УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милош Б. Ђорић

ГЕОДЕЗИЈСКЕ ЛИНИЈЕ И ХИПЕРПОВРШИ БЛИЗУ КЕЛЕРОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

докторска дисертација

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Miloš B. Djorić

GEODESIC LINES AND HYPERSURFACES OF THE NEARLY KÄHLER MANIFOLD $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022.

Ментор:

др Мирјана Ђорић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије:

др Мирослава Антић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Зоран Ракић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Срђан Вукмировић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Емилија Нешовић, редовни професор
Универзитет у Крагујевцу - Природно-математички факултет

Датум одбране: ______________________

Захвалница

Ову тезу првенствено посвећујем својој породици, без чије подршке и бројних одрицања она засигурно не би ни могла да настане. Својој менторки, проф. др Мирјани Ђорић, дугујем захвалност на дугогодишњој успешној сарадњи током целокупних својих студија. Њени стални подстицаји и вера у мене током израде тезе умногоме су заслужни што је овај корак у мом образовању успешно завршен. Чланови Комисије за оцену тезе су својим коментарима и сугестијама изузетно побољшали квалитет саме тезе, на чему им захваљујем. Такође, хвала и свим осталим наставницима и професорима који су на било који начин били део мог досадашњег математичког пута, као и ђацима и студентима са којима ме је рад у настави увек испуњавао и мотивисао.

Милош Ђорић

Наслов дисертације: Геодезијске линије и хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

Резиме: У овој дисертацији представљена је класификација неких битних класа хиперповрши M близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, као и параметризација геодезијских линија ове многострукости. Ова многострукост је једна од свега четири хомогене, шестодимензионе, близу Келерове многострукости. Поред скоро комплексне структуре J, ова многострукост поседује и скоро продукт структуру P која антикомутира са J. Захваљујући томе, на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ постоје две интересантне класе тангентних векторских поља, тзв. $\mathcal{P}-$сингуларна векторска поља, која имају сличне особине као $\mathcal{A}-$сингуларна векторска поља на комплексној квадрици Q, која су позната од раније. Дефинисани су појмови $\mathcal{P}-$главних и $\mathcal{P}-$изотропних тангентних векторских поља на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и представљене су њихове основне особине. У случају када је нормално векторско поље ξ хиперповрши M $\mathcal{P}-$главно, добијена је делимична класификација, док је имерзија хиперповрши M са $\mathcal{P}-$изотропним нормалним векторским пољем дата експлицитно.

Кључне речи: Близу Келерове многострукости, скоро продукт структура, Хопфове хиперповрши, $\mathcal{P}-$главно векторско поље, $\mathcal{P}-$изотропно векторско поље

Научна област: Математика

Ужа научна област: Диференцијална геометрија

Dissertation title: Geodesic lines and hypersurfaces of the nearly Kähler manifold $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

Abstract: In this dissertation, the classification of some important classes od hypersurfaces M of the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ is considered, along with the parametrisation of the geodesic lines of this manifold. This manifold is one of only four examples of homogeneous, 6-dimensional, nearly Kähler manifolds. In addition to the almost complex structure J, this manifold is endowed with an almost product structure P, which anticommutes with J. Owing to these facts, there are two families of interesting tangent vector fields on $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, called $\mathcal{P}-$singular vector fields, having similar properties as $\mathcal{A}-$singular vector fields on complex quadrics Q, which are already known. The notion of $\mathcal{P}-$principal and $\mathcal{P}-$isotropic tangent vector fields of $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ is defined, along with their basic properties. In the case of $\mathcal{P}-$principal normal vector field ξ of the hypersurface M, the partial classification is given, while the immersion of the hypersurfaces M with $\mathcal{P}-$isotropic normal vector field ξ is stated explicitly.

Keywords: Nearly Kähler manifolds, almost product structure, Hopf hypersurfaces, $\mathcal{P}-$principal vector field, $\mathcal{P}-$isotropic vector field

Research area: Mathematics

Research sub-area: Differential geometry

Садржај

Увод

Риманове многострукости које су снабдевене неком додатном геометријском структуром, нпр. скоро комплексном или скоро контактном метричком структуром, имају разна интересантна својства са тачке гледишта диференцијалне геометрије. У случају када се та структура, често дефинисана неким тензором, слаже са Римановом геометријом, тј. метриком, кажемо да је структура интеграбилна. Услов компатибилности значи да је структура паралелна у односу на одговарајућу Леви-Чивита конексију, или, еквивалентно, Риманова група холономије се редукује са ортогоналне групе на неку њену Лијеву подгрупу G која чува ту геометријску структуру. Тако добијамо тзв. $G-$структуру на многострукости, која је редукција главног раслојења многострукости на одговарајуће подраслојење са структурном групом G. Први примери оваквих многострукости су Келерове и Калаби-Јау-ове, паралелне G_2-структуре у димензији 7, паралелне $Spin(7)-$структуре у димензији 8, као и симетрични простори. Међутим, постоји мноштво важних Риманових многострукости снабдевених неинтеграбилним геометријским структурама, на пример скоро контактне метричке структуре у непарним димензијама, неке хермитске многострукости (које нису Келерове) у парним димензијама, као и хомогени несиметрични простори. Група холономије ових многострукости је најчешће цела ортогонална група, па се не могу међусобно разликовати са те тачке гледишта.

Келерове многострукости представљају специјалне скоро хермитске многострукости и предмет су изучавања Риманове, комплексне и симплектичке геометрије већ дуги низ година, па је ова класа многострукости широко испитана и постоји мноштво примера у литератури. Посматрајући неке друге симетрије које скоро комплексна структура J као тензорско поље задовољава, тј. ослабљивањем услова да је J паралелна или остављајући само услов да је одговарајућа фундаментална форма ω затворена, добијамо многе друге геометрије. У раду [35], Греј и Харвела дефинисали су 16 различитих скоро хермитских геометрија, према различитим симетријама које коваријантни извод $\tilde{\nabla}\omega$ ове форме ω задовољава, међу њима и близу Келерову. Прецизније, код близу Келерових многострукости коваријантни извод скоро комплескне структуре J је кососиметрично тензорско поље, уместо Келеровог услова да је та структура паралелна у односу на одговарајућу Леви-Чивита конексију. Последњих година порасло је интересовање за ову класу многострукости јер представљају пример геометрије са торзијом и као такве имају примену у математичкој физици (видети [1]). Прво систематично изучавање близу Келерових многострукости извео је Греј у радовима [32] и [34], иако су се у неком облику ове многострукости појавиле и раније, у радовима [45] и [58] под називом $K-$простори, односно скоро Тачибана простори. Греј је изучавао ове многострукости у контексту групе слабе холономије, коју је сам дефинисао у [32] и доказао да се близу Келерове многострукости карактеришу тиме да је група слабе холономије баш група $U(n)$. Уколико је димензија близу Келерове многострукости 2 или 4, познато је да је та многострукост обавезно и Келерова, па први примери строго близу Келерових многострукости постоје тек у димензији 6.

Хронолошки гледано, први пример близу Келерове многострукости је сфера $\mathbb{S}^6$, чија се скоро комплексна структура J дефинише користећи алгебру октониона, док је у раду [27] доказано да је $\tilde{\nabla} J$ на овој сфери кососиметрично. Напоменимо да је сфера $\mathbb{S}^6$ хомогена многострукост јер специјална Лијева група G_2 аутоморфизама алгебре октониона делује транзитивно на овој сфери, при чему су све изотропне групе изоморфне специјалној унитарној групи $SU(3)$, па је $\mathbb{S}^6 = G_2/SU(3)$. Греј и Вулф су у раду [36] пронашли још три примера у димензији 6 који представљају комплетне, простоповезане и хомогене многострукости: многострукост застава $F_{1,2}(\mathbb{C}^3) = SU(3)/T^2$, комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^3 = Sp(2)/Sp(1)U(1)$ и производ сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 = SU(2)^3/SU(2)_\triangle$, где је $SU(2)_\triangle$ дијагонална подгрупа од $SU(2)^3$.

Они су дефинисали појам $3-$симетричних простора, као уопштења симетричних простора и до тада познатих примера близу Келерових многострукости. Ови простори садрже, за сваку тачку многострукости, локално дефинисану симетрију реда 3 која је холоморфна изометрија и која ту тачку има за изоловану фиксну тачку, као и природно дефинисану скоро комплексну структуру коју ћемо подразумевати као канонско дефинисану. Такође, мотивисани својим истраживањима, они су поставили две хипотезе: прва се односила на то да су све хомогене близу Келерове многострукости управо $3-$симетрични простори, снабдевени канонском скоро комплексном структуром, а друга да су све компактне близу Келерове многострукости $3-$симетрични простори. Доста касније, Бутруил је 2005. године у раду [11] доказао да су ова четири примера заправо једине хомогене, близу Келерове многострукости у димензији шест. Нађ је 2002. године у раду [48] доказао структурну теорему за комплетне, близу Келерове многострукости - свака од њих је локално Риманов производ неке хомогене близу Келерове многострукости, твистор простора кватернионских близу Келерових многострукости са позитивном скаларном кривином и шестодимензионе строго близу Келерове многострукости. Према томе, шестодимензионе близу Келерове многострукости су градивни блокови произвољних близу Келерових многострукости и њихово изучавање доприноси бољем разумевању целе ове класе многострукости. Ови резултати, између осталог, значе и да је прва од поменутих хипотеза тачна, док је друга и даље отворен проблем, без обзира што су сва четири поменута примера компактне многострукости.

Ричијева кривина строго близу Келерових многострукости, за разлику од Келерових, је строго позитивна, па је глобално гледано близу Келерова геометрија ригиднија од Келерове. Мајерсова теорема даје да је свака комплетна, строго близу Келерова многострукост компактна, са коначном фундаменталном групом, па је њено универзално наткривање опет комплетна, близу Келерова многострукост. Због тога има смисла посматрати повезане, просто-повезане близу Келерове многострукости. Такође, све шестодимензионе близу Келерове многострукости су Ајнштајнове, са првом Черновом класом једнаком нули и постоји њихова веза са теоријом спинора. Наиме, Фридрих и Груневалд су у раду [26] показали да свака шестодимензиона Риманова многострукост допушта Риманов Килингов спинор ако и само ако је близу Келерова. Такође, шестодимензиона многострукост је близу Келерова ако и само ако Риманов конус конструисан над њом има групу холономије садржану у G_2, што даје везу између близу Келерове и G_2-геометрије. Један од главних проблема у теорији близу Келерових многострукости је и конструкција нових примера. Фасколо и Хаскинс дали су недавно прве примере комплетних, нехомогених близу Келерових многострукости, приказавши у раду [24] експлицитну конструкцију близу Келерове структуре на $\mathbb{S}^6$ и $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Такође, у раду

[29] представљен је псеудо-Риманов аналогон производа сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, који има близу Келерову структуру.

Подмногострукости сфере $\mathbb{S}^6$ интензивно су изучаване од друге половине 20. века до данас, али се током последњих десетак година изучавају и скоро комплексне, Лагранжове и CR подмногострукости (специјално, хиперповрши) близу Келеровог производа сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ (видети радове [3], [4], [5], [10], [18], [19], [21], [22], [23], [42], [43], [40], [39], [61]).

У Глави 1 ове дисертације дате су основне дефиниције и изложени добро познати резултати о близу Келеровим многострукостима. У Глави 2 представљена је близу Келерова структура на многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. У Глави 3 представљени су резултати из коауторског рада кандидата [22], где је добијена експлицитна параметризација геодезијских линија на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, као и неке њихове особине. У Глави 4 дат је приказ познатих резултата везаних за хиперповрши близу Келерових многострукости, специјално од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Глава 5 даје мотивацију, дефиницију и основне особине специјалних векторских поља на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, названих $\mathcal{P}$-главна, односно $\mathcal{P}$-изотропна. Главе 6 и 7 баве се испитивањем и класификацијом специјалних класа хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са $\mathcal{P}-$сингуларним нормалним векторским пољем, који представљају резултате самосталног рада кандидата [21], као и коауторског рада [23].

Глава 1

Близу Келерове многострукости

1.1 Основне дефиниције и особине

Нека је $(\tilde{M}, J)$ **скоро комплексна** многострукост, тј. многострукост која поседује $(1,1)-$тензорско поље J које се назива скоро комплексна структура. Тензор J је ендоморфизам тангентног раслојења $J : T\tilde{M} \to T\tilde{M}$ многострукости, такав да је линеаран на сваком влакну (слоју, фибри) раслојења и важи $J^2 = -\mathrm{Id}$. Прецизније, на тангентном простору $T_p\tilde{M}$, у произвољној тачки многострукости $p \in \tilde{M}$, одговарајући ендоморфизам $J_p : T_p\tilde{M} \to T_p\tilde{M}$ задовољава услов $J_p^2 = -\mathrm{Id}$. Наравно, постојање скоро комплексне структуре на $\tilde{M}$ повлачи да је реална димензија од $\tilde{M}$ парна, означимо је са $2n$, као и да је J_p изоморфизам на сваком тангентном простору. Такође, структурна група главног раслојења многострукости, која представља групу симетрија које задовољавају функције преласка локалних карата овог раслојења, редукује се са $GL(2n, \mathbb{R})$ на $GL(n, \mathbb{C})$. Самим тим, постоје одређене тополошке опструкције за постојање скоро комплексне структуре на многострукости.

Скоро комплексна многострукост $\tilde{M}$ са скоро комплексном структуром J представља **комплексну** многострукост, тј. поседује комплексну структуру такву да је J индукована скоро комплексна структура из те комплексне структуре, ако и само ако је одговарајући Нијенхуисов тензор

$$4N_J(X,Y) = J[X,Y] - [JX,Y] - [X,JY] - J[JX,JY]$$

идентички једнак нули. Тај услов се у литератури често назива условом интеграбилности скоро комплексне структуре, тј. скоро комплексна многострукост је уједно и комплексна ако и само ако је скоро комплексна структура интеграбилна.

Познато је да су сфере $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^6$ једине сфере које допуштају скоро комплексну структуру, с тим што је и даље отворен проблем да ли сфера $\mathbb{S}^6$ допушта неку скоро комплексну структуру која је интеграбилна, тј. да ли је то комплексна многострукост (сфера $\mathbb{S}^2$ очигледно јесте комплексна многострукост). То, специјално, значи да остале парнодимензионе сфере нису комплексне многострукости, иако је за сфере $\mathbb{S}^{4k}$, $k \in \mathbb{N}$ то било познато и раније, користећи методе алгебарске топологије, прецизније Чернове класе.

Тангентно раслојење $\tilde{M}$ реалне димензије $2n$ произвољне скоро комплексне многострукости $(\tilde{M}, J)$ димензије n може се комплексификовати, користећи скоро комплексну структуру J, до комплексног векторског раслојења $\tilde{M} \otimes \mathbb{C}$ димензије n на следећи начин: то је скуп

$$\tilde{M} \otimes \mathbb{C} = \{X + iY \mid X, Y \in T\tilde{M}\},$$

са природно дефинисаним операцијама сабирања и множења скаларом, као и конјугацијом. При томе, као влакно овог раслојења над сваком тачком многострукости добијамо холоморфни тангентни простор, који представља комплексификацију реалног тангентног простора многострукости, са структуром комплексног векторског простора. Сваки ендоморфизам на $\tilde{M}$ се, такође, природно проширује на $\tilde{M}\otimes\mathbb{C}$, па тако и скоро комплексна структура релацијом

$$J : \tilde{M}\otimes\mathbb{C} \to \tilde{M}\otimes\mathbb{C}, \qquad J(X+iY) = JX + iJY.$$

Потпростори

$$T^{(1,0)}\tilde{M} = \{X - iJX \mid X \in \tilde{M}\}, \qquad T^{(0,1)}\tilde{M} = \{X + iJX \mid X \in \tilde{M}\},$$

представљају, редом, у свакој тачки многострукости сопствене потпросторе изоморфизма J, за сопствене вредности i и $-i$, који у директној суми дају

$$\tilde{M}\otimes\mathbb{C} = T^{(1,0)}\tilde{M} \oplus T^{(0,1)}\tilde{M}.$$

Векторско раслојење $T^{(1,0)}\tilde{M}$ назива се хомолорфним тангентним раслојењем и изоморфно је, као реално раслојење димензије $2n$, тангентном раслојењу $\tilde{M}$, док се векторско раслојење $T^{(0,1)}\tilde{M}$ назива антихомолорфним тангентним раслојењем. Приметимо да је конјугација један $\mathbb{R}-$линеарни (али не и $\mathbb{C}-$линеарни) изоморфизам између холоморфног и антихоломорфног тангентног раслојења $T^{(1,0)}\tilde{M} \to T^{(0,1)}\tilde{M}$. Такође, ова два раслојења су инволутивна ако и само ако је Нијенхуисов тензор идентички једнак нули (видети [20], [60]).

Слично тако, можемо посматрати комплексификовани векторски простор $k-$форми $\tilde{M}\otimes\mathbb{C}$, у ознаци $\Lambda^k\otimes\mathbb{C}$. Важи изоморфизам векторских простора

$$\Lambda^k\otimes\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p(\Lambda^{1,0})\otimes\Lambda^q(\Lambda^{0,1}),$$

где је

$$\Lambda^{p,q} := \Lambda^p(\Lambda^{1,0})\otimes\Lambda^q(\Lambda^{0,1})$$

простор свих комплексних диференцијалних $k-$форми типа (p,q), где је $p+q=k$. Како унитарне матрице комутирају са скоро комплексном структуром J, сваки скуп $\Lambda^{p,q}$ је $U(n)-$инваријантан комплексни модул.

Ако је $p\neq q$, означимо са $[[\Lambda^{p,q}]]$ реални векторски простор кога чине све реалне форме из скупа $\Lambda^{p,q}\oplus\Lambda^{q,p}$, тј. све реалне форме типа $(p,q)+(q,p)$. Његова комплексификација је $[[\Lambda^{p,q}]]\otimes\mathbb{C} = \Lambda^{p,q}\oplus\overline{\Lambda^{p,q}} = \Lambda^{p,q}\oplus\Lambda^{q,p}$. За $p=q$, скуп $\Lambda^{p,p}$ је комплексификација скупа $[\Lambda^{p,p}]$ свих реалних форми типа (p,p), тј. $(p,p)-$форми α за које важи $\alpha=\overline{\alpha}$, тј. $[\Lambda^{p,p}]\otimes\mathbb{C} = \Lambda^{p,p}$. Сада имамо изоморфизме $U(n)-$модула

$$\Lambda^1 = [[\Lambda^{1,0}]], \qquad \Lambda^2 = [[\Lambda^{2,0}]]\oplus[\Lambda^{1,1}], \qquad \Lambda^3 = [[\Lambda^{3,0}]]\oplus[[\Lambda^{2,1}]].$$

За глатку фамилију позитивно дефинитних, симетричних, хермитских форми на сваком холоморфном тангентном простору кажемо да дефинишу хермитску метрику уколико за свака два холоморфна тангентна вектора Z, W важи

$$h(Z,W) = \overline{h(W,Z)}.$$

Лако се показује да овај дефинициони услов повлачи да је реални део ове форме једна симетрична, реална, позитивно дефинитна, билинеарна форма, па индукује Риманову метрику на одговарајућем реалном тангентном простору. Такође, како хермитска метрика чува скоро комплексну структуру, то и ова метрика чува скоро комплексну структуру, па се у литератури често и тај услов на реалном тангентном простору узима за дефиницију хермитске метрике. Такође, имагинарни део хермитске форме је кососиметрична, реална, позитивно дефинитна, недегенерисана, билинеарна форма на реалном тангентном простору, који се назива хермитском диференцијалном формом.

Скоро хермитска многострукост је скоро комплексна многострукост са хермитском метриком на сваком холоморфном тангентном простору. Слично тако, **хермитска** многострукост је комплексна многострукост која поседује хермитску метрику на сваком холоморфном тангентном простору и самим тим представља комплексни аналогон Риманове многострукости. Приметимо да свака комплексна многострукост поседује бар једну хермитску метрику, слично као што свака Риманова многострукост поседује бар једну Риманову метрику. Зато се често у литератури појмови комплексне и хермитске многострукости у потпуности поистовећују.

Прецизније, скоро хермитска многострукост $(\tilde{M}, \tilde{g}, J)$ је скоро комплексна Риманова многострукост, чија је комплексна структура J компатибилна са хермитском метриком $\tilde{g}$, тј. додатно задовољава и услов

$$\tilde{g}(JX, JY) = \tilde{g}(X, Y),$$

за све $X, Y \in T\tilde{M}$, па кажемо и да је J једна $\tilde{g}-$ортогонална трансформација. Уређени пар тензора $(\tilde{g}, J)$ који задовољава ове услове индукује такозвану $U(n)-$структуру на $\tilde{M}$. Наиме, услов компатибилности скоро комплексне структуре и хермитске метрике заправо значи редукцију структурне групе многострукости са $GL(n, \mathbb{C})$ на $U(n)$, док компатибилност скоро комплексне структуре и Риманове метрике значи редукцију структурне групе многострукости са $GL(2n, \mathbb{R})$ на $O(2n)$ (односно на $SO(2n)$ уколико је многострукост још и оријентисана).

У свакој тачки скоро хермитске многострукости $\tilde{M}$ постоји репрезентација од $U(n)$ на одговарајућем тангентном простору, дајући структуру $U(n)-$модула на комплексификованом векторском простору $k-$форми $\Lambda^k \otimes \mathbb{C}$. Како се свака ортогонална матрица поклапа са транспонатом свог инверза, имамо да су репрезентације $\Lambda^k T_p^* M$ и $\Lambda^k T_p M$ од $U(n) \subset SO(2n)$ еквивалентне, па се не губи никаква информација уколико поистоветимо $k-$форме и $k-$векторе, користећи метрику. Због тога и користимо ознаку Λ^k за реалне $k-$форме, па ћемо надаље често поистовећивати $U(n)-$модуле и њихове дуале.

Свака скоро комплексна Риманова многострукост поседује бар једну хермитску метрику $\tilde{g}$ јер поседује скоро комплексну структуру J и Риманову метрику g', које за произвољне $X, Y \in T\tilde{M}$ индукују

$$\tilde{g}(X, Y) = \frac{1}{2}(g'(X, Y) + g'(JX, JY)).$$

На свакој скоро хермитској многострукости постоји Риманова метрика $\tilde{g}$ која је једнака реалном делу хермитске метрике h, тј.

$$\tilde{g} = \operatorname{Re} h = \frac{1}{2}(h + \bar{h}).$$

На свакој скоро хермитској многострукости дефинисана је и комплексна диференцијална форма ω типа $(1,1)$, која је супротна имагинарном делу хермитске метрике h, тј.

$$\omega = -\operatorname{Im} h = \frac{i}{2}(h - \bar{h}).$$

И ова форма једнака је свом конјугату, па представља комплексификацију реалне 2-форме на $\tilde{M}$, која се назива **скоро симплектичком** формом или фундаменталном формом. Веза између ове три форме је

$$h = \tilde{g} - i\omega, \tag{1.1}$$

па је јасно да било које две од њих једнозначно одређују трећу. Такође, све три форме чувају скоро комплексну структуру, тј. компатибилне су са њом

$$\tilde{g}(JX, JY) = \tilde{g}(X, Y), \quad \omega(JX, JY) = \omega(X, Y), \quad h(JX, JY) = h(X, Y).$$

Веза форми $\tilde{g}$ и ω успоставља се користећи скоро комплексну структуру

$$\omega(X, Y) = \tilde{g}(JX, Y), \qquad \tilde{g}(X, Y) = \omega(JX, Y).$$

Прва од ових релација се често у литератури узима за дефиницију скоро симплектичке форме на скоро хермитским многострукостима.

Уколико скоро симплектичка форма ω на скоро хермитској многострукости $(\tilde{M}, \tilde{g}, J)$ задовољава, додатно, и услов интеграбилности $d\omega = 0$, тј. важи да је затворена, за многострукост $\tilde{M}$ кажемо да је **симплектичка** или **скоро Келерова**, а саму форму називамо симплектичком формом. Симплектичке многострукости $(\tilde{M}, \tilde{g}, J)$ које су уједно и комплексне, називају се **Келеровим** многострукостима. Форма ω на Келеровим многострукостима назива се Келеровом формом, а Риманова метрика $\tilde{g}$ Келеровом метриком. Наравно, из претходних разматрања следи да Келерова форма, уз помоћ скоро комплексне структуре, индукује Риманову метрику $\tilde{g}$, као и хермитску метрику чије су ове метрике реални и имагинарни део (до на знак). Зато се у дефиницији Келерове многострукости често узима и да је многострукост хермитска и симплектичка, са симплектичком затвореном $2-$формом добијеном као имагинарни део хермитске форме.

Приметимо, такође, да на специјалној Келеровој многострукости $\mathbb{C}^n$, израз (1.1) повезује четири структуре: Риманову (еуклидску) метрику, симплектичку форму, хермитску форму и комплексну структуру $i = \sqrt{-1}$. Унитарна линеарна пресликавања чувају хермитску форму, ортогонална чувају еуклидску метрику, симплектичка чувају симплектичку форму и комплексно-линеарна пресликавања чувају комплексну структуру, па имамо познати идентитет који важи за одговарајуће Лијеве групе, чији су елементи матрице поменутих класа пресликавања

$$U(n) = SO(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = SO(2n) \cap Sp(2n) = GL(n, \mathbb{C}) \cap Sp(2n).$$

Другим речима, на нивоу Лијевих матричних група важи $U(n) = SO(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) \cap Sp(2n)$, што се донекле може објаснити тиме што је $SO(2n)$ максимална компактна подгрупа од $GL(2n, \mathbb{R})$, док је $U(n)$ максимална компактна подгрупа од $GL(n, \mathbb{C})$ и $Sp(2n)$. Такође, постојање било која две од ортогоналне, симплектичке или комплексне структуре, које су међусобно компатибилне, повлачи постојање унитарне структуре. Испоставља се да се ова особина може, у неком смислу, пренети на произвољну Келерову многострукост.

Наиме, Келерове многострукости поседују неколико структура, па се могу дефинисати на разне еквивалентне начине, сходно одабраној структури на коју се намеће неки додатни услов интеграбилности. Уколико је скоро комплексна структура J скоро хермитске многострукости $(\tilde{M}, \tilde{g}, J)$ паралелна у односу на Леви-Чивита конексију, тј. важи $\tilde{\nabla} \equiv 0$, многострукост је Келерова. Овај услов еквивалентан је услову да је форма ω паралелна, тј. да важи $\tilde{\nabla}\omega \equiv 0$. Оба ова услова јача су од првобитно постављеног услова затворености форме, али на хермитским многострукостима се испостављају еквивалентнима. Такође, Риманова многострукост је Келерова ако и само ако је њена група холономије садржана у $U(n)$, тј. ако и само ако је то скоро комплексна многострукост чија се скоро комплексна структура чува при паралелном померању на многострукости.

Посматрајући неке друге симетрије које коваријантни извод тензорског поља J или форме ω може да задовољава, добијамо многе друге геометрије, међу њима и близу Келерову. Ово је приступ коришћен у раду [35], где су аутори дефинисали 16 различитих скоро хермитских геометрија, према различитим симетријама које коваријантни извод $\tilde{\nabla}\omega$ форме ω задовољава. Наиме, форма $\tilde{\nabla}\omega$ се може представити као збир четири компоненте, од којих свака одговара некој иредуцибилној репрезентацији од $U(n)$. Из ове декомпозиције добија се $2^4 = 16$ врста скоро хермитских структура, према томе који подскуп скупа ових иредуцибилних компоненти се поништава (видети [28]).

Дефиниција 1.1. ***Близу Келерова*** *многострукост је скоро хермитска многострукост чије* $(2,1)-$*тензорско поље* $G(X,Y) := (\tilde{\nabla}_X J)Y$ *задовољава услов*

$$G(X,X) = (\tilde{\nabla}_X J)X = 0, \tag{1.2}$$

за све $X \in T\tilde{M}$*, при чему је* $\tilde{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија метрике* $\tilde{g}$.

Поменимо још и да услов да је форма $d\omega$ типа $(3,0)+(0,3)$, тј. да је њен $(2,1)+(1,2)$-део једнак нули, дефинише **квази-Келерове** или $(2,1)-$**симплектичке** многострукости. Ова класа многострукости обухвата симплектичке, као и близу Келерове многострукости. Такође, фундаментална форма ω на близу Келеровим многострукостима не мора бити затворена, тако да ове многострукости нису обавезно симплектичке. Штавише, многострукост је Келерова ако и само ако је истовремено скоро Келерова (симплектичка) и близу Келерова. Познат је и резултат да је многострукост Келерова ако и само ако је квази-Келерова и хермитска, тј. квази-Келерова и комплексна (видети [31]).

Дефинициона релација (1.2) је еквивалентна услову да је тензорско поље G кососиметрично, тј. за све $X, Y \in T\tilde{M}$ важи

$$G(X,Y) = -G(Y,X). \tag{1.3}$$

Како је тензорско поље J код Келерових многострукости паралелно, њихов тензор G је идентички једнак нули и свакако задовољава (1.2). Зато је свака Келерова многострукост и близу Келерова, док се оне које су близу Келерове и нису Келерове називају **строго** близу Келеровим многострукостима. Надаље ћемо под термином близу Келерова многострукост заправо подразумевати строго близу Келерову многострукост.

Из дефиниције се лако показује да на близу Келеровим многострукостима важе следеће релације.

Лема 1.1. *За сва векторска поља* $X, Y, Z \in T\tilde{M}$ *важи:*

$$G(X,JY) + JG(X,Y) = 0, \tag{1.4}$$

$$\tilde{g}(G(X,Y),Z) + \tilde{g}(G(X,Z),Y) = 0. \tag{1.5}$$

Из (1.4) следи да тензори J и G у неком смислу антикомутирају јер важи

$$G(X, JY) = G(JX, Y) = -JG(X, Y), \tag{1.6}$$

па је специјално задовољено и

$$\begin{aligned} G(JX, JY) &= -G(X, Y), \\ G(X, JX) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Одавде се непосредно добија да је $G(X, Y)$ нормално на X, Y, JX, JY, за произвољне $X, Y \in T\tilde{M}$, па се сада лако доказује да, када је $\tilde{M}$ димензије 2 или 4, важи $\tilde{\nabla} \equiv 0$, тј. $\tilde{M}$ је Келерова.

Лема 1.2. *За сва векторска поља $X, Y, Z \in T\tilde{M}$ важи*

$$\tilde{\nabla}\omega(X, Y, Z) = \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y, Z) = \tilde{g}(G(X, Y), Z).$$

Такође, могуће је померати J по свим позицијама у $\tilde{\nabla}\omega$; прецизније,

$$\tilde{\nabla}\omega(JX, Y, Z) = \tilde{\nabla}\omega(X, JY, Z) = \tilde{\nabla}\omega(X, Y, JZ),$$

па је форма $\tilde{\nabla}\omega$ кососиметрична реална $3-$форма типа $(3, 0) + (0, 3)$.

Доказ. Како је конексија метричка ($\tilde{\nabla}\tilde{g} = 0$) и скоро комплексна структура J је компатибилна са метриком, важи

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}\omega(X, Y, Z) &= X(\tilde{g}(JY, Z)) - \tilde{g}(J\tilde{\nabla}_X Y, Z) - \tilde{g}(JY, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(JY), Z) - \tilde{g}(J\tilde{\nabla}_X Y, Z) \\ &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y, Z). \end{aligned}$$

Овај доказани идентитет важи и када је многострукост $\tilde{M}$ само скоро хермитска. Уколико је $\tilde{M}$ још и близу Келерова, користећи (1.6), добијамо

$$\tilde{\nabla}\omega(JX, Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX} J)Y, Z) = -\tilde{g}(J(\tilde{\nabla}_X J)Y, Z) = \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)JY, Z) = \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y, JZ).$$

Напомена 1.1. *Слично се доказује да је, за све $X, Y, Z \in T\tilde{M}$, форма $B(X, Y, Z) := \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y, JZ)$ једна кососиметрична реална $3-$форма типа $(3, 0) + (0, 3)$.*

Приметимо да важи и обрнуто тврђење у неком смислу. Наиме, ако је форма $\tilde{\nabla}\omega$ кососиметрична, тада специјално важи и

$$\tilde{\nabla}\omega(X, X, Y) = 0 = \tilde{g}(G(X, X), Y),$$

за сва тангентна векторска поља Y, па из недегенерисаности метрике следи да је $G(X, X) = 0$ за сва тангентна векторска поља X, односно $\tilde{M}$ је близу Келерова.

Лема 1.3. *На свакој близу Келеровој многострукости важи*

$$N(X, Y) = -J(\tilde{\nabla}_X J)Y = -JG(X, Y),$$

за све $X, Y \in T\tilde{M}$, где је N Нијенхуисов тензор типа $(2, 1)$.

Доказ. Леви-Чивита конексија $\tilde{\nabla}$ представља конексију без торзије, тј. важи $[X,Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X$. Како је тензор G кососиметричан и како важи (1.6), добијамо

$$[JX, JY] = -2J(\tilde{\nabla}_X J)Y + J\tilde{\nabla}_{JX} Y - J\tilde{\nabla}_Y JX,$$

$$J[JX, Y] = J(\tilde{\nabla}_{JX} Y - \tilde{\nabla}_{JY} X), \qquad J[X, JY] = J(\tilde{\nabla}_X JY - \tilde{\nabla}_{JY} X).$$

Комбинацијом претходних релација, следи

$$\begin{aligned} -4N(X,Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X + 2J(\tilde{\nabla}_X J)Y + J\tilde{\nabla}_X JY - J\tilde{\nabla}_Y JX \\ &= 2J(\tilde{\nabla}_X J)Y + J(\tilde{\nabla}_X J)Y - J(\tilde{\nabla}_Y J)X \\ &= 4J(\tilde{\nabla}_X J)Y. \end{aligned}$$

Последица 1.1. *Строго близу Келерове многострукости нису комплексне многострукости у односу на разматрану скоро комплексну структуру. Једине комплексне многострукости међу близу Келеровим многострукостима су оне које су уједно и Келерове.*

Сада ћемо ближе описати просторе реалних и комплексних 3−форми на близу Келеровим многострукостима.

Свака реална форма типа $(p,q)+(q,p)$ задовољава одређене везе са скоро комплексном структуром J. Илустрације ради, размотрићемо прво случај $k=2$ и представићемо добро познату декомпозицију простора Λ^2. Наиме, у свакој тачки многострукости, Риманова метрика $\tilde{g}$ омогућава изоморфизам $\mathfrak{so}(n) \simeq \Lambda^2$ на следећи начин: произвољну матрицу $A \in \mathfrak{so}(n)$ пресликамо у 2−форму $\tilde{g}(A\cdot,\cdot)$. Ако видимо $\mathfrak{so}(2n)$ као адјунговану репрезентацију од $SO(2n) \supset U(n)$, заправо смо добили изоморфизам $U(n)$−модула: за $A \in \mathfrak{so}(2n)$ и $B \in U(n)$, дејство B на 2−форме даје

$$B\tilde{g}(A\cdot,\cdot) = \tilde{g}(AB^{-1}\cdot, B^{-1}\cdot) = \tilde{g}(BAB^{-1}\cdot,\cdot),$$

па је пресликавање $A \mapsto \tilde{g}(A\cdot,\cdot)$ $U(n)$−еквиваријантно.

Посматрајмо разлагање $\mathfrak{so}(2n) = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)^{\perp}$, где је $\mathfrak{u}(n)^{\perp}$ ортогонални комплемент $\mathfrak{u}(n)$ као потпростора од $\mathfrak{so}(2n)$, у односу на стандардни скаларни производ. Имајући у виду $\mathfrak{so}(2n) = \Lambda^2 = [[\Lambda^{2,0}]] \oplus [\Lambda^{1,1}]$, сваком ендоморфизму који је представљен матрицом $A \in \mathfrak{so}(2n)$ одговара једна 2−форма α таква да је $\alpha(JX,JY) = \alpha(X,Y)$. Заиста, како A комутира са скоро комплексном структуром J која је $\tilde{g}$−ортогонална, имамо

$$\alpha(JX,JY) = \tilde{g}(AJX,JY) = \tilde{g}(JAX,JY) = \tilde{g}(AX,Y) = \alpha(X,Y).$$

С друге стране, 2−форма $\beta \in [\Lambda^{1,1}]$ је дефинисана тако да се поништава на векторима облика $\beta(X-iJX, Y-iJY) = 0$, одакле лако следи $\beta(JX,JY) = \beta(X,Y)$. Узимајући у обзир димензије, видимо да су ова разлагања заправо еквивалентна

$$\mathfrak{so}(2n) = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)^{\perp}, \qquad \Lambda^2 = [\Lambda^{1,1}] \oplus [[\Lambda^{2,0}]],$$

због изоморфизама

$$\mathfrak{u}(n) \simeq [\Lambda^{1,1}], \qquad \mathfrak{u}(n)^{\perp} \simeq [[\Lambda^{2,0}]].$$

Фундаментална форма ω заправо припада простору $[\Lambda^{1,1}]$, због

$$\omega(JX,JY) = -\tilde{g}(X,JY) = \tilde{g}(JX,Y) = \omega(X,Y).$$

Како је форма ω по дефиницији $U(n)-$инваријантна, имамо разлагање $[\Lambda^{1,1}] = [\Lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}$, где је $[\Lambda_0^{1,1}]$ дефинисан као ортогонални комплемент слике пресликавања $\wedge\omega : \mathbb{R} \to [\Lambda^{1,1}]$, које реалном броју r додељује форму $r \wedge \omega = r\omega$. Тиме смо добили разлагање простора Λ^2 на $U(n)-$подмодуле

$$\Lambda^2 = [[\Lambda^{2,0}]] \oplus [\Lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}.$$

Приметимо још да за елементе β простора $[[\Lambda^{2,0}]]$ важи $\beta(X - iJX, Y + iJY) = 0$, одакле је $\beta(JX, JY) = -\beta(X, Y)$.

Слична разматрања у случају $k = 3$ омогућавају боље разумевање симетрија које задовољава коваријантни извод $\tilde{\nabla}\omega$ фундаменталне форме ω. Заиста, $3-$форма $\tilde{\nabla}\omega$ припада скупу $\Lambda^1 \otimes [[\Lambda^{2,0}]]$ због

$$\tilde{\nabla}\omega(X, JY, JZ) = \tilde{\nabla}\omega(X, Y, J^2Z) = -\tilde{\nabla}\omega(X, Y, Z).$$

Штавише, ова форма припада простору $[[\Lambda^{3,0}]]$ када је многострукост близу Келерова

$$\tilde{\nabla}\omega(X, Y, Z) = \tilde{\nabla}\omega(JX, JY, Z) - \tilde{\nabla}\omega(X, JY, JZ) - \tilde{\nabla}\omega(JX, Y, JZ).$$

Елементи простора $\beta \in [[\Lambda^{3,0}]]$ заиста задовољавају овакву релацију јер из дефиниције $\beta(X - iJX, Y - iJY, Z + iJZ) = 0$, добијамо

$$\beta(X, Y, Z) = \beta(JX, JY, Z) - \beta(X, JY, JZ) - \beta(JX, Y, JZ).$$

Како су $\tilde{\nabla}\omega$ и $d\omega$ $3-$форме, природно се поставља питање да ли међу њима постоји нека релација. Како је, по дефиницији,

$$d\omega = \tilde{\nabla}\omega(X, Y, Z) - \tilde{\nabla}\omega(Y, X, Z) + \tilde{\nabla}\omega(Z, X, Y),$$

а форма $\tilde{\nabla}\omega$ је кососиметрична, одмах добијамо $d\omega = 3\tilde{\nabla}\omega$.

Важи и обрнуто тврђење. Наиме, ако је $d\omega = 3\tilde{\nabla}\omega$, за сва тангентна векторска поља X, Y важи

$$0 = d\omega(X, X, Y) = \tilde{\nabla}\omega(X, X, Y) = 3\tilde{g}(G(X, X), Y),$$

одакле је, због недегенерисаности метрике $\tilde{g}$, $G(X, X) = 0$ за сва тангентна векторска поља X, тј. многострукост $\tilde{M}$ је близу Келерова.

Последица 1.2. *Спољашњи и коваријантни извод фундаменталне форме ω припадају скупу $[[\Lambda^{3,0}]]$ и важи $d\omega = 3\tilde{\nabla}\omega$. Самим тим строго близу Келерове многострукости нису симплектичке многострукости, а једине симплектичке многострукости међу близу Келеровим многострукостима су оне које су уједно и Келерове.*

1.2 Канонска хермитска конексија

Све скоро хермитске Риманове многострукости $\tilde{M}$, поред Леви-Чивита конексије $\tilde{\nabla}$ Риманове метрике $\tilde{g}$, такође поседују и канонску (унутрашњу) хермитску конексију $\overline{\nabla}$. Скуп свих метричких конексија ове многострукости је један афини простор $\mathcal{SO}$, чија је директриса простор свих сечења од $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(2n)$, при чему је $\mathfrak{so}(2n)$ скуп свих кососиметричних ендоморфизама на $T\tilde{M}$ (тј. адјунговано раслојење метричкој структури). Другим речима, ако је $\overline{\nabla}$ нека метричка конексија, разлика $\tilde{\nabla} - \overline{\nabla}$ је једна $\mathfrak{so}(2n)-$вредносна $1-$форма. Скуп свих хермитских конексија $\overline{\nabla}$, које поред тога што су метричке ($\overline{\nabla}\tilde{g} = 0$), задовољавају додатно и услов $\overline{\nabla}J = 0$, представља афини потпростор $\mathcal{U}$ афиног простора $\mathcal{SO}$. Овај потпростор има за директрису скуп сечења од $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)$, где је $\mathfrak{u}(n)$ адјунговано раслојење $U(n)-$структуре, и може се поистоветити са раслојењем свих кососиметричних ендоморфизама на $T\tilde{M}$ који комутирају са J. Коначно, ортогонални комплемент $\mathfrak{u}(n)^{\perp}$ простора $\mathfrak{u}(n)$ у $\mathfrak{so}(2n)$, може се поистоветити са раслојењем кососиметричних ендоморфизама на $T\tilde{M}$ који антикомутирају са J.

Како је

$$\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(2n) = (\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)) \oplus (\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)^{\perp}),$$

то је

$$\tilde{\nabla} - \overline{\nabla} = \eta + \xi,$$

при чему тензор η не зависи од избора хермитске конексије $\overline{\nabla}$. Означимо са $\overline{\nabla}$ јединствену хермитску конексију такву да је $\xi = 0$, тј.

$$\tilde{\nabla} - \overline{\nabla} = \eta.$$

Тако одабрану хермитску конексију $\overline{\nabla}$ називамо **унутрашњом** или **канонском хермитском конексијом** скоро хермитске многострукости $(\tilde{M}, \tilde{g}, J)$, док η називамо унутрашњом торзијом $U(n)-$структуре скоро хермитске многострукости. Канонска хермитска конексија $\overline{\nabla}$ је заправо пројекција Леви-Чивита конексије $\tilde{\nabla} \in \mathcal{SO}$ на $\mathcal{U}$, или, еквивалентно, то је јединствена хермитска конексија таква да је разлика $\tilde{\nabla} - \overline{\nabla}$ једна $1-$форма са вредностима у $\mathfrak{u}(n)^{\perp}$.

Торзија T унутрашње конексије $\overline{\nabla}$ и унутрашња торзија η везане су релацијом

$$T(X, Y) = \eta_X Y - \eta_Y X, \qquad X, Y \in T\tilde{M}.$$

Даље, разлика $\eta = \tilde{\nabla} - \overline{\nabla}$ се на свакој квази-Келеровој многострукости (а самим тим и близу Келеровој) може изразити експлицитно на следећи начин

$$\eta_X Y = \frac{1}{2} J(\tilde{\nabla}_X Y), \qquad X, Y \in T\tilde{M}.$$

Она заправо на природан начин мери (не)интеграбилност $U(n)-$структуре, односно (не)могућност $U(n)-$структуре да допусти конексију без торзије, па се управо она може употребити за класификацију свих скоро хермитских многострукости, слично као $\tilde{\nabla}\omega$ и $\tilde{\nabla}J$. Заиста, присуство метрике $\tilde{g}$ омогућава декомпозицију

$$\begin{aligned} \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)^{\perp} &\simeq [[\Lambda^{1,0} \otimes \Lambda^{2,0}]] \oplus [[\Lambda^{0,1} \otimes \Lambda^{2,0}]] \\ &\simeq [[\Lambda^{3,0}]] \oplus [[U^1]] \oplus [[\Lambda_0^{2,1}]] \oplus \Lambda^1. \end{aligned}$$

Ово је иредуцибилна декомпозиција репрезентације $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(n)^{\perp}$ од $U(n)$ у свакој тачки. Тотално кососиметрични тензори су сечења раслојења изоморфног са $[[\Lambda^{3,0}]]$. Према томе, многострукост $\tilde{M}$ је близу Келерова ако и само ако је $\eta \in [[\Lambda^{3,0}]]$; комплексна ако и само ако је $\eta \in [[\Lambda^{2,1}]]$; симплектичка ако и само ако је $\eta \in [[U^1]]$; квази-Келерова ако и само ако је $\eta \in [[\Lambda^{1,0} \otimes \Lambda^{2,0}]]$.

Самим тим је $\eta = 0$, тј. $\overline{\nabla} = \tilde{\nabla}$ ако и само ако је скоро комплексна структура J паралелна у односу на Леви-Чивита конексију $\tilde{\nabla}$, тј. ако и само ако је многострукост $\tilde{M}$ Келерова, тј. њена Риманова холономија је садржана у $U(n)$. Еквивалентно, како унутрашња торзија η одређује $d\omega$ и Нијенхуисов тензор N, ω је затворена и J је интеграбилна.

За близу Келерове многострукости важи да је $\overline{\nabla}$ $U(n)-$конексија јер се може доказати да важи $\overline{\nabla}g = 0$ и $\overline{\nabla}\omega = 0$, одакле је $\overline{\nabla}J = 0$. Сада видимо и да је многострукост $\tilde{M}$ близу Келерова ако и само ако је њена унутрашња торзија тотално кососиметрична, односно ако и само ако је коваријантни извод фундаменталне форме ω $3-$форма $\tilde{\nabla}\omega = \dfrac{1}{3}d\omega$, с обзиром да је Леви-Чивита конексија без торзије.

Досадашња разматрања могу се објединити једним тврђењем.

Пропозиција 1.1. *Нека је $\tilde{M}$ скоро хермитска многострукост. Следећи услови су еквивалентни:*

- $(\tilde{\nabla}_X)X = 0$ *за све* $X \in T\tilde{M}$ *(тј. $\tilde{M}$ је близу Келерова многострукост);*
- *унутрашња торзија канонске конексије $\overline{\nabla}$ је тотално кососиметрична;*
- $\tilde{\nabla}\omega = \frac{1}{3}d\omega$*;*
- $\tilde{\nabla}\omega$ *је реална форма типа* $(3,0)+(0,3)$*;*
- $d\omega$ *је реална форма типа* $(3,0)+(0,3)$ *и N је тотално кососиметричан тензор.*

Напомена 1.2. *Сваки од ових еквивалентних услова може се узети за дефиницију близу Келерове многострукости $\tilde{M}$.*

Пропозиција 1.2. *Унутрашња торзија конексије $\overline{\nabla}$ је паралелна, а како је $\overline{\nabla}$ хермитска конексија, важи и*

$$\overline{\nabla}\eta = \overline{\nabla}\tilde{\nabla}\omega = \overline{\nabla}d\omega = 0.$$

Самим тим и Нијенхуисов тензор N је $\overline{\nabla}-$паралелан.

Једна од последица овог тврђења је да је група холономије конексије $\overline{\nabla}$ произвољне шестодимензионе близу Келерове многострукости садржана у $SU(3)$. Такође, геодезијске линије конексије $\overline{\nabla}$ поклапају се са геодезијским линијама Леви-Чивита конексије $\tilde{\nabla}$.

Конексија $\overline{\nabla}$ индукује хермитски тензор кривине $\bar{R}$ на близу Келеровој многострукости $\tilde{M}$ дат са

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = \tilde{g}([\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y]Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z, W).$$

Како конексија $\bar{\nabla}$ чува метрику $\tilde{g}$, то је

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = \bar{R}(Z,W,X,Y) = -\bar{R}(Y,X,Z,W) = -\bar{R}(X,Y,W,Z).$$

Веза између хермитског тензора кривине $\bar{R}$ и Римановог тензора кривине $\tilde{R}$ је

$$\begin{aligned} 4\bar{R}(X,Y,Z,W) = &\quad 3\tilde{R}(X,Y,Z,W) + 2\tilde{R}(X,Y,JZ,JW) \\ + &\quad \tilde{R}(X,Z,JW,JY) + \tilde{R}(X,W,JY,JZ). \end{aligned}$$

У раду [59] доказан је следећи резултат.

Теорема 1.1. *Тензор $\bar{R}$ близу Келерове многострукости $\tilde{M}$ задовољава други Бјанкијев идентитет*

$$\sum(\bar{\nabla}_X\bar{R})(Y,Z,\cdot,\cdot) = 0,$$

док је први Бјанкијев идентитет

$$\sum \bar{R}(X, Y, Z, \cdot) = 0$$

задовољен ако и само ако је многострукост $\tilde{M}$ Келерова.

Риманов тензор кривине $\tilde{R}$ близу Келерових многострукости задовољава идентитете који подсећају на одговарајуће идентитете у случају Келерових многострукости, али су овде, наравно, компликованији. Теза [54] садржи детаљне доказе наредних тврђења, која су се први пут појавила у радовима [32] и [34].

Пропозиција 1.3. *На произвољној близу Келеровој многострукости $\tilde{M}$ важе следећи идентитети за Риманов тензор кривине $\tilde{R}$ и тангентна векторска поља $X, Y, Z, W \in T\tilde{M}$:*

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^2\omega(W, X, Y, Z) - \tilde{\nabla}^2\omega(X, W, Y, Z) &= \omega(\tilde{R}(X, W)Y, Z) + \omega(Y, \tilde{R}(X, W)Z), \\ \tilde{\nabla}^2\omega(X, X, JY, Y) &= \|G(X, Y)\|^2, \\ \|G(X, Y)\|^2 &= \tilde{R}(X, Y, JX, JY) - \tilde{R}(X, Y, X, Y). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Формула (1.8) омогућава нам да изразимо норму вектора $G(X, Y)$ у терминима кривине, па се сада лако доказује да је Риманов тензор кривине $J-$инваријантан, тј. важи

$$\tilde{R}(W, X, Y, Z) = \tilde{R}(JW, JX, JY, JZ).$$

Ако дефинишемо $S(W, X, Y, Z) = \tilde{R}(W, X, Y, Z)$, јасно је да је S такође алгебарски тензор кривине и да задовољава први Бјанкијев идентитет

$$S(W, X, Y, Z) + S(X, Y, W, Z) + S(Y, W, X, Z) = 0.$$

Довољно је доказати да важи $\tilde{R}(X, Y, Y, X) = S(X, Y, Y, X)$.

$$\begin{aligned} \tilde{R}(JX, JY, JY, JX) - \tilde{R}(X, Y, Y, X) &= \tilde{R}(JX, JY, JY, JX) - \tilde{R}(X, Y, JY, JX) \\ &\quad + \tilde{R}(X, Y, JY, JX) - \tilde{R}(X, Y, Y, X) \\ &= \|G(JX, JY)\|^2 - \|G(X, Y)\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Сада је могуће још више: користећи поларизацију, умемо да изразимо скаларни производ два вектора облика $G(X, Y)$.

Пропозиција 1.4. *На произвољној близу Келеровој многострукости $\tilde{M}$ важе следећи идентитети за Риманов тензор кривине $\tilde{R}$ и тангентна векторска поља $X, Y, Z, W \in T\tilde{M}$:*

$$\begin{aligned} \tilde{g}(G(W, X), G(Y, Z)) &= \tilde{R}(W, X, JY, JZ) - \tilde{R}(W, X, Y, Z), \\ 2\tilde{\nabla}^2\omega(W, X, Y, Z) &= -\sum_{X,Y,Z} \tilde{g}(G(W, X), G(Y, JZ)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Греј је у раду [32] дефинисао следећу особину близу Келерових многострукости.

Дефиниција 1.2. *Близу Келерова многострукост је* ***(глобално) константног типа*** с *уколико постоји позитивна реална константа с таква да је*

$$\|G(X,Y)\|^2 = c^2(\|X\|^2\|Y\|^2 - \tilde{g}^2(X,Y) - \omega^2(X,Y)). \tag{1.10}$$

Док претходна тврђења важе за произвољну близу Келерову многострукост, шестодимензионе многострукости имају још неке додатне интересантне особине. За почетак, њихов тангентни простор у произвољној тачки може се представити као директна сума међусобно ортогоналних холоморфних равни

$$\mathrm{span}\{X, JX\} \oplus \mathrm{span}\{Y, JY\} \oplus \mathrm{span}\{G(X,Y), JG(X,Y)\},$$

где је Y векторско поље нормално на холоморфну раван разапету са X и JX. Захваљујући томе, може се израчунати норма вектора $G(X,Y)$, па се испоставља да на свакој строго близу Келеровој многострукости димензије 6 постоји локално добро дефинисана функција c за коју важи претходна релација (1.10). Наиме, функција c се може дефинисати у локално одабраном покретном реперу, а онда проширити глобално на целу многострукост захтевајући да релација (1.10) буде задовољена за свака два векторска поља X, Y. За дата векторска поља X, Y у околини разматране тачке постоји ортонормирани репер $\{E_i, JE_i\}$, $i = 1, 2, 3$, такав да важи

$$X = \alpha E_1, \qquad Y = \beta E_1 + \gamma JE_1 + \delta E_2,$$

за локално дефинисане функције $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Претпоставићемо да је $\delta \neq 0$, да бисмо избегли тривијални случај $G(X,Y) = 0$. Дефинишимо c тако да важи

$$G(E_1, E_2) = cE_3,$$

при чему можемо одабрати оријентацију базе такву да је $c > 0$. Како је

$$G(X,Y) = \alpha G(E_1, \delta E_2) = \alpha\delta c E_3,$$

важи $\|G(X,Y)\|^2 = \alpha^2\delta^2c^2$. Такође, због очигледних релација

$$\|X\|^2\|Y\|^2 = \alpha^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2), \qquad \tilde{g}^2(X,Y) = \alpha^2\beta^2, \qquad \omega^2(X,Y) = \alpha^2\gamma^2,$$

десна страна једнакости (1.10) једнака је

$$c^2(\|X\|^2\|Y\|^2 - \tilde{g}^2(X,Y) - \omega^2(X,Y)) = \alpha^2\delta^2c^2,$$

чиме је тврђење доказано.

Ипак, постојање функције c је далеко једноставније од доказа да је она и константна, који је технички доста захтеван и приказан је у раду [54].

Лема 1.4. *Свака повезана шестодимензиона близу Келерова многострукост је константног типа.*

С тим у вези, поменимо ендоморфизме Ric и Ric^*, дефинисане на произвољној скоро хермитској многострукости са локалним ортонормираним репером $E_1, E_2, \ldots, E_{2n}$

$$\tilde{g}(\mathrm{Ric}X, Y) = \sum_{i=1}^{2n} \tilde{R}(X, E_i, E_i, Y), \qquad \tilde{g}(\mathrm{Ric}^*X, Y) = \sum_{i=1}^{2n} \tilde{R}(X, E_i, JE_i, JY).$$

Због претходних релација, разлика $\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*$ задовољава

$$\tilde{g}((\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*)X, Y) = \sum_{i=1}^{2n} \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X)E_i, (\tilde{\nabla}_Y)E_i).$$

Такође, ендоморфизам $\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*$ је самоадјунгован, па је такав и његов коваријантни извод. Разлика ових Ричијевих тензора комутира са скоро комплексном структуром J, а његов коваријантни извод задовољава следећу формулу, за произвољне $X, Y, Z \in T\tilde{M}$

$$2\tilde{g}((\tilde{\nabla}_Z(\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*))X, Y) = \tilde{g}((\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*)JX, (\tilde{\nabla}_Z J)Y) + \tilde{g}((\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*)JY, (\tilde{\nabla}_Z J)X).$$

Ова формула може се записати и у облику

$$\overline{\nabla}(\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*) = 0.$$

На шестодимензионој строгој близу Келеровој многострукости још важи и

$$\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^* = 4c^2\mathrm{Id}.$$

Управо диференцирајући ову релацију следи да за произвољно векторско поље Z важи

$$\tilde{\nabla}_Z(\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^*) = 0 = 4Z(c^2),$$

па је функција c локално константна на свакој шестодимензионој близу Келеровој многострукости, а самим тим и глобално константна уколико је та многострукост повезана.

Теорема 1.2. *Свака шестодимензиона близу Келерова многострукост је Ајнштајнова, са позитивном скаларном кривином $S = 30c^2$. Прецизније, Ричијев тензор задовољава*

$$\mathrm{Ric} = \frac{S}{6}\tilde{g} = 5c^2\tilde{g}, \qquad \mathrm{Ric}^* = \frac{S}{30}\tilde{g} = c^2\tilde{g}.$$

Напомена 1.3. *За близу Келерову многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ важи $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, што ћемо видети касније у* (2.20)*, па је* $\mathrm{Ric} = \frac{5}{3}\tilde{g}$.

Глава 2

Близу Келерова многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

2.1 Близу Келерова структура на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

У овом поглављу ћемо детаљно описати близу Келерову структуру на производу сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Докази тврђења дати су у тези [17].

Посматрајмо сферу $\mathbb{S}^3$, канонски смештену у $\mathbb{R}^4$, као скуп свих јединичних кватерниона у скупу свих кватерниона $\mathbb{H}$. Тангентни вектор из $T_p\mathbb{S}^3$ може се изразити у облику $p\alpha$, где је α произвољни имагинарни кватернион, захваљујући наредним релацијама које важе у произвољној тачки $p = x_1 + x_2\mathrm{i} + x_3\mathrm{j} + x_4\mathrm{k}$ ($\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ су имагинарне јединице у $\mathbb{H}$):

$$\begin{aligned} p\mathrm{i} &= -x_2 + x_1\mathrm{i} + x_4\mathrm{j} - x_3\mathrm{k}, \\ p\mathrm{j} &= -x_3 - x_4\mathrm{i} + x_1\mathrm{j} + x_2\mathrm{k}, \\ p\mathrm{k} &= -x_4 + x_3\mathrm{i} - x_2\mathrm{j} + x_1\mathrm{k}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Сфера $\mathbb{S}^3$ има структуру Лијеве групе у односу на стандардно кватернионско множење и изоморфна је групи $SU(2)$, тј. $Sp(1)$, са Лијевом алгебром $T_1(\mathbb{S}^3)$ изоморфном са $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathrm{Im}(\mathbb{H})$. Тангентни простор $T_p(\mathbb{S}^3)$ идентификујемо са $p\,\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, док су инфинитезималне леве и десне транслације представљене обичним кватернионским множењем слева и сдесна. Фиксирана база $[\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}]$ у $T_1(\mathbb{S}^3)$ левом транслацијом прелази у базу $[p\mathrm{i}, p\mathrm{j}, p\mathrm{k}]$ у $T_p(\mathbb{S}^3)$, тј. дефинисан је један глобални покретни ортонормирани репер на $\mathbb{S}^3$. Ово наравно показује и да је сфера $\mathbb{S}^3$ паралелизабилна многострукост, као што је и свака Лијева група.

Лијеве заграде елемената базе $[\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}]$ се лако добијају из саме дефиниције

$$[\mathrm{i}, \mathrm{j}] = 2\mathrm{k}, \qquad [\mathrm{j}, \mathrm{k}] = 2\mathrm{i}, \qquad [\mathrm{k}, \mathrm{i}] = 2\mathrm{j}.$$

Леви-Чивита конексија лево-инваријантних векторских поља $X_p = px$, $Y_p = py$ је

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = \frac{1}{2}p[x, y],$$

за произвољне $p \in \mathrm{SU}(2) \simeq \mathbb{S}^3$, $x, y \in \mathrm{su}(2)$. Уколико је, општије, векторско поље Y дуж γ на $\mathbb{S}^3$ произвољно, можемо га записати као $Y_p = p\gamma(p)$, где је $\gamma : \mathbb{S}^3 \to T_1(\mathbb{S}^3)$ произвољна глатка крива, одакле је

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = p\left(\frac{1}{2}[x, \gamma(p)] + \gamma_*(X)\right).$$

Производ сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ је наравно Лијева група, као производ Лијевих група, али такође и хомогена многострукост. Наиме, уколико је идентификујемо са $Sp(1) \times Sp(1) \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, односно $SU(2) \times SU(2)$, уређена тројка јединичних кватерниона (h, k, l) дејствује на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ на следећи начин

$$((h, k, l), (p, q)) \mapsto (hpl^{-1}, kql^{-1}).$$

Ово дејство је очигледно транзитивно, а стабилизатор тачке $(1, 1)$, која је јединични елемент ове Лијеве групе, представља групу свих уређених тројки облика (h, h, h), где је h јединични кватернион. Ако ову изотропну подгрупу означимо са $SU(2)_\triangle$, имамо да је $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ глатка хомогена многострукост и Лијева група, дифеоморфна са

$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 = SU(2)^3/SU(2)_\triangle.$$

Зато је оправдано конструисати близу Келерову структуру на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ прво у тачки $(1, 1)$, а затим га пренети транслацијама на целу $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Надаље подразумевамо природну идентификацију $T_{(p,q)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) \cong T_p\mathbb{S}^3 \oplus T_q\mathbb{S}^3$, па ћемо сваки тангентни вектор у тачки (p, q) записивати у облику

$$X_{(p,q)} = (pU_{(p,q)}, qV_{(p,q)}), \tag{2.2}$$

за векторска поља U, V чије су вредности имагинарни кватерниони, односно скраћено $X = (pU, qV)$.

Дефинишимо векторска поља

$$\begin{aligned} E_1(p, q) &= (p\mathrm{i}, 0), & F_1(p, q) &= (0, q\mathrm{i}),\\ E_2(p, q) &= (p\mathrm{j}, 0), & F_2(p, q) &= (0, q\mathrm{j}),\\ E_3(p, q) &= -(p\mathrm{k}, 0), & F_3(p, q) &= -(0, q\mathrm{k}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Лема 2.1. *Векторска поља (2.3) чине ортонормирани репер у свакој тачки многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, у односу на стандардну еуклидску продукт метрику. Њихове Лијеве заграде су*

$$[E_i, E_j] = -2\varepsilon_{ijk}E_k, \quad [F_i, F_j] = -2\varepsilon_{ijk}F_k, \quad [E_i, F_j] = 0, \tag{2.4}$$

док је Леви-Чивита конексија

$$\begin{aligned} \tilde\nabla_{E_i}E_j &= -\varepsilon_{ijk}E_k, & \tilde\nabla_{E_i}F_j &= \tfrac{\varepsilon_{ijk}}{3}(E_k - F_k),\\ \tilde\nabla_{F_i}E_j &= \tfrac{\varepsilon_{ijk}}{3}(F_k - E_k), & \tilde\nabla_{F_i}\tilde F_j &= -\varepsilon_{ijk}F_k, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где је тотално симетрични Леви-Чивита симбол ε_{ijk} дефинисан са

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } (ijk) \text{ парна пермутација од } (123),\\ -1, & \text{ако је } (ijk) \text{ непарна пермутација од } (123),\\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Скоро комплексна структура J на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ дефинисана је са

$$J(pU, qV) = \frac{1}{\sqrt{3}}(p(2V - U), q(-2U + V)), \quad (pU, qV) \in T_{(p,q)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3). \tag{2.6}$$

Ова дефиниција је у сагласности са структуром Лијеве групе на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. На Лијевој алгебри $T_{(1,1)}\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ пресликавање J_0 дато са

$$J_0 : (U, V) \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}(2V - U, -2U + V)$$

очигледно представља скоро комплексну структуру (видети [11]), одакле се левим транслацијама преноси на целу $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ јер су леве транслације заправо множења слева јединичним кватернионима

$$(pU, qV) \longmapsto (U, V) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3}}(2V - U, -2U + V) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3}}(p(2V - U), q(-2U + V)).$$

Иако на производу две непарно димензионе сфере постоји скоро комплексна структура, која је интеграбилна и самим тим даје структуру комплексне многострукости том производу, приметимо да овако дефинисана структура J није интеграбилна. Наиме, лако се проверава да Нијенхуисов тензор N није идентички једнак нули (видети [43]), узимајући на пример

$$N(E_1, E_3) = \frac{8}{3}E_2 \neq 0.$$

Наравно, из Леме 1.3 је јасно да скоро комплексна структура не може бити интеграбилна ни на једној строго близу Келеровој многострукости.

Стандардна продукт метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ се очигледно не слаже са дефинисаном скоро комплексном структуром J. Одговарајућа близу Келерова метрика $\tilde{g}$ је зато дефинисана као аритметичка средина $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\langle J\cdot, J\cdot \rangle$, са

$$\begin{aligned} \tilde{g}(Z, Z') &= \frac{1}{2}(\langle Z, Z' \rangle + \langle JZ, JZ' \rangle) \\ &= \frac{4}{3}(\langle U, U' \rangle + \langle V, V' \rangle) - \frac{2}{3}(\langle U, V' \rangle + \langle U', V \rangle), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где су $Z = (pU, qV)$ и $Z' = (pU', qV')$ произвољна тангентна векторска поља (видети [10]). Овде се ознака $\langle \cdot, \cdot \rangle$ у првом реду односи на стандардну еуклидску продукт метрику на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, док се у другом реду иста ознака односи на уобичајену метрику на $\mathbb{S}^3$.

Напомена 2.1. *У литератури се може сусрести и близу Келерова метрика на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ која је нормализована у односу на дефинисану метрику, често са фактором $\frac{1}{3}$.*

Директном провером добијамо да важи следећа лема.

Лема 2.2. *Деловање метрике $\tilde{g}$, скоро комплексне структуре J и одговарајућег $(1,2)$ тензорског поља $G = \tilde{\nabla}J$, где је $\tilde{\nabla}$ Леви-Чивита конексија метрике $\tilde{g}$, на дефинисаној бази $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, дати су редом следећим формулама*

$$\tilde{g}(E_i, E_j) = \frac{4}{3}\delta_{ij}, \quad \tilde{g}(E_i, F_j) = -\frac{2}{3}\delta_{ij}, \quad \tilde{g}(F_i, F_j) = \frac{4}{3}\delta_{ij}. \tag{2.8}$$

$$JE_i = -\frac{1}{\sqrt{3}}(E_i + 2F_i), \quad J\tilde{F}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(2E_i + F_i),$$

$$\begin{aligned} G(E_i, E_j) &= -\frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt{3}}(E_k + 2F_k), \quad G(E_i, F_j) = -\frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt{3}}(E_k - F_k), \\ G(F_i, E_j) &= -\frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt{3}}(E_k - F_k), \quad G(F_i, F_j) = \frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt{3}}(2E_k + F_k). \end{aligned}$$

Из претходне леме следи да је скоро комплексна структура J компатибилна са метриком $\tilde{g}$, као и да G задовољава (1.2) и (1.3), па је многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, снабдевена метриком $\tilde{g}$ и скоро комплексном структуром J, дефинисаним редом са (2.7) и (2.6), једна близу Келерова многострукост.

Како дефинисана база није ортонормирана у односу на метрику $\tilde{g}$, али су сви базни вектори константне дужине, од ње се лако може добити база која јесте ортонормирана

$$\bar{E}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2}(E_i + F_i), \quad \bar{F}_i = \frac{1}{2}(E_i - F_i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.9}$$

Директно се проверава да важи $J\bar{E}_i = -\bar{F}_i$, $J\bar{F}_i = \bar{E}_i$, као и

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\bar{E}_i}\bar{E}_j &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{ijk}\bar{E}_k, & \tilde{\nabla}_{\bar{E}_i}\bar{F}_j &= \tfrac{5\sqrt{3}}{6}\varepsilon_{ijk}\bar{F}_k, \\ \tilde{\nabla}_{\bar{F}_i}\bar{E}_j &= \tfrac{\sqrt{3}}{6}\varepsilon_{ijk}\bar{F}_k, & \tilde{\nabla}_{\bar{F}_i}\bar{F}_j &= \tfrac{\sqrt{3}}{6}\varepsilon_{ijk}\bar{E}_k, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} G(\bar{E}_i, \bar{E}_j) &= -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_{ijk}\bar{F}_k, & G(\bar{E}_i, \bar{F}_j) &= -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_{ijk}\bar{E}_k, \\ G(\bar{F}_i, \bar{E}_j) &= -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_{ijk}\bar{E}_k, & G(\bar{F}_i, \bar{F}_j) &= \tfrac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_{ijk}\bar{F}_k. \end{aligned}$$

Скоро продукт структура на некој Римановој многострукости је $(1,1)-$тензорско поље P које на сваком тангентном простору дефинише ендоморфизам који је инволуција, $P^2 = \mathrm{Id}$. Уколико је ова структура интеграбилна, кажемо да је она продукт структура. Довољан услов за интеграбилност скоро продукт структуре је њена паралелност у односу на Леви-Чивита конексију Риманове метрике. На $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ постоји скоро продукт структура P, која је дефинисана са (видети [10])

$$PZ = (pV, qU), \quad Z = (pU, qV) \in T_{(p,q)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3). \tag{2.11}$$

Ова дефиниција пресликавања P је такође, попут дефиниције скоро комплексне структуре, у сагласности са структуром Лијеве групе на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Наиме, на Лијевој алгебри $T_{(1,1)}\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ ово пресликавање дато је са $(U, V) \mapsto (V, U)$, одакле се левим транслацијама преноси на целу $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Основне особине ове структуре дате су наредном лемом.

Лема 2.3. *Скоро продукт структура на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, дефинисана са* (2.11)*, задовољава следеће особине:*

$$\begin{aligned} &P^2 = \mathrm{Id} \quad \textit{(P је инволуција, тј. добро дефинисана)}, \\ &PJ = -JP \quad \textit{(P и J антикомутирају)}, \\ &\tilde{g}(PX, PY) = \tilde{g}(X, Y) \quad \textit{(P је компатибилна са } \tilde{g}\textit{)}, \\ &\tilde{g}(PX, Y) = \tilde{g}(X, PY) \quad \textit{(P је симетрична)}, \\ &PG(X, Y) + G(PX, PY) = 0 \quad \textit{(веза P и G)}, \\ &(\tilde{\nabla}_X P)Y = \frac{1}{2}(JG(X, PY) + JPG(X, Y)) \quad \textit{(коваријантни извод од P)}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

за сва тангентна векторска поља X, Y на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Дејство скоро продукт структуре и његовог коваријантног извода на бази гласи

$$PE_i = F_i, \quad PF_i = E_i, \quad P\bar{E}_i = \bar{E}_i, \quad P\bar{F}_i = -\bar{F}_i,$$

$$\begin{aligned}
(\tilde\nabla_{E_i}P)E_j &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{3}(E_k+2F_k), & (\tilde\nabla_{E_i}P)F_j &= -\frac{\varepsilon_{ijk}}{3}(2E_k+F_k),\\
(\tilde\nabla_{F_i}P)E_j &= -\frac{\varepsilon_{ijk}}{3}(E_k+2F_k), & (\tilde\nabla_{F_i}P)F_j &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{3}(2E_k+F_k).\\
(\tilde\nabla_{\bar E_i}P)\bar E_j &= 0, & (\tilde\nabla_{\bar E_i}P)\bar F_j &= 0,\\
(\tilde\nabla_{\bar F_i}P)\bar E_j &= \tfrac{\sqrt3}{3}\varepsilon_{ijk}\bar F_k, & (\tilde\nabla_{\bar F_i}P)\bar F_j &= -\tfrac{\sqrt3}{3}\varepsilon_{ijk}\bar E_k.
\end{aligned}$$

Из ових формула јасно је да тензорско поље $\tilde\nabla P$ није идентички једнако нули, па структура P није паралелна у односу на Леви-Чивита конексију. Познато је и јаче тврђење, да ова скоро продукт структура P није интеграбилна, тј. није продукт структура.

Структура P и њен коваријантни извод задовољавају још и следеће особине

$$\begin{aligned}
(\tilde\nabla_X P)JY &= J(\tilde\nabla_X P)Y,\\
(\tilde\nabla_X P)PY &= -P(\tilde\nabla_X P)Y,\\
(\tilde\nabla_{PX} P)Y &= -(\tilde\nabla_X P)Y.
\end{aligned}$$

За произвољан имагинарни кватернион $\alpha=\alpha_1\mathrm{i}+\alpha_2\mathrm{j}+\alpha_3\mathrm{k}$, згодно је знати експлицитно дејство скоро комплексне и скоро продукт структуре, као и њихових коваријантних извода на векторима

$$V_\alpha=(p\alpha,0)=\alpha_1E_1+\alpha_2E_2-\alpha_3E_3,\qquad W_\alpha=(0,q\alpha)=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2-\alpha_3F_3,$$

који припадају тангентном простору $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ у тачки (p,q). Из дефиниције ових структура и вектора, уз коришћење добро познате везе између различитих множења имагинарних кватерниона ($\cdot$ је стандардно множење кватерниона, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ је стандардан скаларни производ на $\mathbb{R}^3$ и $\times$ векторски производ на $\mathbb{R}^3$)

$$\alpha\cdot\beta=-\langle\alpha,\beta\rangle+\alpha\times\beta, \tag{2.13}$$

одмах добијамо

$$JV_\alpha=-\frac{1}{\sqrt3}(V_\alpha+2W_\alpha),\quad JW_\alpha=\frac{1}{\sqrt3}(2V_\alpha+W_\alpha),\quad PV_\alpha=W_\alpha,\quad PW_\alpha=V_\alpha,$$

док из формула на бази и (2.12) следи

$$\begin{aligned}
G(V_\alpha,V_\beta)&=\frac{2}{3\sqrt3}(V_{\alpha\times\beta}+2W_{\alpha\times\beta}), & G(V_\alpha,W_\beta)&=\frac{2}{3\sqrt3}(V_{\alpha\times\beta}-W_{\alpha\times\beta}),\\
G(W_\alpha,V_\beta)&=\frac{2}{3\sqrt3}(V_{\alpha\times\beta}-W_{\alpha\times\beta}), & G(W_\alpha,W_\beta)&=-\frac{2}{3\sqrt3}(2V_{\alpha\times\beta}+W_{\alpha\times\beta}).
\end{aligned}$$

Еуклидска продукт метрика и близу Келерова метрика на овим векторима износе

$$\begin{aligned}
\langle V_\alpha,V_\beta\rangle &= \langle\alpha,\beta\rangle, & \langle V_\alpha,W_\beta\rangle &= 0, & \langle W_\alpha,W_\beta\rangle &= \langle\alpha,\beta\rangle,\\
\langle JV_\alpha,JV_\beta\rangle &= \tfrac53\langle\alpha,\beta\rangle, & \langle JV_\alpha,JW_\beta\rangle &= -\tfrac43\langle\alpha,\beta\rangle, & \langle JW_\alpha,JW_\beta\rangle &= \tfrac53\langle\alpha,\beta\rangle,\\
\tilde g(V_\alpha,V_\beta) &= \tfrac43\langle\alpha,\beta\rangle, & \tilde g(V_\alpha,W_\beta) &= -\tfrac23\langle\alpha,\beta\rangle, & \tilde g(W_\alpha,W_\beta) &= \tfrac43\langle\alpha,\beta\rangle.
\end{aligned}$$

Како на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ имамо стандардну еуклидску продукт метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и близу Келерову метрику $\tilde g$, постоје и две њима редом одговарајуће Леви-Чивита конексије ∇^E и $\tilde\nabla$. Експлицитна веза између ових конексија је (видети [17])

$$\nabla^E_X Y=\tilde\nabla_X Y+\frac12\big(JG(X,PY)+JG(Y,PX)\big). \tag{2.14}$$

Веза између геометрије многострукости $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \tilde{g})$ и $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ успоставља се још и користећи стандардну продукт структуру на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, дефинисану са

$$QZ = Q(pU, qV) = (-pU, qV) \quad Z = (pU, qV).$$

Наредне формуле често се користе при одређивању експлицитних имерзија подмногострукости од $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \tilde{g})$. Узајамна веза између ове продукт структуре Q и скоро продукт структуре P је

$$QZ = \frac{1}{\sqrt{3}}(2PJZ - JZ), \quad PZ = \frac{1}{2}(Z - \sqrt{3}QJZ), \quad Z \in T(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3).$$

Сада можемо изразити еуклидску метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ преко близу Келерове метрике $\tilde{g}$, користећи продукт структуре Q и P:

$$\langle Z, Z'\rangle = \frac{3}{8}(\tilde{g}(Z,Z') + \tilde{g}(QZ,QZ')) = \tilde{g}(Z,Z') + \frac{1}{2}\tilde{g}(Z,PZ'). \tag{2.15}$$

Последица претходне формуле је и веза

$$\langle Z, Z'\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{g}(Z, PJZ').$$

Сада се може доказати да за сва тангентна векторска поља X, Y на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ важи релација

$$(\nabla^E_X Q)Y = 0,$$

као и да је она еквивалентна формули $(\tilde{\nabla}_X P)JY = J(\tilde{\nabla}_X P)Y$. Одавде је јасно да је скоро продукт структура P, у неком смислу, заиста близу Келеров аналогон стандардне еуклидске продукт структуре Q, која је паралелна у односу на конексију ∇^E.

Производ тродимензионалних сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ је многострукост која је природно смештена у еуклидски простор $\mathbb{R}^8$, са еуклидском конексијом D и метриком $\langle\cdot,\cdot\rangle$, као подмногострукост кодимензије 2. Нормално раслојење у произвољној тачки (p,q) разапето је позиционим вектором (p,q) и вектором $(-p,q) = Q(p,q)$, па можемо разложити $D_X Y$, за произвољна тангентна векторска поља X, Y на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, на тангентни и нормални део

$$D_X Y = \nabla^E_X Y + \frac{1}{2}\langle D_X Y, (p,q)\rangle(p,q) + \frac{1}{2}\langle D_X Y, (-p,q)\rangle(-p,q). \tag{2.16}$$

Риманов тензор кривине $\tilde{R}$ многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ може се изразити на следећи начин

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{XY}Z = \; & \frac{5}{12} \left(\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y\right) \\ + \; & \frac{1}{12}\left(\tilde{g}(JY,Z)JX - \tilde{g}(JX,Z)JY - 2\tilde{g}(JX,Y)JZ\right) \\ + \; & \frac{1}{3}\left(\tilde{g}(PY,Z)PX - \tilde{g}(PX,Z)PY\right. \\ + \; & \left.\tilde{g}(JPY,Z)JPX - \tilde{g}(JPX,Z)JPY\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Коваријантни извод овог тензора добија се директним рачуном и износи

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \tilde{R})(Y,Z,T,W) = \ & \frac{1}{12} \Big(\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Z,T)\tilde{g}(JY,W) - \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y,T)\tilde{g}(JZ,W) \\
+ \ & \tilde{g}(JZ,T)\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y,W) - \tilde{g}(JY,T)\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Z,W) \\
- \ & 2\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y,T)\tilde{g}(JZ,W) - 2\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X J)Y,Z)\tilde{g}(JT,W) \Big) \\
+ \ & \frac{1}{3} \Big(\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X P)Z,T)\tilde{g}(PY,W) - \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X P)Y,T)\tilde{g}(PZ,W) \\
+ \ & \tilde{g}(PZ,T)\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X P)Y,W) - \tilde{g}(PY,T)\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X P)Z,W) \\
+ \ & \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X (JP))Z,T)\tilde{g}(JPY,W) - \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X (JP))Y,T)\tilde{g}(JPZ,W) \\
+ \ & \tilde{g}(JPZ,T)\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X (JP))Y,W) - \tilde{g}(JPY,T)\tilde{g}((\tilde{\nabla}_X (JP))Z,W) \Big) . \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Одавде се сада показује да $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ није локално симетричан простор јер је на пример

$$(\tilde{\nabla}_{\bar{F}_1} \tilde{R})(\bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{E}_3, \bar{F}_3) = \frac{\sqrt{3}}{36} \neq 0.$$

Такође, канонска конексија $\overline{\nabla}$ на ортонормираној бази од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ има облик

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\bar{E}_i} \bar{E}_j &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \varepsilon_{ijk} \bar{E}_k, & \overline{\nabla}_{\bar{E}_i} \bar{F}_j &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \varepsilon_{ijk} \bar{F}_k, \\
\overline{\nabla}_{\bar{F}_i} \bar{E}_j &= 0, & \overline{\nabla}_{\bar{F}_i} \bar{F}_j &= 0,
\end{aligned} \qquad (2.19)
$$

па се сада лако показује да за придружени тензор кривине канонске конексије важи $\overline{R} \neq 0$, због

$$\overline{R}(\bar{E}_1, \bar{E}_2)\bar{E}_1 = -\frac{2}{3}\bar{E}_2 \neq 0.$$

Овакве многострукости се некада у литератури називају Черн-равнима (видети [42]), па смо заправо доказали да $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ није Черн-равна.

Многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ је константног типа $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (видети Напомену 1.3), што следи из формуле:

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(G(X,Y), G(Z,W)) = \ & \frac{1}{3}(\tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(Y,W) - \tilde{g}(X,W)\tilde{g}(Y,Z) \\
+ \ & \tilde{g}(JX,Z)\tilde{g}(JW,Y) - \tilde{g}(JX,W)\tilde{g}(JZ,Y)).
\end{aligned} \qquad (2.20)
$$

Поред стандардних релација (1.3), (1.4), (1.5) које су задовољене на произвољној близу Келеровој многострукости, претходна формула нам омогућава да, додатно, на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ изразимо коваријантни извод $\tilde{\nabla} G$ тензора G

$$
\begin{aligned}
G(X, G(Y,Z)) &= \frac{1}{3}(\tilde{g}(X,Z)Y - \tilde{g}(X,Y)Z + \tilde{g}(JX,Z)JY - \tilde{g}(JX,Y)JZ); \\
(\tilde{\nabla} G)(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}(\tilde{g}(X,Z)JY - \tilde{g}(X,Y)JZ - \tilde{g}(JY,Z)X).
\end{aligned} \qquad (2.21)
$$

Такође, могуће је изразити тензор G координатно, на произвољним векторима $X = (p\alpha, q\beta)$, $Y = (p\gamma, q\delta) \in T_{(p,q)}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$:

$$
\begin{aligned}
G(X,Y) = \frac{2}{3\sqrt{3}}(&p(\beta \times \gamma + \alpha \times \delta + \alpha \times \gamma - 2\beta \times \delta), \\
&q(-\alpha \times \delta - \beta \times \gamma + 2\alpha \times \gamma - \beta \times \delta)).
\end{aligned} \qquad (2.22)
$$

2.2 Риманова субмерзија са $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$

За произвољну Лијеву групу G и њену затворену подгрупу H, која је самим тим и Лијева подгрупа, количнички простор G/H има структуру Лијеве групе јер постоји природно дефинисано десно дејство групе H на G. Такође, количничко пресликавање $\pi : G\to G/H$ је глатка субмерзија, а уређена четворка $(G, G/H, H, \pi)$ је глатко раслојење, са тоталним простором G, базом G/H и влакнима H. Ово дејство још и чува влакна, на сваком од њих дејствује слободно и транзитивно, па уређена петорка $(G, G/H, H, \pi, H)$ има структуру главног раслојења.

Већ смо увели глатку хомогену структуру на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, видевши је као количнички простор производа сфера $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3 = SU(2)^3$ и њене затворене подгрупе $SU(2)_\triangle$. Одговарајуће количничко пресликавање $\pi : \mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ је свакако глатка субмерзија, али је могуће видети га и као Риманову субмерзију, чијим ћемо се својствима сада позабавити. Наредни резултати су изложени у раду [47].

С тим у вези, размотримо производ сфера $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, са уобичајеном структуром наслеђеном из $\mathbb{H}^3$. Идентификујући скуп имагинарних кватерниона са скупом $\mathbb{R}^3$, имамо дефинисане скаларни и векторски производ $\langle,\rangle$ и $\times$ на скупу $\mathrm{Im}\mathbb{H}$. За тангентне векторе $V = (g_1V_1, g_2V_2, g_3V_3)$ и $W = (g_1W_1, g_2W_2, g_3W_3)$ у тачки (g_1, g_2, g_3), где су $V_1, V_2, V_3, W_1, W_2, W_3$ имагинарни кватерниони, сада имамо индуковану метрику

$$\begin{aligned}
\langle (g_1V_1, g_2V_2, g_3V_3), (g_1W_1, g_2W_2, g_3W_3)\rangle &= \sum_{l=1}^{3}\mathrm{Re}(g_lV_l\overline{W_l}\overline{g_l})\\
&= -\sum_{l=1}^{3}\mathrm{Re}(g_lV_lW_l\overline{g_l})\\
&= \sum_{l=1}^{3}\mathrm{Re}(g_l(\langle V_l, W_l\rangle - V_l\times W_l)\overline{g_l})\\
&= \sum_{l=1}^{3}\langle V_l, W_l\rangle.
\end{aligned}$$

У односу на ову метрику, следећа векторска поља на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ чине ортонормирану базу.

$$\begin{aligned}
&E_1(g_1,g_2,g_3) = (g_1\overline{g_3}ig_3, 0, 0), && F_1(g_1,g_2,g_3) = (0, g_2\overline{g_3}ig_3, 0), && G_1(g_1,g_2,g_3) = (0,0,ig_3),\\
&E_2(g_1,g_2,g_3) = (g_1\overline{g_3}jg_3, 0, 0), && F_2(g_1,g_2,g_3) = (0, g_2\overline{g_3}jg_3, 0), && G_2(g_1,g_2,g_3) = (0,0,jg_3),\\
&E_3(g_1,g_2,g_3) = (g_1\overline{g_3}kg_3, 0, 0), && F_3(g_1,g_2,g_3) = (0, g_2\overline{g_3}kg_3, 0), && G_3(g_1,g_2,g_3) = (0,0,kg_3).
\end{aligned}$$

На сваком тангентном простору $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, наредна пресликавања су добро дефинисана, чувају дефинисану метрику

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(g_1V_1, g_2V_2, g_3V_3) &= (g_1V_2, g_2V_3, g_3V_1),\\
\tilde{P}_1(g_1V_1, g_2V_2, g_3V_3) &= (g_1V_2, g_2V_1, g_3V_3),\\
\tilde{P}_2(g_1V_1, g_2V_2, g_3V_3) &= (g_1V_3, g_2V_2, g_3V_1),\\
\tilde{P}_3(g_1V_1, g_2V_2, g_3V_3) &= (g_1V_1, g_2V_3, g_3V_2),
\end{aligned}$$

док на базним векторима делују на следећи начин

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}E_l &= G_l, & \tilde{\tau}F_l &= E_l, & \tilde{\tau}G_l &= F_l,\\
\tilde{P}_1E_l &= F_l, & \tilde{P}_1F_l &= E_l, & \tilde{P}_1G_l &= G_l,\\
\tilde{P}_2E_l &= G_l, & \tilde{P}_2F_l &= F_l, & \tilde{P}_2G_l &= E_l,\\
\tilde{P}_3E_l &= E_l, & \tilde{P}_3F_l &= G_l, & \tilde{P}_3G_l &= F_l.
\end{aligned}$$

Очигледно је да за ова пресликавања важи

$$\tilde{\tau}^3 = \mathrm{Id} = \tilde{P_1}^2 = \tilde{P_2}^2 = \tilde{P_3}^2, \qquad \tilde{P}_3\tilde{P}_1 = \tilde{\tau}.$$

Посматрајмо сада пресликавање $\pi : \mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ дефинисано са

$$\pi : (g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_1\overline{g_3}, g_2\overline{g_3}).$$

Лако се добија да је $\pi(g_1, g_2, g_3) = \pi(g_1', g_2', g_3')$ ако и само ако је $(g_1', g_2', g_3') = (g_1a, g_2a, g_3a)$, за неки јединични кватернион $a \in \mathbb{H}$.

За сваку тачку (g_1, g_2, g_3) многострукости $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, криве $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, дефинисане тако да садрже тачку (g_1, g_2, g_3) и имају за вектор брзине у тој тачки баш базне векторе E_1, F_1, G_1, задовољавају

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (g_1\overline{g_3}e^{\mathrm{i}t}g_3, g_2, g_3), & \gamma_1(0) &= (g_1, g_2, g_3), & \gamma_1'(0) &= E_1(g_1, g_2, g_3),\\
\gamma_2(t) &= (g_1, g_2\overline{g_3}e^{\mathrm{i}t}g_3, g_3), & \gamma_2(0) &= (g_1, g_2, g_3), & \gamma_2'(0) &= F_1(g_1, g_2, g_3),\\
\gamma_3(t) &= (g_1, g_2, e^{\mathrm{i}t}g_3), & \gamma_3(0) &= (g_1, g_2, g_3), & \gamma_3'(0) &= G_1(g_1, g_2, g_3).
\end{aligned}$$

Замењујући i са j, k, добијамо одговарајуће криве на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ које садрже разматрану тачку (g_1, g_2, g_3) и за векторе брзина у одговарајућој тачки имају $E_2, F_2, G_2, E_3, F_3, G_3$.

Лема 2.4. *Важе следеће релације које описују како диференцијал пресликавања π делује на базним векторима $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$*

$$\begin{aligned}
d\pi(E_l(g_1, g_2, g_3)) &= \widetilde{E}_l(\pi(g_1, g_2, g_3))\\
d\pi(F_l(g_1, g_2, g_3)) &= \widetilde{F}_l(\pi(g_1, g_2, g_3))\\
d\pi(G_l(g_1, g_2, g_3)) &= -\widetilde{E}_l(\pi(g_1, g_2, g_3)) - \widetilde{F}_l(\pi(g_1, g_2, g_3)).
\end{aligned}$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
d\pi(E_l(g_1, g_2, g_3)) &= \frac{d}{dt}\pi(g_1\overline{g_3}e^{\mathrm{i}t}g_3, g_2, g_3)\mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(g_1\overline{g_3}e^{\mathrm{i}t}, g_2\overline{g_3})\mid_{t=0}\\
&= (g_1\overline{g_3}\mathrm{i}, 0) = \tilde{E}_1(g_1\overline{g_3}, g_2\overline{g_3}) = \tilde{E}_1(\pi(g_1, g_2, g_3)).
\end{aligned}$$

Пропозиција 2.1. *Пресликавање π је субмерзија. Хоризонтална и вертикална дистрибуција су разапете следећим векторским пољима*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathcal{L}\{E_1 + F_1 + G_1, E_2 + F_2 + G_2, E_3 + F_3 + G_3\},\\
\mathcal{H} &= \mathcal{L}\Big\{\frac{1}{3}(2E_l - F_l - G_l), \frac{1}{3}(-E_l + 2F_l - G_l)\Big\}, \qquad l = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ на хоризонталним векторима узима константне вредности

$$\begin{aligned}
\langle\frac{1}{3}(2E_l-F_l-G_l),\frac{1}{3}(2E_{l'}-F_{l'}-G_{l'})\rangle&=\frac{2}{3}\delta_{ll'},\\
\langle\frac{1}{3}(2E_l-F_l-G_l),\frac{1}{3}(-E_{l'}+2F_{l'}-G_{l'}))\rangle&=-\frac{1}{3}\delta_{ll'},\\
\langle\frac{1}{3}(-E_l+2F_l-G_l),\frac{1}{3}(-E_{l'}+2F_{l'}-G_{l'})\rangle&=\frac{2}{3}\delta_{ll'},
\end{aligned}$$

што значи да је независна од одабира тачке (g_1,g_2,g_3) за коју је $\pi(g_1,g_2,g_3)=(p,q)$. То нам омогућава да канонски дефинишемо метрику g_s на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, тако да субмерзија π постане Риманова субмерзија

$$g_s(\widetilde{E_i},\widetilde{E_j})=\frac{2}{3}\delta_{ij},\quad g_s(\widetilde{F_i},\widetilde{F_j})=\frac{2}{3}\delta_{ij},\quad g_s(\widetilde{E_i},\widetilde{F_j})=-\frac{1}{3}\delta_{ij}.$$

Последица 2.1. *Веза између добијене метрике и стандардне близу Келерове метрике је $g=2g_s$.*

Поставља се природно питање да ли је могуће и дефинисана пресликавања $\tilde{\tau},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,\tilde{P}_3$ спустити субмерзијом π са $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$. Наиме, свако линеарно пресликавање $\tilde{A}$ тангентног простора $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ које чува метрику, хоризонталну и вертикалну дистрибуцију, као и фибре субмерзије π, индукује линеарно пресликавање A тангентног простора $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$

$$AZ(p,q)=d\pi(\tilde{A}\tilde{Z}(g_1,g_2,g_3)),$$

где је (g_1,g_2,g_3) било која тачка из $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ за коју је $\pi(g_1,g_2,g_3)=(p,q)$, а $\tilde{Z}(g_1,g_2,g_3)$ јединствено хоризонтално векторско поље такво да је $d\pi(\tilde{Z}(g_1,g_2,g_3))=Z(p,q)$. Ово пресликавање је коректно дефинисано и изометрија је јер за произвољне хоризонталне тангентне векторе редом у тачкама (g_1,g_2,g_3) и (g_1a,g_2a,g_3a), за које је $d\pi(v)=d\pi(w)$, такође важи и $d\pi(\tilde{A}v)=d\pi(\tilde{A}w)$.

Пресликавања $\tilde{\tau},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,\tilde{P}_3$ задовољавају услове наметнуте за $\tilde{A}$, па индукују пресликавања τ,P_1,P_2,P_3 дефинисана на тангентном простору $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ у произвољној тачки (p,q). Њихово деловање на базним векторима дато је следећом лемом.

Лема 2.5. *Важе релације*

$$\begin{aligned}
&\tau(\widetilde{E}_l)=-\widetilde{E}_l-\widetilde{F}_l, && P_1(\widetilde{E}_l)=\widetilde{F}_l, && P_2(\widetilde{E}_l)=-\widetilde{E}_l, && P_3(\widetilde{E}_l)=-\widetilde{E}_l,\\
&\tau(\widetilde{F}_l)=\widetilde{E}_l, && P_1(\widetilde{F}_l)=\widetilde{E}_l, && P_2(\widetilde{F}_l)=-\widetilde{E}_l, && P_3(\widetilde{F}_l)=-\widetilde{E}_l.
\end{aligned}$$

Сада се лако проверава да важи $\frac{2}{\sqrt{3}}(\tau+\frac{1}{2}\mathrm{Id}))^2=-\mathrm{Id}$, па је веза са скоро комплексном структуром J дата са

$$J=\frac{2}{\sqrt{3}}(\tau+\frac{1}{2}\mathrm{Id}).$$

Дејство скоро комплексне структуре на бази је

$$J(\widetilde{E}_l)=\frac{1}{\sqrt{3}}(-\widetilde{E}_l-2\widetilde{F}_l),\qquad J(\widetilde{F}_l)=\frac{1}{\sqrt{3}}(2\widetilde{E}_l+\widetilde{F}_l).$$

Из претходно добијених веза, непосредно се показује следећа последица која даје везу између скоро продукт структура.

Последица 2.2.

$$P_1 = P, \qquad P_2 = -\frac{1}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}JP, \qquad P_3 = -\frac{1}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}JP$$

Посматрајмо пресликавања $\tilde{\mathcal{F}_{abc}}, \tilde{\mathcal{F}_1}, \tilde{\mathcal{F}_2} : \mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ дефинисана са

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{F}_{abc}}(g_1,g_2,g_3) &= (ag_1, bg_2, cg_3), \quad a,b,c\in\mathbb{S}^3\\
\widetilde{\mathcal{F}_1}(g_1,g_2,g_3) &= (g_2,g_1,g_3),\\
\widetilde{\mathcal{F}_2}(g_1,g_2,g_3) &= (g_3,g_2,g_1),\\
\widetilde{\mathcal{F}_3}(g_1,g_2,g_3) &= (g_1,g_3,g_2).
\end{aligned}$$

Како је очигледно $\widetilde{\mathcal{F}_3} = \widetilde{\mathcal{F}_2}\circ\widetilde{\mathcal{F}_1}\circ\widetilde{\mathcal{F}_2}$, довољно је да испитамо особине пресликавања $\widetilde{\mathcal{F}_{abc}}$, $\widetilde{\mathcal{F}_1}$ и $\widetilde{\mathcal{F}_2}$. Директно се проверава да су у питању изометрије многострукости $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, као и да следеће једнакости не зависе од одабира јединичног кватерниона d

$$\begin{aligned}
\pi\widetilde{\mathcal{F}_{abc}}(g_1d,g_2d,g_3d) &= \pi(ag_1d,bg_2d,cg_3d) = (ag_1\overline{g_3}\overline{c}, bg_2\overline{g_3}\overline{c}),\\
\pi\widetilde{\mathcal{F}_1}(g_1d,g_2d,g_3d) &= \pi(g_2d,g_1d,g_3d) = (g_2\overline{g_3}, g_1\overline{g_3}),\\
\pi\widetilde{\mathcal{F}_2}(g_1d,g_2d,g_3d) &= \pi(g_3d,g_2d,g_1d) = (g_3\overline{g_1}, g_2\overline{g_1}).
\end{aligned}$$

На основу разматрања које претходи Леми 2.5, ове изометрије индукују изометрије $\mathcal{F}_{abc}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, у односу на метрику g, које се слажу са Римановом субмерзијом π

$$\pi\circ\widetilde{\mathcal{F}_{abc}} = \mathcal{F}_{abc}\circ\pi, \qquad \pi\circ\widetilde{\mathcal{F}_1} = \mathcal{F}_1\circ\pi, \qquad \pi\circ\widetilde{\mathcal{F}_2} = \mathcal{F}_2\circ\pi.$$

Метрика g је само константан умножак близу Келерове метрике g_s, па су $\mathcal{F}_{abc}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ изометрије и од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ у односу на ту близу Келерову метрику. Експлицитне формуле ових изометрија дате су са

$$\mathcal{F}_{abc}(p,q) = (ap\overline{c}, bq\overline{c}), \qquad \mathcal{F}_1(p,q) = (q,p), \qquad \mathcal{F}_2(p,q) = (\overline{p}, q\overline{p}).$$

Изометрије $\mathcal{F}_{abc}$ (видети [51]) многострукости $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ чувају метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\tilde{g}$ и слажу се са скоро комплексном и скоро продукт структурама J, P. Међутим, изометрије $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ немају ту особину.

Пропозиција 2.2. *Диференцијали изометрија $\mathcal{F}_{abc}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, скоро комплексна структура J и скоро продукт структуре P_1, P_2, P_3 задовољавају*

$$\begin{aligned}
&d\mathcal{F}_{abc}\circ J = J\circ d\mathcal{F}_{abc}, && d\mathcal{F}_1\circ J = -J\circ d\mathcal{F}_1, && d\mathcal{F}_2\circ J = -J\circ d\mathcal{F}_2,\\
&d\mathcal{F}_{abc}\circ P_1 = P_1\circ d\mathcal{F}_{abc}, && d\mathcal{F}_1\circ P_1 = P_1\circ d\mathcal{F}_1, && d\mathcal{F}_2\circ P_1 = P_3\circ d\mathcal{F}_2,\\
&d\mathcal{F}_{abc}\circ P_2 = P_2\circ d\mathcal{F}_{abc}, && d\mathcal{F}_1\circ P_2 = P_3\circ d\mathcal{F}_1, && d\mathcal{F}_2\circ P_2 = P_2\circ d\mathcal{F}_2,\\
&d\mathcal{F}_{abc}\circ P_3 = P_3\circ d\mathcal{F}_{abc}, && d\mathcal{F}_1\circ P_3 = P_2\circ d\mathcal{F}_1, && d\mathcal{F}_2\circ P_3 = P_1\circ d\mathcal{F}_2.
\end{aligned}$$

Доказ. Даћемо експлицитне формуле за диференцијале поменутих изометрија

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F}_{abc}(p\alpha, q\beta) &= (ap\alpha\overline{c}, bq\beta\overline{c}),\\
d\mathcal{F}_1(p\alpha, q\beta) &= (q\beta, p\alpha),\\
d\mathcal{F}_2(p\alpha, q\beta) &= (\overline{p}(p(-\alpha)\overline{p}), q\overline{p}(p(\beta-\alpha)\overline{p})),
\end{aligned}$$

као и дејство скоро комплексне структуре и три скоро продукт структуре на произвољном базном вектору

$$J(p\alpha, q\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}(p(2\beta - \alpha), q(-2\alpha + \beta)) \qquad P_1(p\alpha, q\beta) = (p\beta, q\alpha),$$
$$P_2(p\alpha, q\beta) = (p(-\alpha), q(\beta - \alpha)) \qquad P_3(p\alpha, q\beta) = (p(\alpha - \beta), q(-\beta)).$$

одакле доказ следи непосредним компоновањем пресликавања са обе стране једнакости.

Дакле, скоро комплексна структура J се чува при изометријама $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ до на знак, па је инваријантна при њиховој композицији. С друге стране, погодно одабраном композицијом ових изометрија можемо повезати сваке две скоро продукт структуре P_1, P_2, P_3. Ако са $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ означимо скуп ових структура, тада је скуп $\mathcal{P}$ инваријантан при изометријама $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, па у многим класификационим теоремама о подмногострукостима $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, постоје три изометричне фамилије примера подмногострукости као решење проблема који се изучавају.

У раду [47] аутори су дефинисали близу продукт структуру P^* као тензор који задовољава све познате идентитете из (2.12) које задовољава скоро продукт структура P, заједно са тензором кривине (2.17). Један од главних резултата тог рада је да постоје три такве структуре

$$P_l = \cos\left(\frac{2\pi l}{3}\right) P - \sin\left(\frac{2\pi l}{3}\right) JP, \qquad l = 1, 2, 3.$$

које се природно повезују са већ дефинисаном субмерзијом $\pi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Прецизније, уколико близу продукт структура P^* задовољава прве четири релације из (2.12) и формулу за Риманов тензор кривине (2.17), тада постоји константан угао θ такав да је

$$P^* = \cos\theta P + \sin\theta JP.$$

Ако сада, додатно, наметнемо да P^* задовољава и пети идентитет из (2.12), добијамо да је θ целобројни умножак од $\frac{2\pi}{3}$, тј. P^* је једна од структура P_1, P_2, P_3. Последња релација из (2.12) је тада аутоматски задовољена.

Осврнимо се сада на везу између Риманових тензора кривине R и $\tilde{R}$ на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. У раду [50] дате су једначине које повезују ове тензоре на многострукостима M и B при субмерзији $\pi : M \to B$, које представљају неку врсту аналогије са Гаусовим и Кодацијевим једначинама за имерзију. Прва од тих једначина гласи

$$\mathcal{H}R_{XY}Z = \tilde{R}_{XY}Z - 2A_Z A_X Y + A_X A_Y Z - A_Y A_X Z,$$

где су X, Y, Z произвољни хоризонтални вектори, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ редом пројекције на потпросторе хоризонталних и вертикалних вектора, а тензор A типа $(1, 2)$ дефинисан је на M са

$$A_E F = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{H}F + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{V}F.$$

У истом раду доказано је да, за хоризонтална векторска поља X, Y и вертикално поље V важе формуле

$$A_X Y = \mathcal{V}(\nabla_X Y) = \frac{1}{2}\mathcal{V}[X, Y], \tag{2.23}$$
$$A_X V = \mathcal{H}\nabla_X V = \mathcal{H}\nabla_V X. \tag{2.24}$$

Према томе, наш циљ је да добијемо експлицитне изразе за A_XY и A_XV, па ћемо прво испитати како они изгледају на бази.

Из дефиниције базних вектора, Лијевих заграда и конексије директно се добијају формуле

$$[E_i, E_j] = (2E_k + \frac{4}{9}G_k)\varepsilon_{ijk}, \quad [F_i, F_j] = (2E_k + \frac{4}{9}G_k)\varepsilon_{ijk}, \quad [E_i, F_j] = -\frac{2}{9}\varepsilon_{ijk}G_k, \tag{2.25}$$

док је Леви-Чивита конексија

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_i}E_j &= (E_k + \tfrac{2}{9}G_k)\varepsilon_{ijk}, & \tilde{\nabla}_{F_i}E_j &= (\tfrac{1}{3}(E_k - F_k) - \tfrac{1}{9}G_k)\varepsilon_{ijk}, \\ \tilde{\nabla}_{E_i}F_j &= -(\tfrac{1}{3}(E_k - F_k) + \tfrac{1}{9}G_k)\varepsilon_{ijk}, & \tilde{\nabla}_{F_i}F_j &= (F_k + \tfrac{2}{9}G_k)\varepsilon_{ijk}, \\ \tilde{\nabla}_{E_i}G_j &= (E_k + \tfrac{2}{3}G_k)\varepsilon_{ijk} & \tilde{\nabla}_{F_i}G_j &= (F_k + \tfrac{2}{3}G_k)\varepsilon_{ijk}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Представљајући произвољна хоризонтална векторска поља X, Y и вертикално поље V у одговарајућој бази, добијамо

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \alpha_3E_3 + \beta_1F_1 + \beta_2F_2 + \beta_3F_3, \\ Y &= \gamma_1E_1 + \gamma_2E_2 + \gamma_3E_3 + \delta_1F_1 + \delta_2F_2 + \delta_3F_3, \\ Z &= \lambda_1G_1 + \lambda_2G_2 + \lambda_3G_3, \end{aligned}$$

а користећи формуле за метрику и скоро комплексну структуру на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, добијамо

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{2}g(X, 2E_i + F_i) = \frac{\sqrt{3}}{2}g(X, JF_i), & \beta_i &= \frac{1}{2}g(X, E_i + 2F_i) = -\frac{\sqrt{3}}{2}g(X, JE_i) \\ \gamma_i &= \frac{1}{2}g(Y, 2E_i + F_i) = \frac{\sqrt{3}}{2}g(Y, JF_i), & \delta_i &= \frac{1}{2}g(Y, E_i + 2F_i) = -\frac{\sqrt{3}}{2}g(Y, JE_i), \\ \lambda_i &= \frac{1}{3}g(V, G_i). & & i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Користећи (2.23), (2.24) и (2.26), добијамо

$$\begin{aligned} A_XY &= \frac{\sqrt{3}}{18}\left((2g(JX, Q_1PY) - g(JX, Q_1Y))G_1\right. \\ &\quad + (2g(JX, Q_2PY) - g(JX, Q_2Y))G_2 + \left.(2g(JX, Q_3PY) - g(JX, Q_3Y))G_3\right) \\ A_XV &= \frac{1}{3}(g(V, G_1)Q_1X + g(V, G_2)Q_2X + g(V, G_3)Q_3X), \end{aligned}$$

где су симетрични ендоморфизми Q_i, $i = 1, 2, 3$, дефинисани на тангентном простору од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са

$$Q_i(E_j) = \varepsilon_{ijk}E_k, \qquad Q_i(F_j) = \varepsilon_{ijk}F_k.$$

Глава 3

Геодезијске линије на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

За изучавање и класификацију многих класа подмногострукости од суштинског је значаја познавање експлицитних формула параметризованих геодезијских линија. У овом поглављу представићемо детаљно извођење тих формула, а добијени резултати објављени су у коауторском раду [22].

Како знамо да су $\mathcal{F}_{abc}$ изометрије многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, за произвољне јединичне кватернионе a, b, c, довољно је да одредимо геодезијске линије $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ које садрже тачку $(1,1)$; тада је геодезијска линија која садржи тачку (a,b) дата са $\tilde{\gamma}(t) = (ax(t), by(t))$.

Теорема 3.1. *Геодезијске линије многострукости* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *које садрже тачку* $(1,1)$ *дате су параметризацијом:*

(1) $\gamma(t) = (\cos(at) + \sin(at)\mathrm{i}, \cos(at) - \sin(at)\mathrm{i})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(2) $\gamma(t) = (\cos(at) + \sin(at)\mathrm{i}, \cos(\widetilde{a}t) + \sin(\widetilde{a}t)\mathrm{i})$, *где је* $c_1 \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \setminus \{0\}$, $d_1 \in \mathbb{R}$, $a = \frac{1+d_1}{2}\|c_1\|$, $\widetilde{a} = \frac{1-d_1}{2}\|c_1\|$;

(3)

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \Bigg(&\left(\frac{1}{1+\varphi^2}\cos(At) + \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\cos(Bt)\right) + \left(\frac{1}{1+\varphi^2}\sin(At) + \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\sin(Bt)\right)\mathrm{i} + \\ &\left(\frac{\varphi}{1+\varphi^2}\sin(At) - \frac{\varphi}{1+\varphi^2}\sin(Bt)\right)\mathrm{j} - \left(-\frac{\varphi}{1+\varphi^2}\cos(At) + \frac{\varphi}{1+\varphi^2}\cos(Bt)\right)\mathrm{k}, \\ &\left(\frac{1}{1+\widetilde{\varphi}^2}\cos(\widetilde{A}t) + \frac{\widetilde{\varphi}^2}{1+\widetilde{\varphi}^2}\cos(\widetilde{B}t)\right) + \left(\frac{1}{1+\widetilde{\varphi}^2}\sin(\widetilde{A}t) + \frac{\widetilde{\varphi}^2}{1+\widetilde{\varphi}^2}\sin(\widetilde{B}t)\right)\mathrm{i} + \\ &\left(\frac{\widetilde{\varphi}}{1+\widetilde{\varphi}^2}\sin(\widetilde{A}t) - \frac{\widetilde{\varphi}}{1+\widetilde{\varphi}^2}\sin(\widetilde{B}t)\right)\mathrm{j} - \left(-\frac{\widetilde{\varphi}}{1+\widetilde{\varphi}^2}\cos(\widetilde{A}t) + \frac{\widetilde{\varphi}}{1+\widetilde{\varphi}^2}\cos(\widetilde{B}t)\right)\mathrm{k}\Bigg),\end{aligned}$$

где је $c_1, c_2 \in Im\mathbb{H} \setminus \{0\}$, $d_1 \in \mathbb{R}$, $a = \frac{1+d_1}{2}\|c_1\|$, $b = \frac{1}{2}\|c_2\|$, $c = \frac{2}{3}\|c_1\|$, $\tilde{a} = \frac{1-d_1}{2}\|c_1\|$, $\tilde{b} = -\frac{1}{2}\|c_2\|$, $\tilde{c} = c$,

$$A = \frac{c + \sqrt{(2a-c)^2 + 4b^2}}{2}, \qquad B = \frac{c - \sqrt{(2a-c)^2 + 4b^2}}{2},$$

$$\widetilde{A} = \frac{\widetilde{c} + \sqrt{(2\widetilde{a}-\widetilde{c})^2 + 4\widetilde{b}^2}}{2}, \qquad \widetilde{B} = \frac{\widetilde{c} - \sqrt{(2\widetilde{a}-\widetilde{c})^2 + 4\widetilde{b}^2}}{2},$$

$$\varphi = \frac{c - 2a + \sqrt{(c-2a)^2 + 4b^2}}{2b}, \qquad \widetilde{\varphi} = \frac{\widetilde{c} - 2\widetilde{a} + \sqrt{(\widetilde{c}-2\widetilde{a})^2 + 4\widetilde{b}^2}}{2\widetilde{b}}.$$

Напомена 3.1. *Сменом* $\varphi = \mathrm{tg}\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, *(аналогно за* $\widetilde{\theta}$*)* $\frac{1}{1+\varphi^2} = \cos^2\theta$, $\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} = \sin^2\theta$, $\frac{\varphi}{1+\varphi^2} = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$, *параметризована крива из случаја (3) постаје*

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \Big(&(\cos^2\theta\cos(At) + \sin^2\theta\cos(Bt)) + (\cos^2\theta\sin(At) + \sin^2\theta\sin(Bt))\mathrm{i} + \\ &\sin\theta\cos\theta(\sin(At) - \sin(Bt))\mathrm{j} - \sin\theta\cos\theta(-\cos(At) + \cos(Bt))\mathrm{k}, \\ &(\cos^2\widetilde{\theta}\cos(\widetilde{A}t) + \sin^2\widetilde{\theta}\cos(\widetilde{B}t)) + (\cos^2\widetilde{\theta}\sin(\widetilde{A}t) + \sin^2\widetilde{\theta}\sin(\widetilde{B}t))\mathrm{i} + \\ &\sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}(\sin(\widetilde{A}t) - \sin(\widetilde{B}t))\mathrm{j} - \sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}(-\cos(\widetilde{A}t) + \cos(\widetilde{B}t))\mathrm{k}\Big).\end{aligned}$$

Доказ. Приметимо да свака геодезијска линија $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, користећи (2.2), индукује постојање функција α, $\beta : \mathbb{R} \to \mathrm{Im}\mathbb{H}$ таквих да је

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (x(t)\alpha(t), y(t)\beta(t)). \tag{3.1}$$

Ради једноставности, избегаваћемо писање параметра t функција $x, y, \alpha, \beta, \gamma$ и њихових извода. Из (3.1) следи

$$\gamma'' = (x\alpha\cdot\alpha + x\alpha', y\beta\cdot\beta + y\beta'). \tag{3.2}$$

За имагинарне кватернионе α_1, α_2 имамо да важи (2.13), одакле је $\alpha\cdot\alpha = -\|\alpha\|^2$. Дакле, можемо писати

$$\begin{aligned}\gamma'' &= (x(\alpha' - \|\alpha\|^2), y(\beta' - \|\beta\|^2)) \\ &= (x\alpha', y\beta') - \|\alpha\|^2(x, 0) - \|\beta\|^2(0, y).\end{aligned}$$

Изједначавајући тангентне и нормалне делове леве и десне стране ове једнакости, уз коришћење (2.16) и (2.14), следи

$$\nabla^E_{\gamma'}\gamma' = (x\alpha', y\beta') = \tilde{\nabla}_{\gamma'}\gamma' + JG(\gamma', P\gamma'). \tag{3.3}$$

Како је $\gamma' = (x\alpha, y\beta)$, $P\gamma' = (x\beta, y\alpha)$, формула (2.22) даје $G(\gamma', P\gamma') = \frac{2}{\sqrt{3}}(x(\alpha\times\beta), y(\alpha\times\beta))$, тј.

$$JG(\gamma', P\gamma') = \frac{2}{3}(x(\alpha\times\beta), -y(\alpha\times\beta)). \tag{3.4}$$

Коначно, како је γ геодезијска, користећи (3.3) и (3.4), рачунамо

$$\alpha'(t) = \frac{2}{3}\alpha(t)\times\beta(t), \quad \beta'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)\times\beta(t). \tag{3.5}$$

Приметимо да из (3.5) следи $(\alpha(t) + \beta(t))' = 0$ па постоји константан имагинарни кватернион $c_1 \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ такав да је

$$\alpha(t) + \beta(t) = c_1. \tag{3.6}$$

С друге стране, из (3.5) и (3.6) следи

$$(\alpha(t)-\beta(t))' = -\frac{2}{3}c_1 \times (\alpha(t)-\beta(t)). \tag{3.7}$$

Ако је $c_1 = 0$, из (3.6) и (3.7) добијамо да су α и β константне. Без умањења општости, можемо претпоставити да су то имагинарни кватерниони колинеарни са i:

$$\alpha = -\beta = a\mathrm{i}, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3.8}$$

Ако је $c_1 \neq 0$, из $\langle \alpha(t)-\beta(t), c_1\rangle = \langle \alpha(t)-\beta(t), \alpha(t)+\beta(t)\rangle$ и тога што је c_1 константан вектор, имамо $\langle \alpha(t)-\beta(t), c_1\rangle' = \langle -\frac{2}{3}c_1 \times (\alpha(t)-\beta(t)), c_1\rangle = 0$, односно

$$\langle \alpha(t)-\beta(t), c_1\rangle = \tilde{d}_1 \in \mathbb{R}.$$

Означимо са ε део вектора $\alpha-\beta$ који је ортогоналан на c_1:

$$\varepsilon(t) = \alpha(t)-\beta(t) - \frac{\langle \alpha(t)-\beta(t), c_1\rangle}{\|c_1\|^2}c_1 \tag{3.9}$$

па рачунамо даље

$$\begin{aligned} \varepsilon'(t) &= -\tfrac{2}{3}c_1 \times \varepsilon(t), && (3.10)\\ \varepsilon''(t) &= -\tfrac{4}{9}\|c_1\|^2 c_1 \varepsilon(t). && (3.11) \end{aligned}$$

Решавањем диференцијалне једначине (3.11) добијамо

$$\varepsilon(t) = \cos\left(\frac{2}{3}\|c_1\|t\right)c_2 + \sin\left(\frac{2}{3}\|c_1\|t\right)c_3, \tag{3.12}$$

за неке $c_2, c_3 \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$, $c_2, c_3 \perp c_1$. Имајући у виду (3.10), закључујемо да важи

$$\|c_1\|c_2 = c_1 \times c_3, \quad \|c_1\|c_3 = -c_1 \times c_2.$$

Дакле,

$$c_3 = -\frac{c_1}{\|c_1\|} \times c_2 \tag{3.13}$$

па је $c_3 \perp c_1, c_2$.

Ако је $c_2 = 0$, следи да је и $c_3 = 0$, $\varepsilon = 0$, $\alpha-\beta = d_1 c_1$ ($d_1 = \frac{\tilde{d}_1}{\|c_1\|^2}$), $\alpha+\beta = c_1$ и одатле

$$\alpha = \frac{1+d_1}{2}c_1, \quad \beta = \frac{1-d_1}{2}c_1.$$

Можемо претпоставити да је c_1 колинеаран са i и добити

$$\alpha = a\mathrm{i}, \quad \beta = \tilde{a}\mathrm{i}, \tag{3.14}$$

где је $a = \frac{1+d_1}{2}\|c_1\|$, $\tilde{a} = \frac{1-d_1}{2}\|c_1\|$.

Ако је $c_2 \neq 0$, вектори $\frac{c_1}{\|c_1\|}$, $\frac{c_2}{\|c_2\|}$, $-\frac{c_3}{\|c_3\|}$ чине ортонормирану базу простора $\mathrm{Im}\mathbb{H}$. Како је увек могуће наћи јединични кватернион $h \in \mathbb{S}^3$ такав да је

$$h^{-1}\frac{c_1}{\|c_1\|}h = \mathrm{i}, \quad h^{-1}\frac{c_2}{\|c_2\|}h = \mathrm{j}, \quad h^{-1}\frac{c_3}{\|c_3\|}h = -\mathrm{k},$$

можемо надаље претпоставити да радимо са базом $\{\mathrm{i},\mathrm{j},-\mathrm{k}\}$. Користећи (3.9) и (3.12) добијамо

$$\alpha(t)+\beta(t)=c_1=\|c_1\|\,h\,\mathrm{i}\,h^{-1}, \tag{3.15}$$

$$\alpha(t)-\beta(t)=d_1\,\|c_1\|\,h\,\mathrm{i}\,h^{-1}+\|c_2\|\cos\left(\tfrac{2}{3}\|c_1\|t\right)h\,\mathrm{j}\,h^{-1}-\|c_2\|\sin\left(\tfrac{2}{3}\|c_1\|t\right)h\,\mathrm{k}\,h^{-1}. \tag{3.16}$$

Знамо да је $\|c_3\|=\|c_2\|$ из (3.13), па уз ознаку $d_1=\frac{\tilde{d}_1}{\|c_1\|^2}\in\mathbb{R}$, имамо

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{1+d_1}{2}\|c_1\|hih^{-1}+\frac{1}{2}\|c_2\|\cos\left(\frac{2}{3}\|c_1\|t\right)hjh^{-1}\\ &- \frac{1}{2}\|c_2\|\sin\left(\frac{2}{3}\|c_1\|t\right)h\mathrm{k}h^{-1},\\ \beta(t) &= \frac{1-d_1}{2}\|c_1\|hih^{-1}-\frac{1}{2}\|c_2\|\cos\left(\frac{2}{3}\|c_1\|t\right)hjh^{-1}\\ &+ \frac{1}{2}\|c_2\|\sin\left(\frac{2}{3}\|c_1\|t\right)h\mathrm{k}h^{-1},\end{aligned} \tag{3.17}$$

где је $h\in\mathbb{S}^3$, $c_1,c_2\in\mathrm{Im}\mathbb{H}\setminus\{0\}$, $d_1\in\mathbb{R}$.

Напомена 3.2. *Приметимо да имамо слободу ротације базе, у следећем смислу. Пресликавање $(x,y)\to(hxh^{-1},hyh^{-1})$ је изометрија (ротација) од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ и уколико тачка $(1,1)\in\gamma=(x,y)$ припада трагу криве, тада припада и трагу криве $(1,1)\in\tilde{\gamma}=(\tilde{x},\tilde{y})=(hxh^{-1},hyh^{-1})$. Штавише, крива $\tilde{\gamma}$ је такође тангентна на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ јер, за α, $\beta:\mathbb{R}\to\mathrm{Im}\mathbb{H}$ користећи (3.1), добијамо*

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}' &= (hx'h^{-1},hy'h^{-1})=(hx\alpha h^{-1},hy\beta h^{-1})\\ &= (hxh^{-1}h\alpha h^{-1},hyh^{-1}h\beta h^{-1})=(\tilde{x}\tilde{\alpha},\tilde{y}\tilde{\beta})\end{aligned} \tag{3.18}$$

за $\tilde{\alpha}=h\alpha h^{-1}$, $\tilde{\beta}=h\beta h^{-1}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}:\mathbb{R}\to\mathrm{Im}\mathbb{H}$. Дакле, довољно је одредити решења једначина

$$(x'(t),y'(t))=(x(t)\alpha(t),y(t)\beta(t)) \tag{3.19}$$

за

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \tfrac{1+d_1}{2}\|c_1\|\mathrm{i}+\tfrac{1}{2}\|c_2\|\cos\left(\tfrac{2}{3}\|c_1\|t\right)\mathrm{j}-\tfrac{1}{2}\|c_2\|\sin\left(\tfrac{2}{3}\|c_1\|t\right)\mathrm{k},\\ \beta(t) &= \tfrac{1-d_1}{2}\|c_1\|\mathrm{i}-\tfrac{1}{2}\|c_2\|\cos\left(\tfrac{2}{3}\|c_1\|t\right)\mathrm{j}+\tfrac{1}{2}\|c_2\|\sin\left(\tfrac{2}{3}\|c_1\|t\right)\mathrm{k}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

У свим разматраним случајевима, потребно је да решимо систем диференцијалних једначина где су функције облика

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= a\mathrm{i}+b\cos(ct)\mathrm{j}-b\sin(ct)\mathrm{k},\\ \beta(t) &= \tilde{a}\mathrm{i}+\tilde{b}\cos(\tilde{c}t)\mathrm{j}-\tilde{b}\sin(\tilde{c}t)\mathrm{k},\end{aligned} \tag{3.21}$$

што се своди на решавање једначине

$$f'(t)=f(t)(a\mathrm{i}+b\mathrm{j}\cos(ct)-b\mathrm{k}\sin(ct)), \tag{3.22}$$

за следеће вредности константи:

(1) ако је $c_1=0$, тада $\tilde{a}=-a\neq 0$, $b=\tilde{b}=c=\tilde{c}=0$;

(2) ако је $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, тада $a = \frac{1+d_1}{2}\|c_1\|$, $\tilde{a} = \frac{1-d_1}{2}\|c_1\|$, $b = \tilde{b} = c = \tilde{c} = 0$;

(3) ако је $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, тада $a = \frac{1+d_1}{2}\|c_1\|$, $b = \frac{1}{2}\|c_2\|$, $c = \frac{2}{3}\|c_1\|$, $\tilde{a} = \frac{1-d_1}{2}\|c_1\|$, $\tilde{b} = -\frac{1}{2}\|c_2\|$, $\tilde{c} = c$.

Случајеви (1) и (2) своде се на диференцијалну једначину облика $f'(t) = f(t) \cdot a\mathrm{i}$, која има очигледно решење које задовољава услов $f(0) = 1$:

$$f(t) = \cos(at) + \mathrm{i}\sin(at).$$

Геодезијске линије у овим случајевима имају параметризацију

$$\gamma(t) = (\cos(at) + \sin(at)\mathrm{i}, \cos(\tilde{a}t) + \sin(\tilde{a}t)\mathrm{i}),$$

при чему у случају (1) стављамо $\tilde{a} = -a \neq 0$ (тј. $a + \tilde{a} = 0$), док у случају (2) бирамо $a + \tilde{a} = \|c_1\| \neq 0$.

У трећем случају, уведимо

$$f(t) = f_1(t) + \mathrm{i}f_2(t) + \mathrm{j}f_3(t) + \mathrm{k}f_4(t) =: g_1(t) + \mathrm{j}g_2(t),$$

за реалне функције f_l, $l = \overline{1,4}$. Тада једначина (3.22) постаје

$$g_1' + \mathrm{j}g_2' = (g_1 + \mathrm{j}g_2)(a\mathrm{i} + b\mathrm{j}e^{\mathrm{i}ct})$$

одакле добијамо следећи систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= g_1 a\mathrm{i} - \overline{g_2} b e^{\mathrm{i}ct}, \\ g_2'(t) &= g_2 a\mathrm{i} + \overline{g_1} b e^{\mathrm{i}ct}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Диференцирајући једну од ових једначина и комбинујући са преосталом, добијамо линеарне једначине другог реда

$$\begin{aligned} g_1'' - c\mathrm{i}g_1' + (a^2 + b^2 - ac)g_1 = 0, \\ g_2'' - c\mathrm{i}g_2' + (a^2 + b^2 - ac)g_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Карактеристична једначина гласи

$$\lambda^2 - c\mathrm{i}\lambda + (a^2 + b^2 - ac) = 0, \tag{3.25}$$

са решењима $\lambda_1 = A\mathrm{i}$, $\lambda_2 = B\mathrm{i}$, где је

$$A = \frac{c + \sqrt{(2a-c)^2 + 4b^2}}{2}, \qquad B = \frac{c - \sqrt{(2a-c)^2 + 4b^2}}{2}. \tag{3.26}$$

Сада знамо општа решења за једначине (3.24) у облику

$$\begin{aligned} g_1(t) = (\mu_1 + \mathrm{i}\mu_2)e^{\mathrm{i}At} + (\nu_1 + \mathrm{i}\nu_2)e^{\mathrm{i}Bt}, \\ g_2(t) = (\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)e^{\mathrm{i}At} + (\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2)e^{\mathrm{i}Bt}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где $\mu_l, \nu_l, \eta_l, \xi_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2$. Како је $A \neq B$, функције $\sin(At)$, $\cos(At)$, $\sin(Bt)$, $\cos(Bt)$ су линеарно независне. Након замене (3.27) у (3.23), добијамо да важе следеће релације

$$\begin{aligned} (A-a)\mu_1 &= b\xi_2, \qquad (B-a)\nu_1 = b\eta_2, \\ (A-a)\mu_2 &= b\xi_1, \qquad (B-a)\nu_2 = b\eta_1, \\ (A-a)\eta_1 &= -b\nu_2, \qquad (B-a)\xi_1 = -b\mu_2, \\ (A-a)\eta_2 &= -b\nu_1, \qquad (B-a)\xi_2 = -b\mu_1. \end{aligned}$$

Како је
$$\frac{A-a}{b}=\frac{-b}{B-a}=\frac{c-2a+\sqrt{(c-2a)^2+4b^2}}{2b}:=\varphi,$$
међу коефицијентима постоје следеће четири везе

$$\varphi=\frac{\xi_2}{\mu_1}=\frac{\xi_1}{\mu_2}=-\frac{\nu_1}{\eta_2}=-\frac{\nu_2}{\eta_1}. \tag{3.28}$$

Случај $b=0$ повлачи $c_2=0$, који је већ разматран.

Дакле, решење једначине коју задовољава функција f је

$$\begin{aligned} f(t)=&(\mu_1\cos(At)-\mu_2\sin(At)-\varphi\eta_2\cos(Bt)+\varphi\eta_1\sin(Bt))+\\ &(\mu_2\cos(At)+\mu_1\sin(At)-\varphi\eta_1\cos(Bt)-\varphi\eta_2\sin(Bt))\mathrm{i}+\\ &(\eta_1\cos(At)-\eta_2\sin(At)+\varphi\mu_2\cos(Bt)-\varphi\mu_1\sin(Bt))\mathrm{j}-\\ &(\eta_2\cos(At)+\eta_1\sin(At)+\varphi\mu_1\cos(Bt)+\varphi\mu_2\sin(Bt))\mathrm{k}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Како је $f(t)$ крива на јединичној сфери $\mathbb{S}^3$ која садржи тачку 1, добијамо да важи

$$\mu_2=\eta_1=0,\quad \mu_1=\frac{1}{1+\varphi^2},\quad \eta_2=\frac{-\varphi}{1+\varphi^2}.$$

Коначно, решење разматране диференцијалне једначине је

$$f(t)=\left(\frac{1}{1+\varphi^2}\cos(At)+\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\cos(Bt)\right)+\left(\frac{1}{1+\varphi^2}\sin(At)+\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\sin(Bt)\right)\mathrm{i}+$$
$$\left(\frac{\varphi}{1+\varphi^2}\sin(At)-\frac{\varphi}{1+\varphi^2}\sin(Bt)\right)\mathrm{j}-\left(-\frac{\varphi}{1+\varphi^2}\cos(At)+\frac{\varphi}{1+\varphi^2}\cos(Bt)\right)\mathrm{k}.$$

Приметимо да је ово заиста крива на $\mathbb{S}^3$ због $\mu_1^2+\mu_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2=\frac{1}{1+\varphi^2}=\cos^2\theta$. Параметризацију геодезијских (3.1) добићемо када заменимо (3.29), са одговарајућим константама $A,B,\tilde{A},\tilde{B}$, у $\gamma(t)=(x(t),y(t))$.

Пропозиција 3.1. *Важе следећа тврђења.*

1. *Геодезијске линије на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ у односу на близу Келерову метрику поклапају се са геодезијским линијама у односу на уобичајену продукт метрику ако и само ако важи $c_1=0$ или $c_2=0$.*
2. - *Вектор брзине геодезијске линије је сопствени вектор оператора P у односу на сопствену вредност -1 ако и само ако је $c_1=0$.*
   - *Вектор брзине геодезијске линије је сопствени вектор оператора P у односу на сопствену вредност 1 ако и само ако је $c_1\neq 0$, $c_2=0$, $d_1=0$.*
3. *Геодезијска линија на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ је затворена ако и само ако је задовољен неки од следећих услова:*
   - *има параметризацију дату у Теореми 3.1 (1),*
   - *однос $\frac{a}{\tilde{a}}$ је рационалан број у Теореми 3.1 (2),*
   - *односи $\frac{B}{A}=\frac{k}{l}$, $\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}=\frac{p}{q}$ и $\frac{A}{\tilde{A}}=\frac{l}{n}$ су рационални бројеви у случају (3) Теореме 3.1.*

Доказ.

1. Из једнакости (6.2) јасно је да је $\nabla^E_{\gamma'}\gamma' = 0$ еквивалентно са $\alpha' = \beta' = 0$, односно $\alpha = \beta = \text{const}$. Раније смо већ добили да ово важи ако и само ако је $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$.

2. Како важи $\gamma' = (x\alpha, y\beta)$, $P\gamma' = (x\beta, y\alpha)$, услов $P\gamma' = \pm\gamma'$ своди се на $\alpha = \pm\beta$ и закључак следи из (3.8) и (3.14).

3. Јасно је да је $\gamma(t)$ периодична функција у случају (1) Теореме 3.1.

   Ако је једна од константи $a, \tilde{a}$ једнака 0 у случају (2) Теореме 3.1, тада она друга, која је различита од 0, мора бити паран умножак од π. Ако је $a \cdot \tilde{a} \neq 0$, обе координатне функције од $\gamma(t)$ су периодичне са истим периодом ако и само ако је однос $\frac{a}{\tilde{a}}$ рационалан број.

   Ако је једна од константи A, B (односно $\tilde{A}$, $\tilde{B}$) једнака 0 у случају (3) Теореме 3.1, тада она друга, која је различита од 0, мора бити паран умножак од π. Ако је $A \cdot B \neq 0, \tilde{A} \cdot \tilde{B} \neq 0$ у случају (3) Теореме 3.1, прва координатна функција од $\gamma(t)$ је периодична ако и само ако су функције $\sin(At)$, $\cos(At)$, $\sin(Bt)$, $\cos(Bt)$ све периодичне са истим периодом, што опет важи ако и само ако је однос $\frac{B}{A}$ једнак односу два парна умношка од π. Према томе, $\frac{B}{A} = \frac{k}{l}$ је рационалан број. Сличан закључак важи за другу координатну функцију, па је однос $\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} = \frac{p}{q}$ рационалан број. Како би обе координатне функције имале исти период, добијамо још један додатни услов, наиме $\frac{A}{\tilde{A}} = \frac{l}{n}$ такође мора бити рационалан број (или, еквивалентно, $\frac{B}{\tilde{B}} = \frac{k}{m}$ мора бити рационалан). Тада је период обе координатне функције једнак $T = \frac{2l\pi}{A} = \frac{2k\pi}{B} = \frac{2n\pi}{\tilde{A}} = \frac{2m\pi}{\tilde{B}}$.

Напомена 3.3. *Користећи формулу (2.20) можемо израчунати дужину вектора брзине, тј. одредити брзину криве*

$$\|\gamma'\| = \sqrt{g(\gamma', \gamma')} = \sqrt{(\frac{1}{3} + d_1^2)\|c_1\|^2 + \|c_2\|^2}.$$

Како је у питању константа, лако је одредити природну репараметризацију тако да γ' буде јединично векторско поље дуж геодезијске, једноставном променом параметра $s = t\sqrt{(\frac{1}{3} + d_1^2)\|c_1\|^2 + \|c_2\|^2}$.

Вратимо се сада на формуле субмерзије π из претходног поглавља. Поставља се питање у каквом су односу геодезијске линије на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са геодезијским линијама на производу $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Нека је γ крива на $\mathbb{S}^3$ и a произвољан имагинарни кватернион. Тада ова крива задовољава

$$\gamma'(t) = \gamma(t)a$$

за све вредности параметра t ако и само ако је геодезијска линија, која у тренутку $t = 0$ пролази кроз тачку $\gamma(0)$ и има вектор брзине $\gamma(0)a$. Ово нам омогућава експлицитно одређивање геодезијских линија сфере решавањем диференцијалне једначине првог реда, уместо стандардног поступка решавања система диференцијалних једначина другог реда, па опет долазимо до познатог резултата

$$\gamma(t) = \gamma(0)\left(\cos(t\|a\|) + \sin(t\|a\|)\frac{a}{\|a\|}\right). \tag{3.30}$$

Приметимо да претходна формула важи и у граничном случају $a = 0$. Такође, на овај начин смо добили све геодезијске линије сфере $\mathbb{S}^3$ које садрже тачку $\gamma(0)$ јер, замењујући све могуће имагинарне кватернионе a, скуп вектора $\gamma(0)a$ даје цео тангентни простор у тачки $\gamma(0)$.

Сада је могуће добити експлицитно и геодезијске линије $\gamma : I \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),$$

где су γ_i геодезијске линије на $i-$тој компоненти производа $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, добијене замењујући у (3.30) редом одговарајуће почетне тачке $\gamma_i(0)$ и векторе брзина $\gamma_i(0)a_i$, за произвољне имагинарне кватернионе a_i, $i = 1, 2, 3$.

Из дефиниције субмерзије лако се показује да дуж геодезијске линије γ важи да је вектор $\gamma(t)$ хоризонталан (вертикалан) за све вредности параметра t ако и само ако је хоризонталан (вертикалан) у почетној тачки $\gamma(0)$. Према томе, све геодезијске линије на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ могуће је добити спуштањем добијених геодезијских линија многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ субмерзијом π. Примера ради, геодезијска линија $\tilde{\gamma}$ на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ која задовољава почетне услове $\tilde{\gamma}(0) = (1, 1)$, $\tilde{\gamma}'(0) = (i, j)$ добија се као $\pi(\gamma)$, где су формуле субмерзије π дате у претходном поглављу. Ова параметризована крива се наравно поклапа са већ добијеном кривом у делу (2) Теореме 3.1.

Глава 4

Неке хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

Нека је (M, g) хиперповрш Риманове многострукости $(\tilde{M}, \tilde{g})$, где је g изометрично наслеђена метрика, а ∇, $\tilde{\nabla}$ редом Леви-Чивита конексије на M, $\tilde{M}$.

Веза између њих дата је формулама **Гауса** и **Вајнгартена**

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{4.1}$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X, \tag{4.2}$$

за $X, Y \in TM$, при чему је ξ локално дефинисано нормално векторско поље, а h и A_ξ друга фундаментална форма и оператор облика за ξ, редом. Код ових формула се често уместо ознаке A_ξ за оператор облика, користи само A. Лако се доказује да важи релација $\tilde{g}(h(X, Y), \xi) = g(A_\xi X, Y)$, па самим тим Гаусова формула има и облик

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(A_\xi X, Y)\xi.$$

Означимо са $\bar{\nabla}$ **ван дер Барден - Бортолотијеву конексију** дефинисану са

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla^\perp_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z),$$

за X, Y, Z тангентне на M, при чему је $\nabla^\perp$ нормална конексија наслеђена од $\tilde{\nabla}$ у нормалном раслојењу $T^\perp M$ од M у $\tilde{M}$.

Једначине **Гауса** и **Кодација**

$$R_{XY}Z = (\tilde{R}_{XY}Z)^T + A_{h(Y,Z)}X - A_{h(X,Z)}Y \tag{4.3}$$

$$(\tilde{R}_{XY}Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z), \tag{4.4}$$

дају везу између тензора кривине $\tilde{R}$ амбијентне многострукости $\tilde{M}$, његових пројекција на тангентно $(\tilde{R}_{XY}Z)^T$ и нормално $(\tilde{R}_{XY}Z)^\perp$ раслојење и тензора кривине R подмногострукости M.

Вектор средње кривине $\vec{H}$ подмногострукости дат је са $\vec{H} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\, h$. Подмногострукост је **минимална** ако је вектор средње кривине свуда једнак нули.

Посебно важне хиперповрши M скоро хермитске многострукости $(\tilde{M}, \tilde{g}, J)$ представљају **Хопфове** хиперповрши. Хопфова фолијација је природно дефинисана једнодимензиона фолијација на M, индукована дистрибуцијом која се добија применом J на нормално раслојење хиперповрши. Хиперповрш M се назива Хопфовом хиперповрши од $\tilde{M}$ ако је ова фолијација тотално геодезијска, што је еквивалентно са тим да су интегралне криве структурног векторског поља $U = -J\xi$, за јединично нормално векторско поље хиперповрши ξ, геодезијске линије на M. У књизи [13] детаљно је представљена теорија везана за ову класу хиперповрши, као и многи примери.

Јединична сфера $\mathbb{S}^{2n+1}$ је Хопфова хиперповрш од $\mathbb{C}^{n+1}$ и индукована фолијација на $\mathbb{S}^{2n+1}$ је добро позната Хопфова фолијација великим круговима који су једине геодезијске линије на сфери. Примери Хопфових хиперповрши преосталих комплексних просторних форми, комплексног пројективног и комплексног хиперболичког простора, су рецимо хомогене хиперповрши. Поред многих интересантних геометријских својстава, неке од Хопфових хиперповрши комплексних просторних форми представљају модел просторе Сасакијевих просторних форми. Кодацијева једначина за Хопфове хиперповрши комплексних просторних форми се знатно поједностављује када је применимо на векторима који су главни, одакле се добија веза са кривином амбијентне многострукости. Међутим, ово није могуће у том облику применити када је амбијентна многострукост близу Келерова многострукост сфера $\mathbb{S}^6$. У раду [7] класификоване су све Хопфове хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$, као тубе око тотално геодезијске хиперсфере $\mathbb{S}^5$, односно тубе око скоро комплексних кривих сфере $\mathbb{S}^6$.

Приметимо да је у случају Келерове амбијентне многострукости, дефиниција Хопфове хиперповрши еквивалентна услову да је структурно векторско поље хиперповрши у свакој тачки главни вектор хиперповрши. Према Пропозицији 1 у раду [7], исто важи и за хиперповрши близу Келерове многострукости. Наиме, за произвољну хиперповрш близу Келерове многострукости имамо

$$\tilde{\nabla}_U U = -\tilde{\nabla}_U(J\xi) = -(\tilde{\nabla}_U J)\xi - J(\tilde{\nabla}_U \xi) = JAU, \tag{4.5}$$

где смо искористили својство (1.7) близу Келерових многострукости, специјално за $X = U$. Из Гаусове формуле је сада јасно да је $\nabla_U U$ компонента од JAU тангентна на хиперповрш M. Међутим, како је за произвољни тангентни вектор X хиперповрши, JX нормално на хиперповрш ако и само ако је X колинеаран са U, тј. $X = \alpha U$ за неки реалан број α, добијамо да је дефинициони услов

$$\nabla_U U = 0$$

Хопфове хиперповрши M близу Келерове многострукости $\tilde{M}$ еквивалентан услову

$$AU = \alpha U$$

свуда на M, тј. да је векторско поље U у свакој тачки главни вектор оператора облика A. Вредност функције $\alpha = g(AU, U)$ на M у свакој тачки представља главну кривину оператора облика A. Код Хопфових хиперповрши комплексних просторних форми кривине различите од нуле ова функција је специјално и константна.

Надаље ћемо разматрати хиперповрши (M, g) близу Келерове многострукости $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

За свако тангентно векторско поље X на M имамо следеће разлагање

$$JX = \phi X + \eta(X)\xi,$$

где су ϕX и $\eta(X)\xi$ редом тангентни и нормални део од JX. Тада је ϕ тензорско поље типа $(1, 1)$, док је η $1-$форма на M. Из дефиниције се лако показује да важе релације

$$\begin{aligned} &\eta(X) = g(X, U), \qquad \eta(\phi X) = 0, \qquad \phi^2 X = -X + \eta(X)U, \\ &g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y), \quad g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ове формуле (4.6) показују да (ϕ, U, η, g) дефинише скоро контактну метричку структуру на M (видети [20]).

Лема 4.1. *Коваријантни извод векторског поља* U *и тензора* ϕ, η *дати су са*

$$\begin{aligned} \nabla_X U &= -G(X,\xi) + \phi AX, \\ (\nabla_X \phi)Y &= G(X,Y)^T - g(AX,Y)U + \eta(Y)AX, \\ (\nabla_X \eta)Y &= g(G(X,Y),\xi) - g(AX,\phi Y). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Доказ. Директним коришћењем дефиниције коваријантног извода тензорског поља и основних релација датих у (4.6), редом изводимо:

$$\begin{aligned} \nabla_X U &= -\tilde{\nabla}_X(J\xi) - g(AX,U)\xi \\ &= -(\tilde{\nabla}_X J)\xi - J\tilde{\nabla}_X \xi g(AX,U)\xi \\ &= -G(X,\xi) + JAX - g(AX,U)\xi = -G(X,\xi) + \phi AX, \\ (\nabla_X \phi)Y &= \nabla_X(\phi Y) - \phi\nabla_X Y \\ &= \tilde{\nabla}_X(\phi Y)^T - \phi\nabla_X Y \\ &= (\tilde{\nabla}_X(JY - \eta(Y)\xi))^T - \phi\nabla_X Y \\ &= ((\tilde{\nabla}_X J)Y + J\tilde{\nabla}_X Y)^T - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X Y - \phi\nabla_X Y \\ &= G(X,Y)^T - g(AX,Y)U + \eta(Y)AX, \\ (\nabla_X \eta)Y &= X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X Y, U) + g(Y, \nabla_X U) - g(\nabla_X Y, U) \\ &= g(\nabla_X U, Y) \\ &= g(-G(X,\xi) + \phi AX, Y) \\ &= g(G(X,Y),\xi) - g(AX,\phi Y). \end{aligned}$$

Сада ћемо разматрати, специјално, хиперповрши (M, g) близу Келерове многострукости $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \tilde{g})$. Како на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ постоји и скоро продукт структура P, за свако тангентно векторско поље X на M имамо следеће разлагање

$$PX = TX + \mu(X)\xi,$$

где су TX и $\mu(X)\xi$ редом тангентни и нормални део од PX. Тада је T тензорско поље типа $(1,1)$, док је μ 1−форма на M. Из дефиниције се лако показује да важе релације (видети [43])

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \tilde{g}(PX,\xi) = g(X,(P\xi)^T), & T^2X &= X - \mu(X)(P\xi)^T, \\ g(TX,Y) &= -g(X,TY), & g(TX,TY) &= g(X,Y) - \mu(X)\mu(Y). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ово специјално значи и да је линеарни оператор T, на отвореним подскуповима многострукости на којима је различит од нула-оператора, један симетричан оператор чије су једине две сопствене вредности супротне.

Лема 4.2. *Коваријантни изводи тензора* T,μ *дати су са*

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)Y &= \frac{1}{2}(JG(X,PY) + JPG(X,Y))^T - g(AX,Y)\phi TU \\ &\quad + g(AX,Y)\mu(U)U + \mu(Y)AX, \\ (\nabla_X \mu)Y &= \frac{1}{2}g(JG(X,PY) + JPG(X,Y),U) - g(AX,TY) - g(AX,Y)g(TU,U). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Доказ. Директним коришћењем дефиниције коваријантног извода тензорског поља и основних релација датих у (4.8), редом изводимо:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T)Y &= \nabla_X(TY) - T\nabla_X Y\\
&= \tilde{\nabla}_X(TY)^T - T\nabla_X Y\\
&= \tilde{\nabla}_X(PY - \mu(Y)\xi)^T - T\nabla_X Y\\
&= ((\tilde{\nabla}_X P)Y + P\tilde{\nabla}_X Y)^T - \mu(Y)\tilde{\nabla}_X\xi - T\nabla_X Y\\
&= ((\tilde{\nabla}_X P)Y + g(AX,Y)P\xi)^T + \mu(Y)AX\\
&= \frac{1}{2}(JG(X,PY) + JPG(X,Y))^T + g(AX,Y)(P\xi)^T + \mu(Y)AX,\\
(\nabla_X\mu)Y &= X(\mu(Y)) - \mu(\nabla_X Y)\\
&= \tilde{g}(\nabla_X(PY),\xi) + \tilde{g}(PY,\nabla_X\xi) - \tilde{g}(P\nabla_X Y,\xi)\\
&= \tilde{g}((\nabla_X P),Y) + \tilde{g}(P\nabla_X,Y) - g(AX,TY) - \tilde{g}(P\tilde{\nabla}_X Y - g(AX,Y)P\xi,\xi)\\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}(G(X,PY) + PG(X,Y),U) - g(AX,TY) - g(AX,Y)g(TU,U).
\end{aligned}$$

Гаусова и Кодацијева једначина сада имају следећи облик:

$$\begin{aligned}
R_{XY}Z &= \frac{5}{12}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right)\\
&+ \frac{1}{12}\left(g(\phi Y,Z)\phi X - g(\phi X,Z)\phi Y - 2g(\phi X,Y)\phi Z\right)\\
&+ \frac{1}{3}\left(g(TY,Z)TX - g(TX,Z)TY\right.\\
&+ g(\phi PY,Z)\phi PX - g(\phi PX,Z)\phi PY)\\
&+ g(AZ,Y)AX - g(AZ,X)AY.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, Z) &= \frac{1}{12}\left(g(\phi Y,Z)\eta(X) - g(\phi X,Z)\eta(Y) - 2g(\phi X,Y)\eta(Z)\right)\\
&+ \frac{1}{3}\left(g(TY,Z)\mu(X) - g(TX,Z)\mu(Y)\right.\\
&- g(TX,U)g(TY,\phi Z) - g(TX,U)g(TY,\phi Z)\mu(Y)\eta(Z)\\
&+ \left. g(TY,U)g(TX,\phi Z) + g(TY,U)g(TX,\phi Z)\mu(X)\eta(Z)\right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Кодацијева једначина може се записати и у облику

$$\begin{aligned}
(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X &= \frac{1}{12}\left(\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X - 2g(\phi X,Y)U\right)\\
&+ \frac{1}{3}\left(\mu(X)TY - \mu(Y)TX + g(TX,U)\phi PY - g(TY,U)\phi PX\right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ричијев тензор кривине хиперповрши се лако добија на основу (4.10) и саме дефиниције тог тензора

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= \frac{5}{4}g(X,Y) - \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Y)\\
&+ \frac{1}{3}\left(g(TU,U)g(TX,Y) + \mu(X)\mu(Y) + \mu(U)g(TX,\phi Y)\right.\\
&+ \left.\mu(U)\mu(X)\eta(Y) + g(TX,U)g(TY,U)\right)\\
&+ Hg(AX,Y) - g(A^2X,Y).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Први примери хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ дати су у раду [41]. Три хиперповрши, дате следећим имерзијама, уједно представљају и једине примере у многим класификационим теоремама које се баве битним класама хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$.

- $f_1:\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, $(\mathrm{x},\mathrm{y})\mapsto(\mathrm{x},\mathrm{y})$;
- $f_2:\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, $(\mathrm{x},\mathrm{y})\mapsto(\mathrm{y},\mathrm{x})$;
- $f_3:\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, $(\mathrm{x},\mathrm{y})\mapsto(\bar{\mathrm{x}},\mathrm{y}\bar{\mathrm{x}})$.

Све ове хиперповрши дефинисане имерзијама f_i, $i=1,2,3$, су Хопфове и минималне, са три различите главне кривине чије су вредности и вишеструкости: $0,\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Оне припадају редом трима класама хиперповрши $f_{i,r}:\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, $i=1,2,3$, које постоје за произвољну вредност параметра $r\in(0,1]$, узимајући специјално $r=1$:

- $f_{1,r}(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\mathrm{x},(ry_1,ry_2,ry_3,\sqrt{1-r^2}))$, $\mathrm{x}\in\mathbb{S}^3$, $\mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{S}^2$;
- $f_{2,r}(\mathrm{x},\mathrm{y})=((ry_1,ry_2,ry_3,\sqrt{1-r^2}),\mathrm{x})$, $\mathrm{x}\in\mathbb{S}^3$, $\mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{S}^2$;
- $f_{3,r}(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\bar{\mathrm{x}},(ry_1,ry_2,ry_3,\sqrt{1-r^2})\bar{\mathrm{x}})$, $x\in\mathbb{S}^3$, $\mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{S}^2$.

Представићемо сада експлицитне формуле које ближе описују саму структуру фамилије многострукости $M_{1,r}$, дефинисаних имерзијом $f_{1,r}$ са

$$M_{1,r}=f_{1,r}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2).$$

Наравно, преостале две фамилије многострукости

$$M_{2,r}=f_{2,r}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2),\qquad M_{3,r}=f_{3,r}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2),$$

добијене су применом изометрија $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ на $M_{1,r}$, одакле се непосредно добијају сличне релације које важе на њима, те их нећемо експлицитно изводити.

Посматрајмо отворени подскуп многострукости $M_{1,r}$ на коме важи $y_3\neq 0$ и линеарно независна векторска поља V_1, V_2 у произвољној тачки $(\mathrm{x},(ry_1,ry_2,ry_3,\sqrt{1-r^2}))$ ове многострукости, дата са

$$V_1=(0,(y_3,0,-y_1,0)),\qquad V_2=(0,(0,y_3,-y_2,0)).$$

Заједно са векторским пољима E_1,E_2,E_3, они чине базу тангентног простора многострукости $M_{1,r}$. Нормално векторско поље ξ представљено у стандардној бази је

$$\xi=-\frac{1}{2}(y_3E_1-y_2E_2+y_1E_3)-y_3F_1+y_2F_2-y_1F_3,$$

одакле се добија

$$U=-J\xi=\frac{\sqrt{3}}{2}(y_3E_1-y_2E_2+y_1E_3),$$

па је $P\xi=\frac{1}{2}\xi-\frac{\sqrt{3}}{2}J\xi$.

Приметимо да из представљања V_1,V_2 у бази F_1,F_2,F_3

$$\begin{aligned}
V_1 &= -(ry_2y_3+\sqrt{1-r^2}y_1)F_1 && -r(y_1^2+y_3^2)F_2 && +(\sqrt{1-r^2}y_3-ry_1y_2)F_3,\\
V_2 &= (ry_1y_3-\sqrt{1-r^2}y_2)F_1 && -(\sqrt{1-r^2}y_3+ry_1y_2)F_2 && -r(y_2^2+y_3^2)F_3,
\end{aligned}$$

лако следи да су у произвољној тачки многострукости где важи $y_3 \neq 0$, векторска поља

$$\tilde{V}_1 = y_1F_1 - y_3F_3, \qquad \tilde{V}_2 = y_2F_1 + y_3F_3$$

линеарно независна и важи $\mathrm{span}(V_1, V_2) = \mathrm{span}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$. Самим тим су и векторска поља

$$\begin{aligned} &e_1 = y_3E_1 - y_2E_2 + y_1E_3, \quad e_2 = y_1E_1 - y_3E_3, \quad e_3 = y_2E_1 + y_3E_2,\\ &e_4 = y_1F_1 - y_3F_3, \qquad\qquad\quad e_5 = y_2F_1 + y_3F_3, \end{aligned}$$

линеарно независна, па скуп $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ такође чини једну базу тангентног простора од $M_{1,r}$, у тачкама где је $y_3 \neq 0$. Ова база, иако није ортонормирана, јесте погоднија за рачун од базе $\{E_1, E_2, E_3, V_1, V_2\}$.

Изводи функција y_1, y_2, y_3 у правцу векторских поља F_1, F_2, F_3 дати су редом са

$$\begin{aligned} &F_1(y_1) = -y_2, && F_2(y_1) = -y_3, && F_3(y_1) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r},\\ &F_1(y_2) = y_1, && F_2(y_2) = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, && F_3(y_2) = -y_3,\\ &F_1(y_3) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, && F_2(y_3) = y_1, && F_3(y_3) = y_2, \end{aligned}$$

одакле се директно добија матрица оператора облика

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{y_1y_2}{6y_3} & -\frac{y_2^2+y_3^2}{6y_3} & \frac{y_1y_2}{3y_3}+\frac{\sqrt{1-r^2}}{2r} & \frac{y_2^2+y_3^2}{3y_3}\\ 0 & \frac{y_1^2+y_3^2}{6y_3} & \frac{y_1y_2}{6y_3} & -\frac{y_1^2+y_3^2}{6y_3} & \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}-\frac{y_1y_2}{3y_3}\\ 0 & -\frac{y_1y_2}{3y_3} & -\frac{y_2^2+y_3^2}{6y_3} & \frac{y_1y_2}{6y_3}+\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} & \frac{y_2^2+y_3^2}{6y_3}\\ 0 & \frac{y_1^2+y_3^2}{3y_3} & \frac{y_1y_2}{3y_3} & -\frac{y_1^2+y_3^2}{6y_3} & \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}-\frac{y_1y_2}{6y_3} \end{pmatrix}.$$

Како разматрана база није ортонормирана, није изненађујуће што добијена матрица није симетрична. Њене сопствене вредности представљају главне кривине ових хиперповрши, има их три различите, са вишеструкостима 1, 2, 2 и износе

$$0, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}+\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}+\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}-\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}-\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}.$$

Како се испоставило да важи

$$AU = \frac{\sqrt{3}}{2}A(e_1) = 0,$$

то је структурно тангентно векторско поље U заправо у свакој тачки хиперповрши сопствени вектор за сопствену вредност једнаку 0. Ово, специјално, значи да су све многострукости $M_{1,r}$ Хопфове, са константном функцијом главне кривине која је једнака 0. Такође, међу хиперповршима $M_{1,r}$ једина минимална је она за коју је $r = 1$.

У раду [41] доказано је да је структурно векторско поље U хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ Килингово векторско поље ако и само ако важи $A\phi = \phi A$. Непосредно се проверава, на бази, да је услов $A\phi = \phi A$ испуњен на хиперповршима $M_{i,r}$, $i = 1, 2, 3$, ако и само ако је $r = 1$. Испоставља се да важи више, да су то једине такве хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, као и да ове структуре не могу да антикомутирају (видети [40]).

Теорема 4.1. *Једине хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ код којих оператор облика A и скоро контактна структура ϕ комутирају, тј. важи $A\phi=\phi A$, дате су имерзијама f_1, f_2, f_3. Такође, не постоје хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ код којих оператор облика A и скоро контактна структура ϕ антикомутирају, тј. важи $A\phi=-\phi A$.*

Наравно, поменуте хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ представљају производ сфере $\mathbb{S}^3$ и сфере $\mathbb{S}^2$, као њене најједноставније хиперповрши. Уколико сферу $\mathbb{S}^2$ заменимо производом $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, тј. Клифордовим торусом утопљеним у $\mathbb{S}^3$ (видети [39]), добијамо нове три класе хиперповрши $f_{i,k,l}:\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, $i=1,2,3$, $k^2+l^2=1$, $0<k,l<1$, од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$:

- $f_{1,k,l}(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\mathrm{x},\mathrm{y})$, $\mathrm{x}\in\mathbb{S}^3$, $\mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{S}^1(k)\times\mathbb{S}^1(l)\subset\mathbb{S}^3$;
- $f_{2,k,l}(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\mathrm{y},\mathrm{x})$, $\mathrm{x}\in\mathbb{S}^3$, $\mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{S}^1(k)\times\mathbb{S}^1(l)\subset\mathbb{S}^3$;
- $f_{3,k,l}(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\bar{\mathrm{x}},\mathrm{y}\bar{\mathrm{x}})$, $\mathrm{x}\in\mathbb{S}^3$, $\mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{S}^1(k)\times\mathbb{S}^1(l)\subset\mathbb{S}^3$.

Прикажимо сада рачунање главних кривина фамилије многострукости $M_{1,k,l}$, дефинисаних имерзијом $f_{1,k,l}$ са

$$M_{1,k,l}=f_{1,k,l}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1).$$

Наравно, преостале две фамилије многострукости $M_{2,k,l}=f_{2,k,l}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$, $M_{3,k,l}=f_{3,k,l}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$, добијене су применом изометрија $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ на $M_{1,k,l}$, слично као и код фамилија хиперповрши $f_{i,r}$, $i=1,2,3$.

Посматрајмо линеарно независна векторска поља W_1, W_2 у произвољној тачки (x,y), $\mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $y_1^2+y_2^2=k^2$, $y_3^2+y_4^2=l^2$, ове многострукости, дата са

$$W_1=(0,(y_2,-y_1,0,0)),\qquad W_2=(0,(0,0,y_4,-y_3)).$$

Заједно са векторским пољима E_1,E_2,E_3, они чине базу тангентног простора многострукости $M_{1,k,l}$. Нормално векторско поље ξ ових хиперповрши, представљено у стандардној бази, је

$$\xi=\frac{1}{kl}(\frac{1}{2}(y_1y_3+y_2y_4)E_2+\frac{1}{2}(y_2y_3-y_1y_4)E_3+(y_1y_3+y_2y_4)F_2+(y_2y_3-y_1y_4)F_3),$$

одакле се добија

$$U=-J\xi=-\frac{\sqrt{3}}{2kl}((y_1y_3+y_2y_4)E_2+(y_2y_3-y_1y_4)E_3),$$

па је опет $P\xi=\frac{1}{2}\xi-\frac{\sqrt{3}}{2}J\xi$. Ако уведемо ознаке

$$\kappa=\frac{y_1y_3+y_2y_4}{kl},\qquad \mu=\frac{y_2y_3-y_4y_4}{kl},$$

видимо да важи $\kappa^2+\mu^2=1$, па и претходне формуле добијају компактнији облик

$$\xi=\frac{1}{2}(\kappa E_2+\mu E_3)+(\kappa F_2+\mu F_3),\qquad U=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\kappa E_2+\mu E_3).$$

Приметимо да из представљања W_1, W_2 у бази F_1, F_2, F_3

$$\begin{array}{lll} W_1 & = -k^2 F_1 & -kl\mu F_2 & +kl\kappa F_3, \\ W_2 & = l^2 F_1 & -kl\mu F_2 & +kl\kappa F_3, \end{array}$$

лако следи да су у произвољној тачки ове многострукости, векторска поља

$$\tilde{W}_1 = F_1, \qquad \tilde{W}_2 = -\mu F_2 + \kappa F_3$$

линеарно независна и важи $\mathrm{span}(W_1, W_2) = \mathrm{span}(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2)$. Самим тим су и векторска поља

$$\begin{array}{lll} e_1 = \kappa E_2 + \mu E_3, & e_2 = E_1, & e_3 = -\mu E_2 + \kappa E_3, \\ e_4 = F_1, & e_5 = -\mu F_2 + \kappa F_3, & \end{array}$$

линеарно независна, па скуп $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ такође чини једну базу тангентног простора од $M_{1,k,l}$, која није ортонормирана.

Изводи функција κ, μ у правцу векторских поља F_1, F_2, F_3 дати су редом са

$$\begin{array}{lll} F_1(\kappa) = -2\mu, & F_2(\kappa) = \dfrac{k^2 - l^2}{kl}, & F_3(\kappa) = 0, \\ F_1(\mu) = 2\kappa, & F_2(\mu) = 0, & F_3(\mu) = \dfrac{k^2 - l^2}{kl}, \end{array}$$

одакле се директно добија матрица оператора облика

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{l^2 - k^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{7}{6} & l^2 - k^2 \end{pmatrix}.$$

Хиперповрши дефинисане имерзијама $f_{i,k,l}$, $i = 1, 2, 3$, $k^2 + l^2 = 1$, $0 < k, l < 1$, су такође Хопфове, са пет различитих главних кривина које су константне и износе (до на знак)

$$0, \quad \frac{-3k + \sqrt{9k^2 + 3l^2}}{6l}, \quad \frac{-3k - \sqrt{9k^2 + 3l^2}}{6l}, \quad \frac{3l + \sqrt{3k^2 + 9l^2}}{6k}, \quad \frac{3l - \sqrt{3k^2 + 9l^2}}{6k}.$$

Опет важи да је међу овим хиперповршима само једна минимална, и то она за коју важи $k = l = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Испоставља се да међу хиперповршима од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ постоји мноштво примера компактних минималних хиперповрши. Наиме, свака минимална хиперповрш Σ сфере $\mathbb{S}^3$ дефинисана имерзијом $f : \Sigma \to \mathbb{S}^3$ има главне кривине облика $\pm\lambda$ и индукује три хиперповрши

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(\mathrm{x}, f(\mathrm{y})) \subset \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \mid \mathrm{x} \in \mathbb{S}^3, \mathrm{y} \in \Sigma\}, \\ M_2 &= \{(f(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \subset \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \mid \mathrm{x} \in \Sigma, \mathrm{y} \in \mathbb{S}^3\}, \\ M_3 &= \{(\bar{\mathrm{x}}, f(\mathrm{y})\bar{\mathrm{x}}) \subset \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \mid \mathrm{x} \in \mathbb{S}^3, \mathrm{y} \in \Sigma\}. \end{aligned}$$

Лако се проверава да су ове хиперповрши заиста минималне јер све имају исте главне кривине, и то (видети [43])

$$0, \quad \frac{3\lambda+\sqrt{9\lambda^2+3}}{6}, \quad \frac{3\lambda-\sqrt{9\lambda^2+3}}{6}, \quad \frac{-3\lambda+\sqrt{9\lambda^2+3}}{6}, \quad \frac{-3\lambda-\sqrt{9\lambda^2+3}}{6}.$$

Све ове хиперповрши уопштавају већ раније поменуте минималне површи у овом поглављу. Конкретно, хиперповрши дефинисане имерзијама $f_{i,1}$, $i=1,2,3$, одговарају тотално геодезијским минималним хиперповршима $f:\Sigma\to\mathbb{S}^3$ за $\lambda=0$.

С друге стране, изненађујуће је да су многе важне класе хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ заправо празни скупови. У раду [41] доказана је следећа теорема.

Теорема 4.2. *Не постоје умбиличке хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, као ни оне са паралелном другом фундаменталном формом.*

Доказ. Нека је M хиперповрш од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, са јединичним нормалним векторским пољем ξ. Одаберимо тангентно векторско поље X на M такво да је $PX=X$ и $X\perp U$. Ово је очигледно могуће урадити јер је ендоморфизам P инволуција на $T(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)$, са сопственим вредностима 1 и -1 и одговарајућим сопственим потпросторима димензије 3. Приметимо да је тада $\tilde g(X,\xi)=\tilde g(PX,\xi)=0$, $g(X,U)=g(PX,U)=0$. Означимо са $a=g(P\xi,\xi)=-g(PU,U)$, $b=g(P\xi,U)=g(\xi,PU)$. Сада из Кодацијеве једначине (4.12), стављајући редом X и U, па JX и U, добијамо

$$(\nabla_X A)U-(\nabla_U A)X = -\frac{1}{3}bX+\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{12}\right)JX, \tag{4.14}$$

$$(\nabla_{JX} A)U-(\nabla_U A)JX = \frac{1}{3}bJX+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{12}\right)X. \tag{4.15}$$

Уколико је M тотално умбиличка, постоји функција λ на M таква да за сва тангентна векторска поља Y на M важи $AY=\lambda Y$. Из ове дефиниције непосредно следи да за свака два тангентна векторска поља Y,Z на важи

$$(\nabla_Z A)Y=\nabla_Z(AY)-A\nabla_Z Y=Z(\lambda)Y. \tag{4.16}$$

Из једначина (4.14) и (4.16) сада добијамо, бирајући $Y=X$, $Z=U$ и обрнуто, да је $a=\frac{1}{4}$. Аналогно из (4.15) и (4.16), бирајући $Y=JX$, $Z=U$ и обрнуто, да је $a=-\frac{1}{4}$. Контрадикција! Уколико има паралелну другу фундаменталну форму, тада важи $\nabla\equiv 0$, па контрадикцију добијамо одмах комбинацијом релација (4.14) и (4.15).

У раду [43] доказана је следећа теорема.

Теорема 4.3. *Не постоје локално конформно равне хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, као ни Ајнштајнове Хопфове хиперповрши.*

Последњих година интензивно се изучавају разне многострукости које се називају солитонима. У теорији подмногострукости, од посебног је значаја када подмногострукост има структуру солитона, на пример када је хиперповрш Ричи или Јамабе солитон.

Риманова многострукост (M,g) је **Јамабе солитон** уколико допушта векторско поље V такво да је

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_V g=(R-\lambda)g \tag{4.17}$$

где $\mathcal{L}_V$ представља Лијев извод у правцу векторског поља V, R је скаларна кривина метрике g и λ је реалан број.

Риманова многострукост (M, g) је **квази-Јамабе солитон** уколико допушта векторско поље V такво да је

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = (R-\lambda)g + \mu\eta \otimes \eta, \tag{4.18}$$

где је μ нека функција и η је дуална 1-форма пољу V, дата са $\eta(X) = g(X, V)$. Векторско поље V назива се **солитонским векторским пољем** за (M, g).

Испитаћемо особине Јамабе и квази-Јамабе солитона M који су хиперповрши произвољне близу Келерове многострукости $\tilde{M}$, чије је векторско поље $V = U = -J\xi$ солитонско.

Пропозиција 4.1. *Свака хиперповрш близу Келерове многострукости која представља квази-Јамабе солитон са солитонским пољем $U = -J\xi$, уједно је и Хопфова хиперповрш.*

Доказ. На основу релације (1.4), знамо да важи

$$g(G(X,\xi), Y) + g(G(Y,\xi), X) = 0, \tag{4.19}$$

па добијамо

$$(\mathcal{L}_U g)(X, Y) = g((\phi A - A\phi)X, Y). \tag{4.20}$$

Добро је познато да ова релација важи на Келеровим многострукостима.

Користећи формуле (4.6), међу којима је и кососиметричност ендоморфизма ϕ, добијамо

$$g(\nabla_U U, U) = g(\nabla_U U, AU) = 0. \tag{4.21}$$

Стављајући $X = U$ и $Y = \nabla_U U$ у наредну релацију, која следи из (4.18) и (4.20)

$$\frac{1}{2}g((\phi A - A\phi)X, Y) = (R-\lambda)g(X, Y) + \mu g(X, U)g(Y, U), \tag{4.22}$$

добијамо

$$g((\phi A - A\phi)U, \nabla_U U) = 0. \tag{4.23}$$

С друге стране, из (4.21) закључујемо

$$g((\phi A - A\phi)U, \nabla_U U) = g(\nabla_U U, \nabla_U U). \tag{4.24}$$

Комбинујући (4.23) и (4.24), закључујемо

$$g(\nabla_U U, \nabla_U U) = 0,$$

односно

$$\nabla_U U = 0.$$

Према томе, $AU \in \mathrm{Ker}(\phi)$, тј. U је главни вектор оператора облика A и важи $AU = \alpha U$, где је $\alpha = g(AU, U)$. Ово значи да је хиперповрш Хопфова.

Теорема 4.4. *Хиперповрш близу Келерове многострукости представља Јамабе солитон ако и само ако има константну скаларну кривину и оператор облика A комутира са скоро контактном структуром ϕ.*

Доказ. Нека је $Z \perp U$ векторско поље на M такво да је Z сопствени вектор за A, тј. $AZ = \nu Z$ за неку функцију ν на M.

Замењујући $X = Y = U$ у (4.22), добијамо

$$R = \lambda - \mu. \tag{4.25}$$

Замењујући $X = Y = Z$ сада даје

$$R = \lambda, \tag{4.26}$$

што значи да је скаларна кривина R константна и $\mu = 0$. Према томе, међу хиперповршима близу Келерове многострукости, свака која је квази-Јамабе солитон је уједно и Јамабе солитон.

Релација (4.22) сада повлачи

$$g((\phi A - A\phi)X, Y) = 0$$

за произвољна тангентна векторска поља X, Y, па је

$$\phi A = A\phi.$$

Глава 5

$\mathcal{P}-$сингуларна векторска поља на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

5.1 Комплексна квадрика Q^n

У овом поглављу дефинисаћемо $\mathcal{P}-$сингуларна векторска поља на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, по угледу на $\mathcal{A}-$сингуларна векторска поља на комплексној квадрици. Детаљан преглед особина комплексне квадрике дат је у раду [53].

Комплексна квадрика је једна комплексна хомогена хиперповрш у комплексном пројективном простору $\mathbb{C}P^{n+1}$, дефинисана једначином

$$Q = \{[z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}] \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n+2}^2 = 0\},$$

где су $z_i, i = 1, \ldots, n+2$ хомогене координате на $\mathbb{C}P^{n+1}$. Ово следи из чињенице да је Q слика Штифелове многострукости

$$\tilde{Q} = \{x + iy \in \mathbb{R}^{n+2} + i\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{C}^{n+2} \mid \langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle = \frac{1}{2}, \langle x, y\rangle = 0\} = \pi^{-1}(Q)$$

ортонормираних репера у $\mathbb{R}^{n+2}$ при Хопфовој фибрацији $\pi : \mathbb{S}^{2n+3} \to \mathbb{C}P^{n+1}$, $z \mapsto [z]$, која је Риманова субмерзија. Хоризонтални потпростор $H_z \subset T_z\mathbb{S}^{2n+3}$ Риманове субмерзије π у тачки $z = x + iy \in \tilde{Q}$, као и хоризонтални потпростор $H_zQ \subset T_z\tilde{Q}$ њене рестрикције $\pi\mid_{\tilde{Q}}$ дати су са

$$H_z = \{u + iv \in \mathbb{C}^{n+2} \mid \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle = 0, \langle x, v\rangle = \langle y, u\rangle\}$$

$$H_zQ = \{u + iv \in \mathbb{C}^{n+2} \mid u, v \perp x, y\} \subset H_z\}.$$

Диференцијал π_* субмерзије π представља унитарно пресликавање са H_z на $T_{\pi(z)}\mathbb{C}P^{n+1}$, односно са H_zQ на $T_{\pi(z)}Q$.

Такође, комплексна квадрика Q^n је компактан хермитски симетричан простор ранга 2. Наиме, рестрикујући канонско дејство унитарне групе $U(n+2)$ на $\mathbb{C}^{n+2}$, на њену подгрупу $O(n+2)$, добијамо дејство $\psi : O(n+2) \times \mathbb{S}^{2n+3} \to \mathbb{S}^{2n+3}$, које се пројектује Хопфовом фибрацијом на дејство $\varphi : O(n+2) \times \mathbb{C}P^{n+1} \to \mathbb{C}P^{n+1}$ тако да пројекција постаје еквиваријантна. Како је $\tilde{Q}$ орбита дејства ψ, то је квадрика Q орбита дејства φ. За сваку матрицу $B \in O(n+2)$, поменута дејства индукују пресликавања

$$\psi_B : \mathbb{S}^{2n+3} \to \mathbb{S}^{2n+3}, \qquad z = x + iy \mapsto \psi(B, z) = Bz = Bx + iBy,$$

$$\varphi_B : \mathbb{C}P^{n+1} \to \mathbb{C}P^{n+1}, \qquad [z] \mapsto \varphi(B, [z]) = [Bz].$$

Како је φ_B холоморфна изометрија комплексног пројективног простора $\mathbb{C}P^{n+1}$, рестрикција $f_B = \varphi_B \mid_Q$ је холоморфна изометрија квадрике Q. Према томе, квадрика Q^n је хомогена подмногострукост од $\mathbb{C}P^{n+1}$, па су унутрашња и спољашња геометрија квадрике исте у свим тачкама. Стабилизатор, тј. група изотропије тачке $q^* = [z^*]$, $z^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^{2n+3}$, при дејству φ, је подгрупа $SO_2 \times O_n \subset O(n+2)$, одакле добијамо реализацију комплексне квадрике као симетричног простора ранга 2

$$Q = O_{n+2}/(SO_2 \times O_n) \cong SO_{n+2}/(SO_2 \times SO_n).$$

Ово нам омогућава да многе геометријске особине комплексне квадрике можемо третирати користећи методе Лијевих група и алгебри, на пример разматрајући изотропну репрезентацију, Абелове потпросторе и коренску декомпозицију Лијеве алгебре.

Постоје две канонске геометријске структуре на Q. Прва је Келерова скоро комплексна структура J, канонски наслеђена са $\mathbb{C}P^{n+1}$, са Римановом метриком g изометрично наслеђеном од Фубини-Штудијеве метрике на $\mathbb{C}P^{n+1}$. Друга структура је комплексна конјугација A, пошто оператор облика A_η комплексне квадрике у односу на произвољну јединичну нормалу $\eta \in T(Q)^\perp$ представља конјугацију на тангентном простору $T(Q)$. Прецизније, A је један самоадјунгован, инволутиван, ортогонални ендоморфизам од $T(Q)$, па је рефлексија на тотално реалном линеарном потпростору $V(A)$ који је сопствени за сопствену вредност 1. Додатно, A антикомутира са J, па је $V(A)$ један $n-$димензиони тотално реални потпростор од $T(Q)$, тј. $J(V(A)) = V(A)^\perp$. Самим тим су сопствени потпростори сваке од конјугација A, за сопствене вредности 1, -1, редом $V(A)$, $J(V(A))$ и комплексни векторски простор $T(Q)$ разлаже се на директну суму ових сопствених потпростора $V(A)$ и $J(V(A))$. Додатно, важи и $V(\lambda^2 A) = \lambda V(A)$, за све $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

Како је комплексна квадрика Q комплексна хиперповрш од $\mathbb{C}P^{n+1}$, тангентни и нормални простор $T(Q)$, $T(Q)^\perp$ су комплексни потпростори од $T(\mathbb{C}P^{n+1})$. Очигледно је, за произвољно $\lambda \in \mathbb{S}^1$ и конјугацију A, ендоморфизам λA такође конјугација. Такође, сваки од оператора A_η је конјугација за произвољни одабир нормалног векторског поља η из дводимензионог нормалног простора $T(Q)^\perp$, при чему је још и $A_{\lambda\eta} = \lambda A_\eta$ за све $\lambda \in \mathbb{C}$. Тада је $\{\eta, J\eta\}$ ортонормирана база од $T(Q)^\perp$, па је скуп свих јединичних нормалних вектора у произвољној тачки, тзв. круг нормала, дат са $\mathbb{S}^1\eta = \{\lambda\eta \mid \lambda \in \mathbb{S}^1\}$ и важи $A_{\lambda\eta} = \lambda A_\eta$. На овај начин спољашња геометрија квадрике Q индукује круг конјугација на сваком тангентном простору $T_q(Q)$, које играју круцијалну улогу у геометрији саме квадрике.

Постоји један канонски одабир јединичног нормалног векторског поља подмногострукости $\tilde{Q} \subset \mathbb{S}^{2n+3}$ кодимензије 2, дат са

$$\tilde{\xi} : \tilde{Q} \to \mathbb{C}^{n+2}, \qquad \tilde{\xi}(z) = -\overline{z} \in H_z.$$

За коваријантни извод $\tilde{\nabla}$ сфере $\mathbb{S}^{2n+3}$ важи

$$\tilde{\nabla}_w \tilde{\xi} = -\bar{w} \in H_z Q, \qquad w \in H_z Q,$$

па оператор облика $\tilde{A}$ од $\tilde{Q}$ захваљујући Вајнгартеновој једначини има облик

$$\tilde{A}_{\tilde{\xi}(z)} w = \bar{w} \qquad w \in H_z Q.$$

Како је π Риманова субмерзија, $\xi = \pi_*(\tilde{\xi})$ је јединично нормално векторско поље квадрике Q дуж π, док је оператор облика A квадрике дат са

$$A_{\xi(z)}\pi_* w = \pi_* \overline{w},$$

тј. $A_{\xi(z)}$ представља конјугацију тангентног простора $T_{\pi(z)}Q$ захваљујући чињеници да је $\tilde{A}_{\tilde{\xi}(z)}$ конјугација на $H_z Q$.

Такође, за свако $z \in \tilde{Q}$ и $\lambda \in \mathbb{S}^1$ имамо

$$\lambda^2 \xi(\lambda z) = \xi(z),$$

па $\xi(z)$ пролази цео нормални простор $T_q(Q)^\perp$ када z прође целу фибру $\pi^{-1}(q) \subset \tilde{Q}$. Као последицу ове чињенице имамо заправо и доказ да је A_η конјугација за све јединичне нормале η.

Друга фундаментална форма h квадрике Q дата је са

$$h(U,V) = \langle A_\eta U, V\rangle \eta + \langle JA_\eta U, V\rangle J\eta,$$

па се Риманов тензор кривине од Q лако добија из Гаусове једначине и има облик

$$\begin{aligned} R(U,V)W =& (g(V,W)U - g(U,W)V) \\ &+ (g(JV,W)JU - g(JU,W)JV - 2g(JU,V)JW) \\ &+ (g(AV,W)AU - g(AU,W)AV \\ &+ g(JAV,W)JAU - g(JAU,W)JAV). \end{aligned}$$

Овде смо опет заменили A_η са A јер је A_η комплексна конјугација за све јединичне нормале $\eta \in T(Q)^\perp$.

Лако се проверава да је кривина сваке од равни $\mathrm{span}\{U, JV\}$ једнака нули, за произвољни пар (U,V) ортонормираних вектора који припадају потпростору $V(A)$. Ове равни су реални дводимензиони линеарни потпростори тангентног простора TQ и представљају тангентне просторе максималних тотално геодезијских, равних подмногострукости од Q које садрже дату тачку. Испоставља се да су ово и једине равни на којима се тензор кривине поништава, па се називају равним $2-$равнима.

За сваки јединични тангентни вектор W на Q постоји оваква раван којој W припада, тј. постоје конјугација A и ортонормирани вектори $U, V \in V(A)$ такви да је

$$W = W(\theta) = \cos\theta U + \sin\theta JV, \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \tag{5.1}$$

Дефиниција 5.1. *Тангентни вектор W на Q се назива:*

- *$\mathcal{A}-$главним ако је $\theta = 0$;*
- *$\mathcal{A}-$изотропним ако је $\theta = \frac{\pi}{4}$.*

Према томе, тангентни вектор W је $\mathcal{A}-$главни ако и само ако постоји конјугација A таква да је $AW = W$, док је $\mathcal{A}-$изотропан ако и само ако постоје ортонормирана векторска поља U, V таква да је

$$AU = U, \qquad AV = V, \qquad W = \frac{U + JV}{\sqrt{2}}.$$

Једна од еквивалентних дефиниција ових појмова је следећа. Приметимо да је вектор W $\mathcal{A}-$главни ако и само ако је димензија дистрибуције

$$\mathrm{span}\{W, JW, AW, JAW\}$$

једнака 2. Како је ова дистрибуција $J-$инваријантна и $A-$инваријантна, њена димензија је парна, па је та димензија за остале тангентне векторе једнака 4, при чему за $\mathcal{A}-$изотропне векторе W важи још додатно и да су вектори који разапињу дистрибуцију међусобно ортогонални. Геометријски, $\mathcal{A}-$главни вектори W одговарају случају када AW припада холоморфној равни $\mathrm{span}\{W, JW\}$, док $\mathcal{A}-$изотропна векторска поља одговарају случају када је AW нормалан на холоморфну раван $\mathrm{span}\{W, JW\}$. Такође, вектор W је $\mathcal{A}-$изотропни ако и само ако је $AW \perp W$ за све могуће конјугације A.

Како постоји кружна $\mathbb{S}^1-$фамилија оператора облика A, без умањења општости можемо за $\mathcal{A}-$главни вектор W узети да је $AW = \pm W$ или чак $AW = \pm JW$, што често знатно олакшава рачун са овим векторима и доказе многих класификационих теорема везаних за подмногострукости квадрике (видети [8] и [57]). С друге стране, за $\mathcal{A}-$изотропне векторе довољно је да важи $AW \perp W$ за све конјугације A, што се своди на $AW \perp W$ и $AW \perp JW$, за све конјугације A. За сва остала тангентна векторска поља W, димензија дистрибуције $\mathcal{D}_W$ је 4, независно од одабира A, али вектор AW није нормалан на холоморфну раван.

Сада је јасно да W лежи у више равни чија је кривина нула (конјугација A и/или векторска поља (U, V) из дефиниције нису једнозначно одређени), једино у овим граничним случајевима када су то $\mathcal{A}-$главна или $\mathcal{A}-$изотропна векторска поља, па се за W тада још каже и да је $\mathcal{A}-$сингуларно.

У раду [53], поред доказа и детаља везаних за саму структуру комплексне квадрике, дато је неколико карактеризација $\mathcal{A}-$сингуларних векторских поља. Наиме, за фиксирани вектор W, секциона кривина свих равни $\mathrm{span}\{U, V\}$ које садрже W је ненегативна, при чему је једнака нули, тј. представља равну раван ако и само ако је вектор W у језгру Јакобијевог оператора $R_W : U \mapsto R(U, V)V$.

5.2 Специјална векторска поља на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

С обзиром да $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ такође поседује скоро комплексну структуру J и скоро продукт структуру P, при чему се P понаша слично као оператор облика A комплексне квадрике (видети 2.12) и тензори кривине имају јако сличан облик, можемо посматрати слична векторска поља на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Међутим, постоји једна битна разлика која онемогућава једноставно уопштење дефиниције ових векторских поља са Q на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Наиме, многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ не поседује $\mathbb{S}^1-$фамилију скоро продукт структура, већ свега три такве структуре задовољавају (2.12). Самим тим се ни релација (5.1) не може директно пренети на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Такође, раван $\mathrm{span}\{U, JV\}$, за векторе U, V који су ортонормирани и сопствени су вектори оператора P за сопствену вредност 1, има константну секциону кривину једнаку $\frac{1}{12}$, па није равна.

Зато ћемо искористити једну од поменутих карактеризација која се може пренети на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Како је дистрибуција

$$\mathcal{D}_Z = \mathrm{span}\{Z, JZ, PZ, JPZ\}$$

на $T(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$ $J-$инваријантна и $P-$инваријантна, $\mathcal{D}_Z$ има димензију 2 или 4 за произвољно тангентно векторско поље Z на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Дефиниција 5.2. *За тангентни вектор Z на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ кажемо да је*

- *$\mathcal{P}-$**главни** ако је димензија дистрибуције $\mathcal{D}_Z$ једнака 2;*
- *$\mathcal{P}-$**изотропни** ако је димензија дистрибуције $\mathcal{D}_Z$ једнака 4, при чему су сви вектори дистрибуције међусобно ортогонални.*

Тангентно векторско поље на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ је $\mathcal{P}$-главно, односно $\mathcal{P}$-изотропно ако је у свакој тачки одговарајући тангентни вектор $\mathcal{P}$-главни, односно $\mathcal{P}$-изотропни.

Приметимо да је могуће дефинисати $\mathcal{P}$-изотропни вектор Z само условом да је димензија дистрибуције $\mathcal{D}_Z$ једнака 4, али би та класа векторских поља била преширока. Такође, поменимо и еквивалентну дефиницију - јединични тангентни вектор Z је $\mathcal{P}$-изотропни ако постоје ортонормирани тангентни вектори X, Y за које важи

$$PX = X, \qquad PY = Y, \qquad Z = \frac{X + JY}{\sqrt{2}}. \tag{5.2}$$

Заиста, уколико важе релације (5.2), лако се доказује да тада важи да је X нормално на JY, што уз

$$PZ = \frac{X - JY}{\sqrt{2}}, \qquad JZ = \frac{JX - Y}{\sqrt{2}},$$

даје да је PZ нормално на Z и JZ. Обрнуто, бирајући

$$X = \frac{Z + PZ}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{JPZ - JZ}{\sqrt{2}},$$

непосредно следи да важе релације (5.2).

Нека је Z произвољно тангентно векторско поље на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Разложимо Z дуж холоморфне равни $\Pi_Z = \operatorname{span}\{Z, JZ\}$ и њеног ортогонала $\Pi_Z^{\perp}$. Нека је $Z^{\perp}$ јединично векторско поље колинеарно са ортогоналном пројекцијом векторског поља PZ на потпростор $\Pi_Z^{\perp}$. Тада су оба векторска поља $Z^{\perp}$ и $J(Z^{\perp})$ ортогонална на Π_Z, па можемо да уведемо ознаке

$$PZ = aZ + bJZ + cZ^{\perp}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

где су a, b, c глатке функције на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Уведимо глатке угаоне функције φ, θ, придружене векторском пољу Z (које зависе од тачке на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$), такве да је $a = \sin\varphi\cos\theta$, $b = \sin\varphi\sin\theta$, $c = \cos\varphi$. Важи

$$PZ = \sin\varphi\cos\theta\, Z + \sin\varphi\sin\theta\, JZ + \cos\varphi\, Z^{\perp}. \tag{5.3}$$

Такође, за сваки јединични тангентни вектор Z на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, пројекција квадрата одређеног векторима PZ, PJZ на холоморфну раван $\Pi_Z = \operatorname{span}\{Z, JZ\}$ је тачка или опет квадрат, који има површину

$$\Theta = \tilde{g}^2(PZ, Z) + \tilde{g}^2(PZ, JZ) = \sin^2\varphi.$$

Важи $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, при чему је $\Theta = 0$ ако и само ако је $PZ \perp \Pi_Z$, тј. Z је $\mathcal{P}-$изотропни вектор, а $\Theta = 1$ ако и само ако је $PZ \in \Pi_Z$, тј. Z је $\mathcal{P}-$главни вектор.

Наредна пропозиција даје неке карактеризације $\mathcal{P}-$главних векторских поља на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Пропозиција 5.1. *Наредна тврђења су еквивалентна за тангентно векторско поље Z на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$:*

1. *Z је $\mathcal{P}-$главно;*

2. *постоји глатка функција θ таква да је $PZ = \cos\theta\, Z + \sin\theta\, JZ$;*

3. *постоје глатке функције f_1, f_2, f_3, које нису све једнаке нули, такве да је*

$$Z = f_1\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)E_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)F_1\right) + f_2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)E_2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)F_2\right)$$
$$+ f_3\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)E_3 + \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)F_3\right);$$

4. *холоморфна секциона кривина холоморфне равни $\Pi_Z = \operatorname{span}\{Z, JZ\}$ једнака је 0.*

Доказ. Како су J и P симетрични ендоморфизми на $T(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$, имамо $g(Z,Z) = g(JZ,JZ) = g(PZ,PZ)$, па релација (5.3) важи за произвољно тангентно векторско поље Z. Из (5.3) јасно је да за $c = 0$ (тј. $\varphi = \frac{\pi}{2}$), Z је $\mathcal{P}-$главно и важи $PZ = \cos\theta Z + \sin\theta JZ$. Такође, за $c \neq 0$ (тј. $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$), димензија дистрибуције $\mathcal{D}_Z$ једнака је 4.

Користећи (2.3), могуће је одредити коефицијенте произвољног $\mathcal{P}-$главног векторског поља $Z = \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \mu_3 E_3 + \nu_1 F_1 + \nu_2 F_2 + \nu_3 F_3$ у тој бази. Директним рачуном добија се

$$\mu_i \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \nu_i \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right), \quad i = 1,2,3.$$

Према томе, постоје глатке функције f_1, f_2, f_3 такве да је $\mu_i = f_i \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ и $\nu_i = f_i \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$, чиме смо добили тражену формулу. Специјално, Z је јединично $\mathcal{P}-$главно векторско поље ако и само ако за функције f_1, f_2, f_3 додатно важи $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$.

Користећи израз за тензор кривине (2.17), рачуна се холоморфна секциона кривина холоморфне равни Π_Z

$$H(Z) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(g^2(PZ,Z) + g^2(JPZ,Z)) = \frac{2}{3}c^2 = \frac{2}{3}\cos^2\varphi.$$

Одатле је јасно да је скуп свих могућих вредности ове секционе кривине сегмент $[0, \frac{2}{3}]$. Штавише, ова кривина једнака је 0 ако и само ако је Z $\mathcal{P}$-главно, док је кривина једнака $\dfrac{2}{3}$ ако и само ако је Z $\mathcal{P}$-изотропно, чиме је доказ завршен.

Нека је (M, g, ∇) произвољна реална хиперповрш од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, где је g метрика која је изометрично наслеђена од метрике $\tilde{g}$ и ∇ њена Леви-Чивита конексија. Означимо са ξ одговарајуће јединично нормално векторско поље на M, а са $\mathcal{U}^\perp$ холоморфну дистрибуцију на TM вектора нормалних на $U = -J\xi$. Приметимо да је овај скуп такође и ортогонални комплемент холоморфне равни $\operatorname{span}\{\xi, J\xi\}$ у $T(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$. Ако је η јединично векторско поље колинеарно са пројекцијом $P\xi$ на дистрибуцију $\mathcal{U}^\perp$, тада важи

$$P\xi = a\xi + bJ\xi + c\eta = \sin\varphi\cos\theta\,\xi + \sin\varphi\sin\theta\, J\xi + \cos\varphi\,\eta.$$

Угаоне функције θ и φ не морају бити константне наравно. Међутим, већина познатих примера хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са $\mathcal{P}-$главним нормалним векторским пољем заиста имају константне угаоне функције. Векторско поље $J\xi$ је увек тангентно на хиперповрш M јер је ендоморфизам J кососиметричан. С друге стране, векторско поље

$P\xi$ је тангентно на хиперповрш ако и само ако је $a=0$. У раду [23] класификоване су све хиперповрши код којих је $P\xi$ ортогонално на ξ и $J\xi$, тј. ξ је $\mathcal{P}-$изотропно векторско поље, што одговара вредностима $a=b=0$, односно $\varphi=0$. Постоје још два слична случаја, који су размотрени у раду [21] (добијени резултати биће представљени у наредној глави):

- $P\xi=\varepsilon\xi$, што је еквивалентно са геометријским условом да је векторско поље $P\xi$ свуда нормално на хиперповрш (одговара вредностима $b=c=0$, тј. $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\theta=0$ или $\theta=\pi$);
- $P\xi=\varepsilon J\xi$, што је еквивалентно са геометријским условом да су $P\xi$ и $J\xi$ колинеарна векторска поља (одговара вредностима $a=c=0$, тј. $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$ или $\theta=\frac{3\pi}{2}$).

Како је оператор P инволутиван на сваком тангентном простору на основу (2.12), јасно је да су ±1 једине сопствене вредности од P, па су једине могућности $\varepsilon\in\{1,-1\}$.

Пропозиција 5.2. *На хиперповрши (M,g,∇) од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ са јединичним нормалним векторским пољем ξ, следећи услови су еквивалентни:*

1. *ξ је $\mathcal{P}-$главно векторско поље;*
2. *холоморфна дистрибуција $\mathcal{U}^\perp$ је $P-$инваријантна.*

Доказ. Доказаћемо да је $\mathcal{U}^\perp$ $P-$инваријантна, тј. да важи $P(\mathcal{U}^\perp)=\mathcal{U}^\perp$, ако и само ако је $c=0$, тј. ξ је $\mathcal{P}-$инваријантно. Одаберимо $X\in\mathcal{U}^\perp$. Тада

$$\begin{aligned}
0 &= g(PX,\xi) = g(X,P\xi) &&= g(X,a\xi+bJ\xi+c\eta) = cg(X,\eta),\\
0 &= g(PX,U) = g(X,PU) = g(X,JP\xi) &&= g(X,-aU-b\xi+cJ\eta) = cg(X,J\eta).
\end{aligned}$$

Ако заменимо $X=\eta$ у првој релацији или $X=J\eta$ у другој, добијамо $c=0$ и ξ је $\mathcal{P}-$главно, чиме је доказ завршен.

Сада се једноставно добијају изрази за Јакобијев оператор R_Y многострукости $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, дефинисан са $R_Y(X)=\tilde{R}(X,Y)Y$, уколико је векторско поље Y специјално одабрано да буде $\mathcal{P}-$главно, односно $\mathcal{P}-$изотропно

$$\begin{aligned}
R_Y(X) &= \frac{5}{12}X+\frac{1}{3}(\cos\theta PX+\sin\theta PJX)-\frac{3}{4}\tilde{g}(X,Y)Y-\frac{1}{12}\tilde{g}(X,JY)JY,\\
R_Y(X) &= \frac{5}{12}X-\frac{5}{12}\tilde{g}(X,Y)Y+\frac{1}{4}\tilde{g}(X,JY)JY-\frac{1}{3}\tilde{g}(X,PY)PY-\frac{1}{3}\tilde{g}(X,JPY)JPY.
\end{aligned}$$

Ричијев тензор хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ са јединичним нормалним векторским пољем које је $\mathcal{P}-$главно, односно $\mathcal{P}-$изотропно, гласи

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X) &= \frac{5}{4}X+\frac{1}{12}\phi(X)U\\
&\quad-\frac{1}{3}(\cos\theta PX+\sin\theta PJX)+\mathrm{Tr}A\cdot AX-A^2X,\\
\mathrm{Ric}(X) &= \frac{5}{4}X-\frac{1}{4}\phi(X)U\\
&\quad+\frac{1}{3}(g(X,P\xi)P\xi+g(X,PU)PU))+\mathrm{Tr}A\cdot AX-A^2X.
\end{aligned}$$

Глава 6

Хиперповрши са $\mathcal{P}-$главним нормалним векторским пољем

У овом поглављу бавићемо се класификацијом неких специјалних класа хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, са нормалним векторским пољем које је $\mathcal{P}-$главно. Неки од добијених резултата објављени су у самосталном раду [21] аутора, док је остатак резултата у припреми за објављивање.

Дефинишимо функције ω_{ij}^k и h_{ij} са

$$\omega_{ij}^k = g(\nabla_{e_i} e_j, e_k), \qquad h_{ij} = \tilde{g}(h(e_i, e_j), \xi),$$

где је h друга фундаментална форма хиперповрши дефинисана Гаусовом формулом (4.1). Ове функције задовољавају добро познате идентитете

$$\omega_{ij}^k = -\omega_{ik}^j, \qquad h_{ij} = h_{ji}.$$

Функције ω_{ij}^k се често у литератури називају Кристофеловим символима, што је назив мотивисан одговарајућим функцијама код површи тродимензионог еуклидског простора.

У овом поглављу испитиваћемо особине хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ чије нормално векторско поље ξ задовољава услов $P\xi = \varepsilon\xi$ или $P\xi = \varepsilon J\xi$, где је $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Одаберимо ортонормирану базу од TM у оба случаја на следећи начин. Нека је $e_1 = J\xi = -U$ и e_2 вектор ортогоналан на e_1, такав да је $Pe_2 = e_2$. Такво векторско поље e_2 постоји пошто је димензија оба сопствена потпростора оператора P једнака 3. Ако дефинишемо $e_3 = Je_2$, примењујући (1.3) и (1.5), добијамо да је $G(e_1, e_2)$ ортогонално на e_1, e_2 и e_3:

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}(G(e_1, e_2), e_1) = -\tilde{g}(G(e_2, e_1), e_1) = \tilde{g}(G_(e_2, e_1), e_1) = 0,\\
&\tilde{g}(G(e_1, e_2), e_2) = -\tilde{g}(G(e_2, e_2), e_2) = 0,\\
&\tilde{g}(G(e_1, e_2), e_3) = -\tilde{g}(G(e_2, e_1), Je_2) = \tilde{g}(G(e_2, Je_2), e_1) = 0.
\end{aligned}$$

Користећи (2.20), закључујемо да је $\|G(e_1, e_2)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Бирајући сада $e_4 = \sqrt{3}G(e_1, e_2)$ и $e_5 = \sqrt{3}JG(e_1, e_2)$, добијамо ортонормирану базу $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ на TM.

Тензор $G(\cdot,\cdot)$ је комплетно одређен на бази $\{e_1,\ldots,e_5\}$:

$$\begin{array}{lll}
G(e_1,e_2)=\frac{1}{\sqrt{3}}e_4, & G(e_2,e_3)=0, & G(e_3,e_5)=-\frac{1}{\sqrt{3}}e_1,\\
G(e_1,e_3)=-\frac{1}{\sqrt{3}}e_5, & G(e_2,e_4)=\frac{1}{\sqrt{3}}e_1, & G(e_3,\xi)=-\frac{1}{\sqrt{3}}e_4,\\
G(e_1,e_4)=-\frac{1}{\sqrt{3}}e_2, & G(e_2,e_5)=\frac{1}{\sqrt{3}}\xi, & G(e_4,e_5)=0,\\
G(e_1,e_5)=\frac{1}{\sqrt{3}}e_3, & G(e_2,\xi)=-\frac{1}{\sqrt{3}}e_5, & G(e_4,\xi)=\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\\
G(e_1,\xi)=0, & G(e_3,e_4)=\frac{1}{\sqrt{3}}\xi, & G(e_5,\xi)=\frac{1}{\sqrt{3}}e_2.
\end{array}$$

Међу претходним релацијама, већина се добија директно из дефиниције базе и особине (1.7). Једине које захтевају доказ, на основу особина (1.3), (1.4) и (1.7) близу Келерових многострукости, су следеће

$$\begin{aligned}
&G(e_2,e_6)=G(e_2,-Je_1)=JG(e_2,e_1)=-JG(e_1,e_2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}Je_4=-\frac{1}{\sqrt{3}}e_5,\\
&G(e_3,e_6)=G(e_2,-Je_1)=G(e_2,e_1)=-G(e_1,e_2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}e_4.
\end{aligned}$$

Користећи (4.1) и дефиницију тензорског поља G, примењујући на бази $\{e_1,\ldots,e_5\}$, добијамо следеће релације:

$$\begin{array}{lllll}
h_{12}=-\omega^3_{11}, & h_{22}=-\omega^3_{21}, & h_{33}=\omega^2_{31}, & h_{44}=-\omega^5_{41}, & h_{55}=\omega^4_{51},\\
h_{13}=\omega^2_{11}, & h_{23}=\omega^2_{21}, & h_{34}=-\omega^5_{31}, & h_{45}=\omega^4_{41}, & \\
h_{14}=-\omega^5_{11}, & h_{24}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\omega^5_{21}, & h_{35}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\omega^4_{31}, & & \\
h_{15}=\omega^4_{11}, & h_{25}=\omega^4_{21}, & & &
\end{array} \tag{6.1}$$

$$\begin{array}{llll}
\omega^2_{41}=-\omega^5_{31}, & \omega^4_{13}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\omega^5_{12}, & \omega^5_{33}=\omega^4_{32}, & \omega^2_{51}=\frac{2}{\sqrt{3}}+\omega^4_{31},\\
\omega^3_{51}=-\omega^4_{21}, & \omega^5_{13}=\omega^4_{12}, & \omega^4_{43}=-\omega^5_{42}, & \omega^5_{53}=\omega^4_{52},\\
\omega^3_{31}=-\omega^2_{21}, & \omega^4_{23}=-\omega^5_{22}, & \omega^5_{43}=\omega^4_{42}, & \omega^4_{33}=-\omega^5_{32},\\
\omega^5_{51}=-\omega^4_{41}, & \omega^5_{23}=\omega^4_{22}, & \omega^4_{53}=-\omega^5_{52}, & \omega^3_{41}=\frac{2}{\sqrt{3}}+\omega^5_{21}.
\end{array} \tag{6.2}$$

Из дефиниције $\tilde{\nabla}G$ и формуле (2.21), даље добијамо:

$$\begin{array}{ll}
h_{11}=\omega^5_{14}+\omega^3_{12}, & \\
\omega^5_{24}=-\omega^3_{22}-\omega^3_{11}, & \omega^5_{34}=-\omega^3_{32}+\omega^2_{11},\\
\omega^5_{44}=-\omega^5_{11}-\omega^3_{42}, & \omega^5_{54}=\omega^4_{11}-\omega^3_{52}.
\end{array} \tag{6.3}$$

Добијене релације важе у оба случаја $P\xi=\varepsilon J\xi$ и $P\xi=\varepsilon\xi$ пошто се скоро комплексна структура J понаша на исти начин на базним векторима. Надаље ћемо ова два случаја разматрати одвојено јер ћемо користити особине скоро продукт структуре P, која се другачије понаша на базним векторима у ова два случаја.

- **Случај** $P\xi = \varepsilon J\xi$

Користећи (2.12) и одабрану базу, рачунамо $Pe_1 = \varepsilon e_6$ и $Pe_3 = -e_3$. Такође, због $PG(X,Y) + G(PX,PY) = 0$ добијамо да је $Pe_4 = -\varepsilon e_5$ и $Pe_5 = -\varepsilon e_4$, па је дејство скоро продукт структуре P на бази дато са

$$Pe_1 = \varepsilon e_6, \quad Pe_2 = e_2, \quad Pe_3 = -e_3, \quad Pe_4 = -\varepsilon e_5, \quad Pe_5 = -\varepsilon e_4, \quad Pe_6 = \varepsilon e_1.$$

Из дефиниције $(\tilde{\nabla}_X P)Y$ и последње релације у (2.12), закључујемо да функције ω_{ij}^k задовољавају следеће везе:

$$\begin{array}{llll}
\omega_{11}^2 = 0, & \omega_{13}^5 = \varepsilon\left(\omega_{13}^4 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), & \omega_{22}^3 = 0, & \omega_{32}^3 = 0, \\
\omega_{11}^3 = 0, & \omega_{14}^5 = 0, & \omega_{23}^5 = \varepsilon\omega_{23}^4, & \omega_{33}^5 = \varepsilon\omega_{33}^4, \\
\omega_{11}^5 = 0, & \omega_{21}^3 = \varepsilon\omega_{21}^2, & \omega_{31}^2 = -\varepsilon\omega_{21}^2, & \\
\omega_{12}^3 = 0, & \omega_{21}^5 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, & \omega_{31}^5 = 0. &
\end{array}$$

Одавде добијамо контрадикцију јер, из дефиниције, имамо

$$\tilde{g}((\tilde{\nabla}_{e_4}P)e_1, e_3) = g(\tilde{\nabla}_{e_4}(Pe_1) - P(\tilde{\nabla}_{e_4}e_1), e_3) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

док из последње релације у (2.12), добијамо

$$\tilde{g}((\tilde{\nabla}_{e_4}P)e_1, e_3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Према томе, случај $P\xi = \pm J\xi$ је немогућ, тј. доказали смо следећу теорему.

Теорема 6.1. *Не постоје хиперповрши од* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *које задовољавају услов* $P\xi = \pm J\xi$.

- **Случај** $P\xi = \xi$

У случају $P\xi = \varepsilon\xi$, дејство скоро продукт структуре P на бази дато је са

$$Pe_1 = -\varepsilon e_1, \quad Pe_2 = e_2, \quad Pe_3 = -e_3, \quad Pe_4 = \varepsilon e_4, \quad Pe_5 = -\varepsilon e_5, \quad Pe_6 = \varepsilon e_6.$$

На исти начин, као у претходном случају, за $\varepsilon = 1$ изводимо

$$\begin{array}{llllll}
\omega_{11}^2 = 0, & \omega_{13}^4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, & \omega_{23}^4 = 0, & \omega_{33}^4 = 0, & \omega_{31}^5 = 0, & \omega_{52}^3 = 0, \\
\omega_{11}^4 = 0, & \omega_{11}^3 = 0, & \omega_{22}^3 = 0, & \omega_{31}^4 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, & \omega_{42}^3 = 0, & \omega_{53}^4 = 0, \\
\omega_{12}^3 = 0, & \omega_{21}^2 = 0, & \omega_{31}^2 = 0, & \omega_{11}^5 = 0, & \omega_{43}^4 = 0, & \\
\omega_{14}^5 = 0, & \omega_{21}^4 = 0, & \omega_{32}^3 = 0, & \omega_{41}^4 = 0, & \omega_{51}^4 = 0. &
\end{array}$$

Овог пута контрадикција следи разматрањем израза $\tilde{g}((\tilde{\nabla}_{e_5}P)e_1, e_2)$ на два различита начина јер добијамо прво $\tilde{g}((\tilde{\nabla}_{e_5}P)e_1, e_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, а затим $\tilde{g}((\tilde{\nabla}_{e_5}P)e_1, e_2) = -\sqrt{3}$.

Дакле, ни случај $P\xi = \xi$ није могућ.

Теорема 6.2. *Не постоје хиперповрши од* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *које задовољавају услов* $P\xi = \xi$.

- **Случај** $P\xi = -\xi$

На већ описани начин, само сада за $\varepsilon = -1$, изводе се релације:

$$\begin{array}{lllll}
\omega_{11}^3 = 0, & \omega_{21}^3 = 0, & \omega_{11}^2 = 0, & \omega_{11}^5 = 0, & \omega_{51}^4 = 0, \\
\omega_{11}^4 = 0, & \omega_{21}^4 = 0, & \omega_{21}^2 = 0, & \omega_{21}^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \omega_{52}^3 = 0, \\
\omega_{12}^3 = 0, & \omega_{22}^3 = 0, & \omega_{31}^4 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, & \omega_{41}^4 = 0, & \omega_{53}^5 = 0, \\
\omega_{13}^5 = 0, & \omega_{23}^5 = 0, & \omega_{32}^3 = 0, & \omega_{42}^3 = 0, & \\
\omega_{14}^5 = 0, & & \omega_{33}^5 = 0, & \omega_{43}^5 = 0. &
\end{array}$$

Даље, користећи дефиницију и формулу (2.17) тензора кривине $\tilde{R}$, добијамо да функције ω_{ij}^k задовољавају следеће диференцијалне једначине:

$$\begin{array}{ll}
e_1(\omega_{23}^4) = -\omega_{13}^4\omega_{53}^4 + \frac{5\omega_{53}^4}{2\sqrt{3}} + e_2(\omega_{13}^4), & e_1(\omega_{31}^2) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\omega_{13}^4\right)\omega_{31}^5, \\
e_1(\omega_{31}^5) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \omega_{13}^4\right)(\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5), & e_1(\omega_{33}^4) = -\omega_{23}^4\omega_{31}^2 + \frac{\omega_{43}^4}{2\sqrt{3}} + \omega_{13}^4\omega_{43}^4 - \omega_{31}^5\omega_{53}^4 + e_3(\omega_{13}^4), \\
e_1(\omega_{41}^5) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\omega_{13}^4\right)\omega_{31}^5, & e_1(\omega_{43}^4) = \omega_{23}^4\omega_{31}^5 - \frac{\omega_{33}^4}{2\sqrt{3}} - \omega_{13}^4\omega_{33}^4 - \omega_{41}^5\omega_{53}^4 + e_4(\omega_{13}^4), \\
e_1(\omega_{53}^4) = -\frac{5\omega_{23}^4}{2\sqrt{3}} + \omega_{13}^4\omega_{23}^4 + e_5(\omega_{13}^4), & e_2(\omega_{31}^2) = -2\omega_{23}^4\omega_{31}^5, \\
e_2(\omega_{31}^5) = \omega_{23}^4(\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5), & e_2(\omega_{33}^4) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \omega_{13}^4\right)\omega_{31}^2 + \omega_{23}^4\omega_{43}^4 + \omega_{33}^4\omega_{53}^4 + e_3(\omega_{23}^4), \\
e_2(\omega_{41}^5) = -2\omega_{23}^4\omega_{31}^5, & e_2(\omega_{43}^4) = -\frac{\omega_{31}^5}{2\sqrt{3}} - \omega_{13}^4\omega_{31}^5 - \omega_{23}^4\omega_{33}^4 + \omega_{43}^4\omega_{53}^4 + e_4(\omega_{23}^4), \\
e_2(\omega_{53}^4) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\omega_{13}^4 + (\omega_{23}^4)^2 + (\omega_{53}^4)^2 + e_5(\omega_{23}^4), & e_3(\omega_{31}^5) = \omega_{31}^2\omega_{33}^4 + \omega_{33}^4\omega_{41}^5 - 2\omega_{31}^5 + \omega_{43}^4 - e_4(\omega_{31}^2), \\
e_3(\omega_{43}^4) = -\frac{5}{6} + \frac{\omega_{13}^4}{\sqrt{3}} + (\omega_{31}^5)^2 - (\omega_{33}^4)^2 + \omega_{31}^2\omega_{41}^5 - (\omega_{43}^4)^2 + e_4(\omega_{33}^4), & e_3(\omega_{41}^5) = -2\omega_{31}^5\omega_{33}^4 - \omega_{31}^2\omega_{43}^4 - \omega_{41}^5\omega_{43}^4 + e_4(\omega_{31}^5), \\
e_3(\omega_{53}^4) = -\frac{\omega_{31}^5}{2\sqrt{3}} - \omega_{13}^4\omega_{31}^5 + \omega_{23}^4\omega_{33}^4 - \omega_{43}^4\omega_{53}^4 + e_5(\omega_{33}^4), & e_4(\omega_{53}^4) = -\frac{\omega_{41}^5}{2\sqrt{3}} - \omega_{13}^4\omega_{41}^5 + \omega_{23}^4\omega_{43}^4 + \omega_{33}^4\omega_{53}^4 + e_5(\omega_{43}^4), \\
e_5(\omega_{31}^2) = -2\omega_{31}^5\omega_{53}^4, & e_5(\omega_{31}^5) = (\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5)\omega_{53}^4, \\
e_5(\omega_{41}^5) = -2\omega_{31}^5\omega_{53}^4. &
\end{array}$$

Сада је могуће одредити матрицу оператора облика A хиперповрши M

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\
0 & 0 & \omega_{31}^2 & -\omega_{31}^5 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\omega_{31}^5 & -\omega_{41}^5 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Видимо да важи $Ae_1 = 0$, тј. $J\xi$ је главно векторско поље које одговара главној кривини 0. Тиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 6.3. *Све хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ које задовољавају услов $P\xi = -\xi$ су Хопфове. Главне кривине које одговарају главном векторском пољу $J\xi$ су константне и једнаке 0.*

Лијеве заграде на базним векторима су

$$\begin{aligned}
[e_1,e_2] &= \left(\frac{5}{2\sqrt{3}}-\omega_{13}^4\right)e_5, & [e_1,e_3] &= -\,\omega_{31}^2 e_2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\omega_{13}^4\right)e_4-\omega_{31}^5 e_5,\\
[e_1,e_4] &= \omega_{31}^5 e_2-\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\omega_{13}^4\right)e_3-\omega_{41}^5 e_5, & [e_1,e_5] &= -\left(\frac{5}{2\sqrt{3}}-\omega_{13}^4\right)e_2,\\
[e_2,e_3] &= \omega_{31}^2 e_1+\omega_{23}^4 e_4+\omega_{33}^4 e_5, & [e_2,e_4] &= -\,\omega_{31}^5 e_1-\omega_{23}^4 e_3+\omega_{43}^4 e_5,\\
[e_2,e_5] &= \sqrt{3}e_1+\omega_{23}^4 e_2+\omega_{53}^4 e_5, & [e_3,e_4] &= \frac{1}{\sqrt{3}}e_1-\omega_{33}^4 e_3-\omega_{43}^4 e_4,\\
[e_3,e_5] &= -\omega_{31}^5 e_1+\omega_{33}^4 e_2-\omega_{53}^4 e_4, & [e_4,e_5] &= -\,\omega_{41}^5 e_1+\omega_{43}^4 e_2+\omega_{53}^4 e_3.
\end{aligned}$$

Према томе, дистрибуција $\mathcal{D}_1=\operatorname{span}\{e_1,e_2,e_5\}$ је очигледно интеграбилна. Уколико је

$$f_1=\frac{1}{2}e_2-\frac{\sqrt{3}}{2}e_3,\qquad f_2=\frac{\sqrt{3}}{2}e_4+\frac{1}{2}e_5,$$

дистрибуција $\mathcal{D}_2=\operatorname{span}\{f_1,f_2\}$ је такође интеграбилна јер важи

$$[f_1,f_2]=\left(\frac{\omega_{23}^4}{2}-\frac{\sqrt{3}\omega_{33}^4}{2}\right)f_1+\left(\frac{\sqrt{3}\omega_{43}^4}{2}+\frac{\omega_{53}^4}{2}\right)f_2.$$

Како је $TM=\mathcal{D}_1\oplus\mathcal{D}_2$, многострукост M је локално дифеоморфна са производом $M_1\times M_2$ интегралних подмногострукости M_1 и M_2 дистрибуција $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$. Надаље ћемо се позабавити својствима ових подмногострукости.

Нека су h_1 и h_2 друге фундаменталне форме имерзија M_1 и M_2 у $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$. Директним рачуном добијамо да је $h_1\equiv 0$ и

$$\begin{aligned}
h_2(f_1,f_1) &= \tfrac{\sqrt{3}\omega_{31}^2}{2}\left(\tfrac{1}{2}e_1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\xi\right),\\
h_2(f_1,f_2) &= \tfrac{\sqrt{3}\omega_{31}^5}{2}\left(\tfrac{1}{2}e_1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\xi\right),\\
h_2(f_2,f_2) &= -\tfrac{\sqrt{3}\omega_{41}^5}{2}\left(\tfrac{1}{2}e_1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\xi\right),
\end{aligned}\tag{6.4}$$

па је M_1 тотално геодезијска у $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$. Приметимо да из Гаусове једначине можемо добити секционе кривине од M_1 и M_2. Тензори кривине R_1 и R_2 од M_1 и M_2 дати су са

$$\begin{aligned}
\tilde g(R_1(e_i,e_j)e_j,e_i) &= \tilde g(\tilde R(e_i,e_j)e_j,e_i)=\frac{3}{4},\qquad i\neq j,\ i,j\in\{1,2,5\},\\
\tilde g(R_2(f_1,f_2)f_2,f_1) &= \tilde g(\tilde R(f_1,f_2)f_2,f_1)+\tilde g(h_2(f_1,f_1),h_2(f_2,f_2))\\
&\quad-\tilde g(h_2(f_1,f_2),h_2(f_1,f_2))\\
&=\frac{3}{4}(1+(\omega_{31}^5)^2-\omega_{31}^2\omega_{41}^5),
\end{aligned}\tag{6.5}$$

па M_1 има константну секциону кривину. Према томе, локално је изометрична сфери $\mathbb{S}^3$ са метриком $g_1=\frac{4}{3}g_0$, где је g_0 стандардна метрика сфере са константном секционом кривином 1. Тиме смо доказали да хиперповрш од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ која задовољава услов $P\xi=-\xi$ локално представља слику од $\mathbb{S}^3\times M_2$ при некој имерзији.

Сада ћемо одредити могуће вишеструкости главних кривина хиперповрши M, у ознаци m.

Пропозиција 6.1. *Број m различитих главних кривина у свакој тачки хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ за коју важи $P\xi = -\xi$ је или 3 или 5. Прецизније,*

- *$m = 3$ ако и само ако је $\omega_{31}^5 = 0$ и $\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5 = 0$;*
- *$m = 5$ ако и само ако је $\omega_{31}^5 \neq 0$ или $\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5 \neq 0$.*

Доказ. Карактеристични полином оператора A је

$$\begin{aligned} P_A(x) &= -x\left(x^4 + (\omega_{31}^2 - \omega_{41}^5)x^3 - \left(\omega_{31}^2 - \omega_{41}^5 - \frac{1}{6}\right)x^2 + \frac{1}{12}(\omega_{31}^2 - \omega_{41}^5)x + \frac{1}{144}\right) \\ &= -x\left(x^2 - \lambda_1 x - \frac{1}{12}\right)\left(x^2 - \lambda_2 x - \frac{1}{12}\right), \end{aligned}$$

где су $\lambda_{1,2}$ решења квадратне једначине

$$\lambda^2 - (\omega_{31}^2 - \omega_{41}^5)\lambda - (\omega_{31}^2\omega_{41}^5 + (\omega_{31}^5)^2) = 0.$$

Приметимо да су ова решења увек реална, дата са

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega_{31}^2 - \omega_{41}^5 \pm \sqrt{(\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5)^2 + 4(\omega_{31}^5)^2}}{2}.$$

Штавише, важи $\lambda_1 = \lambda_2$ ако и само ако је $\omega_{31}^5 = 0$ и $\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5 = 0$, што је еквивалентно са тим да су решења једначина $x^2 - \lambda_1 x - \frac{1}{12} = 0$ и $x^2 - \lambda_2 x - \frac{1}{12} = 0$ међусобно једнака. Како су та решења и различита од 0, доказ је завршен.

Претпоставићемо да је вишеструкост главних кривина константна на M и размотрити одговарајућа два случаја одвојено.

- **Случај** $m = 3$

У случају када у свакој тачки постоје три различите главне кривине, јасно је да важи $e_1(\omega_{31}^2) = e_2(\omega_{31}^2) = e_3(\omega_{31}^2) = e_5(\omega_{31}^2) = 0$. Такође, из $\omega_{31}^2 + \omega_{41}^5 = 0$ и $e_4(\omega_{41}^5) = 0$, добијамо $e_4(\omega_{31}^2) = 0$, па је

$$\omega_{31}^2 = -\omega_{41}^5 = \omega = \text{const}.$$

Даље, из (6.4) и (6.5) закључујемо да подмногострукост M_2 у овом случају има константну секциону кривину једнаку $\frac{3}{4}(1+\omega^2)$ и смештена је тотално умбилички у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Према томе, локално је изометрична сфери $\mathbb{S}^2$ са метриком $g_2 = \frac{4}{3(1+\omega^2)} g_0$. Доказали смо управо следећу пропозицију.

Пропозиција 6.2. *Хиперповрш од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са три различите главне кривине, која задовољава услов $P\xi = -\xi$, има константне главне кривине и локално је дифеоморфна производу сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2$.*

Напомена 6.1. *Хопфове хиперповрши хомогене близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ проучаване су у раду [39], где су аутори класификовали све Хопфове хиперповрши са три различите главне кривине, под додатном претпоставком да се холоморфна дистрибуција $\mathcal{U}^\perp$ чува при дејству скоро продукт структуре P. Како смо доказали Пропозицију 5.2 и Теорему 6.3, можемо применити резултате из поменутог рада у случају који разматрамо. До сада смо ипак представили доказе који се ослањају на одабир базе са почетка ове главе, али ћемо се сада, при одређивању експлицитних формула имерзије, позвати на доказ Теореме 5.3. из [39].*

Теорема 6.4. *Једине хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са три различите главне кривине, које задовољавају услов $P\xi = -\xi$, до на изометрију $\mathcal{F}_{abc}$ од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, дате су имерзијама $f_{3,r} : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ из Главе 4, тј. $\mathcal{M}_{3,r} = f_{3,r}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2)$, при чему је*

$$f_{3,r} : (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto (\bar{\mathrm{x}}, (\sqrt{1-r^2} + r\mathrm{y})\bar{\mathrm{x}}), \quad 0 < r \leqslant 1.$$

Доказ. Од сада ћемо поистоветити M са сликом отвореног подскупа од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2$, према Пропозицији 6.2. Одредимо експлицитне формуле имерзије

$$f : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \quad f(x, y) = (p(x, y), q(x, y)).$$

Приметимо да је $\mathbb{R}^8 = TM \oplus \operatorname{span}\{f, Qf\}$, где је Q стандардна продукт структура на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Даље, диференцијал $df = (dp, dq)$ задовољава

$$dp = \frac{1}{2}(df - Qdf), \qquad dq = \frac{1}{2}(df + Qdf).$$

Директно се проверава да важи $Qf_1 = f_1$ и $Qf_2 = f_2$, па је рестрикција диференцијала dp на другу координату идентички једнака 0. Према томе, p не зависи од друге променљиве y, па га можемо, без умањења општости, посматрати као пресликавање из $\mathbb{S}^3$ у $\mathbb{S}^3$. Због облика изометрија простора $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, довољно је одредити функције p и q које задовољавају почетни услов

$$p(1, x) = 1, \qquad q(1, y) = \tilde{q}(y). \tag{6.6}$$

Очигледно је задовољено

$$\operatorname{span}\{df(E_1), df(E_2), df(E_3)\} = \mathcal{D}_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_5\},$$

с обзиром да је $[E_1, E_2, E_3]$ стандардна база од $T(\mathbb{S}^3)$. Скоро продукт структура P чува дистрибуцију $\mathcal{D}_1$ јер је $Pe_1 = e_1$, $Pe_2 = e_2$, $Pe_5 = e_5$, па добијамо

$$Pdf(E_1) = df(E_1), \quad Pdf(E_2) = df(E_2), \quad Pdf(E_3) = df(E_3). \tag{6.7}$$

За имерзију $\mathbb{S}^3$ у $\mathbb{R}^4$ са другом фундаменталном формом $\tilde{h}$, имамо у произвољној тачки $p \in \mathbb{S}^3$

$$D_{E_i}E_j = \nabla^E_{E_i}E_j + \tilde{h}(E_i, E_j) = -\sum_k \varepsilon_{ijk}E_k - \langle E_i, E_j\rangle p,$$

где је D еуклидска равна конексија од $\mathbb{R}^4$. Користећи (2.14) и (2.5), заједно са чињеницом да је M_1 тотално геодезијска у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, добијамо

$$\nabla^E_{E_i}E_j = \tilde{\nabla}_{E_i}E_j = \nabla_{E_i}E_j = -\sum_k \varepsilon_{ijk}E_k. \tag{6.8}$$

Због

$$df(E_i) = (dp(E_i), dq(E_i)) = D_{E_i}f = (D_{E_i}p, D_{E_i}q), \qquad i = 1, 2, 3,$$

постоје имагинарни кватерниони $\alpha_i(x, y), \beta_i(x, y)$ такви да је $df(E_i) = (p\alpha_i, q\beta_i)$. Штавише, α_i не зависи од y. Сада, из (2.11) и (6.7), следи $\alpha_i = \beta_i$, па је

$$df(E_i) = (p\alpha_i, q\alpha_i), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.9}$$

Из дефиниције и (2.8), следи

$$\tilde{g}(df(E_i), df(E_j)) = g_1(E_i, E_j) = \frac{4}{3}\delta_{ij},$$

где је $g_1 = f^*\tilde{g}$ повлачење метрике $\tilde{g}$. Користећи (2.7), закључујемо да су α_i, $i = 1, 2, 3$, ортонормирани кватерниони (у еуклидском смислу), па је

$$\alpha_i \times \alpha_j = -\varepsilon \sum_k \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \qquad \varepsilon \in \{-1, 1\}. \tag{6.10}$$

Узимајући тангентни део од $D_{E_j} D_{E_i} f$ и користећи релацију (2.13), добијамо

$$\nabla^E_{E_i} E_j = (p(\alpha_i \times \alpha_j + E_i(\alpha_j)), q(\alpha_i \times \alpha_j + E_i(\alpha_j))). \tag{6.11}$$

Из релација (6.8), (6.10) и (6.11) следи

$$\begin{array}{lll} E_1(\alpha_1) = 0, & E_2(\alpha_1) = (1-\varepsilon)\alpha_3, & E_3(\alpha_1) = -(1-\varepsilon)\alpha_2, \\ E_1(\alpha_2) = -(1-\varepsilon)\alpha_3, & E_2(\alpha_2) = 0, & E_3(\alpha_2) = (1-\varepsilon)\alpha_1, \\ E_1(\alpha_3) = (1-\varepsilon)\alpha_2, & E_2(\alpha_3) = -(1-\varepsilon)\alpha_1, & E_3(\alpha_3) = 0. \end{array}$$

Уколико је $\varepsilon = 1$, овај систем диференцијалних једначина даје да су α_1, α_2, α_3 константни међусобно ортонормирани вектори, па постоји ротација простора $\mathbb{E}^3$, тј. јединични кватернион h, такав да је испуњено

$$\alpha_1 = h\mathrm{i}h^{-1}, \quad \alpha_2 = h\mathrm{j}h^{-1}, \quad \alpha_3 = -h\mathrm{k}h^{-1}.$$

Интеграцијом (6.9), добијамо јединствено решење које задовољава услове (6.6)

$$p(x, y) = hxh^{-1}, \qquad q(x, y) = \tilde{q}(x, y)hxh^{-1}.$$

Остаје да одредимо функцију $\tilde{q}(x, y)$. Ако фиксирамо тачку $x_0 \in \mathbb{S}^3$, имерзија $(x_0, y) \mapsto (hxh^{-1}, \tilde{q}(y)hx_0h^{-1})$ сфере $\mathbb{S}^2$ у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, подударна је до на изометрију од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, имерзији $\tilde{q} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, $\tilde{q}(y) = (1, \tilde{q}(y)) \mapsto (1, \tilde{q}(y))$. Како смо доказали да је M_2 тотално умбиличка подмногострукост од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, као и да је M_2 локално изометрична сфери $\mathbb{S}^2$, имерзија $y \mapsto \tilde{q}(y)$ сфере $\mathbb{S}^2$ у $\mathbb{S}^3$ је тотално умбиличка. Самим тим можемо, до на изометрију сфере $\mathbb{S}^3$, узети да је $\tilde{q}(y) = \sqrt{1 - r^2} + ry$, тј.

$$q(x, y) = (\sqrt{1 - r^2} + ry)hxh^{-1}, \qquad y \in \mathrm{Im}\mathbb{H}.$$

Уз репараметризацију сфере $\mathbb{S}^3$, јасно је да је добијена имерзија облика $f_{3,r}$.

Уколико је $\varepsilon = 1$, слично као у претходном случају закључујемо да постоји ротација простора $\mathbb{E}^3$, тј. јединични кватернион h, такав да су испуњени почетни услови

$$\alpha_1(1) = -h\mathrm{i}h^{-1}, \quad \alpha_2(1) = -h\mathrm{j}h^{-1}, \quad \alpha_3(1) = h\mathrm{k}h^{-1},$$

док је јединствено решење система диференцијалних једначина које задовољава ове услове дато са

$$\alpha_1 = -hx\mathrm{i}x^{-1}h^{-1}, \quad \alpha_2 = -hx\mathrm{j}x^{-1}h^{-1}, \quad \alpha_3 = hx\mathrm{k}x^{-1}h^{-1}.$$

Интеграцијом (6.9), добијамо јединствено решење које задовољава услове (6.6)

$$p(x, y) = hx^{-1}h^{-1}, \qquad q(x, y) = \tilde{q}(x, y)hx^{-1}h^{-1}.$$

На потпуно исти начин сада можемо добити да је $q(x,y)=(\sqrt{1-r^2}+ry)hx^{-1}h^{-1}$, тј.

$$p(x,y)=hx^{-1}h^{-1},\qquad q(x,y)=(\sqrt{1-r^2}+ry)hx^{-1}h^{-1},\qquad y\in \mathrm{Im}\mathbb{H}.$$

Уз сличну репараметризацију сфере $\mathbb{S}^3$, јасно је да је опет добијена имерзија облика $f_{3,r}$.

У Глави 4 приказан је рачун са имерзијом $f_{1,r}$, док се одговарајуће формуле за имерзију $f_{3,r}$ изводе аналогно. Међутим, коришћена база није ортонормирана и самим тим се добијене величине не поклапају са онима које су добијене у овој глави. Зато ћемо сада приказати формуле за имерзију $f_{3,r}$, у бази одабраној на почетку ове главе, прилагођеној конкретној имерзији.

Вектори

$$\begin{array}{lclclcl}
\tilde E_1 &=& (1-2x_1^2-2x_2^2)(E_1+F_1) &-& 2(x_1x_4+x_2x_3)(E_2+F_2) &-& 2(x_1x_3-x_2x_4)(E_3+F_3)\\
\tilde E_2 &=& 2(x_1x_4-x_2x_3)(E_1+F_1) &+& (1-2x_1^2-2x_3^2)(E_2+F_2) &+& 2(x_1x_2+x_3x_4)(E_3+F_3)\\
\tilde E_3 &=& 2(x_1x_3+x_2x_4)(E_1+F_1) &+& 2(x_3x_4-x_1x_2)(E_2+F_2) &-& (1-2x_2^2-2x_3^2)(E_3+F_3)\\
\tilde F_1 &=& (1-2x_3^2-2x_4^2)F_1 &+& 2(x_1x_4+x_2x_3)F_2 &+& 2(x_1x_3-x_2x_4)F_3\\
\tilde F_2 &=& 2(x_1x_4-x_2x_3)F_1 &+& (1-2x_2^2-2x_4^2)F_2 &-& 2(x_1x_2+x_3x_4)F_3\\
\tilde F_3 &=& -2(x_1x_3+x_2x_4)F_1 &+& 2(x_1x_2-x_3x_4)F_2 &-& 2(1-2x_1^2-2x_4^2)F_3
\end{array}$$

чине базу од $T(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)$. Приметимо да су ово редом слике при изометрији $d\mathcal{F}_2$ одговарајуће стандардне базе на $T(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)$. Лако се проверава, користећи формуле из Главе 2, да важе следеће везе:

$$\begin{array}{lll}
g(\tilde E_i,\tilde E_j)=\frac{4}{3}\varepsilon_{ijk}, & g(\tilde E_i,\tilde F_j)=-\frac{2}{3}\varepsilon_{ijk}, & g(\tilde F_i,\tilde F_j)=\frac{4}{3}\varepsilon_{ijk},\\
[\tilde E_i,\tilde E_j]=-2\varepsilon_{ijk}\tilde E_k, & [\tilde E_i,\tilde F_j]=0, & [\tilde F_i,\tilde F_j]=-2\varepsilon_{ijk}\tilde F_k.
\end{array}$$

Рачун се знатно олакшава коришћењем формула за тензоре J, P, G на бази $[\tilde E_1,\tilde E_2,\tilde E_3,\tilde F_1,\tilde F_2,\tilde F_3]$:

$$\begin{array}{lcllcl}
J\tilde E_i &=& \frac{1}{\sqrt3}(\tilde E_i+2\tilde F_i), & J\tilde F_i &=& -\frac{1}{\sqrt3}(2\tilde E_i+\tilde F_i),\\
P\tilde E_i &=& \tilde E_i, & P\tilde F_i &=& -(\tilde E_i+\tilde F_i),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\tilde\nabla_{\tilde E_i}\tilde E_j=-\varepsilon_{ijk}\tilde E_k, & \tilde\nabla_{\tilde E_i}\tilde F_j=\frac{\varepsilon_{ijk}}{3}(\tilde E_k-\tilde F_k),\\
\tilde\nabla_{\tilde F_i}\tilde E_j=\frac{\varepsilon_{ijk}}{3}(\tilde F_k-\tilde E_k), & \tilde\nabla_{\tilde F_i}\tilde F_j=-\varepsilon_{ijk}\tilde F_k,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
G(\tilde E_i,\tilde E_j)=-\frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt3}(\tilde E_k+2\tilde F_k), & G(\tilde E_i,\tilde F_j)=-\frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt3}(\tilde E_k-\tilde F_k),\\
G(\tilde F_i,\tilde E_j)=-\frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt3}(\tilde E_k-\tilde F_k), & G(\tilde F_i,\tilde F_j)=\frac{2\varepsilon_{ijk}}{3\sqrt3}(2\tilde E_k+\tilde F_k).
\end{array}$$

Приметимо да се ове формуле за J, P, G незнатно разликују од одговарајућих формула на стандардној бази, док су формуле за Лијеве заграде, Леви-Чивита конексију и метрику потпуно исте јер је $\mathcal{F}_2$ изометрија.

База прилагођена овој класи хиперповрши је

$$\begin{aligned}
e_1 &= -U=J\xi=\tfrac{\sqrt3}{2}(y_3\tilde E_1-y_2\tilde E_2+y_1\tilde E_3),\\
e_2 &= \tfrac{\sqrt3}{2\sqrt{y_2^2+y_3^2}}(y_2\tilde E_1+y_3\tilde E_2),\\
e_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{y_2^2+y_3^2}}(y_2(\tilde E_1+2\tilde F_1)+y_3(\tilde E_2+2\tilde F_2)),\\
e_4 &= \tfrac{1}{2\sqrt{y_2^2+y_3^2}}(-y_1y_3(\tilde E_1+2\tilde F_1)+y_1y_2(\tilde E_2+2\tilde F_2)+(y_2^2+y_3^2)(\tilde E_3+2\tilde F_3)),\\
e_5 &= -\tfrac{\sqrt3}{2\sqrt{y_2^2+y_3^2}}(-y_1y_3\tilde E_1+y_1y_2\tilde E_2+(y_2^2+y_3^2)\tilde E_3),\\
e_6 &= \xi=-\tfrac12(y_3\tilde E_1-y_2\tilde E_2+y_1\tilde E_3)-y_3\tilde F_1+y_2\tilde F_2-y_1\tilde F_3.
\end{aligned}$$

Изводи функција y_1, y_2, y_3 у правцу векторских поља $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_3$ дати су редом са

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}_1(y_1) = -y_2, && \tilde{F}_2(y_1) = -y_3, && \tilde{F}_3(y_1) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r},\\
&\tilde{F}_1(y_2) = y_1, && \tilde{F}_2(y_2) = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, && \tilde{F}_3(y_2) = -y_3,\\
&\tilde{F}_1(y_3) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, && \tilde{F}_2(y_3) = y_1, && \tilde{F}_3(y_3) = y_2,
\end{aligned}$$

одакле се директно добија матрица оператора облика

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0\\
0 & 0 & \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6}\\
0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} & 0\\
0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Кристофелови симболи који се појављују у матрици оператора облика су

$$\omega_{31}^2 = -\omega_{41}^5 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \qquad \omega_{31}^5 = 0,$$

док су три различите главне кривине, са вишеструкостима 1, 2, 2 исте као и код фамилије $\mathcal{M}_{1,r}$ и износе

$$0, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}+\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}+\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}-\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}, \quad \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}-\frac{\sqrt{3-2r^2}}{2\sqrt{3}r}.$$

- **Случај** $m = 5$

Класификација хиперповрши од $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ са пет различитих главних кривина, које још задовољавају и услов $P\xi = -\xi$, представља доста озбиљан проблем, уколико немамо још неке додатне услове које хиперповрш задовољава. Ипак, у раду [39] дата је једна таква фамилија хиперповрши, заједно са још две фамилије хиперповрши које задовољавају $P\xi = \frac{1}{2}\xi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi$, па је и њихово нормално векторско поље ξ такође $\mathcal{P}-$главно. Имерзије $f_{i,k,l}$, $i = 1,2,3$ којима су дефинисане ове фамилије приказали смо у Глави 4, као и детаљнији рачун везан за фамилију хиперповрши $\mathcal{M}_{1,k,l} = f_{1,k,l}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$. Сада ћемо детаљније представити фамилију хиперповрши

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{3,k,l} &= f_{3,k,l}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)\\
&= \{(\bar{x}, y\bar{x}) \in \mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3 \mid x\in\mathbb{S}^3, y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{S}^3, y_1^2+y_2^2=k^2, y_3^2+y_4^2=l^2\}
\end{aligned}$$

и доказати да задовољава тражене услове: за све $0 < k, l < 1$, $k^2+l^2=1$, одговарајућа хиперповрш ове фамилије има у свакој својој тачки пет различитих главних кривина, које су притом константне, и још је задовољен услов $P\xi = -\xi$.

Ортонормирана база $(e_1, \dots, e_5)$ и нормално векторско поље $\xi = e_6$ одабрани у овом поглављу, прилагођени датој фамилији, гласе

$$\begin{aligned}
e_1 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(\kappa \tilde{E}_2 + \mu \tilde{E}_3), & e_2 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\tilde{E}_1,\\
e_3 &= \tfrac{1}{2}(\tilde{E}_1 + 2\tilde{F}_1), & e_4 &= \tfrac{1}{2}(\kappa(\tilde{E}_3 + 2\tilde{F}_3) - \mu(\tilde{E}_2 + 2\tilde{F}_2)),\\
e_5 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(\mu \tilde{E}_2 - \kappa \tilde{E}_3), & e_6 &= \xi = \tfrac{1}{2}(\kappa \tilde{E}_2 + \mu \tilde{E}_3) + (\kappa \tilde{F}_2 + \mu \tilde{F}_3),
\end{aligned}$$

где је $\kappa = \dfrac{y_1 y_3 + y_2 y_4}{kl}$, $\mu = \dfrac{y_2 y_3 - y_1 y_4}{kl}$.

Сада се директно проверава да важи услов $P\xi = -\xi$. Изводи функција κ, μ у правцу векторских поља $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_3$ дати су редом са

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1(\kappa) &= -2\mu, & \tilde{F}_2(\kappa) &= \frac{k^2 - l^2}{kl}, & \tilde{F}_3(\kappa) &= 0,\\
\tilde{F}_1(\mu) &= 2\kappa, & \tilde{F}_2(\mu) &= 0, & \tilde{F}_3(\mu) &= \frac{k^2 - l^2}{kl},
\end{aligned}$$

одакле се добија матрица оператора облика

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{6} & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & \dfrac{\sqrt{3}}{6}\\
0 & \dfrac{\sqrt{3}}{6} & -1 & \dfrac{l^2 - k^2}{kl} & 0\\
0 & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Кристофелови симболи који се појављују у матрици оператора облика су

$$\omega_{31}^2 = 0, \qquad \omega_{31}^5 = 1, \qquad \omega_{41}^5 = \frac{k^2 - l^2}{kl},$$

па су свих пет главних кривина константне и износе (до на знак)

$$0, \qquad \frac{-3k \pm \sqrt{9k^2 + 3l^2}}{6l}, \qquad \frac{3l \pm \sqrt{3k^2 + 9l^2}}{6k}.$$

Класификација хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са произвољним $\mathcal{P}-$главним нормалним векторским пољем је озбиљнији проблем јер је та класа векторских поља прешироко. Међутим, у свим познатим примерима оваквих хиперповрши важи да је функција θ таква да је $P\xi = \cos\theta\xi + \sin\theta J\xi$ заправо константна. Зато се природно намеће као додатни услов и та претпоставка, па за такву хиперповрш кажемо да има $\mathcal{P}-$**искошено нормално векторско поље**. Испоставља се да је њихова класификација заиста и могућа и своди се на већ поменуте хиперповрши.

Ова класа хиперповрши има, наравно, доста сличности са искошененим подмногострукостима M Келерових многострукости $\widetilde{M}$. Наиме, уколико произвољно векторско поље JX, $X \in TM$, заклапа константан угао са тангентном равни T_pM, за сваку тачку p, тј. тај угао не зависи од одабира тачке p и векторског поља X, за подмногострукост M се каже да је искошена. Поменути угао назива се Виртингеровим углом који узима константну вредност из сегмента $[0, \frac{\pi}{2}]$, при чему је једнак 0 ако и само ако је подмногострукост скоро комплексна, а $\frac{\pi}{2}$ ако и само ако је подмногострукост тотално реална. Искошене подмногострукости са вредношћу угла у интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$ називају се строго искошеним. Уколико је амбијентна многострукост шестодимензиона и близу Келерова, све строго искошене подмногострукости морају бити дводимензионе (видети [3]).

Приметимо да се наша дефиниција хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са $\mathcal{P}-$искошененом нормалом ипак односи само на константан угао између векторског поља $P\xi$ и холоморфне равни разапете са $\xi, J\xi$, а не на произвољно векторско поље PX и холоморфне равни разапете са X, JX. Та претпоставка ипак јесте довољна да векторско поље $P\xi$ заклапа константан угао са тангентном равни хиперповрши у произвољној тачки, што оправдава уведену терминологију. Наиме, пројекција векторског поља $P\xi$ на тангентну раван у одговарајућој тачки је колинеарна са $J\xi$, па је тај угао једнак $|\frac{\pi}{2} - \theta|$.

Нека је, слично као и раније, $e_1 = J\xi = -U$ и e_2 вектор ортогоналан на e_1, такав да је $Pe_2 = e_2$. Ако дефинишемо $e_3 = Je_2$, добијамо, као и раније, да је $G(e_1, e_2)$ ортогонално на e_1, e_2 и e_3. Користећи (2.20), закључујемо да је $\|G(e_1, e_2)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, па бирајући $e_4 = \sqrt{3}G(e_1, e_2)$ и $e_5 = \sqrt{3}JG(e_1, e_2)$, добијамо ортонормирану базу $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ на TM.

Тензор $G(\cdot, \cdot)$ је комплетно одређен на бази $\{e_1, \ldots, e_5\}$ истим формулама као на почетку овог поглавља. Такође, релације (6.1), (6.2), (6.3) остају на снази. Користећи (2.12) и одабрану базу, као и претпоставку $Pe_6 = \cos\theta e_6 + \sin\theta e_1$, рачунамо $Pe_1 = -\cos\theta e_1 + \sin\theta e_6$ и $Pe_3 = -e_3$. Такође, добијамо да је

$$\begin{aligned} Pe_4 = \sqrt{3}PG(e_1, e_2) &= -\sqrt{3}G(Pe_1, Pe_2) \\ &= -\sqrt{3}G(-\cos\theta e_1 + \sin\theta e_6, e_2) \\ &= \cos\theta e_4 - \sin\theta e_5, \\ Pe_5 = PJe_4 &= -JPe_4 \\ &= -J(\cos\theta e_4 - \sin\theta e_5) \\ &= -\sin\theta e_4 - \cos\theta e_5, \end{aligned}$$

па је дејство скоро продукт структуре P на бази потпуно одређено.

Случајеви $P\xi = \pm\xi$ и $P\xi = \pm J\xi$ су већ размотрени, па можемо надаље претпоставити да је $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из дефиниције коваријантног извода скоро продукт структуре $(\tilde{\nabla}_X P)Y$ и последње релације у (2.12), узимајући назначена векторска поља за X и Y, закључујемо да функције ω_{ij}^k задовољавају следеће везе:

- $X = e_1$, $Y = e_1, \ldots, e_6$

$$\omega_{12}^3 = 0, \quad \omega_{14}^5 = 0, \quad \omega_{11}^5 = \mathrm{ctg}\theta\omega_{11}^4 \quad \omega_{11}^3 = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\omega_{11}^2, \quad \omega_{32}^3 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\left(\omega_{13}^4 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right);$$

- $X = e_2$, $Y = e_1, \ldots, e_6$

$$\omega_{22}^3 = 0, \quad \omega_{12}^2 = 0, \quad \omega_{21}^3 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\omega_{21}^2 \quad \omega_{23}^5 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\omega_{23}^4, \quad \omega_{21}^5 = \mathrm{ctg}\theta\omega_{21}^4 - \frac{\sqrt{3}}{6};$$

- $X = e_3$, $Y = e_1, \ldots, e_6$

$$\omega_{32}^3 = 0, \qquad \omega_{31}^2 = \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\omega_{21}^2, \qquad \omega_{33}^5 = \frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\omega_{33}^4, \qquad \omega_{31}^5 = \mathrm{ctg}\theta\left(\omega_{31}^4 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right);$$

- $X = e_4$, $Y = e_1, \dots, e_6$

$$\omega_{42}^3 = 0, \qquad \omega_{11}^3 = 0, \qquad \omega_{41}^5 = \mathrm{ctg}\theta\omega_{41}^4, \qquad \omega_{43}^5 = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\omega_{43}^4,$$

$$\omega_{31}^4 = \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\omega_{21}^4 + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}\cos\theta};$$

- $X = e_5$, $Y = e_1, \dots, e_6$

$$\omega_{52}^3 = 0, \quad \omega_{51}^4 = -\mathrm{tg}\theta\omega_{41}^4, \quad \omega_{53}^5 = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\omega_{53}^4, \quad 2\cos\theta - 1 = 0, \quad \mathrm{tg}\theta = 2\sin\theta;$$

одакле је $\cos\theta = \frac{1}{2}$, тј. $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Према томе, доказали смо следеће тврђење.

Лема 6.1. *Уколико је нормално векторско поље хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ $\mathcal{P}-$искошено, једине могућности за константну угаону функцију θ су (до на 2π) $\theta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$, тј. мора да важи $P\xi = -\xi$, $P\xi = \frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi$ или $P\xi = \frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi$.*

Нека је хиперповрш која задовољава услов $P\xi = \frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi$ и $M' = \mathcal{F}_2(M)$ њена слика при изометрији $\mathcal{F}_2$. Тада је $\xi' = d\mathcal{F}_2(\xi)$ јединична нормала хиперповрши M'. Користећи формуле из Пропозиције 2.2, добијамо

$$\begin{aligned}
P\xi' &= Pd\mathcal{F}_2(\xi) = d\mathcal{F}_2(P_3(\xi)) \\
&= d\mathcal{F}_2(-\frac{1}{2}P\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}JP\xi) \\
&= d\mathcal{F}_2(-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{1}{2}J\xi)) \\
&= d\mathcal{F}_2(-\xi) \\
&= -\xi',
\end{aligned}$$

па хиперповрш M' задовољава све услове Пропозиција 6.1 и 6.2, као и Теорема 6.3 и 6.4.

Слично тако, ако је хиперповрш која задовољава услов $P\xi = \frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi$, $M'' = \mathcal{F}_1(M)$ њена слика при изометрији $\mathcal{F}_1$ и $\xi'' = d\mathcal{F}_1(\xi)$ јединична нормала, аналогно као за M' добијамо

$$\begin{aligned}
P\xi'' &= Pd\mathcal{F}_1(\xi) = d\mathcal{F}_1(P\xi) \\
&= d\mathcal{F}_1(\frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi) = \frac{1}{2}d\mathcal{F}_1(\xi) - \frac{\sqrt{3}}{2}d\mathcal{F}_1(J\xi) \\
&= \frac{1}{2}\xi'' + \frac{\sqrt{3}}{2}Jd\mathcal{F}_1(\xi) \\
&= \frac{1}{2}\xi'' + \frac{\sqrt{3}}{2}J\xi''.
\end{aligned}$$

Заједно са претходно добијеним резултатима, видимо да хиперповрш $\bar{M} = (\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1)(M) = \mathcal{F}_2(M'')$ задовољава све потребне услове. Према томе, класификацију до на изометрију облика $\mathcal{F}_{abc}$ добијамо применом претходних резултата, на хиперповрши M', односно $\bar{M}$.

Последица 6.1. *Све хиперповрши од* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *са* $\mathcal{P}-$*искошеном нормалом* ξ *су Хопфове хиперповрши, које имају* 3 *или* 5 *различитих главних кривина, при чему је главна кривина која одговара главном векторском пољу* $J\xi$ *константна и једнака* 0. *Уколико је број различитих главних кривина једнак* 3, *оне су још и константне.*

Како важи

$$\mathcal{F}_{abc} \circ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_{bac}, \qquad \mathcal{F}_{abc} \circ \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_{cba},$$

као и то да су $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ инволуције, класификација хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са $\mathcal{P}-$искошеном нормалом, до на изометрије $\mathcal{F}_{abc}$, је завршена.

Теорема 6.5. *Једине хиперповрши од* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *са* $\mathcal{P}-$*искошеном нормалом, које имају три главне кривине, дате су до на изометрију* $\mathcal{F}_{abc}$ *имерзијама* $f_{1,r}$, $f_{2,r}$, $f_{3,r}$, $r \in (0, 1]$.

Глава 7

Хиперповрши са $\mathcal{P}-$изотропним нормалним векторским пољем

У овом поглављу бавићемо се класификацијом специјалне класе хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, са нормалним векторским пољем које је $\mathcal{P}-$изотропно. Добијени резултати објављени су у коауторском раду [23].

Нека је (M, g, ∇) хиперповрш од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, са наслеђеном метриком g и Леви-Чивита конексијом ∇. Додатно, претпоставимо да је јединично нормално векторско поље ξ хиперповрши M једно $\mathcal{P}-$изотропно векторско поље. Како је $P\xi \perp \xi$ и $P\xi \perp J\xi$, димензија дистрибуције $\{\xi, J\xi, P\xi, JP\xi\}$ је 4 и можемо одабрати локално покретну базу тангентног простора $T_{(p,q)}M$ у произвољној тачки $(p,q) \in M$ хиперповрши на следећи начин. За прва три вектора базе бирамо $e_1 = J\xi$, $e_2 = P\xi$, $e_3 = JP\xi$ јер знамо су они међусобно ортонормирани.

Даље, користећи (2.20), закључујемо да је $\|G(\xi, P\xi)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Примењујући (1.2), (1.3), (1.5), (1.7), закључујемо да је $G(\xi, P\xi)$ ортогонално на e_1, e_2, e_3

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(G(\xi, P\xi), J\xi) &= -\tilde{g}(G(\xi, J\xi), P\xi) = 0,\\
\tilde{g}(G(\xi, P\xi), P\xi) &= -\tilde{g}(G(P\xi, \xi), P\xi) = \tilde{g}(G(P\xi, P\xi), \xi) = 0,\\
\tilde{g}(G(\xi, P\xi), JP\xi) &= -\tilde{g}(G(P\xi, \xi), JP\xi) = \tilde{g}(G(P\xi, JP\xi), \xi) = 0.
\end{aligned}$$

Исти закључак важи и за $JG(\xi, P\xi)$, па је коначно локална покретна ортонормирана база дата са

$$e_1 = J\xi,\ e_2 = P\xi,\ e_3 = JP\xi,\ e_4 = \sqrt{3}G(\xi, e_2),\ e_5 = \sqrt{3}JG(\xi, e_2). \tag{7.1}$$

Тензор $G(\cdot, \cdot)$ је комплетно одређен на базним векторима $\{e_1, \ldots, e_5\}$:

$$\begin{array}{lll}
G(e_1, e_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_5, & G(e_2, e_3) = 0, & G(e_3, e_5) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\xi,\\
G(e_1, e_3) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_4, & G(e_2, e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}\xi, & G(e_3, \xi) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_5,\\
G(e_1, e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, & G(e_2, e_5) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_1, & G(e_4, e_5) = 0,\\
G(e_1, e_5) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, & G(e_2, \xi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_4, & G(e_4, \xi) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_2,\\
G(e_1, \xi) = 0, & G(e_3, e_4) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_1, & G(e_5, \xi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_3.
\end{array}$$

Поред оних релација које следе на основу одабира базе и формула (1.7), (1.5), имамо још, користећи (1.6), (1.7)

$$G(e_1, e_2) = G(J\xi, P\xi) = -JG(\xi, P\xi) = -\frac{1}{\sqrt{3}} Je_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} e_5,$$
$$G(e_1, e_2) = G(J\xi, JP\xi) = -G(\xi, P\xi) = -\frac{1}{\sqrt{3}} e_4.$$

Користећи (4.1) и дефиницију тензора G, примењујући их на базним векторима $\{e_1, \dots, e_5\}$, добијамо следеће релације:

$$\begin{aligned}
&h_{12} = -\omega_{11}^3, && h_{22} = -\omega_{21}^3, && h_{33} = \omega_{31}^2, && h_{44} = -\omega_{41}^5, && h_{55} = \omega_{51}^4,\\
&h_{13} = \omega_{11}^2, && h_{23} = \omega_{21}^2, && h_{34} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \omega_{31}^5, && h_{45} = \omega_{41}^4, &&\\
&h_{14} = -\omega_{11}^5, && h_{24} = -\omega_{21}^5, && h_{35} = \omega_{31}^4, && &&\\
&h_{15} = \omega_{11}^4, && h_{25} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \omega_{21}^4, && && &&
\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_{41}^2 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} - \omega_{31}^5, && \omega_{13}^4 = -\omega_{12}^5, && \omega_{33}^5 = \omega_{32}^4, && \omega_{51}^2 = \omega_{31}^4,\\
&\omega_{51}^3 = -\tfrac{2}{\sqrt{3}} - \omega_{21}^4, && \omega_{13}^5 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} + \omega_{12}^4, && \omega_{43}^4 = -\omega_{42}^5, && \omega_{53}^5 = \omega_{52}^4,\\
&\omega_{31}^3 = -\omega_{21}^2, && \omega_{23}^4 = -\omega_{22}^5, && \omega_{43}^5 = \omega_{42}^4, && \omega_{33}^4 = -\omega_{32}^5,\\
&\omega_{51}^5 = -\omega_{41}^4, && \omega_{23}^5 = \omega_{22}^4, && \omega_{53}^4 = -\omega_{52}^5, && \omega_{41}^3 = \omega_{21}^5.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Из дефиниције коваријантног извода тензора $(\tilde{\nabla} G)(X, Y, Z)$ и формуле (2.21), даље добијамо:

$$\begin{aligned}
&h_{11} = \omega_{14}^5 + \omega_{12}^3,\\
&\omega_{24}^5 = -\omega_{22}^3 - \omega_{11}^3, \quad \omega_{34}^5 = -\omega_{32}^3 + \omega_{11}^2,\\
&\omega_{44}^5 = -\omega_{11}^5 - \omega_{42}^3, \quad \omega_{54}^4 = \omega_{11}^4 - \omega_{52}^3.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Даље, користећи дефиницију коваријантног извода тензора $(\tilde{\nabla}_X P)Y$ и последњу формулу у (2.12), закључујемо да функције ω_{ij}^k задовољавају:

$$\begin{aligned}
&\omega_{11}^3 = 0, && \omega_{21}^2 = 0, && \omega_{21}^5 = 0, && \omega_{12}^5 = \omega_{11}^4, && \omega_{32}^4 = \omega_{31}^5 - \tfrac{1}{2\sqrt{3}}, && \omega_{52}^3 = \omega_{11}^4,\\
&\omega_{14}^5 = 0, && \omega_{32}^3 = 0, && \omega_{31}^5 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, && \omega_{42}^4 = \omega_{41}^5, && \omega_{12}^4 = \omega_{11}^5 + \tfrac{1}{2\sqrt{3}}, && \omega_{52}^5 = \omega_{51}^4,\\
&\omega_{11}^2 = 0, && \omega_{22}^3 = 0, && \omega_{21}^4 = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, && \omega_{42}^5 = \omega_{41}^4, && \omega_{22}^5 = \omega_{21}^4 + \tfrac{1}{2\sqrt{3}}, && \omega_{32}^5 = \omega_{31}^4,\\
&\omega_{21}^3 = 0, && \omega_{31}^2 = 0, && \omega_{31}^4 = 0, && \omega_{22}^4 = \omega_{21}^5, && \omega_{42}^3 = -\omega_{11}^5, && \omega_{52}^4 = -\omega_{41}^4.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Сада ћемо на два начина израчунати вредности тензора кривине, по дефиницији $\tilde{R}_{XY} Z = [\tilde{\nabla}_x, \tilde{\nabla}_Y] Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$ и користећи израз (2.17) за $\tilde{R}$. Одавде следи да функције ω_{ij}^k задовољавају следеће диференцијалне једначине:

$$\begin{aligned}
&e_2(\omega_{12}^3) = -(\omega_{11}^4)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_{11}^5 + (\omega_{11}^5)^2,\\
&e_2(\omega_{41}^5) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_{11}^5 + (\omega_{41}^4)^2 - (\omega_{41}^5)^2,
\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$
\begin{aligned}
e_3(\omega_{12}^3) &= \frac{4}{\sqrt{3}}\omega_{11}^4 - 2\omega_{11}^4\omega_{11}^5,\\
e_3(\omega_{11}^5) &= (-\frac{2}{\sqrt{3}} + \omega_{11}^5)\omega_{41}^4 + \omega_{11}^4\omega_{41}^5,\\
e_3(\omega_{41}^5) &= 2\omega_{41}^4\omega_{41}^5,
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

$$
\begin{aligned}
e_1(\omega_{41}^5) &= \omega_{11}^4(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\omega_{11}^5) - \omega_{12}^3\omega_{41}^4 + e_4(\omega_{11}^5),\\
e_1(\omega_{41}^4) &= -(\omega_{11}^4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{11}^5 + (\omega_{11}^5)^2 - (\omega_{41}^4)^2 + \omega_{41}^5(\omega_{12}^3 - \omega_{51}^4) + e_4(\omega_{11}^4),\\
e_4(\omega_{12}^3) &= -3\omega_{11}^5\omega_{41}^4 + \omega_{11}^4(\omega_{12}^3 + 3\omega_{41}^5) - e_1(\omega_{11}^5),
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

$$
\begin{aligned}
e_2(\omega_{11}^5) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{12}^3 + \omega_{11}^4\omega_{41}^4 - (\frac{2}{\sqrt{3}} + \omega_{11}^5)\omega_{41}^5,\\
e_2(\omega_{11}^4) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{41}^4 - \omega_{11}^5\omega_{41}^4 - \omega_{11}^4\omega_{51}^4,\\
e_3(\omega_{11}^4) &= \omega_{11}^4\omega_{41}^4 - \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{12}^3 + \omega_{51}^4(\frac{2}{\sqrt{3}} - \omega_{11}^5),
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

$$
\begin{aligned}
e_5(\omega_{12}^3) &= \omega_{11}^5(\omega_{12}^3 - 3\omega_{51}^4) - 3\omega_{11}^4\omega_{41}^4 + e_1(\omega_{11}^4),\\
e_5(\omega_{11}^5) &= 2(\omega_{41}^4)^2 + \omega_{41}^5(2\omega_{51}^4 - \omega_{12}^3) + \omega_{12}^3\omega_{51}^4 - e_4(\omega_{11}^4),\\
e_1(\omega_{51}^4) &= \omega_{11}^4(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\omega_{11}^5) - \omega_{12}^3\omega_{41}^4 + e_5(\omega_{11}^4),
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

$$
\begin{aligned}
e_2(\omega_{41}^4) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{11}^4 - \omega_{41}^4(\omega_{41}^5 + \omega_{51}^4),\\
e_2(\omega_{51}^4) &= -\frac{2}{3} + (\omega_{41}^4)^2 - (\omega_{51}^4)^2,\\
e_3(\omega_{51}^4) &= -\frac{4}{\sqrt{3}}\omega_{11}^4 + 2\omega_{41}^4\omega_{51}^4,
\end{aligned} \tag{7.11}
$$

$$
\begin{aligned}
e_3(\omega_{41}^4) &= \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{11}^5 + (\omega_{41}^4)^2 - \omega_{41}^5\omega_{51}^4,\\
e_5(\omega_{41}^5) &= -\omega_{11}^4\omega_{41}^4 + (\frac{1}{\sqrt{3}} + \omega_{11}^5)\omega_{41}^5 + (\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\omega_{11}^5)\omega_{51}^4 - e_4(\omega_{41}^4),\\
e_4(\omega_{51}^4) &= (\frac{2}{\sqrt{3}} + \omega_{11}^5)\omega_{41}^4 + (-2\omega_{41}^5 + \omega_{51}^4)\omega_{11}^4 + e_5(\omega_{41}^4).
\end{aligned} \tag{7.12}
$$

Интересантно је да се већ из до сада добијених формула, без познавања саме класификације хиперповрши од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са $\mathcal{P}-$изотропним нормалним векторским пољем, може доказати да не постоје две важне класе таквих хиперповрши.

Пропозиција 7.1. *Не постоје минималне хиперповрши близу Келерове многострукости* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *са* $\mathcal{P}-$*изотропним нормалним векторским пољем.*

Доказ. Из додатног услова минималности

$$h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) + h(e_3, e_3) + h(e_4, e_4) + h(e_5, e_5) = 0,$$

као и (7.2), (7.4), (7.5), добијамо додатну везу међу непознатим функцијама

$$\omega_{51}^4 = -\omega_{12}^3 + \omega_{41}^5. \tag{7.13}$$

Сада се, користећи (7.13), једначине (7.6)-(7.12) своде на

$$\begin{aligned}
e_2(\omega_{11}^4) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{41}^4 - \omega_{11}^5\omega_{41}^4 + \omega_{11}^4(\omega_{12}^3 - \omega_{41}^5),\\
e_3(\omega_{11}^4) &= \omega_{11}^4\omega_{41}^4 + (\frac{2}{\sqrt{3}} - \omega_{11}^5)\omega_{41}^5 + (-\frac{4}{\sqrt{3}} + \omega_{11}^5)\omega_{12}^3,\\
e_5(\omega_{12}^3) &= 4\omega_{11}^5\omega_{12}^3 - 3\omega_{11}^4\omega_{41}^4 - 3\omega_{11}^5\omega_{41}^5 + e_1(\omega_{11}^4),\\
e_5(\omega_{11}^5) &= -(\omega_{12}^3)^2 - 2\omega_{12}^3\omega_{41}^5 + 2((\omega_{41}^4)^2 + (\omega_{41}^5)^2) - e_4(\omega_{11}^4),\\
e_5(\omega_{11}^4) &= e_4(\omega_{11}^5) - e_1(\omega_{12}^3),\\
e_2(\omega_{41}^4) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{11}^4 + \omega_{12}^3\omega_{41}^4 - 2\omega_{41}^4\omega_{41}^5,\\
e_3(\omega_{41}^4) &= \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{11}^5 + (\omega_{41}^4)^2 - (\omega_{41}^5)^2 + \omega_{12}^3\omega_{41}^5,\\
e_5(\omega_{41}^5) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{12}^3 + 2\omega_{12}^3\omega_{11}^5 - \omega_{11}^4\omega_{41}^4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{41}^5 - \omega_{11}^5\omega_{41}^5 - e_4(\omega_{41}^4),\\
e_5(\omega_{41}^4) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{41}^4 + 2\omega_{11}^5\omega_{41}^4 - 2\omega_{11}^4\omega_{41}^5 + e_1(\omega_{11}^5) + e_4(\omega_{41}^5).
\end{aligned}$$

Слично као и раније, из дефиниције тензора кривине $\tilde{R}$ на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и формуле (2.17), бирајући векторе e_3, e_5, e_1 и e_2, e_5, e_1, добијамо

$$\begin{gathered}
\omega_{11}^4\omega_{11}^5 + \omega_{12}^3\omega_{41}^4 = 0,\\
(\omega_{11}^4)^2 - (\omega_{11}^5)^2 + \omega_{12}^3(\omega_{12}^3 - 2\omega_{41}^5) = 0.
\end{gathered} \tag{7.14}$$

Претпоставимо прво да је $\omega_{12}^3 \neq 0$. Из (7.14) следи да је $\omega_{41}^5 = \frac{(\omega_{11}^4)^2 - (\omega_{11}^5)^2 + (\omega_{12}^3)^2}{2\omega_{12}^3}$ и $\omega_{41}^4 = -\frac{\omega_{11}^4\omega_{11}^5}{\omega_{12}^3}$. Сада из тензора кривине, израженог на поменута два начина на векторима e_1, e_4, e_6, добијамо изводе

$$\begin{aligned}
e_4(\omega_{11}^5) =& \frac{1}{6(\omega_{12}^3)^2}\{-2\omega_{11}^4(\omega_{12}^3)^2(\sqrt{3} - 3\omega_{11}^5) + 6\omega_{11}^4\omega_{12}^3 e_1(\omega_{11}^4) - 6\omega_{11}^5\omega_{12}^3 e_1(\omega_{11}^5) +\\
&+ 3(-(\omega_{11}^4)^2 + (\omega_{11}^5)^2 + (\omega_{12}^3)^2)e_1(\omega_{12}^3)\},\\
e_4(\omega_{11}^4) =& \frac{1}{12(\omega_{12}^3)^2}\{2(\omega_{12}^3)^2[3(\omega_{11}^4)^2 - \omega_{11}^5\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}\omega_{11}^5)] - 9(\omega_{12}^3)^4]\\
&- 12\omega_{12}^3[\omega_{11}^5 e_1(\omega_{11}^4) + \omega_{11}^4 e_1(\omega_{11}^5) + 3[((\omega_{11}^4)^2 + (\omega_{11}^5)^2)^2 + 4\omega_{11}^4\omega_{11}^5 e_1(\omega_{12}^3)]\}.
\end{aligned}$$

Даље, тензор кривине на векторима e_2, e_4, e_1 даје $\omega_{11}^4 = 0$. Према томе, из $e_3(\omega_{11}^4) = 0$ и $e_4(\omega_{11}^4) = 0$, изводимо

$$0 = (-2\sqrt{3} + 3)(\omega_{11}^5)^2 - 3(2\sqrt{3} - \omega_{11}^5)(\omega_{12}^3)^2, \tag{7.15}$$

$$0 = 3(\omega_{11}^5)^4 - 4\sqrt{3}\omega_{11}^5(\omega_{12}^3)^2 - 6(\omega_{11}^5)^2(\omega_{12}^3)^2 - 9(\omega_{12}^3)^4. \tag{7.16}$$

Додатно, користећи тензор кривине на векторима e_2, e_4, e_1, додатно добијамо

$$8 + 4\sqrt{3}\omega_{11}^5 + 6(\omega_{11}^5)^2 + 4\sqrt{3}\frac{(\omega_{11}^5)^3}{(\omega_{12}^3)^2} + 3\frac{(\omega_{11}^5)^4}{(\omega_{12}^3)^2} + 3(\omega_{12}^3)^2 = 0. \tag{7.17}$$

Сада се може лако проверити да једначине (7.15), (7.16), (7.17) дају контрадикцију.

Дакле, можемо претпоставити да је $\omega_{12}^3 = 0$. Користећи (7.14) добијамо $\omega_{11}^4 = \omega_{11}^5 = 0$. Такође, користећи (7.7) за $e_3(\omega_{11}^5)$, имамо $\omega_{41}^4 = 0$, док из (7.9) за $e_2(\omega_{11}^5)$, следи $\omega_{41}^5 = 0$. Контрадикција сада следи из (7.12), чиме је доказ завршен.

Пропозиција 7.2. *Не постоје Хопфове хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ са $\mathcal{P}-$изотропним нормалним векторским пољем.*

Доказ. Користећи (7.2) и (7.3), заједно са свим добијеним везама које функције ω_{ij}^k задовољавају под условом да је јединично нормално векторско поље ξ $\mathcal{P}-$изотропно, оператор облика хиперповрши M представљен је матрицом

$$\begin{pmatrix} \omega_{12}^3 & 0 & 0 & -\omega_{11}^5 & \omega_{11}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ -\omega_{11}^5 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\omega_{41}^5 & \omega_{41}^4 \\ \omega_{11}^4 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \omega_{41}^4 & \omega_{51}^4 \end{pmatrix}.$$

Претпоставимо сада, додатно, да је хиперповрш M Хопфова, односно да је $J\xi$ векторско поље главних вектора. Тада, користећи матрицу оператора облика, закључујемо да је

$$\omega_{11}^4 = \omega_{11}^5 = 0.$$

Сада, користећи (7.7) за $e_3(\omega_{11}^5)$ добијамо

$$\omega_{41}^4 = 0.$$

Рачунајући $e_2(\omega_{11}^5)$ и $e_3(\omega_{11}^4)$ из (7.9), добијамо редом

$$\omega_{12}^3 = -\omega_{41}^5, \qquad \omega_{12}^3 = \omega_{51}^4.$$

С друге стране, рачунајући $e_3(\omega_{41}^4)$ из (7.12), добијамо контрадикцију.

Теорема 7.1. *Нека је M реална хиперповрш близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ чије је нормално векторско поље $\mathcal{P}$-изотропно. Тада је имерзија $f : M \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ дата са*

$$(u, v, x, y, z) \mapsto f(u, v, x, y, z) = (a(x, y, z)\tilde{p}(u, v)\bar{c}(x, y, z), b(x, y, z)\tilde{q}(u, v)\bar{c}(x, y, z)), \tag{7.18}$$

где је

• $(\tilde{p}, \tilde{q}) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *дато са*

(7.19)
$$\tilde{p}(u,v) = \left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}u-v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}u-v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}+\tfrac{v}{2}\right), \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}+\tfrac{v}{2}\right)\right),$$
$$\tilde{q}(u,v) = \left(-\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}u+v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}u+v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}-\tfrac{v}{2}\right), -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}-\tfrac{v}{2}\right)\right);$$

• *јединични кватерниони* a, b, c *су решења следећег система ПДЈ*

$$\begin{aligned} a_x &= a\eta_1,\ b_x = b\eta_2,\ c_x = c\eta_3,\\ a_y &= a\delta_1,\ b_y = b\delta_2,\ c_y = c\delta_3,\\ a_z &= a\mu_1,\ b_z = b\mu_2,\ c_z = c\mu_3, \end{aligned} \tag{7.20}$$

за коефицијенте η_i, δ_i, μ_i, $i = 1, 2, 3$ *који задовољавају услове*

$$\begin{aligned} \langle\eta_1, i\rangle + \langle\eta_2, i\rangle + \langle\eta_3, i\rangle = 0,\\ \langle\delta_1, i\rangle + \langle\delta_2, i\rangle + \langle\delta_3, i\rangle = 0,\\ \langle\mu_1, i\rangle + \langle\mu_2, i\rangle + \langle\mu_3, i\rangle = 0. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Доказ. Од сада ћемо увек претпостављати да $\{e_1, \ldots, e_5\}$ означава ортонормирану базу у тачки $(r, s) \in M$, одабрану раније, под претпоставком да је M реална хиперповрш близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, са $\mathcal{P}-$изотропним нормалним векторским пољем.

Приметимо да важи
$$[e_2, e_3] = 0,$$
па векторска поља e_2, e_3 одговарају координатним векторским пољима у тачки $T_{(r,s)}M$, тј. можемо одабрати локално координате u, v, x, y, z такве да је $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ база у $T_{(r,s)}M$ и

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial u},\ e_3 = \frac{\partial}{\partial v}. \tag{7.22}$$

Сада рачунамо

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_5, \quad \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_5, \quad \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v} = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_4 \tag{7.23}$$

одакле закључујемо да за сваку тачку (x, y, z), вектори $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ разапињу тангентни простор неке површи $S \subset M^5$. Како је $Je_2 = e_3$ и $Je_3 = -e_2$, следи да је S скоро комплексна површ. Главни резултати о скоро комплексним површима у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ могу се наћи у радовима [10], [19].

Даље, из (7.23), сада следи да је S равна површ, која није тотално геодезијска, због

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v} = 0,$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e_5, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_4, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_5.$$

Коначно, како је

$$P\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \xi, \quad P\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = -J\xi,$$

важи да је $P(TS) \subset T^{\perp}S$. У раду [10] успостављена је $1-1$ кореспонденција између просто-повезаних скоро комплексних површи $\phi : S \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и тзв. $H-$површи $X : M \to \mathbb{R}^3$ у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$, дефинисаних следећом парцијалном диференцијалном једначином

$$X_{xx} + X_{yy} = -\frac{4}{\sqrt{3}} X_x \times X_y.$$

При томе су две комплексне површи изометричне ако и само ако су одговарајуће $H-$пов–рши изометричне. Штавише, скоро комплексне површи које задовољавају додатни услов $P(TS) \subset T^{\perp}S$, у поменутој кореспонденцији локално одговарају површима константне средње кривине $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ у $\mathbb{E}^3$, при чему се метрике на овим двема површима поклапају до на фактор 2. Примењујући те резултате, добијамо да нашој површи S одговара нека равна површ, константне средње кривине у $\mathbb{E}^3$. Како су једине површи у $\mathbb{E}^3$ са константном Гаусовом и средњом кривином раван, кружни цилиндар или сфера, и још је S равна и није тотално геодезијска, S мора бити у кореспонденцији са кружним цилиндром у $\mathbb{E}^3$.

Сада ћемо добити прецизније информације о имерзији скоро комплексне површи S у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, користећи изотермалне координате (u, v). Нека је $\phi : S \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 : (u, v) \mapsto (p(u, v), q(u, v))$ скоро комплексна имерзија, где су (u, v) изотермалне координате на површи S. Означаваћемо парцијалне изводе индексирањем оном променљивом по којој диференцирамо, тј. $\phi_u = (p_u, q_u)$, $\phi_v = (p_v, q_v)$. Како су координате изотермалне, уз замену u и v ако је неопходно, можемо претпоставити да је $\phi_v = J\phi_u$. Штавише, како су p и q јединични вектори, можемо изразити тангентне векторе ϕ_u, ϕ_v на S као

$$\begin{aligned} \phi_u &= (p(u, v)\alpha_1(u, v), q(u, v)\beta_1(u, v)), \\ \phi_v &= (p(u, v)\alpha_2(u, v), q(u, v)\beta_2(u, v)), \end{aligned} \tag{7.24}$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ имагинарни кватерниони, скуп који идентификујемо са $\mathbb{R}^3$ на уобичајан начин. Како за имагинарне кватернионе важи (2.13), користећи (7.24), добијамо

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= (p[-\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \mathrm{Id} + \alpha_{1u}], q[-\langle \beta_1, \beta_1 \rangle \mathrm{Id} + \beta_{1u}]), \\ \phi_{uv} &= (p[-\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \mathrm{Id} + \alpha_2 \times \alpha_1 + \alpha_{1v}], q[-\langle \beta_1, \beta_2 \rangle \mathrm{Id} + \beta_2 \times \beta_1 + \beta_{1v}]), \\ \phi_{vu} &= (p[-\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \mathrm{Id} + \alpha_1 \times \alpha_2 + \alpha_{2u}], q[-\langle \beta_1, \beta_2 \rangle \mathrm{Id} + \beta_1 \times \beta_2 + \beta_{2u}]), \\ \phi_{vv} &= (p[-\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle \mathrm{Id} + \alpha_{2v}], q[-\langle \beta_2, \beta_2 \rangle \mathrm{Id} + \beta_{2v}]). \end{aligned} \tag{7.25}$$

Опет, како су координате изотермалне, из дефиниције (2.6) скоро комплексне структуре J и дефиниције (2.7) близу Келерове метрике $\tilde{g}$, следи

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1, \quad \beta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2. \tag{7.26}$$

Из формуле (2.15), рачунамо

$$\langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1, \quad \langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0, \quad \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1,$$

као и дужине од ϕ_u, ϕ_v, користећи (7.24). Следи да је

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + \langle \beta_1, \beta_1 \rangle = 1, \quad \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + \langle \beta_2, \beta_2 \rangle = 1, \quad \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + \langle \beta_1, \beta_2 \rangle = 1.$$

Коначно, након замене β_1, β_2 из (7.26), добијамо

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0.$$

Даље, користићемо релацију (2.14) да бисмо израчунали

$$\nabla^E_{\phi_u} \phi_u = -\frac{2}{\sqrt{3}} e_5, \quad \nabla^E_{\phi_u} \phi_v = \nabla^E_{\phi_v} \phi_u = \frac{1}{\sqrt{3}} e_4, \quad \nabla^E_{\phi_v} \phi_v = 0. \tag{7.27}$$

Како је $e_4 = \sqrt{3} G(Pe_2, e_2)$, $e_5 = \sqrt{3} JG(Pe_2, e_2)$ из (7.1) и (2.22), изразићемо e_4 и e_5 као

$$e_4 = \sqrt{3}(p(-\alpha_1 \times \alpha_2), q(-\alpha_1 \times \alpha_2)), \quad e_5 = (p(-\alpha_1 \times \alpha_2), q(\alpha_1 \times \alpha_2)). \tag{7.28}$$

Пошто је $\nabla^E_{\phi_u} \phi_u$ тангентни део од ϕ_{uu}, упоређујући тангентне и нормалне делове, као и за $\phi_{uv}, \phi_{vu}, \phi_{vv}$, уз (7.27) и (7.28), закључујемо

$$\alpha_{1u} = \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha_1 \times \alpha_2, \quad \alpha_{2u} = -2\alpha_1 \times \alpha_2, \quad \alpha_{1v} = 0, \quad \alpha_{2v} = 0. \tag{7.29}$$

Приметимо да је, $\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2$ константан у односу на u и v и има дужину $\frac{1}{\sqrt{2}}$, означимо

$$g_1 := \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2. \tag{7.30}$$

Сада рачунамо

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right)_u = -\frac{4}{\sqrt{3}} \alpha_1 \times \alpha_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} g_1 \times \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right) \tag{7.31}$$

и добијамо

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right)_{uu} = -\frac{4}{\sqrt{3}} g_1 \times \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right)_u \overset{(7.31)}{=} -\frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right).$$

Дакле, постоје g_2, g_3, као функције од v, такви да је

$$-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2 = \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} u\right) g_2 + \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} u\right) g_3. \tag{7.32}$$

Диференцирајући два пута (7.32) у односу на u:

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right)_{uu} = \frac{8}{3}\left(-\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} u\right) g_2 - \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) g_3\right), \tag{7.33}$$

изводимо користећи (7.32) и (7.33):

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right)_{uu} = -\frac{8\sqrt{2}}{3} g_1 \times \left(-\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} u\right) g_2 + \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} u\right) g_3\right). \tag{7.34}$$

Према томе, имамо

$$g_2 = \sqrt{2}g_1 \times g_3, \quad g_3 = -\sqrt{2}g_1 \times g_2$$

па су $\sqrt{2}g_1$, $\sqrt{2}g_2$, $2g_3$ ортонормирани вектори. Коначно, добијамо

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2 = \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right) g_2 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right) g_1 \times g_2,\\
&-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = g_1,
\end{aligned}$$

и закључујемо

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}g_1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right) g_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right) g_1 \times g_2,\\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}g_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right) g_2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right) g_1 \times g_2. \qquad (7.35)
\end{aligned}$$

Како је $\mathbb{S}^3$ двоструко наткривање од $SO(3)$, сваки елемент групе $SO(3)$ можемо представити као конјугацију јединичним кватернионом, одређеним до на знак. Према томе, како вектори $\sqrt{2}g_1$, $\sqrt{2}g_2$, $2g_3$ чине ортонормирану базу од $\mathrm{Im}\mathbb{H}$, можемо наћи јединични кватернион $d \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$, да бисмо је заротирали и радили на даље са $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$

$$g_1 = d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\bar{d}, \quad g_2 = d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\right)\bar{d}, \quad g_1 \times g_2 = d\left(\frac{1}{2}\mathrm{k}\right)\bar{d}.$$

Сада из (7.35), следи

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = d\tilde{\alpha}_1\bar{d}, \quad \beta_1 = d\tilde{\beta}_1\bar{d},\\
\alpha_2 = d\tilde{\alpha}_2\bar{d}, \quad \beta_2 = d\tilde{\beta}_2\bar{d},
\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{j} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{k},\\
\tilde{\alpha}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{j} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{k},\\
\tilde{\beta}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{j} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{k}, \qquad (7.36)\\
\tilde{\beta}_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{j} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\right)\mathrm{k}.
\end{aligned}$$

Од овог момента у доказу ћемо променити нотацију и користити $\tilde{p}, \tilde{q}$ уместо p, q. Имерзија M^5 у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ дата је са

$$(u, v, x, y, z) \mapsto f(u, v, x, y, z) = (a(x, y, z)\tilde{p}(u, v)\bar{c}(x, y, z),\ b(x, y, z)\tilde{q}(u, v)\bar{c}(x, y, z)) \qquad (7.37)$$

у локалним координатама, јер смо већ раније видели да је за јединичне кватернионе a, b, c, пресликавање дато са $\mathcal{F}_{abc} : (r, s) \mapsto (ar\bar{c}, bs\bar{c})$ изометрија од $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, g)$, која чува уобичајену метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$, скоро комплексну структуру J и скоро продукт структуру P. Диференцијал овог пресликавања дат је са (видети Пропозицију 2.2)

$$d\mathcal{F}_{abc}(r\alpha, s\beta) = (ar\alpha\bar{c}, bs\beta\bar{c}) = (ar\bar{c}\cdot c\alpha\bar{c}, bs\bar{c}\cdot c\beta\bar{c}). \tag{7.38}$$

Како су имерзије $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ $SO(4)$-подударне стандардном равном торусу у $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3 = SU(2)\times SU(2)$ је двоструко наткривање од $SO(4)$, следи да се свака ротација $\mathcal{R}\in SO(4)$ може записати у облику $\mathcal{R}(x) = \mu x\nu$, где је $\mu,\nu\in\mathbb{S}^3$. Према томе, можемо да узмемо

$$\begin{aligned}\tilde{p}(u,v) &= a_1(r_1\cos u, r_1\sin u, r_2\sin v, r_2\cos v)a_2,\\ \tilde{q}(u',v') &= a_3(s_1\cos u', r_1\sin u', r_2\sin v', r_2\cos v')a_4,\end{aligned}$$

где су r_1, r_2, s_1, s_2 позитивни реални бројеви за које важи $r_1^2+r_2^2 = 1$ и $s_1^2+s_2^2 = 1$, док су $a_1, a_2, a_3, a_4\in\mathbb{S}^3$ јединични кватерниони.

Даље, примењујући одговарајућу изометрију, $(\tilde{p},\tilde{q})$ постаје

$$\begin{aligned}\tilde{p}(u^*,v^*) &= (r_1\cos u^*, r_1\sin u^*, r_2\cos v^*, r_2\sin v^*),\\ \tilde{q}(u^\circ,v^\circ) &= (s_1\cos u^\circ, r_1\sin u^\circ, r_2\cos v^\circ, r_2\sin v^\circ)d,\end{aligned}$$

за неко $d\in\mathbb{S}^3$. Већ знамо да су обе имерзије $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ подударне цилиндру (са Кристофеловим симболима који су идентички једнаки нули). Како су координате u^*, v^* и u°, v° повезане афином трансформацијом са стандардним координатама, писаћемо и даље u и v.

Имајући на уму да су једине површи са константном Гаусовом и средњом кривином у $\mathbb{S}^3$ локално геодезијске сфере и равни торуси (видети [17]), налазимо да је решење за $(\tilde{p},\tilde{q})$ које задовољава

$$\begin{aligned}\tilde{p}_u(u,v) = \tilde{p}\tilde{\alpha}_1, \quad \tilde{p}_v = \tilde{p}\tilde{\alpha}_2,\\ \tilde{q}_u(u,v) = \tilde{q}\tilde{\beta}_1, \quad \tilde{q}_v = \tilde{q}\tilde{\beta}_2,\end{aligned}$$

дато као раван торус

$$\begin{aligned}\tilde{p}(u,v) &= \left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}u-v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}u-v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}+\tfrac{v}{2}\right), \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}+\tfrac{v}{2}\right)\right),\\ \tilde{q}(u,v) &= \left(-\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}u+v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}u+v}{\sqrt{2}}\right), \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}-\tfrac{v}{2}\right), -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{u}{\sqrt{6}}-\tfrac{v}{2}\right)\right).\end{aligned} \tag{7.39}$$

Сада ћемо добити додатну информацију о имерзији f на следећи начин. За $f = (a\tilde{p}\bar{c}, b\tilde{q}\bar{c})$, рачунамо изводе од f у односу на x, y, z и закључујемо да постоје имагинарни кватерниони η_i, δ_i, μ_i, за $i = 1, 2, 3$, такви да a, b, c задовољавају систем (7.20) ПДЈ датих у формулацији Теореме. Користећи (7.20), рачунамо

$$\begin{aligned}f_x &= (a\eta_1\tilde{p}\bar{c} - a\tilde{p}\eta_3\bar{c}, b\eta_2\tilde{q}\bar{c} - b\tilde{q}\eta_3\bar{c}) = (a\tilde{p}\bar{c}(c\bar{\tilde{p}}\eta_1\tilde{p} - c\eta_3)\bar{c}, b\tilde{q}\bar{c}(c\bar{\tilde{q}}\eta_2\tilde{q} - c\eta_3)\bar{c}),\\ f_y &= (a\delta_1\tilde{p}\bar{c} - a\tilde{p}\delta_3\bar{c}, b\delta_2\tilde{q}\bar{c} - b\tilde{q}\delta_3\bar{c}) = (a\tilde{p}\bar{c}(c\bar{\tilde{p}}\delta_1\tilde{p} - c\delta_3)\bar{c}, b\tilde{q}\bar{c}(c\bar{\tilde{q}}\delta_2\tilde{q} - c\delta_3)\bar{c}),\\ f_z &= (a\mu_1\tilde{p}\bar{c} - a\tilde{p}\mu_3\bar{c}, b\mu_2\tilde{q}\bar{c} - b\tilde{q}\mu_3\bar{c}) = (a\tilde{p}\bar{c}(c\bar{\tilde{p}}\mu_1\tilde{p} - c\mu_3)\bar{c}, b\tilde{q}\bar{c}(c\bar{\tilde{q}}\mu_2\tilde{q} - c\mu_3)\bar{c}).\end{aligned} \tag{7.40}$$

Даље, како је $\xi = P(f_u)$, из (7.38) добијамо

$$\xi = (a\tilde{p}\bar{c}\cdot c\tilde{\beta}_1\bar{c}, b\tilde{q}\bar{c}\cdot c\tilde{\alpha}_1\bar{c}).$$

Сада, због (2.7), посматрамо услове $g(f_x,\xi) = 0$, $g(f_y,\xi) = 0$ и $g(f_z,\xi) = 0$. Директним рачуном добијамо услове (7.21), чиме је доказ завршен.

Коначно, имајући у виду једначине (7.20), даћемо пример реалне хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ чије је нормално векторско поље $\mathcal{P}-$изотропно. Други примери се могу добити на сличан начин.

Пример 7.1. *Имерзија* $(u,v,x,y,z) \mapsto f = (a\tilde{p}\bar{c}, b\tilde{q}\bar{c})$, *где су* a,b,c *дефинисани са*

$$a = \cos x + j\sin x,\ b = \cos y + j\sin y,\ c = \cos z + j\sin z,$$

и $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ *су дати са* (7.19), *описује хиперповрш од* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, *чије је јединично нормално векторско поље* $\mathcal{P}$*-изотропно.*

Проверимо прво да је f имерзија. Како је $a_x = aj$, $a_y = a_z = 0$, $b_y = bj$, $b_x = b_z = 0$, $c_x = c_y = 0$, $c_z = cj$, рачунамо

$$f_x = (aj\tilde{p}\bar{c}, 0),\ f_y = (0, bj\tilde{q}\bar{c}),\ f_z = (-aj\tilde{p}\bar{c}, -bj\tilde{q}\bar{c}).$$

Кристећи (7.19) и (7.36), добијамо f_u и f_v. Сада се праволинијски показује да су вектори f_x, f_y, f_z, f_u, f_v линеарно независни.

Нормално векторско поље ξ дато је са

$$\Bigg(-\frac{\cos\left(\frac{u}{\sqrt{6}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\sin(x-z)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin\left(\frac{u}{\sqrt{6}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\sin(x+z)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos\left(\frac{u}{\sqrt{6}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\cos(x-z)}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos(x+z)\sin\left(\frac{u}{\sqrt{6}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sin\left(\frac{u}{\sqrt{6}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\sin(y-z)}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos\left(\frac{u}{\sqrt{6}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\sin(y+z)}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos(y-z)\sin\left(\frac{u}{\sqrt{6}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos\left(\frac{u}{\sqrt{6}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\cos(y+z)}{\sqrt{2}}\Bigg),$$

па се директно проверава да је $P\xi$ нормално на ξ и $J\xi$.

Литература

[1] I. Agricola. “The Srni lectures on non-integrable geometries with torsion.” Arch. Math. Brno 42 (2006). Supplement, pp. 5–84.

[2] I. Agricola, A. Borówka, and T. Friedrich. “$\mathbb{S}^6$ and the geometry of nearly Kähler 6-manifolds” (2017). arXiv:1707.08591v1.

[3] M. Antić. “A class of slant surfaces of the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” Hacettepe J. Math. Stat. 47 (2 2018), pp. 251–260.

[4] M. Antić, N. Djurdjević, and M. Moruz. “CR submanifolds of the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ characterised by properties of the almost product structure.” Mediterr. J. Math. 15 (2018), pp. 1–28.

[5] M. Antić et al. “Three-dimensional CR submanifolds of the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” Ann. Math. P. Appl. 198 (1 2019), pp. 227–242.

[6] F. Belgun and A. Moroianu. “Nearly Kähler 6-manifolds with reduced holonomy.” Ann. Global. Anal. Geom. 19 (2001), pp. 307–319.

[7] J. Berndt, J. Bolton, and L. M. Woodwards. “Almost complex curves and Hopf hypersurfaces in the nearly Kähler $\mathbb{S}^6$.” Geom. Dedic. 56 (1995), pp. 237–247.

[8] J. Berndt and Y. J. Suh. “Contact hypersurfaces in Kähler manifolds.” Proc. AMS 143 (2015), pp. 2637–2649.

[9] A. Besse. Einstein manifolds. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[10] J. Bolton et al. “Almost complex surfaces in the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” Tohoku Math. J. 67 (2015), pp. 1–17.

[11] J-B. Butruille. “Homogeneous nearly Kähler manifolds.” Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry 16 (2010). IRMA Lect. Math. Theor. Phys. , Eur. Math. Soc., Zürich, pp. 399–423.

[12] J-B. Butruille. “Twistors and 3-symmetric spaces.” Proc. of the Lon. Math. Soc. 96 (3 2008), pp. 738–766.

[13] T. Cecil and P. Ryan. Geometry of hypersurfaces. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2015.

[14] B-Y. Chen. Geometry of submanifolds. Dover Publications, 2019.

[15] R. Cleyton, A. Moroianu, and U. Semmelmann. “Metric connections with parallel skew-symmetric torsion.” Adv. in Math. 378.107519 (2021).

[16] J. C. G. Dávila and F. M. Cabrera. “Homogeneous nearly Kähler manifolds.” Ann. Global Anal. Geom. 42 (2 2012), pp. 147–170.

[17] B. Dioos. Submanifolds of the nearly Kähler manifold $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. PhD thesis - J. Van der Veken (supervisor), L. Vrancken (cosupervisor). Department of Mathematics, Faculty of Science, Geometry Section, 2015.

[18] B. Dioos, L. Vrancken, and X. Wang. "Lagrangian submanifolds in the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$." Ann. Global Anal. Geom. 53 (2018), pp. 39–66.

[19] B. Dioos et al. "Flat almost complex surfaces in the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$." Results Math. 73.38 (1 2018).

[20] M. Djorić and M. Okumura. CR Submanifolds of complex projective space. Developments in Mathematics, 19, Springer, 2009.

[21] M. B. Djorić. "Hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ whose normal vector field is $\mathcal{P}-$principal." Mediterr. J. Math. 18.251 (2021).

[22] M. B. Djorić, M. Dj. Djorić, and M. Moruz. "Geodesic lines on nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$." J. Math. Anal. Appl. 466 (2018), pp. 1099–1108.

[23] M. B. Djorić, M. Dj. Djorić, and M. Moruz. "Real hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ with $\mathcal{P}$-isotropic normal." J. Geom. Phys. 160.103945 (2021).

[24] L. Foscolo and M. Haskins. "New G_2 holonomy cones and exotic nearly Kähler structures on $\mathbb{S}^6$ and $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$." Ann. Math. 185 (1 2017), pp. 59–130.

[25] T. Fridrich. "On types of non-integrable geometries" (). arXiv:math/0205149v1.

[26] T. Fridrich and R. Grunewald. "On the first eigenvalue of the Dirac operator on 6-dimensional manifolds." Ann. Global Anal. Geom. 3 (1985), pp. 265–273.

[27] T. Fukami and S. Ishihara. "Almost Hermitian structure on $\mathbb{S}^6$." Tohoku Math. J. (2) 7 (3 1955), pp. 151–156.

[28] P. Gauduchon. "Hermitian connections and Dirac operators." Boll. Un. Mat. Ital. B 11 (7 1997), pp. 257–288.

[29] E. Ghandour and L. Vrancken. "Almost complex surfaces in the nearly Kähler $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$." Mathematics 8.1160 (2020).

[30] A. Gray. "Almost complex submanifolds of the six sphere." Proc. AMS 20 (1 1969), pp. 277–279.

[31] A. Gray. "Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds." Mich. Math. J. 12 (3 1965), pp. 273–287.

[32] A. Gray. "Nearly Kähler manifolds." J. Diff. Geom. 4 (1970), pp. 283–309.

[33] A. Gray. "Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3." J. Diff. Geom. 7 (1972), pp. 343–369.

[34] A. Gray. "The Structure of Nearly Kähler Manifolds." Math. Ann. 223 (1976), pp. 233–248.

[35] A. Gray and L. M. Hervella. "The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants." Ann. di Mat. Pura ed Appl. 123 (1 1980), pp. 35–58.

[36] A. Gray and J. Wolf. "Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms I." J. Diff. Geom. 2 (1 1968), pp. 77–114.

[37] L. He, X. Jiao, and X. Zhou. "On almost complex curves and Hopf hypersurfaces in the nearly Kähler six-sphere." Sci. China Math. 57 (5 2014), pp. 1045–1056.

[38] N. Heidari and A. Heydari. “Nearly Kähler submanifolds of a space form.” Mediterr. J. Math. 13 (2016), pp. 2527–2537.

[39] Z. Hu and Z. Yao. “On Hopf hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” Ann. Mat. Pura Appl. 199 (2020), pp. 1147–1170.

[40] Z. Hu, Z. Yao, and Y. Zhang. “Hypersurfaces in the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^6$ and $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ with anticommutative structure tensors.” Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 26 (4 2019), pp. 535–549.

[41] Z. Hu, Z. Yao, and Y. Zhang. “On some hypersurfaces in the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” Math. Nachr. 291 (2018), pp. 343–373.

[42] Z. Hu and Y. Zhang. “Rigidity of the almost complex surfaces in the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” J. Geom. Phys. 100 (2016), pp. 80–91.

[43] Z. Hu et al. “On the nonexistence and rigidity for hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” J. Diff. Geom. Appl. 75 (2021).

[44] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. Vol. 1, 2. Wiley Classics Library, 1996.

[45] S. Koto. “Some theorems on almost Kählerian spaces.” J. of the Math. Soc. of Japan 12 (4 1960), pp. 422–433.

[46] A. Moroianu and U. Semmelmann. “Generalized Killing spinors and Lagrangian graphs.” J. Diff. Geom. Appl. 37 (2014), pp. 141–151.

[47] M. Moruz and L. Vrancken. “Properties of the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.” Publ. Inst. Math. (N. S.) 103 (117 2018), pp. 147–158.

[48] P-A. Nagy. “Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations.” Asian J. Math. 6 (3 2002), pp. 481–504.

[49] P-A. Nagy. “On nearly Kähler geometry.” Ann. Global Anal. Geom. 22 (2 2002), pp. 167–178.

[50] B. O’Neill. “The fundamental equations of a submersion.” Mich. Math. J. 13 (4 1966), pp. 459–469.

[51] F. Podestá and A. Spiro. “6-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one.” J. Geom. Phys. 60 (6 2010), pp. 156–164.

[52] F. Podestá and A. Spiro. “6-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one (II)” (2010). arXiv:1011.4681v1.

[53] H. Reckziegel. “On the Geometry of the Complex Quadric.” Geometry and Topology of Submanifolds VIII, World Sci. Publ, River Edge (1995), pp. 302–315.

[54] G. Russo. Torus symmetry and nearly Kähler metrics. PhD thesis, supervisor: Andrew Swann. Department of Mathematics and Centre for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Aarhus University, 2019.

[55] G. Russo and A Swann. “Nearly Kähler six-manifolds with two-torus symmetry.” J. Geom. Phys. 138 (2019), pp. 144–153.

[56] K. Sekigawa and T. Sato. “Nearly Kähler manifolds with positive holomorphic sectional curvature.” Kodai Math. J. 8 (1985), pp. 139–156.

[57] Y. J. Suh. “Real hypersurfaces in the complex quadric with parallel Ricci tensor.” Adv. Math 281 (2015), pp. 886–905.

[58] S. Tachibana. “On almost-analytic vectors in certain almost-Hermitian manifolds.” Tohoku Math. J. 11 (3 1959), pp. 351–363.

[59] L. Vezzoni. “On the canonical Hermitian connection in nearly Kähler manifolds.” Kodai Math. J. 32 (2009), pp. 420–431.

[60] K. Yano and M. Kon. Structures on manifolds. Vol. 3. Series in pure mathematics, World Scientific, 1985.

[61] Y. Zhang et al. “Lagrangian submanifolds in the 6-dimensional nearly Kähler manifolds with parallel second fundamental form.” J. Geom. Phys. 108 (2016), pp. 21–37.

Биографија аутора

Милош Ђорић рођен је 6.2.1988. у Београду. Основну школу и Математичку гимназију у Београду завршио је као ученик генерације, освојивши неколико награда на државним и међународним такмичењима из математике и физике. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2006. године и дипломирао 2010. године са просечном оценом 10. Током студија је више пута награђиван као један од најбољих студената у генерацији. Мастер академске студије, модул Математика, на истом факултету уписао је 2010. године и дипломирао 2011. године одбранивши мастер рад Вајерштрасова репрезентација минималних површи, под менторством проф. др Мирјане Ђорић, са просечном оценом 10. Докторске студије на Катедри за Геометрију Математичког факултета Универзитета у Београду уписао је школске 2011/12 по акредитацији из 2009. године, а затим школске 2018/19 по акредитацији из 2015.

Запослен је на Математичком факултету од 2010. године, и то прво као сарадник у настави до 2012. године, затим као асистент до 2018. године и као асистент практичне наставе. Држао је вежбе на курсевима Еуклидска геометрија, Диференцијална геометрија, Геометрија 2, Геометрија 3, Геометрија 5, Одабрана поглавља геометрије А на основним академским студијама, као и Одабрана поглавља геометрије Б и Одабрана поглавља Диференцијалне геометрије на мастер академским студијама. Био је члан Савета Математичког факултета у једном мандату, од 2014. до 2017. године. У Математичкој гимназији у Београду запослен је од 2010. године као спољни сарадник.

Члан је пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије Геометрија, образовање, визуелизација са применама, под бројем 174012, од 2011. године.

Учествовао је на Летњој научној школи BMS/SFB Summer School: Discrete Differential Geometry, у организацији TU Berlin 2013. године. Био је члан Организационог одбора међународних конференција XVII, XVIII, XIX, XX Geometrical seminar, одржаних на Златибору 2012 и 2016. године и у Врњачкој бањи 2014. и 2018. године. На конференцији XX Geometrical seminar 2018. године имао је саопштење Geodesic lines on the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. На међународној конференцији Pure and Applied Differential Geometry - PADGE 2017, Leuven, Белгија, презентовао је постер Geodesic lines on the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. На XI Симпозијуму Математика и примене, одржаном у децембру 2021. године на Математичком факултету, одржао је предавање: Неке реалне хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Био је члан Уредништва часописа Тангента за ученике средњих школа од 2011. до 2016. године, док је у часопису Математички лист за ученике основних школа члан Уредништва од 2018. године. Оба часописа издаје Друштво математичара Србије. Као члан Комисије за такмичења ученика основних школа, један је од аутора збирке 1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа, у више издања Друштва математичара Србије. Био је заменик лидера екипе Србије на Јуниорским балканским математичким олимпијадама од 2012. године до данас. На Јуниорској балканској математичкој олимпијади одржаној 2015. године у организацији Србије био је званични секретар такмичења и члан Организационог одбора (детаљи су објављени у стручном раду: Зоран Каделбург, Милош Ђорић, 19. Јуниорска балканска математичка олимпијада, Настава математике, LX 3-4, 2015. године). Такође, био је један од координатора при прегледу задатака на Балканским математичким олимпијадама у организацији Србије, и то 2009. године у Крагујевцу и 2018. године на Авали.

Списак објављених научних радова:

1. M. Djorić, M. Djorić, M. Moruz, Geodesic lines on nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, J. Math. Anal. Appl. 466 (2018), 1099–1108. (M 21, IF: 1.190);

2. M. Djorić, M. Djorić, M. Moruz, Real hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ with $\mathcal{P}$-isotropic normal, J. Geom. Phys. 160 (2021) (M 22, IF: 1.056);

3. M. Djorić, Hypersurfaces of homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ whose normal vector field is $\mathcal{P}-$principal, Mediterr. J. Math. 18, 251 (2021) (M 21, IF: 1.4).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани/а ___________________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, __________________________

____