Универзитет у Београду - Математички факултет
Наставно - научном већу

# Извештај Комисије за оцену докторске дисертације кандидаткиње Соње Телебаковић Онић

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на седници одржаној 18. марта 2022. године, именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације **„Фробенијусове алгебре и тополошке квантне теорије поља”** кандидаткиње Соње Телебаковић Онић. Након прегледања дисертације, Комисија подноси Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду следећи извештај.

## 1. Основни подаци о кандидаткињи и дисертацији

**Основни подаци о кандидаткињи:**

Соња Телебаковић Онић рођена је 20.08.1981. године у Београду. Дипломирала је на Математичком факултету Универзитета у Београду 2007. године на смеру Теоријска математика и примене са просечном оценом 9,14. Докторске студије на Катедри за алгебру и математичку логику Математичког факултета Универзитета у Београду уписала је 2007. године. На докторским студијама положила је следеће предмете: Алгебра 3, Универзалне алгебре, Теорија бројева, Теорија модела, Теорија скупова, Специјални курс (Комутативна алгебра). Све испите на докторским студијама положила је са оценом 10.

Запослена је на Математичком факултету на Катедри за алгебру и математичку логику од 2007. године, прво као сарадник у настави, а затим као асистент и асистент практичне наставе. До сада је држала вежбе из следећих предмета: Линеарна алгебра А, Линеарна алгебра Б, Алгебра 1А, Алгебра 1Б, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Линеарна алгебра, Алгебра 1, Алгебра 2 на основним академским студијама, као и Методологија истраживања у настави математике на мастер академским студијама.

Учествовала је на научним пројектима Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије: Анализа и алгебра са применама, под бројем *ОН 174032*; Аналитичке и алгебарске методе и примене у геометрији, топологији и теорији бројева, под бројем *ОН 144020*.

**Наслов дисертације:** Фробенијусове алгебре и тополошке квантне теорије поља

**Обим дисертације и библиографија:** Дисертација има x+92 стране и 3 прилога (изјава о ауторству, изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и изјава о коришћењу). Главни део дисертације састоји се од увода и четири главе. У литератури је наведено 48 референци.

## 2. Предмет и циљ дисертације

Предмет дисертације је проучавање везе између Фробенијусових алгебри и тополошких квантних теорија поља (TQFT). Познато је да свакој дводимензионалној TQFT (2-TQFT) одговара једна комутативна Фробенијусова алгебра и обрнуто, тј. да је категорија чији су објекти 2-TQFT еквивалентна категорији комутативних Фробенијусових алгебри. Свака 2-TQFT је потпуно одређена сликом једнодимензионалне сфере $S^1$ и сликама генератора категорије дводимензионалних оријентисаних кобордизама. Релацијама које важе за ове кобордизме одговарају управо аксиоме комутативне Фробенијусове алгебре.

Циљ дисертације је решавање следећих проблема:

- С обзиром да прелаз из димензије 1 на димензију 2 у категорији кобордизама са сферама као објектима доноси комутативност множења и комножења у односу на постојање само симетричности тих операција, природно се поставља питање да ли са новим повећањем димензије добијамо нове класе Фробенијусових објеката.
- Од раније је познато да постоји верна једнодимензионална тополошка квантна теорија поља. У дисертацији се решава проблем верности произвољне једнодимензионалне TQFT.
- Питање постојања верних вишедимензионалних TQFT.

## 3. Основне хипотезе од којих се полазило у истраживању

Фробенијусове алгебре се први пут појављују у теорији репрезентација, у раду немачког математичара Фробенијуса из 1903. године. Он је проучавао коначно-димензионалне алгебре код којих су прва и друга регуларна репрезентација изоморфне. Сам термин Фробенијусова алгебра први користе Брауер, Незбит и Накајама у низу радова тридесетих година прошлог века. Они дају и неколико еквивалентних карактеризација Фробенијусових алгебри. Према једној од тих дефиниција, Фробенијусова алгебра је коначно-димензионална алгебра над пољем $\mathbb{K}$ заједно са линеарном формом $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$, таквом да важи

$$(\forall a \in A) \quad \varepsilon(ab) = 0 \ \Rightarrow b = 0.$$

На пример, алгебра квадратних матрица над пољем $\mathbb{K}$ са трагом је пример Фробенијусове алгебре.

Алтернативну карактеризацију Фробенијусових алгебри као алгебри које су истовремено и коалгебре, при чему множење и комножење задовољавају одређене услове компатибилности, даје Лоувир 1967. године, а касније ови услови привлаче пажњу и Квина и Абрамса.

У последње време интересовање за Фробенијусове алгебре је порасло због њихове повезаности са тополошким квантним теоријама поља. Ову везу први је приметио Дијкграф, а њом су се касније бавили и Квин, Савин, Абрамс и Кок, као и многи други математичари. На основу Атијине аксиоматизације, $n$-димензонална тополошка квантна теорија поља ($n$-TQFT) је симетрични моноидални функтор из категорије оријентисаних $n$-кобордизама у категорију коначно-димензионалних векторских простора над фиксираним пољем. Овакав функтор свакој затвореној оријентисаној $(n-1)$-димензионалној многострукости придружује векторски простор, а сваком оријентисаном $n$-кобордизму линеарно пресликавање. Верност функтора као што је TQFT је посебно битна, пошто обезбеђује да алгебарска слика категорије кобордизама нема дефекта.

## 4. Кратак опис садржаја дисертације

Садржај дисертације подељен је у увод и 4 главе.

У првој глави дат је преглед основних дефиниција и особина Фробенијусових алгебри, а наведени су и најважнији примери Фробенијусових алгебри.

Друга глава посвећена је оригиналним резултатима који су објављени у коауторском раду са Ђ. Баралићем и З. Петрићем ([BPT]). Пратећи Фробенијусову структуру која се стандардно додељује једнодимензионалној сфери, у том раду се испитује Фробенијусова структура сфера свих других димензија. Почевши од димензије $d = 1$, све сфере су комутативни Фробенијусови објекти у категоријама чије су стрелице $(d+1)$-димензионални кобордизми. У односу на језик којим се описује Фробенијусова структура (множење, комножење, јединица, којединица), нема разлике међу овим сферама, јер су оне ослобођене било каквих додатних једнакости које се могу изразити на том језику. Једини изузетак је нулдимензионална сфера, чија одговарајућа Фробенијусова структура није комутативна, већ само симетрична.

Инспирисани класичним резултатом Р. Брауера из области репрезентације група, у коме је конструисана једна дијаграматска алгебра, К. Дошен и З. Петрић доказују верност једног симетричног моноидалног функтора из категорије 1-кобордизама у категорију матрица. Како се категорија матрица може посматрати као скелетон категорије коначно-димензионалних векторских простора, њихов функтор је пример једне верне 1-TQFT, коју аутори називају брауеријанским функтором. У трећој глави ове дисертације је доказано да се, у односу на поље карактеристике нула, свака 1-TQFT, која пресликава нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у векторски простор димензије бар 2, поклапа са брауеријанским функтором до на множење инвертибилним матрицама, и уопштен је резултат верности Дошена и Петрића на све 1-TQFT ([STO]).

На крају, у четвртој глави, показано је да комутативној Фробенијусовој алгебри $\mathbb{QZ}_5 \otimes Z(\mathbb{QS}_3)$, која је настала као тензорски производ групне алгебре и центра групне алгебре, одговара верна 2-TQFT. Резултати презентовани у овој глави део су коауторског рада са С. Гајовићем и ментором З. Петрићем ([GPTO]).

## 5. Остварени резултати и научни допринос дисертације

Фробенијусову структуру једнодимензионалне сфере $S^1$ проучавали су многи математичари. Није тешко проверити да је за свако $d \geq 1$, сфера $S^{d-1}$ симетричан Фробенијусов објекат у категорији $dCob$ чији су морфизми $d$-кобордизми. Лако се може проверити и да је за свако $d \geq 2$, сфера $S^{d-1}$ комутативан Фробенијусов објекат у овој категорији. Како сфера $S^0$ није комутативан, али јесте симетричан Фробенијусов објекат, повећање димензија сфере са 0 на 1 резултира сужавањем класе симетричних на класу комутативних Фробенијусових објеката. У заједничком раду кандидаткиње са Ђ. Баралићем и З. Петрићем [BPT] показано је да са новим повећањем димензија сфера не добијамо нове класе Фробенијусових објеката. Другим речима, ниједна права подкласа класе комутативних Фробенијусових објеката не садржи сферу $S^{d-1}$, за $d \geq 2$.

У раду [BPT] је конструисана једна синтаксна симетрична моноидална категорија $\mathbf{K}$ са универзалним Фробенијусовим објектом 1. Објекти ове категорије су коначни ординали, а у циљу дефинисања стрелица ове категорије, индуктивно су дефинисани терми, тј. речи које добијамо помоћу композиције, тензорисања и примитивних терама $\mathbf{1}$, $\tau$, $\mu$, $\eta$, $\delta$ и $\varepsilon$. Затим су терми посечени по најмањој релацији еквиваленције тако да је 1 комутативан Фробенијусов објекат у $\mathbf{K}$, а за скуп стрелица категорије $\mathbf{K}$ је узет скуп класа еквиваленције $[f]$, где је $f$ терм. У раду [BPT] је показано да се свака стрелица категорије $\mathbf{K}$ може представити у нормалној форми.

**Теорема 1.** *За сваки терм $f$ постоји терм $f'$ у нормалној форми тако да је $f \equiv f'$.*

Дефинисана је и категорија $dCobS$, чији су објекти коначне колекције $(d-1)$-димензионалних сфера, а морфизми класе еквиваленције тополошких $d$-кобордизама. Ова категорија је пуна поткатегорија категорије $dCob$, чији су објекти све затворене $(d-1)$-многострукости, док су морфизми добијени од произвољних $d$-многострукости, а не само од оних чије су границе хомеоморфне колекцији сфера. Постоји јединствени симетрични моноидални функтор из $\mathbf{K}$ у $dCobS$ који пресликава универзални Фробенијусов објекат 1 у сферу $S^{d-1}$, за свако $d \geq 2$, који је назван интерпретацијом категорије $\mathbf{K}$ у $dCobS$.

**Теорема 2.** *За свако $d \geq 2$, интерпретација категорије* $\mathbf{K}$ *у категорији $dCobS$ је веран функтор.*

У самосталном раду кандидаткиње [STO] доказана је верност свих 1-TQFT. Сваком 1-кобордизму $K = (M, \Sigma_0, \Sigma_1) : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ придружена је релација еквиваленције $R_K$ на скупу $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$ на следећи начин. За $(i,k), (j,l)$ елементе скупа $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$ важи $(i,k)R_K(j,l)$ акко

тачке $(i,k)$ и $(j,l)$ припадају истој компоненти повезаности многострукости $M$.

Затим је релацији $R_K$ придружена матрица $A(K)$ формата $p^m \times p^n$ на следећи начин.

Ако $a_0$ означава колону матрице $A(K)$, $0 \leq a_0 < p^n$, $a_0$ се може представити у систему са основом $p$ са $n$ цифара $a_0^0 \ldots a_{n-1}^0$. Ако $a_1$ означава врсту матрице $A(K)$, $0 \leq a_1 < p^m$, $a_1$ се може представити у систему са основом $p$ са $m$ цифара $a_0^1 \ldots a_{m-1}^1$. Тада је елемент матрице $A(K)$ у врсти $a_1$ и колони $a_0$ једнак 1 ако за све $(i,k)$ и $(j,l)$ из скупа $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$ важи

$$(i,k)R_K(j,l) \;\Rightarrow a_i^k = a_j^l;$$

иначе је тај елемент једнак 0.

Дефинисан је функтор $B$ из категорије 1-кобордизама у категорију матрица. На објектима је дефинисан са $B(n, \varepsilon) = p^n$, за $p \geq 2$, а на стрелицама $K : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ са $B(K) = p^a \cdot A(K)$, где је $a$ број компоненти повезаности кобордизма $K$ које су хомеоморфне кружници $S^1$, а $A(K)$ је $(0,1)$-матрица формата $p^m \times p^n$ која је придружена кобордизму $K$.

**Теорема 3.** $B$ је стриктни симетрични моноидални функтор између моноидалних категорија $(1Cob, \otimes, (0, \varepsilon), \tau_{n,m})$ и $(Mat_{\mathbb{K}}, \otimes, 1, S_{n,m})$.

**Теорема 4.** $B$ је веран функтор.

У дисертацији је наведен директан, краћи доказ верности функтора $B$, иако је тај резултат последица максималности из рада К. Дошена и З. Петрића (K. Došen and Z. Petrić, *Symmetric self-adjunctions and matrices*, Algebra Colloquium, 19, 2012, pp. 1051-1082). Функтор $B$ је пример једне стриктне једнодимензионалне TQFT који одговара матричној репрезентацији алгебре Брауерових дијаграма, па је назван брауеријанском репрезентацијом.

**Теорема 5.** Нека је $F : 1Cob \to Mat_{\mathbb{K}}$ стриктна 1-TQFT, таква да је слика позитивно оријентисане тачке $F(+)$ природан број $p \geq 2$. Ако је $B$ брауеријанска репрезентација, онда постоји моноидални природни изоморфизам $\theta : B \Rightarrow F$.

**Теорема 6.** Свака стриктна 1-TQFT, $F : 1Cob \to Mat_{\mathbb{K}}$, таква да је $F(+) = p \geq 2$, је веран функтор.

Резултат верности је затим уопштен на све јаке једнодимензионалне TQFT, тј. на све јаке симетричне моноидалне функторе $(F, F_0, F_2)$ између стриктне моноидалне категорије 1-кобордизама и нестриктне моноидалне категорије коначно-димензионалних векторских простора.

**Теорема 7.** Ако је $(F, F_0, F_2) : 1Cob \to Vect_{\mathbb{K}}$ јака 1-TQFT, која нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке пресликава у векторски простор димензије бар 2, онда је $F$ веран функтор.

У коауторском раду [BPT] показано је да брауеријанска репрезентација пресликава сферу $S^0$ у матричну Фробенијусову алгебру.

У заједничком раду кандидаткиње са ментором З. Петрићем и С. Гајовићем [GPTO], показано је да комутативној Фробенијусовој алгебри $\mathbb{Q}\mathbb{Z}_5 \otimes Z(\mathbb{Q}\mathbb{S}_3)$, која је настала као тензорски производ групне алгебре и центра групне алгебре, одговара верна 2-TQFT. Ако је $(A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ комутативна Фробенијусова алгебра, код које је множење означено са $\mu$, јединица са $\eta$, комножење са $\delta$, а којединица са $\varepsilon$, тада се може конструисати 2-TQFT, у ознаци $F_A$ тако да је слика круга баш $A$, и да се генератори категорије 2-кобордизама пресликавају редом у $\mu$, $\eta$, $\delta$ и $\varepsilon$. Функтор $F_A$ је добро дефинисан, пошто релацијама које важе за 2-кобордизме тачно одговарају аксиоме комутативне Фробенијусове алгебре.

**Теорема 8.** Ако је $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{Z}_5 \otimes Z(\mathbb{Q}\mathbb{S}_3)$, онда је одговарајућа 2-TQFT, $F_{\mathbb{A}}$ верна и инјективна на објектима.

То значи да су 2-кобордизми еквивалентни ако и само ако су им одговарајућа линеарна пресликавања једнака.

## 6. Објављени и саопштени резултати

**Објављени радови који су у вези са темом дисертације:**

[BPT] Dj. Baralić, Z. Petrić, and S. Telebaković, *Spheres as Frobenius objects*, Theory and Applications of Categories 33, 24 (2018), pp. 691-726 (M23).
Impakt faktor (2018): 0,524

[GPTO] S. Gajović, Z. Petrić, and S. Telebaković Onić, *A Faithful 2-dimensional TQFT*, Homology, Homotopy and Applications 22 (1) (2020), pp. 391-399 (M23).
Impakt faktor (2020): 0,519

[STO] S. Telebaković Onić, *On the Faithfulness of 1-dimensional Topological Quantum Field Theories*, Glasnik Matematički 55 (2020), pp. 67-83 (M23).
Impakt faktor (2020): 0,660

**Остали радови:**

- B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, and S. Telebaković, *Formulae of Partial Reduction for Linear Systems of First Order Operator Equations*, Applied Mathematics Letters 23 (2010), pp. 1367-1371 (M21).
- B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, and S. Telebaković, *Differential Transcendency in the Theory of Linear Differential Systems with Constant Coefficients*, ISRN Mathematical Analysis 2012 (2012), pp. 1-8 (M51).

**Саопштења на конференцијама која су у вези са темом дисертације:**

- S. Telebaković Onić, *1-dimensional Topological Quantum Field Theories and Brauerian Representation*, IX Simpozijum *Matematika i primene*, Beograd, 30. novembar i 1. decembar 2018.
- S. Telebaković, *On the Brauerian Representation and 1-dimensional Topological Quantum Field Theories*, Godišnji susret seminara za konfiguracione prostore Matematičkog instituta SANU, Beograd, 25-27. decembar 2017.

**Остала саопштења на конференцијама:**

- B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, and S. Telebaković, *On some reduction formulae for linear systems of operator equations*, 12. Srpski matematički kongres, Novi Sad, 28. avgust - 2. septembar 2008 (izlagač).

## 7. Закључак

Резултати до којих је Соња Телебаковић Онић дошла у свом раду и које је представила у поднетом рукопису припадају савременој области истраживања значајних за алгебру, логику, топологију и математичку физику. Ова дисертација садржи веома конкретан и вредан научни допринос овим областима. Кандидаткиња је објавила три научна рада у часописима са СЦИ листе (два коауторска и један самостални) која се односе на тему дисертације. Има још два рада из других области. Сама дисертација је педантно и систематски написана, са јасним доказима и добро приказаним примерима. Дисертација може бити користан материјал за истраживаче који желе да се упознају са овом облашћу. Комисија констатује да је дисертација урађена према одобреној пријави и да је у питању оригинално и самостално научно дело.

Због свега наведеног, са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета у Београду да рукопис „Фробенијусове алгебре и тополошке квантне теорије поља" кандидаткиње Соње Телебаковић Онић прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду,
4.4.2022.

Председник комисије:

________________________

проф. др Раде Живаљевић,
научни саветник, Математички институт САНУ
редовни професор Физичког факултета

Чланови комисије:

________________________

проф. др Александар Липковски,
редовни професор Математичког факултета

________________________

проф. др Марко Радовановић,
ванредни професор Математичког факултета

________________________

др Ђорђе Баралић,
виши научни сарадник, Математички институт САНУ