

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Dragutin Ž. Pavlović

**MODELIRANJE  
STOHAISTIČKE STRUKTURE  
KARAKTERISTIKA VELIKIH VODA  
DOBIJENIH IZ SERIJA  
PIKOVA IZNAD PRAGA**

doktorska disertacija

Beograd, 2013.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Dragutin Ž. Pavlović

**MODELLING OF  
STOCHASTIC STRUCTURE  
OF FLOOD CHARACTERISTICS  
DERIVED FROM  
PEAKS OVER THRESHOLD SERIES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013.

# Informacije o mentorima i članovima komisije

Mentori:

dr. Jovan Despotović, dipl.građ.inž,  
vanredni profesor, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu,

dr. Jasna Plavšić, dipl.građ.inž,  
docent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.

Članovi komisije:

dr. Vesna Jevremović, dipl.matematičar,  
vanredni profesor, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu,

dr. Zoran Radić, dipl.građ.inž,  
docent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu,

dr. Tina Dašić, dipl.građ.inž,  
docent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu,

Datum odbrane: \_\_\_\_\_

# Zahvalnost

Rad na doktorskoj disertaciji treba da predstavlja krunu zvaničnog akademskog obrazovanja nekoga ko je odlučio da posveti dobar deo svog života traganju za kamenčićima u mozaiku znanja u beskrajnom moru još neotkrivenih odnosa koji vladaju među elementima u okruženju u kome postojimo, u spolnjem i unutrašnjem svetu, materijalnom ili nematerijalnom, dostižnom ili nedostižnom našim čulima. Velika je radost imati saznanje da kamenčić znanja koji čovek kao pojedinac priloži ima mogućnost da dalje traje i druge ljude motiviše i inspiriše da nastave tu neprekidnu potragu za sklapanjem mozaika koji će otkriti sliku kao funkcionise postojanje.

Kao autor ove disertacije želeo sam da shvatim i objasnim jedan mali kamen koji u mozaiku opisuje jednu osobinu vode, i to velike vode. Voda, od koje smo i sami najvećim delom sazdani, pored svojih blagih osobina, može da nas ugrozi kada u velikim količinama plavi svet dok kroz njega teče. Pokušao sam zato da saznam kako se ta njena velika količina, posmatrana kroz vremenski tok, može opisati na jedan specifični način. Na način da opišem velike vode po nekim njihovim pojavnim karakteristikama i pronađem zakonitosti verovatnoće koje mogu da opišu te karakteristike u njihovom sledu kroz vreme.

Ka ovom istraživanju usmerio me je profesor dr Vojislav Vukmirović, sada u penziji a nekada nastavnik na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Njemu dugujem najveću zahvalnost na podršci, savetima i strpljenu, dok sam često na putu kroz izradu disertacije lutao u nemogućnosti da prepoznam značaj nekog od rezultata na koje sam nailazio. Ponosan sam što mogu da se smatram njegovim učenikom i što me je izabrao da u skladu sa mojim mogućnostima započnem rad na istraživanjima nekih od ideja do kojih je on došao, kao iskusan stručnjak u oblasti hidrologije i autor mnogobrojnih publikacija i nastavne literature u istoj oblasti.

Zahvalan sam i svojim mentorima sa Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, profesoru dr Jovanu Despotoviću i docentu dr Jasni Plavšić, stručnjacima iz oblasti hidrologije, koji su me pratili u radu i pomagali. Oni su me kroz dijalog upućivali da kako njima a tako i sebi (i onima koji budu čitali disertaciju) razjasnim mnoge od činjenica koje su se pojavljivale tokom istraživanja. U udžbenicima prof. dr Vesne Jevremović i prof. dr Jovana Mališića tražio sam odgovore iz statistike i verovatnoće i slučajnih procesa, kao i u literaturi prof. dr Emira Zelenhasića.

Prostor koji mi je ovde na raspolaganju ne pruža mogućnost da se zahvalim svima ostalima od kojih sam učio i koji su me inspirisali, direktno ili kroz literaturu, tokom svih godina školovanja i neformalnog učenja. Hvala im svima.

I kao što je „saznanje sopstvenog neznanja početno saznanje” tako je i rad na doktoratu saznanje da si dostigao tek prvi vrh prvog brda na koje si se pepeo, i sa koga vidiš da na horizontu ima još puno vrhova. Svako novo saznanje otvara put kao osvajanju novih znanja. U tome je i draž izazova učenja.

# Modeliranje stohastičke strukture karakteristika velikih voda dobijenih iz serija pikova iznad praga

## REZIME

Na formiranje velikih voda utiču mnogobrojni i međusobno uslovljeni činioci, pa se one najčešće opisuju u domenu verovatnoće pojave. Merodavne velike vode, izražene kroz protoke, zapremine, trajanja talasa i slično, uobičajeno se dobijaju analizom verovatnoće pojave na godišnjem nivou, pretežno metodom godišnjih ekstrema. Međutim, unutar godine su moguće pojave većeg broja značajnih poplavnih talasa koji se koriste u analizi verovatnoće metodom pikova iznad praga.

Karakteristike velikih voda dobijaju se iz nizova dnevnih protoka. U disertaciji se pored osnovnih nizova karakteristika uvode u razmatranje i agregacije od dve ili više uzastopnih vrednosti. To su veličine slučajnog karaktera i mogu se obuhvatiti zbirnim nazivom karakteristike strukture velikih voda.

Predmet istraživanja u disertaciji su informacije o strukturi pojave velikih voda koje se mogu izvesti iz nizova dnevnih protoka uvođenjem različitih karakteristika velikih voda kao slučajnih veličina i analizom njihove verovatnoće pojave.

Hipoteza disertacije je da se upotrebom parcijalnih serija tj. pikova iznad praga, kroz koncept slučajnih procesa, analiziraju elementi procesa velikih voda, odnosno njihove strukture i da sve ekstremne vrednosti (vrhovi poplavnih talasa, zapremine talasa velikih voda) nose informaciju o pojavi velikih voda.

Cilj istraživanja je da se na velike vode primeni metodologija analize pomoću prekidnih slučajnih procesa proširenjem postupaka iz metode pikova. Na karakteristikama velikih voda definišu se događaji koji se mogu opisati slučajnim procesima.

Zadatak je da se verovatnoće događaja opišu funkcijama raspodele i ostvari detaljniji uvid u strukturu velikih voda primenom prekidnih slučajnih procesa.

Primena postavljenih hipoteza i predloženih metoda i postupaka analize stohastičke strukture velikih voda prikazana je na podacima o srednjim dnevnim protocima na hidrometrijskoj stanici Bezdán na reci Dunav, za period od 1931. do 2009. godine.

Disertacija je organizovana u četiri celine. Prvu čini Uvod, gde je opisan značaj proučavanja velikih voda, postavljeni ciljevi disertacije i dat prikaz pristupa i metoda stohastičke analize velikih voda. Druga celina se bavi teorijskim osnovama za predloženu metodologiju stohastičkog modeliranja karakteristika velikih voda. Nju čine tri glave – od druge do četvrte. Maksimalna godišnja zapremina talasa velikih voda, trajanje talasa i trajanje ciklusa kao slučajni procesi razmatraju se u glavi 2. Metoda pikova iznad praga za analizu maksimalnih godišnjih protoka prikazana je u glavi 3, a karakteristike velikih voda koje se mogu definisati na serijama pikova iznad praga u glavi 4. Treću celinu predstavlja test primer modeliranja stohastičke strukture velikih voda prikazan u glavi 5. Poslednja, četvrta celina, je šesta glava sa zaključcima.

U poglavljima o teorijskim osnovama prvo je predstavljen pregled poznatih koncepta za stohastičku analizu. Predstavljene su metode analize i njihova tipizacija. Ukazano je na pretpostavke koje dovode do metoda koje se predlažu u disertaciji. Dat je osvrt i na standardnu proceduru statističke analize velikih voda.

Kroz raspravu o maksimalnoj godišnjoj zapremini talasa velike vode koji prekoračuje izabrani prag protoka, postavljene su osnovne stohastičke relacije. Konceptija analize je da se pri stohastičkoj analizi slučajne veličine, u opštem slučaju bilo koje karakteristike velikih voda, proučavaju:

- a) broj događaja u intervalu vremena,
- b) trajanje ciklusa između dva, tri ili više uzastopnih događaja,
- c) broj događaja u intervalima vrednosti karakteristike,
- d) vrednosti karakteristika pri jednom, dva ili više uzastopnih događaja,
- e) maksimalne vrednosti karakteristike u vremenskom intervalu.

Osnovu teorije predstavljaju postulati o broju prekida (promeni stanja procesa) po vremenu i po zapremini talasa (stavke a) i c)). Iz ovih postulata sledi da njima odgovarajući sistemi diferencijalnih jednačina imaju rešenje koje eksplicitno zavisi od funkcija intenziteta javljanja. Da bi se sistem jednačina rešio, uzimajući u obzir opravdane pretpostavke, usvojeni su oblici funkcija intenziteta koji vode ka binomnom, Puasonovom ili negativnom binomnom zakonu verovatnoće broja događaja odnosno prekida u procesu. Ovi oblici su dokazani u dosadašnjoj primeni metode pikova iznad praga.

Neprekidne raspodele dužina vremenskog perioda između dva ili više uzastopnih događaja i vrednosti karakteristika pri jednom ili više uzastopnih događaja (stavke b) i d)) modelirane su prema eksponencijalnoj, Vejbulovoj ili Pareto raspodeli. U disertaciji se razmatra i rekurentni model koji modelira raspodele agregiranih – udruženih karakteristika preko funkcije intenziteta osnovnog niza, sa oblikom koji odgovara Vejbulovoj raspodeli osnovnog niza karakteristike, i diskretne raspodele broja javljanja.

Zatim se, u posebnom poglavlju, daje prikaz klasične metode pikova iznad praga, koja je poseban slučaj prethodno pomenute metodologije, jer koristi u zaključivanju samo deo prethodno iznesenih teorijskih postavki. Radi računarskog formalizovanja postupaka analize podataka, u posebnom poglavlju su dati principi i šeme za tretiranje nizova srednjih dnevnih protoka kao bi se na njima formirali nizovi karakteristika

---

velikih voda po principu prekoračenja izbranog praga. Obuhvaćena je metodologija formiranja kako osnovnih nizova, tako i njihovih agregacija.

Metodologija za modeliranje stohastičke strukture velikih voda dobijenih iz serija pikova iznad praga prikazana je na podacima o srednjim dnevnim protocima na reci Dunav za hidrometrijsku stanicu Bezdan. Podaci su iz 79 godina, od 1931. do 2009. godine. Karakteristike velikih voda koje su razmatrane su zapremine talasa velikih voda iznad praga, trajanja prekoračenja, trajanja ciklusa i pikovi protoka.

Za raspodele izabranih karakteristika velikih voda, ustanovljeno je da od teorijskih neprekidnih raspodela za veličine prekoračenja, zadovoljavajuće slaganje u većini slučajeva (za većinu baznih protoka) ima Vejbulova raspodela. Prilagođenjem osnovnog niza karakteristike Vejbulovom raspodelom može se posredno doći do modela za funkciju intenziteta broja javljanja, odnosno do njenog integrala. Diskretne raspodele za broj javljanja su drugačije za razne veličine, te mogu biti bilo koje od tri navedene (binomna, Puasonova ili negativna binomna).

Predloženi rekurentni modeli raspodela karakteristika i njihovih agregacija, počivaju na postulatima Markova za prekide u vremenu i po vrednosti karakteristike, kao i na nezavisnosti te dve vrste prekida. Modeli se zasnivaju na funkciji intenziteta broja javljanja osnovnog niza, sa oblikom koji odgovara Vejbulovoj raspodeli osnovnog niza karakteristike, i vrednosti parametra karakteristici odgovarajuće diskretne raspodele broja javljanja. Ono što je opšti zaključak je da iako predloženi rekurentni modeli za raspodelu karakteristike formalno imaju opravdanje, proračun jednog od parametara iz raspodele broja javljanja (za koji se prepostavlja da je konstantan, a pokazano je da iz realnih nizova nije) često ne daje dobro slaganje empirijskih i teorijskih raspodela. Zato je predložen postupak kojim se vrši prilagođenje drugom metodom, koja unosi dodatnu složenost u proračune, ali poboljšava slaganje osmotrenih podataka i modela.

Kao završetak testiranja daje se prikaz rezultatata analize maksimalnih vrednosti karakteristike na godišnjem nivou (što odgovara događaju  $e$ )).

Ključne reči: velike vode, stohastička struktura, pikovi iznad praga, modeliranje.

Naučna oblast: Građevinarstvo.

Uža naučna oblast: Hidrologija.

UDK broj: 624:556(043.3)

# Modelling of stochastic structure of flood characteristics derived from peaks over threshold series

## SUMMARY

There are number of factors that influence flood occurrence. Many of them are interdependent. Because of their random nature, floods are usually analysed using stochastic models. The most widespread approach in estimating a design-flood is based on the annual maximum series (AMS) of flood discharges. The design-flood is usually defined in terms of a peak-discharge-value, but it may also be defined in terms of its volume or its duration. Another approach is the peak-over-threshold method (POT). As there might be a number of flood occurrences within a year, only those ones whose peaks exceed a given threshold level are used to define flood characteristics in the POT. These floods form a partial duration series.

Datasets of flood characteristics are derived from the daily mean flow data. In addition to the basic (raw) datasets of the considered flood characteristic (a peak discharge, a flood duration, a flood volume, a number of flood occurrences within a specified interval, a time duration between the two floods, etc.), datasets derived through aggregation of two or more consecutive members of the basic series are also considered in this dissertation. Members of the derived datasets are also random variables. Together with the corresponding raw data they are termed flood structure characteristics.

The dissertation, thus deals with the information about the flood structure that might be deduced from the daily mean flow data through the introduction of flood characteristics and the analysis of their probability distributions using different stochastic models.

The main hypothesis is that all relevant information about the floods and their structure are inherent in the values of the flood characteristics that exceed given threshold, i.e. in the partial duration series of flood characteristics.

The dissertation aims at applying the theory of intermittent stochastic processes on the series of flood structure characteristics with procedures extended from the peak-over-threshold methods. To do this, probabilities of chosen events should be described with appropriate distribution functions. The data used to check the validity of the posed hypothesis and the applied methodology are obtained from the



mean daily series for the Bezdán gauging station on the Danube River in Serbia. These data refer to the 79-years long period, i.e. to the period 1931-2009.

The dissertation has four parts that are organised in six chapters. The first part is Chapter 1 Introduction. In this part, the importance of the flood analysis is outlined, aims and objectives of the study are set forth and the stochastic approach to the problem of the flood analysis is presented along with the description of available stochastic models. In the second part, which contains the following three chapters, theoretical bases of the proposed methodology for the description and prediction of the flood behaviour are given. The annual maximal volume of the flood, the flood duration and the flood cycle duration are defined as stochastic processes in Chapter 2. The peak-over-threshold method in the analysis of the flood peak discharges is described in Chapter 3, while Chapter 4 presents how the other flood characteristics are defined and derived from the partial duration series of the flood peak discharges. The proposed methodology for modelling stochastic structure of flood characteristics, derived from the peak-over-threshold series, is tested against the 79-years record of mean flow data from the gauging station Bezdán on the Danube River in the third part of the dissertation (Chapter 5). The most important conclusions from this study are summarised in the fourth part (Chapter 6).

An overview of the known concepts of stochastic modelling is given in the theoretical part of the dissertation. The types of methods are systematised and assumptions that lead to methods proposed in the dissertation are drawn. The standard procedure for statistical analysis of floods is also discussed. The basic stochastic relations are introduced through the discussion of the annual maximum volumes of floods that exceed the selected threshold for the discharge. The proposed methodological approach to the stochastic modelling of any flood characteristic includes the following analyses the analysis of:

- a) a number of occurrences in a time interval,
- b) a cycle duration or a time between two, three or more consecutive events,
- c) a number of occurrences in an interval measured in the units of the characteristic variable,
- d) the value of the flood characteristic in a single event or its cumulative value in two, three or more consecutive events,
- e) the maximum flood characteristic value in a time interval.

A number of interruptions over time and by the flood volume are the postulates of the proposed theory. These postulates imply that the result of the corresponding system of the two differential equations depends on the shape of functions of the occurrence. To solve the system of equations according to all relevant assumptions for the given variable, only those shapes of the intensity function that lead to the binomial, Poisson and negative binomial probability distributions for the number of occurrences or interruptions are considered. The use of these shapes was already proven in the applications of the peak-over-threshold method.

Continuous distribution functions of the time periods between two or more consecutive events and cumulative values of the flood characteristics in two or more consecutive events (items b) and d)) are modelled by exponential, Weibull or Pareto

distributions. A recurrence model for the distributions of the aggregated flood characteristics is also considered in the dissertation. The model consists of the discrete distribution for the number of occurrences and the type of the intensity function that corresponds to the Weibull distribution for the base data-series from which the flood characteristic is derived.

Consequently, it is shown in a separate chapter, that the traditional peak-over-threshold method is simply a special case of the proposed methodology, i.e. that it is based only on the selected assumptions.

For the sake of easier handling of large amounts of data, the basic principles and schemes of the computer procedures that are used for derivation of the partial duration series of the flood characteristics and their aggregates are presented in a separate chapter.

The methodology for modelling of stochastic structure of flood characteristics derived from peak-over-threshold series was tested against mean daily flow data from the Bezdan gauging station on the Danube River in Serbia. The data refer to the 79-years long record, i.e. from the period 1931-2009. The analysed flood characteristics are: excess flood volumes and excess flood discharges along with the associated event and cycle durations.

For the majority of chosen threshold values the Weibull distribution function provides the best fitting with the exceed values of the chosen flood characteristic. The fitting of the starting partial duration series to the Weibull distribution allows one to define, indirectly, the intensity function of the process and its integral.

The proposed recurrence models for distributions of flood characteristics and their aggregates rest on the Markov theory both for the time and characteristic value intermissions, as well as on the assumption that the two types of intermittence are independent. The models are based on the occurrence intensity function with the shape corresponding to the Weibull distribution for the starting partial duration series and the parameter of the discrete distribution for the number of occurrences of the considered flood characteristic. The overall conclusion is that there is formal justification for the application of the proposed recurrence model. However, the parameter of the discrete distribution sometimes does not lead to satisfactory fitted results (theoretically, parameter is supposed to be constant, but data records show that it is variable). Due to this conclusion, a modification of the method for parameter determination is introduced to achieve a better fit. However, the modification makes the calculations more complicated than expected.

The testing ends with the analysis of annual maximum values (the item e)) of the chosen flood characteristics.

Key words: Flood Flows, Stochastic Structure, Peaks Over Threshold, Modelling.

Scientific field: Civil Engineering – Hydraulic and Environmental Engineering.

Specific scientific field: Hydrology.

UDK number: 624:556(043.3)

# Sadržaj

<b>Informacije o mentorima i članovima komisije</b>	<b>i</b>
<b>Zahvalnost</b>	<b>ii</b>
<b>Rezime</b>	<b>iii</b>
<b>Summary</b>	<b>vi</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Pojam velikih voda . . . . .	1
1.2 Značaj proučavanja velikih voda . . . . .	1
1.3 Metode analize velikih voda . . . . .	3
1.4 Stohastička analiza velikih voda . . . . .	4
1.4.1 Hidrološki podaci za opis velikih voda . . . . .	5
1.4.2 Metode za statističku analizu velikih voda . . . . .	7
1.5 Pregled literature . . . . .	12
1.6 Predmet rada – ciljevi i zadaci . . . . .	13
1.6.1 Polazne hipoteze istraživanja . . . . .	14
1.6.2 Naučne metode istraživanja . . . . .	15
1.6.3 Cilj i zadaci istraživanja . . . . .	15
<b>2 Maksimalna godišnja zapremina talasa velike vode kao slučajni proces</b>	<b>17</b>
2.1 Uvod . . . . .	17
2.2 Neke matematske definicije i postulati o talasima velikih voda . . . . .	18
2.2.1 Osnovni pojmovi i definicije . . . . .	18
2.2.2 Zapremine velikih voda kao slučajni proces . . . . .	20
2.2.3 Opis procesa Markova kao osnove za proces zapremina velikih voda . . . . .	23
2.3 Raspodela broja javljanja prekida u vremenu . . . . .	25
2.3.1 Osnovne jednačine . . . . .	25
2.3.2 Intenzitet procesa . . . . .	27
2.3.3 Puasonov zakon verovatnoće . . . . .	28
2.3.3.1 Sa konstantnim parametrom . . . . .	28
2.3.3.2 Sa promenljivim parametrom . . . . .	29
2.3.4 Negativni binomni zakon verovatnoće . . . . .	31

2.3.5	Binomni zakon verovatnoće . . . . .	32
2.4	Raspodela broja prekida po zapremini . . . . .	33
2.4.1	Osnovne jednačine . . . . .	33
2.4.2	Intenzitet procesa . . . . .	34
2.5	Raspodela vremena za ostvarenje $\nu$ prekida . . . . .	37
2.5.1	Definicija . . . . .	37
2.5.2	Vreme za ostvarenje jednog prekida . . . . .	38
2.5.3	Vreme za ostvarenje $\nu$ prekida . . . . .	39
2.6	Raspodela zapremina talasa velikih voda . . . . .	43
2.7	Kontinualne raspodele pogodne za opis vremena i zapremina . . . . .	44
2.7.1	Eksponecijalna raspodela . . . . .	44
2.7.2	Vejbulova raspodela . . . . .	45
2.7.3	Pareto raspodela - opšta . . . . .	50
2.8	Raspodela maksimalne godišnje zapremine talasa velike vode . . . . .	54
2.8.1	Raspodele broja javljanja zapremina iznad praga sa uticajem na oblik funkcije raspodele maksimalne godišnje vrednosti . . . . .	55
2.8.1.1	Puasonov zakon . . . . .	55
2.8.1.2	Binomni zakon . . . . .	55
2.8.1.3	Negativni binomni zakon . . . . .	56
2.9	Analiza trajanja talasa i trajanja ciklusa velikih voda . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Metoda pikova iznad praga - POT primenjena na analizu maksimalnih godišnjih protoka</b>	<b>59</b>
3.1	Istorijat metode pikova iznad praga . . . . .	59
3.2	Teorijske osnove . . . . .	60
3.3	Raspodela godišnjih ekstrema po metodi pikova iznad praga . . . . .	62
3.3.1	Raspodela broja javljanja pikova . . . . .	63
3.3.2	Raspodele visine pikova iznad praga . . . . .	64
3.4	Praktični modeli raspodela godišnjih maksimuma po metodi pikova . . . . .	65
3.5	Preporuke za primenu metode pikova iznad praga . . . . .	66
3.5.1	Izbor praga – baznog protoka . . . . .	68
3.5.2	Kriterijumi nezavisnosti pikova . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Karakteristike velikih voda iz serija pikova iznad praga</b>	<b>72</b>
4.1	Hidrogrami dnevnih protoka kao izvor podataka . . . . .	72
4.2	Karakteristike velikih voda . . . . .	73
4.2.1	Definicija i osnovne karakteristike . . . . .	73
4.2.2	Klasifikacija karakteristika . . . . .	74
4.3	Agregacije na nivou karakteristike . . . . .	74
4.3.1	Smisao uvođenja agregacija . . . . .	74
4.3.2	Shema formiranja agregacija . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Test primer modeliranja stohastičke strukture velikih voda</b>	<b>79</b>
5.1	Uvod . . . . .	79
5.2	Test podaci – hidrometrijska stanica Bezdan, reka Dunav . . . . .	80

5.3	Stohastička struktura zapremina, trajanja talasa prekoračenja i trajanja ciklusa . . . . .	82
5.3.1	Opšte karakteristike zapremina i trajanja talasa prekoračenja . . . . .	83
5.3.2	Opšte karakteristike trajanja ciklusa između prekoračenja . . . . .	91
5.3.3	Broj pojave prekida u intervalu vremena . . . . .	95
5.3.3.1	Broj pojave prekida po kalendarskim godinama . . . . .	95
5.3.3.2	Broj pojave prekida po vremenskim intervalima različitih dužina . . . . .	96
5.3.4	Broj pojave pikova u intervalima vrednosti pikova . . . . .	98
5.3.5	Raspodela broja javljanja prekida u vremenu, $p_\nu(t)$ . . . . .	102
5.3.6	Raspodela broja javljanja pikova po intervalima vrednosti pikova, $p_n(x)$ . . . . .	106
5.3.7	Raspodela trajanja ciklusa, $G(\tau)$ . . . . .	112
5.3.8	Raspodela visine pikova, $H(x)$ . . . . .	116
5.3.9	Raspodela maksimalnih godišnjih zapremina i trajanja talasa prekoračenja, $F(x)$ . . . . .	124
5.4	Modeliranje stohastičke strukture pikova – maksimalnih prekoračenja usvojenog baznog protoka . . . . .	129
5.4.1	Opšte karakteristike visine pikova $\xi$ . . . . .	130
5.4.2	Opšte karakteristike trajanja ciklusa između pikova . . . . .	133
5.4.3	Broj pojave pikova u intervalu vremena . . . . .	138
5.4.3.1	Broj pojave pikova po i unutar kalendarskih godina . . . . .	138
5.4.3.2	Broj pojave pikova po vremenskim intervalima različitih dužina . . . . .	140
5.4.4	Broj pojave pikova u intervalima vrednosti pikova . . . . .	142
5.4.5	Raspodela broja javljanja pikova u vremenu, $p_\nu(t)$ . . . . .	144
5.4.6	Raspodela broja javljanja pikova po intervalima vrednosti pikova, $p_n(x)$ . . . . .	146
5.4.7	Raspodela trajanja ciklusa pikova, $G(\tau)$ . . . . .	149
5.4.8	Raspodela visine pikova, $H(\xi)$ . . . . .	153
5.4.9	Raspodela maksimalnih godišnjih protoka, $F(x)$ . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Zaključno poglavlje</b> . . . . .	<b>159</b>
6.1	Presek istraživanja . . . . .	160
6.2	Predlozi za dalja istraživanja . . . . .	164
	<b>Bibliografija</b> . . . . .	<b>166</b>
	<b>Prilozi</b>	
1.	Statistike zapremina $V$ prekoračenja preko praga, osnovni niz . . . . .	174
2.	Statistike $V_2$ zapremina prekoračenja preko praga, agregacija 2 . . . . .	175
3.	Statistike $V_3$ zapremina prekoračenja preko praga, agregacija 3 . . . . .	176
4.	Parametri eksponencijalne, Vejbulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $V$ zapremine prekoračenja preko praga, agregacije 1, 2 i 3 . . . . .	177
5.	Statistike $d$ trajanja prekoračenja preko praga, osnovni niz . . . . .	178

6.	Statistike $d_2$ trajanja prekoračenja preko praga, agregacija 2 . . .	179
7.	Statistike $d_3$ trajanja prekoračenja preko praga, agregacija 3 . . .	180
8.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $d$ trajanja prekoračenja preko praga, agregacije 1, 2 i 3 . . . . .	181
9.	Statistike $\tau$ trajanja ciklusa prekoračenja preko praga, osnovni niz	182
10.	Statistike $\tau_2$ trajanja ciklusa prekoračenja preko praga, agregacija 3	183
11.	Statistike $\tau_3$ trajanja ciklusa prekoračenja preko praga, agregacija 3	184
12.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\tau$ trajanja ciklusa prekoračenja preko praga, agregacije 1, 2 i 3 . . . . .	185
13.	Analiza $n_x$ broja javljanja pikova iznad praga u toku kalendarske godine, Reka: Dunav, Stanica: Bezdan . . . . .	186
14.	Statistike $\xi$ visina pikova iznad praga, Reka: Dunav, Stanica: Bezdan	187
15.	Statistike $\xi_2$ visina pikova iznad praga, agregacija 2 . . . . .	188
16.	Statistike $\xi_3$ visina pikova iznad praga, agregacija 3 . . . . .	189
17.	Statistike $\xi_4$ visina pikova iznad praga, agregacija 4 . . . . .	190
18.	Statistike $\xi_5$ visina pikova iznad praga, agregacija 5 . . . . .	191
19.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\xi_1$ pikove iznad praga, agregacija 1 . . . . .	192
20.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\xi_2$ pikove iznad praga, agregacija 2 . . . . .	193
21.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\xi_3$ pikove iznad praga, agregacija 3 . . . . .	194
22.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\xi_4$ pikove iznad praga, agregacija 4 . . . . .	195
23.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\xi_5$ pikove iznad praga, agregacija 5 . . . . .	196
24.	Statistike $\tau$ vremena između pojave pikova iznad praga, Reka: Dunav, Stanica: Bezdan . . . . .	197
25.	Statistike $\tau_2$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 2	198
26.	Statistike $\tau_3$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 3	199
27.	Statistike $\tau_4$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 4	200
28.	Statistike $\tau_5$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 5	201
29.	Parametri eksponencijalne, Weibulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\tau_1$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 1 . . . . .	202

30.	Parametri Eksponencijalne, Vejbulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\tau_2$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 2 . . . . .	203
31.	Parametri eksponencijalne, Vejbulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\tau_3$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 3 . . . . .	204
32.	Parametri eksponencijalne, Vejbulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\tau_4$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 4 . . . . .	205
33.	Parametri eksponencijalne, Vejbulove i Pareto raspodele i $p$ vrednosti za statistike testova $KS$ i $N\omega^2$ za $\tau_5$ vremena između pojave pikova iznad praga, agregacija 5 . . . . .	206
34.	Analiza $n_\xi$ broja javljanja pikova iznad praga u godini dana, Reka: Dunav, Stanica: Bezdán . . . . .	207
35.	Empirijska relativna frekvencija $n_{\xi,mes}$ broja javljanja pikova po mesecima u toku godine, Reka: Dunav, Stanica: Bezdán . . . . .	208
36.	Empirijska kumulativna relativna frekvencija $n_{\xi,mes}$ broja javljanja pikova po mesecima u toku godine, Reka: Dunav, Stanica: Bezdán . . . . .	209
37.	Maksimalni godišnji protoci – hronološki i uređeni u rastući niz, Reka: Dunav, Stanica: Bezdán . . . . .	210
<b>Biografija autora . . . . .</b>		<b>211</b>
<b>Izjava o autorstvu . . . . .</b>		<b>212</b>
<b>Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada . . . . .</b>		<b>213</b>
<b>Izjava o korišćenju . . . . .</b>		<b>214</b>

---

# Glava 1

## Uvod

### 1.1 Pojam velikih voda

Velike vode na vodotocima predstavljaju značajan problem za naselja, privredu, komunikacije, poljoprivredu i ekološki status voda u ugroženim zonama. Osnovni uzroci nastanka velikih voda na slivovima su topljenje snega i nagle i /ili dugotrajne atmosferske padavine (kiša) koje veoma brzo i intenzivno formiraju oticaj sa slivnog područja. Pored prirodnih, i antropogeni uticaji na slivu i u atmosferi mogu dovesti do sličnih posledica.

Pod velikim vodama smatra se prirodna pojava tokom koje na nekoj deonici vodotoka dolazi do naglog rasta vodostaja i protoka, dostizanja njihovog maksimuma, i zatim opadanja. Ovo je definicija poplavnog talasa, a njegova posledica može da bude izlivanje vode iz osnovnog korita vodotoka. Sa hidrološkog aspekta velike vode su ekstremni proticaji male verovatnoće pojave.

U širem smislu, sa pojmom velikih voda mogu se povezati i zapremine poplavnih talasa, zatim vremena tokom kojih proticaji poplavnih talasa prevazilaze određenu vrednost, vremena pojave vršnih proticaja i mnoge druge. Sve ove veličine se mogu predstaviti kao vremenski zavisni - stohastički slučajni procesi.

### 1.2 Značaj proučavanja velikih voda

U domenu velikih voda, zadatak hidrotehnike je projektovanje sistema koji do projektnog nivoa zaštite sprečavaju izlivanje velikih voda i onemogućavaju gubitak života i imovine, kao i nastanak štete u bilo kom vidu. Velike poplave pogodile su u poslednjih desetak godina niz evropskih zemalja u slivovima Rajne i Dunava izazvši velike materijalne štete. Zbog toga je od izuzetnog značaja što bolje odrediti protoke velikih voda.



S obzirom da se procene velikih voda zasnivaju na podacima osmatranja u prirodi, postoji stalna potreba za inoviranjem tih procena. Inovirane procene mogu da objasne neadekvatno funkcionisanje objekata izgrađenih po prethodnim procenama, što omogućava poboljšanje sistema za zaštitu od velikih voda.

Inoviranje procena velikih voda je neophodno iz dva razloga: zbog povećanja fonda podataka osmatranja i zbog kompleksnijih zahteva koji se postavljaju u oblasti zaštite od poplava. Fond podataka o poplavnim talasima se svakodnevno povećava, a time se povećava i pouzdanost probablističkih procena velikih voda.

Sa razvojem društva i sistema vrednosti u društvu, kriterijumi i uslovi za zaštitu od velikih voda postaju sve brojniji i međusobno više uslovljeni. Npr. nekontrolisana urbanizacija zahteva obimne i skupe radove na zaštiti od velikih voda, dok se planskim i integralnim rešenjima mogu postići efikasnije i pouzdanije zaštite. Takođe, neplanske promene namene površina, seča šuma, izgradnja velikih infrastrukturnih sistema znatno povećavaju rizik i komplikuju zaštitu od velikih voda. Još jedan primer je renaturalizacija ranije regulisanih vodotoka, od koje se zahteva održanje propisanog stepena zaštite uz očuvanje životne sredine, s jedne strane, i uklanjanje objekata prethodnog sistema zaštite, sa druge strane.

Velike poplave dešavaju se širom sveta, što potvrđuju najnovije katastrofe registrovane na prostorima SAD, Nemačke, Velike Britanije, Australije, jugoistočne Azije, itd. Osnovne karakteristike posledica su da u nerazvijenim zemljama ekstremne poplave uzrokuju veliki broj ljudskih žrtava uz izuzetno nepovoljne posledice na privredu, dok se u razvijenim državama štete prevashodno iskazuju preko ekonomskih pokazatelja.

U radovima Hoyois, Guha-Sapir (2003) i Kundzewicz i saradnici (2013) dat je prikaz i analiza poplava za prostor Evrope, za periode od 1973. do 2002. odnosno 1985. do 2009. godine. Konstatovan je porast broja katastrofalnih poplava, sa porastom kako broja žrtava tako i broja ljudi koji su u zonama ugroženim poplavama, uz rast obima šteta. Stradalo je preko 2500 osoba, oko 9 miliona ljudi je osetilo direktne posledice poplava, a štete su procenjene na oko 70 milijardi evra. Prema izveštajima organa EU od 1998. do 2004. godine dogodilo se oko 100 velikih poplava sa značajnim štetama. Među njima se izdvajaju poplave u slivovoima Dunava i Elbe u leto 2002. godine i poplave iz 2005. godine. U tom period je bilo oko 700 stradalih, evakuisano je oko 500000 ljudi a štete koje su isplatile osiguravajuće kuće iznosile su oko 25 milijardi evra.

I u našoj zemlji, Srbiji, bilo je u toku poslednjih deset godina zabeleženo više velikih poplava, uz značajne ekonomske posledice. Poginulo je desetak ljudi, popla-

vljeno je nekoliko hiljada objekata i velike poljoprivredne površine. Najveće poplave su se dogodile u proleće 2006. godine, kada je na mnogim rekama dostignut apsolutni maksimum vodostaja. Štete su tada procenjene na približno 36 miliona evra (Mihailović i saradnici, 2010).

Priroda pojave velikih voda i složenost uzroka njihovog nastanka, zatim velika prostornost nepovoljnih posledica poplava, uzrokuje potrebu za saradnjom na regionalnom i globalnom nivou. Na međudržavnom planu obrazuju se sistemi i modeli za praćenje, najavu i prognozu poplava. U Evropi su ustanovljeni međunarodni projekti kao što su FRIEND (1984–), MEDHYCOS (1995–), WATCH (2007–2011), gde se razmenom ideja i znanja stvara baza za definisanje prethodno navedenih ciljeva u oblasti proučavanja velikih voda (Gustard, i saradnici, 1993, Van Lanen, Demuth, 2002, Lehner i saradnici, 2006). Godine 2003. godine je započet EFAS (2003–) projekat sa zadatkom da se brže reaguje na opasnosti od poplava na Evropskim međunarodnim rekama.

Oblast zaštite od velikih voda zakonski se reguliše u gotovo svih zemljama. U evropskim razmerama to je na najvišem nivou postignuto kroz Evropsku okvirnu direktivu o vodama (EU WFD, 2000) i Direktivu o poplavama (EU FD, 2007). U našoj zemlji su zakonski okviri postavljeni kroz Zakon o vodama (2010).

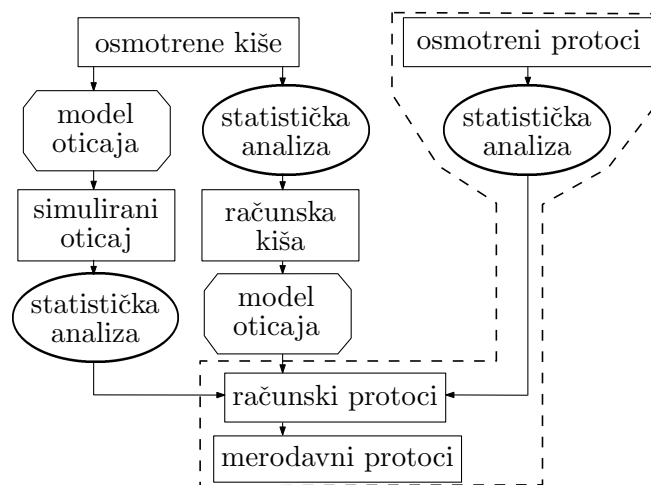
Prethodno navedeno samo je letimičan prikaz razloga za intenziviranje proučavanja velikih voda i razvoja modela za ocenu velikih voda. Tema ove disertacije je u skladu sa ovim tendencijama i potrebama.

### 1.3 Metode analize velikih voda

U zavisnosti od raspoloživih podataka i njihovog obima, na raspolaganju su sledeće klase metoda analize velikih voda:

- Analiza verovatnoće pojave na izabranom profilu vodotoka,
- Regionalna analiza verovatnoće pojave: – indeks metoda,
  - regionalna regresija,
  - regionalizacija parametara raspodela,
  - višeparametarski regresioni modeli.
- Modeli padavine-oticaaj: – fizički zasnovani modeli:
  - konceptualni / distribuirani,
  - modeli epizode / kontinualni simulacioni modeli,
- Bajesova analiza,
- Verovatno maksimalna velika voda (Probable Maximum Flood, PMF).

Proračuni velikih voda mogu se zasnivati na različitim pristupima i metodama. Uopšteno, izbor metode zavisi od više elemenata. Najvažniji je ima li zapisa protoka na profilu vodotoka od interesa, odnosno postoje li kontinualna hidrometrijska merenja. To slivove deli na dve velike grupe; osmotreni i neizučeni. Osmotreni su uglavnom profili na većim ili značajnim vodotocima, dok mali slivovi najčešće pripadaju klasi neizučenih ili delimično izučenih slivova. Za ove druge zaključivanje o velikim vodama je pomoću metoda parametarske hidrologije – modeli padavine-oticaaj, o čemu ovde neće biti reči. Na slici 1.1 data je opšte prihvaćena šema statističkog zaključivanja o velikim vodama prema raspoloživim podacima, odnosno prema „osmotrivosti” sliva.

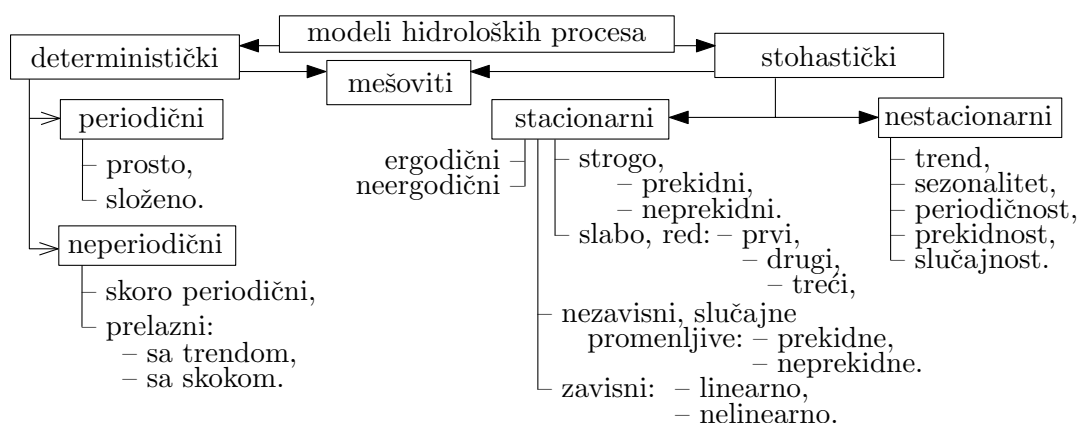


Slika 1.1: Analiza velikih voda – opšti statistički pristup.

## 1.4 Stohastička analiza velikih voda

Osnovni zadatak analize velikih voda je ocena merodavnih velikih voda na vodotocima. U inženjerskom smislu to su najveći očekivani talasi velikih voda i njihove karakteristike. Ove ocene nikada ne možemo da potvrdimo sa izvesnošću. Sva nastojanja u ovom poduhvatu ograničena su ispravnošću pretpostavki u opisu pojave.

Proces nastanka velikih voda veoma je složen u svakom smislu. Skup prirodnih faktora koji ga čine izuzetno je raznolik i praktično u detaljima neosmotriv. Zbog toga smo i prinuđeni da odgovore o prirodi velikih voda tražimo kroz razne pristupe. To su najčešće različiti modeli od čisto determinističkih i čisto stohastičkih do hibridnih (determinističko-stohastičkih) modela. Svaki od pristupa pretpostavlja različite nivoe složenosti analize i ima svoje dobre i loše strane, kako u domenu praktične primenljivosti tako i po kvalitetu dobijenih rezultata. Na slici 1.2 daje se



Slika 1.2: Vrste modela velikih voda kao hidrološkog procesa.

jedna od mogućih sistematizacija proučavanja velikih voda kao hidrološkog procesa koja se često javlja u hidrološkoj literaturi.

Suočeni sa velikom neizvesnošću, moguć put u nalaženju odgovora možemo naći kroz koncept verovatnoće pojave i slučajnih procesa, čiji je jedan od pristupa suština ovog istraživanja. Možemo ovaj pristup nazvati i „stohastičkom analizom”, što je širi, ali i primereniji pojam, jer ukazuje na značaj vremenskog sleda u pojavi velikih voda. Ključni problem je svakako nepoznavanje „prave” raspodele velikih voda i što su podaci koji treba da na nju ukažu često nedovoljnog obima. Zato su najvažniji zadaci ovog pristupa:

- odabrati „odgovarajući” stohastički model verovatnoće velikih voda,
- odrediti njegove parametre,
- odrediti ocene velikih voda sa zadovoljavajućom procenjenom tačnošću.

Ispunjenje tri prethodno navedena, sažeta i nedvosmislena zahteva, nije nimalo jednostavno. Složenost stohastičke analize velikih voda može se prikazati kroz elemente koje je potrebno uzeti u obzir. Neki od ključnih elemenata analize navedeni su u tabeli 1.1 kolona (1), a koja se sve pitanja postavljaju u svakom od elementarnih koraka ili kakav je moguć put u donošenju odluke u fazi analize, u koloni (2).

#### 1.4.1 Hidrološki podaci za opis velikih voda

Kako se iz tabele 1.1 može videti, prvi izbor pravimo oko toga koju ćemo vrstu podataka upotrebiti u analizi. Izvori podataka za analiza velikih voda mogu biti:

- Hidrometrijska merenja – ulaz za analizu verovatnoće pojave i osnova za konstrukciju hidrograma poplavnih talasa,
- Klimatološki podaci – ulaz za analizu verovatnoće pojave preko podataka o padavinama, sa meteoroloških stanica za upotrebu u hidrološkim modelima, relativno

Tabela 1.1: Elementi stohastičke analize velikih voda.

Element analize	pitanja/metodi/kriterijumi
(1)	(2)
Podaci	– izvori podataka, – tipovi podataka (godišnji maksimumi AMF, pikovi iznad praga POT), – klasifikacija podataka (sistematski/nesistematski).
Ocena parametara	– metoda momenata, – težinski i L-momenti, – maksimalna verodostojnost.
Izbor modela	– funkcije raspodela, – papiri verovatnoće, – testovi saglasnosti, – dijagrami parametara.
Regionalna analiza	– indeksne metode, – regionalna regresija, – parametarske metode.
Intervali poverenja	– širina intervala
Analiza nestacionarnih serija	uslovljena prirodnim ili antropogenim promenama na slivu, uticajem brana, usled klimatskih promena, ...

kratki raspoloživi nizovi.

- Istorijski podaci – iz arhivskih i drugih zapisa, uz ocenu njihove upotrebljivosti.
- Paleopodaci – iz tumačenja markera/pokazatelja različitih tipova iz vremena van pisanih tragova.

Podaci se prema načinu na koji su prikupljeni mogu podeliti na sistematske i nesistematske.

Sistematski podaci potiču iz sistematskih merenja koje se kontinualno sprovode kroz vreme, najčešće kroz mrežu osmatračkih stanica. Ti podaci mogu potpuno pokrivati opseg mogućih vrednosti ili biti ograničeni fizičkim mogućnostima načina opažanja. Oni su osnova za stohastičku analizu velikih voda.

Nesistematski podaci su istorijske vrednosti (izdvojene vrednosti iz zapisa u prošlosti vezanih za ekstremne hidrološke događaje). To mogu biti i paleo-podaci iz vremena pre pisane istorije koji su prikupljeni geološkim, botaničkim ili drugim istraživanjima prošlosti pre civilizacije u potrazi za tragovima velikih voda. Ovo podaci služe najčešće za ocenu valjanosti sprovedenih stohastičkih analiza velikih voda.

Vrste podataka koji se koriste u stohastičkoj analizi velikih voda uopšteno se mogu predstaviti kao realizacije različito definisanih slučajnih procesa na baznim podacima koji čine hidrograme. Tako se može reci da su raspoloživi tipovi podataka:

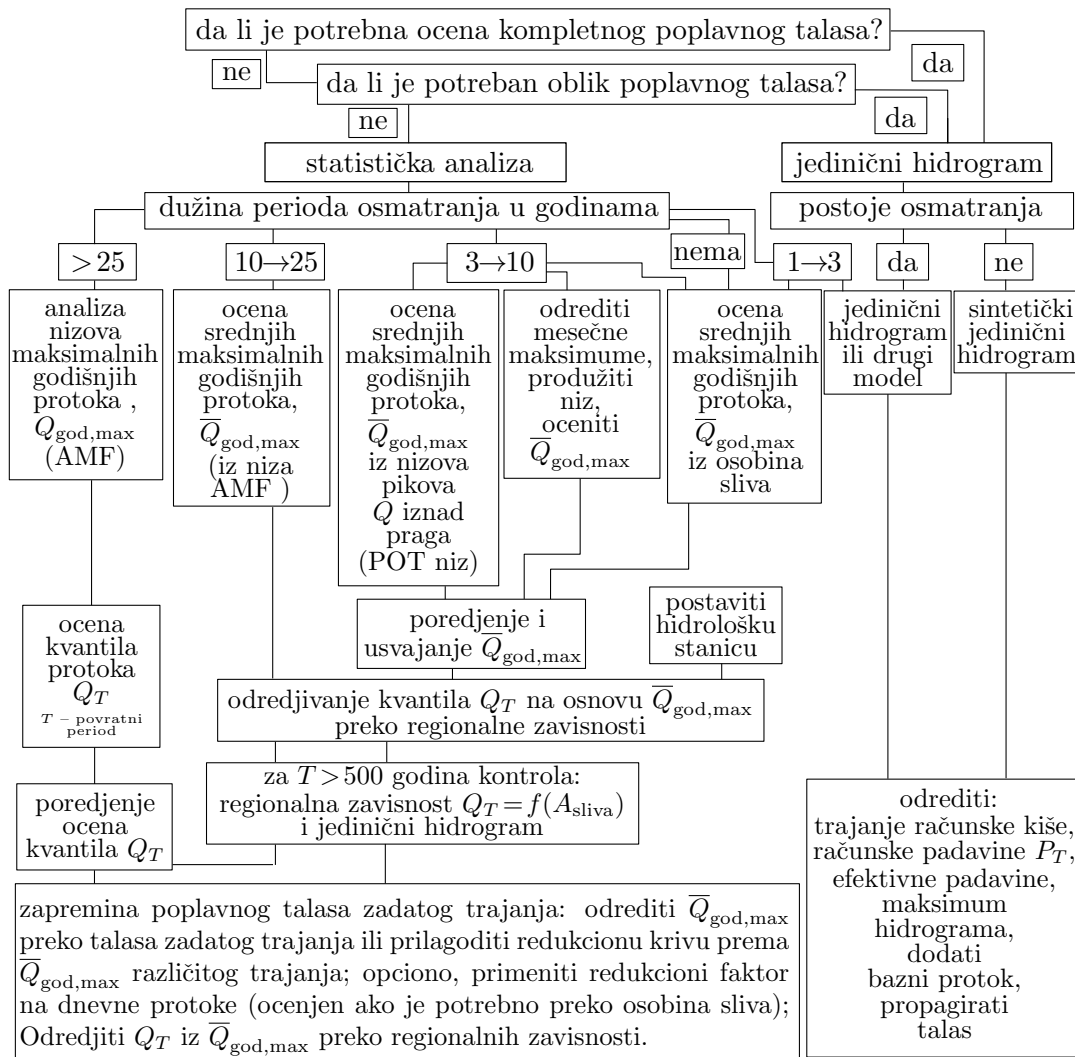
- Kompletne serije, odnosno kompletni hidrogrami,
- Parcijalne serije: – delimični-parcijalni hidrogrami definisani prekoračenjem izabranog baznog protoka (Partial Duration Series – PDS),  
– maksimalni godišnji protoci (ili Annual Maxima Flood - AMF); jedna vrednost po godini, međjusobno nezavisni,  
– pikovi iznad praga (ili Peaks Over Threshold - POT); maksimalne vrednosti, tj. pikovi, u epizodama PDS iznad odabrane baze (baznog protoka), broj javljanja u godini zavisi od baze, nezavisnost među njima treba potvrditi.

Na slici 1.3 prikazana je klasična šema ocene merodavnih velikih voda preuzeta iz rada Sutcliffe (1978). Tu je prikazano kako obim i vrsta podataka mogu opredeliti način na koji je moguće izvršiti analizu velikih voda i kompleksnost njihove inženjerske analize.

Hidrogrami dnevnih protoka su osnovni hidrološki izvor podataka za statističku analizu velikih voda na izučenim slivovima. Na slici 1.4 prikazano je kako se dolazi do podataka koji reprezentuju protoke velikih voda. Levi blok skica (L1, L2 i L3) pokazuje kako se iz kompletnog hidrograma (kompletne serije protoka) (skica L1) prepoznaju i odvajaju lokalni maksimumi (L2) od kojih neki predstavljaju godišnje maksimume (L3). Desni blok (D1, D2 i D3) prikazuje kako od kompletnog niza protoka uvođenjem baznog protoka - praga  $Q_B$  nastaje parcijalna serija (D1). U parcijalnoj seriji su samo neki lokalni maksimumi (skica D2) u odnosu na one sa skice L2. Oduzimanjem vrednosti baznog protoka od tih izvojenih lokalnih maksimuma nastaju prekoračenja - pikovi, označeni sa  $\xi$ . Ovim postupcima dobijaju se nizovi vrednosti za primenu metode godišnjih maksimuma (AMF) i metodu pikova iznad praga (POT) za proučavanje verovatnoće pojave velikih voda.

## 1.4.2 Metode za statističku analizu velikih voda

Na izučenim slivovima velike vode se proučavaju statističkom analizom na podacima koji se formiraju iz hidrograma – zapisa o promenama protoka u vodotoku u toku vremena. Na šemi sa slike 1.1 to je blok uokviren isprekidanom linijom. Fizička složenost procesa hidrološkog ciklusa i praktična nemogućnost njihove formalne matematičke predstave, uslovljava da ih posmatramo kao slučajne procese. To važi i za velike vode čija retka pojava implicira da se mogu smatrati slučajnim događajima i



Slika 1.3: Postupci za ocenu merodavnih velikih voda (po Sutcliffe (1978)).

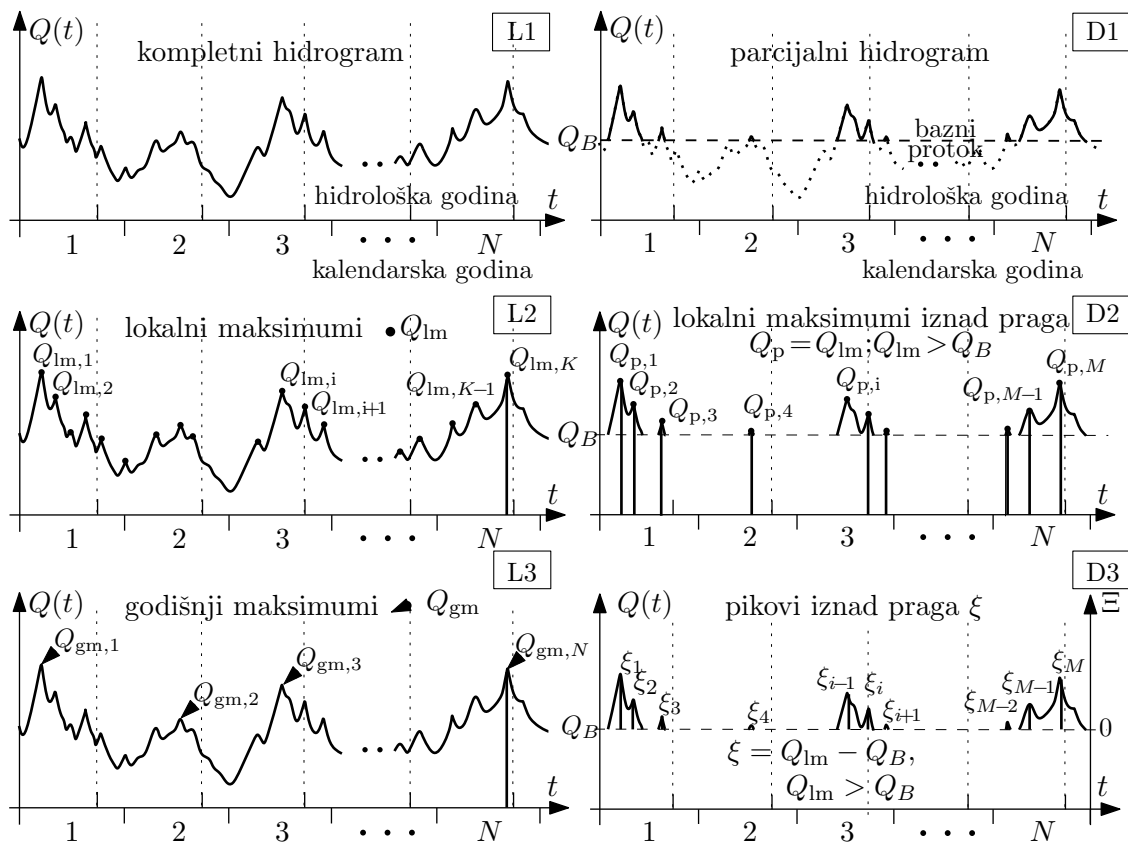
da se mogu proučavati metodama verovatnoće i statistike. Uređenost pojave velikih voda u vremenu dalje znači da je reč o stohastičkim slučajnim procesima.

Statistička analize hidroloških podataka uspostavlja modele veze ekstremnih događaja sa verovatnoćom pojave. Prethodno je predstavljena raznovrsnost izvora podataka koji nam mogu poslužiti za analizu velikih voda. Iz karakteristika tih tipova podataka zavisi i složenost statističke analize.

Najjednostavnije metode analize se primenjuju ako su podaci sa kojima radimo:

- slučajni u realizacijama vrednosti,
- međusobno nezavisni,
- homogeni po poreklu (iz iste su populacije) i po karakteristikama kroz vreme.

Hidrološki proces formiranja velikih voda je po prirodi stohastički nestacionaran - videti sliku 1.5, debela isprekidana linija. Statistička analiza mogla bi da se primeni



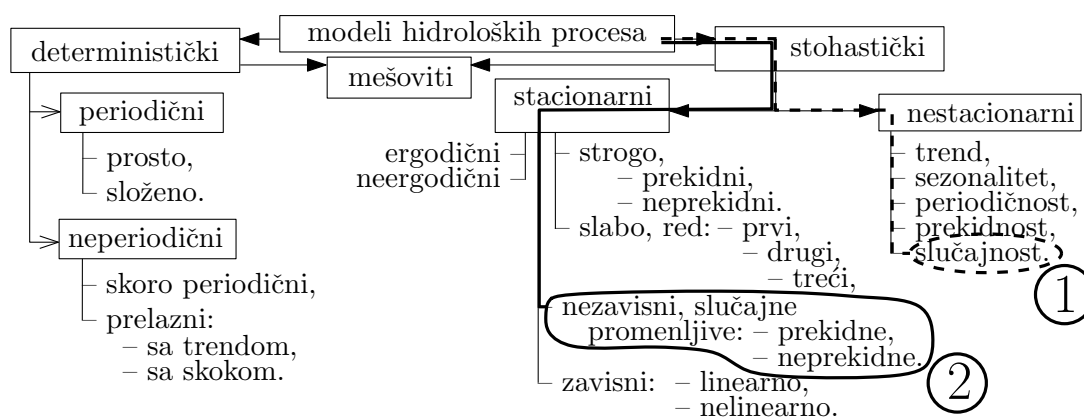
Slika 1.4: Prikaz načina na koji se iz potpunih ili parcijalnih serija protoka dolazi do podataka koji reprezentuju protoke velikih voda.

samo na element slučajnosti, pošto se sve ostale komponente uklone. Pogodnim izborom slučajne veličine koja je karakteristika – osobina velikih voda i uz opravdano uvedenu pretpostavku o njoj stacionarnosti proučavanje pojave možemo svesti na klasu stohastičkih stacionarnih slučajnih procesa (slika 1.5, debela puna linija). To je način koji će se primeniti u ovom radu.

Odstupanja od bazičnih pretpostavki za primenu statističke analize (slučajnost, nezavisnost i homogenost) su često prisutna. Kada su u pitanju velike vode, može se javiti problem nehomogenosti kada je njihovo poreklo različito (nastaju kao posledica jakih i/ili dugotrajnih kiša ili kao posledica topljenja snega). Ako se homogenost posmatra kao vremenska ustaljenost, to znači da se režimi velikih voda nisu menjali kroz vreme - stacionarni su (tj. ustaljeni su). Ukoliko se pojave promene režima na vodotocima, bilo da su prirodne ili antropogene, ovaj aspekt homogenosti nije održiv. Neispunjenje pretpostavki nezavisnosti i homogenosti zahteva upotrebu složenijeg statističkog modeliranja kroz koncept vremenskih serija.

Ispunjenje uslova nezavisnosti i homogenosti najčešće se postiže formiranjem





Slika 1.5: Priroda velikih voda kao hidrološkog procesa – 1. prava, 2. uprošćena.

nizova maksimalnih godišnjih protoka, tj. najvećih protoka iz svake godine osmatranja. U hidrološkoj praksi ovo je standardan postupak i osnova je metode godišnjih ekstrema (AMF). AMF metoda je jednostavna i zahteva malo napora u prikupljanju podataka. Primenjuje se kako na pojedinačnim profilima tako za analize na regionalnom nivou.

Osnovni koraci postupka statističke analize u AMF metodi su:

- proračun statističkih pokazatelja niza slučajne promenljive,
- formiranje empirijske raspodele, odnosno njena ocena modelom kompromisne verovatnoće,
- proračun teorijskih raspodela koje su mogući modeli zakona raspodele verovatnoće koji sledi slučajna promenljiva,
- testiranje saglasnosti teorijskih i empirijskog zakona raspodele verovatnoća,
- ocene vrednosti slučajne promenljive za zadate vrednosti verovatnoće pojave (kvantili) po teorijskim zakonima verovatnoće.

Statistički nizovi se mogu oformiti i na drugim polaznim principima, a da opet zadrže postulate slučajnosti, nezavisnosti i homogenosti. Nizovi maksimalnih godišnjih protoka, sa po jednom vrednosti iz svake godine, mogu imati neke male vrednosti iz malovodnih godina, a da su one znatno niže od nekih niže rangiranih vrednosti velikih voda iz vodnih godina.

Nasuprot, metoda pikova iznad praga (POT metoda ili metoda parcijalnih serija, što je alternativni naziv) ima pristup da zadrži veći broj značajnih vršnih protoka - pikova (onih koji prevazilaze odabrani prag  $x_B$  – bazni protok), iz celokupnog perioda kada su prikupljeni podaci. To znači da se najčešće radi sa u proseku više od jedne ekstremne vrednosti po godini. Moguće je da se neka od maksimalnih

godišnjih vrednosti ne nađe u nizu koji čine vršni protoci za neki prag po POT metodi. POT metoda je fleksibilnija i kompletnija u opisu velikih voda negom AMF.

Ilustrativno je tvrđenje da je POT metoda kompromis između AMF metode i modeliranja vremenskih serija (što su u suštini protoci). U biti ona obuhvata proučavanje dva procesa; vrednosti prekoračenja protoka preko praga i vremena pojave pikova. POT metoda se koncentriše na intenzivnije maksimalne protoke koji bolje opisuju proces formiranja velikih voda. Suština POT metode više odgovara prirodi procesa velikih voda od AMF metode.

Metoda pikova iznad praga počiva na složenom statističkom aparatu. Njena osnova je teorija slučajnih procesa. Njena dodatna mogućnost je sposobnost sagledavanja nehomogenosti nizova, kao što je unutargodišnja neravnomernost. Osim toga, pored ocene kvantila velikih voda (isti zadatak kao AMF metoda), zaključivanja su moguća i o vremenima pojave velikih voda, vremenskom intervalu (periodu) između pojave velikih voda tj. trajanju ciklusa, broju pojava velikih voda u izabranim vremenskim intervalima itd.

Znatno složenija i zahtevnija analiza vremenskih serija se primenjuje pri modeliranju autokorelacione strukture kompletne serije protoka (hronoloških nizovi protoka - hidrograma).

Rezultat statističke analiza velikih voda po AMF metodi je izbor teorijskog zakona raspodele verovatnoće, po uslovu najboljeg prilagodavanja sa opaženim maksimalnim godišnjim protocima. U hidrološkoj praksi se koriste mnogobrojni teorijski zakoni raspodele verovatnoća, odnosno funkcije raspodele, sa različitim brojem parametara:

broj parametra	naziv zakona verovatnoće, odnosno funkcije raspodele
• dvo- parametarske:	– log-normalna (LN2), – Gumbelova (raspodela ekstremnih vrednosti tipa 1, EV1), – Frešeova (raspodela ekstremnih vrednosti tipa 2, EV2), – Veibulova (raspodela ekstremnih vrednosti tipa 3, EV3).
• tro- parametarske:	– log-normalna (LN2), – Pirsonova (P3), – log-Pirson (LP), – opšta raspodela ekstremnih vrednosti (GEV), – opšta Pareto (GP), – opšta logistička (GL).

---

\*nastavak sa prethodne strane

broj parametra	naziv zakona verovatnoće, odnosno funkcije raspodele
• četvero-	– dvokomponentna raspodela ekstremnih vrednosti (TCEV), parametarske:
• peto-	– Vejbijeva raspodela (WAK), parametarske:

---

Za primenu u praksi razvijen je veliki broj uputstava i preporuka, u kojima je sažet rad vrhunskih stručnjaka na sveobuhvatnoj analizi velikih voda. Među nezaobilaznim, referentnim publikacijama su WMO - No.233 TP.126 (1969), WMO - No.168 (1994), Interagency Advisory Committee on Water Data (1982), National Committee on Water Engineering (1987. revised 1998), Institute for Hydrology (1975, 1999). O njima ovde neće biti reči.

\* \* \*

Prikaz metode POT – metode pikova iznad praga za protoke biće do detalja dat u poglavlju 3. Nastanak POT metode je rezultat pristupa prirodnom procesu nastanka velikih voda kao stohastičkom, vremenski zavisnom, slučajnom procesu. Stoga je prirodno da se o ovoj metodi govori posle uvođenja veze između apstraktnih pretpostavki pojma slučajnih procesa i nastanka velikih voda kao posledice međudejstva prirodnih elemenata okruženja, a što će biti detaljno učinjeno u poglavlju 2.

## 1.5 Pregled literature

Među mnogobrojnim radovima iz hidrologije velikih voda veoma je malo onih koji se bave zapreminama velikih voda, odnosno poplavnih talasa i ocenom njihove vrednosti (Choulakian i saradnici, 1990). Većina statističkih metoda zasniva se na posmatranju elemenata poplavnih talasa – vršnih protoka (pikova poplavnih talasa), njihovih trajanja i zapremina i smatra ih za slučajne promenljive. Zatim se usvajaju modeli raspodele sa više slučajnih promenljivih, utvrđuju njihove marginalne raspodele i određuju povratni periodi koji im odgovaraju (Ashkar, 1980, Yue i saradnici, 1999). Drugi istraživači uvode regionalne analize zasnovane na korelacionim tehnikama kako bi dali ocenu velikih voda na neizučnim slivovima (Chiang, 1975, Ouarda i saradnici, 2000). Postoji takođe i pristup nazvan QdF-analiza koja trajanje talasa ne smatra slučajnom promenljivom već parametrom, dok vršni protok u talasu ostaje slučajna promenljiva, pa na specifičan način proučavaju zapremine talasa (Javelle i saradnici, 2002).

U ovoj disertaciji slediće se put stohastičke analize zapremina poplavnih ta-

lasa koji se zasniva na parcijalnim serijama – POT metoda. Teorijske osnove ovog pristupa obrađivali su Todorović (1978), Ashkar, Rousselle (1982), Correia (1987), Cunnane (1989).

Same osnove POT metode nastale su kao potreba za analizom zakona verovatnoće maksimalnih godišnjih protoka analizom maksimuma svih značajnih poplavnih talasa na vodotoku, a ne samo jednog po godini. Značajni radovi iz ove oblasti su Langbein (1949), Darlymple (1960), Borgman (1963), Shane, Lynn (1964), Bernier (1967), Todorović, Zelenhasić (1969), Zelenhasić (1970), Todorović, Woolisher (1972), Todorović (1978). Dobar teorijski pregled metoda za analizu velikih voda u smislu maksimalnih proticaja prikazan je u publikaciji čiji je autor Smith (1990). Na srpskom jeziku teorijske osnove POT metode za anlizu velikih voda i njihovih karakteristika se mogu naći u udžbeničkoj literaturi Vukmirović (1990), Zelenhasić, Ruski (1991), Zelenhasić (1997).

U našoj zemlji, na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, grupa nastavnika se dugi niz godina bavi metodom pikova iznad praga. Među objavljenim radova značajniji su Vukmirović (1995), Vukmirović, Petrović (1997*a,b*), Plavšić (2006), Vukmirović (2010).

Ideja za temu disertacije potiče iz radova profesora Vojislava Vukmirovića. On je imao priliku da prati razvoj stohastičke metode koja proučava prekoračenja preko praga, POT metode, od njenog samog nastanka, saradjujući sa Petrom Todorovićem, Emirom Zelenhasićem i brojnim stranim istraživačima. Iskustva zaokružena u doktoratu (proučavanjem kretanja nanosa kao slučajng procesa, Vukmirović (1975)) i kasnije mentorstvima (doktorati Despotović (1996), jake kiše kao slučajni proces i Plavšić (2004), protoci velikih voda) dovela su do pitanja o mogućnosti primene tih iskustava i na proučavanje zapremine velikih voda, njihovih trajanja i maksimalnih protoka prekoračenja. O tim idejama će, kroz ciljeve i zadatke disertacije, biti više reči u podpoglavljima koja slede.

## 1.6 Predmet rada – ciljevi i zadaci

S obzirom na mnogobrojne i međusobno uslovljene prirodne činioce koji utiču na formiranje velikih voda, one se najčešće opisuju u domenu verovatnoće pojave. Uobičajeno je da se relevantne velike vode, odnosno merodavne veličine kao što su protoci, zapremine, trajanja talasa i slično, dobijaju analizom verovatnoće pojave na godišnjem nivou. Pri tom se najčešće koristi metoda godišnjih ekstrema, koja iz hidrograma iz svake godine uzima u razmatranje najveću opaženu vrednost protoka.

Međutim, unutar godine su moguće pojave većeg broja značajnih poplavnih talasa. Dublju analizu pojave velikih voda obezbeđuje metoda pikova, koja obuhvata i unutar godišnje velike vode. Karakteristika metode pikova ili metode parcijalnih serija je da uzima sva prekoračenja protoka preko izabranog praga za zaključivanje o velikim vodama.

Pored podataka o maksimalnim protocima i pikovima protoka, nizovi dnevnih protoka nose informacije i o trajanju velikih voda, trenucima pojave maksimuma, vremenu između pojave maksimuma talasa, zapreminama poplavnih talasa, itd. Ove veličine koje su slučajnog karaktera mogu se obuhvatiti zbirnim nazivom karakteristike strukture velikih voda.

Uvođenjem novih karakteristika strukture velikih voda, iz postojećih podataka o poplavnim talasima mogu se izvesti brojne nove informacije. Te karakteristike opisane verovatnoćom pojave, treba da doprinesu dubljem razumevanju i boljem opisivanju slučajnog procesa velikih voda.

Iz iskustva u primeni metode pikova u oblastima pronosa nanosa, jakih kiša i drugih hidrometeoroloških veličina, uočen je potencijal metode pikova da iz raspoloživih podataka izvuče veliki broj informacija. Važi pravilo da veći broj podataka sa sobom nosi i veći broj informacija.

U disertaciji, predmet istraživanja su informacije o strukturi pojave velikih voda koje se mogu izvesti iz dnevnih serija protoka uvođenjem novih slučajnih veličina i analizom njihovih verovatnoća pojave. Polazne ideje potiču iz oblasti primene slučajnih procesa obnavljanja na proučavanje pronosa nanosa u vodotocima i jakih kiša, a koje do sada nisu bile primenjene u analizi velikih voda.

U radu će se kao nove slučajne veličine uvesti agregacije (udruživanja) dve ili više uzastopnih vrednosti. Te veličine mogu biti dva ili više susednih pikova, vremena potrebna da se ostvare tako udruženi pikovi, sumarna trajanja takvih agregacija itd. Slične slučajne veličine se mogu uvesti i za zapremine talasa velikih voda ili za trajanje velikih voda, itd.

### **1.6.1 Polazne hipoteze istraživanja**

Hipoteza na kojoj počiva osnova doktorske disertacije jeste da se upotrebom parcijalnih serija tj. pikova iznad praga, kroz koncept slučajnih procesa, mogu analizirati elementi procesa nastanka velikih voda, odnosno njihove strukture i da sve ekstremne vrednosti (vrhovi poplavnih talasa, zapremine talasa velikih voda) nose informaciju o procesu formiranja velikih voda.

## 1.6.2 Naučne metode istraživanja

Proces formiranja velikih voda je izuzetno složen fizički proces, koji se teško modelira determinističkim modelima. Velike vode, kao ekstremni hidrološki događaji, dešavaju se relativno retko, pa često ispunjavaju sve uslove da se mogu posmatrati kao slučajni događaji i proučavati metodama teorije verovatnoće i slučajnih procesa.

Stohastički karakter pojave velikih voda, koji se u ovom radu analizira preko različitih karakteristika velikih voda, predodređuje da se oni proučavaju pomoću prekidnih slučajnih procesa.

U doktorskoj disertaciji se stoga primenjuju metode koje proističu iz teorije slučajnih procesa i teorije verovatnoće, kao i pojedine klasične metode statističke analize.

## 1.6.3 Cilj i zadaci istraživanja

Cilj istraživanja u okviru izrade doktorske disertacije je da se za fenomen velikih voda primeni metodologija analize pomoću prekidnih slučajnih procesa tako što će se proširiti dosadašnja istraživanja vršena metodom pikova. Na prethodno definisanim karakteristikama velikih voda mogu se definisati različiti događaji koji se mogu opisati slučajnim procesima. Razmatranja će obuhvatiti:

- broj događaja u intervalu vremena,
- trajanje ciklusa između dva, tri ili više uzastopnih događaja,
- broj događaja u intervalima vrednosti karakteristike,
- vrednosti karakteristike pri jednom, dva ili više uzastopnih događaja,
- maksimalne vrednosti karakteristika u intervalu vremena.

Zadatak je da se verovatnoće odabranih događaja opišu familijama funkcija raspodela i da se testiraju pomoću odgovarajućih empirijskih raspodela i testova saglasnosti.

Analizom očekivanih rezultata ostvariće se navedeni ciljevi i omogućiće se detaljniji uvid u strukturu velikih voda primenom prekidnih slučajnih procesa. Na taj način se očekuje bolje razumevanje dinamike procesa velikih voda kroz njihove procene i za druge vremenske korake osim standardnih godinu dana. Konačni cilj je pouzdanija procena velikih voda kao osnova za unapređenje upravljanja vodnim resursima.

Očekivani doprinos se ogleda u analiziranju ne samo pojedinačnih ekstremnih događaja već i njihovih sekvencijalnih (uzastopnih) suma, njima odgovarajućih veličina

u domenu vremena pojave i vremena između pojava, kao i modeliranju zakona verovatnoće i međusobnih veza tih zakona.

U tom smislu, rezultati disertacije obuhvataju:

- doprinos definisanju i razumevanju složenih procesa formiranja velikih voda,
- unapređenje metodologije obrade i analize podataka hidrometrijskih merenja,
- povećanje nivoa znanja i količine izvedenih informacija o strukturi pojave velikih voda iz raspoloživih podataka hidrometrijskih merenja,
- utvrđivanje ograničenja pojedinih metoda u primeni.

Praktična primena se ogleda u mogućnosti da se preko postojećih podataka dođe do dodatnih informacija o velikim vodama i da se osobine velikih voda procene sa većom pouzdanošću.

---

## Glava 2

# Maksimalna godišnja zapremina talasa velike vode kao slučajni proces

### 2.1 Uvod

Analiza pojave maksimalnih godišnjih zapremina talasa velikih voda, njihovog trajanja kao i maksimalnih godišnjih protoka vršiće se, kako je najavljeno, metodama analize slučajnih procesa.

Da bi se opisala pojava zapremina talasa velikih voda i za ovu pojavu definisala funkcija raspodele, potrebno je da se analiziraju sledeće pojave:

- broj epizoda velikih voda u vremenskim intervalima,
- broj javljanja epizoda u intervalima zapremine,
- trajanje ciklusa pojedinih epizoda,
- trajanje talasa velikih voda, i
- zapremine talasa u pojedinim epizodama.

Prve dve pojave iz prethodnog nabrojanja opisuju se diskretnim raspodelama, a ostale neprekidnim (kontinualnim) raspodelama.

Pri definisanju funkcije raspodele maksimalnih godišnjih zapremina kao i maksimalnih godišnjih protoka primenjuju se ekvivalentni postupci, s'tim što su od posebnog značaja:

- broj javljanja pojave u vremenu, i
- maksimalni protoci iznad izabrane bazne vrednosti protoka (praga) i zapremine talasa iznad praga tokom trajanja tih prekoračenja.



U ovoj glavi razmatraju se zapremine talasa iznad praga, njihova trajanja i trajanja ciklusa, dok se maksimalni protoci razmatraju u glavi 3.

## 2.2 Neke matematske definicije i postulati o talasima velikih voda

Posmatraju se zapremine talasa velikih voda (iznad bazne vrednosti  $Q_B$ ) na profilu određenog vodotoka. Nije moguće sa sigurnošću predvideti maksimalnu zapreminu talasa velike voda od početnog trenutka  $t$  ( $t > 0$ ). Drugim rečima, maksimalna zapremina talasa u toku vremenskog intervala  $(0, t]$ , za svako  $t > 0$  predstavlja slučajnu promenljivu. Iz toga sledi zaključak da će se za proučavanje veličine koja ima slučajan karakter primeniti metode teorije verovatnoće.

Kao uvod, daju se neke bazne definicije iz teorije verovatnoće i slučajnih procesa, u nameri da se dalja razmatranja učine jasnim i nedvosmislenim. Kao literatura korišćene su monografije Mališić (1975), Jevremović (1999), Kottegoda, Rosso (2008), Vukmirović (1975, 1990).

### 2.2.1 Osnovni pojmovi i definicije

Neka  $\Omega = \{\omega\}$  predstavlja neprazan skup svih elementarnih slučajnih događaja (ishoda)  $\omega$ . Elementarni događaj  $\omega$  (ili elementarni ishod nekog eksperimenta) je primarni pojam koji se ne definiše. Slučajni događaj  $A$  je onaj podskup skupa  $\Omega$  koji obuhvata sve elementarne događaje  $\omega$  koji imaju osobine kojima se slučajni događaj  $A$  definiše. Svaki elementarni događaj  $\omega$  je istovremeno i slučajan događaj. Skup  $\Omega$  kao skup svih elementarnih događaja  $\omega$  je izvestan (siguran) događaj. Prazan skup označen sa  $\Theta$  takođe je element skupa  $\Omega$  i predstavlja nemoguć događaj (nemoguće je da se ne dogodi ništa, tj da ne postoji ishod eksperimenta). Pošto je  $\Omega$  sam sebi podskup, a važi i da je prazan skup  $\Theta$  podskup skupa  $\Omega$ , sledi da su i  $\Omega$  i  $\Theta$  slučajni događaji.

Neka je  $\mathcal{A}$  - familija (skup) događaja iz  $\Omega$ , i neka  $\mathcal{A}$  ima sledeće osobine:

a.1) siguran događaj  $\Omega$  pripada familiji  $\mathcal{A}$ :

$$\Omega \in \mathcal{A},$$

b.1) ako neki događaj  $A$  pripada familiji  $\mathcal{A}$  onda i njemu suprotan (komplementaran) događaj  $\bar{A}$  pripada familiji  $\mathcal{A}$ :

$$\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A} \quad \text{gde je} \quad \bar{A} = \Omega - A,$$

c.1) ako je  $A_1, A_2, \dots, A_n$  bilo koji konačan ili prebrojiv niz događaja koji pripadaju familiji  $\mathcal{A}$ , tada i njihova unija pripada  $\mathcal{A}$ :

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_j A_j \in \mathcal{A}.$$

Familija  $\mathcal{A}$  sa osobinama a.1), b.1) i c.1) se zove  $\sigma$ -polje ili  $\sigma$ -algebra događaja (podskupova) iz  $\Omega$ . Skreće se pažnja da i nemoguć događaj  $\Theta$ , kao komplement sigurnog događaja  $\Omega$  pripada familiji  $\mathcal{A}$  (osobina b.1)).

Neka je  $P$  realna funkcija definisana na  $\sigma$ -polju  $\mathcal{A}$  događaja iz  $\Omega$  koja ima sledeće osobine:

a.2) nenegativnost – za svaki događaj  $A$  iz familije  $\mathcal{A}$  je  $P(A) \geq 0$ :

$$P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (2.1)$$

b.2) aditivnost – ako je  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  niz disjunktних (međusobno isključujućih) slučajnih događaja iz  $\mathcal{A}$ , tada je:

$$P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j), \quad (2.2)$$

c.2) normiranost – verovatnoća sigurnog (izvesnog) događaja je jednaka 1:

$$P(\Omega) = 1. \quad (2.3)$$

Funkcija  $P: \Omega \rightarrow R$  sa izvedenim svojstvima a.2), b.2) i c.2) zove se verovatnoća. Njen argument je događaj, a njena vrednost realan broj. Uređena trojka  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  čini, odnosno jeste, prostor verovatnoće.

Funkcija  $X$  definisana na prostoru verovatnoće  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  i koja preslikava prostor elementarnih događaja  $\Omega$  u skup realnih brojeva  $R$ , za koju inverzna slika svakog intervala  $(-\infty, x)$ ,  $x \in R$  predstavlja slučajni događaj iz  $\mathcal{A}$  i koja je konačna, zove se slučajna promenljiva.

Za prethodno definiciju slučajne promenljive važi osobine:

a.3) merljivost – skup  $\{\omega | X(\omega) < x\}$  je događaj koji pripada  $\mathcal{A}$ , za svako  $x \in R$ :

$$\forall x \in R \rightarrow \{\omega | X(\omega) < x\} \in \mathcal{A} ,$$

b.3) konačnost:

$$P \{\omega | X(\omega) = -\infty\} = P \{\omega | X(\omega) = +\infty\} = 0 .$$

Funkcija

$$F(x) = P \{\omega : X(\omega) < x\} \equiv P \{X < x\} ,$$

definisana za svako  $x \in R$  zove se funkcija raspodele slučajne promenljive  $x$ . Ona je neopadajuća, neprekidana s leve strane i vrednosti su joj iz zatvorenog intervala  $[0, 1]$ , pri čemu je  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ .

Neka se pod funkcijom raspodele podrazumeva:

$$F(x) = P \{X \leq x\} . \tag{2.4}$$

Tada je  $F(x)$  neprekidna sa desne strane za svako realno  $x$ . U ovom radu su korišćene funkcije raspodela definisane kao izrazom (2.4).

Neka  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  predstavlja prostor verovatnoće i neka je  $T = \{t\} \subset R$  skup vrednosti realnog parametara  $t$ . Slučajni proces je konačna funkcija i predstavlja familiju (skup) slučajnih promenljivih  $\{X(t, \omega) | t \in T\} \equiv \{X(t) | t \in T\}$ . Za svaku fiksiranu vrednost  $t = t_0$  zapis  $X(t_0, \omega)$  predstavlja slučajnu promenljivu. Za svako fiksirano  $\omega = \omega_0 \in \Omega$  sledi da je  $X(t, \omega_0)$  neslučajna funkcija realnog argumenta  $t \in T$ . Ona se zove realizacija (trajektorija, uzoračka funkcija) slučajnog procesa  $X(t)$ . Konačno, kada su i  $t$  i  $\omega$  nezavisne veličine imamo slučajni proces. Skup svih realizacija slučajnog procesa  $X(t)$  označavamo sa  $\mathcal{R}(X_t)$ . Ako je  $T$  prebrojiv skup  $X(t)$  se zove slučajni niz, a ako je  $T$  neprebrojiv skup tada je  $X(t)$  slučajni proces u užem smislu.

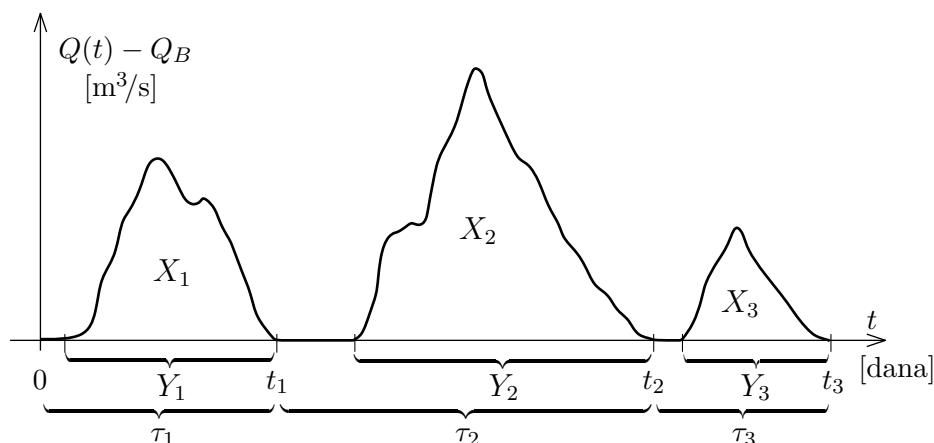
## 2.2.2 Zapremine velikih voda kao slučajni proces

Slučajni proces maksimalnih zapremina talasa velikih voda većih od praga  $Q_B$  definiše se izrazom:

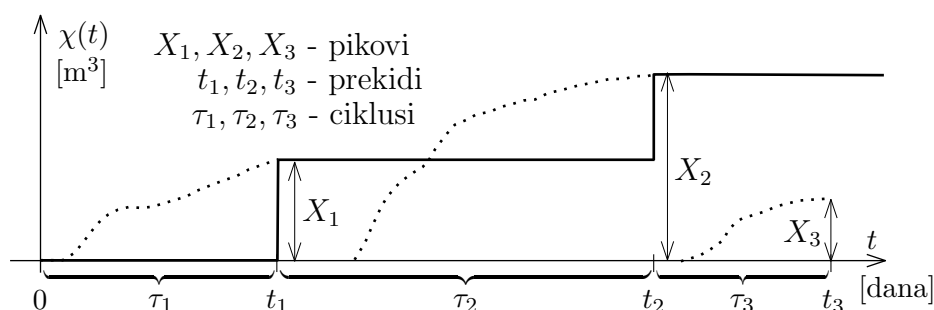
$$\chi(t) = \chi_t = \sup_{\substack{t_\nu \leq t \\ \nu=1, \dots, \eta_t}} \{ X(t_\nu), t \geq 0 \} . \tag{2.5}$$

gde su  $X(t_\nu), 0 \leq t_\nu \leq t$  (skraćeno  $X_\nu$ ) zapremine pojedinačnih talasa velikih voda (kojih ima  $\eta_t$ ) za protoke veće od baznog  $Q_B$ , a sve do trenutka  $t$ . Trenuci  $t_\nu$  su trenuci ostvarenja  $\nu$ -te zapremine  $X_\nu$ .

Realizacija slučajnog procesa zapremine velikih voda definisanog sa (2.5) može biti predstavljena na različite načine. Talas se može predstaviti hidrogramom (slika 2.1) ili hronološkim dijagramom dostizanja maksimalne zapremine poplavnog talasa (slika 2.2).



Slika 2.1: Hidrogram prekoračenja baznog protoka  $Q_B$ .



Slika 2.2: Najveća pojedinačna zapremina (supremum) do vremena  $t$  - jedna realizacija slučajnog procesa maksimalnih zapremina poplavnih talasa.

Iz ovih dijagrama, koji su karakteristični za pojavu velikih voda, uočava se smena perioda velikih voda i perioda sa protocima manjim od  $Q_B$  (slika 2.1). Na slici 2.2 prikazana je realizacija slučajnog procesa  $\chi(t)$ . Za analizu slučajnog procesa bitne su vrednosti zapremina pojedinačnih talasa  $X_\nu$  (na slici su označene sa  $X_1, X_2$  i  $X_3$ ). U daljem tekstu ove vrednosti će se kraće nazivati pikovi. Realizacija slučajnog procesa je stepenasta funkcija sa skokom u trenutku  $t_\nu$  i horizontalnom platformom do trenutka pojave većeg pika. Za trenutak pojave pika  $t_\nu$  koristiće se izraz prekid

(na slici su to vremenski trenuci  $t_1, t_2$  i  $t_3$ ), a vreme između pojedinih prekida ciklus (na slici su to intervali vremena  $\tau_1, \tau_2$  i  $\tau_3$ ).

Kroz tekst koji sledi proučavaće se neki interesantni podskupovi skupa svi trajektorija  $\mathcal{R}(\chi_t)$  slučajnog procesa velikih voda, kao što su podskupovi realizacija pri kojima je:

- ukupan broj talasa velikih voda u vremenskom intervalu  $(0, t]$  manji od  $\nu$ ,
- ukupan broj talasa velikih voda u intervalu zapremina  $(0, x]$  manji od  $n$ ,
- vremenski period pri  $\nu$  ciklusa velikih voda  $\leq t$ ,
- maksimalna zapremina pri  $n$  talasa velikih voda  $\leq x$  ili maksimalno trajanja pri  $n$  talasa velikih voda  $\leq t$ .

Navedeni podskupovi definišu neke značajne pojave slučajnog procesa maksimalnih zapremina velikih voda. Da bi se te pojave opisale potrebno je izračunati verovatnoće prethodno navedenih podskupova i utvrditi međusobnu zavisnost između njih.

\* \* \*

Da bi se lakše opisao slučajni proces i četiri navedena podskupa (podfamilije), definišaće se dve klase merljivih podskupova iz odgovarajućih prostora elementarnih ishoda.

Neka je slučajna promenljiva  $\eta_t$  broj prekida na vremenskom segmentu dužine  $t$ , na primer  $(0, t]$ . Na svakom intervalu  $(0, t], t > 0$  slučajna promenljiva  $\eta_t$  je definisana pomoću

$$\eta_t = \max \{ \nu ; t_\nu \leq t \} .$$

Očigledno je da  $\eta_t$  predstavlja diskretnu slučajnu promenljivu, tj. da za svako  $t > 0$ ,  $\eta_t = 0, 1, 2, \dots$ . Za  $t = 0$  je  $\eta_0 \equiv 0$ .

Podskup prostora  $\Omega_\eta$ , označen sa  $E_\nu^t$ , sadrži sve realizacije slučajnog procesa koje u intervalu  $(0, t]$  imaju tačno  $\nu$  tačaka prekida:

$$E_\nu^t = \{ \eta_t = \nu \} . \tag{2.6}$$

Karakteristike skupa  $\{ \eta_t = \nu \}$  su:

$$\begin{aligned} \forall t > 0 \Rightarrow \quad & \{ \eta_t = i \} \cap \{ \eta_t = j \} = \emptyset, \quad i \neq j, \\ & \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \{ \eta_t = \nu \} = \Omega_\eta . \end{aligned} \tag{2.7}$$

gde je  $\emptyset$  prazan skup, a  $\Omega_\eta$  predstavlja siguran događaj. Ovo znači da su za  $i \neq j$  skupovi isključivi (međusobno) i da je sigurno da u svakom intervalu  $(0, t]$  ili nema prekida ili ima bar jedan prekid.

Neka je slučajna promenljiva  $\mu_x$  broj prekida od nastanka talasa  $x = 0$  do zapremine  $x$  ( $x > 0$ ).

Ako je  $x_n$  ukupna zapremina do  $n$ -tog prekida, tada je pri svakoj realizaciji slučajnog procesa vrednost slučajne promenljive  $\mu_x$  jednaka:

$$\mu_x = \max \{k ; x_k \leq x\} .$$

Očigledno je da je i  $\mu_x$  diskretna slučajna promenljiva. Za svako  $x > 0$ ,  $\mu_x = 0, 1, 2, \dots$ , a za  $x = 0$  je  $\mu_0 \equiv 0$ .

Drugi podskup, podskup prostora  $\Omega_\mu$ , označen sa  $G_n^x$ , sadrži sve realizacije slučajnog procesa kod kojih je ukupna zapremina  $x_n$  do  $n$ -tog prekida (u toku  $n$  talasa)  $\leq x$ :

$$G_n^x = \{\mu_x = n\} .$$

Navode se neke karakteristike skupa  $\{\mu_x = n\}$ , koje važe za svako  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \{\mu_x = i\} \cap \{\mu_x = j\} &= \emptyset \quad , \text{ za } \forall i \neq j , \\ \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\mu_x = n\} &= \Omega_\mu . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ovo znači da su i skupovi  $\{\mu_x = i\}$  i  $\{\mu_x = j\}$  za  $i \neq j$  isključivi međusobno i da je sigurno da u svakom intervalu  $(0, x]$  ili nema prekida ili ima bar jedan prekid.

### 2.2.3 Opis procesa Markova kao osnove za proces zapremine velikih voda

Kod matematskog opisa slučajnog procesa zapremina talasa velikih voda koristiće se postulati procesa Markova diskretnog tipa.

#### I – Postulati Markova za broj prekida u vremenu

- a.) Verovatnoća da se u vremenskom intervalu  $(t, t+\Delta t)$ ,  $t > 0$ ,  $\Delta t > 0$  dogodi jedan prekid pod uslovom da je u intervalu  $(0, t]$  bilo  $\nu$  prekida jednaka je  $\lambda(t, \nu)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$

$$P \{\eta_{\Delta t} = 1\} = \lambda(t, \nu)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0 ,$$

b.) Verovatnoća da se u intervalu dužine  $\Delta t$  dogodi više od jednog prekida je  $\mathcal{O}(\Delta t)$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , tj. u veoma malim vremenskim intervalima  $(t, t + \Delta t)$  praktično je nemoguće da dođe do dva ili više prekida. Iz toga sledi,

$$P \{ \eta_{\Delta t} > 1 \} = \mathcal{O}(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

ili

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P \{ \eta_{\Delta t} > 1 \}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P \{ \Omega_{\eta} - \{ \eta_{\Delta t} = 0 \} - \{ \eta_{\Delta t} = 1 \} \}}{\Delta t} = 0, \quad (2.10)$$

c.) verovatnoća da u intervalu  $(t, t + \Delta t)$  ne dođje ni do jednog prekida je  $1 - \lambda(t, \nu) \Delta t$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , tj.

$$P \{ \eta_{\Delta t} = 0 \} = 1 - \lambda(t, \nu) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

U prethodnim izrazima je sa  $\lambda(t, \nu)$  označena funkcija vremenskog intenziteta javljanja prekida koja predstavlja graničnu vrednost verovatnoće javljanja jednog prekida u veoma malom vremenskom intervalu  $(t, t + \Delta t]$  pod uslovom da su se u intervalu  $(0, t]$  prekidi javili  $\nu$  puta, tj.

$$\lambda(t, \nu) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P \{ \eta_{t+\Delta t} - \eta_t = 1 \mid \eta_t = \nu \}}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

Skup stanja procesa broja javljanja prekida je  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Ako je  $\eta(t) = \nu$  to znači da se proces u momentu  $t$  nalazio u stanju  $\nu$ . Pri takvoj interpretaciji prethodno navedenih postulati predstavljaju verovatnoće sledećih događaja:

- postulat a.) – prelaza iz stanja  $\nu$  u stanje  $(\nu + 1)$ ,
- postulat b.) – ostajanja u istom stanju  $\nu$ ,
- postulat c.) – prelaza u stanje  $k$ , gde je  $k > 1$ .

Za mali priraštaj vremena  $\Delta t$  praktično su mogući sledeći slučajevi: prelaz u sledeće više stanje ili ostajanje u istom stanju. U postulatima je  $\lambda(t, \nu) > 0$ , gde je  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

## II – Postulati Markova za prekide po zapremini talasa

1. Verovatnoća da u intervalu zapremine  $(x, x + \Delta x)$ ,  $x > 0$ ,  $\Delta x > 0$  dođe do jednog prekida, pod uslovom da je u intervalu  $(0, x]$  bilo  $n$  prekida,

jednaka je  $\varkappa(x, n) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ . Shodno tome,

$$P(\mu_{\Delta x} = 1) = \varkappa(x, n) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

2. Verovatnoća da u intervalu zapremine  $\Delta x$  dođe do više od jednog prekida je  $\mathcal{O}(\Delta x)$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , tj. u veoma malim intervalima  $(x, x + \Delta x)$  praktično je nemoguće da dođe do dva ili više prekida. Dakle,

$$P(\mu_{\Delta x} > 1) = \mathcal{O}(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

ili

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\mu_{\Delta x} > 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{\Omega_{\mu} - \{\mu_{\Delta x} = 0\} - \{\mu_{\Delta x} = 1\}\}}{\Delta x} = 0.$$

3. Verovatnoća da u intervalu  $(x, x + \Delta x)$  ne dođe ni do jednog prekida je  $1 - \varkappa(x, n) \Delta x$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , tj.

$$P(\mu_{\Delta x} = 0) = 1 - \varkappa(x, n) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

### III – Pretpostavka o nezavisnosti prekida u vremenu i prekida po zapremini talasa

Ova pretpostavka se uvodi zbog lakšeg postavljanja matematskog aparata za modeliranje stohastičke strukture karakteristika velikih voda.

1. Verovatnoća broja prekida u intervalu vremena  $(0, t]$  ne zavisi od verovatnoće prekida u intervalu zapremine talasa  $(0, x]$ , tj.

$$P\{\{\eta_t = \nu\} \cap \{\mu_x = n\}\} = P\{\eta_t = \nu\} \cdot P\{\mu_x = n\}.$$

## 2.3 Raspodela broja javljanja prekida u vremenu

### 2.3.1 Osnovne jednačine

Za opisivanje talasa velikih voda od interesa je da se posmatra i opiše broj njihovog javljanja od trenutka  $t = 0$  do vremena  $t$  ( $t > 0$ ). Iz prethodnog opisa jasno je da se ne može sa sigurnošću predvideti broj javljanja talasa u fiksiranom vremenskom intervalu  $(0, t]$ .



Slučajan broj javljanja prekida  $\eta_t$  u intervalu  $(0, t]$  definisan je skupom,

$$\eta_t = \max \{ \nu; t_\nu \leq t \} , \quad (2.13)$$

i predstavlja diskretnu slučajnu veličinu čije vrednosti mogu biti  $0, 1, 2, \dots$ , tj.  $\eta_t$  će imati raspodelu:

$$\eta_t : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \dots \end{pmatrix} . \quad (2.14)$$

Zakon verovatnoće broja javljanja prekida u vremenskom intervalu  $(0, t]$  (vidi 2.14) definisan je izrazom:

$$p_\nu(t) = P \{ \eta_t = \nu \} . \quad (2.15)$$

Koristeći postulate I-a. i I-b., odnosno izraze (2.9) i (2.10), sledi da se zakon verovatnoće  $p_\nu(t)$  može odrediti polazeći od verovatnoće broja javljanja prekida u intervalu  $(0, t + \Delta t]$ , koja je jednaka zbiru verovatnoće  $\nu$  javljanja u intervalu  $(0, t]$  i nula javljanja u intervalu  $(t, t + \Delta t]$  i verovatnoće  $(\nu - 1)$  javljanja u intervalu  $(0, t]$  i jednog javljanja u intervalu  $(t, t + \Delta t]$ .

$$\begin{aligned} p_\nu(t + \Delta t) = & p_\nu(t) [1 - \lambda(t, \nu) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)] + \\ & + p_{\nu-1} [\lambda(t, \nu-1) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)] + \mathcal{O}(\Delta t) , \end{aligned} \quad (2.16)$$

odnosno:

$$\frac{p_\nu(t + \Delta t) - p_\nu(t)}{\Delta t} = \lambda(t, \nu-1) p_{\nu-1}(t) - \lambda(t, \nu) p_\nu(t) + \frac{\mathcal{O}(\Delta t)}{\Delta t} . \quad (2.17)$$

Kada vrednost  $\Delta t \rightarrow 0$ , dobija se:

$$p'_\nu(t) = \lambda(t, \nu-1) p_{\nu-1}(t) - \lambda(t, \nu) p_\nu(t) , \quad \nu \geq 1 . \quad (2.18)$$

Iz prethodnog izraza sledi da izvod verovatnoće broja javljanja prekida u tački  $t = 0$ :

$$p'_0(t) = -\lambda(t, 0) p_0(t) . \quad (2.19)$$

Za sistem diferencijalnih jednačina (2.18) i (2.19) početni uslovi su, prema postulatu I-c., odnosno izrazu i (2.11):

$$\begin{aligned} t = 0 & \Rightarrow p_0(0) = 1 , \\ t = 0 & \Rightarrow p_\nu(0) = 0 , \quad \forall \nu \geq 1 . \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Intenzitet procesa

U dobijenim diferencijalnim jednačinama (2.18) i (2.19) javlja se funkcija intenziteta prekida u vremenu koja predstavlja graničnu vrednost uslovne verovatnoće jednog prekida u veoma malom intervalu  $(t, t + \Delta t)$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , ako je u intervalu vremena  $(0, t]$  bilo  $\nu$  prekida, tj.

$$\lambda(t, \nu) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P \{E_1^{\Delta t} | E_\nu^t\}}{\Delta t} . \quad (2.21)$$

Od funkcije intenziteta  $\lambda(t, \nu)$  zavise rešenja diferencijalnih jednačina, a to znači i zakon verovatnoće broja prekida u vremenskom intervalu  $(0, t]$ . Zbog toga ova funkcija intenziteta ima izuzetan značaj.

Za funkciju intenziteta  $\lambda(t, \nu)$  uobičajeno je da se pretpostave relativno jednostavni oblici u kojima se razdvaja uticaj vremena i broja prekida. Na taj način se omogućava rešenje sistema jednačina (2.18) i (2.19). Prema Vukmiroviću (1990), pretpostavljaju se 4 oblika funkcije intenziteta  $\lambda(t, \nu)$  koji daju 4 različita zakona verovatnoće javljanja prekida (Tabela 2.1). Ovi zakoni verovatnoće će se detaljnije prikazati u narednim potpoglavljima.

Tabela 2.1: Zakoni verovatnoće  $\eta_t$  broja javljanja prekida po vremenu

tip raspodele	$\lambda(t, \nu)$ funkcija intenziteta	$p_\nu(t)$ zakon verovatnoće broja javljanja prekida
(1)	(2)	(3)
I	const.	→ Puasonov sa konstantnim parametrom.
II	$\lambda_1(t)$	→ Puasonov sa promenljivim parametrom.
III	$\lambda_1(t) \left(1 + \frac{\nu}{a}\right)$	→ negativan binomni.
IV	$\lambda_1(t) \left(1 - \frac{\nu}{b}\right)$	→ binomni.

Kod izbora funkcije intenziteta mora se voditi računa o prirodi velikih voda. Potrebno je zadovoljiti dva postulata:

$$\boxed{\text{Postulat } a} \quad \forall t > 0, \quad \lambda(t, \nu) > 0 . \quad (2.22)$$

$$\boxed{\text{Postulat } b} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial E(\eta_t)}{\partial t} = \text{const.} \neq \infty . \quad (2.23)$$

Postulat  $a$  govori da tokom vremena  $t$  ( $t > 0$ ) uvek postoji izvesna verovatnoća da će se dogoditi prekid u intervalu  $(t, t + \Delta t)$  ako se u intervalu  $(0, t]$  prekid dogodio  $\nu$  puta. Ovaj postulat se odražava na zakon raspodele prekida u vremenu, pa i na prosečan broj prekida u intervalu  $(0, t]$ , koji je obeležen sa  $E(\eta_t)$  i koji glasi:

$$E(\eta_t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu p_{\nu}(t) . \quad (2.24)$$

Pored toga što mora biti  $E(\eta_t) \geq 0$ , postulat  $a$  ujedno ukazuje da:

$$\text{Za } \forall t > 0, \quad \frac{\partial E(\eta_t)}{\partial t} > 0 . \quad (2.25)$$

Drugim rečima, sa povećanjem vremenskog intervala  $(0, t]$  povećava se i prosečan broj prekida.

Ovaj postulat govori da priraštaj broja javljanja talasa po vremenu i pri veoma velikim intervalima vremena ima konačnu vrednost. Drugim rečima, u dužem intervalu vremena, talasi velikih voda se u proseku javljaju jednakim intenzitetom (tj, ne može da dođe do njihovog nagomilavanja u kratkim pod-intervalima).

## 2.3.3 Puasonov zakon verovatnoće

### 2.3.3.1 Puasonov zakon verovatnoće sa konstantnim parametrom

Ako je funkcija intenziteta javljanja prekida tokom vremena nepromenljiva tj.

$$\lambda(t, \nu) = \lambda_0 = \text{const.} , \quad (2.26)$$

sistem diferencijalnih jednačina (2.18) i (2.19) se transformiše u oblik:

$$p'_{\nu}(t) = -\lambda_0 [p_{\nu}(t) - p_{\nu-1}(t)] , \quad (2.27)$$

$$p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) . \quad (2.28)$$

Iz jednačine (2.28) dobija se da je:

$$p_0(t) = C e^{-\lambda_0 t} , \quad (2.29)$$

Konstanta  $C$  se određuje iz početnog uslova (2.20) i iznosi  $C = 1$ , pa se dobija:

$$p_0(t) = P\{\eta_t = 0\} = e^{-\lambda_0 t} . \quad (2.30)$$

Iz jednačine (2.27), uz korišćenje uslova (2.20) da je za  $t=0$  verovatnoća  $p_\nu(t) = 0$  za  $\nu = 1, 2, \dots$ , rekurzivnim putem dobijaju se vrednosti za  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_\nu(t)$  pa se konačno zakon verovatnoće izražava sa:

$$p_\nu(t) = e^{-\lambda_0 t} \frac{[\lambda_0 t]^\nu}{\nu!} . \quad (2.31)$$

Izraz (2.31) predstavlja Puasonov zakon verovatnoće sa konstantnim parametrom  $\lambda_0$ , odnosno radi se o homogenom Puasonovom procesu.

Matematičko očekivanje broja javljanja prekida (odnosno srednji ili prosečni broj javljanja prekida) je:

$$E(\eta_t) = \lambda_0 t , \quad (2.32)$$

dispersija (odnosno varijansa) broja javljanja prekida je:

$$D(\eta_t) = \lambda_0 t . \quad (2.33)$$

Odnos varijanse i srednjeg broja javljanja prekida iznosi jedan, tj.  $D(\eta_t)/E(\eta_t) = 1$ .

### 2.3.3.2 Puasonov zakon verovatnoće sa promenljivim parametrom

Za funkciju intenziteta javljanja prekida u vremenu sa oblikom:

$$\lambda(t, \nu) = \lambda(t) , \quad (2.34)$$

sistem diferencijalnih jednačina (2.18) i (2.19) se pretvara u:

$$p'_\nu(t) = -\lambda(t) [p_\nu(t) - p_{\nu-1}(t)] , \quad (2.35)$$

$$p'_0(t) = -\lambda(t) p_0(t) . \quad (2.36)$$

Iz jednačine (2.36) dobija se da je:

$$p_0(t) = C e^{-\Lambda(t)} , \quad (2.37)$$

gde je:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du . \quad (2.38)$$

Veličina  $\Lambda(t)$  praktično predstavlja prosečan broj javljanja prekida u vremenskom intervalu dužine  $t$ .

Početni uslov (2.20) omogućuje da se odredi konstanta  $C$  koja iznosi  $C = 1$ , pa

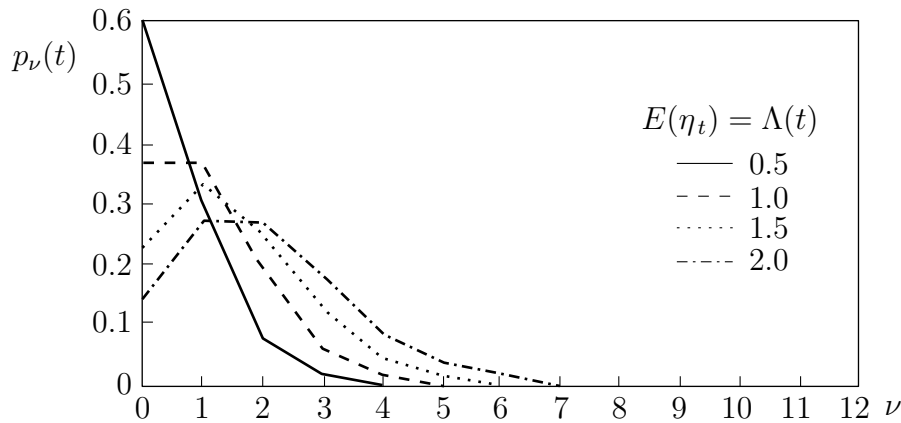
se dobija:

$$p_0(t) = e^{-\Lambda(t)} . \quad (2.39)$$

Iz jednačine (2.35), uz korišćenje uslova (2.20) da je za  $t = 0$  verovatnoća  $p_\nu(t) = 0$  za  $\nu = 1, 2, \dots$ , rekurzivnim putem dobijaju se vrednosti za  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_\nu(t)$  pa se konačno zakon verovatnoće izražava sa:

$$p_\nu(t) = P\{\eta_t = \nu\} = e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^\nu}{\nu!} . \quad (2.40)$$

Izraz (2.40) predstavlja Puasonov zakon verovatnoće sa promenljivim parametrom  $\Lambda(t)$ , odnosno u pitanju je nehomogen Puasonov proces. Na slici 2.3 prikazan je Puasonov zakon verovatnoće za vrednosti parametra  $\Lambda = 0.5, 1.0, 1.5$ , i  $2.0$ .



Slika 2.3: Puasonov zakon za vrednosti  $\Lambda(t) = 0.5, 1.0, 1.5$  i  $2.0$ .

Za Puasonov zakon verovatnoće važi rekurentna formula:

$$p_\nu(t) = \frac{\Lambda(t)}{\nu} p_{\nu-1}(t) . \quad (2.41)$$

Srednji broj javljanja prekida je:

$$E(\eta_t) = \Lambda(t) , \quad (2.42)$$

dok je disperzija (tj. varijansa) broja javljanja prekida:

$$D(\eta_t) = \Lambda(t) . \quad (2.43)$$

Odnos varijanse i srednjeg broja javljanja prekida jednak je jedinici.

### 2.3.4 Negativni binomni zakon verovatnoće

Sistem diferencijalnih jednačina (2.18) i (2.19) ima rešenje ako se funkcija intenziteta javljanja pikova izrazi kao proizvod dve funkcije  $\lambda(t)$  i  $\lambda_*(\nu)$ , gde funkcija  $\lambda_*(\nu)$  ima oblik aritmetičke progresije:

$$\lambda_*(\nu) = 1 + \frac{\nu}{a}, \quad (2.44)$$

i gde je parametar  $a$  pozitivan ( $a > 0$ ). Za ovakav oblik funkcije intenziteta,

$$\lambda(t, \nu) = \lambda(t) \lambda_*(\nu) = \lambda(t) \left(1 + \frac{\nu}{a}\right), \quad (2.45)$$

diferencijalne jednačine (2.18) i (2.19) imaće oblik:

$$p'_\nu(t) = -\lambda(t) \left[1 + \frac{\nu}{a} p_\nu(t)\right] + \lambda(t) \left[1 + \frac{\nu-1}{a} p_{\nu-1}(t)\right], \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (2.46)$$

$$p'_0(t) = -\lambda_1(t) p_0(t). \quad (2.47)$$

i njihovim rešenjem se dobija zakon verovatnoće u obliku:

$$p_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu + a)}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(a)} (1 - e^{-\Lambda(t)/a})^\nu e^{-\Lambda(t)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (2.48)$$

$$p_0(t) = e^{-\Lambda(t)}, \quad (2.49)$$

gde je:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du. \quad (2.50)$$

Izraz 2.48 ekvivalentan je negativnom binomnom zakonu verovatnoće.

Na slici 2.4 prikazan je negativni binomni zakon verovatnoće za srednje vrednosti slučajnog broja  $E(\eta_t) = 0.5, 1.0, 1.5$  i  $2.0$  pri odnosu disperzije i srednjeg broja javljanja 1.20. Za negativni binomni zakon verovatnoće važi rekurentna formula:

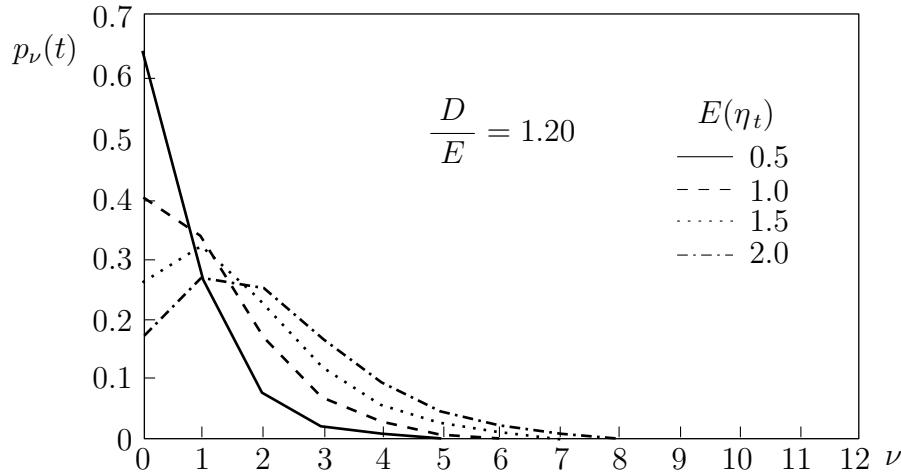
$$p_\nu(t) = \frac{a + \nu - 1}{\nu} (1 - e^{-\Lambda(t)/a}) p_{\nu-1}(t). \quad (2.51)$$

Matematičko očekivanje broja javljanja prekida u vremenu  $(0, t]$  je:

$$E(\eta_t) = a (e^{\Lambda(t)/a} - 1), \quad (2.52)$$

a disperzija:

$$D(\eta_t) = a e^{\Lambda(t)/a} (e^{\Lambda(t)/a} - 1). \quad (2.53)$$


 Slika 2.4: Negativni binomni zakon;  $D/E = 1.20$  i  $E(\eta_t) = 0.5, 1.0, 1.5$  i  $2.0$ .

Odnos disperzije i srednjeg broja pojave prekida veći je od jedinice.

$$\frac{D(\eta_t)}{E(\eta_t)} = e^{\Lambda(t)/a} > 1. \quad (2.54)$$

### 2.3.5 Binomni zakon verovatnoće

Ako se funkcija intenziteta broja javljanja prekida u vremenu  $(0, t]$  predstavi proizvodom funkcije  $\lambda(t)$  i funkcije  $\lambda_{**}(\nu) = 1 - \nu/b$  ( $b$  je pozitivni parametar), tj.

$$\lambda(t, \nu) = \lambda(t) \lambda_{**}(\nu) = \lambda(t) \left(1 - \frac{\nu}{b}\right), \quad (2.55)$$

Sistem diferencijalnih jednačina (2.18) i (2.19) daje rešenje u obliku:

$$p_\nu(t) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(b+1-\nu)} e^{-\Lambda(t)} (e^{\Lambda(t)/b} - 1)^\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (2.56)$$

$$p_0(t) = e^{-\Lambda(t)}, \quad (2.57)$$

što predstavlja binomni zakon verovatnoće. I ovde je sa  $\Lambda(t)$  obeleženo:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du. \quad (2.58)$$

Za binomni zakon verovatnoće važi rekurentni izraz:

$$p_\nu(t) = \frac{b+1-\nu}{\nu} (e^{\Lambda/b} - 1) p_{\nu-1}(t). \quad (2.59)$$

Matematičko očekivanje broja javljanja prekida u vremenskom intervalu  $(0, t]$  je:

$$E(\eta_t) = b (1 - e^{-\Lambda(t)/b}) , \quad (2.60)$$

a disperzija se računa po izrazu:

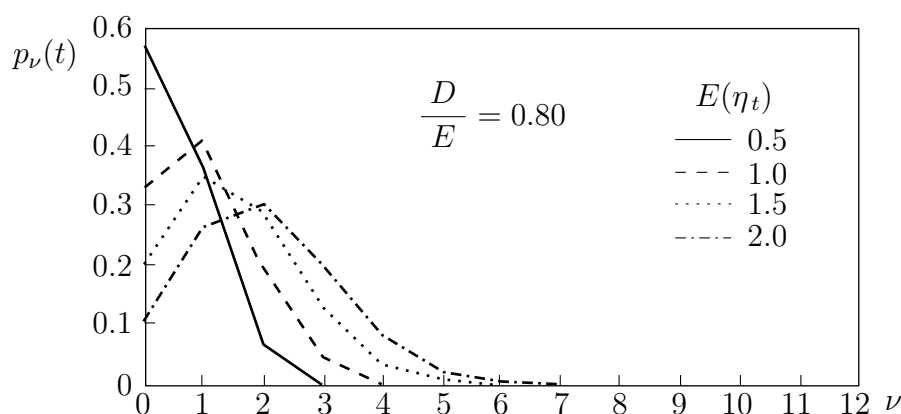
$$D(\eta_t) = b e^{-\Lambda(t)/b} (1 - e^{-\Lambda(t)/b}) , \quad (2.61)$$

pa količnik iz disperzije i srednjeg broja javljanja glasi:

$$\frac{D(\eta_t)}{E(\eta_t)} = e^{-\Lambda(t)/b} < 1 , \quad (2.62)$$

i uvek je manji od jedinice.

Na slici 2.5 prikazan je binomni zakon verovatnoće pri odnosu varijanse i srednjeg broja javljanja 0.80 za četiri vrednosti srednjeg broja javljanja 0.5, 1.0, 1.5 i 2.0.



Slika 2.5: Binomni zakon;  $D/E = 0.80$  i  $E(\eta_t) = 0.5, 1.0, 1.5$  i  $2.0$ .

## 2.4 Raspodela broja prekida po zapremini

### 2.4.1 Osnovne jednačine

Broj prekida po zapremini,  $\mu_x$  od  $x = 0$  do zapremine  $x$  ( $x > 0$ ) opisuje se slučajnim događajem

$$G_n^x = \{\mu_x = n\} . \quad (2.63)$$

Slučajna promenljiva  $\mu_x$  definisana je izrazom:

$$\mu_x = \max \{n; X_n \leq x\} , \quad (2.64)$$



gde je  $X_n$  zapremina prilikom  $n$  prekida.

Verovatnoća da će u intervalu  $(0, x + \Delta x]$  biti tačno  $n$  prekida može se izračunati kao zbir verovatnoće da će u  $(0, x]$  biti  $n$  javljanja prekida, a u  $(x, x + \Delta x)$  nula javljanja, zatim verovatnoće da će u  $(0, x]$  biti  $(n-1)$  javljanja, a u  $(x, x + \Delta x)$  jedno javljanja, itd.

$$p_n(x + \delta x) = \sum_{r=0}^n p_{n-r}(x) p_r(x + \Delta x). \quad (2.65)$$

Uz pretpostavku da je verovatnoća dva ili više prekida u intervalu  $(x, x + \Delta x)$  infinitezimala višeg reda od  $\Delta x$ , iz izraza(2.65), na sličan način kao u prethodnom poglavlju dobija se sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\partial p_n(x)}{\partial x} = \varkappa(x, n-1) p_{n-1}(x) - \varkappa(x, n) p_n(x), \quad (2.66)$$

za  $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{\partial p_0(x)}{\partial x} = -\varkappa(x, 0) p_0(x). \quad (2.67)$$

Početni uslov je:

$$\text{za } x = 0 \quad \rightarrow \quad p_0(x) = 1, \quad (2.68)$$

iz čega sledi:

$$\text{za } x = 0 \quad \rightarrow \quad p_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## 2.4.2 Intenzitet procesa

U diferencijalnim jednačinama (2.66) i (2.67) javlja se funkcija  $\varkappa(x, n)$  koja je jednaka:

$$\varkappa(x, n) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{p_{n+1}(x + \Delta x) | p_n(x)\}}{\Delta x}. \quad (2.69)$$

Funkcija  $\varkappa(x, n)$  predstavlja graničnu vrednost uslovne verovatnoće jednog prekida u veoma malom intervalu  $(x, x + \Delta x)$  pod uslovom da je u intervalu  $(0, x]$  bilo  $n$  prekida. Adekvatan naziv ove funkcije je zapreminski intenzitet prekida. Od oblika funkcije zapreminskog intenziteta prekida zavisi rešenje diferencijalnih jednačina (2.66) i (2.67) koje istovremeno predstavlja zakon verovatnoće prekida po zapremini poplavnog talasa. Funkcija zapreminskog intenziteta je druga fundamentalna funkcija kojom se definiše funkcija raspodele slučajnog procesa  $X_t$  i četiri posmatrane familije raspodela.

Kod izbora funkcije zapreminskog intenziteta prekida neophodno je da bude zadovoljen sledeći postulat, koji proizilazi iz prirode procesa velikih voda:

$$\boxed{\text{Postulat } a} \quad \forall x > 0 \quad \rightarrow \quad \varkappa(x, n) > 0. \quad (2.70)$$

Postulat govori da na intervalu vrednosti zapremine  $(0, x]$  za  $\forall x > 0$ , uvek postoji izvesna verovatnoća da će se javiti prekid na intervalu zapremine  $(x, x + \Delta x)$  ako se u intervalu  $(0, x]$  prekid javio  $n$  puta. Ako  $E(\eta_x)$ , tj. prosečan broj prekida za dostizanje zapremine  $x$ , definišemo sa:

$$E(\eta_x) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(x), \quad (2.71)$$

onda se ovaj postulat se može izraziti i sa:

$$\text{za } \forall x > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E(\eta_x)}{\partial x} > 0. \quad (2.72)$$

Nadalje će se analizirati uticaj oblika funkcije  $\varkappa(x, n)$  na zakon verovatnoće verovatnoće broja prekida po zapremini  $X$  u intervalu  $(0, x]$  i to kroz 4 (četiri) oblika funkcije  $\varkappa(x, n)$  (prema Vukmiroviću, 1990) koja vode do 4 različita zakona verovatnoće broja prekida (videti Tabelu 2.2). Ovi zakoni verovatnoće biće detaljno prikazani u jednom od sledećih potpoglavlja.

Tabela 2.2: Zakoni verovatnoće broja javljanja prekida  $\mu_x$  po zapreminama poplavnih talasa.

tip oblika	$\varkappa(x, n)$ funkcija intenziteta	naziv zakona	verovatnoća pojave $p_n(x)$
(1)	(2)	(3)	(4)
I	$\varkappa_0$	Puasonov (homogen)	$\frac{[\varkappa_0 x]^n}{n!} e^{-\varkappa_0 x}$
II	$\varkappa_1(x)$	Puasonov (nehomogen)	$\frac{[\mathcal{K}_1(x)]^n}{n!} e^{-\mathcal{K}_1(x)}$
III	$\varkappa_1(x) \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)$	Negativan binomni	$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} (1 - e^{-\mathcal{K}_1(x)/\alpha})^n e^{-\mathcal{K}_1(x)}$
IV	$\varkappa_1(x) \left(1 - \frac{n}{\beta}\right)$	Binomni	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{n!\Gamma(\beta+1-n)} e^{-\mathcal{K}_1(x)} (e^{\mathcal{K}_1(x)/\beta} - 1)^n$

u prethodnim izrazima je  $\mathcal{K}_1(x) = \int_0^x \varkappa_1(u) du$ .

---

## 2.5 Raspodela vremena za ostvarenje $\nu$ prekida

### 2.5.1 Definicija

Neka je  $\tau_\nu$  slučajno vreme tokom kog se ostvari  $\nu$  prekida. Sledi da je  $\tau_\nu$  neprekidna slučajna promenljiva. Njen zakon raspodele se potpuno određuje funkcijom raspodele:

$$G_\nu(t) = P\{\tau_\nu \leq t\}, \quad t \geq, \nu = 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

Pri daljem matematičkom izvođenju koristi se ranije uvedeni skup  $E_i^t$  koji predstavlja događaj da se u intervalu  $(0, t]$  javi  $i$  prekida. Njegova verovatnoća  $p_i(t)$  može se napisati:

$$\begin{aligned} p_i(t) &= P\{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}, \\ &= P\{\tau_i \leq t\} P\{t < \tau_{i+1} \mid \tau_i \leq t\}, \\ &= P\{\tau_i \leq t\} [1 - P\{\tau_{i+1} \leq t \mid \tau_i \leq t\}]. \\ &= P\{\tau_i \leq t\} - P\{\tau_{i+1} \leq t\} = G_i(t) - G_{i-1}(t). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Sumiranjem verovatnoća od  $i = 0$  do  $i = \nu - 1$ , dobija se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\nu-1} p_i(t) &= \sum_{i=0}^{\nu-1} P\{\tau_i \leq t\} - \sum_{i=0}^{\nu-1} P\{\tau_{i+1} \leq t\}, \\ \sum_{i=0}^{\nu-1} p_i(t) &= P\{\tau_0 \leq t\} - P\{\tau_\nu \leq t\} = G_0(t) - G_\nu(t). \end{aligned}$$

Pošto za  $\tau_0 \equiv 0$  sledi  $P\{\tau_0 \leq t\} = 1$ , konačno se dobija izraz za funkciju raspodele vremena za ostvarenje  $\nu$  prekida:

$$G_\nu(t) = 1 - \sum_{i=0}^{\nu-1} p_i(t), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.75)$$

Funkcija gustine raspodele verovatnoće se dobija po definiciji:

$$g_\nu(t) = \frac{\partial G_\nu(t)}{\partial t} = - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{\partial p_i(t)}{\partial t}. \quad (2.76)$$

## 2.5.2 Vreme za ostvarenje jednog prekida

Funkcija raspodele vremena za  $\nu$  prekida, prema izrazu (2.75) za  $\nu = 1$  jednaka je:

$$G_1(t) = 1 - p_0(t), \quad (2.77)$$

a funkcija gustine raspodele je tada:

$$g_1(t) = \frac{\partial G_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_0(t)}{\partial t}. \quad (2.78)$$

U gornjem izrazu  $p_0(t)$  je verovatnoća da nema prekida u  $(0, t]$ , čiji je izvod po vremenu dat izrazom (2.19). Dobija se

$$g_1(t) = \lambda(t, 0) p_0(t). \quad (2.79)$$

Pod pretpostavkom da je intenzitet procesa  $\lambda(t, \nu)$  ne zavisi od broja prekida  $\nu$  već samo od vremena, tj.  $\lambda(t, \nu) = \lambda_1(t)$  (tipovi I i II), za verovatnoću  $p_0(t)$  važi izraz (2.39), tj.  $p_0(t) = e^{-\Lambda_1(t)}$ . Tada funkcija raspodele vremena za 1 prekid glasi:

$$G_1(t) = 1 - e^{-\Lambda_1(t)}, \quad (2.80)$$

gde je  $\Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda_1(u) du$ .

U slučajevima kada intenzitet procesa zavisi i od broja prekida  $\nu$  (tipovi III i IV iz tabele 2.1) verovatnoća  $p_0(t)$  ima isti oblik kao i u slučajevima I i II. To se može videti u jednačinama (2.47) i (2.57). Iz toga sledi da raspodela vremena za ostvarenje 1 prekida za sve razmatrane tipove funkcije intenziteta ima isti oblik dat jednačinom (2.80). Drugim rečima, isti izraz važi bez obzira koji tip diskretne raspodele se uzme za broj javljanja prekida, tj. bez obzira da li je u pitanju binomni, negativni binomni ili Puasonov zakon verovatnoće.

\* \* \*

U tabeli 2.3 navedene su raspodele koje su po svom obliku pogodne za analizu zakona verovatnoće  $G_1$ , vremena za 1 prekid. Za vrednost parametra  $a = 1$  Vejbulova funkcija raspodele svodi se na eksponencijalnu, a za  $a = 2$  na Rejljevovu raspodelu. Prve četiri raspodele su specijalni slučajevi uopštene gama raspodele. Eksponencijalna raspodela je takođe i specijalni slučaj Pareto raspodele.

Jednoparametarske raspodele imaju prednost u pogledu jednostavne primene,

Tabela 2.3: Funkcije raspodele pogodne za analizu  $\tau_1$ , trajanja vremenskog prekida pri jednom ciklusu.

Tip raspodele	Parametri	Intenzitet $\lambda_1(t)$	Funkcija raspodele $G_1(t)$
Ekspozon	$\mu$	$\frac{1}{\mu}$	$1 - e^{-t/\mu}$
Rejli	$\mu$	$\frac{\pi}{2\mu^2} t$	$1 - e^{-\frac{\pi}{4\mu^2} t^2}$
Erlang	$\mu$	$\frac{4t}{\mu^2(1+t/\mu)}$	$1 - (1 + 2t/\mu) e^{-2t/\mu}$
Vejbul	$a, b$	$\frac{a}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1}$	$1 - e^{-(t/b)^a}$
Pareto	$b, k$	$\frac{1}{b} \left(1 - k \frac{t}{b}\right)^{1/k-1}$	$1 - \left(1 - k \frac{t}{b}\right)^{1/k}$

dok su dvoparametarske prilagodljivije empirijskoj raspodeli. Iskustva sa primenom metode pikova pri analizi maksimalnih dnevnih padavina, jakih kratkotrajnih kiša kao i maksimalnih protoka na rekama, ukazuju na uspešnost primene i Vejbulove i Pareto raspodele (Vukmirović, 1990, Despotović, 1996, Plavšić, 2004). U poglavlju 2.7 dat je detaljan opis eksponencijalne, Vejbulove i Pareto raspodele.

Oblik funkcije intenziteta  $\lambda(t)$  direktno utiče na koeficijent varijacije teorijske funkcije raspodele:

- za konstantno  $\lambda(t)$  koeficijent varijacije je  $C_v = 1$  (eksponencijalna raspodela),
- ako je za svako  $t : \lambda(t + \Delta t) > \lambda(t)$ , tj. ako je  $\lambda(t)$  monotono rastuća funkcija  $C_v < 1$  (raspodele Rejljeva, Erlangova I i Vejbulova za  $a > 1$ ),
- ako je za svako  $t : \lambda(t + \Delta t) < \lambda(t)$ , odnosno,  $\lambda(t)$  je monotono opadajuća funkcija, tada je koeficijent varijacije  $C_v > 1$  (Vejbulova raspodela za  $0 < a < 1$ ).

### 2.5.3 Vreme za ostvarenje $\nu$ prekida

Ako izvode verovatnoća u izrazu (2.76) zamenimo jednačinom (2.18) dobijamo:

$$g_\nu(t) = - \sum_{i=1}^{\nu-1} \lambda(t, i-1) p_{i-1}(t) + \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda(t, i) p_i(t).$$

Konačno, izraz za funkciju gustine raspodele verovatnoća vremena za  $\nu$  prekida glasi:

$$g_\nu(t) = \lambda(t, \nu - 1) p_{\nu-1}(t) . \quad (2.81)$$

Iz gornjeg izraza očigledno je da i kod vremena za više od jednog prekida veoma važnu ulogu igra funkcija vremenskog intenziteta. Za pretpostavljena četiri oblika funkcije vremenskog intenziteta  $\lambda(t, \nu)$  (Tabela 2.1) prikazuju se dalje u tabelama 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 izrazi za funkciju raspodele  $G_\nu(t)$  i funkciju gustine raspodele  $g_\nu(t)$  za vrednosti  $\nu = 1, 2, 3, 4$  i opšti slučaj  $\nu$ .

Tabela 2.4: Oblik I,  $\lambda(t, \nu) = \lambda_0 = \text{const.}$

$\nu$	$P(E_{\nu-1}^t) = p_{\nu-1}(t)$	$g_\nu(t)$	$G_\nu(t)$
1	$e^{-\lambda_0 t}$	$\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$	$1 - e^{-\lambda_0 t}$
2	$\lambda_0 t e^{-\lambda_0 t}$	$\lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t}$	$1 - e^{-\lambda_0 t}(1 + \lambda_0 t)$
3	$\frac{1}{2}(\lambda_0 t)^2 e^{-\lambda_0 t}$	$\frac{1}{2}\lambda_0^3 t^2 e^{-\lambda_0 t}$	$1 - e^{-\lambda_0 t}(1 + \lambda_0 t + \frac{1}{2}\lambda_0^2 t^2)$
4	$\frac{1}{6}(\lambda_0 t)^3 e^{-\lambda_0 t}$	$\frac{1}{6}\lambda_0^4 t^3 e^{-\lambda_0 t}$	$1 - e^{-\lambda_0 t}(1 + \lambda_0 t + \frac{1}{2}\lambda_0^2 t^2 + \frac{1}{6}\lambda_0^3 t^3)$
$\nu$	$\frac{1}{(\nu-1)!}(\lambda_0 t)^{\nu-1} e^{-\lambda_0 t}$	$\frac{1}{(\nu-1)!}\lambda_0^\nu t^{\nu-1} e^{-\lambda_0 t}$	$1 - e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}$

U slučaju oblika I, matematičko očekivanje trajanja vremenskog perioda pri  $\nu$  prekida je jednako (Vukmirović, 1975):

$$E(\tau_\nu) = \frac{\nu}{\lambda_0} ,$$

a varijansa je jednaka:

$$D(\tau_\nu) = \frac{\nu}{\lambda_0^2} .$$

U slučaju oblika II, funkcija  $\lambda_1(t)$  je analitička funkcija koja treba da ispuni postulat **a** dat izrazom (2.22) na strani 27. Osim toga, pri izboru ove funkcije neophodno je da se vodi računa da bude zadovoljena relacija (Vukmirović, 1975):

$$\frac{E(\tau_\nu)}{E(\tau_1)} = \nu .$$

Tabela 2.5: Oblik II,  $\lambda(t, \nu) = \lambda_1(t)$ ,  $\Lambda_1 = \Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda_1(s) ds$ .

$\nu$	$P(E_{\nu-1}^t) = p_{\nu-1}(t)$	$g_\nu(t)$	$G_\nu(t)$
1	$e^{-\Lambda_1}$	$\lambda_1 e^{-\Lambda_1}$	$1 - e^{-\Lambda_1}$
2	$\Lambda_1 e^{-\Lambda_1}$	$\lambda_1 \Lambda_1 e^{-\Lambda_1}$	$1 - e^{-\Lambda_1} (1 + \Lambda_1)$
3	$\frac{1}{2} \Lambda_1^2 e^{-\Lambda_1}$	$\frac{1}{2} \lambda_1 \Lambda_1^2 e^{-\Lambda_1}$	$1 - e^{-\Lambda_1} (1 + \Lambda_1 + \frac{1}{2} \Lambda_1^2)$
4	$\frac{1}{6} \Lambda_1^3 e^{-\Lambda_1}$	$\frac{1}{6} \lambda_1 \Lambda_1^3 e^{-\Lambda_1}$	$1 - e^{-\Lambda_1} (1 + \Lambda_1 + \frac{1}{2} \Lambda_1^2 + \frac{1}{6} \Lambda_1^3)$
$\nu$	$\frac{1}{(\nu-1)!} \Lambda_1^{\nu-1} e^{-\Lambda_1}$	$\frac{1}{(\nu-1)!} \lambda_1 \Lambda_1^{\nu-1} e^{-\Lambda_1}$	$1 - e^{-\Lambda_1} \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{\Lambda_1^i}{i!}$

Tabela 2.6: Oblik III,  $\lambda(t, \nu) = \lambda_1(t) \left(1 + \frac{\nu}{a}\right)$  i  $\Lambda_1 = \Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda_1(s) ds$ .

$\nu$	$P(E_{\nu-1}^t) = p_{\nu-1}(t)$	$g_\nu(t) = \lambda(t, \nu-1) p_{\nu-1}(t)$
1	$e^{-\Lambda_1}$	$\lambda_1 e^{-\Lambda_1}$
2	$a(1 - e^{-\Lambda_1/a}) e^{-\Lambda_1}$	$\lambda_1 (1 + \frac{1}{a}) a (1 - e^{-\Lambda_1/a}) e^{-\Lambda_1}$
3	$\frac{1}{2} a(a+1) (1 - e^{-\Lambda_1/a})^2 e^{-\Lambda_1}$	$\lambda_1 (1 + \frac{2}{a}) \frac{1}{2} a(a+1) (1 - e^{-\Lambda_1/a})^2 e^{-\Lambda_1}$
4	$\frac{1}{6} a(a+1)(a+2) (1 - e^{-\Lambda_1/a})^3 e^{-\Lambda_1}$	$\lambda_1 (1 + \frac{3}{a}) \frac{1}{6} a(a+1)(a+2) (1 - e^{-\Lambda_1/a})^3 e^{-\Lambda_1}$
$\nu$	$\frac{1}{(\nu-1)!} \frac{(a+\nu-1)!}{a!} e^{-\Lambda_1} (1 - e^{-\Lambda_1/a})^{\nu-1}$	$\lambda_1 (1 + \frac{\nu-1}{a}) \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{(a+\nu-1)!}{a!} (1 - e^{-\Lambda_1/a})^{\nu-1} e^{-\Lambda_1}$

Rekurentna formula za proračun  $p_\nu(t)$ , izraz (2.51)

nastavak tabele

$\nu$	$G_\nu(t) = 1 - \sum_{i=0}^{\nu-1} p_i(t)$
1	$1 - e^{-\Lambda_1}$
2	$1 - e^{-\Lambda_1} [1 + a(1 - e^{-\Lambda_1/a})]$
3	$1 - e^{-\Lambda_1} [1 + a(1 - e^{-\Lambda_1/a}) + \frac{1}{2} a(a+1) (1 - e^{-\Lambda_1/a})^2]$
4	$1 - e^{-\Lambda_1} [1 + a(1 - e^{-\Lambda_1/a}) + \frac{1}{2} a(a+1) (1 - e^{-\Lambda_1/a})^2 + \frac{1}{6} a(a+1)(a+2) (1 - e^{-\Lambda_1/a})^3]$
$\nu$	$G_\nu = G_{\nu-1} - \frac{e^{-\Lambda_1}}{(\nu-1)!} \left\{ \prod_{i=1}^{\nu-1} (a+i-1) \right\} (1 - e^{-\Lambda_1/a})^{\nu-1}, \quad \text{za } \nu = 2, 3, 4, \dots$



Tabela 2.7: Oblik IV,  $\lambda(t, \nu) = \lambda_1(t) \left(1 - \frac{\nu}{b}\right)$  i  $\Lambda_1 \equiv \Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda_1(s) ds$ .

$\nu$	$P(E_{\nu-1}^t) = p_{\nu-1}(t)$	$g_\nu(t) = \lambda(t, \nu-1) p_{\nu-1}(t)$
1	$e^{-\Lambda_1}$	$\lambda_1 e^{-\Lambda_1}$
2	$b e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)$	$\lambda_1 (1 - \frac{1}{b}) b e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)$
3	$\frac{1}{2} b(b-1) e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)^2$	$\lambda_1 (1 - \frac{2}{b}) \frac{1}{2} b(b-1) e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)^2$
4	$\frac{1}{6} b(b-1)(b-2) e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)^3$	$\lambda_1 (1 - \frac{3}{b}) \frac{1}{6} b(b-1)(b-2) e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)^3$
$\nu$	$\frac{1}{(\nu-1)!} \frac{b!}{(b-\nu+1)!} e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)^{\nu-1}$	$\lambda_1 (1 - \frac{\nu-1}{b}) \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{b!}{(b-\nu+1)!} e^{-\Lambda_1} (e^{\Lambda_1/b} - 1)^{\nu-1}$
nastavak tabele		
$\nu$	$G_\nu(t) = 1 - \sum_{i=0}^{\nu-1} p_i(t)$	
1	$1 - e^{-\Lambda_1}$	
2	$1 - e^{-\Lambda_1} [1 + b(e^{\Lambda_1/b} - 1)]$	
3	$1 - e^{-\Lambda_1} [1 + b(e^{\Lambda_1/b} - 1) + \frac{1}{2} b(b-1)(e^{\Lambda_1/b} - 1)^2]$	
4	$1 - e^{-\Lambda_1} [1 + b(e^{\Lambda_1/b} - 1) + \frac{1}{2} b(b-1)(e^{\Lambda_1/b} - 1)^2 + \frac{1}{6} b(b-1)(b-2)(e^{\Lambda_1/b} - 1)^3]$	
$\nu$	$F_\nu = F_{\nu-1} - \frac{e^{-\Lambda_1}}{(\nu-1)!} \left\{ \prod_{i=1}^{\nu-1} (b-i+1) \right\} (e^{\Lambda_1/b} - 1)^{\nu-1}, \quad \text{za } \nu = 2, 3, 4, \dots$	

## 2.6 Raspodela zapremina talasa velikih voda

Neka je sa  $X_n$  obeležena zapremina talasa pri  $n$  prekida. Očigledno je da je  $X_n$  neprekidna slučajna promenljiva. Njena funkcija raspodele je:

$$H_n(x) = P\{X_n \leq x\} . \quad (2.82)$$

Dalje matematičko izvođenje funkcije raspodele je identično izvođenju raspodele vremena za ostvarenje  $\nu$  prekida, sa tim što se koristi skup  $G_n^x$  i njegova osobina:

$$p_n(x) = P(G_n^x) = P\{X_n \leq x\} - P\{X_{n-1} \leq x\} . \quad (2.83)$$

Izraz za funkciju raspodele zapremine poplavnog talasa pri  $n$  prekida je analogan izrazu (2.81):

$$H_n(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_n(x) , \quad (2.84)$$

a za funkciju gustine raspodele verovatnoće je:

$$h_n(x) = \varkappa(x, n-1) p_n(x) . \quad (2.85)$$

Iz prethodnog izraza je jasno da i kod raspodele zapremine talasa važnu ulogu ima funkcija zapreminskog intenziteta. U Tabeli 2.2 prikazana su njena četiri pretpostavljena oblika.

Za  $p_n(x)$ ,  $h_n(x)$  i  $H_n(x)$ , zbog pretpostavljenih istih formi funkcija vremenskog i zapreminskog intenziteta, mogu se koristiti tabele 2.4, 2.5, 2.6 i 2.7, s tim što treba zameniti oznake ( $\nu$  sa  $n$ ,  $p_{\nu-1}(t)$  sa  $p_{n-1}(x)$ ,  $g$  sa  $h$ ,  $G$  sa  $H$ ).

Funkcija raspodele zapremina pri jednom ciklusu je tada:

$$H_1(x) = 1 - e^{-\mathcal{K}_1(x)}, \quad \mathcal{K}_1(x) = \int_0^x \varkappa_1(s) ds . \quad (2.86)$$

Isti izraz kao i kod vremena za 1 prekid važi bez obzira koji tip diskretne raspodele se uzme za broj javljanja prekida, tj. bez obzira da li je u pitanju binomni, negativni binomni ili Puasonov zakon verovatnoće.

Funkcije raspodele za analizu zapremine pri jednom prekidu moraju da budu takve da je oblast slučajne promenljive između nule i beskonačnosti ( $0 < t < +\infty$ ).

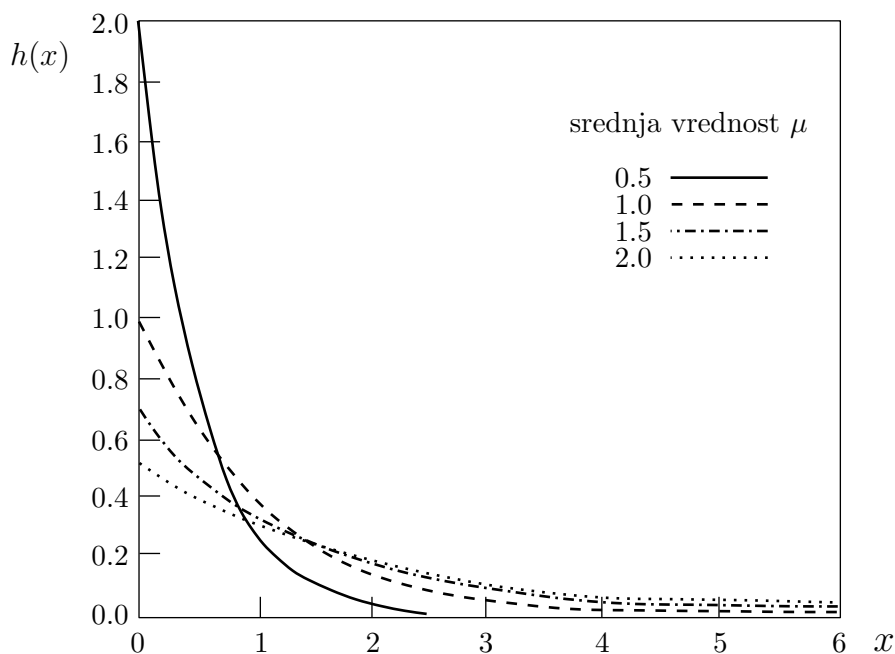
## 2.7 Kontinualne raspodele pogodne za opis vremena i zapremina

### 2.7.1 Eksponecijalna raspodela

Funkcija gustine eksponencijalne raspodele data je izrazom:

$$h(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}, \quad x > 0, \quad (2.87)$$

Parametar raspodele je  $\mu$ , koji predstavlja srednju vrednost  $E[X] = \mu$ . Na slici 2.6 prikazan je uticaj parametra  $\mu$  na oblik funkcije gustine jednoparametarske eksponencijalne raspodele. Ova raspodela se široko primenjuje u teoriji pouzdanosti i masovnog opsluživanja.



Slika 2.6: Funkcije gustine eksponencijalne raspodele za srednje vrednosti slučajne veličine jednake  $\mu = 0.5, 1.0, 1.5$  i  $2.0$ .

Funkcija raspodele ima oblik:

$$H(x) = 1 - e^{-x/\mu}. \quad (2.88)$$

Kvantili  $X_H$  su dati izrazom:

$$X_H = \mu \ln(1/(1 - H)). \quad (2.89)$$

Funkcija intenziteta raspodele je:

$$\lambda(x) = \frac{1}{\mu} = \text{const.} \quad (2.90)$$

Pomoću standardne promenljive:

$$Z = \frac{X}{\mu}, \quad (2.91)$$

dobija se standardna eksponencijalna raspodela sa gustinom:

$$g(z) = e^{-z}, \quad (2.92)$$

i funkcijom raspodele:

$$H(z) = 1 - e^{-z}. \quad (2.93)$$

Pošto je:

$$z = -\ln(1 - H) = -\ln P, \quad (2.94)$$

dijagram verovatnoće za eksponencijalnu raspodelu je semilogaritamski, tj. razmera za  $X$  je aritmetička, a za verovatnoću  $P$  je logaritamska.

Momenti eksponencijalne raspodele su:

- srednja vrednost  $\mu$ ,
- standardna devijacija  $\sigma = \mu$ ,
- koeficijent asimetrije  $C_s = 2$ .

## 2.7.2 Weibulova raspodela

Funkcija gustine dvoparametarske Weibulove raspodele data je izrazom:

$$h(x) = \frac{a \Gamma^a \left(1 + \frac{1}{a}\right)}{\mu} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{a-1} \exp \left[ -\Gamma^a \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(\frac{x}{\mu}\right)^a \right], \quad x > 0, \quad (2.95)$$

Uvodeći smenu:

$$b = \frac{\mu}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{a}\right)}, \quad (2.96)$$

dobija se oblik funkcije gustine raspodele jednostavniji za pisanje:

$$h(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp \left[ -\left(\frac{x}{b}\right)^a \right], \quad x > 0. \quad (2.97)$$

Funkcija raspodele ima oblik:

$$H(x) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x}{b} \right)^a \right] . \quad (2.98)$$

Opseg vrednosti za slučajnu promenljivu definisana je za  $0 < x < +\infty$ , a za parametre  $a$  i  $b$  ( $a > 0, b > 0$ ).

Na slici 2.7 prikazane su gustine dvoparametarske raspodele za srednju vrednost  $\mu = 1$  i standardne devijacije  $\sigma = 0.5, 1.0$  i  $1.5$ .

Funkcija obezbeđenosti je prema izrazu:

$$P(x) = \exp \left[ - \left( \frac{x}{b} \right)^a \right] . \quad (2.99)$$

Kvantili  $X_H$  se računaju po izrazu:

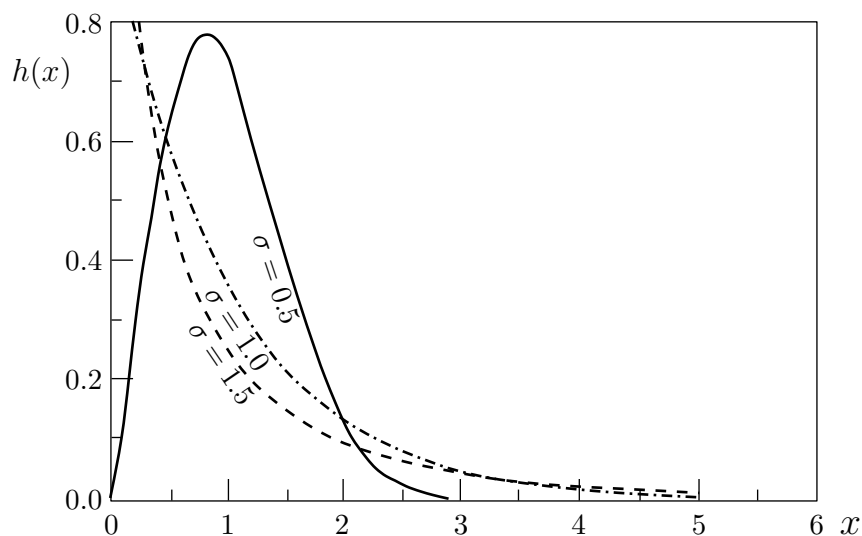
$$X_H = b (\ln(1/(1 - H)))^{1/a} . \quad (2.100)$$

Funkcija intenziteta raspodele je:

$$\lambda(x) = \frac{a}{b} \left( \frac{x}{b} \right)^{a-1} . \quad (2.101)$$

Pomoću standardizovane slučajne promenljive:

$$Z = \frac{X}{b} = \frac{X}{\mu} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{a} \right) , \quad (2.102)$$



Slika 2.7: Gustine Wejbulove raspodele sa srednjom vrednošću  $\mu = 1$  i standardnom devijacijom  $\sigma = 0.5, 1.0$  i  $1.5$ .

dobija se standardizovana Vejbulova raspodela sa:

$$h(z) = a z^{a-1} \exp(-z^a), \quad (2.103)$$

$$P(z) = \exp(-z^a). \quad (2.104)$$

Iz izraza (2.104) standardizovana promenljiva se može izraziti sa:

$$\ln Z = \frac{1}{a} \ln(-\ln P). \quad (2.105)$$

Na osnovu prethodne relacije, može se zaključiti da dijagram verovatnoće za Vejbulovu raspodelu ima logaritamsku razmeru za slučajnu promenljivu, a dvostruku logaritamsku razmeru za funkciju obezbeđenosti.

Na slici 2.8 na dijagramu verovatnoće prikazane su tri funkcije raspodele sa srednjom vrednošću  $\mu = 1$  i standardnim devijacijama  $\sigma = 0.5, 1.0$  i  $1.5$ .

### Parametri po metodi momenata

Za Vejbulovu raspodelu se početni momenti  $r$ -tog reda računaju prema izrazu:

$$m_r = b^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{a}\right). \quad (2.106)$$

Izrazi za momente raspodele glase:

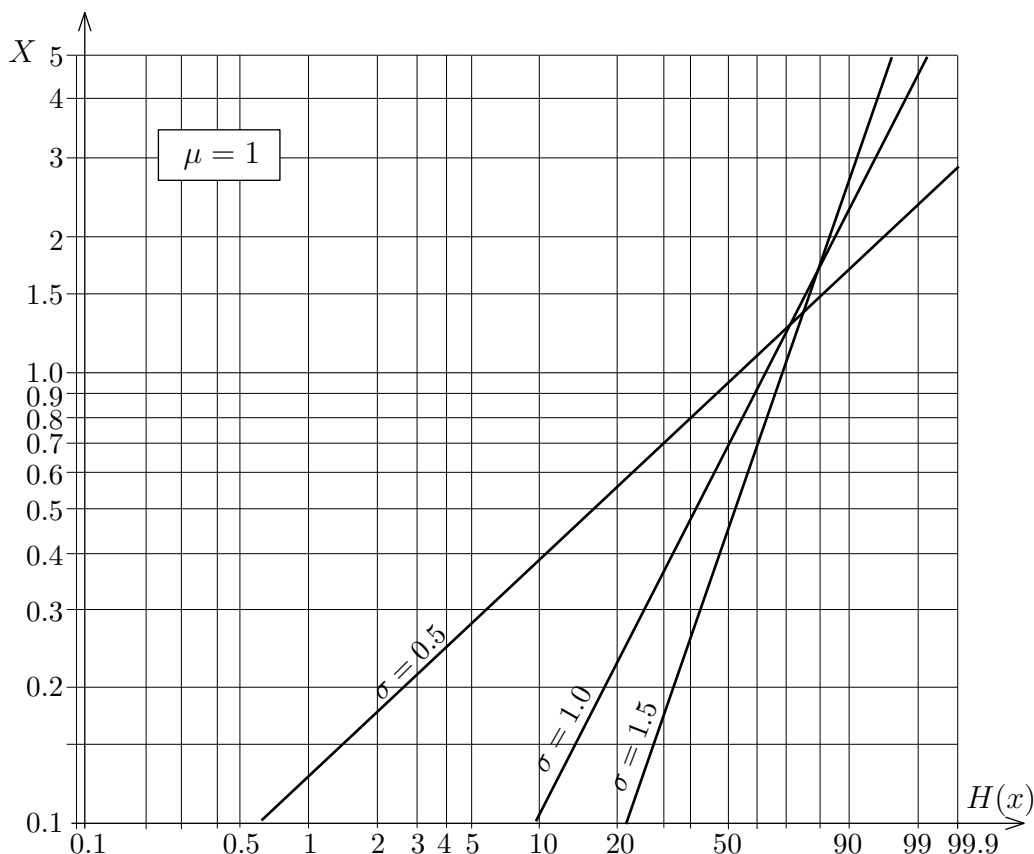
$$\mu = b \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \quad (2.107)$$

$$\sigma = b \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)}, \quad (2.108)$$

$$C_s = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{a}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right]^{3/2}}. \quad (2.109)$$

Kombinovanjem izraza (2.107) i (2.108) tako da se eliminiše parametar razmere  $b$  dobija se veza:

$$1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)}, \quad (2.110)$$



Slika 2.8: Funkcije raspodele po Wejbulu za srednju vrednost  $\mu = 1$  i standardnu devijaciju  $\sigma = 0.5, 1.0$  i  $1.5$ .

iz koje se numeričkim postupkom, za poznatu srednju vrednost  $\mu$  i standardnu devijaciju  $\sigma$ , određuje nepoznat parametar oblika  $a$ . Parametar  $b$  se zatim izračunava uvođenjem  $a$  u izraz (2.107).

### Metoda maksimalne verodostojnosti

Parametri Wejbulove raspodele određuju se polazeći od logaritma funkcije verodostojnosti (Vukmirović, 1990):

$$\begin{aligned} \ln L &= N \ln a - N \ln b + (a - 1) \sum_{i=1}^N \ln x_i - \\ &\quad - N(a - 1) \ln b - \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^N x_i^2, \\ \ln L &= N \ln a - N a \ln b + (a - 1) \sum_{i=1}^N \ln x_i - \frac{1}{b^a} \sum_{i=1}^N x_i^a. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Diferenciranjem po parametru  $b$  dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= -\frac{Na}{b} + \frac{a}{b^{a+1}} \sum_{i=1}^N x_i^a = 0, \\ b^a &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^a. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Diferenciranjem po parametru  $a$  dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= -\frac{N}{a} - N \ln b + \sum_{i=1}^N \ln x_i - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{b}\right)^a \ln \frac{x_i}{b} = \\ &= \frac{1}{a} - \ln b \left(1 - \frac{1}{N b^a} \sum_{i=1}^N x_i^a\right) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i - \frac{1}{N b^a} \sum_{i=1}^N x_i^a \ln x_i = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Iz relacija (2.112) i (2.113) sledi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^N x_i^a \ln x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^a} = 0. \quad (2.114)$$

Iz ovog izraza (2.114) metodom postepenog približavanja određuje se parametar  $a$  potom parametar  $b$  direktno iz izraza (2.112).

### Metoda približno maksimalne verodostojnosti

Ovom metodom se iz dve relacije koje slede (Vukmirović, 1990) mogu metodom postepenog približavanja odrediti dva parametra Vejbulove raspodele  $a$  i  $\mu$  (odnosno  $b$  prema (2.96)):

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{x_i}{\mu} = \frac{1}{a} \psi(1) - \ln \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \right], \quad (2.115)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\mu} \ln \frac{x_i}{\mu} = \frac{1}{a} \psi \left( 1 + \frac{1}{a} \right) - \ln \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \right]. \quad (2.116)$$

Veličina  $\psi$  predstavlja izvod prirodnog logaritma gama funkcije argumenta odnosno poznatu digama funkciju ( $\psi(u) = d(\ln \Gamma(u))/du$ ). Ako se za parametar  $\mu$  prihvati ocena srednje vrednosti niza, parametar  $a$  se određuje direktno kombinovanjem iz-



raza (2.115) i (2.116) u izraz:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\mu} \ln \frac{x_i}{\mu} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{x_i}{\mu} = \frac{1}{a} \left[ \psi \left( 1 + \frac{1}{a} \right) - \psi(1) \right]. \quad (2.117)$$

### Metoda L-momenata

Prva dva L-momenta se računaju po sledećim izrazima (Akram, Hayat, 2004, Wang, 1996):

$$\begin{aligned} L_1 &= b \Gamma \left( 1 + \frac{1}{a} \right), \\ L_2 &= L_1 (1 - 2^{-1/a}). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Alternativni postupak je sa uvođenjem transformisane promenljive:

$$y = \ln x, \quad (2.119)$$

i računanjem momenata  $L_{1,y}$  i  $L_{2,y}$  pomoću logaritmskog niza  $y_i$ . Parametri  $a$  i  $b$  se tada izračunavaju pomoću jednostavnih izraza:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\ln 2}{L_{2,y}}, \\ b &= \exp \left( L_{1,y} + \frac{0.5772}{a} \right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

### 2.7.3 Pareto raspodela - opšta

Funkcija raspodele opšte Pareto raspodele, sa parametrima razmere  $\alpha$  i oblika  $k$  ima oblik (Hosking, Wallis, 1987):

$$H(x) = \begin{cases} 1 - \left( 1 - k \frac{x}{\alpha} \right)^{1/k}, & k \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\alpha} & k = 0. \end{cases} \quad (2.121)$$

dok je funkcija gustine raspodele jednaka:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - k \frac{x}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k}-1}, & k \neq 0, \\ \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} & k = 0. \end{cases} \quad (2.122)$$

Za  $k=0$  opšta Pareto raspodela se svodi na eksponencijalnu raspodelu, dok je za

vrednosti  $k < 0$  poznata kao obična Pareto raspodela (ili Pareto raspodela II vrste). Parametar  $\alpha$  je uvek pozitivan.

Funkcija opšte Pareto raspodele za  $k < 0$  nije ograničena sa gornje strane (tj.  $0 \leq x < \infty$ ) i u poređenju sa eksponencijalnom raspodelom, ima duži „rep”. Za  $k > 0$  funkcija opšte Pareto raspodele je ograničena sa gornje strane (tj.  $0 \leq x \leq \alpha/k$ ). Kada je  $k = 0.5$  funkcija gustine opšte Pareto raspodele postaje trougaona, dok za  $k > 0.5$  gustina postaje veoma izražena u blizini gornje granice. Na slici 2.9 prikazani su oblici funkcije gustine opšte Pareto raspodele za izabrane vrednosti parametra oblika  $k$  i parametar razmere  $\alpha = 1$ .

Početni momenti reda  $r$  opšte Pareto raspodele računaju se po izrazu (Giles, Feng, 2009):

$$m_r = \alpha^r / \prod_{i=1}^r (ik+1), \quad \text{uz uslov } k > -1/r. \quad (2.123)$$

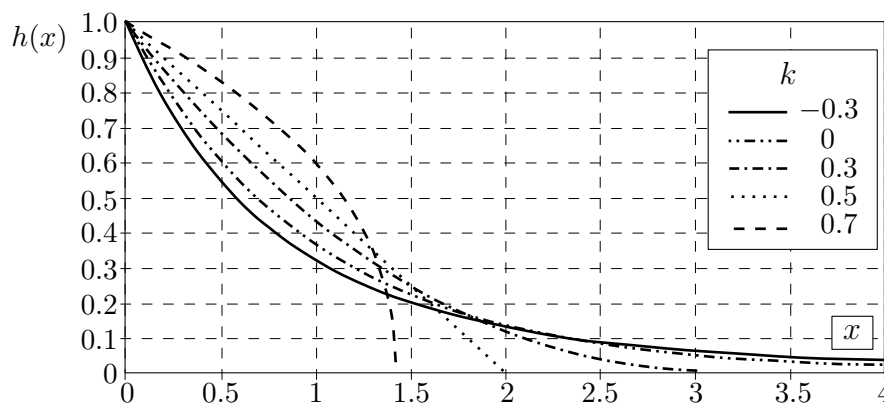
Matematičko očekivanje, disperzija odnosno varijansa i koeficijenti varijacije, asimetrije i spljoštenosti opšte Pareto raspodele dati su redom sledećim izrazima (Ashkar, Tatsambon, 2007):

$$\mu = E[X] = \frac{\alpha}{k+1}, \quad k > 1, \quad (2.124)$$

$$\sigma^2 = D[X] = \frac{\alpha^2}{(k+1)^2(2k+1)}, \quad k > -1/2, \quad (2.125)$$

$$C_v = (2k+1)^{-1/2}, \quad (2.126)$$

$$C_s = \frac{2(1-k)(2k+1)^{1/2}}{3k+1}, \quad k > -1/3, \quad (2.127)$$



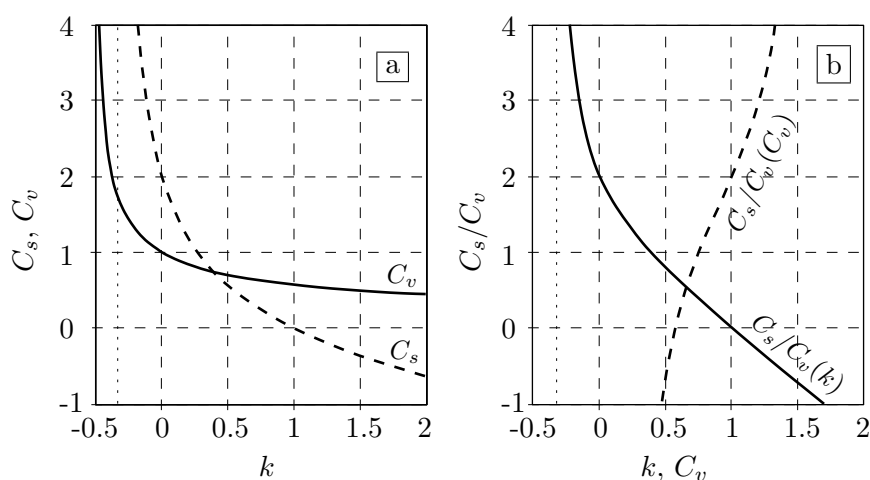
Slika 2.9: Neki od oblika funkcije gustine opšte Pareto raspodele za  $\alpha = 1$ .

$$C_k = \frac{3(2k^2 - k + 3)(2k + 1)}{(3k + 1)(4k + 1)}, \quad k > -1/4. \quad (2.128)$$

Odnos  $C_s/C_v$  se računa po izrazu:

$$\frac{C_s}{C_v} = \frac{2(1 - k)(2k + 1)}{3k + 1}, \quad k > -1/3. \quad (2.129)$$

Na slici 2.10 prikazani su koeficijenti varijacije i asimetrije u zavisnosti od parametra oblika  $k$  (slika 2.10.a), kao i odnos  $C_s/C_v$  u funkciji parametara  $k$  i  $C_v$  (slika 2.10.b)



Slika 2.10: Opšta Pareto raspodela – zavisnosti statistika  $C_s$ ,  $C_v$  i njihovog odnosa od parametra  $k$  i međusobno.

### Metoda momenata za ocenu parametara

Na osnovu izraza za proračun momenata od (2.124) do (2.126) mogu se odrediti ocene parametara raspodele (Hosking, Wallis, 1987):

$$\hat{k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\hat{C}_v^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{x}^2}{S^2} - 1 \right), \quad (2.130)$$

$$\hat{\alpha} = (\hat{k} + 1) \bar{x} = \frac{\bar{x}}{2} \left( \frac{\bar{x}^2}{S^2} - 1 \right). \quad (2.131)$$

### Metoda maksimalne verodostojnosti

Iz funkcije verodostojnosti u obliku (Kottegoda, Rosso, 2008):

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{\alpha^n} \prod_{i=1}^n \left( 1 - k \frac{x_i}{\alpha} \right)^{1/k-1} \quad (2.132)$$

odnosno njenog prirodnog logaritama:

$$\ln L = -n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k} - 1 \right) \ln \left( 1 - k \frac{x_i}{\alpha} \right), \quad (2.133)$$

diferenciranjem po parametrima  $k$  i  $\alpha$  dobija se sistem jednačina čije rešenje daje ocenu parametara (Singh, Guo, 1997):

$$\begin{aligned} \hat{k} &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \hat{k} \frac{x_i}{\hat{\alpha}} \right), \\ \hat{\alpha} &= (\hat{k} - 1) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - \hat{k} x_i / \hat{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Rešavanje ovog sistema se vrši numeričkim metodama.

### Metoda težinskih momenata

Težinski momenti se definišu u obliku (Hosking, Wallis, 1987):

$$M_{p,q,r} = E[X^p H^q (1 - H)^r] = \int_0^1 [x(H)]^p H^q (1 - H)^r dH. \quad (2.135)$$

Za ocenu parametara opšte raspodele preporučunje se da se koriste težinski momenti:

$$M_{(r)} = M_{1,0,r} = E[X (1 - H)^r]. \quad (2.136)$$

Prethodno izraz se kod opšte Pareto raspodele svodi na:

$$M_{(r)} = \frac{\alpha}{(r + 1)(k + r + 1)}, \quad (2.137)$$

odnosno:

$$M_{(0)} = \frac{\alpha}{(k + 1)}, \quad M_{(1)} = \frac{\alpha}{2(k + 2)}. \quad (2.138)$$

Iz prethodnih izraza slede ocene parametara:

$$\hat{k} = \frac{\hat{M}_{(0)}}{\hat{M}_{(0)} - 2\hat{M}_{(1)}} - 2. \quad (2.139)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{2\hat{M}_{(0)}\hat{M}_{(1)}}{\hat{M}_{(0)} - 2\hat{M}_{(1)}}. \quad (2.140)$$

Nepristrasne ocene težinskih momenata  $\hat{M}_{(0)}$  i  $\hat{M}_{(1)}$  su (Hosking, Wallis, 1987):

$$\hat{M}_{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{(i)} = \bar{x}, \quad (2.141)$$

$$\hat{M}_{(1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) x_{(i)} \quad \text{ili} \quad \hat{M}_{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-0.35}{n}\right) x_{(i)}, \quad (2.142)$$

gde su  $x_{(i)}$  članovi uzorka uređenog u rastući redosled.

## 2.8 Raspodela maksimalne godišnje zapremine talasa velike vode

Funkcija raspodele ekstremnih vrednosti u intervalu  $(0, t]$  definisana je izrazom:

$$F_t(x) = P\{X \leq x\} = P_t\{\chi(t) \leq x\}.$$

S obzirom na svojstvo skupa  $\{\eta_t = \nu\}$  dato izrazom (2.7) sledi izvođenje:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= P\{\chi(t) \leq x, \Omega_\eta\} \\ &= P\left\{\chi(t) \leq x, \bigcup_{\nu=0}^{+\infty} \{\eta_t = \nu\}\right\} \\ &= \bigcup_{\nu=0}^{+\infty} P\left\{\sup_{0 \leq i \leq \nu} X_i \leq x, \{\eta_t = \nu\}\right\}. \\ F_t(x) &= P\{\eta_t = 0\} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} P\left\{\sup_{0 \leq i \leq \nu} X_i \leq x, (\eta_t = \nu)\right\}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Pretpostavlja se:

- a) da je niz pikova  $X_1, X_2, \dots, X_\nu, \dots$  sastavljen od nezavisnih slučajnih promenljivih sa identičnom raspodelom  $H(x) = P\{X \leq x\}$ ,
- b) za svako  $\nu = 1, 2, \dots$  niz  $\{\xi_\nu\}_1^\infty$  nezavisan je od broja prethodnih javljanja.

Na osnovu prethodne dve pretpostavke i izraza (2.143) sledi:

$$F_t(x) = P\{\eta_t = 0\} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} P\left\{\sup_{1 \leq i \leq \nu} X_i \leq x\right\} P\{\eta_t = \nu\}, \quad (2.144)$$

$$F_t(x) = P\{\eta_t = 0\} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} [H(x)]^\nu p_\nu(t). \quad (2.145)$$

Izraz (2.145), ako interval  $(0, t]$  obuhvata godinu dana, predstavlja  $F(x)$  funkciju raspodele maksimalnih godišnjih vrednosti po metodi pikova.

## 2.8.1 Raspodele broja javljanja zapremina iznad praga sa uticajem na oblik funkcije raspodele maksimalne godišnje vrednosti

### 2.8.1.1 Puasonov zakon

Ako je broj javljanja pikova u vremenu definisan Puasonovim zakonom, odnosno ako je indeks disperzije broja javljanja pikova  $I_{\eta_\nu} = 1$ , važi:

$$P\{\eta_t = \nu\} = p_\nu(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^\nu}{\nu!}, \quad (2.146)$$

funkcija raspodele ekstrema biće:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= e^{-\Lambda(t)} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} [H(x)]^\nu e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^\nu}{\nu!} = \\ &= e^{-\Lambda(t)} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{[H(x) \Lambda(t)]^\nu}{\nu!} \right\} = \\ &= e^{-\Lambda(t)} e^{H(x) \Lambda(t)}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

i konačno:

$$F_t(x) = e^{-\Lambda(t) [1-H(x)]}. \quad (2.148)$$

### 2.8.1.2 Binomni zakon

Ako je broj javljanja pikova raspodeljen po binomnom zakonu verovatnoće, tj. ako je indeks disperzije broja javljanja pikova  $I_{\eta_\nu} < 1$ , važi:

$$P\{\eta_t = \nu\} = p_\nu(t) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(b+1-\nu)} (e^{\Lambda(t)/b} - 1)^\nu e^{-\Lambda(t)}. \quad (2.149)$$

Tada će funkcija raspodele ekstrema biti:

$$F_t(x) = e^{-\Lambda(t)} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} [H(x)]^\nu \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(b+1-\nu)} (e^{\Lambda(t)/b} - 1)^\nu e^{-\Lambda(t)} =$$

$$= e^{-\Lambda(t)} \Gamma(b+1) \left\{ \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{[H(x)]^\nu [e^{\Lambda(t)/b} - 1]^\nu}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(b+1-\nu)} \right\}, \quad (2.150)$$

$$F_t(x) = e^{-\Lambda(t)} [1 - (1 - e^{-\Lambda(t)/b}) H(x)]^b. \quad (2.151)$$

### 2.8.1.3 Negativni binomni zakon

Ako je broj javljanja pikova raspoređen prema negativnom binomnom zakonu verovatnoće (Paskalova ili Polijina raspodela), tj. ako je indeks disperzije broja javljanja pikova  $I_{\eta_\nu} > 1$ , sledi:

$$P \{ \eta_t = \nu \} = p_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu+a)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(a)} (1 - e^{-\Lambda(t)/a})^\nu e^{-\Lambda(t)}, \quad (2.152)$$

funkcija raspodele ekstrema biće:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= e^{-\Lambda(t)} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} [H(x)]^\nu \frac{\Gamma(\nu+a)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(a)} (1 - e^{-\Lambda(t)/a})^\nu e^{-\Lambda(t)} = \\ &= \frac{e^{-\Lambda(t)}}{\Gamma(a)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu+a)}{\nu!} [H(x)]^\nu [1 - e^{-\Lambda(t)/a}]^\nu \right\}, \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$F_t(x) = e^{-\Lambda(t)} [1 + (e^{-\Lambda(t)/a} - 1) H(x)]^{-a}. \quad (2.154)$$

## 2.9 Analiza trajanja talasa i trajanja ciklusa velikih voda

Trajanja talasa velikih voda odnosno trajanja ciklusa velikih voda koja se formiraju izborom praga (baznog protoka) na hidrogramu protoka, predstavljaju slučajne veličine čija se vrednost ne može sa sigurnošću predvideti. Već je napomenuto da ni broj talasa velikih voda u toku nekog vremenskog intervala  $t$  ne može biti određen sa sigurnošću. Dakle, ukoliko su ispunjene određene pretpostavke, radi se o „slučajnom broju slučajnih veličina”, odnosno o slučajnom procesu.

Slučajni proces maksimalnog trajanja talasa velikih voda nastalih prekoračenjem praga-baznog protka  $Q_B$  definiše se izrazom:

$$Y(t) = \Upsilon_t = \sup_{\substack{t_\nu \leq t \\ \nu=1, \dots, \eta_t}} \{ Y(t_\nu), t \geq 0 \}. \quad (2.155)$$

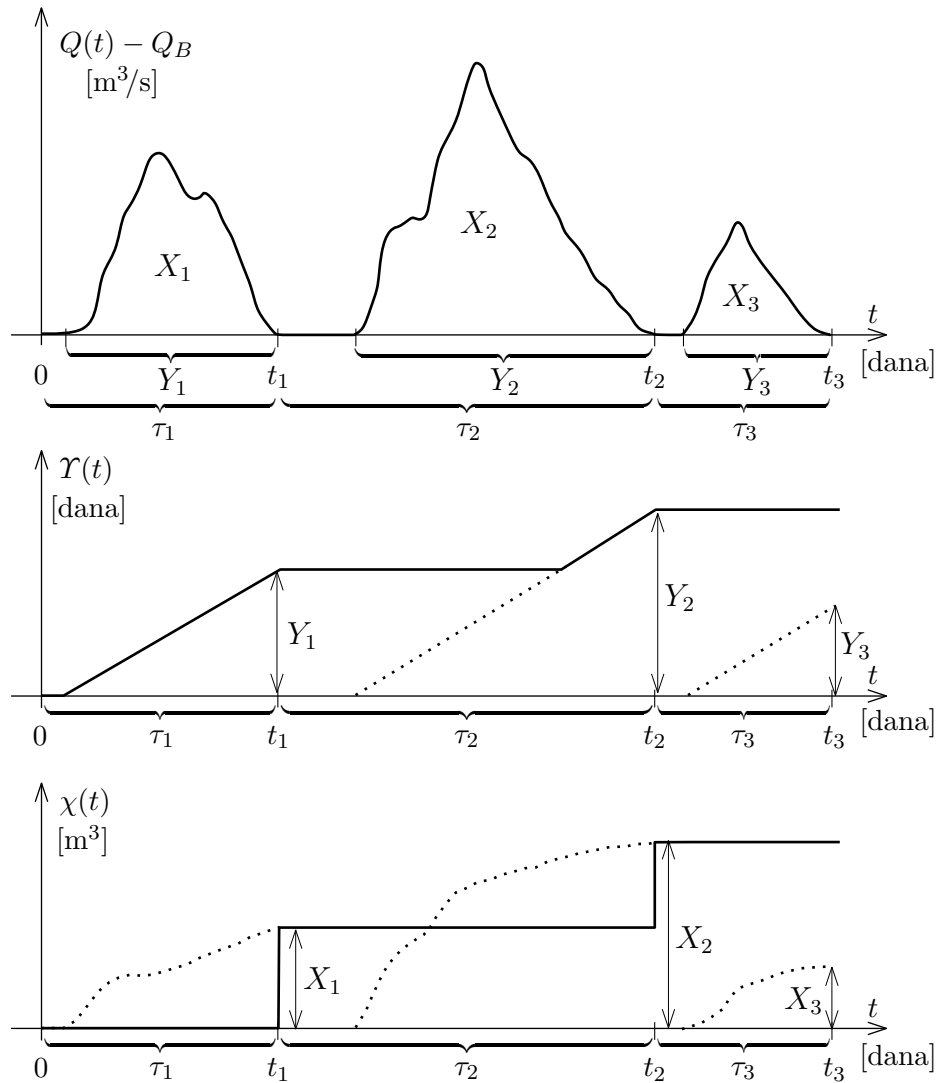
gde su  $Y(t_\nu), 0 \leq t_\nu \leq t$  (skraćeno  $Y_\nu$ ) trajanja pojedinačnih talasa velikih voda (kojih ima  $\eta_t$ ) za protoke veće od baznog  $Q_B$ , a sve do trenutka  $t$ .

Analogno se može definisati i slučajni proces za trajanja cilusa velikih voda ako se u prethodnom izrazu veličina  $Y$  koja predstavlja trajanje velikih voda zameni sa  $\tau$  što je trajanje ciklusa velikih voda.

Realizacija slučajnog procesa velikih voda definisanog sa (2.155) može biti predstavljena nekom funkcijom koja karakteriše trajanja talasa velikih voda. Talas može biti predstavljen hidrogramom (slika 2.11, gornji dijagram) ili hronološkim dijagramom dostizanja maksimalnog trajanja zapremine poplavnog talasa (slika 2.11, centralni dijagram).

Iz poslednja dva dijagrama na crtežu jasno je da se može uspostaviti analogija u postupcima proučavanja slučajnih procesa maksimalnih zapremina, maksimalnih trajanja velikih voda i maksimalnih trajanja ciklusa velikih voda. Za to je dovoljno izmeniti u izrazima u prethodnim poglavljima oznake za zapremine  $X$  sa oznakama za trajanje  $Y$  odnosno  $\tau$ . Analiza broja javljanja u vremenu identična je za sve procese, jer se radi o istom stohastičkom poreklu. Analiza veličine trajanja  $Y$  odnosno  $\tau$  se sprovodi po istim pretpostavkama i procedurama kao za zapremine  $X$  što važi i za analizu maksimalnih godišnjih vrednosti.





Slika 2.11: Gornji dijagram je hidrogram prekoračenja protoka preko praga, osnova za formiranje procesa velikih voda. Centralni dijagram – jedna realizacija slučajnog procesa trajanja velikih voda, odnosno trajanja talasa prekoračenja baznog protoka. Donji dijagram je jedna odgovarajuća realizacija slučajnog procesa zapremina velikih voda, tj. tipa procesa o kome je do sada bilo reči. Prikaz je osnova za uspostavljanje analogije postupaka u proučavanju ova dva slučajna procesa.

---

## Glava 3

# Metoda pikova iznad praga - POT primenjena na analizu maksimalnih godišnjih protoka

### 3.1 Istorijat metode pikova iznad praga

Nastojanje da se proces formiranja hidroloških veličina opiše na način koji što vernije oslikava fizičku prirodu tih stohastičkih slučajnih procesa, doveo je do saradnje inženjera – hidrotehničara i matematičara, u okviru Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi”. Prvi napori u tom smeru doveli su da se razvije model koji je dao Petar Todorović u svojim radovima (Todorović, Zelenhasić, 1970, Todorović, 1970, Todorović, Rousselle, 1971, Todorović, 1978). Ovde se pominju i radovi koji imaju elemente prethodnih istraživanja značajnih za razvoj metode (Langbein, 1949, Borgman, 1963, Shane, Lynn, 1964, Bernier, 1967, Cunnane, 1973, Rosbjerg, 1977). Osnovu Todorovićevog modela čine parcijalne serije, odnosno niz protoka koji prevazilaze određenu vrednost – prag. Ova metoda se može primeniti na veliki broj hidroloških veličina, a ne samo na velike vode. Ovde će biti prikazani protoci, ali slično važi i za kiše, kretanje nanosa, odnosno za karakteristične veličine ovih procesa. Na Univerzitetu u Beogradu, na Građevinskom fakultetu neguje se tradicija primene proučavanja stohastičkih slučajnih procesa kroz doktorate nekadašnjih i sadašnjih nastavnika i to u oblasti proučavanja kretanja nanosa – Vukmirović (1975), jakih kiša – Despotović (1996) i velikih voda – Plavšić (2004).

Već je istaknuto da su velike vode i vremena pojave pikova protoka koji prevazilaze odabrani prag slučajne promenljive. I broj pikova u nekom intervalu vremena je takođe slučajna promenljiva. Shodno prethodno izrečenom, za model Todorovića

se kaže da je „stohastički model slučajnog broja slučajnih promenljivih”.

Iako je model formiran za niz nezavisnih, identično raspodeljenih protoka koji prevazilaze izabrani prag, matematička formulacija dopušta da se primeni i kada se utvrdi stohastička zavisnost između pikova pa čak i ako oni nisu iz populacije sa istim zakonom raspodele verovatnoća. Proces javljanja pikova smatran je Puasonovskim, a raspodela vrednosti pikova je najčešće modelirana eksponencijalnom raspodelom. Iako primenjiva na sve tipove ekstrema, uglavnom se primenjivala na velike vode, a ređe na male vode, kiše, pronos nanosa.

Od 80-tih godina 20. veka, metoda se teorijski razvija i obuhvata složenije forme stohastičkog procesa ekstrema, uvodi nove pogodne raspodele pikova, ocenu rizika, itd. To su između ostalog oblasti koje se bave vremenski zavisnim parametrima (North, 1980), korelisanim pikovima (Rosbjerg, 1985, 1987*a*), ocenom rizika (Konecny, Nachtnebel, 1985, Rasmussen, Rosbjerg, 1989, Plavšić, 2004), Bajesovom analizom (Rousselle, Hindie, 1976, Rasmussen, Rosbjerg, 1991*a*), sezonalitetom (Rasmussen, Rosbjerg, 1991*b*), raznim raspodelama za veličinu pikova (Miquel, 1984, Van Montfort, Witter, 1986, Hosking, Wallis, 1987, Fitzgerald, 1989, Davidson, Smith, 1990, Wang, 1991, Rosbjerg i saradnici, 1991, 1992) i broj prekoračenja (Calenda i saradnici, 1977, Cunnane, 1979, Van Montfort, Otten, 1991).

U narednim poglavljima prikazaće se osnove POT metode.

## 3.2 Teorijske osnove

Prilikom analize ekstremnih vrednosti neke hidrološke veličine metodom pikova u razmatranje se uzimaju sve ekstremne vrednosti veće od neke izabrane bazne vrednosti bez obzira koliko puta su se javile u godini dana (ili razmatranom vremenskom intervalu dužine  $t$ ). Treba naglasiti da se iz jednog hidrograma velikih voda (jednog poplavnog talasa) analizira samo jedna vrednost, maksimalni protok pri tom poplavnom talasu.

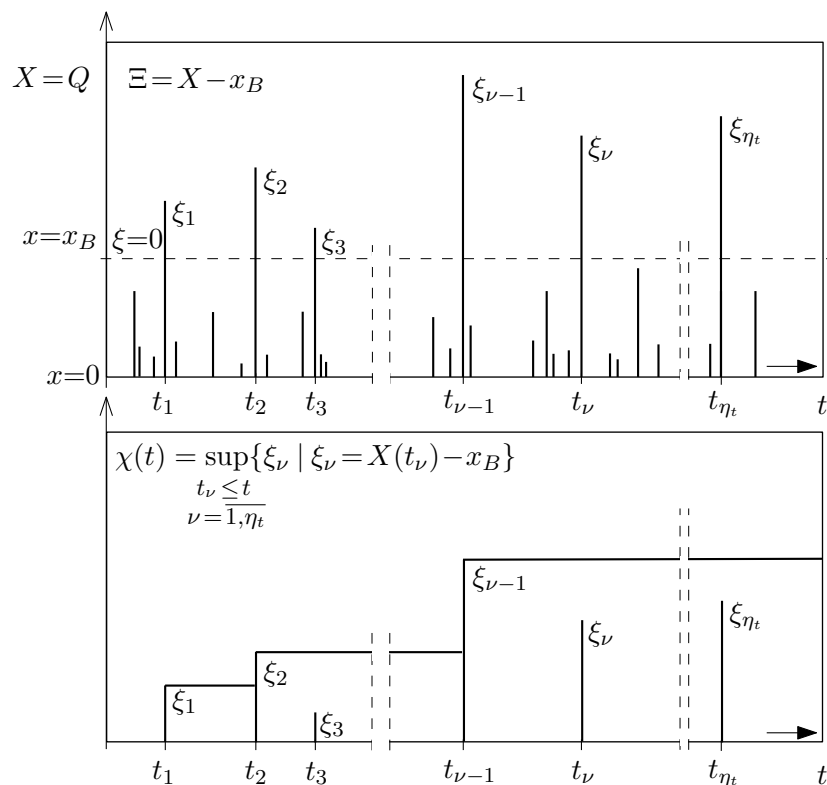
Analiziraju se vrednosti protoka  $X = Q$  koje su veće od neke vrednosti  $x_B$  u vremenskom intervalu  $(0, t]$  - na primer godina dana (slika 3.1)

Taj slučajni proces je definisan izrazom:

$$\chi(t) = \sup_{\substack{t_\nu \leq t \\ \nu=1, \dots, \eta_t}} \{ \xi_\nu ; \xi_\nu = X(t_\nu) - x_B, X(t_\nu) > x_B \} . \quad (3.1)$$

gde su  $t_\nu$  trenuci pojave pikova (ili prekidi, po definiciji iz glave 2), dok su  $\xi_\nu$  vrednosti pikova talasa prekoračenja. Jedna realizacija ovog slučajnog procesa prikazana

je na slici 3.1, koja će poslužiti da se objasne veličine iz definicije (3.1).



Slika 3.1: Slučajni proces  $\chi(t)$ .

Na donjem dijagramu na slici 3.1 prikazana je zavisnost slučajnog procesa  $\chi(t)$  od vremena  $t$  pri realizaciji sa gornjeg dijagrama. Kao i u slučaju procesa zapremina talasa i ovaj proces predstavlja se stepenastom funkcijom sa skokovima u trenucima prekida  $t_\nu$ .

Pojava maksimalnih vrednosti hidrološke slučajne promenljive  $x$  u intervalu  $(0, t]$ , odnosno vremenskom intervalu trajanja  $t$ , opisuje se pomoću funkcije raspodele:

$$F_t(x) = P\{X \leq x\} = P\{\chi(t) \leq x - x_B\}, \quad x > x_B. \quad (3.2)$$

Da bi se ova funkcija raspodele mogla odrediti neophodno je da se analiziraju dve slučajne pojave:

- $\eta_t$ , broja javljanja pikova tj. ekstrema većih od  $x_B$  u vremenskom intervalu  $(0, t]$ ,
- $\xi$ , visine pikova tj. ekstrema većih od izabrane bazne vrednosti  $x_B$ .

Ove slučajne pojave se analiziraju na podacima prikupljenim kroz  $N$  sukcesivnih intervala dužine  $t$ . Raspodela broja javljanja  $\eta_t$  se analizira preko broja javljanja

u svakom od  $N$  intervala, dok se raspodela prekoračenja, tj. pikova, analizira na objedinjenim podacima iz svih  $N$  intervala.

### 3.3 Raspodela godišnjih ekstrema po metodi pikova iznad praga

Funkcija raspodele ekstremnih vrednosti protoka  $X$  u intervalu  $(0, t]$  definisana sa (3.2), svodi se na izraz (Vukmirović, 1990):

$$F_t(x) = P\{\eta_t=0\} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} P\left\{\sup_{1 \leq i \leq \nu} \xi_i \leq x - x_B\right\} P\{\eta_t=\nu\}, \quad (3.3)$$

odnosno u slučaju jednako raspodeljenih pikova:

$$F_t(x) = P\{\eta_t=0\} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} [H(x-x_B)]^\nu p_\nu(t), \quad x > x_B. \quad (3.4)$$

gde  $H(\xi) = H(x-x_B)$  označava funkciju raspodele pikova, a  $p_\nu(t)$  verovatnoću da se u periodu vremena  $t$  javi  $\nu$  pikova.

Izraz (3.4), ako interval  $(0, t]$  obuhvata godinu dana, predstavlja funkciju raspodele maksimalnih godišnjih protoka po metodi pikova. Podseća se da  $H(\xi) = H(x-x_B)$  označava funkciju raspodele pikova, a  $p_\nu(t)$  verovatnoća da se u periodu vremena  $t$  javi  $\nu$  pikova.

Za oblik funkcije raspodele maksimalnih godišnjih vrednosti presudan je tip raspodele broja javljanja pikova iznad praga.

Ako je broj javljanja pikova u vremenu definisan Puasonovim zakonom sa parametrom  $\Lambda(t)$ :

$$P\{\eta_t=\nu\} = p_\nu(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^\nu}{\nu!}, \quad (3.5)$$

funkcija raspodele ekstrema biće:

$$F_t(x) = e^{-\Lambda(t) [1-H(x)]}. \quad (3.6)$$

Ako je broj javljanja pikova raspodeljen po binomnom zakonu verovatnoće sa parametrima  $b$  i  $\Lambda(t)$

$$P\{\eta_t=\nu\} = p_\nu(t) = \frac{\Gamma(b+1)}{\nu! \Gamma(b+1-\nu)} (e^{\Lambda(t)/b} - 1)^\nu e^{-\Lambda(t)}, \quad (3.7)$$

tada će funkcija raspodele ekstrema biti:

$$F_t(x) = e^{-\Lambda(t)} [1 - (1 - e^{-\Lambda(t)/b}) H(x - x_B)]^b . \quad (3.8)$$

Ako je broj javljanja pikova raspoređen prema negativnom binomnom zakonu verovatnoće sa parametrima  $a$  i  $\Lambda(t)$ :

$$P\{\eta_t = \nu\} = p_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu + a)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(a)} (1 - e^{-\Lambda(t)/a})^\nu e^{-\Lambda(t)} , \quad (3.9)$$

funkcija raspodele ekstrema biće:

$$F_t(x) = e^{-\Lambda(t)} [1 + (e^{-\Lambda(t)/a} - 1) H(x - x_B)]^{-a} . \quad (3.10)$$

### 3.3.1 Raspodela broja javljanja pikova

U tabeli 3.1 dati su izrazi za proračun verovatnoće pojave određenog broja javljanja pikova po prethodno navedene tri diskretne raspodele uz upotrebu drugačije paramtrizacije koja se češće koristi (kolona 2). Veza između dve paramtrizacije data je u koloni 4, a osobine raspodele (očekivanje, disperzija i indeks disperzije) u koloni 3.

Tabela 3.1: Diskretne raspodele pogodne za analizu  $\eta_t$  broja javljanja pikova u intervalu vremena  $(0, t]$ .

Tip raspodele (1)	Verovatnoća $p_\nu(t) = P\{\eta_t = \nu\}$ (2)	Osobine raspodele (3)	Parametar $p = p(\Lambda(t))$ (4)
Puasonova $P(\Lambda(t))$	$e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^\nu}{\nu!}$	$E\eta_t = D\eta_t = \Lambda(t)$ $I\eta_t = D\eta_t / E\eta_t = 1$	—
Binomna $B(p, b)$	$\binom{b}{\nu} p^\nu (1-p)^{b-\nu}$	$E\eta_t = bp, D\eta_t = bp(1-p)$ $(I\eta_t = 1-p) < 1$	$p = 1 - e^{-\Lambda(t)/b}$
Negativna binomna $NB(p, a)$	$\binom{a-1+\nu}{\nu} p^a (1-p)^\nu$	$E\eta_t = a(1-p)/p$ $D\eta_t = a(1-p)/p^2$ $(I\eta_t = 1/p) > 1$	$p = e^{-\Lambda(t)/a}$

### 3.3.2 Raspodele visine pikova iznad praga

Po analogiji sa raspodelom pikova zapremine velikih voda funkcija raspodele visine pikova definisana je izrazom (2.86) i glasi:

$$H(\xi) = 1 - e^{-K(\xi)}, \quad (3.11)$$

gde je:

$$K(\xi) = \int_0^{\xi} \kappa(s) ds. \quad (3.12)$$

i gde je  $\kappa(s)$  funkcija intenziteta javljanja pikova intervalu  $(0, \xi]$  koja utiče na oblik raspodele visine pikova.

U tabeli 3.2 prikazane su neke funkcije raspodele koje su izvedene iz jednostavnih oblika funkcije intenziteta  $\kappa(\xi)$  i koje su pogodne za analizu visine pikova. Njihova popularnost u primeni je stečena jednostavnošću primene i mogućnošću da se vrednost funkcije raspodele ekstrema na godišnjem nivou ili proračun kvantila izabranog povratnog perioda mogu izračunati eksplicitnim izrazima.

Tabela 3.2: Kontinualne raspodele pogodne za analizu  $\xi = x - x_B$  visine pikova. Verovatnoće prevazilaženja pika iznad praga  $1 - H(x - x_B)$ , prema tipu raspodele vrednosti pikova  $\xi$  iznad praga  $x_B$ .

Raspodela $\xi$ vrednosti pikova iznad praga	Intenzitet $\kappa(\xi)$	Verovatnoće prevazilaženja pika iznad praga $(1 - H(x - x_B))$
Eksponecijalna (E)	$\frac{1}{\mu_\xi}$ ,	$e^{-\left(\frac{x - x_B}{\mu_\xi}\right)}, x > x_B.$
Vejbulova (W)	$\frac{a}{b} \left(\frac{\xi}{b}\right)^{a-1}$ ,	$e^{-\left(\frac{x - x_B}{b}\right)^a}, x > x_B.$
Pareto (Pa)	$\frac{1}{b} \left(1 - k \frac{\xi}{b}\right)^{-1}$ ,	$\left(1 - k \frac{x - x_B}{b}\right)^{1/k}, x > x_B.$

\* \* \*

Funkcije raspodele za analizu visine pikova moraju da zadovolje uslov da je oblast slučajne promenljive između nule i beskonačnosti ( $0 < \xi < +\infty$ ). Uvođenje parametra lokacije u funkcije raspodele nije opravdano s obzirom da su serije pikova formirane

uzimanjem vrednosti iznad uslovno izabranog praga. Pored funkcija raspodela navedenih u tabeli 3.2, uslov u pogledu oblasti definisanosti zadovoljavaju i funkcije raspodele koje nastaju logaritamskom transformacijom poznatih funkcija raspodele.

Pored raspodela u tabeli 3.2 u metodi pikova primenjivane su i dvoparametarska gama 2 raspodela (Teasombut, Yevjevich, 1978) i dvoparametarska log-normalna raspodela (Rosbjerg, 1987b).

Dvoparametarska Vejbulova raspodela se za vrednost parametra  $a = 1$  svodi se na eksponencijalnu, a za  $a = 2$  na Rejljeviju raspodelu. Praktična primena dvoparametarske Vejbulove raspodele je jednostavna, pošto se kvantili slučajne promenljive mogu eksplicitno izraziti za vrednosti raspodele visine pikova po izboru.

Brojna iskustva sa primenom metode pikova pri analizi maksimalnih dnevnih padavina, jakih kratkotrajnih kiša kao i maksimalnih protoka na rekama, pokazala su da se pri analizi statističkih serija visine pikova može uspešno primeniti dvoparametarska Vejbulova raspodela. Zbog toga se dvoparametarska Vejbulova raspodela preporučuje kao zadovoljavajuća aproksimacija funkcije raspodele za analizu statističkih serija visine pikova (Vukmirović, 1995, Vukmirović, Petrović, 1997a).

Za analizu visine pikova se u novije vreme koristi Pareto raspodela (Van Montfort, Witter, 1986, Fitzgerald, 1989, Davidson, Smith, 1990, Wang, 1991, Rosbjerg i saradnici, 1992, Birikundavyi, Rousselle, 1997). Pri primeni eksponencijalne raspodele visine pikova, koja je specijalni slučaj Pareto raspodele, često treba postaviti visok prag (baznu vrednost  $x_B$ ). Prirodno je dakle upotrebiti fleksibilniju Pareto raspodelu koja ima dva parametra. Njen parametar oblika  $k$  omogućava bolje prilagođavanje raspodele u zoni malih obezbeđenosti u odnosu na jednoparametarsku eksponencijalnu raspodelu. Pareto raspodela je stabilna na promenu praga u smislu da promena praga ne utiče na promenu parametra oblika. Pragu  $x_B$  odgovaraju parametri raspodele  $\alpha$  i  $k$  a srednja vrednost prekoračenja je  $E[X - x_B] = \alpha/(k+1)$ . Za viši prag  $x_B+h$ ;  $h > 0$  pikovi imaju istu raspodelu sa parametrima  $k$  i  $\alpha - kh$  a srednja vrednost iznosi  $E[X - (x_B + h)] = (\alpha - kh)/(k + 1) = E[X - x_B] (1 - kh/(k + 1))$ .

### 3.4 Praktični modeli raspodela godišnjih maksimuma po metodi pikova

U tabeli 3.3 prikazane su moguće kombinacije diskretnih i kontinualnih raspodela.

Pravougaonicima su izdvojene kombinacije koje se načešće koriste. To su one kod kojih se ne određuje više od ukupno tri parametra za formiranje konačne funkcije raspodele godišnjih ekstrema. Teorijske analize i iskustvo u primeni pokazali su je



Tabela 3.3: Modeli raspodela maksimalnih godišnjih vrednosti  
– metoda pikova iznad praga.

Raspodela broja javljanja pikova iznad praga	raspodela pikova iznad praga – $H(\xi)$		
	eksponencijalna (E)	Veibulova (W)	Pareto (Pa)
Puasonova (P)	$P + E$	$P + W$	$P + Pa$
Binomna (B)	$B + E$	$B + W$	$B + Pa$
Negativna binomna (NB)	$NB + E$	$NB + W$	$NB + Pa$

da je izbor ovih raspodela koristan kako zbog prirode procesa velikih voda tako i zbog praktičnih potreba za eksplicitnim izrazima za proračun kvantila.

U tabeli 3.4 prikazane su raspodele maksimalnih godišnjih vrednosti  $F(x)$  prema tipu raspodele broja javljanja pikova iznad praga. Odgovarajući izraz koji treba uneti umesto obezbeđenosti  $1 - H(x - x_B)$  uzima se iz tabele 3.2 prema odabranoj kontinualnoj raspodeli za visinu pikova.

Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih vrednosti  $F(x)$  (odnosno u tabelama  $F$ ) definisana je samo za vrednosti  $x > x_B$ , odnosno za vrednosti pika  $\xi > 0$ . Na osnovu ovog uslova date su u trećoj koloni tabele 3.5 granične vrednosti funkcije raspodele  $F_g(x)$  za koje je moguće izračunati kvantil  $x_F$ , tj. mora biti ispunjeno da je  $F(x_F) > F_g(x)$ .

U tabelama 3.5 i 3.6 prikazan je način proračuna kvantila maksimalnog godišnjeg protoka, od izbora  $F$ , zatim proračuna odgovarajućeg prevazilaženja pika  $1 - H(x - x_B)$  (tabela 3.5), pa do proračuna kvantila  $x_F$  (tabela 3.6).

### 3.5 Preporuke za primenu metode pikova iznad praga

Metoda pikova iznad praga (POT), iako već dugo prisutna u oblasti hidrologije, nije stekla veliku popularnost u praktičnoj primeni. Osnovni razlog je složenost postupka. Analiza godišnjih ekstrema (AMF) je još uvek najzastupljenija metoda. Osnovna pitanja koja se postavljaju su:

- izbor odgovarajućeg praga (baznog protoka),
- utvrđivanje nezavisnosti pikova, tj. izbor kriterijuma za odluku koji je pik iznad praga značajan,

Tabela 3.4: Raspodele maksimalnih godišnjih vrednosti  $F(x)$  prema tipu raspodele broja javljanja pikova iznad praga.

Raspodela broja javljanja pikova iznad praga	Raspodela maksimalnih godišnjih vrednosti, $F(x)$
Puasonova (P)	$F(x) = \begin{cases} e^{-\Lambda} [1 - H(x - x_B)] & , x > x_B \\ e^{-\Lambda} & , x \leq x_B \end{cases}$
Binomna (B)	$F(x) = \begin{cases} \{1 - p[1 - H(x - x_B)]\}^a & , x > x_B \\ (1 - p)^a & , x \leq x_B \end{cases}$
Negativna binomna (NB)	$F(x) = \begin{cases} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{p} - 1 \right) [1 - H(x - x_B)] \right\}^{-b} & , x > x_B \\ p^b & , x \leq x_B \end{cases}$

Tabela 3.5: Verovatnoće prevazilaženja pika iznad praga  $(1 - H(x - x_B))$  u funkciji zadate vrednosti funkcije raspodele  $F$  definisane za maksimalne godišnje vrednosti, prema tipu raspodele vrednosti pikova iznad praga.

Raspodela $\mu_\xi$ broja javljanja pikova iznad praga	izraz za $(1 - H(x - x_B))$ u funkciji izabranog $F$	uslov granične proračunske vrednosti, $F > F_g(x)$
Puasonova (P)	$-\frac{\ln F}{\Lambda}$	$F > e^{-\Lambda}$
Binomna (B)	$\frac{1 - F^{1/a}}{p}$	$F > (1 - p)^a$
Negativna binomna (NB)	$\frac{F^{-1/b} - 1}{1/p - 1}$	$F > p^b$

- da li je proces formiranja velikih voda stacionaran.
- koju diskretnu raspodelu odabrati za broj javljanja pikova, a koju kontinualnu raspodelu za visinu pikova,
- kako se prethodne odluke odražavaju na POT raspodelu godišnjih ekstrema (umesto klasične analize godišnjih maksimuma, AMF).

Prateća literatura je retka i uglavnom nedosledna po pitanju različitih elemenata i kompleksnosti POT metode. Svaka ozbiljna hidrološka knjiga ima poglavlje posvećeno POT metodi, ali uputstva za rad katkad nisu dovoljna kada treba rešiti

Tabela 3.6: Izrazi za proračun kvantila maksimalnih godišnjih vrednosti  $x_F$  prema tipu raspodele pikova iznad praga.

Raspodela $\xi$ vrednosti pikova iznad praga	vrednost kvantila $x_F$ maksimalnog godišnjeg protoka
Eksponecijalna (E)	$x_F = x_B + \mu_\xi [-\ln(1 - H(x - x_B))] , x > x_B$
Vejbulova (W)	$x_F = x_B + a [-\ln(1 - H(x - x_B))]^{1/b} , x > x_B$
Pareto (Pa)	$x_F = x_B + \frac{b}{k} \left( 1 - (1 - H(x - x_B))^k \right) , x > x_B$

konkretan problem. Pretpostavke POT metode za dobijanje jednostavnih izraza za proračun kvantila nekada nisu u skladu sa fizičkim značenjem tih uslova za inženjerske potrebe u domenu ocene velikih voda. U nastavku će biti prikazana neka od uputstava koja su data u sledećim odrednicama Lang i saradnici (1999), Tanaka, Takara (2002), Rosbjerg, Madsen (2004).

### 3.5.1 Izbor praga – baznog protoka

Dva su osnovna načina izbora praga:

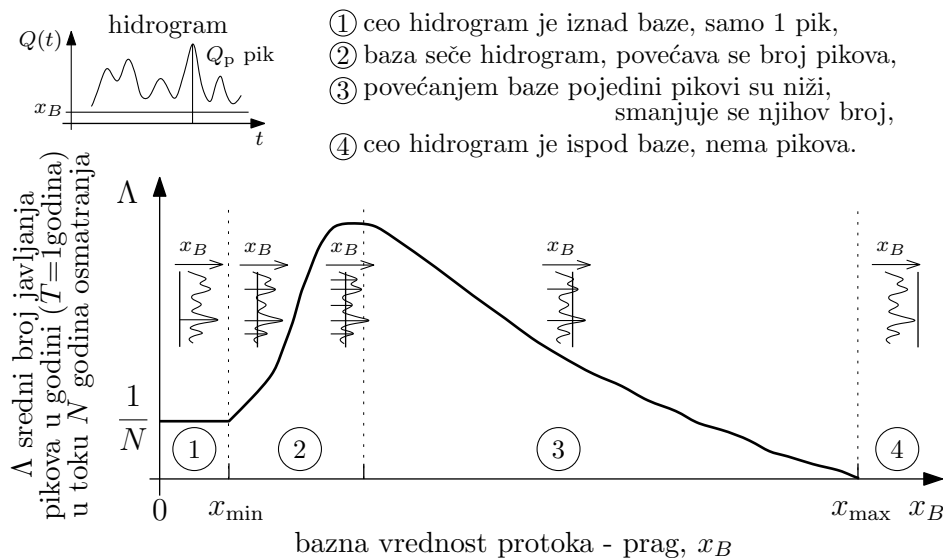
- fizički zasnovan, npr. biranjem praga prema nivou kada dolazi do izlivanja vodotoka iz osnovnog korita ili preliivanja preko postojećih zaštititnih objekata/sistema,
- matematički zasnovan, da sa ispune pretpostavke o nezavisnosti pikova i pretpostavci da je javljanje pikova Poasonov proces.

U literaturi se može naći više pristupa za izbor praga.

#### Prema srednjem broju prekoračenja praga

Kroz ovaj pristup se direktno utiče na nezavisnost pikova. Niski pragovi impliciraju veliki ukupni broj pikova ali je među njima mali broj onih koji su nezavisni, što opet dovodi do male vrednosti srednjeg broja javljanja pikova u vremenskom intervalu. Povišenjem praga povećava se prosečan broj u vremenskom periodu ali samo do neke granice kada počinje monotono da opada jer je sve manje pikova. Na slici 3.2 (po ugledu na Lang i saradnici (1999)) definišu se 4 zone u sistemu gde je  $\Lambda(T)$  prosečni broj pikova u vremenskom intervalu  $(0, T]$  dat u funkciji izabranog praga  $x_B$ . Oblast 3 se utvrđuje probanjem raznih pragova. Njena leva granica je

nepodesna jer u blizini oblasti potencijalno zavisnih pikova dok je desna granica 0 odnosno nema pikova jer baza prelazi maksimalni pik.



Slika 3.2: Srednji broj javljanja pikova u vremenskom intervalu u funkciji izabranog praga, prema Lang i saradnici (1999).

Veliki broj istraživača je pokušao da fiksira vrednost srednjeg broja javljanja pikova u godini dana kao parametar za izbor odgovarajućeg praga. Mogući kriterijumi za izbor su prema:

- specifičnim klimatskim uslovima, na osnovu homogenih geografskih regiona,
- izabranom povratnom periodu.

Na primer, protok povratnog perioda 1.15 godina je predložio Darlymple (1960). Prednost POT metode (pod pretpostavkom eksponencijalne raspodele visine pikova  $\xi$ ) nad AMF metodom Cunnane (1973) nalazi ako je  $\Lambda > 1.65$ . Za kanadske reke su Waylen, Woo (1983) i Irvine, Waylen (1986) zaključili da je odgovarajući povratni period od 1.2 do 2 godine.

U radu Rosbjerg, Madsen (1992) se tvrdi da ovakav pristup ne odražava fizičke karakteristike sliva u okviru regiona. Predlaže se za određivanje praga upotreba standardnog faktora verovatnoće. To podrazumeva da se prag  $x_B$  određuje iz nizova dnevnih protoka kao  $x_B = E[Q] + 3\sqrt{D[Q]}$ . Ukoliko se drži do kriterijuma srednjeg broja javljanja pikova u godini dana predlažu vrednosti  $\Lambda > 2$ .

Madsen, Rosbjerg (1997) pokazuju Monte Karlo simulacijom da se, uz pretpostavku od opštoj Pareto raspodeli visine pikova, mogu postaviti složeni uslovi za izbor baznog protoka preko  $\Lambda$  srednjeg broja javljanja pikova.

### Prema srednjoj vrednosti pikova iznad praga

Miquel (1984) predlaže da se utvrdi stabilnost vrednosti kvantila u odnosu na izabran prag, pa da se za radni prag izabere onaj iz zone stabilnih ocena kvantila. Istraživači kao Davidson, Smith (1990) i Naden, Bayliss (1993) predlažu izbor praga  $x_B$  iz oblasti u kojoj postoji linearna veza prosečne visine pika  $\bar{\xi}$  i njemu odgovarajućeg praga  $x_B$ . Ovim se postiže stabilnost parametara POT raspodele. Njihova iskustva govore da je izbor ovog tipa dobar kada je visina pikova  $\xi$  prati raspodele ili Opštu Pareto ili eksponencijalnu. Srednja vrednost pika  $\bar{\xi}$  linearno opada sa promenom praga  $x_B$  kod opšte Pareto raspodele, dok je kod eksponencijalne raspodele ona konstantna.

### Prema vrednosti indeksa disperzije

Izbor praga može se izvršiti tako da se ostvari Poasonova raspodela broja javljanja pikova. Ashkar, Rousselle (1989) su prema radu Cunnane (1979) predložili da se prag  $x_B$  bira tako da vrednost uzoračkog indeksa disperzije  $I$  bude u granicama 90% intervala poverenja  $[I_{0.05}, I_{0.95}]$ . Poasonova raspodela javljanja pikova odgovara vrednosti indeksa disperzije  $I = 1$ , i može se očekivati da se ostvari u opsegu vrednosti  $\Lambda < 5$  (srednji broj javljanja pikova u godini).

U slučaju da se pokaže da indeks disperzije ne ukazuje na Poasonovu raspodelu broja javljanja pikova, izbor je između binomne ( $I < 1$ ) i negativne binomne raspodele ( $I > 1$ ).

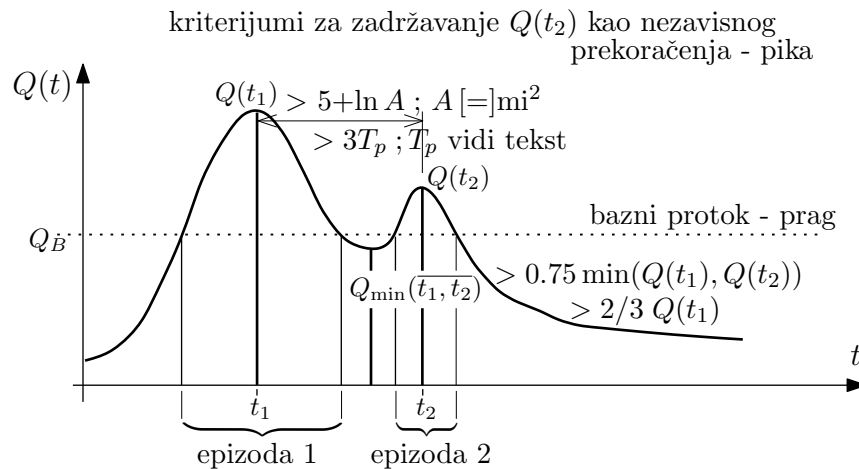
\* \* \*

Sažetak prethodnih uputstava bio bi sledeći; za izbor praga  $x_B$  prvo treba utvrditi interval vrednosti koji odgovara kriterijumima prema srednjoj vrednosti pika i po indeksu disperzije, a zatim izabrati iz tog intervala najveći prag sa srednjim brojem javljanja pikova  $\Lambda$  u opsegu  $2 < \Lambda < 3$ .

## 3.5.2 Kriterijumi nezavisnosti pikova

Pretpostavka nezavisnosti članova niza pikova osnovna je pretpostavka za bilo kakvu statističku analizu. Pošto su u pitanju pikovi iznad praga, oni u stvari predstavljaju vršne protoke sa hidrograma talasa velikih voda. Jasno je da je onda glavni problem nezavisnosti pikova problem fizičkog razdvajanja poplavnih talasa, tj. razdvajanja direktnog i baznog oticaja. Ova izmešanost/preklapanje talasa rezultat je kako prethodnog stanja vlage na slivu ali i atmosferskih padavina koje formiraju oticaj. Navodi se nekoliko kriterijuma koji su predloženi u literaturi (pratiti sliku 3.3 za objašnjenja).

- Interagency Advisory Committee on Water Data (1982) navodi da dva susedna pika treba da budu minimalno razdvojena sa  $5 + \ln(A)$  dana gde je  $A$  površina sliva izražena u miljama. Postoji još jedan proizvoljno uveden kriterijum da od dva susedna pika  $Q(t_1)$  i  $Q(t_2)$  ( $t_1 < t_2 \wedge Q(t_1) > Q(t_2)$ ) drugi  $Q(t_2)$  treba odbaciti ako za minimalni protok  $Q_{min,1-2}$  između njih važi  $Q_{min,1-2} > 0.75 \min(Q(t_1), Q(t_2))$
- Cunnane (1979) nudi sledeći kriterijum da drugi pik  $Q(t_2)$  mora biti odbačen ako važi za vreme između dva pika ( $\tau; (t_2 - t_1)$ )  $< 3T_p$  ili za minimalni protok između dva pika  $Q_{min,1-2} > 2/3 Q(t_1)$ . Ovde  $T_p$  predstavlja prosečno vreme do pojave vršnog protoka (pika) na prvih 5 „čistih“ (jasno izdvojenih) hidrograma.
- Miquel (1984) ne zadaje minimalnu vrednost za  $\tau$ , ali predlaže da testiranje autokorelacije pikova na koraku 1 i 2. Ukoliko se na zadatom pragu poverenja odbaci hipoteza o nezavisnosti, pikove treba birati sa uvećanim  $\tau$ . Ashkar, Rousselle (1983) predlažu da se ne postavljaju preterana ograničenja što se tiče vremenskog intervala  $\tau$  već da se recimo podizanjem praga postigne nezavisnost pikova.



Slika 3.3: Kriterijumi za nezavisnost susednih pikova.

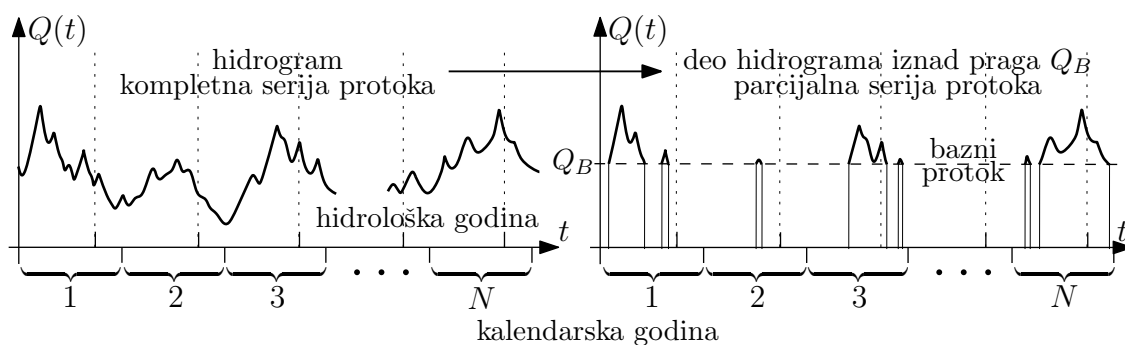
---

## Glava 4

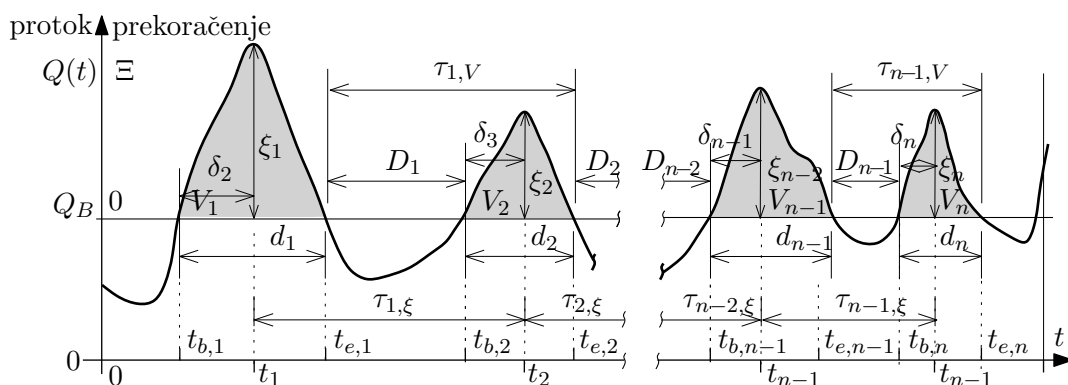
# Karakteristike velikih voda iz serija pikova iznad praga

### 4.1 Hidrogrami dnevnih protoka kao izvor podataka

Osnov za većinu analiza hidroloških veličina čine opaženi hidrogrami sa osmatračkih profila na vodotocima. Zadatak ovog istraživanja je proučavanje stohastičke strukture velikih voda na serijama dobijenih metodom pikova iznad praga. Time je jasno naglašeno da se teži elegantnoj metodi kojom se iz kompletnih serija podataka - hidrograma, izdvaja deo koji nosi informacije o gornjim ekstremnim događajima - velikim vodama. Postavljanjem praga odvajamo parcijalne (delimične) serije, odnosno delove kompletnog hidrograma koji prevazilaze definisani prag - baznu vrednost protoka. Formirajući serije metodom pikova iznad praga posredno se trudimo da ostvarimo postulate slučajnosti, nezavisnosti i homogenosti podataka. Na slici 4.1 prikazan je način formiranja parcijalnih serija. O svemu ovome detaljno je bilo reći u poglavlju 1.4.



Slika 4.1: Pretvaranje kompletnih serija protoka u parcijalne serije.



- $\xi_i$ , pik talasa prekoračenja,  $Q(\tau_i) - Q_B$ ,
- $d_i$ , trajanje talasa prekoračenja,
- $V_i$ , zapremina talasa prekoračenja,
- $t_i$ , vreme pojave pika protoka,
- $D_i$ , vreme između dva prekoračenja
- $t_{b,i}$ , početak talasa prekoračenja,
- $t_{e,i}$ , kraj talasa prekoračenja,
- $\delta_i$ , vreme od početka talasa do pika protoka,
- $\tau_{i,\xi}$ , trajanje ciklusa između dva pika protoka,
- $\tau_{i,V}$ , trajanje ciklusa između dva pika zapremine.

veličine za opis velikih voda

Slika 4.2: Neke od veličina koje opisuju stohastički proces pojave velikih voda.

Parcijalne serije protoka u sebi nose informacije o karakteristikama „izdvojenih” ekstremnih događaja. Na slici 4.2 prikazuju se neke od veličina koje se mogu uvesti iz formiranih parcijalnih serija.

## 4.2 Karakteristike velikih voda

### 4.2.1 Definicija i osnovne karakteristike

Sve veličine kojima se mogu opisati velike vode predstavljaju zbirnim imenom karakteristike velikih voda. Još jednom se poziva na sliku 4.2 gde su prikazane neke od karakteristika - veličina koje opisuju velike vode.

Dakle, tu se radi o vremenskim karakteristikama (trajanja, počeci, prestanci, pojave lokalnih ekstrema), trenutnim veličinama (ukupni lokalni maksimum, lokalno prekoračenje) ili sumarnim vrednostima (zapremina prekoračenja preko praga). Sve te veličine se mogu tretirati kao slučajne promenljive, a pošto imaju mesto u vremenskom sledu znači da se radi i o stohastičkim hidrološkim slučajnim procesima.

Klasična statistička analiza velikih voda sprovodi se na ili maksimalnim godišnjim protocima ili na prekoračanjima preko praga što su takođe neke od karakteristika velikih voda.



## 4.2.2 Klasifikacija karakteristika

Karakteristike velikih voda bi se mogle klasifikovati na više načina. Recimo prema tome da li je njihova jedinica izražavanja vremenska, na vremenske karakteristike (npr. trajanje talasa ili trajanje ciklusa) i ostale karakteristike (npr. zapremina talasa ili pik protoka). Prema tome da li su definisane za vremenski trenutak ili period vremena podela bi bila na trenutne (kao pi protoka) ili intervalne (kao zapremina talasa). Intervalne karakteristike su istovremeno i aditivne, odnosno eksplicitno je fizički jasno šta predstavljaju zbrovi takvih veličina (recimo zbrovi zapremina poplavnih talasa ili njihovih trajanja). Trenutne karakteristike nemaju eksplicitan karakter aditivnosti (zbir dva ili više protoka ili pikova) osim u slučaju kada su funkcionalno povezani sa nekom drugom veličnom (recimo uprošćeni proračun zapremine poplavnog talasa)

Zapremina poplavnog talasa iznad određene baze bila bi intervalna karakteristika ostalog tipa, jer je vezana za interval vremena tokom kojeg je protok veći od praga, a izražava se u zapreminskim jedinicama. Zatim trenutak pojave vršnog protoka - pika je vremenska karakteristika trenutnog tipa, jer se opisuje vremenskim jedinicama, a vezan je za trenutak vremena. Trajanja protoka iznad praga ili trajanja ciklusa su vremenske karakteristike intervalnog tipa, itd.

## 4.3 Agregacije na nivou karakteristike

### 4.3.1 Smisao uvođenja agregacija

Standardna stohastička analiza se viši na osnovnom nizu karakteristika, što podrazumeva realizaciju slučajne promenljive (karakteristike velikih voda) povezane sa vremenom njene realizacije (prethodno definisanim po vremenskom karakteru - trajanje intervala, njegov početak ili kraj, trenutak pojave ekstrema, ...). Rezultat ovih analiza je da se verovatnoće događaja opisanih nad osnovnim nizom opišu familijama funkcija raspodela.

U prikazu ciljeva ove disertacije naglašeno je da će se fenomen velikih voda proučavati primenom metodologije analize pomoću prekidnih slučajnih procesa tako što će se proširiti dosadašnja istraživanja vršena metodom pikova. Zato se na odabranim karakteristikama velikih voda definišu događaji koji se opisuju slučajnim procesima i to:

- broj događaja u intervalu vremena,
- dužinu vremenskog perioda između dva, tri ili više uzastopnih događaja,

- broj događaja u intervalima vrednosti karakteristike,
- sumarne vrednosti karakteristika pri jednom, dva ili više uzastopnih događaja,
- maksimalne vrednosti karakteristika u intervalu vremena.

Događaj se ovde definiše kao entitet vezan za član osnovnog niza karakteristike.

Posmatranje dva, tri ili više uzastopnih događaja (koji je opet jedna vrsta izvedenog događaja), implicira formiranje agregacija. Agregacije su izvedeni nizovi iz osnovnog niza vrednosti karakteristika u smislu da se vrši sabiranje uzastopnih članova polaznog niza i to na različitom nivou. Moglo bi se reći da su to „karakteristike udruženih karakteristika”. Nivo agregiranja znači koliko uzastopnih članova osnovnog niza sekvencijalno sabiramo. Nivo 1 predstavlja sam osnovni niz, nivo 2 podrazumeva niz zbirova po dva uzastopna člana osnovnog niza, nivo 3 po tri uzastopna člana osnovnog niza itd. Ova šema sa oznakama veličina prikazana je na slici 4.3. Ono što je važno naglasiti je i da ove agregacije predstavljaju klase izvedenih hidroloških stohastičkih procesa.

Zadatak je da se verovatnoće odabranih događaja opišu familijama funkcija raspodela i da se testiraju pomoću odgovarajućih empirijskih raspodela i testova saglasnosti. Takođe, od interesa je i utvrditi vezu između zakona verovatnoće koji važe za događaje definisane na osnovnom nizu i one na agregacijama, što je teorijski razmatrano u poglavlju 2.5.

### 4.3.2 Shema formiranja agregacija

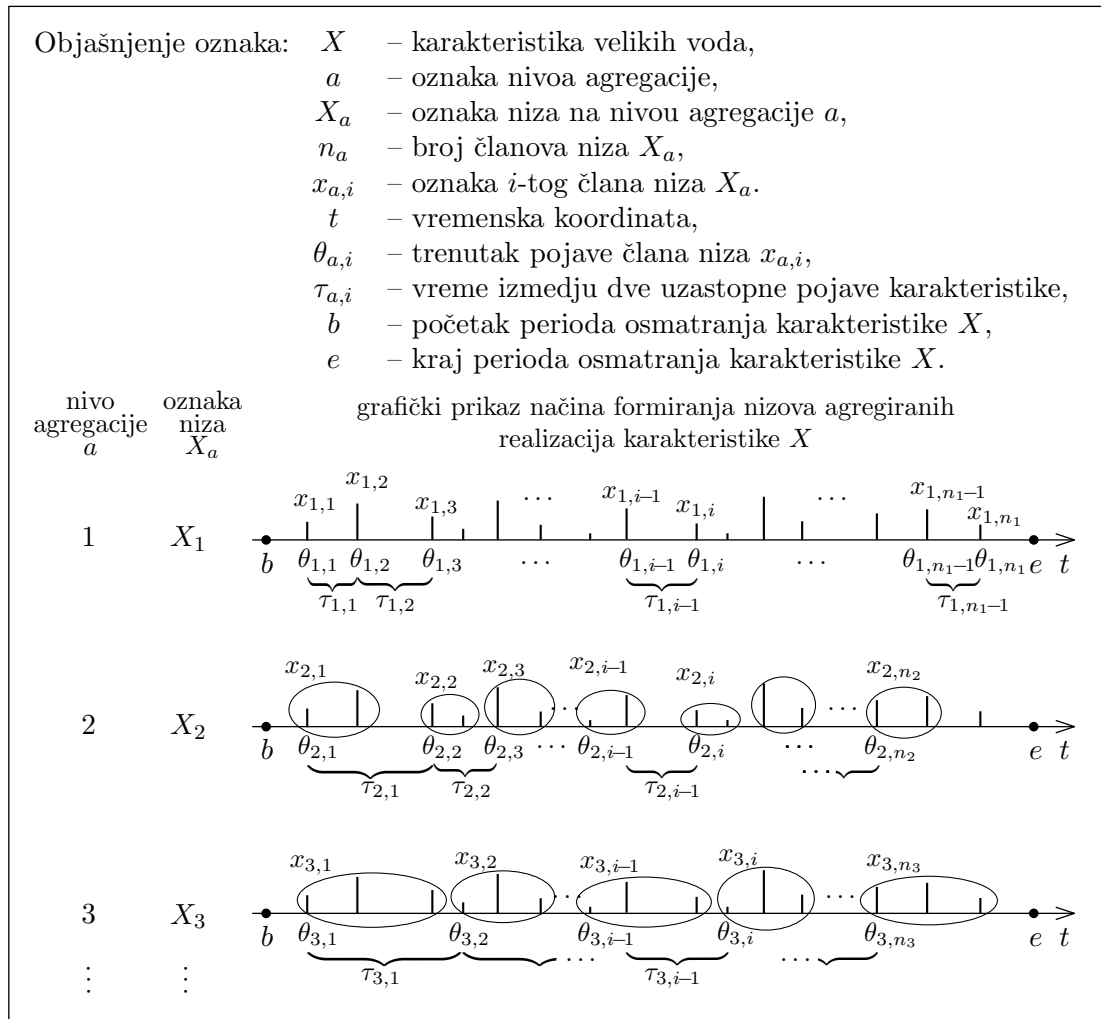
U ovom potpoglavlju sledi prikaz niza izraza po kojima se računaju veličine koje opisuju jednu agregaciju. Svi izrazi polaze od elemenata članova osnovnog niza karakteristike velikih voda (oznaka niza  $X$ ), tj. niza koji odgovara nivou agregacije  $a=1$  (indeks uz oznaku niza).

- na nivou agregacije  $a$ , broj članova niza  $X_a$ , odnosno  $n_a$  iznosi:

$$n_a = \left\lfloor \frac{n_1}{a} \right\rfloor, \quad (4.1)$$

- na nivou agregacije  $a$ , za niz  $X_a$ , opšti izraz za  $i$ -ti član niza  $x_{a,i}$  je:

$$x_{a,i} = \sum_{j=(i-1)a+1}^{ia} x_{1,j}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad (4.2)$$



Slika 4.3: Šema formiranja nizova agregiranih realizacija karakteristike  $X$ .

- trenutak pojave  $\theta_{a,i}$  člana niza  $x_{a,i}$  je:

$$\theta_{a,i} = \theta_{1,(i-1)a+1}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad (4.3)$$

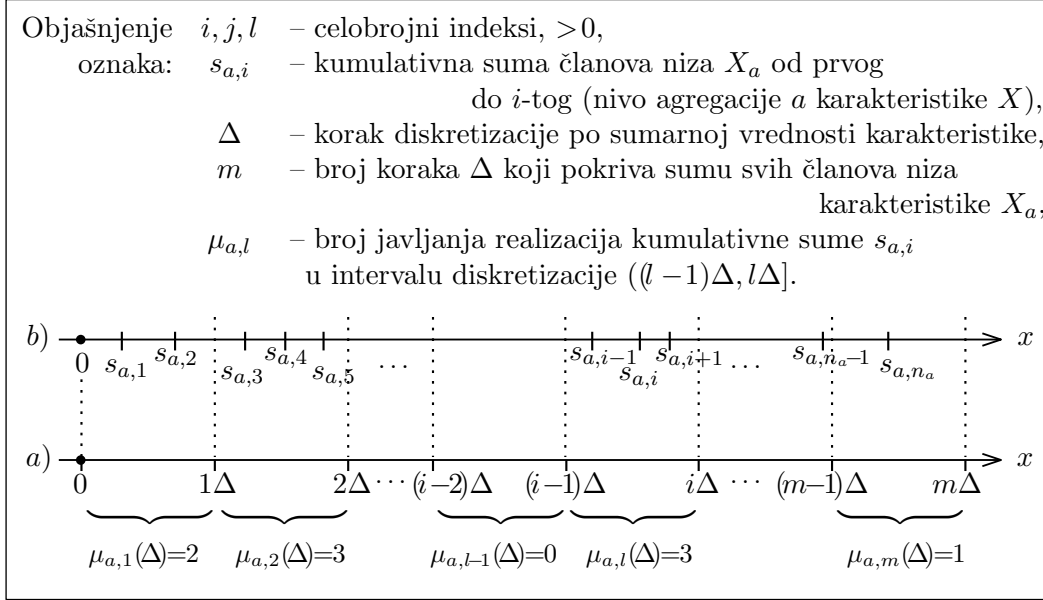
- vreme između pojave dva susedna člana niza je:

$$\tau_{a,i} = \theta_{a,i+1} - \theta_{a,i}. \quad (4.4)$$

\*      \*      \*

Jedan od zadataka koji se postavlja u proučavanju velikih voda je i utvrđivanje funkcije intenziteta broja javljanja prekida po intervalima karakteristike. Radi toga se vrši diskretizacija, vrednosti karakteristike  $X$  po intervalima zadate širine, odnosno po koracima  $\Delta$ . Na slici 4.4 a) prikazana je osa vrednosti karakteristike  $X$

podeljena na korake  $\Delta$ . Da bi se prebrojali prekidi po koracima  $\Delta$ , formiraju se kumulativne sume vrednosti karakteristike  $X$  kao što je prikazano na slici 4.4 b). Pretpostavka je da se kumulativnom sumom čuva vremenska struktura slučajnosti, odnosno stohastička priroda hidrološke slučajne veličine.



Slika 4.4: Shema formiranja elemenata za utvrđivanje funkcije intenziteta broja javljanja događaja vezanih za karakteristiku  $X$  u intervalu njene vrednosti.

Veličine sa slike 4.4 mogu se odrediti na sledeći način:

- na nivou agregacije  $a$ , član  $s_{a,i}$  niza  $S_a$  predstavlja kumulativnu sumu članova niza karakteristike  $X_a$ :

$$s_{a,i} = \sum_{j=1}^i x_{a,j}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad \text{gde je } n_a \text{ broj članova niza } X_a, \quad (4.5)$$

- na nivou agregacije  $a$ , broj javljanja prekida karakteristike  $X_a$ , u  $l$ -tom po redu intervalu širine  $\Delta$  je:

$$\mu_{a,l}(\Delta) = \# \{s_{a,i} : (l-1)\Delta < s_{a,i} \leq l\Delta\}, \quad l = \overline{1, m} \quad (4.6)$$

gde je:  $m = \left\lceil \frac{s_{a,n_a}}{\Delta} \right\rceil$

- mora biti ispunjen uslov da je zbir broja javljanja iz svih koraka jednak ukupnom

broju realizacija vrednosti karakteristike na toj agregaciji  $a$  :

$$\sum_{l=1}^m \mu_{a,l} = n_a, \quad (4.7)$$

\* \* \*

Opis karakteristika velikih voda i način na koji se analitički može formalizovati način formiranja agregacija iz osnovnog niza karakteristike, čine osnovu za praktičan rad na analizi stohastičke strukture karakteristika velikih voda. To podrazumeva da se raspoloživi nizovi srednjih dnevnih protoka pretvaraju u odabranu karakteristiku prema zadatim baznim vrednostima protoka (tj. prema pragu) i zatim vrši analiza verovatnoće pojave u najširem smislu tog pojma.

Za računarske proračune u okviru rada na disertaciji korišćen je softver za radne tabele MS Excel za pojedinačne proračune, a za zahtevnije računarske potrebe softver MatLab. Doktorant je pored standardnih funkcija koje imaju ovi softveri koristio i jednostavne funkcije i kodove koje je sam napisao ili postojeće prilagodio prema posebnim proračunskim potrebama.

---

## Glava 5

# Test primer modeliranja stohastičke strukture velikih voda

### 5.1 Uvod

Radi prikaza metoda modeliranja stohastičke strukture velikih voda na podacima dobijenim iz serija pikova iznad praga potrebno je pronaći odgovarajuće podatke. Načelno, ukoliko je hidrometrijski profil opremljen limnigrafom, ukoliko postoje pouzdane krive protoka, moguće je kvalitetno rekonstruisati hidrograme. Ukoliko se analiziraju samo vršne vrednosti protoka stvar je jednostavnija. Međutim ukoliko je potrebno analizirati zapremine talasa velikih voda iznad izabranog praga izbor podataka se sužava.

Podaci sa kojima se najčešće raspolaže su podaci o srednjim dnevnim protocima. O njima i karakteristikama velikih voda u njima sadržanim je bilo reči u prethodnoj glavi teksta. Takvi podaci za hidrometrijske profile na velikim rekama sa velikim slivnim područjima imaju zadovoljavajuću vremensku rezoluciju. To znači da su na njima trajanja poplavnih talasa duga, pa kvantizacija i osrednjavanje na dnevnom nivou neće ostaviti velike posledice kako na zapremine poplavnih talasa tako i na pikove protoka iznad izabranog praga. Nasuprot tome, kod malih slivova, gde su poplavni talasi kratke vremenske baze (par sati ili manje), nema smisla koristiti hidrograme srednjih dnevnih protoka za analizu stohastičke strukture velikih voda.

Ako je profil opremljen vodomernom letvom koja se očitava svakog dana u isto vreme, opet su veliki slivovi u prednosti nad malim slivima. Inertnost velikih slivova daće relativno malu razliku između vršnog i srednjeg dnevnog protoka. Kod malih slivova, mala inercija promena, dovodi do toga da ponekad talas velikih voda ostane neosmotren. Napominje se da se ne može ustanoviti jasna razlika između „malih” i

„velikih” slivova bez detaljnog uvida u osmotrene podatke, istoriju hidrometrijskog profila i slivne površine.

Primena metodologije na ovom mestu vezana je za parcijalne serije protoka, odnosno na u širem smislu shvaćene serije prekoračenja iznad praga. Dakle u pitanju mogu biti i protoci kao trenutne veličine ili zapremine kao integralna forma prekoračenja, sa pratećim elementima u vremenskom domenu (trajanja, vremena pojave vršne vrednosti, vreme između dve pojedinačne ili sekvencijalno grupisane vrednosti, itd.).

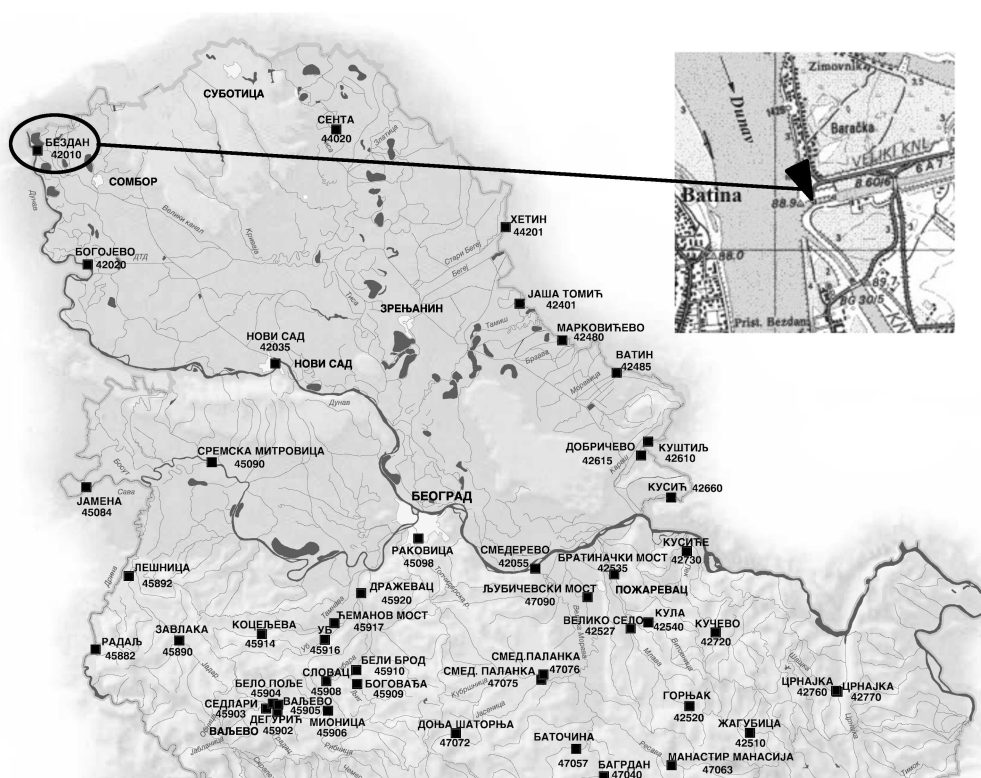
Na kraju poglavlju 3.5 prikazane su preporuke koje se daju za primenu klasične metode pikova za analizu maksimalnih godišnjih protoka. One podrazumevaju izbor „najpovoljnije” baze, u smislu primenljivosti raspodela za broj prekoračenja i za raspodelu visine pikova (prekoračenja) i saglasnosti empirijskih i teorijskih raspodela koje se utvrđuju statističkim testovima.

Za potrebe analize stohastičke strukture velikih voda, nizovi prekoračenja, tj. parcijalne serije, neće se formirati po „strogim” kriterijumima. Uobičajeno je da početni prag bude nešto ispod najmanje osmotrene maksimalne godišnje vrednosti. Ostali pragovi (baze) koji se ispituju su veći od tog minimalnog. Svaki od pragova daće drugačiju sliku o informacijama o strukturi velikih voda za koje smatramo da su sadržane u parcijalnoj seriji poreklom iz iste neprekidne vremenske serije – hidrograma dnevnih protoka.

## 5.2 Test podaci – hidrometrijska stanica Bezdán, reka Dunav

Za potrebe testiranja metoda modeliranja stohastičke strukture karakteristika velikih voda dobijenih iz serija pikova iznad praga odabrani su podaci o dnevnim protocima sa hidrometrijske stanice Bezdán na reci Dunav, a u skladu sa razmatranjima iz prethodnog poglavlja. Na slici 5.1 dat je prikaz dela hidrografske mreže reke Dunav u Republici Srbiji, sa detaljem lokacije h.s. Bezdán. Na istoj slici crnim kvadratićima su obeležene hidrometrijske stanice na kojima se meri protok (stanje iz 2012. godine). Osnovni podaci za hidrometrijsku stanicu Bezdán, reka Dunav, dati su u tabeli 5.1.

H.s. Bezdán na Dunavu je granična stanica na ulazu Dunava u R. Srbiju. Ona je druga po redu stanica ustanovljena na prostorima teritorije sadašnje države Srbije. Uzvodno, u republici Mađarskoj, postoji h.s. Moháč, sa kojom se može vršiti uporedna kontrola rezultata merenja protoka.



Slika 5.1: Hidrografska mreža reke Dunav u Republici Srbiji sa detaljem položaja h.s. Bezdан (gornji desni ugao slike).  
(na osnovu grafičkih priloga sa internet lokacije RHMZ-a).

Obrada podataka prikupljenih na h.s. Bezdан je u periodu od 1950. do 2012. godine u nadležnosti Republičkog hidrometeorološkog zavoda Srbije. Za potrebe izrade bilansa reke Dunav, 1970. godine, na inicijativu Dunavske komisije, tadašnji Savezni hidrometeorološki zavod i institut „Jaroslav Černi” su radili obradu podataka od 1931. do 1970. godine. Tada su iz nepoznatih razloga bile zanemarene velike vode iz 1965. godine, odnosno smanjena njihova vrednost. Među podacima koji su korišćeni u ovoj disertaciji nalaze se originalni (nekorigovani) podaci iz 1965. godine. Obradivači iz RHMZ-a su usvojili ove nekorigovane podatke kada su naknadno sa mađarskim kolegama proverili podatke sa stanice Mohač iz istog perioda.

U nastavku teksta biće prikazana primena postupaka i metoda prezentovanih u glavi 3, na karakteristikama velikih voda formiranih kao u glavi 4, a na serijama pikova iznad praga iz originalnih podataka o srednji dnevnim protocima zabeleženih na hidrometrijskoj stanici Bezdан na reci Dunav.



Tabela 5.1: Osnovni podaci za hidrometrijsku stanicu Bezdán, reka Dunav.

stanica	Bezdán
reka.....	Dunav
sliv.....	Crno more
oznaka.....	42010
godina osnivanja.....	1856.
kota nule vodomera..... [mnJm]	89.64
udaljenost od ušća..... [km]	1425.59
površina sliva..... [km <sup>2</sup> ]	210250
<hr/>	
Elementi merenja i osmatranja	[od godine]
<hr/>	
– Način registrovanja vodostaja	
– letva.....	1920.
– limnigraf.....	1972.
– digitalno.....	2003.
– merenje protoka.....	1924.
– merenje temperature.....	1949.
– protok suspendovanog nanosa.....	1991.
– ledene pojave.....	1900.
– kvalitet vode.....	1965.
<hr/>	
način izveštavanja (aktivni).....	GSM
<hr/>	
Opseg podataka	
<hr/>	
– period raspoloživih podataka..... [od-do]	1931.-2011.
– dužina niza..... [godina]	81
– raspon vrednosti (godišnji maks.)..... [m <sup>3</sup> /s]	2790 → 8360
– apsolutni izmereni minimum..... [m <sup>3</sup> /s]	610 (12.-14.1.'47.)
– apsolutni izmereni maksimum..... [m <sup>3</sup> /s]	8360 (24.6.1965.)
– najniža baza za pikove..... [m <sup>3</sup> /s]	2500
<hr/>	
Odbrana od poplava,	[vodostaj, protok]     [H   Q]
– redovna..... [cm, m <sup>3</sup> /s]	500   4440
– vanredna..... [cm, m <sup>3</sup> /s]	700   7150
<hr/>	

### 5.3 Stohastička struktura zapremina, trajanja talasa prekoračenja i trajanja ciklusa

U ovom radu je predviđeno da se odrede raspodele sledećih slučajnih veličina velikih voda:

- ukupanog broja talasa velikih voda u vremenskom intervalu  $(0, t]$ ,  $p_\nu(t)$ ,
- ukupanog broja talasa velikih voda u intervalu  $(0, x]$ ,  $p_n(x)$ ,
- vremena za ostvarenje  $\nu$  prekida odnosno ciklusa velikih voda,  $G_\nu(t)$ ,

- zapremina ili trajanja pri  $n$  talasa velikih voda,  $H_n(x)$ .

Prva i treća slučajna veličina opisuju strukturu pojave velikih voda u vremenu, dok se druga i četvrta bave strukturom same karakteristike  $X$ . U ovom poglavlju karakteristika  $X$  je ili zapremina ( $X = V$ ) ili trajanje ( $X = d$ ) talasa velikih voda.

Osnovni zadatak je proučiti zakone verovatnoća (diskretne i kontinualne) koje ove pojave prate i proveriti da li se mogu modelirati na način kako je to pretpostavljeno u prethodnim poglavljima.

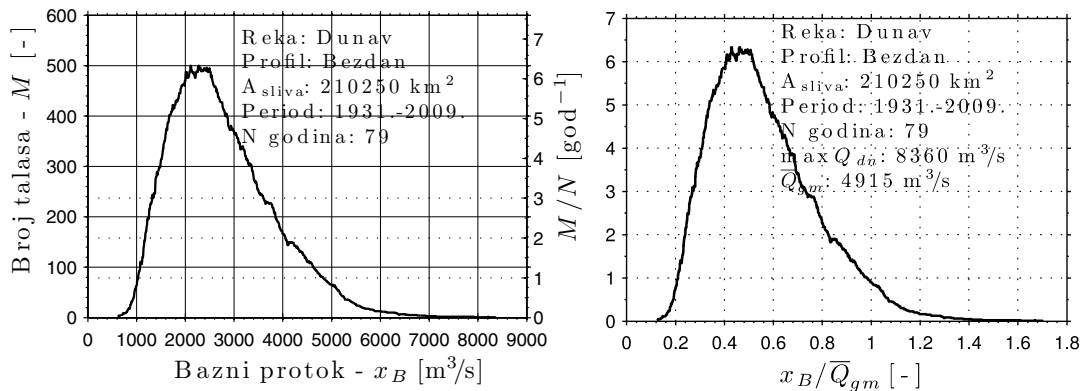
U prvom delu koji je deskriptivnog tipa u razmatranje će se uzeti veći broj baznih protoka  $Q_B$ . Kasnije, posle analize zakona verovatnoće događaja od interesa, prikaz će se dati za samo par baznih protoka, a po potrebi se davati komentari o iskustvima pri sprovođenju istraživanja.

Biće prezentovan i rezultat primene klasične metode pikova za određivanje raspodele maksimalnih godišnjih zapremina i trajanja talasa prekoračenja,  $F(x_{\max, \text{god}})$ , kao specijalni slučaj funkcije raspodele maksimuma u intervalu vremena  $t$ , odnosno kada je  $t = \text{godinu dana}$ . Ovo odgovara prirodnom ciklusu smene hidroloških uslova formiranja oticaja. Usvojeno je da se posmatra kalendarska godina, a ne hidrološka. Pretpostavlja se da se razlike između ova dva pristupa, usled velikog broja godina sa podacima (79 godina), zanemarljive. Takođe, talas koji započne u jednoj godini, a završi u narednoj, biće pridružen godini u kojoj se završio.

### 5.3.1 Opšte karakteristike zapremina i trajanja talasa prekoračenja

Podaci o karakterističnim veličinama talasa velikih voda – zapreminama prekoračenja  $V$  i trajanjima prekoračenja  $d$  dobijaju se iz 79 godišnjeg niza srednjih dnevnih protoka (od 1931. do 2009. godine). Formiranje niza ovih vrednosti izvršeno je jednostavnim presecanjem hidrograma veličinom izabranog baznog protoka – praga  $Q_B$ , bez ikakve procedure eliminacije ili ukрупnjavanja (neki od ovakvih principa su prikazani u slučaju primene metode pikova za analizu maksimalnih godišnjih protoka). Jasno je da ovakav pristup, proceduralno jednostavan i jasan, može imati nedostatke, najviše u očekivanoj velikoj asimetriji nizova karakteristika, sa posledicama na teorijske zakone verovatnoće koji im se prilagođavaju. Kod formiranja nizova trajanja, zbog korišćenja hidrograma srednjih dnevnih protoka dolazi do kvantizacije trajanja na dnevni nivo, što opet predstavlja donekle grub oblik diskretizacije inače neprekidne slučajne promenljive.

Agregacije karakteristika talasa velikih voda urađene su, pored osnovnog niza  $X$



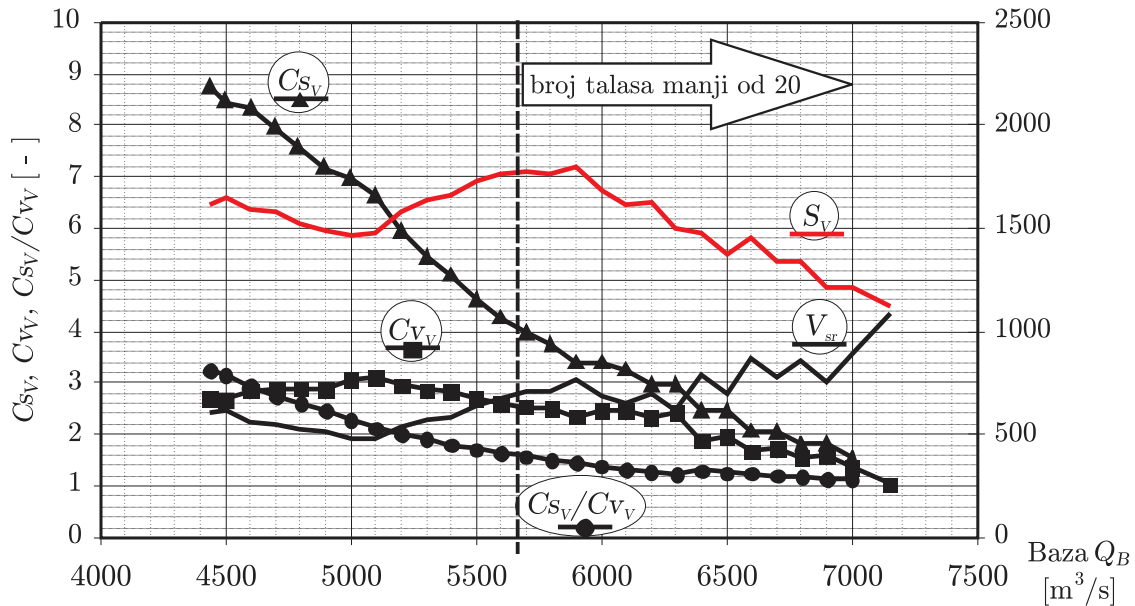
Slika 5.2: Reka: Dunav, stanica: Bezdán. Broj talasa prekoračenja  $M$  tokom perioda od 1931. do 2009. godine (79 godina) u funkciji izabranog baznog protoka  $Q_B$  (levo) i prosečan broj talasa u godini u funkciji odnosa baznog protoka i srednje vrednosti prosečnih godišnjih protoka (desno).

odnosno  $X_1$ , i za nivoe 2 i 3, odnosno  $X_2$  i  $X_3$ . Fizički, to bi moglo da se shvati kao veličina koja opisuje kolika je ukupna zapremina talasa velikih voda ili koliko je ukupno trajanje velikih voda u uzastopnih jedan, dva ili tri talasa. Naravno, broj nivoa agregacije bi mogao biti i veći, ali je ovde izbor stao na nivou tri. Principi agregisanja karakteristika opisani su u poglavlju 4.3 na strani 74.

Na slici 5.2 prikazana je promena broja talasa velikih voda, odnosno pikova, sa podizanjem vrednosti baznog protoka. Na slikama 5.3 i 5.4 prikazane su statistike osnovnih nizova zapremina i trajanja talasa prekoračenja u funkciji baznog protoka, a detaljno su date i u tabelama Priloga 1. i 5. Na slikama su obeležene vertikalne linije na pozicijama baznih protoka od kojih je broj članova osnovnih nizova karakteristika manji od 20 (što je uzeto kao minimum potreban za statističku obradu). Statistike agregiranih pikova su prikazane samo tabelarno i to za zapremine  $V$  u Prilozima 2. i 3. i trajanja  $d$  u Prilozima 6. i 7.

Na slici 5.5 prikazano je dijagram koji može da posluži za ocenu pogodnog zakona verovatnoće koje slede pikovi – zapremine prekoračenja  $V_1, V_2$  i  $V_3$  izdvojeni za različite bazne protoke  $Q_B$ . Ovde je u pitanju polje sa vezom koeficijenta varijacije  $C_v$  i količnika koeficijenta asimetrije i koeficijenta varijacije  $C_s/C_v$ . U njemu su jednoparametarske raspodele prikazane tačkom, dvoparametarske glatkim linijama, a troparametarske raspodele bi trebale da pokriju bilo koju tačku u polju. Slično se može postići i dijagramom L-momenata koji nije ovde korišćen. Na slici 5.6 dat je dijagram za ocenu zakona verovatnoće trajanja prekoračenja  $d_1, d_2$  i  $d_3$ . Na slike prikazane su statistike za bazne protoke počevši od protoka redovne odbrane od poplava od  $4440 \text{ m}^3/\text{s}$  pa do onih za koje postoji bar 20 elemenata u nizu koji se

Statistike zapremina talasa prekoračenja  $V$ , Bezdán/Dunav, 79 godina, od 1931. do 2009.

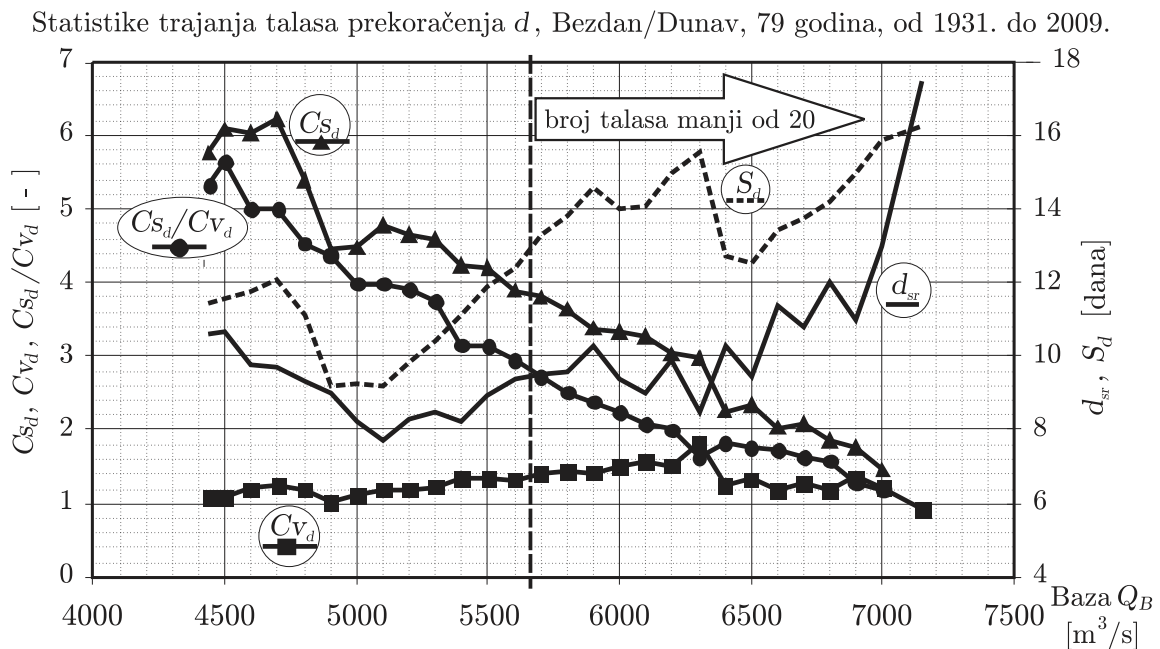


Slika 5.3: Statistike zapremina prekoračenja baznog protoka  $Q_B$ : srednja vrednost  $V_{sr}$ , standardna devijacija  $S_V$ , koeficijent varijacije  $Cv_V$ , koeficijent asimetrije  $Cs_V$  i količnik koeficijenta asimetrije i varijacije  $Cs_V/Cv_V$ .

posmatra.

Na slikama 5.7 i 5.8 prikazani su redom za agregacije zapremine prekoračenja  $V$  i trajanja prekoračenja  $d$  rezultati Kramer-FonMizesovog  $N\omega^2$  testa saglasnosti tri teorijske funkcije raspodele pogodne za analizu prekoračenja; eksponencijalne, dvo-parametarske Vejbulove i Pareto raspodele (parametri određeni metodom maksimalne verodostojnosti). Na dijagramima su prikazane tzv.  $p$  vrednosti odnosno verovatnoće prevazilaženja kontrolne statistike  $N\omega^2$ . Dakle, u pitanju su pikovi  $X$  odnosno  $X_1$  i njihove agregacije označene sa  $X_2$  i  $X_3$  (umesto  $X$  staviti  $V$  ili  $d$ ).

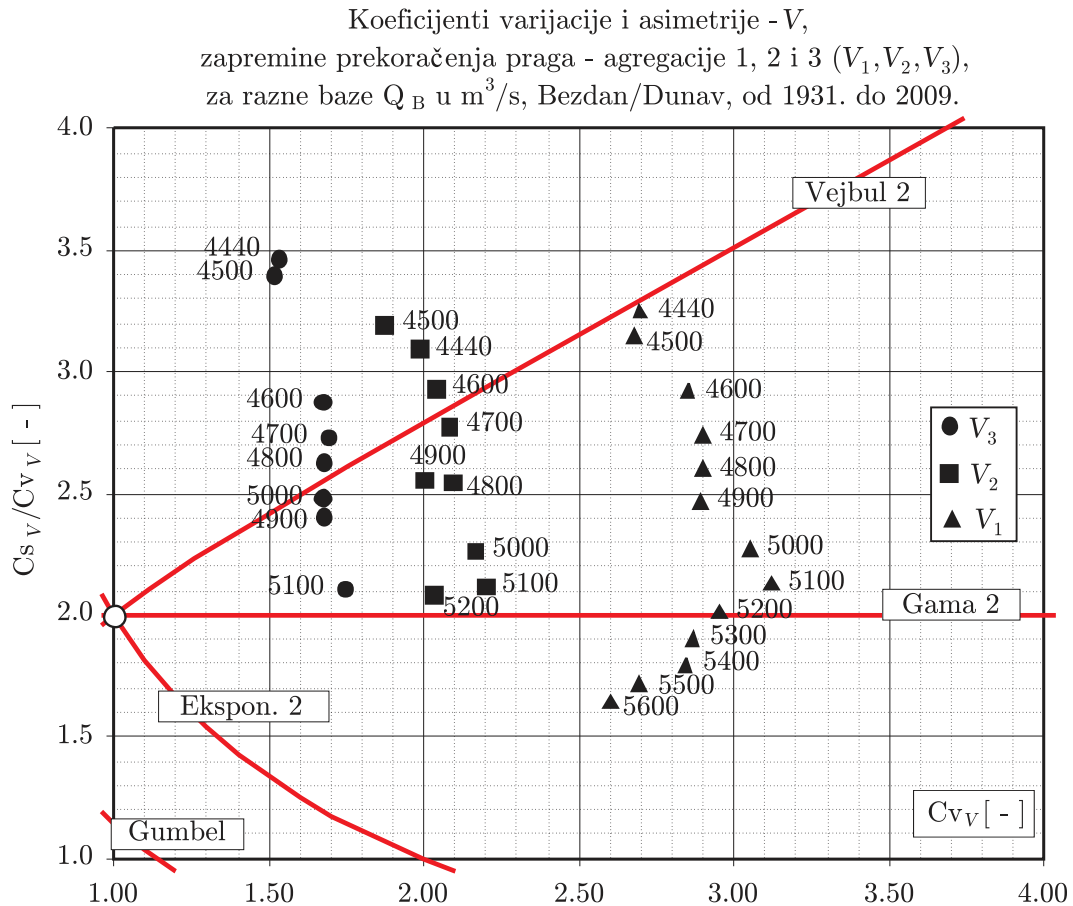
Na slici 5.7, koja se bavi zapreminama prekoračenja i njihovim agregacijama nivoa 2 i 3, uočava se da prikazane  $p$  vrednosti testa saglasnosti za dve dvoparametarske raspodele prevazilaze uobičajene pragove značajnosti (5% ili 10%) bez obzira na posmatranu agregaciju. Sa povećanjem nivoa agregacije slaganje slabi za dvoparametarske raspodele, a povećava se za eksponencijalnu raspodelu, koja praktično nigde nije pogodna za primenu. Ovo je posledica jako velikih koeficijenata asimetrije u nizovima podataka. Za dalje obrade usvaja se kao merodavna Vejbulova raspodela, mada se ona na osnovnom nizu  $V$  smenjuje po najboljem slaganju sa Pareto raspodelom. Interesantno je da je za sve posmatrane baze gotovo svejedno koji će se dvoparametarski zakon verovatnoće zapremina prekoračenja koristi jer su svi statistički dovoljno dobri.



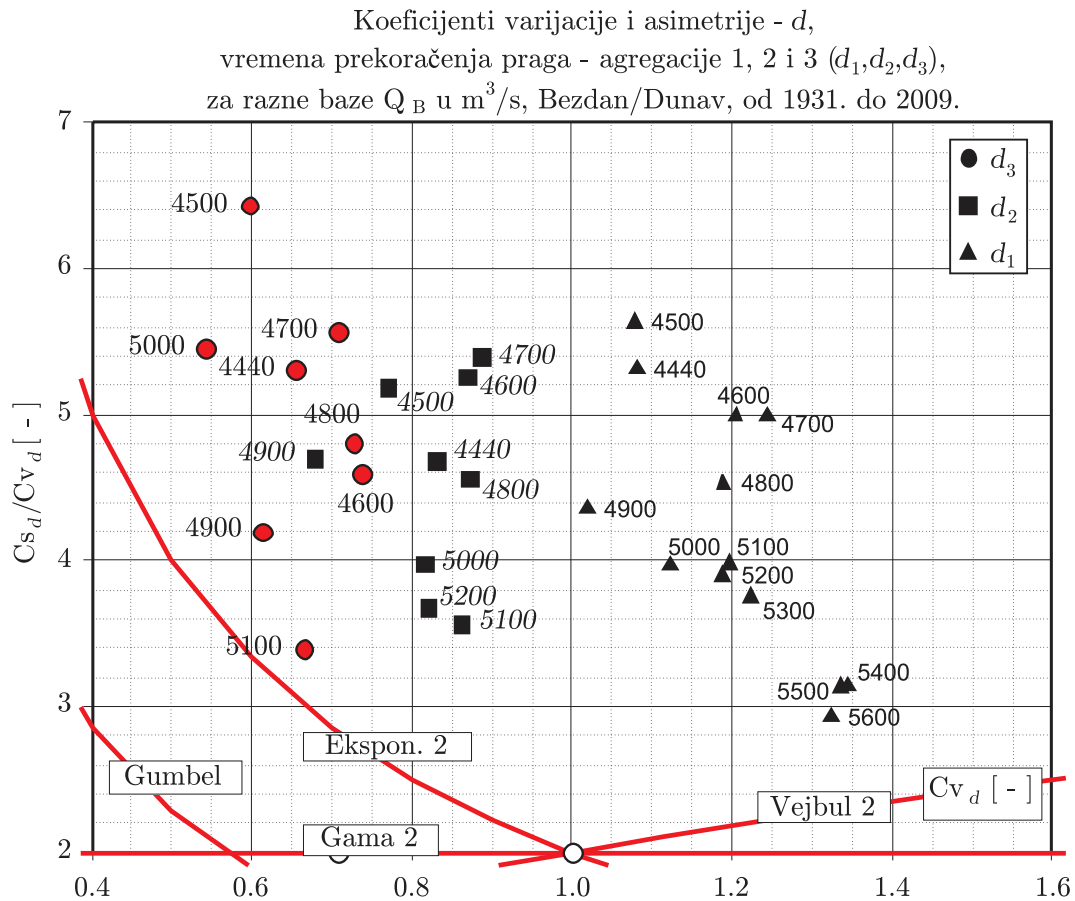
Slika 5.4: Statistike trajanja prekoračenja baznog protoka  $Q_B$ : srednja vrednost  $d_{sr}$ , standardna devijacija  $S_d$ , koeficijent varijacije  $Cv_d$ , koeficijent asimetrije  $Cs_d$  i količnik koeficijenta asimetrije i varijacije  $Cs_d/Cv_d$ .

Na slici 5.8, koja se bavi trajanjima prekoračenja, uočava se takođe da prikazane  $p$  vrednosti testa saglasnosti za dve dvoparametarske raspodele prevazilaze uobičajene pragove značajnosti od 5% ili 10%. Osnovni niz po sve tri raspodele ima visoke  $p$  vrednosti reda od 60 do 80% dok se oni na višim agregacijama uglavnom preplovljuju. Za razliku od zapremine prekoračenja, trajanja prekoračenja imaju manje koeficijente asimetrije, kao i manje raspone ostalih statistika (videti Priloge 1, 2, 3, 5, 6 i 7). Ovde je dominantno slaganje pikova sa dvoparametarskom Vejbulovom raspodelom.

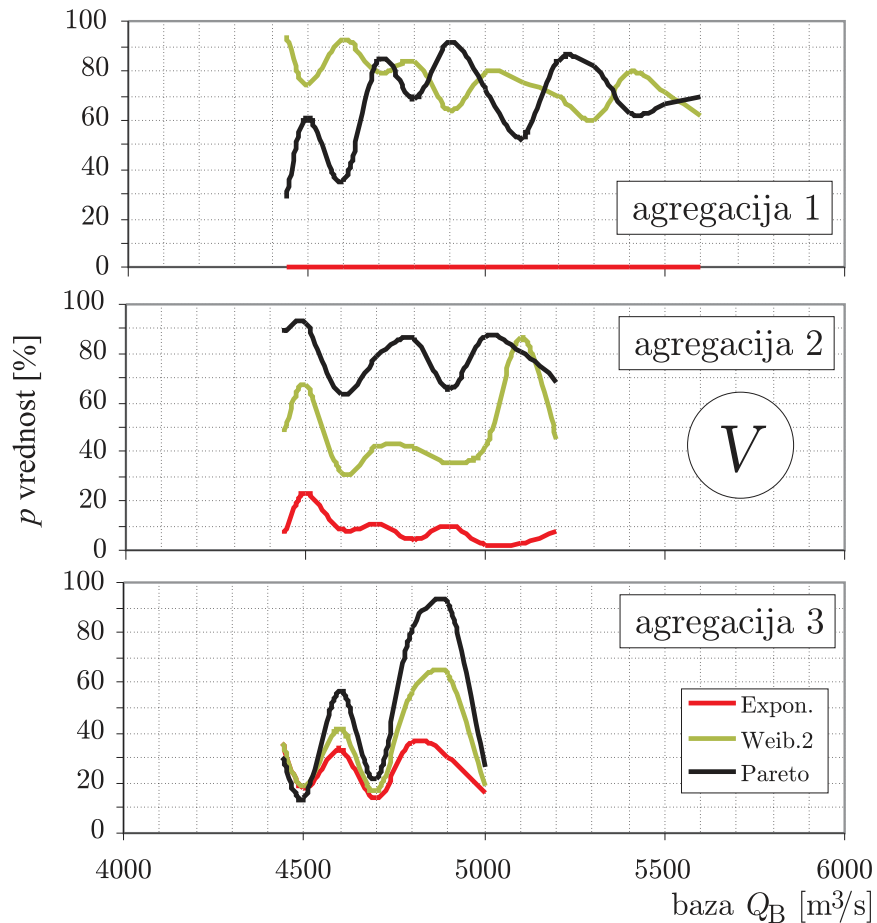
Na osnovu prethodno pomenute analize predstavljene slikama 5.7 i 5.8 u daljem radu sa pikovima uglavnom će se kao reprezentativna koristiti Vejbulova raspodela kao raspodela pojave pikova (što je i opravdano dosadašnjom hidrološkom praksom u primeni metode pikova na pikove protoka).



Slika 5.5: Veličina  $V$ , zapremine prekoračenja baznog protoka  $Q_B$  – agregacije 1, 2 i 3, ( $V_1, V_2, V_3$ ). Dijagram za ocenu zakona verovatnoće. Prikazani su samo bazni protoci (brojne oznake u markere u  $m^3/s$ ) gde je broj članova u agregaciji minimalno 20.

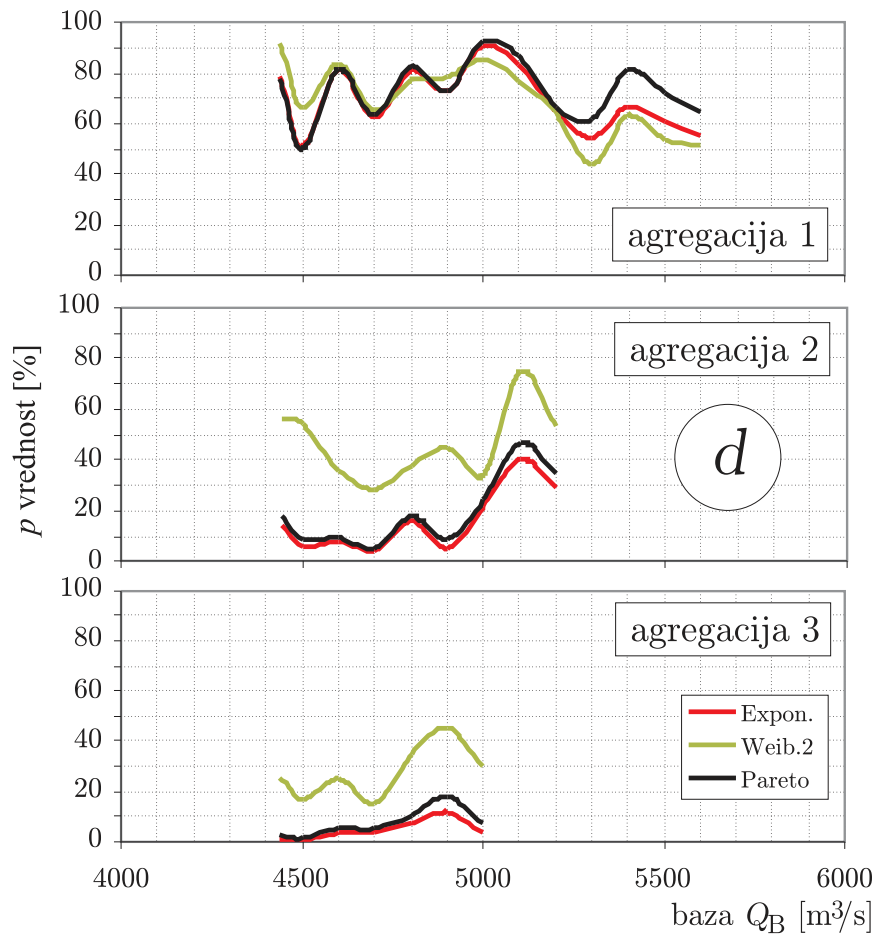


Slika 5.6: Veličina  $d$ , trajanja prekoračenja baznog protoka  $Q_B$  – agregacije 1, 2 i 3, ( $d_1, d_2, d_3$ ). Dijagram za ocenu zakona verovatnoće. Prikazani su samo bazni protoci (brojne oznake u markere u  $m^3/s$ ) gde je broj članova u agregaciji minimalno 20.



Slika 5.7: Reka: Dunav, stanica: Bezdan, period od 1931. do 2009. godine (79 godina). Agregacije zapremine prekoračenja  $V_i; i = \overline{1,3}$ ;  $p$  vrednost za test statistiku  $N\omega^2$  Kramer - Fon Mizesovog testa pri testiranju saglasnosti sa eksponencijalnom, Weibulovom i Pareto raspodelom. Parametri određeni po metodi maksimalne verodostojnosti. Minimalni broj članova nizova je 20.





Slika 5.8: Reka: Dunav, stanica: Bezdan, period od 1931. do 2009. godine (79 godina). Agregacije trajanja prekoračenja  $d_i; i = \overline{1,3}$ ;  $p$  vrednost za test statistiku  $N\omega^2$  Kramer - Fon Mizesovog testa pri testiranju saglasnosti sa eksponencijalnom, Weibulovom i Pareto raspodelom. Parametri određeni po metodi maksimalne verodostojnosti. Minimalni broj članova nizova je 20.

### 5.3.2 Opšte karakteristike trajanja ciklusa između prekoračenja

Kako je naglašeno u ciljevima i zadacima ovog istraživanja, među pojavama koje su od interesa je i vreme između pojave prekida odnosno trajanje ciklusa, označeno sa  $\tau$  (odnosno  $\tau_{i,\nu}$  na slici 4.2). Vremena između pojave prekida su aditivne veličine. To znači da se može postaviti pitanje koja je raspodela trajanja ciklusa  $\tau$  (tj.  $\tau_1$ ) prekoračenja većih od baze  $Q_B$ . Takođe, mogu da se posmatraju agregirana vremena, tj. da se postavi pitanje raspodele trajanja dva ( $\tau_2$ ), tri ( $\tau_3$ ) ili  $i$  ( $\tau_i$ ) sukcesivnih ciklusa.

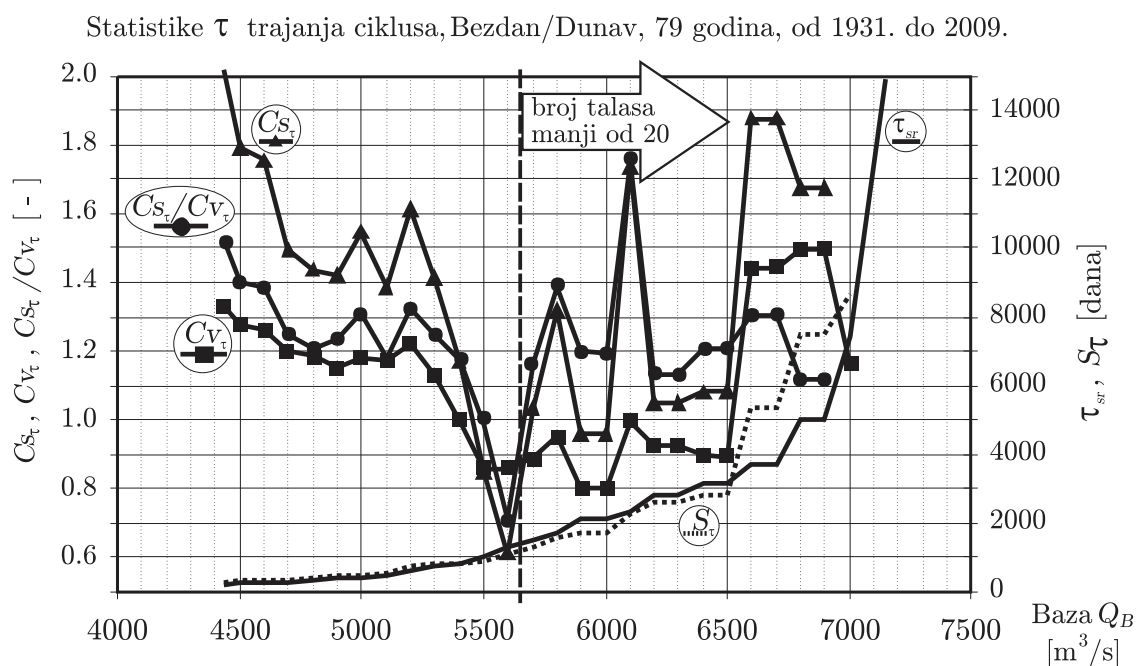
Slično kao i zapremine i trajanja prekoračenja, i za vremena trajanja ciklusa na bilo kom nivou agregacije za potrebe generalnog opisa mogu se izračunati osnovne statistike. Na slici 5.9 dat je grafički prikaz statistika osnovnog niza  $\tau = \tau_1$ . Zbog obima, u Prilozima 9. do 10. date su tabele sa detaljnim vrednostima srednjih vrednosti, standardnih devijacija, koeficijenata varijacije i asimetrije i njihovim količnikom za razne bazne protoke i različite nivoe agregacija (konkretno za  $\tau_1, \tau_2$  i  $\tau_3$ )

Na slici 5.10 prikazano je dijagram za ocenu pogodnog zakona verovatnoće trajanja ciklusa na različitim nivoima agregacije. Različite agregacije predstavljane su posebnim markerima, a uz svaki marker u polju upisana je vrednost baznog protoka  $Q_B$  koja mu odgovara.

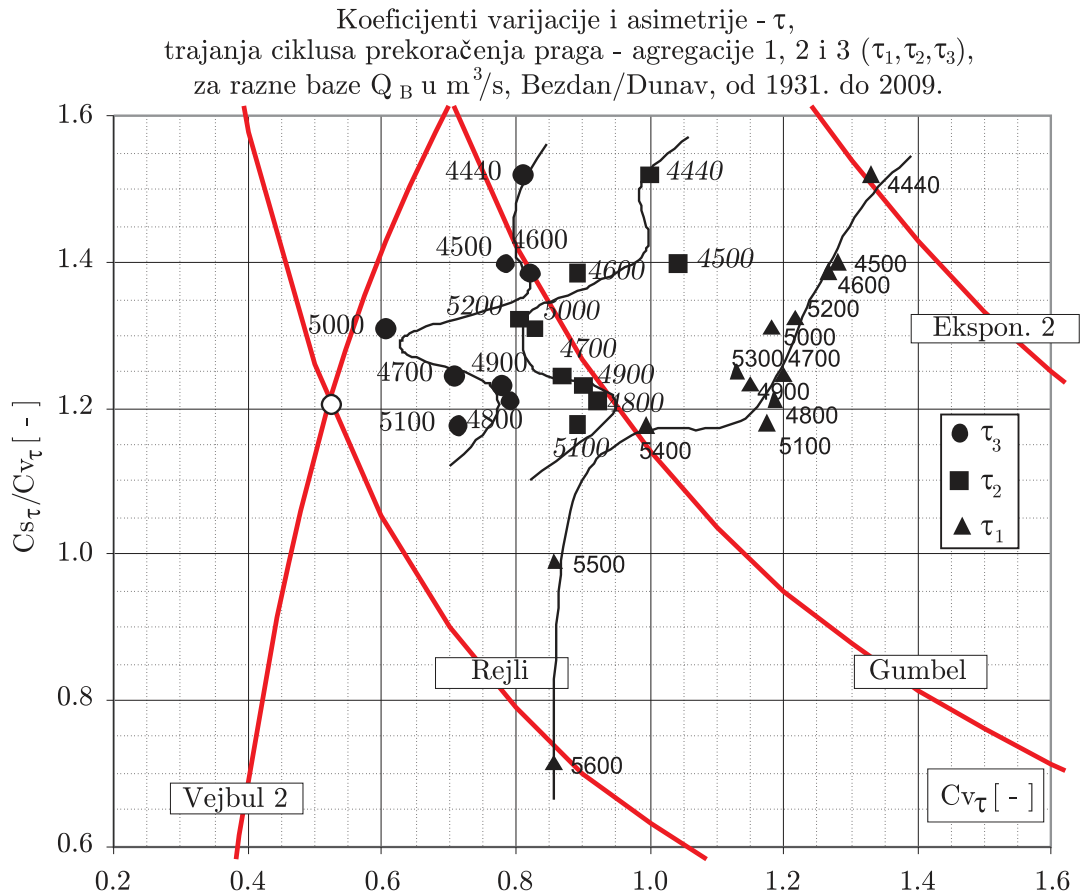
Na slici 5.11 prikazane su  $p$  vrednosti za rezultat Kramer-FonMizesovog  $N\omega^2$  testa saglasnosti za tri teorijske funkcije raspodele; eksponencijalnu, dvoparametarsku Vejbulovu i Pareto raspodelu (parametri određeni metodom maksimalne verodostojnosti) za trajanja ciklusa  $\tau$  odnosno  $\tau_1$  i njihove agregacija  $\tau_2$  i  $\tau_3$ .

Sa slike se uočava da prikazane  $p$  vrednosti testa saglasnosti za sve raspodele imaju vrednosti veće od uobičajenih 10% za sve bazne protoke izuzev za eksponencijalnu raspodelu kod osnovnog niza  $\tau$  za bazne protoke ispod 3350 m<sup>3</sup>/s.

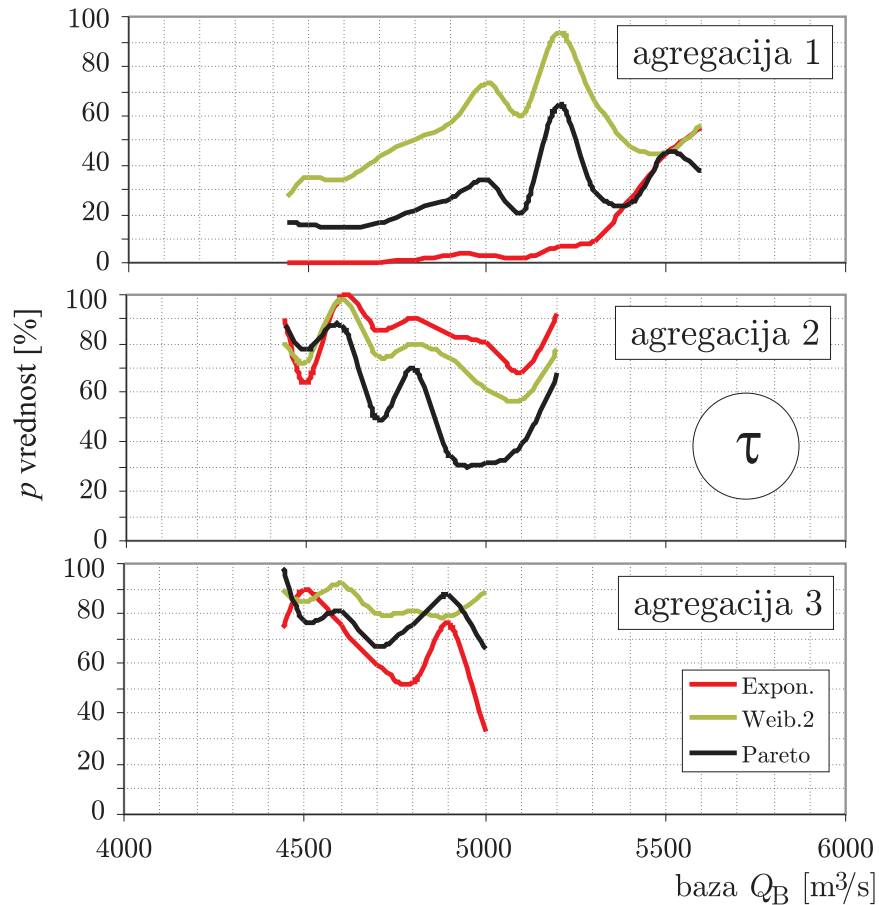
Uopšteno gledajući, opet bi mogli da se odlučimo za Vejbulovu dvoparametarsku raspodelu kao odgovarajuću raspodelu trajanja ciklusa za posmatrane agregacije do nivoa 3, za bazne protoke veće od 4440 m<sup>3</sup>/s.



Slika 5.9: Statistike trajanja ciklusa prekoračenja baznog protoka  $Q_B$ : srednja vrednost  $\tau_{sr}$ , standardna devijacija  $S_\tau$ , koeficijent varijacije  $C_{v_\tau}$ , koeficijent asimetrije  $C_{s_\tau}$  i količnik koeficijenta asimetrije i varijacije  $C_{s_\tau}/C_{v_\tau}$ .



Slika 5.10: Trajanje ciklusa  $\tau$  – agregacije 1, 2 i 3, ( $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ). Dijagram polje za ocenu zakona verovatnoće. Prikazani su samo bazni protoci  $Q_B$  (brojne oznake uz markere u  $m^3/s$ ) gde je broj članova u agregaciji minimalno 20. Glatke linije služe za praćenje pripadnosti agregaciji – pokazuju položaj istorodnih markera.

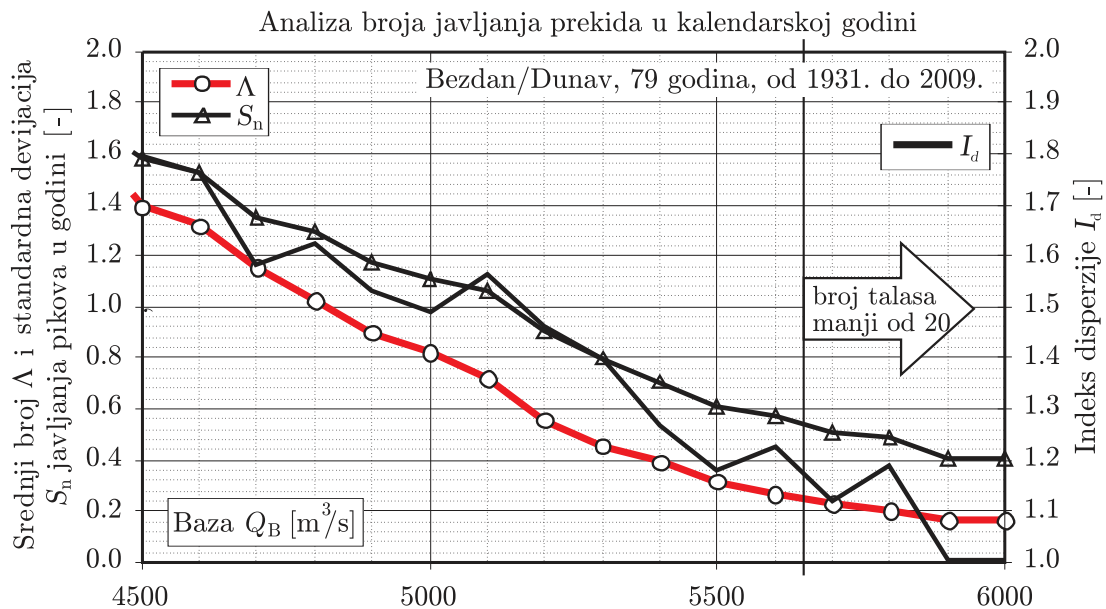


Slika 5.11: Reka: Dunav, stanica: Bezdan, period od 1931. do 2009. godine (79 godina). Agregacije trajanja ciklusa  $\tau_i; i = \overline{1,3}$ ;  $p$  vrednost za test statistiku  $N\omega^2$  Kramer - Fon Mizesovog testa pri testiranju saglasnosti sa eksponencijalnom, Vejbulovom i Pareto raspodelom. Parametri određeni po metodi maksimalne verodostojnosti. Minimalni broj članova nizova je 20.

### 5.3.3 Broj pojave prekida u intervalu vremena

#### 5.3.3.1 Broj pojave prekida po kalendarskim godinama

Za bazni opis pojave prekoračenja od značaja je prikazati broj njihovih pojava u toku perioda od godinu dana. To se može učiniti kroz grafički i numerički prikaz osnovnih statistika broja javljanja po kalendarskim godinama. Na slici 5.12 i u tabeli u Prilogu 13. dati su rezultati analize broja javljanja  $M$  pikova iznad praga u godini dana. Ovi pokazatelji mogu biti od koristi pri heurističkoj oceni pogodnosti primene pojedinih diskretnih raspodela za opis zakona verovatnoće broja javljanja pikova u godini dana.



Slika 5.12: Bezdimenzionalne statistike broja javljanja pikova u toku kalendarskih godina, srednji broj javljanja pikova u godini  $\Lambda$ , standardna devijacija broja javljanja  $S_n$  i indeks disperzije,  $I_d = S_n^2 / \Lambda$ . Opseg baznih protoka  $Q_B$  od 4500 do 6000 m³/s.

Ovde nije obrađivana unutargodišnja raspodela pojave pikova. Za njenu ocenu može da posluži analiza u poglavlju 5.4.3.1 na strani 138 koja se odnosi na metodu pikova za pikove protoka preko praga. Razlika u procesima pikova protoka preko praga i pikova zapremina prekoračenja i trajanja preko praga je u trenutku promene vrednosti procesa; kod pikova protoka to je trenutak realizacije pika, a kod zapremina i trajanja to je trenutak prestanka prekoračenja u jednom talasu (videti sliku 4.2 na strani 73). Načelno, tokom velikog broja godina osmatranja protoka (što je ovde slučaj) ne bi trebalo da postoje značajne razlike, bar na nivou opštih ili deskriptivnih razmatranja procesa.

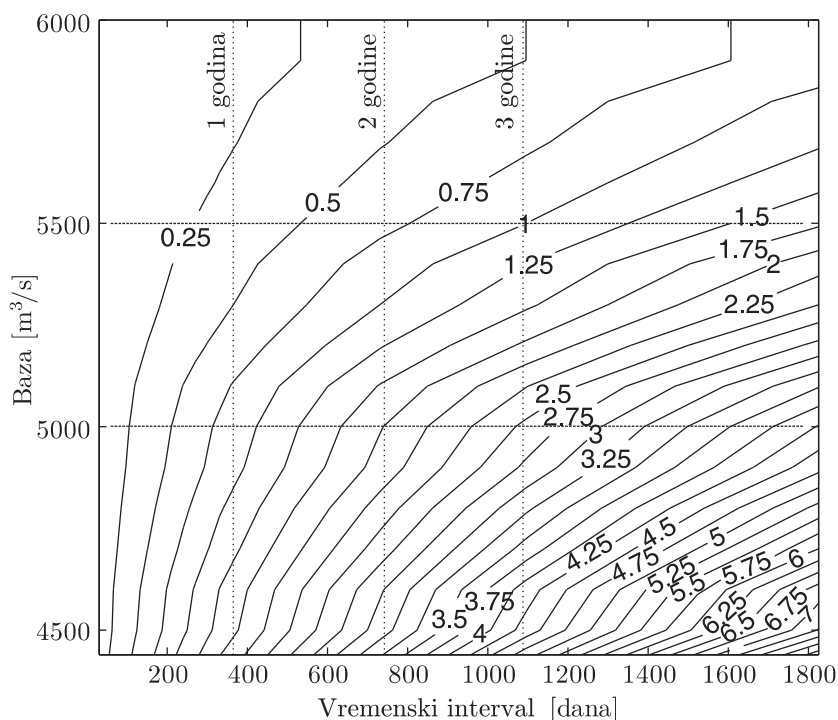
### 5.3.3.2 Broj pojave prekida po vremenskim intervalima različitih dužina

Pored broja javljanja pikova po vremenskim intervalima dužine godinu dana, razmatran je i broj javljanja pikova po intervalima  $\Delta$  drugih dužina, u opsegu od 30 do 1825 dana ( $\approx 5$  godina)<sup>1</sup>, za različite bazne protoke.

Proučavanje broja pojave pikova po vremenskim intervalima Xrazličitih dužina značajno je kao pokazatelj moguće raspodele trajanja ciklusa odnosno vremena između pojave pikova  $\tau$ .

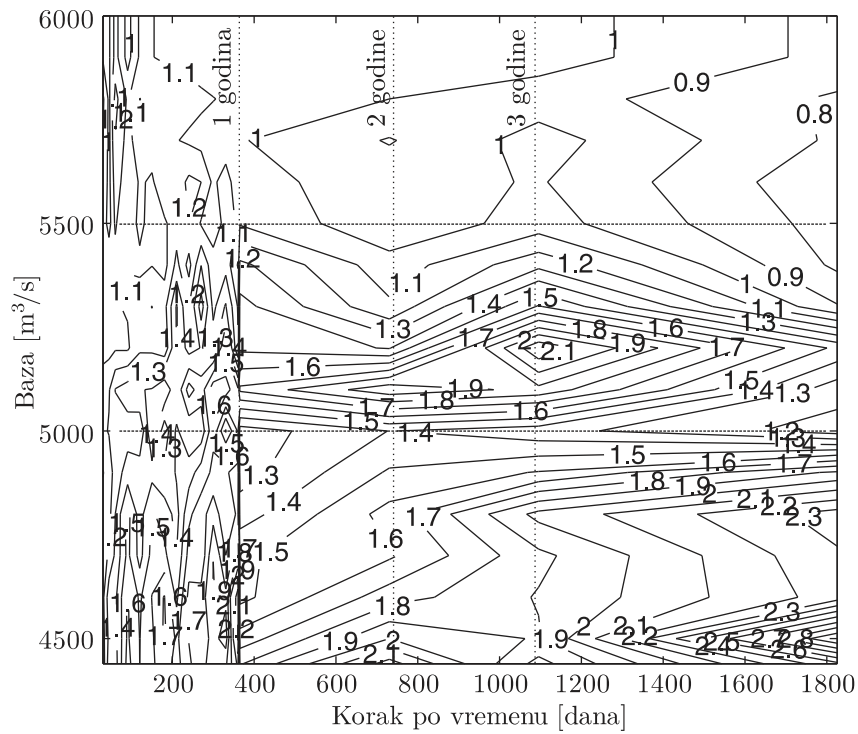
Radi sticanja osnovnih informacija dat je grafički prikaz statistika broja javljanja pikova za različite bazne protoke i dužine vremenskih intervala i to srednjih vrednosti (slika 5.13) i indeksa disperzije (slike 5.14 i 5.15).

Ovi prikazi su više teorijskog nego praktičnog značaja, pošto karakter hidroloških pojava ima smisla proučavati na nivou hidrološke godine ili po sezonama sa homogenim hidrološkim karakteristikama. Sa matematskog stanovišta ovakva ograničenja ne postoje. Ukoliko se ne vodi računa o sezoni, već se smatra da je intenzitet pojave pikova homogen u vremenu onda se može smatrati da vrednosti ovih statistika imaju praktičnu vrednost (što može biti implicitno opravdano za niske vrednosti baznog protoka - veliki broj pikova).

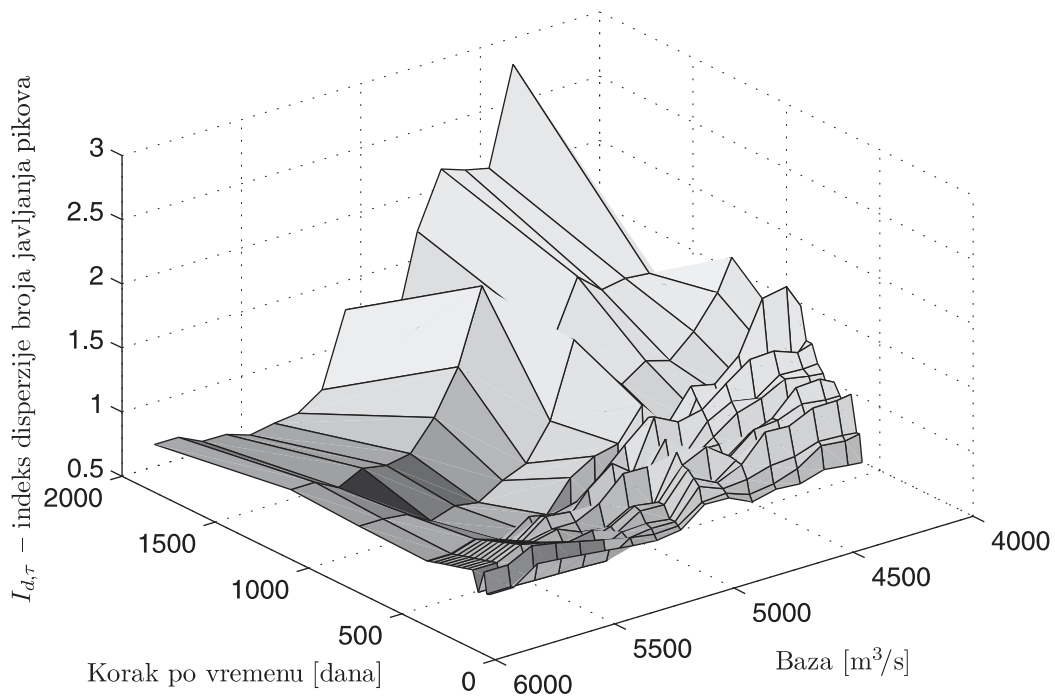


Slika 5.13: Srednja vrednost broja javljanja u različitim intervalima.

<sup>1</sup>Ispitivano je 17 intervala, u danima {30, 45, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360, 365, 730, 1095, 1825}.



Slika 5.14: Indeksi disperzije broja javljanja pikova po vremenskom koraku u danima.



Slika 5.15: Prostorni prikaz (3D) polja indeksa disperzije broja javljanja pikova po vremenskom koraku u danima.

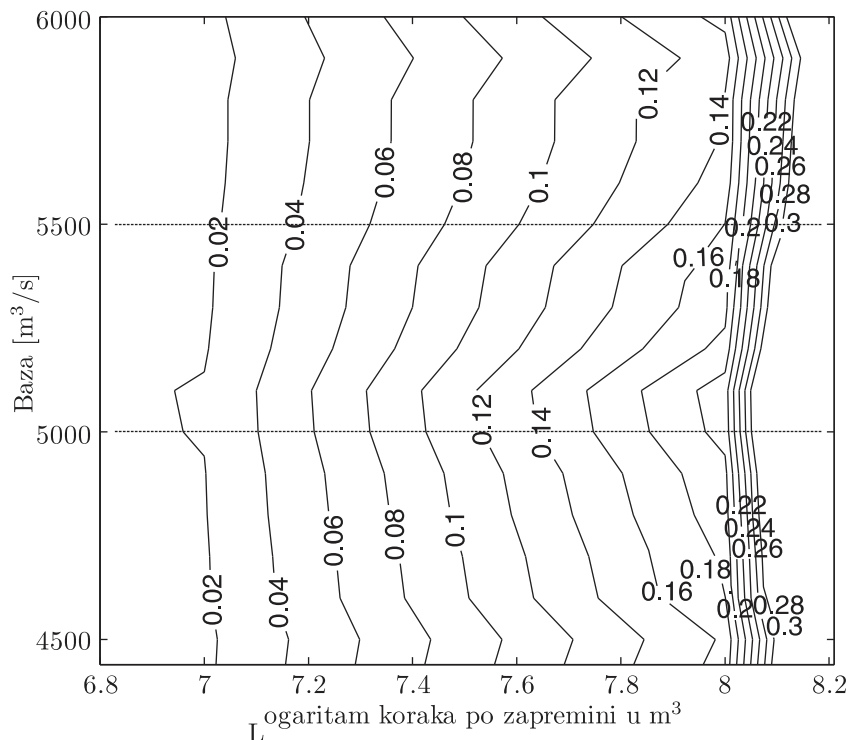


### 5.3.4 Broj pojave pikova u intervalima vrednosti pikova

Proučavanje broja pojave pikova po intervalima vrednosti pikova značajno je kao pokazatelj moguće raspodele same vrednosti pikova  $X$  (o ovome je bio reči u Uvodnom poglavlju disertacije). Podseća se na značaj funkcije intenziteta procesa  $\varkappa(x, n)$  (izraz 2.69 na strani 34), njenog pretpostavljenog oblika i posledica na zakon verovatnoće pojave pikova.

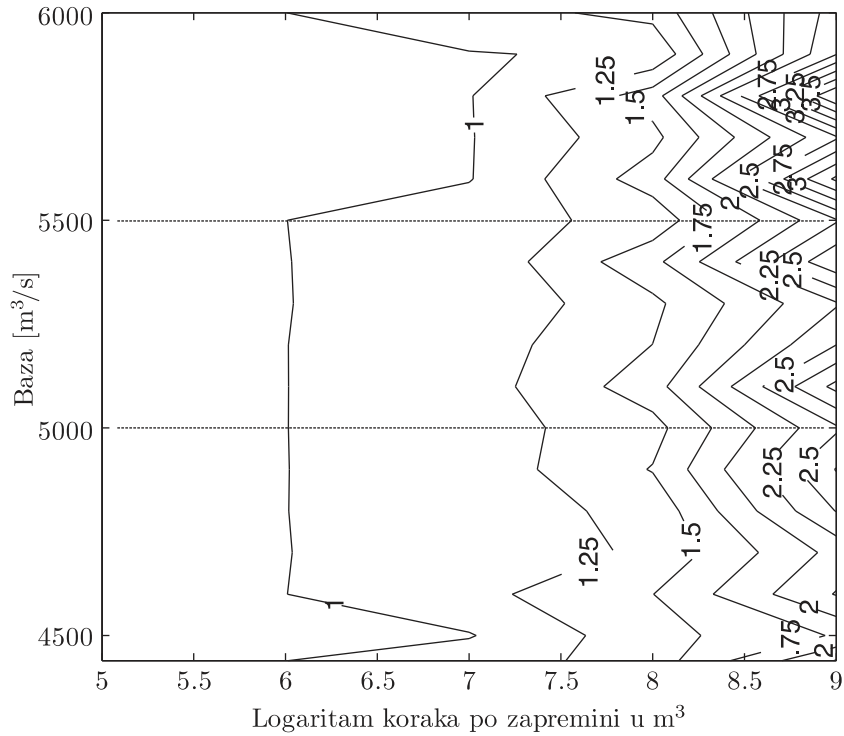
Grafički prikaz statistika broja javljanja pikova za različite bazne protoke i vrednosti koraka u veličini pika ( $\Delta$  na slici 4.4) i to srednjih vrednosti i indeksa disperzije dat je radi sticanja opšteg utiska o opsegu i karakteru promene vrednosti, a takođe i kao sredstvo za usmeravanja ka detaljnijim ispitivanjima koja slede. Prikaz za zapremine talasa prekoračenja  $V$  dat je na slikama 5.16, 5.17 i 5.18, za trajanja talasa prekoračenja  $d$  na slikama 5.19, 5.20 i 5.21. Zbog velikog opsega u kome se kreću zapremine prekoračenja, na koordinatnoj osi za zapremine prikazani su dekadni logaritmi zapreminskih koraka izraženih u  $m^3$

Zapremine prekoračenja  $V$  – srednja vrednost broja javljanja po koraku zapremina

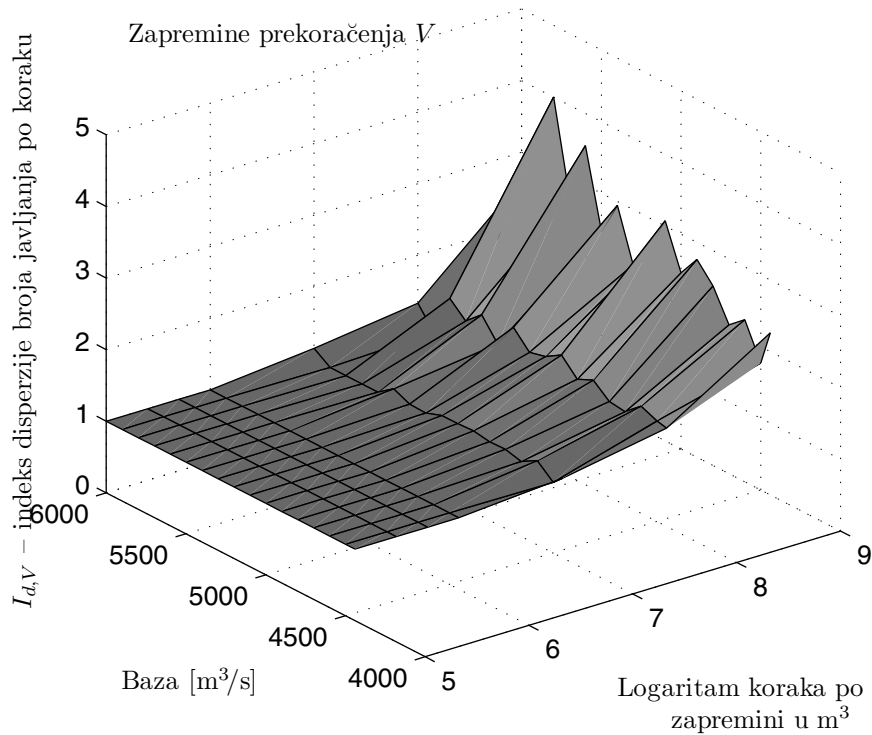


Slika 5.16: Srednje vrednosti broja javljanja zapremina prekoračenja  $V$  po zapreminskom koraku u  $m^3$ .

Zapremine prekoračenja  $V$  – indeks disperzije broja javljanja po koraku zapremine

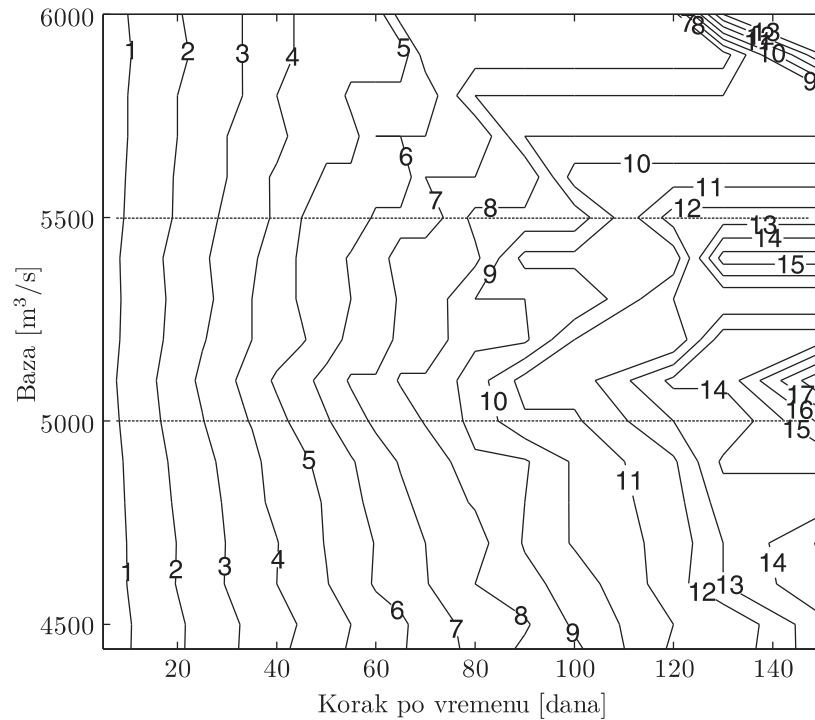


Slika 5.17: Indeksi disperzije broja javljanja zapremine prekoračenja  $V$  po zapreminskom koraku u  $m^3$ .



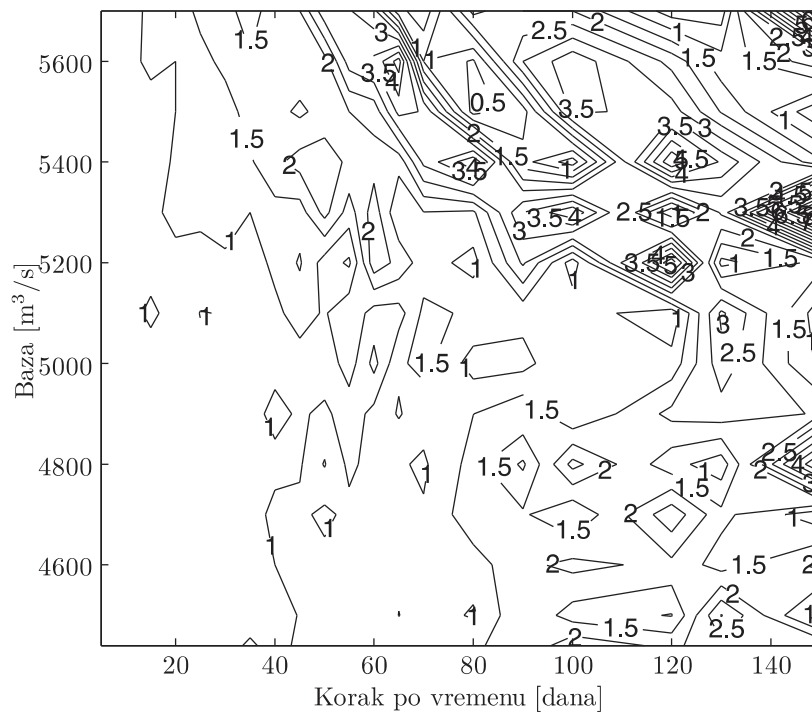
Slika 5.18: Prostorni prikaz (3D) indeksa disperzije broja javljanja zapremine prekoračenja  $V$  po zapreminskom koraku u  $m^3$ .

Trajanja prekoračenja  $d$  – srednja vrednost broja javljanja po koraku trajanja

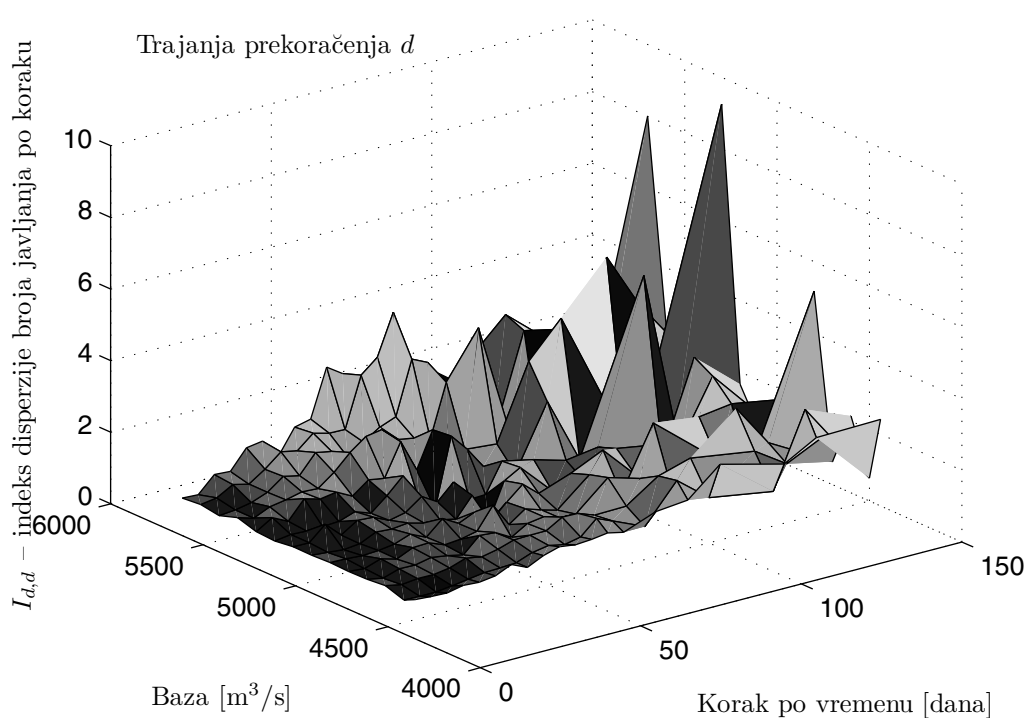


Slika 5.19: Srednje vrednosti broja javljanja trajanja prekoračenja  $d$  po koraku trajanja u danima.

Trajanja prekoračenja  $d$  – indeks disperzije broja javljanja po koraku trajanja



Slika 5.20: Indeksi disperzije broja javljanja trajanja prekoračenja  $d$  po koraku trajanja u danima.



Slika 5.21: Prostorni prikaz (3D) indeksa disperzije broja javljanja trajanja prekoračenja  $d$  po vremenskom koraku u danima.

### 5.3.5 Raspodela broja javljanja prekida u vremenu, $p_\nu(t)$

Poznavanje raspodele broja javljanja pikova (tj. prekida)  $\nu$  u intervalu vremena veličine  $t$  ima višestruki značaj. U klasičnoj metodi pikova (POT) ona predstavlja element za utvrđivanje funkcije raspodele ekstremnih vrednosti protoka u tokom intervala  $t$ .

Preko Postulata o broju prekida u vremenu dolazi se do izraza (2.12) koji predstavlja funkcija vremenskog intenziteta  $\lambda(t, \nu)$  (poglavljje 2.2, od strane 20). Za njeno određivanje je bitno poznavanje raspodele broja javljanja pikova u vremenu (ili u opštem slučaju pojave prekida, kako se u pomenutom poglavljju posmatra događaj u slučajnom procesu). Od oblika funkcije vremenskog intenziteta zavisi rešenje diferencijalnih jednačina (2.18) i (2.19) (videti poglavljje 2.3).

Poznavanjem funkcije vremenskog intenziteta može se, kada je to matematski izvodljivo, formirati stohastički model trajanja vremenskog perioda pri jednom prekidu i preko prethodnog rekurentni model trajanja vremenskog perioda pri  $\nu$  prekida (podsetiti se u poglavljju 2.5, strana 37). Sve ovo, još jednom, započinje prepoznavanjem zakona verovatnoće broja javljanja pikova (prekida) u vremenu.

Na slikama 5.22 i 5.23 prikazana je analiza broja javljanja na h.s. Bezdan na reci Dunav, za bazne protoke  $Q_B$  redom 44400 i 5100 m<sup>3</sup>/s, po vremenskim intervalima različite dužine. Ovo se praktično radi po šemi iz drugog dela podpoglavlja 4.3.2 na strani 75, preko veličine  $\tau$  koja predstavlja vreme između dva prekida, odnosno ono što nazivamo trajanje ciklusa. Prebrojavanje ciklusa je isto što i prebrojavanja prekida i vodi ka raspodeli broja pojave prekoračenja preko baznog protoka i svih njihovih karakteristika.

Na gornjim dijagramima slika 5.22 i 5.23 data je empirijska analiza, a na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je numerički kod od dva broja razdvojena kosom crtom:

- prvi broj je vremenski interval u kome se gleda broj javljanja prekida, izražen u danima,
- drugi broj je indeks disperzije broja javljanja prekida za zadati vremenski interval.

Na donjem dijagramu data je teorijska analiza. Na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je kod od tri elementa razdvojena belinama:

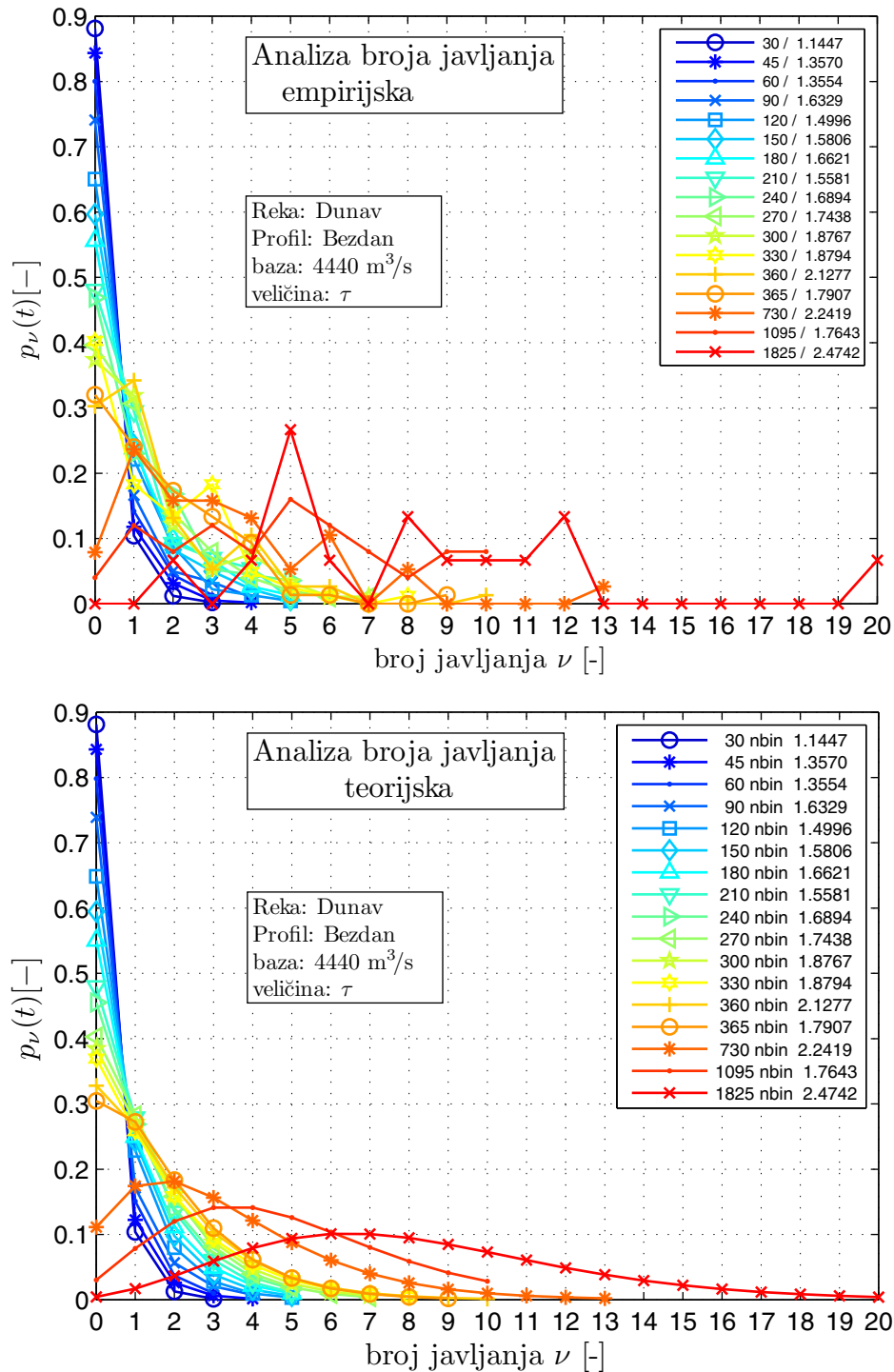
- prvi je broj – vremenski interval izražen u danima,
- drugi je kod diskretne raspodele kojom je prilagođena empirijska (bin – binomna, pois – Puasonova, nbin – negativna binomna),

- treći je broj – indeks disperzije broja javljanja prekida za zadati vremenski interval.

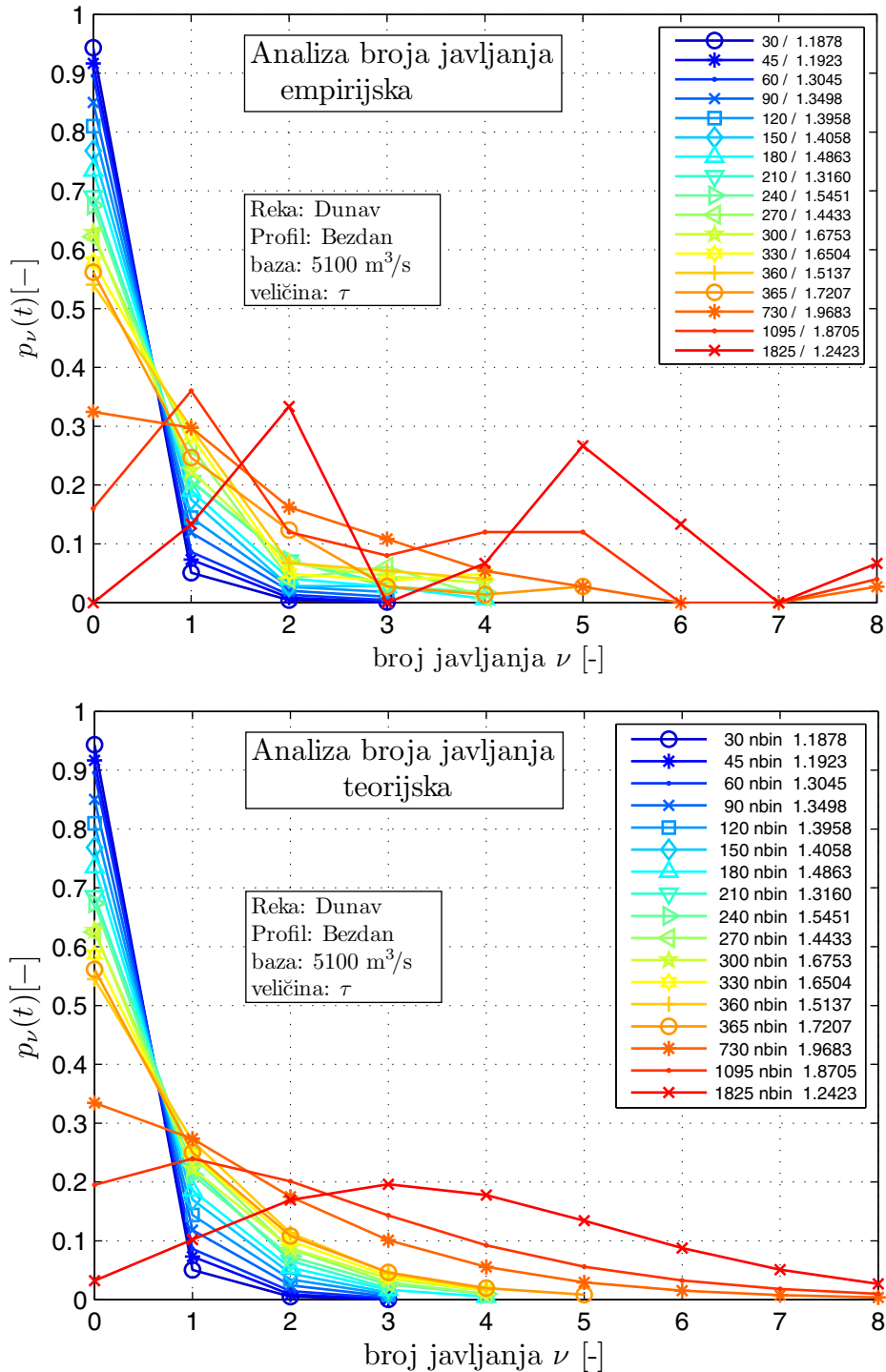
Pregledom prilagođenih diskretnih teorijskih raspodela uočava se da za izabrane vremenske interval  $t$  broj javljanja pikova prati negativnu binomnu raspodelu. Treba naglasiti da je ovde uzet kriterijum izbora raspodele prema dosta oštrim granicama za vrednost indeksa disperzije:

- binomna raspodela, za  $I_d < 0.95$ ,
- Puasonova raspodela, za  $0.95 \leq I_d \leq 1.05$ ,
- negativna binomna, za  $1.05 < I_d$ .

Ovde je prikazana analiza za dva bazna protoka. Situacija je slična za sve testirane bazne protoke (počevši od 4440 m<sup>3</sup>/s, što je granica redovne odbrane od poplava), izuzev onih većih od 5500 m<sup>3</sup>/s (gde ima malo članova nizova) i velike vremenske korake. Pregled kretanja vrednosti indeksa disperzije broja javljanja pikova u vremenskim intervalima različitih dužina već je prikazan na slikama 5.14 i 5.15 (strana 97).



Slika 5.22: Analiza broja javljanja prekida, bazni protok  $Q_B = 4440 \text{ m}^3/\text{s}$ , vremenski intervali različitih dužina, od 30 do 1825 ( $\approx 5$  godina) kalendarskih dana. Ključ legende:(crtež gore) vremenski interval u danima / indeks disperzije; (crtež dole) vremenski interval u danima / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.



Slika 5.23: Analiza broja javljanja prekida, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , vremenski intervali različitih dužina, od 30 do 1825 ( $\approx 5$  godina) kalendarskih dana. Ključ legende:(crtež gore) vremenski interval u danima / indeks disperzije; (crtež dole) vremenski interval u danima / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.



### 5.3.6 Raspodela broja javljanja pikova po intervalima vrednosti pikova, $p_n(x)$

Poznavanje raspodele broja javljanja pikova  $n$  u intervalima vrednosti pikova  $X$  (pik je ovde zapremina ili trajanje prekoračenja baznog protoka) bitno je za ocenu mogućeg zakona verovatnoće visine pikova. Ovi koraci po vrednosti veličine  $X$  označeni su sa  $\Delta$  (slika 4.4).

U klasičnoj metodi pikova (POT), zakon verovatnoće raspodele pikova protoka predstavlja jedan od dva ključna elementa za analizu maksimalnih godišnjih protoka.

Polazeći od Postulata o broju prekida po veličini pika  $x$  dolazi se do izraza po zapisu istoventnom izrazu (2.69) koji predstavlja funkcija intenziteta prekida po pikovima  $\varkappa(\xi, n)$  (u poglavlju 2.4, strana 34, to je  $\varkappa(x, n)$ ). Za njeno određivanje je ključno poznavanje raspodele broja javljanja pikova u intervalu vrednosti pikova  $x$  (u opštem slučaju to je pojava prekida, kao što se u pomenutom poglavlju posmatra događaj u razvoju slučajnog procesa). Od oblika funkcije intenziteta prekida po pikovima zavisi rešenje diferencijalnih jednačina 2.66 i 2.67 (poglavlje 2.4, u izrazima je sa  $x$  označen korak po zapremini, mada je suštinski isto da li je u pitanju trajanje prekoračenja, pik protoka prekoračenja, itd.).

Poznavanjem funkcije intenziteta prekida po pikovima može se, ukoliko je to matematski izvodljivo, formirati probabilistički model vrednosti pikova i preko prethodnog rekurentni model vrednosti pikova pri  $n$  prekida (videti razmatranja u poglavlju 2.5, strana 37).

Na slikama 5.24 i 5.25 prikazana je analiza broja javljanja zapremina prekoračenja po koracima trajanja, a na slikama 5.26 i 5.27 analiza broja javljanja trajanja prekoračenja po vremenskim koracima, na h.s. Bezdan na reci Dunav, za bazne protoke  $Q_B$  od 4440 i 5100 m<sup>3</sup>/s (zapreminski koraci od 10<sup>5</sup> do 10<sup>9</sup> m<sup>3</sup>, koraci trajanja od 5 do 150 dana). Broj javljanja se analizira po šemi iz podpoglavlja 4.3.2 na strani 75, preko veličine  $X$  odnosno  $X_a$  koja predstavlja vrednost pika na nivou agregacije  $a$ .

Na gornjem dijagramu slike data je empirijska analiza, a na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je numerički kod od dva broja razdvojena kosom crtom:

- prvi broj je korak  $\Delta$  po vrednosti veličine  $X$ , izražen u m<sup>3</sup> za zapremine ili danima za trajanja,
- drugi broj je indeks disperzije broja javljanja pikova po koracima  $\Delta$  veličine  $X$ .

Na donjem dijagramu slike data je teorijska analiza. Na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je kod od tri elementa razdvojena belinama:

- prvi je broj – korak  $\Delta$  veličine  $X$  izražen u  $\text{m}^3$  za zapremine ili danima za trajanja,
- drugi je kod diskretne raspodele kojom je prilagođena empirijska (bin – binomna, pois – Puasonova, nbin – negativna binomna),
- treći je broj – indeks disperzije broja javljanja pikova po koracima  $\Delta$  veličine  $X$ .

Kvalitativnim poređenjem raspodela broja javljanja uočava se dobro slaganje empirijskih i teorijskih raspodela zapremina prekoračenja uz minimalna odstupanja. Kod trajanja prekoračenja odstupanja rastu sa povećanjem koraka po vremenu, a tip raspodele nije konsistentan.

Veličina koraka je uzeta posmatrajući opseg vrednosti u nizu pikova. Naravno, od izbora zakona verovatnoće broja javljanja visine pikova  $X$ , zavisi oblik funkcije intenziteta  $\varkappa(x, n)$ .

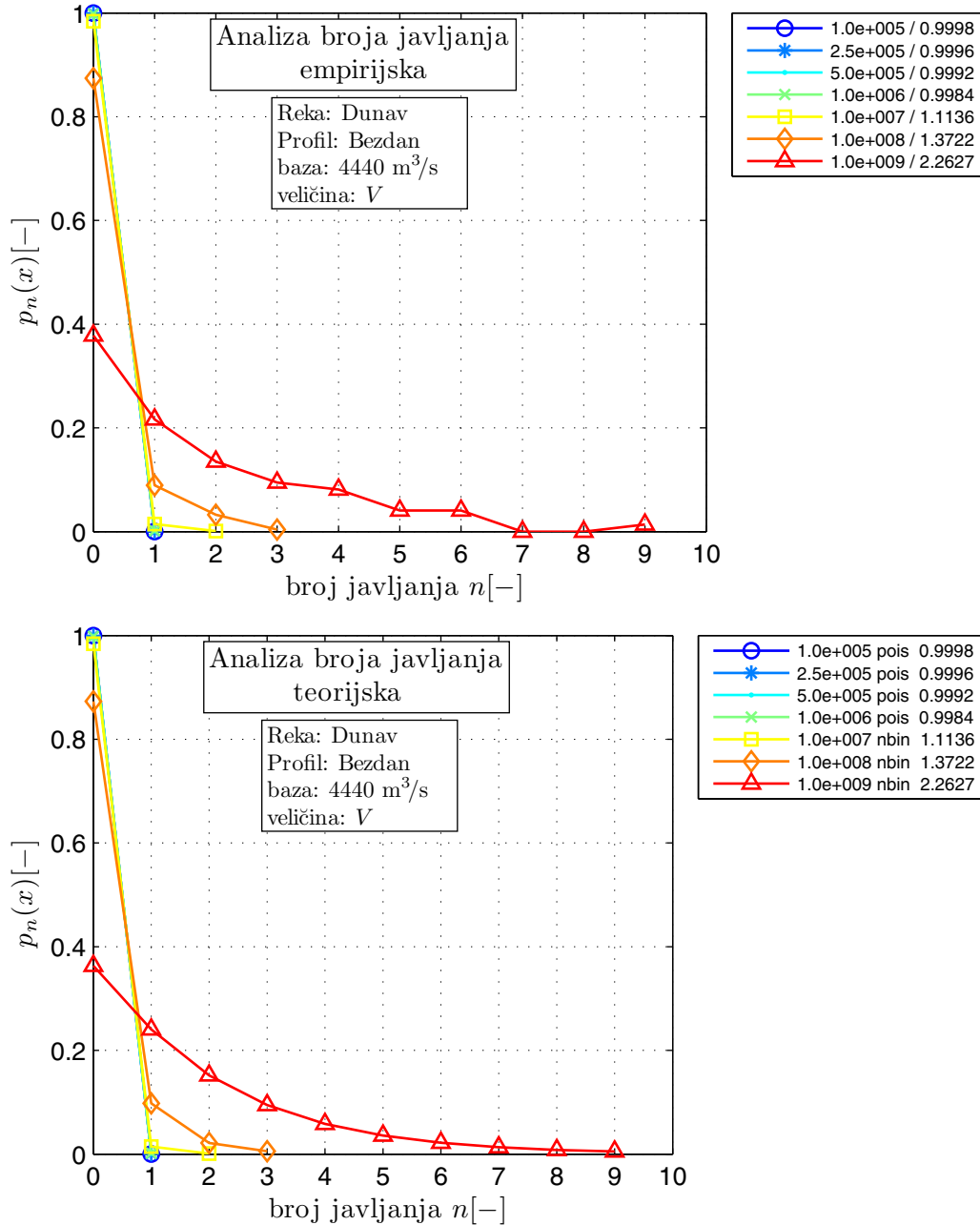
Pregledom prilagođenih diskretnih teorijskih raspodela primetno je da za najveći broj koraka po zapremini broj javljanja zapremina prekoračenja prati Poasonovu, pa negativno binomnu raspodelu. Broj javljanja trajanja prekoračenja po vremenskim koracima prati negativno binomnu raspodelu, uz česta odstupanja ka druge dve diskretne raspodele (odstupanja su izraženija za više baze).

Testiranje saglasnosti teorijskih i empirijskih raspodela u većini slučajeva po  $\chi^2$  testu nije moglo da se izvede zbog nemogućnosti da se zadovolji kriterijum o broj u klasa i minimalnom broju članova u klasi. U malobrojnim slučajevima kada je to bilo moguće dobijena je zadovoljavajuća saglasnost.

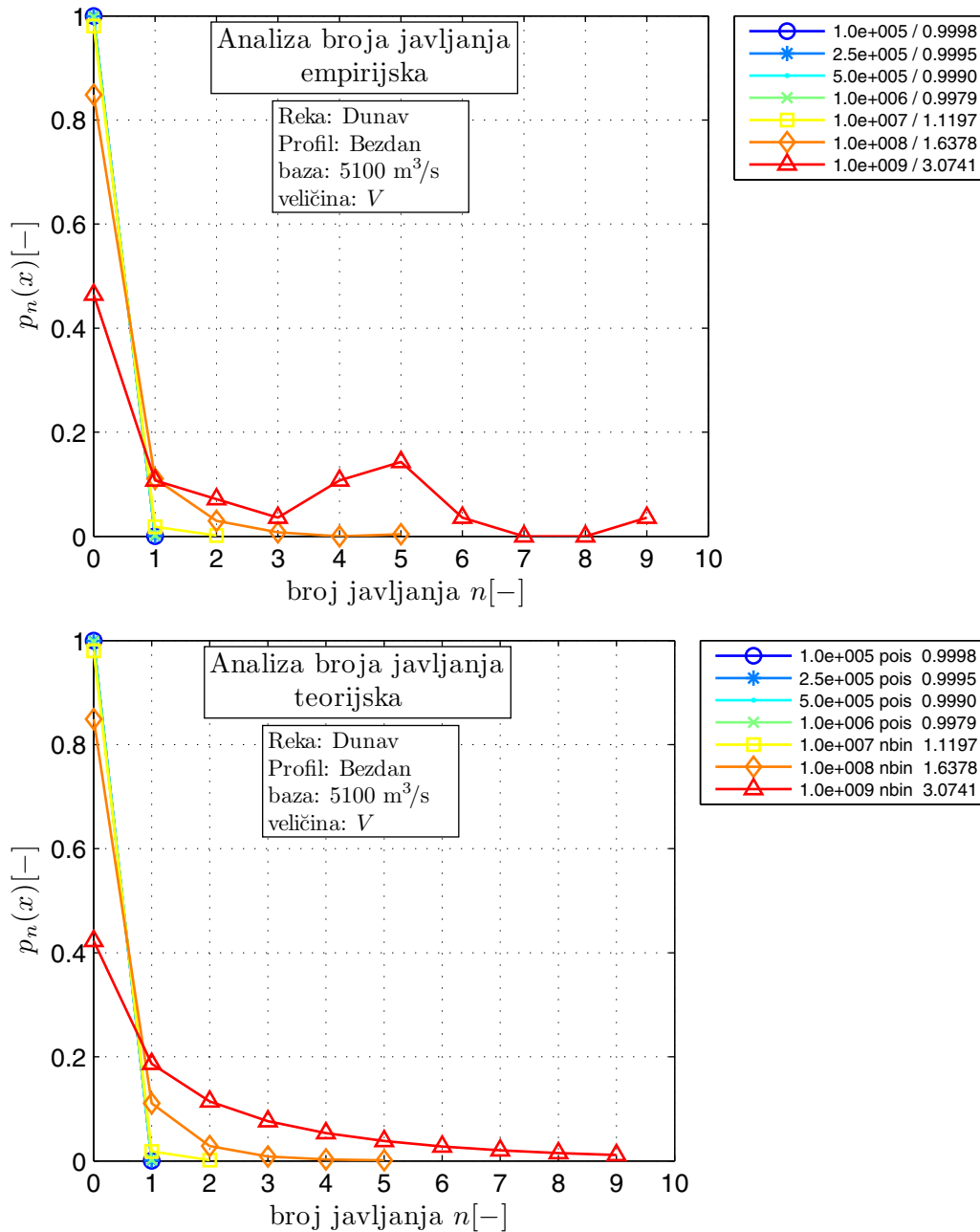
Treba naglasiti da je i ovde, kao i kod broja javljanja pikova u vremenu, uzet kriterijum izbora raspodele po strogim granicama za vrednost indeksa disperzije:

- binomna raspodela, za  $I_d < 0.95$ ,
- Puasonova raspodela, za  $0.95 \leq I_d \leq 1.05$ ,
- negativna binomna, za  $1.05 < I_d$ .

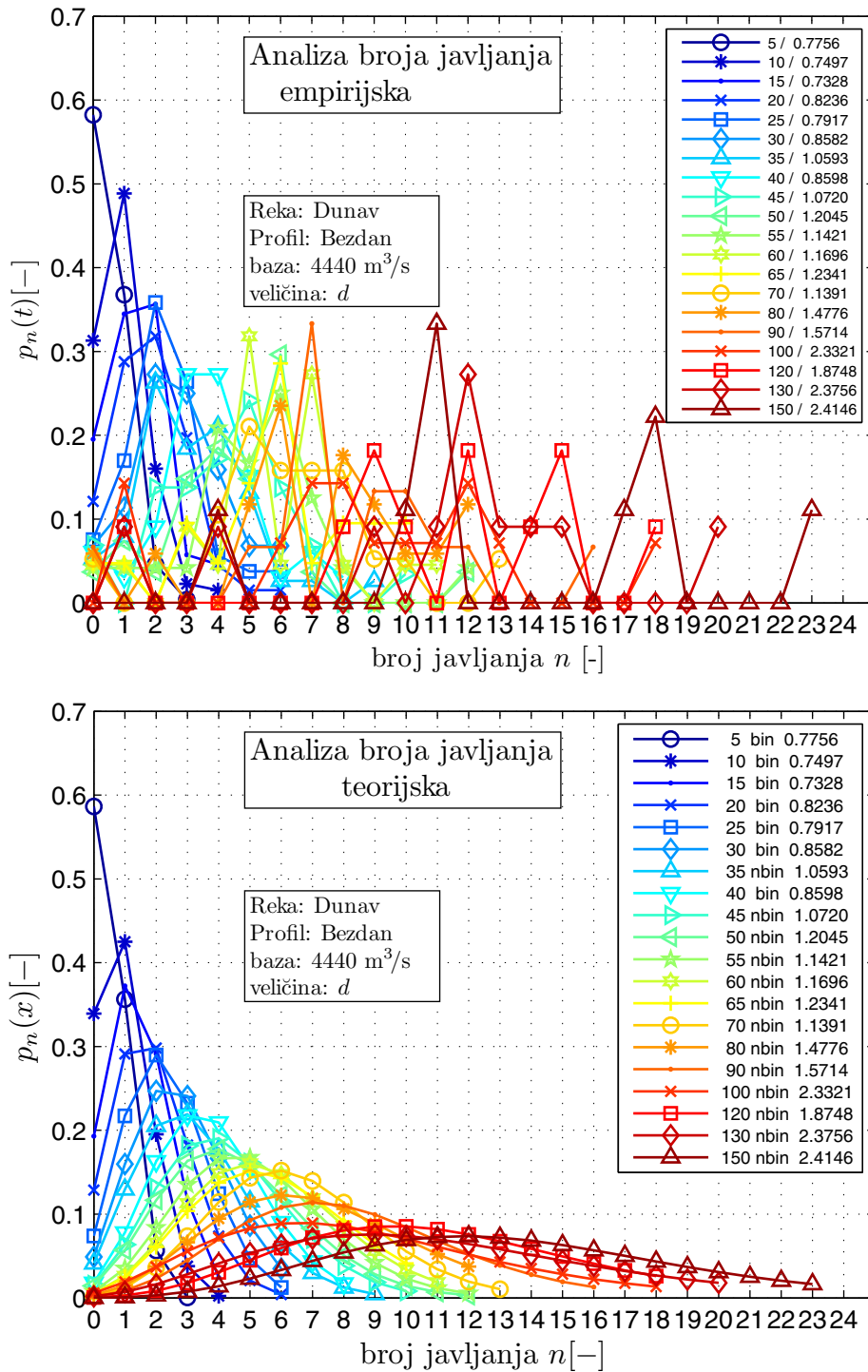
Prikazana je analiza za dva bazna protoka. Opšti pregled kretanja vrednosti indeksa disperzije broja javljanja pikova za razne korake u vrednosti veličine pikova prikazan je na slikama 5.17 i 5.18 za zapremine prekoračenja (strana 99) i za trajanja prekoračenja na slikama 5.20 i 5.21 (strana 101).



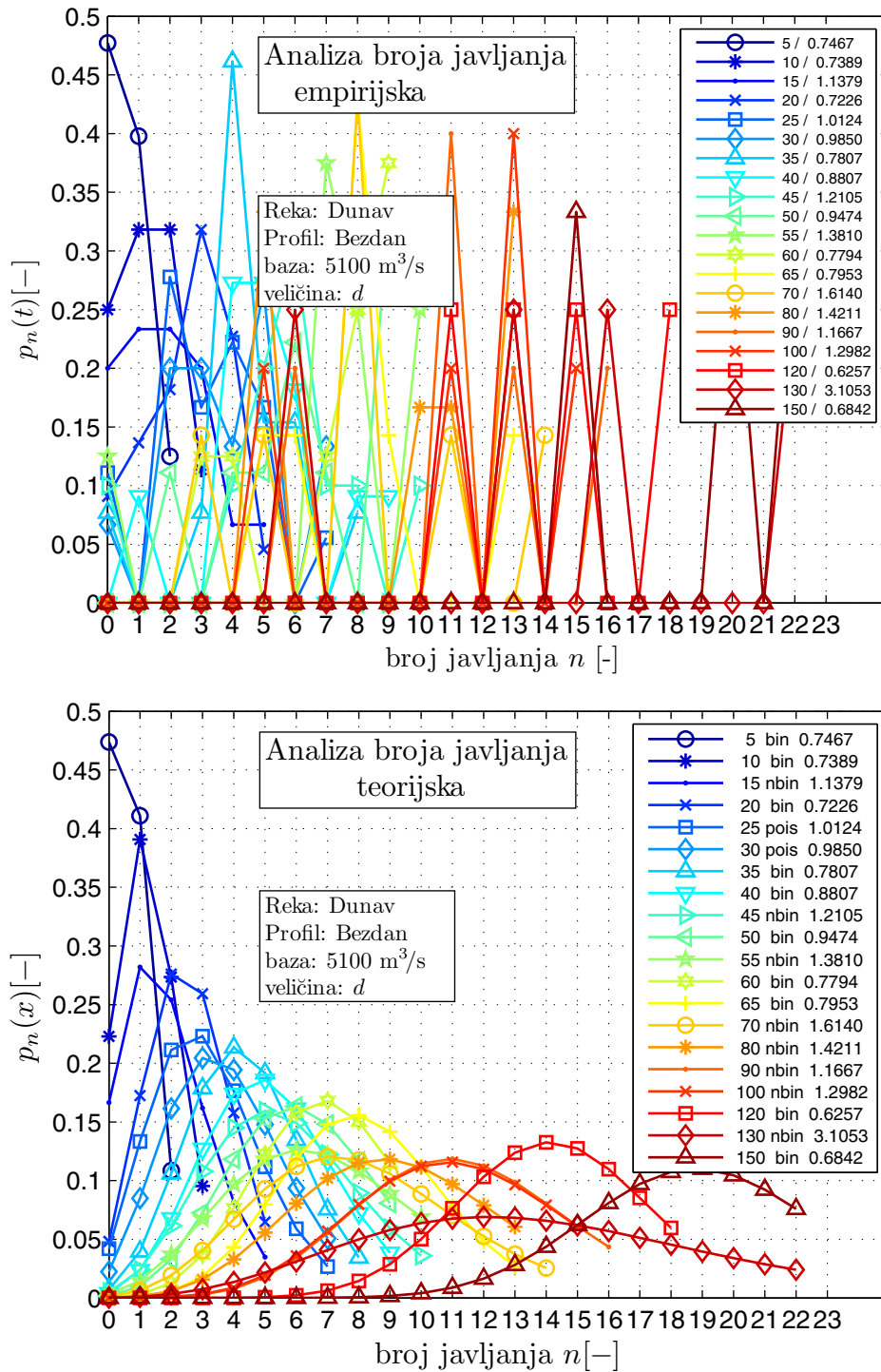
Slika 5.24: Analiza broja javljanja pikova zapremina  $V$  po zapreminskom koraku, bazni protok  $Q_B = 4440 \text{ m}^3/\text{s}$ , zapreminski koraci različitih dužina, od  $10^5$  do  $10^9 \text{ m}^3$ . Ključ legende:(crtež gore) zapreminski korak u  $\text{m}^3$  / indeks disperzije; (crtež dole) zapreminski korak u  $\text{m}^3$  / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.



Slika 5.25: Analiza broja javljanja pikova zapremina  $V$  po zapreminskom koraku, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , zapreminski koraci različitih dužina, od  $10^5$  do  $10^9 \text{ m}^3$ . Ključ legende:(crtež gore) zapreminski korak u  $\text{m}^3$  / indeks disperzije; (crtež dole) zapreminski korak u  $\text{m}^3$  / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.



Slika 5.26: Analiza broja javljanja pikova trajanja talasa  $d$  po koraku trajanja, bazni protok  $Q_B = 4440 \text{ m}^3/\text{s}$ , vremenski koraci različitih dužina, od 5 do 150 dana. Ključ legende: (crtež gore) vremenski korak u danima / indeks disperzije; (crtež dole) vremenski korak u danima / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.



Slika 5.27: Analiza broja javljanja pikova trajanja talasa  $d$  koraku trajanja, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , vremenski koraci različitih dužina, od 5 do 150 dana. Ključ legende: (crtež gore) vremenski korak u danima / indeks disperzije; (crtež dole) vremenski korak u danima / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.

### 5.3.7 Raspodela trajanja ciklusa, $G(\tau)$

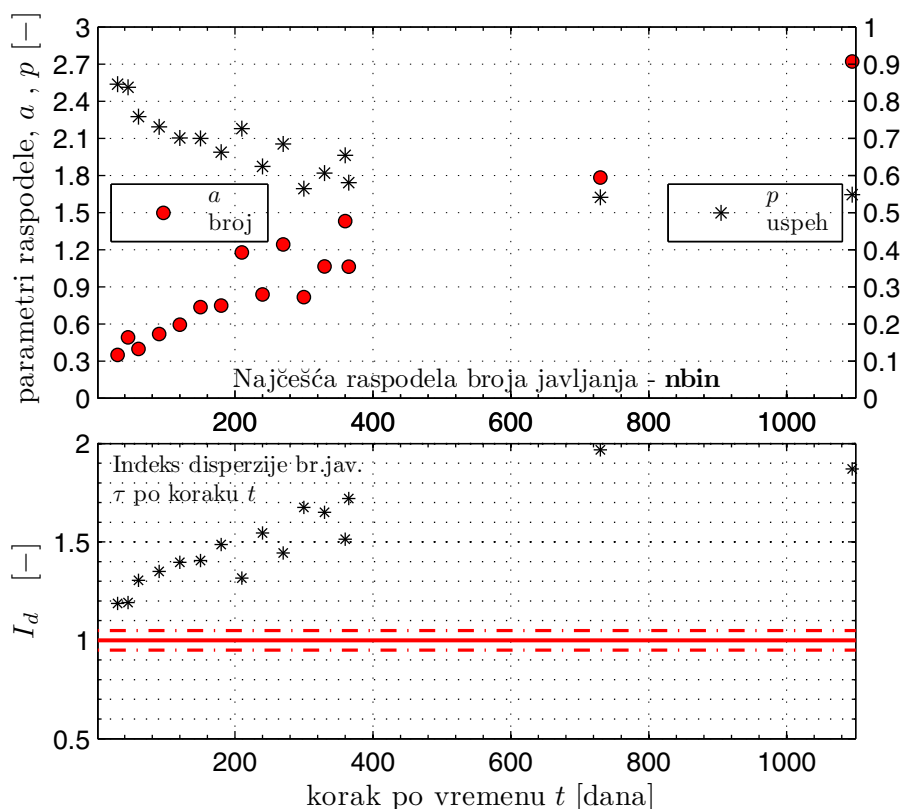
U poglavlju 2.5 za  $G_\nu(t)$  dobija se funkcija raspodele vremena za ostvarenje  $\nu$  prekida izraz oblika (2.75). Dalje, u slučaju vremena između dva prekida ili 1 ciklusa ( $\nu = 1$ ) i pretpostavku da vremenski intenzitet ne zavisi od broja prekida ( $\lambda(t, \nu) = \lambda(t)$ ) dobija se izraz (2.80). U njemu zbog prethodne pretpostavke figuriše veličina  $\Lambda_1(t)$  (u daljem tekstu će se pisati bez indeksa 1). Da bi se odredila raspodela  $G_\nu(\tau)$ , potrebno je znati raspodelu broja javljanja prekida.

Proučavanja raspodele trajanja ciklusa jedinstvena je za obe karakteristike velikih voda koje se u ovom poglavlju proučavaju – a to su zapremine i trajanja prekoračenja preko izabranih baznih protoka. Ove dve karakteristike se proučavaju kroz slučajne procese kojima prekid nastupa u istom trenutku, pa su im i trajanja ciklusa istovetna.

Kao primer, analizom broja javljanja prekida u vremenu na h.s. Bezdane na reci Dunav za bazni protok  $5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , osmotreno je da je za sve primenjene vrednosti koraka po vremenu broj javljanja prekida raspodeljen po negativnoj binomnoj raspodeli (videti sliku 5.23 na strani 105). Na slici 5.28 prikazani su uzorački indeksi disperzije (donji crtež) i fitovani parametri negativne binomne raspodele za vremenske korake do 1095 dana (3 godine) po metodi maksimalne verodostojnosti. U pitanju su parametri  $a$  – broj uspeha i  $p$  – verovatnoća uspeha.

Prema poglavlju 2.3.4, ako je funkcija vremenskog intenziteta javljanja u obliku (2.45), tada odgovarajući sistem jednačina (2.46) i (2.47) ima rešenje u obliku (2.48) i (2.49) što je ekvivalentno da je broj prekida raspoređen po negativnoj binomnoj raspodeli. Izraz (2.45) podrazumeva da u delu koji zavisi od broja javljanja figuriše parametar - konstanta  $a$  koji je u stvari i parametar negativne binomne raspodele. Na slici 5.28 uočava se da  $a$  nije konstantno sa promenom vremenskog intervala (kreće se u opsegu od 0.3 do 2.7 za korake do 1095 dana), što kasnije može kompromitovati model raspodele trajanja vremenskog perioda pri raznim brojevima ciklusa  $\nu$ .

U izrazima za negativnu binomnu raspodelu figuriše veličina  $\Lambda(t)$  (definisana izrazom (2.50)). Nju je lakše izračunati nego samu vrednost funkcije vremenskog intenziteta  $\lambda(t)$ . Nadalje će se prvenstveno proučavati karakteristika  $\Lambda(t)$ . Izraz (2.77) upućuje da je funkcija raspodele trajanja jednog ciklusa nezavisna od oblika diskretne raspodele broja javljanja prekida u vremenu. jer verovatnoća  $p_0(t)$  ima isti oblik za sve razmatrane diskretne raspodele, i da se može modelovati Vejbulovom, Pareto ili eksponencijalnom raspodelom. Zbog pretežno najboljeg slaganja sa Vejbulovom raspodelom (za protoke preko  $4440 \text{ m}^3/\text{s}$  u testiranom slučaju, vidi sliku



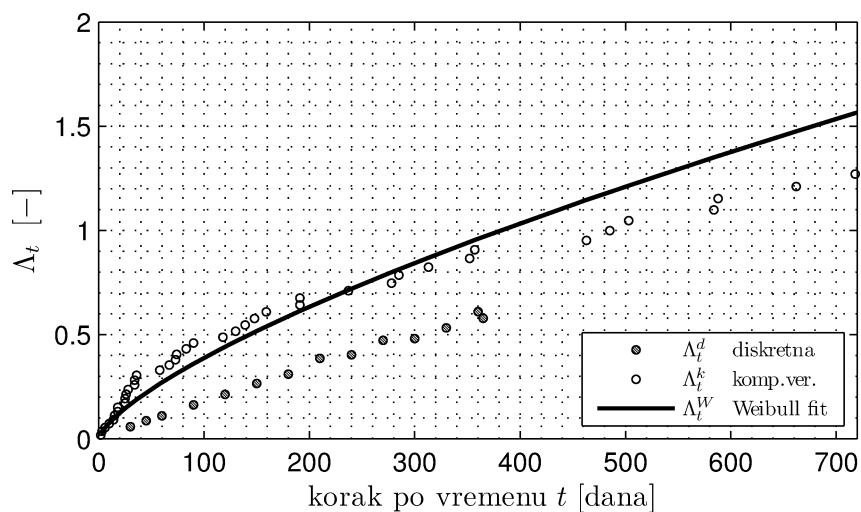
Slika 5.28: Parametri fitovane negativne binomne raspodele,  $a$  i  $p$  (gore) i uzorački indeks disperzije  $I_d$  (dole) broja javljanja pikova u vremenu. H.s. Bezdán, reka: Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

5.11 na strani 94) ona je izabrana kao mogući model, a odgovarajuća funkcija  $\Lambda(t)$  predstavljena je na slici 5.29 sa oznakom  $\Lambda_t^W$ .  $\Lambda(t)$  se takođe može modelovati i iz empirijske raspodele promenljive  $\tau$  (označeno na slici 5.29 sa  $\Lambda_t^k$ ) kada se primenjuje izraz (2.80) u kome se  $G_1(\tau)$  zamenjuje empirijskom raspodelom. Treći primenjeni model je dobijen zamenom empirijskih statistika niza broja javljanja prekida u vremenu za razne vremenske korake, i to srednje vrednosti broja javljanja i indeksa disperzije, u izraze (2.52) i (2.53) i rešavanjem po  $\Lambda(t)$  (na slici 5.29 označeno sa  $\Lambda_t^d$ )

Na osnovu prethodnih razmatranja, za h.s. Bezdán na reci Dunav, za bazu  $5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , prema izrazima za  $G_\nu$  za negativnu binomnu raspodelu u tabeli 2.6, izračunate su vrednosti funkcije raspodele  $G_\nu$  osnovnog niza  $\tau$  i njegovih agregacija  $\tau_2$  i  $\tau_3$ . Model je rekurentnog tipa za negativnu binomnu raspodelu broja javljanja pikova u vremenu, a za  $\Lambda(t)$  usvojen je analitički model Vejbulove raspodele fitovan na osnovni niz  $\tau$ .

Pošto parametar  $a$  nije konstantan u odnosu na vremenski interval, uzimanjem njegove srednje vrednosti i uvođenjem u model, dobijeni su nezadovoljavajući rezul-





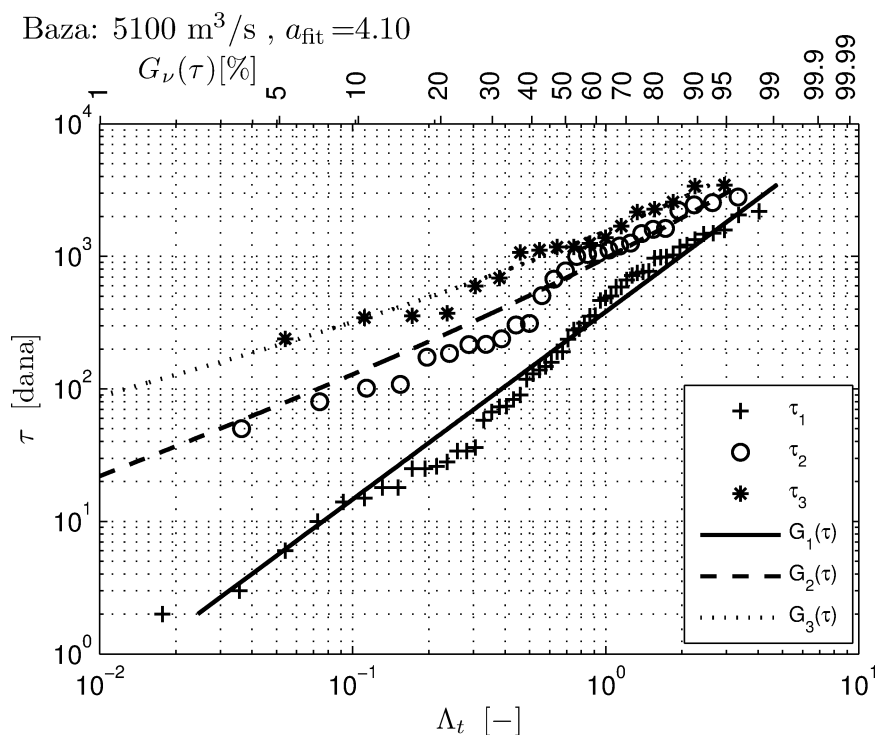
Slika 5.29:  $\Lambda_t = \int_0^t \lambda(u) du$ , karakteristika procesa javljanja pikova u vremenu, izračunata preko: diskretne empirijske raspodele broja javljanja pikova ( $\Lambda_t^d$ ), kompromisne verovatnoće niza  $\tau$  ( $\Lambda_t^k$ ) i prilagođenjem zakona verovatnoće veličine  $\tau$  Wejbulovom raspodelom ( $\Lambda_t^W$ ). H.s. Bezdan, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

tati slaganja raspodela. Time je dovedena u pitanje jednostavnost primene modela koja pretpostavlja poznavanje vrednosti osnovnog niza  $\tau$  i analizu broja javljanja prekida u vremenu. Kao rešenje za ovaj problem predložen je i sporoveden složeniji postupak. Pored osnovnog niza  $\tau$  iskorišćen je niz  $\tau_2$  koji predstavlja agregirana po dva susedna ciklusa. Zatim je parametar  $a$  modela određen fitovanjem funkcije  $G_2$  tako da po  $N\omega^2$  testu da najbolju saglasnost teorijske raspodele i kompromisne verovatnoće. Tako određen parametar  $a$  usvojen je i za više agregacije.

Na slici 5.30 prikazan je rezultat ove složenije tehnike. U pitanju je dijagram koji prikazuje promenljivu  $\tau$  i veličine  $\Lambda_t$  i  $G(\tau)$ , i koji je u stvari papir Wejbulove raspodele. Kompromisna verovatnoća za  $\tau$  je po Wejbulu. Procedura fitovanja dala je vrednost parametra  $a$  modela od 4.10. Na slici se vidi da najveća odstupanja ne prelaze približno 10% po funkciji raspodele, što po testu saglasnosti Kramer-FonMizesa, u konkretnom slučaju, daje i više nego zadovoljavajuće slaganje. Postignute  $p$  vrednosti za  $N\omega^2$  test statistiku za  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  i  $\tau_2$  redom su 57%, 50% i 94%.

Primena procedure fitovanja  $G_2$  za pojedine vrednosti pragova nije uvek davala uspešne rezultate jer su se za vrednosti parametra  $a$  dobijale veoma velike vrednosti (red veličine nekoliko desetina hiljada). To možda matematički ima smisla kada se fituje funkcija, ali nema fizičkog objašnjenja što se tiče trajanje ciklusa  $\tau$  ili njegovih agregacija i fizičkog tumačenja značenja parametra  $a$  u smislu negativne

binomne raspodele. Preporuka je da se u takvim slučajevima koriste fitovanja kompromisne verovatnoće svake agregacije karakteristike  $\tau$  nekom raspodelom (recimo Weibulovom) i da se odustane od rekurentnog modela po šemi prikazanoj u tabeli 2.6. Svakako ne postoji univerzalno rešenje koje će dati odgovor na sve moguće analitičke situacije.



Slika 5.30: Funkcija raspodele osnovnog niza  $\tau$  i agregacija  $\tau_2$  i  $\tau_3$  preko rekurentnog modela sa negativno binomnom raspodelom broja javljanja pikova u vremenu. Parametar  $a = a_{\text{fit}}$  određen je fitovanjem funkcije  $G_2$  na  $G_1$  tako da je po  $N\omega^2$  testu najbolja saglasnost teorijske raspodele i kompromisne verovatnoće za  $G_2$ . H.s. Bezdan, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

### 5.3.8 Raspodela visine pikova, $H(x)$

U poglavlju 2.6 za funkcija raspodele vrednosti zapremine talasa pri  $n$  prekida  $H_n(x)$  dobija se izraz oblika (2.82). Sva razmatranja iz ovog poglavlja se mogu primeniti i na trajanja prekoračenja  $d$ , jednostavno oznaku  $x$  koja predstavlja zapreminu  $V$  treba shvatiti kao trajanje  $d$ . Dalje, u slučaju razmatranja pikova pri realizaciji po jednog prekida ( $n=1$ ) i pretpostavku da zapreminski intenzitet (sledstveno vremenski intenzitet trajanja prekoračenja) ne zavisi od broja prekida ( $\varkappa(x, n) = \varkappa(x)$ ) dobija se izraz (2.86). U njemu, uz prethodne pretpostavke, figuriše veličina  $\mathcal{K}_1(x)$  (u daljem tekstu će se pisati bez indeksa 1). Da bi se odredila raspodela  $H_n(x)$ , potrebno je znati raspodelu broja javljanja prekida.

U ovom poglavlju biće razmotrene dve karakteristike velikih voda u smislu raspodele njihovih vrednosti – zapremine i trajanja prekoračenja. Prvo će biti prikazana analiza zapremina prekoračenja  $V$ , a zatim trajanja prekoračenja  $d$ .

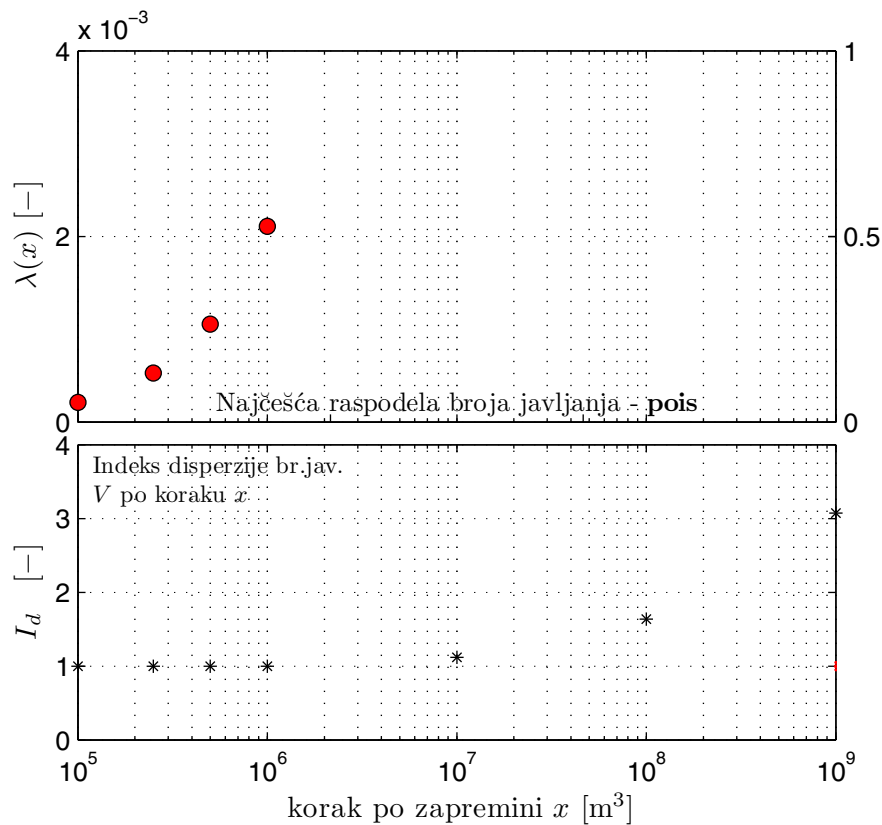
#### Zapremine prekoračenja $V$

Kao primer, analizom broja javljanja prekida po vrednosti zapremine na h.s. Bezdan na reci Dunav za bazu 5100 m<sup>3</sup>/s, osmotreno je da je za niže zapreminske korake (do 10<sup>6</sup> m<sup>3</sup>) broj javljanja prekida raspodeljen po diskretnoj Poasonovoj raspodeli, a za više (od 10<sup>7</sup> m<sup>3</sup>) po negativnoj binomnoj raspodeli (slika 5.25, strana 109). Ovaj „dualizam” u ponašanju svakako mora imati posledice i na zakon raspodele zapremina prekoračenja. Na slici 5.31 (strana 117) prikazani su uzorački indeksi disperzije (donji crtež) i fitovan parametar Poasonove raspodele za zapreminske korake do 10<sup>6</sup> m<sup>3</sup> (fit metodom maksimalne verodostojnosti).

Slično kao u poglavlju 2.4, sistem diferencijalnih jednačina (2.66) i (2.67), za funkciju intenziteta procesa zapremina prekoračenja kao u tabeli 2.2 (strana 36), kolona 1, tip II, ima rešenje koje daje da je broj prekida raspoređen po Puasonovoj raspodeli sa oblikom kao u 4. koloni iste tabele. Jasno je da se ovde pretpostavka o stalnosti Puasonove raspodele treba uzeti sa rezervom, s’obzirom na primedbu iz prethodnog odeljka.

U prethodno navedenim izrazima pojavljuje se veličina  $\mathcal{K}(x)$  (izraz (2.86)). Nju je lakše izračunati nego samu vrednost funkcije protočnog intenziteta  $\varkappa(x)$  čiji integral predstavlja. Zbog toga će se nadalje proučavati karakteristika  $\mathcal{K}(x)$ .

Kao i funkcija raspodele  $G_\nu(\tau)$  tako je i funkcija raspodele osnovnog niza zapremina prekoračenja  $H_n(x)$  nezavisna od oblika diskretne raspodele broja javljanja prekida po zapremini. Iz izraza (2.86) sledi da se  $H(x)$  može modelovati Vejbulovom, Pareto ili eksponencijalnom raspodelom, a da se iz ovih raspodela onda može odrediti  $\mathcal{K}(x)$ . Najbolje slaganje je sa Pareto i Vejbulovom raspodelom (za bazne



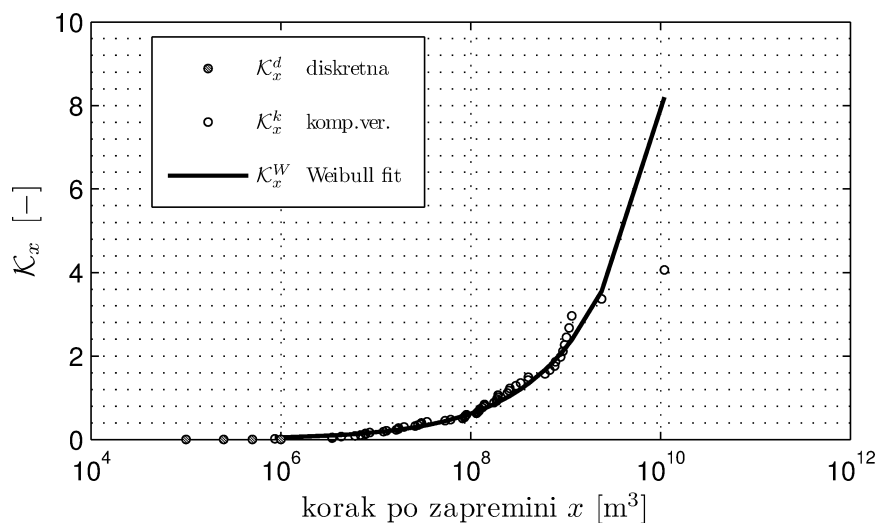
Slika 5.31: Parametar fitovane Puasonove raspodele (gornji crtež) i uzorački indeks disperzije  $I_d$  (donji crtež) broja javljanja zapremina prekoračenja  $V$  po zapreminskim koracima (intervalima). H.s. Bezdán, reka: Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

protoke preko  $4440 \text{ m}^3/\text{s}$  u testiranom slučaju, vidi stranu 89), ali je Vejbulova raspodela izabrana kao mogući model (pošto se i za ostale karakteristike pokazala kao veoma pogodna), a odgovarajuća funkcija  $\mathcal{K}(x)$  predstavljena na slici 5.32 oznakom  $\mathcal{K}_x^W$ .

$\mathcal{K}(x)$  se takođe može modelovati i preko empirijske raspodele zapremine prekoračenja  $V$  (označeno na slici 5.32 sa  $\mathcal{K}_x^k$ ) kada se primenjuje izraz (2.86)) u kome se  $H(x)$  zamenjuje empirijskom raspodelom.

Treći primenjeni model je dobijen zamenom empirijskih statistika niza broja javljanja prekida zapremina prekoračenja za razne zapreminske korake i to srednje vrednosti broja javljanja i indeksa disperzije u izraze za momente diskretne raspodele i rešavanjem po  $\mathcal{K}(x)$  (na slici 5.32 označeno sa  $\mathcal{K}_x^d$ ).

Na osnovu prethodnih razmatranja, za h.s. Bezdán na reci Dunav, za bazu  $5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , izračunate su vrednosti funkcije raspodele  $H_n(x)$  osnovnog niza zapremina prekoračenja  $V$  i njegovih agregacija  $V_2$  i  $V_3$ . Primenjen model je rekurentnog tipa

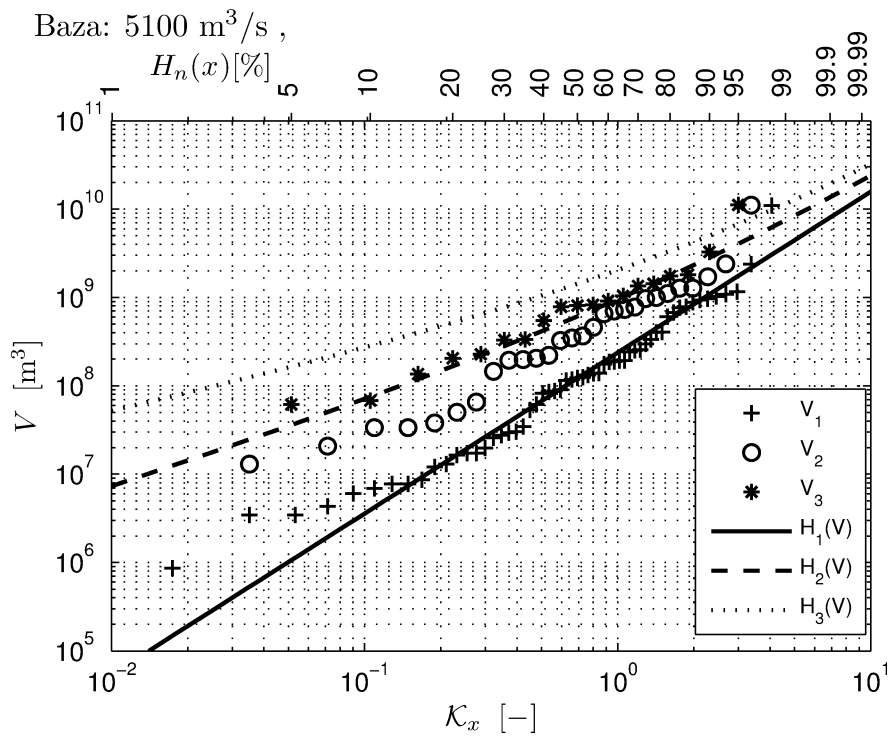


Slika 5.32:  $\mathcal{K}_x = \int_0^x \varkappa(u) du$ , karakteristika procesa javljanja pikova (zapremina prekoračenja) po zapreminskim koracima, izračunata preko: diskretne empirijske raspodele broja javljanja pikova ( $\mathcal{K}_x^d$ ), kompromisne verovatnoće niza  $V$  ( $\mathcal{K}_x^k$ ) i prilagođenjem zakona verovatnoće veličine  $V$  Weibulovom raspodelom ( $\mathcal{K}_x^W$ ). H.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

za Poasonovu raspodelu broja javljanja zapremina prekoračenja po zapreminskom koraku – formiran po šemi iz tabele 2.5 (strana 41), a za  $\mathcal{K}(x)$  usvojen je analitički oblik koji odgovara Weibulovoj raspodeli fitovan na osnovni niz  $V$  (odnosno  $V_1$ ).

Na slici 5.33 prikazane su markerima empirijske raspodele osnovnog niza  $V$  i njegovih agregacija  $V_2$  i  $V_3$ . Pune linije su odgovarajuće teorijske raspodele preko rekurentnog modela. Testiranje saglasnosti odgovarajućih empirijskih i teorijskih raspodela dalo je skromne rezultate u posmatranom primeru (h.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $5100 \text{ m}^3/\text{s}$ ); osnovni niz i druga agregacija su prošli test sa  $p$  vrednostima redom 87% i 11% (što je prihvatljivo), dok treća agregacija nije prošla test jer je  $p = 2\%$ . Objašnjenje za ovo leži u načinu formiranja niza zapremina prekoračenja, velikom opsegu njihovih vrednosti (povlači značajnu asimetriju) i promenljivom tipu diskretne raspodele broja javljanja. Tako je došlo do velikog ublažavanja potrebnih kriterijuma, što dovodi u sumnju kvalitet primene (mada test saglasnosti kaže da ima smisla).

Naglašava se da funkcija raspodele osnovnog niza zapremina prekoračenja igra važnu ulogu u primeni klasične metode pikova (POT) za analizu zakona verovatnoće maksimalnih godišnjih zapremina prekoračenja.



Slika 5.33: Funkcija raspodele osnovnog niza  $V$  i agregacija  $V_2$  i  $V_3$  preko rekurentnog modela sa Puasonovom raspodelom broja javljanja zapremina prekoračenja  $V$  po koracima (intervalima) zapremine. H.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

### Trajanje talasa prekoračenja $d$

U primeru analize broja javljanja prekida trajanja prekoračenja  $d$  po vrednosti vremenskog koraka na h.s. Bezdán na reci Dunav za bazu od 5100 m<sup>3</sup>/s, zaključuje se da je za najveći broj koraka po trajanju broj javljanja prekida raspodeljen po diskretnoj binomnoj raspodeli (slika 5.27, strana 111), mada postoje i zanačajne nekonsistentne promene u tipu raspodele. Na slici 5.34 prikazani su uzorački indeksi disperzije (donji crtež) i fitovani parametri binomne raspodele za vremenske korake trajanja do 3500 dana (fit metodom maksimalne verodostojnosti). U pitanju su parametri  $b$  – broj uspeha i  $p$  – verovatnoća uspeha.

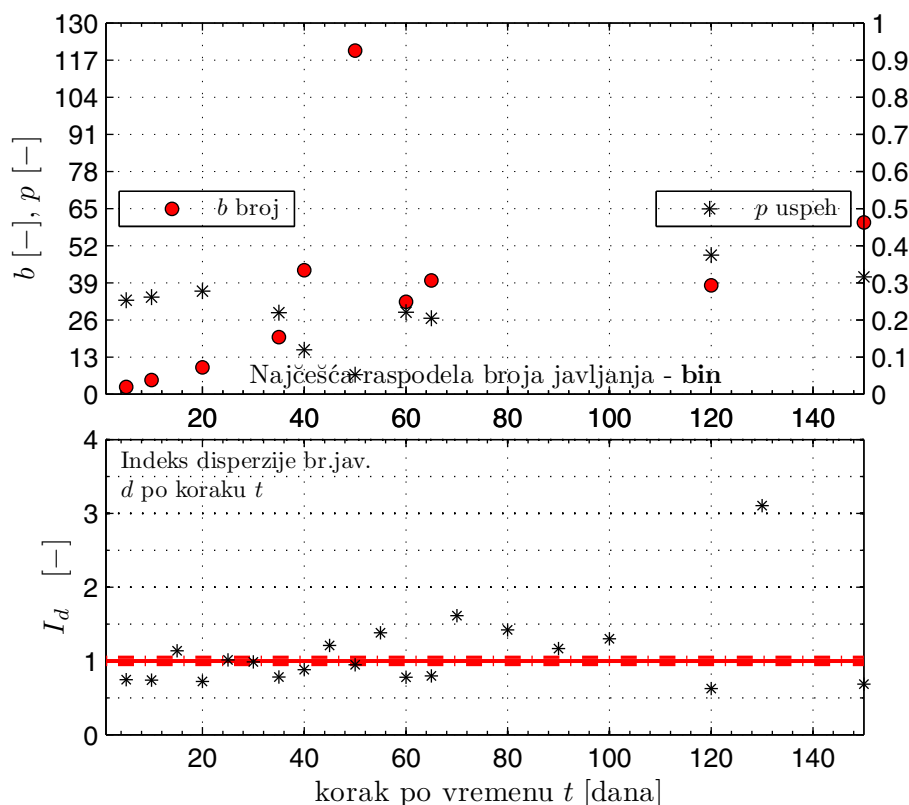
Slično kao u poglavlju 2.4, sistem diferencijalnih jednačina (2.66) i (2.67), za funkciju intenziteta procesa trajanja prekoračenja kao u tabeli 2.2 (strana 36) kolona 1, tip IV, ima rešenje koje daje da je broj prekida raspoređen po binomnoj raspodeli sa oblikom kao u 4. koloni iste tabele. Izraz za funkciju intenziteta podrazumeva da u delu koji zavisi od broja javljanja figuriše parametar - konstanta  $b$  koja je u stvari i parametar binomne raspodele. Na slici 5.34 vidi se da  $b$  nije konstantno kako se menja vrednost koraka trajanja (vrednost koraka do 150 dana).

Odstupanje od uslova konstantnosti parametra i tipa diskretne raspodele može imati posledice na model raspodele trajanja prekoračenja pri raznim brojevima ciklusa  $n$ .

Kao i za zapremine, proučava se karakteristika  $\mathcal{K}(x)$  koja figuriše u izrazu (2.86) za raspodele  $H_n(x)$ .

I ovde je funkcija raspodele osnovnog niza trajanja prekoračenja  $d$  (tj.  $d_1$ ) nezavisna od oblika diskretne raspodele broja javljanja prekida po vremenu, a  $H(x)$  se može modelovati Vejbulovom, Pareto ili eksponencijalnom raspodelom. Funkcija  $\mathcal{K}(x)$  se može odrediti iz ovih raspodela. Zbog pretežno najboljeg slaganja sa Vejbulovom raspodelom (za bazne protoke preko 4440 m<sup>3</sup>/s u testiranom slučaju, vidi stranu 90) ona je izabrana kao mogući model, a odgovarajuća funkcija  $\mathcal{K}(x)$  je predstavljena na slici 5.35 oznakom  $\mathcal{K}_x^W$ .  $\mathcal{K}(x)$  se takođe može modelovati i preko empirijske raspodele trajanja prekoračenja (označeno na slici 5.35 sa  $\mathcal{K}_x^k$ ). Treći primenjeni model je preko empirijskih statistika niza broja javljanja trajanja prekoračenja za razne vremenske korake i to srednje vrednosti broja javljanja i indeksa disperzije, označen na slici 5.35 kao  $\mathcal{K}_x^d$ .

Na osnovu prethodnih razmatranja, za h.s. Bezdán na reci Dunav, za bazu 5100 m<sup>3</sup>/s, prema modelu po obliku slično kao u tabeli 2.7, izračunate su vrednosti funkcije raspodele  $H_n(\xi)$  osnovnog niza trajanja prekoračenja  $d$  i njegovih agregacija  $d_2$  i  $d_3$ . Model je rekurentnog tipa za binomnu raspodelu broja javljanja traja-



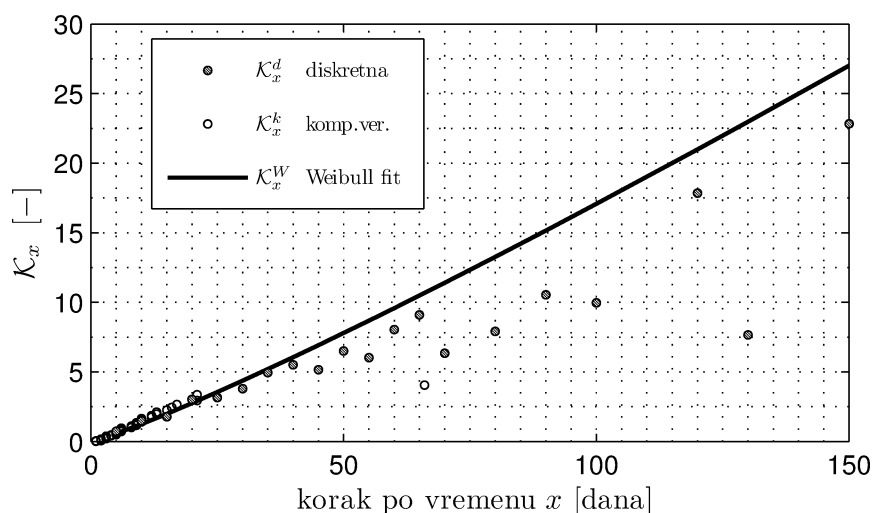
Slika 5.34: Parametri fitovane binomne raspodele (gornji crtež) i uzorački indeks disperzije  $I_d$  (donji crtež) broja javljanja trajanja prekoračenja  $d$  po koracima trajanja. H.s. Bezdán, reka: Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

nja prekoračenja po koraku trajanja, a za  $\mathcal{K}(x)$  usvojen je analitički koji odgovara Vejbulovoj raspodeli fitovan na osnovni niz  $d$ .

Na slici 5.36 prikazane su markerima empirijske raspodele osnovnog niza  $d$  i njegovih agregacija  $d_2$  i  $d_3$ . Pune linije su odgovarajuće teorijske raspodele preko modifikovanog rekurentnog modela. Rekurentni model koji je pretpostavljen podrazumeva da je vrednost parametra  $b$  konstantna za bilo koji korak po trajanju. Pošto je utvrđeno da parametar  $b$  nije konstantan, zamenski, reprezentativan, koeficijent  $b_{\text{fit}}$  je dobijen modifikacijom postupka tako što je fitovan model  $H_2$  tako da test saglasnosti Kramer Fon Mizesa ( $N\omega^2$  test) da najbolje slaganje  $H_1$  po Vejbulovoj kompromisnoj verovatnoći i  $H_2$  po modelu sa konstantnim parametrom  $b$ .  $p$  vrednosti za  $N\omega^2$  test statistiku za  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$  redom su 88%, 98% i 99%.

Ovde se javio problem u fitovanju što  $p$  vrednosti minimalno ali konstantno rastu sa sa povećanjem vrednosti fitovanog parametra  $b$  van realnih vrednosti parametra, koji se izražava u danima (taj rast se ogleda na višim decimalama). Zato je ovde



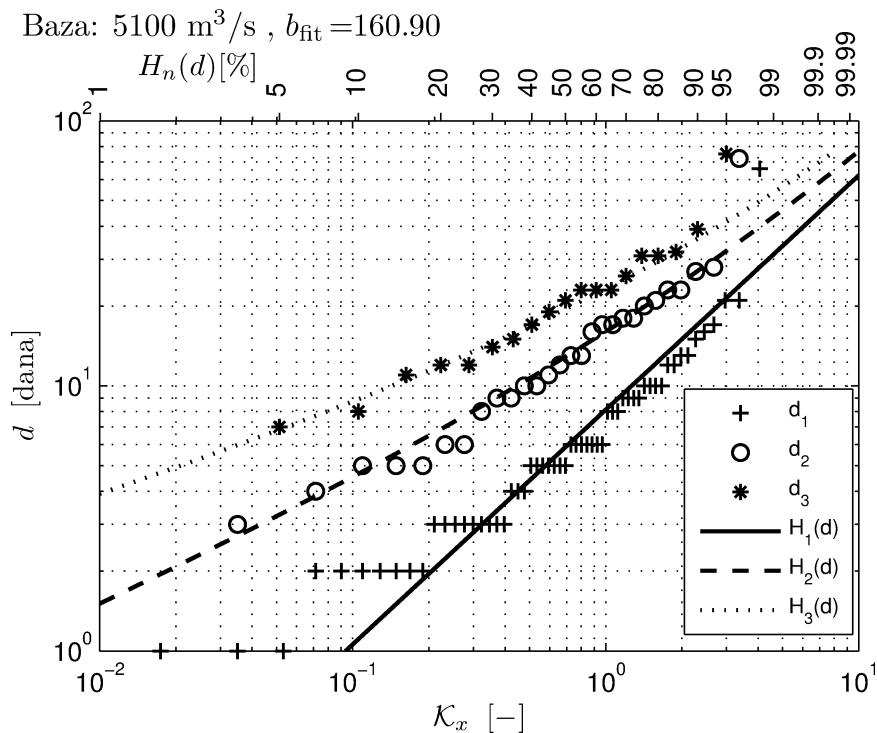


Slika 5.35:  $\mathcal{K}_x = \int_0^t \varkappa(u) du$ , karakteristika procesa javljanja pikova (trajanja prekoračenja) po vremenskim koracima, izračunata preko: diskretne empirijske raspodele broja javljanja pikova ( $\mathcal{K}_x^d$ ), kompromisne verovatnoće niza  $d$  ( $\mathcal{K}_x^k$ ) i prilagođenjem zakona verovatnoće veličine  $d$  Vejbulovom raspodelom ( $\mathcal{K}_x^W$ ). H.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

primenjena i modifikacija procesa traženja parametra kojom se pratilo slaganje i za  $H_3$  teorijsko i empirijsko. Odabir parametra  $b$  je izvršen u zoni gde prag značajnosti za  $H_3$  dostiže maksimum. U toj zoni  $p$  vrednosti za  $H_1$  i  $H_2$  iskazane u procentima već imaju konstantne vrednosti zaokružene na decimalu.

Po prethodnom postupku za parametar  $b$  je utvrđena vrednost 169.9, a testiranje saglasnosti odgovarajućih empirijskih i teorijskih raspodela dalo je dobre rezultate u posmatranom primeru (h.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $5100 \text{ m}^3/\text{s}$ ) sa najmanjom  $p$  vrednošću za osnovni niz  $d$  od  $p = 88\%$ . Za agregacije koje su ispitane  $p > 98\%$ .

Ceo postupak dosta komplikuje formiranje predloženog rekurentnog modela raspodele trajanja prekoračenja. Primena je moguća ali uz narušavanje osnovnih pretpostavki i dosta dodatnih analiza.



Slika 5.36: Funkcija raspodele osnovnog niza  $d$  i agregacija  $d_2$  i  $d_3$  preko rekurentnog modela sa binomnom raspodelom broja javljanja trajanja prekoračenja  $d$  po koracima (intervalima) vremenu. Parametar  $b = b_{\text{fit}}$  određen je fitovanjem funkcije  $H_2$  na  $H_1$  tako da je po  $N\omega^2$  testu najbolja saglasnost teorijske raspodele i kompromisne verovatnoće za  $H_2$ . H.s. Bezdan, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ , podaci od 1931.-2009. (79 godina).

### 5.3.9 Raspodela maksimalnih godišnjih zapremina i trajanja talasa prekoračenja, $F(x)$

U poglavlju 3.3 na strani 62 dat je detaljni prikaz kako se po metodi pikova iznad praga formulišu izrazi za proračun funkcije raspodele maksimalnih godišnjih vrednosti karakterističnih veličina prekoračenja (zapremina, trajanja,...). Formulacija (3.4) je opšti izraz koji važi za bilo koji vremenski interval  $t$ . Ukoliko je  $t = T = \text{godina dana}$  tada se broj javljanja pikova analizira po godinama (u ovom slučaju po kalendarским godinama). Izrazima (3.6), (3.8), (3.10) redom su definisane funkcije raspodele godišnjih maksimuma  $F(x)$  ako je broj javljanja u godini dana  $p_\nu(T)$  opisan/modeliran Puasonovim, binomnim ili negativno-binomnim diskretnim zakonom verovatnoće. U prethodno pomenutim izrazima sa  $H(x)$  je označena neprekidna funkcija raspodele pikova koja se ovde modelira jednom od tri raspodele: eksponencijalnom, Vejbulovom ili Pareto raspedelom. Složena raspodela maksimalne godišnje vrednosti karakteristike prekoračenja  $F(x)$  dobijena je kombinovanjem diskretne i kontinualne raspodele koje se pojedinačno najbolje slažu sa empirijskim podacima.

Na Vejbulovom papiru verovatnoće, na slikama 5.37, 5.38 i 5.39, prikazane su punim linijama teorijske a markerima empirijske funkcije raspodela maksimalnih godišnjih zapremina talasa prekoračenja  $V$  baznih protoka, a na slikama 5.40, 5.41 i 5.42 maksimalnih godišnjih trajanja talasa prekoračenja  $d$ , i to redom za odabrane bazne protoke  $Q_B = \{5000, 5100, 5200\} \text{ m}^3/\text{s}$  za reku Dunav na h.s. Bezdan (puna linija), podaci osmatranja iz 79 godina (od 1931. do 2009. godine). U tekstualnom bloku na papiru verovatnoće dati su parametri modeliranih raspodela, diskretne raspodele broja javljanja pikova (broj eksperimenata i verovatnoća uspeha) i neprekidne raspodele visine pikova (parametri oblika i razmere).

U objašnjenjima koja su navedena uz svaku od slika dati su vrednost maksimalne apsolutne razlike teorijske i empirijske raspodele i odgovarajuća vrednost praga značajnosti testa saglasnosti Kolmogorov-Smirnova. Treba primetiti da postoje godine u kojima nema prekoračenja bazne vrednosti protoka pa se za tu godinu dodeljuje nula kao maksimalna vrednost karakteristične veličine prekoračenja.

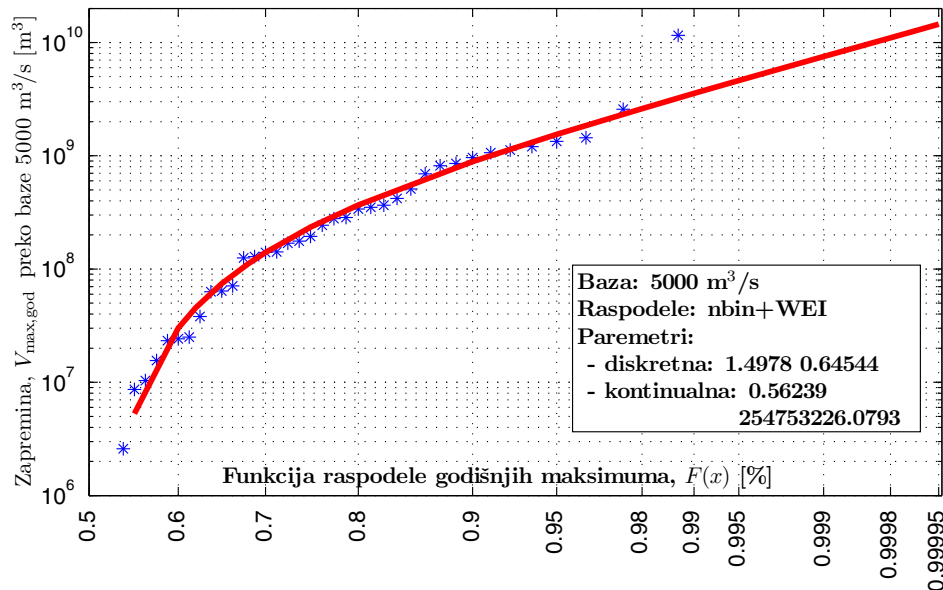
Bazni protoci koji su odabrani  $Q_B = \{5000, 5100, 5200\} \text{ m}^3/\text{s}$  imaju redom po 65, 57 i 44 karakterističnih vrednosti (za broj prekoračenja videti tabele u Prilozima 1. i 5.). To ih čini dovoljno dobrim za statističku obradu, a relativno visok prag obezbeđuje ispunjenje uslova koji se očekuju od ekstremnih vrednosti koje su potrebne kada se primenjuje metoda pikova.

Izabrani bazni protoci su nešto veći od redovne granice za odbranu od poplava na ovom hidrometrijskom profilu koji iznosi  $4440 \text{ m}^3/\text{s}$ . Korišćenje baznih protoka

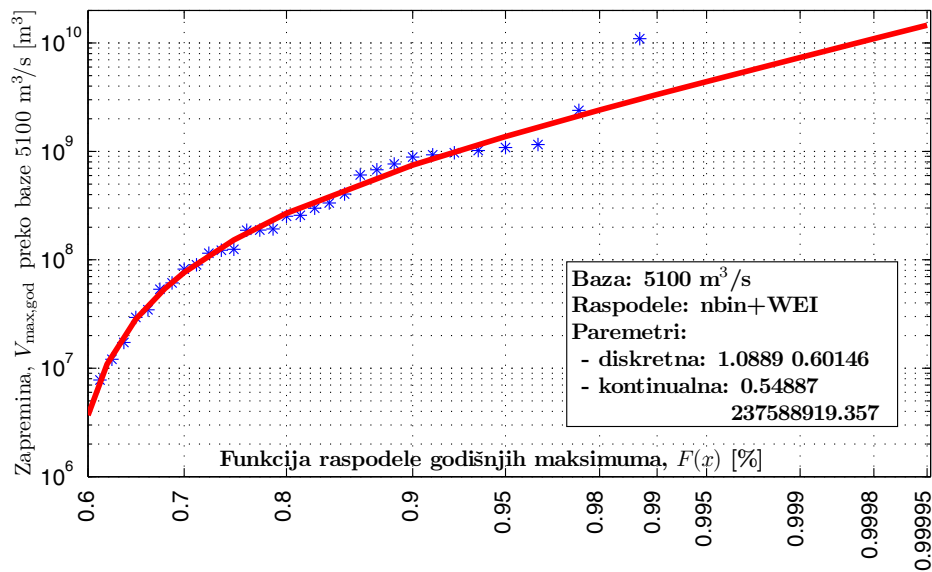
bliskih granici vanredne odbrane od poplava od  $7150 \text{ m}^3/\text{s}$  nema smisla zbog malog broja prekoračenja.

Zapremine prekoračenja  $V$  pokazuju visoke  $p$  vrednosti ( $> 50\%$  za prikazana tri bazna protoka) imajući u vidu veoma visoke vrednosti koeficijenata asimetrije osnovnog niza prekoračenja (veće od 6) koji su posledica uzimanja svih prekoračenja iznad baze bez ikakve procedure eliminacije ili ukрупnjavanja. Trajanja prekoračenja  $d$  imaju manje  $p$  vrednosti ( $> 20\%$  za prikazana tri bazna protoka), uz koeficijente asimetrije osnovnih nizova trajanja oko 4.6; trajanja su uzeta sva preko baze i uz činjenicu da su diskretizovana na po ceo dan – korišćeni su hidrogrami srednjih dnevnih protoka (trajanja prekoračenja su u suštini neprekidne vremenske slučajne promenljive).

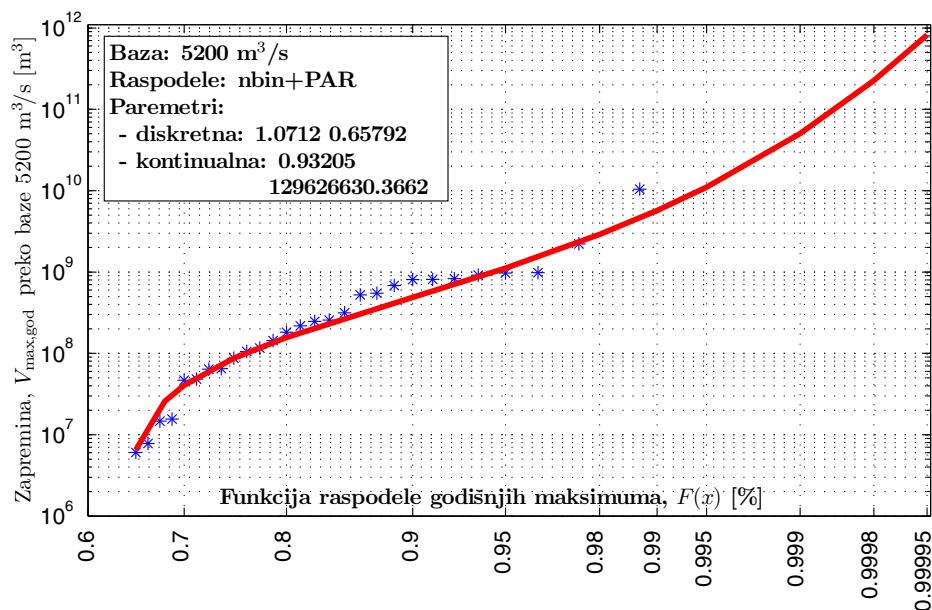
Iz numeričkih pokazatelja testiranja saglasnosti može se zaključiti da se za analizu maksimalnih godišnjih zapremina prekoračenja i trajanja prekoračenja preko praga može primeniti na prethodnom primeru prikazan postupak.



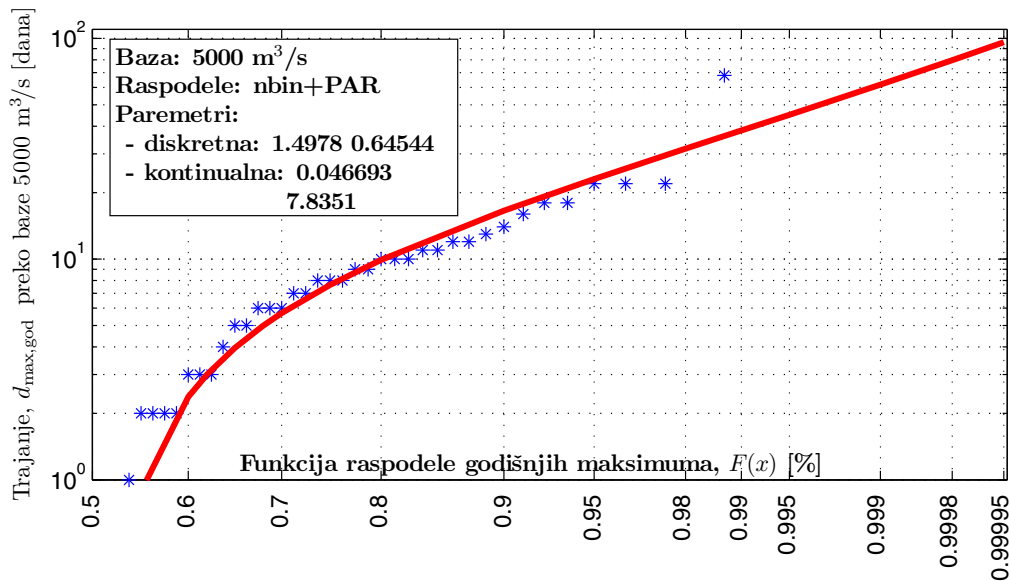
Slika 5.37: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih zapremina prekoračenja baznog protoka POT metodom. Reka: Dunav, Profil: Bezdán, bazni protok  $Q_B = 5000 \text{ m}^3/\text{s}$ . Marker – empirijska, puna linija – teorijska raspodela, (papier Vejbulove raspodele). Najveća razlika teorijske i empirijske raspodele  $\max dF = 2.7\%$ , prag značajnosti testa saglasnosti Kolmogorov-Smirnova  $78\%$ , 37 od 79 godina ima maksimalne zapremine prekoračenja veće od 0.



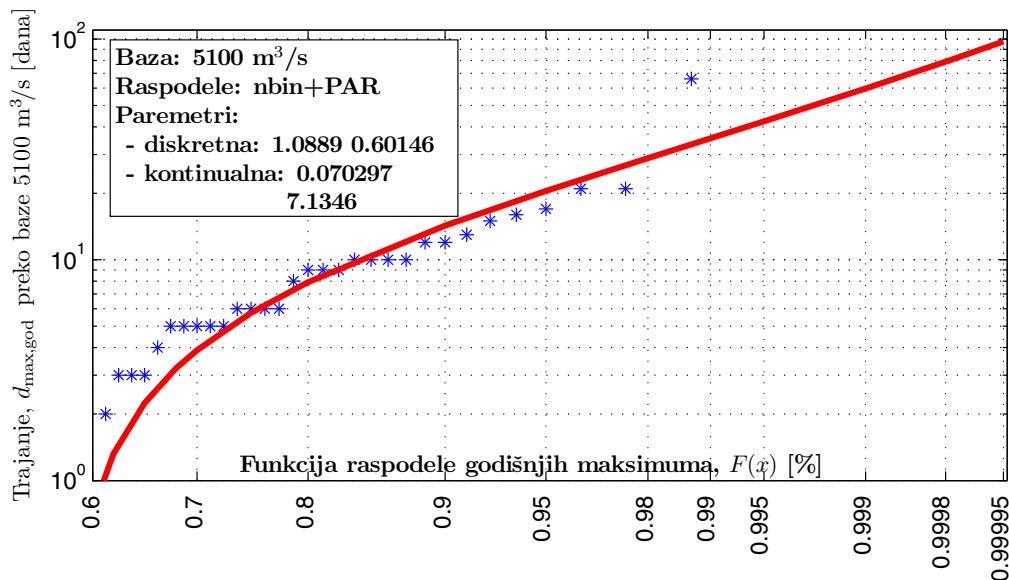
Slika 5.38: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih zapremina prekoračenja baznog protoka POT metodom. Reka: Dunav, Profil: Bezdani, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ . Marker – empirijska raspodela, puna linija – teorijska raspodela, (papier Weibulove raspodele). Najveća razlika teorijske i empirijske raspodele  $\max dF = 2.9\%$ ,  $p$  vrednost testa saglasnosti Kolmogorov-Smirnova 77%, 33 od 79 godina ima maksimalne zapremine prekoračenja veće od 0.



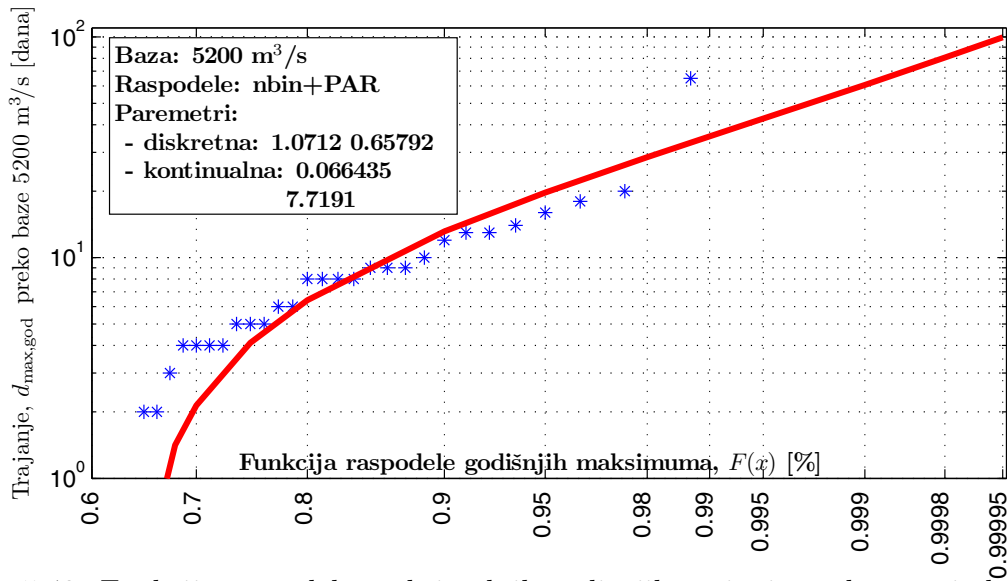
Slika 5.39: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih zapremina prekoračenja baznog protoka POT metodom. Reka: Dunav, Profil: Bezdani, bazni protok  $Q_B = 5200 \text{ m}^3/\text{s}$ . Marker – empirijska raspodela, puna linija – teorijska raspodela, (papier Weibulove raspodele). Najveća razlika teorijske i empirijske raspodele  $\max dF = 4.8\%$ ,  $p$  vrednost testa saglasnosti Kolmogorov-Smirnova 57%, 28 od 79 godina ima maksimalne zapremine prekoračenja veće od 0. Parametru oblika kontinualne raspodele na slici (prvi broj) potrebno je promeniti znak da odgovara parametrizaciji Pareto raspodele!



Slika 5.40: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih trajanja prekoračenja baznog protoka POT metodom. Reka: Dunav, Profil: Bezdan, bazni protok  $Q_B = 5000 \text{ m}^3/\text{s}$ . Marker – empirijska, puna linija – teorijska raspodela, (papier Vejbulove raspodele). Najveća razlika teorijske i empirijske raspodele  $\max dF = 4.4\%$ ,  $p$  vrednost testa saglasnosti Kolmogorov-Smirnova 35%, 37 od 79 godina ima maksimalna trajanja prekoračenja veća od 0 dana. Parametru oblika kontinualne raspodele na slici (prvi broj) potrebno je promeniti znak da odgovara parametrizaciji Pareto raspodele!



Slika 5.41: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih trajanja prekoračenja baznog protoka POT metodom. Reka: Dunav, Profil: Bezdan, bazni protok  $Q_B = 5100 \text{ m}^3/\text{s}$ . Marker – empirijska, puna linija – teorijska raspodela, (papier Vejbulove raspodele). Najveća razlika teorijske i empirijske raspodele  $\max dF = 5.4\%$ ,  $p$  vrednost testa saglasnosti Kolmogorov-Smirnova 22%, 33 od 79 godina ima maksimalna trajanja prekoračenja veća od 0 dana. Parametru oblika kontinualne raspodele na slici (prvi broj) potrebno je promeniti znak da odgovara parametrizaciji Pareto raspodele!



Slika 5.42: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih trajanja prekoračenja baznog protoka POT metodom. Reka: Dunav, Profil: Bezdán, bazni protok  $Q_B = 5200 \text{ m}^3/\text{s}$ . Marker – empirijska, puna linija – teorijska raspodela, (papier Weibulove raspodele). Najveća razlika teorijske i empirijske raspodele  $\max dF = 5.9\%$ ,  $p$  vrednost testa saglasnosti Kolmogorov-Smirnova 22%, 28 od 79 godina ima maksimalna trajanja prekoračenja veća od 0 dana. Parametru oblika kontinualne raspodele na slici (prvi broj) potrebno je promeniti znak da odgovara parametrizaciji Pareto raspodele!

## 5.4 Modeliranje stohastičke strukture pikova – maksimalnih prekoračenja usvojenog baznog protoka

U ovom odeljku daje se prikaz proučavanja stohastičke strukture protoka koji prevazilaze usvojeni bazni protok, odnosno pikova (označeni su simbolom  $\xi$ ) na reci Dunav, h.s. Bezdán. Prema cilju i zadacima istraživanja pojave koje se ovde razmatraju, a vezane su za pojavu pikova su:

- broj javljanja pikova  $\nu$  u intervalima vremena  $t$ , kroz diskretne raspodele  $p_\nu(t)$ ,
- trajanje ciklusa  $\tau$  između dva, tri ili više uzastopnih događaja  $\tau_i$  reprezentovanih pojavom pikova, kroz kontinualne raspodele  $G(\tau)$ ,
- broj javljanja pikova  $n$  u intervalima vrednosti pikova  $x$ , kroz diskretne raspodele  $p_n(x)$ ,
- vrednosti pikova  $\xi$ , kroz kontinualne raspodele  $H(\xi)$ .

Osnovni zadatak je proučiti zakone verovatnoća (diskretne i kontinualne) koje ove pojave prate i proveriti da li se mogu modelirati na način kako je to pretpostavljeno u prethodnim poglavljima.

U prvom delu koji je opisnog tipa u razmatranje će se uzeti veći broj baznih protoka  $Q_B$ . Kasnije, kada se budu detaljno analizirali zakoni verovatnoće prethodno pomenutih događaja od interesa, biće prikazana analiza za samo jedan bazni protok zbog ipak ograničenog prostora, dok će se po potrebi davati komentari o iskustvima pri sprovođenju istraživanja.

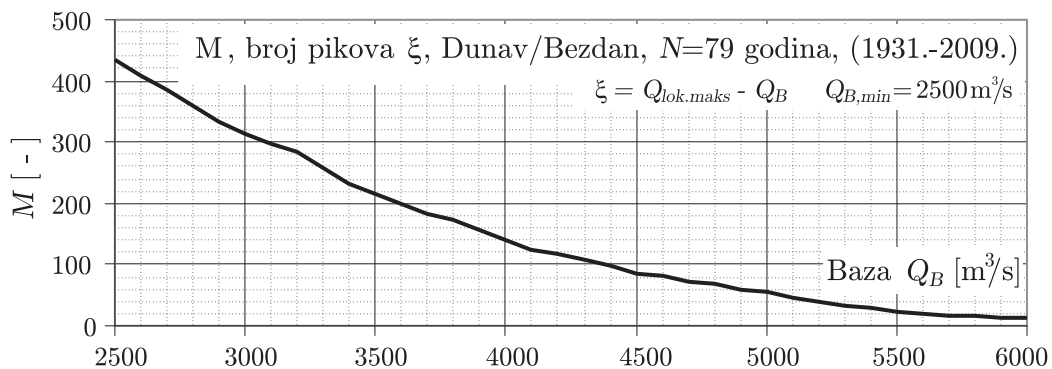
Pre prikaza rezultata skreće se pažnja na jednu važnu činjenicu. Pikovi, koji su po prirodi protoci, predstavljaju trenutne veličine, tj. izražavaju se u  $\text{m}^3/\text{s}$  odnosno kao protekla zapremina u jedinici vremena. Iako analiza agregacija pikova, dakle  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ , nema jasan fizički smisao, one se ovde ipak analiziraju.

Biće prikazan i rezultat primene klasične metode pikova na određivanje raspodele maksimalnih godišnjih protoka  $F(Q_{\max, \text{god}})$ , kao specijalni slučaj  $F(Q_{\max, t})$  funkcije raspodele raspodele maksimuma u intervalu vremena  $t$ , odnosno kada je  $t = T = \text{godinu dana}$ , što odgovara prirodnom ciklusu smene hidroloških uslova formiranja oticaja. Radi pojašnjenja, ovde se radi o kalendarskoj godini, a ne o hidrološkoj godini, a smatra se da se razlike između ova dva pristupa usled velikog broja godina sa podacima (79 godina) mogu zanemariti.

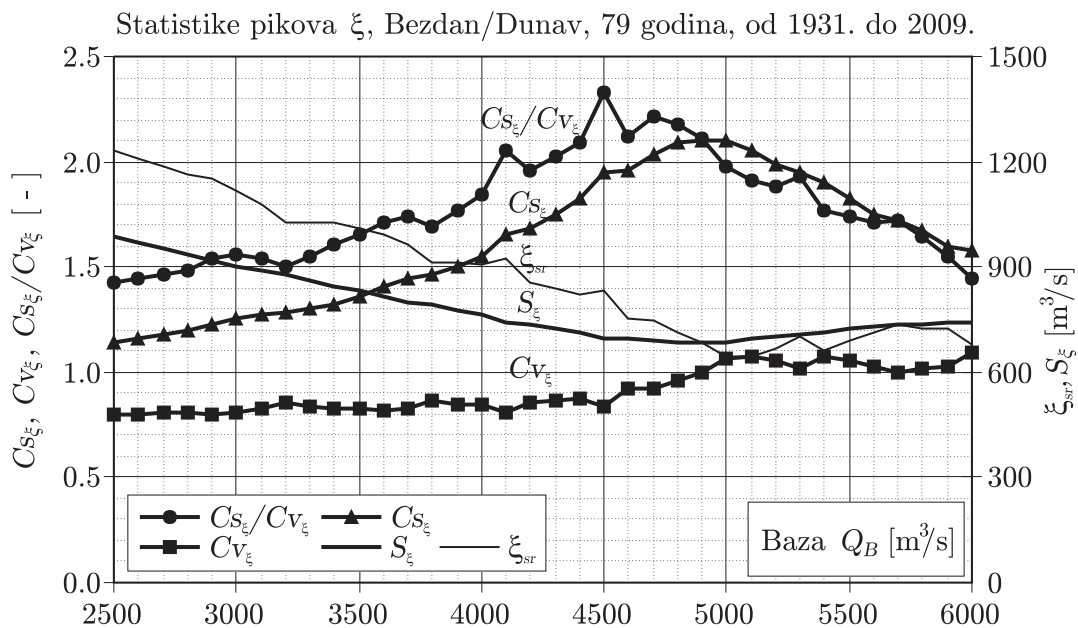


### 5.4.1 Opšte karakteristike visine pikova $\xi$

Iz 79-godišnjeg niza srednjih dnevnih protoka (od 1931. do 2009. godine), za najniži prag - bazni protok od  $2500 \text{ m}^3/\text{s}$ , izdvojeno je 436 nezavisnih lokalnih maksimalnih protoka – pikova. Do ovog broja se došlo posle eliminacije određenog broja vršnih protoka za koje se opravdano sumnjalo da su deo nekog drugog talasa velikih voda koji se superponirao sa većim prethodnim. Na slici 5.43 prikazana je promena broja pikova sa baznim protokom. Na slici 5.44 prikazane su osnovne statistike pikova u funkciji baznog protoka i detaljno u tabeli Priloga 14. Statistike agregiranih pikova su prikazane samo tabelarno u Prilozima od 15. do 18.



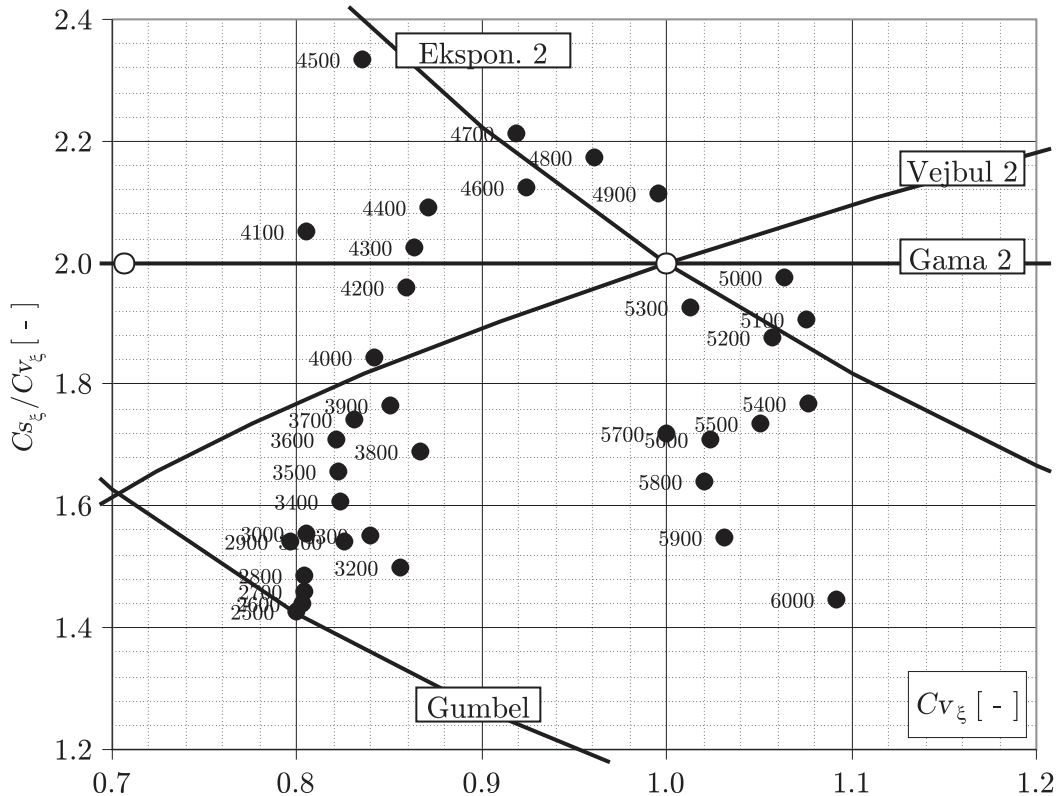
Slika 5.43: Ukupan broj pikova protoka  $M$  u funkciji izabranog baznog protoka - praga  $Q_B$ .



Slika 5.44: Statistike pikova  $\xi$ :  $\xi_{sr}$  - srednja vrednost,  $S_\xi$  - standardna devijacija,  $C_{V_\xi}$  - koeficijent varijacije,  $C_{S_\xi}$  - koeficijent asimetrije.

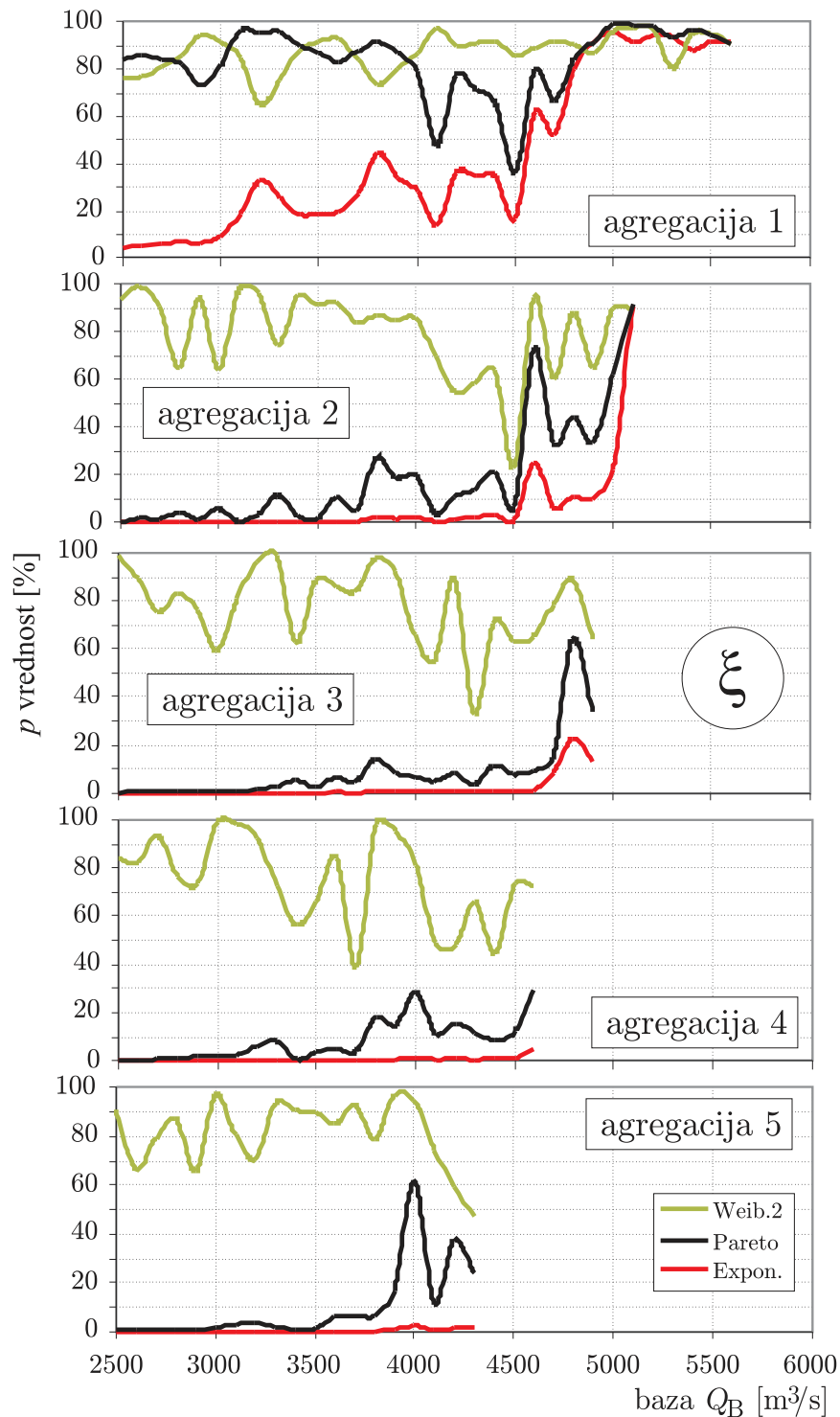
Na slici 5.45 dat je dijagram koji može da posluži za ocenu zakona verovatnoće pikova  $\xi$  izdvojenih za razne bazne protoke  $Q_B$ . U pitanju polje sa vezom koeficijenta varijacije  $C_v$  i količnika koeficijenta asimetrije i varijacije  $C_s/C_v$ . U njemu su jednoparametarske raspodele prikazane tačkom, dvoparametarske glatkim linijama, a troparametarske raspodele bi trebale da pokriju bilo koju tačku u polju. Slično se može postići i dijagramom L-momenata koji nije ovde korišćen.

Analiza koeficijenata varijacije i asimetrije pikova  $\xi$ ,  
za razne baze 2500-6000 m<sup>3</sup>/s, moguće raspodele.  
Bezdan/Dunav, 79 godina, od 1931. do 2009.



Slika 5.45: Pikovi protoka  $\xi$ . Dijagram za ocenu zakona verovatnoće.

Na slici 5.46 prikazan je rezultat Kramer-FonMizesovog  $N\omega^2$  testa saglasnosti tri teorijske funkcije raspodele (eksponencijalne, dvoparametarske Vejbulove i Pareto raspodele, parametri određeni metodom maksimalne verodostojnosti) i pikova  $\xi$  tj.  $\xi_1$  i njihovih agregacija (označene sa  $\xi_2, \xi_3, \xi_4$  i  $\xi_5$ ). Iz prvog dijagrama na slici se uočava da  $p$  vrednosti testa saglasnosti za dve dvoparametarske raspodele ima vrednosti koje prevazilaze uobičajene pragove testiranja (5% ili 10%). Za baze veće od oko 4500 m<sup>3</sup>/s gotovo je svejedno koji se zakon verovatnoće vrednosti pikova koristi - svi su statistički dovoljno dobri. U daljem radu sa pikovima uglavnom će se koristiti Vejbulova raspodela kao raspodela pojave pikova (opravdano dosadašnjom hidrološkom praksom).



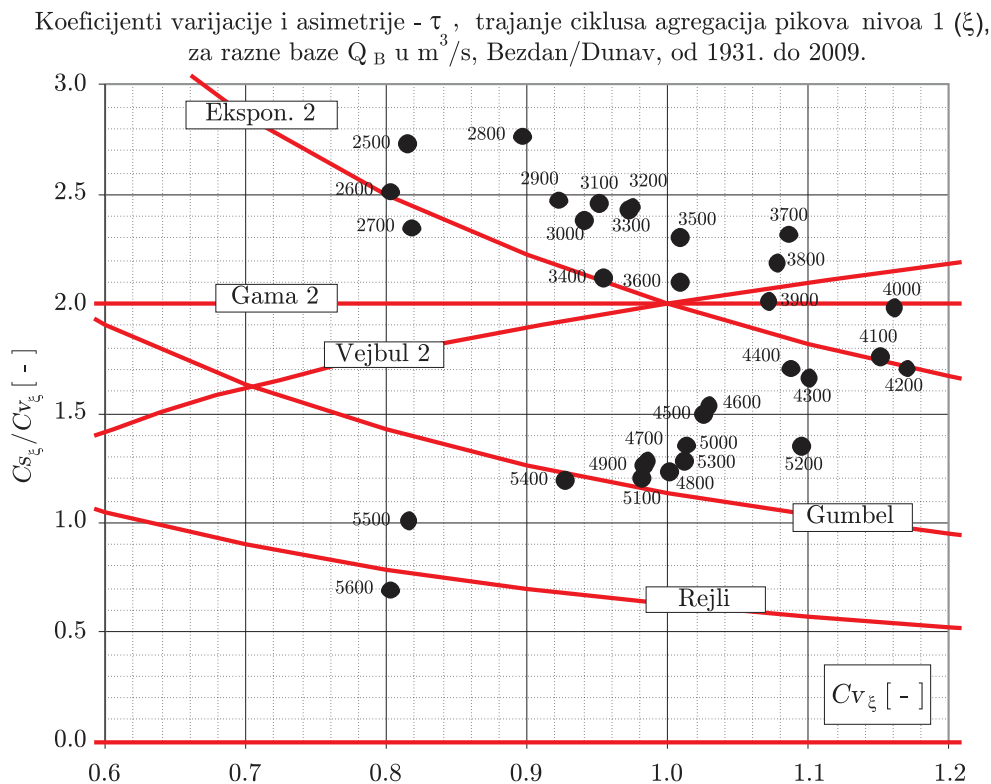
Slika 5.46: Agregacije pikova  $\xi_i; i = \overline{1,5}$ ;  $p$  vrednost za test statistiku  $N\omega^2$  Kramer - Fon Mizesovog testa pri testiranju saglasnosti sa eksponencijalnom, Vejbulovom dvoparametarskom i Pareto raspodelom. Parametri određeni po metodi maksimalne verodostojnosti. Minimalni broj članova nizova je 20.

### 5.4.2 Opšte karakteristike trajanja ciklusa između pikova

Kako je naglašeno u ciljevima i zadacima ovog istraživanja, među pojavama koje su od interesa je i vreme između pojave pikova, odnosno trajanje ciklusa između dva pika protoka (na slici 4.2 označeno sa  $\tau_\xi$ ). Vreme između pikova je, za razliku od samih pikova, aditivna veličina. To znači da je logično postaviti pitanje kakva je raspodela trajanja ciklusa između pojave dva pika ( $\tau$  ili  $\tau_1$ ). Takođe, posmatraju se agregirana vremena, tj. postavlja se pitanje raspodele trajanja ciklusa između pojave agregiranih dva ( $\tau_2$ ) ili tri ( $\tau_3$ ) ili  $i$  ( $\tau_i$ ) sukcesivnih pikova.

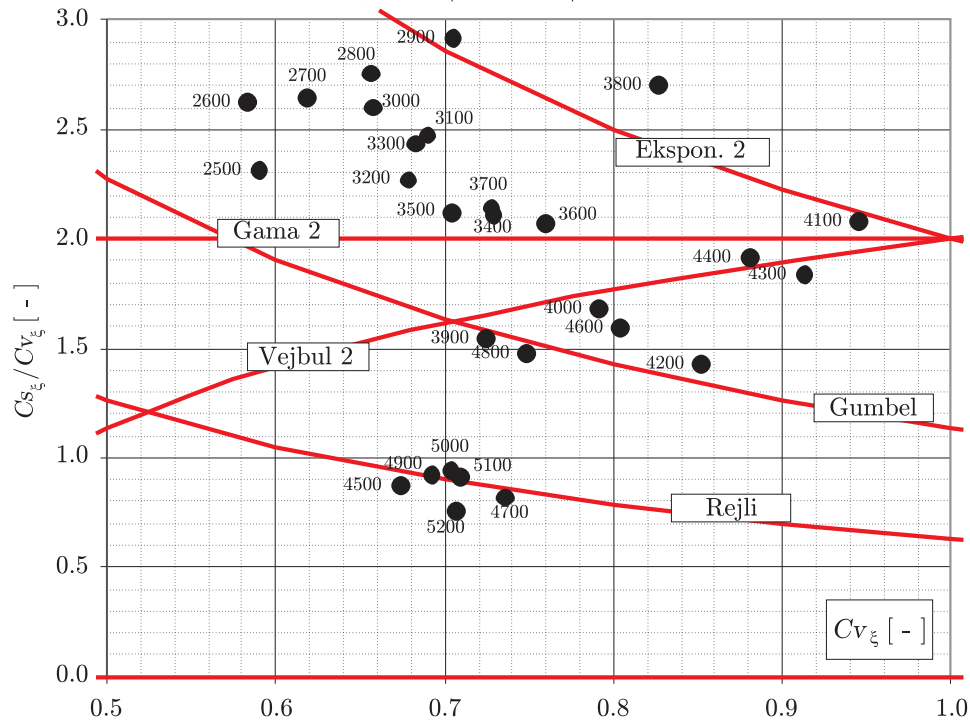
Slično kao i za same pikove (veličina označena sa  $\xi$ ), i za vremena pojave pikova na bilo kom nivou agregacije za potrebe generalnog opisa mogu se izračunati osnovne statistike. Zbog obima u Prilozima 24. do 28. su date tabele sa detaljnim vrednostima srednjih vrednosti, standardnih devijacija, koeficijenata varijacije i asimetrije i njihovim količnikom za razne bazne protoke i različite nivoe agregacija (dakle za  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  i  $\tau_5$ )

Na slikama od 5.47 do 5.51 prikazani su dijagrami za ocenu pogodnog zakona verovatnoće koji slede trajanja pikova na različitim nivoima agregacije. Uz svaki marker u polju upisana je vrednost baznog protoka  $Q_B$  koja mu odgovara.



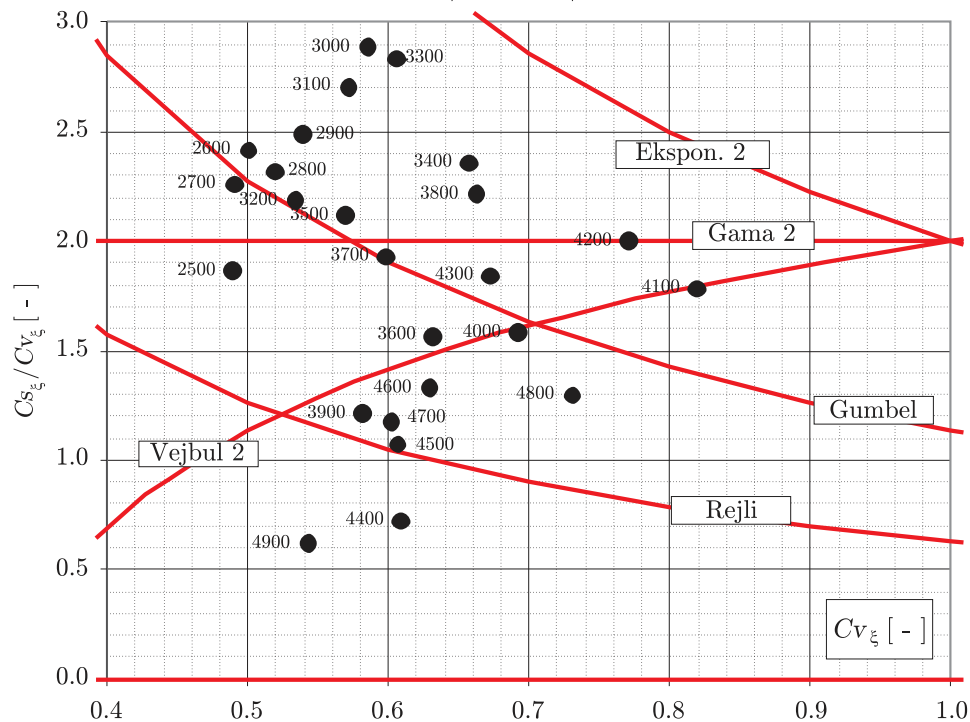
Slika 5.47: Trajanje ciklusa agregacije 1,  $\tau_1$ . Dijagram za ocenu zakona verovatnoće.

Koeficijenti varijacije i asimetrije -  $\tau_2$ , trajanje ciklusa agregacija pikova nivoa 2 ( $\xi_2$ ), za razne baze  $Q_B$  u  $m^3/s$ , Bezdán/Dunav, od 1931. do 2009.



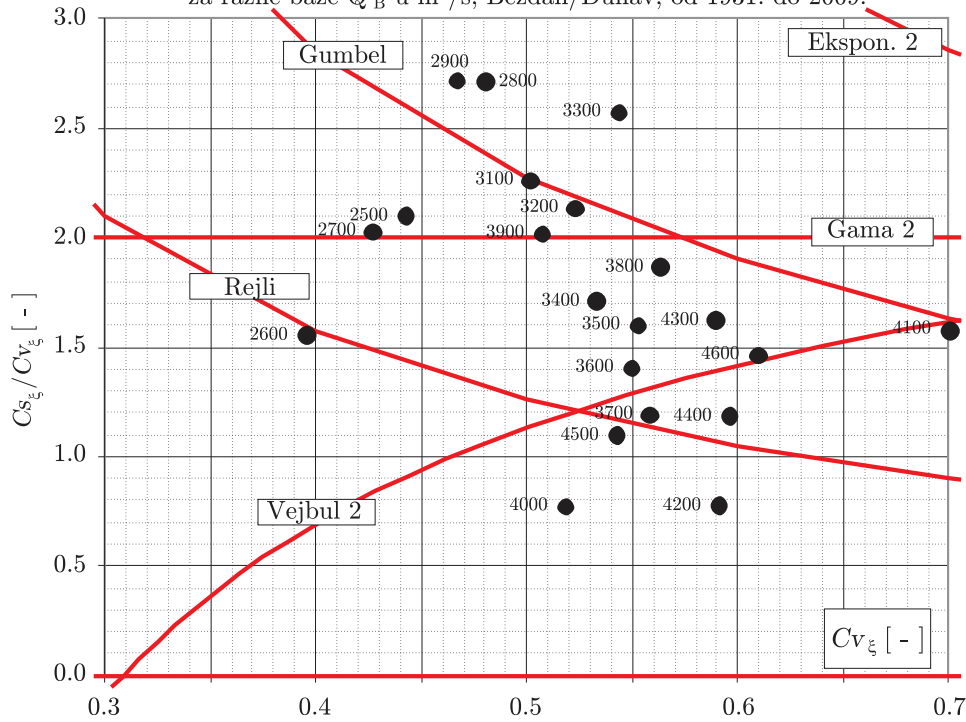
Slika 5.48: Trajanje ciklusa agregacije 2,  $\tau_2$ . Dijagram za ocenu zakona verovatnoće.

Koeficijenti varijacije i asimetrije -  $\tau_3$ , trajanje ciklusa agregacija pikova nivoa 3 ( $\xi_3$ ), za razne baze  $Q_B$  u  $m^3/s$ , Bezdán/Dunav, od 1931. do 2009.



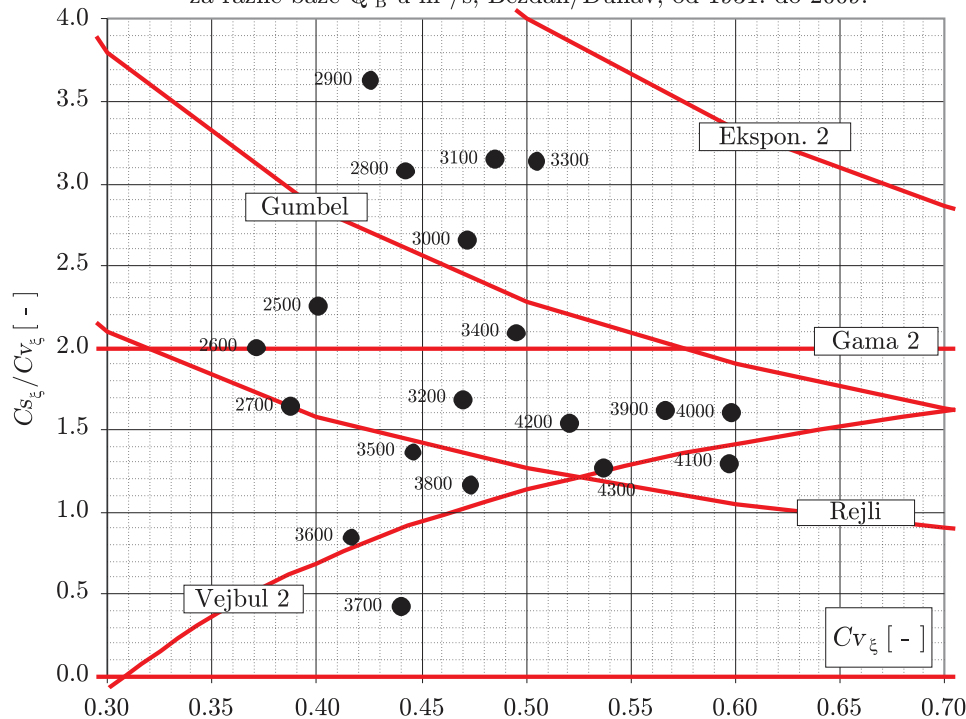
Slika 5.49: Trajanje ciklusa agregacije 3,  $\tau_3$ . Dijagram za ocenu zakona verovatnoće.

Koeficijenti varijacije i asimetrije -  $\tau_4$ , trajanje ciklusa agregacija pikova nivoa 4 ( $\xi_4$ ), za razne baze  $Q_B$  u  $m^3/s$ , Bezdán/Dunav, od 1931. do 2009.



Slika 5.50: Trajanje ciklusa agregacije 4,  $\tau_4$ . Dijagram za ocenu zakona verovatnoće.

Koeficijenti varijacije i asimetrije -  $\tau_5$ , trajanja ciklusa agregacija pikova nivoa 5 ( $\xi_5$ ), za razne baze  $Q_B$  u  $m^3/s$ , Bezdán/Dunav, od 1931. do 2009.

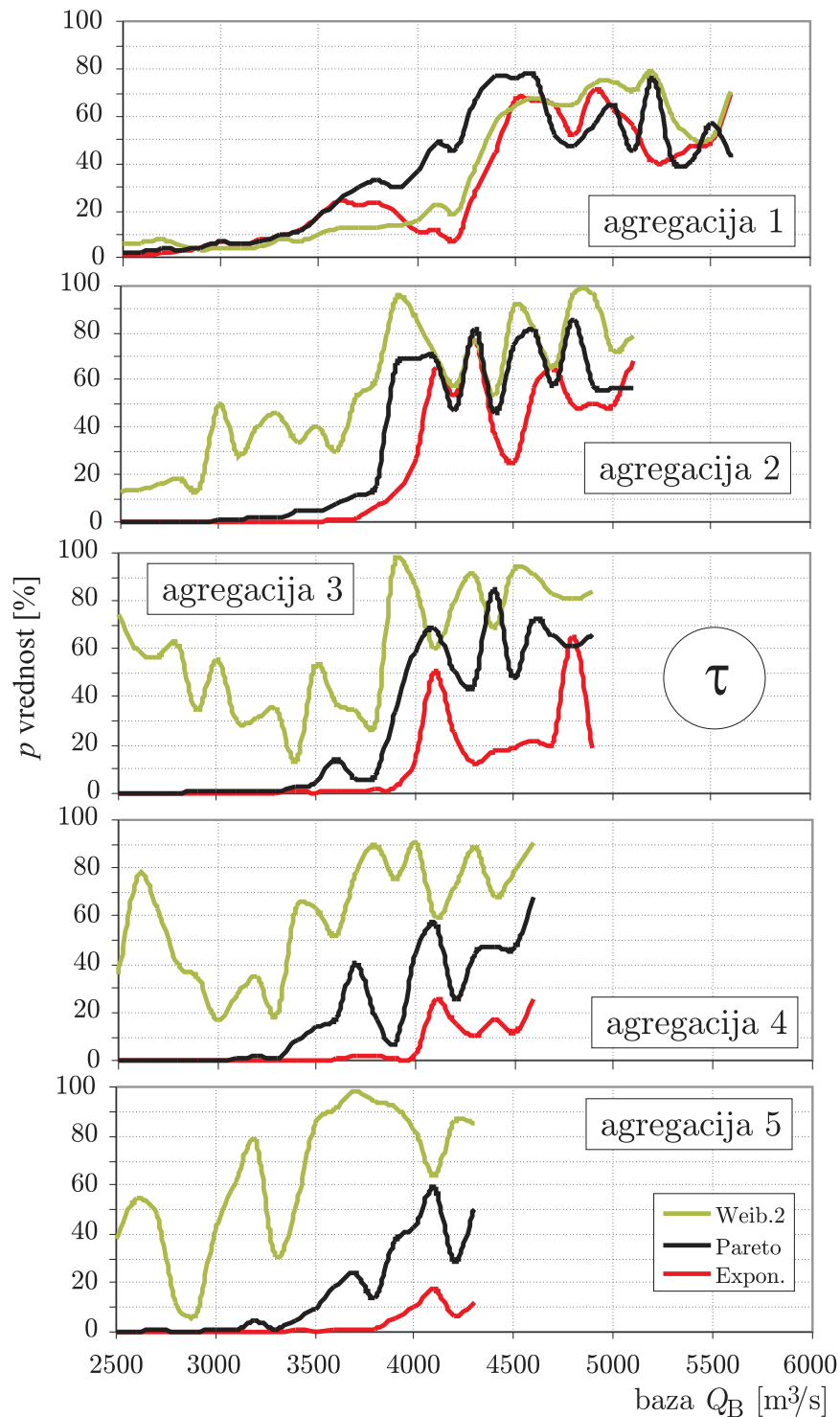


Slika 5.51: Trajanje ciklusa agregacije 5,  $\tau_5$ . Dijagram za ocenu zakona verovatnoće.

Na slici 5.52 prikazan je rezultat Kramer-FonMizesovog  $N\omega^2$  testa saglasnosti za tri teorijske funkcije raspodele; eksponencijalnu, dvoparametarsku Weibulovu i Pareto raspodelu (parametri određeni metodom maksimalne verodostojnosti) za trajanja ciklusa  $\tau$  odnosno  $\tau_1$  i njihove agregacija  $\tau_2, \tau_3, \tau_4$  i  $\tau_5$ ).

Iz prvog dijagrama na slici se uočava da prikazane  $p$  vrednosti testa saglasnosti za sve raspodele imaju vrednost veću od uobičajenih 10% za bazne protoke veće od približno 3500 m<sup>3</sup>/s. Sa praktičnog stanovišta, za baze veće od približno 4500 m<sup>3</sup>/s sve raspodele su gotovo isto dobre.

Posmatrajući sve nivoe agregacija, opet bi mogli da se uopšteno odlučimo za Weibulovu dvoparametarsku raspodelu vremena između pojave pikova za posmatrane agregacije do nivoa 5, za bazne protoke veće od nekih 4000 m<sup>3</sup>/s.



Slika 5.52: Trajanje ciklusa  $\tau_i$ , agregacije  $i = \overline{1,5}$ ;  $p$  vrednost za test statistiku  $N\omega^2$  Kramer - Fon Mizesovog testa pri testiranju saglasnosti sa eksponencijalnom, Vejbulovom dvoparametarskom i Pareto raspodelom. Parametri određeni po metodi maksimalne verodostojnosti. Minimalni broj članova nizova je 19.

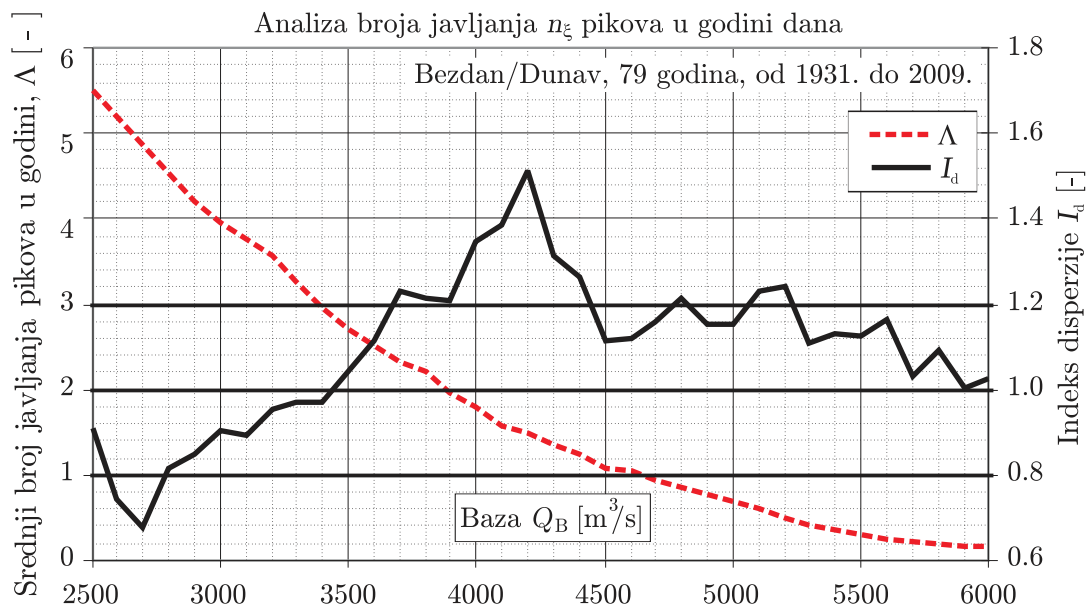


### 5.4.3 Broj pojave pikova u intervalu vremena

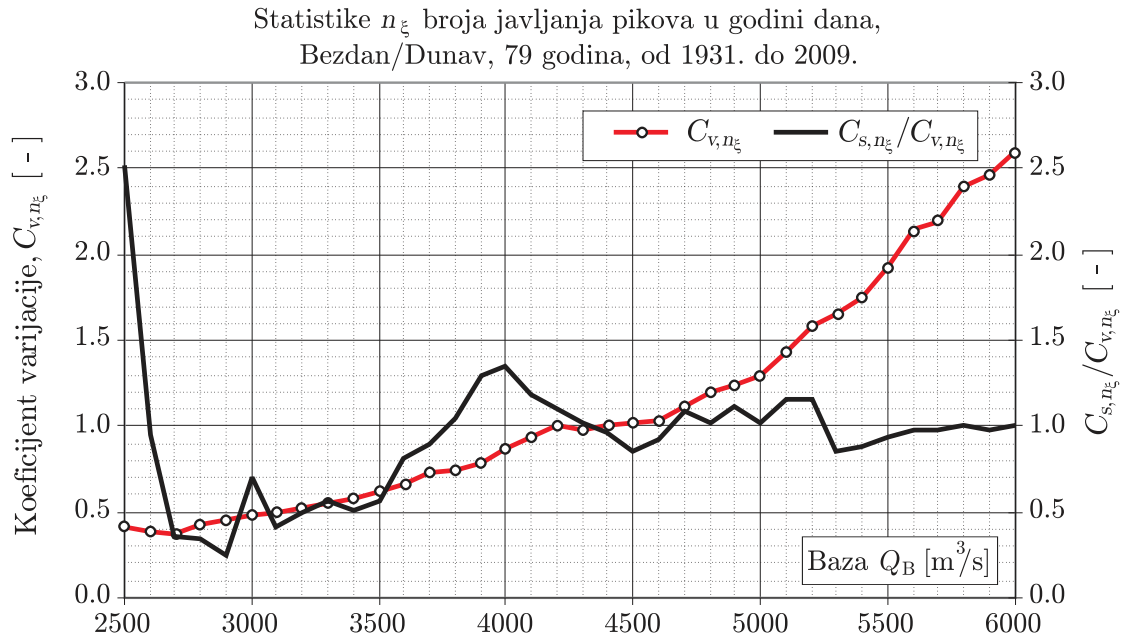
#### 5.4.3.1 Broj pojave pikova po i unutar kalendarskih godina

Za bazni opis pojave pikova od značaja je prikazati karakter njihove pojave u funkciji izabranog praga  $Q_B$  u toku perioda od godinu dana. To se može učiniti kroz grafički i numerički prikaz osnovnih statistika broja javljanja u toku kalendarske godine. Na slikama 5.53 i 5.54 i u tabeli u Prilogu 34. dati su rezultati analize  $n_\xi$  broja javljanja pikova iznad praga u godini dana. Ovi pokazatelji mogu biti od koristi pri heurističkoj oceni pogodnosti primene pojedinih diskretnih raspodela za opis zakona verovatnoće broja javljanja pikova u godini dana.

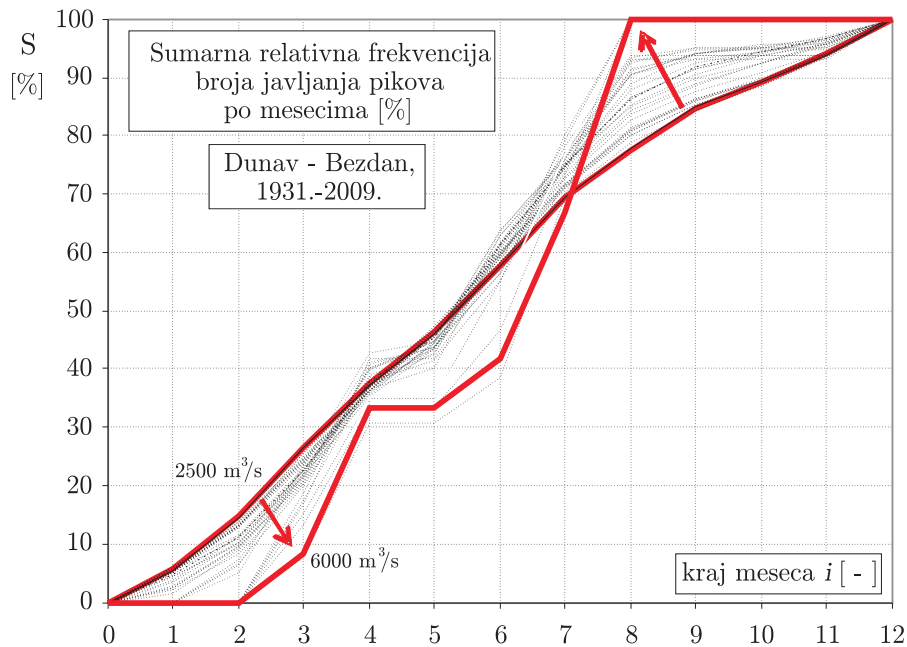
Empirijska relativna i sumarna (kumulativna) relativna frekvencija broja javljanja pikova po mesecima  $n_{\xi,mes}$  u toku godine date su redom u tabelama u Prilogu 35. i Prilogu 36., dok je na slici 5.55 prikaz samo sumarne relativne frekvencije. Interesantno je primetiti da se na profilu h.s. Bezdán na reci Dunav veliki protoci (veći od  $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ ) najčešće javljaju tokom 4, 7 ili 8 meseca, na osnovu podataka iz 79 godina, od 1931. do 2009. godine.



Slika 5.53: Bezdimezionalne statistike broja javljanja pikova u intervalu od godinu dana, srednji broj javljanja pikova u godini  $\Lambda$  i indeks disperzije,  $I_d = S_{n_\xi}^2 / \Lambda$ . Opseg baznih protoka  $Q_B$  od 2500 do 6000  $\text{m}^3/\text{s}$ .



Slika 5.54: Bezdimenzionalne statistike broja javljanja pikova u periodu od godinu dana, koeficijent varijacije  $C_{v,n_\xi}$  i količnik koeficijenta asimetrije i koeficijenta varijacije,  $C_{s,n_\xi}/C_{v,n_\xi}$ .

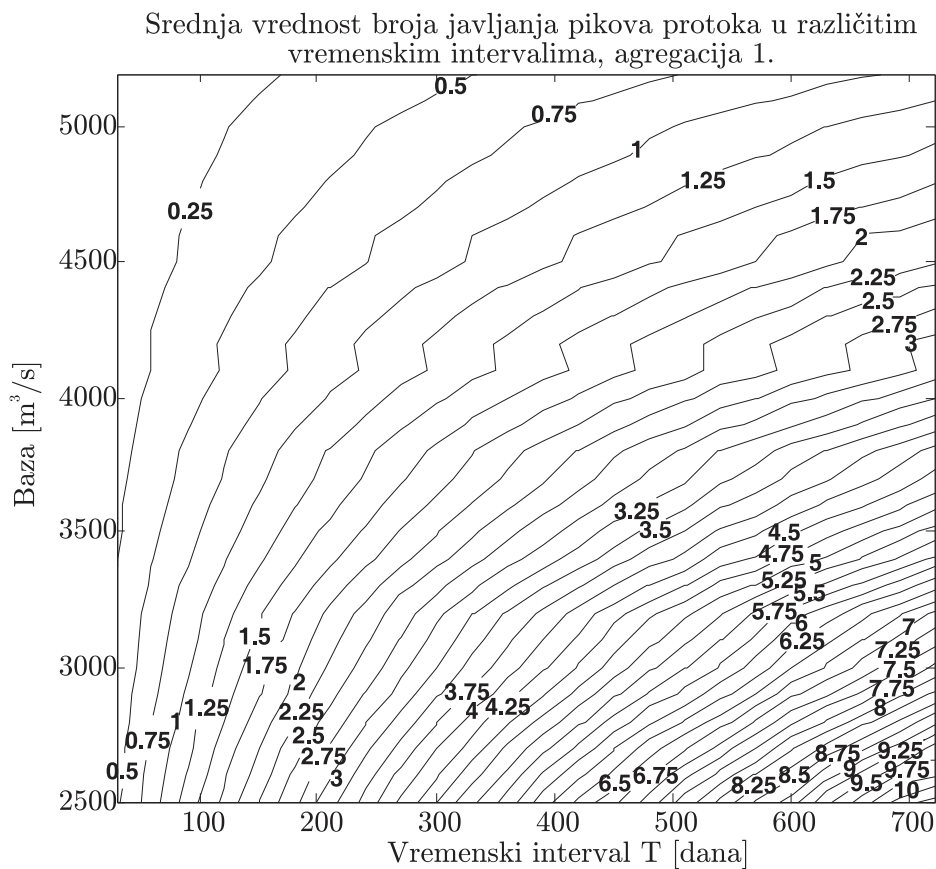


Slika 5.55: Sumarne relativne frekvencije broja javljanja pikova po mesecima. Na apscisi je kraj meseca, a na ordinati se očitava koliko se % pikova od ukupnog broja za zadatu bazu  $Q_B$  dogodilo do kraja izabranog meseca. Opseg  $Q_B$  od 2500 do 6000  $m^3/s$ . Strelice označavaju trend promene sa povećanjem vrednosti baze.

### 5.4.3.2 Broj pojave pikova po vremenskim intervalima različitih dužina

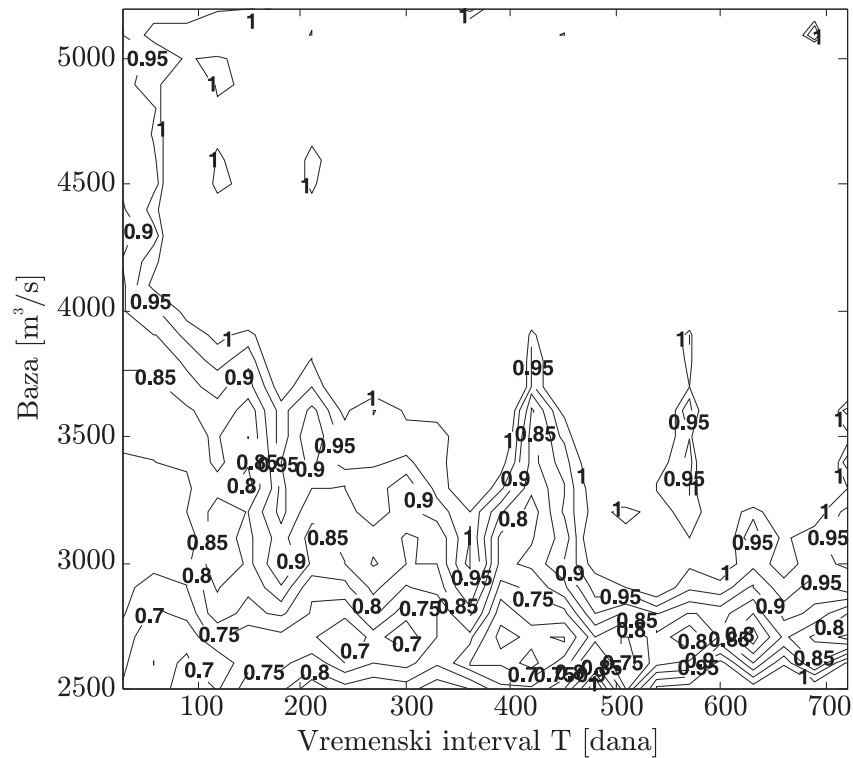
Pored broja javljanja pikova po vremenskim intervalima dužine godinu dana, razmatran je i broj javljanja pikova po intervalima drugih dužina, u opsegu od 30 do 720 dana (tačnije {30:15:360, 365, 720}), za različite bazne protoke od 2500 do 5200 m<sup>3</sup>/s sa priraštajem od 100 m<sup>3</sup>/s.

Dat je grafički prikaz statistika broja javljanja pikova za različite bazne protoke i dužine vremenskih koraka i to srednjih vrednosti (slika 5.56) i indeksa disperzije (slike 5.57 i 5.58). Ovi prikazi su više teorijskog nego praktičnog značaja, pošto se karakter hidroloških pojava ima smisla proučavati na nivou hidrološke godine ili po sezonama sa homogenim hidrološkim karakteristikama. Sa matematskog stanovišta ovakva ograničenja ne postoje. Ukoliko se ne vodi računa o sezoni, već se smatra da je intenzitet pojave pikova homogen u vremenu onda se može smatrati da vrednosti ovih statistika imaju praktičnu vrednost (što može biti implicitno opravdano za niske vrednosti baznog protoka - veliki broj pikova, na slici 5.55 gotovo konstantan nagib linije za nisko  $Q_B$ ).

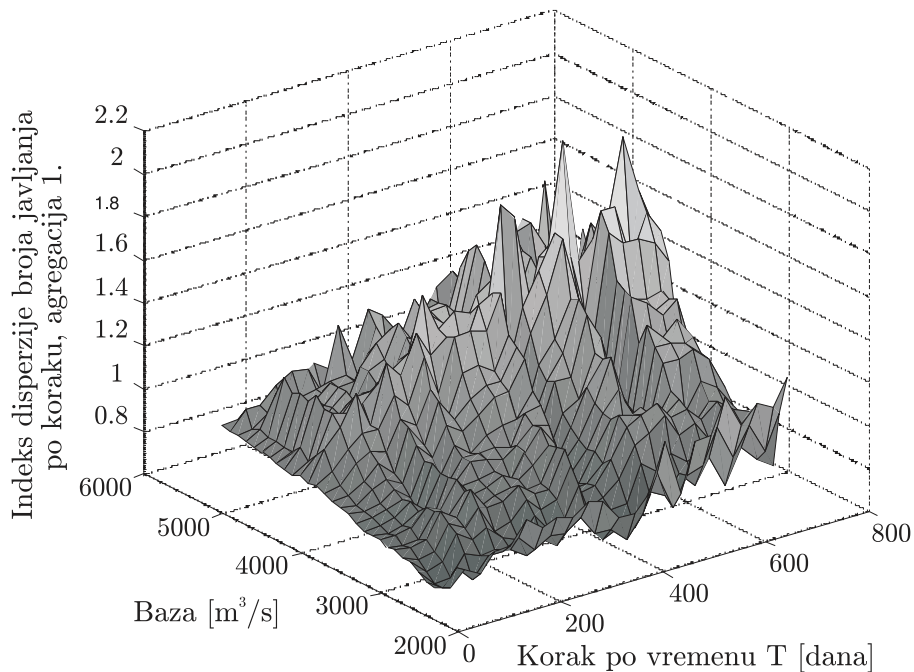


Slika 5.56: Srednje vrednosti broja javljanja pikova protoka  $\xi$  u različitim vremenskim intervalima.

Indeks disperzije broja javljanja pikova protoka u različitim vremenskim intervalima, agregacija 1.



Slika 5.57: Indeksi disperzije broja javljanja pikova protoka  $\xi$  po koraku u različitim vremenskim intervalima.



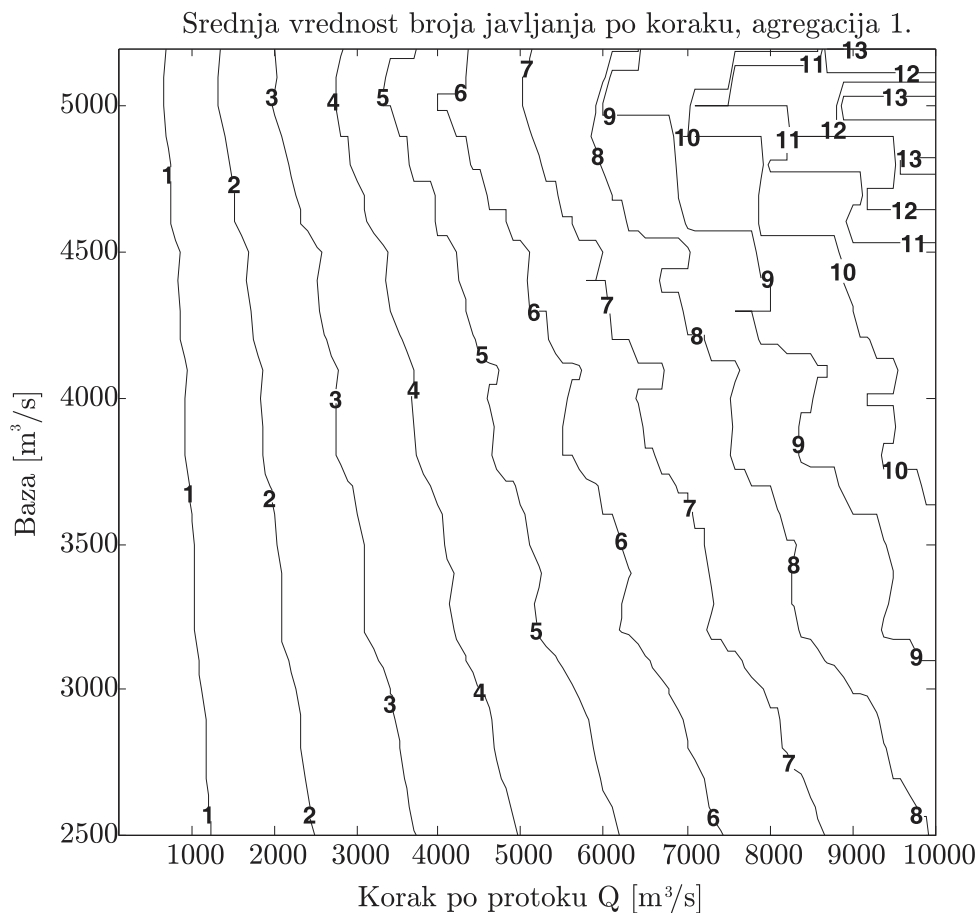
Slika 5.58: Prostorni prikaz (3D) indeksa disperzije broja javljanja pikova protoka  $\xi$  različitim vremenskim intervalima.

### 5.4.4 Broj pojave pikova u intervalima vrednosti pikova

Proučavanje broja pojave pikova po intervalima vrednosti pikova značajno je kao pokazatelj moguće raspodele same vrednosti pikova  $\xi$  (o ovome je bio reči u Uvodnom poglavlju disertacije). Podseća se na značaj funkcije intenziteta procesa  $\varkappa(x, n)$  (izraz 2.69 na strani 34), njenog pretpostavljenog oblika i posledica na zakon verovatnoće pojave pikova.

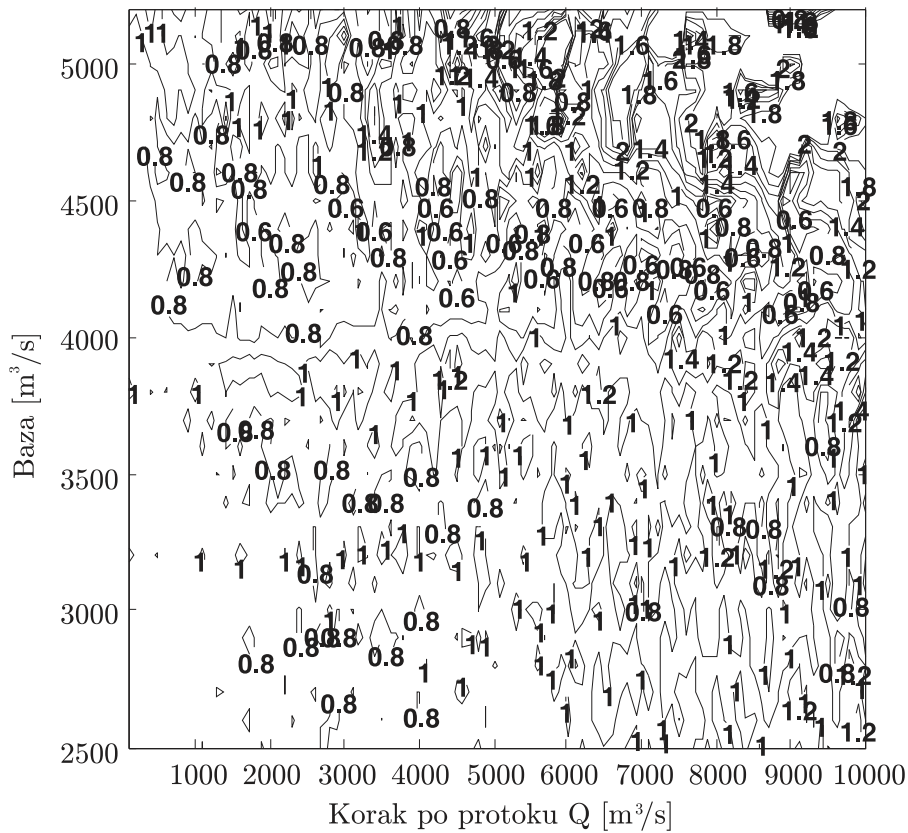
Dat je grafički prikaz statistika broja javljanja pikova za različite bazne protoke ( $\{2500 : 100 : 5200\} \text{ m}^3/\text{s}$ ) i vrednosti koraka u veličini protoka ( $\{1, 1.5, 2, 3, 5, 8, 10\} 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ ) i to srednjih vrednosti (slika 5.59) i indeksa disperzije (slike 5.60 i 5.61).

Namena ovih prikaza je opisna, za ilustraciju pojave, i kao sredstvo za usmeravanje ka detaljnijim ispitivanjima koja slede.

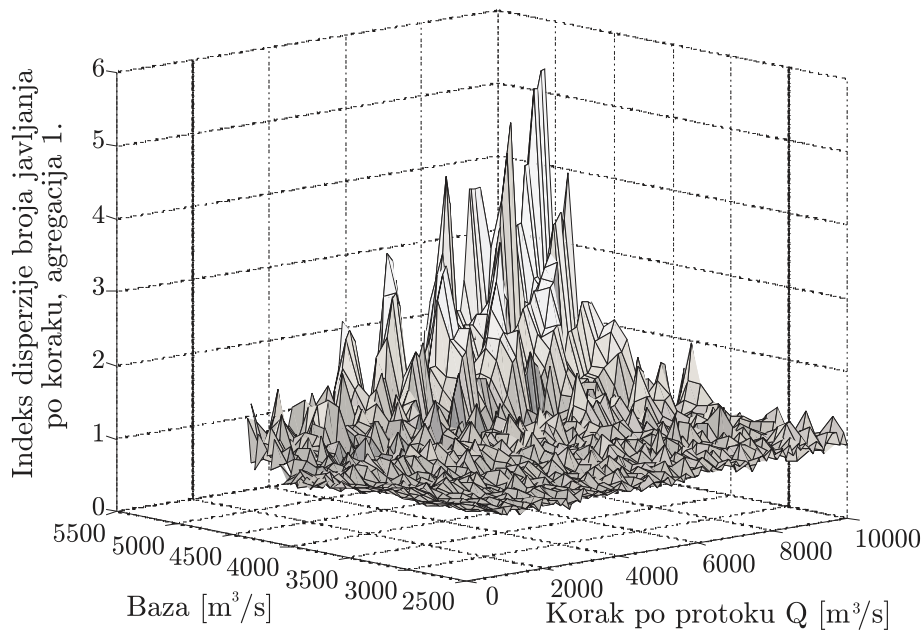


Slika 5.59: Srednje vrednosti broja javljanja pikova protoka  $\xi$  po koraku u jedinicama protoka.

Indeks disperzije broja javljanja po koraku, agregacija 1.



Slika 5.60: Indeksi disperzije broja javljanja pikova protoka  $\xi$  po koraku u jedinicama protoka -  $m^3/s$ .



Slika 5.61: Prostorni prikaz (3D) indeksa disperzije broja javljanja pikova protoka  $\xi$  po koraku u jedinicama protoka -  $m^3/s$ .

### 5.4.5 Raspodela broja javljanja pikova u vremenu, $p_\nu(t)$

Poznavanje raspodele broja javljanja pikova (tj. prekida)  $\nu$  u intervalu vremena veličine  $t$  ima višestruki značaj.

Kao prvo, u klasičnoj metodi pikova (POT) ona predstavlja element za utvrđivanje funkcije raspodele maksimalnih vrednosti protoka tokom intervala  $t$ .

Zatim, poznavanje raspodele broja javljanja pikova u vremenu je bitno verifikaciju pretpostavke funkcije vremenskog intenziteta  $\lambda(t, \nu)$  date izrazom (2.12). Od oblika funkcije vremenskog intenziteta zavisi rešenje diferencijalnih jednačina (2.18) i (2.19) (videti poglavlje 2.3) i tip teorijske raspodele broja javljanja.

Na slici 5.62 prikazana je analiza broja javljanja pikova na h.s. Bezdana na reci Dunav, za bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , po vremenskim intervalima različite dužine. Ovo se praktično radi po shemi iz podpoglavlja 4.3.2 na strani 75, preko veličine  $\tau$  koja predstavlja vreme između dva pika protoka, odnosno trajanje ciklusa.

Na gornjem dijagramu data je empirijska analiza, a na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je numerički kod od dva broja razdvojena kosom crtom:

- prvi broj je vremenski interval u kome se gleda broj javljanja pikova, u danima,
- drugi broj je indeks disperzije broja javljanja pikova za zadati vremenski interval.

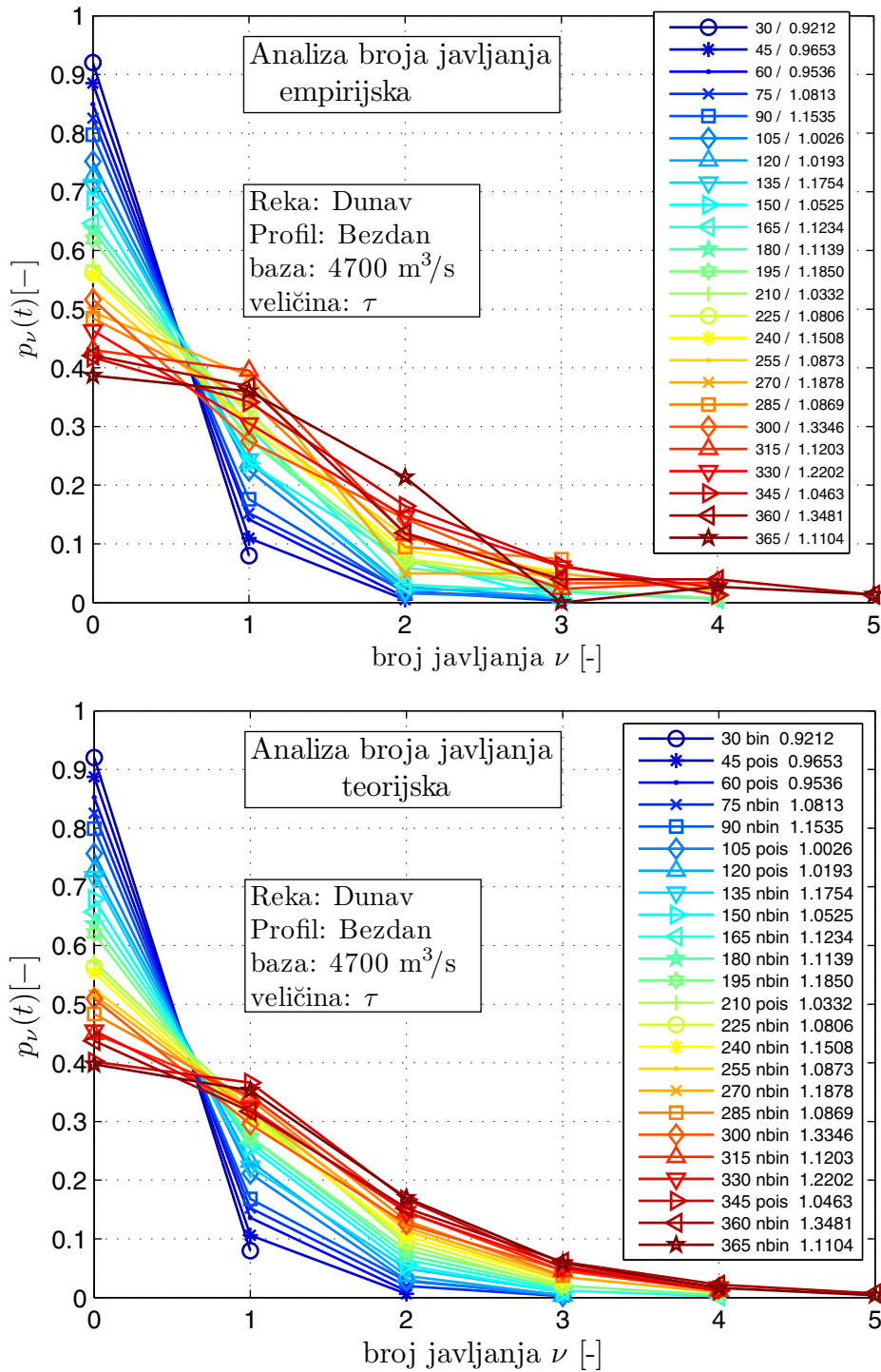
Na donjem dijagramu data je teorijska analiza. Na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je kod od tri elementa razdvojena belinama:

- prvi element je broj – vremenski interval, u danima,
- drugi element je kod diskretne raspodele kojom je prilagođena empirijska (bin – binomna, pois – Puasonova, nbin – negativna binomna),
- treći element je broj – indeks disperzije broja javljanja pikova za zadati vremenski interval.

Pregledom prilagođenih teorijskih raspodela uočava se da za najveći broj koraka po vremenu  $t$  broj javljanja pikova prati negativnu binomnu raspodelu. Treba naglasiti da je ovde uzet kriterijum izbora raspodele prema dosta oštrim granicama za vrednost indeksa disperzije:

- binomna raspodela, za  $I_d < 0.95$ ,
- Puasonova raspodela, za  $0.95 \leq I_d \leq 1.05$ ,
- negativna binomna, za  $1.05 < I_d$ .

Ovde je prikazana samo analiza za jedan bazni protok. Situacija je slična za bazne protoke veće od približno  $4000 \text{ m}^3/\text{s}$ . Pregled kretanja vrednosti indeksa disperzije broja javljanja pikova u vremenskim intervalima različitih dužina već je prikazan na slikama 5.57 i 5.58 (strana 141).



Slika 5.62: Analiza broja javljanja pikova, h.s. Bezdán, reka: Dunav, podaci od 1931. do 2009. godine (79 godina), bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , vremenski intervali različitih dužina, od 30 do 365 kalendarskih dana. Ključ legende:(crtež gore) vremenski interval u danima / indeks disperzije; (crtež dole) vremenski interval u danima / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.



### 5.4.6 Raspodela broja javljanja pikova po intervalima vrednosti pikova, $p_n(x)$

Poznavanje raspodele broja javljanja pikova  $n$  u intervalima vrednosti pikova  $x$  ( $x$  ima dimenziju protoka) bitno je za ocenu mogućeg zakona verovatnoće visine pikova.

U klasičnoj metodi pikova (POT) ovaj zakon verovatnoće predstavlja element za utvrđivanje funkcije raspodele maksimalnih vrednosti protoka tokom intervala  $t$ .

Poznavanje raspodele broja javljanja pikova u intervalu vrednosti pikova  $x$  je bitno za verifikaciju pretpostavke o obliku funkcije intenziteta prekida po pikovima  $\varkappa(\xi, n)$  (u poglavlju 2.4, strana 34, to je  $\varkappa(x, n)$ ). Od oblika funkcije intenziteta prekida po pikovima zavisi rešenje diferencijalnih jednačina 2.66 i 2.67 (poglavljje 2.4, u izrazima je sa  $x$  označen korak po zapremini, mada je suština ista i kada je u pitanju korak po vrednosti pika), a time i tip diskretne teorijske raspodele za broj javljanja.

Na slici 5.63 (strana 148) prikazana je raspodela broja javljanja prekida po vrednosti pikova na h.s. Bezdani na reci Dunav, za bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , po koracima protoka različitih dužina (od 250 do 3500  $\text{m}^3/\text{s}$ ). Broj javljanja prekida se analizira po šemi iz podpoglavlja 4.3.2 na strani 75, preko veličine  $\xi$  koja predstavlja vrednost visine pika.

Na gornjem dijagramu data je empirijska analiza, a na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je numerički kod od dva broja razdvojena kosom crtom:

- prvi broj je korak  $\Delta$  po vrednosti pika protoka, u  $\text{m}^3/\text{s}$ ,
- drugi broj je indeks disperzije broja javljanja pikova za korak  $\Delta$ .

Na donjem dijagramu data je teorijska analiza. Na legendi dijagrama pored bojama kodiranih linija dat je kod od tri elementa razdvojena belinama:

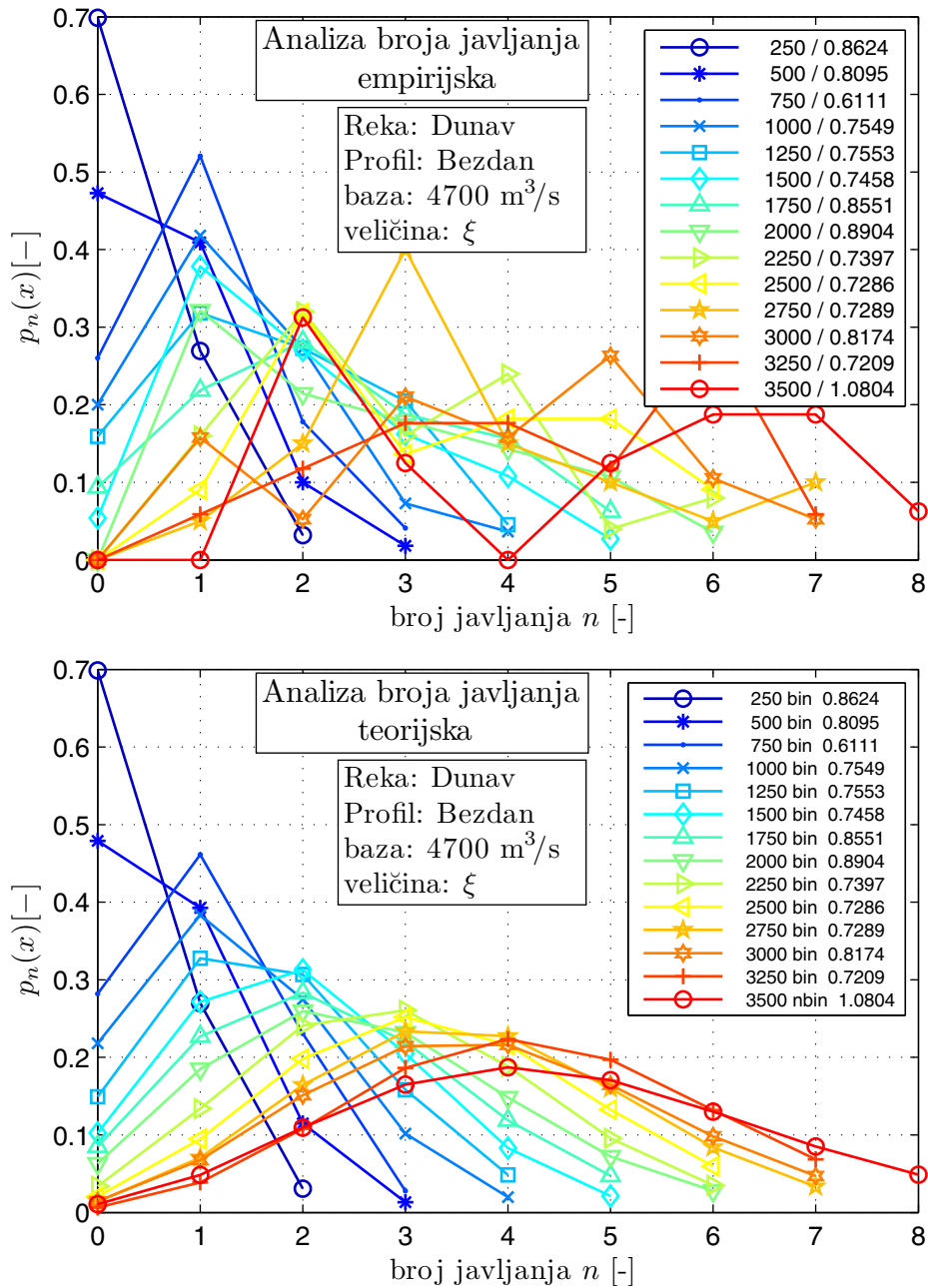
- prvi je broj – korak  $\Delta$  po piku protoka, u  $\text{m}^3/\text{s}$ ,
- drugi je kod diskretne raspodele kojom je prilagođena empirijska (bin – binomna, pois – Puasonova, nbin – negativna binomna),
- treći broj – indeks disperzije broja javljanja pikovia za zadati korak  $\Delta$ .

Kvalitativnim poređenjem dijagrama broja javljanja uočava se da odstupanja usvojene teorijske od empirijske raspodele rastu sa povećanjem koraka po protoku. Veličina koraka je birana prema vrednostima u nizu pikova protoka.

Pregledom prilagođenih diskretnih teorijskih raspodela primetno je da broj pikova prati binomnu raspodelu za najveći broj koraka. Treba naglasiti da je i ovde, kao kod broja javljanja pikova u vremenu, uzet kriterijum izbora raspodele po strogim granicama za vrednost indeksa disperzije:

- binomna raspodela, za  $I_d < 0.95$ ,
- Puasonova raspodela, za  $0.95 \leq I_d \leq 1.05$ ,
- negativna binomna, za  $1.05 < I_d$ .

Prikazana je analiza samo za jedan bazni protok. Slično se može zaključiti za bazne protoke do približno  $5000 \text{ m}^3/\text{s}$ , kao i korake  $x$  do isto oko  $5000 \text{ m}^3/\text{s}$ . Opšti pregled kretanja vrednosti indeksa disperzije broja prekida po pikovima za korake  $x$  različitih vrednosti prikazan je na slikama 5.60 i 5.61 (strana 143).



Slika 5.63: Analiza broja javljanja pikova po koraku protoka, h.s. Bezdani, reka: Dunav, podaci od 1931. do 2009. godine (79 godina), bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , koraci različitih dužina, od 250 do 3500 m<sup>3</sup>/s. Ključ legende: (crtež gore) korak u m<sup>3</sup>/s / indeks disperzije; (crtež dole) protočni korak u m<sup>3</sup>/s / fitovana diskretna raspodela / indeks disperzije.

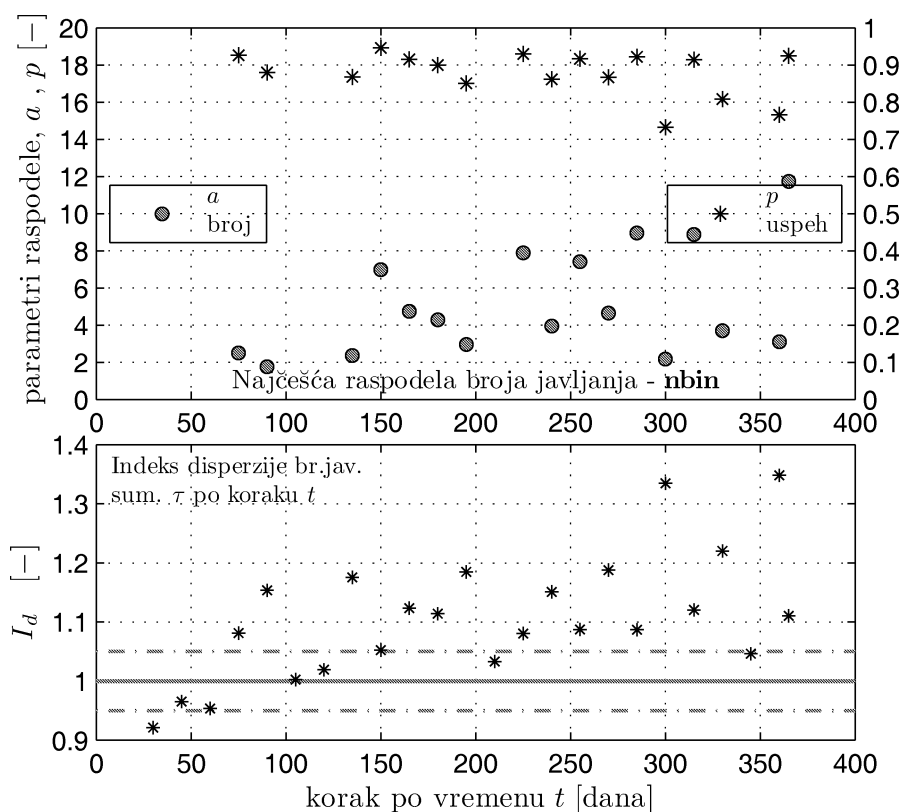
### 5.4.7 Raspodela trajanja ciklusa pikova, $G(\tau)$

U poglavlju 2.5 za funkciju raspodele vremena za ostvarenje  $\nu$  prekida  $G_\nu(\tau)$  dobija se izraz oblika (2.75). Dalje, u slučaju vremena između dva prekida ili 1 ciklusa ( $\nu = 1$ ) i pretpostavku da vremenski intenzitet ne zavisi od broja prekida ( $\lambda(t, \nu) = \lambda(t)$ ) dobija se izraz (2.80). U njemu zbog prethodne pretpostavke figuriše veličina  $\Lambda_1(t)$  (u daljem tekstu će se pisati bez indeksa 1). Da bi se odredila raspodela  $G_\nu(\tau)$ , potrebno je znati raspodelu broja javljanja pikova.

Analizom broja javljanja prekida u vremenu na h.s. Bezdan na reci Dunav za bazu od 4700 m<sup>3</sup>/s, osmotreno je da je za najveći broj koraka po vremenu broj javljanja prekida raspodeljen po diskretnoj negativnoj binomnoj raspodeli (videti sliku 5.62 na strani 145). Na slici 5.64 prikazani su uzorački indeksi disperzije (donji crtež) i fitovani parametri negativne binomne raspodele za vremenske korake do 365 dana po metodi maksimalne verodostojnosti. U pitanju su parametri  $a$  – broj uspeha i  $p$  – verovatnoća uspeha.

Prema poglavlju 2.3.4, ako je funkcija vremenskog intenziteta javljanja u obliku (2.45), tada odgovarajući sistem jednačina (2.46) i (2.47) ima rešenje u obliku (2.48) i (2.49) što je ekvivalentno da je broj prekida raspoređen po negativnoj binomnoj raspodeli. Izraz (2.45) podrazumeva da u delu koji zavisi od broja javljanja figuriše parametar - konstanta  $a$  koji je u stvari i parametar negativne binomne raspodele. Na slici 5.64 uočava se da  $a$  nije konstantno sa promenom vremenskog koraka (kreće se u opsegu od 2 do 12 za korake do 365 dana), što kasnije može kompromitovati model raspodele trajanja vremenskog perioda pri raznim brojevima ciklusa  $\nu$ .

U izrazima za negativnu binomnu raspodelu figuriše veličina  $\Lambda(t)$  (definisana izrazom (2.50)). Nju je lakše izračunati nego samu vrednost funkcije vremenskog intenziteta  $\lambda(t)$ . Zato će se nadalje prvenstveno proučavati karakteristika  $\Lambda(t)$ . Izraz (2.77) upućuje da je funkcija raspodele trajanja jednog ciklusa nezavisna od oblika diskretne raspodele broja javljanja prekida u vremenu jer verovatnoća  $p_0(t)$  ima isti oblik za sve razmatrane diskretne raspodele. Iz izraza (2.80) sledi da se  $G(\tau)$  može modelovati Vejbulovom, Pareto ili eksponencijalnom raspodelom. Zbog pretežno najboljeg slaganja sa Vejbulovom raspodelom (za protoke preko 4000 m<sup>3</sup>/s u testiranom slučaju, vidi stranu 137) ona je izabrana kao mogući model, a odgovarajuća funkcija  $\Lambda(t)$  predstavljena je na slici 5.65 oznakom  $\Lambda_t^W$ .  $\Lambda(t)$  se takođe može modelovati i iz empirijske raspodele promenljive  $\tau$  (označeno na slici 5.65 sa  $\Lambda_t^k$ ) kada se primenjuje izraz (2.80) u kome se  $G_1(\tau)$  zamenjuje empirijskom raspodelom. Treći primenjeni model je dobijen zamenom empirijskih statistika niza broja javljanja prekida u vremenu za razne vremenske korake i to srednje vrednosti broja

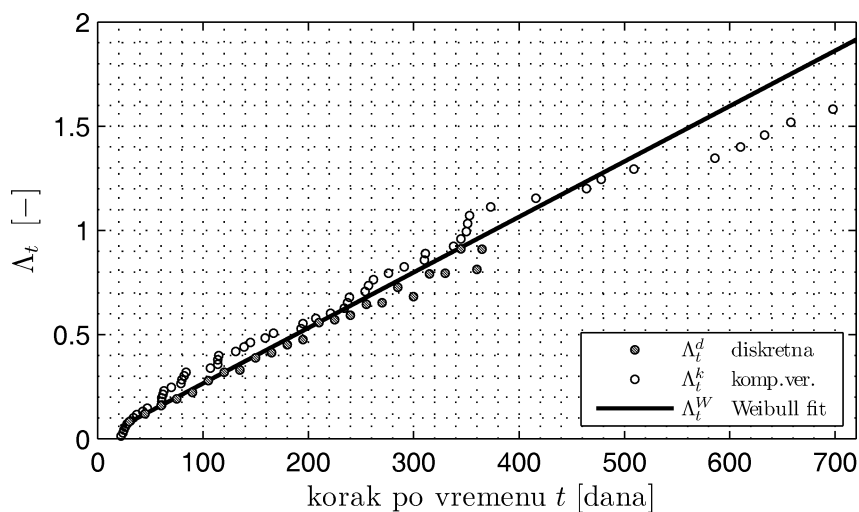


Slika 5.64: Parametri fitovane negativne binomne raspodele,  $a$  i  $p$  (gornji crtež) i uzorački indeks disperzije  $I_d$  (donji crtež) broja javljanja pikova u vremenu. H.s. Bezdán, reka: Dunav, bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ .

javljanja i indeksa disperzije u izraze (2.52) i (2.53) i rešavanjem po  $\Lambda(t)$  (na slici 5.65 označeno sa  $\Lambda_t^d$ ).

Na osnovu prethodnih razmatranja, za h.s. Bezdán na reci Dunav, za bazu  $4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , prema izrazima za  $G_\nu(\tau)$  za negativnu binomnu raspodelu u tabeli 2.6, izračunate su vrednosti funkcije raspodele  $G_\nu$  osnovnog niza  $\tau$  i njegovih agregacija  $\tau_2, \tau_3, \tau_4$  i  $\tau_5$ . Model je rekurentnog tipa za negativnu binomnu raspodelu broja javljanja pikova u vremenu, a za  $\Lambda(t)$  usvojen je analitički model Vejbulove raspodele fitovan na osnovni niz  $\tau$ .

Pošto parametar  $a$  nije konstantan u odnosu na vremenski interval, uzimanjem njegove srednje vrednosti i uvođenjem u model, dobijeni su nezadovoljavajući rezultati slaganja raspodele. Time je dovedena u pitanje jednostavnost primene modela koja pretpostavlja poznavanje vrednosti osnovnog niza  $\tau$  i analizu broja javljanja prekida u vremenu. Kao rešenje za ovaj problem upotrebljena je složenija procedura. Pored osnovnog niza  $\tau$  iskorišćen je i niz  $\tau_2$  koji predstavlja agregirana po dva susedna ciklusa. Zatim je parametar  $a$  modela određen fitovanjem funkcije  $G_2$  na



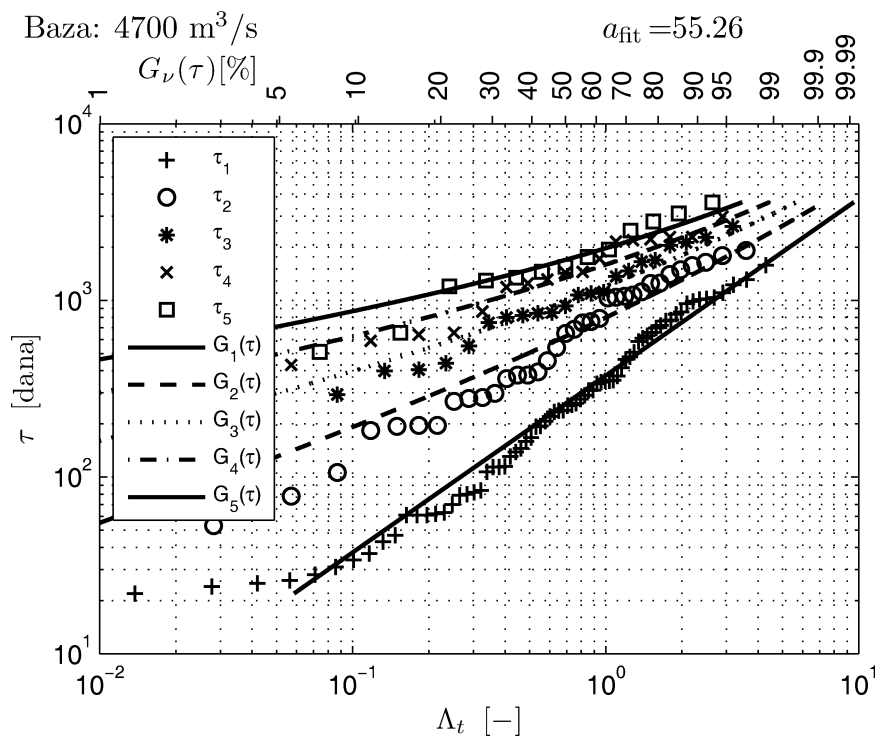
Slika 5.65:  $\Lambda_t = \int_0^t \lambda(u) du$ , karakteristika procesa javljanja pikova u vremenu, izračunata na više načina; preko diskretne empirijske raspodele broja javljanja pikova ( $\Lambda_t^d$ ), preko kompromisne verovatnoće niza  $\tau$  ( $\Lambda_t^k$ ) i prilagođenjem zakona verovatnoće veličine  $\tau$  Vejbulovom raspodelom ( $\Lambda_t^W$ ). H.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ .

$G_1$  tako da po  $N\omega^2$  testu da najbolju saglasnost teorijske raspodele i kompromisne verovatnoće.

Na slici 5.66 prikazan je rezultat ove složenije tehnike. U pitanju je dijagram koji prikazuje promenljivu  $\tau$  i veličine  $\Lambda_t$  i  $G(\tau)$ , i koji je u stvari papir Vejbulove raspodele. Kompromisna verovatnoća za  $\tau$  je po Vejbulu. Dok je u konkretnom slučaju, prema analizi broja javljanja prekida u vremenu srednja vrednost parametra  $a$  nešto veća od 5, procedura fitovanja dala je 55.26, znatno veći broj. Na slici se vidi da najveća odstupanja ne prelaze približno 12% po funkciji raspodele, što po testu saglasnosti Kolmogorov-Smirnova, u konkretnom slučaju, daje zadovoljavajuće slaganje (prag značajnosti preko uobičajenih 10%)

Primene procedure fitovanja  $G_2$  za pojedine vrednosti pragova nije uvek davala uspešne rezultate. To se odnosi na dobijanje vrednosti parametra  $a$  koji ima veoma velike vrednosti (red veličine nekoliko desetina hiljada), što matematički ima smisla kada se fituje funkcija, ali nema fizičkog objašnjenja što se tiče trajanja ciklusa  $\tau$  ili njegovih agregacija.

Preporuka je da se u takvim slučajevima koriste fitovanja kompromisne verovatnoće svake agregacije karakteristike nekom raspodelom (recimo Vejbulovom) i da se odustane od rekurentnog modela po šemi prikazane u tabeli 2.6. Svakako ne postoji univerzalno rešenje koje će dati odgovor na sve moguće analitičke situacije.



Slika 5.66: Funkcija raspodele osnovnog niza  $\tau$  i njegovih agregacija  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$  i  $\tau_5$  preko rekurentnog modela sa negativnom binomnom raspodelom broja javljanja pikova u vremenu. Parametar  $a = a_{\text{fit}}$  određen je fitovanjem funkcije  $G_2$ . H.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ .

### 5.4.8 Raspodela visine pikova, $H(\xi)$

Postupak analize visine pikova  $\Xi$  analogan je postupku analize zapremine poplavnih talasa  $X$ . Obe slučajne veličine se mogu opisati identičnim slučajnim procesima koji definišu maksimalnu vrednost slučajne karakteristike velikih voda (što su obe veličine) u intervalu vremena.

U poglavlju 2.6 za funkciju raspodele vrednosti pikova pri  $n$  prekida  $H_n(x)$  dobija se izraz oblika (2.82). Praktično, sva razmatranja iz ovog poglavlja se mogu preslikati i za pikove protoka  $\xi$ , jednostavno oznaku  $x$  treba shvatiti kao pik  $\xi$ . Dalje, u slučaju razmatranja pikova pri realizaciji po jednog prekida ( $n=1$ ) i pretpostavku da zapreminski intenzitet (sledstveno intenzitet pikova) ne zavisi od broja prekida ( $\varkappa(x, n) = \varkappa(x)$ ) dobija se izraz (2.86). U njemu, uz prethodne pretpostavke, figuriše veličina  $\mathcal{K}_1(t)$  (u daljem tekstu će se pisati bez indeksa 1). Da bi se odredila raspodela  $H(\xi)$ , potrebno je znati raspodelu broja javljanja pikova.

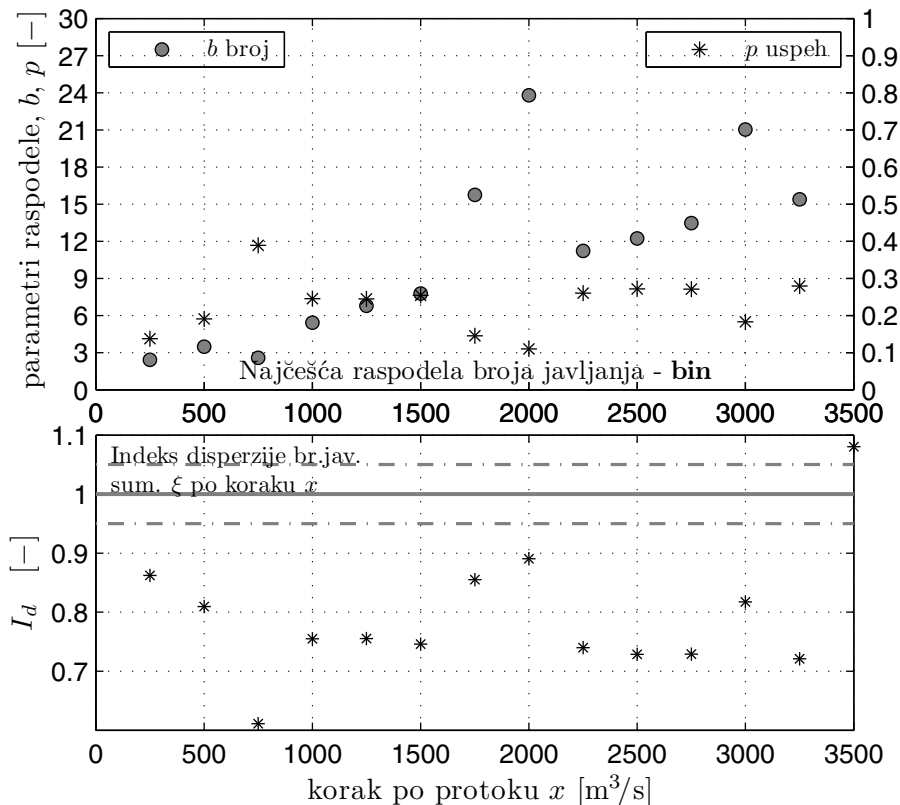
Analizom broja javljanja prekida po vrednosti protoka na h.s. Bezdán na reci Dunav za bazu od 4700 m<sup>3</sup>/s, osmotreno je da je za najveći broj koraka po pik u protoku broj javljanja pikova raspodeljen po diskretnoj binomnoj raspodeli (slika 5.63, strana 148). Na slici 5.67 prikazani su uzorački indeksi disperzije (donji crtež) i fitovani parametri binomne raspodele za protočne korake do 3500 m<sup>3</sup>/s (fit metodom maksimalne verodostojnosti). U pitanju su parametri  $b$  – broj uspeha i  $p$  – verovatnoća uspeha.

Slično kao u poglavlju 2.4, sistem diferencijalnih jednačina (2.66) i (2.67), za funkciju protočnog intenziteta kao u tabeli 2.2 kolona 1, ima rešenje koje daje da je broj prekida raspoređen po binomnoj raspodeli sa oblikom kao u 4. koloni iste tabele. Izraz za funkciju intenziteta podrazumeva da u delu koji zavisi od broja javljanja figuriše parametar - konstanta  $b$  koja je u stvari i parametar binomne raspodele. Na slici 5.67 uočava se da  $b$  nije konstantno kako se menja vrednost protočnog koraka (kreće se u opsegu od minimalno 3 do maksimalno 24 za korake do 3500 m<sup>3</sup>/s), što kasnije može kompromitovati model raspodele visine pikova pri raznim brojevima perioda  $n$ .

U prethodno navedenim izrazima figuriše veličina  $\mathcal{K}(x)$  (izraz (2.86)). Nju je lakše izračunati nego samu vrednost funkcije protočnog intenziteta  $\varkappa(x)$  čiji je integral. Zato će se nadalje prvenstveno proučavati karakteristika  $\mathcal{K}(x)$ .

Kao i funkcija raspodele  $G_\nu(\tau)$  tako je i funkcija raspodele osnovnog niza pikova nezavisna od oblika diskretne raspodele broja javljanja prekida po protoku. Iz izraz (2.86) sledi da se  $H(\xi)$  može modelovati Vejbulovom, Pareto ili eksponencijalnom raspodelom i da se iz ovih raspodela može odrediti  $\mathcal{K}(x)$ . Zbog pretežno najboljeg

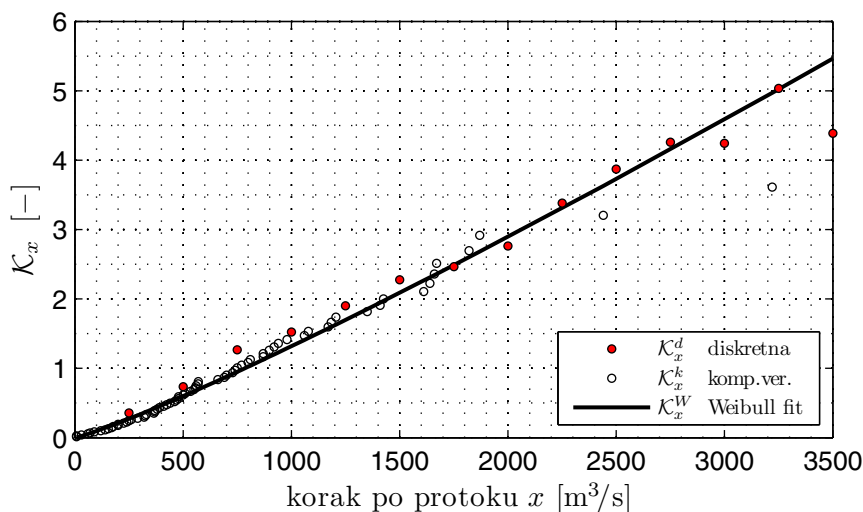




Slika 5.67: Parametri fitovane binomne raspodele,  $b$  i  $p$  (gornji crtež) i uzorački indeks disperzije  $I_d$  (donji crtež) broja javljanja pikova po koraku protoka. H.s. Bezdán, reka: Dunav, bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ .

slaganja sa Vejbulovom raspodelom (za bazne protoke preko  $3500 \text{ m}^3/\text{s}$  u testiranom slučaju, vidi stranu 132) ona je izabrana kao mogući model, a odgovarajuća funkcija  $\mathcal{K}(x)$  predstavljena na je slici 5.68 oznakom  $\mathcal{K}_x^W$ .  $\mathcal{K}(x)$  se takođe može modelovati i preko empirijske raspodele pikova  $\xi$  (označeno na slici 5.68 sa  $\mathcal{K}_x^k$ ) kada se primenjuje izraz (2.86)) u kome se  $H(x)$  zamenjuje empirijskom raspodelom. Treći primenjeni model je dobijen zamenom empirijskih statistika niza broja javljanja pikova za razne korake i to srednje vrednosti broja javljanja i indeksa disperzije u izraze za momente binomne raspodele i rešavanjem po  $\mathcal{K}(x)$ . Ova varijanta je prikazana na slici 5.68 kao  $\mathcal{K}_x^d$ .

Na osnovu prethodnih razmatranja, za h.s. Bezdán na reci Dunav, za bazu  $4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , prema modelu po obliku slično kao u tabeli 2.7, izračunate su vrednosti funkcije raspodele  $H_n(\xi)$  osnovnog niza pikova  $\xi$  i njegovih agregacija  $\xi_2, \xi_3, \xi_4$  i  $\xi_5$ . Model je rekurentnog tipa za binomnu raspodelu broja javljanja pikova po koraku protoka, a za  $\mathcal{K}(\xi)$  usvojen je analitički oblik koji odgovara Vejbulovoj raspodeli fitovan na osnovni niz  $\xi$ .



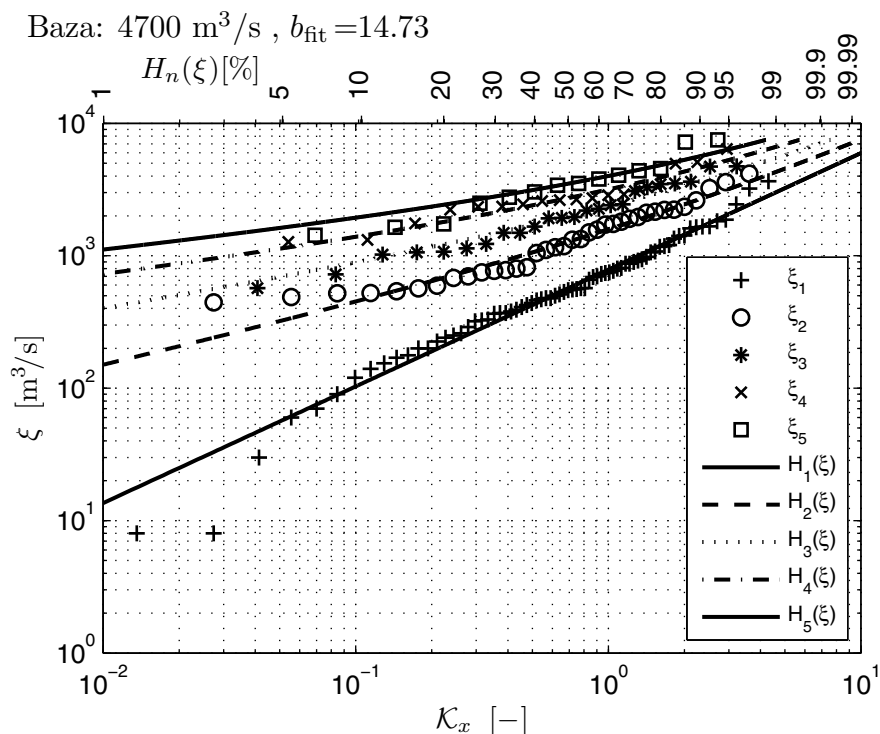
Slika 5.68:  $\mathcal{K}_x = \int_0^x \varkappa(u)du$ , karakteristika procesa javljanja pikova u vremenu, izračunata na više načina; preko diskretne empirijske raspodele broja javljanja pikova ( $\mathcal{K}_x^d$ ), preko kompromisne verovatnoće niza  $\xi$  ( $\mathcal{K}_x^k$ ) i prilagođenjem zakona verovatnoće veličine  $\xi$  Vejbulovom raspodelom ( $\mathcal{K}_x^W$ ). H.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Na slici 5.69 prikazane su markerima empirijske raspodele osnovnog niza  $\xi$  i njegovih agregacija  $\xi_2, \xi_3, \xi_4$  i  $\xi_5$ . Pune linije su odgovarajuće teorijske raspodele preko modifikovanog rekurentnog modela. Rekurentni model koji je pretpostavljen podrazumeva da je vrednost parametra  $b$  konstantna za bilo koji korak po protoku. Pošto je utvrđeno da parametar  $b$  nije konstantan, zamenski, reprezentativan, koeficijent  $b_{\text{fit}}$  je dobijen modifikacijom postupka tako što je fitovan model  $H_2$  tako da test saglasnosti Kramer Fon Mizesa ( $N\omega^2$  test) da najbolje slaganje  $H_1$  po Vejbulovoj kompromisnoj verovatnoći i  $H_2$  po modelu sa konstantnim parametrom  $b$ . Tako određen parametar upotrebljen je i za proračun  $H_3, H_4$  i  $H_5$ . Testiranje saglasnosti odgovarajućih empirijskih i teorijskih raspodela dalo je jako dobre rezultate u posmatranom primeru (h.s. Bezdán, reka Dunav, bazni protok  $4700 \text{ m}^3/\text{s}$ ) sa najnižom  $p$  vrednošću za agregaciju 4 od  $\alpha = 54\%$ . Za osnovni niz i preostale agregacije koje su ispitane  $p > 80\%$ .

Značaj ovog modela je samo matematički (apstraktan) jer fizički nema smisla razmatrati verovatnoću slučajne veličine koja predstavlja zbirove uzastopnih maksimalnih protoka prevazilaženja baznog protoka tj. pikova. Međutim, dobro slaganje na svim analiziranim nivoima agregacije upućuje da bi ovakva analiza mogla biti od koristi kada se zapremine velikih voda proučavaju preko dvodimenzionalnog procesa trajanja talasa i pikova talasa.

Naglašava se da funkcija raspodele osnovnog niza pikova igra važnu ulogu u

primeni klasične metode pikova (POT) za analizu zakona verovatnoće maksimalnih godišnjih protoka.



Slika 5.69: Funkcija raspodele  $H_n(\xi)$  osnovnog niza  $\xi$  i njegovih agregacija  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  i  $\xi_5$  preko rekurentnog modela sa binomnom raspodelom broja javljanja pikova u vrednosti protoka. Parametar  $b = b_{\text{fit}}$  određen je fitovanjem funkcije  $H_2$ . H.s. Bezdan, reka Dunav, bazni protok  $Q_B=4700 \text{ m}^3/\text{s}$ .

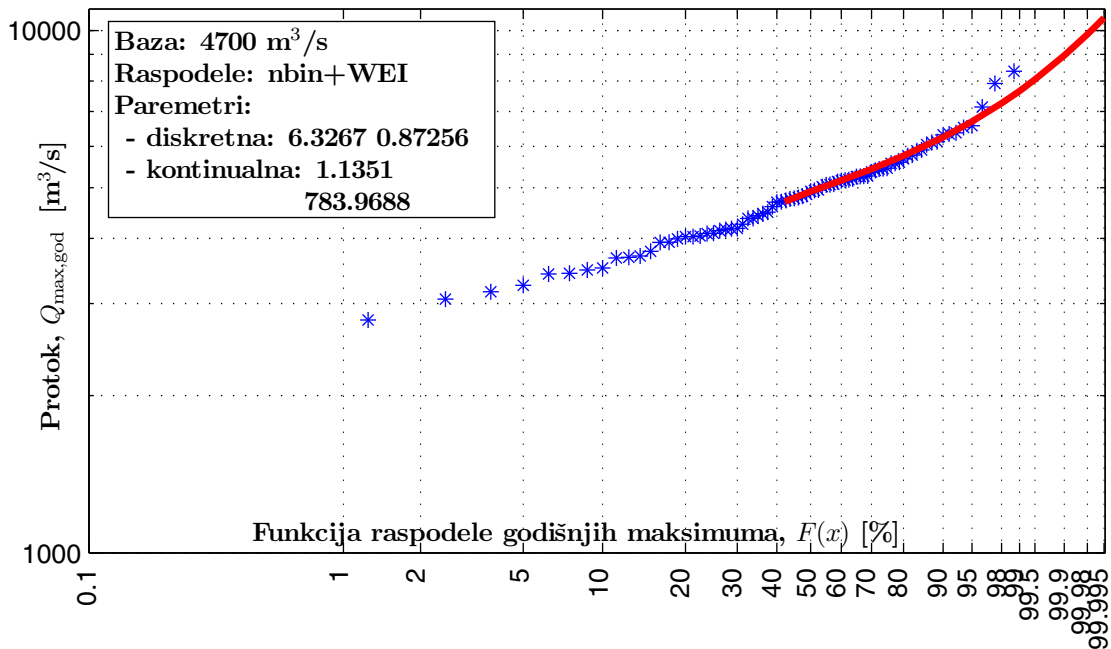
### 5.4.9 Raspodela maksimalnih godišnjih protoka, $F(x)$

U poglavlju 3.3 na strani 62 dat je detaljni prikaz kako se po metodi pikova iznad praga (POT) formulišu izrazi za proračun funkcije raspodele maksimalni godišnjih protoka. Formulacija (3.4) je opšti izraz koji važi za bilo koji vremenski interval  $t$ . Ukoliko je  $t = T = \text{godina dana}$  tada se broj javljanja pikova analizira po godinama (ovde kalendarskim godinama). Izrazima (3.6), (3.8), (3.10) redom su definisane funkcije raspodele godišnjih maksimuma  $F(x)$  ako je broj javljanja u godini dana modeliran Puasonovim, binomnim ili negativno-binomnim diskretnim zakonom verovatnoće (sa  $H(\xi)$  je označena neprekidna funkcija raspodele pikova).

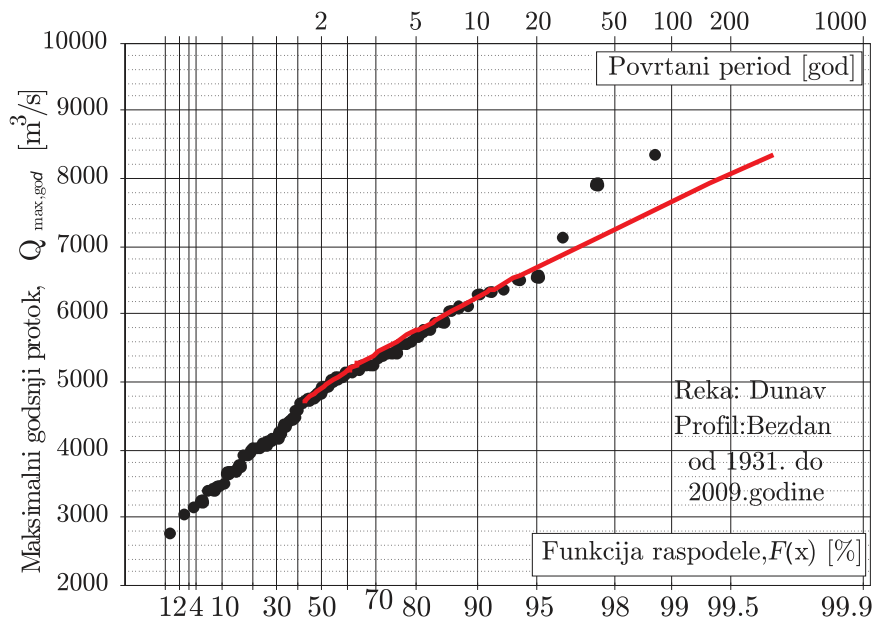
U Prilogu 37. data je tabela sa maksimalnim godišnjim protocima za h.s. Beždan na reci Dunav. Podaci su složeni na dva načina; hronološki i u neopadajući niz. Osnovne statistike su: obim uzorka  $N = 79$ , srednja vrednost  $Q_{\text{god,max,sr}} = 4903 \text{ m}^3/\text{s}$ , standardna devijacija  $S_{Q_{\text{god,max}}} = 1060 \text{ m}^3/\text{s}$ , koeficijent varijacije  $C_{v,\text{god,max}} = 0.2162$ , koeficijent asimetrije  $C_{s,\text{god,max}} = 0.6153$  i odnos koeficijenta asimetrije i koeficijenta varijacije je  $C_{s,\text{god,max}}/C_{v,\text{god,max}} = 2.84$ .

Na slici 5.70, na Vejbulovom papiru verovatnoće, prikazana je funkcija raspodele godišnjih maksimuma protoka za reku Dunav na h.s. Beždan (puna linija), na osnovu podataka osmatranja iz 79 godina (od 1931. do 2009. godine) dobijena primenom POT metode, za prethodno razmatrani bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ . U gornjem levom uglu papira verovatnoće dati su parametri modeliranih raspodela, diskretne negativno-binomne raspodele broja javljanja pikova i neprekidne Vejbulove raspodele visine pikova.

Pored Vejbulovog papira verovatnoće, na slici 5.71 ista teorijska funkcija raspodele po POT metodi prikazana je i na Gumbelovom papiru verovatnoće. Na Gumbelovom papiru verovatnoće su jasnije uočljive razlike između empirijske i teorijske funkcije raspodele u zoni velikih vrednosti kako funkcije raspodele  $F(x)$  tako i povratnog perioda izraženog u godinama. U ovom konkretnom slučaju, za bazu  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$  i izabranu kombinaciju diskretne raspodele broja javljanja pikova i neprekidne raspodele visine pikova, test statistika  $N\omega^2$  testa saglasnosti Kramer – Fon Mizesa sa vrednošću od 0.0371 može da izdraži izuzetno visoku  $p$  vrednost od 95%, što govori da model može uspešno da opiše zakon verovatnoće pojave maksimalnih godišnjih protoka za odabrani bazni protok od  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ .



Slika 5.70: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih protoka POT metodom, Reka: Dunav, Profil: Bezdan, bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , marker – empirijska raspodela, puna linija – teorijska raspodela, (papir Vejbulove raspodele).



Slika 5.71: Funkcija raspodele maksimalnih godišnjih protoka POT metodom, Reka: Dunav, Profil: Bezdan, bazni protok  $Q_B = 4700 \text{ m}^3/\text{s}$ , marker – empirijska raspodela, puna linija – teorijska raspodela, (papir Gumbelove raspodele). Test statistika testa saglasnosti Kramer Fon Mizesa iznosi  $N\omega^2 = 0.037$  što za obim od  $N=47$  članova koji se porede u empirijskoj i teorijskoj raspodeli daje  $p$  vrednost  $\approx 0.95$ .

---

# Glava 6

## Zaključno poglavlje

Velike vode na vodotocima predstavljaju značajan problem za naselja, privredu, komunikacije, poljoprivredu i ekološki status voda u ugroženim zonama. Pored maksimalnih protoka i nivoa, velike vode se mogu okarakterisati i zapreminama poplavnih talasa, zatim trajanjem vremenskih perioda tokom kojih su protoci poplavnih talasa veći od određene vrednosti, vremenskim trenucima pojave vršnih protoka, itd. Sve ove veličine se mogu predstaviti kao vremenski zavisni - stohastički slučajni procesi.

U ovom radu je pokazano da se informacije o strukturi pojave velikih voda mogu izvesti proučavanjem njihovih različitih karakteristika dobijenih iz dnevnih serija protoka. Te karakteristike predstavljaju slučajne veličine i može se izvršiti analiza njihove verovatnoća pojave. Iz osnovnih karakteristika mogu se oformiti agregacije (udruživanja) dve ili više njihovih uzastopnih vrednosti (dva ili više susednih pikova, vremena potrebnih da se ostvare tako udruženi pikovi, itd).

Karakteristike velikih voda razmatrane u radu su definisane preko različitih događaja koji se mogu opisati slučajnim procesima. Te karakteristike su razmatrane kroz:

- broj događaja u intervalu vremena ( $\nu$ ),
- trajanje ciklusa između dva, tri ili više uzastopnih događaja ( $\tau_1, \tau_2, \dots$ ),
- broj događaja u intervalima vrednosti karakteristike ( $n$ ),
- vrednosti karakteristike pri jednom, dva ili više uzastopnih događaja ( $x_1, x_2, \dots$ ),
- maksimalnu vrednost karakteristike u intervalu vremena ( $x_{\max; \overline{0}, t}$ ).

Ovi događaji su opisani familijama funkcija raspodela. U narednom odeljku daje se sinteza istraživanja u ovoj disertaciji, a zatim su date i preporuke za dalja istraživanja.

## 6.1 Presek istraživanja

Pored pika protoka, kroz disertaciju su obuhvaćene i zapremine i trajanja prekoračenja kao i vremenske karakteristike procesa definisanih nad ovim veličinama.

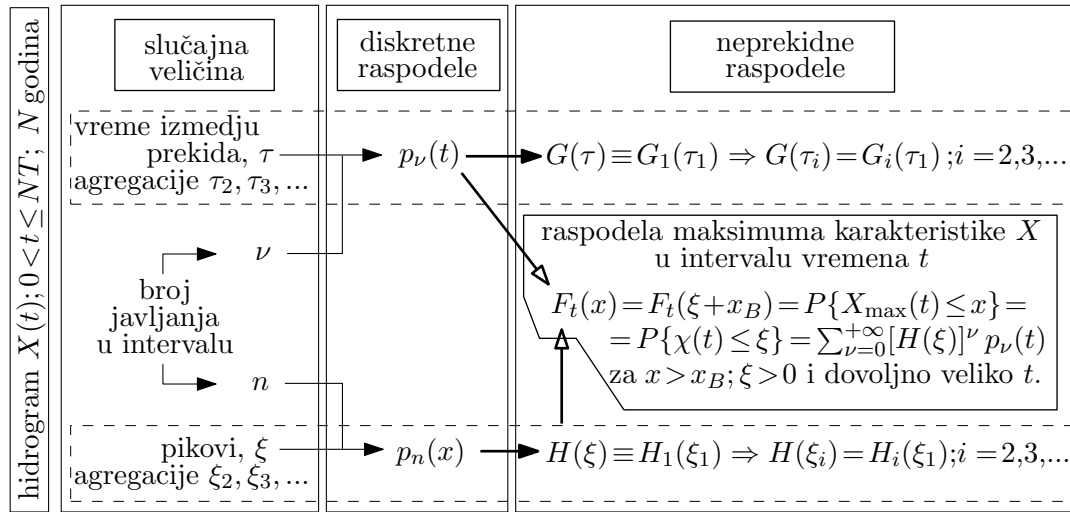
Pored osnovnih karakteristika ( $X$ ), proučavane su i njihove agregacije ( $X_2, X_3, \dots$ ), kao zbir više uzastopnih, sa namerom da se dođe do zakona njihove raspodele  $F_i(x)$  preko raspodele osnovne veličine  $F_1(x)$ .

Analizirajući broj javljanja prekida<sup>1</sup> u intervalu razmatrane veličine dobija se sistem jednačina, čije rešenje, na osnovu određenih pretpostavke dovodi do funkcije raspodele broja prekida. Ključne veličine za rešavanje ovih sistema su funkcije vremenskog intenziteta procesa  $\lambda(t, \nu)$  i zapreminskog intenziteta procesa  $\kappa(x, n)$ . Obe su funkcija karakteristike ( $t, x$ ) i broja javljanja u odgovarajućem intervalu ( $\nu, n$ ). Od oblika funkcije intenziteta direktno zavisi verovatnoća broja prekida u vremenskom intervalu  $\overline{0, t}$ . Iako su veoma važne, ključne, funkcije intenziteta nisu direktno osmotrive, već se o njihovom obliku zaključci donose na osnovu analize broja javljanja prekida na osmotrenim podacima. Zatim se vrše opravdane pretpostavke o njihovom obliku, a time i o stohastičkoj strukturi posmatrane veličine. Ovde su proučavana četiri oblika funkcija intenziteta procesa koja vode ka sledećim zakonima verovatnoće broja javljanja prekida; homogenom i nehomogenom Puasonovom zakonu, binomnom i negativnom binomnom (poglavljja 2.3 i 2.4).

Na slici 6.1 je prikazana šema povezanosti raspodela veličina koje su posmatrane kao karakteristike velikih voda. Napominje se da su zakoni verovatnoća agregiranih veličina traženi u funkciji osnovne veličine po najpogodnijem od predloženih modela funkcija intenziteta.

U poglavljima 2.5 i 2.6 redom su razmatrane teorijske osnove za proučavanje raspodele vremena za ostvarenje prekida i raspodele zapremina talasa velikih voda, kako za osnovne nizove veličina ( $G_1(\tau)$  i  $H_1(V)$ ) tako i za njihove agregacije ( $G_\nu(\tau)$  i  $H_n(V)$ ). Neke od kontinualnih raspodela pogodnih za vremena i zapremine koje po formi odgovaraju predloženim modelima funkcija intenziteta, opisane su u poglavlju 2.7 (eksponencijalna, Vejbulova i opšta Pareto). Zatim je u poglavlju 2.8 dat teorijski osvrt na formiranje raspodela maksimalnih godišnjih zapremina talasa velikih voda. Poglavlje 2.9 sadrži prikaz analogija u analizi trajanja talasa ( $d$ ) i trajanja ciklusa ( $\tau$ ) velikih voda i analize zapremina talasa velikih voda ( $V$ ). Kao posebna celina, glava 3 bavi se specijalnim slučajem primene metode pikova iznad praga za analizu maksimalnih godišnjih protoka. Glava 4 posvećena je karakteristikama ve-

<sup>1</sup>Prekid kod prekidnih slučajnih procesa je prepoznatljiv po skoku na trajektoriji procesa i koristi se za razdvajanje događaja vezanih za izabranu karakteristiku velikih voda.



Slika 6.1: Metodologija modeliranja stohastičke strukture karakteristika pikova protoka (maksimalnih lokalnih prekoračenja preko baze ili praga) i primena rezultata na analizu maksimalnih protoka u intervalu vremena  $(0, t]$ . Kada je interval jednak godinu dana,  $T$ , dobija se klasična metoda pikova iznad praga – POT za analizu raspodele maksimalnih godišnjih protoka.

likih voda koje se mogu dobiti iz serija pikova iznad praga. To su one definisane i klasifikovane. Objašnjen je i pojam njihove agregacije i praktična šema kako se formiraju iz osmotrenih nizova srednjih dnevnih protoka.

U glavi 5 je na konkretnom primeru izvršeno test modeliranje stohastičke strukture velikih voda. Radi ispitivanja postavljenih pretpostavki i predloženih metoda, za testiranje su korišteni podaci o srednjim dnevnim protocima sa hidrometrijske stanice Bezdan na reci Dunav koji obuhvataju period dužine 79 godina. Na njima su definisani slučajni procesi, a karakteristične veličine koje figurišu u tim procesima su formirane od parcijalnih serija za odabrane baze – pragove protoka  $Q_B$  i to su:  $V$  zapremine i  $d$  trajanja prekoračenja,  $\tau$  trajanja ciklusa – vremenski intervali između pojave prekida u procesu i  $\xi$  pikovi protoka – lokalni maksimumi prekoračenja preko baze.

Proučavanja broja javljanja prekida po vremenu  $p_\nu(t)$  pokazala su da i kod zapremina prekoračenja  $V$ , trajanja prekoračenja  $d$  i pikova protoka  $\xi$  negativna binomna raspodela predstavlja odgovarajuću diskretnu raspodelu broja javljanja. Prema njoj je i odabran odgovarajući rekurentni model raspodele trajanja ciklusa  $\tau$  u procesima. Model ima u funkciji intenziteta  $\lambda(t, \nu)$  nezavisne činioce koji zavise od vremena  $t$  i broja javljanja  $\nu$  ( $\lambda(t, \nu) = \lambda_1(t)\lambda_2(\nu)$ ). Vremenski činilac  $\lambda_1(t)$  se posmatra kroz odgovarajuću integralnu veličinu  $\Lambda_1(t)$  sa oblikom koji odgovara Vejbulovoj raspodeli za niz  $\tau$ . Činilac koji zavisi od broja javljanja podrazumeva konstantnu vrednost pa-



rametra diskretne raspodele, što su analize podataka pokazale da nije slučaj. Stoga je urađeno fitovanje konstantnog parametra (u realnom opsegu vrednosti parametra) na način da se postigne najbolja moguća saglasnost agregacije 2 ( $\tau_2$ ) sa teorijskom raspodelom po modelu za istu agregaciju  $G_2(\tau)$ . Pokazalo se da ovaj pristup može biti veoma upotrebljiv, jer iako je slaganja rađeno na nivou agregacije 2, slaganja su dobra i na drugim nivoima (koji su ovde probani). Međutim, to kompromituje pretpostavku o modelu, a i znatno usložnjava pristup problemu.

Proučavanja broja javljanja zapremina prekoračenja  $V$  po zapreminskim koracima  $p_n(x)$  pokazala su da je odgovarajuća diskretna raspodela za niže zapreminske korake ( $\leq 10^6 \text{ m}^3$ ) Puasonova, a za veće ( $\geq 10^7 \text{ m}^3$ ) negativna binomna. Primenjen je rekurentni model raspodele zapremina prekoračenja  $V$  u procesima sa usvojenom Puasonovom raspodelom broja javljanja. Model ima funkciju intenziteta  $\varkappa(x)$ , odnosno njoj odgovarajuću integralnu veličinu  $\mathcal{K}(x)$  koja odgovara Vejbulovoj raspodeli (njom se fituje osnovni niz  $V$ ,  $(H_1(x))$ ).

Testiranje saglasnosti odgovarajućih empirijskih i teorijskih raspodela dalo je skromne rezultate u posmatranom primeru (za bazni protok  $5100 \text{ m}^3/\text{s}$ ); osnovni niz i druga agregacija su prošli test saglasnosti, dok treća agregacija nije. Objašnjenje za ovo leži u načinu formiranja niza zapremina prekoračenja, velikom opsegu njihovih vrednosti (povlači značajnu asimetriju) i promenljivom tipu diskretne raspodele broja javljanja. Tako je došlo do velikog ublažavanja potrebnih kriterijuma, što dovodi u sumnju upotrebljivost modela za analizu zapremina.

Analiza broja javljanja trajanja prekoračenja  $d$  po vremenskim koracima  $p_n(x)$  pokazala je da je binomna raspodela odgovarajuća diskretna raspodela za broj javljanja. Za analizu raspodele trajanja prekoračenja i njegovih agregacija (ovde su analizirani nivoi 2 i 3) korišćen je rekurentni model sa binomnom raspodelom broja javljanja trajanja prekoračenja  $d$  po vremenskim koracima trajanja, a za  $\mathcal{K}(x)$  (integral vremenskog činioca funkcije intenziteta,  $\varkappa(t)$ ) oblik koji odgovara Vejbulovoj raspodeli kojom je fitovan osnovni niz  $d$ .

Slično slučaju sa zapreminama prekoračenja i ovde je usvojen rekurentni model kod koga je funkcija intenziteta procesa sa nezavisnim činiocima sa brojem javljanja i vremenskim uticajem. Činilac sa brojem javljanja podrazumeva da je vrednost parametra  $b$  konstantna za bilo koji korak po vremenu. Pošto je utvrđeno da je promenljiv, zamenjujući konstantan koeficijent je tražen modifikacijom postupka tako što je fitovan model  $H_2$  tako da test saglasnosti Kramer Fon Mizesa da najbolje slaganje teorijskog i empirijskog  $H_2$ .

Ovde se javio problem u fitovanju  $H_2$  što  $p$  vrednost testa saglasnosti minimal-

nim intenzitetom konstantno raste sa povećanjem vrednosti fitovanog parametra ka nerealno velikim vrednostima parametra. Zato je ovde primenjena modifikacija procesa traženja parametra kojom se pratilo slaganje i za  $H_3$  teorijsko i empirijsko. Odabir parametra je izvršen u zoni gde  $p$  vrednost za  $H_3$  dostiže maksimum. U toj zoni  $p$  vrednosti za  $H_1$  i  $H_2$  iskazane u procentima već imaju stabilne vrednosti zaokružene na decimalu. Stoga model u originalnoj formi nije direktno primenljiv, već uz modifikacije određivanja parametra u funkciji intenziteta javljanja u nezavisnom činiocu koji obračunava uticaj broja javljanja  $n$ .

Analiza verovatnoće broja javljanja pikova protoka  $\xi$  po koracima protoka  $p_n(x)$ , kao u prethodnom pomenutim trajanjima prekoračenja, pokazala su pogodnost primene binomne raspodele. Za analizu raspodele pikova protoka i njegovih agregacija (ovde su analizirani nivoi od 2 do 5) korišćen je rekurentni model sa binomnom raspodelom broja javljanja pikova protoka  $\xi$  po koracima protoka, dok je za  $\mathcal{K}(x)$  usvojen oblik koji odgovara Vejbulovoj raspodeli za  $H(x)$ . Slično kao u prethodnom slučaju, utvrđeno je da je parametar modela promenljiv, a zamenjujući konstantan je dobijen modifikacijom postupka fitovanjem funkcija  $H_2$  da se po testu saglasnosti Kramer Fon Mizesa da najbolje slaganje teorijskog i empirijskog  $H_2$ . Ovde je dobijeno veoma zadovoljavajuće slaganje.

\* \* \*

Opšti zaključak bi bio da se prilikom modeliranja stohastičke strukture karakteristika velikih voda na podacima dobijenim iz serija pikova iznad praga broj javljanja karakteristika velikih voda po koracima u vrednosti karakteristike može uspešno modelovati diskretnim raspodelama (binomnom, Puasonovom i negativno binomnom). U zavisnosti od posmatrane karakteristike i izabrane veličine koraka za analizu broja javljanja, tip raspodele može biti konzistentan, da odstupa povremeno ili da prvo bude jednog tipa pa zatim drugog. Ovo je svakako posledica više uzroka. Jedan je što radimo sa relativno ograničenim nizom podataka dnevno osrednjenih podataka. Drugi je što je u pitanju prirodni proces koji se osmatra relativno kratko, što u primeru koji je prikazan u disertaciji predstavlja jednu veliku trajektoriju procesa na celom opsegu od 79 godina ili 79 sukcesivnih godišnjih trajektorija. Izbor baze ovde nije posebno analiziran, mada je zaključak da baza mora biti dovoljno visoka, da bi eliminisala asimetriju podataka (i time neke možda neprimerene vrednosti), a da opet ima statistički dovoljan obim kako bi se formirale željene agregacije i obezbedila analiza.

Za raspodele samih pikova predloženi su modeli koji na osnovu analize broja ja-

vljanja po koracima u vrednosti karakteristike treba da daju rekurentnu vezu između raspodele osnovnog niza karakteristike i njenih agregacija - udruživanja po dve, tri, ili više. Analitička matematska formulacija moguća je pod određenim pretpostavkama. Ovde je pokazano da te pretpostavke, u pojedinim slučajevima nije moguće ostvariti. Zato su uvedeni postupci da se model kalibriše tako da se pored osnovnog niza koristi i druga agregacija. Ovim se odstupa od prvobitne ideje jednostavnog zaključivanja o raspodelama viših agregacija na osnovu osnovnog niza, pošto se postupak usložnjava. Međutim i na ovaj način formirani modeli (iako sa može se reći veštačkim parametrima, a ne iz analize broja javljanja karakteristike po koracima u vrednosti karakteristike) imaju svoju upotrebljivost.

## 6.2 Predlozi za dalja istraživanja

Tokom rada na izradi disertacije otvorila su se mnoga pitanja. Većina njih prevazilazi obim predviđenih istraživanja, ali zaslužuju da budu pomenuta jer je očigledana njihova važnost za postizanje još sveobuhvatnijeg sagledavanja stohastičke strukture velikih voda. Ovde se navode samo neka od njih.

U disertaciji se prikazuje jedan stohastički model proučavanja karakteristika velikih voda na podacima dobijenim iz serija pikova iznad praga. Posmatraju se karakteristike i njihove agregacije. Rezultati analize su u obliku funkcija raspodela diskretnih i kontinualnih veličina. Odatle proističe logična potreba da se u nekom budućem vremenu ocene neizvesnosti u analizi rizika od velikih voda pod pretpostavkom da prikazani stohastički model odgovara fizičkom modelu, a da praktično celokupna neizvesnost potiče od neizvesnosti u oceni parametara. Značajan doprinos u ovoj oblasti, u primeni klasične metode pikova za analizu maksimalnih godišnjih protoka, dat je u doktorskoj disertaciji J.Plavšić (2004).

Proučavane su karakteristike velikih voda na kojima se definišu različiti događaji koji se mogu opisati slučajnim procesima, kako je to navedeno u prvom delu ovog zaključnog poglavlja. Što se tiče zapremina prekoračenja, pojavila se kao interesantna ideja da bi bilo od interesa proučiti, na osnovu predloženog stohastičkog modela, i raspodelu sumarnih zapremina prekoračenja u izabranom intervalu vremena. Od posebnog interesa bi bilo doći do ove raspodele na godišnjem nivou.

Prilikom prikaza primene klasične metode pikova na analizu zakona raspodele maksimalnih godišnjih protoka, navedeni su neki od kriterijuma za utvrđivanje nezavisnosti pikova. U pitanju je dakle utvrđivanje da li je došlo do superpozicije dva ili više talasa iz odgovarajućih dva ili više događaja koji su ih izazvali. Prilikom

formiranja niza slučajne promenljive koja predstavlja zapreminu prekoračenja preko praga u proučavanjima u ovoj disertaciji nije vođeno računa o poreklu vode u talasu prekoračenja. Tako se dešavalo da za određeni opseg baznih protoka dođe do pojave velikog broja malih zapremina talasa prekoračenja. To za posledicu ima značajnu asimetriju zapremina, a s tim i uticaj na parametar oblika modela raspodele. Svakako bi bilo značajno da se u budućnosti deo istraživanja usmeri na tretman malih zapremina prekoračenja u odgovarajućim nizovima.

Prilikom preliminarnih istraživanja, testiranje metodologije je izvršeno i na hidrogramima srednjih dnevnih protoka na hidrometrijskim profilima koji imaju relativno malu slivnu površinu, odnosno gde je brz odogovor sliva na uzroke formiranja talasa velikih voda. Tada je potrebna mnogo finija vremenska rezolucija kada je u pitanju proučavanje zapreminskih karakteristika velikih voda. Neka buduća istraživanja mogla bi da idu u smeru obezbeđivanja odgovarajućih podataka (profili sa limnigrafom i hidrogrami visoke vremenske rezolucije) i testiranja metode na takvim podacima. Što se tiče proučavanja pikova protoka, ovo pitanje nije od suštinskog značaja.

\* \* \*

Analiza velikih voda sastavni je deo postupaka koji se sprovode u vodoprivrednim i hidrotehničkim aktivnostima. Kroz proračun merodavnih vrednosti karakteristika velikih voda omogućava se procena šteta i rizika, kao i planiranje i projektovanje mera, objekata i sistema za zaštitu od vodom izazvanih problema kao što su poplave, aktiviranje klizišta, erozija tla, itd. Jasno je da postoji nedvosmislen uticaj rezultata analize velikih voda na predviđene aktivnosti za suočavanje sa mogućim posledicama njihovog nepovoljnog dejstva. Svaka mogućnost da se iz raspoloživog fonda podataka izvuče maksimum informacija o velikim vodama omogućava da se sagledaju ograničenja projektovanih objekata, da se postignu bolja tehnička rešenja na postojećim i budućim objektima, odnosno da se sigurnije i bezbednije živi u uslovima ugroženosti velikim vodama.

---

# Bibliografija

- Akram, M., Hayat, A. (2004), Comparison of estimators of the Weibull distribution, Financial Econometrics Series SWP 2012/4, Faculty of Business and Law, School of Accounting, Economics and Finance, Deakin University, VIC 3125.
- Ashkar, F. (1980), Partial duration series models for flood analysis, Doktorska disertacija, Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal.
- Ashkar, F., Rousselle, J. (1982), A multivariate statistical analysis of flood magnitude, duration and volume, u V. Singh, ed., „Statistical analysis of Rainfall and Runoff”, pp. 651–668.
- Ashkar, F., Rousselle, J. (1983), „The effect of certain restrictions imposed on the interarrival times of flood events on the Poisson distribution used for modeling flood counts”, *Water Resources Research* 19(2), 481–485.
- Ashkar, F., Rousselle, J. (1989), „Partial duration series modeling under the assumption of a poissonian flood count”, *Journal of Hydrology* 90(0), 134–144.
- Ashkar, F., Tatsambon, C. N. (2007), „Revisiting some estimation methods for the generalized pareto distribution”, *Journal of Hydrology* 346(0), 136–146.
- Bernier, J. (1967), „Sur la théorie du renouvellement et son application en hydrologie”, *Electricite de France* HYD.67(10).
- Birikundavyi, S., Rousselle, J. (1997), „Use of partial duration series for single-station and regional analysis of floods”, *Journal of Hydrologic Engineering - ASCE* 2(2), 68–75.
- Borgman, L. (1963), „Risk criteria”, *ASCE Journal of Waterways Harbours Division* 89, 1–9.
- Calenda, G., Petaccia, A., Togna, A. (1977), „Theoretical probability distribution of critical hydrologic events by partial-duration series method”, *Journal of Hydrology* 33, 233–245.
- Chiang, S. (1975), „Prediction of flood volume from small humid region watersheds”, *Journal of Hydraulic Division ASCE* 101(HY7), 817–828.

- 
- Choulakian, V., El-Jabi, N., Moussi, J. (1990), „On the distribution of flood volume in partial duration series analysis of flood phenomena”, *Stochastic Hydrology and Hydraulics* 4(3), 217–226.
- Correia, F. (1987), Multivariate partial duration series in flood risk analysis, u V. Singh, ed., „Hydrologic frequency modelling”, pp. 541–554.
- Cunnane, C. (1973), „A particular comparison of annual maxima and partial duration series methods of flood frequency prediction”, *Journal of Hydrology* 18, 257–271.
- Cunnane, C. (1979), „A note to poisson assumption in partial duration series models”, *Water Resources Research* 15(2), 489–494.
- Cunnane, C. (1989), Statistical distribution for flood frequency analysis, Technical Report Operational Hydrology Report No 33, World Meteorological Organization.
- Darlymple, T. (1960), *Flood Frequency Analysis*, Vol.No 1534A of *Water Supply Paper*, US Geological Survey.
- Davidson, A., Smith, R. (1990), „Models for exceedances over high thresholds”, *Stochastic Hydrology and Hydraulics* 52, 393–442.
- Despotović, J. (1996), Analiza jakih kiša kao uzročnika poplava pomoću slučajnih procesa, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd.
- EFAS (2003–), „European Commission Joint Research Centre – The **E**uropean **F**lood **A**lert **S**ystem”.  
URL: <http://efas-is.jrc.ec.europa.eu/>
- EU FD (2007), „The EU floods directive”, (OJ L288).  
URL: [ec.europa.eu/environment/water/flood\\_risk/index.html](http://ec.europa.eu/environment/water/flood_risk/index.html)
- EU WFD (2000), „The EU water framework directive - integrated river basin management for Europe”, (OJ L327).  
URL: [ec.europa.eu/environment/water/water-framework/index\\_en.html](http://ec.europa.eu/environment/water/water-framework/index_en.html)
- Fitzgerald, D. (1989), „Single station and regional analysis of daily rainfall extreme”, *Stochastic Hydrology and Hydraulics* 3, 878–881. Published by American Statistical Association and American Society for Quality.
- FRIEND (1984–), „**F**low **R**egimes from **I**nternational **E**xperimental and **N**etwork **D**ata”, UNESCO.  
URL: <http://typo38.unesco.org/fr/aboutihp/ihppartners/friend.html>
- Giles, D. E., Feng, H. (2009), Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the Generalized Pareto distribution, Technical report, Univeristy of Victoria, Department of Economics, Victoria, B.C., Canada V8W 2Y2.

- 
- Gustard, A., i saradnici (1993), Friend97regional hydrology: Concepts and models for sustainable water resource management, u „Extreme Hydrological Events: Precipitation, Floods and Droughts”, IAHS Publ. No. 246. Proceedings of the Postojna Conference.
- Hosking, J. R. M., Wallis, J. R. (1987), „Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution”, *Technometrics* 29(3), 339–349. Published by American Statistical Association and American Society for Quality.
- Hoyois, P., Guha–Sapir, D. (2003), Three decades of floods in Europe: a preliminary analysis of emdat data, Technical report, working paper (draft), CRED, Brussels.
- Institute for Hydrology (1975), *Flood Studies Report*, Vol. - total 5 volumes, Natural Environment Research Council, London, Wallingford, Oxfordshire, UK.
- Institute for Hydrology (1999), *Flood Estimation Handbook*, Vol. - total 5 volumes, Natural Environment Research Council, London, Wallingford, Oxfordshire, UK.
- Interagency Advisory Committee on Water Data (1982), *Guidelines for Determining Flood Flow Frequency – Bulletin 17B*, fifth edn, USGS - Office of Surface Water, Reston, Virginia.  
URL: [http://water.usgs.gov/osw/bulletin17b/bulletin\\_17B.html](http://water.usgs.gov/osw/bulletin17b/bulletin_17B.html)
- Irvine, K., Waylen, P. (1986), „Partial series analysis of high flows in Canadian rivers”, *Canadian Water Resources Journal* 11(20), 83–91.
- Javelle, P., Sauquet, E., Grésillon, J.-M. (2002), Describing actual and future flood hydrological regimes, u „Third Inter-Celtic Colloquium on Hydrology and Management of Water Resources Celtic Water in a European Framework: Pointing the way to quality”, pp. 270–280. National University of Ireland, Galway (Ireland).
- Jevremović, V. (1999), *Verovatnoća i statistika*, prvo edn, Građevinski fakultet , Krug, Beograd.
- Konecny, F., Nachtnebel, H. (1985), „Extreme values processes and the evaluation of risk”, *Applied Mathematical Modelling* 9, 11–15.
- Kottegoda, N. T., Rosso, R. (2008), *Applied Statistics for Civil and Environmental Engineers*, second edn, Blackwell Publishing Ltd, UK. Prev.ed. published as: *Statistics, probability, and reliability for civil and environmental engineers*. New York, McGraw-Hill, 1997.
- Kundzewicz, Z. W., Pińskwar, I., Brakenridge, G. R. (2013), „Large floods in europe, 1985-2009”, *Hydrological Sciences Journal* 58(1), 1–7.
- Lang, M., Ouarda, T. B., Bobée, B. (1999), „Towards operational guidelines for over threshold modeling”, *Journal of Hydrology* 225(3), 103–117.
- Langbein, L. (1949), „Annual floods and the partial duration series”, *American Geophysical Union Transactions* 30, 878–881.

- 
- Lehner i saradnici, B. (2006), „Estimating the impact of global change on flood and drought risks in europe: A continental, integrated analysis”, *Climatic change* 75, 273–299.
- Madsen, H., Rosbjerg, D. (1997), „The partial duration series method in regional index-flood modeling”, *Water Resources Research* 33(4), 771–781.
- Mališić, J. (1975), *Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primerima*, drugo edn, IP Gradjevinska knjiga, Beograd.
- MEDHYCOS (1995–), „Mediterranean hydrological cycle observing system”, WMO, kao deo regionalne implementacije programa WHYCOS - World Hydrological Cycle Observing System.  
URL: <http://medhycos.mpl.ird.fr/>
- Mihailović, A., Urošev, M., Milijašević, D. (2010), „Poplave u Srbiji u periodu 1999–2009. godina - hidrološka analiza i mere zaštite od poplava”, *Glasnik Srpskog geografskog društva* XC(1), 93–121.
- Miquel, J. (1984), *Guide pratique d'estimation des probabilités de crue*, number 53 in „Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricit de France”, Eyrolles.
- Naden, P., Bayliss, A. (1993), Flood estimation: peak-over-threshold techniques, u „MAFF Conf. of RIVER and Coastal Engineering”, pp. 9.1.1–9.1.18.
- National Committee on Water Engineering (1987. revised 1998), *ARR – Australian Rainfall and Runoff*, Engineers Australia.  
URL: <http://www.arr.org.au/>
- North, M. (1980), „Time-dependent stochastic model of floods”, *Journal of Hydraulic Division* 106(HY5), 649–665.
- Ouarda, T., Girard, C., Cavadias, G., Bobée, B. (2000), „Regional flood peak and volume estimation in a northern Canadian Basin”, *Journal of Cold Regions Engineering* 14(5-6), 176–191.
- Plavšić, J. (2004), Analiza rizika od poplava pomoću prekidnih slučajnih procesa, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd.
- Plavšić, J. (2006), Uncertainty in flood estimation by partial duration series, u E. Ferrari, P. Versace, eds, „Proceedings of 1st International Workshop on Hydrologic Extremes”, Cosenza, Italy, pp. 135–148.
- Rasmussen, P., Rosbjerg, D. (1989), „Risk estimation in partial duration series”, *Water Resources Research* 25, 2319–2330.
- Rasmussen, P., Rosbjerg, D. (1991a), „Evaluation of risk concepts in partial duration series”, *Stochastic Hydrology and Hydraulics* 5, 1–16.



- 
- Rasmussen, P., Rosbjerg, D. (1991*b*), „Prediction uncertainty in seasonal partial duration series”, *Water Resources Research* 27, 2875–2883.
- Rosbjerg, D. (1977), „Return periods of hydrological events”, *Nordic Hydrology* 8, 57–61.
- Rosbjerg, D. (1985), „Estimation in partial duration series with independent and dependent peak values”, *Journal of Hydrology* 76, 183–195.
- Rosbjerg, D. (1987*a*), „On the annual maximum distribution in dependent partial duration series”, *Stochastic Hydrology and Hydraulics* 1, 3–16.
- Rosbjerg, D. (1987*b*), Partial duration series with log-normal distributed peak values, u V. Singh, ed., „Hydrologic Frequency Modelling”, pp. 117–129.
- Rosbjerg, D., Madsen, H., Rasmussen, P. (1992), „Prediction in partial duration series with generalized Pareto-distributed exceedances”, *Water Resources Research* 28, 3001–3010.
- Rosbjerg, D., Rasmussen, P., Madsen, H. (1991), Modelling of exceedances in partial duration series, u „International Hydrology and Water Resources Symposium, Perth”, IAHS Publ. no. 213, pp. 755–760. Proceedings of the Perth Symposium.
- Rosbjerg, D., Madsen, H. (1992), On the choice of threshold level in partial duration series, u „XVII Nordic Hydrological Conference, Alta, Norway”, pp. 604–615.
- Rosbjerg, D., Madsen, H. (2004), Advanced approaches in PDS/POT modelling of extreme hydrological events, u „Hydrology: Science & Practice for 21<sup>st</sup> Century”, Vol. I, British Hydrological Society.
- Rousselle, J., Hindie, F. (1976), „Incertitude dans les debits de crues: Approche bayesienne”, *Journal of Hydrology* 30, 341–349.
- Shane, R., Lynn, W. (1964), „Mathematical model for flood risk analysis”, *ASCE Journal of Hydraulic Division* 90, 1–20.
- Singh, V. P., Guo, H. (1997), „Parameter estimation for 2-parameter generalized Pareto distribution by pome”, *Stochastic Hydrology and Hydraulics* (11), 211–227. Published by Springer-Verlag.
- Smith, R. (1990), Extreme value theory, u S. V. W. Ledermann, E. Lloyd, C. Alexander, eds, „Handbook of Applicable Mathematics Supplement, Chapter 14”, Vol. 7, John Wiley, Chichester, pp. 437–472.
- Sutcliffe, J. (1978), „Methods of flood estimation: a guide to the flood studies report”, Wallingford, Institute of Hydrology, 50pp. (IH Report No.49).
- Tanaka, S., Takara, K. (2002), A study on threshold selection in pot analysis of extreme floods, u „The Extremes of the Extremes: Extraordinary Floods”, IAHS Publ. no. 271, pp. 299–304. Proceedings of a symposium held at Reykjavik, Iceland, July 2000.

- 
- Teasombut, V., Yevjevich, V. M. (1978), Use of partial flood series for estimating distribution of maximum annual flood peak, Hydrology Paper 97, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Todorović, P. (1970), „On some problems involving random numbers of random variables”, *Annals of Mathematical Statistics* 41(3), 1059–1063.
- Todorović, P. (1978), „Stochastics models for floods”, *Water Resources Research* 14(2), 345–356. May 1980.
- Todorović, P., Rousselle, J. (1971), „Some problems of flood analysis”, *Water Resources Research* 7(5), 1144–1150.
- Todorović, P., Woolisher, D. (1972), „On the time when the extreme flood occurs”, *Water Resources Research* 8(6), 1433–1438.
- Todorović, P., Zelenhasić, E. (1969), Stochastic process of precipitation, Hydrology Paper 42, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Todorović, P., Zelenhasić, E. (1970), „A stochastic model for flood analysis”, *Water Resources Research* 6(6), 1641–1648.
- Van Lanen, H., Demuth, S., eds (2002), *FRIEND2002 Regional Hydrology: Bridging the Gap between Research and Practice*, Vol. IAHS Publ. 274.
- Van Montfort, M. A., Otten, A. (1991), „The first and the second E of the extreme value distribution EV1”, *Stochastic Hydrology and Hydraulics* 5(1), 69–76.
- Van Montfort, M., Witter, J. (1986), „The generalized Pareto distribution applied to rainfall depths”, *Hydrological Sciences Journal* 31, 151–162.
- Vukmirović, V. (1975), Analiza kretanja vučenog nanosa pomoću slučajnih procesa, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd.
- Vukmirović, V. (1990), *Analiza verovatnoće pojave hidroloških veličina*, Građevinski fakultet i Naučna knjiga, Beograd.
- Vukmirović, V. (1995), „Analysis of maxima using renewal processes”, Méthodes statistiques et approches bayésiennes en hydrologie, Medjunarodna konferencija u čast J. Berniera, UNESCO, Paris.
- Vukmirović, V. (2010), „Analiza kiša metodom parcijalnih serija”, *Vodoprivreda* (243–245), 7–15.
- Vukmirović, V., Petrović, J. (1997a), Flood flow analysis using renewal processes, u „Technical Documents in Hydrology, No. 11”, Annual FRIEND-AMHY meeting, Thessaloniki, pp. 159–169.
- Vukmirović, V., Petrović, J. (1997b), Peaks over threshold method for low flows analysis, u „Technical Documents in Hydrology, No. 11”, Annual FRIEND-AMHY meeting, Thessaloniki, pp. 105–113.

- 
- Wang, Q. (1991), „The POT model described by the generalized Pareto distribution with poisson arrival rate”, *Journal of Hydrology* 129, 263–280.
- Wang, Q. (1996), „Direct sample estimators of L moments”, *Water Resources Research* 32(12), 3617–3619.
- WATCH (2007–2011), „Water and global change”, EU FP6 program.  
URL: <http://www.eu-watch.org/>
- Waylen, P., Woo, M. (1983), „Stochastic analysis of high flows in some central British Columbia rivers”, *Canadian Journal of Civil Engineering* 10(2), 639–648.
- WMO - No.168 (1994), *Guide to Hydrological Practices*, fifth edn, Secretariat of The World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- WMO - No.233 TP.126 (1969), *Technical note No. 98 – Estimation of Maximum Floods*, Secretariat of The World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland.
- Yue, S., Ouarda, T., Bobée, B., Legendre, P., Bruneau, P. (1999), „The Gumbel mixed model for flood frequency analysis”, *Journal of Hydrology* (226), 88–100.
- Zakon o vodama* (2010), Službeni glasnik RS br.30/2010.
- Zelenhasić, E. (1970), Theoretical probability distribution for flood peaks, Hydrology Paper 42, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Zelenhasić, E. (1997), *Stohastička hidrologija*, Pan-merkur, Novi Sad.
- Zelenhasić, E., Ruski, M. (1991), *Inženjerska hidrologija*, Naučna knjiga, Beograd.

---

# Prilozi

1. Statistike zapremine  $V$  prekoračenja preko praga - osnovni niz,  $V_1$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdan

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_1$	sr. vred. $V_{1,sr}$	st. dev. $S_{V_1}$	koeficijenti		$C_{S_{V_1}}/C_{V_{V_1}}$
				varijacije $C_{V_{V_1}}$	asimetrije $C_{S_{V_1}}$	
$[10^6 m^3]$	$[-]$	$[10^6 m^3]$	$[10^6 m^3]$	$[-]$	$[-]$	$[-]$
4440	123	601.4	1621.2	2.696	8.757	3.248
4500	110	613.8	1644.3	2.679	8.430	3.147
4600	104	557.2	1587.9	2.850	8.328	2.922
4700	91	546.1	1583.5	2.900	7.944	2.739
4800	81	525.2	1522.6	2.899	7.542	2.601
4900	71	513.7	1485.0	2.891	7.136	2.468
5000	65	481.6	1469.9	3.052	6.940	2.274
5100	57	474.1	1479.3	3.120	6.647	2.130
5200	44	535.5	1580.5	2.952	5.946	2.015
5300	36	573.1	1642.1	2.865	5.450	1.902
5400	31	585.8	1664.8	2.842	5.106	1.797
5500	25	643.3	1733.0	2.694	4.634	1.720
5600	21	679.4	1767.2	2.601	4.279	1.645
5700	18	703.4	1780.5	2.531	3.984	1.574
5800	16	703.6	1759.0	2.500	3.766	1.506
5900	13	769.2	1803.2	2.344	3.408	1.454
6000	13	682.9	1679.6	2.460	3.405	1.384
6100	12	656.5	1617.7	2.464	3.270	1.327
6200	10	699.1	1625.8	2.326	2.982	1.282
6300	10	618.4	1495.0	2.418	2.977	1.231
6400	7	784.9	1480.0	1.886	2.460	1.305
6500	7	699.7	1371.8	1.961	2.465	1.257
6600	5	872.1	1457.3	1.671	2.079	1.244
6700	5	777.4	1340.1	1.724	2.075	1.204
6800	4	861.0	1341.4	1.558	1.834	1.177
6900	4	759.7	1217.1	1.602	1.832	1.144
7000	3	893.1	1216.4	1.362	1.550	1.138
7150	2	1091.2	1121.7	1.028		

2. Statistike zapremina prekoračenja preko praga - agregacija 2,  $V_2$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdan

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_2$	sr. vred. $V_{2,sr}$	st. dev. $S_{V_2}$	koeficijenti		$C_{S_{V_2}}/C_{V_{V_2}}$
				varijacije $C_{V_{V_2}}$	asimetrije $C_{S_{V_2}}$	
$[10^6 m^3]$	$[-]$	$[10^6 m^3]$	$[10^6 m^3]$	$[-]$	$[-]$	$[-]$
4440	61	1190.7	2362.0	1.984	6.144	3.097
4500	55	1227.6	2297.4	1.872	5.983	3.197
4600	52	1114.4	2270.1	2.037	5.979	2.935
4700	45	1081.8	2250.7	2.080	5.778	2.777
4800	40	1041.0	2176.0	2.090	5.329	2.549
4900	35	1019.4	2038.6	2.000	5.114	2.558
5000	32	956.7	2069.0	2.163	4.897	2.264
5100	28	943.5	2073.2	2.197	4.658	2.120
5200	22	1071.0	2171.9	2.028	4.231	2.086
5300	18	1146.3	2267.6	1.978	3.747	1.894
5400	15	1185.8	2301.6	1.941	3.576	1.842
5500	12	1314.1	2513.7	1.913	3.268	1.709
5600	10	1401.4	2551.8	1.821	2.991	1.643
5700	9	1406.8	2501.9	1.778	2.815	1.583
5800	8	1407.1	2462.1	1.750	2.623	1.499
5900	6	1648.5	2587.2	1.569	2.235	1.424
6000	6	1467.8	2412.6	1.644	2.223	1.352
6100	6	1313.0	2216.0	1.688	2.287	1.355
6200	5	1398.1	2199.2	1.573	2.089	1.328
6300	5	1236.7	2024.7	1.637	2.078	1.269
6400	3	1552.9	2211.0	1.424	1.730	1.215
6500	3	1383.0	2061.7	1.491	1.732	1.162
6600	2	1848.5	2434.6	1.317		
6700	2	1646.8	2215.3	1.345		
6800	2	1722.0	1630.0	0.947		
6900	2	1519.3	1475.4	0.971		
7000	1	2293.1	0.0	0.000		
7150	1	2182.5	0.0	0.000		

3. Statistike zapremine prekoračenja preko praga - agregacija 3,  $V_3$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdan

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_3$	sr. vred. $V_{1,sr}$	st. dev. $S_{V_1}$	koeficijenti		$C_{SV_3}/C_{V_{V_1}}$
				varijacije $C_{V_{V_3}}$	asimetrije $C_{SV_3}$	
$[10^6 m^3]$	$[-]$	$[10^6 m^3]$	$[10^6 m^3]$	$[-]$	$[-]$	$[-]$
4440	41	1804.2	2758.9	1.529	5.304	3.468
4500	36	1839.7	2784.9	1.514	5.149	3.402
4600	34	1663.8	2782.7	1.672	4.819	2.881
4700	30	1622.7	2742.8	1.690	4.620	2.733
4800	27	1575.5	2636.2	1.673	4.405	2.632
4900	23	1547.0	2592.7	1.676	4.039	2.410
5000	21	1454.7	2430.4	1.671	4.149	2.484
5100	19	1422.4	2478.2	1.742	3.677	2.111
5200	14	1644.9	2670.3	1.623	3.191	1.965
5300	12	1719.4	2649.6	1.541	3.153	2.046
5400	10	1778.6	2736.7	1.539	2.849	1.852
5500	8	1971.2	2866.8	1.454	2.546	1.751
5600	7	2038.1	3108.9	1.525	2.473	1.621
5700	6	2110.2	3107.7	1.473	2.214	1.504
5800	5	2221.0	3140.3	1.414	1.906	1.348
5900	4	2472.8	3002.3	1.214	1.683	1.386
6000	4	2201.7	2813.1	1.278	1.668	1.306
6100	4	1969.5	2583.4	1.312	1.771	1.350
6200	3	2323.9	2727.6	1.174	1.324	1.128
6300	3	2060.1	2499.6	1.213	1.314	1.083
6400	2	2329.3	2911.7	1.250		
6500	2	2074.5	2661.3	1.283		
6600	1	3600.3	0.0	0		
6700	1	3222.7	0.0	0		
6800	1	2919.5	0.0	0		
6900	1	2583.4	0.0	0		
7000	1	2679.3	0.0	0		
7150	0					

4. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za zapremine prekoračenja preko praga - agregacije 1, 2 i 3, ( $V_1, V_2, V_3$ ).  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdan.

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Vejbul 2		$p_{W_2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	M	$\xi_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[m <sup>3</sup> /s] ·10 <sup>6</sup>	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s] ·10 <sup>6</sup>	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s] ·10 <sup>6</sup>	[%]	[%]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
V <sub>1</sub> - agregacija 1												
4440	123	601.39	0.0	0	0.6074	383.85	96	94	-0.7161	225.27	20	29
4500	110	613.78	0.0	0	0.6733	430.39	49	74	-0.6087	259.69	58	61
4600	104	557.18	0.0	0	0.5941	338.02	97	93	-0.7837	184.74	32	35
4700	91	546.06	0.0	0	0.6093	336.09	85	79	-0.7388	185.98	85	84
4800	81	525.15	0.0	0	0.6007	314.90	90	84	-0.7923	165.44	61	69
4900	71	513.68	0.0	0	0.6139	312.91	74	64	-0.7579	165.71	84	92
5000	65	481.62	0.0	0	0.5624	254.75	91	80	-0.9955	109.81	81	72
5100	57	474.12	0.0	0	0.5489	237.59	87	76	-1.1008	92.26	72	53
5200	44	535.48	0.0	0	0.5670	284.98	85	70	-0.9320	129.63	77	84
5300	36	573.14	0.1	0	0.5888	317.47	55	60	-0.9125	141.25	84	82
5400	31	585.79	0.1	0	0.5473	293.47	72	80	-1.1002	113.81	74	63
5500	25	643.30	0.5	0.2	0.5645	341.80	56	71	-0.9204	157.07	71	66
5600	21	679.35	1.3	0.4	0.5680	366.68	45	62	-0.8457	180.63	71	69
V <sub>2</sub> - agregacija 2												
4440	61	1190.73	7	7	0.8096	1026.39	61	48	-0.3241	766.89	91	88
4500	55	1227.56	57	23	0.8488	1101.17	74	67	-0.2730	853.05	86	92
4600	52	1114.36	23	9	0.8033	954.08	40	32	-0.3125	720.28	61	63
4700	45	1081.82	14	11	0.8170	933.05	43	42	-0.3198	686.66	59	79
4800	40	1041.01	10	5	0.7857	864.15	72	42	-0.3977	594.52	86	86
4900	35	1019.45	16	10	0.8122	876.37	37	35	-0.3361	635.87	38	66
5000	32	956.66	2	3	0.7472	751.58	53	42	-0.4787	481.63	91	87
5100	28	943.55	11	3	0.6671	663.66	88	86	-0.6016	404.65	88	81
5200	22	1070.97	17	8	0.7067	815.96	48	45	-0.4431	570.97	73	69
V <sub>3</sub> - agregacija 3												
4440	41	1804.16	28	36	0.9956	1799.86	28	36	-0.1603	1480.68	53	30
4500	36	1839.74	23	18	1.0220	1861.02	28	19	-0.1534	1523.26	7	14
4600	34	1663.81	44	33	0.9131	1573.86	57	42	-0.2381	1224.84	60	57
4700	30	1622.74	20	14	0.9127	1534.06	30	17	-0.2427	1183.07	23	22
4800	27	1575.46	57	36	0.8913	1465.41	74	57	-0.2690	1114.99	85	82
4900	23	1547.05	78	31	0.8562	1398.67	92	63	-0.3135	1035.07	85	91
5000	21	1454.73	15	16	0.9304	1391.03	20	19	-0.2534	1046.40	44	27



5. Statistike  $d$  trajanja prekoračenja preko praga - agregacija 1,  $d_1$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_1$	sr. vred. $d_{1,sr}$	st. dev. $S_{d_1}$	koeficijenti		$Cs_{d_1}/Cv_{d_1}$
				varijacije $Cv_{d_1}$	asimetrije $Cs_{d_1}$	
[dana]	[-]	[dana]	[dana]	[-]	[-]	[-]
4440	123	10.6	11.5	1.082	5.762	5.326
4500	110	10.7	11.5	1.078	6.084	5.642
4600	104	9.8	11.8	1.204	6.021	5.001
4700	91	9.7	12.1	1.244	6.220	5.001
4800	81	9.3	11.1	1.189	5.397	4.540
4900	71	9.0	9.2	1.018	4.449	4.369
5000	65	8.2	9.2	1.123	4.476	3.984
5100	57	7.7	9.2	1.197	4.768	3.985
5200	44	8.3	9.9	1.188	4.648	3.912
5300	36	8.5	10.4	1.223	4.594	3.757
5400	31	8.3	11.1	1.344	4.243	3.156
5500	25	8.9	11.9	1.335	4.192	3.141
5600	21	9.4	12.4	1.325	3.896	2.941
5700	18	9.5	13.3	1.398	3.800	2.718
5800	16	9.6	13.8	1.447	3.634	2.512
5900	13	10.3	14.6	1.417	3.376	2.383
6000	13	9.4	14.0	1.492	3.346	2.242
6100	12	9.0	14.1	1.566	3.265	2.086
6200	10	9.9	15.0	1.512	3.030	2.004
6300	10	8.5	15.5	1.827	2.986	1.634
6400	7	10.3	12.7	1.236	2.254	1.824
6500	7	9.4	12.5	1.330	2.332	1.753
6600	5	11.4	13.4	1.179	2.033	1.723
6700	5	10.8	13.7	1.272	2.071	1.628
6800	4	12.0	14.2	1.180	1.866	1.581
6900	4	11.0	15.0	1.363	1.760	1.292
7000	3	13.0	15.9	1.221	1.458	1.194
7150	2	17.5	16.3	0.929		

6. Statistike trajanja prekoračenja preko praga - agregacija 2,  $d_2$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_2$	sr. vred. $2_{2,sr}$	st. dev. $S_{d_2}$	koeficijenti		$Cs_{d_2}/Cv_{d_2}$
				varijacije $Cv_{d_2}$	asimetrije $Cs_{d_2}$	
[dana]	[-]	[dana]	[dana]	[-]	[-]	[-]
4440	61	21.1	17.5	0.830	3.891	4.688
4500	55	21.4	16.5	0.769	3.992	5.190
4600	52	19.6	17.0	0.869	4.574	5.261
4700	45	19.3	17.1	0.886	4.780	5.396
4800	40	18.6	16.2	0.872	3.979	4.563
4900	35	17.9	12.2	0.678	3.189	4.703
5000	32	16.4	13.4	0.816	3.246	3.978
5100	28	15.3	13.2	0.862	3.074	3.568
5200	22	16.6	13.6	0.819	3.018	3.684
5300	18	17.0	14.2	0.835	2.991	3.582
5400	15	16.6	14.9	0.900	2.876	3.197
5500	12	18.0	17.7	0.984	2.987	3.035
5600	10	19.0	18.3	0.963	2.700	2.805
5700	9	19.0	18.8	0.989	2.744	2.774
5800	8	19.1	19.8	1.034	2.584	2.500
5900	6	21.5	20.6	0.959	2.307	2.407
6000	6	19.8	19.9	1.003	2.334	2.327
6100	6	18.0	19.8	1.099	2.343	2.131
6200	5	19.8	19.8	0.998	2.187	2.191
6300	5	17.0	20.2	1.190	2.175	1.828
6400	3	20.7	17.2	0.833	1.321	1.586
6500	3	18.7	17.7	0.947	1.676	1.770
6600	2	24.0	25.5	1.061		
6700	2	23.0	25.5	1.107		
6800	2	24.0	18.4	0.766		
6900	2	22.0	18.4	0.836		
7000	1	32.0	0.0	0.000		
7150	1	35.0	0.0	0.000		

7. Statistike trajanja prekoračenja preko praga - agregacija 3,  $d_3$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_3$	sr. vred. $d_{3,sr}$	st. dev. $S_{d_3}$	koeficijenti		$Cs_{d_3}/Cv_{d_3}$
				varijacije $Cv_{d_3}$	asimetrije $Cs_{d_3}$	
[dana]	[-]	[dana]	[dana]	[-]	[-]	[-]
4440	41	31.8	20.8	0.655	3.479	5.315
4500	36	32.1	19.2	0.597	3.843	6.436
4600	34	29.3	21.6	0.737	3.387	4.599
4700	30	29.0	20.5	0.708	3.941	5.564
4800	27	28.0	20.3	0.727	3.494	4.808
4900	23	27.1	16.6	0.613	2.576	4.202
5000	21	24.8	13.4	0.541	2.952	5.453
5100	19	23.1	15.4	0.665	2.258	3.397
5200	14	25.3	15.7	0.622	1.966	3.163
5300	12	25.5	16.2	0.634	2.229	3.513
5400	10	24.9	17.2	0.693	2.297	3.317
5500	8	27.0	18.3	0.679	2.085	3.070
5600	7	28.1	23.4	0.832	2.195	2.639
5700	6	28.5	24.4	0.855	2.179	2.548
5800	5	29.6	26.2	0.886	1.893	2.136
5900	4	32.3	22.3	0.692	1.736	2.508
6000	4	29.8	22.0	0.739	1.742	2.358
6100	4	27.0	21.5	0.796	1.918	2.411
6200	3	32.0	26.5	0.827	1.458	1.763
6300	3	28.0	26.7	0.952	1.346	1.413
6400	2	31.0	31.1	1.004		
6500	2	28.0	26.9	0.960		
6600	1	45.0	0.0	0.000		
6700	1	43.0	0.0	0.000		
6800	1	40.0	0.0	0.000		
6900	1	36.0	0.0	0.000		
7000	1	39.0	0.0	0.000		
7150	0					

8. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za trajanja prekoračenja preko praga - agregacije 1, 2 i 3, ( $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ).

Reka: Dunav, Stanica: Beždan.

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$ [dana]	pik. M [-]	Eksp. $\xi_{sr}$ [dana]	$p_E$ vred. $KS$ [%] $N\omega^2$ [%]		Vejbul 2 oblik razm. [ - ] [dana]	$p_{W2}$ vred. $KS$ [%] $N\omega^2$ [%]		Pareto oblik razm. [ - ] [dana]	$p_{GP}$ vred. $KS$ [%] $N\omega^2$ [%]			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
$d_1$ - agregacija 1												
4440	123	10.59	3.3	79	1.1885	11.31	52	92	-0.0232	10.33	2	77
4500	110	10.70	0.0	51	1.2481	11.62	1	66	-0.0203	10.48	0	50
4600	104	9.79	3.3	81	1.1207	10.27	26	84	-0.0583	9.18	2	81
4700	91	9.70	1.1	63	1.1314	10.23	12	66	-0.0655	9.02	0	63
4800	81	9.33	4.4	81	1.1377	9.86	32	77	-0.0599	8.75	2	83
4900	71	9.01	2.6	73	1.2422	9.76	24	78	-0.0043	8.98	2	73
5000	65	8.23	9.1	91	1.1406	8.69	46	85	-0.0467	7.84	6	92
5100	57	7.70	5.1	83	1.1304	8.12	24	77	-0.0703	7.13	3	87
5200	44	8.30	10.8	65	1.1410	8.78	41	64	-0.0664	7.72	6	67
5300	36	8.50	0.8	55	1.1560	9.06	6	44	-0.0778	7.80	0	62
5400	31	8.26	26.3	67	1.0361	8.41	35	63	-0.1402	7.03	11	81
5500	25	8.92	23.2	61	1.0766	9.25	38	54	-0.1294	7.69	13	73
5600	21	9.38	43.1	55	1.0580	9.64	40	51	-0.1365	8.03	53	65
$d_2$ - agregacija 2												
4440	61	21.08	0.2	14	1.4373	23.46	44	56	0.0762	22.59	1	18
4500	55	21.40	0.1	6	1.5338	24.01	43	54	0.1020	23.40	0	9
4600	52	19.58	0.1	8	1.4214	21.77	17	36	0.0531	20.57	0	9
4700	45	19.33	0.6	4	1.4252	21.54	17	28	0.0462	20.19	1	5
4800	40	18.58	0.3	16	1.4264	20.72	25	38	0.0626	19.69	1	18
4900	35	17.94	0.2	5	1.6741	20.24	30	45	0.1882	20.95	1	9
5000	32	16.41	0.2	22	1.4768	18.38	15	34	0.1111	18.13	0	24
5100	28	15.32	15.7	40	1.3824	16.96	85	75	0.0917	16.67	23	47
5200	22	16.59	4.8	29	1.4265	18.40	52	53	0.1262	18.58	9	34
$d_3$ - agregacija 3												
4440	41	31.76	0.3	1	1.7226	35.87	26	26	0.1836	36.86	1	2
4500	36	32.11	0.0	1	1.8548	36.34	22	17	0.2153	38.01	0	2
4600	34	29.32	1.4	3	1.5913	33.04	30	25	0.1493	33.32	3	5
4700	30	29.00	0.0	4	1.6505	32.72	5	15	0.1534	33.00	0	5
4800	27	28.00	0.8	7	1.6171	31.59	42	34	0.1599	32.08	2	10
4900	23	27.13	1.6	12	1.8181	30.72	66	46	0.2966	34.26	6	18
5000	21	24.81	0.1	4	2.0162	28.12	30	30	0.3512	32.32	1	7

9. Statistike  $\tau$  trajanja ciklusa prekoračenja preko praga - agregacija 1,  $\tau_1$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_1$	sr. vred. $\tau_{1,sr}$	st. dev. $S_{\tau_1}$	koeficijenti		$Cs_{\tau_1}/Cv_{\tau_1}$
				varijacije $Cv_{\tau_1}$	asimetrije $Cs_{\tau_1}$	
[dana]	[ - ]	[dana]	[dana]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
4440	122	221.8	294.7	1.329	2.021	1.521
4500	109	248.2	317.7	1.280	1.792	1.400
4600	103	262.7	332.4	1.265	1.755	1.387
4700	90	300.6	360.6	1.200	1.495	1.246
4800	80	338.2	401.3	1.187	1.437	1.211
4900	70	386.5	444.7	1.150	1.419	1.233
5000	64	417.0	492.3	1.181	1.548	1.311
5100	56	471.6	554.3	1.175	1.386	1.179
5200	43	591.0	719.7	1.218	1.612	1.323
5300	35	726.0	820.5	1.130	1.413	1.250
5400	30	847.1	842.2	0.994	1.169	1.175
5500	24	1053.9	904.3	0.858	0.849	0.990
5600	20	1264.7	1083.1	0.856	0.611	0.714
5700	17	1487.9	1325.0	0.891	1.038	1.166
5800	15	1686.3	1604.4	0.951	1.316	1.383
5900	12	2107.9	1687.8	0.801	0.959	1.198
6000	12	2107.8	1687.8	0.801	0.958	1.197
6100	11	2299.5	2282.1	0.992	1.737	1.750
6200	9	2810.6	2606.2	0.927	1.050	1.132
6300	9	2810.6	2606.3	0.927	1.049	1.131
6400	6	3148.3	2815.5	0.894	1.081	1.209
6500	6	3148.5	2815.0	0.894	1.082	1.210
6600	4	3731.5	5369.2	1.439	1.878	1.305
6700	4	3731.5	5369.2	1.439	1.878	1.305
6800	3	4975.7	7459.5	1.499	1.674	1.117
6900	3	4976.0	7458.4	1.499	1.674	1.117
7000	2	7443.0	8646.5	1.162		
7150	1	14887.0	0.0	0.000		

10. Statistike trajanja ciklusa prekoračenja preko praga - agregacija 2,  $\tau_2$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_2$	sr. vred. $\tau_{2,sr}$	st. dev. $S_{\tau_2}$	koeficijenti		$Cs_{\tau_3}/Cv_{\tau_2}$
				varijacije $Cv_{\tau_2}$	asimetrije $Cs_{\tau_2}$	
[dana]	[ - ]	[dana]	[dana]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
4440	60	439.9	439.0	0.998	1.683	1.687
4500	54	499.4	520.1	1.041	1.577	1.514
4600	51	517.5	461.2	0.891	1.123	1.260
4700	44	589.4	511.5	0.868	0.843	0.972
4800	39	664.9	612.7	0.921	1.167	1.266
4900	34	762.7	686.2	0.900	0.897	0.998
5000	31	824.5	682.4	0.828	0.720	0.870
5100	27	936.4	833.0	0.890	0.858	0.965
5200	21	1178.5	948.6	0.805	0.720	0.895
5300	17	1428.6	1090.9	0.764	0.627	0.820
5400	14	1731.1	876.8	0.507	0.059	0.116
5500	11	2192.4	1218.8	0.556	-0.535	-0.963
5600	9	2679.6	1616.1	0.603	0.034	0.056
5700	8	3014.5	2395.5	0.795	1.151	1.448
5800	7	3445.1	2804.7	0.814	1.529	1.878
5900	5	4557.2	3120.2	0.685	0.319	0.466
6000	5	4557.2	3119.8	0.685	0.318	0.465
6100	5	4823.4	4024.6	0.834	1.149	1.377
6200	4	6029.3	5085.9	0.844	-0.110	-0.131
6300	4	6029.3	5087.2	0.844	-0.110	-0.131
6400	2	7854.5	5444.0	0.693		
6500	2	7855.0	5443.3	0.693		
6600	1	11745.0	0.0	0.000		
6700	1	11745.0	0.0	0.000		
6800	1	13598.0	0.0	0.000		
6900	1	13598.0	0.0	0.000		
7000	0					
7150	0					

11. Statistike trajanja ciklusa prekoračenja preko praga - agregacija 3,  $\tau_3$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_3$	sr. vred. $\tau_{3,sr}$	st. dev. $S_{\tau_3}$	koeficijenti		$Cs_{\tau_3}/Cv_{\tau_3}$
				varijacije $Cv_{\tau_3}$	asimetrije $Cs_{\tau_3}$	
[dana]	[-]	[dana]	[dana]	[-]	[-]	[-]
4440	40	659.8	533.8	0.809	1.273	1.574
4500	35	739.9	578.9	0.782	0.769	0.983
4600	33	784.3	642.7	0.819	1.225	1.495
4700	29	893.0	631.7	0.707	0.526	0.744
4800	26	997.4	787.2	0.789	1.633	2.069
4900	22	1176.5	914.6	0.777	1.022	1.315
5000	20	1275.6	770.7	0.604	0.167	0.276
5100	18	1404.7	999.6	0.712	0.855	1.202
5200	13	1761.7	1327.3	0.753	1.004	1.332
5300	11	2203.0	1234.8	0.561	-0.152	-0.271
5400	9	2544.8	1812.0	0.712	0.805	1.130
5500	7	3255.0	1189.6	0.365	-0.567	-1.552
5600	6	4019.3	1473.0	0.366	1.412	3.854
5700	5	4557.2	2679.0	0.588	0.507	0.863
5800	4	5233.8	2566.2	0.490	0.085	0.172
5900	3	6978.7	3865.8	0.554	1.227	2.215
6000	3	6978.7	3865.8	0.554	1.227	2.215
6100	3	7595.7	4905.2	0.646	1.414	2.190
6200	2	10468.0	1200.7	0.115		
6300	2	10468.0	1200.7	0.115		
6400	1	7656.0	0.0	0		
6500	1	7657.0	0.0	0		
6600	0					
6700	0					
6800	0					
6900	0					
7000	0					
7150	0					

12. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za trajanja ciklusa prekoračenja preko praga - agregacije 1, 2 i 3,  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ .  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán.

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza	pik.	Eksp.	$p_E$	vred.	Vejbul 2		$p_{W2}$	vred.	Pareto		$p_{GP}$	vred.
$Q_B$	M	$\tau_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[dana]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
$\tau_1$ - agregacija 1												
4440	122	221.76	0	0	0.7340	181.12	4	27	-0.6175	110.15	5	17
4500	109	248.21	0	0	0.7357	204.06	10	35	-0.5886	128.70	7	16
4600	103	262.69	0	0	0.7348	216.09	13	34	-0.5864	137.02	8	14
4700	90	300.63	0	1	0.7465	251.93	32	43	-0.5069	173.42	10	16
4800	80	338.23	0	2	0.7520	285.33	36	51	-0.4782	201.74	10	22
4900	70	386.54	3	4	0.7850	337.00	60	57	-0.3598	263.51	22	27
5000	64	416.95	6	3	0.7666	357.34	70	74	-0.4006	270.87	27	34
5100	56	471.59	2	2	0.7066	381.85	64	61	-0.5600	258.89	19	21
5200	43	590.95	13	7	0.7541	499.57	99	94	-0.4488	362.04	90	64
5300	35	726.03	15	9	0.7662	625.65	56	66	-0.3239	516.67	41	29
5400	30	847.07	30	26	0.8632	790.68	32	48	0.0492	889.26	26	24
5500	24	1053.92	31	45	0.9602	1037.83	27	45	0.3168	1405.34	52	45
5600	20	1264.70	56	56	0.9071	1217.58	43	56	0.5217	2027.82	44	37
$\tau_2$ - agregacija 2												
4440	60	439.85	98	90	1.0272	444.93	94	80	0.0131	445.61	97	87
4500	54	499.39	52	64	0.9779	494.33	59	73	-0.0487	475.29	65	77
4600	51	517.51	100	99	1.0872	534.12	100	98	0.2132	632.00	95	87
4700	44	589.36	62	85	1.0628	603.03	66	75	0.3141	786.70	66	49
4800	39	664.92	83	90	1.0442	676.50	83	80	0.1575	772.41	92	70
4900	34	762.74	91	83	1.0450	775.95	79	74	0.3208	1031.51	32	34
5000	31	824.55	77	80	1.1637	868.97	38	62	0.5575	1362.32	12	31
5100	27	936.44	64	69	1.0602	957.89	57	57	0.3302	1273.60	29	39
5200	21	1178.52	92	92	1.2118	1255.21	61	78	0.4693	1775.74	64	69
$\tau_3$ - agregacija 3												
4440	40	659.78	58	74	1.2506	709.04	98	89	0.2262	806.02	97	98
4500	35	739.86	83	89	1.2603	795.75	83	84	0.4568	1099.81	89	77
4600	33	784.33	71	75	1.2703	847.38	99	92	0.3012	1027.61	91	81
4700	29	893.00	33	60	1.3935	977.11	85	80	0.7043	1592.22	87	67
4800	26	997.38	32	52	1.3521	1091.54	90	81	0.2202	1209.44	64	76
4900	22	1176.55	46	76	1.3034	1274.76	78	79	0.3422	1580.08	91	87
5000	20	1275.55	20	32	1.6657	1420.18	93	89	1.0510	2750.54	72	65



13. Analiza  $n_x$  broja javljanja pikova iznad praga u toku kalendarske godine, za razne bazne protoke  $Q_B$ .

Odnosi se na zapremine i trajanja prekoračenja baznog protoka.

Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$ [m <sup>3</sup> /s]	broj pikova M [-]	$n_x$			st.dev. $S_{n_x}$ [-]	koeficijenti		$Cs_{n_x}/Cv_{n_x}$ [-]	indeks dispersije $I_{n_x}$ [-]
		min $n_{x,\min}$ [-]	maks $n_{x,\max}$ [-]	srednji $n_{x,\text{sr}} = \Lambda_B$ [-]		varijacije $Cv_{n_x}$ [-]	asimetrije $Cs_{n_x}$ [-]		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
4440	123	0	7	1.557	1.678	1.077	1.052	0.977	1.807
4500	110	0	8	1.392	1.580	1.135	1.442	1.271	1.794
4600	104	0	6	1.316	1.524	1.157	1.252	1.081	1.764
4700	91	0	6	1.152	1.350	1.172	1.320	1.126	1.582
4800	81	0	6	1.025	1.291	1.259	1.493	1.186	1.625
4900	71	0	5	0.899	1.172	1.304	1.573	1.206	1.529
5000	65	0	5	0.823	1.107	1.345	1.526	1.135	1.488
5100	57	0	4	0.722	1.061	1.471	1.574	1.070	1.561
5200	44	0	4	0.557	0.902	1.620	1.867	1.153	1.462
5300	36	0	4	0.456	0.797	1.750	1.939	1.108	1.395
5400	31	0	3	0.392	0.706	1.798	1.741	0.968	1.269
5500	25	0	2	0.316	0.611	1.930	1.784	0.924	1.178
5600	21	0	2	0.266	0.571	2.147	2.068	0.963	1.226
5700	18	0	2	0.228	0.505	2.217	2.191	0.988	1.120
5800	16	0	2	0.203	0.490	2.421	2.447	1.011	1.188
5900	13	0	2	0.165	0.406	2.468	2.416	0.979	1.002
6000	13	0	2	0.165	0.406	2.468	2.416	0.979	1.002

14. Statistike visina pikova iznad praga,  $\xi = Q_{\text{pik}} - Q_B$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj M	pikovi		sr.br.pik u godini $\Lambda_B$	sr. vred. $\xi_{sr}$	st. dev. $S_\xi$	koeficijenti		
		min. $\xi_{min}$	maks. $\xi_{max}$				varijacije $Cv_\xi$	asimetrije $Cs_\xi$	$Cs_\xi/Cv_\xi$
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	436	10	5860	5.519	1233.0	985.4	0.799	1.140	1.426
2600	410	10	5760	5.190	1207.6	969.2	0.803	1.156	1.441
2700	384	10	5660	4.861	1185.3	952.6	0.804	1.174	1.461
2800	359	2	5560	4.544	1163.9	935.7	0.804	1.195	1.487
2900	333	1	5460	4.215	1150.8	916.3	0.796	1.227	1.541
3000	313	10	5360	3.962	1120.3	901.5	0.805	1.252	1.556
3100	297	1	5260	3.759	1077.9	889.6	0.825	1.273	1.542
3200	283	4	5160	3.582	1028.9	880.5	0.856	1.284	1.501
3300	257	10	5060	3.253	1028.5	863.5	0.840	1.302	1.551
3400	233	10	4960	2.949	1027.8	846.5	0.824	1.325	1.608
3500	215	10	4860	2.722	1009.7	830.4	0.822	1.362	1.656
3600	198	10	4760	2.506	991.7	814.6	0.821	1.403	1.708
3700	184	8	4660	2.329	963.5	800.5	0.831	1.447	1.741
3800	174	8	4560	2.203	915.1	792.9	0.867	1.463	1.689
3900	156	18	4460	1.975	914.6	778.0	0.851	1.501	1.765
4000	141	10	4360	1.785	906.1	763.1	0.842	1.553	1.844
4100	124	37	4260	1.570	921.6	742.3	0.805	1.652	2.051
4200	119	20	4160	1.506	857.4	736.4	0.859	1.683	1.960
4300	108	10	4060	1.367	839.2	724.5	0.863	1.749	2.026
4400	98	10	3960	1.241	819.3	713.4	0.871	1.821	2.091
4500	85	80	3860	1.076	834.7	697.2	0.835	1.949	2.333
4600	83	2	3760	1.051	752.8	695.6	0.924	1.962	2.124
4700	73	8	3660	0.924	748.7	688.1	0.919	2.035	2.214
4800	67	20	3560	0.848	711.7	683.6	0.960	2.087	2.173
4900	60	25	3460	0.759	687.1	683.7	0.995	2.103	2.113
5000	55	20	3360	0.696	644.7	685.6	1.063	2.099	1.974
5100	47	10	3260	0.595	644.9	693.7	1.076	2.051	1.907
5200	39	10	3160	0.494	665.4	703.4	1.057	1.986	1.878
5300	32	60	3060	0.405	700.0	708.7	1.012	1.951	1.927
5400	29	28	2960	0.367	663.8	714.9	1.077	1.905	1.769
5500	24	10	2860	0.304	690.1	724.9	1.050	1.822	1.735
5600	20	20	2760	0.253	715.7	732.3	1.023	1.751	1.711
5700	17	60	2660	0.215	733.8	733.5	1.000	1.720	1.721
5800	15	70	2560	0.190	722.4	737.1	1.020	1.675	1.642
5900	13	6	2460	0.165	721.7	744.1	1.031	1.598	1.549
6000	12	50	2360	0.152	681.3	744.0	1.092	1.578	1.445

15. Statistike visina pikova iznad praga - agregacija 2,  $\xi_2$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_2$	sr. vred. $\xi_{2,sr}$	st. dev. $S_{\xi_2}$	koeficijenti		$C_{S_{\xi_2}}/C_{V_{\xi_2}}$
				varijacije $C_{V_{\xi_2}}$	asimetrije $C_{S_{\xi_2}}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	218	2466.0	1511.7	0.613	1.088	1.775
2600	205	2415.1	1469.0	0.608	0.818	1.344
2700	192	2370.7	1494.1	0.630	0.959	1.521
2800	179	2331.7	1483.1	0.636	0.931	1.464
2900	166	2306.2	1318.1	0.572	0.662	1.158
3000	156	2246.0	1348.0	0.600	0.663	1.105
3100	148	2162.0	1270.1	0.587	0.980	1.668
3200	141	2064.7	1317.0	0.638	1.043	1.635
3300	128	2041.2	1275.7	0.625	0.789	1.263
3400	116	2039.1	1237.8	0.607	0.933	1.538
3500	107	2002.3	1233.3	0.616	1.256	2.040
3600	99	1983.3	1280.2	0.645	1.096	1.697
3700	92	1927.0	1236.1	0.641	1.270	1.980
3800	87	1830.1	1260.9	0.689	1.123	1.629
3900	78	1829.1	1226.0	0.670	1.138	1.698
4000	70	1791.7	1212.8	0.677	1.187	1.754
4100	62	1843.3	1087.5	0.590	1.381	2.341
4200	59	1693.1	1110.8	0.656	1.314	2.002
4300	54	1678.4	1083.9	0.646	1.354	2.097
4400	49	1638.7	1079.0	0.658	1.188	1.805
4500	42	1645.5	1034.4	0.629	1.551	2.468
4600	41	1481.5	1070.7	0.723	1.121	1.550
4700	36	1472.6	927.4	0.630	1.132	1.797
4800	33	1398.4	893.2	0.639	1.147	1.796
4900	30	1374.2	875.5	0.637	1.208	1.896
5000	27	1263.7	841.0	0.665	1.168	1.756
5100	23	1264.0	1153.7	0.913	1.820	1.994

16. Statistike visina pikova iznad praga - agregacija 3,  $\xi_3$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_3$	sr. vred. $\xi_{3,sr}$	st. dev. $S_{\xi_3}$	koeficijenti		$Cs_{\xi_3}/Cv_{\xi_3}$
				varijacije $Cv_{\xi_3}$	asimetrije $Cs_{\xi_3}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	145	3705.9	1906.1	0.514	0.700	1.361
2600	136	3639.4	1979.8	0.544	0.956	1.757
2700	128	3556.0	1950.0	0.548	1.041	1.899
2800	119	3477.6	1869.7	0.538	0.900	1.675
2900	111	3452.3	1831.1	0.530	0.937	1.767
3000	104	3368.9	1729.5	0.513	0.896	1.746
3100	99	3233.7	1704.7	0.527	0.889	1.686
3200	94	3097.0	1633.1	0.527	0.773	1.466
3300	85	3073.0	1535.4	0.500	0.657	1.315
3400	77	3056.6	1724.4	0.564	1.011	1.792
3500	71	3002.3	1484.4	0.494	0.716	1.447
3600	66	2975.0	1622.4	0.545	0.971	1.780
3700	61	2863.1	1483.7	0.518	0.902	1.740
3800	58	2745.2	1500.6	0.547	0.811	1.484
3900	52	2743.7	1484.5	0.541	0.827	1.529
4000	47	2718.2	1326.1	0.488	0.734	1.505
4100	41	2732.8	1371.8	0.502	1.139	2.268
4200	39	2551.6	1267.2	0.497	0.876	1.763
4300	36	2517.6	1171.7	0.465	0.959	2.060
4400	32	2442.9	1119.6	0.458	0.893	1.949
4500	28	2468.3	971.8	0.394	0.790	2.006
4600	27	2225.2	1003.0	0.451	0.969	2.149
4700	24	2208.9	1190.5	0.539	0.719	1.333
4800	22	2097.6	1230.2	0.586	0.580	0.988
4900	20	2061.3	1244.1	0.604	1.182	1.959

17. Statistike visina pikova iznad praga - agregacija 4,  $\xi_4$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_4$	sr. vred. $\xi_{4,sr}$	st. dev. $S_{\xi_4}$	koeficijenti		$Cs_{\xi_4}/Cv_{\xi_4}$
				varijacije $Cv_{\xi_4}$	asimetrije $Cs_{\xi_4}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	109	4932.0	2327.1	0.472	0.784	1.662
2600	102	4852.6	2197.5	0.453	0.706	1.560
2700	96	4741.3	2305.0	0.486	0.715	1.470
2800	89	4644.9	2236.4	0.481	0.782	1.624
2900	83	4612.5	2114.1	0.458	0.573	1.250
3000	78	4491.9	2031.9	0.452	0.483	1.069
3100	74	4323.9	2095.8	0.485	0.569	1.175
3200	70	4113.4	2030.8	0.494	0.618	1.252
3300	64	4082.5	1870.7	0.458	0.378	0.824
3400	58	4078.2	1671.6	0.410	0.644	1.570
3500	53	4013.8	1702.0	0.424	0.592	1.396
3600	49	3931.2	1796.8	0.457	0.648	1.417
3700	46	3854.1	1738.9	0.451	0.831	1.842
3800	43	3625.6	1500.5	0.414	0.042	0.101
3900	39	3658.2	1739.0	0.475	0.477	1.003
4000	35	3583.3	1685.8	0.470	0.449	0.955
4100	31	3686.6	1614.9	0.438	0.716	1.635
4200	29	3394.9	1445.0	0.426	0.733	1.721
4300	27	3356.8	1369.9	0.408	0.766	1.878
4400	24	3257.3	1465.8	0.450	1.322	2.937
4500	21	3291.0	1240.5	0.377	0.843	2.236
4600	20	2952.1	1333.1	0.452	0.388	0.859

18. Statistike visina pikova iznad praga - agregacija 5,  $\xi_5$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_5$	sr. vred. $\xi_{5,sr}$	st. dev. $S_{\xi_5}$	koeficijenti		$Cs_{\xi_5}/Cv_{\xi_5}$
				varijacije $Cv_{\xi_5}$	asimetrije $Cs_{\xi_5}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	87	6176.6	2746.8	0.445	0.591	1.328
2600	82	6037.8	2633.3	0.436	0.635	1.456
2700	76	5926.2	2412.4	0.407	0.429	1.055
2800	71	5814.5	2482.3	0.427	0.530	1.241
2900	66	5743.3	2376.0	0.414	0.715	1.730
3000	62	5593.4	2307.5	0.413	0.426	1.034
3100	59	5368.3	2185.8	0.407	0.483	1.185
3200	56	5141.8	2174.7	0.423	0.606	1.433
3300	51	5121.7	1944.2	0.380	0.302	0.795
3400	46	5104.9	1831.8	0.359	0.315	0.877
3500	43	5048.4	1880.2	0.372	0.270	0.724
3600	39	4930.7	1878.5	0.381	0.425	1.116
3700	36	4777.1	1824.4	0.382	0.296	0.775
3800	34	4538.5	1796.8	0.396	0.415	1.048
3900	31	4523.6	1971.8	0.436	0.241	0.552
4000	28	4479.2	2041.0	0.456	0.099	0.218
4100	24	4585.6	1583.0	0.345	0.376	1.089
4200	23	4269.7	1626.4	0.381	0.317	0.833
4300	21	4159.7	1527.8	0.367	0.436	1.186

19. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za pikove iznad praga  
 - agregacija 1,  $\xi_1$ ,  
 Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$	$p$ vred.	Vejbul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GPP}$ vred.	
$Q_B$	M	$\xi_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]
2500	436	1233.0	0	4	1.205	1309.4	72	76	0.213	1486.7	28	84
2600	410	1207.6	0	5	1.198	1280.6	75	77	0.209	1451.7	28	86
2700	384	1185.3	0	6	1.195	1255.9	80	81	0.207	1421.9	27	84
2800	359	1163.9	1	7	1.185	1229.7	82	86	0.204	1393.4	26	82
2900	333	1150.8	1	6	1.231	1229.4	97	94	0.206	1378.4	20	73
3000	313	1120.3	5	9	1.221	1194.9	93	91	0.198	1334.8	29	82
3100	297	1077.9	9	19	1.172	1137.0	91	85	0.184	1270.9	74	96
3200	283	1028.9	20	33	1.091	1061.4	81	65	0.162	1193.4	96	95
3300	257	1028.5	16	26	1.145	1077.6	82	75	0.171	1200.9	88	96
3400	233	1027.8	12	18	1.170	1083.0	90	88	0.180	1207.2	70	90
3500	215	1009.7	18	19	1.180	1066.7	92	92	0.177	1183.7	69	87
3600	198	991.7	29	20	1.195	1051.8	91	93	0.175	1160.2	68	83
3700	184	963.5	42	27	1.208	1026.5	67	84	0.166	1119.3	88	88
3800	174	915.1	44	44	1.102	947.4	77	73	0.140	1041.4	94	92
3900	156	914.6	37	34	1.143	957.9	77	81	0.149	1048.2	92	87
4000	141	906.1	32	29	1.164	953.9	83	87	0.152	1040.7	88	79
4100	124	921.6	20	14	1.293	999.1	89	97	0.172	1074.1	62	48
4200	119	857.4	40	36	1.160	902.4	87	90	0.134	970.0	85	78
4300	108	839.2	38	35	1.161	883.6	89	91	0.128	944.6	80	71
4400	98	819.3	36	34	1.161	862.8	91	92	0.120	916.0	74	66
4500	85	834.7	23	17	1.302	908.9	77	86	0.142	949.3	49	36
4600	83	752.8	48	62	1.072	772.5	81	89	0.075	808.6	73	79
4700	73	748.7	42	52	1.135	784.0	94	92	0.077	806.2	63	67
4800	67	711.7	66	80	1.125	744.9	84	90	0.043	742.1	77	84
4900	60	687.1	81	92	1.093	712.4	81	87	0.013	695.8	83	92
5000	55	644.7	88	96	0.998	644.0	89	96	-0.057	608.4	97	99
5100	47	644.9	83	91	0.967	635.1	93	98	-0.071	599.2	94	99
5200	39	665.4	95	94	0.974	657.7	98	97	-0.049	632.6	97	98
5300	32	700.0	94	94	1.090	725.7	97	80	0.004	702.7	94	94
5400	29	663.8	99	88	0.969	654.1	100	95	-0.073	615.9	100	97
5500	24	690.1	99	91	0.974	682.0	99	95	-0.037	664.9	99	95
5600	20	715.7	95	91	1.002	716.4	95	91	0.004	718.3	95	91

20. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za pikove iznad praga  
 - agregacija 2,  $\xi_2$ ,  
 Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Vejbul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_2$	$\xi_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]
2500	218	2466.0	0	0	1.707	2770.0	96	94	0.330	3169.2	0	0
2600	205	2415.1	0	0	1.710	2712.1	100	99	0.423	3320.3	2	2
2700	192	2370.7	0	0	1.649	2655.1	97	91	0.342	3075.7	0	2
2800	179	2331.7	0	0	1.627	2607.6	46	65	0.364	3086.1	1	4
2900	166	2306.2	0	0	1.816	2594.8	95	94	0.443	3173.5	1	2
3000	156	2246.0	0	0	1.731	2523.9	64	64	0.449	3129.4	3	6
3100	148	2162.0	0	0	1.780	2432.6	98	97	0.338	2773.0	0	1
3200	141	2064.7	0	0	1.634	2311.2	90	97	0.328	2658.0	1	4
3300	128	2041.2	0	0	1.642	2281.9	51	74	0.434	2848.3	11	12
3400	116	2039.1	0	0	1.711	2288.0	92	95	0.346	2643.6	1	3
3500	107	2002.3	0	0	1.722	2253.5	98	92	0.346	2611.5	1	2
3600	99	1983.3	0	1	1.606	2214.3	96	93	0.367	2649.1	3	11
3700	92	1927.0	0	0	1.655	2163.5	89	84	0.353	2545.0	8	5
3800	87	1830.1	4	3	1.500	2029.8	81	87	0.338	2409.9	30	27
3900	78	1829.1	1	2	1.553	2037.3	77	85	0.387	2501.2	19	19
4000	70	1791.7	1	2	1.549	1996.4	85	86	0.362	2401.1	18	20
4100	62	1843.3	0	0	1.799	2076.7	72	70	0.393	2487.1	1	4
4200	59	1693.1	0	1	1.639	1902.0	78	55	0.404	2343.1	6	11
4300	54	1678.4	1	2	1.678	1891.3	55	59	0.372	2255.8	10	14
4400	49	1638.7	1	3	1.599	1831.0	76	64	0.416	2289.7	18	21
4500	42	1645.5	0	1	1.758	1864.2	10	24	0.409	2275.8	3	7
4600	41	1481.5	25	25	1.447	1637.8	99	95	0.368	2015.1	80	73
4700	36	1472.6	1	7	1.729	1663.8	50	61	0.460	2110.5	10	34
4800	33	1398.4	10	11	1.688	1574.4	92	88	0.454	2000.3	56	44
4900	30	1374.2	14	10	1.678	1543.7	64	65	0.448	1961.6	31	34
5000	27	1263.7	18	22	1.632	1420.4	98	89	0.452	1818.7	62	62
5100	23	1264.0	85	91	1.202	1350.3	99	90	0.119	1414.0	97	91



21. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti  $\alpha$  za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za pikove iznad praga  
 - agregacija 3,  $\xi_3$ ,  
 Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Vejbul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_3$	$\xi_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]
2500	145	3705.9	0	0	2.049	4185.4	97	99	0.467	5103.1	0	0
2600	136	3639.4	0	0	1.958	4119.3	96	89	0.487	5180.0	0	1
2700	128	3556.0	0	0	1.936	4020.8	70	75	0.478	5049.5	0	1
2800	119	3477.6	0	0	1.969	3930.7	91	83	0.541	5138.5	0	1
2900	111	3452.3	0	0	2.007	3907.1	66	76	0.519	5011.9	0	1
3000	104	3368.9	0	0	2.083	3816.3	56	59	0.510	4815.1	0	1
3100	99	3233.7	0	0	2.022	3660.6	71	81	0.520	4673.1	0	1
3200	94	3097.0	0	0	2.006	3499.5	93	96	0.510	4437.4	1	1
3300	85	3073.0	0	0	2.121	3471.8	100	99	0.658	4860.7	3	3
3400	77	3056.6	0	0	1.894	3457.6	73	63	0.568	4681.0	1	5
3500	71	3002.3	0	0	2.144	3391.0	92	89	0.580	4468.7	1	2
3600	66	2975.0	0	0	1.958	3366.0	83	86	0.537	4405.4	3	6
3700	61	2863.1	0	0	2.060	3239.7	86	84	0.600	4418.7	11	5
3800	58	2745.2	0	1	1.944	3102.3	100	98	0.621	4333.6	18	14
3900	52	2743.7	0	1	1.950	3095.1	85	92	0.510	3957.9	7	8
4000	47	2718.2	0	0	2.176	3068.4	76	66	0.762	4679.7	10	7
4100	41	2732.8	0	0	2.124	3089.8	44	55	0.587	4150.7	1	5
4200	39	2551.6	0	1	2.144	2882.0	94	89	0.553	3748.1	5	8
4300	36	2517.6	0	1	2.326	2851.8	38	33	1.070	5468.6	7	3
4400	32	2442.9	0	1	2.366	2765.3	53	71	0.656	3809.0	7	11
4500	28	2468.3	0	1	2.754	2778.0	86	63	0.820	4192.0	2	8
4600	27	2225.2	1	1	2.387	2512.7	58	65	0.781	3857.4	13	9
4700	24	2208.9	3	8	2.026	2504.5	97	78	1.053	4993.0	20	14
4800	22	2097.6	22	23	1.834	2368.4	98	89	0.832	3944.0	86	64
4900	20	2061.3	5	13	1.780	2320.6	66	64	0.509	3052.1	30	34

22. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za pikove iznad praga  
 - agregacija 4,  $\xi_4$ ,  
 Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Vejbul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_4$	$\xi_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]
2500	109	4932.0	0	0	2.260	5578.3	85	84	0.603	7413.6	0	0
2600	102	4852.6	0	0	2.366	5486.6	87	82	0.588	7135.5	0	0
2700	96	4741.3	0	0	2.191	5361.5	93	94	0.645	7408.1	0	1
2800	89	4644.9	0	0	2.229	5260.9	91	77	0.667	7354.4	0	1
2900	83	4612.5	0	0	2.360	5221.9	78	74	0.737	7516.2	0	3
3000	78	4491.9	0	0	2.376	5074.0	100	99	0.757	7410.6	1	2
3100	74	4323.9	0	0	2.200	4886.8	99	98	0.636	6645.2	1	2
3200	70	4113.4	0	0	2.170	4655.2	80	92	0.722	6773.9	4	7
3300	64	4082.5	0	0	2.374	4619.9	67	73	0.812	6946.1	5	8
3400	58	4078.2	0	0	2.611	4590.3	74	56	0.806	6874.8	0	1
3500	53	4013.8	0	0	2.553	4530.5	70	66	0.882	7141.2	1	4
3600	49	3931.2	0	0	2.367	4447.6	93	84	0.684	6195.2	3	5
3700	46	3854.1	0	0	2.393	4360.9	45	39	0.787	6591.9	3	4
3800	43	3625.6	0	0	2.667	4080.3	99	98	1.040	7021.0	8	18
3900	39	3658.2	0	1	2.246	4126.4	91	95	0.939	7115.0	16	15
4000	35	3583.3	0	1	2.293	4047.5	47	81	0.860	6401.7	12	29
4100	31	3686.6	0	1	2.488	4167.9	69	49	1.066	7463.7	15	12
4200	29	3394.9	0	1	2.569	3836.5	46	48	1.030	6734.1	14	16
4300	27	3356.8	0	1	2.676	3786.8	92	66	1.125	7088.9	12	12
4400	24	3257.3	0	1	2.397	3685.1	59	45	0.638	5047.2	1	9
4500	21	3291.0	0	1	2.889	3697.1	93	73	1.054	6696.0	10	12
4600	20	2952.1	3	5	2.462	3338.9	85	73	1.018	6055.5	23	29

23. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za pikove iznad praga  
 - agregacija 5,  $\xi_5$ ,  
 Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Vejbul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_5$	$\xi_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]	[-]	[m <sup>3</sup> /s]	[%]	[%]
2500	87	6176.6	0	0	2.407	6972.9	94	91	0.752	10192.7	0	1
2600	82	6037.8	0	0	2.460	6815.9	59	67	0.656	9265.7	0	0
2700	76	5926.2	0	0	2.662	6675.0	82	79	0.913	10617.0	0	1
2800	71	5814.5	0	0	2.523	6558.3	89	87	0.765	9541.0	0	1
2900	66	5743.3	0	0	2.607	6481.5	82	66	0.732	9179.4	0	1
3000	62	5593.4	0	0	2.619	6298.0	98	97	0.773	9122.3	1	2
3100	59	5368.3	0	0	2.670	6050.1	64	81	0.936	9778.0	2	3
3200	56	5141.8	0	0	2.572	5809.5	87	70	0.833	8792.6	1	4
3300	51	5121.7	0	0	2.878	5746.6	97	94	0.875	8783.1	0	2
3400	46	5104.9	0	0	3.028	5706.7	98	91	0.869	8678.2	0	1
3500	43	5048.4	0	0	2.892	5642.9	76	90	0.798	8251.1	1	1
3600	39	4930.7	0	0	2.876	5539.0	90	85	1.059	9698.5	5	6
3700	36	4777.1	0	0	2.888	5364.1	90	93	0.914	8484.2	5	6
3800	34	4538.5	0	0	2.751	5099.6	80	79	1.024	8959.8	9	7
3900	31	4523.6	0	1	2.476	5087.4	96	97	0.862	7955.2	19	17
4000	28	4479.2	1	2	2.382	5046.2	94	95	1.172	9197.4	44	62
4100	24	4585.6	0	1	3.222	5125.3	83	75	1.065	8697.5	8	11
4200	23	4269.7	0	1	2.960	4802.7	63	60	1.338	9404.6	18	37
4300	21	4159.7	0	1	3.055	4670.1	34	47	1.148	8233.9	8	24

24. Statistike vremena između pojave pikova iznad praga,  $\tau$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj M	sr. vred. $\tau_{sr}$	st. dev. $S_\tau$	koeficijenti		$C_{S_\tau}/C_{V_\tau}$
				varijacije $C_{V_\tau}$	asimetrije $C_{S_\tau}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[dana]	[dana]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	435	66.3	54.0	0.814	2.229	2.737
2600	409	70.5	56.6	0.802	2.018	2.516
2700	383	75.2	61.4	0.817	1.921	2.351
2800	358	80.0	71.7	0.896	2.481	2.769
2900	332	86.3	79.5	0.922	2.283	2.477
3000	312	91.8	86.2	0.939	2.242	2.387
3100	296	96.8	91.9	0.950	2.339	2.462
3200	282	101.6	98.7	0.972	2.367	2.436
3300	256	111.8	108.9	0.974	2.383	2.447
3400	232	123.3	117.6	0.954	2.024	2.122
3500	214	133.7	134.8	1.008	2.328	2.309
3600	197	145.2	146.3	1.007	2.120	2.105
3700	183	156.3	169.7	1.085	2.519	2.321
3800	173	165.4	178.0	1.077	2.361	2.193
3900	155	184.6	197.6	1.071	2.161	2.018
4000	140	204.3	237.1	1.160	2.308	1.989
4100	123	232.4	267.3	1.150	2.026	1.761
4200	118	229.7	268.5	1.169	1.996	1.708
4300	107	252.8	278.0	1.100	1.831	1.665
4400	97	278.9	303.1	1.087	1.859	1.711
4500	84	322.1	329.9	1.024	1.536	1.499
4600	82	329.9	339.3	1.028	1.584	1.540
4700	72	375.7	369.9	0.984	1.264	1.284
4800	66	409.9	409.8	1.000	1.239	1.239
4900	59	458.5	450.2	0.982	1.245	1.268
5000	54	494.1	500.4	1.013	1.377	1.360
5100	46	574.0	562.7	0.980	1.183	1.207
5200	38	668.7	731.8	1.094	1.482	1.354
5300	31	819.6	828.4	1.011	1.299	1.285
5400	28	907.5	840.5	0.926	1.110	1.198
5500	23	1099.8	896.3	0.815	0.824	1.011
5600	19	1331.3	1067.7	0.802	0.559	0.697

25. Statistike vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 2,  $\tau_2$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_2$	sr. vred. $\tau_{2,sr}$	st. dev. $S_{\tau_2}$	koeficijenti		$C_{S_{\tau_2}}/C_{v_{\tau_2}}$
				varijacije $C_{v_{\tau_2}}$	asimetrije $C_{S_{\tau_2}}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[dana]	[dana]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	217	132.4	78.0	0.589	1.366	2.318
2600	204	140.8	82.0	0.582	1.531	2.629
2700	191	150.0	92.7	0.618	1.639	2.652
2800	178	160.5	105.2	0.656	1.809	2.759
2900	165	173.2	122.0	0.704	2.056	2.918
3000	155	184.4	121.2	0.657	1.713	2.605
3100	147	194.4	133.9	0.689	1.707	2.478
3200	140	204.1	138.3	0.678	1.541	2.275
3300	127	224.6	153.2	0.682	1.664	2.440
3400	115	247.8	180.4	0.728	1.538	2.112
3500	106	268.9	189.2	0.704	1.494	2.124
3600	98	291.1	221.0	0.759	1.574	2.073
3700	91	313.5	227.9	0.727	1.561	2.148
3800	86	331.7	274.0	0.826	2.234	2.704
3900	77	370.5	268.2	0.724	1.119	1.546
4000	69	405.1	320.2	0.790	1.332	1.685
4100	61	467.2	441.5	0.945	1.968	2.083
4200	58	456.0	388.1	0.851	1.219	1.432
4300	53	508.9	464.5	0.913	1.677	1.838
4400	48	561.9	494.4	0.880	1.688	1.919
4500	41	643.8	433.2	0.673	0.589	0.875
4600	40	648.3	520.8	0.803	1.282	1.596
4700	35	740.9	544.8	0.735	0.605	0.822
4800	32	810.3	606.2	0.748	1.106	1.479
4900	29	910.2	629.7	0.692	0.638	0.923
5000	26	983.0	691.3	0.703	0.663	0.943
5100	22	1149.2	814.8	0.709	0.649	0.915
5200	18	1349.3	952.6	0.706	0.537	0.760

26. Statistike vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 3,  $\tau_3$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_3$	sr. vred. $\tau_{3,sr}$	st. dev. $S_{\tau_3}$	koeficijenti		$C_{S_{\tau_3}}/C_{v_{\tau_3}}$
				varijacije $C_{v_{\tau_3}}$	asimetrije $C_{S_{\tau_3}}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[dana]	[dana]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	144	199.1	97.2	0.489	0.912	1.867
2600	135	212.1	106.0	0.500	1.209	2.419
2700	127	225.3	110.3	0.490	1.108	2.264
2800	118	241.7	125.5	0.519	1.206	2.322
2900	110	259.8	139.9	0.539	1.342	2.493
3000	103	277.3	162.2	0.585	1.690	2.890
3100	98	291.6	166.5	0.571	1.547	2.710
3200	93	307.1	163.7	0.533	1.167	2.189
3300	84	336.5	203.6	0.605	1.718	2.839
3400	76	367.8	241.5	0.657	1.551	2.362
3500	70	399.3	226.9	0.568	1.206	2.123
3600	65	438.4	276.5	0.631	0.990	1.570
3700	60	465.8	278.5	0.598	1.155	1.932
3800	57	500.0	330.8	0.662	1.467	2.218
3900	51	558.8	324.4	0.581	0.707	1.218
4000	46	607.6	420.3	0.692	1.098	1.587
4100	40	688.2	563.5	0.819	1.463	1.786
4200	38	683.8	526.6	0.770	1.544	2.005
4300	35	754.1	506.4	0.671	1.240	1.846
4400	31	836.5	508.9	0.608	0.441	0.725
4500	27	960.4	581.9	0.606	0.652	1.076
4600	26	986.5	619.9	0.628	0.837	1.332
4700	23	1124.8	676.5	0.601	0.707	1.175
4800	21	1231.9	899.3	0.730	0.950	1.302
4900	19	1364.8	739.8	0.542	0.337	0.621

27. Statistike vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 4,  $\tau_4$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_4$	sr. vred. $\tau_{4,sr}$	st. dev. $S_{\tau_4}$	koeficijenti		$C_{s_{\tau_4}}/C_{v_{\tau_4}}$
				varijacije $C_{v_{\tau_4}}$	asimetrije $C_{s_{\tau_4}}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[dana]	[dana]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	108	265.4	117.4	0.442	0.930	2.103
2600	101	283.3	111.9	0.395	0.617	1.561
2700	95	300.8	128.3	0.426	0.865	2.029
2800	88	322.9	155.0	0.480	1.303	2.715
2900	82	347.9	162.3	0.467	1.270	2.720
3000	77	370.5	199.6	0.539	2.384	4.423
3100	73	390.8	195.9	0.501	1.135	2.264
3200	69	410.0	214.2	0.523	1.117	2.138
3300	63	448.7	243.6	0.543	1.397	2.574
3400	57	490.4	261.2	0.533	0.913	1.714
3500	52	528.6	292.0	0.552	0.885	1.602
3600	48	574.0	315.2	0.549	0.772	1.407
3700	45	621.1	346.5	0.558	0.666	1.195
3800	42	654.4	368.5	0.563	1.052	1.869
3900	38	735.5	372.7	0.507	1.024	2.020
4000	34	808.4	418.6	0.518	0.401	0.775
4100	30	917.6	642.2	0.700	1.106	1.580
4200	28	917.9	542.0	0.591	0.461	0.781
4300	26	999.8	589.0	0.589	0.959	1.627
4400	23	1124.8	669.9	0.596	0.707	1.187
4500	20	1293.5	701.1	0.542	0.597	1.102
4600	19	1342.0	817.3	0.609	0.893	1.466

28. Statistike vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 5,  $\tau_5$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj $M_5$	sr. vred. $\tau_{5,sr}$	st. dev. $S_{\tau_5}$	koeficijenti		$C_{s_{\tau_5}}/C_{v_{\tau_5}}$
				varijacije $C_{v_{\tau_5}}$	asimetrije $C_{s_{\tau_5}}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[ - ]	[dana]	[dana]	[ - ]	[ - ]	[ - ]
2500	86	332.8	133.1	0.400	0.904	2.260
2600	81	353.5	130.9	0.370	0.743	2.007
2700	75	377.2	146.0	0.387	0.637	1.647
2800	70	403.8	178.5	0.442	1.363	3.084
2900	65	435.2	184.9	0.425	1.544	3.634
3000	61	463.4	218.3	0.471	1.253	2.658
3100	58	487.8	236.3	0.485	1.528	3.153
3200	55	513.9	241.3	0.470	0.794	1.692
3300	50	559.0	282.0	0.504	1.583	3.139
3400	45	609.4	301.5	0.495	1.037	2.097
3500	42	665.5	296.4	0.445	0.610	1.371
3600	38	721.7	300.2	0.416	0.355	0.853
3700	35	776.0	341.0	0.439	0.188	0.429
3800	33	823.0	389.3	0.473	0.551	1.165
3900	30	916.2	518.4	0.566	0.916	1.619
4000	27	1015.7	607.0	0.598	0.963	1.611
4100	23	1175.2	701.0	0.596	0.777	1.303
4200	22	1161.4	604.1	0.520	0.803	1.544
4300	20	1280.3	686.7	0.536	0.680	1.268
4400	18	1422.5	804.1	0.565	1.026	1.815



29. Parametri eksponencijalne, Weibulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 1,  $\tau_1$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Weibul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	M	$\tau_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]
2500	435	66.3	0	1	1.401	73.5	0	7	0.128	74.4	0	2
2600	409	70.5	0	1	1.407	78.2	0	7	0.147	80.4	0	3
2700	383	75.2	0	2	1.376	83.1	0	8	0.152	86.1	0	4
2800	358	80.0	0	3	1.292	87.4	0	6	0.069	85.4	0	4
2900	332	86.3	0	4	1.252	93.6	0	4	0.060	91.4	0	5
3000	312	91.8	0	7	1.222	98.9	0	4	0.049	96.3	0	7
3100	296	96.8	0	6	1.219	104.2	0	4	0.040	100.6	0	6
3200	282	101.6	0	8	1.195	108.8	0	5	0.023	103.9	0	8
3300	256	111.8	0	9	1.191	119.5	1	8	0.022	114.2	0	10
3400	232	123.3	0	12	1.185	131.6	2	7	0.045	128.9	0	12
3500	214	133.7	0	17	1.142	141.1	2	10	-0.005	133.0	0	17
3600	197	145.2	0	24	1.122	152.3	6	13	-0.005	144.6	0	25
3700	183	156.3	1	22	1.065	160.8	4	13	-0.069	145.5	0	30
3800	173	165.4	1	23	1.057	169.5	5	13	-0.067	154.3	1	33
3900	155	184.6	6	19	1.025	186.7	9	14	-0.070	171.6	3	30
4000	140	204.3	11	11	0.975	201.7	10	16	0.159	172.3	6	37
4100	123	232.4	8	12	0.952	226.8	19	23	-0.176	192.5	16	49
4200	118	229.7	5	8	0.940	222.5	17	19	-0.204	184.4	15	46
4300	107	252.8	30	29	0.974	249.6	34	40	-0.124	222.2	29	68
4400	97	278.9	50	45	0.974	275.5	51	57	-0.104	250.4	48	77
4500	84	322.1	81	67	1.005	322.7	78	64	-0.028	313.1	81	76
4600	82	329.9	82	67	0.998	329.6	83	68	-0.033	319.2	84	77
4700	72	375.7	75	65	0.999	375.6	75	65	0.043	392.0	66	52
4800	66	409.9	61	52	0.972	404.7	74	65	0.016	416.5	58	48
4900	59	458.5	88	71	0.995	457.5	90	74	0.052	482.6	81	57
5000	54	494.1	78	63	0.976	488.6	86	75	-0.006	491.1	79	65
5100	46	574.0	63	56	0.962	564.1	79	71	0.063	611.0	50	45
5200	38	668.7	59	41	0.910	638.0	91	78	-0.152	571.2	85	76
5300	31	819.6	64	42	0.936	795.1	67	60	0.012	829.1	63	41
5400	28	907.5	40	48	0.979	899.6	38	50	0.164	1060.8	45	41
5500	23	1099.8	27	49	1.068	1124.9	34	51	0.373	1528.3	75	57
5600	19	1331.3	50	69	1.043	1350.6	56	71	0.654	2360.7	69	43

30. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 2,  $\tau_2$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Vejbul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_2$	$\tau_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]
2500	217	132.4	0	0	1.835	150.0	9	13	0.345	171.6	0	0
2600	204	140.8	0	0	1.855	159.6	15	14	0.274	172.5	0	0
2700	191	150.0	0	0	1.760	169.7	12	16	0.290	187.7	0	0
2800	178	160.5	0	0	1.671	181.1	13	19	0.256	197.1	0	0
2900	165	173.2	0	0	1.580	194.7	17	14	0.215	207.2	0	0
3000	155	184.4	0	0	1.655	207.7	43	50	0.255	226.0	0	1
3100	147	194.4	0	0	1.591	218.5	41	29	0.263	241.4	0	1
3200	140	204.1	0	0	1.607	229.5	49	41	0.292	259.0	0	2
3300	127	224.6	0	0	1.601	252.4	61	46	0.285	283.9	0	2
3400	115	247.8	0	1	1.502	276.8	53	34	0.271	311.6	2	5
3500	106	268.9	0	1	1.549	301.2	53	40	0.291	342.2	3	5
3600	98	291.1	0	2	1.443	323.3	27	30	0.270	368.1	7	8
3700	91	313.5	1	2	1.494	349.5	65	53	0.262	391.1	9	11
3800	86	331.7	5	7	1.351	364.5	68	61	0.123	370.6	10	15
3900	77	370.5	16	13	1.442	409.7	96	94	0.314	481.3	44	67
4000	69	405.1	33	28	1.337	442.9	92	86	0.264	511.0	59	69
4100	61	467.2	60	65	1.169	495.8	78	70	0.061	495.9	66	69
4200	58	456.0	35	53	1.237	490.6	54	58	0.270	584.6	42	47
4300	53	508.9	58	77	1.171	539.4	83	77	0.108	563.9	84	81
4400	48	561.9	27	37	1.229	603.7	30	53	0.146	643.9	57	46
4500	41	643.8	38	26	1.496	712.1	81	91	0.684	1117.0	90	74
4600	40	648.3	48	56	1.300	704.0	87	82	0.273	825.5	94	81
4700	35	740.9	51	65	1.355	808.6	62	65	0.611	1233.8	56	58
4800	32	810.3	37	49	1.387	889.3	97	96	0.383	1124.1	90	85
4900	29	910.2	60	50	1.450	1002.3	98	96	0.735	1672.3	73	58
5000	26	983.0	36	49	1.445	1083.4	55	72	0.673	1708.6	70	56
5100	22	1149.2	58	68	1.462	1271.8	62	78	0.717	2075.1	78	56

31. Parametri eksponencijalne, Weibulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $pp$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 3,  $\tau_3$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Weibul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_3$	$\tau_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]
2500	144	199.1	0	0	2.191	225.6	76	75	0.548	290.0	0	0
2600	135	212.1	0	0	2.135	240.3	61	59	0.437	287.3	0	0
2700	127	225.3	0	0	2.185	255.3	66	57	0.479	313.6	0	0
2800	118	241.7	0	0	2.060	274.0	59	62	0.433	328.3	0	0
2900	110	259.8	0	0	1.996	294.6	41	34	0.448	360.1	0	1
3000	103	277.3	0	0	1.848	313.9	60	56	0.335	357.5	0	1
3100	98	291.6	0	0	1.893	330.5	37	30	0.369	384.1	0	0
3200	93	307.1	0	0	2.021	348.4	39	31	0.550	459.0	0	1
3300	84	336.5	0	0	1.799	380.9	42	35	0.321	431.0	0	1
3400	76	367.8	0	0	1.678	415.4	3	14	0.369	495.4	1	2
3500	70	399.3	0	0	1.898	452.4	58	53	0.555	609.7	2	4
3600	65	438.4	0	1	1.713	495.1	60	37	0.562	681.5	7	14
3700	60	465.8	0	1	1.808	527.1	24	34	0.492	678.4	3	6
3800	57	500.0	1	1	1.647	563.1	24	28	0.304	637.6	6	7
3900	51	558.8	2	2	1.819	630.0	97	96	0.538	830.8	33	34
4000	46	607.6	11	14	1.538	678.3	94	87	0.390	835.5	43	59
4100	40	688.2	35	50	1.315	751.3	73	60	0.213	832.7	65	69
4200	38	683.8	18	25	1.418	756.7	85	79	0.274	868.5	52	51
4300	35	754.1	6	13	1.591	844.0	100	91	0.386	1029.6	37	45
4400	31	836.5	29	17	1.708	938.2	68	68	0.602	1311.5	90	85
4500	27	960.4	26	19	1.760	1082.3	96	93	0.838	1845.2	59	48
4600	26	986.5	33	22	1.705	1110.4	93	91	0.575	1541.3	74	72
4700	23	1124.8	17	21	1.792	1269.6	94	83	0.720	1943.9	79	66
4800	21	1231.9	44	65	1.456	1364.9	96	81	0.566	1990.0	71	61
4900	19	1364.8	16	19	2.001	1543.2	96	84	1.088	2859.2	64	66

32. Parametri eksponencijalne, Vejbulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 4,  $\tau_4$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Vejbul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_4$	$\tau_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]
2500	108	265.4	0	0	2.417	300.2	36	36	0.703	425.8	0	0
2600	101	283.3	0	0	2.722	319.0	76	77	0.689	435.9	0	0
2700	95	300.8	0	0	2.501	339.6	54	63	0.686	473.2	0	0
2800	88	322.9	0	0	2.216	365.6	28	40	0.429	433.0	0	0
2900	82	347.9	0	0	2.276	393.6	18	35	0.451	471.8	0	0
3000	77	370.5	0	0	1.983	419.3	28	17	0.276	453.7	0	0
3100	73	390.8	0	0	2.144	443.1	30	27	0.543	573.7	0	1
3200	69	410.0	0	0	2.060	465.0	28	35	0.605	638.2	1	2
3300	63	448.7	0	0	1.994	509.3	38	19	0.504	650.8	0	1
3400	57	490.4	0	1	2.024	556.0	42	64	0.528	714.8	4	9
3500	52	528.6	0	1	1.955	599.3	63	63	0.595	816.1	9	14
3600	48	574.0	0	1	1.964	650.5	67	53	0.720	970.6	18	18
3700	45	621.1	2	2	1.925	703.1	85	79	0.679	1019.5	28	40
3800	42	654.4	1	2	1.916	741.1	61	89	0.445	908.0	10	18
3900	38	735.5	1	1	2.118	832.4	77	75	0.526	1065.6	11	8
4000	34	808.4	1	3	2.066	913.4	94	90	0.894	1521.7	37	45
4100	30	917.6	7	26	1.554	1028.1	76	60	0.416	1291.1	26	57
4200	28	917.9	13	16	1.797	1034.5	70	73	1.076	2067.4	39	26
4300	26	999.8	9	11	1.829	1129.2	89	89	0.581	1554.7	63	45
4400	23	1124.8	15	17	1.816	1271.0	83	68	0.774	2022.4	43	48
4500	20	1293.5	7	12	1.985	1460.5	84	79	0.723	2185.8	60	47
4600	19	1342.0	14	25	1.767	1511.7	99	90	0.565	2070.2	66	68

33. Parametri eksponencijalne, Weibulove dvoparametarske i Pareto raspodele i  $p$  vrednosti za statistike testova  $KS$  i  $N\omega^2$  za vremena između pojave pikova iznad praga - agregacija 5,  $\tau_5$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

baza	pik.	Eksp.	$p_E$ vred.		Weibul 2		$p_{W2}$ vred.		Pareto		$p_{GP}$ vred.	
$Q_B$	$M_5$	$\tau_{sr}$	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$	oblik	razm.	$KS$	$N\omega^2$
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]	[-]	[dana]	[%]	[%]
2500	86	332.8	0	0	2.654	374.7	42	38	0.668	508.7	0	0
2600	81	353.5	0	0	2.876	396.6	46	54	0.730	553.7	0	0
2700	75	377.2	0	0	2.791	424.6	54	48	0.959	691.5	0	1
2800	70	403.8	0	0	2.392	456.4	6	12	0.584	599.8	0	0
2900	65	435.2	0	0	2.460	491.0	6	7	0.524	616.1	0	0
3000	61	463.4	0	0	2.258	524.2	35	42	0.544	676.1	0	1
3100	58	487.8	0	0	2.198	552.3	60	61	0.409	648.0	0	1
3200	55	513.9	0	0	2.294	581.8	81	78	0.626	784.3	1	4
3300	50	559.0	0	0	2.123	633.5	38	31	0.496	799.8	1	1
3400	45	609.4	0	0	2.183	691.1	57	50	0.589	919.5	2	5
3500	42	665.5	0	0	2.439	752.5	95	85	0.823	1150.1	8	10
3600	38	721.7	0	0	2.653	814.4	95	92	1.075	1445.5	17	18
3700	35	776.0	1	1	2.495	875.5	100	99	1.037	1548.9	30	24
3800	33	823.0	1	1	2.280	929.8	96	94	0.632	1262.5	17	14
3900	30	916.2	5	5	1.904	1036.2	96	92	0.675	1525.6	57	37
4000	27	1015.7	4	10	1.800	1146.3	92	83	0.588	1592.6	41	43
4100	23	1175.2	9	18	1.830	1330.5	82	64	0.665	1940.8	56	59
4200	22	1161.4	5	7	2.064	1311.2	92	86	0.605	1790.9	35	29
4300	20	1280.3	7	12	2.020	1447.7	88	86	0.699	2121.5	53	50

34. Analiza  $n_\xi$  broja javljanja pikova iznad praga u godini dana,  $\xi = Q_{\text{pik}} - Q_B$ ,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$	broj pikova M	$n_\xi$			st.dev. $S_{n_\xi}$	koeficijenti			indeks disperzije $I_{n_\xi}$
		min $n_{\xi,\text{min}}$	maks $n_{\xi,\text{max}}$	srednji $n_{\xi,\text{sr}} = \Lambda_B$		varijacije $Cv_{n_\xi}$	asimetrije $Cs_{n_\xi}$	$Cs_{n_\xi}/Cv_{n_\xi}$	
[m <sup>3</sup> /s]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
2500	436	1	15	5.519	2.241	0.406	1.026	2.527	0.910
2600	410	1	11	5.190	1.968	0.379	0.359	0.948	0.746
2700	384	1	10	4.861	1.817	0.374	0.133	0.357	0.679
2800	359	0	10	4.544	1.927	0.424	0.146	0.344	0.817
2900	333	0	9	4.215	1.892	0.449	0.112	0.250	0.850
3000	313	0	9	3.962	1.891	0.477	0.336	0.704	0.902
3100	297	0	8	3.759	1.834	0.488	0.199	0.408	0.895
3200	283	0	8	3.582	1.851	0.517	0.252	0.488	0.956
3300	257	0	8	3.253	1.779	0.547	0.306	0.560	0.973
3400	233	0	7	2.949	1.694	0.574	0.292	0.509	0.973
3500	215	0	7	2.722	1.687	0.620	0.354	0.571	1.045
3600	198	0	7	2.506	1.671	0.667	0.539	0.808	1.114
3700	184	0	7	2.329	1.693	0.727	0.653	0.898	1.230
3800	174	0	7	2.203	1.636	0.743	0.783	1.054	1.215
3900	156	0	7	1.975	1.544	0.782	1.008	1.289	1.207
4000	141	0	7	1.785	1.550	0.868	1.176	1.354	1.346
4100	124	0	6	1.570	1.474	0.939	1.106	1.178	1.383
4200	119	0	6	1.506	1.510	1.002	1.100	1.098	1.513
4300	108	0	5	1.367	1.341	0.981	0.995	1.014	1.316
4400	98	0	5	1.241	1.253	1.010	0.974	0.964	1.265
4500	85	0	4	1.076	1.095	1.018	0.868	0.853	1.115
4600	83	0	4	1.051	1.085	1.033	0.948	0.918	1.120
4700	73	0	4	0.924	1.035	1.120	1.223	1.092	1.159
4800	67	0	4	0.848	1.014	1.195	1.222	1.022	1.212
4900	60	0	4	0.759	0.937	1.233	1.368	1.109	1.155
5000	55	0	4	0.696	0.897	1.288	1.302	1.011	1.155
5100	47	0	4	0.595	0.855	1.437	1.653	1.150	1.229
5200	39	0	4	0.494	0.782	1.585	1.834	1.157	1.240
5300	32	0	2	0.405	0.670	1.655	1.406	0.849	1.109
5400	29	0	2	0.367	0.644	1.754	1.549	0.883	1.130
5500	24	0	2	0.304	0.585	1.926	1.801	0.935	1.127
5600	20	0	2	0.253	0.542	2.142	2.087	0.974	1.162
5700	17	0	2	0.215	0.472	2.191	2.135	0.974	1.033
5800	15	0	2	0.190	0.455	2.397	2.409	1.005	1.091
5900	13	0	2	0.165	0.406	2.468	2.416	0.979	1.002
6000	12	0	2	0.152	0.395	2.601	2.596	0.998	1.028

35. Empirijska relativna frekvencija  $n_{\xi,mes}$  broja javljanja pikova po mesecima u toku godine. Reka: Dunav, Stanica: Bezdan

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$ [m <sup>3</sup> /s]	ukupno pikova M [ - ]	mesec sa najviše javljanja pikova	Empirijska relativna frekvencija broja javljanja pikova po mesecima [%]											
			mesec u godini											
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2500	436	3	6	9	12	11	9	11	12	8	7	5	5	6
2600	410	3	5	9	12	11	9	11	12	9	7	4	5	6
2700	384	3	5	9	12	11	9	12	12	9	6	4	5	7
2800	359	6	5	8	12	12	9	13	12	9	5	3	5	6
2900	333	6	5	8	13	12	10	13	12	9	5	4	4	6
3000	313	6	5	8	11	12	11	14	11	10	5	3	4	6
3100	297	6	5	8	11	12	10	13	12	10	5	3	4	6
3200	283	6	6	8	11	12	10	13	12	10	5	4	5	6
3300	257	6	5	8	11	12	9	13	12	9	5	4	4	7
3400	233	6	6	7	11	12	9	13	13	10	6	3	4	6
3500	215	6	6	7	11	12	9	14	13	10	5	3	4	6
3600	198	6	6	7	11	13	8	15	14	11	5	4	4	4
3700	184	6	5	5	11	14	8	16	14	11	5	4	3	4
3800	174	6	6	6	11	14	9	16	14	10	5	3	3	5
3900	156	6	4	6	12	13	8	17	13	11	5	3	2	4
4000	141	6	4	6	13	14	9	16	13	12	5	2	2	4
4100	124	6	5	6	11	15	7	16	14	11	6	2	2	3
4200	119	6	3	7	12	15	7	17	14	12	5	3	3	3
4300	108	6	4	7	11	15	6	18	14	13	5	2	2	4
4400	98	4	2	6	12	16	6	16	15	14	5	1	2	3
4500	85	4	2	7	12	19	5	19	13	14	4	1	1	4
4600	83	6	2	7	12	18	5	19	12	14	4	1	1	4
4700	73	6	3	7	11	18	4	21	12	15	3	1	1	4
4800	67	6	1	7	12	18	4	19	13	15	3	1	0	4
4900	60	6	0	7	13	17	3	22	15	17	2	0	0	5
5000	55	4	0	7	15	18	4	16	15	18	2	0	0	5
5100	47	4	0	6	17	19	2	13	17	17	2	0	0	6
5200	39	7	0	5	18	18	3	13	21	15	3	0	0	5
5300	32	4	0	0	19	22	3	13	22	16	0	0	0	6
5400	29	4	0	0	17	21	3	14	21	17	0	0	0	7
5500	24	4	0	0	17	25	0	17	21	21	0	0	0	0
5600	20	7	0	0	15	20	0	20	25	20	0	0	0	0
5700	17	4	0	0	12	24	0	18	24	24	0	0	0	0
5800	15	7	0	0	13	20	0	13	27	27	0	0	0	0
5900	13	7	0	0	8	23	0	8	31	31	0	0	0	0
6000	12	8	0	0	8	25	0	8	25	33	0	0	0	0

36. Empirijska kumulativna relativna frekvencija  $n_{\xi,mes}$  broja javljanja pikova po mesecima u toku godine. Reka: Dunav, Stanica: Bezdán

Broj godina: 79, od 1931. do 2009.

baza $Q_B$ [m <sup>3</sup> /s]	ukupno pikova M [-]	Empirijska kumulativna relativna frekvencija broja javljanja pikova po mesecima [%]												
		početak godine	kraj meseca $i$ u godini											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2500	436	0	6	15	27	38	46	58	69	78	85	89	94	100
2600	410	0	5	14	26	37	46	58	69	78	85	89	94	100
2700	384	0	5	14	26	37	46	58	70	79	84	89	93	100
2800	359	0	5	13	25	37	47	60	71	80	85	89	94	100
2900	333	0	5	13	26	37	47	60	72	81	86	89	94	100
3000	313	0	5	13	24	36	47	60	72	81	86	89	94	100
3100	297	0	5	13	25	36	46	60	72	81	86	90	94	100
3200	283	0	6	14	25	36	46	59	71	81	86	89	94	100
3300	257	0	5	13	24	36	46	58	71	80	85	89	93	100
3400	233	0	6	13	24	36	45	58	71	81	86	90	94	100
3500	215	0	6	13	25	37	46	60	73	83	87	91	94	100
3600	198	0	6	13	24	36	44	60	74	84	89	92	96	100
3700	184	0	5	11	22	35	43	59	73	84	89	92	96	100
3800	174	0	6	11	23	37	45	61	75	85	90	93	95	100
3900	156	0	4	10	22	36	44	61	74	85	90	94	96	100
4000	141	0	4	10	23	37	46	62	74	87	91	94	96	100
4100	124	0	5	11	23	38	45	61	75	86	92	94	97	100
4200	119	0	3	10	22	37	44	61	75	87	92	94	97	100
4300	108	0	4	11	22	37	44	61	75	88	93	94	96	100
4400	98	0	2	8	20	37	43	59	74	89	94	95	97	100
4500	85	0	2	9	21	40	45	64	76	91	94	95	96	100
4600	83	0	2	10	22	40	45	64	76	90	94	95	96	100
4700	73	0	3	10	21	38	42	63	75	90	93	95	96	100
4800	67	0	1	9	21	39	43	63	76	91	94	96	96	100
4900	60	0	0	7	20	37	40	62	77	93	95	95	95	100
5000	55	0	0	7	22	40	44	60	75	93	95	95	95	100
5100	47	0	0	6	23	43	45	57	74	91	94	94	94	100
5200	39	0	0	5	23	41	44	56	77	92	95	95	95	100
5300	32	0	0	0	19	41	44	56	78	94	94	94	94	100
5400	29	0	0	0	17	38	41	55	76	93	93	93	93	100
5500	24	0	0	0	17	42	42	58	79	100	100	100	100	100
5600	20	0	0	0	15	35	35	55	80	100	100	100	100	100
5700	17	0	0	0	12	35	35	53	76	100	100	100	100	100
5800	15	0	0	0	13	33	33	47	73	100	100	100	100	100
5900	13	0	0	0	8	31	31	38	69	100	100	100	100	100
6000	12	0	0	0	8	33	33	42	67	100	100	100	100	100



37. Maksimalni godišnji protoci – hronološki i uređeni u rastući niz,  
Reka: Dunav, Stanica: Bezdan, 79 godina, od 1931. do 2009. godine.

r.b. [-]	hronološki niz		uređen niz		r.b. [-]	hronološki niz		uređen niz	
	godina [-]	$Q_{\max, \text{god}}$ [m <sup>3</sup> /s]	godina [-]	$Q_{\max, \text{god}}$ [m <sup>3</sup> /s]		godina [-]	$Q_{\max, \text{god}}$ [m <sup>3</sup> /s]	godina [-]	$Q_{\max, \text{god}}$ [m <sup>3</sup> /s]
1	1931	4175	1950	2790	41	1971	3160	1962	4940
2	1932	4137	1934	3060	42	1972	3930	1958	4950
3	1933	3990	1971	3160	43	1973	4370	1949	5025
4	1934	3060	1989	3252	44	1974	5450	1995	5065
5	1935	4925	1978	3420	45	1975	6570	1936	5069
6	1936	5069	1953	3430	46	1976	4030	2005	5080
7	1937	5179	1984	3480	47	1977	5160	1959	5140
8	1938	4854	1969	3510	48	1978	3420	1977	5160
9	1939	5428	2008	3670	49	1979	4760	1985	5170
10	1940	6311	2004	3680	50	1980	4030	1937	5179
11	1941	5598	1983	3700	51	1981	5680	1967	5200
12	1942	5269	1986	3780	52	1982	4770	1957	5250
13	1943	4602	1972	3930	53	1983	3700	1945	5257
14	1944	6125	1990	3933	54	1984	3480	2007	5260
15	1945	5257	1933	3990	55	1985	5170	1942	5269
16	1946	4420	1976	4030	56	1986	3780	2000	5360
17	1947	5884	1980	4030	57	1987	4730	1955	5400
18	1948	5440	1993	4042	58	1988	5778	1939	5428
19	1949	5025	1992	4086	59	1989	3252	1948	5440
20	1950	2790	1961	4090	60	1990	3933	1974	5450
21	1951	4160	1932	4137	61	1991	6050	1970	5570
22	1952	4820	1951	4160	62	1992	4086	1994	5570
23	1953	3430	1931	4175	63	1993	4042	1941	5598
24	1954	6520	1968	4180	64	1994	5570	1981	5680
25	1955	5400	1964	4260	65	1995	5065	1999	5760
26	1956	6110	1973	4370	66	1996	4460	1988	5778
27	1957	5250	2003	4370	67	1997	5906	1947	5884
28	1958	4950	1946	4420	68	1998	4790	1997	5906
29	1959	5140	1996	4460	69	1999	5760	1991	6050
30	1960	4490	1960	4490	70	2000	5360	1956	6110
31	1961	4090	1943	4602	71	2001	4700	1944	6125
32	1962	4940	1963	4690	72	2002	7140	1940	6311
33	1963	4690	2001	4700	73	2003	4370	2009	6340
34	1964	4260	1987	4730	74	2004	3680	1966	6370
35	1965	8360	1979	4760	75	2005	5080	1954	6520
36	1966	6370	1982	4770	76	2006	7920	1975	6570
37	1967	5200	1998	4790	77	2007	5260	2002	7140
38	1968	4180	1952	4820	78	2008	3670	2006	7920
39	1969	3510	1938	4854	79	2009	6340	1965	8360
40	1970	5570	1935	4925					

---

## Biografija autora

Dragutin Pavlović je rođen 13.7.1966. u Beogradu. Od 15.12.1992. godine zaposlen je na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, kao stipendista Zavoda za tržište rada, od aprila 1994. kao asistent-pripravnik i od juna 1998. godine kao asistent. Učestvuje u nastavi na predmetima: Hidrotehnika i Osnove hidrotehnike, Hidrologija, Inženjerska hidrologija i Stohastička hidrologija.

U Beogradu je završio osnovnu školu OŠ „Ivan Gundulić” i srednju školu (matematičko-tehnička struka, smer programer) u IX beogradskoj gimnaziji, 1985. godine. Diplomirao je na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu 1992. godine sa prosečnom ocenom 9,46. Diplomski rad na predmetu Hidraulika pod naslovom „Analiza prostorne neravnomernosti parametara porodne sredine” odbranio je sa ocenom 10 (deset). Poslediplomske studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu, na odseku za Hidrotehniku, smer Mehanika fluida, hidraulika i hidrologija upisao je 1992. godine i položio propisane predmete sa srednjom ocenom 9,83. Magistarsku tezu pod naslovom „Regionalna statistička analiza minimalnih proticaja” odbranio je decembra 1997. godine.

Dobitnik je Vukove diplome za osnovnu i srednju školu, nagrade Fonda „Jaroslav Černi” za najbolji uspeh na III godini studija na Odseku za hidrotehniku i nagrade Građevinskog fakulteta povodom Dana fakulteta 1993. godine iz fonda Instituta za hidrotehniku.

U periodu od 1993. do 2011. učestvovao je u izradi 3 studije, 4 projekta, 2 revizije projekata. Učestvovao je ili učestvuje u ukupno 5 naučno-istraživačkih projekata ili projekata tehnološkog razvoja. Učestvovao je u pripremi i održavanju kursa iz Merenja u hidrotehnici - „Merenje protoka u cevi pomoću sonde za brzinu” 2005. i 2011. godine. Sa prof. dr Vojislavom Vukmirovićem je 2005. godine objavio zbirku zadataka „Primenjena hidrologija”.

Govori i piše na engleskom jeziku, elementarno se služi ruskim i francuskim. Oženjen je i otac je jednog muškog deteta.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а \_\_\_\_\_ мр. Драгутин Ж. Павловић, дипл. инж. грађ.

број уписа \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„МОДЕЛИРАЊЕ СТОХАСТИЧКЕ СТРУКТУРЕ  
КАРАКТЕРИСТИКА ВЕЛИКИХ ВОДА  
ДОБИЈЕНИХ ИЗ СЕРИЈА ПИКОВА ИЗНАД ПРАГА”

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, \_\_\_\_\_ 4.10.2013. \_\_\_\_\_



Мр. Драгутин Ж. Павловић,  
дипл. инж. грађ.

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ мр. Драгутин Павловић, дипл.инж.грађ.

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада „МОДЕЛИРАЊЕ СТОХАСТИЧКЕ СТРУКТУРЕ КАРАКТЕРИСТИКА  
ВЕЛИКИХ ВОДА ДОБИЈЕНИХ ИЗ СЕРИЈА ПИКОВА ИЗНАД ПРАГА”

Ментор \_\_\_\_\_  
В.проф. Јован Ж. Деспотовић, дипл.инж.грађ.  
Доц.др. Јасна Д. Плавшић, дипл.инж.грађ.

Потписани \_\_\_\_\_ мр. Драгутин Ж. Павловић, дипл.инж.грађ.

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_ 4.10.2013.



Мр. Драгутин Ж. Павловић,  
дипл.инж.грађ.

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„МОДЕЛИРАЊЕ СТОХАСТИЧКЕ СТРУКТУРЕ  
КАРАКТЕРИСТИКА ВЕЛИКИХ ВОДА  
ДОБИЈЕНИХ ИЗ СЕРИЈА ПИКОВА ИЗНАД ПРАГА”

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 4.10.2013.



Мр. Драгутин Ж. Павловић,  
дипл.инж.грађ.

1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.