

**Наставно-научном већу Математичког факултета  
Универзитета у Београду**

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета, која је одржана 10.09.2021. године, одређени смо за чланове комисије за писање извештаја о докторској дисертацији *Екстремални проблеми Брауновог кретања и других случајних процеса* кандидата Милице Јовалекић. После прегледа рукописа који је Милица Јовалекић предала комисији, подносимо Наставно-научном већу Математичког факултета следећи

## ИЗВЕШТАЈ

Докторска дисертација *Екстремални проблеми Брауновог кретања и других случајних процеса* написана је на 69+*i*+VI страница. Структура рада је следећа:

### Увод

#### 1 Случајни процеси и мартингали

- 1.1 Вероватносни простор и случајне променљиве
- 1.2 Случајни процеси
- 1.3 Мартингали

#### 2 Дубове мартингалне неједнакости

- 2.1 Максималне неједнакости
- 2.2 Дубова  $L^1$  неједнакост
- 2.3 Дубова  $L^p$  неједнакост

#### 3 Вероватносни доказ вишедимензионе Хардијеве неједнакости

- 3.1 Релативна ентропија
- 3.2 Вероватносне густине на јединичној коцки  $(0, 1)^n$  у  $\mathbb{R}^n$
- 3.3 Вишедимензиона тежинска Хардијева неједнакост
- 3.4 Вишедимензиона тежинска Карлеманова неједнакост

#### 4 Дијаметар планарног Брауновог кретања

- 4.1 Брауново кретање
- 4.2 Јакобијева функција
- 4.3 Конвексан омотач планарног Брауновог кретања
- 4.4 Горње ограничење очекиваног дијаметра планарног Брауновог кретања
- 4.5 Доње ограничење очекиваног дијаметра планарног Брауновог кретања

### Закључак

**Литература** (број библиографских јединица: 56)

**Списак симбола**

**Биографија аутора**

## ПРИКАЗ САДРЖАЈА ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ова докторска дисертација припада научној области *Вероватноћа и статистика*, а конкретни проблеми који се у њој разматрају припадају *Теорији случајних процеса и мартингала*, као и *Теорији Брауновог кретања*.

Прва глава ове дисертације посвећена је класичној вероватносној теорији. У првој секцији ове главе дат је кратак преглед основних ознака, тврђења и појмова који се користе у наставку текста и који се односе на вероватносне просторе и случајне променљиве. У другој секцији се разматрају низови случајних променљивих, односно, случајни процеси. Посебну класу случајних процеса представљају мартингали и они су заступљени у трећој секцији. Постоји велики број класичних, књига, радова и монографија које се баве вероватносном теоријом на разним нивоима, почев од оног елементарног до веома напредног и које су цитиране у дисертацији. Поред тога, описане су и велике примене вероватносне теорије у другим гранама математике, пре свега, у разним гранама математичке анализе.

Дубове мартингалне неједнакости се изучавају у другој глави. У првој секцији се разматрају Дубове максималне неједнакости, преко којих се у наредним секцијама изводе стандардне Дубове  $L^p$  неједнакости. Варијанта нестандардне Дубове  $L^1$  неједнакости, код које је у посматраном мартингалу прва случајна променљива константна, доказана је 2008. године. Оригиналан и публикован допринос ове главе, односи се на проучавање поменуте нестандардне Дубове неједнакости, али у  $L^p$  случају, при чему је  $0 < p < 1$  и  $1 < p < \infty$ .

У трећој глави је заступљен вероватносни доказ вишедимензионе тежинске Хардијеве неједнакости. Заправо, цела глава је базирана на оригиналним резултатима преузетим из одговарајућег рада кандидата. Наиме, користећи релативну ентропију, односно, Кулбак-Лајблерову дивергенцију вероватносних густина на јединичној коцки у вишедимензионом реалном простору изводи се вишедимензиона тежинска Хардијева неједнакост, која као директну последицу има вишедимензиону Карлеманову неједнакост.

Брауново кретање, као један од најважнијих случајних процеса са многобројним применама, јесте тематика последње главе. Наведене су неке од класичних референци везаних за Брауново кретање. Након уводне секције, у којој се разматра линеарно Брауново кретање, у наредним секцијама се изучава планарно Брауново кретање, односно, конвексан омотач, периметар и дијаметар планарног Брауновог кретања. Преко очекиваног периметра конвексног омотача Брауновог кретања, за који је позната тачна вредност, изводе се основна ограничења за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања. Добијене оцене за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања побољшане су у раду из 2017. године. Оригиналан допринос ове главе заснован је на резултату публикованом у одговарајућем раду кандидата, где је добијено ново доње ограничење, боље од претходних, за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања. У доказу се, поред вероватносних метода, користи и теорија која се односи на генерализовану Јакобијеву функцију, при чему је суштински део одређивање функције расподеле пројекција слике Брауновог кретања на праве одређене одговарајућим јединичним векторима у равни.

Наведен је и списак литературе који се састоји од 56 библиографских јединица. Након тога, наведен је и списак симбола који се користе у дисертацији, као и биографија кандидата, односно, аутора ове докторске дисертације.

Резултати аутора који се односе на тему дисертације објављени су у три самостална рада (сви са SCI листе). У наставку наводимо списак радова аутора ове дисертације.

## Списак научних радова кандидата

### Објављени радови (часописи са SCI листе)

- М. Jovalekić, Some estimates related to the Doob's martingale inequalities, *Statist. Probab. Lett.* **153** (2019), 124–129. (M23) (IF 2019=0.680)
- М. Jovalekić, A Probabilistic Proof of the Multidimensional Weighted Hardy Inequality, *C. R. Acad. Bulgare Sci.* **73** (2020), 1483–1488. (M23) (IF 2020=0.378)
- М. Jovalekić, Lower bound for the diameter of planar Brownian motion, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* **64** (2021), 283–286. (M23) (IF 2020=0.447)

## ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

Рукопис *Екстремални проблеми Брауновог кретања и других случајних процеса* кандидата Милице Јовалекић садржи вредан научни допринос у области случајних процеса и мартингала, посебно у теорији Брауновог кретања. Милица Јовалекић се успешно бави научним радом у наведеним областима. Објавила је три самостална рада у часописима са SCI листе, који се односе на тему дисертације.

Имајући у виду све наведено, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да рукопис *Екстремални проблеми Брауновог кретања и других случајних процеса* кандидата Милице Јовалекић прихвати као докторску дисертацију и да одреди комисију за одбрану.

У Београду, 17. јануар 2022.

Чланови комисије:

---

проф. др Павле Младеновић (ментор), редовни професор,  
Математички факултет, Универзитет у Београду

---

др Јелена Јоцковић, доцент,  
Математички факултет, Универзитет у Београду

---

др Ленка Главаш, доцент,  
Математички факултет, Универзитет у Београду

---

проф. др Тамара Коледин, ванредни професор,  
Електротехнички факултет, Универзитет у Београду