

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ		
1. Датум и орган који је именовео комисију:		
30.06.2023. Наставно-научно веће Универзитета у Новом Саду, Природно-математичког факултета		
2. Састав комисије у складу са <i>Правилима докторских студија Универзитета у Новом Саду</i> :		
1. Шобот др Борис	ванредни професор	Алгебра и математичка логика, 04.05.2022.
презиме и име	звање	ужа научна област и датум избора
Природно-математички факултет у Н. Саду		председник
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
2. Курилић др Милош	редовни професор	Анализа и вероватноћа, 15.06.2004.
презиме и име	звање	ужа научна област и датум избора
Природно-математички факултет у Н. Саду		ментор
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
3. Академик Тодорчевић др Стево	научни саветник	Математика, 28.6.1991.
презиме и име	звање	ужа научна област и датум избора
Математички институт САНУ у Београду		ментор
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
4. Кузељевић др Бориша	доцент	Алгебра и математичка логика, 01.09.2018.
презиме и име	звање	ужа научна област и датум избора
Природно-математички факултет у Н. Саду		члан
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
5. Перовић др Александар	редовни професор	Математика, 15.11.2018.
презиме и име	звање	ужа научна област и датум избора
Саобраћајни факултет у Београду		члан
установа у којој је запослен-а		функција у комисији

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ
1. Име, име једног родитеља, презиме: Недељко, Желимир, Стефановић
2. Датум рођења, општина, држава: 31.12.1973., Смедеревска Паланка, Југославија
3. Назив факултета, назив претходно завршеног нивоа студија и стечени стручни/академски назив: Математички факултет у Београду, магистарске студије, магистар математичких наука
4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија: 2014. Математика
III НАСЛОВ ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ:
Примена форсинг методе на доказивање комбинаторних тврђења
IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ:
Докторска дисертација је писана на српском језику (ћирилично писмо), има 146 страна, литература садржи 19 референци, а приложени су индекс појмова, резимеи на српском и енглеском језику и биографија кандидата.
Дисертација је подељена на 9 поглавља. Оригинални резултати су дати у последњем, деветом поглављу, док у првих осам аутор систематски излаже делове теорије скупова који се користе у доказима оригиналних тврђења. Тиме се постиже комплетност текста дисертације.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

У првом поглављу дата је сажета анализа аксиома теорије скупова ZFC, као и њихових последица које обезбеђују егзистенцију основних објеката који се у теорији скупова разматрају. Дат је кратак преглед аритметике ординала и кардинала, наведена су базична тврђења о структури коју чине затворени и неограничени подскупови бесконачног кардинала те о ко-идеалу одговарајућих стационарних скупова. Дата је и врло општа верзија делта-систем леме. Комисија сматра да је уводни део написан тако да садржи све неопходне податке, а од читаоца захтева минимално предзнање из области теорије скупова.

У другој глави се разматрају модели теорије скупова са генералног становишта. Разматрају се класни и скуп-модели, као и модели са додатним особинама (добро фундирани, екстензионални, транзитивни). Уводи се хијерахија формула, релативизација формуле на дати (класни) модел и разматра феномен апсолутности формуле (генерално и, специјално, у транзитивним моделима). Приказано је и неколико верзија теореме рефлексije. Према мишљењу Комисије ово поглавље је изложено посебно компетентно, уз доста детаља који се не могу наћи у већини литературе.

Трећа глава је посвећена конструктивилној хијерархији и, специјално, Геделовом конструктивилном универзуму. Дат је доказ Леви-Шенфилдове теореме апсолутности. У четвртој глави се посматра класа ординално дефинибилних скупова (са параметрима из дате класе) и верификују се аксиоме теорије ZF у њеној поткласи – класи наследно ординално дефинибилних скупова. Ове две главе су изложене с одговарајућом мером детаљности.

Пета глава је посвећена форсингу, методи конструкције модела теорије скупова. Уводи се форсинг релација, наводе се основне особине ове релације и доказује основна теорема форсинга која повезује задовољивост формуле у генеричкој екстензији и форсинг релацију у полазном моделу. Показује се да екстензија пребројивог транзитивног модела (коначног фрагмента) ZFC задовољава исте аксиоме. Наводе се познате неједнакости које се односе на кофиналност ординала и степеновање кардинала у полазном моделу и његовој генеричкој екстензији. У наставку је дат приказ Коеновог форсинга; наведене су његове особине које ће се у наставку користити као и форсинг еквиваленција разних инкарнација Коеновог форсинга. На крају пете главе је дат доказ Лејверове теореме о (параметарској) дефинибилности основног модела у генеричкој екстензији. Као што се види из наслова тезе, глава 5 је посебно значајна јер излаже главни метод коришћен у тексту, и то је учињено компетентно и с избором резултата који ће бити коришћени у наставку.

У шестој глави се уводи Коенов симетрични модел и наводе његове особине које ће се користити у наставку. Затим је дат доказ да овај модел не задовољава аксиому избора. Дат је и Харингтонов доказ Халперн-Лојхлијеве теореме (комбинаторног тврђења, $HL(d)$, о бојењу производа d -много дрвета, где је d произвољан природан број), као и доказ да Коенов симетрични модел задовољава услов ВРI (у свакој Буловој алгебри постоји прост идеал, или, еквивалентно, ултрафилтер). У овом делу текста представљена је тема од посебне важности за главне резултате, и према мишљењу Комисије то је учињено на одговарајући начин.

Седма глава садржи основне дефиниције и тврђења дескриптивне теорије скупова. Дефинишу се кодови отворених (и затворених скупова) и даје позната карактеризација Коенових реалних бројева. Мишљење је Комисије да је и овај део тезе изложен на адекватан начин.

У осмој глави су представљени резултати Зукера и Ламби-Хенсона, који су у вези са оригиналним резултатима аутора. Прво, $ZF + VP1 + DDF(d)$ имплицира $HL(d)$, за сваки природан број d ; друго, $ZF + VP1 + G(d)$ имплицира $HL(d)$, за сваки природан број d ; где су $DDF(d)$ и $G(d)$ Ремзијевски искази о бојењу коначних производа пољских простора. Притом је $DDF(2)$ теорема ZFC , док исказ $DDF(d)$, за d веће од 2, није доказив у ZFC : у моделима $ZFC + CH$ важи негација $DDF(3)$, већ при бојењу у две боје. Стога је задатак да се нађу модели у којима су тачни искази $DDF(d)$, за d веће од 2, или јачи услови $PG(d)$, интересантан када је истраживање снаге Халперн-Лојхлијеве теореме у питању. Занимљиво је да су се ови резултати појавили током самог истраживања, што указује на актуелност теме. Такође, њихово укључивање у тезу показује да је кандидат у току са савременим истраживањима.

Коначно, девета глава садржи оригиналне резултате аутора, који обједињују појмове и методе описане у претходним деловима текста. Ово је, наравно, централни део тезе и биће детаљније описан у наставку. Сви оригинални резултати приказани су јасно и прецизно. Њихова позиција у оквиру фонда савременог математичког знања је, захваљујући свему изложеном у претходним главама, јасно назначена.

VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ:

[1] (M22) Nedeljko Stefanović, *Alternatives to the Halpern-Läuchli theorem*, *Annals of Pure and Applied Logic*, 174,9 (2023) 103313. <https://doi.org/10.1016/j.apal.2023.103313>

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА:

Метода форсинга, примарно намењена доказима независности, може се користити као алат при доказивању комбинаторних тврђења. Она је у прошлости с успехом примењивана у ту сврху, као што показују нпр. резултати Тодорчевића и Мура. Описана идеја је веома успешно спроведена и у овој тези. Такође су коришћени симетрични подмодели, првобитно конструисани ради доказа независности Аксиоме избора.

Оригинални резултати аутора налазе се у деветој глави тезе. Прво се показује да из чињенице да Коенов симетрични модел задовољава услов ВР1 следи Халперн-Лојхлијева теорема. Затим се доказује да у Коеновом симетричном моделу важи принцип G: $G(d)$, за сваки природан број d , па стога и Халперн-Лојхлијева теорема. Даље, показује се да је исказ $PG(\lambda)$ (о бојењу коначних производа пољских простора у мање од λ -много боја, где је λ бесконачан кардинал) тачан по додавању λ -много Коенових реалних бројева, уз додатне претпоставке на λ . Специјално, PG па и DDF је тачно по додавању \aleph_0 -много Коенових реалних бројева на произвољан пребројив транзитиван модел ZFC. На крају су дата два Ремзијевска тврђења која су доказива у ZFC. Прво се односи на бојење коначног производа пољских простора у пребројиво боја, при којем инверзне слике синглтона (боја) имају својство Бера. Друго се односи на бојење коначног „по-нивоима-производа“ пребројивих дрвета висине ω без максималних елемената. Показује се да из другог исказа следи Халперн-Лојхлијева теорема.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА:

Кроз девет поглавља тезе приказана је изградња теорије скупова, почевши од аксиома и достигавши велики број значајних резултата. На тај начин, укључујући у текст преглед великог броја тема везаних за модерну теорију скупова, кандидат је предмет истраживања ставио у шири контекст. Притом је показао завидно познавање материје, као и способност систематичног организовања резултата у логичке целине и њиховог методичког излагања. Посебно је наглашено место које унутар области има само истраживање којим се бави теза и тиме истакнут његов значај. Добијени резултати изложени су на јасан и прецизан начин.

Дакле, Комисија позитивно оцењује начин приказа и тумачења резултата истраживања.

IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Експлицитно навести да ли дисертација јесте или није написана у складу са наведеним образложењем, као и да ли она садржи или не садржи све битне елементе. Дати јасне, прецизне и концизне одговоре на 3. и 4. питање:

1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме?

Дисертација је написана у потпуности у складу с образложењем наведеним у пријави теме.

2. Да ли дисертација садржи све битне елементе?

Дисертација садржи све битне елементе: темељан уводни део који повезује истраживање са савременим токовима теорије скупова, главни део у којем је изложен предмет истраживања и јасно и прецизно изложени резултати истраживања, као и списак релевантне литературе, индекс појмова који значајно олакшава сналажење у тексту и закључак.

3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци?

Докази независности представљају један од највећих доприноса теорије скупова математици. Они омогућују да се покаже да хипотезе, везане не само за област теорије скупова, већ из разних области математике, нису доказиве (у оквиру одређеног скупа аксиома). Један од најплоднијих метода који се у ову сврху примењују је метод форсинга.

У оквиру истраживања независности и релативне конзистентности појављују се многе аксиоме као могућа „допуна“ систему ZF. Најпознатија од њих је свакако Аксиома избора (AC), али разматра се и велики број њених ослабљења. Од великог је значаја проучавање њихове хијерархије и, на тај начин, одређивање снаге сваког од њих (тј. проучавање њихових последица). Међу њима се истичу, између осталих, Boolean Prime Ideal теорема (BPI) и Халперн-Лојхлијева теорема. Разоврсност ових тврђења, као и идеја које се користе у доказивању импликација између њих, представља значајан допринос свеукупном телу фундамената математике и на тај начин, посредно и целокупне математике.

Откривање нових доказа постојећих тврђења често може на нови начин осветлити везе између објеката и постулата о којима она говоре. Као што је и сам кандидат у закључку овог рада истакао, такво боље разумевање може потом водити и новим тврђењима. Управо је такав случај и са резултатима окупљеним у последњој глави ове тезе.

О значају добијених резултата сведочи и чињеница да су објављени у једном од најпрестижнијих часописа из области математичке логике.

Докторска дисертација је прошла проверу плагијаризма софтвером iThenticate (<https://www.ithenticate.com/>) и проценат сличности са другим изворима је 8%.

4. Који су недостаци дисертације и какав је њихов утицај на резултат истраживања?

Дисертација нема недостатака.

X ПРЕДЛОГ:
На основу наведеног, комисија предлаже:
Да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана.

Место и датум:
Нови Сад 25.07.2023.

1. др Борис Шобот,
ванредни професор ПМФ у Н. Саду

_____, председник

2. др Милош Курилић,
редовни професор ПМФ у Н. Саду

_____, ментор

3. Академик др Стево Тодорчевић,
научни саветник Математичког
института САНУ

_____, ментор

4. др Бориша Кузељевић,
доцент ПМФ у Н. Саду

_____, члан

5. др Александар Перовић,
редовни професор Саобраћајног
факултета у Београду

_____, члан

НАПОМЕНА: Члан комисије који не жели да потпише извештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије, дужан је да унесе у извештај образложење односно разлоге због којих не жели да потпише извештај и да исти потпише.