

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јована Г. Петровић

**НУМЕРИЧКА ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКА АНАЛИЗА  
КОРИШЋЕЊЕМ МЕТОДА МОМЕНАТА  
СА ИНТЕГРАЦИЈОМ ВИСОКЕ ТАЧНОСТИ**

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Jovana G. Petrović

**NUMERICAL ELECTROMAGNETIC ANALYSIS  
USING METHOD OF MOMENTS  
WITH HIGH-PRECISION INTEGRATION**

Belgrade, 2022

**Ментор:**

др Драган Олћан, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

**Чланови комисије:**

др Милан Илић, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Ненад Цветковић, ванредни професор  
Универзитет у Нишу – Електронски факултет

др Предраг Иваниш, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Антоније Ђорђевић, редовни члан  
Српска академија наука и уметности

др Бранко Колунџија, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Датум одбране \_\_\_\_\_

*Мојој породици и мом разредном*

## Захвалница

Желим да изразим велику захвалност свом ментору, проф. др Драгану Олћану на вишегодишњој посвећености и подршци током истраживања чији су резултати приказани у дисертацији, као и проф. др Антонију Ђорђевићу, који је увек био доступан за плодну дискусију, идеје и корисне сугестије.

На овом месту бих се захвалила свом првом ментору и разредном старешини, мр Александру Сеничићу, уз кога сам направила прве кораке ка науци и који је увек веровао у мене.

Напошетку, ове дисертације не би било без подршке и инспирације коју добијам од моје ћерке Љубице, супруга Владимира, родитеља Горана и Донке и брата Велимира.

## НУМЕРИЧКА ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКА АНАЛИЗА КОРИШЋЕЊЕМ МЕТОДА МОМЕНАТА СА ИНТЕГРАЦИЈОМ ВИСОКЕ ТАЧНОСТИ

### Сажетак:

У оквиру ове докторске дисертације предложено је неколико смена за поништавање сингуларитета подинтегралних функција, који се срећу при нумеричкој електромагнетској анализи методом момената, чиме је омогућена ефикасна нумеричка интеграција високе тачности.

Први део доприноса односи се на нумеричку електромагнетску анализу дводимензионалних структура (теоријски бесконачно дугачких трака). Предложене смене поништавају сингуларитете подинтегралних функција, што је показано и нумеричким експериментима, и теоријски. Захваљујући високој тачности интеграла, целодоменска анализа (са функцијама базиса високог реда) спроведена је на траци ширине 4,000 таласних дужина, чиме су границе целодоменске анализе значајно померене, омогућујући анализу са мањим бројем непознатих и бољом апроксимацијом струја на крајевима траке у поређењу са анализом са функцијама базиса нижег реда. На основу обраде резултата великог броја нумеричких експеримената предложене су апроксимативне формуле за параметре смене и потребан број тачака нумеричке интеграције за постизање високе тачности интеграла у зависности једино од електричне дужине елемента.

У другом делу дисертације смене су проширене на нумеричку електромагнетску анализу ротационо симетричних тродимензионалних структура начињених од металних и диелектричних домена. Било је потребно моделовати ротационо симетричну комору у коју је могуће сместити узорак непознате комплексне пермитивности. Мерењем коефицијента рефлексije коморе са узорком диелектрика на анализатору мрежа и упоређивањем са коефицијентом рефлексije из нумеричког модела издвојени су диелектрични параметри узорака. Претходно је комора коришћена за одређивање пермитивности уз квази-статички нумерички модел на учестаностима до око 1 GHz. Новим моделом је опсег мерења проширен до око 3 GHz, а тачност нумеричког модела је боља од тачности мерења. Тиме је тачност одређивања диелектричних параметара ограничена мерном несигурношћу.

**Кључне речи:** метод момената, подешавање у тачкама, Галеркинов метод, функције базиса високог реда, целодоменске базисне функције, сингуларне функције, интеграција високе тачности, поништавање сингуларитета, ротационо симетричне структуре, издвајање пермитивности и тангенса угла губитака

**Научна област:** Електротехника и рачунарство

**Ужа научна област:** Електромагнетика, антене и микроталаси

# NUMERICAL ELECTROMAGNETIC ANALYSIS USING METHOD OF MOMENTS WITH HIGH-PRECISION INTEGRATION

## Abstract

In order to obtain high-precision computationally efficiently, several singularity cancelation transformations for integrals with singularities encountered in numerical electromagnetic analysis are proposed in this dissertation.

The first part of the dissertation refers to the numerical electromagnetic analysis of two-dimensional structures (infinitely long strips). The proposed transformations cancel the singularities of the integrand, which has been demonstrated by numerical experiments and theoretically. Owing to the high-precision integrals, a strip 4,000 wavelengths wide strip was analyzed with the entire-domain analysis (and higher order basis functions), enabling analysis with fewer unknowns and better current approximation at the strip ends than the analysis with low-order basis functions. Approximate formulas for transformation parameters and the number of required integration points for high-precision integration are proposed by processing results from a large number of numerical experiments. These formulas depend only on the electrical length of the element.

In the second part of the dissertation the proposed transformations are extended for the application to rotationally symmetrical three-dimensional structures composed of metallic and dielectric domains. The motivation was to make a full-wave model of the rotationally symmetrical chamber used for the extraction of the complex permittivity. The dielectric parameters of the samples were extracted by measuring the reflection coefficient of the chamber with the dielectric sample using a network analyzer and comparing it with the reflection coefficient obtained from the numerical model. Previously, the chamber was used to determine the permittivity with a quasi-static numerical model at frequencies up to about 1 GHz. With the new model, the measurement range has been extended to about 3 GHz, while the accuracy of the numerical model is better than the accuracy of the measurements. Therefore, the accuracy of the extracted permittivity depends primarily on the measurement uncertainty.

**Key words:** method of moments, Galerkin technique, higher-order basis functions, entire-domain basis functions, singular functions, high-precision integration, singularity cancelation, body of revolution, permittivity extraction, loss tangent extraction.

**Scientific field:** Electrical and computer engineering

**Scientific subfield:** Electromagnetics, antennas and microwaves

# САДРЖАЈ

1. Увод .....	1
1.1. ПОСТАВКА ПРОБЛЕМА .....	1
1.2. ДОПРИНОСИ ИСТРАЖИВАЊА .....	5
1.3. СТРУКТУРА ДИСЕРТАЦИЈЕ .....	8
2. МЕТОД МОМЕНАТА .....	10
2.1. МАКСВЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ .....	11
2.2. МАКСВЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У КОМПЛЕКСНОМ ОБЛИКУ .....	12
2.3. ЕЛЕКТРИЧНЕ И МАГНЕТСКЕ СТРУЈЕ И НАЕЛЕКТРИСАЊА .....	14
2.4. МАКСВЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У КОМПЛЕКСНОМ ОБЛИКУ СА ЕЛЕКТРИЧНИМ И МАГНЕТСКИМ ИЗВОРИМА .....	15
2.5. ПОТЕНЦИЈАЛИ .....	16
2.6. ТЕОРЕМА ПОВРШИНСКЕ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ.....	18
2.7. АПРОКСИМАЦИЈА СТРУЈА.....	19
2.8. ПОСТАВЉАЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ НА ОСНОВУ ГРАНИЧНОГ УСЛОВА ЗА ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ КОМПОНЕНТЕ ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА.....	19
2.9. ПОСТАВЉАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА НА ОСНОВУ ГРАНИЧНОГ УСЛОВА ЗА ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ КОМПОНЕНТЕ ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА.....	20
2.10. ПОСТАВЉАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА КАДА ПОСТОЈЕ И ЕЛЕКТРИЧНЕ И МАГНЕТСКЕ СТРУЈЕ .....	21
3. ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРОБЛЕМИ .....	24
3.1. ГЕОМЕТРИЈА АНАЛИЗИРАНИХ СТРУКТУРА .....	25
3.2. ПОСТАВКА НУМЕРИЧКОГ ЕКСПЕРИМЕНТА .....	26
3.3. РАСЕЈАНО ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ.....	26
3.4. ИЗБОР БАЗИСНИХ И ТЕЖИНСКИХ ФУНКЦИЈА .....	28
3.5. ТИПОВИ СИНГУЛАРИТЕТА .....	31
3.6. ОСНОВНА ИДЕЈА ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА .....	32
3.7. СМЕНЕ КОЈЕ ПОНИШТАВАЈУ СИНГУЛАРИТЕТЕ .....	32
3.7.1. СМЕНА СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ .....	33
3.7.2. СМЕНА СА СТЕПЕНИМ ЧЛАНОМ .....	34
3.7.3. СМЕНА СА СИНУСОМ.....	34
3.7.4. СМЕНА СА СИНУС ХИПЕРБОЛИЧКИМ .....	35
3.7.5. СМЕНА СА ТАНГЕНСОМ.....	35
3.7.6. СМЕНА СА ТАНГЕНС ХИПЕРБОЛИЧКИМ.....	35
3.8. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗИ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА .....	36
3.8.1. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗ ПОНИШТАВАЊА ЛОГАРИТАМСКОГ СИНГУЛАРИТЕТА СМЕНОМ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ .....	36
3.8.2. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА ОБЛИКА $1/R$ СМЕНОМ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ .....	38
3.8.3. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА .....	40
3.9. ПРОЦЕНА ГРЕШКЕ И БРОЈА ТАЧНИХ ЦИФРА .....	42
3.10. ОПТИМАЛАН ИЗБОР ПАРАМЕТАРА СМЕНА .....	43
3.10.1. ОПТИМАЛАН ИЗБОР ПАРАМЕТАРА СМЕНЕ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ.....	44
3.10.2. ОПТИМАЛАН ИЗБОР ПАРАМЕТАРА СМЕНА А-Е .....	47



3.11.	Додатна анализа смене са експоненцијалним чланом .....	50
3.11.1.	Процена потребног броја интеграционих тачака на основу експерименталних резултата .....	50
3.11.2.	Теоријска процена броја интеграционих тачака после смене са експоненцијалним чланом .....	51
3.11.3.	Оптималан распоред тачака и тежина у нумеричкој интеграцији после смене са експоненцијалним чланом .....	53
3.11.4.	Смена сумом полинома са оптимално изабраним коефицијентима .....	56
3.12.	Аутоматска процедура за интеграцију високе тачности .....	59
3.12.1.	Оптималан избор параметара смене .....	60
3.12.2.	Апроксимација параметара смене .....	61
3.12.3.	Апроксимација броја интеграционих тачака .....	62
3.12.4.	Верификација аутоматске процедуре за интеграцију високе тачности ..	63
3.12.5.	Утицај нумеричког шума у Гаус-Лежандровој нумеричкој интеграцији	64
3.13.	Густина површинских струја на тракама .....	65
3.13.1.	Равне и закривљене траке ширине до 400 таласних дужина .....	65
3.13.2.	Равне и закривљене траке ширине до 4000 таласних дужина .....	68
3.13.3.	Траке произвољних попречних пресека .....	71
3.14.	Избор базисних функција .....	75
4.	Ротационо симетричне метало-диелектричне структуре .....	79
4.1.	Мотивација за нумеричку електромагнетску анализу ротационо симетричних структура .....	79
4.2.	Геометрија анализираних структура .....	80
4.3.	Побуда: ТЕМ прстен магнетских струја .....	81
4.4.	Апроксимације струја и наелектрисања на ротационо симетричним структурама .....	83
4.5.	Постављање система једначина код ротационо симетричних структура .....	84
4.6.	Смена за интеграцију високе тачности .....	87
4.6.1.	Конвергенција прве две интеграције .....	93
4.6.2.	Галеркинова интеграција .....	96
4.7.	Хардверска поставка експеримента .....	98
4.8.	Нумерички модел коморе .....	100
4.8.1.	Конвергенција коефицијента рефлексije .....	102
4.8.2.	Процена тачности коефицијента рефлексije: поређење са аналитичким решењем .....	103
4.8.3.	Утицај варијација релативне пермитивности узорка на коефицијент рефлексije .....	106
4.9.	Мерење релативне пермитивности материјала .....	107
5.	Закључак .....	111
	Биографија аутора .....	122

# 1. УВОД

Развој савремене технике, а посебно антена, микроталасне технике, радарске технике, као и електронике, тесно је везан са развојем нумеричке електромагнетике (енглески: *computational electromagnetics*). Електромагнетски проблем потпуно је описан системом од четири интегралне (или диференцијалне) векторске једначине у којима фигуришу расподеле струја и наелектрисања, односно електрично и магнетско поље [1]–[3], уз конститутивне једначине које описују средине у којој постоји електромагнетско поље. Такав систем назива се и систем Максвелових једначина. Иако на основу теореме о јединствености решења електромагнетског проблема [1]–[3] постоји јединствено решење система Максвелових једначина постављеног за конкретан електромагнетски проблем, то решење није увек лако наћи. Из тог разлога су за неке класе проблема (на пример на нижим радним учестаностима) уведене апроксимације које смањују рачунску комплексност система и омогућавају лакше и брже добијање решења, а које је са инжењерске тачке гледишта прихватљиво по питању тачности.

Ипак, како се техника развија, а посебно са порастом радне учестаности уређаја, анализе које су засноване на апроксимацијама више нису довољне. Због тога је потребно спровести максимално могуће тачну електромагнетску анализу, односно директно решавање система Максвелових једначина. Аналитичка решења постоје за неке електромагнетске проблеме, најчешће за оне са високим степеном симетрије, али за већину практичних проблема аналитичка решења нису позната, па је једино могуће наћи нумеричко решење. За потребе нумеричког решавања система Максвелових једначина развијени су нумерички методи. Једна од најпознатијих подела је на метод момената (енглески: *method of moments*, скраћено: МоМ) [4]–[7], метод коначних елемената (енглески: *finite element method*, скраћено: FEM) [8]–[11] и метод коначних разлика у временском домену (енглески: *finite difference time domain*, скраћено: FDTD) [6], [12].

Иако се деценијама користе, сваки од метода се и даље развија и унапређује. У овој докторској дисертацији неке класе електромагнетских проблема представљених у наставку, значајних и за теорију и праксу, биће решене методом момената. Сам метод је у овој дисертацији унапређен тако да је омогућена врло висока тачност (блиска машинској тачности рачунара који користе 64 бита за запис бројева) нумеричких резултата.

У наставку овог поглавља биће најпре описани електромагнетски проблеми којима ћемо се бавити, а затим ће укратко бити истакнути главни доприноси дисертације. На крају поглавља дата је и структура дисертације.

## 1.1. ПОСТАВКА ПРОБЛЕМА

Метод момената је у општем случају намењен за нумеричко решавање система интегралних једначина, тј. у нашем случају линеарних, део-по-део хомогених

електромагнетских проблема описаних Максвеловим једначинама. Структуре које се анализирају теоријски могу бити са променом електромагнетског поља у једној, две или три димензије простора. Фокус ове дисертације биће на проблемима код којих се електромагнетско поље мења у две димензије, а геометрија разматраних структура је дводимензионална или ротационо симетрична.

Ако су познате расподеле извора поља, тј. расподеле струја и наелектрисања, електромагнетско поље може се израчунати коришћењем одговарајућих линеарних оператора [1]–[3], тј. познати су изрази електромагнетског поља у хомогеној средини у функцији од расподеле струја и наелектрисања. На основу теореме површинске еквиваленције са једне стране и теореме јединствености решења електромагнетског проблема са друге [1]–[3], изједначавањем тангенцијалних компоненти електромагнетског поља на границама средина могуће је поставити интегралне једначине у којима су непознате функције расподела извора поља, тј. расподела густина струја и густина наелектрисања [4], [7]. Уколико је домен непознатих функција расподеле површ, поменута формулација методе момената назива се још и систем површинских интегралних једначина (енглески: *surface integral equations*, скраћено: *SIE*).

Методом момената постављене интегралне једначине се апроксимативно решавају на следећи начин. Најпре се претпоставе апроксимације расподела струја (и наелектрисања), најчешће као линеарна комбинација познатих функција базиса (енглески: *basis functions*) са непознатим коефицијентима. Увођењем у интегралне једначине, а затим и поступком који се назива тестирањем тежинским функцијама, добија се систем линеарних једначина са непознатим коефицијентима из развоја струја.

Функције базиса су унапред изабране функције у апроксимацији расподела струја (и наелектрисања). Оне могу бити полиноми нултог реда, тј. константе (енглески: *pulse basis functions*) или вишег реда (енглески: *higher-order basis functions*). За функције базиса вишег реда најчешће се користе ортогонални полиноми [4], [7], [13]. При томе, што је структура која се анализира електрички већа, то је потребан већи број непознатих коефицијената за апроксимацију струја (и наелектрисања), јер се расподела струја све сложеније мења. За функције базиса вишег реда, минималан број непознатих коефицијената по таласној дужини је између три и четири [7], што је утврђено нумеричким експериментима. Структура која се анализира може бити посматрана као јединствена или подељена на више мањих структура (елемената). Ако је домен базисних функција цела структура, функције базиса називају се целодоменске (енглески: *entire-domain basis functions*). Када је структура подељена на више мањих елемената, домен функције базиса може бити искључиво један елемент или, пак, истовремено више њих. Избор функција базиса, а тиме и њиховог домена, игра важну улогу у брзини конвергенције резултата електромагнетске анализе методом момената [7], а што ће бити показано и у овој дисертацији. Наиме, коришћење целодоменске анализе са функцијама базиса вишег реда има бржу конвергенцију електромагнетских резултата у односу на случај када се користе функције базиса нултог реда са истим бројем непознатих коефицијената. Додатно, анализа функцијама базиса вишег реда може боље да апроксимира сингуларна понашања расподела струја (и наелектрисања) на крајевима структуре. Из наведених разлога у проблемима којима се бавимо у овој дисертацији биће коришћене функције базиса вишег реда за апроксимацију струја (и наелектрисања).

Само тестирање подразумева множење интегралне једначине тест функцијом, а затим и интеграцију по домену тест функције. Интегралне једначине тестирају се онолико пута колико има непознатих коефицијената развоја, односно са онолико тест функција колико има непознатих у интегралним једначинама [7]. Две реализације тестирања интегралних једначина тежинским функцијама су коришћене у овој дисертацији: подешавање у тачкама и Галеркиново тестирање. У првом случају су тежинске функције којима се интегралне једначине тестирају Диракове (делта) функције, а у другом случају то су базисне функције из претпостављене апроксимације. На основу особина делта функција, интеграција функције која је помножена делта функцијом своди се на рачунање вредности те функције у тачки у

којој је делта функција различита од нуле. Отуда се ово тестирање назива подешавањем у тачкама, а суштински представља рачунање тангенцијалних компоненти поља у унапред одређеним тачкама. У случају тестирања базисном функцијом (Галеркиново тестирање) потребно је решити још један додатни интеграл (који може бити било линијски, било површински, зависно од домена тест функције). Отуда следи да се интегралне једначине могу свести на систем линеарних једначина тестирањем тежинским функцијама, при чему је за формирање матрице система потребно израчунати постављене интеграле. То је изазован задатак с обзиром на то да су подинтегралне функције сингуларне (неодређене за неке вредности аргумената), односно квазисингуларне (имају веома велике вредности за неке вредности аргумената). Напоменимо да матрични елементи који се добијају интеграцијом морају да имају коначне вредности да би систем имао физички смислено решење. Према томе, ако је  $R$  растојање између тачке у којој се рачуна поље и тачке извора поља, подинтегралне функције имају сингуларитете различитих облика у зависности од електромагнетског проблема који се анализира. Када је у питању електромагнетска анализа 3-D структура, сингуларитети су облика  $1/R$  и  $1/R^2$  [4]. Код електромагнетске анализе 2-D структура сингуларитети који се срећу у језгрима интеграла су сингуларитети Ханкелове функције нултог реда и друге врсте,  $H_0^{(2)}(R)$ , односно првог реда и друге врсте,  $H_1^{(2)}(R)$  [4]. Из тог разлога се не могу применити потпуно исти поступци за рачунање интеграла у случају анализе 2-D и 3-D структура. Додатно, што је ред функције базиса виши, интеграле је теже израчунати са високом тачношћу [7], [14]. На сложеност израчунавања интеграла утиче и положај тачке рачунања поља, као и облик структуре која се анализира.

Главни циљ ове дисертације управо је рачунање апроксимација расподела извора поља (расподела густина струја и наелектрисања) са високом тачношћу, тј. са што је могуће више тачних цифара на рачунарима који користе 64 бита за запис бројева. За то је потребно израчунати елементе матрице система, односно поменуте интеграле са сингуларним подинтегралним функцијама, са високом тачношћу. Како је метод имплементиран на рачунару са двоструком тачношћу (64 бита за запис бројева), највећи могући број остварених тачних цифара је 15. Додатно, рачунањем поља након што су израчунате струје и наелектрисања, неке грешке могу бити и мање уочљиве. Одатле следи да, ако су апроксимације расподела извора израчунате са високом тачношћу, онда ће и апроксимације електромагнетских поља бити израчунате са бар истом толиком тачношћу.

Када се нека од стандардних нумеричких интеграција примени на интеграцију сингуларних функција, потребно је много тачака интеграције да би решење интеграла постигло жељену тачност, а може се десити и да не конвергира без обзира на број тачака. У литератури постоји много предложених техника за убрзавање конвергенције интеграла са сингуларним подинтегралним функцијама. Два најчешћа приступа су издвајање сингуларитета (енглески: *singularity extraction*) [15]–[33] и поништавање сингуларитета (енглески: *singularity cancelation*) [14], [34]–[50].

Основна идеја издвајања сингуларитета је да се од подинтегралне функције одузме функција која садржи проблематични сингуларитет. Остатак подинтегралне функције интеграл се директном применом нумеричке интеграције, док се интегралу самог сингуларитета приступа посебно, а најчешће аналитички. Коначно решење оригиналног интеграла је збир парцијалних резултата. Аутори у раду [15] предлажу аналитичку формулу за интеграцију статичког језгра Грине функције, тј. сингуларног дела интеграла. Преостала разлика је тада довољно глатка функција да се може израчунати коришћењем Гаус-Лежандрове нумеричке интеграције [22]. У раду [19] такође је предложено аналитичко решење статичког дела Грине функције, па је остатак након одузимања сингуларног дела од подинтегралне функције ограничена функција. Ипак, како су изводи функције и даље неограничени, то нумеричка интеграција разлике остаје рачунски захтевна. Слично, у радовима [16], [20], [23], [24], [33] предложена су аналитичка решења сингуларног дела подинтегралне функције за неке формулације метода момената, али остатак подинтегралне

функције има логаритамски сингуларитет којим је потребно посебно се позабавити. У раду [33] логаритамски сингуларитет је превазиђен и интегрални су израчунати до машинске тачности. Постоје и технике у којима се површински интегрални базисне и тест функције раздвајају на четири линијска интеграла, а које дају нешто боље резултате [28]–[32].

Недостатак свих техника које се баве аналитичким решавањем сингуларитета је посебан третман за различите интегранде, базисне функције, као и облике елемената, тј. самих структура које се анализирају. Резултат интеграције издвајањем сингуларитета зависи од аналитичког облика издвојеног интеграла. Додатно, ако су од подинтегралне функције издвојена прва два члана Тејлоровог развоја, остатак има два континуална извода, па је потребно издвојити много чланова ако је захтевана брзина конвергенције грешке после нумеричке интеграције експоненцијална [17].

Са друге стране, технике поништавања сингуларитета су чисто нумеричке. Ако се уведе погодна смена која тачке око сингуларитета растеже, односно поништава сингуларитет или само помера половине који су близу домена интеграције [51], функција постаје значајно лакша за нумеричку интеграцију неким од стандардних поступака. При томе се смена бира тако да Јакобијан трансформације компензује сингуларно понашање интегранда, па је трансформисана функција ограничена. Другачије посматрано, бира се неуниформни распоред тачака за нумеричку интеграцију такав да минимизира број потребних тачака за унапред дефинисану тачност интеграла. Када је сингуларитет потиснут, експоненцијална конвергенција грешке обезбеђена је коришћењем Гаус-Лежандрове нумеричке интеграције [52]. Велика вредност технике поништавања сингуларитета је у једноставности примене и независности од облика подинтегралне функције. У овој докторској дисертацији ће интегрални са сингуларним подинтегралним функцијама бити решени са високом тачношћу управо коришћењем смена које поништавају сингуларитете.

Први покушаји да се технике поништавања сингуларитета имплементирају у метод момената су [45], [48], а погодне су за интеграцију квазисингуларних функција над троугловима. Техника је успешно проширена на четвороуглове, заједно са функцијама базиса вишег реда [49]. Њен недостатак је зависност од облика троугла по чијој површи се ради интеграција, односно метод постаје неефикасан када су троуглови деформисани. Аутори у [34] предлажу поступак поништавања сингуларитета са брзом конвергенцијом без обзира на облик троугла над којим се интегрални. Овај се рад такође превасходно односи на интеграцију квазисингуларних функција. Трансформација синус хиперболичким за рачунање интеграла квазисингуларних подинтегралних функција над троугловима предложена је у раду [42]. У радовима [37], [38] аутори користе апроксимацију Гринове функције без сингуларитета, која пак одговара Гриновој функцији филтрираној нископропусним филтром. При томе се грешка која је унета апроксимацијом Гринове функције делимично ублажава одговарајућом дискретизацијом домена интеграције. Поништавање сингуларитета облика  $1/R$  у 3-D електромагнетским проблемима, које заједно са Гаус-Лежандровом интеграцијом омогућава машинску тачност интеграла, предложено је у и радовима [42], [44]. Трансформације променљивих у [41] омогућавају рачунање Галеркинових интеграла са врло високом тачношћу у случају равних и кривих 3-D елемената са сингуларитетима облика  $1/R$  и  $1/R^2$ . Погодне трансформације променљивих уведене су за рачунање интеграла до предефинисане тачности, а који се срећу при анализи осно-симетричних металних структура [50]. То је омогућило коришћење максимално ортогоналних базисних функција (енглески: *max-ortho basis functions*) врло високих редова при анализи металних осно-симетричних структура методом момената. Додатно, за интеграцију функција са логаритамским сингуларитетима постоје и табелиране тежине и апсцисе за нумеричку интеграцију [53]–[55], али се оне могу искористити само у случају равних елемената.

Већина поменутих смена односи се на сингуларитете из анализе 3-D структура, па се не могу директно применити на другачије сингуларитете који се срећу при анализи 2-D електромагнетских проблема. С друге стране, радови се углавном баве квазисингуларним

подинтегралним функцијама, док ћемо се у овој дисертацији бавити правим сингуларитетима и рачунањем интеграла до врло високе (скоро машинске) тачности.

У првом делу дисертације биће описана електромагнетска анализа теоријски бесконачно дугачких структура, тј. 2-D структура, где су промене поља у само две димензије. Она је важна у многим теоријским и практичним разматрањима [2]–[4], [7], а најчешће се користи у анализи рефлектованог и трансмитованог таласа [4] и у анализи водова [56]. У фокусу ће бити 2-D расејачи на које наилази раван, униформан талас у трансверзалном магнетском (енглески: *transversal magnetic*, скраћено: ТМ) или у трансверзалном електричном (енглески: *transversal electric*, скраћено: ТЕ) моду<sup>1</sup> [4], [57]. Расејачи су бесконачно танке 2-D структуре (траке), а које су направљене од савршеног проводника (енглески: *perfect electric conductor*, скраћено: ПЕС).

Други део дисертације посвећен је посебној класи 3-D структура које поседују ротациону (осну) симетрију, тј. ротационо симетричним структурама (енглески: *body of revolution*, скраћено: BoR). Ротацијом једне планарне криве (генератрисе) око осе симетрије, које леже у истој равни, настаје BoR структура. Оне су предмет истраживања већ више од пола века [50], [58]–[66]. Значајне због своје улоге у анализи коаксијалних система, радарских система, геофизичких истраживања и др. Мотивација за електромагнетску анализу ротационо симетричних структура у овој дисертацији произашла је из потребе за што тачнијим нумеричким моделом коморе коришћене за мерење релативне комплексне пермитивности немагнетских материјала. Сама комора поседује ротациону симетрију, као и узорци материјала који се мере. Непознати параметри материјала издвајају се упоређивањем измереног коефицијента рефлексије и оног добијеног из нумеричког модела за претпостављене диелектричне параметре узорка. Диелектрични параметри изражени су преко комплексне<sup>2</sup> релативне пермитивности  $\epsilon_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r \tan \delta$  или, еквивалентно, релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  и тангенса угла губитака  $\tan \delta$ .

Захваљујући ротационој симетрији, овакав 3-D проблем може се свести на анализу 2-D пресека, чиме се значајно редукује његова комплексност и рачунарско време потребно за нумеричку анализу. При томе можемо разликовати две подгрупе. Ако је и побуда ротационо симетрична (на пример ТЕМ прстен магнетских струја или тачкасти генератор смештен на осе симетрије), у сваком 2-D пресеку који садржи осу симетрије решење проблема је исто. Ако пак сама побуда није ротационо симетрична (на пример раван, униформан талас који наилази из једног правца), онда сваки од поменутих 2-D пресека има различито електромагнетско решење. У другом случају анализа ротационо симетричних структура може се свести на серију анализа 2-D пресека коришћењем брзе Фуријеове трансформације (енглески: *fast Fourier transform*, скраћено: FFT) [58]–[64]. Када је и побуда ротационо симетрична, проблем се своди на анализу једног 2-D пресека [50], [65]–[67]. Од интереса за ову дисертацију биће ротационо симетричне структуре напајане ротационо симетричном побудом. Елементи саме структуре могу бити од метала (са или без губитака) или диелектрика (са или без губитака).

## 1.2. ДОПРИНОСИ ИСТРАЖИВАЊА

У последњих 70 година постоји стално повећање расположивих рачунарских ресурса, које отвара могућност за електромагнетску анализу са унапред дефинисаном тачношћу за време прихватљиво у инжењерској пракси. Постоји растући интерес за електромагнетском

---

<sup>1</sup> Због једноставности изражавања, у овој докторској дисертацији ће се под термином мод подразумевати униформан, раван, линијски поларизован талас.

<sup>2</sup> У овој дисертацији комплексни бројеви неће бити подвучени.

анализом до машинске тачности, тј. са свим значајним цифрама које рачунарска представа бројева са двоструком тачношћу може да подржи.

Радови који се баве интеграцијом сингуларних функција, било екстракцијом, било поништавањем сингуларитета, углавном се односе на квазисингуларитете и сингуларитете који се срећу при 3-D електромагнетској анализи методом момената. Како су сингуларитети при 2-D анализи другачијег облика (и различити за различите типове побуда), на њих не могу бити директно примењене исте смене, односно екстракције.

У овој дисертацији предложене су смене за које је теоријски и нумеричким експериментима доказано да поништавају сингуларитете који се срећу при електромагнетској анализи 2-D структура када се за апроксимацију густина струја користе полиноми као базисне функције. Густине струја могу се представити као функција само једне (криволинијске) координате, па су интегрални при овој анализи линијски. Свака од предложених смена поништава све сингуларитете 2-D анализе, што значи да је довољно користити једну смену и у случају ТМ и ТЕ мода инцидентног таласа.

Трансформације су имплементирани на рачунару са репрезентацијом бројева у двострукој тачности и показано је да се, након њихове примене, Гаус-Лежандровом квадратурном интеграцијом постиже висока тачност (блиска машинској). Разматране су траке које су у попречном пресеку различитих облика, од потпуно равне до врло закривљене параболе, затим различитих отворених и затворених попречних пресека. Нумеричким експериментима потврђено је да је за сваки од разматраних облика могуће израчунати интеграле са високом тачношћу, односно да облик попречног пресека може бити практично произвољан ако се користе предложене смене.

Свака од смена има један или два параметра чијим је оптималним подешавањем одређен минималан број тачака за Гаус-Лежандрову интеграцију након које се постиже висока тачност. Упоређивањем потребног броја интеграционих тачака за високу тачност свих разматраних смена, може се приметити да су разлике око 10 %. Утврђено је и да број тачака интеграције превасходно зависи од електричне ширине траке, односно од максималног реда коришћене базисне функције.

На једној од смена спроведена је серија нумеричких експеримената на основу којих су апроксимирани аналитичке формуле за одређивање параметара трансформације и потребног броја интеграционих тачака за високу тачност, а које зависе само од њене електричне ширине, али не и облика 2-D структуре или мода инцидентног таласа. Тиме је предложена аутоматска процедура којом се сингуларни интегрални могу израчунати са врло високом тачношћу ако је позната само ширина траке. Процедура је верификована на примерима трака које нису биле у скупу експеримената на основу кога су аналитичке формуле апроксимирани.

Висока тачност интеграције омогућила је коришћење функција базиса врло високог реда при целодоменској анализи која је овде спроведена. Као што је већ речено, за целодоменску анализу потребне су три до четири непознате по таласној дужини када се користе функције базиса високог реда. Одатле следи да је за електрички веће структуре потребан виши ред апроксимације, а сингуларне интеграле са функцијама базиса вишег реда теже је израчунати. Ипак, како су предложеним сменама сингуларитети поништени, то тачност интеграла након Гаус-Лежандрове интеграције превасходно зависи од броја рачунских операција које је потребно спровести, односно броја интеграционих тачака. Како је сада омогућена висока тачност интеграла са врло високим редом базисних функција, то је могуће структуру поделити на електрички врло велике елементе. Тиме се постиже бржа конвергенција електромагнетских резултата у односу на ситуацију када се користе функције базиса нултог реда са истим бројем непознатих (али већим бројем елемената структуре). Осим тога, боље су апроксимирана сингуларна понашања струја на крајевима структуре. Максимална ширина траке за коју је спроведен нумерички експеримент рачунања сингуларног интеграла је  $w = 16000 \lambda$ , где је  $\lambda$  таласна дужина у слободном простору. При томе је ред базисне функције био 56000. Поређења ради, максималан ред функција базиса

који се тренутно користи у комерцијалном софтверу је око стотину [68]. Ипак, на траци електричне ширине  $w = 16000 \lambda$  нису израчунате апроксимације густина струја, јер је време извршавања програма било неприхватљиво дуго. Највећа трака на којој су израчунате апроксимације густина струја је ширине  $w = 4000 \lambda$ .

Резултати нумеричке анализе са предложеним сменама, тј. целодоменске апроксимације густина струја на тракама, верификовани су упоређивањем са резултатима добијеним комерцијалним софтвером. Апроксимације конвергирају донекле различитим вредностима, посебно у околини крајева, па се на тракама ширина до  $w = 400 \lambda$  оне разликују за око 1 %, посматрајући све правце инцидентног таласа.

Траке веома великих електричних ширина, до  $w = 4000 \lambda$ , такође су анализиране предложеним поступком, након чега је добијена апроксимација густине струје упоређена са апроксимацијом из комерцијалног софтвера. Овим је потврђено да се целодоменска апроксимација струја на тракама може користити и за врло широке траке под условом да су елементи матрице система, тј. сингуларни интегрални, израчунати са високом тачношћу. Другим речима, елементи структуре могу бити димензија и до  $4000 \lambda$ . Ово је уједно и максимална ширина траке анализирана целодоменском анализом. Разлог ограничења је пре свега у самој рачунарској имплементацији којом су за ову траку заузети сви рачунски и меморијски ресурси на доступном рачунару.

Поред нумеричке анализе са високом тачношћу 2-D структура, дисертација се бави и нумеричком анализом са високом тачношћу ротационо симетричних структура. Ако изузмемо општу анализу 3-D структура, у отвореној литератури нема поступака који анализирају ротационо симетричне метало-диелектричне структуре методом момената са високом тачношћу. Мотивација за овај део истраживања потиче од потребе за нумеричким моделом ротационо симетричне коморе за мерење диелектричних параметара на високим учестаностима.

У оквиру ове докторске дисертације предложена је смена којом се интегрални који се срећу при анализи ротационо симетричних структура методом момената, након Галеркиновог тестирања, могу израчунати са високом тачношћу. Како су интегрални сада површински, то се смена односи на две координате. С друге стране, већ је речено да је у сваком 2-D пресеку који садрже осу симетрије решење проблема исто када је и побуда осно симетрична. Ипак, претходно предложене смене се сада не могу директно искористити. Један разлог је што су интегрални сада површински, јер су струје и наелектрисања расподељени по целој површи структуре, па постоји и друга координата коју је такође потребно трансформисати. Други разлог је што се при анализи ротационо симетричних структура појављују и нешто другачији облици сингуларитета.

Користећи се предложеном анализом са високом тачношћу, представљен је нумерички модел ротационо симетричне коморе за мерење диелектричних параметара материјала. Захваљујући предложеној смени тачност резултата предложеног нумеричког модела већа је од тачности самих мерења, а модел је успешно коришћен при издвајању диелектричних параметара материјала. Додатно, развојем овог нумеричког модела значајно је померена горња граница мерења параметара диелектрика доступном комором дубоко у микроталасне учестаности. Претходно ограничење учестаности било је на око 1 GHz, а последица је коришћења квазистатичког модела коморе [65].

Већина кључних доприноса ове дисертације публикована је у:

- **J. G. Perovic**, D. I. Olcan, B. M. Kolundzija, and A. R. Djordjevic, "A Singularity Cancellation Transformation for Entire-Domain Analysis of 2-D Structures With High-Precision Integration," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 67, no. 4, pp. 2522–2533, Apr. 2019, doi: 10.1109/TAP.2019.2891401 (**M21, IF 2019 = 4,371**) [14]
- **J. G. Petrovic**, D. I. Olcan, N. N. Obradovic, and A. R. Djordjevic, "High-Precision Method of Moments Applied to Measurement of Dielectric Parameters at Microwave



- Frequencies,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, pp. 970–979, 2021, doi: 10.1109/TMTT.2021.3136294 (M21, IF 2021 = 3,599) [66]
- **J. G. Perovic** and D. I. Olcan, “An Entire-Domain Analysis of Very Large 2-D Scatterers in TM mode Using Gegenbauer Polynomials,” in *2019 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting*, Atlanta, GA, USA, Jul. 2019, pp. 561–562. doi: 10.1109/APUSNCURSINRSM.2019.8888988 (M33) [69]
  - **J. G. Perovic** and D. I. Olcan, “An Entire-Domain Analysis of Very Large 2-D Scatterers in TM mode Using Gegenbauer Polynomials,” in *2019 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting*, Atlanta, GA, USA, Jul. 2019, pp. 561–562. doi: 10.1109/APUSNCURSINRSM.2019.8888988 (M33) [70]
  - **J. G. Petrović** and D. I. Olćan, “Solving 4,000 Wavelengths 2-D TM Scatterer Using Entire-Domain High-Precision MoM,” in *2021 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting*, Marina Bay Sands, Singapore, Dec. 2021, pp. 1337–1338 (M33) [71]
  - D. I. Olcan and **J. G. Petrovic**, “Advances in entire-domain high-precision 2D method of moments analysis,” in *Proceedings of 15th Interantional Conference on Applied Electromagnetics*, Nis, Serbia, 2021, pp. 19–22 (M33) [72]

### 1.3. СТРУКТУРА ДИСЕРТАЦИЈЕ

Дисертација је подељена у пет поглавља.

Кратак увод у проблеме којима се дисертација бави, преглед литературе, као и сажетак главних доприноса решењима тих проблема приказани су у овом поглављу.

У поглављу 2 дат је кратак преглед решавања система Максвелових једначина методом момената у општем случају. Најпре су у одељцима 2.1 и 2.2 представљене Максвелове једначине у свом основном облику, у временском и комплексном (фреквенцијском) домену. Затим су у одељку 2.3 уведени магнетски извори поља, струје и наелектрисања, након чега су Максвелове једначине и формално проширене магнетским изворима поља у одељку 2.4. Уведени су магнетски и електрични вектор и скалар потенцијали у одељку 2.5, где је показано и да се поменути систем једначина може трансформисати тако да су густине струја непознате величине. У одељку 2.6 дат је кратак осврт на теорему површинске еквиваленције, која ће бити коришћена при решавању електромагнетских проблема у овој дисертацији. Апроксимације густина површинских струја уведене су у одељку 2.7. Затим је у одељцима 2.8 и 2.9 илустровано како се из система Максвелових једначина, у случају структура које садрже само металне сегменте, долази до система линеарних једначина, чије су решење коефицијенти у апроксимацијама струја. Слично је урађено и у одељку 2.10 за метало-диелектричне структуре.

Дводимензионални проблеми и предлог поступка њихове анализе са високом тачношћу приказани су у поглављу 3. Геометрија анализираних структура и сама поставка проблема су описани у одељцима 3.1 и 3.2. Изрази за расејано поље у конкретним проблемима дати су у одељку 3.3, након чега је у одељку 3.4 дискутован избор базисних и тежинских функција. За базисне функције изабрани су ортогонални полиноми, и то у највећем броју проблема у овој дисертацији Лежандрови полиноми, док су избор тежинских функција Диракови (делта) импулси, тј. коришћено је подешавање у тачкама. Како је при формирању система линеарних једначина рачунски најзахтевнији задатак рачунање елемената матрице система, тј. интеграла са сингуларним подинтегралним функцијама, у одељку 3.6 представљена је основна идеја поништавања ових сингуларитета увођењем погодних смена са одређеним особинама. Она је разрађена у одељку 3.7, где је приказано неколико њених реализација.

Докази да предложене смене заиста поништавају сингуларитете који се срећу у електромагнетској анализи 2-D проблема дати су у одељку 3.8. Након што су смене уведене, интегрални се могу израчунати са високом тачношћу користећи се стандардном Гаус-Лежандровом нумеричком интеграцијом. Начин процене броја тачних цифара коришћен у овој дисертацији приказан је у одељку 3.9. Оптималним подешавањем параметара смена, као што је то описано у одељку 3.10, могуће је смањити број потребних интеграционих тачака за максималну тачност. Додатна анализа једне од смена (смене са експоненцијалним чланом), која се пре свега односи на процену броја потребних интеграционих тачака за интеграцију са високом тачношћу, приказана је у одељку 3.11. У истом одељку описане су и оптимизације које су имале за циљ смањење потребног броја интеграционих тачака за високу тачност. На основу великог броја спроведених нумеричких експеримената, параметри једне од предложених смена (смене са тангенсом), као и потребан број интеграционих тачака за интеграцију са високом тачношћу, апроксимирани су аналитичким формулама које зависе само од електричне ширине анализиране 2-D структуре. Тиме је предложена аутоматска процедура за интеграцију са високом тачношћу, детаљно описана у одељку 3.12. Аналитички изрази верификовани су на примерима структура које нису биле у експериментима на основу којих су аналитичке формуле изведене. Крајњи циљ нумеричке анализе 2-D расејача био је рачунање густина површинских струја на испитиваним структурама. Да би добијени резултати били проверени, они су упоређени са резултатима комерцијалног софтвера и заједно представљени у одељку 3.13. Коначно, избор Лежандрових полинома за базисне функције, као и кратка дискусија о Гегенбауеровим и Чебишевљевим полиномима као базисним функцијама у апроксимацијама струја при анализи 2-D структура, дати су у одељку 3.14, чиме је ово поглавље закључено.

Нумеричка анализа са високом тачношћу 3-D структура са ротационом симетријом (BoR структура) представљена је у поглављу 4. Мотивација нумеричке електромагнетске анализе поменутих структура, које су састављене делом од металних, а делом од део-по-део хомогених диелектричних елемената, је издвајање диелектричних параметара немагнетских материјала. Та анализа је детаљно описана у одељку 4.1. Опис геометрије једног елемента структуре, одговарајућег локалног координатног система и величина које га карактеришу дат је у одељку 4.2. Коришћена побуца у нумеричким моделима је ТЕМ прстен магнетских струја, чији је кратак опис дат у одељку 4.3. Једна од предности анализе ротационо симетричних у односу на општи случај 3-D структура је што се густине површинских струја могу представити као функције само једне координате. О томе ће бити речи у одељку 4.4, где су уведени облици апроксимација густина електричних и магнетских струја. Систем Максвелових једначина је, увођењем апроксимација и тестирањем тежинским функцијама, трансформисан у систем линеарних једначина, а све посебности и погодности због ротационе симетрије проблема истакнуте су у одељку 4.5. Како се и у овим проблемима појављују сингуларитети у подинтегралним функцијама при формирању система линеарних једначина, од којих су неки другачији у односу на сингуларитете у претходно анализираним 2-D проблемима, то је потребно њима се посебно позабавити у циљу електромагнетског решења са високом тачношћу. У одељку 4.6 предложена је смена након које се интегрални са којима се срећемо при нумеричкој анализи ротационо симетричних структура могу израчунати са високом тачношћу. Хардверска поставка експеримента за издвајање диелектричних параметара материјала, коју чине месингана ротационо симетрична комора, у коју се може убацили узорак материјала, и анализатор мрежа, описана је у одељку 4.7. Затим је у одељку 4.8 представљен нумерички модел коморе, који се заснива на анализи ротационо симетричних структура. Параметри модела и његове нумеричке анализе подешени су тако да тачност израчунатог комплексног коефицијента рефлексije буде већа од тачности измереног комплексног коефицијента рефлексije. У завршном одељку 4.9 овог поглавља приказани су издвојени диелектрични параметри узорка тефлона, као и материјала Rogers 4350В и FR-4.

Закључак дисертације дат је у поглављу 5.

## 2. МЕТОД МОМЕНАТА

Почетком 19. века спроведено је много експеримената и теоријских открића у циљу разумевања електромагнетских појава. Шарл Кулон је око 1780. године поставио Кулонов закон електростатике. Затим је Андре Ампер 1825. године дошао до закона који повезује магнетско поље са наелектрисањима у покрету (струјом). Мајкл Фарадеј је открио електромагнетску индукцију, коју су око 1834. математички уобличили Хајнрих Ленц и Франц Ернст Нојман. Детаљнијом анализом и систематизацијом ових радова дуго се бавио Џејмс Клерк Максвел, који је у низу радова објављених од око 1850. до око 1870. године извео преко 20 једначина које описују електромагнетске појаве. Коначно је Оливер Хевисајд применио векторску анализу да од свих једначина које је Максвел извео формулише четири векторске једначине које чине потпун систем за описивање електромагнетског поља. Експерименталну потврду Максвеловим једначинама дао је Хајнрих Херц низом експеримента крајем 19. века. Након тога је и већина научника у потпуности прихватила Максвелове једначине као полазну тачку за решавање електромагнетских проблема [73].

Према досадашњим сазнањима, макроскопско електромагнетско поље непокретних средина у потпуности је описано помоћу поменуте четири Максвелове једначине уз конститутивне релације. У једначинама фигуришу струје, наелектрисања и поља. Ако су познате расподеле извора поља (струја и наелектрисања), решавањем ових једначина може се одредити расподела поља, као и обрнуто. Ипак, врло је мали број електромагнетских проблема за које постоји решење у аналитичком облику, па се већина практичних проблема решава апроксимативно неким од нумеричких метода [4], [7], [12], [13].

Један начин поделе нумеричких метода за анализу електромагнетских проблема је на 3-D електромагнетску анализу полазећи од Максвелових једначина (енглески: *full-wave computational electromagnetics*) и асимптотске методе. Прва група метода заснива се на нумеричком решавању Максвелових једначина. Најпознатији методи који припадају овој групи су метод момената (енглески: *method of moments*, скраћено: МоМ) [4]–[7], метод коначних елемената (енглески: *finite element method*, скраћено: FEM) [8]–[11] и метод коначних разлика у временском домену (енглески: *finite difference time domain*, скраћено: FDTD) [6], [12]. Другој групи припадају методи у којима се, поред нумеричких апроксимација за само решавање система Максвелових једначина, уводе и додатне апроксимације самих једначина. Најпознатији методи из друге групе су физичка оптика (енглески: *physical optics*, скраћено: PO), геометријска оптика (енглески: *geometrical optics*, скраћено: GO), униформна теорија дифракције (енглески: *uniform theory of diffraction*, скраћено: UTD) итд.

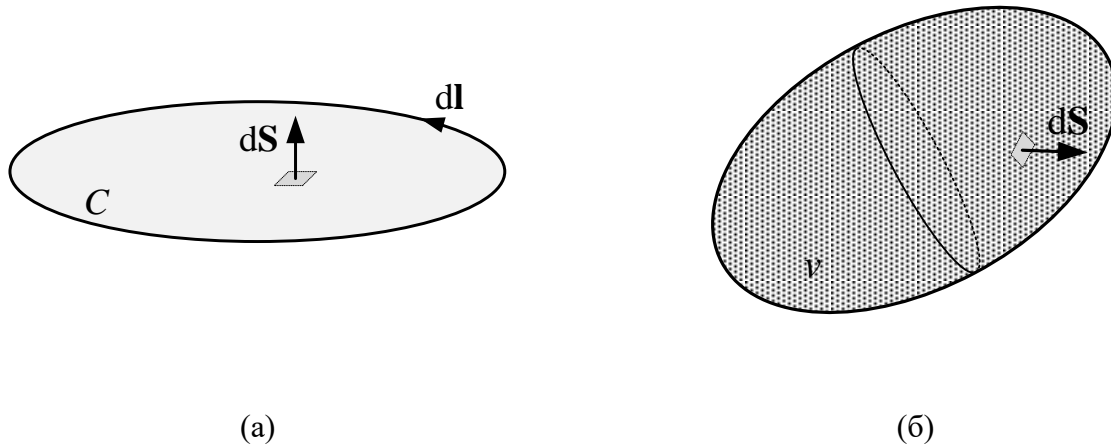
У наставку овог поглавља биће приказане неке основне теореме и закључци из електромагнетике, а затим ће бити представљен основни приступ решавању електромагнетских проблема коришћењем метода момената.

## 2.1. МАКСВЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ

Систем Максвелових једначина у интегралном облику, који у потпуности описује електромагнетско поље у посматраном делу простора, је [1]–[3]

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.1)$$

где је  $\mathbf{E}$  вектор електричног поља (јединица [V/m]),  $\mathbf{H}$  вектор магнетског поља (јединица [A/m]),  $\mathbf{D}$  вектор електричне индукције (или вектор електричног помераја) (јединица [C/m<sup>2</sup>]),  $\mathbf{B}$  вектор магнетске индукције (јединица [Wb/m<sup>2</sup>]),  $\mathbf{J}$  густина запреминских (електричних) струја (јединица [A/m<sup>2</sup>]) и  $\rho$  запреминска густина (електричних) наелектрисања (јединица [C/m<sup>3</sup>]). У прве две једначине  $C$  је произвољна контура, док је  $S$  отворена површ ослоњена на ту контуру. Оријентације површи и контуре повезане су правилом десне завојнице, као што је приказано на слици 2.1а. У последње две једначине  $S$  је затворена површ, оријентисана упоље, а  $V$  њен домен, као што је скицирано на слици 2.1б. Прва једначина у (2.1) је посебан случај Фарадејевог закона електромагнетске индукције када су средине непокретне, друга једначина се још назива и уопштени Амперов закон, трећа уопштени Гаусов закон и четврта закон конзервације магнетског флуksа. Све поменуте електромагнетске величине зависе од вектора положаја  $\mathbf{r}$  и времена  $t$ .



Слика 2.1. Илустрација правила десне завојнице за оријентације (а) контуре и површи ослоњене на контуру и (б) затворене површи.

Да би систем једначина (2.1) био потпун, потребне су и конститутивне релације. Из њих се могу израчунати вектори  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{J}$  за познате векторе  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Конститутивне релације су у општем случају векторске [1]–[3]

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{H}). \quad (2.2)$$

Ипак, вектори  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{J}$  практично су функције само једног од вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , тј. у највећем броју практичних случајева важи да је  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$  и  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$ . Посебно, у линеарним срединама конститутивне релације имају следећи облик [1]–[3]

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

где су  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  пермитивност, пермеабилност и специфична проводност средине, редом.

Из друге и треће једначине у (2.1) изводи се једначина континуитета [1]–[3]

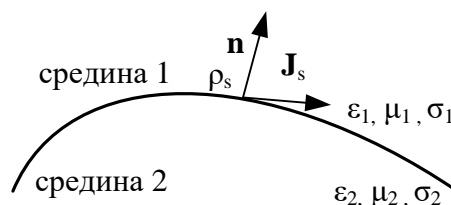
$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv, \quad (2.4)$$

из које следи да се наелектрисање не може створити нити уништити, већ само пренети из једног дела простора у други.

На границама две средине се из (2.1) изводе гранични услови [1]–[3]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s, \quad \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} = \rho_s, \quad \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.5)$$

где је  $\mathbf{J}_s$  густина површинских струја на граничној површи,  $\rho_s$  густина површинских слободних наелектрисања на граничној површи,  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{B}_1$  су вектори електромагнетског поља непосредно уз граничну површ у средини 1,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{B}_2$  су вектори електромагнетског поља непосредно уз граничну површ у средини 2, док је  $\mathbf{n}$  нормала на граничну површ усмерена од средине 2 ка средини 1, као што је приказано на слици 2.2.



Слика 2.2. Уз граничне услове.

## 2.2. МАКСВЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У КОМПЛЕКСНОМ ОБЛИКУ

Посебно, у линеарним срединама могуће је успостављање простопериодичног електромагнетског поља (енглески: *time-harmonic electromagnetic field*) при чему су све електромагнетске величине од интереса простопериодичне и исте кружне учестаности. Свака простопериодична величина може се представити јединственим комплексним представником (фазором) који зависи само од вектора положаја  $\mathbf{r}$  [1]–[3]. Тиме се рачунске операције значајно поједностављују с обзиром на то да се диференцирање по времену своди на множење, а интеграција по времену на дељење комплексном константом, као што ће бити и доказано у наставку.

Нека је  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  произвољна простопериодична векторска величина. Она се може записати као

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.6)$$

где је  $\omega$  кружна (угаона) учестаност,  $\sqrt{2} \mathbf{A}(\mathbf{r})$  амплитуда и  $\alpha$  почетна фаза. На основу Ојлерове формуле

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (2.7)$$

где је  $e \approx 2,71828\dots$  основа природних логаритама, а  $j$  имагинарна јединица ( $j^2 = -1$ ), простопериодична величина може се записати и као

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j(\alpha + \omega t)} \right\}. \quad (2.8)$$

Како су у простопериодичном режиму све величине исте кружне учестаности, то можемо сматрати да је  $e^{j\omega t}$  заједнички мултипликативни члан свих величина, а за комплексни представник простопериодичне величине  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  изабрати

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\alpha}, \quad (2.9)$$

где је комплексан број у формули подвучен.

Диференцирање у временском домену пресликава се у множење константом  $j\omega$  у комплексном домену јер важи

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \frac{\partial (e^{j(\alpha + \omega t)})}{\partial t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j(\alpha + \omega t)} \right\}, \quad (2.10)$$

одакле, на основу дефиниције (2.9), важи да је комплексни представник величине  $\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  једнак  $j\omega \underline{\mathbf{A}}$ .

На сличан начин доказује се и да се интеграл простопериодичне величине у временском домену пресликава у дељење константом  $j\omega$  у комплексном домену

$$\int \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) dt = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \int e^{j(\alpha + \omega t)} dt \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{j\omega} \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j(\alpha + \omega t)} \right\}. \quad (2.11)$$

Приметити да је константа интеграције у решењу неодређеног интеграла из (2.11) већ постављена на нулу. Оправдање лежи у чињеници да је режим који анализирамо простопериодичан и да су стога и све величине простопериодичне исте кружне учестаности. Додавање ненулта константе би резултовало компонентом која није простопериодична.

Од овог места па надаље бавићемо се искључиво електромагнетским проблемима у простопериодичном режиму. Сматраћемо да су све електромагнетске величине комплексни бројеви и то неће бити посебно наглашавано. Ради једноставности записа и прегледности текста комплексни бројеви неће бити подвучени.

Увођењем комплексних представника електромагнетских величина, интегралне једначине (2.1) постају

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dv, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.12)$$

а једначина континуитета (2.4)

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -j\omega \int_v \rho dv, \quad (2.13)$$

док гранични услови формално задржавају облик као у (2.5), али су све величине комплексне. При томе су губици у диелектрицима садржани у имагинарном делу комплексне

пермитивности  $\varepsilon$ , односно губици у магнетским материјалнима у имагинарном делу комплексне пермеабилности  $\mu$ . Наиме, комплексна пермитивност се може изразити као [1]

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r) = \varepsilon_0\varepsilon'_r - j\varepsilon_0\varepsilon'_r \tan \delta, \quad (2.14)$$

где је  $\varepsilon'_r$  релативна пермитивност диелектрика,  $\varepsilon''_r$  карактерише поларизационе губитке,  $\tan \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$  тангенс угла губитака у диелектрику, док је  $\varepsilon_0 \approx 8,8541878176 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  пермитивност вакуума. Слично, комплексна пермеабилност је [1]

$$\mu = \mu_0(\mu'_r - j\mu''_r) = \mu_0\mu'_r - j\mu_0\mu'_r \tan \delta_m, \quad (2.15)$$

где је  $\mu_r = \mu'_r$  релативна пермеабилност материјала,  $\mu''_r$  карактерише магнетске губитке,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  пермеабилност вакуума, док је  $\tan \delta_m = \mu''/\mu'$  тангенс угла губитака у магнетском материјалу.

Систем Максвелових једначина (2.12) формално може бити проширен увођењем магнетских побуда, тј. магнетских струја и наелектрисања. Више детаља о овоме је у одељцима 2.3 и 2.4.

### 2.3. ЕЛЕКТРИЧНЕ И МАГНЕТСКЕ СТРУЈЕ И НАЕЛЕКТРИСАЊА

Наелектрисање у простору може бити тачкасто  $Q$ , расподељено по линији, тј. линијско, густине  $Q'$ , по површи, тј. површинско, густине  $\rho_s$ , или по запремини, тј. запреминско, густине  $\rho$ . Под појмом електрична струја најпре су сматрана само слободна наелектрисања у покрету (кондукциона струја, енглески: *conduction current*) [1]. Концепт је затим проширен еквивалентним Амперовим струјама, тј. чланом  $j\omega\mathbf{D}$  (енглески: *displacement current*) који се појављује у другој Максвеловој једначини у (2.12). Побуда се може описати струјама, па је уведен и појам побудне електричне струје  $\mathbf{J}_i$  (енглески: *impressed current*). При томе, на основу расподеле у простору, електричне струје се деле на запреминске, густине  $\mathbf{J}$ , површинске, густине  $\mathbf{J}_s$ , и линијске, јачине  $I$ .

Дуално се могу посматрати магнетске струје и наелектрисања, а који су само математички концепт уведен ради лакшег решавања електромагнетских проблема, превасходно оних везаних за средине са диелектрицима [1]. У овој докторској дисертацији, једна класа проблема са диелектрицима биће анализирана у поглављу 4.

Густине магнетских струја означаћемо са  $\mathbf{M}$ , а посебно густине побудних струја са  $\mathbf{M}_i$ . Дуално еквивалентним Амперовим струјама, тј. члану  $j\omega\mathbf{D}$  је члан  $j\omega\mathbf{B}$ , који се појављује у првој Максвеловој једначини (2.12). Расподеле магнетских струја такође могу бити по запремини, површини и линији, односно говоримо о запреминским  $\mathbf{M}$ , површинским  $\mathbf{M}_s$  и линијским магнетским струјама  $K$  [1]. Аналогно електричним наелектрисањима, уведе се формално и магнетска наелектрисања (магнетске масе). Тачкасто магнетско наелектрисање означаћемо са  $Q_m$ , густину линијског са  $Q'_m$ , густину површинског са  $\rho_{sm}$  и густину запреминског са  $\rho_m$ .

## 2.4. МАКСВЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У КОМПЛЕКСНОМ ОБЛИКУ СА ЕЛЕКТРИЧНИМ И МАГНЕТСКИМ ИЗВОРИМА

Максвелове једначине се формално проширују додавањем магнетских извора поља као [2]

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S (\mathbf{M} + j\omega\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_m dv. \quad (2.16)$$

Ако се изузме минус у првој једначини, може се уочити да су сада једначине (2.16) формално симетричне у односу на електрично и магнетско поље.

Из Максвелових једначина (2.16) следе и одговарајући гранични услови [2]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = -\mathbf{M}_s, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s, \quad \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} = \rho_s, \quad \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} = \rho_{ms}, \quad (2.17)$$

где су  $\mathbf{M}_s$  површинске магнетске струје, а  $\rho_{ms}$  површинска магнетска наелектрисања на граничној површи.

Дуално једначини континуитета (2.13), изводи се и једначина континуитета за магнетске струје

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = j\omega \int_V \rho_m dv. \quad (2.18)$$

Диференцијални облици једначина континуитета, који су аналогни интегралним облицима (2.13) и (2.18), су  $\text{div}_s \mathbf{J}_s = -j\omega\rho_s$ , односно  $\text{div}_s \mathbf{M}_s = j\omega\rho_{ms}$ , где је  $\text{div}_s$  дивергенција по одговарајућој површи. Из диференцијалних облика се за познате густине струја могу једноставно добити одговарајуће густине наелектрисања.

У оквиру ове докторске дисертације разматране су само линеарне средине, а побуде су искључиво простопериодичне, па ће у фокусу бити решавање система (2.16). Како се поља могу изразити преко струја и наелектрисања (као што ће бити показано у одељку 2.5), то за познате параметре средине, геометрију проблема и расподелу побуда, једначине (2.16) чине систем интегралних једначина по непознатим електричним струјама  $\mathbf{J}$  и магнетским струјама  $\mathbf{M}$ . Додатно, ако је у свакој тачки на граничној површи позната и расподела тангенцијалне компоненте било електричног, било магнетског поља, решење Максвелових једначина, односно поменутог система интегралних једначина је, на основу теореме јединствености решења електромагнетских проблема, јединствено [1]–[3]. Другачије формулисано, решење које у свакој тачки граничне површи задовољава прва два гранична услова у (2.17) јесте решење посматраног електромагнетског проблема.

Тражење апроксимативног решења за струје електромагнетског проблема састоји се од неколико основних корака. Најпре се претпостави облик апроксимација густина електричних и магнетских струја. Најчешће у самим функцијама које апроксимирају струје фигуришу непознати коефицијенти које треба одредити. Затим се изразе електрично и магнетско поље преко претпостављених апроксимација струја. Налажењем тангенцијалних компоненти поља на граничним површима и њиховим изједначавањем, тј. постављањем граничних услова, добијамо једначине које треба решити да бисмо израчунали непознате коефицијенте из апроксимација струја, односно да бисмо нашли апроксимативно решење електромагнетског проблема.



## 2.5. ПОТЕНЦИЈАЛИ

За потребе једноставнијег рачунања поља, уведе се магнетски вектор потенцијал  $\mathbf{A}$  и електрични скалар потенцијал  $V$  кроз следећу везу са електричним пољем и магнетском индукцијом [1]–[3]

$$\mathbf{E}_e = -j\omega\mathbf{A} - \text{grad } V, \quad \mathbf{B}_e = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.19)$$

где је  $\mathbf{E}_e$  електрично поље, а  $\mathbf{B}_e$  магнетска индукција који настају због присуства електричних струја и наелектрисања. Дуално, електрични вектор потенцијал  $\mathbf{A}_e$  и магнетски скалар потенцијал  $V_m$  дефинисани су једначинама

$$\mathbf{B}_m = -j\omega\mathbf{A}_e - \text{grad } V_m, \quad \mathbf{E}_m = \text{rot } \mathbf{A}_e. \quad (2.20)$$

где је  $\mathbf{B}_m$  магнетска индукција, а  $\mathbf{E}_m$  електрично поље који настају због присуства магнетских струја и наелектрисања.

Сада је укупно електрично поље, које потиче од електричних и магнетских струја и наелектрисања,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m$ , док је укупна магнетска индукција  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_m$ .

Ако су у линеарној, хомогеној, неограниченој средини познате густине запреминских електричних струја  $\mathbf{J}$  и наелектрисања  $\rho$ , потенцијали  $\mathbf{A}$  и  $V$  могу се израчунати као [1]–[3]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_{v'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{v'} \rho(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad (2.21)$$

а слично и потенцијали  $\mathbf{A}_e$  и  $V_m$  ако су познате расподеле запреминских магнетских струја  $\mathbf{M}$  и наелектрисања  $\rho_m$  [1]–[3]

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{r}) = \varepsilon \int_{v'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad V_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \int_{v'} \rho_m(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad (2.22)$$

где је  $\mathbf{r}'$  вектор положаја извора поља,  $\mathbf{r}$  вектор положаја тачке у којој се рачуна поље,  $v'$  домен у ком постоје извори поља, као што је приказано на слици 2.3а, а  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  одговарајућа Гринова функција. О Гриновој функцији биће више речи касније.

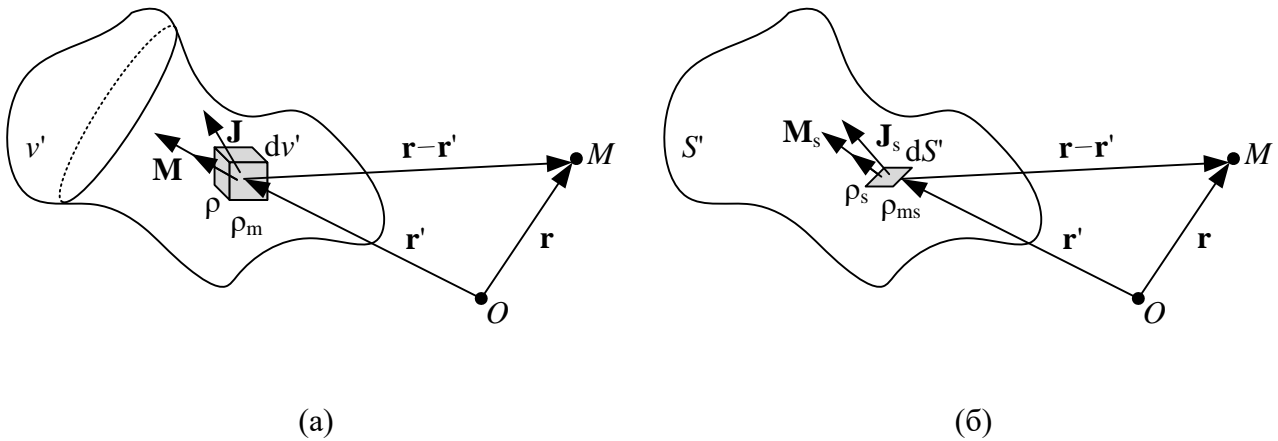
Слично, ако у линеарној, хомогеној, неограниченој средини постоје површинске електричне струје и наелектрисања, потенцијали се могу израчунати као [1]–[3]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_{S'} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{S'} \rho_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \quad (2.23)$$

односно ако постоје површинске магнетске струје  $\mathbf{M}_s$  и површинска магнетска наелектрисања  $\rho_{ms}$ , као

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{r}) = \varepsilon \int_{S'} \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad V_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \int_{S'} \rho_{ms}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \quad (2.24)$$

где је  $S'$  површ по којој постоје извори поља, као што је скицирано на слици 2.3б.



Слика 2.3. Уз потенцијале када су извори расподељени по (а) запремини и (б) површи.

С обзиром на то да су наелектрисања и одговарајуће струје повезани једначинама континуитета, (2.13) и (2.18), онда су и магнетски вектор потенцијал и електрични скалар потенцијал везани Лоренцовим условом који се добија на основу (2.13) и (2.23) [1]

$$\operatorname{div}_s \mathbf{A} + j\omega\epsilon\mu V = 0. \quad (2.25)$$

Слично, на основу (2.18) и (2.24), добија се дуалан услов који повезује електрични вектор потенцијал и магнетски скалар потенцијал

$$\operatorname{div}_s \mathbf{A}_e - j\omega\epsilon\mu V_m = 0. \quad (2.26)$$

Увођењем једначине (2.23) у (2.19), као и (2.24) у (2.20), добијају се изрази за укупно електрично поље када су струје и наелектрисања расподељени по површи

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \int_{S'} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \frac{1}{\epsilon} \int_{S'} \rho_s(\mathbf{r}') \operatorname{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS' + \epsilon \int_{S'} \operatorname{rot}(\mathbf{M}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS', \quad (2.27)$$

односно за укупну магнетску индукцију

$$\mathbf{B} = \mu \int_{S'} \operatorname{rot}(\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS' - j\omega\epsilon \int_{S'} \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \frac{1}{\mu} \int_{S'} \rho_{ms}(\mathbf{r}') \operatorname{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS'. \quad (2.28)$$

У претходне две формуле оператори  $\operatorname{rot}$  и  $\operatorname{grad}$  делују на функције које зависе од вектора положаја тачке у којој се рачуна поље,  $\mathbf{r}$ , али не и од вектора положаја тачке извора,  $\mathbf{r}'$ . Из тог разлога оператори  $\operatorname{rot}$  и  $\operatorname{grad}$  делују само на Гринове функције у (2.27) и (2.28).

За различите електромагнетске проблеме Гринова функција има различите облике. У случају 3-D проблема и брзопроменљивог електромагнетског поља, важи да је

$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-\gamma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ , где је  $\gamma = \alpha + j\beta$  коефицијент простирања. При томе је  $\alpha$  је коефицијент слабљења, док је  $\beta$  фазни коефицијент. Посебно, ако је средина без губитака, коефицијент простирања је чисто имагинаран, тј.  $\gamma = j\beta$ . Када су структуре такве да промене електромагнетског поља постоје у само две димензије, тј. у случају 2-D проблема без губитака, Гринова функција је  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ , где је  $H_0^{(2)}$  Ханкелова функција нултог реда и друге врсте. Тада се у једначинама (2.27) и (2.28) појављује и Ханкелова

функција првог реда и друге врсте  $H_1^{(2)}$ , као последица деловања градијента на Гринову функцију. Постоје и други облици Гринове функције, а овде су наведени само они који су коришћени у оквиру дисертације.

Врло слични изрази за  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  могу се добити када су струје и наелектрисања запремински расподељени, увођењем једначина (2.21) у (2.19) и (2.22) у (2.20). Ти изрази овде нису наведени јер се у оквиру ове дисертације бавимо струјама и наелектрисањима који су површински расподељени.

На овај начин израчунато поље аутоматски задовољава систем Максвелових једначина (2.16) [4], [11], [12]. Даље је потребно израчунати тангенцијалне компоненте и применити граничне услове (2.17) да бисмо добили једначине које треба решити.

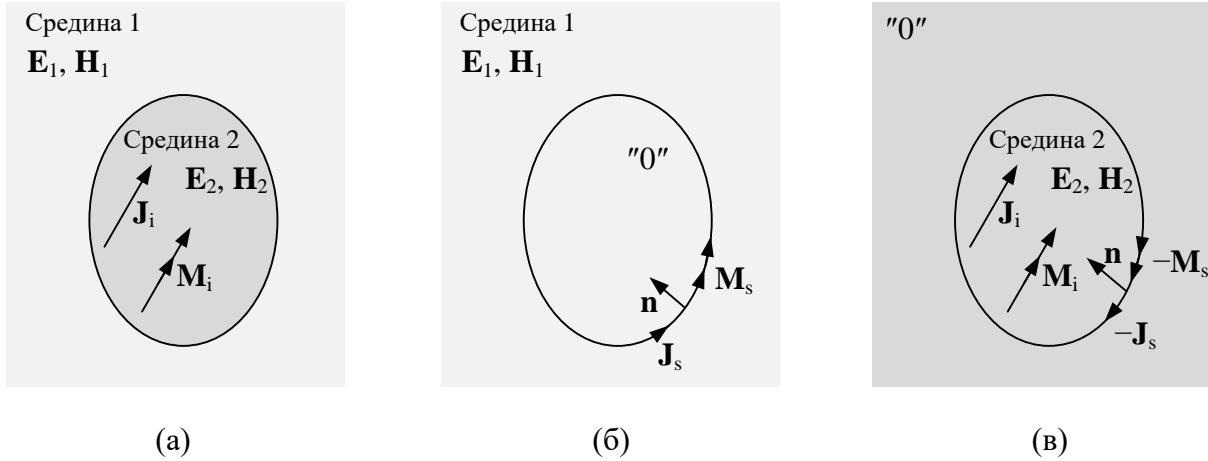
## 2.6. ТЕОРЕМА ПОВРШИНСКЕ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ

Једначине (2.27) и (2.28) важе само за неограничене, линеарне и хомогене средине. Ипак, поменуте једначине могу се применити и на линеарне део-по-део хомогене средине. То следи из теореме површинске еквиваленције која ће укратко бити изложена у наставку. Више детаља о теорему површинске еквиваленције може се пронаћи у [1]–[3], [7].

Посматрајмо ограничену, линеарну, хомогену средину 2 окружену неограниченом, линеарном, хомогеном средином 1, као што је приказано на слици 2.4а. Нека у средини 2 постоје побудне електричне струје  $\mathbf{J}_i$  и побудне магнетске струје  $\mathbf{M}_i$  и нека је електромагнетско поље у средини 1  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$ , а у средини 2  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ . На основу теореме јединствености решења, поље у средини 1 неће се променити ако тангенцијалне компоненте поља на граничној површи остану исте. Стога, ако на граничну површ две средине поставимо еквивалентне електричне струје које су једнаке  $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s$  и еквивалентне магнетске струје које су једнаке  $\mathbf{M}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s$ , где су  $\mathbf{E}_s$  и  $\mathbf{H}_s$  тангенцијалне компоненте електричног, односно магнетског поља на граничној средини, као што је приказано на слици 2.4б, електромагнетско поље у средини 1 ће остати исто. Ипак, поље у средини 2 ће бити једнако нули [7]. На сликама 2.4б и 2.4в је део простора у коме је поље нула означено са "0". Као последица, средина 2 може се заменити средином произвољних параметара. Ако замену извршимо средином параметара средине 1, читав простор постаје хомоген. На овом месту види се главни мотив увођења еквивалентних магнетских струја: омогућавање да се примене изрази за потенцијале (а тиме и за поља) који важе у хомогеној средини.

На сличан начин може се показати да се поље у средини 2 неће променити ако се на граничну површ поставе еквивалентне електричне и магнетске струје, као што је приказано на слици 2.4в, а читав простор се хомогенизује тако да је средина 2 свуда. Поље у средини 2 потиче како од еквивалентних струја  $\mathbf{J}_s$  и  $\mathbf{M}_s$ , тако и од побудних струја  $\mathbf{J}_i$  и  $\mathbf{M}_i$  које у њој постоје.

При постављању граничних услова зарад генерисања система једначина, разликује се неколико специфичних ситуација. Ако се на граничној површи поставља само услов једнакости тангенцијалних компоненти електричног поља, систем интегралних једначина се још назива и систем интегралних једначина електричног поља (енглески: *electric field integral equations*, скраћено: EFIE). Слично, ако се поставља само услов једнакости тангенцијалних компоненти магнетског поља, систем се назива и систем интегралних једначина магнетског поља (енглески: *magnetic field integral equations*, скраћено: MFIE). Када је потребно поставити оба гранична услова, они се могу комбиновати у један, па се систем назива и комбиновани систем интегралних једначина (енглески: *combined field integral equations*, скраћено: CFIE) или само посматрати истовремено, па се систем назива и спрегнути систем интегралних једначина (енглески: *coupled region integral equation*, скраћено: CRIE).



Слика 2.4. Уз теорему површинске еквиваленције: (а) оригинални проблем, (б) еквивалентан проблем за средину 1 и (в) еквивалентан проблем за средину 2. [7]

## 2.7. АПРОКСИМАЦИЈА СТРУЈА

У проблемима којима се бавимо, апроксимативно решење електромагнетских проблема добијено методом момената су заправо нумеричке апроксимације површинских струја. Када су једном израчунате апроксимације струја, на основу диференцијалног облика једначине континуитета, позната су и наелектрисања. Електромагнетско поље се тада може израчунати помоћу (2.27) и (2.28). Нека је поларизација линеарна и нека су струје апроксимирани линеарном комбинацијом базисних функција

$$\mathbf{C}_s \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n f_n \mathbf{i}_0, \quad (2.29)$$

где је  $\mathbf{C}_s = \{\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s\}$  заједничка ознака за било електричне, било магнетске струје,  $a_n \in \{a_n^{\mathbf{J}_s}, a_n^{\mathbf{M}_s}\}$  су одговарајући непознати комплексни коефицијенти,  $f_n$  базисне функције,  $\mathbf{i}_0 \in \{\mathbf{i}_0^{\mathbf{J}_s}, \mathbf{i}_0^{\mathbf{M}_s}\}$  јединични вектори који одређују референтне смерове струја, док је  $N-1$  максималан ред апроксимације струја. Ако постоје и електричне, и магнетске струје, најчешћа пракса је да редови апроксимација буду исти [7]. Базисне функције дефинисане су на елементу (или елементима) структуре која се анализира и представљају неке унапред познате математичке функције. Те функције могу бити константе, полиноми, сингуларне функције које одговарају физици проблема итд.

Тачност апроксимације, као и тачност и ефикасност саме електромагнетске анализе зависе и од избора базисних функција [7].

## 2.8. ПОСТАВЉАЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ НА ОСНОВУ ГРАНИЧНОГ УСЛОВА ЗА ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ КОМПОНЕНТЕ ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА

Претпоставимо да је структура направљена од савршеног проводника (енглески: *perfect electric conductor*, скраћено: PEC) и да читаву структуру посматрамо као један елемент. На структури ће постојати само електричне струје, па је довољно, на основу теореме јединствености решења електромагнетског проблема, да поставимо гранични услов за

тангенцијалну компоненту електричног поља. При томе електрично поље постоји само ван савршеног проводника.

Када се апроксимација струја (2.29) уврсти у једначину (2.27), апроксимација електричног поља које потиче од површинских струја је

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx -j\omega\mu \int_{S', n=0}^{N-1} a_n f_n \mathbf{i}_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \frac{j}{\omega\epsilon} \text{grad} \int_{S'} \text{div}_{S'} \left( \sum_{n=0}^{N-1} a_n f_n \mathbf{i}_0 \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \quad (2.30)$$

односно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx -j\omega\mu \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{S'} f_n \mathbf{i}_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \frac{j}{\omega\epsilon} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{S'} \text{div}_{S'} (f_n \mathbf{i}_0) \text{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS'. \quad (2.31)$$

Гранични услов за једнакост тангенцијалних компоненти електричног поља је

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_{\text{tan}} + \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{i}_{\text{tan}} = 0, \quad (2.32)$$

где је  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$  побудно електрично поље, док је са  $\mathbf{i}_{\text{tan}}$  означен јединични вектор тангенцијалан на граничну површ. Када се (2.31) уврсти у (2.32), добија се

$$\left( -j\omega\mu \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{S'} f_n \mathbf{i}_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \frac{j}{\omega\epsilon} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{S'} \text{div}_{S'} (f_n \mathbf{i}_0) \text{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS' \right)_{\text{tan}} \approx -(\mathbf{E}_i(\mathbf{r}))_{\text{tan}}, \quad (2.33)$$

где је са  $\text{tan}$  означен оператор којим се издваја тангенцијална компонента, односно скаларно множење јединичним вектором  $\mathbf{i}_{\text{tan}}$ , који, у општем случају, има две компоненте. Једначина (2.33) има  $N$  непознатих комплексних коефицијената  $a_n$  који су у линеарној вези. Додатно, тачка у којој се рачуна поље  $\mathbf{r}$  може бити изабрана било где на граничној површи.

У оквиру следећег корака потребно је поставити систем од  $N$  линеарних, независних једначина из којих се могу израчунати непознати коефицијенти.

## 2.9. ПОСТАВЉАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА НА ОСНОВУ ГРАНИЧНОГ УСЛОВА ЗА ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ КОМПОНЕНТЕ ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА

У овом одељку биће детаљно објашњен поступак генерисања система линеарних једначина из ког се могу израчунати непознати коефицијенти апроксимација струја. Како је постављен гранични услов једнакости тангенцијалних компоненти електричног поља (2.32), то се из њега изводи систем интегралних једначина електричног поља (EFIE).

Ако на леву и десну страну једначине (2.33) применимо операторе множења тежинским функцијама  $w_m$ , а затим и интеграцију по граничној површи елемента структуре, добијамо систем

$$\begin{aligned}
& -j\omega\mu \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_S w_m \int_{S'} f_n(\mathbf{i}_0)_{\tan} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' dS - \\
& - \frac{j}{\omega\epsilon} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_S w_m \int_{S'} \operatorname{div}_{S'}(f_n \mathbf{i}_0)(\operatorname{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\tan}) dS' dS = - \int_S w_m (\mathbf{E}_i(\mathbf{r}))_{\tan} dS,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

где је  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , а  $S$  гранична површ која је уједно и домен тежинске функције  $w_m$ , док смо релацију приближно заменили релацијом једнако. Тежинске функције дефинисане су на домену на коме рачунамо електрично поље. Ако су тежинске функције Диракови (делта) импулси, онда се начин генерисања линеарних једначина назива подешавањем у тачкама [4], [7]. У случају да су тежинске функције изабране да буду једнаке базисним функцијама, у питању је Галериков метод [4], [7].

Систем линеарних једначина (2.34) може се представити и у матричној форми ако се непознати коефицијенти издвоје у вектор колону  $\mathbf{x}$ , елементи са десне стране једначине у слободну вектор колону  $\mathbf{b}$ , а остали чланови у матрицу система  $\mathbf{A}$ , димензија  $N \times N$ . Матрична једначина је тада  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Посебно, интегрални који треба израчунати при формирању („пуњењу“) матрице  $\mathbf{A}$  имају сингуларне подинтегралне функције, и то онда када се тачка у којој се рачуна поље  $\mathbf{r}$  и тачка извора поља  $\mathbf{r}'$  поклапају, односно квази-сингуларне, када су тачке  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  веома близу једна другој.

Сам сингуларитет потиче од Гринове функције, која може узети различите облике за различите електромагнетске проблеме. У случају анализе 2-D структура сингуларитети су облика  $1/R$  и  $\log R$ , као што ће бити показано у одељку 3.5, док су у случају анализе 3-D структура облика  $1/R$  и  $1/R^2$ , што ће бити показано у одељку 4.5. Ипак, решење електромагнетског проблема је јединствено на основу већ поменуте теореме о јединствености. Сингуларне подинтегралне функције отежавају нумеричко рачунање интеграла, односно најчешће се нумеричке методе за интеграцију не могу директно применити. Стога је потребно посветити посебну пажњу сваком типу сингуларитета, јер тачност описане електромагнетске анализе највише зависи од тачности рачунања интеграла матрице система. У наставку ове дисертације посебан акценат биће на рачунању поменутих интеграла са врло високом тачношћу. Сви нумерички експерименти спроведени су на персоналном рачунару, са представом бројева у двострукој тачности, односно на 64-битном систему који је данас у употреби. Стога је максимална тачност која се може остварити 15 значајних цифара. Са друге стране, могуће је радити и са већом тачношћу, када се рачун обавља помоћу посебног софтвера, а не директно помоћу хардверских функција. Такав приступ значајно успорава поступак, па овде неће бити разматран.

Добијени систем линеарних једначина може се решити неким од стандардних поступака, као што су Гаусова елиминација, LU (енглески: *lower-upper*) декомпозиција и др. У оквиру ове докторске дисертације коришћена је LU декомпозиција, јер је то најефикаснији поступак познат у овом тренутку.

## 2.10. ПОСТАВЉАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА КАДА ПОСТОЈЕ И ЕЛЕКТРИЧНЕ И МАГНЕТСКЕ СТРУЈЕ

Ако у структури постоје диелектрици или магнетски материјали, након примене теореме површинске еквиваленције, на граничним површима постоје и електричне и магнетске струје. Ако је ред сваке од апроксимација једнак  $N$ , онда је укупан број непознатих на једној граничној површи  $2N$ . У том случају најчешће се постављају гранични услови за тангенцијалне компоненте и електричног, и магнетског поља. Као што је већ поменуто, ти

гранични услови могу бити комбиновани у један услов и тада говоримо о комбинованом систему једначина (CFIE). У овој дисертацији користићемо формулацију у којој су ови гранични услови у раздвојеним једначинама (CRIE). Постоји неколико њених даљих подела, од којих су најпознатије PMCHWT и Müller-ова. Прва поменута је добила име по првим словима презимена научника који су је поставили. Први рад су објавили Roggio и Miller [74]. Затим су је Cheng и Harrington [75] применили на цилиндричне структуре, а онда и Wu и Tsai на ротационо симетричне структуре [76].

У овој докторској дисертацији ће за решавање електромагнетских проблема са диелектрицима бити коришћена управо PMCHWT формулација, која је укратко изложена у наставку. Детаљно извођење са нумеричким примерима може се наћи у [7].

Посматрајмо раздвојну површ две средине  $i$  и  $j$ . Нека су  $(\mathbf{E}_i)_{\text{tan}}$  и  $(\mathbf{H}_i)_{\text{tan}}$  тангенцијалне компоненте електричног и магнетског поља у средини  $i$  непосредно уз граничну површ, док су  $(\mathbf{E}_j)_{\text{tan}}$  и  $(\mathbf{H}_j)_{\text{tan}}$  тангенцијалне компоненте електричног и магнетског поља у средини  $j$  непосредно уз граничну површ. Гранични услов који по PMCHWT формулацији треба задовољити је [7]

$$(\mathbf{E}_i)_{\text{tan}} = (\mathbf{E}_j)_{\text{tan}}, (\mathbf{H}_i)_{\text{tan}} = (\mathbf{H}_j)_{\text{tan}}. \quad (2.35)$$

Поље у средини  $i$  рачунамо из (2.27) и (2.28) након што, на основу теореме површинске еквиваленције, хомогенизујемо читав простор параметрима средине  $i$  и поставимо еквивалентне површинске струје  $\mathbf{J}_s^{(i)}$  и  $\mathbf{M}_s^{(i)}$ . Слично, поље у средини  $j$  рачунамо на основу истих израза са разликом да сада у формулу улазе параметри средине  $j$  и одговарајуће еквивалентне површинске струје  $\mathbf{J}_s^{(j)}$  и  $\mathbf{M}_s^{(j)}$ . При томе су еквивалентне струје на граничној површи у суседним срединама истог интензитета и правца, али супротног смера, тј. [7]

$$\mathbf{J}_s^{(i)} = -\mathbf{J}_s^{(j)}, \mathbf{M}_s^{(i)} = -\mathbf{M}_s^{(j)}, \quad (2.36)$$

што директно следи из теореме површинске еквиваленције.

Ако струје на граничној површи апроксимирамо са (2.29), из једнакости тангенцијалних компоненти електричног поља (2.35) добијамо једначину

$$\begin{aligned} & -j\omega\mu_i \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{J}_s} \int_{S'} f_n(\mathbf{i}_0^{\mathbf{J}_s})_{\text{tan}} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \frac{j}{\omega\epsilon_i} \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{J}_s} \int_{S'} \text{div}_{S'}(f_n \mathbf{i}_0^{\mathbf{J}_s})(\text{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\text{tan}}) dS' + \\ & + \epsilon_i \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{M}_s} \int_{S'} f_n(\text{rot}(\mathbf{i}_0^{\mathbf{M}_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\text{tan}}) dS' + (\mathbf{E}_i^{(i)})_{\text{tan}} = \\ & = j\omega\mu_j \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{J}_s} \int_{S'} f_n(\mathbf{i}_0^{\mathbf{J}_s})_{\text{tan}} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \frac{j}{\omega\epsilon_j} \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{J}_s} \int_{S'} \text{div}_{S'}(f_n \mathbf{i}_0^{\mathbf{J}_s})(\text{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\text{tan}}) dS' - \\ & - \epsilon_j \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{M}_s} \int_{S'} f_n(\text{rot}(\mathbf{i}_0^{\mathbf{M}_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\text{tan}}) dS' + (\mathbf{E}_i^{(j)})_{\text{tan}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где су  $a_n^{\mathbf{J}_s}$  и  $a_n^{\mathbf{M}_s}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , коефицијенти апроксимација електричних и магнетских струја у средини  $i$ , редом, док су коефицијенти одговарајућих апроксимација у средини  $j$  исти само супротног знака. Тангенцијалне компоненте електричног поља које потичу од побуда у срединама  $i$  и  $j$  су  $(\mathbf{E}_i^{(i)})_{\text{tan}}$  и  $(\mathbf{E}_i^{(j)})_{\text{tan}}$ , редом. Тестирањем једначине (2.37) тежинским функцијама  $w_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , добија се  $N$  једначина.

Других  $N$  једначина добија се тестирањем једначине која потиче из другог граничног услова у (2.35), тј. из једнакости тангенцијалних компоненти магнетског поља у срединама  $i$  и  $j$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{J}_s} \int_{S'} f_n \left( \text{rot}(\mathbf{i}_0^{\mathbf{J}_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right)_{\text{tan}} dS' - \frac{j\omega \varepsilon_i}{\mu_i} \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{M}_s} \int_{S'} f_n \left( \mathbf{i}_0^{\mathbf{M}_s} \right)_{\text{tan}} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \\
& + \frac{j}{\omega \mu_i^2} \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{M}_s} \int_{S'} \text{div}_{s'}(f_n \mathbf{i}_0^{\mathbf{M}_s}) (\text{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\text{tan}}) dS' + (\mathbf{H}_i^{(i)})_{\text{tan}} = \\
& = - \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{J}_s} \int_{S'} f_n \left( \text{rot}(\mathbf{i}_0^{\mathbf{J}_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right)_{\text{tan}} dS' + \frac{j\omega \varepsilon_j}{\mu_j} \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{M}_s} \int_{S'} f_n \left( \mathbf{i}_0^{\mathbf{M}_s} \right)_{\text{tan}} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \\
& - \frac{j}{\omega \mu_j^2} \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{\mathbf{M}_s} \int_{S'} \text{div}_{s'}(f_n \mathbf{i}_0^{\mathbf{M}_s}) (\text{grad}(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\text{tan}}) dS' + (\mathbf{H}_i^{(j)})_{\text{tan}}, \tag{2.38}
\end{aligned}$$

где су  $(\mathbf{H}_i^{(i)})_{\text{tan}}$  и  $(\mathbf{H}_i^{(j)})_{\text{tan}}$  тангенцијалне компоненте магнетског поља које потичу од побуда у срединама  $i$  и  $j$ , редом. Тестирањем једначине (2.38) тежинским функцијама  $w_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , добија се других  $N$  једначина.

Тиме је формиран систем линеарних једначина са непознатим коефицијентима  $a_n^{\mathbf{J}_s}$  и  $a_n^{\mathbf{M}_s}$ . Додатно, када је структура састављена из  $M$  оваквих елемената, број непознатих коефицијената је једнак  $2MN$  у случају када постоје и магнетске и електричне струје на сваком елементу, када базисне функције припадају само једном елементу и када је њихов ред на сваком елементу исти. Тада се за сваки од елемената постављају једначине (2.37) и (2.38).

Елементи одговарајуће матрице система су интегрални са сингуларним подинтегралним функцијама. Сингуларитет и у овим проблемима потиче од Гринове функције када се тачка извора поља и тачка у којој се рачуна поље поклапају.



### 3. ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРОБЛЕМИ

Са теоријског становишта 2-D електромагнетске структуре су оне код којих је једна димензија бесконачно велика, а промена електромагнетског поља постоји само у попречном пресеку. У пракси, ако је једна димензија структуре много дужа од друге две, онда се практично електромагнетско поље мења само у попречном пресеку структуре, односно у 2-D простору. Ипак, поље је различито од пресека до пресека, што се описује експоненцијалним фактором. На пример, такав је случај код електрички великих расејача са константним попречним пресеком, водова и таласовода без губитака или са (приближно) малим губицима.

Електромагнетска 2-D анализа појављује се у многим теоријским разматрањима и практичним применама [2]–[4], [7]. Најчешће се користи при рачунању расејаног (енглески: *scattered field*) и електромагнетског поља у вишеслојним срединама [2], [4], [7], [77]–[84] и у анализи водова [56]. Посебна пажња се посвећује апроксимацији густине површинских струја у близини ивица, како у практичним применама [85], тако и у нумеричким истраживањима [86]. Дводимензионална електромагнетска анализа користи се и у случајевима када 3-D анализа превазилази границе доступних рачунарских ресурса или се резултат може добити из 2-D анализе.

Иако за неке 2-D проблеме постоји аналитичко [77]–[81], ипак је највише оних електромагнетских проблема које је могуће решити искључиво апроксимативно, неким од нумеричких метода. У случају метода момената, највише пажње потребно је за рачунање интеграла са сингуларним подинтегралним функцијама, који су у 2-D проблемима облика  $1/R$  и  $\log R$ .

Када се интеграл са сингуларитетима решавају директно, користећи неки од стандардних нумеричких поступака, потребно је много интеграционих тачака да би се постигла жељена тачност резултата. Најчешће је тај број неприхватљиво велики са практичног становишта. Стога се пре нумеричке интеграције примењује нека од следећих техника: издвајање сингуларитета (енглески: *singularity extraction*) [15]–[25] или поништавање сингуларитета коришћењем трансформација променљивих, односно смена [14], [35]–[47]. (У овој дисертацији ће изрази смена и трансформација бити коришћени као синоними.)

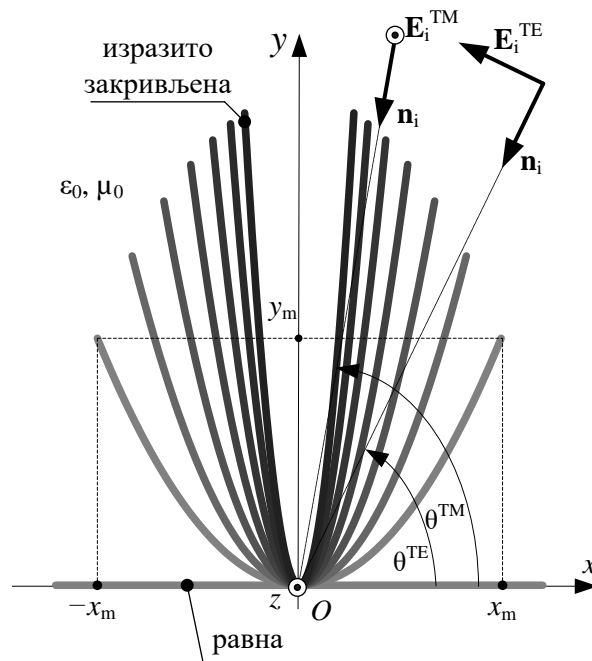
Подаци за нумеричку интеграцију функција са логаритамским сингуларитетима познати су у облику табелираних тежина и апсциса [53], [54]. Ипак, они могу бити употребљени једино у случају равних елемената код којих је претходно издвојен сингуларитет.

У овој дисертацији биће представљено неколико смена за поништавање сингуларитета које се срећу у 2-D електромагнетској анализи у случају трансверзалног електричног поља (енглески: *transversal electric field*, скраћено: ТЕ), односно у случају трансверзалног магнетског поља (енглески: *transversal magnetic field*, скраћено: ТМ). Примери таквих електромагнетских проблема су дугачки водови, расејачи побуђени равним, униформним

таласом итд. Део резултата који је проистекао из рада на овој дисертацији и презентован је у овом поглављу публикован је у [14], [69], [70], [87].

### 3.1. ГЕОМЕТРИЈА АНАЛИЗИРАНИХ СТРУКТУРА

На слици 3.1 приказани су попречни пресеци бесконачно дугачких трака, истих дужина попречног пресека, али различитих полупречника кривине. Траке су теоријски бесконачно дугачке у правцу  $z$ -осе. Параметарске једначине попречних пресека ових трака су  $x' = x_m t'$ ,  $y' = y_m t'^2$ , где је  $t'$  локална координата у опсегу  $[-1, 1]$ , док су  $x_m$  и  $y_m$  параметри. У зависности од (полупречника) кривине, параметар  $y_m$  узима различите вредности. У два крајња разматрана случаја је  $y_m = 0$ , када је трака равна, односно  $y_m = 31w/64$ , када је трака изразито закривљена, где је  $w$  ширина траке. За унапред изабрану ширину траке и закривљеност  $y_m$  параметар  $x_m$  је јединствено одређен. Код поменуте равне траке је  $x_m = 0,5w$ , док је код максимално закривљене разматране траке  $x_m \approx 0,0924253 w$ .



Слика 3.1. Попречни пресеци трака различитих закривљености побуђених равним, униформним таласом у ТМ и ТЕ моду.

Равна трака и изразито закривљена трака са слике 3.1 изабране су као два основна примера за тестирање предложених смена, јер ова два крајња случаја могу да послуже као градивни елементи за друге произвољне облике трака. Наиме, траке које би биле додатно закривљене увек могу да се поделе на траке значајно мањих полупречника кривине.

Траке ће бити анализирани методом момената као расејачи, са циљем израчунавања густине површинских струја индукованих на површи трака. Када су познате густине струја, поље се може израчунати из (2.27) и (2.28). Како рачунање поља подразумева интеграцију густине струје, грешке у апроксимацији струја могу бити и потиснуте или замаскиране, тј. неке грешке у апроксимацији струја неће бити видљиве ако се посматра искључиво поље. Из тог разлога у оквиру ове дисертације посматраћемо примарно густине струја на тракама као резултат анализе на основу кога се јасно може дефинисати тачност резултата.

### 3.2. ПОСТАВКА НУМЕРИЧКОГ ЕКСПЕРИМЕНТА

Све разматране траке начињене су од савршеног електричног проводника и бесконачно су танке, тако да се може сматрати да на њима постоји само један плашт површинских струја. Траке су постављене у вакууму и на њих наилази раван, униформан, простопериодичан, линеарно поларизован талас. Правац простирања инцидентног таласа, одређен јединичним вектором  $\mathbf{n}_i$ , се налази у равни попречног пресека траке (слика 3.1). Када је вектор електричног поља у равни попречног пресека траке (у општем случају има и  $x$  и  $y$  компоненту), у питању је ТЕ мод. Када је вектор електричног поља паралелан  $z$ -оси, у питању је ТМ мод. У случају да вектор електричног поља има све три компоненте Декартовог координатног система, у питању је хибридни мод. У оквиру ове дисертације биће разматрани и ТЕ, и ТМ мод.

Коефицијент простирања таласа је у општем случају комплексан број,  $\gamma = \alpha + j\beta$ . Како је у разматраним проблемима средина без губитака, коефицијент простирања је чисто имагинаран број,  $\gamma = j\beta$ . Ако је са  $\mathbf{r}$  означен вектор положаја тачке у којој се рачуна поље, са  $\mathbf{i}_i$  јединични вектор који показује правац и смер инцидентног електричног поља, тада је електрично поље инцидентног таласа дато изразом [88]

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{-\gamma \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}} \mathbf{i}_i = E_0 e^{j\beta(x \cos \theta + y \sin \theta)} \mathbf{i}_i, \quad (3.1)$$

док је магнетско поље [88]

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{Z_{\text{ТЕМ}}} e^{-\gamma \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}} \mathbf{n}_i \times \mathbf{i}_i = \frac{E_0}{Z_{\text{ТЕМ}}} E_0 e^{j\beta(x \cos \theta + y \sin \theta)} \mathbf{n}_i \times \mathbf{i}_i, \quad (3.2)$$

где је  $Z_{\text{ТЕМ}}$  таласна импеданса, која је у посматраном случају једнака  $Z_{\text{ТЕМ}} = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \approx 120\pi \Omega$ . Јединични вектор  $\mathbf{i}_i$  једнак је  $\mathbf{i}_i = \mathbf{i}_z$  у ТМ случају и  $\mathbf{i}_i = -\sin \theta \mathbf{i}_x + \cos \theta \mathbf{i}_y$  у ТЕ случају, где је  $\theta \in \{\theta^{\text{ТЕ}}, \theta^{\text{ТМ}}\}$  заједничка ознака за упадни угао инцидентног таласа (слика 3.1). Усвојићемо да је интензитет електричног поља  $E_0 = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ .

Како су разматране структуре металне и постављене у вакууму, то ће за њихову анализу бити постављена ЕФИЕ формулација метода момената и у фокусу ће бити решавање једначине (2.34). При томе, сматраћемо да је трака један сегмент, тј. користићемо целодоменску апроксимацију струја (енглески: *entire-domain analysis*).

### 3.3. РАСЕЈАНО ЕЛЕКТРИЧНО ПОЉЕ

С обзиром на то да је Гринова функција у 2-D електромагнетским проблемима једнака Ханкеловој функцији друге врсте и нултог реда,  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = H_0^{(2)}(\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ , расејано електрично поље (2.27) има облик

$$\mathbf{E}_s = -\frac{\pi \mu_0 f}{2} \int_C J_s(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{l}' + \frac{j}{4\epsilon_0} \text{grad} \left( \int_C \rho_s(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{l}' \right), \quad (3.3)$$

где је  $d\mathbf{l}' = dl' \mathbf{i}_t$  вектор елементарне дужине  $dl' = \sqrt{(dx'/dt')^2 + (dy'/dt')^2}$  попречног пресека траке, јединични вектор  $\mathbf{i}_t$  одређује референтни смер површинских струја  $J_s$ ,  $f$  је радна учестаност,  $\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}_x + y' \mathbf{i}_y$  је вектор положаја тачке извора расејаног поља,  $\mathbf{r} = x \mathbf{i}_x + y \mathbf{i}_y$  је вектор положаја тачке у којој се рачуна поље,  $C'$  означава попречни пресек траке, као што је и илустровано на слици 3.2 на примеру закривљене траке. Интензитет густине струје  $J_s$  зависи само од локалне  $t'$  координате, односно од Декартових  $x'$  и  $y'$  координата. Смер густине струје у ТМ моду је дуж  $z$ -осе, па је јединични вектор  $\mathbf{i}_t$  једнак је  $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_z$ , док је у ТЕ моду дуж попречног пресека траке, па је  $\mathbf{i}_t = (\mathbf{i}_x dx'/dt' + \mathbf{i}_y dy'/dt')/dl'$ .

Површинска густина наелектрисања може се израчунати на основу диференцијалног облика једначине континуитета,  $\rho_s = \frac{j}{2\pi f} \text{div}_s \mathbf{J}_s$ . Ако је координатни систем Декартов, последњи израз може се записати и као  $\rho_s = \frac{j}{2\pi f} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{i}_y \right) \cdot \mathbf{J}_s$ , где је дивергенција симболички замењена скаларним производом.

Како у ТМ моду површинске струје имају само аксијалну компоненту, то је површинска густина наелектрисања једнака нули,

$$\rho_s = \frac{j}{2\pi f} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{i}_y \right) \cdot J_s \mathbf{i}_z = 0, \quad (3.4)$$

јер је скаларни производ различитих јединичних вектора Декартовог координатног система једнак нули. Стога, у једначини (3.3) остаје само први сабирак, тј. расејано електрично поље потиче само од индукованих струја.

Са друге стране у ТЕ случају, вектор густине струје има и  $x$ , и  $y$  компоненту, па у општем случају, постоје и површинска, и линијска наелектрисања на траци. Треба напоменути да линијска наелектрисања не постоје физички, али с обзиром на коришћење базисних функција у апроксимацији струја чија вредност на крајевима није нула, а једначина по првом Кирхофовом закону није постављена, уведена су фиктивна линијска наелектрисања. Наиме, целодоменска апроксимација Лежандровим полиномима не обезбеђује да је струја на крајевима траке једнака нули. После примене градијента, други сабирак трансформише се у

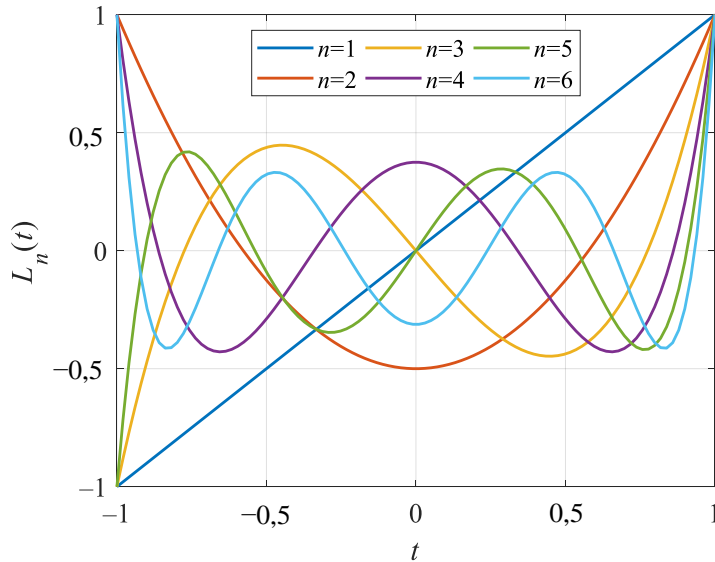
$$\frac{j}{4\epsilon} \text{grad} \left( \int_{C'} \rho_s(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(\beta R) dl' \right) = \frac{j}{4\epsilon} \left( \int_{C'} \rho_s(\mathbf{r}') \frac{\partial H_0^{(2)}(\beta R)}{\partial R} \mathbf{i}_R dl' + \sum_{k=1}^2 Q'_k \frac{\partial H_0^{(2)}(\beta R)}{\partial R} \Big|_{R_k} \mathbf{i}_{R_k} \right), \quad (3.5)$$

где је  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  вектор који полази од тачке извора поља на површинском наелектрисању и завршава се у тачки у којој се рачуна поље,  $R = |\mathbf{R}|$  је растојање између поменутих тачака,  $\mathbf{i}_R = \mathbf{R}/R$  је јединични вектор,  $Q'_k = jJ_s(t'_k)/(2\pi f)$ ,  $k \in \{1,2\}$ , је подужна густина линијских наелектрисања на два краја траке, чије су локалне координате  $t'_1 = -1$  и  $t'_2 = 1$ ,  $\mathbf{R}_k$  је вектор који полази од тачке извора поља на одговарајућем линијском наелектрисању  $Q'_k$  и завршава се у тачки у којој се рачуна поље, док је  $\mathbf{i}_{R_k} = \mathbf{R}_k/R_k$  јединични вектор, као што је и илустровано на слици 3.2. Парцијални извод Ханкелове функције је  $\frac{\partial}{\partial R} H_0^{(2)}(\beta R) = -\beta H_1^{(2)}(\beta R)$  [89], где је  $H_1^{(2)}$  Ханкелова функција друге врсте и првог реда.



$$\begin{aligned}
L_0(t) &= 1 \\
L_1(t) &= t \\
(n+1)L_{n+1}(t) &= t(2n+1)L_n(t) - nL_{n-1}(t).
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

Ови полиноми закључно са редом шест скицирани су на слици 3.3.



Слика 3.3. Лежандрови полиноми од првог до шестог реда.

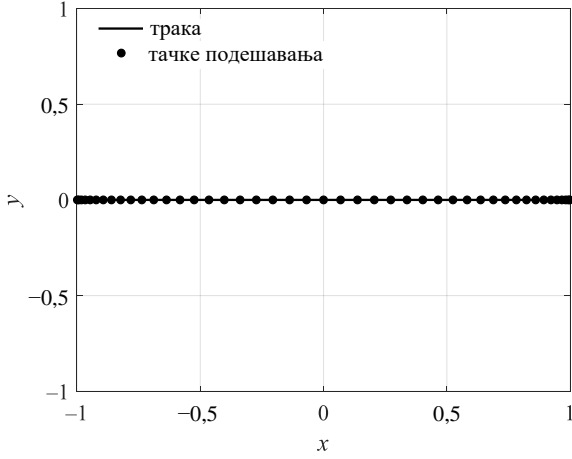
За тежинске функције коришћени су Диракови (делта) импулси

$$\delta(t - t_m) = \begin{cases} +\infty, & t = t_m \\ 0, & t \neq t_m \end{cases}
\tag{3.8}$$

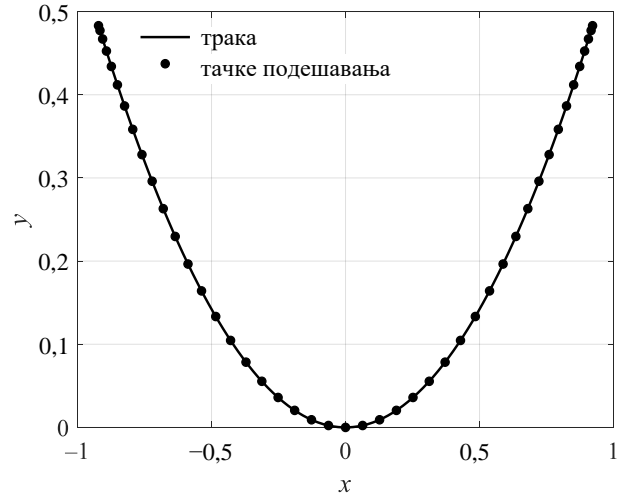
Тада се, због својства делта импулса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_m) f(t) dt = f(t_m),
\tag{3.9}$$

интеграл који се јављају у (2.34) своде на једноструке, по једној променљивој  $t'$ , што ће се видети у једначинама (3.10) и (3.11) које следе. При томе је распоред тачака подешавања  $t_m$  на траци исти као распоред апсциса из Гаус-Лежандрове нумеричке интеграције [7], [14]. Тиме су тачке подешавања гушће распоређене у околини крајева траке, односно тамо где очекујемо брже промене и велике вредности густине струја, а ређе око средине попречног пресека траке, где је ситуација обрнута. Ово је илустровано на слици 3.4, на примерима равне и изразито закривљене траке са по 45 тачака подешавања.



(a)



(б)

Слика 3.4. Пример распореда 45 тачака подешавања на (а) равној и (б) закривљеној траци.

Коначно, систем (2.34) у случају разматраног проблема у ТЕ моду своди се на

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi\mu_0 f}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{t'=-1}^1 L_n(t') H_0^{(2)}(\beta R(t', t_m)) \sqrt{x_m^2 + (2y_m t')^2} \mathbf{i}_t \cdot \mathbf{i}_{\tan} dt' - \\
& -\frac{\pi\beta f}{2\epsilon_0} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{t'=-1}^1 \frac{dL_n(t')}{dt'} H_1^{(2)}(\beta R(t', t_m)) \mathbf{i}_R \cdot \mathbf{i}_{\tan} dt' + \\
& + \frac{\beta}{8\pi\epsilon_0 f} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \sum_{k=1}^2 L_n(t'_k) H_1^{(2)}(\beta R(t'_k, t_m)) \mathbf{i}_{R_k} \cdot \mathbf{i}_{\tan} = \\
& = -E_0 e^{j\beta(x(t_m)\cos\theta + y(t_m)\sin\theta)} (-\sin\theta \mathbf{i}_x + \cos\theta \mathbf{i}_y) \cdot \mathbf{i}_{\tan},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

односно у ТМ моду на

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi\mu_0 f}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{t'=-1}^1 L_n(t') H_0^{(2)}(\beta R(t', t_m)) \sqrt{x_m^2 + (2y_m t')^2} \mathbf{i}_t \cdot \mathbf{i}_{\tan} dt' = \\
& = -E_0 e^{j\beta(x(t_m)\cos\theta + y(t_m)\sin\theta)} \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_{\tan},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где су  $t_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , тачке подешавања,  $\sqrt{x_m^2 + (2y_m t')^2}$  је Јакобијан који потиче од облика попречног пресека траке (добијен на основу параметарских једначина),  $\mathbf{i}_{\tan}$  јединични вектор тангенцијалан на попречни пресек траке,  $x(t_m)$  и  $y(t_m)$  се добијају из параметарских једначина траке за сваку тачку подешавања  $t_m$ , док јединични вектори  $\mathbf{i}_t$  узимају одговарајуће вредности у зависности од мода.

За израчунавање елемената матрице система, односно вредности које стоје уз непознате коефицијенте  $a_n$ , потребно је израчунати интеграле са сингуларним подинтегралним функцијама, што је наредни корак у анализи постављеног проблема.

### 3.5. ТИПОВИ СИНГУЛАРИТЕТА

У циљу издвајања интеграла које треба израчунати у случају било ТЕ, било ТМ мода, расејано поље може бити записано и као

$$\mathbf{E}_s(t_m) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \left( -\frac{\pi\mu_0 f}{2} \mathbf{I}_{m,n}^{(1)} - \frac{\pi\beta f}{2\varepsilon_0} \mathbf{I}_{m,n}^{(2)} + \frac{\beta}{8\pi f \varepsilon_0} \mathbf{I}_{m,n}^{(3)} \right), \quad (3.12)$$

где су

$$\mathbf{I}_{m,n}^{(1)} = \int_{t'=-1}^1 L_n(t') H_0^{(2)}(\beta R(t', t_m)) \sqrt{x_m^2 + (2y_m t')^2} \mathbf{i}_t dt', \quad (3.13)$$

$$\mathbf{I}_{m,n}^{(2)} = \int_{t'=-1}^1 \frac{dL_n(t')}{dt'} H_1^{(2)}(\beta R(t', t_m)) \mathbf{i}_R dt' \quad (3.14)$$

интеграла са сингуларним интеграндима, док је

$$\mathbf{I}_{m,n}^{(3)} = \sum_{k=1}^2 L_n(t'_k) H_1^{(2)}(\beta R_k(t'_k, t_m)) \mathbf{i}_{R_k}. \quad (3.15)$$

Као што је већ поменуто, у ТМ случају на траци нема наелектрисања стога је тада  $\mathbf{I}_{m,n}^{(2)} = 0$  и  $\mathbf{I}_{m,n}^{(3)} = 0$ .

Ханкелове функције, које се појављују у (3.13)–(3.15), теже бесконачности када  $R$  тежи нули, односно када се тачка подешавања  $t_m$  приближава тачки извора поља  $t'$ . Кажемо и да је тачка  $t_m$  сингуларитет подинтегралне функције.

На основу Тејлорових развоја у околини нуле, Ханкелове функције могу се апроксимирати са

$$H_0^{(2)}(R) \approx \left( 1 - \frac{R^2}{4} + \frac{R^4}{64} \right) - j \frac{2}{\pi} \left( \left( \ln \frac{R}{2} + \gamma \right) - \frac{R^2}{4} \left( \ln \frac{R}{2} + \gamma - 1 \right) - \frac{R^4}{128} \left( \ln \frac{4}{R^2} - 2\gamma + 3 \right) \right), \quad (3.16)$$

односно

$$H_1^{(2)}(R) \approx \left( \frac{R}{2} - \frac{R^3}{16} + \frac{R^5}{384} \right) - j \left( -\frac{2}{\pi R} - \frac{R}{2\pi} \left( \ln \frac{4}{R^2} - 2\gamma + 1 \right) + \frac{R^3}{32\pi} \left( \ln \frac{16}{R^4} - 4\gamma + 5 \right) - \frac{R^5}{576\pi} \left( \ln \frac{8}{R^3} - 3\gamma + 5 \right) \right), \quad (3.17)$$

где је  $\gamma \approx 0,57721\dots$  Ојлерова константа (енглески: *Euler Mascheroni constant*). Из претходних израза закључујемо да је сингуларитет функције  $H_0^{(2)}$  облика  $\log R$ , док је сингуларитет функције  $H_1^{(2)}$  облика  $1/R$ .

Додатно, електрично поље површинског наелектрисања на траци није дефинисано на самој траци, односно за  $R = 0$  (скоковито се мења при проласку кроз траку), али има коначне



вредности за  $R=0^+$  и  $R=0^-$ . Стога ће тачка у којој рачунамо поље бити постављена на растојању  $\xi = 10^{-5}$   $w$  нормално изнад површи траке. То растојање од  $\xi = 10^{-5}$   $w$  изабрано је након низа нумеричких симулација као најмање растојање за које нумерички резултати не дивергирају.

Најзад, за рачунање самих Ханкелових функција реалних аргумената са високом тачношћу коришћена је већ постојећа библиотека MKL (енглески: *math kernel library*, скраћено: MKL) [90].

### 3.6. ОСНОВНА ИДЕЈА ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА

У циљу израчунавања интеграла (3.13) и (3.14) са високом тачношћу, односно брже конвергенције нумеричке интеграције, увешћемо смене које ће поништити поменуте сингуларитете. Нека трансформација  $t'(s')$  пресликава променљиву  $t' \in [-1, 1]$  у променљиву  $s' \in [-1, 1]$  и нека је Јакобијан те трансформације  $dt'/ds'$ . Након ове смене променљивих, интеграл (3.13) и (3.14) постају

$$\mathbf{I}_{m,n}^{(1)} = \int_{s'=-1}^1 L_n(t'(s')) H_0^{(2)}(\beta R(t'(s'), t_m)) \sqrt{x_m^2 + (2y_m t'(s'))^2} \mathbf{i}_t \frac{dt'}{ds'} ds', \quad (3.18)$$

$$\mathbf{I}_{m,n}^{(2)} = \int_{s'=-1}^1 L'_n(t'(s')) H_1^{(2)}(\beta R(t'(s'), t_m)) \mathbf{i}_R \frac{dt'}{ds'} ds'. \quad (3.19)$$

Основна идеја је пронаћи смену која у новом  $s'$  домену растеже окоину сингуларитета са циљем да примењена нумеричка интеграција брже конвергира. Како у претходним формулама, сингуларитети потичу од сингуларитета Ханкелових функција, док су Лежандрови полиноми и Јакобијан  $\sqrt{x_m^2 + (2y_m t'(s'))^2}$  несингуларни, то је од кључног значаја за растезање домена и поништавање сингуларитета. Наиме, ако у околини сингуларитета производ  $H_0^{(2)} \frac{dt'}{ds'}$ , односно производ  $H_1^{(2)} \frac{dt'}{ds'}$  тежи некој константној вредности, подинтегралне функције постају значајно лакше за примену нумеричке интеграције. Посебно, ако су те константне вредности једнаке нули, кажемо да је сингуларитет поништен.

### 3.7. СМЕНЕ КОЈЕ ПОНИШТАВАЈУ СИНГУЛАРИТЕТЕ

У овом одељку биће побројано неколико смена које поништавају поменуте сингуларитете, док ће у наставку оне бити детаљније анализирани. Заједничко свим предложеним сменама су врло слични Тејлорови развоји у околини нуле. При томе се сингуларитети  $t_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , из домена  $t'$  пресликавају у нулу у новом домену  $s'$ . Идеја сваке смене је да: (а) растегне окоину сингуларитета и (б) поништи сингуларитет. Свака од предложених смена зависи од тачке у којој се налази сингуларитет, тј. тачке  $t_m$ , као и од једног или два параметра којима се растезање око сингуларитета подешава, чиме ћемо се посебно бавити.

Поред анализираних могу се користити и неке друге (непарне) функције које пресликавају интервал  $[-1, 1]$  у интервал  $[-1, 1]$  као смене које такође поништавају сингуларитете Ханкелових функција. У оквиру ове дисертације задржаћемо се на наредних неколико једноставних, аналитички задатих функција.

### 3.7.1. СМЕНА СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ

Прва предложена смена и њен Јакобијан је [14]

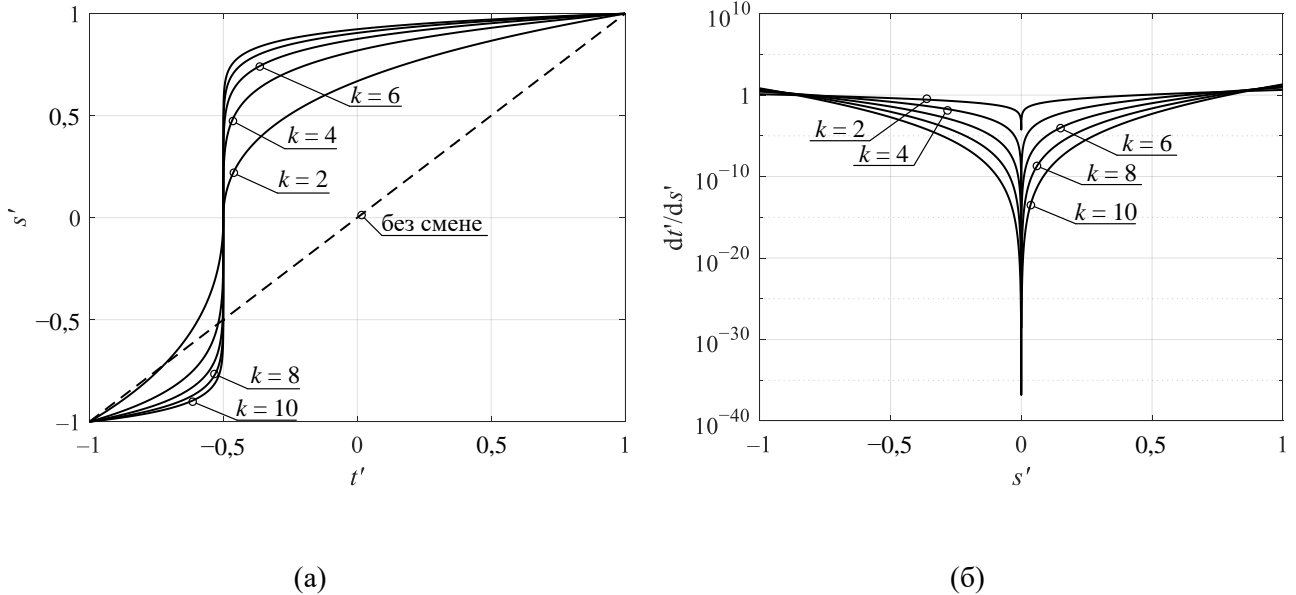
$$t'(s') = t_m + \operatorname{sgn}(s')(A^{|s'|} - 1)^k, \quad (3.20)$$

$$\frac{dt'}{ds'} = k(A^{|s'|} - 1)^{k-1} A^{|s'|} \ln(A), \quad (3.21)$$

где је  $t_m$  тачка подешавања (тачка сингуларитета),  $A = 1 + (1 - \operatorname{sgn}(s')t_m)^{1/k}$ ,  $\ln(x)$  је природни логаритам,  $\operatorname{sgn}(x)$  је сигнум функција и  $k$  је реалан број ( $k \geq 2$ ) који представља параметар трансформације. Инверзна функција дата је изразом [14]

$$s'(t') = \operatorname{sgn}(t' - t_m) \frac{\ln(1 + |t' - t_m|^{1/k})}{\ln(1 + |t_m - \operatorname{sgn}(t' - t_m)|^{1/k})}. \quad (3.22)$$

На слици 3.5а [14] приказана је трансформација за  $t_m = -0,5$  и  $k \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .



Слика 3.5. Илустрација трансформације за  $t_m = -0,5$  и различите изборе параметра  $k$ : (а) смена и (б) одговарајући Јакобијани. [14]

Домени променљивих  $s'$  и  $t'$  формално су исти, тј.  $-1 \leq s', t' \leq 1$  за све тачке подешавања  $t_m$ . Са слике се може видети да трансформација растеже тачке у  $s'$ -домену око сингуларитета, док су остали делови збијени, а параметар  $k$  квантитативно контролише то растезање, односно сабијање. Додатно, тачка подешавања (тачка сингуларитета)  $t_m$  пресликана је у  $s' = 0$ . Са слике 3.5б, где су приказани одговарајући Јакобијани, види се да они теже нули у

новој тачки сингуларитета у  $s'$ -домену. Ово је важна особина смене, која утиче на поништавање сингуларитета, као што ће и бити доказано у одељцима 3.8.1 и 3.8.2.

### 3.7.2. СМЕНА СА СТЕПЕНИМ ЧЛАНОМ

Смена са степеним чланом (ова смена ће ради једноставности референцирања у наставку бити навођена као смена А) дефинисана је на следећи начин. Нека је  $t'(s')$  у (3.18) и (3.19) задато као

$$t' = |s'|^{m_1-1} s' (1 - \operatorname{sgn}(s') t_m) + t_m, \quad (3.23)$$

где је  $m_1$  реални број већи од 1, тј.  $m_1 \geq 1$ . Како  $s', t_m \in [-1, 1]$ , то је онда и  $t' \in [-1, 1]$ . Јакобијан ове трансформације је

$$\frac{dt'}{ds'} = m_1 |s'|^{m_1-1} (1 - \operatorname{sgn}(s') t_m). \quad (3.24)$$

На слици 3.6а приказана је, између осталих, и смена А за једну тачку сингуларитета и један параметар трансформације, док је на слици 3.6б дат одговарајући Јакобијан. Слика 3.6а је илустровано да се и овом сменом сингуларитет из једног домена пресликава у нулу у другом домену, док Јакобијан трансформације тежи нули у тачки сингуларитета. Слично као и у претходној смени, параметром  $m_1$  контролишу се растезање и сабијање у  $s'$ -домену.

### 3.7.3. СМЕНА СА СИНУСОМ

Смена са синусом (ова смена ће ради једноставности референцирања у наставку бити навођена као смена В) дата је изразом

$$t'(u) = t_m + (1 - \operatorname{sgn}(u) t_m) u, \quad (3.25)$$

где је

$$u(s') = \operatorname{sgn}(s') \left( \frac{|\sin(m_2 s')|}{\sin(m_2)} \right)^{m_1}, \quad (3.26)$$

и где су параметри трансформације  $m_1$  и  $m_2$  реални позитивни бројеви. Једначина (3.26) растеже променљиву у околини сингуларитета, док (3.25) само помера растезање у околину тачке сингуларитета  $t_m$ , тј. пресликава сингуларитет из  $t_m$  у нулу у  $s'$ -домену, као што је приказано на слици 3.6а. Јакобијан ове трансформације је

$$\frac{dt'}{ds'} = m_1 m_2 \left( \frac{\operatorname{sgn}(s') \sin(m_2 s')}{\sin(m_2)} \right)^{m_1-1} \frac{\cos(m_2 s')}{\sin(m_2)} (1 - \operatorname{sgn}(s') t_m), \quad (3.27)$$

који је илустрован на слици 3.6б.

У околини краја траке ( $s'=1$  и  $s'=-1$ ) функција  $\cos(m_2 s')/\sin(m_2)$  се понаша као котангенс, који је периодичан са периодом  $\pi$  и антисиметричан око  $\pi/2$ . Стога је параметар  $m_2$  ограничен на  $\pi/2$ , тј.  $0 < m_2 < \pi/2$ . За први параметар важи да је  $m_1 \geq 1$ .

У наставку су представљене још три смене које се од смене са синусом разликују само у функцији која се степењује у (3.26), тј. функцији  $u(s')$ .

### 3.7.4. СМЕНА СА СИНУС ХИПЕРБОЛИЧКИМ

Смена коју следећу разматрамо (ова смена ће ради једноставности референцирања у наставку бити навођена као смена С) дата је изразом

$$u(s') = \operatorname{sgn}(s') \left( \frac{|\sinh(m_2 s')|}{\sinh(m_2)} \right)^{m_1}, \quad (3.28)$$

где је  $t'(u)$  дато једначином (3.25), док су параметри задовољавају услове  $m_1 \geq 1$  и  $0 < m_2 < \pi/2$ . Јакобијан ове трансформације је

$$\frac{dt'}{ds'} = m_1 m_2 \left( \frac{\operatorname{sgn}(s') \sinh(m_2 s')}{\sinh(m_2)} \right)^{m_1 - 1} \frac{\cosh(m_2 s')}{\sinh(m_2)} (1 - \operatorname{sgn}(s') t_m). \quad (3.29)$$

### 3.7.5. СМЕНА СА ТАНГЕНСОМ

Ако уместо синуса или синуса хиперболичког у претходним сменама искористимо тангенс, добијамо наредну смену коју ћемо разматрати (ова смена ће ради једноставности референцирања у наставку бити навођена као смена D)

$$u(s') = \operatorname{sgn}(s') \left( \frac{|\tan(m_2 s')|}{\tan(m_2)} \right)^{m_1}, \quad (3.30)$$

где је  $t'(u)$  дато једначином (3.25), а параметри  $m_1 \geq 1$  и  $0 < m_2 < \pi/2$ . Јакобијан ове трансформације је

$$\frac{dt'}{ds'} = m_1 m_2 \left( \frac{\operatorname{sgn}(s') \tan(m_2 s')}{\tan(m_2)} \right)^{m_1 - 1} \frac{(1 - \operatorname{sgn}(s') t_m)}{\tan(m_2) \cos^2(m_2 s')}. \quad (3.31)$$

### 3.7.6. СМЕНА СА ТАНГЕНС ХИПЕРБОЛИЧКИМ

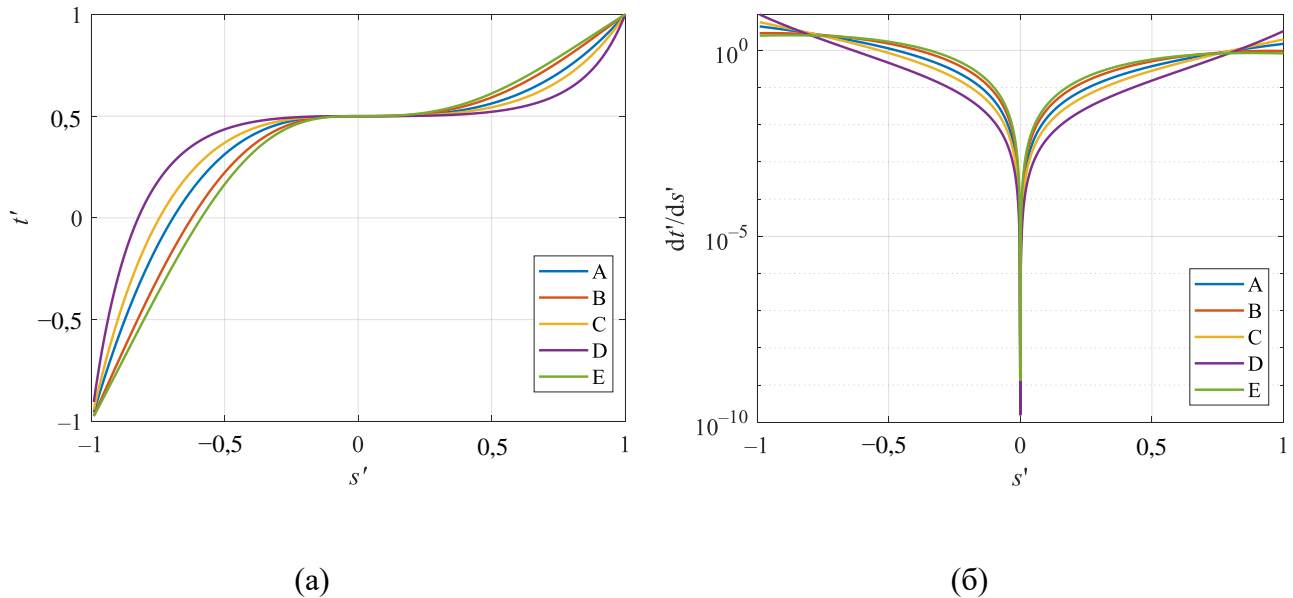
Коначно, ако уместо тангенса употребимо тангенс хиперболички, смена је (ова смена ће ради једноставности референцирања у наставку бити навођена као смена E)

$$u(s') = \operatorname{sgn}(s') \left( \frac{|\tanh(m_2 s')|}{\tanh(m_2)} \right)^{m_1}, \quad (3.32)$$

где је  $t'(u)$  дато једначином (3.25),  $m_1 \geq 1$  и  $0 < m_2 < \pi/2$ , док је Јакобијан

$$\frac{dt'}{ds'} = m_1 m_2 \left( \frac{\operatorname{sgn}(s') \sinh(m_2 s')}{\sinh(m_2)} \right)^{m_1 - 1} \frac{\cosh(m_2 s')}{\sinh(m_2)} (1 - \operatorname{sgn}(s') t_m). \quad (3.33)$$

Смене предложене у одељцима 3.7.2–3.7.6 за један сет параметара илустроване су на слици 3.6а, док су одговарајући Јакобијани приказани на слици 3.6б. Одатле се може видети да су сингуларитети пресликани у нулу, да је њихова околина растегнута, као и да Јакобијани трансформација теже нули у сингуларитету. Последњи закључак је потребан, али не и довољан услов поништавања сингуларитета предложеним сменама. Докази су дати у поглављу 3.8. Такође, са слике 3.6 види се да су ове смене, иако имају различит аналитичке изразе, квалитативно сличне.



Слика 3.6. Илустрација (а) трансформација и (б) одговарајућих Јакобијана када је  $t_m = 0,5$ ,  $m_1 = 3$  и  $m_2 = 1$ .

### 3.8. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗИ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА

У наставку су дати докази поништавања сингуларитета, који се срећу у 2-D електромагнетским проблемима, претходно наведеним сменама. Први и други доказ односе се на смену са експоненцијалним чланом, док се трећи доказ односи на поништавање сингуларитета сменама А–Е.

#### 3.8.1. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗ ПОНИШТАВАЊА ЛОГАРИТАМСКОГ СИНГУЛАРИТЕТА СМЕНОМ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ

За предложену смену (3.20) изведен је теоријски доказ поништавања логаритамског сингуларитета који је дат у наставку. Овај доказ објављен је у [14] када је и први пут предложена та смена.

Нека је  $f(t')$  интегранд интеграла (3.13) пре трансформације, док је  $g(s') = f(t'(s'))dt'/ds'$  интегранд након трансформације, тј. подинтегрална функција у (3.18). У циљу поједностављивања доказа, сматраћемо да је  $s' > 0$ . Доказ за  $s' < 0$  формално је исти пошто се интегранд  $g(s')$  понаша исто у околини нуле када  $s' \rightarrow 0^-$  и када  $s' \rightarrow 0^+$ . Полазимо од Тејлоровог развоја одговарајуће Ханкелове функције у околини нуле (3.16). Када занемаримо константе, интегранд  $g(s')$  се у околини  $s' \rightarrow 0^+$  понаша као

$$\lim_{s' \rightarrow 0^+} g(s') = \lim_{s' \rightarrow 0^+} A^{s'} (A^{s'} - 1)^{k-1} L_n(s') \ln(s'), \quad (3.34)$$

где је  $k \geq 2$ . Лежандрови полиноми непарних редова у околини нуле, тј. за  $s' \rightarrow 0^+$ , једнаки су нули, док Лежандрови полиноми парних редова имају коначне, ненулта вредности. Одатле следи да функција  $g(s')$  брже конвергира у случају непарних него парних редова полинома. Додатно, члан  $(A^{s'} - 1)^{k-1}$  брже тежи нули за веће вредности  $k$ , пошто је  $\lim_{s' \rightarrow 0^+} (A^{s'} - 1) = 0$ . Стога, као најтежи случај, тј. најспорију конвергенцију, посматрамо  $k = 2$  и парне редове Лежандрових полинома. Даље, како је  $\lim_{s' \rightarrow 0^+} A^{s'} = 1$ , поменути лимес може се поједноставити на следећи начин

$$\lim_{s' \rightarrow 0^+} A^{s'} (A^{s'} - 1) \ln(s') = \lim_{s' \rightarrow 0^+} (A^{s'} - 1) \ln(s'). \quad (3.35)$$

На основу Тејлоровог развоја  $A^{s'}$  у околини нуле,  $A^{s'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s'^n \ln^n(A)}{n!} \approx 1 + s' \ln(A)$ , лимес (3.35) се даље своди на

$$\lim_{s' \rightarrow 0^+} (A^{s'} - 1) \ln(s') = \lim_{s' \rightarrow 0^+} (s' \ln(A) \ln(s')), \quad (3.36)$$

одакле следи да је

$$\lim_{s' \rightarrow 0^+} g(s') = \ln(A) \lim_{s' \rightarrow 0^+} s' \ln(s') = 0. \quad (3.37)$$

Другачије речено, вредност интегранда  $g(s')$  у нули, где је трансформацијом премештен сингуларитет, једнака је нули, односно, сингуларитет је поништен.

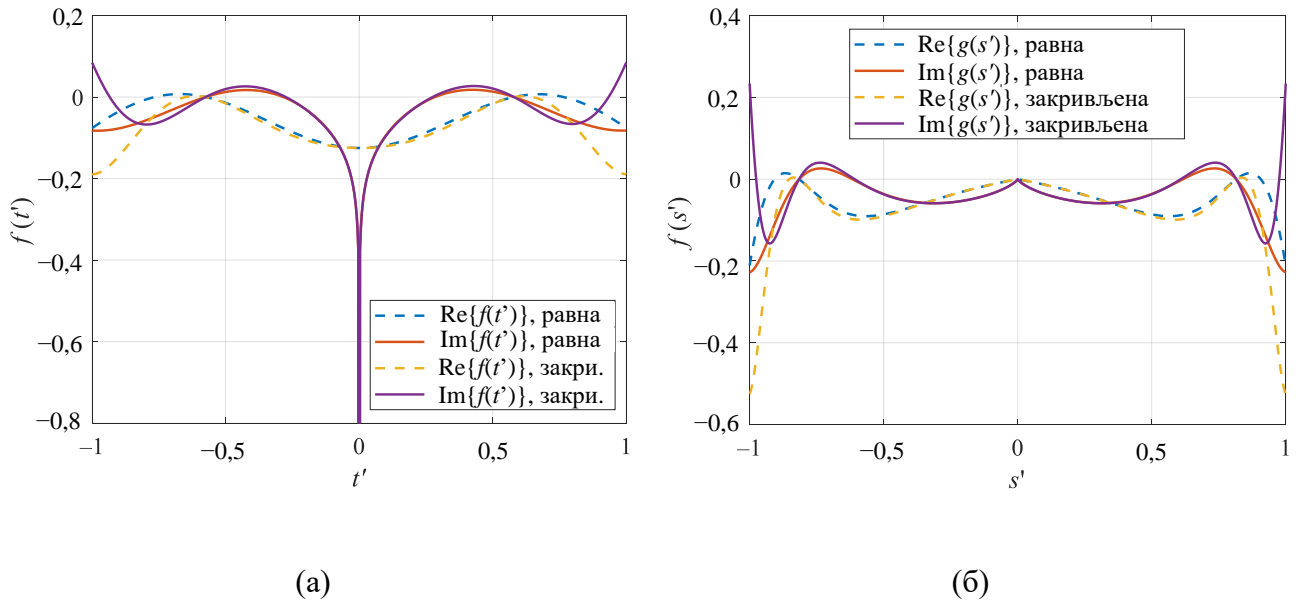
Ово је најважнија особина предложене трансформације: како трансформисани интегранд није сингуларан, то се нумеричка интеграција може спровести са много мање рачунарских ресурса за постизање жељене тачности. С обзиром на то да се свака ограничена функција може представити преко полинома, то доказ који је дат важи за све базисне функције које су ограничене и чији је домен  $[-1, 1]$ .

Као илустрација претходно описаног, на слици 3.7 приказани су реални и имагинарни делови функција  $f(t')$ , тј. интегранда пре трансформације, и функције  $g(s')$ , тј. интегранда после трансформације [14]. Графици илуструју случај равне и закривљене траке ширине  $w = \lambda$  побуђене таласом у ТМ моду, када је тачка подешавања  $t_m = 0$ , а базисна функција другог реда.

Са слика 3.7а и 3.7б може се видети да се у околини сингуларитета функције понашају врло слично било да је у питању равна или закривљена трака. Одатле следи да се предложена трансформација може искористити у оба случаја, што ће бити показано на нумеричким примерима у наставку, а и за било коју траку полупречника кривине који је између равне и изразито закривљене.

Након трансформације спроводи се добро позната Гаус-Лежандрова нумеричка интеграција у циљу постизања предефинисане тачности, а нама је од интереса максимална могућа. Може се очекивати да је за различите изборе параметра  $k$  потребан и различит број интеграционих тачака, тј. да постоји оптималан избор параметра  $k$  за који је број

интеграционих тачака минималан. У одељку 3.10 ће питање минималног броја интеграционих тачака бити посебно разматрано.



Слика 3.7. Реални и имагинарни делови интегранда у случају равне и закривљене траке у ТМ моду ширине  $w = \lambda$  (а) пре и (б) после трансформације. [14]

### 3.8.2. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА ОБЛИКА $1/R$ СМЕНОМ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ

Предложена смена (3.20) поништава и други сингуларитет који се среће у 2-D електромагнетским проблемима, тј. сингуларитет облика  $1/R$ , што ће бити доказано у наставку.

Нека је сада  $f(t')$  интегранд интеграла (3.14) пре трансформације, док је  $g(s') = J(s')f(t'(s'))$  интегранд истог интеграла после трансформације, тј. подинтегрална функција у (3.19). Када изоставимо константе, поменуте функције пропорционалне су изразима

$$\begin{aligned}
 f(t') &\sim L_n(t')H_1^{(2)}(\beta t'), \\
 g(s') &\sim L_n(t'(s'))H_1^{(2)}(\beta t'(s'))\frac{dt'}{ds'}.
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

Базисна функција  $L_n$ , која је у нашем случају полином, није сингуларна. С друге стране, Јакобијан трансформације  $dt'/ds'$ , дат изразом (3.21), поништава сингуларитет, јер у нули, где је након трансформације (3.20) сингуларитет премештен, има вредност која је блиска нули, као што ће бити доказано у наставку.

Како је сингуларитет после трансформације у нули, то је од интереса проверити понашање интегранда  $g(s')$  у околини нуле, тј. вредност лимеса  $\lim_{s' \rightarrow 0} g(s')$ . Реални део функције  $g(s')$  нема сингуларитете, док је имагинарни део сингуларан. Јакобијан (3.21) може се записати и као

$$\frac{dt'}{ds'} = k(A^{s'} - 1)^{k-1} A^{s'} \ln(A), \quad (3.39)$$

када је  $s' > 0$ , односно као

$$\frac{dt'}{ds'} = k(A^{-s'} - 1)^{k-1} A^{-s'} \ln(A) \quad (3.40)$$

када је  $s' < 0$ . Имајући у виду Тејлоров развој у околини нуле одговарајуће Ханкелове функције, дат изразом (3.17), и изостављајући константе добијамо

$$\lim_{s' \rightarrow 0^+} \text{Im}\{g(s')\} = \lim_{s' \rightarrow 0^+} (A^{s'} - 1)^{k-1} A^{s'} \frac{1}{s'}. \quad (3.41)$$

Поново на основу Тејлоровог развоја у околини нуле важи да је  $\lim_{s' \rightarrow 0^+} A^{s'} = \lim_{s' \rightarrow 0^+} (1 + s' \ln A) = 1$ , одакле је

$$\lim_{s' \rightarrow 0^+} \text{Im}\{g(s')\} = 0 \quad (3.42)$$

за  $k \geq 2$ . На сличан начин показује се и да је лимес са леве стране једнак нули, тј. да је и  $\lim_{s' \rightarrow 0^-} \text{Im}\{g(s')\} = 0$ , одакле следи да је

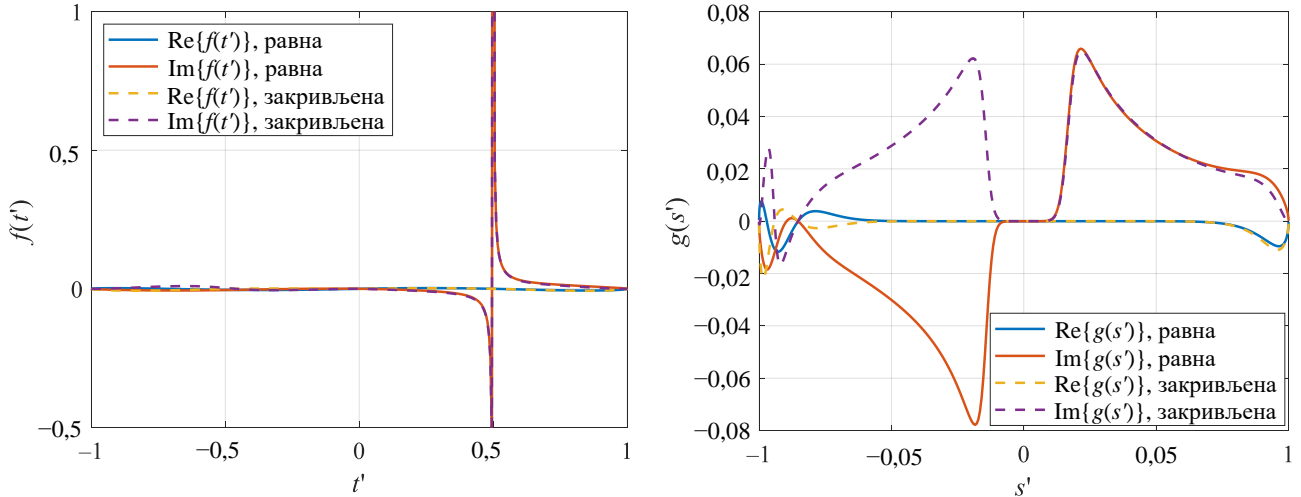
$$\lim_{s' \rightarrow 0} g(s') = 0, \quad (3.43)$$

односно да је сингуларитет поништен.

Овим је доказано да предложена смена са експоненцијалним чланом поништава оба сингуларитета који се срећу у ТЕ моду ( $\log R$  и  $1/R$ ).

Као илустрација претходног, дата је слика 3.8. На слици 3.8 приказани су реални и имагинарни делови функција  $f(t')$  и  $g(s')$  равне и закривљене траке ширине  $w = \lambda$  побуђене ТЕ модом, када је сингуларитет у  $t_m = 0,5$ , а базисна функција другог реда. Са слике 3.8а се може видети да се имагинарни делови функција  $f(t')$  врло слично понашају у околини сингуларитета. Након смене, сингуларитети су поништени, што и илуструје слика 3.8б.





(a)

(б)

Слика 3.8. Реални и имагинарни делови интегранда у случају равне и закривљене траке у ТЕ моду ширине  $w = \lambda$  (а) пре и (б) после трансформације.

### 3.8.3. ТЕОРИЈСКИ ДОКАЗ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА

У овом одељку дат је доказ поништавања сингуларитета облика  $\log R$  и  $1/R$  сменама А–Е предложеним у одељцима 3.7.2–3.7.6, који се срећу у интегралима (3.18) и (3.19).

Интегранди поменутих интеграла су производ Лежандровог полинома (базисне функције), једне од Ханкелових функција ( $H_0^{(2)}$  или  $H_1^{(2)}$ ) и одговарајућег Јакобијана. Након сваке од предложених трансформација, тј. након (3.25), сингуларитет Ханкелове функције померен је у  $s'=0$ . Додатно, захваљујући Јакобијану, сингуларитет је поништен, као што ће бити доказано у наставку. У циљу теоријског доказа поништавања сингуларитета, фокусирајмо се на интеграле облика  $\int_{-1}^1 H_0^{(2)}(s') \frac{dt'}{ds'} ds'$  и  $\int_{-1}^1 H_1^{(2)}(s') \frac{dt'}{ds'} ds'$ , где су константе и Лежандрови полиноми изостављени, јер они немају утицај на сингуларитете.

Јакобијани свих предложених смена у околини нуле имају Тејлоров развој пропорционалан истој функцији,  $\frac{dt'}{ds'} \sim s'^{m_1-1}$ . Наиме, у случају смене А, очигледно је да важи пропорционалност. У случају смене В Јакобијан је пропорционалан изразу  $(\sin(m_2 s'))^{m_1-1} \cos(m_2 s') \sim (m_2 s')^{m_1-1} \cdot 1 \sim s'^{m_1-1}$ . Слично, Јакобијан смене С пропорционалан је изразу  $(\sinh(m_2 s'))^{m_1-1} \cosh(m_2 s') \sim (m_2 s')^{m_1-1} \cdot 1 \sim s'^{m_1-1}$ , смене D изразу  $(\tan(m_2 s'))^{m_1-1} \frac{1}{\cos^2(m_2 s')} \sim (m_2 s')^{m_1-1} \cdot 1 \sim s'^{m_1-1}$ , односно смене E изразу  $(\tanh(m_2 s'))^{m_1-1} \frac{1}{\cosh^2(m_2 s')} \sim (m_2 s')^{m_1-1} \cdot 1 \sim s'^{m_1-1}$ . Тејлорови развоји у околини нуле Ханкелових функција дати су изразима (3.16) и (3.17).

На основу претходног следи да се лимес имагинарног дела интегранда  $H_0^{(2)}(s') \frac{dt'}{ds'}$  може записати као

$$\lim_{s' \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left\{ H_0^{(2)}(s') \frac{dt'}{ds'} \right\} = \lim_{s' \rightarrow 0} \ln(s') s'^{m_1-1}, \quad (3.44)$$

где су константе изостављене због читљивости, али без губитка општости. Када  $x \rightarrow 0$ , онда је  $\ln(x) \approx x - 1$ , па је лимес поменутог интегранда једнак

$$\lim_{s' \rightarrow 0} (s'-1) s'^{m_1-1} = 0, \quad (3.45)$$

што важи када је  $m_1 > 1$ .

Слично, лимес имагинарног дела другог интегранда,  $H_1^{(2)}(s') \frac{dt'}{ds'}$ , једнак је

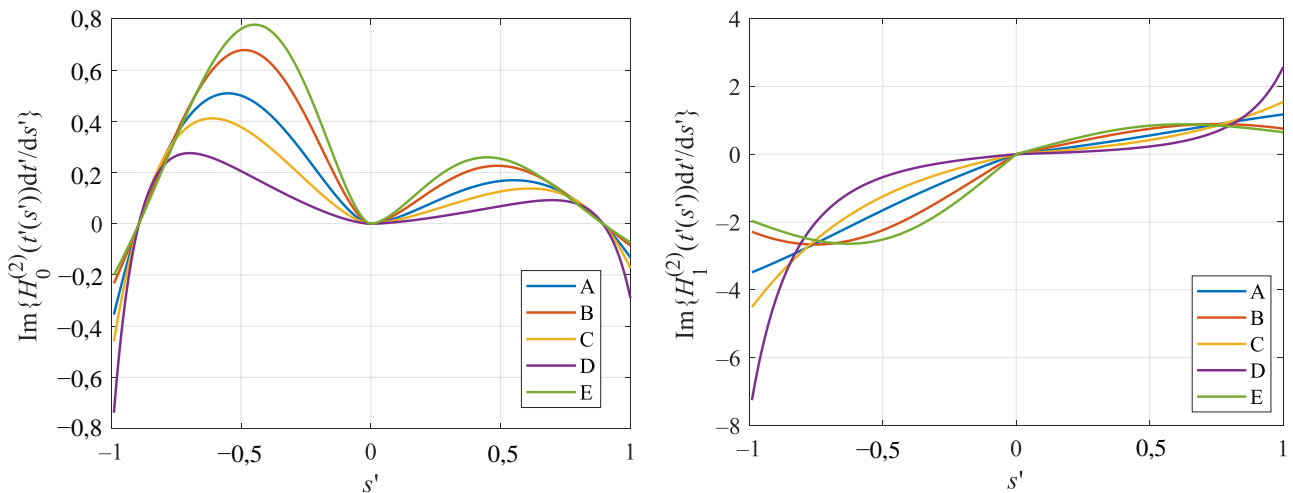
$$\lim_{s' \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left\{ H_1^{(2)}(s') \frac{dt'}{ds'} \right\} = \lim_{s' \rightarrow 0} \frac{1}{s'} s'^{m_1-1} = \lim_{s' \rightarrow 0} s'^{m_1-2} = 0 \quad (3.46)$$

за  $m_1 > 2$ .

Реални делови интегранда нису сингуларни. Стога се они интеграле директном применом неког од нумеричких метода интеграције.

На слици 3.9 илустровани су имагинарни делови интегранда после сваке од пет смена А–Е, за параметре  $m_1 = 3$  и  $m_2 = 1$ , одакле се може видети да су сингуларитети у  $t_m = 0,5$  успешно поништени.

Са теоријске тачке гледишта све предложене смене поништавају сингуларитете облика  $\log R$  и  $1/R$ . Ипак, оне се другачије понашају у регионима који нису у самој околини сингуларитета. Није познат једноставан начин теоријског сагледавања ових разлика, па су спроведени нумерички експерименти за проналазак смене која је најпогоднија у пракси, као и њених параметара. Такође, све друге функције које имају Јакобијан који је пропорционалан  $s'^{m_1-1}$  могу да се користе.



(а)

(б)

Слика 3.9. Имагинарни делови интегранда после смена А–Е у случају Ханкелове функције друге врсте и (а) нултог и (б) првог реда за  $m_1 = 3$  и  $m_2 = 1$ .

### 3.9. ПРОЦЕНА ГРЕШКЕ И БРОЈА ТАЧНИХ ЦИФРА

Да бисмо могли да квантификујемо конвергенцију интеграла, нађемо оптималне параметре и упоредимо различите смене, уводимо процену релативне грешке нумеричких интеграла који се појављују код анализе у случају ТМ мода

$$\delta_{\text{TM}} = \log_{10} \frac{\left| I_{z, N_{\text{int}}}^{(1)} - I_{z, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}}^{(1)} \right|}{\left| I_{z, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}}^{(1)} \right|}, \quad (3.47)$$

односно за ТЕ мод

$$\delta_{\text{TE}} = \log_{10} \frac{\sqrt{\left| I_{x, N_{\text{int}}} - I_{x, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}} \right|^2 + \left| I_{y, N_{\text{int}}} - I_{y, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}} \right|^2}}{\sqrt{\left| I_{x, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}} \right|^2 + \left| I_{y, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}} \right|^2}}, \quad (3.48)$$

где су  $I_{x, N_{\text{int}}}$  и  $I_{y, N_{\text{int}}}$  компоненте вектора  $\mathbf{I} = -\frac{\pi\mu_0 f}{2} \mathbf{I}^{(1)} - \frac{\pi\beta f}{2\varepsilon_0} \mathbf{I}^{(2)} + \frac{\beta}{8\pi f \varepsilon_0} \mathbf{I}^{(3)}$  израчунате са  $N_{\text{int}}$  интеграционих тачака, док су  $I_{x, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}}$  и  $I_{y, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}}$  исте компоненте израчунате са  $N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}$  тачака, а  $I_{z, N_{\text{int}}}^{(1)}$  и  $I_{z, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}}^{(1)}$  су компоненте вектора  $-\frac{\pi\mu_0 f}{2} \mathbf{I}^{(1)}$  израчунате са  $N_{\text{int}}$ , односно  $N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}$  интеграционих тачака. Обратите пажњу да наведени изрази улазе као линеарна комбинација у апроксимацију расејаног поља (3.12), односно да у случају ТЕ мода постоје само  $x$  и  $y$  компоненте електричног поља, док у случају ТМ мода постоји само  $z$  компонента електричног поља. Ради једноставности означавања, изостављене су ознаке  $m, n$  из индекса интеграла. Сматраћемо да је  $\Delta N_{\text{int}} = 2$ .

Како се број тачних значајних цифара на основу релативне грешке  $\delta$  може израчунати као  $-\log_{10} \delta$ , то је процена броја значајних цифара у интегралима (3.47) и (3.48)  $-\delta_{\text{TM}}$  и  $-\delta_{\text{TE}}$ .

У ТМ случају рачунаћемо и процену апсолутне грешке интеграла нормализоване на 1 А,

$$\Delta_{\text{TM}} = \log_{10} \frac{\left| I_{z, N_{\text{int}}}^{(1)} - I_{z, N_{\text{int}} + \Delta N_{\text{int}}}^{(1)} \right|}{1 \text{ A}}. \quad (3.49)$$

Израз је нормализован да би под логаритмом био неименован број.

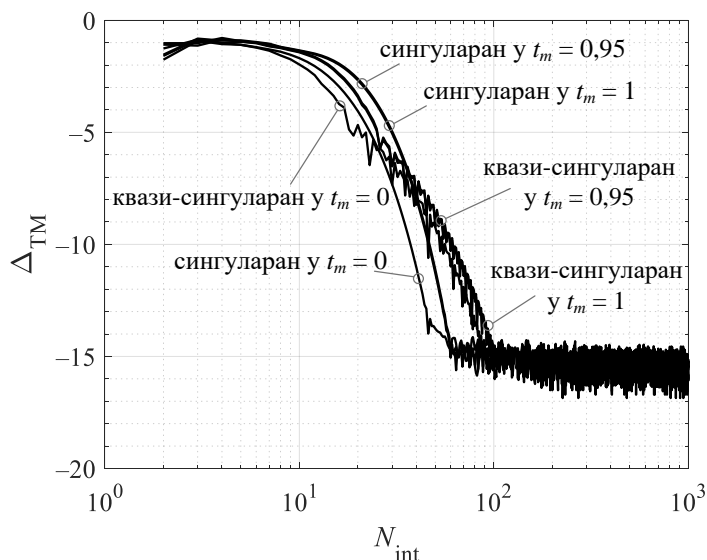
Пре него што пређемо на конкретне реализације смена, остаје да утврдимо где се налазе тачке подешавања за које је потребно више интеграционих тачака да би интеграл исконвергирао. Број интеграционих тачака потребних за високу тачност интеграла са овим тачкама подешавања већи је од броја интеграционих тачака потребних за високу тачност интеграла у осталим (за интеграцију лакшим) тачкама подешавања. Од интереса је одредити број интеграционих тачака који обезбеђује високу тачност интеграла у свим тачкама подешавања.

У те сврхе спроведен је следећи експеримент, објављен и у [14]. Нека је расејач равна трака ширине  $w = \lambda$  и нека су базисне функције Лежандрови полиноми. Трака је побуђена ТМ модом. Овде ћемо посматрати интеграл који одговара базисној функцији другог реда, тј.  $n = 2$ . До истих закључака се може доћи и када је ред полинома различит од два, тј.  $n \neq 2$ .

Тачке подешавања су: (а) на самом крају траке ( $t_m = 1,0$ ), (б) у близини краја траке ( $t_m = 0,95$ ) и (в) на средини траке ( $t_m = 0$ .) Иако су у целодоменској анализи, коју ћемо овде спровести, од интереса превасходно интегрални са сингуларним интеграндима, само ради комплетности приказани су и интегрални са квази-сингуларним подинтегралним функцијама. За друге поменуте је тачка у којој рачунамо поље на растојању  $\lambda/100$  на нормали изнад тачке подешавања  $t_m$ . Процена грешака интеграла у свим наведеним случајевима приказане су на слици 3.10. У оквиру овог експеримента коришћена је смена (3.20), мада су закључци исти при коришћењу било које од наведених смена.

Када је  $t_m = 1,0$ , коришћена смена даје нуле за све вредности  $s' \in [0, 1]$ . Одатле следи да је довољно интегралити само у једној половини  $s'$ -домена, што два пута смањује потребан број интеграционих тачака. Када је  $t_m = 0$ , за конвергенцију је потребно мање тачака него када је  $t_m = 0,95$ . Са графика се може закључити и да је за максималну тачност, тј. за 14 значајних цифара, за конвергенцију интеграла са квази-сингуларним функцијама потребно два пута више интеграционих тачака него у случају интеграла са сингуларним интеграндима. Ипак, у сваком од разматраних случајева могуће је остварити максималан број значајних цифара у двострукој тачности. Како ћемо спровести целодоменску анализу структура, то ће нам најпре од интереса бити сингуларне подинтегралне функције.

На основу резултата овог експеримента, приказаних на слици 3.10, као добар пример једног од најтежих случајева посматраћемо тачку подешавања  $t_m = 0,95$ . У експериментима који следе број тачака интеграције биће одређен за управо ову тачку подешавања, а како је она једна од најтежих за интеграцију, то ће и интегрални сингуларни у тачкама ближе средини траке бити израчунати са високом тачношћу.



Слика 3.10. Процена релативне грешке интеграла у случају равне траке  $w = \lambda$  и реда базисне функције  $n = 2$  за различите положаје тачке сингуларитета и квази-сингуларитета  $t_m$  када је инцидентни талас у ТМ моду. [14]

### 3.10. ОПТИМАЛАН ИЗБОР ПАРАМЕТАРА СМЕНА

Како свака од предложених смена зависи од једног или два параметра, то се поставља питање постоји ли њихов оптималан избор, односно да ли неки избор параметара омогућава максималну тачност са мање интеграционих тачака. У циљу одређивања оптималних

параметра, као и одговарајућег броја интеграционих тачака спроведен је низ експеримената са свим предложеним сменама.

Анализиране су равне и изразито закривљене траке са слике 3.1 електричних ширина  $w/\lambda$  у опсегу од 1 до 400. При томе је ред базисне функције у интегралу чија се конвергенција испитује највећи потребан за апроксимацију струја на посматраној траци, тј. [7]

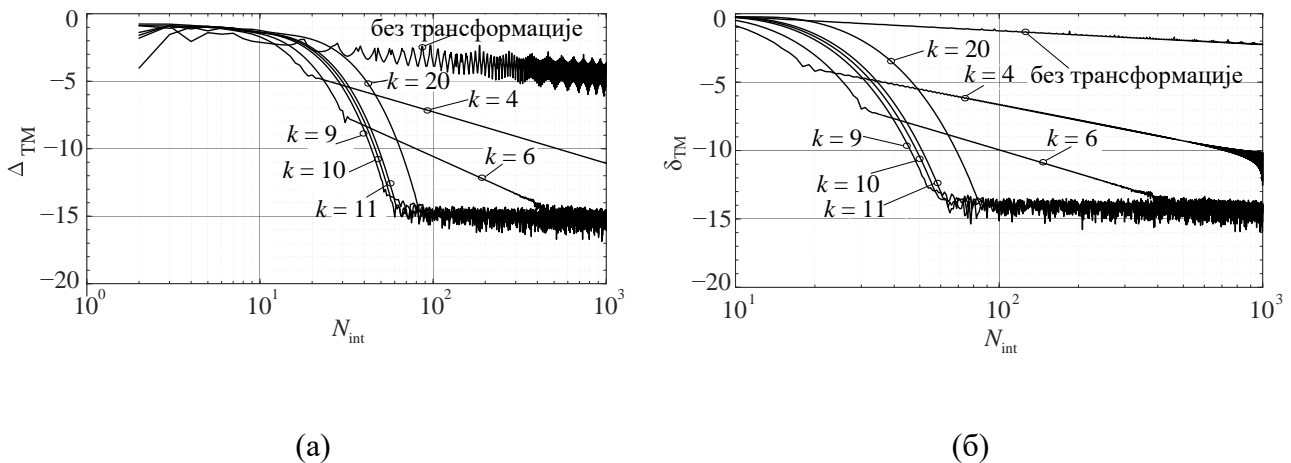
$$N_0 \sim \lceil 3,5w/\lambda \rceil \quad (3.50)$$

где  $\lceil \circ \rceil$  означава први већи цео број.

### 3.10.1. ОПТИМАЛАН ИЗБОР ПАРАМЕТРА СМЕНЕ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ

Избор оптималног параметра  $k$ , смене са експоненцијалним чланом и минималног броја интеграционих тачака,  $N_{\text{int}}$ , за постизање највеће тачности биће илустрован на примеру приказаном на слици 3.11 [14]. Посматрајмо равну траку ширине једне таласне дужине,  $w = \lambda$ . Нека је ред Лежандровог полинома  $n = 2$ . Процена апсолутне грешке (3.49) дата је на слици 3.11а, док је процена релативне грешке (3.47) дата на слици 3.11б, за различите изборе параметра смене  $k$ . На графицима су приказане и процене грешака без трансформације. Резултати показују да је за израчунавање интеграла са  $\delta_{\text{TM}} \leq -14$  довољно  $N_{\text{int}} = 64$  тачака после трансформације са  $k = 10$ . Са друге стране, без предложене трансформације чак ни  $N_{\text{int}} = 10^3$  тачака није довољно за  $\delta_{\text{TM}} \leq -3$ .

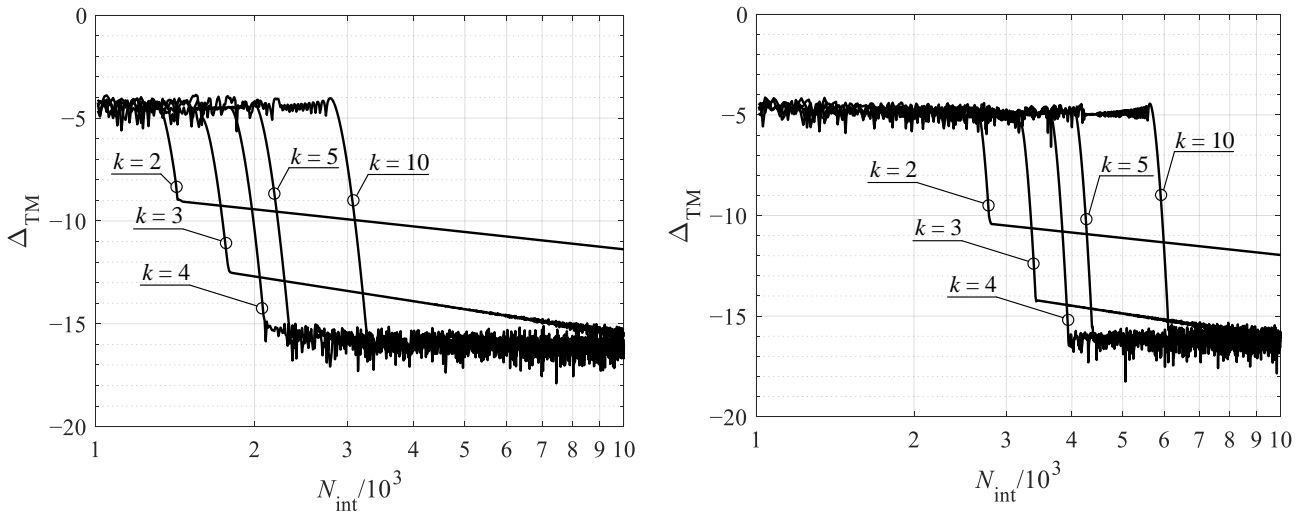
Посматрајући било процену релативне, било апсолутне грешке на сликама 3.11 добијају се врло слични резултати за оптималан избор параметра  $k$ , као и минималног броја интеграционих тачака. Модул ових интеграла је приближно једнак један. Стога су апсолутна и релативна грешка сличних вредности.



Слика 3.11. Процена (а) апсолутне и (б) релативне грешке у случају равне траке ширине  $w = \lambda$  побуђене ТМ модом за ред базисне функције  $n = 2$ . [14]

Са слика 3.11а и 3.11б види се да је за  $k$  које је 9, 10 или 11 потребан сличан број тачака интеграције за максималну тачност. Ипак, за шире траке је оптималан избор параметра критичнији, односно може значајније смањити потребан број интеграционих тачака. Додатно, већи редови базисних функција захтевају већи број интеграционих тачака. То је илустровано на примерима закривљене траке ширине  $w = 400 \lambda$  побуђене ТМ таласом

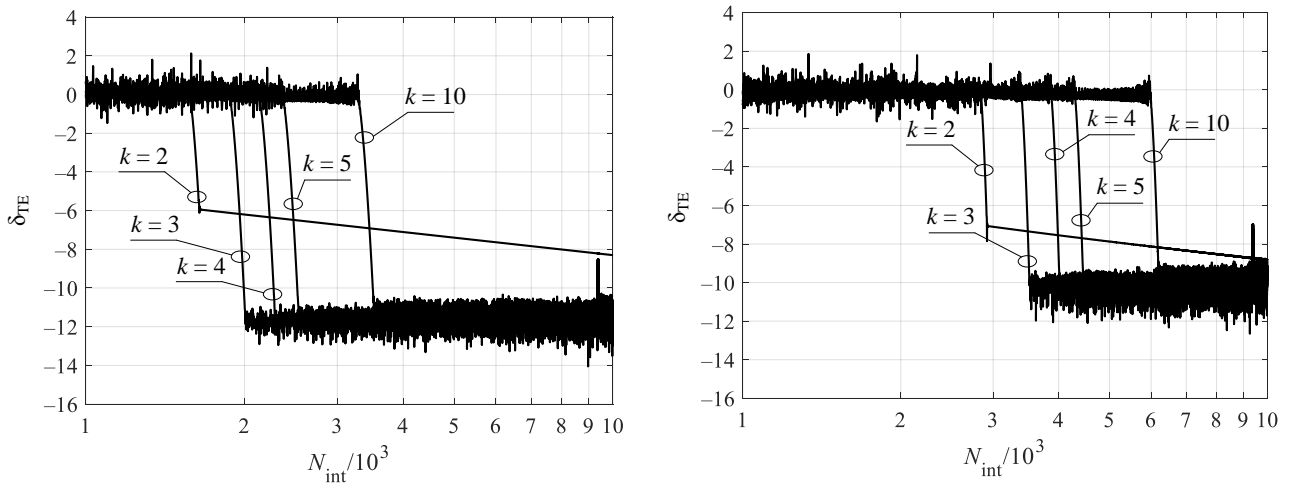
и равне траке ширине  $w = 400 \lambda$  побуђене ТЕ таласом, на интегралима са базисним функцијама реда  $n = 200$  и  $n = 1350$ . Резултати су приказани на сликама 3.12 и 3.13.



(a)

(б)

Слика 3.12. Процена апсолутне грешке када је базисна функција реда (а)  $n = 200$  и (б)  $n = 1350$  у случају закривљене траке ширине  $w = 400 \lambda$  побуђене ТМ модом. [14]



(a)

(б)

Слика 3.13. Процена релативне грешке када је базисна функција реда (а)  $n = 200$  и (б)  $n = 1350$  у случају равне траке ширине  $w = 400 \lambda$  побуђене ТЕ модом. [14]

Оптималан избор параметра  $k$  и минималног броја интеграционих тачака  $N_{\text{int}}$  начињен је на основу процена апсолутних грешака датих на сликама 3.12а и 3.12б са циљем да је  $\Delta_{\text{TM}} \leq -15$  [14]. Када је ред Лежандровог полинома  $n = 200$ , оптималан избор је  $k = 4$ , за који је  $N_{\text{int}} = 2100$ , док је за ред полинома  $n = 1350$ , оптималан избор такође  $k = 4$ , али је  $N_{\text{int}} = 3950$ . У примерима са слика 3.13а и 3.13б, оптималан избор параметра смене је  $k = 3$  за оба разматрана реда полинома, али је број потребних тачака интеграције за  $n = 200$  једнак  $N_{\text{int}} = 2000$ , док је за  $n = 1350$  једнак  $N_{\text{int}} = 3750$ .

За сваку од испитиваних трака ширина  $\lambda \leq w \leq 400 \lambda$  спроведен је исти експеримент у потрази за оптималним  $k$ , када је инцидентни талас у ТМ и у ТЕ моду, са кораком промене параметра  $k = 0,01$ . При томе је ред Лежандрових полинома  $n$  био највећи ред потребан за целодоменску апроксимацију струја на траци,  $N_0$ . Укратко, за траке шире од  $w/\lambda > 10$ , важи да је  $N_0 \approx 3,5w/\lambda$ , што је познат резултат [7]. Сумирани резултати у случају ТМ мода су у табели 3.1 [14], док су у случају ТЕ мода приказани у табели 3.2.

Табела 3.1. Оптималан параметар трансформације, ред апроксимације, потребан број интеграционих тачака и процењен број интеграционих тачака у ТМ случају [14].

Пресек	$w/\lambda$	$N_0$	$k$	$N_{\text{int}}$
Равна	1	5	9,17	63
	2	10	8,66	86
	5	20	7,16	127
	10	40	6,56	198
	20	74	6,33	287
	50	175	4,98	636
	100	340	4,75	1159
	200	665	3,94	2011
	300	985	4,00	2988
Закривљена	400	1300	3,75	3811
	1	5	6,47	358
	2	10	6,58	375
	5	20	6,58	383
	10	40	6,50	425
	20	80	5,61	441
	50	182	5,06	689
	100	344	4,50	1157
	200	665	4,16	2039
	300	985	3,95	2896
400	1300	3,97	3804	

Табела 3.2. Оптималан параметар трансформације, ред апроксимације и потребан број интеграционих тачака у ТЕ случају.

Пресек	$w/\lambda$	$N_0$	$k$	$N_{\text{int}}$
Равна	1	5	10,6	210
	2	10	10,1	198
	5	20	10,1	198
	10	40	6,8	218
	20	74	5,3	306
	50	175	4,8	792
	100	340	3,6	1020
	200	665	3,0	1796
	300	985	2,9	2606
Закривљена	400	1300	2,9	3464
	1	5	10,9	230
	2	10	10,5	220
	5	20	8,7	222
	10	40	6,0	246
	20	80	4,7	336
	50	182	4,2	642
	100	344	3,8	1082
	200	665	3,0	1766
	300	985	2,9	2548
400	1300	3,2	3536	

Оптималан параметар  $k$  је нелинеарна функција електричне ширине траке  $w/\lambda$ . У случају равне траке у ТМ моду може бити апроксимиран следећом аналитичком формулом [14]

$$k \approx 9,0 - 2,1 \cdot \log_{10}(w/\lambda). \quad (3.51)$$

Аналитички облик формуле је унапред претпостављен на основу експерименталних резултата, док су константе добијене минимизацијом средње квадратне грешке одступања аналитичке формуле од експерименталних резултата. За минимизацију је коришћен Нелдер-Мед симплекс (енглески: *Nelder-Mead simplex*) алгоритам [91]–[93].

Ипак, када су траке закривљене,  $k$  је приближно константно за  $w/\lambda \leq 10$ , а онда опада за веће вредности  $w/\lambda$ . Његова апроксимативна формула би зависила и од полупречника кривине попречног пресека.

### 3.10.2. ОПТИМАЛАН ИЗБОР ПАРАМЕТАРА СМЕНА А-Е

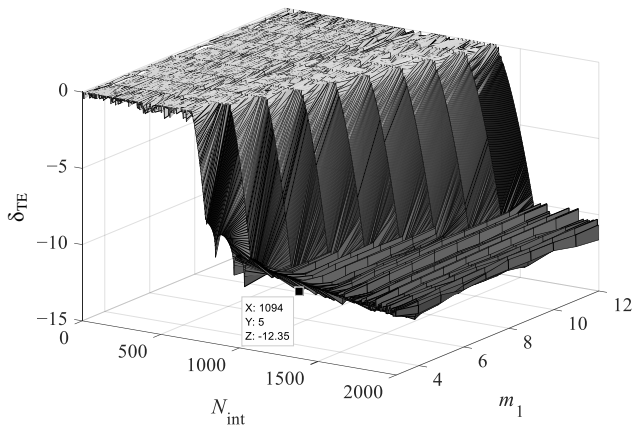
Слични нумерички експерименти спроведени су за смене А–Е у циљу проналажења оптималних параметара и минималног потребног броја интеграционих тачака за максималну тачност.

Као пример електрички велике траке посматрајмо изразито закривљену траку ширине  $w = 100 \lambda$  побуђену таласом у ТЕ моду. Највећи ред базисних функција је  $N_0 = 350$ . На слици 3.14а приказана је процена релативне грешке у функцији од параметра трансформације  $m_1$  и броја интеграционих тачака за максималну тачност  $N_{\text{int}}$ ,  $\delta_{\text{ТЕ}}(m_1, N_{\text{int}})$ , док је на слици 3.14б дата та иста грешка у функцији од  $N_{\text{int}}$  за неколико параметара трансформације  $m_1$  смене А. Као што се може видети са графика, процена грешке брзо конвергира до неке вредности, после чега практично више нема побољшања. Оптимална вредност параметра  $m_1$ , која обезбеђује минималну грешку уз минималан број интеграционих тачака  $N_{\text{int}}$ , обележена је на слици 3.14а. Оптималан параметар у овом примеру је  $m_1 = 5$ , коме одговара  $N_{\text{int}} = 1024$  и процена релативне грешке  $\delta_{\text{ТЕ}} \leq -12$ , односно 12 тачно одређених значајних цифара.

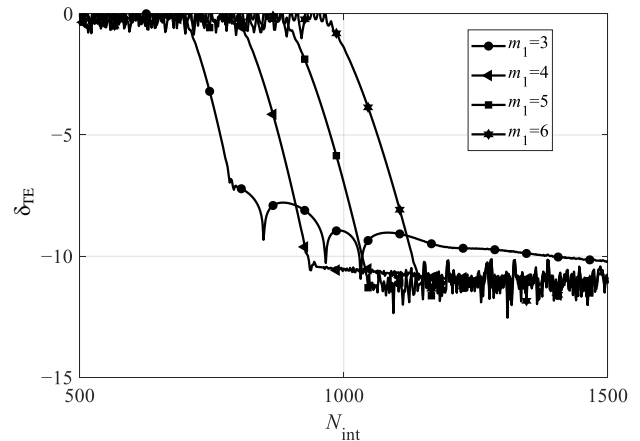
Истом поставком експеримента одређене су оптималне вредности параметра  $m_1$  и за остале ширине испитиваних трака. Квалитативно, графици изгледају исто као на сликама 3.14. Резултати оптималног параметра  $m_1$ , као и њему одговарајућег броја  $N_{\text{int}}$ , у случају равних и закривљених трака ширина  $1 \leq w/\lambda \leq 400$  сумирани су у табелама 3.3. и 3.4.

Осим смене А остале предложене смене имају по два параметра. Параметром  $m_2$  променљива се линеарно скалира, док се параметром  $m_1$  степенује одговарајућа функција. Нека је други параметар константан, тј.  $m_2 = 1$ , чиме је изостављено линеарно скалирање. Сада можемо спровести експеримент као онај са слике 3.14 и одредити оптималне вредности параметра  $m_1$  и минималне вредности  $N_{\text{int}}$ . Графици конвергенција за оптималне параметре свих испитиваних трака после смене В, у оба разматрана мода, приказани су на сликама 3.15а и 3.15б, а затим су резултати сумирани у табелама 3.3 и 3.4. На основу слике 3.15 може се закључити да је број значајних цифара бар 9 у сваком испитиваном случају. Додатно, број значајних цифара је нешто већи у ТМ случају јер сингуларитет у том случају ( $\log R$ ) захтева мање интеграционих тачака од ТЕ случаја (сингуларитет  $1/R$ ).





(a)

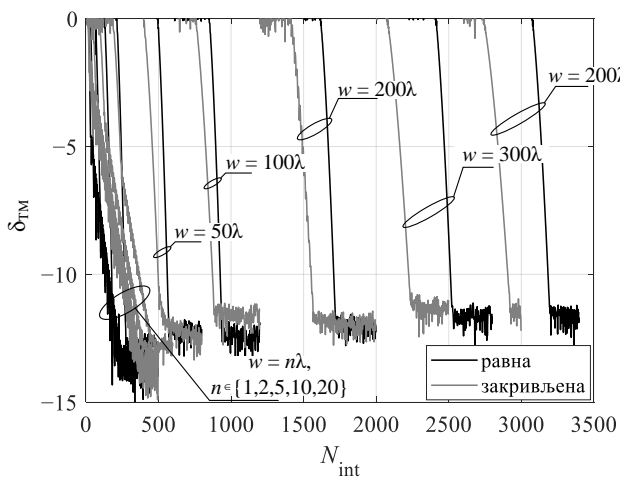


(б)

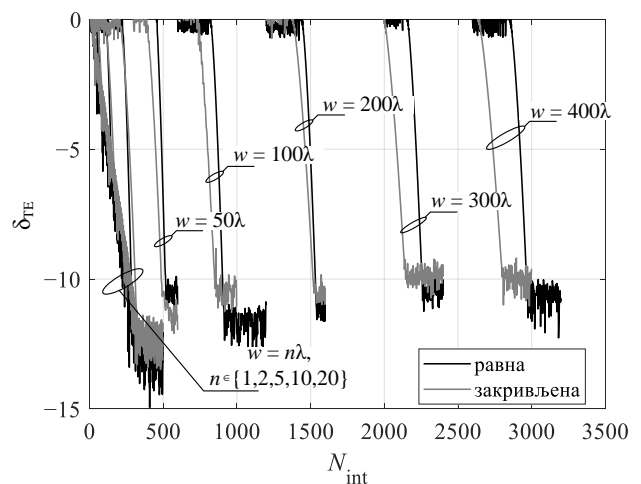
Слика 3.14. Процена релативне грешке у случају закривљене траке ширине  $w = 100 \lambda$  у зависности од: (а)  $m_1$  и  $N_{\text{int}}$  и (б)  $N_{\text{int}}$  за неколико различитих параметара  $m_1$  смене А.

Процене релативних грешака за траке различитих облика и ширина изгледају врло слично онима приказаним на слици 3.15 и за све остале разматране смене, па оне неће бити посебно приказане.

Оптималан избор параметра  $m_1$ , у случају када је параметар  $m_2 = 1$ , за сваку од предложених смена, у ТЕ и ТМ случајевима, закривљених и равних трака електричних ширина  $1 \leq w/\lambda \leq 400$ , као и минималан потребан број интеграционих тачака, одређени су експериментима описаним уз слике 3.14. Резултати спроведених експеримената сумирани су у табелама 3.3 и 3.4.



(a)



(б)

Слика 3.15. Процена релативне грешке за равне и закривљене траке различитих ширина у: (а) ТМ моду [14] и (б) ТЕ моду.

Из резултата закључујемо да минималан број интеграционих тачака  $N_{\text{int}}$  највише зависи од електричне ширине траке, тј. од  $w/\lambda$  и креће се од 240 за најужу траку,  $w/\lambda = 1$ ,

до 4000 за најширу разматрану траку,  $w/\lambda = 400$ . За различите смене тај број варира за око 15%. Оптималан параметар  $m_1$  смањује се како  $w/\lambda$  расте за све разматране смене. Минималан потребан број интеграционих тачака после смене са експоненцијалним чланом, дат у табелама 3.1 и 3.2, је у односу на резултате после смена А–Е, датих у табелама 3.3 и 3.4, нешто мањи за уже траке, а већи за шире траке. Стога, ако су траке углавном уске, погодније је користити смену са експоненцијалним чланом, док је за анализу ширих трака оптималније користити смене А–Е.

Са слике 3.6, где су приказане смене А–Е и одговарајући Јакобијани, видимо да се у околини сингуларитета све функције слично мењају. То следи из чињенице да су прва два члана Тејлоровог развоја свих предложених смена једнак  $x \pm x^3/3$ . Са друге стране, остали чланови развоја, који се међусобно разликују, као и Јакобијани, такође утичу на интегранде. Тако да се, као што се може видети из табела 3.3 и 3.4, оптималан параметар  $m_1$  и минималан број  $N_{\text{int}}$  разликују од једне до друге смене. Оптималан параметар  $m_1$  већи је од два у свим разматраним случајевима, што је у складу са претходно изведеним доказом о поништавању сингуларитета из поглавља 3.8.3.

Додатно, како смене В–Е имају и други параметар  $m_2$ , који је у претходним експериментима имао константну вредност  $m_2 = 1$ , очекујемо да истовременом оптимизацијом оба параметра минималан број интеграционих тачака можемо додатно да умањимо. Детаљна анализа урађена је на примеру смене са тангенсом (смене D) у поглављу 3.12. Она је изабрана за даље испитивање јер је у случају ужих трака (ширине до 10 таласних дужина) после ње потребно најмање тачака за највећу тачност у односу на друге смене.

Табела 3.3. Оптималан параметар трансформације и минималан број интеграционих тачака у ТМ случају.

Равна трака										
	А		В		С		D		Е	
$w/\lambda$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$
1	8,0	200	10,8	240	5,0	300	8,2	150	10,6	250
2	10,1	200	10,8	240	5,0	300	8,2	160	10,6	250
5	9,4	220	10,8	240	5,0	300	8,2	180	10,6	250
10	10,1	220	10,8	240	5,0	300	8,2	290	10,6	250
20	5,0	300	7,6	280	5,0	300	5,1	370	8,9	270
50	4,6	600	7,0	580	4,6	600	4,8	770	5,0	500
100	4,8	1000	4,9	940	4,6	1110	4,1	1300	4,9	910
200	4,0	1800	4,4	1730	4,0	2000	3,8	2360	4,6	1700
300	3,9	2700	4,4	2520	3,7	2770	3,0	3000	4,1	2400
400	3,0	3100	3,9	3200	3,6	3600	3,0	4000	4,0	3140
Закривљена трака										
	А		В		С		D		Е	
$w/\lambda$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$	$m_1$	$N_{\text{int0}}$
1	5,0	370	6,5	370	5,0	380	4,9	430	6,5	350
2	5,0	370	6,5	370	5,0	380	4,9	430	6,5	350
5	5,0	370	6,5	400	5,0	420	4,9	430	6,5	370
10	5,0	400	6,5	420	5,0	450	4,9	480	6,5	400
20	5,9	500	6,5	500	5,0	500	4,9	600	6,5	450
50	5,1	620	5,2	550	4,8	670	4,9	860	6,3	580
100	4,5	1000	4,9	900	4,3	1110	4,7	1480	4,9	880
200	4,3	1800	4,5	1580	4,0	1950	3,7	2350	4,5	1610
300	3,0	2250	4,1	2250	3,6	2680	3,0	3070	4,0	2280
400	3,0	2900	4,1	2930	3,5	3440	3,0	4000	3,8	2970

Табела 3.4. Оптималан параметар трансформације и минималан број интеграционих тачака у ТЕ случају.

Равна трака										
	A		B		C		D		E	
$w/\lambda$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$
1	9,0	250	10,6	330	8,5	260	7,6	220	10,6	350
2	9,0	250	10,6	330	8,5	260	7,6	220	10,6	350
5	9,0	250	10,4	330	8,5	260	7,6	220	10,2	360
10	9,8	300	9,3	340	7,5	280	7,6	250	9,4	370
20	6,8	300	9,3	340	5,5	340	4,4	340	9,4	370
50	4,3	570	5,4	520	4,0	550	3,5	640	5,8	500
100	4,6	1000	4,6	930	3,8	850	3,1	1110	3,9	850
200	3,1	1600	3,0	1530	2,5	1550	2,6	1870	3,0	1540
300	2,9	2300	3,0	2260	2,5	2300	2,5	2740	3,0	2260
400	3,0	3100	3,0	3000	2,5	3000	2,4	3500	2,5	2910
Закривљена трака										
	A		B		C		D		E	
$w/\lambda$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$	$m_1$	$N_{int0}$
1	9,4	280	10,6	340	8,5	260	7,8	220	10,6	360
2	10,4	280	10,6	340	8,5	270	7,8	240	10,6	370
5	10,2	300	10,6	340	8,5	270	7,8	250	10,6	370
10	9,7	300	10,0	350	7,5	300	7,8	310	10,6	370
20	6,2	350	9,0	350	5,5	350	4,2	400	9,6	370
50	4,6	600	5,0	500	4,0	600	3,5	710	6,1	510
100	4,3	1000	4,6	870	3,8	1000	3,2	1200	4,0	840
200	3,0	1500	4,0	1530	2,7	1590	2,6	1950	3,2	1540
300	3,0	2200	3,0	2170	2,5	2220	2,5	2750	3,1	2260
400	3,0	2900	2,5	2800	2,5	2900	2,4	3500	2,7	2940

### 3.11. ДОДАТНА АНАЛИЗА СМЕНЕ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ

Поред одређивања оптималног параметра, спроведена је и додатна анализа смене са експоненцијалним чланом. Најпре су пронађене аналитичке формуле за процену потребног броја интеграционих тачака за максималну тачност на основу низа нумеричких експеримената који су претходно спроведени. Затим је поменута процена за равну траку у ТМ моду и теоријски појашњена.

Додатно, коришћењем оптимизационих алгоритама, и то диференцијалне еволуције и генетичког алгорита, спроведен је експеримент за проналажење распореда апсциса и тежина у нумеричкој интеграцији са циљем проналажења мањег минималног броја интеграционих тачака него што је то случај када се користи Гаус-Лежандрова интеграција након смене.

Коначно, успешност примене смене са експоненцијалним чланом мотивисала је потрагу са сменом представљеном полиномијалном сумом.

У одељцима који следе приказани су добијени резултати. Неки од резултата претходно су објављени у [14].

#### 3.11.1. ПРОЦЕНА ПОТРЕБНОГ БРОЈА ИНТЕГРАЦИОНИХ ТАЧАКА НА ОСНОВУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИХ РЕЗУЛТАТА

Минималан број интеграционих тачака из табеле 3.1, који одговара оптималном избору параметра  $k$ , а након чега се постиже висока тачност, може се апроксимирати формулом [14]

$$N_{\text{int}} \approx \lceil 55 + 9,5 w / \lambda \rceil \quad (3.52)$$

у случају равних трака, односно формулом [14]

$$N_{\text{int}} \approx \lceil 315 + 8,6 w / \lambda \rceil \quad (3.53)$$

у случају закривљених трака у ТМ моду. Обе формуле добијене су минимизацијом средње квадратне грешке између аналитичке формуле и одговарајућих експерименталних резултата коришћењем Нелдер-Мед симплекс алгоритма [91]–[93]. При томе, број  $N_{\text{int}}$  је мањи ако је захтевана тачност нижа од максималне.

Слично, минималан број потребних интеграционих тачака из табеле 3.2, који одговара оптималном параметру  $k$ , може се апроксимирати формулом

$$N_{\text{int}} \approx \lceil 196 + 8,1 w / \lambda \rceil \quad (3.54)$$

у случају равних трака, односно формулом

$$N_{\text{int}} \approx \lceil 122 + 7,4 w / \lambda \rceil \quad (3.55)$$

у случају закривљених трака у ТЕ моду. Поново су аналитичке формуле добијене сличним експериментом као и (3.52) и (3.53).

### 3.11.2. ТЕОРИЈСКА ПРОЦЕНА БРОЈА ИНТЕГРАЦИОНИХ ТАЧАКА ПОСЛЕ СМЕНЕ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ

Потребан број интеграционих тачака  $N_{\text{int}}^{(\text{est})}$  за интеграцију функције  $g(s)$ , када се користи смена са експоненцијалним чланом, може се и теоријски проценити. Доказ дат у наставку претходно је објављен у [14].

Гаус-Лежандрова интеграција са  $N_{\text{int}}$  тачака тачна је за полиноме реда  $2N_{\text{int}} - 1$  и мањег. Стога је потребно проценити ред полинома којим се апроксимира интегранд  $g(s) \approx \sum_m g_m s^m$ , где су  $g_m$  коефицијенти развоја, а резидуал (грешка) је

$$\varepsilon_g = \left| g(s) - \sum_m g_m s^m \right| \leq 10^{-15}. \text{ Резидуал је изабран имајући на уму да је } |g(s)| \sim 1 \text{ (слика 3.76),}$$

тако да води ка највећој тачности резултата у двострукој тачности представљања бројева.

Ханкелова функција друге врсте и нултог реда  $H_0^{(2)}(z)$  је део интегранда  $g(s)$ . Она је дефинисана као  $H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - jY_0(z)$ , где су  $J_0(z)$  и  $Y_0(z)$  Беселова функција нултог реда и Беселова функција друге врсте и нултог реда, респективно. Тејлорови развоји Беселових функција у околини нуле су

$$J_0(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2n}, \quad (3.56)$$

односно

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n+1) \frac{(-0.25z^2)^n}{(n!)^2}, \quad (3.57)$$

где је  $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ , а  $\gamma$  већ спомињана Ојлерова константа.

Други део интегранда  $g(s)$  је функција  $A^{|s|}$ , чији је Тејлоров развој у околини нуле

$$A^{|s|} = \left(e^{\ln(A)}\right)^{|s|} = e^{|s|\ln(A)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|s|\ln(A))^n}{n!}. \quad (3.58)$$

У случају који је овде разматран, максималан аргумент Беселове функције је  $z_{\max} = \beta r(s) = 2\pi \frac{w}{\lambda} |s|_{\max}$  и  $|s|_{\max} = 1$ . Из (3.56) се види да је допринос  $n$ -тог члана  $\frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z_{\max}}{2}\right)^{2n}$ . Како је  $|J_0(z)| \leq 1$ , за предефинисан резидуал  $\varepsilon_g$  максимални ред развоја  $2n_J$  у (3.56) може бити процењен тражећи минималну вредност степена  $n_J$  такву да је

$$\frac{1}{(n_J!)^2} \left(\pi \frac{w}{\lambda}\right)^{2n_J} \leq \varepsilon_g. \quad (3.59)$$

На сличан начин, у случају Беселове функције друге врсте  $Y_0$ , ред полинома може бити процењен из

$$\frac{2}{\pi} \psi(n_Y + 1) \frac{(\pi w / \lambda)^{2n_Y}}{(n_Y!)^2} \leq \varepsilon_g. \quad (3.60)$$

Први члан у (3.57),  $\frac{2}{\pi} J_0(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right)$ , има развој степена  $2n_J$  што произилази из чињенице

да је  $z \sim t^m$ ,  $m \geq 1$  и  $t \sim A^{k|s|}$ . Стога, заменом  $z(s)$  у  $\frac{2}{\pi} J_0(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right)$  добијамо  $mk|s| \ln\left(\frac{A}{2}\right) \frac{2}{\pi} J_0$ , где су  $m$ ,  $k$  и  $A$  константе. Овим је, на још један начин, доказано да предложена смена поништава логаритамски сингуларитет.

Конечно, ред полиномијалног развоја функције  $H_0^{(2)}(s)$  је  $n_H = \max(2n_J, 2n_Y)$ , што је број који зависи од електричне ширине траке,  $w/\lambda$ .

Други мултипликативни члан функције  $g(s)$  је

$$g_A(s) = k(A^{|s|} - 1)^{k-1} A^{|s|} \ln(A) \sqrt{x_m^2 + (2y_m t(s))^2} L_q(t(s)), \quad (3.61)$$

односно  $g(s) = g_A(s) H_0^{(2)}(s)$ . Ради поједностављивања израза разматраћемо само равне траке, за које важи  $\sqrt{x_m^2 + (2y_m t(s))^2} = x_m$ . Константе у  $g_A(s)$  су  $k$ ,  $\ln A$  и  $x_m$ . Члан са највећим степеном у развоју функције  $(A^{|s|} - 1)^{k-1} A^{|s|}$  је  $(A^{|s|})^k = A^{k|s|}$ . Затим, користећи

(3.20), члан са највећим степеном у развоју функције  $L_q(t(s))$  је  $(A^{|k|})^q = A^{q|k|}$  и важи да је  $A \leq 1 + 2^{1/k}$ . На основу (3.58) ред развоја функције  $g_A(s)$  је најмањи цео број  $n_A$  који задовољава неједнакост

$$0,5 \frac{w}{\lambda} k \ln(1 + 2^{1/k}) \frac{(k(q+1) \ln(1 + 2^{1/k}))^{n_A}}{n_A!} \leq \varepsilon_g. \quad (3.62)$$

Према томе ред развоја функције  $g(s)$  може бити апроксимиран са  $n_H + n_A$ , јер важи да је  $g(s) \approx \sum_{m=0}^{n_A} g_{Am} s^m \sum_{m=0}^{n_H} g_{Hm} s^m$ . Процењен број интеграционих тачака  $N_{\text{int}}^{(\text{est})}$ , који омогућава тачну интеграцију полиномијалног развоја функције  $g(s)$ , је [14]

$$N_{\text{int}}^{(\text{est})} = \frac{n_A + n_H + 1}{2}. \quad (3.63)$$

Последња формула предвиђа за око 50 % већи број интеграционих тачака него што је добијено нумеричким експериментима за све разматране  $w/\lambda$ ,  $N_0$  и  $k$ . Подаци 50 %  $N_{\text{int}}^{(\text{est})}$  у случају равних трака различитих електричних ширина дати су у табели 3.5. Процена за 50 % више интеграционих тачака је због тога што је  $n_A + n_H$  горња граница реда полиномијалног развоја функције  $g(s)$ . Додатно, Гаус-Лежандрова интеграција са  $N_{\text{int}}^{(\text{est})}$  интеграционих тачака даје тачну вредност када је интегранд полином реда  $n_A + n_H$ , док експериментално добијен број  $N_{\text{int}}$  обезбеђује тачност од највише 14 значајних цифара, одакле такође следи да је  $N_{\text{int}} < N_{\text{int}}^{(\text{est})}$ .

Табела 3.5 Процењен број интеграционих тачака у случају равне траке.

$w/\lambda$	1	2	5	10	20	50	100	200	300	400
$0,5 N_{\text{int}}^{(\text{est})}$	45	71	113	196	344	686	1290	2270	3397	4343

Формула (3.63) се не може користити за процену броја интеграционих тачака када је трака закривљена. У том случају постоји додатна интеракција између  $g_A(s)$  и  $H_0^{(2)}(s)$  која није обухваћена предложеном формулом. Стога се у случају закривљених трака, као и трака побуђених ТЕ таласом, морамо ослонити на експерименталне резултате дате у табелама 3.1 и 3.2 при коришћењу смене са експоненцијалним чланом.

### 3.11.3. ОПТИМАЛАН РАСПОРЕД ТАЧАКА И ТЕЖИНА У НУМЕРИЧКОЈ ИНТЕГРАЦИЈИ ПОСЛЕ СМЕНЕ СА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИМ ЧЛАНОМ

Након примене смене и поништеног сингуларитета, интеграл се може израчунати користећи неки од метода нумеричке интеграције. Као што је већ речено, у овој докторској дисертацији коришћена је Гаус-Лежандрова нумеричка интеграција. Укратко, ако је

$I = \int_{-1}^1 g(s) ds$  интеграл, онда се нумерички он може израчунати као  $I \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}} w_k g(s'_k)$ , где се

тежине  $w_k$  и апсцисе  $s'_k$  рачунају по утврђеном правилу. Питање које се намеће је да ли је могуће остварити исту тачност са мање интеграционих тачака  $N_{\text{int}}$  подешавањем тежина и апсциса оптимизационим алгоритмом. Другим речима, да ли постоји приступ нумеричкој

интеграцији који је у овом контексту ефикаснији од Гаус-Лежандрове интеграције. У овом поглављу ће бити описан експеримент који је спроведен да би дао одговор на постављено питање.

Посматрајмо интеграле (3.18), краће записане као  $I_{m,n} = \int_{-1}^1 g(s') ds'$ , где  $m = 0, 1, \dots, N_0$  одређује тачку подешавања, док  $n = 0, 1, \dots, N_0$  одређује ред базисне функције. Референтни интеграл,  $I_{\text{ref},m,n}$ , које ћемо сматрати тачним, израчунати су Гаус-Лежандровом нумеричком интеграцијом са бројем тачака интеграције који обезбеђује 14 значајних цифара. На основу резултата експеримента приказаних на слици 3.10, пример једног од најтежих сингуларитета је у  $t_m = 0,95$ . Стога ће и у овом експерименту бити разматрана само та тачка подешавања. Циљ је пронаћи распоред апсциса  $s'_k$  и тежина  $w_k$  тако да за сваки ред базисне функције  $n$  важи да је  $f_{n,\text{opt}}(n) \leq 10^{-14}$ , где је

$$f_{n,\text{opt}} = \left| I_{\text{ref},m,n} - \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}/2} w_k (g(s'_k) + g(-s'_k)) \right|. \quad (3.64)$$

Из последњег израза може се закључити да је, као и код Гаус-Лежандрове интеграције, постављен услов симетрије апсциса у односу на нулу, којима одговарају исте тежине. Додатни услов је да број интеграционих тачака буде мањи од броја који је потребан за Гаус-Лежандрову интеграцију. Вредности свих оптимизационих променљивих,  $s'_k$  и  $w_k$ , ограничени су на интервал  $[0, 1]$ .

Оптимизациона функција је највећа вредност функције  $f_{n,\text{opt}}$  за све разматране редове базисних функција, односно

$$f_{\text{opt}} = \max_{0 \leq n \leq N_0} \{f_{n,\text{opt}}\}, \quad (3.65)$$

где је број непознатих, тј. димензија  $D$  оптимизационе функције једнак  $N_{\text{int}}$ . Алгоритми који су коришћени за проналажење минимума оптимизационе функције (3.65) су диференцијална еволуција [94], [95] и генетички алгоритам [96], [97]. Резултати експеримената дати су у наставку.

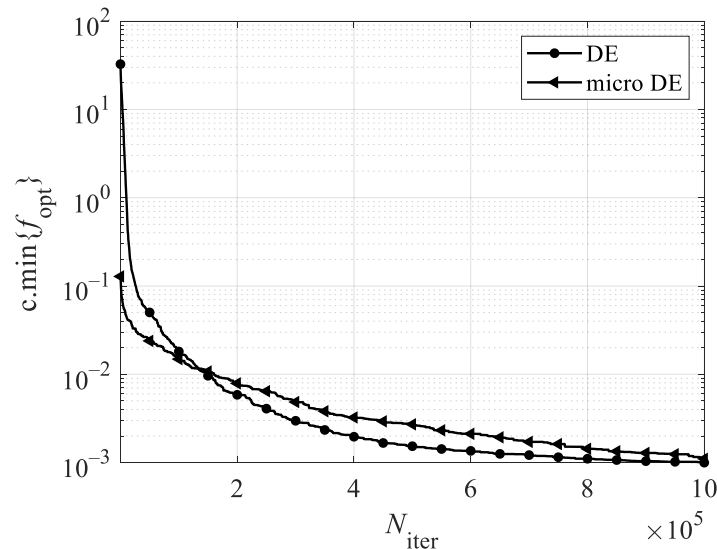
#### А) Диференцијална еволуција

Диференцијална еволуција (енглески: *differential evolution*) је стохастички алгоритам који ради са скупом решења, односно популацијом. Основни кораци алгоритма су: 1) формирање почетне популације, 2) селекција и 3) укрштање. За кораке 2) и 3) дефинисани су оператори селекције и укрштања, док се формирање почетне популације најчешће реализује случајним одабиром.

За потребе експеримента у овој докторској дисертацији имплементирани су две верзије диференцијалне еволуције. У првој, почетна популација је изабрана случајно, а алгоритам се зауставља када пронађе решење или када је испуњен задати број позива оптимизационе функције (*DE*). Друга верзија је имплементирана као микро диференцијална еволуција, где је алгоритам пуштен више пута испочетка увек задржавајући најбоље пронађено решење за следеће пуштање (*micro DE*). У поређењу резултата, укупан број позива оптимизационе функције је исти за обе имплементације.

Испитивана је равна трака електричне ширине једне таласне дужине,  $w/\lambda = 1$ . Максималан ред базисне функције је  $N_0 = 5$ . Нека је трака побуђена ТМ таласом, односно испитујемо интеграл (3.18). На основу табеле 3.1, за максималну тачност и Гаус-Лежандрову

интеграцију, потребне су  $N_{\text{int}} = 63$  интеграционе тачке. Стога је у (3.64) изабран нешто мањи број интеграционих тачака,  $N_{\text{int}} = 60$ . На слици 3.16 приказане су средње вредности кумулативних минимума за две верзије диференцијалне еволуције (*DE* и *micro DE*), када је број позива оптимизационе функције ограничен на  $10^6$ , а сваки од алгоритама покренут по 10 пута. Величина популације била је  $N_{\text{pop}} = 60$ .



Слика 3.16. Средњи кумулативни минимуми у случају равне траке ширине  $w = \lambda$  побуђене ТМ таласом за две реализације диференцијалне еволуције.

Из резултата са слике 3.16 може се закључити да су оба алгорита после милион позива оптимизационе функције стигла до грешке која обезбеђује само три значајне цифре. То је врло слаб резултат у односу на 14 значајних цифара које даје Гаус-Лежандрова интеграција са скоро истим бројем тачака интеграције.

С обзиром на то да знамо да постоји распоред  $s'_k$  и  $w_k$  који обезбеђује значајно бољи резултат, закључујемо да је одређивање  $s'_k$  и  $w_k$  на овај начин сувише захтевно по питању рачунарских ресурса.

#### Б) Генетички алгоритам

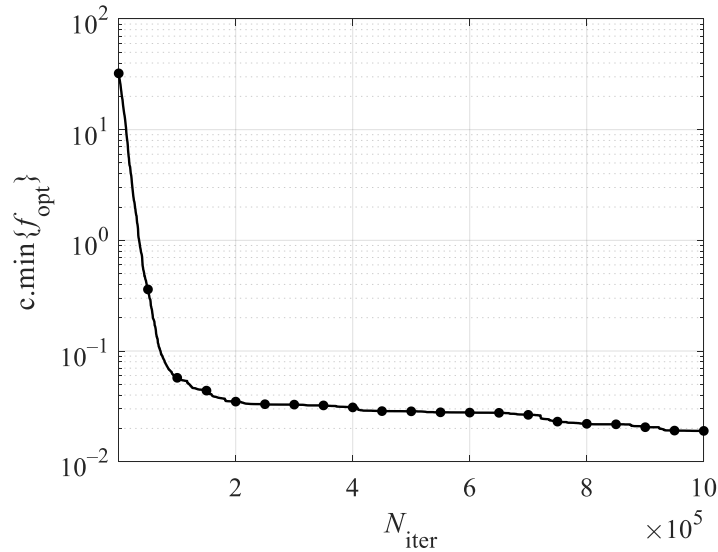
Генетички алгоритам (енглески: *genetic algorithm*) је стохастички алгоритам за глобалну оптимизацију који се заснива на принципу природне селекције и опстанка најприлагођенијих јединки. Алгоритам у сваком кораку ажурира скуп решења, односно популацију. Фазе алгоритма су: 1) формирање почетне популације, 2) селекција, 3) укрштање и 4) мутација. Основна разлика у односу на диференцијалну еволуцију је мутација.

За потребе овог експеримента почетна популација, величине  $N_{\text{pop}} = 10D$ , формирана је случајним избором. Селекција је елитистичка, односно нова генерација формира се од 20 % најбољих решења из претходне. Укрштање, са вероватноћом 0,8, реализовано је на нивоу сваког гена као  $d_i = r_i^{(2)} + \alpha(r_i^{(2)} - r_i^{(1)})$ , где је  $d_i$  ген на  $i$ -том месту нове јединке, док су  $r_i^{(1)}$  и  $r_i^{(2)}$  гени на истим местима првог и другог родитеља, а параметар  $\alpha$  је случајан број из опсега  $[0, 0,5]$ , различит за сваку позицију  $i$ . Коначно, мутација је реализована на нивоу сваког новоформираног решења са вероватноћом 0,2.

Средњи кумулативни минимум 10 пуштања генетичког алгоритма, за исти пример као са слике 3.16, приказан је на слици 3.17. Одатле се може видети да је после  $10^6$  итерација



вредност оптимизационе функције око  $10^{-2}$ , што је поново значајно лошији резултат у односу на Гаус-Лежандрову интеграцију.



Слика 3.17. Средњи кумулативни минимум у случају равне траке ширине  $w = \lambda$  побуђене ТМ таласом када је примењен генетички алгоритам.

Из претходна два експеримента закључујемо да је проналазак распореда апсциса и тежина било диференцијалном еволуцијом, било генетичким алгоритмом, који ће обезбедити максималну тачност са мање интеграционих тачака него Гаус-Лежандрова интеграција, сувише захтевно са доступним рачунарским ресурсима. Отуда експерименти нису поновљени за траке широкх попречних пресека и других облика, а у наставку ћемо се држати Гаус-Лежандрове квадратурне формуле после примене одговарајућих смена за поништавање сингуларитета.

### 3.11.4. СМЕНА СУМОМ ПОЛИНОМА СА ОПТИМАЛНО ИЗАБРАНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

У претходним поглављима доказано је да смена са експоненцијалним чланом, која је дата једначином (3.20), поништава сингуларитете облика  $\log R$  и  $1/R$ , чиме омогућава рачунање са високом тачношћу елемената матрице система у методу момената. У овом поглављу предложена је смена сумом полинома са коефицијентима које треба накнадно одредити користећи оптимизационе алгоритме. Циљ је био пронаћи оптималне коефицијенте смене тако да она обезбеђује максималну тачност са исто или мање интеграционих тачака него (3.20).

Предложена смена дата је изразом

$$t' = \frac{\sum_{j=0}^{D-1} a_{2j+1} (s^{2j+1} (1 - \text{sgn}(s') t_m) + t_m)}{\sum_{j=0}^{D-1} a_{2j+1}}, \quad (3.66)$$

где су  $a_{2j+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, D-1$ , непознати коефицијенти, док је  $D$  број непознатих коефицијента. Нормализација сумом у имениоцу,  $\sum_{j=0}^{D-1} a_{2j+1}$ , обезбеђује да променљива  $t'$  буде

у интервалу  $[-1, 1]$  када је и  $s'$  из истог интервала. Такође, како је  $t'=t_m$  када је  $s'=0$ , то је сингуларитет из  $t_m$  преликан у нулу.

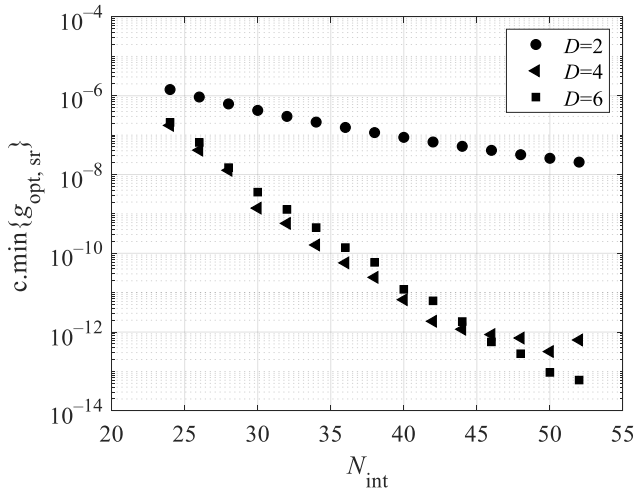
Поново посматрајмо интеграле (3.18), краће записане као  $I_{m,n} = \int_{-1}^1 g(s') ds'$ , где  $m = 0, 1, \dots, N_0$  одређује тачку подешавања, док  $n = 0, 1, \dots, N_0$  одређује ред базисне функције. Најпре су, након смене (3.20) Гаус-Лежандровом интеграцијом, израчунати референтни интеграл,  $I_{\text{ref},m,n}$ . Број интеграционих тачака одређен је табелом 3.1. Затим су, након смене (3.66), Гаус-Лежандровом интеграцијом израчунати и интеграл  $I_{m,n}$ . Нека је тачка подешавања  $t_m = 0,95$ . За свако  $n$ , дефинисана је разлика  $g_{n,\text{opt}} = |I_{\text{ref},m,n} - I_{m,n}|$ , а на основу ње и оптимизациона функција

$$g_{\text{opt}} = \max_{0 \leq n \leq N_0} \{g_{n,\text{opt}}\}. \quad (3.67)$$

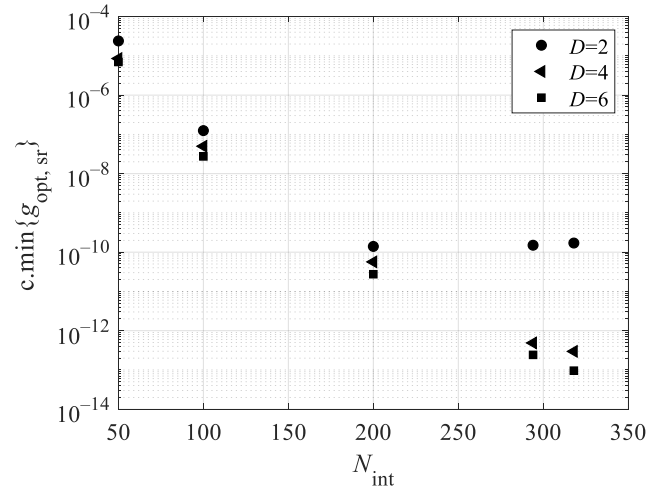
За рачунање оптимизационе функције  $g_{\text{opt}}$ , поред реда базисних функција  $N_0$  и броја интеграционих тачака  $N_{\text{int}}$ , потребно је још дефинисати и број непознатих коефицијената  $D$ . За одређивање оптималних коефицијената смене (3.66) коришћен је генетички алгоритам, имплементиран како је описано у поглављу 3.11.3, а затим и систематска претрага са коначним кораком за  $D = 2$ .

Експеримент је спроведен на примеру равне и закривљене траке за које је  $w/\lambda = 1$  и  $N_0 = 5$ , док је број непознатих коефицијената био  $D \in \{2, 4, 6\}$ . Средњи кумулативни минимум оптимизационе функције (3.67) након пет пуштања,  $\text{s.min}\{g_{\text{opt}}\}$ , приказан је слици 3.18. Из резултата се може закључити да је интеграле (3.18) могуће израчунати са максималном тачношћу са четири или шест коефицијента у смени (3.66) и  $N_{\text{int}} = 50$  за равну, односно  $N_{\text{int}} = 320$  за закривљену траку, што је мање од потребног броја приказаног у табели 3.1. Са друге стране, када се оптимизују два коефицијента, и то коефицијенти  $a_1$  и  $a_3$ , максимална тачност није постигнута са  $N_{\text{int}} \leq 55$ , односно са  $N_{\text{int}} \leq 320$ .

Како је смена ипак једноставнија када има два коефицијента, разматрано је да ли је уместо коефицијената уз  $s'$  и  $s^3$ , оптималније варирати коефицијенте уз нека друга два члана у смени, док су остали постављени на нуле. Са тим циљем, поред већ добијених резултата, испитивани су парови коефицијената уз  $s^5$  и  $s^7$ , односно уз  $s^7$  и  $s^9$ . Средњи кумулативни минимума,  $\text{s.min}\{g_{\text{opt}}\}$ , у случају равне и закривљене траке ширине  $w = \lambda$ , за разне изборе  $N_{\text{int}}$ , приказани су на слици 3.19. Из ових резултата види се да је могуће остварити максималну тачност интеграла у случају равне траке са  $N_{\text{int}} = 44$  и сменом са само два коефицијента,  $a_5$  и  $a_7$ , што је за око 30 % мање од потребног броја датог у табели 3.1. Слично, максималну тачност могуће је остварити и у случају закривљене траке са два коефицијента,  $a_7$  и  $a_9$ , са  $N_{\text{int}} = 320$ .

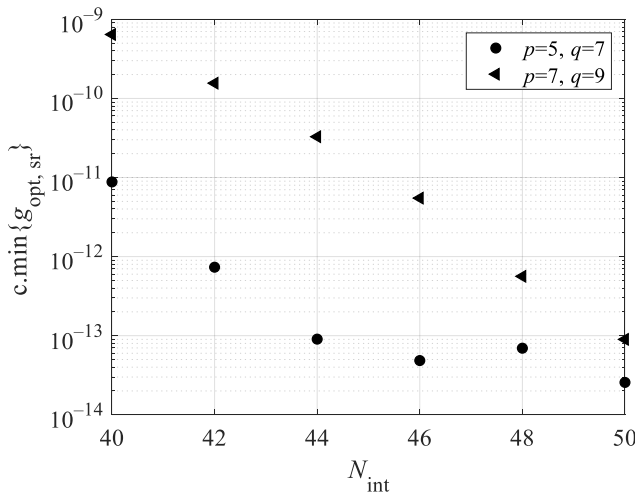


(a)

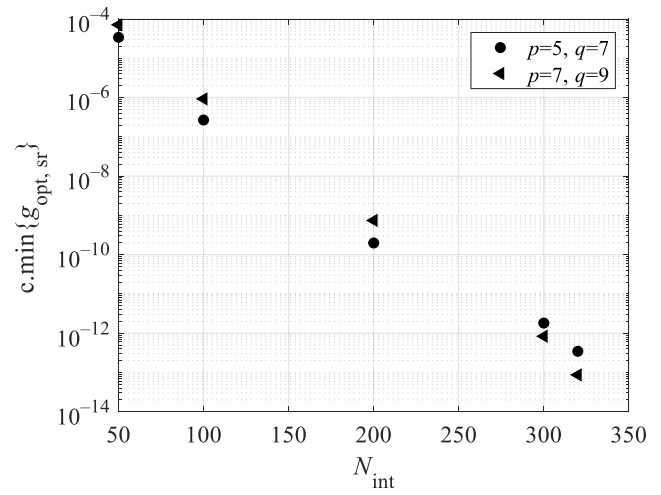


(б)

Слика 3.18. Средња вредност кумулативног минимума у случају (а) равне и (б) закривљене траке ширине  $w = \lambda$  за различит број коефицијената у смени.



(a)



(б)

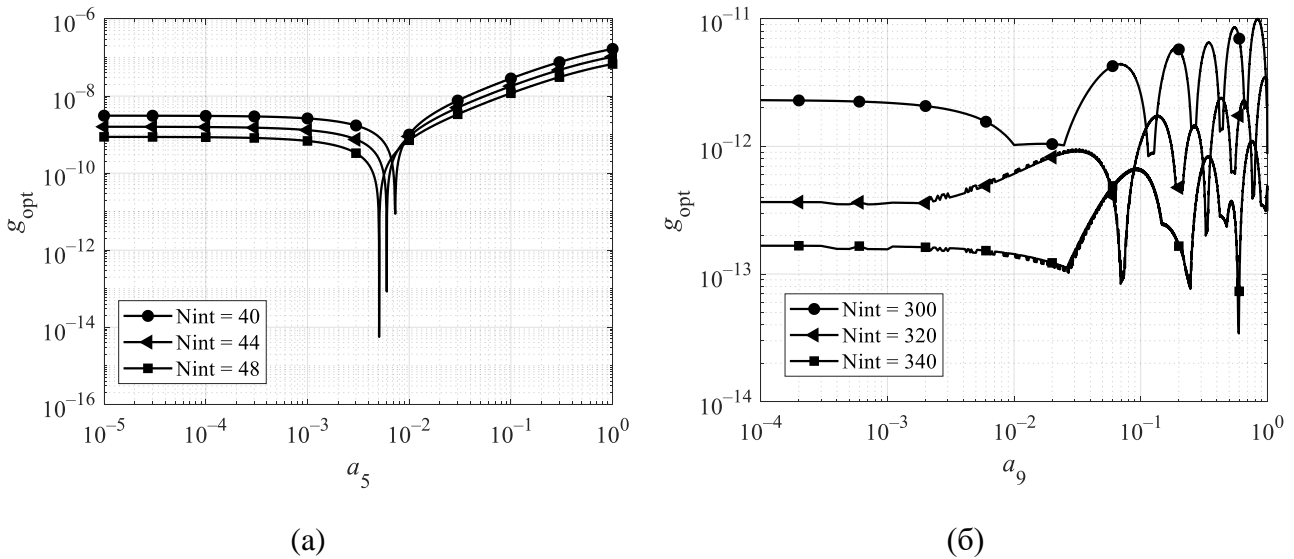
Слика 3.19. Средња вредност кумулативног минимума у случају (а) равне и (б) закривљене траке ширине  $w = \lambda$  када постоје два коефицијента у смени.

С обзиром на то да је за  $D = 2$  оптимизациони простор значајно смањен, спроведена је и систематска претрага са коначним кораком. При томе је један коефицијент постављен на јединицу,  $a_7 = 1$ , док је други био променљив са кораком  $10^{-5}$ . Иако на први поглед изгледа да је у смени могуће подешавати два коефицијента независно, када је  $D = 2$  довољно је подешавати један коефицијент јер је

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{a_5(s'^5(1 - \text{sgn}(s')t_m) + t_m) + a_7(s'^7(1 - \text{sgn}(s')t_m) + t_m)}{a_5 + a_7} = \\
&= \frac{\frac{a_5}{a_7}(s'^5(1 - \text{sgn}(s')t_m) + t_m) + s'^7(1 - \text{sgn}(s')t_m) + t_m}{\frac{a_5}{a_7} + 1}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Резултати експеримента, који су приказани на слици 3.20, то и потврђују: за максималну тачност, са бројем интеграционих тачака који је сличан до сада презентованим, довољно је да један коефицијент буде постављен на јединицу, а други оптимално подешен.

Приметити да се смена са степеним чланом (смена А) може добити из (3.66) када је  $D = 1$  ако додатно проширимо домен степена са непарних природних бројева на позитивне реалне бројеве. Стога мотивација за смену А потиче из претходних експеримената.



Слика 3.20. Вредност оптимизационе функције у случају (а) равне и (б) закривљене траке ширине  $w = \lambda$  у функцији од вредности коефицијента  $a_5$ , односно  $a_9$  када је  $a_7 = 1$ .

### 3.12. АУТОМАТСКА ПРОЦЕДУРА ЗА ИНТЕГРАЦИЈУ ВИСОКЕ ТАЧНОСТИ

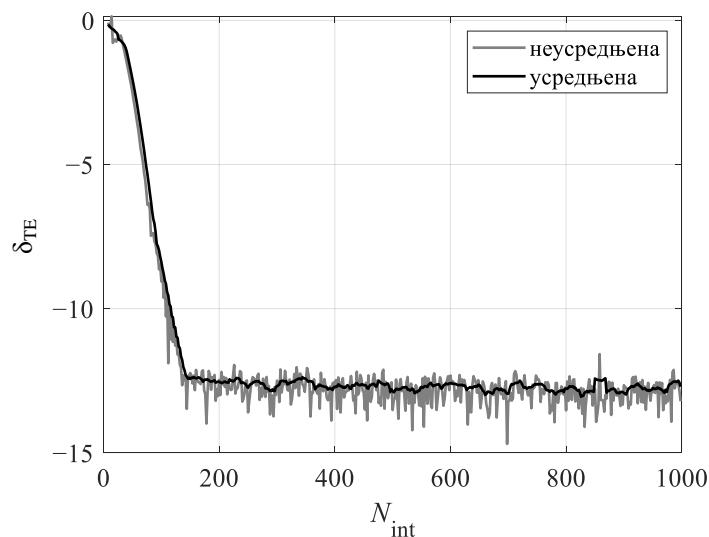
Под аутоматском процедуром за интеграцију високе тачности сматраћемо низ корака чијом се применом могу са високом тачношћу израчунати интегрални који се срећу при анализи 2-D структура произвољног облика методом момената. Циљ овог поглавља је да уведе аутоматску процедуру за интеграцију високе тачности, такву да избор параметара интеграције и броја интеграционих тачака зависи искључиво од електричне ширине траке, тј. од  $w/\lambda$ . Коришћена је смена тангенсом, односно смена D, али се врло слична процедура може спровести и са осталим разматраним сменама. На основу низа нумеричких резултата, предложене су и аналитичке формуле којима се параметри интеграције и потребан број интеграционих тачака могу израчунати за произвољну електричну дужину  $w/\lambda$ .

### 3.12.1. ОПТИМАЛАН ИЗБОР ПАРАМЕТАРА СМЕНЕ

Како смена тангенсом има два параметра, за избор оптималних параметара који минимизирају број интеграционих тачака за што већи број значајних цифара постављен је следећи нумерички експеримент.

Интегрални су израчунати, користећи се предложеном сменом, за параметар  $m_1$  из опсега [1, 11] са кораком 0,1, параметар  $m_2$  из опсега од 0,1 до 1,4 са кораком 0,1 и са бројем интеграционих тачака који је вариран у различитим опсезима зависно од електричне ширине траке. За сваки од разматраних парова  $(m_1, m_2)$  израчуната је, зависно од побуде, релативна грешка (3.47) или (3.48). Са циљем потискивања шума у релативној грешци, 10 узастопних тачака је усредњено као  $\delta_{\text{averaged}}(N_{\text{int}}) = \frac{1}{10} \sum_{k=-5}^4 \delta_{\text{non-averaged}}(N_{\text{int}} + k)$ , где је  $\delta_{\text{averaged}}(N_{\text{int}})$

усредњена грешка за  $N_{\text{int}}$  интеграционих тачака, док је  $\delta_{\text{non-averaged}}(N_{\text{int}} + k)$  неусредњена грешка за  $N_{\text{int}} + k$  интеграционих тачака. На слици 3.21 приказане су неусредњена и усредњена грешка за један пар,  $m_1 = 5,2$  и  $m_2 = 1,4$ , у ТЕ моду равне траке ширине  $w = \lambda$ . Као и код претходних резултата, види се да грешка брзо опада до неке вредности, након чега практично нема побољшања.

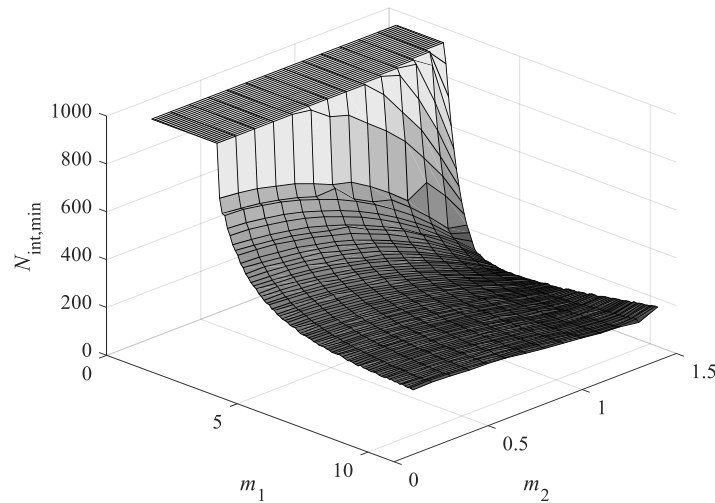


Слика 3.21. Неусредњена и усредњена процена релативне грешке у ТЕ случају равне траке ширине  $w = \lambda$ , за  $m_1 = 5,2$  и  $m_2 = 1,4$ .

Из усредњених грешака, за сваки разматрани пар параметара смене  $(m_1, m_2)$  одређен је број интеграционих тачака после ког практично нема побољшања  $N_{\text{int, min}}$  и минимална грешка  $\delta_0$ . За пример са слике 3.21 је  $N_{\text{int, min}} = 138$  и  $\delta_0 = -12$ . За исту траку као са слике 3.21, на слици 3.22 приказана је зависност минималног броја интеграционих тачака  $N_{\text{int, min}}$  од параметара трансформације  $(m_1, m_2)$ . Овим експериментом је све припремљено за одређивање оптималног пара  $(m_1, m_2)$  који минимизира  $N_{\text{int, min}}$ . Минимална вредност означена је са  $N_{\text{int, min } 0}$  и представља минимум функције са слике 3.22 за коју се добија и оптимални пар  $(m_1, m_2)$ .

Овакав низ експеримената спроведен је за све разматране траке електричних ширина  $1 \leq w/\lambda \leq 400$ . Резултати су представљени на сликама 3.23 и 3.24, одакле се може видети да постоји правилност у избору параметара и броја интеграционих тачака у зависности од

електричне ширине траке. Одељци 3.12.2 и 3.12.3 посвећени су одређивању аналитичких функција које могу да апроксимирају рачунање оптималних параметара, као и броја интеграционих тачака у зависности само од електричне ширине траке.



Слика 3.22. Зависност минималног броја интеграционих тачака од параметара смене за равну траку ширине  $w = \lambda$ ,  $\delta_0 = -12$ .

### 3.12.2. АПРОКСИМАЦИЈА ПАРАМЕТАРА СМЕНЕ

Резултати добијени из претходно описаног експеримента, тј. оптимални параметри смене  $m_1$  и  $m_2$  у функцији електричне ширине траке  $w/\lambda$ , приказани су на слици 3.23. Како се оптималне вредности за траке једне ширине, а различитих облика и типа инцидентног таласа групишу, апроксимиране су аналитичким функцијама које зависе само од електричне ширине трака  $w/\lambda$ .

Први параметар смене  $m_1$  може се апроксимирати формулом

$$m_1 = A \arctan \left( B - \ln \left( \frac{w}{\lambda} \right)^C \right) + D, \quad (3.69)$$

где су  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  коефицијенти који могу бити одређени минимизацијом средње квадратне грешке оптималних вредности добијених експериментом и апроксимације. Минимизација је спроведена вишеструким пуштањем симплекс алгоритма сваки пут из случајно изабране почетне тачке. Добијени резултати, заокружени на две децимале, су  $A = 1,07$ ,  $B = 5,59$ ,  $C = 1,14$  и  $D = 3,63$ . Са повећањем електричне ширине траке, параметар  $m_1$  приближава се вредности  $m_1 = 2$ , тако да за траку  $w/\lambda = 20,000$ , процењена вредност је  $m_1 \approx 2,13$ , што је веће од два и у складу са доказом датим у поглављу 3.8.3.

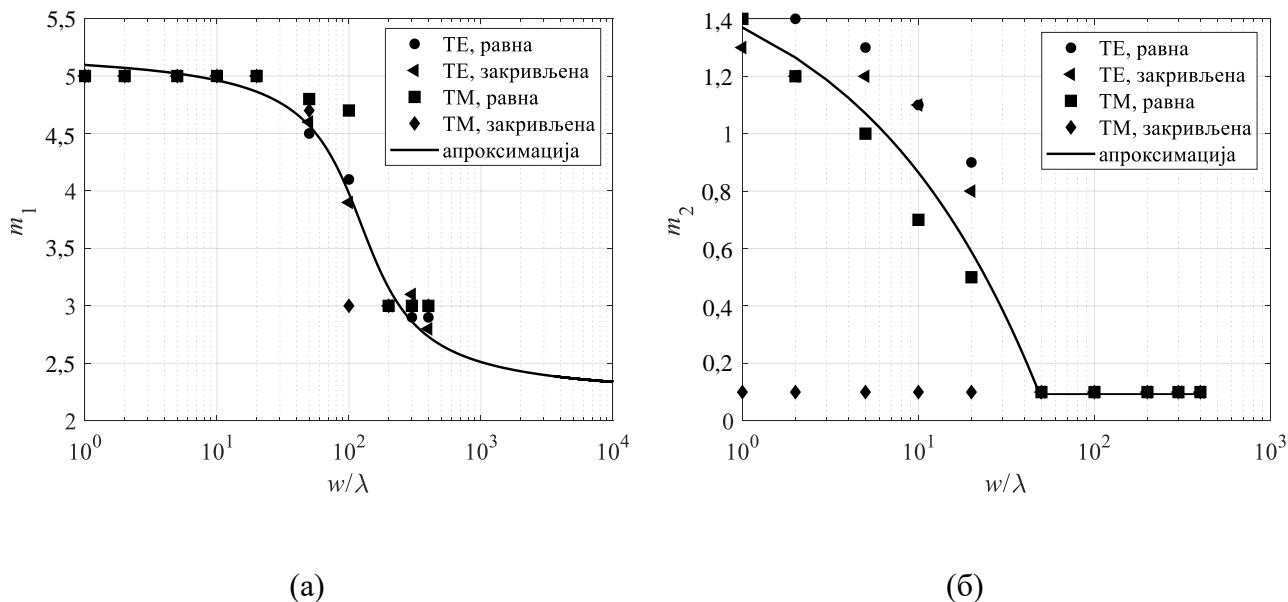
Слично, други параметар смене  $m_2$  може се апроксимирати формулом

$$m_2 = E \left( \frac{w}{\lambda} \right)^F + G, \quad \text{када је } w/\lambda \leq 50 \text{ за ТЕ/равну, ТМ/равну, ТЕ/закривљену} \quad (3.70)$$

$$m_2 = 0,1, \text{ у осталим случајевима}$$

где су  $E$ ,  $F$  и  $G$  коефицијенти одређени минимизацијом средње квадратне грешке, као и претходно. Вредности коефицијената, заокружене на две децимале, су  $E = -0,27$ ,  $F = 0,44$  и  $G = 1,63$ .

Резултати које дају обе апроксимативне формуле (3.69) и (3.70) приказани су на слици 3.23 упоредо са оптималним вредностима добијеним из експеримената. Како аналитичке формуле за одређивање вредности параметара смене зависе само од електричне ширине траке, то је за аутоматизацију процедуре интеграције са високом тачношћу потребно још проценити и број интеграционих тачака, о чему ће бити речи у наредном одељку.



Слика 3.23. Оптимални избор параметра (а)  $m_1$  и (б)  $m_2$  и њихове апроксимације.

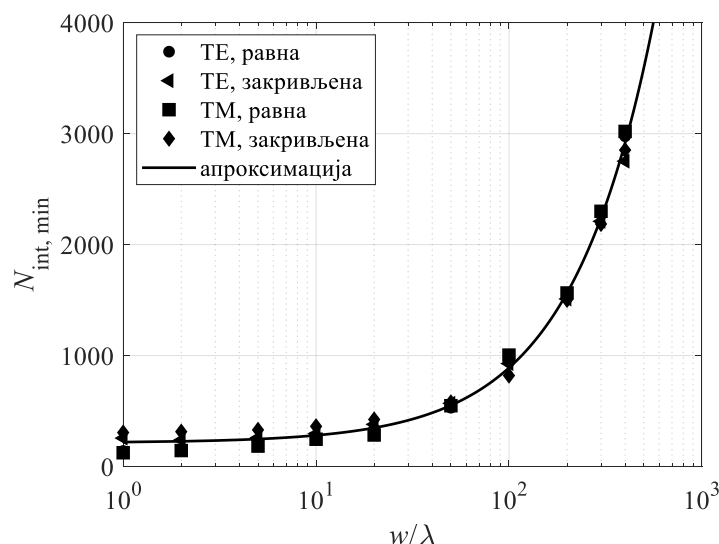
### 3.12.3. АПРОКСИМАЦИЈА БРОЈА ИНТЕГРАЦИОНИХ ТАЧАКА

Минималне вредности броја интеграционих тачака за максималну тачност при оптималним параметрима смене, добијене експериментима као са слике 3.22, приказане су на слици 3.24. Како се вредности за различите траке групишу око једне вредности  $w/\lambda$ , предложена је аналитичка формула која их апроксимира

$$N_{\text{int, min } 0} = \left\lceil 6,76 \frac{w}{\lambda} + 313,57 \right\rceil, \quad (3.71)$$

где је  $\lceil x \rceil$  оператор заокруживања на најближу горњу целобројну вредност. Коефицијенти у (3.71) добијени су минимизацијом средње квадратне грешке, слично као у претходне две апроксимације, са ограничењем да апроксимација прецењује оптималне вредности. Рестрикција је уведена да би формула (3.71) била конзервативна.

Коначно, са аналитичким формулама (3.69)–(3.71) интеграција са високом тачношћу може бити аутоматизована. То значи да, при нумеричкој интеграцији сингуларних интеграла са високом тачношћу коришћењем смене  $D$ , избор параметара смене, као и потребног броја интеграционих тачака не зависи од облика структуре која се испитује, нити од типа инцидентног таласа, већ само од електричне ширине структуре. Као што се може приметити са слике 3.23, формуле (3.69) и (3.70) дају нешто другачије процене за параметре смене, него што су оптималне. Ово даље резултира у нешто већем броју потребних интеграционих тачака од минималног, али омогућава аутоматску шему интеграције са високом тачношћу.



Слика 3.24. Минималан број тачака интеграције и његова апроксимација.

У следећем одељку илустрована је примена апроксимација (3.69)–(3.71) на примерима трака које су већих електричних ширина него оне разматране до сада. Тиме је употреба апроксимација (3.69)–(3.71) верификована.

### 3.12.4. ВЕРИФИКАЦИЈА АУТОМАТСКЕ ПРОЦЕДУРЕ ЗА ИНТЕГРАЦИЈУ ВИСОКЕ ТАЧНОСТИ

Расејачи анализирани у овом поглављу су равне и изразито закривљене траке електричних ширина у опсегу  $400 < w/\lambda \leq 16000$ .

За рачунање интеграла коришћена је смена са тангенсом (смена D) са параметрима  $m_1$  и  $m_2$  рачунатим из апроксимација (3.69) и (3.70). Одатле је процењен минималан број интеграционих тачака потребан за максималну тачност који је затим упоређен са апроксимацијом (3.71).

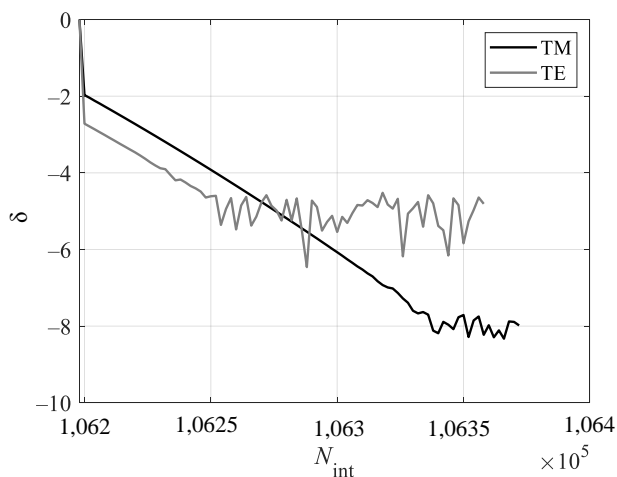
Процењене релативне грешке интеграла за највећу анализирану траку електричне ширине  $w/\lambda = 16000$  приказане су на слици 3.25. У поређењу са вредношћу коју процењује апроксимација  $N_{\text{int, min } 0} \approx 1,08 \cdot 10^5$ , минималан број интеграционих тачака са слике 3.25 је нешто мањи у свим разматраним случајевима. Додатно, због разлике у сингуларитетима (и тежини њихове интеграције), процењене грешке су мање у ТМ случају, него у ТЕ случају.

Резултати свих разматраних трака приказани су у табели 3.6. Може се закључити да је број интеграционих тачака за Гаус-Лежандрову интеграцију за око 10 % већи него број процењен из експеримената. Тиме је потврђена конзервативност формуле (3.71). Минимална вредност модула минимума релативних грешака за све разматране случајеве, тј.  $\min\{|\delta_0|\}$ , такође је дата у табели 3.6. Тај број представља минималан број тачно одређених значајних цифара при интеграцији траке дате електричне ширине и он опада како  $w/\lambda$  расте. Разлог опадања броја тачно израчунатих значајних цифара лежи у броју нумеричких операција са бројевима записаних у двострукој тачности. Следећи одељак посвећен је једноставном експерименту који испитује како број интеграционих тачака утиче на број значајних цифара.

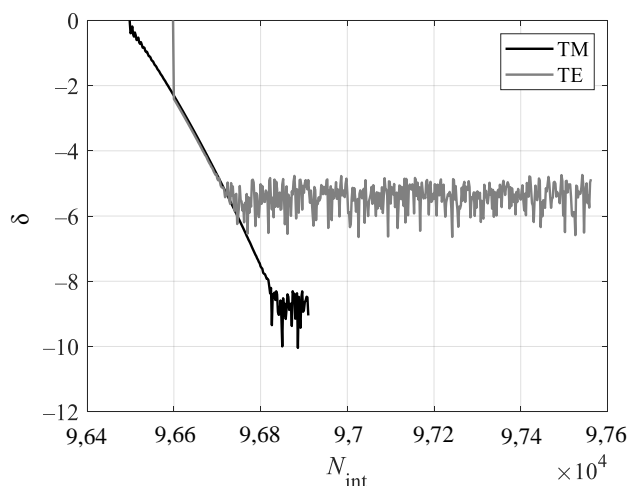


Табела 3.6. Верификација апроксимативних формула.

$w/\lambda$	$\min\{ \delta_0 \}$	$m_1$	$m_2$	$N_{\text{int},\min 0}$				
				апрокс.	ТМ/равна	ТМ/крива	ТЕ/равна	ТЕ/крива
1000	8	2,39	0,1	7072	7000	6500	7000	6460
2000	8	2,29	0,1	1,38e4	1,37e4	1,25e4	1,37e4	1,25e4
3000	8	2,24	0,1	2,06e4	2,04e4	1,85e4	2,04e4	1,85e4
4000	8	2,22	0,1	2,73e4	2,7e4	2,45e4	2,7e4	2,45e4
5000	7	2,2	0,1	3,4e4	3,37e4	3,04e4	3,36e4	3,04e4
1e4	6	2,16	0,1	6,79e4	6,67e4	6,06e4	6,67e4	6,05e4
1,6e4	5	2,14	0,1	1,08e5	1,06e5	9,68e4	1,06e5	9,67e4



(а)



(б)

Слика 3.25. Процена релативних грешака у случају (а) равних и (б) закривљених трака ширине  $w/\lambda = 16000$ .

### 3.12.5. УТИЦАЈ НУМЕРИЧКОГ ШУМА У ГАУС-ЛЕЖАНДРОВОЈ НУМЕРИЧКОЈ ИНТЕГРАЦИЈИ

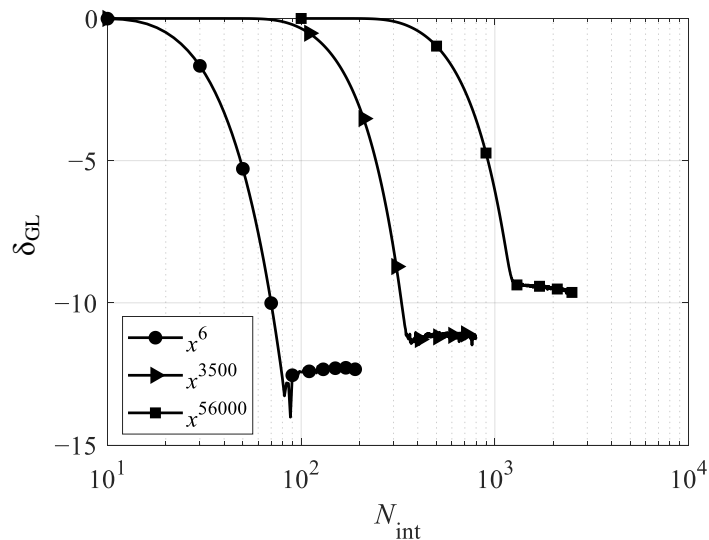
У циљу испитивања како број интеграционих тачака у Гаус-Лежандровој нумеричкој интеграцији утиче на број тачно одређених значајних цифара, спроведен је следећи нумерички експеримент. Интеграли са познатим аналитичким решењем  $\int_{-1}^1 x^n dt = 2/(n+1)$ , за три вредности степена  $n \in \{6, 3500, 56000\}$ , израчунати су Гаус-Лежандровом нумеричком интеграцијом. Мотивација за избор степена долази из чињенице да су то оптимални редови апроксимације неких од испитиваних трака: за траку ширине  $w = 10000 \lambda$  ред апроксимације је  $N_0 \sim 35000$ , док је за траку ширине  $w = 16000 \lambda$  ред апроксимације  $N_0 \sim 56000$ .

Релативна грешка је израчуната из формуле  $\delta_{\text{GL}}(N_{\text{int}}) = \log_{10} \frac{|2/(n+1) - I_{N_{\text{int}}}|}{|2/(n+1)|}$ , где је  $I_{N_{\text{int}}}$  интеграл рачунат нумерички у  $N_{\text{int}}$  интеграционих тачака после предложене смене.

На слици 3.26 приказане су релативне грешке у функцији броја интеграционих тачака за сва три разматрана интеграла. Због грешака у заокруживању и коначне тачности бројева у много нумеричких операција, број значајних цифара је мањи од 15, као што се може видети са слике 3.26. Број значајних цифара када је интегранд  $x^{56000}$  је само 9. Када је интегранд још

комплекснији, на пример када је и Ханкелова функција укључена, број значајних цифара је још мањи, као што се може видети из колоне  $\min\{|\delta_0|\}$  у табели 3.6.

Овај једноставни експеримент илуструје да број значајних цифара опада како ред полинома расте, због бројних нумеричких операција које је потребно спровести и грешака у заокруживању које неминовно постоје због коначне тачности представе бројева. Стога, иако нисмо спроводили експерименте са полиномима степена већег од 56000, чини се да је једино ограничење за ред полинома који може да се користи за апроксимацију расподеле струје коначна тачност представљања бројева у рачунару.



Слика 3.26. Релативна грешка интеграла рачунатих Гаус-Лежандровом нумеричком интеграцијом.

### 3.13. ГУСТИНА ПОВРШИНСКИХ СТРУЈА НА ТРАКАМА

У претходним поглављима било је речи о интеграцији сингуларних интеграла који се срећу при анализи 2-D расејача методом момената. Крајњи резултат анализе, тј. решење система линеарних једначина, су коефицијенти у апроксимацијама густина површинских струја на расејачима. Ради провере, добијене апроксимације густина струја упоређене су са резултатима комерцијално доступног софтвера за траке различитих облика, електричних ширина и инцидентног таласа у ТЕ и ТМ моду. Коришћен је комерцијални софтвер WIPL-2D. Резултати представљени у овом поглављу публиковани су у [14], [69]–[71], [87], а проистекли су из рада на овој докторској дисертацији.

#### 3.13.1. РАВНЕ И ЗАКРИВЉЕНЕ ТРАКЕ ШИРИНЕ ДО 400 ТАЛАСНИХ ДУЖИНА

Посматрајмо 2-D расејаче равнo и изразито закривљеног попречног пресека (слика 3.1) побуђене равним, униформним таласом у ТМ моду. У нумеричкој анализи најпре ћемо користити смену дату једначином (3.20) на начин како је описано у претходним поглављима.

Нека је добијена апроксимација густине струја на тракама  $J_z$ , а нека је апроксимација густине струја на истој траци добијена из комерцијалног софтвера, који користи део-по-део константне базисне функције (енглески: *pulse basis functions*),  $J_{z0}$ . Процена релативне грешке може се израчунати из [14]

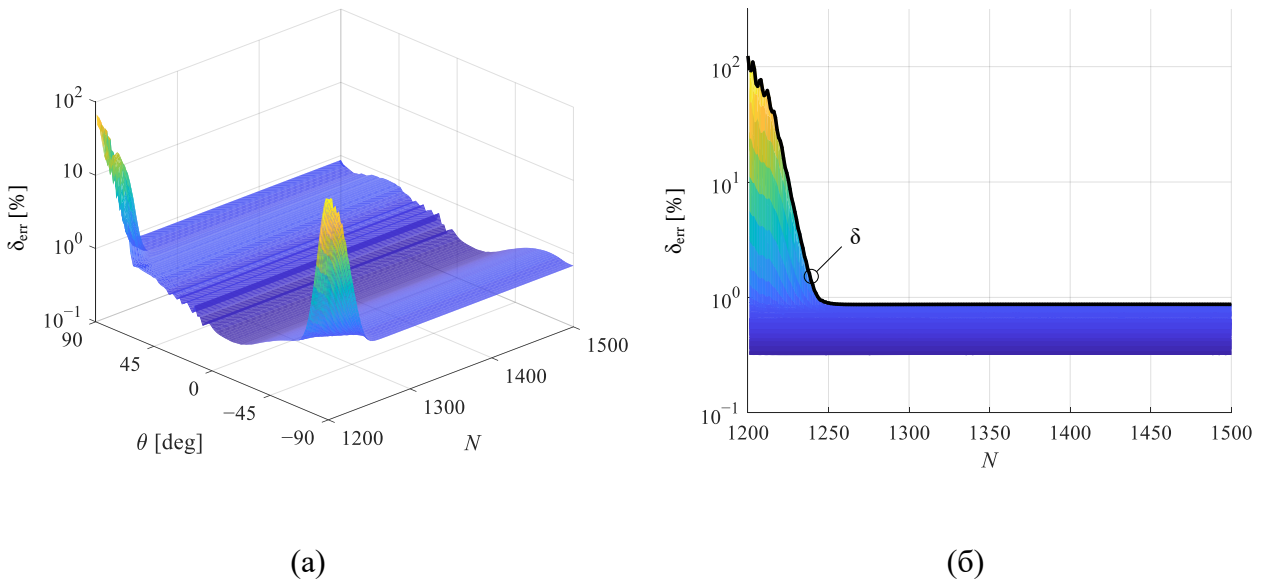
$$\delta_{\text{err}}(N, \theta) = \frac{\int_{-1}^1 |J_{z0}(t) - J_z(t)| dt}{\int_{-1}^1 |J_{z0}(t)| dt} \approx \frac{\sum_{u=1}^M |J_{z0}(t_u) - J_z(t_u)|}{\sum_{u=1}^M |J_{z0}(t_u)|}, \quad (3.72)$$

где су  $t_u$  ( $u = 1, 2, \dots, M$ ) тачке равномерно распоређене по ширини траке на интервалу  $[-1, 1]$  и  $M = 6000$ . Процена грешке је функција (а) инцидентног угла побудног таласа,  $\theta$ , и (б) броја непознатих коефицијената у апроксимацији струја,  $N$ . Да бисмо стекли увид у највећу вредност процене грешке, рачуната је за 91 правац инцидентног таласа у опсегу од  $-90^\circ$  до  $90^\circ$  и за различите редове апроксимације струја, у свим разматраним случајевима.

Пример процене грешке струја  $\delta_{\text{err}}(\theta, N)$ , у процентима, на закривљеној траци ширине  $w = 400 \lambda$  приказан је на слици 3.27а, док је исти график посматран са стране дат на слици 3.27б [14]. При томе, свака линија на сликама 3.27а и 3.27б представља грешку рачунату за један угао  $\theta$ . Максимална вредност процене грешке  $\delta$ , као функције реда апроксимације струја  $N$ , за све разматране углове инцидентног таласа  $\theta$ , рачуната је као [14]

$$\delta(N) = \max_{-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ} \delta_{\text{err}}(N, \theta) \quad (3.73)$$

и означена је дебелом линијом на слици 3.27б.

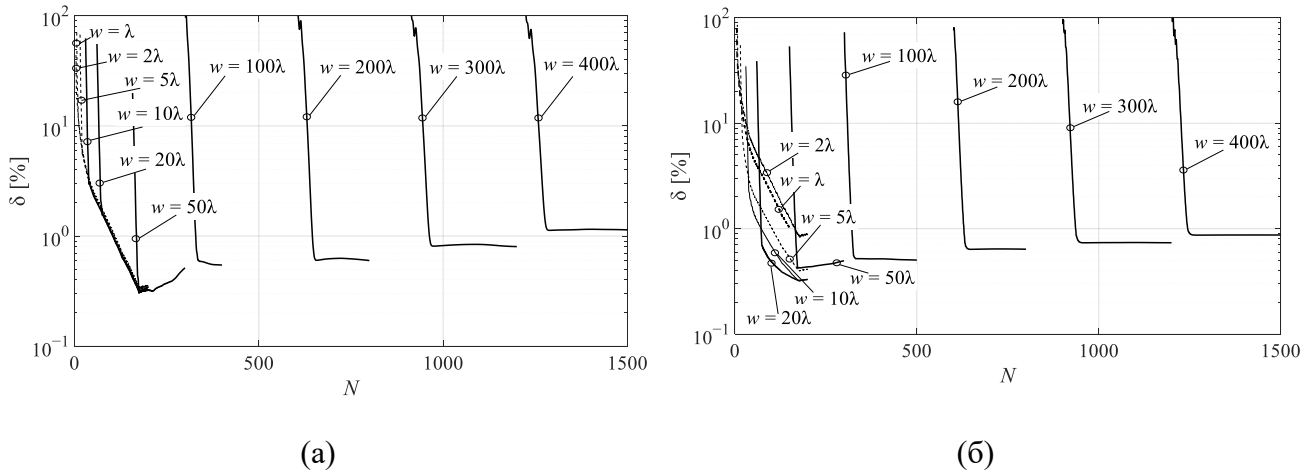


Слика 3.27. Процена грешке струја на закривљеној траци ширине  $w = 400 \lambda$ : (а) у функцији од упадног угла и реда апроксимације и (б) поглед са стране и процена максималне грешке  $\delta$  (дебела линија) [14].

Како су резултати процене грешака  $\delta_{\text{err}}(N, \theta)$  квалитативно врло слични за све траке, то они неће бити посебно представљени. Процене максималних грешака за траке различитих ширина представљене су на слици 3.28 [14]. Сви резултати са слике 3.28 показују исто понашање: грешка је велика када је  $N$  мало, затим грешка нагло опада повећавањем  $N$  и, на самом крају, конвергира некој вредности или се јако споро смањује. Минимална вредност  $N$

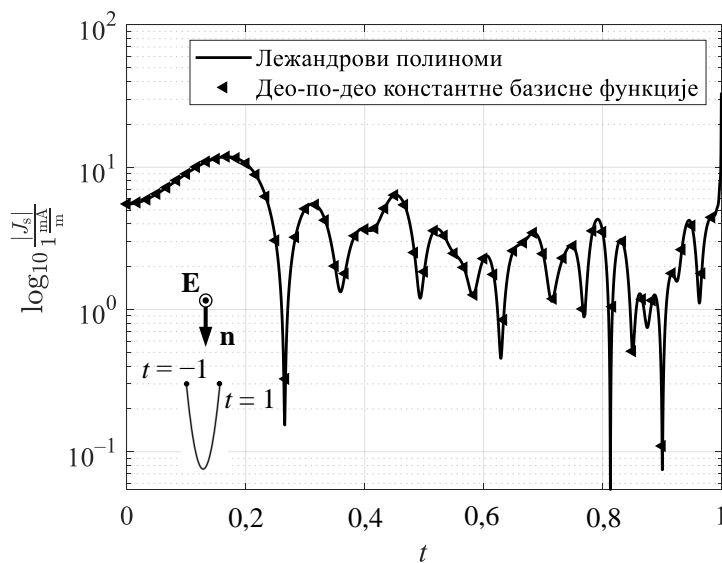
за коју грешка конвергира је апроксимативно  $N \sim \lceil \xi w / \lambda \rceil$ , где је  $3,5 \leq \xi \leq 5$  и  $\xi$  се смањује како се ширина трака  $w / \lambda$  повећава [7], [14].

Процењена максимална грешка за све разматране структуре мања је од 1 %. Како процена грешке конвергира са повећавањем  $N$ , то указује да целодоменска анализа са Лежандровим полиномима конвергира мало другачијим резултатима од референтног решења из комерцијалног софтвера. Ово неслагање је очекивано с обзиром на то да су референтна решења добијена користећи константан број део-по-део константних базисних функција.



Слика 3.28. Процене максималних грешака  $\delta$  код (а) равних и (б) закривљених трака различитих електричних ширина [14].

У циљу илустрације грешке од 1 % у струјама, на слици 3.29 [14] приказане су густине струја на закривљеној траци ширине  $w = 20 \lambda$  када је инцидентни угао  $\theta = 90^\circ$ . Попречни пресек траке и правац инцидентног таласа такође су приказани на слици 3.29. Ред највећег Лежандровог полинома је 80. У посматраном случају, густина струје је симетрична око  $t = 0$ , тако да је дата само једна половина графика. Вертикална оса је у логаритамској размери како би мале вредности густине струја биле јасније. Са слике се види да су разлике у густинама струја практично неприметне голим оком.

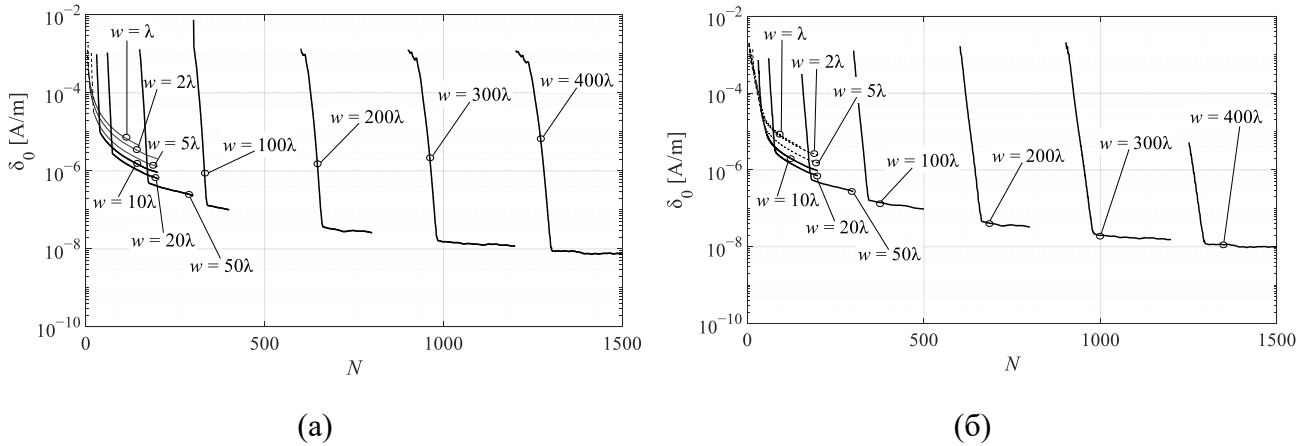


Слика 3.29. Поређење густина струја на закривљеној траци ширине  $w = 20 \lambda$  за  $\theta = 90^\circ$  [14].

Други начин процене максималне грешке је [14]

$$\delta_0(N) = \max_{-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ} \frac{1}{M} \sum_{u=1}^M |J_{z,N}(t_u) - J_{z,N-1}(t_u)|, \quad (3.74)$$

где су  $t_u$ ,  $N$  и  $M$  као у дефиницији грешака  $\delta_{\text{err}}$  и  $\delta$ . На овај начин испитује се разлика у густинама струја за два узастопна реда апроксимације струја. Процењене максималне грешке (3.74) за равне и закривљене траке различитих ширина приказане су на слици 3.30 [14].



Слика 3.30. Процене максималних грешака  $\delta_0$  код (а) равних и (б) закривљених трака различитих електричних ширина [14].

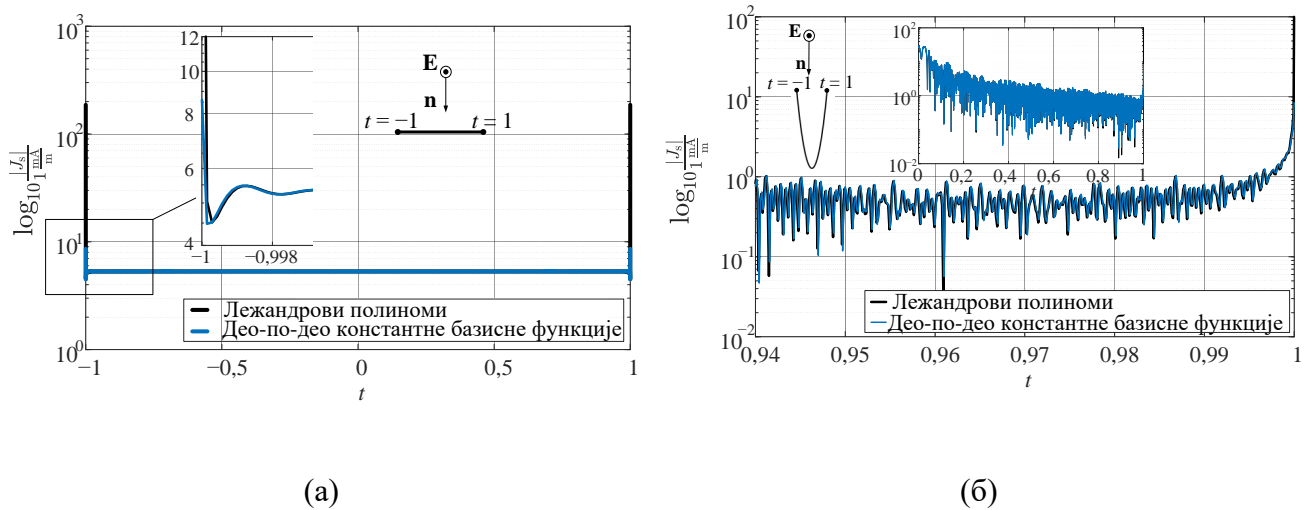
Квалитативно, облик грешака личи на оне приказане на слици 3.28, тј. добијају се исте вредности реда апроксимације за које грешке конвергирају,  $N \sim \lceil \xi w / \lambda \rceil$ ,  $3,5 \leq \xi \leq 5$ . Како графици опадају, то се може закључити да се повећањем реда апроксимације, уз интеграле срачунате са високом тачношћу, добијају све тачније апроксимације струја. Зависно од захтева бира се и потребан ред. У оквиру ове дисертације користићемо минималан ред за који густине конвергирају, тј.  $N \sim \lceil \xi w / \lambda \rceil$ .

### 3.13.2. РАВНЕ И ЗАКРИВЉЕНЕ ТРАКЕ ШИРИНЕ ДО 4000 ТАЛАСНИХ ДУЖИНА

У овом одељку биће приказани резултати апроксимација струја на тракама врло великих електричних дужина, и то једне равне једне и изразито закривљене траке са слике 3.1. У целодоменској анализи број непознатих је  $N = 3,5w/\lambda$ . Резултати су, као и претходно, упоређени са резултатима из комерцијалног софтвера. Комерцијални софтвер дели траку на кратке сегменте, на којима струју апроксимира константом, полиномом првог или другог реда, што ће бити наглашено у сваком од анализираних примера.

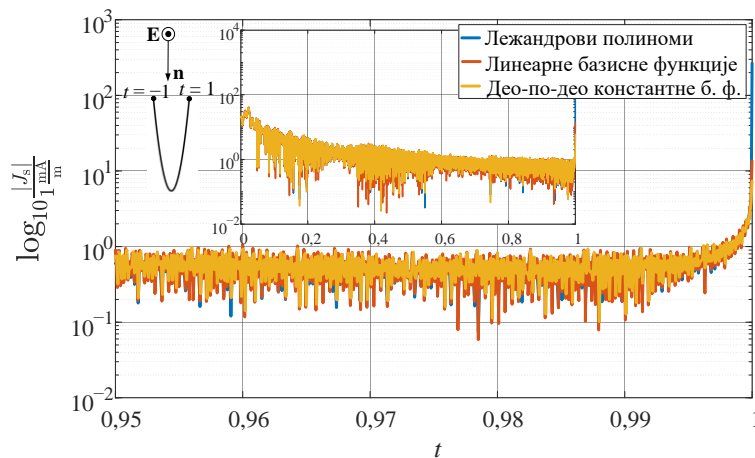
Нека су траке најпре побуђене равним, униформним таласом ТМ типа под инцидентним углом од  $\theta = 90^\circ$ . Ширина трака је 1000 таласних дужина. На слици 3.31, у логаритамској размери, упоредо су приказане густине струја добијене целодоменском анализом коришћењем смене (3.20) и део-по-део константном апроксимацијом из истог комерцијалног софтвера. За избор параметара трансформације и броја интеграционих тачака коришћене су апроксимације (3.51)–(3.53). Оправданост избора истог параметра трансформације у случају закривљених и равних трака лежи у чињеници да се и из табеле 3.1 види да се за шире траке параметри све мање разликују. Број непознатих коефицијената у целодоменској анализи је 3500, док је број непознатих у комерцијалном софтверу 14000. Највеће неслагање које се може видети на сликама 3.31 је на крајевима трака где

полиномијална расподела струје боље апроксимира велике вредности струја. Процењена грешка (3.72) у оба случаја је око 2 %.



Слика 3.31. Апроксимација густине струје на 2-D расејачима облика (а) равне и (б) закривљене траке ширине 1000 таласних дужина у ТМ случају.

Следећи пример је расејач у облику закривљене траке ширине 2000 таласних дужина, побуђен ТМ модом, који је анализиран целодоменском анализом коришћењем смене (3.20) и комерцијалног софтвера, најпре са део-по-део константним, а затим и са линеарним сегментима. Резултати су приказани на слици 3.32 [69]. Процене грешака (3.72) целодоменског решења у односу на део-по-део константну и део-по-део линеарну апроксимацију су око 2,5 %.



Слика 3.32. Полиномијална, део-по-део константна и део-по-део линеарна апроксимација густине струје на 2-D расејачу облика закривљене траке ширине 2000 таласних дужина у ТМ случају [69].

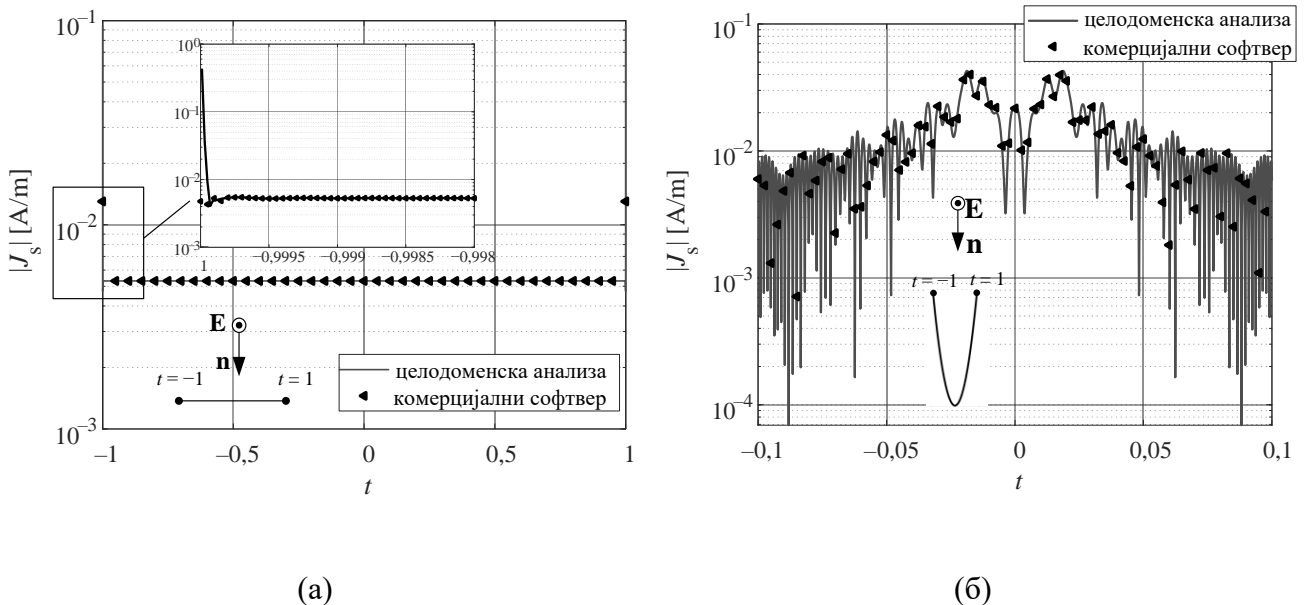
Врло слични експерименти спроведени су коришћењем смене D (3.30) на примеру 2-D расејача у облику равних и закривљених трака побуђених ТМ и ТЕ модом. Максимална ширина трака у наредним експериментима је 4000 таласних дужина. Та ширина је највећа за коју је израчуната апроксимација густине струја, јер паралелна имплементација овог кода на персоналном рачунару са осам језгара и 32 GB RAM меморије заузима готово све ресурсе за траку те ширине. Наиме, ради убрзавања програма, Лежандрови полиноми су унапред израчунати за сваку тачку подешавања, којих је било 22450 за траку ширине 4000  $\lambda$ , и за сваки ред, којих је било 14000 за траку ширине 4000  $\lambda$ . Искоришћено свих осам језгара, а програм је написан тако да је за сваки од њих заузета посебна меморија за чување ових података. Пошто су бројеви чувани у двострукој тачности, то је укупна заузета меморија

само за ове податке једнака  $22450 \cdot 14000 \cdot 8 = 2514400000$  бајтова, што је око 19 GB. Део радне меморије заузимају остале променљиве, па је укупна меморија коју програм заузима око 22 GB.

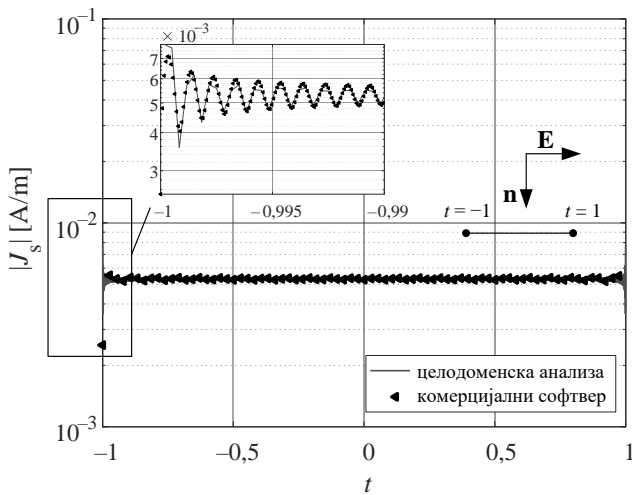
Параметри апроксимације и број тачака интеграције израчунати су из апроксимација (3.69)–(3.71). Резултати густина струја упоређени су са резултатима из комерцијалног софтвера који користи полиномијалну апроксимацију другог реда на сегментима максималне дужине  $0,5 \lambda$ .

Апроксимације густине струје на равnoj траци приказане су на слици 3.33а, док су на слици 3.33б [71] приказане апроксимације густине струје на закривљеној траци. Ширина трака је  $4000 \lambda$ , док је побуда у ТМ моду. Извршавање програма трајало је око 80 сати. На сликама су уметнути и облици попречних пресека одговарајућих трака, као и правац наилаaska побудног таласа за који је трака анализирана. Ради прегледности дат је само део опсега координате  $t$  на слици 3.33б. Процењена грешка (3.72) је око 3,5 % у оба случаја, а разлике у густинама струја су на сликама неприметне.

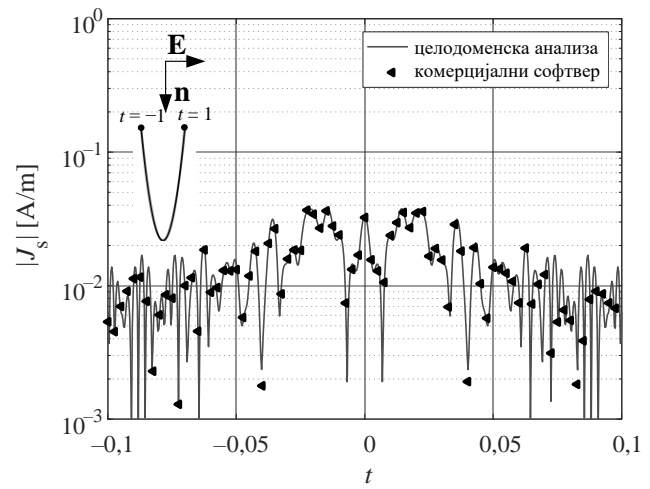
Равне и закривљене траке великих електричних ширина анализиране су и у ТЕ моду коришћењем смене  $D$ . Из (3.3)–(3.5) се може видети да је за рачунање елемента матрице у случају ТМ моду потребно решити један интеграл, а два интеграла у случају ТЕ мода. Стога трајање програма траје значајно дуже, па је максимална електрична ширина траке анализиране у ТЕ моду мања од максималне ширине траке анализиране у ТМ моду. Трајање анализе траке ширине  $3000 \lambda$  је око 90 сати, односно слично као и анализа траке ширине  $4000 \lambda$  у ТМ моду. Добијене апроксимације густине струја на тракама ширина  $2000 \lambda$  и  $3000 \lambda$  упоређене су са резултатима комерцијалног софтвера и приказане на сликама 3.34 и 3.35. Као и у претходним резултатима, на сликама су уметнути одговарајући облици попречних пресека трака заједно са правцем инцидентног таласа који је анализиран. Процењена грешка (3.72) је око 3,5 % у оба случаја. Са приказаних графика не могу се лако видети разлике у добијеним апроксимацијама.



Слика 3.33. Полиномијална апроксимација и апроксимација добијена комерцијалним софтвером густине струје на 2-D расејачима облика (а) равне и (б) закривљене траке [71] ширине  $4000$  таласних дужина у ТМ случају.

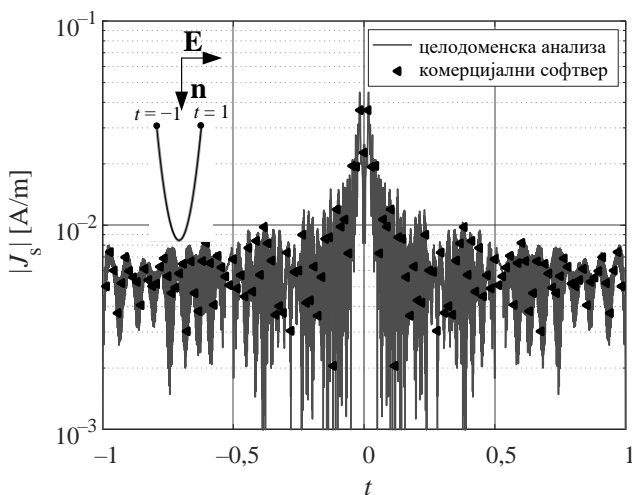


(a)

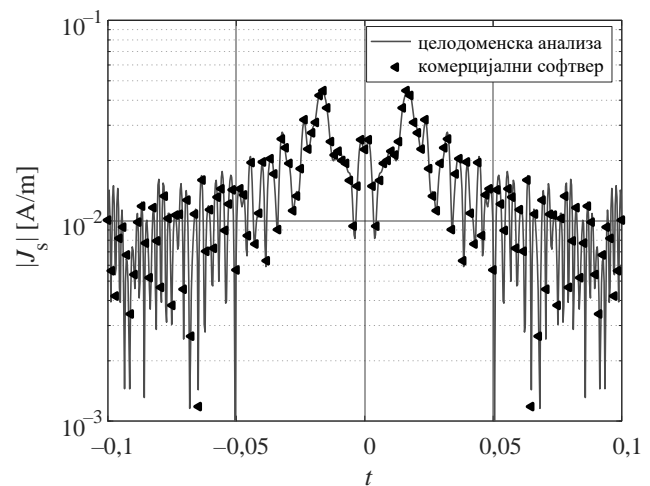


(б)

Слика 3.34. Полиномијална и апроксимација добијена комерцијалним софтвером густине струја на 2-D расејачима облика (а) равне и (б) закривљене траке ширине 2000 таласних дужина у ТЕ случају.



(a)



(б)

Слика 3.35. Полиномијална и апроксимација добијена комерцијалним софтвером густине струја на 2-D расејачима облика закривљене траке ширине 3000 таласних дужина у ТЕ случају: (а) на целом и (б) делу опсега координате  $t$ .

Експериментима са слика 3.31–3.35 потврђено је да се 2-D расејачи побуђени ТМ и ТЕ модом могу анализирати целодоменском анализом ако су интегрални израчунати са високом тачношћу. То имплицира да један сегмент у 2-D нумеричкој анализи методом момената може бити до бар 4000 електричних дужина.

### 3.13.3. ТРАКЕ ПРОИЗВОЉНИХ ПОПРЕЧНИХ ПРЕСЕКА

У досадашњем излагању разматране су траке равне и изразито закривљеног попречног пресека (слика 3.1) са идејом да се од та два облика могу формирати и другачији било отворени, било затворени облици попречних пресека трака. У овом поглављу анализирани су 2-D расејачи у облику танких трака различитих отворених и затворених попречних пресека



који су сложенијег облика. Расејачи су побуђени ТМ таласом. Анализа је, као и до сада, целодоменска, уз коришћење наведених смена за рачунање интеграла са високом тачношћу.

На слици 3.37 [14] уметнути су облици попречних пресека трака које су анализиране, а облици су означени словима А–F. Трака облика А (параболе) је већ разматрана као закривљена трака у претходним поглављима, а овде је дата ради поређења. Параметарске једначине траке облика В (Архимедове спирале) су

$$x = 3c\pi(1+t)/2 \cos(3c\pi(1+t)/2), \quad y = 3c\pi(1+t)/2 \sin(3c\pi(1+t)/2), \quad (3.75)$$

где је  $t$  локална координата из опсега  $[-1, 1]$ , док је  $c$  реални број којим се контролише ширина траке  $w$ . Параметарске једначине траке облика С (облика „таласа“) су

$$x = ct, \quad y = c(a_0 + a_1t + \dots + a_6t^6), \quad (3.76)$$

где тачке  $(x, y) \in \{(-0,8, 0), (-0,6, 1), (-0,3, 0,8), (0, 1), (0,3, 0,8), (0,6, 1), (0,8, 0)\}$  припадају кривој и тиме дефинишу коефицијенте  $a_i, i=1,2,\dots,6$ , док су  $t$  и  $c$  као у претходној дефиницији. Параметарске једначине траке облика D (елипсе) су

$$x = c \cos(\pi(t+1/2)), \quad y = 0,2c \sin(\pi(t+1/2)), \quad (3.77)$$

траке облика Е (облика „пасуља“)

$$\begin{aligned} x &= c(\sin^3(\pi(2t+3)/4) + \cos^3(\pi(2t+3)/4))\cos(\pi(t+2)/2), \\ y &= c(\sin^3(\pi(2t+3)/4) + \cos^3(\pi(2t+3)/4))\sin(\pi(t+2)/2) \end{aligned} \quad (3.78)$$

и траке облика F (облика „детелине“)

$$\begin{aligned} x &= c(\sin^4(\pi(t+1/4)) + \cos^4(\pi(t+1/4)))\cos(\pi(t+1/4)), \\ y &= c(\sin^4(\pi(t+1/4)) + \cos^4(\pi(t+1/4)))\sin(\pi(t+1/4)). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ширина свих анализираних трака је  $w = 20 \lambda$ . Инцидентни угао побудног таласа је такође приказан на слици 3.37. Нумеричка електромагнетска анализа спроведена је коришћењем смене (3.20). Са циљем процене апроксимације густине струја, број непознатих коефицијената је удвостручен неколико пута и израчуната је процена грешке [14]

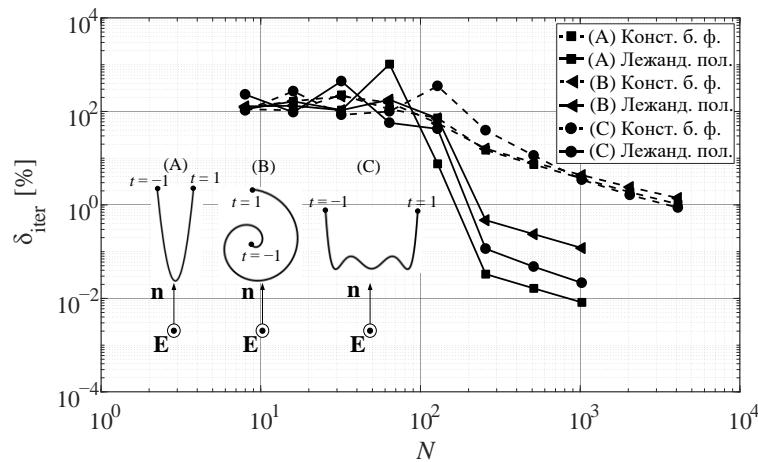
$$\delta_{\text{пер}}(2N) = \frac{\int_{-1}^1 |J_{2N}(t) - J_N(t)| dt}{\int_{-1}^1 |J_{2N}(t)| dt}, \quad (3.80)$$

где су  $J_N(t)$  и  $J_{2N}(t)$  апроксимације густина струја са  $N$  и  $2N$  непознатих коефицијената, редом. У случају део-по-део константне апроксимације (добијене комерцијалним софтвером),  $N$  тачака у којима се рачуна струја  $J_N(t)$  треба проширити на  $2N$  тачака, па је (3.80) рачуната као [14]

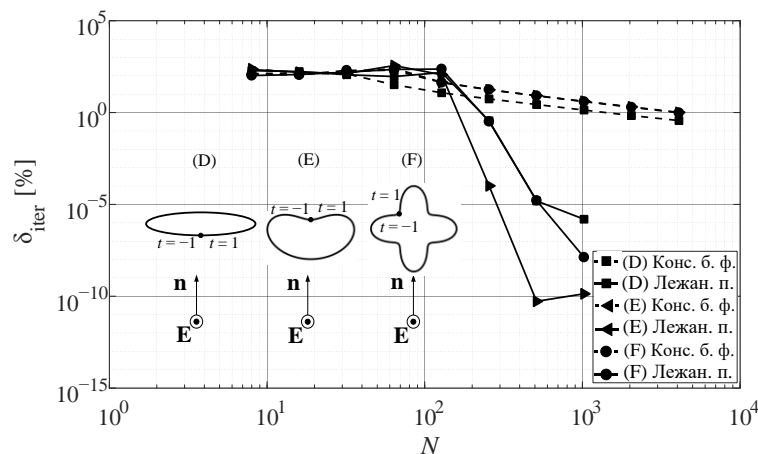
$$\delta_{\text{iter}} \approx \frac{\sum_{k=1}^{2N} |J_{2N}(t_k) - J_N(t_k)|}{\sum_{k=1}^{2N} |J_{2N}(t_k)|}. \quad (3.81)$$

Слично, у случају целодоменске апроксимације, Гаус-Лежандрова интеграција је коришћена за рачунање процене грешке (3.80).

На сликама 3.37 и 3.38 приказане су процене грешака (3.80) део-по-део константне и целодоменске апроксимације струја за 2-D расејаче облика А–F. Из резултата се може закључити да у сваком разматраном случају резултати целодоменске анализе конвергирају брже од део-по-део константне апроксимације. Стога предложена нумеричка интеграција може бити коришћена у целодоменској анализи и трака облика компликованијих од равне траке и параболе (закривљене), докле год је закривљеност мања од претходно разматране параболе. Користећи се овим облицима као основним сегментима, сложенији облици могу бити формиран и анализирани.



Слика 3.36. Процена грешке при рачунању густине струја на тракама различитих отворених попречних пресека електричне ширине  $20 \lambda$  [14].



Слика 3.37. Процена грешке при рачунању густине струја на тракама различитих затворених попречних пресека електричне ширине  $20 \lambda$  [14].

На слици 3.38 [14] приказане су целодоменска и део-по-део константна апроксимација густина струја на тракама облика В (Архимедове спирале) и облика Е („пасуља“), тј. једне траке отвореног и једне затвореног попречног пресека. Ред целодоменске апроксимације

изабран је тако да је процена максималне грешке (3.73) мања од 1 % у односу на део-по-део константну апроксимацију из комерцијалног софтвера са  $N = 6000$  сегмената. За облик В добијени ред апроксимације је 105, док је за облик Е тај ред 135. У односу на колону  $N_0$  из табеле 3.1 ред апроксимације је нешто већи, што се може приписати компликованијем облику попречног пресека траке. Са слике се не може визуелно приметити одступање у разликама густина струја добијених различитим приступима.

Додатно су разматрана још три облика са оштрим ивицама, уметнута на слици 3.39 [70] чије су параметарске једначине редом: облика А

$$x = 16 \sin^3(\pi t) / L, \tag{3.82}$$

$$y = (13 \cos(\pi t) - 5 \cos(2\pi t) - 2 \cos(3\pi t) - \cos(4\pi t)) / L,$$

облика В

$$x = (\sin^4(1,5\pi t) + \cos^4(1,5\pi t)) \cos(\pi t) / L, \tag{3.83}$$

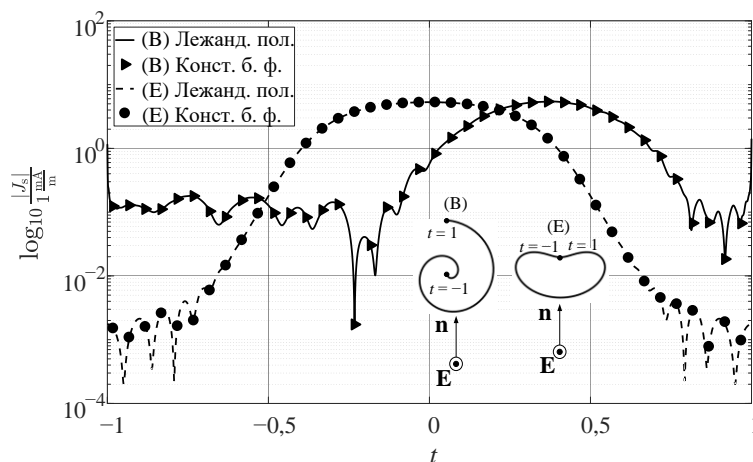
$$y = (\sin^4(1,5\pi t) + \cos^4(1,5\pi t)) \sin(\pi t) / L$$

и облика С

$$x = \sqrt{\cos(0,5\pi t) \cos(0,25\pi t)} / L, \tag{3.84}$$

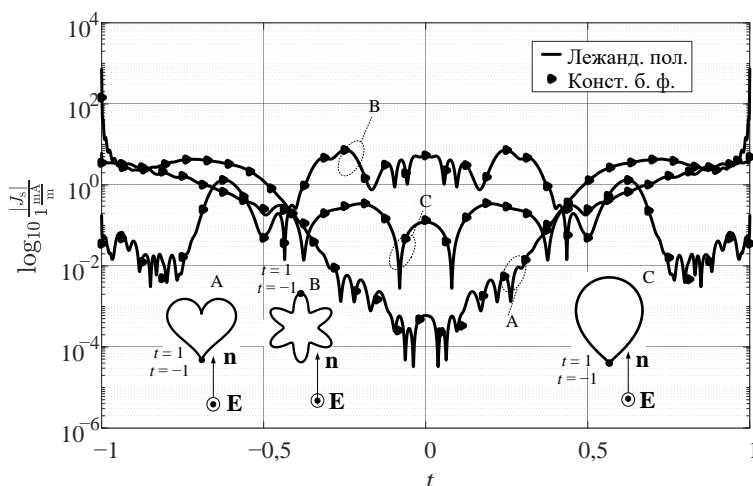
$$y = \sqrt{\cos(0,5\pi t) \sin(0,25\pi t)} / L,$$

где је  $L = 20 \lambda$  ширина траке. Нумеричка електромагнетска анализа спроведена је користећи се сменом (3.20), где су параметар трансформације и број интеграционих тачака изабрани из табеле 3.1 за траке ширине  $20 \lambda$ , тј.  $k = 5,61$  и  $N_{\text{int}} = 441$ . Ред апроксимација струја је нешто већи него у табели 3.1 и за облике А, В и С са слике 3.39 износи 101, 141 и 91, редом. Као и у претходном примеру, ред апроксимације изабран је тако да процена максималне грешке (3.73) буде мања од 1 %. Иако полиноми не могу потпуно да испрате сингуларна понашања струја, разлике у целодоменској и део-по-део константној апроксимацији струја практично су незнатне и за облике који имају оштре ивице, као што су облици А и С са слике 3.39.

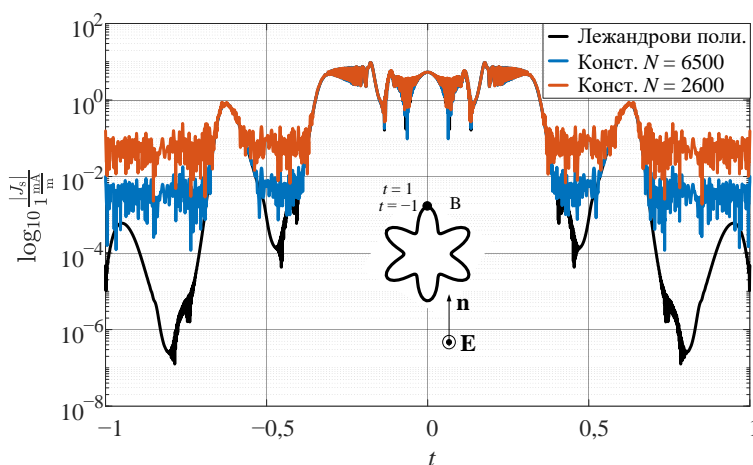


Слика 3.38. Целодоменска и део-по-део константна апроксимација густина струја на расејачима два различита облика [14].

У случају широких трака целодоменска анализа има бар још једну предност у односу на део-по-део константну: већи динамички опсег. То је илустровано на примеру траке облика В са слике 3.39, ширине  $w = 400 \lambda$ , побуђене ТМ таласом под инцидентним углом као на слици 3.40 [70]. Ред целодоменске апроксимације је  $N = 2600$  (са параметром трансформације  $k = 4,97$  и бројем интеграционих тачака  $N_{\text{int}} = 7500$ ), док је део-по-део константна апроксимација добијена из комерцијалног софтвера са  $N = 2600$  и  $N = 6500$ . Резултати су приказани на слици 3.40, одакле се може видети да је, и са 2,5 пута више непознатих, у део-по-део константној апроксимацији ниво шума значајно вишег нивоа него у целодоменској апроксимацији.



Слика 3.39. Целодоменска и део-по-део константна апроксимација густина струја на расејачима три различита облика. [70]



Слика 3.40. Целодоменска и део-по-део константна апроксимација струја на траци ширине  $400 \lambda$ . [70]

### 3.14. ИЗБОР БАЗИСНИХ ФУНКЦИЈА

У целодоменским апроксимацијама у досадашњим експериментима коришћени су Лежандрови полиноми као базисне функције. Ови полиноми су често коришћени у нумеричкој електромагнетици. Лежандрови полиноми су један у односу на други ортогонални, о чему је већ било речи у одељку 3.4. Поред њих, као базисне функције могли би да се користе и Чебишевљеви и Гегенбауерови полиноми. У овом поглављу биће речи о избору базисних функција које се користе у целодоменској електромагнетској анализи.

Гегенбауерови полиноми,  $C_q^{(\alpha)}(t)$ , реда  $q$  и параметра  $\alpha$ , дефинисани су на интервалу  $[-1, 1]$  рекурентном релацијом

$$C_0^{(\alpha)}(t) = 1,$$

$$C_1^{(\alpha)}(t) = 2\alpha t, \quad (3.85)$$

$$C_q^{(\alpha)}(t) = (2t(q + \alpha - 1)C_{q-1}^{(\alpha)}(t) - (q + 2\alpha - 2)C_{q-2}^{(\alpha)}(t)) / q.$$

Ови полиноми ортогонални су у односу на тежинску функцију  $(1-t^2)^{\alpha-1/2}$  [89], тј. важи

$$\int_{-1}^1 C_q^{(\alpha)}(t) C_p^{(\alpha)}(t) (1-t^2)^{\alpha-1/2} dt = 0, \quad q \neq p \quad (3.86)$$

$$\int_{-1}^1 C_q^{(\alpha)}(t) C_q^{(\alpha)}(t) (1-t^2)^{\alpha-1/2} dt = \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(p+2\alpha)}{p!(p+\alpha)\Gamma(\alpha)},$$

где је  $\Gamma(x)$  гама функција.

Специјалан случај Гегенбауерових полинома за  $\alpha = 1$  су Чебишевљеви полиноми друге врсте, док се Гегенбауерови полиноми за  $\alpha = 0,5$  свде на Лежандрове полиноме. Као базисне функције могу бити коришћени и Чебишевљеви полиноми прве врсте и реда  $q$ ,  $T_q(t)$ , дефинисани рекурентном релацијом [98]

$$T_0(t) = 1,$$

$$T_1(t) = t \quad (3.87)$$

$$T_{q+1}(t) = 2tT_q(t) - T_{q-1}(t).$$

Чебишевљеви полиноми ортогонални су у односу на тежинску функцију  $(1-t^2)^{-1/2}$ , односно важи да је [89]

$$\int_{-1}^1 T_q(t) T_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad q \neq p,$$

$$\int_{-1}^1 T_q(t) T_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad q \neq 0, \quad (3.88)$$

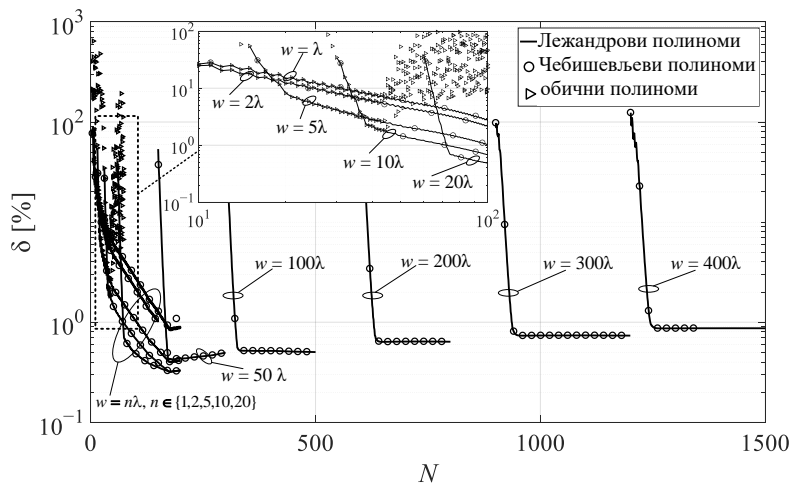
$$\int_{-1}^1 T_0(t) T_0(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

На крају, у овом поглављу ћемо  $Q_q(t) = t^q$  звати обичним полиномима.

Како се поменути полиноми користе као базисне функције, то се множењем Гриновом функцијом и одговарајућим Јакобијанима добијају неке сложеније функције које, у општем случају, нису ортогоналне. Другим речима, подинтегралне функције у (3.18) и (3.19) нису

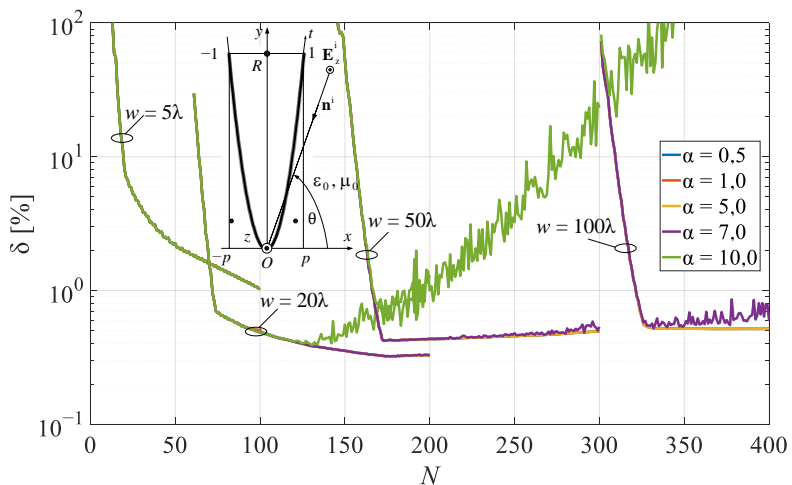
ортогоналне за различите редове коришћених базисних функција, биле оне Лежандрови, Гегенбауерови или Чебишевљеви полиноми. Ипак, као што ће и овде бити илустровано, ортогоналност самих полинома олакшава нумеричке експерименте у поређењу са обичним полиномима, који немају особину ортогоналности, а посебно за више редове.

Најпре ћемо упоредити резултате целодоменске анализе са три различите врсте полинома као базисних функција: Лежандрових полинома, Чебишевљеви полинома прве врсте и обичних полинома. Нека су расејачи закривљене траке облика параболе побуђене ТМ таласом. Нумеричка електромагнетска анализа спроведена је коришћењем смене (3.20). На слици 3.41 [14] приказане су процене максималних релативних грешака (3.73) за траке ширина  $1 \leq w/\lambda \leq 400$  и три сета базисних функција. Из резултата се види да су грешке врло сличне када се користе Лежандрови или Чебишевљеви полиноми прве врсте, док обични полиноми могу да се користе само за уске траке, до  $w/\lambda \leq 10$ .



Слика 3.41. Процена максималне релативне грешке густина струја на закривљеним тракама различитих електричних ширина за три врсте базисних функција [14].

Нека је и даље расејач у облику закривљене траке побуђен ТМ таласом. Густине струја на тракама апроксимирани су линеарном комбинацијом Гегенбауерових полинома као базисних функција за неколико параметара  $\alpha \in \{0,5, 1, 5, 7, 10\}$ , док су ширине трака  $w/\lambda \in \{5, 20, 50, 100\}$ . Процене максималних релативних грешака (3.73) дате су на слици 3.42 [69].



Слика 3.42. Процена максималне релативне грешке густина струја на закривљеним тракама различитих електричних ширина када су базисне функције Гегенбауерови полиноми различитог параметра  $\alpha$ . [69]

Са слике се види да је процена максималне грешке мања од 1 % за све разматране ширине трака када је  $\alpha = 0,5$ , тј. када су базисне функције Лежандрови полиноми. За мале вредности параметра  $\alpha$  и мале редове апроксимација  $N$ , разлике су практично незнатне, док са порастом  $\alpha$  и  $N$ , резултати дивергирају. Стога постоји ограничење у коришћењу Гегенбауерових полинома као базисних функција. Са слике 3.42 може се закључити да, ако је захтевана грешка мања од 1 %, за траке ширине до  $100 \lambda$  Гегенбауерови полиноми могу бити базисне функције са параметром  $\alpha$  највише једнаким 7.

## 4. РОТАЦИОНО СИМЕТРИЧНЕ МЕТАЛО-ДИЕЛЕКТРИЧНЕ СТРУКТУРЕ

У поглављу 3 предложене су смене које поништавају сингуларитете који се срећу при анализи 2-D електромагнетских проблема методом момената. Ако трећа димензија није много већа од прве две или ако се поље мења у све три димензије, говоримо о 3-D електромагнетским проблемима. При њиховој анализи методом момената такође се срећемо са сингуларним подинтегралним функцијама којима треба посветити посебну пажњу. Посебно, ако 3-D структуре имају ротациону (осну) симетрију, зваћемо их ротационо (осно) симетричним структурама (енглески: *body of revolution*, скраћено: BoR). У овом поглављу бавићемо се нумеричком анализом ротационо симетричних структура, које могу имати, осим металних делова, и део-по-део хомогене диелектричне делове. Већина резултата из овог поглавља објављена је у [66].

### 4.1. МОТИВАЦИЈА ЗА НУМЕРИЧКУ ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКУ АНАЛИЗУ РОТАЦИОНО СИМЕТРИЧНИХ СТРУКТУРА

Тачна мерења релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  различитих диелектричних материјала на микроталасним учестаностима значајна су и у примењеној, и у теоријској електромагнетици и имају дугу историју [99], [100]. Технике одређивања релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  реализују се коришћењем електромагнетске анализе и у временском, и у фреквенцијском (фазорском) домену [101]–[114]. Како се у оквиру ове дисертације бавимо техникама у фреквенцијском домену, то ће бити приступ и овом проблему.

Постоји много различитих поставки експеримената за мерења релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  у фреквенцијском домену, зависно од опсега учестаности, агрегатног стања, величине и облика узорака. Фокус у оквиру ове дисертације је на чврстим материјалима који су линеарни, хомогени и изотропни, на микроталасним учестаностима. Релативна пермитивност  $\epsilon'_r$  и тангенс угла губитака  $\tan \delta$  садржани су у комплексној пермитивности  $\epsilon_r$ , као што је дато једначином (2.14). Испитивани материјали су немагнетски, па је пермеабилност сваког  $\mu_0$ .

Мерење пермитивности најчешће има два корака: (1) мерење величине која је повезана са пермитивношћу и (2) одређивање пермитивности на основу измерених података. За други корак користе се што тачнији електромагнетски модели мерне поставке или модели са одређеним апроксимацијама.

У овој дисертацији, у оквиру другог корака коришћен је метод момената са базисним функцијама вишег реда (енглески: *higher-order basis functions*).



Што се тиче првог корака одређивања пермитивности, овде је коришћена комора за мерење која има ротациону (осну) симетрију, а састављена је од металних и диелектричних делова. Анализатором мрежа мери се комплексни коефицијент рефлексије коморе са узорком из ког се, упоређивањем са комплексним коефицијентом рефлексије добијеним из нумеричког модела, издваја релативна пермитивност узорка. При томе се из нумеричког модела добијају комплексни коефицијенти рефлексије коморе за неколико вредности релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  узорка, а онда примењује интерполација. Издвојеном вредношћу релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  сматра се она која даје најбоље слагање мереног и рачунатог коефицијената рефлексије. За овакав начин одређивања пермитивности неопходна је висока тачност нумеричке анализе, а тиме и висока тачност и ефикасно рачунање интеграла који се срећу при методи момената.

Структуре са ротационом симетријом посебан су случај 3-D електромагнетских структура које су предмет нумеричке анализе већ више од пола века [58]–[61], [63]. Када се користи формулација са површинским струјама, густина струја је функција само једне координате. Стога је електромагнетска анализа оваквих структура слична анализи 2-D структура које смо већ детаљно обрађивали у претходном поглављу. Са друге стране, смене које су претходно предложене не могу бити директно примењене на ротационо симетричне структуре јер се у 3-D проблемима срећу и нови сингуларитети, облика  $1/R^2$ .

У техници коју предлагемо у овом поглављу, а која је и објављена у [66], биће коришћени Лежандрови полиноми као базисне функције вишег реда, слично као у [7], [14], [50]. У [50] су анализирани ротационо симетричне структуре састављене од само металних елемената, док су домени базисних функција суседни елементи структуре, тј. базисне функције припадају елементима који имају заједничку ивицу. За разлику од тога, овде су ротационо симетричне структуре метало-диелектричне, док базисне функције припадају тачно једном елементу структуре.

Први циљ овог поглавља је да предложи унифициран начин рачунања интеграла са сингуларним подинтегралним функцијама са високом тачношћу, а који се срећу при нумеричкој електромагнетској анализи методом момената ротационо симетричних, метало-диелектричних структура. У те сврхе предложена је смена која поништава поменуте сингуларитете.

Други циљ овог поглавља је примена метода момената са предложеном сменом за одређивање релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  из мерења коефицијента рефлексије ротационо симетричне коморе у коју је смештен узорак материјала непознатих диелектричних параметара. Поменута комора је надограђена верзија коморе објављене у [115], а за коју узорци треба да буду облика цилиндра кружног попречног пресека. Први нумерички модел поменуте коморе је квазистатички [65] и коришћен је за одређивање пермитивности керамичких материјала [116], [117] на учестаностима до око 1 GHz. Модел предложен у овој дисертацији, значајно помера горњу границу фреквенцијског опсега дубоко у микроталасни опсег. При томе, када се користи интеграција са високом тачношћу, несигурност нумеричког модела је неколико редова величине испод несигурности мерења. Стога, несигурност у издвојеној релативној пермитивности  $\epsilon'_r$  пре свега потиче од самих мерења коефицијента рефлексије коморе са узорком [66].

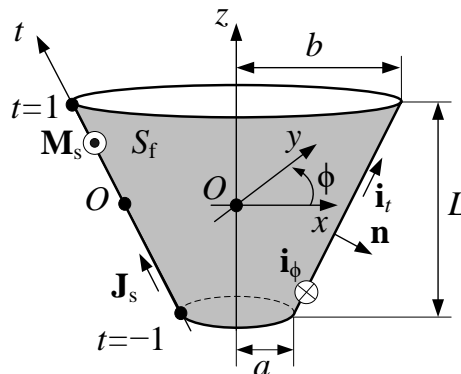
## 4.2. ГЕОМЕТРИЈА АНАЛИЗИРАНИХ СТРУКТУРА

Посматрајмо произвољну ротационо симетричну структуру сачињену од металних и део-по-део линеарних, хомогених диелектричних елемената. Пример једног елемента структуре приказан је на слици 4.1. Сваки елемент је у општем случају површ  $S_f$  (обојена сивом бојом на слици 4.1) у облику омотача зарубљене купе.

Свака површ  $S_f$  дефинисана је првим (доњим) полупречником  $a$ , другим (горњим) полупречником  $b$  и висином  $L$ . Специјално, када је за  $L=0$  и  $a=0$ ,  $S_f$  је круг, док када је  $a \neq 0$ ,  $S_f$  је кружни прстен. За висину која је  $L \neq 0$ , док су полупречници исти, тј.  $a=b$ ,  $S_f$  је прав кружни цилиндар. Локални координатни систем (приказан на слици 4.1) дефинисан је координатама  $t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , и  $\phi$ ,  $-\pi < \phi \leq \pi$ . При томе први полупречник  $a$  одговара координати  $t = -1$ , док други полупречник  $b$  одговара координати  $t = 1$ . За сваку тачку на елементу, са локалним координатама  $(t, \phi)$ , постоје јединствене координате у Декартовом, такође локалном, координатном систему (приказаном на слици 4.1)

$$\begin{aligned} x &= \frac{((b-a)t + b + a)\cos\phi}{2}, \\ y &= \frac{((b-a)t + b + a)\sin\phi}{2} \text{ и} \\ z &= \frac{Lt}{2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

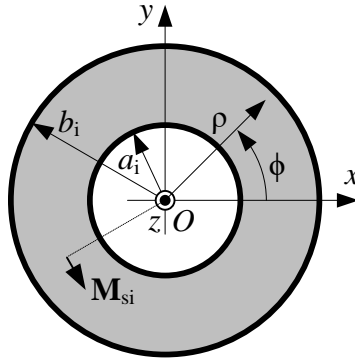
На све координате биће додат знак прим када се односе на тачку извора поља. Везе између координатних система (4.1) остају формално исте.



Слика 4.1. Ротационо (осно) симетричан елемент. [66]

### 4.3. ПОБУДА: ТЕМ ПРСТЕН МАГНЕТСКИХ СТРУЈА

Мотивација за увођење ТЕМ прстена магнетских струја као побуде ротационо симетричних структура потиче од примене коаксијалних водова као напојних. Униформним коаксијалним водом се, далеко од генератора (као и осталих дисконтинуитета), простире ТЕМ талас. Да не бисмо улазили у анализу самог генератора, посматраћемо само део коаксијалног вода од једног попречног пресека до коморице. Тада је потребно, на основу теореме компензације, на месту пресека поставити еквивалентне магнетске и електричне струје, а испод њих савршени проводник. Расподела магнетских струја је кружна и довољно је да посматрамо њих, док ће електричне добити своје вредности [13]. Тиме су једна половина коаксијалног вода и генератор замењени ТЕМ прстеном магнетских струја (енглески: ТЕМ *frill*) у овом случају.



Слика 4.2. TEM прстен магнетских струја у локалном Декартовом и поларном координатном систему.

Нека је побуда постављена у  $Ox$  равни Декартовог локалног координатног система тако да је центар TEM прстена у координатном почетку, као на слици 4.2. Одговарајући цилиндрични координатни систем са истим координатним почетком такође је уцртан на слици 4.2. Поменути побуда одређена је унутрашњим полупречником  $a_i$ , спољашњим полупречником  $b_i$  и напоном између унутрашњег и спољашњег проводника коаксијалног вода  $V$ . Површинска густина магнетских струја,  $\mathbf{M}_{si}$ , има само  $\phi$  компоненту у цилиндричном координатном систему. За претпостављени TEM талас у равни прстена, када је  $a_i < \rho < b_i$ , електрично поље има само  $\rho$  компоненту  $E_{i\rho}(\rho) = -M_{si}(\rho)$ , односно важи да је

$E_{i\rho}(\rho) = \frac{V}{\rho \ln(b_i/a_i)}$ , док магнетско поље има само  $\phi$  компоненту поља и важи да је

$H_{i\phi}(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}$ , где је  $I$  јачина струје на месту TEM прстена магнетских струја. Тада су у тачки са координатама  $(x, 0, z)$  ненулте компоненте електричног поља дате следећим изразима [13]

$$E_{ix}(x, z) = \frac{1}{\pi \ln(b_i/a_i)} \frac{b_i - a_i}{2} \int_{\rho'=a_i}^{b_i} \int_{\phi'=0}^{\pi} \frac{\cos\phi' (1 + \gamma R) e^{-\gamma R}}{R^2} d\phi' d\rho',$$

$$E_{iz}(x, z) = -\frac{1}{\pi \ln(b_i/a_i)} \frac{V}{R} \int_{\phi'=0}^{\pi} \frac{e^{-\gamma R}}{R} d\phi' \Bigg|_{\rho'=a_i}^{\rho'=b_i},$$
(4.2)

док су ненулте компоненте магнетског поља у истој тачки једнаке

$$H_{ix}(x, z) = -j\omega\epsilon_0 \frac{V}{\pi \ln(b_i/a_i)} \frac{b_i - a_i}{2} \int_{\rho'=a_i}^{b_i} \int_{\phi'=0}^{\pi} \frac{e^{-\gamma R}}{R} \sin\phi' d\phi' d\rho',$$

$$H_{iy}(x, z) = j\omega\epsilon_0 \frac{V}{\pi \ln(b_i/a_i)} \frac{b_i - a_i}{2} \int_{\rho'=a_i}^{b_i} \int_{\phi'=0}^{\pi} \frac{e^{-\gamma R}}{R} \cos\phi' d\phi' d\rho',$$
(4.3)

где је  $R$  растојање између тачке извора поља (на TEM прстену) и тачке у којој се рачуна поље. Компонента у електричног поља је у посматраној тачки једнака нули, тј.  $E_{iy}(x, z) = 0$ , као и  $z$  компонента магнетског поља, тј.  $H_{iz}(x, z) = 0$ . У наставку ћемо из разлога једноставности, а без губитка генералности, сматрати да је  $V = 1 \text{ V}$ .

На основу теореме површинске еквиваленције и у овим проблемима ће постојати само површинске струје и наелектрисања. Како су у питању структуре које имају и диелектрике, то ће у електромагнетским моделима постојати и електричне, и магнетске струје, о чему је већ било речи у поглављу 2. Циљ нумеричке електромагнетске анализе ротационо симетричних структура, побуђених ТЕМ прстеном магнетских струја, су максимално тачне апроксимације површинских струја на елементима структуре.

#### 4.4. АПРОКСИМАЦИЈЕ СТРУЈА И НАЕЛЕКТРИСАЊА НА РОТАЦИОНО СИМЕТРИЧНИМ СТРУКТУРАМА

Због ротационе симетрије коју поседују и структура и побуда, површинске струје и наелектрисања независне су од координате  $\phi$ . Како побуда (ТЕМ прстен магнетских струја) има само  $\phi$  компоненту (види слику 4.2), то и површинске магнетске струје на елементима структуре имају само  $\phi$  компоненту, док површинске електричне струје имају само  $t$  компоненту (слика 4.1). Одатле следи да се апроксимације густина површинских струја (2.29) могу записати као

$$\mathbf{J}_s = \sum_{n=0}^{N-1} a_n L_n(t) \mathbf{i}_t, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{n=0}^{N-1} b_n L_n(t) \mathbf{i}_\phi, \quad (4.4)$$

где су  $\mathbf{i}_t$  и  $\mathbf{i}_\phi$  јединични вектори у правцу  $t$  и  $\phi$  координата, редом,  $L_n(t)$  базисне функције,  $N$  је максимални ред апроксимације (исти и за електричне и магнетске струје), док су  $a_n$  и  $b_n$  непознати (комплексни) коефицијенти. За базисне функције изабрани су Лежандрови полиноми јер су се добро показали при анализи 2-D структура описаном у поглављу 3.

Са познатим апроксимацијама струја (4.4) могу се изразити и апроксимације површинских, односно линијских наелектрисања из диференцијалних облика једначина континуитета (2.13) и (2.18). У ту сврху потребно је израчунати дивергенције струја.

Претпоставимо, у општем случају, криволинијски координати систем  $(u_1, u_2)$ . Површинска дивергенција вектора из тог координатног система  $\mathbf{W} = W_1 \mathbf{i}_1 + W_2 \mathbf{i}_2$  може се израчунати као [118]

$$\text{div}_s \mathbf{W} = \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} (W_1 h_2) + \frac{\partial}{\partial u_2} (W_2 h_1) \right), \quad (4.5)$$

где су  $\mathbf{i}_1$  и  $\mathbf{i}_2$  јединични вектори прве и друге координате, редом, док су  $dl_1 = h_1 du_1$  и  $dl_2 = h_2 du_2$  одговарајуће елементарне дужине. У  $(t, \phi)$  координатном систему са слике 4.1,

који је један пример криволинијског система, је  $h_1 = \frac{\sqrt{L^2 + (b-a)^2}}{2}$  и  $h_2 = (b-a)t + a + b$ .

Одатле следи да је површинска дивергенција базисне функције  $L_n(t)$  из апроксимације густине струја једнака

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_s(L_n(t)\mathbf{i}_t) &= \frac{2}{((b-a)t+a+b)\sqrt{L^2+(b-a)^2}} \frac{\partial}{\partial t}(L_n(t)((b-a)t+a+b)) = \\ &= \frac{2\left(\frac{\partial L_n(t)}{\partial t}((b-a)t+a+b) + (b-a)L_n(t)\right)}{((b-a)t+a+b)\sqrt{L^2+(b-a)^2}}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Површинска дивергенција исте базисне функције у апроксимацији густине магнетских струја је једнака нули, јер магнетске струје не зависе од  $\phi$  координате, што следи из

$$\operatorname{div}_s(L_n(t)\mathbf{i}_\phi) = \frac{2}{((b-a)t+a+b)\sqrt{L^2+(b-a)^2}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( L_n(t) \frac{\sqrt{L^2+(b-a)^2}}{2} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Стога, на ротационо симетричној структури, побуђеној ТЕМ прстеном магнетских струја, неће бити магнетских површинских наелектрисања, односно важи да је  $\rho_{sm} = 0$ . Додатно, како су магнетске струје паралелне ивицама структуре, а ивице структуре паралелне  $\phi$  оси, то су и магнетска линијска наелектрисања једнака нули,  $Q'_m = 0$ , на свим ивицама.

## 4.5. ПОСТАВЉАЊЕ СИСТЕМА ЈЕДНАЧИНА КОД РОТАЦИОНО СИМЕТРИЧНИХ СТРУКТУРА

Када је дефинисан тип побуде и када су претпостављене апроксимације расподеле електричних и магнетских струја и наелектрисања, следећи корак је решавање једначина (2.37) и (2.38) тестирањем тежинским функцијама  $w_m$ . У матричној форми добијени систем је  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , где је  $\mathbf{A}$  матрица система,  $\mathbf{b}$  колона слободних чланова која потиче од побуде и  $\mathbf{x}$  вектор у који су смештени непознати коефицијенти.

У посматраном случају се једначине (2.37) и (2.38) додатно поједностављују, сходно томе што нема магнетских наелектрисања, као и томе што електричне струје имају само  $t$  компоненту, односно магнетске имају само  $\phi$  компоненту. Функције  $w_m$  којима су једначине тестиране, са циљем добијања система линеарних једначина, исте су као и базисне функције (Лежандрови полиноми), тј. примењен је Галеркинов метод. У [7] је нумеричким експериментима показано да је за велики број проблема, за исти број непознатих, Галеркинов метод најефикаснији од свих метода који су разматрани.

Када се примене гранични услови, добијају се једначине облика (2.37) и (2.38). Ненулте интеграле који се срећу у (2.37) и (2.38) можемо записати и као

$$\mathbf{I}_k(t) = \int_{t'=-1}^1 \int_{\phi'=-\pi}^{\pi} \mathbf{f}_k(t', \phi') dS'(t', \phi'), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{I}_4(t) = \int_{\phi'=-\pi}^{\pi} \mathbf{f}_4(\phi') dl',$$

где су подинтегралне функције, са изостављеним константама, облика

$$\mathbf{f}_1(t', \phi') = \frac{L_n(t') \mathbf{i}_b e^{-\gamma R(t', \phi')}}{R(t', \phi')}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{f}_2(t', \phi') = \frac{(1 + \gamma R(t', \phi')) e^{-\gamma R(t', \phi')}}{R^2(t', \phi')} \mathbf{i}_R \operatorname{div}_s (L_n(t') \mathbf{i}_t), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{f}_3(t', \phi') = \frac{(1 + \gamma R(t', \phi')) e^{-\gamma R(t', \phi')}}{R^2(t', \phi')} L_n(t') \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_R(t', \phi'), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{f}_4(\phi') = \frac{(1 + \gamma R(t_e', \phi')) e^{-\gamma R(t_e', \phi')}}{R^2(t_e', \phi')} \mathbf{i}_R L_n(t_e'). \quad (4.12)$$

Иако физички линијских наелектрисања нема, примењени метод захтева линијска наелектрисања зато што је свака базисна функција дефинисана само на једном елементу, базисна функција која апроксимира нециркуларну компоненту површинске електричне струје не тежи нули на границама елемента и нису постављени услови по првом Кирхофовом закону. Линијска (електрична) наелектрисања постављена су на крајевима елемента, односно  $t'_e = \pm 1$ . Коришћењем базисних функција чији су домени на два сегмента, базисних функција које на крајевима елемента имају нулту вредност, као и постављањем додатне једначине по првом Кирхофовом закону, постојање линијских наелектрисања се може избећи, као што је то урађено у [68], [119].

Јединични вектор  $\mathbf{i}_b$  одређује правац и референтни смер густине струје, па је  $\mathbf{i}_b = \mathbf{i}_t$  код електричних струја, односно  $\mathbf{i}_b = \mathbf{i}_\phi$  код магнетских. Додатно, у подинтегралним функцијама (4.9)–(4.12) појављује се комплексни коефицијент простирања  $\gamma = \alpha + j\beta$ , јер су анализирани структуре у општем случају са губицима. У диелектричним срединама где постоје губици, пермитивност је комплексан број, као што је дато једначином (2.14), а коефицијент простирања може се добити из  $\gamma = j\omega\sqrt{\epsilon\mu}$  [120].

Да бисмо интеграле (4.8) израчунали, најпре је потребно да изразимо елементарну површину  $dS'$  и елементарну дужину  $dl'$  преко локалних координата  $t'$  и  $\phi'$  везаних за елемент структуре. Елементарна површина је

$$dS'(t', \phi') = \frac{((b-a)t'+a+b)\sqrt{L^2 + (b-a)^2}}{4} d\phi' dt', \quad (4.13)$$

док је елементарна дужина

$$dl' = \frac{\sqrt{L^2 + (b-a)^2}}{2} d\phi'. \quad (4.14)$$

Домен тежинских функција исти је као и базисних, односно елемент површи по којој се интеграл у трећој (Галеркиновој) интеграцији дат је једначином (4.13). (Подсетимо се да су координате које одређују тачку извора поља означене са прим, а координате тачке у којој се рачуна поље означене без прим.) Због ротационе симетрије, поље не зависи од  $\phi$  координате,

па је при тестирању једначина (Галеркиновој интеграцији) довољно нумерички интегралити само по  $t$  координати. Тиме је елиминисана једна интеграција у односу на најопштији случај нумеричке анализе 3-D електромагнетских проблема. Како је  $R$  у подинтегралним функцијама  $f_k$  растојање између неке тачке на елементу одређене координатама  $t$  и  $\phi$  и тачке на елементу одређене координатама  $t'$  и  $\phi'$ , то нумеричка вредност растојања  $R$  зависи од избора координате  $\phi$ . Иако она може бити произвољно изабрана из разлога ротационе симетрије, координата  $\phi$  је фиксирана због утицаја на нумеричку вредност растојања  $R$ .

Елементи матрице система линеарних једначина  $\mathbf{A}$  добијају се решавајући интеграле облика

$$\int_{t=-1}^1 L_m(t) \int_{t'=-1}^1 \int_{\phi'=-\pi}^{\pi} \mathbf{f}_k(t', \phi') dS'(t', \phi') \frac{(b-a)t + a + b}{4} \sqrt{L^2 + (b-a)^2} dt, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.15)$$

$$\int_{t=-1}^1 L_m(t) \int_{\phi'=-\pi}^{\pi} \mathbf{f}_4(\phi') d\phi' \frac{(b-a)t + a + b}{4} \sqrt{L^2 + (b-a)^2} dt.$$

Један (сваки) елементи матрице су сума одговарајућих интеграла облика (4.15) који потичу од електричних струја, односно сума оних који потичу од магнетских струја. Од тога како су у матрици колони  $\mathbf{x}$ , односно матрици колони  $\mathbf{b}$  распоређени непознати коефицијенти зависи и који интеграл (4.15) доприноси суми одговарајућих елемената матрице система  $\mathbf{A}$ . Ако је структура састављена од једног металног елемента у хомогеном диелектрику, на њему постоје само електричне струје, па врста матричног елемента одговара реду тест функције  $m$ , док колона одговара реду базисне функције  $n$ . Ако, пак, метална плоча раздваја два диелектрика 1 и 2, она се на основу теореме површинске еквиваленције може еквивалентно представити као две плоче, од којих је једна зароњена у хомогени диелектрик 1, док је друга зароњена у хомогени диелектрик 2. Тада се матрица система  $\mathbf{A}$  састоји од четири блока. Један блок потиче од утицаја струја прве плоче на поље на првој плочи, тј. елементи матрице овог блока потичу од струја прве плоче, док је координата  $t$  треће интеграције у (4.15) такође на првој плочи. Други блок чине елементи матрице који потичу од струја друге плоче, па је координата  $t$  треће интеграције је на другој плочи. Трећи и четврти блок односе се на утицај струја прве плоче на другу плочу, односно струја друге плоче на прву плочу. Како су две плоче у различитим срединама, то су матрични елементи трећег и четвртог блока једнаки нули. При томе је сваки блок димензија које одговарају реду апроксимације струја на плочи. Уколико се структура састоји од једног неметалног елемента који раздваја два хомогена диелектрика, на њему постоје и електричне, и магнетске струје. Матрица система се и у овом случају може разложити на четири блока, као у претходном примеру. Разлика је у постојању и магнетских струја поред електричних, па је број непознатих два пута већи. Ако се структура коју анализирамо састоји од  $M$  објеката и на сваком објекту постоје и магнетске, и електричне струје, док свака од базисних функција припада само једном елементу, онда је димензија матрице система  $2NM$ .

Слободна колона система једначина добија се тестирањем тангенцијалних компоненти поља које потичу од побуда. Ако је  $\mathbf{F}_{i,\tan} \in \{\mathbf{E}_{i,\tan}, \mathbf{H}_{i,\tan}\}$  јединствена ознака тангенцијалне компоненте поља ТЕМ прстена магнетских струја, онда је елемент слободне колоне дат интегралом облика

$$\int_{t=-1}^1 L_m(t) \int_{t'=-1}^1 \int_{\phi'=-\pi}^{\pi} \mathbf{F}_{i,\tan} dS'(t',\phi') \frac{(b-a)t+a+b}{4} \sqrt{L^2+(b-a)^2} dt. \quad (4.16)$$

Ако је структура састављена од једног металног елемента у хомогеном диелектрику, онда матрични елемент одговара реду  $m$  слободне колоне и представља тангенцијалну компоненту електричног поља ТЕМ прстена. Када је структура састављена од једног металног елемента између два диелектрика, првих  $N$  елемената у колони слободних чланова односе се на тангенцијалне компоненте електричног поља ТЕМ прстена на првој еквивалентној плочи, а других  $N$  елемената на тангенцијалне компоненте електричног поља ТЕМ прстена на другој еквивалентној плочи. У случају да структуру чини један неметални елемент између два диелектрика, један начин распоређивања елемената колоне слободних чланова је да првих  $N$  елемената буду тангенцијалне компоненте електричног поља ТЕМ прстена на првој еквивалентној плочи, других  $N$  тангенцијалне компоненте магнетског поља ТЕМ прстена на првој еквивалентној плочи, док последњих  $2N$  елемената чине тангенцијалне компоненте електричног и магнетског поља од ТЕМ прстена на другој плочи.

Непознати коефицијенти апроксимација струја у матрици колони  $\mathbf{x}$  распоређени су у складу са распоредом елемената у матрици система  $\mathbf{A}$  и колони слободних чланова  $\mathbf{b}$ .

Када се рачунају матрични елементи између два удаљена елемента структуре, нумеричке методе за интеграцију могу се директно применити. Међутим, када су тачка у којој се рачуна поље и тачка извора поља на истом елементу структуре, подинтегралне функције (4.9)–(4.12) су све сингуларне са сингуларитетима облика  $1/R$ , односно  $1/R^2$ . Наиме, када се тачка у којој се рачуна поље приближи тачки извора поља, онда  $R \rightarrow 0$ , па поменуте функције теже бесконачности. Један од рачунски најтежих задатака у формирању система линеарних једначина јесте одређивање матричних елемената (4.15). Одељак 4.6, који следи, посвећен је решавању тог проблема, предлагањем смена које омогућавају рачунање интеграла са високом тачношћу.

## 4.6. СМЕНА ЗА ИНТЕГРАЦИЈУ ВИСОКЕ ТАЧНОСТИ

Интеграли које треба решити да би били израчунати елементи матрице, система су троструки и то по променљивама  $t'$ ,  $\phi'$  и  $t$ . Прва и трећа интеграција су суштински по истим координатама, осим што се у првој интеграцији променљива односи на тачку извора поља, а у другој интеграцији променљива се односи на тачку у којој се рачуна поље.

Идеја следеће смене, слично као и смена за поништавање сингуларитета код 2-D проблема, је да растегне регион око сингуларитета тако да буде (значајно) више интеграционих тачака у делу функције где се она брзо мења. Како сада суштински постоје две променљиве, то предложена смена има две једначине и то

$$\begin{aligned} t' &= |s'|^{m_1-1} s' (1 - \text{sgn}(s') t_m) + t_m, \\ \phi' &= \pi |p'|^{m_2-1} p', \end{aligned} \quad (4.17)$$

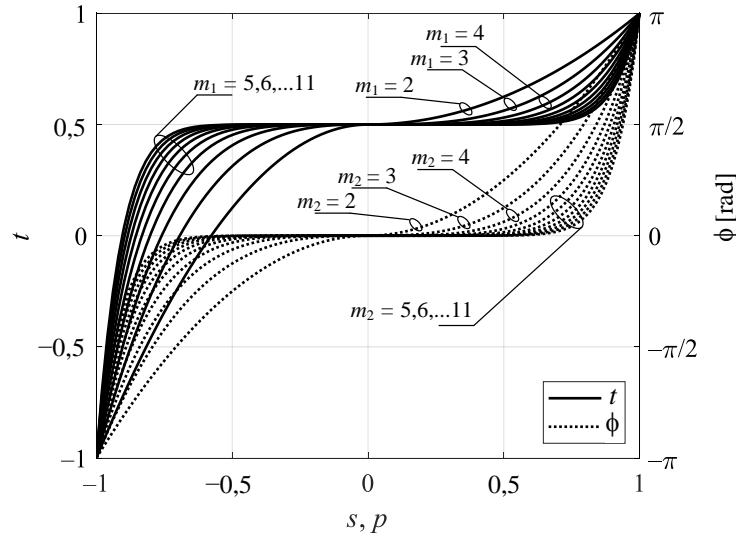
где су  $s' \in [-1, 1]$  и  $p' \in [-1, 1]$  нове променљиве (координате), док су  $m_1$  и  $m_2$  параметри ове трансформације. Одговарајући Јакобијани се добијају диференцирањем израза у (4.17)



$$\begin{aligned}
J_s(s', t_m) &= \frac{dt'}{ds'} = m_1 |s'|^{m_1-1} (1 - \text{sgn}(s')t_m), \\
J_p(p') &= \frac{d\phi'}{dp'} = m_2 \pi |p'|^{m_2-1},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

док је  $J_{sp}(s', p', t_m) = \frac{dt'}{ds'} \frac{d\phi'}{dp'} = J_s(s', t_m) J_p(p')$ .

На слици 4.3 је на примеру сингуларитета  $t_m = 0,5$  илустрована предложена смена када су параметри  $m_1$  и  $m_2$  варирани у опсегу од 2 до 11. Са слике се може видети да је сингуларитет померен у нулу, као и да је растегнут у њеној околини. Апсолутне вредности одговарајућих Јакобијана дате су на слици 4.4, одакле се види да у нули, тј. тачки сингуларитета, они теже нули. Слично као и у поглављу 3.7, трансформација (4.17) олакшаће нумеричко рачунање интеграла са сингуларним подинтегралним функцијама и омогућити високу тачност, као што ће бити показано у овом одељку.



Слика 4.3. Илустрација предложених смена.

Функције  $\mathbf{f}_k(t', \phi')$ ,  $k = 1, 2, 3$ , се сменама (4.17) трансформишу у  $\mathbf{f}_k(t'(s'), \phi'(p'))$  заменом сваке променљиве  $t'$  изразом  $t'(s')$ , односно сваке променљиве  $\phi'$  изразом  $\phi'(p')$ . Слично, функција  $\mathbf{f}_4(\phi')$  се другом сменом из (4.17) трансформише у  $\mathbf{f}_4(\phi'(p'))$  заменом променљиве  $\phi'$  изразом  $\phi'(p')$ . У складу са трансформацијама, елементарна површ у (4.8)  $dS'(t', \phi')$  мења се у  $dS'(t'(s'), \phi'(p'))$  заменом сваког  $t'$  са  $t'(s')$  и сваког  $\phi'$  са  $\phi'(p')$  из (4.17), док је  $dt'd\phi'$  замењено са  $J_{sp} ds' dp'$ , где је  $J_{sp}$  Јакобијан ове трансформације. Коначно, израз за површину елементарне површи у интегралима са новим променљивама постаје

$$dS'(t'(s'), \phi'(p')) = J_{sp} ((b-a)t'(s') + a + b) \sqrt{L^2 + (b-a)^2} \frac{dp' ds'}{4}, \tag{4.19}$$

док је елементарна дужина у истим интегралима

$$dl'(\phi'(p')) = J_p \sqrt{L^2 + (b-a)^2} \frac{dp'}{2}, \tag{4.20}$$

где је  $J_p$  одговарајући Јакобијан. Тиме су интегрални (4.8) трансформисани у

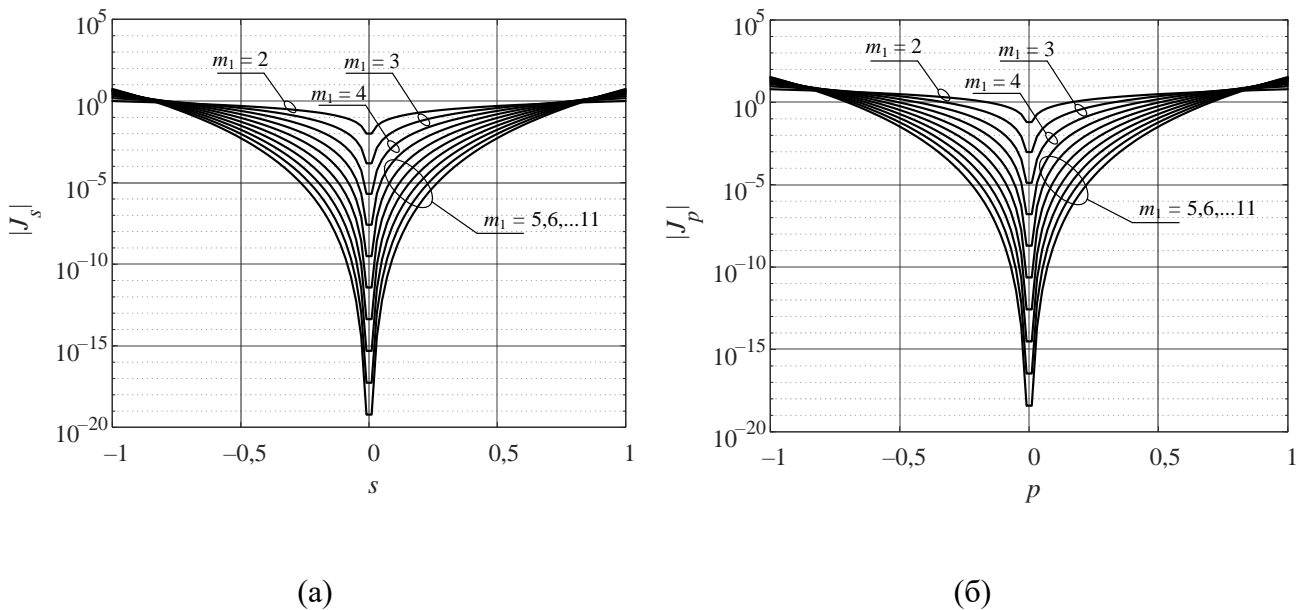
$$\mathbf{I}_k(t) = \int_{s'=-1}^1 \int_{p'=-1}^1 \mathbf{f}_k(t'(s'), \phi'(p')) dS'(t'(s'), \phi'(p')), \quad k=1,2,3, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{I}_4(t) = \int_{p'=-1}^1 \mathbf{f}_4(\phi'(p')) dl'(\phi'(p')),$$

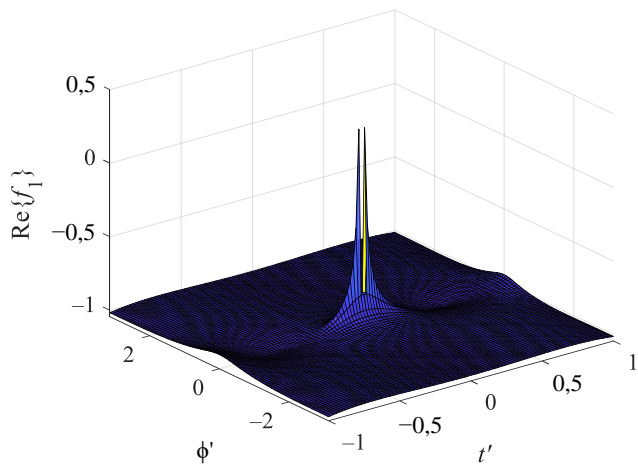
по новим променљивама  $s'$  и  $p'$ .

На сликама 4.5–4.12 приказани су реални и имагинарни делови подинтегралних функција  $\mathbf{f}_k(t', \phi')$  пре и после примене смене. Сингуларитет подинтегралних функција, тј. тачка подешавања, има координату  $t=0$ , док су вредности функције  $\mathbf{f}_4(t', \phi')$ , која је приказана на сликама 4.11–4.12, израчунате за  $t_e'=0$ . Са слика се може видети да су функције на које није примењена смена сингуларне, тј. сингуларни су реални делови, а у неким случајевима и имагинарни. Након примењене смене (4.17), функције немају сингуларитет, као што је илустровано на сликама 4.5–4.12, те се на њих може директно применити Гаус-Лежандрова нумеричка интеграција. Параметар  $t_m$  у смени (4.17) одређен је самом тачком сингуларитета, па је у овом случају  $t_m=0$ . Како је структура ротационо симетрична, то је избор  $\phi$  координате произвољан. Из експеримената је закључено да је при трансформацији функција  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  погодније изабрати  $\phi=0$ , док функцијама  $\mathbf{f}_3$  и  $\mathbf{f}_4$  одговара избор  $\phi=\pi/2$ . Исто се добија и једноставним додавањем константе  $-\pi/2$  смени  $\phi$  координате при трансформацији функција  $\mathbf{f}_3$  и  $\mathbf{f}_4$ .

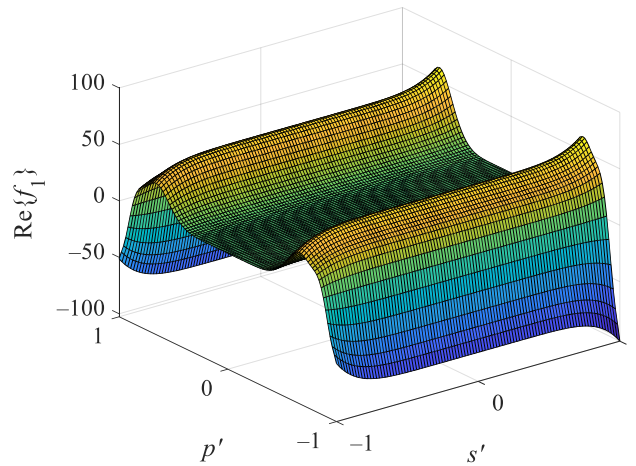
Описаном трансформацијом уведена је смена у прве две интеграције, тј. у (4.8), па остаје још једна интеграција (Галеркинова интеграција) у (3.2). Пре него што се позабавимо њоме, испитаћемо конвергенцију и проценити тачност прве две интеграције, тј. интеграла (4.21).



Слика 4.4. Илустрације Јакобијана трансформације (а)  $t$ -координате и (б)  $\phi$ -координате.

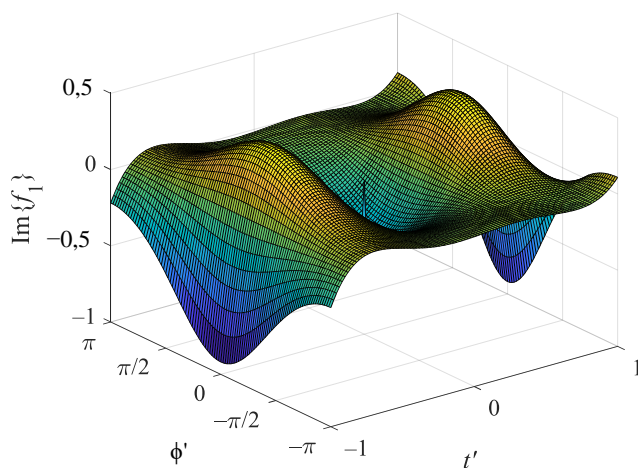


(a)

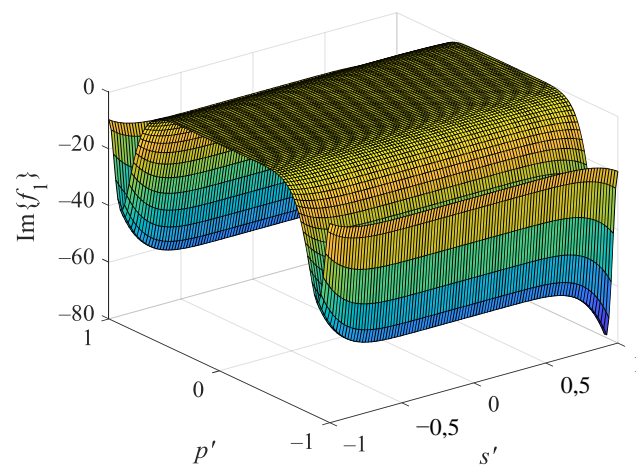


(б)

Слика 4.5. Реални део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_1$  за ред базисне функције  $n = 4$ .

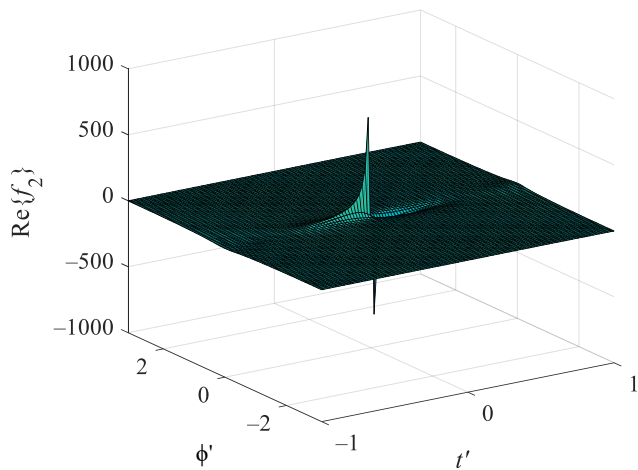


(a)

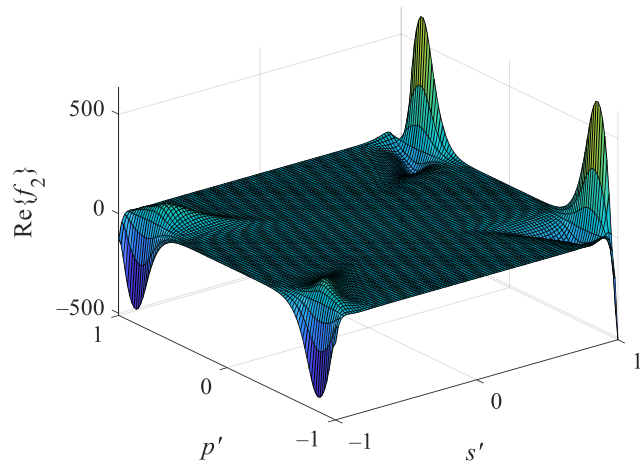


(б)

Слика 4.6. Имагинарни део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_1$  за ред базисне функције  $n = 4$ .

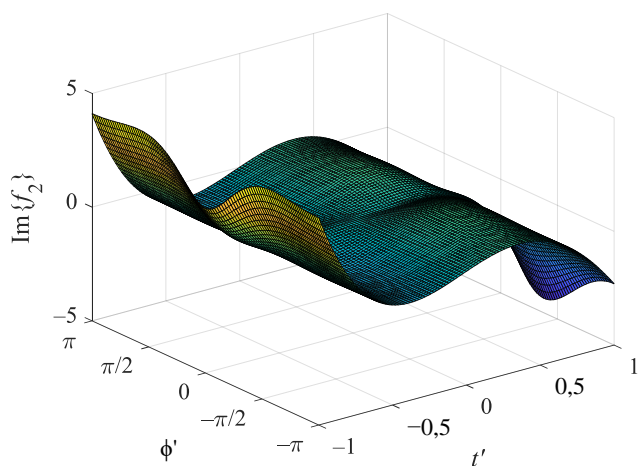


(a)

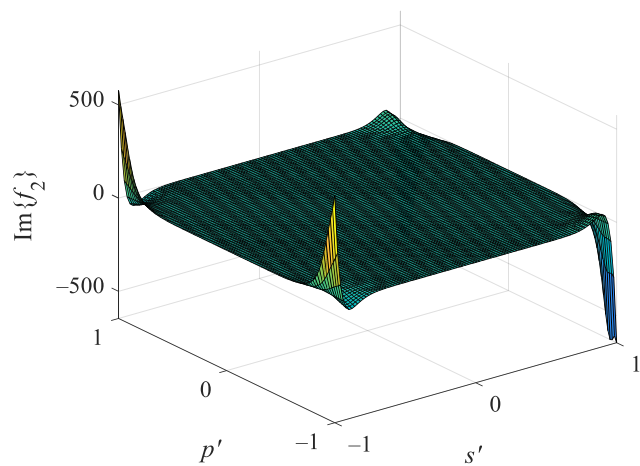


(б)

Слика 4.7. Реални део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_2$  за ред базисне функције  $n = 4$ .

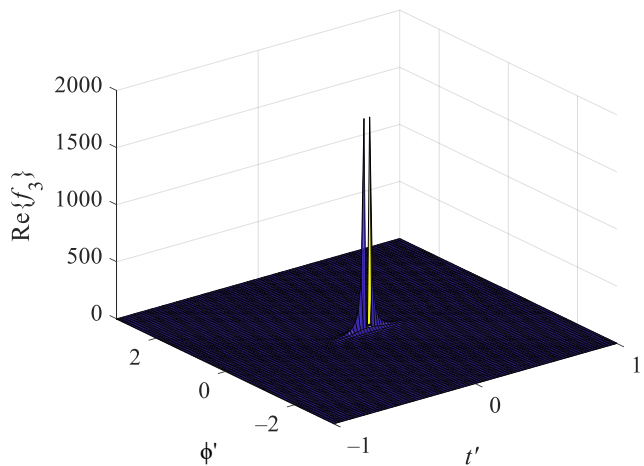


(a)

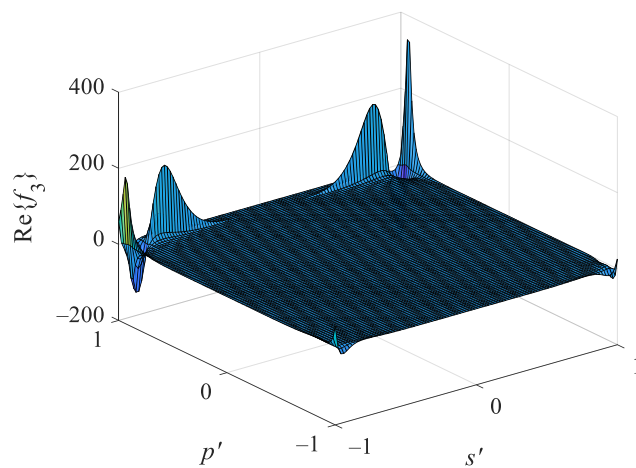


(б)

Слика 4.8. Имагинарни део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_2$  за ред базисне функције  $n = 4$ .

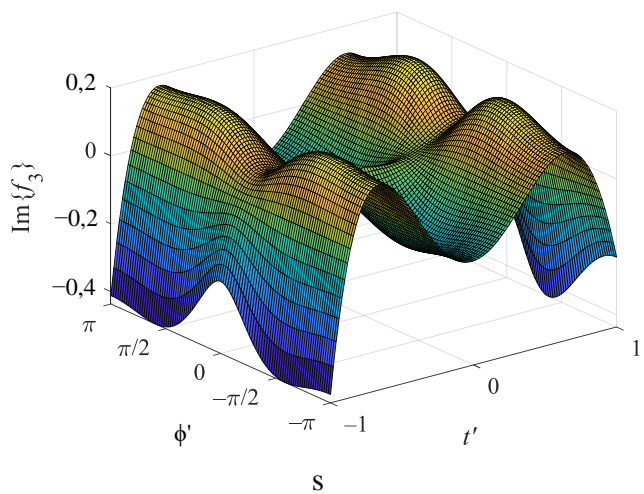


(a)

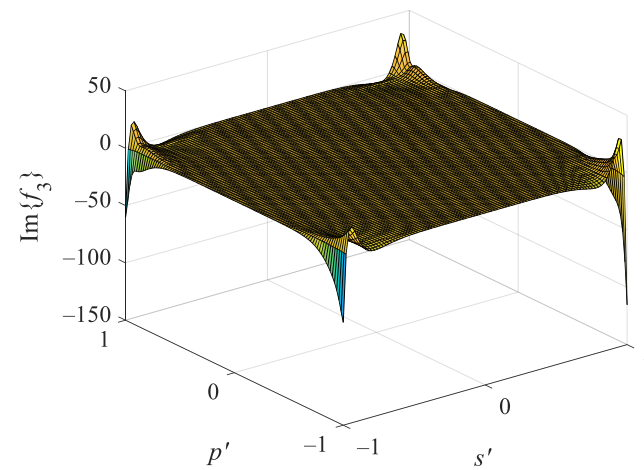


(б)

Слика 4.9. Реални део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_3$  за ред базисне функције  $n = 4$ .

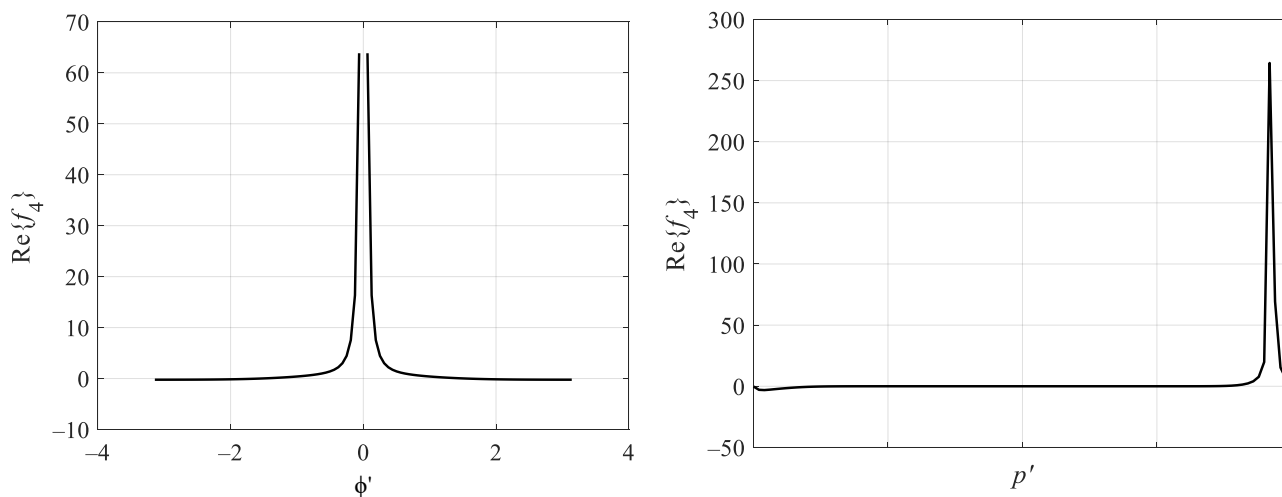


(a)



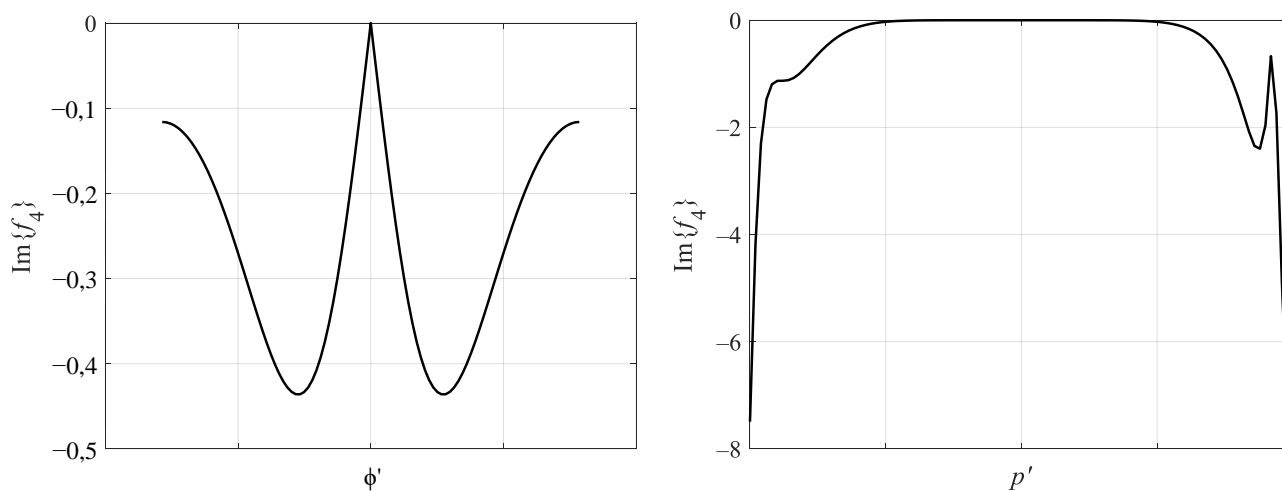
(б)

Слика 4.10. Имагинарни део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_3$  за ред базисне функције  $n = 4$ .



(a) (b)

Слика 4.11. Реални део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_4$  за ред базисне функције  $n = 4$ .



(a) (b)

Слика 4.12. Имагинарни део подинтегралне функције (а) пре и (б) после смене подинтегралне функције  $f_4$  за ред базисне функције  $n = 4$ .

#### 4.6.1. КОНВЕРГЕНЦИЈА ПРВЕ ДВЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

У циљу испитивања конвергенције интеграла, уводимо процену релативне грешке,  $\delta_I$ , као

$$\delta_I = \frac{|I_{N_{\text{int}}+1} - I_{N_{\text{int}}}|}{|I_{N_{\text{int}}+1}|}, \quad (4.22)$$

где је  $I_{N_{\text{int}}}$  (комплексна) вредност интеграла израчунатог са  $N_{\text{int}}$  интеграционих тачака, док је  $I_{N_{\text{int}}+1}$  вредност истог интеграла израчунатог са  $N_{\text{int}}+1$  интеграционих тачака. Ако је интеграл површински, као што су то интеграли (4.21), онда  $N_{\text{int}}$  представља број тачака по једној интеграцији, тј. укупан број тачака интеграције је  $N_{\text{int}}^2$ . За сваки од интеграла (4.21) израчунате су процене  $\delta_{I_k}$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , а затим је израчуната и процена максималне релативне грешке за сва четири интеграла као

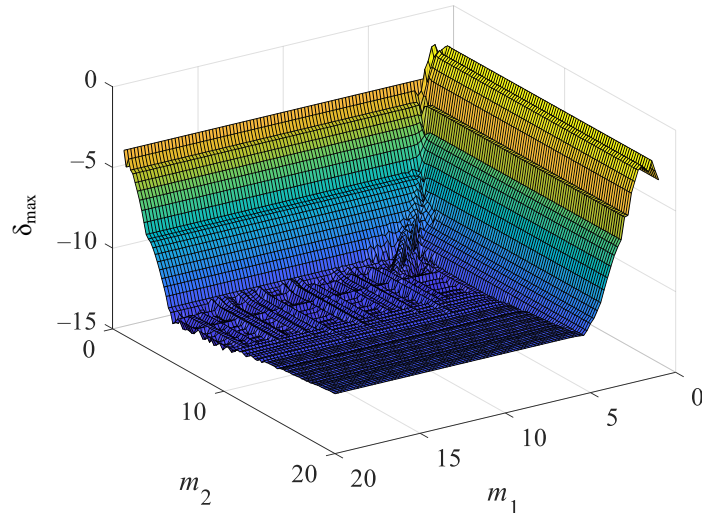
$$\delta_{\text{max}} = \log_{10}(\max(\delta_{I_k})), k \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (4.23)$$

Користећи се проценом максималне грешке, апроксимативно се може одредити и број тачно израчунатих цифара као  $-\delta_{\text{max}}$ . Ако је интеграл близу нуле, тј. ако је  $|I_{N_{\text{int}}+1}| \leq 10^{-14}$ , сматраћемо да је процена релативне грешке  $10^{-14}$ . Ова граница је изабрана с обзиром на чињеницу да је коришћена двострука тачност у имплементацији, па се из (4.23) добија да је процењен максималан број тачних цифара 15.

Као један од примера најтежих интеграла за интеграцију посматраћемо интеграле са сингуларним подинтегралним функцијама. Стога ће у свим наредним примерима тачка рачунања поља бити на истом елементу на ком су и извори тог поља. Сви нумерички резултати у овом одељку дати су на примеру материјала без губитака у коме је  $\epsilon_r = \mu_r = 1$ . Када у материјалима постоје губици, интегрални ће бити само скалирани одговарајућим константама. Фокус је стављен на електрички мале елементе, јер ће нам такви бити потребни при нумеричкој анализи модела већ поменути коморе, па је процена (4.23) практично независна од учестаности. На крају, слично као што је показано у поглављу 3.9, ако је тачка сингуларитета  $t_m = 0,95$ , интегрални су врло тешки за интеграцију, па ће нумерички експерименти бити постављени баш за ту тачку поља. Конвергенција интеграла зависи и од самих параметара трансформације  $m_1$  и  $m_2$ , као и реда базисне функције  $n$ .

#### 4.6.1.1. ПАРАМЕТРИ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Процена максималне релативне грешке (4.23) у случају омотача правога цилиндра (димензија  $a = b = 0,6 \text{ mm}$  и  $L = 15,25 \text{ mm}$ ) у функцији параметара трансформације  $m_1$  и  $m_2$  представљена је на слици 4.1. Сам цилиндар уметнут је на слику 4.1. Учестаност на којој је нумерички експеримент спроведен је  $f = 3 \text{ GHz}$ , ред базисне функције је  $n = 2$ , док је број тачака интеграције  $N_{\text{int}} = 300$ . Описани нумерички експеримент постављен је у циљу одређивања оптималних вредности параметара трансформације  $m_1$  и  $m_2$ . Са слике 4.13 може се видети да ако је  $m_1 > 5$  и  $5 \leq m_2 \leq 10$ , број тачних значајних цифара је око 12. Додатни експерименти показују да су и за остале елементе сличних димензија (кружни прстен, омотач зарубљене купе, круг) резултати квалитативно исти, па ти резултати неће бити посебно приказани.



Слика 4.13. Процена максималне грешке у случају омотача правог кружног цилиндра. [66]

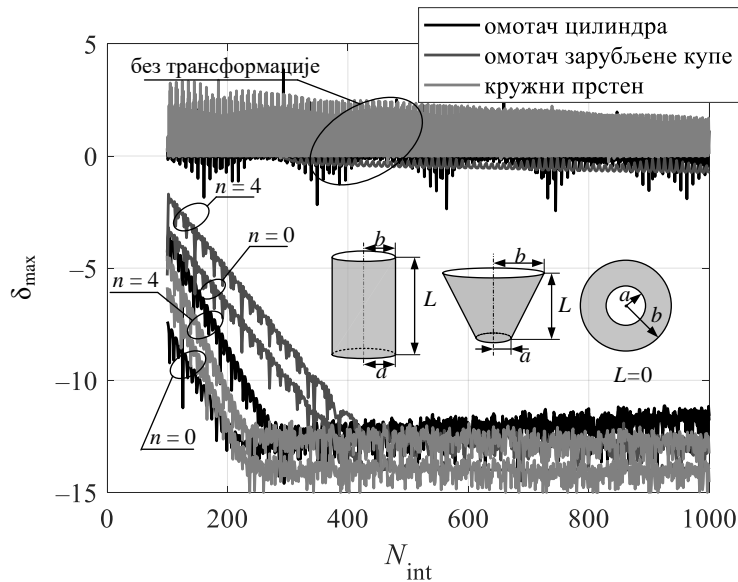
#### 4.6.1.2. УТИЦАЈ РЕДА БАЗИСНЕ ФУНКЦИЈЕ

У поглављу 3 показано је да већи ред базисне функције захтева више интеграционих тачака за максималну тачност. Процене максималних грешака (4.23) у случају три елемента различитих облика, када је ред базисне функције  $n = 4$  и  $n = 0$ , дате су на слици 4.1. Први елемент је већ поменути омотач правог цилиндра (димензија  $a = b = 0,6 \text{ mm}$  и  $L = 15,25 \text{ mm}$ ), други елемент је омотач зарубљене купе (димензија  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $b = 15 \text{ mm}$  и  $L = 15 \text{ mm}$ ), а последњи је кружни прстен (димензија  $a = 3 \text{ mm}$ ,  $b = 12,2 \text{ mm}$  и  $L = 0$ ). Сви поменути елементи уметнути су на слику 4.1. Као додатак, на слици су приказане и процене максималних грешака  $\delta_{\max}$  када је Гаус-Лежандрова интеграција примењена директно на интеграле (4.8), односно када је трансформација (4.13) изостављена. Учестаност на којој је експеримент спроведен је  $f = 3 \text{ GHz}$ . Параметри интеграције у овом експерименту су  $m_1 = 7$  и  $m_2 = 9$ . Они су изабрани из опсега којим се постиже минимална грешка, односно максимална тачност.

Са слике 4.14 може се закључити да је коришћењем предложене трансформације добијена значајно боља тачност за исти број интеграционих тачака него када је Гаус-Лежандрова интеграција директно примењена. На пример, са око  $N_{\text{int}} = 400$  сви интегрални су израчунати са бар 12 значајних цифара, док са истим бројем интеграционих тачака и без трансформације, интегрални су израчунати са само једном тачном цифром. Треба приметити и да се, када су интегрални рачунати изостављајући трансформацију, добијају и позитивне вредности  $\delta_{\max}$  с обзиром на сингуларитете у интеграндима. То значи да се интегрални  $I_{N_{\text{int}}}$  и  $I_{N_{\text{int}}+1}$  разликују за неколико редова величине. Одатле следи да се за рачунање интеграла (4.8) мора применити смена која ће поништити (или ублажити) сингуларитет подинтегралне функције или нека друга нумеричка техника (на пример екстракција сингуларитета).

Да сумирамо резултате из одељка 4.6.1: када су апроксимације електричних и магнетских струја са по највише пет непознатих, тј. када је максимални ред апроксимације струја  $n = 4$ , интегрални (4.21) могу бити израчунати са 12 значајних цифара ако је примењена предложена смена са параметрима  $m_1 = 7$ ,  $m_2 = 9$  и  $N_{\text{int}} = 250$  у случају омотача правог цилиндра и кружног прстена, односно  $N_{\text{int}} = 400$  у случају омотача зарубљене купе.





Слика 4.14. Процена максималне грешке за различите редове базисних функција. [66]

#### 4.6.2. ГАЛЕРКИНОВА ИНТЕГРАЦИЈА

Након што су интегрални (4.21) израчунати са високом тачношћу, остаје још једна интеграција (Галеркинова), по променљивој  $t$ , да би елементи матрице, тј. интегрални (4.15) били израчунати са високом тачношћу.

Када су домени тест функције  $L_m(t)$  и базисне функције  $L_n(t)$  исти, интегранд Галеркиновог интеграла, тј. сума одговарајућих интеграла из (4.21), има сингуларно понашање на крајевима, за  $t = -1$  и  $t = 1$ . У супротном, када су домени тест и базисних функција на различитим елементима структуре, подинтегрална функција Галеркинове интеграције није сингуларна, па тада нема проблема са директном применом Гаус-Лежандровог поступка за интеграцију. Како су интегрални са сингуларитетима тежи за нумеричку интеграцију, овде ће они бити у фокусу. У тим случајевима су, пре примене Гаус-Лежандрове нумеричке интеграције, интегранди трансформисани сменом (4.17). Како је интеграција само по променљивој  $t$ , то је довољна прва једначина из предложене смене.

Уведимо следеће ознаке: нека је  $N_{\text{int},g}$  број тачака у Галеркиновој интеграцији,  $x_{\text{GL}}(l)$  су апсцисе и  $w_{\text{GL}}(l)$  тежине у Гаус-Лежандровој нумеричкој интеграцији ( $l = 1, 2, \dots, N_{\text{int},g}$ ),  $t$  је координата тачке у којој се рачуна поље, док је  $I(t, n)$  интегранд који се добија сумом одговарајућих интеграла из (4.21).

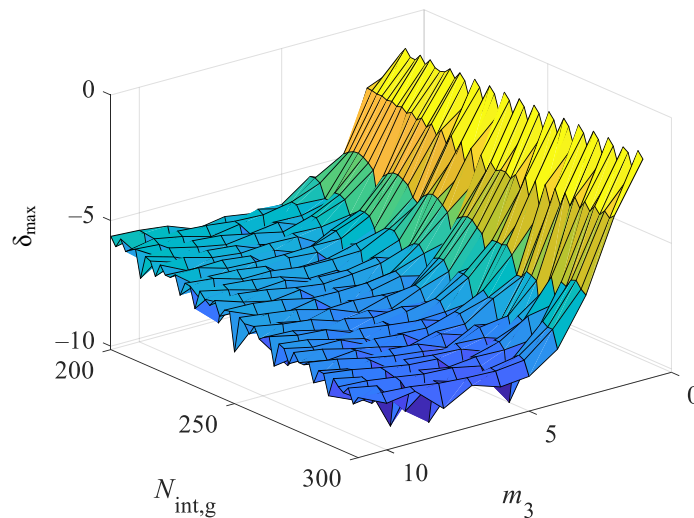
Како су интегрални сингуларни на ивицама, то је смена (4.17) најпре примењена за сингуларитет у  $t = -1$ , а затим за сингуларитет у  $t = 1$ . За ту примену уведени су трећи параметар  $m_3$  и нова координата  $s_1 = x_{\text{GL}}(l)$  на следећи начин. Најпре је у једначини (4.17) за тачку сингуларитета изабрана тачка  $t_{m_1} = x_{\text{GL}}(1)$ , која је у близини  $t = -1$ , односно извршена је замена променљиве  $t_m$  из (4.17) променљивом  $t_{m_1}$ , тј.  $t_m \equiv t_{m_1}$ . Уместо параметра  $m_1$  уведен је нов параметар  $m_3$ , па је одговарајућа замена у смени  $m_1 \equiv m_3$ . Додатно, замењене су и интеграционе променљиве увођењем нове  $s_1 = x_{\text{GL}}(l)$  као  $t \equiv s$  и  $s \equiv s_1$ . Након примене смене на сингуларитет око једног краја траке, потребно је спровести исту смену и за растезање сингуларитета у околини другог краја траке, тј.  $t = 1$ . За тачку сингуларитета изабрана је тачка  $t_{m_2} = x_{\text{GL}}(N_{\text{int},g})$  у близини другог краја траке, тј. дошло је до замене  $t_m \equiv t_{m_2}$  у смени (4.17). Додатно су спроведене и следеће замене променљивих  $t \equiv t$  и  $s \equiv s$ ,

док је коришћен исти параметар трансформације  $m_3$ , тј.  $m_1 \equiv m_3$ . Сада се елемент матрице система у реду  $r$  и колони  $q$  може израчунати као

$$A_{r,q} = \sum_{l=1}^{N_{\text{int,g}}} w_{\text{GL}}(l) L_m(t) I(t,n) J_s(s_1, t_{m_1}) J_s(s, t_{m_2}), \quad (4.24)$$

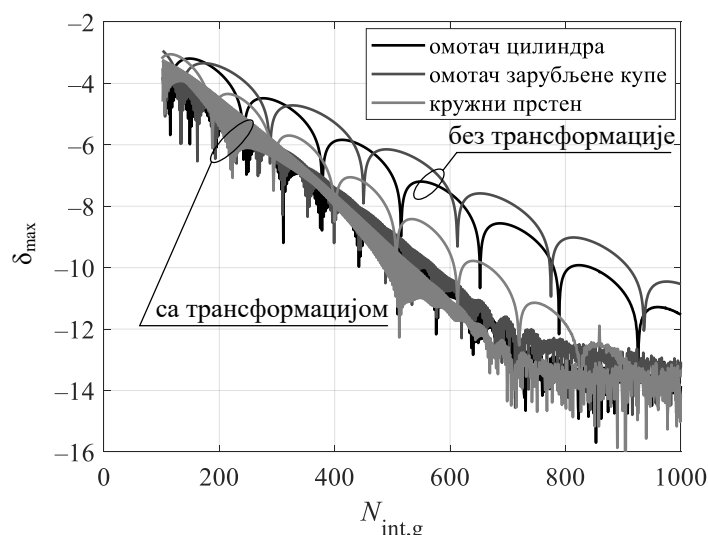
где су  $J_s(s_1, t_{m_1})$  и  $J_s(s, t_{m_2})$  Јакобијани (4.18).

Оптимална вредност параметра  $m_3$  може се одредити из експеримента који је суштински сличан експерименту за одређивање оптималних вредности параметара  $m_1$  и  $m_2$ . Сви интегрални  $I(t,n)$  израчунати су са максималном тачношћу, као што је описано у претходном одељку, док је параметар  $m_3$  вариран у опсегу  $1 \leq m_3 \leq 11$  са кораком један, а број интеграционих тачака  $N_{\text{int,g}}$  у опсегу  $100 \leq N_{\text{int,g}} \leq 300$  са кораком два. Ако је испитивани елемент већ поменути кружни прстен (димензија  $a = 3 \text{ mm}$ ,  $b = 12,2 \text{ mm}$  и  $L = 0$ ), док су ред базисне функције и ред тест функције исти и износе  $m = n = 4$ , процена грешке (4.22) (што је у случају Галеркинове интеграције истовремено и процена максималне грешке (4.23)) у функцији од  $m_3$  и  $N_{\text{int,g}}$  приказана је на слици 4.15. Из овог резултата следи да се за  $3 \leq m_3 \leq 8$  може добити висока тачност. При томе, повећавањем броја интеграционих тачака повећава се и тачност израчунатих интеграла, док избор оптималног параметра  $m_3$  остаје исти. Врло су слични резултати и у случајевима омотача правог цилиндра, односно зарубљене купе стога они неће бити посебно приказани.



Слика 4.15. Процена релативне грешке након Галеркинове интеграције у функцији  $m_3$  и  $N_{\text{int,g}}$ .

На слици 4.16 дата је процена релативне грешке (4.22) Галеркинових интеграла када су рачунати са и без предложене смене у функцији од броја интеграционих тачака  $N_{\text{int,g}}$  за сва три анализирана елемента (омотача правог цилиндра, зарубљене купе и кружног прстена). При томе је за сваки изабрана вредност параметра трансформације  $m_3 = 7$ , док су сви интегрални  $I(t,n)$  израчунати са максималном тачношћу, као што је описано у одељку 4.6.1. Учестаност је  $f = 3 \text{ GHz}$ , док су ред базисне и тест функције исти, тј.  $m = n = 4$ .



Слика 4.16. Процена релативне грешке Галеркинове интеграције. [66]

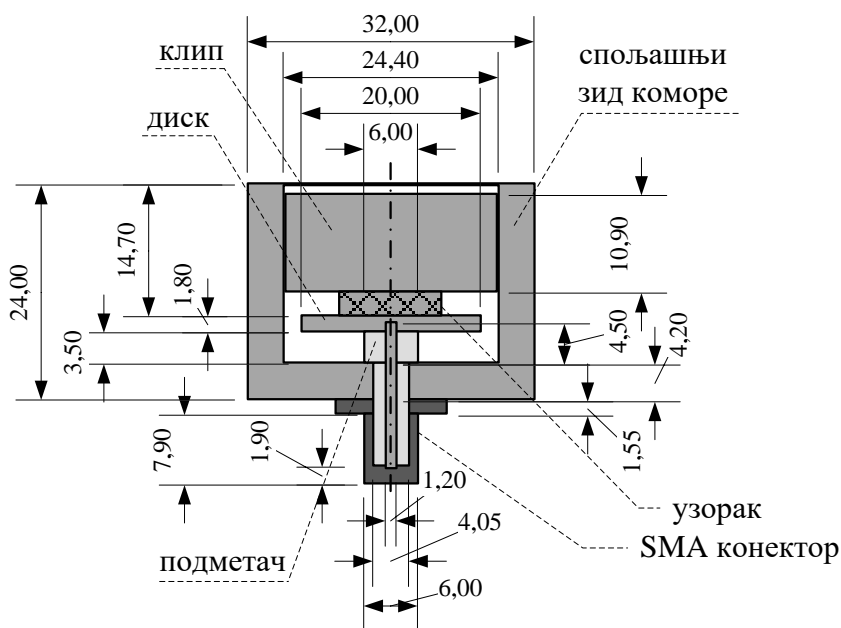
Иако је за 12 значајних цифара потребно  $N_{\text{int},g} = 700$  интеграционих тачака, што је и два пута више него за интеграле  $I(t, n)$ , коришћењем предложене смене се ипак добијају до четири тачне значајне цифре више у односу на случај када трансформација није примењена.

На основу претходне анализе можемо да закључимо да се за рачунање елемената матрице система са високом тачношћу може искористи предложена смена за све три интеграције. У општем случају, избор параметара интеграције и потребан број интеграционих тачака зависи од облика елемента, као и његове највеће електричне димензије, односно највећег реда апроксимације струја. За потребе одређивања диелектричних параметара материјала помоћу поменуте коморе, односно конкретне примене коју имамо у виду, сви матрични параметри ће бити рачунати са  $m_1 = 7$ ,  $m_2 = 9$  и  $m_3 = 7$ , што обезбеђује високу тачност интеграла у нумеричкој анализи коморе.

Коначно, када су израчунати елементи матрице система  $\mathbf{A}$  и вектора слободних чланова  $\mathbf{b}$ , вектор непознатих коефицијената  $\mathbf{x}$  може се израчунати LU декомпозицијом. Тиме су одређене апроксимације струја на елементима анализираних структуре, а одакле се могу, применом одговарајућих оператора, добити и остале електромагнетске величине од интереса (електрично и магнетско поље, улазна импеданса, коефицијент рефлексије итд.).

## 4.7. ХАРДВЕРСКА ПОСТАВКА ЕКСПЕРИМЕНТА

За мерење диелектричних параметара материјала коришћена је претходно фабрикована коаксијална комора [65]. Скица попречног пресека коморе, са димензијама у милиметрима, приказана је на слици 4.17, док је фотографија расклопљене коморе уметнута на слику 4.18. На слици 4.17 скициран је и произвољни узорак на месту где се он поставља при мерењима. Комора је направљена од месинга и напаја се стандардним SMA конектором (енглески: *SubMiniature version A*, скраћено: SMA) са тефлоном (енглески: *polytetrafluoroethylene*, скраћено: PTFE) као диелектриком, који је продужен и делом излази изван конектора. Спољашњи проводник конектора електрички је повезан са спољашњим зидом коморе, док је метални диск коморе електрички повезан са унутрашњим проводником конектора. Метални диск постављен је на подметач од тефлона ради механичке стабилности.



Слика 4.17. Скица осног пресека коморе са димензијама у милиметрима.

Први корак при одређивању релативне перимитивности  $\epsilon'_r$  и тангенса угла губитака  $\tan \delta$  јесте мерење комплексног коефицијента рефлексije коморе у коју је смештен узорак. Мерна поставка састоји се од описане коморе и векторског анализатора мрежа (марке *Agilent E5061A*). Опсег учестаности мерења је од 2 MHz до 3 GHz, одређен могућностима анализатора. Фотографија мерне поставке приказана је на слици 4.18. Узорци су облика кружних цилиндара, пречника до 20 mm и висине до 14 mm, а постављају се на метални диск у комору и притискају клипом, као што је приказано на слици 4.17, као и у попречном пресеку модела коморе на слици 4.19.



Слика 4.18. Фотографија анализатора мрежа на који је повезана комора. Фотографија расклопљене коморе уметнута је на фотографију. [66]

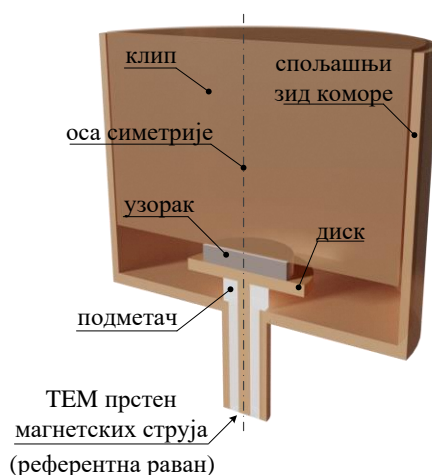
Анализатор мрежа који је коришћен за мерења има стандардни N конектор на приступима. Како је на комори уграђен SMA конектор, коришћен је и стандардни прелаз SMA на N. Пре мерења урађена је потпуна једнопортна калибрација чиме је и референтна равна за мерење коефицијента рефлексije постављена на почетак SMA конектора, као што је приказано на слици 4.19.

## 4.8. НУМЕРИЧКИ МОДЕЛ КОМОРЕ

Да би из измерених резултата (параметара расејања, тј.  $s$ -параметара) били издвојени диелектрични параметри материјала, релативна пермитивност  $\epsilon'_r$  и тангенс угла губитака  $\tan \delta$  или, еквивалентно комплексна релативна пермитивност  $\epsilon_r$ , потребан је што бољи нумерички модел коморе. Нумеричком електромагнетском анализом модела могуће је израчунати комплексни коефицијент рефлексије  $\Gamma$  за различите диелектричне параметре узорка, који се затим упоређују са измереним комплексним коефицијентом рефлексије  $\Gamma_{\text{meas}}$ . Они диелектрични параметри који обезбеђују најбоље слагање између  $\Gamma$  и  $\Gamma_{\text{meas}}$ , проглашавају се за (издвојене) параметре мереног материјала.

Како су комора, узорак и напајање ротационо симетрични, користимо ротационо симетричне елементе за моделовање структуре. Попречни пресек 3-D модела коморе приказан је на слици 4.19.

Као што је већ речено у одељку 4.3, TEM прстен магнетских струја настао је као начин моделовања побуде реализоване коаксијалним водом [13]. Стога је он изабран за побуду и у нумеричком моделу коморе. Побуда је постављена у референтну раван. Унутрашњи и спољашњи полупречник TEM прстена исти су као одговарајући полупречници коришћеног SMA конектора, тј.  $a_i = 0,6 \text{ mm}$  и  $b_i = 2,025 \text{ mm}$ .



Слика 4.19. Попречни пресек модела коморе. [66]

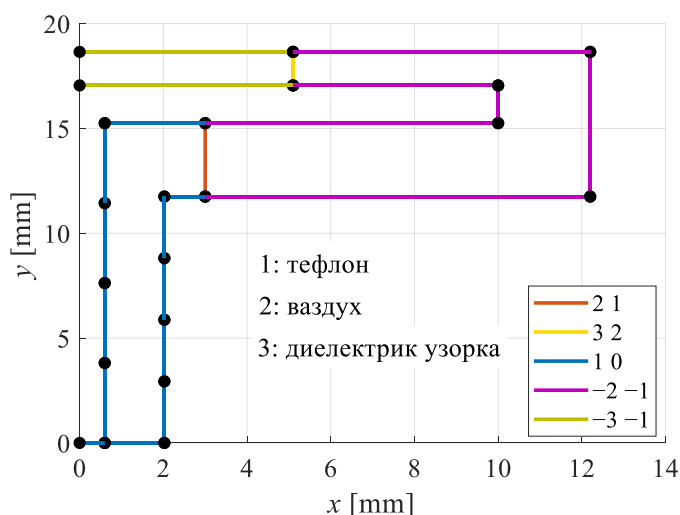
У нумеричком моделу, као и његовој физичкој реализацији, постоје три домена (тј. различита материјала): тефлон (PTFE), ваздух и материјал од кога је направљен узорак. Тефлон је диелектрик у SMA конектору и подметачу металног диска. Сам мерни узорак је непознате комплексне релативне пермитивности  $\epsilon_r$ , тј. непознате релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  и тангенса угла губитака  $\tan \delta$ . Ваздух испуњава остатак коморе, као и њену околину. Сви поменути домени су немагнетски, јер смо се у експериментима бавили само таквим материјалима, па је њихова пермеабилност  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ . Диелектрични губици укључени су увођењем комплексне пермитивности, док су губици у металима укључени у нумерички модел преко површинске импедансе  $Z_s = \sqrt{\pi\mu_0 f / \sigma}$ , где је  $\sigma$  електрична проводност. На елементима који су од метала са губицима, гранични услов једнакости тангенцијалних компоненти електричног поља модификован је у

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) + Z_s \mathbf{J}_s = \mathbf{E}_{i, \text{tan}} \quad (4.25)$$

где је  $\mathbf{E}_{i,\tan}$  тангенцијална компонента електричног поља која потиче од TEM прстена магнетских струја, а  $\mathbf{E}_{\tan}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s)$  је тангенцијална компонента електричног поља која потиче од индукованих струја. При нумеричкој анализи се последњи услов своди на промену елемената само на главној дијагонали матрице система у односу на модел без губитака у металу [7].

Нумеричким експериментима да је показано да нумерички модел коморе који се састоји се од 23 елемента довољан за рачунање коефицијента рефлексije, односно да финансије поделе проводника вода, као и других елемената структуре, не доприносе значајнијем побољшању тачности коефицијента рефлексije. Сваки елемент структуре је BoR, и то кружни прстен, круг или омотач правога кружног цилиндра. На слици 4.20 приказана је једна половина попречног пресека где су издвојени појединачни елементи структуре. Њеном ротацијом око осе симетрије добија се модел коморе са уметнутим узорком. Како је у металу поље једнако нули, то су на слици 4.20, у односу на слике 4.17 и 4.19, издвојене само унутрашње површи коморе, тј. оне између којих постоји ненулно поље. С обзиром на то да постоје брзе промене поља, а самим тим и струја, у близини TEM прстена магнетских струја (побуде) потребан је већи ред апроксимације струја да тачније испрате те промене. Уместо повећања реда струја, унутрашњи и спољашњи проводници вода додатно су подељени на четири права цилиндра, док је ред апроксимације струја остао исти. На слици су црним кружићима означени крајеви сегмената.

Поред полупречника  $a$ ,  $b$  и висине  $L$  (види слику 4.1), за нумеричку електромагнетску анализу потребно је још дефинисати и између којих домена се налази сваки елемент. У том циљу уведено је следеће означавање [7]. Најпре су три домена у моделу коморе означени са 1, 2, односно 3. Ако је елемент од метала код кога је са обе стране исти домен  $i$ , он је означен са  $i 0$ . Ако је елемент од метала који раздваја два домена  $i$  и  $j$ , ознака је  $-i - j$ . Коначно, ако елемент раздваја два диелектрика, означен је са  $i j$ . На слици 4.20 је бројем 1 означен домен ван коморе, као и у месинганом диску и у унутрашњем проводнику коаксијалног вода, бројем 2 домен диелектрика у коаксијалном воду, а бројем 3 домен узорка непознате комплексне пермитивности.



Слика 4.20. Попречни пресек нумеричког модела коморе. Елементи структуре између различитих домена обележени су различитим бојама.

Пошто је комора (идеално) затворена, то је електромагнетско поље ван коморе теоријски једнако нули. У пракси је поље ван коморе занемарљиво мало. На основу теореме еквиваленције следи да ван коморе може бити било који домен. Иако је у физичком моделу ван коморе ваздух, у нумеричком моделу је тефлон. На тај начин добија се нешто

једноставнији нумерички модел (са мање непознатих) јер има мање металних површина између два различита диелектрика. Слично, у месинганом диску, као и у унутрашњем проводнику коаксијалног вода, поље је нула, па је и тај простор такође испуњен тефлоном. На слици 4.20 бројем 1 означен је тефлон, а бројем 2 ваздух.

Након нумеричке анализе коморе методом момената са РМСНWT формулацијом, као што је то описано у поглављу 2.10, биће познате апроксимације густина површинских електричних и магнетских струја на сваком од елемената структуре. Да бисмо израчунали комплексни коефицијент рефлексije, најпре ћемо израчунати комплексну импедансу на месту TEM прстена магнетских струја као

$$Z = \frac{V}{2\pi a_i J_s(t=-1)}, \quad (4.26)$$

где је  $J_s(t=-1)$  густина површинске електричне струје на унутрашњем проводнику коаксијалног вода (SMA конектора) на месту TEM прстена магнетских струја. Када је позната импеданса, комплексни коефицијент рефлексije може се израчунати из

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}, \quad (4.27)$$

где је  $Z_0$  карактеристична импеданса коаксијалног вода, односно номинална импеданса приступа, која је у случају коришћеног SMA конектора једнака  $Z_0 = 50 \Omega$ .

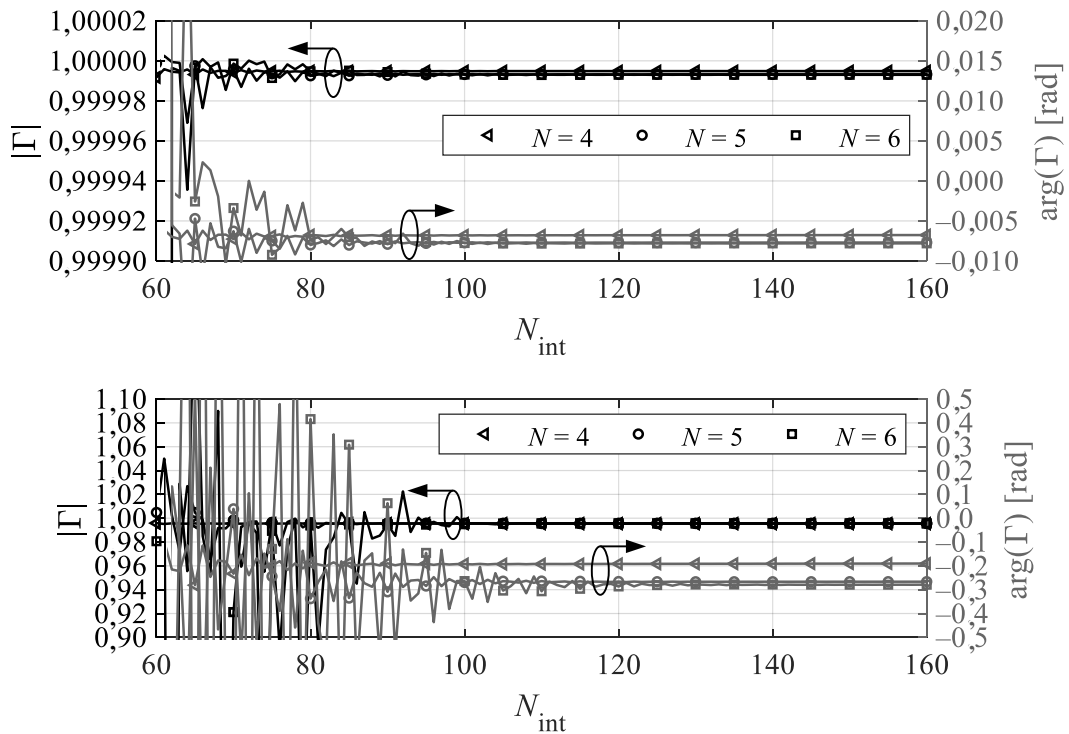
Пре одређивања диелектричних параметара из измереног коефицијента рефлексije коморе са узорком, потребно је фино подесити нумерички модел коморе, односно одредити потребан ред апроксимације струја на елементима и броја интеграционих тачака тако да коефицијент рефлексije конвергира, а да тачност нумерички израчунатог коефицијента буде већа од тачности измереног. Додатно, испитан је и утицај варијација релативне пермитивности  $\epsilon'_r$  на коефицијент рефлексije  $\Gamma$  да бисмо могли проценити и релативну грешку издвојених диелектричних параметара. Са тим циљевима постављени су експерименти приказани у одељцима 4.8.1–4.8.3.

#### 4.8.1. КОНВЕРГЕНЦИЈА КОЕФИЦИЈЕНТА РЕФЛЕКСИЈЕ

Циљ експеримента описаног у овом одељку је подешавање реда апроксимације струја у нумеричком моделу и броја тачака интеграције тако да израчунати коефицијент рефлексije  $\Gamma$  конвергира на свим учестаностима из мереног опсега.

Експеримент се састоји од рачунања  $\Gamma$  за различита подешавања модела, на најнижој и највишој учестаности мерења, тј. на 2 MHz и 3 GHz, и то када је у комору постављен узорак познате релативне пермитивности  $\epsilon'_r = 3,5$  и  $\epsilon''_r = 10,85 \cdot 10^{-3}$ , чији је пречник  $d = 10$  mm и висина  $h = 1,6$  mm. Узорак је направљен од материјала Rogers 4350В, који се често користи у микроталасној техници, па су и његови параметри добро познати [121]. Број непознатих коефицијената у свакој апроксимацији струја на сваком од елемената структуре вариран је из скупа  $N \in \{4, 5, 6\}$ , док је број интеграционих тачака  $N_{\text{int}}$  мењан у опсегу од 60 до 160.

Модул и аргумент израчунатих комплексних коефицијената рефлексije представљени су на слици 4.21 и то на горњем панелу на учестаности  $f = 2$  MHz, а на доњем на учестаности  $f = 3$  GHz. Са слике 4.21 може се закључити да коефицијент рефлексije конвергира на обе разматране учестаности када је  $N = 5$  и  $N_{\text{int}} = 120$ . Стога ће баш овакав нумерички модел у наставку бити коришћен за екстракцију диелектричних параметара.



Слика 4.21. Модул и аргумент комплексног коефицијента рефлексије коморе на: (а)  $f = 2$  MHz (горњи панел) и (б)  $f = 3$  GHz (доњи панел). [66]

#### 4.8.2. ПРОЦЕНА ТАЧНОСТИ КОЕФИЦИЈЕНТА РЕФЛЕКСИЈЕ: ПОРЕЂЕЊЕ СА АНАЛИТИЧКИМ РЕШЕЊЕМ

У циљу процене тачности израчунавања комплексног коефицијента рефлексије из нумеричког модела коморе, тј. да бисмо проверили да ли је тачност нумеричког модела већа од тачности мерења, спроведен је следећи експеримент.

Анализирана је редна веза два коаксијална вода истих полупречника, испуњених различитим диелектрицима, приказана на слици 4.22. Разлог због којег је изабран овакав модел за процену тачности нумеричке анализе је што за њега можемо аналитички израчунати коефицијент рефлексије. Додатно су полупречници, дужине и релативне пермитивности редне везе коаксијалних водова изабрани тако да буду истог реда величине као у моделу коморе. Прва секција испуњена је ваздухом, а друга немагнетским диелектриком без губитака релативне пермитивности  $\epsilon_r = \epsilon'_r$ . Полупречници су исти као полупречници напојног вода коморе, тј. SMA конектора (унутрашњи  $a_1 = 0,6$  mm, а спољашњи  $b_1 = 2,025$  mm), док је дужина сваке секције  $L = 6$  mm. На почетку прве секције је приступ номиналне импедансе  $50 \Omega$ , док је крај друге секције кратко спојен. Циљ је био упоредити теоријску вредност комплексног коефицијента рефлексије на различитим учестаностима, за различите вредности релативне пермитивности диелектрика друге секције, са комплексним коефицијентом добијеним из одговарајућег нумеричког модела.

Теоријска вредност комплексног коефицијента рефлексије може се израчунати следећим поступком. Како је крај друге секције кратко спојен, то је импеданса која се види гледано у крај другог вода једнака нули, па је импеданса која се види гледано у крај прве према другој секцији једнака [99], [120]

$$Z_1 = -Z_{c2} \tanh(-\gamma_2 L), \quad (4.28)$$



где је коефицијент простирања у другом воду једнак  $\gamma_2 = j\omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0}$ , а његова карактеристична импеданса  $Z_{c2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}}\ln\frac{b_1}{a_1}$ . Тада је улазна импеданса каскадне секције два вода једнака [99], [120]

$$Z = Z_{c1} \frac{Z_1 - Z_{c1} \tanh(-\gamma_1 L)}{Z_{c1} - Z_1 \tanh(-\gamma_2 L)}, \quad (4.29)$$

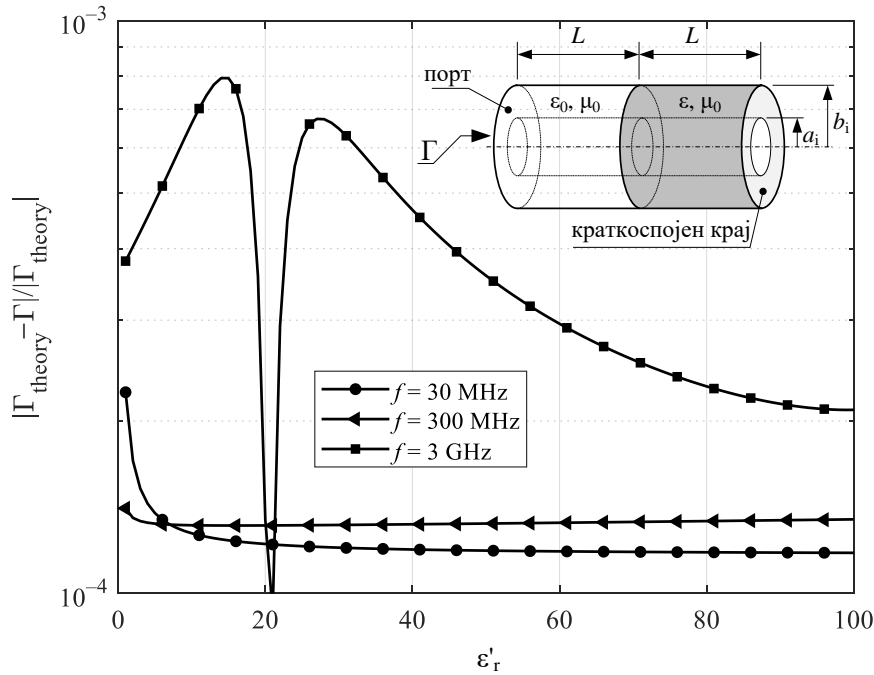
где је коефицијент простирања у првој секцији једнак  $\gamma_1 = j\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , а одговарајућа карактеристична импеданса  $Z_{c1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\ln\frac{b_1}{a_1}$ . Сада се теоријска вредност улазног коефицијента рефлексије  $\Gamma_{\text{theory}}$  може израчунати из (4.27), где је  $Z_0 = 50 \Omega$  номинална импеданса приступа.

Комплексни коефицијент рефлексије  $\Gamma$  израчунат је и из нумеричког модела каскадне везе ових водова користећи предложени нумерички приступ. У нумеричком моделу TEM прстен постављен је на почетак прве секције, односно на место приступа. За рачунање интеграла коришћена је предложена смена (4.17) са параметрима  $m_1 = 7$ ,  $m_2 = 9$  и  $m_3 = 7$ . Након електромагнетске анализе, комплексни коефицијент рефлексије израчунат је на основу (4.26) и (4.27).

Релативна пермитивност другог диелектрика варирана је у опсегу  $1 \leq \epsilon'_r \leq 100$  са кораком један, а резултати су поновљени на три учестаности:  $f = 30 \text{ MHz}$ ,  $f = 300 \text{ MHz}$  и  $f = 3 \text{ GHz}$ . Релативна грешка нумеричког резултата, тј.  $|\Gamma - \Gamma_{\text{theory}}| / |\Gamma_{\text{theory}}|$ , приказана је у функцији релативне пермитивности другог диелектрика  $\epsilon_r$  на слици 4.22 на све три учестаности. Са слике се може видети да је релативна грешка мања од 0,1 % на све три учестаности за сваку од разматраних пермитивности. Како је ова релативна грешка испод грешке мерења (о којој ће бити речи у одељку 4.9), закључујемо да је и модел коморе са истим подешавањима довољно тачан за примену за коју је намењен.

Додатно се на слици 4.22 може приметити и повећање релативне грешке са порастом учестаности. Како је исто подешавање модела (исти ред апроксимације и број тачака интеграције) коришћено за све три учестаности, овакво понашање је и очекивано. Наиме, при вишим учестаностима су и електричне дужине у моделу веће, па је потребан и виши ред апроксимација струја за исту тачност.

У циљу утврђивања колико је тачних цифара  $p$  матрице система потребно да би релативна грешка коефицијента рефлексије била испод 0,1 %, спроведен је следећи експеримент. Полазећи од матрице система у којој су елементи израчунати са бар 12 тачних цифара, у сваком наредном кораку једна цифра је постављена на нулу, полазећи од цифре најмање тежине. На тај начин је број тачних цифара на једноставан начин смањен за један. Овај корак је понављан док елементи матрице не остану са само једном тачно израчунавом значајном цифром. Истовремено је иста процедура примењена и на елементе вектора слободних чланова  $\mathbf{b}$ . У сваком кораку, тј. за сваки број тачно израчунатих значајних цифара  $p$ , систем линеарних једначина је решен, након чега је израчунат и одговарајући коефицијент рефлексије из (4.26) и (4.27), као и релативна грешка у односу на теоријско решење  $|\Gamma - \Gamma_{\text{theory}}| / |\Gamma_{\text{theory}}|$ .

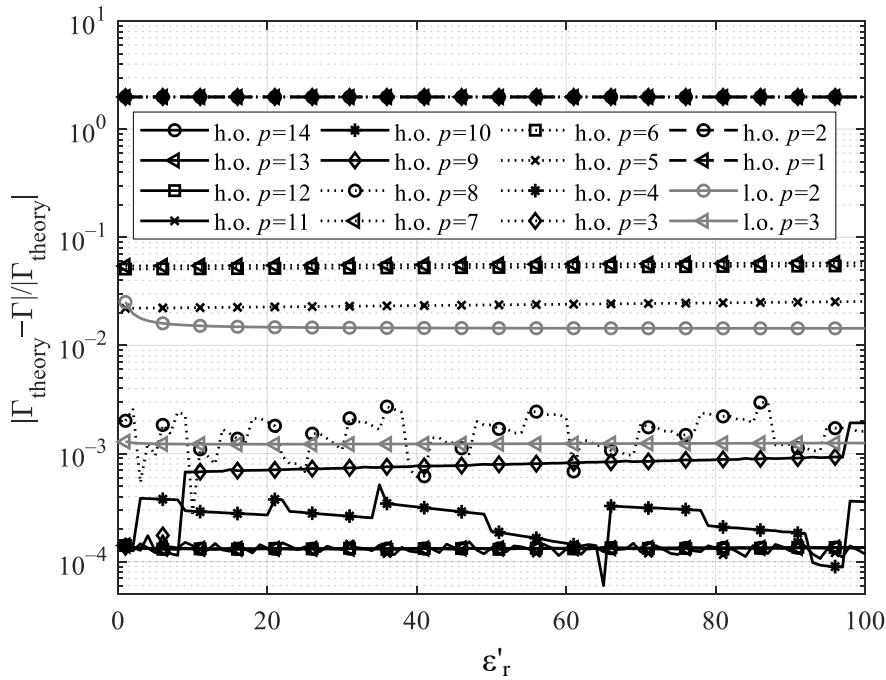


Слика 4.22. Релативна грешка коефицијента рефлексије каскадне везе два коаксијална вода у функцији релативне пермитивности другог вода на 30 MHz, 300 MHz и 3 GHz. [66]

Учестаност на којој је експеримент спроведен је  $f = 300 \text{ MHz}$ , док је релативна пермитивност диелектрика у другом воду варирана у опсегу  $1 \leq \epsilon_r \leq 100$ . На слици 4.23 приказане су релативне грешке коефицијента рефлексије израчунате након анализе са функцијама базиса вишег реда са  $p = 1, 2, \dots, 14$  цифара које у елементима оригиналне матрице нису промењени на нулу. Како су елементи матрице система израчунати са 12 тачних цифара, то су релативне грешке за  $p \in \{14, 13, 12\}$  практично исте. Када је  $p = 11$ , постоје мала одступања. Даље смањивање броја значајних цифара води ка смањивању тачности коефицијента рефлексије, тј. повећавању релативне грешке израчунатог коефицијента рефлексије у односу на теоријску вредност. Са слике 4.23 може се закључити да је довољно израчунати елементе матрице са  $p = 9$  тачних значајних цифара да би релативна грешка коефицијента рефлексије била испод 0,1 %.

Конечно, да бисмо утврдили да ли је за анализу ефикасније користити функције базиса нижег или вишег реда, спроведен је и следећи експеримент. Резултати анализе са функцијама базиса вишег реда упоређени су са резултатима анализе са функцијама базиса нижег реда. За апроксимације функцијама базиса нижег реда изабрани су полиноми реда нула или један, док су за апроксимације функцијама базиса вишег реда изабрани полиноми реда вишег од један. Додатно, за потребе анализе функцијама базиса нижег реда било је потребно поделити елементе нумеричког модела коморе на ситније, у односу на оне приказане на слици 4.20. Највећа дужина у таквом моделу је  $l = 1 \text{ mm}$ . Како је радна учестаност експеримента  $f = 300 \text{ MHz}$ , то је електрична дужина највећег сегмента  $l/\lambda = 0,01$  за  $\epsilon_r = 100$ . Резултати су добијени са интегралима израчунатим са две или три тачне значајне цифре. Наиме, време анализе са функцијама базиса нижег реда са  $p = 3$  тачно израчунате значајне цифре практично је исто као и време које је потребно за анализу функцијама базиса вишег реда са  $p = 12$ . Разлог је у повећаном броју елемената модела, па је и укупан број непознатих при анализи функцијама базиса нижег реда већи него при анализи функцијама базиса вишег реда. Резултати представљени на слици 4.23 показују да, за исто време анализе, апроксимација функцијама базиса вишег реда даје један ред величине мању релативну грешку коефицијента

рефлексије. Отуда следи да је за анализу са високом прецизношћу ефикасније користити функције базиса вишег реда.



Слика 4.23. Релативна грешка коефицијента рефлексије када су матрични елементи израчунати са различитим бројем тачних цифара  $p$  у случају апроксимације функцијама базиса вишег реда (h.o.) и нижег реда (l.o.). [66]

### 4.8.3. УТИЦАЈ ВАРИЈАЦИЈА РЕЛАТИВНЕ ПЕРМИТИВНОСТИ УЗОРКА НА КОЕФИЦИЈЕНТ РЕФЛЕКСИЈЕ

Са циљем даље припреме поступка одређивања релативне пермитивности узорка користећи нумерички модел коморе, испитана је зависност комплексног коефицијента рефлексије  $\Gamma$  од релативне перимитивности узорка  $\epsilon_r$ , тј. функција  $\Gamma(\epsilon_r)$ . Аналитички облик функције  $\Gamma(\epsilon_r)$  није познат. Ипак, ако су варијације у  $\epsilon_r$  мале, то је на основу прва два члана Тејлоровог развоја у околини  $\epsilon_r$ , могуће написати следећу апроксимацију

$$\Gamma(\epsilon_r + \Delta\epsilon_r) \approx \Gamma(\epsilon_r) + \Gamma'(\epsilon_r)\Delta\epsilon_r, \quad (4.30)$$

јер је очекивано да одговарајуће варијације у  $\Gamma$  буду линеарно пропорционалне, тј.  $\Delta\Gamma \approx \Gamma'(\epsilon_r)\Delta\epsilon_r$ .

Претходно тврђење илустровано је и на резултатима следећег експеримента. Израчунате су апсолутне промене у  $\Gamma$  нормализоване на релативну промену  $\epsilon_r$ , тј. однос

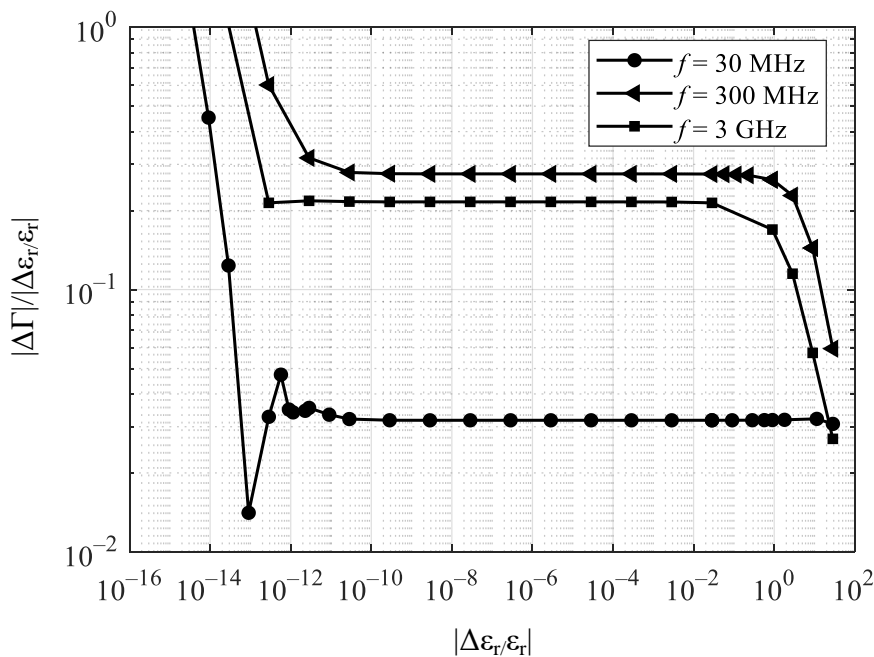
$|\Delta\Gamma|/\left|\frac{\Delta\epsilon_r}{\epsilon_r}\right|$ . На једној учестаности и за мале варијације у  $\epsilon_r$  овај однос има константну

вредност. Та се вредност разликује за различите учестаности и различито  $\epsilon_r$ . На слици 4.24 дата је нормализована промена коефицијента рефлексије у случају поменутог Rogers 4350В узорка који је већ испитиван у одељку 4.8.1. Са графика се може видети да ако је релативна

промена перимитивности у опсегу  $10^{-10} \leq \Delta\epsilon_r / \epsilon_r \leq 10^{-2}$ , онда је однос  $|\Delta\Gamma|/\left|\frac{\Delta\epsilon_r}{\epsilon_r}\right|$

константан, што је потврда претпоставке која следи из (4.30). Са друге стране, када је  $|\Delta\epsilon_r/\epsilon_r| < 10^{-10}$ , присутан је нумерички шум процене извода, тј. диференцирања, па пропорционалност из (4.30) више не важи. Када је, пак, релативна промена велика, тј. за  $|\Delta\epsilon_r/\epsilon_r| > 10^{-2}$ , линеарна апроксимација (3.2) више није довољно добра, јер виши редови у Тејлоровом развоју имају све већи утицај на коефицијент рефлексије, па поново пропорционалност не важи. Ипак, како је у широком опсегу нормализоване промене релативне пермитивности  $|\Delta\epsilon_r/\epsilon_r|$  нормализована промена коефицијента рефлексије  $|\Delta\Gamma|/\left|\frac{\Delta\epsilon_r}{\epsilon_r}\right|$  константна, то овај експеримент потврђује нумеричку стабилност модела коморе.

Резултати са слике 4.24 могу се искористити за процену релативне грешке издвојених релативних пермитивности на следећи начин. Ако претпоставимо да је узорак са малим губицима, па је  $|\Gamma| \approx 1$  (као што је то случај код испитиваног узорка Rogers 4350В материјала), онда је  $|\Delta\epsilon_r/\epsilon_r| \approx |\Delta\Gamma|/K$ , где је  $K$  константа коју можемо одредити са слике 4.24. На пример на учестаности  $f = 300$  MHz константа је  $K \approx 0,3$ . Ако претпоставимо да је несигурност мерења  $|\Delta\Gamma|/|\Gamma| \approx 1,5\%$  [122], за узорке са малим губицима је тада  $|\Delta\Gamma| \approx 1,5\%$ , то је на  $f = 300$  MHz релативна грешка издвојене пермитивности приближно једнака  $|\Delta\epsilon_r/\epsilon_r| \approx |\Delta\Gamma|/K \approx 5\%$ .



Слика 4.24. Апсолутна промена комплексног коефицијента коморе  $\Gamma$  нормализована на релативну промену релативне пермитивности узорка  $\Delta\epsilon_r/\epsilon_r$ . [66]

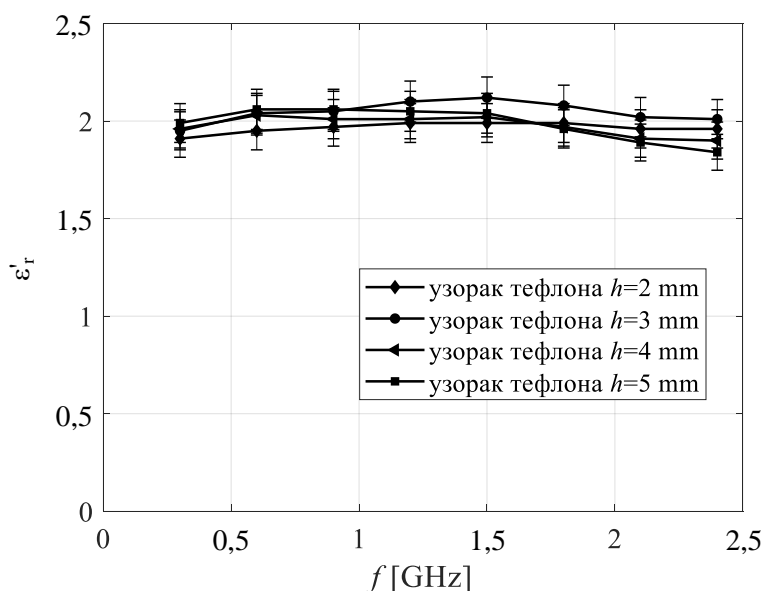
## 4.9. МЕРЕЊЕ РЕЛАТИВНЕ ПЕРМИТИВНОСТИ МАТЕРИЈАЛА

Користећи представљени нумерички модел коморе, укључујући и предложене смене за нумеричку интеграцију, са једне стране, као и хардверску поставку мерења коефицијента рефлексије, описаном у одељку 4.7, са друге стране, издвојене су релативне пермитивности тефлона, као и материјала Rogers 4350 и FR-4, који се често срећу у микроталасним колима. Додатно, издвојен је и тангенс угла губитака узорка FR-4 материјала.

Тефлон (PTFE) је изабран за проверу поступка с обзиром на то да је његова релативна пермитивност  $\epsilon'_r = 2,1$  позната, док је имагинарни део комплексне релативне пермитивности  $\epsilon''_r \leq 10^{-4}$  [123]. С обзиром на то да имагинарни део релативне пермитивности има врло малу вредност, то губици овог материјала неће бити анализирани. У нумеричком моделу из кога је издвојено  $\epsilon'_r$  тефлона, диелектрик узорка је без губитака, док су губици у металима укључени. Релативна пермитивност узорка  $\epsilon'_r$  варирана је у околини  $\epsilon'_r = 2$  са кораком 0,01.

Мерење релативне пермитивности тефлона је изазовно с обзиром на то да је она блиска релативној пермитивности вакуума (тј. блиска јединици), а и пречници узорка које смо користили су два пута мањи од пречника коморе, па овај материјал ствара врло мали контраст у односу на остатак коморе, односно празну комору. Отуда следи да је утицај овог узорка на комплексни коефицијент рефлексије коморе релативно мали.

Мерена су четири узорка различитих димензија истог тефлона. Сви узорци су пречника 10 mm, док су висине различите и износе 2 mm, 3 mm, 4 mm и 5 mm. Релативна пермитивност  $\epsilon'_r$  издвојена је на осам учестаности у опсегу од 300 MHz до 2,4 GHz и резултати су упоредо приказани на слици 4.25.



Слика 4.25. Релативна пермитивност тефлона добијена мерењем узорка истих пречника и различитих висина. [66]

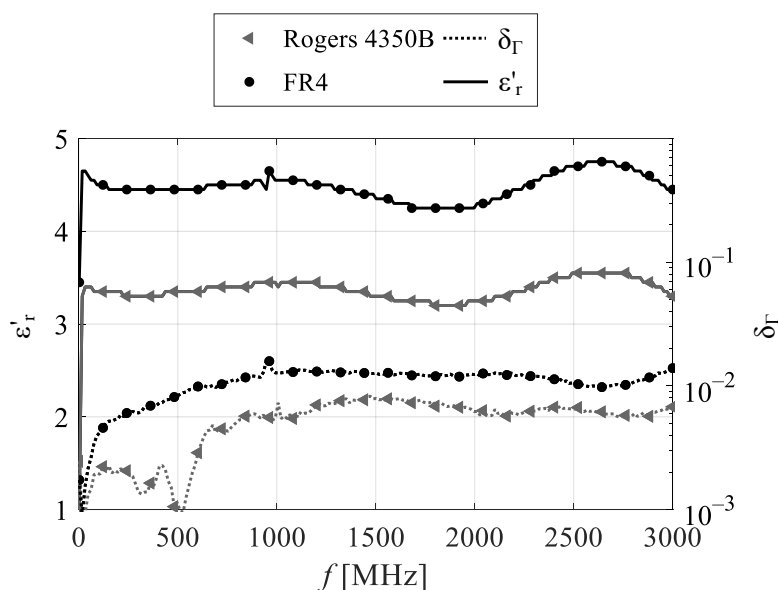
Из приказаних резултата може се видети да је релативна грешка издвојеног  $\epsilon'_r$  око  $\pm 5\%$ , што је илустровано на слици 4.25. Процењена грешка мерења коефицијента рефлексије је око  $1,5\%$ . Она потиче од више различитих фактора, као што су грешка у мерењу димензија коморе и узорка, површинска хрпавост (енглески: *surface flatness*) узорака, као и саме коморе (што има значајан утицај на мерења узорака великих пермитивности), тачан положај узорка у комори, односно колико је померен од центра (што има значајан утицај на мерења на високим учестаностима), мерна несигурност коришћеног анализатора мрежа и др. Користећи се проценом константе  $K$  са слике 4.24, добија се да је и очекивана грешка око  $\pm 5\%$ , на сличан начин као што је то описано у одељку 4.8.3. Оправданост коришћења резултата са слике 4.24 за процену грешке у овом експерименту лежи у чињеници да је  $\epsilon'_r$  тефлона сличног реда величине, док  $\epsilon''_r$  има јако мале вредности.

С обзиром на то да су добијени резултати, као и процењене грешке очекивани, ова мерења тефлона верификују предложену процедуру за одређивање релативне пермитивности материјала.

Следећи узорци који су испитивани су од материјала Rogers 4350B и FR-4. Пречници узорака су такође 10 mm. Висина Rogers материјала је 1,52 mm, а материјала FR-4 0,8 mm. Димензије узорака су мерене микрометарским завртњем. Оба материјала имају и слој метализације, која је занемарена приликом мерења димензија и нумеричке анализе.

Ови материјали су често коришћени у микроталасној техници при изради кола. Стога су параметри диелектрика добро познати. Релативна пермитивност Rogers материјала је  $3,48 \pm 0,05$  на 10 GHz [121], док је очекивана релативна пермитивност FR-4 материјала (око) 4,5 [109]. Најпре су одређене релативне перимитивности узорака при чему су губици у диелектрицима занемарени, као и у експерименту са тефлоном.

Релативне пермитивности у опсегу учестаности од 2 MHz до 3 GHz приказане су на слици 4.26. Из резултата се може видети да су осцилације релативне пермитивности око 0,1, што су уклапа у очекивану грешку од око  $\pm 5\%$ , слично као и при мерењу параметара тефлона.



Слика 4.26. Релативна пермитивност Rogers 4350B и FR-4 материјала.

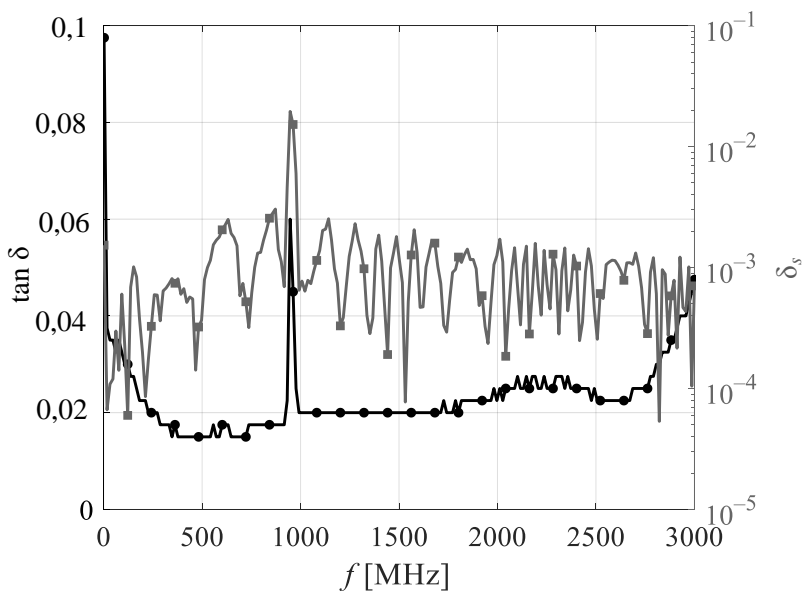
Осим релативне пермитивности, која је на слици 4.26 приказана на левој осци, на десној је дата и девијација израчунатог коефицијента рефлексије  $\Gamma$ , добијеног коришћењем нумеричког модела за релативну пермитивност која је издвојена, у односу на измерени коефицијент рефлексије  $\Gamma_{\text{meas}}$ . Девијација је израчуната као

$$\delta_\Gamma = \frac{|\Gamma - \Gamma_{\text{meas}}|}{|\Gamma_{\text{meas}}|}. \quad (4.31)$$

У случају Rogers материјала, девијација је мања од 1% на целом испитиваном опсегу учестаности, док за FR-4 материјал она износи до неколико процената. Грешка за други материјал је већа јер су губици FR-4 материјала већи, па имају и значајнији утицај на коефицијент рефлексије. Као што ће бити показано у наредном експерименту, девијација ће бити мања ако се у нумерички модел укључе и губици у диелектрику.

Како су губици Rogers 4350B материјала врло мали, односно имагинарни део релативне пермитивности је  $\epsilon''_r \leq 9,8 \cdot 10^{-4}$  на 10 GHz [121], то они нису издвојени коришћењем предложеног метода. Очекивани губици материјала FR-4 су за ред величине већи, па ћемо тангенс угла губитака овог материјала издвојити.

Екстракција је и овде спроведена упоређивањем коефицијента рефлексије израчунатог на основу нумеричког модела  $\Gamma$  и измереног  $\Gamma_{\text{meas}}$ . Овај пут су у нумерички модел, поред губитака у металу, укључени и губици у диелектрику, док су за релативну пермитивност искоришћени резултати из претходног експеримента, приказани на слици 4.26. Издвојени тангенс угла губитака дат је на левој оси слике 4.27, док је на десној оси девијација (4.31) коефицијента рефлексије, која је сада у целом опсегу учестаности мања од 1 %.



Слика 4.27. Тангенс угла губитака FR-4 материјала.

Овим експериментима потврђено је да се предложеним методом могу издвојити релативна пермитивност и тангенс угла губитака, тј. комплексна релативна пермитивност узорака немагнетских материјала. При томе узорци морају бити у облику кружних цилиндара, таквих димензија да се могу сместити у комору. За одређивање тангенса угла губитака потребно је и да буде  $\tan \delta > 10^{-3}$ .

## 5. ЗАКЉУЧАК

У дисертацији су предложене нове смене које поништавају сингуларитете подинтегралних функција који се срећу при електромагнетској анализи методом момената. Оне обезбеђују нумеричку интеграцију сингуларних функција са високом тачношћу (блиској машинској) на рачунарски ефикасан начин. Када су интегрални елементи матрице система израчунати са високом тачношћу, тада и решење система линеарних једначина даје резултат са високом тачношћу. Другим речима, густине површинских струја израчунате су са минималном грешком имајући у виду да је имплементација метода на рачунару са представом бројева у двострукој тачности, тј. да је максималан број тачних цифара 15.

При нумеричкој електромагнетској анализи 2-D структура методом момената циљ је био са високом тачношћу израчунати целодоменску апроксимацију густине површинских струја. Траке које су разматране направљене су од савршеног проводника, бесконачно су танке и бесконачно су дугачке, а различитих су попречних пресека. Анализиране су као расејачи на које наилази равна, униформан талас у ТМ или ТЕ моду. Методом момената са неуниформним подешавањем у тачкама систем Максвелових једначина трансформисан је у систем линеарних једначина са непознатим коефицијентима из развоја струја. Рачунски најзахтевнији корак при формирању система линеарних једначина је рачунање елемената матрице система, а који представљају интеграле са сингуларним подинтегралним функцијама. Када је матрица система формирана, систем линеарних једначина решен је LU декомпозицијом и заменом уназад.

У језгру интеграла које је потребно израчунати при формирању матрице система линеарних једначина, појављују се Ханкелова функција друге врсте и нултог реда, односно друге врсте и првог реда. Поменуте Ханкелове функције су сингуларне када су њихови аргументи једнаки нули. Након развијања у Тејлоров ред у околини нуле, показује се да је сингуларитет Ханкелове функције друге врсте и нултог реда облика  $\log R$ , док је сингуларитет Ханкелове функције друге врсте и првог реда облика  $1/R$ . Предложено је шест различитих смена и за сваку је теоријски доказано да поништава сингуларитете облика  $\log R$  и  $1/R$ . Тиме је обезбеђено да се нумеричка интеграција трансформисаних подинтегралних функција спроведе са високом тачношћу. У овој дисертацији коришћена је стандардна Гаус-Лежандрова нумеричка интеграција након смена.

Резултати су верификовани упоређивањем апроксимација густина струја на тракама добијеним целодоменском анализом са предложеним сменама и анализом комерцијалним софтвером. При томе је процена девијације између резултата око 1 %, што потиче од помало различитих вредности којима две предложене апроксимације конвергирају с обзиром на различите базисне функције.

Нумеричким експериментима показано је и да су предложене смене погодне за анализу трака практично произвољног облика попречног пресека (равна, парабола, различити отворени и затворени облици). Захваљујући високој тачности интеграла, границе



електричних димензија целодоменске анализе 2-D структура померене су на 4000 таласних дужина. При томе је ред базисне функције био 14000. Након добијања података из великог броја нумеричких експеримената формиране су аналитичке формуле за параметре смене и потребан број интеграционих тачака за интеграцију са високом тачношћу у функцији од само електричне ширине 2-D структуре. Тиме је предложена аутоматска процедура за анализу 2-D структура са високом тачношћу.

Мотивација за проширење овог истраживања долази из анализе ротационо симетричних структура. Конкретно, било је потребно направити што тачнији нумерички модел коморе за мерење параметара диелектрика, где комора и узорци материјала поседују ротациону симетрију. Одређивање диелектричних параметара узорака реализује се упоређивањем измереног коефицијента рефлексије са оним добијеним из нумеричког модела. При томе је било потребно обезбедити да тачност нумеричког модела буде боља од тачности мерења. Стога је предложена и смена двеју променљивих, које представљају локалне координате ротационо симетричних структура, чиме је обезбеђена висока тачност нумеричке електромагнетске анализе ротационо симетричних структура. На тај начин су границе мерења диелектричних параметара материјала комором померене са досадашње учестаности од 1 GHz, диктиране квазистатичким нумеричким моделом коморе, до дубоко у опсег микроталасних учестаности.

У претходним експериментима је након одговарајућих смена, коришћен Гаус-Лежандров метод за нумеричку интеграцију, док су параметри смена оптимално подешавани тако да потребан број интеграционих тачака за највећу тачност буде минималан. Као предмет даљег истраживања остаје испитивање да ли примена других нумеричких метода интеграције након предложених смена обезбеђује исту тачност са мање интеграционих тачака. Додатно, аутоматизација интеграције је урађена на примеру једне од шест смена, од којих свака поништава сингуларитете од интереса за 2-D нумеричку анализу. Намеће се питање да ли би аутоматизација интеграције са неком од других смена резултовала значајно другачијим аналитичким формулама за процену параметара смене, односно потребног броја интеграционих тачака.

Предложени поступак одређивања диелектричних параметара материјала подразумева мерење немагнетских узорака. За потпуније описивање узорака материјала, потребно је осмислити и направити поступак мерења и магнетских особина материјала, у првом реду релативне пермеабилности линеарних узорака. Предлози у литератури постоје, а за та мерења се може искористити исти или врло сличан нумерички модел као модел развијен у овој дисертацији.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Harrington, Roger F., *Time-harmonic electromagnetic fields*. New York: IEEE Press, 2001.
- [2] C. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*. New York: Wiley, 2012.
- [3] J. Jackson, *Classical electrodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [4] Harrington, Roger F., *Field computation by moment method*. New York: IEEE Press, 1993.
- [5] J. J. H. Wang, *Generalized moment methods in electromagnetics: Formulation and computer solution of integral equations*. Wiley-Interscience, 1991.
- [6] A. F. Peterson, S. L. Ray, and R. Mitra, *Computational methods for electromagnetics*. Wiley-IEEE Press, 1998.
- [7] B. M. Kolundžija and A. R. Djordjević, *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*. Boston: Artech House, 2002.
- [8] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 1996.
- [9] J. L. Volakis, A. Chatterjee, and L. C. Kempel, *Finite element method for electromagnetics (antennas, microwave circuits, and scattering applications)*, 1st ed. New York: IEEE Press, 1998.
- [10] J. M. Jin and D. J. Riley, *Finite element analysis of antennas and arrays*, 1st ed. Hoboken, New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2009.
- [11] J. M. Jin, *The finite element method in electromagnetics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2014.
- [12] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method*, 3rd ed. Norwood, Massachusetts: Artech House, 2005.
- [13] B. D. Popović, M. B. Dragović, and A. R. Djordjević, *Analysis and synthesis of wire antennas*. Chichester, New York, Brisbane, Singapore: Research Studies Press, John Wiley & Sons LTD, 1982.
- [14] J. G. Perovic, D. I. Olcan, B. M. Kolundzija, and A. R. Djordjevic, “A singularity cancelation transformation for entire-domain analysis of 2-D structures with high-precision integration,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 67, no. 4, pp. 2522–2533, Apr. 2019, doi: 10.1109/TAP.2019.2891401.
- [15] D. Wilton, S. Rao, A. Glisson, D. Schaubert, O. Al-Bundak, and C. Butler, “Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 32, no. 3, pp. 276–281, 1984, doi: 10.1109/TAP.1984.1143304.

- [16] R. D. Graglia, "On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 41, no. 10, pp. 1448–1455, Oct. 1993, doi: 10.1109/8.247786.
- [17] P. Yla-Oijala and M. Taskinen, "Calculation of CFIE impedance matrix elements with RWG and  $n \times$  RWG functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 51, no. 8, pp. 1837–1846, Aug. 2003, doi: 10.1109/TAP.2003.814745.
- [18] S. Caorsi, D. Moreno, and F. Sidoti, "Theoretical and numerical treatment of surface integrals involving the free-space Green's function," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 41, no. 9, pp. 1296–1301, Sep. 1993, doi: 10.1109/8.247757.
- [19] T. F. Eibert and V. Hansen, "On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 43, no. 12, pp. 1499–1502, Dec. 1995, doi: 10.1109/8.475946.
- [20] R. E. Hodges and Y. Rahmat-Samii, "The evaluation of MFIE integrals with the use of vector triangle basis functions," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 14, no. 1, pp. 9–14, Jan. 1997, doi: 10.1002/(SICI)1098-2760(199701)14:1<9::AID-MOP4>3.0.CO;2-P.
- [21] M. J. Bluck, M. D. Pocock, and S. P. Walker, "An accurate method for the calculation of singular integrals arising in time-domain integral equation analysis of electromagnetic scattering," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 12, pp. 1793–1798, Dec. 1997, doi: 10.1109/8.650197.
- [22] P. Arcioni, M. Bressan, and L. Perregrini, "On the evaluation of the double surface integrals arising in the application of the boundary integral method to 3-D problems," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 45, no. 3, pp. 436–439, Mar. 1997, doi: 10.1109/22.563344.
- [23] S. Jarvenpaa, M. Taskinen, and P. Yla-Oijala, "Singularity subtraction technique for high-order polynomial vector basis functions on planar triangles," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 1, pp. 42–49, Jan. 2006, doi: 10.1109/TAP.2005.861556.
- [24] I. Hanninen, M. Taskinen, and J. Sarvas, "Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions," *Prog. Electromagn. Res.*, vol. 63, pp. 243–278, 2006, doi: 10.2528/PIER06051901.
- [25] D. Tihon and C. Craeye, "All-analytical evaluation of the singular integrals involved in the method of moments," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 66, no. 4, pp. 1925–1936, Apr. 2018, doi: 10.1109/TAP.2018.2803130.
- [26] M. S. Tong and W. C. Chew, "On the near-interaction elements in integral equation solvers for electromagnetic scattering by three-dimensional thin objects," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 8, pp. 2500–2506, Aug. 2009, doi: 10.1109/TAP.2009.2024575.
- [27] M. S. Tong and W. C. Chew, "Super-hyper singularity treatment for solving 3D electric field integral equations," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 49, no. 6, pp. 1383–1388, Jun. 2007, doi: 10.1002/mop.22443.
- [28] A. G. Polimeridis and J. R. Mosig, "Complete semi-analytical treatment of weakly singular integrals on planar triangles via the direct evaluation method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 83, no. 12, pp. 1625–1650, Sep. 2010, doi: 10.1002/nme.2877.
- [29] A. G. Polimeridis and J. R. Mosig, "On the direct evaluation of surface integral equation impedance matrix elements involving point singularities," *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.*, vol. 10, pp. 599–602, 2011, doi: 10.1109/LAWP.2011.2159469.

- [30] A. G. Polimeridis and T. V. Yioultzis, "On the direct evaluation of weakly singular integrals in Galerkin mixed potential integral equation formulations," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 9, pp. 3011–3019, Sep. 2008, doi: 10.1109/TAP.2008.928782.
- [31] A. G. Polimeridis, J. M. Tamayo, J. M. Rius, and J. R. Mosig, "Fast and accurate computation of hypersingular integrals in Galerkin surface integral equation formulations via the direct evaluation method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 6, pp. 2329–2340, Jun. 2011, doi: 10.1109/TAP.2011.2143662.
- [32] E. H. Bleszynski, M. K. Bleszynski, and T. Jaroszewicz, "Reduction of singular surface integrals to nonsingular line integrals in integral equations for planar geometries," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, no. 11, pp. 4760–4769, Nov. 2016, doi: 10.1109/TAP.2016.2602356.
- [33] J. S. Asvestas, "Calculation of the inner EFIE integral over a bilinear quadrilateral to machine precision," in *2015 USNC-URSI Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium)*, Vancouver, BC, Canada, Jul. 2015, pp. 118–118. doi: 10.1109/USNC-URSI.2015.7303402.
- [34] M.-D. Zhu, T. K. Sarkar, and Y. Zhang, "On the Shape-Dependent Problem of Singularity Cancellation Transformations for Weakly Near-Singular Integrals," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 69, no. 9, pp. 5837–5850, Sep. 2021, doi: 10.1109/TAP.2021.3069483.
- [35] I. Ismatullah and T. F. Eibert, "Adaptive singularity cancellation for efficient treatment of near-singular and near-hypersingular integrals in surface integral equation formulations," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 1, pp. 274–278, Jan. 2008, doi: 10.1109/TAP.2007.913170.
- [36] M. M. Botha, "A family of augmented duffy transformations for near-singularity cancellation quadrature," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 6, pp. 3123–3134, Jun. 2013, doi: 10.1109/TAP.2013.2252137.
- [37] F. Vipiana, A. Polemi, S. Maci, and G. Vecchi, "Spectral filtering of the spatial green's function," in *2007 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Honolulu, HI, Jun. 2007, pp. 2805–2808. doi: 10.1109/APS.2007.4396118.
- [38] F. Vipiana, A. Polemi, S. Maci, and G. Vecchi, "A mesh-adapted closed-form regular kernel for 3D singular integral equations," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 6, pp. 1687–1698, Jun. 2008, doi: 10.1109/TAP.2008.923334.
- [39] F. Vipiana and D. R. Wilton, "Numerical evaluation via singularity cancellation schemes of near-singular integrals involving the gradient of Helmholtz-type potentials," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 3, pp. 1255–1265, Mar. 2013, doi: 10.1109/TAP.2012.2227922.
- [40] A. G. Polimeridis and J. R. Mosig, "Evaluation of weakly singular integrals via generalized cartesian product rules based on the double exponential formula," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 58, no. 6, pp. 1980–1988, Jun. 2010, doi: 10.1109/TAP.2010.2046866.
- [41] A. G. Polimeridis, F. Vipiana, J. R. Mosig, and D. R. Wilton, "DIRECTFN: Fully numerical algorithms for high precision computation of singular integrals in Galerkin SIE methods," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 6, pp. 3112–3122, Jun. 2013, doi: 10.1109/TAP.2013.2246854.
- [42] M. A. Khayat and D. R. Wilton, "Numerical evaluation of singular and near-singular potential Integrals," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, no. 10, pp. 3180–3190, Oct. 2005, doi: 10.1109/TAP.2005.856342.

- [43] M. A. Khayat, D. R. Wilton, and P. W. Fink, "An improved transformation and optimized sampling scheme for the numerical evaluation of singular and near-singular potentials," *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.*, vol. 7, pp. 377–380, 2008, doi: 10.1109/LAWP.2008.928461.
- [44] R. D. Graglia and G. Lombardi, "Machine precision evaluation of singular and nearly singular potential integrals by use of Gauss quadrature formulas for rational functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 4, pp. 981–998, Apr. 2008, doi: 10.1109/TAP.2008.919181.
- [45] R. Graglia, "Static and dynamic potential integrals for linearly varying source distributions in two- and three-dimensional problems," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 35, no. 6, pp. 662–669, Jun. 1987, doi: 10.1109/TAP.1987.1144160.
- [46] L. Rossi and P. J. Cullen, "On the fully numerical evaluation of the linear-shape function times the 3D Green's function on a plane triangle," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 47, no. 4, pp. 398–402, Apr. 1999, doi: 10.1109/22.754871.
- [47] F. Vipiana and D. R. Wilton, "Optimized numerical evaluation of singular and near-singular potential integrals involving junction basis functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 1, pp. 162–171, Jan. 2011, doi: 10.1109/TAP.2010.2090464.
- [48] M. G. Duffy, "Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 19, no. 6, pp. 1260–1262, Dec. 1982, doi: 10.1137/0719090.
- [49] A. B. Manic, M. Djordjevic, and B. M. Notaros, "Duffy method for evaluation of weakly singular SIE potential integrals over curved quadrilaterals with higher order basis functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 62, no. 6, pp. 3338–3343, Jun. 2014, doi: 10.1109/TAP.2014.2309971.
- [50] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Evaluation of potential and impedance integrals in analysis of axially symmetric metallic structures to prescribed accuracy up to machine precision," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 65, no. 5, pp. 2526–2539, May 2017, doi: 10.1109/TAP.2017.2673760.
- [51] M. M. Botha and T. Rylander, "Analysis and estimation of quadrature errors in weakly singular source integrals of the method of moments: Analysis and estimation of quadrature errors in the MoM," *Int. J. Numer. Model. Electron. Netw. Devices Fields*, vol. 31, no. 1, p. e2269, Jan. 2018, doi: 10.1002/jnm.2269.
- [52] A. Chernov, T. von Petersdorff, and C. Schwab, "Exponential convergence of  $hp$  quadrature for integral operators with Gevrey kernels," *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 45, no. 3, pp. 387–422, May 2011, doi: 10.1051/m2an/2010061.
- [53] J. A. Crow, "Quadrature of integrands with a logarithmic singularity," *Math. Comput.*, vol. 60, no. 201, pp. 297–297, Jan. 1993, doi: 10.1090/S0025-5718-1993-1155572-3.
- [54] J. Ma, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions," p. 27, 2021.
- [55] Yan-Fei Jing, Ting-Zhu Huang, Yong Duan, Sheng-Jian Lai, and Jin Huang, "A novel integration method for weak singularity arising in two-dimensional scattering problems," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 58, no. 8, pp. 2725–2731, Aug. 2010, doi: 10.1109/TAP.2010.2050441.
- [56] A. Djordjevic, T. K. Sarkar, and R. F. Harrington, "Time-domain response of multiconductor transmission lines," *Proc. IEEE*, vol. 75, no. 6, pp. 743–764, Jun. 1987, doi: 10.1109/PROC.1987.13797.

- [57] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 30, no. 3, pp. 409–418, May 1982, doi: 10.1109/TAP.1982.1142818.
- [58] M. G. Andreasen, "Scattering from bodies of revolution," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 13, no. 303–310, p. 1965, doi: 10.1109/TAP.1965.1138406.
- [59] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "Radiation and scattering from bodies of revolution," *Appl Sci Res*, vol. 20, no. 1, pp. 405–435, 1969, doi: 10.1007/BF00382412.
- [60] A. W. Glisson and D. R. Wilton, "Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 28, no. 5, pp. 593–603, 1980.
- [61] S. D. Gedney and R. Mittra, "The use of the FFT for the efficient solution of the problem of electromagnetic scattering by a body of revolution," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 38, no. 3, pp. 313–322, 1990, doi: 10.1109/8.52253.
- [62] A. A. K. Mohsen and A. K. Abdelmageed, "A fast algorithm for treating EM scattering by bodies of revolution," *AEU - Int. J. Electron. Commun.*, vol. 55, no. 3, pp. 164–170, Jan. 2001, doi: 10.1078/1434-8411-00025.
- [63] J.-P. A. H. M. Vaessen, M. C. van Beurden, and A. G. Tijhuis, "Accurate and efficient computation of the modal Green's function arising in the electric-field integral equation for a body of revolution," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 60, no. 7, pp. 3294–3304, Jul. 2012, doi: 10.1109/TAP.2012.2196911.
- [64] A. A. Kucharski, "The FIT-MoM method for analysis of electromagnetic scattering by bodies-of-revolution embedded in multilayered media," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 69, no. 9, p. 9, 2021, doi: 10.1109/TAP.2021.3060903.
- [65] A. Djordjevic, D. Olcan, J. Petrovic, N. Obradovic, and S. Filipovic, "High-accuracy quasistatic numerical model for bodies of revolution tailored for RF measurements of dielectric parameters," *Facta Univ. - Ser. Electron. Energ.*, vol. 34, no. 1, pp. 141–156, 2021, doi: 10.2298/FUEE2101141D.
- [66] J. G. Petrovic, D. I. Olcan, N. N. Obradovic, and A. R. Djordjevic, "High-precision method of moments applied to measurement of dielectric parameters at microwave frequencies," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, pp. 970–979, 2021, doi: 10.1109/TMTT.2021.3136294.
- [67] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Using ultra-high expansion orders of max-ortho basis functions for analysis of axially symmetric metallic antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 66, no. 7, pp. 3696–3699, Jul. 2018, doi: 10.1109/TAP.2018.2835499.
- [68] "WIPL-D." Belgrade, Serbia. Accessed: Nov. 23, 2022. [Online]. Available: <https://wipl-d.com/products/wipl-d-pro/>
- [69] J. G. Perovic and D. I. Olcan, "An entire-domain analysis of very large 2-D scatterers in TM mode using Gegenbauer polynomials," in *2019 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting*, Atlanta, GA, USA, Jul. 2019, pp. 561–562. doi: 10.1109/APUSNCURSINRSM.2019.8888988.
- [70] J. G. Perovic and D. I. Olcan, "An entire-domain analysis of 2-D structures with closed cross-sections using high-precision integration," in *2019 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, Granada, Spain, Sep. 2019, pp. 0328–0330. doi: 10.1109/ICEAA.2019.8879086.
- [71] J. G. Petrović and D. I. Olcan, "Solving 4,000 wavelengths 2-D TM scatterer using entire-domain high-precision MoM," in *2021 IEEE International Symposium on Antennas and*

*Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting*, Marina Bay Sands, Singapore, Dec. 2021, pp. 1337–1338. doi: 10.1109/APS/URSI47566.2021.9703908.

- [72] D. I. Olcan and J. G. Petrovic, “Advances in entire-domain high-precision 2D method of moments analysis,” in *Proceedings of 15th International Conference on Applied Electromagnetics*, Nis, Serbia, 2021, pp. 19–22.
- [73] “History of Maxwell’s equations.” [https://en.wikipedia.org/wiki/History\\_of\\_Maxwell%27s\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Maxwell%27s_equations) (accessed Jan. 12, 2022).
- [74] A. J. Poggio and E. K. Miller, “Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems,” in *Computer Techniques for Electromagnetics*, Oxford, UK: Pergamon, 1973, pp. 159–264.
- [75] Y. Chang and R. Harrington, “A surface formulation for characteristic modes of material bodies,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 25, no. 6, pp. 789–795, Nov. 1977, doi: 10.1109/TAP.1977.1141685.
- [76] T. K. Wu and L. L. Tsai, “Scattering from arbitrary-shaped lossy dielectric bodies of revolution,” *Radio Sci.*, vol. 12, no. 5, pp. 709–718, 1977, doi: 10.1029/RS012i005p00709.
- [77] K. Umashankar, W. Chun, and A. Taflove, “Simple analytical solution to electromagnetic scattering by two-dimensional conducting object with edges and corners. I. TM polarization,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 39, no. 12, pp. 1665–1671, Dec. 1991, doi: 10.1109/8.121586.
- [78] D. Erricolo and P. L. E. Uslenghi, “Exact radiation and scattering for an elliptic metal cylinder at the interface between isorefractive half-spaces,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 9, pp. 2214–2225, Sep. 2004, doi: 10.1109/TAP.2004.834151.
- [79] P. L. E. Uslenghi, “Exact penetration, radiation, and scattering for a slotted semielliptical channel filled with isorefractive material,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 6, pp. 1473–1480, Jun. 2004, doi: 10.1109/TAP.2004.829848.
- [80] P. L. E. Uslenghi, “Reflection by a concave parabolic mirror,” *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.*, vol. 11, pp. 419–422, 2012, doi: 10.1109/LAWP.2012.2194979.
- [81] M. Alian and H. Oraizi, “Electromagnetic scattering by 2-D PEC cylinder of general cross section under TMz illumination,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, no. 9, pp. 3953–3959, Sep. 2016, doi: 10.1109/TAP.2016.2583481.
- [82] E. Arvas and T. K. Sarkar, “RCS of two-dimensional structures consisting of both dielectrics and conductors of arbitrary cross section,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 37, no. 5, pp. 546–554, May 1989, doi: 10.1109/8.24182.
- [83] M. E. Peters and E. H. Newman, “TM scattering by a general sheet impedance discontinuity,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 39, no. 3, pp. 359–366, Mar. 1991, doi: 10.1109/8.76335.
- [84] L. R. Hamilton, J. J. Ottusch, M. A. Stalzer, R. S. Turley, J. L. Visher, and S. M. Wandzura, “Numerical solution of 2-D scattering problems using high-order methods,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 4, pp. 683–691, Apr. 1999, doi: 10.1109/8.768808.
- [85] I. T. Gilles, “Infinite current behavior along a subwavelength perfectly conducting concaved wedge,” *2016 Int. Symp. Antennas Propag. ISAP*, p. 2, 2016.
- [86] A. F. Peterson and R. D. Graglia, “Basis functions for vertex, edge, and corner singularities: a review,” *IEEE J. Multiscale Multiphysics Comput. Tech.*, vol. 1, pp. 161–175, 2016, doi: 10.1109/JMMCT.2017.2650962.
- [87] D. Olcan, J. Perovic, A. Krneta, and B. Kolundzija, “Accuracy of surface current approximation using Legendre polynomials for 2-D TM scattering,” in *2018 IEEE*

*International Symposium on Antennas and Propagation & USNC/URSI National Radio Science Meeting*, Boston, MA, Jul. 2018, pp. 2435–2436. doi: 10.1109/APUSNCURSINRSM.2018.8609322.

- [88] A. Đorđević, *Elektromagnetika*. Beograd, Srbija: Akademska misao, 2012.
- [89] M. Abramovitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*. Tenth Printing, 1972.
- [90] “Intel(R) Math Kernel Library.” Intel, 2018. Accessed: Nov. 17, 2021. [Online]. Available: <https://www.intel.com/content/www/us/en/developer/tools/oneapi/onemkl.html#gs.g6890b>
- [91] J. A. Nelder and R. Mead, “A simplex method for function minimization,” *Comput. J.*, vol. 7, no. 4, pp. 308–313, Jan. 1965, doi: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [92] F. Gao and L. Han, “Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters,” *Comput. Optim. Appl.*, vol. 51, no. 1, pp. 259–277, Jan. 2012, doi: 10.1007/s10589-010-9329-3.
- [93] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, “Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions,” *SIAM J. Optim.*, vol. 9, no. 1, pp. 112–147, Jan. 1998, doi: 10.1137/S1052623496303470.
- [94] R. Storn, “Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces,” *J. Glob. Optim.*, pp. 341–359, doi: 10.1023/A:1008202821328.
- [95] R. Storn, “On the usage of differential evolution for function optimization,” in *Proceedings of North American Fuzzy Information Processing*, Berkeley, CA, USA, 1996, pp. 519–523. doi: 10.1109/NAFIPS.1996.534789.
- [96] D. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, INC, 1989.
- [97] J. Barker, “Simulation of genetic systems by automatic digital computers,” *Aust. J. Biol. Sci.*, vol. 11, no. 4, p. 603, 1958, doi: 10.1071/BI9580603.
- [98] A. M. Lerer and A. G. Schuchinsky, “Full-wave analysis of three-dimensional planar structures,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 41, no. 11, pp. 2002–2015, Nov. 1993, doi: 10.1109/22.273428.
- [99] D. M. Pozar, *Microwave engineering*. USA: John Willy and Sons, 2012.
- [100] H. Johnson and M. Graham, *High-speed digital design*. Ney Jersy: Prentice Hall PTR, 1993.
- [101] K. Shibata and M. Kobayashi, “Difference between the method of moments and the finite element method for estimation of complex permittivity in liquids using a coaxial probe,” in *2019 International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC EUROPE*, Barcelona, Spain, Sep. 2019, pp. 100–105. doi: 10.1109/EMCEurope.2019.8871604.
- [102] A. M. Nicolson and G. F. Ross, “Measurement of the intrinsic properties of materials by time domain techniques,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-19, no. 4, pp. 377–382, 1970, doi: 10.1109/TIM.1970.4313932.
- [103] M. C. Decerton and F. E. Gardiol, “Simple nondestructive method for measurement of complex permittivity,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 23, no. 4, pp. 434–438, 1974, doi: 10.1109/TIM.1974.4314329.
- [104] M. C. Decreton and M. S. Ramachandriah, “Nondestructive measurement of complex permittivity for dielectric slabs,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 23, no. 12, pp. 1077–1080, 1975, doi: 10.1109/TMTT.1975.1128749.



- [105] D. K. Ghodgaonkar and V. V. Varadan, "A free-space method for measurement of dielectric constants and loss tangents at microwave frequencies," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 37, no. 3, pp. 789–793, 1989, doi: 10.1109/19.32194.
- [106] D. Misra, "On the measurement of the complex permittivity of materials by an open-ended coaxial probe," *IEEE Microw. Guid. Wave Lett.*, vol. 5, no. 5, pp. 161–163, May 1995, doi: 10.1109/75.374085.
- [107] D. Misra, M. Chhabra, B. R. Epstein, M. Microtznik, and K. R. Foster, "Noninvasive electrical characterization of materials at microwave frequencies using an open-ended coaxial line: test of an improved calibration technique," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 38, no. 1, pp. 8–14, Jan. 1990, doi: 10.1109/22.44150.
- [108] K. J. Bois, A. Benally, and R. Zoughi, "Multimode solution for the reflection properties of an open-ended rectangular waveguide radiating into a dielectric half-space: The forward and inverse problems," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 48, no. 6, pp. 1131–1140, 1999, doi: 10.1109/19.816127.
- [109] A. R. Djordjević, R. M. Biljić, V. D. Likar - Smiljanić, and T. K. Sarkar, "Wideband frequency-domain characterization of FR-4 and time-domain causality," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 43, pp. 662–667, 2001, doi: 10.1109/15.974647.
- [110] I. Huynen, C. Steukers, and F. Duhamel, "A wideband line-line dielectrometric method for liquids, soils, and planar substrates," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 50, no. 5, pp. 1343–1348, 2001, doi: 10.1109/19.963208.
- [111] M. W. Hyde, M. J. Havrilla, A. E. Bogle, and N. J. Lehman, "Broadband characterization of materials using a dual-ridged waveguide," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 62, no. 12, pp. 3168–3176, 2013, doi: 10.1109/TIM.2013.2270050.
- [112] M. W. Hyde IV, M. J. Havrilla, and A. E. Bogle, "Nondestructive Determination of the Permittivity Tensor of a Uniaxial Material Using a Two-Port Clamped Coaxial Probe," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 64, no. 1, pp. 239–246, Jan. 2016, doi: 10.1109/TMTT.2015.2502242.
- [113] J. Dong *et al.*, "Noncontact Measurement of Complex Permittivity of Electrically Small Samples at Microwave Frequencies," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 64, no. 9, pp. 2883–2893, Sep. 2016, doi: 10.1109/TMTT.2016.2588487.
- [114] U. C. Hasar and Y. Kaya, "Self-calibrating noniterative complex permittivity extraction of thin dielectric samples," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 60, no. 2, pp. 354–361, Apr. 2018, doi: 10.1109/TEMC.2017.2715161.
- [115] A. Đorđević, J. Dinkić, M. Stevanović, D. Olćan, S. Filipović, and N. Obradović, "Measurement of permittivity of solid and liquid dielectrics in coaxial chambers," p. 7, 2016.
- [116] N. Obradović *et al.*, "The effect of mechanical activation on synthesis and properties of MgAl<sub>2</sub>O<sub>4</sub> ceramics," *Ceram. Int.*, vol. 45, no. 9, pp. 12015–12021, Jun. 2019, doi: 10.1016/j.ceramint.2019.03.095.
- [117] S. Filipovic *et al.*, "Multiferroic heterostructure BaTiO<sub>3</sub>/ε-Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composite obtained by in situ reaction," *Sci. Sinter.*, vol. 53, no. 1, pp. 1–8, 2021, doi: 10.2298/SOS2101001F.
- [118] A. I. Borisenko and I. E. Tarapov, in *Vector and Tensor Analysis with Application*, New York: Dover Publications, Inc., 1968, pp. 168–174.
- [119] A. Djordjevic and et al., "AWAS." Belgrade, Serbia, 2004. [Online]. Available: <https://mtt.etf.bg.ac.rs/software.htm>

- [120] А. Ђорђевић Р. and Д. Тошић В., *Микроталасна техника*. Београд: Универзитет у Београду, Електротехнички факултет, 2010.
- [121] “RO4000 high frequency circuit materials, data sheet.” <https://rogerscorp.com/-/media/project/rogerscorp/documents/advanced-connectivity-solutions/english/data-sheets/ro4000-laminates-ro4003c-and-ro4350b---data-sheet.pdf> (accessed Jan. 12, 2022).
- [122] “E5061A/E5062A User’s Guide.” Keysight. Accessed: Nov. 16, 2022. [Online]. Available: <https://www.keysight.com/us/en/assets/9018-04905/user-manuals/9018-04905.pdf>
- [123] “Osobine termoplast materijala,” Jan. 18, 2022. <http://www.termoplast.rs/wp-content/uploads/2015/02/Tehnicka-plastika-za-web.pdf>

## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Јована (Горан) Петровић (рођена Перовић) рођена је 1992. године. Основну школу и гимназију завршила је у Краљеву као носилац Вукове дипломе. На Електротехничком факултету у Београду дипломирала је 01.07.2015. године са просечном оценом 9,87. Мастер академске студије на истом факултету завршила је 05.09.2016. године са просечном оценом 10. Докторске академске студије уписала је 2016. године. На докторским студијама положила је све испите са оценом 10. Мастер рад „Слабљење електромагнетских таласа у стохастичким срединама“ добио је другу Пупинову награду Матице српске.

Од 01.02.2016. године запослена је на Електротехничком факултету као сарадник у настави, а од 01.02.2017. године као асистент. На Катедри за општу електротехнику ангажована је на предметима Основи електротехнике 1 и 2, Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике, Микроталасна техника, Инжењерски оптимизациони алгоритми, Основни оптимизациони алгоритми у инжењерству. Учесник је пројекта Министарства за науку и технолошки развој „Алгоритми и софтвери за симулацију у фреквенцијском и временском домену РФ подсистема и електромагнетских сензора у ИСТ“, Фонда за науку „Оптимизациони алгоритми за анализу електромагнетског зрачења“, Српске академије наука и уметности Ф-133 „Мерење особина диелектрика при РФ и микроталасним учестаностима“.

Коаутор је три рада публикована у часописима са међународним значајем (два категорије М21, једног категорије М22), једног рада публикованог у националном часопису од међународног значаја (категорије М24) и једног рада публикованог у истакнутом националном часопису (категорије М52), десет саопштења са међународних скупова штампаних у целини (М33), три саопштења са међународних скупова штампаних у изводу (М34) и једног саопштења са скупа националног значаја штампаног у целини (М63).

ПРИЛОГ 1.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Јована Петровић  
Број индекса 2016/5012

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Нумеричка електромагнетска анализа коришћењем метода момената  
са интеграцијом високе тачности

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 23.12.2022.

---

**Прилог 2.**

**Изјава о истоветности штампане и електронске верзије  
докторског рада**

Име и презиме аутора Јована Петровић

Број индекса 2016/5012

Студијски програм Микроталасна техника

Наслов рада Нумеричка електромагнетска анализа коришћењем метода момената  
са интеграцијом високе тачности

Ментор др Драган Олћан, редовни професор

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 23.12.2022.

---

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Нумеричка електромагнетска анализа коришћењем метода момената  
са интеграцијом високе тачности

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.

Кратак опис лиценци дат је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, 23.12.2022.

---

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. **Ауторство – без прераде.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.