

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Немања М. Илић

**АЛГОРИТМИ ДИСТРИБУИРАНЕ  
ДЕТЕКЦИЈЕ И ЕСТИМАЦИЈЕ  
ЗАСНОВАНИ НА КОНСЕНЗУСУ**

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Nemanja M. Ilić

**CONSENSUS BASED DISTRIBUTED  
DETECTION AND ESTIMATION  
ALGORITHMS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

**Ментор:**

Др Срђан Станковић, професор емеритус  
Електротехнички факултет Универзитета у Београду

**Чланови комисије:**

Др Жељко Ђуровић, редовни професор  
Електротехнички факултет Универзитета у Београду

Др Милорад Станојевић, редовни професор  
Саобраћајни факултет Универзитета у Београду

**Датум одбране:**

# Алгоритми дистрибуиране детекције и естимације засновани на консензусу

## Резиме:

Ова дисертација разматра неколико важних проблема у дистрибуираној обради сигнала, то јест, у дистрибуираној детекцији и естимацији сигнала. Предложени су нови алгоритми за дистрибуирану детекцију промене сигнала и праћење покретних циљева помоћу сензорских мрежа, као и алгоритам за детекцију и идентификацију отказа коришћењем преклапајуће декомпозиције система. Сви предложени алгоритми су засновани на увођењу консензус стратегије, чија се динамика у паралели комбинује са динамиком детекције или естимације, чиме се подстиче слагање о величинама од интереса између чворова у коришћеним сензорским мрежама или између преклапајућих подсистема у посматраном систему, и добијају робусна и ефикасна решења посматраних проблема.

У првом делу је предложен нови алгоритам за детекцију промене сигнала у реалном времену помоћу сензорских мрежа, изведен из генерализованог количника веродостојности. Алгоритам је заснован на комбинацији рекурзивно генерисаних локалних статистика и глобалне консензус стратегије, и не захтева никакав центар фузије. Разматран је проблем детекције непознате промене у средњој вредности посматраног случајног процеса и перформансе алгоритма су анализиране у смислу величине грешке у односу на одговарајући централизован алгоритам. Анализа укључује асиметричне константне и временски променљиве матрице које описују комуникације између чворова у мрежи, као и константне и временски променљиве факторе заборављања у коришћеним рекурзијама. Предложен је и аналогни алгоритам за детекцију непознате промене у варијанси. Резултати симулација илуструју карактеристичне особине алгоритама, укључујући перформансе детекције у погледу кашњења у детекцији и вероватноће лажног аларма. Они такође показују да се теоретска анализа везана за проблем детекције промене у средњој вредности може проширити на проблем детекције промене у варијанси.

Нова дистрибуирана методологија за детекцију и изолацију отказа (*fault detection and isolation* - FDI) је предложена у другом делу, у форми мулти-агент мреже која представља комбинацију FDI опсервера заснованог на консензусу за генерисање резидуала и стратегије одлучивања засноване на консензусу за детекцију промене у сигналу резидуала, применљиве у реалном времену. Предложени опсервер је заснован на преклапајућој декомпозицији система и

комбинацији локалних оптималних стохастичких FDI опсервера са динамичком конзензус стратегијом. Показано је да предложени алгоритам генерише резидуале који обезбеђују, под општим условима везаним за локалне моделе и топологију мреже, високу ефикасност, скалабилност и робусност. Предложена стратегија одлучивања даје решења за два посебна проблема: а) локалну детекцију у непреклапајућим деловима идентификованих подсистема и б) стратегију засновану на консензусу за FDI у преклапајућим деловима. Приказани примери илуструју применљивост предложене методологије у практичним проблемима.

Дистрибуирани алгоритми за праћење покретних циљева засновани на консензусу су разматрани у трећем делу и предложен је нови алгоритам са децентрализованом адаптацијом у случају сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора. Дата компаративна анализа показује да је подешавање параметара консензус шеме од суштинске важности за добијање једноставних и ефикасних алгоритама, који захтевају слање информација само о локалним естимацијама стања између чворова. Предложени алгоритам, који даје већи значај чворовима који примају мерења, је заснован на размени додатне бинарне информације и представља робустан и ефикасан практичан алат. Стабилност алгоритма је испитана за дату поставку проблема. Изабрани примери показују перформансе алгоритма у погледу грешке естимације и неслагања између чворова.

Даљи рад везан за дистрибуирани алгоритам детекције промене сигнала може бити усмерен ка промени основног концепта конструкције децентрализованог решења блиског одговарајућем централизованом тако што би се усвојио прагматичнији критеријум, у коме би циљ консензус шеме био да се повећа такозвани *deflection* (квадрат разлике средње вредности сигнала после и пре промене подељен са варијансом сигнала пре промене) за (скоро) све чворове. Предложени алгоритам децентрализоване детекције и идентификације отказа, имајући у виду јако мали број радова у литератури из ове области, представља интересантан нови правац за даља истраживања. Нарочито, треба даље истражити ефекат различитих комбинација поставки отказа који се желе и не желе детектовати, и њиховог додељивања различитим агентима, са импликацијом на дизајн локалних естиматора и консензус шеме. Предложени алгоритам за дистрибуирано праћење покретних циљева може се унапредити увођењем дистрибуиране шеме асоцијације која би решила проблем праћења више покретних циљева.

Такође, примене консензус алгоритма у решавању проблема дистрибуиране калибрације и синхронизације у сензорским мрежама, као и у дистрибуираној стохастичкој апроксимацији везаној за решавање широког спектра оптимиза-

ционих проблема помоћу сензорских мрежа, представљају веома привлачне задатке за даље истраживање.

**Кључне речи:** *Консензус, Сензорске мреже, Мулти-агент системи, Дистрибуирана детекција промене сигнала, Генерализовани количник веродостојности, Децентрализована естимација, Детекција и изолација отказа, Преклапајућа декомпозиција система, Дистрибуирано праћење покретних циљева, Децентрализована адаптација.*

**Научна област:** Електротехника

**Ужа научна област:** Управљање системима и обрада сигнала

**УДК број:** 621.3

# Consensus based distributed detection and estimation algorithms

## Summary:

This work deals with several important problems of distributed signal processing, *i.e.*, distributed signal detection and estimation. Novel algorithms for distributed change detection and target tracking using sensor networks, as well as algorithm for fault detection and isolation using overlapping system decomposition are proposed. All the proposed algorithms are based on the introduction of a consensus strategy, whose dynamics is combined in parallel with detection or estimation dynamics, enforcing in such a way agreement between the sensors of the used sensor networks or between overlapping subsystems of the monitored systems, and obtaining robust and efficient solutions of the considered problems.

In the first part a novel distributed algorithm derived from the Generalized Likelihood Ratio is proposed for real time change detection using sensor networks. The algorithm is based on a combination of recursively generated local statistics and a global consensus strategy, and does not require any fusion center. The problem of detection of an unknown change in the mean of an observed random process is discussed and the performance of the algorithm is analyzed in the sense of a measure of the error with respect to the corresponding centralized algorithm. The analysis encompasses asymmetric constant and randomly time varying matrices describing communications in the network, as well as constant and time varying forgetting factors in the underlying recursions. An analogous algorithm for detection of an unknown change in the variance is also proposed. Simulation results illustrate characteristic properties of the algorithms including detection performance in terms of detection delay and false alarm rate. They also show that the theoretical analysis connected to the problem of detecting change in the mean can be extended to the problem of detecting change in the variance.

A new distributed fault detection and isolation (FDI) methodology is proposed in the second part, in the form of a multi-agent network representing a combination of a consensus based FDI observer for residual generation and a consensus based decision making strategy for change detection, applicable in real time. The proposed observer is based on overlapping system decomposition and a combination between the local optimal stochastic FDI observers and a dynamic consensus strategy. It is shown how the proposed algorithm can generate residuals which provide, under general conditions concerning local models and the network topology, high efficiency, scalability and robustness. The proposed decision making strategy provides solutions for two particular cases: a) local detection for non-overlapping parts of the identified

subsystems; b) a consensus based strategy for FDI in the overlapping parts. Selected examples illustrate the applicability of the proposed methodology in practice.

Consensus based algorithms for distributed target tracking are discussed in the third part and a new algorithm with decentralized adaptation is proposed for sensor networks with limited sensing range. The given comparative analysis shows that tuning of the gains in the consensus scheme is of crucial importance for getting simple, yet efficient tracking algorithms, requiring the exchange of only local state estimates between the nodes. The proposed algorithm, giving higher importance to the nodes receiving measurements, is based on the exchange of an additional binary information and represents a robust and efficient tool for practice. Stability of the algorithm is theoretically investigated on a given scenario. Selected examples illustrate its performance in terms of the estimation error and the disagreement between the nodes.

Further work related to the distributed change detection algorithm can be aimed at replacing the basic concept of making the decentralized solution close to the centralized one by a more pragmatic choice, in which the aim of a consensus scheme would be to increase the so-called deflection of (almost) all the nodes. The proposed algorithm for decentralized fault detection and isolation, having in mind very few papers in literature in this field, represents an interesting new direction for further research. Especially, different combinations of settings of the target and nuisance faults, and their assignment to different agents, with implications to the design of local estimators and consensus scheme, should be further investigated. The proposed distributed target tracking algorithm can be upgraded by introducing distributed data association scheme in order to address the problem of multi-target tracking.

Also, consensus based distributed calibration and synchronization in sensor networks, as well as consensus based distributed stochastic approximation connected to solving a wide variety of optimization problems in sensor networks, present very attractive tasks for further research.

**Keywords:** *Consensus, Sensor networks, Distributed change detection, Generalized Likelihood Ratio, Multi-agent systems, Decentralized estimation, Fault detection and isolation, Overlapping decomposition, Distributed target tracking, Decentralized adaptation.*

**Scientific field:** Electrical Engineering

**Specific scientific field:** Automatic Control and Signal Processing

**UDC number:** 621.3



Алгоритми дистрибуиране детекције и  
естимације засновани на консензусу

Немања Илић

*Захваљујем се професору Срђану Станковићу, ментору и водичу на овом интересантном и лепом путовању кроз свет науке и технике, на несебичном дељењу мисли и фином усмеравању током пута и сарадњи која за мене искрено представља велику част и задовољство.*

*Захваљујем се професору Жељку Буровићу, на кључној помоћи у прекретници која је, из разлога који немају везе са науком, одлучивала да ли ће се започето путовање уопште наставити.*

*Захваљујем се родитељима, мајци на васпитању које ме је довело до прилике да учествујем на оваквом путовању, и оцу на поштовању етике са којим је живео, које ме је дубински одредило. Овај рад посвећујем њима и деки и нани.*

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
1.1	Формулација проблема и мотивација . . . . .	1
1.2	Консензус алгоритам . . . . .	2
1.2.1	Теорија графова . . . . .	3
1.2.2	Теорија матрица . . . . .	6
1.2.3	Консензус протоколи . . . . .	7
1.2.4	Анализа конвергенције . . . . .	8
1.2.5	Временски променљива топологија размене информација .	10
1.2.6	Временски променљиве тежине размењених информација .	10
1.2.7	Пример . . . . .	11
1.2.8	Консензус протоколи у дистрибуираној детекцији и ести- мацији . . . . .	15
1.3	Допринос дисертације . . . . .	16
1.3.1	Глава 2 . . . . .	16
1.3.2	Глава 3 . . . . .	17
1.3.3	Глава 4 . . . . .	17
1.4	Кратак преглед дисертације . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Дистрибуирана детекција промене сигнала заснована на мето- дологији генерализованог количника веродостојности и консен- зус алгоритму</b>	<b>19</b>
2.1	Увод . . . . .	20
2.2	Дистрибуирана рекурзивна детекција промене у средњој вредно- сти сигнала . . . . .	22
2.2.1	Локалне рекурзије . . . . .	22
2.2.2	Централизовани рекурзивни алгоритам и алгоритам засно- ван на консензусу . . . . .	23
2.2.3	Анализа алгоритма заснованог на консензусу . . . . .	28
2.2.4	Временски променљив фактор заборављања . . . . .	36

2.3	Дистрибуирана рекурзивна детекција промене у варијанси сигнала	38
2.4	Резултати симулација	40
2.5	Закључак	48
<b>3</b>	<b>Децентрализовано надгледање отказа у великим системима засновано на консензусу</b>	<b>51</b>
3.1	Увод	51
3.2	Конструкција децентрализованог FDI опсервера	53
3.2.1	Преклапајући FDI опсервери	53
3.2.2	FDI опсервер заснован на консензусу	55
3.2.3	Оптималан дизајн локалних филтара	56
3.2.4	Оптималан дизајн консензус шеме	58
3.3	Дистрибуирана детекција отказа евалуацијом резидуала	62
3.3.1	Откази у непреклапајућим и преклапајућим деловима система	62
3.3.2	Дистрибуирано одлучивање засновано на консензусу	64
3.4	Закључак	66
<b>4</b>	<b>Адаптивно дистрибуирано праћење покретних циљева помоћу сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора засновано на консензусу</b>	<b>70</b>
4.1	Увод	70
4.2	Дистрибуирана естимација заснована на консензусу	73
4.2.1	Алгоритми	73
4.2.2	Компаративна анализа	75
4.2.3	Експерименти	76
4.3	Децентрализовано адаптивно праћење покретних циљева помоћу сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора	77
4.3.1	Алгоритам	77
4.3.2	Анализа стабилности	81
4.3.3	Експерименти	82
4.4	Закључак	87
<b>5</b>	<b>Закључак</b>	<b>91</b>
5.1	Контекст дисертације	91
5.2	Смернице за даље истраживање	92
	<b>Литература</b>	<b>99</b>

<i>САДРЖАЈ</i>	iii
<b>Биографија аутора</b>	<b>100</b>
<b>Прилози</b>	<b>101</b>
Изјава о ауторству . . . . .	101
Изјава о истоветности штампане и електронске верзије . . . . .	102
Изјава о коришћењу . . . . .	103

# Листа слика

1.1	Оријентисани граф са шест чворова. Стрелица од чвора $i$ ка чвору $j$ означава да чвор $j$ прима информације од чвора $i$ . . . . .	4
1.2	Чворови у сензорској мрежи (интелигентни агенти - пастири) који су извршили мерења (избројали овце) како би естимирали стање околине, и доступне комуникацијске везе преко којих се спроводи консензус алгоритам. . . . .	12
2.1	Естимирана средња вредност $\pm$ једна стандардна девијација једног реда матрице $C(1000) \cdot \dots \cdot C(1)$ ; компоненте вектора тежина су представљене кружићима. . . . .	28
2.2	Средње вредности иновационих чланова $x_i(t)$ (пуна линија) и $x_i^*(t)$ (испрекидана линија); вредност $\sigma_i^0$ је 2. . . . .	40
2.3	Реализације функција одлучивања: централизована стратегија (горе), константна консензус матрица (средина), случајне консензус матрице (доле). . . . .	42
2.4	Средња вредност $\pm$ једна стандардна девијација за функције одлучивања: централизована стратегија (испрекидана линија), предложени алгоритам (пуна линија); константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (доле). . . . .	43
2.5	Однос средње квадратне грешке и средње квадратне вредности централизоване статистике: константна консензус матрица (горње половине слика), случајне консензус матрице (доње половине слика); промена у средњој вредности (пуна линија), промена у варијанси (испрекидана линија); константни фактор заборављања (лево), временски променљив фактор заборављања (десно). . . . .	44
2.6	Естимиране расподеле статистика под хипотезама $H_0$ и $H_1$ : централизована стратегија (горе), константна консензус матрица (средина), случајне консензус матрице (доле); $\alpha = 0.9$ (лево), $\alpha = 0.99$ (десно). . . . .	45

2.7	Кашњење у детекцији наспрам вероватноће лажног аларма за све чворове: константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (средина), без консензуса (доле); централизована стратегија (испрекидана линија). . . . .	46
2.8	Вероватноћа детекције наспрам вероватноће лажног аларма за све чворове у мрежи: константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (средина), без консензуса (доле). . . . .	47
2.9	Средња вредност $\pm$ једна стандардна девијација за функције одлучивања: централизована стратегија (испрекидана линија), предложени алгоритам (пуна линија); константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (доле). . . . .	48
2.10	Средња вредност $\pm$ једна стандардна девијација за функције одлучивања: централизована стратегија (испрекидана линија), предложени алгоритам (пуна линија); константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (доле); коришћени иновациони члан $x_i(t)$ (лево), $x_i^*(t)$ (десно). . . . .	49
3.1	Структура матрица модела . . . . .	58
3.2	Резидуали за два возила. Одзив на циљни отказ (горе) и одзив на споредни отказ (доле). . . . .	59
3.3	Норме резидуала, без консензуса (испрекидане линије) и са консензусом (пуне линије). Одзив на циљни отказ (горње половине слика) и на споредни отказ (доње половине слика). . . . .	63
3.4	Критеријумска функција . . . . .	64
3.5	Структура матрица модела . . . . .	65
3.6	Норме резидуала за $\bar{F}_1$ , са и без консензус шеме (горе и доле, респективно). . . . .	67
3.7	Норме резидуала за $\bar{F}_3$ , са и без консензус шеме (горе и доле, респективно). . . . .	68
3.8	Норме резидуала за $\bar{F}_4$ , са и без консензус шеме (горе и доле, респективно). . . . .	68
3.9	Дистрибуирана статистика (пуна линија) и оптимална централизована статистика (испрекидана линија) за $\alpha = 0.9$ и $\alpha = 0.99$ . . . . .	69
4.1	Средња растојања између правих и естимираних позиција: Алгоритам А са неподешеним консензусом (испрекидане линије), Алгоритам А са подешеним консензусом (пуне линије), Алгоритам Б (црта-тачка линије). . . . .	78

4.2	Варијанса естимација: Алгоритам А са неподешеним консензусом (испрекидана линија), Алгоритам А са подешеним консензусом (пуна линија), Алгоритам Б (црта-тачка линија). . . . .	79
4.3	Естимације параметра свих чворова Алгоритма А без и са адаптацијом (горњи и доњи делови слика, респективно). . . . .	84
4.4	Снимци естимација позиције свих чворова (тачке), са позицијама чворова (кружићи), чворовима који опсервирају мету ( $\otimes$ ) и путањом мете. . . . .	86
4.5	Тежински излазни степени ( <i>weighted out-degrees</i> ) чворова. . . . .	87
4.6	Естимације позиције мете свих чворова. . . . .	88
4.7	Средње растојање по чвору између стварне и естимиране позиције: Алгоритам А са и без адаптивне консензус шеме (пуне и испрекидане линије, респективно), Алгоритам Б (тачка-црта линије). 89	
4.8	Варијанса естимација: Алгоритам А са адаптивном консензус шемом (пуне линије), Алгоритам Б (тачка-црта линије). . . . .	90



# Листа табела

2.1	Кашњење у детекцији (минимално, средње и максимално међу свим чворовима у мрежи) за вероватноће лажног аларма $p_f = 10^{-4}$ и $p_f = 10^{-1}$ и за $\alpha = 0.9$ и $\alpha = 0.99$ . . . . .	45
-----	---	----

# Глава 1

## Увод

### 1.1 Формулација проблема и мотивација

Предмет ове дисертације је истраживање неколико централних проблема у дистрибуираној (децентрализованој)<sup>1</sup> обради сигнала. Тематика припада областима дистрибуиране детекције и децентрализоване естимације. Наиме, предложени су алгоритми за дистрибуирану детекцију промене сигнала, за децентрализовано надгледање отказа у великим системима које претпоставља децентрализовану естимацију и дистрибуирану детекцију, као и за дистрибуирано праћење покретних циљева које представља специјалан случај проблема естимације. Методолошка линија која повезује све предложене алгоритме је примена консензус шеме, чија се динамика комбинује са динамиком процеса детекције и естимације.

Јасно је да је ситуација где постоји централна јединица којој су доступне све релевантне информације о систему на први поглед повољнија од било које дистрибуиране шеме. Многи системи у пракси (електродистрибутивни системи,

---

<sup>1</sup>У контексту обраде сигнала термини *дистрибуиран* и *децентрализован* се углавном употребљавају као синоними [57] који означавају да је обрада сигнала расподељена унутар система. У скорашње време се термин *дистрибуиран* чешће повезује са расподељивањем функција обраде сигнала унутар система док се термин *децентрализован* повезује са структуром система, тј. са одсуством централне јединице која поседује све доступне информације везане за систем. У области детекције сигнала се уобичајено користи термин *дистрибуирана детекција* да би се нагласило да је решавање задатка одлучивања о присуству сигнала дистрибуирано на конститутивне елементе система; у области естимације сигнала углавном се користи термин *децентрализована естимација* да би се акценат ставио на изостанак централне јединице која поседује знање о целом систему. У проблему праћења покретних циљева, који је специјалан случај естимације, користи се термин *дистрибуирано праћење покретних циљева*, с обзиром на доминантну примену у сензорским мрежама. Недавно се појавио и термин *дистрибуиран децентрализован*, који се односи на системе у којима је присутна дистрибуција функција и који немају централну јединицу. У овој дисертацији ће се користити синтагме које су уобичајене у литератури везаној за области о којима се говори. У наслову се појављује термин *дистрибуиран* с обзиром на то да се више користи од термина *децентрализован*.

фабрике са обимном производњом итд.) су, међутим, превелики да би класичне централизоване шеме биле применљиве. Такође, систем може бити физички састављен од више ентитета од којих ниједан не поседује потребно знање. Додатно, могу да постоје ограничења у погледу количине комуникација које су дозвољене између различитих ентитета, тако да је непрактично размењивати све релевантне информације и на тај начин претварати проблем у централизован. Заправо, и да не постоје комуникацијска ограничења, централизација није препоручљива јер постоји могућност да ниједан ентитет није способан да се избори са глобалним проблемом; чак и да постоји такав један, јавља се оправдано питање робусности шеме у односу на његов квар. Побројани разлози чине децентрализацију у поменути случајевима неопходном.

Предложени алгоритми за детекцију и за праћење покретних циљева су делом мотивисани све већом применом сензорских мрежа у овим областима док је алгоритам за детекцију и изолацију отказа делом мотивисан потребом за решавањем проблема естимације и детекције у великим и комплексним системима. Дакле, горепоменути ентитети који сачињавају разматране системе могу бити чворови у сензорским мрежама и подсистеми у надгледаним великим системима. Ови саставни делови у општем случају имају способности мерења, процесирања и комуникације па се могу назвати и *интелигентним агентима*, тако да проблематика дисертације припада и области *мулти-агент система*.

## 1.2 Консензус алгоритам

Сви алгоритми који ће бити предложени у главама које следе користе консензус стратегију као средство за погодно усаглашавање величина од интереса између умрежених елемената система. Треба напоменути да се консензус шема у предложеним алгоритмима не примењује изоловано од процеса детекције и естимације, тј. на начин да се усаглашавају резултати локалног процесирања појединачних елемената система након што су ови процеси завршени [22]. Овакво решење се може замислити али оно представља у суштини само децентрализовано рачунање конвексне комбинације одређених величина. Напротив, у свим предложеним алгоритмима динамика консензус шеме се у паралели комбинује са динамиком процеса детекције или естимације. У главама које следе консензус шема је објашњена у контексту предложених решења па постоји потреба за одвојеном општом дискусијом о консензус алгоритму. Најпре ће, као предуслов, бити уведене ознаке и дефиниције из области теорије графова и матрица, које се уобичајено користе у литератури везаној за консензус.

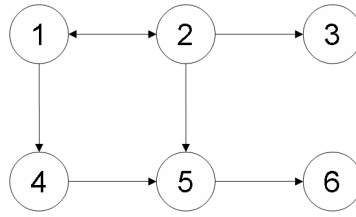
### 1.2.1 Теорија графова

Природан начин моделовања размене информација у дистрибуираним алгоритмима заснованим на консензусу је помоћу оријентисаних или неоријентисаних графова [44].

Претпоставимо да мрежа ентитета укључених у дистрибуирано решавање посматраног проблема броји  $n$  чланова. Оријентисани (усмерени) граф је пар  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$ , где је  $\mathcal{V}_n = 1, \dots, n$  коначан непразан скуп чворова и  $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n$  скуп уређених парова чворова, које називамо *гране* (у посматраним алгоритмима представљају комуникацијске везе). Грана  $(i, j)$  из скупа грана оријентисаног графа означава да чвор  $j$  може да добије информације од чвора  $i$ , али не и обратно. Петље  $(i, i)$  нису дозвољене, уколико није другачије назначено. За грану  $(i, j)$ ,  $i$  је родитељ чвор а  $j$  дете чвор. За разлику од оријентисаног графа, парови чворова су код неоријентисаног графа неуређени, па грана  $(i, j)$  означава да чворови  $i$  и  $j$  могу добијати информације један од другог. Уочити да се неоријентисани граф може посматрати као посебан случај оријентисаног графа, где грана  $(i, j)$  код неоријентисаног графа одговара гранама  $(i, j)$  и  $(j, i)$  код оријентисаног графа. Уколико грана  $(i, j) \in \mathcal{E}_n$ , тада је чвор  $i$  *сусед* (комшија) чвора  $j$ . Скуп суседа чвора  $i$  се означава  $\mathcal{N}_i$ . Тежински граф додељује тежину свакој грани у графу; такви су сви графови који ће бити разматрани у наредним главама. Унија одређеног скупа графова је граф чији су скупови чворова и грана унија скупова чворова и грана свих графова у посматраном скупу графова.

*Оријентисана путања* је секвенца грана у оријентисаном графу у форми  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots$ . *Неоријентисана путања* у неоријентисаном графу је аналогно дефинисана. Код оријентисаног графа, *круг* је оријентисана путања која почиње и завршава се у истом чвору. Оријентисани граф је *строго повезан* уколико постоји оријентисана путања од сваког чвора ка сваком другом чвору. Неоријентисани граф је *повезан* уколико постоји неоријентисана путања између сваког пара различитих чворова. *Оријентисано дрво* је оријентисани граф у коме сваки чвор има тачно једног родитеља сем једног чвора, који се назива *корен*, који нема родитеља и који има оријентисану путању ка свим осталим чворовима. Уочити да оријентисано дрво нема круг зато што је свака грана оријентисана у смеру од корена. Код неоријентисаних графова, *дрво* је граф код кога је сваки пар чворова повезан тачно једном неоријентисаном путањом.

Подграф  $(\mathcal{V}_n^s, \mathcal{E}_n^s)$  графа  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  је граф код кога је  $\mathcal{V}_n^s \subseteq \mathcal{V}_n$  и  $\mathcal{E}_n^s \subseteq \mathcal{E}_n \cap (\mathcal{V}_n^s \times \mathcal{V}_n^s)$ . Оријентисано обухватно дрво (*directed spanning tree*)  $(\mathcal{V}_n^s, \mathcal{E}_n^s)$  оријентисаног графа  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  је подграф  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  такав да је  $(\mathcal{V}_n^s, \mathcal{E}_n^s)$  оријентисано дрво и



Слика 1.1: Оријентисани граф са шест чворова. Стрелица од чвора  $i$  ка чвору  $j$  означава да чвор  $j$  прима информације од чвора  $i$ .

( $\mathcal{V}_n^s = \mathcal{V}_n$ ). Неоријентисано обухватно дрво код неоријентисаног графа је аналогно дефинисано. Граф  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  има или поседује оријентисано обухватно дрво уколико је оријентисано обухватно дрво подграф  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$ . Уочити да оријентисани граф  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  има оријентисано обухватно дрво ако и само ако  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  има најмање један чвор са оријентисаним путањама ка свим осталим чворовима. Код неоријентисаних графова је постојање неоријентисаног обухватног дрвета еквивалентно повезаности. Међутим, код оријентисаних графова је постојање оријентисаног обухватног дрвета слабији услов од строге повезаности. Слика 1.1 приказује оријентисан граф који има више од једног оријентисаног обухватног дрвета али није строго повезан. Чворови 1 и 2 су коренови два оријентисана обухватна дрвета зато што имају оријентисане путање ка свим другим чворовима. Међутим, граф није строго повезан зато што чворови 3, 4, 5 и 6 немају оријентисане путање ка свим другим чворовима.

Матрица суседства  $\mathcal{A}_n = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  оријентисаног графа  $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$  је дефинисана на начин да је  $a_{ij}$  позитивна тежина уколико  $(j, i) \in \mathcal{E}_n$ , и  $a_{ij} = 0$  уколико  $(j, i) \notin \mathcal{E}_n$ . Петље нису дозвољене (т.ј.  $a_{ii} = 0$ ) уколико другачије није назначено. Матрица суседства неоријентисаног графа је аналогно дефинисана, уз додатак да је  $a_{ij} = a_{ji}$  за све  $i \neq j$  зато што  $(j, i) \in \mathcal{E}_n$  имплицира да је  $(i, j) \in \mathcal{E}_n$ . Уочити да  $a_{ij}$  означава тежину гране  $(j, i) \in \mathcal{E}_n$ . Уколико тежина није битна, вредност  $a_{ij}$  се поставља на 1 за  $(j, i) \in \mathcal{E}_n$ . Граф је *балансиран* уколико важи  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$  за свако  $i$ . Код неоријентисаних графова  $\mathcal{A}_n$  је симетрична матрица, тако да је сваки неоријентисани граф балансиран.

Дефинишимо матрицу  $\mathcal{L}_n = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  као

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j. \quad (1.1)$$

Уочити да уколико је  $(j, i) \notin \mathcal{E}_n$  тада је  $l_{ij} = -a_{ij} = 0$ . Матрица  $\mathcal{L}_n$  задовољава

$$l_{ij} \leq 0, i \neq j, \quad \sum_{j=1}^n l_{ij} = 0, i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Код неоријентисаних графова  $\mathcal{L}_n$  је симетрична матрица и назива се *Лапласијан*. Међутим, код оријентисаних графова  $\mathcal{L}_n$  није у општем случају симетрична матрица и понекад се назива *несиметричан Лапласијан* или *оријентисан Лапласијан*.

Уочити да се  $\mathcal{L}_n$  из (1.1) може аналогно дефинисати као  $\mathcal{L}_n \triangleq \mathcal{D} - \mathcal{A}_n$ , где  $\mathcal{D} = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  представља матрицу улазних степени (*in-degree*) чворова, датих са  $d_{ij} = 0, i \neq j$ , и  $d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, i = 1, \dots, n$ . Треба напоменути да је у случају оријентисаних графова дефиниција несиметричног Лапласијана дата у (1.1) различита од уобичајене дефиниције Лапласијана за оријентисане графове у литератури из области теорије графова. На овом месту се усваја дефиниција дата у (1.1) за оријентисане графове услед њеног значаја за консензус алгоритме.

И код неоријентисаних и код оријентисаних графова, с обзиром на то да  $\mathcal{L}_n$  има нулте суме елемената по редовима, 0 је сопствена вредност  $\mathcal{L}_n$  са одговарајућим сопственим вектором  $\mathbf{1}_n$ , величине  $n \times 1$  са свим елементима једнаким 1. Уочити да је  $\mathcal{L}_n$  дијагонално доминантна матрица и да има ненегативне дијагоналне елементе. Може се показати (видети следеће поглавље) да су у случају неоријентисаних графова све ненулте сопствене вредности  $\mathcal{L}_n$  позитивне ( $\mathcal{L}_n$  је позитивна семидефинитна матрица), док у случају оријентисаних графова све ненулте сопствене вредности  $\mathcal{L}_n$  имају позитивне реалне делове. Дакле, све ненулте сопствене вредности  $-\mathcal{L}_n$  имају негативне реалне делове. Код неоријентисаних графова 0 је једнострука сопствена вредност  $\mathcal{L}_n$  ако и само ако је граф повезан. Код оријентисаних графова 0 је једнострука сопствена вредност  $\mathcal{L}_n$  ако је граф строго повезан, супротно не мора да важи. Нека је код неоријентисаних графова  $\lambda_i(\mathcal{L}_n)$   $i$ -та сопствена вредност  $\mathcal{L}_n$ , где је  $\lambda_1(\mathcal{L}_n) \leq \lambda_2(\mathcal{L}_n) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathcal{L}_n)$ , тако да је  $\lambda_1(\mathcal{L}_n) = 0$ . Код неоријентисаних графова  $\lambda_2(\mathcal{L}_n)$  се назива *алгебарска повезаност*, и она је позитивна ако и само ако је неоријентисан граф повезан. Алгебарска повезаност квантификује брзину конвергенције консензус алгоритама.

Уколико је дата матрица  $S = [s_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , оријентисани граф матрице  $S$ , који се означава као  $\Gamma(S)$ , је оријентисани граф са скупом чворова  $\mathcal{V}_n = 1, \dots, n$ , таквих да постоји грана од чвора  $j$  до чвора  $i$  ако и само ако  $s_{ij} \neq 0$ . Другим речима, елементи матрице суседства задовољавају  $a_{ij} > 0$  уколико је  $s_{ij} \neq 0$  и

$a_{ij} = 0$  уколико је  $s_{ij} = 0$ .

## 1.2.2 Теорија матрица

Консензус алгоритми се углавном разматрају помоћу алата из теорије матрица [44]. У овом поглављу биће дате важне дефиниције, леме и теореме које се користе [23].

*Теорема 1. (Герцгоринаова теорема)* Нека је  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , и нека

$$R'_i(A) \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

представљају избрисане (*deleted*) апсолутне суме редова матрице  $A$ . Тада су све сопствене вредности матрице  $A$  лоциране у унији  $n$  дискова

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R'_i(A)\} \equiv G(A).$$

Даље, уколико унија  $k$  од ових  $n$  дискова формира повезан регион одвојен од осталих  $n - k$  дискова, тада се тачно  $k$  сопствених вредности матрице  $A$  налази у овом региону.

*Лема 1.* Нека је  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  дато, као и  $\lambda \in \mathbb{C}$ , и претпоставимо да су  $x$  и  $y$  вектори такви да је (а)  $Ax = \lambda x$ , (б)  $A^T y = \lambda y$ , и (в)  $x^T y = 1$ . Уколико је  $|\lambda| = \rho(A) > 0$ , где  $\rho(A)$  означава спектрални радијус матрице  $A$ , и  $\lambda$  је једина сопствена вредност матрице  $A$  са модулом  $\rho(A)$ , тада је  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda^{-1} A)^m = xy^T$ .

Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  је *редуцибилна* било да је (а)  $n = 1$  и  $A = 0$ , било (б)  $n \geq 2$  и постоји матрица пермутације  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  таква да је  $P^T A P$  у горњој блок троугаоној форми. Матрица је *иредуцибилна* уколико није редуцибилна.

*Теорема 2.* Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  је иредуцибилна ако и само ако је  $G(A)$  строго повезан граф.

Вектор  $x$  или матрица  $A$  су *ненегативни* (респективно, *позитивни*), у ознаци  $x \geq 0$  (респективно,  $x > 0$ ) или  $A \geq 0$  (респективно,  $A > 0$ ) уколико су сви њихови елементи ненегативни (респективно, позитивни). У случају ненегативних матрица  $A \geq B$  (респективно,  $A > B$ ) имплицира да је  $A - B$  ненегативна (респективно, позитивна) матрица. Две  $n \times n$  ненегативне матрице  $P$  и  $Q$  су истог *типа* уколико имају нулте и позитивне елементе на истим локацијама. Нотација  $P \sim Q$  се користи у обележавању матрица  $P$  и  $Q$  истог типа.

*Теорема 3.* Уколико је матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ненегативна, тада је  $\rho(A)$  сопствена вредност  $A$  и постоји ненегативни вектор  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , такав да важи  $Ax =$

$\rho(A)x$ .

*Теорема 4. (Перон-Фробенијусова теорема)* Уколико је матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  иредуцибилна и ненегативна, тада важи: (а)  $\rho(A) > 0$ , (б)  $\rho(A)$  је сопствена вредност  $A$ , (в) постоји позитиван вектор  $x$  такав да је  $Ax = \rho(A)x$ , и (г)  $\rho(A)$  је алгебарски (и геометријски) једнострука сопствена вредност  $A$ .

Квадратна ненегативна матрица је *примитивна* уколико је иредуцибилна и има тачно једну сопствену вредност максималног модула, која је обавезно позитивна. Квадратна ненегативна матрица је *стохастичка по реду* (*row stochastic*) уколико су суме елемената у сваком реду једнаке 1. Свака матрица стохастичка по реду има сопствену вредност 1 са одговарајућим сопственим вектором  $\mathbf{1}_n$ . Спектрални радијус матрице стохастичке по реду је 1 зато што је њена сопствена вредност 1 а Теорема 1 имплицира да су све сопствене вредности садржане у затвореном јединичном диску.

*Теорема 5.* Уколико је  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ненегативна и примитивна, тада имамо да је  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\rho(A)^{-1} A^k] = \omega \nu^T$ , где је  $A\omega = \rho(A)\omega$ ,  $A^T \nu = \rho(A)\nu$ ,  $\omega > 0$ ,  $\nu > 0$  и  $\omega^T \nu = 1$ .

*Теорема 6.* Уколико је  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ненегативна, тада је  $A$  примитивна ако и само ако важи  $A^m > 0$  за неки позитиван цео број  $m$ .

С обзиром на то да је спектрални радијус матрице стохастичке по реду једнак 1, Теорема 5 имплицира да уколико је  $A$  стохастичка по реду и примитивна, тада је  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{1}_n \nu^T$ , где је  $A^T \nu = \nu$ ,  $\nu > 0$  и  $\mathbf{1}_n^T \nu = 1$ .

### 1.2.3 Консензус протоколи

Нека је  $\xi_i$  информацијско стање  $i$ -тог агента које представља информацију коју он размењује унутар система који представља умрежен скуп агената. Ова информација може бити естимација стања (под)система, локална статистика за детекцију итд.

Као што је описано у [20, 28, 36, 42], консензус протоколи у континуалном времену могу се представити у форми

$$\dot{\xi}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \alpha_{ij}(t) (\xi_i(t) - \xi_j(t)), \quad (1.3)$$

где  $\mathcal{N}_i(t)$  представља скуп агената чије су информације доступне агенту  $i$  у тренутку  $t$  и  $\alpha_{ij}(t)$  означава позитиван, у општем случају временски променљив, тежински фактор. Другим речима, информацијско стање сваког агента се помера ка стањима његових (у општем случају временски променљивих) суседа у сваком тренутку. Уочити да поједини агенти не морају учествовати у



размени информација са другим агентима током одређених временских интервала. Линеарни консензус протокол у континуалном времену може се написати у матричној форми као

$$\dot{\xi}(t) = -L(t)\xi(t), \quad (1.4)$$

где је  $L(t)$  Лапласијан графа и  $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)]^T$ .

Аналогно, консензус протокол у дискретном времену, као што је предложено у [28, 31, 42], може се представити као

$$\xi_i(k+1) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i(k) \cup \{i\}} \beta_{ij}(k) \xi_j(k) \quad (1.5)$$

где је  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k) \cup \{i\}} \beta_{ij}(k) = 1$  и  $\beta_{ij}(k) > 0$  за  $j \in \mathcal{N}_i(k) \cup \{i\}$ . Другим речима, следеће стање сваког агента се добија као конвексна комбинација његовог тренутног стања и тренутних стања његових (у општем случају временски променљивих) суседа. Уочити да агент просто задржава своје тренутно стање уколико не постоји размена информација са другим агентима у одређеном временском тренутку. Линеарни консензус протокол у дискретном времену може се написати у матричној форми као

$$\xi(k+1) = C(k)\xi(k), \quad (1.6)$$

где је  $C(k)$  стохастичка матрица са позитивним елементима на главној дијагонали.

Каже се да је консензус у мрежи агената постигнут уколико  $\|\xi_i - \xi_j\| \rightarrow 0$  када  $t \rightarrow \infty$ ,  $\forall i \neq j$ .

## 1.2.4 Анализа конвергенције

Претпоставимо најпре временски непроменљиву топологију размене информација, где се скупови суседних агената сваког агента не мењају у времену, као и временски непроменљиве тежине којима се пондеришу размењене информације.

У случају континуалног консензус протокола (1.3), једноставно је видети да је  $L\mathbf{1} = 0$  и да све сопствене вредности Лапласијана  $L$  имају ненегативне реалне вредности из Гершгоринове теореме. Уколико је 0 једнострука сопствена вредност  $L$ , познато је да  $\xi$  конвергира керналу матрице  $L$ , што даље имплицира да  $\|\xi_i - \xi_j\| \rightarrow 0$ .

Чињеница да је 0 једнострука сопствена вредност матрице  $L$  ако и само ако

је граф са  $L$  строго повезан је довољан а не потребан услов. Заправо, може се показати да је 0 једнострука сопствена вредност матрице  $L$  ако и само ако одговарајући граф поседује обухватно дрво. Овај закључак је показан независно у [30, 43].

У случају дискретног консензус протокола (1.5), може се показати да се све сопствене вредности матрице  $C$  које нису једнаке јединици налазе унутар отвореног јединичног круга, према Гершгориновој теореме. Уколико је јединица једнострука сопствена вредност матрице  $C$  и уколико су све остале сопствене вредности по модулу мање од 1, може се показати да важи  $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k \rightarrow \mathbf{1}\nu^T$ , где је  $\nu$  колона вектор. Ово имплицира да важи  $\|\xi_i - \xi_j\| \rightarrow 0$ .

Позната Перон-Фробенијусова теорема каже да је јединица једнострука сопствена вредност стохастичке матрице уколико је одговарајући граф строго повезан. Слично као у случају континуалног консензус протокола, ово представља довољан а не потребан услов. Заправо, код ненегативних матрица са идентичним позитивним сумама по редовима, та сума по редовима матрице је једнострука сопствена вредност ако и само ако одговарајући диграф поседује обухватно дрво [42]. Другим речима, матрица може бити редуцибилна али задржава спектрални радијус као једноструку сопствену вредност. Даље, уколико матрица поседује обухватно дрво и позитивне елементе на главној дијагонали, показује се да је спектрални радијус матрице јединствена сопствена вредност максималног модула. Дакле, јединица је јединствена сопствена вредност модула један стохастичке матрице  $C$  ако и само ако одговарајући диграф поседује обухватно дрво [42]. Као резултат, дискретни консензус протокол асимптотски постиже консензус ако и само ако одговарајућа топологија размене информација поседује обухватно дрво.

Сада када су познати услови под којима консензус протоколи конвергирају, следећи корак је налажење стања еквилибријума ка коме консензус протоколи конвергирају.

У случају када топологија размене информација поседује обухватно дрво имамо да важи  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Lt} \rightarrow \mathbf{1}\nu^T$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k \rightarrow \mathbf{1}\mu^T$ , где су  $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_n]^T$  и  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$  ненегативни леви сопствени вектори матрица  $L$  и  $C$  који одговарају сопственим вредностима 0 и 1 респективно и чији елементи задовољавају  $\sum_j \nu_j = \sum_j \mu_j = 1$ . Као резултат, имамо  $\xi(t) \rightarrow \sum_j \nu_j \xi_j(0)$  и  $\xi(k) \rightarrow \sum_j \mu_j \xi_j(0)$ . Дакле, коначно стање еквилибријума је конвексна комбинација почетних услова свих агената. Међутим, није јасно да ли сваки агент доприноси коначном стању еквилибријума.

У случају када је топологија размене информација строго повезана, имамо

да су  $\nu_j$  и  $\mu_j$  позитивни,  $j = 1, \dots, n$ , па почетни услови сваког агента доприносе коначном стању консензус еквилибријума у овом случају. Даље, уколико је  $\nu_i = \nu_j = 1/n$  и  $\mu_i = \mu_j = 1/n$ , за  $i \neq j$ , коначно стање консензус еквилибријума је средња вредност почетних услова свих агената (*average consensus*). Као што је показано у [36], *average consensus* се постиже уколико је топологија размене информација и строго повезана и балансирана. У случају када топологија размене информација поседује обухватно дрво, коначна вредност консензус еквилибријума је једнака конвексној комбинацији почетних услова оних агената који поседују оријентисану путању ка свим другим агентима [43]. Дакле, захтев постојања обухватног дрвета је блажи од захтева строге повезаности и балансираности, али коначна вредност не мора да буде средња вредност.

### 1.2.5 Временски променљива топологија размене информација

У реалним апликацијама могуће је да се топологија размене информација између агената динамички мења, то јест да се скупови суседних чворова за поједине или све чворове мењају у времену. У [28] се експлицитно узима у обзир ова могућност и доказује да се консензус асимптотски постиже уколико је унија колекције графова свих агената повезана довољно често у еволуцији система. Приступ из [28] се заснива на неоријентисаним графовима и претпоставља извесна ограничења у погледу могућих тежина које се додељују размењеним информацијама (исте тежине). Општији случај оријентисаних графова и различитих тежина додељених различитим агентима је разматран у [42]. Показује се да се консензус (не мора бити *average consensus*) асимптотски постиже под динамички променљивим топологијама ако и само ако унија колекције графова током извесних временских интервала поседује обухватно дрво довољно често у еволуцији система.

### 1.2.6 Временски променљиве тежине размењених информација

У оба случаја, и временски променљивих и непроменљивих топологија размене информација, реално је претпоставити да се тежине које агенти додељују размењеним информацијама мењају у времену. Ове промене могу бити детерминистичке али су у пракси више присутне насумичне промене, то јест одговарајуће матрице комуникацијских тежина  $L(t)$  и  $C(t)$  у (1.4) и (1.6), респективно, представљају случајне матрице такве да њихове одређене статистичке особине

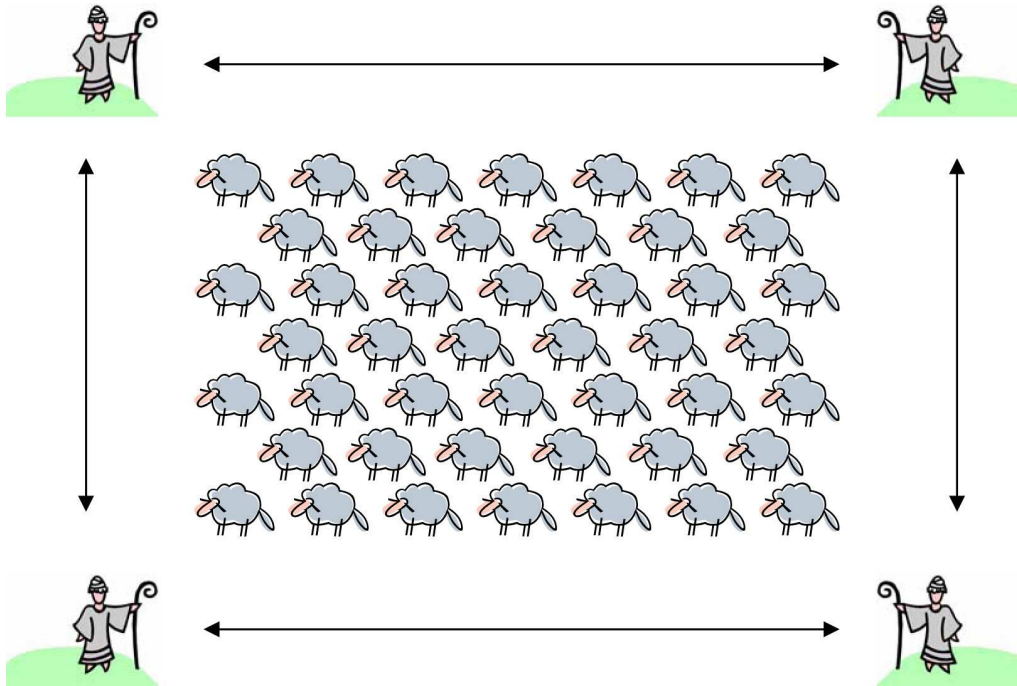
омогућавају постизање консензуса. Популарни консензус алгоритми који користе случајне консензус матрице јесу такозвани *gossip* алгоритми, у којима се количина остварених комуникација у мрежи смањује тако што у једном временском тренутку један насумично изабрани чвор комуницира са само једним такође насумично изабраним чвором, чиме се остварује значајна уштеда у потрошњи енергије за комуникације.

Основни резултат у области примене случајних консензус матрица из [6], за дискретни консензус протокол (1.6) и *average consensus*, каже да је за конвергенцију првог и другог момента информацијских стања агената ка усредњеној вредности њихових почетних стања, потребно да буду задовољени следећи услови ( $\bar{C} = E\{C(k)\}$ ): 1)  $\mathbf{1}^T \bar{C} = \mathbf{1}^T$ , 2)  $\bar{C} \mathbf{1} = \mathbf{1}$ , 3)  $\rho(\bar{C} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n) < 1$  и 4)  $\rho(E\{C \otimes C\} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n^2) < 1$ . Услов 4) укључује Кронекеров производ који може бити сложен за евалуацију па се уместо овог услова често користи други, довољан услов конвергенције:  $\lambda_2(E\{C^T C\}) < 1$ , где  $\lambda_2$  представља другу највећу сопствену вредност.

### 1.2.7 Пример

У претходним поглављима везаним за поставку и главне особине консензус шема фокус је стављен на теоретска разматрања. На овом месту биће дат један прост и интуитиван пример као илустрација дате теоретске анализе. С обзиром на то да се у главама које следе углавном користи дискретан консензус протокол пример описује дискретан алгоритам.

Посматрајмо проблем усредњавања једне измерене величине коју је измерило више сензора, као елементаран пример у коме се могу објаснити опште карактеристике консензус алгоритма. У ту сврху замислимо интересантну ситуацију где  $n = 4$  пастира (представљају интелигентне агенте - чворове у сензорској мрежи) који се налазе на четири брда надгледају стадо оваца у долини која се налази испод тих брда (околина коју надгледа сензорска мрежа). Претпоставимо да сваки од пастира може да комуницира са суседном двојцом, као на Слици 1.2, и да пастири имају задатак пребројавања оваца који хоће да реше најбоље што могу. Задатак треба да заврше док су на брду, могуће из разлога што се њихов газда повремено насумично попне на једно од брда како би их проверио. Аналоган пример из техничке праксе, мање живописан, може бити мрежа блиско постављених сензора који су измерили температуру у неком малом простору [6]. Уколико избацимо субјективност пастира, и претпоставимо да грешке у бројању задовољавају нормалну расподелу, једина разлика је грубља дискретизација у примеру са овцама.



Слика 1.2: Чворови у сензорској мрежи (интелигентни агенти - пастири) који су извршили мерења (избројали овце) како би естимирали стање околине, и доступне комуникацијске везе преко којих се спроводи консензус алгоритам.

Претпоставимо да је сваки од пастира пребројао  $O_i$  оваца у долини,  $i = 1, \dots, 4$ . Са глобалног гледишта целокупног система, непомерена естимација броја оваца најмање средње квадратне грешке је средња вредност измерених величина,  $\hat{O} = \sum_{i=1}^4 O_i/4$ , што и представља оптимално централизовано решење проблема. Међутим, уколико не постоји неко ко ће сакупити све појединачне резултате бројања, јавља се потреба за децентрализованим решењем заснованим на постојећим комуникацијским могућностима мреже.

Нека су чворови у мрежи нумерисани у смеру кретања казаљке на сату, почев од горњег левог. Матрица суседства дата је са

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Означимо вектор естимација стања чворова (тренутна естимација броја оваца свих пастира) са  $\xi(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \xi_3(t) \ \xi_4(t)]^T$ . У општем смислу, консензус стратегија има за циљ подстицање усаглашавања величина од заједничког интереса (нпр. естимација стања или статистика за детекцију) између умрежених елемената система. Она, у суштини, за сваки елемент помера поменуте вели-

чине ка величинама суседних елемената у мрежи (као што у јату птица свака птица управља свој правац, смер и брзину лета ка средњем правцу, смеру и брзини суседних птица). Тако, на основу постојећих комуникацијских канала у посматраној мрежи, можемо дефинисати алгоритам усредњавања заснован на консензусу где ће чворови у свакој итерацији формирати нове естимације које представљају конвексну комбинацију њихове тренутне естимације и естимација њима суседних чворова, почевши од иницијално измерених величина. Јасно је да овакав алгоритам захтева размену информација о естимацијама између суседних чворова. Алгоритам се може написати у компактном облику (1.6), где је матрица  $C(t)$  стохастичка матрица (по реду) истог типа као матрица суседства  $A$ .

Итеришући (1.6) уназад до почетних услова добијамо

$$\xi(t) = C(t-1)C(t-2)\cdots C(0)\xi(0) = \phi(t-1)\xi(0); \quad (1.7)$$

у нашем примеру је  $\xi(0) = [O_1 \ O_2 \ O_3 \ O_4]^T$ . Очигледно, циљ је да  $\xi(t)$  конвергира вектору средњих вредности  $\frac{\mathbf{1}^T}{n}\xi(0) = [\hat{O} \ \hat{O} \ \hat{O} \ \hat{O}]^T$ , тј.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n}. \quad (1.8)$$

Један од главних задатака конструкције консензус шема је дизајн таквих консензус матрица које задовољавају (1.8). На овом месту ћемо претпоставити да смо успешно обавили тај задатак (детаљно објашњење се налази у следећој глави).

Најпре посматрајмо случај када имамо константну консензус матрицу  $C(t) = C$  која задовољава (1.8):

$$C = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}.$$

Конкретно, вредности елемената у консензус матрици имплицирају да у свакој итерацији алгоритма сваки пастир од суседна два прими информацију о њиховим естимацијама броја оваца (може се замислити да у пракси сваки пастир у свакој итерацији гласно каже своју тренутну естимацију), сабере их и дода своју тренутну естимацију, све то подели са 3 и на тај начин добије своју нову

естимацију. После 3 итерација алгоритма имамо да је

$$\phi(5) = \begin{bmatrix} 0.2593 & 0.2593 & 0.2222 & 0.2593 \\ 0.2593 & 0.2593 & 0.2593 & 0.2222 \\ 0.2222 & 0.2593 & 0.2593 & 0.2593 \\ 0.2593 & 0.2222 & 0.2593 & 0.2593 \end{bmatrix},$$

док је после 9 итерација

$$\phi(25) = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix},$$

што значи да је сваки чвор у мрежи практично дошао до оптималне естимације на децентрализован начин, само комуникацијом са суседним чворовима.

Посматрајмо сада случај када имамо временски променљиву консензус матрицу  $C(t)$ . Овај случај одговара широком спектру комуникацијских стратегија у мрежи, на овом месту ћемо претпоставити најједноставнији случај када у једној итерацији алгоритма насумично изабрана два повезана чвора размењују информације о естимацијама. Може се показати [6] да једначину (1.8) у овом случају задовољавају консензус матрице  $C(t)$  у форми

$$C_{ij} = I - \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_j)^T}{2}, \quad (1.9)$$

где  $e_i$  представља вектор величине  $n$  са свим елементима једнаким нули сем  $i$ -тог елемента који је једнак јединици. Насумично изабрани пар је  $(i, j)$ ; множење вектора тренутних естимација са  $C_{ij}$  заправо има за резултат да се естимације  $i$ -тог и  $j$ -тог чвора замене њиховом аритметичком средином. На пример, у случају када први и други чвор размењују естимације имамо

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

У овом случају се после  $\sim 15$  итерација постиже жељено решење. Дакле, консензус шема у оба случаја долази до траженог решења на потпуно децентрализован начин, без било каквог центра фузије који би сакупио информације од свих чворова, већ само посредством комуникација између суседних чворова, за мрежу која није потпуно повезана.

## 1.2.8 Консензус протоколи у дистрибуираној детекцији и естимацији

Као што је речено, описани консензус протоколи у алгоритмима који ће бити предложени не примењују се одвојено од процеса детекције и естимације, већ се динамика консензус стратегије у паралели комбинује са динамиком процеса детекције или естимације. У овом контексту у постојећој литератури углавном се претпостављају симетричне везе и симетричне консензус матрице и са њима повезано просто усредњавање фактором  $\frac{1}{n}$ , једнаким за све чворове [6, 7, 8]. Разлог је знатно поједностављење теоретских анализа у алгоритмима који користе симетричне консензус матрице у односу на општи асиметрични случај. Поставља се оправдано питање дизајна консензус шема у случајевима када све комуникације нису обостране и у случајевима различитих тежина додељених различитим чворовима. У главама које следе, нарочито следећој, биће дат предлог решења ових проблема.

Конкретно, у Глави 2, где се разматра проблем дистрибуиране детекције, поставка проблема резултује у различитим тежинама повезаним са различитим чворовима, што даље имплицира да производ консензус матрица из (1.7) не треба да тежи вектору са истим елементима као у (1.8) већ вектору са елементима који представљају различите тежине чија је сума 1. Овакав проблем у контексту детекције није до сада разматран. Чак и да су у специјалном случају све тежине исте, литература не покрива случај када све везе између чворова нису обостране.

У првом делу Главе 3, где се разматра специјалан случај децентрализоване естимације, агенти немају исте моделе, већ њихови модели представљају моделе подсистема глобалног система. Ови модели се преклапају тако да консензус шема има улогу у погодном усредњавању преклапајућих стања као и у пружању потребних информација агентима који немају знање о одређеним деловима система преко комуникација са агентима који имају то знање.

Главна карактеристика консензус шеме у Глави 4, која такође разматра један специјалан случај децентрализоване естимације, је адаптивност на проблем у којем већина агената у мрежи нема добре естимације, када мањина "добрих" агената треба да повуче већину "лоших" и када се ова два скупа мењају динамички у времену. За разлику од предложених решења у литератури, која овај проблем решавају додатним оптерећивањем комуникацијских канала [33, 37, 10], предложено решење се ослања само на фино динамичко подешавање параметара у консензус матрицама.



## 1.3 Допринос дисертације

Примена алгоритама заснованих на консензусу у дистрибуираној детекцији и естимацији у скорашње време привлачи велики број истраживача [6, 7, 8, 33, 37, 10]. Предложени алгоритми се налазе у рангу најновијих достигнућа из поменутих области, о чему сведоче прихваћени и објављени радови у најпрестижнијим иностраним часописима из области обраде сигнала [51, 27]. Ови резултати су логичан наставак постигнутих достигнућа у области децентрализоване естимације засноване на консензус алгоритму [54, 53, 55]. У овом поглављу ће бити набројани доприноси Глава 2, 3 и 4, које садрже резултате истраживања.

### 1.3.1 Глава 2

Предложен је нови дистрибуирани рекурзивни алгоритам за детекцију промене сигнала у реалном времену у сензорским мрежама усмереним ка детекцији. Дистрибуиране шеме за детекцију до скоро нису биле ефикасно применљиве у реалном времену. Значајни помак представља увођење такозваног текућег консензуса [7], где се динамика детектора у паралели комбинује са консензус динамиком. Примена и генерализација ове методологије на рекурзију усмерену ка детекцији промене сигнала, чиме се добија потпуно децентрализована детекција промене у реалном времену [51], је задатак који се наставља на скорашње напретке у области дистрибуиране детекције у сензорским мрежама и пружа смернице за даљи развој. Алгоритам не захтева центар фузије, тако да се коначна одлука може донети тестирањем стања било ког чвора у мрежи у односу на заједнички праг. Разматран је проблем детекције непознатог скока у средњој вредности и варијанси посматраног случајног процеса [27], коришћењем генерализованог количника веродостојности, и изведене су одговарајуће рекурзивне форме. Теоретска анализа, фокусирана на однос централизованог решења, дефинисаног као тежинска сума локалних статистика за детекцију, и статистика генерисаних консензус шемом, показује да предложени алгоритам генерише статистике које су асимптотски довољно близу централизованом решењу. Анализа укључује константне и временски променљиве асиметричне консензус матрице, као и константне и временски променљиве факторе заборављања у коришћеним рекурзијама. Асиметричне консензус матрице, као и њихов дизајн који је решење проблема линеарног програмирања, нису раније разматрани у консензус шемама у контексту детекције.

### 1.3.2 Глава 3

У великим и комплексним системима постоји потреба за умреженим и децентрализованим естиматорима за детекцију и изолацију отказа. Упркос томе, постоји јако мали број децентрализованих опсервера који су практично применљиви [17, 21, 22], и скоро сви поседују елементе централизације, обично у виду јаког центра фузије сигнала [17]. Потпуно децентрализована стратегија заснована на консензус алгоритму која не захтева ниједан центар фузије је веома пожељна са аспекта примене у пракси. Предложен је један такав нови алгоритам, заснован на преклапајућој декомпозицији система, у форми мулти-агент мреже представљене комбинацијом локалних оптималних стохастичких опсервера и динамике консензуса [52]. У случају отказа у преклапајућим деловима система предложена је дистрибуирана стратегија одлучивања, коришћењем дистрибуиране шеме за детекцију из Главе 1. Показано је да предложени алгоритам генерише резидуале који пружају, под општим условима везаним за локалне моделе и топологију мреже, високу ефикасност, скалабилност и робусност целе шеме естимације.

### 1.3.3 Глава 4

Дистрибуирано праћење покретних циљева, као специфичан задатак дистрибуиране естимације где се естимира стање покретне мете, је у фокусу великог броја истраживача, у првом реду због изразите практичне примене узроковане скорашњим развојем сензорских мрежа које се могу користити у ове сврхе. Проблем који привлачи велику пажњу је праћење помоћу сензорских мрежа које се састоје из сензора са ограниченим дометом мерења. Последица коришћења оваквих мрежа је мали број сензора који у датом тренутку опсервирају мету тако да се јавља потреба за адаптацијом шеме дистрибуиране естимације која би то узела у обзир. Предложен је потпуно дистрибуиран алгоритам заснован на адаптивној консензус шеми [26] који представља напредак у односу на постојеће алгоритме где се проблем ограниченог домета сензора решава слањем релативно велике количине додатних података између сензора [37]. Додатна анализа показује да је подешавање параметара консензус шеме од суштинског значаја за добијање једноставних али и ефикасних алгоритама. Такође, показује се да је размена додатне бинарне информације између чворова о томе да ли је чвор опсервирао мету, заједно са информацијом о естимацијама стања, довољна да би се добио робустан и ефикасан алат за праксу.

## 1.4 Кратак преглед дисертације

У овом поглављу ће бити дат кратак преглед садржаја ове тезе, са главним циљем истицања методолошке доследности и повезаности глава које следе.

Глава 2 је посвећена проблему дистрибуиране детекције промене сигнала у сензорским мрежама. Проблем детекције непознатог скока у средњој вредности и варијанси посматраног случајног процеса се решава шемом заснованом на рекурзивној форми генерализованог количника веродостојности.

Алгоритам за децентрализовану детекцију и изолацију отказа у великим системима је предложен у Глави 3. У првом делу алгоритам користи децентрализовану шему естимације док у другом делу користи резултате из Главе 2 у конструисању дистрибуиране шеме одлучивања повезане са отказима у преклапајућим деловима система.

У Глави 4 је посматран проблем дистрибуираног праћења покретних циљева помоћу сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора. Предложен је алгоритам са децентрализованом шемом естимације, структурно сличном оној из Главе 3, заснован на увођењу децентрализоване адаптације на ситуацију где мали проценат сензора опсервира мету.

Глава 5 износи закључне коментаре и смернице за даљи рад.

Имајући у виду чињеницу да се Главе 2, 3 и 4, које садрже резултате истраживања, ипак односе на у извесној мери различите проблеме, оне су написане на такав начин да свака може да представља целину за себе, тј. могу се читати одвојено (са изузетком другог дела Главе 3 који користи алгоритам предложен у Глави 2).

Заједничко за све предложене алгоритме је примена консензус шеме као средства за дистрибуирано решавање разматраних проблема. Консензус стратегија се у паралели комбинује са процесима детекције и естимације, чиме се добијају алгоритми применљиви у реалном времену. Такође, предложени алгоритми не захтевају било какав центар фузије - применом консензуса се постиже слично понашање свих агената у мрежи тако да се излаз било ког агента може користити као коначно решење посматраног проблема.

## Глава 2

# Дистрибуирана детекција промене сигнала заснована на методологији генерализованог количника веродостојности и консензус алгоритму

У овој глави ће бити предложен нови алгоритам за детекцију промене сигнала у реалном времену помоћу сензорских мрежа, изведен из генерализованог количника веродостојности. Алгоритам је заснован на комбинацији рекурзивно генерисаних локалних статистика и глобалне консензус стратегије, и не захтева никакав центар фузије. Разматран је проблем детекције непознате промене у средњој вредности посматраног случајног процеса и перформансе алгоритма су анализиране у смислу величине грешке у односу на одговарајући централизован алгоритам. Анализа укључује асиметричне константне и временски променљиве матрице које описују комуникације између чворова у мрежи, као и константне и временски променљиве факторе заборављања у коришћеним рекурзијама. Предложен је и аналогни алгоритам за детекцију непознате промене у варијанси. Резултати симулација илуструју карактеристичне особине алгоритама, укључујући перформансе детекције у погледу кашњења у детекцији и вероватноће лажног аларма. Они такође показују да се теоретска анализа везана за проблем детекције промене у средњој вредности може проширити на проблем детекције промене у варијанси.

## 2.1 Увод

Један од типичних задатака *сензорских мрежа* који је у фокусу многих истраживача је дистрибуирана детекција, нпр. [12, 60]. Класичне мулти-сензорске дистрибуиране шеме детекције захтевају постојање *центра фузије*, који сакупља релевантне информације од свих сензора и где се доноси коначна одлука. У [1] дистрибуирана детекција је генерално подељена на *три класе*, где горепоменућа паралелна архитектура са центром фузије представља прву класу. Уклањање центра фузије доноси, у принципу, многе предности, као што су повећана поузданост и смањени комуникацијски захтеви, упркос извесном погоршању перформанси у односу на оптималан централизован систем. Друга класа укључује изванредан број скорашњих покушаја примене *консензус техника* у решавању проблема дистрибуиране детекције, са циљем елиминисања потребе за центром фузије [22]. Међутим, динамички процес усаглашавања се уводи *након сакупљања свих података*, што узрокује немогућност примене у решавању проблема детекције промене у реалном времену. Наиме, претпостављају се две фазе у детекцији: фаза сакупљања података (*sensing phase*), где сваки сензор сакупља опсервације у одређеном временском интервалу, и фаза комуникације, где сензори затим примењују консензус алгоритам како би усагласили локалне статистике.

Трећа класа алгоритама дистрибуиране детекције претпоставља паралелно извршавање фаза сакупљања података и комуникације, у истом временском кораку. Ова класа се углавном повезује са концептом *текућег консензуса* (*running consensus*), који је уведен у алгоритмима предложеним и описаним у [7, 8], претпостављајући консензус шему са симетричним консензус матрицама. Анализа таквих алгоритама заснована на теорији великих одступања (*large deviations theory*) је представљена у [1]. Алгоритам који комбинује дистрибуирану детекцију минималне варијансе (засновану на такозваној дифузији) са Нојман-Пирсоновом детекцијом је предложен у [11]. У [9] је предложен алгоритам текућег консензуса за решавање проблема најбрже детекције, заснован на статистици кумулативне суме [3]. Он представља моћан практичан алат за детекцију промене у реалном времену али садржи нелинеарност која се користи у правилу за ресетовање алгоритма која узрокује потешкоће у теоретској анализи особина алгоритма. У [51] је предложена нова класа дистрибуираних алгоритама детекције промене у реалном времену заснованих на консензусу, базирана на комбинацији рекурзивних контролних табела геометријских покретних просека (*geometric moving average control charts*) [3] са консензус алгоритмом. Ова класа уводи, заједно са инхерентном способношћу праћења, општију поставку

са асиметричним консензус матрицама. Међутим, претпостављено је, као и код свих горепомнутих алгоритама из треће класе, да је вредност параметра после промене позната.

У овој глави, као наставак рада из [51], биће предложена два алгорита за дистрибуирану детекцију *непознатих промена* у: а) средњој вредности и б) варијанси део по део стационарног случајног процеса, помоћу сензорске мреже која опсервира околину. Оба алгорита имају рекурзивне форме изведене из израза за статистику генерализованог количника веродостојности (ГКВ) која се користи у тестирању хипотеза, где хипотеза  $H_0$  одговара константној вредности параметра пре промене, а хипотеза  $H_1$  непознатој вредности параметра после промене. У [29] је предложена прозорски скраћена (*window-truncated*) верзија статистике ГКВ за секвенцијално тестирање мулти-хипотеза, која не дозвољава рекурзивну структуру. На овом месту биће уведен константни фактор заборављања у изведеним рекурзијама, чиме се добијају алгоритми који припадају класи контролних табела покретних просека, применљиви у решавању проблема *on-line* детекције промене [3] (изненадне промене са  $H_0$  на  $H_1$ ). Добијена рекурзивна форма је структурно слична оној описаној у [51], али има доста сложенији иновациони члан. Треба нагласити да је ГКВ коришћен као почетна тачка у извођењу алгорита да би се превазишла инхерентно присутна ограничења из [51], и да би се омогућило праћење непознатих скокова у вредности параметара. Даље, слично као у [51], уводи се динамичка консензус шема, и добијају алгоритми који асимптотски обезбеђују скоро исто понашање свих чворова, тј. *сваки чвор* се може изабрати за тестирање локалне варијабле одлучивања у односу на предефинисани праг.

Изведени алгоритам за *детекцију промене у средњој вредности* биће теоретски анализиран у случајевима константних и случајних временски променљивих консензус матрица које карактеришу мрежу. Анализа је фокусирана на грешку између генерисаних дистрибуираних варијабала одлучивања и одговарајуће централизоване статистике. Горепомнута комплексност иновационог члана чини анализу компликованијом од оне из [51]. Штавише, утврђено је да је неопходно увођење новог критеријума перформанси. Биће показано да је под хипотезом  $H_1$  однос норме матрице средње квадратне грешке и средње квадратне вредности централизоване варијабле одлучивања ограничен у случају константних консензус матрица са  $K_1^1(1 - \alpha)^2$ , где је  $0 < \alpha < 1$  фактор заборављања алгорита, док је код случајних консензус матрица ограничен са  $K_2^1(1 - \alpha)$ , где су  $K_1^1$  и  $K_2^1$  коначне константе. Под хипотезом  $H_0$  је показано да је горепомнути однос ограничен у случају константних консензус

матрица са  $K_1^0(1 - \alpha)$ , док је код случајних консензус матрица ограничен са  $K_2^0$ , где су  $K_1^0$  и  $K_2^0$  коначне константе. У случају временски променљивих фактора заборављања (који се понашају као  $\frac{t}{t+1}$ ), који одговарају иницијалном проблему тестирања хипотеза, одговарајуће границе су такође изведене, показујући аналогију између члана  $t^{-1}$  и члана  $1 - \alpha$  из случаја константног фактора заборављања. Више резултата симулација биће дато као илустрација карактеристичних особина предложеног алгоритма, укључујући перформансе детекције у погледу кашњења у детекцији и вероватноће лажног аларма.

Алгоритам за *детекцију промене у варијанси* је конструисан слично као алгоритам за средњу вредност, почевши од извођења рекурзивне форме ГКВ. С обзиром на то да је добијени иновациони члан у рекурзијама веома тешко анализирати, особине алгоритма за варијансу су анализирани помоћу симулација, квалитативно показујући да сви резултати анализа везани за случај промене у средњој вредности такође важе у случају детекције промене у варијанси.

Кратак преглед ове главе биће дат као што следи. Поглавље 2.2 почиње локалним рекурзивним алгоритмом изведеним из ГКВ за случај промене у средњој вредности (Одељак 2.2.1). Предложена је нова дистрибуирана шема детекције промене заснована на консензус алгоритму (Одељак 2.2.2) и дата анализа грешке између статистика генерисаних предложеним алгоритмом и одговарајућом централизованом шемом (у случају константних и временски променљивих фактора заборављања - Одељци 2.2.3 и 2.2.4, респективно). Алгоритам детекције промене у варијанси је предложен у Поглављу 2.3 док Поглавље 2.4 представља неке илустративне примере симулација.

## 2.2 Дистрибуирана рекурзивна детекција промене у средњој вредности сигнала

### 2.2.1 Локалне рекурзије

Претпоставимо да је предмет разматрања сензорска мрежа од  $n$  чворова, у којој је сигнал мерења  $i$ -тог чвора дат са

$$y_i(t) = \theta_i + \epsilon_i(t), \quad (2.1)$$

где су  $\epsilon_i(t) \sim N(0, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , међусобно независни и идентично расподељени случајни процеси. Најпре размотримо проблем бинарног тестирања хипотеза, где је циљ  $i$ -тог чвора разликовање хипотезе  $H_0^i$ , где је  $\theta_i = \theta_i^0 = 0$ , од

хипотезе  $H_1^i$ , где је  $\theta_i = \theta_i^1 \neq 0$ . У случају када  $\theta_i^1, i = 1, \dots, n$ , нису унапред познати могуће је применити методологију ГКВ за тестирање хипотеза и добити следећу локалну статистику засновану на  $N$  узастопних мерења [3, 18]

$$s_i^l(N) = \max_{\theta_i^1} \sum_{t=1}^N \log \frac{p_{\theta_i^1}(y_i(t))}{p_{\theta_i^0}(y_i(t))} = \frac{N}{2} \bar{y}_i(N)^2 \sigma_i^{-2}, \quad (2.2)$$

где је  $\bar{y}_i(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_i(t)$ .

Израчунавање  $s_i^l(N)$  се може извршавати *on-line*, рекурзивно. Уводећи  $t$  као тренутно време добијамо, коришћењем [18], следећу основну рекурзију за локалну функцију одлучивања

$$s_i^l(t+1) = \frac{t}{t+1} s_i^l(t) + \frac{\sigma_i^{-2}}{t+1} [(t+1) \bar{y}_i(t+1) - \frac{1}{2} y_i(t+1)] y_i(t+1), \quad (2.3)$$

где се  $\bar{y}_i$  такође рекурзивно рачуна као

$$\bar{y}_i(t+1) = \frac{t}{t+1} \bar{y}_i(t) + \frac{1}{t+1} y_i(t+1), \quad \bar{y}_i(0) = 0. \quad (2.4)$$

## 2.2.2 Централизовани рекурзивни алгоритам и алгоритам заснован на консензусу

Глобална централизована функција одлучивања за целу сензорску мрежу, која разликује хипотезе  $H_0 : \theta_i = \theta_i^0 = 0, i = 1, \dots, n$ , и  $H_1 : \theta_i = \theta_i^1 \neq 0, i = 1, \dots, n$ , је дефинисана као сума локалних статистика датих помоћу (2.2)<sup>2</sup>. После занемаривања другог члана у загради са десне стране (2.3) добијамо следећу рекурзију за централизовану функцију одлучивања

$$s_c(t+1) = \frac{t}{t+1} s_c(t) + \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} \bar{y}_i(t+1) y_i(t+1), \quad s_c(0) = 0. \quad (2.5)$$

Статистике дате у (2.3) и (2.5) могу разликовати две хипотезе али не могу пратити промене параметара. Зато, да бисмо решили проблем детекције промене, уводимо апроксимацију која замењује  $\frac{t}{t+1}$  константом  $\alpha$  блиском јединици (која служи као фактор заборављања). Наиме, циљ је детектовати промену са хипотезе  $H_0$  на хипотезу  $H_1$ , која се дешава симултано код свих сензора у непознатом временском тренутку  $t_0$  (такође је могуће претпоставити да се промена

<sup>2</sup>Може се лако показати да је одговарајући векторски ГКВ у форми суме локалних ГКВ повезаних са појединачним чворовима.



дешава у непразном подскупу скупа свих чворова мреже [51]). Означавајући

$$x_i(t) = \bar{y}_i(t)y_i(t), \quad (2.6)$$

где је

$$\bar{y}_i(t+1) = \alpha\bar{y}_i(t) + (1-\alpha)y_i(t+1), \quad \bar{y}_i(0) = 0, \quad (2.7)$$

централизована функција одлучивања постаје

$$s_c(t+1) = \alpha s_c(t) + \sum_{i=1}^n w_i x_i(t+1), \quad s_c(0) = 0, \quad (2.8)$$

где су  $w_i$  ненегативне тежине, једнаке  $\sigma_i^{-2}$  из (2.5). Треба приметити да је добијена централизована функција одлучивања (2.8) у основи једна варијанта алгоритма геометријских покретних просека [3] са ненормализованим тежинама, где примена ГКВ резултује у специфичној форми функције  $x_i$ , омогућавајући праћење непознатих скокова у вредности параметара. Из практичних разлога ћемо даље усвојити да су тежине нормализоване на такав начин да је  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ; према томе, у (2.8), уводимо  $w_i = \sigma_i^{-2}(\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2})^{-1}$ . Глобална процедура детекције се заснива на тестирању функције одлучивања  $s_c(t)$  у односу на одговарајуће изабран праг  $\lambda_c > 0$ , тако да се промена детектује када  $s_c(t)$  прекорачи  $\lambda_c$ . Приметити да алгоритам захтева *центар фузије*. Такође треба приметити да је могуће усвојити  $x_i(t) = \sigma_i^{-2}\bar{y}_i(t)y_i(t)$ , резултујући у једнаким тежинама  $w_i = n^{-1}$ ; ово представља специјалан случај поставке изнад.

Циљ ове главе је предлог новог дистрибуираног алгоритма за детекцију промене сигнала који *не захтева центар фузије* и у коме се излаз било ког унапред изабраног чвора може користити за представника целе мреже и тестирати у односу на предефинисани *заједнички* праг. Основна претпоставка је да су чворови у мрежи повезани у складу са временски променљивим оријентисаним графом представљеним тежинском матрицом суседства (*weighted adjacency matrix*)  $C(t) = [c_{ij}(t)]_{n \times n}$ , која задовољава  $c_{ij}(t) \geq 0$ ,  $i \neq j$  и  $c_{ii}(t) > 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  ( $c_{ij}(t)$  представља тежину везе од чвора  $j$  ка чвору  $i$ ). Додатно ћемо претпоставити да су матрице  $C(t)$  стохастичке по реду (*row-stochastic*), случајне, независне идентично расподељене и статистички независне од секвенци  $\{x_i(t)\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Предлаже се следећи алгоритам који генерише векторску функцију одлучивања  $s(t) = [s_1(t) \cdots s_n(t)]^T$  за целу мрежу:

$$s(t+1) = \alpha C(t)s(t) + C(t)x(t+1), \quad s(0) = 0, \quad (2.9)$$

где је  $x(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]^T$ . Алгоритам је изведен из алгоритама заснованих на консензусу, усмерених ка естимацији стања и параметара, предложених у [53, 55]; такође је сличан алгоритму за детекцију заснованом на текућем консензусу, предложеном у [7, 8, 9]. Приметити да матрица  $C(t)$  врши за сваки чвор конвексификацију стања суседа и подстиче на тај начин консензус између чворова. Када се постигне да је  $s_i(t) \approx s_j(t)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , детекција промене се може спровести тестирањем  $s_i(t)$  за било које  $i$  у односу на исто  $\lambda_c$  као у случају (2.8), под условом да је (2.9) постигло довољан ниво апроксимације  $s_c(t)$  генерисаног помоћу (2.8).

Да би се применио предложени алгоритам неопходно је поставити тежине веза у  $C(t)$  у складу са ограничењима комуникационе структуре која су условљена постојањем комуникационих линкова. Претпоставићемо, у општем случају, да је  $C(t)$  реализовано у сваком дискретном временском тренутку  $t$  као  $C^{(k)}$  са вероватноћом  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $N < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^N p_k = 1$  (случај константних матрица је специјалан случај ове поставке). Даље ћемо претпоставити да су матрице појединачних реализација  $C^{(k)} = [c_{ij}^{(k)}]_{n \times n}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , константне, ненегативне, стохастичке по реду матрице, које задовољавају  $c_{ii}^{(k)} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , тако да имамо

$$\bar{C} = E\{C(t)\} = \sum_{k=1}^N C^{(k)} p_k. \quad (2.10)$$

Ова формална поставка очигледно обухвата асинхрони асиметрични *gossip* алгоритам са једном изменом поруке у једном временском тренутку: уколико чвор  $j$  комуницира са чвором  $i$ , одговарајућа реализација је у форми  $C^{(k)} = I + C^{[i,j]}$ , где је  $C^{[i,j]} = [c^{[i,j]kl}]$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ ,  $n \times n$  матрица чији су сви елементи нуле сем  $(i, j)$ -тог елемента, који је једнак  $\gamma_{ij}$ , и  $(i, i)$ -тог елемента који је једнак  $-\gamma_{ij}$ ,  $0 < \gamma_{ij} < 1$ . Разни типови синхроних асиметричних *gossip* алгоритама се такође могу представити на овај начин конструкцијом одговарајућих реализација  $C^{(k)}$  које садрже више ненултих елемената ван главне дијагонале лоцираних на одговарајућим местима. Комуникацијске грешке се очито могу аналогно моделовати, формирањем реализација  $C^{(k)}$  у складу са грешкама (видети нпр. [53]). На овом месту конкретни начини генерисања реализација  $C^{(k)}$  нису од суштинске важности: анализа која следи је применљива за било коју унапред изабрану техничку поставку која задовољава усвојени општи модел мреже.

Претпоставићемо даље да:

- A1)  $\bar{C}$  има сопствену вредност 1 алгебарске вишеструкости 1;
- A2)  $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{C}^i = \mathbf{1}w^T$ .

Прва претпоставка је у вези са унапред датом топологијом коришћене мулти-агент мреже, имплицирајући да граф асоциран са матрицом  $\bar{C}$  има обухватно дрво (*spanning tree*), као и да  $\bar{C}^i$  конверира ненегативној стохастичкој матрици по реду са једнаким редовима када  $i$  тежи бесконачности, нпр. [42, 34]. Претпоставка А2) поставља формалну везу између алгоритма (2.9) и централизоване шеме (2.8), имплицирајући да су матрице реализације  $C^{(k)}$ , одговарајуће вероватноће  $p_k$  и вектор тежина  $w$  повезани релацијом

$$w^T \bar{C} = w^T \sum_{k=1}^N C^{(k)} p_k = w^T. \quad (2.11)$$

За унапред дати вектор  $w$ , сходно захтевима који долазе од изабраног централизованог детектора (2.8), једначина (2.11) се решава по  $C^{(k)}$  и  $p_k$ . То је нелинеарна једначина, која се може решавати у пракси усвајањем једног скупа параметара (нпр. вероватноћа  $p_k$ ) и решавањем проблема линеарног програмирања за преостали скуп параметара (параметри у  $C^{(k)}$ ), или обрнуто [25]. Приметити да је у случају асинхроног *randomized gossip* алгоритма са једном комуникацијом у једном временском тренутку  $C^{(k)}$  карактерисано само једним скаларним параметром; у општем случају,  $C^{(k)}$  је карактерисано са више параметара који задовољавају дата ограничења. Треба напоменути да решавање (2.11) у специјалном случају када су сви  $w_i = n^{-1}$  резултује у симетричним средњим консензус матрицама  $\bar{C}$  када комуникацијски линкови дозвољавају такву структуру; иначе имамо асиметрично  $\bar{C}$  које задовољава (2.11). Повезана литература покрива само симетричан случај [7, 8, 9, 6]; асиметричан случај је третиран у [51, 25].

*Пример конструкције консензус матрица.* У случају када је вектор тежина  $w$  у (2.8) унапред изабран према претходном одељку, конструкција тежина комуникацијских веза је заснована на А2). Претпоставимо да сензорска мрежа има  $n = 10$  чворова и да је

$$w^T = [15.72 \ 3.02 \ 20.74 \ 11.29 \ 5.31 \ 6.17 \ 12.44 \ 5.59 \ 3.62 \ 6.10] \cdot 10^{-2}.$$

Када се ради са константним консензус матрицама, решавањем једначине (2.11) за предефинисану произвољну асиметричну структуру матрице  $C$  (претпостављени елементи једнаки нули који представљају непостојање комуникације између одговарајућих чворова) добија се да је

$$C = \begin{bmatrix} 49.35 & 12.34 & 0 & 0 & 0 & 5.36 & 17.43 & 0 & 6.43 & 9.09 \\ 0 & 59.11 & 0 & 0 & 9.01 & 5.36 & 17.43 & 0 & 0 & 9.09 \\ 0 & 0 & 63.64 & 18.19 & 9.01 & 0 & 0 & 9.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34.00 & 47.76 & 0 & 0 & 0 & 9.16 & 0 & 9.09 \\ 0 & 12.34 & 34.00 & 0 & 6.20 & 5.36 & 17.43 & 9.16 & 6.43 & 9.09 \\ 28.11 & 0 & 0 & 0 & 9.01 & 56.45 & 0 & 0 & 6.43 & 0 \\ 28.11 & 12.34 & 0 & 0 & 0 & 5.36 & 38.67 & 0 & 6.43 & 9.09 \\ 0 & 0 & 34.00 & 18.19 & 9.01 & 0 & 0 & 38.80 & 0 & 0 \\ 28.11 & 12.34 & 0 & 0 & 9.01 & 5.36 & 17.43 & 0 & 18.66 & 9.09 \\ 28.11 & 12.34 & 0 & 18.19 & 9.01 & 0 & 17.43 & 0 & 6.43 & 8.49 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}.$$

Добијање случајних консензус матрица је сложеније. Да би се демонстрирала методологија, посматрајмо потпуно повезану сензорску мрежу са  $n = 3$  чвора, са асиметричним *gossip* алгоритмом са једном комуникацијом по временском одбирку. У овом случају постоји  $N = 6$  могућих реализација матрице  $C(t)$ :  $C^{(1)} = I + C^{[1,2]}$ ,  $C^{(2)} = I + C^{[1,3]}$ ,  $C^{(3)} = I + C^{[2,1]}$ ,  $C^{(4)} = I + C^{[2,3]}$ ,  $C^{(5)} = I + C^{[3,1]}$ , и  $C^{(6)} = I + C^{[3,2]}$  (видети претходни одељак). Дакле, добија се да је

$$\bar{C} = \sum_{k=1}^N C^{(k)} p_k = \begin{bmatrix} 1 - \gamma_{12}p_1 - \gamma_{13}p_2 & \gamma_{12}p_1 & \gamma_{13}p_2 \\ \gamma_{21}p_3 & 1 - \gamma_{21}p_3 - \gamma_{23}p_4 & \gamma_{23}p_4 \\ \gamma_{31}p_5 & \gamma_{32}p_6 & 1 - \gamma_{31}p_5 - \gamma_{32}p_6 \end{bmatrix}.$$

Постоје две главна практична избора за добијање решења проблема (2.11):

а) усвајање вредности вероватноћа  $p_k$  (нпр.  $p_k = 1/N$ ,  $k = 1, \dots, N$ ) и решавање (2.11) по преосталом скупу параметара;

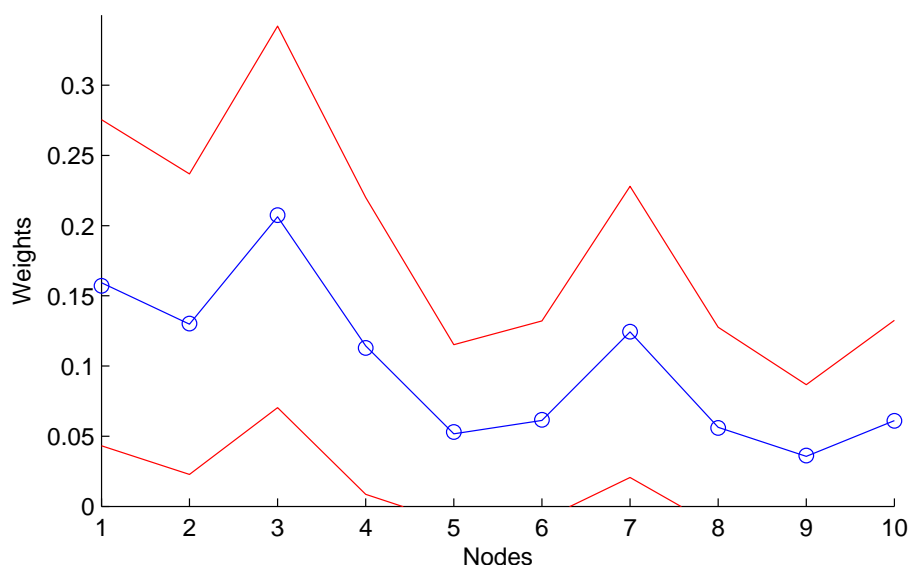
б) усвајање вредности елемената  $C^{(k)}$ , тј. скупа параметара  $\gamma_{ij}$  (нпр.  $\gamma_{ij} = 0.5$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ), и решавање (2.11) по вероватноћама  $p_k$ .

Са гледишта примене предложеног алгоритма у реалним сензорским мрежама случај под а) одговара случају када се могуће комуникације исте тежине између чворова дешавају са неким предефинисаним вероватноћама док случај под б) обухвата ситуације када чворови шаљу податке са предефинисаним тежинама када се могуће комуникације исте вероватноће десе.

Вративши се на горепоменућу мрежу са  $n = 10$ , добија се, за *gossip* алгоритам са једном комуникацијом по одбирку и за примењену методологију под б) са  $\gamma_{ij} = 0.5$ , да је

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 95.87 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0.44 & 1.42 & 0 & 0.52 & 0.74 \\ 0 & 96.66 & 0 & 0 & 0.74 & 0.44 & 1.42 & 0 & 0 & 0.74 \\ 0 & 0 & 97.03 & 1.48 & 0.74 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.77 & 95.74 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0.74 \\ 0 & 1.01 & 2.77 & 0 & 92.35 & 0.44 & 1.42 & 0.75 & 0.52 & 0.74 \\ 2.29 & 0 & 0 & 0 & 0.74 & 96.45 & 0 & 0 & 0.52 & 0 \\ 2.29 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0.44 & 95.00 & 0 & 0.52 & 0.74 \\ 0 & 0 & 2.77 & 1.48 & 0.74 & 0 & 0 & 95.01 & 0 & 0 \\ 2.29 & 1.01 & 0 & 0 & 0.74 & 0.44 & 1.42 & 0 & 93.36 & 0.74 \\ 2.29 & 1.01 & 0 & 1.48 & 0.74 & 0 & 1.42 & 0 & 0.52 & 92.53 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}.$$

Може се лако проверити да је  $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{C}^i = \mathbf{1}w^T$ , као и да је сума свих елемената ван главне дијагонале једнака 0.5.



Слика 2.1: Естимирана средња вредност  $\pm$  једна стандардна девијација једног реда матрице  $C(1000) \cdot \dots \cdot C(1)$ ; компоненте вектора тежина су представљене кружићима.

У оба приказана примера колоне матрица  $\bar{C}$  имају једнаке елементе (изузимајући елементе на главној дијагонали); ово је због практичне користи усвојено као додатно ограничење у проблему линеарног програмирања.

Као илустрација особина конвергенције алгорита, производи  $\varphi(1000, 1) = C(1000) \cdot \dots \cdot C(1)$  су рачунати коришћењем 5000 Монте Карло итерација. На Слици 2.1 је показано да се добијена средња вредност било ког од редова матрице  $\varphi(1000, 1)$  (практично су једнаки) подудара са вектором тежина  $w$ ; стандардна девијација опада како се број агената који симултано комуницирају повећава.

### 2.2.3 Анализа алгорита заснованог на консензусу

Теоретска анализа која ће бити дата у овом одељку разматра однос између предложеног алгорита заснованог на консензусу (2.9) и централизоване шеме (2.8) која је узета као референца. Циљ је да се покаже да предложени алгорита генерише статистике које су (довољно) близу централизованог статистички. Теоретска анализа перформанси предложеног алгорита у погледу стандардних мера перформанси детекције - вероватноћа детекције и лажног аларма претпоставља знање о расподелама генерисаних статистика. Веома је тешко и ван обима овог разматрања добити поменуте расподеле, имајући у виду да се ради о

комбинацији динамике консензуса са динамиком варијанте алгоритма покретних геометријских просека. Ипак, горепоменуте мере перформанси ће бити детаљно продискутоване уз помоћ симулација у Поглављу 4.

Вектор грешке између стања алгоритма заснованог на консензусу и централизоване шеме се дефинише као

$$e(t) = s(t) - \mathbf{1}s_c(t), \quad (2.12)$$

где је  $\mathbf{1} = [1 \cdots 1]^T$ . Итерисањем (2.9) и (2.8) уназад до нултих почетних услова, добија се

$$s(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i \varphi(t-1, t-i-1)x(t-i), \quad (2.13)$$

где је  $\varphi(i, j) = C(i) \cdots C(j)$ ,  $i \geq j$ , и

$$s_c(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i w^T x(t-i), \quad (2.14)$$

одакле је

$$e(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i [\varphi(t-1, t-i-1) - \mathbf{1}w^T]x(t-i). \quad (2.15)$$

Из (2.15) директно се добија

$$E\{e(t)\} = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i (\bar{C} - \mathbf{1}w^T)^{i+1} m = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i \tilde{C}^{i+1} m, \quad (2.16)$$

где је  $m = E\{x(t)\}$  и  $\tilde{C} = \bar{C} - \mathbf{1}w^T$ , имајући у виду да је, под A2),  $(\bar{C} - \mathbf{1}w^T)^i = \bar{C}^i - \mathbf{1}w^T$ . Очигледно,  $s(t)$  је померени естиматор  $\mathbf{1}s_c(t)$  када  $m \neq \mu\mathbf{1}$ , где је  $\mu$  дати скалар, имајући у виду да је  $\tilde{C}m = 0$  за  $m = \mu\mathbf{1}$ .

Рачунајући  $m = [E\{x_1(t)\} \cdots E\{x_n(t)\}]^T$  добија се из (2.6), (2.7) и (2.1)

$$E\{x_i(t)\} = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j y(t-j)y_i(t) \approx \theta_i^2 + (1 - \alpha)\sigma_i^2, \quad (2.17)$$

где је коришћена апроксимација (која ће се користити и надаље у овој глави) да за довољно велико  $t$  важи  $1 - \alpha^t \approx 1$ .

Под претпоставкама A1) and A2) следи да  $\bar{C}$  and  $\mathbf{1}w^T$  имају исте сопствене векторе. Дакле,  $\bar{C}$  има исте сопствене вредности као  $\tilde{C}$ , осим што је сопствена вредност 1 матрице  $\bar{C}$  замењена сопственом вредношћу 0 матрице  $\tilde{C}$ . Имајући у виду да је  $c_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , следи да су модули свих сопствених вредности

матрице  $\tilde{C}$  стриктно мањи од 1 [42]. Означимо  $\max_i \{|\lambda_i(\tilde{C})|\} = \lambda_M < 1$ . Може се видети да је

$$\|E\{e(t)\}\| \leq \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i \|\tilde{C}^{i+1}\| \|m\| \leq \frac{k\lambda_M \|m\|}{1 - \alpha\lambda_M} < \frac{k\lambda_M \|m\|}{1 - \lambda_M}, \quad (2.18)$$

имајући у виду да је  $\|\tilde{C}^i\| \leq k\lambda_M^t$  за било коју норму матрица, где је  $k$  одговарајуће изабрана константа, и да је  $\lambda_M < 1$ . Интересантно је направити поређење са особинама аналогног алгоритма предложеног у [51], где је горња граница  $\|E\{e(t)\}\|$  пропорционална  $1 - \alpha$  под обе хипотезе.

Међутим, добијени квалитет у апроксимацији централизованог решења се адекватније може изразити нормализовањем  $\|E\{e(t)\}\|$  математичким очекивањем саме централизоване варијабле одлучивања. У овом случају лако се добија да је под обе хипотезе

$$\frac{\|E\{e(t)\}\|}{E\{s_c(t)\}} \leq K(1 - \alpha), \quad (2.19)$$

где је  $K < \infty$ , имајући у виду да је  $E\{s_c(t)\} \approx w^T \frac{m}{1-\alpha}$ . Под хипотезом  $H_1$  средња вредност централизоване статистике расте као  $\frac{1}{1-\alpha}$  када се  $\alpha$  приближава 1, док горња граница грешке остаје константна; под хипотезом  $H_0$  средња вредност централизоване статистике остаје константна и независна од  $\alpha$ , док средња вредност грешке линеарно опада као  $1 - \alpha$  (имајући у виду да под  $H_0$  важи  $m \sim 1 - \alpha$ ).

Потпунији увид у квалитет апроксимације може се добити анализом матрице средње квадратне грешке:

$$Q(t) = E\{e(t)e(t)^T\}. \quad (2.20)$$

Следећа лема служи као предуслов.

*Лема 1.* Коваријациона функција  $r_i(\tau) = E\{(x_i(t) - m_i)(x_i(t + \tau) - m_i)\}$  за алгоритам (2.5) задовољава

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} |r_i(\tau)| \leq K_1; \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 < K_1 < \infty. \quad (2.21)$$

Доказ: Почевши од (2.6) изводи се

$$\begin{aligned}
r_i(\tau) &= E\{(\bar{y}_i(t)y_i(t) - m_i)(\bar{y}_i(t+\tau)y_i(t+\tau) - m_i)\} = \\
&= E\{((1-\alpha)\sum_{j=0}^{t-1}\alpha^j(\theta_i^2 + \theta_i(\epsilon_i(t) + \epsilon_i(t-j)) + \\
&\quad + \epsilon_i(t)\epsilon_i(t-j)) - (\theta_i^2 + (1-\alpha)\sigma_i^2)) \cdot \\
&\cdot ((1-\alpha)\sum_{k=0}^{t+\tau-1}\alpha^k(\theta_i^2 + \theta_i(\epsilon_i(t+\tau) + \epsilon_i(t+\tau-k)) + \\
&\quad + \epsilon_i(t+\tau)\epsilon_i(t+\tau-k)) - (\theta_i^2 + (1-\alpha)\sigma_i^2))\} = \\
&= E\{(1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{t-1}\alpha^j\theta_i(\epsilon_i(t) + \epsilon_i(t-j)) \cdot \\
&\cdot \sum_{k=0}^{t+\tau-1}\alpha^k\theta_i(\epsilon_i(t+\tau) + \epsilon_i(t+\tau-k))\} + \delta_{\tau,0}r_{\epsilon\epsilon}, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

где је  $r_{\epsilon\epsilon}$  део  $r_i(\tau)$  везан за математичко очекивање производа чланова  $(1-\alpha)((\sum_{j=0}^{t-1}\alpha^j\epsilon_i(t)\epsilon_i(t-j)) - \sigma_i^2)$  и  $(1-\alpha)((\sum_{k=0}^{t-1}\alpha^k\epsilon_i(t+\tau) + \epsilon_i(t+\tau-k)) - \sigma_i^2)$ , које је ненулта за  $\tau = 0$  и  $k = j$ ,

$$\begin{aligned}
r_{\epsilon\epsilon} &= (1-\alpha)^2(E\{\epsilon_i^4(t) + \sum_{j=1}^{t-1}\alpha^{2j}\epsilon_i^2(t)\epsilon_i^2(t-j)\} - \sigma_i^4) \approx \\
&\approx (1-\alpha)^2(2\sigma_i^4 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\sigma_i^4) = \\
&= (1-\alpha)\sigma_i^4\frac{2-\alpha^2}{1+\alpha}. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

С обзиром на то да је  $r_i(\tau) = r_i(-\tau)$ , може се видети да за  $\tau > 0$  постоје ненулти чланови у преосталим члановима у (2.22) само у случајевима када је  $k = \tau$  и  $k = \tau + j$ ; за  $\tau = 0$  постоје ненулти чланови у случајевима када је  $k = 0$  и  $k = j$  али такође и у случају када је  $j = 0$ , заједно са чланом везаним за  $\theta_i^2\epsilon_i^2(t)$  који је ненулта за свако  $j$  и  $k$ . Дакле, добија се следећи израз за  $r_i(\tau)$  (за  $\tau \geq 0$ )

$$\begin{aligned}
r_i(\tau) &= (1-\alpha)^2E\{\sum_{j=0}^{t-1}\alpha^j\theta_i^2(\alpha^\tau\epsilon_i^2(t) + \alpha^{\tau+j}\epsilon_i^2(t-j))\} + \delta_{\tau,0}(r_{\epsilon\epsilon} + r_\epsilon) \approx \\
&\approx (1-\alpha)^2\theta_i^2\sigma_i^2(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2})\alpha^\tau + \delta_{\tau,0}(r_{\epsilon\epsilon} + r_\epsilon) = \\
&= (1-\alpha)\theta_i^2\sigma_i^2\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\alpha^\tau + \delta_{\tau,0}(r_{\epsilon\epsilon} + r_\epsilon), \tag{2.24}
\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}
r_\epsilon &= (1-\alpha)^2E\{\sum_{k=0}^{t-1}\alpha^k(\theta_i^2\epsilon_i^2(t) + \sum_{j=0}^{t-1}\alpha^j\theta_i^2\epsilon_i^2(t))\} \approx \\
&\approx (1-\alpha)\theta_i^2\sigma_i^2 + \theta_i^2\sigma_i^2. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Имајући у виду да је  $0 < \alpha < 1$  добија се

$$r_i(\tau) < (1-\alpha)\theta_i^2\sigma_i^2\kappa_1\alpha^\tau + \delta_{\tau,0}((1-\alpha)\sigma_i^4\kappa_2 + (1-\alpha)\theta_i^2\sigma_i^2 + \theta_i^2\sigma_i^2), \tag{2.26}$$



где су  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  константе које не зависе од  $\alpha$  (нпр.  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ). Дакле, (2.21) је задовољено под обе хипотезе. Прецизније, под хипотезом  $H_1$  је

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} |r_i(\tau)| < \theta_i^2 \sigma_i^2 (\kappa_1 + 1) + (1 - \alpha)(\sigma_i^4 \kappa_2 + \sigma_i^2 \theta_i^2) < K_1 < \infty, \quad (2.27)$$

где је  $K_1$  константа која не зависи од  $\alpha$  (нпр.  $K_1 = \theta_i^2 \sigma_i^2 (\kappa_1 + 1) + (\sigma_i^4 \kappa_2 + \sigma_i^2 \theta_i^2)$ ), док под хипотезом  $H_0$  постоји само један ненулти члан:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} |r_i(\tau)| < (1 - \alpha) \sigma_i^4 \kappa_2 \leq K_0 (1 - \alpha) < \infty, \quad (2.28)$$

где је  $K_0$  константа која не зависи од  $\alpha$ . *Q.E.D.*

*Теорема 1.* Нека важе претпоставке A1) и A2), и нека је

$$J(t) = \frac{\|Q(t)\|_{\infty}}{E\{s_c(t)^2\}}.$$

Тада је, под хипотезом  $H_1$ , у случају константних консензус матрица

$$J(t) \leq K_1^1 (1 - \alpha)^2,$$

док је код случајних консензус матрица

$$J(t) \leq K_2^1 (1 - \alpha);$$

под хипотезом  $H_0$ , у случају константних консензус матрица је

$$J(t) \leq K_1^0 (1 - \alpha),$$

док је код случајних консензус матрица

$$J(t) \leq K_2^0,$$

где су  $K_1^1, K_2^1, K_1^0, K_2^0 < \infty$  константе које не зависе од  $\alpha$  и  $\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ , где је  $A = [a_{ij}]$  дата матрица.

*Доказ:* Најпре се израчунава доња граница за варијансу централизоване статистике:

$$\begin{aligned} \text{var}\{s_c(t)\} &= E\left\{\left(\sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j w^T x(t-j) - \frac{w^T m}{1-\alpha}\right)^2\right\} = \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k w^T \tilde{R}_{jk} w, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где је

$$\tilde{R}_{jk} = \text{diag}\{r_1(j-k), \dots, r_n(j-k)\}. \quad (2.30)$$

Из (2.24), (2.23) and (2.25) могу се добити и доње границе за  $r_i(\tau)$ :

$$r_i(\tau) > (1-\alpha)\kappa_3\alpha^{|\tau|} + \delta_{\tau,0}((1-\alpha)\kappa_4 + \kappa_5), \quad (2.31)$$

где су  $\kappa_3$ ,  $\kappa_4$  и  $\kappa_5$  константе које не зависе од  $\alpha$  (нпр.  $\kappa_3 = \frac{3}{2} \min_i \theta_i^2 \sigma_i^2$ ,  $\kappa_4 = \min_i (\frac{1}{2} \sigma_i^4 + \theta_i^2 \sigma_i^2)$  и  $\kappa_5 = \min_i \theta_i^2 \sigma_i^2$ ). Дакле, под хипотезом  $H_1$  је

$$\begin{aligned} \text{var}\{s_c(t)\} &> \\ &> \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k (1-\alpha) \alpha^{|j-k|} \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_3 + \\ &+ \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^{2j} ((1-\alpha) \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_4 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_5). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Анализирајући прву суму у (2.32) добија се

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k \alpha^{|j-k|} = \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j (\sum_{k=0}^{j-1} \alpha^k \alpha^{j-k} + \sum_{k=j}^{t-1} \alpha^k \alpha^{k-j}) \approx \\ &\approx \sum_{j=0}^{t-1} (j\alpha^{2j} + \frac{\alpha^{2j}}{1-\alpha^2}) \approx \frac{2}{(1-\alpha^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Дакле, коначно се добија да је под хипотезом  $H_1$

$$\begin{aligned} \text{var}\{s_c(t)\} &> \frac{2(1-\alpha)}{(1-\alpha^2)^2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_3 + \frac{1}{1-\alpha^2} ((1-\alpha) \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_4 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_5) > \\ &> \kappa_6 (1-\alpha)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где је  $\kappa_6$  константа која не зависи од  $\alpha$  (нпр.  $\kappa_6 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_5$ ).

Израчунавање доње границе варијансе централизоване статистике је простије под хипотезом  $H_0$  (коришћењем чињенице да је  $r_i(\tau) > \delta_{\tau,0}(1-\alpha)\kappa_7$ , где је  $\kappa_7 \neq \kappa_7(\alpha)$ , нпр.  $\kappa_7 = \frac{1}{2} \min_i \sigma_i^4$ ):

$$\text{var}\{s_c(t)\} > \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^{2j} (1-\alpha) \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_7 > \kappa_8, \quad (2.35)$$

где је  $\kappa_8 \neq \kappa_8(\alpha)$  (нпр.  $\kappa_8 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \kappa_7$ ).

Имајући у виду да је  $E\{s_c(t)\} \approx w^T \frac{m}{1-\alpha}$ , добија се да је под хипотезом  $H_1$

$$E\{s_c(t)^2\} = E\{s_c(t)\}^2 + \text{var}\{s_c(t)\} \geq m_1 (1-\alpha)^{-2}, \quad (2.36)$$

док је под хипотезом  $H_0$

$$E\{s_c(t)^2\} \geq m_0, \quad (2.37)$$

где  $m_1, m_0 < \infty$  не зависе од  $\alpha$ .

Треба приметити да је могуће наћи, на сличан начин као изнад, да горње границе варијансе централизоване статистике имају исту форму као доње границе (2.34) и (2.35), само се константе разликују. Дакле, под  $H_1$  варијанса централизоване статистике расте како се  $\alpha$  приближава вредности 1 ( $\kappa_{H_1}^l < (1 - \alpha)\text{var}\{s_c(t)\} < \kappa_{H_1}^u$ ), док под  $H_0$  остаје унутар константног интервала ( $\kappa_{H_0}^l < \text{var}\{s_c(t)\} < \kappa_{H_0}^u$ ).

Предмет даљег разматрања је детерминистички вектор  $y$  величине  $n$  и анализа квадратне форме  $y^T Q(t)y$  под хипотезом  $H_1$ .

У случају константних консензус матрица је  $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$ , где је

$$Q_1(t) = \Phi(t)^T \tilde{R}(t) \Phi(t) \quad (2.38)$$

и

$$Q_2(t) = \Phi(t)^T m_X(t) m_X(t)^T \Phi(t), \quad (2.39)$$

где је  $\Phi(t) = [\alpha^{t-1} \tilde{C}^t : \alpha^{t-2} \tilde{C}^{t-1} : \dots : \alpha^0 \tilde{C}]^T$ ,  $\tilde{R}(t) = R(t) - m_X(t) m_X(t)^T$ ,  $R(t) = E\{X(t)X(t)^T\}$ ,  $X(t) = [x(1)^T \dots x(t)^T]^T$  и  $m_X(t) = E\{X(t)\}$ .

Анализирајући најпре  $y^T Q_1(t)y$  закључује се да је  $\tilde{R}(t) = [\tilde{R}_{ij}]$ ,  $i, j = 1, \dots, t$ , где су  $\tilde{R}_{ij}$  константне  $n \times n$  блок матрице дефинисане преко (2.30), као и да је

$$\lambda_{\max}(\tilde{R}(t)) \leq \|\tilde{R}(t)\|_\infty \leq K_1 < \infty, \quad (2.40)$$

због апсолутне сумабилности коваријационих функција.

Посматрајући (2.38) може се закључити да је израз  $y^T \Phi(t)^T \Phi(t)y$  у форми суме чланова који садрже  $y^T \tilde{C}^i \tilde{C}^{iT} y$ ,  $i = 1, \dots, t$ . Имајући у виду да су модули свих сопствених вредности матрице  $\tilde{C}$  стриктно мањи од 1, долази се до неједнакости  $\|y^T \tilde{C}^i \tilde{C}^{iT} y\| \leq k \lambda_M^{2i} \|y\|^2$ , где је  $k < \infty$ ,  $i = 1, \dots, t$  и  $\lambda_M = \max_i \{|\lambda_i(\tilde{C})|\} < 1$ .

Дакле,

$$y^T Q_1(t)y \leq k' K_1 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^{2i} \lambda_M^{2(i+1)} \|y\|^2 \leq k' K_1 \frac{\lambda_M^2}{1 - \lambda_M^2} \|y\|^2 \leq k_1^1 \|y\|^2, \quad (2.41)$$

где  $k_1^1 < \infty$  не зависи од  $\alpha$ , док се анализом  $Q_2(t)$  долази до неједнакости

$$y^T Q_2(t)y \leq (\sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i \|\tilde{C}^{i+1}\| \|m\|)^2 \|y\|^2 \leq k'' \left(\frac{\lambda_M}{1 - \lambda_M}\right)^2 \|y\|^2 \leq k_2^1 \|y\|^2, \quad (2.42)$$

где  $k_2^1 < \infty$  не зависи од  $\alpha$ .

Код случајних консензус матрица се матрица средње квадратне грешке декомпонује као  $Q(t) = Q_3(t) + Q_4(t)$ , где је

$$Q_3(t) = E\{E_x\{e(t)e(t)^T\} - E_x\{e(t)\}E_x\{e(t)\}^T\} \quad (2.43)$$

и

$$Q_4(t) = E\{E_x\{e(t)\}E_x\{e(t)\}^T\}, \quad (2.44)$$

$E_x\{\cdot\}$  означава условно очекивање ако је дата  $\sigma$ -алгебра генерисана са  $\{C(t)\}$ .

Аналогно са (2.38) and (2.39) се добија да је

$$Q_3(t) = E\{\tilde{\Phi}(t)^T \tilde{R}(t) \tilde{\Phi}(t)\}, \quad (2.45)$$

где је  $\tilde{\Phi}(t) = [\alpha^{t-1}(\varphi(t-1, 0) - \mathbf{1}w^T) : \alpha^{t-2}(\varphi(t-1, 1) - \mathbf{1}w^T) : \dots : \alpha^0(\varphi(t-1, t-1) - \mathbf{1}w^T)]^T$  и

$$Q_4(t) = E\{\tilde{\Phi}(t)^T m_X(t) m_X(t)^T \tilde{\Phi}(t)\}. \quad (2.46)$$

Анализом члана везаног за  $Q_3(t)$  и директним коришћењем (2.40) као последице независности између  $\{x(t)\}$  и  $\{C(t)\}$  долази се до израза

$$E\{\tilde{\Phi}(t)^T \tilde{\Phi}(t)\} = \sum_{j=0}^{t-1} D(t-1, j) \alpha^{2(t-j-1)}, \quad (2.47)$$

где је  $D(t-1, j) = E\{(\varphi(t-1, j) - \mathbf{1}w^T)(\varphi(t-1, j) - \mathbf{1}w^T)^T\}$ . На основу резултата из [51] да норма матрица  $D(t-1, j)$ ,  $j = 0, \dots, t-1$  има коначну горњу границу која не зависи од  $\alpha$  добија се да је

$$y^T Q_3(t) y \leq m' K_1 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^{2i} \|y\|^2 \leq k_3^1 (1 - \alpha)^{-1} \|y\|^2, \quad (2.48)$$

где  $k_3^1 < \infty$  не зависи од  $\alpha$ , док се члан  $y^T Q_4(t) y$  може аналогно анализирати. Користи се чињеница да је

$$\begin{aligned} & E\{\tilde{\Phi}(t)^T m_X(t) m_X(t)^T \tilde{\Phi}(t)\} \leq \\ & \leq 2\alpha^{2(t-1)} E\{(\varphi(t-1, 0) - \mathbf{1}w^T) m m^T (\varphi(t-1, 0) - \mathbf{1}w^T)^T\} + \dots + \\ & + 2\alpha^{2 \cdot 0} E\{(\varphi(t-1, t-1) - \mathbf{1}w^T) m m^T (\varphi(t-1, t-1) - \mathbf{1}w^T)^T\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

и добија неједнакост

$$y^T Q_4(t)y \leq m'' \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^{2i} \|m\|^2 \|y\|^2 \leq k_4^1 (1 - \alpha)^{-1} \|y\|^2, \quad (2.50)$$

где  $k_4^1 < \infty$  не зависи од  $\alpha$ .

Стога, избором  $y = e_i$ , где  $e_i$  означава вектор величине  $n$  са свим нулама и  $i$ -тим чланом једнаким јединици, добија се да је у случају константних консензус матрица  $Q_{ii}(t) \leq k_{12}^1$ , где је  $k_{12}^1 < \infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Даље,  $|Q_{ij}(t)| \leq \max_i Q_{ii}(t)$ , имајући у виду основне особине позитивних семидефинитних матрица. Код случајних консензус матрица се добија да је  $\max_{i,j} Q_{ij}(t) \leq k_{34}^1 \frac{1}{1-\alpha}$ , где је  $k_{34}^1 < \infty$ . Дељењем матрице средње квадратне грешке средњом квадратном вредношћу централизоване варијабле одлучивања (2.36) добија се резултат.

Под хипотезом  $H_0$  константа  $K_1$  из (2.40) зависи од  $\alpha$ , тј.  $K_1 \sim 1 - \alpha$ , тако да неједнакости везане за квадратне форме (2.41) и (2.48) треба помножити са  $1 - \alpha$ . Такође, под  $H_0$  средња вредност  $x(t)$  показује слично понашање,  $m \sim 1 - \alpha$ , тако да неједнакости везане за квадратне форме (2.49) и (2.50) треба помножити са  $(1 - \alpha)^2$ . Дакле, у случају константних консензус матрица је

$$y^T Q(t)y \leq k_1^0 (1 - \alpha) \|y\|^2 + k_2^0 (1 - \alpha)^2 \|y\|^2 < k_{12}^0 (1 - \alpha) \|y\|^2, \quad (2.51)$$

док је код случајних консензус матрица

$$y^T Q(t)y \leq k_3^0 \|y\|^2 + k_4^0 (1 - \alpha) \|y\|^2 < k_{34}^0 \|y\|^2. \quad (2.52)$$

*Q.E.D.*

## 2.2.4 Временски променљив фактор заборављања

Рекурзивни алгоритми са константним фактором заборављања  $\alpha$  (2.8) и (2.9) представљају у основи алгоритме за праћење, усмерене ка проблемима у којима долази до наплог скока параметара [3]. Анализа случаја временски променљивог фактора заборављања који одговара проблему тестирања хипотеза је такође интересантна, да би се видела аналогија између  $1 - \alpha$  и  $t^{-1}$  (коришћењем методологије из [51]).

*Теорема 2.* Нека је у (2.8) и (2.9) фактор заборављања у форми  $\alpha(t+1) = \frac{t}{t+1}$  и нека важе претпоставке A1) и A2). Тада је под хипотезом  $H_1$  у случају

константних консензус матрица

$$J(t) = O(t^{-2}),$$

док је код случајних консензус матрица

$$J(t) = O(t^{-1});$$

под хипотезом  $H_0$  је у случају константних консензус матрица

$$J(t) = O(t^{-1}),$$

док је код случајних консензус матрица

$$J(t) = O(1).$$

*Доказ:* Најпре се добија израз за централизовану статистику

$$s_c(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{t-i}{t} w^T x(t-i), \quad (2.53)$$

имајући у виду да је  $\frac{t-1}{t} \cdot \frac{t-2}{t-1} \cdot \dots \cdot \frac{t-i}{t-i+1} = \frac{t-i}{t}$ . Једноставно је показати да је  $E\{x(t)\} = O(1)$  под хипотезом  $H_1$  и да је  $E\{x(t)\} = O(t^{-1})$  под хипотезом  $H_0$ . Слично као у (2.36) и (2.37) може се показати да је у случају константних консензус матрица  $E\{s_c(t)^2\} = O(t^2)$ , док је код случајних консензус матрица  $E\{s_c(t)^2\} = O(1)$  (приметити аналогију између  $1 - \alpha$  и  $\frac{1}{t}$ ).

Добија се следећи израз за грешку (2.12)

$$e(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{t-i}{t} \tilde{C}^{i+1} x(t-i). \quad (2.54)$$

Применом истог принципа резоновања као у Теорему 1 везано за хипотезу  $H_1$ , у случају константних консензус матрица може се добити следећи израз, слично као у (2.38)

$$y^T Q_1(t) y = y^T \Psi(t)^T \tilde{R}(t) \Psi(t) y, \quad (2.55)$$

где је  $\Psi(t) = [\frac{1}{t} \tilde{C}^t; \frac{2}{t} \tilde{C}^{t-1}; \dots; \tilde{C}]$ . Настављајући као у доказу Теореме 1 добија се

$$y^T Q_1(t) y \leq k' K_1 \sum_{i=0}^{t-1} \left(1 - 2\frac{i}{t} + \frac{i^2}{t^2}\right) \lambda_M^{2(i+1)} \|y\|^2 = O(1) \|y\|^2, \quad (2.56)$$

где је директно коришћена Кронекерова лема (нпр. [14]) да би се добило

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^t \left(2\frac{i}{t} + \frac{i^2}{t^2}\right) \lambda_M^{2(i+1)} = 0. \quad (2.57)$$

Аналогно резонување се може применити и на члан  $Q_2(t)$  из (2.39), и показати да је  $y^T Q_2(t)y = O(1)\|y\|^2$ .

Код случајних консензус матрица се добија, слично као у Теорему 1, да је

$$y^T Q_3(t)y \leq m' K_1 \sum_{i=0}^{t-1} \left(1 - 2\frac{i}{t} + \frac{i^2}{t^2}\right) \|y\|^2 = O(t)\|y\|^2. \quad (2.58)$$

Аналогно, може се показати да је  $y^T Q_4(t)y = O(t)\|y\|^2$ .

Под хипотезом  $H_0$  неједнакости везане за чланове  $Q_1(t)$  и  $Q_3(t)$  треба помножити са  $t^{-1}$ , зато што је  $K_1 \sim t^{-1}$ ; неједнакости везане за чланове  $Q_2(t)$  и  $Q_4(t)$  треба помножити са  $t^{-2}$ , зато што је  $m \sim t^{-1}$ , тако да се њихов утицај може занемарити у односу на чланове  $Q_1(t)$  и  $Q_3(t)$ . Дакле, слично као у Теорему 1 добија се резултат. *Q.E.D.*

## 2.3 Дистрибуирана рекурзивна детекција промене у варијанси сигнала

Претпоставимо, без губитка општости, да је предмет разматрања следећи модел система са нултом средњом вредношћу

$$y_i(t) = \epsilon_i(t), \quad (2.59)$$

где је под хипотезом  $H_0^i$  шум дефинисан као  $\epsilon_i(t) \sim N(0, (\sigma_i^0)^2)$ , док је под хипотезом  $H_1^i$  дефинисан као  $\epsilon_i(t) \sim N(0, (\sigma_i^1)^2)$ ;  $\{\epsilon_i(t)\}$  су под обе хипотезе међусобно независни идентично расподељени процеси. У случају када  $(\sigma_i^1)^2$  није унапред познато, примена методологије ГКВ за тестирање хипотеза доводи до следеће статистике засноване на  $N$  узастопних мерења [3, 18]

$$s_i^l(N) = \max_{\sigma_i^1} \sum_{t=1}^N \log \frac{p_{\sigma_i^1}(y_i(t))}{p_{\sigma_i^0}(y_i(t))} = N \log \frac{\sigma_i^0}{\bar{\sigma}_i(N)} + \frac{1}{2(\sigma_i^0)^2} \sum_{t=1}^N y_i(t)^2 - \frac{N}{2}, \quad (2.60)$$

где је  $\bar{\sigma}_i(N)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_i(t)^2$ .

Увођењем  $t$  као тренутног времена изводи се, слично као у (2.3), следећа

основна рекурзија за израчунавање  $s_i^l(t)$ :

$$\begin{aligned}
s_i^l(t+1) &= \frac{t}{t+1} s_i^l(t) + \left(1 - \frac{1}{2(t+1)}\right) \log \frac{(\sigma_i^0)^2}{\bar{\sigma}_i(t+1)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t+1} \frac{1}{(\sigma_i^0)^2} - \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \frac{1}{\bar{\sigma}_i(t+1)^2} \right) y_i(t+1)^2 + \\
&+ \frac{1}{2(\sigma_i^0)^2} (\bar{\sigma}_i(t+1)^2 - (\sigma_i^0)^2). \tag{2.61}
\end{aligned}$$

За довољно велико  $t$  могу се увести апроксимације  $\frac{1}{t+1} \ll 1$  и  $\frac{t}{t+1} \approx 1$  везане за иновационе чланове и, после замене  $\frac{t}{t+1}$  са  $\alpha$  близу 1, коначно се добија следећа рекурзија за *on-line* детекцију промене сигнала

$$\begin{aligned}
s_i^l(t+1) &= \alpha s_i^l(t) + \log \frac{(\sigma_i^0)^2}{\bar{\sigma}_i(t+1)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\sigma_i^0)^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_i(t+1)^2} \right) y_i(t+1)^2 + \\
&+ \frac{1}{2(\sigma_i^0)^2} (\bar{\sigma}_i(t+1)^2 - (\sigma_i^0)^2), \tag{2.62}
\end{aligned}$$

где је  $\bar{\sigma}_i(t+1)^2$  рекурзивно генерисано помоћу

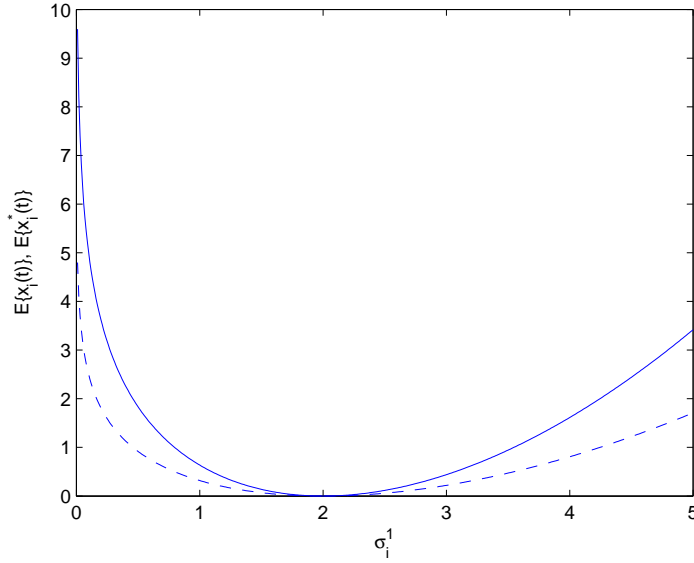
$$\bar{\sigma}_i(t+1)^2 = \alpha \bar{\sigma}_i(t)^2 + (1 - \alpha) y_i(t+1)^2. \tag{2.63}$$

Усвајањем општег приступа из [8, 51] да је централизована статистика дефинисана као сума локалних статистика (датих у (2.62)) и означавањем

$$x_i(t) = \log \frac{(\sigma_i^0)^2}{\bar{\sigma}_i(t)^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\sigma_i^0)^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_i(t)^2} \right) y_i(t)^2 + \frac{1}{2(\sigma_i^0)^2} (\bar{\sigma}_i(t)^2 - (\sigma_i^0)^2),$$

долази се до исте форме централизованог (2.8) и дистрибуираног алгоритма (2.9), као у случају детекције промене у средњој вредности сигнала. Очигледно, ови алгоритми користе једнаке нормализоване тежине  $w_i = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Комплексност израза за  $x_i(t+1)$  (рекурзивно генерисан члан  $\bar{\sigma}_i(t+1)^2$  у имениоцу, корелисан са  $y_i(t+1)^2$ , плус логаритамски члан) чини било какву теоретску анализу везану за статистичке особине  $x_i(t)$  веома тешком. Анализа везана за својства централизоване и дистрибуираних статистика је још тежа, тако да ће особине алгоритма за детекцију промене у варијанси бити анализиране у следећем поглављу помоћу симулација.





Слика 2.2: Средње вредности иновационих чланова  $x_i(t)$  (пуна линија) и  $x_i^*(t)$  (испрекидана линија); вредност  $\sigma_i^0$  је 2.

Израчунавање у рекурзијама се може поједноставити заменом

$$x_i(t) = x_i^*(t) = \log \frac{\sigma_i^0}{\bar{\sigma}_i(t)} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\sigma_i^0)^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_i(t)^2} \right) y_i(t)^2.$$

Може се показати да математичко очекивање члана  $x_i^*(t)$  (под претпоставком да је  $\alpha$  довољно близу 1, тако да је  $\bar{\sigma}_i(t)$  исконвергирало  $\sigma_i^1$ ) има исти знак као  $x_i(t)$ , али са мањим вредностима на ординати, као што се види на Сlici 2.2. У следећем поглављу ће бити показано да је резултујућа шема детекције такође ефикасна, под условом да је изабран одговарајући праг.

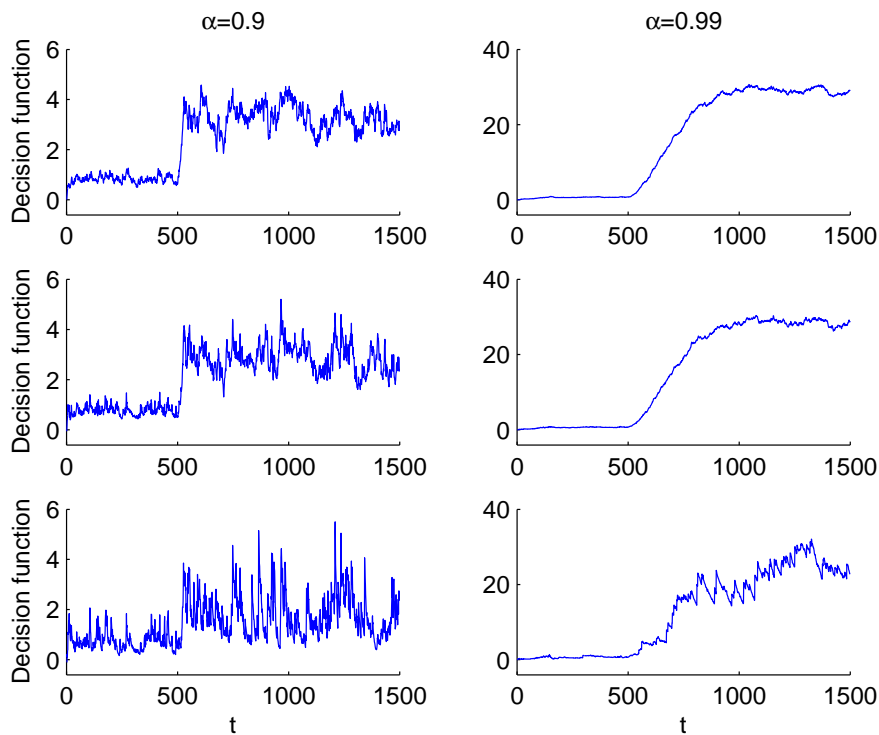
## 2.4 Резултати симулација

*Промена у средњој вредности сигнала.* Посматрајмо сензорску мрежу са  $n = 10$  чворова, где су средње вредности  $\theta_i^1$  (непознате конструктору шеме детекције) насумице узете из интервала  $(0, 1]$ , док су варијансе  $\sigma_i^2$  насумице узете из интервала  $[0.5, 1.5]$ ; претпостављено је да је  $\theta_i^0 = 0$  у иницијалном случају без промене,  $i = 1, \dots, n$ . Тежине комуникацијских веза су добијене решавањем једначине (2.11) у оба случаја, и константних и временски променљивих консензус матрица, под ограничењима да су консензус матрице стохастичке по реду и да поседују предефинисану структуру (елементе који су нула). Прет-

постављена топологија мреже одговара модификованом геометријском случајном графу (*Geometric Random Graph*) у коме чворови представљају просторно насумице распоређене агенте (у овом случају унутар квадратне површине), и повезани су уколико су на међусобном растојању мањем од унапред одређеног прага (у овом случају праг је половина странице квадрата, видети нпр. [6]), резултујући иницијално неоријентисаним графом. Модификација је да су отприлике 10% оригиналних двосмерних комуникација насумично претворене у једносмерне. Врло је вероватно да се једносмерне комуникације јављају у пракси када се ради са сензорским мрежама. Компоненте вектора тежина су изабране као  $w_i = \sigma_i^{-2} (\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2})^{-1}$  (видети Одељак 2.2.2). Када се ради са случајним консензус матрицама претпостављен је асиметричан асинхрони *gossip* алгоритам са једном комуникацијом у датом временском тренутку. Вредности елемената у реализацијама консензус матрица које одговарају чворовима који комуницирају су 0.5, тако да је једначина (2.11) решена за вероватноће појединачних реализација, видети [25].

Слика 2.3 приказује, поређења ради, једну типичну реализацију централизоване функције одлучивања (2.8) за  $\alpha = 0.9$  и  $\alpha = 0.99$ , заједно са одговарајућим реализацијама добијеним у једном насумице изабраном чвору у мрежи (једна компонента (2.9)), у случајевима константних и случајних консензус матрица. Тренутак промене је  $t = 500$ . Додатно, на Слици 2.4 су приказане испрекидањим линијама средња вредност  $\pm$  једна стандардна девијација глобалне функције одлучивања, заједно са функцијама одлучивања једног насумице изабраног чвора (пуна линија), коришћењем 1000 реализација. Може се видети да средња вредност и варијанса и централизоване и дистрибуиране статистике расту како се  $\alpha$  приближава вредности 1 под хипотезом  $H_1$ , као и да остају унутар константног интервала под  $H_0$ .

Слика 2.5(а) (лево, пуна линија) илуструје зависност грешке између статистика генерисаних предложеним алгоритмом и одговарајућег централизованог решења од фактора заборављања  $\alpha$  под хипотезом  $H_1$  (видети Теорему 1 из Одељка 2.2.3). За мрежу описану изнад, однос средње квадратне грешке за један насумице изабрани чвор и средње квадратне вредности централизоване статистике у тренутку  $t=1000$  је рачунат коришћењем 1000 Монте Карло итерација, као функција од  $(1-\alpha)^2$  у случају константних консензус матрица и као функција од  $(1-\alpha)$  када се радило са случајним консензус матрицама. Слика 2.5(б) (лево, пуна линија) илуструје зависност грешке од фактора заборављања  $\alpha$  под хипотезом  $H_0$ : горепоменути однос је рачунат као функција од  $(1-\alpha)$  у оба случаја, и константних и случајних консензус матрица. Резултати Теореме

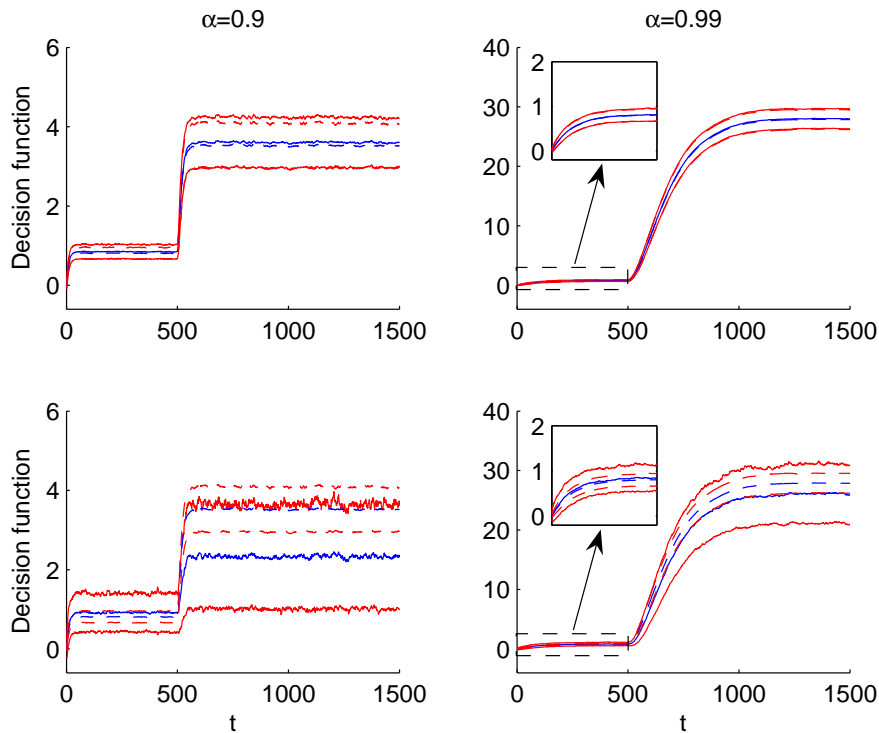


Слика 2.3: Реализације функција одлучивања: централизована стратегија (горе), константна консензус матрица (средина), случајне консензус матрице (доле).

1 су очигледно потврђени, с обзиром на то да су добијене криве приближно линеарне.

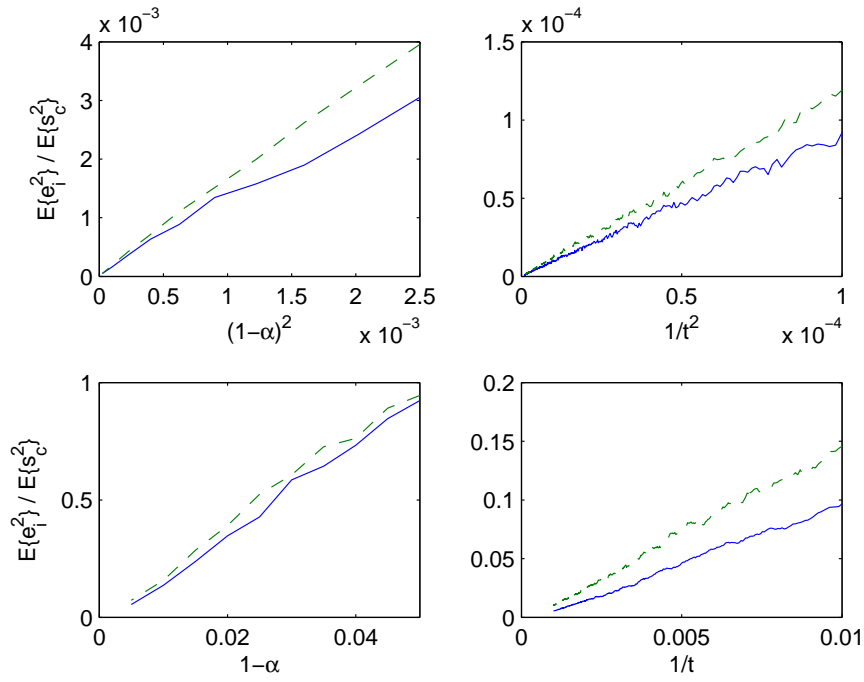
Као први корак у евалуацији предложеног алгоритма у погледу перформанси детекције, расподеле генерисаних статистика под обе хипотезе су естимиране коришћењем  $\sim 10^5$  временских одбирака. Естимиране расподеле за један насумице изабран чвор су приказане на Слици 2.6. Као што се може видети, избор  $\alpha$  ближе 1 резултује у већем одвајању статистика под две хипотезе. Веће расипање статистика када се ради са случајним консензус матрицама је последица изабране комуникацијске стратегије (једна комуникација у једном смеру по временском одбирку); комуникацијске стратегије које претпостављају размену више информација по временском одбирку би дале статистике које су ближе статистикама генерисаним у случају константних консензус матрица.

Избор  $\alpha$  ближе 1 резултује у појави интервала за вредности прага где је вероватноћа лажног аларма практично једнака 0 и вероватноћа детекције једнака 1. Међутим, како  $\alpha$  расте кашњење у детекцији такође расте, тако да кашњење у детекцији постаје значајније од вероватноће детекције. Слика 2.7 показује

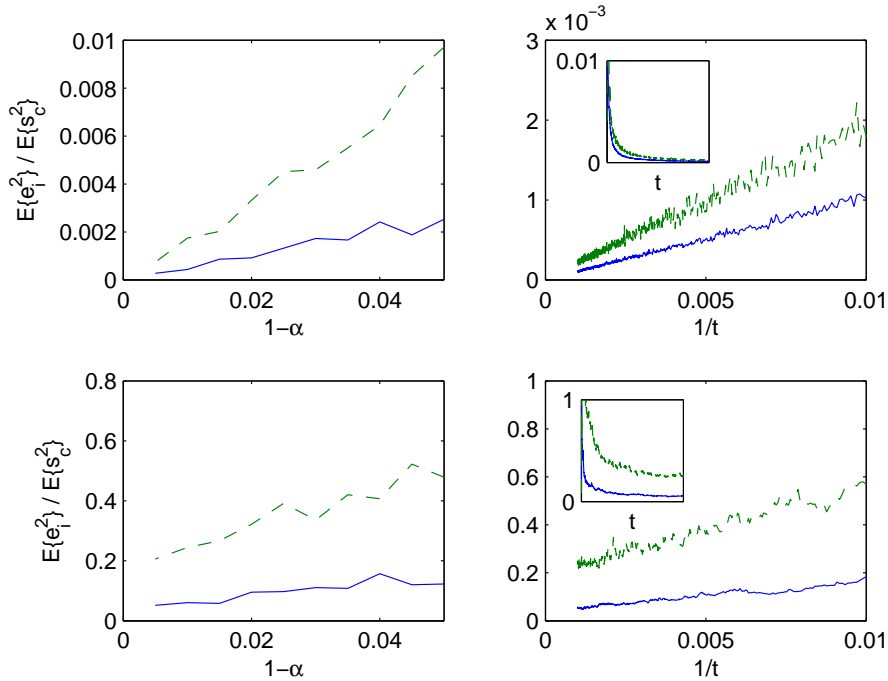


Слика 2.4: Средња вредност  $\pm$  једна стандардна девијација за функције одлучивања: централизована стратегија (испрекидана линија), предложени алгоритам (пуна линија); константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (доле).

кашњење у детекцији наспрам вероватноће лажног аларма, добијено тестирањем статистика за одређени опсег прагова детекције, за све чворове у мрежи (кашњење у детекцији је усредњено на 500 Монте Карло итерација). Заједно са централизованим случајем и случајевима константне и случајних консензус матрица, случај потпуно децентрализованих локалних детектора је такође приказан. Може се видети да је увођење консензус шеме значајно побољшало перформансе детекције алгоритма у односу на локални случај (мање кашњење у детекцији за дату вероватноћу лажног аларма), чак и када се ради са веома проређеним случајним консензус матрицама. Да би се видело коју вредност  $\alpha$  треба изабрати, неке карактеристичне вредности кашњења у детекцији су узете са Сlike 2.7 и приказане у Табели 2.1. С обзиром на то да се тврди да било који чвор може бити изабран за коначно одлучивање, вредност од интереса је максимално кашњење међу свим чворовима. Очито, за релативно високу вредност вероватноће лажног аларма, избор мањег  $\alpha$  је боље решење, док је за ниску вероватноћу лажног аларма  $\alpha$  близу 1 прави избор, који чини да кашњење у

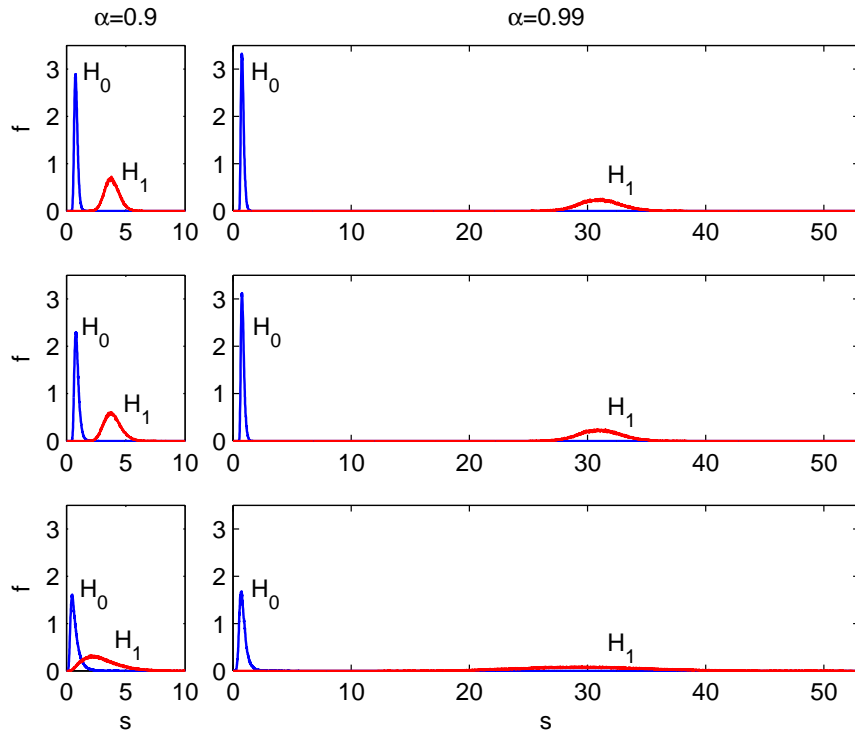


(a) Хипотеза  $H_1$



(b) Хипотеза  $H_0$

Слика 2.5: Однос средње квадратне грешке и средње квадратне вредности централизоване статистике: константна консензус матрица (горње половине слика), случајне консензус матрице (доње половине слика); промена у средњој вредности (пуна линија), промена у варијанси (испрекидана линија); константни фактор заборављања (лево), временски променљив фактор заборављања (десно).



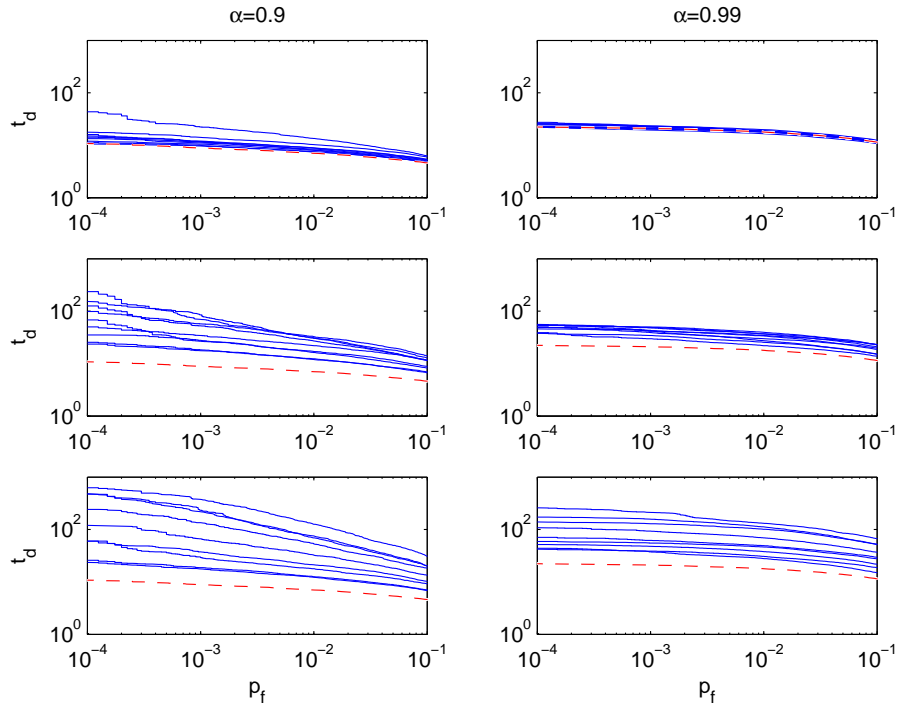
Слика 2.6: Естимиране расподеле статистика под хипотезама  $H_0$  и  $H_1$ : централизована стратегија (горе), константна консензус матрица (средина), случајне консензус матрице (доле);  $\alpha = 0.9$  (лево),  $\alpha = 0.99$  (десно).

детекцији међу чворовима за вероватноћу лажног аларма од  $10^{-4}$  не прелази  $10^2$  чак и када се ради са случајним консензус матрицама (његова вредност је 55.83, док је највеће кашњење међу чворовима без консензуса 258.6).

Табела 2.1: Кашњење у детекцији (минимално, средње и максимално међу свим чворовима у мрежи) за вероватноће лажног аларма  $p_f = 10^{-4}$  и  $p_f = 10^{-1}$  и за  $\alpha = 0.9$  и  $\alpha = 0.99$ .

	$p_f = 10^{-4}$						$p_f = 10^{-1}$					
	$\alpha = 0.9$			$\alpha = 0.99$			$\alpha = 0.9$			$\alpha = 0.99$		
	min	mean	max	min	mean	max	min	mean	max	min	mean	max
centr.	10.77			22.37			4.66			11.7		
C	10.58	16.7	43.47	21.92	23.78	27.39	4.59	5.27	6.34	10.68	11.72	12.7
C(t)	23.51	84.36	236.9	36.3	47.73	55.83	5.92	9.88	14.22	12.83	18.58	23.13
local	23.5	213.5	625.6	37.89	98.42	258.6	6.15	14.34	31.06	15.09	33.78	66.82

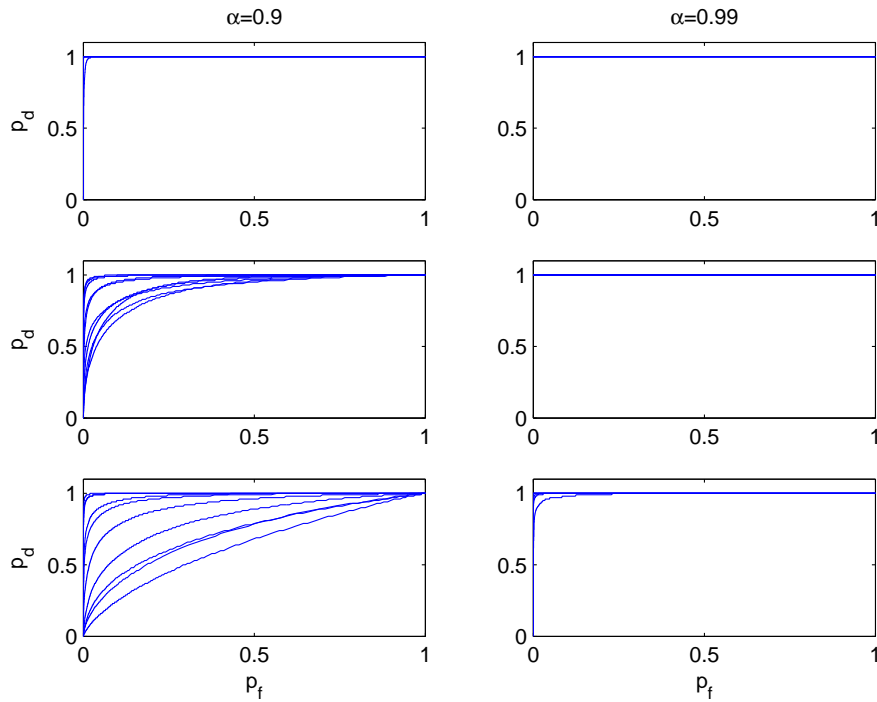
Слика 2.8 приказује вероватноћу детекције наспрам вероватноће лажног аларма за све чворове у мрежи. Случајеви константне и случајних консензус матрица, као и локални случај су представљени. Вероватноћа детекције за централизовани случај за све могуће вредности лажног аларма је једнака 1 за



Слика 2.7: Кашњење у детекцији наспрам вероватноће лажног аларма за све чворове: константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (средина), без консензуса (доле); централизована стратегија (испрекидана линија).

$\alpha = 0.9$  и  $\alpha = 0.99$ . Са слике се може закључити да избор  $\alpha$  довољно близу 1 резултује изванредном ефикасношћу предложеног алгорита. Међутим, ово је погрешан закључак у смислу детекције промене, имајући у виду горепоменуто повећање кашњења у детекцији са повећањем  $\alpha$ ; ово је разлог зашто фокус анализе изнад није на вероватноћи детекције него на кашњењу у детекцији.

*Временски променљив фактор заборављања.* Као илустрацију анализе грешке између статистика генерисаних предложеним алгоритмом и одговарајућег централизованог решења са временски променљивим факторима заборављања (везано за Теорему 2 из Одељка 2.2.4), Слика 2.5 (десно) приказује временску еволуцију грешке. Горепоменуто мрежа је коришћена и однос средње квадратне грешке за један насумице изабран чвор и средње квадратне вредности централизоване статистике под хипотезом  $H_1$  је рачунат коришћењем 1000 Монте Карло итерација, као функција од  $t^{-2}$  у случају константних консензус матрица и као функција од  $t^{-1}$  када се радило са случајним консензус матрицама. Исти однос је рачунат под хипотезом  $H_0$  као функција од  $t^{-1}$  и за константну и за случајне консензус матрице. Такође је рачунат као функција од  $t$ , да би се показало да



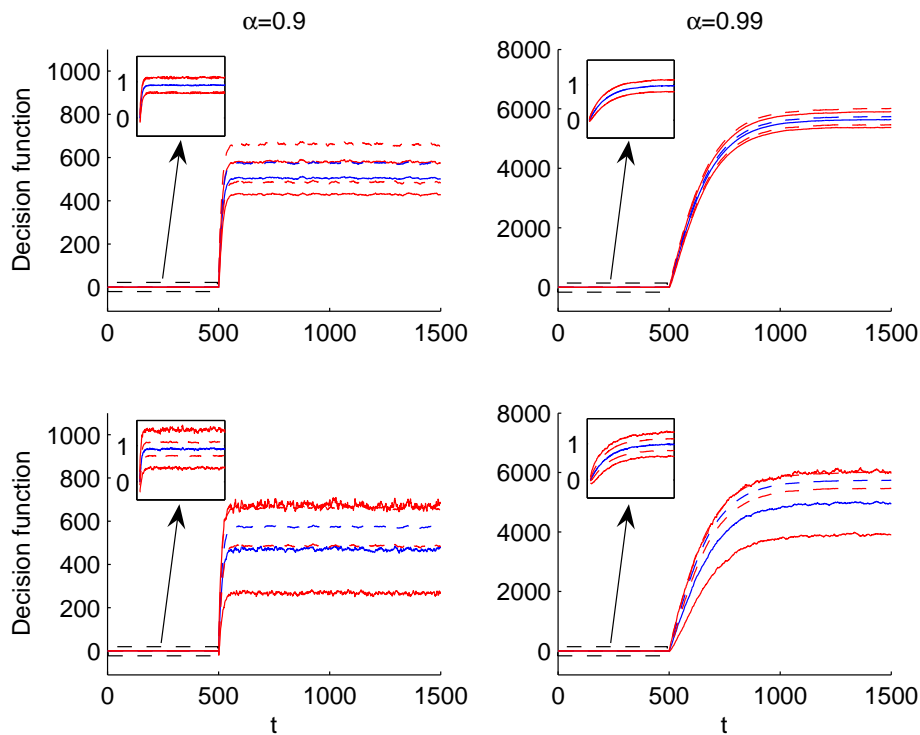
Слика 2.8: Вероватноћа детекције наспрам вероватноће лажног аларма за све чворове у мрежи: константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (средина), без консензуса (доле).

грешка конвергира константи већој од нуле када се ради са случајним консензус матрицама, друкчије од случаја са константним консензус матрицама где конвергира нули као  $t^{-1}$ . Резултати Теореме 2 су очигледно потврђени.

*Промена у варијанси сигнала.* Коришћена је мрежа слична горепоменутој, где су  $(\sigma_i^1)^2$  (непознате конструктору шеме за детекције) насумице изабране из интервала  $(0.5, 1]$  и  $(\sigma_i^0)^2$  насумице изабране из интервала  $(0, 0.5]$ . Тежине комуникацијских веза су добијене решавањем једначине (2.11), са компонентама вектора тежина  $w_i = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Слично као изнад, анализа грешке под хипотезама  $H_1$  и  $H_0$  је дата на Слици 2.5 (испрекидане линије), потврђујући да сви теоретски резултати из Одељка 2.2.3 везани за случај промене у средњој вредности квалитативно важе и за случај алгоритма детекције промене у варијанси.

Као илустрација особина генерисаних статистика, на Слици 2.9 су приказане испрекиданим линијама средња вредност  $\pm$  једна стандардна девијација глобалне функције одлучивања, заједно са функцијама одлучивања једног насумице изабраног чвора добијеним предложеним алгоритмом (пуна линија), коришћењем 1000 реализација.



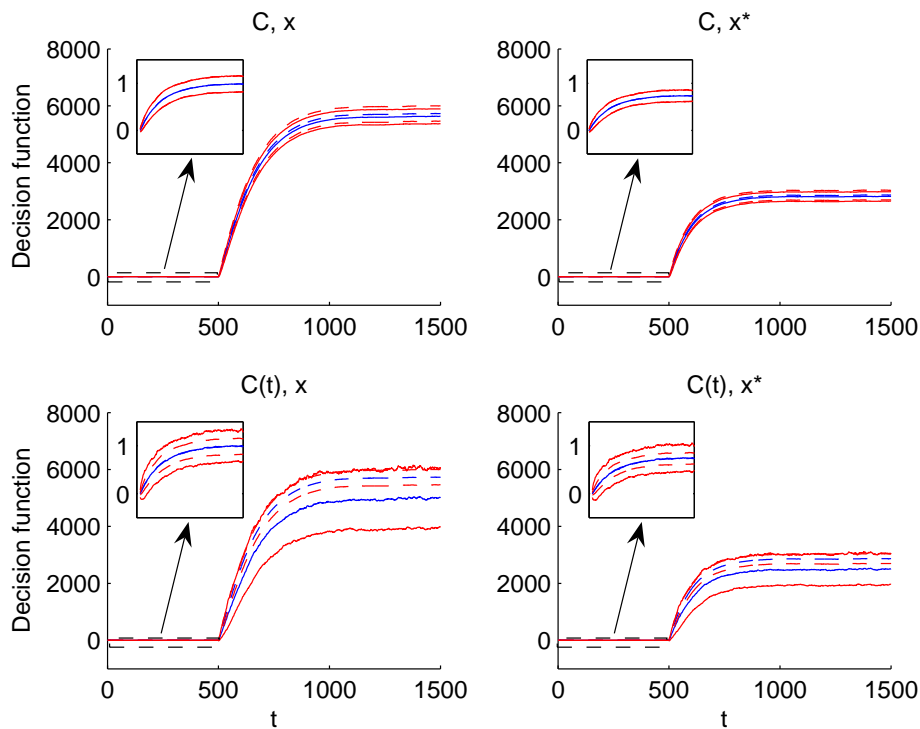


Слика 2.9: Средња вредност  $\pm$  једна стандардна девијација за функције одлучивања: централизована стратегија (испрекидана линија), предложени алгоритам (пуна линија); константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (доле).

Слика 2.10 приказује, поређења ради, средњу вредност  $\pm$  једну стандардну девијацију глобалне функције одлучивања за  $\alpha = 0.99$ , заједно са функцијама одлучивања једног насумице изабраног чвора добијеним предложеним алгоритмом (пуна линија), за константну и случајне консензус матрице и за два различита избора иновационог члана коришћеног у рекурзивној шеми ( $x_i(t)$  и  $x_i^*(t)$ ), видети Поглавље 2.3). Као што се може видети, обе опције се могу користити (са одговарајућом модификацијом прага за детекцију), с обзиром на то да резултују у статистикама са сличним особинама.

## 2.5 Закључак

У овој глави је предложен нови дистрибуирани алгоритам за детекцију промене сигнала у реалном времену коришћењем сензорских мрежа, изведен из генерализованог количника веродостојности (ГКВ), са идејом да се превазиђу основна ограничења приступа из [51] и омогући праћење непознатих промена у



Слика 2.10: Средња вредност  $\pm$  једна стандардна девијација за функције одлучивања: централизована стратегија (испрекидана линија), предложени алгоритам (пуна линија); константна консензус матрица (горе), случајне консензус матрице (доле); коришћени иновациони члан  $x_i(t)$  (лево),  $x_i^*(t)$  (десно).

параметрима. Алгоритам је заснован на комбинацији рекурзивно генерисаних локалних статистика које имају специфичну форму која следи из ГКВ, и глобалне консензус стратегије, као у [51]. Проблеми детекције непознате промене било у средњој вредности било у варијанси део по део стационарног стохастичког процеса су разматрани. Перформансе предложеног алгоритма за детекцију промене у средњој вредности су анализирани у смислу мере грешке у односу на одговарајући централизовани алгоритам. Дата анализа представља централну тачку у овој глави, с обзиром на то да је много комплекснија од оне из [51], услед специфичне форме алгоритма. Показано је да се статистике генерисане предложеним алгоритмом могу учинити довољно блиске централизованом решењу. Такође је показано да се генерисане статистике различито понашају у односу на фактор заборављања  $\alpha$  под две хипотезе. Наиме, први и други момент рекурзивно генерисаних статистика расту како се  $\alpha$  приближава вредности 1 под хипотезом  $H_1$ , док под  $H_0$  остају ограничени унутар константног интервала. Зато алгоритам са  $\alpha$  близу 1 показује високе перформансе у погледу

ниске вероватноће лажног аларма и високе вероватноће детекције. Међутим, како  $\alpha$  расте, кашњење у детекцији такође расте тако да је потребно направити компромис. Резултати симулација пружају детаљну анализу овог феномена, указујући на адекватан избор  $\alpha$ . Они такође показују да анализа везана за проблем детекције промене у средњој вредности важи такође и за случај проблема детекције промене у варијанси.

Даљи рад може бити усмерен на практичне аспекте имплементације предложеног алгорита у сензорским мрежама развијеним за различите сврхе, где је пожељно избегнути постојање центра фузије. Алгоритам се такође може директно применити у децентрализованим шемама детекције и идентификације отказа у великим системима у делу дистрибуиране евалуације резидуала.

## Глава 3

# Децентрализовано надгледање отказа у великим системима засновано на консензусу

У овој глави ће бити предложена нова дистрибуирана методологија за детекцију и изолацију отказа (*fault detection and isolation - FDI*), у форми мулти-агент мреже која представља комбинацију FDI опсервера заснованог на консензусу за генерисање резидуала и стратегије одлучивања засноване на консензусу за детекцију промене у сигналу резидуала, применљиве у реалном времену. Предложени опсервер је заснован на преклапајућој декомпозицији система и комбинацији локалних оптималних стохастичких FDI опсервера са динамичком консензус стратегијом. Показано је да предложени алгоритам генерише резидуале који обезбеђују, под општим условима везаним за локалне моделе и топологију мреже, високу ефикасност, скалабилност и робусност. Предложена стратегија одлучивања даје решења за два посебна проблема: а) локалну детекцију у непреклапајућим деловима идентификованих подсистема и б) стратегију засновану на консензусу за FDI у преклапајућим деловима. Приказани примери илуструју применљивост предложене методологије у практичним проблемима.

### 3.1 Увод

У скорашње време проблем конструкције опсервера за детекцију и изолацију отказа (FDI) привлачи велику пажњу истраживача и инжењера из области управљања системима, нпр. [18]. Опсервери представљају идеалан алат за FDI: отказ се понашају као неочекивани улази и на тај начин узрокују да резидуали грешке имају ненулте вредности. Пажљивим избором појачања опсервера могу

се направити особене карактеристике појединачних резидуала узрокованих отказом [18]. Постоје два главна типа FDI опсервера: Бирд-Џонсонов FDI филтар и опсервери непознатог улаза [16]. Оба приступа су се развијала и побољшавала од појављивања, нпр. [15, 16]. Међутим, упркос веома наглашеној потреби за *умреженом* и *децентрализованом FDI* у великим и комплексним системима, постоји само мали број прилога решавању проблема конструкције *децентрализованих FDI опсервера*, нпр. [17, 21, 22]. Штавише, ниједан не представља ефикасан практичан алат без елемената централизације, обично у форми јаког центра фузије [17]. Такође, не постоје ефикасне дистрибуиране шеме одлучивања применљиве у реалном времену; покушаји да се уведе консензус стратегија у овом кораку су углавном засновани на рекурзијама које су применљиве после сакупљања свих мерења, нпр. [35].

У овој глави је предложена нова децентрализована *FDI стратегија заснована на консензусу* која не захтева никакав центар фузије. Стратегија је заснована на: 1) преклапајућој декомпозицији система; 2) имплементацији локалних опсервера помоћу *интелигентних агената*, према капацитетима агената за мерење и процесирање; 3) примени динамичке *консензус стратегије* која обезбеђује глобалне естимације стања свим агентима у мрежи; 4) локалном генерисању *резидуала* који представљају основу процеса одлучивања; 5) примени додатне консензус стратегије на нивоу анализе резидуала; 6) дистрибуираној детекцији промене коју локално врше сви агенти, без било какве форме центра фузије. Предложени опсервер у основи представља примену децентрализованог естиматора заснованог на консензусу предложеног у [54, 53, 24, 52] у решавању дистрибуираног FDI проблема. Предложена дистрибуирана стратегија одлучивања се такође може сматрати као једна форма примене методологије текућег консензуса из [7].

Поглавље 3.2 је посвећено опису предложеног децентрализованог FDI опсервера а Поглавље 3.3 опису процеса одлучивања заснованом на анализи резидуала генерисаних опсервером из Поглавља 3.2. Унутар Поглавља 3.2, главна дефиниција проблема је дата у Одељку 3.2.1, заједно са описом преклапајуће декомпозиције система на подсистеме везане за индивидуалне агенте, коришћењем опште методологије дате у [48]. На основу локалних модела подсистема локални FDI опсервери су изабрани коришћењем методологије предложене у [15]. Наиме, сваки локални опсервер је конструисан тако да буде осетљив на одређени локално изабран отказ, и неосетљив на преостале могуће отказе, коришћењем критеријумске функције формулисана на одговарајући начин. У Одељку 3.2.2 је описан предложени алгоритам естимације, који предста-

вља мулти-агент мрежу локалних опсервера повезаних консензус алгоритмом (нпр. [58, 34, 20, 28, 30, 42]), настављајући се на методологију предложену у [54, 53, 24, 52]. Одељак 3.2.3 је посвећен оптималном избору појачања опсервера, а Одељак 3.2.4 оптимизацији целог алгоритма у односу на параметре консензус шеме (видети такође [24, 52]). У оквиру Поглавља 3.3 су најпре размотрени општи структурални аспекти проблема анализе резидуала, где је направљена разлика између: а) отказа који се дешавају у непреклапајућим деловима идентификованих подсистема, и б) отказа који се дешавају у преклапајућим деловима подсистема. Затим је, у Одељку 3.3.1, описан главни рекурзивни алгоритам заснован на консензусу и доведен у везу са случајем под б). У Одељку 3.3.2 је показано да се методологија генерализованог количника веродостојности може ефикасно применити у целом процесу одлучивања. Изабрани примери показују да предложена нова методологија обезбеђује високу ефикасност и робусност, близу постојећих шема које укључују централизацију.

## 3.2 Конструкција децентрализованог FDI опсервера

### 3.2.1 Преклапајући FDI опсервери

Нека је континуални стохастички систем представљен са

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \quad \dot{x} &= Ax + \Gamma e, \\ y &= Cx + v, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $y = (y_1, \dots, y_p)^T$ ,  $e = (e_1, \dots, e_m)^T$  и  $v = (v_1, \dots, v_p)^T$  представљају векторе стања, излаза, шума процеса и шума мерења, респективно, док су  $A$ ,  $\Gamma$  и  $C$  константне матрице величине  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $p \times n$ , респективно. Претпостављено је да су  $e$  и  $v$  независни бели случајни процеси нулте средње вредности са константним коваријационим матрицама  $Q_e$  и  $R$ .

Према [15, 16, 17, 18], сваки отказ у процесу, актуатору или сензору може се моделовати као адитивни улазни члан у моделу у простору стања (3.1). Наиме, систем са могућих  $q$  отказа може се представити са

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \quad \dot{x} &= Ax + \Gamma e + \sum_{k=1}^q \bar{F}_k \bar{\mu}_k, \\ y &= Cx + v. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Сигнали отказа  $\bar{\mu}_k$  у (3.2) су непознате и произвољне функције времена; оне су нула када нема отказа. Матрице  $\bar{F}_k$  (правци отказа, *fault directions*) су унапред познате. Уколико претпоставимо да постоји један циљни отказ (*target fault*) који желимо да детектујемо, означимо га са  $\mu_1 = \bar{\mu}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, q\}$ ; остали могући откази представљају споредне отказе  $\mu_2$  (*nuisance faults*), тј.  $\sum_{k=1}^q \bar{F}_k \bar{\mu}_k = F_1 \mu_1 + F_2 \mu_2$ .

Претпоставићемо да систем чине  $N$  аутономних агената, и да  $i$ -ти агент може да опсервира  $p_i$ -димензионалан вектор  $y^{(i)} = (y_{l_1^i}, \dots, y_{l_{p_i}^i})^T$ , састављен од скупа компоненти  $y$  са индексима одређеним агентовим *скупом индекса излаза*  $I_i^y = \{l_1^i, \dots, l_{p_i}^i\}$ ,  $l_1^i, \dots, l_{p_i}^i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $l_1^i < \dots < l_{p_i}^i$ ,  $p_i \leq p$ . Такође, претпоставићемо да вектор  $y^{(i)}$  задовољава *излазну релацију*

$$y^{(i)} = C^{(i)} x^{(i)} + v^{(i)}, \quad (3.3)$$

где  $x^{(i)}$  представља  $n_i$ -димензионални вектор састављен од компоненти  $x$  одређених агентовим *скупом индекса стања*  $I_i^x = \{j_1^i, \dots, j_{n_i}^i\}$ ,  $j_1^i, \dots, j_{n_i}^i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j_1^i < \dots < j_{n_i}^i$ ,  $n_i \leq n$ ,  $C^{(i)}$  је константна  $p_i \times n_i$  матрица а  $v^{(i)}$  вектор шума мерења који садржи компоненте  $v$  одређене са  $I_i^y$  чија је коваријациона матрица  $R^{(i)}$  (може се лако добити из  $R$ ). На тај начин се долази до  $n_i \times n_i$  матрице  $A^{(i)}$  која одговара  $x^{(i)}$  и садржи компоненте  $A$  одређене паровима индекса који припадају  $I_i^x \times I_i^x$ , тако да је

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{j_1^i, j_1^i} & \cdots & a_{j_1^i, j_{n_i}^i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_{n_i}^i, j_1^i} & \cdots & a_{j_{n_i}^i, j_{n_i}^i} \end{bmatrix}.$$

На аналоган начин се добијају матрице  $\Gamma^{(i)}$  и  $F_k^{(i)}$ , састављене од  $n_i$  редова матрица  $\Gamma$  и  $\bar{F}_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ , одређене са  $I_i^x$ . Стога, *локални модел у простору стања*  $i$ -тог агента је

$$\mathbf{S}_i : \quad \dot{x}^{(i)} = A^{(i)} x^{(i)} + \Gamma^{(i)} e + F_1^{(i)} \mu_1^{(i)} + F_2^{(i)} \mu_2^{(i)}, \quad (3.4)$$

$i = 1, \dots, N$ , где су  $\mu_1^{(i)}$  и  $\mu_2^{(i)}$  циљни и споредни откази за  $i$ -ти подсистем,  $i = 1, \dots, q$ , док су  $F_1^{(i)}$  и  $F_2^{(i)}$  одговарајући правци отказа. Приметити да правци отказа за подсистеме директно следе из праваца отказа за глобални модел (3.2), према датим скуповима индекса. Динамички системи  $\mathbf{S}_i$  представљају *преклапајуће подсистеме* система  $\mathbf{S}$  [48]. Декомпозиција система  $\mathbf{S}$  на преклапајуће подсистеме не мора обавезно следити тачну декомпозицију матрица из (3.1): параметарске матрице у (3.4) могу се такође добити као резултат генерализо-

ване експанзије, апроксимативног моделовања, апроксимативне агрегације итд. [48, 54].

Даље ћемо претпоставити да  $i$ -ти агент може аутономно да генерише естимацију  $\hat{x}^{(i)}$  локалног вектора стања  $x^{(i)}$  коришћењем локалног естиматора

$$\bar{\mathbf{E}}_i : \quad \dot{\hat{x}}^{(i)} = A^{(i)}\hat{x}^{(i)} + L^{(i)}(y^{(i)} - C^{(i)}\hat{x}^{(i)}), \quad (3.5)$$

где је  $L^{(i)}$  појачање филтра у устаљеном стању, као и одговарајуће локалне резидуале

$$r^{(i)} = H^{(i)}(y^{(i)} - C^{(i)}\hat{x}^{(i)}), \quad (3.6)$$

где  $H^{(i)}$  представља одговарајуће конструисану матрицу пројекције [18].

### 3.2.2 FDI опсервер заснован на консензусу

Локални естиматори (3.5) могу бити неефикасни у њиховим FDI задацима због локалне недоступности релевантних мерења и неадекватности локалних модела. Зато је наш задатак формулисање стратегије естимације која треба да омогући свим агентима у мрежи добијање поузданих естимација целог вектора стања  $x$  коришћењем *комуникацијске стратегије* између агената. На тај начин се сваки агент доводи у позицију да генерише резидуале осетљивије на циљни отказ и мање осетљиве на споредне отказе.

У овој глави се предлаже FDI опсервер заснован на увођењу *консензус шеме*, као у [54, 53] (видети такође, нпр. [58, 20, 28, 42, 24, 52]). Наиме, естимација  $\xi^i$  целог вектора  $x$  коју генерише  $i$ -ти агент је представљена са

$$\mathbf{E}_i : \quad \dot{\xi}^i = A_i \xi^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K_{ij} (\xi^j - \xi^i) + L_i (y^{(i)} - C_i \xi^i), \quad (3.7)$$

$i = 1, \dots, N$ , где су, према [54], матрице  $A_i$ ,  $C_i$ ,  $L_i$  добијене из  $A^{(i)}$ ,  $C^{(i)}$  и  $L^{(i)}$ , респективно, чувањем ненултих елемената и додавањем нула на места одређена векторима  $I_i^x$  и  $I_i^y$ . Алгоритам је заснован на комбинацији *децентрализованих преклапајућих естиматора* представљених са (3.5) и консензус шеме, која тежи да учини локалне естимације  $\xi^i$  што је могуће ближим [42, 45]. Претпоставићемо да је  $K_{ij} = \text{diag} \{k_1^{ij}, \dots, k_n^{ij}\}$ , где је  $k_\nu^{ij} = h_\nu^{ij} g_\nu^{ij}$ ,  $h_\nu^{ij}, g_\nu^{ij} \geq 0$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  (видети [54, 53] за више детаља).

Дакле, резидуал који генерише  $i$ -ти агент у FDI сврхе постаје

$$r_i = H^{(i)}(y^{(i)} - C_i \xi^i). \quad (3.8)$$



### 3.2.3 Оптималан дизајн локалних филтара

Матрице  $L^{(i)}$  и  $H^{(i)}$  у (3.5) треба изабрати тако да је резидуал под примарним утицајем циљног отказа  $\mu_1^{(i)}$  и под минималним утицајем споредних отказа  $\mu_2^{(i)}$ , шума процеса и шума мерења. Настављајући се на [15, 24, 52], претпоставићемо да су  $\mu_1^{(i)}$  и  $\mu_2^{(i)}$  бели шумови нулте средње вредности са коваријансама  $Q_1^{(i)}$  and  $Q_2^{(i)}$ . Појачање филтра и матрицу пројекције одредићемо минимизовањем следећег критеријума

$$J = \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\gamma_i} E \{ h_2^{(i)} h_2^{(i)T} \} + E \{ h_3^{(i)} h_3^{(i)T} \} - E \{ h_1^{(i)} h_1^{(i)T} \} \right\}, \quad (3.9)$$

где је  $h_1^{(i)}(t)$  одзив  $\mathbf{S}_i$  на  $\mu_1(t)$ ,  $h_2^{(i)}(t)$  је одзив  $\mathbf{S}_i$  на  $\mu_2(t)$  и  $h_3^{(i)}(t)$  одзив  $\mathbf{S}_i$  на члан са шумовима  $\Gamma^{(i)}e(t) - L^{(i)}v(t)$ , док је  $\gamma_i$  позитивна скаларна константа која одређује тежину преноса од споредних отказа. Приметити да су овде коваријансе  $Q_1^{(i)}$  и  $Q_2^{(i)}$  параметри који одређују дизајн филтра: када  $Q_1^{(i)}$  расте пренос од циљног отказа треба да расте, када  $Q_2^{(i)}$  расте пренос од споредних отказа треба да расте. Настављајући се на извођење оптималног стохастичког FDI филтра дато у [15], добијамо да је у устаљеном стању

$$L^{(i)} = P^{(i)} C^{(i)T} R^{(i)-1}, \quad (3.10)$$

где се  $P^{(i)}$  добија као решење алгебарске Рикатијеве једначине

$$A^{(i)} P^{(i)} + P^{(i)} A^{(i)T} - P^{(i)} C^{(i)T} R^{(i)-1} C^{(i)} P^{(i)} + \frac{1}{\gamma_i} F_2^{(i)} Q_2^{(i)} F_2^{(i)T} - F_1^{(i)} Q_1^{(i)} F_1^{(i)T} + \Gamma^{(i)} Q_e^{(i)} \Gamma^{(i)T} = 0. \quad (3.11)$$

Према [15], уколико је  $\text{rank}\{H^{(i)}\} = p_i - f^{(i)}$ , где је  $f^{(i)}$  димензија  $F_2^{(i)}$ , оптимална матрица пројекције је

$$H^{(i)} = [\rho_{p_i}^{(i)} \cdots \rho_{f^{(i)+1}}^{(i)}] [\rho_{p_i}^{(i)} \cdots \rho_{f^{(i)+1}}^{(i)}]^T \quad (3.12)$$

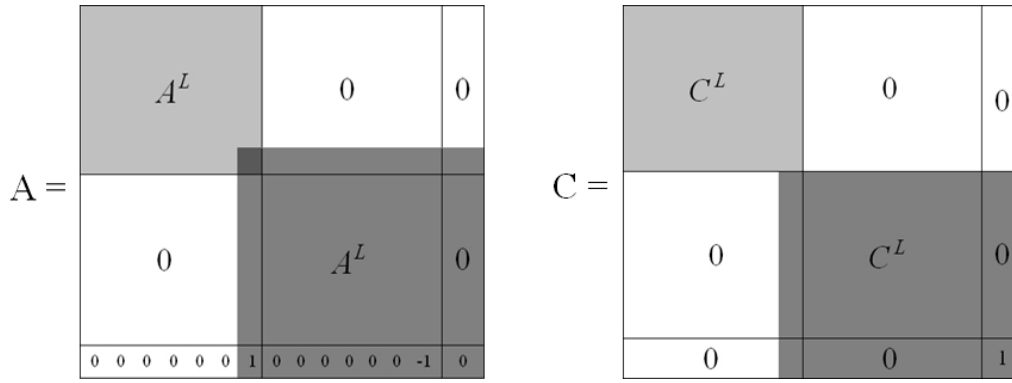
где су  $\rho_{p_i}^{(i)}, \dots, \rho_{f^{(i)+1}}^{(i)}$  сопствени вектори повезани са  $p_i - f^{(i)}$  најмањих сопствених вредности матрице  $C^{(i)} P^{(i)} C^{(i)T}$  (видети [15] за одговарајуће детаље).

*Пример 1. Детекција отказа у сензору растојања у плотуну возила.* Проблем који испитујемо је узет из [17] и укључује детекцију отказа у систему два возила која се крећу као плотун. Возилима се управља тако да одржавају константну брзину и растојање, па су неопходни додатни сензори за мерење релативне брзине и релативног растојања између возила. Растојање, међутим,

укључује динамику оба возила и захтева модел вишег реда за филтар који би детектовао евентуални отказ. У [17] је за детекцију отказа у сензору растојања коришћен алгоритам децентрализоване естимације, заснован на генерисању глобалног сигнала отказа. Ова метода у основи користи глобалну естимацију стања изведена мешањем локалних естимација на оптималан начин, тј. захтева филтар за глобални систем. Са друге стране, решење проблема засновано на горе предложеном методу се ослања само на локалне филтре и пажљиво изабране локалне подсистеме за децентрализовану детекцију засновану на консензусу, тј. овај приступ не захтева никакав тип центра фузије. Пример користи модел возила дат у [19], у коме је нелинеарна динамика возила линеаризована око праве, равне путање и брзине од 25 m/s. Због поједностављења је коришћена само лонгитудинална динамика, која је представљена са  $\dot{x} = A^L x$ ,  $y = C^L x$ . Стања возила су:  $x = (\text{маса ваздуха у мотору, брзина мотора, вертикална брзина, вертикална позиција, промена нагиба, нагиб, лонгитудинална брзина})^T$ . Треће и седмо стање су замењени у односу на оригинални пример у циљу згодне конструкције локалних подсистема. Мерења су  $y = (\text{маса ваздуха у мотору, брзина мотора, брзина задњих симетричних точкова, вертикално убрзање, промена нагиба, брзина предњих симетричних точкова, лонгитудинално убрзање})^T$ . Матрице стања и мерења могу се наћи у [19]. Да би се направио филтар за детекцију отказа у сензору растојања мора се најпре направити модел у простору стања за плотун:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \bar{F}_1^{\bar{\omega}_f^1} \bar{\mu}_1^{\bar{\omega}_f^1} + \bar{F}_2^{\bar{\omega}_e^1} \bar{\mu}_2^{\bar{\omega}_e^1} + \bar{F}_3^R \bar{\mu}_3^R + \bar{F}_4^{\bar{v}_z^2} \bar{\mu}_4^{\bar{v}_z^2} + Ge, \\ y &= Cx + v. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Агент 1 пази на циљни отказ у сензору брзине предњих симетричних точкова, његов споредни отказ је отказ у сензору брзине мотора, док Агент 2 пази на циљни отказ у сензору растојања а његов споредни отказ је отказ у сензору вертикалног убрзања. Очигледан начин за добијање глобалних матрица  $A$  и  $C$  је формирање блок дијагоналних композитних матрица понављањем  $A^L$  и  $C^L$  на дијагонали. Ово, међутим, није довољно, јер не постоји начин да се растојање  $R$  између два возила опише помоћу датих стања, тако да се стање растојања додаје динамици плотуна, коришћењем једначине  $\dot{R} = v_x^1 - v_x^2$ . Крајњи резултат је плотун представљен као систем од 15 стања сачињених од лонгитудиналне динамике два возила и стања растојања, док глобални скуп мерења представљају мерења лонгитудиналне динамике два возила плус мерење растојања. Структура одговарајућих матрица стања и мерења је дата на Слици 3.1.



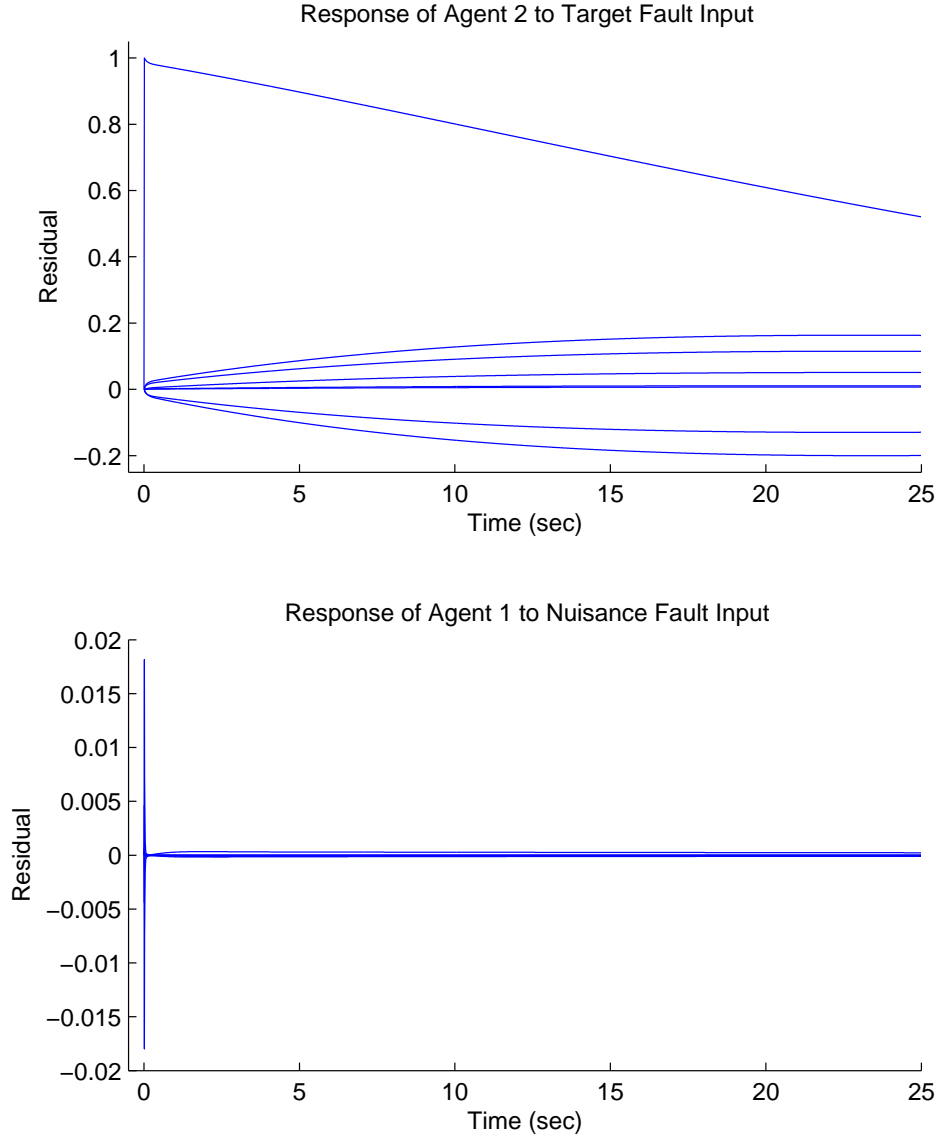
Слика 3.1: Структура матрица модела

Све четири мапе отказа су конструисане коришћењем стандардних техника моделовања [16]. Локални модели система су конструисани избором скупа индекса стања Агента 1  $I_1^x = \{1, \dots, 7\}$  и његовим скупом индекса излаза  $I_1^y = \{1, \dots, 7\}$ ; скуп индекса стања Агента 2 је  $I_2^x = \{7, \dots, 15\}$  док је његов скуп индекса излаза  $I_2^y = \{8, \dots, 15\}$ . Одговарајуће локалне матрице стања и мерења су илустроване на Слици 3.1: Агент 1 је представљен светлијом нијансом сиве а Агент 2 тамнијом. Параметри два оптимална стохастичка филтра за детекцију отказа су:  $Q_1^{(1)} = Q_1^{(2)} = 0.1I$ ,  $Q_2^{(1)} = Q_2^{(2)} = I$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10^{-5}$ ,  $\Gamma = \text{col}\{1, \dots, 1\}$ ,  $Q_e = 1$ ,  $R^{(1)} = I$  и  $R^{(2)} = I$ . С обзиром на то да је претпостављено да Агент 1 боље опсервира преклапајуће стање, изабране вредности консензус параметара су  $k_\nu^{12} = 1$  и  $k_\nu^{21} = 10$ ,  $\nu = 1, \dots, 15$ . На Слици 3.2 је приказана временска еволуција резидуала Агента 2 (горе) када у систему постоји отказ у сензору растојања (јединични одскочни сигнал који се јавља на почетку), као и временска еволуција резидуала Агента 1 (доле) када у систему постоји отказ у сензору брзине мотора. Као што се види са слике, добијени су слични резултати онима из [17, 19], али без коришћења глобалног филтра и било каквог типа центра фузије.

### 3.2.4 Оптималан дизајн консензус шеме

У овом поглављу ћемо показати како се параметри консензус шеме предложеног FDI опсервера могу одредити минимизовањем пројектоване излазне средње квадратне грешке устаљеног стања. Формулација проблема следи критеријум дизајна локалних оптималних стохастичких опсервера, а примењена методологија следи приступ из [54, 53, 24, 52].

Нека је  $X = (x^T, \dots, x^T)^T$ ,  $A_X = \text{diag}\{A, \dots, A\}$ ,  $B = \text{col}\{B_S, \dots, B_S\}$  ( $\text{col}\{\cdot\}$  означава блок матрицу колоне састављену од елемената који су набројени уну-



Слика 3.2: Резидуали за два возила. Одзив на циљни отказ (горе) и одзив на споредни отказ (доле).

тар заграда), и нека је

$$B_S = \left[ \Gamma \begin{array}{c} \bar{F}_1^{(1)} \\ \bar{F}_2^{(1)} \end{array} \vdots \dots \vdots \begin{array}{c} \bar{F}_1^{(N)} \\ \bar{F}_2^{(N)} \end{array} \right],$$

$$U = (e^T, \mu_1^{(1)T}, \mu_2^{(1)T}, \dots, \mu_1^{(N)T}, \mu_2^{(N)T})^T.$$

Такође, уведемо ознаке  $Y = (y^{(1)T}, \dots, y^{(N)T})^T$ ,  $\Psi = \text{diag}\{C_1, \dots, C_N\}$  и  $V =$

$(v^{(1)T}, \dots, v^{(N)T})^T$  (члан са белим шумовима нулте средње вредности са коваријансом  $R_V$  која се може лако добити из  $R$ ). Тада имамо из (3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_X : \quad \dot{X} &= A_X X + BU, \\ Y &= \Psi X + V. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Означимо  $\Xi = (\xi^{1T}, \dots, \xi^{NT})^T$ ,  $A_\Xi = \text{diag}\{A_1, \dots, A_N\}$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{L_1, \dots, L_N\}$  и  $\tilde{K} = [\tilde{K}_{ij}]$ ,  $\tilde{K}_{ij} = K_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $\tilde{K}_{ii} = -\sum_{j,j \neq i} K_{ij}$ . Тада, из (3.7) имамо

$$\mathbf{E} : \quad \dot{\Xi} = A_\Xi \Xi + \tilde{K} \Xi + \Lambda(Y - \Psi V). \quad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.15) добија се следећа динамика:

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} A_X & 0 \\ A_X - A_\Xi & A_\Xi - \Lambda\Psi + \tilde{K} \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} B & 0 \\ B & -\Lambda \end{bmatrix} \Theta, \quad (3.16)$$

где је  $Z = (X^T, E^T)^T$ ,  $E = X - \Xi$ , и  $\Theta = (U^T, V^T)^T$ , што очигледно представља стохастички систем са белим шумом  $\Theta$  који се понаша као стохастички улаз:

$$\mathbf{S}_E : \quad \dot{Z} = \Phi_Z Z + B_Z \Theta. \quad (3.17)$$

Циљ оптимизације је проналажење консензус параметара који ће помоћи агентима да боље детектују своје циљне отказе, боље блокирају своје споредне отказе, као и отказе других агената које не желе да детектују те такође представљају споредне отказе, и све то у присуству шума процеса и мерења. Дакле, може се формулисати следећи оптимизациони проблем заснован на пројектованој излазној средњој квадратној грешки:

$$\begin{aligned} \min_{K_{ij}} J &= \min_{K_{ij}} \text{Tr} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i C_{r_i} \left( \frac{1}{\gamma_i} P_E^{\mu_2^{(i)}} \right. \right. \\ &+ P_E^{n^{(i)}} - P_E^{\mu_1^{(i)}} + \left. \left. \sum_{j=1, j \neq i}^N (P_E^{\mu_2^{(j)}} + P_E^{\mu_1^{(j)}}) \right) C_{r_i}^T \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

где су  $a_i$  ненегативне тежине које одговарају релативном значају  $i$ -тог агента у шеми,  $C_{r_i}$  се добија из  $C_r = \text{diag}\{H^{(1)}C_1, \dots, H^{(N)}C_N\}$  анулирањем свих елемената сем  $H^{(i)}C_i$ . Прва три члана у суми представљају коваријансу грешке естимације  $i$ -тог агента узроковану његовим споредним отказима, шумом процеса и мерења, и циљним отказом, респективно. Друга сума у (3.18) представља утицај отказа других агената; елементе у суми који одговарају и отказима  $i$ -тог агента очигледно треба искључити. Даље,  $P_E^{\mu_1^{(i)}}$ ,  $P_E^{\mu_2^{(i)}}$  и  $P_E^{n^{(i)}}$  су, респективно,

ДЕЛОВИ

$$P_Z^{\mu_1^{(i)}} = \begin{bmatrix} P_X^{\mu_1^{(i)}} & P_{XE}^{\mu_1^{(i)}} \\ P_{EX}^{\mu_1^{(i)}} & P_E^{\mu_1^{(i)}} \end{bmatrix}, \quad P_Z^{\mu_2^{(i)}} = \begin{bmatrix} P_X^{\mu_2^{(i)}} & P_{XE}^{\mu_2^{(i)}} \\ P_{EX}^{\mu_2^{(i)}} & P_E^{\mu_2^{(i)}} \end{bmatrix}, \quad P_Z^{n^{(i)}} = \begin{bmatrix} P_X^{n^{(i)}} & P_{XE}^{n^{(i)}} \\ P_{EX}^{n^{(i)}} & P_E^{n^{(i)}} \end{bmatrix},$$

где се  $P_Z^{\mu_1^{(i)}}$ ,  $P_Z^{\mu_2^{(i)}}$  и  $P_Z^{n^{(i)}}$  добијају као решења одговарајућих једначина Љапунова:

$$\begin{aligned} \Phi_Z P_Z^{\mu_1^{(i)}} + P_Z^{\mu_1^{(i)}} \Phi_Z^T + B_Z^{\mu_1^{(i)}} Q_Z^{\mu_1^{(i)}} B_Z^{\mu_1^{(i)T}} &= 0, \\ \Phi_Z P_Z^{\mu_2^{(i)}} + P_Z^{\mu_2^{(i)}} \Phi_Z^T + B_Z^{\mu_2^{(i)}} Q_Z^{\mu_2^{(i)}} B_Z^{\mu_2^{(i)T}} &= 0, \\ \Phi_Z P_Z^{n^{(i)}} + P_Z^{n^{(i)}} \Phi_Z^T + B_Z^{n^{(i)}} Q_Z^{n^{(i)}} B_Z^{n^{(i)T}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где је  $B_Z^{\mu_1^{(i)}} = \text{col}\{\bar{F}_1^{(i)}, \dots, \bar{F}_1^{(i)}\}$  (величине  $2nN \times 1$ ),  $B_Z^{\mu_2^{(i)}} = \text{col}\{\bar{F}_2^{(i)}, \dots, \bar{F}_2^{(i)}\}$  (величине  $2nN \times f^{(i)}$ ) и  $B_Z^{n^{(i)}} = \begin{bmatrix} B_Z^\Gamma \\ \vdots \\ B_Z^{L_i} \end{bmatrix}$ , где је  $B_Z^\Gamma = \text{col}\{\Gamma, \dots, \Gamma\}$  (величине  $2nN \times m$ ) а  $B_Z^{L_i}$  матрица која представља део  $\text{diag}\{L_1, \dots, L_N\}$  који садржи  $L_i$  (величине  $2nN \times p_i$ ), док је  $Q_Z^{\mu_1^{(i)}} = Q_1^{(i)}$ ,  $Q_Z^{\mu_2^{(i)}} = Q_2^{(i)}$  и  $Q_Z^{n^{(i)}} = \text{diag}\{Q_e, R^{(i)}\}$ .

*Пример 2.* Посматрајмо систем **S** са

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$\bar{F}_1 = [-2 \ -1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\bar{F}_2 = [1 \ -3 \ 2 \ 1]^T$ ,  $\bar{F}_3 = [-1 \ 2 \ -3 \ 1]^T$ ,  $\bar{F}_4 = [1 \ 1 \ -1 \ -2]^T$ ,  $\Gamma = I$ ,  $C = I$ ,  $Q_e = I$  и  $R = I$ . Претпоставимо да постоје два агента, први са скупом индекса стања  $I_1^x = \{1, 2, 3\}$  и скупом индекса излаза  $I_1^y = \{1, 2\}$ , и други са одговарајућим скуповима индекса  $I_2^x = \{2, 3, 4\}$  и  $I_2^y = \{3, 4\}$ . Циљни отказ Агента 1 је одговарајући део  $\bar{F}_1$ , његов споредни отказ је одговарајући део  $\bar{F}_2$ ; циљни отказ Агента 2 је део  $\bar{F}_4$  а споредни отказ део  $\bar{F}_3$ . Изабране вредности параметара у дизајну два оптимална стохастичка FDI опсервера су:  $Q_1^{(1)} = Q_1^{(2)} = 0.1I$ ,  $Q_2^{(1)} = Q_2^{(2)} = I$  и  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10^{-3}$ . Систем је намерно направљен симетричан у односу на структуру отказа. Консензус параметри добијени горепоменутом оптимизацијом са  $a_1 = a_2 = 1$  су  $k_\nu^{12} = k_\nu^{21} = 0.28$ ,  $\nu = 1, \dots, 4$ . Уколико претпоставимо да Агент 1 добија своја мерења са мањим шумом него Агент 2, параметар  $k_\nu^{21}$  постаје већи од  $k_\nu^{12}$ . Такође, уколико, на пример, смањимо горњи десни елемент у матрици стања (направимо да Агент 1 буде мање зависан од Агента 2), параметар  $k_\nu^{21}$  поново постаје већи од  $k_\nu^{12}$ . Оба

експеримента показују да агент са бољим локалним перформансама има већу тежину у комуникацији.

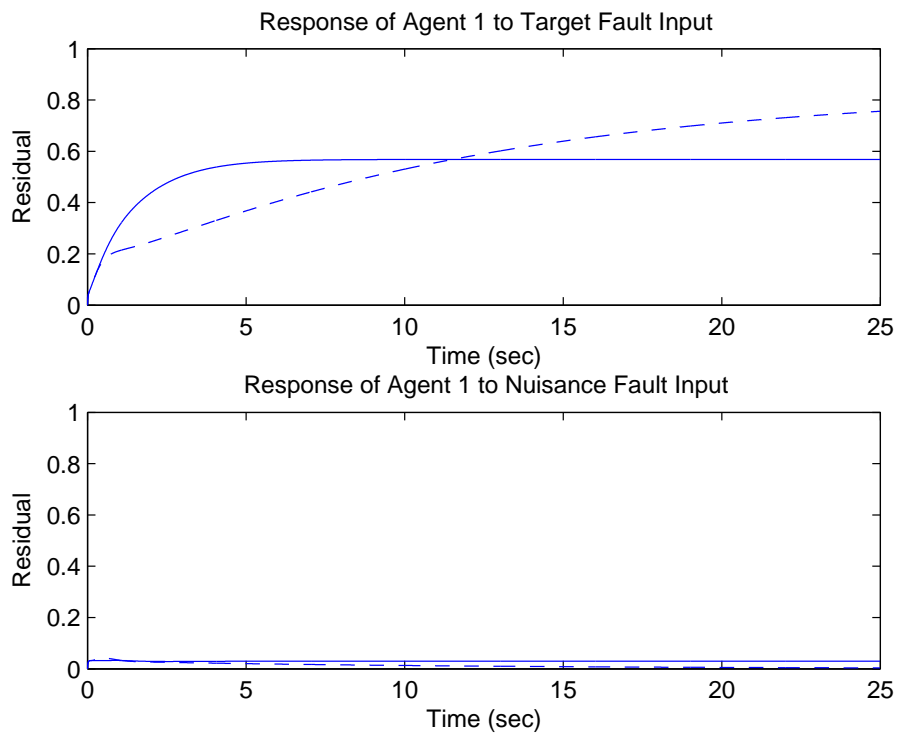
Утицај консензус шеме на резидуале може се јасно видети за другачију поставку отказа, тј. када имамо заједничке циљне отказе као одговарајуће делове  $\bar{F}_2$  и заједничке споредне отказе као делове  $\bar{F}_3$ . У овој поставци Агент 2 не може сам да детектује циљни отказ, као што се може видети са Сlike 3.3 (испрекидане линије), која приказује временске одзиве норме резидуала оба агента када се јаве циљни и споредни отказ (откази су јединични одскочни сигнали који се јављају на почетку временске секвенце). Увођење консензус шеме суштински поправља перформансе Агента 2, као што се може видети са Сlike 3.3 (пуне линије). Вредности консензус параметара добијене оптимизацијом су  $k_v^{12} = 1.92$  and  $k_v^{21} = 1.44$ . Слика 3.4 приказује одговарајућу критеријумску функцију која је у овом случају очигледно конвексна.

### 3.3 Дистрибуирана детекција отказа евалуацијом резидуала

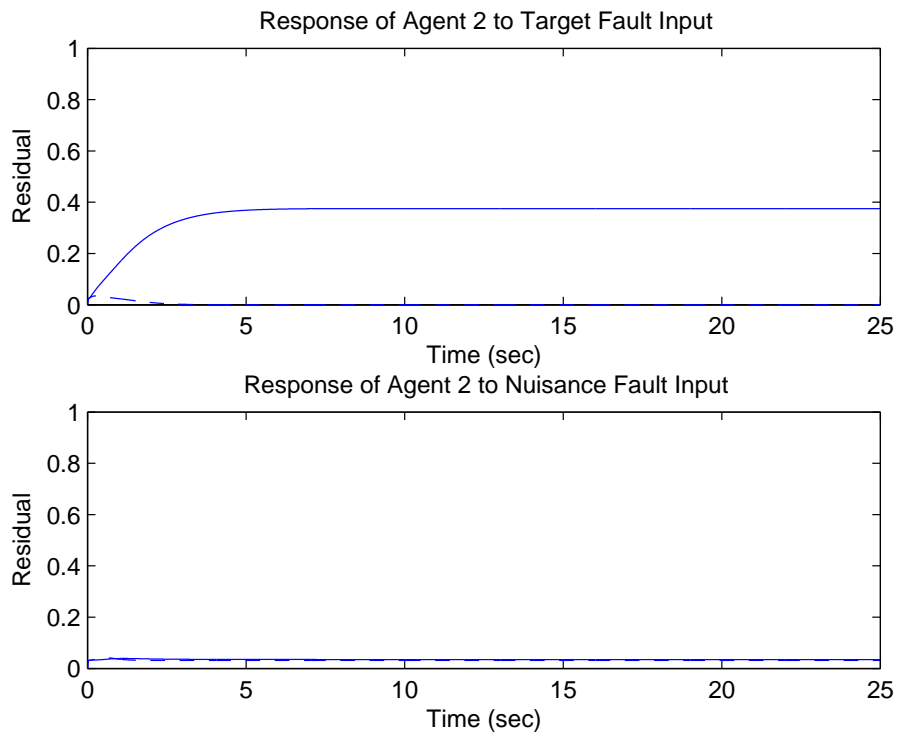
#### 3.3.1 Откази у непреклапајућим и преклапајућим деловима система

Претходни одељци су посвећени главним аспектима преклапајуће декомпозиције система у FDI сврхе и предлогу новог децентрализованог FDI опсервера заснованог на консензусу који не захтева центар фузије. Као резултат, сви агенти у мрежи су у стању да генеришу сопствене резидуале добијене на основу локално доступних мерења; ови резидуали представљају основу за коначно одлучивање о отказу. На овом месту ћемо навестити два главна начина резонувања, који резултују из две ситуације у пракси.

а) *Откази у непреклапајућим деловима система.* У овом случају сваки агент има свој циљни отказ изражен у смислу одговарајућег модела подсистема; агент је, у принципу, у стању да детектује локалне отказе коришћењем опсервера датог у (3.5). Консензус алгоритам има принципијелну улогу у поправљању естимација преклапајућих стања, под утицајем повољних ефеката консензус шеме у потискивању шума (*denoising*, видети [54, 53] за опште разматрање), и, стога, у генерисању резидуала који су осетљивији на циљне отказе и мање осетљиви на споредне отказе. Сваки агент затим следи сопствени пут у локалном процесирању резидуала и извођењу сопствене одлуке везане за постојање локалних отказа, без било каквог директног утицаја других агената.



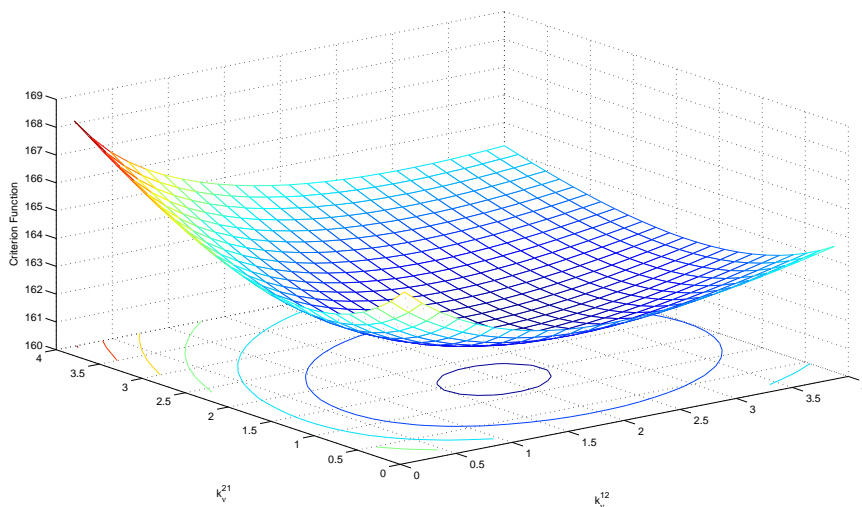
(a) АГЕНТ 1



(b) АГЕНТ 2

Слика 3.3: Норме резидуала, без консензуса (испрекидане линије) и са консензусом (пуне линије). Одзив на циљни отказ (горње половине слика) и на споредни отказ (доње половине слика).





Слика 3.4: Критеријумска функција

б) *Откази у преклапајућим деловима*. Овај случај је много комплекснији него случај под а), и захтева потпуно нов систем *дистрибуираног одлучивања*. У општем случају, сваки циљни отказ који би требало да се детектује је у вези са одређеном мрежом повезаних локалних FDI естиматора. Сваки локални естиматор је конструисан према специфичној дефиницији циљног отказа и дефиницији локалних споредних отказа, који су, у општем случају, различити за све агенте. Зато сваки агент из скупа агената повезаних са изабраним циљним отказом има сопствени резидуал, који се може локално процесирати, и који може да резултује у бинарној одлуци (постојање или непостојање датог отказа). Проблем који се јавља је како доћи до глобалне одлуке која је добијена на дистрибуиран начин, без помоћи било каквог центра фузије. Очигледно, систем дистрибуираног одлучивања се може заснивати на комуникационим каналима већ коришћеним у фази естимације.

### 3.3.2 Дистрибуирано одлучивање засновано на консензусу

Проблем *дистрибуираног одлучивања* није нов проблем: видети нпр. [59, 12, 60]. Главна заједничка особина већине предложених шема је постојање *центра фузије*. Са напретком бежичних сензорских мрежа јавља се растуће интересовање за потпуно децентрализоване системе одлучивања без центра фузије, у којима чворови постижу слагање о заједничкој вредности статистике која се тестира у сваком чвору [50]. Важно је истаћи да постоје системи у којима мрежа опажа околинду и сакупља потребан скуп мерења пре имплементације консен-

зус шеме [22], као и системи у којима се консензус шема примењује у паралели са процесом аквизиције података [7, 9, 51]. Други приступ је адекватнији за FDI проблем који се разматра у овој глави, с обзиром на то да је неопходно конструисати алат који је способан да реагује одмах по појави отказа. Зато цео дистрибуирани FDI систем треба да буде конструисан на основу концепта *детекције промене* у реалном времену [3]. Очито, мерења добијена од стране агената су у ствари резидуали генерисани горепоменутом шемом естимације, док је задатак целог система детектовање промене било у средњој вредности било у варијанси у целом скупу дистрибуираних резидуала. На овом месту се дистрибуирана шема детекције описана у претходној глави може директно и праволинијски применити.

*Пример 3.* Посматрајмо систем  $\mathbf{S}$  где је  $A$  матрица величине  $12 \times 12$ , приказана на Слици 3.5,  $\Gamma = I$ ,  $\bar{F}_1$  је друга колона матрице стања  $A$ ,  $\bar{F}_2$  трећа колона  $A$ ,  $\bar{F}_3$  седма колона  $A$ ,  $\bar{F}_4$  осма колона  $A$ ,  $C = I$ ,  $Q_e = 0.01I$  и  $R = 0.0004I$ . Претпоставимо да постоји  $n = 4$  агента (са одговарајућим моделима у простору стања представљеним сивим сенкама на Слици 3.5) - први са скупом индекса стања  $I_1^x = \{1, 2, 3\}$  и скупом индекса излаза  $I_1^y = \{1, 2, 3\}$ , други са скупом индекса стања  $I_2^x = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и скупом индекса излаза  $I_2^y = \{3, 4, 5, 6\}$ , трећи са скупом индекса стања  $I_3^x = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  и скупом индекса излаза  $I_3^y = \{6, 7, 8, 9\}$ , и четврти са скупом индекса стања  $I_4^x = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  и скупом индекса излаза  $I_4^y = \{8, 9, 10, 11\}$ .

	-4	1	-0.1	-0.1	0	0.3	0.1	0	0.3	0.2	0.1	0
	-1	-4	0.1	0.1	0.2	0	0	0.1	0.2	0.3	0	0
	1	3	-5	-0.1	0.1	1	0.2	1	0	0	0	0.1
	0.1	-0.1	-0.1	-1	1	1	1	0.2	0	0	0	0
	0	0.1	0.1	-0.1	-1	1	-0.1	-0.2	0	0.3	0.1	0
	0.1	0	0.1	0.1	-1	-1	-0.2	-0.1	0.2	0	0	0.1
	0	0	0.2	1	2	3	-7	-2	2	1	2	1
	0	0	0.1	0.2	1	-1	-4	-5	1	1	1	1
	0.3	0.1	0	0	0	0.1	1	-0.1	-1	1	-1	1
	0.1	0.3	0	0	0.1	0	0.1	0.1	-1	-1	-1	-1
	0	0.2	0	0.1	0	0	0.1	-0.1	-1	1	-1	-1
	0.2	0	0.1	0	0.1	0.1	0.1	0.1	-1	-1	3	-3

Слика 3.5: Структура матрица модела

Агент 1 је усмерен ка локалној детекцији отказа: његова циљна грешка је одговарајући део  $\bar{F}_1$ , његов споредни отказ је одговарајући део  $\bar{F}_2$ . Остала три

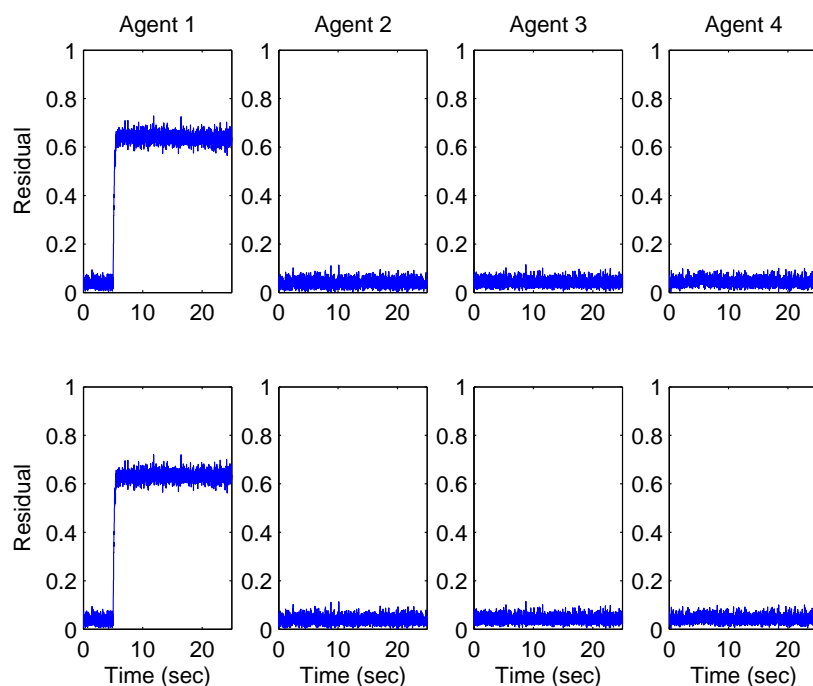
агента имају заједничке отказе: њихови циљни откази су одговарајући делови  $\bar{F}_3$ , док су им споредни откази одговарајући делови  $\bar{F}_4$ . С обзиром на то да се стања Агента 2 преклапају са стањима Агента 1 споредна грешка Агента 2 је такође и  $\bar{F}_2$  јер не желимо да буде осетљив на локални отказ Агента 1. Изабране су вредности параметара дизајна четири оптимална стохастичка опсервера  $Q_1^{(i)} = 10^{-5}I$ ,  $Q_2^{(i)} = I$ ,  $\gamma_i = 10^{-2}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Вредности консензус параметара су  $k_v^{12} = 0.1$ ,  $k_v^{13} = 0.1$ ,  $k_v^{14} = 0.1$ ,  $k_v^{21} = 0.1$ ,  $k_v^{23} = 10$ ,  $k_v^{24} = 5$ ,  $k_v^{31} = 0.1$ ,  $k_v^{32} = 0.1$ ,  $k_v^{34} = 0.1$ ,  $k_v^{41} = 0.1$ ,  $k_v^{42} = 5$ , и  $k_v^{43} = 10$ .

Слике 3.6 и 3.7 приказују временски одзив норме резидуала свих агената када се јаве циљни откази  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_3$ , респективно; откази су представљени јединичним одскочним сигнаlima који се јављају у временском тренутку  $t = 5$ . Приказани су резидуали добијени коришћењем предложене консензус шеме (горе), као и резидуали добијени без коришћења консензуса - тј. где су вредности свих консензус параметара нула (доле). Као што се може видети са Слике 3.6, Агент 1 може лако детектовати локални отказ, који не утиче на резидуале других агената. Утицај консензус шеме је јасан - она суштински побољшава перформансе Агената 2 и 4, као што се може видети са Слике 3.7. Слика 3.8 приказује временски одзив норме резидуала свих агената када се јави споредни отказ  $\bar{F}_4$ . Одговарајући резидуали за споредни отказ  $\bar{F}_2$  су исте магнитуде. Може се видети да су резидуали свих агената (скоро) потпуно неосетљиви на споредне отказе.

Даље, у фази дистрибуираног одлучивања примењен је алгоритам заснован на генерализованом количнику веродостојности, усмерен ка дистрибуираној детекцији непознате промене у средњој вредности резидуала Агената 2, 3 и 4 узрокованих појавом отказа  $\bar{F}_3$ . Предложени алгоритам заснован на консензусу (видети претходну главу) постиже асимптотски слично понашање свих агената, блиско оптималној централизованом статистици. На Слици 3.9 су пуном линијом приказане статистике једног случајно изабраног агента (средња вредност  $\pm$  једна стандардна девијација), као и оптималне централизоване статистике (испрекидана линија), добијене помоћу 1000 Монте Карло итерација, за две вредности параметра  $\alpha$  коришћеног у рекурзијама за детекцију промене. Квалитет добијеног детектора промене је очигледан.

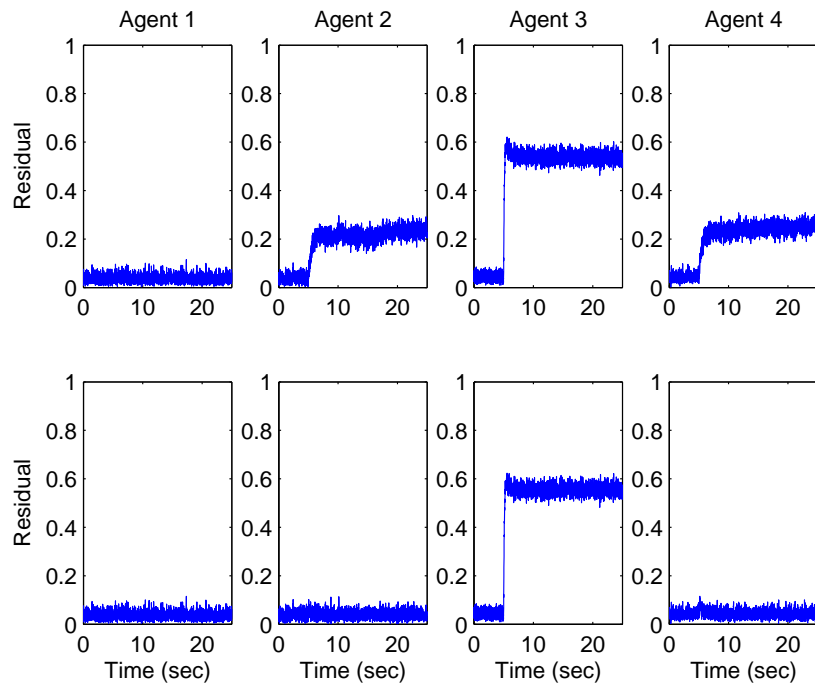
## 3.4 Закључак

У овој глави је предложена нова дистрибуирана методологија за детекцију и идентификацију отказа, у форми мулти-агент мреже која представља комбина-

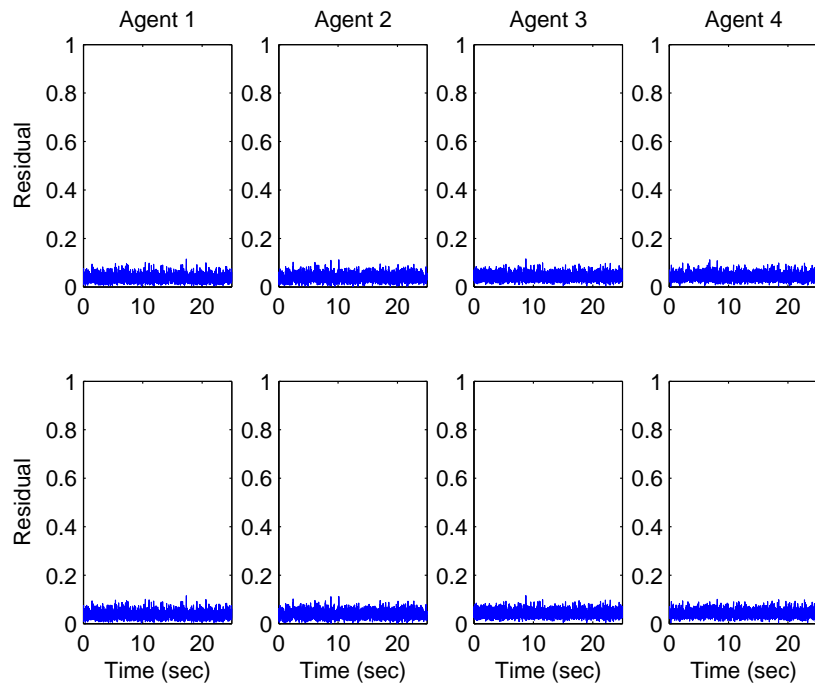


Слика 3.6: Норме резидуала за  $\bar{F}_1$ , са и без консензус шеме (горе и доле, респективно).

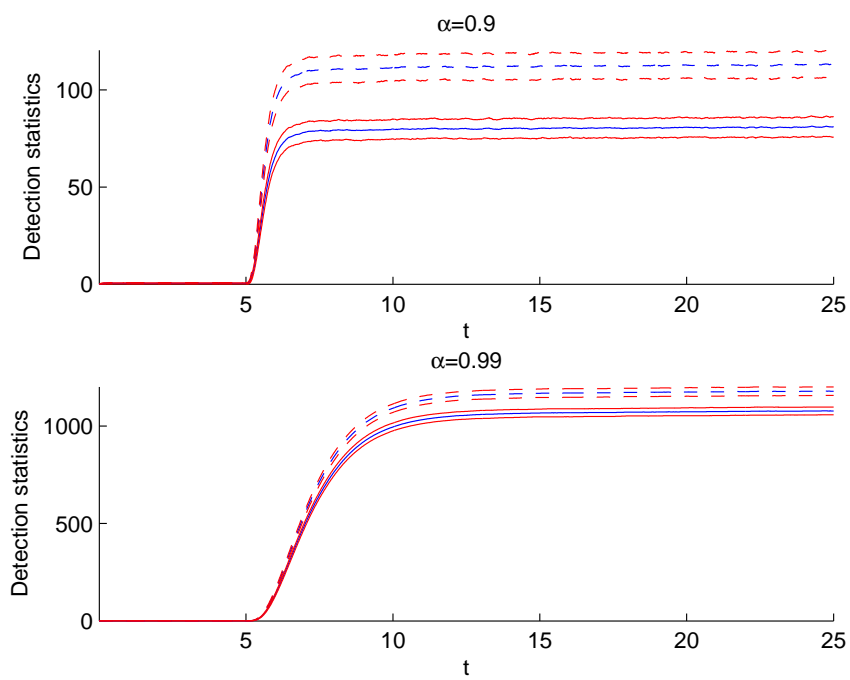
цију опсервера заснованог на консензусу за генерисање резидуала и стратегије одлучивања у реалном времену засноване на консензусу за детекцију промене у резидуалима. Предложени опсервер је заснован на преклапајућој декомпозицији система и комбинацији локалних оптималних стохастичких FDI опсервера и динамичке консензус стратегије. Предложена стратегија одлучивања даје решења за два посебна случаја: а) локалну детекцију отказа у непреклапајућим деловима идентификованих подсистема; б) стратегију засновану на консензусу за FDI у преклапајућим деловима. Предложена потпуно децентрализована методологија отвара много нових могућности за развој ефикасних, скалабилних и робусних децентрализованих FDI система.



Слика 3.7: Норме резидуала за  $\bar{F}_3$ , са и без консензус шеме (горе и доле, респективно).



Слика 3.8: Норме резидуала за  $\bar{F}_4$ , са и без консензус шеме (горе и доле, респективно).



Слика 3.9: Дистрибуирана статистика (пуна линија) и оптимална централизована статистика (испрекидана линија) за  $\alpha = 0.9$  и  $\alpha = 0.99$ .

## Глава 4

# Адаптивно дистрибуирано праћење покретних циљева помоћу сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора засновано на консензусу

У овој глави су размотрени дистрибуирани алгоритми за праћење покретних циљева засновани на консензусу и предложен је нови алгоритам са децентрализованом адаптацијом у случају сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора. Дата компаративна анализа показује да је подешавање параметара консензус шеме од суштинске важности за добијање једноставних и ефикасних алгоритама, који захтевају слање информација само о локалним естимацијама стања између чворова. Предложени алгоритам, који даје већи значај чворовима који примају мерења, је заснован на размени додатне бинарне информације и представља робустан и ефикасан практичан алат. Стабилност алгоритма је испитана за дату поставку проблема. Изабрани примери показују перформансе алгоритма у погледу грешке естимације и неслагања између чворова.

### 4.1 Увод

Сензорске мреже у скорије време привлаче велику пажњу, имајући у виду напредак у мрежама велике брзине, као и ниску цену и моћне рачунарске способности самих сензора. *Дистрибуирана естимација* је један од најзначајнијих

задатака колаборативног процесирања информација који је у фокусу истраживача (видети нпр. [53, 54] и тамо наведене референце). У потпуно децентрализованим конфигурацијама модуларност, брзина и одрживост постижу се организовањем процесирања на такав начин да сваки сензор комуницира само са подгрупом свих чворова, обично у мрежи њему суседним, како би дошао до глобалног резултата, без потребе за централном процесирајућом јединицом. *Дистрибуирано праћење покретних циљева* је специфичан проблем дистрибуиране естимације где се естимира стање покретне мете. Иницијално је проблем праћења покретних циљева коришћењем мулти-сензорских шема био повезан са фузијом информација добијених са *сензора великог домета*, као што су радари и сонари, нпр. [13, 2, 41]. У данашње време се примењују сензорске мреже са *ограниченим дометом сензора* (*limited sensing range - LSR*) који прекривају релативно велику област, где је главни изазов развити ефикасне алгоритме праћења у ситуацији када мету у сваком временском тренутку опсервира само релативно мали број сензора [37].

*Дистрибуирани алгоритми обраде сигнала засновани на консензусу* су се показали као ефикасан алат у решавању широког спектра проблема у *мулти-агент системима*, укључујући проблеме дистрибуиране естимације стања, нпр. [34, 45, 57]. Ови алгоритми омогућавају ефикасну *децентрализацију* функција, тј. такво слагање између чворова које *елиминира потребу за центром фузије*. Два важна дистрибуирана децентрализована алгоритма естимације који се често цитирају у литератури су предложена у [33], где се консензус шема повезује са процесом естимације стања. Оба алгоритма претпостављају размену *локалних мерења* и *локалних коваријанси* између суседних чворова, заједно са *естимацијама стања*. Генерализација једне од шема из [33] која укључује консензус шему са више параметара је дата у [10], али се она и даље ослања на размену локалних мерења и коваријанси. Наставак рада из [33] је описан у [37], са главним циљем да се превазиђе проблем значајног процента *недостајућих мерења* сензора у сензорским мрежама са LSR. Предложени алгоритам је заснован на једном од алгоритама из [33], заједно са додатним центром фузије вишег нивоа за погодно стапање дистрибуираних естимација стања. Са друге стране, у [53] је предложен алгоритам за дистрибуирану децентрализовану естимацију засновану на консензусу коришћењем преклапајуће декомпозиције система. Алгоритам структурно подсећа на један од алгоритама из [33] у случају кад су сви модели подсистема исти; међутим, он захтева размену само естимација стања између чворова. За апликације у реалном времену је од суштинске важности да су у свим поменутих алгоритмима функције естимације и консензуса спојене



унутар сваке итерације (текући консензус, *running consensus*), наспрот приступима који уводе консензус шему после сакупљања свих потребних мерења, видети нпр. [22].

Циљ ове главе је разматрање *проблема дистрибуираног децентрализованог праћења покретних циљева* са тачке гледишта примене *алгоритама заснованих на консензусу*, и предлог нове шеме са децентрализованом адаптацијом применљиве на сензорске мреже са LSR. У првом делу биће дато поређење два карактеристична представника постојећих алгоритама заснованих на консензусу, тј. алгоритама предложених у [53] и [37], у смислу резултујуће грешке естимације, неслагања између чворова (*disagreement*), размене информација између чворова, имуности на шум и потенцијалне адаптивности мреже у односу на глобални задатак. Специјална пажња биће посвећена структурним особинама алгоритама и ефекту избора консензус параметара. Треба напоменути да детаљно поређење дистрибуираних алгоритама естимације заснованих на консензусу није до сада третирано у литератури. На основу добијених резултата у другом делу главе биће предложена нова верзија алгорита из [53], за праћење покретних циљева у присуству LSR, заснована на децентрализованој адаптивној стратегији која захтева само слабе додатне бинарне информације између чворова о томе да ли је чвор опсервирао мету. Ова информација се користи у адаптацији локалних консензус параметара тако што се већа тежина додељује чворовима који опсервирају мету и на тај начин постижу бољи глобални резултати у праћењу. Дата је анализа стабилности предложеног алгорита. Резултати симулација илуструју карактеристичне особине предложеног алгорита и показују да он може да представља једноставан и ефикасан практичан алат.

Кратак преглед главе биће дат као што следи. У Поглављу 4.2 су размотрене и експериментално илустроване особине дистрибуираних алгоритама естимације заснованих на консензусу. Предложена шема праћења са адаптацијом на сензорске мреже са LSR је представљена у Поглављу 4.3, заједно са теоретском анализом стабилности и карактеристичним резултатима симулација.

## 4.2 Дистрибуирана естимација заснована на консензусу

### 4.2.1 Алгоритми

Претпоставимо да је покретна мета представљена линеарним временски непроменљивим дискретним стохастичким моделом у простору стања

$$x(t+1) = Fx(t) + Ge(t), \quad (4.1)$$

где је  $x$  ( $\dim\{x\} = m$ ) вектор стања мете и  $e$  бели Гаусов шум нулте средње вредности са коваријационом матрицом  $Q$ . Такође претпоставимо да имамо  $n$  интелигентних чворова (*агената*) у мрежи у којој сваки чвор има, у општем случају, ограничене домете за мерење и комуникацију који одређују у сваком тренутку  $t$  скуп агената који могу да опсервирају мету и скупове суседних чворова који могу да размењују поруке. Модел мерења  $i$ -тог агента је

$$y_i(t) = \gamma_i(t)H_i x(t) + v_i(t), \quad (4.2)$$

где је  $y_i(t)$  ( $\dim\{y_i\} = p_i$ ) вектор мерења,  $H_i$  је константна матрица излаза и  $v_i$  бели Гаусов шум мерења нулте средње вредности са коваријационом матрицом  $R_i$ ; фактор  $\gamma_i(t)$  одражава тренутну доступност мерења: једнак је 1 када  $i$ -ти агент опсервира мету, иначе је 0,  $i = 1, \dots, n$ .

Наш циљ је конструкција дистрибуираног естиматора стања  $x$  у (4.1) *без било каквог центра фузије*, у коме аутономни агенти (интелигентни сензори) генеришу сопствене естимације целог вектора стања на основу локално доступних мерења (4.2) и комуникације између суседа у реалном времену. Оваква формулација која претпоставља да се сваки агент може изабрати за глобалног естиматора захтева *низак ниво неслагања* о естимацијама између агената. Фокусираћемо пажњу на следећа два карактеристична алгоритма *заснована на консензусу*:

*Алгоритам А:* Алгоритам се добија из [53] под претпоставком да су сви модели подсистема једнаки моделу система (4.1):

$$\begin{aligned} \xi_i(t|t) &= \xi_i(t|t-1) + \gamma_i(t)L_i(t)(y_i(t) - H_i\xi_i(t|t-1)), \\ \xi_i(t+1|t) &= \sum_{j \in \mathcal{J}_i} c_{ij}(t)F\xi_j(t|t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$i = 1, \dots, n$ , где је  $\mathcal{J}_i = \mathcal{N}_i \cup \{i\}$  ( $\mathcal{N}_i$  је скуп суседа  $i$ -тог чвора),  $\xi_i$  је естимација  $x$  коју генерише  $i$ -ти агент,  $L_i(t) = P_i(t|t)H_i^T R_i^{-1}$  је појачање локалног Калмановог филтра добијено из (4.1) и (4.2) према [49] коришћењем

$$\begin{aligned} P_i(t|t)^{-1} &= P_i(t|t-1)^{-1} + \gamma_i(t)H_i^T R_i^{-1}H_i^T, \\ P_i(t+1|t) &= FP_i(t|t)F^T + GQG^T; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$c_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , су (у општем случају) временски променљиве тежине такве да је  $n \times n$  матрица  $C(t) = [c_{ij}(t)]$  (консензус матрица) стохастичка по реду за свако  $t$ , нпр. [28, 34, 45, 58, 23]. Алгоритам садржи део са филтрирањем у коме се процесирају локална мерења и део са предикцијом у коме се постиче слагање између агената формирањем конвексне комбинације размењених предикција  $F\xi_j(t|t)$ , нпр. [34, 42, 45, 57, 58]. Општа анализа стабилности и робусности верзије алгоритма у устаљеном стању је дата у [53]. Треба напоменути да  $P_i(t|t)$  и  $P_i(t+1|t)$  не представљају коваријансе грешке естимација; заиста, (4.3) се може посматрати као општи опсервер Луенбергеровог типа где  $L_i(t)$  може бити дефинисано на било какав усвојен начин (видети Главу 3 и [24], где је конструисан дистрибуирани филтар за детекцију отказа).

*Алгоритам Б:* Такозвани Калман-консензус филтар (КCF) [33, 37] је представљен помоћу

$$\begin{aligned} \xi_i(t|t) &= \xi_i(t|t-1) + P_i(t|t) \left[ \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \gamma_j(t) H_j^T R_j^{-1} (y_j(t) - H_j(t) \xi_i(t|t-1)) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\xi_j(t|t-1) - \xi_i(t|t-1)) \right], \\ \xi_i(t+1|t) &= F\xi_i(t|t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где су

$$\begin{aligned} P_i(t|t)^{-1} &= P_i(t|t-1)^{-1} + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \gamma_j(t) H_j^T R_j^{-1} H_j, \\ P_i(t+1|t) &= FP_i(t|t)F^T + GQG^T, \end{aligned} \quad (4.6)$$

и  $\varepsilon$  је мали позитиван скалар. Алгоритам је изведен докомпоновањем глобалног Калмановог филтра за целу мрежу и додавањем консензус члана на нивоу филтрације [33]; уочити да  $P_i(t|t)$  и  $P_i(t+1|t)$  поново не представљају праве коваријансе. Овај алгоритам је изабран за компаративну анализу која следи због велике заступљености у литератури и карактеристичне структуре различите од

структуре Алгоритма А.

## 4.2.2 Компаративна анализа

Следећи аспекти су важни у поређењу Алгоритама А и Б:

а) Захтевана размена мерења  $y_j(t)$ ,  $j \in \mathcal{N}_i$ , заједно са одговарајућим локалним коваријансама шума, чини Алгоритам Б знатно мање погодним за имплементацију ( $m$  реалних бројева се преноси у свакој комуникацији између чворова у Алгоритму А, док се у Алгоритму Б преноси  $m + m + m^2$  бројева). Са друге стране, доступност више мерних података генерално омогућује мању грешку естимације. Међутим, имајући у виду да су у Алгоритму А естимације већ добијене коришћењем локалних мерења, може се очекивати да додатна размена самих мерења нема значајан утицај; у наставку ће, између осталог, бити показано да се финим подешавањем тежина  $c_{ij}(t)$  може добити ефикасније и ефективније решење.

б) Увођење консензус члана у нивоу предикције у Алгоритму А, а не већ на нивоу филтрације као у Алгоритму Б, је благотворно у погледу повећања имуности на шум, имајући у виду додатно просторно усредњавање тренутних резидуала из суседства имлицитно присутно у Алгоритму А [55]. У циљу илустрације овог тврђења, претпоставимо да у (4.2) и (4.3) имамо  $H_i = H$ ,  $R_i = R$  и  $L_i(t) = L_i = L$  ( $L$  може бити појачање Калмановог филтра у устаљеном стању или било које друго константно појачање), тако да се цела мрежа која имплементира Алгоритам А може компактно представити са

$$X(t+1|t) = \Phi(t)X(t|t-1) + \Psi(t)Y(t), \quad (4.7)$$

где је  $X(t+1|t) = (\xi_1(t+1|t)^T, \dots, \xi_n(t+1|t)^T)^T$ ,  $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ ,  $\Phi(t) = [\Phi_{ij}(t)]$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , где  $\Phi_{ij}(t) = c_{ij}(t)F(I - \gamma_j(t)LH)$  представљају  $m \times m$  блокове, и  $\Psi(t) = [\Psi_{ij}(t)]$ , где  $\Psi_{ij}(t) = c_{ij}(t)\gamma_j(t)FL$  представљају  $m \times p_i = m \times p$  блокове.

Претпоставимо даље ради поједностављења да у (4.1) имамо  $F = 1$ ,  $G = 1$  и  $Q = 1$  ( $\dim\{x\} = 1$ ), и да је  $L_i = \lambda$ , где је  $\lambda > 0$  мали скалар; претпоставићемо такође да је  $\Gamma(t) = \Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ , где су  $\gamma_i$  константе једнаке 1 или 0 и да је  $C(t) = C$  константна, примитивна, стохастичка матрица по реду [23]. Поредимо Алгоритам А са сличним алгоритмом

$$\xi_i(t|t) = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} c_{ij} \xi_j(t-1|t-1) + \gamma_i \lambda (y_i(t) - H_i \xi_i(t-1|t-1)), \quad (4.8)$$

у коме је консензус члан уведен на нивоу филтрације, као у [58]. Коришћењем (4.7), долази се до закључка да је матрица  $C(I - \lambda\Gamma)$  од суштинске важности за особине (4.3); сличним резоновањем се долази до тога да  $C - \lambda\Gamma$  одређује особине (4.8). За  $\nu \geq n$  добијамо, после издвајања чланова линеарних по  $\lambda$ , да је  $(C(I - \lambda\Gamma))^\nu \approx C^\nu - CA_{\nu-1}$  и  $(C - \lambda\Gamma)^\nu \approx C^\nu - A_{\nu-1}$ , где је  $A_{\nu-1} = \lambda\Gamma C^{\nu-1} + \lambda C\Gamma C^{\nu-2} + \dots + \lambda C^{\nu-1}\Gamma$ . Може се лако видети да је минимална сума по реду матрице  $CA_{\nu-1}$  већа од минималне суме по реду матрице  $A_{\nu-1}$ , имајући у виду претпостављене особине  $C$  и ненегативност  $A_{\nu-1}$  (видети [55]). Дакле,  $\|(C(I - \lambda\Gamma))^\nu\|_\infty \leq \|(C - \lambda\Gamma)^\nu\|_\infty$ , указујући на потенцијалну супериорност Алгоритма А ( $\|B\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$  за матрицу  $B = [b_{ij}]$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ). Обимне и разноврсне симулације представљене у [55] потврђују предност Алгоритма А у случају естимације параметара. Добијени закључци се могу директно проширити и на временски променљива појачања.

в) Алгоритам Б није довољно флексибилан, имајући у виду да је једини слободан параметар  $\varepsilon$  у (4.5), који треба да буде довољно мали да би алгоритам био стабилан и довољно велики да би се постигло задовољавајуће усаглашавање између агената. Са друге стране, избор елемената целе матрице  $C(t)$  у Алгоритму А пружа могућност добијања мреже са разноликим жељеним особинама. Треба напоменути да алгоритам предложен у [10] укључује слично дефинисану консензус шему, али и даље захтева размену мерних података.

### 4.2.3 Експерименти

Следећи пример ће експериментално показати горепоменуте тврдње. Посматрајмо мету која се креће по кружној путањи [33], са динамиком датом у (4.1) са

$$F = I_2 + \varepsilon F_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} F_0^2 + \frac{\varepsilon^3}{6} F_0^3, \quad F_0 = 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и са периодом одабирања  $\varepsilon = 0.015$ . Сензорска мрежа са  $n = 50$  насумице распоређених чворова унутар квадратног простора је симулирана. Сензори су повезани уколико је њихово растојање мање од  $\sim 1/4$  стране квадрата. Како би се илустровали повољни ефекти консензуса на укупан квалитет естимације, претпоставићемо нереалну ситуацију у којој сваки сензор опсервира само једну изабрану компоненту позиције мете [33]. Остали параметри су  $G = \varepsilon I_2$ ,  $Q = \sigma_e^2 I_2$ ,  $R_i = \sigma_{v_i}^2$ , где је  $\sigma_e = 1$  и  $\sigma_{v_i}$  су насумице изабрани из интервала  $\sigma_{v_i} \in [1, 10]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; такође, за све агенте је  $P_i(1|0) = 10I_2$ ,  $\xi_i(1|0) = (17.4, 0)^T$  и  $x_0 = (15, -10)^T$ .

У општем случају избор параметара консензус шеме у Алгоритму А може

бити заснован на директној оптимизацији [53]. На овом месту су усвојена два прагматична избора:

$$а) c_{ij} = \frac{R_j^{-1}}{\sum_{j \in \mathcal{J}_i} R_j^{-1}},$$

где се захтева да су сваком агенту унапред познате константне варијансе мерног шума његових суседа и б)  $C$  има једнаке ненулта елементе у сваком реду. Код Алгоритма Б је вредност параметра  $\varepsilon$  коришћеног у (4.5) постављена на 0.07, близу границе стабилности. Перформансе а) подешеног и б) неподешеног Алгоритма А пореде се са перформансама Алгоритма Б. На Слици 4.1(а) су приказана средња растојања по чвору између правих и естимираних позиција (усредњена на 100 Монте Карло итерација). Као што се може видети, подешен Алгоритам А има боље перформансе од Алгоритма Б, упркос чињеници да потоњи користи размену мерних података. Перформансе алгоритама у најгорем случају (највећа средња растојања за један чвор) су приказане на Слици 4.1(б).

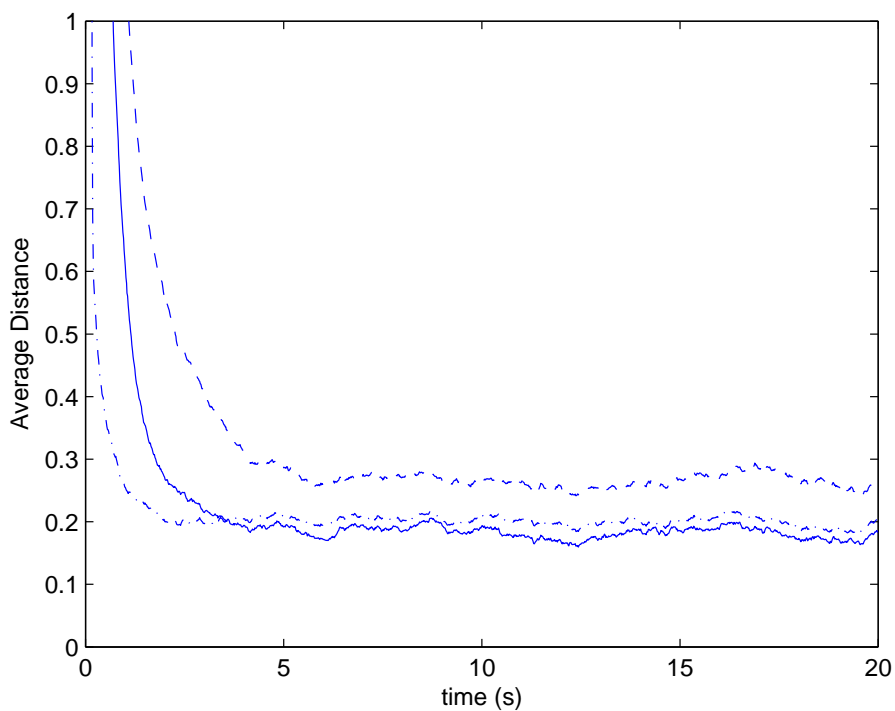
Неслагање између чворова, естимирано као варијанса естимација позиције мете, је такође рачунато; резултати засновани на 100 Монте Карло итерација су дати на Слици 4.2 (дате су варијансе дуж  $x$ -осе, резултујуће криве за  $y$ -осу су сличне). Могуће је приметити да подешавање консензус параметара незнатно повећава неслагање у односу на неподешен случај, као што је и очекивано, с обзиром на то да су различитим агентима додељене различите вредности тежина у консензус шеми. Међутим, подешени Алгоритам А и даље има значајно боље перформансе од Алгоритма Б, чије су перформансе у најгорем случају сличне одговарајућим перформансама неподешеног Алгоритма А (Слика 4.1(б)).

Дакле, закључује се да са финим подешавањем консензус параметара Алгоритам А може да представља једноставнији и ефикаснији практичан алат од Алгоритма Б. Овај подешени алгоритам биће узет за основу дизајна шеме праћења покретних циљева применљиве у мрежама са LSR чији опис следи.

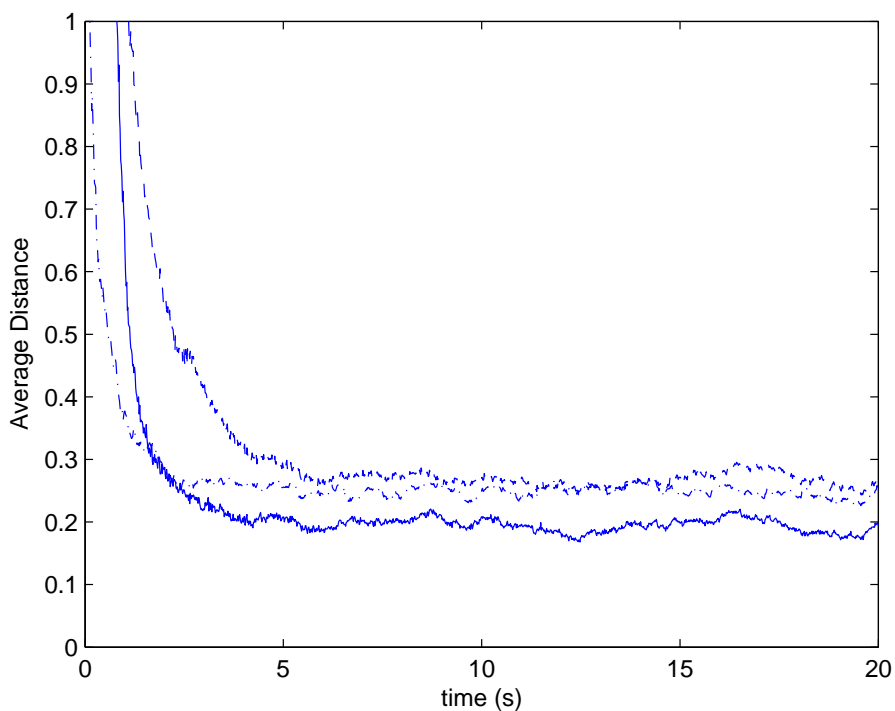
## 4.3 Децентрализовано адаптивно праћење покретних циљева помоћу сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора

### 4.3.1 Алгоритам

Посматраћемо проблем праћења покретних циљева помоћу сензорских мрежа са LSR, када у датом временском тренутку само мали проценат агената може да

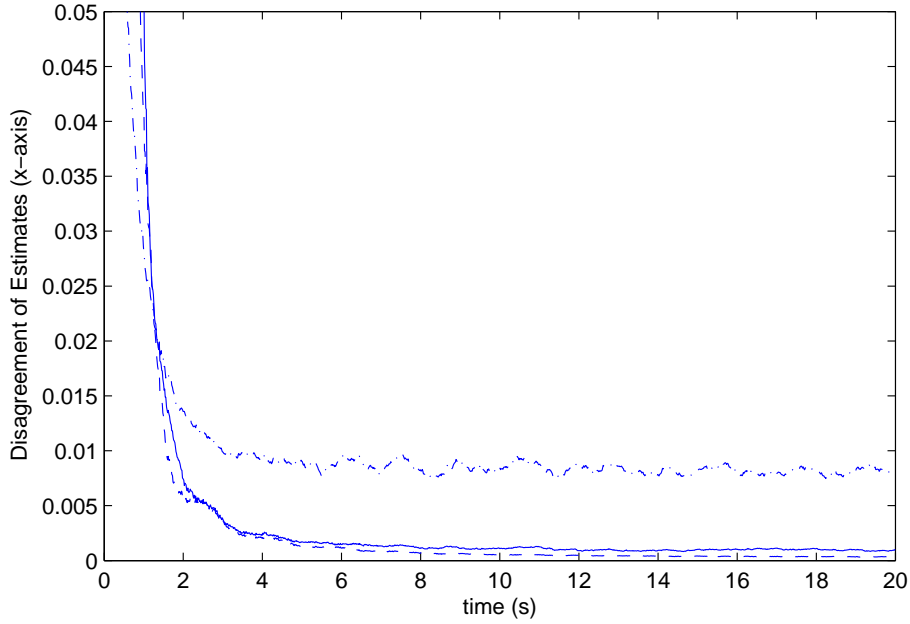


(a) Средња растојања по чвору



(b) Највећа средња растојања по чвору

Слика 4.1: Средња растојања између правих и естимираних позиција: Алгоритам А са неподешеним консензусом (испрекидане линије), Алгоритам А са подешеним консензусом (пуне линије), Алгоритам Б (црта-тачка линије).



Слика 4.2: Варијанса естимација: Алгоритам А са неподешеним консензусом (испрекидана линија), Алгоритам А са подешеним консензусом (пуна линија), Алгоритам Б (црта-тачка линија).

опсервира мету. На основу резултата претходног поглавља, почећемо од Алгоритма А и конструисати нови алгоритам који укључује *децентрализовану адаптацију у реалном времену* чији је циљ да динамички даје већи значај чворовима који примају мерења, доприносећи на тај начин бржем праћењу од стране свих чворова у мрежи. Ова идеја је имплементирана увођењем размене додатних бинарних порука између суседних чворова о томе да ли чвор јесте или није опсервирао мету ( $\gamma_i(t) = 1$  или  $\gamma_i(t) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , у (4.3)); уочити да је ова бинарна порука већ имплицитно укључена у размену порука у Алгоритму Б. Коришћењем ових додатних порука, сваки чвор рачуна вредности  $|\mathcal{J}_i|$  скалара  $\chi_j^i(t)$ , који представљају историје опсервација суседних чворова, чије апсолутне вредности представљају број узастопних итерација у којима суседи јесу или нису опсервирали мету. Правило ажурирања може се представити у компактној форми:

$$\chi_j^i(t) = \begin{cases} (1 - \gamma_j(t-1))\chi_j^i(t-1) + 1 & \text{ако } \gamma_j(t) = 0, \\ \gamma_j(t-1)\chi_j^i(t-1) - 1 & \text{ако } \gamma_j(t) = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Иницијално,  $\chi_j^i(0) = 0$ ,  $j \in \mathcal{J}_i$  и  $\gamma_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Очито, у случају промена ( $\gamma_j(t) = 1$  и  $\gamma_j(t-1) = 0$ , или  $\gamma_j(t) = 0$  и  $\gamma_j(t-1) = 1$ ),  $\chi_j^i(t)$  се ресетује на  $-1$  или



1, респективно; иначе, претходна вредност  $\chi_j^i(t)$  се или смањује или повећава за 1. Коришћењем (4.9) ненормализоване консензус тежине се затим рачунају као

$$c_{ij}^x(t) = \begin{cases} c_{ij}^x(0)k_1^{\chi_j^i(t)} & \text{ако } \chi_j^i(t) \geq 0, \\ c_{ij}^x(\infty) - (c_{ij}^x(\infty) - c_{ij}^x(0))k_2^{|\chi_j^i(t)|} & \text{ако } \chi_j^i(t) \leq 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

где су  $c_{ij}^x(0)$  иницијалне вредности и  $c_{ij}^x(\infty)$  жељене коначне вредности; параметри  $0 < k_1, k_2 < 1$  одређују брзину прилажења коначним вредностима. Слична идеја је описана у [38] у другачијем контексту, где се користе вишеструке консензус итерације после сваке опсервације. Коначно, нормализоване консензус тежине, које задовољавају важно правило да је консензус матрица  $C(t)$  стохастичка по реду, добијају се као

$$c_{ij}(t) = \frac{c_{ij}^x(t)}{\sum_{j \in \mathcal{J}_i} c_{ij}^x(t)}. \quad (4.11)$$

За несуседне чворове,  $j \notin \mathcal{J}_i$ ,  $c_{ij}(t) = 0$ .

У општем случају, параметри  $k_1$  и  $k_2$  зависе од периоде одабирања, својстава мете, геометрије мреже итд. и подешавају се унапред; јасно је из (4.11) да је резонски узети да је  $k_1 = k_2 = k$ . Штавише, за веома мале вредности  $k$  цела шема се редукује на тренутно пребацивање на  $c_{ij}^x(\infty)$  за чворове који опсервирају мету и на 0 за остале, чиме се добија најбрже праћење. У пракси, међутим, веће вредности су пожељне са тачке гледишта робусности у односу на грешке у комуникацијама, тако да коначни избор треба да буде резултат компромиса.

Треба напоменути да су вредности  $c_{ij}(t)$  близу нули за чворове који не опсервирају мету само у ситуацијама када ови чворови имају у свом суседству чворове који примају опсервације; иначе су вредности  $c_{ij}(t)$  у суседствима у којима су искључиво чворови који не опсервирају мету међусобно сличне и нису близу нули, тако да се омогућава ток информација кроз целу мрежу.

У случају када поменута робусност не представља проблем, следећа шема која представља поједностављење шеме дате у (4.11) може се применити:

$$c_{ij}(t) = \frac{\left(\gamma_j(t) + \prod_{j \in \mathcal{J}_i} (1 - \gamma_j(t))\right) c_{ij}^a}{\sum_{j \in \mathcal{J}_i} \left(\gamma_j(t) + \prod_{j \in \mathcal{J}_i} (1 - \gamma_j(t))\right) c_{ij}^a}, \quad (4.12)$$

где су  $c_{ij}^a$  тежине повезане са *a priori* проценом о перформансама одређеног чвора (нпр.  $c_{ij}^a = R_j^{-1}$ ).

### 4.3.2 Анализа стабилности

Теоретска анализа предложеног алгоритма је врло комплексна у општем случају. Почећемо од упрошћеног глобалног модела (4.7) и претпоставићемо да је пар  $(H, F)$  опсервабилан и пар  $(F, GQ^{\frac{1}{2}})$  контролабилан, као и да диграф који представља мрежу има обухватно дрво [34, 45, 54].

Стабилност алгоритма ће бити демонстрирана коришћењем специфичног сценарија који показује главне феномене:

а) иницијално, сви агенти опсервирају мету и консензус тежине су постављене на  $C(0) = [c_{ij}(0)]$ ;

б) почевши од  $t = 1$ , само један агент наставља да опсервира мету и предложени адаптивни алгоритам се примењује према (4.10).

У иницијалној поставци под а), имамо да је  $\Phi_{ij}(0) = c_{ij}(0)F(I - LH)$  према (4.7). Користићемо резултате из [53, 40, 32, 23] и најпре дефинисати норму блок матрице  $\Phi(0)$  као  $\|\Phi(0)\|_* = \|\|\Phi_{ij}(0)\|_\tau\|_\infty$ , где је норма  $\|A\|_\tau$  квадратне матрице  $A$  дефинисана са  $\|A\|_\tau = \|D_\tau U^T A U D_\tau^{-1}\|_\infty$ ,  $U$  је ортогонална матрица у репрезентацији  $A = U\Delta U^T$ ,  $\Delta$  горња триангуларна матрица која садржи сопствене вредности  $A$  на дијагонали (према Шуровој теореме [23]) и  $D_\tau = \text{diag}\{\tau, \tau^2, \tau^3, \dots, \tau^n\}$ . Даље, могуће је наћи за било које дато  $\varepsilon > 0$  такво  $\tau_\varepsilon > 0$  да за свако  $\tau > \tau_\varepsilon$  имамо  $\rho(A) \leq \|A\|_\tau \leq \rho(A) + \varepsilon$ , где је  $\rho(A)$  спектрални радијус матрице  $A$  [53, 23]. Непосредно се добија да је  $\|\Phi_{ij}(0)\|_\tau \leq \rho < 1$  за довољно велико  $\tau$ , имајући у виду да је спектрални радијус матрице  $F(I - LH)$  стриктно мањи од 1, као последица претпостављених услова контролабилности и опсервабилности. Стога,  $\|\Phi(0)\|_* \leq \rho < 1$ , имајући у виду да је  $\|C(0)\|_\infty = 1$ . Дакле, целокупан дистрибуирани естиматор је иницијално стабилан.

У поставци под б) примењује се предложени адаптивни алгоритам под претпоставком да су мерења доступна само првом агенту; претпоставићемо такође да је први чвор изворни чвор графа који представља мрежу. Дакле, имамо модел (4.7) у коме је  $\Phi_{1j}(t) = c_{1j}(t)F(I - LH)$ ,  $\Gamma_{1j}(t) = c_{1j}(t)FL$ ,  $\Phi_{ij}(t) = c_{ij}(t)F$  и  $\Gamma_{ij}(t) = 0$  за  $i = 2, \dots, n$ . Коришћењем (4.10) може се закључити да адаптивна шема производи  $c_{i1}(t) \rightarrow 1$  и  $c_{ij}(t) \rightarrow 0$ ,  $j = 2, \dots, n$ , за  $i \in \mathcal{N}_1^+$ , где је  $\mathcal{N}_1^+$  излазни комшилук (*out-neighborhood*) чвора 1, који садржи чворове на крају лукова који излазе из првог чвора. Стога се подмрежа која садржи чворове из  $\mathcal{N}_1^+$  редукује на мрежу у којој први чвор естимира стање мете аутономно и оптимално користећи локални Калманов филтар у устаљеном стању, док остатак чворова просто прима естимације од првог чвора. Чворови из скупа  $\mathcal{N} - \mathcal{N}_1^+$  примају естимације од чворова из скупа  $\mathcal{N}_1^+$  као улаза. Даље се из (4.7) може закључити да је матрица  $\Phi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)$  когредијентна (преко подложности

пермутационим трансформацијама) матрици

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \Phi^{[11]} & \Phi^{[12]} \\ \Phi^{[21]} & \Phi^{[22]} \end{bmatrix},$$

где је:

-  $\Phi^{[11]} = [\Phi_{ij}^{[11]}]$ ,  $i, j = 1, \dots, |\mathcal{N}_1^+|$ , где је  $\Phi_{i1}^{[11]} = F(I - LH)$  и  $\Phi_{ij}^{[11]} = 0$  за  $j = 2, \dots, |\mathcal{N}_1^+|$ , тј.

$$\Phi^{[11]} = \begin{bmatrix} F(I - LH) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(I - LH) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

-  $\Phi^{[22]} = [\Phi_{ij}^{[22]}]$ ,  $i, j = 1, \dots, |\mathcal{N} - \mathcal{N}_1^+|$ , где је  $\Phi_{ij}^{[22]} = c''_{ij}F$ , тј.

$$\Phi^{[22]} = \begin{bmatrix} c''_{11}F & c''_{12}F & \dots \\ c''_{21}F & c''_{22}F & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix};$$

под усвојеним претпоставкама имамо да је  $c''_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_j c''_{ij} \leq 1$  и  $\sum_j c''_{ij} < 1$  за најмање једну вредност  $i$ ,

-  $\Phi^{[21]} = [\Phi_{ij}^{[21]}]$ , где је најмање један блок ненулта и у форми  $\Phi_{ij}^{[21]} = c'_{ij}F$ ,  $c'_{ij} > 0$ , и  $\Phi_{ij}^{[12]} = 0$  [55].

Учити да константе  $c'_{ij}$  и  $c''_{ij}$  следе из (4.10), узевши у обзир да адапациона шема генерише  $c_{ij}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_{ij}^x(t)}{\sum_{j \in \mathcal{J}_i} c_{ij}^x(t)} = \frac{c_{ij}^x(0)}{\sum_{j \in \mathcal{J}_i} c_{ij}^x(0)}$  за  $i \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_1^+$ .

Коришћењем методологије представљене у [30], заједно са резултатима из [55], могуће је показати да је  $(\Phi_{ij}^{[22]})^\mu = [c_{ij}^{[\mu]}F^\mu]$ , за неки коначан позитиван цео број  $\mu$ , где је  $c_{ij}^{[\mu]} \geq 0$  и  $\sum_j c_{ij}^{[\mu]} < 1$  за свако  $i$ . Стога је, према горепоменутиим аргументима и [53, 55],  $\|(\Phi_{ij}^{[22]})^\mu\|_* < 1$  за довољно велико  $\tau$ , имајући у виду да је  $\|F\|_\tau = \rho(F) + \varepsilon = 1 + \varepsilon$  за све стандардне моделе мета [5, 2] и да је  $\|c_{ij}^{[\mu]}\|_\infty < 1$ . Дакле, цео систем је стабилан за асимптотске вредности консензус параметара. Коришћењем аналогних аргумената и додатних техникалија анализа се може проширити на општи временски променљив случај.

### 4.3.3 Експерименти

*Пример 1.* Како бисмо демонстрирали главну идеју иза предложене процедуре адаптације, размотримо једноставан проблем естимације параметара, где је  $F = 1$ ,  $Q = 0$ , периода одабирања је  $\epsilon = 0.01$ . Сензорска мрежа са прстен топологијом и  $n = 50$  чворова је симулирана. Коваријансе мерног шума су  $R_i = \sigma_{v_i}^2$ , где је  $\sigma_{v_i}$  насумично изабрано из интервала  $\sigma_{v_i} \in (0, 3)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Почетни услови за све агенте су  $x_0 = 5$ ,  $F_0 = 1$ ,  $\xi_i(0|0) = 0$ .

Два различита проблема су анализирана, у оба само један чвор добија мерења параметра. У првом случају тај активан чвор се не мења у времену док се у другом мења (активни чворови се бирају у смеру окретања казаљке на сату, тако да је после сваких  $t_d = 5$  итерација алгоритма активан чвор замењен његовим суседом). Изабране вредности параметара из (4.10) су  $c_{ij}^x(0) = 0.1$ ,  $c_{ij}^x(\infty) = 1$ , као и  $k_1 = k_2 = 0.1$  (непромењен активан чвор) и  $k_1 = k_2 = 0.9$  (променљиви активан чвор). Перформансе Алгоритма А са и без адаптације су упоређене. На Слици 4.3 је приказана колективна перформанса естимације сензорске мреже - приказане су естимације параметара свих чворова. Перформансе основног Алгоритма А без адаптације (где сваки ред консензус матрице  $C$  има једнаке ненулта елементе чија је сума 1) нису задовољавајуће, услед утицаја велике инерције целе мреже. Може се видети да предложена адаптивна процедура значајно убрзава конвергенцију естимација ка правој вредности параметра.

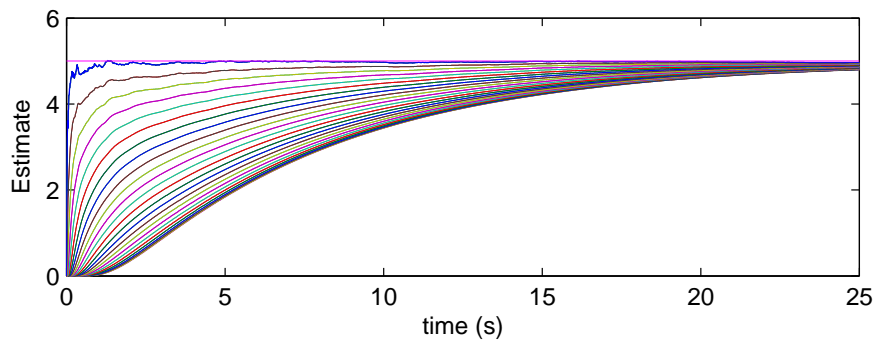
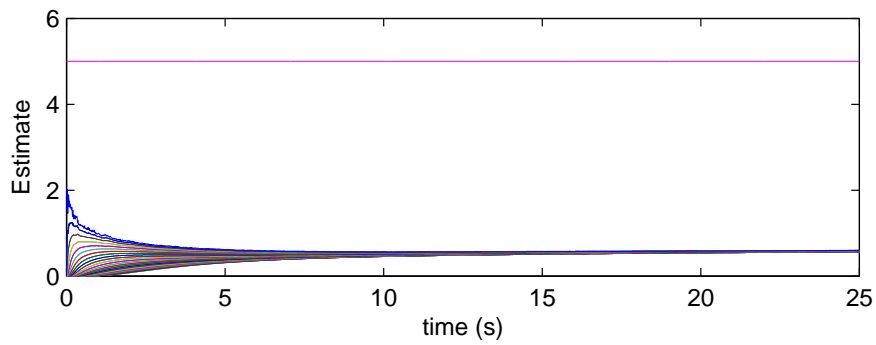
*Пример 2.* Посматрајмо проблем праћења једне мете која врши маневре унутар датог квадратног простора, описан у [37]. Динамика мете је моделована као део по део линеарни систем са два различита модалитета понашања. Када није близу границе квадрата мета се креће дуж линеарне путање, док се меко одбија под дејством силе ортогоналне ивици квадрата када се приближи граници [37]. Линеарни модел кретања мете чија су позиција  $q \in \mathcal{R}^2$  и брзина  $p \in \mathcal{R}^2$  представљен је једначином (4.1), са  $x(t) = (q_1(t), p_1(t), q_2(t), p_2(t))^T$  и

$$F = I_2 \otimes \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

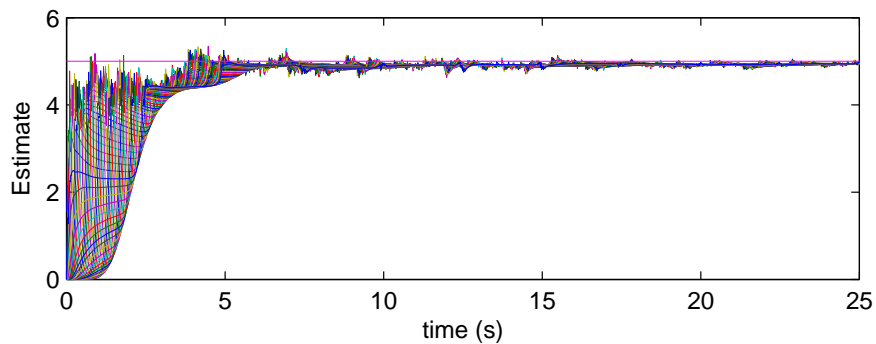
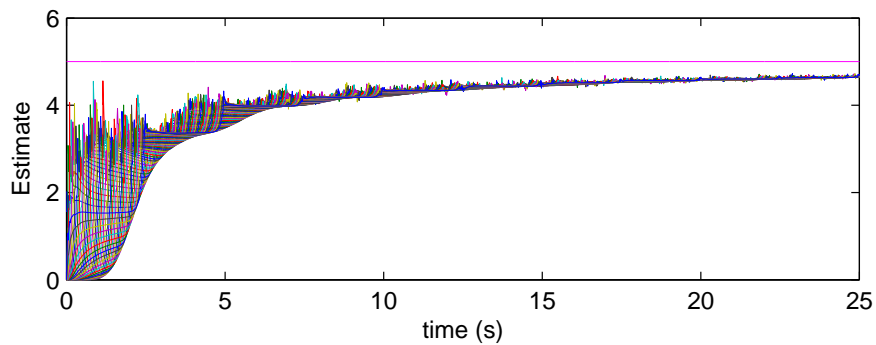
где је  $\epsilon$  периода одабирања,  $I_2$  је  $2 \times 2$  јединична матрица а симбол  $\otimes$  означава Кронекеров производ.

Сензори који мере позицију мете ( $n = 100$ ) су униформно распоређени унутар квадрата ивице  $l = 90$ , са растојањем између суседних сензора  $d = 10$ ; домет мерења је  $r_s = 1.5d$  а комуникацијски радијус  $r_c = 3d + 2$ . Као резултат, минимално 4 а максимално 9 сензора (и даље мање од 10%) опсервирају позицију мете. Такође је усвојено да је у (4.1) и (4.2)  $G = I_2 \otimes (\epsilon^2 \sigma_0 / 2, \epsilon \sigma_0)^T$ ,  $Q = \sigma_e^2 I_2$ ,  $R_i = \sigma_v^2 I_2$ , где је  $\epsilon = 0.04$ ,  $\sigma_0 = \sigma_e = \sigma_v = 3$ , као и  $x_0 = (-5, 7, 0, 20)^T$ ,  $P_i(1|0) = 10\sigma_0^2 I_4$ ,  $\xi_i(1|0) = (0, 0, 0, 0)^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ . После прелиминарне анализе изабране вредности параметара у (4.10) су  $k_1 = k_2 = 0.1$ ,  $c_{ij}^x(0) = 0.1$  и  $c_{ij}^x(\infty) = 1$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Слика 4.4 даје снимке естимација позиције од стране свих чворова, заједно



(a) Непроменљив активан чвор



(b) Променљив активан чвор

Слика 4.3: Естимације параметра свих чворова Алгоритма А без и са адаптацијом (горњи и доњи делови слика, респективно).

са трајекторијом мете. Веће грешке у естимацији могу се уочити само током маневара, што је и очекивано с обзиром на то да је шема естимације заснована на линеарном моделу. Слика 4.5 илуструје улогу предложене децентрализоване адаптивне шеме. Дати су снимци, синхронизовани са снимцима са Сликe 4.4, тежинских излазних степена (*weighted out-degrees*) чворова који одражавају релативан значај одређеног чвора, дефинисаних као

$$w_i^{out}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i^+} c_{ji}(t),$$

где је  $i$  индекс чвора а  $\mathcal{N}_i^+$  његов излазни комшилук (видети претходно поглавље). Као што се може видети, просторна расподела  $w_i^{out}(t)$  адаптивно еволуира у времену, блиско пратећи трајекторију мете. Колективна перформанса сензорске мреже у праћењу је приказана на Слици 4.6, где су приказане естимације позиције у времену, од стране свих чворова. Може се видети да су чворови постигли приближан консензус око естимација.

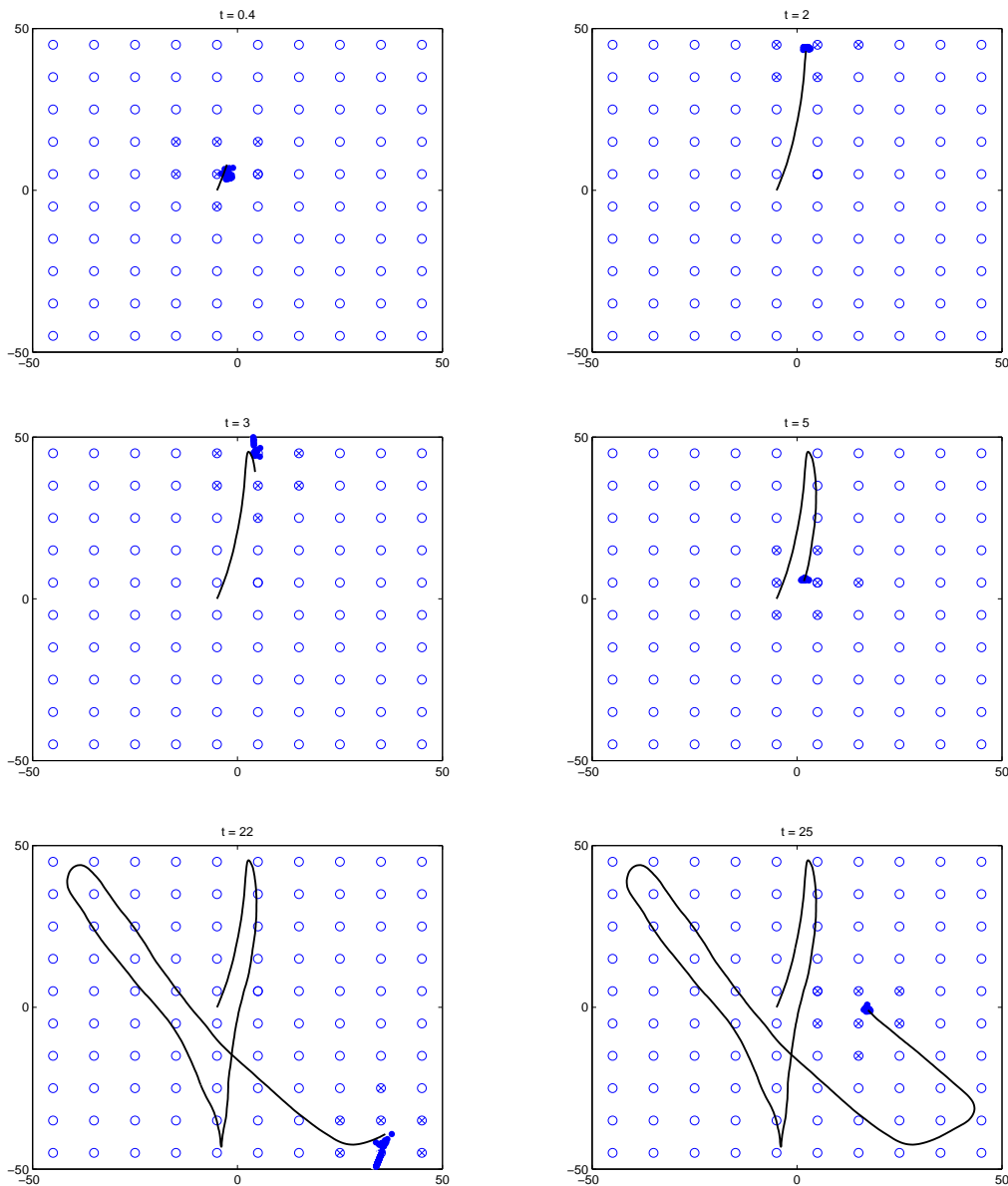
Предложени адаптивни алгоритам пореди се са Алгоритмом Б, у коме је  $\epsilon$  изабрано према [37], близу границе стабилности; на Слици 4.7(а) су приказана средња растојања по чвору између стварне и естимиране позиције. Растојања по чвору су усредњена на  $n_r = 250$  итерација, свака је карактерисана са другачијим почетним условима

$$x_0^i = (0, 20 \cos(2\pi i/n_r), 0, 20 \sin(2\pi i/n_r))^T,$$

$i = 1, \dots, n_r$ . У случају константних консензус тежина, где сваки ред матрице  $C$  има једнаке ненулте елементе, Алгоритам А има лоше перформансе с обзиром на то да усредњавање које мрежа врши имплицира велику еквивалентну временску константу естимационе процедуре. Може се видети да увођење предложене адаптивне шеме резултује у изванредном побољшању перформанси. Такође, предложена адаптивна шема чини да предложени алгоритам показује бољу ефикасност од Алгоритма Б.

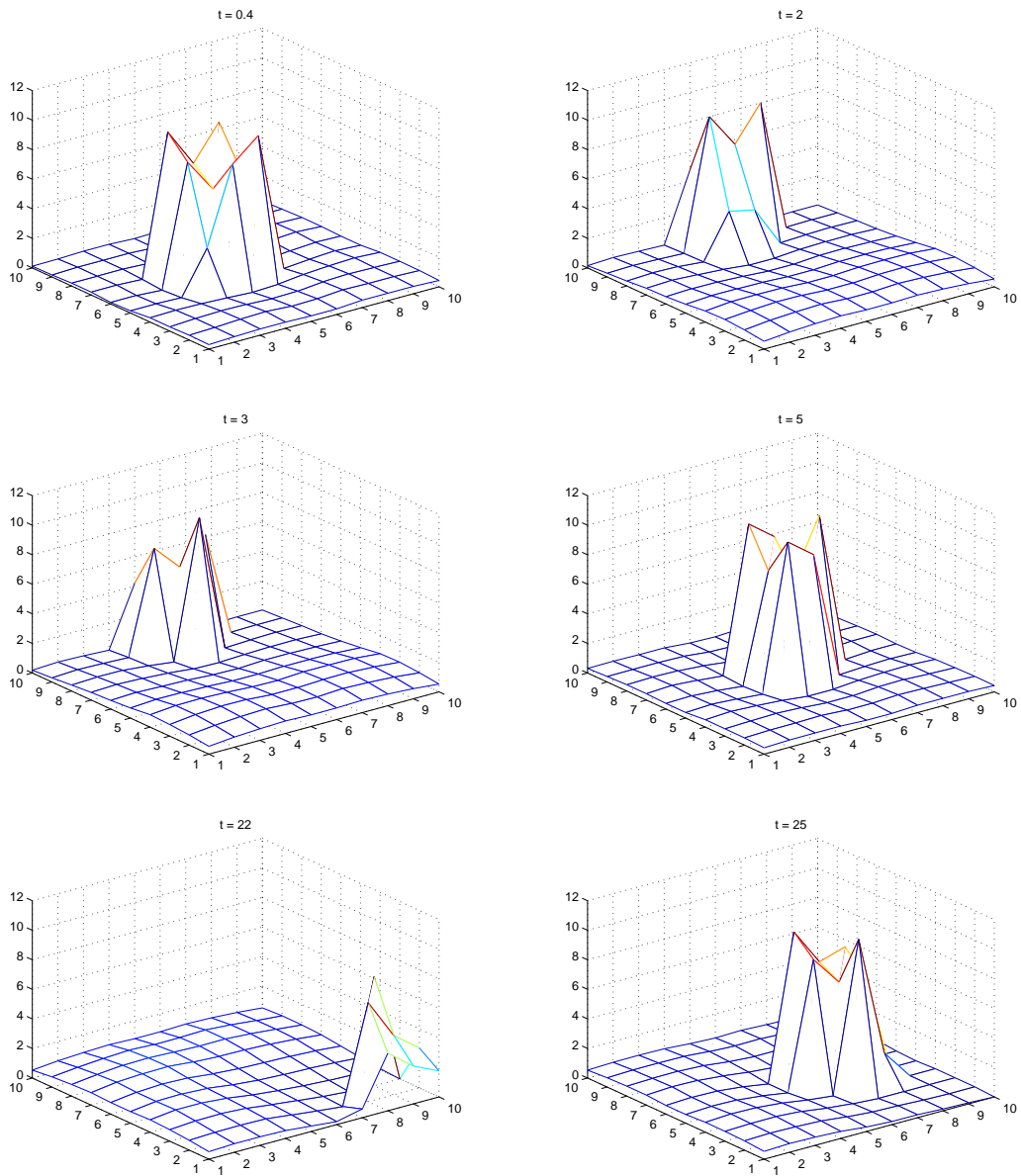
Коначно, неслагање између чворова, естимирано као варијанса естимација позиције мете, је дато на Слици 4.8(а) за случај предложеног адаптивног алгоритма и Алгоритма Б. Предложени алгоритам је нешто бољи од Алгоритма Б.

Робусност предложеног алгоритма у односу на застој у комуникацијама (*communication dropouts*) може се теоретски проучавати коришћењем методологије из [53]. Јасно је да додавање адаптивне процедуре не може да утиче на



Слика 4.4: Снимци естимација позиције свих чворова (тачке), са позицијама чворова (кружићи), чворовима који опсервирају мету ( $\otimes$ ) и путањом мете.

робусност шеме у овом погледу, имајући у виду да застоји у комуникацијама могу само да успоре цео естимациони процес. Сlike 4.7(б) и 4.8(б) служе као доказ ове тврдње: за вероватноћу застоја у комуникацијама од 0.5 јавља се само мало повећање грешке естимације, као и мало повећање неслагања између чворова. Предложени алгоритам показује и даље боље перформансе од Алгоритма Б, чије је погоршање у перформансама веће, услед већих комуникацијских захтева.

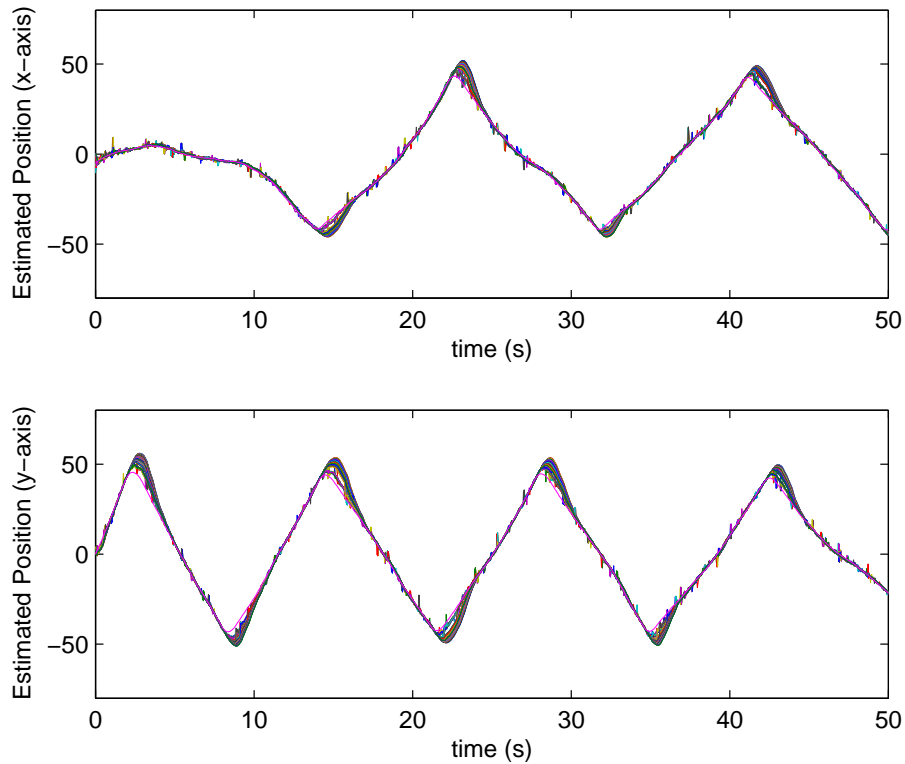


Слика 4.5: Тежински излазни степени (*weighted out-degrees*) чворова.

## 4.4 Закључак

У овој глави је разматран проблем дистрибуираног децентрализованог праћења покретних циљева помоћу сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора и предложен је нови једноставан и ефикасан алгоритам заснован на консензусу са децентрализованом адаптацијом, настављајући се на основни алгоритам из [53]. Предложени алгоритам претпоставља размену бинарних информација између чворова о томе да ли чворови опсервирају мету, заједно са информацијама о естимацијама стања. Додатне бинарне информације се користе у ди-

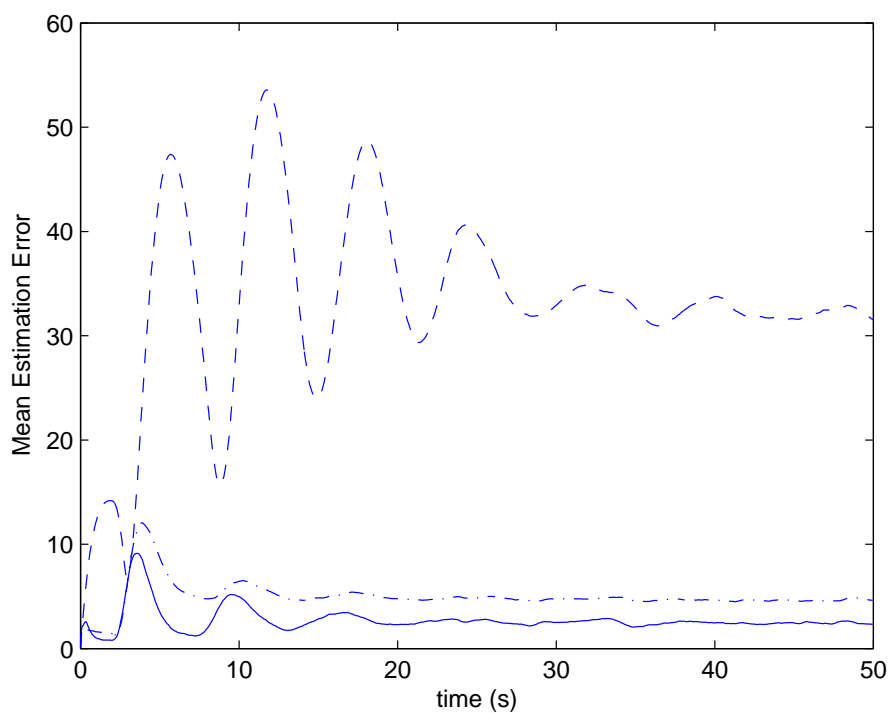




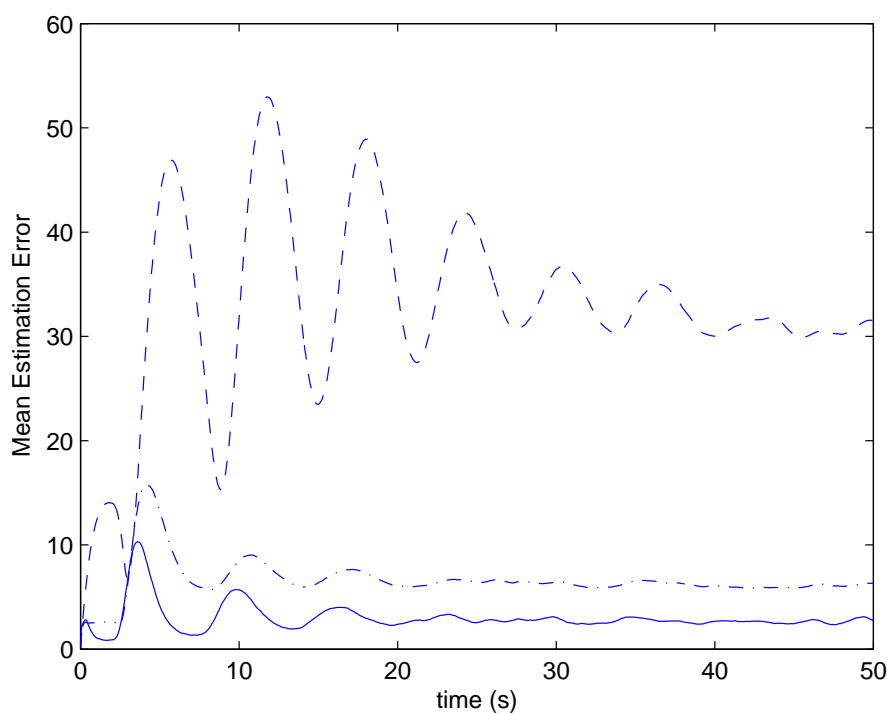
Слика 4.6: Естимације позиције мете свих чворова.

намичкој адаптацији консензус тежина како би се релативно повећале тежине везане за чворове који опсервирају мету. Стабилност алгоритма је теоретски показана коришћењем специфичног сценарија. Перформансе су упоређене у симулацијама са КСФ алгоритмом из [33, 37], који претпоставља размену локалних мерења између чворова, заједно са естимацијама стања. Показано је да предложени алгоритам обезбеђује не само мању средњу квадратну грешку естимације од КСФ алгоритма, већ и мање неслагање између чворова.

Даљи развој може бити усмерен ка укључивању додатних адаптивних шема за детекцију маневара мете. Дистрибуирана шема асоцијације података такође се може применити у циљу решавања проблема праћења више покретних циљева, слично као у [46].

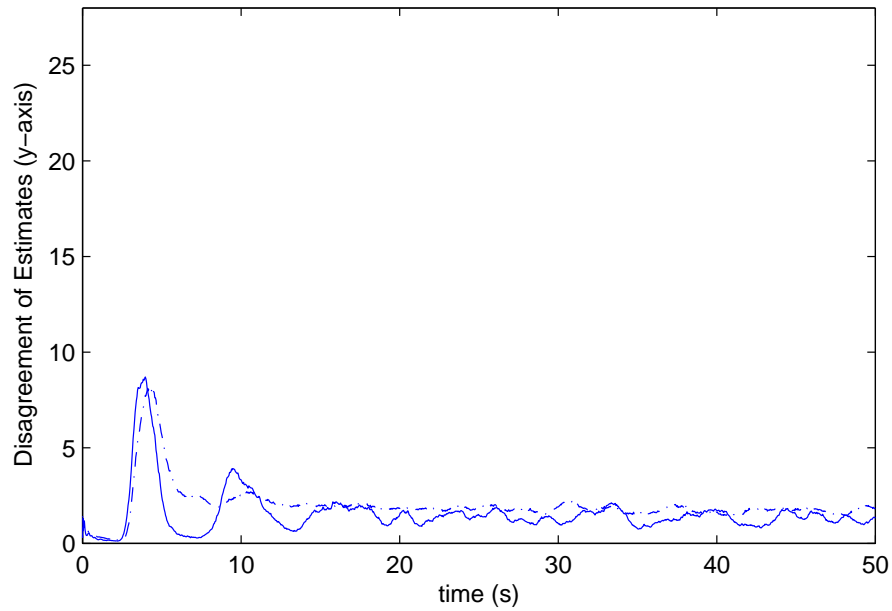


(a) Без застоја у комуникацијама

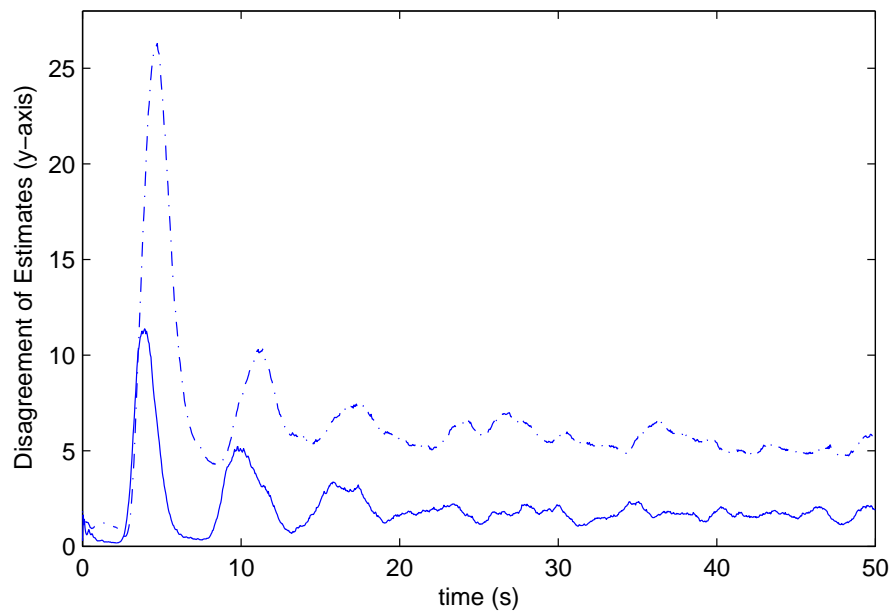


(b) 50% застоја у комуникацијама

Слика 4.7: Средње растојање по чвору између стварне и естимиране позиције: Алгоритам А са и без адаптивне консензус шеме (пуне и испрекидане линије, респективно), Алгоритам Б (тачка-црта линије).



(a) Без застоја у комуникацијама



(b) 50% застоја у комуникацијама

Слика 4.8: Варијанса естимација: Алгоритам А са адаптивном консензус шемом (пуне линије), Алгоритам Б (тачка-црта линије).

# Глава 5

## Закључак

Преглед резултата ове дисертације је већ на неколико места у тексту био предмет разматрања (завршна поглавља претходних глава). Уместо додатног прегледа, на овом месту ће бити размотрене главне концептуалне линије које повезују различите аспекте приказаног истраживања, као и смернице за даље истраживање које се отварају и намећу.

### 5.1 Контекст дисертације

Овај рад представља логичан наставак постигнутог напретка у радовима који се баве децентрализованом естимацијом заснованом на консензусу [54, 53, 55], који сами представљају надоградњу на радове у којима су описани основни принципи и структура проблема децентрализоване естимације [47, 48, 56] и радове који су направили значајне резултате у области дистрибуираних асинхроних итерација у паралелном процесирању и дистрибуираној оптимизацији [4, 57, 58].

Алгоритам децентрализоване естимације заснован на консензусу [54] је примењен у решавању два специфична проблема: надгледању отказа у великим системима и праћењу покретних циљева помоћу сензорских мрежа са ограниченим дометом сензора. У надгледању отказа је било потребно наћи одговарајући робусни естиматор [15], као и оптималан дизајн консензус шеме чији је предлог дат како би се добило робусно и ефикасно практично решење. Развијена је и стратегија за дистрибуирано одлучивање у случају отказа у преклапајућим деловима система. У проблему праћења покретних циљева је било потребно наћи начин подешавања алгоритма који би решио проблем ограниченог домета сензора. Предложена је нова адаптивна процедура која на погодан начин подешава параметре консензус шеме тако да се добија једноставан и ефикасан

алгоритам.

Принцип паралелног комбиновања динамике консензус шеме са динамиком процеса естимације је искоришћен у предлогу шеме дистрибуиране детекције у промени сигнала, где је уместо динамике естиматора уведена динамика детектора. У ту сврху било је неопходно извести одговарајуће рекурзивне форме где је могуће уметање динамике консензуса. Предлог решења овог проблема је дат за случај непознатог скока у промени параметара који дефинишу посматране сигнале, на основу изведене рекурзивне форме генерализованог количника веродостојности. Особине алгоритма су анализирани преко односа статистика за детекцију које генерише предложени алгоритам и одговарајуће централизоване статистике [7, 8]. Ова егзактна теоретска анализа, доста сложена услед специфичног члана у рекурзивној форми генерализованог количника веродостојности, изведена за општи случај асиметричних консензус матрица, показује карактеристичне особине алгоритма. Поменути анализа можда представља и централни технички допринос дисертације, с обзиром на то да су у контексту детекције до сада у литератури анализирани шеме са симетричним консензус матрицама. Предложени алгоритам [27] представља наставак алгоритма из [51] који претпоставља општу шему са асиметричним консензус матрицама, али је усмерен ка детекцији познатог скока у параметрима који дефинишу сигнал.

## 5.2 Смернице за даље истраживање

Основна идеја у конструкцији дистрибуираног алгоритма за детекцију је покушај да се дође до децентрализованог решења које је довољно близу одговарајућем централизованом решењу проблема. Овај критеријум може се заменити прагматичнијим избором, где би циљ алгоритма био повећање односа сигнал/шум статистика за детекцију (скоро) свих чворова у мрежи. Овакав критеријум, који максимизује такозвани *deflection* (квадрат разлике средње вредности сигнала после и пре промене подељен са варијансом сигнала пре промене) [39], би резултовао у модификованој консензус шеми, где би, слично као у случају праћења покретних циљева из Главе 4, главни циљ био да "добри" агенти повуку оне "лоше" (карактерисани у смислу статистика), истовремено без лошег утицаја "лоших" на "добре", што се природно дешава у консензус шемама усмереним ка усредњавању.

Предлог решења проблема децентрализованог надгледања отказа у великим системима, с обзиром на чињеницу да постоји јако мали број радова у литератури који ефикасно решавају овај проблем, представља нову линију коју би

требало даље истраживати. Посебно, треба истражити различите комбинације поставки отказа који се желе и не желе детектовати, са импликацијом на дизајн локалних естиматора и консензус шеме - откази представљају физичке феномене у систему који постоје независно од алгорита али се њиховим погодним мапирањем и додељивањем различитим агентима могу добити вероватно још боље перформансе алгорита.

Даљи развој предложеног алгорита за дистрибуирано праћење покретних циљева може бити усмерен ка практичном побољшању и увођењу компликованије динамике локалних естиматора која би могла боље да моделује маневре, као и ка директној надградњи помоћу дистрибуиране шеме асоцијације која би омогућила ефикасно праћење више покретних циљева.

Такође, примене консензус алгорита у решавању проблема дистрибуиране калибрације и синхронизације у сензорским мрежама, као и у дистрибуираној стохастичкој апроксимацији везаној за решавање широког спектра оптимизационих проблема помоћу сензорских мрежа, представљају веома привлачне задатке за даље истраживање.

# Литература

- [1] D. Bajović, D. Jakovetić, J. Xavier, B. Sinopoli, and J. M. F. Moura. Distributed detection via gaussian running consensus: large deviations asymptotic analysis. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2011.
- [2] Y. Bar-Shalom and X. Li. *Multitarget-multisensor tracking: Principles and techniques*. YBS Publishing, 1995.
- [3] M. Basseville and L. V. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1993.
- [4] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. Prentice Hall, 1989.
- [5] S. S. Blackman. *Multiple Target Tracking with Radar Applications*. Artech House, Dedham, MA, 1986.
- [6] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah. Randomized gossip algorithms. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 52:2508–2530, 2006.
- [7] P. Braca, S. Marano, and V. Matta. Enforcing consensus while monitoring the environment in wireless sensor networks. *IEEE Trans. Signal Processing*, 56:3375–3380, 2008.
- [8] P. Braca, S. Marano, V. Matta, and P. Willett. Asymptotic optimality of running consensus in testing binary hypotheses. *IEEE Trans. Signal Processing*, 58:814–825, 2010.
- [9] P. Braca, S. Marano, V. Matta, and P. Willett. Consensus-based page’s test in sensor networks. *Signal Processing*, 91:919–930, 2011.
- [10] F. S. Cattivelli and A. H. Sayed. Diffusion strategies for distributed Kalman filtering and smoothing. *IEEE Trans. Aut. Control*, 55:2069–2084, 2010.

- [11] F. S. Cattivelli and A. H. Sayed. Distributed detection over adaptive networks using diffusion adaptation. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 59:1917–1932, 2011.
- [12] J. F. Chamberland and V. Veeravalli. Decentralized detection in sensor networks. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 50:407–416, 2003.
- [13] K. C. Chang, C. Y. Chong, and Y. Bar-Shalom. Distributed estimation in distributed sensor networks. In S. G. Tzafestas and K. Watanabe, editors, *Large-scale stochastic systems detection, estimation, stability and control*. Marcel Dekker, 1992.
- [14] H. F. Chen. *Stochastic approximation and its applications*. Kluwer Academic, Dordrecht, the Netherlands, 2002.
- [15] R. H. Chen, D. L. Mingori, and J. L. Speyer. Optimal stochastic fault detection filter. *Automatica*, pages 377–390, 2003.
- [16] W. H. Chung and J. L. Speyer. A game theoretic fault detection filter. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43:145–161, 2005.
- [17] W. H. Chung, J. L. Speyer, and R. Chen. A decentralized fault detection filter. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, 123:237–248, 2001.
- [18] S. X. Ding. *Model Based Fault Diagnosis Techniques - Design Schemes, Algorithms and Tools*. Springer Verlag, 2008.
- [19] R. K. Douglas, J. L. Speyer, D. L. Mingori, R. H. Chen, D. P. Maladi, and W. H. Chung. Fault detection and identification with application to advanced vehicle control: Final report 96-25. Technical report, California PATH, 1996.
- [20] A. Fax and R. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 49:1465–1476, 2004.
- [21] R. M. G. Ferrari, T. Parisini, and M. L. Polycarpou. Distributed fault diagnosis with overlapping decompositions and consensus filters. In *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 2007.
- [22] E. Franco, R. Olfati-Saber, T. Parisini, and M. M. Polycarpou. Distributed fault diagnosis using sensor networks and consensus based filters. In *Proc. 45th IEEE CDC Conf.*, 2006.
- [23] R. A. Horn and C. A. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1985.



- [24] N. Ilić, M. Stanković, and S. Stanković. Consensus based overlapping decentralized observer for fault detection and isolation. In *Proc. Melecon 2010 Conf.*, 2010.
- [25] N. Ilić and S. S. Stanković. Communication gains design in a consensus based distributed change detection algorithm. In *Proc. 8th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, 2010.
- [26] N. Ilić, S. S. Stanković, and M. S. Stanković. Consensus based distributed tracking in sensor networks with limited sensing range. In *Proc. 55th ETRAN Conference*, 2011.
- [27] N. Ilić, S. S. Stanković, M. S. Stanković, and K. H. Johansson. Consensus based distributed change detection using generalized likelihood ratio methodology. *Signal Process.*, 92(7):1715–1728, 2012.
- [28] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 48:988–1001, 2003.
- [29] T. L. Lai. Sequential multiple hypothesis testing and efficient fault detection-isolation in stochastic systems. Technical report, Stanford University, 1998.
- [30] Z. Lin, B. Francis, and M. Maggiore. Necessary and sufficient conditions for formation control of unicycles. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 50:121–127, 2005.
- [31] L. Moreau. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 50:169–182, 2005.
- [32] Y. Ohta and D. Siljak. Overlapping block diagonal dominance and existence of Lyapunov functions. *J. Math. Analysis Appl.*, 112.
- [33] R. Olfati-Saber. Distributed Kalman filtering for sensor networks. In *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, pages 5492–5498, 2007.
- [34] R. Olfati-Saber, A. Fax, and R. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95:215–233, 2007.
- [35] R. Olfati-Saber, E. Franco, E. Frazzoli, and J. S. Sharma. Belief consensus and distributed hypothesis testing in sensor networks. In *Proc. Workshop on Emb. Sensing and Control*.

- [36] R. Olfati-Saber and R. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 49:1520–1533, 2004.
- [37] R. Olfati-Saber and N. F. Sandell. Distributed tracking in sensor networks with limited sensing range. In *Proc. American Control Conference*, pages 3157–3162, 2008.
- [38] A. Petitti, D. D. Paola, A. Rizzo, and G. Cicirelli. Distributed target tracking for sensor networks with only local communication. In *Proc. 19th Med. Conf. on Control & Automation*, pages 662–667, 2011.
- [39] B. Picinbono. On deflection as a performance criterion in detection. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 31(3):1072–1081, 1995.
- [40] I. F. Pierce. Matrices with dominating diagonal blocks. *Journ. of Economic Theory*, 9:159–170, 1974.
- [41] B. Rao and H. Durant-Whyte. A decentralized Bayesian algorithm for identification of tracked targets. *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern.*, 23:1683–1698, 1993.
- [42] W. Ren and R. Beard. Consensus seeking in multi-agent systems using dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50:655–661, 2005.
- [43] W. Ren, R. Beard, and T. McLain. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems. In V. Kumar, N. Leonard, and A. Morse, editors, *Cooperative Control*, volume 309 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 171–188. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [44] W. Ren and R. W. Beard. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
- [45] W. Ren, R. W. Beard, and D. B. Kingston. Multi-agent Kalman consensus with relative uncertainty. In *Proc. American Control Conference*, 2005.
- [46] N. F. Sandell and R. Olfati-Saber. Distributed data association for multi-target tracking in sensor networks. In *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, pages 1085–1090, 2008.

- [47] C. W. Sanders, E. C. Tacker, and T. D. Linton. Specific structures for large scale state estimation algorithms having information exchange. *IEEE Trans. Autom. Control*, 23:255–260, 1978.
- [48] D. D. Šiljak. *Decentralized Control of Complex Systems*. Academic Press, New York, 1991.
- [49] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poola, M. Jordan, and S. S. Sastry. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49:1453–1464, 2004.
- [50] A. Speranzon, C. Fischione, and K. H. Johansson. Distributed and collaborative estimation over wireless sensor networks. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 2006.
- [51] S. S. Stanković, N. Ilić, M. S. Stanković, and K. H. Johansson. Distributed change detection based on a consensus algorithm. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 59:5686–5697, 2011.
- [52] S. S. Stanković, N. Ilić, Ž. Djurović, M. S. Stanković, and K. H. Johansson. Consensus based overlapping decentralized fault detection and isolation. In *Proc. Conf. on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, pages 570–575, 2010.
- [53] S. S. Stanković, M. S. Stanković, and D. M. Stipanović. Consensus based overlapping decentralized estimation with missing observations and communication faults. *Automatica*, 45:1397–1406, 2009.
- [54] S. S. Stanković, M. S. Stanković, and D. M. Stipanović. Consensus based overlapping decentralized estimator. *IEEE Trans. Autom. Control*, 54:410–415, 2009.
- [55] S. S. Stanković, M. S. Stanković, and D. M. Stipanović. Decentralized parameter estimation by consensus based stochastic approximation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 56:531–543, 2011.
- [56] E. C. Tacker and C. W. Sanders. Decentralized structures for state estimation in large scale systems. *Large Scale Systems*, 40:39–49, 1980.
- [57] J. N. Tsitsiklis. *Problems in Decentralized Decision Making and Computation*. PhD thesis, Dep. Electrical Eng. Comput. Sci., M.I.T., Cambridge, MA, 1984.

- [58] J. N. Tsitsiklis, D. P. Bertsekas, and M. Athans. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31:803–812, 1986.
- [59] P. K. Varshney. *Distributed Detection and Data Fusion*. Springer, New York, 1996.
- [60] R. Vishwanathan and P. Varshney. Distributed detection with multiple sensors: Part i - fundamentals. *Proc. of the IEEE*, 85:54–63, 1997.

## Биографија аутора

Немања Илић је рођен 1984. године у Крушевцу, где је завршио основну школу и гимназију природно-математичког смера. Електротехнички факултет Универзитета у Београду је уписао 2003. године. Основне студије на одсеку за Физичку електронику, смер Биомедицински и еколошки инжењеринг, завршио је 2007. године, са просечном оценом 9.77, као најбољи дипломирани студент на смеру (*Siemens Prize*). Мастер студије на истом смеру је завршио 2008. године, са просечном оценом 9.83. Школске 2008/2009 је уписао докторске студије на студијском подручју Управљање системима и обрада сигнала. Објавио је неколико радова у реномираним иностраним часописима из области обраде сигнала и презентовао радове на више домаћих и иностраних конференција. Области којима се тренутно бави укључују децентрализовану естимацију, детекцију и праћење покретних циљева.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Немања Илић

број индекса 5049/08

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„Алгоритми дистрибуиране детекције и естимације засновани на консензусу”

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Београду, 14.5.2013.

Потпис докторанда

Немања Илић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске  
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Немања Илић

Број индекса 5049/08

Студијски програм Управљање системима и обрада сигнала

Наслов рада „Алгоритми дистрибуиране детекције и естимације  
засновани на консензусу”

Ментор др Срђан Станковић, професор емеритус  
Електротехнички факултет Универзитета у Београду

Потписани/а Немања Илић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 14.5.2013.

**Потпис докторанда**

*Немања Илић*

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Алгоритми дистрибуиране детекције и естимације засновани на консензусу”

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, 14.5.2013.

