

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Slobodan M. Drašković

ADAPTIVNA TEHNIKA FILTRIRANJA  
NESTACIONARNIH SIGNALA PRIMENOM  
APSOLUTNIH KONAČNIH RAZLIKA

doktorska disertacija

Beograd, 2023.



UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Slobodan M. Drašković

ADAPTIVE FILTERING OF NON-STATIONARY  
SIGNALS BASED ON ABSOLUTE FINITE  
DIFFERENCES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023.



## Mentor:

---

dr Željko Đurović, redovni profesor

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

## Članovi komisije:

---

dr Goran Kvašček, vanredni profesor

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

---

dr Zoran Perić, redovni profesor

Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet

---

dr Boško Nikolić, redovni profesor

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

---

dr Jelena Čertić, vanredni profesor

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane: \_\_\_\_\_



## ZAHVALNICA

*Pored nekih delova ove disertacije koje ne bih posebno izdvajao, definitivno najteži, a u isto vreme i najlepši deo pisanja disertacije jeste pisanje zahvalnice. Stava sam da svi ljudi oko mene koje poznajem imaju nekakvog uticaja na izradu ove disertacije, bilo posredno ili neposredno, ali jednostavno papir nije dovoljno veliki da ih sve nabrojim, zato ću izdvojiti samo neke.*

*Neizmernu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Željku Đuroviću, zbog nesebične spremnosti da me uvek izvede na pravi put i ogromne pomoći u prevazilaženju svih izazova koje sa sobom nosi izrada jedne doktorske disertacije, a najviše zahvalnosti mu dugujem zbog uvek korisnih i odmerenih saveta. Veliku zahvalnost dugujem i dr Branku Kovačeviću i dr Goranu Kvašćevu koji su, pored mentora, među prvima prepoznali potencijal mog dotadašnjeg rada i koji su imali velikog uticaja na moj dalji rad. Zahvalnost dugujem i ostalim članovima komisije na korisnim savetima i sugestijama koje su doprineli konačnoj izvedbi ove disertacije.*

*Zahvalnost dugujem i svim svojim kolegama sa Visoke škole elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, kao i kolegama iz Klett EDU trening centra, a najviše hvala Nenadu Seljišti na podršci i razumevanju tokom izrade ove disertacije. Posebnu zahvalnost dugujem i dr Veri Petrović na podršci i savetima tokom čitavog rada i studija.*

*Ogromnu zahvalnost dugujem i svojim roditeljima Mirku i Jelici i bratu Milanu na neizmernoj podršci i usmeravanju i tokom odrastanja i tokom razvoja moje karijere, i naravno na tome što su me samo jednom pitali “Kada ćeš već da završiš te studije?”.*

*Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, supruzi Milici i sinu Ognjenu koji su mi bezgranična i безусловna podrška u svemu što radim i bez čijeg zalaganja i ljubavi ne bih bio ovo što jesam.*





**Naslov disertacije:** Adaptivna tehnika filtriranja nestacionarnih signala primenom apsolutnih konačnih razlika

**Sažetak:** Iako je oblast adaptivnog filtriranja razvijena i različiti rezultati datiraju još iz sredine prošlog veka, činjenica da i danas postoje naučni časopisi i međunarodne naučne konferencije koje su posvećene samo ovoj oblasti dovoljno govori o tome koliko je ona i danas aktuelna i izazovna za čitave zajednice naučnika i istraživača. Nijedan od algoritama se ne može opisati kao optimalan, već su određeni algoritmi bolji za određene klase modela, ili su dobri u detekciji promena stacionarnosti i estimaciji u prelaznom režimu, dok u stacionarnom stanju daju osetno veću grešku, i obratno. Takođe, različiti algoritmi imaju različit broj parametara koje treba podesiti pre početka estimacije i koji u mnogome utiču na kvalitet estimacije. Uzimajući u obzir sve te kriterijume, postaje jasno da ne postoji optimalan algoritam. Svi algoritmi imaju određene nedostatke i prednosti u zavisnosti od područja upotrebe.

Predmet istraživanja ove doktorske disertacije su algoritmi za detekciju nestacionarnosti i adaptaciju faktora zaboravljanja. Cilj disertacije je razvoj novog algoritma za detekciju nestacionarnosti signala i adaptaciju faktora zaboravljanja, sa uporedivim ili boljim performansama u poređenju sa prethodno opisanim i u literaturi poznatim algoritmima.

Rešenje predloženo u ovoj disertaciji predstavlja novi pristup dizajnu algoritma za detekciju nestacionarnosti signala i adaptaciji faktora zaboravljanja zasnovan na apsolutnim konačnim razlikama koji do sada nije korišćen u literaturi. Predloženi algoritam je intuitivan i jednostavan za korišćenje i implementaciju u praksi. Eksperimentalni rezultati pokazuju odlične performanse algoritma u odnosu na druge, trenutno dostupne algoritme.

**Ključne reči:** Adaptivno filtriranje; Detekcija nestacionarnosti; Apsolutne konačne razlike, Varijabilni faktor zaboravljanja; Modeliranje signala

**Naučna oblast:** Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo

**Uža naučna oblast:** Upravljanje procesima i obrada signala



**Dissertation title:** Adaptive Filtering of Non-Stationary Signals Based on Absolute Finite Differences

**Abstract:** Although the field of adaptive filtering is quite developed and various results date back to the middle of the last century, the fact that even today there are scientific journals and international scientific conferences that are dedicated only to this field speaks volumes about how current and challenging it is even today for entire communities of scientists and researchers. None of the algorithms can be described as optimal, but certain algorithms are better for certain classes of models, or they are good at detecting changes in stationarity and estimation in the transient mode, while in the stationary state they give a noticeably larger error, and vice versa. Also, different algorithms have a different number of parameters that need to be set before starting the estimation and which largely affect the estimation quality. Taking into account all these criteria, it becomes clear that there is no optimal algorithm. All algorithms have certain disadvantages and advantages, depending on the area of use.

The subject of research in this doctoral dissertation is algorithms for non-stationarity detection and adaptation of the forgetting factor. The goal of this doctoral dissertation is the development of a new algorithm for the detection of signal non-stationarity and the adaptation of the forgetting factor, with comparable or better performance compared to previously described and known algorithms in the literature.

The solution proposed in this dissertation represents a new approach to the design of the algorithm for the detection of signal non-stationarity and the adaptation of the forgetting factor based on absolute finite differences, which has not been used in the literature so far. The proposed algorithm is intuitive and easy to use and implement in practice. Experimental results show excellent performance of the algorithm compared to other currently available algorithms.

**Keywords:** Adaptive filters; Non-stationarity detection; Absolute finite differences; Variable forgetting factor; Signal modeling

**Scientific field:** Electrical and Computer Engineering

**Scientific subfield:** Control Systems and Signal Processing



# SADRŽAJ:

<b>1. UVOD.....</b>	<b>1</b>
1.1. STANJE NAUKE I PREGLED LITERATURE.....	2
1.2. PREDMET I CILJ ISTRAŽIVANJA I POLAZNE HIPOTEZE .....	3
1.3. STRUKTURA TEZE.....	4
<b>2. MODELIRANJE SIGNALA .....</b>	<b>5</b>
2.1. STACIONARNOST SIGNALA .....	7
2.1.1. <i>Stacionarnost u užem smislu</i> .....	7
2.1.2. <i>Stacionarnost u širem smislu</i> .....	7
2.2. MODELI SIGNALA .....	8
2.2.1. <i>Autoregresivni model (AR)</i> .....	8
2.2.2. <i>Model pokretnih proseka (MA)</i> .....	9
2.2.3. <i>ARMA model</i> .....	10
2.2.4. <i>ARIMA model</i> .....	11
2.2.5. <i>SARIMA model</i> .....	14
2.2.6. <i>SARIMAX model</i> .....	15
2.2.7. <i>Zaključak o modelima signala</i> .....	16
2.3. TEHNIKE ESTIMACIJE PARAMETARA MODELA.....	17
2.3.1. <i>Autokorelaciona metoda</i> .....	18
2.3.2. <i>Kovarijantna metoda</i> .....	19
2.3.3. <i>Modifikovana kovarijantna metoda</i> .....	21
2.3.4. <i>Burgova metoda</i> .....	23
2.3.5. <i>Metoda najmanjih kvadrata</i> .....	25
2.3.6. <i>Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata</i> .....	27
2.3.7. <i>Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom</i> .....	29
2.3.8. <i>Poređenje opisanih metoda</i> .....	31
<b>3. ADAPTIVNE TEHNIKE ESTIMACIJE PARAMETARA MODELA NESTACIONARNIH SIGNALA .....</b>	<b>34</b>
3.1. ADAPTACIJA FAKTORA ZABORAVLJANJA ZASNOVANA NA GRADIJENTU SREDNJE KVADRATNE GREŠKE .....	36
3.2. ADAPTACIJA FAKTORA ZABORAVLJANJA ZASNOVANA NA ESTIMACIJI VARIJANSE KVADRATNE GREŠKE.....	40

<b>4. DIZAJN SISTEMA ZA ADAPTACIJU FAKTORA ZABORAVLJANJA PRIMENOM APSOLUTNIH KONAČNIH RAZLIKA .....</b>	<b>44</b>
4.1. APSOLUTNE KONAČNE RAZLIKE .....	44
4.2. STATISTIKE SIGNALA APSOLUTNE KONAČNE RAZLIKE.....	47
4.2.1. <i>Slučaj autoregresivnog modela prvog reda</i> .....	47
4.2.2. <i>Slučaj autoregresivnog modela drugog reda</i> .....	56
4.2.3. <i>Slučaj autoregresivnog modela trećeg reda</i> .....	65
4.3. ADAPTACIJA FAKTORA ZABORAVLJANJA ZASNOVANA NA APSOLUTNIM KONAČNIM RAZLIKAMA.....	70
<b>5. EKSPERIMENTALNI REZULTATI I ANALIZA.....</b>	<b>72</b>
5.1. KOMPARATIVNA ANALIZA ALGORITAMA NA SINTETIČKIM SIGNALIMA .....	73
5.1.1. <i>Analiza performansi algoritama na veštački generisanom signalu</i> .....	74
5.1.2. <i>Analiza uticaja različitih aktivacionih šumova autoregresivnog modela</i> .....	77
5.1.3. <i>Analiza uticaja izbora parametara metode na kvalitet estimacije</i> .....	83
5.1.4. <i>Analiza uticaja aditivnog šuma merenja</i> .....	86
5.2. PRIMENA PREDLOŽENOG ALGORITMA NA REALNIM SIGNALIMA .....	87
5.2.1. <i>Adaptivna filtracija merenja sa senzora</i> .....	87
5.2.2. <i>Estimiranje parametara modela govornog signala</i> .....	90
<b>6. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>100</b>
<b>LITERATURA:.....</b>	<b>103</b>
<b>BIOGRAFIJA.....</b>	<b>107</b>

# 1. UVOD

Osnove digitalne obrade signala sežu još od numeričkih tehnika za rešavanje sistema jednačina i fizičara i matematičara kao što su Njutn, Ojler, Gaus i Furije. Nakon toga, obrada signala se ubrzano širi tokom četrdesetih i pedesetih godina 20. veka sa razvojem radarskih sistema i telekomunikacija i šezdesetih godina sa razvojem digitalnih računara. Ogroman doprinos obradi signala dat je sistematizacijom brze Furijeve transformacije (*engl. Fast Fourier Transform - FFT*) [1] koja je uticala na razvoj digitalnih filtera osamdesetih godina 20. veka, kao i knjigom „Digitalna obrada signala“ [2]. Nakon toga, digitalna obrada signala je postala zastupljena u svim sferama nauke i industrije kao što su medicina, automatsko upravljanje, telekomunikacije, teorija informacija i skladištenje podataka.

Konvencionalni filteri su projektovani sa jasnim ciljem, najčešće kako bi poništili neke frekvencijske sadržaje signala ili propustili samo određene fekvencije koje su unapred poznate. Njihovi koeficijenti su konstantni i biraju se tako da zadovolje te, unapred poznate, uslove. Adaptivni filteri su filteri signala čiji se koeficijenti menjaju tokom vremena sa ciljem da se omogući što brža konvergencija ka optimalnom stanju. Obično u ovakvim filterima postoji neki optimizacioni kriterijum u obliku funkcije greške (*engl. Cost Function*) koji omogućava adaptaciju ovih koeficijenata. Adaptivni filteri se koriste kada nisu unapred poznate granične učestanosti filtriranja ili kada se karakteristike filtriranog signala menjaju tokom vremena.

Modeliranje signala podrazumeva opisivanje nekog fizičkog fenomena (generalno bilo kakvog merenog signala) preko parametara modela. Kako su mereni signali najčešće stohastički i pod velikim uticajem šuma, cilj modeliranja signala je izvlačenje karakteristika osnovnog signala i estimacija parametara modela. Dodatni izazov pri modeliranju signala predstavljaju procesi čiji se parametri menjaju tokom vremena tj. nestacionarni procesi. U ovom slučaju razvijane su razne tehnike adaptivnog filtriranja koje bi prepoznale ove promene i shodno tome brzo prilagodile koeficijente filtera.

## 1.1. Stanje nauke i pregled literature

Adaptivne tehnike u obradi signala kao i u upravljanju procesima zahtevaju pouzdane detektore nestacionarnosti. Identifikacija dinamičkih sistema podrazumeva određivanje strukture i parametara modela na osnovu merenja ulaznih i izlaznih signala [3-6]. Za linearne, diskretne sisteme opisane diferencnim jednačinama poznatog reda, problem identifikacije sistema se svodi na estimaciju parametara modela [4-8].

Metod najmanjih kvadrata (*engl. Least Squares – LS*) i njegove mnoge varijacije se u velikoj meri primenjuju u rešavanju problema estimacije parametara modela u različitim poljima [3, 5-9]. Klasična formula LS metode je u serijskoj formi što znači da se prvo sva merenja sakupljaju, a potom obrađuju odjednom. Da bi se nakon novopristiglih merenja ažurirala estimacija, potrebno je ponovo sprovesti algoritam koristeći stara i nova merenja. Ovakav način estimacije parametara modela je matematički prilično jednostavan, ali zato može da prouzrokuje ogromne probleme prilikom implementacije pošto je računarska kompleksnost veoma velika, čak i za procesorsku moć današnjih računara. Zbog te svoje nerekurzivne prirode, metod najmanjih kvadrata je često nepoželjan u aplikacijama koje rade u realnom vremenu, mada se u literaturi mogu naći predlozi kako primeniti LS metod u *on-line* aplikacijama [10].

Kako bi se povećala efikasnost LS algoritma, razvijena je rekurzivna metoda najmanjih kvadrata (*engl. Recursive Least Squares – RLS*) [5, 6, 9, 11, 12]. Uvođenjem rekurzije, računarska kompleksnost je umnogome umanjena. Ipak, RLS algoritam ima nekoliko nedostataka. Prvi nedostatak je velika osetljivost na početne uslove tj. inicijalizaciju algoritma. Drugi, i najprimetniji nedostatak rekurzivne metode najmanjih kvadrata jeste sporo praćenje vremenski promenljivih parametara modela. Međutim, kako bi se povećala mogućnost praćenja promena ovakvih parametara, tj. izvršila estimacija parametara modela nestacionarnih signala, razvijen je veliki broj metoda. Neke od njih su zasnovane na modifikaciji kovarijacione matrice [13-15], druge na korišćenju klizne prozorske funkcije [6, 10, 16-18], dok su najčešće korišćene metode zasnovane na težinskom faktoru [12, 19-24].

Rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom (*engl. Weighted Recursive Least Squares – WRLS*) predstavljaju prirodan način za estimaciju parametara modela nestacionarnih signala [19-22, 25]. U zavisnosti od veličine faktora zaboravljanja (*engl. Forgetting Factor – FF*) može se postići da se starija merenja brže ili sporije odbacuju, i na taj način se može uticati na brzinu praćenja promena parametara modela, kao i na kvalitet estimacije (manja vrednost FF omogućava brže praćenje promena, ali je greška estimacije veća, i obratno). Kako bi se korišćenjem WRLS metode omogućilo praćenje promenljivih parametara, ali i zadovoljavajuća preciznost estimacije, intenzivno se istražuje na polju adaptacije faktora zaboravljanja tj. primeni varijabilnog faktora zaboravljanja (*engl. Variable Forgetting Factor – VFF*), koji bi imao približno jediničnu vrednost dok je estimirani signal stacionaran, i koji bi naglo opadao kada se detektuje nestacionarnost signala čiji se parametri modela estimiraju.

Uvođenje varijabilnog faktora zaboravljanja sa sobom povlači i potrebu za algoritmima za detekciju promena u parametrima modela signala i adekvatnom izdvajanju stacionarnih delova, kao i za adaptacijom FF prema tim granicama. Većina poznatih metoda detektuje samo skokovite promene [23, 24, 26-28], što je jako korisno u detekciji kvarova, segmentaciji signala, praćenju pokretnih ciljeva, itd. gde se očekuju skokovite promene signala.



## 1.2. Predmet i cilj istraživanja i polazne hipoteze

Nijedan od postojećih algoritama za adaptivnu obradu vremenski promenljivih signala se ne može opisati kao univerzalno upotrebljiv ili čak optimalan, već su određeni algoritmi bolji za određene klase modela, ili su dobri u detekciji promena stacionarnosti i estimaciji u prelaznom režimu, dok u stacionarnom stanju daju osetno veću grešku, i obratno. Takođe, svi ovi algoritmi imaju različit broj parametara koje treba podesiti pre početka estimacije i koji u mnogome utiču na kvalitet estimacije. Uzimajući u obzir sve te kriterijume, postaje jasno da ne postoji optimalan algoritam. Svi algoritmi imaju određene nedostatke i prednosti, u zavisnosti od područja upotrebe.

Shodno tome, ova disertacija ima za cilj projektovanje nove tehnike za detekciju nestacionarnosti i odgovarajuće podešavanje faktora zaboravljanja. Ideja je da se detaljno ispituju i demonstriraju sve prednosti i nedostaci ovog novog pristupa a u poređenju sa prethodno opisanim i u literaturi poznatim algoritmima. Predmet istraživanja ove doktorske disertacije su algoritmi za detekciju nestacionarnosti i adaptaciju faktora zaboravljanja.

Iako je oblast adaptivnog filtriranja dosta razvijena i različiti rezultati datiraju još iz sredine prošlog veka, činjenica da i danas postoje naučni časopisi i međunarodne naučne konferencije koje su posvećene samo ovoj oblasti dovoljno govori o tome koliko je ona i danas aktuelna i izazovna za čitave zajednice naučnika i istraživača. Polazne hipoteze koje će biti početna tačka istraživanja koje se predlaže ovom prijavom su:

- Apsolutne konačne razlike signala sadrže informaciju o nestacionarnosti signala koji se obrađuje;
- Informacije o stacionarnosti dobijene iz apsolutnih konačnih razlika se mogu iskoristiti za adaptaciju faktora zaboravljanja i mogu se uključiti u algoritam za projektovanje težinske rekurzivne metode najmanjih kvadrata;
- Razvijeni postupak adaptivne filtracije na bazi apsolutnih konačnih razlika će biti upotrebljiv za mnoge primene jer će njegovo podešavanje zahtevati poznavanje fizike procesa koji se filtriraju, što je uglavnom informacija kojom projektanti raspolažu. U tom smislu se podrazumeva poznavanje vremenskih konstanti kako samih signala tako i dinamike nestacionarnosti, ali i osnovnih spektralnih svojstava poput maksimalnih frekvencija u spektralnoj gustini snage;
- Jedna od važnih hipoteza jeste da će metod apsolutnih konačnih razlika biti sa numeričkog i memorijskog stanovišta uporediv sa ostalim tehnikama adaptivne filtracije, i da će stoga biti upotrebljiv u realnom vremenu.
- Detekcije promene nestacionarnosti korišćenjem apsolutnih konačnih razlika će, sa stanovišta brzine detektovanja promena u modelu, biti ili brže ili makar uporedive sa, u literaturi poznatim, tehnikama za detekciju nestacionarnosti signala.

### 1.3. Struktura teze

Teza je se sastoji od uvodnog poglavlja, dva pregledna poglavlja, poglavlja koje opisuje predloženi metod adaptacije, poglavlja koje opisuje eksperimentalne rezultate i analizu, sa poglavljem zaključka i pregledom literature.

U uvodnom poglavlju je opisana inicijalna motivacija i ciljevi istraživanja. Dat je kratak pregled trenutnog stanja i napretka u oblasti kao i pregled literature.

Drugo poglavlje daje trenutni pregled stanja u oblasti modeliranja signala. Dat je opis stacionarnosti signala. Nakon toga izvršen je pregled trenutno korišćenih modela signala kao i tehnika za estimaciju parametara modela signala.

Treće poglavlje bavi se adaptivnim tehnikama za estimaciju parametara modela nestacionarnih signala i opisuje dva trenutno najčešće korišćena algoritma u ovoj oblasti. Algoritmi su detaljno opisani i data su inicijalna zapažanja o njihovim karakteristikama.

U četvrtom poglavlju predstavljene su apsolutne konačne razlike signala kao osnov za dalju adaptaciju faktora zaboravljanja pri estimaciji parametara modela. Pokazane su teorijske i eksperimentalne statistike signala apsolutne konačne razlike i njihova zavisnost od promene parametra modela i dat je predlog algoritma za adaptaciju faktora zaboravljanja na osnovu signala apsolutnih konačnih razlika.

Eksperimentalni rezultati primene i analiza predloženog algoritma dati su u petom poglavlju. Rezultati su prvo predstavljeni na sintetički generisanim signalima i izvršena je analiza performansi, zatim analiza različitih aktivacionih šuma, analiza uticaja izbora parametara i analiza uticaja šuma merenja. Sve analize su rađene komparativno sa dva algoritma koji se bave istom tematikom a koji su opisani u trećem poglavlju. Nakon toga, rezultati su verifikovani na realnim signalima (filtracija merenja sa senzora i filtracija govornog signala).

U šestom poglavlju dat je zaključak disertacije, pregled doprinosa disertacije kao i opis budućih istraživanja.

U poslednjem poglavlju dat je pregled korišćene literature.

## 2. MODELIRANJE SIGNALA

Ideja korišćenja matematičkih modela koji opisuju neki proces je poznata u praksi. Nekada je moguće na osnovu fizičkih zakona izvesti jednačine koje adekvatno opisuju neki proces i takvi modeli se nazivaju deterministički modeli. Na primer model motora jednosmerne struje sa jednim namotajem na statoru i jednim namotajem na rotoru se može opisati jednačinama (2.1-2.4):

$$u_s(t) = R_s i_s(t) + L_s \frac{di_s(t)}{dt} \quad (2.1)$$

$$u_r(t) = R_r i_r(t) + L_r \frac{di_r(t)}{dt} + \omega_m(t) M_{sr} i_s(t) \quad (2.2)$$

$$m_c(t) + m_m(t) = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + k_m \omega_m(t) \quad (2.3)$$

$$m_c(t) = M_{sr} i_s(t) i_r(t) \quad (2.4)$$

gde  $U$ ,  $I$ ,  $R$  i  $L$  respektivno označavaju napon, struju, otpornost i induktivnost a  $s$  i  $r$  u indeksu označavaju statorski i rotorski namotaj,  $\omega_m$  označava ugaonu brzinu rotora,  $M_{sr}$  označava međusobnu induktivnost,  $m_c$  i  $m_m$  označavaju momente konverzije i opterećenja,  $J_m$  označava moment inercije motora dok  $k_m$  označava koeficijent viskoznog trenja [29].

Međutim vrlo često nije moguće izvesti determinističke jednačine modela, ili čak i kada je to moguće, nijedan fizički fenomen nije potpuno deterministički jer se mogu desiti razne druge spoljne pobude koje mogu uticati na ishod izlaza. U tom slučaju signali i sistemi moraju biti opisani stohastičkim modelima koji će na osnovu prikupljenih ulaznih podataka odrediti buduće kretanje izlaza. Skup podataka prikupljenih tokom vremena, ili koji se snime nekim od opštepoznatih tehnika odabiranja signala predstavljaju signal koji se obrađuje. Ideja stohastičkog modeliranja signala je da se taj signal predstavi određenim parametrima modela. Stohastičke procese je jako teško opisati jer je svaka varijabla koja se opservira ustvari random varijabla. Jedan od načina da se ovi procesi opišu jeste spektralna gustina snage. U tom slučaju spektralna gustina snage je u stvari funkcija parametara tog modela i stoga je izbor odgovarajućeg modela i adekvatna estimacija njegovih parametara neophodna. Ovakav pristup u estimaciji signala se naziva parametarsko modelovanje [3-8, 30, 31]. Ako uzmemo da je  $u(n)$  ulazni (aktivacioni), a  $y(n)$  izlazni (mereni) signal, onda možemo napisati najjednostavniji oblik modela signala u linearnoj formi (2.5)

$$y(n) = -\sum_{i=1}^p a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^q b_i u(n-i) \quad (2.5)$$

gde vrednosti  $a_i$  i  $b_i$  predstavljaju parametre modela a  $p$  i  $q$  predstavljaju red modela. Takođe je vrlo bitno da kod estimacije parametara modela signala,  $u(n)$  nije poznata ulazna sekvenca već aktivacioni šum, čije karakteristike mogu i ne moraju biti poznate. Aktivacioni šum treba razlikovati od šuma merenja koji se vrlo često javlja pri oservacijama nekog signala i koji se u simulacijama mora dodatno modelovati. Jednačina (2.5) predstavlja opšti oblik parametarskog modela signala poznat kao autoregresivni model pokretnih proseka (*engl. Autoregressive-Moving Average - ARMA*), ali će o njemu i o ostalim varijacijama modela biti reči nešto kasnije.

Procena spektra, koristeći ove parametre, je poznata kao parametarska spektralna estimacija. Formiranje modela signala je od suštinskog značaja za različite grane industrije. Adekvatni modeli signala se mogu koristiti za kompresiju signala, predviđanje budućih promena u ekonomiji ili prilikom planiranja proizvodnje, estimaciji funkcije prenosa, optimizaciji procesa, itd [3-8, 30, 31].

## 2.1. Stacionarnost signala

Veoma važna pretpostavka u modeliranju stohastičkih signala jeste stacionarnost signala čiji se parametri modela estimiraju. To podrazumeva da se podaci koji se koriste u estimaciji nalaze u nekoj vrsti statističkog ekvilibrijuma tj. da se statistike takvih signala ne menjaju tokom vremena. U tom slučaju se signal može opisati preko određenog skupa statistika kao što su srednja vrednost, varijansa, autokorelaciona funkcija, spektralna gustina snage i slično. Međutim, realni signali najčešće nisu stacionarni i njihove statistike se menjaju tokom vremena i stoga je bitno definisati uslove stacionarnosti signala.

### 2.1.1. Stacionarnost u užem smislu

Pod signalima koji su stacionarni u užem smislu se smatraju stohastički signali čije se rapodele ne menjaju tokom vremena. To praktično znači da je signal stacionaran u užem smislu ukoliko je združena funkcija gustine verovatnoće proizvoljnog broja odbiraka  $k$  nekog signala  $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_k)$  u proizvoljnim trenucima  $t_1, t_2, \dots, t_k$  jednaka združenoj funkciji gustine verovatnoće odgovarajućih odbiraka  $y(t_1 + h), y(t_2 + h), \dots, y(t_k + h)$  pomerenih u vremenu za proizvoljno  $h$  (2.6)

$$\rho(y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_k)) = \rho(y(t_1 + h), y(t_2 + h), \dots, y(t_k + h)) \quad (2.6)$$

za bilo koji skup vremenskih trenutaka  $t_1, t_2, \dots, t_k$  gde je  $k > 0$  i za da svako  $h$ . Ovo je praktično nemoguće dokazati, pa je stoga i nemoguće dokazati da je neki proces stacionaran u užem smislu. Stoga se vrlo često uvodi pojam slaba stacionarnost signala ili stacionarnost signala u širem smislu [30].

### 2.1.2. Stacionarnost u širem smislu

Problem stacionarnosti signala u užem smislu je što je nemoguće dokazati. Manje strog način definisanja stacionarnosti signala jeste da se pretpostavi da su statistike signala do nekog reda  $n$  konstantne. Da bi se neki signal opisao kao stacionaran u širem smislu dovoljno je pokazati da je srednja vrednost  $\mu = E\{y(t)\}$  ista za bilo koje  $t$  i da autokorelaciona funkcija  $R_Y(t, t + \tau) = R_Y(\tau)$  zavisi samo od razlike  $\tau$  između odbiraka za bilo koje  $t$  [30, 31].

Kako je i ovo teško dokazati, u praksi se često za uslov stacionarnosti u širem smislu ili takozvane slabe stacionarnosti uzma nepromenljivost statistika prvog i drugog reda, tj. nepromenljivost srednje vrednosti i varijanse signala.

## 2.2. Modeli signala

Prilikom opisivanja signala odgovarajućim modelom važno je napomenuti da se ne može praktično svaki signali opisati svakim modelom [32]. Iako u literaturi postoje teoreme koje pokazuju da se isti stohastički procesi mogu modelirati različitim vrstama linearnih modela, uz pretpostavku da red tih modela može bit i beskonačno veliki, u praktičnim implementacijama ovih metodologija je vrlo važno izabrati odgovarajući model procesa koji je prilagođen njegovim svojstvima. Stoga ćemo dati prikaz nekoliko osnovnih tipova modela signala koji se najčešće koriste da opišu realne signale, kao što su AR (*engl. Autoregressive*), MA (*engl. Moving Average*), ARMA (*engl. Autoregressive-Moving Average*), ARIMA (*engl. Autoregressive Integrated Moving Average*), SARIMA (*engl. Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average*) i SARIMAX (*engl. Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average with eXogenous inputs*) modeli procesa.

### 2.2.1. Autoregresivni model (AR)

Ukoliko u jednačini (2.5) pretpostavimo da su svi parametri  $b_i, i = 1 \dots q$  jednaki nuli, osim prvog koji je  $b_0 = 1$  dobijamo AR model procesa koji je predstavljen sledećom ulazno-izlaznom diferencnom jednačinom (2.7)

$$y(n) = -\sum_{i=1}^p a_i y(n-i) + u(i) \quad (2.7)$$

ili u matičnom obliku (2.8)

$$y(n) = \mathbf{Z}^T(n)\boldsymbol{\theta} + u(n) \quad (2.8)$$

gde je  $\mathbf{Z}^T(n) = [-y(n-1) - y(n-2) - \dots - y(n-p)]$  vektor merenja čija veličina zavisi od reda  $p$  AR modela, a  $\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$  vektor parametara modela [3, 7, 30, 31]. Tipična notacija AR modela reda  $p$  je  $AR(p)$ . Ako jednačinu (2.8) raspišemo u razvijenom obliku (2.9),

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_p y(n-p) + u(n) \quad (2.9)$$

zaključujemo da je sadašnja vrednost procesa  $y(n)$  ustvari linearna kombinacija prethodnih  $p$  odbiraka procesa i sadašnje vrednosti ulaza, pa odatle i sledi naziv autoregresivni model.

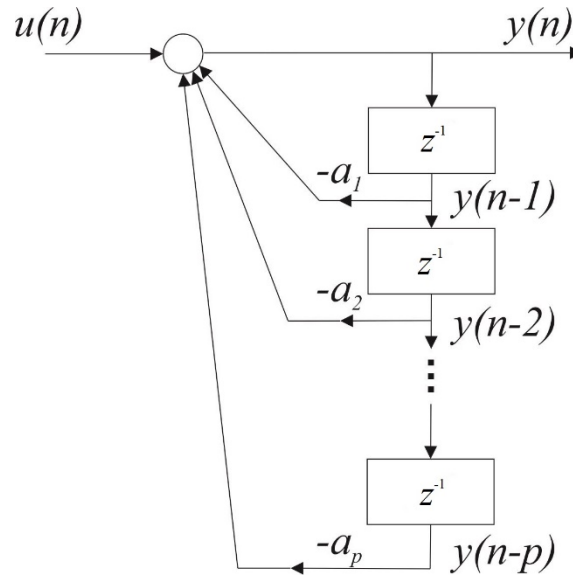
Ako sada primenimo Z transformaciju (2.10) na obe strane jednačine (2.9)

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \dots - a_p z^{-p} Y(z) + U(z) \quad (2.10)$$

možemo dobiti funkciju prenosa  $AR(p)$  modela signala (2.11).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (2.11)$$

Na osnovu funkcije prenosa (2.11) možemo napraviti strukturni blok dijagram AR( $p$ ) modela procesa (Slika 2.1).



Slika 2.1: Strukturni blok dijagram AR modela procesa

Pošto je AR model opisan samo polovima funkcije prenosa, on se može vrlo uspešno koristiti za estimaciju spektralne gustine snage signala koji imaju oštre pikove u svom spektru [7].

### 2.2.2. Model pokretnih proseka (MA)

Ukoliko u jednačini (2.5) pretpostavimo da su svi parametri  $a_i, i = 1 \dots p$  jednaki nuli dobijamo MA model procesa koji je predstavljen sledećom ulazno-izlaznom diferencnom jednačinom (2.12)

$$y(n) = \sum_{i=0}^q b_i u(n-i) \quad (2.12)$$

ili u matričnom obliku (2.13)

$$y(n) = \mathbf{X}^T(n) \Phi \quad (2.13)$$

gde je  $\mathbf{X}^T(n) = [u(n) \ u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u(n-q)]$  vektor merenja čija veličina zavisi od reda  $q$  MA modela, a  $\Phi = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_q]^T$  vektor parametara modela [3, 7, 30, 31]. Tipična notacija MA modela reda  $q$  je MA( $q$ ). Ako jednačinu (2.13) napišemo u malo drugačijem obliku (2.14)

$$y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2) + \dots + b_q u(n-q) \quad (2.14)$$

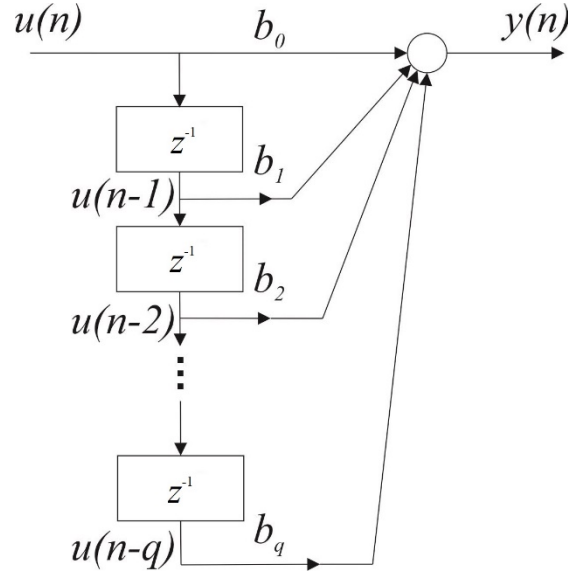
vidimo i zbog čega je ovakav proces dobio svoj naziv. Naime, vrednost opservacije u sadašnjosti zavisi od neke vrste proseka ulaznog signala iz prošlosti i sadašnjosti.

Ako na obe strane jednačine (2.14) primenimo Z transformaciju dobijamo funkciju prenosa MA procesa (2.15-2.16).

$$Y(z) = b_0U(z) + b_1z^{-1}U(z) + b_2z^{-2}U(z) + \dots + b_qz^{-q}U(z) \quad (2.15)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_qz^{-q} \quad (2.16)$$

Sada možemo formirati strukturni blok dijagram ovakvog procesa (Slika 2.2).



Slika 2.2: Strukturni blok dijagram MA procesa

Kako je MA model opisan samo nulama funkcije prenosa, on se može vrlo uspešno koristiti za estimaciju sprekralne gustine snage signala koji imaju doline u svom spektru [7].

### 2.2.3. ARMA model

Kao što je i ranije navedeno ARMA model opisan jednačinom (2.5) je kombinacija AR i MA modela procesa. Posmatrajući jednačinu (2.5) koja opisuje model može se zaključiti da vrednost izlaza zavisi od vrednosti ulaza i izlaza u prethodnim odbircima. Ako sada primenimo Z transformaciju na obe strane jednačine (2.5) u razvijenom obliku (2.17) dobijamo (2.18)

$$y(n) = -a_1y(n-1) - \dots - a_p y(n-p) + b_0u(n) + b_1u(n-1) + \dots + b_q u(n-q) \quad (2.17)$$

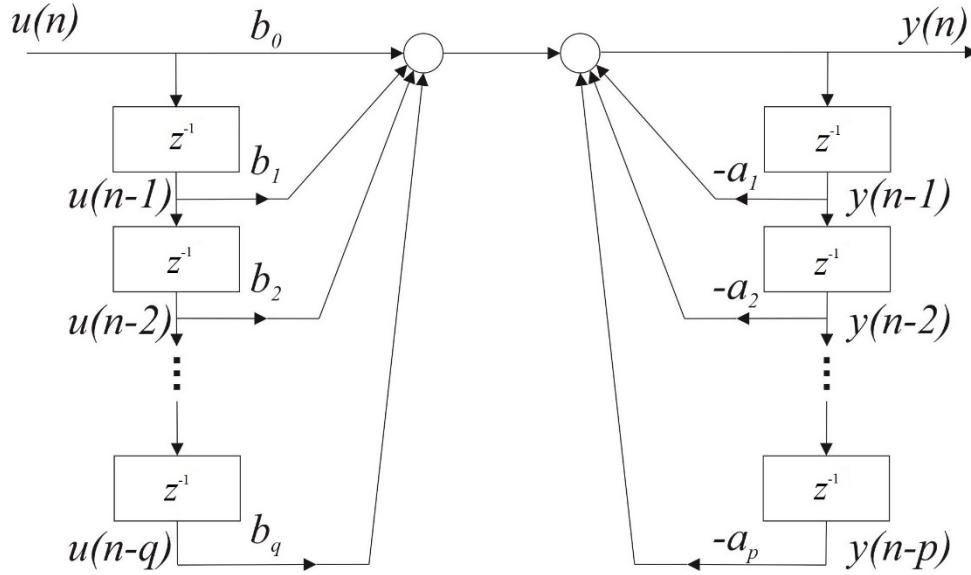
$$Y(z) = -a_1z^{-1}Y(z) - \dots - a_p z^{-p}Y(z) + b_0U(z) + b_1z^{-1}U(z) + \dots + b_q z^{-q}U(z) \quad (2.18)$$

odakle se može izvesti funkcija prenosa ARMA modela procesa (2.19) reda  $(p,q)$  u oznaci ARMA $(p,q)$ .

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_qz^{-q}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_pz^{-p}} \quad (2.19)$$



Strukturni blok dijagram jednog ARMA( $p, q$ ),  $p > q$  je dat na slici (Slika 2.3).



Slika 2.3: Strukturni blok dijagram ARMA procesa

Kako je ARMA model opisan i nulama i polovima funkcije prenosa, on se može podjednako uspešno koristiti za estimaciju spektralne gustine snage i signala koji imaju oštra propadanja i signala koji imaju oštre pikove u svom spektru [7].

#### 2.2.4. ARIMA model

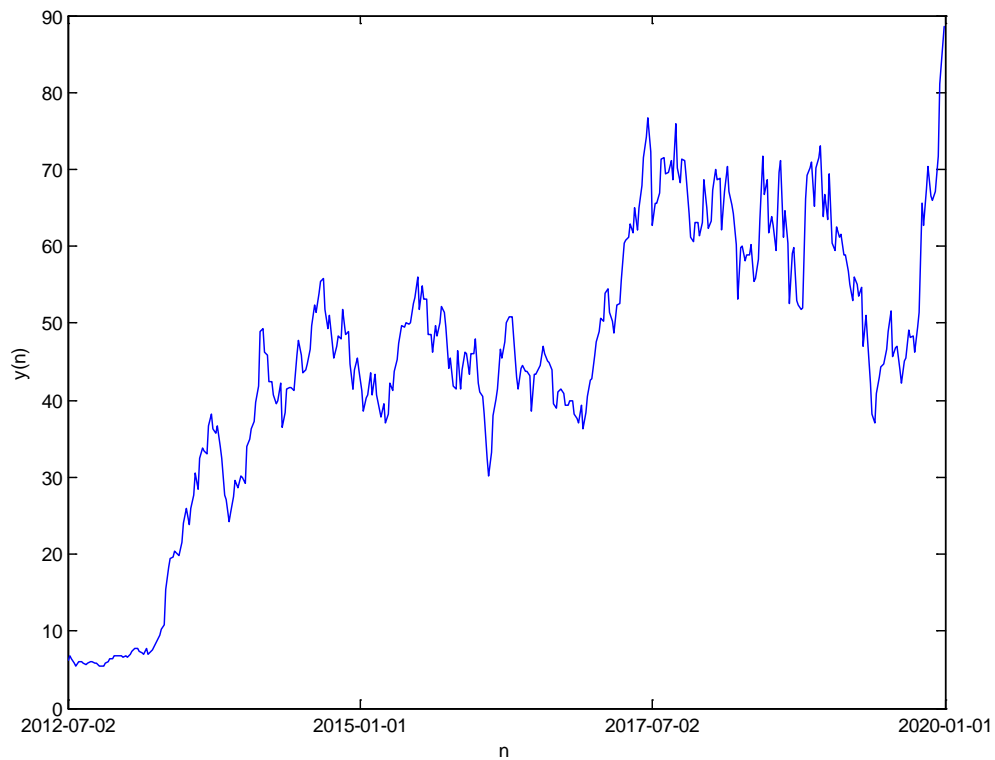
ARIMA model je prošireni ARMA model koji sadrži integracionu (I u ARIMA) komponentu kako bi se mogao adekvatno primeniti na nestacionarnim signalima. ARIMA modeli se upotrebljavaju kada prikupljeni podaci pokazuju karakteriste nestacionarnosti ali obično samo u smislu promena u srednjoj vrednosti signala. U tom slučaju se može izvršiti diferenciranje prikupljenih podataka tako što se od trenutne vrednosti oduzima prethodna. Na ovaj način se eliminiše promena u srednjoj vrednosti prikupljenih podataka. U nekim slučajevima nije dovoljno izvršiti jedno diferenciranje već se diferencira onoliko puta koliko je potrebno dok signal ne ispolji znake stacionarnosti [30, 31]. Dakle, ukoliko je red autoregresivnog dela ARIMA modela  $p$ , red pokretnog proseka  $q$  i ukoliko je izvršeno  $d$  diferenciranja dobijamo model u oznaci ARIMA( $p, d, q$ ). Ovakav model se najlakše može opisati uvođenjem operatora pomeranja unazad  $\mathbf{B}$  gde je  $\mathbf{B}^m y(n) = y(n - m)$  i tada se jednačine modela mogu opisati kao (2.20) [31],

$$\Theta_p(\mathbf{B})(1 - \mathbf{B})^d y(n) = \Phi_q(\mathbf{B})u(n) \quad (2.20)$$

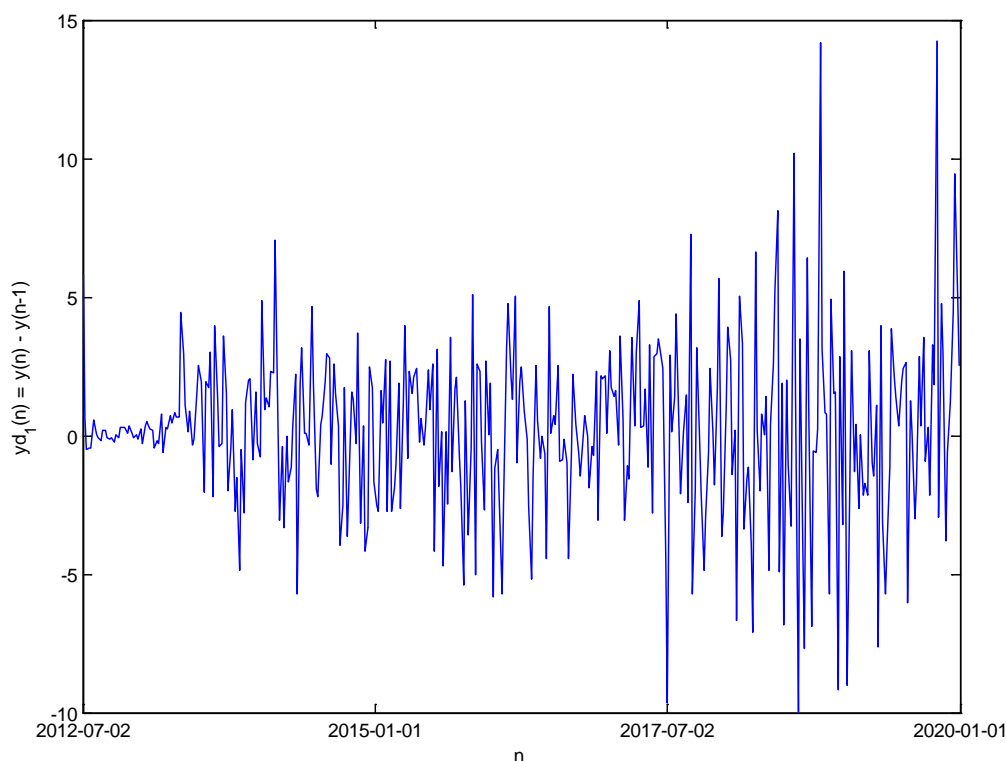
gde je:

- $\Theta_p$  polinom reda  $p$  koji opisuje autoregresivni deo nesezonske komponente tj.  $\Theta_p(\mathbf{B}) = (1 + a_1\mathbf{B} + a_2\mathbf{B}^2 + \dots + a_p\mathbf{B}^p)$  gde su  $a_1 \dots a_p$  parametri autoregresivnog dela nesezonske komponente ARIMA modela;
- $\Phi_q$  polinom reda  $q$  koji opisuje deo pokretnih proseka nesezonske komponente tj.  $\Phi_q(\mathbf{B}) = (1 + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^2 + \dots + b_q\mathbf{B}^q)$  gde su  $b_1 \dots b_q$  parametri dela pokretnog proseka nesezonske komponente ARIMA modela.

U slučaju da podaci, na primer vrednost akcija automobilske kompanije Tesla u periodu od 2.7.2012. do 1.1.2020. godine, pokazuju jasne znake nestacionarnosti srednje vrednosti (Slika 2.4), signal se može diferencirati kako bi se uklonile promene srednje vrednosti (Slika 2.5). U ovom slučaju bi model jednostavno predviđao inkrement vrednosti akcija a ne samu vrednost akcija u budućnosti, ali bi se tačna vrednost akcija mogla utvrditi integracijom, i stoga i naziv autoregresivni integracioni model pokretnih proseka.



*Slika 2.4: Vrednost akcija kompanije Tesla, Inc. (TSLA) izražena u USD u periodu od 2.7.2012. do 1.1.2020. godine*



Slika 2.5: Jednom diferencirane vrednosti akcija kompanije Tesla, Inc. (TSLA) u periodu od 2.7.2012. do 1.1.2020. godine

Kako je ARIMA model jako kompleksan i kako sadrži dosta parametara koje treba podesiti, zgodno je definisati nekoliko specijalnih slučajeva ovog modela koji se u praksi najčešće koriste. Neki specijalni slučajevi ARIMA modela:

- A. ARIMA(0,1,1) – Praktično MA model prvog reda nad prvim izvodom merenog signala (2.21)

$$\nabla y(n) = u(n) + b_1 u(n - 1) \quad (2.21)$$

gde  $\nabla y(n)$  predstavlja prvi izvod merenog signala  $y(n)$ , tj.  $\nabla y(n) = y(n) - y(n - 1)$ .

- B. ARIMA(0,2,2) – Praktično MA model drugog reda nad drugim izvodom merenog signala (2.22)

$$\nabla^2 y(n) = u(n) + b_1 u(n - 1) + b_2 u(n - 2) \quad (2.22)$$

gde  $\nabla^2 y(n)$  predstavlja drugi izvod merenog signala  $y(n)$ , tj.  $\nabla^2 y(n) = \nabla y(n) - \nabla y(n - 1) = y(n) - 2y(n - 1) + y(n - 2)$ .

- C. ARIMA(1,1,1) – Praktično ARMA(1,1) model prvim izvodom merenog signala (2.23)

$$\nabla y(n) = -a_1 \nabla y(n - 1) + u(n) + b_1 u(n - 1) \quad (2.23)$$

### 2.2.5. SARIMA model

ARIMA model je odličan za podatke koji pokazuju nestacionarnost u smisli promena u srednjoj vrednosti signala, ali zato se ne može koristiti ukoliko unutar signala postoji neka takozvana sezonska zavisnost, tj. uticaj nekog spoljnog faktora koji zavisi od trenutka u vremenu kao što je na primer procena proizvodnje žitarica u toku godine. U ovom slučaju se mogu koristiti SARIMA modeli (*engl. Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average*), koji su u suštini ARIMA modeli sa integrisanom sezonskom komponentom [30, 31].

SARIMA model koristi dodatno diferenciranje sa kašnjenjem  $s$  kako bi otklonio sezonsku komponentu. U ovom slučaju se ARIMA model proširuje još jednim dodatnim ARIMA modelom samo sa kašnjenjem u diferenciranju u trajanju  $s$  i na ovaj način oznaka SARIMA modela postaje SARIMA( $p,d,q$ )( $P,D,Q$ ) $_s$ . gde su  $p, d$  i  $q$ , parametri ARIMA modela sa diferenciranjem odbiraka bez kašnjenja, kao i u slučaju klasičnih ARIMA modela, dok su  $P, D$  i  $Q$  parametri ARIMA modela sa kašnjenjem u diferenciranju u trajanju  $s$ . Ovakav model se najlakše može opisati uvođenjem operatora pomeranja unazad  $\mathbf{B}$  i tada se jednačine modela mogu opisati kao (2.24) [31],

$$\Theta_P(\mathbf{B}^s)\Theta_p(\mathbf{B})(1 - \mathbf{B}^s)^D(1 - \mathbf{B})^d y(n) = \Phi_Q(\mathbf{B}^s)\Phi_q(\mathbf{B})u(n) \quad (2.24)$$

gde je:

- $\Theta_P$  polinom reda  $P$  koji opisuje autoregresivni deo sezonske komponente tj.  $\Theta_P(\mathbf{B}^s) = (1 + A_1\mathbf{B}^s + A_2\mathbf{B}^{2s} + \dots + A_P\mathbf{B}^{Ps})$  gde su  $A_1 \dots A_P$  parametri autoregresivnog dela sezonske komponente SARIMA modela;
- $\Theta_p$  polinom reda  $p$  koji opisuje autoregresivni deo nesezonske komponente tj.  $\Theta_p(\mathbf{B}) = (1 + a_1\mathbf{B} + a_2\mathbf{B}^2 + \dots + a_p\mathbf{B}^p)$  gde su  $a_1 \dots a_p$  parametri autoregresivnog dela nesezonske komponente SARIMA modela;
- $\Phi_Q$  polinom reda  $Q$  koji opisuje deo pokretnih proseka sezonske komponente tj.  $\Phi_Q(\mathbf{B}^s) = (1 + B_1\mathbf{B}^s + B_2\mathbf{B}^{2s} + \dots + B_Q\mathbf{B}^{Qs})$  gde su  $B_1 \dots B_Q$  parametri dela pokretnog proseka sezonske komponente SARIMA modela;
- $\Phi_q$  polinom reda  $q$  koji opisuje deo pokretnih proseka nesezonske komponente tj.  $\Phi_q(\mathbf{B}) = (1 + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^2 + \dots + b_q\mathbf{B}^q)$  gde su  $b_1 \dots b_q$  parametri dela pokretnog proseka nesezonske komponente SARIMA modela.

Kako je sam SARIMA model još kompleksniji od ARIMA modela i sadrži dodatne parametare koje treba podesiti, opet je zgodno definisati nekoliko specijalnih slučajeva ovog modela koji se u praksi najčešće koriste:

- A. SARIMA(0,0,0)(1,0,0) $_{12}$  – Jednostavan AR model prvog reda sa sezonskom komponentom čiji je period 12 odbiraka (2.25).

$$y(n) = -a_1 y(n - 12) + u(n) \quad (2.25)$$

Ovakav model se najčešće koristi za stacionarne mesečne podatke čije vrednosti ne zavise od prethodnih meseci već isključivo od vrednosti iz istog meseca prethodne godine.

- B. SARIMA(0,1,0)(1,0,0) $_{12}$  – Proširenje prethodnog modela kako bi izašli na kraj sa eventualnim nestacionarnom promenama (2.26).

$$\nabla y(n) = -a_1 \nabla y(n-12) + u(n) \quad (2.26)$$

Ovakav model se najčešće koristi za mesečne podatke koji pokazuju nestacionarnost u smislu promena u srednjoj vrednosti iz meseca u mesec, tj. kada promena vrednosti u nekom mesecu zavisi samo od promene vrednosti u istom mesecu prethodne godine.

- C. SARIMA(0,0,0)(0,0,1)<sub>4</sub> – Takodje jednostavan kvartalni model pokretnih proseka sa sezonskom komponentom bez ispoljavanja promena u srednjoj vrednosti merenog signala (2.27).

$$y(n) = u(n) + b_1 u(n-4) \quad (2.27)$$

- D. SARIMA(0,1,0)(0,0,1)<sub>4</sub> – Proširenje prethodnog modela ukoliko podaci pokazuju promenu u srednjim vrednostima (2.28).

$$\nabla y(n) = u(n) + b_1 u(n-4) \quad (2.28)$$

- E. SARIMA(0,0,0)(0,1,1)<sub>4</sub> – Alternativno prethodnom modelu, diferenciranje se može izvršiti i nad sezonskom komponentom (2.29).

$$(1 - \mathbf{B}^4)y(n) = y(n) - y(n-4) = u(n) + b_1 u(n-4) \quad (2.29)$$

Dakle diferenciranje sa kašnjenjem  $s$  takođe može ukloniti nestacionarnost koja se ispoljava u vidu promena u srednjoj vrednosti signala, pa je pitanje da li će se vršiti klasično diferenciranje ili diferenciranje sa kašnjenjem  $s$  stvar izbora pri modeliranju signala.

### 2.2.6. SARIMAX model

Iako se SARIMA modeli dobro nose i sa nestacionarnim signalima i sa sezonskim komponentama u merenjima, mnogi se slažu da se kvalitet estimacije u nekim sličajevima može u mnogome unaprediti ako se identifikuju spoljni signali koji mogu uticati na estimirani signal, kao što je na primer uticaj temperature na kratkotrajno jednodnevno predviđanje potrošnje električne energije [33-39].

U ovim slučajevima se može opisati uticaj spoljnih signala na estimirani signal dodavanjem tih spoljnih signala  $x_k(t)$  sa odgovarajućim težinskim faktorima  $\beta_k$ , gde  $k$  označava broj spoljnih signala koji utiču na estimirani signal, na desnu stranu jednačine (2.22), dobijajući tako opštu formu SARIMAX (*engl. Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average with eXogenous inputs*) modela (2.30) [39-42],

$$\Theta_p(\mathbf{B}^s)\Theta_p(\mathbf{B})(1 - \mathbf{B}^s)^D(1 - \mathbf{B})^d y(n) = \beta_k x_k(n) + \Phi_Q(\mathbf{B}^s)\Phi_q(\mathbf{B})u(n) \quad (2.30)$$

Jedan od primera primene SARIMAX modela je, kao što je već rečeno, predviđanje kratkotrajne potrošnje električne energije gde je identifikovano da je temperatura nezavisan spoljni signal koji direktno utiče na potrošnju električne energije. Takođe, identifikovano je da sam signal potrošnje ima trend koji je potrebno ukloniti diferenciranjem, kao i da signal ima jednodnevnu, nedeljnu i godišnju

sezonsku komponentu koju treba modelirati [39, 42] i stoga se model signala može opisati jednačinom (2.31)

$$\nabla y(n) = -a_1 \nabla y(n - 24) - a_2 \nabla y(n - 168) - a_3 \nabla y(n - 8760) + \beta x(n) + u(n) \quad (2.31)$$

### 2.2.7. Zaključak o modelima signala

Parametarske metode modeliranja signala kao što su autoregresivni model i model pokretnih proseka, kao i autoregresivni model pokretnih proseka koji je nastao spajanjem ova dva modela zahtevaju da modeliran signal bude stacionaran. Kako većina signala koji su od značaja i koji se modeliraju ispoljavaju različite znake nestacionarnosti, intenzivno se istraživalo na različitim metodama za rešavanje problema estimacije nestacionarnih signala i izdvojila su se dva pristupa.

Jedan pristup podrazumeva da se pre same estimacije identifikuju uzroci nestacionarnosti i da se prema njima prilagodi osnovni ARMA model. Tako se došlo do zaključka da kada estimirani signal pokazuje znake kontinualne promene srednje vrednosti, tj znake trenda u merenjima, može se primeniti diferenciranje merenog signala onoliko puta koliko je potrebno da bi se uklonio ovaj vid nestacionarnosti. Ovaj pristup dodaje I (*engl. Integrated*) u ARMA skraćenicu i nastaje ARIMA model. Takođe signal može pokazivati znake nestacionarnosti u vidu nekih periodičnih promena ili poremećaja koji se ponavljaju, takozvane sezonske komponente signala koja se može uspešno modelirati tako što se vrši diferenciranje merenog signala sa kašnjenjem od onoliko odbiraka kolika je perioda te sezonske komponente. Ovaj pristup dodaje S (*engl. Seasonal*) u ARMA ili ARIMA skraćenicu modela i njegovom primenom nastaju SARMA i SARIMA modeli u zavisnosti od toga da li estimirani signal ima samo sezonsku komponentu ili ima i sezonsku komponentu i pokazuje znake trenda u merenjima. Dalje istraživanje u ovom smeru dovelo je do pronalaska da i neki dodatni spoljni signali mogu direktno da utiču na estimirani signal kao što je spoljna temperatura koja direktno utiče na kratkotrajno predviđanje potrošnje električne energije. Dodavanjem ovih spoljnih signala u model dobijamo X (*engl. exogenous*) u skraćenicu modela i tako dobijamo ARMAX, ARIMAX, SARMAX ili SARIMAX modele u zavisnosti od toga da li na estimirani signal samo utiče neki spoljni signal ili je to neka kombinacija uticaja spoljnih signala, trenda u merenjima i sezonske komponente.

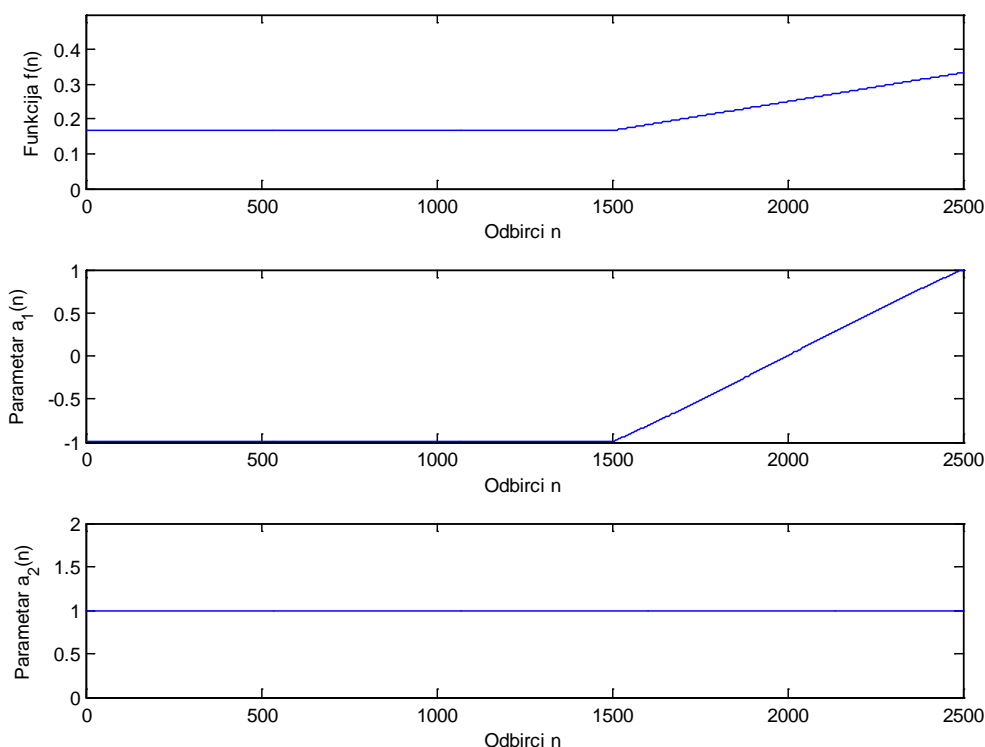
Drugi pristup za rešavanje problema estimacije nestacionarnih signala podrazumeva da se koristi standardni ARMA model ali da se parametri modela signala kontinualno estimiraju i menjaju kako se menja stacionarnost signala. Ostatak rada biće okrenut ovim metodama. Ovakav pristup za sobom povlači razvoj različitih tehnika za estimaciju parametara modela o kojima će biti reči u sledećem delu poglavlja 2, dok će u sledećem poglavlju 3 posebna pažnja biti posvećena algoritmima za detekciju nestacionarnosti signala.

### 2.3. Tehnike estimacije parametara modela

Tokom godina su razvijene različite tehnike estimacije parametara modela. Neke od njih su razvijene specifično za neke određene modele signala, dok su neke univerzalne i mogu se primeniti na različite modele signala. Takođe svaka od tih metoda ima neke svoje specifičnosti i prednosti i nedostatke. Da bismo bolje opisali te specifičnosti svake od metoda, prilikom njihovog opisivanja i analize prikazaćemo i po jedan eksperiment sa estimiranjem parametara modela veštački generisanog signala (2.32) koji je nestacionaran i čiji se parametri menjaju po unapred definisanim, poznatim, trajektorijama (Slika 2.6)

$$\begin{aligned} y(n) &= -a_1(n)y(n-1) - a_2y(n-2) + u(n) \\ a_1(n) &= -2\cos(2\pi f(n)); \quad a_2(n) = 1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

gde je  $u(n)$  beli Gausov šum nulte srednje vrednosti, dok je  $f(n)$  funkcija koja određuje trajektoriju promenljivog parametra modela  $a_1(n)$ . Trajanje signala je 2500 odbiraka i na generisan signal je dodat aditivni šum merenja, varijanse koja je definisana odnosom signal/šum  $SNR = 25\text{dB}$  kako bi se uslovi približili realnim uslovima. Parametar modela  $a_1(n)$  (Slika 2.6, sredina) definisan funkcijom  $f(n)$  (Slika 2.6, gore) ima stacionaran deo do 1500-tog odbirka, nakon čega sledi postepena pomena od 1500-tog do 2500-tog odbirka. Parametar modela  $a_2(n)$  (Slika 2.6, dole) je konstantan. Trajektorije su postavljene tako da se ispunje uslovi stabilnosti modela.



Slika 2.6: Trajektorije funkcije  $f(n)$  (gore) i parametara modela  $a_1(n)$  (sredina) i  $a_2(n)$  (dole)

### 2.3.1. Autokorelaciona metoda

Autokorelacioni metod ili Yule-Walker metod estimira spektralnu gutinu snage ulaznog signala, tako što estimira parametre AR modela minimizujući srednju kvadratnu grešku estimacije (2.33) [7, 30, 43-45]

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n) + \sum_{j=1}^p a_j y(n-j)|^2 \quad (2.33)$$

gde je  $N$  broj odbiraka signala  $y(n)$ ,  $p$  red AR modela a  $\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$  parametri modela signala. Odbirci signala  $y(n)$  koji nisu u opsegu  $0 \leq n \leq N-1$  moraju da se postave na nulu. Estimirana snaga greške predikcije se minimizuje diferenciranjem po parametrima modela  $a_l$  za svako  $l = 1 \dots p$  i izjednačavanjem sa nulom. Na ovaj način dobija se set jednačina (2.34)

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y(n) + \sum_{j=1}^p a_j y(n-j)) y^*(n-l) = 0 \quad (2.34)$$

Kako je procena autokorelacione funkcije (*engl: Autocorrelation Function – ACF*)  $\hat{r}_{yy}(j)$  data jednačinom (2.35)

$$\hat{r}_{yy}(j) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-j} y^*(n) y(n+j) & \text{za } j = 0, 1, \dots, p \\ \hat{r}_{yy}^*(-j) & \text{za } j = -p+1, -p+2, \dots, -1 \end{cases} \quad (2.35)$$

jednačina (2.32) se može zapisati u matričnom obliku (2.36).

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{yy}(0) & \hat{r}_{yy}(-1) & \dots & \hat{r}_{yy}(-p+1) \\ \hat{r}_{yy}(1) & \hat{r}_{yy}(0) & \dots & \hat{r}_{yy}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{yy}(p-1) & \hat{r}_{yy}(p-2) & \dots & \hat{r}_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{r}_{yy}(1) \\ \hat{r}_{yy}(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yy}(p) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

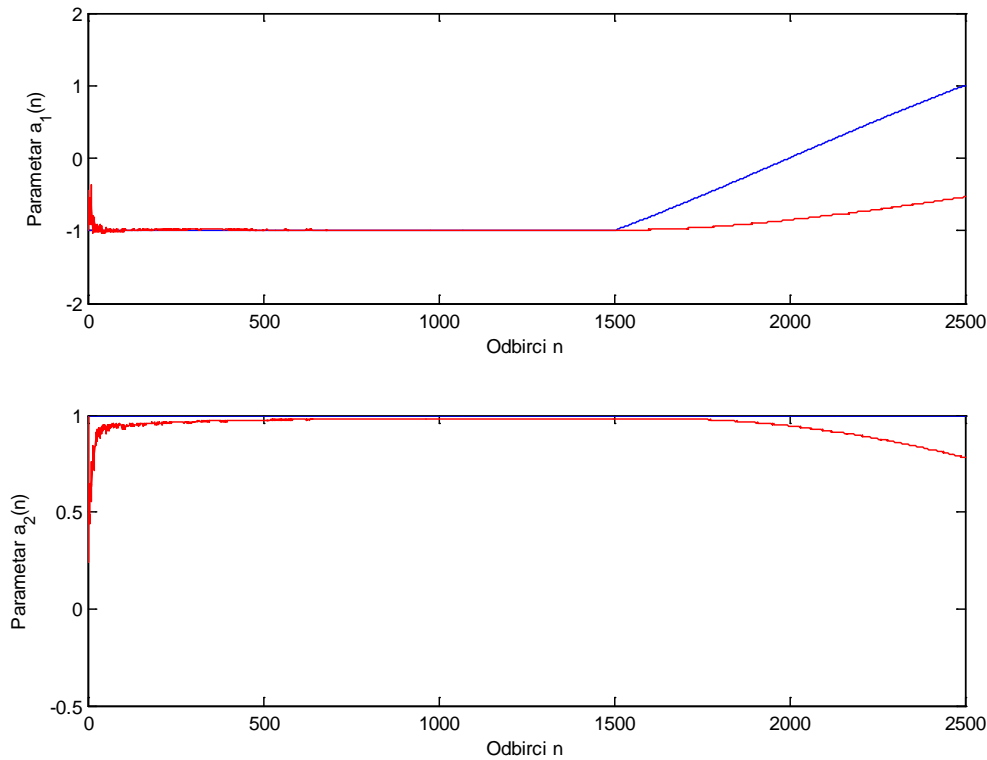
Kako pomenuti metod koristi procenu autokorelacione funkcije signala, stoga je i sam metod estimacije parametara modela nazvan autokorelacioni metod, a alternativno ime Yule-Walker-ov metod je dobio zbog korišćenja Yule-Walker-ovih jednačina (2.36).

Rešavanjem Yule-Walker-ovih jednačina (2.36) formira se estimacija nepoznatih parametara modela  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p]^T$ . Pošto je sama procena autokorelacione funkcije (2.35) prilično skromna čak i za veliki broj odbiraka signala, dok za mali broj odbiraka signala vrlo često daje i pomerene i zašumljene estimacije, ovaj metod nije čest izbor u praksi. Pored toga, metoda podrazumeva da je signal stacionaran u posmatranom opsegu.

Prilikom kontrolisanog eksperimeta postavljeno je da se estimacija parametara modela vrši iznova sa svakim odbirkom merenog signala  $y(n)$  kako bi se pratio uticaj promene vrednosti parametara modela  $a_2$ , kao i da bi se simulirali uslovi rada u realnom vremenu. Dobijeni rezultati (Slika 2.7), očekivano, u početku pokazuju pomerene estimacije i estimacije visoke standardne devijacije dok se dalje tokom stacionarnog perioda dobijaju sve bolje estimacije zbog povećanja broja odbiraka koji ulaze u



estimaciju autokorelacione funkcije, dok sa druge strane, tokom perioda kada se javlja promena nestacionarnosti, rezultati pokazuju nedovoljno brzo praćenje tih promena, i stoga veliku grešku u estimaciji.



Slika 2.7: Trajektorije estimiranih parametara modela  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem autokorelacione metode estimacije

### 2.3.2. Kovarijantna metoda

Kovarijantna metoda, slično kao i autokorelaciona metoda, minimizuje srednju kvadratnu grešku estimacije, samo što je granica sumiranja greške pomena (2.37), pa nije potrebno izjednačavati pojedine odbirke sa nulom [7, 45].

$$J = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} |y(n) + \sum_{j=1}^p a_j y(n-j)|^2 \quad (2.37)$$

Nakon minimizacije kriterijuma (2.37) diferenciranjem po nepoznatim parametrima modela  $a_l$  za svako  $l = 1 \dots p$  i izjednačavanjem sa nulom dobija se set jednačina (2.38) čijim se rešavanjem mogu estimirati nepoznati parametri.

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} (y(n) + \sum_{j=1}^p a_j y(n-j)) y^*(n-l) = 0 \quad (2.38)$$

Uvođenjem kovarijantne jednačine (2.39) jednačine (2.38) se mogu zapisati i u matričnom obliku (2.40). Ovakav sistem jednačina se lako može rešiti tehnikom pseudoinverzije.

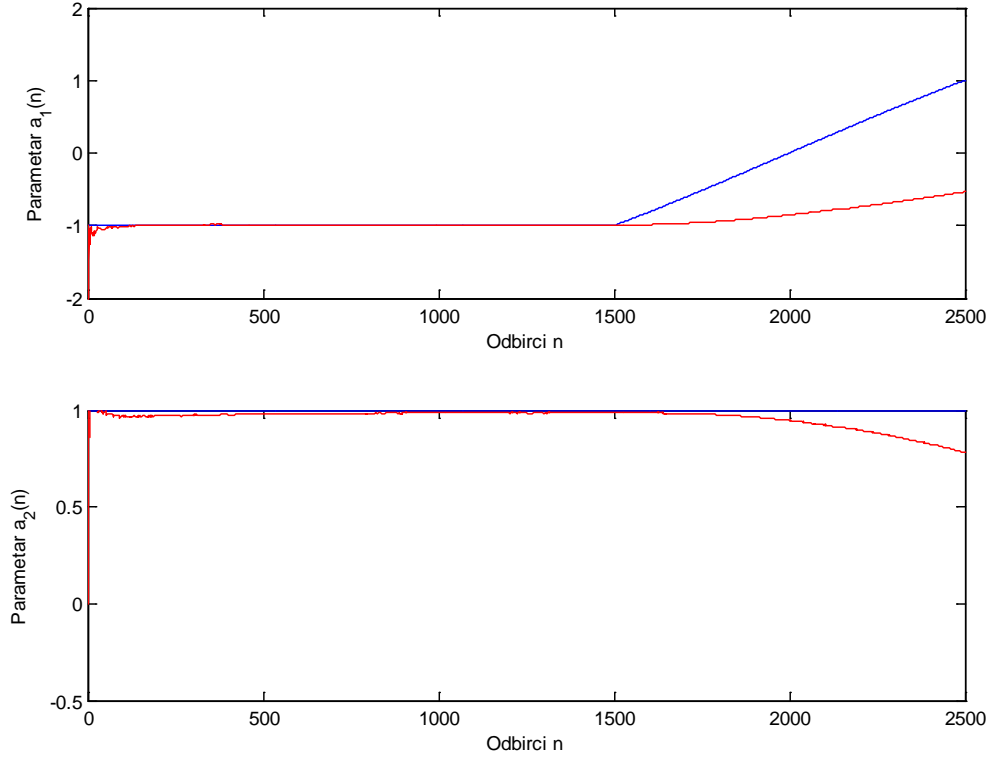
$$c_{yy}(l, j) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} y^*(n-l)y(n-j) \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} c_{yy}(1,1) & c_{yy}(1,2) & \dots & c_{yy}(1,p) \\ c_{yy}(2,1) & c_{yy}(2,2) & \dots & c_{yy}(2,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{yy}(p,1) & c_{yy}(p,2) & \dots & c_{yy}(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{yy}(1,0) \\ c_{yy}(2,0) \\ \vdots \\ c_{yy}(p,0) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Zbog kovarijantne jednačine (2.39) je i sama metoda dobila ime kovarijantna metoda. Kvadratna matrica u jednačini (2.40) je Hermitijan matrica tj.  $c_{yy}(l, j) = c_{yy}^*(j, l)$  i pozitivno definitna. Ukoliko je prisutan i šum merenja dolazi se do zaključka da je kvadratna matrica u jednačini (2.40) uz to i nesingularna i stoga se može naći njena inverzna matrica i na taj način se osigurava postojanje rešenja sistema jednačina (2.40).

Zbog same sličnosti ovih metoda gde se  $c_{yy}(l, j)$  često posmatra kao estimacija autokorelacione funkcije  $\hat{r}_{yy}(l-j)$  pretpostavlja se da je i kvalitet estimacije sličan. Razlika je u tome što se u proceni koristi efektivno manje odbiraka nego što je slučaj sa autokorelacionom metodom.

Prilikom kontrolisanog eksperimenta, da bi se imali isti uslovi za sve metode, postavljeno je da se estimacija parametara modela vrši iznova sa svakim odbirkom merenog signala  $y(n)$  kako bi se pratio uticaj promene vrednosti parametara modela  $a_2$ , kao i da bi se simulirali uslovi rada u realnom vremenu. Dobijeni rezultati (Slika 2.8) tokom stacionarnih perioda pokazuju manje pomerene estimacije parametara modela nego u slučaju autokorelacione metode (Slika 2.7), najverovatnije zbog nepomerivosti estimatora (2.39). Takođe, primetno je i da je smanjen uticaj šuma na estimacije tokom celog perioda merenog signala. Brzina praćenja promena u stacionarnosti signala je slična kao i kod autokorelacione metode.



Slika 2.8: Trajektorije estimiranih parametara modela  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem kovarijantne metode estimacije

### 2.3.3. Modifikovana kovarijantna metoda

Autokorelaciona i kovarijantna metoda minimizuju srednju kvadratnu grešku predikcije unapred (*a priori*) tako što u kriterijumima srednje kvadratne greške (2.33 i 2.37) koriste optimalni prediktor unapred (2.41), dok se optimalni prediktor unazad (2.42), primenom koga se računa srednja kvadratna greška predikcije unazad, ne koristi u ovim metodama.

$$\hat{y}(n) = -\sum_{j=1}^p a_j y(n-j) \quad (2.41)$$

$$\hat{y}(n) = -\sum_{j=1}^p a_j^* y(n+j) \quad (2.42)$$

O ovim jednačinama (2.41 i 2.42)  $a_j$  su kao i do sada parametri AR modela signala. Na osnovu ova dva prediktora se, po ugledu na kovarijantnu metodu, mogu definisati srednje kvadratne greške predikcije unapred (2.43) i unazad (2.44).

$$J_f = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} |y(n) + \sum_{j=1}^p a_j y(n-j)|^2 \quad (2.43)$$

$$J_b = \frac{1}{N-p} \sum_{n=0}^{N-1-p} |y(n) + \sum_{j=1}^p a_j^* y(n+j)|^2 \quad (2.44)$$

Modifikovana kovarijantna metoda stoga minimizuje prosek srednjih kvadratnih grešaka unapred i unazad (2.45) [7, 46-50].

$$J = \frac{J_f + J_b}{2} \quad (2.45)$$

Slično kao i kod kovarijantne metode, kriterijum opisan jednačinama (2.43-2.45) se minimizuje diferenciranjem po nepoznatim parametrima modela  $a_l$  za svako  $l = 1 \dots p$  i izjednačava sa nulom (2.46).

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = \frac{1}{2(N-p)} \left[ \sum_{n=p}^{N-1} (y(n) + \sum_{j=1}^p a_j y(n-j)) y^*(n-l) + \sum_{n=0}^{N-1-p} (y(n) + \sum_{j=1}^p a_j^* y(n+j)) y(n+l) \right] = 0 \quad (2.46)$$

Dobijene jednačine (2.46) se mogu donekle uprostiti i zapisati u skraćenom obliku (2.47) [7]

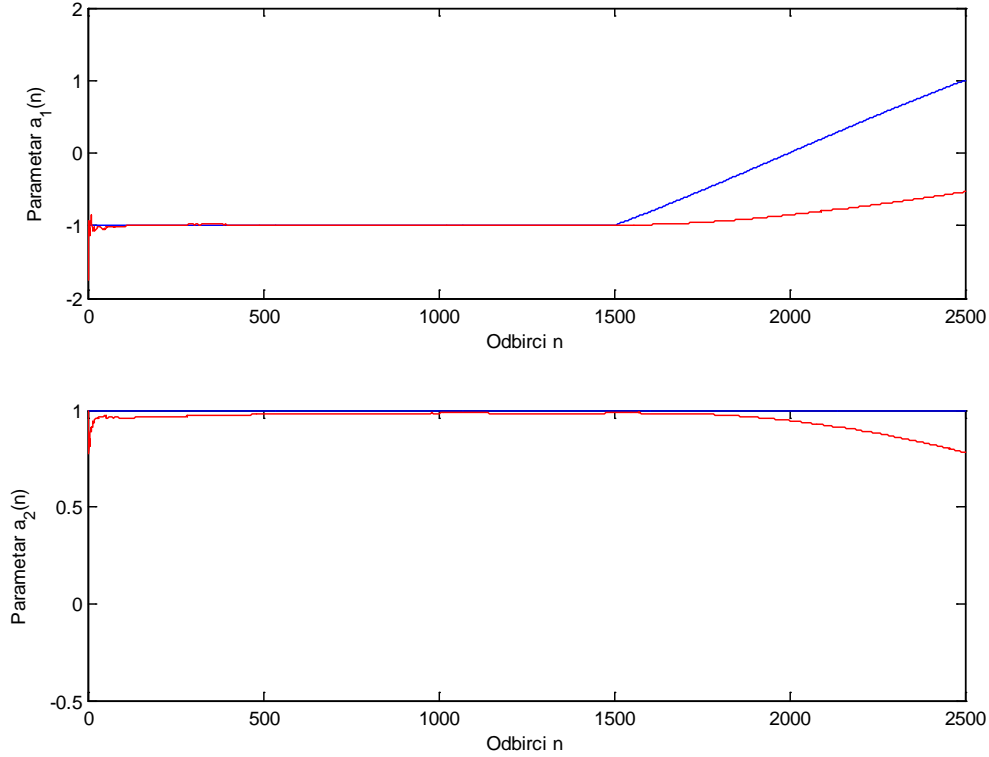
$$\sum_{j=1}^p a_j \left[ \sum_{n=p}^{N-1} (y(n-j) y^*(n-l)) + \sum_{n=0}^{N-1-p} (y^*(n+j) y(n+l)) \right] - \left[ \sum_{n=p}^{N-1} (y(n) y^*(n-l)) + \sum_{n=0}^{N-1-p} (y^*(n) y(n+l)) \right] \quad (2.47)$$

za svako  $l = 1 \dots p$ . Ukoliko se uvede jednačina modifikovane kovarijanse (2.48) po kojoj je metod inače i dobio ime, prethodni sistem jednačina (2.44) se može zapisati u matričnom obliku (2.49) koji je ustvari isti kao i kod kovarijantne metode.

$$c_{yy}(l, j) = \frac{1}{2(N-p)} \left[ \sum_{n=p}^{N-1} y^*(n-l) y(n-j) + \sum_{n=0}^{N-1-p} (y^*(n+j) y(n+l)) \right] \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} c_{yy}(1,1) & c_{yy}(1,2) & \dots & c_{yy}(1,p) \\ c_{yy}(2,1) & c_{yy}(2,2) & \dots & c_{yy}(2,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{yy}(p,1) & c_{yy}(p,2) & \dots & c_{yy}(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{yy}(1,0) \\ c_{yy}(2,0) \\ \vdots \\ c_{yy}(p,0) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Nadalje se estimacija parametara modela vrši potpuno isto kao i kod kovarijantne metode, samo se  $c_{yy}(l, j)$  drugačije računa. Ako zadržimo praksu da se prilikom kontrolisanog eksperimenta, da bi se imali isti uslovi za sve metode koje načelno očekuju da mereni signal bude stacionaran, estimacija parametra modela vrši sa svakim novim odbirkom signala dobijeni rezultati (Slika 2.9) pokazuju jako slične estimacije parametara modela kao i kovarijantna metoda, samo sa dodatno umanjenim uticajem šuma. Praćenje promena parametara modela je i dalje slabo, kao i kod kovarijantne metode.



Slika 2.9: Trajektorije estimiranih parametara modela  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem modifikovane kovarijantne metode estimacije

### 2.3.4. Burgova metoda

Burgova metoda [51], za razliku od prethodno opisanih metoda (autokorelaciona, kovarijantna i modifikovana kovarijantna metoda) ne estimira nepoznate parametre AR modela direktno već prvo estimira koeficijente refleksije  $k_1, k_2, \dots, k_p$ , gde je  $p$  red AR modela, a onda na osnovu Levinsonove rekurzije određuje za svako  $j = 1, 2, \dots, p$  parametre autoregresivnog modela signala (2.50) [7, 51-53].

$$\hat{a}_j(i) = \begin{cases} \hat{a}_{j-1}(i) + \hat{k}_j \hat{a}_{j-1}(j-i) & \text{za } i = 1, 2, \dots, j-1 \\ \hat{k}_j & \text{za } i = j \end{cases} \quad (2.50)$$

gde su ustvari estimirani parametri  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p]^T$  opsani sa  $\hat{a}_p(1), \hat{a}_p(2), \dots, \hat{a}_p(p)$ . Kao što se može videti, parametri AR modela signala zavise samo od koeficijenata refleksije koji se pre toga moraju estimirati. Ukoliko se pođe od grešaka predikcije unapred (2.51) i unazad (2.52) u  $j$ -toj iteraciji Levinsonove rekurzije

$$\hat{e}_f^j(n) = y(n) + \sum_{i=1}^j a_j(i)y(n-i) \quad (2.51)$$

$$\hat{e}_b^j(n) = y(n-j) + \sum_{i=1}^j a_j^*(i)y(n+i-j) \quad (2.52)$$

i nakon što se zameni (2.50) u (2.51, 2.52) dobijaju se rekurzivne jednačine grešaka predikcije unapred (2.53) i unazad (2.54) koje zavise samo od poslednje estimiranog koeficijenta refleksije  $\hat{k}_j$  i prethodnih grešaka

$$\hat{e}_f^j(n) = \hat{e}_f^{j-1}(n) + \hat{k}_j \hat{e}_b^{j-1}(n-1) \quad (2.53)$$

$$\hat{e}_b^j(n) = \hat{e}_b^{j-1}(n-1) + \hat{k}_j^* \hat{e}_f^{j-1}(n) \quad (2.54)$$

gde je  $\hat{e}_f^0(n) = \hat{e}_b^0(n) = y(n)$ . Sada se na osnovu jednačina grešaka predikcije unapred (2.53) i unazad (2.54) može definisati kriterijumska funkcija, tj. ukupna estimirana srednja kvadratna greška predikcije u  $j$  – toj iteraciji Levinsonove rekurzije kao (2.55)

$$\hat{J}_j = \frac{1}{2(N-j)} \sum_{n=j}^{N-1} \left[ \left| \hat{e}_f^{j-1}(n) + \hat{k}_j \hat{e}_b^{j-1}(n-1) \right|^2 + \left| \hat{e}_b^{j-1}(n-1) + \hat{k}_j^* \hat{e}_f^{j-1}(n) \right|^2 \right] \quad (2.55)$$

koja se dalje, slično kao i kod prethodnih metoda minimizuje tako što se diferencira, samo sada po koeficijentu refleksije  $\hat{k}_j$ , i izjednačava sa nulom (2.56).

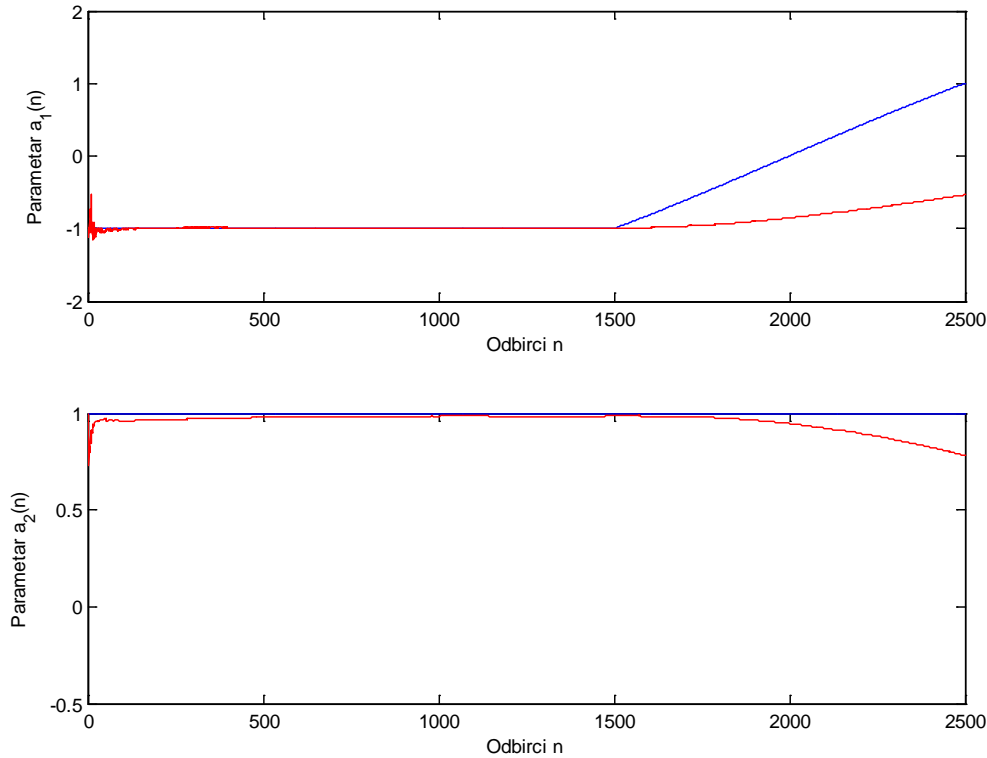
$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{J}_j}{\partial \hat{k}_j} = \frac{1}{2(N-j)} \sum_{n=j}^{N-1} & \left[ (\hat{e}_f^{j-1}(n) + \hat{k}_j \hat{e}_b^{j-1}(n-1)) \hat{e}_b^{j-1}(n-1)^* + \right. \\ & \left. (\hat{e}_b^{j-1}(n-1)^* + \hat{k}_j \hat{e}_f^{j-1}(n)^*) \hat{e}_f^{j-1}(n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Rešavanjem minimizacionog kriterijuma (2.56) dobija se Burgov metod za estimaciju koeficijenta refleksije (2.57).

$$\hat{k}_j = \frac{-2 \sum_{n=j}^{N-1} \hat{e}_f^{j-1}(n) \hat{e}_b^{j-1}(n-1)^*}{\sum_{n=j}^{N-1} (|\hat{e}_f^{j-1}(n)|^2 + |\hat{e}_b^{j-1}(n-1)|^2)} \quad (2.57)$$

Treba napomenuti da se i u literaturi nalazi podatak da Burgov metod daje dobre rezultate ukoliko je proces stvarno autoregresivni, dok u drugim slučajevima često daje pomerene i lošije estimacije [49].

Prilikom kontrolnog eksperimenta pri estimaciji parametara poznatog modela signala dobijeni rezultati (Slika 2.10) pokazuju neznatne i skoro identične rezultate u pogledu praćenja promena parametara i u pogledu estimacije vrednosti parametara modela u stacionarnom stanju. Ono što bi bilo zanimljivo a što će biti dato u poglavlju 2.3.8 jeste poređenje ovih metoda u smislu krajnjeg kvaliteta estimacije (kumulativne kvadratne greške estimacije) i u pogledu brzine izvršavanja.



Slika 2.10: Trajektorije estimiranih parametara modela  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem Burgove metode estimacije

### 2.3.5. Metoda najmanjih kvadrata

Metoda najmanjih kvadrata (*engl. Least Squares – LS*) se ne zasniva na traženju nepomerenog estimatora minimalne varijanse već parametre modela estimira tako što minimizuje kvadratnu razliku između odbiraka signala i njihovih procenjenih vrednosti (kvadratnu grešku estimacije). Ovaj način estimacije je prvo opisao Gaus još krajem 18. i početkom 19. veka kada je formulisao osnovni koncept metode najmanjih kvadrata tako što je rekao da je najbolji izbor nepoznatih vrednosti onaj koji je najverovatniji, a nejverovatnije vrednosti su one za koje će suma kvadrata razlika između opserviranih i estimiranih vrednosti biti najmanja.

Ako pretpostavimo da je potrebno estimirati nepoznate parametre AR modela reda  $p$  ( $a_1, a_2, \dots, a_p$ ) koji se nalaze u vektoru  $\boldsymbol{\theta}$ , iz  $N$  odbiraka signala  $y(n)$ , gde je  $N \geq p$ , veza između ovih merenja i parametara modela u  $n$ -tom trenutku je data jednačinom (2.58)

$$y(n) = \mathbf{Z}^T(n)\boldsymbol{\theta} + u(n) \quad (2.58)$$

gde je  $\mathbf{Z}^T = [-y(n-1), -y(n-2), \dots, -y(n-p)]$  poznati  $(1 \times p)$  vektor merenja a  $u(n)$  šum merenja. Metoda najmanjih kvadrata estimira nepoznate parametre  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p]^T$  tako da estimirane vrednosti signala  $\hat{y}(n)$  budu što bližnije izmerenim tako što minimizuje kvadratnu grešku estimacije (2.59) [11, 54-57].

$$J_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^n (y(i) - \mathbf{Z}^T(i)\boldsymbol{\theta})^2 \quad (2.59)$$

Kao i do sada, minimizacija kriterijuma se vrši tako što se kriterijumska funkcija diferencira po parametrima modela  $\boldsymbol{\theta}$  i izjednačava sa nulom. Ako sada primenimo prvi izvod po traženim parametrima  $\boldsymbol{\theta}$  na obe strane jednačine (2.59) i izjednačimo sa nulom (2.60), dobijamo set linearnih jednačina (2.61).

$$\frac{\partial J_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=0}^n -2\mathbf{Z}(i)(y(i) - \mathbf{Z}^T(i)\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (2.60)$$

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{Z}(i)y(i) = (\sum_{i=0}^n \mathbf{Z}(i)\mathbf{Z}^T(i))\boldsymbol{\theta} \quad (2.61)$$

Jednačine (2.61) koje je potrebno rešiti da bi se došlo do estimacije  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p]^T$  se nazivaju normalne jednačine i mogu se rešiti, pod pretpostavkom da je matrica  $\sum_{i=0}^n \mathbf{Z}(i)\mathbf{Z}^T(i)$  nesingularna i invertibilna, na sledeći način (2.62)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}(n)\mathbf{b}(n) \quad (2.62)$$

gde su inverzna korelaciona matrica  $\mathbf{P}(n)$  i vektor  $\mathbf{b}(n)$  dati jednačinama (2.63) i (2.64), respektivno.

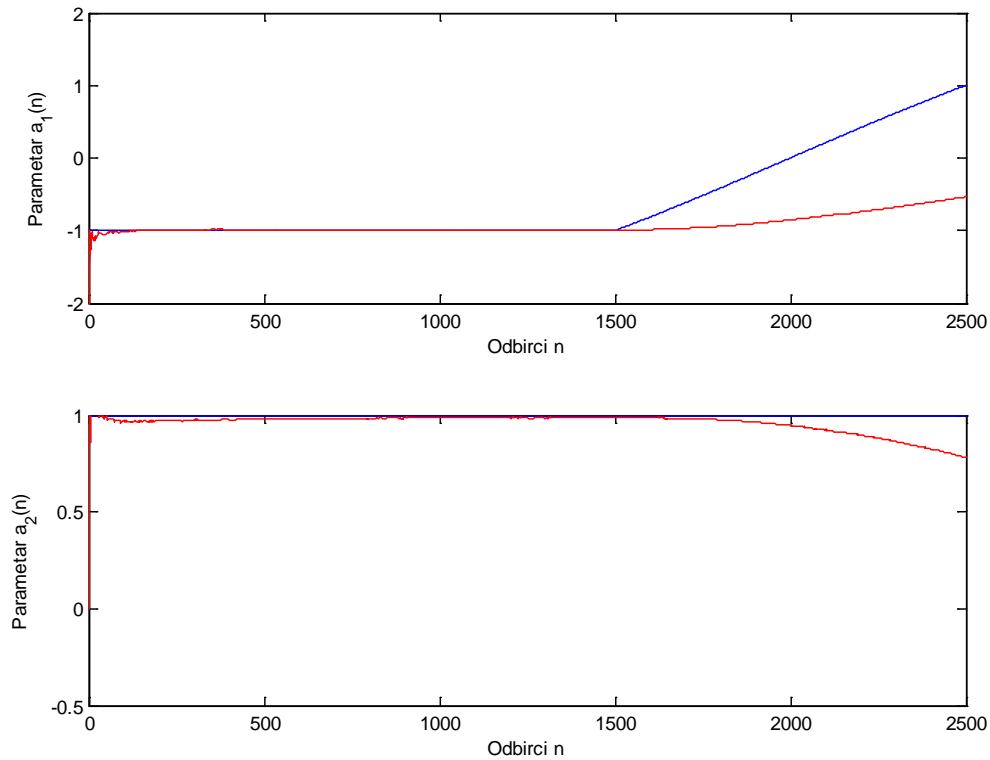
$$\mathbf{P}(n) = (\sum_{i=0}^n \mathbf{Z}(i)\mathbf{Z}^T(i))^{-1} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{b}(n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{Z}(i)y(i) \quad (2.64)$$

Metoda najmanjih kvadrata, iako daje najverovatnija rešenja, ima dva jako izražena nedostatka. Prvi je nedostatak to što radi u serijskoj (*engl. Batch*) formi, pa se sa svakim novim odbirkom merenja moraju ponovo estimirati nepoznati parametri modela i mora se ponovo računati inverzna korelaciona matrica  $\mathbf{P}(n)$ , ali to je generalni problem i za sve prethodno opisane metode, i on se može rešiti uvođenjem rekurzivnih metoda, o kojima će biti reči u kasnijim poglavljima. Drugi je što, kao i prethodne metode, očekuje da je estimirani signal stacionaran.

Prilikom kontrolisanog eksperimenta je zadržana praksa da se sa svakim novim odbirkom iznova vrši estimacija parametara modela signala. Rezultati (Slika 2.11) prikazuju skoro identične rezultate u pogledu praćenja promena parametara i u pogledu estimacije vrednosti parametara modela u stacionarnom stanju. Takođe, ono što bi bilo zanimljivo a što će biti dato u poglavlju 2.3.8 jeste poređenje ovih metoda u smislu krajnjeg kvaliteta estimacije (kumulativne kvadratne greške estimacije) i u pogledu brzine izvršavanja.





150

Slika 2.11: Trajektorije estimiranih parametara  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem metode najmanjih kvadrata

### 2.3.6. Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata

Kako je serijska forma identifikovana kao jedan od glavnih problema metode najmanjih kvadrata kada se radi o signalima čiji se parametri modela moraju estimirati sa svakim novim odbirkom merenja (što je ujedno i najčešći sličaj sa aplikacijama koje rade u realnom vremenu), razvijene su rekurzivne metode rešavanja jednačina (2.62-2.64) [10-12, 58]. Polazeći od jednačine inverzne korelacione matrice (2.63) zapisane u malo drugačijem obliku (2.65),

$$\mathbf{P}^{-1}(n) = \mathbf{P}^{-1}(n-1) + \mathbf{Z}(n)\mathbf{Z}^T(n) \quad (2.65)$$

koju, pošto se radi o matricnim jednačinama, pomnožimo sa  $\mathbf{P}(n)$  sa leve i  $\mathbf{P}(n-1)$  sa desne strane dobijamo (2.66).

$$\mathbf{P}(n-1) = \mathbf{P}(n) + \mathbf{P}(n)\mathbf{Z}(n)\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1) \quad (2.66)$$

Nakon množenja (2.66) sa vektorom merenja  $\mathbf{Z}(n)$  sa desne strane dobijamo (2.67).

$$\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n) = \mathbf{P}(n)\mathbf{Z}(n)[1 + \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)] \quad (2.67)$$

Nakon množenja sa  $[1 + \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)]^{-1}\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)$  sa desne strane jednačine (2.67) i zamene sa (2.66) dobijamo (2.68) što je alternativni zapis inverzije matrice iz (2.63), poznat kao lema inverzije matrice [59, 60].

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n-1) - \mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)[1 + \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)]^{-1}\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1) \quad (2.68)$$

Ako sada sa označimo vektor pojačanja (2.69)

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)[1 + \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)]^{-1} \quad (2.69)$$

inverzna korelaciona matrica  $\mathbf{P}(n)$  postaje (2.70).

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1) \quad (2.70)$$

Koristeći se malo drugačijim zapisom vektora  $\mathbf{b}(n)$  (2.71)

$$\mathbf{b}(n) = \mathbf{b}(n) + \mathbf{Z}(i)y(i) \quad (2.71)$$

i zamenom jednačina (2.70 i 2.71) u jednačinu (2.62) dobija se (2.72)

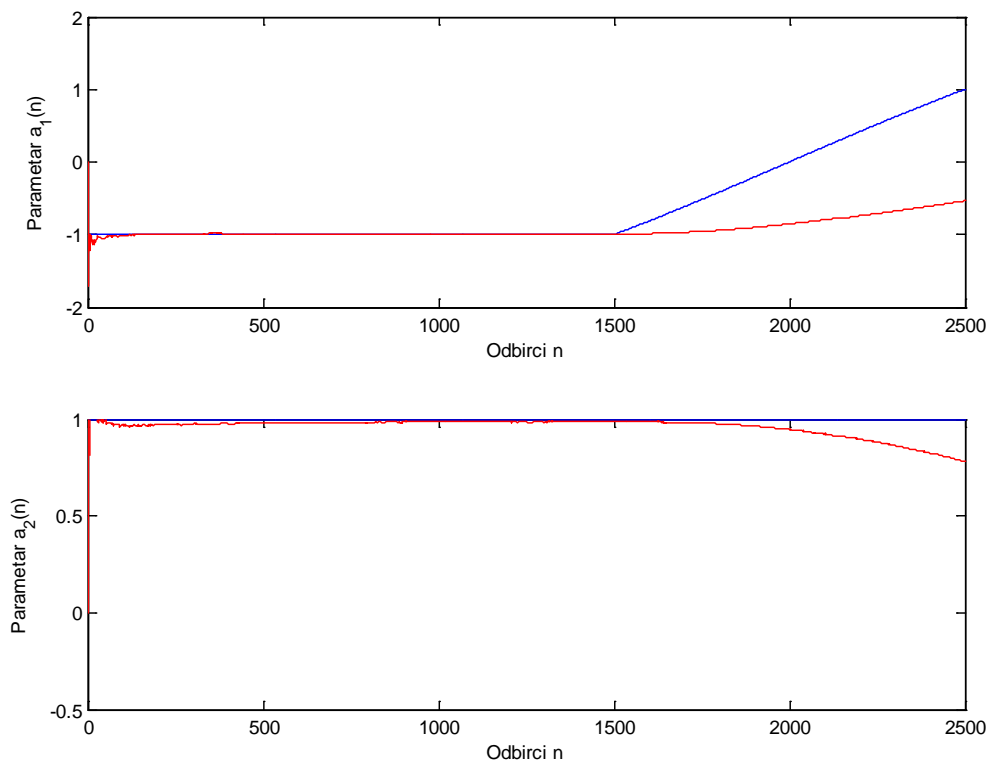
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(n) = \{\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)[1 + \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)]^{-1}\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\} \{\mathbf{b}(n) + \mathbf{Z}(i)y(i)\} \quad (2.72)$$

odakle se može izvesti rekurzivna jednačina estimacije parametara  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(n)$  (2.73).

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(n) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(n-1) + \mathbf{K}(n) \left( y(n) - \mathbf{Z}^T(n)\hat{\boldsymbol{\theta}}(n-1) \right) \quad (2.73)$$

Jednačine (2.69, 2.70 i 2.73) predstavljaju rekurzivnu metodu najmanjih kvadrata (*engl. Recursive Least Squares – RLS*) [10-12, 58].

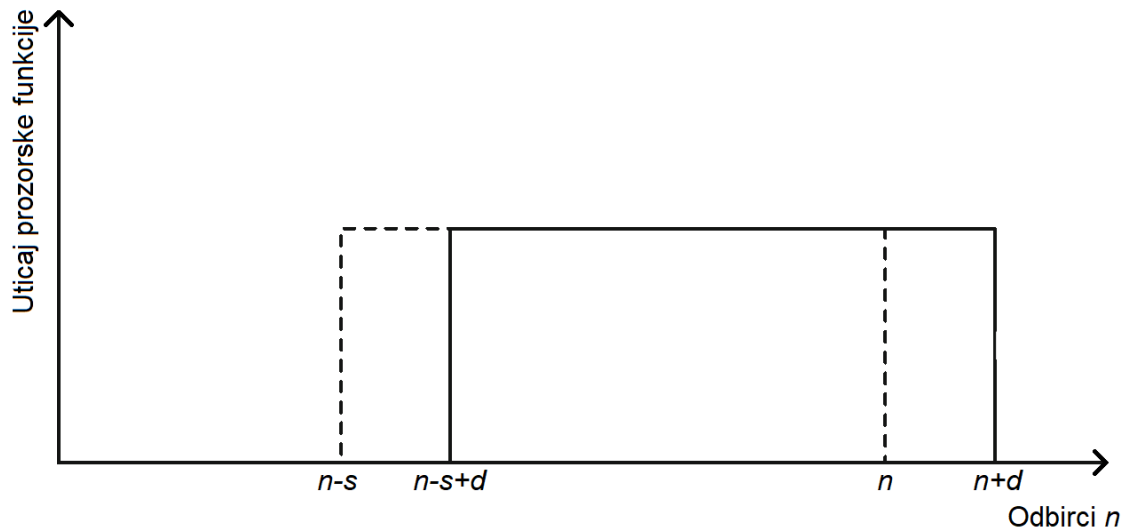
Prilikom kontrolnog eksperimenta koji je rađen i sa svim prethodnim metodama, dobijaju se gotovo identični rezultati (Slika 2.12) kao i prilikom korišćenja nerekurzivne metode, pošto je iz nje i izvedena rekurzivna metoda najmanjih kvadrata. Razlika je u vremenu izvršavanja i brzini estimacije, o čemu će biti reči u poglavlju 2.3.8.



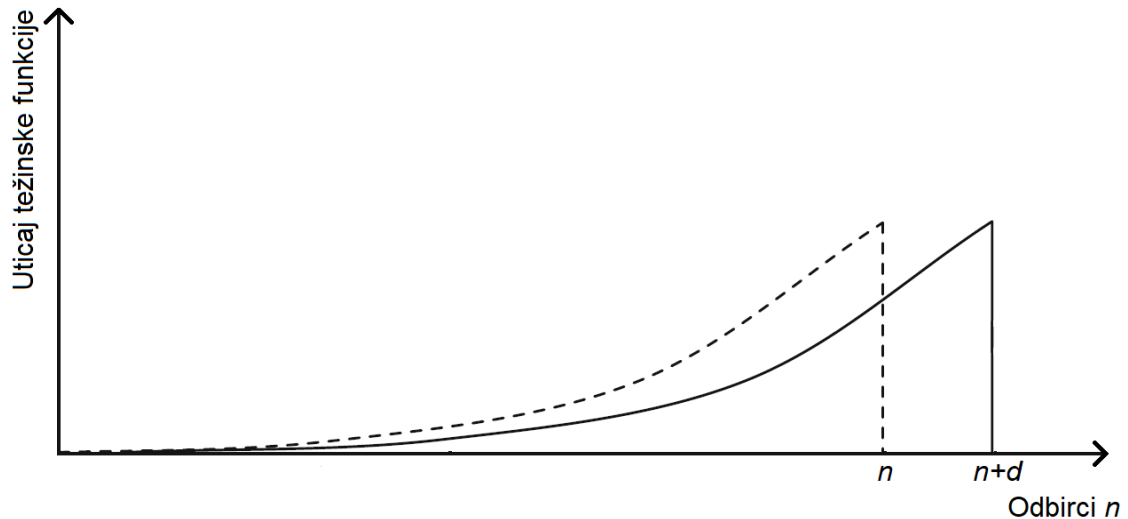
Slika 2.12: Trajektorije estimiranih parametara modela  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem rekurzivne metode najmanjih kvadrata

### 2.3.7. Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom

Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata je veoma efikasna, u smislu vremena potrebnog za izračunavanje vrednosti parametara modela signala. Pored toga, i tačnost estimacije je veoma visoka kada se radi o stacionarnim signalima. Međutim, problem se javlja kada je signal koji se estimira nestacionaran, tj. čiji se parametri modela menjaju tokom vremena. U tom slučaju, dva osnovna pristupa su da se estimacije baziraju na samo određenom broju poslednjih merenja, tj. na korišćenju takozvane prozorske funkcije (*engl. Sliding Window*) ili da se se napravi eksponencijalna težinska funkcija koja će veći značaj dati poslednjim merenjima, dok starija merenja eksponencijalno iščezavaju (*engl. Exponential Weighting Factor*). U slučaju korišćenja prozorske funkcije (Slika 2.13) jasno je da je glavni problem izabrati broj odbiraka  $s$  koji ulaze u estimaciju, koji, u zavisnosti od aplikacije, mora biti dovoljno veliki kako bi se dobile nepomerene estimacije parametara modela odgovarajućeg kvaliteta, dok sa druge strane mora biti dovoljno mali kako bi se ispratile promene u vrednostima parametara meodela. Isti slučaj se javlja i pri korišćenju eksponencijalne težinske funkcije (Slika 2.14), samo što se u ovom slučaju mora izabrati vrednost težinskog faktora  $\lambda$ , takva da bude dovoljno veliki kako bi period “zaboravljanja” bio duži i kako bi se dobile estimacije sa manjom kvadratnom greškom u stacionarnom stanju, dok sa druge strane mora biti dovoljno mali kako bi prilikom estimacije parametara modela nestacionarnih signala imali adekvatno praćenje promena [11].



Slika 2.13: Primena kvadratne prozorske funkcije prilikom estimacije parametara modela nestacionarnih signala



Slika 2.14: Primena eksponencijalne težinske funkcije prilikom estimacije parametara modela nestacionarnih signala

Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom (engl. *Weighted Recursive Least Squares – WRLS*) minimizuje kvadratnu grešku estimacije, tj. kriterijum minimizacije (2.59) proširuje korišćenjem težinskog faktora  $\lambda$  kako bi skorija merenja imala veću “težinu” (2.74)

$$J_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} (y(i) - \mathbf{Z}^T(i)\boldsymbol{\theta}(i))^2 \quad (2.74)$$

gde je  $y(i)$  mereni signal,  $\mathbf{Z}^T(i) = [-y(i-1) - y(i-2) - \dots - y(i-p)]$  vektor merenja čija veličina zavisi od reda modela  $p$  i  $\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$  vektor parametara modela [11, 12, 19-22, 25].

Vrednost težinskog vektora  $\lambda$  se uzima u opsegu (0,1]. Na taj način najveći uticaoaj na vrednost kriterijuma imaju merenja iz bliske prošlosti, dok ona starija postepeno iščezavaju. Minimizacijom

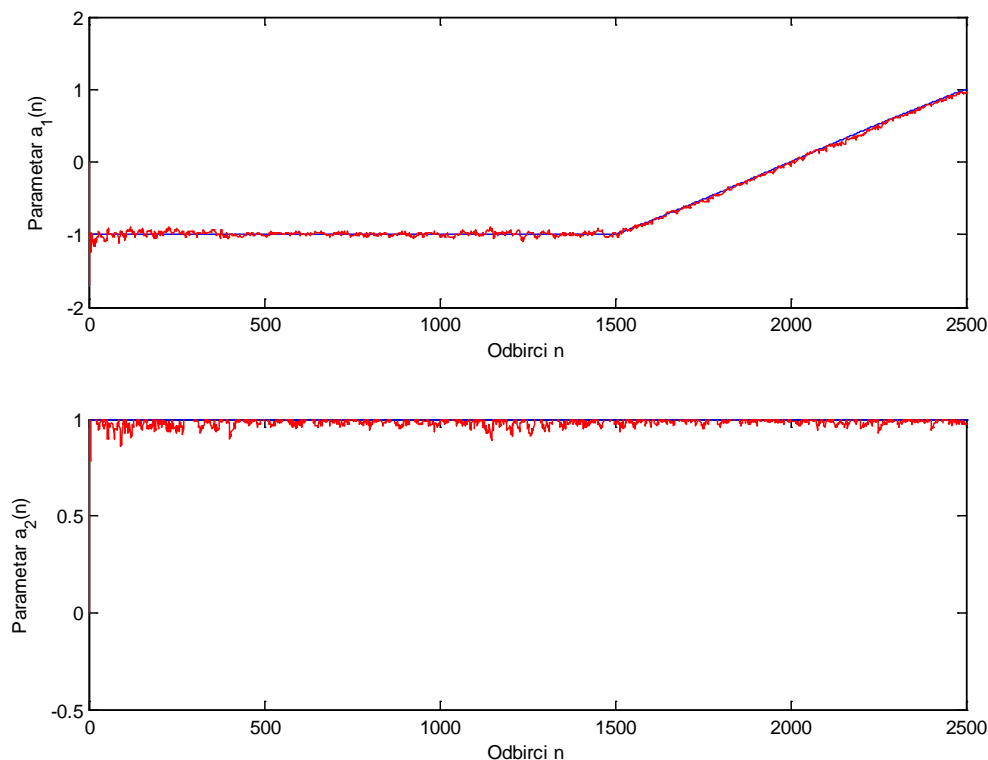
kriterijuma (2.74) dobijaju se modifikovane jednačine rekurzivne metode najmanjih kvadrata (2.69, 2.70 i 2.73) koje opisuju rekurzivnu metodu najmanjih kvadrata (2.75-2.77).

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)(\lambda + \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n))^{-1} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)) \quad (2.76)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(n) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(n-1) + \mathbf{K}(n)(y(n) - \mathbf{Z}^T(n)\hat{\boldsymbol{\theta}}(n-1)) \quad (2.77)$$

Prilikom kontrolnog eksperimenta koji je rađen i sa svim prethodnim metodama, postavljeno je da je vrednost težinskog faktora  $\lambda = 0,90$ . Rezultati (Slika 2.15) pokazuju dosta veliki šum merenja, pošto je sama metoda osmišljena tako da veći značaj daje skorijim merenjima, tj postavljen je eksponencijalni prozor nad kojim se vrši estimacija, pa je stoga i uticaj šuma u tom slučaju veći. Glavna razlika se međutim ogleda u tome da je sada metod potpuno ispratio promene vrednosti parametara modela u nestacionarnom delu signala.



Slika 2.15: Trajektorije estimiranih parametara modela  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom

### 2.3.8. Poređenje opisanih metoda

Kako bismo adekvatno poredili opisane metode i istakli njihove prednosti i nedostatke izvršeni su dodatni eksperimenti kako bi se ispitao kvalitet estimacije tokom stacionarnog i tokom

nestacionarnog perioda, kao i računarska kompleksnost svake od metoda. Dodatni eksperimenti su vršeni nad veštački generisanim signalom opisanim na početku poglavlja 2.3, sa tim da je posmatrano da odbirci stižu jedan za drugim i sa svakim novim odbirkom je estimacija ponavljena kako bi se simulirali uslovi rada u realnom vremenu.

Može se zaključiti (Tabela 2.1, treća kolona) da je vremenski najzahtevnija metoda najmanjih kvadrata (približno 8 sek), dok se najbrže izvršavaju rekurzivne metode (približno 0.035 sek) što je i očekivano. Međutim zanimljivo je da su i autokorelaciona metoda i Burgova metoda prilično računarski nezahtevne (približno 0.3 sek). Kovarijantna i modifikovana kovarijantna metoda su srednje računarske kompleksnosti (od 0.7 do 1.2 sek).

Tabela 2.1: Analiza performansi opisanih metoda

r.br.	naziv metode	vreme izvršavanja	kvadratna greška tokom stacionarnog dela	ukupna kvadratna greška
1	Autokorelaciona metoda	0.3183 s	5.8695	896.5871
2	Kovarijantna metoda	0.6722 s	5.1336	897.1798
3	Modifikovana kovarijantna metoda	1.2356 s	1.7905	893.5917
4	Burgova metoda	0.2451 s	1.6612	893.0621
5	Metoda najmanjih kvadrata	8.1979 s	5.1336	897.1798
6	Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata	0.0372 s	2.7471	894.7836
7	Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom	0.0356 s	5.0295	6.1301

Što se tiče kvadratne greške estimacije, pošto su eksperimenti vršeni nad veštački generisanom signalu, čije stvarne parametre  $\boldsymbol{\theta}(n) = [a_1(n), a_2(n)]^T$  znamo, kriterijum kvaliteta estimacije po kome poredimo metode je postavljen kao ukupna kvadratna greška estimacije parametara  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(n) = [\hat{a}_1(n), \hat{a}_2(n)]^T$  (2.78).

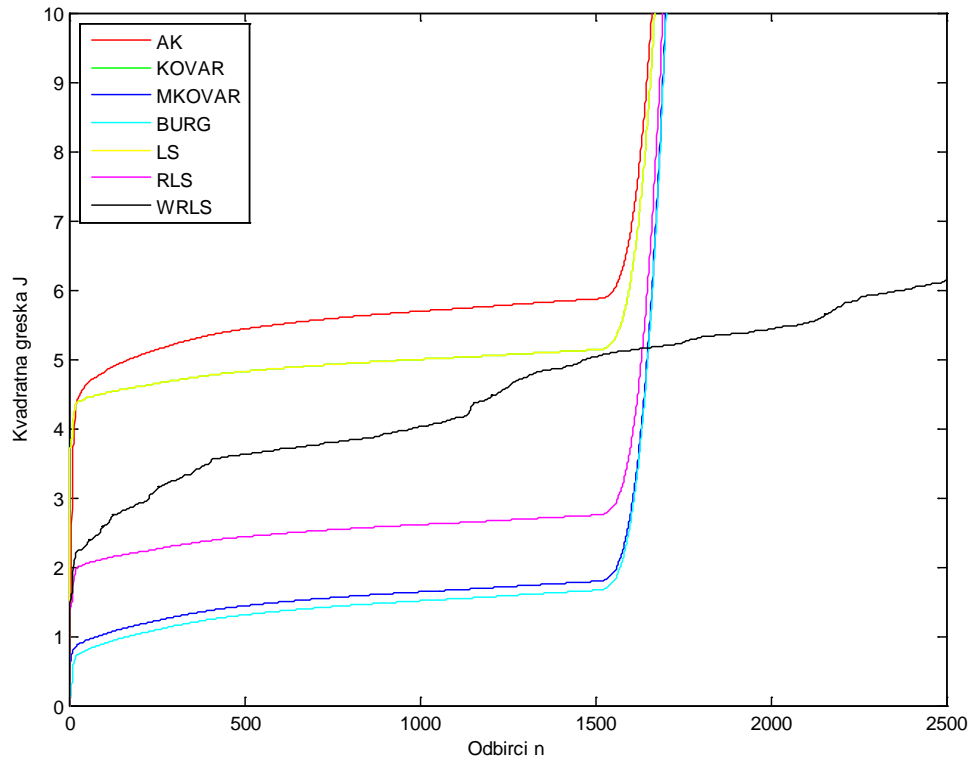
$$J = \sum_{i=1}^N \left( (\hat{a}_1(i) - a_1(i))^2 + (\hat{a}_2(i) - a_2(i))^2 \right) \quad (2.78)$$

Kvadratna greška estimacije (2.78) je izračunata za prvih 1500 odbiraka koji predstavljaju stacionaran deo signala (Tabela 2.1, četvrta kolona) i na celokupnom signalu tj svih 2500 odbiraka (Tabela 2.1, peta kolona). Ono što je i očekivano, je da je Burgova metoda imala najmanju kvadratnu grešku estimacije tokom stacionarnog dela signala pošto je i pokazano da ona daje odlične rezultate pri redu sa stacionarnim signalima koji su stvarno AR tipa [49], međutim zanimljivo je da je, u stacionarnom delu, i modifikovana kovarijantna metoda dala slične rezultate u pogledu kvaliteta estimacije. Ostale metode su sve imale slične rezultate.

Sa druge strane, rekurzivna metoda najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom je imala ubedljivo najbolje ukupne rezultate, pošto je ona jedina metoda koja je projektovana da estimira parametre modela nestacionarnih signala. Ovo se najbolje vidi grafički (Slika 2.16) gde su prikazane trajektorije kumulativne greške estimacije (2.79), gde se zaključuje da, iako Burgova metoda i modifikovana kovarijantna metoda daju najbolje rezultate tokom stacionarnog dela, onog trenutka kada signal postane nestacionaran, njihovi rezultati, očekivano, se rapidno pogoršavaju, dok jedino rekurzivna

metoda najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom daje prihvatljive rezultate prilikom estimacije parametara modela nestacionarnih signala. Stoga će se i ostatak rada skoncentrisati na korišćenje rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom kao osnovne metode estimacije i mogućnostima njene nadogradnje.

$$J(n) = \sum_{i=1}^n \left( (\hat{a}_1(i) - a_1(i))^2 + (\hat{a}_2(i) - a_2(i))^2 \right) \quad (2.79)$$

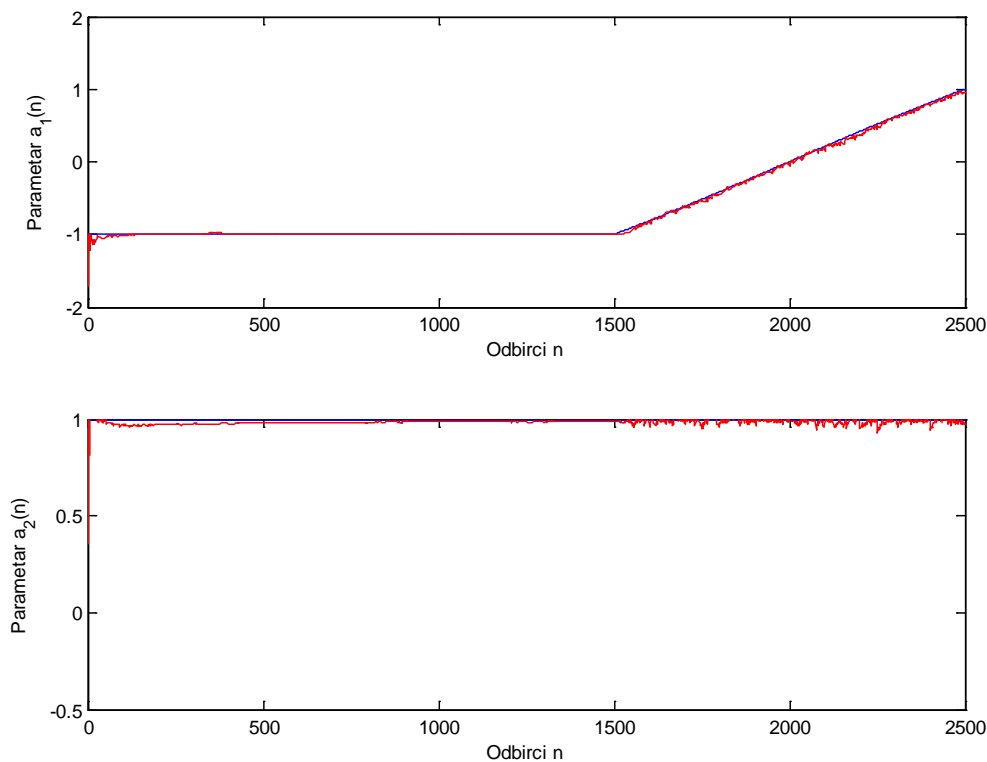


Slika 2.16: Prikaz kumulativnih grešaka estimacije za sve metode

### 3. ADAPTIVNE TEHNIKE ESTIMACIJE PARAMETARA MODELA NESTACIONARNIH SIGNALA

Fiksni težinski faktor  $\lambda$  u jednačinama rekurzivne metode najmanjih kvadrata (2.75-2.77) utiče na to da se smanji greška estimacije usled promene parametara modela signala. Međutim, poželjno bi bilo da u vremenskom periodu u kom je signal stacionaran, faktor zaboravljanja bude visok (približan jedinici) kako bi više merenja ušlo u proces estimacije i na taj način povećala preciznost estimacije, dok u vremenskom periodu u kom je signal nestacionaran, poželjno je da se faktor  $\lambda$  smanji da bi se uticaj pređašnjih merenja što pre „zaboravio“ i na taj način omogućiti brže praćenje promena u parametrima modela. Stoga se težinski faktor često naziva i faktor zaboravljanja.

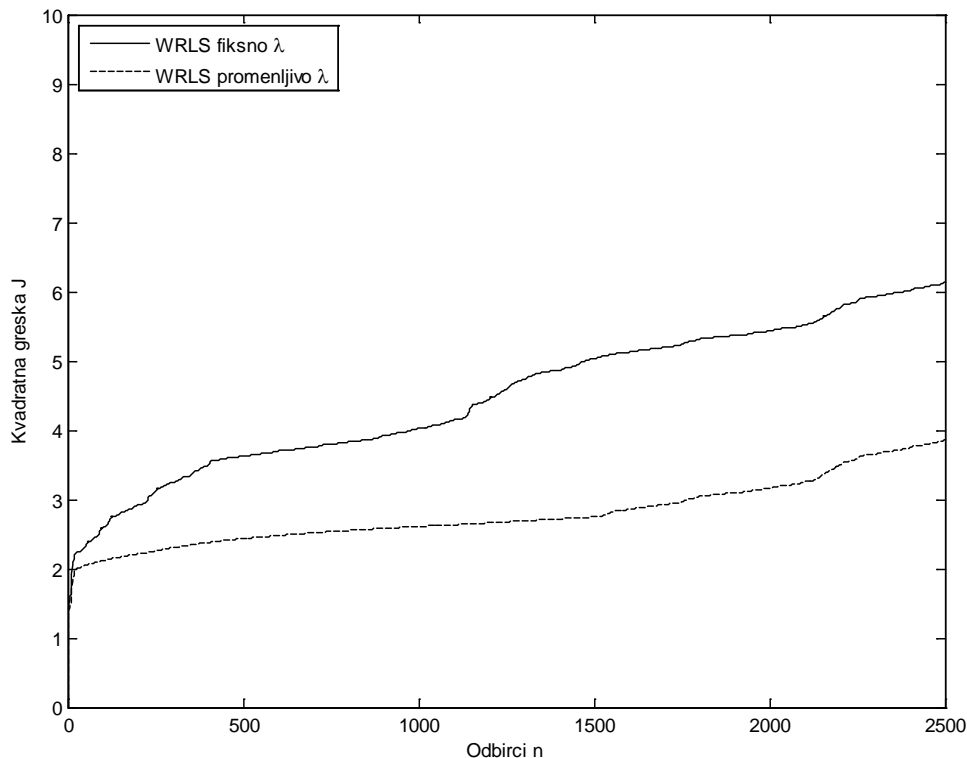
Kako bi se dodatno naglasile dobre strane ovakvog, adaptivnog, filtriranja ponovljen je eksperiment iz poglavlja 2.3.7, s' tim da je postavljen težinski faktor  $\lambda = 1.0$  tokom prvih 1500 odbiraka estimacije, dok je tokom poslednjih 1000 odbiraka težinski faktor bio  $\lambda = 0.9$ . Dobijeni rezultati (Slika 3.1) pokazuju da je uticaj šuma merenja umanjen tokom stacionarnog dela signala u poređenju sa korišćenjem fiksnog težinskog faktora (Slika 2.15). Vreme izvršavanja rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa promenljivim težinskim faktorom je ostalo isto (0.0362 sek).



Slika 3.1: Trajektorije estimiranih parametara modela  $a_1(n)$  (gore) i  $a_2(n)$  (dole) korišćenjem rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa promenljivim težinskim faktorom



Ukoliko pogledamo kumulativnu kvadratnu grešku (Slika 3.2) možemo zaključiti i da je kvalitet estimacije opisan kriterijumom (2.79) poboljšan skoro za 50% tj, tokom stacionarnog dela signala kvalitet estimacije iznosi 2.7471 nasuprot 5.0295 koliko je iznosio pri korišćenju fiksnog težinskog faktora. Takođe, ukupan kvalitet estimacije je poboljšan i iznosi 3.859 što je opet značajno poboljšanje u odnosu na 6.1301 koliko je iznosio prilikom rada sa fiksnim težinskim faktorom.



*Slika 3.2: Prikaz kumulativne kvadratne greške estimacije za slučaj rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa fiksnim i promenljivim faktorom zaboravljanja*

Sve prethodno navedeno dovodi do potrebe da se faktor  $\lambda$  kontinualno adaptira, a to sa druge strane povlači potrebu za razvojem algoritama za detekciju nestacionarnosti. Tokom godina su razvijene različite adaptivne tehnike estimacije parametara modela. Pojedine su razvijene specifično za neke određene modele signala, dok su većina njih univerzalne i mogu se primeniti na različite modele signala. Kao što je već u uvodu i napisano, neke od njih su zasnovane na modifikaciji kovarijacione matrice [13-15], druge na korišćenju klizne prozorske funkcije [6, 10, 16-18], dok su najčešće korišćene metode zasnovane na težinskom faktoru [12, 19-24]. Kako su tehnike zasnovane na adaptaciji faktora zaboravljanja i korišćenju rekurzivne metode najzastupljenije, u nastavku rada će biti opisane dve tehnike [23, 24], za koje je istraživanjem utvrđeno da daju najbolje rezultate za širok spektar različitih filtriranih signala.

### 3.1. Adaptacija faktora zaboravljanja zasnovana na gradijentu srednje kvadratne greške

Adaptacija faktora zaboravljanja zasnovana na gradijentu srednje kvadratne greške (*engl. Gradient-Based Variable Forgetting Factor Recursive Least Squares GVFF-RLS*) polazi od jednačine a posteriori greške estimacije signala korišćenjem rekurzivne metode najmanjih kvadrata (3.1) [24]

$$e(n) = y(n) - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(n)\mathbf{Z}(n) \quad (3.1)$$

gde je mereni signal  $y(n)$  opisan sa (3.2).

$$y(n) = \boldsymbol{\theta}^T(n)\mathbf{Z}(n) + u(n) \quad (3.2)$$

Uvođenjem vektora greške estimacije parametara  $\mathbf{V}(n)$  (3.3)

$$\mathbf{V}(n) = \boldsymbol{\theta}(n) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(n) \quad (3.3)$$

i zamenom (3.2) i (3.3) u (3.1) dobija se jednačina greške (3.4)

$$e(n) = u(n) + \mathbf{V}^T(n)\mathbf{Z}(n) \quad (3.4)$$

Varijansa ovako opisane srednje kvadratne greške (*engl. Mean Square Error – MSE*) je zapravo suma varijanse šuma i srednje kvadratne greške estimacije parametara modela (3.5).

$$\sigma_e^2(n) = E\{e^2(n)\} = E\{u^2(n)\} + E\{\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{V}(n)\mathbf{V}^T(n)\mathbf{Z}(n)\} = \sigma_u^2(n) + \sigma_{ex}^2(n) \quad (3.5)$$

Analizom srednje kvadratne greške estimacije parametara modela, opisane kao priraštaj srednje kvadratne greške (*engl. Excess Mean Square Error – EMSE*) dobijene su jednačine (3.6) i (3.7) [24]

$$\rho_n = 1 + \lambda(n-1)\rho_{n-1} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\rho}_n = 1 + \lambda^2(n-1)\tilde{\rho}_{n-1} \quad (3.7)$$

gde se, posmatrajući jednačine, zaključuje da dok je signal stacionaran i  $\lambda(n)$  blisko 1 vrednosti  $\rho_n$  i  $\tilde{\rho}_n$  monotono rastu. Prilikom promene stacionarnosti signala očekuje se da vrednost težinskog faktora  $\lambda(n)$  opadne, ali čak i da opadne na  $\sim 0$ , vrednosti  $\rho_n$  i  $\tilde{\rho}_n$  ne mogu biti manji od 1 jer je  $\lambda(n)$  uvek pozitivno. Daljom analizom dobijen je koeficijent  $\zeta_n$  (3.8) za koji je zaključeno da mora biti u opsegu  $0 \leq \zeta_n < 1$  da bi algoritam konvergirao, i koeficijent  $h_n$  (3.9) za koji se može primetiti da je uvek negativan [24].

$$\zeta_n = 1 - \frac{2[(p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2] - (p+2)\rho_n}{\rho_n[(p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2]} \quad (3.8)$$

$$h_n = \frac{2}{\rho_n} - \frac{2}{(p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2} \quad (3.9)$$

Rešavanjem nejednačine  $0 \leq \zeta_n < 1$  dobija se da mora biti ispunjen uslov (3.10)

$$2[(p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2] - (p+2)\rho_n > 0 \quad (3.10)$$

tj. zamenom jednačina (3.6) i (3.7) u (3.10) dobija se nejednakost (3.11)

$$2[(p+1)[1 + \lambda^2(n-1)\tilde{\rho}_{n-1}] + [1 + \lambda(n-1)\rho_{n-1}]^2] - (p+2)[1 + \lambda(n-1)\rho_{n-1}] > 0 \quad (3.11)$$

koja kada se reši daje uslove konvergencije algoritma (3.12-3.13).

$$D = (p-2)^2\rho_{n-1}^2 - 8(p+2)[(p+1)\tilde{\rho}_{n-1} + \rho_{n-1}^2] \quad (3.12)$$

$$\lambda_{\min} = \frac{(p-2)\rho_{n-1} + \sqrt{D}}{4[(p+1)\tilde{\rho}_{n-1} + \rho_{n-1}^2]} \quad (3.13)$$

U slučaju da je diskriminanta  $D$  (3.12) manja od nule, težinski faktor mora biti ograničen sa donje strane nulom, tj.  $\lambda(n) > 0$ , dok u slučaju da je  $D \geq 0$ , težinski faktor mora biti ograničen sa donje strane sa  $\lambda_{\min}$  (3.13), tj.  $\lambda(n) > \lambda_{\min}$ , gde je  $p$  red modela signala koji se koristi. Ovo ograničavanje težinskog faktora je nophodno kako bi se obezbedila stabilnost algoritma. Ukoliko se radi sa signalima nižeg reda recimo autoregresivnog modela (*engl. Autoregressive – AR*) prvog ili drugog reda tj. AR(1) ili AR(2),  $D$  je uvek negativno pa se uslovi (3.11-3.13) i ne koriste već se jednostavno postavlja granica  $\lambda(n) > 0$  [24].

Naprednom analizom EMSE izveden je gradijentni mehanizam (3.14) [24]

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_e^2(n+1)}{\partial \lambda} = \zeta_n \frac{\partial \hat{\sigma}_e^2(n)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \zeta_n}{\partial \lambda} \hat{\sigma}_e^2(n) + \frac{\partial h_n}{\partial \lambda} \hat{\sigma}_u^2(n) \quad (3.14)$$

U kome su  $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \lambda}$  (3.15) i  $\frac{\partial h_n}{\partial \lambda}$  (3.16) dati kao izvodi jednačina (3.8) i (3.9), respektivno.

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial \lambda} = \frac{2}{\rho_n^2} \frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda} - \frac{p+2}{((p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2)^2} \left[ (p+1) \frac{\partial \tilde{\rho}_n}{\partial \lambda} + 2\rho_n \frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda} \right] \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \lambda} = -\frac{2}{\rho_n^2} \frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda} - \frac{2}{((p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2)^2} \left[ (p+1) \frac{\partial \tilde{\rho}_n}{\partial \lambda} + 2\rho_n \frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda} \right] \quad (3.16)$$

Računanjem izvoda jednačina (3.6) i (3.7) po težinskom faktoru  $\lambda$  dobijaju se  $\frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda}$  (3.17) i  $\frac{\partial \tilde{\rho}_n}{\partial \lambda}$  (3.18)

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda} = \rho_{n-1} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_n}{\partial \lambda} = 2\lambda(n-1) \tilde{\rho}_{n-1} \quad (3.18)$$

čijom se zamenom u (3.15) i (3.16) dobijaju jednačine (3.19) i (3.20) koje opisuju gradijent srednje kvadratne greške (3.14) [24].

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial \lambda} = 2 \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n^2} - \frac{p+2}{((p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2)^2} [(p+1)2\lambda(n-1)\tilde{\rho}_{n-1} + 2\rho_n\rho_{n-1}] \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \lambda} = -2 \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n^2} - \frac{2}{((p+1)\tilde{\rho}_n + \rho_n^2)^2} [(p+1)2\lambda(n-1)\tilde{\rho}_{n-1} + 2\rho_n\rho_{n-1}] \quad (3.20)$$

Pošto je u praksi pokazano da je teško dobiti stvarnu varijansu greške estimacije i varijansu šuma, predloženo je da se one estimiraju na kraćem (3.21) i dužem (3.22) eksponencijalnom prozoru,

$$\hat{\sigma}_e^2(n) = \alpha \hat{\sigma}_e^2(n-1) + (1-\alpha)e^2(n) \quad (3.21)$$

$$\hat{\sigma}_u^2(n) = \beta \hat{\sigma}_u^2(n-1) + (1-\beta)e^2(n) \quad (3.22)$$

gde su  $\alpha$  i  $\beta$  koeficijenti niskopropusnog filtera i  $\beta > \alpha$ . Kada je sistem stacionaran  $\hat{\sigma}_e^2(n) \sim \hat{\sigma}_u^2(n)$  dok pri promeni stacionarnosti dolazi do povećanja greške estimacije koja će se pre uočiti u  $\hat{\sigma}_e^2(n)$  zbog kraćeg prozora, tj  $\hat{\sigma}_e^2(n) > \hat{\sigma}_u^2(n)$ .

Na kraju, tehnika adaptacije faktora zaboravljanja zasnovana na gradijentu srednje kvadratne greške (3.14), opisanog jednačinama (3.6-3.7 i 3.19-3.22) je data sa (3.23) [24]

$$\lambda(n) = \left[ \lambda(n-1) - \frac{\mu}{1-\lambda(n-1)} \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}_e^2(n)}{\partial \lambda} \right]_{2\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \quad (3.23)$$

gde je donja granica je postavljena na  $2\lambda_{\min}$  kako bi se obezbedila stabilnost algoritma. Parametar  $\mu$  je definisan kao korak gradijenta i on ima dosta uticaja na samu adaptaciju. Naime, ideja je da kada je gradijent blizak nuli, faktor zaboravljanja se skoro i ne menja ( $\lambda(n) \sim \lambda(n-1)$ ). Kada dodje do

promena u parametrima modela (promene stacionarnosti), izvod  $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \lambda}$  (3.19) naglo raste pa samim tim i gradijent (3.14) raste i tada se faktor zaboravljanja naglo obara (3.23). Čim sistem krene da ulazi u stacionarno stanje negativna priroda izvoda  $\frac{\partial h_n}{\partial \lambda}$  (3.20) povlači gradijent u negativne vrednosti i faktor zaboravljanja raste, do gornje granice opisane parametrom  $\lambda_{\max}$ .

### **Parametri algoritma koji se moraju podesiti:**

Parametri koje se moraju podesiti kako bi GVFF-RLS algoritam radio na zadovoljavajućem nivou su:

$\lambda_{\max}$  – maksimalna vrednost faktora zaboravljanja. Obično se bira malo manja od 1, kako bi algoritam imao zadovoljavajuće praćenje sporih promena parametara modela. U originalnom radu [24] je data diskusija o temi maksimalne vrednosti FF zavisno od SNR gde je navedeno da najbolje rezultate daje  $\lambda_{\max} = 0.9968$  za  $SNR = 10dB$  i  $\lambda_{\max} = 0.99$  za  $SNR = 20dB$ .

$\alpha$  – parametar usrednjavanja (*engl. smoothing parameter*) kraćeg eksponencijalnog prozora. U originalnom radu [24] nije data tačna analiza kako se bira, jedino što je dato jeste da za vrednost  $\alpha = 0.3$  daje najbolje performanse u eksperimentalnim rezultatima, i da mora biti manji od  $\beta$  što je i logično pošto je u pitanju kraći prozor filtriranja

$\beta$  – parametar usrednjavanja dužeg eksponencijalnog prozora. Za ovaj parametar je data malo ozbiljnija analiza u originalnom radu [24], gde je rađeno ispitivanje kako promena parametara  $\alpha$  i  $\mu$  utiče na  $\beta$  i došlo se do zaključka da u većini slučajeva vrednost  $\beta = 0.99$  daje najbolje performanse algoritma bez obzira na izbor  $\alpha$  i  $\mu$ .

$\mu$  – korak gradijenta. Opet na neki način parametar usrednjavanja, jer što je parametar veći, ceo algoritam je osetljiviji i brže smanjuje faktor zaboravljanja kada dođe do detekcije nestacionarnosti, ali tada je takođe i veća verovatnoća lažnog alarma, tj, i male promene gradijenta (3.14) dovode do velikih promena FF. Sa druge strane, izborom jako malog koraka  $\mu$  dolazi se do veće robusnosti algoritma, ali i do sporijeg reagovanja na promene u stacionarnosti signala. Ne postoji preporuka za izbor osim da, naravno, mora biti veći od 0. U većini analiza u originalnom radu [24] ima vrednost  $\mu = 0.04$ .

## 3.2. Adaptacija faktora zaboravljanja zasnovana na estimaciji varijanse kvadratne greške

Adaptacija faktora zaboravljanja zasnovana na estimaciji varijanse kvadratne greške (*engl. Robust Variable Forgetting Factor Recursive Least Squares RVFF-RLS*) polazi od ideje da signal greške estimacije  $e(n)$  (3.27) rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom opisane jednačinama (3.24-3.28), ne treba biti nula, jer će u tom slučaju uticaj šuma biti efektivno sadržan u estimacijama parametara  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(n)$ . Umesto toga, ideja je da se šum  $u(n)$  pojavi u grešci estimacije  $e(n)$  [23].

$$y(n) = \boldsymbol{\theta}^T(n)\mathbf{Z}(n) + u(n) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n)(\lambda + \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n))^{-1} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)) \quad (3.26)$$

$$e(n) = y(n) - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(n-1)\mathbf{Z}(n) \quad (3.27)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(n) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(n-1) + \mathbf{K}(n)e(n) \quad (3.28)$$

U jednačinama rekurzivne metode najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom (3.24-3.28), greška  $e(n)$  opisana jednačinom (3.27) je ustvari *a priori* greška estimacije. Sa druge strane, *a posteriori* greška estimacije može biti opisana nakon estimacije parametara modela kao (3.29).

$$\epsilon(n) = y(n) - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(n)\mathbf{Z}(n) \quad (3.29)$$

Zamenom (3.27) i (3.28) u (3.29) dobijamo vezu između ove dve greške (3.30)

$$\epsilon(n) = e(n)(1 - \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{K}(n)) \quad (3.30)$$

Kako je poželjno da se uticaj šuma oslika u  $\epsilon(n)$ , tj da je  $E\{\epsilon^2(n)\} = E\{u^2(n)\} = \sigma_u^2(n)$  [61], korišćenjem (3.30) i (3.25) može se izvesti matematičko očekivanje (3.31)

$$E\left\{\left[1 - \frac{q(n)}{\lambda(n)+q(n)}\right]^2\right\} = \frac{\sigma_u^2(n)}{\sigma_e^2(n)} \quad (3.31)$$

gde je  $q(n)$  opisano sa (3.32) i  $\sigma_e^2(n)$  (3.33) snaga *a priori* greške estimacije.

$$q(n) = \mathbf{Z}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Z}(n) \quad (3.32)$$

$$E\{e^2(n)\} = \sigma_e^2(n) \quad (3.33)$$

Rešavanjem jednačine (3.31), pod pretpostavkom da su ulazni signal i signal greške nekorelisani, dobija se osnovna jednačina adaptacije faktora zaboravljanja (3.34) [23].

$$\lambda(n) = \frac{\hat{\sigma}_q(n)\hat{\sigma}_u(n)}{\hat{\sigma}_e(n) - \hat{\sigma}_u(n)} \quad (3.34)$$

gde je  $E\{q^2(n)\} = \sigma_q^2(n)$ . Iz praktičnih razloga, estimacije snage  $\hat{\sigma}_e^2(n)$  i  $\hat{\sigma}_q^2(n)$  se računaju rekurzivno (3.35) i (3.36)

$$\hat{\sigma}_e^2(n) = \alpha\hat{\sigma}_e^2(n-1) + (1-\alpha)e^2(n) \quad (3.35)$$

$$\hat{\sigma}_q^2(n) = \alpha\hat{\sigma}_q^2(n-1) + (1-\alpha)q^2(n) \quad (3.36)$$

gde je  $\alpha = 1 - 1/(K_\alpha p)$  faktor usrednjavanja i  $K_\alpha \geq 2$  [23]. Takođe iz praktičnih razloga, predloženo je da se snaga šuma estimira iz greške estimacije  $e(n)$ , samo na dužem eksponencijalnom prozoru (3.37)

$$\hat{\sigma}_u^2(n) = \beta\hat{\sigma}_u^2(n-1) + (1-\beta)e^2(n) \quad (3.37)$$

gde je  $\beta = 1 - 1/(K_\beta p)$  faktor usrednjavanja i  $K_\beta > K_\alpha$  [23, 24].

Jednačine (3.24-3.28) opisuju rekurzivni metod najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom, dok jednačine (3.27, 3.32, 3.34-3.37) opisuju tehniku adaptacije faktora zaboravljanja. Međutim, jednačina koja opisuje faktor zaboravljanja mora biti modifikovana kako bi se osigurala stabilnost algoritma. Naime, u stacionarnom stanju, estimacija  $\hat{\sigma}_e(n)$  računata na kraćem eksponencijalnom prozoru varira oko estimacije  $\hat{\sigma}_u(n)$ , i stoga se može desiti da težinski faktor ima ili jako visoku vrednost ili čak negativnu vrednost. Stoga u tim slučajevima kada je estimacija  $\hat{\sigma}_e(n)$  bliska estimaciji  $\hat{\sigma}_u(n)$  treba ograničiti težinski faktor sa gornje strane na 1 ili na vrednost  $\lambda_{\max}$  blisku 1. Iz praktičnih razloga, kako bi se pojednostavio algoritam, i smanjio broj izračunavanja, ukoliko je ispunjen uslov (3.38)

$$\hat{\sigma}_e(n) \leq \gamma\hat{\sigma}_u(n) \quad (3.38)$$

gde je  $1 < \gamma \leq 2$ , postavlja se da je  $\lambda(n) = \lambda_{\max}$ , dok se u suprotnom vrši adaptacija faktora zaboravljanja po pravilu (3.39). Konstanta  $\xi$  se jednostavno postavlja na jako malu pozitivnu vrednost kako bi se sprečilo eventualno deljenje sa nulom [23].

$$\lambda(n) = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_q(n)\hat{\sigma}_u(n)}{\xi + |\hat{\sigma}_e(n) - \hat{\sigma}_u(n)|}, \lambda_{\max} \right\} \quad (3.39)$$

Sada, jednačine (3.27, 3.32, 3.35-3.39) predstavljaju konačan algoritam adaptacije faktora zaboravljanja.

Pošto su estimacije varijanse greške računane na kraćem i dužem eksponencijalnom prozoru  $\hat{\sigma}_e^2(n)$  i  $\hat{\sigma}_u^2(n)$  (3.35) i (3.37) postiže se da je  $\hat{\sigma}_e^2(n)$  brže promenljiva i više reaguje na promene greške estimacije dok je  $\hat{\sigma}_u^2(n)$  “sporija”. Ideja algoritma je da kada dodje do promene stacionarnosti, zbog različite dužine eksponencijalnih prozora nad kojima je vršena estimacija varijanse greške, dolazi do odstupanja  $\hat{\sigma}_e(n)$  od  $\hat{\sigma}_u(n)$  i delioci  $|\hat{\sigma}_e(n) - \hat{\sigma}_u(n)|$  u jednačini (3.39) postaje veći pa samim ti i vrednost količnika  $\frac{\hat{\sigma}_q(n)\hat{\sigma}_u(n)}{\xi + |\hat{\sigma}_e(n) - \hat{\sigma}_u(n)|}$  opada a stoga i vrednost FF opada. Estimacija  $\hat{\sigma}_q(n)$  iz (3.36) služi da, onog trenutka kada sistem ponovo krene da ulazi u stacionarno stanje, poveća vrednost faktora zaboravljanja čak iako se to još uvek nije odrazilo na estimacije  $\hat{\sigma}_e(n)$  i  $\hat{\sigma}_u(n)$ . Kada su estimacije  $\hat{\sigma}_e(n)$  i  $\hat{\sigma}_u(n)$  bliske, tj. kada je ispunjen uslov (3.38) smatra se da je signal stacionaran i ne vrši se adaptacija faktora zaboravljanja.

### **Parametri algoritma koji se moraju podesiti:**

Parametri koje se moraju podesiti kako bi RVFF-RLS algoritam radio na zadovoljavajućem nivou su:

$\lambda_{\max}$  – maksimalna vrednost faktora zaboravljanja. Obično se bira malo manja od 1, kako bi algoritam imao zadovoljavajuće praćenje sporih promena parametara koje ne može adekvatno da detektuje, a ipak dovoljno bliska 1 da bi algoritam sa davao dobre rezultate tokom perioda kada je signal stacionaran. Sam parametar ima velikog uticaja na ceo algoritam pošto je, zbog uslova (3.38) koji je često ispunjen, faktor zaboravljanja često postavljen na maksimalnu vrednost  $\lambda = \lambda_{\max}$ .

$\alpha$  – parametar usrednjavanja kraćeg eksponencijalnog prozora koji se koristi za estimaciju  $\hat{\sigma}_e^2(n)$  (3.35) i  $\hat{\sigma}_q^2(n)$  (3.36). Ne podešava se direktno parametar  $\alpha$  već se podešava  $K_\alpha$  dok je  $\alpha = 1 - \frac{1}{K_\alpha p}$ .

Parametar  $p$  je red modela signala koji se estimira. Na ovaj način se uvek postiže da je  $0 < \alpha < 1$ . Jedini suslov je da je  $K_\alpha \geq 2$ . Što je  $K_\alpha$  veći to je i  $\alpha$  veći pa je eksponencijalni prozor za estimaciju  $\hat{\sigma}_e^2(n)$  duži. Na taj način algoritam postaje sporiji tj. sporije detektuje promene jer je uslov (3.38) češće ispunjen pa nema adaptacije već je  $\lambda = \lambda_{\max}$ , i suprotno, što je  $K_\alpha$  manji to je i  $\alpha$  manji pa je eksponencijalni prozor kraći i promene se bolje detektuju ali je tada i dosta veći uticaj šuma pa često dolazi i do nepotrebne adaptacije i umanjenja faktora zaboravljanja.

$\beta$  – parametar usrednjavanja dužeg eksponencijalnog prozora koji se koristi za estimaciju  $\hat{\sigma}_v^2(n)$  (3.37). Ne podešava se direktno parametar  $\beta$  već se podešava  $K_\beta$  dok je  $\beta = 1 - \frac{1}{K_\beta p}$ . Parametar  $p$  je red modela signala koji se estimira. Na ovaj način se uvek postiže da je  $0 < \beta < 1$ . Jedini suslov je da je  $K_\beta \geq K_\alpha \geq 2$ . Uticaj je sličan kao i kod parametra  $K_\alpha$ .

$\xi$  – parametar koji sprečava deljenje sa nulom. Nema nikakvog uticaja, prosto služi kao zaštita od deljenja sa nulom u slučaju da je  $\hat{\sigma}_e(n) - \hat{\sigma}_u(n) = 0$ . Obično se postavlja na neku vrednost blisku nuli, recimo  $\xi = 10^{-8}$ .

$\gamma$  – parametar koji utiče na ispunjenost uslova (3.38). Ograničenje u izboru parametra je  $1 < \gamma \leq 2$ . Ima direktan uticaj na robustnost algoritma. Kada je  $\gamma$  bliže 1 uslov (3.38) često nije ispunjen (zbog dužeg prozora na kome se estimira  $\hat{\sigma}_u^2(n)$  je tromiji pa stalno “kasni” za  $\hat{\sigma}_e^2(n)$ ) pa se stalno vrši adaptacija faktora zaboravljanja i stoga je i jako veliki uticaj šuma. Suprotno tome, što je  $\gamma$  veće, uslov (3.38) je češće ispunjen pa je većinu vremena  $\lambda = \lambda_{\max}$  i ne vrši se adaptacija. Na taj način



algoritam je robustniji, ali generalno više podseća na metodu sa fiksnim faktorom zaboravljanja, i detektuje samo skokovite promene u stacionarnosti. U suprotnom se oslanja na  $\lambda_{\max}$  koje je dovoljno manje od 1 da bi algoritam adekvatno pratio spore promene.

## 4. DIZAJN SISTEMA ZA ADAPTACIJU FAKTORA ZABORAVLJANJA PRIMENOM APSOLUTNIH KONAČNIH RAZLIKA

### 4.1. Apsolutne konačne razlike

Uvođenje varijabilnog faktora zaboravljanja podrazumeva potrebu za algoritmima koji će detektovati promene stacionarnosti signala. Glavni zahtev takvih algoritama je da u što kraćem periodu detektuju promenu nestacionarnosti, tj. da od trenutka promene stacionarnosti do trenutka detekcije prođe što manje vremena kako se ne bi degradirala tačnost estimacije. Pokazano je da se nestacionarnost signala može detektovati korišćenjem samo odbiraka signala čiji se model estimira, tj. računanjem apsolutnih konačnih razlika (*engl. Absolute Finite Differences AFD*) tog signala [62, 63, 64].

Ako je mereni signal opisan autoregresivnim modelom (4.1),

$$y(n) = \boldsymbol{\theta}^T(n)\mathbf{Z}(n) + u(n) \quad (4.1)$$

gde je  $\mathbf{Z}^T(n) = [-y(n-1) - y(n-2) - \dots - y(n-p)]$  vektor merenja čija veličina zavisi od reda  $p$  AR modela,  $\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$  vektor parametara modela  $u(n)$  aktivacioni šum, konačne razlike mogu biti opisane jednačinom (4.2).

$$b(n) = y(n) - y(n-1) \quad (4.2)$$

Ukoliko na konačne razlike (4.2) dodamo operator apsolutne vrednosti dolazi se do finalnog oblika apsolutnih konačnih razlika (4.3).

$$c(n) = |b(n)| \quad (4.3)$$

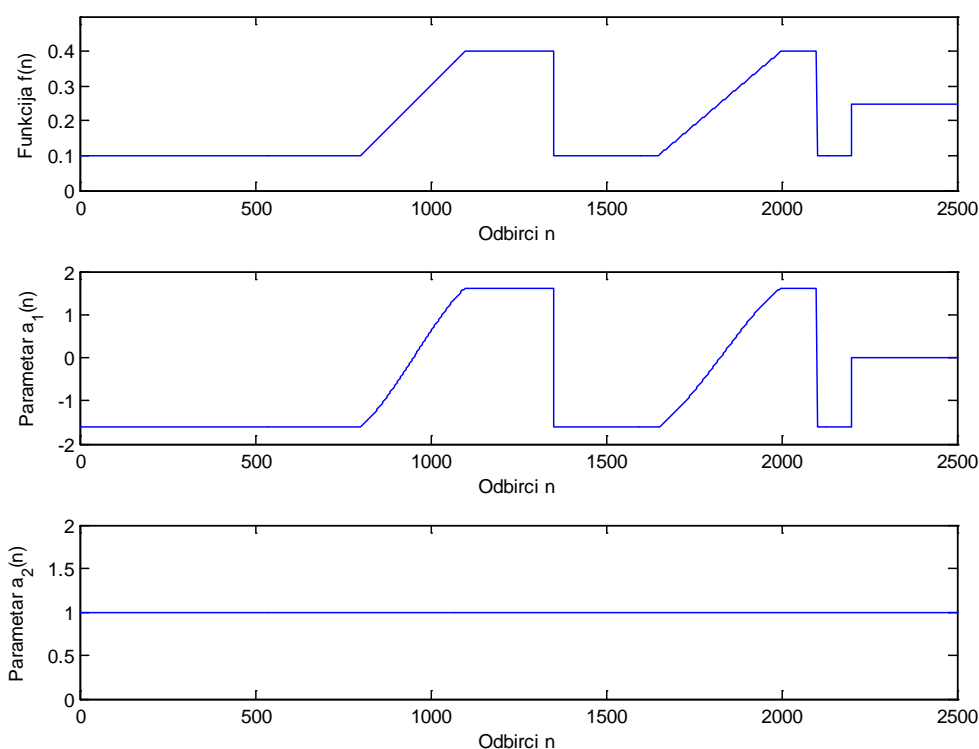
Ukoliko se radi sa signalima gde je jako izražen signal šuma, ili koji su sami po sebi brzo promenljivi, na signal apsolutnih konačnih razlika se može primeniti jednostavan filter propusnik niskih učestanosti u rekurzivnoj formi, ali će o tome više biti reči u poglavlju 4.3.

Kako bi se bolje objasnila ideja apsolutnih konačnih razlika, napravljen je jedan kontrolni eksperiment sa veštački generisanim signalom na osnovu autoregresivnog modela drugog reda (4.4) koji je nestacionaran i čiji se parametri modela menjaju po unapred definisanim, poznatim, trajektorijama (Slika 4.1),

$$y(n) = -a_1(n)y(n-1) - a_2(n)y(n-2) + u(n)$$

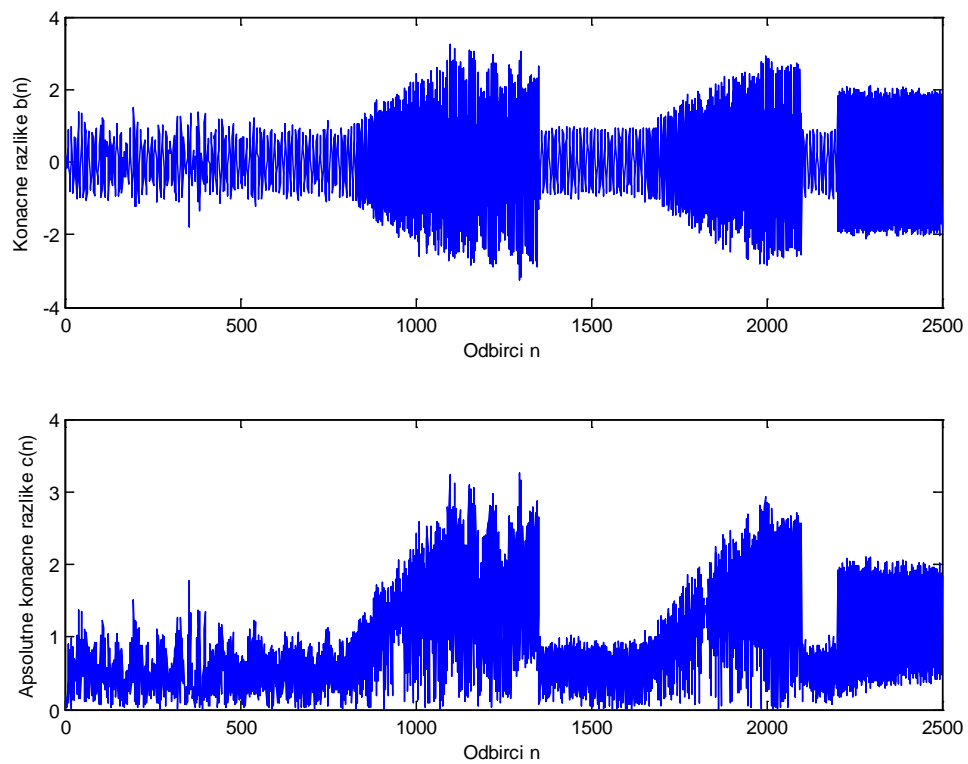
$$a_1(n) = -2\cos(2\pi f(n)); \quad a_2(n) = 1 \quad , \quad (4.4)$$

gde je  $u(t)$  beli Gausov šum nulte srednje vrednosti, dok je  $f(t)$  funkcija koja određuje trajektoriju promenljivog parametra modela  $a_1(t)$ . Trajanje signala je 2500 odbiraka i na generisan signal je dodat aditivni šum merenja  $SNR = 25dB$  kako bi se uslovi približili realnim uslovima. Parametar modela  $a_1(n)$  (Slika 4.1, sredina) definisan funkcijom  $f(n)$  (Slika 4.1, gore) ima nekoliko postepenih i nekoliko skokovitih promena u vrednosti. Parametar modela  $a_2(t)$  (Slika 4.1, dole) je konstantan. Trajektorije su postavljene tako da se ispune uslovi stabilnosti signala.



Slika 4.1: Trajektorije funkcije  $f(n)$  (gore) i parametara modela  $a_1(n)$  (sredina) i  $a_2(n)$  (dole)

Ukoliko sada pogledamo signal konačnih razlika (Slika 4.2, gore) računat po jednačini (4.2) i signal apsolutnih konačnih razlika (Slika 4.2, dole) računat po jednačini (4.3), jasno se uočava da se u njima nalazi informacija o promeni parametara modela signala. U sledećem poglavlju će teorijski i eksperimentalno biti pokazane ove zavisnosti u slučajevima različitih modela signala.



*Slika 4.2: Trajektorije signala konačnih razlika  $b(n)$  (gore) i apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  (dole)*

## 4.2. Statistike signala apsolutne konačne razlike

Prvo je potrebno dokazati da se u apsolutnim konačnim razlikama nalazi informacija o stacionarnosti signala, i da je ona dovoljno deskriptivna da se može izvući i na osnovu nje adaptirati faktor zaboravljanja. U tu svrhu, prvo će teorijski biti obrađene statistike signala apsolutnih konačnih razlika.

Nakon toga biće izvršena eksperimentalna analiza izvedenih zavisnosti, dok za neke zavisnosti koje su veoma kompleksne nećemo izvoditi teorijske zavisnosti već ćemo samo eksperimentalno pokazati zavisnost stacionarnosti signala od apsolutnih konačnih razlika.

### 4.2.1. Slučaj autoregresivnog modela prvog reda

Pretpostavimo da je korisni signal opisan modelom prvog reda (4.5) uz početni uslov (4.6)

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + u(n) \quad (4.5)$$

$$y(n_0) = y_0 \quad (4.6)$$

pri čemu je parametar modela  $a_1$  konstantan, a  $u(n)$  beli stohastički proces nulte srednje vrednosti i poznate varijanse  $\sigma_u^2 = \text{var}\{u(n)\}$ . Ukoliko je  $|a_1| < 1$ , za vremenske trenutke  $n \gg n_0$  može se smatrati da su isčezli početni uslovi diferencne jednačine (4.5), pa se od signala  $y(n)$  može očekivati ponašanje stacionarnih signala, bar u širem smislu. Drugim rečima, možemo smatrati nepromenljivost sledećih statistika (4.7-4.9).

$$E\{y(n)\} = m_y \quad (4.7)$$

$$\text{var}\{y(n)\} = \sigma_y^2 \quad (4.8)$$

$$E\{y(n)y(n-1)\} = \sigma_{n,n-1} \quad (4.9)$$

Sada se može odrediti matematičko očekivanje signala  $y(n)$  (4.10), a pošto je  $u(n)$  beli stohastički proces nulte srednje vrednosti  $E\{u(n)\} = 0$ , može se zaključiti da je i signal  $y(n)$  takođe nulte srednje vrednosti.

$$\begin{aligned} E\{y(n)\} &= E\{-a_1 y(n-1)\} + E\{u(n)\} \\ \Rightarrow m_y &= -a_1 m_y + E\{u(n)\} \\ \Rightarrow m_y &= \frac{E\{u(n)\}}{1+a_1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Na sličan način se može izvesti i varijansa signala  $y(n)$  (4.11),

$$\text{var}\{y(n)\} = a_1^2 \text{var}\{y(n-1)\} + \text{var}\{u(n)\} - 2a_1 E\{y(n-1)u(n)\} \quad (4.11)$$

a pošto je pretpostavljeno da je signal  $y(n)$  stacionaran bar u širem smislu, i da je signal  $u(n)$  beli stohastički proces, jednačina (4.11) se može zapisati u sledećem obliku (4.12)

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-a_1^2} \quad (4.12)$$

Takođe, pod istim pretpostavkama može se izračunati kovarijansa (4.13) između promenljivih  $y(n)$  i  $y(n-1)$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{n,n-1} &= E\{y(n)y(n-1)\} \\ &= E\{(-a_1y(n-1) + u(n))y(n-1)\} \\ &= -a_1E\{y^2(n-1)\} + E\{u(n)y(n-1)\} \\ &= -a_1\sigma_y^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Za konačne razlike opisane jednačinom (4.2) jednostavno se zaključuje da je to stohastički proces nulte srednje vrednosti (4.14) i poznate varijanse (4.15).

$$m_b(n) = E\{b(n)\} = E\{y(n)\} - E\{y(n-1)\} = 0 \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &= \text{var}\{b(n)\} \\ &= \text{var}\{y(n)\} + \text{var}\{y(n-1)\} - 2E\{y(n)y(n-1)\} \\ &= 2\sigma_y^2 - 2\sigma_{n,n-1} \\ &= 2(1+a_1)\sigma_y^2 \\ &= \frac{2(1+a_1)}{1-a_1^2}\sigma_u^2 \\ &= \frac{2}{1-a_1}\sigma_u^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pošto je signal apsolutne konačne razlike (4.3) signal od interesa za ovo izvođenje, prvo se mora definisati izraz za funkciju raspodele slučajne promenljive  $c(n)$  (4.16)

$$\begin{aligned} F_{c(n)}(\zeta) &= P\{|b(n)| \leq \zeta\} \\ &= \begin{cases} 0 & ; \zeta < 0 \\ P\{-\zeta \leq b \leq \zeta\} & \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & ; \zeta < 0 \\ \int_{-\zeta}^{\zeta} f_b(\delta)d\delta & \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

gde je sa  $f_b(\delta)$  označena funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive  $b(n)$ . Diferenciranjem izraza (4.16) dobija se funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive  $c(n)$  (4.17).

$$f_{c(n)}(\zeta) = \frac{dF_{c(n)}(\zeta)}{d\zeta} = \begin{cases} 0 & ; \zeta < 0 \\ f_b(\zeta) + f_b(-\zeta) & \end{cases} \quad (4.17)$$

Shodno tome matematičko očekivanje slučajne promenljive  $c(n)$  (4.3) može se predstaviti jednačinom (4.18).

$$m_c = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta f_{c(n)}(\zeta) d\zeta = \int_0^{\infty} \zeta (f_b(\zeta) + f_b(-\zeta)) d\zeta \quad (4.18)$$

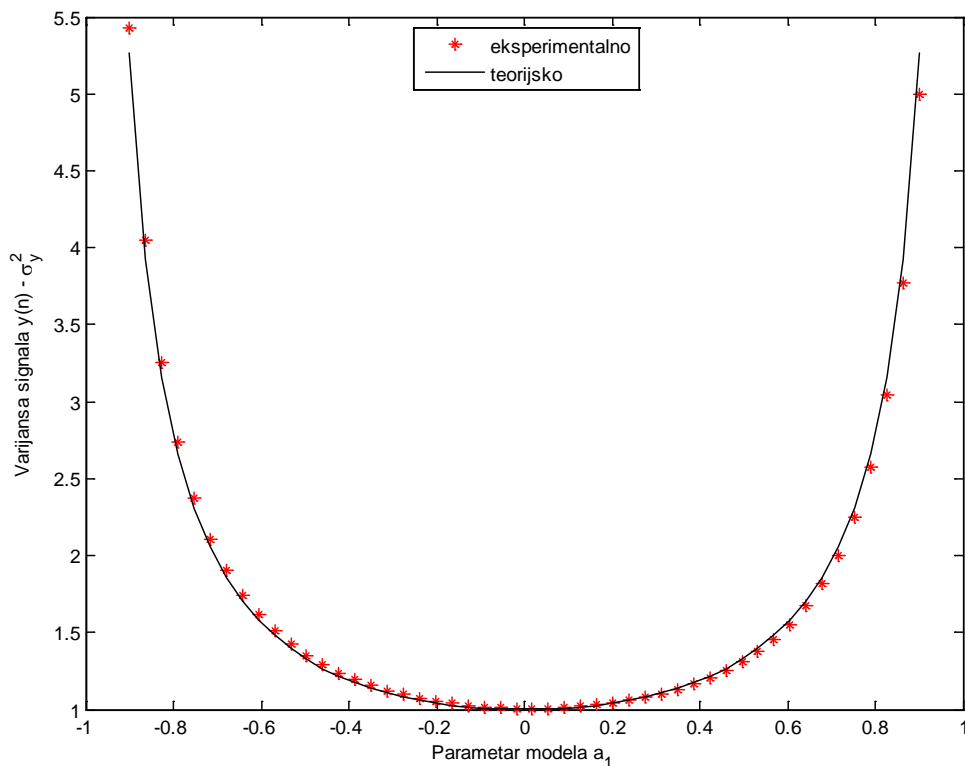
Prirodno je pretpostaviti da je slučajna promenljiva  $y(n)$  normalno raspodeljena. Čak i ukoliko je slučajna promenljiva  $u(n)$  raspodeljena po nekom drugom zakonu raspodele, na osnovu jednačine (4.5) u razvijenom obliku (4.19) i centralne granične teoreme, jasno je da raspodela promenljive  $y(n)$  teži Gausovskoj raspodeli kako  $n \rightarrow \infty$ .

$$y(n) = \sum_{k=n_0}^n (-a_1)^{n-k} u(k) + (-a_1)^{n-n_0} y(n_0) \quad (4.19)$$

Shodno tome će se u daljem tekstu podrazumevati da su promenljive  $y(n)$  a samim tim i  $b(n)$  Gausovske. Na osnovu tih pretpostavki može se rešiti integralna jednačina (4.18) i dobiti konačan izraz za matematičko očekivanje signala apsolutne konačne razlike (4.20) [62, 65].

$$\begin{aligned} m_c &= 2 \int_0^{\infty} \zeta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{b(n)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sigma_{b(n)}^2}\right) d\zeta \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{b(n)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sigma_{b(n)}^2}\right) d\left(\frac{\zeta^2}{\sigma_{b(n)}^2}\right) \\ &= \frac{2\sigma_{b(n)}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2\sigma_u}{\sqrt{\pi(1-a_1)}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Korišćenjem jednačine (4.5) generisano je  $N = 5000$  odbiraka signala  $y(n)$  sa Gausovski raspodeljenim aktivacionim šumom nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse i bez aditivnog šuma merenja, za različite vrednosti parametra modela  $a_1$  koji je variran od -0.9 do 0.9 kako bi se obezbedilo da sistem bude stabilan. Grafički su prikazane (Slika 4.3) eksperimentalno određene vrednosti varijanse signala  $y(n)$  i teorijski izvedena vrednost (4.12) u zavisnosti od vrednosti parametra modela  $a_1$ . Može se zaključiti da eksperimentalno dobijene vrednosti varijanse signala odgovaraju teorijski izvedenim vrednostima, što potvrđuje ispravnost izvođenja.

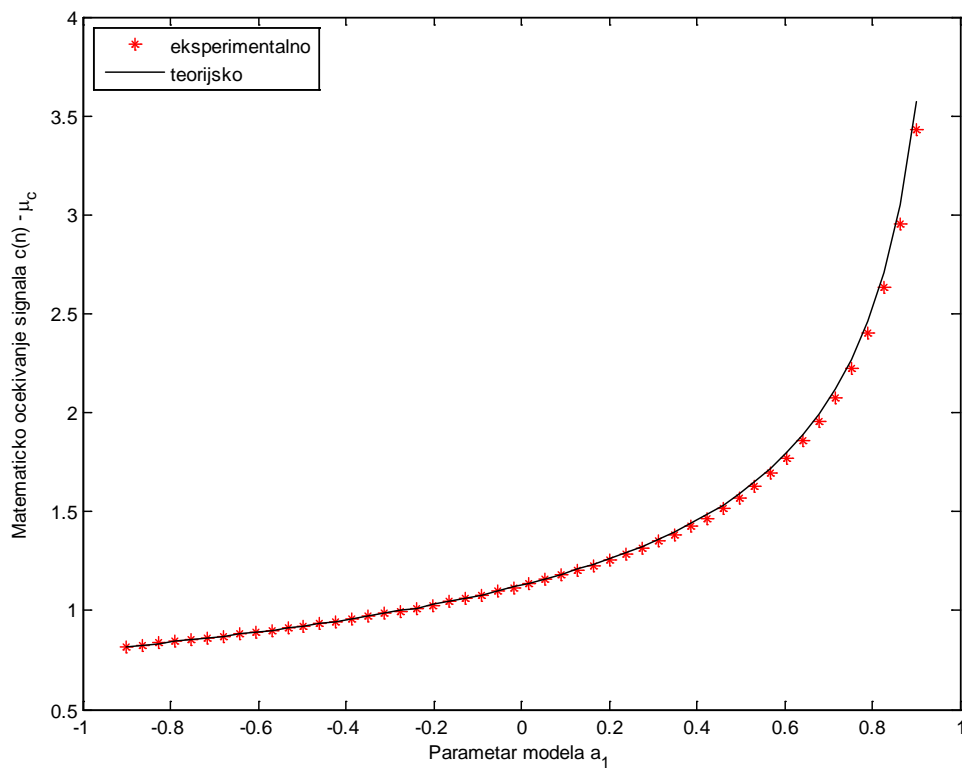


Slika 4.3: Prikaz eksperimentalno određene i teorijski izvedene varijanse signala  $y(n)$  za slučaj  $AR(1)$  modela

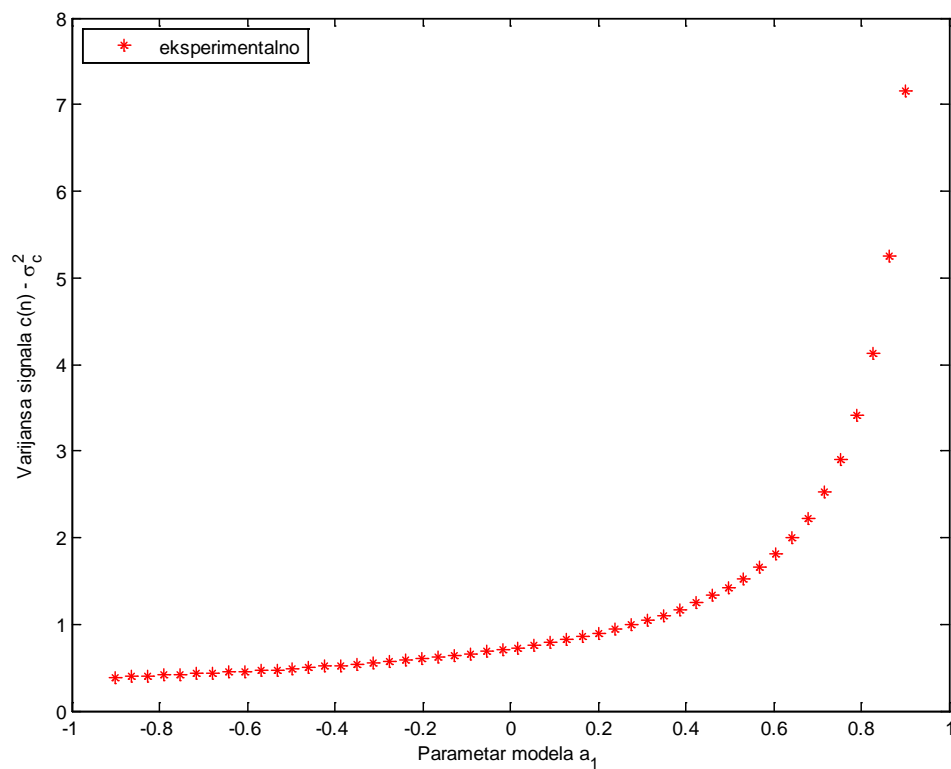
Za isti generisan signal, izračunate su i prikazane (Slika 4.4) eksperimentalno dobijene i teorijski izvedene (4.20) vrednosti matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika za različite vrednosti parametra modela  $a_1$ . Dobijeni rezultati pokazuju poklapanje teorijskih i eksperimentalnih rezultata, a pošto jednačina (4.20) pokazuje jasnu zavisnost očekivanja apsolutnih konačnih razlika od parametara modela, dok se sa grafika vidi i da su promene očekivanja jasno izražene, može se zaključiti da se takav signal može koristiti u detekciji nestacionarnosti signala.

Slični zaključci se mogu izvesti i posmatranjem eksperimentalno utvrđenih varijansi signala apsolutne konačne razlike (Slika 4.5). U ovom slučaju nisu određivane teorijske zavisnosti, zbog kompleksnosti izračunavanja.



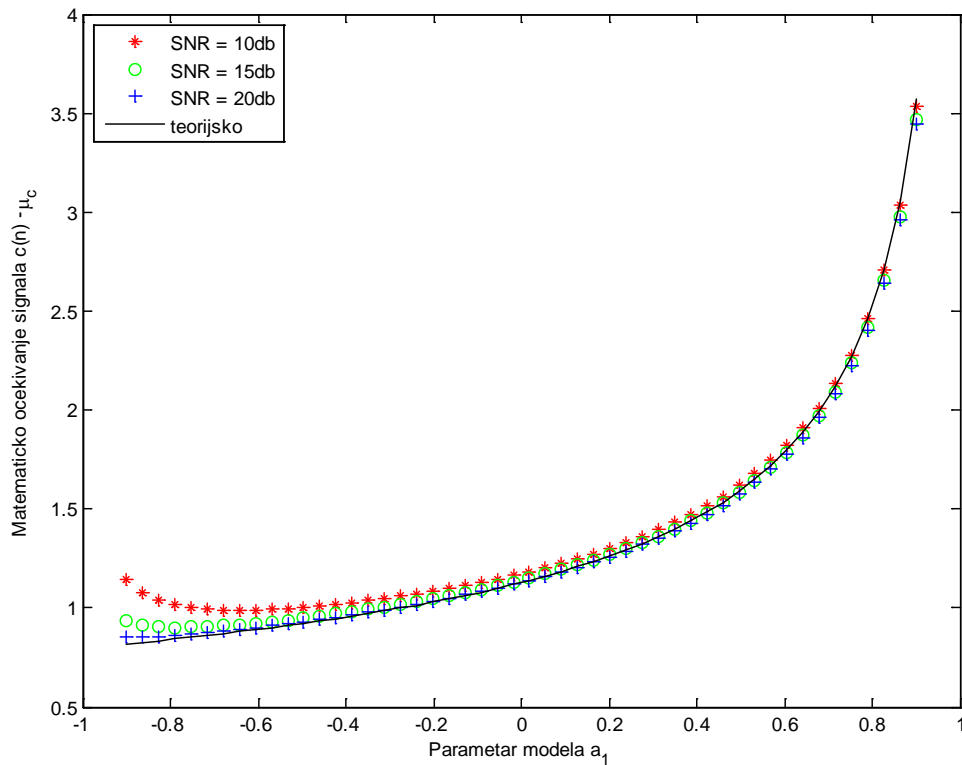


Slika 4.4: Prikaz eksperimentalno određenog i teorijski izvedenog matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za slučaj  $AR(1)$  modela



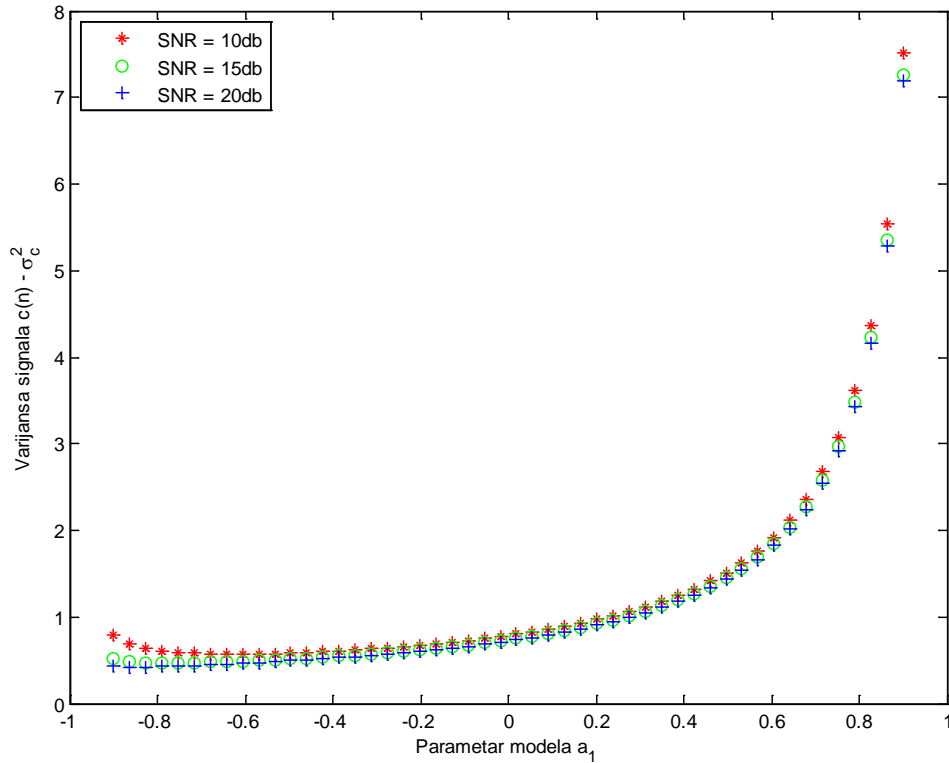
Slika 4.5: Prikaz eksperimentalno određene varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za slučaj  $AR(1)$  modela

Zanimljivo je ispitati i uticaj aditivnog šuma merenja na statistike apsolutnih konačnih razlika. Simulacije koje prikazuju eksperimentalno određeno i teorijski izvedeno matematičko očekivanje signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  su ponovljene za različite odnose signal/šum i dobijeni rezultati (Slika 4.6) pokazuju da sa pogoršanjem  $SNR$  dolazi do sve većeg odstupanja eksperimentalnih rezultata od teorijski izvedenih, ali i dalje se jasno vidi zavisnost promene matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika od parametra autoregresivnog modela prvog reda.



Slika 4.6: Prikaz eksperimentalno određenog i teorijski izvedenog matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite  $SNR$  aditivnog šuma merenja za slučaj  $AR(1)$  modela

Takođe, simulacije su ponovljene i za eksperimentalno određivanje varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite odnose signal/šum, i rezultati pokazuju blago pomeranje estimacije kako  $SNR$  opada (Slika 4.7), ali i dalje se jasno vidi promena varijanse apsolutne konačne razlike sa promenom parametra modela.



Slika 4.7: Prikaz eksperimentalno određene varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite SNR aditivnog šuma merenja za slučaj AR(1) modela

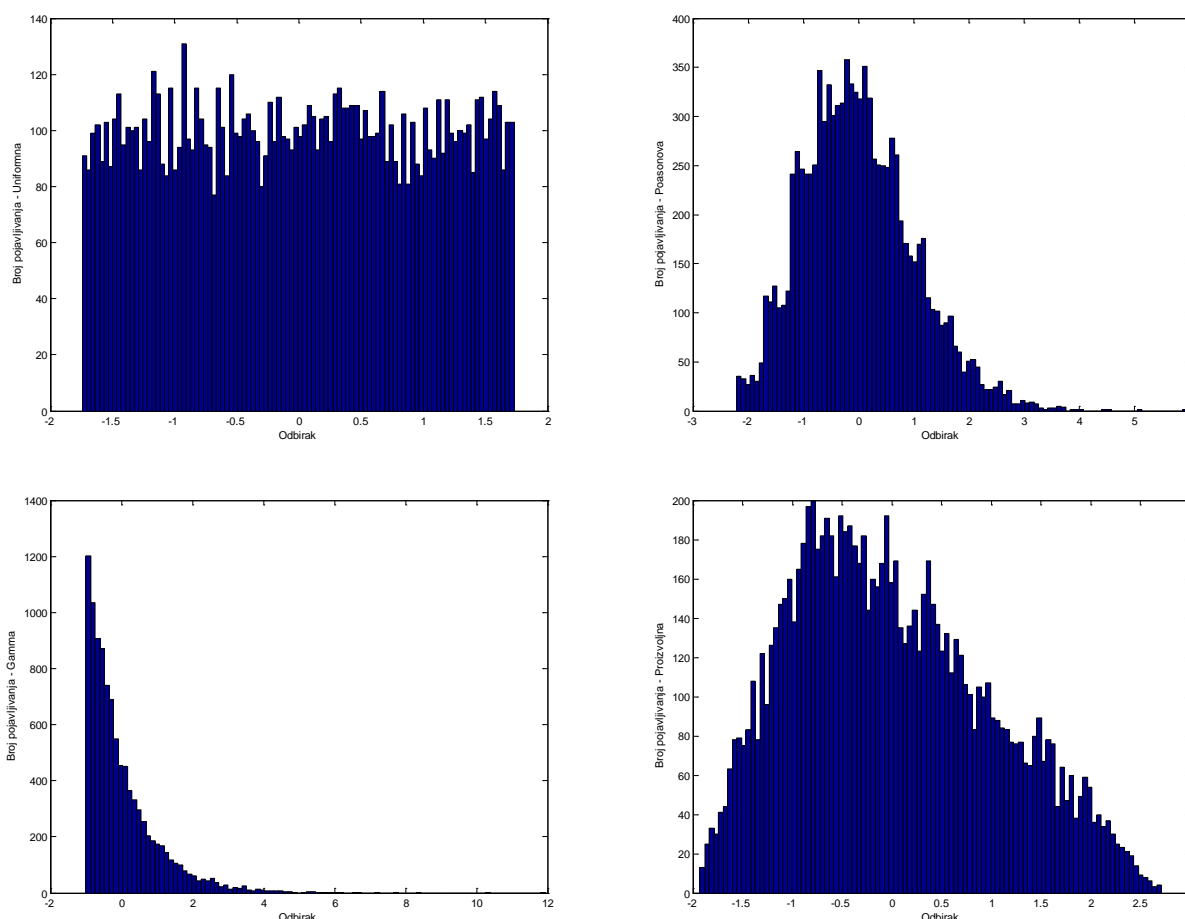
Pošto su sva izvođenja (4.5-4.20) vršena pod nekoliko pretpostavki, od kojih je najznačajnija ta da je aktivacioni šum  $u(n)$  beli Gausov šum nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse, zanimljivo je ponoviti isti eksperiment samo u slučaju aktivacionog šuma drugačije raspodele. U ovom slučaju su izvršene simulacije za slučaj aktivacionog šuma koji imaju a) uniformnu raspodelu sa funkcijom gustine verovatnoće opisanom jednačinom (4.21) b) modifikovanu Poasonovu raspodelu sa funkcijom gustine verovatnoće opisanom jednačinom (4.22) što je ustvari modifikovana funkcija kako bi se omogućilo da se primeni na kontinualne signale a da zadrži nesimetrični oblik Poasonove raspodele, c) Gama raspodelu sa funkcijom gustine verovatnoće opisanom jednačinom (4.23) i d) proizvoljnu sinetički generisanu asimetričnu raspodelu sa funkcijom gustine verovatnoće opisanom jednačinom (4.24), gde su svi parametri funkcija gustina verovatnoća izabrani tako da se obezbedi nuta srednja vrednost i jedinična varijansa, sa tim da su odbirci šuma u sva četiri slučaja i dodatno softverski normalizovani. Prikazani su histogrami aktivacionog šuma (Slika 4.8) kako bi se jasno naznačilo da neki (kao što je to slučaj sa šumom sinetički generisanom raspodelom) imaju izrazito asimetrične raspodele kako bi se ispitaio i takav slučaj.

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{za } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^{\text{round}(x)} e^{-\lambda}}{\text{round}(x)!}, \text{ za } x \geq 0 \quad (4.22)$$

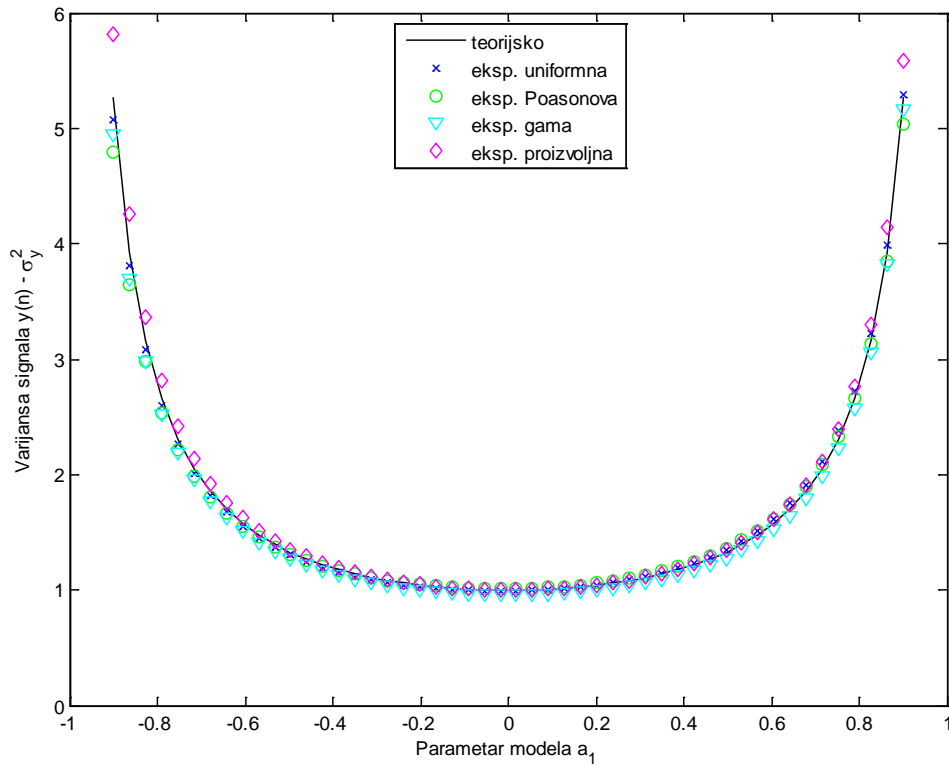
$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, \text{ za } x > 0 \quad (4.23)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{2} & \text{za } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{6} & \text{za } 0 < x \leq 6 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (4.24)$$

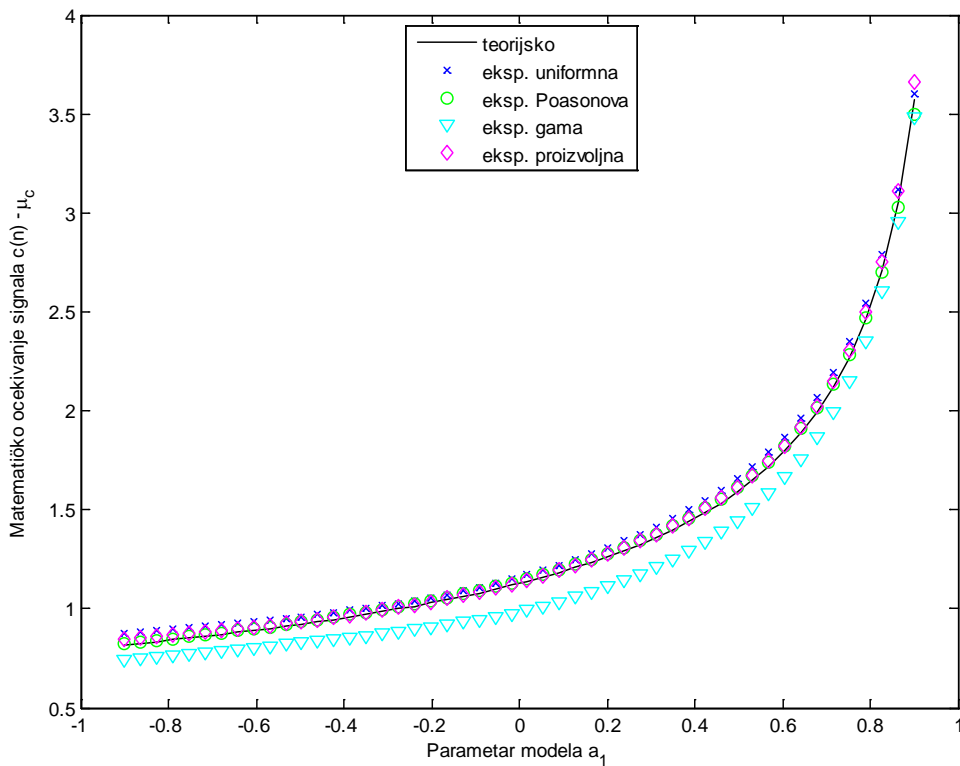


Slika 4.8: Prikaz histograma aktivacionog šuma  $u(n)$ , za slučaj uniformne (gore levo), modifikovane Poasonove (gore desno), Gama (dole levo) i sintetički generisane asimetrične (dole desno) raspodele

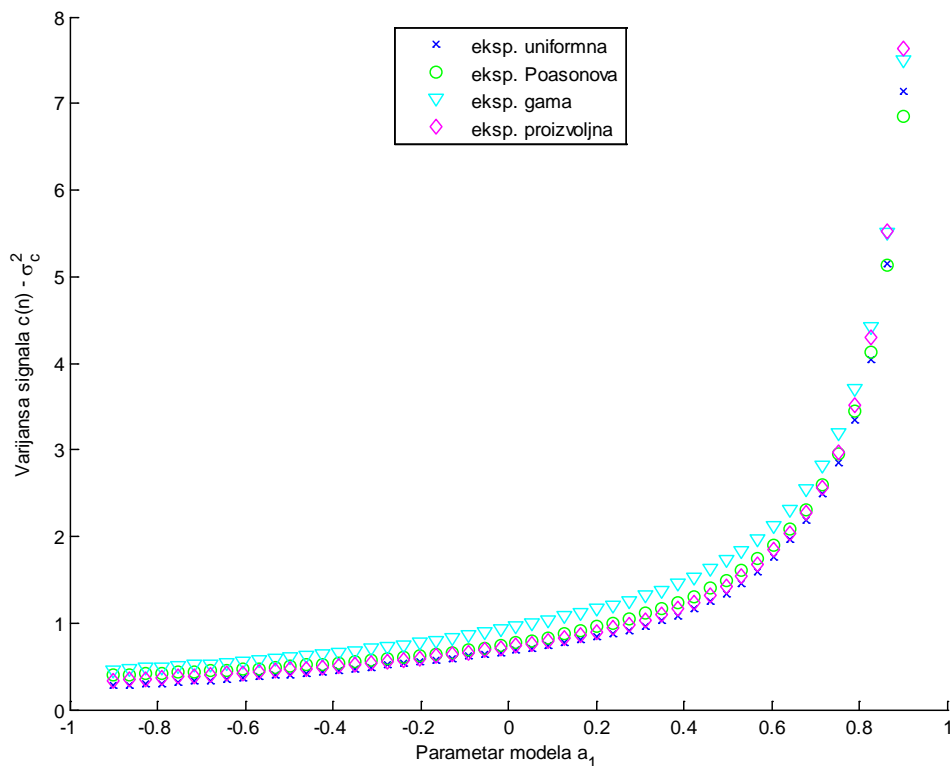
Razultati su prikazani na slikama 4.9-4.11. Može se zaključiti da dolazi do delimičnih odstupanja eksperimentalno dobijenih rezultata od teorijskih (koji su izvedeni pod pretpostavkom šuma Gausovske raspodele), najviše u slučaju Gama raspodele aktivacionog šuma pri utvđivanju matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika (Slika 4.10). U svakom slučaju, zavisnosti promene statistika apsolutne konačne razlike signala od parametara modela signala i dalje su prisutne i jasno uočljive, pa se smatra da se signal apsolutnih konačnih razlika može koristiti i u slučaju kada aktivacioni šum nije Gausovske raspodele.



Slika 4.9: Prikaz eksperimentalno određene i teorijski izvedene varijanse signala  $y(n)$  za različite aktivacione šumove za slučaj  $AR(1)$  modela



Slika 4.10: Prikaz eksperimentalno određenog i teorijski izvedenog matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite aktivacione šumove za slučaj  $AR(1)$  modela



Slika 4.11: : Prikaz eksperimentalno određene varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite aktivacione šumove za slučaj  $AR(1)$  modela

#### 4.2.2. Slučaj autoregresivnog modela drugog reda

Slična se analiza može sprovesti i za signale koji su opisani autoregresivnim modelom drugog reda. Uz pretpostavku da je model signala dat jednačinom (4.25) i uz početne uslove (4.26) može se smatrati da su zadovoljeni isti uslovi stacionarnosti (4.27) kao i na malopredjašnje analiziranom modelu prvog reda.

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + u(n) \quad (4.25)$$

$$y(n_0) = y_0, \quad y(n_0 + 1) = y_1 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} E\{y(n)\} &= m_y \\ \text{var}\{y(n)\} &= \sigma_y^2 \\ E\{y(n)y(n-1)\} &= \sigma_{n,n-1} \\ E\{y(n)y(n-2)\} &= \sigma_{n,n-2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Primenjujući operator matematičkog očekivanja na jednačinu (4.25) i vodeći se istom pretpostavkom da je  $E\{u(n)\} = 0$ , zaključujemo da je proces  $y(n)$  nulte srednje vrednosti (4.28).

$$\begin{aligned}
E\{y(n)\} &= E\{-a_1y(n-1)\} - E\{-a_2y(n-2)\} + E\{u(n)\} \\
&\Rightarrow m_y = \frac{E\{u(n)\}}{1+a_1+a_2} = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Analiza varijanse signala  $y(n)$  je malo složenija. Primenjujući operator varijanse na relaciju (4.25), a uzimajući u obzir da je signal  $u(n)$  beli stohastički proces koji je nekorelisan sa  $y(n-1)$  i  $y(n-2)$ , dobijamo jednakost (4.29)

$$\begin{aligned}
\text{var}\{y(n)\} &= a_1^2\text{var}\{y(n-1)\} + a_2^2\text{var}\{y(n-2)\} + 2a_1a_2E\{y(n-1)y(n-2)\} + \text{var}\{u(n)\} \\
&\Rightarrow \sigma_y^2 = a_1^2\sigma_y^2 + a_2^2\sigma_y^2 + 2a_1a_2\sigma_{n,n-1} + \sigma_u^2
\end{aligned} \tag{4.29}$$

a kako je kovarijansa  $\sigma_{n,n-1}$  data sa (4.30)

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,n-1} &= E\{y(n)y(n-1)\} \\
&= E\{(-a_1y(n-1) - a_2y(n-2) + u(n))y(n-1)\} \\
&= -a_1\sigma_y^2 - a_2\sigma_{n,n-1} \\
&\Rightarrow \sigma_{n,n-1} = -\frac{a_1}{1+a_2}\sigma_y^2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

zamenom (4.30) u (4.29) dobija se konačan izraz za varijansu signala  $y(n)$  (4.31).

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-a_1^2-a_2^2+2a_1a_2\frac{a_1}{1+a_2}} \tag{4.31}$$

Kao i u prethodnoj analizi za slučaj autoregresivnog modela prvog reda, treba pogledati statistike konačne razlike (4.2), za koje se na sličan način zaključuje da je nulte srednje vrednosti (4.32) i poznate varijanse (4.33).

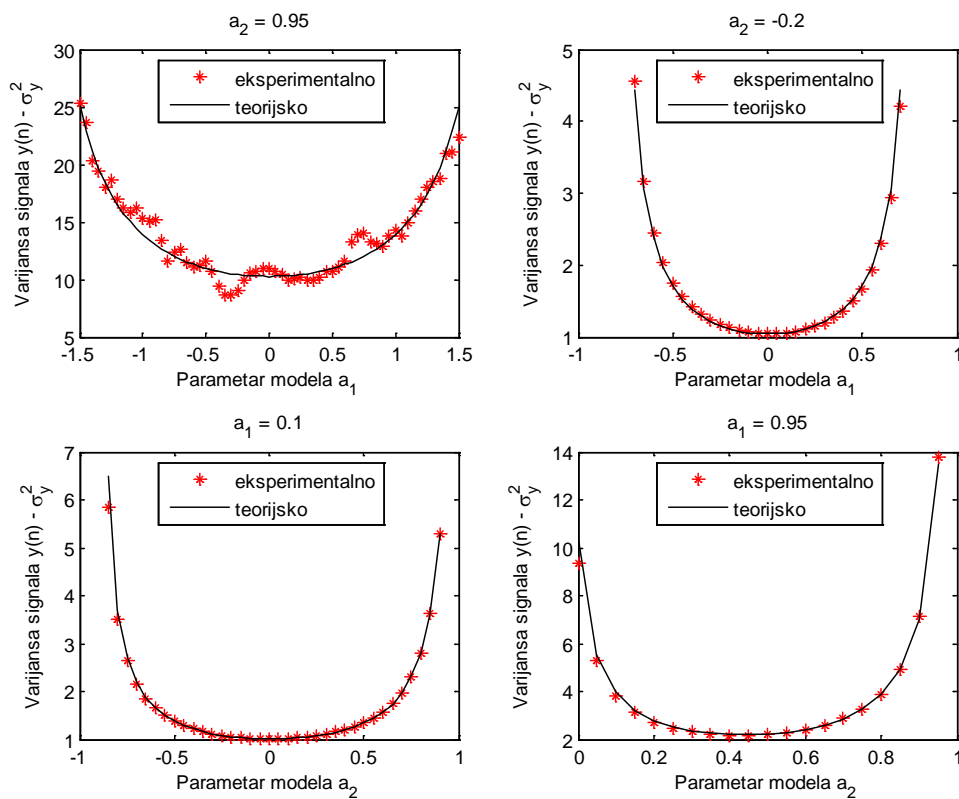
$$m_b(n) = E\{b(n)\} = E\{y(n)\} - E\{y(n-1)\} = 0 \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_b^2 &= \text{var}\{b(n)\} = \text{var}\{y(n)\} + \text{var}\{y(n-1)\} - 2E\{y(n)y(n-1)\} \\
&= 2\sigma_y^2 - 2\sigma_{n,n-1} = 2\left(1 + \frac{a_1}{1+a_2}\right)\frac{\sigma_u^2}{1-a_1^2-a_2^2+2a_1a_2\frac{a_1}{1+a_2}}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Opet, konačni cilj ove analize predstavlja statistika apsolutne vrednosti konačne razlike (4.3), za koju se sličnom analizom koja je sprovedena za autoregresivni model prvog reda, usvajajući pretpostavku da je sekvenca  $y(n)$  Gausovski raspodeljena, dolazi se do matematičkog očekivanja slučajne promenljive  $c(n)$  (4.34) [62, 65].

$$\begin{aligned}
m_c &= 2 \int_0^\infty \zeta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{b(n)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sigma_{b(n)}^2}\right) d\zeta = \int_0^\infty \frac{\sigma_{b(n)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sigma_{b(n)}^2}\right) d\left(\frac{\zeta^2}{\sigma_{b(n)}^2}\right) \\
&= \frac{2\sigma_b}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2\sigma_u}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(1 + \frac{a_1}{1+a_2}\right) \frac{1}{1-a_1^2-a_2^2+2a_1a_2\frac{a_1}{1+a_2}}}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Slično kao i u prethodnom poglavlju, izvršene su simulacije nad veštački generisanim signalima, samo što je sada neophodno varirati dva parametra modela  $a_1$  i  $a_2$  unutar granica stabilnosti kako bi se analizirali dobijeni rezultati. Korišćenjem jednačine (4.5) generisano je  $N = 5000$  odbiraka signala  $y(n)$  sa Gausovski raspedljenim aktivacionim šumom nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse i bez aditivnog šuma merenja, za različite vrednosti parametra modela  $a_1$  i  $a_2$  koji zadovoljavaju uslove stabilnosti modela. Grafički su prikazane (Slika 4.12) eksperimentalno određene vrednosti varijanse signala  $y(n)$  i teorijski izvedena vrednost (4.31) u za nekoliko različitih vrednosti parametra modela  $a_1$  i  $a_2$ . Prvo je parametar modela  $a_2$  bio fiksiran (Slike 4.12, gore levo i gore desno) dok je parametar modela  $a_1$  bio variran, i suprotno (Slike 4.12, dole levo i dole desno). Može se zaključiti da eksperimentalno dobijene vrednosti varijanse signala odgovaraju teorijski izvedenim vrednostima, što potvrđuje ispravnost izvođenja.



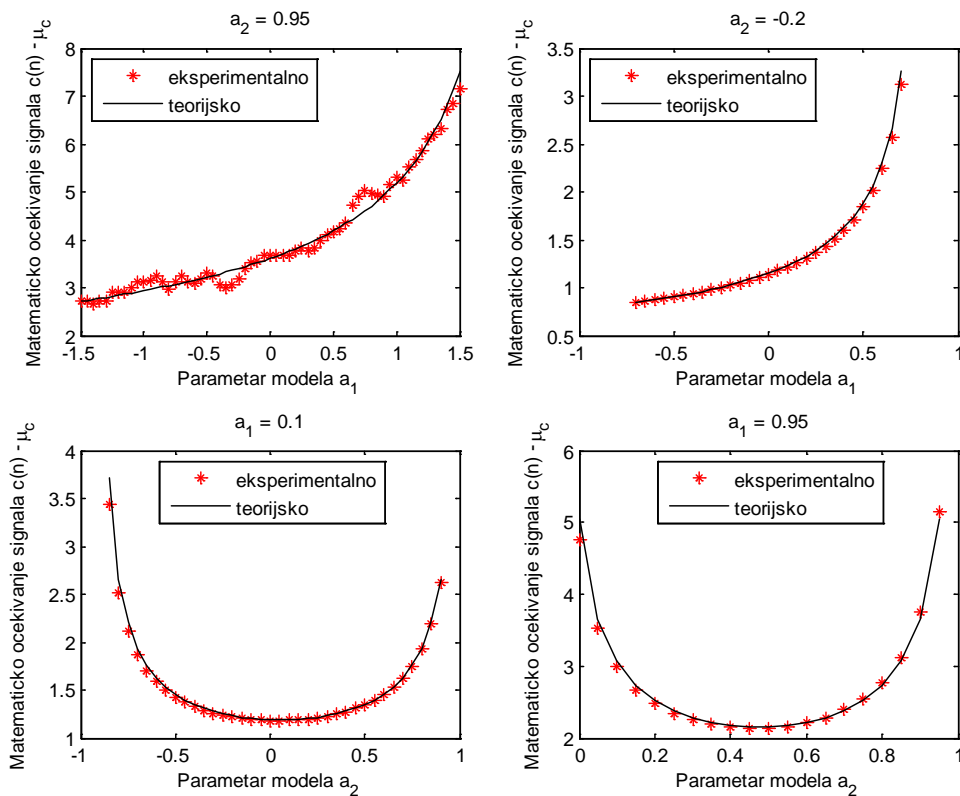
Slika 4.12: Prikaz eksperimentalno određene i teorijski izvedene varijanse signala  $y(n)$  za slučaj AR(2) modela

Slično je ponovljeno i za eksperimentalno dobijene i teorijski izvedene (4.34) vrednosti matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika (Slika 4.13). Dobijeni rezultati pokazuju poklapanje teorijskih i eksperimentalnih rezultata, a pošto jednačina (4.34) pokazuje jasnu zavisnost očekivanja apsolutnih konačnih razlika od parametara modela, dok se sa grafika vidi i da su promene očekivanja

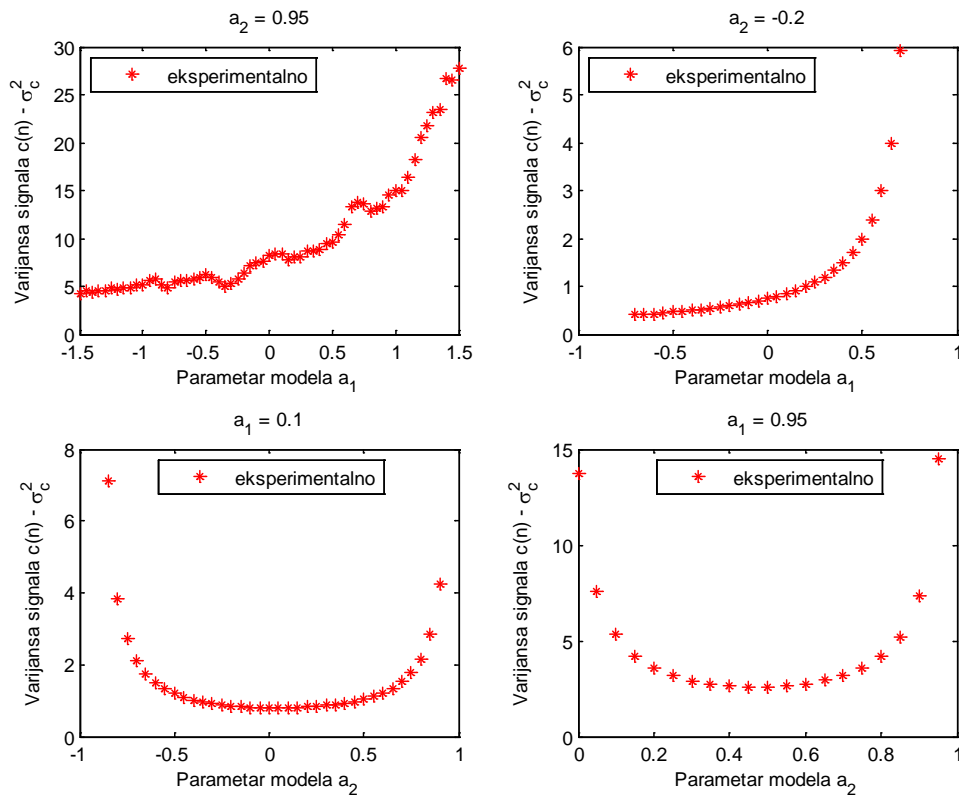


jasno izražene, može se zaključiti da se takav signal može koristiti u detekciji nestacionarnosti signala.

Isti zaključci se mogu izvesti i posmatranjem eksperimentalno utvrđenih varijansi signala apsolutne konačne razlike (Slika 4.14). I u ovom slučaju nisu određivane teorijske zavisnosti, zbog kompleksnosti izračunavanja.

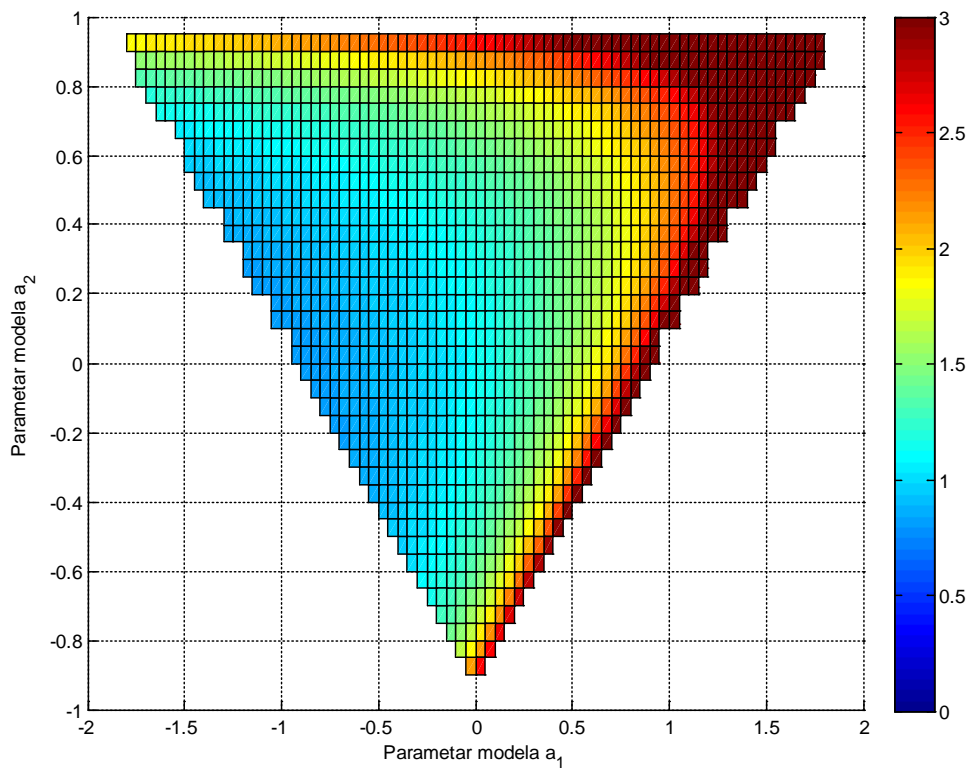


Slika 4.13: : Prikaz eksperimentalno određenog i teorijski izvedenog matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za slučaj  $AR(2)$  modela

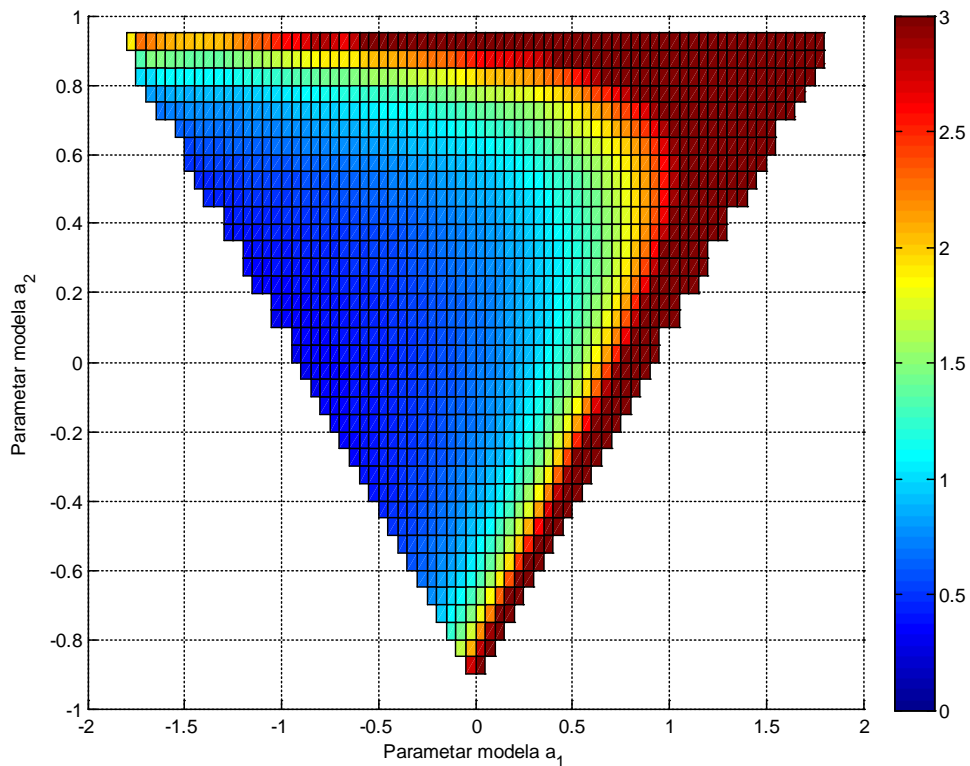


Slika 4.14: : Prikaz eksperimentalno određene varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za slučaj  $AR(2)$  modela

Zanimljivo je i prikazati trodimenzionu varijaciju parametara modela i matematičko očekivanje apsolutnih konačnih razlika (Slika 4.15) i varijansu istog signala (Slika 4.16) kako bi se jasno istakle promene ovih statistika u zavisnosti od promena parametara modela. Svakako da postoje određene konture po kojima ova dva parametra mogu da se kreću tako da se statistike uopšte ne promene ali takva scenario je u praksi skoro pa nemoguć.

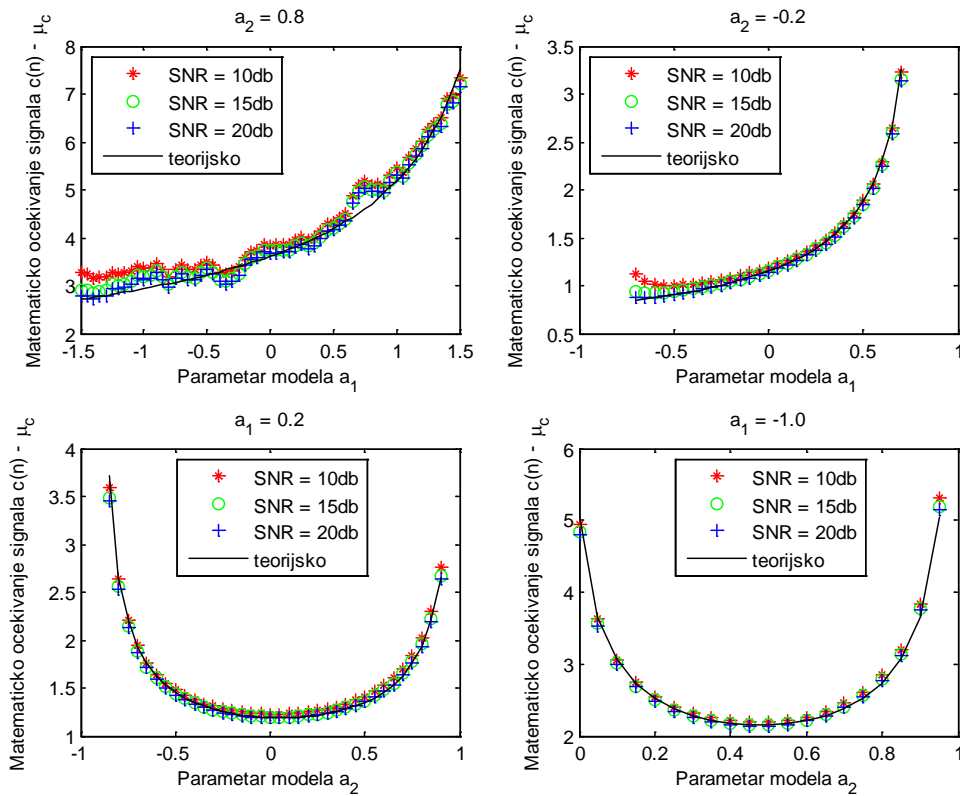


Slika 4.15: Prikaz zavisnosti matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  od promene parametara modela  $a_1$  i  $a_2$  za slučaj AR(2) modela

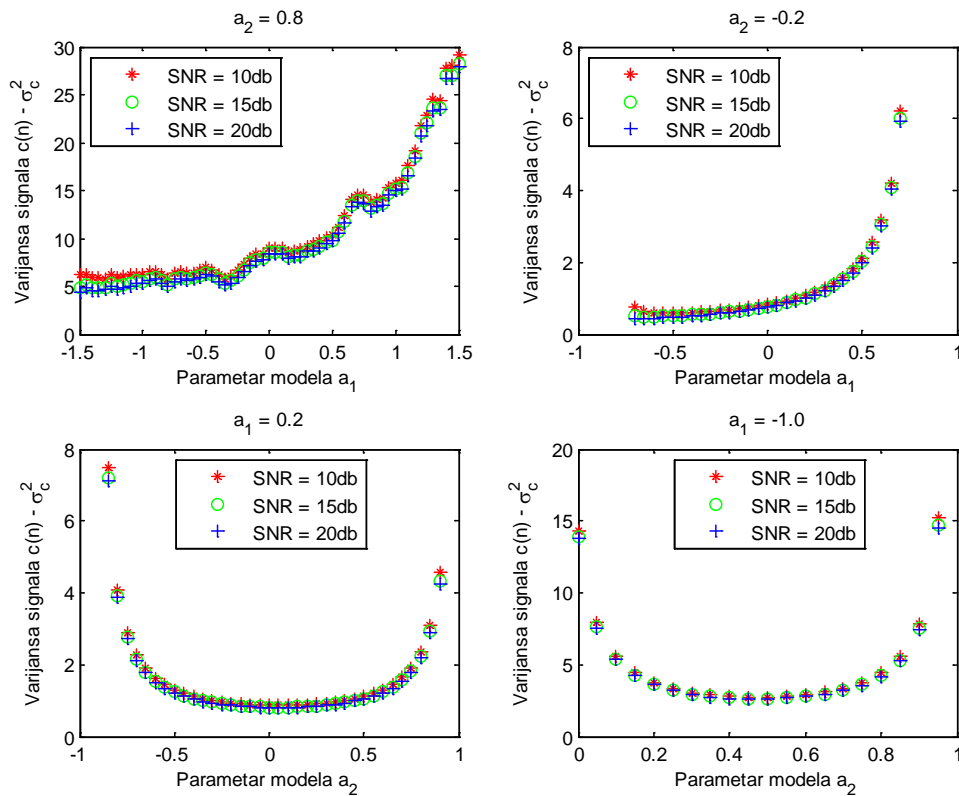


Slika 4.16: Prikaz zavisnosti varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  od promene parametara modela  $a_1$  i  $a_2$  za slučaj AR(2) modela

Isto kao i za slučaj AR(1) modela, interesantno je ispitati uticaj aditivnog šuma merenja na statistike apsolutnih konačnih razlika. Simulacije koje prikazuju eksperimentalno određeno i teorijski izvedeno matematičko očekivanje signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$ , kao i eksperimentalno određenu varijansu istog signala su ponovljene za različite odnose signal/šum i dobijeni rezultati (Slike 4.17 i 4.18) pokazuju da sa pogoršanjem  $SNR$  dolazi do sve većeg odstupanja eksperimentalnih rezultata od teorijski izvedenih, ali i dalje se jasno vidi zavisnost promene matematičkog očekivanja i varijanse signala apsolutnih konačnih razlika od parametra autoregresivnog modela drugog reda.

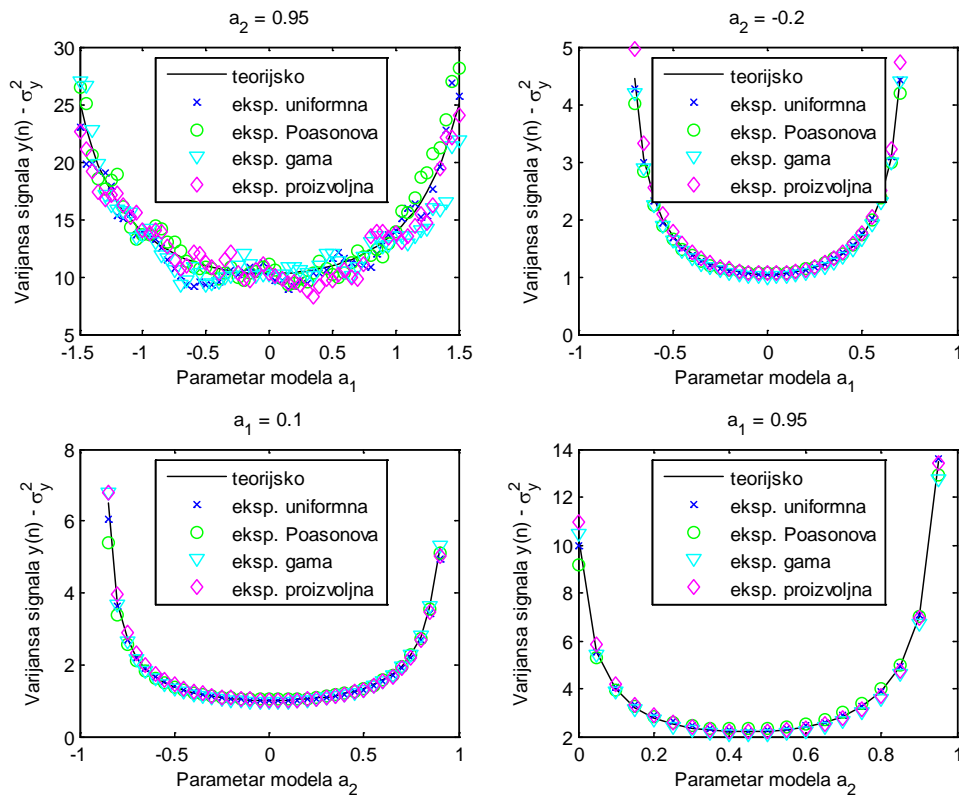


Slika 4.17: Prikaz eksperimentalno određenog i teorijski izvedenog matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite  $SNR$  aditivnog šuma merenja za slučaj AR(2) modela

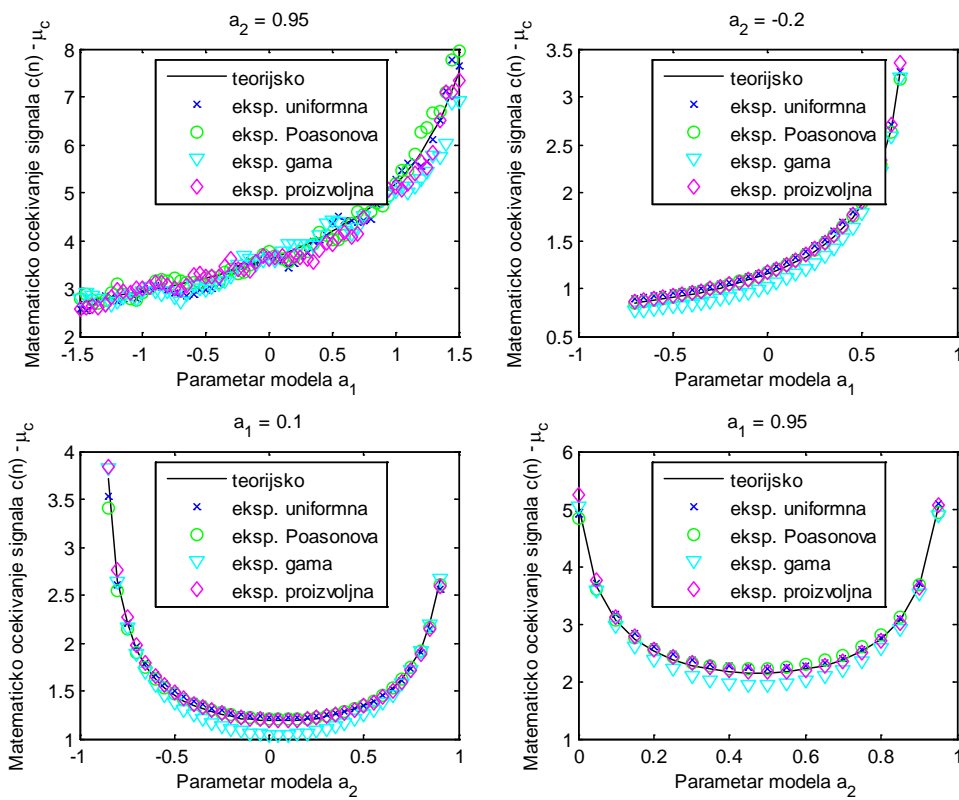


Slika 4.18: Prikaz eksperimentalno određene varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite SNR aditivnog šuma merenja za slučaj AR(2) modela

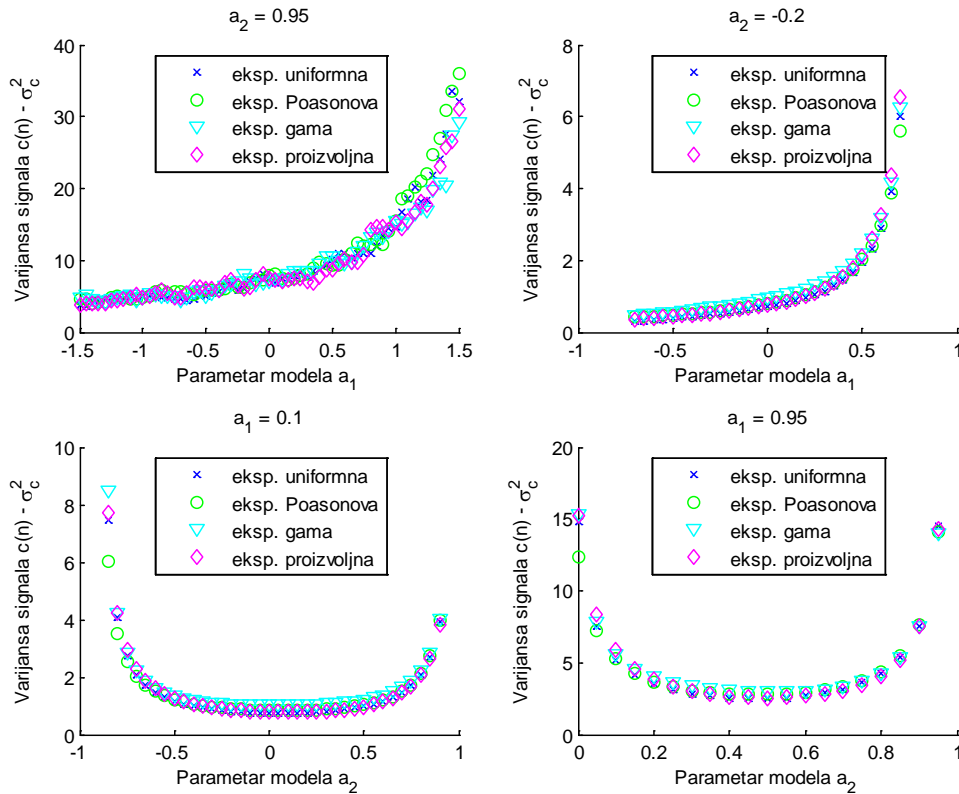
Pošto su i u ovom slučaju izvođenja vršena sa pretpostavkom Gausovskog aktivacionog šuma nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse, simulacije su ponovljene za različite aktivacione šumove (Slika 4.8) opisane u prethodnom poglavlju. Rezultati su prikazani na slikama 4.19-4.21. Može se zaključiti da dolazi do delimičnih odstupanja eksperimentalno dobijenih rezultata od teorijskih, ponovo najviše u slučaju Gama raspodele aktivacionog šuma, najverovatnije zbog njegove izrazite nesimetričnosti. U svakom slučaju, zavisnosti promene statistika apsolutne konačne razlike signala od parametara modela signala i dalje su prisutne i jasno uočljive.



Slika 4.19: Prikaz eksperimentalno određene i teorijski izvedene varijanse signala  $y(n)$  za različite aktivacione šumove za slučaj AR(2) modela



Slika 4.20: Prikaz eksperimentalno određenog i teorijski izvedenog matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite aktivacione šumove za slučaj AR(2) modela



Slika 4.21: Prikaz eksperimentalno određene varijanse signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  za različite aktivacione šumove za slučaj  $AR(2)$  modela

### 4.2.3. Slučaj autoregresivnog modela trećeg reda

U ovom slučaju nije jednostavno teorijski izvesti jednačine koje opisuju zavisnost statistika apsolutnih konačnih razlika od parametara modela. Stoga su izvršene simulacije na autoregresivnim modelom trećeg reda (4.35) sa početnim uslovima (4.36)

$$y(n) = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - a_3y(n-3) + u(n) \quad (4.35)$$

$$y(n_0) = y_0, y(n_0 + 1) = y_1, y(n_0 + 2) = y_2 \quad (4.36)$$

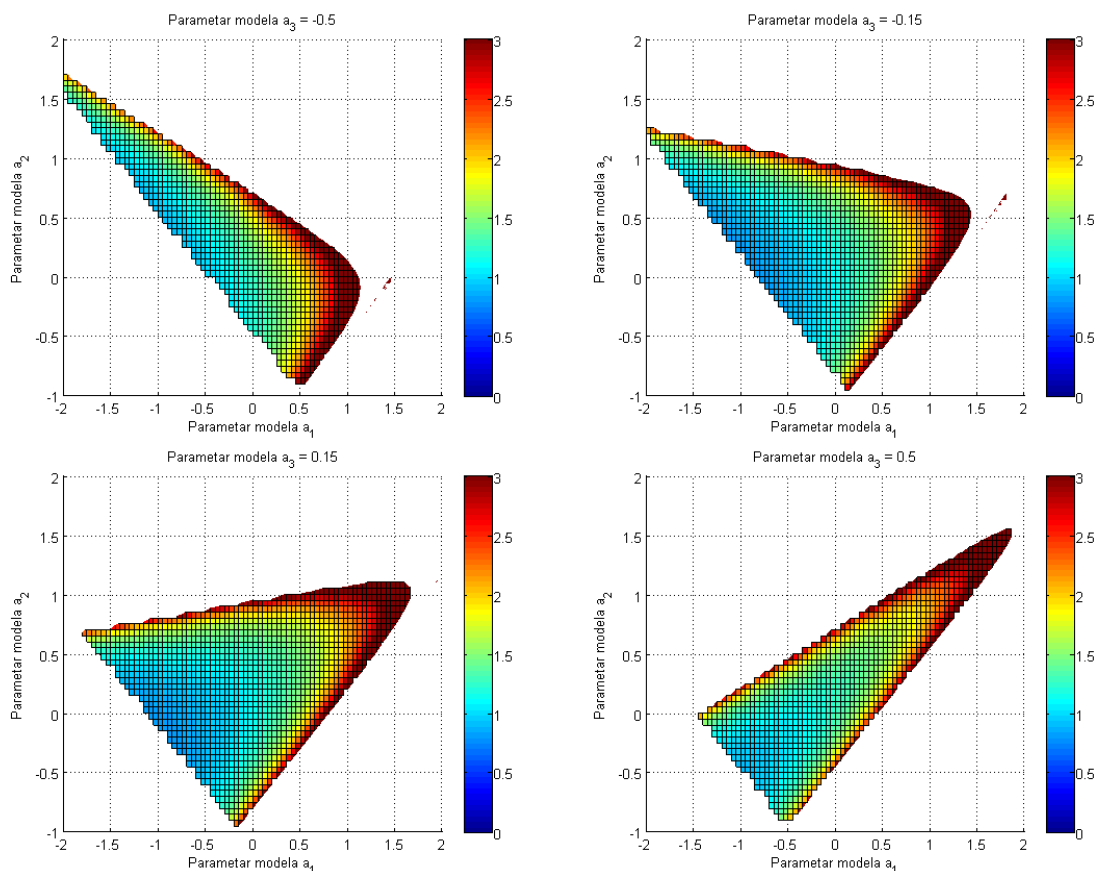
gde su parametri modela  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  varirani tako da se ispune uslovi stabilnosti modela tj. da se koreni karakteristične jednačine (4.37) nalaze unutar jediničnog kruga. Ostali uslovi su bili isti kao i u prethodnim poglavljima, tj. simulacije su ponavljane za različite vrednosti parametara svaki put u trajanju od  $N = 5000$  odbiraka nad kojima su računane statistike prvog i drugog reda apsolutnih konačnih razlika.

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (4.37)$$

Pošto o ovim slučajevima variramo 3 parametra modela, nije ih moguće prikazati sve odjednom. Zato je prvo prikazan slučaj kada je posmatrano matematičko očekivanje apsolutnih konačnih razlika gde su parametri modela  $a_1$  i  $a_2$  varirani dok je parametar modela  $a_3$  bio fiksiran na četiri vrednosti a)

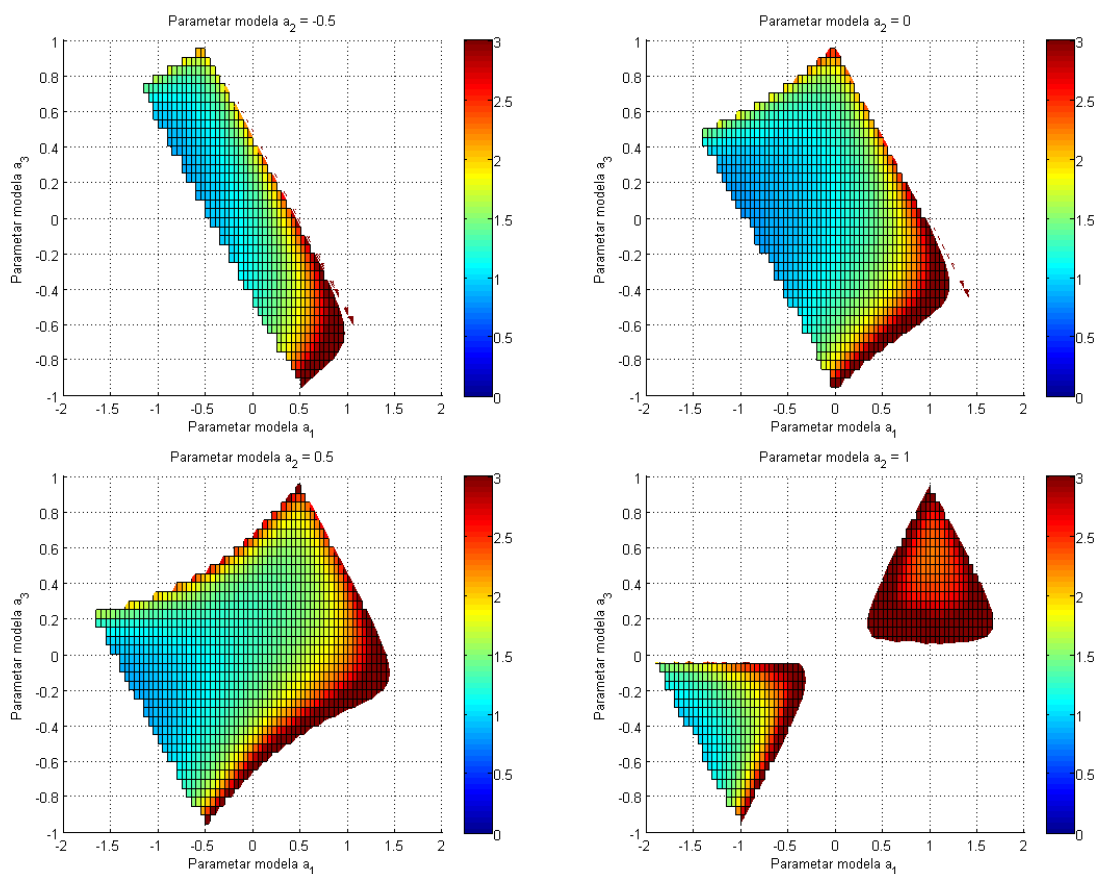
$a_3 = -0.5$  (Slika 4.22, gore levo), b)  $a_3 = -0.15$  (Slika 4.22, gore desno), c)  $a_3 = 0.15$  (Slika 4.22, dole levo) i c)  $a_3 = 0.5$  (Slika 4.22, dole desno). Zatim su parametri modela  $a_1$  i  $a_3$  varirani dok je parametar modela  $a_2$  bio fiksiran na četiri vrednosti a)  $a_2 = -0.5$  (Slika 4.23, gore levo), b)  $a_2 = 0.0$  (Slika 4.23, gore desno), c)  $a_2 = 0.5$  (Slika 4.23, dole levo) i c)  $a_2 = 1.0$  (Slika 4.23, dole desno). Na kraju su parametri modela  $a_2$  i  $a_3$  varirani dok je parametar modela  $a_1$  bio fiksiran na četiri vrednosti a)  $a_1 = -1.0$  (Slika 4.24, gore levo), b)  $a_1 = -0.5$  (Slika 4.24, gore desno), c)  $a_1 = 0.0$  (Slika 4.24, dole levo) i c)  $a_1 = 0.5$  (Slika 4.24, dole desno). Iz ovih simulacija može se zaključiti, kao i do sada, da prilikom promena parametara modela (tj. neposredno pri promeni stacionarnosti signala) dolazi do promena u statistikama apsolutnih konačnih razlika i za slučaj signala opisanog autoregresivnim modelom trećeg reda što dovodi do zaključka da i u ovom sličaju signal apsolutnih konačnih razlika može sadržati informaciju o stacionarnosti signala. Ono što može biti problem jeste što u nekim poljima, na primer za slučaj kada je  $a_3 = -0.15$  (Slika 4.22, gore desno), za promene parametara  $a_1$  i  $a_2$  u opsegu  $-1.5 < a_1 < 0$  i  $-0.5 < a_2 < 0.75$  imamo jako male promene u srednjoj vrednosti apsolutnih konačnih razlika. Ovakvih polja gde za određene promene parametara modela imamo male promene srednje vrednosti ima skoro u svim sprovedenim simulacijama što može dovesti do poteškoća prilikom izvlačenja informacija o stacionarnosti signala i adaptaciji faktora zaboravljanja, ali to je problem koji će biti obrađen u poglavlju 4.3.

Iste simulacije su ponovljene i za slučaj zavisnosti varijanse apsolutne konačne razlike od parametara autoregresivnog modela trećeg reda (Slike 4.25-4.27), i mogu se izvesti isti zaključci kao i prilikom posmatranja zavisnosti srednje vrednosti. U ovom slučaju su polja u kojima imamo velike promene u parametrima modela a male promene u varijansi apsolutne konačne razlike još izraženija, ali to samo ukazuje na to da će sistem za adaptaciju faktora zaboravljanja prema signalu apsolutnih konačnih razlika morati da bude adekvatno podešen da detektuje ovakve promene.

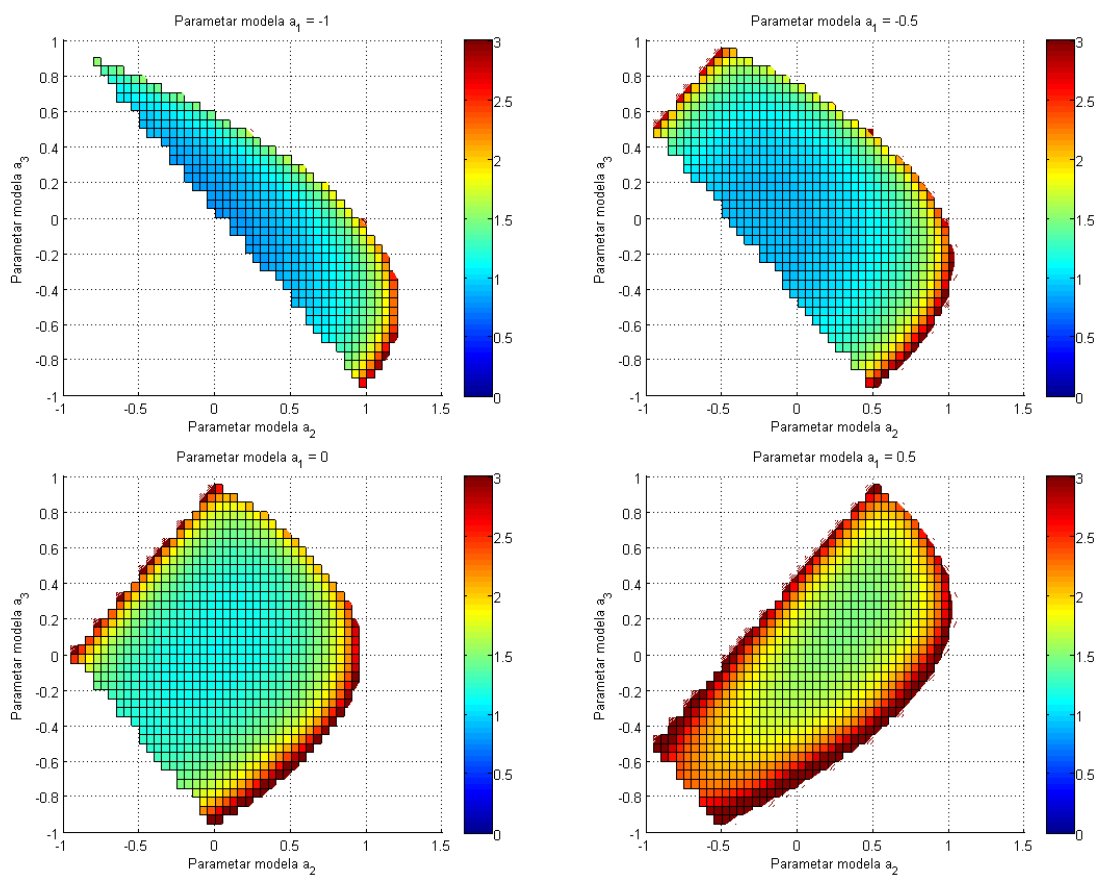


Slika 4.22: Prikaz zavisnosti  $\mu_c$  od promene parametara  $a_1$  i  $a_2$  AR(3) modela,  $a_3$  je fiksno

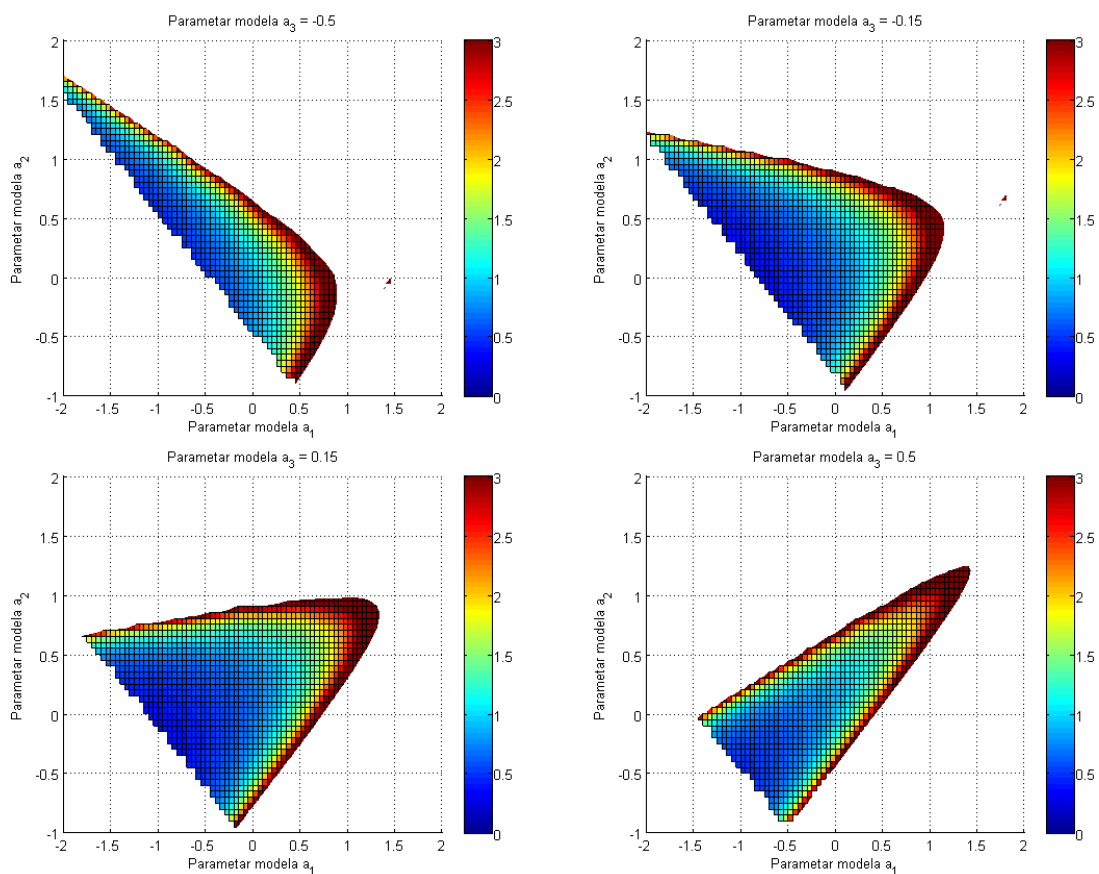




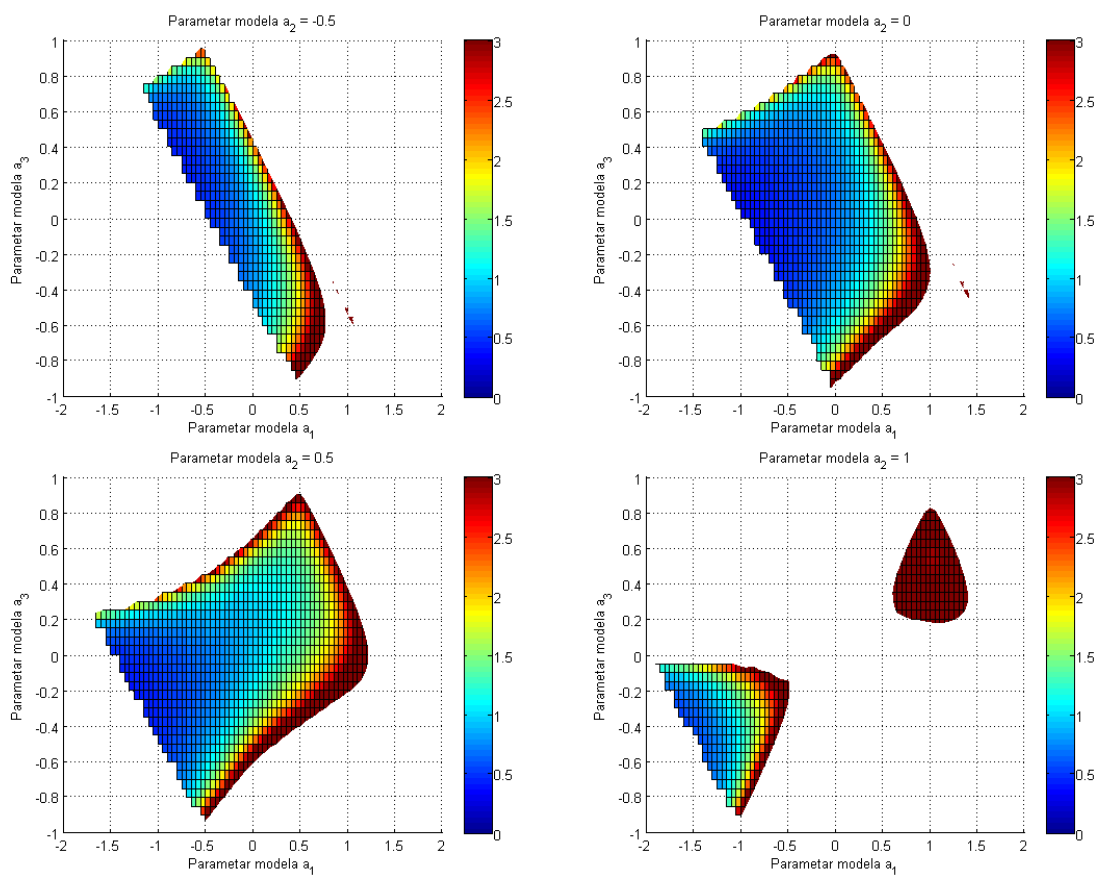
Slika 4.23: Prikaz zavisnosti  $\mu_c$  od promene parametara  $a_1$  i  $a_3$  AR(3) modela,  $a_2$  je fiksno



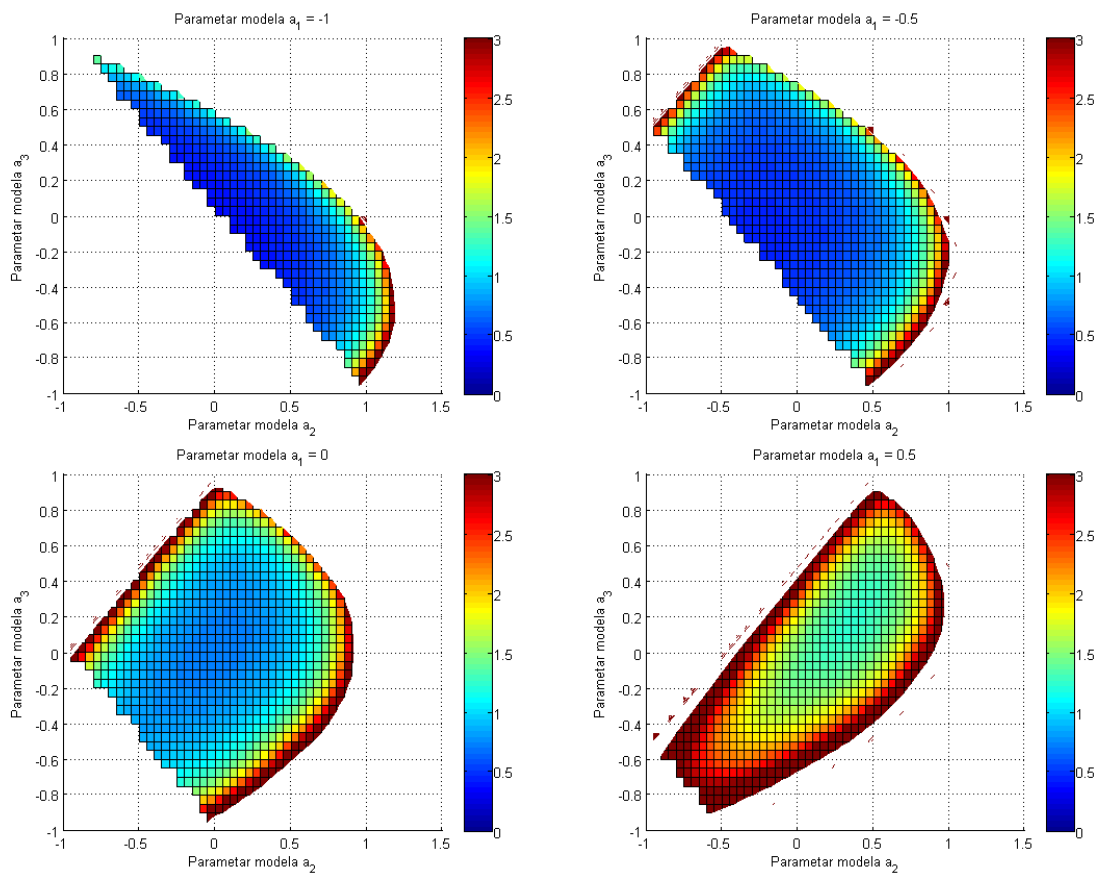
Slika 4.24: Prikaz zavisnosti  $\mu_c$  od promene parametara  $a_2$  i  $a_3$  AR(3) modela,  $a_1$  je fiksno



Slika 4.25: Prikaz zavisnosti  $\sigma_c^2$  od promene parametara  $a_1$  i  $a_2$  AR(3) modela,  $a_3$  je fiksno



Slika 4.26: Prikaz zavisnosti  $\sigma_c^2$  od promene parametara  $a_1$  i  $a_3$  AR(3) modela,  $a_2$  je fiksno



Slika 4.27: Prikaz zavisnosti  $\sigma_c^2$  od promene parametara  $a_2$  i  $a_3$  AR(3) modela,  $a_1$  je fiksno

### 4.3. Adaptacija faktora zaboravljanja zasnovana na apsolutnim konačnim razlikama

Kao što je pokazano, signal apsolutnih konačnih razlika ima tu osobinu da prati promene stacionarnosti posmatranih signala i stoga se može koristiti za adaptaciju faktora zaboravljanja. Iako je, za određene klase modela (signale opisane autoregresivnim modelima prvog, drugog i trećeg reda), pokazana korelacija između apsolutnih konačnih razlika i parametara modela signala (poglavlja 4.2.1. – 4.2.3.), neophodno je napraviti algoritam koji će na osnovu apsolutnih konačnih razlika vršiti adaptaciju faktora zaboravljanja. Kako pretpostavljamo da je filtriran signal apsolutnih konačnih razlika konstantan kada je signal stacionaran, a opada ili raste kada se menjaju parametri modela, jedan od logičnih načina da se težinski faktor adaptira jeste da se prvo signal apsolutnih konačnih razlika (4.3) filtrira niskopropusnim filtrom (4.38) kako bi se delimično umanjio uticaj šuma merenja, nakon čega se vrši diferenciranje funkcije (4.38) sa kašnjenjem  $M$  (4.39) kako bi se izvuкао nagib apsolutnih konačnih razlika koji ujedno predstavlja stepen nestacionarnosti, na koji se na kraju primeni polinomska aproksimacije (4.40):

$$c_s(n) = \alpha c_s(n-1) + (1-\alpha)c(n) \quad (4.38)$$

$$q(n) = c_s(n) - c_s(n-M) \quad (4.39)$$

$$\lambda(n) = \max\left(\sum_{i=0}^{n_p} \lambda_i(q(n))^i, \lambda_{\min}\right) \quad (4.40)$$

gde parametar  $\alpha$  predstavlja koeficijent nisko propusnog filtera, dok parametar  $M$  predstavlja kompromis (*trade-off*) između tačnosti estimacije stepena stacionarnosti i brzine praćenja promena stacionarnosti signala. Red  $n_p$  i koeficijenti  $\lambda_i, i = 1, \dots, n_p$  polinomske aproksimacije (4.40) se moraju odrediti kroz (i) kontrolni eksperiment gde su stvarne promene parametara signala poznate ili (ii) heruistički, imajući u vidu da kada je stepen nestacionarnosti približan nuli, faktor zaboravljanja  $\lambda$  teži jedinici, dok kada stepen nestacionarnosti raste (u apsolutnoj vrednosti), faktor zaboravljanja  $\lambda$  opada [21, 62, 63]. Jednačine (4.38-4.40) opisuju predloženi algoritam za adaptaciju faktora zaboravljanja korišćenjem apsolutnih konačnih razlika (*engl. Absolute Finite Differences Variable Forgetting Factor Recursive Least Squares - AFDVFF-RLS*).

#### Parametri algoritma koji se moraju podesiti:

Parametri koje se moraju podesiti kako bi AFDVFF-RLS algoritam radio na zadovoljavajućem nivou su:

$\alpha$  – parametar usrednjavanja eksponencijalnog prozora za filtriranje signala apsolutnih konačnih razlika. Najčešće se uzma srednja vrednost  $\alpha = 0.5$  koja daje i zadovoljavajuće dug prozor filtriranja kako bi se adekvatno isfiltrirao šim i ujedno zadovoljavajuće kratak prozor kako bi se efektivno ispratilo promene stacionarnosti signala.

$M$  – parametar koji predstavlja kašnjenje diferenciranja apsolutne konačne razlike, dok ujedno ima i ulogu filtriranja signala. Što je parametar veći tačnost estimacije stepena stacionarnosti je veća, ali je i brzina praćenja promena stacionarnosti manja, i suprotno, što je parametar manji brzina praćenja je veća ali tačnost estimacije stepena stacionarnosti je manja. Najšesće je dovoljno da  $M$  bude u opsegu od 5 do 10 odbiraka.

$n_p$  i  $\lambda_i$  – red i koeficijenti polinomske aproksimacije (4.40). Moraju se podesiti zasebno prema tipu signala koji se estimira. Pretpostavka je da je dovoljno da polinomska zavisnost bude kvadratna zavisnost ili zavisnost četvrtog stepena (na primer  $-a \cdot q^2(n) + \lambda_{max}$  ili  $-a \cdot q^4(n) + \lambda_{max}$ ) tako da se podešavaju samo slobodni koeficijent koji onda predstavlja maksimalnu vrednost težinskog faktora  $\lambda_{max}$  i koeficijent najvišeg stepena polinoma  $a$ .

$\lambda_{min}$  – minimalna vrednost faktora zaboravljanja koja osigurava da polinomska aproksimacija ne podesi faktor zaboravljanja na nemoguću, negativnu vrednost, tj. osigurava stabilnost algoritma. Dovoljno je izabrati neku vrednost blisku nuli, recimo  $\lambda_{min} = 0.01$  i nije potrebno dalje podešavanje ovog parametra.

## 5. EKSPERIMENTALNI REZULTATI I ANALIZA

Performanse predloženog algoritma su demonstrirane u poglavlju 5.1 kroz nekoliko kontrolisanih eksperimenata tj. korišćenjem veštački generisanih signala čiji su parametri modela poznati. Rezultati su poređeni sa rezultatima dobijenim korišćenjem gradijentne metode (GVFF-RLS) opisane u poglavlju 3.1 i robusne metode (RVFF-RLS) opisane u poglavlju 3.2, kao dve metode za koje se u naučnim radovima pokazalo da daju zadovoljavajuće rezultate [23, 24].

Nakon toga su u poglavlju 5.2 demonstrirane mogućnosti primene predloženog algoritma na realnim signalima kao što je adaptivna filtracija merenja sa senzora ili estimacija parametara modela signala govora.

Podesećanja radi, GVFF-RLS algoritam koristi gradijentni metod (5.1) da adaptira faktor zaboravljanja

$$\lambda(n) = \left[ \lambda(n-1) - \frac{\mu}{1-\lambda(n-1)} \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}_e^2(n)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}}, \quad (5.1)$$

gde je  $\mu$  korak gradijenta,  $\lambda_{\min}$  je donja granica faktora zaboravljanja koja osigurava stabilnost, i  $\lambda_{\max}$  je gornja granica faktora zaboravljanja koja se koristi u stacionarnom stanju. Pored ovih parametara ovaj algoritam zahteva da se podese i dužine eksonencijalnih prozora ( $\alpha$  i  $\beta$ ) na osnovu kojih se estimiraju varijanse greške koje ulaze u estimaciju gradijenta.

RVFF-RLS algoritam adaptira faktor zaboravljanja (5.2) na osnovu estimirane *a priori* greške estimacije  $\hat{\sigma}_e^2(n)$  i estimirane varijanse šuma  $\hat{\sigma}_u^2(n)$

$$\lambda(n) = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_q(n)\hat{\sigma}_v(n)}{\xi + |\hat{\sigma}_e(n) - \hat{\sigma}_v(n)|}, \lambda_{\max} \right\}, \quad (5.2)$$

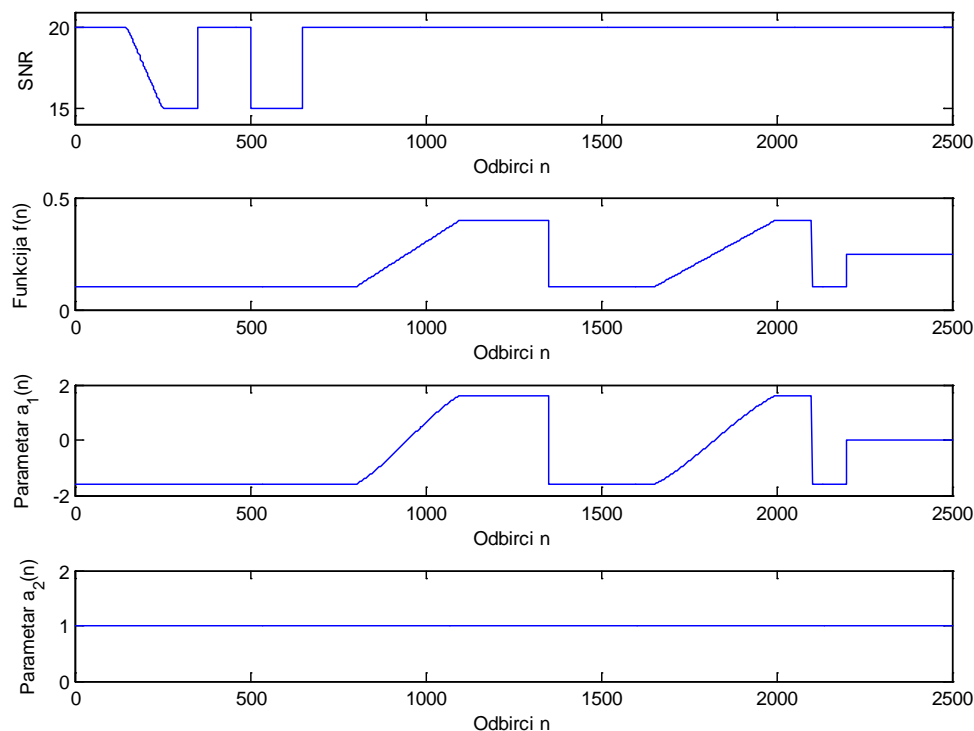
gde mala pozitivna konstanta  $\xi$  sprečava deljenje sa nulom i  $\lambda_{\max}$  ograničava faktor zaboravljanja na vrednost blisku jedinici prilikom stacionanog stanja. Takođe je potrebno podesiti još dva parametra  $K_\alpha$  i  $K_\beta$  koji opisuju dužine eksonencijalnih prozora pri estimaciji varijanse šuma kao i diskriminacioni faktor  $\gamma$  koji definiše kada se vrši adaptacija faktora zaboravljanja a kada se postavlja na fiksnu vrednost  $\lambda_{\max}$ .

## 5.1. Komparativna analiza algoritama na sintetičkim signalima

Tokom komparativne analize algoritama, kao osnova je korišćen veštački generisan signal opisan autoregresivnim modelom drugog reda (5.3) u trajanju od 2500 odbiraka

$$\begin{aligned} y(n) + a_1(n)y(n-1) + a_2(n)y(n-2) &= u(n) \\ a_1(n) &= -2\cos(2\pi f(n)); \quad a_2(n) = 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

gde je promena parametra modela  $a_1(n)$  (Slika 5.1, sredina-dole) definisana trajektorijom funkcije  $f(n)$  (Slika 5.1, sredina-gore) dok je drugi parametar modela  $a_2(n)$  konstantan i jednak 1 (Slika 5.1, dole). Trajektorija parametra modela  $a_1(n)$  ima tri skokovite promene pri odbicima 1350, 2100 i 2200, i dve postepene promene pri odbircima 800-1100 i 1650-2000. Na ceo signal je dodat nestacionaran šum merenja Gausovske raspodele i nulte srednje vrednosti tako da se SNR menja po predefinisanoj trajektoriji (Slika 5.1, gore). Nestacionarni deo šuma merenja nalazi se u stacionarnom delu merenog signala (prvih 800 odbiraka) kako bi se lakše izveli zaključci o uticaju nestacionarnog šuma merenja na algoritme za detekciju nestacionarnosti i adaptaciju faktora zaboravljanja.



Slika 5.1: Trajektorije varijanse šuma (gore), funkcije  $f(n)$  (sredina-gore), parametara modela  $a_1(n)$  (sredina-dole) i  $a_2(n)$  (dole)

Nakon izvršene analize detekcije nestacionarnosti i adaptacije faktora zaboravljanja (poglavlje 5.1.1.), izvršena je analiza uticaja različitih aktivacionih šumova (poglavlje 5.1.2.) kao i analiza uticaja izbora parametara algoritama na kvalitet estimacije (poglavlje 5.1.3.).

Pošto su stvarni parametri modela signala  $a_1(n)$  i  $a_2(n)$  poznati, postavljen je jedinstven kriterijum krajnjeg kvaliteta estimacije kao suma kvadratnih grešaka estimacije parametara modela (5.4),

$$J = \sum_{i=1}^N (y(i) - \mathbf{Z}^T(i)\hat{\boldsymbol{\theta}}(i-1))^2, \quad (5.4)$$

gde je  $N$  broj odbiraka signala,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(i)$  vektor estimiranih parametara modela i  $\mathbf{Z}^T(i)$  vektor merenja.

Takođe, definisana je i kumulativna suma srednje kvadratne greške estimacije (5.4) kako bi se grafički prikazali uticaji promene stacionarnosti na kvalitet estimacije.

$$J(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(i) - \mathbf{Z}^T(i)\hat{\boldsymbol{\theta}}(i-1))^2 \quad (5.5)$$

Što se predloženog algoritma tiče (AFDVFF-RLS) kao polinomska funkcija (4.40) koja opisuje zavisnost faktora zaboravljanja od stepena nestacionarnosti (4.39) izabrana je jednostavna kvadratna funkcija ograničena sa donje strane oblika (5.6)

$$\lambda(n) = \max(-a \cdot q^2(n) + \lambda_{max}, \lambda_{min}) \quad (5.6)$$

koja ima jasan fizički smisao, pošto se očekuje da tokom stacionarnih delova signala stepen nestacionarnosti  $q(n)$  dobijen diferenciranjem signala apsolutne konačne razlike sa kašnjenjem  $M$  bude blizak nuli. Parametar  $\lambda_{max}$  opisuje maksimalnu vrednost faktora zaboravljanja, dok parametar  $a$  opisuje brzinu reakcije algoritma na detekciju promene stacionarnosti, tako da što je parametar  $a$  veći prilikom detekcije nestacionarnosti faktor zaboravljanja se brže smanjuje. Parametar  $\lambda_{min}$  jednostavno ograničava faktor zaboravljanja sa donje strane.

### 5.1.1. Analiza performansi algoritama na veštački generisanom signalu

Tokom analize performansi algoritama korišćen je Gausovski aktivacioni šum  $u(n)$  nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse. Takođe, parametri svih algoritama su podešeni tako da postižu minimalnu ukupnu kvadratnu grešku estimacije (5.4), kako bi se postigli isti početni uslovi. To praktično znači da su vrednosti parametara algoritama sledeće:

AFDVFF-RLS algoritam:

- $M = 10$
- $\alpha = 0.5$
- $a = 0.9$
- $\lambda_{max} = 0.95$
- $\lambda_{min} = 0.01$  (ne podešava se, samo se postavlja da spreči negativne vrednosti FF)

GVFF-RLS algoritam:

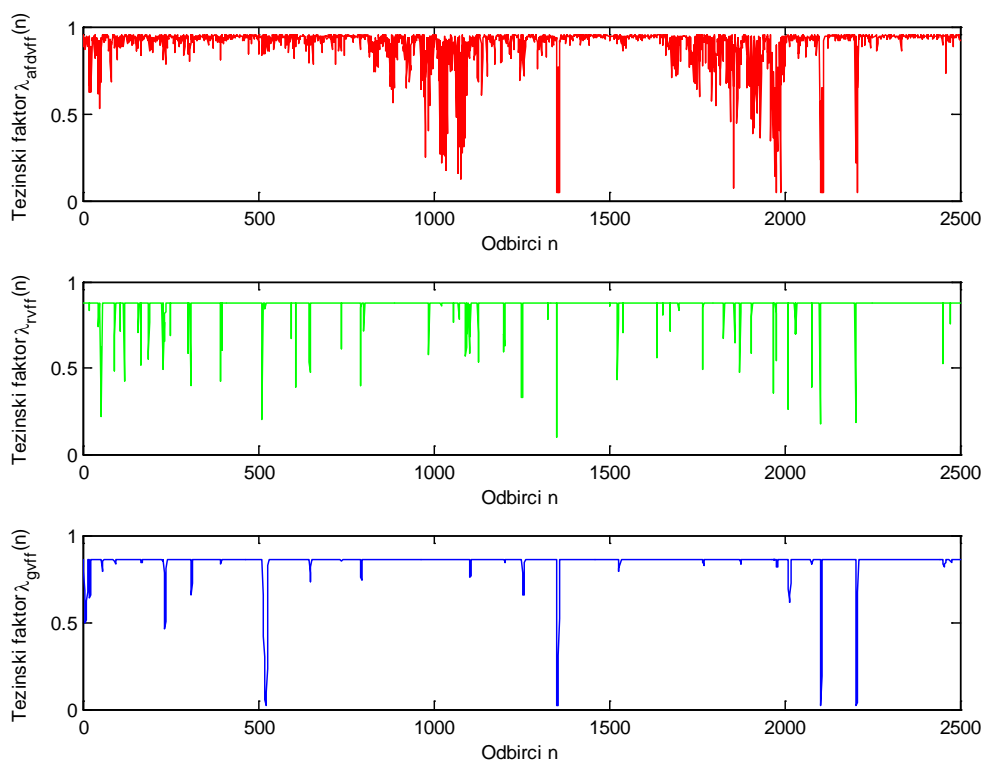
- $\mu = 0.25$
- $\alpha = 0.175$
- $\beta = 0.98$
- $\lambda_{max} = 0.86$



RVFF-RLS algoritam:

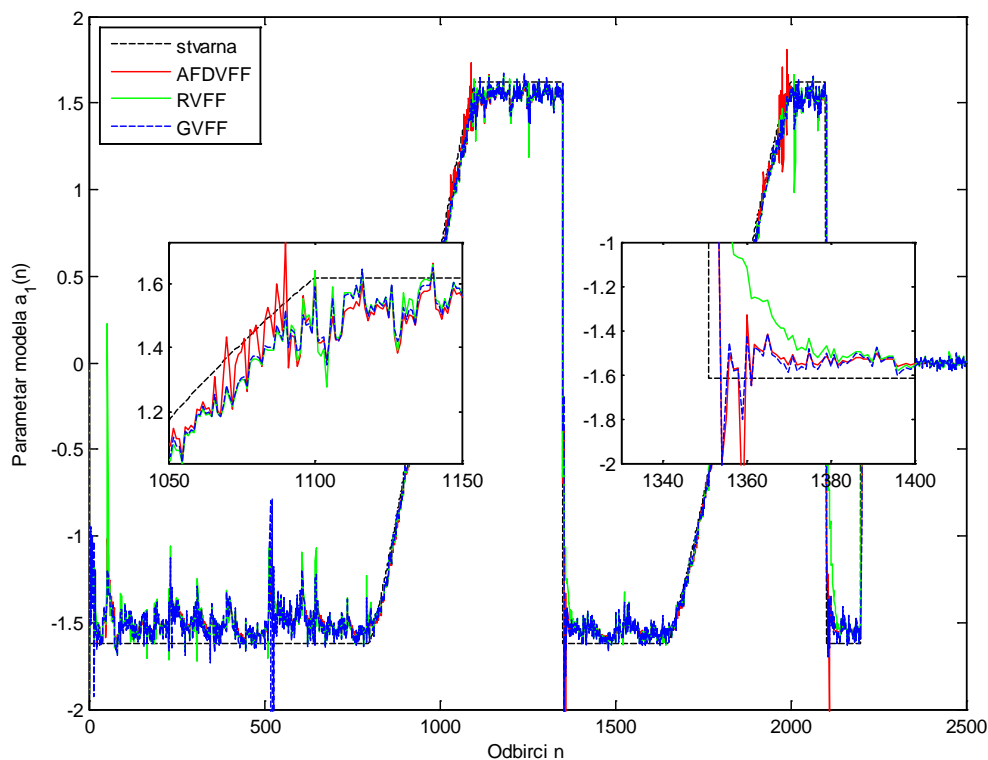
- $\gamma = 1.25$
- $K_\alpha = 2$
- $K_\beta = 48$
- $\lambda_{max} = 0.88$
- $\xi = 10^{-8}$  (ne podešava se, samo se postavlja da spreči deljenje sa nulom)

Ako pogledamo trajektorije faktora zaboravljanja generisane algoritmima AFDVFF-RLS (Slika 5.2, gore), RVFF-RLS (Slika 5.2, sredina) i GVFF-RLS (Slika 5.2, dole) sa ovako podešenim parametrima za veštački generisan signal (5.3), zaključak je da su sva tri algoritma detektovala skokovite promene stacionarnosti pri odbircima 1350, 2100 i 2200 i stoga umanjile težinski faktor kako bi stara merenja što pre iščezla. Međutim, razlike ovih algoritama su očigledne tokom postepenih promena stacionarnosti signala pri odbircima 800-1100 i 1650-2000, gde se jasno vidi da ni GVFF-RLS ni RVFF-RLS metod ne smanjuju težinski faktor već se oslanjaju na svoje inače niske maksimalne vrednosti težinskog faktora (primetiti da su maksimalne vrednosti težinskog faktora za GVFF-RLS i RVFF-RLS metode  $\lambda_{max} = 0.86$  i  $\lambda_{max} = 0.88$  respektivno, dok je za AFDVFF-RLS algoritam  $\lambda_{max} = 0.95$ ), dok su iste te promene u stacionarnosti signala detektovane od strane AFDVFF-RLS algoritma i težinski faktor je i u tim periodima umanjen. Ispitivanje uticaja nestacionarnog šuma merenja je pokazalo da su promene u varijansi šuma imale mali do nikakav uticaj na adaptaciju faktora zaboravljanja korišćenjem AFDVFF-RLS algoritma, dok su i RVFF-RLS i GVFF-RLS algoritam prilično osetljivi na ove promene i detektovali su ih kao promene stacionarnosti signala i stoga nepotrebno umanjile težinski faktor. Ova pojava se najjasnije uočava oko 500. odbirka gde su RVFF-RLS i GVFF-RLS algoritmi umanjili težinski faktor skoro na nulu.



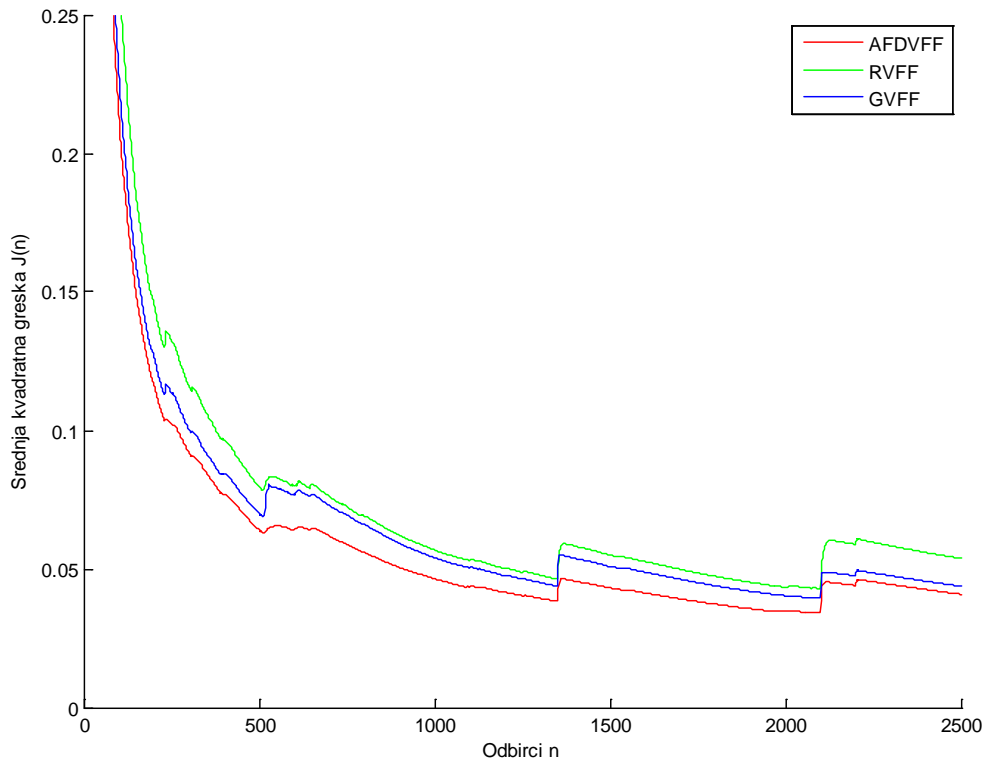
Slika 5.2: Trajektorije faktora zaboravljanja dobijene AFDVFF-RLS (gore), RVFF-RLS (sredina) i GVFF-RLS (dole) algoritmima

Ovi rezultati su potvrđeni i estimiranim trajektorijama parametra modela  $a_1(n)$  (Slika 5.3), gde su dva karakteristična perioda, jedan pri postepenoj promeni stacionarnosti signala (Slika 5.3, levo) a drugi pri skokovitoj promeni (Slika 5.3, desno), uvećana. Jasno je da su postepene promene parametra modela  $a_1(n)$  najbolje ispraćene od strane AFDVFFF-RLS algoritma dok se u slučaju RVFF-RLS i GVFF-RLS algoritama ove promene sporije prate pošto ih algoritmi efektivno ne detektuju već se oslanjaju na nešto nižu maksimalnu vrednost težinskog faktora  $\lambda_{max}$ . Interesantno je primetiti i da je tokom skokovitih promena u stacionarnosti RVFF-RLS algoritam dao najlošije rezultate, tj. najsporije je ispratio promene, najverovatnije zbog svoje robusne prirode. Delovi signala gde smo imali nestacionarni šum merenja nisu uvećani pošto se ne vidi jasno rezultat, ali ono što je očigledno je da u ovom slučaju imamo veliku grešku estimacije parametra modela  $a_1(n)$  u slučaju sva tri algoritma, iako je najizraženije u slučaju GVFF-RLS algoritma.



*Slika 5.3: Estimirane trajektorije parametra modela  $a_1(n)$  gde su dva karakteristična perioda uvećana: jedan gde su promene parametra postepene (levo) i skokovite (desno).*

Ako se za celo trajanje simulacije prikažu (Slika 5.4) kumulativne srednje kvadratne greške estimacije (5.5), jasno je da AFDVFFF-RLS algoritam daje najbolje rezultate nakon koga sledi GVFF-RLS algoritam i na kraju RVFF-RLS algoritam. Kao što je i očekivano najveći skokovi u greškama estimacije su prilikom skokovitih promena u stacionarnosti signala. Tokom promena stacionarnosti aditivnog šuma merenja, najlošiji rezultati su bili u slučaju GVFF-RLS algoritma pošto on efektivno estimira gradijent greške koji se skokovito menja tokom promene u stacionarnosti šuma. Međutim ni AFDVFFF-RLS ni RVFF-RLS algoritam nisu imuni na ove promene.



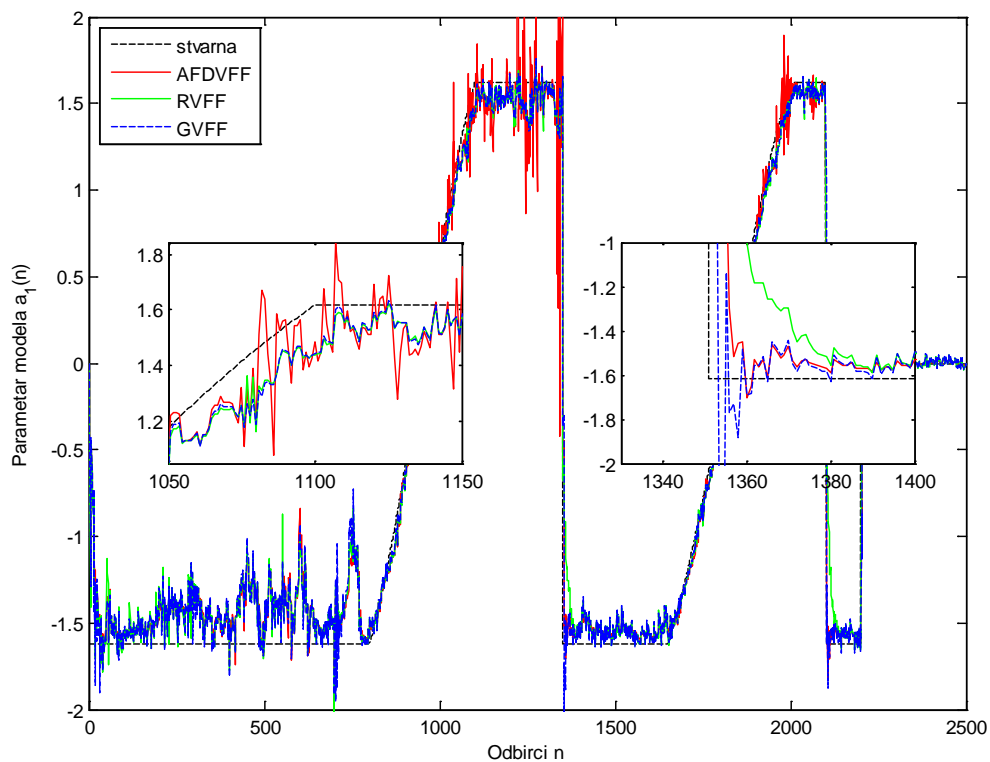
Slika 5.4: Trajektorije kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela

### 5.1.2. Analiza uticaja različitih aktivacionih šumova autoregresivnog modela

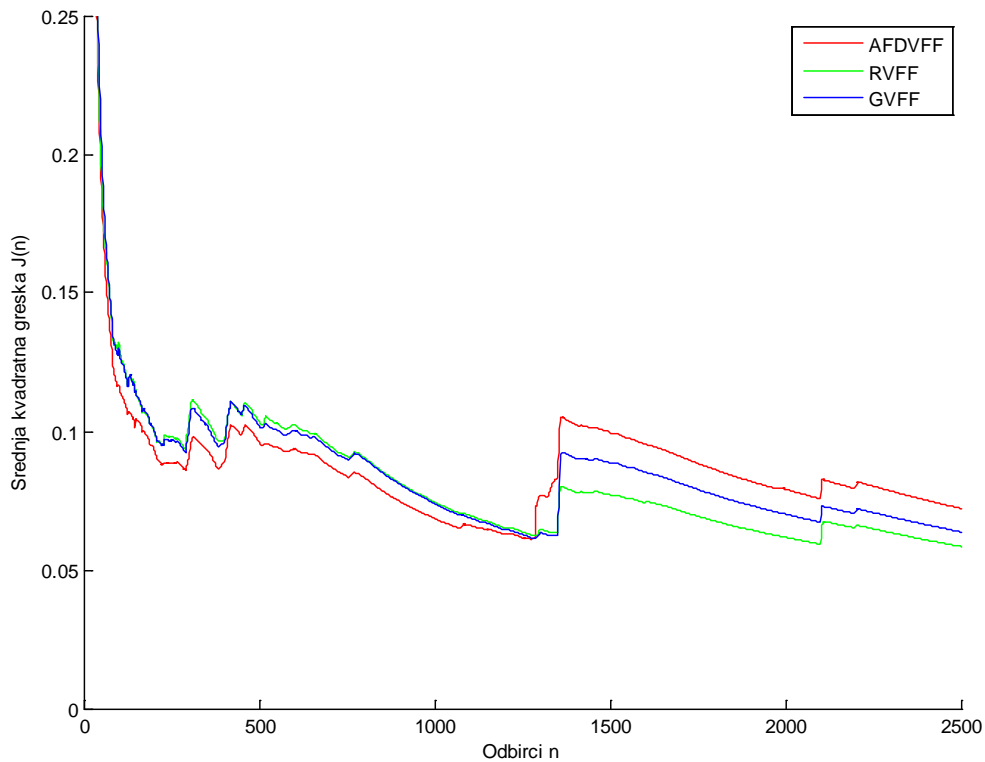
Sve simulacije iz prethodnog poglavlja su sprovedene pod pretpostavkom Gausovskog aktivacionog šuma nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse. Međutim, u praksi to veoma često nije tako pa je stoga interesantno ispitati kako se algoritmi ponašaju za različite raspodele aktivacionog šuma.

Simulacije iz prethodnog poglavlja su ponovljene za slučaj aktivacionog šuma uniformne (4.21), modifikovane Poasonove (4.22), gama (4.23) i proizvoljno generisane (4.24) raspodele nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse opisane u poglavlju 4.2.1. slika 4.8. U svim slučajevima je zadržano da je aditivni šum merenja Gausovske raspodele.

U slučaju aktivacionog šuma uniformne raspodele opisane funkcijom gustine verovatnoće (4.21) prilikom estimacije parametara modela  $a_1(n)$  (Slika 5.5) može se primetiti da su estimacije pod velikim uticajem šuma, pogotovu estimacije korišćenjem AFDVFF-RLS metode. To se najbolje vidi na trajektoriji kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela (Slika 5.6) prilikom skokovite promene stacionarnosti na 1350. odbirku kada je greška u slučaju AFDVFF-RLS algoritma naglo porasla dok je pre tog trenutka bila najmanja. Može se zaključiti da u slučaju uniformne raspodele aktivacionog šuma AFDVFF-RLS metoda daje najlošije rezultate i veoma je osetljiva na takvu vrstu šuma.

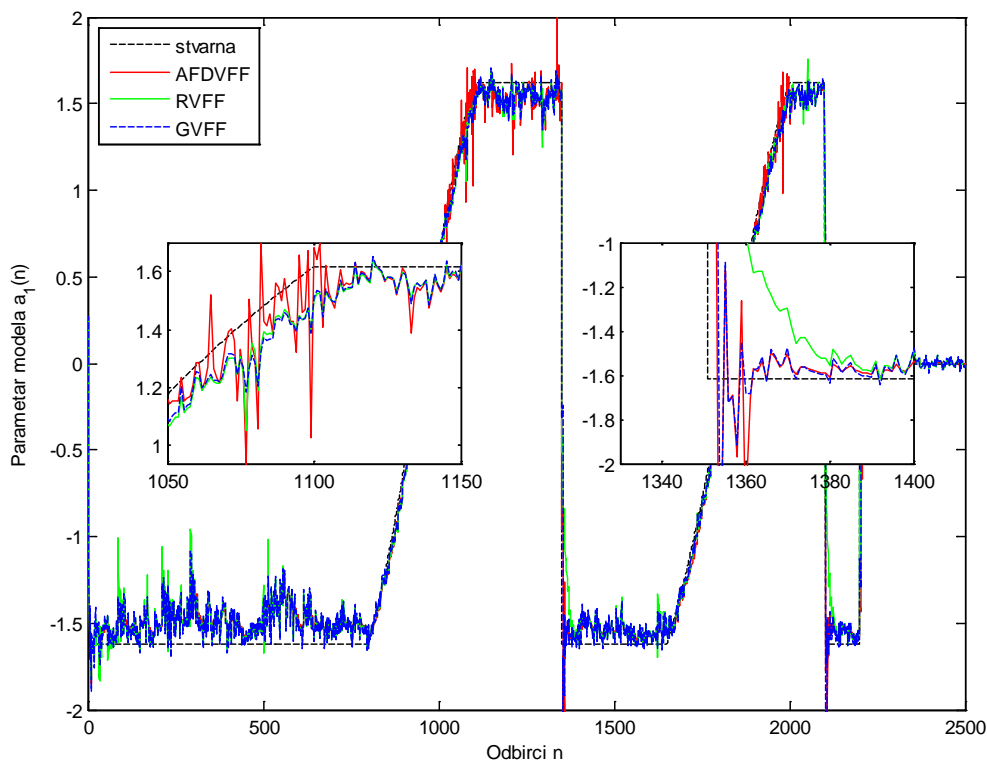


Slika 5.5: Estimirane trajektorije parametra modela  $a_1(n)$  za slučaj aktivacionog šuma uniformne raspodele gde su dva karakteristična perioda uvećana

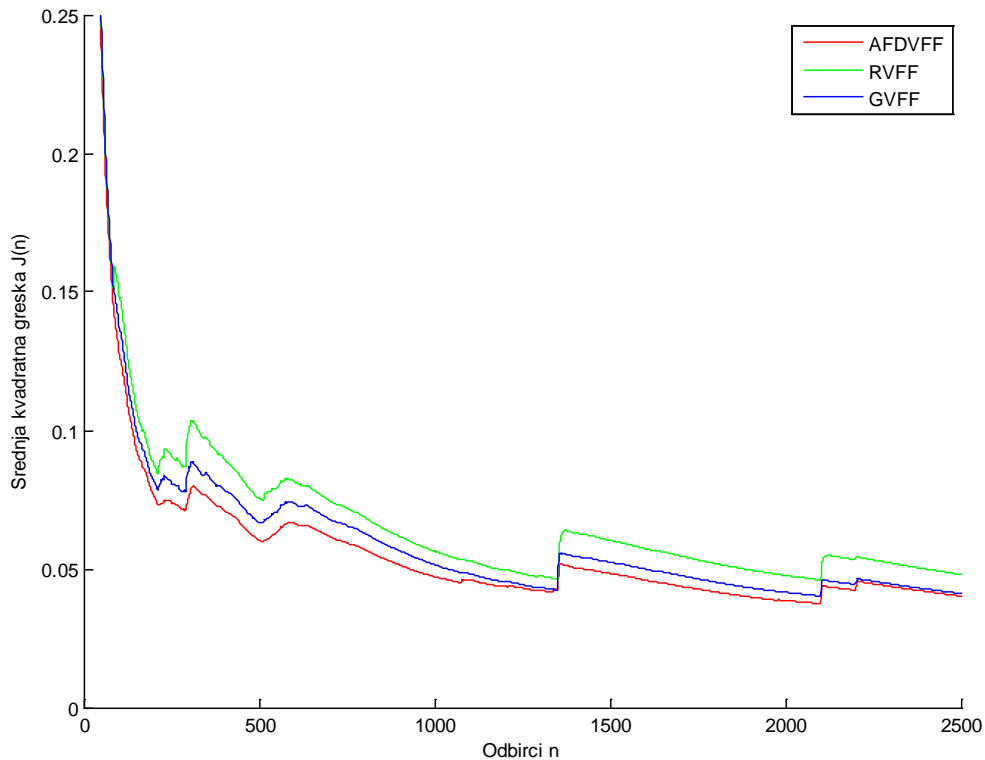


Slika 5.6: Trajektorije kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela za slučaj aktivacionog šuma uniformne raspodele

U slučaju aktivacionog šuma modifikovane Poasonove raspodele opisane funkcijom gustine verovatnoće (4.22) prilikom estimacije parametara modela  $a_1(n)$  (Slika 5.7) može se zaključiti da su estimacije pod mnogo manjim uticajem šuma nego u slučaju uniformne raspodele aktivacionog šuma. Na trajektoriji kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela (Slika 5.8) vidimo da su dobijeni rezultati jako slični kao i u slučaju Gausovske raspodele aktivacionog šuma (Slika 5.4). Iz ovih rezultata se može zaključiti da u slučaju modifikovane Poasonove raspodele sva tri algoritma imaju jako slične performanse kao i u slučaju Gausovske raspodele aktivacionog šuma.

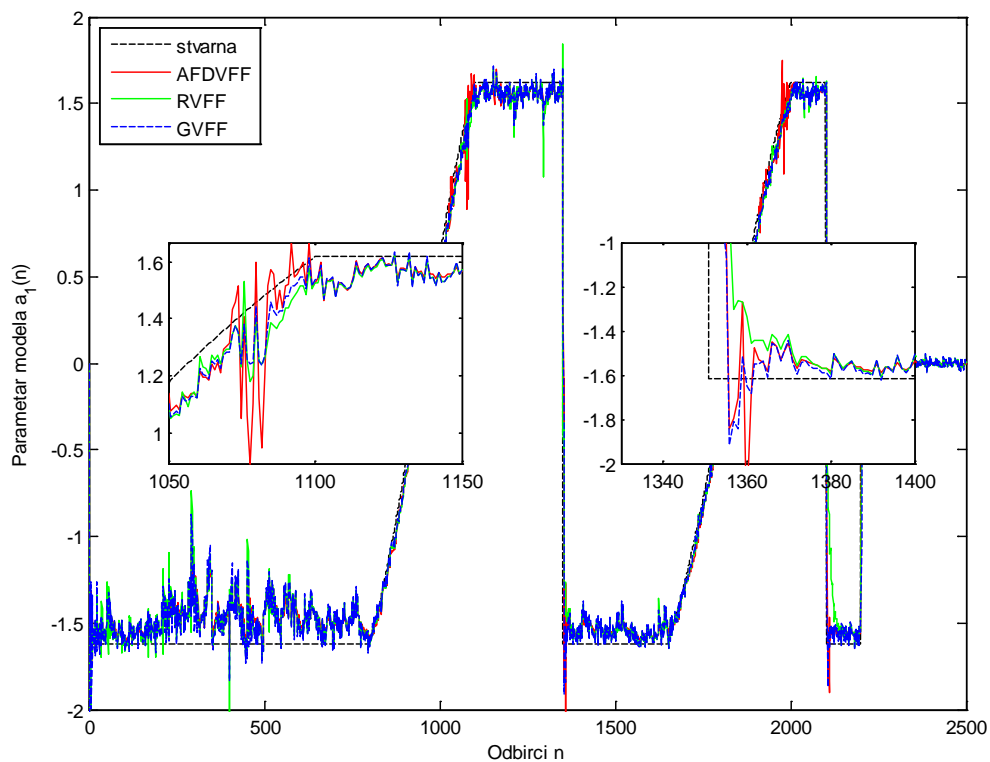


*Slika 5.7: Estimirane trajektorije parametra modela  $a_1(n)$  za slučaj aktivacionog šuma modifikovane Poasonove raspodele gde su dva karakteristična perioda uvećana*

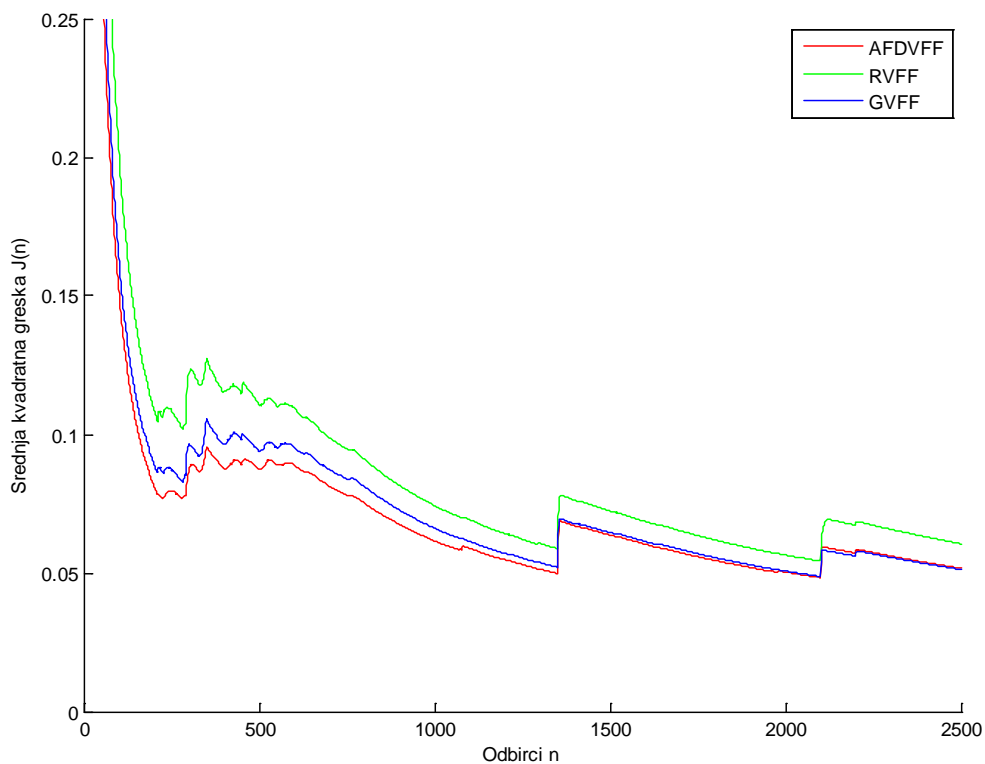


*Slika 5.8: Trajektorije kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela za slučaj aktivacionog šuma modifikovane Poasonove raspodele*

Ukoliko je aktivacioni šum gama raspodele opisane funkcijom gustine verovatnoće (4.23) prilikom estimacije parametara modela  $a_1(n)$  (Slika 5.9) dobijamo jako slične rezultate kao i u slučaju Gausovske raspodele, što je prilično neočekivano imajući u vidu da je gama raspodela izrazito nesimetrična i da je dala dosta pomerene estimacije statistika apsolutne konačne razlike u odnosu na teoretski izvedene u poglavlju 4.2. Na trajektoriji kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela (Slika 5.10) se ovo i potvrđuje. Iz ovih rezultata se može zaključiti da i u slučaju gama raspodele sva tri algoritma imaju jako slične a možda čak i bolje performanse nego u slučaju Gausovske raspodele aktivacionog šuma.



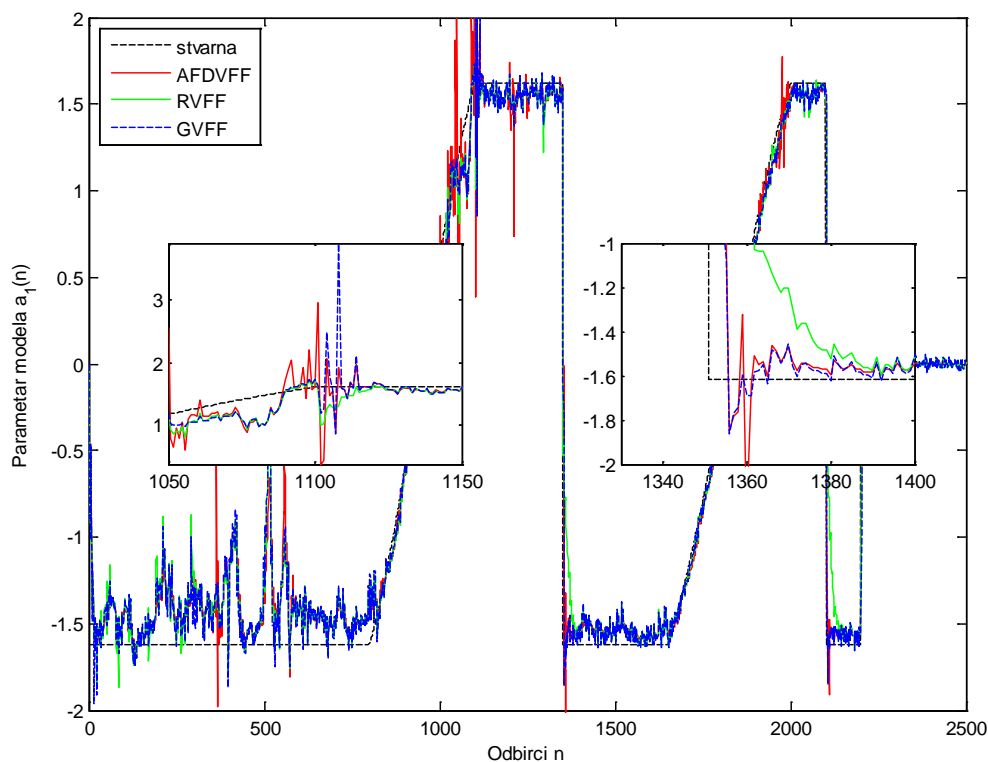
Slika 5.9: Estimirane trajektorije parametra modela  $\alpha_1(n)$  za slučaj aktivacionog šuma gama raspodele gde su dva karakteristična perioda uvećana



Slika 5.10: Trajektorije kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela za slučaj aktivacionog šuma gama raspodele

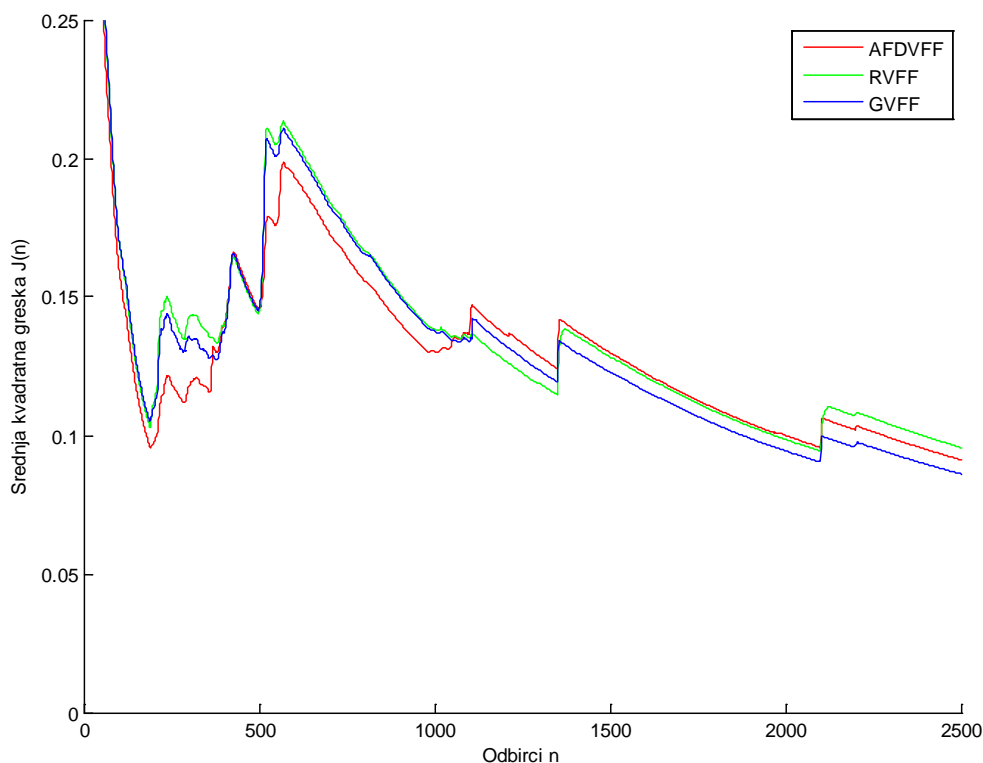
I na kraju su simulacije ponovljene za slučaj aktivacionog šuma sintetički generisane nesimetrične raspodele opisane funkcijom gustine verovatnoće (4.24). U tom slučaju su dobijeni rezultati prilikom estimacije parametara modela  $a_1(n)$  (Slika 5.11) lošiji nego u slučaju gama raspodele (Slika 5.9), mada ne kao u slučaju uniformne raspodele (Slika 5.5). Na trajektoriji kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela (Slika 5.12) se uočava da dobijeni rezultati jesu lošiji što se tiče AFDVFF-RLS algoritma nego u slučaju aktivacionih šumova modifikovane Poasonove i gama raspodele, ali su bolji nego u slučaju uniforme raspodele.

Posmatrajući sve dobijene rezultate (Slike 5.3-5.12) može se izvesti zaključak da je AFDVFF-RLS metoda najosetljivija na promene raspodele aktivacionog šuma dok su i RVFF-RLS i GVFF-RLS metode manje osetljive. Ono što je takođe zanimljivo jeste da AFDVFF-RLS algoritam u slučaju svake simulirane raspodele aktivacionog šuma brže konvergira ka rešenju a to se zaključuje posmatranjem prvih 100 odbiraka simulacije i trajektorije kumulativne srednje kvadratne greške estimacije (Slike 5.4, 5.6, 5.8, 5.10 i 5.12) u tom početnom delu simulacije.



Slika 5.11: Estimirane trajektorije parametra modela  $a_1(n)$  za slučaj aktivacionog šuma sintetički generisane nesimetrične raspodele su dva karakteristična perioda uvećana





Slika 5.12: Trajektorije kumulativne srednje kvadratne greške estimacije parametara modela za slučaj aktivacionog šuma sintetički generisane nesimetrične raspodele

### 5.1.3. Analiza uticaja izbora parametara metode na kvalitet estimacije

Sva tri opisana metoda efektivno zahtevaju podešavanje 4 različita parametra pre početka same estimacije. Ostali parametri kao što je  $\lambda_{\min}$  u slučaju AFDVFF-RLS metode ili  $\xi$  u slučaju RVFF-RLS metode, sprečavaju neželjene situacije kao što je negativan težinski faktor ili deljenje sa nulom. Oni se ne podešavaju i stoga ne utiču na kvalitet estimacije. Gledajući ostale parametre dobijene minimizacijom kvadratne greške estimacije parametara iz poglavlja 5.1.1

AFDVFF-RLS algoritam:

- $M = 10$
- $\alpha = 0.5$
- $a = 0.9$
- $\lambda_{max} = 0.95$

GVFF-RLS algoritam:

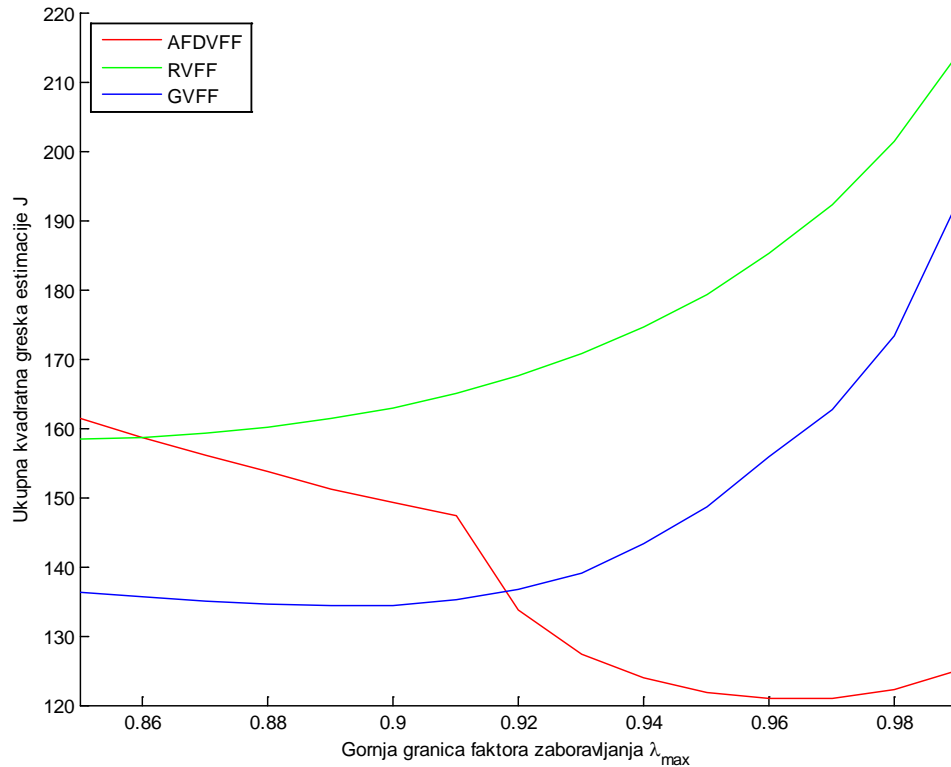
- $\mu = 0.25$
- $\alpha = 0.175$
- $\beta = 0.98$
- $\lambda_{max} = 0.86$

RVFF-RLS algoritam:

- $\gamma = 1.25$
- $K_{\alpha} = 2$
- $K_{\beta} = 48$
- $\lambda_{max} = 0.88$

Zaključuje se da se jedino parametar  $\lambda_{max}$  koji ima isti fizički smisao pojavljuje u sve tri opisane metode i stoga je najlakše prvo prikazati uticaj njegovog izbora na kvalitet estimacije. U ovom eksperimentu su svi parametri ostali isti kao kao gore opisani, dok je aktivacioni šum bio, kao i u prvom slučaju, Gausovski. Parametar  $\lambda_{max}$  je variran od 0.85 do 0.99 i posmatrana je krajnja kvadratna greška estimacije parametara modela opisana jednačinom (5.4). Simulacije su ponovljene 200 puta i rezultati su usrednjeni. Dobijeni rezultati (Slika 5.13) pokazuju da sve tri metode zavise od izbora parametra  $\lambda_{max}$  na različite načine. Posmatrajući promenu kvaliteta estimacije u zavisnosti od promene ovog parametra zaključuje se da je najmanji uticaj lošeg parametra estimacije bio u slučaju predložene AFDVFF-RLS metode. U slučaju druge dve metode je uticaj lošeg izbora parametra  $\lambda_{max}$  bio dosta izraženiji, pogotovu u slučajevima kada je postavljen na vrednosti veće od 0.9, što ide u prilog zaključku da ove dve metode se u slučaju sporih promena stacionarnosti signala

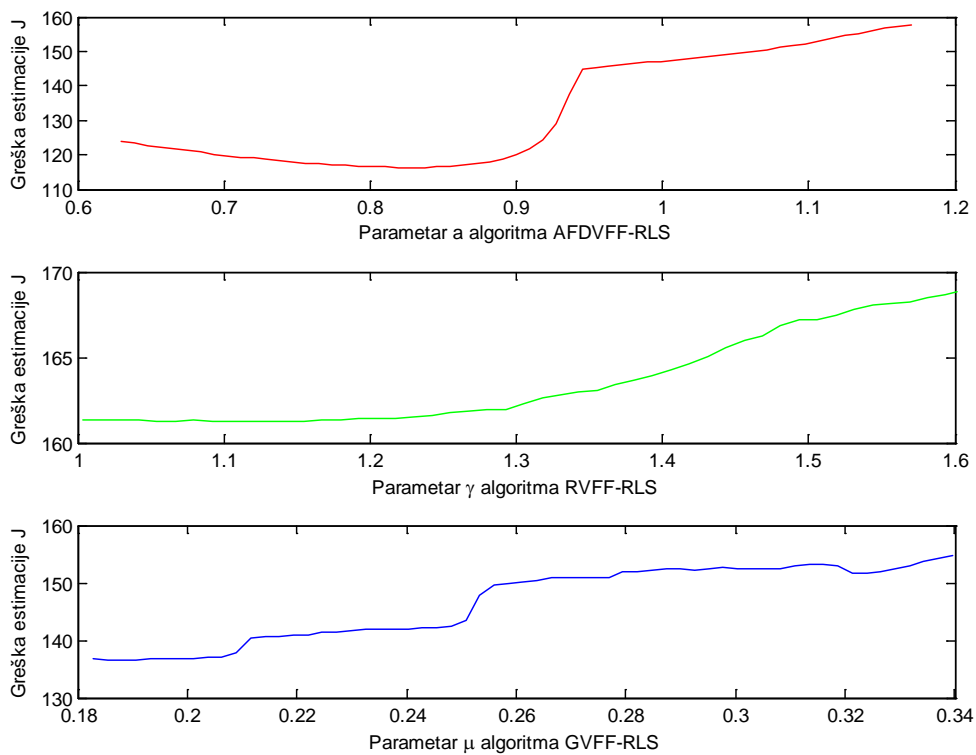
efektivno oslanjaju na nešto nižu maksimalnu vrednost težinskog faktora. Upravo se zbog toga i vidi jedna prelomna tačka na grafiku u slučaju AFDVFF-RLS metode, na vrednosti  $\lambda_{max} = 0.91$ , što je ustvari tačka od koje se algoritam pri daljem smanjivanju ove vrednosti ne oslanja na detekciju nestacionatnosti već kompenzuje slabu detekciju sa efektivno manjom maksimalniom vrednošću faktora zaboravljanja.



Slika 5.13: Analiza uticaja izbora  $\lambda_{max}$  parametra na kvalitet estimacije

Kako su parametri  $a$  kod AFDVFF-RLS,  $\gamma$  kod RVFF-RLS i  $\mu$  kod GVFF-RLS metode identifikovani kao parametri koji pored  $\lambda_{max}$  imaju najviše uticaja na kvalitet estimacije, sprovedena je i uporedna analiza njihovog uticaja. Pošto ovi parametri nisu međusobno povezani, nemaju isti fizički smisao niti iste opsege u kojima se biraju, posmatrani su zasebno (Slika 5.14). Na primer, AFDVFF-RLS algoritam daje minimalnu sumu kvadratne greške estimacije pri  $a = 0.87$ . Vrednost  $a$  je varirana od 0.6 do 1.2, dok su ostali parametri ostali fiksni kao u prethodnom primeru. Isto je odrađeno i sa RVFF-RLS i GVFF-RLS metodama za parametre  $\gamma$  i  $\mu$ , respektivno.

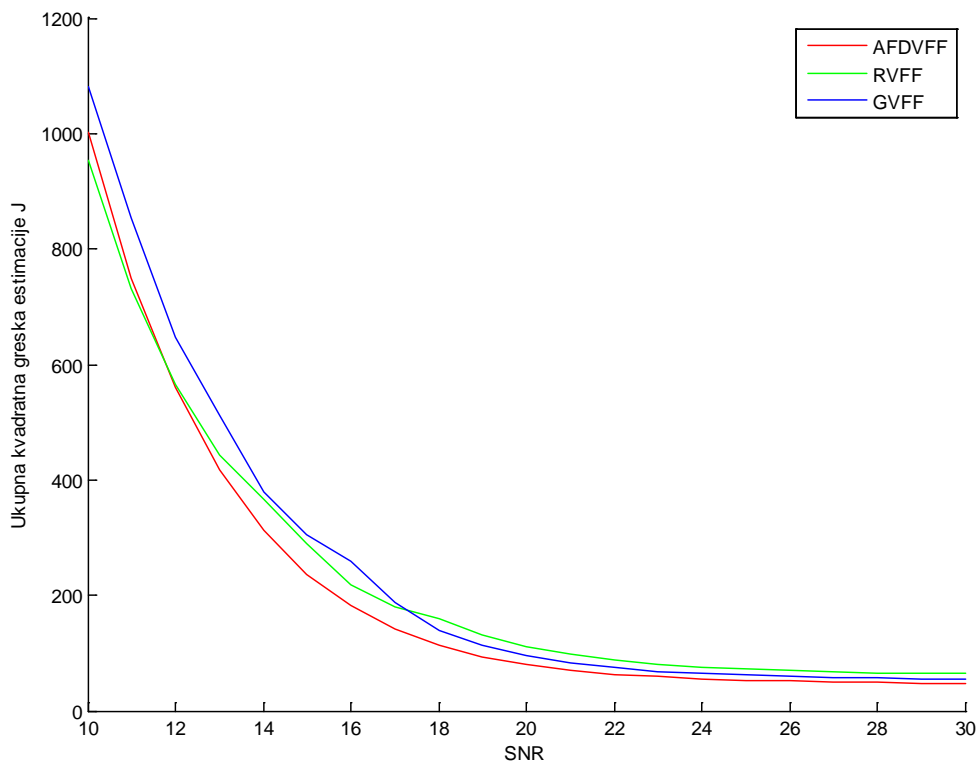
Prema ovoj analizi zaključuje se da je GVFF-RLS algoritam najotporniji na loše podešen parametar  $\mu$ , dok su RVFF-RLS i AFDVFF-RLS nešto osetljivije na promene parametara  $\gamma$  i  $a$ . Međutim ako pogledamo sume kvadrata greške estimacije zaključuje se da, iako je AFDVFF-RLS metod možda najosetljiviji, ipak u svim slučajevima daje najbolje rezultate.



Slika 5.14: Uporedna analiza uticaja parametara  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\mu$  na kvalitet estimacije

#### 5.1.4. Analiza uticaja aditivnog šuma merenja

Efekat aditivnog šuma merenja je takođe jedan od bitnih faktora koji utiče na krajnji kvalitet estimacije. Stoga su simulacije ponovljene tako da se zadrže parametri metoda koji daju najmanju kvadratnu grešku estimacije, a aditivni šum merenja je variran u opsegu od 10 dB do 30 dB. Tokom ovih simulacija i aditivni šum merenja i aktivacioni šum su imali Gausovsku raspodelu. Za svaki izbor  $SNR$ -a simulacije su ponovljene 100 puta i ukupna suma kvadratnih grešaka estimacije opisana jednačinom (5.4) je usrednjena na tih 100 ponavljanja kako bi se dobili relevantni rezultati. Kao što je i očekivano, sve metode daju bolje rezultate kada je  $SNR$  veći (Slika 5.15), sa tim da AFDVFF-RLS metoda daje delimično bolje rezultate od druge dve. Međutim, kako  $SNR$  opada, tako opada i kvalitet estimacije, dok za veoma niske  $SNR$  ( $\ll 15dB$ ) RVFF-RLS metoda daje nabolje rezultate, a kvalitet estimacije korišćenjem GVFF-RLS metode naglo opada.

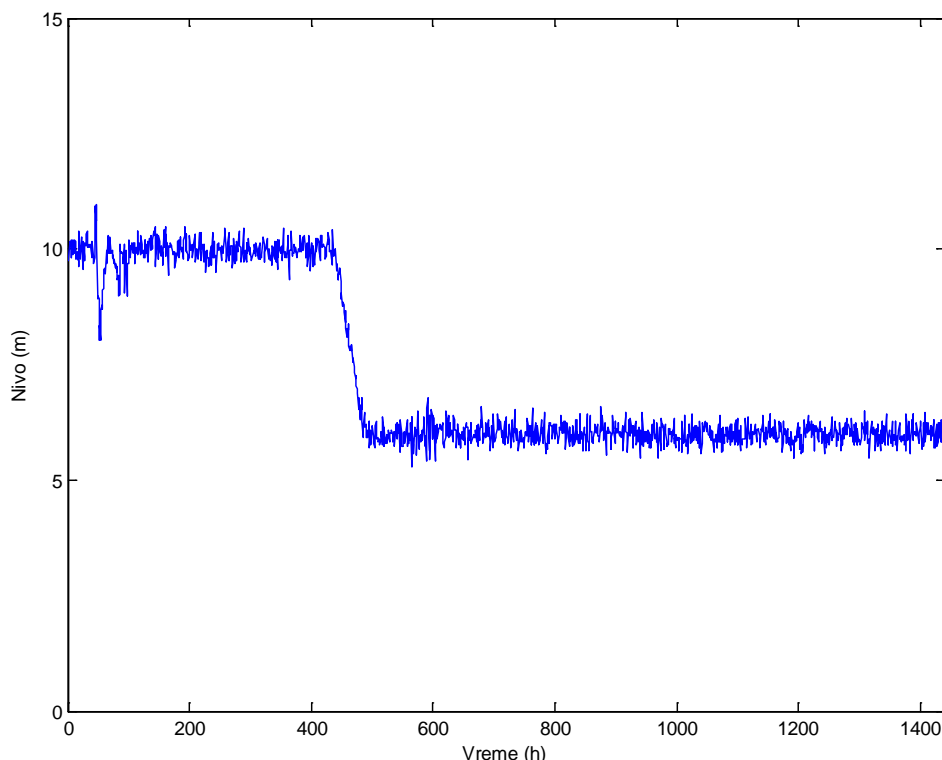


Slika 5.15: Uticaj šuma merenja na kvalitet estimacije

## 5.2. Primena predloženog algoritma na realnim signalima

### 5.2.1. Adaptivna filtracija merenja sa senzora

Primena predložene metode je demonstrirana i na realnim signalima korišćenjem merenja sa separatora pare (Slika 5.16). Sistem sa koga su merenja snimljena je TEK0 B1 blok termoelektrane Kostolac čija je nominalna izlazna snaga 350 MW. Separator pare je cilindričnog oblika, visine 24 m i prečnika 0.9 m. Jedan od najznačajnijih zahteva celog procesa jeste da se nivo vode u separatoru pare održava na oko 8 m [66]. Signal je snimljen 11. decembra 2020. godine. Za vreme trajanja merenja snimljen je jedan poremećaj nivoa tokom prvog sata i jedna promene referentnog nivoa tokom osmog sata merenja.



*Slika 5.16: Nivo vode u separatoru pare*

Nivo vode u separatoru se meri pri ekstremno visokim pritiscima pare i nestabilnim dotokom vode, pa su stoga snimljena merenja nepouzdana i sa veoma visokim uticajem mernog šuma [66]. Kako bi se adekvatno vodio proces, pouzdana merenja nivoa su od krucijalnog značaja, a pored toga nivo vode je i jedan od alarmnih signala za prinudno gašenje sistema. Stoga snimljena merenja moraju biti filtrirana tako da se smanji uticaj merenog šuma a da sa druge strane sistem može da isprati i promene u referentnom nivou kao i eventualne poremećaje nivoa. Jedan od mogućih načina jeste da se koristi niskopropusni filter prvog reda (5.7) sa varijabilnim koeficijentom  $\lambda(n)$  (težinskim faktorom koji opisuje dužinu eksponencijalnog prozora filtracije) koji se podešava nekom od opisanih metoda

$$d(n) = \lambda(n)d(n-1) + (1 - \alpha(n))y(n) \quad (5.7)$$

gde je  $y(n)$  mereni signal a  $d(n)$  filtrirani signal.

Korišćenjem istih parametara metoda kao u prethodnim eksperimentima,

AFDVFF-RLS algoritam:

- $M = 10$
- $\alpha = 0.5$
- $a = 0.9$
- $\lambda_{max} = 0.95$

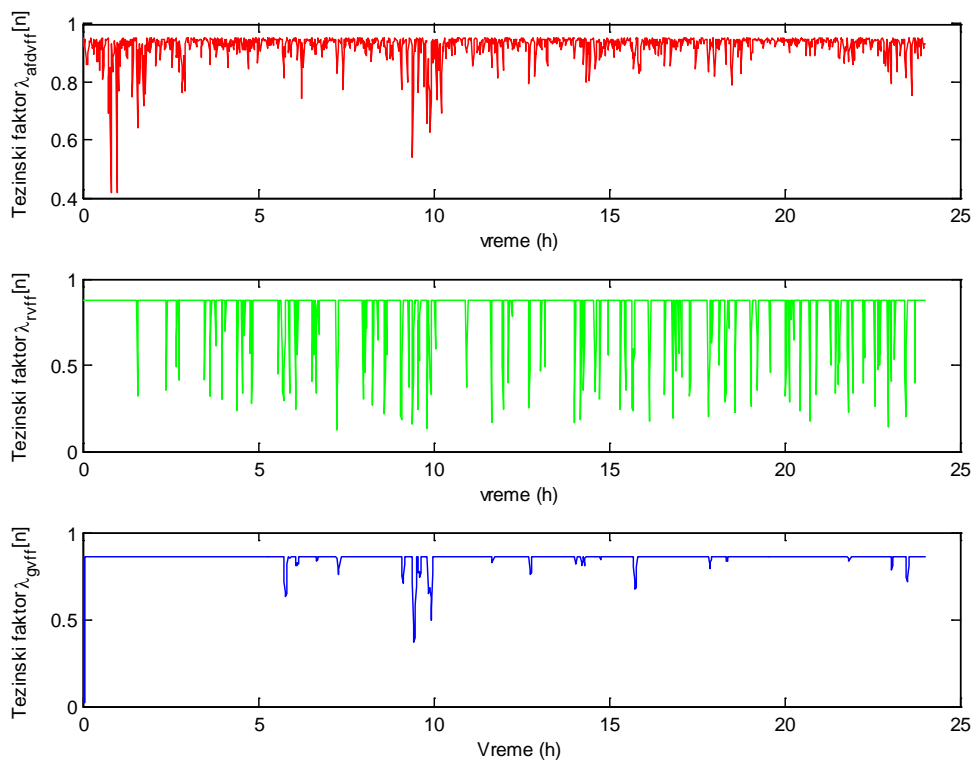
GVFF-RLS algoritam:

- $\mu = 0.25$
- $\alpha = 0.175$
- $\beta = 0.98$
- $\lambda_{max} = 0.86$

RVFF-RLS algoritam:

- $\gamma = 1.25$
- $K_\alpha = 2$
- $K_\beta = 48$
- $\lambda_{max} = 0.88$

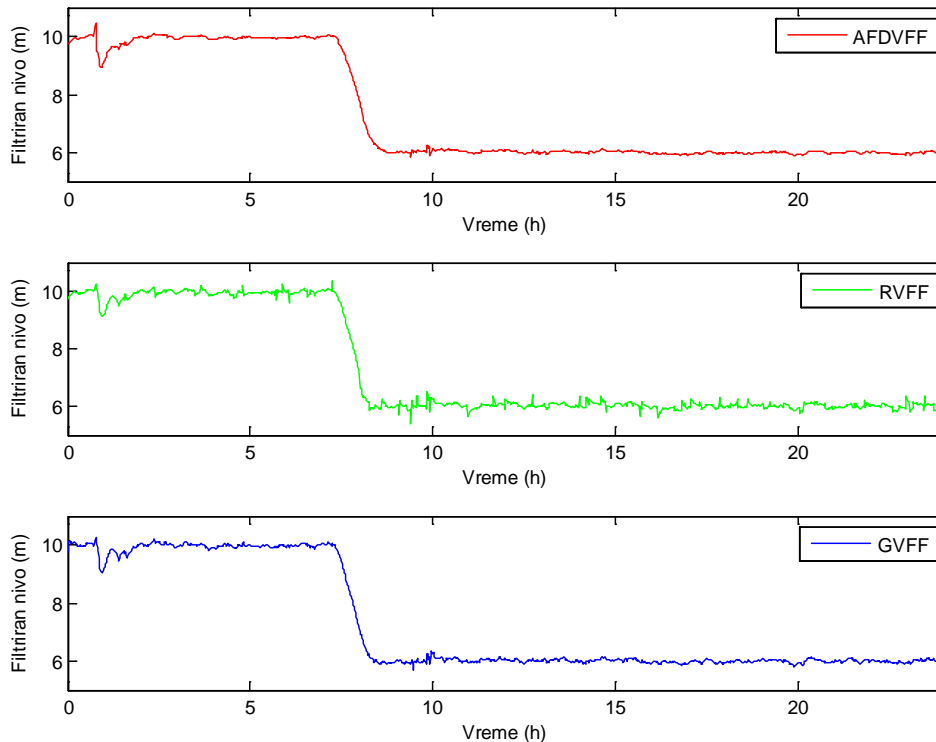
dobijene su trajektorije faktora zaboravljanja (Slika 5.17) koje se direktno mogu koristiti kao koeficijenti niskopropusnog filtera kako u stacionarnim delovima signala faktor zaboravljanja teži jedinici i stoga dužina eksponencijalnog prozora postaje efektivno veća i stoga se postiže odlična filtracija mernog šuma. Sa druge strane kada se detektuje promena stacionarnosti faktor zaboravljanja se smanjuje tj. smanjuje se i dužina eksponencijalnog prozora omogućujući praćenje tih promena. Ono što je očigledno jeste da je AFDVFF-RLS algoritam detektovao (Slika 5.17, gore) i poremećaj nivoa (oko prvog sata merenja) i promenu referentnog nivoa (oko osmog sata merenja) i smanjio faktor zaboravljanja, dok je RVFF-RLS algoritam često detektovao (Slika 5.17, sredina) neke nepostojeće promene stacionarnosti i nepotrebno smanjivao faktor zaboravljanja. Sa druge strane GVFF-RLS algoritam očigledno nije ni detektovao (Slika 5.17, dole) poremećaj nivoa pri početku merenja, dok je promena referentnog nivoa detektovana.



Slika 5.17: Estimirani težinski faktori korišćeni pri filtriranju mernog signala dobijeni AFDVFF-RLS (gore), RVFF-RLS (sredina) i GVFF-RLS (dole) metodom

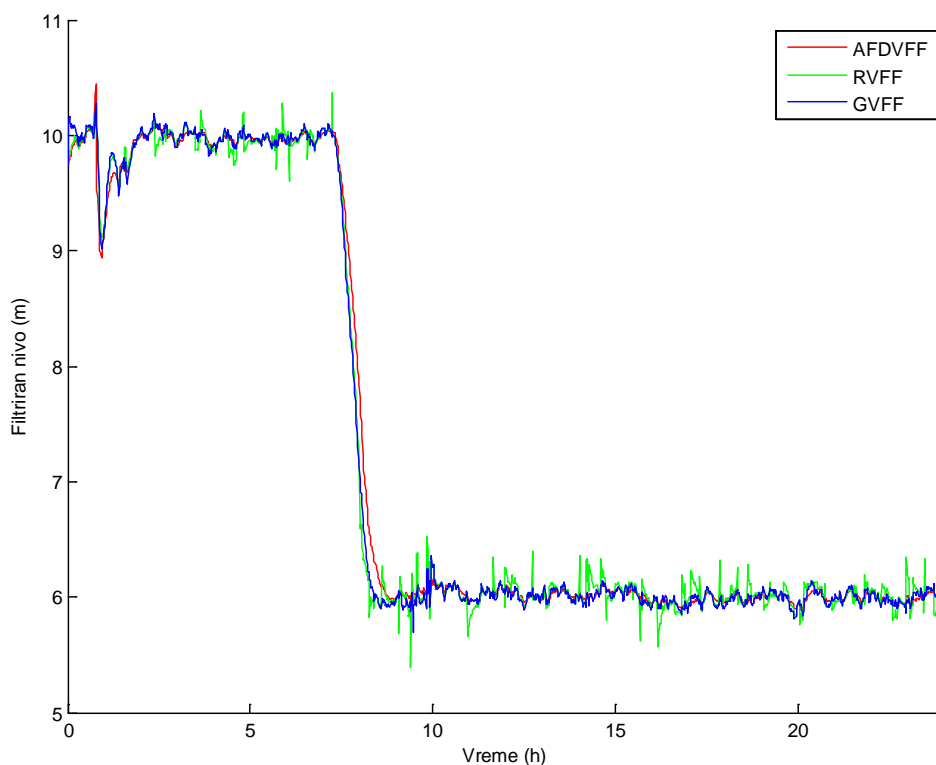
Ukoliko pogledamo trajektorije filtriranog signala  $d(n)$  korišćenjem ovako dobijenih težinskih faktora kao koeficijenata niskopropusnog filtera  $\lambda(n)$  može se zaključiti da su tokom stacionarnog dela merenja najbolje filtrirana korišćenjem AFDVFF-RLS metode (Slika 5.18, gore) dok su filtrirana merenja korišćenjem RVFF-RLS metode (Slika 5.18, sredina) najlošija što je i za očekivati pošto je

algoritam često detektovao nepostojeće promene stacionarnosti i smanjivao težinski faktor. Ono što je zanimljivo jeste da se sa grafika vidi da je čak i GVFF-RLS metoda ostavila vidljiv poremećaj (Slika 5.18, dole) iako ga nije detektovala kao promenu stacionarnosti (Slika 5.17, dole), najverovatnije zbog relativno niske maksimalne vrednosti težinskog faktora  $\lambda_{max} = 0.86$ .



Slika 5.18: Filtrirane trajektorije nivoa vode u separatoru pare korišćenjem AFDVFF-RLS (gore), RVFF-RLS (sredina) i GVFF-RLS (dole) metode

Sa druge strane, ako predstavimo sva tri grafika jedan preko drugog (Slika 5.19) vidimo da RVFF-RLS i GVFF-RLS metode nešto brže propuštaju promenu referentnog nivoa nego što je to slučaj sa AFDVFF-RLS metodom, ali se to može pripisati nižim maksimalnim vrednostima težinskog faktora koji su postavljeni kao parametri metoda.



Slika 5.19: Filtrirane trajektorije nivoa vode u separatoru pare

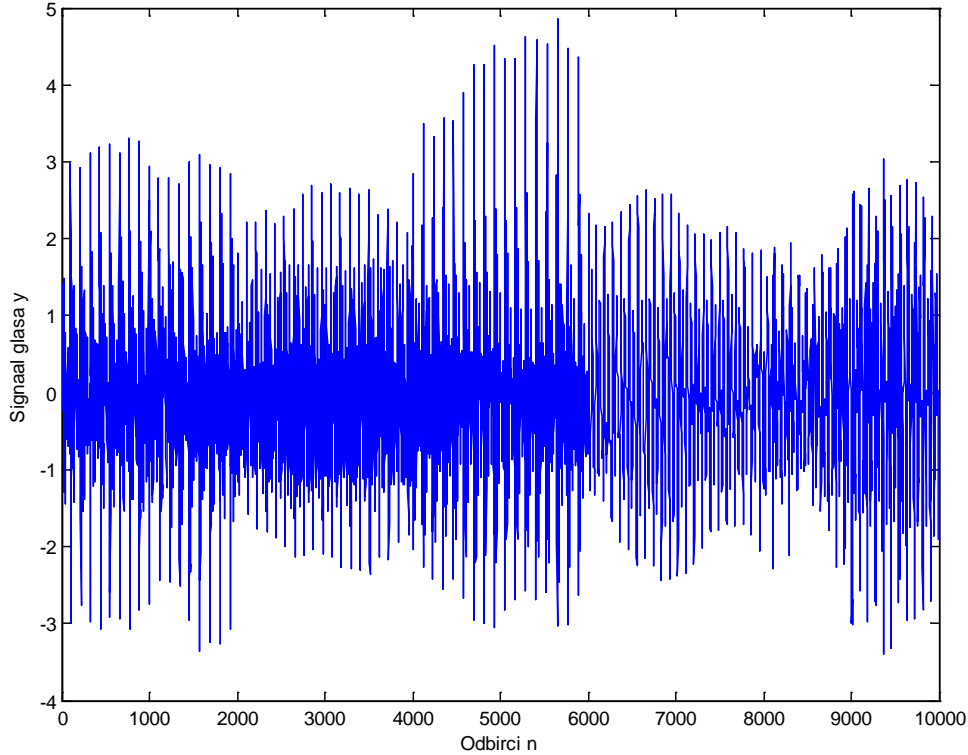
### 5.2.2. Estimiranje parametara modela govornog signala

Dalja analiza ovih metoda sprovedena je na signalu govora koji se može aproksimirati autoregresivnim modelom osmog reda. Snimljena je sekvenca samoglasnika (a, o, e, i, u) sa frekvencijom odabiranja  $F_s = 16 \text{ kHz}$ , svaki u trajanju od 2000 odbiraka (Slika 5.20). Pre testiranja samih metoda izvršena je estimacija parametara modela korišćenjem fiksnog faktora zaboravljanja  $\lambda = 0.99$ , za svaki glas ponaosob (smatra se da tokom trajanja jednog glasovnog signala nema promena u stacionarnosti), kako bi se ostale metode mogle porediti u odnosu na te dobijene parametre korišćenjem kumulativne sume normalizovane kvadratne greške estimacije parametara modela (5.8)

$$J(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\hat{\theta}(i) - \theta(i)}{\theta(i)} \right)^2 \quad (5.8)$$

gde je  $\hat{\theta}(i)$  estimirana vrednost parametara modela korišćenjem neke od tri gore pomenute metode, a  $\theta(i)$  vrednost parametara modela dobijena korišćenjem fiksnog faktora zaboravljanja na svakom glasu ponaosob, za koje se smatra da su najprecizniji.





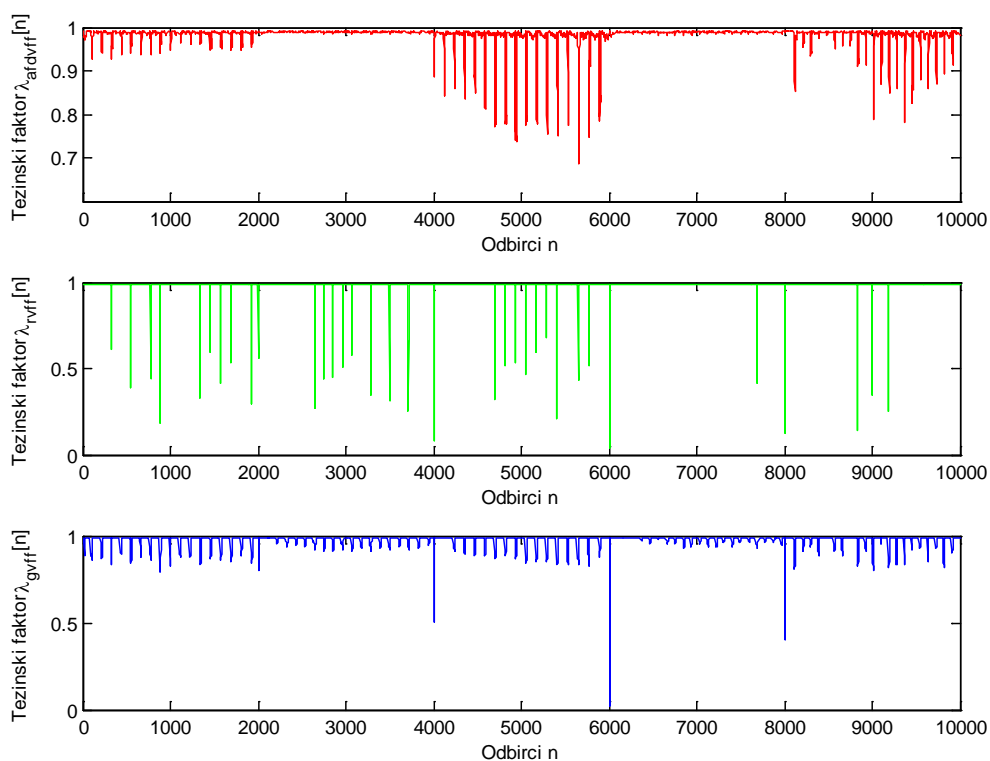
*Slika 5.20: Snimljena sekvenca samoglasnika (gore), generisani impulsni šum (sredina) i zašumljeni signal glasa (dole)*

Parametri predložene metode u ovom eksperimentu su postavljani na  $M = 10$  i  $\alpha = 0.99$ , dok je za polinomsku aproksimaciju iz (4.40) izabrana kvadratna funkcija ograničena sa donje strane (5.9).

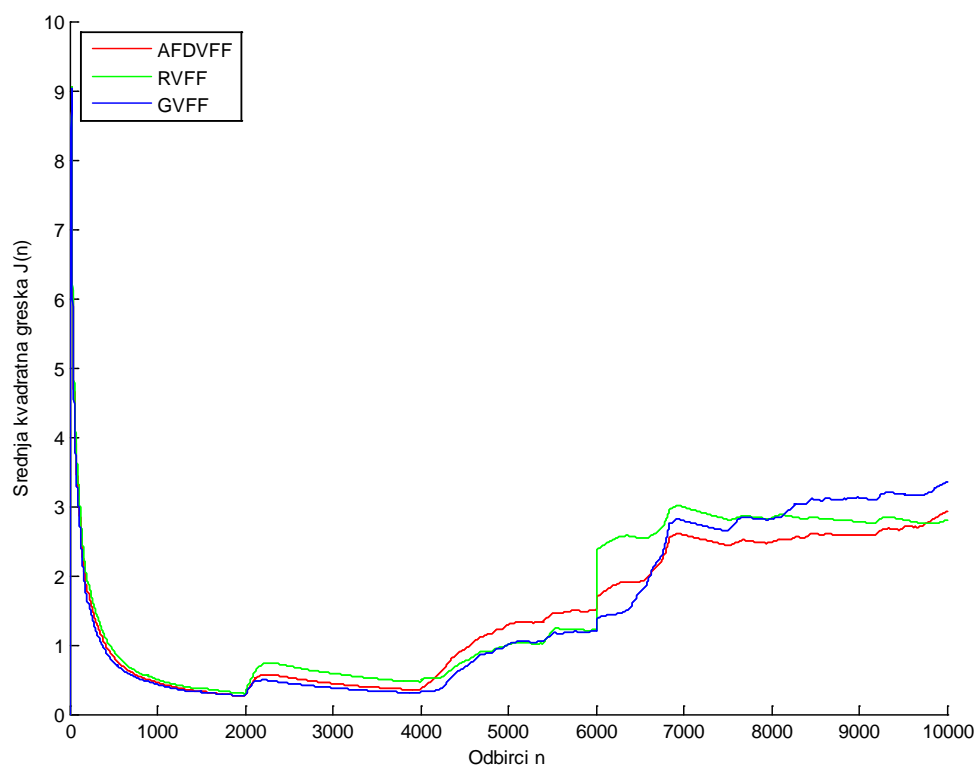
$$\lambda(n) = \max(-10q^2(n) + 0.99, 0.01) \quad (5.9)$$

U slučaju RVFF-RLS algoritma parametri su izabrani prema preporuci iz [23], tj.  $\gamma = 1.4$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $K_\alpha = 6$ ,  $K_\beta = 3K_\alpha$ , dok su parametri GVFF-RLS takođe izabrani prema preporuci iz simulacionih rezultata iz [24] tj.  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.89$ . U oba slučaja je postavljena gornja granica  $\lambda_{\max} = 0.99$  što ograničava faktor zaboravljanja sa gornje strane.

Primenom ovih metoda na snimljeni glasovni signal (Slika 5.20) dobijaju se trajektorije faktora zaboravljanja (Slika 5.21) iz kojih se može uvideti da sve tri metode vrše detekciju nekih promena stacionarnosti. Ono što je jasno jeste da su i RVFF-RLS i GVFF-RLS metode detektovale promene stacionarnosti na 4000., 6000. i 8000. odbirku (Slika 5.21, sredina i dole), ali su često detektovale i neke nepostojeće promene, što se zaključuje po tome što je težinski faktor često smanjivan. Nasuprot njima, AFDVFF-RLS metoda je prikazala najlošije rezultate u smislu da nije adekvatno detektovala sve promene stacionarnosti tj. promene glasova (Slika 5.21, gore). Poređenje trajektorija kumulativne sume normalizovane kvadratne greške estimacije formiranih korišćenjem (5.8), prikazanih na Slici 5.22, ukazuje da sve tri metode daju slične rezultate, sa tim da RVFF-RLS metoda rezultuje nešto nižom sumom normalizovane srednje kvadratne greške estimacije. Sa druge strane, neobično je što je AFDVFF-RLS metoda dala bolje rezultate (manju normalizovanu srednju kvadratnu grešku estimacije) nego što je to slučaj sa GVFF-RLS metodom.

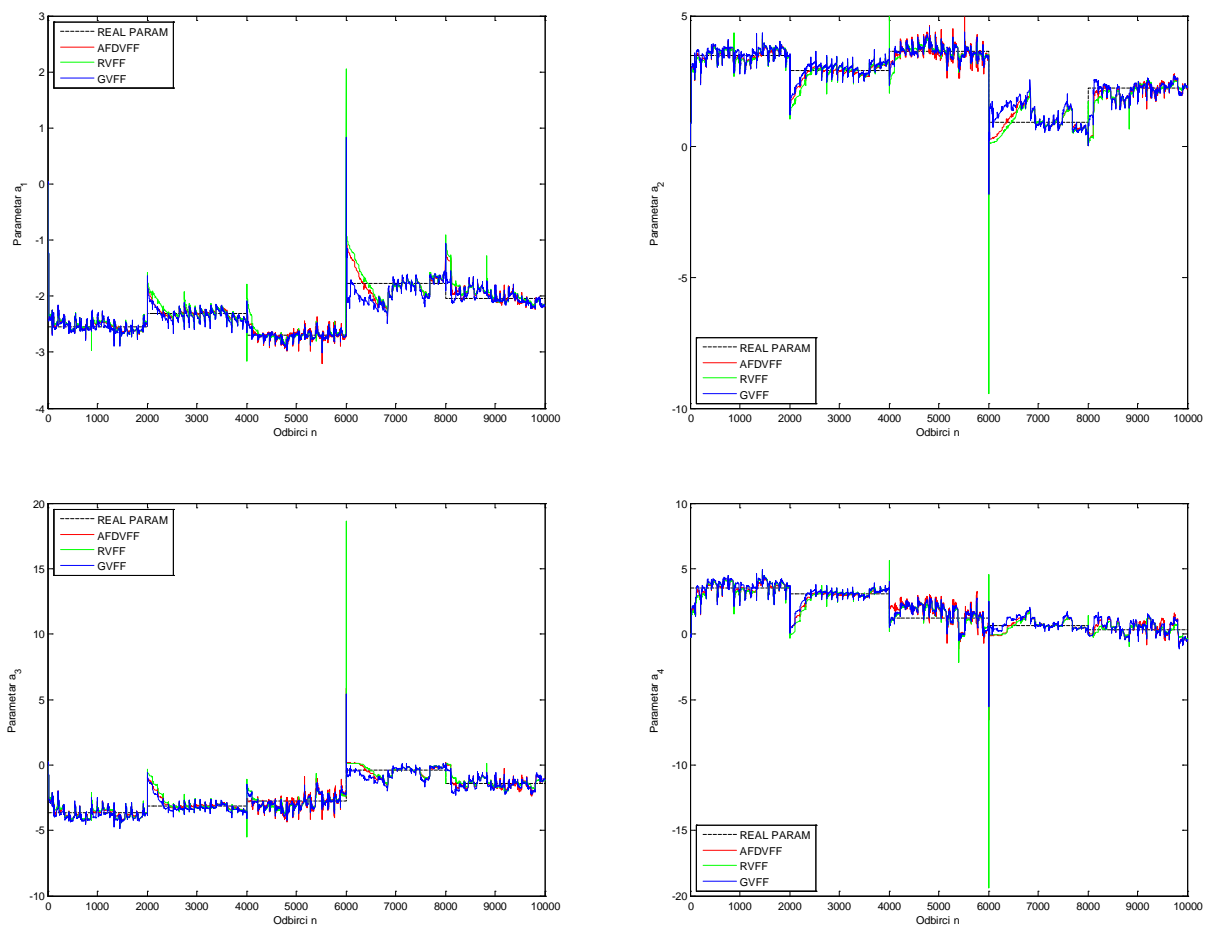


Slika 5.21: Trajektorije faktora zaboravljanja pri primeni na signalu glasa

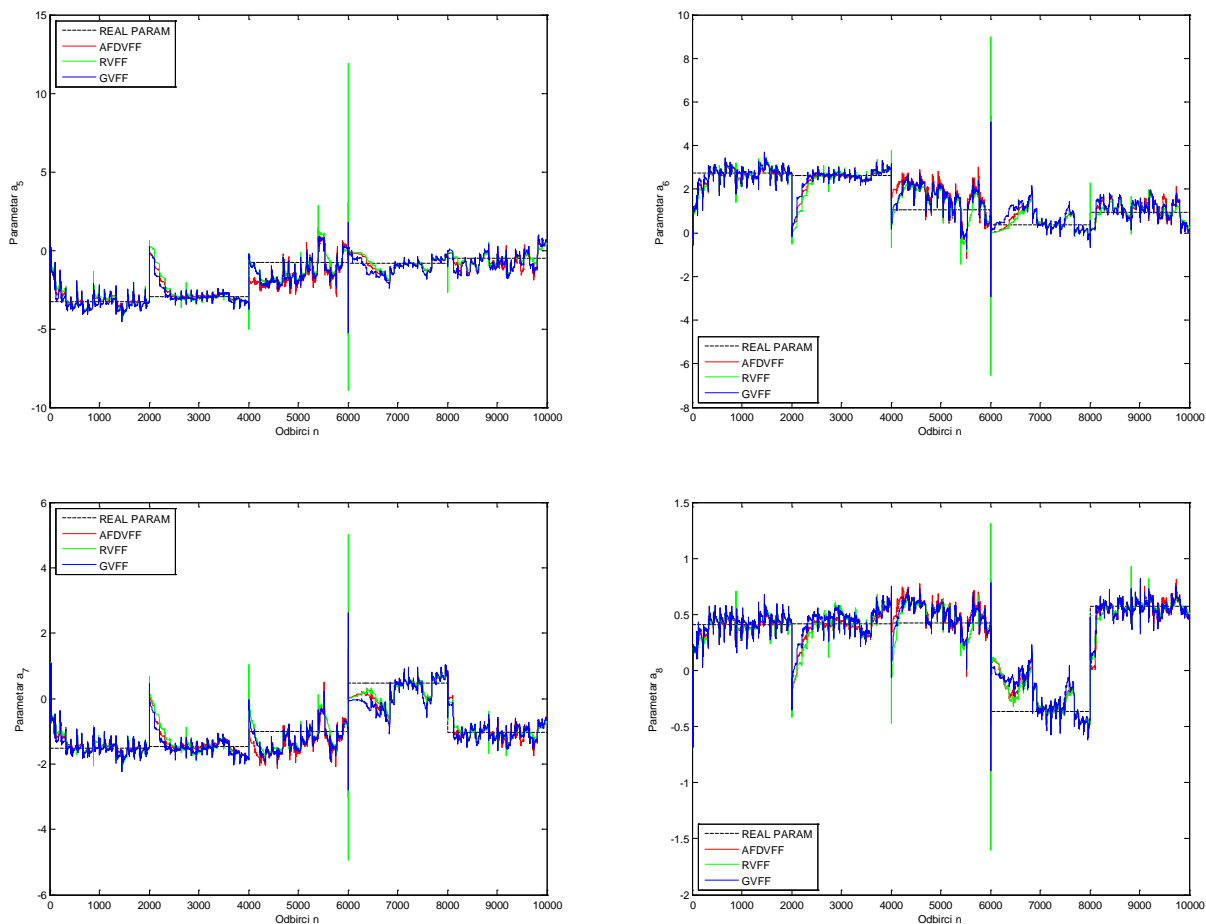


Slika 5.22: Trajektorije kumulativne sume normalizovane kvadratne greške estimacije

Ono što je takođe zanimljivo jeste da se prikažu trajektorije estimiranih parametara modela  $\theta = [a_1, a_2, \dots, a_8]^T$  (Slike 5.23 i 5.24). Prvo što se zaključuje jeste da GVFF-RLS metoda daje najzašumljenije rezultate. Pored toga zanimljivo je pogledati trajektorije parametara modela posle 6000. odbirka, pogotovu u slučajevima trajektorija parametara  $a_1$  (Slika 5.23, gore levo) i  $a_2$  (Slika 5.23, gore desno). Tu se jasno vidi da RVFF-RLS i AFDVFF-RLS metode sporo prate promenu parametra modela nakon 6000. odbirka, iako se iz trajektorije težinskog faktora (Slika 5.21) u slučaju RVFF-RLS metode vidi da je promena stacionarnosti detektovana i vrednost težinskog faktora umanjena. Međutim, trajanje tokom kog je FF bio umanjen u slučaju RVFF-RLS metode je bilo samo jedan odbirak, što u slučaju autoregresivnog modela osmog reda AR(8) nije dovoljno, jer je informacija o stacionarnosti ostala u ostalim parametrizacijama. Ovaj slučaj se najbolje ilustruje uvidom u trajektoriju parametra  $a_8$  (Slika 5.24, dole desno) gde su sve metode sporo ispratile promene. U slučaju predložene AFDVFF-RLS metode promene su veoma loše detektovane i jednostavno nije moguće izvući dodatne zaključke. Sa druge strane, praćenje promene parametra modela je najbrže od strane GVFF-RLS metode.



Slika 5.23: Trajektorije parametra modela  $a_1$  (gore levo),  $a_2$  (gore desno),  $a_3$  (dole levo) i  $a_4$  (dole desno) dobijene primenom sve tri opisane metode

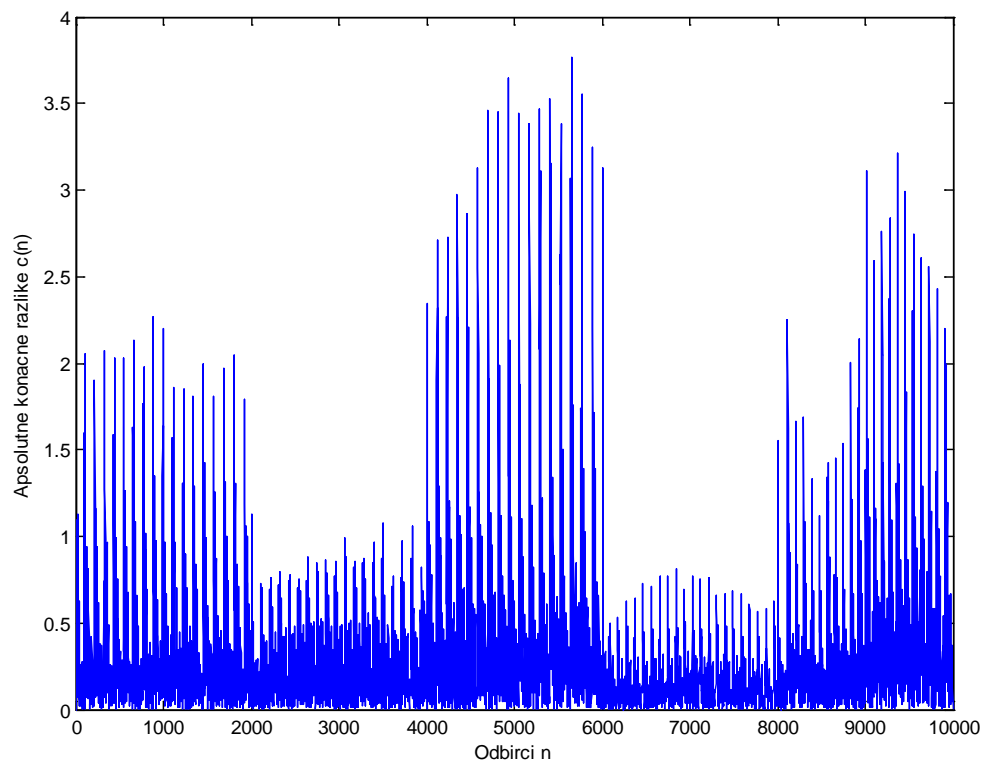


Slika 5.24: Trajektorije parametra modela  $a_5$  (gore levo),  $a_6$  (gore desno),  $a_7$  (dole levo) i  $a_8$  (dole desno) dobijene primenom sve tri opisane metode

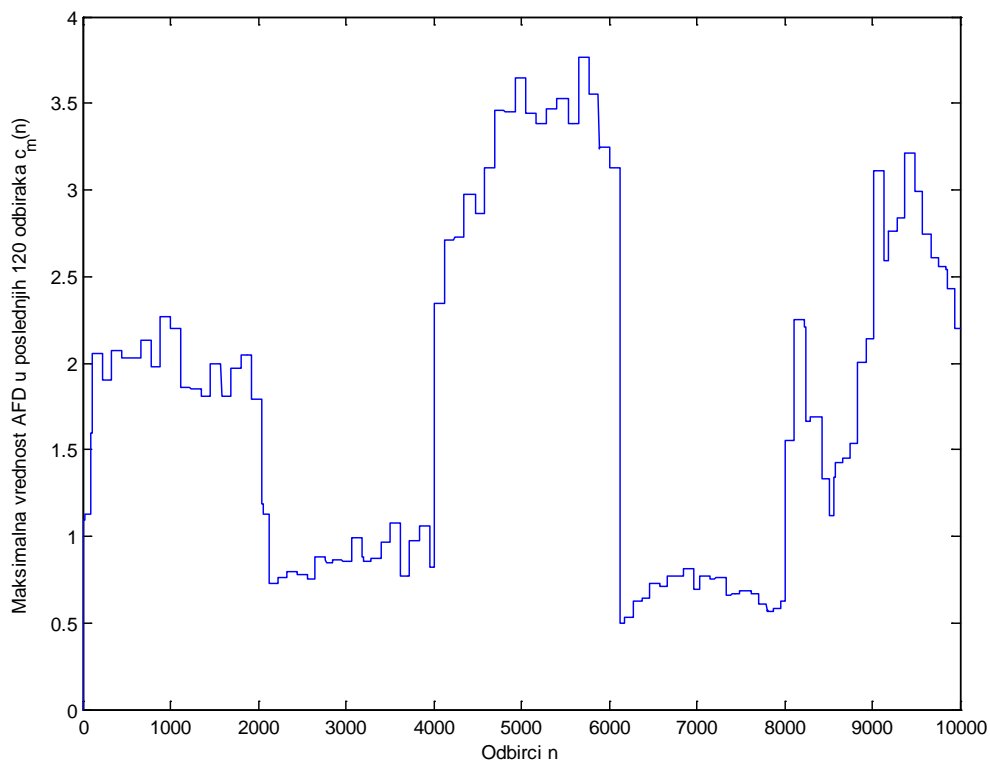
Kako je predloženi metod prilično loše detektovao promene stacionarnosti signala govora, izvršene su dodatne analize kako bi se metod poboljšao. Ukoliko pogledamo trajektoriju apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$  (Slika 5.25) snimljene sekvence  $y(n)$  iz prethodne analize (Slika 5.20), računane po (5.10), zaključujemo da se promena stacionarnosti jasno vidi na svakih 2000 odbiraka. Ono što se takođe zaključuje jeste da se u apsolutnim konačnim razlika signala govora jasno vidi i određena pseudoperiodičnost signala, najverovatnije zbog pitch frekvencije govornika (pošto je snimljena sekvenca samoglasnika). Kako je perioda ovog signala oko 118 odbiraka, ceo signal je propušten kroz nelinearnu funkciju traženja maksimuma u poslednjih  $N_p = 120$  odbiraka (5.11) kako bi se dobio signal nalik gornjoj anvelopi signala (Slika 5.26).

$$c(n) = |y(n) - y(n - 1)| \quad (5.10)$$

$$c_m(n) = \max([c(n - N_p + 1), c(n - N_p + 2), \dots, c(n)]) \quad (5.11)$$



Slika 5.25: Trajektorije signala apsolutnih konačnih razlika  $c(n)$



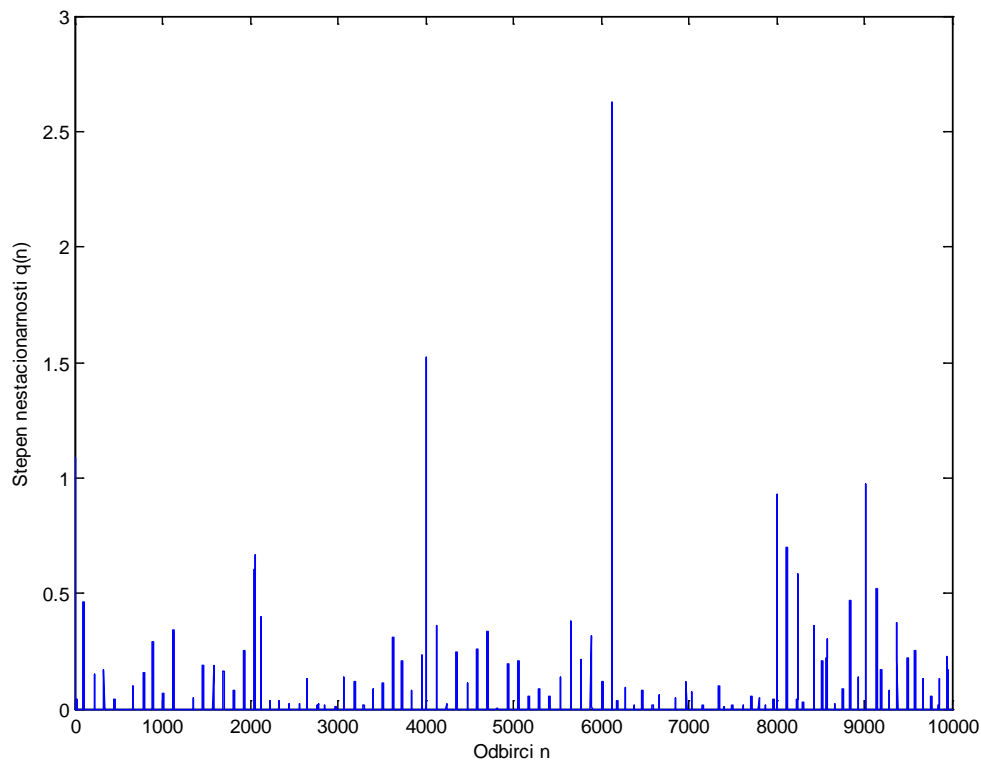
Slika 5.26: Trajektorije maksimalne vrednosti AFD u poslednjih 120 odbiraka  $c(n)$

Kako se sada jasno vidi promena stacionarnosti, stepen stacionarnosti predložen u poglavlju 4.3 se može estimirati na isti način tj. prostim diferenciranjem sa kašnjenjem od  $M = p$  odbiraka (5.12), gde je  $p$  red autoregresivnog modela koji se koristi, kako bi se efektivno faktor zaboravljanja zadržao umanjenim najmanje toliko odbiraka.

$$q(n) = c_m(n) - c_m(n - M) \quad (5.12)$$

Na osnovu prikazanog stepena nestacionarnosti (Slika 5.27) zaključuje se da se dalja adaptacija faktora zaboravljanja takođe može raditi na isti način kao što je predloženo u poglavlju 4.3 tj korišćenjem polinomske funkcije (5.13).

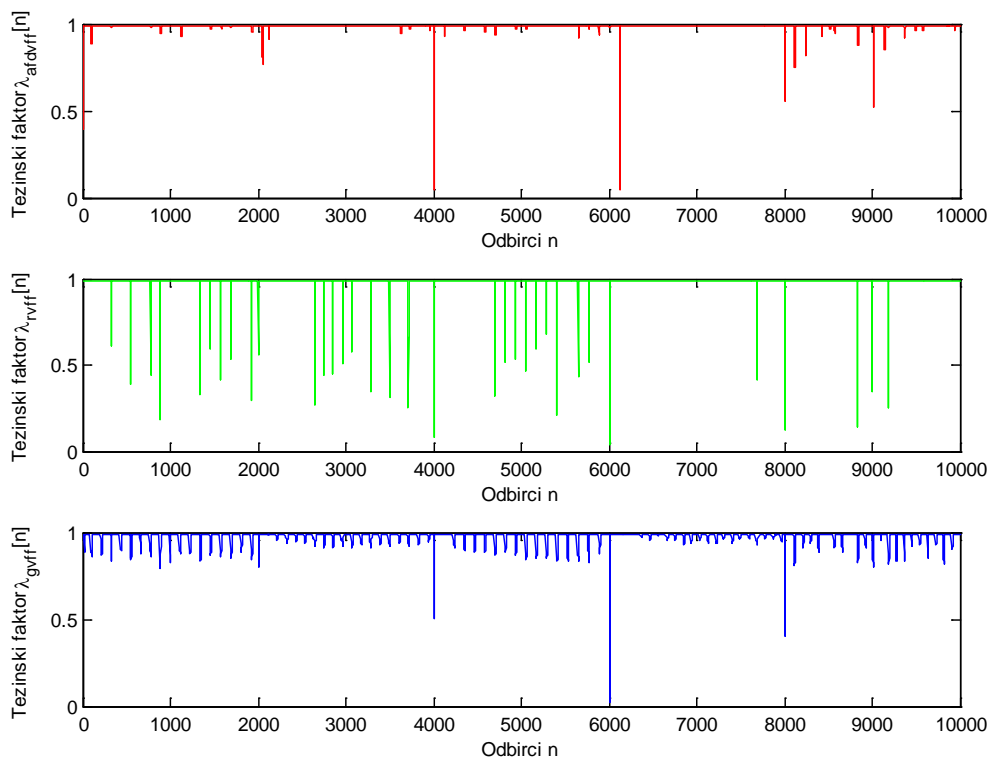
$$\lambda(n) = \max\left(\sum_{i=0}^{n_p} \lambda_i (q(n))^i, \lambda_{\min}\right) \quad (5.13)$$



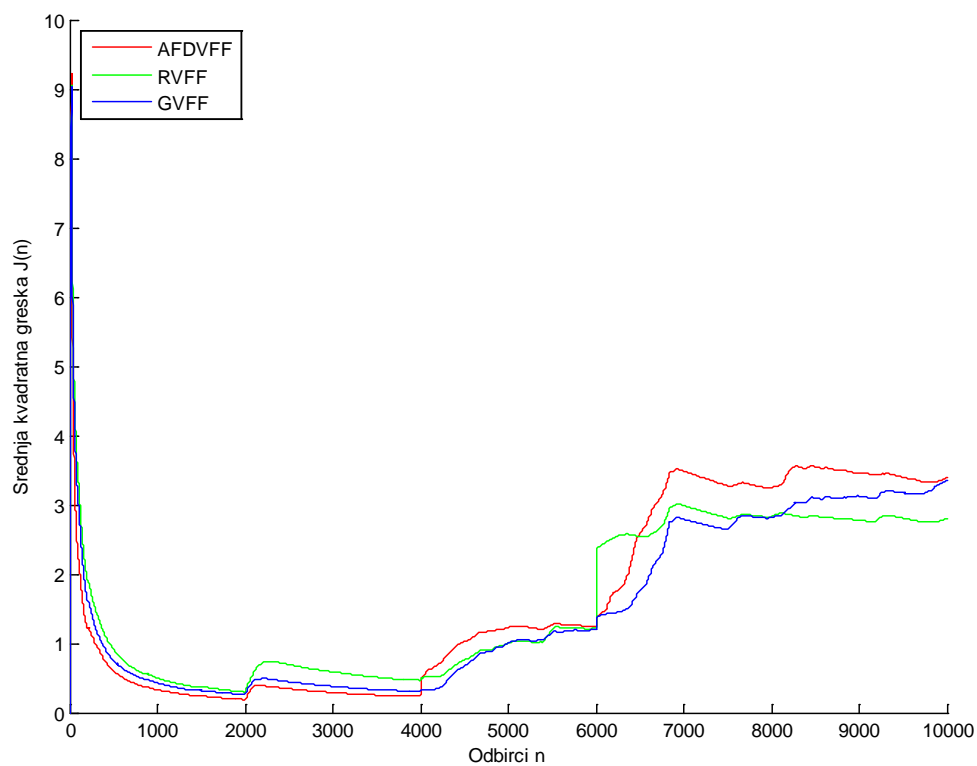
Slika 5.27: Trajektorije stepena nestacionarnosti  $q(n)$

Ukoliko ponovimo simulacije sa početka ovog poglavlja na glasovni signal (Slika 5.20) gde su svi parametri simulacije ostali isti, osim u slučaju predložene metode gde se u koriste jednačine (5.10-5.12) i gde je za polinomsku aproksimaciju iz (5.13) izabrana kvadratna funkcija ograničena sa donje strane (5.14), dobijamo sledeće rezultate (Slike 5.28-5.31).

$$\lambda(n) = \max(-0.5q^2(n) + 0.99, 0.01) \quad (5.14)$$

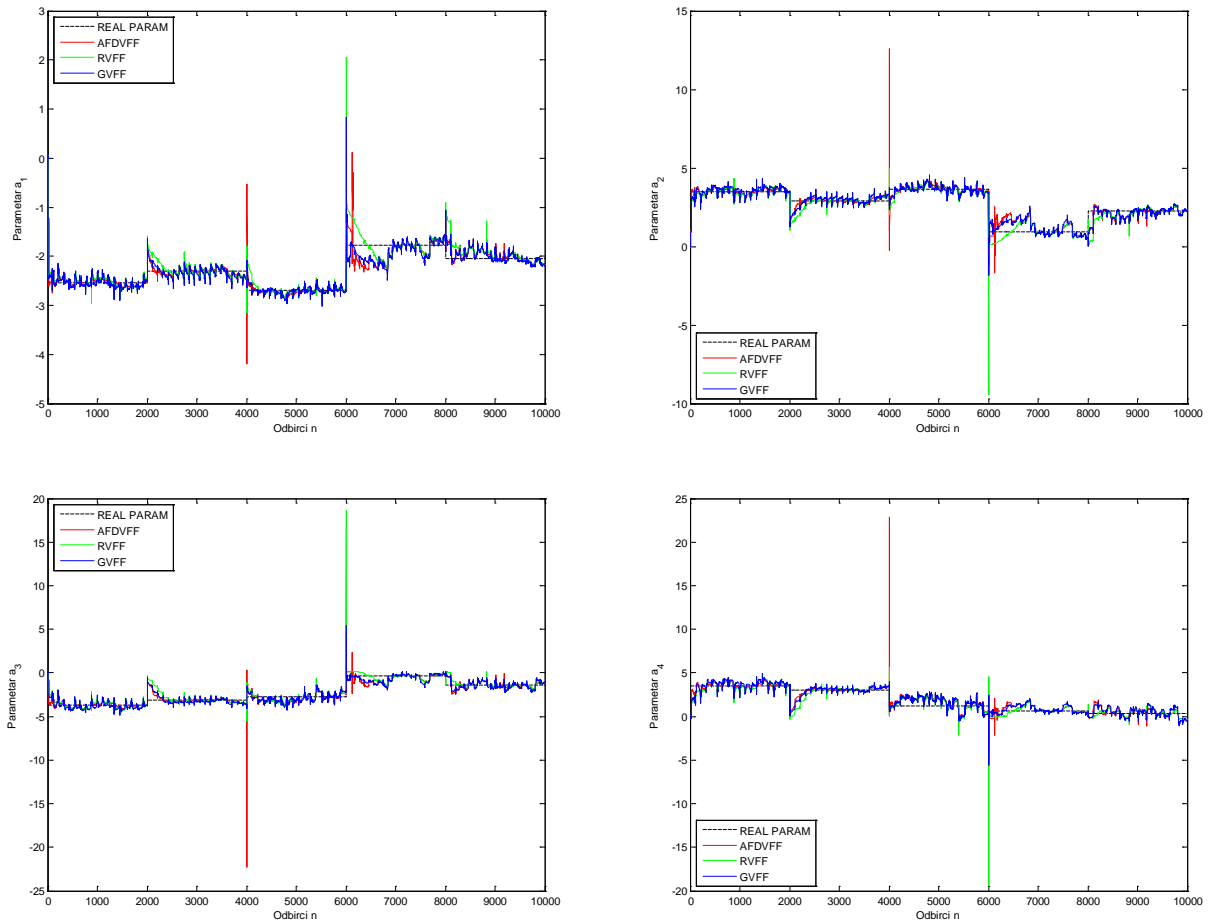


Slika 5.28: Trajektorije faktora zaboravljanja pri primeni modifikovane metode na signalu glasa



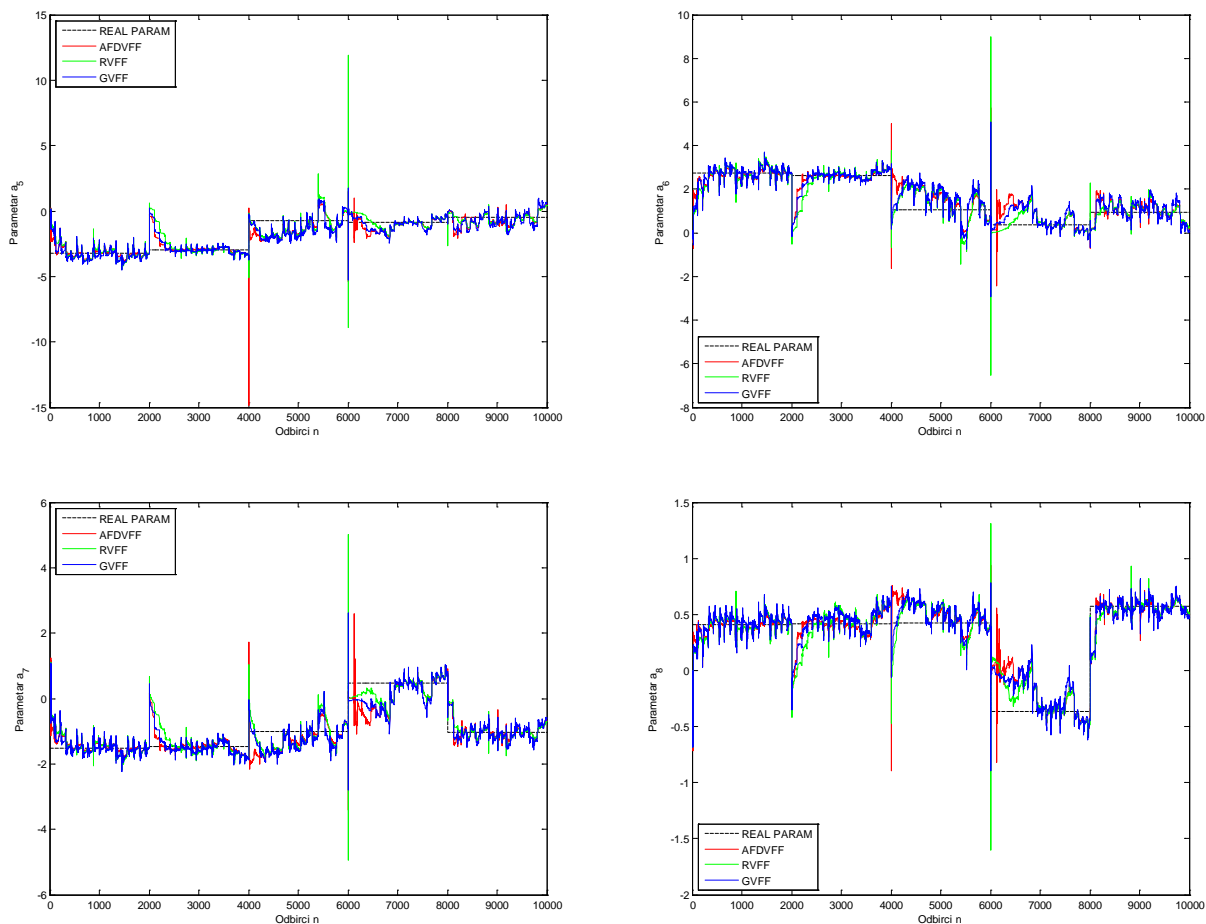
Slika 5.29: Trajektorije kumulativne sume normalizovane kvadratne greške estimacije pri primeni modifikovane metode

Ono što se sada može zaključiti jeste da je predloženi metod sa ovom modifikacijom sada detektovao sve promene stacionarnosti kao i druga dva metoda (Slika 5.28, gore) ali da pritom nije imao puno lažnih detekcija. Glavno poboljšanje se primećuje pri trajektoriji parametara modela posle 6000. odbirka, pogotovu u slučajevima trajektorija parametara  $a_1$  (Slika 5.30, gore levo) i  $a_2$  (Slika 5.30, gore desno) gde su promene u parametrima, iako sa kašnjenjem od 120 odbiraka, ispraćenje brže od druge dve metode.



*Slika 5.30: Trajektorije parametra modela  $a_1$  (gore levo),  $a_2$  (gore desno),  $a_3$  (dole levo) i  $a_4$  (dole desno) dobijene primenom modifikovane metode i druge dve opisane metode*





Slika 5.31: Trajektorije parametra modela  $a_5$  (gore levo),  $a_6$  (gore desno),  $a_7$  (dole levo) i  $a_8$  (dole desno) dobijene primenom modifikovane metode i druge dve opisane metode

Modifikacija predloženog metoda koja je dovela do poboljšanja u radu sa govornim signalima sastoji se u promeni pristupa izvlačenja informacija iz apsolutnih konačnih razlika, gde je se umesto klasičnog niskopropusnog filtriranja (4.38) iskoristila nelinearna funkcija traženja maksimuma (5.11) u prozoru određene dužine koji je diktiran pitch periodom govornika. U ovom slučaju pitch perioda je utvrđena eksperimentalno kako bi se pokazale karakteristike predložene metode, a za dalji rad i usvaršavanje metode ostaje da se u algoritam integriše i automatsko detektovanje pitch periode. Ostatak algoritma je ostao isti, tj. u slučaju estimacije parametara govornog signala predlaže se algoritam opisan jednačinama (5.10-5.13).

## 6. Zaključak

Još od pojave digitalnih računara, oblast obrade i modeliranja signala se ubrzano širi. Svake godine se objavi zavidan broj radova na temu novih metoda za bržu i efikasniju estimaciju parametara modela signala koji su od krucijalnog značaja i za oblast prepoznavanja i klasifikacije signala, kao i za oblast upravljanja sistemima. Shodno tome, tema disertacije je pregled metoda za detekciju nestacionarnosti i adaptaciju faktora zaboravljanja pri modeliranju nestacionarnih signala, kao i predlog i analiza jedne nove metode za adaptaciju faktora zaboravljanja zasnovane na apsolutnim konačnim razlikama signala.

U radu je izvršen pregled literature i data je detaljna analiza različitih modela signala kao i tehnika za estimaciju parametara tih modela na osnovu merenog signala. Parametarske metode modeliranja signala kao što su autoregresivni model i model pokretnih proseka, kao i autoregresivni model pokretnih proseka koji je nastao spajanjem ova dva modela zahtevaju da modeliran signal bude stacionaran. Kako većina signala koji su od značaja i koji se modeliraju ispoljavaju različite znake nestacionarnosti, intenzivno se istraživalo na različitim metodama za rešavanje problema estimacije nestacionarnih signala i izdvojila su se dva pristupa. Jedan pristup podrazumeva da se pre same estimacije identifikuju uzroci nestacionarnosti i da se prema njima prilagodi osnovni ARMA model. Tako se došlo do zaključka da kada estimirani signal pokazuje znake kontinualne promene srednje vrednosti, tj. znake trenda u merenjima, može se primeniti diferenciranje merenog signala onoliko puta koliko je potrebno da bi se uklonio ovaj vid nestacionarnosti. Ovaj pristup dodaje *I (engl. Integrated)* u ARMA skraćenicu i nastaje ARIMA model. Takođe signal može pokazivati znake nestacionarnosti u vidu nekih periodičnih promena ili poremećaja koji se ponavljaju, takozvane sezonske komponente signala koje se mogu uspešno modelirati tako što se vrši diferenciranje merenog signala sa kašnjenjem od onoliko odbiraka kolika je perioda te sezonske komponente. Ovaj pristup dodaje *S (engl. Seasonal)* u ARMA ili ARIMA skraćenicu modela i njegovom primenom nastaju SARMA i SARIMA modeli u zavisnosti od toga da li estimirani signal ima samo sezonsku komponentu ili ima i sezonsku komponentu i pokazuje znake trenda u merenjima. Dalje istraživanje u ovom smeru dovelo je do pronalaska da i neki dodatni spoljni signali mogu direktno da utiču na estimirani signal, kao što je spoljna temperatura koja direktno utiče na kratkotrajno predviđanje potrošnje električne energije. Dodavanjem ovih spoljnih signala u model dobijamo *X (engl. eXogenous)* u skraćenicu modela i tako dobijamo ARMAX, ARIMAX, SARMAX ili SARIMAX modele u zavisnosti od toga da li na estimirani signal samo utiče neki spoljni signal ili je to neka kombinacija uticaja spoljnih signala, trenda u merenjima i sezonske komponente. Drugi pristup za rešavanje problema estimacije nestacionarnih signala podrazumeva da se koristi standardni ARMA model ali da se parametri modela signala kontinualno estimiraju i menjaju kako se menja stacionarnost signala. Ovakav pristup za sobom povlači razvoj različitih tehnika za detekciju nestacionarnosti i adaptaciju faktora zaboravljanja.

Novi metod za detekciju nestacionarnosti signala predložen je u ovom radu. Metod je zasnovan na apsolutnim konačnim razlikama signala za koje je teorijski pokazano da sadrže informaciju o promeni parametara autoregresivnog modela prvog i drugog reda. Dobijeni teorijski rezultati su potvrđeni i eksperimentalno. Takođe, eksperimentalno je ispitan i uticaj aditivnog šuma merenja na statistike apsolutnih konačnih razlika signala opisanog autoregresivnim modelima prvog i drugog reda. Simulacije pokazuju da sa pogoršanjem odnosa signal šum dolazi do sve većeg odstupanja eksperimentalnih rezultata od teorijski izvedenih, ali i dalje se jasno vidi zavisnost promene matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika od parametra autoregresivnog modela prvog reda. Simulacije su ponovljene i za eksperimentalno određivanje varijanse signala apsolutnih konačnih razlika za različite odnose signal-šum, i rezultati pokazuju blago pomeranje estimacije kako se snaga šuma povećava, ali i dalje se jasno vidi promena varijanse apsolutne konačne razlike sa

promenom parametra modela. Pošto su sva teorijska izvođenja vršena pod nekoliko pretpostavki, od kojih je najznačajnija ta da je aktivacioni šum beli Gausov šum nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse, eksperimentalni rezultati su ponovljeni u slučaju aktivacionog šuma: a) uniformne raspodele, b) modifikovane Poasonove raspodele, c) Gama raspodele i d) proizvoljne sinetički generisane asimetrične raspodele. Može se zaključiti da dolazi do delimičnih odstupanja eksperimentalno dobijenih rezultata od teorijskih (koji su izvedeni pod pretpostavkom šuma Gausovske raspodele), najviše u slučaju Gama raspodele aktivacionog šuma pri utvrđivanju matematičkog očekivanja signala apsolutnih konačnih razlika. U svakom slučaju, zavisnosti promene statistika apsolutne konačne razlike signala od parametara modela signala i dalje su bile prisutne i jasno uočljive, pa se smatra da se signal apsolutnih konačnih razlika može koristiti i u slučaju kada šum nije Gausovske raspodele. Kako se ispostavilo da je teorijsko ispitivanje primenljivosti apsolutnih konačnih razlika signala na detekciju promene stacionarnosti u slučaju autoregresivnih modela višeg reda jako kompleksno, eksperimentalno je pokazano da se pri promeni vrednosti parametara autoregresivnih modela trećeg reda menjaju i vrednosti apsolutnih konačnih razlika signala i pretpostavka je da su one primenljive i na modelima višeg reda. Takođe, uočeno je da postoji putanja tj. kontura po kojoj se parametri modela mogu menjati tako da se statistike prvog i drugog reda apsolutnih konačnih razlika signala ne menjaju, ali pretpostavka je da je takva promena moguća sa statistički zanemarljivom verovatnoćom.

Na osnovu apsolutnih konačnih razlika signala predložen je jednostavan algoritam za adaptaciju faktora zaboravljanja pri korišćenju rekurzivne metode najmanjih kvadrata za estimaciju parametara modela signala. Pored njega, posebna pažnja posvećena je metodama za adaptaciju faktora zaboravljanja zasnovanim na gradijentu srednje kvadratne greške (GVFF-RLS) i na estimaciji varijanse kvadratne greške (RVFF-RLS) kao dvema, u ovom trenutku, najzastupljenijim metodama u ovoj oblasti. Predloženi algoritam je pokazao uporedive performanse u poređenju sa GVFF-RLS i RVFF-RLS algoritmima na sintetičkim signalima opisanim autoregresivnim modelom drugog reda, u smislu brzine detekcije skokovitih promena stacionarnosti, dok je u smislu detekcije postepenih promena bio superioran. Takođe, algoritmi su poređeni i prema uticaju promene raspodele aktivacionog šuma. U slučaju aktivacionog šuma uniformne raspodele prilikom estimacije parametara modela primećeno je da su estimacije pod velikim uticajem šuma, a najviše estimacije korišćenjem AFDVFF-RLS metode. U slučaju aktivacionog šuma modifikovane Poasonove raspodele prilikom estimacije parametara modela zaključuje se da su estimacije pod mnogo manjim uticajem nego u slučaju uniformne raspodele aktivacionog šuma i da sva tri algoritma imaju jako slične performanse kao u slučaju Gausovske raspodele aktivacionog šuma. Ukoliko je aktivacioni šum gama raspodele prilikom estimacije parametara modela, izvode se uporedivi zaključci kao i u slučaju Gausovske raspodele, što je prilično neočekivano imajući u vidu da je gama raspodela izrazito nesimetrična i da je dala dosta pomerene estimacije statistika apsolutne konačne razlike u odnosu na teoretski izvedene. I na kraju su simulacije ponovljene za slučaj aktivacionog šuma sinetički generisane nesimetrične raspodele. U tom slučaju zaključeno je da su rezultati lošiji nego u slučaju gama raspodele, mada ne tako loši kao u slučaju uniformne raspodele. Posmatrajući sve dobijene rezultate zaključuje se da je AFDVFF-RLS metoda najosetljivija na promene raspodele aktivacionog šuma dok su RVFF-RLS i GVFF-RLS metode manje osetljive. Ono što je takođe zanimljivo jeste da AFDVFF-RLS algoritam, u slučaju svake simulirane raspodele aktivacionog šuma, brže konvergira ka rešenju, a to se zaključuje posmatranjem početnih odbiraka simulacije i trajektorije kumulativne srednje kvadratne greške estimacije u tom delu simulacije.

Pri analizi uticaja izbora parametara algoritama utvrđeno je da svi algoritmi imaju sličan broj parametara koje treba podesiti pre početka estimacije i da njihov izbor u velikoj meri utiče na kvalitet estimacije. Pošto sve tri metode sadrže parametar  $\lambda_{\max}$  kao maksimalnu vrednost faktora zaboravljanja, njegov uticaj na kvalitet estimacije je posebno ispitan. Posmatrajući promenu kvaliteta estimacije u zavisnosti od promene ovog parametra zaključuje se da je najmanji uticaj lošeg parametra

estimacije bio u slučaju predložene AFDVFF-RLS metode. U slučaju druge dve metode je uticaj lošeg izbora parametra  $\lambda_{max}$  bio dosta izraženiji, pogotovu u slučajevima kada je postavljen na vrednosti veće od 0.9, što ide u prilog zaključku da se ove dve metode u slučaju sporih promena stacionarnosti signala efektivno oslanjaju na nešto nižu maksimalnu vrednost faktora zaboravljanja.

Pri primeni algoritama na realnim signalima kao što su merenja sa senzora uočeno je da sve metode daju slične rezultate. Najviše problema i najlošiji rezultati su uočeni pri primeni algoritama na govornom signalu. Kako je predloženi metod prilično loše detektovao promene stacionarnosti signala govora, izvršene su dodatne analize kako bi se metod poboljšao. Deo nedostataka u vidu loše detekcije promene glasa, kao i previše kratke detekcije je odmah uočen i algoritam za adaptaciju faktora zaboravljanja je modifikovan kako bi se rezultati popravili. Modifikacija predloženog metoda koja je dovela do poboljšanja u radu sa govornim signalima sastoji se u promeni pristupa izvlačenja informacija iz apsolutnih konačnih razlika, gde je umesto klasičnog niskopropusnog filtriranja iskorišćena nelinearna funkcija traženja maksimuma u prozoru određene dužine koji je diktiran *pitch* periodom govornika. U ovom slučaju *pitch* perioda je utvrđena eksperimentalno kako bi se pokazale karakteristike predloženog metoda. Predloženi metod sa ovom modifikacijom je detektovao sve promene stacionarnosti kao i druga dva metoda, a da pritom nije imao puno lažnih detekcija. Glavno poboljšanje se primećuje pri skokovitim promenama gde su promene u parametrima ispraćene brže od druge dve metode.

Pošto je i teorijski, a i eksperimentalno pokazano da signal apsolutnih konačnih razlika sadrži i informaciju o stacionarnosti signala opisanih autoregresivnim modelima prvog, drugog i trećeg reda, dalja istraživanja mogu da obuhvataju ispitivanja na signalima opisanim različitim modelima, kao i signalima opisanim autoregresivnim modelima višeg reda. Takođe, deo istraživanja bi mogao da bude usmeren na različite algoritme koji adaptiraju faktor zaboravljanja na osnovu signala apsolutnih konačnih razlika kako bi se unapredile performanse pri primeni na realnim merenim signalima. U slučaju govornog signala, modifikacija algoritma je predložena na kraju poglavlja 5.2.2 ali bi dalje istraživanje moglo da bude usmereno u pravcu automatske detekcije *pitch* frekvencije govornika i adaptacije algoritma na osnovu nje.

Opšti zaključak je da rešenje predloženo u ovoj disertaciji predstavlja novi pristup dizajnu algoritma za detekciju nestacionarnosti signala i adaptaciji faktora zaboravljanja zasnovanom na apsolutnim konačnim razlikama kakav do sada nije korišćen u literaturi. Predloženi algoritam je intuitivan i jednostavan za korišćenje i implementaciju u praksi, pritom ne oduzima previše procesorskog vremena na proračune. Eksperimentalni rezultati pokazuju odlične performanse algoritma i pri detekciji skokovitih i pri detekciji postepenih promena parametara, kada je modelovani signal nastao iz autoregresivnog modela. Pri primeni istog algoritma na signalu govora dobijaju se zadovoljavajuće performanse ukoliko se delimično modifikuje metod za adaptaciju faktora zaboravljanja. Ukoliko je u signalu prisutan impulsni šum, uočava se delimična degradacija performansi, kao i kod drugih algoritama.

## Literatura:

- [1] James W. Cooley and John W. Tukey: “*An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*” *Mathematics of computation* 19.90 (1965): 297-301.
- [2] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer: “*Digital Signal Processing*”, Pearson, 1975.
- [3] Lennart Ljung: “*System Identification: Theory for the user*”, New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1987.
- [4] Hugh Jack: “*Dynamic system modeling and control*”, Draft Ver 2, 1993.
- [5] Mourad Barkat: “*Signal Detection and Estimation (2<sup>nd</sup> edition)*”, USA: Artech House, 2005.
- [6] Maciej Niedzwiecki: “*Identification of time-varying processes*”, New York, Wiley, 2000.
- [7] Steven Kay: “*Modern spectral estimation: theory and application*”, New Jersey, Englewood Cliffs, 1988.
- [8] Douglas C. Montgomery and George C. Runger: “*Applied statistics and probability for engineers*”, New Jersey, John Wiley & Sons, 2010.
- [9] Fredrik Gustafsson: “*Adaptive filtering and change detection*”, New York, Wiley, 2000.
- [10] Jin Jiang and Youmin Zhang: “*A revisit to block and recursive least squares for parameter estimation*”, *Computers & Electrical Engineering* 30.5 (2004): 403-416.
- [11] Peter C. Young: “*Recursive estimation and time-series analysis: An introduction for the student and practitioner*”, Springer Science & Business Media, 2011.
- [12] Lennart Ljung and Torsten Soderstrom: “*Theory and practice of recursive identification*”, Cambridge, MIT Press, 1983.
- [13] Graham C. Goodwin and Kwai Sang Sin: “*Adaptive filtering prediction and control*”, New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1984.
- [14] Jianliang Jiang and Robert Cook: “*Fast parameter tracking RLS algorithm with noise immunity*”, *Electronics Letters* 28.22 (1992): 2043-2045.
- [15] D-J. Park and B-E. Jun: “*Selfperturbing recursive least squares algorithm with fast tracking capability*”, *Electronics Letters* 28.6 (1992): 558-559.
- [16] B-Y Choi and Zeungnam Bien: “*Sliding-windowed weighted recursive least-squares method for parameter estimation*”, *Electronics Letters* 25.20 (1989): 1381-1382.
- [17] Hanyu Liu and Zhenya He: “*A sliding-exponential window RLS adaptive filtering algorithm: Properties and applications*”, *Signal processing* 45.3 (1995): 357-368.
- [18] Murat Belge and Eric L. Miller: “*A sliding window RLS-like adaptive algorithm for filtering alpha-stable noise*”, *Signal Processing Letters, IEEE* 7.4 (2000): 86-89.
- [19] Blake Toplis and Subbarayan Pasupathy: “*Tracking improvements in fast RLS algorithms using a variable forgetting factor*”, *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on* 36.2 (1988): 206-227.
- [20] T. R. Fortescue, L. S. Kershenbaum and B. E. Ydstie: “*Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors*”, *Automatica* 17.6 (1981): 831-835.
- [21] Goran Kvaščev, Ž.Đurović, B. Kovačević and I. K. Kovačević: “*Adaptive estimation of time-varying parameters in AR models with variable forgetting factor*”, *Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON), 2014 17th IEEE. IEEE*, 2014.
- [22] Francesco Fraccaroli, Andrea Peruffo, and Mattia Zorzi: “*A New Recursive Least-Squares Method with Multiple Forgetting Schemes*”, arXiv preprint arXiv:1503.07338, 2015.
- [23] Constantin Paleologu, Jacob Benesty, and Silviu Ciochina: “*A robust variable forgetting factor recursive least-squares algorithm for system identification*”, *IEEE Signal Processing Letters* 15 (2008): 597-600.

- [24] Shu-Hung Leung and C. F. So. “*Gradient-based variable forgetting factor RLS algorithm in time-varying environments*”, IEEE Transactions on Signal Processing 53.8 (2005): 3141-3150.
- [25] Ta-Hsin Li: “*On Exponentially Weighted Recursive Least Squares for Estimating Time-Varying Parameters*”, Department of Mathematical Sciences, IBM TJ Watson Research Center, NY, Yorktown Heights, 2003.
- [26] Alan S. Willsky: “*Detection of abrupt changes in dynamic systems*”, Springer Berlin Heidelberg, 1986.
- [27] Michèle Basseville: “*Detecting changes in signals and systems - A survey*”, Automatica 24.3 (1988): 309-326.
- [28] Michael Last and Robert Shumway: “*Detecting abrupt changes in a piecewise locally stationary time series*”, Journal of multivariate analysis 99.2 (2008): 191-214.
- [29] Paul C. Krause, Oleg Wasynczuk and Scott D. Sudhoff: “*Analysis of Electrical Machines*”, New York, McGraw-Hill, Book Company, 1986.
- [30] George Box, Gwilym Jenkins, Gregory Reinsel and Greta Ljung: “*Time Series Analysis: Forecasting and Control*”, New Jersey, John Wiley & Sons, 2015.
- [31] Paul SP Cowpertwait and Andrew V. Metcalfe: “*Introductory time series with R*”, Springer-Verlag, New York, 2009.
- [32] Herman Wold: “*A study in the analysis of stationary time series*”, Almqvist & Wiksell 1954.
- [33] R. Ramanathan, R. Engle, C. W. J. Granger, F. Vahid-Araghi and C. Brace: “*Short-run forecasts of electricity loads and peaks*”, International Journal of Forecasting 13 (1997): 161-74.
- [34] G. A. Darbellay and M. Slama: “*Forecasting the short-term demand for electricity: Do neural networks stand a better chance?*”, International Journal of Forecasting 16 (2000): 71-83.
- [35] O. Carpinteiro, A. Reis and A. Silva: “*A hierarchical neural model in short-term load forecasting*”, Applied Soft Computing 4 (2004): 405-12.
- [36] L. J. Soares and L. R. Souza: “*Forecasting electricity demand using generalized long memory*”, International Journal of Forecasting 22 (2006): 17-28.
- [37] J. W. Taylor, L. M. De Menezes and P. E. McSharry: “*A comparison of univariate methods for forecasting electricity demand up to a day ahead*”, International Journal of Forecasting 22 (2006): 1-16
- [38] L. J. Soares and M. C. Medeiros: “*Modeling and forecasting short-term electricity load: A comparison of methods with an application to Brazilian data*”, International Journal of Forecasting 24 (2008): 630-44.
- [39] J. Hinman and E. Hickey: “*Modeling and forecasting short-term electricity load using regression analysis*”, Journal of Institute for Regulatory Policy Studies, 2009.
- [40] C. S. Fiskin, O. Turgut, S. Westgaard and A. G. Cerit: “*Time series forecasting of domestic shipping market: comparison of SARIMAX, ANN-based models and SARIMAX-ANN hybrid model*”, International Journal of Shipping and Transport Logistics, (2022) 14(3), 193-221.
- [41] S. I. Vagropoulos, G. I. Chouliaras, E. G. Kardakos, C. K. Simoglou and A. G. Bakirtzis: “*Comparison of SARIMAX, SARIMA, modified SARIMA and ANN-based models for short-term PV generation forecasting*”, IEEE International Energy Conference (ENERGYCON), 2016 .
- [42] N. Liu, V. Babushkin and A. Afshari: “*Short-term forecasting of temperature driven electricity load using time series and neural network model*”, Journal of Clean Energy Technologies, (2014), 2(4), 327-331.
- [43] M. B. Priestley: “*Spectral Analysis and Time Series*”, Academic Press, London 1983.

- [44] H. Akaike: “*Fitting autoregressive models for prediction*”, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1969 21: 243–247.
- [45] P. M. Broersen and H. E. Wensink: “*On Finite Sample Theory for Autoregressive Model Order Selection*”, IEEE Transactions on Signal Processing, 41(1993), 194.
- [46] A. Vizinho and L. R. Wyatt: “*Evaluation of the use of the modified-covariance method in HF radar ocean measurement*”, IEEE Journal of Oceanic Engineering, 26(4), (2001): 832–840.
- [47] L. Marple: “*A new autoregressive spectrum analysis algorithm*”, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 28(4), (1980): 441–454.
- [48] S. L. Marple Jr and W. M. Carey: “*Digital spectral analysis with applications*”, 1989.
- [49] A. H. Nuttall: “*Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques*”, Tech. Rep. TR-5303, Naval Underwater Systems Center, New London, Conn., 1976.
- [50] T. J. Ulrych and R. W. Clayton: “*Time Series Modelling and Maximum Entropy*”, Phys. Earth Planet. Inter., Vol. 12, pp. 188–200, 1976.
- [51] J. P. Burg: “*Maximum Entropy Spectral Analysis*”, Ph.D. dissertation, Stanford University, May 1975.
- [52] J. P. Burg: “*A New Analysis Technique for Time Series Data*”, NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, Enschede, The Netherlands, Aug. 1968, reprinted in Modern Spectrum Analysis, D. G. Childers, ed., IEEE Press, New York, 1978.
- [53] K. Roth, I. Kauppinen, P. A. Esquef and V. Valimaki: “*Frequency warped Burg's method for AR-modeling*”, IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, (2003): 5–8.
- [54] M. L. Johnson and L. M. Faunt: “*Parameter estimation by least-squares methods*”, Methods in enzymology, Academic Press, 210 (1992): 1–37.
- [55] V. Strejč: “*Least squares parameter estimation*”, Automatica, 16(5), (1980):535–550.
- [56] H. W. Sorenson: “*Least-squares estimation: from Gauss to Kalman*”, IEEE Spectrum, 7(7), (1970): 63–68.
- [57] T. Thorvaldsen: “*A comparison of the least squares method and the Burg method for autoregressive spectral analysis*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 29(4), (1981): 675–679.
- [58] F. Ding, X. Wang, Q. Chen and Y. Xiao: “*Recursive Least Squares Parameter Estimation for a Class of Output Nonlinear Systems Based on the Model Decomposition*”, Circuits, Systems, and Signal Processing, 35(9), (2015): 3323–3338.
- [59] E. Bodewig, “*Matrix Calculus*”, Amsterdam, North Holland, 1956.
- [60] Y.C. Ho: “*On the stochastic approximation method and optimal filtering theory*”, Jnl. Math. Anal. App. 6, (1962): 152.
- [61] J. Benesty, H. Rey, L. R. Vega and S. Tressens: “*A nonparametric VSS NLMS algorithm*”, IEEE Signal Process. Lett., vol. 13, no. 10, pp. 581–584, 2006.
- [62] S. Drašković, Ž. Đurović and V. Petrović: “*Absolute finite differences based variable forgetting factor RLS algorithm*”, IET Signal Processing 16.1 (2022): 80–91.
- [63] S. Drašković, G. Kvaščev, V. Petrović, Ž. Đurović and B. Kovačević: “*A New Approach to Adaptive Non-stationary Signals Parameter Identification*”, Proceedings of 1st International Conference on Electrical, Electronic and Computing Engineering IcETRAN 2014, Vrnjačka Banja, Serbia, June 2–5, 2014, pp. AUI1.6.1–5
- [64] S. Drašković, G. Kvaščev, Ž. Đurović, V. Petrović and B. Kovačević: “*Speech Signal Parameter Identification Using Adaptive Forgetting Factor*”, Proceedings of 2nd International Conference on Electrical, Electronic and Computing Engineering IcETRAN 2015, Silver Lake (Srebrno Jezero), Serbia, June 8–11, 2015, pp. AUI2.1.1–5

- [65] S. Drašković, Ž. Đurović, B. Kovačević and V. Petrović: “*Statistics of Absolute Finite Differences: Autoregressive Model Case*”, Proceedings of 3rd International Conference on Electrical, Electronic and Computing Engineering IcETRAN 2016, Zlatibor, Serbia, June 13–16, 2016, pp. AUI4.4.1-5
- [66] N. Shashoa, G. Kvaščev, A. Marjanović and Ž. Đurović: “*Sensor fault detection and isolation in a thermal power plant steam separator*”, Control engineering practice, vol. 21, no. 7, pp. 908-916, 2013.



# Biografija

Slobodan Drašković rođen je 26. februara 1989. godine u Kraljevu. Osnovnu školu Bane Milenković u Novom Selu završio je 2004. godine sa najvišim uspehom i dobitnik je Vukove diplome. Matematičku gimnaziju u Kraljevu završio je 2008. godine kao đak generacije. Osnovne akademske studije završio je 2012. godine na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, odsek Signali i sistemi, kod mentora prof. dr Željka Đurovića, sa prosečnom ocenom 9.37. Maser akademske studije završio je 2014. godine na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, odsek Signali i sistemi, kod mentora prof. dr Željka Đurovića, sa prosečnom ocenom 9.83. Doktorske studije upisao 2014. godine na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, modul Upravljanje procesima i obrada signala, kod mentora prof. dr Željka Đurovića. Položio je sve ispite sa prosečnom ocenom 10.

Objavio je 7 radova na domaćim i međunarodnim konferencijama od čega je na 4 rada prvi autor. Koautor je 5 priručnika izdata od strane Visoke škole elektrotehnike i računarstva strukovnih studija. Objavio je jedan rad kao prvi autor u međunarodnom časopisu vidljivom na SCI listi.

Stručna praksa obavio na katedri za električne mašine na Tehničkom Univerzitetu u Drezdenu 2012. godine. Od 2012. do 2014. godine radio kao saradnik u nastavi na Visokoj školi elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu. Od 2014. godine pa do danas radi kao asistent na Visokoj školi elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu. Od 2019. godine pa do danas radi kao stručni saradnik i koordinator programa u Klett EDU trening centru za obrazovanje odraslih u oblasti mehatronike i održavanja mašina i opreme u Beogradu. Od 2019. godine pa do danas radi kao predavač u SIEMENS trening centru u Beogradu gde drži obuke iz industrijske automatizacije i programiranja PLC kontrolera za industriju.

Radio je na više prijekata u privredi, na projektovanju i izvođenju automatizovanih sistema od čega su najznačajniji implementacija upravljačkog algoritma za proces liofilizacije (freeze-drying) na PLC uređaju, i implementacija i projektovanje SCADA sistema za interfejs sa mašinom, realizacija i projektovanje SCADA sistema i upravljačkih algoritama za HVAC sisteme, projektovanje i realizacija sistema za pakovanje praškastih i zrnastih materijala. Mentor je EUROBOT ekipe "WE-SHARE Robotics", gde radni na organizaciji i vođenju studenata kroz projektovanje i implementaciju raznih elektronskih kola, ploča, i upravljačkih algoritama mobilnih robota u Visokoj školi elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, Beograd. Radio je na kompletnoj modernizaciji i opremanju laboratorije za automatsko upravljanje i razvoju razne laboratorijske opreme i aparatura košćenjem PLC uređaja i embeded sistema za edukaciju studenata u Visokoj školi elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, Beograd.

Nagrade i sertifikati:

- Nagrada za najbolji rad mladog istraživača, 1st International Conference on Electrical, Electronic and Computing Engineering (IcETRAN 2014).
- Sertifikat MikroTik Certified Network Associate, broj sertifikata 1502NA780, 27.02.2015.
- Sertifikat MikroTik Certified Routing Engineer, broj sertifikata 1503RE047, 09.03.2015.
- Sertifikat MikroTik Certified Academy Trainer, broj sertifikata ACTR0333, 15.06.2015.
- Sertifikat/obuka SolidWorks Advanced course, broj sertifikata SO-00252, izdat od Solfins d.o.o. Beograd.
- Sertifikat/obuka 2013 EECI Graduate School on Control – Control of Nonlinear Delay Systems and PDEs, 15.03.2013.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Слободан Драшковић

Број индекса 2014/5002

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Адаптивна техника филтрирања нестационарних  
сигнала применом апсолутних коначних разлика

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Слободан Драшковић

Број индекса 2014/5002

Студијски програм Управљање системима и обрада сигнала

Наслов рада Адаптивна техника филтрирања нестационарних сигнала применом апсолутних коначних разлика

Ментор проф. др Жељко Ђуровић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Адаптивна техника филтрирања нестационарних  
сигнала применом апсолутних коначних разлика

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.  
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.