



UNIVERZITET U NOVOM SADU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA



**ANALIZA STABILNOSTI
LINEARNIH STACIONARNIH
PROCESA OPISANIH
IRACIONALNIM FUNKCIJAMA
PRENOSA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentori:
dr Milan R. Rapačić
dr Rachid Malti

Kandidat:
Vukan Turkulov

Novi Sad, 2023. godine

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA¹

Vrsta rada:	Doktorska disertacija
Ime i prezime autora:	Vukan Turkulov
Mentor 1:	dr Milan R. Rapaić, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor 2:	dr Rachid Malti, redovni profesor, Univerzitet u Bordou
Naslov rada:	Analiza stabilnosti linearnih stacionarnih procesa opisanih iracionalnim funkcijama prenosa
Jezik publikacije (pismo)	Srpski (latinica)
Fizički opis rada:	Stranica: 129 Poglavlja: 8 Referenci: 284 Tabela: 4 Slika: 0 Grafikona: 36 Priloga: 1
Naučna oblast:	Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo
Uža naučna oblast (naučna disciplina):	Računarstvo i automatika (automatika i upravljanje sistemima)
Ključne reči / predmetna odrednica	Stabilnost sistema, linearni sistemi, iracionalne funkcije prenosa, frakcioni sistemi, sistemi sa kašnjenjem, sistemi sa distribuiranim parametrima
Rezime na jeziku rada:	Disertacija se bavi analizom stabilnosti sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa. U okviru disertacije predložena su dva metoda za rešavanje ovog problema: 1) za određivanje segmenta invarijantne stabilnosti duž krive 2) za određivanje stabilnosti unutar oblasti u prostoru parametara.
Datum prihvatanja teme od strane nadležnog veća:	27.04.2023.
Datum odbrane: (Popunjava odgovarajuća služba)	
Članovi komisije:	Predsednik: dr Zoran Jeličić, redovni profesor, FTN, Novi Sad Član: dr Filip Kulić, redovni profesor, FTN, Novi Sad Član: dr Mirna Kapetina, vanredni profesor, FTN, Novi Sad Član: dr Tomislav Šekara, redovni profesor, ETF, Beograd Član: dr Milan R. Rapaić, redovni profesor, FTN, Novi Sad Član: dr Rachid Malti, redovni profesor, Univerzitet u Bordou
Napomena:	

¹ Autor doktorske disertacije potpisao je i priložio sledeće Obrasce:

56 – Izjava o autorstvu;

5B – Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije i o ličnim podacima;

5r – Izjava o korišćenju.

Ove Izjave se čuvaju na fakultetu u štampanom i elektronskom obliku i ne koriče se sa tezom.

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**

KEY WORD DOCUMENTATION²

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Vukan Turkulov
Supervisor 1	dr Milan R. Rapačić, full professor, Faculty of technical sciences, University of Novi Sad
Supervisor 2	dr Rachid Malti, full professor, University of Bordeaux
Thesis title:	Stability analysis of linear, stationary processes with irrational transfer functions
Language of text (script):	Serbian language (latin)
Physical description:	Pages: 129 Chapters: 8 References: 284 Tables: 4 Illustrations: 0 Graphs: 36 Appendices: 1
Scientific field:	Electrical and Computer Engineering
Scientific subfield (scientific discipline):	Computing and Control Engineering (Automatic Control and Systems Engineering)
Subject, Key words:	Stability analysis, linear systems, irrational transfer functions, fractional systems, time-delay systems, distributed-parameter systems
Abstract in English language:	The PhD thesis deals with the analysis of the stability of systems described by irrational transfer functions. Within the framework of the thesis, two methods for solving this problem are proposed: 1) for determining the segment of invariant stability along a curve 2) for determining stability within a region in the parametric space.
Accepted on Scientific Board on:	27.04.2023.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board:	President: dr Zoran Jeličić, full professor, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad Member: dr Filip Kulić, full professor, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad Member: dr Mirna Kapetina, assistant professor, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad Member: dr Tomislav Šekara, full professor, ETF, Beograd Member: dr Milan R. Rapačić, full professor, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad Member: dr Rachid Malti, full professor, University of Bordeaux
Note:	

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authority,

5B – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Pregled stanja u oblasti sa pregledom literature	5
2.1	Pojam stabilnosti	5
2.1.1	Stabilnost u smislu Ljapunova	6
2.1.2	Ulazno-izlazna stabilnost	9
2.2	Pregled literature	13
2.2.1	Sistemi sa vremenskim kašnjenjem	13
2.2.2	Frakcioni sistemi	17
2.2.3	Sistemi sa distribuiranim parametrima	19
2.2.4	D-dekompozicija	22
2.3	Doprinos disertacije u odnosu na postojeću literaturu	23
3	Postavka problema	25
3.1	Karakteristična funkcija sistema	25
3.2	Oblast invarijantne stabilnosti	28
3.3	Pretpostavke	29
3.3.1	Analitičnost karakteristične funkcije	29
3.3.2	Ograničenost karakteristične funkcije	30
3.3.3	Diferencijabilnost karakteristične funkcije	32
3.3.4	Gradijent karakteristične funkcije	32
3.3.5	Ponašanje funkcije na glatkim delovima konture	33
3.4	Predloženi metodi	34
4	Stabilnost duž krive u prostoru parametara	35
4.1	Kriva u prostoru parametara	35
4.2	Dovoljni uslovi invarijantne stabilnosti	36
4.3	Kompletan segment invarijantne stabilnosti	40
4.4	Implementacija	42
4.4.1	Implementacija Teoreme 3	42
4.4.2	Implementacija Teoreme 4 i Teoreme 5	45
4.4.3	Paralelizacija	46
4.5	Primer	47

4.6	Zaključak	50
5	Stabilnost unutar oblasti u prostoru parametara	51
5.1	Dovoljni uslovi invarijantne stabilnosti	51
5.2	Kompletna podoblast invarijantne stabilnosti	54
5.3	Implementacija	56
5.3.1	Implementacija Teoreme 6	56
5.3.2	Implementacija Teoreme 7	59
5.3.3	Paralelizacija	60
5.4	Primer	63
6	Neka proširenja i specijalni slučajevi	67
6.1	Stabilnost retardiranih sistema	67
6.1.1	Metod krive	67
6.1.2	Metod oblasti	69
6.2	Ublažavanje pretpostavki	70
7	Primeri	75
7.1	Sistemi sa vremenskim kašnjenjem	75
7.2	Fracioni sistemi	76
7.3	Sistemi sa distribuiranim parametrima	78
8	Zaključak	89
	Dodatak	91
	Rošeoova teorema	91
	Helderova nejednakost	91
	Fundamentalna teorema analize	91
	Analitičke kompleksne funkcije	92
	Meromorfne kompleksne funkcije	92
	Laplasova transformacija	92
	Bibliografija	92

Spisak slika

2.1	Sistem sa ulazom i izlazom	9
2.2	Zagrevanje jednog kraja štapa dužine L	20
3.1	Prikaz podskupa polova sistema (3.16)	31
3.2	Grafički prikaz konture ${}^{\rho,R}\mathcal{K}^f$	33
4.1	Grafički prikaz primera krive (4.1)	36
4.2	Poluprava definisana pomoću $\boldsymbol{\eta}^0$ i $\boldsymbol{\eta}^d$	39
4.3	Primena Teoreme 3 na primer 1	41
4.4	Primena Procedure 2 na primer 1	48
4.5	Primena Procedure 2 na mnogobrojne prave za primer 1	49
4.6	Primena Procedure 2 na mnogobrojne prave za primer 1	49
5.1	Primeri oblasti ${}_q\mathcal{W}_\varepsilon^1(\boldsymbol{\eta})$	52
5.2	Primena Teoreme 6 na primer 1	55
5.3	Primena Teoreme 7 na primer 1	65
5.4	Primena Teoreme 7 na primer 1	66
6.1	Iterativna primena Teoreme 8 na primer 2	69
6.2	Iterativna primena Teoreme 9 na primer 2	71
6.3	Primena Teoreme 4 na primer 4	73
6.4	Primena Teoreme 7 na primer 4	73
7.1	Primena Teoreme 4 na primer 5	76
7.2	Primena Teoreme 7 na primer 5	76
7.3	Primena Teoreme 4 na primer 6 - prikaz dobijenih polupravih invarijantne stabilnosti.	77
7.4	Primena Teoreme 4 na primer 6 - prikaz krajnjih tačaka dobijenih segmenata invarijantne stabilnosti.	77
7.5	Primena Teoreme 4 na primer 7	78
7.6	Primena Teoreme 7 na primer 7	79
7.7	Primena Teoreme 4 na primer 7	79
7.8	Primena Teoreme 7 na primer 7	80
7.9	Primena Teoreme 7 na primer 8	81
7.10	Primena Teoreme 7 na primer 8	81

7.11 Upravljački sistem iz primera 9.	82
7.12 Zagrevanje jednog kraja štapa dužine $0 < L \leq \infty$	82
7.13 Primena Teoreme 4 na primer 9, polu-beskonačni štap	83
7.14 Primena Teoreme 7 na primer 9, polu-beskonačni štap	84
7.15 Primena Teoreme 4 na primer 9, konačni štap	85
7.16 Primena Teoreme 7 na primer 9, konačni štap	85
7.17 Primena Teoreme 4 na primer 9, par provodnika	86
7.18 Primena Teoreme 7 na primer 9, par provodnika	87

Spisak tabela

4.1	Ulazni parametri Procedure 1	43
4.2	Ulazni parametri Procedure 2	45
5.1	Ulazni parametri Procedure 3	57
5.2	Ulazni parametri Procedure 4	59

Notacija

Oznake

\mathbb{N}	Skup prirodnih brojeva
\mathbb{N}_0	Skup nenegativnih celih brojeva
\mathbb{R}	Skup realnih brojeva
\mathbb{R}^+	Skup pozitivnih realnih brojeva
\mathbb{R}_0^+	Skup nenegativnih realnih brojeva
\mathbb{C}	Skup kompleksnih brojeva
\mathbb{C}^+	Skup kompleksnih brojeva sa pozitivnim realnim delom
$\overline{\mathbb{C}}^+$	Skup kompleksnih brojeva sa nenegativnim realnim delom
j	Imaginarna jedinica
s	Laplasova promenljiva
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarni proizvod
$\ x\ _p$	p -norma vektora x
\dot{x}	Prvi izvod funkcije x po vremenu t
$\mathcal{L}\{x(t)\}$	Laplasova transformacija signala x
$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	Inverzna Laplasova transformacija signala x

Skraćenice

BDS	Beskonačno-dimenzionalni sistemi
SCS	<i>Stability Crossing Set</i>
BIBO	<i>Bounded-Input Bounded-Output</i>
TDS	<i>Time-Delay System</i>
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i>
FIFO	<i>First-In, First-Out</i>
MRSW	<i>Multiple-Readers, Single-Writer</i>
ISS	<i>Input-to-State Stability</i>
IO sistemi	<i>Input-Output sistemi</i>

Glava 1

Uvod

Ova disertacija predstavlja sistematičan pregled rezultata naučno-istraživačkog rada do kojih je autor došao tokom svojih doktorskih studija na Katedri za automatsko upravljanje Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu. Istraživanje i disertacija rađeni su pod vođstvom dvojice mentora: Milana Rapaića iz Novog Sada i Rašida Maltija iz Bordoaa. Svi prikazani rezultati tiču se analize stabilnosti sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa. Neki od ovih rezultata su u skraćenom obliku već publikovani u međunarodnom časopisu [1] i prikazani na međunarodnim konferencijama [2–4], drugi su još uvek u postupku recenzije [5, 6], dok deo rezultata nikada ranije nije publikovan i po prvi put je prikazan u okviru ove disertacije.

Matične institucije obojice mentora mogu se pohvaliti razvijenim grupama koje se duži niz godina bave frakcionim sistemima, i uopšteno sistemima koji su opisani iracionalnim funkcijama prenosa. Iz mnoštva radova poteklih sa Fakulteta tehničkih nauka, u nastavku izdvajamo one koje smatramo naj-reprezentativnijim. Iako su postojali raniji radovi koji su se bavili upravljanjem sistemima sa beskonačno stepeni slobode [7–9], ipak možemo reći da je novosadsku školu frakcionog računa i sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa osnovao akademik Teodor Atanacković [10–20]. Unutar Katedre za automatsko upravljanje (tačnije Odseka za automatiku, geomatiku i upravljanje sistemima) ova oblast je dalje razvijana kroz niz doktorata [21–24] i naučnih radova u oblastima upravljanja sistemima sa beskonačno stepeni slobode [25–27], analize frakcionih modela i modela sa distribuiranim parametrima [19, 20, 28, 29], frakcionih regulatora [30–36], i identifikacije i estimacije parametara modela opisanih iracionalnim funkcijama prenosa [37–41]. Navedene oblasti uspešno se neguju u saradnji sa mnogobrojnim kolegama iz zemlje i inostranstva [32, 42–47].

Mentor Rašid Malti je član istraživačke grupe CRONE (*Commande Robuste d’Ordre Non Entier*) iz Bordoaa, koja je verovatno najstarija i jedna od najjuticajnijih grupa iz oblasti frakcionog računa na svetu. Plodni doprinos CRONE grupe ogleda se u mnoštvu doktorskih disertacija [48–55] i obja-

vljenih radova iz ove oblasti [46, 56–79], sa posebnim akcentom na frakcione regulatore [68, 80–88]. Navedeni radovi predstavljaju samo jedan deo bogate literature Univerziteta u Bordou na temu frakcionih sistema.

Imajući u vidu dosadašnji rad Fakulteta tehničkih nauka (Univerziteta u Novom Sadu) i CRONE grupe (Univerziteta u Bordou), ova disertacija predstavlja prirodan nastavak rada mentora i njihovih grupa u oblasti sistema koji su opisani iracionalnim funkcijama prenosa.

Rad je formalno podeljen u 8 poglavlja. U poglavlju 2 dajemo pregled različitih definicija stabilnosti linearnih sistema, poput Ljapunovljeve, asimptotske, eksponencijalne, BIBO, \mathcal{L}_p i H_∞ stabilnosti. Razmatranje započinjemo od modela u prostoru stanja, posle čega prelazimo na sisteme modelovane funkcijama prenosa. U slučaju racionalnih funkcija prenosa, razmatrane definicije stabilnosti mahom su ekvivalentne. Međutim, u slučaju iracionalnih funkcija prenosa, definicije se razlikuju.

Nastavak poglavlja posvećen je pregledu literature koja se bavi analizom stabilnosti sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa. Posebna pažnja posvećena je praktično značajnim klasama takvih sistema: sistemima sa vremenskim kašnjenjem, frakcionim sistemima, kao i sistemima sa distribuiranim parametrima.

U poglavlju 3 dajemo postavku problema koji se razmatra u okviru disertacije. Stabilnost racionalnih funkcija prenosa svodi se na analizu stabilnosti karakterističnog polinoma sistema. Međutim, pokazaćemo da je u slučaju iracionalnih funkcija prenosa pojam karakterističnog polinoma neodgovarajuć. Ovaj problem prevazilazimo uvođenjem pojma karakteristične funkcije sistema, koja predstavlja direktno uopštenje karakterističnog polinoma.

U nastavku poglavlja izlažemo samu postavku problema. U okviru disertacije razmatramo funkcije prenosa parametrizovane konačnim brojem realnih parametara. Cilj izloženih postupaka je pronalazak segmenata krive i/ili oblasti u prostoru parametara, u okviru kojih je broj „nestabilnih” polova sistema invarijantan. U tu svrhu uvodimo pojmove maksimalnog segmenta i maksimalne oblasti invarijantne stabilnosti.

Da bi predloženi postupci bili primenjivi, neophodno je da funkcija prenosa sistema ispunjava skup pretpostavki. Ostatak poglavlja 3 posvećen je formulaciji i razmatranju ovih pretpostavki.

Glavni rezultati disertacije mogu se podeliti u dve grupe. Prva grupa obuhvata metode za analizu stabilnosti duž krive u prostoru parametara, dok druga grupa obuhvata metode za analizu stabilnosti unutar oblasti u prostoru parametara. Poglavlje 4 posvećeno je analizi stabilnosti duž krive. Početak poglavlja uvodi definiciju krive, čime se broj parametara funkcije prenosa svodi na samo jedan parametar.

Prvi izloženi metod pronalazi segment krive u prostoru parametara, takav da je broj nestabilnih polova sistema invarijantan za sve parametarske tačke koje pripadaju pronađenom segmentu. Ovaj metod je konzervativan,

jer je dobijeni segment „nemaksimalan“. U nastavku poglavlja opisan je drugi metod, koji pronalazi maksimalan takav segment krive. Drugi metod oslanja se na iterativnu primenu prvog, a centralni rezultat poglavlja predstavlja dokaz da takva iterativna primena zaista konvergira ka maksimalnom traženom segmentu krive.

U nastavku poglavlja izložena je računarska implementacija metoda, koja uvodi nekoliko poteškoća u odnosu na njihovu matematičku reprezentaciju. Ove poteškoće detaljno su razmatrane, kao i načini na koje ih je moguće prevazići. Oba metoda ilustrovana su primerom.

Poglavlje 5 posvećeno je analizi stabilnosti unutar oblasti u prostoru parametara. Slično kao u prethodnom poglavlju, prvo izlažemo metod koji pronalazi konzervativnu oblast takvu da je broj nestabilnih polova sistema invarijantan za sve parametarske tačke unutar oblasti. Potom izlažemo metod koji pronalazi maksimalnu takvu oblast, bez obzira na njen oblik. Nekonzervativni metod zasniva se na iterativnoj primeni konzervativnog, a dokaz da takva primena konvergira ka traženoj oblasti predstavlja centralni rezultat ovog poglavlja.

U nastavku poglavlja 5 opisana je računarska implementacija metoda. U slučaju metoda za analizu stabilnosti unutar oblasti, složenost algoritma zavisi od broja parametara funkcije prenosa, što predstavlja motivaciju za što efikasnijom implementacijom algoritma. U tu svrhu, u poglavlju opisujemo i „paralelnu“ implementaciju metoda, koja je pogodna za istovremeno izvršavanje na više procesorskih jedinica. Paralelna varijanta metoda ne poseduje nikakve nedostatke u odnosu na sekvencijalnu, osim nešto složenije implementacije.

U poglavlju 6 opisana su neka proširenja postojećih metoda. Proširenja uključuju ublažavanje pojedinih pretpostavki iz poglavlja 3, kao i efikasniju primenu metoda na specifične klase sistema.

Iracionalne funkcije prenosa koriste se za modelovanje raznovrsnih klasa sistema. U poglavlju 7 ilustrujemo primenu metoda na mnoštvo primera koji obuhvataju različite klase sistema, uključujući i upravljačke sisteme. Primeri ilustruju primenu obe grupe metoda - za analizu stabilnosti duž krive i za analizu stabilnosti unutar oblasti.

U poglavlju 8 dajemo zaključna razmatranja, dok su u Dodatku izdvojene poznate teoreme i definicije, kako bi osnovni tekst disertacije bio čitljiviji.

Glava 2

Pregled stanja u oblasti sa pregledom literature

Stabilnost je fundamentalna osobina dinamičkih sistema koja nalazi primenu u raznorodnim oblastima poput inženjerstva, fizike, ekonomije, farmacije i biologije. Okvirno govoreći, dinamički sistem je stabilan ukoliko se posle unutrašnjih ili spoljašnjih poremećaja vraća u ravnotežno stanje. Analizom stabilnosti sistema, kao i faktora koji utiču na stabilnost, moguće je doneti vredne zaključke o samom sistemu. Na primer, analizom stabilnosti moguće je utvrditi da li odabrani parametri upravljačkog algoritma rezultuju željenim ponašanjem, ili pronaći maksimalnu dozvoljenu vrednost vremenskog kašnjenja unutar upravljačkog sistema.

U ovom poglavlju dajemo uvod u stabilnost dinamičkih sistema. U odeljku 2.1 dajemo pregled različitih definicija stabilnosti. Potom, u odeljku 2.2 dajemo pregled postojećih metoda za analizu stabilnosti različitih klasa dinamičkih sistema. U odeljku 2.3 izložimo doprinos disertacije u odnosu na metode analize stabilnosti sistema dostupne u literaturi.

2.1 Pojam stabilnosti

Iako je osnovna ideja stabilnosti sistema univerzalna, postoji mnoštvo različitih definicija stabilnosti. Definicije se najpre razlikuju po tipu sistema na koji su primenjive; na primer, različite definicije stabilnosti možemo primeniti na linearne i nelinearne sisteme, na sisteme sa i bez ulaza, na sisteme modelovane u vremenskom i sisteme modelovane u kompleksnom domenu. Potom, definicije stabilnosti se razlikuju po samim osobinama koje sistem mora da poseduje kako bi se smatrao stabilnim; na primer, asimptotska stabilnost zahteva da se sistem posle poremećaja vraća u ravnotežno stanje, dok eksponencijalna stabilnost zahteva da se sistem u takvo stanje vraća „dovoljno brzo”.

U ovom odeljku ćemo razmotriti različite definicije stabilnosti, kao i klase

sistema na koje su te definicije primenjive. U odeljku 2.1.1 počecemo od stabilnosti u smislu Ljapunova, dok u odeljku 2.1.2 razmatramo različite definicije ulazno-izlazne stabilnosti.

2.1.1 Stabilnost u smislu Ljapunova

Ljapunovljeva stabilnost je jedna od najstarijih definicija stabilnosti dinamičkih sistema, predložena krajem 19. veka [89]. U standardnom obliku, definicija se primenjuje na nelinearne sisteme bez ulaza, opisane modelom

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.1)$$

gde x predstavlja stanje sistema, dok f opisuje njegovu dinamiku.

Sa druge strane, u okviru disertacije se bavimo linearnim sistemima sa ulazima i izlazima. U vremenskom domenu, ovakve sisteme možemo opisati modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.2)$$

gde x predstavlja vektor unutrašnjih stanja sistema, u predstavlja vektor ulaza a y vektor izlaza sistema, dok su A , B i C matrice konačnog reda koje određuju dinamiku sistema.

Napomena 1. U opštem slučaju, matrice A , B i C mogu zavisiti od nezavisne vremenske promenljive t . Međutim, u okviru disertacije ograničavamo se na sisteme u kojima su ove matrice nezavisne od t . Takvi sistemi, čije karakteristike se ne menjaju tokom vremena, nazivaju se vremenski invarijantnim ili stacionarnim sistemima. \square

Shodno tome, Ljapunovljevu stabilnost ćemo razmatrati u kontekstu sistema 2.2. Međutim, pošto Ljapunovljeva stabilnost ne uzima u obzir ulaz sistema, kao ni njegov izlaz, razmatranja u ovom odeljku započecemo analizom pojednostavljenog sistema

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.3)$$

Mirne radne tačke

Stabilnost u smislu Ljapunova vezuje se za njegova ravnotežna stanja, predstavljena tačkama u prostoru stanja u kojima se stanje sistema ne menja tokom vremena. Takve tačke se zovu „mirne radne tačke”, i definisane su na sledeći način.

Definicija 1. Tačka x^* je mirna radna tačka sistema (2.3) ako i samo ako važi $Ax^* = 0$. \square

Ukoliko je sistem nelinearan, on može posedovati više mirnih radnih tačaka. U tom slučaju, moguće je diskutovati o stabilnosti svake pojedinačne mirne radne tačke u smislu Ljapunova. U slučaju linearnih sistema, situacija je nešto jednostavnija, pošto postoji tačno jedna mirna radna tačka $x^* = 0$, uz pretpostavku da $\det(A) \neq 0$. Kada se ispituje stabilnost linearnog sistema u smislu Ljapunova, misli se na ispitivanje stabilnosti njegove jedine mirne radne tačke. Sa druge strane, ukoliko važi $\det(A) = 0$, situacija je nešto složenija jer onda sistem (2.3) poseduje beskonačno mnogo mirnih radnih tačaka.

Definicije stabilnosti

Imajući u vidu model (2.3) i definiciju mirne radne tačke, možemo dati tri usko povezane definicije vezane za stabilnost sistema u smislu Ljapunova, odnosno stabilnost njegove jedine mirne radne tačke $x^* = 0$.

Definicija 2. Neka je dat sistem (2.3) i neka je $\det(A) \neq 0$. Sistem je stabilan u smislu Ljapunova ukoliko za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

□

Definicija 3. Neka je dat sistem (2.3) i neka je $\det(A) \neq 0$. Sistem je asimptotski stabilan ukoliko je stabilan u smislu Ljapunova i ukoliko postoji $\delta > 0$ za koje važi

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.5)$$

□

Definicija 4. Neka je dat sistem (2.3) i neka je $\det(A) \neq 0$. Sistem je eksponencijalno stabilan ukoliko je asimptotski stabilan i ukoliko postoje $\delta > 0$, $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ za koje važi

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

□

Definicija 2 je najblaža; Ljapunovljeva stabilnost zahteva da stanje sistema ostane „dovoljno blizu” mirne radne tačke ukoliko je njegovo početno stanje „dovoljno blizu” iste te tačke. Asimptotska stabilnost je nešto strožija, jer zahteva da se stanje sistema vrati u mirnu radnu tačku ukoliko je početno stanje sistema „dovoljno blizu” mirne radne tačke. Eksponencijalna stabilnost je najstrožija, jer zahteva da se sistem u ravnotežno stanje vrati eksponencijalno brzo.

U slučaju nelinearnih sistema, stabilnost u prethodno navedena tri smisla nije jednostavno ispitati. Međutim, u slučaju linearnih sistema, postoje poznati rezultati za utvrđivanje sve tri vrste stabilnosti:

Teorema 1. *Neka je dat sistem (2.3) i neka je $\det(A) \neq 0$. Sistem je stabilan u smislu Ljapunova ako i samo ako sve svojstvene vrednosti matrice A imaju realni deo manji ili jednak nuli i ukoliko su sve svojstvene vrednosti sa nultim realnim delom jednostruke [90, 91].*

Teorema 2. *Neka je dat sistem (2.3) i neka je $\det(A) \neq 0$. Sistem je stabilan u asimptotskom i eksponencijalnom smislu ako i samo ako sve svojstvene vrednosti matrice A imaju negativan realni deo [90, 91].*

Uviđamo da su definicije asimptotske i eksponencijalne stabilnosti ekvivalentne u slučaju linearnih sistema konačne dimenzije. Takođe napominjemo da se u teoriji analize sistema često koristi i termin „granične stabilnosti”. U slučaju sistema (2.3), sistem je granično stabilan ukoliko je stabilan u smislu Ljapunova, ali nije stabilan u asimptotskom i eksponencijalnom smislu [91, 92].

Stabilnost u odnosu na ulazni signal

Proširivanje Ljapunovljeve stabilnosti na sisteme sa ulazom je izazovno. U tom slučaju, nije dovoljno diskutovati o ponašanju sistema u zavisnosti od njegovog početnog stanja, već i u zavisnosti od ulaznog signala. U opštem slučaju nelinearnih sistema, u ovu svrhu se definiše ISS stabilnost (*Input-to-State Stability*) koja ispituje amplitudu stanja sistema u zavisnosti od amplitude ulaznog signala, a čije razmatranje je izvan opsega ove disertacije.

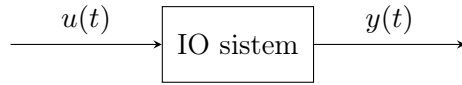
Međutim, vredno je napomenuti da u slučaju linearnih sistema konačne dimenzije postoji jaka veza između eksponencijalne i ISS stabilnosti. Naime, stanje $x(t)$ sistema (2.2) u zavisnosti od početnog stanja $x(0)$ i ulaza $u(t)$ određeno je kao

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (2.7)$$

gde član $e^{At}x(0)$ određuje odziv na početno stanje (*sopstveni odziv sistema*), dok član pod integralom određuje odziv na ulazni signal (*prinudni odziv sistema*). Dakle, u slučaju sistema (2.2) moguće je zasebno diskutovati o stabilnosti sistema u odnosu na njegova početna stanja, i o stabilnosti sistema u odnosu na ulazni signal.

Analizom prinudnog odziva sistema, moguće je pokazati da je prinudni odziv eksponencijalno stabilnog sistema ograničen ukoliko je ulazni signal sistema ograničen. Štaviše, u tom slučaju je amplituda odziva sistema proporcijalna amplitudi ulaznog signala [90, 91].

Ovime zaključujemo razmatranja vezana za Ljapunovljevu stabilnost. U sledećem odeljku prelazimo na definicije stabilnosti koje ispituju odnos ulaznog i izlaznog signala sistema.



Slika 2.1: Sistem sa ulazom i izlazom

2.1.2 Ulazno-izlazna stabilnost

Sistemi sa ulazima i izlazima (*IO Sistemi*) u opštem slučaju predstavljaju mapiranje ulaznog signala $u(t)$ na izlazni signal $y(t)$, kao što je prikazano na slici 2.1. Ovakvi modeli se koriste za opisivanje dinamičkih sistema iz raznih oblasti poput fizike, inženjerstva, biologije i ekonomije. Iako IO sistem ne mora sadržati unutrašnja stanja, u praksi često koristimo modele koji imaju unutrašnja stanja. U tom slučaju odziv sistema $y(t)$ ne zavisi samo od ulaznog signala $u(t)$, već i od datih početnih vrednosti unutrašnjih stanja sistema.

Sistemi sa ulazima i izlazima mogu se modelovati na različite načine. U okviru disertacije, bavimo se sistemima modelovanim funkcijama prenosa definisanim u frekvencijskom (Laplasovom) domenu. Takvi modeli imaju oblik

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (2.8)$$

gde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ i $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ predstavljaju kompleksne likove (Laplasovu transformaciju, vidi Dodatak) ulaznog i izlaznog signala. Funkcija prenosa može se definisati samo u slučaju da je sistem linearan. Za dati ulazni signal $u(t)$ i funkciju prenosa $G(s)$, izlazni signal određen je kao

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\mathcal{L}\{u(t)\}\}, \quad (2.9)$$

gde operator \mathcal{L}^{-1} predstavlja inverznu Laplasovu transformaciju (vidi Dodatak).

Napomena 2. Radi jednostavnosti, u okviru disertacije razmatramo sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom. Sva razmatranja mogu se trivijalno proširiti na sisteme sa više ulaza i/ili izlaza. \square

Iracionalne funkcije prenosa

Sistem (2.2) može se opisati funkcijom prenosa u kompleksnom domenu, određenom kao

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (2.10)$$

U tom slučaju, funkcija prenosa sistema je racionalna. Međutim, u okviru disertacije se bavimo funkcijama prenosa koje ne moraju biti racionalne. Drugim rečima, funkcija prenosa $G(s)$ ne mora imati oblik količnika dva polinoma, već može biti proizvoljnog oblika. Na primer, $G(s)$ može sadržati

članove poput e^{-s} , $\sinh(s)$ ili $s^{\sqrt{2}}$. Štaviše, ispitivanje sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa predstavlja centralnu tačku doktorske disertacije. Dok racionalne funkcije prenosa opisuju sisteme konačnog reda, iracionalne funkcije prenosa opisuju sisteme beskonačnog reda. Ovakvi sistemi ne mogu se opisati modelom oblika (2.2).

Primer. Posmatrajmo sistem opisan funkcijom prenosa

$$G(s) = \frac{1}{s + e^{-s\tau}}. \quad (2.11)$$

Ovaj sistem moguće je opisati u vremenskom domenu modelom

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(t - \tau) + u(t) \\ y &= x, \end{aligned} \quad (2.12)$$

ali ga nije moguće opisati modelom oblika (2.2). \square

Ostatak odeljka posvećen je različitim definicijama ulazno-izlazne stabilnosti. Zajednička crta svim različitim definicijama ulazno-izlazne stabilnosti je da se vezuju za odnos ulaznog i izlaznog signala sistema, i da za „dovoljno lep” ulazni signal zahtevaju „dovoljno lep” izlazni signal.

BIBO stabilnost

Među najpoznatijim definicijama ulazno-izlazne stabilnosti je BIBO (*Bounded-Input, Bounded-Output*) stabilnost.

Definicija 5. Sistem je BIBO stabilan ako i samo ako za svako u , takvo da je $|u(t)| \leq U < \infty, \forall t \geq 0$, postoji $Y < \infty$, takvo da je $|y(t)| < Y, \forall t \geq 0$. Drugim rečima, sistem je BIBO stabilan ako na svaki konačan ulaz daje konačan izlaz. \square

BIBO stabilnost se definiše u odnosu na prinudni odziv sistema, dok sopstveni odziv ne igra nikakvu ulogu u definiciji. Usled toga, BIBO stabilnost ne uzima u obzir početne uslove sistema. Sistem je BIBO stabilan ako i samo ako je impulsni odziv sistema apsolutno integrabilan. Takođe, treba napomenuti da „granično stabilni” sistemi (sistemi čija funkcija prenosa ima jednostruke polove na imaginarnoj osi) nisu BIBO stabilni. Na primer, sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x \end{aligned} \quad (2.13)$$

ima funkciju prenosa $G(s) = \frac{1}{s}$ i nije BIBO stabilan, što je lako uvideti odabirom $u(t) = c, c > 0$.

BIBO stabilnost nije uvek praktično ispitati, pogotovo u slučaju iracionalnih funkcija prenosa. Naime, funkcija prenosa sistema konačnog reda (2.2), određena kao (2.10), je racionalna, te je njenu stabilnost u BIBO smislu moguće ispitati jednostavnom analizom položaja polova. Sa druge strane,

sistemi beskonačnog reda poseduju iracionalne funkcije prenosa, za koje nije jednostavno utvrditi stabilnost u BIBO smislu. Primera radi, takve funkcije prenosa mogu posedovati beskonačan broj polova, a u izvesnim slučajevima nije moguće garantovati stabilnost čak ni ukoliko znamo da se svi polovi nalaze sa leve strane imaginarne ose.

\mathcal{L}_p stabilnost

Radi uvođenja \mathcal{L}_p stabilnosti, prvo definišemo \mathcal{L}_p normu funkcije f . Formalno razmatramo dva različita slučaja: kada je $p \in [1, \infty)$ i kada je $p = \infty$.

Definicija 6. Za funkciju $f(t)$, $t \geq 0$, norma $\|f\|_{\mathcal{L}_p}$ za neko $p \in [1, \infty)$ definisana je kao

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.14)$$

□

Definicija 7. Za funkciju $f(t)$, $t \geq 0$, norma $\|f\|_{\mathcal{L}_\infty}$ definisana je kao

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} |f(t)|. \quad (2.15)$$

□

Stabilnost u \mathcal{L}_p smislu definiše se kao odnos \mathcal{L}_p normi ulaznog i izlaznog signala, kao što je prikazano u narednoj definiciji.

Definicija 8. Sistem (2.8) je \mathcal{L}_p stabilan za $1 \leq p \leq \infty$ ako i samo ako postoji $\gamma > 0$ tako da za svako u važi

$$\|y\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}_p}. \quad (2.16)$$

□

Stabilnost u \mathcal{L}_p smislu se često definiše i u nešto širem smislu

$$\|y\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}_p} + \beta, \quad (2.17)$$

gde β dozvoljava nenulti izlaz za multi ulaz [90]. U slučaju linearnih sistema, član β nije potreban. Pošto u okviru disertacije posmatramo isključivo linearne sisteme, \mathcal{L}_p stabilnost ćemo razumeti u smislu Definicije 8.

Takođe je zanimljivo primetiti da \mathcal{L}_p stabilnost predstavlja direktno uopštenje BIBO stabilnosti. Naime, BIBO stabilnost je ekvivalentna \mathcal{L}_∞ stabilnosti. Rigorozniji tretman \mathcal{L}_p stabilnosti može se pronaći u [90].

H_p stabilnost

Stabilnost u H_p smislu specifična je za sisteme opisane funkcijama prenosa jer se, za razliku od \mathcal{L}_p i BIBO stabilnosti, direktno definiše u kompleksnom domenu. Slično kao prilikom definisanja \mathcal{L}_p norme, razmatramo dva različita slučaja za $p \in [1, \infty)$ i za $p = \infty$.

Definicija 9. Sistem (2.8) je H_p stabilan za $1 \leq p < \infty$ ako i samo ako je funkcija prenosa $G(s)$ holomorfna nad \mathbb{C}^+ i

$$\sup_{x>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G(x + jy)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (2.18)$$

□

Definicija 10. Sistem (2.8) je H_∞ stabilan ako i samo ako je $G(s)$ holomorfna nad \mathbb{C}^+ i

$$\sup_{\Re(s)>0} |G(s)| < \infty. \quad (2.19)$$

□

Eksponecijalna stabilnost

U literaturi se često susreće pojam stabilnosti u eksponecijalnom smislu, koja se u opštem slučaju može primenjivati i na linearne i na nelinearne sisteme. Štaviše, eksponecijalna stabilnost određena je Definicijom 4. Međutim, u ovom odeljku daćemo novu definiciju eksponecijalne stabilnosti, određenu pomoću impulsnog odziva sistema. U slučaju linearnih sistema, obe definicije su ekvivalentne.

Da bismo formulisali eksponecijalnu stabilnost, prvo definišemo α -eksponecijalnu stabilnost.

Definicija 11. Sistem (2.8) je α -eksponecijalno stabilan za dato $\alpha > 0$ ako i samo ako

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha t} |h(t)| < \infty, \quad (2.20)$$

gde $h(t)$ predstavlja impulsni odziv sistema. □

Sada možemo dati definiciju eksponecijalne stabilnosti.

Definicija 12. Sistem (2.8) je eksponecijalno stabilan ako je α -eksponecijalno stabilan za neko $\alpha > 0$. □

Vidimo da su različite definicije stabilnosti u slučaju linearnih sistema konačne dimenzije blisko povezane. Sve navedene definicije podrazumevaju da funkcija prenosa sistema nema polova u desnoj kompleksnoj poluravni, a mnoge podrazumevaju da funkcija prenosa nema polova ni na imaginarnoj osi. Stabilnost u α -eksponecijalnom smislu je nešto strožija, i zahteva da funkcija prenosa nema polova u poluravni određenoj kao

$$\mathcal{P}_\alpha = \{s = x + jy : x \geq -\alpha\}. \quad (2.21)$$

2.2 Pregled literature

Pošto je disertacija prvenstveno posvećena sistemima opisanim iracionalnim funkcijama prenosa, u ovom odeljku dajemo pregled postojećih metoda analize stabilnosti takvih sistema.

Iracionalne funkcije u zatvorenoj formi prenosa opisuju linearne sisteme sa beskonačno dimenzijom. Primeri takvih sistema obuhvataju sisteme sa vremenskim kašnjenjem, sisteme sa distribuiranim parametrima, kao i frakcione sisteme. Postoji nekoliko monografija posvećenih opštoj analizi beskonačno dimenzionalnih sistema (BDS), poput [93] i [94]. Često je citirana i monografija Foiaša [95] koja se prvenstveno bavi upravljanjem BDS.

Radovi koji se bave analizom stabilnosti BDS raznoliki su po postavci problema koje rešavaju i po klasama sistema koje razmatraju. Dok su radovi koji se bave analizom stabilnosti BDS u opštem slučaju malobrojni (na primer [96]), postoji mnoštvo radova koji se bave analizom specifičnih klasa BDS.

U odeljcima 2.2.1-2.2.3 dajemo pregled metoda za analizu stabilnosti najčešće sretanih klasa BDS. U odeljku 2.2.4 potom razmatramo familiju metoda za analizu stabilnosti koja ima dodirnih tačaka sa metodima predloženim u okviru disertacije, a koja nije vezana ni za jednu specifičnu klasu BDS.

2.2.1 Sistemi sa vremenskim kašnjenjem

Kao najčešće obrađivanu klasu BDS izdvajamo sisteme sa vremenskim kašnjenjem čijoj su analizi stabilnosti u poslednjih nekoliko decenija posvećene mnogobrojne knjige [97–104].

Sistemi sa vremenskim kašnjenjem opisuju sisteme čije ponašanje ne zavisi samo od trenutnog stanja i ulaza sistema, već i od stanja sistema iz prethodnih vremenskih trenutaka. Sistemi sa vremenskim kašnjenjem susreću se u oblastima poput inženjerstva [105–109], biologije [110–114], fizike [115–120], i ekonomije [121–127].

Iako je vremensko kašnjenje moguće i u linearnim i nelinearnim modelima, posebnu pažnju posvećujemo linearnim sistemima sa kašnjenjem zato što se u okviru disertacije bavimo isključivo linearnim sistemima, kao i zbog njihovog praktičnog značaja. U tom pogledu, u nastavku izdvajamo pojedine praktično zanimljive klase linearnih sistema sa vremenskim kašnjenjem.

Retardirani sistemi

Retardirani sistemi predstavljaju najčešće susretanu klasu linearnih sistema sa vremenskim kašnjenjem. U literaturi se ovakvi sistemi nekada nazivaju i sistemima sa tačkastim, diskretnim ili koncentrisanim kašnjenjem.

Definicija 13. Linearni retardirani sistemi su sistemi čiji model u prostoru stanja ima oblik

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) + Bu(t) \\ y(t) &= C_0x(t) + \sum_{i=1}^m C_i x(t - \tau_i)\end{aligned}\tag{2.22}$$

gde parametri τ_i , $i = 1 \dots m$ predstavljaju vremenska kašnjenja. \square

Funkcija prenosa sistema (2.22) ima oblik

$$G(s) = \left[C_0 + \sum_{i=1}^m C_i e^{-s\tau_i} \right] \left[sI - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-s\tau_i} \right]^{-1} B.\tag{2.23}$$

Većina literature posvećene sistemima sa vremenskim kašnjenjem je usmerena upravo na retardirane sisteme. Od primera izdvajamo [128–136].

Primer. Posmatrajmo linearni retardirani sistem opisan modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t - \tau_1) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau_2) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Funkcija prenosa datog sistema je

$$G(s) = \frac{s + e^{-s\tau_1} + 1}{s^2 + s(2 + 2e^{-s\tau_1}) + 2e^{-s\tau_1} + e^{-2s\tau_1} + e^{-2s\tau_2} + 1}.\tag{2.25}$$

\square

Neutralni sistemi

Neutralni sistemi predstavljaju klasu sistema nešto složeniju od retardiranih. Razlika se sastoji u tome što je vremensko kašnjenje moguće i uz član koji sadrži diferenciranje po vremenu.

Definicija 14. Linearni neutralni sistemi su sistemi čiji model u prostoru stanja ima oblik

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=1}^m A'_i \dot{x}(x - \tau_i) + Bu(t), \\ y(t) &= C_0x(t) + \sum_{i=1}^m C_i x(t - \tau_i)\end{aligned}\tag{2.26}$$

gde parametri τ_i , $i = 1 \dots m$ predstavljaju vremenska kašnjenja. \square

Funkcija prenosa sistema (2.26) ima oblik

$$G(s) = \left[C_0 + \sum_{i=1}^m C_i e^{-s\tau_i} \right] \left[sI - A_0 - \sum_{i=1}^m e^{-s\tau_i} (sA'_i + A_i) \right]^{-1} B. \quad (2.27)$$

Od radova posvećenih analizi neutralnih sistema izdvajamo [137–142]. Kao što će biti pokazano u okviru disertacije, analiza stabilnosti neutralnih sistema je daleko složenija u odnosu na retardirane sisteme.

Primer. Posmatrajmo neutralni sistem opisan modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_0 x(t) + a_1 x(t - \tau) + a'_1 \dot{x}(t - \tau) + bu(t) \\ y(t) &= x(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Funkcija prenosa datog sistema je

$$G(s) = \frac{b}{s [1 - a'_1 e^{-s\tau}] - a_0 - a_1 e^{-s\tau}}. \quad (2.29)$$

□

Sistemi sa distribuiranim kašnjenjem

Treću praktično zanimljivu klasu sistema sa kašnjenjem čine sistemi sa distribuiranim kašnjenjem. Ispitivanje stabilnosti takvih sistema je izazovno zbog njihove raznolike strukture.

Definicija 15. Linearni sistemi sa distribuiranim kašnjenjem su sistemi čiji model u prostoru stanja ima oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x + \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 x(t+h) \alpha_i(h) dh + Bu(t) \\ y(t) &= C_0 x(t) + \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 x(t+h) \gamma_i(h) dh \end{aligned} \quad (2.30)$$

gde parametri τ_i , $i = 1 \dots m$ predstavljaju intervale nad kojima su kašnjenja distribuirana, a funkcije $\alpha_i(h)$ i $\gamma_i(h)$, $i = 1 \dots m$ predstavljaju jezgra pojedinačnih kašnjenja. □

Napomena 3. U opštem slučaju, neka od jezgara $\alpha_i(h)$ i $\gamma_i(h)$, $i = 1 \dots m$ mogu se degenerisati u Dirakove impulse, što odgovarajuće članove u sumi pretvara u koncentrisana kašnjenja. □

Napomena 4. Sistem može posedovati i distribuirana i neutralna kašnjenja, time kombinujući elemente sistema (2.26) i (2.30). □

Funkcija prenosa sistema (2.30) ima oblik

$$G(s) = \left[C_0 + \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 e^{sh} \gamma_i(h) dh \right] \left[s - A_0 - \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 e^{sh} \alpha_i(h) dh \right]^{-1} B. \quad (2.31)$$

Kao što se vidi iz (2.31), oblik funkcije prenosa sistema (2.30) umnogome zavisi od jezgra $\alpha_i(h)$ i $\gamma_i(h)$, $i = 1 \dots m$. Ovo otežava pronalazak opštih metoda za analizu stabilnosti sistema sa distribuiranim kašnjenjem.

Od radova koji se bave analizom distribuiranih sistema izdvajamo [143–148].

Primer. Posmatrajmo sistem sa distribuiranim kašnjenjem opisan modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_0 x(t) + \int_{-\tau}^0 x(t+h) \cos(h) dh + u(t) \\ y(t) &= x(t). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Funkcija prenosa datog sistema je

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 - a_0 s^2 + s \cos(\tau) e^{-s\tau} - a_0 - \sin(\tau) e^{-s\tau}}. \quad (2.33)$$

□

Metodi analize stabilnosti sistema sa vremenskim kašnjenjem

Iz literature izdvajamo nekoliko ranih radova koji se bave opštim problemom stabilnosti sistema sa vremenskim kašnjenjem [99, 128, 149–151], kao i rane radove koji se bave analizom sistema sa nešto specifičnijom formom [152, 153] i/ili teorijskim osnovama stabilnosti ovakvih sistema [154].

Radovi [155, 156] su posebno zanimljivi jer se bave „ τ -dekompozicijom” u užem smislu, zapažajući posebne geometrijske karakteristike SCS (*Stability Crossing Set*) retardiranih sistema. SCS čine sve parametarske tačke za koje sistem ima bar jedan pol na imaginarnoj osi. U opštem slučaju, postupak pronalaženja SCS naziva se D-dekompozicija. U slučaju da svi parametri sistema predstavljaju vremenska kašnjenja, postupak se zove τ -dekompozicija. Ovaj pristup je produbljen početkom 21. veka, rezultujući mnoštvom radova koji karakterišu SCS sistema sa vremenskim kašnjenjem [104, 157–164]. Pomenuti radovi uglavnom se bave nešto užom klasom retardiranih sistema, pošto su zasnovani na geometrijskim osobinama koje u opštem slučaju nisu prisutne kod svih sistema sa vremenskim kašnjenjem (npr. kod raznolike klase sistema sa distribuiranim kašnjenjem). Postoji nekoliko izuzetaka poput [144], koji pronalaze SCS pojedinih sistema sa distribuiranim kašnjenjem.

U literaturi koja se bavi analizom stabilnosti sistema često se pojavljuje pojam prečešljavanja frekvencija (engl. *frequency sweeping*). Ovaj izraz

se uopšteno koristi za uslove stabilnosti koji su iskazani u vidu nejednakosti koje moraju biti zadovoljene za pojedini skup (uglavnom nenegativnih) frekvencija. Prva grupa ovakvih metoda u kontekstu sistema sa vremenskim kašnjenjem pojavljuje se krajem 20. veka u radovima [133, 134, 165, 166], analizirajući stabilnost u zavisnosti od vremenskog kašnjenja, i/ili ispitujući da li takva zavisnost uopšte postoji. Počevši od 2013. godine, pojavljuje se nova familija metoda prečešljavanja frekvencija [98, 135, 167]. U osnovnom obliku, nove metode prečešljavanja frekvencija karakterišu stabilnost sistema u zavisnosti od jednog kašnjenja. Proširenje metoda omogućuje ispitivanje stabilnosti sistema za proizvoljnu parametarsku tačku u višedimenzionalnom prostoru parametara. Ovakvo proširenje postignuto je iterativnom primenom osnovnog metoda na pojedinačne parametre kašnjenja. Kao i u slučaju D-dekompozicije, postojeće metode prečešljavanja frekvencija uglavnom su ograničene na retardirane sisteme.

Metodi prikazani u okviru ove disertacije sadrže jednakosti koje moraju biti zadovoljene za skup nenegativnih frekvencija sistema. U tom pogledu, prikazani metodi mogu se smatrati metodima prečešljavanja frekvencija. Međutim, struktura samih jednakosti je umnogome drugačija od postojećih metoda u literaturi. Takođe, prikazani metodi su uniformno primenjivi na retardirane sisteme i sisteme sa distribuiranim kašnjenjem, dok su pod određenim uslovima primenjivi i na neutralne sisteme.

Pored pomenutih pristupa, navodimo i: rad [136] koji je ustanovio neizbežno visoku algoritamsku kompleksnost analize stabilnosti sistema sa vremenskim kašnjenjem; često citirane preglede postojećih metoda za analizu stabilnosti [168, 169]; metode koji aproksimiraju sisteme sa vremenskim kašnjenjem sistemima konačnih dimenzija [170]; numeričke metode analize stabilnosti [171]; radove koji utvrđuju specifične osobine stabilnosti retardiranih sistema [172].

Posebna sličnost može se povući između rezultata ove disertacije i rada [173]. Osnovna prednost metoda prikazanih u ovoj disertaciji sastoji se u njihovoj primenjivosti na znatno širi skup sistema (sa i bez vremenskih kašnjenja).

Radi kompletnosti, napominjemo da se stabilnost sistema sa vremenskim kašnjenjem može analizirati i pomoću Ljapunov-Krasovskii funkcionala [174–177]. Popularnost ovog pristupa ogleda se u njegovoj primenjivosti na široke klase dinamičkih sistema (uključujući i nelinearne sisteme), dok se mane pristupa ogledaju u tome što su dobijeni uslovi stabilnosti dovoljni, ali ne i potrebni (drugim rečima, dobijeni rezultati su konzervativni). Posebna pažnja ovom pristupu posvećena je u knjizi [100].

2.2.2 Frakcioni sistemi

Frakcioni račun predstavlja granu matematike koja dozvoljava izvode proizvoljnog realnog (ili čak kompleksnog) reda, time uopštavajući uobi-

čajenu operaciju diferenciranja. Na primer, frakcioni račun dopušta izvode stepena poput π , $\sqrt{2}$, i $\frac{2}{3}$. Postoji više načina na koji se frakcioni izvodi i integrali mogu definisati [178]. Osnovno svojstvo svih definicija koje su zaživele u praksi jeste da se u slučaju multih početnih uslova operator frakcionog diferenciranja reda α u Laplasovom domenu predstavlja sa s^α . U okviru disertacije ćemo se služiti ovom činjenicom, a za sve ostale osobine se oslanjamo na literaturu [178–181].

Napomena 5. Pored diferenciranja proizvoljnog realnog reda, frakcioni račun dopušta i diferenciranje kompleksnog reda [39, 182–185]. U okviru disertacije, ipak se ograničavamo na diferenciranje realnog reda. \square

Frakcioni dinamički sistemi sadrže diferenciranje po vremenu necelog stepena. Takvi modeli nalaze primenu u oblastima poput mehanike [186–188], elektrotehnike [75, 189, 190], termodinamike [56, 191], biologije [192–196], kao i u obradi signala [197, 198] i teoriji upravljanja [81, 83, 199, 200]. Razne primene frakcionih modela moguće je pronaći u [201, 202].

U opštem slučaju, funkcija prenosa frakcionih sistema je oblika

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{\sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} + 1}, \quad (2.34)$$

gde $\alpha_i \geq 0$ i $\beta_j \geq 0$ predstavljaju (u opštem slučaju necelo) stepene diferenciranja. Funkcija prenosa frakcionih sistema je, dakle, iracionalna, te su frakcioni sistemi beskonačnog reda [203, 204].

Ukoliko su svi stepeni diferenciranja celobrojni umnošci nekog broja $\nu > 0$, tada funkciju prenosa možemo zapisati u obliku

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta'_j \nu}}{\sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha'_i \nu} + 1}, \quad (2.35)$$

gde su α'_i i β'_j nenegativni celi brojevi. Takav frakcioni sistem zovemo sistemom sa proporcijalnim redom izvoda. U suprotnom, sistem je neproporcijalnog reda.

Uslov proporcionalnosti znatno olakšava matematičko rukovanje karakterističnim polinomom sistema, rezultujući mnogobrojnim kriterijumima stabilnosti za sisteme ovog tipa [205–210]. U slučaju da redovi izvoda nisu proporcijalni, analiza stabilnosti je složenija. Od primera navodimo [211–213].

Neki od standardnih metoda za analizu konačno dimenzionalnih linearnih sistema prošireni su na frakcione sisteme, poput geometrijskog mesta korena [214], Košijevog principa argumenta [171, 215] i Nikvistovog kriterijuma stabilnosti [213]. Postoji i zanimljiva grupa radova koja se bave analizom stabilnosti frakcionih sistema koji sadrže i vremenska kašnjenja [216–220]. Mnogi navedeni metodi primenjivi su isključivo na sisteme sa proporcijalnim redom izvoda.

Takođe, nekolicina radova pruža kriterijume stabilnosti za frakcione sisteme koji ispunjavaju specifične uslove [221–223], gde se uslovi uglavnom sastoje iz ograničenja dozvoljenih vrednosti redova izvoda. Mana ovakvih pristupa ogleda su u tome što nisu uniformno primenjivi na sve sisteme frakcionog tipa.

Navodimo i: radove koji formulišu dovoljne uslove za stabilnost frakcionih sistema putem Ljapunovljevih funkcija [74, 194, 224], radove koji se bave stabilizacijom i upravljanjem frakcionih sistema [222, 225, 226], preglede postojećih metoda za analizu stabilnosti frakcionih sistema [227].

Metodi prikazani u ovoj disertaciji predstavljaju direktno proširenje i uopštenje metoda predloženih u [46, 228].

2.2.3 Sistemi sa distribuiranim parametrima

Sistemi sa distribuiranim parametrima (ili sistemi sa raspodeljenim parametrima) su dinamički sistemi koji, pored vremena, sadrže bar još jednu nezavisnu promenljivu. Iako dodatna nezavisna promenljiva može predstavljati različite fizičke veličine, ona najčešće predstavlja prostornu koordinatu. Sisteme sa distribuiranim parametrima karakterišu parcijalne diferencijalne jednačine i modeli sa beskonačno dimenzija, dajući iracionalne funkcije prenosa.

Sistemi sa distribuiranim parametrima se često modeluju u Hilbertovim prostorima stanja [94], što je dovelo do raznih teorema o stabilnosti koje su analogne teoremama konačno-dimenzionalnih sistema [229]. Ovakav pristup blisko je povezan sa matematičkom analizom polugrupa [94, 230, 231]. Za razliku od modelovanja u Hilbertovom prostoru stanja, u okviru disertacije razmatramo sisteme sa distribuiranim parametrima modelovane funkcijama prenosa.

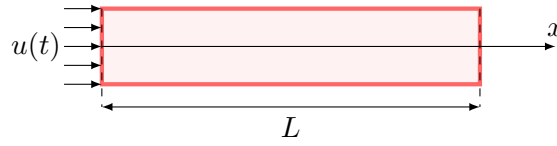
Sistemi sa distribuiranim parametrima se takođe susreću u literaturi koja se bavi upravljanjem i stabilizacijom sistema [232–236]. Takođe izdvajamo: primenu Nikvistovog kriterijuma stabilnosti [237]; bitne teorijske zaključke o stabilnosti distribuiranih sistema [238]; aproksimacije sistemima konačnog reda [239, 240]; opšte preglede postojećih rezultata [241–243].

Radi potpunosti, navodimo i formiranje dovoljnih uslova stabilnosti pomoću Ljapunov-Krasovskii funkcionala [244, 245], koji su u opštem slučaju primenjivi i na nelinearne sisteme sa distribuiranim parametrima.

Kako su sistemi sa distribuiranim parametrima raznoliki, u nastavku odeljka izdvajamo neke klase ovih sistema.

Toplotna jednačina

Jednačina toplote je fundamentalna parcijalna diferencijalna jednačina koja opisuje raspodelu toplote tokom vremena u datom fizičkom sistemu, igrajući bitnu ulogu u oblastima poput inženjerstva, fizike i matematike.

Slika 2.2: Zagrevanje jednog kraja štapa dužine L .

Jednačina se zasniva na primeni Furijeovog zakona, koji opisuje način na koji se toplota prenosi kroz tela [246]. Analiza stabilnosti sistema zasnovanih na toplotnoj jednačini može se pronaći u mnogim radovima, poput [247–253].

U najjednostavnijem jednodimenzionalnom obliku, jednačina toplote predstavlja relaciju

$$\frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} = k \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t}, \quad (2.36)$$

gde $\theta(x, t)$ predstavlja temperaturu u tački x i vremenu t , dok k predstavlja konstantu koja zavisi od fizičkih karakteristika sredine kroz koju se toplota provodi. Jednačina toplote se koristi za modelovanje različitih fizičkih pojava, uključujući provod toplote kroz čvrsta tela ili fluide. Jednačina ima širok spektar primena u raznim industrijama, poput projektovanja toplotnih razmenjivača, optimizacije potrošnje energije u zgradama i analize toplotnih procesa u elektroenergetskim postrojenjima.

Pokazaćemo da sistemi zasnovani na toplotnoj jednačini imaju iracionalne funkcije prenosa. Pretpostavimo da relacija (2.36) opisuje provod toplote kroz jednodimenzionalan štap dužine L , kao što je prikazano na slici 2.2. Štap se greje ulaznim toplotnim fluksom na levom kraju ($x = 0$), dajući granični uslov

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, 0) = u(t, 0). \quad (2.37)$$

Pretpostavimo da je štap toplotno izolovan po celoj dužini i na desnom kraju, odnosno da je temperatura štapa u tački $x = L$ jednaka ambijentalnoj temperaturi, te da nema razmene toplote između štapa i okoline. U tom slučaju, dobijamo dodatni granični uslov

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, L) = 0. \quad (2.38)$$

Upotrebom Laplasove transformacije i rešavanjem diferencijalne jednačine po x , dobijamo funkciju prenosa sistema

$$G(s) = \frac{\sinh((L-x)\sqrt{ks})}{\cosh(L\sqrt{ks})\sqrt{ks}}. \quad (2.39)$$

Funkcija prenosa se definiše kao odnos izlaznog i ulaznog signala u Laplasovom domenu, a predstavljeni model nema definisan izlazni signal. Umesto toga, u funkciji prenosa figuriše nezavisna prostorna promenljiva x . Dakle,

izlazni signal se može interpretirati kao funkcija temperature u zavisnosti od vremena, u odabranoj tački x :

$$y(t) = \theta(t, x). \quad (2.40)$$

Jednačina telegrafičara

Jednačina telegrafičara predstavlja par spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanje napona i struje kroz električne vodove. Jednačine je originalno izveo Oliver Hevisajd krajem 19. veka [254, 255], za potrebe modelovanja sistema za telegrafsku komunikaciju. U međuvremenu, jednačine su pronašle upotrebu u analizi raznovolikih sistema, poput električnih kola, komunikacionih linija i energetskih sistema. Analiza sistema zasnovanih na telegrafskim jednačinama može se pronaći u mnogim radovima, poput [256–259].

Jednačinu telegrafičara čine relacije

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) &= -H \frac{\partial}{\partial t} i(x, t) - Ri(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} i(x, t) &= -C \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) - Gv(x, t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

gde $v(t, x)$ predstavlja napon u trenutku t na prostornoj udaljenosti x , $i(t, x)$ predstavlja struju u trenutku t na prostornoj udaljenosti x , H predstavlja podužnu induktivnost voda, C predstavlja podužnu kapacitivnost voda, R predstavlja podužnu otpornost voda i G predstavlja podužnu provodnost voda.

Jednačine je takođe moguće transformisati u jednu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda koja sadrži samo jednu zavisnu promenljivu - ili struju, ili napon. Na primer, sledeća jednačina telegrafičara opisuje promenu napona u električnim vodovima, i ekvivalenta je paru jednačina (2.41)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = \left[HC \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (RC + GH) \frac{\partial}{\partial t} + GR \right] v(x, t), \quad (2.42)$$

Pretpostavimo da se vod napaja iz naponskog izvora oblika signala $u(t)$ na jednom kraju ($x = 0$), i da je vod beskonačne dužine. Ove pretpostavke proizvode granične uslove

$$\begin{aligned} v(0, t) &= u(t) \\ v(x = \infty, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Primenom Laplasove transformacije i rešavanjem diferencijalne jednačine dobijamo funkciju prenosa sistema

$$G(s) = e^{x\sqrt{(Cs+G)(Hs+R)}}, \quad (2.44)$$

koja određuje promenu napona na udaljenosti x tokom vremena, kao odziv na pobudu $u(t)$.

Talaska jednačina

Talaska jednačina je fundamentalna jednačina u fizici koja opisuje širenje talasa kroz datu sredinu. U najjednostavnijem obliku, talaska jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina koja opisuje ponašanje talasa u jednoj dimenziji. Jednačina ima primenu u oblastima poput akustike, elektromagnetike, seizmologije i dinamike fluida. Analiza sistema zasnovanih na jednačini talasa može se pronaći u [248, 260–262].

Talaska jednačina u jednoj dimenziji se može napisati kao:

$$\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \quad (2.45)$$

gde $v(x, t)$ predstavlja pomeranje talasa u tački x i vremenu t , a c određuje brzinu talasa. Levi deo jednačine opisuje ubrzanje talasa, dok desni deo opisuje njegovu zakrivljenost.

Posmatrajmo širenje talasa kroz jednodimenzionalnu sredinu fiksne dužine $x \in [0, L]$. Pretpostavimo ulazni poremećaj na jednom kraju sredine $x = 0$

$$v(t, 0) = u(t), \quad (2.46)$$

i invarijantnost poremećaja na drugom kraju $x = L$

$$v(t, L) = 0. \quad (2.47)$$

Na primer, ulazni signal može predstavljati izvor zvuka na jednom kraju vazdušne cevi, dok je drugi kraj cevi zvučno izolovan.

Funkcija prenosa datog sistema je

$$G(s) = \frac{e^{\frac{2sx}{c}} - e^{\frac{2Ls}{c}}}{e^{\frac{sx}{c}} - e^{\frac{s(2L+x)}{c}}} \quad (2.48)$$

Slično prethodnim primerima, jednačina opisuje odziv sistema na zadati ulazni signal, u proizvoljnoj tački $x \in [0, L]$.

2.2.4 D-dekompozicija

U ovom odeljku razmatramo familiju metoda koja ima dodirnih tačaka sa metodima predloženim u okviru disertacije, a koja nije vezana ni ja jednu specifičnu klasu BDS.

Postupak se naziva *D-dekompozicijom*, a sastoji se od pronalaska skupa promene stabilnosti (*Stability Crossing Set*, SCS) sistema. Ovakav skup definisan je kao skup svih tačaka u prostoru parametara za koje sistem sadrži bar jedan pol na imaginarnoj osi. Uz određene pretpostavke, sistem može promeniti broj nestabilnih polova jedino ukoliko kontinualnom promenom parametara bar jedan pol pređe iz leve kompleksne poluravni u desnu (ili

obratno). Prilikom ovakvog prelaska polova iz jedne poluravni u drugu, mora postojati vrednost parametara za koju sistem poseduje polove na samoj imaginarnoj osi. Dakle, SCS deli prostor parametara na oblasti invarijantne stabilnosti, pružajući uvid u ponašanje sistema u zavisnosti od vrednosti njegovih parametara.

Napomena 6. U slučaju da svi parametri predstavljaju vremenska kašnjenja, u literaturi se umesto naziva *D-dekompozicija* koristi termin τ -*dekompozicija*. \square

Primeri ranih radova koji se bave D-dekompozicijom uključuju [263–266]. Počevši od sredine 20. veka, ovom problemu se posvećuje veća pažnja: u opštoj analizi sistema [155, 267, 268], u oblasti upravljanja [161, 269–272], analizi nelinearnih sistema [273, 274], analizi sistema sa vremenskim kašnjenjem [144, 157–159, 162–164], analizi frakcionih sistema [275, 276].

Metodi izloženi u ovoj disertaciji delimično rešavaju problem D-dekompozicije. Poglavlje 5 prikazuje metod koji posebno podseća na D-dekompoziciju; počevši od zadate tačke u prostoru parametara, prikazani metod pronalazi celu oblast invarijantne stabilnosti koja sadrži datu tačku. Za razliku od opšteg problema D-dekompozicije, prikazani metodi ne vrše potpunu podelu prostora parametara na oblasti invarijantne stabilnosti. Umesto toga, prikazani metodi pronalaze jednu takvu oblast, počevši od zadate tačke iz unutrašnjosti te oblasti.

Slično tome, poglavlje 4 prikazuje metod pronalaska segmenta invarijante stabilnosti duž zadate krive u prostoru parametara sistema. U tom pogledu, metod se bavi jednodimenzionalnim problemom D-dekompozicije duž date krive.

2.3 Doprinos disertacije u odnosu na postojeću literaturu

U postojećoj literaturi analize stabilnosti BDS moguće je zapaziti sledeće:

1. Postojeći metodi uglavnom su primenjivi na uske klase BDS. Na primer: na retardirane sisteme [135, 158, 163, 167], na frakcione sisteme [205, 206, 215, 277], na frakcione sisteme sa proporcijalnim redom izvoda [208, 209, 211], na sisteme koji uključuju toplotnu jednačinu [249, 250, 252], itd.
2. Postojeći metodi uglavnom daju uslove stabilnosti koji su dovoljni, ali ne i potrebni [160, 165, 175, 224, 257, 278, 279]. Drugim rečima, postojeći metodi daju konzervativne rezultate. Ova pojava je posebno primetna kod metoda primenjivih na nešto šire klase BDS.

Ova disertacija predstavlja metode koji istovremeno prevazilaze oba navedena nedostatka:

1. Metodi su primenjivi na znatno širu klasu BDS u odnosu na postojeće pristupe; precizna klasa dopuštenih sistema određena je pretpostavkama izloženim u poglavlju 3. Široka klasa dopuštenih sistema čini predstavljene analitičke alate uniformnim, što im daje posebnu vrednost.
2. Predstavljene metode daju rezultate koji nisu konzervativni. Preciznije rečeno, primena metoda rezultuje kompletnim oblastima u prostoru parametara u kojima je broj nestabilnih polova sistema invarijantan, dok same oblasti mogu biti proizvoljnog oblika (uključujući i nelinearne i nekonveksne oblike). Samim tim, predstavljene alate daju dubok uvid u stabilnost sistema u zavisnosti od njegovih parametara.

Glava 3

Postavka problema

Ovo poglavlje posvećeno je definisanju problema koji se proučava u okviru disertacije. Poglavlje započinje definisanjem pojma karakteristične funkcije sistema u odeljku 3.1. Potom dajemo definiciju oblasti invarijantne stabilnosti u odeljku 3.2. U odeljku 3.3 formulišemo pretpostavke koje sistem mora da zadovoljava kako bi predloženi metodi bili primenjivi. U odeljku 3.4 dajemo kratak pregled metoda izloženih u predstojećim poglavljima.

3.1 Karakteristična funkcija sistema

Posmatrajmo kontinualan, vremenski-invarijantan sistem opisan funkcijom prenosa

$$G(s, \boldsymbol{\eta}), \quad (3.1)$$

gde $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_n] \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ predstavlja vektor realnih parametara u okviru datog domena \mathcal{D} . Disertacija se bavi ispitivanjem stabilnosti sistema G u zavisnosti of parametra $\boldsymbol{\eta}$.

U slučaju racionalnih funkcija prenosa, pojam karakteristične jednačine (tačnije, karakterističnog polinoma) igra ključnu ulogu u analizi stabilnosti sistema. Funkcija prenosa takvih sistema je oblika

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad (3.2)$$

pri čemu se uglavnom ograničavamo na funkcije prenosa za koje važi $n > m$. Karakteristični polinom funkcije prenosa (3.2) je njen imenilac

$$f(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j, \quad (3.3)$$

čije nule odgovaraju polovima polazne funkcije prenosa. Stabilnost sistema u potpunosti je određena položajem nula karakterističnog polinoma. Razlog tome je što funkcija prenosa racionalnih sistema nema drugih singularnih tačaka osim polova, kojih ima konačno mnogo i koji u potpunosti odgovaraju nulama karakterističnog polinoma.

U slučaju iracionalnih funkcija prenosa, situacija je složenija, jer se pojam karakterističnog polinoma ne može definisati na jednoznačan način kao u slučaju racionalnih funkcija prenosa. Štaviše, sama upotreba pojma *polinom* je neodgovarajuća, jer iracionalne funkcije prenosa sadrže izraze koji su složeniji od polinoma. Na primer, takve funkcije prenosa mogu sadržati članove poput e^{-s} , \sqrt{s} , $\sinh(\sqrt{s})$, $s^{\sqrt{2}}$. Shodno tome, primerenije je koristiti opštiji izraz *karakteristična funkcija*. Posledica iracionalnosti je što polazna funkcija prenosa može sadržati tačke grananja i/ili esencijalne singularitete, kao i broj polova koji nije konačan.

Ukoliko bismo karakterističnu funkciju definisali kao imenilac funkcije prenosa, nailazimo na nekoliko problema. Na primer, posmatrajmo funkciju prenosa

$$G(s) = \frac{(s-2)\sqrt{s-1}}{(s+1)(1+e^{-2s})}. \quad (3.4)$$

Uzimanjem imenioca od $G(s)$, dobijamo karakterističnu funkciju

$$f(s) = (s+1)(1+e^{-2s}) \quad (3.5)$$

gde odmah uočavamo problem. Naime, sistem (3.4) je nestabilan usled tačke grananja u brojiocu, što nije obuhvaćeno funkcijom (3.5). Pošto nam je polazni cilj uvođenja karakteristične funkcije izolacija onih delova funkcije prenosa koji utiču na stabilnost sistema, ovakva definicija je očigledno neodgovarajuća. Zaključujemo da karakterističnu funkciju nije moguće definisati prosto kao „imenilac” funkcije prenosa, odnosno da koncepti brojioca i imenioca nisu odgovarajući u ovom kontekstu.

Definicija karakteristične funkcije koju pružamo u nastavku ima sledeće ciljeve:

1. Kao i u slučaju racionalnih funkcija prenosa, karakteristična funkcija sadrži sve elemente funkcije prenosa koji utiču na stabilnost sistema.
2. Kao i u slučaju racionalnih funkcija prenosa, karakteristična funkcija omogućava isključivanje elemenata funkcije prenosa koji ne utiču na stabilnost.
3. Karakteristična funkcija predstavlja uopštenje karakterističnog polinoma. Drugim rečima, primena definicije na racionalne funkcije prenosa rezultuje opšteprihvaćenom definicijom karakterističnog polinoma.

Definicija 16. Neka je funkcija prenosa linearnog stacionarnog dinamičkog sistema označena kao $G(s, \boldsymbol{\eta})$, gde $\boldsymbol{\eta}$ predstavlja vektor realnih parametara koji pripadaju kompaktnom povezanom skupu $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$.

Funkcija $f(s, \boldsymbol{\eta})$ je karakteristična funkcija date funkcije prenosa $G(s, \boldsymbol{\eta})$ ako za svako $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$:

- (1) f ne sadrži polove.
- (2) f sadrži tačke grananja i/ili esencijalne singularitete svuda gde G sadrži tačke grananja i/ili esencijalne singularitete, i f ne uvodi dodatne tačke grananja i/ili esencijalne singularitete koji ne postoje u G .
- (3) Sve konačne nule funkcije f odgovaraju polovima funkcije G po lokaciji i višestrukosti.

□

Osobina (1) uklanja elemente funkcije prenosa koji ne utiču na stabilnost, a koji bi komplikovali karakterističnu funkciju uvođenjem dodatnih singulariteta. Pošto esencijalni singulariteti i tačke grananja utiču na stabilnost sistema, osobina (2) garantuje da će ove vrste singulariteta biti održane u karakterističnoj funkciji. Pošto položaj polova funkcije prenosa utiče na stabilnost, osobina (3) garantuje da će polovi biti očuvani u karakterističnoj funkciji (u formi njenih nula).

Primer. Neka je dat sistem opisan funkcijom prenosa

$$G(s, \eta) = \frac{\sqrt{s - \eta}(s + 2)e^{-\eta s}}{s^2 + s^\eta + 1} \quad (3.6)$$

za $\eta \in [0, 1]$. Jedan primer karakteristične funkcije sistema G je funkcija

$$f(s, \eta) = \frac{s^2 + s^\eta + 1}{\sqrt{s - \eta}}. \quad (3.7)$$

□

Postoji više validnih karakterističnih funkcija f za bilo koju datu funkciju prenosa G . Sa stanovišta postupaka koje predlažemo, svaka od mogućih karakterističnih funkcija formiranih za dato G , ekvivalentna je. Uglavnom je najpogodnije formirati najjednostavniju moguću karakterističnu funkciju zarad lakše analize. Naravno, važi i obratno - svaka data karakteristična funkcija f validna je za više funkcija prenosa G .

Predložena metodologija se direktno primenjuje na karakteristične funkcije. Samim tim, rezultati analize stabilnosti primenjene na f važe za sve funkcije prenosa G za koje f zadovoljava Definiciju 16.

Napomena 7. Definicija 16 predstavlja jedan mogući način da se definiše karakteristična funkcija sistema, tako da ispunjava ciljeve navedene u ovom odeljku. Međutim, karakterističnu funkciju moguće je definisati i na druge načine. Na primer, karakteristična funkcija $f(s, \boldsymbol{\eta})$ sistema $G(s, \boldsymbol{\eta})$ može se

definisati kao

$$f(s, \boldsymbol{\eta}) = G^{-1}(s, \boldsymbol{\eta}) Q(s, \boldsymbol{\eta}), \quad (3.8)$$

gde $Q(s, \boldsymbol{\eta})$ predstavlja analitičku funkciju u $\overline{\mathbb{C}^+}$. \square

3.2 Oblast invarijantne stabilnosti

Stabilnost sistema je usko povezana sa položajem nula karakteristične funkcije. Radi preglednosti, uvodimo notaciju $NU_f(\boldsymbol{\eta})$ kojom označavamo broj nula karakteristične funkcije f sa nenegativnim realnim delom za datu vrednost parametra $\boldsymbol{\eta}$, ubrajaajući i višestrukost tih nula.

Osnovni cilj disertacije je pronalazak oblasti u prostoru parametara \mathcal{D} unutar koje je broj nestabilnih polova sistema invarijantan.

Definicija 17. Posmatrajmo karakterističnu funkciju f i datu vrednost parametra $\boldsymbol{\eta}^0$. Skup svih vrednosti parametra $\boldsymbol{\eta}$ za koje je $NU_f(\boldsymbol{\eta})$ invarijantno u odnosu na $NU_f(\boldsymbol{\eta}^0)$ označićemo kao

$$\mathcal{M}_f^\#(\boldsymbol{\eta}^0) = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D} \mid NU_f(\boldsymbol{\eta}) = NU_f(\boldsymbol{\eta}^0)\}. \quad (3.9)$$

Skup $\mathcal{M}_f^\#(\boldsymbol{\eta}^0)$ ne mora činiti jednu povezanu oblast u prostoru parametara. Sa druge strane, cilj disertacije je upravo pronalazak jedne ovakve oblasti koja je povezana. Zbog toga uvodimo pojam maksimalne povezane oblasti invarijantnog broja nestabilnih polova $\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$, koju definišemo kao skup tačaka koji zadovoljava sledeće uslove:

1. $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{M}_f^\#(\boldsymbol{\eta}^0) \subset \mathcal{D}$
2. Postoji putanja \mathcal{P} koja spaja $\boldsymbol{\eta}^0$ sa $\boldsymbol{\eta}$, takva da $\mathcal{P} \subset \text{int}(\mathcal{M}_f^\#(\boldsymbol{\eta}^0))$.

\square

Disertacija pruža metod pronalaska maksimalne oblasti invarijantnog broja nestabilnih polova, počevši od date vrednosti parametra $\boldsymbol{\eta}^0$. Nasuprot tome, disertacija se ne bavi direktnim određivanjem samog broja nestabilnih polova ni za jednu oblast, kao ni za jednu vrednost parametra $\boldsymbol{\eta}$. U tu svrhu moguće je primeniti postojeće metode poput Košijevog principa argumenta.

Disertacija takođe prikazuje metod pronalaska maksimalnog segmenta krive unutar prostora parametara, duž kog je broj nestabilnih polova invarijantan. U zavisnosti od specifičnosti problema koji se rešava, ovakav pristup može biti pogodniji od traženja oblasti invarijantne stabilnosti.

Napomena 8. Skup je u nekim slučajevima otvoren, dok u nekim slučajevima nije otvoren. Na primer, za

$$f(s, \eta) = s + \eta, \quad \eta \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \quad (3.10)$$

lako je pokazati da $NU_f(1) = (0, \infty)$ predstavlja otvoren skup, dok skup $NU_f(-1) = (-\infty, 0]$ nije otvoren. \square

U okviru disertacije često analiziramo invarijantnost broja nestabilnih polova za neki skup parametarskih tačaka. Radi jednostavnosti, uvešćemo pojam *invarijantne stabilnosti*. Dve parametarske tačke $\boldsymbol{\eta}^1$ i $\boldsymbol{\eta}^2$ su invarijantne po pitanju stabilnosti ukoliko $NU_f(\boldsymbol{\eta}^1) = NU_f(\boldsymbol{\eta}^2)$. Takođe, skup parametarskih tačaka $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ je invarijantan po pitanju stabilnosti ukoliko je $NU_f(\boldsymbol{\eta})$ invarijantno za svako $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{A}$. Ovakav skup tačaka nazivamo oblast invarijantne stabilnosti. Iako uglavnom razmatramo oblasti invarijantne stabilnosti koje su maksimalne i/ili povezane, u tekstu izbegavamo upotrebu termina „maksimalna oblast” i „povezana oblast” ukoliko je to iz konteksta očigledno.

3.3 Pretpostavke

Prikazani metodi primenjivi su na karakteristične funkcije koje zadovoljavaju pretpostavke definisane u ovom odeljku.

3.3.1 Analitičnost karakteristične funkcije

Analitičke funkcije se u kompleksnoj analizi uglavnom definišu nad otvorenim skupom (vidi Dodatak). Međutim, da bismo formulisali prvu pretpostavku, potrebno je definisati analitičke funkcije nad zatvorenim skupom.

Definicija 18. Kompleksna funkcija f je analitička na zatvorenom skupu $\overline{\mathcal{Y}}$ ako i samo ako postoji otvoren skup \mathcal{Y}^* takav da je f analitička na \mathcal{Y}^* i važi $\overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}^*$. \square

Uzimajući u obzir prethodnu definiciju, možemo definisati prvu pretpostavku.

Pretpostavka 1. Postoji konačan skup $\mathcal{Z}^f \subset \mathbb{R}$, nezavisan od \mathcal{D} , takav da je preslikavanje $s \mapsto f(s, \boldsymbol{\eta})$ analitičko nad $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus j\mathcal{Z}^f$ za svako $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$. \square

Metodi razvijeni u okviru disertacije zasnovani su na određivanju broja nula karakteristične funkcije u desnoj kompleksnoj poluravni primenom Rošeove teoreme. Da bi primena Rošeove teoreme rezultovala brojem takvih nula, neophodno je da karakteristična funkcija ne poseduje singularitete u zatvorenoj desnoj kompleksnoj poluravni.

Pretpostavka 1 ne predstavlja ozbiljno ograničenje za sisteme koji poseduju singularitete u \mathbb{C}^+ , jer su takvi sistemi svakako nestabilni po svim uobičajenim definicijama stabilnosti. Na primer, sistem

$$f(s, \boldsymbol{\eta}) = \sqrt{s-1}(s^2 + \eta_1 s + e^{-\eta_2 s}) \quad (3.11)$$

ne ispunjava Pretpostavku 1, a nestabilan je za svaku vrednost $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$.

Za sisteme koji poseduju singularitete na imaginarnoj osi, situacija je složenija. Mnogi sistemi imaju čisto imaginarne singularitete, a stabilni su.

Na primer, sistem

$$f(s, \boldsymbol{\eta}) = s^2 + \eta_1 s^{\eta_2} + 1, \quad \mathcal{D} = [0, 2) \times [0, 2) \quad (3.12)$$

je očevidno stabilan za neke vrednosti $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$, iako poseduje tačku grananja u $s = 0$. Zbog ovakvih sistema, Pretpostavka 1 dozvoljava singularitete na imaginarnoj osi. Postojanje čisto imaginarnih singulariteta predstavlja izazov prilikom konstrukcije konture nad kojom se primenjuje Rošeova teorema, kao što će biti prikazano unutar Pretpostavke 5 i centralnih teorema i dokaza disertacije.

U okviru metoda prikazanih u narednim poglavljima, neke operacije potrebno je primeniti na skup svih tačaka nenegativnog dela imaginarne ose, u kojima je karakteristična funkcija analitička. U tu svrhu, definišemo skup Ξ^f .

Definicija 19. Skup svih nenegativnih vrednosti ω koje odgovaraju tačkama na imaginarnoj osi $s = j\omega$ u kojima je karakteristična funkcija f analitička za svako $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$ označićemo kao

$$\Xi^f = \left\{ \omega \geq 0 \mid f \text{ je analitička u } s = j\omega, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D} \right\}. \quad (3.13)$$

□

Napomena 9. Skup Ξ^f predstavlja sve nenegativne frekvencije ω za koje je f analitička, dok \mathcal{Z}^f predstavlja sve (pozitivne ili negativne) frekvencije ω za koje f nije analitička. Uz upotrebu notacije $-\Xi^f = \{-\omega : \omega \in \Xi^f\}$, važi

$$-\Xi^f \cup \Xi^f \cup \mathcal{Z}^f = \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Notacija \mathcal{Z}^f obuhvata i pozitivne i negativne frekvencije, kako bi formiranje kontura u nastavku odeljka bilo kompletno. Notacija Ξ^f isključuje negativne frekvencije jer je, usled simetrije karakteristične funkcije f , za rešavanje centralnih jednakosti dovoljno uzimati u obzir samo nenegativne frekvencije. □

3.3.2 Ograničenost karakteristične funkcije

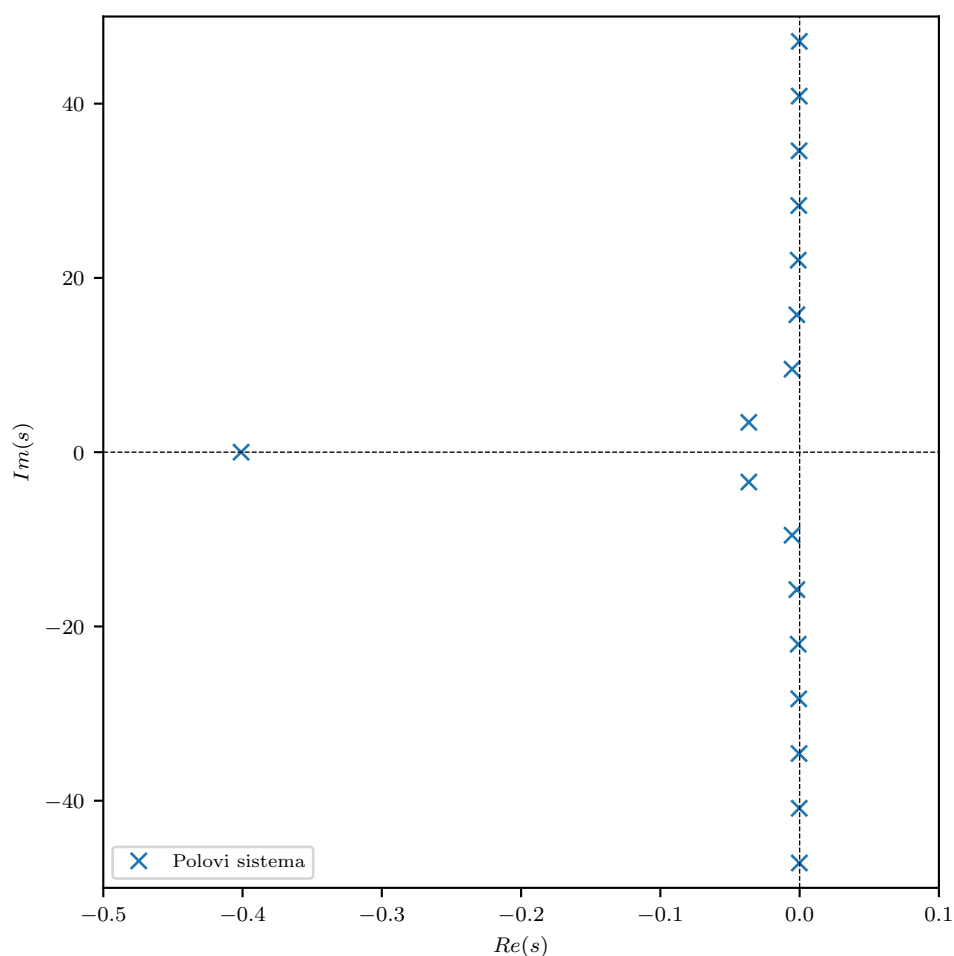
Pretpostavka 2.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |f(j\omega, \boldsymbol{\eta})|^{-1} < \infty, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}. \quad (3.15)$$

□

Pretpostavka 2 nije neophodna u formalnom smislu, pošto teoreme izložene u okviru disertacije važe i u slučaju da pretpostavka nije zadovoljena. Međutim, sistemi koji ne zadovoljavaju Pretpostavku 2 uglavnom nisu stabilni po uobičajenim definicijama stabilnosti, bez obzira na broj polova u \mathbb{C}^+ . Ova činjenica, donekle neintuitivna, ilustrovana je sistemom

$$f(s) = s + 1 + se^{-s}, \quad (3.16)$$



Slika 3.1: Prikaz podskupa polova sistema (3.16)

koji ne ispunjava Pretpostavku 2, a koji nije H^∞ stabilan iako njegova karakteristična funkcija nema nijednu nulu u $\overline{\mathbb{C}^+}$ (odnosno sistem ne poseduje polove u $\overline{\mathbb{C}^+}$). Podskup polova sistema 3.16 prikazan je na slici 3.1. Sistem poseduje beskonačno polova, čiji realni delovi su negativni, ali bliski nuli. Usled ovoga, funkcija prenosa sistema nije ograničena na imaginarnoj osi (za $s = j\omega$), što sistem čini nestabilnim u H_∞ smislu. Za detaljniju analizu sistema (3.16), pogledati [218].

Dakle, iako nije neophodna za dokaze centralnih teorema, Pretpostavka 2 ojačava vezu između rezultata primene izloženih metoda i uobičajenih definicija stabilnosti. Naravno, sistemi koji krše ovu pretpostavku nisu uobičajeni i/ili nisu praktični (na primer, nekauzalni sistemi).

3.3.3 Diferencijabilnost karakteristične funkcije

Pretpostavka 3. Funkcija $\eta \mapsto f(s, \eta)$ je neprekidno diferencijabilna nad \mathcal{D} za svako $s \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus j\mathcal{Z}^f$. \square

Pošto se prikazani metodi zasnivaju na analizi priraštaja karakteristične funkcije prilikom malih promena parametara η , karakteristična funkcija mora biti dovoljno glatka. Na primer, dokaz Teoreme 3 oslanja se na fundamentalnu teoremu analize, koju nije moguće primeniti ukoliko funkcija nije diferencijabilna.

Naravno, tačke η u kojima funkcija nije diferencijabilna podrazumevaju velike promene ponašanja sistema, otežavajući analizu stabilnosti. U ovom slučaju, metodi bi mogli primenjeni na oblasti koje isključuju nediferencijabilne tačke, ili bi parametarski prostor mogao biti izdvojen na više podprostora u okviru kojih je Pretpostavka 3 zadovoljena. Na primer, stabilnost sistema

$$f(s, \eta) = s + |\eta_1| + e^{-\eta_2 s}, \quad \mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (3.17)$$

se može analizirati prethodnim partitionisanjem parametarskog prostora \mathcal{D} na podprostore $\mathcal{D}_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^+$ i $\mathcal{D}_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}^+$.

3.3.4 Gradijent karakteristične funkcije

Pretpostavka 4. Za svako $\eta, \eta' \in \mathcal{D}$ i za neko $p \geq 1$, važi

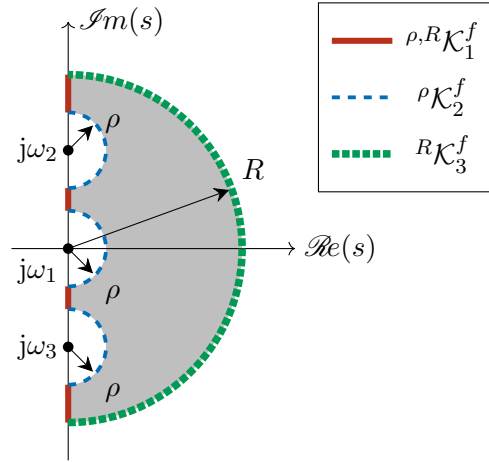
$$\inf_{\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}^f} \frac{|f(j\omega, \eta)|}{\|\nabla f(j\omega, \eta')\|_p} = 0 \Rightarrow \inf_{\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}^f} |f(j\omega, \eta)| = 0. \quad (3.18)$$

\square

U centralnim teoremama disertacije se proverava da li je odnos karakteristične funkcije i njenog gradijenta na imaginarnoj osi jednak nuli. Ukoliko jeste, smatramo da je vrednost same karakteristične funkcije jednaka nuli. Ovaj zaključak je tačan jedino ukoliko važi Pretpostavka 4. U suprotnom, moguće je da odnos funkcije i njenog gradijenta teži nuli usled „dovoljno velikog” gradijenta, kao što ilustruje primer

$$f(s, \eta) = s^2 e^{-\eta s} + 1, \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}^+. \quad (3.19)$$

Intuitivno posmatrano, Pretpostavka 4 važi za sisteme u kojima, za velike vrednosti modula Laplasove promenljive, vrednost karakteristične funkcije ne zavisi od η . Sistemi sa neutralnim kašnjenjem, kao što (3.19) ilustruje, predstavljaju klasu sistema koja krši ovu pretpostavku. U poglavlju 6 izloženi su načini da se ova pretpostavka ublaži.

Slika 3.2: Grafički prikaz konture $\rho, R\mathcal{K}^f$

3.3.5 Ponašanje funkcije na glatkim delovima konture

Da bismo formulisali poslednju pretpostavku, definišimo pomoćne vrednosti

$$R_*^f = \max \left\{ |\omega^*| : \omega^* \in \mathcal{Z}^f \right\},$$

$$\rho_*^f = \frac{1}{2} \min \left\{ |\omega_i^* - \omega_j^*| : \omega_i^*, \omega_j^* \in \mathcal{Z}^f, \omega_i^* \neq \omega_j^* \right\}.$$

Drugim rečima, R_*^f predstavlja apsolutnu vrednost najvećeg singulariteta funkcije f na imaginarnoj osi, dok ρ_*^f predstavlja polovinu najmanje udaljenosti između bilo koja dva singulariteta na imaginarnoj osi. Uzimajući neko $0 < \rho < \rho_*^f$ i $R > R_*^f + \rho_*^f$, definišimo skupove

$$\begin{aligned} \rho, R\mathcal{K}_1^f &= \{j\omega : |\omega| < R\} \setminus \bigcup_{\omega^* \in \mathcal{Z}^f} \{j\omega : |\omega - \omega^*| < \rho\} \\ \rho\mathcal{K}_2^f &= \bigcup_{\omega^* \in \mathcal{Z}^f} \left\{ \omega^* + \rho e^{j\varphi} : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ R\mathcal{K}_3^f &= \left\{ R e^{j\varphi} : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Unija ovih skupova $\rho, R\mathcal{K}^f = \rho, R\mathcal{K}_1^f \cup \rho\mathcal{K}_2^f \cup R\mathcal{K}_3^f$ predstavlja konturu koja u celosti leži u zatvorenoj desnoj kompleksnoj poluravnini. Kada ρ teži nuli i R teži beskonačnosti, unutrašnjost konture obuhvata celu otvorenu desnu kompleksnu poluravan, dok deo same konture leži na imaginarnoj osi, isključujući singularne tačke na imaginarnoj osi. Kontura $\rho, R\mathcal{K}^f$ je prikazana na Slici 3.2.

Za date skupove $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ i $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, karakterističnu funkciju f , broj $1 \leq p \leq \infty$ i parametar $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{B}$, definišimo

$${}_p B_{\boldsymbol{\eta}}^f(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{s \in \mathcal{A}} \frac{|f(s, \boldsymbol{\eta})|}{\sup_{\boldsymbol{\eta}' \in \mathcal{B}} \|\nabla f(s, \boldsymbol{\eta}')\|_p}. \quad (3.20)$$

Uz uvedenu notaciju i definicije, spremni smo da formulišemo poslednju pretpostavku.

Pretpostavka 5. Za karakterističnu funkciju f važi

$$\inf_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} {}_1 B_{\boldsymbol{\eta}}^f(\rho \mathcal{K}_2^f \cup R \mathcal{K}_3^f, \mathcal{D}) = \zeta^f,$$

gde $\zeta^f \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. □

Dakle, izloženi metodi se zasnivaju na pretpostavci da je odnos karakteristične funkcije i njenog gradijenta striktno veći od nekog pozitivnog broja ζ^f na glatkim delovima konture. Ova pretpostavka ograničava analizu na holomorfne delove imaginarne ose, pojednostavljujući matematički račun.

Karakterističan primer sistema koji krše Pretpostavku 5 predstavljaju sistemi sa neutralnim kašnjenjem, poput (3.19).

3.4 Predloženi metodi

Predloženi metodi inspirisani su postupkom koji je predložen u radu [46] za analizu stabilnosti frakcionih sistema usled promene reda diferenciranja. Dati metodi zasnivaju se na fundamentalnoj teoremi matematičke analize i Rošeovoj teoremi iz oblasti kompleksne analize. U zavisnosti od geometrije prostora parametara, metodi se mogu primenjivati na dva različita načina: kao analiza stabilnosti duž glatke krive u prostoru parametara, ili kao analiza stabilnosti u čitavoj parametarskoj podoblasti. Oba postupka detaljno su ilustrovana u poglavljima 4 i 5.

Prednost metoda koji analizira stabilnost duž krive ogleda se u tome što je numerički manje zahtevan, kao i u tome što njegova algoritamska kompleksnost ne zavisi od dimenzionalnosti prostora parametara. Ovo je naročito važno naglasiti s obzirom da veliki broj postupaka predloženih u literaturi postaje izuzetno složen kada je broj parametara velik.

Prednost metoda koji analizira stabilnost u oblasti leži u tome što jednovremeno pokriva kompletnu oblast, po ceni povećane numeričke kompleksnosti.

Glava 4

Stabilnost duž krive u prostoru parametara

U okviru ovog poglavlja predstavljen je metod za pronalaženje segmenata glatke krive u prostoru parametara, duž kog je broj nestabilnih polova sistema invarijantan.

4.1 Kriva u prostoru parametara

Posmatrajmo neprekidnu diferencijabilnu krivu u prostoru parametara $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, opisanu kao

$$\boldsymbol{\eta} : \Omega \rightarrow \mathcal{D}, \quad \Omega = [\theta_{\min}, \theta_{\max}) \subset \mathbb{R} \quad (4.1)$$

gde je $-\infty \leq \theta_{\min} < \theta_{\max} \leq +\infty$ i

$$\left| \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta} \right| \leq 1 \quad (4.2)$$

za svako η_i , $i = 1, \dots, n$. U okviru ovog poglavlja, razmatramo samo parametre koji pripadaju odabranoj krivoj. Skup svih takvih parametara označićemo kao

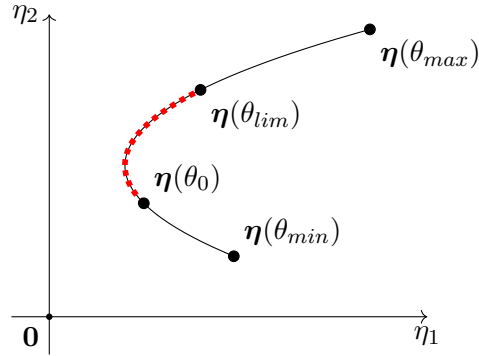
$$\mathcal{N} = \left\{ \boldsymbol{\eta}(\theta) \mid \forall \theta \in \Omega \right\}. \quad (4.3)$$

Radi preglednosti, u ovom poglavlju ćemo karakterističnu funkciju obeležavati kao

$$f(s, \boldsymbol{\eta}(\theta)) \equiv f(s, \theta). \quad (4.4)$$

Odaberimo početnu vrednost parametra $\boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{N}$, i njoj odgovarajuću vrednost θ_0 , tako da $\boldsymbol{\eta}(\theta_0) = \boldsymbol{\eta}^0$. U opštem slučaju, može postojati više različitih vrednosti θ_0 koje ispunjavaju ovaj uslov. Za dato $\theta' \in \Omega$, $\theta' > \theta_0$, kažemo da θ_0 i θ' pripadaju istom segmentu invarijantne stabilnosti ako i samo ako

$$NU_f(\boldsymbol{\eta}(\theta_0)) = NU_f(\boldsymbol{\eta}(\theta')), \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta']. \quad (4.5)$$



Slika 4.1: Grafički prikaz primera krive (4.1)

Uvodeći $\mathbb{T}(\theta_0) \subset \Omega$ kao skup svih vrednosti parametra θ koje pripadaju istom segmentu invarijantne stabilnosti kao i θ_0 , konačno definišemo gornju granicu segmenta invarijantne stabilnosti kao

$$\theta_{lim} = \sup \mathbb{T}(\theta_0) . \quad (4.6)$$

Uvođenje krive parametrizovane pomoću θ transformiše višedimenzionalan problem analize stabilnosti za $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$ u jednodimenzionalan problem traženja gornje granice invarijantne stabilnosti duž krive za $\theta \in \Omega$. Dakle, problem se svodi na pronalazak vrednosti θ_{lim} za datu krivu (4.1) i početnu vrednost θ_0 . Grafički prikaz primera krive (4.1) dat je na Slici 4.1. Vrednosti θ_{min} i θ_{max} određuju početne i krajnje tačke krive, θ_0 predstavlja odabranu početnu tačku, a θ_{lim} predstavlja nepoznatu gornju granicu invarijantne stabilnosti koju treba odrediti. Nepoznati segment invarijantne stabilnosti je segment krive između tačaka $\boldsymbol{\eta}(\theta_0)$ i $\boldsymbol{\eta}(\theta_{lim})$.

Odabir krive zavisi od problema koji se rešava, i ne utiče na sam metod izuzev složenosti matematičkog računa. Na primer, moguće je odabrati krivu koja određuje radnu putanju projektovanog upravljačkog sistema. Kao što će biti prikazano u primeru 1 i ilustrovano na Slici 4.2, najjednostavnija takva kriva predstavlja polupravu u prostoru parametara.

Rešenje ovako postavljenog problema se sastoji iz dva koraka. U odeljku 4.2 pronalazimo konzervativno rešenje, odnosno dovoljne uslove invarijantne stabilnosti. Potom, u odeljku 4.3 ovaj postupak primenjujemo iterativno, čime pronalazimo θ_{lim} .

4.2 Dovoljni uslovi invarijantne stabilnosti

U ovom odeljku predstavljen je metod koji za datu krivu (4.1) i početnu tačku θ_0 pronalazi „skok“ Δ takav da su sve tačke $\boldsymbol{\eta}(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \Delta]$ invarijantne po pitanju stabilnosti. Dobijeni skok je konzervativan; formalno posmatrano, $\theta_0 + \Delta < \theta_{lim}$. Bez obzira na konzervativnost dobijenog

segmenta invarijante stabilnosti, prikazani postupak je bitan jer predstavlja prvi korak ka traženju krajnje vrednosti θ_{lim} . Metod je predstavljen u obliku Teoreme 3.

Teorema 3. *Neka je data karakteristična funkcija f (vidi Definiciju 16) linearog stacionarnog sistema, koja zadovoljava Pretpostavke 1-5. Neka je data neprekidno diferencijabilna kriva u prostoru parametara (4.1), i neka je dato $\theta_0 \in \Omega$ takvo da $f(j\omega, \theta_0) \neq 0, \forall \omega \in \Xi^f$. Tada važi $NU_f(\theta_0 + \Delta) = NU_f(\theta_0)$ za svako $\Delta \in [0, \bar{\Delta}(\theta_0)]$, gde $\bar{\Delta}(\theta_0)$ predstavlja rešenje jednakosti*

$$\bar{\Delta}(\theta_0) = \min \left\{ {}_1B_{\eta(\theta_0)}^f(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \zeta^f \right\} \quad (4.7)$$

za $\mathcal{A} = \{j\omega : \omega \in \Xi^f\}$ i $\mathcal{B} = \{\eta(\theta) : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)\}$.

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljno $\Delta \in [0, \bar{\Delta}(\theta_0)]$. Koristeći osnovna svojstva integrala, za proizvoljno $s \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus j\mathcal{Z}^f$ važi

$$\left| \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta} \frac{\partial f}{\partial \theta}(s, \theta) d\theta \right| \leq \Delta \max_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(s, \theta) \right|. \quad (4.8)$$

Zbog (3.20) i (4.7), za proizvoljno $s = j\omega, \omega \in \Xi^f$ i $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)$ važi

$$\bar{\Delta}(\theta_0) \leq \min \left\{ \frac{|f(s, \theta_0)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(s, \theta) \right|}, \zeta^f \right\}. \quad (4.9)$$

Međutim, zbog Pretpostavke 5, uvek je moguće pronaći $\rho_{max} > 0$ i $R_{min} > 0$ tako da prethodna nejednakost važi i na ${}^\rho\mathcal{K}_2^f \cup {}^R\mathcal{K}_3^f$ za svako $\rho < \rho_{max}$ i svako $R > R_{min}$. Uzimajući u obzir poslednje dve nejednakosti, dobijamo

$$\left| \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta} \frac{\partial f}{\partial \theta}(s, \theta) d\theta \right| < |f(s, \theta_0)|, \quad (4.10)$$

za svako $s \in {}^{\rho, R}\mathcal{K}^f$. Dalje, usled Pretpostavke 3 moguće je primeniti fundamentalnu teoremu analize, tako da

$$|f(s, \theta_0 + \Delta) - f(s, \theta_0)| < |f(s, \theta_0)|, \quad \forall s \in {}^{\rho, R}\mathcal{K}^f. \quad (4.11)$$

Najzad, Pretpostavka 1 omogućuje primenu Roševog teoreme, garantujući da $f(s, \theta_0)$ i $f(s, \theta_0 + \Delta)$ imaju isti broj nula u ${}^{\rho, R}\mathcal{K}^f$.

Vrednost $\rho > 0$ može biti proizvoljno mala, dok vrednost $R > 0$ može biti proizvoljno velika, tako da u graničnom slučaju ${}^{\rho, R}\mathcal{K}^f$ pokriva celu zatvorenu desnu kompleksnu poluravan izuzev singulariteta na imaginarnoj osi. Međutim, vrednost karakteristične funkcije ne može biti jednaka nuli u singularnim tačkama imaginarne ose na osnovu pretpostavke teoreme, čime je dokaz završen. \square

Napomena 10. U jednakosti (4.7) koristi se operacija infimuma nad $\omega \in \Xi^f$. U literaturi se jednakosti (i nejednakosti) ovog tipa nazivaju *prečešljavanjem frekvencija*. Napominjemo da, iako prikazane jednakosti predstavljaju vid prečešljavanja frekvencija, njihov oblik je originalan, a same jednakosti su sasvim drugačije od do sada razmatranih u literaturi. \square

Napomena 11. Nekada je teško odrediti supremum iz (3.20) koji se nalazi na desnoj strani jednakosti (4.7). Na primer, složenost izraza pod supremumom može onemogućiti njegovo analitičko rešavanje, dok ista složenost može numeričko rešavanje činiti neefikasnim. Ovaj problem možemo prevazići uvođenjem zamenskog, konzervativnog izraza

$$\sup_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)} \|\nabla f(j\omega, \boldsymbol{\eta}(\theta))\|_p \leq \bar{M}(\omega, \theta_{low} = \theta_0, \theta_{high} = \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0), \theta_{max}) \quad (4.12)$$

kojeg je lakše odrediti. Iako ovakva zamena uvodi konzervativizam, krajnji rezultat pronalaska granice θ_{lim} ostaje nepromenjen, kao što će biti prikazano u odeljku 4.3.

Gradijent karakteristične funkcije unutar (3.20) moguće je sračunati za bilo koje $s \in \mathcal{A}$. Međutim, u (4.12) koristimo činjenicu da skup \mathcal{A} u Teoremi 3 predstavlja podskup imaginarne ose. Usled toga, funkcija \bar{M} zavisi od ω umesto od s . \square

Napomena 12. Jednakost (4.7) je cirkularna, jer se korak $\bar{\Delta}(\theta_0)$ pojavljuje na obe strane jednakosti. Prema tome, $\bar{\Delta}(\theta_0)$ nije moguće dobiti direktnim sračunavanjem izraza sa desne strane jednakosti. Međutim, ovaj nedostatak moguće je zaobići na nekoliko načina.

Prvo, primetimo da je leva strana jednakosti (4.7) opadajuća, a desna strana rastuća funkcija u zavisnosti od $\bar{\Delta}(\theta_0)$. Ova činjenica omogućava efikasnu pretragu za $\bar{\Delta}(\theta_0)$ u prostoru $[0, \theta_{max} - \theta_0]$ bisekcijom, kao što će biti prikazano u odeljku 4.4.

Drugo, Napomena 11 prikazuje zamenu maksimuma iz (4.7) konzervativnijim izrazom \bar{M} . Ukoliko zamenski izraz \bar{M} ne zavisi od $\bar{\Delta}(\theta_0)$, cirkularnost je uklonjena, te je skok $\bar{\Delta}(\theta_0)$ moguće dobiti direktnim računom desne strane jednakosti. \square

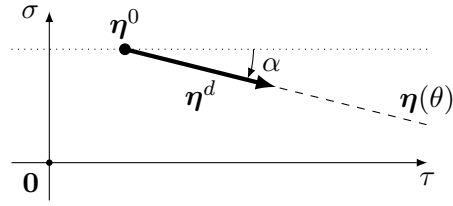
Napomena 13. Iako (4.1) dozvoljava razne krive, izrazi koji figurišu u (4.7) najjednostavniji su ukoliko kriva predstavlja polupravu u prostoru parametara

$$\boldsymbol{\eta}(\theta) = \boldsymbol{\eta}^0 + \theta \boldsymbol{\eta}^d, \quad (4.13)$$

gde $\boldsymbol{\eta}^0$ predstavlja početnu tačku poluprave, a $\boldsymbol{\eta}^d$ predstavlja jedinični vektor pomeraja koji određuje pravac i smer poluprave, kao što je prikazano na slici 4.2. \square

Primer 1. Posmatrajmo karakterističnu funkciju

$$f(s, \tau, \sigma) = s + e^{-\sqrt{\sigma s}} e^{-\tau s}, \quad (4.14)$$

Slika 4.2: Poluprava definisana pomoću η^0 i η^d

gde je $\eta = [\eta_1 = \tau, \eta_2 = \sigma] \in \mathcal{D} = [0, 20] \times [0, 20]$. U okviru ovog primera, pokazaćemo primenu Teoreme 3 na (4.14), analizirajući stabilnost sistema u zavisnosti od τ i σ . Definišimo krivu (4.1) kao polupravu (4.13), dobijajući

$$\tau = \tau^0 + \theta \cos \alpha \quad \text{i} \quad \sigma = \sigma^0 + \theta \sin \alpha, \quad (4.15)$$

gde je $\eta^0 = [\tau^0, \sigma^0]$, a α predstavlja ugao koji određuje pravac jediničnog vektora η^d , kao što je prikazano na slici 4.2.

Radi primene Teoreme 3, potrebno je odrediti

$$\sup_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \theta) \right|. \quad (4.16)$$

U tu svrhu, uočimo

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -s e^{-\sqrt{\sigma s}} e^{-s\tau} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{\sigma}} e^{-\sqrt{\sigma s}} e^{-s\tau} \quad (4.17)$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = -e^{-\sqrt{\sigma s}} e^{-s\tau} \left[s c_1 + \frac{c_2}{2} \sqrt{\frac{s}{\sigma}} \right], \quad (4.18)$$

gde je $c_1 = \cos \alpha$ i $c_2 = \sin \alpha$. Uvrštavanjem $s = j\omega$, moduo iz (4.16) možemo zameniti konzervativnijim izrazom, kao što je predloženo u Napomeni 11

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \theta) \right| &= e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-\sqrt{\sigma \omega}} \left| c_1 j\omega + \frac{c_2}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\sigma}} \sqrt{j} \right| \\ &\leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-\sqrt{\sigma \omega}} \left(|c_1| \omega + \frac{c_2}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\sigma}} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Izraz (4.19) očevidno je monotono opadajući u zavisnosti od σ . Samim tim, supremum iz (4.16) možemo zameniti izrazom

$$\sup_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \theta) \right| \leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-\sqrt{\sigma_{\min} \omega}} \left(|c_1| \omega + \frac{c_2}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_{\min}}} \right), \quad (4.20)$$

gde je

$$\sigma_{\min} = \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)} \sigma. \quad (4.21)$$

U slučaju poluprave, minimum (4.21) ima posebno jednostavan oblik

$$\sigma_{\min} = \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)} \sigma = \min \{ \sigma^0 + c_2 \theta_0, \sigma^0 + c_2 (\theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)) \}. \quad (4.22)$$

Dakle, korak $\bar{\Delta}(\theta_0)$ pronalazimo kao

$$\bar{\Delta}(\theta_0) = \min \left\{ \inf_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \theta_0)|}{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-\sqrt{\sigma_{\min} \omega}} \left(|c_1| \omega + \frac{c_2}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_{\min}}} \right)}, \zeta^f \right\}, \quad (4.23)$$

gde je σ_{\min} definisano kao u (4.22). Pošto je za (4.14) vrednost $\zeta^f = \infty$, jednakost se pojednostavljuje u

$$\bar{\Delta}(\theta_0) = \inf_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \theta_0)|}{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-\sqrt{\sigma_{\min} \omega}} \left(|c_1| \omega + \frac{c_2}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_{\min}}} \right)}. \quad (4.24)$$

Najveću vrednost $\bar{\Delta}(\theta_0)$ koja zadovoljava (4.24) možemo pronaći bisekcijom.

Na slici 4.3 prikazani su rezultati primene (4.24) na početnu tačku $\boldsymbol{\eta}^0 = [10, 10]$ i pravu određenu uglom $\alpha = -0.93$ rad. Krajnja tačka dobijenog segmenta, obeležene sa $\boldsymbol{\eta}^1$, dobijena je kao

$$\boldsymbol{\eta}^1 = \boldsymbol{\eta}(\theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)). \quad (4.25)$$

□

4.3 Kompletan segment invarijantne stabilnosti

Teorema 3 predstavlja uslove invarijantne stabilnosti koji su konzervativni. Rezultat teoreme je segment invarijantne stabilnosti krive određen gornjom granicom

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta, \quad (4.26)$$

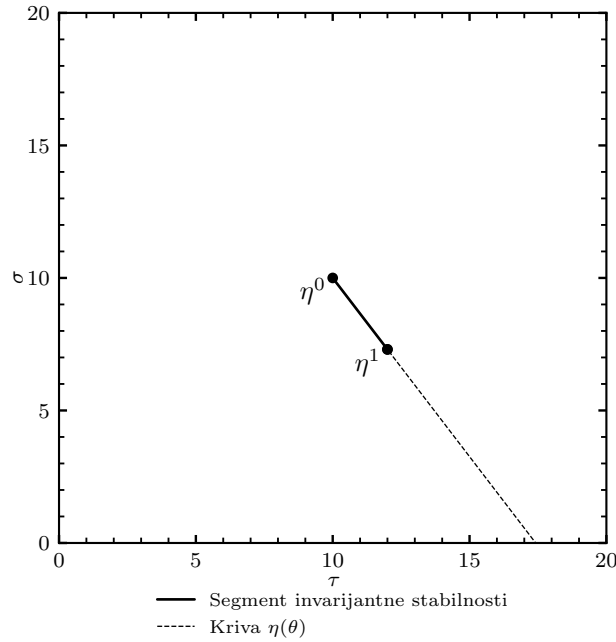
gde $\Delta \in [0, \bar{\Delta}(\theta_0)]$.

Dobijeni segment možemo dodatno produžiti iterativnom primenom metoda, tako da

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.27)$$

gde $\Delta_k \in [0, \bar{\Delta}(\theta_k)]$. Granična vrednost $\lim_{k \rightarrow \infty}$ primenjena na (4.27) konvergira ka granici stabilnosti θ_{lim} duž krive $\boldsymbol{\eta}(\theta)$, uz pretpostavku da takva granica uopšte postoji. U tom smislu, predstavljen metod, počevši od date tačke θ_0 , pronalazi kompletan segment invarijantne stabilnosti duž krive, koji je određen gornjom granicom θ_{lim} . Ova tvrdnja je formalizovana i dokazana u nastavku ovog odeljka.

Teorema koja sledi dokazuje da predloženi iterativni metod pronalazi kompletan segment invarijantne stabilnosti, u slučaju da gornja granica θ_{lim} segmenta postoji.



Slika 4.3: Primena Teoreme 3 na primer 1

Teorema 4. *Neka važe pretpostavke Teoreme 3, neka je θ_{lim} definisano kao u (4.6) i neka θ_{lim} postoji. Posmatrajmo niz θ_k dobijen primenom (4.27), gde inkrementi Δ_k zadovoljavaju $\Delta_k = \xi \bar{\Delta}(\theta_k)$ za neko $\xi \in (0, 1)$. Tada je niz θ_k neopadajuć i važi*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = \theta_{lim}.$$

Dokaz. Lako je uočiti da je niz θ_k monoton po svojoj konstrukciji. Na osnovu definicije θ_{lim} (videti (4.6)), nemoguće je da $\theta_k > \theta_{lim}$ za neko k , što znači da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k \leq \theta_{lim}.$$

Sada će biti dokazano da ova nejednakost može biti zamenjena striktnom jednakošću.

Pretpostavimo da θ_k konvergira nekoj konačnoj vrednosti $\theta_{\#} < \theta_{lim}$. Pošto je posmatrani niz konvergentan, inkrementi Δ_k postaju proizvoljno mali kako $k \rightarrow \infty$. Ovo znači da, uzimajući u obzir (4.7) i Pretpostavku 4, vrednost

$$\inf_{\omega \in \Xi^f} |f(j\omega, \theta_k)| \quad (4.28)$$

takođe postaje proizvoljno mala. Ovo protivreči definiciji θ_{lim} iz (4.6). Dakle, θ_k konvergira ka θ_{lim} . \square

Predstojeća teorema pokriva slučaj u kom θ_{lim} ne postoji. U tom slučaju, niz θ_k divergira.

Teorema 5. Neka važe sve pretpostavke Teoreme 3, neka je θ_{lim} definisano kao u (4.6) i neka θ_{lim} ne postoji. Posmatrajmo niz θ_k dobijen primenom (4.27), gde inkrementi Δ_k zadovoljavaju $\Delta_k = \xi \bar{\Delta}(\theta_k)$ za neko $\xi \in (0, 1)$. Tada je niz θ_k neopadajuć i divergentan.

Dokaz. Lako je uočiti da je niz θ_k monoton po svojoj konstrukciji. Ostatak teoreme biće dokazan kontradikcijom.

Pretpostavimo da je niz θ_k konvergentan. Imajući na umu Pretpostavku 4, to znači da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\omega \in \Xi^f} |f(j\omega, \theta_k)| = 0. \quad (4.29)$$

Ovo dalje znači da θ_{lim} postoji, što je protivrečno postavci teoreme. \square

Napomena 14. Dobijeni segment invarijantne stabilnosti je „kompletan” po pogledu gornje granice, određene vrednošću θ_{lim} . Donja granica segmenta je određena odabranom početnom tačkom θ_0 , te je segment invarijantne stabilnosti možda moguće proširiti sa donje strane nekom vrednošću manjom od θ_0 . Naravno, pronalazak donje granice segmenta je trivijalan - dovoljno je Teoreme 4 i 5 ponovo primeniti na odabranu krivu, u suprotnom smeru od originalnog. \square

4.4 Implementacija

Teoreme 3-5 daju teorijsku osnovu za određivanje maksimalnog segmenta invarijantne stabilnosti duž krive u prostoru parametara. Segment je moguće odrediti postupkom koji kombinuje sve tri pomenute teoreme, a čiju implementaciju ćemo prikazati u okviru ovog odeljka.

4.4.1 Implementacija Teoreme 3

Prvo ćemo opisati postupak za pronalazak konzervativnog segmenta invarijantne stabilnosti. Postupak se oslanja na Teoremu 3, a pseudokod postupka je prikazan u Proceduri 1 nazvanoj `FindValidJump`. Ulazni parametri procedure opisani su u Tabeli 4.1, dok rezultat procedure predstavlja skok Δ koji održava broj nestabilnih polova u odnosu na θ , odnosno $NU_f(\theta) = NU_f(\theta + \Delta^*)$, $\forall \Delta^* \in [0, \Delta]$.

Napomena 15. Početna vrednost parametra je u jednakosti (4.7) obeležena kao θ_0 , dok je u okviru Procedure 1 obeležena kao θ . Razlog za to je što ćemo oznaku θ_0 koristiti za početnu vrednost Procedure 2. \square

Napomena 16. Cilj procedure je, za zadatu početnu vrednost θ , pronaći $\bar{\Delta}(\theta)$ koje zadovoljava jednakost (4.7). Međutim, tačnu vrednost $\bar{\Delta}(\theta)$ nije trivijalno pronaći računarskom implementacijom, jer jednakost (4.7) nije moguće direktno rešiti numerički. Umesto toga, tražićemo vrednost Δ koja

$f(s, \theta)$	Karakteristična funkcija sistema, parametrizovana u odnosu na θ .
$\overline{M}(\omega, \theta_{low}, \theta_{high}, \theta_{max})$	Konzervativna zamena za imenilac desne strane jednakosti (4.7), kao što je obrazloženo u Napomeni 11.
θ	Početna vrednost parametra θ , u odnosu na koju tražimo skok invarijantne stabilnosti.
Δ_{max}	Najveći dozvoljeni skok parametra θ . Ova vrednost zavisi od Ω iz (4.1), kao i od početne vrednosti θ .
δ	Kriterijum zaustavljanja procedure.

Tabela 4.1: Ulazni parametri Procedure 1

je manja od, ali bliska vrednosti $\overline{\Delta}(\theta)$. U tom pogledu, povratna vrednost procedure Δ upravo odgovara vrednosti Δ iz Teoreme 3. \square

Napomena 17. Činjenica da Procedura 1 kao rezultat vraća pomeraj Δ koji je striktno manji od $\overline{\Delta}(\theta)$ ne utiče na krajnji rezultat pronalaska kompletnog segmenta invarijantne stabilnosti. Konzervativnost uneta Procedurem 1 biće nadomeštena iterativnom prirodom Procedure 2, kao što je dokazano u teoremama 4 i 5. \square

Pošto je leva strana jednakosti (4.7) rastuća, a desna neopadajuća u odnosu na $\overline{\Delta}(\theta)$, onda pod uslovima teoreme za svako $0 \leq \Delta < \overline{\Delta}(\theta)$ važi

$$\Delta < \min \left\{ {}_1B_{\eta(\theta_0)}^f(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \zeta^f \right\} \quad (4.30)$$

gde je $\mathcal{A} = \{j\omega : \omega \in \Xi^f\}$ i $\mathcal{B} = \{\eta(\theta) : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\}$, dok (4.30) ne važi ni za jedno $\Delta > \overline{\Delta}(\theta)$. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti za pronalazak vrednosti Δ , tako što ćemo proveravati da li je nejednakost (4.30) ispunjena za razne vrednosti Δ . Rezultat procedure predstavlja najveću vrednost Δ za koju možemo pouzdano tvrditi da zadovoljava (4.30).

Prvi koraci procedure, u linijama 2-6, proveravaju da li je uslov (4.30) ispunjen na celom intervalu $[\theta, \theta + \Delta_{max}]$. U slučaju da je tako, bilo koji skok (u okviru maksimalnog dozvoljenog skoka Δ_{max}) održava broj nestabilnih polova. Tada se procedura završava, dajući Δ_{max} kao rezultat. U suprotnom, započinjemo bisekciju u glavnoj petlji procedure.

U prvoj iteraciji petlje, proveravamo da li je nejednakost (4.30) zadovoljena na sredini dozvoljenog intervala $[\theta, \theta + \Delta_{max}]$, Linije 9-13 postavljaju vrednost $\Delta = \frac{\Delta_{max}}{2}$, dok linija 14 proverava nejednakost (4.30). Ukoliko je nejednakost zadovoljena, tada važi $\overline{\Delta}(\theta) \in [\frac{\Delta_{max}}{2}, \Delta_{max}]$, U tom slučaju, dalju pretragu usmeravamo na taj interval postavljanjem vrednosti $\Delta = \frac{3}{4}\Delta_{max}$ u liniji 10. Nasuprot tome, ukoliko nejednakost (4.30) nije zadovoljena za

$\Delta = \frac{\Delta_{max}}{2}$, tada važi $\bar{\Delta}(\theta) \in [0, \frac{\Delta_{max}}{2}]$. U tom slučaju, dalju pretragu usmeravamo na taj interval postavljanjem vrednosti $\Delta = \frac{1}{4}\Delta_{max}$ u liniji 12.

Opisani postupak iterativno ponavljamo poloveći interval u svakoj narednoj iteraciji, sve dok veličina posmatranog intervala ne postane manja od kriterijuma zaustavljanja δ . Kada se ovaj uslov zaustavljanja ispuni, petlja se završava, dajući kao rezultat najveću vrednost Δ za koju smo sigurni da zadovoljava nejednakost (4.30). Završne linije 17-21 određuju takvu rezultujuću vrednost Δ .

```

1:      Procedure FindValidJump
      Inputs :
           $f(s, \theta)$ 
           $\bar{M}(s, \theta_{low}, \theta_{high}, \theta_{max})$ 
           $\theta$ 
           $\Delta_{max}$ 
           $\delta$ 
      Output:  $\Delta$ 
2:       $\Delta := \Delta_{max}$  ;
3:       $\Delta_{valid} := \left[ \Delta < \min \left( \min_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \theta)|}{\bar{M}(j\omega, \theta, \theta + \Delta, \theta + \Delta_{max})}, \zeta^f \right) \right]$  ;
4:      if  $\Delta_{valid}$  then
5:          return  $\Delta$ ;
6:      end
7:       $offset := \Delta_{max}/2$  ;
8:      while  $offset > \delta$  do
9:          if  $\Delta_{valid}$  then
10:              $\Delta := \Delta + offset$ ;
11:          else
12:              $\Delta := \Delta - offset$ ;
13:          end
14:           $\Delta_{valid} := \left[ \Delta < \min \left( \min_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \theta)|}{\bar{M}(j\omega, \theta, \theta + \Delta, \theta + \Delta_{max})}, \zeta^f \right) \right]$  ;
15:           $offset := offset/2$ 
16:      end
17:      if  $\Delta_{valid}$  then
18:          return  $\Delta$  ;
19:      else
20:          return  $\Delta - (2 * offset)$  ;
21:      end
```

Procedura 1: Traženje pomeraja invarijantne stabilnosti Δ

Napomena 18. Najveći validan pomeraj $\overline{\Delta}(\theta)$ često je mnogo manji od najvećeg dozvoljenog pomeraja Δ_{max} . U tom slučaju, veliki broj početnih iteracija biva utrošen na približavanje levom (manjem) kraju intervala, odnosno vrednosti $\Delta = 0$. Ovu činjenicu moguće je iskoristiti za pravljenje efikasnije procedure za traženje $\overline{\Delta}(\theta)$, koja pretpostavlja da je $\overline{\Delta}(\theta) \ll \Delta_{max}$. \square

4.4.2 Implementacija Teoreme 4 i Teoreme 5

U ovom odeljku prikazaćemo postupak za određivanje kompletnog segmenta invarijantne stabilnosti, oslanjajući se na Teoremu 4. Postupak je nazvan `FindThetaLim` i prikazan kao Procedura 2.

Cilj procedure je, za zadatu početnu vrednost θ_0 , pronaći vrednost θ_{lim} (vidi (4.6)) ukoliko ona postoji. Procedura 2 se oslanja na Proceduru 1 kao jedan od koraka. Ulazni parametri procedure opisani su u Tabeli 4.2, dok rezultat procedure predstavlja vrednost θ_{lim} .

$f(s, \theta)$	Karakteristična funkcija sistema, parametrizovana u odnosu na θ .
$\overline{M}(s, \theta_{low}, \theta_{high}, \theta_{max})$	Konzervativna zamena za imenilac desne strane jednakosti (4.7), kao što je obrazloženo u Napomeni 11.
θ_0	Početna vrednost parametra θ , u odnosu na koju tražimo segment invarijantne stabilnosti.
θ_{max}	Najveća dozvoljena vrednost parametra θ .
δ	Prvi kriterijum zaustavljanja procedure. Ukoliko je u tekućoj iteraciji dobijeni pomeraj parametra θ manji od kriterijuma δ , procedura se završava.
k_{max}	Drugi kriterijum zaustavljanja procedure. Ukoliko procedura dostigne k_{max} iteracija, procedura se završava.
ξ	Parametar koji skalira pomeraj dobijen unutar svake iteracije procedure, u cilju smanjivanja uticaja grešaka nastalih usled odbirkovanja.

Tabela 4.2: Ulazni parametri Procedure 2

Linije 2-4 postavljaju početne vrednosti promenljivih. Promenljiva θ_{lim} predstavlja trenutnu aproksimaciju granice segmenta invarijantne stabilnosti, dok Δ predstavlja pomeraj duž krive koji ćemo činiti u okviru jedne iteracije glavne petlje procedure. Dakle, unutar svake iteracije petlje ćemo

računati konzervativni pomeraj Δ , potom aproksimaciju θ_{lim} uvećati za dobijenu vrednost. Brojač iteracija označen je kao k .

Linije 5-10 predstavljaju glavnu petlju procedure. U toku prve iteracije, u liniji 6 koristimo Proceduru 1 za pronalaženje konzervativnog pomeraja Δ koji očuvava broj nestabilnih polova u odnosu na $\theta = \theta_0$. U linijama 7-9, trenutnu aproksimaciju vrednosti θ_{lim} uvećavamo za dobijeni pomeraj Δ , skalirajući ga faktorom ξ kako bismo izbegli greške nastale usled numerike. Ovaj postupak iterativno ponavljamo, dok se ne ispuni jedan od sledećih uslova:

Pomeraj Δ je manji od δ . U ovom slučaju, prekidamo proceduru, a kao rezultat vraćamo trenutnu aproksimaciju θ_{lim} . Teorema 4 garantuje konvergenciju ka stvarnoj vrednosti θ_{lim} u slučaju da $k \rightarrow \infty$. Međutim, pošto u računarskoj implementaciji nije moguće praktično realizovati beskonačno iteracija, kriterijum δ se koristi kao znak da daljim iteracijama ne dobijamo značajne promene aproksimacije θ_{lim} .

Aproksimacija θ_{lim} je jednaka θ_{max} . U ovom slučaju je procedura naišla na gornju granicu dozvoljene vrednosti θ . Kao rezultat procedure vraćamo graničnu vrednost θ_{max} .

Broj iteracija k je dostigao k_{max} . Teorema 5 nam govori da, ukoliko Procedura 2 divergira, θ_{lim} ne postoji. Međutim, takvu divergenciju nije moguće dokazati u računarskoj implementaciji procedure. Umesto toga, dovoljno veliki broj iteracija ($k = k_{max}$) uzimamo kao znak divergencije, i u tom slučaju proceduru obustavljamo. U ovom slučaju kao rezultat vraćamo θ_{max} , pošto ta vrednost predstavlja jedino ograničenje segmenta invarijantne stabilnosti.

4.4.3 Paralelizacija

Ukoliko se Procedure 1 i 2 izvršavaju na računaru koji poseduje više procesorskih jedinica, poželjno je uvesti paralelizaciju radi poboljšanja performansi procedura.

Glavna petlja Procedure 2 nije podesna za paralelizaciju, zbog jake međuzavisnosti između samih iteracija. Međutim, postoji nekoliko pogodnih mesta za paralelizaciju:

1. **Prečešljavanje frekvencija.** Unutar Procedure 1 vršimo prečešljavanje frekvencija u linijama 3 i 14. Drugim rečima, vršimo evaluaciju jednog matematičkog izraza za mnoge različite vrednosti frekvencije $\omega \in \Xi^f$. Pošto su evaluacije izraza za različite vrednosti frekvencija međusobno nezavisne, moguće je evaluacije paralelno izvršavati na više procesorskih jedinica.

```

1:   Procedure FindThetaLim
      Inputs :
           $f(s, \theta)$ 
           $\overline{M}(s, \theta_{low}, \theta_{high}, \theta_{max})$ 
           $\theta_0$ 
           $\theta_{max}$ 
           $\delta$ 
           $k_{max}$ 
           $\xi$ 
      Output:  $\theta_{lim}$ 

2:    $\theta_{lim} := \theta_0$  ;
3:    $\Delta := \infty$  ;
4:    $k := 0$  ;

5:   while  $\Delta > \delta$  and  $\theta_{lim} < \theta_{max}$  and  $k < k_{max}$  do
6:        $\Delta := \text{FindValidJump}(f, \overline{M}, \theta_{lim}, \theta_{max} - \theta_{lim}, \delta)$  ;
7:        $\Delta := \xi \Delta$  ;
8:        $\theta_{lim} := \theta_{lim} + \Delta$  ;
9:        $k := k + 1$  ;
10:  end

11:  if  $k < k_{max}$  then
12:      return  $\theta_{lim}$  ;
13:  else
14:      return  $\theta_{max}$  ;
15:  end

```

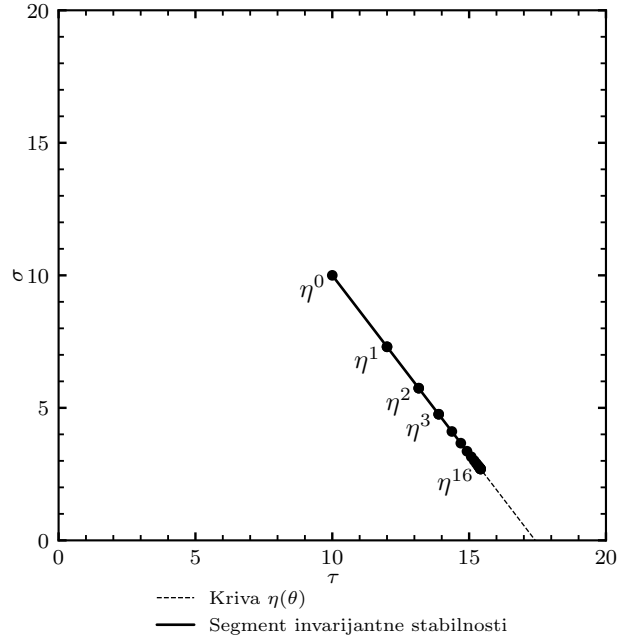
Procedura 2: Određivanje granice invarijantne stabilnosti θ_{lim}

- 2. Evaluacija različitih krivih.** Nekada je poželjno izvršiti Proceduru 2 za više različitih krivih u prostoru parametara. Krive mogu, a ne moraju počinjati od iste parametarske tačke. Svi primeri u okviru disertacije sadrže ovakvu primenu procedure, radi bolje karakterizacije prostora parametara (na primer, pogledati Sliku 4.6). Pošto je Procedura 2 nezavisna za različite krive, moguće je proceduru paralelno izvršavati na više procesorskih jedinica, pri čemu svako nezavisno izvršavanje vezujemo za jednu krivu.

4.5 Primer

Na slici 4.4 prikazani su rezultati primene Procedure 2 na primer 1. Korišćene vrednosti parametara procedure su $\xi = 0.9$, $\delta = 1 \times 10^{-2}$ i $k_{max} = 1000$.

Vrednost θ_{max} implicitno je određena na osnovu $\boldsymbol{\eta}^0$, $\boldsymbol{\eta}^d$ i \mathcal{D} . Procedura je prekinuta posle 16 iteracija, pošto je skok Δ u 16. iteraciji postao manji od kriterijuma zaustavljanja δ . Na slici su prikazane tačke $\boldsymbol{\eta}^k = \boldsymbol{\eta}(\theta_k)$ dobijene u pojedinačnim iteracijama algoritma.

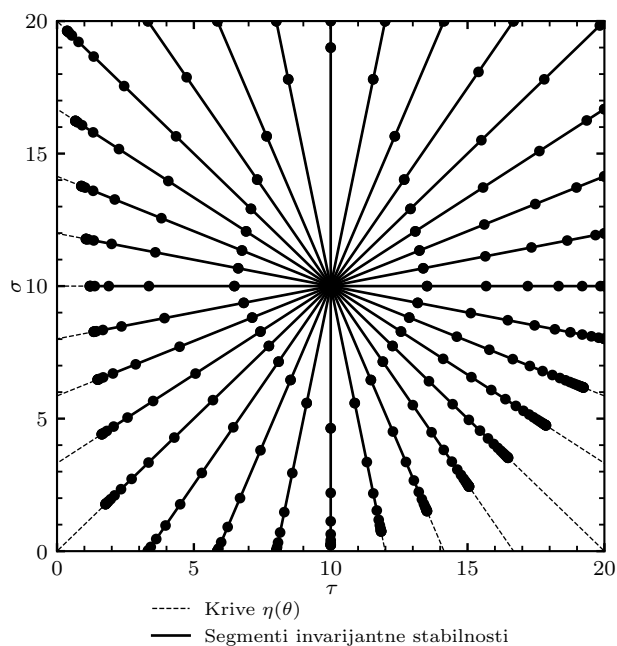


Slika 4.4: Primena Procedure 2 na primer 1

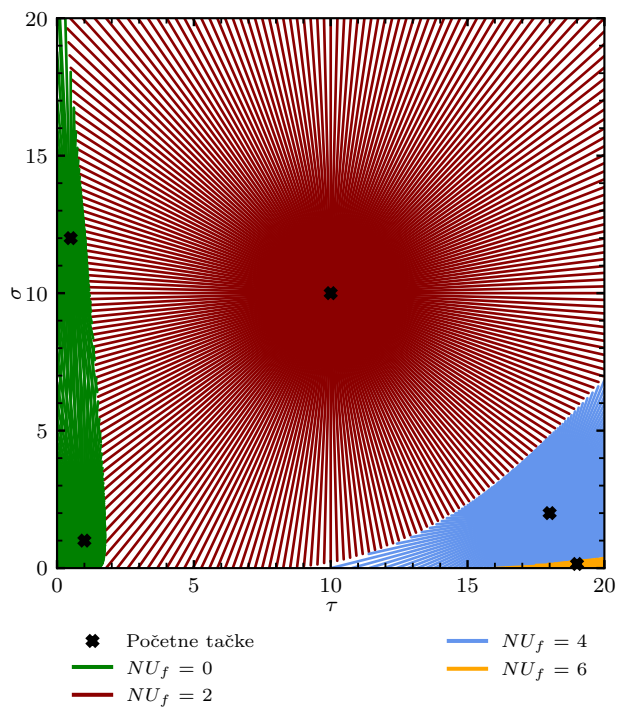
Proceduru možemo na sličan način primeniti na mnogobrojne poluprave koje dele zajedničku početnu tačku $\boldsymbol{\eta}^0$. Na slici 4.5 prikazani su rezultati takve primene, zajedno sa tačkama $\boldsymbol{\eta}_k$ dobijenim u svim iteracijama procedure.

Na slici 4.5 uočavamo estimaciju oblasti invarijantne stabilnosti kojoj pripada početna tačka $\boldsymbol{\eta}^0$. Radi povećanja preciznosti estimacije i radi karakterizacije stabilnosti kompletnog domena \mathcal{D} , moguće je povećati gustinu pravih i primeniti Procedure 2 na mnogobrojne početne tačke $\boldsymbol{\eta}^0$ koje pripadaju različitim oblastima invarijantne stabilnosti. Naravno, odabir tačaka $\boldsymbol{\eta}^0$ je iskustven i iterativan, jer ne možemo unapred znati da li dve tačke pripadaju istoj oblasti invarijantne stabilnosti.

Rezultati ovakve primene Procedure 2 prikazani su na slici 4.6. Za svako $\boldsymbol{\eta}^0$, odgovarajuća vrednost $NU_f(\boldsymbol{\eta}^0)$ određena je primenom Košijevog principa argumenta.



Slika 4.5: Primena Procedure 2 na mnogobrojne prave za primer 1



Slika 4.6: Primena Procedure 2 na mnogobrojne prave za primer 1

4.6 Zaključak

U ovom poglavlju prikazali smo metode za traženje maksimalnog segmenta invarijantne stabilnosti duž krive u prostoru parametara. Složenost metoda ne zavisi direktno od dimenzionalnosti parametarskog prostora, pošto je pomeraj duž krive parametrizovan samo jednim parametrom θ .

Ukoliko želimo karakterizaciju čitave oblasti unutar parametarskog prostora po pitanju broja nestabilnih polova (umesto karakterizaciju jedne krive), metode možemo primeniti na mnoštvo krivih, kao što je prikazano na slici 4.6. Međutim, ovakva primena ipak ne garantuje invarijantnu stabilnost u celoj oblasti, bez obzira na gustinu odabranih krivih. Na primer, moguće je da postoji tačka između odabranih krivih za koju metodi ne mogu garantovati invarijantan broj nestabilnih polova, pošto tačka ne pripada odabranim krivama.

U sledećem poglavlju uvodimo metode koje prevazilaze navedeni problem. Metodi izloženi u sledećem poglavlju garantuju invarijantost broja nestabilnih polova unutar čitavih oblasti u prostoru parametara.

Glava 5

Stabilnost unutar oblasti u prostoru parametara

U ovom poglavlju prikazan je metod pronalaženja maksimalne oblasti invarijantnog broja nestabilnih polova $\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$, počevši od zadate tačke $\boldsymbol{\eta}^0$. Zarad preglednosti, uvodimo notaciju

$${}_q\mathcal{W}_\varepsilon^\xi(\boldsymbol{\eta}) = \left\{ \boldsymbol{\eta} + \mathbf{v} : \|\mathbf{v}\|_q \leq \xi\varepsilon \right\}, \quad (5.1)$$

gde je q -norma vektora \mathbf{v} dimenzije n za $q \in [1, \infty)$ definisana kao

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (5.2)$$

dok je u slučaju $q = \infty$ norma definisana kao

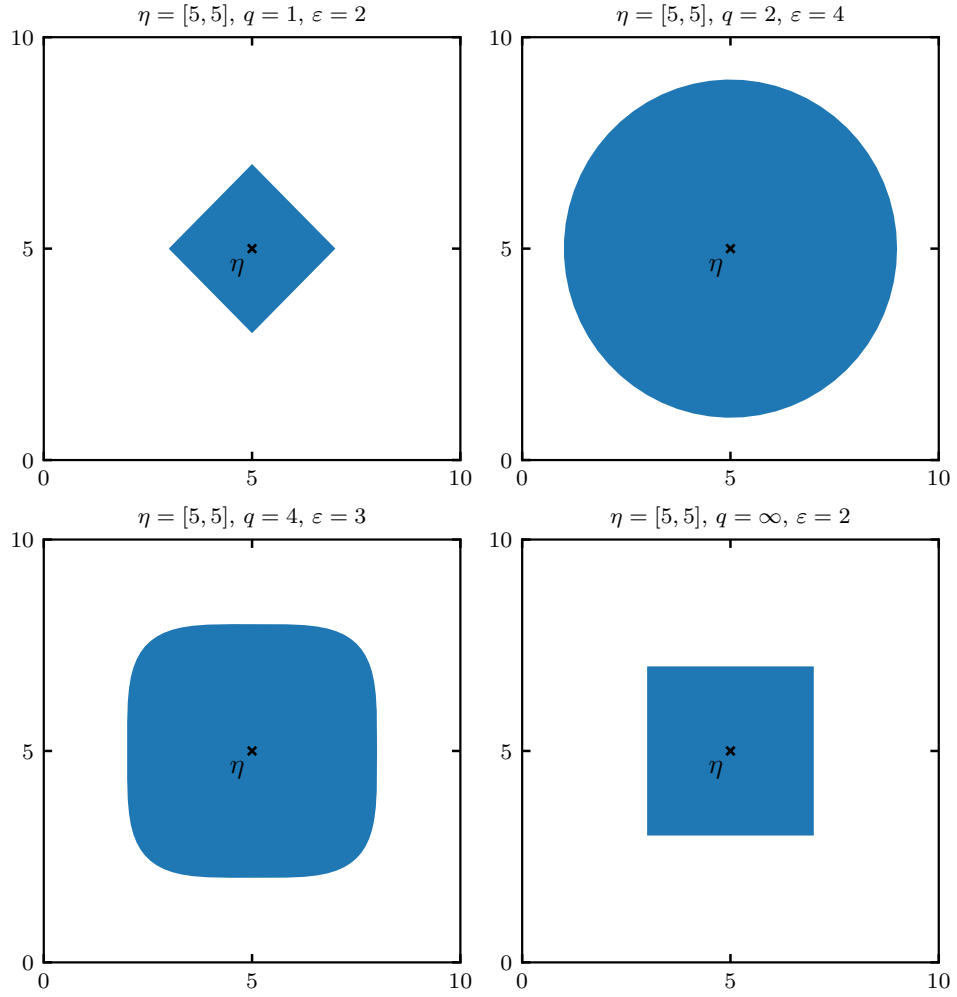
$$\|\mathbf{v}\|_p = \max_{i=1\dots n} \{|v_i|\}. \quad (5.3)$$

Vrednost q određuje oblik oblasti ${}_q\mathcal{W}_\varepsilon^\xi(\boldsymbol{\eta})$, dok vrednost ε određuje njenu veličinu. Na slici 5.1 prikazani su primeri oblasti ${}_q\mathcal{W}_\varepsilon^1(\boldsymbol{\eta})$ za različite vrednosti q i ε .

5.1 Dovoljni uslovi invarijantne stabilnosti

Postupak za određivanje kompletne oblasti invarijantne stabilnosti analogan je postupku za određivanje kompletnog segmenta invarijantne stabilnosti duž krive, prikazanom u poglavlju 4. U ovom odeljku je prikazan metod koji, za datu početnu tačku $\boldsymbol{\eta}^0$, određuje oblast invarijantne stabilnosti koja je okružuje. Dobijena oblast određena je sa ${}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)}^1(\boldsymbol{\eta}^0)$, gde je q unapred određeno kao parametar koji određuje oblik dobijene oblasti, dok se vrednost $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)$ dobija primenom Teoreme 6 i predstavlja veličinu dobijene oblasti.

Dobijena oblast je konzervativna. Međutim, Teorema 6 je bitna jer predstavlja osnovu za pronalazak kompletne oblasti invarijantne stabilnosti.

Slika 5.1: Primeri oblasti ${}_q\mathcal{W}_\varepsilon^1(\boldsymbol{\eta})$

Teorema 6. Neka je data karakteristična funkcija f (vidi Definiciju 16) linearnog stacionarnog sistema, koja zadovoljava Pretpostavke 1-5. Neka je data početna vrednost parametra $\boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{D}$ za koju važi $f(j\omega, \boldsymbol{\eta}^0) \neq 0, \forall \omega \in \Xi^f$. Neka su p i q realni brojevi takvi da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty. \quad (5.4)$$

Tada važi

$$NU_f(\boldsymbol{\eta}^0) = NU_f(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}_q\mathcal{W}_\varepsilon^1(\boldsymbol{\eta}^0). \quad (5.5)$$

za svako $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)]$, gde $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)$ predstavlja rešenje jednakosti

$$\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0) = \min \left\{ {}_pB_{\boldsymbol{\eta}^0}^f \left(\mathcal{A}, {}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)}^1(\boldsymbol{\eta}^0) \right), \zeta^f \right\}, \quad (5.6)$$

gde je $\mathcal{A} = \{j\omega : \omega \in \Xi^f\}$.

Dokaz. Odaberimo proizvoljno $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)]$. Usled (5.6) i Pretpostavke 5, moguće je pronaći ρ_{max} i R_{min} tako da

$$\varepsilon < \frac{|f(s, \boldsymbol{\eta}^0)|}{\sup_{\boldsymbol{\eta} \in {}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}}^1(\boldsymbol{\eta}^0)} \|\nabla f(s, \boldsymbol{\eta})\|_p}, \quad \forall s \in {}^{\rho,R}\mathcal{K}^f, \quad (5.7)$$

za svako $\rho < \rho_{min}$ i $R > R_{max}$. Reorganizujući (5.7), koristeći osnovna svojstva integrala i primenjujući Helderovu nejednakost, dobijamo

$$\int_0^1 |\langle \nabla f(s, \boldsymbol{\eta}^0 + \beta \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle| d\beta < |f(s, \boldsymbol{\eta}^0)| \quad (5.8)$$

$\forall \mathbf{v} \in {}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}}^1(\mathbf{0})$ i $\forall s \in {}^{\rho,R}\mathcal{K}^f$. Primenom fundamentalne teoreme analize i Pretpostavke 3 na (5.8), dobijamo

$$|f(s, \boldsymbol{\eta}) - f(s, \boldsymbol{\eta}^0)| < |f(s, \boldsymbol{\eta}^0)| \quad (5.9)$$

za svako $\forall \boldsymbol{\eta} \in {}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}}^1(\boldsymbol{\eta}^0)$ and $\forall s \in {}^{\rho,R}\mathcal{K}^f$. Pretpostavka 1 dozvoljava upotrebu Rošeeve teoreme na (5.9), garantujući da $f(s, \boldsymbol{\eta}^0)$ i $f(s, \boldsymbol{\eta})$, $\forall \boldsymbol{\eta} \in {}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}}^1(\boldsymbol{\eta}^0)$ imaju jednak broj polova unutar ${}^{\rho,R}\mathcal{K}^f$.

Dokaz je završen uzimanjem $\rho \rightarrow 0$ i $R \rightarrow \infty$. \square

Napomena 19. Nekada je teško odrediti supremum iz (3.20) koji se nalazi na desnoj strani jednakosti (5.6). Na primer, složenost izraza pod supremumom može onemogućiti njegovo analitičko rešavanje, dok ista složenost može numeričko rešavanje činiti neefikasnim. Ovaj problem možemo prevazići uvođenjem zamenskog, konzervativnog izraza

$$\sup_{\boldsymbol{\eta} \in {}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}}^1(\boldsymbol{\eta}^0)} \|\nabla f(j\omega, \boldsymbol{\eta})\|_p \leq \bar{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}^0, \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0), p, q, \varepsilon_{max}), \quad \omega \in \Xi^f \quad (5.10)$$

kojeg je lakše odrediti. Iako ovakva zamena uvodi konzervativizam, krajnji rezultat pronalaska kompletne oblasti invarijantne stabilnosti ostaje nepromenjen, kao što će biti prikazano u odeljku 5.2. \square

Primer 1 (nastavak). Prikazaćemo primenu Teoreme 6 na primer 1. Radi jednostavnosti, korišćićemo $p = q = 2$. Da bi Teorema 6 bila primenjena na (4.14), potrebno je pronaći

$$\sup_{\boldsymbol{\eta} \in {}_q\mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}}^1(\boldsymbol{\eta}^0)} \|\nabla f(j\omega, \boldsymbol{\eta})\|_p, \quad \omega \in \Xi^f. \quad (5.11)$$

Nastavljajući se na (4.17), vidi se da

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \tau}(j\omega, \boldsymbol{\eta}) \right| = \omega e^{-\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2}}} \quad \text{i} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma}(j\omega, \boldsymbol{\eta}) \right| = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2}}} \sqrt{\frac{\omega}{\sigma}}, \quad (5.12)$$

što dovodi do

$$\|\nabla f(j\omega, \boldsymbol{\eta})\|_p = \left(\left| \frac{\partial f}{\partial \tau}(j\omega, \boldsymbol{\eta}) \right|^p + \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma}(j\omega, \boldsymbol{\eta}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.13)$$

Uvrštavajući $p = 2$ i (5.12) u (5.13), dobijamo

$$\|\nabla f(j\omega, \boldsymbol{\eta})\|_2 = e^{-\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2}}} \sqrt{\omega \left(\omega + \frac{1}{4\sigma} \right)}. \quad (5.14)$$

Funkcija (5.14) je opadajuća u odnosu na σ . Samim tim, supremum iz (5.11) možemo izraziti kao

$$\sup_{\boldsymbol{\eta} \in_q \mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)}^1(\boldsymbol{\eta}^0)} \|\nabla f(j\omega, \boldsymbol{\eta})\|_p = e^{-\sqrt{\frac{\sigma_{\min}\omega}{2}}} \sqrt{\omega \left(\omega + \frac{1}{4\sigma_{\min}} \right)}, \quad (5.15)$$

gde je

$$\sigma_{\min} = \min_{\boldsymbol{\eta} \in_q \mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)}^1(\boldsymbol{\eta}^0)} \sigma = \min \{ \sigma_0 - \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0), \sigma_0 + \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0) \}. \quad (5.16)$$

Uvrštavanjem (5.16) u (5.6) zaključujemo da je $NU_f(\boldsymbol{\eta})$ invarijantno u oblasti određenoj početnom tačkom $\boldsymbol{\eta}^0$ i parametrom $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)$ ako

$$\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0) = \min \left\{ \inf_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \boldsymbol{\eta}^0)|}{e^{-\sqrt{\frac{\sigma_{\min}\omega}{2}}} \sqrt{\omega \left(\omega + \frac{1}{4\sigma_{\min}} \right)}}, \zeta^f \right\}, \quad (5.17)$$

gde je σ_{\min} definisano kao u (5.16). Pošto je za (4.14) vrednost $\zeta^f = \infty$, jednakost se pojednostavljuje u

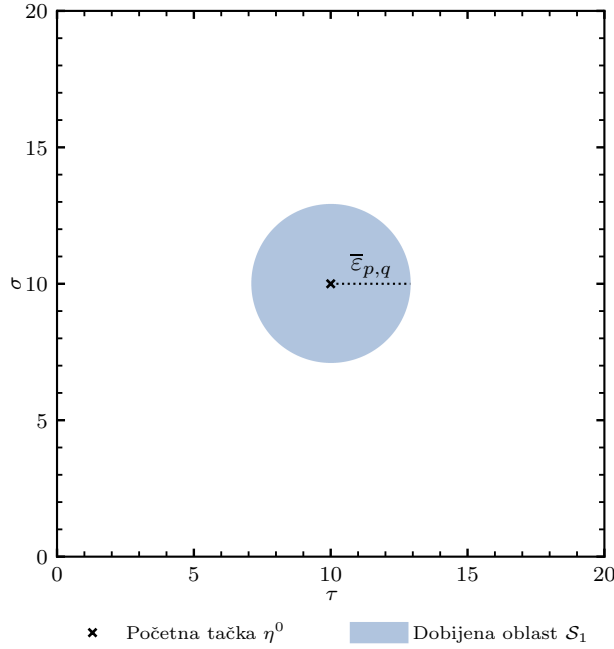
$$\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0) = \inf_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \boldsymbol{\eta}^0)|}{e^{-\sqrt{\frac{\sigma_{\min}\omega}{2}}} \sqrt{\omega \left(\omega + \frac{1}{4\sigma_{\min}} \right)}}. \quad (5.18)$$

Vrednost $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)$ koja rešava (5.18) moguće je pronaći bisekcijom. \square

Rezultati primene (5.18) na primer 1 prikazani su na slici 5.2. Metod je primenjen na $\boldsymbol{\eta}^0 = [10, 10]$, a dobijeni rezultat je $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0) \approx 2.906$.

5.2 Kompletna podoblast invarijantne stabilnosti

Analogno metodi namenjenoj analizi stabilnosti duž krive, u ovom odeljku pronalazimo kompletnu oblast invarijantne stabilnosti oko $\boldsymbol{\eta}^0$. Kompletnu oblast dobijamo iterativnom primenom Teoreme 6.



Slika 5.2: Primena Teoreme 6 na primer 1

Postupak započinjemo biranjem početne tačke $\boldsymbol{\eta}^0$ i definisanjem skupa \mathcal{S}_0 kao

$$\mathcal{S}_0 = \{\boldsymbol{\eta}^0\}. \quad (5.19)$$

Potom biramo $\xi \in (0, 1)$ i konstruišemo monotono rastući niz skupova

$$\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k \cup \bigcup_{\boldsymbol{\eta} \in \partial \mathcal{S}_k} q \mathcal{W}_{\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})}^{\xi}(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (5.20)$$

gde $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})$ predstavlja rešenje (5.6). U sledećoj teoremi dokazujemo da niz skupova \mathcal{S}_k konvergira ka $\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$.

Teorema 7. *Neka je data karakteristična funkcija f (vidi Definiciju 16) linearnog stacionarnog sistema, koja zadovoljava Pretpostavke 1-5. Neka su p i q realni brojevi koji zadovoljavaju (5.4). Neka je data početna vrednost parametra $\boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{D}$ za koju važi $f(j\omega, \boldsymbol{\eta}^0) \neq 0, \forall \omega \in \Xi^f$.*

Neka je \mathcal{S}_0 definisano kao u (5.19), \mathcal{S}_k kao u (5.20), i $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})$ kao u (5.6). Tada važi

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{S}_k = \mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0). \quad (5.21)$$

Dokaz. Teorema je trivijalno zadovoljena ako

$$\forall \boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0), \quad \exists k(\boldsymbol{\eta}^*) \in \mathbb{N} \text{ tako da } \boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{S}_{k(\boldsymbol{\eta}^*)}. \quad (5.22)$$

Ostatak dokaza je usmeren na dokazivanje (5.22).

Za svako $\boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$, $\exists \mathcal{P}$ definisano kao $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P} \subset \text{int}(\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0))$ tako da $g(0) = \boldsymbol{\eta}^0$, $g(1) = \boldsymbol{\eta}^*$ i tako da je g neprekidna funkcija. Definišimo niz

$$m_k = \max \{x : g(x) \in \mathcal{S}_k\}. \quad (5.23)$$

i primetimo da (5.22) važi ukoliko

$$\exists k(\boldsymbol{\eta}^*) \text{ tako da } m_{k(\boldsymbol{\eta}^*)} = 1. \quad (5.24)$$

U svakoj iteraciji k za koju $m_k \neq 1$, (5.6) primenjujemo na $\boldsymbol{\eta}^k = g(m_k)$. Pošto je za svako takvo $\boldsymbol{\eta}^k$ vrednost $|f(j\omega, \boldsymbol{\eta}^k)|$ pozitivna $\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}^f$, sledi da je $m_{k+1} > m_k$.

Parametar $g(m_k)$ pripada $\text{int}(\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0))$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Imajući to u vidu, kao i Pretpostavku 4, zaključujemo da $\exists \alpha > 0$ takvo da $|f(j\omega, g(m_k))| > \alpha$, $\forall m_k \in [0, 1]$, $\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}^f$. Dakle, niz m_k je striktno rastući i konvergira ka 1 (ne konvergira na nijednoj drugoj vrednosti iz intervala $[0, 1]$). Dakle, (5.24) važi, čime je dokaz završen. \square

Napomena 20. Postupak (5.20) podrazumeva primenu Teoreme 6 na beskonačno mnogo tačaka u svakoj iteraciji k . Ovakav postupak nije moguće direktno primeniti na digitalnom računaru. Umesto toga, teoremu primenjujemo na diskretno odbirkovan skup tačaka $\mathcal{S}_k^* \subset \partial \mathcal{S}_k$. \square

Napomena 21. Analogno Teoremi 4, Teorema 7 zahteva beskonačno mnogo iteracija k . Pošto takva implementacija nije moguća na digitalnom računaru, algoritam možemo prekinuti u slučaju da dobijene vrednosti $\bar{\varepsilon}_{p,q}$ postanu manje od zadatog kriterijuma zaustavljanja δ . \square

Napomena 22. Teorema 7 podrazumeva da pretragom ne napuštamo prostor parametara \mathcal{D} . U računarskoj implementaciji algoritma neophodno je proveriti ovu pretpostavku, i odstraniti rezultate koji ne pripadaju dozvoljenom domenu \mathcal{D} .

Alternativno, možemo unutar svake iteracije uvesti maksimalan dozvoljeni radijus ε_{max} , i odbaciti rezultate $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0) > \varepsilon_{max}$. \square

5.3 Implementacija

Teoreme 6 i 7 daju teorijsku osnovu za određivanje kompletne oblasti invarijantne stabilnosti u prostoru parametara. Kompletnu oblast je moguće odrediti postupkom koji kombinuje obe pomenute teoreme, a čiju implementaciju ćemo prikazati u okviru ovog odeljka.

5.3.1 Implementacija Teoreme 6

Prvo ćemo opisati postupak za pronalazak konzervativne oblasti invarijantne stabilnosti. Postupak predstavlja računarsku implementaciju Teoreme

6, a pseudokod postupka je prikazan u Proceduri 3 nazvanoj `FindStability-InvarianceRadius`. Ulazni parametri procedure opisani su u Tabeli 5.1, dok rezultat procedure predstavlja vrednost ε koja određuje veličinu (radijus) oblasti invarijantne stabilnosti koja okružuje početnu parametarsku tačku $\boldsymbol{\eta}$. Oblik oblasti određen je parametrom q , koji predstavlja jedan od ulaznih parametara algoritma.

$f(s, \boldsymbol{\eta})$	Karakteristična funkcija sistema.
$\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})$	Konzervativna zamena za imenilac desne strane jednakosti (5.6), kao što je obrazloženo u Napomeni 19.
$\boldsymbol{\eta}$	Početna parametarska tačka, oko koje tražimo oblast invarijantne stabilnosti.
p	Parametar koji određuje normu koja se koristi u (5.6). Procedura pretpostavlja da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
q	Parametar koji određuje oblik dobijene oblasti invarijantne stabilnosti. Procedura pretpostavlja da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
ε_{max}	Najveći dozvoljeni radijus invarijantne stabilnosti.
δ	Kriterijum zaustavljanja procedure.

Tabela 5.1: Ulazni parametri Procedure 3

Napomena 23. Početna vrednost parametarske tačke je u Teoremi 6 obeležena kao $\boldsymbol{\eta}^0$, dok je u okviru Procedure 3 obeležena kao $\boldsymbol{\eta}$. Razlog za to je što ćemo oznaku $\boldsymbol{\eta}^0$ koristiti za početnu vrednost Procedure 4. \square

Cilj procedure je, za zadatu početnu tačku $\boldsymbol{\eta}$, pronaći radijus invarijantne stabilnosti $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})$ koje rešava jednakost 5.6. Pošto je računarskom implementacijom nemoguće pronaći tačnu vrednost $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})$, procedura umesto toga pronalazi vrednost $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})$ koja je bliska $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})$.

Pošto je leva strana jednakosti rastuća, a desna neopadajuća u odnosu na $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta})$, posmatrani problem je identičan problemu koji se rešava unutar Procedure 1. Samim tim, i Procedura 3 je identična Proceduri 1, izuzev uslova koji se proverava u linijama 3 i 14.

Napomena 24. Pošto su procedure 1 i 3 slične izuzev uslova (odnosno nejednakosti) koji se proverava, postupak bisekcije moguće je implementirati kao jedinstveni podprogram koji se koristi za rešavanje oba razmatrana problema. \square

```

1:   Procedure FindStabilityInvarianceRadius
      Inputs :
           $f(s, \boldsymbol{\eta})$ 
           $\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})$ 
           $\boldsymbol{\eta}$ 
           $p$ 
           $q$ 
           $\varepsilon_{max}$ 
           $\delta$ 
      Output :  $\varepsilon$ 
      Require:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 

2:    $\varepsilon := \varepsilon_{max}$  ;
3:    $\varepsilon_{valid} := \left[ \varepsilon < \min \left( \min_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \boldsymbol{\eta})|}{\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})}, \zeta^f \right) \right]$  ;
4:   if  $\varepsilon_{valid}$  then
5:       return  $\varepsilon$ ;
6:   end

7:    $offset := \varepsilon_{max}/2$  ;
8:   while  $offset > \delta$  do
9:       if  $\varepsilon_{valid}$  then
10:           $\varepsilon := \varepsilon + offset$ ;
11:       else
12:           $\varepsilon := \varepsilon - offset$ ;
13:       end
14:        $\varepsilon_{valid} := \left[ \varepsilon < \min \left( \min_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \boldsymbol{\eta})|}{\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})}, \zeta^f \right) \right]$  ;
15:        $offset := offset/2$ 
16:   end

17:   if  $\varepsilon_{valid}$  then
18:       return  $\varepsilon$  ;
19:   else
20:       return  $\varepsilon - (2 * offset)$  ;
21:   end

```

Procedura 3: Traženje radijusa invarijantne stabilnosti ε

5.3.2 Implementacija Teoreme 7

U ovom odeljku prikazaćemo postupak za određivanje kompletne oblasti invarijantne stabilnosti, oslanjajući se na Teoremu 7. Postupak je nazvan `FindStabilityInvarianceRegion` i prikazan kao Procedura 4.

Cilj procedure je, za zadatu početnu parametarsku tačku $\boldsymbol{\eta}^0$, pronaći skup $\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$. Pošto takav skup može biti proizvoljnog oblika, javlja se problem njegove reprezentacije na računaru.

Skup $\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$ se u toku Procedure 4 dobija unijom mnoštva podskupova dobijenih upotrebom Procedure 3. Upravo ćemo takvu reprezentaciju iskoristiti i kao rezultat Procedure 4, odnosno kao reprezentaciju skupa $\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$. Drugim rečima, povratna vrednost procedure će biti skup \mathcal{M}_f konačnog broja podskupova \mathcal{S}_i .

Procedura 4 se oslanja na Proceduru 3 kao jedan od koraka. Ulazni parametri procedure opisani su u Tabeli 5.2.

$f(s, \boldsymbol{\eta})$	Karakteristična funkcija sistema.
$\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})$	Konzervativna zamena za imenilac desne strane jednakosti (5.6), kao što je obrazloženo u Napomeni 19.
$\boldsymbol{\eta}^0$	Početna parametarska tačka, oko koje tražimo kompletnu oblast invarijantne stabilnosti.
p	Parametar koji određuje normu koja se koristi u (5.6). Procedura pretpostavlja da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
q	Parametar koji određuje oblik dobijene oblasti invarijantne stabilnosti. Procedura pretpostavlja da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
\mathcal{D}	Domen parametarskih tačaka. Jednostavniji oblici skupa \mathcal{D} omogućuju efikasniju implementaciju algoritma.
δ	Kriterijum zaustavljanja procedure.
ξ	Parametar koji skalira konzervativan radius invarijantne stabilnosti dobijen unutar svake iteracije procedure, u cilju smanjivanja uticaja grešaka nastalih usled odbirivanja.

Tabela 5.2: Ulazni parametri Procedure 4

U linijama 2-4 glavne promenljive algoritma postavljamo na njihove početne vrednosti. Promenljiva \mathcal{M}_f predstavlja aproksimaciju kompletne obla-

sti invarijantne stabilnosti $\mathcal{M}_f(\boldsymbol{\eta}^0)$, koja je na početku procedure prazna. Promenljiva `points_to_evaluate` predstavlja skup tačaka nad kojima želimo da primenimo Proceduru 3, kako bismo za svaku tačku dobili konzervativnu oblast invarijantne stabilnosti koja je okružuje. Umesto običnog skupa, ova promenljiva ima strukturu FIFO (*First-In, First-Out*) reda. Na početku algoritma, u red ubacujemo početnu tačku $\boldsymbol{\eta}^0$.

U liniji 5 započinjemo glavnu petlju algoritma. Linije 6-8 proveravaju da li je u FIFO redu preostalo potencijalnih tačaka za primenu Procedure 3. U prvoj iteraciji algoritma red zasigurno nije prazan, pošto se u njemu nalazi $\boldsymbol{\eta}^0$. U liniji 9 preuzimamo sledeću potencijalnu tačku iz reda, i dodeljujemo je promenljivoj $\boldsymbol{\eta}$. Linije 10-14 ćemo objasniti naknadno, pošto nisu relevantne u prvoj iteraciji algoritma.

U liniji 15 pronalazimo najveći dozvoljen radijus konzervativne oblasti invarijantne stabilnosti oko $\boldsymbol{\eta}$, u odnosu na dozvoljen domen \mathcal{D} . U slučaju da domen ima oblik hiperkocke, određivanje takve vrednosti ε_{max} je trivijalno. U liniji 16 koristimo Proceduru 3 kako bismo pronašli konzervativnu oblast invarijantne stabilnosti \mathcal{S} oko tačke $\boldsymbol{\eta}$, koju u liniji 17 karakterišemo centrom $\boldsymbol{\eta}$, radijusom ε , i normom (oblikom) q . Novodobijenu oblast pridružujemo aproksimaciji kompletne oblasti invarijantne stabilnosti \mathcal{M}_f . U linijama 20-23 biramo nove tačke za primenu Procedure 3. Tačke uzimamo sa granice novodobijene oblasti \mathcal{S} . Granica sadrži beskonačno tačaka; međutim, unutar računarske implementacije moramo se ograničiti na konačan broj takvih tačaka. U tom pogledu, linija 20 vrši odbirkovanje granice oblasti \mathcal{S} , dok linije 21-23 ubacuju odabrane tačke u FIFO red `points_to_evaluate`.

Postupak ponavljamo iterativno. U svakoj iteraciji glavne petlje, preuzimamo novu tačku iz FIFO reda. U linijama 10-14, proveravamo da li odabrana tačka „još uvek” pripada granici aproksimacije \mathcal{M}_f . Ukoliko se ispostavi da tačka pripada unutrašnjosti neke podoblasti $\mathcal{S}_i \in \mathcal{M}_f$, odabranu tačku ne uzimamo u obzir. U suprotnom, na odabranu tačku primenjujemo Proceduru 3.

Kriterijum zaustavljanja algoritma nalazi se u liniji 19. Naime, ukoliko je konzervativna oblast invarijantne stabilnosti koja je izračunata u nekoj iteraciji „previše mala” (ukoliko je njen radijus ε manji od kriterijuma zaustavljanja δ), onda granicu te oblasti ne koristimo u daljim iteracijama algoritma. Ova pojava ne prekida proceduru trenutno; međutim, zbog opisanog mehanizma će FIFO red `points_to_evaluate` u jednom trenutku postati prazan, što će prekinuti proceduru u liniji 7.

5.3.3 Paralelizacija

Procedura 4 je pogodna za paralelizaciju na više procesorskih jedinica. Međutim, paralelizacija nije trivijalna, pošto iteracije glavne petlje nisu u potpunosti nezavisne. U okviru ovog odeljka pokazaćemo paralelnu implementaciju Procedure 4. Pseudokod paralelne implementacije prikazan je u


```

1:   Procedure FindStabilityInvarianceRegion

      Inputs :
           $f(s, \boldsymbol{\eta})$ 
           $\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})$ 
           $\boldsymbol{\eta}^0$ 
           $p$ 
           $q$ 
           $\mathcal{D}$ 
           $\delta$ 
           $\xi$ 
      Output :  $\mathcal{M}_f$ 
      Require:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 

2:    $\mathcal{M}_f = \emptyset$  ;
3:   points_to_evaluate := empty FIFO queue ;
4:   points_to_evaluate.push( $\boldsymbol{\eta}^0$ ) ;

5:   loop
6:       if points_to_evaluate.empty() then
7:           break loop;
8:       end
9:        $\boldsymbol{\eta} :=$  points_to_evaluate.pop() ;
10:      for  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{M}_f$  do
11:          if  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{S}$  then
12:              skip iteration;
13:          end
14:      end
15:       $\varepsilon_{max} := \max \{x \in \mathbb{R}_0^+ : \boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{D}, \forall \boldsymbol{\eta}^* \in {}_q\mathcal{W}_x^1\}$ ;
16:       $\varepsilon :=$ 
          FindStabilityInvarianceRadius( $f, \overline{M}_r^f, \boldsymbol{\eta}, p, q, \varepsilon_{max}, \delta$ );
17:       $\mathcal{S} := (\boldsymbol{\eta}, \xi \cdot \varepsilon, q)$  ;
18:       $\mathcal{M}_f := \mathcal{M}_f \cup \{\mathcal{S}\}$  ;
19:      if  $\varepsilon > \delta$  then
20:          new_points := sampled boundary of  $\mathcal{S}$  ;
21:          for point in new_points do
22:              points_to_evaluate.push(point) ;
23:          end
24:      end
25:  end loop

26:  return  $\mathcal{M}_f$ 

```

Procedura 4: Određivanje kompletne oblasti invarijantne stabilnosti

dve procedure - Procedura 5 i Procedura 6.

Procedura 5, nazvana `FindStabilityInvarianceRegionParallel`, predstavlja ulaznu tačku paralelne implementacije. U tom pogledu, Procedura 5 direktno menja Proceduru 4, a oslanja se na Proceduru 6, nazvanu `Worker`, kao podprogram. Sama Procedura `FindStabilityInvarianceRegionParallel` je jednostavna. U liniji 2, procedura inicijalizuje aproksimaciju \mathcal{M}_f na prazan skup. Potom, u liniji 3, procedura pokrene „izvršitelja” u vidu podprograma `Worker`, zadajući izvršitelju da pronađe oblast ekvivalentne stabilnosti oko $\boldsymbol{\eta}^0$. Izvršitelj (engl. *worker*) predstavlja logički koncept nezavisnog toka izvršavanja programa, u okviru koga je moguće izvršiti neki podprogram. Izvršitelji se mogu paralelno izvršavati na različitim procesorskim jedinicama, ili konkurentno izvršavati na istoj procesorskoj jedinici. U liniji 4 procedura čeka da svi se pokrenuti izvršitelji završe, posle čega procedura vraća konačni rezultat \mathcal{M}_f .

Napomena 25. Svi izvršitelji čitaju i pišu u istu promenljivu \mathcal{M}_f . Shodno tome, promenljiva \mathcal{M}_f se izvršiteljima prosleđuje „po referenci”. \square

```

1:      Procedure FindStabilityInvarianceRegionParallel
           Inputs :
                $f(s, \boldsymbol{\eta})$ 
                $\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})$ 
                $\boldsymbol{\eta}^0$ 
                $p$ 
                $q$ 
                $\mathcal{D}$ 
                $\delta$ 
                $\xi$ 
           Require:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 
2:       $\mathcal{M}_f = \emptyset$  ;
3:      spawn (Worker,  $f, \overline{M}_r^f, \boldsymbol{\eta}^0, p, q, \mathcal{D}, \delta, \xi, \mathcal{M}_f$ ) ;
4:      wait for all workers to finish ;
5:      return  $\mathcal{M}_f$ 

```

Procedura 5: Paralelna implementacija Procedure 4

Procedura 6, nazvana `Worker`, opisuje jednog izvršitelja. Telo procedure umnogome liči na Proceduru 4. Najpre, izvršitelj u linijama 3-7 proverava da li se dobijena tačka $\boldsymbol{\eta}$ nalazi u unutrašnjosti aproksimacije \mathcal{M}_f . Ukoliko je tako, izvršitelj odbacuje tačku i prekida svoje izvršavanje. U suprotnom, izvršitelj pronalazi konzervativnu oblast invarijantne stabilnosti oko $\boldsymbol{\eta}$, i pridružuje je aproksimaciji \mathcal{M}_f . Ukoliko je novodobijena oblast \mathcal{S} „dovoljno

velika”, izvršitelj odbirkuje nove tačke na granici novodobijene oblasti, i pokreće po jednog novog izvršitelja za svaku odbirkovanu tačku.

Napomena 26. Pošto svi izvršitelji konkurentno/paralelno pristupaju istoj promenljivoj \mathcal{M}_f , potrebno je obezbediti atomske operacije nad promenljivom. Pošto većinu vremena izvršitelji provode čitajući promenljivu \mathcal{M}_f , a samo mali deo vremena provedu pišući u promenljivu, pristup promenljivoj moguće je obezbediti MRSW (*Multiple-Readers, Single-Writer*) katancem radi veće efikasnosti. \square

Ceo postupak se završava kada ne preostane nijedan izvršitelj. Ova situacija se dešava u slučaju da svi postojeći izvršitelji završe svoj podprogram, a da su novodobijene oblasti \mathcal{S} unutar tih izvršitelja „dovoljno male” da ne prouzrokuju pravljenje novih izvršitelja.

5.4 Primer

Slika 5.3 ilustruje primenu Teoreme 7 na primer 1, za $p = q = 2$. Na slici je prikazano prvih 12 iteracija algoritma. Crvenom bojom označena je novodobijena oblast invarijantne stabilnosti u svakoj iteraciji k .

Kompletnu karakterizaciju stabilnosti unutar domena \mathcal{D} dobijamo primenom Teoreme 7 na više početnih tačaka $\boldsymbol{\eta}^0$, odabranih tako da nijedna oblast invarijantne stabilnosti ne bude propuštena. Ovakav odabir početnih tačaka je iskustven i iterativan. U slučaju primera 1, odabrane su početne tačke $[1, 1]$, $[10, 10]$, $[18, 2]$, $[19, 0.15]$ i kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-3}$. Rezultati algoritma prikazani su na slici 5.4, gde je NU_f za svako $\boldsymbol{\eta}^0$ određeno pomoću Košijevog principa argumenta.

```

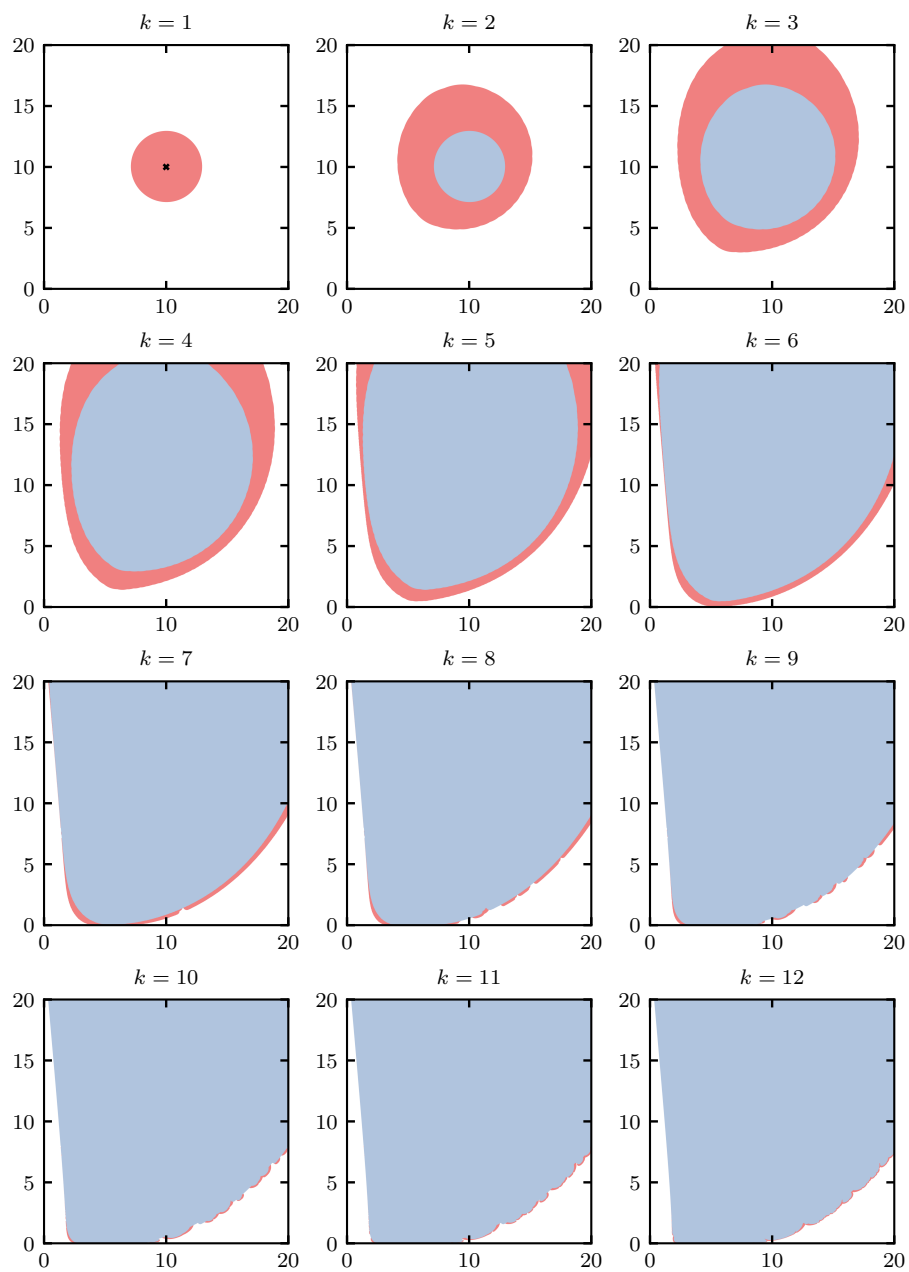
1:   Procedure Worker
      Inputs :
           $f(s, \boldsymbol{\eta})$ 
           $\overline{M}_r^f(\omega, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon, p, q, \varepsilon_{max})$ 
           $\boldsymbol{\eta}$ 
           $p$ 
           $q$ 
           $\mathcal{D}$ 
           $\delta$ 
           $\xi$ 
           $\mathcal{M}^f$ 
      Require:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 

2:   loop
3:       for  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{M}_f$  do
4:           if  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{S}$  then
5:               return ;
6:           end
7:       end
8:        $\varepsilon_{max} := \max \{x \in \mathbb{R}_0^+ : \boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{D}, \forall \boldsymbol{\eta}^* \in {}_q\mathcal{W}_x^1\}$ ;
9:        $\varepsilon :=$ 
10:          FindStabilityInvarianceRadius( $f, \overline{M}_r^f, \boldsymbol{\eta}, p, q, \varepsilon_{max}, \delta$ );
11:        $\mathcal{S} := (\boldsymbol{\eta}, \xi \cdot \varepsilon, q)$  ;
12:        $\mathcal{M}_f := \mathcal{M}_f \cup \{\mathcal{S}\}$  ;
13:       if  $\varepsilon > \delta$  then
14:           new_points := sampled boundary of  $\mathcal{S}$  ;
15:           for  $\boldsymbol{\eta}'$  in new_points do
16:               spawn (Worker,  $f, \overline{M}_r^f, \boldsymbol{\eta}', p, q, \mathcal{D}, \delta, \xi, \mathcal{M}^f$ ) ;
17:           end
18:       end
19:   end loop

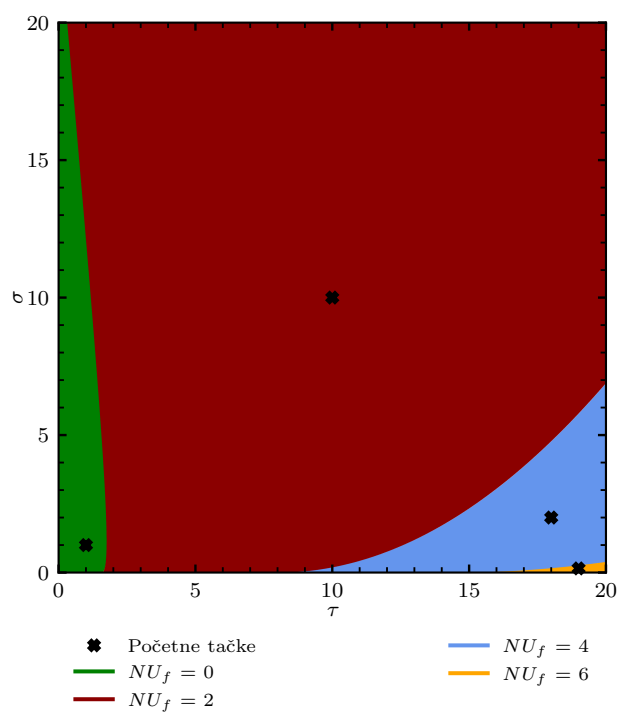
return

```

Procedura 6: Paralelna implementacija Procedure 4



Slika 5.3: Primena Teoreme 7 na primer 1



Slika 5.4: Primena Teoreme 7 na primer 1

Glava 6

Neka proširenja i specijalni slučajevi

Metodi predstavljeni u okviru poglavlja 4 i 5 primenjivi su na široku klasu sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa. Za neke uske podklase takvih sistema, predloženi metodi mogu se realizovati efikasnije. U ovom poglavlju prikazujemo neke slučajeve u kojima se efikasnost metoda može povećati, kao i načine na koje se neke pretpostavke iz poglavlja 3 mogu ublažiti.

6.1 Stabilnost retardiranih sistema

Retardirani sistemi predstavljaju podklasu sistema sa vremenskim kašnjenjem koja se često sreće u praksi. Karakteristična funkcija retardiranih sistema ima oblik (2.22). Prelaskom na notaciju $\eta_i = \tau_i$, karakteristična funkcija se dalje može zapisati u obliku

$$f(s, \boldsymbol{\eta}) = s^m + \sum_{i=1}^n P_i(s) e^{-s\eta_i}, \quad (6.1)$$

gde parametri $\eta_i \geq 0$ predstavljaju diskretna vremenska kašnjenja, a $P_i(s)$ su polinomi čiji stepen $\deg P_i(s) < m$, $m \in \mathbb{N}$, a koji zavise od matrica A_i , B i C_i za $i = 1 \dots n$. Pogodan oblik funkcije (6.1) omogućava efikasniju primenu Teoreme 3 i Teoreme 6. U ovom odeljku prikazane su modifikovane verzije ovih teorema, specijalizovane za retardirane sisteme.

6.1.1 Metod krive

Uvrštavanjem (4.1) u (6.1) dobijamo

$$f(s, \boldsymbol{\theta}) = s^m + \sum_{i=1}^n P_i(s) e^{-s\eta_i(\boldsymbol{\theta})}. \quad (6.2)$$

Radi veće opštosti, u okviru ovog odeljka razmatraćemo nešto širu klasu karakterističnih funkcija

$$f(s, \theta) = s^m + \sum_{i=1}^n f_i(s) e^{-s\eta_i(\theta)}, \quad (6.3)$$

gde $f_i(s)$ predstavljaju proizvoljne kompleksne funkcije. Funkcije oblika (6.2) predstavljaju specijalan slučaj funkcija koje poseduju oblik (6.3), u kojem funkcije $f_i(s)$ imaju oblik polinoma.

Teorema 8. *Neka je data karakteristična funkcija f oblika (6.3), i neka f zadovoljava Pretpostavke 1-5. Neka je data neprekidno diferencijabilna kriva u prostoru parametara (4.1), i neka je dato $\theta_0 \in \Omega$ takvo da $f(j\omega, \theta_0) \neq 0, \forall \omega \in \Xi^f$. Tada važi $NU_f(\theta_0 + \Delta) = NU_f(\theta_0)$ za svako $\Delta \in [0, \bar{\Delta}(\theta_0)]$, gde $\bar{\Delta}(\theta_0)$ predstavlja rešenje jednakosti*

$$\bar{\Delta}(\theta_0) = \inf_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \theta_0)|}{\omega \sum_{i=1}^n |f_i(j\omega)| \max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta_0 + \bar{\Delta}(\theta_0)} \left| \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|}. \quad (6.4)$$

Dokaz. Kao posledica Teoreme 3, $NU_f(\theta_0 + \Delta) = NU_f(\theta_0)$ važi za svako $\Delta \in [0, \bar{\Delta}(\theta_0)]$ ukoliko je zadovoljeno (4.7). Dalje, uvrštavanjem (6.3) u imenilac desne strane izraza (4.7) dobijamo

$$\begin{aligned} \max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta_0 + \Delta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right| &= \max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta_0 + \Delta} \omega \sum_{i=1}^n \left| f_i(j\omega) \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right| \\ &\leq \omega \sum_{i=1}^n |f_i(j\omega)| \max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta_0 + \Delta} \left| \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Uvrštavanje konzervativnog maksimuma (6.5) u (4.7) trivijalno dokazuje teoremu. \square

Napomena 27. U slučaju da je kriva (4.1) definisana kao poluprava (4.13), karakteristična funkcija sistema (6.3) poprima oblik

$$f(s, \theta) = s^m + \sum_{i=1}^n f_i(s) e^{-s\theta a_i}, \quad (6.6)$$

dok jednakost (6.4) poprima posebno jednostavan oblik

$$\bar{\Delta}(\theta_0) = \inf_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \theta_0)|}{\omega \sum_{i=1}^n a_i |f_i(j\omega)|}, \quad (6.7)$$

gde su a_i realni koeficijenti zavisni od (4.13). \square

Primer 2. Posmatrajmo retardirani sistem opisan karakterističnom funkcijom

$$f(s, \tau_1, \tau_2) = s^2 + 2se^{-s\tau_1} + e^{-s\tau_2}. \quad (6.8)$$

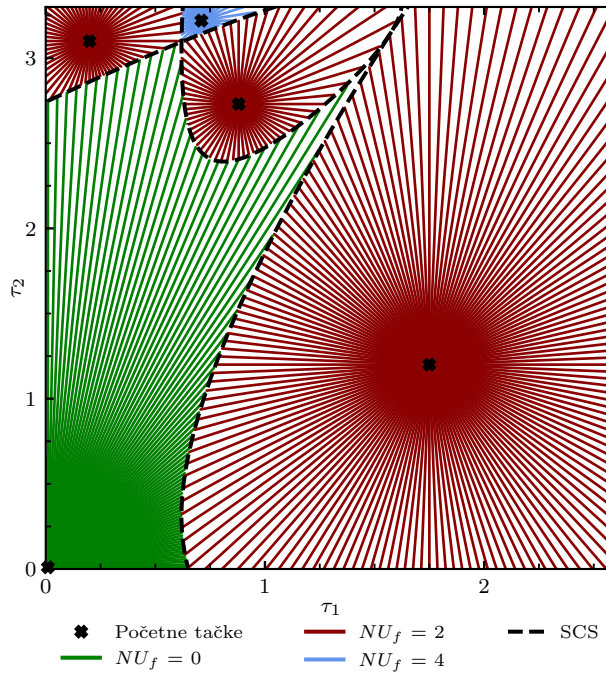
Primenom Teoreme 8 ispitaćemo stabilnost sistema u zavisnosti od parametara τ_1 i τ_2 .

Pošto ćemo metod primenjivati duž poluprave, korišćićemo modifikovani oblik teoreme dat izrazom (6.7). Karakteristična funkcija sistema može se zapisati u obliku (6.6), gde je

$$m = 2, f_1(s) = 2e^{-s\tau_1^0}, f_2(s) = e^{-s\tau_2^0}, a_1 = \cos \alpha, a_2 = \sin \alpha, \quad (6.9)$$

a α je ugao koji određuje pravac jediničnog vektora iz (4.13).

Iterativna primena nejednakosti (6.7) daje rezultate prikazane na slici 6.1. Algoritam je primenjen na početne tačke $[0, 0]$, $[1.75, 1.20]$, $[0.88, 2.73]$, $[0.20, 3.10]$, $[0.71, 3.22]$, sa kriterijumom zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-3}$ u domenu $\mathcal{D} = [0, 2.6] \times [0, 3.3]$. Rezultati su prikazani uporedno sa SCS dobijenim pomoću metoda iz [158].



Slika 6.1: Iterativna primena Teoreme 8 na primer 2

□

6.1.2 Metod oblasti

Teorema 9. Neka je data karakteristična funkcija f oblika (6.3), i neka f zadovoljava Pretpostavke 1-5. Neka je data početna vrednost parametra

$\boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{D}$ za koju važi $f(j\omega, \boldsymbol{\eta}^0) \neq 0, \forall \omega \in \Xi^f$. Neka su p i q realni brojevi takvi da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty. \quad (6.10)$$

Tada važi

$$NU_f(\boldsymbol{\eta}^0) = NU_f(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}_q\mathcal{W}_\varepsilon^1(\boldsymbol{\eta}^0). \quad (6.11)$$

za svako $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)]$, gde $\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0)$ predstavlja rešenje jednakosti

$$\bar{\varepsilon}_{p,q}(\boldsymbol{\eta}^0) = \inf_{\omega \in \Xi^f} \frac{|f(j\omega, \boldsymbol{\eta}^0)|}{\omega \left(\sum_{i=1}^n |P_i(j\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}}}. \quad (6.12)$$

Dokaz. Uvođenjem (6.1) u imenilac desne strane jednakosti (5.6) dobijamo

$$\begin{aligned} \|\nabla f(j\omega, \boldsymbol{\eta})\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial \eta_i}(j\omega, \boldsymbol{\eta}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n | -j\omega P_i(j\omega) e^{-j\omega \eta_i} |^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \omega \left(\sum_{i=1}^n |P_i(j\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dakle, supremum u imeniocu nejednakosti (5.6) ne zavisi od $\boldsymbol{\eta}$. Uvrštavanjem (6.13) u (5.6) dobijamo (6.12), čime je dokaz završen. \square

Napomena 28. Smena (6.13) ne uvodi dodatni konzervativizam, a omogućava efikasnu i uniformnu primenu teoreme na retardirane sisteme. \square

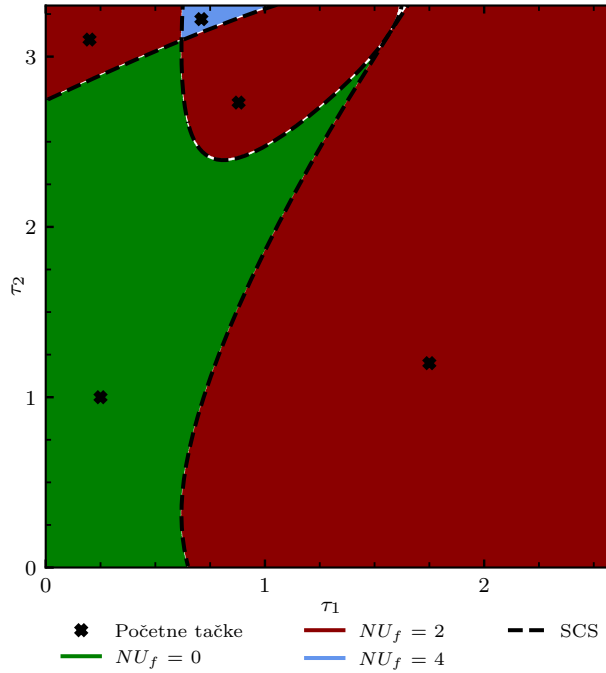
Primer 2 (nastavak). Teoremu 9 primenićemo na karakterističnu funkciju (6.8). Radi potrebe teoreme, karakterističnu funkciju ćemo izraziti u obliku (6.1), gde su

$$m = 2, \quad P_1(s) = 2s, \quad P_2(s) = 1. \quad (6.14)$$

Rezultati iterativne primene teoreme prikazani su na slici 6.2. Algoritam je primenjen na početne tačke [0.25, 1.00], [1.75, 1.20], [0.88, 2.73], [0.20, 3.10] i [0.71, 3.22] u domenu $\mathcal{D} = [0, 2.6] \times [0, 3.3]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-3}$. Rezultati su prikazani uporedno sa SCS dobijenim pomoću metoda iz [158]. \square

6.2 Ublažavanje pretpostavki

Neke karakteristične funkcije zadovoljavaju Pretpostavke 1-4, ali ne zadovoljavaju Pretpostavku 5.



Slika 6.2: Iterativna primena Teoreme 9 na primer 2

Primer 3. Posmatrajmo karakterističnu funkciju

$$f(s, \eta) = s^\eta + 1, \quad (6.15)$$

gde $\eta \in \mathcal{D} = (0, L)$, $1 < L < \infty$. Pretpostavke 1-4 su zadovoljene, ali Pretpostavka 5 nije zadovoljena. \square

U ovom odeljku prikazan je način da se ovaj problem zaobiđe. Predloženi metod predstavlja uopštenje metoda prikazanog u [46], gde je slična tehnika primenjena na specifični slučaj frakcionih sistema. Radi kompletnosti, metod prikazujemo u okviru disertacije.

Osnovna ideja sastoji se od proširivanja karakteristične funkcije f pomoćnom funkcijom h , dajući proširenu karakterističnu funkciju

$$f^*(s, \eta) = f(s, \eta) h(s, \eta). \quad (6.16)$$

Cilj je karakterističnu funkciju proširiti na način koji ispunjava Pretpostavku 5, a koji ne utiče na $NU_f(\eta)$.

Teorema 10. Neka je data karakteristična funkcija f kao u Definiciji 16 i neka f zadovoljava Pretpostavke 1-4, ali ne i Pretpostavku 5. Definišimo f^* kao u 6.16, gde $h(s, \eta)$ predstavlja pomoćnu funkciju koja zadovoljava sledeće uslove:

(i) h zadovoljava Pretpostavke 1-4, tako da $\Xi^h \subseteq \Xi^f$.

(ii) $NU_h(\boldsymbol{\eta}) = 0, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$.

(iii) $B^{f^*}(s) = \infty, \forall s \in \mathcal{K}_2^f \cup \mathcal{K}_3^f, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$.

Tada f^* zadovoljava Pretpostavke 1-5 i

$$NU_f(\boldsymbol{\eta}) = NU_{f^*}(\boldsymbol{\eta}), \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}. \quad (6.17)$$

Dokaz. Proširena funkcija f^* zadovoljava Pretpostavku 1, jer je proizvod dve analitičke funkcije analitička funkcija. Pošto je granična vrednost proizvoda dve funkcije jednaka proizvodu graničnih vrednosti pojedinačnih funkcija, funkcija f^* zadovoljava Pretpostavku 2. Pošto je proizvod dve neprekidne funkcije neprekidna funkcija i proizvod dve diferencijabilne funkcije diferencijabilna funkcija, f^* zadovoljava i Pretpostavku 3. Pretpostavka 4 je zadovoljena usled činjenice da i f i h zadovoljavaju Pretpostavku 4. Pretpostavka 5 je direktno zadovoljena zbog (iii).

Tvrđnja 6.17 trivijalno sledi iz (ii), čime je dokaz završen. \square

Primer 3 (nastavak). Posmatrajmo karakterističnu funkciju (6.15) i definišimo $L^* = \lceil L \rceil + 1$, gde $\lceil L \rceil$ označava gornji ceo broj u odnosu na realni broj L . Definišimo pomoćnu funkciju

$$h(s, \eta) = \left(s^{\frac{L^* - \eta}{L^*}} + 1 \right)^{L^*}. \quad (6.18)$$

Pošto h zadovoljava uslove Teoreme 10, stabilnost karakteristične funkcije f može se ispitivati primenom Teorema 3-7 na funkciju f^* . \square

Primer 4. Posmatrajmo sistem opisan karakterističnom funkcijom

$$f(s, \beta, \sigma) = s^\beta + ke^{-\sqrt{\sigma}s}, \quad (6.19)$$

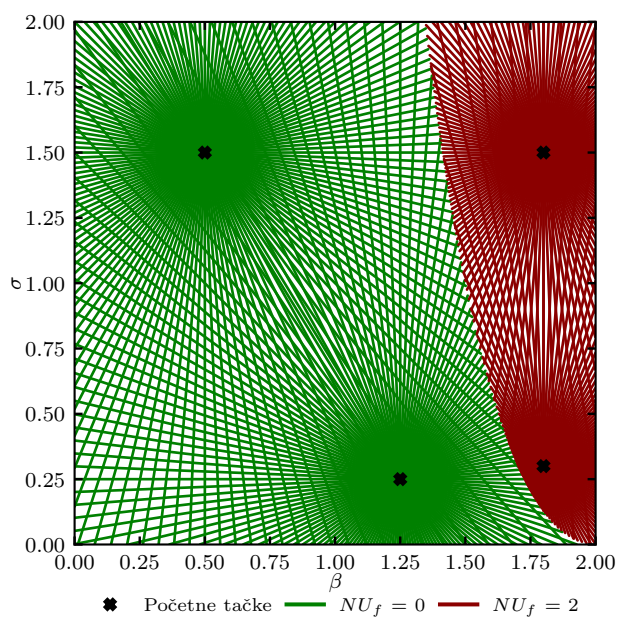
gde $\beta \in [0, L]$, $0 < L < \infty$ i $\sigma \in [0, 2]$. Cilj je analizirati stabilnost sistema u zavisnosti od parametara β i σ . Karakteristična funkcija 6.19 zadovoljava Pretpostavke 1-4, ali ne zadovoljava Pretpostavku 5. Definišimo pomoćnu funkciju

$$h(s, \beta, \sigma) = \left(s^{\frac{L-\beta}{L}} + 1 \right)^{L^*}, \quad (6.20)$$

gde je $L^* = \lceil L \rceil$. Pošto (6.19) i (6.20) zadovoljavaju uslove Teoreme 10, stabilnost karakteristične funkcije f analiziraćemo primenom Teorema 4 i 7 na proširenu karakterističnu funkciju

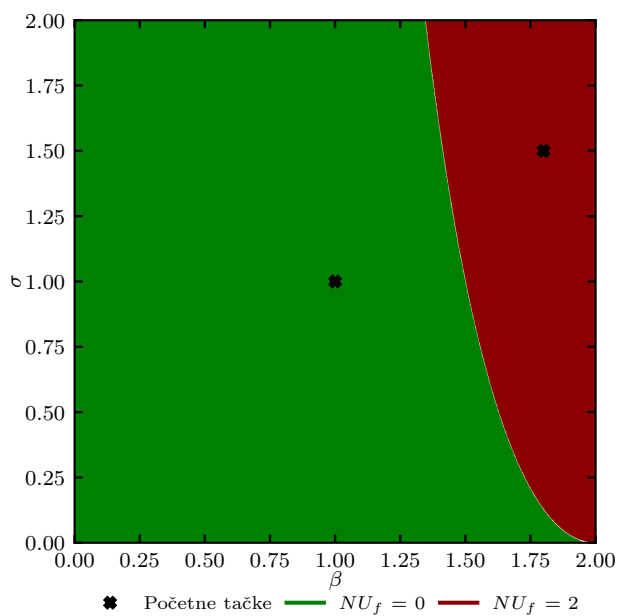
$$f^*(s, \beta, \sigma) = \left(s^\beta + ke^{-\sqrt{\sigma}s} \right) \left(s^{\frac{L-\beta}{L}} + 1 \right)^{L^*}. \quad (6.21)$$

Na slici 6.3 prikazani su rezultati primene Teoreme 4 na (6.21), za $L = 2$. Teorema je primenjena na početne tačke $[0.50, 1.50]$, $[1.25, 0.25]$, $[1.80, 1.50]$ i $[1.80, 0.30]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-3}$.



Slika 6.3: Primena Teoreme 4 na primer 4

Na slici 6.4 prikazani su rezultati primene Teoreme 7 na (6.21), takođe uzimajući $L = 2$. Teorema je primenjena na početne tačke $[1, 1]$ i $[1, 8, 1.5]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-3}$.



Slika 6.4: Primena Teoreme 7 na primer 4

□

Glava 7

Primeri

U ovom poglavlju prikazana je primena teorema 3-7 na različite klase sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa.

7.1 Sistemi sa vremenskim kašnjenjem

Primer 5. Posmatrajmo sistem modelovan u prostoru stanja

$$\dot{x}(t) = - \int_{-\tau}^0 e^{k\alpha} x(t + \alpha) d\alpha. \quad (7.1)$$

Dati sistem ima karakterističnu funkciju

$$f(s, \tau, k) = s^2 + sk + 1 - e^{-\tau(s+k)}. \quad (7.2)$$

Ispitaćemo stabilnost sistema u prostoru parametara τ i k , u domenu $\mathcal{D} = [0, 20.5] \times [0, 0.5]$

Na slici 7.1 prikazani su rezultati primene Teoreme 4 na početne tačke [1.0, 0.4], [10.0, 0.4], [17.0, 0.4], [4.9, 0.1], [8.0, 0.04], [11.3, 0.08], [14.5, 0.04], [17.5, 0.08], [12.0, 0.013], [18.0, 0.018], [19.9, 0.047], i [16.19, 0.007]. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-4}$.

Na slici 7.2 prikazani su rezultati primene Teoreme 7 na početne tačke [1.0, 0.2], [4.9, 0.1], [8.0, 0.04], [11.3, 0.08], [14.5, 0.04], [17.5, 0.08], [12.0, 0.013], [18.0, 0.018], [19.9, 0.047] i [16.19, 0.007]. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 5 \times 10^{-4}$.

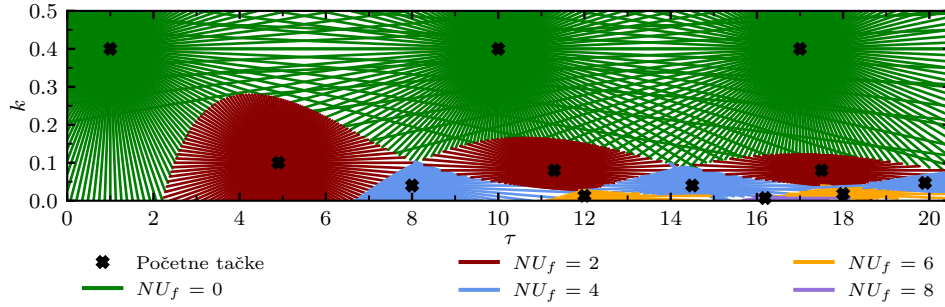
□

Primer 6. Posmatrajmo sistem modelovan u prostoru stanja

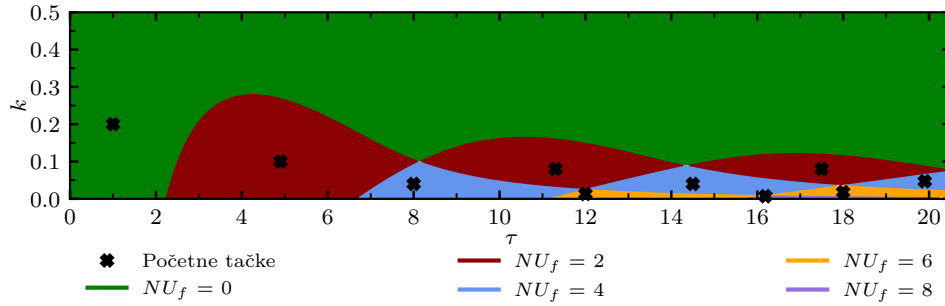
$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau_1) - \int_{-\tau_2}^0 e^{k\alpha} x(t + \alpha) d\alpha. \quad (7.3)$$

Dati sistem ima karakterističnu funkciju

$$f(s, \tau_1, \tau_2, k) = s^2 + s(k + e^{-s\tau_1}) + ke^{-s\tau_1} + 1 - e^{-\tau_2(s+k)}. \quad (7.4)$$



Slika 7.1: Primena Teoreme 4 na primer 5



Slika 7.2: Primena Teoreme 7 na primer 5

Ispitaćemo stabilnost sistema u prostoru parametara τ_1 , τ_2 i k , u domenu $\mathcal{D} = [0, 0.55] \times [3, 13] \times [0, 18 \times 10^{-3}]$. Na slikama 7.3 i 7.4 prikazani su rezultati Teoreme 4 na (7.4), koristeći početnu tačku $\eta^0 = [0.25, 8, 3 \times 10^{-3}]$ i kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

□

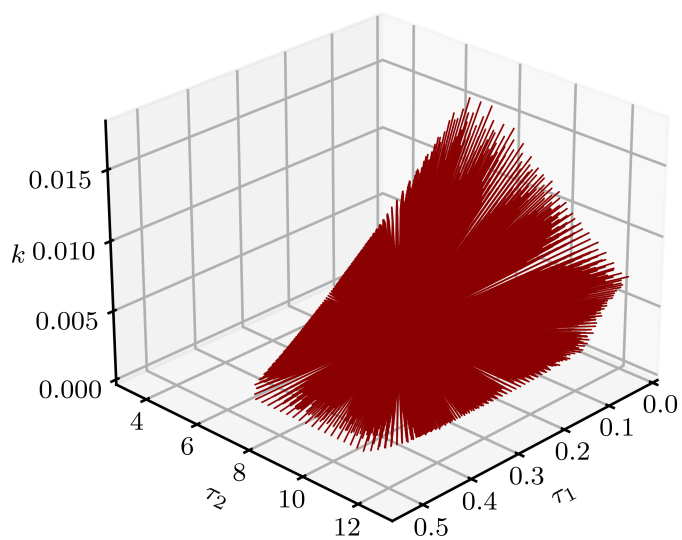
7.2 Frakcioni sistemi

Primer 7. Posmatrajmo sistem opisan karakterističnom funkcijom

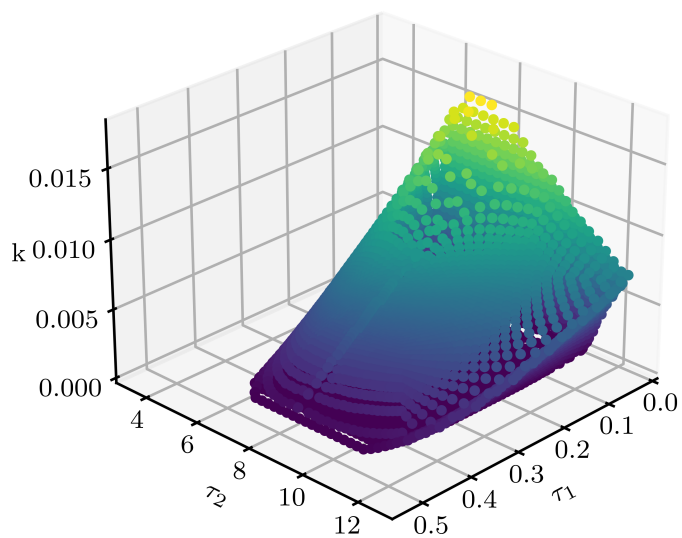
$$f(s) = s + ke^{-x\sqrt{\psi(s)}}, \quad \psi(s) = \frac{(s^{\alpha+\beta} + as^\alpha + b)(s^\gamma + 1)}{s^\beta + a}, \quad (7.5)$$

koja odgovara uopštenoj frakcionoj telegrafskoj jednačini u zatvorenoj povratnoj sprezi [259]. Ispitaćemo stabilnost sistema u dva prostora parametara:

- Prostor parametara x i k , u domenu $\mathcal{D}_1 = [0, 4] \times [4, 8]$.
- Prostor parametara α i γ , u domenu $\mathcal{D}_2 = [0.2, 0.9]^2$.

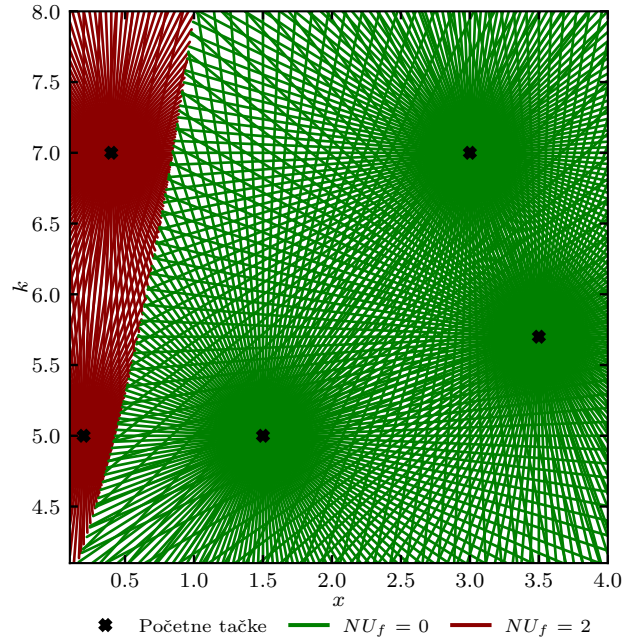


Slika 7.3: Primena Teoreme 4 na primer 6 - prikaz dobijenih polupravnih invarijantne stabilnosti.



Slika 7.4: Primena Teoreme 4 na primer 6 - prikaz krajnjih tačaka dobijenih segmenata invarijantne stabilnosti.

Slika 7.5 prikazuje primenu Teoreme 4 na (7.5) u prostoru parametara x i k , koristeći početne tačke $[0.4, 7.0]$, $[0.2, 5.0]$, $[3.0, 7.0]$, $[1.5, 5.0]$ i $[3.5, 5.7]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-4}$.



Slika 7.5: Primena Teoreme 4 na primer 7

Slika 7.6 prikazuje primenu Teoreme 7 na (7.5) u prostoru parametara x i k , koristeći početne tačke $[0.4, 7.0]$ i $[2.5, 6.0]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-4}$.

Slika 7.7 prikazuje primenu Teoreme 4 na (7.5) u prostoru parametara α i γ , koristeći početne tačke $[0.40, 0.40]$, $[0.70, 0.70]$, $[0.86, 0.86]$ i $[0.89, 0.89]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-4}$.

Slika 7.8 prikazuje primenu Teoreme 7 na (7.5) u prostoru parametara α i γ , koristeći početne tačke $[0.40, 0.40]$, $[0.70, 0.70]$, $[0.86, 0.86]$ i $[0.89, 0.89]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 5 \times 10^{-5}$.

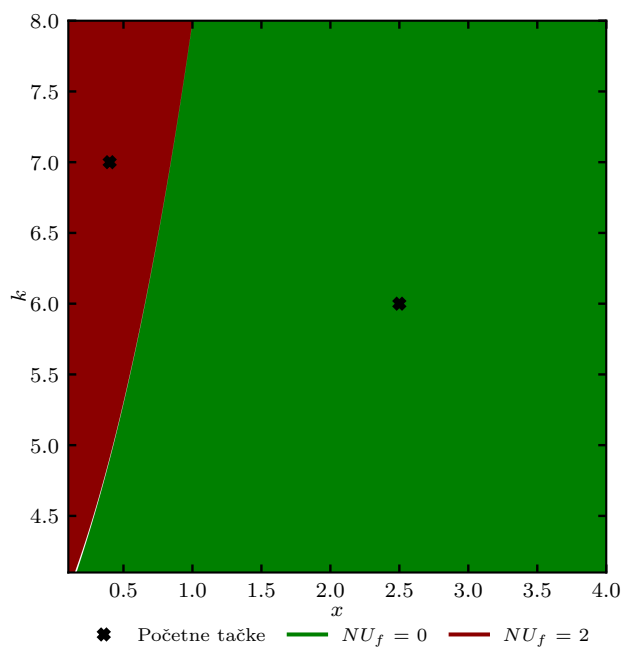
□

7.3 Sistemi sa distribuiranim parametrima

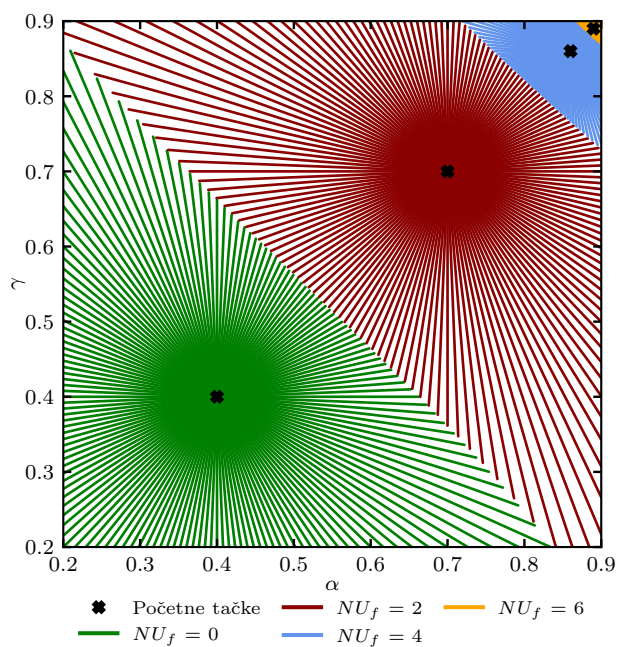
Primer 8. Posmatrajmo sistem opisan karakterističnom funkcijom

$$f(s, k, \sigma) = s + ke^{-\sqrt{\sigma}s}. \quad (7.6)$$

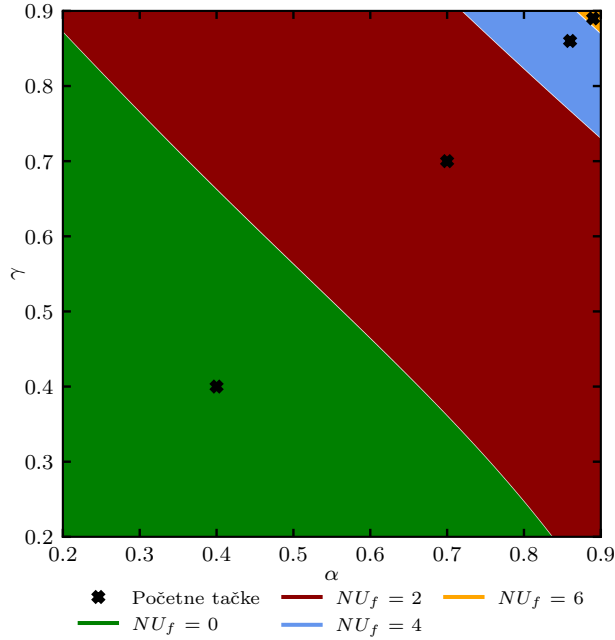
Ispitaćemo stabilnost sistema u prostoru parametara k i σ , u domenu $[k, \sigma] \in \mathcal{D} = [0, 20]^2$. Na slici 7.9 prikazani su rezultati primene Teoreme 4 na početne



Slika 7.6: Primena Teoreme 7 na primer 7



Slika 7.7: Primena Teoreme 4 na primer 7



Slika 7.8: Primena Teoreme 7 na primer 7

tačke $[0.5, 0.5]$, $[4.0, 4.0]$, $[2.0, 10.0]$, $[10.0, 2.0]$, $[6.0, 6.0]$, $[16.0, 10.0]$, $[10.0, 16.0]$, Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

Na slici 7.10 prikazani su rezultati primene Teoreme 7 na početne tačke $[4, 4]$, $[6, 6]$, Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-2}$.

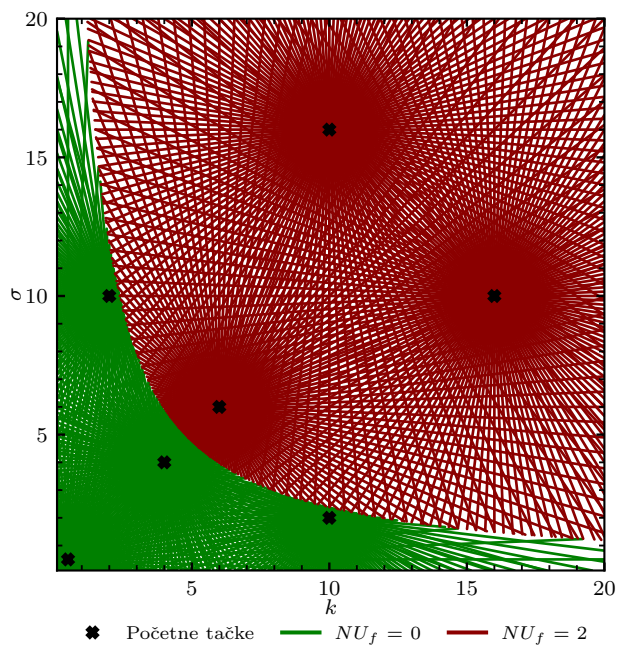
□

Primer 9. Posmatrajmo upravljački sistem prikazan na slici 7.11. Funkcija prenosa sistema kojim upravljamo označena je sa $G(s)$, dok je proporcijalno pojačanje P regulatora označeno sa k . Vreme neophodno da se signal sprovede od regulatora do aktuatora, kao i vreme neophodno da se signal sprovede od senzora do regulatora, označeno je sa $e^{-\frac{\tau}{2}}$. Dakle, ukupno vremensko kašnjenje cele petlje jednako je $\tau \geq 0$. Funkcija prenosa spregnutog sistema je

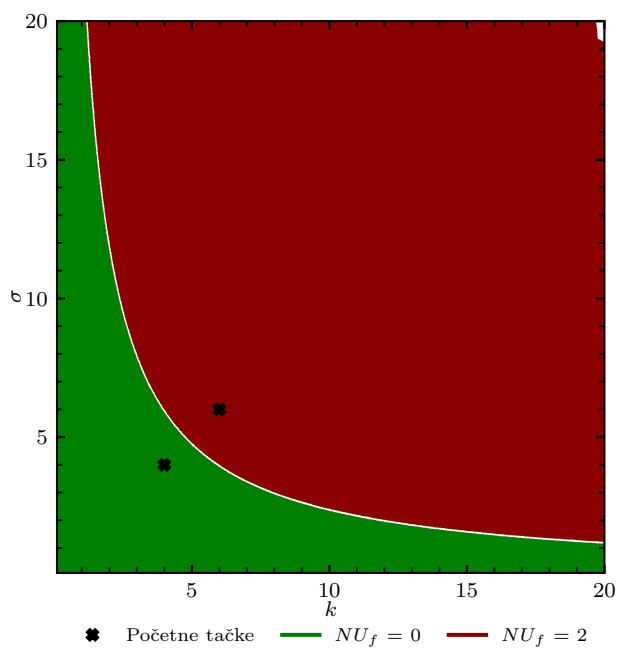
$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{ke^{-s\frac{\tau}{2}}G(s)}{1 + ke^{-s\tau}G(s)}. \quad (7.7)$$

Cilj nam je analiza stabilnosti sistema u zatvorenoj sprezi u zavisnosti od parametara τ i k . U nastavku su prikazana tri slučaja koja odgovaraju različitim sistemima $G(s)$.

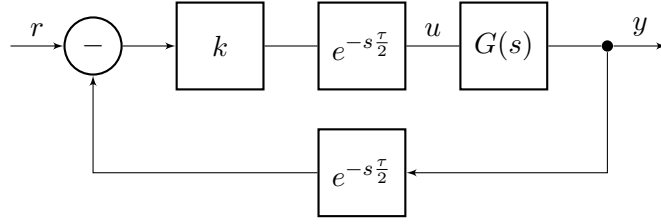
1. Provođenje toplote u polu-beskonačnom štapu Posmatrajmo jednodimenzionalno provođenje toplote u tankom štapu, kao što je prikazano na slici 7.12. U prvom slučaju posmatračemo polu-beskonačni štap, dužine



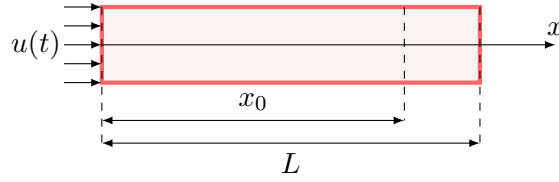
Slika 7.9: Primena Teoreme 7 na primer 8



Slika 7.10: Primena Teoreme 7 na primer 8



Slika 7.11: Upravljački sistem iz primera 9.

Slika 7.12: Zagrevanje jednog kraja štapa dužine $0 < L \leq \infty$.

$L \rightarrow \infty$. Štap je toplotno izolovan, osim na svojim krajevima. Temperaturu štapa obeležimo kao $\theta(t, x)$. Na levom kraju $x = 0$, štap se greje ulaznim toplotnim fluksom $u(t, 0) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, 0)$, gde λ predstavlja toplotnu provodljivost materijala od kog je štap sačinjen. Temperatura štapa meri se na poprečnom preseku $x = x_0 > 0$.

Odgovarajući model raspodele temperature duž štapa opisan je jednačinom provođenja toplote

$$\frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} = \sigma^{-1} \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t}, \quad (7.8)$$

gde σ predstavlja koeficijent toplotne provodljivosti materijala od kog je štap sačinjen. Granični uslovi sistema dati su jednakostima

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, 0) = u(t, 0) \quad \wedge \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, L) = 0. \quad (7.9)$$

Uzevši $L \rightarrow \infty$, funkcija prenosa sistema data je izrazom

$$G(s) = \frac{e^{-x_0 \sqrt{\frac{s}{\sigma}}}}{\lambda \sqrt{\frac{s}{\sigma}}}. \quad (7.10)$$

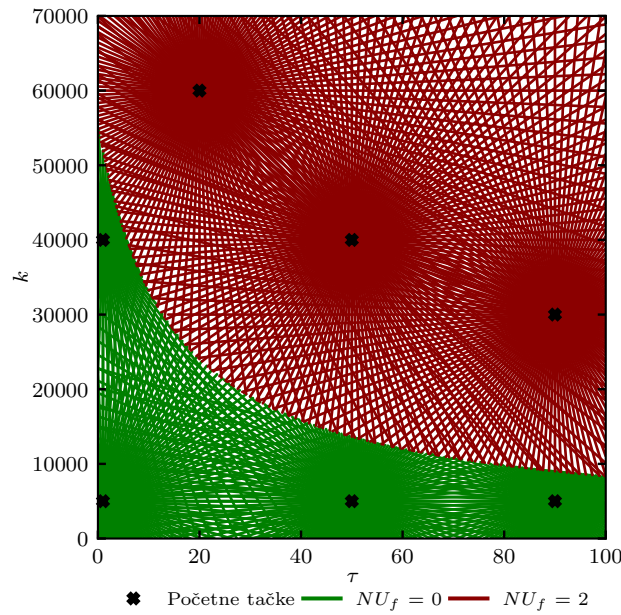
Odgovarajuća funkcija prenosa spregnutog sistema je

$$F(s) = \frac{k e^{-s\tau/2} e^{-x_0 \sqrt{\frac{s}{\sigma}}}}{\lambda \sqrt{\frac{s}{\sigma}} + k e^{-s\tau} e^{-x_0 \sqrt{\frac{s}{\sigma}}}}. \quad (7.11)$$

Teoreme 4 i 7 primenjene su na karakterističnu funkciju

$$f(s, \tau, k) = \lambda \sqrt{\frac{s}{\sigma}} + k e^{-s\tau} e^{-x_0 \sqrt{\frac{s}{\sigma}}}. \quad (7.12)$$

Smatramo da je štap sačinjen od aluminijuma, čija toplotna provodljivost je $\lambda = 237 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, a koeficijent toplotne provodljivosti $\sigma = 98.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ [280]. Temperatura se meri na rastojanju $x_0 = 0.15 \text{ m}$ od levog kraja štapa. Rezultati Teoreme 4 prikazani su na slici 7.13. Teorema je primenjena na početne tačke $[1, 0.5 \times 10^4]$, $[50, 0.5 \times 10^4]$, $[90, 0.5 \times 10^4]$, $[1, 4 \times 10^4]$, $[50, 4 \times 10^4]$, $[20, 6 \times 10^4]$ i $[90, 3 \times 10^4]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 0.8$.



Slika 7.13: Primena Teoreme 4 na primer 9, polu-beskonačni štap

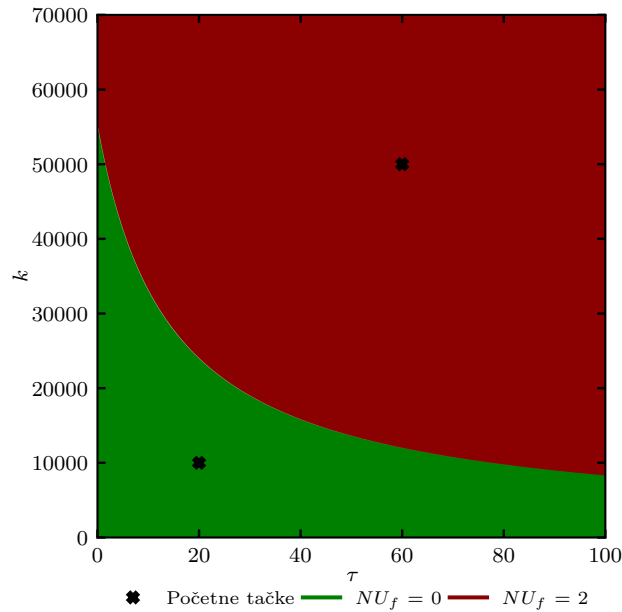
Rezultati Teoreme 7 prikazani su na slici 7.14. Teorema je primenjena na početne tačke $[20, 1 \times 10^4]$ i $[60, 5 \times 10^4]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 0.1$.

2. Provođenje toplote u štapu konačne dužine U ovom odeljku ponovo posmatramo provođenje toplote u štapu. Međutim, posmatrani štap će u ovom slučaju biti konačne dužine $0 < L < \infty$. Odgovarajuća funkcija prenosa procesa je

$$G(s) = \frac{\sinh((L-x)\sqrt{\frac{s}{\sigma}})}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\sigma}} \cosh(L\sqrt{\frac{s}{\sigma}})}, \quad (7.13)$$

dok je funkcija prenosa sistema u zatvorenoj sprezi

$$F(s) = \frac{ke^{-s\frac{\tau}{2}} \sinh((L-x)\sqrt{\frac{s}{\sigma}})}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\sigma}} \cosh(L\sqrt{\frac{s}{\sigma}}) + ke^{-s\tau} \sinh((L-x)\sqrt{\frac{s}{\sigma}})}. \quad (7.14)$$



Slika 7.14: Primena Teoreme 7 na primer 9, polu-beskonačni štap

Teoreme 4 i 7 primenjene su na karakterističnu funkciju

$$f(s, \tau, k) = \lambda \sqrt{\frac{s}{\sigma}} \cosh \left(L \sqrt{\frac{s}{\sigma}} \right) + k e^{-s\tau} \sinh \left((L - x) \sqrt{\frac{s}{\sigma}} \right). \quad (7.15)$$

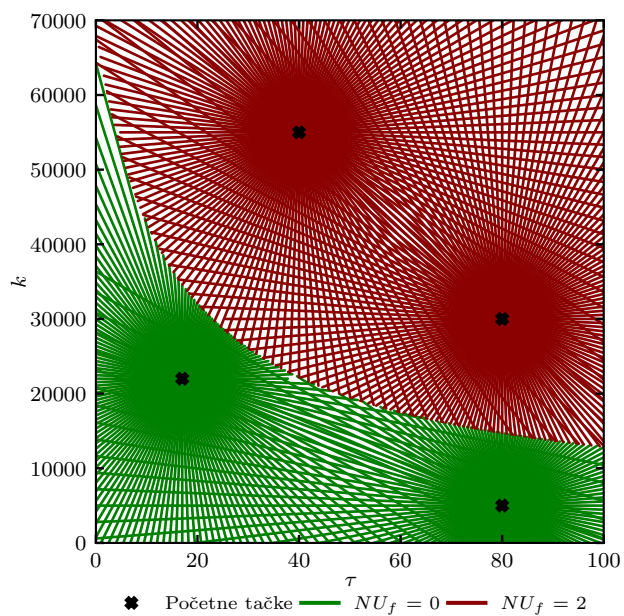
Smatramo da je štap dužine $L = 0.2$ m. Ostali parametri štapa su nepromenjeni u odnosu na polu-beskonačni štap. Rezultati Teoreme 4 prikazani su na slici 7.15. Teorema je primenjena na početne tačke $[17.0, 22 \times 10^3]$, $[80.0, 5 \times 10^3]$, $[40.0, 55 \times 10^3]$ i $[80.0, 30 \times 10^3]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1$.

Rezultati Teoreme 7 prikazani su na slici 7.16. Teorema je primenjena na početne tačke $[25, 15 \times 10^3]$ i $[60, 50 \times 10^3]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 0.1$.

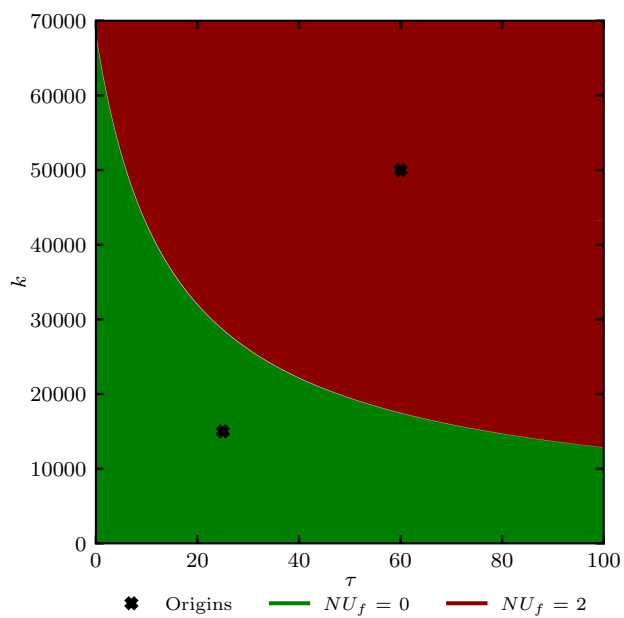
3. Prostiranje napona u uparenim električnim provodnicima Posmatrajmo par električnih provodnika beskonačne dužine, modelovanih pomoću telegrafskih jednačina. Napon $v(x, t)$ u prostorno-vremenskom domenu modelovan je jednačinom

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = \left[HC \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (RC + GH) \frac{\partial}{\partial t} + GR \right] v(x, t), \quad (7.16)$$

gde H predstavlja podužnu induktivnost voda, C predstavlja podužnu kapacitivnost voda, R predstavlja podužnu otpornost voda i G predstavlja podužnu provodnost voda. Na levom (konačnom) kraju, vod se napaja iz



Slika 7.15: Primena Teoreme 4 na primer 9, konačni štap



Slika 7.16: Primena Teoreme 7 na primer 9, konačni štap

naponskog izvora $v(0, t) = u(t)$. Ovo ujedno predstavlja prvi granični uslov sistema, dok je drugi granični uslov dat kao $v(L = \infty, t) = 0$. Napon je meren na udaljenosti $x_0 > 0$ od levog (konačnog) kraja voda, dajući izlaz sistema $y(t) = v(x_0, t)$.

Uzimajući $L \rightarrow \infty$, dobijamo funkciju prenosa sistema

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{x_0 \sqrt{(Cs+G)(Hs+R)}}, \quad (7.17)$$

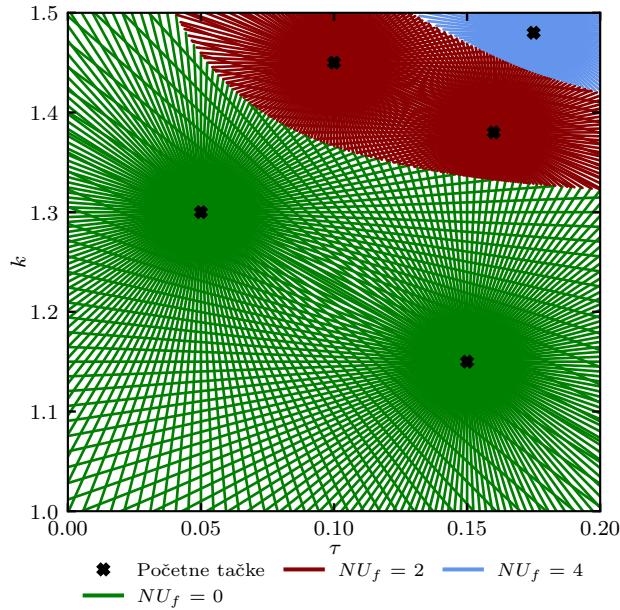
i funkciju spregnutog prenosa

$$F(s) = \frac{ke^{-s\frac{\tau}{2}} e^{x_0 \sqrt{(Cs+G)(Hs+R)}}}{1 + ke^{-s\tau} e^{x_0 \sqrt{(Cs+G)(Hs+R)}}}. \quad (7.18)$$

Teoreme 4 i 7 primenjene su na karakterističnu funkciju

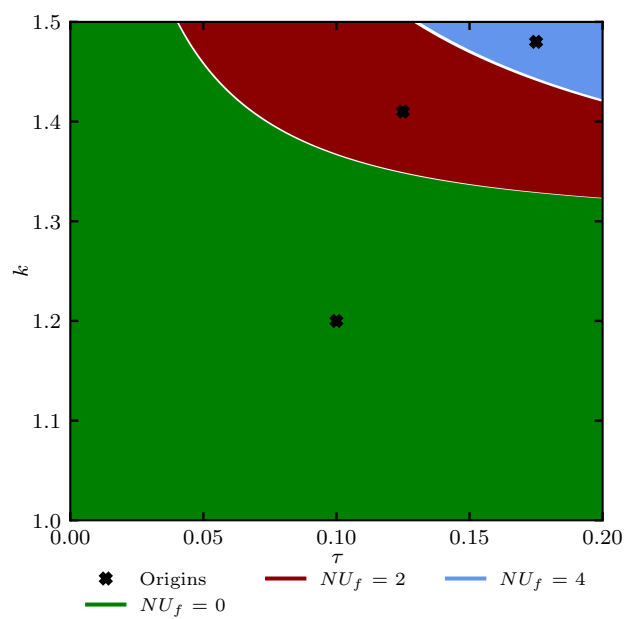
$$f(s, \tau, k) = 1 + ke^{-s\tau} e^{x_0 \sqrt{(Cs+G)(Hs+R)}}. \quad (7.19)$$

Za električne karakteristike vodova uzete su vrednosti $R = 17.224 \text{m}\Omega \text{m}^{-1}$, $C = 51.57 \text{pF m}^{-1}$, $H = 612.9 \text{nH m}^{-1}$ i $G = 1 \text{nS m}^{-1}$ po ugledu na [281]. Rezultati Teoreme 4 prikazani su na slici 7.17. Teorema je primenjena na početne tačke $[0.05, 1.3]$, $[0.15, 1.15]$, $[0.1, 1.45]$, $[0.16, 1.38]$ i $[0.175, 1.48]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-5}$.



Slika 7.17: Primena Teoreme 4 na primer 9, par provodnika

Rezultati Teoreme 7 prikazani su na slici 7.18. Teorema je primenjena na početne tačke $[0.1, 1.2]$, $[0.125, 1.41]$ i $[0.175, 1.48]$. Korišćen je kriterijum zaustavljanja $\delta = 1 \times 10^{-5}$.



Slika 7.18: Primena Teoreme 7 na primer 9, par provodnika

□

Glava 8

Zaključak

Rad posmatran u celini posvećen je analizi stabilnosti linearnih, vremenski-invarijantnih dinamičkih sistema, sa akcentom na sisteme sa beskonačno dimenzija.

Stabilnost se analizira u smislu određivanja broja nestabilnih polova sistema u zavisnosti od vrednosti parametara modela. Broj nestabilnih polova određuje se direktno. Umesto toga, izloženi metodi polaze od zadate tačke u prostoru parametara modela, i pronalaze maksimalni segment invarijantnog broja nestabilnih polova duž krive u prostoru parametara, odnosno unutar oblasti u prostoru parametara. Problem određivanja samog broja nestabilnih polova nije u domenu disertacije, a može se rešiti primenom konvencionalnih metoda poput Košijevog principa argumenta, ili srodnih metoda zasnovanih na njemu. U poglavlju 3, problem je formalno postavljen uz propratnu domensku terminologiju i notaciju.

U poglavlju 4 je prikazan metod za određivanje segmenta invarijantnog broja nestabilnih polova duž krive u prostoru parametara sistema, počevši od zadate tačke koja pripada krivoj. Teorema 3 daje dovoljne uslove za pronalazak takvog segmenta krive. Uslovi su dati u vidu jednakosti (4.7) koja mora biti zadovoljena za određen skup vrednosti $\omega \in \Xi^f$, predstavljajući formu prečešljanja frekvencija. Iako je jednakost cirkularna, priroda korišćenih izraza u samoj jednakosti omogućava njeno lako rešavanje putem bisekcije. Dobijeni segment invarijantnog broja nestabilnih polova nije maksimalan. Drugim rečima, dobijeno rešenje je konzervativno. Teorema 4 potom pokazuje da iterativnom primenom Teoreme 3 dobijamo segment stabilnosti koji jeste maksimalan. Obe teoreme ilustrovane su primenom na sistem sa iracionalnom funkcijom prenosa.

Poglavlje 5 se bavi pronalaskom oblasti invarijantnog broja nestabilnih polova unutar oblasti u prostoru parametara, počevši od zadate vrednosti parametara. Teorema 6 daje dovoljne uslove za pronalazak takve oblasti koja okružuje početnu tačku. Oblik dobijene oblasti zavisi od odabranih parametara p i q , dok se veličina oblasti dobija rešavanjem jednakosti (5.6). Slično

kao u poglavlju 4, jednakost je konzervativna. Struktura same jednakosti umnogome liči na odgovarajuću jednakost iz Teoreme 4. Teorema 7 potom pokazuje da iterativna primena Teoreme 6 rezultuje maksimalnom oblašću invarijantnog broja nestabilnih polova. Teoreme su ponovo prikazane na primeru koji je bio razmatran i u poglavlju 4, dajući kompletnu karakterizaciju stabilnosti u posmatranom domenu parametara modela.

Poglavlje 6 razmatra proširenja metoda iz poglavlja 4 i 5, namenjena pojedinim klasama dinamičkih sistema. Prvo proširenje bavi se retardiranim sistemima. Zbog specifične forme, ovakvi sistemi omogućuju lakšu primenu svih teorema iz poglavlja 4 i 5. Proširenje je ilustrovano primerom, a rezultati su upoređeni sa postojećim metodom iz [158]. Drugo proširenje bavi se sistemima koji ne zadovoljavaju jednu od pretpostavki izloženih u postavci problema disertacije. Kao što je prikazano, ovaj nedostatak je u određenim slučajevima moguće zaobići modifikacijom karakteristične funkcije sistema. Proširenje je ilustrovano primenom na frakcioni sistem u kom najviši stepen izvoda zavisi od parametara modela.

Poglavlje 7 ilustruje primenu teorema 3-7 na razne sisteme sa iracionalnim funkcijama prenosa. Posmatrani primeri uključuju sisteme sa vremenskim kašnjenjem (tačkastim i distribuiranim), primere sa prostorno distribuiranim parametrima, kao i frakcione sisteme.

Po mišljenju autora, dobijeni rezultati pokazuju da su razmatrane teoreme korisne u inženjerskoj praksi, omogućujući analizu stabilnosti linearnih dinamičkih sistema u slučajevima kada konvencionalne metode nisu primenljive.

Dodatak

Rošeova teorema

Teorema koja sledi poznata je kao Rošeova teorema [282]. Rezultati disertacije zasnivaju se na primeni Rošeove teoreme na karakteristične funkcije dinamičkih sistema.

Teorema .11. *Neka su f i g kompleksne funkcije koje su holomorfne unutar oblasti \mathcal{K} koja je obuhvaćena zatvorenom konturom $\partial\mathcal{K}$. Ukoliko je $|g(s)| < |f(s)|$, $\forall s \in \partial\mathcal{K}$, onda f i $f + g$ imaju jednak broj nula unutar \mathcal{K} , uzimajući u obzir i višestrukost tih nula.*

Helderova nejednakost

Teorema koja sledi poznata je kao Helderova nejednakost [283]. Upotreba nejednakosti jedan je od ključnih koraka u okviru dokaza Teoreme 6.

Teorema .12. *Neka su p i q realni brojevi takvi da*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \wedge \quad p, q \geq 1. \quad (1)$$

Za kompleksne funkcije f i g onda važi

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (2)$$

Helderova nejednakost predstavlja uopštenje Koši-Švarcove nejednakosti [283].

Fundamentalna teorema analize

Fundamentalna teorema analize [282] povezuje neodređeni i određeni integral neprekidnih funkcija. Upotreba teoreme predstavlja bitan korak u okviru dokaza Teoreme 3 i Teoreme 6.

Teorema .13. *Neka je f funkcija koja je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Neka je F neodređeni integral funkcije f na $[a, b]$. Tada važi*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Analitičke kompleksne funkcije

Pretpostavka 1 zahteva da je karakteristična funkcija sistema analitička u desnoj kompleksnoj poluravni. U literaturi se analitičke kompleksne funkcije često nazivaju i *holomorfnim* funkcijama.

Definicija 20. Kompleksna funkcija f je analitička nad otvorenim skupom \mathcal{D} ako i samo ako je diferencijabilna u svakoj tački skupa \mathcal{D} [282, 284]. \square

Meromorfne kompleksne funkcije

Definicija 21. Kompleksna funkcija f je meromorfna nad otvorenim skupom \mathcal{D} ako i samo ako je analitička nad \mathcal{D} osim u skupu izolovanih tačaka, i ako sve takve tačke predstavljaju polove funkcije f [282, 284]. \square

Laplasova transformacija

Posmatrajmo funkciju $f(t)$, definisanu za svako $t \geq 0$. Jednostrana Laplasova transformacija funkcije f definisana je kao

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(s)e^{-st} dt. \quad (4)$$

Inverzna Laplasova transformacija kompleksne funkcije $F(s)$ definisana je kao

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-jT}^{\gamma+jT} e^{st} F(s) ds, \quad (5)$$

gde je $\gamma \in \mathbb{R}$ odabrano tako da integral bude konvergentan.

Bibliografija

- [1] Vukan Turkulov, Milan R. Rapaić, and Rachid Malti. A novel approach to stability analysis of a wide class of irrational linear systems. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 26(1):70–90, 2023.
- [2] Vukan Turkulov, Milan R. Rapaić, and Rachid Malti. Stabilnost linear-nih dinamičkih sistema sa vremenskim kašnjenjem. In *Zbornik radova*, volume 63, pages 213–218, Srebrno Jezero, Srbija, 2019. Akademska Misao, Beograd.
- [3] Rachid Malti, Milan R. Rapaić, and Vukan Turkulov. Stability analysis of incommensurate elementary fractional systems using interval arithmetics. In *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications*, Warsaw, 2021.
- [4] Rachid Malti, Milan R. Rapaić, and Vukan Turkulov. Stability analysis of incommensurate fractional systems using interval arithmetics. In *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications*, Dubai, 2023.
- [5] Vukan Turkulov, Milan R. Rapaić, and Rachid Malti. Stability analysis of time-delay systems in the parametric space. *arXiv:2103.15629*, 2021.
- [6] Rachid Malti, Milan R. Rapaić, and Vukan Turkulov. A unified framework for exponential stability analysis of linear irrational systems in the parametric space. *HAL open science*, 2022.
- [7] Dušan Petrovački. *Optimalno upravljanje nelinearnim procesom provođenja toplote*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1979.
- [8] Dušan P. Petrovački. Optimal control of a heat conduction problem. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 26(4):463–480, 1975.
- [9] Dušan Petrovački. The minimum time problem for a class of nonlinear distributed parameter systems. *International Journal of Control*, 32(1):51–62, 1980.

-
- [10] T.M. Atanacković and B. Stanković. On a class of differential equations with left and right fractional derivatives. *ZAMM*, 87(7):537–546, 2007.
- [11] T M Atanacković, S Pilipović, and D Zorica. A diffusion wave equation with two fractional derivatives of different order. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(20):5319–5333, 2007.
- [12] Teodor M. Atanacković, Stevan Pilipović, Bogoljub Stanković, and Dušan Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. Wiley, first edition, 2014.
- [13] T M Atanacković, S Konjik, and S Pilipović. Variational problems with fractional derivatives: Euler–Lagrange equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(9):095201, 2008.
- [14] Teodor M. Atanacković, Sanja Konjik, Stevan Pilipović, and Srboljub Simić. Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and Nöther’s theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(5-6):1504–1517, 2009.
- [15] T.M. Atanacković and B. Stanković. Generalized wave equation in nonlocal elasticity. *Acta Mechanica*, 208(1-2):1–10, 2009.
- [16] T.M. Atanacković and B. Stanković. On a numerical scheme for solving differential equations of fractional order. *Mechanics Research Communications*, 35(7):429–438, 2008.
- [17] T M Atanacković, M Budincevic, and S Pilipović. On a fractional distributed-order oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(30):6703–6713, 2005.
- [18] Teodor M. Atanacković, Stevan Pilipović, and Dušan Zorica. Time distributed-order diffusion-wave equation. I. Volterra-type equation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2106):1869–1891, 2009.
- [19] Jovan K. Popović, Milica T. Atanacković, Ana S. Pilipović, Milan R. Rapačić, Stevan Pilipović, and Teodor M. Atanacković. A new approach to the compartmental analysis in pharmacokinetics: fractional time evolution of diclofenac. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 37(2):119–134, 2010.
- [20] Jovan K. Popović, Milica T. Atanacković, Ana S. Pilipović, Milan R. Rapačić, Stevan Pilipović, and Teodor M. Atanacković. Remarks on the mass balance for multi-compartmental models; a nonlinear compartmental model. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 37(2):217–220, 2010.

- [21] Nebojša Petrovački. *Identifikacija, simulacija i upravljanje klasom ED-FA pojačavača*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2008.
- [22] Milan R. Rapaić. *Optimalno i suboptimalno upravljanje klasom sistema sa raspodeljenim parametrima*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2011.
- [23] Mirna Kapetina. *Adaptivna estimacija parametara sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2017.
- [24] Boris Jakovljević. *Optimalno i suboptimalno podešavanje parametara robusnih linearnih regulatora necelog reda*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2015.
- [25] Zoran D. Jeličić and Nebojša Petrovački. Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(6):571–581, 2009.
- [26] Milan R. Rapaić and Zoran D. Jeličić. Optimal control of a class of fractional heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, 62(1-2):39–51, 2010.
- [27] Marko C. Bošković, Tomislav B. Šekara, and Milan R. Rapaić. An Analytical Design Method of PI/PID Load Frequency Controllers for Single-Area Power System with Communication Network Time Delay. In *2021 20th International Symposium INFOTEH-JAHORINA (INFOTEH)*, pages 1–6, East Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, 2021. IEEE.
- [28] Stevan M. Cvetičanin, Milan R. Rapaić, and Dušan Zorica. Frequency analysis of generalized time-fractional telegrapher’s equation. In *2017 European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, pages 1–4, Catania, Italy, 2017. IEEE.
- [29] Stevan M. Cvetičanin, Dušan Zorica, and Milan R. Rapaić. Non-local telegrapher’s equation as a transmission line model. *Applied Mathematics and Computation*, 390:125602, 2021.
- [30] Boris B. Jakovljević, Tomislav B. Šekara, Milan R. Rapaić, and Zoran D. Jeličić. On the distributed order PID controller. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 79:94–101, 2017.
- [31] Boris B. Jakovljević, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić, and Tomislav B. Šekara. Optimization of distributed order fractional PID controller under constraints on robustness and sensitivity to measurement

- noise. In *ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014*, pages 1–6, Catania, 2014. IEEE.
- [32] Alessandro Pisano, Milan Rapaić, Zoran Jeličić, and Elio Usai. Nonlinear fractional PI control of a class of fractional-order systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(3):637–642, 2012.
- [33] Boris B. Jakovljević, M. R. Rapaić, Zoran D. Jeličić, and Tomislav B. Šekara. Optimization of fractional PID controller by maximization of the criterion that combines the integral gain and closed-loop system bandwidth. In *2014 18th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, pages 64–69, Sinaia, Romania, 2014. IEEE.
- [34] Boris Jakovljević, Paolo Lino, and Guido Maione. Optimized Current and Speed Fractional-Order PID Control in Electrical Drives. In *Proceedings of the International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA '21)*, volume 452, pages 141–152. Springer International Publishing, Cham, 2022.
- [35] Boris Jakovljević, Paolo Lino, and Guido Maione. Control of double-loop permanent magnet synchronous motor drives by optimized fractional and distributed-order PID controllers. *European Journal of Control*, 58:232–244, 2021.
- [36] Boris Jakovljević, Paolo Lino, and Guido Maione. Fractional and Distributed Order PID Controllers for PMSM Drives. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, pages 4100–4105, Naples, Italy, 2019. IEEE.
- [37] Alessandro Pisano, Milan Rapaić, Elio Usai, and Zoran Jeličić. Second-order sliding mode approaches to disturbance estimation and fault detection in fractional-order systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):2436–2441, 2011.
- [38] Mirna N. Kapetina, Milan R. Rapaić, Alessandro Pisano, and Zoran D. Jeličić. Adaptive Parameter Estimation in LTI Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(10):4188–4195, 2019.
- [39] Mirna N. Kapetina, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić, Paolo Lino, and Guido Maione. Complex-Order Models: A System Identification Point of View. *Applied Sciences*, 12(9):4768, 2022.
- [40] M.N. Kapetina, M.R. Rapaić, and Z.D. Jeličić. Two-stage adaptive estimation of irrational linear systems. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 78:213–219, 2017.

- [41] Mirna Kapetina, Paolo Lino, Guido Maione, and Milan Rapaić. Estimation of Non-integer Order Models to Represent the Pressure Dynamics in Common-rail Natural Gas Engines. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):14551–14556, 2017.
- [42] A. Pisano, M. R. Rapaić, Z. D. Jeličić, and E. Usai. Sliding mode control approaches to the robust regulation of linear multivariable fractional-order dynamics. *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 20(18):2045–2056, 2010.
- [43] A Pisano, M R Rapaić, Z D Jeličić, and E Usai. On second-order sliding-mode control of fractional-order dynamics. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, pages 6680–6685, Baltimore, MD, 2010. IEEE.
- [44] Alessandro Pisano, Milan R. Rapaić, Elio Usai, and Zoran D. Jeličić. Continuous finite-time stabilization for some classes of fractional order dynamics. In *2012 12th International Workshop on Variable Structure Systems*, pages 16–21, Mumbai, Maharashtra, India, 2012. IEEE.
- [45] Milan R. Rapaić, Tomislav B. Šekara, and Marko Č. Bošković. Frequency-Distributed Representation of Irrational Linear Systems. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 21(5):1396–1419, 2018.
- [46] Milan R. Rapaić and Rachid Malti. Stability regions of fractional systems in the space of perturbed orders. *IET Control Theory & Applications*, 13(16):2610–2619, 2019.
- [47] Milan R. Rapaić and Tomislav B. Šekara. Novel direct optimal and indirect method for discretization of linear fractional systems. *Electrical Engineering*, 93(2):91–102, 2011.
- [48] Victor Stephane. *System Identification by non integer model for robust path tracking through flatness*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2010.
- [49] Benjamin Feytout. *CRONE command for the optimization of wind turbine production*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2013.
- [50] Manel Chetoui. *Systems identification with fractional models using noisy input output data*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2013.
- [51] Lamine Fadiga. *H_∞ control of fractional order models*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2014.

-
- [52] Elena Ivanova. *Subspace system identification with fractional differentiation models*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2017.
- [53] Asma Achnib. *Development of the CRONE control with robust anticipative effect*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2019.
- [54] Gaby Abou Haidar. *Application of fractional order system in the acoustics domain : Modeling and synthesis of a wind instrument*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2021.
- [55] Abir Mayoufi. *Identification of fractional MISO systems for earth climate modeling*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 2021.
- [56] Stéphane Victor, Rachid Malti, Hugues Garnier, and Alain Oustaloup. Parameter and differentiation order estimation in fractional models. *Automatica*, 49(4):926–935, 2013.
- [57] Rachid Malti, Stéphane Victor, and Alain Oustaloup. Advances in System Identification Using Fractional Models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(2):021401, 2008.
- [58] Rachid Malti, Mohamed Aoun, Jocelyn Sabatier, and Alain Oustaloup. Tutorial on system identification using fractional differentiation models. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(1):606–611, 2006.
- [59] Rachid Malti, Stéphane Victor, Alain Oustaloup, and Hugues Garnier. An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):14379–14384, 2008.
- [60] Rachid Malti, Jocelyn Sabatier, and Hüseyin Akçay. Thermal modeling and identification of an aluminum rod using fractional calculus. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(10):958–963, 2009.
- [61] Magalie Thomassin and Rachid Malti. Subspace method for continuous-time fractional system identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(10):880–885, 2009.
- [62] Stéphane Victor, Abir Mayoufi, Rachid Malti, Manel Chetoui, and Mohamed Aoun. System identification of MISO fractional systems: Parameter and differentiation order estimation. *Automatica*, 141:110268, 2022.

- [63] Abir Mayoufi, Stéphane Victor, Manel Chetoui, Rachid Malti, and Mohamed Aoun. Output Error MISO System Identification Using Fractional Models. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 24(5):1601–1618, 2021.
- [64] Abir Mayoufi, Stéphane Victor, Rachid Malti, Manel Chetoui, and Mohamed Aoun. An optimal instrumental variable approach for continuous-time multiple input-single output fractional model identification. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):3701–3706, 2020.
- [65] Elena Ivanova, Rachid Malti, and Xavier Moreau. Pseudo-State-Space Fractional System Identification. *SSRN Electronic Journal*, 2018.
- [66] Jocelyn Sabatier, Mathieu Merveillaut, Rachid Malti, and Alain Oustaloup. How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system? *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(5):1318–1326, 2010.
- [67] Rachid Malti, Xavier Moreau, Firas Khemane, and Alain Oustaloup. Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions. *Automatica*, 47(11):2462–2467, 2011.
- [68] Alain Oustaloup, Jocelyn Sabatier, Patrick Lanusse, Rachid Malti, Pierre Melchior, Xavier Moreau, and Mathieu Moze. An overview of the CRONE approach in system analysis, modeling and identification, observation and control. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):14254–14265, 2008.
- [69] Rachid Malti, Mohamed Aoun, François Levron, and Alain Oustaloup. Analytical computation of the \mathcal{H}_2 -norm of fractional commensurate transfer functions. *Automatica*, 47(11):2425–2432, 2011.
- [70] Mohamed Aoun, Rachid Malti, François Levron, and Alain Oustaloup. Numerical Simulations of Fractional Systems: An Overview of Existing Methods and Improvements. *Nonlinear Dynamics*, 38(1-4):117–131, 2004.
- [71] Mohamed Aoun, Rachid Malti, François Levron, and Alain Oustaloup. Numerical Simulations of Fractional Systems. In *Volume 5: 19th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Parts A, B, and C*, pages 745–752, Chicago, Illinois, USA, 2003. ASMEDC.
- [72] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F.M. Nanot. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1):25–39, 2000.

- [73] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, and Ch. Ceyral. Fractional differentiation for edge detection. *Signal Processing*, 83(11):2421–2432, 2003.
- [74] J.C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup. A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Processing*, 91(3):437–445, 2011.
- [75] Jocelyn Sabatier, Mohamed Aoun, Alain Oustaloup, Gilles Grégoire, Franck Ragot, and Patrick Roy. Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation. *Signal Processing*, 86(10):2645–2657, 2006.
- [76] O. Cois, A. Oustaloup, T. Poinot, and J.-L. Battaglia. Fractional state variable filter for system identification by fractional model. In *2001 European Control Conference (ECC)*, pages 2481–2486, Porto, 2001. IEEE.
- [77] Stephane Victor, Pierre Melchior, Mathieu Pellet, and Alain Oustaloup. Lung Thermal Transfer System Identification With Fractional Models. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 28(1):172–182, 2020.
- [78] Mathieu Moze, Jocelyn Sabatier, and Alain Oustaloup. LMI Tools for Stability Analysis of Fractional Systems. In *Volume 6: 5th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C*, pages 1611–1619, Long Beach, California, USA, 2005. ASMEDC.
- [79] Alain Oustaloup. *Etude et réalisation d'un système d'asservissement d'ordre 3/2 de la fréquence d'un laser à colorant continu*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Bordou, Bordo, Francuska, 1975.
- [80] Alain Oustaloup. *La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entier*. *Traité des nouvelles technologies*. Hermès, Paris, 1991.
- [81] A. Oustaloup, B. Mathieu, and P. Lanusse. The CRONE Control of Resonant Plants: Application to a Flexible Transmission. *European Journal of Control*, 1(2):113–121, 1995.
- [82] A Oustaloup, X Moreau, and M Nouillant. The CRONE suspension. *Control Engineering Practice*, 4(8):1101–1108, 1996.
- [83] Patrick Lanusse, Rachid Malti, and Pierre Melchior. CRONE control system design toolbox for the control engineering community: tutorial and case study. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1990):20120149, 2013.

- [84] A. Oustaloup, P. Melchior, P. Lanusse, O. Cois, and F. Dancla. The CRONE toolbox for Matlab. In *CACSD. Conference Proceedings. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (Cat. No.00TH8537)*, pages 190–195, Anchorage, AK, USA, 2000. IEEE.
- [85] Alain Oustaloup and Benoît Mathieu. *La commande CRONE: du scalaire au multivariable*. Collection Automatique. Hermès sciences publications, Paris, second edition, 1999.
- [86] Jocelyn Sabatier, Patrick Lanusse, Pierre Melchior, and Alain Oustaloup. *Fractional Order Differentiation and Robust Control Design: CRONE, H-infinity and Motion Control*, volume 77 of *Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2015.
- [87] Rachid Malti, Pierre Melchior, Patrick Lanusse, and Alain Oustaloup. Towards an object oriented CRONE Toolbox for fractional differential systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):10830–10835, 2011.
- [88] Rachid Malti, Pierre Melchior, Patrick Lanusse, and Alain Oustaloup. Object-oriented CRONE toolbox for fractional differential signal processing. *Signal, Image and Video Processing*, 6(3):393–400, 2012.
- [89] A. M. Lyapunov. *Obshchaya zadacha o stabilnosti dvizheniya*. Doktor-ska disertacija, Univerzitet u Harkovu, Harkov, 1892.
- [90] Hassan K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, third edition, 2002.
- [91] Karl Johan Åström and Richard M. Murray. *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton University Press, Princeton, second edition, 2021.
- [92] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, fifth edition, 2006.
- [93] Ruth F. Curtain and Anthony J. Pritchard. *Infinite dimensional linear systems theory*. Number 8 in Lecture notes in control and information sciences. Springer, Berlin Heidelberg, 1978.
- [94] Ruth F. Curtain and Hans Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, volume 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer New York, New York, 1995.
- [95] Ciprian Foiaş, Hitay Özbay, and Allen Tannenbaum. *Robust control of infinite dimensional systems: frequency domain methods*. Number 209

- in Lecture notes in control and information sciences. Springer, London; New York, 1995.
- [96] Tomislav B. Šekara and Milan R. Rapaić. A revision of root locus method with applications. *Journal of Process Control*, 34:26–34, 2015.
- [97] Silviu-Iulian Niculescu, Keqin Gu, Timothy J. Barth, Michael Griebel, David E. Keyes, Risto M. Nieminen, Dirk Roose, and Tamar Schlick, editors. *Advances in Time-Delay Systems*, volume 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [98] Xu-Guang Li, Silviu-Iulian Niculescu, and Arben Cela. *Analytic Curve Frequency-Sweeping Stability Tests for Systems with Commensurate Delays*. SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [99] L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin. *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. Academic Press, New York, 1973.
- [100] Emilia Fridman. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Springer International Publishing, Cham, 2014.
- [101] Min Wu, Yong He, and Jin-Hua She. *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [102] L. Dugard and Erik I. Verriest, editors. *Stability and control of time-delay systems*. Number 228 in Lecture notes in control and information sciences. Springer, London; New York, 1998.
- [103] W. Michiels and Silviu-Iulian Niculescu. *Stability, control, and computation for time-delay systems: an eigenvalue-based approach*. Number 27 in Advances in design and control. SAIM/Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, second edition, 2014.
- [104] Keqin Gu, Vladimir L. Kharitonov, and Jie Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
- [105] Nejat Olgac and Rifat Sipahi. A Unique Methodology for Chatter Stability Mapping in Simultaneous Machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 127(4):791–800, 2005.
- [106] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1999.

-
- [107] R.J. Anderson and M.W. Spong. Bilateral control of teleoperators with time delay. In *Proceedings of the 1988 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 1, pages 131–138, Beijing, China, 1988. IEEE.
- [108] H. Suh and Z. Bien. Use of time-delay actions in the controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):600–603, 1980.
- [109] E. Fridman and U. Shaked. An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11):1931–1937, 2002.
- [110] E.D. Sontag. Some new directions in control theory inspired by systems biology. *Systems Biology*, 1(1):9–18, 2004.
- [111] Uwe an der Heiden and Michael C. Mackey. The dynamics of production and destruction: Analytic insight into complex behavior. *Journal of Mathematical Biology*, 16(1):75–101, 1982.
- [112] Norman MacDonald. *Biological delay systems: linear stability theory*. Number 8 in Cambridge studies in mathematical biology. Cambridge University press, Cambridge, 1989.
- [113] Bruno Vielle and Gilbert Chauvet. Delay equation analysis of human respiratory stability. *Mathematical Biosciences*, 152(2):105–122, 1998.
- [114] Gabor Stepan. Delay effects in brain dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367(1891):1059–1062, 2009.
- [115] C.A.A. de Carvalho and H.M. Nussenzveig. Time delay. *Physics Reports*, 364(2):83–174, 2002.
- [116] W. van Dijk and K. A. Kiers. Time delay in simple one-dimensional systems. *American Journal of Physics*, 60(6):520–527, 1992.
- [117] Thomas Erneux. *Applied delay differential equations*. Number 3 in Surveys and tutorials in the applied mathematical sciences. Springer, New York, 2009.
- [118] K. Ikeda, H. Daido, and O. Akimoto. Optical Turbulence: Chaotic Behavior of Transmitted Light from a Ring Cavity. *Physical Review Letters*, 45(9):709–712, 1980.
- [119] Emmanuel Villerman. Pulsed dynamics of fountains. *Nature*, 371(6492):24–25, 1994.
- [120] Marc R. Roussel. The Use of Delay Differential Equations in Chemical Kinetics. *The Journal of Physical Chemistry*, 100(20):8323–8330, 1996.

- [121] Joseph M. Mahaffy, Jacques Bélair, and Michael C. Mackey. Hematopoietic Model with Moving Boundary Condition and State Dependent Delay: Applications in Erythropoiesis. *Journal of Theoretical Biology*, 190(2):135–146, 1998.
- [122] Douglas Gale. Delay and Cycles. *The Review of Economic Studies*, 63(2):169, 1996.
- [123] Carlo Bianca, Massimiliano Ferrara, and Luca Guerrini. The Time Delays' Effects on the Qualitative Behavior of an Economic Growth Model. *Abstract and Applied Analysis*, 2013:1–10, 2013.
- [124] Ghassan Dibeh. Speculative dynamics in a time-delay model of asset prices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 355(1):199–208, 2005.
- [125] Lujun Zhou and Yaqiong Li. A dynamic IS-LM business cycle model with two time delays in capital accumulation equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1):182–187, 2009.
- [126] M. Kalecki. A Macrodynamic Theory of Business Cycles. *Econometrica*, 3(3):327, 1935.
- [127] Ghassan Dibeh. Time Delays and Business Cycles: Hilferding's model revisited. *Review of Political Economy*, 13(3):329–341, 2001.
- [128] Muo S. Lee and C. S. Hsu. On the τ -decomposition Method of Stability Analysis for Retarded Dynamical Systems. *SIAM Journal on Control*, 7(2):242–259, 1969.
- [129] Bugong Xu. Stability of Retarded Dynamical Systems: A Lyapunov Function Approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 253(2):590–615, 2001.
- [130] Lirong Huang and Xuerong Mao. On Input-to-State Stability of Stochastic Retarded Systems With Markovian Switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(8):1898–1902, 2009.
- [131] P. Pepe. On Stability Preservation under Sampling and Approximation of Feedbacks for Retarded Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54(4):1895–1918, 2016.
- [132] Rupak Datta, Rajeeb Dey, Baby Bhattacharya, Ramasamy Saravankumar, and Choon Ki Ahn. New double integral inequality with application to stability analysis for linear retarded systems. *IET Control Theory & Applications*, 13(10):1514–1524, 2019.

- [133] J. Chen and H.A. Latchman. Asymptotic stability independent of delays: simple necessary and sufficient conditions. In *Proceedings of 1994 American Control Conference - ACC '94*, volume 1, pages 1027–1031, Baltimore, MD, USA, 1994. IEEE.
- [134] S.-I. Niculescu and Jie Chen. Frequency sweeping tests for asymptotic stability: a model transformation for multiple delays. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*, volume 5, pages 4678–4683, Phoenix, AZ, USA, 1999. IEEE.
- [135] Xu-Guang Li, Silviu-Iulian Niculescu, and Arben Çela. An iterative frequency-sweeping approach for stability analysis of linear systems with multiple delays. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 36(2):379–398, 2019.
- [136] Onur Toker and Hitay Özbay. Complexity issues in robust stability of linear delay-differential systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 9(4):386–400, 1996.
- [137] Mark W. Spong. A theorem on neutral delay systems. *Systems & Control Letters*, 6(4):291–294, 1985.
- [138] P. Balasubramaniam, R. Krishnasamy, and R. Rakkiyappan. Delay-dependent stability of neutral systems with time-varying delays using delay-decomposition approach. *Applied Mathematical Modelling*, 36(5):2253–2261, 2012.
- [139] Q.-L. Han. Stability criteria for a class of linear neutral systems with time-varying discrete and distributed delays. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 20(4):371–386, 2003.
- [140] Qing-Long Han. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type. *Automatica*, 38(4):719–723, 2002.
- [141] Magdi S. Mahmoud. Robust H_∞ control of linear neutral systems. *Automatica*, 36(5):757–764, 2000.
- [142] Richard Datko. Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space. *Journal of Differential Equations*, 25(2):258–274, 1977.
- [143] Hong-Bing Zeng, Yong He, Min Wu, and Jinhua She. New results on stability analysis for systems with discrete distributed delay. *Automatica*, 60:189–192, 2015.
- [144] Constantin-Irinel Morărescu, Silviu-Iulian Niculescu, and Keqin Gu. Stability Crossing Curves of Shifted Gamma-Distributed Delay Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 6(2):475–493, 2007.

- [145] G. Ochoa, S. Mondié, and V.L. Kharitonov. Time delay systems with distributed delays: Critical values. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(14):272–277, 2009.
- [146] Áron Fehér and Lőrinc Márton. Approximation and control of a class of distributed delay systems. *Systems & Control Letters*, 149:104882, 2021.
- [147] F. Gouaisbaut. Stability and Stabilization of Distributed time Delay Systems. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1379–1384, Seville, Spain, 2005. IEEE.
- [148] Zhiguang Feng and James Lam. Stability and Dissipativity Analysis of Distributed Delay Cellular Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(6):976–981, 2011.
- [149] Kenneth L Cooke and Zvi Grossman. Discrete delay, distributed delay and stability switches. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86(2):592–627, 1982.
- [150] Kenneth L Cooke and JoséM Ferreira. Stability conditions for linear retarded functional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 96(2):480–504, 1983.
- [151] Jack K Hale, Ettore F Infante, and Fu-Shiang Peter Tsen. Stability in linear delay equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 105(2):533–555, 1985.
- [152] N. Ozturk and A. Uraz. An analysis stability test for a certain class of distributed parameter systems with delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 32(4):393–396, 1985.
- [153] Nevzat Ozturk. Delay-independent stability of a class of distributed parameter systems. In *1985 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 130–134, Fort Lauderdale, FL, USA, 1985. IEEE.
- [154] R. Datko. A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 36:279–292, 1978.
- [155] J.K. Hale and W.Z. Huang. Global Geometry of the Stable Regions for Two Delay Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 178(2):344–362, 1993.
- [156] Joseph M. Mahaffy, Kathryn M. Joiner, and Paul J. Zak. A geometric analysis of stability regions for a linear differential equation with two delays. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 05(03):779–796, 1995.

- [157] N. Olgac and R. Sipahi. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):793–797, 2002.
- [158] Keqin Gu, Silviu-Iulian Niculescu, and Jie Chen. On stability crossing curves for general systems with two delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(1):231–253, 2005.
- [159] Rifat Sipahi and Nejat Olgac. Complete stability robustness of third-order LTI multiple time-delay systems. *Automatica*, 41(8):1413–1422, 2005.
- [160] Keqin Gu, Silviu-Iulian Niculescu, and Jie Chen. Computing Maximum Delay Deviation Allowed to Retain Stability in Systems with Two Delays. In *Applications of Time Delay Systems*, volume 352, pages 157–164. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [161] Irinel-Constantin Morarescu and Silviu-Iulian Niculescu. Stability crossing curves of SISO systems controlled by delayed output feedback. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, pages 659–678, 2007.
- [162] Rifat Sipahi and Ismail Ilker Delice. Extraction of 3D stability switching hypersurfaces of a time delay system with multiple fixed delays. *Automatica*, 45(6):1449–1454, 2009.
- [163] I I Delice and R Sipahi. Advanced clustering with frequency sweeping (ACFS) methodology for the stability analysis of multiple time-delay systems. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, pages 5012–5017, Baltimore, MD, 2010. IEEE.
- [164] Keqin Gu and Mohammad Naghnaeian. Stability Crossing Set for Systems With Three Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(1):11–26, 2011.
- [165] Jie Chen, Demin Xu, and B. Shafai. On sufficient conditions for stability independent of delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9):1675–1680, 1995.
- [166] Jie Chen and H.A. Latchman. Frequency sweeping tests for stability independent of delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9):1640–1645, 1995.
- [167] Xu-Guang Li, Silviu-Iulian Niculescu, and Arben Cela. Complete stability of linear time-delay systems: A new frequency-sweeping frequency approach. In *2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, pages 1121–1126, Hangzhou, China, 2013. IEEE.

- [168] Jean-Pierre Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, 2003.
- [169] R Sipahi, S.-I. Niculescu, CT Abdallah, Wim Michiels, and Keqin Gu. Stability and Stabilization of Systems with Time Delay. *IEEE Control Systems*, 31(1):38–65, 2011.
- [170] Jonathan R. Partington. Some frequency-domain approaches to the model reduction of delay systems. *Annual Reviews in Control*, 28(1):65–73, 2004.
- [171] Chyi Hwang and Yi-Cheng Cheng. A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems. *Automatica*, 42(5):825–831, 2006.
- [172] Wim Michiels and Silviu-Iulian Niculescu. Characterization of Delay-Independent Stability and Delay Interference Phenomena. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(6):2138–2155, 2007.
- [173] C.R. Knospe and M. Roozbehani. Stability of Linear Systems With Interval Time Delays Excluding Zero. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8):1271–1288, 2006.
- [174] Qing-Long Han. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems. *Automatica*, 45(2):517–524, 2009.
- [175] E. Fridman. New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, 43(4):309–319, 2001.
- [176] Yong-Yan Cao and P.M. Frank. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi–Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(2):213–229, 2001.
- [177] M. N. Alpaslan Parlakci. Stability of retarded time-delay systems: Extensively augmented Lyapunov functional approach. In *2007 International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 2906–2908, Seoul, South Korea, 2007. IEEE.
- [178] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Number 198 in Mathematics in science and engineering. Academic Press, San Diego, 1999.
- [179] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and Juan J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Number 204 in North-Holland mathematics studies. Elsevier, Amsterdam; Boston, first edition, 2006.

-
- [180] Kenneth S. Miller and Bertram Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, New York, 1993.
- [181] Richard L. Magin. Fractional Calculus in Bioengineering, Part 1. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 32(1):1–104, 2004.
- [182] Teodor M. Atanacković, Sanja Konjik, Stevan Pilipović, and Dušan Zorica. Complex order fractional derivatives in viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 20(2):175–195, 2016.
- [183] Teodor M. Atanacković and Stevan Pilipović. On a constitutive equation of heat conduction with fractional derivatives of complex order. *Acta Mechanica*, 229(3):1111–1121, 2018.
- [184] Changpin Li, Xuanhung Dao, and Peng Guo. Fractional derivatives in complex planes. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(5-6):1857–1869, 2009.
- [185] Teodor M. Atanacković, Marko Janev, Sanja Konjik, and Stevan Pilipović. Wave equation for generalized Zener model containing complex order fractional derivatives. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 29(2):569–583, 2017.
- [186] P. J. Torvik and R. L. Bagley. On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2):294–298, 1984.
- [187] L. Gaul, P. Klein, and S. Kemple. Damping description involving fractional operators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(2):81–88, 1991.
- [188] Vasily E. Tarasov. Fractional statistical mechanics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(3):033108, 2006.
- [189] Preeti Warriar and Pritesh Shah. Fractional Order Control of Power Electronic Converters in Industrial Drives and Renewable Energy Systems: A Review. *IEEE Access*, 9:58982–59009, 2021.
- [190] Ahmed Elwakil. Fractional-Order Circuits and Systems: An Emerging Interdisciplinary Research Area. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 10(4):40–50, 2010.
- [191] Asma Maachou, Rachid Malti, Pierre Melchior, Jean-Luc Battaglia, Alain Oustaloup, and Bruno Hay. Nonlinear thermal system identification using fractional Volterra series. *Control Engineering Practice*, 29:50–60, 2014.

- [192] Thomas J. Anastasio. The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons. *Biological Cybernetics*, 72(1):69–79, 1994.
- [193] Thomas J. Anastasio. Nonuniformity in the linear network model of the oculomotor integrator produces approximately fractional-order dynamics and more realistic neuron behavior. *Biological Cybernetics*, 79(5):377–391, 1998.
- [194] Adnane Boukhouima, Khalid Hattaf, El Mehdi Lotfi, Marouane Mahrouf, Delfim F.M. Torres, and Noura Yousfi. Lyapunov functions for fractional-order systems in biology: Methods and applications. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140:110224, 2020.
- [195] F. A. Rihan, M. Sheek-Hussein, A. Tridane, and R. Yafia. Dynamics of Hepatitis C Virus Infection: Mathematical Modeling and Parameter Estimation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 12(5):33–47, 2017.
- [196] Fathalla A. Rihan. Numerical Modeling of Fractional-Order Biological Systems. *Abstract and Applied Analysis*, 2013:1–11, 2013.
- [197] Richard Magin, Manuel D. Ortigueira, Igor Podlubny, and Juan Trujillo. On the fractional signals and systems. *Signal Processing*, 91(3):350–371, 2011.
- [198] A. Oustaloup. Fractional order sinusoidal oscillators: Optimization and their use in highly linear FM modulation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(10):1007–1009, 1981.
- [199] Isabel S. Jesus and J. A. Tenreiro Machado. Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, 54(3):263–282, 2008.
- [200] Sanjoy Debbarma and Arunima Dutta. Utilizing Electric Vehicles for LFC in Restructured Power Systems Using Fractional Order Controller. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 8(6):2554–2564, 2017.
- [201] J. Sabatier, Om Prakash Agrawal, and J. A. Tenreiro Machado. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer London NetLibrary, Inc., Guildford Boulder, 2007.
- [202] Bruce J. West, Mauro Bologna, and Paolo Grigolini. *Physics of fractal operators*. Institute for nonlinear science. Springer, New York, 2003.
- [203] Jocelyn Sabatier, Christophe Farges, and Jean-Claude Trigeassou. Fractional systems state space description: some wrong ideas and proposed solutions. *Journal of Vibration and Control*, 20(7):1076–1084, 2014.

-
- [204] Yiheng Wei, Yuquan Chen, Jiachang Wang, and Yong Wang. Analysis and description of the infinite-dimensional nature for nabla discrete fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 72:472–492, 2019.
- [205] Denis Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM: Proceedings*, 5:145–158, 1998.
- [206] Catherine Bonnet and Jonathan R. Partington. Coprime factorizations and stability of fractional differential systems. *Systems & Control Letters*, 41(3):167–174, 2000.
- [207] Jocelyn Sabatier, Mathieu Moze, and Christophe Farges. LMI stability conditions for fractional order systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1594–1609, 2010.
- [208] Christophe Farges, Mathieu Moze, and Jocelyn Sabatier. Pseudo state feedback stabilization of commensurate fractional order systems. In *2009 European Control Conference (ECC)*, pages 3395–3400, Budapest, 2009. IEEE.
- [209] Hyo-Sung Ahn and YangQuan Chen. Necessary and sufficient stability condition of fractional-order interval linear systems. *Automatica*, 44(11):2985–2988, 2008.
- [210] Zhe Gao and Xiaozhong Liao. Robust stability criterion of fractional-order functions for interval fractional-order systems. *IET Control Theory & Applications*, 7(1):60–67, 2013.
- [211] Bilal Senol, Abdullah Ates, B. Baykant Alagoz, and Celaleddin Yergolu. A numerical investigation for robust stability of fractional-order uncertain systems. *ISA Transactions*, 53(2):189–198, 2014.
- [212] Shiqi Zheng. Robust stability of fractional order system with general interval uncertainties. *Systems & Control Letters*, 99:1–8, 2017.
- [213] Mohammad Tavazoei and Mohammad Hassan Asemani. On robust stability of incommensurate fractional-order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 90:105344, 2020.
- [214] S.B. Skaar, A.N. Michel, and R.K. Miller. Stability of viscoelastic control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(4):348–357, 1988.
- [215] Jocelyn Sabatier, Christophe Farges, and Jean-Claude Trigeassou. A stability test for non-commensurate fractional order systems. *Systems & Control Letters*, 62(9):739–746, 2013.

- [216] Y.J. Yu and Z.H. Wang. A graphical test for the interval stability of fractional-delay systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3):1501–1509, 2011.
- [217] Zhe Gao. Robust stability criterion for fractional-order systems with interval uncertain coefficients and a time-delay. *ISA Transactions*, 58:76–84, 2015.
- [218] Catherine Bonnet and Jonathan R. Partington. Analysis of fractional delay systems of retarded and neutral type. *Automatica*, 38(7):1133–1138, 2002.
- [219] Weihua Deng, Changpin Li, and Jinhu Lü. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 48(4):409–416, 2007.
- [220] D. Baleanu, S. J. Sadati, R. Ghaderi, A. Ranjbar, T. Abdeljawad (Maraaba), and F. Jarad. Razumikhin Stability Theorem for Fractional Systems with Delay. *Abstract and Applied Analysis*, 2010:1–9, 2010.
- [221] Jun-Guo Lu and Yang-Quan Chen. Robust Stability and Stabilization of Fractional-Order Interval Systems with the Fractional Order α : The $0 < \alpha < 1$ Case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1):152–158, 2010.
- [222] Liping Chen, Ranchao Wu, Yigang He, and Lisheng Yin. Robust stability and stabilization of fractional-order linear systems with polytopic uncertainties. *Applied Mathematics and Computation*, 257:274–284, 2015.
- [223] I. Petras, YangQuan Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Stability of linear time invariant systems with interval fractional orders and interval coefficients. In *Second IEEE International Conference on Computational Cybernetics, 2004. ICC 2004.*, pages 341–346, Vienna, Austria, 2004. IEEE.
- [224] Weisheng Chen, Hao Dai, Yanfei Song, and Zhengqiang Zhang. Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems. *IET Control Theory & Applications*, 11(7):1070–1074, 2017.
- [225] Zhe Gao. Robust stabilization criterion of fractional-order controllers for interval fractional-order plants. *Automatica*, 61:9–17, 2015.
- [226] Ivo Petráš. Tuning and implementation methods for fractional-order controllers. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 15(2):282–303, 2012.

- [227] C.P. Li and F.R. Zhang. A survey on the stability of fractional differential equations: Dedicated to Prof. Y.S. Chen on the Occasion of his 80th Birthday. *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1):27–47, 2011.
- [228] Rachid Malti and Milan Rapaić. Sufficient stability conditions of fractional systems with perturbed differentiation orders. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):14557–14562, 2017.
- [229] Hartmut Logemann. Circle criteria, small-gain conditions and internal stability for infinite-dimensional systems. *Automatica*, 27(4):677–690, 1991.
- [230] J.A Villegas. *A Port-Hamiltonian approach to distributed parameter systems*. Doktorska disertacija, Twente Univerzitet, Twente, 2007.
- [231] Hartmut Logemann. Stabilization and regulation of infinite-dimensional systems using coprime factorizations. In *Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems*, volume 185, pages 102–139. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [232] M. J. Balas. Suboptimality and stability of linear distributed-parameter systems with finite-dimensional controllers. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45(1):1–19, 1985.
- [233] Mark J Balas. Finite-dimensional controllers for linear distributed parameter systems: Exponential stability using residual mode filters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 133(2):283–296, 1988.
- [234] Kenji Kashima and Yutaka Yamamoto. On standard control problems for systems with infinitely many unstable poles. *Systems & Control Letters*, 57(4):309–314, 2008.
- [235] Christophe Prieur and Emmanuel Trelat. Feedback Stabilization of a 1-D Linear Reaction–Diffusion Equation With Delay Boundary Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(4):1415–1425, 2019.
- [236] M. Vidyasagar, H. Schneider, and B. Francis. Algebraic and topological aspects of feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4):880–894, 1982.
- [237] Y. Chait, C.R. MacCluer, and C.J. Radcliffe. A Nyquist stability criterion for distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(1):90–92, 1989.

- [238] R. Rebarber. Conditions for the equivalence of internal and external stability for distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(6):994–998, 1993.
- [239] A. Cheng and K. Morris. Accurate approximation of invariant zeros for a class of SISO abstract boundary control systems. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, volume 2, pages 1315–1320, Maui, Hawaii, USA, 2003. IEEE.
- [240] Aivar Sootla and Anders Rantzer. Model Reduction of Spatially Distributed Systems Using Coprime Factors and Semidefinite Programming. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):6663–6668, 2011.
- [241] W.H. Ray. Some recent applications of distributed parameter systems theory—A survey. *Automatica*, 14(3):281–287, 1978.
- [242] S.G. Tzafestas and P. Stavroulakis. Recent advances in the study of distributed parameter systems. *Journal of the Franklin Institute*, 315(5-6):285–305, 1983.
- [243] Ruth Curtain and Kirsten Morris. Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial. *Automatica*, 45(5):1101–1116, 2009.
- [244] L. Pandolfi and H. Zwart. Stability of perturbed linear distributed parameter systems. *Systems & Control Letters*, 17(4):257–264, 1991.
- [245] F.D. Bairamov and M.Yu. Safronov. The stability of systems with distributed parameters and lumped forces. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 66(3):341–345, 2002.
- [246] Jean Baptiste Joseph Fourier. *The analytical theory of heat*. Dover phoenix editions. Dover Publications, Mineola, N.Y, 2003.
- [247] C.I. Bymes, I.G. Lauko, D.S. Gilliam, and V.I. Shubov. Output regulation for linear distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12):2236–2252, 2000.
- [248] Emilia Fridman and Yury Orlov. Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays. *Automatica*, 45(1):194–201, 2009.
- [249] Lingfei Li, Xiuxiang Zhou, and Hang Gao. The stability and exponential stabilization of the heat equation with memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 466(1):199–214, 2018.
- [250] Lingfei Li and Hang Gao. The stability and stabilization of heat equation in non-cylindrical domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 493(2):124538, 2021.

- [251] Jeanne A. Atwell and Belinda B. King. Reduced Order Controllers for Spatially Distributed Systems via Proper Orthogonal Decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(1):128–151, 2004.
- [252] Lucie Baudouin, Alexandre Seuret, and Frédéric Gouaisbaut. Stability analysis of a system coupled to a heat equation. *Automatica*, 99:195–202, 2019.
- [253] Rami Katz and Emilia Fridman. Constructive method for finite-dimensional observer-based control of 1-D parabolic PDEs. *Automatica*, 122:109285, 2020.
- [254] Oliver Heaviside. On the Extra Current. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(9):135–145, 1876.
- [255] Oliver Heaviside. *Electromagnetic Theory, Vol. II*, volume 2. Chelsea Publishing Company, New York, 1899.
- [256] S.M. Shahruz and A. Imam. Bounded-input bounded-output stability of systems represented by the Telegrapher’s equation. In *[1992] Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3111–3112, Tucson, AZ, USA, 1992. IEEE.
- [257] L. Baratchart, S. Fueyo, G. Lebeau, and J.-B. Pomet. Sufficient Stability Conditions for Time-varying Networks of Telegrapher’s Equations or Difference-Delay Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 53(2):1831–1856, 2021.
- [258] Hideki Sano. Stability analysis of the telegrapher’s equations with dynamic boundary condition. *Systems & Control Letters*, 111:34–39, 2018.
- [259] Stevan M. Cvetićanin, Dušan Zorica, and Milan R. Rapačić. Generalized time-fractional telegrapher’s equation in transmission line modeling. *Nonlinear Dynamics*, 88(2):1453–1472, 2017.
- [260] Li Zhang and Gabor Stepan. Stability Analysis of the Wave Equation with Delayed Boundary Conditions. *Procedia IUTAM*, 22:139–145, 2017.
- [261] Serge Nicaise and Cristina Pignotti. Stability and Instability Results of the Wave Equation with a Delay Term in the Boundary or Internal Feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5):1561–1585, 2006.
- [262] Rong Gao, Nana Ma, and Gaoji Sun. Stability of solution for uncertain wave equation. *Applied Mathematics and Computation*, 356:469–478, 2019.

- [263] J. Clerk Maxwell. On Governors. *Proceedings of the Royal Society of London*, 16:270–283, 1868.
- [264] Robert Alexander Frazer and William Jolly Duncan. On the criteria for the stability of small motions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 124(795):642–654, 1929.
- [265] Y.I. Neimark. Stability of linearized systems. *LKVVIA, Leningrad*, page 140, 1949.
- [266] Y.I. Neimark. Dynamic systems and controlled processes. *Moscow, Izdatel'stvo Nauka*, page 336, 1978.
- [267] Elena N. Gryazina and Boris T. Polyak. Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited. *Automatica*, 42(1):13–26, 2006.
- [268] E. N. Gryazina, B. T. Polyak, and A. A. Tremba. D-decomposition technique state-of-the-art. *Automation and Remote Control*, 69(12):1991–2026, 2008.
- [269] R. Lanzkron and T. Higgins. D-decomposition analysis of automatic control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 4(3):150–171, 1959.
- [270] Jürgen Ackermann. *Robust Control*. Communications and Control Engineering. Springer London, London, 2002.
- [271] R.N. Tantarís, L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya. Stabilization of discrete-time systems by first-order controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5):858–861, 2003.
- [272] Z. Shafiei and A.T. Shenton. Frequency-domain design of pid controllers for stable and unstable systems with time delay. *Automatica*, 33(12):2223–2232, 1997.
- [273] Dragoslav D. Siljak. *Nonlinear systems: the parameter analysis and design*. Wiley, New York, 1968.
- [274] G. Adomian. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 21(5):101–127, 1991.
- [275] Adrian-Josue Guel-Cortez, César-Fernando Méndez-Barrios, Eun-jin Kim, and Mihir Sen. Fractional-order controllers for irrational systems. *IET Control Theory & Applications*, 15(7):965–977, 2021.

-
- [276] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, and T.B. Šekara. D-decomposition technique for stabilization of Furuta pendulum: fractional approach. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 64(1):189–196, 2016.
- [277] A.G. Radwan, A.M. Soliman, A.S. Elwakil, and A. Sedeek. On the stability of linear systems with fractional-order elements. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(5):2317–2328, 2009.
- [278] Shuo Zhang, Lu Liu, and Dingyu Xue. Nyquist-based stability analysis of non-commensurate fractional-order delay systems. *Applied Mathematics and Computation*, 377:125111, 2020.
- [279] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard. Stability radii of linear systems. *Systems & Control Letters*, 7(1):1–10, 1986.
- [280] Hans Dieter Baehr and Karl Stephan. *Heat and Mass Transfer*. Springer Berlin Heidelberg Springer e-books, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [281] Whitham D Reeve. *Subscriber Loop Signaling and Transmission Handbook: Digital*. John Wiley & Sons, 1995.
- [282] Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables*. Birkhäuser, Boston, Mass, 1999.
- [283] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover books on mathematics. Dover Publ, New York, tenth edition, 2013.
- [284] Ruel V. Churchill, James Ward Brown, and Roger F. Verhey. *Complex variables and applications*. McGraw-Hill, New York, third edition, 1974.

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укорицити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Анализа стабилности линеарних стационарних процеса описаних ирационалним функцијама преноса
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Истраживање се реализује у оквиру израде докторске дисертације на студијском програму „Рачунарство и аутоматика“.
1. Опис података
<i>1.1 Врста студије</i> <i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i> У овој студији нису прикупљани подаци.
<i>1.2 Врсте података</i> а) квантитативни б) квалитативни
<i>1.3. Начин прикупљања података</i> а) анкете, упитници, тестови б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи в) генотипови: навести врсту _____ г) административни подаци: навести врсту _____ д) узорци ткива: навести врсту _____ ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____ е) текст, навести врсту _____

ж) мапа, навести врсту _____

з) остало: описати _____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека _____

б) SPSS фајл, датотека _____

в) PDF фајл, датотека _____

г) Текст фајл, датотека _____

д) JPG фајл, датотека _____

е) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли _____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _____

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је _____

б) варијабле које се више пута мере односе се на _____

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

- а) експеримент, навести тип _____
- б) корелационо истраживање, навести тип _____
- ц) анализа текста, навести тип _____
- д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

- а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

- а) Колики је број недостајућих података? _____
- б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не
- в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у _____ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса _____

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

- a) Да
- б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____
- в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2. Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? _____

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- а) Подаци нису у отвореном приступу
- б) Подаци су анонимизирани
- ц) Остало, навести шта

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

- а) јавно доступни
- б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области
- ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима
