

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Нада В. Ратковић Ковачевић

**ПРИМЕНА РОБУСНЕ РЕДУКЦИЈЕ  
РЕДА СИСТЕМА У МОДЕЛОВАЊУ И  
УПРАВЉАЊУ РЕАЛНИМ ОБЈЕКТИМА  
У МАШИНСТВУ**

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Nada V. Ratković Kovačević

**APPLICATION OF ROBUST ORDER  
REDUCTION IN MODELING AND  
CONTROL OF REAL SYSTEMS AND  
OBJECTS IN MECHANICAL  
ENGINEERING**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

Ментор: редовни професор Др Добрила Шкатарић

Чланови Комисије:

Редовни професор Др Драгутин Дебељковић,  
Машински факултет, Универзитет у Београду

Редовни професор Др Драган Б. Кандић,  
Машински факултет, Универзитет у Београду

Редовни професор Др Милорад Милованчевић,  
Машински факултет, Универзитет у Београду

Ванредни професор Др Ненад Цакић,  
Електротехнички факултет, Универзитет у Београду

Редовни професор Др Добрила Шкатарић,  
Машински факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

# ПРИМЕНА РОБУСНЕ РЕДУКЦИЈЕ РЕДА СИСТЕМА У МОДЕЛОВАЊУ И УПРАВЉАЊУ РЕАЛНИМ ОБЈЕКТИМА У МАШИНСТВУ

## Резиме

Дисертација ПРИМЕНА РОБУСНЕ РЕДУКЦИЈЕ РЕДА СИСТЕМА У МОДЕЛОВАЊУ И УПРАВЉАЊУ РЕАЛНИМ ОБЈЕКТИМА У МАШИНСТВУ је посвећена техникама и методама за редукцију реда линеарних модела, представљених у простору стања, као и условима и ограничењима за њихову примену. Приказан је концепт сингуларних пертурбација и његова примена у редукцији сложености модела система. Размотрене су различите карактеризације линеарних модела великог реда, чије репрезентације моделима у простору стања имају различите временске скале или и мали параметар (имају матрице великих димензија са пуно нула-елемената или са елементима, чији се редови величине веома разликују). Представљени су: сингуларно пертурбовани слабо повезани системи, слабо повезани системи, сингуларно пертурбовани системи, квази сингуларно пертурбовани системи и квази слабо повезани системи. Свака од ових класа представљена је одговарајућим моделом у простору стања неког реалног система. Детаљније је изложен прорачун регулатора за линеаран сингуларно пертурбован систем.

Описана је метода балансирања, као и технике за редукцију реда линеарних модела, познате из литературе, које захтевају примену трансформације балансирања: балансирано одсецање, балансирана резидуализација, генералисана балансирана резидуализација, кориговано балансирано одсецање, метода заснована на брзом подсистему уз одбацивање спорог, модификована генералисана балансирана резидуализација, као и реверзна техника резидуализације. Свака од ових техника даје по један модел редукованог реда, полазећи од балансираног модела пуног реда. Технике изложене у овој тези, примењене су на редуковање реда четири модела реалних система. Први је модел бинарне дестилационе колоне са прегревачем и девет подова. Други је модел у простору стања борбене летелице L-1011. Трећи је математички модел каталитички контролисане реакције, из процесне технике. Четврти је математички модел дела електроенергетског система Србије, сачињен од две машине. Изложена је и редукција реда модела нестабилних линеарних система, на основу изабране литературе.

Мултимоделовањем уз примену балансирања се линеарни модел пуног реда апроксимира помоћу два подсистема, названа *први* и *други*, без губитка променљивих стања. Редови првог и другог подсистема се редукују неком од раније изложених техника. Два начина су примењена на моделу система из праксе (модел у простору стања за електроенергетски систем, састављен од две идентичне области, где је свака област једна електрана) – једном су први и други подсистем редуковани применом балансираног одсецања, а други пут применом балансиране резидуализације. Квалитет апроксимације балансираног модела пуног реда, како у отвореном колу дејства тако и у затвореном колу дејства, са оптималним ЛКГ регулатором у повратној спрези, показао се као добар.

Изложен је нови приступ мултимоделовању на бази балансирања, који се заснива на примени принципа суперпозиције. И ова техника примењена је на модел реалног система – бинарне дестилационе колоне са прегревачем и девет подова.

- Кључне речи

Линеарни системи, математичко моделовање, динамичке анализе, редуковање реда линеарних система, трансформација балансирања, мултимоделовање, линеарно квадратно оптимално управљање

- Научна област

Техника, Машинство

- Ужа научна област

Аутоматско управљање

- УДК број

**681.511.2(043.3)**

# APPLICATION OF ROBUST ORDER REDUCTION IN MODELING AND CONTROL OF REAL SYSTEMS AND OBJECTS IN MECHANICAL ENGINEERING

## Abstract

The dissertation **Application of Robust Order Reduction for Modeling and Control of Real Systems in Mechanical Engineering** is dealing with techniques and methods of order reduction for linear models in the state space representation, as well as with conditions and limitations of their applicability. Well known concept of singular perturbations is described with its application in reduction of complexity of the system's model. Different characterizations of large scale linear models are overviewed, having state space representations who exhibit different time scales or small parameter, too. These models have matrices of large dimensions with many zero-elements or elements with different size order, some very large and others very small. The singularly perturbed and weakly coupled systems, the weakly coupled systems, the singularly perturbed systems, the quasy singularly perturbed systems and the quasy weakly coupled systems are listed and represented here. Each class of these is represented with corresponding state space model of one real system. The design of the regulator for the linear singularly perturbed system is described in detail.

The balancing method is analyzed, as well as techniques for the order reduction of linear model's, known from the literature. These require application of the balancing transformation: the balancing truncation, the balancing residualization, the generalized balancing residualization, the corrected balancing truncation, the method based on the fast subsystem with rejection of the slow subsystem, the modified generalized balancing residualization, as well as the reversed residualization technique. Each of these techniques mentioned gives one model of reduced order, starting from the balanced full order model. Techniques represented in this thesis are applied on order reduction of four real system's models. The first is the state space model of binary distillation column, with condenser, reboiler and nine plates. The second is the state space model of L-1011 fighter aircraft. The third is a mathematical model of the controlled catalytic reaction, from process engineering. The fourth part is a mathematical model of the part of electric power system of Serbia, consisting of two machines. Described here is the order reduction for models of unstable linear systems as well, based on the chosen references.

Multimodeling based on balancing application results in approximation of the linear full order model with two subsystems, namely *the first* and *the second*,

without losing any of the state space variables. Order of the first and of the second subsystem can be further reduced, using some of the techniques mentioned earlier. Two ways are applied on the state space model known from engineering practice (state space representation of the model of the power system composed of two interconnected identical areas, where each area is one power plant) – once the first and the second subsystems have their orders reduced through application of the balanced truncation, then applying the balanced residualization. The precision obtained in approximation of the balanced full order model, both in open loop and in closed loop (closed using the optimal LQG regulator) was acceptable in both cases.

The new approach is described - the multimodeling based on balancing, with application of the superposition principle. This technique too is applied on the real system's model – the one of binary distillation column, with condenser, reboiler and nine plates.

- Key Words:

Linear Systems, Mathematical Modeling, Dynamic Analysis, Order Reduction of Linear Systems, Balancing Transformation, Multimodeling, Linear Quadratic Optimal Control

- Scientific Area

Engineering, Mechanical Engineering

- Scientific Sub-area

Automatic Control

- UDC number

**681.511.2(043.3)**

## Садржај дисертације

### ПРИМЕНА РОБУСНЕ РЕДУКЦИЈЕ РЕДА СИСТЕМА У МОДЕЛОВАЊУ И УПРАВЉАЊУ РЕАЛНИМ ОБЈЕКТИМА У МАШИНСТВУ

<b>1. Увод</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Основне поставке теорије сингуларно пертурбованих и слабо повезаних система</b> .....	<b>4</b>
2.1. Увод .....	4
2.2. Редукција модела применом методе сингуларних пертурбација .....	5
2.3. Анализа извршене апроксимације .....	7
2.4. Структуре линеарних сингуларно пертурбованих и слабо повезаних система .....	10
2.4.1. Сингуларно пертурбовани слабо повезани системи .....	12
2.4.2. Слабо повезани системи .....	12
2.4.3. Сингуларно пертурбовани системи .....	13
2.5. Структуре неких класа линеарних система $AU$ са малим параметром .....	13
2.5.1. Квази сингуларно пертурбовани слабо повезани системи ... ..	13
2.5.2. Квази слабо повезани системи .....	17
2.6. Синтеза регулатора за линеаран сингуларно пертурбовани систем. ....	19
<b>3. Методе редукције реда модела применом технике балансирања</b> .	<b>23</b>
3.1. Увод .....	23
3.2. Приказ методе балансирања .....	24



3.3. Редукција реда модела коришћењем трансформације балансирања.....	27
3.3.1. <i>Балансирано одсецање</i> .....	27
3.3.2. <i>Балансирана резидуализација</i> .....	29
3.3.3. <i>Генералисана балансирана резидуализација</i> .....	32
3.3.4. <i>Кориговано балансирано одсецање</i> .....	37
3.3.5. <i>Метода заснована на брзом подсистему уз одбацивање спорог подсистема</i> .....	37
3.3.6. <i>Модификована генералисана балансирана резидуализација</i> . .....	39
3.3.7. <i>Реверзна техника резидуализације</i> .....	41
3.4. Примери .....	41
<u>Пример 1.</u> Бинарна дестилациона колона са кондензатором, прегревачем и девет подова .....	41
<u>Пример 2.</u> Борбена летелица L-1011 .....	47
<u>Пример 3.</u> Математички модел каталитички контролисане реакције .....	53
<u>Пример 4.</u> Математички модел дела електроенергетског система Србије, сачињен од две машине, који ради у изолованом режиму .....	58
<b>4. Редукција реда модела за нестабилне линеарне системе .....</b>	<b>68</b>
4.1. Увод .....	68
4.2. Метода за редуковање реда линеарног континуалног модела нестабилног система .....	69
4.3. Мек Миланов (McMillan) степен нестабилних полова модела редукованог реда .....	71
4.4. Модел грешке .....	74

4.5. Граница модела грешке .....	79
4.6. Алгоритам за редуковање реда континуалног или дискретног линеарног модела нестабилног система .....	82
<b>5. Мултимоделовање уз балансирање система као метода за редукцију реда модела .....</b>	<b>86</b>
5.1. Увод .....	86
5.2. Мултимоделовање кроз балансирање система .....	91
5.3. Пример .....	102
<b>6. Уопштено мултимоделовање кроз балансирање система уз примену принципа суперпозиције .....</b>	<b>127</b>
6.1. Увод .....	127
6.2. Управљање уз мултимоделовање кроз сингуларне пертурбације и слабу повезаност .....	129
6.3. Нова техника (идеја) за управљање уз мултимоделовање помоћу трансформације балансирања .....	131
6.4. Пример .....	137
<b>7. Закључак .....</b>	<b>141</b>
<b>8. Литература .....</b>	<b>148</b>
<b>Ознаке .....</b>	<b>156</b>
<b>Биографија .....</b>	<b>157</b>
<b>Прилог 1: Изјава о ауторству .....</b>	<b>158</b>
<b>Прилог 2: Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада.....</b>	<b>159</b>
<b>Прилог 3: Изјава о коришћењу .....</b>	<b>160</b>

## 1. УВОД

Математичко моделовање реалних физичких система, предмет је проучавања дуги низ година. Развој математичких метода и софтверских алата, омогућио је да сложени математички модели, великих димензија могу, у зависности од потреба, да обезбеде поуздане и брзе прорачуне. Међутим, поједностављени математички модели и даље остају предмет интересовања за динамичке анализе и синтезе управљачких алгоритама, јер омогућавају лакши и једноставнији увид у добијене резултате. Мери поједностављења диктирају сами системи који се моделују, али и њихова примена. Тако, за грубе прорачуне, могу да се користе веома упрошћени математички модели, док је за потребе регулисања система у прецизним опсезима такав модел незадовољавајући. Инжењерско познавање система који се моделује представља важну компоненту код овог проблема.

У теорији и пракси аутоматског управљања диференцирају се два важна задатка: један је анализа система, у смислу посматрања динамичких перформанси система (одзив система на различите побуде и поремећаје), док је други синтеза управљања, било да се ради о синтези регулатора одређеног типа, или о пројектовању оптималног регулатора, као референтног решења у поступку синтезе.

Дисертација је конципирана у пет целина, уз Увод и Закључак. Најпре су, у другом поглављу, изложене основне поставке теорије система са малим параметрима, нарочито слабо повезаних и сингуларно пертурбованих система. Иако су први резултати у овој области дати пре неколико деценија (Kokotovic, 1981; Kokotovic et al., 1986; Khalil and Kokotovic, 1978; Gajic et al., 1990; Gajić i Petkovski, 1991), они не престају да буду актуелни ни до данашњих дана (Gajić, Škatarić et al., 2009). Нарочито се интересантним за овај рад показују резултати развијени за квази сингуларно пертурбоване и слабо повезане системе, који су проистекли из моделовања и управљања реалних инжењерских система, чији се математички модели нису уклапали у постојеће структуре (Gajic and Skataric, 1991; Skataric and Gajic, 1992; Д. Шкатарић, 2004; Gajić, Škatarić et al., 2009). Техника малих параметара

се уопштава и, у смислу олакшаног приступа, разматрана је шира класа реалних физичких система.

У овом раду, у трећем поглављу, приказују се изабране технике за редукцију одн. снижавање реда модела, које су засноване на балансирању система уз примену методе сингуларних пертурбација. Ове технике имају исту тачност и робусност процењену према  $H_\infty$  норми система сниженог реда, као и *метода директног одсецања* и *метода балансиране резидуализације модела система*. Приказане су и модификације обе технике, које обезбеђују тачну вредност појачања константног улаза, као код оригиналног модела система. Тестиране технике дају високу тачност на нижим и средњим учестаностима. За илустрацију ефикасности приказаних метода за снижавање реда система, изабрани су реални примери из процесне технике, ваздухопловства и енергетике.

У четвртном поглављу представљен је алгоритам за редукцију реда модела, како континуалних тако и дискретних, за нестабилне линеарне системе.

На основу разматрања и анализа у претходним поглављима, у петом поглављу су представљени најзначајнији резултати из дисертације. Изабрана техника мултимоделовања комбинована са техником балансирања, показује се као изузетно успешна и општије применљива од мултимоделовања уз примену теорије сингуларних пертурбација. Теорија диференцијалних игара инкорпорирана је у управљачки проблем. На реалним системима свака од апроксимација почетног модела, као и оригинални модел, тестирани су у отвореном колу дејства за типичне улазне сигнале: импулсни, степ, рампа и синусни. Посебно, ова техника је примењена на математички модел електроенергетског система, који има две међусобно повезане, идентичне области, при чему сваку област чини једна електрана. Овај модел има астатизам другог реда. Модел је нестабилан, те је матрица система модификована уз задати степен стабилности. За исти модел пуног реда мултимоделовање је примењено на два начина. Прво је оригинални модел балансиран и редукован уз примену балансираног одсецања, балансиране резидуализације и генералисане балансиране резидуализације, а ове апроксимације су упоређене у отвореном и затвореном колу дејства, са првим и другим подсистемом, који су добијени

мултимоделовањем комбинованим са балансираним одсецањем. Даље се анализа шири и на оптимални управљачки проблем. Од оптималних ЛКГ (линеарно квадратних гаусовских) регулатора, прорачунатих за овако добијена два подсистема, склопљен је пропорционални, П, регулатор, којим је затворен повратни пренос на балансираном моделу пуног реда. Затим је све поновљено, али је мултимоделовање комбиновано са балансираном резидуализацијом, како би се очувало појачање једносмерних сигнала. У обе варијанте добијене су веома блиске апроксимације за модел пуног реда, и у отвореном и у затвореном колу дејства.

Шесто поглавље је посвећено разради новог прилаза за управљање линеарним системима уз мултимоделовање кроз балансирање система, са применом принципа суперпозиције. Добијени резултати отварају даље концепције управљања уз мултимоделовање и за децентрализовано управљање линеарним динамичким системима. Ова стратегија управљања уз мултимоделовање је применљива на ширу класу система, јер поставља блаже захтеве (захтев линеарности) у односу на теорије изложене у поглављима 2., 3., 4. и 5. Техника је примењена на реалном моделу. Квалитет апроксимације балансираног модела пуног реда је упоређен у отвореном колу дејства са првим одн. другим подсистемом, који су одређени новим приступом и додатно редуковани балансираним одсецањем.

У Закључку су сумирани резултати до којих се дошло у овој дисертацији.

Све симулације вршене су коришћењем Matlab програмског пакета.

Из обимне литературе аутоматског управљања изабране су референце од значаја за проблематику постављену у овој дисертацији.

## 2. ОСНОВНЕ ПОСТАВКЕ ТЕОРИЈЕ СИНГУЛАРНО ПЕРТУРБОВАНИХ И СЛАБО ПОВЕЗАНИХ СИСТЕМА

### 2.1. Увод

Сингуларно пертурбовани и слабо повезани системи детаљно су проучавани последњих четрдесетак година, а и даље су предмет истраживања (Kokotovic et al., 1986; Gajic and Shen, 1993; Škatarić, 2004; Gajić, Škatarić et al., 2009). У пракси је уобичајено да се модели реалних система поједностављују како би се користили за прорачун система. Добри кандидати за редукцију модела су системи код којих се уочавају слабе везе (између променљивих стања, између управљања) или они са веома малим појединим параметрима. Типично поједностављење је да се занемаре "мале" временске константе, масе, моменти инерције, неке "паразитивне" капацитивности и индуктивности и низ других "неважних" параметара (Kokotovic et al., 1986).

Постоје два оправдана разлога за ова поједностављења. Прво, ред модела може да се повећа ако се ови параметри узимају у обзир, што чини модел сложенијим. Друго, задржавање ових параметара уноси "брзе модове", што чини наш модел "крутим" то јест тешким за манипулацију на рачунару, нарочито ако се захтева неки прорачун, на пример, у реалном времену. За сада се не везујемо посебно за линеарне системе и, пошто се горе поменуто, односи и на нелинеарне системе, појам "брзи модови" треба схватити у општије дефинисаном смислу.

Више се добија уз једноставан модел, али постоји осим тога и озбиљан ризик: коришћење поједностављеног модела може да има за последицу да систем буде далеко од свог жељеног оптимума или да чак постане нестабилан. Ако се ово догоди, да ли би требало поновити прорачун уз тачнији модел? То би била строга казна за предузимање разумљивог ризика. Аргументи овде изнети, представљени су као разлози, који оправдавају примену методе сингуларних пертурбација, али би се могли навести и као оправдање у ширем смислу, за редукцију модела уопште (Kokotovic et al., 1986).

За случај превише поједностављеног дизајна, било би корисно наћи неку повољнију алтернативу да се он побољша. Приступ уз примену сингуларних пертурбација пружа такву алтернативу у неким ситуацијама. Он помаже да поново узмемо у обзир "заборављене" параметре, по нижој цени, него да поновимо цео прорачун. То нам такође повећава разумевање последица поједностављења модела. У већини примена, метода сингуларних пертурбација се одвојено бави "брзим" и "спорим модовима". У регулатору, део који управља брзим модовима се препознаје као одвојена јединица или целина. Примена контролера са две временске скале тада смањује цену хардвера, а и сложеност софтвера.

Све ове предности методе сингуларних пертурбација изгледају као да су "сувише добре да би биле истините". Заправо, постоје два веома важна ограничења. Овај приступ захтева добро *a priori* познавање малих параметара, што у пракси није увек случај. Осим тога, приступ је применљив ако су параметри "довољно мали", а то је потребно проценити. Док ова ограничења представљају предмет бројних истраживања, велики број метода сингуларних пертурбација, може да се примени за прорачун оптималног управљања системима и за проблеме оптимизације трајекторије (Kokotovic et al., 1986; Škatarić, 2004).

## 2.2. Редукција модела применом методе сингуларних пертурбација

Почињемо са моделом високог реда, који у општем случају може бити и нелинеаран, а представљен је у облику (Kokotovic et al., 1986):

$$\dot{x}(t) = f[x(t), z(t), u(t), \varepsilon, t], \quad (2.1)$$

$$\varepsilon \dot{z}(t) = g[x(t), z(t), u(t), \varepsilon, t]. \quad (2.2)$$

Претпостављамо да су у домену од интереса  $f$  и  $g$  два пута непрекидно диференцијабилне функције својих аргумената  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\varepsilon$  и  $t$ , где су за дати модел  $x(t)$  и  $z(t)$  променљиве стања,  $u(t)$  је вектор управљања, а  $t$  је време. Скаларни параметар  $\varepsilon$  представља све мале параметре, који ће бити занемарени.

Када поставимо да је  $\varepsilon = 0$ , диференцијална једначина (2.2) постаје алгебарска или трансцедентна:

$$0 = g[\bar{x}(t), \bar{z}(t), \bar{u}(t), 0, t]. \quad (2.3)$$

Овде користимо црту изнад симбола да означимо да променљива припада систему без параметра  $\varepsilon$ . Претпоставимо да (2.3) има више реалних и различитих корена, и узмимо један од њих у разматрање:

$$\bar{z}(t) = \varphi[\bar{x}(t), \bar{u}(t), 0, t]. \quad (2.4)$$

Када заменимо (2.4) у (2.1),

$$\dot{\bar{x}}(t) = f\{\bar{x}(t), \varphi[\bar{x}(t), \bar{u}(t), 0, t], \bar{u}(t), 0, t\}, \quad (2.5)$$

добива се једноставнији модел чији је вектор стања  $\bar{x}(t)$ :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}[\bar{x}(t), \bar{u}(t), t]. \quad (2.6)$$

Ако је  $x$  вектор димензије  $n$  и  $z$  вектор димензије  $m$ , онда је  $n+m$  ред модела датог једначинама (2.1) и (2.2), док је ред модела (2.6) само  $n$ . То није једина предност модела (2.6). Да бисмо видели другу предност, запазимо да у (2.2) заправо имамо  $\dot{z}(t) = g[x(t), z(t), u(t), \varepsilon, t]/\varepsilon$ , то јест, ако је  $\varepsilon$  веома мало и  $g[x(t), z(t), u(t), \varepsilon, t] \neq 0$ , онда је брзина  $\dot{z}(t)$  веома велика. Донекле то објашњава шта се подразумева под "крутошћу" модела (2.1) и (2.2). "Крутост" је елиминисана из (2.6).

Уз (2.6) смо спремни за поједностављени прорачун управљања. Зависно од намене система, проблем може бити одређивање вектора  $\bar{u}(t)$ , који минимизира задати критеријум перформансе  $J$ , или синтеза закона управљања у отвореном колу дејства,  $\bar{u}[\bar{x}(t), t]$ , којим се стабилизује равнотежно стање, или било која од бројних других могућности. За прорачун се користи упрошћени модел (2.6) али, када се прорачун заврши, мора да се проба, односно тестира добијени резултат на реалном систему. За примену у овом разматрању погодно је да се претпостави да је "реални систем" дат једначинама (2.1) и (2.2). Стога се прорачунато  $\bar{u}(t)$  тестира на (2.1) и (2.2). Ако нисмо задовољни исходом, или одбацујемо  $\bar{u}(t)$  и понављамо прорачун за (2.1) и (2.2), или задржавамо  $\bar{u}(t)$  и тражимо начин да га



побољшамо. Приступ уз примену сингуларних пертурбација намењен је овој другој могућности (Kokotovic et al., 1986).

Нема општег правила како да се уведе параметар  $\varepsilon$ , мада су неки савети дати у (Gajic et al., 1990). То зависи и од инжењерског искуства, интуиције и прелиминарне анализе. У многим применама познавање физичких компоненти које ће бити употребљене у систему је довољно да одредимо који су параметри мали.

### 2.3. Анализа извршене апроксимације

Погледајмо сада какве су последице ове редукције за променљиву стања  $z(t)$  (мада се може и уопштити – да  $z(t)$  буде вектор променљивих стања) (Kokotovic et al., 1986). Ова променљива била је искључена из упрошћеног модела (2.6) и тиме јој је "ускраћен" статус променљиве стања. Њена замена је  $\bar{z}(t)$ , што је тек последица  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{u}(t)$  израчуната из (2.4). За разлику од оригиналне променљиве  $z(t)$ , која у тренутку  $t_0$  почиње од унапред задате вредности  $z^0$ , замена  $\bar{z}(t)$  нема слободу да почне од  $z^0$ . Другим речима, може постојати велико одступање између:

$$\bar{z}(t_0) = \varphi[\bar{x}(t_0), \bar{u}(t_0), t_0], \quad (2.7)$$

и  $z(t_0, \varepsilon) = z^0$ . Стога је најбоље што се реално може да очекује од  $\bar{z}(t)$ , да ће апроксимација\*

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t) + O(\varepsilon), \quad (2.8)$$

да важи на интервалу који не обухвата  $t_0$ , то јест за  $t \in [t_1, T]$  где је  $t_1 > t_0$ . Ако бисмо ограничили  $\bar{x}(t)$  да крене од почетног услова  $x^0$ , који је у ствари постављен за  $x(t)$ , онда апроксимација (2.9):

---

\* Користи се  $O(\varepsilon)$  да се назначи апроксимација "реда  $\varepsilon$ ". На интервалу  $[t_0, T]$  функција  $f(t, \varepsilon)$  је  $O(\varepsilon)$ , ако постоје позитивне константе  $\alpha$  и  $\varepsilon^*$  такве да норма функције  $f$  задовољава  $|f| \leq \alpha\varepsilon$ , за све  $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ .

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + O(\varepsilon), \quad (2.9)$$

може да важи на интервалу који обухвата  $t_0$  то јест за све  $t \in [t_0, T]$ .

Апроксимација (2.8) утврђује да се за време  $[t_0, t_1]$  оригинална променљива  $z(t)$  приближава својој замени  $\bar{z}(t)$ , а затим, током  $[t_1, T]$  остаје близу  $\bar{z}(t)$ . Сетимо се да је брзина промене  $z(t)$  велика:  $\dot{z}(t) = g[x(t), z(t), u(t), \varepsilon, t]/\varepsilon$ . Заправо, када смо поставили да је  $\varepsilon$  једнако нула у (2.2), учинили смо да брзина  $\dot{z}(t)$  постане бесконачно велика, а прелазак променљиве  $z(t)$  у ново стање тренутан. Може се рећи да је то разлог зашто се пертурбација од  $\varepsilon > 0$  до  $\varepsilon = 0$  назива “сингуларном”. Хоће ли  $z(t)$  побећи у бесконачност или ће стићи у устаљено стање током овог прелазног процеса? Да ли ће устаљено стање бити  $\bar{z}(t)$ , као што (2.8) захтева?

Да бисмо одговорили на ова питања анализирајмо  $\varepsilon \dot{z}(t)$ , што може задржати коначну вредност, чак и када  $\varepsilon$  тежи нули а  $\dot{z}(t)$  тежи бесконачности. Поставимо:

$$\varepsilon \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dz(\tau)}{d\tau}, \text{ стога је } \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (2.10)$$

и користимо  $\tau = 0$  као почетну вредност у  $t = t_0$ ,

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

Сада, ако  $\varepsilon$  тежи нули,  $\tau$  ће да тежи бесконачности, чак и за  $t$  које је само мало веће од  $t_0$ . С друге стране, док се  $z(t)$  и  $\tau$  готово тренутно промене,  $x(t)$  остаје на својој почетној вредности  $x^0$ . Такође и  $\bar{u}(t) = \bar{u}(t_0)$ , што ћемо обележити са  $\bar{u}(t_0) = u^0$ . Стога, да бисмо описали понашање  $z(\tau)$  као функције аргумента  $\tau$ , користимо:

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = g[x^0, z(\tau), u^0, 0, t_0], \quad (2.12)$$

где је  $z(0) = z^0$  почетни услов за  $z(\tau)$ . Може се запазити да (2.12) следи из (2.2) и (2.10) када је  $\varepsilon$  толико мало да се у  $g$  може заменити нулом. Систем (2.12), који ће

се овде звати "систем граничног слоја" (Kokotovic et al., 1986), има кључну улогу у теорији сингуларних пертурбација.

Основни резултат теорије сингуларних пертурбација представља довољни услов под којим важи апроксимација (2.8), (2.9), што се обично назива теорема Тихонова (Kokotovic et al., 1986). Услов је исказан кроз два захтева, која треба да задовољи систем граничног слоја (2.12). Испуњење првог захтева обезбеђује да се  $z(t)$  приближава  $\bar{z}(t)$  на кратком интервалу  $[t_0, t_1]$ . Запажамо из (2.3) и (2.4) да је  $\bar{z}(t_0)$  равнотежно стање за (2.12) и захтевамо:

**(Претпоставка I)** да равнотежно стање  $\bar{z}(t_0)$  система (2.12) буде асимптотски стабилно, да  $z(\tau)$  полази од  $z^0$ , а  $z^0$  да припада домену атракције равнотежног стања  $\bar{z}(t_0)$ .

Ако је овај захтев испуњен, то јест ако је

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = \bar{z}(t_0), \quad (2.13)$$

онда ће  $z(t)$  постати блиско  $\bar{z}(t)$  у неком тренутку  $t_1$ . Интервал  $[t_0, t_1]$  може да се учини произвољно уским, тако што се  $\varepsilon$  направи довољно мало. Други захтев поставља се зато да обезбеди да  $z(t)$  остане близу  $\bar{z}(t)$ . У неком таквом тренутку  $z(t)$  је већ близу  $\bar{z}(t)$ . Стога је почетна вредност за  $z(\tau)$  близу  $\bar{z}(t)$  и зато захтевамо да  $\bar{z}(t)$ , дефинисано са (2.3) и (2.4), буде асимптотски стабилно равнотежно стање за:

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = g[\bar{x}(t), z(\tau), \bar{u}(t), 0, t], \quad (2.14)$$

за свако изабрано  $t \in [t_1, T]$ . Прецизније, захтева се:

**(Претпоставка II)** да карактеристичне вредности  $\partial g / \partial z$  израчунате дуж  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{z}(t)$ ,  $\bar{u}(t)$  за све  $t \in [t_0, T]$  имају реалне делове мање од фиксног (изабраног) негативног броја.

Када су претпоставке I и II испуњене, апроксимација (2.9) важи за све  $t \in [t_0, T]$  док апроксимација (2.8) важи за све  $t \in [t_1, T]$ , где је  $t_1$  близу, али је веће од  $t_0$ .

Шта овај резултат представља за дизајн-инжењера, који намерава да примени своје упрошћено управљање  $\bar{u}(t)$  на “реални систем” (2.1) и (2.2)? За мало  $\varepsilon$ , испуњење услова I и II уверава га да ће грешка између стварних  $x(t, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$  и  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{z}(t)$ , предвиђена уз помоћ поједностављеног дизајна, бити реда  $\varepsilon$  за све  $t \in [t_0, T]$ , осим у близини  $t_0$ , где грешка за  $z(t)$  може бити велика.

Претпоставља се сада да је пројектанту потребно да зна нешто више о понашању  $z(t, \varepsilon)$  у близини  $t_0$ . Он може да користи  $\bar{u}(t)$  и да симулира систем (2.1) и (2.2) уз стварну вредност  $\varepsilon$ . Међутим, ако жели да избегне симулацију "крутог" система великог реда (2.1) и (2.2), потребна му је апроксимација за  $z(t, \varepsilon)$ , која важи на целом интервалу  $[t_0, T]$ . Таква апроксимација може бити (2.15):

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t) + z(\tau) - z(t_0) + O(\varepsilon), \quad (2.15)$$

где је  $z(\tau)$  решење једначине (2.12) уз  $z(0) = z^0$  и  $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$ . Када су испуњене претпоставке I и II, из наше конструкције система граничног слоја у (2.12) и дискусије његових особина стабилности следи да (2.15) важи за све  $t \in [t_0, T]$ . Види се да је (2.15) тачно за  $t = t_0$ ,  $\tau = 0$ , где је  $z(t_0, \varepsilon) = z(0) = z^0$ . У близини  $t_0$  имамо да је  $\bar{z}(t) - \bar{z}(t_0) \approx 0$  и  $z(t, \varepsilon) \approx z(\tau)$ . Затим  $z(\tau)$  тежи ка  $\bar{z}(t_0)$  док је  $z(t, \varepsilon)$  близу  $\bar{z}(t)$ .

Апроксимација (2.15) је главни алат у многим методама сингуларних пертурбација. Она раздваја временске скале за апроксимативно одређивање  $z(t, \varepsilon)$ . Прво су  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{u}(t)$  одређени на основу поједностављеног модела (2.6) а  $\bar{z}(t)$  је израчунато из (2.4). Затим, да би се добило  $z(\tau)$ , решен је временски инваријантан систем (2.12) угодној временској скали (Kokotović et al., 1986).

#### **2.4. Структуре линеарних сингуларно пертурбованих и слабо повезаних система**

Структура модела одређује да ли ће систем бити класификован као сингуларно пертурбовани и/или слабо повезани. Анализа физичких веза и динамике система доводи до препознавања више временских скала уз присуство

феномена слабих веза (Škatarić, 2004). Специјална класа сингуларно пертурбованих слабо повезаних система проучавана је у оквиру концепта мултимоделовања (Khalil and Kokotovic, 1978; Gajić and Khalil, 1986), где слабе везе постоје само између брзих променљивих, што је разматрано у поглављу 5 и 6.

Овде ће се приказати модели система, који су окарактерисани слабим везама између спорих и брзих променљивих (Škatarić, 2004). Добијена решења у функцији су два мала параметра:  $\varepsilon_1$  је мали параметар који дефинише слабу везу, а  $\varepsilon_2$  дефинише сингуларну пертурбацију. Узимајући у обзир однос, који постоји између ова параметра  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , могућа су три случаја (Škatarić, 2004):

$$1) \quad 0 < M_1 \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \leq M_2 < \infty,$$

$$2) \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \rightarrow 0,$$

$$3) \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rightarrow 0.$$

Прва структура је она која одговара систему, који се може описати као сингуларно пертурбовани и слабо повезани систем истовремено. Друга структура одговара доминантно слабо повезаним системима, док трећа структура представља доминантно сингуларно пертурбовани систем. Друга и трећа структура се могу проучавати коришћењем одговарајућих метода за слабо повезане, односно сингуларно пертурбоване системе.

У пракси се често јављају системи код којих се преко матрице управљања делује само на неки од подсистема. Како је то одступање од структура које су у литератури разрађене и анализирани, ове структуре означиле се као квази сингуларно пертурбоване односно квази слабо повезане (Škatarić, 2004).

Уместо да променљиве стања обележимо са  $x(t)$  и  $z(t)$ , као у случају нелинеарних система (2.1) и (2.2), сада ће ознаке  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  одговарати променљивим стања за линеарне системе одговарајуће класе.

#### 2.4.1. Сингуларно пертурбовани слабо повезани системи

Сингуларно пертурбовани слабо повезани линеарни динамички систем аутоматског управљања има облик:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \varepsilon_1 A_2 \\ \varepsilon_1 A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & \varepsilon_1 B_2 \\ \varepsilon_1 B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

где су  $x_i(t) \in R^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори стања,  $u_i(t) \in R^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори управљања,  $\varepsilon_1$  мали параметар који дефинише слабу везу, а  $\varepsilon_2$  мали параметар који дефинише сингуларну пертурбацију (Kokotovic et al., 1986; Gajic et al., 1990; Gajic and Skataric, 1991; Škatarić, 2004).

**Пример 1.** Реални пример сингуларно пертурбованог слабо повезаног система је носећа полука, чији је модел у простору стања преузет из (Škatarić, 2004). Матрице стања и управљања респективно, дате су са:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -0.04 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.58 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0.951 & 2 \end{bmatrix}.$$

Модел се може декупловати на  $n_1 = n_2 = 2$  једначине, уз избор  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$ .

#### 2.4.2. Слабо повезани системи

Слабо повезани линеарни динамички систем аутоматског управљања има облик (Gajic and Skataric, 1991; Škatarić, 2004; Gajić, Škatarić et al., 2009):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \varepsilon_1 A_2 \\ \varepsilon_1 A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & \varepsilon_1 B_2 \\ \varepsilon_1 B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

где су  $x_i(t) \in R^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори стања,  $u_i(t) \in R^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори управљања, а  $\varepsilon_1$  мали параметар, који дефинише слабу везу.

### 2.4.3. Сингуларно пертурбовани системи

Сингуларно пертурбовани линеарни динамички систем аутоматског управљања има облик (Kokotovic et al., 1986; Gajić and Shen, 1993; Škatarić, 2004):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{A_3}{\varepsilon_2} & \frac{A_4}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{B_3}{\varepsilon_2} & \frac{B_4}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

где су  $x_i(t) \in R^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори стања,  $u_i(t) \in R^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори управљања, а  $\varepsilon_2$  мали параметар, који дефинише сингуларну пертурбацију.

## 2.5. Структуре неких класа линеарних система АУ са малим параметром

Питање колико ефикасно се може реални систем аутоматског управљања довести на облик који одговара системима описаним у 2.4. често је незаобилазно, и једна од ове две структуре се ни не препознаје у пракси (Škatarić, 2004). Стога се уводе квази сингуларно пертурбовани као и квази слабо повезани системи, како би се примери из праксе прикладније моделовали (Škatarić, 2004).

### 2.5.1. Квази сингуларно пертурбовани слабо повезани системи

Примери овакве структуре су знатно чешћи у пракси него сингуларно пертурбовани модели. Квази сингуларно пертурбовани слабо повезани системи управљања имају матрицу система  $A$  истог облика као што је дефинисано у (2.16), док је матрица управљања  $B$  нестандартне структуре (Škatarić, 2004; Gajić, Škatarić et al., 2009):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \varepsilon_1 A_2 \\ \frac{\varepsilon_1 A_3}{\varepsilon_2} & \frac{A_4}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

где су  $x_i(t) \in R^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори стања,  $u_i(t) \in R^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори управљања,  $\varepsilon_1$  је мали параметар који дефинише слабу везу, а  $\varepsilon_2$  мали параметар који дефинише сингуларну пертурбацију.

Матрица управљања у (2.19) има једну од следеће три форме (Škatarić, 2004):

$$\text{i) } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{ii) } B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{iii) } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Оваква структура матрице  $B$  говори да постоји само једно управљање у систему, што је у пракси чест случај. Ако су  $x_1$  споре променљиве стања, а  $x_2$  брзе променљиве стања, онда случај i) одговара ситуацији у којој се јако контролишу спори модови односно, управљање делује само на први подсистем. У случају ii) систем је слабо контролисан само преко брзих модова. У трећем случају, iii), систем је јако контролисан преко спорих модова и слабо контролисан преко брзих модова.

**Пример 2.** Реални пример, који одговара случају i) био би математички модел турбинског регулатора. Овај модел је детаљно приказан у литератури (Arnautović and Škatarić, 1991; Škatarić, 2004), а одговара структури система са јако контролисаним спорим модовима. Матрице система  $A$  и управљања  $B$  су:

$$A = \begin{bmatrix} -0.710 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.610 & 1.280 & -1.460 & 0.566 & 0.000 \\ -0.180 & -0.370 & 0.560 & -0.594 & -0.230 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 314.16 & 0.000 \end{bmatrix},$$



$$B^T = [0.71 \quad 2.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0].$$

Систем се може декомпоновати на  $n_1 = 3$  и  $n_2 = 2$  једначине.

**Пример 3.** Реални пример модела, који је такође квази сингуларно пертурбован и слабо контролисан брзим модовима, али има форму ii) је модел хидроелектране са статичким системом побуђивања узет из (Skataric and Gajic 1992; Škatarić, 2004). Хидроелектрана се посматра као једномашински систем, где је генератор повезан преко вода на круту мрежу. Линеаризован математички модел синхроног генератора дат је у  $dq$  референтном систему и добијен је уз уважавање прелазних процеса у статорским и пригушним намотајима. Такође, сматра се да је генератор опремљен побудницом првог реда (Škatarić, 2004). Вектор стања је:

$$x^T(t) = [\Delta\theta(t) \quad \Delta\omega(t) \quad \Delta u_f(t) \quad \Delta\psi_d(t) \quad \Delta\psi_q(t) \quad \Delta\psi_f(t) \quad \Delta\psi_D(t) \quad \Delta\psi_Q(t)],$$

где је:

$\Delta\theta(t)$  - угао ротора у  $[rad]$ ;

$\Delta\omega(t)$  - угаона брзина у  $[rad/s]$ ;

$\Delta u_f(t)$  - побудни напон у релативним јединицама;

$\Delta\psi_d(t)$  - флуks статорског намотаја по  $d$ -оси;

$\Delta\psi_q(t)$  - флуks статорског намотаја по  $q$ -оси;

$\Delta\psi_f(t)$  - флуks побудног намота;

$\Delta\psi_D(t)$  - флуks пригушног намотаја по  $d$ -оси;

$\Delta\psi_Q(t)$  - флуks пригушног намотаја по  $q$ -оси.

Управљање је дато као  $u(t) = \Delta u_{vr}(t)$  и представља управљачки сигнал за регулатор напона.

Матрица система  $A$  и матрица управљања  $B$  су дате у (2.20).

Ако се анализирају сопствене вредности, види се да систем има сингуларно пертурбовану структуру са пет брзих и три споре променљиве. Међусобном заменом треће и шесте врсте у матрицама  $A$  и  $B$ , добија се структура, која је и даље форме ii).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 314.16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.286 & 0 & 0.147 & 0.528 & -0.134 & -0.04 & -0.276 \\ 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255.38 & -152.49 & 0 & -13.72 & 511.14 & 8.51 & 2.556 & -135.04 \\ -182.84 & -319.5 & 0 & -534.9 & -12.24 & 137 & 41.136 & 8.389 \\ 0 & 0 & 314.16 & 0.446 & 0 & -0.523 & 0.0375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.646 & 0 & 6.094 & -29.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 87.236 & 0 & 0 & -94.74 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$B^T = [0 \ 0 \ 0.184 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Због специјалне структуре матрице  $B$ , ако се направи затворено коло дејства, управљање у повратном преносу ће веома мало утицати на сопствене вредности, које одговарају спором подсистему, тако да ће, и ако се уведе повратни пренос, систем остати на граници стабилности. Штавише, да би се имале само две временске скале, потребно је да су  $\det\langle A_4 \rangle$  и  $\det\langle A_1 \rangle$  реда  $O(1)$  (Chow and Kokotović, 1983). Ова два проблема могуће је превазићи избором задатог степена стабилности (Škatarić, 2004).

**Пример 4.** Реални пример, који одговара структури iii) је, рецимо, математички модел каталитички контролисане реакције узет из (Škatarić, 2004). Матрице система  $A$  и управљања  $B$  су:

$$A = \begin{bmatrix} -16.11 & -0.39 & 27.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.01 & -16.9 & 0.0 & 0.0 & 12.47 \\ 15.11 & 0.0 & -53.6 & -16.6 & 71.8 \\ -53.36 & 0.0 & 0.0 & -107.2 & 232.1 \\ 2.27 & 69.13 & 0.0 & 0.0 & -103 \end{bmatrix},$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 11.1 & -3.61 & -21.9 & -53.6 & 69.1 \\ -12.6 & 3.3 & 0.0 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.5.2. Квази слабо повезани системи

У проучавању једног броја система запажа се да им је матрица система дијагонално доминантна блок матрица, као код математичких модела система са стандардно слабо повезаном структуром, али са управљачким деловањем на само један од подсистема. Такви системи се називају квази слабо повезани системи (Škatarić, 2004).

Велики број физичких система одговара овој структури: то су електроенергетски системи, хемијски реактори и системи аутоматског управљања са само неколико актуатора.

Квази слабоповезани систем, сачињен од два подсистема, има модел облика (Škatarić, 2004):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \varepsilon A_2 \\ \varepsilon A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

где су  $x_i(t) \in R^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори стања,  $u_i(t) \in R^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$  вектори управљања,  $\varepsilon$  је мали параметар, а матрица  $B$  има једну од форми датих у 2.5.1.

Ако је матрица управљања као у i) у 2.5.1., имамо специјални случај линеарног динамичког система код којег управљање делује само на први подсистем. У неким случајевима, какви су на пример електроенергетски системи, у отвореном колу дејства матрица  $A$  је стабилна матрица, а сви елементи матрице  $B_1$  су реда  $\varepsilon$ . Ако је матрица управљања као у ii) у 2.5.1. имамо специјални случај линеарног динамичког система код којег управљање делује само на други подсистем. Структура iii) из 2.5.1. описује класу линеарних система, код којих је матрица система  $A$ , дефинисана једначином (2.16) слабо повезане структуре, док је матрица  $B$  чврсто повезана матрица. Системи са оваквом структуром често се срећу у инжењерској пракси.

**Пример 5.** Реални пример типа i) био би модел хемијског реактора узет из (Škatarić, 2004). Матрице система и управљања, редом, дате су у (2.22) и (2.23).

Систем се може декупловати на подсистеме реда  $n_1 = 5$  и  $n_2 = 4$ , где првих пет променљивих стања описује први подсистем. Користећи формулу за процену

малог параметра, која је дата у радовима (Gajić et al., 1990; Gajić and Shen, 1993) добија се да је:  $\varepsilon = 90/200.4 = 0.445$  - овде вредност "малог" параметра није сасвим мала (Škatarić, 2004).

$$A = \begin{bmatrix} -4.019 & 5.12 & 0.0 & 0.0 & -2.082 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.87 \\ -0.346 & 0.986 & 0.0 & 0.0 & -2.34 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.97 \\ -7.909 & 15.4 & -4.069 & 0.0 & -6.45 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.608 \\ -21.816 & 35.6 & -0.339 & -3.87 & -17.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.39 \\ -60.196 & 98.188 & -7.907 & 0.34 & -53.008 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 20.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 94 & -147.2 & 0.0 & 53.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 94 & -147.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 12.8 & 0.0 & -31.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 12.8 & 0.0 & 0.0 & 18.8 & -31.6 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0.010 & 0.003 & 0.009 & 0.024 & 0.068 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.011 & -0.021 & -0.059 & -0.162 & -0.445 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.151 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

**Пример 6.** Реални пример структуре са управљачком матрицом типа iii) је модел бинарне дестилационе колоне са кондензатором, прегревачем и девет подова, дат у (Škatarić, 2004), где је параметар слабе повезаности  $\varepsilon = 0.25$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0.991 & 0.529 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.522 & -1.051 & 0.596 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.522 & -1.118 & 0.596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.522 & -1.548 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.640 & 0.799 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.721 & 0.901 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.823 & 1.021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.943 \end{bmatrix},$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 3.84 & 4 & 37.6 & 3.08 & 2.36 & 2.88 & 3.08 & 3 \\ -2.88 & -3.04 & -2.8 & -2.32 & -3.32 & -3.82 & -4.12 & -3.96 \end{bmatrix}.$$

## 2.6. Синтеза регулатора за линеаран сингуларно пертурбовани систем

Размотримо сада синтезу оптималног регулатора за сингуларно пертурбован линеаран временски променљив (нестационаран) систем (Kokotovic et al., 1986):

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + B_1 u(t), \quad (2.24)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2(t) = A_3 x_1(t) + A_4 x_2(t) + B_2 u(t), \quad (2.25)$$

и за квадратни индекс перформансе

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left( y(t)^T y(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt, \quad (2.26)$$

где је  $y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$  излаз система.

Добро је познато из теорије линеарних регулатора да је за  $\varepsilon > 0$  оптимално управљање за овај проблем (Kokotovic et al., 1986)

$$u_{optimalno}(t) = -R^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & \frac{B_2^T}{\varepsilon} \end{bmatrix} K(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

где је  $K(t)$  позитивно дефинитно решење Рикатијеве једначине

$$\frac{dK(t)}{dt} = -K(t)A - A^T K(t) + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - C^T C, \quad (2.28)$$

уз гранични услов  $K(t_f) = 0$ . Треба запазити да су матрице  $A$  и  $B$  у (2.28)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{A_3}{\varepsilon} & \frac{A_4}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

и да, док  $\varepsilon$  тежи нули, неки од њихових елемената постају неограничени. Да бисмо узели у обзир ову тешкоћу при прорачуну, претпоставићемо да решење једначине (2.28) има облик:

$$K(t) = \begin{bmatrix} K_1(t) & K_2(t) \\ \varepsilon K_2^T(t) & \varepsilon K_3(t) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

и заменити га у (2.28). Означавајући  $S_1 = B_1 R^{-1} B_1^T$ ,  $S_2 = B_2 R^{-1} B_2^T$ ,  $S = B_1 R^{-1} B_2^T$  добијамо (Kokotovic et al., 1986):

$$\begin{aligned} \frac{dK_1(t)}{dt} = & -K_1(t)A_1 - A_1^T K_1(t) - K_2(t)A_3 - A_3^T K_2^T(t) + K_1(t)S_1 K_1(t) + \\ & + K_1(t)SK_2^T(t) + K_2(t)S^T K_1(t) + K_2(t)S_2 K_2^T(t) - C_1^T C_1, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dK_2(t)}{dt} = & -K_1(t)A_2 - K_2(t)A_4 - \varepsilon A_1^T K_2(t) - A_3^T K_3(t) + \\ & + \varepsilon K_1(t)S_1 K_2(t) + K_1(t)SK_3(t) + \varepsilon K_2(t)S^T K_2(t) + \\ & + K_2(t)S_2 K_3(t) - C_1^T C_2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dK_3(t)}{dt} = & -\varepsilon K_2^T(t)A_2 - \varepsilon A_2^T K_2(t) - K_3(t)A_4 - A_4^T K_3(t) + \\ & + \varepsilon^2 K_2^T(t)S_1 K_2(t) + \varepsilon K_2^T(t)SK_3(t) + \varepsilon K_3(t)S^T K_2(t) + \\ & + K_3(t)S_2 K_3(t) - C_2^T C_2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

уз гранични услов

$$K_1(t_f) = 0, \quad K_2(t_f) = 0, \quad K_3(t_f) = 0. \quad (2.34)$$

Ово је такође сингуларно пертурбовани систем и можемо сада да применимо претходно наведене идеје. Када поставимо да је  $\varepsilon = 0$ , добијамо

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}_1(t)}{dt} = & -\bar{K}_1(t)[A_1 - S\bar{K}_2^T(t)] - [A_1 - S\bar{K}_2^T(t)]^T \bar{K}_1(t) + \bar{K}_1(t)S_1 \bar{K}_1(t) - \\ & - \bar{K}_2(t)A_3 - A_3^T \bar{K}_2^T(t) + \bar{K}_2(t)S_2 \bar{K}_2^T(t) - C_1^T C_1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$0 = \bar{K}_2(t)[S_2 \bar{K}_3(t) - A_4] - \bar{K}_1(t)A_2 - A_3^T \bar{K}_3(t) + \bar{K}_1(t)S\bar{K}_3(t) - C_1^T C_2, \quad (2.36)$$

$$0 = -\bar{K}_3(t)A_4 - A_4^T \bar{K}_3(t) + \bar{K}_3(t)S_2 \bar{K}_3(t) - C_2^T C_2. \quad (2.37)$$

Треба запазити да је  $\bar{K}_1(t_f) = 0$  једини гранични услов којег треба да задовољи овај алгебарско-диференцијални систем једначина и да сада (2.36) и (2.37) имају улогу (2.3). Такође, важно је приметити да је једначина (2.37) независна од (2.35)

и (2.36) и да ће она имати јединствено позитивно дефинитно решење  $\bar{K}_3(t)$ , ако важи:

$$\text{rang}[B_2, A_4 B_2, A_4^2 B_2, \dots, A_4^{m-1} B_2] = m, \quad (2.38)$$

$$\text{rang}\left[C_2^T, A_4^T C_2^T, (A_4^T)^2 C_2^T, \dots, (A_4^T)^{m-1} C_2^T\right] = m, \quad (2.39)$$

за све  $t \in [t_0, t_f]$ . Ако важе (2.38) и (2.39) онда матрица  $[A_4 - S_2 K_3(t)]$  има карактеристичне вредности које све имају негативне реалне делове и (2.36) може да се реши по  $\bar{K}_2(t)$  тако да она ( $\bar{K}_2(t)$ ) буде изражена преко  $\bar{K}_3(t)$ , познате из (2.37) и  $\bar{K}_1(t)$ . Стога је корен (2.4) у овом случају јединствен. С друге стране, ако напишемо систем граничног слоја (2.14) у складу са (2.32) и (2.33) можемо да видимо да је овај корен асимптотски стабилан и да  $K_2(t_f) = 0$  и  $K_3(t_f) = 0$  припадају његовом домену атракције. Дакле, Претпоставка I дата у делу 2.3. је задовољена. Такође, може бити показано да то што је  $[A_4 - S_2 K_3(t)]$  стабилна матрица обезбеђује да Претпоставка II из дела 2.3. буде испуњена и стога:

$$K_1(t, \varepsilon) = \bar{K}_1(t) + O(\varepsilon), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (2.40)$$

$$K_2(t, \varepsilon) = \bar{K}_2(t) + O(\varepsilon), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.41)$$

$$K_3(t, \varepsilon) = \bar{K}_3(t) + O(\varepsilon), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.42)$$

где  $t_1$  може бити произвољно близу  $t_f$ , али мање од њега. Овај резултат нас мотивише да користимо  $\bar{K}_1(t), \bar{K}_2(t), \bar{K}_3(t)$  уместо тачног решења  $K_1(t), K_2(t), K_3(t)$  пошто је много једноставније решити једначине (2.35), (2.36), (2.37) него (2.31), (2.32), (2.33). Управљање блиско оптималном тада ће бити (Kokotovic et al., 1986):

$$u(t) = -R^{-1} \left[ (B_1^T \bar{K}_1(t) + B_2^T K_1(t)) x_1(t) + (\varepsilon B_1^T \bar{K}_2(t) + B_2^T \bar{K}_3(t)) x_2(t) \right], \quad (2.43)$$

а регулисани систем (систем са регулатором) код којег је ово управљање имплементирано у (2.24) и (2.25) је

$$\dot{x}_1(t) = (A_1 - S_1 \bar{K}_1(t) - S \bar{K}_2^T(t)) x_1(t) + (A_2 - S \bar{K}_3(t) - \varepsilon S_1 \bar{K}_2(t)) x_2(t), \quad (2.44)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2(t) = \left( A_3 - S^T \bar{K}_1(t) - S_2 \bar{K}_2^T(t) \right) x_1(t) + \left( A_4 - S_2 \bar{K}_3(t) - \varepsilon S^T \bar{K}_2(t) \right) x_2(t). \quad (2.45)$$

Пошто је  $(A_4 - S_2 \bar{K}_3(t))$  стабилна матрица, Претпоставке I и II (из дела 2.3.) су испуњене за (2.44) и (2.45) то јест, гранични слој којег  $x_2(t)$  испољава у  $t_0$  је стабилан (Kokotovic et al., 1986).

Једна од важних интерпретација овог поступка је да једначина (2.37), која се решава одвојено, одговара пројектовању веома брзог регулатора, који стабилише основне (релевантне) величине, које описују процес у граничном слоју:

$$\frac{dx_2(\tau)}{d\tau} = A_4(t)x_2(\tau) + B_2(t)u(\tau), \quad (2.46)$$

за све изабране  $t \in [t_0, t_f]$ . Када се овај прорачун заврши, онда се пројектује регулатор редукованог система, који је „спор”. Стога процедура има особину раздвајања временских оса (временских скала) која се може искористити у имплементацији хардвера или у изради *on-line* рачунарског софтвера. Детаљи ове процедуре прорачуна појављују се у литератури (Kokotovic et al., 1986).



### 3. МЕТОДЕ РЕДУКЦИЈЕ РЕДА МОДЕЛА ПРИМЕНОМ ТЕХНИКЕ БАЛАНСИРАЊА

#### 3.1. Увод

У овом поглављу ће бити приказано неколико познатих техника за редукцију реда система, које су засноване на балансирању система уз примену методе сингуларних пертурбација (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001; Шкатарић и Ратковић Ковачевић, 2006а). Тачност и робусност ових техника процениће се према  $H_\infty$  норми система редукованог реда. Приказаће се и модификација технике која обезбеђује тачну вредност појачања константног улаза као код оригиналног модела система. Тестиране технике дају високу тачност на нижим и средњим учестаностима. За илустрацију ефикасности приказаних метода за редукцију реда система изабрани су реални примери из процесне и ваздухопловне индустрије.

Осамдесетих година у теорији управљања је развијена техника робусне редукције реда система за линеарне, временски инваријантне системе, заснована на примени трансформације балансирања (Moore, 1981; Glover, 1984). Неке технике за редукцију реда модела биле су развијене за класу сингуларно перурбованих система на основу другачијих математичких процедура, као што је граф метрика (Vidyasagar, 1984). У (Safonov and Chiang, 1989) приказано је како се може израчунати трансформација балансирања, као и две методе за редукцију реда модела, које не захтевају претходно балансирање система.

У (Glover, 1984) су, поред осталог, дати разлози за редуковање модела као и ситуације у којима је то корисно и оправдано. У многим областима инжењерства за динамичке системе се добијају модели у простору стања који имају велики ред. Пожељно је да се они могу заменити моделима редукованог реда, а да грешка, која се при том произведе, не буде превише велика. На пример, неки ставови о томе из (Glover, 1984) су:

- (i) Модели постројења могу се добити комбиновањем модела појединачних компоненти, чиме се формира сложен модел великог реда. Ако се такав

модел постројења може заменити моделом редукованог реда, онда ће каснији прорачун управљања системом бити мање захтеван са аспекта израчунавања и могуће чак нумерички више поуздан.

- (ii) Ако је за постројење дизајниран динамички компензатор високог реда, онда ће у имплементацији модел редукованог реда компензатора укључивати одн. садржавати мање компонената или захтевати мање ресурса за израчунавање.
- (iii) Приликом прорачуна филтара, понекад је могуће да се једноставно добију тј. произведу задовољавајући филтри високог реда, а филтри редукованог реда тада би довели до уштеда у имплементацији.
- (iv) Када се моделују неки системи са расподељеним (дистрибуираним) параметрима могу се, методом коначних елемената или модалном анализом, добити приближни модели високог реда.

### 3.2. Приказ методе балансирања

Робусна редукција реда заснива се на примени трансформације балансирања (Moore, 1981), како је описано у (Glover, 1984). Посматра се линеаран, временски инваријантан систем представљен моделом у простору стања:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $x(t)$  представља  $n$ -димензиони вектор стања,  $u(t)$  је  $m$ -димензиони вектор улаза система, а  $y(t)$  је  $p$ -димензиони вектор излаза система. Одговарајућа функција преноса за систем у отвореном колу дејства, дата је једначином:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.2)$$

Претпоставља се да је систем (3.1), који разматрамо, асимптотски стабилан и да је  $G(s)$  минималне реализације, што захтева да пар  $(A, B)$  буде контролабилан и да пар  $(A, C)$  буде опсервабилан (Gajic and Lelic, 2001).

**Претпоставка 1:** Систем је асимптотски стабилан, пар  $(A, B)$  је контролабилан и пар  $(A, C)$  је опсервабилан.

Ако су карактеристичне вредности матрице  $A$  смештене строго у левој полуравни комплексне равни ( $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0, \forall i$ ), онда се Грамијани контролабилности и опсервабилности система, редом,  $P$  и  $Q$ , дефинишу као (Glover, 1984):

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt, \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt. \quad (3.3)$$

$P$  и  $Q$  задовољавају алгебарске једначине Љапунова (Glover, 1984; Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001):

$$P A^T + A P + B B^T = 0, \quad (3.4)$$

$$Q A + A^T Q + C^T C = 0. \quad (3.5)$$

За системе код којих је  $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0, \forall i$ , који су контролабилни и опсервабилни, оба грамијана,  $P$  и  $Q$ , су позитивно дефинитне матрице:  $P > 0, Q > 0$  (Glover, 1984; Zhou et al., 1996). Тада су Хенкелове сингуларне вредности од  $G(s)$  дефинисане као у (Glover, 1984):

$$\sigma_i(G(s)) = \{\lambda_i(PQ)\}^{1/2}, \quad (3.6)$$

где је, по договору  $\sigma_i(G(s)) \geq \sigma_{i+1}(G(s))$ , а  $G(s), P, Q$  су дати у (3.2), (3.4), (3.5).

Хенкелове сингуларне вредности су за линеаран систем фундаменталне инваријанте, повезане како са значајем тако и са сложености (Glover, 1984). Сингуларне вредности могу се користити као показатељи тога, колико су поједини модови система контролабилни и опсервабилни. Велике сингуларне вредности одговарају јако контролисаним одн. добро опсервираним модовима, а мале сингуларне вредности одговарају слабо контролисаним одн. опсервираним модовима.

Ако се координате у простору стања  $x(t)$  промене неком несингуларном трансформацијом  $T$ , нове координате биће,  $z(t) = T x(t)$ . Тада ће грамијани контролабилности и опсервабилности постати  $T P T^*$  и  $T^{*-1} Q T^{-1}$ , респективно, а

њихов производ у трансформисаним координатама биће  $TPQT^{-1}$ . Грамијани  $P$  и  $Q$  зависе од координата у простору стања, док су карактеристичне вредности њиховог производа  $PQ$  одн.  $TPQT^{-1}$ , непроменљиве приликом трансформације променљивих у простору стања (Glover, 1984).

Трансформација балансирања (Moore, 1981) користи несингуларну трансформацију стања, којом се постиже да, у новим координатама, грамијани контролабилности и опсервабилности буду идентични и дијагонални, то јест (3.7):

$$\begin{aligned} x_b(t) &= T x(t), \quad \det(T) \neq 0 \Rightarrow \\ \frac{dx_b(t)}{dt} &= A_b x_b(t) + B_b u(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} y_b(t) &= C_b x_b(t) + D_b u(t) = y(t), \\ A_b &= TAT^{-1}, \quad B_b = TB, \quad C_b = CT^{-1}, \quad D_b = D, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$P_b = Q_b = \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0, \quad (3.9)$$

где су  $\sigma_i$  Хенкелове сингуларне вредности.

Под претпоставком да је почетни (оригинални) систем контролабилан и опсервабилан, балансирани систем биће такође контролабилан и опсервабилан, пошто се трансформацијом сличности, каква је и трансформација балансирања, задржава и контролабилност и опсервабилност трансформисаног система (Gajic and Lelic, 1996; Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001). Стога су  $\sigma_i$  сви позитивни. Код балансиране реализације у простору стања, грамијани  $P_b$  и  $Q_b$  су идентични и дијагонални (3.9) (Moore, 1981). Додатно, и оригинални и балансирани систем представљају минималне реализације, захваљујући њиховим својствима контролабилности и опсервабилности. Функција преноса,  $G_b(s)$ , дата у:

$$G_b(s) = C_b(sI - A_b)^{-1} B_b + D = G(s), \quad (3.10)$$

такође остаје непромењена, захваљујући промени координата помоћу несингуларне трансформације. Балансирани грамијани контролабилности и опсервабилности задовољавају следеће алгебарске једначине Љапунова (3.11):

$$\begin{aligned} \Sigma A_b^T + A_b \Sigma + B_b B_b^T &= 0 \Leftrightarrow P_b A_b^T + A_b P_b + B_b B_b^T = 0, \\ \Sigma A_b + A_b^T \Sigma + C_b^T C_b &= 0 \Leftrightarrow Q_b A_b + A_b^T Q_b + C_b^T C_b = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.3. Редукција реда модела коришћењем трансформације балансирања

Током осамдесетих година, била је развијена робусна техника за редукцију реда система за временски инваријантне линеарне системе (Moore, 1981; Pernebo and Silverman, 1982; Jonckheere and Silverman, 1983; Glover, 1984; Zhou et al., 1996), заснована на трансформацији балансирања (Moore, 1981). Техника ће бити укратко изложена у овом поглављу. Приказано је неколико познатих техника за редукцију реда система, које су засноване на балансирању система уз примену методе сингуларних пертурбација (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001). Ове технике имају исту тачност и робусност процењену према  $H_\infty$  норми система редукованог реда, као и метода директног одсецања и метода балансирања резидуализованог модела система (Glover, 1984). Приказана је и модификација технике, која обезбеђује тачну вредност појачања константног улаза каква је код оригиналног модела система (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001). Тестиране технике дају одличну тачност на нижим и средњим учестаностима.

Неколико истраживача запазило је да је за синтезу контролера у повратној спрези веома важно обухватити и динамику на вишим учестаностима. Више начина да се овај проблем превазиђе је предложено у радовима (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001), и размотрени су у наставку.

#### 3.3.1. Балансирано одсецање

Идеја за редукцију реда система, заснована на трансформацији балансирања може се повезати са оригиналним радом Калмана на каноничној декомпозицији система (Kalman, 1963), у коме је показано да се модови система, који су било неконтролабилни било неопсервабилни не појављују у функцији преноса система. Можемо да закључимо да модови система, који су истовремено и слабо контролабилни и слабо опсервабилни, имају мали утицај на динамику система, те се могу стога занемарити (Moore, 1981; Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001). Запажено је, међутим, да се не могу занемарити они модови система који су слабо контролабилни а добро опсервабилни нити, обрнуто, јако контролабилни а слабо опсервабилни модови (Gajic and Lelic, 2000).

Претпоставимо да је балансирани систем (3.7)-(3.9) партиционисан на следећи начин:

$$\begin{aligned} A_b &= \begin{bmatrix} A_{b1} & A_{b2} \\ A_{b3} & A_{b4} \end{bmatrix}, B_b = \begin{bmatrix} B_{b1} \\ B_{b2} \end{bmatrix}, \\ C_b &= [C_{b1} \quad C_{b2}], \quad D_b = D, \end{aligned} \quad (3.12)$$

и да је

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \\ \Sigma_1 &= \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}, \quad \Sigma_2 = \text{diag}\{\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Претпостављајући да је  $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ , или само  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ , балансираним одсецањем, добија се систем редукованог реда  $r$ , који је дефинисан у (3.14):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= A_{b1}x_1(t) + B_{b1}u(t), \\ y(t) &= C_{b1}x_1(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Одговарајућа функција преноса редукованог система, односно система сниженог (редукованог) реда је:

$$G_{b1}(s) = C_{b1}(sI - A_{b1})^{-1}B_{b1} + D. \quad (3.15)$$

Добијени систем редукованог реда је контролабилан и опсервабилан пошто су позитивне све одговарајуће Хенкелове сингуларне вредности (Pernebo and Silverman, 1982). Додатно, систем редукованог реда је балансиран и асимптотски стабилан (Pernebo and Silverman, 1982). У литератури, на пример, (Glover, 1984; Enns, 1984) је показано да  $H_\infty$  норма система редукованог реда, који је добијен описаним поступком балансираног одсецања, задовољава услов:

$$\|G(s) - G_{b1}(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n). \quad (3.16)$$

Зато, ако претпоставимо да су занемарене сингуларне вредности мале, техника за редукацију реда помоћу балансираног одсецања даје веома добру апроксимацију за функцију преноса оригиналног система.

Уочено је у (Sreeram and Agathoklis, 1989) да систем редукованог реда добијен поступком балансираног одсецања даје веома добру апроксимацију за

импулсни одзив полазног система (добра је апроксимација спектра на вишим учестаностима), али испољава значајну грешку устаљеног стања за одскочни одзив система (слаба је апроксимација спектра на нижим учестаностима). Ова грешка настаје као последица тога што оригинални систем и систем редукованог реда имају различита појачања константног улаза (статичка појачања, појачања једносмерних сигнала, енгл. *DC gains*). Може се запазити из функције преноса (3.15) да се појачање константног улаза система редукованог реда не подудара са појачањем константног улаза оригиналног система, то јест:

$$G_{b_1}(0) = -C_{b_1}A_{b_1}^{-1}B_{b_1} + D \neq G(0),$$

$$G(0) = -CA^{-1}B + D = G_b(0) = -\begin{bmatrix} C_{b_1} & C_{b_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{b_1} & A_{b_2} \\ A_{b_3} & A_{b_4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{b_1} \\ B_{b_2} \end{bmatrix} + D, \quad (3.17)$$

$$G_b(0) = -C_bA_b^{-1}B_b + D = -CT^{-1}TAT^{-1}TB + D = -CA^{-1}B + D = G(0). \quad (3.18)$$

Наиме, након горе описаног одсецања коришћењем балансирања система, задржава се већи део спектра система на нижим учестаностима и извесни део спектра који одговара вишим учестаностима, али смо изгубили један део спектра нижих учестаности и велики део спектра виших учестаности.

Поправљена метода балансираног одсецања, која обезбеђује тачну вредност појачања константног улаза, какву има оригинални систем, дата је у (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001), примењена у (Škatarić and Ratković Kovačević, 2006b), а овде је наведена касније - формулом (3.45) у делу 3.3.4.

### 3.3.2. Балансирана резидуализација

Пошто се техником балансираног одсецања елиминише један део спектра на нижим учестаностима (који је садржан у занемареном делу система - променљиве стања  $x_2(t)$ ) добија се појачање различито од појачања оригиналног система који је балансиран. Ово неслагање је отклоњено у (Glover, 1984; Liu and Anderson, 1989), где је предложена техника *балансиране резидуализације* (Gajic and Lelic, 2001). Ова техника за редуkcију реда модела производи тачно појачање једносмерног сигнала и даје веома добру апроксимацију спектра на нижим и средњим

учестаностима. Треба запазити да је и у (Glover, 1984) такође коришћена техника резидуализације.

Наведимо у најкраћим цртама суштину технике редукције реда система засноване на балансираној резидуализацији. Посматрамо балансиран линеаран систем, облика:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{b1} & A_{b2} \\ A_{b3} & A_{b4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{b1} \\ B_{b2} \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [C_{b1} \quad C_{b2}] \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T + Du(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где су матрице  $A_{b1}$  и  $A_{b2}$ , редом, димензија  $r \times r$  и  $(n-r) \times (n-r)$ , а преостале матрице имају димензије које одговарају димензијама система дефинисаним у (3.1). Додатно, претпоставимо да одговарајуће Хенкелове сингуларне вредности задовољавају релацију  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ . Уз претпоставку да је променљива стања  $x_2(t)$  достигла своју квази устаљену вредност), можемо да поставимо нулу уместо одговарајућег извода по времену (треба запазити да је  $x_2(t)$  асимптотски стабилна брза променљива стања), што доводи до следеће апроксимације редукованог реда система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{b1} & A_{b2} \\ A_{b3} & A_{b4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{b1} \\ B_{b2} \end{bmatrix} u(t), \quad (3.20)$$

$$y(t) = [C_{b1} \quad C_{b2}] \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T + Du(t). \quad (3.21)$$

Матрица  $A_{22}$  је асимптотски стабилна - показано је у (Glover, 1984), да ова матрица има све карактеристичне вредности у затвореној левој комплексној полуравни, па је стога и инвертибилна. Дакле, можемо из једначине (3.21) одредити  $x_2(t)$  изражено преко  $x_1(t)$  и  $u(t)$  као у:

$$x_2(t) = -A_{b4}^{-1}(A_{b3}x_1(t) + B_{b2}u(t)), \quad (3.22)$$

што доводи до резидуализованог система редукованог реда (Liu and Anderson, 1989):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_r x_1(t) + B_r u(t), \\ y(t) &= C_r x_1(t) + D_r u(t), \end{aligned} \quad (3.23)$$



где је:

$$A_r = A_{b1} - A_{b2}A_{b4}^{-1}A_{b3}, \quad B_r = B_{b1} - A_{b2}A_{b4}^{-1}B_{b2}, \quad (3.24)$$

$$C_r = C_{b1} - C_{b2}A_{b4}^{-1}A_{b3}, \quad D_r = D - C_{b2}A_{b4}^{-1}B_{b2}. \quad (3.25)$$

Према теорији сингуларних пертурбација (Kokotovic et al., 1986; Gajić i Petkovski, 1991) овај систем представља нулту апроксимацију почетног система дефинисаног једначином (3.19). Треба запазити да је теорија сингуларних пертурбација коришћена за редукују реда система кроз балансирање и у низу радова - видети референциране у (Gajić and Lelic, 2000; Gajić and Lelic, 2001).

Поменуто је у (Gajić and Lelic, 2000; Gajić and Lelic, 2001) да функција преноса резидуализованог система:

$$G_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r, \quad (3.26)$$

осим што има исту особину као и она за систем редукованог реда, добијен помоћу одсецања, а то је:

$$\|G(s) - G_r(s)\|_{\infty} \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n), \quad (3.27)$$

такође задржава вредност појачања константног улаза какву има оригинални систем (Liu and Anderson, 1989). У литератури је показано, кроз неколико алгебарских операција са матрицама, да је појачање константног улаза резидуализованог система идентично појачању константног улаза првобитног система (Liu and Anderson, 1989):

$$\begin{aligned} G_r(0) = -C_r A_r^{-1} B_r + D = G(0) = -(C_{b1} - C_{b2} A_{b4}^{-1} A_{b3}) (A_{b1} - A_{b2} A_{b4}^{-1} A_{b3})^{-1} \times \\ \times (B_{b1} - A_{b2} A_{b4}^{-1} B_{b2}) + (D - C_{b2} A_{b4}^{-1} B_{b2}) = -[C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Примећено је, такође у (Liu and Anderson, 1989), да резидуализовани систем редукованог реда даје добре апроксимације спектра система на нижим и средњим учестаностима. Стога су одскочни одзиви резидуализованог система редукованог реда добре апроксимације одговарајућих одскочних одзива полазног система. Занимљиво је да је у литератури запажено и да систем редукованог реда добијен поступком одсецања има бољи спектар на вишим учестаностима него

систем редукованог реда добијен помоћу балансиране резидуализације (Liu and Anderson, 1989; Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001).

### 3.3.3. Генералисана балансирана резидуализација

Даље уопштење резултата познато је из литературе (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001) и оно доводи до развоја алтернативних техника, као што је и *генералисана (уопштена) балансирана резидуализација*. Добијене технике засноване су на трансформацији познатој из сингуларних пертурбација, која је позната под називом Чангова трансформација (Chang, 1972).

Сингуларно пертурбовани линеарни системи управљања имају следећи облик модела у простору стања (Kokotović et al., 1986; Gajić and Lim, 2001):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.29)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Du(t), \quad (3.30)$$

где је  $\varepsilon$  мали позитиван параметар сингуларне пертурбације, који показује раздвајање променљивих стања на споро променљиве  $x_1(t)$  и брзо променљиве  $x_2(t)$ . Овај систем дуалан је систему (3.19), они су дословно идентични за  $\varepsilon = 1$ . Једначина (3.29) одговара једначини (2.18), уз  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , али овде матрица управљања има само две субматрице док у претходном поглављу, у (2.18) матрица  $B$  има четири субматрице.

И балансирани систем има споре и брзе модове: брзи модови су они, који одговарају малим Хенкеловим сингуларним вредностима, а спори модови су они који одговарају релативно великим Хенкеловим сингуларним вредностима. Стога је могуће изразити систем (3.19) у сингуларно пертурбованом облику, на пример, узимајући да је  $\varepsilon = \sigma_{r+1}/\sigma_r$  или чак  $\varepsilon = \sigma_{r+1}/\sigma_1$  и затим множећи са  $\varepsilon$  другу једначину у (3.19), ону која одговара брзим променљивим стања  $x_2(t)$ . Овај ће поступак прикладно скалирати одговарајуће матрице и учинити да њихови

елементи буду истог реда величине, као и они у матрицама које одговарају споро променљивим  $x_1(t)$ . Релације које повезују матрице у (3.19) и (3.29) - (3.30) су:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{b1}, & A_2 &= A_{b2}, & A_3 &= \varepsilon A_{b3}, & A_4 &= \varepsilon A_{b4}, \\ B_1 &= B_{b1}, & B_2 &= \varepsilon B_{b2}, & C_1 &= C_{b1}, & C_2 &= C_{b2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Применом Чангове трансформације (Chang, 1972) сингуларно пертурбован систем управљања (3.29) - (3.30) може да се декомпоује (распрегне) на два независна подсистема, спори и брзи (3.32) - (3.33):

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \varepsilon \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - A_2 L & 0 \\ 0 & A_4 + \varepsilon L A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 - M B_2 - \varepsilon M L B_1 \\ B_2 + \varepsilon L B_1 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.32)$$

$$y(t) = [C_1 - C_2 L \quad C_2 - \varepsilon C_2 L M + \varepsilon C_1 M] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}^T + D u(t), \quad (3.33)$$

где матрице  $L$  и  $M$  задовољавају алгебарске једначине:

$$\begin{aligned} A_4 L - A_3 - \varepsilon L (A_1 - A_2 L) &= 0, \\ M A_4 - A_2 + \varepsilon [M L A_2 - (A_1 - A_2 L) M] &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ове једначине могу да се успешно реше за мале вредности  $\varepsilon$ , коришћењем или методе фиксне тачке или Њутнове методе. За релативно велике вредности  $\varepsilon$  може да се примени метод карактеристичних вектора за решавање једначина (3.34) (видети радове цитиране у Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001). Треба запазити да је за мале вредности  $\varepsilon$  апроксимација нултог реда за решење једначина (3.34) дата са:

$$L^{(0)} = A_4^{-1} A_3, \quad M^{(0)} = A_2 A_4^{-1}, \quad (3.35)$$

што значи да ова метода захтева да субматрица  $A_4$  буде стабилна одн. инвертибилна матрица. Увођењем ознака:

$$\begin{aligned} A_s &= A_1 - A_2 L, & B_s &= B_1 - M B_2 - \varepsilon M L B_1, \\ A_f &= A_4 + \varepsilon L A_2, & B_f &= B_2 + \varepsilon L B_1, \\ C_s &= C_1 - C_2 L, & C_f &= C_2 - \varepsilon C_2 L M + \varepsilon C_1 M, \end{aligned} \quad (3.36)$$

систем (3.32) - (3.33) може да се представи у сажетијем облику:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \varepsilon \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s \\ B_f \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_s & C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + Du(t), \\ y(t) &= y_s(t) + y_f(t), \end{aligned} \quad (3.37)$$

где су излази спорог и брзог подсистема дефинисани редом као у (3.38):

$$\begin{aligned} y_s(t) &= C_s z_1(t) + Du(t), \\ y_f(t) &= C_f z_2(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Свеједно је где се придружује грана директног управљања излазом, да ли брзом или спором подсистему, што пре свега зависи од природе улаза система. Одговарајуће функције преноса за брзи и спори подсистем из горе наведене декомпозиције система дате су са:

$$\begin{aligned} G_s(s) &= C_s (sI - A_s)^{-1} B_s + D, \\ G_f(s) &= C_f (sI - \frac{1}{\varepsilon} A_f)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} B_f = C_f (\varepsilon sI - A_f)^{-1} B_f. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Да би се добила тачна декомпозиција система на спори и брзи подсистем, као у (3.37) треба само решити једначине  $L$ - $M$  (3.34). За мале вредности параметра  $\varepsilon$ , ово се лако може постићи коришћењем, на пример, алгорита фиксне тачке. Неколико алгорита за решавање  $L$ - $M$  једначина предложено је у радовима (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001).

Коришћењем ознаке  $O(\varepsilon)$ , из (3.34) и (3.35) добијамо да је:

$$\begin{aligned} L &= L^{(0)} + O(\varepsilon) = A_4^{-1} A_3 + O(\varepsilon), \\ M &= M^{(0)} + O(\varepsilon) = A_2 A_4^{-1} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ова запажања сугеришу да важе следеће релације између матрица коришћених у апроксимацији резидуализације и матрица добијених тачном декомпозицијом система на спори (3.41) и брзи подсистем (3.42):

$$\begin{aligned} A_s &= A_1 - A_2 L = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3 + O(\varepsilon) = A_r + O(\varepsilon), \\ B_s &= B_1 - M B_2 - \varepsilon M L B_1 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2 + O(\varepsilon) = B_r + O(\varepsilon), \\ C_s &= C_1 - C_2 L = C_1 - C_2 A_4^{-1} A_3 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
A_f &= A_4 + \varepsilon LA_2 = A_4 + O(\varepsilon), \\
B_f &= B_2 + \varepsilon LB_1 = B_2 + O(\varepsilon), \\
C_f &= C_2 - \varepsilon C_2 LM + \varepsilon C_1 M = C_2 + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Стога, резултати из (Liu and Anderson, 1989) се могу добити и пертурбовањем матрица у једначинама (3.40) - (3.42) чланом  $O(\varepsilon)$  и постављањем да је  $\varepsilon = 0$  у функцији преноса брзог подсистема која је дефинисана у (3.39), што је довољно добра апроксимација на нижим и средњим учестаностима (под претпоставком да је  $\varepsilon$  довољно мало).

Уопштење апроксимације резидуализацијом се може добити коришћењем спорог подсистема уз апроксимирање брзог подсистема његовим једносмерним појачањем које је једнако  $-C_f A_f^{-1} B_f$ . Функција преноса апроксимирана моделом редукованог реда дата је са:

$$G(s) \approx C_s (sI - A_s)^{-1} B_s + D - C_f A_f^{-1} B_f. \tag{3.43}$$

Појачање константног улаза код генерализоване резидуализације задовољава следећу лему, дату у литератури (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001).

**Лема:** Процедура генерализоване резидуализације чува оригиналну вредност појачања константног улаза (једносмерног појачања), то јест:

$$-CA^{-1}B + D = -C_s A_s^{-1} B_s + D - C_f A_f^{-1} B_f. \tag{3.44}$$

**Доказ:** Ова лема, може се доказати на следећи начин. Тачна декомпозиција оригиналног балансираног система (3.19) на спори и брзи подсистем је добијена применом несингуларне Чангове трансформације на систем (3.29) - (3.30), коју можемо означити са, на пример,  $T_c$ . Систем (3.29) - (3.30), добијен је од (3.19) множењем једначине у којој је  $\dot{x}_2$  са  $\varepsilon$ , што представља другу несингуларну трансформацију, рецимо  $T_\varepsilon$ . Следи да су оригиналне матрице система и трансформисане матрице система повезане преко композиције две несингуларне трансформације. Таква трансформација одржава неизмењеном преносну функцију (Gajic and Lelic, 1996; Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001), и стога описана

процедура задржава једносмерно појачање система (које се добија заменом  $s = 0$  у функцију преноса система) .

Примећено је у низу симулационих примера за реалне физичке системе да генералисана техника резидуализације (3.43) даје веома добре резултате на ниским учестаностима (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001). На пример, за одскочни одзив, грешка између стварног одзива и одзива добијеног применом методе генералисане резидуализације брзо постаје реда  $O(10^{-10})$  или чак  $O(10^{-14})$ , док је за исте примере одговарајућа грешка код технике резидуализације била реда  $O(10^{-3})$  или  $O(10^{-4})$  током дужег временског периода (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001). Међутим, запажено је да као и поступак резидуализације (3.26) и поступак генералисане резидуализације (3.43) показује лошије понашање на високим учестаностима, него редукција реда модела одсецањем. Разлог овој недоследности је чињеница да обе методе уводе грану директног управљања од улаза ка излазу. Ове гране, *feedforward* спреге, имају тренутне функције преноса дате, редом, изразима  $D_r = D - C_{b2}A_{b4}^{-1}B_{b2}$  и  $D - C_f A_f^{-1} B_f$ . Стога ће сав сигнал улаза система бити пропагиран тренутно до излаза система, дефинисано или са  $(D - C_{b2}A_{b4}^{-1}B_{b2})u(0)$ , за технику резидуализације или, у случају генералисане технике резидуализације, као  $(D - C_f A_f^{-1} B_f)u(0)$ . Ово је у литератури (Gajic and Lelic, 2000; Gajic and Lelic, 2001) нарочито запажено у примерима који су поредили одзиве на улаз типа одскочне функције, за који је  $u(0) = 1$ . Чак је, пошто је у генералисаном поступку резидуализације (3.43) комплетан спори део система замењен његовим једносмерним појачањем, добијени спектар на нижим учестаностима одличан, али није много добар на високим учестаностима, а понекад ни на средњем опсегу учестаности. Стога мора да се направи компромис између високе прецизности на нижим учестаностима, на којима већина реалних физичких система ради, и погоршаног (деградираног) понашања на високим учестаностима

Трансформација балансирања примењена је на сингуларно пертурбоване моделе и у (Shahruz and Behtash, 1989), уз потпуно распрезање система на спори и брзи подсистем.

### 3.3.4. Кориговано балансирано одсецање

У радовима (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001) је истакнуто, да једносмерно појачање за технику редукције реда *балансирано одсецање* може да се побољша, ако се за функцију преноса издвојеног спорог подсистема одабере следећа модификована форма:

$$G_{s,odsecanje}^{popravljeno}(s) = C_{b1}(sI - A_{b1})^{-1}B_{b1} + C_{b1}A_{b1}^{-1}B_{b1} - CA^{-1}B, \quad (3.45)$$

што је поправка методе одсецања. Очигледно је да ова корекција захтева да субматрица  $A_{b1}$  буде инвертибилна. Овим се постиже да појачање једносмерних сигнала у редукованом моделу буде идентично као појачање једносмерних сигнала оригиналног модела. Симулације извршене у неколико примера (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001), показале су да таква апроксимација постаје ближа апроксимацији помоћу балансиране резидуализације, као и апроксимацији помоћу генералисане балансиране резидуализације.

### 3.3.5. Метода заснована на брзом подсистему уз одбацавање спорог подсистема

Потреба да се побољша техника редукције реда система балансирањем на високим учестаностима нарочито је значајна код флексибилних структура (Gajić and Lelić, 2000), и уопште код система, чија се динамика може описати као низ благо ослабљених осцилатора са малим размаком између учестаности. Чак је у (Jonckheere and Silverman, 1983) примећено да неки немоделовани модови високих учестаности могу довести до драстичног погоршања понашања система у затвореном колу дејства, па и до нестабилности (проблем преливања, тј. *spillover problem*) и да, док модели на високим учестаностима изгледају неважни у отвореном колу дејства, они постају значајнији при затвореном колу дејства. Код проблема пројектовања управљања морамо имати на уму немоделовану динамику на вишим учестаностима, која је занемарена ради редукције реда система.

Имајући у виду (3.41) - (3.42), у (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001) је добијена тачна декомпозиција оригиналног система на спори и брзи подсистем:

$$\begin{aligned}
G(s) &= G_s(s) + G_f(s), \\
G_s(s) &= C_s(sI - A_s)^{-1} B_s + D, \\
G_f(s) &= C_f(\varepsilon sI - A_f)^{-1} B_f.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Треба приметити да је у литератури (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001) позната следећа декомпозиција система на брзи и спори део:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s), \tag{3.47}$$

$$G_1(s) = \bar{C}(s)(sI - \bar{A}(s))^{-1} \bar{B}(s) + D, \tag{3.48}$$

$$G_2(s) = C_{b2}(sI - A_{b4})^{-1} B_{b2} = C_2(\varepsilon sI - A_4)^{-1} B_2, \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}(s) &= A_1 + A_2(\varepsilon sI - A_4)^{-1} A_3, \\
\bar{B}(s) &= B_1 + A_2(\varepsilon sI - A_4)^{-1} B_2, \\
\bar{C}(s) &= C_1 + C_2(\varepsilon sI - A_4)^{-1} A_3.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Декомпозиција на спори и брзи део дата једначинама (3.47) - (3.50) не раздваја потпуно споре и брзе променљиве стања, пошто функција преноса  $G_1(s)$  има компоненте обе врсте.

За системе који су описани високо осцилаторним и благо ослабљеним модовима (пар стабилних коњуговано комплексних полова, који су близу имагинарне осе) чини се да је прикладнија апроксимација која задржава брзи подсистем, а чува и једносмерно појачање спорог подсистема. Ово је у складу са теоријом сингуларних пертурбација (Kokotović et al., 1986; Chow et al 1978; Gajić i Petkovski, 1991; Gajić and Lim 2001), али је у супротности са идејом технике  $H_\infty$  редукције реда модела, пошто треба да задржимо модове система који одговарају малим Хенкеловим сингуларним вредностима, а да одстранимо оне модове који одговарају великим Хенкеловим сингуларним вредностима. Одговарајућа апроксимација функције преноса таквих система се може добити из (3.46) занемаривањем споре динамике - постављајући  $s = 0$  у  $G_s(s)$  (као у (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001)):

$$G_{f,aproximirano}(s) = C_f(\varepsilon sI - A_f)^{-1} B_f + (D - C_s A_s^{-1} B_s). \tag{3.51}$$



### 3.3.6. Модификована генералисана балансирана резидуализација

Могуће су алтернативе до сада наведеној декомпозицији спектра система на спори и брзи део (Gajić and Lelic, 2001). Посматра се систем (3.29) - (3.30) и уводи следећа смена (Gajić and Lelic, 2001):

$$z_2(t) = x_2(t) + Lx_1(t), \quad (3.52)$$

где  $L$  задовољава алгебарску једначину (3.34). Ова смена доводи до нових координата, при чему се потпуно раздваја брзи подсистем од спорог:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_s x_1(t) + A_{b2} z_2(t) + B_{b1} u(t), \\ \varepsilon \dot{z}_2(t) &= A_f z_2(t) + B_f u(t), \\ y(t) &= C_s x_1(t) + C_{b2} z_2(t) + Du(t) = y_{sf}(t) + y_{ff}(t), \end{aligned} \quad (3.53)$$

Применом Лапласове трансформације, може да се израчуна функција преноса овог система, која се раздваја као у:

$$\begin{aligned} G(s) &= G_{sf}(s) + G_{ff}(s), \\ G_{sf}(s) &= C_s (sI - A_s)^{-1} [A_{b2} (\varepsilon sI - A_f)^{-1} B_f + B_{b1}] + D, \\ G_{ff}(s) &= C_{b2} (\varepsilon sI - A_f)^{-1} B_f. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Треба приметити да је  $\varepsilon < 1$ , често чак  $\varepsilon \ll 1$ . На нижим и средњим учестаностима брзи подсистем,  $G_{ff}(s)$ , (трећа једначина у (3.54)) може бити апроксимиран својим једносмерним појачањем, које је једнако  $G_{ff}(0) = C_{b2} A_f^{-1} B_f$ .

Спори подсистем на нижим учестаностима може да се апроксимира, тако да задржи своје једносмерно појачање (за  $\varepsilon \ll 1$ , па је постављено  $\varepsilon = 0$ ):

$$G_{sf}(s) \approx C_s (sI - A_s)^{-1} (B_{b1} - A_{b2} A_f^{-1} B_f) + D. \quad (3.55)$$

Одговарајућа апроксимација функције преноса  $G(s) = G_{sf}(s) + G_{ff}(s)$  је:

$$G_{\text{mod1}}(s) \approx C_s (sI - A_s)^{-1} (B_{b1} - A_{b2} A_f^{-1} B_f) + D - C_{b2} A_f^{-1} B_f, \quad (3.56)$$

а ова метода назива се *модификована генералисана балансирана резидуализација* (Gajić and Lelic, 2001).

Друга варијанта методе модификована генералисана резидуализација може се добити увођењем следеће смене у (3.29) - (3.30) (Gajić and Lelic, 2001):

$$z_1(t) = x_1(t) - \varepsilon H x_2(t), \quad (3.57)$$

при чему ће матрица  $H$  бити касније одређена. Ова смена доводи до нових координата (3.58):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= (A_1 - HA_3)z_1(t) + Nx_2(t) + (B_1 - HB_2)u(t), \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) &= A_3z_1(t) + (A_4 + \varepsilon A_3H)x_2(t) + B_2u(t), \\ y(t) &= C_1z_1(t) + (C_2 + \varepsilon C_1H)x_2(t) + Du(t), \\ N &= A_2 - HA_4 + \varepsilon(A_1 - HA_3)H. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Спори подсистем биће потпуно распрегнут од брзог, ако важи:

$$N = A_2 - HA_4 + \varepsilon(A_1 - HA_3)H = 0, \quad (3.59)$$

што доводи до:

$$\dot{z}_1(t) = (A_1 - HA_3)z_1(t) + (B_1 - HB_2)u(t). \quad (3.60)$$

Једначина (3.59) има форму сличну оној за  $L$ -једначину дефинисану у (3.34). Стога се може решити применом истих метода, методом фиксне тачке или Њутновом методом. Може се показати, након извесног рачунања, да функција преноса система сада има раздвојен спори подсистем,  $G_{ss}(s)$ , од брзог,  $G_{fs}(s)$ :

$$\begin{aligned} G(s) &= G_{ss}(s) + G_{fs}(s), \\ G_{ss}(s) &= C_1[sI - (A_1 - HA_3)]^{-1}(B_1 - HB_2) + D, \\ G_{fs}(s) &= (C_2 + \varepsilon C_1H)[\varepsilon sI - (A_4 + \varepsilon A_3H)]^{-1} \times \\ &\quad \times [B_2 + A_3(sI - (A_1 - HA_3))^{-1}(B_1 - HB_2)] \end{aligned} \quad (3.61)$$

Појачање једносмерног сигнала брзог подсистема дефинисаног у (3.61) једнако је:

$$\begin{aligned} D_{fs} = G_{fs}(0) &= -(C_2 + \varepsilon C_1H)(A_4 + \varepsilon A_3H)^{-1} \times \\ &\quad \times [B_2 - A_3(A_1 - HA_3)^{-1}(B_1 - HB_2)] \end{aligned} \quad (3.62)$$

Друга варијанта модификоване генерализане резидуализације даје апроксимацију моделом редукованог реда, на основу (3.57) - (3.62), чија је функција преноса (Gajic and Lelic, 2001):

$$G_{\text{mod}2}(s) = G_{ss}(s) + D_{fs} = C_1[sI - (A_1 - HA_3)]^{-1}(B_1 - HB_2) + D + D_{fs}. \quad (3.63)$$

Треба проценити када је погоднија примена прве, (3.56), а када друге, (3.63), модификоване генерализоване балансиране резидуализације.

### 3.3.7. Реверзна техника резидуализације

Још једна редукција реда модела, заснована на брзом подсистему, може се добити коришћењем апроксимације функције преноса брзог подсистема (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001), као у једначини:

$$G_{f, \text{aproksimirano}2}(s) = C_{2f}(sI - A_{2f})^{-1}B_{2f} + D_{2f}, \quad (3.64)$$

уз

$$\begin{aligned} A_{2f} &= A_{b2} - A_{b3}A_{b1}^{-1}A_{b2}, & B_{2f} &= B_{b2} - A_{b3}A_{b1}^{-1}B_{b1}, \\ C_{2f} &= C_{b2} - C_{b1}A_{b1}^{-1}A_{b2}, & D_{2f} &= D - C_{b1}A_{b1}^{-1}B_{b1}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ова метода може да се назове реверзна техника резидуализације (Gajić and Lelić, 2000; Gajić and Lelić, 2001). Треба запазити да су у (3.65) присутне само субматрице оригиналног модела и да није било неопходно уводити параметар  $\varepsilon$ . Апроксимација (3.64) - (3.65) је директно добијена из првобитног тј. оригиналног балансираног система (3.19) без увођења параметра сингуларне пертурбације, али уз претпоставку да је у одзиву система доминантна брза динамика те да је могуће заменити променљиву  $x_1(t)$  њеном апроксимацијом квази-устаљеног стања, која се може добити из (3.19), тако што се одговарајући извод по времену постави на нулу.

## 3.4. Примери

Ефикасност приказаних метода за редукцију реда система тражена је на три реална примера из праксе – два из процесне и један из ваздухопловне индустрије.

**Пример 1.** Редукује се модел бинарне дестилационе колоне са кондензатором, прегревачем и девет подова (Шкатарић, 2004; Шкатарић и Ратковић Ковачевић, 2006а; Škatarić and Ratković Kovačević, 2006b).

Матрице математичког модела у простору стања, за овај систем су:

$$A = \begin{bmatrix} -0.991 & 0.529 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.522 & -1.051 & 0.596 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.522 & -1.118 & 0.596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.522 & -1.548 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.640 & 0.799 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.721 & 0.901 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.823 & 1.021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.943 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 3.84 & 4 & 37.6 & 3.08 & 2.36 & 2.88 & 3.08 & 3 \\ -2.88 & -3.04 & -2.8 & -2.32 & -3.32 & -3.82 & -4.12 & -3.96 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = [0 \ 0]. \quad (3.68)$$

Ред система је  $n = 8$ . Хенкелове сингуларне вредности (ХСВ) оригиналног и балансираног модела пуног реда, приказане су на слици 3.1. Треба истаћи да је, од осам модова оригиналног модела, само по четири опсервабилно и контролабилно, што значи да редукција модела применом генералисане балансиране резидуализације није прикладна за примену у овом случају.

Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела су:

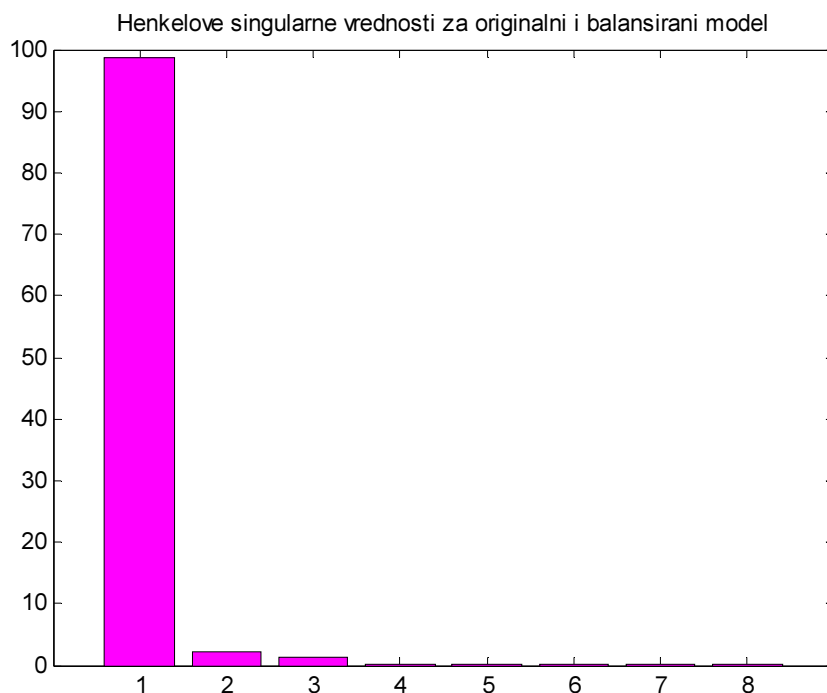
$$\text{hsv}(1) = 98.6944, \quad \text{hsv}(2) = 2.3139, \quad \text{hsv}(3) = 1.3673,$$

$$\text{hsv}(4) = 0.11872, \quad \text{hsv}(5) = 0.0087866, \quad \text{hsv}(6) = 0.00049468,$$

$$\text{hsv}(7) = 3.4189 \cdot 10^{-5}, \quad \text{hsv}(8) = 8.6393 \cdot 10^{-7}.$$

На основу ХСВ, за редуковани ред је одабрано  $r = 3$ . Добијено је неколико система редукованог реда, применом изложених метода: редуковани модел добијен балансираним одсецањем, онај добијен балансираном резидуализацијом, затим генералисаном балансираном резидуализацијом, модификованом балансираном резидуализацијом, коригованим балансираним одсецањем, редуковањем на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог и реверзном балансираном резидуализацијом. Сваки од редукованих модела, као и

оригинални, тестирани су за типичне побудне функције: импулсна побуда, одскачна побуда, побуда типа рампе и простопериодична одн. синусна побуда.

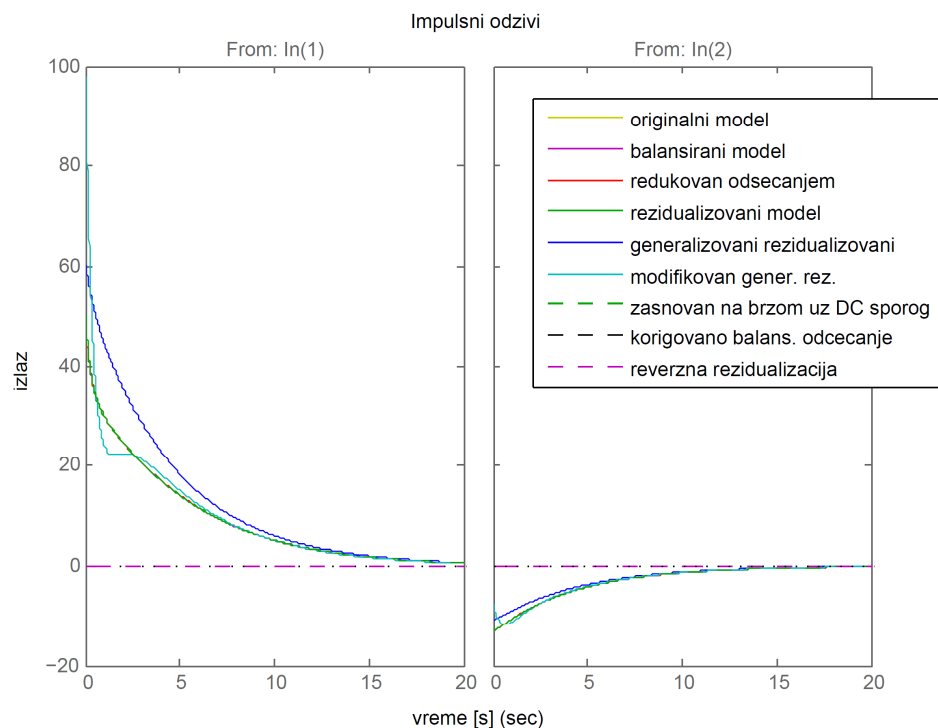


*Слика 3.1. Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела пуног реда*

На сликама 3.2. - 3.5. приказани су одзиви оригиналног система и балансираног система, оба реда  $n = 8$ , и свих седам, на разне начине добијених, система редукованог реда  $r = 3$ : на слици 3.2. су импулсни одзиви (одзиви на побуду Дираковим импулсом), на слици 3.3. одзив на побуду степ импулсом тј. побуду јединичном одскачном функцијом, на слици 3.4. одзив на побуду типа рампе и на слици 3.5. одзив на простопериодичну то јест синусну побуду.

На слици 3.2. се види углавном добро поклапање импулсних одзива за првих седам модела: оригинални и балансирани модел, пуног реда; модел редукован балансираним одсецањем; редукован балансираном резидуализацијом, редукован генералисаном балансираном резидуализацијом; редукован модификованом генералисаном балансираном резидуализацијом; редукован модел заснован на брзом подсистему, уз једносмерно појачање спорог. Уочава се да лошу апроксимацију пружа реверзна балансирана резидуализација и кориговано

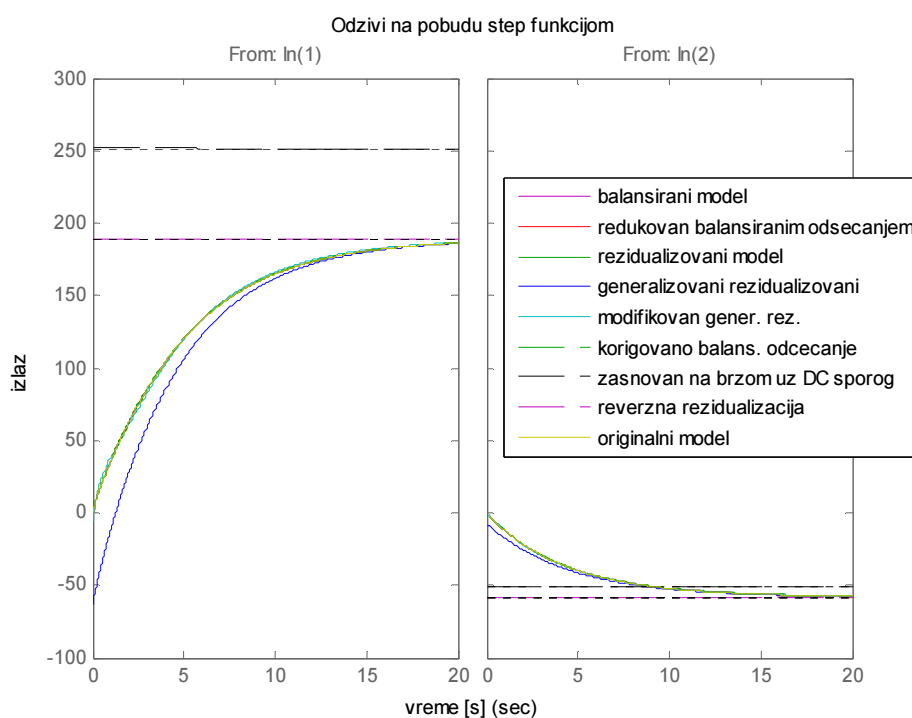
одсецање, док генерализована резидуализација даје квалитетнију апроксимацију од претходне две технике, али лошију од осталих.



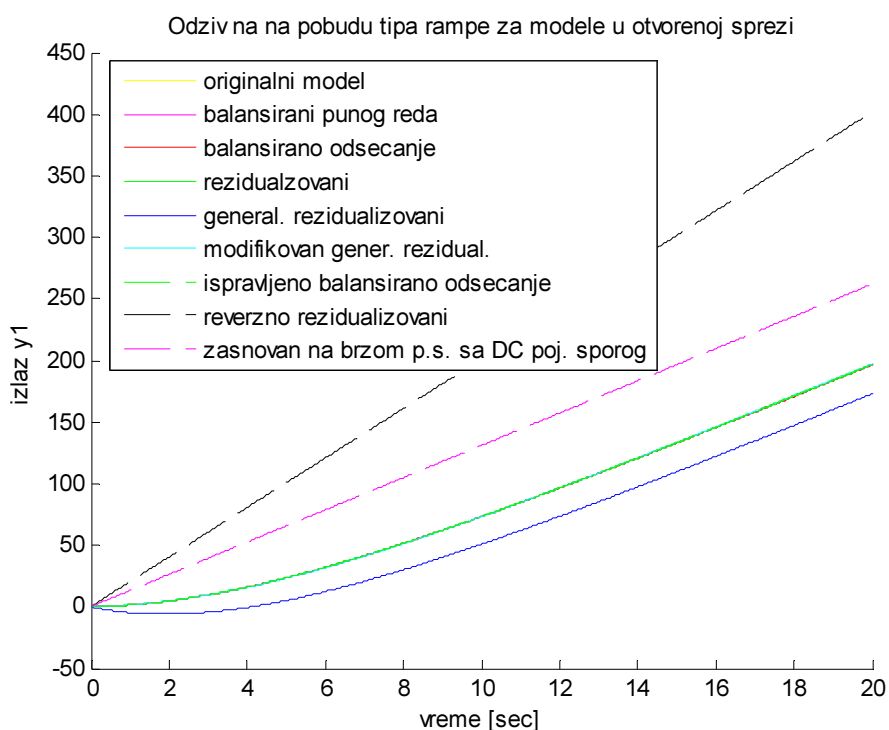
**Слика 3.2.** Импулсни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

На слици 3.3., за побуду јединичном степ функцијом, поклапање одзива редукованих модела са одзивом оригиналног модела је добро, изузев за редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог и нешто мање за онај добијен реверзном балансираном резидуализацијом. Генерализована резидуализација даје квалитетнију апроксимацију од ове две методе (слика 3.3.), али лошију од осталих коришћених техника.

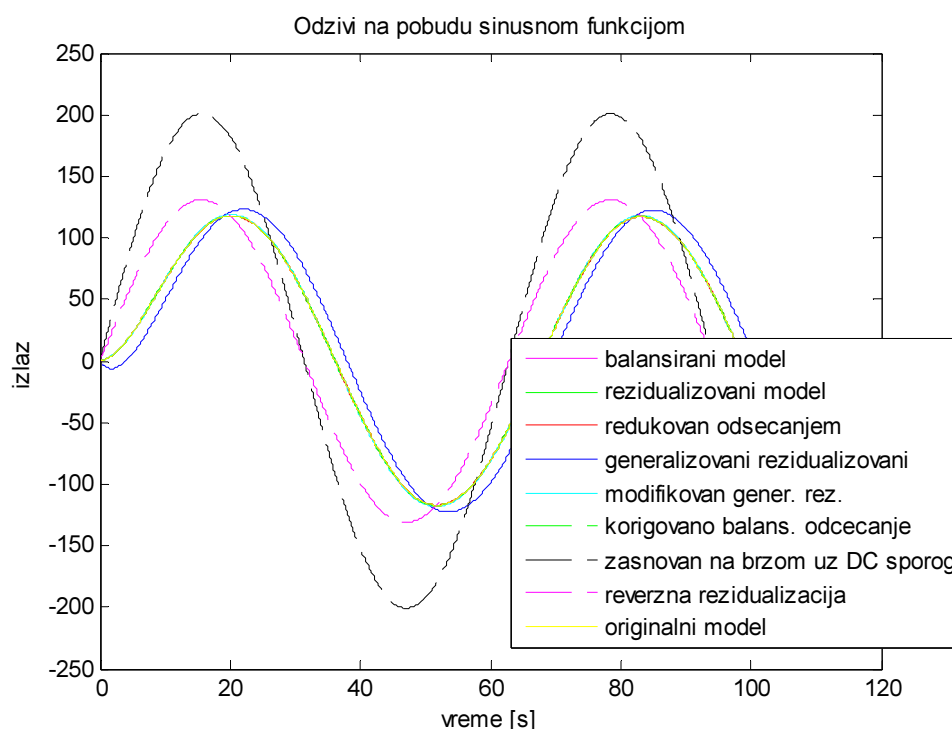
На слици 3.4. приказани су одзиви на побуду типа рампе. Запажа се да је највеће одступање у односу на одзив оригиналног модела за редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог и нешто мање за онај добијен реверзном балансираном резидуализацијом, док генерализована резидуализација даје квалитетнију апроксимацију од њих, али значајно лошију од осталих техника за редуkcију реда модела.



*Слика 3.3. Јединични одскочни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама*



*Слика 3.4. Одзиви на побуду типа рампе за оригинални и балансирани модел пуног реда као и седам модела редукованог реда, добијених раније датим техникама*

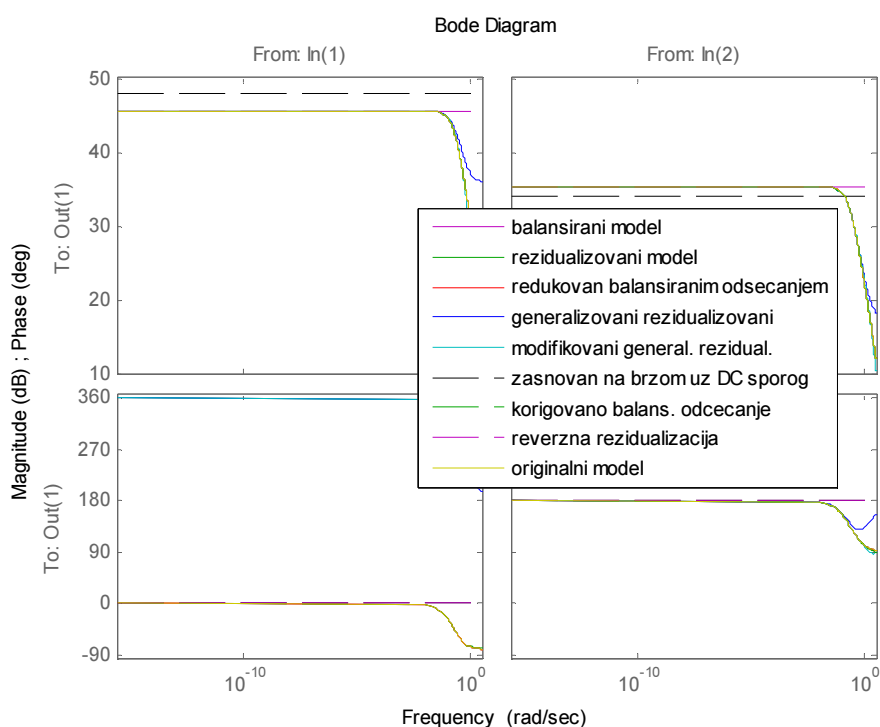


**Слика 3.5.** Простопериодични одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

Са слике 3.5., види се да је поклапање простопериодичних одзива редукованих модела са одзивом оригиналног модела добро, изузев за редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог и нешто мање за онај добијен реверзном балансираном резидуализацијом. Генерализована резидуализација даје квалитетнију апроксимацију од те две методе, али лошију од осталих техника за редуkcију реда модела.

Слика 3.6. приказује амплитудске и фазне фреквентне спектре одн. Бодеве дијаграме за свих девет модела, на којима се види задовољавајуће поклапање и то боље на нижим учестаностима, а лошије на вишим. Изабран је фреквентни опсег до 3,3 Hz. Ипак, са слике 3.6. се види да амплитудске карактеристике најлошије апроксимира редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог, и да нешто бољу апроксимацију од њега даје редуковани модел добијен реверзном балансираном резидуализацијом. Велика одступања фазних фреквентних карактеристика за различите моделе су привид, јер је та разлика  $360^\circ$ .





**Слика 3.6.** Амплитудске и фазне фреквентне карактеристике  
- Бодеве дијаграми оригиналног и балансираног модела пуног реда као  
и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

**Пример 2.** Други реални пример система управљања, на коме је вршена редукација реда, је борбена летелица L-1011 (Шкатарић, 2004; Шкатарић и Ратковић Ковачевић, 2006а; Гајић et al., 2009). Матрице математичког модела система су:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.89 & 0.39 & -5.53 \\ 0.0 & -0.034 & -2.98 & 2.43 \\ 0.034 & -0.0011 & -0.99 & -0.21 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.36 & -1.6 \\ -0.95 & -0.032 \\ 0.03 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

За потребе симулације одабрано је да буде:

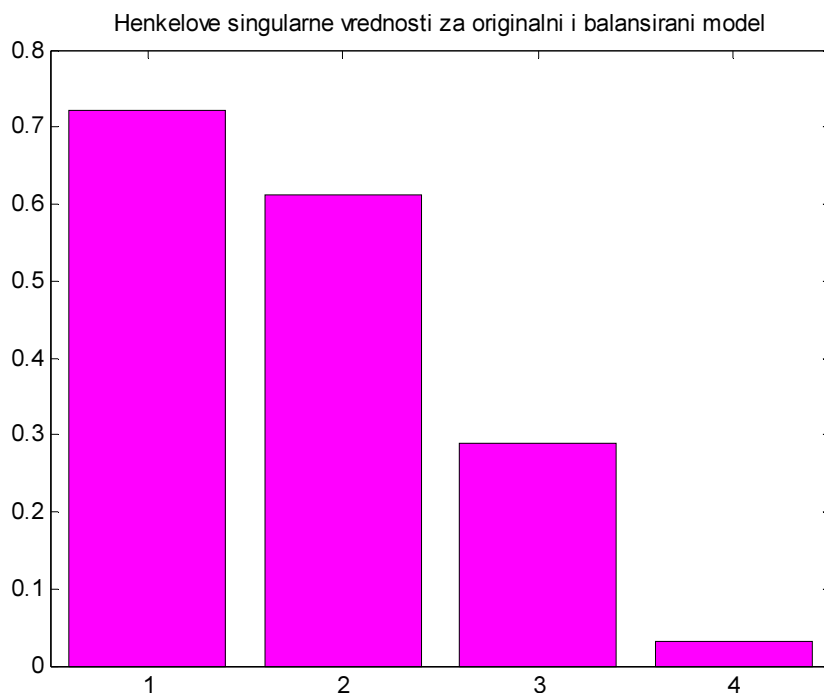
$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \text{и} \quad D = [0 \ 0],$$

то јест, узето је да је излаз система променљива стања  $x_2$ , а да улази система не утичу директно на излаз система. Овакав модел борбене летелице L-1011 је опсервабилан и контролабилан.

Моделовање физичких система уопште, а нарочито моделовање авиона, је веома сложено (Hyde, 1995). Користе се сукцесивне апроксимације, да се кроз више итерација добије апроксимативни линеарни модел летелице, какав је у овом примеру изабран за оригинални модел, којем се ред даље редукује.

Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела пуног реда приказане су на слици 3.7., а њихове вредности су:

$$\text{hsv}(1) = 0.72223, \quad \text{hsv}(2) = 0.61198, \quad \text{hsv}(3) = 0.28864, \quad \text{hsv}(4) = 0.032566.$$

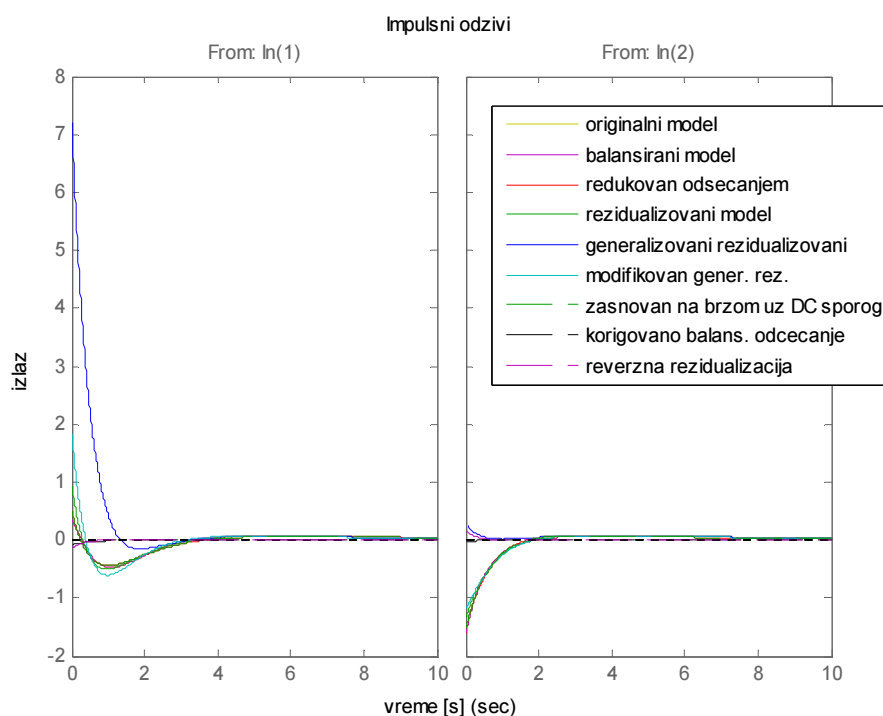


*Слика 3.7. Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела пуног реда*

У примеру који је одабран за симулацију, ред система је  $n = 4$ , а на основу Хенкелових сингуларних вредности за редуковани ред система је одабрано  $r = 3$ . Добијено је седам модела редукованог реда, применом изложених метода: балансираног одсецања, балансиране резидуализације, генералисане балансиране резидуализације, модификоване балансиране резидуализације, коригованог балансираног одсецања, редукције на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог и реверзне балансиране резидуализације. Сваки од редукованих модела,

као и оригинални и балансирани модел пуног реда, тестирани су за типичне побудне функције.

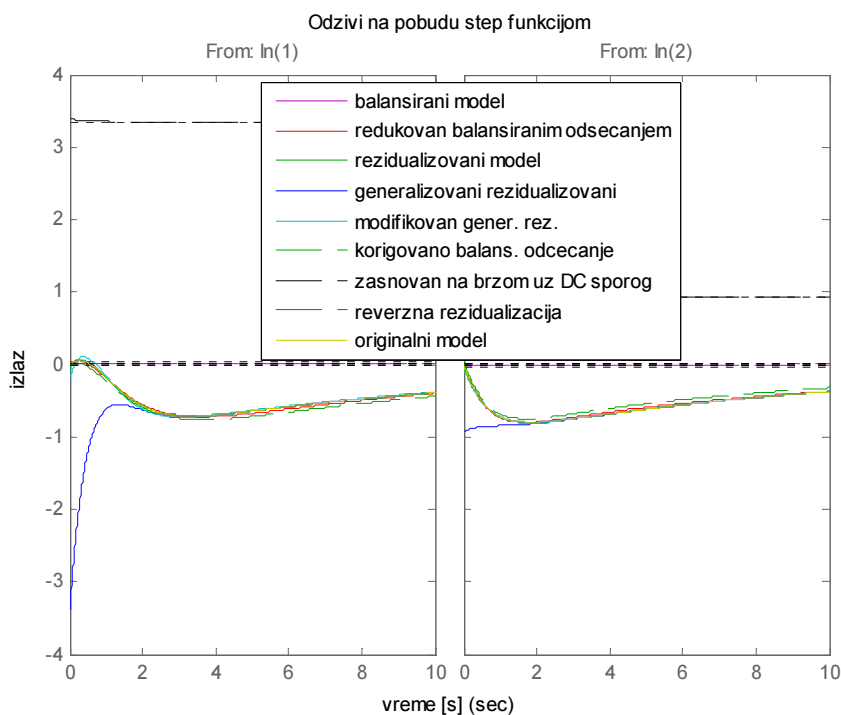
На сликама од 3.8. до 3.11. приказани су одзиви оригиналног система и балансираног система реда  $n = 4$ , и свих седам, на разне начине добијених, система редукованог реда: на слици 3.8. су импулсни одзиви тј. одзиви на побуду типа Диракове функције, на слици 3.9. су степ одзиви одн. одзиви на побуду јединичном одскочном функцијом, на слици 3.10. су одзиви на побуду типа рампе и на слици 3.11. су одзиви на простопериодичну то јест синусну побуду. У резултатима се види добро поклапање одзива за првих седам модела, али за побуду Дираковим импулсом најлошија је апроксимација при генералисаној балансираној резидуализацији.



**Слика 3.8.** Импулсни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

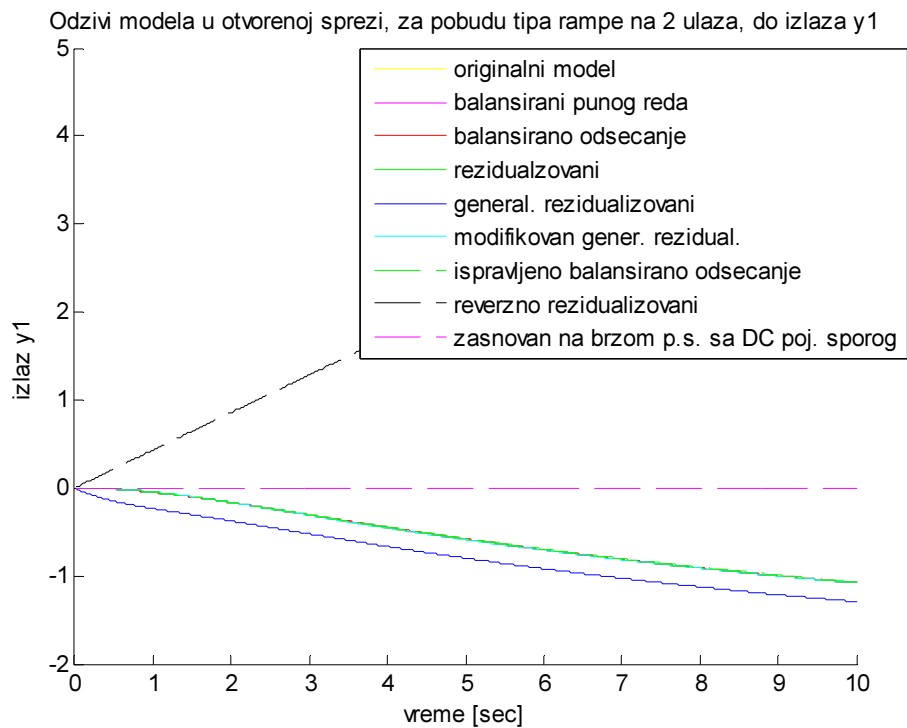
Одзиви на степ побуду, приказани на слици 3.9., најслабије се поклапају при редукцији на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог, нешто је боље при реверзној балансираној резидуализацији, а још је боља апроксимација при генералисаној балансираној резидуализацији, али је слабијег квалитета од осталих техника за редукцију. Код одскочног одзива, зависно од избора методе редукције,

може да се јави прескок у одзиву или да се успори одзив система. Чини се да је, на оба дела слике 3.9., одзив модела редукованог реверзном балансираном резидуализацијом идентички једнак нули.

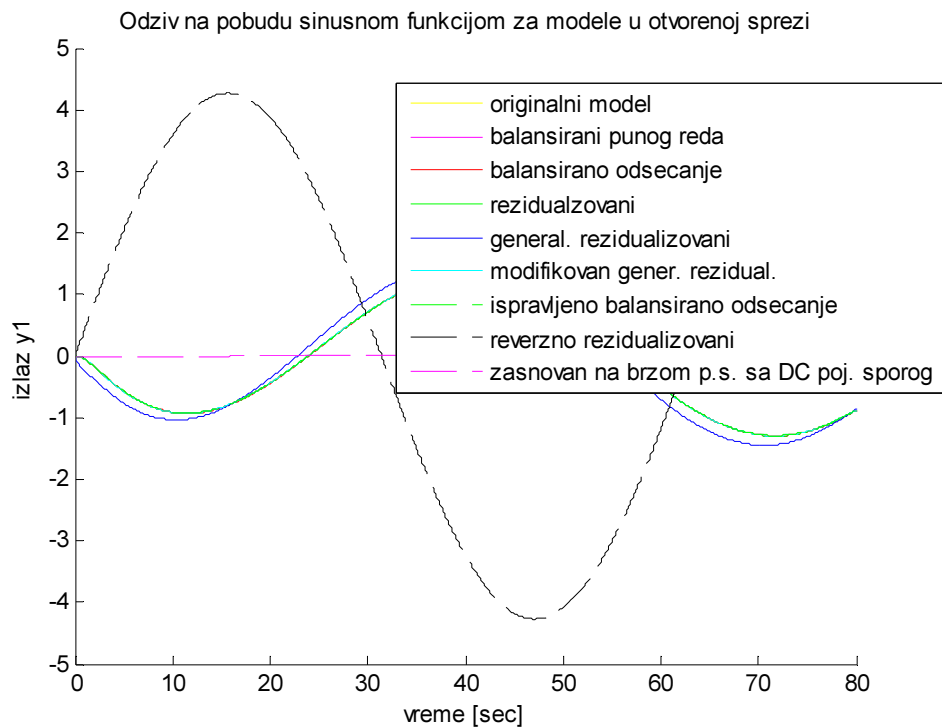


**Слика 3.9.** Јединични одскочни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

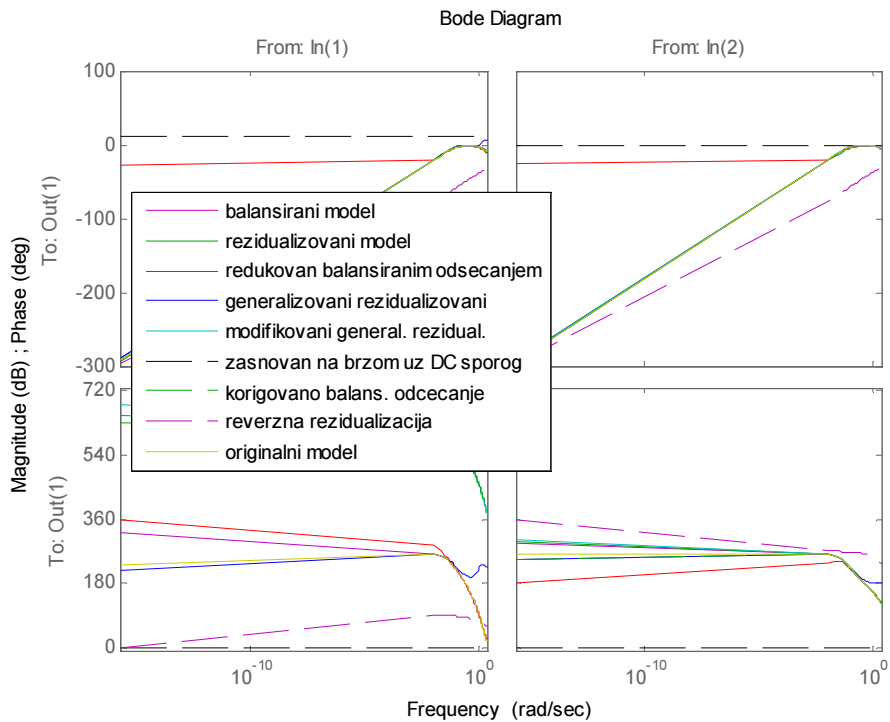
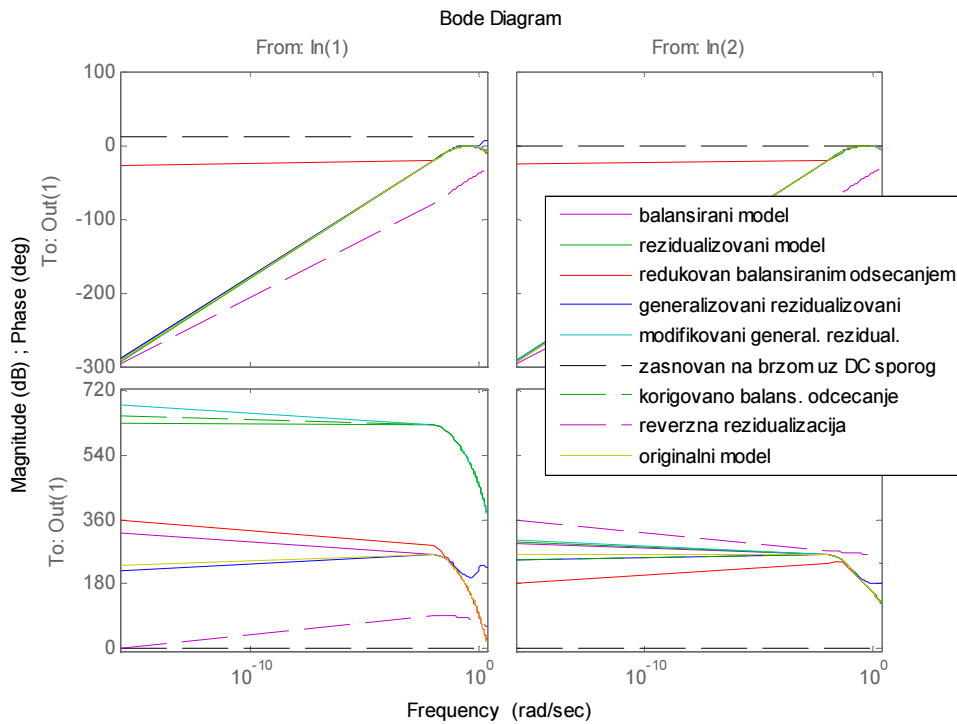
У случају побуде рампом (слика 3.10.) или простопериодичном функцијом (слика 3.11.) применом редукације на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог, добија се веома лоша апроксимација. Нешто бољу апроксимацију даје реверзна балансирана резидуализација (слика 3.10.), али се чини као да је одзив при том идентички једнак нули. Мање деградиран квалитет апроксимације добије се применом генералисане балансиране резидуализације, али слабијег квалитета од преосталих техника за редукацију. За случај побуде рампом (слика 3.10.), као и за побуду простопериодичном функцијом (слика 3.11.), чини се да је на обе слике одзив редукованог модела, добијеног реверзном балансираном резидуализацијом, идентички једнак нули. На слици 3.11., одзив модела редукованог на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог, чак бива у противфази у односу на одзив оригиналног и балансираног и осталих редукованих модела.



**Слика 3.10.** Одзиви на побуду типа рампе за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених датим техникама



**Слика 3.11.** Простопериодични одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама



*Слика 3.12. Амплитудске и фазне фреквентне карактеристике - Бодеови дијаграми оригиналног и балансираног модела пуног реда као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама*

На слици 3.12. су приказани Бодеоу дијаграми - амплитудски и фазни фреквентни спектри за свих седам система, где се види задовољавајуће поклапање само за амплитудске карактеристике, за методе балансирана резидуализација, генералисана балансирана резидуализација, модификована генералисана балансирана резидуализација и кориговано балансирано одсецање. Фреквентне карактеристике су приказане на опсегу до 2.1 Hz. Код фазних карактеристика на слици 3.12., чини се да нема поклапања, осим у једном уском опсегу. Апроксимација ипак није толико груба, јер су неке фазно-фреквентне карактеристике померене за  $360^\circ$  (за улаз 1, на пример). Најлошију апроксимацију амплитудских карактеристика пружа редукција реда модела заснована на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог, а нешто бољу апроксимацију даје балансирано одсецање. Следећа мање груба апроксимација добијена је реверзном резидуализацијом. Слика 3.12. поновљена је, са легендом на различитим местима, будући да се легендом закљони велики део слике.

**Пример 3.** Реални пример - математички модел каталитички контролисане реакције, узет је из (Шкатарић, 2004). Матрице система  $A$  и управљања  $B$  су:

$$A = \begin{bmatrix} -16.11 & -0.39 & 27.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.01 & -16.9 & 0.0 & 0.0 & 12.47 \\ 15.11 & 0.0 & -53.6 & -16.6 & 71.8 \\ -53.36 & 0.0 & 0.0 & -107.2 & 232.1 \\ 2.27 & 69.13 & 0.0 & 0.0 & -103 \end{bmatrix},$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 11.1 & -3.61 & -21.9 & -53.6 & 69.1 \\ -12.6 & 3.3 & 0.0 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}.$$

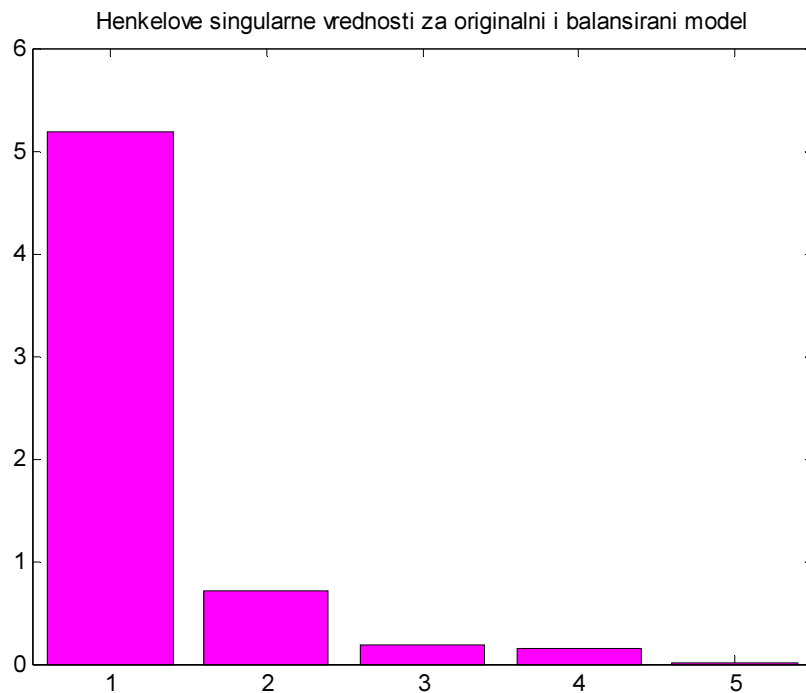
За остале матрице система одабране су:

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \text{ и } D = [0 \ 0].$$

Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела пуног реда приказане су на слици 3.13. а њихове вредности су:

$$\text{hsv}(1) = 5.1766, \quad \text{hsv}(2) = 0.71306, \quad \text{hsv}(3) = 0.18485,$$

$$\text{hsv}(4) = 0.14963, \quad \text{hsv}(5) = 0.0017561.$$

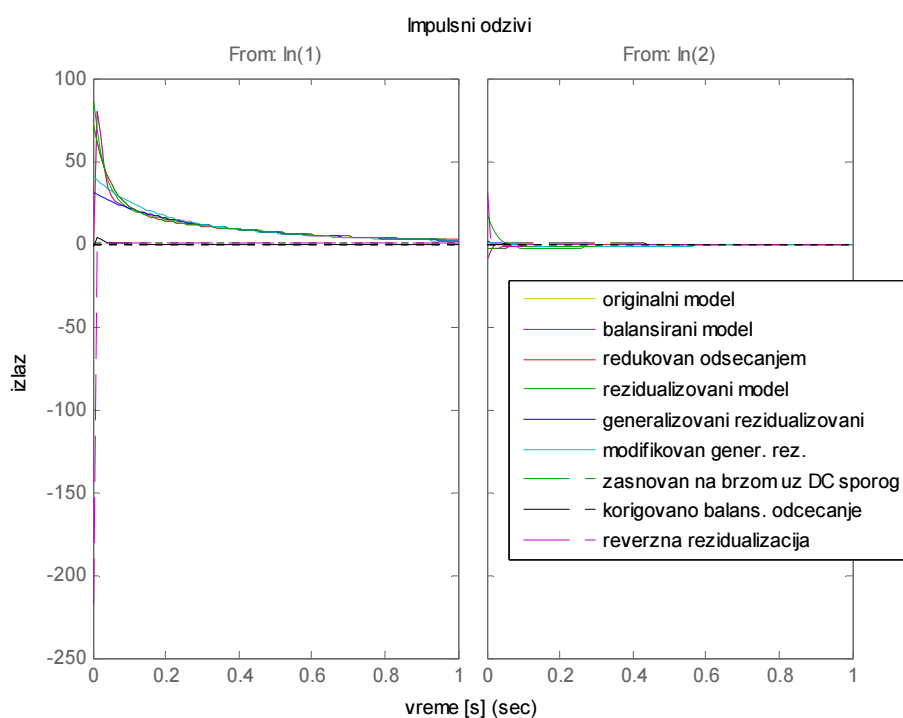


*Слика 3.13. Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела пуног реда*

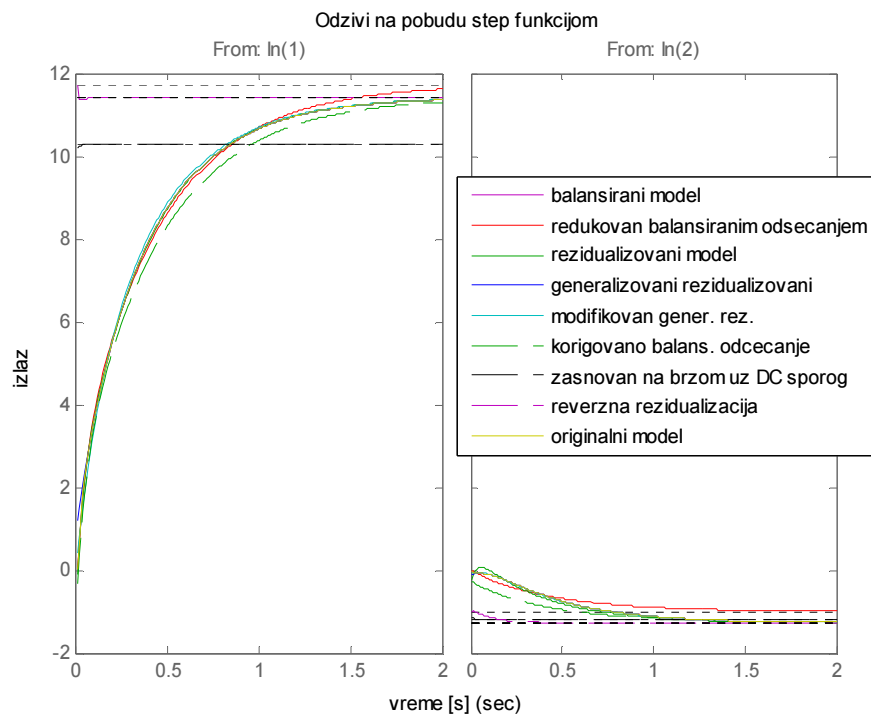
На основу Хенкелових сингуларних вредности за редуковани ред је одабрано  $r = 2$ . Добијено је неколико система редукованог реда, применом изложених метода: редуковани модел добијен балансираним одсецањем, модел добијен балансираном резидуализацијом, модел редукован генералисаном балансираном резидуализацијом, модел настао модификованом балансираном резидуализацијом, модел настао коригованим балансираним одсецањем, модел добијен редуковањем на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог и модел добијен реверзном балансираном резидуализацијом. Сваки од редукованих модела, као и оригинални, тестирани су за типичне побудне функције: импулсна побуда, одскачна побуда, побуда типа рампе и простопериодична, одн. синусна побуда. Оригинални модел је потпуно опсервабилан и контролабилан, те је примена генералисане балансиране резидуализације прикладна.

На сликама 3.14. - 3.17., приказани су одзиви оригиналног система и балансираног система, оба реда  $n = 5$ , и свих седам, на разне начине добијених, система редукованог реда  $r = 2$ .





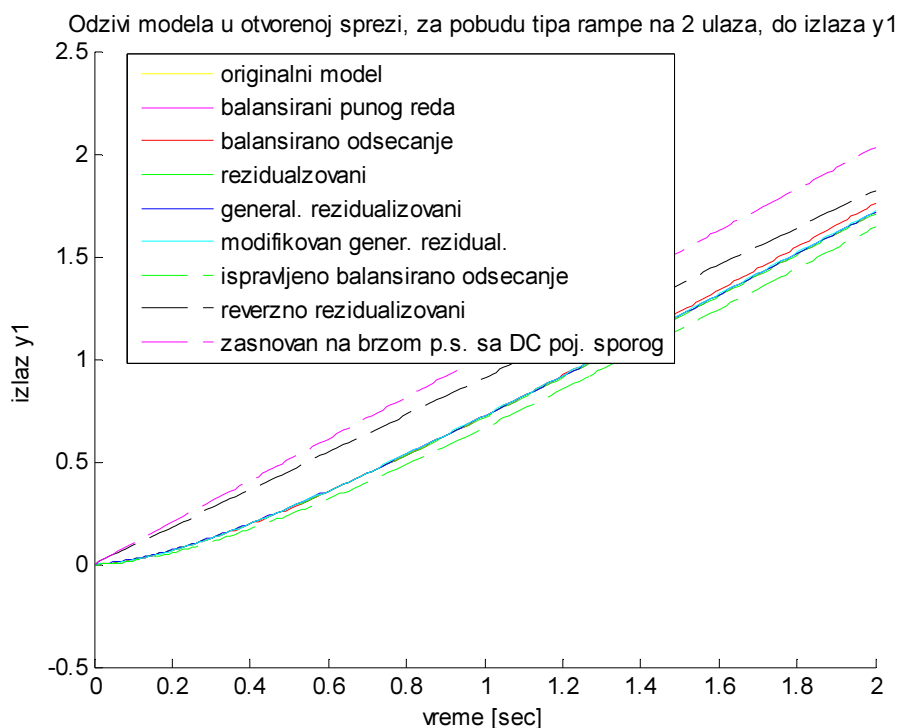
*Слика 3.14. Импульсни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама*



*Слика 3.15. Јединични одскочни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама*

На слици 3.14. су импулсни одзиви, на слици 3.15. одзив на побуду степ функцијом, на слици 3.16. одзив на побуду типа рампе и на слици 3.17. одзив на простопериодичну то јест синусну побуду. На слици 3.14. се види углавном добро поклапање импулсних одзива за првих седам модела, мада се уочава да нешто лошију апроксимацију пружају редуковање на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог подсистема и реверзна балансирана резидуализација, за Дираков импулс на улазу  $u_1$ , док остале технике редукације дају сличну и квалитетну апроксимацију оригиналног и балансираног модела.

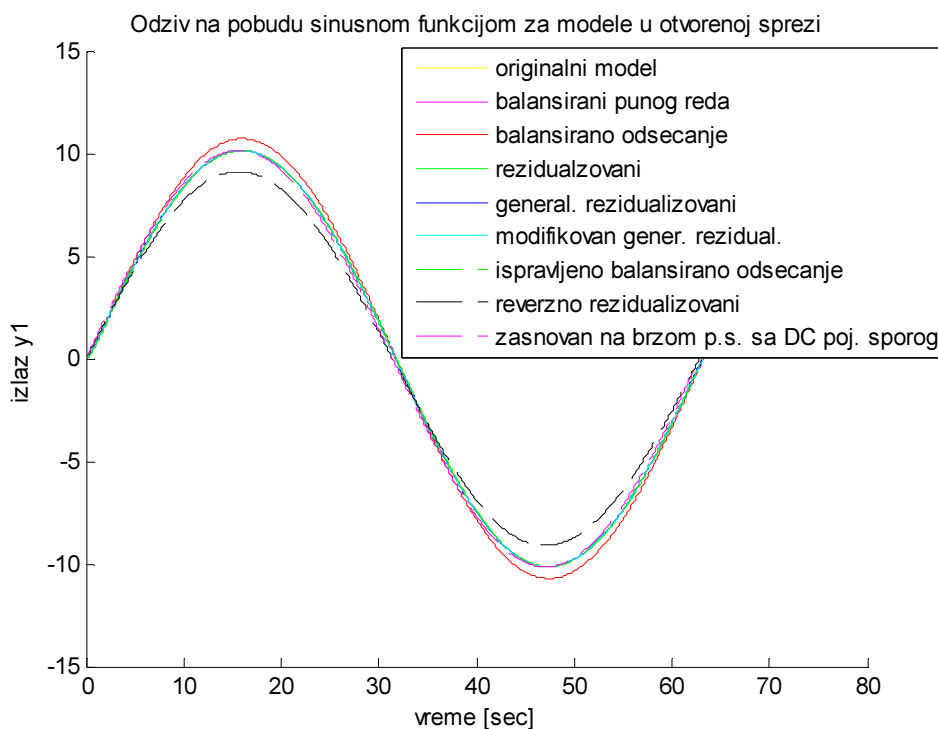
На слици 3.15. за побуду јединичном степ функцијом, поклапање одзива редукованих модела са одзивом оригиналног модела је добро, изузев за редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог и за онај добијен реверзном балансираном резидуализацијом, док остале технике дају апроксимације сличног квалитета.



**Слика 3.16.** Одзиви на побуду типа рампе за оригинални и балансирани модел, као и седам модела редукованог реда, добијених раније датим техникама

Сликом 3.16. приказани су одзиви на побуду типа рампе и види се да је највеће одступање у односу на одзив оригиналног модела за редуковани модел добијен реверзном балансираном резидуализацијом и нешто мање за онај заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог. Кориговано одсецање одступа од оригиналног модела мање него претходне две технике за редукацију, док остале технике дају квалитетне апроксимације оригиналног и балансираног модела пуног реда.

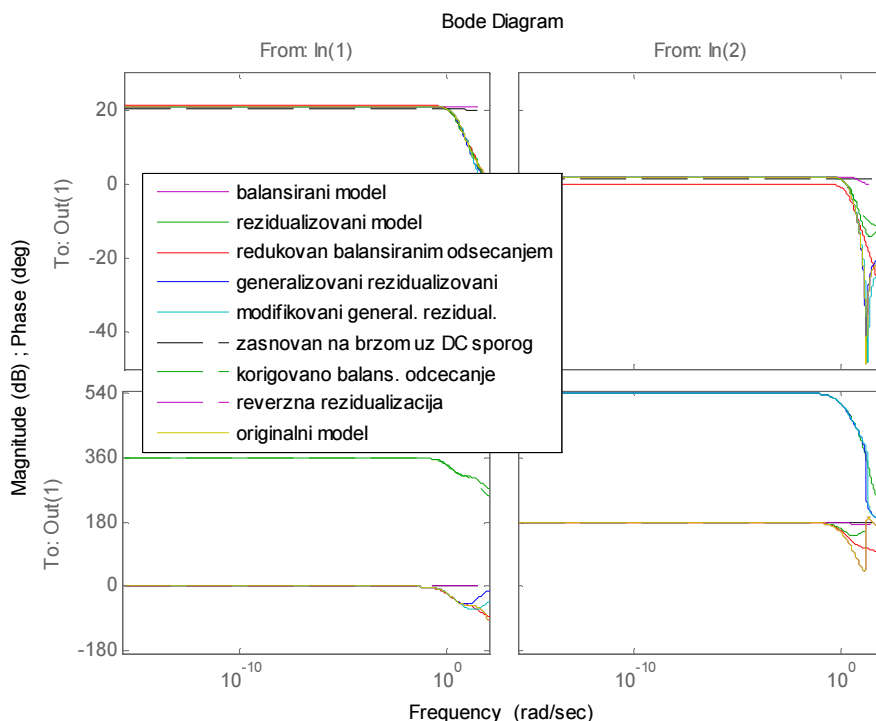
Са слике 3.17., види се да је поклапање простопериодичних одзива редукованих модела са одзивом оригиналног модела доста добро, изузев за редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог и нешто мање за онај добијен балансираним одсецањем, док остале технике за редукацију реда модела дају добре апроксимације сличног квалитета.



*Слика 3.17. Простопериодични одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама*

На слици 3.18. су приказани амплитудски и фазни фреквентни спектри одн. Бодеови дијаграми за свих девет модела - види се задовољавајуће поклапање, и то боље на нижим учестаностима, а лошије на вишим. Изабран је фреквентни опсег ниских учестаности, до 107 Hz. Фазне фреквентне карактеристике изгледа да дају

добро поклапање на нижим учестаностима, мада су криве на дијаграму раздвојене - чини се да су неке фазне карактеристике подиствене или спуштене за  $360^\circ$ .



**Слика 3.18.** Амплитудске и фазне фреквентне карактеристике

- Бодеоу дијаграму оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

**Пример 4.** Мултиваријабилни модел у простору стања дела електроенергетског система Србије, сачињен од две машине, који ради у изолованом режиму, узет је из литературе (Шкатарић, 2004; Гајић et al., 2009; Шкатарић and Ратковић Ковачевић, 2010) и симулиран, коришћењем Matlab пакета. Модел у простору стања има два улаза и три излаза, а матрице система, управљања и улаза су дате једначинама (3.69) – (3.72):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -314.1590 & 314.1590 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0030 & -0.1310 & -0.0120 & -0.1410 & -0.0060 & 0 & 0 \\ -0.2710 & -0.3520 & -2.7630 & -0.1820 & -0.3710 & 0 & 0 \\ 0.0050 & -0.2900 & -0.0080 & -0.3730 & -0.0050 & 314.1590 & 0 \\ -0.2900 & -0.1270 & -0.7240 & 0.0250 & -1.2610 & 0 & 314.1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33.3300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33.3300 \end{bmatrix}, (3.69)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0620 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2010 \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0010 & 0.5070 & 0.0270 & 0.4720 & 0.0350 & 0 & 0 \\ -0.1250 & 0.2250 & 0.1980 & 0.2580 & 0.1350 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

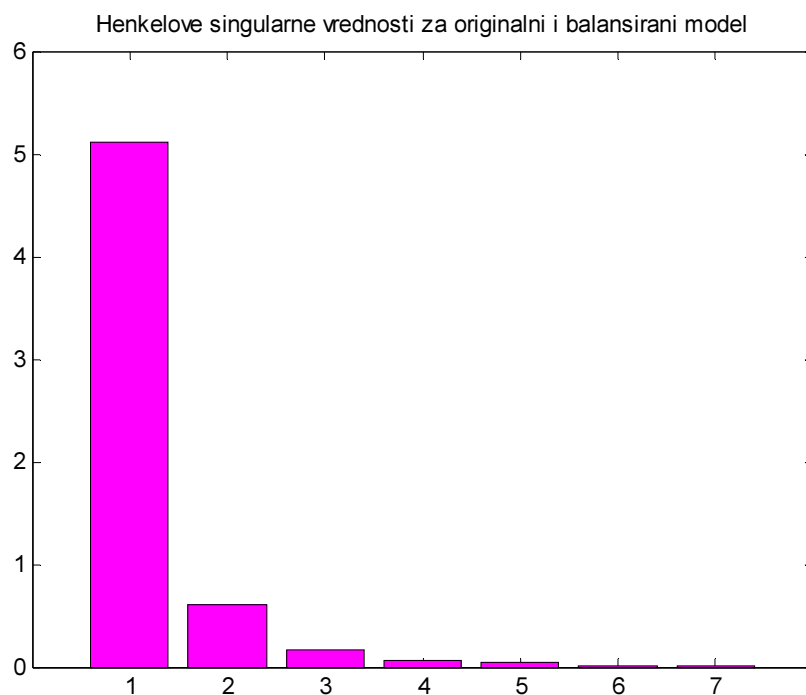
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела пуног реда, приказане су на слици 3.19. а њихове вредности су:

$$\text{hsv}(1) = 5.1135, \quad \text{hsv}(2) = 0.5980, \quad \text{hsv}(3) = 0.1634,$$

$$\text{hsv}(4) = 0.0578, \quad \text{hsv}(5) = 0.0411, \quad \text{hsv}(6) = 0.0048$$

$$\text{hsv}(7) = 0.0020$$



**Слика 3.19.** Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела пуног реда

Редукован ред је одређен на основу Хенкелових сингуларних вредности. Из матрице система  $A$ , види се да је ред система  $n = 7$ , а из Хенкелових сингуларних вредности је закључено да редуковани може да буде  $r = 5$ , за изабрани систем са два улаза и три излаза. Оригинални модел је потпуно опсервабилан и контролабилан, те је примена генералисане балансиране резидуализације прикладна.

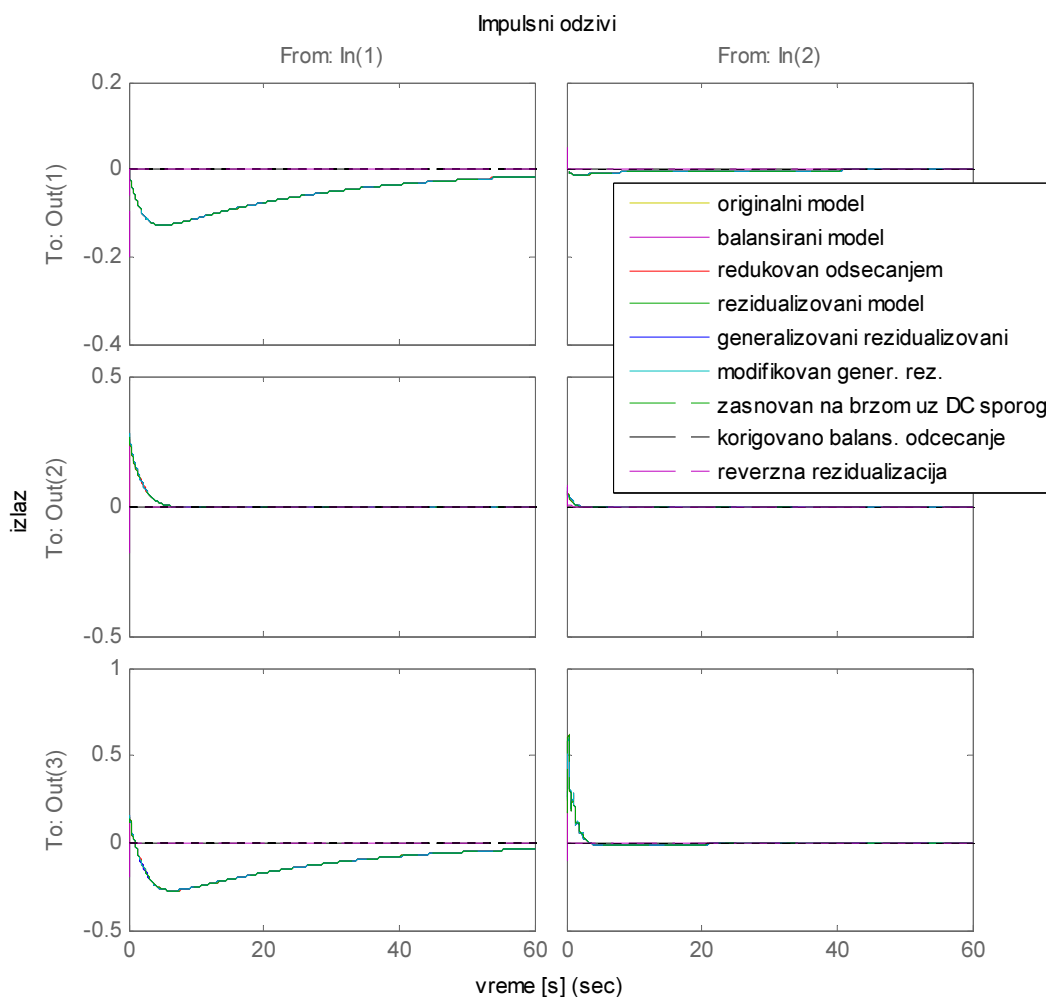
Добијено је неколико модела редукованог реда,  $r = 5$ , применом изложених метода: редуковани модел добијен балансираним одсецањем, модел добијен балансираном резидуализацијом, модел редукован генералисаном балансираном резидуализацијом, модел настао коригованим балансираним одсецањем, модел настао модификованом балансираном резидуализацијом, модел добијен редуковањем на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог подсистема и модел добијен реверзном балансираном резидуализацијом.

Ефикасност апроксимација за сваки од редукованих модела је упоређена за типичне функције улаза: импулсна побуда, степ одн. јединична одскачна побуда, побуда типа рампе и простопериодична тј. синусна побуда. На сликама 3.20. - 3.23., приказани су одзиви оригиналног система и балансираног система, оба реда  $n = 7$ , и свих седам, на разне начине добијених, система редукованог реда  $r = 5$ : на слици 3.20. су импулсни одзиви, на слици 3.21. одзив на побуду степ функцијом, на слици 3.22. одзив на побуду типа рампе и на слици 3.23. одзив на простопериодичну то јест синусну побуду.

На слици 3.20. се види углавном добро поклапање импулсних одзива за првих седам модела, мада се уочава да нешто лошију апроксимацију пружају редуковање на брзи подсистем уз једносмерно појачање спорог подсистема и реверзна балансирана резидуализација, за Дираков импулс на улазу  $u_1(t)$ , док остале технике редукције дају сличну и квалитетну апроксимацију оригиналног и балансираног модела.

На слици 3.21. за побуду јединичном степ функцијом, поклапање одзива редукованих модела са одзивом оригиналног модела је добро, изузев за редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог и за онај добијен реверзном балансираном резидуализацијом, док остале технике дају апроксимације сличног квалитета.

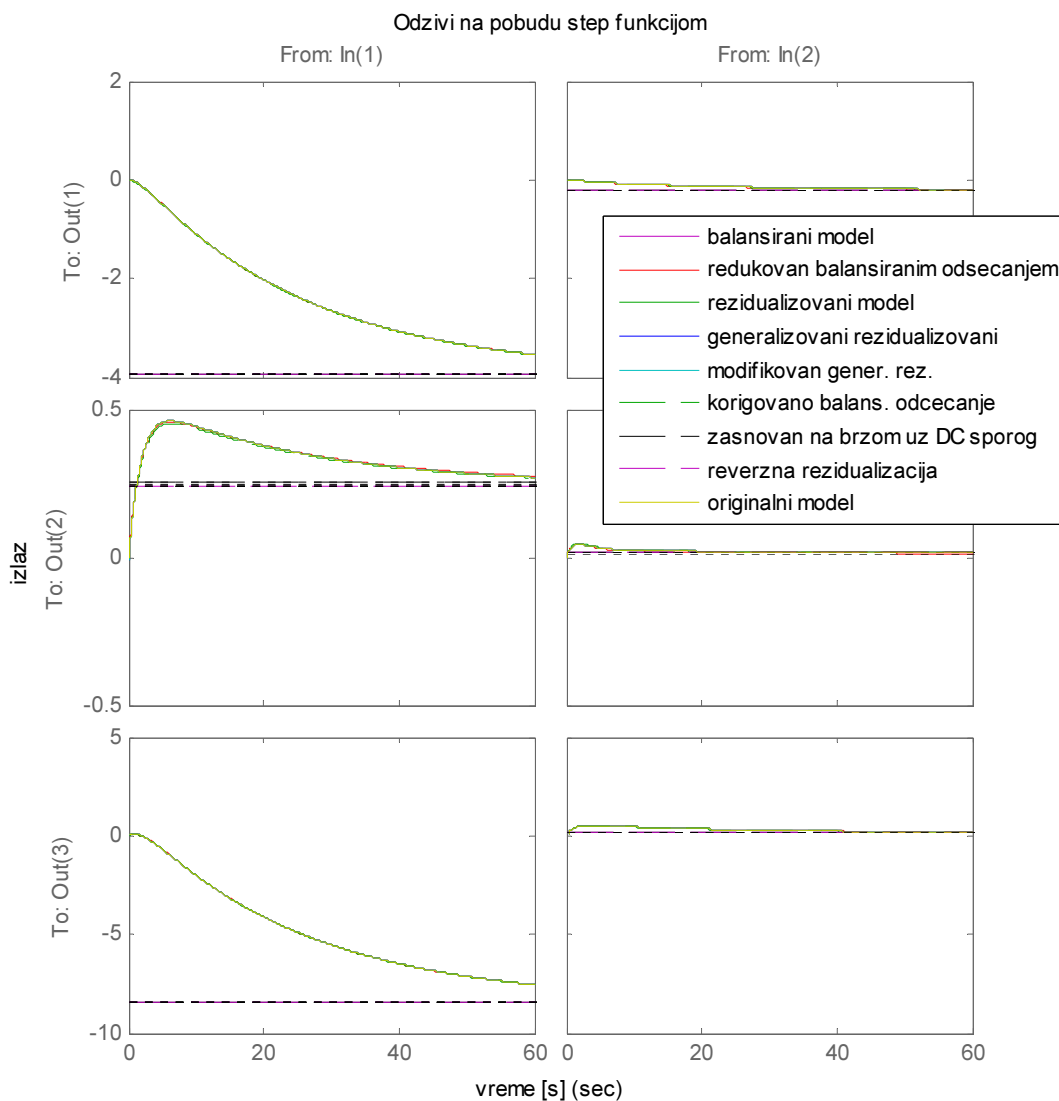
Сликом 3.22. приказани су одзиви на побуду типа рампе и види се да је највеће одступање у односу на одзив оригиналног модела за редуковани модел добијен реверзном балансираном резидуализацијом и нешто мање за онај заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог. Кориговано одсецање одступа од оригиналног модела мање него претходне две технике за редукцију, док остале технике дају квалитетне апроксимације оригиналног и балансираног модела пуног реда.



**Слика 3.20.** Импулсни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

Са слике 3.23., види се да је поклапање простопериодичних одзива редукованих модела са одзивом оригиналног модела доста добро, изузев за редуковани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог

и нешто мање за онај добијен реверзном балансираном резидуализацијом, док остале технике за редукцију реда модела дају добре апроксимације сличног квалитета.

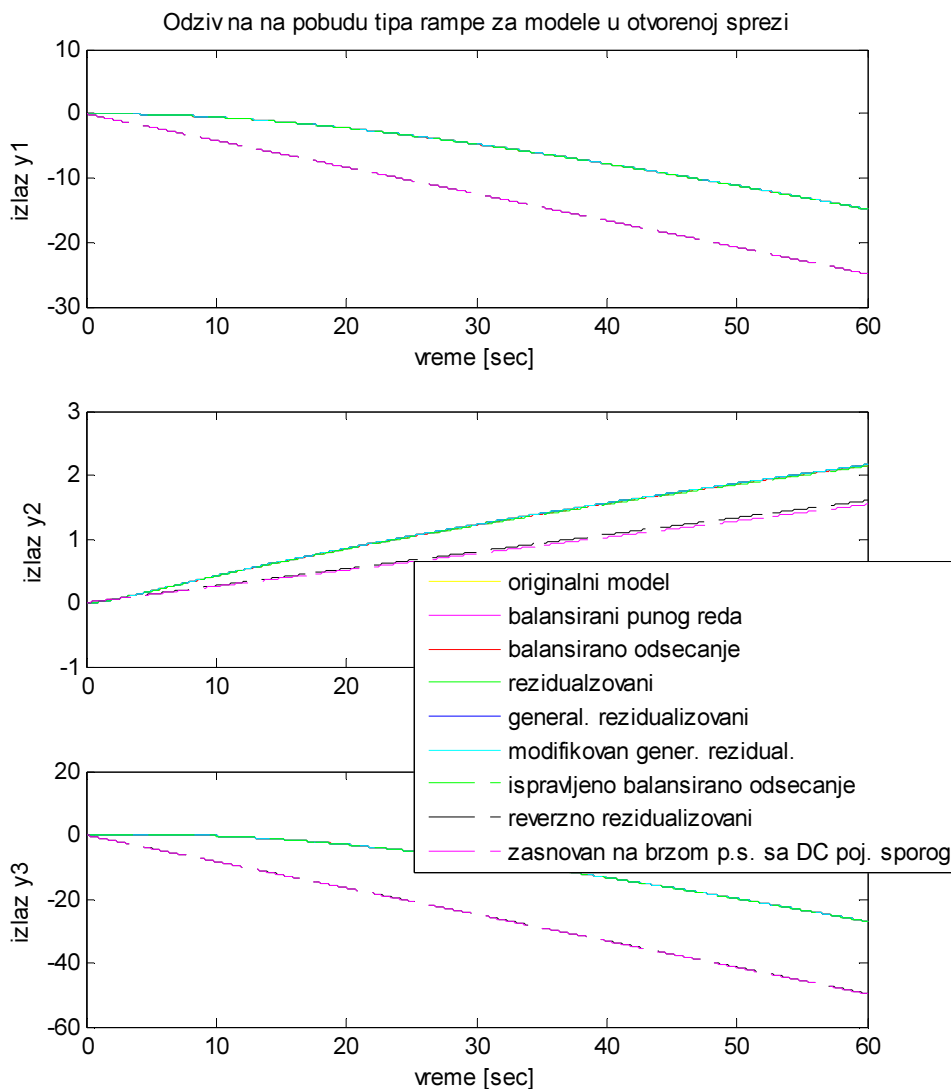


**Слика 3.21.** Јединични одскачни одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукваног реда добијених раније датим техникама

Слике 3.20. – 3.23. приказују доста добро поклапање временских одзива редукваних модела са одзивом оригиналног модела и балансираног модела пуног реда, за све четири типичне функције побуде, изузев у случају када је редуквани модел заснован на брзом подсистему уз једносмерно појачање спорог и за онај



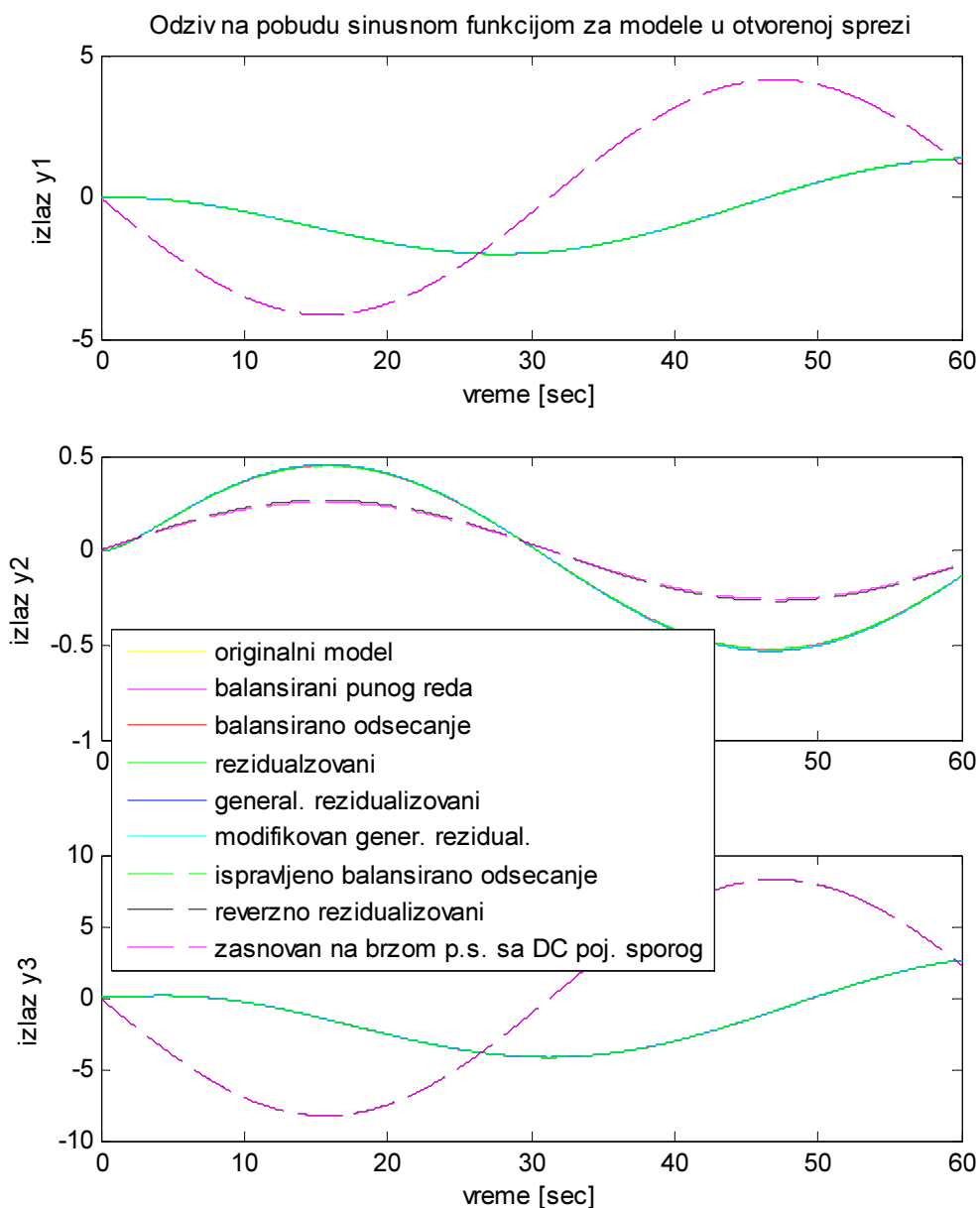
добијен реверзном балансираном резидуализацијом. Осим ове две, остале технике за редукацију реда модела дају добре апроксимације сличног квалитета.



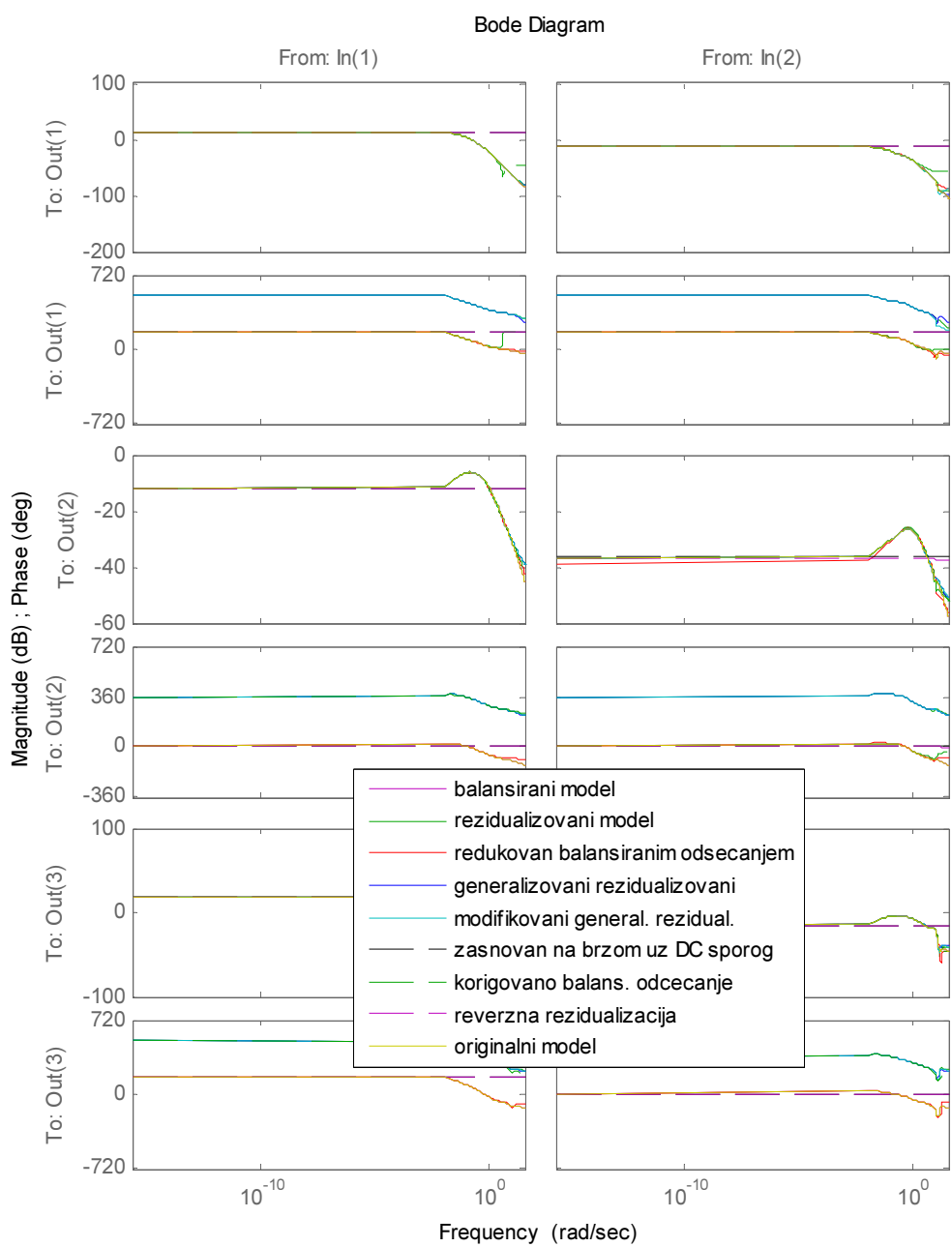
**Слика 3.22.** Одзиви на побуду типа рампе за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама

У случају система у отвореном колу дејства, урађено је поређење са оригиналним и балансираним моделом, за све фреквентне карактеристике (и амплитудске и фазне) за све функције преноса које су на располагању. На сликама 3.24. и 3.25. приказани су Бодеови дијаграми одн. амплитудске и фазне

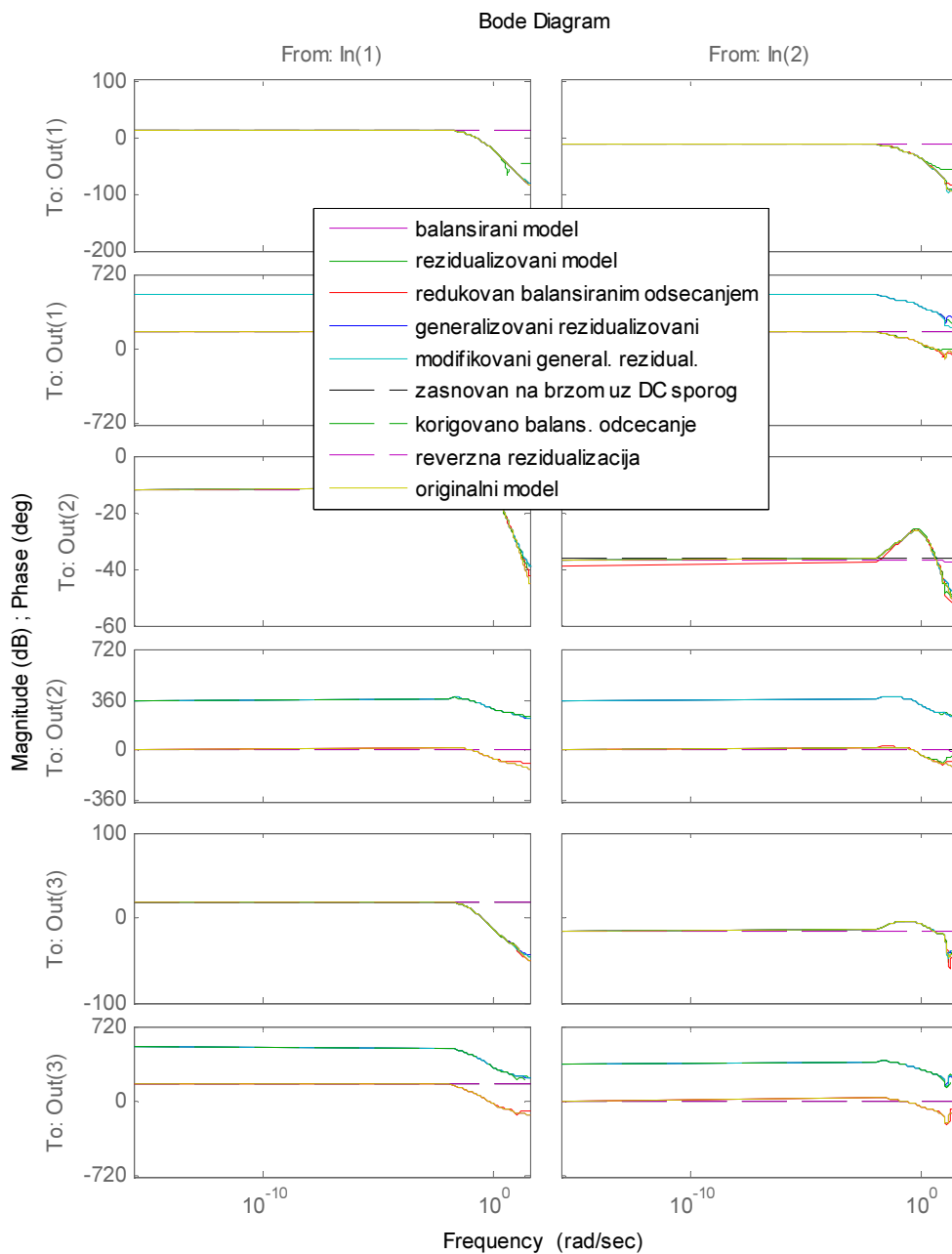
фреквентне карактеристике – иста слика дата је два пута, са легендом на различитим местима. На обе слике, 3.24. и 3.25., види се задовољавајуће поклапање, за свих девет модела, и то боље на нижим учестаностима, а лошије на вишим. Фазне фреквентне карактеристике дају добро поклапање на нижим учестаностима, мада су криве на дијаграму раздвојене - неке фазне карактеристике су подигнуте или спуштене за  $360^\circ$ .



**Слика 3.23.** Простопериодични одзиви оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам модела редукованог реда добијених раније датим техникама



**Слика 3.24.** Амплитудске и фазне фреквентне карактеристике  
 - Бодеве дијаграме оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам  
 модела редукованог реда, добијених раније датим техникама



**Слика 3.25.** Амплитудске и фазне фреквентне карактеристике  
- Бодеоуи дијаграми оригиналног и балансираног модела пуног реда, као и седам  
модела редукованог реда добијених раније датим техникама

Разматрано је неколико техника за редукцију реда система, познатих из литературе, које су све засноване на балансирању система уз примену методе сингуларних пертурбација. Ове технике имају исту робусност тачности израчунату у складу са  $H_\infty$  нормом система редукованог реда као и две технике познате под називом *директно одсецање* и метод *балансиране резидуализације*. Модификација ових техника задржава тачну вредност појачања једносмерног сигнала каква је код оригиналног система и даје апроксимацију од веома добре до одличне тачности на нижим и средњим учестаностима. Ефикасност приказаних техника за редукцију реда модела дата је на реалним примерима.

На основу резултата симулација у примерима 1. - 4., може се закључити да је генералисана метода резидуализације, као и њене верзије (одн. модификације), веома прикладна за примену на нижим и средњим учестаностима, за опсервабилне и контролабилне моделе. Ако оригинални систем има неопсервабилне и/или неконтролабилне модове, генералисана метода резидуализације може знатно да буде лошија од, на пример, балансираног одсецања.

У процесу редукције реда система остаје нејасно где је граница између линеарних система са осцилаторним модовима и линеарних система са изражено осцилаторним модовима. Стога треба покушати и редукцију реда система засновану на спором подсистему и редукцију реда система засновану на брзом подсистему, и зависно од разматраног система, донети одлуку која техника за редукцију реда даје боље резултате.

## 4. РЕДУКЦИЈА РЕДА МОДЕЛА ЗА НЕСТАБИЛНЕ ЛИНЕАРНЕ СИСТЕМЕ

### 4.1. Увод

Приликом прорачуна управљања, апроксимирање модела великог реда моделом редукованог реда мотивисано је предностима које пружају анализа, синтеза и имплементација једноставног модела. Прве развијене технике за редуkcију реда модела биле су оне за стабилне системе, засноване на балансираној реализацији модела, и њиховом применом добијан је редуковани модел стабилне матрице система (Moore, 1981; Pernebo and Silverman, 1982; Enns, 1984).

Сложени системи могу имати нестабилне моделе, осим тога, може се десити да се прорачуном управљања добије нестабилан контролер (регулатор). Управљачка инжењерска примена за редуkcију нестабилних модела постројења или контролера у општем случају тражи декомпозицију на два дела, стабилан и нестабилан.

У (Chiu, 1993) је предложена техника која показује добре резултате за нестабилне континуалне системе. Прво се проверава да ли модел у простору стања изабраног нестабилног система испуњава извесне потребне и довољне услове за балансирање нестабилних система (Kenney and Hewer, 1987). Тада се оригинални модел нестабилног система може редуковати применом алгоритма Therapos-a (1989). Алгоритам за редуkcију реда модела за континуалне линеарне нестабилне системе, предложен у (Chiu, 1993), прво партиционише ову балансирану реализацију на прикладан начин, а затим одсеца променљиве стања које одговарају малим позитивним грамијанима. На овај начин у стању смо да добијемо модел редукованог реда система који има исти број нестабилних полова одн. Мек Миланов (McMillan) степен, као и оригинални модел и који даје  $L^\infty$  норму за ограничење грешке редуkcије модела која је слична оној у случају када је систем стабилан (Enns, 1984; Glover, 1984).

Још један алгоритам за редукцију реда модела за нестабилне системе дат је у (Nagar and Singh, 2004), у две варијанте – може се применити и на континуалне и на дискретне нестабилне линеарне системе.

#### 4.2. Метода за редуковање реда линеарног континуалног модела нестабилног система

Како је у (Chiu, 1993) предложено, посматрамо модел у простору стања линеарног нестабилног система, код којег нема директног утицаја улаза на излаз:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Узима се у разматрање случај када је  $G(s) \in R_{po}(s)^{n_o \times n_i}$  матрица реалних рационалних функција преноса, које имају  $a$  нестабилних полова, тј.  $a$  је њихов Мек Миланов (Mc Millan) степен, и немају полова на  $j\omega$ -оси.

Нека је (4.1) минималне реализације за  $G(s)$ , где је  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times n_i}$ ,  $C \in R^{n_o \times n}$ ,  $\delta(A) = 0$  и  $\pi(A) = a$ . Пре него што наставимо, потребно је увести претпоставке:

**Претпоставка 1:** Карактеристичне вредности матрице  $A$  задовољавају услов  $\lambda_i(A) + \lambda_k(A) \neq 0, \quad \forall 1 \leq i, k \leq n$ .

**Претпоставка 2:** Систем (4.1) може бити балансиран; то значи да је производ грамијана опсервабилности и контролабилности сличан позитивној дијагоналној матрици (Kenney and Hewer, 1987).

Подразумева се да систем (4.1) задовољава претпоставке 1 и 2, и да је балансиран применом алгоритма Therapos-a (1989), након чега је  $\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ , где је  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ ,  $\delta(\Sigma) = 0$  и  $\pi(\Sigma) = a$ , што задовољава Љапуновљеве једначине:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T = 0, \quad (4.2)$$

$$A^T \Sigma + \Sigma A + C^T C = 0. \quad (4.3)$$

Претпоставимо да желимо да одстранимо  $n-r-a > 0$  променљивих стања из оригиналног модела. Напишимо:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

где је

$$\Sigma_1 = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_r], \quad (4.5)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}[\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{n-a}], \quad (4.6)$$

$$\Sigma_3 = \text{diag}[-\sigma_{n-a+1}, \dots, -\sigma_n]. \quad (4.7)$$

Партиционирамо матрице система у складу са тим да добијемо:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2 \quad C_3] \quad (4.8)$$

Нека је, ради једноставности:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{32} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{21} = [A_{21} \quad A_{23}], \quad (4.9)$$

$$\tilde{B}_1 = [B_1 \quad B_3], \quad \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & -\Sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Модел редукованог реда, добијен одсецањем променљивих стања којима одговарају мали позитивни грамијани, је:

$$G_r(s) = [C_1 \quad C_3] \left( sI_{r+a} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix} = \tilde{C}_1 (sI_{r+a} - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{B}_1. \quad (4.11)$$



### 4.3. Мек Миланов (McMillan) степен нестабилних полова модела редукованог реда

Постоји веома важан разлог због којег треба очувати број нестабилних полова и у моделу редукованог реда (Chiu, 1993; Nagar and Singh, 2004). Илустрације ради, претпоставимо да се нестабилни систем може стабилисати затварањем јединичне негативне повратне спреге (Chiu, 1993). Нека је  $a$  број карактеристичних вредности оригиналне нестабилне матрице система, које су у десној полуравни. Стога Nyquist-ов дијаграм ове конфигурације обухвата тачку  $-1$  у комплексној равни тачно  $a$  пута и то у смеру супротном од смера кретања казаљке на сату. Добро редуковани модел биће онај код којег ће затварање јединичне негативне повратне спреге и даље да стабилише систем са реакцијом (систем са затвореним колом дејства) (Chiu, 1993). Ово има за последицу да је број обилазака око тачке  $-1$  и даље  $a$ , па модел редукованог реда мора да има  $a$  карактеристичних вредности које су у десној полуравни комплексне равни тј. које имају позитиван реални део. У наставку ће се показати да модел редукованог реда  $G_r(s)$  и оригинални модел  $G(s)$  под благим условима имају исти број нестабилних полова (Chiu, 1993).

**Предлог 1:** Посматрајмо модел дат у (4.1), који задовољава претпоставке 1 и 2. Ако је  $\sigma_r^2 \neq \sigma_{r+1}^2$ ,  $\sigma_{n-a}^2 \neq \sigma_{n-a+1}^2$  и ако  $\lambda_i(\tilde{A}_{11}) + \lambda_k(\tilde{A}_{11}) \neq 0$  важи за свако  $1 \leq i, k \leq r+a$ , онда модел редукованог реда има следеће особине (Chiu, 1993):

- (i)  $\delta(\tilde{A}_{11}) = 0$  и  $\pi(\tilde{A}_{11}) = a$ ;
- (ii)  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  је минимална реализација за  $G_r(s)$ .

**Доказ:**

- (i) Прво ће се показати, свођењем на контрадикцију, да матрица  $\tilde{A}_{11}$  нема карактеристичних вредности на  $j\omega$ -оси.

Претпоставимо да је  $\omega_0 \in R$  и да је  $j\omega_0$  једна карактеристична вредност матрице  $\tilde{A}_{11}$ . Нека  $V \in C^{(r+a) \times h}$  буде ортонормална база за десни нулти простор матрице  $(\tilde{A}_{11} - j\omega_0 I_{r+a})$  (Chiu, 1993). Стога важи (4.12):

$$\left(\tilde{A}_{11} - j\omega_0 I_{r+a}\right)V = 0, \quad (4.12)$$

и  $V^*V = I_h$ . Из (4.2) и (4.3) имамо

$$\tilde{A}_{11}\tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_1\tilde{A}_{11}^T + \tilde{B}_1\tilde{B}_1^T = 0, \quad (4.13)$$

$$\tilde{A}_{11}^T\tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_1\tilde{A}_{11} + \tilde{C}_1^T\tilde{C}_1 = 0. \quad (4.14)$$

Множењем с леве стране са  $V^*$  и са десне стране са  $V$ , једначине (4.14) и уз коришћење (4.12) добијамо:

$$\tilde{C}_1V = 0. \quad (4.15)$$

Множењем сдесна (4.14) са  $V$ , уз примену (4.15) добијамо:

$$\left(\tilde{A}_{11}^T + j\omega_0 I_{r+a}\right)\tilde{\Sigma}_1V = 0. \quad (4.16)$$

На сличан начин, множењем слева и сдесна једначине (4.13) са  $V^*\tilde{\Sigma}_1$  и  $\tilde{\Sigma}_1V$  респективно, уз примену (4.16) добијамо:

$$\tilde{B}_1^T\tilde{\Sigma}_1V = 0. \quad (4.17)$$

Затим, множењем сдесна (4.13) са  $\tilde{\Sigma}_1V$ , користећи (4.16) и (4.17) добијамо да је  $\left(\tilde{A}_{11} - j\omega_0 I_{r+a}\right)\tilde{\Sigma}_1^2V = 0$ . Следи да су колоне матрице  $\tilde{\Sigma}_1^2V$  у десном нултом простору од  $\left(\tilde{A}_{11} - j\omega_0 I_{r+a}\right)$ . Стога постоји матрица  $\bar{\Sigma}_1 \in R^{h \times h}$ , таква да важи:

$$\tilde{\Sigma}_1^2V = V\bar{\Sigma}_1. \quad (4.18)$$

Заправо, из једнакости (4.18) следи да су карактеристичне вредности матрице  $\bar{\Sigma}_1$  подскупови карактеристичних вредности матрице  $\tilde{\Sigma}_1^2$ . Стога је  $\bar{\Sigma}_1 > 0$ . Помножимо слева (4.18) са  $V^*$  и применимо једнакост  $V^*V = I_h$  да добијемо:

$$V^*\tilde{\Sigma}_1^2V = V^*V\bar{\Sigma}_1 = \bar{\Sigma}_1. \quad (4.19)$$

Пошто је  $V^*\tilde{\Sigma}_1^2V$  ермитска (Hermite-ова) матрица, из (4.19) имамо да је  $\bar{\Sigma}_1 = \bar{\Sigma}_1^T$ . Стога је матрица  $\bar{\Sigma}_1$  симетрична.

Пошто је  $\bar{\Sigma}_1$  симетрична матрица, постоји њој ортогонална матрица  $Q \in R^{h \times h}$ , таква да је матрица  $\Lambda_1 = Q^T\bar{\Sigma}_1Q$  дијагонална. Из (4.18) имамо да је

$\tilde{\Sigma}_1 V Q = V Q \Lambda_1$ . Стога, не губећи на уопштености, може се претпоставити да је  $V$  изабрано тако да матрица  $\bar{\Sigma}_1$  буде дијагонална. Из (4.18), дијагонални елементи матрице  $\bar{\Sigma}_1$  су подскуп дијагоналних елемената матрице  $\tilde{\Sigma}_1^2$ . Из (4.2) и (4.3) имамо да је:

$$\tilde{A}_{21} \tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2 \tilde{A}_{12}^T + \tilde{B}_2 \tilde{B}_1^T = 0, \quad (4.20)$$

$$\tilde{A}_{12}^T \tilde{\Sigma}_1 + \Sigma_2 \tilde{A}_{21} + C_2^T \tilde{C}_1 = 0. \quad (4.21)$$

Множењем (4.20) сдесна са  $\tilde{\Sigma}_1 V$ , уз примену (4.17) добија се:

$$\tilde{A}_{21} \tilde{\Sigma}_1^2 V + \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T \tilde{\Sigma}_1 V = 0. \quad (4.22)$$

Множењем слева и сдесна (4.21) са  $\Sigma_2$  и  $V$ , уз примену (4.15) добија се:

$$\Sigma_2^2 \tilde{A}_{21} V + \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T \tilde{\Sigma}_1 V = 0. \quad (4.23)$$

Одужимо (4.23) од (4.22), уз примену (4.18); тада имамо да је  $\tilde{A}_{21} \tilde{\Sigma}_1^2 V = \Sigma_2^2 \tilde{A}_{21} V$  тј.  $\tilde{A}_{21} V \bar{\Sigma}_1 = \Sigma_2^2 \tilde{A}_{21} V$ . Ако је  $\sigma_r^2 \neq \sigma_{r+1}^2$  и  $\sigma_{n-a}^2 \neq \sigma_{n-a+1}^2$ , онда матрице  $\bar{\Sigma}_1$  и  $\Sigma_2^2$  немају заједничких карактеристичних вредности. Следи да је:

$$\tilde{A}_{21} V = 0. \quad (4.24)$$

Нека је  $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ , где је  $V_1 \in C^{r \times h}$  и  $V_2 \in C^{a \times h}$ . Стога, (4.12) и (4.24) заједно

имплицирају да важи:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega_0 \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

што значи да матрица  $A$  има карактеристичну вредност  $j\omega_0$ . Ово је у контрадикцији са полазном претпоставком да је  $\delta(\tilde{A}_{11}) = 0$ . Стога се закључује да је  $\delta(\tilde{A}_{11}) = 0$ . Из прегледног рада Гловера (Glover, 1984) (према Теорему 3.3, ставке (2) и (3)), ако је  $\delta(\tilde{A}_{11}) = \delta(\tilde{\Sigma}_1) = 0$ , онда је  $\pi(\tilde{A}_{11}) = \nu(\tilde{Z}_1) = a$ .

(ii) У Теореме 3.3, део (5), рада (Glover, 1984), ако је  $\lambda_i(\tilde{A}_{11}) + \lambda_k(\tilde{A}_{11}) \neq 0$ , за  $\forall i$  and  $k$ , следи да је пар  $\{\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1\}$  контролабилан, а сличан резултат имплицира да је пар  $\{\tilde{C}_1, \tilde{A}_{11}\}$  опсервабилан.

**Коментар:** Треба запазити да су услови (i) и (ii) заједно неопходни како би модел редукованог реда,  $G_r(s)$ , и оригинални модел,  $G(s)$ , имали исти број нестабилних полова (Chiu, 1993).

#### 4.4. Модел грешке

У овом делу биће дат модел грешке, која се уводи балансирањем и одсецањем у алгоритму за редукују моделу, као и неке његове особине (Chiu, 1993).

Нека је  $\Phi(s) = sI_{r+a} - \tilde{A}_{11}$ , и нека буде

$$\hat{A}(s) = A_{22} + \tilde{A}_{21}\Phi(s)^{-1}\tilde{A}_{12}, \quad (4.26)$$

$$\hat{B}(s) = B_2 + \tilde{A}_{21}\Phi(s)^{-1}\tilde{B}_1, \quad (4.27)$$

$$\hat{C}(s) = C_2 + \tilde{C}_1\Phi(s)^{-1}\tilde{A}_{12}. \quad (4.28)$$

**Предлог 2:** За оригинални модел  $G(s)$  и модел редукованог реда  $G_r(s)$ , који су дефинисани, редом, у (4.1) и (4.11), важи следећа једнакост (Chiu, 1993):

$$G(s) = G_r(s) + \hat{C}(s)(sI_{n-r-a} - \tilde{A}(s))^{-1}\hat{B}(s). \quad (4.29)$$

**Доказ:** (Chiu, 1993) Нека су у (4.1) преуређени елементи матрица  $A$ ,  $B$  и  $C$  тако да се добију следеће матрице (4.30):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{C} = [\tilde{C}_1 \quad C_2]. \quad (4.30)$$

Нека је (4.31):

$$J = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a \\ 0 & I_{n-r-a} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

тако да је  $J^T J = I_n$ . Стога важе следеће једнакости:

$$\tilde{A} = J^T A J, \quad \tilde{B} = J^T B \quad \text{и} \quad \tilde{C} = C J. \quad (4.32)$$

Следи да је:

$$\tilde{C}(sI_n - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = C J (sI_n - J^T A J)^{-1} J^T B = C (sI_n - A)^{-1} B. \quad (4.33)$$

Применимо формулу за инверзију блок матрица (Kailath, 1980) на матрицу  $(sI_n - \tilde{A})^{-1}$  и нека је  $\Delta(s) = sI_{n-r-a} - \hat{A}$ ; тада имамо:

$$(sI_n - \hat{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi(s)^{-1} + \Phi(s)^{-1} \tilde{A}_{12} \Delta(s)^{-1} \tilde{A}_{21} \Phi(s)^{-1} & \Phi(s)^{-1} \tilde{A}_{12} \Delta(s)^{-1} \\ \Delta(s)^{-1} \tilde{A}_{21} \Phi(s)^{-1} & \Delta(s)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Следи да је:

$$\begin{aligned} G(s) &= \tilde{C}(sI_n - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = \tilde{C}_1 \Phi(s)^{-1} \tilde{B}_1 + \tilde{C}_1 \Phi(s)^{-1} \tilde{A}_{12} \Delta(s)^{-1} \tilde{A}_{21} \Phi(s)^{-1} \tilde{B}_1 + \\ &+ \tilde{C}_1 \Phi(s)^{-1} \tilde{A}_{12} \Delta(s)^{-1} B_2 + C_2 \Delta(s)^{-1} \tilde{A}_{21} \Phi(s)^{-1} \tilde{B}_1 + C_2 \Delta(s)^{-1} B_2 = \\ &= \tilde{C}_1 \Phi(s)^{-1} \tilde{B}_1 + (C_2 + \tilde{C}_1 \Phi(s)^{-1} \tilde{A}_{12}) \Delta(s)^{-1} (B_2 + \tilde{A}_{21} \Phi(s)^{-1} \tilde{B}_1) = \\ &= G_r(s) + \hat{C}(s) (sI_{n-r-a} - \hat{A}(s))^{-1} \hat{B}(s). \end{aligned} \quad (4.35)$$

**Коментар:** Из предлога 2. знамо да матрице  $\hat{A}(s)$ ,  $\hat{B}(s)$  и  $\hat{C}(s)$  описују модел грешке редукције оригиналног модела. У наставку ће бити дате неке особине модела грешке (Chiu, 1993).

**Предлог 3:** За све  $\omega \in R$ , матрице  $\hat{A}(j\omega)$ ,  $\hat{B}(j\omega)$  и  $\hat{C}(j\omega)$  задовољавају Љапуновљеве једначине (Chiu, 1993):

$$\hat{A}(j\omega) \Sigma_2 + \Sigma_2 \hat{A}(j\omega)^* + \hat{B}(j\omega) \hat{B}(j\omega)^* = 0, \quad (4.36)$$

$$\hat{A}(j\omega)^* \Sigma_2 + \Sigma_2 \hat{A}(j\omega) + \hat{C}(j\omega)^* \hat{C}(j\omega) = 0, \quad (4.37)$$

где је  $\Sigma_2$  дефинисано у (4.4) и (4.6).

**Доказ:** Из (4.2) добијамо следеће једнакости (Chiu, 1993)

$$A_{22}\Sigma_2 + \Sigma_2 A_{22}^T = -B_2 B_2^T, \quad (4.38)$$

$$\tilde{A}_{12}\Sigma_2 = -\tilde{\Sigma}_1 \tilde{A}_{21}^T - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2^T, \quad (4.39)$$

$$\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T = -\tilde{A}_{11} \tilde{\Sigma}_1 - \tilde{\Sigma}_1 \tilde{A}_{11}^T. \quad (4.40)$$

Из једнакости (4.40) добијамо:

$$\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T = \Phi(j\omega) \tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_1 \Phi(j\omega)^*. \quad (4.41)$$

Замене се матрице  $\hat{A}(j\omega)$  и  $\hat{B}(j\omega)$ , дефинисане у (4.26) и (4.27), у десну страну једнакости (4.36). Применом једнакости (4.38), (4.39) и (4.41), узастопно, показује се да важи (4.36). За једнакост (4.37) врше се адекватне операције (Chiu, 1993).

**Предлог 4:** Посматра се модел дат у (4.1) који задовољава Претпоставке 1 и 2. Ако је  $\sigma_r^2 \neq \sigma_{r+1}^2$  и  $\sigma_{n-a}^2 \neq \sigma_{n-a+1}^2$ , онда за све  $\omega \in R$  матрица  $\hat{A}(j\omega)$  има све карактеристичне вредности у  $C_-$  (Chiu, 1993).

**Доказ:** Нека је  $\omega_1 \in R$ . Показаће се прво (Chiu, 1993), свођењем на контрадикцију, да  $\hat{A}(j\omega_1)$  нема карактеристичних вредности на  $j\omega$ -оси. Претпоставимо да је  $\omega_0 \in R$ , и да је  $j\omega_0$  једна од карактеристичних вредности матрице  $\hat{A}(j\omega_1)$ . Нека је  $V \in C^{(n-r-a) \times h}$  ортонормална база за десни нулти простор матрице  $(\hat{A}(j\omega_1) - j\omega_0 I_{n-r-a})$ . Стога следи да је

$$(\hat{A}(j\omega_1) - j\omega_0 I_{n-r-a})V = 0, \quad (4.42)$$

и  $V^*V = I_h$ . Из Предлога 3. имамо да је:

$$\hat{A}(j\omega_1)^* \Sigma_2 + \Sigma_2 \hat{A}(j\omega_1) + \hat{C}(j\omega_1)^* \hat{C}(j\omega_1) = 0. \quad (4.43)$$

Множењем једначине (4.43) с леве стране са  $V^*$  и са десне стране са  $V$  и уз коришћење (4.42) добијамо:

$$\hat{C}(j\omega_1)V = 0. \quad (4.44)$$

Множењем сдесна (4.43) са  $V$ , уз примену (4.44) добијамо:

$$\left(\hat{A}(j\omega_1)^* + j\omega_0 I_{n-r-a}\right)\Sigma_2 V = 0. \quad (4.45)$$

Из Предлога 3. добијамо:

$$\hat{A}(j\omega_1)\Sigma_2 + \Sigma_2 \hat{A}(j\omega_1)^* + \hat{B}(j\omega_1)\hat{B}(j\omega_1)^* = 0. \quad (4.46)$$

Аналогно, множењем слева и сдесна једначине (4.46) са  $V^*\Sigma_2$  и  $\Sigma_2 V$  респективно, уз примену (4.45) добија се:

$$\hat{B}(j\omega_1)^*\Sigma_2 V = 0. \quad (4.47)$$

Затим, множењем сдесна (4.46) са  $\Sigma_2^2 V$ , уз примену (4.45) и (4.47) добија се да је:

$$\left(\hat{A}(j\omega_1) - j\omega_0 I_{n-r-a}\right)\Sigma_2^2 V = 0. \quad (4.48)$$

Одатле следи да су колоне матрице  $\Sigma_2^2 V$  у десном нултом простору од  $\left(\hat{A}(j\omega_1) - j\omega_0 I_{n-r-a}\right)$ . Зато, постоји матрица  $\bar{\Sigma}_2 \in R^{h \times h}$ , таква да је испуњено:

$$\Sigma_2^2 V = V\bar{\Sigma}_2. \quad (4.49)$$

Лако се показује да је матрица  $\bar{\Sigma}_2$  позитивно дефинитна и симетрична матрица. Пошто је  $\bar{\Sigma}_2$  симетрична, постоји њој ортогонална матрица  $Q \in R^{h \times h}$ , таква да је матрица  $\Lambda_2 = Q^T \bar{\Sigma}_2 Q$  дијагонална. Из (4.49) има се да је  $\tilde{\Sigma}_2 V Q = V Q \Lambda_2$ . Зато, не губећи на уопштености, можемо да претпоставимо да је  $V$  вектор изабран тако да матрица  $\bar{\Sigma}_2$  буде дијагонална. Из (4.49), следи да су дијагонални елементи матрице  $\bar{\Sigma}_2$  подскуп дијагоналних елемената матрице  $\Sigma_2^2$ . Из (4.28) и (4.44) имамо да је (Chiu, 1993):

$$C_2 V + \tilde{C}_1 \Phi(j\omega_1)^{-1} \tilde{A}_{12} V = 0. \quad (4.50)$$

Из (4.3) добијамо:

$$\tilde{A}_{12}^T \Sigma_2 + \Sigma_2 \tilde{A}_{12} + C_2^T \tilde{C}_1 = 0. \quad (4.51)$$

Применимо транспонување на (4.51) и помножимо десна са  $V$  и искористимо (4.50); тада имамо (4.52):

$$\tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 V + \tilde{\Sigma}_1 \tilde{A}_{12} V - \tilde{C}_1^T \tilde{C}_1 \Phi(j\omega_1)^{-1} \tilde{A}_{12} V = 0. \quad (4.52)$$

Из (4.3) имамо:

$$\tilde{C}_1^T \tilde{C}_1 = -\tilde{A}_{11}^T \tilde{\Sigma}_1 - \tilde{\Sigma}_1 \tilde{A}_{11} = \Phi(j\omega)^* \tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_1 \Phi(j\omega). \quad (4.53)$$

Замена (4.53) у (4.52) даје:

$$\tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 V - \Phi(j\omega_1)^* \tilde{\Sigma}_1 \Phi(j\omega_1)^{-1} \tilde{A}_{12} V = 0. \quad (4.54)$$

Из (4.27) уз примену (4.47) добијамо:

$$B_2^T \Sigma_2 V + \tilde{B}_1^T (\Phi(j\omega_1)^{-1})^* \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 V = 0. \quad (4.55)$$

Из (4.2) имамо

$$\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T = -\tilde{A}_{11} \tilde{\Sigma}_1 - \tilde{\Sigma}_1 \tilde{A}_{11}^T = \Phi(j\omega_1) \tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_1 (\Phi(j\omega_1))^*, \quad (4.56)$$

$$\tilde{A}_{21} \tilde{\Sigma}_1 + \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T + B_2 \tilde{B}_1^T = 0. \quad (4.57)$$

Аналогно претходном, применимо транспонување на (4.57) и помножимо десна са  $\Sigma_2 V$  и искористимо (4.55) и (4.56) да добијемо:

$$\tilde{A}_{12} \Sigma_2^2 V - \Phi(j\omega_1) \tilde{\Sigma}_1 (\Phi(j\omega_1)^{-1})^* \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 V = 0. \quad (4.58)$$

Одредимо  $\tilde{A}_{12} \Sigma_2^2 V$  из (4.54) и заменимо у (4.58), што даје:

$$\tilde{A}_{12} \Sigma_2^2 V = \Phi(j\omega_1) \tilde{\Sigma}_1 \Phi(j\omega_1)^{-1} \tilde{A}_{12} V. \quad (4.59)$$

Последњу једнакост помножимо слева са  $\Phi(j\omega_1)^{-1}$  уз примену (4.49); тада имамо:

$$\Phi(j\omega_1)^{-1} \tilde{A}_{12} V \bar{\Sigma}_2 = \tilde{\Sigma}_1^2 \Phi(j\omega_1)^{-1} \tilde{A}_{12} V. \quad (4.60)$$

Ако је  $\sigma_r^2 \neq \sigma_{r+1}^2$  и  $\sigma_{n-a}^2 \neq \sigma_{n-a+1}^2$ , онда матрице  $\bar{\Sigma}_2$  и  $\tilde{\Sigma}_2^2$  немају заједничких карактеристичних вредности. Стога (4.60) има јединствено решење,

$$\Phi(j\omega_1)^{-1} \tilde{A}_{12} V = 0. \quad (4.61)$$

Следи да је (4.62):



$$\tilde{A}_{12}V = 0. \quad (4.62)$$

Из (4.42) и уз коришћење (4.26) и (4.62) добијамо (4.63):

$$A_{22}V = j\omega_0 V. \quad (4.63)$$

Сада (4.62) и (4.63) имплицирају да (Chiu, 1993):

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} = j\omega_0 \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

што значи да матрица  $A$  има карактеристичну вредност у  $j\omega_0$ . Ово је у контрадикцији са полазном претпоставком да је  $\delta(A) = 0$ . Стога закључујемо да је  $\delta(\hat{A}(j\omega)) = 0$ , за  $\forall \omega \in R$  (Chiu, 1993). Уз рад Гловера ((Glover, 1984), Теорема 3.3 (2) (3)), довољно је показати да је  $\nu(\hat{A}(j\omega)) = \pi(\Sigma_2) = n - r - a$ . Стога матрица  $\hat{A}(j\omega)$  има све своје карактеристичне вредности у  $C_-$  за све  $\omega \in R$ .

#### 4.5. Граница модела грешке

Следећа теорема даје  $L^\infty$  норму горње границе за грешку редукције реда модела коју уводи алгоритам балансирања и одсецања за нестабилне системе (Chiu, 1993).

**Теорема 1:** Посматрајмо оригиналан модел  $G(s)$  дат у (4.1), који задовољава Претпоставке 1 и 2, и модел редукованог реда  $G_r(s)$  дефинисан у (4.11). Ако је  $\sigma_r^2 \neq \sigma_{r+1}^2$ ,  $\sigma_{n-a}^2 \neq \sigma_{n-a+1}^2$  и дијагонални елементи матрице  $\Sigma_2$  међусобно различити тада:

$$\|G - G_r\|_\infty \leq 2tr[\Sigma_2], \quad (4.65)$$

где је  $\Sigma_2$  дефинисано као у (4.4) и (4.6) (Chiu, 1993).

*Примедба:* Овај резултат значи да је  $L^\infty$  норма грешке редукције модела ограничена двоструком вредношћу суме дијагоналних елемената  $\Sigma_2$  који одговарају одсеченим променљивим стања балансиране реализације ма ког нестабилног система (Chiu, 1993). Ова граница  $L^\infty$  норме грешке редукције модела је слична оној која је дата у (Enns, 1984) и (Glover, 1984) за стабилне системе (Chiu, 1993).

**Доказ:** Изаберимо неко  $\omega_1 \in R$ . Нека су  $h$  и  $k$  цели бројеви и  $1 \leq h, k \leq n - r - a$  (Chiu, 1993). Дефинишимо матрице:

$$\bar{A}_{hk}(j\omega_1) = [\hat{A}_{pm}(j\omega_1)]_{p=1, \dots, h, m=1, \dots, k}, \quad (4.66)$$

$$\bar{B}_h(j\omega_1) = [\hat{B}_p(j\omega_1)]_{p=1, \dots, h} \quad (4.67)$$

и

$$\bar{C}_k(j\omega_1) = [\hat{C}_m(j\omega_1)]_{m=1, \dots, k}, \quad (4.68)$$

где су улази  $\hat{A}_{pm}(j\omega_1)$ ,  $\hat{B}_p(j\omega_1)$  и  $\hat{C}_m(j\omega_1)$  дефинисани у (4.26), (4.27) и (4.26), респективно. Другим речима, димензије матрица  $\bar{A}_{hk}(j\omega_1)$ ,  $\bar{B}_h(j\omega_1)$  и  $\bar{C}_k(j\omega_1)$  су  $h \times k$ ,  $h \times n_u$  и  $n_o \times k$ , респективно. За  $\sigma_r^2 \neq \sigma_{r+1}^2$ ,  $\sigma_{n-a}^2 \neq \sigma_{n-a+1}^2$  и уз Предлог 4. имамо  $\delta(\hat{A}(j\omega_1)) = 0$ ,  $\forall \omega_1 \in R$ . За  $\delta(\hat{A}(j\omega_1)) = 0$ ,  $\forall \omega_1 \in R$  и уз Предлог 3.

Из Теореме 4.2 из рада Гловера (Glover, 1984) следи да ако су дијагонални елементи матрице  $\Sigma_2$  међусобно различити, тада за све  $\omega_1 \in R$ , матрица  $\bar{A}_{hk}(j\omega_1)$  има све карактеристичне вредности у  $C$ . Нека је  $\omega \in R$ ,  $2 \leq i \leq n - r - a$  и дефинишимо (Chiu, 1993):

$$E_i(j\omega) \triangleq \bar{C}_i(j\omega_1)(j\omega I_i - \hat{A}_i(j\omega_1))^{-1} \bar{B}_i(j\omega_1) - \bar{C}_{i-1}(j\omega_1)(j\omega I_{i-1} - \bar{A}_{i-1, i-1}(j\omega_1))^{-1} \bar{B}_{i-1}. \quad (4.69)$$

Из Предлога 2. следи да је  $E_i(j\omega) = H_i(j\omega)(j\omega - F_{ii}(j\omega))^{-1} G_i(j\omega)$ , где је:

$$F_{ii}(j\omega) = \hat{A}_i(j\omega_1) + [\hat{A}_{pm}(j\omega_1)]_{p=i, m=1, \dots, i-1} \times (j\omega I_{i-1} - \bar{A}_{i-1, i-1}(j\omega_1))^{-1} [\hat{A}_{pm}(j\omega_1)]_{p=1, \dots, i-1, m=1, \dots, i}, \quad (4.70)$$

$$G_i(j\omega) = \hat{B}_i(j\omega_1) + \left[ \hat{A}_{pm}(j\omega_1) \right]_{p=i, m=1, \dots, i-1} \times \\ \times (j\omega I_{i-1} - \bar{A}_{i-1, i-1}(j\omega_1))^{-1} \bar{B}_{i-1}(j\omega_1), \quad (4.71)$$

$$H_i(j\omega) = \hat{G}_i(j\omega_1) + C_{i-1}(j\omega_1) (j\omega I_{i-1} - \bar{A}_{i-1, i-1}(j\omega_1))^{-1} \times \\ \times \left[ \hat{A}_{pm}(j\omega_1) \right]_{p=1, \dots, i-1; m=1, \dots, i}. \quad (4.72)$$

Стога је  $F_{ii}(j\omega) \in C$ ,  $G_i(j\omega) \in C^{1 \times n_i}$ ,  $H_i(j\omega) \in C^{n_o \times 1}$ . Пошто матрице  $F_{ii}(j\omega)$ ,  $G_i(j\omega)$  и  $H_i(j\omega)$  имају форму сличну матрицама  $\hat{A}(j\omega)$ ,  $\hat{B}(j\omega)$  и  $\hat{C}(j\omega)$ , које су дефинисане, редом, у (4.26), (4.27) и (4.28) за  $s = j\omega$ , следи да из Предлога 3. добијемо (Chiu, 1993):

$$F_{ii}(j\omega) \sigma_{r+i} + \sigma_{r+i} F_{ii}(j\omega)^* + G_i(j\omega) G_i(j\omega)^* = 0, \quad (4.73)$$

$$F_{ii}(j\omega)^* \sigma_{r+i} + \sigma_{r+i} F_{ii}(j\omega) + H_i(j\omega)^* H_i(j\omega) = 0, \quad (4.74)$$

Пошто је  $F_{ii}(j\omega) \in C$ , из (4.73) и (4.74) следи да је (Chiu, 1993):

$$G_i(j\omega) G_i(j\omega)^* = -F_{ii}(j\omega) \sigma_{r+i} - \sigma_{r+i} F_{ii}(j\omega)^* = -2\sigma_{r+i} \operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)], \quad (4.75)$$

$$H_i(j\omega)^* H_i(j\omega) = -F_{ii}(j\omega)^* \sigma_{r+i} - \sigma_{r+i} F_{ii}(j\omega) = -2\sigma_{r+i} \operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)]. \quad (4.76)$$

На сличан начин, из Предлога 4. ако је  $\sigma_{r+i-1}^2 \neq \sigma_{r+i}^2$ , онда  $\operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)] < 0$ ,  $\forall \omega \in R$ . Стога је (Chiu, 1993):

$$\bar{\sigma} \left( H_i(j\omega) (j\omega - F_{ii}(j\omega))^{-1} G_i(j\omega) \right) = \\ = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{H_i(j\omega) G_i(j\omega) G_i(j\omega)^* H_i(j\omega)^*}{(j\omega - F_{ii}(j\omega)) (j\omega - F_{ii}(j\omega))^*} \right) = \\ = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{-2\sigma_{r+i} \operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)] H_i(j\omega) H_i(j\omega)^*}{(j\omega - F_{ii}(j\omega)) (j\omega - F_{ii}(j\omega))^*} \right) = \quad (4.77)$$

$$\bar{\sigma} \left( H_i(j\omega) (j\omega - F_{ii}(j\omega))^{-1} G_i(j\omega) \right) = \\ = \left( \frac{4\sigma_{r+i}^2 \operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)]^2}{\operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)]^2 + (\omega - \operatorname{Im}[F_{ii}(j\omega)])^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \left( \frac{4\sigma_{r+i}^2 \operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)]^2}{\operatorname{Re}[F_{ii}(j\omega)]^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\sigma_{r+i}, \quad (4.78)$$

$\forall \omega \in R$ , води ка томе да је  $\sup_{\omega} \bar{\sigma}(H_i(j\omega)(j\omega - F_{ii}(j\omega))^{-1}G_i(j\omega)) \leq 2\sigma_{r+i}$ . Стога, за све  $\omega, \omega_1 \in R$ ,  $\|E_i\|_{\infty} \leq 2\sigma_{r+i}$  и  $2 \leq i \leq n-r-a$ . Ако је  $F_{ii}(j\omega) \in R$  и  $\omega = 0$ , онда у претходној формули важи једнакост, односно  $\|E_i\|_{\infty} = 2\sigma_{r+i}$  (Chiu, 1993).

Нека је  $E_1(j\omega) = \hat{C}_1(j\omega_1)(j\omega - \hat{A}_{11}(j\omega_1))^{-1}\hat{B}_1(j\omega_1)$  за све  $\omega, \omega_1 \in R$ . Из Предлога 3. добијамо (Chiu, 1993):

$$\hat{A}_{11}(j\omega_1)\sigma_{r+1} + \sigma_{r+1}\hat{A}_{11}(j\omega_1)^* + \hat{B}_1(j\omega_1)\hat{B}_1(j\omega_1)^* = 0, \quad (4.79)$$

$$\hat{A}_{11}(j\omega_1)^*\sigma_{r+1} + \sigma_{r+1}\hat{A}_{11}(j\omega_1) + \hat{C}_1(j\omega_1)^*\hat{C}_1(j\omega_1) = 0. \quad (4.80)$$

Уз сличну манипулацију једначинама, имамо да је  $\|E_1\|_{\infty} \leq 2\sigma_{r+1}$  (Chiu, 1993).

Следи да је, за све  $\omega \in R$ :

$$\begin{aligned} G(j\omega) - G_r(j\omega) &= \hat{C}(j\omega)(j\omega I_{n-r-a} - \hat{A}(j\omega))^{-1}\hat{B}(j\omega) = \\ &= \bar{C}_{n-r-a}(j\omega)(j\omega I_{n-r-a} - \bar{A}_{n-r-a, n-r-a}(j\omega))^{-1}\bar{B}_{n-r-a}(j\omega) = \\ &= E_{n-r-a}(j\omega) + E_{n-r-a-1}(j\omega) + E_{n-r-a-2}(j\omega) + \dots + E_2(j\omega) + \\ &+ E_1(j\omega). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Стога је (Chiu, 1993):

$$\begin{aligned} \|G - G_r\|_{\infty} &= \|E_{n-r-a} + E_{n-r-a-1} + E_{n-r-a-2} + \dots + E_2 + E_1\|_{\infty} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-r-a} \|E_k\|_{\infty} \leq 2 \sum_{k=1}^{n-r-a} \sigma_{r+k} = 2tr[\Sigma_2] \end{aligned} \quad (4.82)$$

#### 4.6. Алгоритам за редуковање реда континуалног или дискретног линеарног модела нестабилног система

Метода предложена у (Nagar and Singh, 2004) слична је првој (Chiu, 1993) – декомпонује се оригинални систем на стабилни и нестабилни подсистем, па се стабилни део може редуковати, а нестабилни мора цео да буде задржан у моделу редукованог реда. Приступ (Nagar and Singh, 2004) је шири у односу на претходни, (Chiu, 1993), јер се односи и на континуалне и на дискретне линеарне моделе.

У (Nagar and Singh, 2004) је приказан развој алгоритма за декомпозицију модела, било нестабилног система било регулатора (који може бити континуалан у времену или дискретан) на два дела – потпуно стабилни и потпуно нестабилни део. Овај алгоритам је заснован на реалној Шуровој трансформацији, која се базира на неколико алата за триангуларизацију матрице система, *A*. Блок форма Шурове трансформације матрице може да се употреби за декомпозицију система. Примена предложеног алгоритма је истраживана за редукцију реда модела нестабилног линеарног система или за редукцију регулатора. Методе расположиве за балансирану реализацију редукције реда модела за стабилне системе, проширене су за нестабилне, било континуалне било дискретне, системе. Овде ћемо се задржати на нестабилним континуалним системима.

За потребе формирања модела редукованог реда, у општем случају се захтева декомпозиција нестабилног система (постројења, регулатора) на потпуно стабилни и на потпуно нестабилни подсистем. Модел редукованог реда за нестабилан систем, може се добити редуковањем стабилног дела, добијеног декомпоновањем, и његовим директним додавањем на нестабилни део, добијен декомпоновањем (Glover, 1984).

Алгоритми засновани на редукцији модела уз балансирану реализацију могу бити прилагођени ради редуковања реда стабилног подсистема. Теорија балансиране реализације, коју је првобитно развио Мур (Moore, 1981), је у потпуности аналитичка теорија за редукцију модела стабилног, минималног и континуалног система. У (Pernebo and Silverman, 1982), ова теорија је проширена на дискретне системе, коришћењем решења Љапуновљевих једначина у дискретном временском домену. Очување једносмерног појачања редукованог модела може се постићи применом резултата из литературе (Fernando and Nicholson, 1982; Fernando and Nicholson, 1983; Liu and Anderson, 1989). У (Safonov i Chiang, 1989) Мурова теорија балансиране реализације (Moore, 1981) је проширена на неминималне системе.

Понекад може да се деси да контролер заснован на  $H_\infty$  - прорачуну управљања, за системе великог реда, буде нестабилан. За редуковање таквог нестабилног контролера, потребно је нестабилни контролер раздвојити на потпуно нестабилни део и потпуно стабилни део, а овај други се може (али не

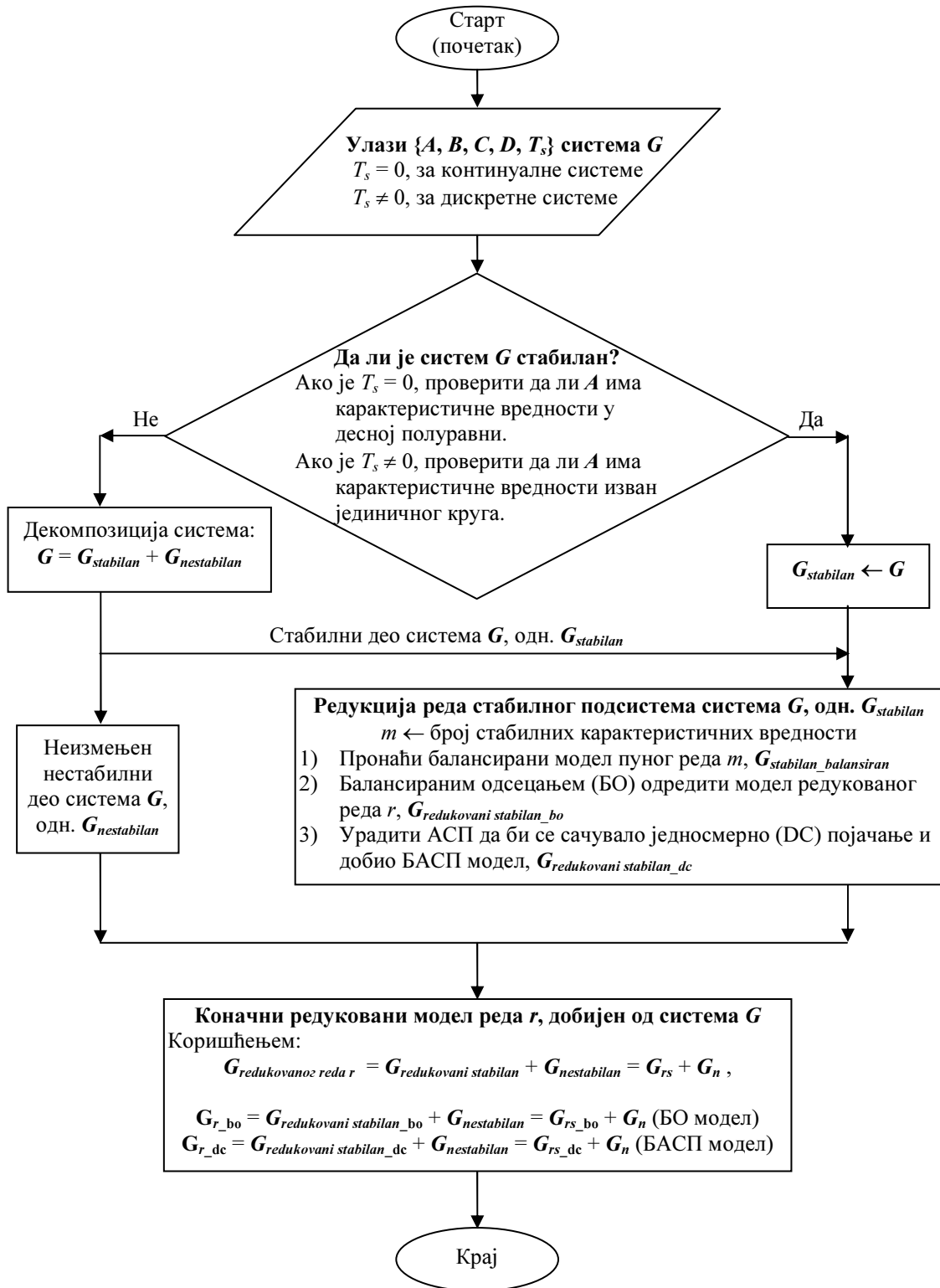
мора) даље редуковати уз коришћење фреквенцијски пондерисане редукције контролера (Liu and Anderson, 1989; Nagar and Singh, 2004). Редуковање контролера обично се постиже применом приступа фреквенцијски пондерисане редукције контролера, чиме се може постићи да на неким учестаностима тачност апроксимације буде већа. Приступ основне редукције модела, потенцијално је применљив и на редукцију контролера. Стога је неопходно да постоје поуздане методе рачунања за решавање одговарајућих проблема редукције модела.

Декомпозиција континуалних система може се постићи помоћу реалне Шурове трансформације, што је разматрано у раду (Hsu and Hou, 1991), у којем се трансформисани систем директно користи за редукцију модела, без претходног потпуног декомпоновања система на стабилни и нестабилни подсистем. Алгоритам за декомпозицију дискретних линеарних система на стабилне и нестабилне подсистеме одн. на три дела (а то су потпуно стабилни део, осцилаторни и потпуно нестабилни подсистем) предложио је Чен (Chen, 1995) користећи билинеарну трансформацију. Ефикасан алгоритам за декомпозицију, који не користи билинеарну трансформацију, дат је у (Nagar and Singh, 2004), тако да се систем који декомпонујемо потпуно декуплује на два дела – потпуно стабилни и потпуно нестабилни део одн. подсистем. Овај алгоритам је представљен блок дијаграмом на слици 4.1. (Nagar and Singh, 2004). Стабилни подсистем може се редуковати неком од метода за редукцију реда, изложених раније, у глави 3. У (Nagar and Singh, 2004), за редуковање стабилног подсистема користи се *балансирано одсецање* (БО) и *балансирана резидуализација*, ради очувања једносмерног појачања (слика 4.1). Уместо назива *балансирана резидуализација*, у (Nagar and Singh, 2004) се користи термин *балансирана апроксимација сингуларне пертурбације* (БАСП).

У (Nagar and Singh, 2004) дато је уопштење за континуалне и дискретне системе – редуковани модел, добијен *балансираном апроксимацијом сингуларне пертурбације* одн. техником балансиране резидуализације, описан је једначинама (Nagar and Singh, 2004):

$$\begin{aligned} A_r &= A_{11} - A_{12}(-\Phi I_r + A_{22})^{-1} A_{21}, & B_r &= B_1 - A_{12}(-\Phi I_r + A_{22})^{-1} B_2, \\ C_r &= C_1 - C_2(-\Phi I_r + A_{22})^{-1} A_{21}, & D_r &= D - C_2(-\Phi I_r + A_{22})^{-1} B_2, \end{aligned} \quad (4.83)$$

где је  $I_r$  јединична матрица реда  $r$ ,  $\Phi = 0$  за континуалне системе, а  $\Phi = 1$  за дискретне.



Слика 4.1. Блок дијаграм редуције реда модела нестабилног линеарног система, било континуалног или дискретног (Nagar and Singh, 2004)

## 5. МУЛТИМОДЕЛОВАЊЕ УЗ БАЛАНСИРАЊЕ СИСТЕМА КАО МЕТОДА ЗА РЕДУКЦИЈУ РЕДА МОДЕЛА

### 5.1. Увод

Системи великог реда су предмет многобројних истраживања већ неколико деценија (Khalil and Kokotovic, 1978; Moore, 1981; Glover, 1984; Geromel and Peres, 1985; Kokotovic et al., 1986; Gajic and Khalil, 1986; Skataric and Gajic, 1992; Gajic and Shen, 1993; Coumarbatch and Gajic, 2000a; Coumarbatch and Gajic, 2000b; Gajic and Lelic, 2001; Mukaidani et al., 2002a; Mukaidani et al., 2002b; Mukaidani et al., 2003a; Mukaidani et al., 2003b; Škatarić, 2004; Mukaidani, 2005; Mukaidani et al., 2007; Gajić, Škatarić et al., 2009; Mukaidani and Dragan, 2009; Škatarić and Ratković Kovačević, 2006a; Škatarić and Ratković Kovačević, 2006b; Ratković Kovačević and Škatarić, 2010). Концепт стратегија мултимоделовања за системе великог реда потиче од рада (Khalil and Kokotovic, 1978). Према том концепту системи великог реда могу бити управљани помоћу неколико независних управљачких центара уз коришћење неколико поједностављених модела система (Gajic and Khalil, 1986; Ratković Kovačević and Škatarić, 2010).

Традиционално се концепт мултимоделовања проучавао коришћењем временског скалирања - увођењем различитих временских оса (сингуларне пертурбације) и слабе повезаности подсистема. У случајевима када физичка интерпретација променљивих у простору стања захтева да се ниједна од њих не изгуби, мултимоделовање обезбеђује начин да се ред модела редукује и да се поједностави прорачун регулатора. Случајеви ове врсте су модели из стварног света, на пример, модели електроенергетских система или аутомобила.

Овде је предложен нови приступ у стратегији мултимоделовања. Стратегије мултимоделовања, у којима управљачки центри користе различите редуковане моделе истог система, развијене су уз коришћење трансформације балансирања и одговарајућих идеја за редукацију реда модела.

У раду (Khalil and Kokotovic, 1978) је употребљена методологија сингуларних пертурбација да се развију стратегије мултимоделовања, тако што се



користи природа система, који има два брза подсистема, узајамно слабо повезана, а оба јако спрегнута са спорим подсистемом. Главни, основни допринос рада (Khalil and Kokotovic, 1978), био је да установи скуп услова под којима ће стратегија мултимоделовања бити добро дефинисана, тако да ће перформанса управљаног система бити блиска понашању, које би било добијено да је управљачка стратегија била реализована помоћу једног контролера, којем је познат тачан модел целог система. Услови да стратегија мултимоделовања буде добро постављена проучавани су у (Gajic and Khalil, 1986) за проблем оптималног линеарног квадратног Гаусовог (ЛКГ) управљања (Kwakernaak and Sivan, 1972). Рад (Mukaidani et al., 2003b) је означио прекретницу за дотадашње стратегије мултимоделовања, које су проучаване и примењиване у више радова, било у оквиру контекста сингуларних пертурбација, или у различитим математичким окружењима. До тада се за стратегије мултимоделовања подразумевало да су мали параметри, које занемарујемо, познатих вредности, док се у (Mukaidani et al., 2003b) пројектује контролер близак оптималном, уз занемаривање малих параметара, чије вредности нису тачно познате.

Структура потребна за мултимоделовање, која се користи код класичног приступа уз примену сингуларних пертурбација и слабе повезаности, дефинисана је као линеаран динамички систем, који има један спори и два брза подсистема (Mukaidani et al. 2002a). Брзи подсистеми су јако спрегнути са спорим подсистемом и слабо повезани или сасвим декупловани међусобно. Овакви системи великог реда описују динамику различитих реалних физичких система, на пример, електроенергетских система (Khalil and Kokotovic, 1978; Moore, 1981) и аутомобила (Gajic and Shen, 1993). Одговарајућа представа мултимоделовања из (Khalil and Kokotovic, 1978; Mukaidani et al., 2002a) дефинисана је помоћу (5.1):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \varepsilon_1 \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon_2 \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & \varepsilon_3 A_{12} \\ A_{20} & \varepsilon_3 A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & B_{02} \\ B_{11} & \varepsilon_3 B_{12} \\ \varepsilon_3 B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$y(t) = C \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

где су

$x_0(t) \in R^{n_0}$  споре променљиве стања,

$x_1(t) \in R^{n_1}$ ,  $x_2(t) \in R^{n_2}$  брзе променљиве стања,

$u_1(t) \in R^{m_1}$ ,  $u_2(t) \in R^{m_2}$  управљачки улази,

$y(t) \in R^P$  излази,

$\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  су мали позитивни параметри сингуларне пертурбације, и истог су реда величине,  $0 < k_1 \leq (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) \leq k_2 < \infty$ , и

$\varepsilon_3$  је мали параметар слабе повезаности, како променљивих стања, тако и сигнала управљања.

Модел дат у (5.1)-(5.2), у којем су истовремено слабо повезане и променљиве стања, а и управљачки улази, може се модификовати као у (5.3)-(5.4), како би се одвојено могла дефинисати слаба повезаност између променљивих стања од њихове слабе повезаности са сигнаlima управљања.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \varepsilon_1 \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon_2 \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & \varepsilon_3 A_{12} \\ A_{20} & \varepsilon_3 A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & B_{02} \\ B_{11} & \varepsilon_4 B_{12} \\ \varepsilon_4 B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$y(t) = C \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

где су

$x_0(t) \in R^{n_0}$  споре променљиве стања,

$x_1(t) \in R^{n_1}$ ,  $x_2(t) \in R^{n_2}$  брзе променљиве стања,

$u_1(t) \in R^{m_1}$ ,  $u_2(t) \in R^{m_2}$  управљачки улази,

$y(t) \in R^P$  излази,

$\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  су мали позитивни параметри сингуларне пертурбације и истог су реда величине, то јест  $0 < k_1 \leq (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) \leq k_2 < \infty$ ,

$\varepsilon_3$  је мали параметар слабе повезаности променљивих стања, и

$\varepsilon_4$  је мали параметар слабе повезаности сигнала управљања.

Модел (5.3) - (5.4) разликује се од оног који је дат у (Khalil and Kokotovic, 1978; Moore, 1981; Mukaidani et al., 2002a). У (5.3)-(5.4) је узет у разматрање општији случај, који дозвољава да систем има слабо повезане променљиве стања, а јако повезане управљачке улазе, као и обрнуто. Оригинални модели у (Khalil and Kokotovic, 1978; Moore, 1981; Mukaidani et al., 2002a) су исти као онај у (5.1)-(5.2), а, за  $\varepsilon_4 = \varepsilon_3$ , такав постаје и модел (5.3)-(5.4). За  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ , једначина (5.1) описује мултипараметарски сингуларно пертурбовани систем (МСПС), који је детаљно проучаван у радовима Мукаиданија и сарадника (Mukaidani et al., 2002a; Mukaidani et al., 2002b; Mukaidani et al., 2003a; Mukaidani et al., 2003b; Mukaidani, 2005; Mukaidani et al., 2007; Mukaidani and Dragan, 2009).

Када се тражи оптимално управљање детерминистичким моделом горе-приказане структуре, погодне за мултимоделовање, треба минимизовати квадратни критеријум перформансе, прикладним избором управљачких сигнала  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . Критеријум перформансе за линеарну квадратну Гаусовску оптимизацију (Kwakernaak and Sivan, 1972), дат је једначином:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0, \quad (5.5)$$

где је

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} & Q_{02} \\ Q_{01}^T & Q_{11} & 0 \\ Q_{02}^T & 0 & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$Q = q^T q = \begin{bmatrix} q_{01} & q_{11} & 0 \\ q_{02} & 0 & q_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{01} & q_{11} & 0 \\ q_{02} & 0 & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{01}^T q_{01} + q_{02}^T q_{02} & q_{01}^T q_{11} & q_{02}^T q_{22} \\ q_{11}^T q_{01} & q_{11}^T q_{11} & 0 \\ q_{22}^T q_{02} & 0 & q_{22}^T q_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

У општем случају мултимоделовања, све елементе у матрицама  $R$  и  $Q$ , који имају вредност нула можемо да заменимо са  $O(\varepsilon)$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>  $O(\varepsilon^i)$  се дефинише као  $O(\varepsilon^i) < c \varepsilon^i$ , где је  $c$  ограничена константа, а  $i$  је реални број. Овде је:  $\varepsilon = \|\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}\|$ .

У циљу решавања проблема мултимоделовања треба да конструишемо два различита модела (5.1), који се добијају када се постави да је  $\varepsilon_1 = 0$ , из чега добијамо први модел за први контролер (или регулатор), и  $\varepsilon_2 = 0$ , чиме произведемо други модел за други контролер. Не губећи на општости, можемо мале параметре слабе повезаности,  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_4$ , да поставимо на нулу, како бисмо поједноставили једначине.

Брза динамика другог подсистема је апроксимирана алгебарском једначином (одговарајући  $\varepsilon_i$  је постављен на нулу). Две апроксимације полазног модела изведене из (5.1) су:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \varepsilon_1 \dot{x}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & 0 \\ A_{20} & 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & B_{02} \\ B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ 0 \\ \varepsilon_2 \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & 0 \\ A_{20} & 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & B_{02} \\ B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Горње једначине могу бити преформулисане као у:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{00} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{20}) & A_{01} \\ \frac{A_{10}}{\varepsilon_1} & \frac{A_{11}}{\varepsilon_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & (B_{02} - A_{02}A_{22}^{-1}B_{22}) \\ \frac{B_{11}}{\varepsilon_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10}) & A_{02} \\ \frac{A_{20}}{\varepsilon_2} & \frac{A_{22}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B_{01} - A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}) & B_{02} \\ 0 & \frac{B_{22}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Из претходног следе два различита модела изведена из оригиналног система. Алгебарске једначине дефинисане у (5.8) и (5.9), користи сваки од контролера, као у (5.5), да формира сопствени критеријум перформансе. Овако поједностављене критеријуме сваки од контролера оптимизује, уз одговарајући модел редукованог

реда, а добијене стратегије управљања формирају стратегију мултимоделовања. Стратегија мултимоделовања, израчуната на овај начин, биће добро постављена, ако се, када је примењена на оригинални модел и када  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  теже нули, вредности критеријума перформансе, као трајекторије у простору стања, асимптотски приближавају одговарајућим вредностима, које постоје под деловањем оптималне стратегије, као што је показано у (Gajić and Khalil, 1986). Стога можемо рећи да је добро постављена стратегија мултимоделовања у  $O(\varepsilon)$  околини оптималне управљачке стратегије.

## 5.2. Мултимоделовање кроз балансирање система

Већ су представљена два постојећа концепта редукције реда модела: први је стратегија мултимоделовања уз коришћење идеја малог параметра и други - трансформација балансирања представљена посебно кроз две методе: балансирано одсецање и балансирану резидуализацију. Овде ћемо приказати идеју мултимоделовања кроз балансирање система, која је општија од мултимоделовања кроз сингуларне пертурбације, пошто ова друга захтева специјалне структуре оригиналног модела. Мултимоделовање кроз сингуларне пертурбације се изводи уз претпоставку да су два брза слабо повезана подсистема, за које су матрице система инвертибилне, оба јако повезана са спорим подсистемом, док оваква претпоставка није потребна за мултимоделовање кроз балансирање система.

Посматра се линеаран, временски инваријантан систем:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$y(t) = C \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{01} & B_{02} \\ B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Балансирани модел је изведен као у (3.7)-(3.9) и има исте Хенкелове сингуларне вредности као оригинални модел дат у (5.1). Матрица  $A_b$  балансираног модела нема исту форму као матрица  $A$ , тј. сви елементи матрице  $A_b$  могу да буду различити од нуле. Исто важи и за матрице  $B$  и  $B_b$ . Хенкелове сингуларне вредности су поређане у опадајућем редоследу, тако да се на основу њих може одредити како треба партиционисати балансирани модел: првих неколико променљивих стања за спори подсистем, а преостале променљиве стања се деле у две групе за два брза дела, као у:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b1}(t) \\ \dot{x}_{b2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b01} & A_{b02} \\ A_{b10} & A_{b11} & A_{b12} \\ A_{b20} & A_{b21} & A_{b22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{b01} & B_{b02} \\ B_{b11} & B_{b12} \\ B_{b21} & B_{b22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$y_b(t) = \begin{bmatrix} C_{b0} & C_{b1} & C_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{b1} & D_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = y(t), \quad (5.16)$$

где су

$y_b(t) \in R^p$ ,  $y(t) \in R^p$  - излази балансираног и оригиналног модела, редом;

$x_{b0}(t) \in R^{n_0}$  - споре променљиве стања или заједничко језгро балансираног модела;

$x_{b1}(t) \in R^{n_1}$ ,  $x_{b2}(t) \in R^{n_2}$  - променљиве стања балансираног модела, које имају малу укупну количину енергије ( $n_0+n_1+n_2 = n$ );

$u_1(t) \in R^{m_1}$ ,  $u_2(t) \in R^{m_2}$  - управљачки улази балансираног и оригиналног модела ( $m_1+m_2 = m$ );

и  $A_{bij}$ ,  $B_{bik}$ ,  $C_{bj}$  и  $D_{bk}$  ( $i, j = 0, 1, 2$  и  $k = 1, 2$ ) су субматрице матрица балансираног система  $A_b$ ,  $B_b$ ,  $C_b$  и  $D_b$ , које имају одговарајуће димензије. Уместо нула-

подматрица, као у (Coumarbatch and Gajic, 2000a), овде се разматра општији случај, у којем подматрице  $A_{b12}$ ,  $A_{b21}$ ,  $B_{b12}$  и  $B_{b21}$  нису нула-матрице, што је често у моделима реалних система.

Одговарајући средње-квадратни критеријум перформансе којег треба минимизовати је дат у (5.17):

$$J_b = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [x_b^T(t) Q_b x_b(t) + u^T(t) R_b u(t)] dt, \quad Q_b = Q_b^T \geq 0, R_b = R_b^T > 0, \quad (5.17)$$

где, не губећи на општости, претпостављамо да су матрице  $Q_b$  и  $R_b$  блок дијагоналне форме:

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q_{b00} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{b11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{b22} \end{bmatrix}, R_b = \begin{bmatrix} R_{b11} & 0 \\ 0 & R_{b22} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Сада се декомпозицијом балансираног модела (5.15) добију два модела редукованог реда; оба се састоје од истог заједничког језгра – подсистема који одговара спорим модовима балансираног модела, и једног од два различита преостала подсистема, који одговарају модовима са малом укупном количином енергије, понаособ *првог* модела редукованог реда и *другог* модела редукованог реда. Матрице унакрсне повезаности (унакрсног купловања или спрезања)  $A_{b12}$ ,  $A_{b21}$  биће занемарене, упркос томе што имају вредности различите од нуле.

*Први* модел редукованог реда, који се овако добије је:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b1}(t) \end{bmatrix} = A_{1r} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + B_{1r} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$y_{b1}(t) = [C_{b0} \quad C_{b1}] \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + D_{b1} u_1(t),$$

где је

$$A_{1r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b01} \\ A_{b10} & A_{b11} \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} B_{b01} & B_{b02} \\ B_{b11} & B_{b12} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

*Други* модел редукованог реда је:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b2}(t) \end{bmatrix} = A_{2r} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + B_{2r} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

$$y_{b2}(t) = [C_{b0} \ C_{b2}] \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + D_{b2} u_2(t),$$

где је

$$A_{2r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b02} \\ A_{b20} & A_{b22} \end{bmatrix}, \quad B_{2r} = \begin{bmatrix} B_{b01} & B_{b02} \\ B_{b12} & B_{b22} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Интересантно је запазити да и *први* и *други* модел редукованог реда у (5.19) и (5.21) имају Хенкелове сингуларне вредности, које одговарају модовима заједничког језгра оригиналног система, и два комплементарна скупа Хенкелових сингуларних вредности, које одговарају модовима оригиналног система, који имају малу укупну количину енергије, ако задржимо све делове матрице  $B_b$ .

Ако се, међутим, подматрице унакрсне повезаности (спрезања, купловања)  $B_{b12}$  и  $B_{b21}$  поставе на нула-матрице одговарајућих димензија, као што је предложено у (Mukaidani et al., 2002a), добијене Хенкелове сингуларне вредности за први и други подсистем разликоваће се од оних за оригинални модел пуног реда, а модели редукованог реда биће као у (5.23)-(5.25) и (5.26)-(5.28). Ова два типа модела редукованог реда и даље садрже све улазне (управљачке) сигнале, које имају и оригинални и балансирани модел.

*Први* модел редукованог реда, добијен као у (Khalil and Kokotovic, 1978; Mukaidani et al., 2002a) је:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b1}(t) \end{bmatrix} = A_{1r} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + B_{1r} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

$$y_{b1}(t) = [C_{b0} \ C_{b1}] \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + D_{b1} u_1(t), \quad (5.24)$$

где је

$$A_{1r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b01} \\ A_{b10} & A_{b11} \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} B_{b01} & B_{b02} \\ B_{b11} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$



Други модел сниженог реда, добијен као у (Khalil and Kokotovic, 1978; Mukaidani et al., 2002a) је:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b2}(t) \end{bmatrix} = A_{2r} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + B_{2r} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$y_{b2}(t) = [C_{b0} \quad C_{b2}] \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + D_{b2} u_2(t), \quad (5.27)$$

уз

$$A_{2r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b02} \\ A_{b20} & A_{b22} \end{bmatrix}, \quad B_{2r} = \begin{bmatrix} B_{b01} & B_{b02} \\ 0 & B_{b22} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Иста апроксимација је урађена и за критеријум перформансе (5.5), те су стога потребна два критеријума перформансе, што води до вишекритеријумског проблема оптимизације. Зависно од поставке изабраног проблема, која се веома често описује диференцијалним играма, два контролера проналазе сваки своју оптималну стратегију и примењују их на глобални систем, дефинисан са (5.1). Добијена на такав начин, стратегија мултимоделовања је добро дефинисана, ако је критеријум перформансе под стратегијом мултимоделовања на растојању  $O(\sigma_{r+1}/\sigma_r)$  од опште, свеобухватне оптималне стратегије управљања добијене директном оптимизацијом оригиналног критеријума перформансе за оригинални систем.

Два критеријума, која треба сада оптимизовати су дати у:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left\{ [x_{b0}(t) \quad x_{b1}(t)] Q_1 \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + [u_1(t) \quad u_2(t)] R_1 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \right\} dt, \quad (5.29)$$

$$Q_1 = Q_1^T \geq 0, \quad R_1 = R_1^T > 0,$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left\{ [x_{b0}(t) \quad x_{b2}(t)] Q_2 \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + [u_1(t) \quad u_2(t)] R_2 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \right\} dt, \quad (5.30)$$

$$Q_2 = Q_2^T \geq 0, \quad R_2 = R_2^T > 0.$$

$Q_1$  и  $Q_2$  су блок-дијагоналне матрице, а  $R_1$  и  $R_2$  су подматрице од  $R_b$ , које имају одговарајуће димензије:

$$Q_1 = Q_1^T = \begin{bmatrix} Q_{b00} & 0 \\ 0 & Q_{b11} \end{bmatrix} \geq 0, \quad R_1 = R_1^T = R_{b11} > 0, \quad (5.31)$$

$$Q_2 = Q_2^T = \begin{bmatrix} Q_{b00} & 0 \\ 0 & Q_{b22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad R_2 = R_2^T = R_{b22} > 0. \quad (5.32)$$

Проблем оптималног управљања на који се позивамо, следећи препоруке из (Khalil and Kokotovic, 1978; Gajic and Khalil, 1986; Gajic and Shen, 1993), је да се минимизира конвексни збир  $J_1$  и  $J_2$  датих у (5.29) и (5.30) за неко  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$J_b = \gamma_1 J_1 + \gamma_2 J_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0. \quad (5.33)$$

Ово одговара *Парето-оптималној кооперативној стратегији* (Khalil and Kokotovic, 1978; Gajic and Khalil, 1986; Mukaidani et al., 2002b).

У Парето оптималној стратегији разматра се ситуација у којој доносиоци одлуке треба да одлуче о својим стратегијама кроз узајамну сарадњу (Khalil and Kokotovic, 1978; Gajic and Khalil, 1986). Суштина овога је да се не може направити одступање од оптималне Парето стратегије, које би смањило трошкове било ког доносиоца одлуке. Нека сваки доносилац одлуке има квадратни функционал цене, као у (5.29) и (5.30). Парето решење је пар  $u_{opt1}(t), u_{opt2}(t)$ , који минимизира (5.33) за неко  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (Mukaidani et al., 2002b).

Оптимално управљање за затворено коло дејства и критеријуме (5.29), (5.30) је:

$$u_{opt}(t) = \begin{bmatrix} u_{opt1}(t) \\ u_{opt2}(t) \end{bmatrix} = -R_b^{-1} B_b^T P_b x_b(t), \quad (5.34)$$

где је  $P_b$  позитивно семидефинитно стабилишуће решење алгебарске Рикатијеве једначине:

$$A_b^T P_b + P_b A_b + Q_b - P_b S_b R_b^{-1} B_b^T = 0, \quad S_b = B_b R_b^{-1} B_b^T. \quad (5.35)$$

Оптимални регулатор стања је специјални случај овог проблема, у којем се доносиоци одлуке слажу око избора  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , као тежинских фактора. Не губећи на општости бирамо:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ . Очекујемо да ће апроксимација критеријума оптимизације бити:

$$\frac{1}{2}(J_1 + J_2) \approx J_b, \quad (5.36)$$

и, према (Khalil and Kokotovic, 1978), може се очекивати да буде:

$$J_b = \frac{1}{2}J_1 + \frac{1}{2}J_2 + O\left(\frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_r}\right) \approx J. \quad (5.37)$$

Оригинални резултат је постигнут у (Mukaidani et al., 2003b), где је уместо  $O(\sigma_{r+1}/\sigma_r)$  било  $O(\|\mu\|^2)$ , при чему  $\mu$  представља норму вектора  $[\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]$ , прецизније:  $\|\mu\| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}$ . И даље се везујући за ову идеју, али укључујући критеријум за балансирано одсецање, уместо  $O(\|\mu\|^2)$ , можемо да користимо  $O(\sigma_{r+1}/\sigma_r)$ , имајући у виду да је ред  $r$  изабран тако да  $\sigma_{r+1}$  има ред величине процента од  $\sigma_r$ . У (Mukaidani et al., 2002b) је развијен рекурзивни алгоритам за решавање мултипараметарских Рикатијевих једначина са брзином конвергенције  $O(\|\mu\|^i)$  и нивоом тачности  $O(\|\mu\|^{i+1})$  за стратегију близу оптималне, где је  $i$  број итерација.

Захтевано решење алгебарске Рикатијеве једначине (5.35) постоји под стандардним претпоставкама (Coumarbatch and Gajic, 2000a; Mukaidani and Dragan, 2009):

**Претпоставка 1:** Уређене тројке матрица  $(A_{1r}, B_{1r}, chol(Q_1))$  и  $(A_{2r}, B_{2r}, chol(Q_2))$  су стабилизабилно-детектибилне.

**Претпоставка 2:** Парови  $(A_{1r}, chol(Q_1))$  и  $(A_{2r}, chol(Q_2))$  су детектибилно-опсервабилни.

Овде  $chol(Q)$  означава Чолески (Cholesky) декомпозицију матрице  $Q$ . Матрице  $(A_{ir}, B_{ir})$ , за  $i = 1, 2$ , су дате једнакостима (5.38).

$$A_{1r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b01} \\ A_{b10} & A_{b11} \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} B_{b01} & B_{b02} \\ B_{b11} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

$$A_{2r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b02} \\ A_{b20} & A_{b22} \end{bmatrix}, \quad B_{2r} = \begin{bmatrix} B_{b01} & B_{b02} \\ 0 & B_{b22} \end{bmatrix}$$

Оптимално управљање за затворено коло дејства за (5.23)-(5.25), (5.29), дато је са

$$u_{\text{prvi}_{opt}}(t) = \begin{bmatrix} u_{\text{prvi}_{opt1}}(t) \\ u_{\text{prvi}_{opt2}}(t) \end{bmatrix} = -R_1^{-1} B_{1r}^T P_1 \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

где је  $P_1$  позитивно семидефинитно стабилишуће решење одговарајуће алгебарске Рикатијеве једначине:

$$A_{1r}^T P_1 + P_1 A_{1r} + Q_1 - P_1 S_1 P_1 = 0, \quad S_1 = B_{1r} R_1^{-1} B_{1r}^T. \quad (5.40)$$

Оптимално управљање за затворено коло дејства за (5.26)-(5.28), (5.30), дато је у:

$$u_{\text{drugi}_{opt}}(t) = \begin{bmatrix} u_{\text{drugi}_{opt1}}(t) \\ u_{\text{drugi}_{opt2}}(t) \end{bmatrix} = -R_2^{-1} B_{2r}^T P_2 \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

где је  $P_2$  позитивно семидефинитно стабилишуће решење одговарајуће алгебарске Рикатијеве једначине:

$$A_{2r}^T P_2 + P_2 A_{2r} + Q_2 - P_2 S_2 P_2 = 0, \quad S_2 = B_{2r} R_2^{-1} B_{2r}^T. \quad (5.42)$$

Интуитивно је јасно да је, за неке моделе, могуће даље редуковање. Ако су управљачки сигнали оригиналног модела слабо повезани, онда је могуће направити два подсистема, као што је горе описано, тако да *први* има само улазе  $u_1$  и *други* само улазе  $u_2(t)$ . Ово значи да се за занемарене модове, који имају малу укупну количину енергије, претпоставља да су достигли своје устаљене вредности (вредности устаљеног стања), радије него да буду посматрани као променљиве величине. Модели типа (5.1) су добри кандидати за овакву врсту редукције. То одговара случају у којем су подматрице  $B_{b02}$  у (5.25) и  $B_{b01}$  у (5.28) постављене на нула-матрице одговарајућих димензија, што производи једначине (5.43)-(5.46) и (5.47)-(5.50), респективно.

Први модел редукованог реда, добијен тако што се у њему занемаре управљачке променљиве  $u_2$ , је:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b01} \\ A_{b10} & A_{b11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{b01} & 0 \\ B_{b11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \text{ или} \quad (5.43)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b1}(t) \end{bmatrix} = A_{1r} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + B_{1r} u_1(t), \quad (5.44)$$

$$y_{b1}(t) = \begin{bmatrix} C_{b0} & C_{b1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + D_{b1} u_1(t), \quad (5.45)$$

$$A_{1r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b01} \\ A_{b10} & A_{b11} \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} B_{b01} \\ B_{b11} \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Други модел редукованог реда, добијен тако што се у њему занемаре управљачке променљиве  $u_1(t)$ , је:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b02} \\ A_{b20} & A_{b22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_{b02} \\ 0 & B_{b22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \text{ или} \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b0}(t) \\ \dot{x}_{b2}(t) \end{bmatrix} = A_{2r} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + B_{2r} u_2(t), \quad (5.48)$$

$$y_{b2}(t) = \begin{bmatrix} C_{b0} & C_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + D_{b2} u_2(t), \quad (5.49)$$

$$A_{2r} = \begin{bmatrix} A_{b00} & A_{b02} \\ A_{b20} & A_{b22} \end{bmatrix}, \quad B_{2r} = \begin{bmatrix} B_{b02} \\ B_{b22} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Иста апроксимација урађена је за критеријум перформансе (5.29)-(5.30), те су добијена два критеријума перформансе, као у (5.51)-(5.52) и (5.53)-(5.54), од којих сваки има свој сопствени (и само један) управљачки сигнал. (Могуће је и проширење: да сваки од критеријума перформансе има више сопствених управљачких сигнала. Могућа је генерализација попут оне у (Mukaidani, 2009) - да има више од два управљачка агента, на пример,  $N$ , и да за сваки од њих постоји

одговарајући критеријум перформансе.) Имајући у виду вишекритеријумску оптимизацију, оба ова критеријума могу бити разматрана као да имају исти значај, као да су равноправани. Поново, сматраћемо да је стратегија мултимоделовања добро постављена одн. добро дефинисана, ако је критеријум перформансе, добијен уз примену стратегије мултимоделовања, на растојању од  $O(\sigma_{r+1}/\sigma_r)$  близу (тј. у  $\sigma_{r+1}/\sigma_r$  околини) глобалне оптималне управљачке стратегије, добијене директном оптимизацијом примењеном на оригинални систем уз одговарајући критеријум перформансе.

Два критеријума, која сада треба оптимизовати су (5.51)-(5.52) и (5.53)-(5.54):

$$J_{prvi} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left\{ [x_{b0}(t) \ x_{b1}(t)] Q_1 \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} + u_1(t)^T R_1 u_1(t) \right\} dt, \quad (5.51)$$

$$Q_1 = Q_1^T = \begin{bmatrix} Q_{b00} & 0 \\ 0 & Q_{b11} \end{bmatrix} \geq 0, \quad R_1 = R_1^T = R_{b11} > 0, \quad (5.52)$$

$$J_{drugi} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left\{ [x_{b0}(t) \ x_{b2}(t)] Q_2 \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + u_2(t)^T R_2 u_2(t) \right\} dt, \quad (5.53)$$

$$Q_2 = Q_2^T = \begin{bmatrix} Q_{b00} & 0 \\ 0 & Q_{b22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad R_2 = R_2^T = R_{b22} > 0. \quad (5.54)$$

У симулационом примеру за  $Q_1$  и  $Q_2$  су изабране јединичне матрице одговарајућих димензија, док су  $R_1$  и  $R_2$  јединичне матрице одговарајућих димензија, помножене неким тежинским коефицијентом, који је у складу са предлозима датим у (Khalil and Kokotovic, 1978):

$$Q_1 = Q_1^T = I_{n_0+n_1} \geq 0, \quad R_1 = R_1^T = Const \cdot I_{m_1} > 0, \quad (5.55)$$

$$Q_2 = Q_2^T = I_{n_0+n_2} \geq 0, \quad R_2 = R_2^T = Const \cdot I_{m_2} > 0. \quad (5.56)$$

Оптимално управљање за затворено коло дејства за (5.51)-(5.52), (5.55) је:

$$u_{prvi\_opt}(t) = -R_1^{-1} B_{1r}^T P_{prvi} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix}, \quad B_{1r} = \begin{bmatrix} B_{b01} \\ B_{b11} \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

где је  $P_{prvi}$  позитивно семидефинитно стабилишуће решење алгебарске Рикатијеве једначине:

$$A_{1r}^T P_{prvi} + P_{prvi} A_{1r} + Q_1 - P_{prvi} S_{prvi} P_{prvi} = 0, \quad S_{prvi} = B_{1r} R_1^{-1} B_{1r}^T, \quad (5.58)$$

док је оптимално управљање за затворено коло дејства за (5.53)-(5.54), (5.56) дато са:

$$u_{drugi\_opt}(t) = -R_2^{-1} B_{2r}^T P_{drugi} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix}, \quad B_{2r} = \begin{bmatrix} B_{b02} \\ B_{b22} \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

где је  $P_{drugi}$  позитивно семидефинитно стабилишуће решење алгебарске Рикатијеве једначине:

$$A_{2r}^T P_{drugi} + P_{drugi} A_{2r} + Q_2 - P_{drugi} S_{drugi} P_{drugi} = 0, \quad S_{drugi} = B_{2r} R_2^{-1} B_{2r}^T. \quad (5.60)$$

Могло би касније да буде истражено, шта су довољни и потребни услови за егзистенцију решења Рикатијевих једначина (5.58), (5.60). Неке корисне идеје и ефикасни итеративни поступци решавања уз услове егзистенције, могу се наћи у радовима Мукаиданија и сарадника (Mukaidani et al., 2002a; Mukaidani et al., 2002b; Mukaidani et al., 2003a; Mukaidani et al., 2003b; Mukaidani, 2005; Mukaidani et al., 2007; Mukaidani and Dragan, 2009).

Следећи корак је да се оптимално управљање из (5.57) и (5.59) имплементира на модел пуног реда. Оптималне регулаторе (5.57) и (5.59) лакше је прорачунати, него оптимални регулатор модела пуног реда (5.34). Пошто су оба управљачка агента подједнаког значаја за модел пуног реда, апроксимација оптималне управљачке стратегије би могла да буде:

$$u_{apr\_opt}(t) = \begin{bmatrix} u_{prvi\_opt}(t) \\ u_{drugi\_opt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1^{-1} B_{1r}^T P_{prvi} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b1}(t) \end{bmatrix} \\ -R_2^{-1} B_{2r}^T P_{drugi} \begin{bmatrix} x_{b0}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

и тако је и изабрано у симулационом поступку.

Проблем оптималног управљања, на који се позивамо, пратећи предлоге из (Khalil and Kokotovic, 1978; Gajic and Khalil, 1986; Gajic and Shen, 1993), је да се минимизира конвексни збир  $J_{prvi}$  и  $J_{drugi}$ , датих у (5.51) и (5.53):

$$J_{aproximiran} = \gamma_1 J_{prvi} + \gamma_2 J_{drugi}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \quad (5.62)$$

за неке вредности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Ово одговара оптималној Парето кооперативној стратегији (Khalil and Kokotovic, 1978; Gajic and Khalil, 1986; Mukaidani et al., 2002b).

У Парето оптималној стратегији, разматрамо ситуацију у којој сваки доносилац одлуке формира сопствену стратегију кроз узајамну сарадњу (Khalil and Kokotovic, 1978; Gajic and Khalil, 1986). Суштина овога је да ма које одступање од Парето оптималне стратегије не може да смањи трошкове ма ког од доносиоца одлука. Нека сваки доносилац одлуке има квадратни функционал цене, као у (5.51) и (5.53). Парето решење је пар  $u_{prvi\_opt}(t)$ ,  $u_{drugi\_opt}(t)$ , који минимизира (5.62) за неко  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (Mukaidani et al., 2002b). Оптимални регулатор стања је посебан случај овог проблема у којем се доносиоци одлуке сагласе око избора тежинских фактора  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Не губећи на општости, бирамо:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ . Према (Khalil and Kokotovic, 1978), може се очекивати да ће апроксимација критеријума оптимизације бити:

$$J_{aproximiran} = J_{bal. I i II} = \frac{1}{2} (J_{prvi} + J_{drugi}) \approx J_b. \quad (5.63)$$

### 5.3. Пример

Методe за редукцију реда модела, које су овде приказане, тестиране су на примеру из реалног света познатом из литературе и узетом из (Khalil and Kokotovic, 1978) уз модификацију. Пример је модел у простору стања за електроенергетски систем, који се састоји од две међусобно повезане идентичне области, при чему је свака област сачињена од једне електране.



За све добијене моделе редукованог реда, решен је проблем линеарног квадратног Гаусовог управљања (ЛКГ). Симулирано је понашање модела у отвореном, као и у затвореном колу дејства. Различите технике за редукацију реда су упоређиване на основу вредности критеријума, који је оптимизован за случај затвореног кола дејства, у којем балансирани модел пуног реда користи разне регулаторе, који су одређени као оптимални регулатори појединих модела редукованог реда.

За пример је изабран модел система, који има два улаза и један излаз. На основу Хенкелових сингуларних вредности (ХСВ), донета је одлука шта би требало да буде изабрано за редуковани ред модела. Ред спорог подсистема, одн. подсистема заједничког језгра, и редови два брза дела (тј. два дела који имају малу укупну количину енергије) су изабрани у складу са предлогом из (Khalil and Kokotovic, 1978). Произведено је неколико модела редукованог реда коришћењем метода поменутих и описаних раније.

Ефикасност ових апроксимација је поређена међусобно, прво за случај отвореног кола дејства, за типичне функције улаза: Дираков импулс, јединична одскочна функција (степ импулс), рампа и простопериодична побуда (синусни сигнал). Такође, за случај отвореног кола дејства направљено је поређење и са балансираним моделом, за све фреквентне карактеристике (и за амплитудне и за фазне спектре) свих расположивих функција преноса. Стратегија управљања у овом раду се разликује од оне, која је коришћена у (Khalil and Kokotovic, 1978). Пројектован је оптимални линеарни квадратни регулатор, како за оригинални и балансирани модел, тако и за моделе редукованог реда. Матрице појачања добијене за моделе редукованог реда прошириване су нулама до пуног реда, а затим су ови регулатори редукованог реда примењени да се затвори повратна спрега по стању на балансираном моделу. Различите апроксимације су поређене према вредностима оптимизованог линеарног квадратног Гаусовог (ЛКГ) критеријума.

За модел, који је изабран за симулацију, променљиве стања су као у (Khalil and Kokotovic, 1978), односно:

$$\begin{aligned} x_1(t) \quad v_1(t) & \quad \text{интеграл грешке управљања за регију 1,} \\ x_2(t) \quad v_2(t) & \quad \text{интеграл грешке управљања за регију 2,} \end{aligned}$$

- $x_3(t) \Delta f_1(t)$  варијација фреквенције за регију 1,  
 $x_4(t) \Delta f_2(t)$  варијација фреквенције за регију 2,  
 $x_5(t) \Delta P_{12}(t)$  варијација протока снаге кроз линију везе,  
 $x_6(t) \Delta P_{G1}(t)$  варијација излаза турбине за електрану 1, одн. регију 1,  
 $x_7(t) \Delta a_1(t)$  варијација положаја вентила турбине за електрану 1 одн. регију 1,  
 $x_8(t) \Delta P_{G2}(t)$  варијација излаза турбине за електрану 2, одн. регију 2,  
 $x_9(t) \Delta a_2(t)$  варијација положаја вентила турбине за електрану 2 одн. регију 2,

а управљачки сигнали су:

- $u_1(t) \Delta P_{c1}(t)$  варијација подешавања брзине за електрану 1, одн. регију 1, и  
 $u_2(t) \Delta P_{c2}(t)$  варијација подешавања брзине за електрану 2, одн. регију 2.

Систем представљен моделом у простору стања је реда  $n = 9$  и описан је матрицама (5.64)-(5.66). Пошто није било могуће пронаћи дефиницију матрице  $C$ , а не знајући ни шта је било излаз модела, инспирисано радовима (Khalil and Kokotovic, 1978; Geromel and Peres, 1985) изабрано је  $C$ , као у (5.66).

Овако дефинисан систем је нестабилан. Значајно је да се уочи да особина нестабилности није инхерентна моделу систему – она је произведена тиме што су у вектор променљивих стања додати интегрални грешака управљања регијама,  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ . У складу с тим, симулација би могла бити изведена уз измењен модел система, из којег би ове две променљиве,  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ , биле изостављене из вектора променљивих стања, али би биле задржане у вектору излаза, што би произвело да модел има пуни ред  $n = 7$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 32.7 & -32.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad (5.65)$$

$$C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad \text{и} \quad D = [0 \quad 0]. \quad (5.66)$$

Овде је одабрана и примењена друга модификација. Како би систем из симулационог примера био стабилан, матрица  $A$  је измењена у складу са задатим степеном стабилности (Škatarić, 2004):

$$A = A + \alpha I_9,$$

где је изабрано је да буде  $\alpha = -10$ , док  $I_9$  означава јединичну матрицу реда 9. Остале матрице система (5.65)-(5.66) су остале неизмењене. Матрица  $A$ , која је промењена како би имала задати степен стабилности, дата је у (5.67):

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 4.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 4.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10.05 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10.05 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 32.7 & -32.7 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

На основу димензија матрице у (5.67) је очигледно да је ред система  $n = 9$ . Међутим, овако добијени систем још увек је неопсервабилан - само четири од његових девет мода је опсервабилно.

Табела 5.1. приказује Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела. На основу Хенкелових сингуларних вредности, донета је одлука да би редуковани ред могао да буде (па је тако и изабран да буде)  $r = 2$ , пошто је трећа Хенкелова сингуларна вредност више него 400 (410,44) пута мања од друге.

За модел редукованог реда, чији је ред  $r = 2$  биће постигнута апроксимација доброг квалитета, како у отвореном, тако и у затвореном колу

дејства. Међутим, на овај начин се занемарују променљиве стања, које би важно било задржати у моделу.

<b>Табела 5.1. Хенкелове сингуларне вредности</b>		
За оригинални и балансирани модел	За <i>први</i> МРР добијен мултимоделовањем уз балансирано одсецање	За <i>други</i> МРР добијен мултимоделовањем уз балансирано одсецање
0.14006	0.099037	0.099037
0.023921	0.016915	0.016915
$0.58281 \cdot 10^{-4}$	$0.41211 \cdot 10^{-4}$	$0.41211 \cdot 10^{-4}$
$0.41813 \cdot 10^{-5}$	$0.29566 \cdot 10^{-5}$	$0.29566 \cdot 10^{-5}$
$0.25878 \cdot 10^{-8}$	$0.17367 \cdot 10^{-21}$	$0.13413 \cdot 10^{-20}$
$0.61066 \cdot 10^{-9}$	$0.1615 \cdot 10^{-23}$	$0.19797 \cdot 10^{-21}$
$0.52878 \cdot 10^{-10}$	$1.4047 \cdot 10^{-28}$	$5.6210 \cdot 10^{-26}$
$0.1103 \cdot 10^{-10}$		
$0.58426 \cdot 10^{-13}$		

Мултимоделовање нам дозвољава да редукујемо ред модела, а при том да задржимо урачунате све променљиве стања, само их при том раздвојимо у два подгрупа, која имају пресек.

Код мултимоделовања, модел редукованог реда, који се састоји од подсистема заједничког језгра и подсистема, који одговара неким модовима који имају мали укупни износ енергије, назван је *први*, а *други* се односи на модел, који се састоји од подсистема заједничког језгра и подсистема, који одговара преосталим модовима, који имају мали укупни износ енергије.

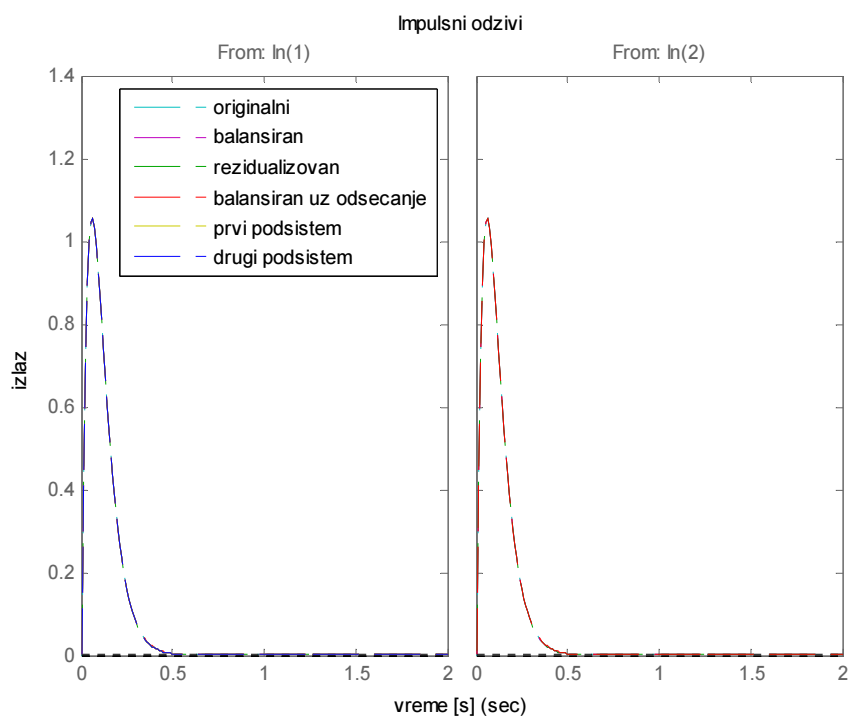
У складу са предлозима датим у (Khalil and Kokotovic, 1978), спори, одн. подсистем заједничког језгра је изабран да има ред  $n_0 = 5$ , а редови два брза подсистема, тј. подсистема, који одговарају модовима са малим укупним износима енергије су, редом,  $n_1 = 2$ , и  $n_2 = 2$ . Стога *први* и *други* подсистем имају исти ред,  $n_0 + n_1 = n_0 + n_2 = 7$ . За *први* и *други* модел редукованог реда, мултимоделовање је изведено кроз балансирано одсецање. На овај начин су

добијена два подсистема, која имају по један улаз, при чему је  $u_1$  улаз *првог* модела, као у (5.43) - (5.46), а  $u_2$  је улаз *другог*, као у (5.47) - (5.50).

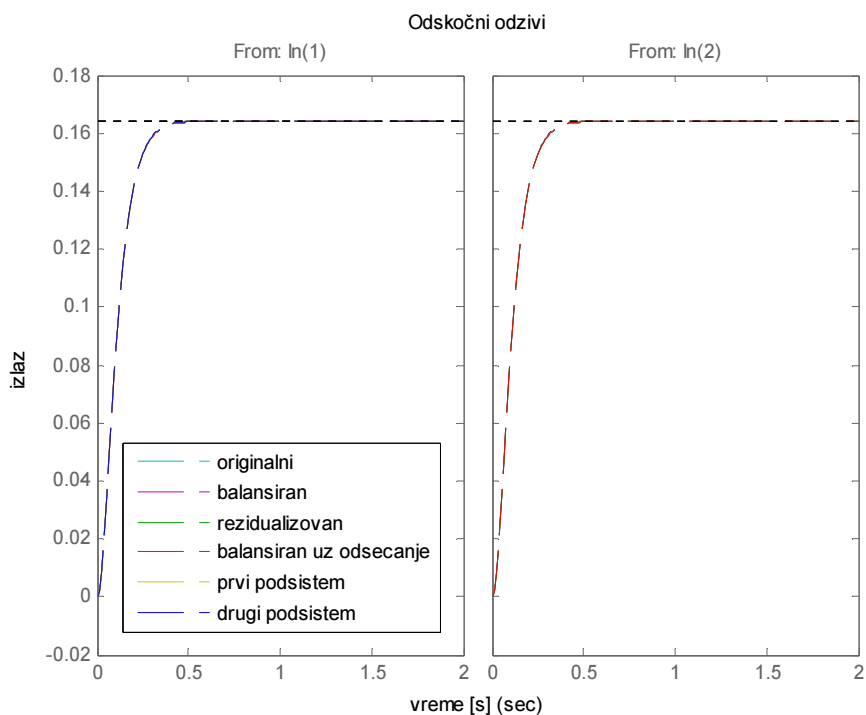
Табела 5.1. садржи такође и Хенкелове сингуларне вредности (ХСВ) за *први* и *други* модел редукованог реда (МРР), који су добијени мултимоделовањем уз примену *балансираног одсецања*. Сваки од подсистема има по један улаз – само сопствени, где  $u_1$  представља улаз првог, а  $u_2$  улаз другог подсистема. Чини се да су највеће четири Хенкелове сингуларне вредности за *први* и *други* подсистем идентичне. Међутим, оне се разликују, а одступање је реда  $10^{-15}$  или мање.

Свака од апроксимација модела, као и оригинални модел, тестирана је у отвореном колу дејства за типичне улазне сигнале: Дираков импулс, одн. импулсни улаз, јединичну одскочну, одн. степ функцију, сигнал рампе и синусну побуду.

На слици 5.1. су приказани одзиви на побуду типа Дираковог импулса: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за четири редукована модела.



**Слика 5.1.** Импулсни одзиви: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда

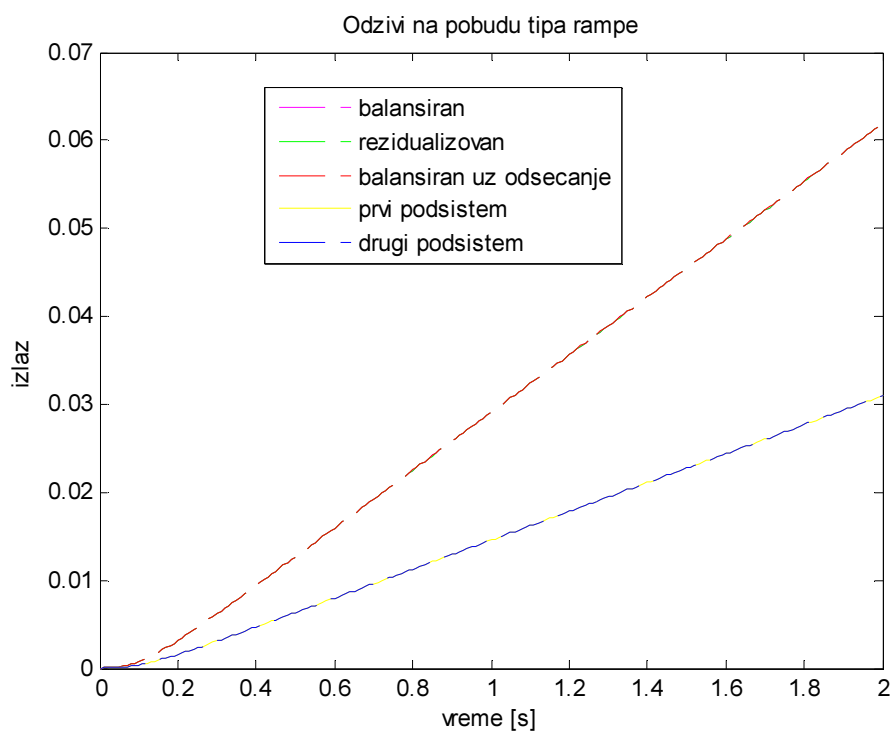


**Слика 5.2.** Одскочни одзиви: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда

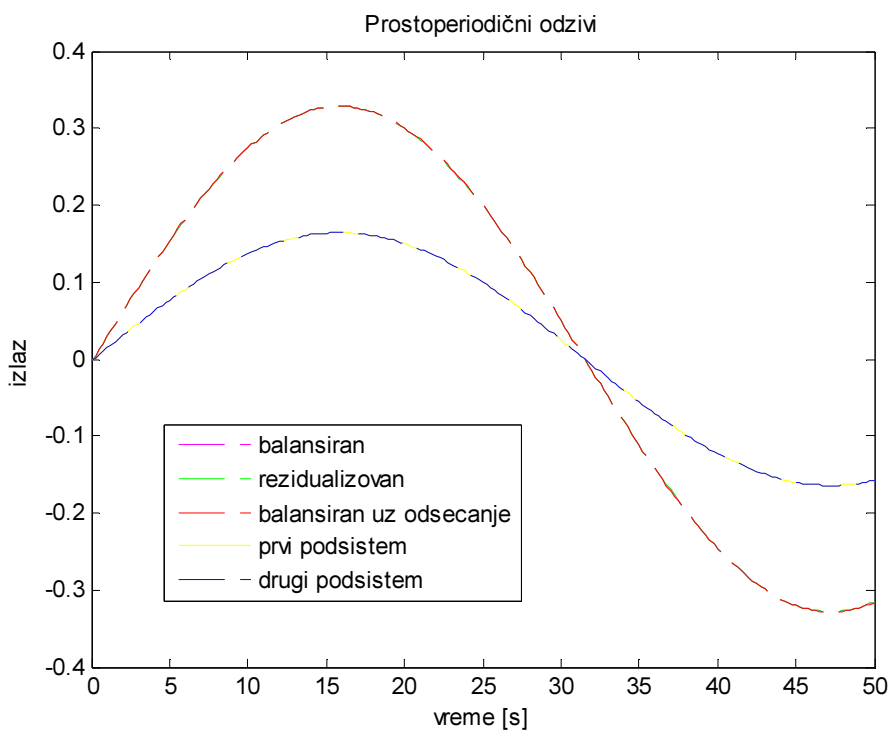
Редуковани модели, чији су импулсни одзиви на слици 5.1., су: модел добијен балансираним одсецањем, балансирани резидуализовани, затим први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. Очигледно је да за овај тип побуде све четири апроксимације дају добро и слично понашање.

Слика 5.2. приказује одзиве на побуду типа јединичног степ импулса, тј. одскочне функције: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, балансирани резидуализовани, први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. И за овај тип побуде све апроксимације су доброг квалитета.

На слици 5.3. приказани су одзиви на побуду типа рампе: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - модел добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. Редуковани модел добијен одсецањем и резидуализовани модел показују добро поклапање, док *први* и *други* подсистем добијен мултимоделовањем, показују значајно одступање од та два. Међутим, понашање оба ова подсистема, и *првог* и *другог* је готово идентично.



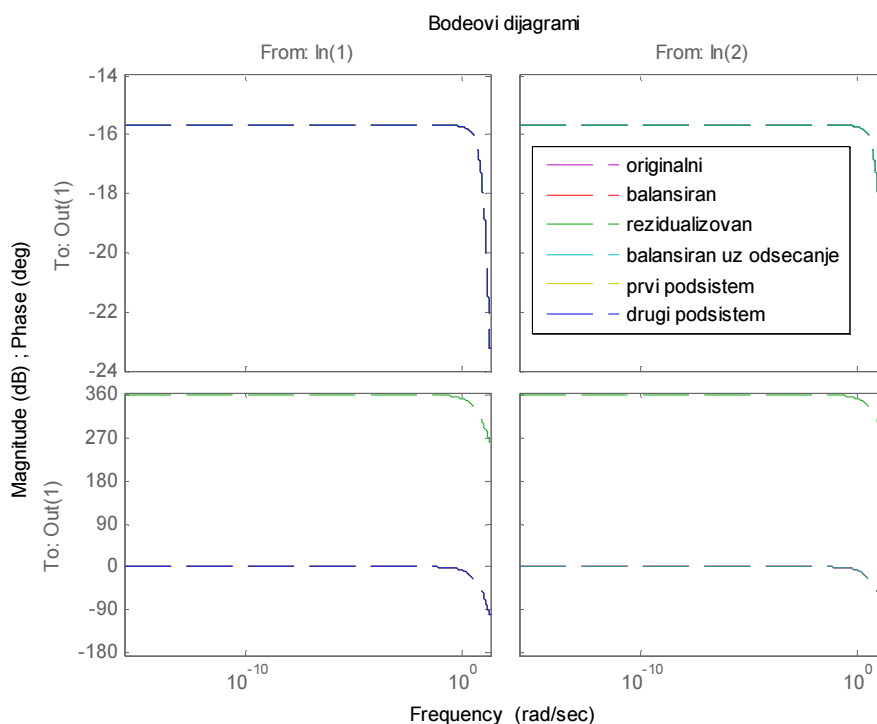
**Слика 5.3.** Одзиви на побуду типа рампе: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда



**Слика 5.4.** Одзиви на простопериодичну побуду: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда

Слика 5.4. приказује одзиве на простопериодичну побуду (синусни улазни сигнал) за све горе наведене моделе. И за овај тип побуде, као и за тип рампе, редуковани модел добијен одсецањем и резидуализовани показују добро поклапање, док мултимоделовањем добијени *први* и *други* подсистем показују значајно одступање од ова два модела. При том је понашање *првог* и *другог* подсистема готово идентично.

На слици 5.5. су приказани Бодеои дијаграми - амплитудске и фазне фреквентне карактеристике за оригинални и балансирани модел и четири различите апроксимације редукованог реда: резидуализовани модел, модел добијен балансирањем одсецањем, као и два подсистема добијена мултимоделовањем, названа *први* и *други*. Изабрани опсег фреквенције, на којем су приказане фреквентне карактеристике, је 20,5 Hz. Фреквентни опсег је изабран на основу карактеристичних учестаности матрице  $A$  оригиналног модела, која је трансформисана до прописаног степена стабилности и дата са (5.67). Разлика у фазним фреквентним карактеристикама на слици 5.5. је привид, јер износи  $360^\circ$ .



**Слика 5.5.** Бодеои дијаграми - амплитудске и фазне фреквентне карактеристике за оригинални и балансирани модел и четири различите апроксимације редукованог реда



Карактеристичне вредности матрице  $A$  из (5.67) су:

$-10,1594 + 2,6794i$ ;  $-10,1594 - 2,6794i$ ;  $-10,0000$ ;  $-10,0000$ ;  $-10,5211$ ;  $-14,1672$ ;  $-14,3885$ ;  $-20,3617$  и  $-20,3427$ .

Затим су матрице оптималног појачања израчунате за оригинални модел, његов балансирани еквивалент и сва четири модела редукованог реда: један добијен помоћу *балансираног одсецања*, један добијен уз *балансирану резидуализацију*, и два модела редукованог реда састављена од спорог подсистема и једног брзог подсистема - названа *први* и *други*, који је састављен од спорог подсистема и преосталог дела брзог подсистема. Матрице потребне за критеријум оптимизације, одабране у складу са матрицама из (Khalil and Kokotovic, 1978) и употребљене за оригинални и балансирани нередуковани модел, као и за различите моделе редукованог реда су:

$$\begin{aligned} Q &= I_9, \quad R = 20I_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \\ Q_{od\ sec\ anja} &= Q_{rezidualizacije} = I_2, \quad R_{od\ sec\ anja} = R_{rezidualizacije} = 20I_2, \\ Q_{prvog} &= Q_{drugog} = I_7, \quad R_{prvog} = R_{drugog} = 20, \end{aligned} \quad (5.68)$$

где  $I_k$  означава јединичну матрицу димензије  $k$ .

Симулације су извршене уз примену Matlab програмског пакета. Израчунате су матрице појачања пропорционалних регулатора за оригинални и балансирани модел пуног реда, за редуковане моделе реда 2, добијене одсецањем и резидуализацијом, као и за *први* и *други* редуковани модел реда 7, који су добијени мултимоделовањем.

Одговарајуће матрице за први и други подсистем,  $K_{prvog}$  и  $K_{drugog}$ , су блиских вредности са одговарајућим подматрицама  $K_{balansiranog}$  и имају прикладне димензије.

$$K_{balansiranog} = \begin{bmatrix} -32810^3 & -15610^3 & 03410^4 & -01510^4 & -03310^3 & 08910^3 & -03210^5 & -01110^3 & -26510^3 \\ -32810^3 & -15610^3 & 03410^4 & -01510^4 & 03310^3 & -08910^3 & 03210^5 & 01110^3 & 26510^3 \end{bmatrix},$$

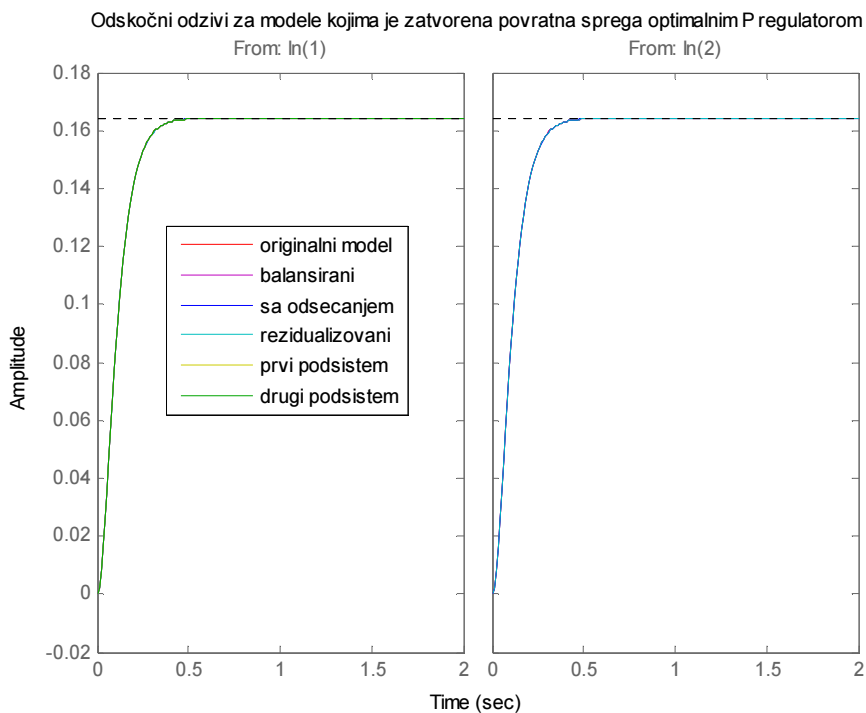
$$K_{od\ sec\ anja} = \begin{bmatrix} -3.2778 \cdot 10^{-3} & -1.5597 \cdot 10^{-3} \\ -3.2778 \cdot 10^{-3} & -1.5597 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$K_{rezidualizacije} = \begin{bmatrix} -3.2785 \cdot 10^{-3} & -1.5635 \cdot 10^{-3} \\ -3.2785 \cdot 10^{-3} & -1.5635 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$K_{prvog} = [-3.28 \cdot 10^{-3} \quad -1.561 \cdot 10^{-3} \quad 0.34 \cdot 10^{-4} \quad -0.15 \cdot 10^{-4} \quad -0.397 \cdot 10^{-3} \quad -0.78 \cdot 10^{-4} \quad -0.247 \cdot 10^{-3}]$$

$$K_{drugog} = [-3.280 \cdot 10^{-3} \quad -1.561 \cdot 10^{-3} \quad 0.34 \cdot 10^{-4} \quad -0.15 \cdot 10^{-4} \quad 0.586 \cdot 10^{-3} \quad -0.111 \cdot 10^{-3} \quad 2.234 \cdot 10^{-3}]$$

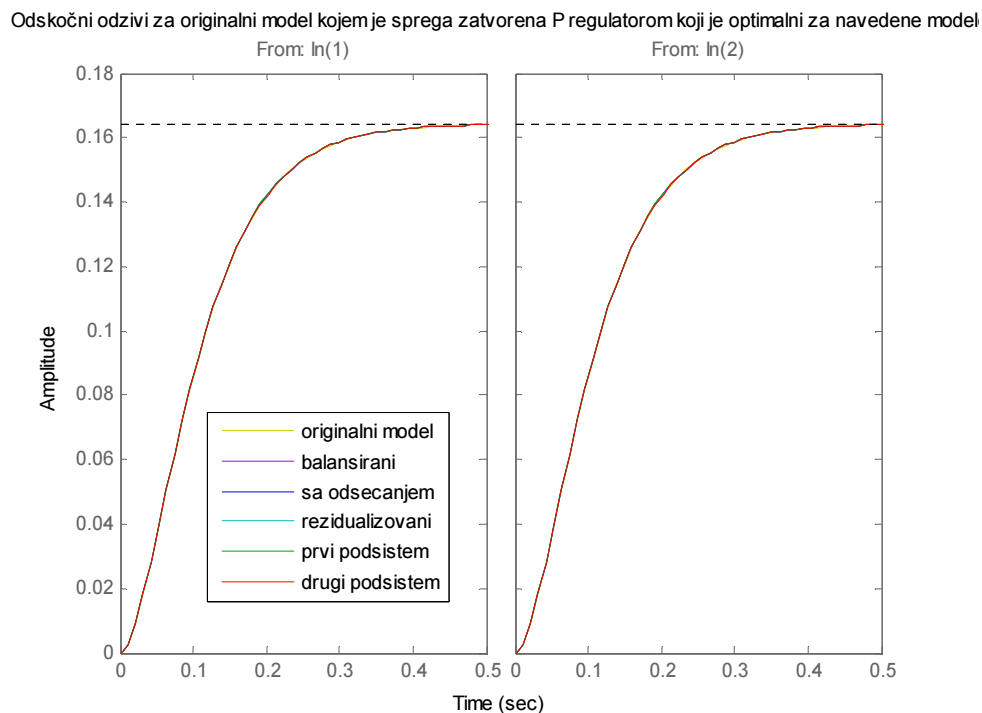
Системи у затвореном колу дејства, такође су тестирани за различите функције улаза: импулсну, одскочну (step), рампу и синусну. Затим су регулатори, пројектовани за моделе редукованог реда, искоришћени да се затвори спрега на балансираном моделу пуног реда. Решене су одговарајуће једначине Љапунова и трагови матрица, које су решења ових једначина, су упоређивани да би се проценило, који је од модела у затвореном колу дејства, добијених на овај начин, најближи оптималном случају у којем регулатор има матрицу појачања  $K_{balansiranog}$ .



**Слика 5.6.** Одскочни одзиви за затворено коло дејства: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда, а сваки је у спрези затвореној одговарајућим оптималним П дејством

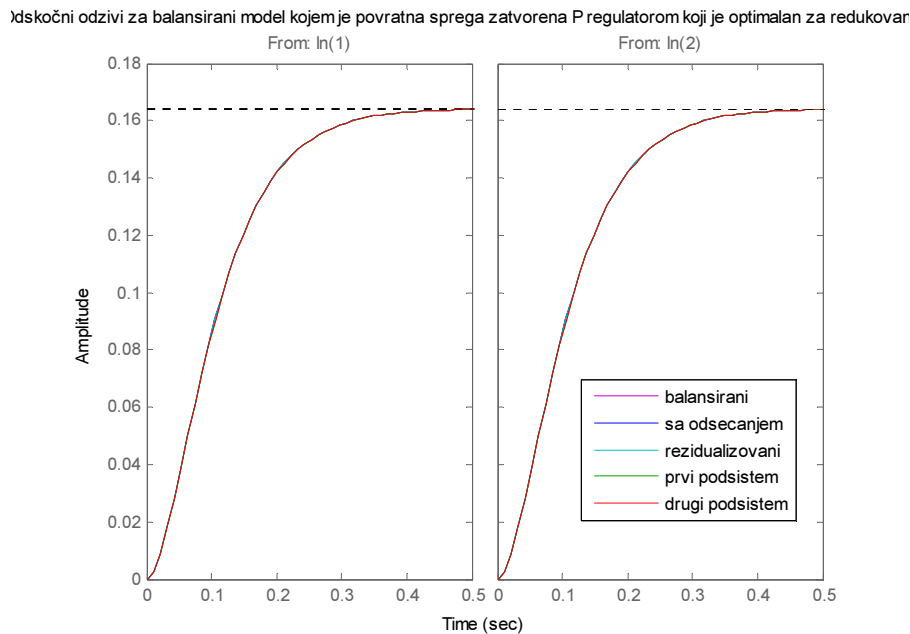
На слици 5.6. су приказани одзиви на побуду типа јединичног импулса за моделе са затвореним колом дејства: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, а и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. За сваки од модела је затворена повратна спрега по стању одговарајућим оптималним ЛКГ регулатором П дејства. Очигледно је да за овај тип побуде све апроксимације дају добре резултате и готово идентично понашање.

Слика 5.7. приказује одзиве на побуду типа јединичног импулса за оригинални модел са затвореним колом дејства, а регулатори, који се користе су оптимални за све наведене моделе: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, као и за први и други подсистем. Први и други подсистем су добијени мултимоделовањем. Све четири апроксимације дају добре резултате и готово идентично понашање.



**Слика 5.7.** Одскочни одзиви за затворено коло дејства: оригинални систем користи оптимални ЛКГ регулатор за, редом: оригинални модел, балансирани модел, као и четири различите апроксимације редукованог реда

Слика 5.8. приказује одзиве на побуду типа јединичног импулса за балансирани модел са затвореним колом дејства, а регулатори, који се користе, су оптимални за све наведене моделе: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, а и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. И за овај случај, све четири приказане апроксимације дају добре резултате и готово идентично понашање.



**Слика 5.8.** Одскочни одзиви за затворено коло дејства: балансирани систем користи оптимални ЛКГ регулатор за, редом: оригинални модел, балансирани модел, као и четири различите апроксимације редукованог реда

На крају је регулатор састављен од  $K_{prvog}$  и  $K_{drugog}$ , као у:

$$K_{bal II} = \begin{bmatrix} -3.28 \cdot 10^3 & -1.561 \cdot 10^3 & 0.341 \cdot 10^4 & -0.151 \cdot 10^4 & -0.397 \cdot 10^3 & -0.78 \cdot 10^4 & -0.247 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ -3.28 \cdot 10^3 & -1.561 \cdot 10^3 & 0.341 \cdot 10^4 & -0.151 \cdot 10^4 & 0.586 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -0.111 \cdot 10^3 & 2.234 \cdot 10^3 \end{bmatrix}.$$

Вредности оптималних критеријума за балансирани модел са сопственим оптималним П регулатором и вредности субоптималних критеријума за балансирани модел са регулатором, који је оптималан за различите моделе редукованог реда, су наизглед идентични, као у *КритеријумиВ*:

$$КритеријумиВ = [0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584].$$

На основу вредности у *KriterijumiB*, чини се да је достигнут жељени квалитет апроксимације за критеријум оптимизације:

$$J_{\text{aproksimiran}} = J_{\text{bal. I i II}} = \frac{1}{2}J_{\text{prvi}} + \frac{1}{2}J_{\text{drugi}} \approx 0.4584.$$

Апсолутне грешке у односу на балансирани оптимални случај су:

$$\text{GreškaKriterijumaB} = [0 \quad 0.768 \cdot 10^{-5} \quad 0.772 \cdot 10^{-5} \quad 0.1402 \cdot 10^{-4} \quad 0.1030 \cdot 10^{-4} \quad 0.469 \cdot 10^{-5}].$$

Међутим, њихово одступање од вредности оптималног критеријума, дато је у *GreškaKriterijumaB* и, редом, за балансирани модел са регулатором, који је оптимални за редуковани модел добијен одсецањем, то одступање је  $0,768 \cdot 10^{-5}$ . За балансирани модел са регулатором, који је оптимални за редуковани модел добијен резидуализацијом, то одступање је  $0,772 \cdot 10^{-5}$ . Затим за балансирани модел са регулатором, који је оптимални за *први* редуковани модел добијен мултимоделовањем ово одступање је  $0,1402 \cdot 10^{-4}$ , а за балансирани модел са регулатором, који је оптимални за *други* редуковани модел добијен мултимоделовањем то је  $0,1030 \cdot 10^{-4}$ .

За регулатор састављен од матрица појачања  $K_{\text{prvog}}$  и  $K_{\text{drugog}}$ , као што је горе описано, разлика између одговарајућег субоптималног критеријума и оног оптималног је најмања за све тестиране моделе редукованог реда:  $0,469 \cdot 10^{-5}$ . Ово је у сагласности са квалитетом апроксимације, који смо очекивали на основу резултата из (Khalil and Kokotovic, 1978).

Одговарајуће релативне грешке у односу на вредност оптималног критеријума за балансирани систем су:

$$\text{RelativnaGreškaKriterijumaB} = [0\% \quad 0.0017\% \quad 0.0017\% \quad 0.0031\% \quad 0.0022\% \quad 0.0010\%].$$

Очигледно, комбинација матрица оптималних појачања првог и другог редукованог модела производи понашање модела у затвореном колу дејства, које је најближе балансираном моделу пуног реда. Релативно одступање од оптималних вредности критеријума је у променљивој *RelativnaGreškaKriterijumaB* и то, респективно за балансирани модел са регулатором оптималним за редуковани модел добијен одсецањем је 0,0017% (мање од једне петине промила), затим исто за балансирани модел са регулатором оптималним за редуковани модел добијен резидуализацијом 0,0017%. За балансирани модел са регулатором

оптималним за *први* редуковани модел добијен мултимоделовањем, релативна грешка критеријума је 0,0031%, затим за балансирани модел са регулатором оптималним за *други* редуковани модел добијен мултимоделовањем је 0,0022%.

За регулатор састављен од  $K_{prvog}$  и  $K_{drugog}$ , као што је горе описано, релативна разлика између одговарајућег субоптималног критеријума и глобално оптималног је најмања од свих тестираних модела редукованог реда: 0,0010%. Овај резултат потврђује да је на овај начин постигнута апроксимација веома доброг квалитета.

Поређење установљених техника за редуковање реда са мултимоделовањем реализованим на савремени и нови начин, дало је веома добре резултате. Може се изабрати прикладнија техника за редукацију реда модела, ако би се у процес избора уградиле све информације о оригиналном систему и ограничењима. На основу редукованих модела добијених мултимоделовањем пројектовани су регулатори, који су оптимални за сваки од модела редукованог реда. Регулатори су примењени на модел пуног реда, и дали су апроксимације критеријума перформансе близу оптималне вредности. На основу регулатора за *први* и *други* подсистем добијен мултимоделовањем, формиран је нови регулатор и примењен на модел пуног реда, уз задовољавајући квалитет апроксимације оптималног случаја (Ратковић Ковачевић и Шкатарић, 2011).

Затим је симулација поновљена, тако да је за *први* и *други* модел редукованог реда (МРР) мултимоделовање изведено кроз балансирану резидуализацију. Табела 5.2. приказује Хенкелове сингуларне вредности оригиналног и балансираног модела, као и првог и другог подсистема у овом случају. На основу Хенкелових сингуларних вредности донета је иста одлука за ред редукованих модела:  $r = 2$ , као и у претходном случају.

У складу са предлозима датим у (Khalil and Kokotovic, 1978) спори, одн. подсистем заједничког језгра, изабран је тако да има ред  $n_0 = 5$ , и редови два брза подсистема, тј. подсистема који одговарају модовима са малим укупним износима енергије били су, редом,  $n_1 = 2$ , и  $n_2 = 2$ , па су стога *први* и *други* подсистем опет имали исти ред,  $n_0 + n_1 = n_0 + n_2 = 7$ . На овај начин су добијена два подсистема, која имају по два улаза, при чему је *први* као у (5.23) - (5.25), а  $u_2$  је улаз *другог*, као у (5.26) - (5.28).

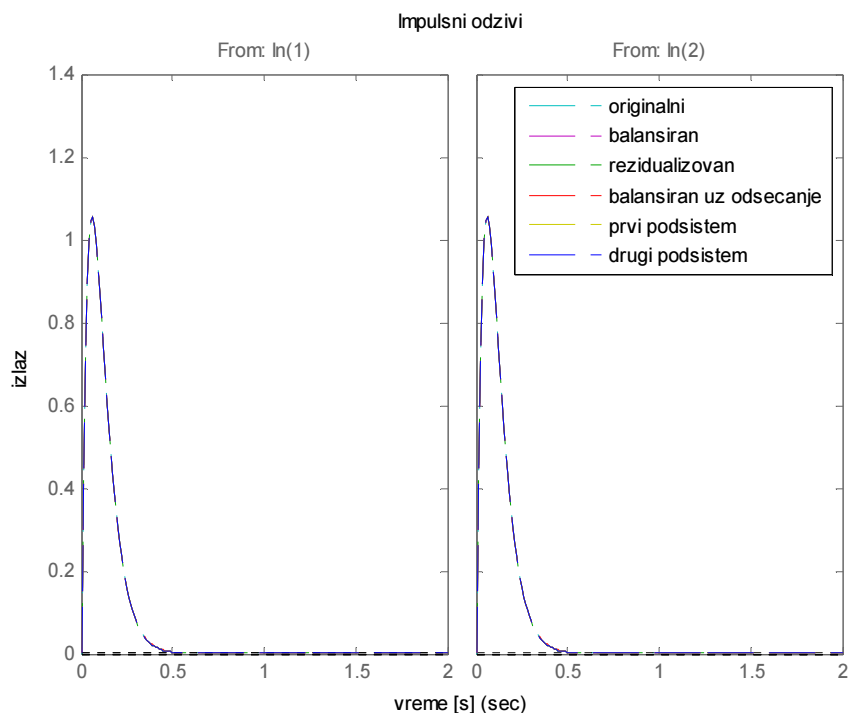
Табела 5.2. Хенкелове сингуларне вредности		
За оригинални и балансирани модел	За <i>први</i> МРР добијен мултимоделовањем уз балансирану резидуализацију	За <i>други</i> МРР добијен мултимоделовањем уз балансирану резидуализацију
0.14006	0.14006	0.14006
0.023921	0.023921	0.023921
$0.58281 \cdot 10^{-4}$	$5.8281 \cdot 10^{-5}$	$5.8281 \cdot 10^{-5}$
$0.41813 \cdot 10^{-5}$	$4.1813 \cdot 10^{-6}$	$4.1813 \cdot 10^{-6}$
$0.25878 \cdot 10^{-8}$	$2.1886 \cdot 10^{-19}$	$5.8817e \cdot 10^{-19}$
$0.61066 \cdot 10^{-9}$	$4.8547 \cdot 10^{-20}$	$6.7968 \cdot 10^{-20}$
$0.52878 \cdot 10^{-10}$	$2.8407 \cdot 10^{-24}$	$1.3792 \cdot 10^{-20}$
$0.1103 \cdot 10^{-10}$		
$0.58426 \cdot 10^{-13}$		

Сваки од подсистема има по два улаза, као и оригинални и балансирани модел пуног реда, али постоји у сваком од њих и део, који одговара малом укупном износу енергије, који има само један улаз. Чини се да су највеће четири Хенкелове сингуларне вредности за *први* и *други* подсистем и овде идентичне. Међутим, оне се разликују, а одступање је реда  $10^{-15}$  или мање.

Свака од апроксимација модела, као и оригинални модел, тестирана је у отвореном колу дејства за типичне улазне сигнале: Дираков импулс, одн. импулсни улаз, јединичну одскочну, одн. степ функцију, сигнал рампе и синусну побуду. У временском домену, све апроксимације дају добро и слично понашање, осим што и *први* и *други* подсистем добијен мултимоделовањем, показују значајно одступање од осталих модела у случају побуде сигналом *рампе* или *синусног* улазног сигнала. Међутим, понашање оба ова модела, и *првог* и *другог* је готово идентично.

На слици 5.9. су приказани одзиви на побуду типа Дираковог импулса: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један

добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, а и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем уз резидуализацију. Очигледно је да за побуду типа Дираковог импулса све апроксимације дају добро и слично понашање.



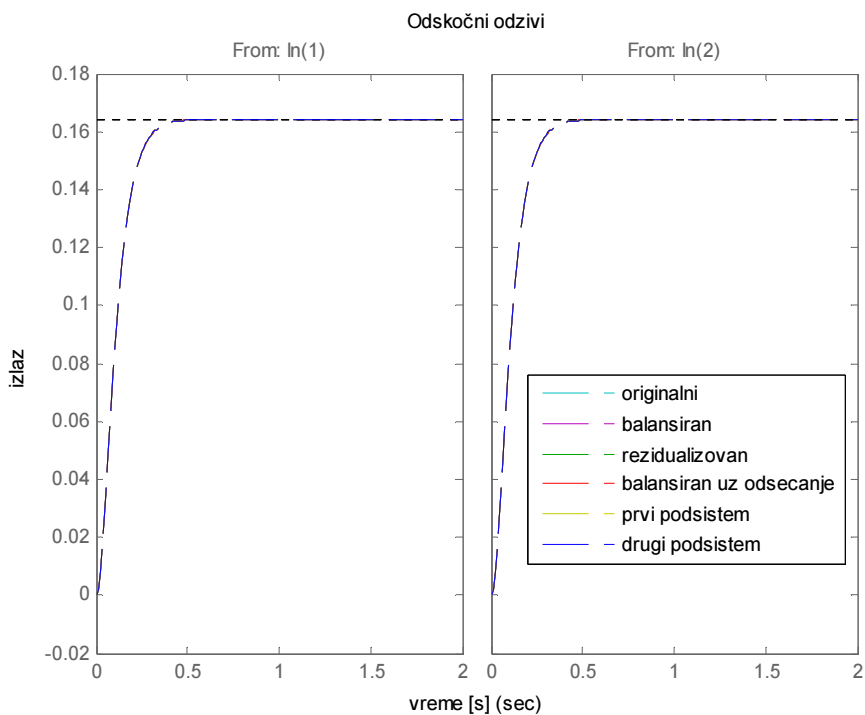
**Слика 5.9.** *Импулсни одзиви: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда*

Слика 5.10. приказује одзиве на побуду типа јединичног импулса, тј. одскочне функције: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, а и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем уз резидуализацију. И за овај тип побуде све апроксимације су доброг квалитета.

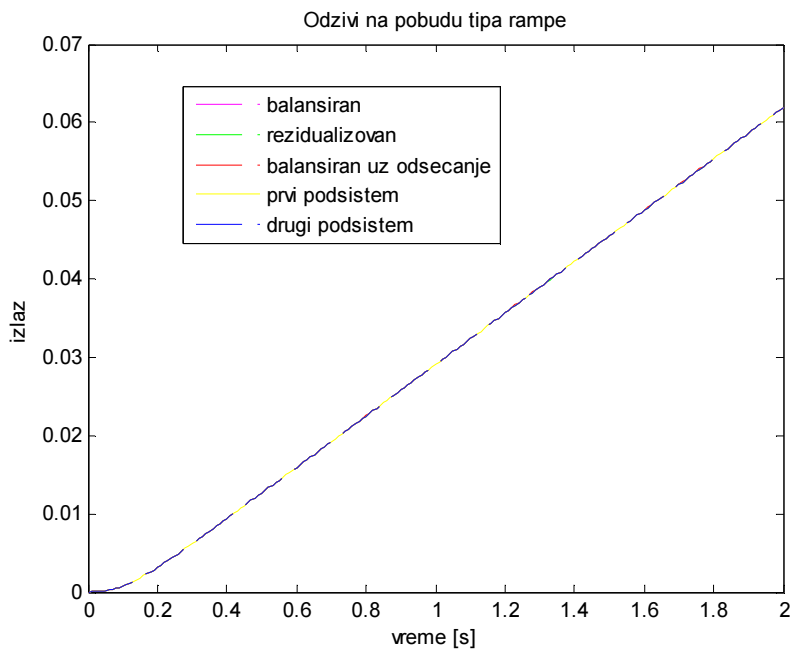
На слици 5.11. су приказани одзиви на побуду типа рампе: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - добијен балансираним одсецањем, балансирани резидуализовани, и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем уз резидуализацију. Сва четири модела редукованог реда показују добро поклапање са оригиналним и балансираним моделом пуног реда, за разлику од претходног случаја, када је за



мултимоделовање било коришћено балансирано одсецање (упоредити слике 5.3. и 5.11.).

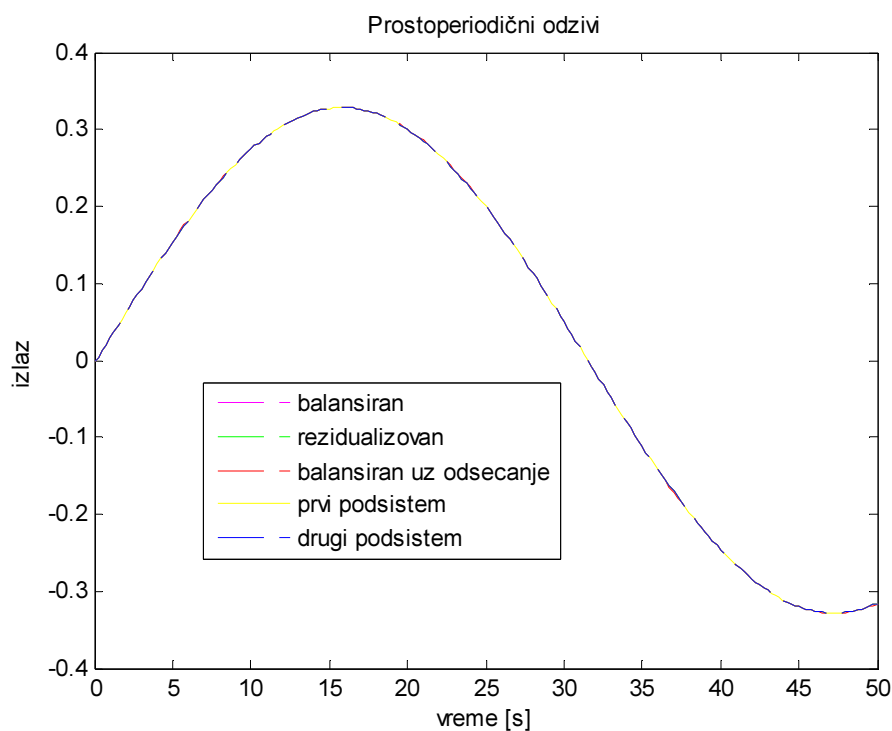


**Слика 5.10.** Одскочни одзиви: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда



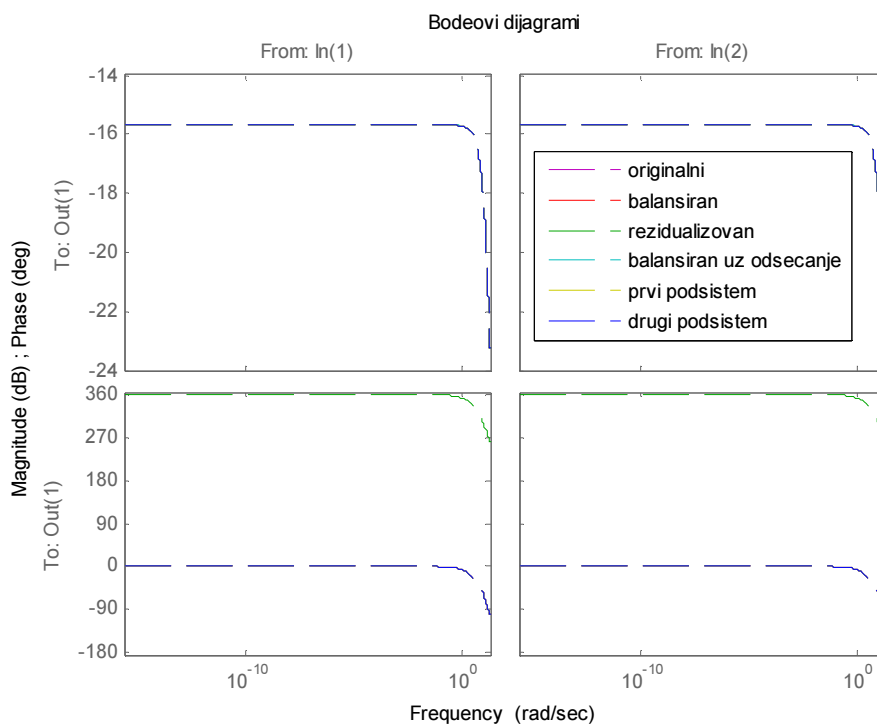
**Слика 5.11.** Одзиви на побуду типа рампе: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда

Слика 5.12. приказује одзиве на простопериодичну побуду (*синусни* улазни сигнал) за све горе наведене моделе. И за случај простопериодичне побуде, као и за побуду типа рампе, сва четири редукована модела показују добро поклапање са оригиналним и балансираним моделом, када је мултимоделовање извршено уз резидуализацију. Треба уочити разлику у односу на претходни случај, када је за мултимоделовање било коришћено балансирано одсецање (упоредити слику 5.4. са сликом 5.12.)



**Слика 5.12.** Одзиви на простопериодичну побуду: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда

На слици 5.13. приказани су Бодеови дијаграми - амплитудске и фазне фреквентне карактеристике за оригинални и балансирани модел и четири различите апроксимације редукованог реда: резидуализовани модел, модел добијен балансираним одсецањем, као и два подсистема добијена мултимоделовањем уз резидуализацију, названа први и други. Изабрани фреквентни опсег на којем су фреквентне карактеристике приказане и овде је до 20,5 Hz. Разлика у фазним фреквентним карактеристикама на слици 5.13. је привид, јер износи  $360^\circ$ .



**Слика 5.13.** Бодеве дијаграме - амплитудске и фазне фреквентне карактеристике за оригинални и балансирани модел и четири различите апроксимације редукованог реда

Затим су матрице оптималног појачања израчунате за оригинални модел, његов балансирани еквивалент и сва четири модела редукованог реда: један добијен помоћу *балансираног одсецања*, један добијен уз *балансирану резидуализацију*, и два модела редукованог реда састављена од спорог подсистема и једног брзог подсистема, названа *први* и *други* - састављен од спорог подсистема и преосталог дела брзог подсистема. Матрице потребне за критеријум оптимизације, одабране су у складу са матрицама из (Khalil and Kokotovic, 1978) и употребљене за оригинални и балансирани нередуквани модел, као и за различите моделе редукованог реда и исте су као у претходном случају (5.68).

Симулације су извршене уз примену МАТЛАБ програмског пакета. Израчунате су матрице појачања пропорционалних регулатора за оригинални и балансирани модел пуног реда, за редуковане моделе реда 2, добијене одсецањем и резидуализацијом, као и за први и други редуковани модел реда 7.

Одговарајуће матрице за први и други подсистем,  $K_{prvog}$  и  $K_{drugog}$ , су блиских вредности са одговарајућим подматрицама  $K_{balansiranog}$  и имају прикладне димензије.

$$K_{balansiranog} = \begin{bmatrix} -32810^3 & -15610^3 & 03410^4 & -01510^4 & -03310^3 & 08910^3 & -03210^5 & -01110^3 & -26510^3 \\ -32810^3 & -15610^3 & 03410^4 & -01510^4 & 03310^3 & -08910^3 & 03210^5 & 01110^3 & 26510^3 \end{bmatrix},$$

$$K_{od\ secanja} = \begin{bmatrix} -3.2778 \cdot 10^{-3} & -1.5597 \cdot 10^{-3} \\ -3.2778 \cdot 10^{-3} & -1.5597 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

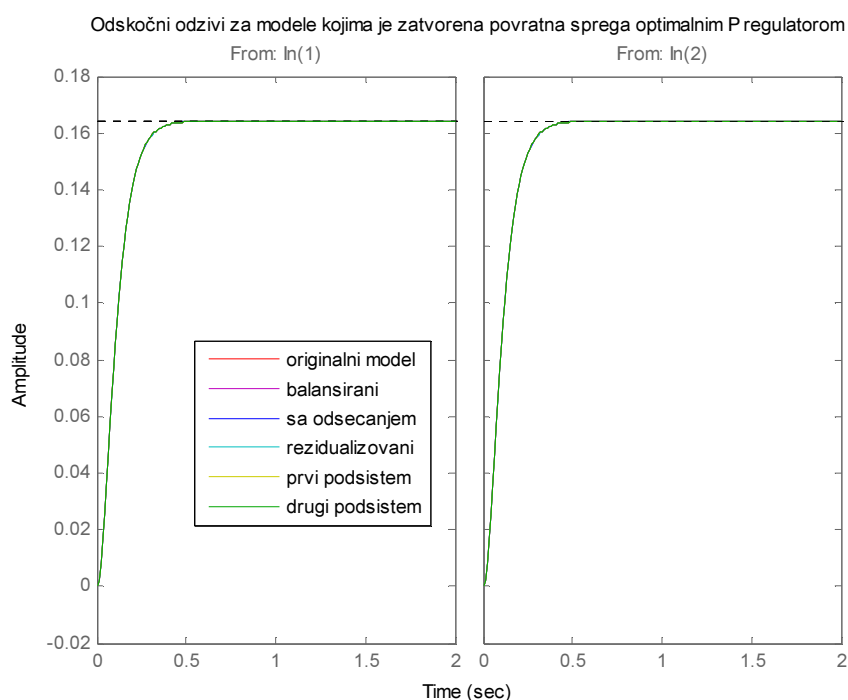
$$K_{rezidualizacije} = \begin{bmatrix} -3.2785 \cdot 10^{-3} & -1.5635 \cdot 10^{-3} \\ -3.2785 \cdot 10^{-3} & -1.5635 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$K_{prvog} = \begin{bmatrix} -3.28 \cdot 10^{-3} & -1.56 \cdot 10^{-3} & 0.34 \cdot 10^{-4} & -0.15 \cdot 10^{-4} & -0.298 \cdot 10^{-3} & -0.63 \cdot 10^{-4} & -0.22 \cdot 10^{-3} \\ -3.28 \cdot 10^{-3} & -1.56 \cdot 10^{-3} & 0.34 \cdot 10^{-4} & -0.15 \cdot 10^{-4} & 0.561 \cdot 10^{-3} & 0.76 \cdot 10^{-4} & 0.20 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$K_{drugog} = \begin{bmatrix} -3.28 \cdot 10^{-3} & -1.56 \cdot 10^{-3} & 0.34 \cdot 10^{-4} & -0.15 \cdot 10^{-4} & -0.39 \cdot 10^{-3} & 0.90 \cdot 10^{-4} & -0.24 \cdot 10^{-4} \\ -3.28 \cdot 10^{-3} & -1.56 \cdot 10^{-3} & 0.34 \cdot 10^{-4} & -0.15 \cdot 10^{-4} & 0.63 \cdot 10^{-3} & -0.11 \cdot 10^{-3} & 2.24 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Системи у затвореном колу дејства су такође тестирани за различите функције улаза: импулсну, одскочну (степ), рампу и синусну. Затим су регулатори, пројектовани за моделе редукованог реда, искоришћени да се затвори спрега на балансираном моделу пуног реда. Решене су одговарајуће једначине Љапунова и трагови матрица, које су њихова решења, упоређивани су да би се одредило, који је од модела у затвореном колу дејства, добијених на овај начин, најближи оптималном случају у којем регулатор има матрицу појачања  $K_{balansiranog}$ .

На слици 5.14. су приказани одзиви на побуду типа јединичног импулса за моделе са затвореним колом дејства: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, а и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. За сваки од модела је затворена повратна спрега по стању, одговарајућим оптималним ЛКГ регулатором П дејства. Очигледно је да за овај тип побуде све апроксимације дају добре резултате и готово идентично понашање.

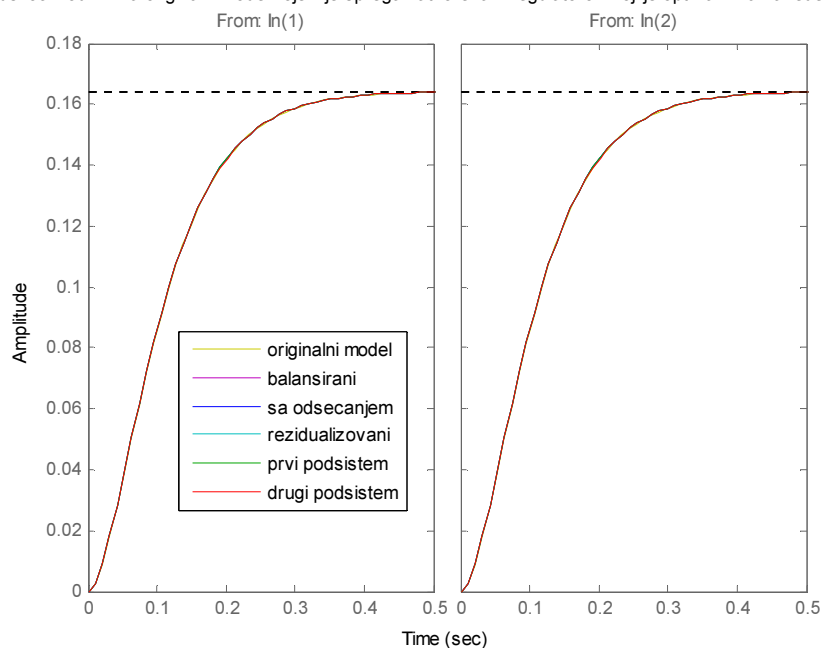


**Слика 5.14.** Одскочни одзиви за затворено коло дејства: оригинални и балансирани систем се пореде са четири различите апроксимације редукованог реда, а сваки је у спрези затвореној одговарајућим оптималним П дејством

Слика 5.15. приказује одзиве на побуду типа јединичног импулса за оригинални модел са затвореним колом дејства. Регулатори, који се користе за затварање спрегнутих преноса, оптимални су за све наведене моделе: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, а и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. И за овај случај све апроксимације дају добре резултате и готово идентично понашање.

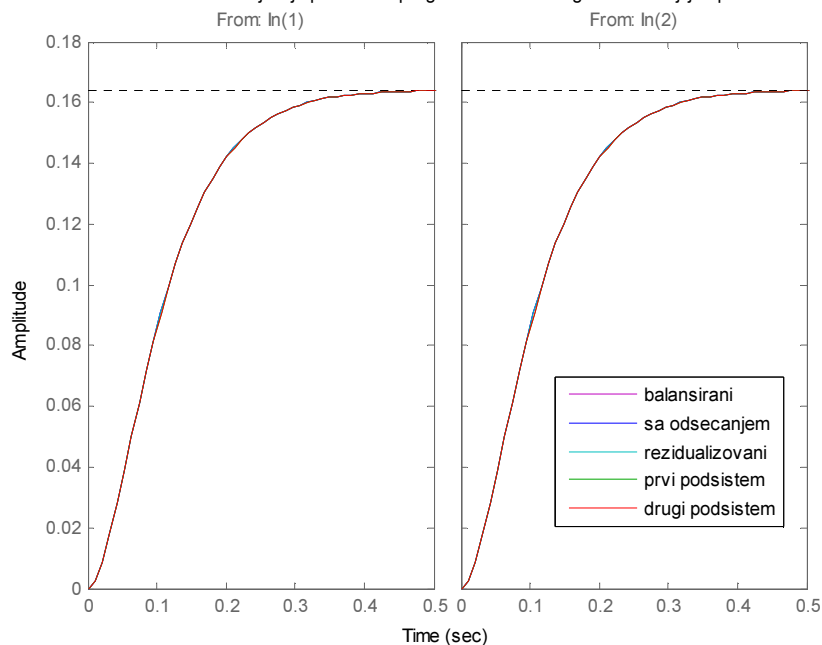
Слика 5.16. приказује одзиве на побуду типа јединичног импулса за балансирани модел са затвореним колом дејства, а регулатори, који се користе су оптимални за све наведене моделе: за оригинални и балансирани модел пуног реда, као и за редуковане моделе - један добијен балансираним одсецањем, затим балансирани резидуализовани, а и за први и други подсистем, који су добијени мултимоделовањем. Очигледно је да и за овај случај све апроксимације дају добре резултате и готово идентично понашање.

Одскочни одзиви за оригинални модел којем је спрега затворена P регулатором који је оптимални за наведене модел



**Слика 5.15.** Одскочни одзиви за затворено коло дејства: оригинални систем користи оптимални ЛКГ регулатор за, редом: оригинални модел, балансирани као и четири различите апроксимације редукованог реда

Одскочни одзиви за балансирани модел којем је повратна спрега затворена P регулатором који је оптималан за редукован



**Слика 5.16.** Одскочни одзиви за затворено коло дејства: балансирани систем користи оптимални ЛКГ регулатор за, редом: оригинални модел, балансирани као и четири различите апроксимације редукованог реда

На крају, регулатор је састављен од  $K_{prvog}$  и  $K_{drugog}$  као у (5.69):

$$K_{bal.II} = \frac{1}{2}(K_{prvog} + K_{drugog}), \quad (5.69)$$

$$K_{bal.II} = \begin{bmatrix} -3.28 \cdot 10^3 & -1.56 \cdot 10^3 & 0.3410^4 & -0.1510^4 & -0.34410^3 & -0.63 \cdot 10^4 & -0.22 \cdot 10^3 & 0.90 \cdot 10^4 & -0.24 \cdot 10^4 \\ -3.28 \cdot 10^3 & -1.56 \cdot 10^3 & 0.3410^4 & -0.1510^4 & 0.58910^3 & 0.76 \cdot 10^4 & 0.20 \cdot 10^3 & -0.11 \cdot 10^3 & 2.24 \cdot 10^3 \end{bmatrix}.$$

Вредности оптималних критеријума за балансирани модел са сопственим оптималним II регулатором и вредности субоптималних критеријума за балансирани модел са регулатором, који је оптималан за различите моделе редукованог реда, су наизглед идентични, као у претходном случају и као у *KriterijumiB*:

$$KriterijumiB = [0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584 \quad 0.4584].$$

На основу вредности у *KriterijumiB*, чини се да је достигнут жељени квалитет апроксимације за критеријум оптимизације (5.70):

$$J_{aproximiran} = J_{bal.II} = \frac{1}{2}J_{prvi} + \frac{1}{2}J_{drugi} \approx 0.4584. \quad (5.70)$$

Апсолутне грешке у односу на балансирани (уравнотежени) оптимални случај су:

$$GreškaKriterijumaB = [0 \quad 0.768 \cdot 10^{-5} \quad 0.772 \cdot 10^{-5} \quad 0.836 \cdot 10^{-4} \quad 0.431 \cdot 10^{-4} \quad 0.490 \cdot 10^{-5}].$$

Међутим, њихово одступање од вредности оптималног критеријума дато је у *GreškaKriterijumaB* и, прве три вредности су идентичне, као у претходном случају. Затим за балансирани модел са регулатором, који је оптимални за *први* редуковани модел добијен мултимоделовањем ово одступање је  $0,836 \cdot 10^{-4}$ , а за балансирани модел са регулатором, који је оптимални за *други* редуковани модел добијен мултимоделовањем то је  $0,431 \cdot 10^{-4}$ . Ове апсолутне грешке су мање него у претходном случају.

За регулатор састављен од матрица појачања  $K_{prvog}$  и  $K_{drugog}$ , као што је горе описано, разлика између одговарајућег субоптималног критеријума и оног оптималног је најмања за све тестиране моделе редукованог реда:  $0,490 \cdot 10^{-5}$ . Ова апсолутна грешка је мало већа, него код мултимоделовања уз балансирано

одсецање, мада је веома мала. Ово је у сагласности са квалитетом апроксимације, који смо очекивали на основу резултата из (Khalil and Kokotovic, 1978).

Одговарајуће релативне грешке у односу на вредност оптималног критеријума за балансирани систем су:

$$RelativnaGreškaKriterijumaB = [0\% \ 0.0017\% \ 0.0017\% \ 0.0018\% \ 0.0009\% \ 0.0011\%].$$

Очигледно, комбинација матрица оптималних појачања првог и другог редукованог модела производи понашање модела у затвореном колу дејства, које је најближе балансираном моделу пуног реда. Релативно одступање од оптималних вредности критеријума је у *RelativnaGreškaKriterijumaB* и то, респективно: за балансирани модел са регулатором оптималним за редуковани модел добијен одсецањем је 0,0017%, затим исто за балансирани модел са регулатором оптималним за редуковани модел добијен резидуализацијом 0,0017%. За балансирани модел са регулатором оптималним за *први* редуковани модел добијен мултимоделовањем, релативна грешка критеријума је 0,0018%, затим за балансирани модел са регулатором оптималним за *други* редуковани модел добијен мултимоделовањем је 0,0009%.

За регулатор састављен од  $K_{prvog}$  и  $K_{drugog}$ , као што је горе описано, релативна разлика између одговарајућег субоптималног критеријума и оног оптималног је најмања од свих тестираних модела редукованог реда: 0,0011%. Овај резултат потврђује да је поново постигнута апроксимација доброг квалитета.

У овом погављу су две већ установљене технике за редуkcију реда изведене, комбиноване са мултимоделовањем и балансирањем и нови приступ је дао веома добре резултате, како за апроксимацију модела у отвореном, тако и у затвореном колу дејства, за реалан инжењерски пример.



## **6. УОПШТЕНО МУЛТИМОДЕЛОВАЊЕ КРОЗ БАЛАНСИРАЊЕ СИСТЕМА УЗ ПРИМЕНУ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИЈЕ**

### **6.1. Увод**

Управљање уз мултимоделовање, када два или неколико управљачких агената користе различите моделе редукованог реда, добијене за систем на основу истог модела пуног реда, како би прорачунали своје регулаторе и применили ове регулаторе на систем пуног реда, које су првобитно развили Кхалил и Кокотовић (Khalil and Kokotovic, 1978; Kokotovic, 1981), било је традиционално засновано на теорији сингуларних пертурбација и слабе повезаности. У неколико радова било је показано, уз коришћење различитих формулација проблема, да управљање уз мултимоделовање може бити добро дефинисано под извесним условима за системе састављене од спорог подсистема јако повезаног за неколико брзих подсистема, који су међусобно слабо повезани или су распрегнути.

Концепт мултимоделовања је првобитно уведен у радовима Кхалила и Кокотовића (Khalil and Kokotovic, 1978; Kokotovic, 1981). Кхалил и Кокотовић су дефинисали класу линеарних система, за које се управљање уз мултимоделовање може добро поставити, а то су сингуларно пертурбовани системи (Kokotovic et al., 1986), који имају неколико брзих подсистема међусобно слабо повезаних (Gajić, Škatarčić et al., 2009), који су сви јако повезани (спрегнути) са спорим подсистемом одн. заједничким језгром. Потенцијалне примене мултимоделовања су пре свега код електроенергетских система (Khalil and Kokotovic, 1978), возила (Gajić and Zhuang, 1991; Gajić and Lim, 2001), и уопште код система великог реда и мрежа. Неколико радова је било објављено о мултимоделовању у духу идеја Кхалила и Кокотовића, уз примену различитих формулација проблема. Стохастичко мултимоделовање за линеарне системе, било је разматрано у (Gajić and Khalil, 1986) и (Gajić and Zhuang, 1991) уз претпоставку да поремећаји типа Гаусовог белог шума постоје у систему и мерењима. У (Gajić, 1988a), проучавана је естимација мултимодела. Мултимоделовање и Неш (Nash) игре разматрани су у (Khalil, 1980; Saksena and Cruz, 1982; Saksena and Başar, 1982; Mukaidani et al.,

2003a). У (Gajic, 1988b) су простудирана својства алгебарских Рикатијевих једначина, које одговарају линеарној структури погодној за мултимоделовање, састављеној од једног спорог и два брза подсистема, уз оптимизацију квадратног индекса перформансе. Стохастичко мултимоделовање за линеарне системе је разматрано и у (Mukaidani, 2009), уз оптимизацију квадратног индекса перформансе и уопштење да постоји више од два, тј.  $N$  управљачких агената.

Нови приступи мултимоделовању за мултимоделоване сингуларно пертурбоване структуре са слабо повезаним брзим подсистемима (структуре идентификоване у (Khalil and Kokotovic, 1978)) били су развијени код (Coumarbatch and Gajic, 2000a; Coumarbatch and Gajic, 2000b) и нешто скорије у низу чланака Мукаиданија и његових сарадника (Mukaidani et al., 2003a; Mukaidani, 2005; Mukaidani et al., 2007; Mukaidani, 2009; Mukaidani and Dragan, 2009). Ова класа система у радовима Мукаиданија и сарадника се назива мултипараметарски сингуларно пертурбовани системи или МСПС, на пример у (Mukaidani and Dragan, 2009).

За идеју редукције реда линеарних модела, може се још применити и принцип суперпозиције, познат из Теорије електричних кола. Редуковање модела може се постићи тако да се прво формира  $m$  модела на основу оригиналног, тако да у сваком од њих буде само један сигнал управљања присутан, а осталих  $m-1$  улаза су идентички једнаки нули. Затим се на сваки од ових  $m$  модела пуног реда примени нека од већ описаних техника за редукцију реда. Коначно, могу се на основу добијених редукованих модела пројектовати регулатори (и оптимални, на пример). На крају, на основу ових регулатора може се формирати нови регулатор и применити на оригинални модел пуног реда.

У овом делу представљена је једноставна а моћна идеја за управљање уз мултимоделовање кроз технику редукције реда система, засновану на трансформацији балансирања уз примену принципа суперпозиције. Представљени резултати отварају нове путеве за управљање уз мултимоделовање (у различитим формулацијама) и уопште за децентрализовано управљање линеарним динамичким системима. Овакво мултимоделовање је релативно нова идеја намењена управљању, која не захтева да систем има сингуларно пертурбовану структуру и слабу повезаност међу брзим подсистемима. У општем случају, нова

стратегија управљања уз мултимоделовање може да се примени на ширу класу система и под блажим условима него мултимоделовање засновано на сингуларно пертурбованим структурама.

У делу 6.2., укратко је приказано мултимоделовање засновано на сингуларним пертурбацијама, у делу 6.3. представљена је редукција реда система заснована на балансирању система. У делу 6.4., уведена је нова идеја (техника) за мултимоделовање кроз трансформацију балансирања, а у делу 6.5. представљен је пример, ради демонстрирања ове технике.

## 6.2. Управљање уз мултимоделовање кроз сингуларне пертурбације и слабу повезаност

Концепт мултимоделовања, који су увели Кхалил и Кокотовић (Khalil and Kokotovic, 1978; Kokotovic, 1981), могао би се назвати мултимоделовање индуковано структуром система (ИСС) (енг. *the system structure induced or SSI multimodeling*). Да би се поједноставила презентација концепта ИСС мултимоделовања, претпоставимо да постоје два управљачка 'агента' са два подсистема, који раде у брзој временској скали и један подсистем, који ради у спорој временској скали са брзим подсистемима, који су међусобно слабо повезани или распрегнути, као и да су оба брза подсистема јако повезана са спорим подсистемом. Такав систем може се представити следећом групом диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = A_{00}x_0(t) + A_{01}x_1(t) + A_{02}x_2(t) + B_{01}u_1(t) + B_{02}u_2(t), \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = A_{10}x_0(t) + A_{11}x_1(t) + \varepsilon_3 A_{12}x_2(t) + B_{11}u_1(t) + \varepsilon_4 B_{12}u_2(t), \quad (6.2)$$

$$\varepsilon_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = A_{20}x_0(t) + \varepsilon_3 A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + \varepsilon_4 B_{21}u_1(t) + B_{22}u_2(t), \quad (6.3)$$

где су  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  вектори променљивих стања, чије су димензије, респективно,  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ , а  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  су вектори управљачких улаза (управљача,

доносилаца одлуке), редом, димензија  $m_1$  и  $m_2$ .  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  су мали позитивни параметри сингуларне пертурбације (Kokotovic et al., 1986; Gajić and Lim, 2001), који указују на раздвајање одн. поделу система на једну спору и две брзе временске скале, док су  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_4$  мали параметри слабе повезаности (Gajić, Škatarčić et al., 2009).

Модел-1 се добија, када се претпостави да је динамика брзе временске скале за променљиве стања  $x_2(t)$  асимптотски стабилна и занемарљива са аспекта доносиоца одлуке  $u_1(t)$ , и обрнуто, модел-2 се добија, када се претпостави да је у брзој временској скали динамика променљивих  $x_1(t)$  занемарљива са аспекта управљача  $u_2(t)$ , што доводи до следећа два модела (6.4)-(6.6) и (6.7)-(6.9):

$$\frac{dx_0^{(1)}(t)}{dt} = A_{00}x_0^{(1)}(t) + A_{01}x_1^{(1)}(t) + A_{02}x_2^{(1)}(t) + B_{01}u_1^{(1)}(t) + B_{02}u_2^{(1)}(t), \quad (6.4)$$

$$\varepsilon_1 \frac{dx_0^{(1)}(t)}{dt} = A_{10}x_0^{(1)}(t) + A_{11}x_1^{(1)}(t) + B_{11}u_1^{(1)}(t), \quad (6.5)$$

$$0 = A_{20}x_0^{(1)}(t) + A_{22}x_2^{(1)}(t) + B_{22}u_2^{(1)}(t), \quad (6.6)$$

и

$$\frac{dx_0^{(2)}(t)}{dt} = A_{00}x_0^{(2)}(t) + A_{01}x_1^{(2)}(t) + A_{02}x_2^{(2)}(t) + B_{01}u_1^{(2)}(t) + B_{02}u_2^{(2)}(t), \quad (6.7)$$

$$0 = A_{10}x_0^{(2)}(t) + A_{11}x_1^{(2)}(t) + B_{11}u_1^{(2)}(t), \quad (6.8)$$

$$\varepsilon_2 \frac{dx_0^{(2)}(t)}{dt} = A_{20}x_0^{(2)}(t) + A_{22}x_2^{(2)}(t) + B_{22}u_2^{(2)}(t). \quad (6.9)$$

Под претпоставком да су  $A_{11}$  и  $A_{22}$  инвертибилне матрице, алгебарске једначине (6.6) и (6.8), могу да се реше респективно по векторима  $x_2^{(1)}(t)$  и  $x_1^{(2)}(t)$ , који се могу даље заменити у диференцијалне једначине (6.4) и (6.5) одн. (6.7) и (6.9), што доводи до формирања два различита модела редукованог реда за оригинални систем: модела-1, чије су променљиве стања  $x_0^{(1)}(t)$  и  $x_1^{(1)}(t)$ , и модела-2, који има променљиве стања  $x_0^{(2)}(t)$  и  $x_2^{(2)}(t)$ . Први доносилац одлуке

проналази своју оптималну стратегију управљања  $u_{1opt}^{(1)}(t)$  користећи модел-1 дат са (6.4)-(6.6) док је одговарајући критеријум перформансе:

$$J_1 = J_1(x_0^{(1)}(t), x_1^{(1)}(t), u_1^{(1)}), \quad (6.10)$$

а други доносилац одлуке проналази своју оптималну стратегију управљања  $u_{2opt}^{(2)}(t)$  користећи модел-2 дат у (6.7)-(6.9) уз критеријум перформансе:

$$J_2 = J_2(x_0^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t), u_2^{(2)}). \quad (6.11)$$

Стратегија мултимоделовања дефинисана са:

$$u_{MM}(t) = [u_{1opt}^{(1)T}(t), u_{2opt}^{(2)T}(t)]^T, \quad (6.12)$$

примењује се на систем (6.1)-(6.3). Проналажење услова за добро дефинисање стратегије мултимоделовања (6.12), за различите формулације проблема, представља централну тему већине објављених истраживања о мултимоделовању.

Циљ је да се развије мултимоделовање, које је независно од структуре система. Да би се ово постигло, користимо технику трансформације балансирања да уведемо нови приступ општем управљању заснованом на мултимоделовању. Треба запазити да су у (Liu and Anderson, 1989; Shahruz and Behtash, 1989; Gajic and Lelic, 2001), разматране везе између методе сингуларних пертурбација (временске скале) и технике за редукцију реда кроз балансирање система.

### **6.3. Нова техника (идеја) за управљање уз мултимоделовање помоћу трансформације балансирања**

Разматра се општи линеаран временски инваријантан систем управљан помоћу два улаза, који има два мерна канала, одн. излаза, дат једначином (6.13), где је  $x(t)$  вектор променљивих стања димензије  $n$ ,  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  су вектори управљачких улаза (управљачи, доносиоци одлуке), чије су димензије, респективно,  $m_1$  и  $m_2$ , а  $y(t)$  је  $p$ -димензионални излаз система:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) = Cx(t), \end{aligned} \quad (6.13)$$

Наш циљ је да проучимо независан утицај два управљачка агенса на динамику система (6.13), када се за редуковање реда система изабере техника балансираног одсецања представљена у делу 6.3. Ради једноставнијег приказивања, претпоставићемо да локални управљачи имају исту структуру информација, то јест, да оба доносиоца одлуке располажу знањем о истом излазу система  $y(t)$ , заправо да “знају“ матрицу  $C$ . Користећи ову претпоставку заједно са информацијом о моделу система, представимо технику у којој локални управљачи формирају ваљане локалне апроксимације модела редукованог реда на основу (6.13), помоћу технике балансирања. (Трансформација балансирања представљена је у делу 3.2. ове тезе.) Локални управљачи чак не морају да располажу информацијама о деловању осталих локалних управљача, нити о њиховим матрицама управљања  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Према принципу линеарности (суперпозиције), одзив оригиналног система (6.13) се може добити као  $x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$ , где је:

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} &= Ax^{(1)}(t) + B_1u_1(t), \\ y^{(1)}(t) &= Cx^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (6.14)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(2)}(t)}{dt} &= Ax^{(2)}(t) + B_2u_2(t), \\ y^{(2)}(t) &= Cx^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Излаз система добија се такође помоћу суперпозиције, као:

$$y(t) = y^{(1)}(t) + y^{(2)}(t) = C(x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)) = Cx(t). \quad (6.16)$$

Грамијан контролабилности  $P_1$  првог управљача у (6.14) је дефинисан са:

$$AP_1 + P_1A^T + B_1B_1^T = 0, \quad (6.17)$$

а грамијан контролабилности  $P_2$  другог управљача је дат у (6.18):

$$AP_2 + P_2A^T + B_2B_2^T = 0. \quad (6.18)$$

Грамијани опсервабилности за оба локална подсистема (6.14) и (6.15) су идентични, то јест,  $Q_1 = Q_2 = Q$ , а дати су помоћу:

$$A^T Q + QA + C^T C = 0, \quad (6.19)$$

где је  $Q$  грамијан опсервабилности оригиналног система (6.13). Треба запазити да и грамијани контролабилности (6.17)-(6.18) такође поштују принцип суперпозиције, јер сабирањем (6.17) и (6.18) добијамо:

$$A(P_1 + P_2) + (P_1 + P_2)A^T + B_1B_1^T + B_2B_2^T = 0 = AP + PA^T + BB^T, \quad (6.20)$$

где је

$$P = P_1 + P_2, \quad (6.21)$$

грамијан контролабилности оригиналног система (6.13).

Сваки од управљача може да изврши балансирање система примењујући метод изложен у делу 6.3. на локалне подсистеме (6.14) и (6.15), то јест:

$$\begin{aligned} \frac{dx_b^{(1)}(t)}{dt} &= A_{b1}x_b^{(1)}(t) + B_{1b}u_1(t), & A_{b1} &= T_1AT_1^{-1}, & B_{1b} &= T_1B, \\ y_{1b}^{(1)}(t) &= C_{1b}x_b^{(1)}(t) = CT_1^{-1}T_1x^{(1)}(t) = Cx^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (6.22)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dx_b^{(2)}(t)}{dt} &= A_{b2}x_b^{(2)}(t) + B_{2b}u_2(t), & A_{b2} &= T_2AT_2^{-1}, & B_{2b} &= T_2B, \\ y_{2b}^{(2)}(t) &= C_{2b}x_b^{(2)}(t) = CT_2^{-1}T_2x^{(2)}(t) = Cx^{(2)}(t), \end{aligned} \quad (6.23)$$

где је

$$x_b^{(1)}(t) = T_1x^{(1)}(t), \quad x_b^{(2)}(t) = T_2x^{(2)}(t). \quad (6.24)$$

Треба приметити да је:

$$x_b(t) = x_b^{(1)}(t) + x_b^{(2)}(t), \quad x_b(t) = Tx(t), \quad (6.25)$$

где је  $x_b(t)$  вектор променљивих стања балансираног система добијен на основу оригиналног система (6.13),

$$\begin{aligned}\frac{dx_b(t)}{dt} &= A_b x_b(t) + B_{1b} u_{1b}(t) + B_{2b} u_{2b}(t), \\ y(t) &= C_b x_b(t) = CT^{-1} x_b(t) = CT^{-1} T x(t) = Cx(t) = \\ &= C(x_b^{(1)}(t) + x_b^{(2)}(t)) = y_{1b}(t) + y_{2b}(t),\end{aligned}\quad (6.26)$$

уз  $T$  као матрицу трансформације балансирања (дефинисану у (6.16)-(6.21)) за оригинални систем (6.13). Треба истаћи да је локални систем (6.22) добијен без познавања матрице управљања  $B_2$ , а да је локални систем (6.23) добијен без икакве информације о матрици управљања  $B_1$ . Стога, имамо два модела оригиналног система сваки са по једним управљачким улазом. Најзад, редукција реда може да се изврши за оба модела следећи технику балансиране редукције реда из дела 6.3.

Одговарајући грамијани контролабилности и опсервабилности балансираних система су идентични. За први локални систем они се добијају из:

$$\begin{aligned}A_{b1} \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(1)} A_{b1}^T + B_{1b} B_{1b}^T &= 0, \\ A_{b1}^T \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(1)} A_{b1} + C_{1b}^T C_{1b} &= 0,\end{aligned}\quad (6.27)$$

а за други систем они се налазе решавањем:

$$\begin{aligned}A_{b2} \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(2)} A_{b2}^T + B_{2b} B_{2b}^T &= 0, \\ A_{b2}^T \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(2)} A_{b2} + C_{2b}^T C_{2b} &= 0.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Ако претпоставимо да су Хенкелове сингуларне вредности балансираних грамијана  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma^{(2)}$  добро раздвојене, то јест, да је  $\sigma_{r_1}^{(1)} \gg \sigma_{r_1+1}^{(1)}$  и  $\sigma_{r_2}^{(2)} \gg \sigma_{r_2+1}^{(2)}$ , тада се локални апроксимативни подсистеми редукованог реда, респективно реда  $r_1$  и  $r_2$ , могу добити помоћу балансираног одсецања система као у:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{r_1}^{(1)}(t)}{dt} &= A_{11}^{(1)} x_{r_1}^{(1)}(t) + B_1^{(1)} u_{1MM}(t), \\ y_{r_1}(t) &= C_1^{(1)} x_{r_1}^{(1)}(t),\end{aligned}\quad (6.29)$$

и



$$\begin{aligned}\frac{dx_{r_2}^{(2)}(t)}{dt} &= A_{11}^{(2)} x_{r_2}^{(2)}(t) + B_1^{(2)} u_{2MM}(t), \\ y_{r_2}(t) &= C_1^{(2)} x_{r_2}^{(2)}(t),\end{aligned}\tag{6.30}$$

где је

$$A_{b1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B_{b1} = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad C_{1b} = [C_1^{(1)} \quad C_2^{(1)}],\tag{6.31}$$

а

$$A_{b2} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B_{b2} = \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}, \quad C_{1b} = [C_1^{(2)} \quad C_2^{(2)}].\tag{6.32}$$

Формуле (6.29)-(6.30) дефинишу два различита модела оригиналног система добијена мултимоделовањем у новим координатама, и, заправо, представљају ново дефинисање управљачке стратегије мултимоделовања:

$$u_{MM}(t) = [u_{1MM}^T(t), u_{2MM}^T(t)]^T.\tag{6.33}$$

Овакве стратегије мултимоделовања добијене независно (и децентрализовано) за различите формулације мултимоделовања у којима локални подсистеми не морају да знају ништа о матрици управљања другог система, примењују се на оригинални систем. На пример, може се прорачунати оптимално линеарно-квadratно управљање уз било Парето било Неш (*Nash*) стратегије. Да би се то омогућило  $u_{MM}(t)$  мора да буде мапирано на координате оригиналног система. Проучавање добре дефинисаности стратегија мултимоделовања за различите формулације проблема мултимоделовања је централна тема већине радова о управљању уз мултимоделовање.

Најједноставнији начин да се оправда апроксимација локалних модела је да се користи приступ у фреквентном домену и да се упореде функције преноса оригиналног и свих система редукованог реда. Треба уочити да је функција преноса оригиналног система (6.13) дата са:

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1} B = G_b(s) = C_b(sI - A_b)^{-1} B_b \\ &= [C(sI - A)^{-1} B_1 \quad C(sI - A)^{-1} B_2] = [G_1(s) \quad G_2(s)] = G(s).\end{aligned}\tag{6.34}$$

Апроксимирајуће функције преноса на локалном нивоу за први и други подсистем дате су са (6.35):

$$\begin{aligned} G_{r_1}(s) &= C_1^{(1)}(sI - A_{11}^{(1)})^{-1} B_1^{(1)}, \\ G_{r_2}(s) &= C_1^{(2)}(sI - A_{11}^{(2)})^{-1} B_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Ове функције преноса редукованог реда у складу са (6.25) задовољавају:

$$\|G_1(s) - G_{r_1}(s)\|_{\infty} \leq 2(\sigma_{r_1+1}^{(1)} + \sigma_{r_1+2}^{(1)} + \dots + \sigma_n^{(1)}), \quad (6.36)$$

и

$$\|G_2(s) - G_{r_2}(s)\|_{\infty} \leq 2(\sigma_{r_2+1}^{(2)} + \sigma_{r_2+2}^{(2)} + \dots + \sigma_n^{(2)}). \quad (6.37)$$

Апроксимација функција преноса редукованог реда дефинисана је са:

$$G_{r_1 r_2}(s) = [G_{r_1}(s) \quad G_{r_2}(s)]. \quad (6.38)$$

Тачност ове апроксимације може да се одреди из (6.36) - (6.38) као:

$$\begin{aligned} \|G(s) - G_{r_1 r_2}(s)\|_{\infty} &= \|[G_1(s) - G_{r_1}(s) \quad G_2(s) - G_{r_2}(s)]\|_{\infty} \leq \\ &\leq O(\min(\sigma_{r_1+1}^{(1)}, \sigma_{r_2+1}^{(2)})). \end{aligned} \quad (6.39)$$

**Коментар 1:** Треба уочити да осим балансираног одсецања, за редукацију реда система (6.22) одн. (6.23) можемо да користимо и балансирану резидуализацију (Liu and Anderson, 1989), као и уопштену (генерализану) балансирану резидуализацију (Gajic and Lelic, 2001), како бисмо добили апроксимативне локалне моделе редукованог реда.

За примену, укратко, основна идеја, која је овде разматрана има четири корака. Прво се примени принцип суперпозиције на оригинални систем, затим се у другом кораку примењује балансирање на оба добијена локална подсистема, што не захтева никакве информације о деловању и управљању оног другог подсистема (одн. о његовој матрици управљања), а у трећем кораку се редукује ред система помоћу технике балансиране редукације реда, за оба локална подсистема. Најзад, у четвртном кораку, сваки од локалних управљача одређује своју управљачку стратегију, користећи модел редукованог реда сопственог

подсистема, затим конвертује ту стратегију у оригиналне координате и имплементира такву стратегију на оригинали систем.

**Коментар 2:** Друга слична идеја је да се у првом кораку обави балансирање целог оригиналног система пуног реда, што би захтевало да оба управљачка центра имају потпуне информације о систему, да сваки од њих зна матрицу управљања оног другог. У другом кораку, сваки од подсистема формира систем редукованог реда, респективно, реда  $r_1$  и  $r_2$ . У трећем кораку, локални подсистеми имплементирају “принцип суперпозиције” уклањајући део са управљањем другог управљачког центра, и користе такве моделе, као своје моделе редукованог реда за оригинални систем. Сваки од модела редукованог реда покретан је управљањем мултимоделовања посебног подсистема. Слично представљеној техници, у четвртном кораку, сваки од локалних управљачких центара одређује своју управљачку стратегију користећи сопствене информације, конвертује такву стратегију у оригиналне координате и имплементира ову стратегију у оригиналном систему. Овај приступ могао би бити нешто сложенији за доказивање пошто “принцип суперпозиције” какав је употребљен у трећем кораку није заправо тачан принцип суперпозиције.

#### 6.4. Пример

У овом делу је представљен пример на коме се показује блискост трајекторија оригиналног система и оног добијеног од подсистема локалног нивоа техником мултимоделовања, која је овде представљена. Треба запазити да је овде изабран регуларан систем, не сингуларно пертурбовани нити слабо повезан, а за овакве системе класичан приступ мултимоделовања није применљив, док се овде предложена техника мултимоделовања (заснована на балансирању система и принципу суперпозиције) може применити.

Посматрајмо математички модел бинарне дестилационе колоне са кондензатором, прегревачем и девет подова (Шкатарић, 2004; Гајић, Шкатарић et al., 2009), дат једначинама (6.40) – (6.42):

$$A = \begin{bmatrix} -0.991 & 0.529 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.522 & -1.051 & 0.596 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.522 & -1.118 & 0.596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.522 & -1.548 & 0.718 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.640 & 0.799 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.721 & 0.901 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.823 & 1.021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.922 & -1.943 \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

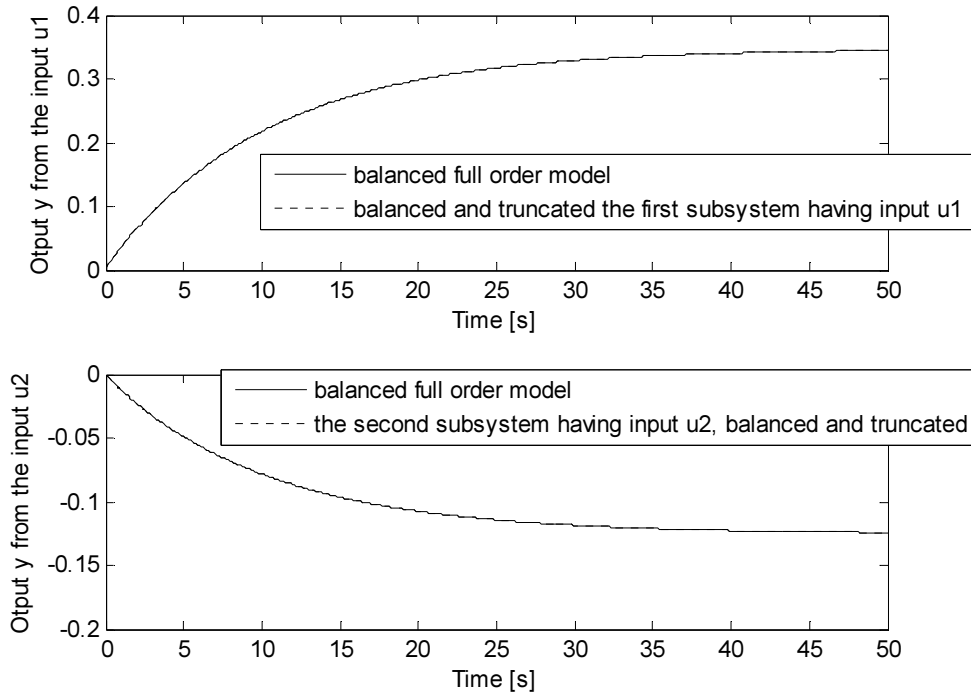
$$B^T = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3.84 & 4.00 & 37.6 & 3.08 & 2.36 & 2.880 & 3.08 & 3 \\ -2.88 & -3.04 & -2.8 & -2.32 & -3.32 & -3.82 & -4.12 & -3.96 \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = [0 \ 0]. \quad (6.42)$$

Хенкелове сингуларне вредности за системе дефинисане у (6.26), (6.22) и (6.23), приказане су у Табели 6.1. На основу друге и треће колоне у табели 6.1., процењено је да се подсистем 1 (6.22) може редуковати на модел-1 реда  $r_1 = 3$ , а подсистем (6.23) редукујемо на модел-2, чији је ред  $r_2 = 2$ . Оба подсистема, модел-1 и модел-2, редукована су поступком балансираног одсецања.

<b>Табела 6.1.: Хенкелове сингуларне вредности</b>		
Балансирани модел пуног реда (6.26)	Подсистем 1 пуног реда (6.22)	Подсистем 2 пуног реда (6.23)
0.18271	0.17183	0.062107
0.0022267	0.0022015	0.00043754
0.00059452	0.00044428	$5.1892 \cdot 10^{-6}$
$8.166 \cdot 10^{-5}$	$6.2736 \cdot 10^{-5}$	$2.8949 \cdot 10^{-6}$
$8.197 \cdot 10^{-6}$	$3.7067 \cdot 10^{-6}$	$2.4945 \cdot 10^{-6}$
$1.3485 \cdot 10^{-6}$	$1.8206 \cdot 10^{-7}$	$2.9973 \cdot 10^{-9}$
$7.9132 \cdot 10^{-8}$	$6.923 \cdot 10^{-9}$	$2.5892 \cdot 10^{-9}$
$1.1383 \cdot 10^{-8}$	$7.2476 \cdot 10^{-11}$	$1.5279 \cdot 10^{-11}$

На слици 6.1. су представљени јединични одскачни (степ) одзиви балансираног система пуног реда и апроксимативних локалних подсистема, названих модел-1 и модел-2. Слика показује добро поклапање одговарајућих јединичних одскачних одзива – криве се на слици не могу разликовати.



**Слика 6.1.** Одскачни јединични одзиви за случај отвореног кола дејства, за балансирани систем пуног реда и моделе редуковане предложеном техником мултимоделовања

У овом делу је представљена основна идеја технике балансираног мултимоделовања, која је општија од технике мултимоделовања засноване на теорији сингуларних пертурбација и слабој повезаности. Техника, која је овде представљена је општија по могућностима примене – она се може применити на готово све линеарне динамичке системе, којима управљају бар два управљачка сигнала, и не захтева специјалну структуру модела, ни претпоставке какве су неопходне за добро дефинисану структуру на коју се може применити мултимоделовање засновано на сингуларним пертурбацијама и слабој повезаности. Други важан податак је да је прорачун регулатора једноставнији и да се у потпуности изводи на нивоу подсистема, а добијени регулатори су један од

другог независни. То обезбеђује основу за развој нове поједностављене технике управљања мултимоделовањем за различите формулације мултимоделовања, као што су Парето игре, Неш игре, и за друге формулације оптималног мултимоделујућег управљања. Главни изазов у овим проучавањима биће да се пронађу услови под којима је стратегија мултимоделовања заснована на трансформацији балансирања добро дефинисана. Уз мање модификације, ова техника може да се прошири и на линеарне стохастичке системе.

## 7. ЗАКЉУЧАК

Докторска теза под насловом *Примена робусне редукације реда система у моделовању и управљању реалним објектима у машинству* је посвећена проблематици моделовања система и процеса. Моделовање је веома широка област, која је нашла много примена у техничким гранама, машинству, електротехници. Посебно су важне примене у електроенергетици, процесној техници, комуникацијама, авиотехници. Модели имају и ширу примену у областима других наука, физици, биологији, астрономији... Савремена наука је са једне стране уско специјализована, а са друге стране тражи много мултидисциплинарних прилаза и међусобно се спрежу сазнања разних области.

Ова дисертација је изабрала један део проблематике везане за моделовање линеарних модела за реалне објекте у машинству, и њихову робусну редукацију. Линеарни модели имају велики значај, јер на једноставан начин описују комплексност реалности. У многим случајевима линеарни модели могу бити даље поједностављени, што постижемо редукацијом њиховог реда.

Линеарни модели који описују реалну проблематику најчешће су модели великог реда. Матрице система и матрице управљања у моделима система великог реда, често имају много елемената, који су малих вредности или нуле. Општа тенденција је редуковање реда модела, без деградација апроксимација. У том циљу у тези је анализирано и експлицитно урађено следеће:

- дат је општи приказ математичког моделовања реалних физичких система уз коришћење математичких метода и софтверских алата. Основни проблем је да се прорачуни за сложене математичке моделе великих димензија сведу на поуздане и брзе нижих димензија. Како поједностављени математички модели представљају предмет интересовања за динамичке анализе и синтезе, мера поједностављења постаје предмет посебног проучавања, зависно од система. Налажење оптималног прилаза између избора математичког модела и потребе регулације система у прецизним опсезима представља проблематику која се

решава, тражи добро инжењерско познавање система. Аутоматско управљање мора да реши важне задатке: анализу система, са праћењем динамичких перформанси и синтезу управљања (синтеза регулатора одређеног типа, пројектовање оптималног регулатора као референтног решења);

- у другој глави, после представљања основних поставки теорије сингуларно пертурбованих и слабо повезаних система, наведена је класификација модела у простору стања за системе великог реда. Ту су модели са малим параметром, са различитим временским скалама, слабо повезани и сингуларно пертурбовани системи. Посебно интересантни су квази слабоповезани и квази сингуларно пертурбовани системи, који се у реалним примерима чешће појављују од сингуларно пертурбованих и слабо повезаних система. Наведене класе модела су представљене на примерима познатим из инжењерске праксе – размотрени су модели у простору стања за шест реалних физичких система, из (Шкатарић, 2004) редом за:

- модел носеће полуге у простору стања, реда 4,
- модел турбинског регулатора, реда 5 (Арнаутовић и Шкатарић, 1991)
- модел хидроелектране са статичким системом побуђивања, реда 8,
- модел каталитички контролисане реакције, реда 5,
- модел хемијског реактора, реда 9,
- модел бинарне дестилационе колоне са кондензатором, прегревачем и девет подова, реда 8.

На крају друге главе приказано је пројектовање регулатора за линеарне сингуларно пертурбоване системе на бази редукованих линеарних модела.

- У трећој глави су изложени концепти редукције реда модела, засновани на балансирању система, којима се линеаран модел великог реда редукује на један модел нижег реда. Приказано је неколико изабраних техника за снижавање реда система, на бази балансирања система уз примену методе сингуларних пертурбација. Приказане су и анализирани методе за редукцију реда модела, који су са стабилном матрицом система:

- балансирано одсецање



- балансирана резидуализација,
- генералисана балансирана резидуализација
- кориговано балансирано одсецање,
- редукција заснована на брзом уз одбацивање спорог подсистема,
- модификована генералисана балансирана резидуализација
- реверзна техника резидуализације.

Одабране су модификације које обезбеђују вредност појачања константног улаза каква је код оригиналног модела, што се не може постићи применом балансираног одсецања, на пример. Показало се да остале наведене технике имају исту тачност и робусност процењену према  $H_\infty$  норми система сниженог реда, као и метода директног одсецања и метода резидуализације балансираног модела система. Тачност апроксимације је оцењена на реалним примерима из процесне технике и ваздухопловства. За одабране случајеве извршена су тестирања и тражена тачност за различите опсеге учестаности. Показало се да поступак снижавања реда резидуализацијом, као и уопштена резидуализација, даје већу ефикасност одн. бољи квалитет апроксимације за ниже и средње учестаности него на вишим учестаностима. Овде су биране методе редукције реда модела, које се могу применити код стабилних система. Ефикасност приказаних метода за редукцију реда модела оцењена је на четири реална примера из праксе: модел бинарне дестилационе колоне са кондензатором, прегревачем и девет подова, из процесне технике; модел борбене летелице L-1011, из ваздухопловне технике; математички модел каталитички контролисане реакције, из процесне технике; и математички модел дела електроенергетског система Србије, сачињен од две машине, из енергетике.

- У четвртој глави представљени су нестабилни линеарни системи, као предмет посебне категорије, као и проблематика редукције реда за ове системе. Приступ, приказан у литератури, обухвата континуалне и дискретне линеарне моделе, а редукција реда модела спроводи се на стабилном подсистему, док се нестабилни део, у моделу редукованог реда, у потпуности задржава.

- У петој глави је, после уводног дела, изложено мултимоделовање кроз балансирање система. Детаљније посматрано, мултимоделовање може да се примени на ширу класу система него што је она коју захтева теорија сингуларних пертурбација. Осим тога, мултимоделовање задржава све променљиве стања оригиналног модела у редукованим моделима. И теорија диференцијалних игара се укључује у управљачке проблеме - користи се за формирање управљања за систем пуног реда, на основу прорачуна управљања за подсистеме одн. системе редукованог реда добијене мултимоделовањем. Квалитет апроксимације за различите методе редукције реда и класично мултимоделовање, проверен је на моделу у простору стања реалног система – то је електроенергетски систем, састављен од две идентичне повезане области. Дата анализа је од ширег значења, а овде је претпостављено ради једноставности да је свака област – једна електрана. Све апроксимације почетног модела и оригинални модел су тестирани прво у отвореном колу дејства, а затим у затвореном колу дејства. Као типични улази усвојени су: импулсни, степ, рампа и синусни сигнал. За разраду предложеног прилаза, тестиране су методе за редукцију реда модела са потребним модификацијама. Модел се може проширити, увођењем електрана различитог типа, усложњавањем појединих области електроенергетског система, као и повећањем броја области повезаних унутар њега.

- За све добијене моделе редукованог реда решен је проблем прорачуна оптималног линеарног квадратног Гаусовог управљања. Симулирано је понашање модела у отвореном и затвореном колу дејства. Различите технике за редукцију реда модела поређене су на основу вредности постављених критеријума: критеријум перформансе је оптимизован за случај затвореног кола дејства, где балансирани модел пуног реда користи разне регулаторе. Регулатори су прорачунати као оптимални за поједине моделе редукованог реда. Изабрани модел система са два улаза и једним излазом је анализиран на основу Хенкелових сингуларних вредности. Донета је одлука избора за редуковани ред модела. Посебно су разматрани спори и брзи подсистеми. За неколико модела редукованог реда, који су били предмет разматрања претходних поглавља, разматрана је

ефикасност апроксимација: за случај отвореног кола дејства и типичне функције улаза: Дираков импулс, јединична одскочна функција, тј. степ импулс, рампа и простопериодични тј. синусни сигнал. Од интереса би било разматрање општијег случаја побуде, представљеног несинусним сигналом, или периодичним сигналом који има и више хармонике, а не само основни.

За систем у отвореном колу дејства, извршено је поређење са балансираним моделом за све фреквентне карактеристике (амплитудни и фазни спектри, Бодеови дијаграми) за све расположиве функције преноса. Пројектован је оптимални линеарни квадратни Гаусов регулатор (ЛКГ) за оригинални и балансирани модел и моделе редукованог реда. Добијене су матрице појачања за моделе редукованог реда, које су проширене нулама до пуног реда, као би се регулатори модела редукованог реда применили за затварање спреге на балансираном моделу пуног реда.

Различите апроксимације су поређене према вредностима оптимизованог критеријума за ЛКГ управљање.

Симулације су извршене уз примену програмског пакета Matlab.

Изведене су и комбиноване две установљене технике за редукацију реда са мултимоделовањем и балансирањем. Класично мултимоделовање оригинални систем раздваја на два подсистема, који се од оригиналног могу добити применом балансираног одсецања. Овде је приказан и други приступ – комбиновање мултимоделовања са техником балансиране резидуализације. За обе варијанте мултимоделовања приказана су поређења са балансираним моделом пуног реда, у отвореном и у затвореном колу дејства. Приступ у овој тези је дао веома добре резултате за апроксимацију модела и у отвореном и у затвореном колу дејства. Модел је биран за реалан инжењерски систем. За даљи рад и тражење софистициранијих техника за редукацију реда модела тражи да се у процес избора уграде све информације о оригиналном систему и ограничењима.

- У шестом поглављу разматрано је за линеарне моделе, даље уопштење мултимоделовања, уз балансирање система и примену принципа суперпозиције. Формирана је нова метода за редукацију реда модела и уопштено је мултимоделовање уз балансирање система. Овај приступ има најмања ограничења

a најширу примену, у односу на методе редукције реда, представљене у претходним поглављима. Нови приступ омогућава пројектовање управљања уз мултимоделовање кроз балансирање уз примену принципа суперпозиције за ширу класу оригиналних модела пуног реда. Практично, мултимоделовање је уопштено, до те мере, да се може применити на произвољан линеарни модел, који има више од једног управљачког улаза. За случај отвореног кола дејства извршено је поређење добијених модела редукованог реда са балансираним моделом пуног реда, за случај побуде јединичном одскочном функцијом.

На бази нових предлога спроведена је *једноставна и моћна идеја* (Gajić, Škatarčić and Ratković Kovačević – рад у припреми) за управљање уз моделовање кроз технику редукције реда модела засновану на трансформацији балансирања уз примену принципа суперпозиције. Добијени резултати, чини се, отварају нове путеве за управљање у различитим формулацијама и за децентрализовано управљање линеарним динамичким системима. Овакав прилаз не тражи од система сингуларно пертурбовану структуру ни слабу повезаност међу подсистемима. Нова стратегија управљања може да се примени на ширу класу система и уз блаже услове од мултимоделовања нмењеног сингуларно пертурбованим структурама. Нова техника је разматрана за линеаран временски инваријантан систем, управљан помоћу два улаза, са два мерна канала (излаза). Примењен је принцип линеарности одн. суперпозиције, на балансирани модел пуног реда, као и на одговарајуће грамијане контролабилности и опсервабилности. Предложена техника је примењена на математички модел бинарне дестилационе колоне са кондензатором, прегревачем и девет подова. Разматрање временских одзива за типичне побудне сигнале показује веома добар квалитет апроксимације: јединични одскочни одзиви, примењени на појединачне улазе, за случај отвореног кола дејства, за балансирани систем пуног реда и моделе редуковане предложеном техником мултимоделовања, готово се поклапају.

Предложена техника је општија по могућностима примене, од метода изложених у претходним поглављима. Важи за скоро све линеарне динамичке

моделе, којима управљају бар два управљачка сигнала, а не захтева специјалну структуру модела ни претпоставке за добро дефинисану структуру. Прорачун регулатора је једноставнији и у потпуности се изводи на нивоу подсистема. Важна је независност пројектовања појединачних регулатора. Све ово представља основу за развој нове, једноставније технике управљања мултимоделовањем за различите формулације - Парето и/или Неш игре, користе се да се од појединачних регулатора "састави" регулатор, који има све улазе, а који примењујемо на модел пуног реда. За даљи рад од интереса ће бити тражење услова за добру дефинисаност стратегије мултимоделовања кроз балансирање засноване на примени принципа суперпозиције. Са модификацијама ова техника може да буде проширена на линеарне стохастичке системе.

Резултати ове тезе су илустровани са 43 слике и 3 табеле.

Главни доприноси ове тезе су везани за:

- одабир процедуре за добијање регулатора;
- разрада техника за редукуцију реда модела и њихово примењивање на моделе система из праксе (машинство: математички модел бинарне дестилационе колоне, са кондензатором, прегревачем и девет подова; математички модел борбене летелице L-1011; математички модел каталитички контролисане реакције; математички модел дела електроенергетског система Србије, који ради у изолованом режиму, сачињен од две машине; математички модел електроенергетског система, који се састоји од две међусобно повезане, идентичне области, при чему је свака област – једна електрана);
- предлог нове општије идеје за редуковање реда модела, и
- развој нове стратегије управљања уз мултимоделовање, која се предвиђа и за ширу класу система и под блажим условима него мултимоделовање засновано на сингуларно пертурбованим структурама.

Приказани резултати су од интереса за даљи развој техника за примену на стохастичке моделе.

## 8. ЛИТЕРАТУРА

- Arnautović, D. and D. Škatarić, „Suboptimal Design of hydroturbine governors”, *IEEE Trans. Energy Conversion*, Vol. 6 (1991): 438-444.
- Chang, K., „Singular perturbations of a general boundary value problem“, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 3, (1972): 520-526.
- Chen, B. M., “A simple algorithm for stable/unstable decomposition of a linear discrete time system”, *Int. J. Contr.*, 61, (1995): 255–260.
- Chiu, T. – Y., „Model Reduction for Unstable Linear Systems“, *Control – Theory and Advanced Technology*, Vol. 9, No. 2, (1993): 467-480.
- Chow, J., J. Allemong, and P. Kokotovic, „Singular perturbation analysis of systems with sustained high frequency oscillations“, *Automatica*, 14, (1978): 271-279.
- Chow, J. and P. Kokotović, "Sparsity and time scales", *Proc. American Control Conference*, San Francisco, U.S.A. (1983): 656-661.
- Coumarbatch, C. and Z. Gajic, “Exact decomposition of the algebraic Riccati equation of deterministic multimodeling optimal control problems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC 45, No. 4, (2000a): 790-794
- Coumarbatch, C. and Z. Gajic, “Parallel optimal Kalman filtering for stochastic systems in multimodeling form”, *Transactions of the ASME Journal Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol. 122, (2000b): 542-550.
- Enns, D. F., „Model reduction with balanced realization: An error bound and a frequency weighted generalization“, *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, NV, USA (1984): 127-132.
- Fernando, K. V. and H. Nicholson, “Singular perturbational model reduction of balanced systems”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-27 (1982): 466–468.

- Fernando, K.V. and H. Nicholson, "Singular perturbation approximation for discrete-time balanced systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-28 (1983): 240–242.
- Gajic, Z., "Quasi-decentralized multimodel estimation of linear systems", *Analysis and Optimization of Systems*, Bensoussan and J. L. Lions (eds.), Springer Verlag, Berlin, New York, (1988a): 133-152.
- Gajic, Z., "The existence of a unique and bounded solution of the algebraic Riccati equation of the multimodel estimation and control problems", *Systems and Control Letters*, Vol. 10 (1988b): 185-190.
- Gajic, Z. and H. Khalil, "Multimodel strategies under random disturbances and imperfect partial observations", *Automatica*, Vol. 22, No. 1 (1986): 121-125.
- Gajic, Z. and M. Lelic, *Modern Control Systems Engineering*, Prentice Hall, London, 1996.
- Gajic, Z. and M. Lelic, "Singular Perturbation Analysis of System Order Reduction via System Balancing", *Proc. of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, (2000): 2420-2424.
- Gajic, Z. and M. Lelic, „Improvement of system order reduction via balancing using the method of singular perturbations“, *Technical Communiqué in Automatica*, Vol. 37 (2001): 1859-1865.
- Gajic, Z. and M. T. Lim, *Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications*, CRC Press, Marcel Dekker, New York, 2001.
- Gajic, Z., M. T. Lim, D. Škatarić, W. C. Su and V. Kecman, *Optimal Control: Weakly Coupled Systems and Applications*, 1<sup>st</sup> ed., CRC Press (Taylor & Francis Group), London, New York, Boca Raton, FL, ISBN 978-0-8493-7429-6, 2009.
- Gajić, Z. i Đ. Petkovski, *Optimalno paralelno upravljanje složenim linearnim sistemima sa malim parametrom*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

- Gajic, Z., D. Petkovski and X. Shen, *Singularly Perturbed and Weakly coupled Linear Control Systems - A Recursive Approach*, Springer-Verlag, Lecture notes in Control and Information Sciences, Berlin, New York, 1990.
- Gajic, Z. and X. Shen, *Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems*, Springer -Verlag, Communications and Control Engineering Series, London, Berlin, New York, 1993.
- Gajic, Z. and D. Skataric, "Singularly Perturbed weakly coupled linear control systems", *Proc. European Control Conference.*, Grenoble, France (1991): 1607-1612.
- Geromel, J. C. and P. L. D. Peres, "Decentralised load-frequency control", *IEE Proc.*, Vol. 132, Pt. D, No. 5 (1985): 225-230.
- Glover, K., „All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L^\infty$ -error bounds“, *International Journal of Control*, Vol. 39, No. 6 (1984): 1115-1193.
- Hsu, C. S. and D. Hou, "Reducing unstable linear control systems via real Schur transformation", *Electron. Lett.*, Vol. 27 (1991): 984–986.
- Hyde, R. A., *H $\infty$  Aerospace Control Design A VSTOL Flight Application – (Advances in Industrial Control Series) I*, Title II, Series, Spring, 1995.
- Jonckheere, E. A. and L. Silverman, „A New Set of Invariants for Linear Systems – Applications to Reduced Order Compensator Design“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC 28 (1983): 953-964.
- Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- Kalman, R. E., „Mathematical Description of Linear Dynamical Systems“, *J. Soc. Indus. and Appl. Math.*, Ser. A, Vol. 1, Issue 2, (1963): 152-192.
- Kenney, C. and G. Hewer, „Necessary and sufficient conditions for balancing unstable systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC 32, 2, (1987): 157-160.



- Khalil, H., “Multimodel design of a Nash game strategy”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, (1980): 553-564.
- Khalil, H. and P. Kokotovic, “Control strategies for decision makers using different models of the same systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC 23, No. 2 (1978): 289-298.
- Kokotovic, P., “Subsystems, time scales, and multimodeling”, *Automatica*, Vol. 17 (1981): 789-795.
- Kokotovic, P., H. Khalil and J. O’Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press, Orlando, 1986.
- Kwakernaak, H. and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, New York (1972). ISBN 0-471-51110-2
- Liu, Y. and B. Anderson, “Singular perturbation approximation of balanced systems”, *International Journal of Control*, Vol. 50 (1989): 1379–1405.
- Moore, B., “Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC 26, (1981): 17-32.
- Mukaidani, H., “A new approach to robust guaranteed cost control for uncertain multimodeling systems”, *Automatica*, Vol. 41, Issue: 6 (2005): 1055-1062.
- Mukaidani, H., “Robust guaranteed cost control for uncertain stochastic systems with multiple decision makers”, *Automatica*, Vol. 45 (2009): 1758-1764.
- Mukaidani, H. and V. Dragan, “Control of deterministic and stochastic systems with several parameters – A survey”, *Annals of the Academy of Romanian Scientists Series on Mathematics and Its Applications*, Vol. 1, (2009): 112-158.
- Mukaidani, H., H. Oya and H. Xu, “Robust Stabilization of Multimodeling Systems via Guaranteed Cost Control Theory”, *Electrical Engineering in Japan*, Vol. 160, Issue: 4 (2007): 49-59.

Mukaidani, H., T. Shimomura and H. Xu, "Near-Optimal Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 12, (2002a): 2051-2057.

Mukaidani, H., T. Shimomura and H. Xu, "Asymptotic expansions of solutions of cross-coupled algebraic Riccati equations of multimodeling systems related to Nash games", *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms*, Vol. 10, Supplement C (2003a): 34 - 39.

Mukaidani, H., H. Xu and K. Mizukami, "Recursive computation of Pareto optimal strategy for multiparameter singularly perturbed systems", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms*, Vol. 9, (2002b): 175-200.

Mukaidani, H., H. Xu and K. Mizukami, "New Results for Near-Optimal Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems", *Automatica*, Vol. 39, No. 12, (2003b): 2157 – 2167.

Nagar, S. and S. Singh, „An algorithmic approach for system decomposition and balanced realized model reduction“, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 341, (2004): 615-630.

Pernebo, L. and L. Silverman, „Model reduction via Balanced State Space Representations“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-27, No 2, (1982): 17-32.

Ratković Kovačević, N. and D. Škatarić, „Multimodeling Control via System Balancing“, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2010 (2010): 1-20.

Article ID 841830, doi: 10.1155/2010/841830

<http://www.hindawi.com/journals/mpe/2010/841830.html>

Ратковић Ковачевић, Н. и Д. Шкатарић, "Неки аспекти управљања уз мултимоделовање засновано на балансирању система", *Зборник радова 24. конгреса о процесној индустрији ПРОЦЕСИНГ 2011*, Фрушка гора, у садржају 3.14., (2011): 1-8.

- Safonov, M. G. and R. Z. Chiang, „A Shur method for balanced truncation model reduction“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, (1989): 729-734.
- Saksena, V. and T. Başar, “A multimodel approach to stochastic team problems”, *Automatica*, Vol. 18 (1982): 713-720.
- Saksena, V. and J. Cruz, “A multimodel approach to stochastic Nash games”, *Automatica*, (1982): 295-305.
- Shahruz, S. and S. Behtash, “Balanced realizations of singularly perturbed systems”, *International Journal of Control*, Vol. 49 (1989): 207-217.
- Škatarić, D., *Optimalno upravljanje kvazi singularno perturbovanim i slabo povezanim sistemima*, monografija, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2004.
- Škatarić, D., M. Čalović and D. Arnautović, "Optimal Control of Low-head Plants", *Proceedings of XV IAHR Symposium* (1990); D4.
- Skataric, D. and Z. Gajic, „Linear Control of Nearly Singularly Perturbed Hydropower Plants“, *Automatica*, Vol. 28, No. 1 (1992): 159-163.
- Шкатарић, Д. и Н. Ратковић Ковачевић, „Приказ методе редукције математичких модела сложених система процесног управљања“, *ТЕХНИКА* 2/2006, *МАШИНСТВО* 55 (2006a): 1-9.
- Škatarić, D. and N. Ratković Kovačević, "The System Order Reduction via Balancing in View of the Method of Singular Perturbation", *FME Transactions*, Vol. 38, No 4, 2010 (2010): 181-187.
- Škatarić, D. and N. Ratković Kovačević, „Robust Order Reduction Using System Balancing with Respect of The Method of Singular Perturbation“, *Proc. Of The 10th WMSCI 2006*, Orlando, Florida, USA, Vol. III (2006b): 353-358.  
ISBN: 980-6560-65-5 (Collection), ISBN: 980-6560-68-X (Volume)
- Sreeram, V. and O. Agathoklis, “Model reduction using balanced realizations with improved low order frequency behaviour”, *Systems & Control Letters*, Vol. 12 (1989): 33-38.

- Therapos, C. P., „Balancing transformations for unstable nonminimal linear systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC 34, 4, (1989): 455-457.
- Vidyasagar, M., „The Graph Metric for Unstable Plants and Robustness Estimates for Feedback Stability“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29, No. 5, (1984): 403-417.
- Zhou, K., J. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- Zhuang, J., and Z. Gajic, “Stochastic multimodeling strategy with perfect measurements,” *Control – Theory and Advanced Technology*, Vol. 7, No.1 (1991): 173-182.

## Ознаке

$R^n, C^n$  је  $n$ -димензиони реални, одн. комплексни Еуклидов простор;

$C^{n \times m}$  је простор  $n \times m$ -димензионих матрица;

$I_n$  је  $n \times n$ -димензиона јединична матрица;

$A^T, A^*$  означава транспоновану одн. комплексно коњуговану матрицу матрице  $A$ ;

$\lambda_i(A)$  означава  $i$ -ту карактеристичну вредност матрице  $A, A \in C^{n \times n}$ ;

$\lambda_{max}(A)$  је карактеристична вредност симетричне матрице  $A$ , са максималним модуом;

$\bar{\sigma}(A) = \lambda_{max}^{1/2}(A^* A)$  је максимална сингуларна вредност матрице  $A, A \in C^{n \times m}$ ;

$G(s)$  је функција преноса;

$\sigma_i(G(s))$  је  $i$ -та Хенкелова сингуларна вредност од  $G(s)$ ;

$\text{rang}(A)$  означава ранг матрице  $A$ ;

$\|A\|$  означава норму матрице  $A$ , одн. овде  $\bar{\sigma}(A)$ ;

$R_{po}(s)$  означава скуп стриктно правилних рационалних функција од  $s$ , са коефицијентима у  $R$ ;

$\|G(s)\|_{\infty}$  означава  $\sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$ , за  $G(s) \in R_{po}(s)^{n_o \times n_i}$  и има имагинарну, тј.  $j\omega$ -осу као границу;

$\text{Re}[z], \text{Re}[A]$  означава реални део од  $z, z \in C$  одн. реални део матрице  $A, A \in C^{n \times n}$ ;

$|z|$  означава модуо броја  $z, z \in C$ ;

$C_+, C_-$  је скуп комплексних бројева који имају позитиван одн. негативан реални део;

$\text{Im}[A]$  означава имагинарни део матрице  $A, A \in C^{n \times n}$ ;

$\text{Tr}[A]$  означава траг матрице  $A, A \in C^{n \times n}$ ;

$A > 0$  значи да је  $A$  позитивно дефинитна матрица, при чему је  $A \in R^{n \times n}$ ;

$\text{In}[A]$  означава инерцију реалне квадратне матрице  $A, A \in R^{n \times n}$ ;  $\text{In}[A]$  је уређена тројка  $(\pi(A), \nu(A), \delta(A))$ , у којој је:

$\pi(A)$  = број карактеристичних вредности матрице  $A$  у  $C_+$ ;

$\nu(A)$  = број карактеристичних вредности матрице  $A$  у  $C_-$ ;

$\delta(A)$  = број карактеристичних вредности матрице  $A$  на имагинарној осци.

## Биографија аутора

Нада В. Ратковић Ковачевић рођена је 25.04.1967. у Београду, од оца, поч. Васе, новинара ТАНЈУГ-а, и мајке Мирјане, коректора листа “Политика”, сада у пензији. Основну и средњу школу завршила је са дипломом “Вук Караџић”.

На Електротехнички факултет у Београду уписала се 1985. Дипломирала је 1992. са оценом 10, на Одсеку за Електронику, смер Аутоматика. Постдипломске студије уписала је 1993. на ЕТФ у Београду, смер *Управљање системима*. Магистарски рад је одбранила 23.04.1999.

Од 1.02.1993. до 31.07.1994. радила је на ЕТФ у Београду као сарадник, на Катедри за аутоматику. Упоредо је радила и у Лола Институту (преко омладинске задруге) у Групи за развој система за програмирање Лола програмабилних контролера.

Од 1.08.1994. ради на Машинском факултету у Београду, на Катедри за физику и електротехнику, као асистент приправник, а затим асистент, држећи до 2005. аудиторне и лабораторијске вежбе из предмета *Електротехника* и лабораторијске вежбе из предмета *Електроника и електрична мерења у САУ* (на смеру Аутоматско управљање). Од увођења новог наставног програма, држала је вежбе на основним академским студијама, на предметима *Електротехника и електроника* и *Електроника и биомедицинска мерења*, а на дипломским, мастер студијама, до 2010., аудиторне и лабораторијске вежбе на предмету *Електричне машине*.

Удала се 2001. за Драгана Ковачевића, и има једно дете, једанаестогодишњу ћерку Милицу.

Коаутор је Збирке решених задатака из Електротехнике и Приручника за лабораторијске вежбе из Електротехнике, као и неколико радова у часописима и на међународним и домаћим конференцијама. Аутор је једног рада у часопису на SCI листи.

Пријавила је 2006. израду докторске дисертације Научно-наставном већу Машинског факултета у Београду, под менторством професора Др Добриле Шкатарић.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Нада Ратковић Ковачевић

број индекса —

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**ПРИМЕНА РОБУСНЕ РЕДУКЦИЈЕ РЕДА СИСТЕМА  
УПРАВЉАЊУ РЕАЛНИМ ОБЈЕКТИМА У МАШИНСТВУ**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 10. 06. 2013.

Нада Ратковић Ковачевић





Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ПРИМЕНА РОБУСНЕ РЕДУКЦИЈЕ РЕДА СИСТЕМА

У МОДЕЛОВАЊУ И УПРАВЉАЊУ РЕАЛНИМ ОБЈЕКТИМА У МАШИНСТВУ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 10. 06. 2013.

Никола Рањковић Ковачевић

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.