UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Dušan D. Đorđević

APROKSIMACIJE REŠENjA STOHASTIČKIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRIMENOM TAYLOR-OVIH REDOVA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2021.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Dušan D. Đorđević

THE APPROXIMATIONS OF SOLUTIONS TO STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS BY APPLYING TAYLOR SERIES

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2021.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Миљана Јовановић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу
Наслов:	Апроксимације решења стохастичких диференцијалних једначина применом Taylor-ових редова
Резиме:	Тема ове докторске дисертације је примена Тејлорове формуле на коефицијенте различитих типова стохастичких диференцијалних једначина, у циљу апроксимација њихових решења под условима који нису стандардни као глобални Липшицов услов и услов линеарног раста. Под одређеним претпоставкама показује се конвергенција низа апроксимативних решења ка решењу полазне једначине, у скоро извесном смислу и у средњем реда $p>0$. Ред конвергенције у L^p смислу се повећава уколико се повећају редови извода у Тејлоровим апроксимацијама коефицијената полазне једначине. Добијени резултати се илуструју кроз примере који су конципирани тако да нису задовољени глобални Липшицов услов и/или услов линеарног раста за коефицијенте преноса и дифузије, те је на тај начин оправдана потреба за доказаним резултатима. Технике примењене у доказима су условљене типом једначине која се разматра, као и условима који су претпостављени за коефицијенте једначина.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Стохастичка анализа
Кључне речи:	L^p конвергенција, полиномијални услов, скоро извесна конвергенција, стохастичке диференцијалне једначине, стохастичке диференцијалне једначине са временски зависним кашњењем, функционалне стохастичке диференцијалне једначине, неутралне стохастичке диференцијалне једначине са временским кашњењем, Тејлорова апроксимација, Фрешеов извод
УДК:	519.21 519.216

CERIF класификација:	P130: Функције, диференцијалне једначине
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Miljana Jovanović, PhD, full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	The approximations of solutions to stochastic differential equations by applying Taylor series
Abstract:	The subject of the doctoral dissertation is the application of the Taylor formula for the coefficients of various types of stochastic differential equations, for the purpose of the approximation of theirs solutions under non standard conditions, such as the global Lipschitz condition and the linear growth condition. Under certain assumptions, the almost sure convergence and the convergence in the p-th mean, $p>0$, of the sequence of approximate solutions towards the solution of the initial equation, is shown. The rate of the L^p convergence increases as the orders of the Taylor approximations of the coefficients of the initial equation increase. Shown results are illustrated through the examples which are designed such that the global Lipschitz condition and/or the linear growth condition for the drift and diffusion coefficients are not satisfied. That way, the need for the shown results is satisfied. Techniques used in the proofs are determined by the type of the considered equation, as well as by the conditions which are assumed for the coefficients of the equations.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Stochastic analysis
Key Words:	L^p convergence, polynomial condition, almost sure convergence, stochastic differential equations, stochastic differential equations with time dependent delay, stochastic functional differential equations, neutral stochastic differential equations with time related delay, Taylor approximation, Frechet derivative
UDC:	519.21 519.216
CERIF Classification:	P130: Functions, differential equations

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Душан Д. Ђорђевић
Ментор, **МН**:	Миљана Д. Јовановић
Наслов рада, **НР**:	Апроксимације решења стохастичких диференцијалних једначина применом Taylor-ових редова
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Српски / енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2021.
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	126 стр.
Научна област, **НО**:	Математичке науке
Научна дисциплина, **НД**:	Стохастичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	L^p конвергенција, полиномијални услов, скоро извесна конвергенција, стохастичке диференцијалне једначине, стохастичке диференцијалне једначине са временски зависним кашњењем, функционалне стохастичке диференцијалне једначине, неутралне стохастичке диференцијалне једначине са временским кашњењем, Тејлорова апроксимација, Фрешеов извод
УДК	519.21 519.216
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	Тема ове докторске дисертације је примена Тејлорове формуле на коефицијенте различитих типова стохастичких диференцијалних једначина, у циљу апроксимација њихових решења под условима који нису стандардни као глобални Липшицов услов и услов линеарног раста. Под одређеним претпоставкама показује се конвергенција низа апроксимативних решења ка решењу полазне једначине, у скоро извесном смислу и у средњем реда p>0. Ред конвергенције у L^p смислу се повећава уколико се повећају редови извода у Тејлоровим апроксимацијама коефицијената полазне једначине. Добијени резултати се илуструју кроз примере који су конципирани тако да нису задовољени глобални Липшицов услов и/или услов линеарног раста за коефицијенте преноса и дифузије, те је на тај начин оправдана потреба за доказаним резултатима. Технике примењене у доказима су условљене типом једначине која се разматра, као и условима који су претпостављени за коефицијенте једначина.
Датум прихватања теме, **ДП**:	31.05.2021.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monograph
Type of record, **TR**:	Textual / graphic
Contents code, **CC**:	Doctoral dissertation
Author, **AU**:	Dušan D. Đorđević
Mentor, **MN**:	Miljana D. Jovanović
Title, **TI**:	The approximations of solutions to stochastic differential equations by applying Taylor series
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian / English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2021
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	126 p.
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Stochastic analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	L^p convergence, polynomial condition, almost sure convergence, stochastic differential equations, stochastic differential equations with time dependent delay, stochastic functional differential equations, neutral stochastic differential equations with time related delay, Taylor approximation, Frechet derivative
UC	519.21 519.216
Holding data, **HD**:	Library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		The subject of the doctoral dissertation is the application of the Taylor formula for the coefficients of various types of stochastic differential equations, for the purpose of the approximation of theirs solutions under non standard conditions, such as the global Lipschitz condition and the linear growth condition. Under certain assumptions, the almost sure convergence and the convergence in the p-th mean, $p>0$, of the sequence of approximate solutions towards the solution of the initial equation, is shown. The rate of the L^p convergence increases as the orders of the Taylor approximations of the coefficients of the initial equation increase. Shown results are illustrated through the examples which are designed such that the global Lipschitz condition and/or the linear growth condition for the drift and diffusion coefficients are not satisfied. That way, the need for the shown results is satisfied. Techniques used in the proofs are determined by the type of the considered equation, as well as by the conditions which are assumed for the coefficients of the equations.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		May 31, 2021.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Predgovor

Na osnovu opsežne literature može se primetiti da mnoge stohastičke diferencijalne jednačine (SDJ), ili čak jednačine uopšte, nisu eksplicitno rešive. Jedan od retkih tipova rešivih SDJ su linearne SDJ, a klasa eksplicitno rešivih SDJ je u opštem slučaju još uža za složenije tipove jednačina. Međutim, mnoge pojave u realnom životu se modeliraju različitim tipovima SDJ koje su nelinarne sa visokim stepenom nelinearnosti.

U mnogim SDJ buduća stanja sistema koji se njima modeliraju ne zavise samo od trenutnog stanja tog sistema, već zavise od jednog ili više stanja sistema u periodu koji prethodi konkretnom trenutku. Na ovaj način se prirodno dolazi do različitih tipova SDJ, a zavisnost od prošlosti može se izražiti na različite načine koji dalje određuju tip jednačina. Tako, na primer, SDJ sa konstantnim kašnjenjem (SDJKK) ima koeficijente prenosa i difuzije koji zavise od stanja u prošlosti koje je uvek konstantno udaljeno od konkretnog trenutka, SDJ sa vremenski zavisnim kašnjenjem (SDJVZK) zavisi od stanja u prošlosti koje može biti bliže ili dalje od konkretnog trenutka, dok neke klase SDJ zavise od više od jednog stanja u prošlosti, kao što su funkcionalne SDJ (SFDJ). SFDJ imaju koeficijente prenosa i difuzije koji zavise ne samo od stanja u razmatranom trenutku, već i od neke istorije tog stanja. Neutralne SDJ (NSDJ), na primer, predstavljaju klasu SDJ koje zavise od prošlosti i sadašnjosti, ali koje pod diferencijalom osim stanja sistema u konkretnom trenutku sadrže i član koji zavisi od stanja sistema u prošlosti. Pored navedenih, postoje i drugi tipovi SDJ, koji su generalizacije običnih SDJ, koji nisu predmet proučavanja u ovoj doktorskoj disertaciji. Motivacija za proučavanje ovih tipova SDJ proizilazi, pre svega, iz njihove primene.

Klasa SDJVZK se često primenjuje u modeliranju pojava u mnogim tehničkim, prirodnim i društvenim naukama (videti, na primer [6, 13, 32, 48, 74, 79]). Ovi tipovi jednačina privlače veliki broj autora koji daju značajan doprinos analizi pomenutih jednačina, kao na primer, egzistenciji i jedinstvenosti rešenja [32, 48, 62], stabilnosti i ograničenosti momenata [3, 4, 5, 8, 47, 48, 62], kao i aproksimaciji rešenja [23, 32, 37, 48, 50, 58, 59, 60, 62, 68], između ostalih. Neki oblici SFDJ se koriste za opisivanje dinamike različitih procesa čime se konstruišu, na primer, predator-plen modeli i drugi populacioni modeli u biologiji, modeli koji omogućavaju istraživanje gena, epidemiološki modeli u medicini, modeli sa naknadnim efektima u mehanici, kao što je: kretanje čestica u fluidima, kontrola kretanja čvrstih tela, viskoelastičnosti i modeli u drugim oblastima (na primer [4, 7, 20, 30, 31, 36, 40, 41, 49, 51, 65, 72, 73, 76, 77]).

Potreba za numeričkim i analitičkim aproksimacijama javlja se kada se rešenje razmatrane jednačine ne može eksplicitno odrediti ili kada je teško analizirati neke osobine rešenja polazne jednačine, već je lakše dokazati odgovarajuće osobine aproksimativnih rešenja. U tom slučaju, koeficijenti aproksimativnih jednačina moraju zadovoljavati odgovarajuće pretpostavke koje garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja. Postoje numerički metodi za različite tipove SDJ, kao što su, na primer, metodi za SFDJ, prezentovani u radovima [53, 63, 78]. Međutim, neki problemi ne zahtevaju numeričke, već analitičke metode kada, na primer, postoje neke osobine rešenja koje treba ispitati, kao što su stabilnost, asimptotika, ograničenost momenata, itd. (videti najpre [35]). Zbog toga je nekada lakše analizirati aproksimativna rešenja, u slučaju kada ona nasleđuju tražene osobine rešenja polazne jednačine, umesto korišćenja nekih komplikovanih numeričkih metoda. Dobro je poznato da je jedan od kriterijuma izbora aproksimativnog metoda koji se primenjuje u rešavanju konkretnog problema brzina kojom aproksimativna rešenja teže rešenju polazne jednačine. U tom smislu analitički metod, zasnovan na Tejlorovom[1] razvoju koji je prezentovan u ovoj disertaciji, ima prednost nad numeričkim metodima.

Kao što se može videti u radovima [66, 67, 70], aproksimacije koje se zasnivaju na Tejlorovom razvoju su adekvatno primenjene u LIBOR modeliranju. Modeli u citiranim radovima baziraju se na običnim SDJ, kao i na SDJ sa Levijevim[2] procesima i opštim semimartingalima. Rezultati iz citiranih radova ukazuju na mogućnost primene rezultata iz ove disertacije u modeliranju određenih tržišnih parametara, imajući u vidu da se njihova evolucija opisuje SDJ čiji koeficijenti često ne zadovoljavaju uslov linearnog rasta.

Poslednjih godina egzistencija i jedinstvenost rešenja, razvoj aproksimativnih metoda, stabilnost tačnog i aproksimativnih rešenja i druge kvalitativne i kvantitativne osobine tačnih i aproksimativnih rešenja, uz visoko nelinearne koeficijente različitih tipova SDJ, privlače pažnju mnogih istraživača (pogledati, na primer [14, 21, 38, 52, 54]). Postoji mnogo metoda za nalaženje aproksimativnih rešenja u eksplicitnom obliku ili u obliku pogodnom za primene numeričkih metoda, kao što je Ojler[3]–Marujamin[4] metod, Milštajnov[5] metod, Runge[6]–Kutin[7] metod i mnogi drugi (videti [32], na primer).

Osnovna motivacija za uvođenje analitičkog metoda, prezentovanog u ovoj disertaciji, potiče od istraživanja Atale [1, 2]. On je aproksimirao rešenja SDJ rešenjima jednačina sa koeficijentima koji su Tejlorovi razvoji nultog reda odgovarajućih koeficijenata polaznih jednačina (u radu [1]), kao i Tejlorovim razvojima prvog reda u datim podeonim tačkama vremenskog intervala (u radu [2]). Na osnovu Atalinih radova, Janković i Ilić su konstruisali aproksimativna rešenja SDJ [27] i integrodiferencijalnih jednačina [28], definisanih na particijama vremenskog intervala. Koeficijenti aproksimativnih jednačina su Tejlorovi razvoji do proizvoljnog reda koeficijenata polaznih jednačina. Bliskost rešenja polazne i aproksimativne jednačine opisuje se u smislu L^p–norme i sa verovatnoćom jedan. Sledeći pomenute radove, autori Svetlana Janković, Miljana Jovanović i Marija Milošević, su ovaj metod delimično proširili na različite tipove SDJ, kao što su: SFDJ [61], pantografske SDJ sa prelazima Markova[8] [59], SDJVZK [60] i SDJ sa Puasonovom[9] slučajnom merom [58]. Imajući u vidu citirane radove, može se zaključiti da L^p–bliskost rešenja polazne i aproksimativnih jednačina raste sa porastom redova Tejorovih razvoja koeficijenata jednačina. U svakom od ovih radova pretpostavljeni su Lipšicov[10] uslov i uslov linearnog rasta za koeficijente prenosa i difuzije, koji garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja polazne jednačine za zadate početne uslove (videti, na primer [48, Glave 2, 5, 6]). Međutim,

[1] Taylor B. (1685–1731) - engleski matematičar
[2] Lévy P. P. (1886–1971) - francuski matematičar
[3] Euler L. (1707–1783) - švajcarski matematičar
[4] Maruyama G. (1916–1986) - japanski matematičar
[5] Milstein G. N. (1937–) - ruski matematičar
[6] Runge C. (1856–1927) - nemački matematičar
[7] Kutta M. W. (1867–1944) -nemački matematičar
[8] Markov A. A. (1856–1922) - ruski matematičar
[9] Poisson S. D. (1781–1840) - francuski matematičar
[10] Lipschitz R. (1832–1903) - nemački matematičar

globalni Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta su previše restriktivni i široka klasa SDJ različitih tipova ima koeficijente koji uglavnom ne zadovoljavaju bar jedan od tih uslova. Ovo je ujedno i glavna motivacija za proširenje rezultata iz pomenutih radova. Osnovna ideja je da se oslabe navedene pretpostavke, tako da koeficijenti zadovoljavaju slabije uslove koji garantuju ograničenost momenata rešenja polazne jednačine (na primer jednostrani Lipšicov uslov, uslov monotonosti, uopšteni uslovi tipa Hasminskog[11] ili neki drugi), dok koeficijenti te jednačine zadovoljavaju polinomijalni uslov. Ova ekstenzija na različite tipove SDJ (obične SDJ, SDJVZK, SFDJ, SNDJ) zahteva primenu tehnike koja se u velikoj meri razlikuje od onih korišćenih u citiranim radovima. Pritom treba naglasiti da se proučavaju SDJ Itovog[12] tipa koje su zadate na konačnom vremenskom intervalu.

U radovima [10, 11, 12] se pretpostavljaju egzistencija i jedinstvenost rešenja polazne i aproksimativnih jednačina, što se može i dokazati uz uvođenje odgovarajućih dodatnih uslova, dok su dokazane u Poglavlju 2.4 za NSDJ.

Ova doktorska disertacija predstavlja originalni naučni doprinos analitičkoj aproksimaciji rešenja različitih tipova SDJ sa visoko nelinearnim koeficijentima, odnosno sa koeficijentima koji zadovoljavaju polinomijalni uslov.

Na lično zadovoljstvo, imao sam priliku da sarađujem sa prof. dr Miljanom Jovanović i prof. dr Marijom Milošević, koje su svoj nemerljiv doprinos i ogromnu količinu vremena uložile u ovu disertaciju, na čemu ću im biti zauvek zahvalan. Svoju veliku zahvalnost dugujem akademiku, prof. dr Stevanu Pilipoviću i dr Mariji Krstić, na podstreku i korisnim sugestijama kojima su doprineli kvalitetu ovog rada.

Ovu disertaciju posvećujem svojim najdražima, koji su uvek uz beskonačnu količinu ljubavi i podrške, imali veru u mene.

[11] Khasminskii R. Z. (1931–) - ruski matematičar

[12] Itô K. (1915–2008) - japanski matematičar

Sadržaj

Predgovor **i**

1 Uvod **1**

1.1 Osnove teorije verovatnoća i stohastičkih procesa . . . 1
1.2 Stohastički integral Itoa . . . 5
1.3 Stohastičke diferencijalne jednačine različitih tipova . . . 11
1.3.1 Stohastičke diferencijalne jednačine . . . 11
1.3.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem . . . 13
1.3.3 Funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine . . . 15
1.3.4 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem . . . 16
1.4 Postojeći rezultati koji se odnose na primenu Tejlorovog razvoja u aproksimaciji rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina 18
1.4.1 Uvod . . . 18
1.4.2 Stohastičke diferencijalne jednačine . . . 20
1.4.3 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem . . . 22
1.4.4 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine . . . 25
1.4.5 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem . . . 27
1.5 Neki pojmovi, tvrđenja i nejednakosti matematičke analize . . . 31
1.6 Frešeov izvod i Tejlorova formula . . . 34

2 Aproksimacije rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina pod polinomijalnim uslovom primenom Tejlorovog razvoja **37**

2.1 Stohastičke diferencijalne jednačine . . . 38
2.1.1 Glavni rezultati . . . 39
2.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem . . . 49
2.2.1 Zasnivanje metoda . . . 49
2.2.2 Glavni rezultati . . . 52
2.2.3 Lipšic-neprekidnost funkcije kašnjenja . . . 62
2.3 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine . . . 65
2.3.1 Uniformna ograničenost funkcionala $a^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ i $b^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ . . . 66
2.3.2 Funkcionali $a^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ i $b^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ zadovoljavaju polinomijalni uslov . . . 73
2.4 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenskim kašnjenjem 88
2.4.1 Formiranje metoda . . . 89
2.4.2 Glavni rezultati . . . 98

Zaključak **109**

Glava 1

Uvod

U ovoj glavi su navedeni, uglavnom bez dokaza, neki osnovni pojmovi i tvrđenja vezana za teoriju verovatnoća i stohastičkih procesa. Konstruisan je stohastički integral Itoa i navedene su njegove osnovne osobine, a potom su definisane stohastičke diferencijalne jednačine različitih tipova. Predstavljene su neke osobine i teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja tih jednačina (videti, na primer, [16, 29, 32, 48]). Radi lakšeg upoređivanja rezultata, ukratko su navedeni sažeci radova [1, 2, 27, 56, 60, 61], koji su i bili motivacija za istraživanja u ovoj disertaciji. Biće navedeni neophodni pojmovi i osobine iz oblasti linearne algebre i matematičke analize, kao i fundamentalne teoreme koje se koriste u daljim dokazivanjima. Navedeno je celo poglavlje posvećeno Frešeovom[1] izvodu i Tejlorovoj formuli, na kojoj su zasnovani metodi doktorske disertacije.

1.1 Osnove teorije verovatnoća i stohastičkih procesa

U ovom poglavlju su navedene neke osnovni elementi teorije verovatnoće i stohastičkih procesa. Najpre se uvode standardne oznake i definicije, a potom i navode neke poznate teoreme.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće na kom je definisana d–dimenzionalna slučajna promenljiva $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

Definicija 1.1.1. *Na kompletnom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definisana je klasa slučajnih promenljivih*

$$L^p(\Omega; \mathbb{R}^d) = \Big\{ X : \Omega \to \mathbb{R}^d \,\Big|\, X \text{ je } \mathcal{F}\text{–merljiva slučajna promenljiva, } E|X|^p < \infty \Big\},$$

gde je p pozitivan realan broj.

Za standardno definisano sabiranje i množenje vektora skalarom, normirani prostor $(L^p(\Omega; \mathbb{R}^d), {}_p\| \cdot \|)$, u odnosu na normu definisanu sa ${}_p\|X\| = (E|X|^p)^{1/p}$, je kompletan metrički prostor, tj. on je Banahov[2] prostor.

Teorema 1.1.2 (Čebišev[3]). *Neka za proizvoljan pozitivan realan broj p slučajna promenljiva $X \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Tada, za svaki realan broj $a > 0$, važi*

$$P\Big\{ |X| \geq a \Big\} \leq \frac{E|X|^p}{a^p}\,.$$

[1]Fréchet M. R. (1878–1973) - francuski matematičar
[2]Banach S. (1892–1945) - poljski matematičar
[3]Chebyshev P. L. (1821–1894) - ruski matematičar

Definicija 1.1.3. *Neka je na prostoru verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dat niz događaja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Tada je*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j = \big\{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A_n \textit{ za beskonačno mnogo brojeva } n\big\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j = \big\{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A_n \textit{ za svaki broj } n \textit{ počev od nekog } n_0\big\}.$$

Lema 1.1.4 (**Borel**[4]**–Kanteli**[5]). *Neka je na prostoru verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dat niz događaja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
i) Ako je $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$, *tada je*

$$P\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0.$$

ii) Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz nezavisnih događaja i* $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$, *tada je*

$$P\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1.$$

Definicija 1.1.5. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neprazan skup* T. *Familija slučajnih promenljivih* $\{x(t),\, t \in T\}$ *definisanih na ovom prostoru verovatnoće naziva se stohastički (slučajni) proces, a skup* T *se naziva indeksni (parametarski) skup.*

Najčešće se razmatraju stohastički procesi koji predstavljaju familije jednodimenzionalnih ili višedimenzionalnih realnih slučajnih promenljivih, pri čemu je indeksni skup potpuno uređen i on je najčešće podskup skupa realnih brojeva. Ta činjenica se, ako se ne naglasi suprotno, koristi u celoj disertaciji.

Definicija 1.1.6. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i na njemu stohastički proces* $x = \{x(t),\, t \in T\}$. *Ako je slučajna promenljiva* $x(t)$, *za svako* $t \in T$, *integrabilna (kvadratno-integrabilna), tj. ako postoji konačno matematičko očekivanje* $Ex(t)$ *(tj.* $E|x(t)|^2 < \infty$*), tada je proces* x *integrabilan (kvadratno-integrabilan).*

Definicija 1.1.7. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i na njemu stohastički proces* $x = \{x(t),\, t \in T\}$ *sa vrednostima u* $\mathbb{R}^d$. *Proces* x *je neprekidan (neprekidan sleva, neprekidan zdesna) ako je za* P*–skoro svako* $\omega \in \Omega$ *funkcija* $x(\cdot)(\omega) = x(\cdot, \omega) : T \to \mathbb{R}^d$ *neprekidna (neprekidna sleva, neprekidna zdesna). Funkcije* $x(\cdot)(\omega) : T \to \mathbb{R}^d$, *za* $\omega \in \Omega$, *se nazivaju trajektorije stohastičkog procesa* x.

Definicija 1.1.8. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i na njemu dva stohastička procesa* $x = \{x(t),\, t \in T\}$ *i* $y = \{y(t),\, t \in T\}$ *sa istim indeksnim skupom* T.
i) Proces y *je verzija (modifikacija) procesa* x, *ako, za svako* $t \in T$, *važi da je* $x(t) = y(t)$ *s.i, odnosno, ako je*

$$P\big\{x(t) = y(t)\big\} = 1, \quad \textit{za svako } t \in T.$$

ii) Procesi x *i* y *se ne razlikuju (indistinguishable) ako se, za skoro svako* $\omega \in \Omega$, *trajektorije procesa* x *i* y *poklapaju, odnosno, ako je*

$$P\big\{(\forall t \in T)(x(t) = y(t))\big\} = 1.$$

[4]Borel É. (1871–1925) - francuski matematičar
[5]Cantelli F. P. (1875–1966) - italijanski matematičar

Definicija 1.1.9. *Neka je prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i* $T \subset \mathbb{R}$ *neprazan skup. Familija neopadajućih* σ*–algebri* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *(u odnosu na relaciju* $\subset$*) koje su pod–*σ*–algebre od* $\mathcal{F}$*, naziva se filtracija (filter)* σ*–algebre* $\mathcal{F}$*. Za takav prostor verovatnoće se kaže da je filtriran.*

Definicija 1.1.10. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoće sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$*. Filtracija je neprekidna zdesna ako je*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t,\, s\in T} \mathcal{F}_s, \quad t \in T,$$

a neprekidna sleva ako je

$$\mathcal{F}_t = \bigcup_{s<t,\, s\in T} \mathcal{F}_s, \quad t \in T.$$

Definicija 1.1.11. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *kompletan prostor verovatnoće sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *koja je neprekidna zdesna. Ako svi skupovi čija je mera* P *jednaka nuli pripadaju* σ*–algebri* $\mathcal{F}_0$*, onda se kaže da filtracija* $\{\mathcal{F}\}_{t\in T}$ *zadovoljava uobičajene uslove.*

Definicija 1.1.12. *Neka je prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *i na njemu stohastički proces* $x = \{x(t),\, t \in T\}$*. Proces* x *je* $\{\mathcal{F}_t\}$*–adaptiran ako je slučajna promenljiva* $x(t)$ $\mathcal{F}_t$*–merljiva, za svaku vrednost parametra* $t \in T$*.*

Definicija 1.1.13. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoće sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$*. Slučajna promenljiva* $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ *se naziva* $\{\mathcal{F}_t\}$*–vreme zaustavljanja (vreme zaustavljanja) ako je*

$$\tau^{-1}\big([0, t]\big) = \big\{\omega \in \Omega \,\big|\, \tau(\omega) \le t\big\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T.$$

Definicija 1.1.14. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *i na njemu dva vremena zaustavljanja* τ *i* ρ*, pri čemu je* $\tau \le \rho$ *s.i. Tada se definišu sledeći stohastički intervali:*

$$\begin{aligned}
[[\tau, \rho[[\; &= \big\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \,\big|\, \tau(\omega) \le t < \rho(\omega)\big\},\\
[[\tau, \rho]] \; &= \big\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \,\big|\, \tau(\omega) \le t \le \rho(\omega)\big\},\\
]]\tau, \rho]] \; &= \big\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \,\big|\, \tau(\omega) < t \le \rho(\omega)\big\},\\
]]\tau, \rho[[\; &= \big\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \,\big|\, \tau(\omega) < t < \rho(\omega)\big\}.
\end{aligned}$$

Neka je dat prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$. Svakom vremenu zaustavljanja τ može se pridružiti sledeća σ–algebra generisana njime, odnosno

$$\mathcal{F}_\tau = \big\{A \in \mathcal{F} \,\big|\, (\forall t \ge 0)\big(A \cap \tau^{-1}([0, t]) \in \mathcal{F}_t\big)\big\}.$$

Definicija 1.1.15. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoće i na njemu zadata slučajna promenljiva* $X \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$*. Neka je* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *pod–*σ*–algebra od* $\mathcal{F}$*. Tada je uslovno matematičko očekivanje slučajne promenljive* X *u odnosu na* $\mathcal{G}$*, u oznaci* $E(X|\mathcal{G})$*,* $\mathcal{G}$*–merljiva slučajna promenljiva takva da, za svaki skup* $G \in \mathcal{G}$*, važi*

$$E\big[I_G E(X|\mathcal{G})\big] = E[I_G X].$$

Ako je Y *slučajna promenljiva na ovom prostoru verovatnoće, onda je* $E(X|Y)$ *uslovno matematičko očekivanje slučajne promenljive* X *u odnosu na minimalnu* σ*–algebru generisanu slučajnom promenljivom* Y*.*

Ako je $A \in \mathcal{F}$ događaj na ovom prostoru verovatnoće, onda je $P(A|\mathcal{G})$ uslovno matematičko očekivanje indikatora događaja I_A u odnosu na σ–algebru $\mathcal{G}$.
Ako je $A \in \mathcal{F}$ događaj na ovom prostoru verovatnoće, onda je $P(A|Y)$ je uslovno matematičko očekivanje indikatora događaja I_A u odnosu na minimalnu σ–algebru generisanu slučajnom promenljivom Y.

Definicija 1.1.16. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan prostor verovatnoće sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, realni brojevi a i b takvi da je $[a,b] \subset T$ i p realan pozitivan broj. Tada je:*

$$\mathcal{L}^p\big([a,b];\mathbb{R}^d\big) = \Big\{x = \big\{x(t),\, t\in[a,b]\big\}\ \Big|\ x \text{ je } \{\mathcal{F}_t\}\text{–adaptiran proces sa vrednostima u } \mathbb{R}^d,\ \int_a^b \big|x(t)\big|^p dt < \infty \text{ s.i.}\Big\};$$

$$\mathcal{L}^p\big(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d\big) = \Big\{\big\{x(t),\, t\geq 0\big\}\ \Big|\ \big(\forall T>0\big)\big(\big\{x(t),\, t\in[0,T]\big\} \in \mathcal{L}^p\big([0,T];\mathbb{R}^d\big)\big)\Big\}.$$

Definicija 1.1.17. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan prostor verovatnoće sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, realni brojevi a i b takvi da je $[a,b] \subset T$ i p realan pozitivan broj. Tada je:*

$$\mathcal{M}^p\big([a,b];\mathbb{R}^d\big) = \Big\{\big\{x(t),\, t\in[a,b]\big\} \in \mathcal{L}^p\big([a,b];\mathbb{R}^d\big)\ \Big|\ E\int_a^b \big|x(t)\big|^p dt < \infty\Big\};$$

$$\mathcal{M}^p\big(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d\big) = \Big\{\big\{x(t),\, t\geq 0\big\}\ \Big|\ \big(\forall T>0\big)\big(\big\{x(t),\, t\in[0,T]\big\} \in \mathcal{M}^p\big([0,T];\mathbb{R}^d\big)\big)\Big\}.$$

Definicija 1.1.18. *Neka je dat prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ i na njemu $\{\mathcal{F}_t\}$–adaptiran integrabilan stohastički proces $x = \{x(t),\, t\in T\}$. Proces x je martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ ako je, za svako $s,t \in T$ za koje je $s<t$,*

$$E\big[x(t)|\mathcal{F}_s\big] = x(s) \text{ s.i.}$$

Definicija 1.1.19. *Neka je dat filtriran prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ i na njemu neprekidan, $\{\mathcal{F}_t\}$–adaptiran stohastički proces $x = \{x(t),\, t\in T\}$. Proces x je lokalni martingal ako postoji neopadajući niz $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vremena zaustavljanja za koji $\tau_n \uparrow \infty$ s.i. takav da je, za svaki prirodan broj n, proces $\{x(t\wedge\tau_k) - x(0), t\in T\}$ martingal.*

Naredna teorema se često naziva Dubova[6] martingalna nejednakost i često se primenjuje u ovoj disertaciji.

Teorema 1.1.20 (Dub). *Neka je na kompletnom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ dat $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$–adaptiran martingal $\{M(t),\, t\in T\}$, gde je $[a,b]\subset T\subset\mathbb{R}$. Neka je dat proizvoljan realan broj $p\geq 1$ i neka su, za svako $t\in T$, slučajne promenljive $M(t)\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Tada je:*
i) za proizvoljan pozitivan realan broj c,

$$P\Big\{\sup_{t\in[a,b]} \big|M(t)\big|^p \geq c\Big\} \leq \frac{E\big|M(b)\big|^p}{c^p};$$

ii) za $p>1$,

$$E\sup_{t\in[a,b]} \big|M(t)\big|^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E\big|M(b)\big|^p.$$

[6]Doob J. L. (1910–2004) - američki matematičar

Definicija 1.1.21. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoće.*
i) Neka su $\mathcal{G}_1$ *i* $\mathcal{G}_2$ *pod–*σ*–algebre od* $\mathcal{F}$*. Tada su* σ*–algebre* $\mathcal{G}_1$ *i* $\mathcal{G}_2$ *nezavisne ako su proizvoljni događaji* $A_1 \in \mathcal{G}_1$ *i* $A_2 \in \mathcal{G}_2$ *nezavisni.*
ii) Slučajna promenljiva X *je nezavisna od* σ*–algebre* $\mathcal{G}$ *koja je pod–*σ*–algebra od* $\mathcal{F}$*, ako su minimalna* σ*–algebra generisana slučajnom promenljivom* X *i* $\mathcal{G}$ *nezavisne* σ*–algebre.*
iii) σ*–algebre* $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_d$*, koje su pod–*$\sigma$*–algebre od* $\mathcal{F}$*, su nezavisne ako su proizvoljni događaji* $A_1 \in \mathcal{G}_1, \dots, A_d \in \mathcal{G}_d$ *nezavisni.*
iv) Stohastički procesi $x_1 = \{x_1(t),\, t \in T\}, \dots, x_d = \{x_d(t),\, t \in T\}$ *su nezavisni ako su za proizvoljne brojeve* $t_1, \dots, t_d \in T$ *minimalne* σ*–algebre generisane slučajnim promenljivim* $x_1(t_1), \dots, x_d(t_d)$ *nezavisne.*

Da bi se konstruisao stohastički integral, definišu se jednodimenzionalno i višedimenzionalno Braunovo[7] kretanje, koja imaju fundamentalni značaj u njegovom uspostavljanju.

Definicija 1.1.22. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *i na njemu* $\{\mathcal{F}_t\}$*–adaptiran stohastički proces* $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$*. Stohastički proces* W *je (jednodimenzionalno) Braunovo kretanje (Vinerov[8] proces) sa parametrom* $\sigma > 0$ *ako je*
i) $W(0) = 0$ *s.i;*
ii) za svako $0 \leq s < t$*, priraštaj* $W(t) - W(s)$ *je nezavisan od* $\mathcal{F}_s$*;*
iii) za svako $0 \leq s < t$*, slučajna promenljiva* $W(t) - W(s)$ *ima* $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$ *raspodelu.*

Specijalno, Braunovo kretanje sa parametrom $\sigma = 1$ se naziva standardno Braunovo kretanje.

Definicija 1.1.23. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *i na njemu d–dimenzionalan stohastički proces* $W = \{(W_1(t), \dots, W_d(t)),\, t \geq 0\}$*. Proces* W *je (d–dimenzionalno) Braunovo kretanje (Vinerov proces) sa parametrima* $\sigma_1, \dots, \sigma_d > 0$ *ako su procesi* $W_1 = \{W_1(t),\, t \geq 0\}, \dots, W_d = \{W_d(t),\, t \geq 0\}$ *jednodimenzionalna Braunova kretanja sa parametrima* $\sigma_1, \dots, \sigma_d$*, redom, i ako su stohastički procesi* $W_1, \dots, W_d$ *nezavisni. Braunovo kretanje je standardno ako je* $\sigma_1 = \dots = \sigma_d = 1$*.*

1.2 Stohastički integral Itoa

Neka je u ovom poglavlju fiksiran prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove u smislu Definicije 1.1.11 i neka je na njemu dato standardno Braunovo kretanje W (jednodimenzionalno, ako nije naglašeno suprotno) koje je $\{\mathcal{F}_t\}$–adaptirano.

Postoji više tipova stohastičkog integrala, a u ovoj disertaciji je od interesa stohastički integral Itoa. On se konstruiše korak po korak. U prvom koraku se definiše stohastički integral Itoa za jednostavni stohastički proces. Zbog toga se, za proizvoljan skup $S \subset \mathbb{R}^d$, definiše njegova karakteristična funkcija $\chi_S : \mathbb{R}^d \to \{0, 1\}$ kao

$$\chi_S(s) = \begin{cases} 1, & s \in S, \\ 0, & s \in \mathbb{R}^d \setminus S. \end{cases}$$

[7]Brown R. (1773–1858) - škotski botaničar
[8]Wiener N. (1894-1964) - američki matematičar

Definicija 1.2.1. *Realan stohastički proces* $x = \{x(t),\, t \in [a,b]\}$ *je jednostavan (prost) proces ako postoji particija segmenta* $[a,b]$, *takva da je* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, *i ograničene* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*–merljive slučajne promenljive* Y_i, $i \in \{1,\ldots,k\}$, *takve da je*

$$x(t) = Y_1 \chi_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=2}^{k} Y_i \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t), \quad t \in [a,b]. \tag{1.2.1}$$

Neka je sa $\mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R})$ označena familija svih jednostavnih stohastičkih procesa, u smislu Definicije 1.2.1, na ovom prostoru verovatnoće.

Definicija 1.2.2 (Ito). *Za proizvoljan jednostavan proces* $x \in \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R})$ *oblika* (1.2.1) *se definiše stohastički (Itov) integral u odnosu na Braunovo kretanje* W *sa*

$$\int_a^b x(t)dW(t) = \sum_{i=0}^{k-1} Y_{i+1}\big(W(t_{i+1}) - W(t_i)\big).$$

Lako je uvideti da prethodno definisan integral Itoa procesa $x \in \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R})$ predstavlja skoro izvesno jedinstveno određenu slučajnu promeljivu zbog činjenice da je, za svako $t \in [a,b]$, reprezentacija (1.2.1) skoro izvesno jedinstvena.

Teorema 1.2.3. *Neka su* $x, y \in \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R})$. *Osnovne osobine stohastičkog integrala iz Definicije 1.2.2 su:*
i) $\int_a^b x(t)dW(t)$ *je* $\mathcal{F}_b$*–merljiva slučajna promenljiva;*
ii) važi da je

$$E\int_a^b x(t)dW(t) = 0;$$

iii) važi stohastička izometrija Itoa, odnosno

$$E\Big|\int_a^b x(t)dW(t)\Big|^2 = E\int_a^b \big|x(t)\big|^2 dt;$$

iv) ako su c_1 *i* c_2 *realne konstante, onda je proces* $c_1x + c_2y \in \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R})$ *i važi da je*

$$\int_a^b \big(c_1x(t) + c_2y(t)\big)dW(t) = c_1\int_a^b x(t)dW(t) + c_2\int_a^b y(t)dW(t).$$

Lema 1.2.4. *Neka je* $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$. *Tada postoji niz* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R}^d)$ *jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b \big|x(t) - y_n(t)\big|^2 dt = 0. \tag{1.2.2}$$

Lema 1.2.4 i Teorema 1.2.3 *iii*), *iv*), uz činjenicu da je $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ Banahov prostor, omogućavaju proširenje definicije integrala Itoa u smislu sledeće definicije.

Definicija 1.2.5 (Ito). *Neka je stohastički proces* $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ *i neka je niz jednostavnih procesa* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R}^d)$ *takav da zadovoljava relaciju* (1.2.2). *Stohastički integral Itoa procesa* x *u odnosu na Braunovo kretanje* W *se definiše kao*

$$\int_a^b x(t)dW(t) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n(t)dW(t),$$

pri čemu je prethodna granična vrednost posmatrana u prostoru $(L^2(\Omega;\mathbb{R}),_2\|\cdot\|)$.

Na osnovu Leme 1.2.4 se jednostavno može zaključiti da je ovako definisanim integralom stohastičkog procesa $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, u odnosu na Braunovo kretanje, skoro izvesno jedinstveno određena slučajna promenljiva koja ne zavisi od konkretnog niza jednostavnih stohastičkih procesa koji zadovoljavaju (1.2.2).

Tvrđenje analogno Teoremi 1.2.3 važi i za stohastičke procese $x, y \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$. Osobina *iii*) ove teoreme se takođe naziva izometrija Itoa.

Još neke osnovne osobine integrala Itoa su navedene u narednoj teoremi, pri čemu su osobine *iii*) i *iv*) uopštenja osobina *ii*) i *iii*) Teoreme 1.2.3. Teorema 1.2.3 je proširena na procese iz klase $\mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$.

Teorema 1.2.6. *Neka su dati realni brojevi $a < c < b$ i neka je proces $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$.*
i) Tada je $\{x(t),\, t \in [a,c]\} \in \mathcal{M}^2([a,c];\mathbb{R})$ i $\{x(t),\, t \in [c,b]\} \in \mathcal{M}^2([c,b];\mathbb{R})$, pri čemu je

$$\int_a^b x(t)dW(t) = \int_a^c x(t)dW(t) + \int_c^b x(t)dW(t).$$

ii) Ako je Y neka realna, $\mathcal{F}_a$–merljiva slučajna promenljiva, onda je stohastički proces $Yx = \{Yx(t),\, t \in [a,b]\} \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, takav da je

$$\int_a^b Yx(t)dW(t) = Y \int_a^b x(t)dW(t).$$

iii) Važi

$$E\left(\int_a^b x(t)dW(t) \,\Big|\, \mathcal{F}_a \right) = 0.$$

iv) Važi izometrija Itoa, odnosno

$$E\left(\left| \int_a^b x(t)dW(t) \right|^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_a \right) = E\left(\int_a^b \big|x(t)\big|^2 dt \,\Big|\, \mathcal{F}_a \right) = \int_a^b E\Big(\big|x(t)\big|^2 \,\big|\, \mathcal{F}_a \Big) dt.$$

Definicija 1.2.7. *Neka je $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, pri čemu je $T > 0$. Stohastički proces $I = I(t) = \{I(t),\, t \in [0,T]\}$, definisan sa*

$$I(t) = \int_0^t x(s)dW(s), \quad t \in [0,T],$$

se naziva neodređen integral Itoa.

Teorema 1.2.8. *Ako je stohastički proces $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, onda njegov neodređeni integral Itoa:*
i) predstavlja kvadratno-integrabilan martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ i važi

$$E \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t x(s)dW(s) \right|^2 \leq 4E \int_0^T \big|x(s)\big|^2 ds;$$

ii) ima neprekidnu modifikaciju.

Nadalje se pod neodređenim integralom Itoa smatra njegova neprekidna modifikacija.

U nastavku je uvodena definicija stohastičkog integrala sa vremenom zaustavljanja. Zbog toga je neophodna sledeća lema.

Lema 1.2.9. *Neka je dat kompletan prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *koja zadovoljava uobičajene uslove i na njemu* $\{\mathcal{F}_t\}$*–vreme zaustavljanja* τ.
i) Stohastički proces $\{I_{[[0,\tau]]}(t),\, t \geq 0\}$ *je ograničen,* $\{\mathcal{F}_t\}$*–adaptiran proces koji je neprekidan zdesna.*
ii) Ako je za neki realan broj $T > 0$ *stohastički proces* $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, onda je i proces* $\{x(t)I_{[[0,\tau]]}(t),\, t \in [0,T]\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$.

Definicija 1.2.10. *Neka je dat kompletan prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *koja zadovoljava uobičajene uslove i na njemu dva* $\{\mathcal{F}_t\}$*–vremena zaustavljanja* τ *i* ρ *za koje je* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$*, za neku pozitivnu realnu konstantu* T*. Za stohastički proces* $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$ *stohastički integral Itoa u odnosu na vreme zaustavljanja* τ *definiše se sa*

$$\int_0^\tau x(s)dW(s) = \int_0^T x(s)I_{[[0,\tau]]}(s)dW(s).$$

Osim toga, definiše se i

$$\int_\rho^\tau x(s)dW(s) = \int_0^\tau x(s)dW(s) - \int_0^\rho x(s)dW(s).$$

Osobine, slične onima iz teorema 1.2.3 i 1.2.6, važe i za stohastičke integrale u odnosu na vreme zaustavljanja.

Teorema 1.2.11. *Neka je dat kompletan prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *koja zadovoljava uobičajene uslove i na njemu dva* $\{\mathcal{F}_t\}$*–vremena zaustavljanja* τ *i* ρ *za koje je* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$ *za neku pozitivnu realnu konstantu* T*. Neka je dato standardno jednodimenzionalno Braunovo kretanje* $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$*, kao i dva nezavisna standardna jednodimenzionalna Braunova kretanja* $W_1 = \{W_1(t),\, t \geq 0\}$ *i* $W_2 = \{W_2(t),\, t \geq 0\}$*. Tada, za stohastičke procese* $x, y \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, važi:*
i)

$$\int_\rho^\tau x(s)dW(s) = \int_0^T x(s)I_{]]\rho,\tau]]}(s)dW(s);$$

ii)

$$E\int_\rho^\tau x(s)dW(s) = 0;$$

iii)

$$E\Big|\int_\rho^\tau x(s)dW(s)\Big|^2 = E\int_\rho^\tau \big|x(s)\big|^2 ds;$$

iv)

$$E\Big(\int_\rho^\tau x(s)dW(s)\,\Big|\,\mathcal{F}_\rho\Big) = 0;$$

v)

$$E\bigg(\Big|\int_\rho^\tau x(s)dW(s)\Big|^2\,\Big|\,\mathcal{F}_\rho\bigg) = E\Big(\int_\rho^\tau \big|x(s)\big|^2 ds\,\Big|\,\mathcal{F}_\rho\Big);$$

vi)

$$E\Big(\int_\rho^\tau x(s)dW(s)\int_\rho^\tau y(s)dW(s)\,\Big|\,\mathcal{F}_\rho\Big) = E\Big(\int_\rho^\tau x(s)y(s)ds\,\Big|\,\mathcal{F}_\rho\Big);$$

vii)

$$E\Big(\int_\rho^\tau x(s)dW_1(s)\int_\rho^\tau x(s)dW_2(s)\,\Big|\,\mathcal{F}_\rho\Big)=0.$$

Definicija stohastičkog integrala se proširuje i na višedimenzionalan slučaj. Neka je $T>0$ realna pozitivna konstanta i neka je na kompletnom prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, koja zadovoljava uobičajene uslove, dato d_1–dimenzionalno Braunovo kretanje $W=\{W(t)=(W_1(t),\dots,W_{d_1}(t))^T,\ t\geq 0\}$, $d_1\in\mathbb{N}$.

Definicija 1.2.12. *Neka je* $x=[x_{ij}]_{d\times d_1}\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_1})$*, pri čemu su stohastički procesi* $x_{ij}\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*,* $i\in\{1,\dots,d\}$*,* $j\in\{1,\dots,d_1\}$*. Neodređeni stohastički integral Itoa procesa* x *je stohastički proces sa vrednostima u* $\mathbb{R}^d$*, određen sa*

$$\int_0^t x(s)dW(s)=\int_0^t\begin{bmatrix}x_{11}(s)&\cdots&x_{1d_1}(s)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ x_{d1}(s)&\cdots&x_{dd_1}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dW_1(s)\\ \vdots\\ dW_{d_1}(s)\end{bmatrix},\quad 0\leq t\leq T,$$

pri čemu je njegova i*–ta komponenta,* $i\in\{1,\dots,d\}$*, suma jednodimenzionalnih stohastičkih integrala*

$$\sum_{j=1}^{d_1}\int_0^t x_{ij}(s)dW_j(s).$$

Višedimenzionalni stohastički integral zadovoljava osobine analogne onima u jednodimenzionalnom slučaju.

Teorema 1.2.13. *Neka je* $x=[x_{ij}]_{d\times d_1}\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_1})$ *i neka su* ρ *i* τ *dva vremena zaustavljanja takva da je* $0\leq\rho\leq\tau\leq T$*. Tada je:*
i) Itov integral procesa x *neprekidan martingal u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ *sa vrednostima u* $\mathbb{R}^d$*;*
ii)

$$E\Big(\int_\rho^\tau x(s)dW(s)\,\Big|\,\mathcal{F}\rho\Big)=0;$$

iii)

$$E\Big(\Big|\int_\rho^\tau x(s)dW(s)\Big|^2\,\Big|\,\mathcal{F}\rho\Big)=E\Big(\int_\rho^\tau |x(s)|^2ds\,\Big|\,\mathcal{F}\rho\Big).$$

Na osnovu Definicije 1.1.16 i Definicije 1.1.17 je lako uvideti da za proizvoljan realan broj $T>0$ relacija $x\in\mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$ povlači $x\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_1})$, kao i da relacija $x\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$ povlači $x\in\mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_1})$.

Definicija integrala Itoa se proširuje i na klasu stohastičkih procesa $x\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$. Sledeće lema omogućava takvo proširenje.

Lema 1.2.14. *Neka je* $x\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$ *i neka je za svaki prirodan broj* n *definisana slučajna promenljiva*

$$\tau_n=n\wedge\inf\Big\{t\geq 0\,\Big|\,\int_0^t |x(s)|^2ds\geq n\Big\}.$$

Tada:
i) su slučajne promenljive τ_n *vremena zaustavljanja;*

ii) važi $\tau_n \uparrow \infty$ *s.i;*
iii) stohastički proces $\{I_{[[0,\tau_n]]}(t)x(t),\, t \geq 0\} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$*, tako da je definisano*

$$I_n(t) = \int_0^t I_{[[0,\tau_n]]}(s)x(s)dW(s), \quad t \geq 0. \tag{1.2.3}$$

iv) za svako $n, m \in \mathbb{N}$ *za koje je* $n \leq m$ *i za svako* $0 \leq t \leq \tau_n$*, važi* $I_m(t) = I_n(t)$*.*

Definicija 1.2.15. *Neka je proces* $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$*. Tada je neodređeni stohastički integral Itoa* $\{\int_0^t x(s)dW(s),\, t \geq 0\}$ *u odnosu na* d_1*–dimenzionalno Braunovo kretanje* $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ *stohastički proces definisan na osnovu Leme 1.2.14 sa*

$$\int_0^t x(s)dW(s) = I_n(t), \quad 0 \leq t \leq \tau_n,$$

pri čemu je $I_n(t)$ *definisano sa* (1.2.3)*.*

Teorema 1.2.16. *Neka je proces* $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$*. Tada je stohastički integral Itoa* $\{\int_0^t x(s)dW(s),\, t \geq 0\}$ *neprekidan lokalni martingal sa vrednostima u* $\mathbb{R}^d$*.*

Naredna teorema, koja se naziva Itova formula, ima ključnu ulogu u stohastičkoj analizi i predstavlja formulu za stohastičko diferenciranje. Pre njenog navođenja, uvodi se pojam traga matrice i definiše se stohastički diferencijal.

Nadalje d i d_1 predstavljaju proizvoljne prirodne brojeve. Za proizvoljnu realnu matricu $B = [b_{ij}]_{k\times\ell}$ oznaka B^T predstavlja transponovanu matricu od B, odnosno $B^T = [b_{ji}]_{\ell\times k}$. Simbol $|\cdot|$ predstavlja Euklidsku[9] ili Frobenijusovu[10] (trag) normu realnih vektora ili matrica, odnosno

$$|B| = \left[trag(B^T B)\right]^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} b_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Definicija 1.2.17. *Neka je dat kompletan prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa filtracijom* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *i na njemu standardan* d_1*–dimenzionalni Vinerov proces* $W = \{W(t)\,,\, t \geq 0\}$ *koji je* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*–adaptiran. Stohastički proces* $x = \{x(t)\,,\, t \geq 0\} = \{[x_1(t), \ldots, x_d(t)]^T,\, t \geq 0\}$ *sa vrednostima u* $\mathbb{R}^d$*, koji je* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*–adaptiran, je stohastički proces Itoa ako postoje funkcije* $f = [f_1, \ldots, f_d]^T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ *i* $g = [g_{ij}]_{d\times d_1} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times d_1})$ *tako da je*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW(s), \quad t \geq 0.$$

Proces $x = x(t)$ *tada ima stohastički diferencijal* $dx(t)$ *dat sa*

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dW(t), \quad t \geq 0. \tag{1.2.4}$$

Teorema 1.2.18 (Ito). *Neka je* $x = \{x(t)\,,\, t \geq 0\}$ d*–dimenzionalni proces Itoa sa stohastičkim diferencijalom* (1.2.4) *i neka je* $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+;\mathbb{R})$*. Tada je stohastički proces* $\{V(x(t), t)\,,\, t \geq 0\}$ *takođe proces Itoa koji ima stohastički diferencijal oblika*

$$\begin{aligned} dV\big(x(t),t\big) =& \Big\{V_t'\big(x(t),t\big) + V_x'\big(x(t),t\big)f(t) + \frac{1}{2}trag\Big[g^T(t)V_{xx}''\big(x(t),t\big)g(t)\Big]\Big\}dt \\ &+ V_x'\big(x(t),t\big)g(t)dW(t), \quad s.i. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

[9] Euclid (sredina 4. veka p.n.e. – sredina 3. veka p.n.e.) - grčki matematičar
[10] Frobenuis F. G. (1849–1917) - nemački matematičar

Sledeća teorema se često primenjuje za ocenu stohastičkog integrala.

Teorema 1.2.19 (Burkholder[11]–Dejvis[12]–Gandi[13]). *Neka je* $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times d_1})$. *Tada, za svaki pozitivan broj* p, *postoje pozitivne konstante* c_p *i* C_p *takve da je*

$$c_p E\bigg(\int_0^t \big|g(s)\big|^2 ds\bigg)^{p/2} \leq E \sup_{s\in[0,t]} \bigg|\int_0^s g(u)dW(u)\bigg|^p \leq C_p E\bigg(\int_0^t \big|g(s)\big|^2 ds\bigg)^{p/2}. \quad (1.2.6)$$

Specijalno, za $p \in (0,2)$ *je* $c_p = (p/2)^p$ *i* $C_p = (32/p)^{p/2}$, *za* $p = 2$ *je* $c_p = 1$ *i* $C_p = 4$, *a za* $p > 2$ *je* $c_p = 1/(2p)^{p/2}$ *i* $C_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{p/2}$.

1.3 Stohastičke diferencijalne jednačine različitih tipova

U ovom poglavlju su navedene osnovne definicije i tvrđenja za SDJ različitih tipova. Izložene su definicije njihovih strogih rešenja, kao i teoreme egzistencije i jedinstvenosti pod različitim pretpostavkama za koeficijente tih jednačina u skladu sa glavnim rezultatima doktorske disertacije.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan prostor verovatnoće sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. Kako su od interesa samo stroga rešenja jednačina, ovaj prostor će u narednim razmatranjima biti fiksiran. Neka je na ovom prostoru verovatnoće definisano standardno d_1–dimenzionalno Braunovo kretanje

$$w = \{w(t),\, t \geq 0\} = \{w_t,\, t \geq 0\} = \{(w_1(t), \ldots, w_{d_1}(t))^T,\, t \geq 0\}$$

koje je $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–adaptirano, $d_1 \in \mathbb{N}$.

1.3.1 Stohastičke diferencijalne jednačine

Razmatra se stohastička diferencijalna jednačina

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dW(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0, \qquad (1.3.1)$$

sa početnim uslovom $x_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ koji je $\mathcal{F}_0$–merljiva slučajna promenljiva nezavisna od Braunovog kretanja w, dok su koeficijenti $a : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ i $b : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d_1}$ Borel-merljive funkcije.

Rešenje x SDJ je strogo ako su prostor verovatnoće, filtracija, Braunovo kretanje i koeficijenti jednačine unapred zadati i fiksirani, a na osnovu njih se određuje rešenje x.

Rešenje x SDJ je slabo ako su fiksirani samo koeficijenti ove jednačine, a dozvoljena je konstrukcija odgovarajućeg prostora verovatnoće, filtracije i Braunovog kretanja, tako da proces x bude rešenje date jednačine.

Definicija 1.3.1. *Stohastički proces* $x = \{x(t),\, t \in [0,T]\}$ *sa vrednostima u* $\mathbb{R}^d$ *je rešenje jednačine* (1.3.1) *sa početnim uslovom* x_0 *ako:*
i) je poces x *neprekidan i* $\{\mathcal{F}_t\}$*–adaptiran;*

[11] Burkholder D. L. (1927–2013) - američki matematičar
[12] Davis R. B. (1926–1997) - američki matematičar
[13] Gundy R. F. (1934–) - američki matematičar

ii) $\{a(t,x(t)),\, t\in[0,T]\}\in\mathcal{L}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$, $\{b(t,x(t)),\, t\in[0,T]\}\in\mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times d_1})$;
iii) za svako $t\in[0,T]$ *važi*

$$x(t)=x_0+\int_0^t a(s,x(s))ds+\int_0^t b(s,x(s))dw(s) \quad s.i.$$

Definicija 1.3.2. *Rešenje x jednačine* (1.3.1) *je jedinstveno ako se svako drugo rešenje jednačine* (1.3.1) *ne razlikuje od njega.*

Definicija 1.3.3. *Funkcija $f:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$, $d,d'\in\mathbb{N}$, zadovoljava globalni Lipšicov uslov po drugom argumentu ako postoji realna pozitivna konstanta L tako da je, za svako $t\in[0,T]$ i $x,y\in\mathbb{R}^d$, zadovoljeno*

$$\big|f(t,x)-f(t,y)\big|\le L|x-y|. \tag{1.3.2}$$

Definicija 1.3.4. *Funkcija $f:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$, $d,d'\in\mathbb{N}$, zadovoljava uslov linearnog rasta po drugom argumentu ako postoji realna pozitivna konstanta L tako da je, za svako $t\in[0,T]$ i $x\in\mathbb{R}^d$, zadovoljeno*

$$\big|f(t,x)\big|^2\le L\big(1+|x|^2\big). \tag{1.3.3}$$

Teorema 1.3.5. [48, Teorema 2.3.1 i Lema 2.3.2] *Neka su $a:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ i $b:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d\times d_1}$ Borel-merljive funkcije koje zadovoljavaju globalni Lipšicov uslov* (1.3.2) *i uslov linearnog rasta* (1.3.3)*. Tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno, strogo rešenje $x\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ jednačine* (1.3.1) *koje zadovoljava uslov*

$$E\sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)\big|^2<\infty.$$

Teorema 1.3.6. *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 1.3.5 i neka je za proizvoljno $p\ge 2$ slučajna promenljiva $x_0\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Tada je*

$$E\sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)\big|^p<\infty.$$

Definicija 1.3.7. *Funkcija $f:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$, $d,d'\in\mathbb{N}$, zadovoljava lokalni Lipšicov uslov po drugom argumentu ako za svaki pozitivan realan broj R, postoji konstanta K_R koja zavisi samo od R, tako da za svako $t\in[0,T]$ i $x,y\in\mathbb{R}^d$ za koje je $|x|\vee|y|\le R$, važi*

$$\big|f(t,x)-f(t,y)\big|^2\le K_R|x-y|^2. \tag{1.3.4}$$

Zaključak Teoreme 1.3.5 se može izvesti i pod opštijim uslovima.

Teorema 1.3.8. [48, Teorema 2.3.4] *Neka Borel-merljive funkcije $a:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ i $b:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d\times d_1}$ zadovoljavaju lokalni Lipšicov uslov* (1.3.4) *i uslov linearnog rasta* (1.3.3)*. Tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno, strogo rešenje $x\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ jednačine* (1.3.1).

Definicija 1.3.9. *Ako postoji pozitivna konstanta $\tilde{S}$ tako da, za svako $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, važi*

$$x^Ta(t,x)+\frac{1}{2}\big|b(t,x)\big|^2\le\tilde{S}\big(1+|x|^2\big), \tag{1.3.5}$$

tada koeficijenti jednačine (1.3.1) zadovoljavaju uslov monotonosti.

Teorema 1.3.10. [48, Teorema 2.3.5] *Neka za koeficijente prenosa i difuzije SDJ* (1.3.1) *sa početnim uslovom x_0 važe lokalni Lipšicov uslov* (1.3.4) *i uslov monotonosti* (1.3.5). *Tada postoji jedinstveno rešenje $x \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$ jednačine* (1.3.1).

Oznaka $\langle \cdot,\cdot \rangle$ reprezentuje standardni Euklidski skalarni proizvod realnih vektora, tj. za $u=(u_1,\ldots,u_d), v=(v_1,\ldots,v_d) \in \mathbb{R}^d$ je $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^d u_i v_i$.

Definicija 1.3.11. *Funkcija $f:[0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $d,d' \in \mathbb{N}$, zadovoljava jednostrani Lipšicov uslov po drugom argumentu ako postoji pozitivna konstanta $\mu>0$ tako da, za svako $t\in[0,T]$ i $x,y\in\mathbb{R}^d$, važi*

$$\big\langle x-y, f(t,x)-f(t,y)\big\rangle \le \mu|x-y|^2. \tag{1.3.6}$$

Lako je primetiti da ako koeficijent prenosa zadovoljava jednostrani Lipšicov uslov (1.3.6) a koeficijent difuzije globalni Lipšicov uslov (1.3.2), tada za koeficijente jednačine (1.3.1) važi uslov monotonosti (1.3.5). Pored toga, u [22] je dokazano da, pod pretpostavkom (1.3.6) za koeficijent prenosa i (1.3.2) za koeficijent difuzije, SDJ (1.3.1) ima ograničene momente reda $p>2$, odnosno važi sledeće tvrđenje.

Lema 1.3.12. [22, Lema 3.2] *Neka za funkciju $a\in\mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ važi jednostrani Lipšicov uslov* (1.3.6), *a za funkciju $b\in\mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d\times d_1})$ globalni Lipšicov uslov* (1.3.2). *Tada, za rešenje x SDJ* (1.3.1) *sa početnim uslovom x_0, važi da, za svako $p>2$, postoji pozitivna konstanta C, koja zavisi od p i T, tako da je*

$$E\sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)\big|^p \le C\big(1+E|x_0|^p\big).$$

1.3.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

Za dati realan broj $\tau>0$, uvodi se klasa funkcija $V=\mathcal{C}([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$, koja sadrži sve neprekidne funkcije $\varphi:[-\tau,0]\to\mathbb{R}^d$. Normirani prostor $\mathbb{V}=(V,\|\cdot\|)$ je Banahov ako je $\|\cdot\|$ supremum norma na V, odnosno, ako je $\|\varphi\|=\sup_{[-\tau,0]}|\varphi(s)|$, za svako $\varphi\in V$.

Razmatra se stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem (SDJVZK)

$$dx(t) = a\big(x(t),x(t-\delta(t)),t\big)dt + b\big(x(t),x(t-\delta(t)),t\big)dw(t), \quad t\in[t_0,T], \tag{1.3.7}$$

sa početnim uslovom

$$x_{t_0}=\eta=\big\{\eta(\theta)\,|\,\theta\in[-\tau,0]\big\}, \tag{1.3.8}$$

koji je $\mathcal{F}_{t_0}$–merljiva slučajna promenljiva sa vrednostima u V, za koju je $E\|\eta\|^2<\infty$ i $x_{t_0}(\theta)=x(t_0+\theta)$ za $\theta\in[-\tau,0]$. Pritom je $\{x(t)\,|\,t\in[t_0-\tau,T]\}$ stohastički proces sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$. Preslikavanja a i b iz $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[t_0,T]$ u $\mathbb{R}^d$ i $\mathbb{R}^{d\times d_1}$, respektivno, su Borel-merljiva. Pretpostavlja se da je i funkcija kašnjenja $\delta:[t_0,T]\to[0,\tau]$ Borel-merljiva.

Definicija 1.3.13. *Stohastički proces $x=\{x(t),\, t\in[t_0-\tau,T]\}$ je rešenje jednačine* (1.3.7) *sa početnim uslovom* (1.3.8) *ako:*
i) je poces $\{x(t),\, t\in[t_0,T]\}$ neprekidan i $\{\mathcal{F}_t\}$–adaptiran;
ii) važi relacija pripadnosti $\{a(x(t),x(t-\delta(t)),t),\, t\in[t_0,T]\}\in\mathcal{L}^1([t_0,T];\mathbb{R}^d)$ i relacija

$\{b(x(t), x(t-\delta(t)), t),\ t \in [t_0, T]\} \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d \times d_1})$;
iii) je $x_{t_0} = \eta$ *i ako za svako* $t \in [t_0, T]$ *važi*

$$x(t) = \eta(0) + \int_{t_0}^{t} a\big(x(s), x(s-\delta(s)), s\big)ds + \int_{t_0}^{t} b\big(x(s), x(s-\delta(s)), s\big)dw(s) \quad s.i.$$

Rešenje x *je jedinstveno ako se bilo koje drugo rešenje jednačine* (1.3.7) *sa početnim uslovom* (1.3.8) *ne razlikuje od njega.*

Definicija 1.3.14. *Funkcija* $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, $d, d' \in \mathbb{N}$, *zadovoljava globalni Lipšicov uslov po prva dva argumenta ako postoji pozitivna konstanta* K *tako da je, za svako* $t \in [t_0, T]$ *i* $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$, *zadovoljeno*

$$\big|f(x, y, t) - f(\tilde{x}, \tilde{y}, t)\big|^2 \leq K\big(|x - \tilde{x}|^2 + |y - \tilde{y}|^2\big). \tag{1.3.9}$$

Definicija 1.3.15. *Funkcija* $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, $d, d' \in \mathbb{N}$, *zadovoljava uslov linearnog rasta po prva dva argumenta ako postoji pozitivna konstanta* L *tako da, za svako* $t \in [t_0, T]$ *i* $x, y \in \mathbb{R}^d$, *važi*

$$\big|f(x, y, t)\big|^2 \leq L\big(1 + |x|^2 + |y|^2\big). \tag{1.3.10}$$

Definicija 1.3.16. *Funkcija* $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, $d, d' \in \mathbb{N}$, *zadovoljava lokalni Lipšicov uslov po prva dva argumenta ako za svaki prirodan broj* n *postoji pozitivna konstanta* K_n *tako da je, za svako* $t \in [t_0, T]$ *i* $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$ *za koje je* $|x| \vee |\tilde{x}| \vee |y| \vee |\tilde{y}| \leq n$, *zadovoljeno*

$$\big|f(x, y, t) - f(\tilde{x}, \tilde{y}, t)\big|^2 \leq K_n\big(|x - \tilde{x}|^2 + |y - \tilde{y}|^2\big). \tag{1.3.11}$$

Definicija 1.3.17. *Funkcija* $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, $d, d' \in \mathbb{N}$, *zadovoljava lokalni Lipšicov uslov po prvom argumentu ako za svaki prirodan broj* n *postoji pozitivna konstanta* K_n *tako da, za svako* $t \in [t_0, T]$ *i* $x, \tilde{x}, y \in \mathbb{R}^d$ *za koje je* $|x| \vee |\tilde{x}| \vee |y| \leq n$, *važi*

$$\big|f(x, y, t) - f(\tilde{x}, y, t)\big|^2 \leq K_n|x - \tilde{x}|^2. \tag{1.3.12}$$

Teorema 1.3.18. *Neka za koeficijente jednačine* (1.3.7) *važe globalni Lipšicov uslov* (1.3.9) *i uslov linearnog rasta* (1.3.10). *Tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno, strogo rešenje* x *jednačine* (1.3.7) *sa početnim uslovom* (1.3.8).

Kao i u prethodnom poglavlju, zaključak Teoreme 1.3.18 važi pod slabijim uslovima.

Teorema 1.3.19. *Neka koeficijenti jednačine* (1.3.7) *zadovoljavaju lokalni Lipšicov uslov* (1.3.11) *i uslov linearnog rasta* (1.3.10). *Tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno, strogo rešenje* x *jednačine* (1.3.7) *sa početnim uslovom* (1.3.8).

Uslovi Teoreme 1.3.19 se mogu još uopštiti tako da i dalje garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja SDJVZK (1.3.7).

Teorema 1.3.20. *Neka funkcija kašnjenja zadovoljava uslov* $\inf_{t \in [t_0, T]} \delta(t) > 0$ *i neka koeficijenti jednačine* (1.3.7) *zadovoljavaju lokalni Lipšicov uslov* (1.3.12) *i uslov linearnog rasta* (1.3.10). *Tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno, strogo rešenje* x *jednačine* (1.3.7) *sa početnim uslovom* (1.3.8).

Specijalan slučaj klase SDJVZK, kada je funkcija kašnjenja δ identički jednaka pozitivnoj konstanti, predstavlja klasu SDJ sa konstantnim kašnjenjem (SDJKK). U tom smislu je od značaja sledeći globalni Lipšicov uslov po prvom argumentu.

Definicija 1.3.21. *Funkcija $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, gde su $d, d' \in \mathbb{N}$, zadovoljava globalni Lipšicov uslov po prvom argumentu, ako postoji pozitivna konstanta K tako da je za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, \tilde{x}, y \in \mathbb{R}^d$, zadovoljeno*

$$\big|f(x, y, t) - f(\tilde{x}, y, t)\big|^2 \leq K|x - \tilde{x}|^2. \tag{1.3.13}$$

Za ovaj tip jednačine važi Teorema 1.3.18, kada se uslov (1.3.9) zameni uslovom (1.3.13), kao i Teorema 1.3.20.

1.3.3 Funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastičke diferencijalne jednačine za vremenski zavisnim, a samim tim i konstatnim kašnjenjem, predstavljaju specijalan slučaj stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina (SFDJ).

Razmatra se SFDJ oblika

$$dx(t) = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dw(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{1.3.14}$$

sa početnim uslovom

$$x_{t_0} = \eta = \{\eta(\theta) \;|\theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{1.3.15}$$

koji je $\mathcal{F}_{t_0}$–merljiva slučajna promenljiva sa vrednostima u V. Oznaka x_t predstavlja stohastički proces $\{x(t + \theta),\, \theta \in [-\tau, 0]\}$, odnosno $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ za $\theta \in [-\tau, 0]$ i $t \in [t_0, T]$, dok je $x(t)$ slučajna promenljiva sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, za fiksirano $t \in [t_0 - \tau, T]$. Pretpostavlja se da su preslikavanja a i b iz $V \times [t_0, T]$ u $\mathbb{R}^d$ i $\mathbb{R}^{d \times d_1}$, respektivno, Borel-merljiva.

Definicija 1.3.22. *Stohastički proces $x = \{x(t),\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ je rešenje jednačine* (1.3.14) *sa početnim uslovom* (1.3.15) *ako:*
i) je proces $\{x(t),\, t \in [t_0, T]\}$ s.i. neprekidan i $\{\mathcal{F}_t\}$–adaptiran;
ii) $\{a(x_t, t),\, t \in [t_0, T]\} \in \mathcal{L}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ i $\{b(x_t, t),\, t \in [t_0, T]\} \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d \times d_1})$;
iii) je $x_{t_0} = \eta$ i ako, za svako $t \in [t_0, T]$, važi

$$x(t) = \eta(0) + \int_{t_0}^{t} a(x_s, s)ds + \int_{t_0}^{t} b(x_s, s)dw(s) \quad s.i.$$

Rešenje x je jedinstveno ako se bilo koje drugo rešenje jednačine (1.3.14) *sa početnim uslovom* (1.3.15) *ne razlikuje od njega.*

Definicija 1.3.23. *Za funkciju $f : V \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, važi globalni (uniformni) Lipšicov uslov po prvom argumentu ako postoji pozitivna konstanta K tako da je, za svako $t \in [t_0, T]$ i $\varphi, \psi \in V$, zadovoljeno*

$$\big|f(\varphi, t) - f(\psi, t)\big| \leq K\|\varphi - \psi\|. \tag{1.3.16}$$

Definicija 1.3.24. *Funkcija $f : V \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, zadovoljava uslov linearnog rasta po prvom argumentu ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $\varphi \in V$, važi*

$$\big|f(\varphi, t)\big| \leq K\big(1 + \|\varphi\|\big). \tag{1.3.17}$$

Definicija 1.3.25. *Za funkciju $f : V \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, važi lokalni Lipšicov uslov po prvom argumentu ako za svaki prirodan broj n, postoji pozitivna konstanta K_n, tako da je za svako $t \in [t_0, T]$ i $\varphi, \psi \in V$, za koje je $\|\varphi\| \vee \|\psi\| \le n$, zadovoljeno*

$$\big|f(\varphi, t) - f(\psi, t)\big| \le K_n \|\varphi - \psi\|. \tag{1.3.18}$$

Teorema 1.3.26. [48, Teorema 5.2.2] *Neka koeficijenti prenosa i difuzije zadovoljavaju globalni Lipšicov uslov* (1.3.16) *i uslov linearnog rasta* (1.3.17)*. Tada postoji jedinstveno rešenje $x \in \mathcal{M}^2([t_0 - \tau, T]; \mathbb{R}^d)$ jednačine* (1.3.14) *sa početnim uslovom* (1.3.15)*.*

Egzistencija i jedinstvenost se ponovo mogu pokazati pod slabijim uslovima za koeficijente jednačine.

Teorema 1.3.27. [48, Teorema 5.2.5] *Neka koeficijenti prenosa i difuzije zadovoljavaju lokalni Lipšicov uslov* (1.3.18) *i uslov linearnog rasta* (1.3.17)*. Tada postoji jedinstveno rešenje $x \in \mathcal{M}^2([t_0 - \tau, T]; \mathbb{R}^d)$ jednačine* (1.3.14) *sa početnim uslovom* (1.3.15)*.*

Teorema 1.3.28. [48, Teorema 5.4.1] *Neka postoji jedinstveno globalno rešenje x jednačine* (1.3.14) *sa početnim uslovom* (1.3.15)*. Neka za koeficijente jednačine važi uslov linearnog rasta* (1.3.17) *i neka je $p \ge 2$ proizvoljan realan broj takav da je $E\|\eta\|^p < \infty$. Tada, za svako $t \ge t_0$, važi*

$$E \sup_{s \in [t_0 - \tau, t]} \big|x(s)\big|^p \le 2^{p/2-1} 3\big(1 + E\|\eta\|^p\big) e^{C(t-t_0)},$$

gde je $C = p[2\sqrt{K} + (33p - 1)K]$.

1.3.4 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

Predmet razmatranja u ovom odeljku je $d-$dimenzionalna neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa konstantnim kašnjenjem (NSDJKK) oblika

$$d\big[x(t) - D(t, x(t-\tau))\big] = f(t, x(t), x(t-\tau))dt + g(t, x(t), x(t-\tau))dw_t, \; t \in [t_0, T], \tag{1.3.19}$$

sa početnim uslovom

$$\eta = \big\{\eta(\theta), \, \theta \in [-\tau, 0]\big\}, \tag{1.3.20}$$

koji je $\mathcal{F}_{t_0}-$merljiva slučajna promenljiva sa vrednostima u V. Koeficijenti jednačine $D : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ i $g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d'}$ su Borel-merljive funkcije a $x(t)$ je slučajna promenljiva sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, za $t \in [t_0 - \tau, T]$.

Definicija 1.3.29. *Stohastički proces $x = \{x(t), \, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ je rešenje jednačine* (1.3.19) *sa početnim uslovom* (1.3.20) *ako:*
i) je proces $\{x(t), \, t \in [t_0, T]\}$ neprekidan i $\{\mathcal{F}_t\}$–adaptiran;
ii) važi realcija pripadnosti $\{f(t, x(t), x(t - \tau)), \, t \in [t_0, T]\} \in \mathcal{L}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ i relacija $\{g(t, x(t), x(t - \tau)), \, t \in [t_0, T]\} \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d \times d_1})$;
iii) je $x_{t_0} = \eta$ i ako, za svako $t \in [t_0, T]$, važi

$$\begin{aligned} x(t) - D(t, x(t - \tau)) = \eta(0) - D(t_0, \eta(\tau)) &+ \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s - \tau))ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} g(s, x(s), x(s - \tau))dw_s \quad s.i. \end{aligned}$$

Rešenje x je jedinstveno ako se bilo koje drugo rešenje jednačine (1.3.19) *sa početnim uslovom* (1.3.20) *ne razlikuje od njega.*

U radu [56] analizirana je jednačina

$$d\big[x(t)-D(x(t-\delta(t)))\big] = f\big(x(t), x(t-\delta(t))\big)dt+g\big(x(t), x(t-\delta(t))\big)dw_t,\ t \in [t_0, T], \quad (1.3.21)$$

sa početnim uslovom (1.3.20), gde je funkcija kašnjenja $\delta : [t_0, T] \to [0, \tau]$ Borel-merljiva. Slično Definiciji 1.3.29, definiše se i rešenje NSDJ (1.3.21).

Definicija 1.3.30. *Za funkciju $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, važi globalni Lipšicov uslov ako postoji pozitivna konstanta K tako da je, za svako $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$, zadovoljeno*

$$\big|h(x, y) - h(\tilde{x}, \tilde{y})\big| \le K\big(|x - y| + |\tilde{x} - \tilde{y}|\big). \quad (1.3.22)$$

Funkcija $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, zadovoljava globalni Lipšicov uslov sa Lipšicovom konstantom manjom od 1 ako postoji pozitivna konstanta $K \in (0, 1)$ tako da, za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\big|\ell(x) - \ell(y)\big| \le K|x - y|. \quad (1.3.23)$$

Definicija 1.3.31. *Za funkciju $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, važi uslov linearnog rasta ako postoji pozitivna konstanta K tako da je, za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, zadovoljeno*

$$\big|h(x, y)\big|^2 \le K\big(1 + |x|^2 + |y|^2\big). \quad (1.3.24)$$

Funkcija $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, gde je $d' \in \mathbb{N}$, zadovoljava uslov linearnog rasta ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $x \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\big|\ell(x)\big|^2 \le K\big(1 + |x|^2\big). \quad (1.3.25)$$

Definicija 1.3.32. *Za funkciju $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, važi lokalni Lipšicov uslov ako za svaki priodan broj n postoji pozitivna konstanta K_n, tako da je, za svako $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |\tilde{x}| \vee |y| \vee |\tilde{y}| \le n$, zadovoljeno*

$$\big|h(x, y) - h(\tilde{x}, \tilde{y})\big| \le K_n\big(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|\big). \quad (1.3.26)$$

Definicija 1.3.33. *Funkcija $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$, zadovoljava lokalni Lipšicov uslov po prvom argumentu ako za svaki priodan broj n postoji pozitivna konstanta K_n tako da, za svako $x, \tilde{x}, y \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |\tilde{x}| \le n$, važi*

$$\big|h(x, y) - h(\tilde{x}, y)\big|^2 \le K_n|x - \tilde{x}|^2. \quad (1.3.27)$$

Egzistencija i jedinstvenost ponovo važe pod slabijim uslovima.

Teorema 1.3.34. [48, Teorema 6.3.1 i Teorema 6.3.2] *Neka važi jedna od naredne dve pretpostavke.*
i) Neka koeficijenti prenosa i difuzije zadovoljavaju lokalni Lipšicov uslov (1.3.26) *i uslov linearnog rasta* (1.3.24)*, dok funkcija D zadovoljava Lipšicov uslov* (1.3.23).
ii) Ako je $\inf_{[t_0,T]} \delta(t) > 0$, neka važe lokalni Lipšicov uslov (1.3.27) *za koeficijente prenosa i difuzije, kao i uslovi linearnog rasta* (1.3.24) *i* (1.3.25) *za koeficijente jednačine* (1.3.21).
Tada postoji jedinstveno rešenje x jednačine (1.3.21) *sa početnim uslovom* (1.3.20).

U radu [71] je razmatrana jednačina

$$d\big[x(t) - D(x(t-\tau))\big] = f(x(t), x(t-\tau))dt + g(x(t), x(t-\tau))dw_t, \quad t \geq 0, \tag{1.3.28}$$

sa početnim uslovom $x_t = \eta \in \mathcal{M}^p([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ za $p \geq 2$, dok su koeficijenti f, g i D neprekidne funkcije. Uvedene su funkcije $V_i : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ za koje postoje konstante $L_i > 0$, $\ell_i \geq 0$, $i \in \{1,2,3\}$, takve, da za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, važi

$$0 \leq V_i(x,y) \leq L_i\big(1 + |x|^{\ell_i} + |y|^{\ell_i}\big), \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Pretpostavlja se da su ispunjeni sldeći uslovi.

$\mathcal{A}_1$: Postoji pozitivna konstanta K_1 tako da, za svako $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\begin{aligned} \langle x - D(y) - \tilde{x} + D(\tilde{y}), f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})\rangle &\leq K_1|x-\tilde{x}|^2 + \big|V_1(y,\tilde{y})\big|^2|y-\tilde{y}|^2, \\ \big|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})\big| &\leq V_1(y,\tilde{y})|y-\tilde{y}|. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_2$: Postoji pozitivna konstanta K_2 tako da, za svako $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\big|g(x,y) - g(\tilde{x},\tilde{y})\big| \leq K_2|x-\tilde{x}| + V_2(y,\tilde{y})|y-\tilde{y}|.$$

$\mathcal{A}_3$: Važi $D(0) = 0$ i za svako $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$, je zadovoljeno

$$\big|D(x) - D(\tilde{x})\big| \leq V_3(x,\tilde{x})|x-\tilde{x}|.$$

Lema 1.3.35. [71, Lema 2.1.] *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$. Tada postoji jedinstveno globalno rešenje jednačine* (1.3.28) *koje ima osobinu da, za svako $T > 0$, važi*

$$E \sup_{t\in[0,T]} \big|x(t)\big|^p \leq C,$$

gde je C pozitivna konstanta koja zavisi od p, T i od početnog uslova η.

1.4 Postojeći rezultati koji se odnose na primenu Tejlorovog razvoja u aproksimaciji rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina

1.4.1 Uvod

Dobro je poznato da se mnogi tipovi SDJ ne mogu rešiti u velikom broju slučajeva. Tada se moše primeniti neki analitički metod za određivanje njihovih aproksimativnih rešenja u eksplicitnom obliku ili u obliku koji je pogodan za primenu numeričkih metoda. U nastavku je, kroz rezultate različitih istraživača opisana ideja konstrukcije analitičkog metoda, zasnovanog na primeni Tejlorovog razvoja, koji se proučava u ovoj doktorskoj disertaciji.

Razmatra se SDJ oblika

$$dx(t) = a\big(t, x(t)\big)dt + b\big(t, x(t)\big)dw(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x_0, \tag{1.4.1}$$

na segmentu $[0,1]$, koji je standardna vremenska transformacija prozvoljnog segmenta $[t_0, T]$ za $0 \leq t_0 < T$, kod koje je $w = \{w(t),\, t \geq 0\}$ standardno d_1–dimenzionalno Braunovo kretanje, početni uslov je slučajna promenljiva x_0 koja je stohastički nezavisna od Braunovog kretanja w, a koeficijienti $a : [0,1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ i $b : [0,1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d_1}$ su Borel-merljive funkcije.

Osnovna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja (Teorema 1.3.5), čiji se dokaz zasniva na Pikarovim[14] iteracijama, zahteva globalni Lipšicov uslov (1.3.2) i uslov linearnog rasta (1.3.3) po drugom argumentu za a i b. Ako je za svaki prirodan broj m zadovoljeno $E|x_0|^{2m} < \infty$, Teorema 1.3.6 garantuje da postoji jedinstveno, s.i. neprekidno, strogo rešenje x jednačine (1.4.1) za koje je $E \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|^{2m} < \infty$. Štaviše, primenom procedure koja je korišćena u [32, 39], može se dokazati da ako je $E|x_0|^p < \infty$ za proizvoljan pozitivan broj p, onda je i $E \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|^p < \infty$.

Postoji veliki broj radova u kojima je rešenje jednačine (1.4.1) aproksimirano na proizvoljnoj particiji segmenta $[0,1]$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1, \quad \delta_n = \max\big\{t_{k+1} - t_k \,\big|\, k \in \{0, \ldots, n-1\}\big\}. \tag{1.4.2}$$

Tako je Marujama [55] bio jedan od prvih koji je izučavao srednje-kvadratnu konvergenciju Ojlerovog metoda, koji je analogan Ojlerovoj poligonalnoj liniji u determinističkom slučaju. Ovaj rezultat je poboljšao Kanagava u radovima [43, 44]. Preciznije, Kanagava je, primenom osnovnih Marujaminih ideja, u [43] razmatrao jednačinu (1.4.1) pod pretpostavkom da važe uslovi

$$|a(t,x) - a(s,y)|^2 + |b(t,x) - b(s,y)|^2 \leq L_1(|x-y|^2 + |t-s|^2), \quad |a(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq L_2$$

i $E|x_0|^2 < \infty$. U [55], Marujama je definisao poligonalnu liniju, koja predstavlja aproksimativno rešenje, na sledeći način: Neka je $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz priraštaja Braunovog kretanja oblika $\xi_k = w(t_k) - w(t_{k-1})$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Neka su slučajne promenljive $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ definisane sa $Y_0 = X_0$ i

$$Y_k = Y_0 + \sum_{j=1}^{k} a(t_{j-1}, Y_{j-1})(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j=1}^{k} b(t_{j-1}, Y_{j-1})\, \xi_j.$$

Neka je $y_n = \{y_n(t),\, t \in [0,1]\}$ poligonalna linija određena relacijom

$$y_n(t) = Y_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\,(Y_{k+1} - Y_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Modifikacijom Marujaminog rezultata (Teorema 1 iz [55]), Kanagava je dokazao da niz $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka rešenju x jednačine (1.4.1) u smislu L^p–norme, tj. za svako $p \geq 2$ važi da je $E \sup_{t\in[0,1]} |y_n(t) - x(t)|^p \to 0$, kada $n \to \infty$. Za svako $\epsilon > p/2$ red ove aproksimacije je određen relacijom

$$E \sup_{t\in[0,1]} \big|y_n(t) - x(t)\big|^p = O\big(\delta_n^{p/2}\,(\log \delta_n)^{\epsilon}\big).$$

U radu [43] Kanagava je poboljšao svoj rezultat aproksimirajući rešenje x jednačine (1.4.1) rešenjima $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, jednačina

$$\begin{aligned} dx^n(t) &= a\big(t_k, x^n(t_k)\big)dt + b\big(t_k, x^n(t_k)\big)dw(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}, \\ x^n(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

[14] Picard C. É. (1856–1941) - francuski matematičar

Bliskost tačnog i aproksimativnih rešenja u L^p–smislu, $p \geq 2$, je reda $O\big(\delta_n^{p/2}\big)$, kada $n \to \infty$ i $\delta_n \to 0$. Ovaj rezultat, za $p = 2$, je ranije postignut u radu Gihmana i Skorohoda [17].

Osnove analitičkog metoda razmatranog u ovoj disertaciji potiču iz radova Atale [1, 2]. U radu [1], pod Lipšicovim uslovom (1.3.2) i uslovom linearnog rasta (1.3.3) za koeficijente prenosa i difuzije a i b, pokazano je da se rešenje x jednačine (1.4.1) može aproksimirati rešenjima x^n jednačina (1.4.3), u smislu L^p–norme, $p \geq 2$. Red ove aproksimacije je $O\big(\delta_n^{p/2}\big)$, kada $n \to \infty$ i $\delta_n \to 0$. Osim toga, rešenje $x^n = \{x^n(t),\, t \in [0,1]\}$ je konstruisano kao s.i. neprekidan proces sukcesivnim povezivanjem procesa $\{x^n(t),\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, particije (1.4.2).

Međutim, Atala je u radu [2] poboljšao svoje rezultate iz [1], aproksimirajući rešenje jednačine (1.4.1) rešenjima SDJ dobijenih na particiji (1.4.2), čiji su koeficijenti prenosa i difuzije Tejlorove aproksimacije prvog reda funkcija a i b po argumentu x, tj. rešenjima linearnih SDJ

$$\begin{aligned} dx^n(t) = {} & \Big[a\big(t_k, x^n(t_k)\big) + a'_x\big(t_k, x^n(t_k)\big)(x^n_t - x^n_{t_k})\Big]dt \\ & + \Big[b\big(t_k, x^n(t_k)\big) + b'_x\big(t_k, x^n(t_k)\big)(x^n_t - x^n_{t_k})\Big]dw(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

za $k \in \{0, \dots, n-1\}$, gde je $x^n(0) = x_0$ s.i. Aproksimativna rešenja x^n su takođe konstruisana nadovezivanjem rešenja jednačina (1.4.4) u podeonim tačkama. Atala je pokazao da ako funkcije a, b, a'_x i b'_x zadovoljavaju Lipšicov uslov (1.3.2) i ako funkcije f i g definisane sa

$$f(t, x, y) = a(t, y) - a(t, x) - a'_x(t, x)(y - x), \quad g(t, x, y) = b(t, y) - b(t, x) - b'_x(t, x)(y - x)$$

zadovoljavaju uslov $|f(t, x, y)| + |g(t, x, y)| \leq K|y - x|^2$, onda red ove aproksimacije u smislu L^p–norme, odnosno bliskost rešenja x i x^n se može oceniti kao $O\big(\delta_n^p\big)$, kada $n \to \infty$ i $\delta_n \to 0$.

Prateći prethodni koncept i imajući u vidu da je primena Tejlorove formule, koja funkcije aproksimira polinomima, veoma korisna u teorijskim i praktičnim istraživanjima, logično je postaviti pitanje koliki je red aproksimacije rešenja x procesima x^n koji su rešenja SDJ čiji su koeficijenti prenosa i difuzije Tejlorove aproksimacije funkcija a i b do proizvoljnog, fiksiranog reda. Pritom koeficijenti polazne jednačine zadovoljavaju globalni Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta. Glavni rezultati u nastavku ovog poglavlja daju odgovor na ovo pitanje, kako za jednačinu (1.4.1), tako i za neke složenije tipove jednačina.

1.4.2 Stohastičke diferencijalne jednačine

U ovom odeljku su izloženi rezultati rada [27] u kome su autori razmatrali skalarnu jednačinu (1.4.1) ($d = 1$), čiji je ekvivalentan integralni oblik

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a\big(s, x(s)\big)ds + \int_0^t b\big(s, x(s)\big)dw(s), \quad t \in [0, 1]. \tag{1.4.5}$$

Njeno rešenje je na particiji (1.4.2) aproksimirano rešenjima $x^n = \{x^n(t),\ t \in [0,1]\}$ jednačina čiji su koeficijenti prenosa i difuzije Tejlorove aproksimacije funkcija a i b, tj.

$$x^n(t) = x^n(t_k) + \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_x^{(i)}\big(s, x^n(t_k)\big)}{i!} \big(x^n(s) - x^n(t_k)\big)^i ds \qquad (1.4.6)$$

$$+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_x^{(i)}\big(s, x^n(t_k)\big)}{i!} \big(x^n(s) - x^n(t_k)\big)^i dw(s), \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0,\ldots,n-1\},$$

gde je $x^n(t_0) = x_0$ s.i. Ovako konstruisano aproksimativno rešenje $x^n = \{x^n(t),\ t \in [0,1]\}$, koje je nastalo sukcesivnim povezivanjem procesa $\{x^n(t),\ t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k, $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, je s.i. neprekidan proces. Očigledno, funkcije a i b moraju zadovoljavati odgovarajuće pretpostavke, a pre svega moraju biti dovoljno glatke. Pretpostavlja se egzistencija i jedinstvenost rešenja aproksimativnih jednačina (1.4.6), bez posebnog naglašavanja pretpostavki koje zadovoljavaju koeficijenti ovih jednačina, dok su naglašene samo one pretpostavke koje se eksplicitno koriste u dokazima. Osim gore navedenih pretpostavki da funkcije a i b zadovoljavaju Lipšicov uslov (1.3.2) i uslov linearnog rasta (1.3.3), uvode se sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Funkcije a i b imaju Tejlorove aproksimacije po drugom argumentu do m_1–og i m_2–og reda, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Funkcije $a_x^{(m_1+1)}$ i $b_x^{(m_2+1)}$ su uniformno ograničene, tj. postoje pozitivne konstante L_1 i L_2 takve da je

$$\sup_{(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}} \big|a_x^{(m_1+1)}(t,x)\big| \le L_1, \qquad \sup_{(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}} \big|b_x^{(m_2+1)}(t,x)\big| \le L_2.$$

$\mathcal{A}_3$: Postoje jedinstvena, s.i. neprekidna stroga rešenja x i x^n jednačina (1.4.5) i (1.4.6), redom, koja zadovoljavaju uslove

$$E \sup_{t\in[0,1]} \big|x(t)\big|^p < \infty \quad \text{i} \quad E \sup_{t\in[0,1]} \big|x^n(t)\big|^{(M+1)^2 p} \le Q < \infty,$$

gde je $M = m_1 \vee m_2$ i Q je pozitivna konstanta.

Autori su dokazali sledeća tvrđenja.

Propozicija 1.4.1. *Neka su x^n rešenja jednačina (1.4.6) i neka su pretpostavke (1.3.2), (1.3.3) i $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ zadovoljene. Tada, za $0 \le r \le (M+1)p$, važi*

$$E\big|x^n(t) - x^n(t_k)\big|^r \le C\delta_n^{r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0,\ldots,n-1\},$$

gde je C konstanta nezavisna od n i δ_n.

Propozicija 1.4.2. *Neka su x i x^n rešenja jednačina (1.4.5) i (1.4.6), redom, i neka važe pretpostavke (1.3.2), (1.3.3) i $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$. Tada je, za $p \ge 2$, zadovoljeno*

$$\sup_{t\in[0,1]} E\big|x(t) - x^n(t)\big|^p \le H\delta_n^{(m+1)p/2},$$

gde je $m = m_1 \wedge m_2$ i H je konstanta nezavisna od n i δ_n.

Teorema 1.4.3. *Neka važe pretpostavke Propozicije 1.4.2. Za $p \geq 2$ je tada*

$$E \sup_{t\in[0,1]} \big|x(t) - x^n(t)\big|^p \leq K\delta_n^{(m+1)p/2}, \quad kada\ n \to \infty,\ \delta_n \to 0,$$

gde je K konstanta nezavisna od n i δ_n.

Teorema 1.4.4. *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 1.4.3 i neka postoji opadajući nula niz pozitivnih realnih brojeva $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za koji je $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\alpha_n^{-2} < \infty$. Tada niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ rešenja aproksimativnih jednačina (1.4.6) konvergira skoro izvesno ka rešenju x jednačine (1.4.5).*

1.4.3 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U radu [60] razmatrana je SDJVZK (1.3.7) uvedena u Odeljku 1.3.2, čiji je ekvivalentan integralni oblik

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} a\big(x(s), x(s-\delta(s)), s\big)ds + \int_{t_0}^{t} b\big(x(s), x(s-\delta(s)), s\big)dw(s), \qquad (1.4.7)$$

za svako $t \in [t_0, T]$, sa početnim uslovom (1.3.8). Neka je

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T \qquad (1.4.8)$$

ekvidistantna particija segmenta $[t_0, T]$, pri čemu je prirodan broj n odabran tako da postoji prirodan broj n_* za koji je $\tau = n_*(T - t_0)/n$. Dakle, podeone tačke segmenta $[t_0 - \tau, T]$ su

$$t_k = t_0 + k\frac{T - t_0}{n}, \quad k \in \{-n_*, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\},$$

gde je dijametar podele $\delta_n = (T - t_0)/n \in (0, 1)$, za dovoljno velike brojeve $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje jednačine (1.4.7) je aproksimirano na particiji (1.4.8) stohastičkim procesima $\{x^n(t),\ t \in [t_0 - \tau, T]\}$ primenom Tejlorovih razvoja koeficijenata a i b po prva dva argumenta. Ako je $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, onda, kako kašnjenje zavisi od vremena, $s - \delta(s)$ za $s \in [t_k, t]$ može uzimati vrednosti iz nekog od intervala $[t_j, t_{j+1})$, $j \in \{k - n_*, \ldots, k\}$. Zbog toga se ne mogu odmah odrediti tačke u kojima se traže izvodi u Tejlorovom razvoju po drugom argumentu koeficijenata jednačine. U tom smislu je prirodno posmatrati podskupove A_k^j, za $j \in \{k - n_*, \ldots, k\}$, segmenta $[t_k, t]$, gde je

$$A_k^j = \big\{s \in [t_k, t] \,\big|\, s - \delta(s) \in [t_j, t_{j+1})\big\}.$$

Da bi se opisla činjenica da se izvodi koeficijenata jednačine (1.4.7) po drugom argumentu određuju u tačkama $x^n(t_j)$, kada je $s \in A_k^j$, za $t \in [t_k, t_{k+1}]$ i $s \in [t_k, t]$, uveden je stepenasti proces

$$\hat{x}^n(s) = \sum_{j=k-n_*}^{k} \chi_{A_k^j}(s)x^n(t_j), \qquad (1.4.9)$$

gde je $x^n(t_j) = \xi(t_j - t_0)$ za $j \in \{-n_*, -n_* + 1, \ldots, -1\}$.

Rešenje $x = \{x(t),\, t \in [t_0, T]\}$ jednačine (1.4.7) je aproksimirano na particiji (1.4.8) rešenjima $\{x^n(t),\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, jednačina

$$
\begin{aligned}
x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i a\big(x^n(t_k), \hat{x}^n(s), s\big)}{i!}\, ds \\
&+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i b\big(x^n(t_k), \hat{x}^n(s), s\big)}{i!}\, dw(s), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \qquad (1.4.10)
\end{aligned}
$$

sa početnim uslovom $x^n_{t_0} = \xi$ za $k = 0$, tj. početnim uslovima $x^n_{t_k}$ za $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. U ovoj jednačini su koeficijenti prenosa i difuzije Tejlorovi razvoji funkcija a and b po prvom argumentu u okolini tačaka $x^n(t_k)$ i po drugom argumentu u okolini tačaka $\hat{x}^n(s)$, $s \in [t_k, t]$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, do m_1–og i m_2–og izvoda, redom, gde je

$$
\begin{aligned}
d^i a\big(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t\big) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i a\big(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t\big)}{\partial^j x^n(t) \partial^{i-j} x^n(t-\delta(t))} (\Delta x^n_{t_k})^j (\Delta \hat{x}^n_t)^{i-j}, \\
d^i b\big(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t\big) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i b\big(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t\big)}{\partial^j x^n(t) \partial^{i-j} x^n(t-\delta(t))} (\Delta x^n_{t_k})^j (\Delta \hat{x}^n_t)^{i-j},
\end{aligned}
$$

za $\Delta x^n_{t_k} = x^n(t) - x^n(t_k)$ i $\Delta \hat{x}^n_t = x^n(t - \delta(t)) - \hat{x}^n(t)$.

Imajući u vidu da (1.4.9), jednačine (1.4.10) mogu biti predstavljene u obliku

$$
\begin{aligned}
x^n(t) = x^n(t_k) &+ \sum_{j=k-n_*}^{-1} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), \xi(t_j - t_0), s)}{i!}\, ds \qquad (1.4.11) \\
&+ \sum_{j=0}^{k} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_j), s)}{i!}\, ds \\
&+ \sum_{j=k-n_*}^{-1} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), \xi(t_j - t_0), s)}{i!}\, dw(s) \\
&+ \sum_{j=0}^{k} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_j), s)}{i!}\, dw(s), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].
\end{aligned}
$$

Aproksimativno rešenje $x^n = \{x^n(t),\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ je s.i. neprekidan proces koji je konstruisan sukcesivnim povezivanjem početnog uslova $\{\xi(\theta),\, -\tau \le \theta \le 0\}$ i procesa $\{x^n(t),\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k za $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Za funkcije a i b se pretpostavlja da zadovoljavaju globalni Lipšicov uslov (1.3.9) i uslov linearnog rasta (1.3.10), što garantuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja SDJVZK (1.4.7). Za aproksimativne jednačina se pretpostavljaju egzistencija i jedinstvenost rešenja, bez posebnog naglašavanja uslova koje zadovoljavaju njihovi koeficijenti. Pored toga, važe i naredni uslovi:

$\mathcal{A}_1$: Funkcije a i b imaju Tejlorove razvoje po prvom i drugom argumentu do m_1-og i m_2–og reda, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Parcijalni izvodi redova m_1+1 i m_2+1 za funkcije a i b, respektivno, su uniformno ograničeni, tj. postoji pozitivna konstanta L takva da je

$$
\begin{aligned}
\sup_{(x,y,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T]} \left| \frac{\partial^{m_1+1} a(x, y, t)}{\partial x^j \partial y^{m_1+1-j}} \right| &\le L, \quad j \in \{0, \ldots, m_1 + 1\}, \\
\sup_{(x,y,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T]} \left| \frac{\partial^{m_2+1} b(x, y, t)}{\partial x^j \partial y^{m_2+1-j}} \right| &\le L, \quad j \in \{0, \ldots, m_2 + 1\}.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}_3$: Postoje jedinstvena, s.i. neprekidna rešenja x i x^n jednačina (1.4.7) i (1.4.10), redom, tako da je za $p \geq 2$,

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t)\big|^p < \infty, \quad E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x^n(t)\big|^{(M+1)^2p} \leq Q < \infty,$$

gde je $M = m_1 \vee m_2$ i $Q > 0$ je konstanta nezavisna od n. Pored toga, pretpostavlja se da je $E\|\xi\|^{(M+1)^2p} < \infty$.

$\mathcal{A}_4$: Početni uslov ξ je Lipšic-neprekidan, tj. postoji pozitivna konstanta β takva da je, za svako $-\tau \leq \theta_1, \theta_2 \leq 0$,

$$\big|\xi(\theta_2) - \xi(\theta_1)\big| \leq \beta\big|\theta_2 - \theta_1\big|.$$

Propozicija 1.4.5. *Neka su $\{x^n(t),\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, rešenja jednačina (1.4.10) i neka važi uslov (1.3.10) i pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$. Tada je za svaki realan broj r za koji je $2 \leq r \leq (M+1)p$, ispunjeno*

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s) - x^n(t_k)\big|^r \leq Cn^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Ako važi i pretpostavka $\mathcal{A}_4$, onda je

$$\sup_{s\in[t_k,t]} E\big|x^n(s - \delta(s)) - \hat{x}^n(s)\big|^r \leq \overline{C}n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \{0, \dots, n-1\},$$

gde su C i $\overline{C}$ konstante nezavisne od n.

Teorema 1.4.6. *Neka je x rešenje jednačine (1.4.7) i x^n njegova aproksimacija određena rešenjima jednačina (1.4.10). Neka su zadovoljene sve pretpostavke Propozicije 1.4.5, kao i Lipšicov uslov (1.3.9) i pretpostavka $\mathcal{A}_4$. Tada, za $p \geq 2$, važi*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t) - x^n(t)\big|^p \leq Hn^{-(m+1)p/2},$$

gde je $m = m_1 \wedge m_2$ a H je konstanta nezavisna od n.

Teorema 1.4.7. *Neka su ispunjena sve pretpostavke Teoreme 1.4.6. Tada niz aproksimativnih rešenja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ određenih jednačinama (1.4.10) konvergira sa verovatnoćom jedan ka rešenju x jednačiine (1.4.7).*

Specijalno, za $\delta(t) \equiv \tau > 0$, $t \in [t_0, T]$, jednačina (1.4.7) se svodi na SDJ sa konstantnim kašnjenjem, odnosno

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^t a\big(x(s), x(s-\tau), s\big)ds + \int_{t_0}^t b\big(x(s), x(s-\tau), s\big)dw(s), \ t \in [t_0, T], \quad (1.4.12)$$

sa početnim uslovom $x_{t_0} = \xi$. Dobro je poznato (videti, na primer [48]) da egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (1.4.12) mogu biti dokazane pod uslovom linearnog rasta (1.3.10) i globalnim Lipšicovim uslovom po prvom argumentu (1.3.13). Tada su aproksimativne jednačine predstavljene takođe u obliku (1.4.10), sa stepenastim procesom $\hat{x}$ koji je u ovom slučaju oblika

$$\hat{x}^n(t) = x^n(t_{k-n_*}) = \begin{cases} x^n(t_{k-n_*}), & k \in \{n_*, \dots, n-1\} \\ \xi(t_{k-n_*} - t_0), & k \in \{0, \dots, n_* - 1\} \end{cases}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

za svako $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Pod slabijim uslovom (1.3.13) umesto (1.3.9), tvrđenja analogna Propoziciji 1.4.5, Teoremi 1.4.6 i Teoremi 1.4.7 važe i za jednačinu (1.4.12).

1.4.4 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine

Neka je data SFDJ (1.3.14) sa početnim uslovom (1.3.15), čiji je ekvivalentan integralni oblik

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(x_s, s)\, dw(s), \quad t \in [t_0, T], \tag{1.4.13}$$

Neka je

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T \tag{1.4.14}$$

ekvidistantna particija segmenta $[t_0, T]$, odnosno, podeone tačke su oblika

$$t_k = t_0 + \frac{k}{n}(T - t_0), \quad k \in \{0, \ldots, n\},$$

a dijametar particije $\delta_n = (T - t_0)/n$ je iz $(0, 1)$, za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$.

Kao što je već naglašeno, rešenje $x = \{x(t),\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ jednačine (1.4.13) se aproksimira na particiji (1.4.14) rešenjima $\{x^n(t),\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, jednačina

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a^{(i)}_{(x^n_{t_k}, s)}(x^n_s - x^n_{t_k}, \ldots, x^n_s - x^n_{t_k})}{i!}\, ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b^{(i)}_{(x^n_{t_k}, s)}(x^n_s - x^n_{t_k}, \ldots, x^n_s - x^n_{t_k})}{i!}\, dw(s), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

koje zadovoljavaju početne uslove $x_{t_0} = \xi$, odnosno $x^n_{t_k} = \{x^n(t_k + \theta),\, \theta \in [-\tau, 0]\}$, za $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, a čiji su koeficijenti prenosa i difuzije Tejlorovi razvoji koeficijenata a i b po prvom argumentu u okolini tačaka $x^n_{t_k}$, do m_1–og i m_2–og Frešeovog izvoda, respektivno.

Koristeći prethodno naveden koncept, proces $x^n = \{x^n(t),\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ nastao sukcesivnim povezivanjem početnog uslova $\xi = \{\xi(\theta),\, \theta \in [-\tau, 0]\}$ i stohastičkih procesa $\{x^n(t),\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u podeonim tačkama t_k za $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ je s.i. neprekidan.

Da bi se konstruisao ovakav analitički metod, neophodno je da funkcionali a i b zadovoljavaju određene uslove, a pre svega moraju biti dovoljno glatki. Pretpostavlja se da funkcionali a i b zadovoljavaju Lipšicov uslov (1.3.16) i uslov linearnog rasta (1.3.17), tako da važe egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (1.4.13). Bez posebnog naglašavanja uslova koje zadovoljavaju koeficijenti aproksimativnih jednačina (1.4.15), pretpostavljaju se egzistencija i jedinstvenost njihovih rešenja. Pored toga, uvedene su i sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Funkcionali a i b imaju Tejlorove razvoje po argumentu x do m_1–og i m_2–og Frešeovog izvoda, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Funkcionali $a^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ i $g^{(m_2+1)}_{(x,t)}$ su uniformno ograničeni, odnosno postoje pozitivne konstante L_1 i L_2 tako da, za proizvoljno $h \in V$, važi

$$\sup_{(x,t) \in V \times [t_0, T]} \left\| a^{(m_1+1)}_{(x,t)}(h, \ldots, h) \right\| \le L_1 \|h\|^{m_1+1},$$

$$\sup_{(x,t) \in V \times [t_0, T]} \left\| b^{(m_2+1)}_{(x,t)}(h, \ldots, h) \right\| \le L_2 \|h\|^{m_2+1}.$$

$\mathcal{A}_3$: Postoje jedinstvena, s.i. neprekidna rešenja x i x^n jednačina (1.4.13) i (1.4.15), redom, takva da je za $p \geq 2$,

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t)\big|^p < \infty, \qquad E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x^n(t)\big|^{(M+1)^2 p} \leq Q < \infty,$$

gde je $M = m_1 \vee m_2$, dok je $Q > 0$ konstanta nezavisna od n. Pored toga, važi da je $E\|\xi\|^{(M+1)^2 p} < \infty$.

$\mathcal{A}_4$: Početni uslov ξ je globalno Lipšic-neprekidan, odnosno postoji realna konstanta $\beta > 0$ takva da, za svako $-\tau \leq \theta_1, \theta_2 \leq 0$, važi

$$\big|\xi(\theta_2) - \xi(\theta_1)\big| \leq \beta|\theta_2 - \theta_1|.$$

Da bi se ocenila bliskost rešenja x i x^n, prvo se navodi pomoćni rezultat koji se može posmatrati nezavisno od pomenute problematike, ali koji se koristi u dokazu glavnog tvrđenja.

Propozicija 1.4.8. *Neka su $\{x^n(t), t \in [t_k - \tau, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, rešenja jednačina (1.4.15) i neka su uslov (1.3.17) i pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ zadovoljene. Tada, za svako $2 \leq r \leq (M+1)p$, važi ocena*

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s) - x^n(t_k)\big|^r \leq Cn^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \{0, \dots, n-1\},$$

gde je $C > 0$ konstanta nezavisna od n.

Za dokaz narednog tvrđenja je važna ekvidistantnost particije segmenta $[t_0, T]$.

Propozicija 1.4.9. *Neka važe svi uslovi Propozicije 1.4.8 i pretpostavka $\mathcal{A}_4$. Tada je, za svako $2 \leq r \leq (M+1)p$, ispunjeno*

$$E\|x_t^n - x_{t_k}^n\|^r \leq Bn^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \{0, \dots, n-1\},$$

gde je B konstanta nezavisna od n.

Primenom Propozicije 1.4.9 se dokazuje da niz aproksimativnih rešenja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u L^p– smislu ka rešenju x jednačine (1.4.13), a naredna teorema određuje stepen bliskosti rešenja x i x^n.

Teorema 1.4.10. *Neka je x rešenje jednačine (1.4.13) i x^n njegovo aproksimativno rešenje određeno jednačinama (1.4.15). Neka važe sve pretpostavke Propozicije 1.4.9 i Lipšicov uslov (1.3.16). Tada, za $p \geq 2$, sledi*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t) - x^n(t)\big|^p \leq Hn^{-(m+1)p/2},$$

gde je $m = m_1 \wedge m_2$ a H je konstanta nezavisna od n.

Dakle, važi da je $E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t) - x^n(t)|^p \to 0$, kada $n \to \infty$, tj. $x^n \xrightarrow{L^p} x$, kada $n \to \infty$. Red konvergencije raste ako redovi u Tejlorovim razvojima funkcionala a i b rastu, slično Tejlorovoj aproksimaciji u realnoj analizi. Naredna teorema je direktna posledica Teoreme 1.4.10, a ona garantuje da skoro sve trajektorije rešenja x^n konvergiraju ka rešenju x jednačine (1.4.13).

Teorema 1.4.11. *Aka važe sve pretpostavke Teoreme 1.4.10 onda niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aproksimativnih rešenja, određenih jednačinama (1.4.15), skoro izvesno konvergira ka rešenju x jednačine (1.4.13).*

1.4.5 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U radu [56], čiji su rezultati izloženi u ovom odeljku, je aproksimativni metod primenjen na klasu NSDJVZK, imajući u vidu da analiza takvih jednačina često podrazumeva primenu netrivijalnih tehnika, kao što su one u [42, 45, 57, 78, 80]. Drugim rečima, cilj je bio da se postigne dovoljno dobar red L^p–konvergencije imajući u vidu da je, na primer u [57, 78], red L^2–konvergencije OM metoda za NSFDJ i NSDJVZK jednak $(\ell-1)/\ell$, gde je $\ell > 1$ proizvoljan prirodan broj. Autori su rešenje jednačine (1.3.19) aproksimirali nizom rešenja NSDJ čiji su neutralni član i koeficijenti prenosa i difuzije Tejlorove aproksimacije funkcija u, a i b, redom, do prvog izvoda. U tom smislu, prisustvo neutralnog člana u jednačini (1.3.19) zahtevalo posebnu tehniku. Posledica prisustva neutralnog člana je, između ostalih, da je posmatran Tejlorov razvoj koeficijenata jednačine (1.3.19) do prvog izvoda, da bi se postigao određeni red L^p–konvergencije.

Razmatra se NSDJVZK (1.3.19) sa početnim uslovom (1.3.20), predstavljena u svom integralnom obliku

$$x(t) = \xi(0) + u\big(x(t-\delta(t))\big) - u\big(x(t_0-\delta(t_0))\big) + \int_{t_0}^{t} a\big(x(s), x(s-\delta(s))\big)ds$$
$$+ \int_{t_0}^{t} b\big(x(s), x(s-\delta(s))\big)dw(s), \quad t \in [t_0, T]. \tag{1.4.16}$$

Neka je $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ ekvidistantna particija segmenta $[t_0, T]$, gde je prirodan broj n odabran tako da postoji prirodan broj n_* za koji je $\tau = n_*(T-t_0)/n$. Pretpostavlja se i da je n dovoljno veliki broj tako da je $\delta_n = (T-t_0)/n \in (0, 1)$. Dakle, podeone tačke segmenta $[t_0 - \tau - \delta_n, T]$ su

$$t_k = t_0 + k\frac{T-t_0}{n}, \quad k \in \{-n_*-1, -n_*, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}, \tag{1.4.17}$$

pri čemu je dodata podeona tačka t_{-n_*-1} za potrebu definicije ovog analitičkog metoda. Neka je $\delta(t_{-1}) = \delta(t_0)$.

Rešenje jednačine (1.4.16) je aproksimirano na particiji (1.4.17) stohastičkim procesom $\{x^n(t),\, t \in [t_0 - \tau - \delta_n, T]\}$ primenom Tejlorovog razvoja koeficijenata u, a i b. Da bi rešenje bilo dobro definisano, neka je

$$x^n(t) = x^n(t+\delta_n) = \xi(t+\delta_n - t_0), \quad t \in [t_0 - \tau - \delta_n, t_0 - \tau]. \tag{1.4.18}$$

Za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, definisana je linearna interpolacija $z_k^n(t)$ za $x^n(t_{k-1-\lfloor\delta(t_{k-1})/\delta_n\rfloor})$ i $x^n(t_{k-\lfloor\delta(t_k)/\delta_n\rfloor})$ sa $z_k^n(t) = (z_{k,1}^n(t), z_{k,2}^n(t), \ldots, z_{k,d}^n(t))$, gde je

$$z_{k,j}^n(t) = x_j^n(t_{k-1-\lfloor\delta(t_{k-1})/\delta_n\rfloor}) + \frac{t-t_k}{\delta_n}\Big(x_j^n(t_{k-\lfloor\delta(t_k)/\delta_n\rfloor}) - x_j^n(t_{k-1-\lfloor\delta(t_{k-1})/\delta_n\rfloor})\Big), \tag{1.4.19}$$

za svako $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Aproksimativna rešenja $\{x^n(t),\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, su data jednačinama

$$x^n(t) = x^n(t_k) + U_1(x^n_{t-\delta(t)}; z_k^n(t)) - U_2(x^n_{t_k-\delta(t_k)}; x^n_{t_{k-1-\lfloor\delta(t_{k-1})/\delta_n\rfloor}}) \tag{1.4.20}$$
$$+ \int_{t_k}^{t} A(x_s^n, x^n_{s-\delta(s)}; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-\lfloor\delta(t_k)/\delta_n\rfloor}})ds + \int_{t_k}^{t} B(x_s^n, x^n_{s-\delta(s)}; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-\lfloor\delta(t_k)/\delta_n\rfloor}})dw(s),$$

za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, sa početnim uslovima $x^n_{t_k} = \{x^n(t_k+\theta),\, \theta \in [-\tau, 0]\}$, zajedno sa (1.4.18), gde je

$$U_1(x^n_{t-\delta(t)}; z^n_k(t)) = u(z^n_k(t)) + D^{(1)}u(z^n_k(t))\Delta z^n_k(t), \tag{1.4.21}$$

$$U_2(x^n_{t_k-\delta(t_k)}; x^n_{t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor}}) \tag{1.4.22}$$
$$= u(x^n(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor})) + D^{(1)}u(x^n(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor}))\Delta \tilde{x}^n_k,$$

$$A(x^n_s, x^n_{s-\delta(s)}; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}}) \tag{1.4.23}$$
$$= a(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor})) + D^{(1)}a(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))(\Delta x^n(t_k), \Delta x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor})),$$

$$B(x^n_s, x^n_{s-\delta(s)}; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}}) \tag{1.4.24}$$
$$= b(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor})) + D^{(1)}b(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))(\Delta x^n(t_k), \Delta x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor})).$$

Dakle, u jednačini (1.4.20), za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, neutralan član predstavlja razliku Tejlorovih aproksimacija funkcije u prvog reda u okolini tačaka $z^n_k(t)$ i $x^n(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor})$. U tom smislu je, za svako $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\Delta z^n_{k,i}(t) = x^n_i(t-\delta(t)) - z^n_{k,i}(t), \quad \Delta \tilde{x}^n_{k,i} = x^n_i(t_k - \delta(t_k)) - x^n_i(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor}),$$

tako da je

$$D^{(1)}u(z^n_k(t))\Delta z^n_k(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_1(z^n_k(t))}{\partial z^n_{k,i}(t)} \Delta z^n_{k,i}(t) \\ \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_2(z^n_k(t))}{\partial z^n_{k,i}(t)} \Delta z^n_{k,i}(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_d(z^n_k(t))}{\partial z^n_{k,i}(t)} \Delta z^n_{k,i}(t) \\ \end{bmatrix} \tag{1.4.25}$$

i analogno

$$D^{(1)}u(x^n(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor}))\Delta \tilde{x}^n_k = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_1(x^n(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(t-\delta(t))} \Delta \tilde{x}^n_{k,i} \\ \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_2(x^n(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(t-\delta(t))} \Delta \tilde{x}^n_{k,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_d(x^n(t_{k-1-\lfloor \delta(t_{k-1})/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(t-\delta(t))} \Delta \tilde{x}^n_{k,i} \end{bmatrix}. \tag{1.4.26}$$

Koeficijenti prenosa i difuzije jednačine (1.4.20), dati sa (1.4.23) i (1.4.24), su Tejlorove aproksimacije funkcija a i b prvog reda u okolini tačaka $(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor})$, $s \in [t_k, t]$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, gde je

$$D^{(1)}a(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))(\Delta x^n(t_k), \Delta x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_1(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(s)} \Delta x^n_i(t_k) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_1(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(s-\delta(s))} \Delta x^n_i(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}) \\ \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_2(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(s)} \Delta x^n_i(t_k) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_2(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(s-\delta(s))} \Delta x^n_i(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_d(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(s)} \Delta x^n_i(t_k) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_d(x^n(t_k), x^n(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}))}{\partial x^n_i(s-\delta(s))} \Delta x^n_i(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}) \end{bmatrix},$$

pri čemu je, za svako $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\Delta x^n_i(t_k) = x^n_i(s) - x^n_i(t_k) \quad \text{i} \quad \Delta x^n_i(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}) = x^n_i(s-\delta(s)) - x^n_i(t_{k-\lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}).$$

Zbog jednostavnije notacije, prvi izvod funkcije b je biti predstavljen za $y, q \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ kao

$$D^{(1)}g(y)q = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{11}(y)}{\partial y_i} q_i & \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{12}(y)}{\partial y_i} q_i & \dots & \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{1d_1}(y)}{\partial y_i} q_i \\ \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{21}(y)}{\partial y_i} q_i & \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{22}(y)}{\partial y_i} q_i & \dots & \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{2d_1}(y)}{\partial y_i} q_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{d1}(y)}{\partial y_i} q_i & \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{d2}(y)}{\partial y_i} q_i & \dots & \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial b_{dd_1}(y)}{\partial y_i} q_i \end{bmatrix},$$

gde je, za $i \in \{1, \dots, d\}$, $s \in [t_k, t]$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, a

$$y_i = x_i^n(s), \quad y_{d+i} = x_i^n(s - \delta(s)), \tag{1.4.27}$$
$$q_i = \Delta x_i^n(t_k) = x_i^n(s) - x_i^n(t_k), \quad q_{d+i} = x_i^n(s - \delta(s)) - x_i^n(t_{k - \lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor}).$$

Aproksimativno rešenje $x^n = \{x^n(t),\, t \in [t_0 - \tau - \delta_n, T]\}$, konstruisano sukcesivnim povezivanjem procesa $\{x^n(t),\, t \in [t_0 - \tau - \delta_n, t_0 - \tau]\}$ datim sa (1.4.18), početnog uslova $\{\xi(\theta),\, -\tau \le \theta \le 0\}$ i procesa $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k za $k \in \{0, \dots, n-1\}$ je s.i. neprekidan proces.

Uz uslove (1.3.22) i (1.3.24) za koeficijente jednačine 1.4.16, uvode se dodatne pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Funkcije u, a i b imaju Tajlorove razvoje prvog reda.

$\mathcal{A}_2$: Postoji realna konstanta $\beta \in (0,1)$ takva da je, za svako $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|D^{(1)}u(x)| \le \beta.$$

$\mathcal{A}_3$: Postoji pozitivna konstanta L_2 takva da je, za svako $y, q \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$|D^{(1)}a(y)q| \vee |D^{(1)}b(y)q| \le L_2|q|.$$

Uzimajući u obzir pretpostavku $\mathcal{A}_1$ uvode se dodatne pretpostavke u vezi ostataka Tejlorovih aproksimacija funkcija u, a i b. U tom smislu, za svako $x, h \in \mathbb{R}^d$, pri čemu je drugi izvod funkcije u u tački x označen sa $D^{(2)}u(x)$, važi

$$D^{(2)}u(x)h^2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_2, \dots, x_d)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j \\ \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, \dots, x_d)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u_d(x_1, x_2, \dots, x_d)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j \end{bmatrix}. \tag{1.4.28}$$

Analogno je, za svako $y, q \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, označeno

$$D^{(2)}a(y)q^2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2d} \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial^2 a_1(y_1, y_2, \dots, y_{2d})}{\partial y_j \partial y_i} q_i q_j \\ \sum_{j=1}^{2d} \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial^2 a_2(y_1, y_2, \dots, y_{2d})}{\partial y_j \partial y_i} q_i q_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{2d} \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial^2 a_d(y_1, y_2, \dots, y_{2d})}{\partial y_j \partial y_i} q_i q_j \end{bmatrix} \tag{1.4.29}$$

i

$$D^{(2)}b(y)q^2 \tag{1.4.30}$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial^2 b_{11}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j & \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial^2 b_{12}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j & \dots & \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial b_{1d_1}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j \\ \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial^2 b_{21}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j & \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial^2 b_{22}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j & \dots & \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial b_{2d_1}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial^2 b_{d1}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j & \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial^2 b_{d2}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j & \dots & \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \frac{\partial b_{dd_1}(y)}{\partial y_i \partial y_j} q_i q_j \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{A}_4$: Funkcije u, a i b su dva puta neprekidno-diferencijabilne i postoji pozitivna konstanta L takva da je, za svako $x, h \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|D^{(2)}u(x)h^2\right| \leq L|h|^2, \tag{1.4.31}$$

i da je za svako $y, q \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\left|D^{(2)}a(y)q^2\right| \vee \left|D^{(2)}b(y)q^2\right| \leq L|q|^2. \tag{1.4.32}$$

$\mathcal{A}_5$: Postoji pozitivna realna konstanta C_ξ takva da je, za svako $p \geq 2$,

$$E \sup_{t,s\in[t_0-\tau,t_0],\,|t-s|\leq\delta_n} \left|\xi(t) - \xi(s)\right|^p \leq C_\xi|t-s|^p.$$

$\mathcal{A}_6$: Postoji pozitivna konstanta $\eta > 0$, takva da je

$$\left|\delta(t) - \delta(s)\right| \leq \eta|t-s|, \quad t, s \in [t_0, T].$$

Napomena 1.4.12. *Pretpostavka $\mathcal{A}_2$ i teorema o srednjoj vrednosti povlače da je za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$,*

$$\left|u(x) - u(y)\right| \leq \sup_{\alpha\in[0,1]} \left|D^{(1)}u(x + \alpha(y-x))\right||x-y| \leq \beta|x-y|. \tag{1.4.33}$$

Neka važi da je $u(0) = 0$. Tada relacija (1.4.33) implicira da je, za svako $x \in \mathbb{R}^d$, ispunjen uslov

$$\left|u(x)\right| \leq \beta|x|. \tag{1.4.34}$$

Pored toga, za svako $x, h \in \mathbb{R}^d$, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_2$, važi da je

$$\left|D^{(1)}u(x)h\right| \leq \beta|h|. \tag{1.4.35}$$

Ako su ispunjeni uslovi (1.3.22), (1.3.24) i (1.4.33), postoji skoro izvesno neprekidno rešenje x jednačine (1.4.16) (videti [48]). Ako je zadovoljen i uslov (1.4.34) i ako je, za svako $p \geq 2$, ispunjeno $E\|\xi\|^p < \infty$, onda je $E\sup_{t_0-\tau\leq t\leq T}|x(t)|^p < \infty$. Jednačine (1.4.20) su linearne SDJVZK na $[t_k, t_{k+1}]$ za svako $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Zbog toga, pod datim uslovima, postoje jedinstvena rešenja ovih jednačina.

Za proizvoljno $p \geq 2$, uvedena je oznaka

$$\mathcal{H}(p) = 2^{p-1}(1 + 2^p)\beta^p. \tag{1.4.36}$$

Propozicija 1.4.13. *Neka je $p \geq 2$ i $\mathcal{H}(p) < 1$. Ako je $E\|\xi\|^p < \infty$, ako važe pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ i uslovi (1.3.24) i (1.4.34), postoji pozitivna konstanta $Q(p)$, takva da je*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau-\delta_n,T]} \left|x^n(t)\right|^p \leq Q(p).$$

Za potrebe naredne propozicije uvedeni su stepenasti procesi

$$y_1^n(t) = \sum_{k=-n_*-1}^{n-1} x^n(t_k)\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t), \quad t \in [t_0 - \tau - \delta_n, T], \tag{1.4.37}$$

$$y_2^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x^n(t_{k-\lfloor t_k/\delta_n\rfloor})\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{1.4.38}$$

Propozicija 1.4.14. *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_6$ kao i uslovi (1.3.24) i (1.4.34). Neka je još $E\|\xi\|^{4p} < \infty$, za neko $p \geq 2$, i*

$$\mathcal{H}(4p) \vee \Big[3^{p-1}\beta^p\Big[\left(1+2^{p-1}\right)(3+\lfloor\eta\rfloor)^p + 2^{p-1}(3+\lfloor 2\eta\rfloor)^p + (2+\lfloor\eta\rfloor)^p\Big]\Big] < 1, \quad (1.4.39)$$

pri čemu je funkcija $\mathcal{H}$ definisana sa (1.4.36). Tada za proizvoljan prirodan broj $\ell > 1$ postoji konstanta $A(\ell) > 0$, koja zavisi od ℓ, ali ne i od n, tako da je

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau-\delta_n,T]} \left|x^n(t) - y_1^n(t)\right|^p \leq A(\ell) n^{-\frac{p\ell-1}{2\ell}} \quad (1.4.40)$$

i

$$E \sup_{t\in[t_0,T]} \left|x^n(t-\delta(t)) - y_2^n(t)\right|^p \leq (2+\lfloor\eta\rfloor)^p A(\ell) n^{-\frac{p\ell-1}{2\ell}}. \quad (1.4.41)$$

Teorema 1.4.15. *Neka je $p \geq 2$ tako da je $E\|\xi\|^{8p} < \infty$ i*

$$\mathcal{H}(8p) \vee \Big[3^{2p-1}\beta^{2p}\Big[\left(1+2^{2p-1}\right)(3+\lfloor\eta\rfloor)^{2p} + 2^{2p-1}(3+\lfloor 2\eta\rfloor)^{2p} + (2+\lfloor\eta\rfloor)^{2p}\Big]\Big] < 1.$$

Neka su zadovoljene pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_6$ kao i Lipšicov uslov (1.3.22), uslov linearnog rasta (1.3.24) i relacija (1.4.34). Tada je, za svako $\ell > 1$,

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \left|x(t) - x^n(t)\right|^p \leq D(\ell) n^{-\frac{2p\ell-1}{2\ell}}, \quad (1.4.42)$$

pri čemu je $D(\ell) > 0$ konstanta koja zavisi od ℓ, ali ne i od n.

Teorema 1.4.16. *Neka su ispunjene sve pretpostavke Teoreme 1.4.15. Tada niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aproksimativnih rešenja određenih jednačinama (1.4.20) konvergira skoro izvesno ka rešenju x jednačine (1.4.16).*

1.5 Neki pojmovi, tvrđenja i nejednakosti matematičke analize

U ovom poglavlju su izloženi osnovni elementi matematičke analize koja se primenjuju u dokazima stohastičkih rezultata.

Definicija 1.5.1. *Funkcije $\lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ definisane su sa*

$$\lfloor x\rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leq x\}, \quad \lceil x\rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq z\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.5.2. *Realni brojevi p i q čine dualni par brojeva (p,q), odnosno par konjugovanih eksponenata, ako je $p > 1$, $q > 1$ i*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.5.3 (Jang[15]). *Neka p i q čine dualni par brojeva. Tada za nenegativne realne brojeve a i b važi*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.5.1)$$

Jednakost u relaciji (1.5.1) važi ako i samo ako je $a^p = b^q$.

[15] Young W. H. (1863–1942) - engleski matematičar

Naredna teorema i njene posledice imaju važnu ulogu u tehnici koja se primenjuje u dokazima glavnih rezultata doktorske disertacije.

Pod merom će nadalje biti podrazumevana pozitivna mera.

Teorema 1.5.4 (**Helder**[16]). *Neka je dat prostor mere $(G, \mathcal{G}, \mu)$, neka su $f, g : G \to \mathbb{R}^d$ (ili $f, g : G \to \mathbb{C}^d$) merljive funkcije i neka p i q čine dualni par brojeva. Tada je*

$$\int_G |fg| d\mu \leq \Big(\int_G |f|^p d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int_G |g|^q d\mu \Big)^{1/q}. \tag{1.5.2}$$

Specijalan slučaj ove teoreme za $p = q = 2$ je nejednakost Koši[17]–Švarc[18]–Bunjakovskog[19].

Neka su za realne veličine a i b uvedene oznake $a \wedge b = \min\{a, b\}$ i $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Posledica 1.5.5. *Za svaki nenegativan realan broj r i za proizvoljne vektore x_i normiranog prostora $(X, \|\cdot\|_X)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, važi*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|_X^r \leq (n^{r-1} \vee 1) \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^r. \tag{1.5.3}$$

Dokaz. Najpre će biti dokazano da za sve proizvoljne nenegativne realne brojeve b_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, važi

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \Big)^r \leq (n^{r-1} \vee 1) \sum_{i=1}^{n} b_i^r. \tag{1.5.4}$$

Relacija (1.5.4) je posledica Helderove nejednakosti (za meru prebrojavanja), u slučaju da je $r > 1$. Zaista, važi da je

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \Big)^r \leq \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \Big)^{1/r} \Big(\sum_{i=1}^{n} 1 \Big)^{1-1/r} \Big)^r = n^{r-1} \sum_{i=1}^{n} b_i^r,$$

jer je $x \mapsto x^r$ rastuća funkcija, $x \geq 0$. U slučaju da je $r \in \{0, 1\}$, relacija (1.5.4) je trivijalno zadovoljena, a u slučaju da je $r \in (0, 1)$, relacija (1.5.4) sledi iz

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^1 \Big)^1 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \Big)^{1/r}.$$

Na osnovu nejednakosti trougla, činjenice da je $t \mapsto t^r$ neopadajuća funkcija za $t \geq 0$ i relacije (1.5.4), sledi da važi i relacija (1.5.3). □

Sldeći pojmovi i rezultati teorije mera imaju posebno mesto u daljoj analizi.

Definicija 1.5.6. *Neka je $(G, \mathcal{G}, \mu)$ prostor mere. Mera μ je σ–konačna ako skup G može biti prekriven pomoću najviše prebrojivo mnogo merljivih skupova konačne mere.*

[16] Hölder O. L. (1859–1937) - nemački matematičar
[17] Cauchy A. L. (1789–1857) - francuski matematičar
[18] Schwarz H. (1843–1921) - nemački matematičar
[19] Bunyakovsky V. Y. (1804–1889) - ruski matematičar

Definicija 1.5.7. *Neka je dat prostor mere $(G, \mathcal{G}, \mu)$ i funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ ili $f : G \to \mathbb{C}$. Funkcija f je G–integrabilna ako je $\mathcal{G}$–merljiva i*

$$\int_G |f| d\mu < \infty.$$

Teorema 1.5.8 (Fubini[20]). *Neka su $(F, \mathcal{F}, \mu)$ i $(G, \mathcal{G}, \nu)$ prostori σ–konačnih mera i neka je funkcija f $F \times G$–integrabilna. Tada je*

$$\int_{F\times G} f d(\mu\times\nu) = \int_F \Big(\int_G f d\nu\Big) d\mu = \int_G \Big(\int_F f d\mu\Big) d\nu.$$

Fubinijeva teorema, tj. njena posledica koja se navodi u nastavku, se primenjuje kroz celu disertaciju, pri čemu će se menjati redosled integracije kod matematičkog očekivanja Lebegovog[21] integrala.

Posledica 1.5.9 (Toneli[22]). *Neka su $(F, \mathcal{F}, \mu)$ i $(G, \mathcal{G}, \nu)$ prostori σ–konačnih mera i neka je funkcija $f : F \times G \to \mathbb{R}$ nenegativna i $(\mu\times\nu)$–merljiva. Tada je*

$$\int_{F\times G} f d(\mu\times\nu) = \int_F \Big(\int_G f d\nu\Big) d\mu = \int_G \Big(\int_F f d\mu\Big) d\nu.$$

Teorema 1.5.10 (Grunval[23]–Belman[24]). *Neka su dati realni brojevi $b > a \geq 0$ i $c \geq 0$ i funkcije $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, pri čemu je u ograničena i Borel-merljiva a v integrabilna. Ako je za proizvoljno $t \in [a, b]$ zadovoljeno*

$$u(t) \leq c + \int_a^t v(s)u(s)ds,$$

onda važi i

$$u(t) \leq c e^{\int_a^t v(s)ds}, \quad t \in [a, b]. \tag{1.5.5}$$

Definicija 1.5.11. *Neka je dat merljiv prostor $(G, \mathcal{G})$ i na njemu dve mere μ i ν. Mera μ je apsolutno neprekidna u odnosu na meru ν, u oznaci $\mu << \nu$, ako za svaki merljiv skup $S \in \mathcal{G}$ za koji je $\mu(S) = 0$ važi da je $\nu(S) = 0$.*

Naredna teorema ima važnu primenu u mnogim oblastima a između ostalih, i u teoriji verovatnoće.

Teorema 1.5.12 (Radon[25]–Nikodim[26]). *Neka je dat merljiv prostor $(G, \mathcal{G})$ i na njemu dve σ–konačne pozitivne mere μ i ν, pri čemu je mera μ apsolutno neprekidna u odnosu na ν. Tada postoji, do na skup μ–mere nula, jedinstvena $\mathcal{G}$–merljiva funkcija $f : G \to \mathbb{R}_+$ (koja se još naziva Radon–Nikodimov izvod) takva da je, za svaki merljiv skup $S \in \mathcal{G}$,*

$$\nu(S) = \int_S f d\mu.$$

[20] Fubini G. (1879–1943) - italijanski matematičar
[21] Lebesgue H. L. (1875–1941) - francuski matematičar
[22] Tonelli L. (1885–1946) - italijanski matematičar
[23] Grönwall T. H. (1877–1932) - švedski matematičar
[24] Bellman R. E. (1920–1984) - američki matematičar
[25] Radon J.(1887–1956) - austrijski matematičar
[26] Nikodym O. M. (1887–1974) - poljski matematičar

Pomoću Radon–Nikodimovog izvoda se definiše uslovno matematičko očekivanje slučajne promenljive u odnosu na σ–algebru.

Sledeća teorema, koja predstavlja integralnu nejednakost Biharijevog[27] tipa iz [64], često se primenjuje u disertaciji kada nije moguće primeniti Teoremu 1.5.10.

Teorema 1.5.13. *Neka je $\mathcal{G}$ klasa funkcija $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:*

1) φ je neopadajuća i neprekidna u $\mathbb{R}_+$ i $\varphi(u) > 0$ za $u > 0$;

2) $\frac{1}{\alpha}\varphi(u) \le \varphi(\frac{u}{\alpha})$ za $u \ge 0$, $\alpha \ge 1$.

Neka su $f = f(x), u = u(x)$ realne nenegativne neprekidne funkcije na U, gde je U bilo koji ograničen skup u $\mathbb{R}$.

Ako je $g = g(x)$ pozitivna neopadajuća funkcija na U i φ pripada klasi $\mathcal{G}$ za koju važi

$$u(x) \le g(x) + \int_{x^0}^{x} f(t)\varphi\big(u(t)\big)dt, \tag{1.5.6}$$

za svako $x \in U$ za koje je $x \ge x^0 \in U$, tada za $x^0 \le x \le x^*$ važi

$$u(x) \le g(x)G^{-1}\Big(G(1) + \int_{x^0}^{x} f(t)dt\Big),$$

gde je

$$G(z) = \int_{z^0}^{z} \frac{ds}{\varphi(s)}, \ \ z \ge z^0 > 0$$

i G^{-1} je inverzna funkcija od G, gde je x^* izabran tako da je

$$G(1) + \int_{x^0}^{x} f(t)dt \in Dom(G^{-1}).$$

1.6 Frešeov izvod i Tejlorova formula

U ovom poglavlju će biti ukratko objašnjen pojam Frešeovog izvoda i navedena odgovarajuća Tejlorova formula (na primer, [9, 15, 18, 24]). Neka su $\mathbb{X} = (X, \|\cdot\|_X)$ i $\mathbb{Y} = (Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{F}$. Skup $\mathcal{L}(X,Y)$ predstavlja skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y. Norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ u $\mathcal{L}(X,Y)$ je definisana sa

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y, \quad A \in \mathcal{L}(X,Y)$$

i $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ je Banahov prostor nad poljem skalara $\mathbb{F}$, ako je prostor $\mathbb{Y}$ Banahov.

Neka je U otvoren podskup od X, neka je $f : U \to Y$ preslikavanje i $x_0 \in U$. Ako postoji linearan operator $F \in \mathcal{L}(X,Y)$ tako da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\big\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Fh\big\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

tada je F Frešeov izvod preslikavanja f u tački x_0 i označava se sa $F = f'_{x_0}$. Granična vrednost je posmatrana dok vektor h teži nuli u X, a Frešeov izvod je jedinstven u slučaju kada on postoji.

[27]Bihari I. (1915–1998) - mađarski matematičar

Neka važi pretpostavka da je preslikavanje $f : U \to Y$ Freše-diferencijabilno u svakoj tački $x_0 \in U$. Tada je $f'_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Tada se razmatra preslikavanje $x_0 \mapsto f'_{x_0}$ iz skupa U u prostor $\mathcal{L}(X, Y)$. Ako je ovo preslikavanje Freše-diferencijabilno u tački x_0, tada je drugi Frešeov izvod $f''_{x_0} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

U slučaju kada postoji drugi Frešeov izvod u nekoj okolini U vektora $x_0 \in X$, može se definisati $F : U \to \mathcal{L}(X, Y)$ kao $F(x) = f'_x$, za svako $x \in U$. Na taj način je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left\| F(x_0 + h) - F(x_0) - F'_{x_0} h \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\| h\|_X} = \lim_{h\to 0} \frac{\left\| f'_{x_0+h} - f'_{x_0} - f''_{x_0} h \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\| h\|_X} = 0.$$

Neka su $\mathbb{X}_1 = (X_1, \| \cdot \|_{X_1}), \ldots, \mathbb{X}_n = (X_n, \| \cdot \|_{X_n}), \mathbb{Y} = (Y, \| \cdot \|_Y)$ normirani prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{F}$ i neka je $B : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ preslikavanje koje je linearno po svakom argumentu. Funkcija B je n–linearan operator iz $X_1 \times \cdots \times X_n$ u Y. Takav n–linearan operator B je ograničen ako postoji konstanta $M \geq 0$ tako da, za svako $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, važi

$$\left\| B(x_1, \ldots, x_n) \right\|_Y \leq M \| x_1\|_{X_1} \cdots \| x_n\|_{X_n}. \tag{1.6.1}$$

Skup svih n–linearnih operatora iz $X_1 \times \cdots \times X_n$ u Y označen je sa $\mathcal{M}_n(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Koristi se i oznaka $\mathcal{M}_n(X, \ldots, X; Y) \equiv \mathcal{M}_n(X^n; Y)$.

Lako je utvrditi da je $\mathcal{M}_n(X_1, \ldots, X_n; Y)$ vektorski prostor. Osim toga, ako se definiše norma opratora $B \in \mathcal{M}_n(X_1, \ldots, X_n; Y)$ kao infimum svih dopustivih M u nejednakosti (1.6.1), tada je $\mathcal{M}_n(X_1, \ldots, X_n; Y)$ normiran prostor. Norma operatora B, dobijena za date vektorske prostore na opisani način, označava se sa $\|B\|_n$, a ekvivalentno se može definisati kao

$$\|B\|_n = \sup_{\substack{h_1 \in X_1, \ldots, h_n \in X_n \\ \|h_1\|_{X_1} = \cdots = \|h_n\|_{X_n} = 1}} \left\| B(h_1, \ldots, h_n) \right\|_Y = \inf \left\{ M \geq 0 \mid M \text{ zadovoljava (1.6.1)} \right\}.$$

Multilinearni operatori i ograničeni linearni operatori su u bliskoj vezi u smislu da je $\mathcal{M}_n(X^n; Y)$ izometrički izomorfan sa $\mathcal{L}(\underbrace{X, \mathcal{L}(X, \ldots, \mathcal{L}(X}_{n \text{ puta}}, Y) \ldots))$ u odnosu na standardne norme ovih prostora. Stoga, ako je $x \in X$ tada je $f''_{x_0}(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ako je $y \in X$, tada je $f''_{x_0}(x)(y) = f''_{x_0}(x, y) \in Y$ i preslikavanje $(x, y) \mapsto f''_{x_0}(x, y)$ pripada $\mathcal{M}_2(X^2; Y)$. Norma $\|f''_{x_0}\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))} = \|f''_{x_0}\|_2$ je ista u prostoru $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ i u prostoru $\mathcal{M}_2(X^2; Y)$.

Na sličan način se definišu viši Frešeovi izvodi, u slučaju kada oni postoje. Tako je n–ti Frešeov izvod funkcije f u tački x_0, $f^{(n)}_{x_0} \in \mathcal{L}\,(\underbrace{X, \ldots, \mathcal{L}(X}_{n \text{ puta}}, Y) \ldots)$, ako je funkcija $x_0 \mapsto f^{(n-1)}_{x_0}$ Freše-diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0. Takođe, ako je funkcija f Freše-diferencijabilna n puta u $x_0 \in X$, onda je $f^{(n)}_{x_0}$, razmatran kao n–linearan operator, simetričan po svakom argumentu. Drugim rečima, za svako $x_1, \ldots, x_n \in X$ važi $f^{(n)}_{x_0}(x_1, \ldots, x_n) = f^{(n)}_{x_0}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, gde je $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$.

Od posebne važnosti za ovu disertaciju je odgovarajući oblik Tejlorove formule [9, 15]. Neka su dati normirani prostori $\mathbb{X} = (X, \| \cdot \|_X)$ i $\mathbb{Y} = (Y, \| \cdot \|_Y)$ nad istim poljem skalara $\mathbb{F}$, neka je U otvoren podskup od X i neka je $f : U \to Y$ funkcija koja je $n + 1$ puta Freše-diferencijabilna. Pretpostavlja se da su $x_0, x \in U$ takvi da segment $[x_0, x] \subset U$

(odnosno, $x_0 + \theta(x - x_0) \in U$ za svako $0 \leq \theta \leq 1$). Tada, za neko $\bar{\theta} \in (0,1)$ važi formula

$$f(x)-f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f_{x_0}^{(k)} \underbrace{(x-x_0, \ldots, x-x_0)}_{k \text{ puta}} + \frac{1}{(n+1)!} f_{x_0+\bar{\theta}(x-x_0)}^{(n+1)} \underbrace{(x-x_0, \ldots, x-x_0)}_{n+1 \text{ puta}}. \tag{1.6.2}$$

Kako je k–ti Frešeov izvod k–linearan operator, može se koristiti još jedna oznaka $f_{x_0}^{(k)} \underbrace{(x - x_0, \ldots, x - x_0)}_{k \text{ puta}} \equiv f_{x_0}^{(k)}(x - x_0)^k$. Ostatak Tejlorovog razvoja može se oceniti na sledeći način

$$\big\|R(x_0,h)\big\|_Y \equiv \frac{1}{(n+1)!} \big\| f_{x_0+\bar{\theta}h}^{(n+1)} \underbrace{(h, \ldots, h)}_{n+1 \text{ puta}} \big\|_Y \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\theta \in [0,1]} \big\| f_{x_0+\theta h}^{(n+1)} \big\|_{n+1} \|h\|_X^{n+1}, \tag{1.6.3}$$

gde je $h = x - x_0 \in X$.

Specijalno, ako se posmatraju vektorski prostori $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ i $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^{d'}$, nad poljem $\mathbb{R}$, sa Euklidskim normama $|\cdot|$, prethodno pomenuti Frešeovi izvodi mogu se lako predstaviti pomoću parcijalnih izvoda. Ako je funkcija $f = (f_1, \ldots, f_{d'}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ Freše--diferencijabilna u $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (dovoljno puta), tada $f'_{x_0} = f_{x_0}^{(1)} = \big[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\big]_{d' \times d} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $f''_{x_0} = f_{x_0}^{(2)} = \big[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\big]_{d' \times d \times d} : \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d'})$ ili $f''_{x_0} : (\mathbb{R}^d)^2 \to \mathbb{R}^{d'}$ (razlikujući slučajeve $f''_{x_0} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$ i $f''_{x_0} \in \mathcal{M}_2(X^2;Y)$), itd.

Glava 2

Aproksimacije rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina pod polinomijalnim uslovom primenom Tejlorovog razvoja

Stohastički numerički metodi, kao Ojlerov, Milštajnov, Vagner[1]–Platenov[2], imaju red konvergencije 1/2, 1, 3/2, respektivno, što je tačno slučaj sa analitičkim aproksimacijama opisanim u ovom poglavlju, dobijenih primenama Tejlorovog razvoja reda nula, jedan i dva, respektivno. Autori su u [22, 25, 46], na primer, pod ne-Lipšicovim i polinomijalnim uslovima za koeficijente stohastičke diferencijalne jednačine, dokazali da Ojler-Marujamino rešenje konvergira strogo reda 3/2. Šeme Milštajnovog tipa [19, 26, 75], pod istim uslovima, mogu dostići jaku konvergenciju reda većeg od onog koji dostižu šeme Ojlerovog tipa sa dodatnim računskim zahtevom da se aproksimiraju iterirani Itovi integrali u svakom vremenskom koraku. Zbog toga ove šeme gube prednost pred šemama Ojlerovog tipa kada je u pitanju računska efikasnost. Ove činjenice sugerišu da numeričke aproksimacije zasnovane na Tejlorovim razvojima višeg reda mogu biti poboljšane njihovim kombinovanjem sa prezentovanim analitičkim aproksimacijama.

Treba napomenuti da se primenom analitičkog metoda proučavanog u ovoj disertaciji dobija veća greška aproksimacije od one u slučaju kada su uključeni i ostaci, ali, podobnim izborom broja koraka n ova greška se može učiniti zadovoljavajuće malom.

Veoma često u primenama, kada je pogodnije da se koriste polinomi u poređenju sa slučajem kada su koeficijenti jednačine komplikovane nelinearne funkcije, korisno je primeniti analitičke aproksimacije.

U ovoj glavi će biti razmatrana analitička metoda koja se zasniva na Tejlorovom razvoju koeficijenata različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina čiji koeficijenti zadovaljvaju različite uslove. Pritom, ti uslovi u opštem slučaju ne moraju da uključuju Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta.

U ovoj glavi su konstruisana aproksimativna rešenja različtih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina definisanih na particiji vremenskog intervala. Koeficijenti polaznih jednačina aproksimirani su njihovim Tejlorovim razvojima do na proizvoljan izvod u

[1]Vagner V. V. (1908–1981) - ruski matematičar

[2]Platen E. (1949–) - nemački matematičar

slučaju kada se ponašaju kao polinomi. Ocenjena je bliskost početnih i aproksimativnih rešenja u smislu L^p–norme i sa verovatnoćom jedan. Neki od rezultata izloženih u ovoj glavi sadržani su u radovima [10, 11, 12].

2.1 Stohastičke diferencijalne jednačine

Razmatra se stohastička diferencijalna jednačina (1.3.1), uvedena u Poglavlju 1.5, u integralnom obliku

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x(s))ds + \int_0^t b(s, x(s))dw(s), \quad t \in [0, T]. \tag{2.1.1}$$

Aproksimativno rešenje se definiše na particiji vremenskog intervala $[0, T]$. Za svaki prirodan broj n razmatra se particija oblika

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \quad \delta_n = \max_{0\le k\le n-1}(t_{k+1} - t_k). \tag{2.1.2}$$

Rešenja jednačina

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^t \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_x^{(i)}\big(s, x^n(t_k)\big)}{i!}\big(x^n(s) - x^n(t_k)\big)^i ds \\ &+ \int_{t_k}^t \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_x^{(i)}\big(s, x^n(t_k)\big)}{i!}\big(x^n(s) - x^n(t_k)\big)^i dw(s),\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0, \ldots, n-1\}, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

u kojima su koeficijenti prenosa i difuzije Tejlorove aproksimacije funkcija a i b redom, dok je $x^n(t_0) = x_0$ skoro izvesno, su primenjene za aproksimaciju rešenja $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ jednačine (2.1.1) na particiji (2.1.2). Funkcije $a_x^{(i)}$ i $b_x^{(i)}$ predstavljaju i-te parcijalne izvode po drugom argumentu funkcija a i b, respektivno. Aproksimativno rešenje $x^n = \{x^n(t), t \in [0, T]\}$, konstruisano u (2.1.3) sukcesivnim povezivanjem procesa $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, je skoro izvesno neprekidan proces.

Na osnovu (2.1.3) može se primetiti da koeficijenti aproksimativnih jednačina ne zavise od ostataka u Tejlorovim razvojima, što nije slučaj kada se primeni Ito–Tejlorov razvoj. Ito–Tejlorov razvoj se dobija višestrukom uzastopnom primenom Itove formule na integrande u integralnoj verziji za stohastičke diferencijalne jednačine i unificiran je kanoničkim sistemom ponovljenih stohastičkih Itovih integrala sa polinomijalnim težinskim funkcijama [32]. Ovi razvoji su osnova dobro poznatih stohastičkih numeričkih metoda, kao što su Ojlerov, Milštajnov i Vagner–Platenov, koji su zasnovani na Tejlorovom razvoju nultog, prvog i drugog reda, respektivno. Za numeričke šeme višeg reda zahteva se adekvatna glatkost koeficijenata prenosa i difuzije ali takođe i odgovarajuća informacija o izvođenju Vinerovog procesa. Ova informacija sadržana je u ostacima koji se sastoje od višestrukih stohastičkih integrala u odnosu na Braunovo kretanje i njihove ocene su relativno komplikovane [33, 34]. Metod prezentovan u nastavku je podoban u slučaju kada je red Tejlorovog razvoja koeficijenata veći od 1. Egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačina (2.1.1) i (2.1.3) je pretpostavljena bez razmatranja uslova koje ispunjavaju njihovi koeficijenti. Pretpostavlja se da su svi Lebegovi i Itovi integrali dobro definisani.

Uvode se sledeće pretpostavke koje su neophodne da bi se dobili glavni rezultati ovog poglavlja.

$\mathcal{A}_1$: Funkcije a i b imaju Tejlorove aproksimacije po drugom argumentu zaključno sa redom m_1 i m_2, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Funkcije $a_x^{(m_1+1)}$ i $b_x^{(m_2+1)}$ su uniformno ograničene, odnosno postoje pozitivne konstante L_1 i L_2, tako da važi

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} \left|a_x^{(m_1+1)}(t,x)\right| \le L_1 \quad \text{i} \quad \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} \left|b_x^{(m_2+1)}(t,x)\right| \le L_2.$$

$\mathcal{A}_3$: Funkcije a i b zadovoljavaju polinomijalni uslov, odnosno postoje pozitivan broj D i nenegativan ceo broj q, tako da za svako $t \in [0,T]$ i svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\left|a(t,x) - a(t,y)\right|^2 \vee \left|b(t,x) - b(t,y)\right|^2 \le D\big(1 + |x|^q + |y|^q\big)|x-y|^2.$$

$\mathcal{A}_4$: Funkcije $a(\cdot,0)$ i $b(\cdot,0)$ su ograničene na $[0,T]$. Preciznije, postoje pozitivne konstante C_a i C_b tako da je $|a(t,0)| \le C_a$ i $|b(t,0)| \le C_b$, za svako $t \in [0,T]$.

$\mathcal{A}_5$: Postoje jedinstvena, skoro izvesno neprekidna rešenja x i x^n jednačina (2.1.1) i (2.1.3), respektivno, koja zadovoljavaju

$$E \sup_{t\in[0,T]} \left|x(t)\right|^{p(M\vee q+1)} \vee E \sup_{t\in[0,T]} \left|x^n(t)\right|^{p(M\vee q+1)^2} \le Q < \infty,$$

za $p > 2$, gde je $Q > 0$ konstanta nezavisna od n i $M = m_1 \vee m_2$.

Napomena 2.1.1. Lipšicov uslov, koji implicira da se koeficijenti ne menjaju brže od linearne funkcije po x, kada se x menja, je suviše restriktivan. Široka klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina ima koeficijente koji ne zadovoljavaju globalni Lipšicov uslov i/ili uslov linearnog rasta, što su dovoljni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (videti Teoremu 1.3.5). Pritom je uvdena pretpostavka o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja jednačina (2.1.1) i (2.1.3) bez eksplicitnog navođenja uslova za koeficijente koji to garantuju, kao na primer, ako koeficijenti zadovoljavaju lokalni Lipšicov uslov i uslov monotonosti (videti Teoremu 1.3.10).

2.1.1 Glavni rezultati

Osnovni cilj u ovom poglavlju je ocena bliskosti rešenja x SDJ (2.1.1) i x^n SDJ (2.1.3), kao i utvrđivanje brzine konvergencije niza $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ka rešenju x. U tom smislu dokazuje se sledeća lema.

Lema 2.1.2. *Neka su x^n rešenja jednačina (2.1.3) i neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_5$. Tada za svako $0 < r \le p\,(M \vee q + 1)$ važi*

$$E|x^n(t) - x^n(t_k)|^r \le C'\delta_n^{r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

gde je C' univerzalna konstatna koja ne zavisi od n i od δ_n.

Dokaz. Razmatra se niz jednačina (2.1.3) na particiji (2.1.2) oblika

$$x^n(t) = x^n(t_k) + \int_{t_k}^t A\big(s, x^n(t_k), x^n(s)\big)ds + \int_{t_k}^t B\big(s, x^n(t_k), x^n(s)\big)dw(s),$$

gde je $t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ i

$$\begin{aligned} A\big(t, x^n(t_k), x^n(t)\big) &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_x^{(i)}(t, x^n(t_k))}{i!} \big(x^n(t) - x^n(t_k)\big)^i, \\ B\big(t, x^n(t_k), x^n(t)\big) &= \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_x^{(i)}(t, x^n(t_k))}{i!} \big(x^n(t) - x^n(t_k)\big)^i. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.5.3) na (2.1.3), zatim Helderove nejednakosti na Lebegov integral, nejednakosti Burkholder–Dejvis–Gandija i Helderove na Itov integral, kao i Fubinijeve teoreme, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, za $r \geq 2$, dobija se

$$\begin{aligned} E|x^n(t) - x^n(t_k)|^r &\leq 2^{r-1}\bigg[E\Big|\int_{t_k}^t A\big(s, x^n(t_k), x^n(s)\big)ds\Big|^r \\ &\qquad + E\Big|\int_{t_k}^t B\big(s, x^n(t_k), x^n(s)\big)dw(s)\Big|^r\bigg] \\ &\leq 2^{r-1}\bigg[(t-t_k)^{r-1}\int_{t_k}^t E\big|A(s, x^n(t_k), x^n(s))\big|^r ds \\ &\qquad + c_r(t-t_k)^{r/2-1}\int_{t_k}^t E\big|B(s, x^n(t_k), x^n(s))\big|^r ds\bigg] \\ &\equiv 2^{r-1}(t-t_k)^{r/2-1}\big[(t-t_k)^{r/2}J_1(t) + c_r J_2(t)\big]. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Za ocene integrala

$$J_1(t) = \int_{t_k}^t E\big|A(s, x^n(t_k), x^n(s))\big|^r ds \quad \text{i} \quad J_2(t) = \int_{t_k}^t E\big|B(s, x^n(t_k), x^n(s))\big|^r ds$$

koriste se pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_5$. Tada je

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int_{t_k}^t E\big|(a(s, x^n(s)) - a(s,0)) + a(s,0) - \big(a(s, x^n(s)) - A(s, x^n(t_k), x^n(s))\big)\big|^r ds \\ &\leq 3^{r-1}\bigg\{\int_{t_k}^t E\left|a(s, x^n(s)) - a(s,0)\right|^r ds + \int_{t_k}^t E|a(s,0)|^r ds \\ &\qquad + \int_{t_k}^t E\big|\, a(s, x^n(s)) - A(s, x^n(t_k), x^n(s))\big|^r ds\bigg\} \\ &\equiv 3^{r-1}\big\{J_1^1(t) + J_1^2(t) + J_1^3(t)\big\}. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Da bi se ocenio integral $J_1^1(t)$, primenjuje se polinomijalni uslov $\mathcal{A}_3$, nejednakost (1.5.3) i pretpostavka $\mathcal{A}_5$. Na taj način se dobija

$$\begin{aligned} J_1^1(t) &\equiv \int_{t_k}^t E\big|\, a(s, x^n(s)) - a(s,0)\big|^r ds = \int_{t_k}^t E\Big(\big|\, a(s, x^n(s)) - a(s,0)\big|^2\Big)^{r/2} ds \\ &\leq \int_{t_k}^t E\Big(D\big(1 + |x^n(s)|^q\big)\cdot|x^n(s)|^2\Big)^{r/2} ds \\ &\leq D^{r/2}2^{(r-2)/2}\int_{t_k}^t E\Big(\big(1 + |x^n(s)|^{rq/2}\big)|x^n(s)|^r\Big)ds \\ &= D^{r/2}2^{(r-2)/2}\int_{t_k}^t \Big(E|x^n(s)|^r + E|x^n(s)|^{r(1+q/2)}\Big)ds \\ &\leq D^{r/2}2^{(r-2)/2}2\int_{t_k}^t Q ds = QD^{r/2}2^{r/2}(t-t_k). \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Za ocenjivanje integrala $J_1^2(t)$ u izrazu (2.1.6), primenjuje se pretpostavka $\mathcal{A}_4$. Stoga važi

$$J_1^2(t) \equiv \int_{t_k}^{t} E|a(s,0)|^r ds \le C_a^r(t-t_k). \tag{2.1.8}$$

U cilju ocene integrala $J_1^3(t)$ u (2.1.6), koriste se uslovi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, nejednakost (1.5.3) i $\mathcal{A}_5$. Postoji $\theta_1 \in (0,1)$ tako da važi

$$\begin{aligned}
J_1^3(t) &\equiv \int_{t_k}^{t} E\left|a\big(s,x^n(s)\big) - A\big(s,x^n(t_k),x^n(s)\big)\right|^r ds \\
&\equiv \int_{t_k}^{t} E\left|\frac{a_x^{(m_1+1)}\big(s,x^n(t_k)+\theta_1\big(x^n(s)-x^n(t_k)\big)\big)}{(m_1+1)!}\big(x^n(s)-x^n(t_k)\big)^{m_1+1}\right|^r ds \\
&\le \frac{L_1^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r}\cdot 2^{(m_1+1)r-1}\int_{t_k}^{t}\Big(E|x^n(s)|^{(m_1+1)r} + E|x^n(t_k)|^{(m_1+1)r}\Big)ds \\
&\le \frac{2^{(m_1+1)r-1}L_1^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r}\int_{t_k}^{t} 2\Big(1+E\sup_{\ell\in[0,T]}|x^n(\ell)|^{(M+1)r}\Big)ds \\
&\le \frac{2^{(m_1+1)r}L_1^r\bar{Q}}{[(m_1+1)!]^r}(t-t_k),
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

gde je $\bar{Q} = 1+Q$. Primenom relacija (2.1.7), (2.1.8) i (2.1.9), nejednakost (2.1.6) postaje

$$J_1(t) \le C_1(t-t_k), \tag{2.1.10}$$

gde je C_1 univerzalna konstanta koja zavisi od r, Q, D, C_a, L_1 i m_1.

Primenom prethodne procedure dobija se

$$J_2(t) \le C_2(t-t_k), \tag{2.1.11}$$

gde je C_2 univerzalna konstanta koja zavisi od r, Q, D, C_b, L_2 i m_2. Na kraju, zamenjujući (2.1.10) i (2.1.11) u (2.1.5), može se zaključiti da je

$$\begin{aligned}
E|x^n(t)-x^n(t_k)|^r &\le 2^{r-1}(t-t_k)^{r/2}\big[C_1(t-t_k)^{r/2}+c_rC_2\big] \\
&\le \tilde{C}(t-t_k)^{r/2} \le \tilde{C}\delta_n^{r/2},
\end{aligned}$$

gde je $\tilde{C} = \tilde{C}(C_1,C_2,T,r)$ konstanta.

Primenom Helderove nejednakosti sa konjugovanim eksponentima $\big(2/r, 2/(2-r)\big)$, za $r \in (0,2)$, prema prethodno pokazanom delu leme proizilazi sledeća ocena

$$E|x^n(t)-x^n(t_k)|^r \le \Big(E|x^n(t)-x^n(t_k)|^2\Big)^{r/2} \le \big(\tilde{C}\delta_n^{2/2}\big)^{r/2} = C''\delta_n^{r/2}.$$

Dokaz je kompletan za $C' = \tilde{C} \vee C''$. $\square$

U sledećoj teoremi dokazuje se brzina konvergencije za analitički metod koji je razmatran u ovom poglavlju. Dokazuje se da ako stepeni Tejlorovih aproksimacija funkcija a i b rastu onda se povećava bliskost rešenja x i x^n u smislu L^p–norme.

Teorema 2.1.3. *Neka su x i x^n rešenja jednačina (2.1.1) i (2.1.3), respektivno. Pod pretpostavkama $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_5$, za $p > 0$, važi*

$$E\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-x^n(t)|^p \le K\delta_n^{\frac{(m+1)p}{2}}, \tag{2.1.12}$$

za dovoljno veliko n, pri čemu je $m = m_1 \wedge m_2$ i K univerzalna konstanta koja ne zavisi od n i od δ_n.

Dokaz. Neka je $t \in [0,T]$ proizvoljan i fiksiran broj. Imajući u vidu (2.1.4), uvode se sldedće oznake

$$A'(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \big[a(s,x(s)) - A\big(s,x^n(t_k),x^n(s)\big)\big]\chi_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s),$$
$$B'(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \big[b(s,x(s)) - B\big(s,x^n(t_k),x^n(s)\big)\big]\chi_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s),\ \ s\in[0,t].$$

Neka je $p \geq 2$. Na osnovu nejednakosti (1.5.3), Helderove i Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti, kao i Fubinijeve teoreme, važi

$$\begin{aligned}
E\sup_{s\in[0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p &= E\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s A'(u)du + \int_0^s B'(u)dw(u)\right|^p\\
&\leq 2^{p-1}\left[E\sup_{s\in[0,t]} s^{p-1}\int_0^s \big|A'(u)\big|^p du + c_pE\left|\int_0^t \big|B'(u)\big|^2 du\right|^{p/2}\right]\\
&\leq 2^{p-1}\left[t^{p-1}\int_0^t E\big|A'(s)\big|^p ds + c_p t^{(p-2)/2}\int_0^t E\big|B'(s)\big|^p ds\right]\\
&\leq 2^{p-1}\big[T^{p-1}S_1(t) + c_pT^{(p-2)/2}S_2(t)\big],
\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

gde je

$$S_1(t) = \int_0^t E\big|A'(s)\big|^p ds \ \ \text{i}\ \ S_2(t) = \int_0^t E\big|B'(s)\big|^p ds.$$

Ocena integrala $S_1(t)$ je dobijena na osnovu nejednakosti trougla i nejednakosti (1.5.3). Tada važi

$$\begin{aligned}
S_1(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k\wedge t}^{t_{k+1}\wedge t} E\Big|a(s,x(s)) - a(s,x^n(s)) + a(s,x^n(s)) - A\big(s,x^n(t_k),x^n(s)\big)\Big|^p ds\\
&\leq 2^{p-1}\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k\wedge t}^{t_{k+1}\wedge t} E\Big|a(s,x(s)) - a(s,x^n(s))\Big|^p ds\\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k\wedge t}^{t_{k+1}\wedge t} E\Big|\,a(s,x^n(s)) - A\big(s,x^n(t_k),x^n(s)\big)\Big|^p ds\Bigg].
\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

Primenom polinomijalnog uslova $\mathcal{A}_3$, nejednakosti Koši–Švarc–Bunjakovskog i $\mathcal{A}_5$, ocenjuje se prvi integral u (2.1.14). Stoga važi

$$\begin{aligned}
&\int_0^t E|a(s,x(s)) - a(s,x^n(s))|^p ds\\
&\leq D^{p/2}\int_0^t E\left[\big(1+|x(s)|^q + |x^n(s)|^q\big)^{p/2}|x(s)-x^n(s)|^p\right] ds\\
&\leq D^{p/2}\int_0^t \Big[E|x(s)-x^n(s)|^p\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[E\big[\big(1+|x(s)|^q+|x^n(s)|^q\big)^p|x(s)-x^n(s)|^p\big]\Big]^{\frac{1}{2}} ds\\
&\leq D^{p/2}\int_0^t \Big[E\sup_{\ell\in[0,s]}|x(\ell)-x^n(\ell)|^p\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[E\sup_{\ell\in[0,s]}\big[\big(1+|x(\ell)|^q+|x^n(\ell)|^q\big)^p|x(\ell)-x^n(\ell)|^p\big]\Big]^{\frac{1}{2}} ds
\end{aligned}$$

$$\leq D^{p/2}Q_1\int_0^t\Big[E\sup_{\ell\in[0,s]}|x(\ell)-x^n(\ell)|^p\Big]^{\frac{1}{2}}ds, \tag{2.1.15}$$

gde je $Q_1=(6^pQ)^{\frac{1}{2}}$ konstanta dobijena na osnovu nejednakosti (1.5.3) i Helderove nejednakosti.

Da bi se ocenio drugi integral u (2.1.14) koriste se pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ i Lema 2.1.2. Postoji $\theta_1\in(0,1)$ tako da je

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k\wedge t}^{t_{k+1}\wedge t}E\bigg|\frac{a_x^{(m_1+1)}\big(s,x^n(t_k)+\theta_1(x^n(s)-x^n(t_k))\big)}{(m_1+1)!}\big(x^n(s)-x^n(t_k)\big)^{m_1+1}\bigg|^p ds\\
&\qquad\leq\frac{L_1^p}{\big[(m_1+1)!\big]^p}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k\wedge t}^{t_{k+1}\wedge t}E\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^{(m_1+1)p}\\
&\qquad\leq\frac{L_1^pC'T}{\big[(m_1+1)!\big]^p}\cdot\delta_n^{(m_1+1)p/2}.
\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

Tada, na osnovu (2.1.15) i (2.1.16), izraz (2.1.14) postaje

$$S_1(t)\leq 2^{p-1}\left[D^{p/2}Q_1\int_0^t\Big[E\sup_{\ell\in[0,s]}\big|x(\ell)-x^n(\ell)\big|^p\Big]^{\frac{1}{2}}ds+\frac{L_1^pC'T\delta_n^{(m_1+1)p/2}}{\big[(m_1+1)!\big]^p}\right]. \tag{2.1.17}$$

Analogno, važi da je

$$\begin{aligned}
S_2(t)&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k\wedge t}^{t_{k+1}\wedge t}E\Big|b(s,x(s))-b(s,x^n(s))+b(s,x^n(s))-B\big(s,x^n(t_k),x^n(s)\big)\Big|^p ds\\
&\leq 2^{p-1}\left[D^{p/2}Q_1\int_0^t\Big[E\sup_{\ell\in[0,s]}|x(\ell)-x^n(\ell)|^p\Big]^{\frac{1}{2}}ds+\frac{L_2^pC'T\delta_n^{(m_2+1)p/2}}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\right].
\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

Sada, zamenom (2.1.17) i (2.1.18) u (2.1.13), može se izračunati

$$\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\\
&\qquad\leq 2^{2p-2}C'T^{p/2}\left\{\frac{T^{p/2}L_1^p}{\big[(m_1+1)!\big]^p}\cdot\delta_n^{(m_1+1)p/2}+\frac{c_pL_2^p}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\cdot\delta_n^{(m_2+1)p/2}\right\}\\
&\qquad\quad+2^{2p-2}D^{p/2}Q_1\big(T^{p-1}+c_pT^{(p-2)/2}\big)\int_0^t\Big[E\sup_{\ell\in[0,s]}|x(\ell)-x^n(\ell)|^p\Big]^{1/2}ds.
\end{aligned}\tag{2.1.19}$$

Kako je n dovoljno veliko, to je δ_n dovoljno malo (blizu 0), tako da je manje od 1, i tada važi

$$\delta_n^{(m_1+1)p/2}\vee\delta_n^{(m_2+1)p/2}\leq\delta_n^{(m+1)p/2},$$

gde je $m=m_1\wedge m_2$. Nejednakost (2.1.19) postaje

$$E\sup_{s\in[0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\leq Z_1(T)\delta_n^{(m+1)p/2}+Z_2(T)\int_0^t\Big[E\sup_{\ell\in[0,s]}|x(\ell)-x^n(\ell)|^p\Big]^{1/2}ds, \tag{2.1.20}$$

gde je

$$Z_1(T) = 2^{2p-2}C'T^{p/2}\left\{\frac{T^{p/2}L_1^p}{\big[(m_1+1)!\big]^p} + \frac{c_pL_2^p}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\right\},$$
$$Z_2(T) = 2^{2p-2}D^{p/2}Q_1\big(T^{p-1} + c_pT^{(p-2)/2}\big).$$

Da bi se kompletirao dokaz, primenjuje se nejednakost Biharijevog tipa (Teorema 1.5.13) na (2.1.20), gde je funkcija φ definisana kao $\varphi : z \mapsto z^{1/2}$, $z \in [0, +\infty)$ i funkcija G je bijekcija, definisana za pozitivne brojeve z kao

$$G(z) = 2z^{1/2}.$$

Njena inverzna funkcija je

$$G^{-1}(y) = \frac{1}{4}y^2, \quad y > 0.$$

Takođe je $\int_0^t f(s)ds = Z_2(T)t \le Z_2(T)T$, za svako $t \in [0,T]$. Na kraju, za svako $t \in [0,T]$ važi

$$E\sup_{s\in[0,t]}|x(s) - x^n(s)|^p \le Z_1(T)\delta_n^{(m+1)p/2}\frac{1}{4}\big(2 + Z_2(T)T\big)^2 = K\delta_n^{(m+1)p/2},$$

gde je $K = 0.25Z_1(T)\big(2 + Z_2(T)T\big)^2$ konstanta nezavisna od n i od δ_n. Poslednja nejednakost važi za svako $t \in [0,T]$, tako da je

$$E\sup_{t\in[0,T]}|x(t) - x^n(t)|^p \le K\delta_n^{(m+1)p/2}.$$

Za $0 < r < 2$ dokaz je analogan kraju dokaza Leme 2.1.2. □

Sledećom teoremom se dokazuje skoro izvesna konvergencija niza aproksimativnih rešenja jednačina (2.1.3) ka tačnom rešenju jednačine (2.1.1).

Teorema 2.1.4. *Neka važe uslovi Teoreme 2.1.3 i neka postoji monotono opadajući niz pozitivnih brojeva $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da $\lambda_n \to 0$ kada $n \to \infty$ i $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\lambda_n^{-2} < \infty$. Tada niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aproksimativnih rešenja jednačina (2.1.3) konvergira skoro izvesno ka rešenju x jednačine (2.1.1).*

Dokaz. Čebiševljeva nejednakost (Teorema 1.1.2) i relacija (2.1.12) iz prethodne teoreme povlače

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}P\Big\{\sup_{t\in[0,T]}|x(t) - x^n(t)|^{p/2} \ge \lambda_n\Big\} &\le \sum_{n=1}^{\infty}E\sup_{t\in[0,T]}|x(t) - x^n(t)|^p\lambda_n^{-2}\\ &\le K\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^{(m+1)p/2}\lambda_n^{-2} < \infty.\end{aligned}$$

Borel–Kantelijeva lema (Teorema 1.1.4) implicira da se sa verovatnoćom jedan realizuje samo konačno mnogo događaja $\{\sup_{t\in[0,T]}|x(t) - x^n(t)|^{p/2} \ge \lambda_n\}$, odnosno za dovoljno veliko n važi $\sup_{t\in[0,T]}|x(t) - x^n(t)| < \lambda_n^{2/p}$ skoro izvesno. Prema tome, niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoro izvesno ka rešenju x, ravnomerno na $[0,T]$. □

Sledeći primer ilustruje prethodna teorijska razmatranja.

Primer 2.1.5. Neka je data autonomna stohastička diferencijalna jednačina

$$dx(t) = \big(- \alpha x^3(t) + \beta \sin x(t)\big)dt + \sigma(1 - 2\sin x(t))dw(t),\ \ t \in [0, T], \tag{2.1.21}$$

sa početnim uslovom $x(0) = 0$ skoro izvesno, gde su α, β i σ realne konstante.

U ovom primeru aproksimativne jednačine, dobijene primenom predloženog analitičkog metoda, su, u jednom slučaju, eksplicitno rešive u situaciji kada polazna jednačina nije eksplicitno rešiva. U drugom slučaju, aproksimativne jednačine su jednostavnijeg oblika od (2.1.21), tako da se neki numerički metod može primeniti za određivanje njihovih aproksimativnih rešenja.

Koeficijenti prenosa

$$a(x) = -\alpha x^3 + \beta \sin x$$

i difuzije

$$b(x) = \sigma(1 - 2\sin x)$$

su neprekidno-diferencijabilne funkcije i, prema tome, lokalno Lipšic-neprekidne. Koeficijent prenosa, međutim, nije globalno Lipšic-neprekidan, dok koeficijent difuzije jeste. Takođe, može se primetiti da jednostrani Lipšicov uslov (1.3.6) važi za funkciju a kada je $\alpha > 0$. Stoga, u smislu Napomene 2.1.1, sve pretpostavke teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja su ispunjene i jednačina (2.1.21) ima jedinstveno rešenje $x = x(t)$ za koje važi početni uslov $x(0) = 0$ skoro izvesno. Uslovi $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_4$ važe, te Lema 1.3.12 povlači

$$E \sup_{0 \le t \le T} \big|x(t)\big|^r \le C\left(1 + E\big|x(0)\big|^r\right) \le Q, \quad \text{za } r > 2.$$

Prema tome, uslov $\mathcal{A}_5$ važi za rešenje x. Jednačina (2.1.21) nije eksplicitno rešiva.

Aproksimativna rešenja (2.1.3) biće formirana na osnovu Maklorenovih[3] aproksimacija funkcija a i b, umesto Tejlorovih aproksimacija ovih funkcija u okolini tačaka $x(t_k)$. Zbog toga se podsegmenti $[t_k, t_{k+1}]$ particije (2.1.2) transformišu u segmente $[0, t_{k+1} - t_k]$, za $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Vremenskom translacijom $t = t_k + u$, za $k \in \{0, \dots, n-1\}$, dobijeni su novi Vinerov proces $\tilde{w}$ i nepoznati proces $\tilde{x}$, tako da važi

$$\tilde{w}(u) = w(t_k + u)\ s.i., \quad \tilde{x}(u) = x(t_k + u)\ s.i. \tag{2.1.22}$$

Tada jednačina (2.1.21) postaje

$$\begin{aligned} d\tilde{x}(u) = \big(- \alpha \tilde{x}^3(u) + \beta \sin \tilde{x}(u)\big)du + \sigma(1 - 2\sin \tilde{x}(u))d\tilde{w}(u),\\ u \in [0, t_{k+1} - t_k], \quad k \in \{0, \dots, n-1\}. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Da bi se demonstrirala činjenica da viši redovi izvoda daju bolje aproksimacije rešenja jednačine (2.1.21), razmatraju se tri različite jednačine.

(I) Maklorenove aproksimacije funkcija $a = a(x)$ i $b = b(x)$ do trećeg i drugog izvoda, respektivno, su

$$a(x) \approx -\frac{6\alpha + \beta}{6} x^3 + \beta x, \quad b(x) \approx -2\sigma x + \sigma, \quad (x \to 0)$$

(formalno $b(x) \approx 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 2\sigma x + \sigma$). Uslovi $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ važe zbog toga što je $\sup_x |a^{(4)}(x)| \le |\beta|$ i $\sup_x |b'''(x)| \le 2|\sigma|$. Aproksimativno rešenje $\{\tilde{x}^n(u),\ u \in [0, T]\}$ je dobijeno sukcesivnim

[3] Maclaurin C. (1698–1746) - škotski matematičar

povezivanjem rešenja jednačina

$$d\tilde{x}^n(u) = \left(-\frac{6\alpha+\beta}{6}\big(\tilde{x}^n(u)\big)^3 + \beta\tilde{x}^n(u)\right)du + \sigma(1-2\tilde{x}^n(u))d\tilde{w}(u), \quad u\in[0,t_{k+1}-t_k], \quad k\in\{0,\dots,n-1\}. \tag{2.1.24}$$

Jednačine (2.1.24) nisu eksplicitno rešive, ali njihovi koeficijenti zadovoljavaju iste uslove kao koeficijenti polazne jednačine (2.1.21) za $\alpha \geq -\beta/6$ i

$$E\sup_{0\leq u\leq T}|\tilde{x}^n(u)|^r \leq c_1\left(1+E|x(0)|^r\right) \leq Q, \quad r>2.$$

Translacija vremena (2.1.22) implicira

$$dx^n(t) = \left(-\frac{6\alpha+\beta}{6}\big(x^n(t)\big)^3 + \beta x^n(t)\right)dt + \sigma(1-2x^n(t))dw(t), \quad t\in[t_k,t_{k+1}], \quad k\in\{0,\dots,n-1\}. \tag{2.1.25}$$

Teorema 2.1.3 daje stepen bliskosti u L^p–smislu, to jest

$$E\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-x^n(t)|^p \leq K\delta_n^{\frac{3}{2}p}.$$

(II) Maklorenove aproksimacije funkcija $a=a(x)$ i $b=b(x)$ do drugih izvoda su

$$a(x)\approx\beta x, \quad b(x)\approx -2\sigma x+\sigma, \quad (x\to 0)$$

(formalno $a(x)\approx 0\cdot\frac{x^2}{2}+\beta x$ i $b(x)\approx 0\cdot\frac{x^2}{2}-2\sigma x+\sigma$). Tada je aproksimativno rešenje $\{\tilde{x}^n(u),\ u\in[0,T]\}$ konstruisano korišćenjem jednačina

$$d\tilde{x}^n(u) = \beta\tilde{x}^n(u)du + \sigma(1-2\tilde{x}^n(u))d\tilde{w}(u),\ u\in[0,t_{k+1}-t_k],\ k\in\{0,\dots,n-1\}. \tag{2.1.26}$$

Jednačine (2.1.26) su nehomogene linearne stohastičke diferencijalne jednačine sa multiplikativnim šumom i njihovi koeficijenti zadovoljavaju globalni Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta. Prema tome, jednačine (2.1.26) su eksplicitno rešive (videti [32, str. 119]), njihova rešenja su

$$\begin{aligned}\tilde{x}^n(u) &= \tilde{x}_0^n e^{(\beta-2\sigma^2)u-2\sigma(\tilde{w}(u)-\tilde{w}(0))} + 2\sigma^2\int_0^u e^{-(\beta-2\sigma^2)(u-s)-2\sigma(\tilde{w}(u)-\tilde{w}(s))}ds \\ &\quad + \sigma\int_0^u e^{-(\beta-2\sigma^2)(u-s)+2\sigma(\tilde{w}(u)-\tilde{w}(s))}d\tilde{w}(s), \\ &\quad u\in[0,t_{k+1}-t_k],\ k\in\{0,\dots,n-1\},\end{aligned}$$

dok za momente važi

$$E\sup_{0\leq t\leq T}|x^n(t)|^r = E\sup_{0\leq u\leq T}|\tilde{x}^n(u)|^r \leq c_2\left(1+3^{r-1}E|x(0)|^r\right) \leq Q,$$

za $r>2$, na osnovu Teoreme 1.3.6. Na osnovu vremenske translacije (2.1.22) dobija se

$$\begin{aligned}x^n(t) &= x^n(t_k)e^{(\beta-2\sigma^2)(t-t_k)-2\sigma(w(t)-w(t_k))} \\ &\quad + 2\sigma^2\int_{t_k}^t e^{-(\beta-2\sigma^2)(t-s)-2\sigma(w(t)-w(s))}ds + \sigma\int_{t_k}^t e^{-(\beta-2\sigma^2)(t-s)-2\sigma(w(t)-w(s))}dw(s), \\ &\quad t\in[t_k,t_{k+1}], \quad k\in\{0,\dots,n-1\}.\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Teorema 2.1.3 daje isti stepen bliskosti u L^p–smislu kao u prethodnom slučaju.

(III) Maklorenove aproksimacije funkcija $a = a(x)$ i $b = b(x)$ do izvoda reda dva i nula, respektivno, su

$$a(x) \approx \beta x, \quad b(x) \approx \sigma, \quad (x \to 0).$$

Tada su jednačine

$$d\tilde{x}^n(u) = \beta \tilde{x}^n(u)du + \sigma d\tilde{w}(u), \quad u \in [0, t_{k+1} - t_k], \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \tag{2.1.28}$$

eksplicitno rešive (videti [32, str.118]) i njihova rešenja su

$$\tilde{x}^n(u) = e^{\beta u}\left(\tilde{x}_0^n + \sigma \int_0^u e^{-\beta s} d\tilde{w}(s)\right), \\ u \in [0, t_{k+1} - t_k], \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Primenom translacije vremena dobija se

$$x^n(t) = e^{\beta(t-t_k)}\Big(x^n(t_k) + \sigma \int_{t_k}^t e^{-\beta(s-t_k)} dw(s)\Big), \\ t \in [t_k, t_{k+1}], \ k \in \{0, \dots, n-1\}, \tag{2.1.29}$$

a Teorema 2.1.3 daje sldeći stepen bliskosti u L^p–smislu

$$E \sup_{t \in [0,T]} |x(t) - x^n(t)|^p \leq K \delta_n^{\frac{1}{2}p}.$$

Važno je napomenuti da je u jednačinama (2.1.23), (2.1.24), (2.1.26) i (2.1.28), za vrednost $k = 0$ početni uslov $\tilde{x}(0) = 0$ skoro izvesno, dok su za $k \in \{1, \dots, n-1\}$ početni uslovi određeni sukcesivno kao vrednosti procesa $\tilde{x}(u)$ u tačkama $t_k - t_{k-1}$. Osim toga, sukcesivnim povezivanjem procesa $\{x^n(t), \ t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, koji reprezentuju rešenja jednačina (2.1.25), (2.1.27) i (2.1.29), u podeonim tačkama, konstruisano je skoro sigurno neprekidno rešenje $\{x^n(t), \ t \in [0, T]\}$.

Najčešći metod za aproksimaciju rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina je numerički Ojler-Marujamin (OM) metod. U [22] je dokazano da ovaj metod, koji se zasniva na Tejlorovom razvoju stepena nula, ima red konvergencije 1/2. Mogu se uporediti aproksimativna rešenja polazne jednačine (2.1.21) dobijena numeričkim OM metodom i analitičkim metodom opisanim u ovom poglavlju primenom Tejlorovog razvoja reda dva i reda nula za različite vrednosti parametara α, β i σ.

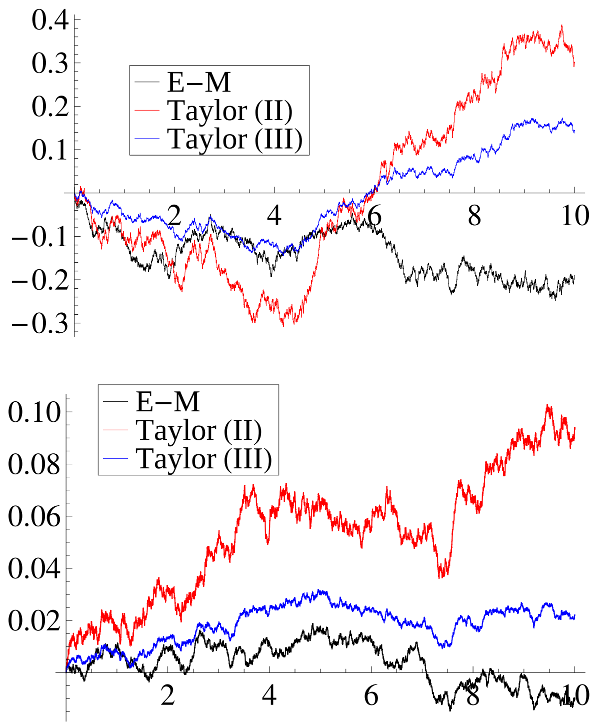
Primenom OM metoda na polaznu SDJ (2.1.21) određuju se aproksimacije $X_k \approx x(t_k)$, gde je $X_0 = 0$,

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \left(-\alpha X_k^3 + \beta \sin X_k\right)(t_{k+1} - t_k) + \sigma(1 - 2\sin X_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k)), \\ \bar{X}(t) &= X_k + (t - t_k)\left(-\alpha X_k^3 + \beta \sin X_k\right) + \sigma(1 - 2\sin X_k)(w(t) - w(t_k)), \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

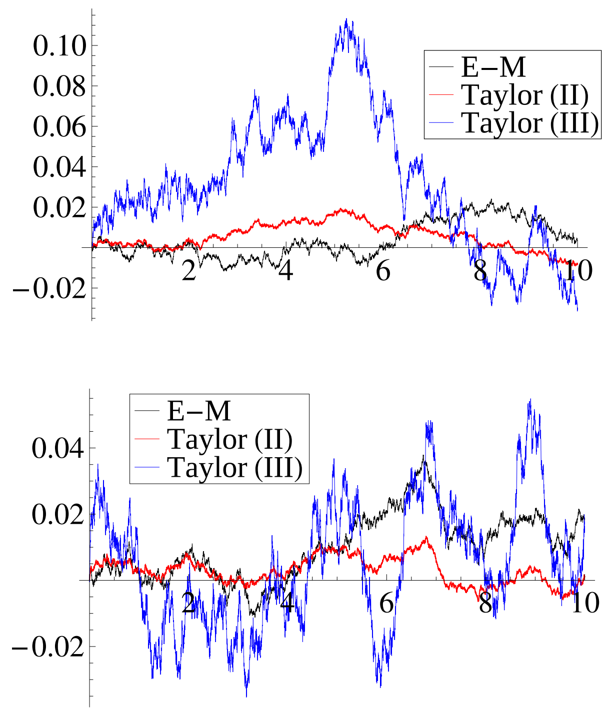
za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, a OM rešenje je definisano sa $X(t) = \bar{X}(t)$ za $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Rezultati poređenja nalaze se na Slikama 1 i 2. Prema Teoremi 2.1.3 niz aproksimativnih rešenja (2.1.27) ima viši red L^p–konvergencije u odnosu na rešenja (2.1.29) i (2.1.30).

U nastavku će dobijeni rezultati biti ilustrovani sledećim grafičkim prikazima za različite vrednosti parametara jednačina (2.1.30), (2.1.27) i (2.1.29).



Slika 1: Trajektorije rešenja jednačina (2.1.30), (2.1.27) i (2.1.29) za $x_0 = 0$ i: $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.3\pi^3/108$, $\sigma = 0.05$ (gore), $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.01$ (dole), za $\delta_{10\,000} = 0.001$ na vremenskom intervalu $[0, 10]$



Slika 2: Trajektorije rešenja jednačina (2.1.30), (2.1.27) i (2.1.29) za $x_0 = 0$, $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.2$ i: $\sigma = 0.01$ (gore), $\sigma = -0.01$ (dole), za $\delta_{10\,000} = 0.001$ na vremenskom intervalu $[0, 10]$

Rezultati ovog poglavlja su sadržani u radu [11].

Prezentovan metod može biti adekvatno proširen na različite tipove stohastičkih diferencijalnih jednačina. Osim toga, neki uslovi za koeficijente jednačine mogu takođe obezbediti primenu analitičkih aproksimacija koeficijenata koji se ne ponašaju nužno kao polinomi.

2.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U ovom poglavlju prezentovan je aproksimativan metod koji se zasniva na Tejlorovom razvoju. Cilj je aproksimirati rešenja polazne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem (SDJVZK) date na konačnom vremenskom intervalu rešenjima aproksimativnih jednačina. Aproksimativne jednačine imaju koeficijente prenosa i difuzije koji su Tejlorovi razvoji odgovarajućih koeficijenata polazne jednačine reda m_1 i m_2, respektivno. Na osnovu odgovarajućih teorema, koje pokazuju bliskost rešenja u smislu L^p–norme i sa verovatnoćom jedan, redom, može se videti da red konvergencije raste samo ako oba broja m_1 i m_2 rastu istovremeno. Takođe, poznati Ojler-Marujamin metod je specijalan slučaj ovog metoda ako je $m_1 = m_2 = 0$.

U nastavku se formira navedeni analitički metod i dokazuju rezultati koji se odnose na L^p i skoro izvesnu bliskost aproksimativnog i tačnog rešenja.

2.2.1 Zasnivanje metoda

Razmatra se SDJVZK (1.3.7) sa početnim uslovom (1.3.8), čiji je integralni oblik

$$\begin{aligned} x(t) = \eta(0) &+ \int_{t_0}^{t} a\big(x(u), x(u-\delta(u)), u\big)du \\ &+ \int_{t_0}^{t} b\big(x(u), x(u-\delta(u)), u\big)dw(u), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Neka su τ i $T - t_0$ samerljive vrednosti, odnosno, neka imaju racionalni količnik. Drugim rečima, za svaki pozitivan ceo broj n za koji postoji pozitivan ceo broj n' tako da je $(T - t_0)/n = \tau/n' = \delta_n$, gde je n dovoljno veliko tako da je $\delta_n < 1$, definiše se ekvidistantna particija vremenskog intervala $[t_0, T]$

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \tag{2.2.2}$$

odnosno $t_j = t_0 + j\delta_n$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, i ekvidistantna particija vremenskog intervala $[t_0 - \tau, t_0]$,

$$t_0 - \tau = t_{-n'} < t_{-n'+1} < \cdots < t_{-1} < t_0, \tag{2.2.3}$$

odnosno $t_j = t_{-n'} + (j + n')\delta_n'$, $j \in \{-n', \ldots, 0\}$. Na taj način su t_j, $j \in \{-n', \ldots, n\}$ podeone tačke segmenta $[t_0 - \tau, T]$.

Aproksimativne jednačine su formiraju na osnovu Tejlorovog razvoja koeficijenata polazne jednačine po prva dva argumenta. Da bi se precizno odredile tačke u čijim okolinama se razvijaju koeficijenti polazne jednačine po drugom argumentu, uvode se sledeći skupovi za proizvoljno i fiksirano $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$S_i^j = \big\{ s \in [t_i, t] \,|\, s - \delta(s) \in [t_j, t_{j+1} \wedge t) \big\}, \qquad j \in \{i - n', \ldots, i\}. \tag{2.2.4}$$

Jednostavnosti radi, definiše se funkcija $\delta_1(s) = s - \delta(s)$, $s \in [t_0, T]$. Cilj formiranja ovih skupova je određivanje najvećih podeonih tačaka iz (2.2.2)−(2.2.3) koje su manje ili jednake $\delta_1(s)$ za $s \in [t_i, t]$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Za proizvoljan $\mathcal{F}_t$–adaptiran stohastički proces $y^n = \{y^n(t) \,|\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ uvodi se novi stepenasti (jednostavni) proces $\tilde{y}^n = \{\tilde{y}^n(t) \,|\, t \in [t_0, T]\}$ oblika

$$\tilde{y}^n(s) = \sum_{j=i-n'}^{i} \chi_{S_i^j}(s) y^n(t_j), \qquad s \in [t_i, t],$$

za svako $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Cilj je da se aproksimira rešenje $x = \{x(t) \,|\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ jednačine (2.2.1) sa početnim uslovom (1.3.8) na particiji (2.2.2)–(2.2.3), stohastičkim procesom koji je označen sa $x^n = \{x^n(t) \,|\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ i koji je dobijen sukcesivnim povezivanjem rešenja jednačina

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i a\big(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s\big)}{i!}\, ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i b\big(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s\big)}{i!}\, dw(s), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

sa početnim uslovima $x^n_{t_0} = \eta$ za $k = 0$ i $x^n_{t_k}$ za $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, pri čemu je proces $x^n_{t_k} = \{x^n(t),\, t \in [t_k - \tau, t_k]\}$. Takođe, proces x^n zadovoljava uslov $x^n(t) = \eta(t - t_0)$, za $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. Stohastički proces $x^n = \{x^n(t) \,|\, t \in [t_0 - \tau, T]\}$ dobijen na ovaj način je skoro izvesno neprekidan.

Jednačine (2.2.5) imaju koeficijente drifta i difuzije koji su Tejlorovi razvoji do izvoda reda m_1 i m_2, respektivno, po prva dva argumenta koeficijenata prenosa i difuzije polazne jednačine (2.2.1).

U jednačinama (2.2.5), $d^i a(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s)$ i $d^i b(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s)$, za $s \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, su, za $i = 0$, jednaki

$$a(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s) \in \mathbb{R}^d \text{ i } b(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s) \in \mathbb{R}^{d_1 \times d},$$

respektivno, a za $i \geq 1$

$$\begin{aligned} d^i a\big(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s\big) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i a_{(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s)}}{\partial x^j\, \partial y^{i-j}} \big[x^n(s) - x^n(t_k)\big]^j \big[x^n(\delta_1(s)) - \tilde{x}^n(s)\big]^{i-j}, \\ d^i b\big(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s\big) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i b_{(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s)}}{\partial x^j\, \partial y^{i-j}} \big[x^n(s) - x^n(t_k)\big]^j \big[x^n(\delta_1(s)) - \tilde{x}^n(s)\big]^{i-j}. \end{aligned}$$

Pritom $\frac{\partial^i a_{(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s)}}{\partial x^j\, \partial y^{i-j}}$ i $\frac{\partial^i b_{(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s), s)}}{\partial x^j\, \partial y^{i-j}}$ označavaju i-te parcijalne Frešeove izvode funkcionala a i b, redom, u tačkama $(x^n(t_k), \tilde{x}^n(s)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, j–puta po prvom argumentu i $(i-j)$–puta po drugom argumentu, $j \in \{0, \ldots, i\}$, $i \in \{1, \ldots, m_1\}$ (ili $i \in \{1, \ldots, m_2\}$).

Obično je, u kontekstu analitičkih i numeričkih aproksimativnih metoda, funkcija kašnjenja δ Lipšic-neprekidna i ovaj slučaj biće razmatran u Poglavlju 2.2.3. Umesto toga, uvešće se opštija pretpostavka za funkciju δ, odnosno pretpostavlja se da je ona neprekidna.

Uvode se sledeće pretpostavke koje su neophodne za dokazivanje glavnih rezultata.

$\mathcal{B}_1$: Postoje Tejlorovi razvoji funkcionala a i b po prva dva argumenta do izvoda reda m_1 i m_2, respektivno.

$\mathcal{B}_2$: Svi parcijalni Frešeovi izvodi po prva dva argumenta, reda m_1+1 za funkcional a i reda m_2+1 za funkcional b su uniformno ograničeni, odnosno postoje pozitivne realne konstante $\bar{L}_a$ i $\bar{L}_b$ tako da važi

$$\sup_{(x,y,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[t_0,T]} \left\| \frac{\partial^{m_1+1}a_{(x,y,t)}}{\partial x^j\,\partial y^{m_1+1-j}} \right\|_{m_1+1} \leq \bar{L}_a, \quad j\in\{0,\ldots,m_1+1\},$$
$$\sup_{(x,y,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[t_0,T]} \left\| \frac{\partial^{m_2+1}b_{(x,y,t)}}{\partial x^j\,\partial y^{m_2+1-j}} \right\|_{m_1+1} \leq \bar{L}_b, \quad j\in\{0,\ldots,m_2+1\}.$$

$\mathcal{B}_3$: Funkcionali a i b zadovoljavaju polinomijalni uslov: postoji pozitivan realan broj $\bar{D}$ i nenegativan ceo broj $\bar{q}$, tako da za svako $x,\tilde{x},y,\tilde{y}\in\mathbb{R}^d$ i svako $t\in[t_0,T]$, važi

$$\begin{aligned}&\big|a(x,y,t)-a(\tilde{x},\tilde{y},t)\big|^2\vee\big|b(x,y,t)-b(\tilde{x},\tilde{y},t)\big|^2\\&\qquad\leq\bar{D}\Big(1+\big|(x,y)\big|^{\bar{q}}+\big|(\tilde{x},\tilde{y})\big|^{\bar{q}}\Big)\big|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})\big|^2.\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_4$: Funkcionali $a(0,0,\cdot)$ i $b(0,0,\cdot)$ su ograničeni na $[t_0,T]$, odnosno postoje pozitivne konstante $\bar{K}_a$ i $\bar{K}_b$ tako da važi $|a(0,0,t)|\leq\bar{K}_a$ i $|b(0,0,t)|\leq\bar{K}_b$, za $t\in[t_0,T]$.

$\mathcal{B}_5$: Postoje jedinstvena rešenja x i x^n jednačina (2.2.1) i (2.2.5), respektivno, sa odgovarajućim početnim uslovom (1.3.8), tako da za neko $\bar{p}\geq 2$ i neku pozitivnu konstantu $\bar{Q}$ nezavisnu od n, važi

$$E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}\big|x(t)\big|^{2\bar{p}(1\vee\bar{q})}\ \vee\ E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(t)\big|^{\bar{p}[2\vee2\bar{q}\vee(1+\bar{q}/2)(M+1)\vee(M+1)^2]}\leq\bar{Q}<\infty,$$

gde je $M=m_1\vee m_2$.

$\mathcal{B}_6$: Stohastički proces η zadovoljava polinomijalni uslov, odnosno postoji pozitivna konstanta D' i nenegativan ceo broj q' tako da za svaka dva realna broja $\theta_1,\theta_2\in[-\tau,0]$, važi

$$\big|\eta(\theta_1)-\eta(\theta_2)\big|^2\leq D'\big(1+|\theta_1|^{q'}+|\theta_2|^{q'}\big)|\theta_1-\theta_2|^2.$$

Polinomijalni uslov koji zadovoljava proces η u $\mathcal{B}_6$ je slabiji od Lipšicovog uslova koji se uobičajeno pretpostavlja za proces η. Na primer, svaka funkcija koja zadovoljava globalni Lipšicov uslov takođe zadovoljava i polinomijalni uslov $\mathcal{B}_3$ za $\bar{q}=0$ (ili uslov $\mathcal{B}_6$ za $q'=0$). Pored toga, svaki polinom i svaka funkcija oblika $\alpha x^k+\beta\sin x^m+\gamma$, za realne konstante α,β,γ i za nenegativne cele brojeve k,m, gde je $x\in\mathbb{R}$, zadovoljava polinomijalni uslov.

Napomena 2.2.1. *Ograničenost parcijalnih izvoda reda m_1+1 i m_2+1, po prvih $2d$ argumenata koordinatnih funkcija funkcionala a i b, redom, impolicira uslov $\mathcal{B}_2$. Drugim rečima, ako postoje realne pozitivne konstante L_a i L_b tako da, za svako $i\in\{1,\ldots,d\}$ i $k\in\{1,\ldots,d\times d_1\}$, važi*

$$\sup_{(x,y,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[t_0,T]}\left|\frac{\partial^{m_1+1}a_i(x,y,t)}{\underbrace{\partial x_1\ldots\partial x_d}_{j}\ \underbrace{\partial y_{d+1}\ldots\partial y_{2d}}_{m_1+1-j}}\right|\leq L_a,\qquad j\in\{0,\ldots,m_1+1\},$$
$$\sup_{(x,y,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[t_0,T]}\left|\frac{\partial^{m_2+1}b_k(x,y,t)}{\underbrace{\partial x_1\ldots\partial x_d}_{j}\ \underbrace{\partial y_{d+1}\ldots\partial y_{2d}}_{m_2+1-j}}\right|\leq L_b,\qquad j\in\{0,\ldots,m_2+1\},$$

$a_i, b_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, d\}$, $k \in \{1, \dots, d \times d_1\}$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_{d \times d_1})$, tada se može dokazati da je $\mathcal{B}_2$ zadovoljeno. Poznato je da su sve norme na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru međusobno ekvivalentne. Kako je Frobenijusova norma na skupu svih realnih $n_1 \times n_2$ matrica identična standardnoj Euklidskoj normi na $\mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, može se zaključiti da $a'_{(x,y,t)} : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ implicira da postoji $\alpha_1 > 0$ tako da je $\|a'_{(x,y,t)}\|_1 \leq \alpha_1 |a'_{(x,y,t)}|$, gde je $|\cdot|$ Euklidska norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{2d^2}$, $a''_{(x,y,t)} : \mathbb{R}^{2d} \to \mathcal{M}_{2d}(\mathbb{R}^{2d}; \mathbb{R})$ implicira da postoji $\alpha_2 > 0$ tako da je zadovoljena relacija $\|a''_{(x,y,t)}\|_2 \leq \alpha_2 |a''_{(x,y,t)}|$, gde je $|\cdot|$ Euklidska norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{2^2 d^3}$, $a^{(m_1+1)}_{(x,y,t)} : \mathbb{R}^{2d} \to \mathcal{M}_{2dm_1}((\mathbb{R}^{2d})^{m_1}; \mathbb{R})$ implicira da postoji $\alpha_{m_1+1} > 0$ tako da je $\|a^{(m_1+1)}_{(x,y,t)}\|_{m_1+1} \leq \alpha_{m_1+1} |a^{(m_1+1)}_{(x,y,t)}|$ gde je $|\cdot|$ Euklidska norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{2^{m_1+1} d^{m_1+2}}$. Slično, za parcijalne Frešeove izvode postoje pozitivne konstante α'_{m_1+1} i β'_{m_2+1} tako da je

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial^{m_1+1} a_{(x,y,t)}}{\partial x^j \, \partial y^{m_1+1-j}} \right\|_{m_1+1} \\
&\quad \leq \alpha'_{m_1+1} \left| \left[\frac{\partial^{m_1+1} a_i(x,y,t)}{\underbrace{\partial x_1 \dots \partial x_d}_{j} \, \underbrace{\partial y_{d+1} \dots \partial y_{2d}}_{m_1+1-j}} \right]_{d \times d^{m_1+1}} \right| \\
&\quad = \alpha'_{m_1+1} \left| \left[\frac{\partial^{m_1+1} a_i(x,y,t)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j} \, \partial y_{i_{j+1}} \dots \partial y_{i_{m_1+1}}} \right]_{d \times \underbrace{d \times \cdots \times d}_{m_1+1}} \right| \\
&\quad = \alpha'_{m_1+1} \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_j=1}^{d} \sum_{i_{j+1}=d+1}^{2d} \cdots \sum_{i_{m_1+1}=d+1}^{2d} \left| \frac{\partial^{m_1+1} a_i(x,y,t)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j} \, \partial y_{i_{j+1}} \dots \partial y_{i_{m_1+1}}} \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \leq \alpha'_{m_1+1} d^{(m_1+2)/2} L_a, \qquad j \in \{0, \dots, m_1+1\}
\end{aligned}$$

i analogno

$$\left\| \frac{\partial^{m_2+1} b_{(x,y,t)}}{\partial x^j \, \partial y^{m_2+1-j}} \right\|_{m_2+1} \leq \beta'_{m_2+1} d^{(m_2+2)/2} L_b, \qquad j \in \{0, \dots, m_2+1\}.$$

Prema tome, uslov $\mathcal{B}_2$ je zadovoljen za $\bar{L}_a = \alpha'_{m_1+1} d^{(m_1+2)/2} L_a$ i $\bar{L}_b = \beta'_{m_2+1} d^{(m_2+2)/2} L_b$.

2.2.2 Glavni rezultati

Sledeća propozicija ima važnu ulogu u oceni bliskosti i reda konvergencije rešenja x^n ka rešenju x.

Propozicija 2.2.2. *I Neka su $\{x^n(t) \,|\, t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, rešenja jednačina (2.2.5) i neka važe pretpostavke $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_5$. Tada za svako $0 < r \leq (M+1)\bar{p}$ važi*

$$E \sup_{s \in [t_k, t]} \left| x^n(s) - x^n(t_k) \right|^r \leq \bar{C}' \delta_n^{r/2}, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}], \ k \in \{0, \dots, n-1\},$$

gde je $\bar{C}'$ pozitivna generička konstanta nezavisna od n.

II Ako se dodatno pretpostavi da važi i $\mathcal{B}_6$, tada je

$$\sup_{s \in [t_k, t]} E \left| x^n(\delta_1(s)) - \tilde{x}^n(s) \right|^r \leq \bar{C}'' \delta_n^{r/2}, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}], \ k \in \{0, \dots, n-1\},$$

gde je $\bar{C}''$ pozitivna konstanta nezavisna od n.

Dokaz. I Radi jednostavnosti, za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, uvode se oznake

$$\begin{aligned}
\bar{A}\big(x^n(t), x^n(\delta_1(t)), t; x^n(t_k), \tilde{x}^n(t)\big) &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i a(x^n(t_k), \tilde{x}^n(t), t)}{i!}, \\
\bar{B}\big(x^n(t), x^n(\delta_1(t)), t; x^n(t_k), \tilde{x}^n(t)\big) &= \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i b(x^n(t_k), \tilde{x}^n(t), t)}{i!}.
\end{aligned}$$

Razlikovaće se slučajevi u zavisnosti od toga da li je $r \geq 2$ ili $0 < r < 2$.
Slučaj 1: $r \geq 2$.

Da bi se dokazao ovaj deo propozicije iskoristiće se jedan od standardnih metoda uz primenu pretpostavke $\mathcal{B}_1$, Helderove nejednakosti (sa konjugovanim eksponentima r i $r/(r-1)$ za Lebegov integral i sa konjugovanim eksponentima $r/2$ i $r/(r-2)$ za Itov integral u slučaju kada je $r > 2$), Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti (za $r > 2$), izometrije Itoa, Dubove martingalne nejednakosti (za $r = 2$), a na kraju i Fubinijeve teoreme. Tada se dobija

$$E \sup_{s \in [t_k, t]} \big|x^n(s) - x^n(t_k)\big|^r \leq 2^{r-1}(t - t_k)^{\frac{r}{2}-1}\big[(t-t_k)^{r/2}\bar{J}_1(t) + c_r \bar{J}_2(t)\big], \tag{2.2.6}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\bar{J}_1(t) &= \int_{t_k}^{t} E\big|\bar{A}\big(x^n(s), x^n(\delta_1(s)), s; x^n(t_k), \tilde{x}^n(s)\big)\big|^r ds, \\
\bar{J}_2(t) &= \int_{t_k}^{t} E\big|\bar{B}\big(x^n(s), x^n(\delta_1(s)), s; x^n(t_k), \tilde{x}^n(s)\big)\big|^r ds,
\end{aligned}$$

za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, dok je pozitivna konstanta c_r dobijena primenom Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti.

Osnovni cilj je ocena izraza $\bar{J}_1(t)$ a izraz $\bar{J}_2(t)$ se može oceniti analogno. Stoga, ako je $k \in \{0, 1, \dots, (n'-1) \wedge (n-1)\}$, integral $\bar{J}_1(t)$ se može predstaviti kao

$$\begin{aligned}
\bar{J}_1(t) = &\sum_{j=k-n'}^{-1} \int_{S_k^j} E\big|\bar{A}\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s) - t_0), s; x^n(t_k), \eta(t_j - t_0)\big)\big|^r ds \\
&+ \sum_{j=0}^{k} \int_{S_k^j} E\big|\bar{A}\big(x^n(s), x^n(\delta_1(s)), s; x^n(t_k), x^n(t_j)\big)\big|^r ds,
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, dok, ako je $k \in \{n' \wedge (n-1), (n'+1) \wedge (n-1), \dots, n-1\}$, onda je za $t \in [t_k, t_{k+1}]$ taj integral jednak

$$\bar{J}_1(t) = \sum_{j=k-n'}^{k} \int_{S_k^j} E\big|\bar{A}\big(x^n(s), x^n(\delta_1(s)), s; x^n(t_k), x^n(t_j)\big)\big|^r ds. \tag{2.2.8}$$

Integrali nad skupovima S_k^j u (2.2.7) se ocenjuju kada je $j \in \{k - n', \dots, -1\}$ i

$k \in \{0, 1, \ldots, (n'-1) \wedge (n-1)\}$. Primenom nejednakosti (1.5.3), dobija se

$$\int_{S_k^j} E\big|\bar{A}\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s; x^n(t_k), \eta(t_j-t_0)\big)\big|^r ds \tag{2.2.9}$$
$$\leq 3^{r-1}\int_{S_k^j} E\big|\bar{A}\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s; x^n(t_k), \eta(t_j-t_0)\big) - a\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s\big)\big|^r ds$$
$$+ 3^{r-1}\int_{S_k^j} E\big|a\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s\big) - a(0,0,s)\big|^r ds + 3^{r-1}\int_{S_k^j} E\big|a(0,0,s)\big|^r ds.$$

Za prvi sabirak u (2.2.9), pretpostavka $\mathcal{B}_1$ povlači da postoje realni brojevi $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ tako da važi

$$\int_{S_k^j} E\Big|\bar{A}\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s; x^n(t_k), \eta(t_j-t_0)\big) - a\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s\big)\Big|^r ds \tag{2.2.10}$$
$$= \int_{S_k^j} E\left|\frac{d^{(m_1+1)}a\big(x^n(t_k)+\theta_1\big(x^n(s)-x^n(t_k)\big), \eta(t_j-t_0)+\theta_2\big(\eta(\delta_1(s)-t_0)-\eta(t_j-t_0)\big), s\big)}{(m_1+1)!}\right|^r ds.$$

Radi jednostavnosti, neka je

$$\bar{a}_1(s) = x^n(t_k) + \theta_1\big(x^n(s) - x^n(t_k)\big), \quad \bar{b}_1(s) = x^n(s) - x^n(t_k),$$
$$\bar{a}_2(s) = \eta(t_j-t_0) + \theta_2\big(\eta(\delta_1(s)-t_0) - \eta(t_j-t_0)\big), \quad \bar{b}_2(s) = \eta(\delta_1(s)-t_0) - \eta(t_j-t_0).$$

Pretpostavka $\mathcal{B}_2$, Njutnova binomna formula i nejednakost (1.5.3) primenjena na (2.2.10) daju

$$\int_{S_k^j} E\Big|\bar{A}\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s; x^n(t_k), \eta(t_j-t_0)\big) - a\big(x^n(s), \eta(\delta_1(s)-t_0), s\big)\Big|^r ds$$
$$= \frac{1}{\big[(m_1+1)!\big]^r}\int_{S_k^j} E\left|\sum_{i=0}^{m_1+1}\binom{m_1+1}{i}\frac{\partial^{m_1+1}a_{(\bar{a}_1(s),\bar{a}_2(s),s)}}{\partial^i x\,\partial^{m_1+1-i}y}\big[\bar{b}_1(s)\big]^i\big[\bar{b}_2(s)\big]^{m_1+1-i}\right|^r ds$$
$$\leq \frac{1}{\big[(m_1+1)!\big]^r}\int_{S_k^j} E\left\{\sum_{i=0}^{m_1+1}\binom{m_1+1}{i}\left\|\frac{\partial^{m_1+1}a_{(\bar{a}_1(s),\bar{a}_2(s),s)}}{\partial^i x\,\partial^{m_1+1-i}y}\right\|_{m_1+1}\big|\bar{b}_1(s)\big|^i\big|\bar{b}_2(s)\big|^{m_1+1-i}\right\}^r ds$$
$$\leq \frac{\bar{L}_a^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r}\int_{S_k^j} E\Big(\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big| + \big|\eta(\delta_1(s)-t_0)-\eta(t_j-t_0)\big|\Big)^{r(m_1+1)} ds$$
$$\leq \frac{2^{2r(m_1+1)}\bar{L}_a^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r}\int_{S_k^j} E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^{(m_1+1)r} ds. \tag{2.2.11}$$

U oceni drugog sabirka u (2.2.9), koristeći polinomijalni uslov $\mathcal{B}_3$, nejednakost (1.5.3) i osobine standardne Euklidske norme, dobija se

$$\begin{aligned}
&\int_{S_k^j} E\big|a\big(x^n(s),\eta(\delta_1(s)-t_0),s\big)-a(0,0,s)\big|^r ds\\
&\quad\le \bar{D}^{r/2}\int_{S_k^j} E\Big(1+\big|\big(x^n(s),\eta(\delta_1(s)-t_0)\big)\big|^{\bar{q}}\Big)^{r/2}\big|\big(x^n(s),\eta(\delta_1(s)-t_0)\big)\big|^r ds\\
&\quad\le 2^{r/2-1}\bar{D}^{r/2}\bigg(\int_{S_k^j} E\big|(x^n(s),\eta(\delta_1(s)-t_0))\big|^r ds\\
&\qquad\qquad+\int_{S_k^j} E\big|(x^n(s),\eta(\delta_1(s)-t_0))\big|^{r(1+\bar{q}/2)}ds\bigg)\\
&\quad\le 2^{r-2}\bar{D}^{r/2}\int_{S_k^j} E\Big[\big|x^n(s)\big|^r+\big|\eta(\delta_1(s)-t_0)\big|^r\Big]ds\\
&\qquad+2^{r(1+\bar{q}/4)-2}\bar{D}^{r/2}\int_{S_k^j} E\Big[\big|x^n(s)\big|^{r(1+\bar{q}/2)}+\big|\eta(\delta_1(s)-t_0)\big|^{r(1+\bar{q}/2)}\Big]ds\\
&\quad\le 2^{r-1}\bar{D}^{r/2}\int_{S_k^j} E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^r ds\\
&\qquad+2^{r(1+\bar{q}/4)-1}\bar{D}^{r/2}\int_{S_k^j} E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^{r(1+\bar{q}/2)}ds.
\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

Treći sabirak u (2.2.9) se ocenjuje primenom pretpostavke $\mathcal{B}_4$, tako da je

$$\int_{S_k^j} E\big|a(0,0,s)\big|^r ds\le \bar{K}_a^r(t-t_k).\tag{2.2.13}$$

Stoga, zamena (2.2.11), (2.2.12) i (2.2.13) u (2.2.9) povlači

$$\begin{aligned}
&\int_{S_k^j} E\big|\bar{A}\big(x^n(s),\eta(\delta_1(s)-t_0),s;x^n(t_k),\eta(t_j-t_0)\big)\big|^r ds\\
&\quad\le \frac{3^{r-1}2^{2r(m_1+1)}\bar{L}_a^r}{[(m_1+1)!]^r}\int_{S_k^j} E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^{(m_1+1)r}ds\\
&\qquad+6^{r-1}\bar{D}^{r/2}\int_{S_k^j} E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^r ds\\
&\qquad+3^{r-1}2^{r(1+\bar{q}/4)-1}\bar{D}^{r/2}\int_{S_k^j} E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^{r(1+\bar{q}/2)}ds+3^{r-1}\bar{K}_a^r(t-t_k)
\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

i integrali na skupovima S_k^j, $j\in\{0,\dots,k\}$, $k\in\{0,1,\dots,(n'-1)\wedge(n-1)\}$, u drugom sabirku izraza (2.2.7), mogu biti ocenjeni analogno. Primena pretpostavke $\mathcal{B}_5$ na prethodno dokazana tvrđenja implicira da (2.2.7) ima formu

$$\begin{aligned}
\bar{J}_1(t)&\le \frac{3^{r-1}2^{2r(m_1+1)}\bar{L}_a^r}{[(m_1+1)!]^r}\int_{t_k}^t E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^{(m_1+1)r}ds\\
&\quad+6^{r-1}\bar{D}^{r/2}\int_{t_k}^t E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^r ds\\
&\quad+3^{r-1}2^{r(1+\bar{q}/4)-1}\bar{D}^{r/2}\int_{t_k}^t E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]}\big|x^n(u)\big|^{r(1+\bar{q}/2)}ds+3^{r-1}\bar{K}_a^r(t-t_k)\\
&\le \bar{K}'(t-t_k),
\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

gde je

$$\bar{K}' = 3^{r-1}\Big\{2^{r-1}(1+\bar{Q})\Big[\frac{2^{r(2m_1+1)+1}\bar{L}_a^r}{[(m_1+1)!]^r} + \bar{D}^{r/2}(1+2^{r\bar{q}/4})\Big] + \bar{K}_a^r\Big\}.$$

Za $k \in \{n'\wedge(n-1), (n'+1)\wedge(n-1), \ldots, n-1\}$, ocena slična oceni (2.2.14) primenjena na integrale iz (2.2.8) daje ocenu analognu oceni (2.2.15). Stoga se može zaključiti da za svako $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ važi

$$\bar{J}_1(t) \le \bar{K}'(t-t_k).$$

Primenom analogne procedure u oceni integrala $\bar{J}_2(t)$, dobija se

$$\bar{J}_2(t) \le \bar{K}''(t-t_k), \tag{2.2.16}$$

gde je

$$\bar{K}'' = 3^{r-1}\Big\{2^{r-1}(1+\bar{Q})\Big[\frac{2^{r(2m_2+1)+1}\bar{L}_b^r}{[(m_2+1)!]^r} + \bar{D}^{r/2}(1+2^{r\bar{q}/4})\Big] + \bar{K}_b^r\Big\}.$$

Zamenom (2.2.15) i (2.2.16) u (2.2.6), sledi

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \le 2^{r-1}(t-t_k)^{r/2}\big[(T-t_0)^{r/2}\bar{K}' + c_r\bar{K}''\big] \le \bar{C}'\delta_n^{r/2},$$

gde je

$$\bar{C}' = 2^{r-1}[(T-t_0)^{r/2}\bar{K}' + c_r\bar{K}'']$$

pozitivna konstanta nezavisna od n.

Slučaj 2: $0 < r < 2$.

Vrednosti $2/r$ i $2/(2-r)$ predstavljaju konjugovane eksponente u ovom scenariju. Poznato je da je rešenje jednačine skoro izvesno neprekidan proces i tada postoji $s_0 \in [t_k, t]$ tako da je $\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^r = |x^n(s_0)-x^n(t_k)|^r$. Helderova nejednakost sa prethodno pomenutim konjugovanim eksponentima, kao i dokazani deo propozicije iz Slučaja 1 (za $r=2$) su primenjeni na sledeći način

$$\begin{aligned}
E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^r &= E|x^n(s_0)-x^n(t_k)|^r\\
&\le \big(E|x^n(s_0)-x^n(t_k)|^2\big)^{r/2}\big(E|1|^{2/(2-r)}\big)^{(2-r)/2}\\
&\le \big(E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^2\big)^{r/2}\\
&\le \bar{C}'^{r/2}\delta_n^{r/2},
\end{aligned}$$

čime je kompletiran dokaz dela I.

II Za svako $k \in \{0, \ldots, (n'-1)\wedge(n-1)\}$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ i $s \in [t_k, t]$, koristeći pretpostavku

$\mathcal{B}_6$ i već dokazani deo I ove propozicije, dobija se

$$\begin{aligned}
&E\big|x^n(\delta_1(s)) - \tilde{x}^n(s)\big|^r \\
&\quad= \sum_{i=k-n'}^{-1}\chi_{S_k^i}(s)E\big|\eta(\delta_1(s)-t_0)-\eta(t_i-t_0)\big|^r + \sum_{i=0}^{k}\chi_{S_k^i}(s)E\big|x^n(\delta_1(s))-x^n(t_i)\big|^r \\
&\quad\le (D')^{r/2}\sum_{i=k-n'}^{-1}\chi_{S_k^i}(s)\big(1+|\delta_1(s)-t_0|^{q'}+|t_i-t_0|^{q'}\big)^{r/2}|\delta_1(s)-t_i|^r \\
&\qquad+\sum_{i=0}^{k}\chi_{S_k^i}(s)E\sup_{u\in[t_i,t_{i+1}\wedge s]}|x^n(u)-x^n(t_i)|^r \\
&\quad\le (D')^{r/2}\sum_{i=k-n'}^{-1}\chi_{S_k^i}(s)(1+2\tau^{q'})^{r/2}(\tau\wedge 1)^{r/2}|t_{i+1}-t_i|^{r/2}+\bar{C}'\delta_n^{r/2}\sum_{i=0}^{k}\chi_{S_k^i}(s) \\
&\quad\le \bar{C}''\delta_n^{r/2},
\end{aligned}$$

gde je $C''=(D')^{r/2}(1+2\tau^{q'})^{r/2}(\tau\wedge 1)^{r/2}\vee\bar{C}'$ i skup

$$\left\{\sum_{i=0}^{k}\chi_{S_k^i}(s),\ \sum_{i=k-n'}^{-1}\chi_{S_k^i}(s)\right\}=\{0,1\}.$$

Za $k\in\{n'\wedge(n-1),(n'+1)\wedge(n-1),\dots,n-1\}$, $t\in[t_k,t_{k+1}]$ i $s\in[t_k,t]$, na osnovu dokazanog dela I dobija se

$$\begin{aligned}
E\big|x^n(\delta_1(s))-\tilde{x}^n(s)\big|^r &= \sum_{i=k-n'}^{k}\chi_{S_k^i}(s)E\big|x^n(\delta_1(s))-x^n(t_i)\big|^r \\
&\le \sum_{i=k-n'}^{k}\chi_{S_k^i}(s)E\sup_{u\in[t_i,t_{i+1}\wedge s]}\big|x^n(u)-x^n(t_i)\big|^r \\
&\le \bar{C}'\delta_n^{r/2}\sum_{i=k-n'}^{k}\chi_{S_k^i}(s) \\
&= \bar{C}'\delta_n^{r/2},
\end{aligned}$$

jer postoji jedinstveno $i\in\{k-n',\dots,k\}$ tako da je $\delta_1(s)\in[t_i,t_{i+1})$. Stoga za svako $k\in\{0,\dots,n-1\}$ važi

$$E\big|x^n(\delta_1(s))-\tilde{x}^n(s)\big|^r\le\bar{C}''\delta_n^{r/2}$$

i dokaz je kompletiran jer ocena važi za svako $s\in[t_k,t]$. $\square$

Skupovi (2.2.4) generisani neprekidnom funkcijom kašnjenja δ mogu, u opštem slučaju, imati složene strukture, pri čemu osobine ovih skupova ne igraju bitnu ulogu u prethodnom dokazu. Međutim, sa stanovišta implementacije ovog aproksimacionog metoda, strukture ovih skupova su veoma važne. Da bi se neznatno pojednostavio metod, nametnute su restriktivnije pretpostavke, odnosno Lipšic neprekidnost funkcije δ, što je analizirano u Poglavlju 2.2.3.

U sledećoj teoremi uspostavljen je red L^p–konvergencije analitičkog metoda koji se sada razmatra. Biće pokazano da ako stepen Tejlorovih aproksimacija koeficijenata a i b istovremeno raste, tada red bliskosti između rešenja x i x^n takođe raste u smislu L^p–norme.

Teorema 2.2.3. *Neka važe sve pretpostavke Propozicije 2.2.2 Deo II, i neka je x rešenje jednačine* (2.2.1) *sa početnim uslovom* (1.3.8)*. Tada je*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t)-x^n(t)\big|^{\bar p} \le \bar C \delta_n^{(m+1)\bar p/2},$$

gde je $m=m_1\wedge m_2$, i $\bar C$ je generička konstanta nezavisna od n.

Dokaz. Neka je $t\in[t_0,T]$ proizvoljan fiksiran broj i neka je $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, tako da je $t\in[t_k,t_{k+1}]$. Tada, standardne procedure kao na početku dokaza Propozicije 2.2.2 obezbeđuju da važi

$$\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} \big|x(s)-x^n(s)\big|^{\bar p} \qquad (2.2.17)\\
&\le A_1\sum_{j=0}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} E\big|a\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big)-\bar A\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s;x^n(t_j),\tilde x^n(s)\big)\big|^{\bar p}ds\\
&\quad +B_1\sum_{j=0}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} E\big|b\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big)-\bar B\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s;x^n(t_j),\tilde x^n(s)\big)\big|^{\bar p}ds,
\end{aligned}$$

gde je $A_1=2^{\bar p-1}(T-t_0)^{\bar p-1}$ i $B_1=2^{\bar p-1}c_{\bar p}(T-t_0)^{\bar p/2-1}$.

Dodajući i oduzimajući član $a(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s)$, za svako $u\in[t_j,t_{j+1}\wedge t]$ i svako $j\in\{0,\dots,k\}$, dobija se

$$\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{u} E\big|a\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big)-\bar A\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s;x^n(t_j),\tilde x^n(s)\big)\big|^{\bar p}ds\\
&\quad\le 2^{\bar p-1}\int_{t_j}^{u} E\big|a\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big)-a\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s\big)\big|^{\bar p}ds \qquad (2.2.18)\\
&\qquad+2^{\bar p-1}\int_{t_j}^{u} E\big|a\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s\big)-\bar A\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s;x^n(t_j),\tilde x^n(s)\big)\big|^{\bar p}ds.
\end{aligned}$$

Pretpostavke $\mathcal B_1$ i $\mathcal B_2$ i Propozicija 2.2.2 povlače

$$\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{u} E\big|a\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s\big)-\bar A\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s;x^n(t_j),\tilde x^n(s)\big)\big|^{\bar p}ds\\
&\qquad\le \frac{2^{(m_1+1)\bar p}\bar L_a^{\bar p}\bar C''}{[(m_1+1)!]^{\bar p}}(u-t_j)\delta_n^{(m_1+1)\bar p/2}. \qquad (2.2.19)
\end{aligned}$$

Prvi sabirak u (2.2.18) može biti ocenjen primenom polinomijalnog uslova $\mathcal B_3$, tako da je

$$\int_{t_j}^{u} E\big|a\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big)-a\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s\big)\big|^{\bar p}ds \le 3^{\bar p/2-1}\bar D^{\bar p/2}(I_1+I_2+I_3), \quad (2.2.20)$$

gde je

$$I_1 = \int_{t_j}^{u} E\big[|x(s)-x^n(s)|^2 + |x(\delta_1(s)) - x^n(\delta_1(s))|^2\big]^{\bar{p}/2} ds,$$

$$I_2 = \int_{t_j}^{u} E\big[|x(s)|^2 + |x(\delta_1(s))|^2\big]^{\bar{p}\bar{q}/4}\big[|x(s)-x^n(s)|^2 + |x(\delta_1(s)) - x^n(\delta_1(s))|^2\big]^{\bar{p}/2} ds,$$

$$I_3 = \int_{t_j}^{u} E\big[|x^n(s)|^2 + |x^n(\delta_1(s))|^2\big]^{\bar{p}\bar{q}/4}\big[|x(s)-x^n(s)|^2 + |x(\delta_1(s)) - x^n(\delta_1(s))|^2\big]^{\bar{p}/2} ds.$$

Očigledno, (1.5.3) implicira

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2^{\bar{p}/2}\int_{t_j}^{u} E \sup_{r\in[t_0-\tau,s]} |x(r)-x^n(r)|^{\bar{p}} ds, \\ I_2 &\leq (1\vee 2^{\bar{p}\bar{q}/4-1})2^{\bar{p}/2-1}(I_{21}+I_{22}), \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

gde je

$$I_{21} = \int_{t_j}^{u} E\big[|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}/2} + |x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}/2}\big]|x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}} ds,$$

$$I_{22} = \int_{t_j}^{u} E\big[|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}/2} + |x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}/2}\big]|x(\delta_1(s))-x^n(\delta_1(s))|^{\bar{p}} ds.$$

Primena nejednakosti Koši–Švarc–Bunjakovskog povlači

$$I_{21} \leq \int_{t_j}^{u} \Big\{E\big[|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}/2} + |x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}/2}\big]^2|x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}}\Big\}^{1/2}\Big\{E|x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}}\Big\}^{1/2} ds, \tag{2.2.22}$$

a dodatnom primenom pretpostavke $\mathcal{B}_5$ može se videti da je

$$\begin{aligned} &E\big[|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}/2} + |x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}/2}\big]^2|x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}} \\ &\qquad \leq 2^{\bar{p}} E\big[|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}} + |x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}}\big]\big[|x(s)|^{\bar{p}} + |x^n(s)|^{\bar{p}}\big] \\ &\qquad \leq 2^{\bar{p}}\Big[E|x(s)|^{\bar{p}(1+\bar{q})} + E|x(s)|^{\bar{p}}|x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}} + E|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}}|x^n(s)|^{\bar{p}} \\ &\qquad\qquad + E|x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}}|x^n(s)|^{\bar{p}}\Big]. \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Kako je

$$|x(s)|^{\bar{p}}|x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}} \leq 1 \vee \sup_{r\in[t_0-\tau,s]} |x(r)|^{\bar{p}(1+\bar{q})},$$

nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovskog povlači

$$E|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}}|x^n(s)|^{\bar{p}} \leq (E|x(s)|^{2\bar{p}\bar{q}})^{1/2}(E|x^n(s)|^{2\bar{p}})^{1/2} \leq 1+\bar{Q}$$

i slično

$$E|x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}}|x^n(s)|^{\bar{p}} \leq 1+\bar{Q},$$

a tada (2.2.23) postaje

$$E\big[|x(s)|^{\bar{p}\bar{q}/2} + |x(\delta_1(s))|^{\bar{p}\bar{q}/2}\big]^2|x(s)-x^n(s)|^{p} \leq 2^{\bar{p}+2}(1+\bar{Q}). \tag{2.2.24}$$

Tada, zamenom (2.2.24) u (2.2.22), dobija se

$$I_{21} \leq 2^{\bar{p}/2+1}(1+\bar{Q})^{1/2} \int_{t_j}^{u} \big(E|x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}}\big)^{1/2} ds \tag{2.2.25}$$

i analogno se može videti da je

$$I_{22} \leq 2^{\bar{p}/2+1}(1+\bar{Q})^{1/2} \int_{t_j}^{u} \big(E|x(\delta_1(s))-x^n(\delta_1(s))|^{\bar{p}}\big)^{1/2} ds. \tag{2.2.26}$$

Zamenom (2.2.25) i (2.2.26) u (2.2.21), važi

$$\begin{aligned} I_2 \leq{}& (1\vee 2^{\bar{p}\bar{q}/4-1})2^{\bar{p}}(1+\bar{Q})^{1/2} \\ &\cdot \int_{t_j}^{u} \Big[\big(E|x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}}\big)^{1/2} + \big(E|x(\delta_1(s))-x^n(\delta_1(s))|^{\bar{p}}\big)^{1/2}\Big] ds \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

i analogno

$$\begin{aligned} I_3 \leq{}& (1\vee 2^{\bar{p}\bar{q}/4-1})2^{\bar{p}}(1+\bar{Q})^{1/2} \\ &\cdot \int_{t_j}^{u} \Big[\big(E|x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}}\big)^{1/2} + \big(E|x(\delta_1(s))-x^n(\delta_1(s))|^{\bar{p}}\big)^{1/2}\Big] ds. \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Sada, na osnovu (2.2.21), (2.2.27) i (2.2.28), nejednakost (2.2.20) postaje

$$\begin{aligned} &\int_{t_j}^{u} E\big|a\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big) - a\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s\big)\big|^{\bar{p}} ds \\ &\quad\leq 3^{\bar{p}/2-1}2^{\bar{p}/2}\bar{D}^{\bar{p}/2}\Big[\int_{t_j}^{u} E\sup_{r\in[t_0-\tau,s]}|x(r)-x^n(r)|^{\bar{p}} ds \\ &\qquad\qquad + 2^{\bar{p}/2+2}(1\vee 2^{\bar{p}\bar{q}/4-1})(1+\bar{Q})^{1/2}\int_{t_j}^{u}\big(E\sup_{r\in[t_0-\tau,s]}|x(r)-x^n(r)|^{\bar{p}}\big)^{1/2} ds\Big]. \end{aligned}$$

Zamena poslednjeg izraza i (2.2.19) u (2.2.18) implicira

$$\begin{aligned} &\int_{t_j}^{u} E\big|a\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big) - \bar{A}\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s;x^n(t_j),\tilde{x}^n(s)\big)\big|^{\bar{p}} ds \\ &\leq \frac{2^{(m_1+2)\bar{p}-1}\bar{L}_a^{\bar{p}}\bar{C}''}{[(m_1+1)!]^{\bar{p}}}(u-t_j)\delta_n^{(m_1+1)\bar{p}/2} \\ &\quad + 3^{\bar{p}/2-1}2^{3\bar{p}/2-1}\bar{D}^{\bar{p}/2}\Big[\int_{t_j}^{u} E\sup_{r\in[t_0-\tau,s]}|x(r)-x^n(r)|^{\bar{p}} ds \\ &\qquad\qquad + 2^{\bar{p}/2+2}(1\vee 2^{\bar{p}\bar{q}/4-1})(1+\bar{Q})^{1/2}\int_{t_j}^{u}\big(E\sup_{r\in[t_0-\tau,s]}|x(r)-x^n(r)|^{\bar{p}}\big)^{1/2} ds\Big]. \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Očigledno je da analogno može biti dokazano za funkciju b sa odgovarajućim konstantama, odnosno važi

$$\begin{aligned} &\int_{t_j}^{u} E\big|b\big(x(s),x(\delta_1(s)),s\big) - \bar{B}\big(x^n(s),x^n(\delta_1(s)),s;x^n(t_j),\tilde{x}^n(s)\big)\big|^{\bar{p}} ds \\ &\leq \frac{2^{(m_2+2)\bar{p}-1}\bar{L}_b^{\bar{p}}\bar{C}''}{[(m_2+1)!]^{\bar{p}}}(u-t_j)\delta_n^{(m_2+1)\bar{p}/2} \\ &\quad + 3^{\bar{p}/2-1}2^{3\bar{p}/2-1}\bar{D}^{\bar{p}/2}\Big[\int_{t_j}^{u} E\sup_{r\in[t_0-\tau,s]}|x(r)-x^n(r)|^{\bar{p}} ds \\ &\qquad\qquad + 2^{\bar{p}/2+2}(1\vee 2^{\bar{p}\bar{q}/4-1})(1+\bar{Q})^{1/2}\int_{t_j}^{u}\big(E\sup_{r\in[t_0-\tau,s]}|x(r)-x^n(r)|^{\bar{p}}\big)^{1/2} ds\Big]. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Zamenom (2.2.29) i (2.2.30) u (2.2.17), na kraju važi

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x(s)-x^n(s)|^{\bar p}\\
&\quad\le K_1\delta_n^{(m+1)\bar p/2} \qquad\qquad (2.2.31)\\
&\quad + K_2\int_{t_0}^t \Big[E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x(u)-x^n(u)|^{\bar p} + K_3\big(E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x(u)-x^n(u)|^{\bar p}\big)^{1/2}\Big]ds,
\end{aligned}
$$

pri čemu je n dovoljno veliko tako da je δ_n manje od 1, gde su

$$
\begin{aligned}
K_1 &= 2^{3\bar p-2}(T-t_0)^{\bar p/2}\bar C''\Big(\frac{2^{m_1\bar p}(T-t_0)^{\bar p/2}\bar L_a^{\bar p}}{[(m_1+1)!]^{\bar p}} + \frac{2^{m_2\bar p}c_{\bar p}\bar L_b^{\bar p}}{[(m_2+1)!]^{\bar p}}\Big),\\
K_2 &= 2^{5\bar p/2-2}3^{\bar p/2-1}\bar D^{\bar p/2}(T-t_0)^{\bar p/2-1}\big((T-t_0)^{\bar p/2}+c_{\bar p}\big),\\
K_3 &= (1\vee 2^{\bar p\bar q/4-1})2^{\bar p/2+2}(1+\bar Q)^{1/2},
\end{aligned}
$$

pozitivne konstante nezavisne od n. Drugim rečima, relacija (2.2.31) je oblka

$$
\begin{aligned}
u(t) &\le K_1\delta_n^{(m+1)\bar p/2} + K_2\int_{t_0}^t\Big[u(s)+K_3\big(u(s)\big)^{1/2}\Big]ds\\
&\equiv g(t)+\int_{t_0}^t f(v)\varphi\big(u(v)\big)dv,
\end{aligned}
$$

za svako $t\ge t_0$, $t\in S$, gde je S otvoren podskup skupa svih realnih brojeva takav da je $S\supset[t_0,T]$, $u:S\to\mathbb{R}^+$ je neprekidna funkcija definisana sa

$$
u(s) = E\sup_{r\in[t_0-\tau,s]}|x(r)-x^n(r)|^{\bar p},
$$

$g=K_1\delta_n^{(m+1)\bar p/2}:S\to\mathbb{R}^+$ je konstanta i stoga neopadajuća neprekidna funkcija, dok je $f=K_2:S\to\mathbb{R}^+$ takođe konstantna funkcija, te je neprekidna. Funkcija $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ je definisana kao $\varphi(x)=x+K_3x^{1/2}$ i lako je videti da je $\varphi\in\mathcal{G}$ iz Teoreme 1.5.13. To znači da su pretpostavke Teoreme 1.5.13 zadovoljene i da za svako $t\in[t_0,t^*]$ važi

$$
u(t)\le g(t)G^{-1}\Big(G(1)+\int_{t_0}^t f(v)dv\Big), \qquad (2.2.32)
$$

gde je za proizvoljan pozitivan broj z_0, funkcija $G:[z_0,+\infty)\to\mathbb{R}^+$ definisana kao

$$
G(z)=\int_{z_0}^z\frac{ds}{\varphi(s)} = 2\ln\frac{K_3+\sqrt{z}}{K_3+\sqrt{z_0}}.
$$

Funkcija $G^{-1}:\mathbb{R}^+\to[z_0,+\infty)$ je inverzna funkcija od G data sa

$$
G^{-1}(y)=\big[(K_3+\sqrt{z_0})e^{y/2}-K_3\big]^2
$$

i t^* je takav broj da je $G(1)+\int_{t_0}^t f(v)dv\in Dom(G^{-1})=\mathbb{R}^+$, $t\in[t_0,t^*]$, što znači da t^* može biti bilo koji realan broj veći ili jednak t_0, ali u našem je interesu da važi $t^*\ge T$. Kako je

$$
G^{-1}\Big(G(1)+\int_{t_0}^t f(v)dv\Big) = \big[(K_3+1)e^{K_2(t-t_0)/2}-K_3\big]^2,
$$

tada (2.2.32) postaje

$$E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x(s)-x^n(s)|^{\bar{p}} \le \bar{C}\delta_n^{(m+1)\bar{p}/2},$$

gde je $\bar{C}=K_1\big[(1+K_3)e^{K_2(T-t_0)/2}-K_3\big]^2$ pozitivna konstanta nezavisna od n. Dokaz je kompletiran za $t=T$. □

Dokaz sledeće teoreme koja se odnosi na skoro izvesnu konvergenciju niza rešenja aproksimativnoh jednačina analogan je dokazu u [60, Theorem 2], a baziran je na Borel–Kantelijevoj lemi i činjenici da je podela (2.2.2)–(2.2.3) ekvidistantna.

Teorema 2.2.4. *Neka su ispunjene pretpostavke Teoreme 2.2.3. Tada niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ rešenja jednačina* (2.2.5) *konvergira skoro izvesno rešenju x jednačine* (2.2.1).

Dokaz. Čebiševljeva nejednakost i Teorema 2.2.3 impliciraju

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big\{ \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t)-x^n(t)\big|^{\bar{p}/2} \ge n^{-r}\Big\} \le \bar{C}(T-t_0)^{(m+1)\bar{p}/2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-[(m+1)\bar{p}-4r]/2},$$

za svako $r>0$. Na osnovu Borel–Kantelijeve leme zaključuje se da $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x skoro izvesno za $r<\bar{p}/4-1/2$ u slučaju $\bar{p}>2$, odnosno za $r<1/2$ u slučaju $\bar{p}=2$. □

Napomena 2.2.5. *U prethodnim dokazima koeficijenti prenosa i difuzije zadovoljavaju polinomijalni uslov $\mathcal{B}_3$. Ovi dokazi će i dalje važiti uz male korekcije, ako bi se konstante $\bar{D}$ i $\bar{q}$ razlikovale za svaki od koeficijenata u smislu da za neke pozitivne konstante D_1 i D_2, za neke nenegativne cele brojeve q_1 i q_2, za svako $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}^d$ i $t\in[t_0,T]$ važi*

$$\begin{aligned}
\big|a(x_1,x_2,t)-a(y_1,y_2,t)\big|^2 &\le D_1\big(1+|(x_1,x_2)|^{q_1}+|(y_1,y_2)|^{q_1}\big)|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)|^2,\\
\big|b(x_1,x_2,t)-b(y_1,y_2,t)\big|^2 &\le D_2\big(1+|(x_1,x_2)|^{q_2}+|(y_1,y_2)|^{q_2}\big)|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)|^2.
\end{aligned}$$

Konstanta $\bar{Q}$ iz $\mathcal{B}_5$ može biti zamenjena dvema konstantama Q_1 i Q_2 tako da je

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t)|^{\alpha} \le Q_1 \quad i \quad E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x^n(t)|^{\beta} \le Q_2.$$

2.2.3 Lipšic-neprekidnost funkcije kašnjenja

Pretpostavlja se da je Borel-merljiva funkcija kašnjenja $\delta:[t_0,T]\to[0,\tau]$ Lipšic neprekidna. Drugim rečima, postoji pozitivna konstanta L tako da je

$$\big|\delta(s_1)-\delta(s_2)\big| \le L|s_1-s_2|, \quad s_1,s_2\in[t_0,T]. \tag{2.2.33}$$

Iz navedenog sledi da je funkcija $\delta_1:[t_0,T]\to[t_0-\tau,T]$, $\delta_1(t)=t-\delta(t)$, takođe Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom $1+L$.

Osnovni razlog za uvođenje restriktivnijih pretpostavki za δ je određivanje tačaka u kojima će izvodi koeficijenata jednačine (2.2.1) u odnosu na prvi i drugi argument biti definisani i fiksirani na celoj particiji. Ove tačke su oblika $x^n(t_{k-\lfloor\delta(t_k)/\delta_n\rfloor})$, gde je $\lfloor\cdot\rfloor$ funkciju najvećeg celog dela broja. Radi jednostivnije notacije, uvodi se nova funkcija

$\delta_2 : \{0,\ldots,n-1\} \to \{-n',\ldots,n-1\}$ definisana sa $\delta_2(k) = k - \lfloor \delta(t_k)/\delta_n \rfloor$. U tom slučaju jednačina (2.2.5) je oblika

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i a(x^n(t_k), x^n(t_{\delta_2(k)}), s)}{i!} ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i b(x^n(t_k), x^n(t_{\delta_2(k)}), s)}{i!} dw(s), \\ &t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0,\ldots,n-1\}. \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Umesto Propozicije 2.2.2 važi sledeće tvrđenje.

Propozicija 2.2.6. *I Neka su $\{x^n(t)\,|\,t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, rešenja jednačina (2.2.34) i neka su ispunjene pretpostavke $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_5$. Tada za svako $0 < r \le (M+1)\bar{p}$ važi*

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s) - x^n(t_k)\big|^r \le \bar{C}'\delta_n^{r/2}, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0,\ldots,n-1\},$$

gde C' predstavlja pozitivnu generičku konstantu nezavisnu od n.

II Pod pretpostavkama iz dela I, uz pretpostavku $\mathcal{B}_6$ i Lipšicov uslov (2.2.33), *za svako $0 < r \le (M+1)\bar{p}$ važi*

$$\sup_{s\in[t_k,t]} E\big|x^n(\delta_1(s)) - x^n(t_{\delta_2(k)})\big|^r \le C''\delta_n^{r/2}, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0,\ldots,n-1\},$$

gde je C'' pozitivna generička konstanta nezavisna od n.

Dokaz. Dokaz dela I analogan je dokazu dela I u Propoziciji 2.2.2. Jedina razlika javlja se kod koeficijenata jednačina (2.2.5) koji sadrže $x^n(t_{\delta_2(k)})$ umesto $\tilde{x}^n(s)$.
II Ovaj deo se dokazuje potpuno različito od dokaza dela II Propozicije 2.2.2. Neka je $t \in [t_k, t_{k+1}]$ za $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ i $s \in [t_k, t]$. Kako je cilj ocena izraza $E|x^n(\delta_1(s)) - x^n(t_{\delta_2(k)})|^r$, posmatra se razlika

$$\delta_1(s) - t_{\delta_2(k)} = \delta_1(s) - \left(t_0 + k\delta_n - \left\lfloor \frac{\delta(t_k)}{\delta_n} \right\rfloor \delta_n\right) = s - t_k - \delta(s) + \left\lfloor \frac{\delta(t_k)}{\delta_n} \right\rfloor \delta_n. \tag{2.2.35}$$

Nejednakost trougla, Lipšic neprekidnost (2.2.33) i

$$-\delta(s) + \delta(t_k) - \delta_n \le -\delta(s) + \left\lfloor \frac{\delta(t_k)}{\delta_n} \right\rfloor \delta_n \le -\delta(s) + \delta(t_k)$$

čine dovoljan uslov da važi

$$\left| s - t_k - \delta(s) + \left\lfloor \frac{\delta(t_k)}{\delta_n} \right\rfloor \delta_n \right| \le s - t_k + \delta_n + \big|\delta(s) - \delta(t_k)\big| \le \big(3 + \lfloor L \rfloor\big)\delta_n. \tag{2.2.36}$$

Stoga (2.2.35) i (2.2.36) daju

$$\big|\delta_1(s) - t_{\delta_2(k)}\big| \le \big(3 + \lfloor L \rfloor\big)\delta_n, \tag{2.2.37}$$

odakle sledi da ima najviše $N = 3 + \lfloor L \rfloor$ podeonih tačaka particije (2.2.2)–(2.2.3) između $\delta_1(s)$ i $t_{\delta_2(k)}$ (isključujući $\delta_1(s)$ ako je to jedna podeona tačka) i broj takvih tačaka N ne zavisi od n niti od n'. Ova činjenica je veoma pogodna jer n (a samim tim i n') teži ka $+\infty$.

Najpre se razmatra slučaj kada je $\delta_1(s) \geq t_{\delta_2(k)}$. Za sledeću ocenu, od značaja je indeks $i = \max\{j \in \{-n', \dots, k\} \,|\, t_j \leq \delta_1(s)\}$. Tada, imajući u vidu (2.2.37) i nejednakost (1.5.3), može se izračunati

$$\begin{aligned} &E\big|x^n(\delta_1(s)) - x^n(t_{\delta_2(k)})\big|^r \\ &\quad = E\big|x^n(\delta_1(s)) - x^n(t_i) + x^n(t_i) - \cdots - x^n(t_{\delta_2(k)+1}) + x^n(t_{\delta_2(k)+1}) - x^n(t_{\delta_2(k)})\big|^r \\ &\quad \leq \Big(1 \vee \big(3 + \lfloor L \rfloor\big)^{r-1}\Big) \sum_{j=\delta_2(k)}^{i} E \sup_{u \in [t_j, t_{j+1} \wedge s]} \big|x^n(u) - x^n(t_j)\big|^r. \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Ako je u prethodnoj sumi $j \leq -1$, tada $\mathcal{B}_6$ omogućava

$$\begin{aligned} E \sup_{u \in [t_j, t_{j+1} \wedge s]} \big|x^n(u) - x^n(t_j)\big|^r &= E \sup_{u \in [t_j, t_{j+1}]} \big|\eta(u - t_0) - \eta(t_j - t_0)\big|^r \\ &\leq (D')^{r/2} E \sup_{u \in [t_j, t_{j+1}]} \big(1 + |u - t_0|^{q'} + |t_j - t_0|^{q'}\big)^{r/2} |u - t_j|^r \\ &\leq (D')^{r/2} \big(1 + 2\tau^{q'}\big)^{r/2} (1 \wedge \tau)^{r/2} \delta_n^{r/2}, \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

a ako je $j \geq 0$, onda deo I povlači

$$E \sup_{u \in [t_j, t_{j+1} \wedge s]} \big|x^n(u) - x^n(t_j)\big|^r \leq \bar{C}' \delta_n^{r/2}. \tag{2.2.40}$$

Prema tome, (2.2.39) i (2.2.40) zamenjeni u (2.2.38) impliciraju

$$E\big|x^n(\delta_1(s)) - x^n(t_{\delta_2(k)})\big|^r \leq C'' \delta_n^{r/2}, \tag{2.2.41}$$

gde je

$$C'' = \Big(1 \vee \big(3 + \lfloor L \rfloor\big)^{r-1}\Big) \big(3 + \lfloor L \rfloor\big) \Big((D')^{r/2} \big(1 + 2\tau^{q'}\big)^{r/2} (1 \wedge \tau)^{r/2} \vee \bar{C}'\Big)$$

konstanta nezavisna od n. Ova ocena važi bez obzira da li je $\delta_1(s)$ podeona tačka u (2.2.2)–(2.2.3) ili nije.

Vredi napomenuti da je ocena (2.2.41) dobijena slično u slučaju kada je $\delta_1(s) < t_{\delta_2(k)}$, a kako je $s \in [t_k, t]$ proizvoljno, dokaz je kompletan. □

Analogno Teoremama 2.2.3 i 2.2.4 formulisane su sledeće teoreme.

Teorema 2.2.7. *Neka važe sve pretpostavke Propozicije 2.2.6, neka je x rešenje jednačine* (2.2.1) *sa početnim uslovom* (1.3.8), *i neka je x^n rešenje jednačine* (2.2.34). *Tada je*

$$E \sup_{t \in [t_0 - \tau, T]} \big|x(t) - x^n(t)\big|^{\bar{p}} \leq C \delta_n^{(m+1)\bar{p}/2},$$

gde je $m = m_1 \wedge m_2$, a C je generička konstanta nezavisna od n.

Teorema 2.2.8. *Neka su ispunjene pretpostavke Teoreme 2.2.7. Tada niz $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ rešenja jednačina* (2.2.34) *konvergira skoro izvesno rešenju x jednačine* (2.2.1).

Dokazi ovih teorema su izostavljeni jer se ne razlikuju od dokaza iz prethodnog poglavlja.

Rezultati ovog poglavlja su sadržani u radu [10].

2.3 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju razmatran je metod analitičke aproksimacije zasnovan na Tejlorovoj formuli za klasu SFDJ sa koeficijentima koji zadovoljavaju polinomijalni uslov. Glavni rezultati su L^p i skoro izvesna konvergencija niza aproksimativnih rešenja ka rešenju polazne jednačine. Važno je napomenuti da red L^p–bliskosti raste kada se povećava red izvoda u Tejlorovim razvojima koeficijenata polazne jednačine.

U radu [61] je pretpostavljeno da su uniformno ograničeni izvodi narednog reda u odnosu na najveći red izvoda koji se koristi u Tejlorovoj aproksimaciji koeficijenata prenosa i difuzije, a takođe i da koeficijenti prenosa i difuzije zadovoljavaju Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta. U ovom poglavlju, umesto navedenih uslova, zahteva se uniformna ograničenost ovih izvoda u Poglavlju 2.3.1, odnosno polinomijalni uslov u Poglavlju 2.3.2. Važno je napomenuti da ta dva uslova, u opštem slučaju, nisu uporediva, što je bila glavna motivacija za razmatranja u ovom poglavlju.

Razmatra se stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina (SFDJ) (1.3.14) sa početnim uslovom (1.3.15). Odgovarajući integralni oblik jednačine (1.3.14) je

$$x(t) = \eta(0) + \int_{t_0}^{t} a(x_u, u)du + \int_{t_0}^{t} b(x_u, u)dw(u), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.3.1}$$

Za svako pozitivno, dovoljno veliko n razmatraju se ekvidistantne particije vremenskog intervala $[t_0, T]$ u obliku

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \tag{2.3.2}$$

odnosno $t_k = t_0 + k(T - t_0)/n$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Dijametar ovih particija je označen sa $\delta_n = (T - t_0)/n < 1$. Na ovoj particiji razmotriće se sledeće aproksimativne jednačine

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a^{(i)}_{(x^n_{t_k},s)}(\overbrace{x^n_s - x^n_{t_k}, \dots, x^n_s - x^n_{t_k}}^{i \text{ puta}})}{i!} ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b^{(i)}_{(x^n_{t_k},s)}(\overbrace{x^n_s - x^n_{t_k}, \dots, x^n_s - x^n_{t_k}}^{i \text{ puta}})}{i!} dw(s), \ t \in [t_k, t_{k+1}], \ k \in \{0, \dots, n-1\}, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

sa početnim uslovom (1.3.15) i početnim uslovima $x^n_{t_k} = \{x^n(t_k + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, izvedenih iz rešenja prethodnih jednačina. Rešenja jednačina (2.3.3) biće iskorišćena za aproksimaciju rešenja $x = \{x(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ jednačine (2.3.1) sa početnim uslovom (1.3.15). Aproksimativno rešenje $x^n = \{x^n(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$, konstruisano sukcesivnim povezivanjem sa početnim uslovom (1.3.15) i stohastičkih procesa $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, je skoro izvesno neprekidan proces.

U jednačinama (2.3.3), koeficijenti prenosa i difuzije su Tejlorove aproksimacije funkcionala a i b, redom. Ovde $a^{(i)}_{(x^n_{t_k},s)}$ i $b^{(i)}_{(x^n_{t_k},s)}$ predstavljaju i-te Frešeove izvode funkcionala a i b u odnosu na prvi argument, respektivno, u tačkama $(x^n_{t_k}, s)$, gde je $i \geq 1$. Stoga $a^{(0)}_{(x^n_{t_k},s)} = a(x^n_{t_k}, s) \in \mathbb{R}^d$ i $b^{(0)}_{(x^n_{t_k},s)} = b(x^n_{t_k}, s) \in \mathbb{R}^{d \times d_1}$.

Rezultati sadržani u prvom delu ovog poglavlja su joůvek neobjavljeni, a drugog su razmatrani u radu [12].

2.3.1 Uniformna ograničenost funkcionala $a^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ i $b^{(m_1+1)}_{(x,t)}$

Neka za koeficijnte SFDJ (2.3.1) važe sledeće pretpostavke:

$\mathcal{C}_1$: Postoje Tejlorovi razvoji funkcionala a i b po prvom argumentu zaključno do m_1–og, odnosno, m_2–og Frešeovog izvoda, respektivno.

$\mathcal{C}_2$: Funkcionali $a^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ i $b^{(m_2+1)}_{(x,t)}$ su uniformno ograničeni, odnosno, postoje pozitivne realne konstante L_a i L_b tako da za svako $h \in V$

$$\sup_{(x,t)\in V\times[t_0,T]} \left|a^{(m_1+1)}_{(x,t)}(h,\ldots,h)\right| \le L_a\|h\|^{m_1+1},$$

$$\sup_{(x,t)\in V\times[t_0,T]} \left|b^{(m_2+1)}_{(x,t)}(h,\ldots,h)\right| \le L_b\|h\|^{m_2+1}.$$

$\mathcal{C}_3$: Funkcionali a i b zadovoljavaju sledeći polinomijalni uslov: postoje pozitivan realan broj D i nenegativan ceo broj q tako da za svako $x, y \in V$ i $t \in [t_0, T]$ važi

$$\big|a(x,t)-a(y,t)\big|^2 \vee \big|b(x,t)-b(y,t)\big|^2 \le D\big(1+\|x\|^q+\|y\|^q\big)\|x-y\|^2.$$

$\mathcal{C}_4$: Funkcije $a(0,\cdot)$ i $b(0,\cdot)$ su ograničene na $[t_0, T]$, tj. postoje pozitivne konstante K_a i K_b, takve da $|a(0,t)| \le K_a$ i $|b(0,t)| \le K_b$ za svako $t_0 \le t \le T$.

$\mathcal{C}_5$: Postoje jedinstvena rešenja x i x^n jednačina (2.3.1) i (2.3.3), respektivno, sa odgovarajućim prethodno navedenim početnim uslovima, takva da je za neko $p \ge 2$ i neku pozitivnu konstantu Q koja ne zavisi od n,

$$E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}|x(t)|^{2p(1\vee q)} \vee E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}|x^n(t)|^{p[2\vee 2q\vee(M+1)(1+q/2)\vee(M+1)^2]} \le Q < \infty,$$

gde je $M = m_1 \vee m_2$.

$\mathcal{C}_6$: Stohastički proces η zadovoljava polinomijalni uslov: postoji pozitivna konstanta D' i nenegativan ceo broj q' tako da za svaka dva realna broja $\theta_1, \theta_2 \in [-\tau, 0]$ važi

$$\big|\eta(\theta_1)-\eta(\theta_2)\big|^2 \le D'\big(1+|\theta_1|^{q'}+|\theta_2|^{q'}\big)|\theta_1-\theta_2|^2.$$

Naredna lema ima važnu ulogu u opisivanju bliskosti rešenja x i x^n, kao i za određivanje brzine konvergencije rešenja x^n ka x.

Propozicija 2.3.1. *Neka su $\{x^n(t)\,|\,t\in[t_k,t_{k+1}]\}$, $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, rešenja jednačina (2.3.3) sa prethodno pomenutim početnim uslovima i neka su zadovoljene pretpostavke $\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_5$. Tada za svako $0<r\le(M+1)p$,*

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \le C'\delta_n^{r/2}, \quad t\in[t_k,t_{k+1}], \quad k\in\{0,\ldots,n-1\},$$

gde je C' konstanta nezavisna od n.

Dokaz. Radi jednostavnijeg zapisa, uvode se naredne oznake

$$A(x^n_t,t;x^n_{t_k}) = \sum_{i=0}^{m_1}\frac{a^{(i)}_{(x^n_{t_k},t)}(x^n_t-x^n_{t_k})^i}{i!}, \quad B(x^n_t,t;x^n_{t_k}) = \sum_{i=0}^{m_2}\frac{b^{(i)}_{(x^n_{t_k},t)}(x^n_t-x^n_{t_k})^i}{i!},$$

gde je $t\in[t_k,t_{k+1}]$, $k\in\{0,\ldots,n-1\}$. Iz tehničkih razloga se posebno diskutuju slučajevi kada je $r\ge 2$ i kada je $0<r<2$.

Slučaj 1. Neka je $r \geq 2$. Na osnovu pretpostavke $\mathcal{C}_1$, Helderove nejednakosti (primenjene dva puta, sa konjugovanim eksponentima r i $r/(r-1)$ za Lebegov integral i sa konjugovanim eksponentima $r/2$ i $r/(r-2)$, za Itov integral u slučaju kada je $r > 2$), Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti (kada je $r > 2$), izometrije Itoa, Dubove martingalne nejednakosti (kada je $r = 2$) i Fubinijeve teoreme, sledi da je

$$E \sup_{s \in [t_k, t]} \big| x^n(s) - x^n(t_k) \big|^r \leq 2^{r-1} (t - t_k)^{\frac{r}{2}-1} \big[(t-t_k)^{r/2} J_1(t) + c_r J_2(t) \big], \tag{2.3.4}$$

gde c_r predstavlja konstantu koja proizilazi iz primene Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti i

$$J_1(t) = \int_{t_k}^{t} E\big|A(x_s^n, s; x_{t_k}^n)\big|^r ds \quad \text{i} \quad J_2(t) = \int_{t_k}^{t} E\big|B(x_s^n, s; x_{t_k}^n)\big|^r ds.$$

Pri oceni integrala $J_1(t)$, dodavanjem i oduzimanjem člana $a(x_s^n, s)$, zatim primenom nejednakosti (1.5.3) i pretpostavke $\mathcal{C}_1$, sledi da postoji $\theta_0 \in (0,1)$ tako da je

$$J_1(t) \leq 2^{r-1} \left[\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_s^n, s)\big|^r ds + \int_{t_k}^{t} E \left| \frac{a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n + \theta_0 (x_s^n - x_{t_k}^n), s)} (x_s^n - x_{t_k}^n)^{m_1+1}}{(m_1+1)!} \right|^r ds \right],$$

odnosno, $\mathcal{C}_2$, (1.5.3) i $\mathcal{C}_5$ impliciraju

$$J_1(t) \leq 2^{r-1} \left[\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_s^n, s)\big|^r ds + \frac{L_a^r 2^{r(m_1+1)}(1+Q)}{\big[(m_1+1)!\big]^r} (t - t_k) \right]. \tag{2.3.5}$$

Prvi sabirak u relaciji (2.3.5) se ocenjuje pomoću nejednakosti (1.5.3) i pretpostavki $\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_5$, na sledeći način

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_s^n, s)\big|^r ds &= \int_{t_k}^{t} E\big|a(x_s^n, s) - a(0,s) + a(0,s)\big|^r ds \\
&\leq 2^{r-1} \left[\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_s^n, s) - a(0,s)\big|^r ds + \int_{t_k}^{t} E\big|a(0,s)\big|^r ds \right] \\
&\leq 2^{r-1} \left[\int_{t_k}^{t} E\Big(\big|a(x_s^n, s) - a(0,s)\big|^2\Big)^{r/2} ds + |K_a|^r (t - t_k) \right] \\
&\leq 2^{r-1} \left[D^{r/2} \int_{t_k}^{t} E\big(1 + \|x_s^n\|^q\big)^{r/2} \|x_s^n\|^r ds + K_a^r (t - t_k) \right] \\
&\leq 2^{r-1} \left[D^{r/2} 2^{r/2-1} \left(\int_{t_k}^{t} E\|x_s^n\|^r ds + \int_{t_k}^{t} E\|x_s^n\|^{r(1+q/2)} ds \right) + K_a^r (t - t_k) \right] \\
&\leq \tilde{K}(t - t_k),
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

gde je $\tilde{K} = D^{r/2} 2^{3r/2-1}(1+Q) + 2^{r-1} K_a^r$ pozitivna konstanta nezavisna od n. Zamenom (2.3.6) u (2.3.5) dobija se

$$J_1(t) \leq K'(t - t_k) \tag{2.3.7}$$

i analogno

$$J_2(t) \leq K''(t - t_k), \tag{2.3.8}$$

pri čemu su $K' = D^{r/2}2^{5r/2-2}(1+Q) + 2^{2r-2}K_a^r + [(m_1+1)!]^{-r}L_a^r 2^{r(m_1+2)-1}(1+Q)$ i $K'' = D^{r/2}2^{5r/2-2}(1+Q)+2^{2r-2}K_b^r+[(m_2+1)!]^{-r}L_b^r 2^{r(m_2+2)-1}(1+Q)$ konstante nezavisne od n.

Zamenom ocena (2.3.7) i (2.3.8) u (2.3.4) kompletira se dokaz u prvom slučaju, tj.

$$\begin{aligned} E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r &\le 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}}\left[(T-t_k)^{r/2}K'+c_rK''\right] \\ &\le C'\delta_n^{r/2}, \end{aligned}$$

gde $C' = 2^{r-1}[(T-t_0)^{r/2}K' + c_rK'']$ predstavlja pozitivnu konstantu nezavisnu od n. Slučaj 2. Za $0<r<2$, brojevi $2/r$ i $2/(2-r)$ su konjugovani eksponenti. Poznato je da je rešenje x^n skoro izvesno neprekidan proces te postoji $s_0\in[t_k,t]$ tako da je

$$\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r = \big|x^n(s_0)-x^n(t_k)\big|^r.$$

Primenom Helderove nejednakosti sa prethodno pomenutim konjugovanim eksponentima i dokazanog dela iz prvog slučaja (kada je $r=2$) dobija se

$$\begin{aligned} E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r &= E\big|x^n(s_0)-x^n(t_k)\big|^r \\ &\le \Big(E\big|x^n(s_0)-x^n(t_k)\big|^2\Big)^{r/2}\Big(E|1|^{2/(2-r)}\Big)^{(2-r)/2} \\ &\le \Big(E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^2\Big)^{r/2} \\ &\le C'^{r/2}\delta_n^{r/2}, \end{aligned}$$

čime je dokaz potpun. □

Ekvidistantnost podele (2.3.2) nije od interesa u Propoziciji 2.3.1. Međutim, ona ima važnu ulogu u Propoziciji 2.3.2.

Propozicija 2.3.2. *Neka važe pretpostavke Propozicije 2.3.1 i $\mathcal{C}_6$. Tada, za svaki pozitivan broj $r\le(M+1)p$ važi*

$$E\|x_t^n - x_{t_k}^n\|^r \le C''\delta_n^{r/2},\quad t\in[t_k,t_{k+1}],\quad k\in\{0,\dots,n-1\},$$

gde je C'' pozitivna konstanta nezavisna od n.

Dokaz. Neka su skupovi S_1 i S_2 definisani sa $S_1 = \{t\in[t_0,T]\,|\,t-\tau<t_0\}$ i $S_2 = \{t\in[t_0,T]\,|\,t_{\lfloor n(t-t_0)/(T-t_0)\rfloor}-\tau<t_0\le t-\tau\}$. Dokaz Propozicije 2 iz [61] implicira da za svako $k\in\{0,\dots,n-1\}$ i za svako fiksirano $t\in[t_k,t_{k+1}]$ važi

$$E\|x_t^n - x_{t_k}^n\|^r \le E_1+E_2+E_3, \tag{2.3.9}$$

gde je

$$\begin{aligned} E_1 &= E\sup_{u\in[t_k-\tau,t_0+t_k-t]}\big|\eta(u+t-t_k-t_0)-\eta(u-t_0)\big|^r\cdot\chi_{S_1}(t), \\ E_2 &= E\sup_{u\in[t_0+t_k-t,t_0]}\big|x^n(u+t-t_k)-\eta(u-t_0)\big|^r\cdot\chi_{S_1\cup S_2}(t), \\ E_3 &= E\sup_{u\in[t_0,t_k]}\big|x^n(u+t-t_k)-x^n(u)\big|^r. \end{aligned}$$

Propozicija 2.3.1 implicira ocenu

$$E_3 \leq 3(1 \vee 3^{r-1})C'\delta_n^{r/2}. \tag{2.3.10}$$

Primenom pretpostavke $\mathcal{C}_6$ dobija se

$$\big|\eta(0) - \eta(u-t_0)\big|^r \leq (D')^{r/2}\big(1 + |u-t_0|^{q'}\big)^{r/2}|u-t_0|^r,$$

i, kako $u - t_0$ pripada segmentu $[-\tau, 0]$, odnosno $u - t_0 \in [t_k - t, 0]$, sledi

$$\big|\eta(0) - \eta(u-t_0)\big|^r \leq (D')^{r/2}(1 + \tau^{q'})^{r/2}|T-t_0|^{r/2}\delta_n^{r/2}. \tag{2.3.11}$$

Kombinovanje relacije (2.3.11) sa Propozicijom 2.3.1 povlači

$$\begin{aligned} E_2 &\leq (1\vee 2^{r-1})\Big[E\sup_{u\in[t_0+t_k-t,t_0]}\big|x^n(u+t-t_k)-x^n(t_0)\big|^r + E\sup_{u\in[t_0+t_k-t,t_0]}\big|\eta(0)-\eta(u-t_0)\big|^r\Big] \\ &\leq (1\vee 2^{r-1})\big[C' + (D')^{r/2}(1+\tau^{q'})^{r/2}|T-t_0|^{r/2}\big]\delta_n^{r/2}. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Slično je

$$\big|\eta(u+t-t_k-t_0) - \eta(u-t_0)\big|^r \leq (D')^{r/2}\big(1 + |u+t-t_k-t_0|^{q'} + |u-t_0|^{q'}\big)^{r/2}|t-t_k|^r$$

i obe vrednosti $u + t - t_k - t_0$ i $u - t_0$ pripadaju segmentu $[-\tau, 0]$, te je

$$\big|\eta(u+t-t_k-t_0) - \eta(u-t_0)\big|^r \leq (D')^{r/2}(1 + 2\tau^{q'})^{r/2}|T-t_0|^{r/2}\delta_n^{r/2}.$$

Tada je

$$E_1 \leq (D')^{r/2}(1 + 2\tau^{q'})^{r/2}|T-t_0|^{r/2}\delta_n^{r/2}. \tag{2.3.13}$$

Zamenom ocena (2.3.13), (2.3.12) i (2.3.10) u (2.3.9) dokaz je kompletiran. □

U sledećoj teoremi određuje se red L^p–konvergencije razmatranog analitičkog metoda. Dokazuje se da ako stepeni Tejlorovih aproksimacija funkcionala a i b istovremeno rastu, onda se povećava red bliskosti između rešenja x i x^n u smislu L^p–norme.

Teorema 2.3.3. *Neka važe sve pretpostavke Propozicije 2.3.2 i neka je x rešenje jednačine* (2.3.1) *sa početnim uslovom* (1.3.15). *Tada za svako $p \geq 2$ za koje je zadovoljena pretpostavka $\mathcal{C}_5$, važi*

$$E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}\big|x(t) - x^n(t)\big|^p \leq C\delta_n^{(m+1)p/2},$$

gde je $m = m_1 \wedge m_2$ i C je konstanta nezavisna od n.

Dokaz. Dokaz Teoreme 1 iz [61] pokazuje da se primenom standardnih metoda koje su bazirane na nejednakostima Heldera i Burkholder–Dejvis–Gandija, može zaključiti

$$\begin{aligned} &E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}\big|x(s) - x^n(s)\big|^p \\ &\leq 2^{p-1}(T-t_0)^{p-1}\sum_{k=0}^{j-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E\big|a(x_u,u) - A(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du \\ &\quad + 2^{p-1}(T-t_0)^{p-1}\int_{t_j}^{t} E\big|a(x_u,u) - A(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du \\ &\quad + 2^{p-1}c_p(T-t_0)^{p/2-1}\sum_{k=0}^{j-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E\big|b(x_u,u) - B(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du \\ &\quad + 2^{p-1}c_p(T-t_0)^{p/2-1}\int_{t_j}^{t} E\big|b(x_u,u) - B(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du, \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

zbog toga što x i x^n imaju isti početni uslov η, pri čemu je c_p konstanta dobijena primenom Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti i j je najveći ceo broj za koji $t \in [t_j, T]$, za proizvoljno $t \in [t_0, T]$. Očigledno je da za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, \ldots, j\}$, nejednakost (1.5.3) implicira

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u, u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p du \\
&\quad \le 2^{p-1}\bigg[\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u, u) - a(x_u^n, u)\big|^p du + \int_{t_k}^{t} \big|a(x_u^n, u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p du\bigg].
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Pretpostavke $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ i Propozicija 2.3.2, primenjene na drugi sabirak u (2.3.15), impliciraju

$$\int_{t_k}^{t} \big|a(x_u^n, u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p du \le \frac{L_a^p C''}{\big[(m_1+1)!\big]^p}\, \delta_n^{(m_1+1)p/2}(t - t_k), \tag{2.3.16}$$

jer je δ_n manje od 1, za dovoljno veliko n.

Za ocenjivanje prvog sabirka u izrazu (2.3.15) najpre se primenjuju polinomijalni uslov $\mathcal{C}_3$ i nejednakost (1.5.3), a zatim se primenjuje nejednakost Koši–Švarc–Bunjakovskog. Na taj način se dobija

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u, u) - a(x_u^n, u)\big|^p du \\
&\quad \le \int_{t_k}^{t} E\Big[D\big(1 + \|x_u\|^q + \|x_u^n\|^q\big)\|x_u - x_u^n\|^2\Big]^{p/2} du \\
&\quad \le 3^{p/2-1} D^{p/2} \int_{t_k}^{t} E\Big[\big(1 + \|x_u\|^{pq/2} + \|x_u^n\|^{pq/2}\big)\|x_u - x_u^n\|^p\Big] du \\
&\quad = 3^{p/2-1} D^{p/2}\bigg\{\int_{t_k}^{t} E\|x_u - x_u^n\|^p du + \int_{t_k}^{t} E\Big[\big(\|x_u\|^{pq/2}\|x_u - x_u^n\|^{p/2}\big)\|x_u - x_u^n\|^{p/2}\Big] du \\
&\qquad\qquad + \int_{t_k}^{t} E\Big[\big(\|x_u^n\|^{pq/2}\|x_u - x_u^n\|^{p/2}\big)\|x_u - x_u^n\|^{p/2}\Big] du\bigg\} \\
&\quad \le 3^{p/2-1} D^{p/2}\bigg\{\int_{t_k}^{t} E\|x_u - x_u^n\|^p du + \int_{t_k}^{t} \big(E\|x_u\|^{pq}\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2}\big(E\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2} du \\
&\qquad\qquad + \int_{t_k}^{t} \big(E\|x_u^n\|^{pq}\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2}\big(E\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2} du\bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Nejednakosti (1.5.3) i Koši–Švarc–Bunjakovskog, kao i pretpostavka $\mathcal{C}_5$ se primenjuju na matematičko očekivanje koje se javlja pod integralom u drugom i trećem sabirku u (2.3.17), tako da je

$$\begin{aligned}
E\|x_u\|^{pq}\|x_u - x_u^n\|^p &\le 2^{p-1}\big(E\|x_u\|^{p(1+q)} + E\|x_u\|^{pq}\|x_u^n\|^p\big) \\
&\le 2^{p-1}\Big(E\|x_u\|^{p(1+q)} + \big(E\|x_u\|^{2pq}\big)^{1/2}\big(E\|x_u^n\|^{2p}\big)^{1/2}\Big) \\
&\le 2^p(1 + Q)
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

i slično

$$E\|x_u^n\|^{pq}\|x_u - x_u^n\|^p \le 2^p(1 + Q). \tag{2.3.19}$$

Zamena (2.3.18) i (2.3.19) u ocenu (2.3.17) povlači

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u,u)-a(x_u^n,u)\big|^p du \qquad (2.3.20)\\
&\quad \le 3^{p/2-1}D^{p/2}\bigg[\int_{t_k}^{t} E\|x_u-x_u^n\|^p du + 2^{1+p/2}(1+Q)^{1/2}\int_{t_k}^{t}\big(E\|x_u-x_u^n\|^p\big)^{1/2}du\bigg].
\end{aligned}$$

Slične ocene se mogu dobiti i za funkcional b, odnosno važi

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|b(x_u,u)-B(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du \qquad (2.3.21)\\
&\quad \le 2^{p-1}\bigg[\int_{t_k}^{t} E\big|b(x_u,u)-b(x_u^n,u)\big|^p du + \int_{t_k}^{t} E\big|b(x_u^n,u)-B(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du\bigg],
\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|b(x_u,u)-b(x_u^n,u)\big|^p du \qquad (2.3.22)\\
&\quad \le 3^{p/2-1}D^{p/2}\bigg[\int_{t_k}^{t} E\|x_u-x_u^n\|^p du + 2^{1+p/2}(1+Q)^{1/2}\int_{t_k}^{t}\big(E\|x_u-x_u^n\|^p\big)^{1/2}du\bigg]
\end{aligned}$$

i

$$\int_{t_k}^{t} E\big|b(x_u^n,u)-B(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du \le \frac{L_b^p C''}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\delta_n^{(m+1)p/2}(t-t_k). \qquad (2.3.23)$$

Primena (2.3.15), (2.3.16) i (2.3.20)−(2.3.23) na (2.3.14) implicira

$$u(t) \le g(t) + \int_{t_0}^{t} f(v)\varphi(u(v))dv,$$

gde je:
- funkcija $u = u(t)$ definisana na otvorenom skupu $S \supset [t_0, T]$ u $\mathbb{R}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^+$ kao

$$u(t) = E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}\big|x(s)-x^n(s)\big|^p,$$

i to je neprekidna funkcija;
- konstantna funkcija

$$f = f(t) = 2^{2p-2}3^{p/2-1}D^{p/2}(T-t_0)^{p/2-1}\big[(T-t_0)^{p/2}+c_p\big]$$

definisana na istom skupu S, ima vrednosti u $\mathbb{R}^+$ i očigledno je neprekidna funkcija;
- funkcija $g = g(t)$ definisana na istom skupu S sa vrednostima u $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ kao

$$g(t) = 2^{2p-2}C''(T-t_0)^{p/2}\bigg(\frac{L_a^p(T-t_0)^{p/2}}{[(m_1+1)!]^p} + \frac{c_pL_b^p}{[(m_2+1)!]^p}\bigg)\delta_n^{(m+1)p/2},$$

te je konstantna funkcija, te je neprekidna;
- funkcija $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definisana kao

$$\varphi(x) = 2^{1+p/2}(1+Q)^{1/2}x^{1/2} + x,$$

$\varphi(x) > 0$ za $x > 0$ i za nju važi da je neopadajuća i neprekidna funkcija, i za svako $\alpha \geq 1$ i $x \geq 0$ je ispunjeno $\varphi(x)/\alpha \leq \varphi(x/\alpha)$, odnosno φ pripada klasi $\mathcal{G}$.

Drugim rečima, ispunjene su sve pretpostavke za primenu nejednakosti Biharijevog tipa i Teorema 1.5.13 implicira da za svako $t \in [t_0, T]$ važi

$$u(t) \leq g(t) G^{-1}\Big(G(1) + \int_{t_0}^{t} f(v)dv\Big), \tag{2.3.24}$$

gde je funkcija G definisana kao

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{\varphi(s)} = 2 \ln \frac{\sqrt{z} + 2^{1+p/2}(1+Q)^{1/2}}{\sqrt{z_0} + 2^{1+p/2}(1+Q)^{1/2}},$$

za proizvoljno $z \geq z_0 > 0$. Funkcija $G^{-1} : \mathbb{R}^+ \to [z_0, +\infty)$ predstavlja njenu inverznu funkciju i jednaka je

$$G^{-1}(y) = \Big[\big(z_0 + 2^{1+p/2}(1+Q)^{1/2}\big)e^{y/2} - 2^{1+p/2}(1+Q)^{1/2}\Big]^2.$$

Kako je $Dom(G^{-1}) = \mathbb{R}_+$, vrednost $G(1) + \int_{t_0}^{t} f(v)dv$ pripada domenu funkcije G^{-1} za svako $t^* \geq t_0$ i $t_0 \leq t \leq t^*$.

Zbog svega izloženog, za svako $t \in [t_0, T]$ je zadovoljeno

$$E \sup_{s \in [t_0 - \tau, t]} \big|x(s) - x^n(s)\big|^p \leq C \delta_n^{(m+1)p/2},$$

gde C predstavlja pozitivnu konstantu nezavisnu od n i nezavisnu od δ_n, izvedenu iz (2.3.24). Specijalan slučaj $t = T$ završava dokaz. $\square$

Sledeća teorema je dokazana analogno kao Teoreme 1.4.11 [61, Theorem 2]. Dokaz se zasniva na Borel–Kantelijevoj lemi. Dokazana je skoro izvesna konvergencija niza rešenja aproksimativnih jednačina (2.3.3) ka rešenju polazne jednačine (2.3.1).

Teorema 2.3.4. *Neka su ispunjene pretpostavke Teoreme 2.3.3. Tada niz* $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sukcesivno povezanih rešenja jednačina* (2.3.3) *sa prethodno pomenutim početnim uslovima, konvergira skoro izvesno ka rešenju* x *jednačine* (2.3.1) *sa početnim uslovom* (1.3.15).

Napomena 2.3.5. *U prethodnim dokazima koeficijenti prenosa i difuzije zadovoljavaju polinomijalni uslov* $\mathcal{C}_3$. *Ovi dokazi još uvek važe, sa minornim tehničkim korekcijama, ako bi se konstante* D *i* q *razlikovale u zavisnosti od koefijicenata, u smislu da važi*

$$\begin{aligned} \big|a(x,t) - a(y,t)\big|^2 &\leq D_1\big(1 + \|x\|^{q_1} + \|y\|^{q_1}\big)\|x-y\|^2, \\ \big|b(x,t) - b(y,t)\big|^2 &\leq D_2\big(1 + \|x\|^{q_2} + \|y\|^{q_2}\big)\|x-y\|^2, \end{aligned}$$

za neke pozitivne konstante D_1 *i* D_2 *i za neke nenegativne cele brojeve* q_1 *i* q_2, *za svako* $x, y \in V$ *i* $t \in [t_0, T]$. *U stvari, konstante koje bi se javile u dokazima pod ovakvim pretpostvakama mogle bi biti i manje, ali, zbog jedostavnijeg zapisa, pretpostavka* $\mathcal{C}_3$ *ostaje nepromenjena. Slično važi za konstantu* Q *u* $\mathcal{C}_5$, *odnosno može se zahtevati da postoje konstante pozitivne* Q_1 *i* Q_2 *za koje je*

$$E \sup_{t \in [t_0 - \tau, T]} |x(t)|^{\alpha} \leq Q_1, \quad E \sup_{t \in [t_0 - \tau, T]} |x^n(t)|^{\beta} \leq Q_2.$$

Takođe se može primetiti da je polinomijalni uslov za η *u* $\mathcal{C}_6$ *opštiji uslov od Lipšicovog, koji se obično pretpostavlja.*

2.3.2 Funkcionali $a^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ i $b^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ zadovoljavaju polinomijalni uslov

Uvode se sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Postoje Tejlorovi razvoji funkcionala a i b po prvom argumentu do Frešeovih izvoda m_1 m_2, redom.

$\mathcal{A}_2$: Početni uslov η zadovoljava polinomijalni uslov, odnosno postoji pozitivna konstanta D' i nenegativan ceo broj q' tako da za svako $\theta_1, \theta_2 \in [-\tau, 0]$, važi

$$\big|\eta(\theta_1) - \eta(\theta_2)\big|^2 \leq D'\big(1 + |\theta_1|^{q'} + |\theta_2|^{q'}\big)|\theta_1 - \theta_2|^2.$$

$\mathcal{A}_3$: Funkcije $a(0,\cdot)$ i $b(0,\cdot)$ su ograničene na $[t_0, T]$, odnosno postoje pozitivne konstante K_a i K_b, tako da je $|a(0,t)| \leq K_a$ i $|b(0,t)| \leq K_b$, za svako $t_0 \leq t \leq T$.

$\mathcal{A}_4$: Funkcije $a^{(m_1+1)}_{(0,\cdot)}$ i $b^{(m_2+1)}_{(0,\cdot)}$ su ograničene na $[t_0, T]$, odnosno postoje pozitivne konstante K'_a i K'_b tako da, za svako $t \in [t_0, T]$, važi

$$\big\|a^{(m_1+1)}_{(0,t)}\big\|_{m_1+1} \leq K'_a, \quad \big\|b^{(m_2+1)}_{(0,t)}\big\|_{m_2+1} \leq K'_b.$$

$\mathcal{A}_5$: Funkcionali a, b i njihovi Frešeovi izvodi po prvom argumentu reda $m_1 + 1$ i $m_2 + 1$, respektivno, zadovoljavaju polinomijalne uslove: postoje pozitivni realni brojevi D_a, D_b, D'_a i D'_b i nenegativni celi brojevi q_a, q_b, q'_a i q'_b tako da za svako $x, y \in V$ i $t \in [t_0, T]$, važi

$$\begin{aligned}
&\big|a(x,t) - a(y,t)\big|^2 \leq D_a\big(1 + \|x\|^{q_a} + \|y\|^{q_a}\big)\|x - y\|^2,\\
&\big|b(x,t) - b(y,t)\big|^2 \leq D_b\big(1 + \|x\|^{q_b} + \|y\|^{q_b}\big)\|x - y\|^2,\\
&\big\|a^{(m_1+1)}_{(x,t)} - a^{(m_1+1)}_{(y,t)}\big\|^2_{m_1+1} \leq D'_a\big(1 + \|x\|^{q'_a} + \|y\|^{q'_a}\big)\|x - y\|^2,\\
&\big\|b^{(m_2+1)}_{(x,t)} - b^{(m_2+1)}_{(y,t)}\big\|^2_{m_2+1} \leq D'_b\big(1 + \|x\|^{q'_b} + \|y\|^{q'_b}\big)\|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_6$: Postoje jedinstvena rešenja x i x^n jednačina (2.3.1) i (2.3.3), respektivno, tako da za $p \geq 2$, važi

$$\begin{aligned}
&E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t)\big|^{2p(1\vee q)} \leq Q < \infty,\\
&E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x^n(t)\big|^{2p[1+(M\vee(q/2))][2+M+(M\vee(q/2))]} \leq Q < \infty,
\end{aligned}$$

gde je Q pozitivna konstanta nezavisna od n, $q = q_a \vee q_b \vee q'_a \vee q'_b$ i $M = m_1 \vee m_2$.

Pretpostavja se da postoje jedinstvena rešenja jednačina (2.3.1) i (2.3.3), bez uvđenja konkretnih uslova koje zadovoljavaju njihovi koeficijenti. Međutim, konstruisan je primer koji ilustruje da postoje SFDJ koje zadovoljavaju uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja, kao i pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_6$.

Pretpostavlja se da su svi Lebegovi i Itovi integrali dobro definisani.

Pokazuje se L^p i skoro izvesna konvergencija procesa $x^n = \{x^n(s) \mid s \in [t_0 - \tau, T]\}$, koji je nastao povezivanjem rešenja jednačina (2.3.3), ka procesu $x = \{x(s) \mid s \in [t_0 - \tau, T]\}$ koji je rešenje jednačine (2.3.1) sa početnim uslovom (1.3.15). U tu svrhu se dokazuju sledeći rezultati.

Propozicija 2.3.6. *Neka* $\{x^n(t)\,|\,t \in [t_k-\tau, t_{k+1}]\}$, $k \in \{0,\dots,n-1\}$, *reprezentuju rešenja jednačina* (2.3.3) *sa početnim uslovom* (1.3.15) *i pretpostavlja se da su zadovoljeni uslovi* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_6$. *Tada, za svako* $0 < r \le \big(M+2+[M \vee \frac{q}{2}]\big)p$, *važi*

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \le C\delta_n^{r/2}, \quad t\in[t_k,t_{k+1}],\ k\in\{0,\dots,n-1\},$$

gde je C *konstanta nezavisna od* n *i nezavisna od* δ_n.

Dokaz. Radi jednostavnosti su uvedene oznake

$$A(x_t^n,t;x_{t_k}^n) = \sum_{i=0}^{m_1}\frac{a^{(i)}_{(x_{t_k}^n,t)}\big(x_t^n-x_{t_k}^n,\dots,x_t^n-x_{t_k}^n\big)}{i!},$$
$$B(x_t^n,t;x_{t_k}^n) = \sum_{i=0}^{m_2}\frac{b^{(i)}_{(x_{t_k}^n,t)}\big(x_t^n-x_{t_k}^n,\dots,x_t^n-x_{t_k}^n\big)}{i!}.$$

U nastavku je razmatran slučaj $r\ge 2$. Slučaj $0<r<2$ se može jednostavno dokazati primenom Helderove nejednakosti sa konjugovanim eksponentima $(2/r, 2/(2-r))$.

Koristeći nejednakost (1.5.3), Helderovu nejednakost za odgovarajući Lebegov integral i konjugovane eksponente $(r, r/(r-1))$, Burkholder–Dejvis–Gandijevu nejednakost, Helderovu nejednakost sa konjugovanim eksponentima $(r/2, r/(r-2))$ (za $r>2$), izometriju Itoa, Dubovu martingalnu nejednakost (za $r=2$) i Fubinijevu teoremu za odgovarajući stohastički integral, dobija se

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \le 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}-1}\big[(t-t_k)^{r/2}J_1(t)+c_rJ_2(t)\big], \tag{2.3.25}$$

gde je

$$J_1(t)=\int_{t_k}^t E\big|A(x_s^n,s;x_{t_k}^n)\big|_E^r\,ds, \quad J_2(t)=\int_{t_k}^t E\big|B(x_s^n,s;x_{t_k}^n)\big|^r\,ds$$

i konstanta $c_r>0$ je dobijena primenom Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti.

Integral $J_1(t)$ se ocenjuje primenom pretpostavke $\mathcal{A}_1$ i nejednakosti (1.5.3). Radi jednostavnosti, uvodi se oznaka $\Delta_s^n = x_s^n - x_{t_k}^n$, za $s\in[t_k,t_{k+1}]$, $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Postoji $\bar\theta\in(0,1)$ tako da važi

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int_{t_k}^t E\Big|a(x_s^n,s)-\big[a(x_s^n,s)+A(x_s^n,s;x_{t_k}^n)\big]\Big|^r ds\\ &= \int_{t_k}^t E\left|a(x_s^n,s)-\frac{a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n,s)}(\Delta_s^n,\dots,\Delta_s^n)}{(m_1+1)!}\right|^r ds\\ &\le 2^{r-1}\Big[\int_{t_k}^t E\big|a(x_s^n,s)\big|^r ds+\frac{1}{[(m_1+1)!]^r}\int_{t_k}^t E\big|a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n,s)}(\Delta_s^n,\dots,\Delta_s^n)\big|^r ds\Big]. \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Naredni deo biće dokazan primenom relacije (1.5.3), kao i $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5$ i $\mathcal{A}_6$, tako da je

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^t E\big|a(x_s^n,s)\big|^r ds =& \int_{t_k}^t E\big|a(x_s^n,s)-a(0,s)+a(0,s)\big|^r ds\\ \le& 2^{r-1}\Big[\int_{t_k}^t E\Big(\big|a(x_s^n,s)-a(0,s)\big|^2\Big)^{r/2} ds + K_a^r(t-t_k)\Big]\\ \le& 2^{r-1}\Big[D_a^{r/2}\int_{t_k}^t E\big(1+\|x_s^n\|^{q_a}\big)^{r/2}\|x_s^n\|^r ds + K_a^r(t-t_k)\Big]\\ \le& 2^{r-1}\Big[D_a^{r/2}2^{r/2-1}\Big(\int_{t_k}^t E\|x_s^n\|^r ds + \int_{t_k}^t E\|x_s^n\|^{r(1+q_a/2)} ds\Big) + K_a^r(t-t_k)\Big]\\ \le& 2^{r-1}\Big[D_a^{r/2}2^{r/2}(1+Q)(t-t_k)+K_a^r(t-t_k)\Big],\end{aligned}$$

odnosno

$$\int_{t_k}^t E\big|a(x_s^n,s)\big|^r ds \le K'(t-t_k), \tag{2.3.27}$$

gde je

$$K' = 2^{r-1}\big(D_a^{r/2}2^{r/2}(1+Q)+K_a^r\big)$$

konstanta nezavisna od n i od δ_n.

Primenom (1.6.3), pretpostavki $\mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_6$, kao i (1.5.3), dobija se

$$\begin{aligned}&\big|a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n,s)}(\Delta_s^n,\dots,\Delta_s^n)\big|^r\\ &\quad\le \big\|a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n,s)} - a^{(m_1+1)}_{(0,s)} + a^{(m_1+1)}_{(0,s)}\big\|^r_{m_1+1}\cdot\big\|\Delta_s^n\big\|^{r(m_1+1)}\\ &\quad\le 2^{r-1}\Big[\Big(D_a'\big(1+\|x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n\|^{q_a'}\big)\|x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n\|^2\Big)^{r/2} + (K_a')^r\Big]\big\|\Delta_s^n\big\|^{r(m_1+1)}\\ &\quad\le 2^{3r/2-2}(D_a')^{r/2}\Big[\Big(\|x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n\|^r + \|x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n\|^{r(1+q_a'/2)}\Big)\big\|\Delta_s^n\big\|^{r(m_1+1)}\Big]\\ &\qquad + 2^{r-1}(K_a')^r\big\|\Delta_s^n\big\|^{r(m_1+1)}.\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Drugi sabirak na desnoj strani u (2.3.26) može se oceniti na osnovu (2.3.28) primenom nejednakosti (1.5.3). Tada je

$$\begin{aligned}&\int_{t_k}^t E\big|a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n,s)}(\Delta_s^n,\dots,\Delta_s^n)\big|^r ds\\ &\quad\le 2^{3r/2-2}(D_a')^{r/2}\Big[\int_{t_k}^t E\|x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n\|^r\big\|\Delta_s^n\big\|^{r(m_1+1)} ds\\ &\qquad\qquad + \int_{t_k}^t E\|x_{t_k}^n+\bar\theta\Delta_s^n\|^{r(1+q_a'/2)}\big\|\Delta_s^n\big\|^{r(m_1+1)} ds\Big]\\ &\qquad + 2^{r-1}(K_a')^r\int_{t_k}^t E\big\|\Delta_s^n\big\|^{r(m_1+1)} ds,\end{aligned}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a^{(m_1+1)}_{(x^n_{t_k}+\bar\theta\Delta^n_s,s)}(\Delta^n_s,\dots,\Delta^n_s)\big|^r ds\\
&\quad\le (D'_a)^{r/2}2^{r(m_1+7/2)-4}\\
&\quad\quad\cdot\bigg\{\int_{t_k}^{t}E\Big(|1-\bar\theta|^r\big\|x^n_{t_k}\big\|^r+|\bar\theta|^r\big\|x^n_s\big\|^r\Big)\Big(\big\|x^n_s\big\|^{r(m_1+1)}+\big\|x^n_{t_k}\big\|^{r(m_1+1)}\Big)ds\\
&\quad\quad\quad+2^{rq'_a/2}\int_{t_k}^{t}E\Big[\Big(|1-\bar\theta|^{r(1+q'_a/2)}\big\|x^n_{t_k}\big\|^{r(1+q'_a/2)}+|\bar\theta|^{r(1+q'_a/2)}\big\|x^n_s\big\|^{r(1+q'_a/2)}\Big)\\
&\quad\quad\quad\quad\cdot\Big(\big\|x^n_s\big\|^{r(m_1+1)}+\big\|x^n_{t_k}\big\|^{r(m_1+1)}\Big)\Big]ds\bigg\}\\
&\quad\quad+(K'_a)^r2^{r(m_1+2)-2}\int_{t_k}^{t}E\Big(\big\|x^n_s\big\|^{r(m_1+1)}+\big\|x^n_{t_k}\big\|^{r(m_1+1)}\Big)ds.
\end{aligned}
$$

Primenom Helderove nejednakosti sa konjugovanim eksponentima $(2,2)$ na izraze oblika $E\big(\|x^n_s\|^\alpha\|x^n_{t_k}\|^\beta\big)$ u prethodnim ocenama, odnosno nejednakosti Koši–Švarc–Bunjakovskog, imajući u vidu da je $0<\theta<1$, i konačno primenom pretpostavke $\mathcal{A}_6$, dobija se

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a^{(m_1+1)}_{(x^n_{t_k}+\bar\theta\Delta^n_s,s)}(\Delta^n_s,\dots,\Delta^n_s)\big|^r ds\\
&\quad\le 2^{r(m_1+7/2)-4}(D'_a)^{r/2}\\
&\quad\quad\cdot\bigg\{\bigg[(1-\bar\theta)^r\bigg(\int_{t_k}^{t}\big(E\|x^n_{t_k}\|^{2r}\big)^{1/2}\big(E\|x^n_s\|^{2r(m_1+1)}\big)^{1/2}ds+\int_{t_k}^{t}E\|x^n_{t_k}\|^{r(m_1+2)}ds\bigg)\\
&\quad\quad\quad+\bar\theta^r\bigg(\int_{t_k}^{t}E\|x^n_s\|^{r(m_1+2)}ds+\int_{t_k}^{t}\big(E\|x^n_s\|^{2r}\big)^{1/2}\big(E\|x^n_{t_k}\|^{2r(m_1+1)}\big)^{1/2}ds\bigg)\bigg]\\
&\quad\quad\quad+2^{rq'_a/2}\bigg[(1-\bar\theta)^{r(1+q'_a/2)}\bigg(\int_{t_k}^{t}\big(E\|x^n_{t_k}\|^{2r(1+q'_a/2)}\big)^{1/2}\big(E\|x^n_s\|^{2r(m_1+1)}\big)^{1/2}ds\\
&\quad\quad\quad\quad+\int_{t_k}^{t}E\|x^n_{t_k}\|^{r(m_1+2+q'_a/2)}ds\bigg)\\
&\quad\quad\quad+\bar\theta^{r(1+q'_a/2)}\bigg(\int_{t_k}^{t}E\|x^n_s\|^{r(m_1+2+q'_a/2)}ds\\
&\quad\quad\quad\quad+\int_{t_k}^{t}\big(E\|x^n_s\|^{2r(1+q'_a/2)}\big)^{1/2}\big(E\|x^n_{t_k}\|^{2r(m_1+1)}\big)^{1/2}ds\bigg)\bigg]\bigg\}\\
&\quad\quad+2^{r(m_1+2)-2}(K'_a)^r\int_{t_k}^{t}\big(E\|x^n_s\|^{r(m_1+1)}+E\|x^n_{t_k}\|^{r(m_1+1)}\big)ds\\
&\quad\le 2^{r(m_1+2)-1}(1+Q)(t-t_k)\\
&\quad\quad\cdot\Big\{(K'_a)^r+(D'_a)^{r/2}2^{3r/2-2}\Big[\big((1-\bar\theta)^r+\bar\theta^r\big)+2^{rq'_a/2}\big((1-\bar\theta)^{r(1+q'_a/2)}+\bar\theta^{r(1+q'_a/2)}\big)\Big]\Big\}\\
&\quad\le K''(t-t_k),
\end{aligned}
\tag{2.3.29}
$$

gde je

$$
K''=2^{r(m_1+2)-1}(1+Q)\big[(D'_a)^{r/2}2^{3r/2-1}(1+2^{rq'_a/2})+(K'_a)^r\big].
$$

Zamenom relacija (2.3.27) i (2.3.29) u (2.3.25), očigledno se dobija

$$J_1(t) \le 2^{r-1}\Big[K' + \big[(m_1+1)!\big]^{-r}K''\Big](t-t_k). \tag{2.3.30}$$

Analogna procedura za $J_2(t)$ daje

$$J_2(t) \le 2^{r-1}\Big[L' + \big[(m_2+1)!\big]^{-r}L''\Big](t-t_k), \tag{2.3.31}$$

gde je

$$\begin{aligned} L' &= 2^{r-1}\big(D_b^{r/2}2^{r/2}(1+Q)+K_b^r\big),\\ L'' &= 2^{r(m_2+2)-1}(1+Q)\big[(D_b')^{r/2}2^{3r/2-1}(1+2^{rq_b'/2})+(K_b')^r\big]. \end{aligned}$$

Primenom (2.3.30) i (2.3.31) na (2.3.25) kompletiran je dokaz, gde je

$$C = 2^{2r-2}\Big\{(T-t_0)^{r/2}\big[K'+[(m_1+1)!]^{-r}K''\big] + c_r\big[L'+[(m_2+1)!]^{-r}L''\big]\Big\}$$

konstanta nezavisna od n i od δ_n.

Primetimo da u prethodnom dokazu činjenica da je particija (2.3.2) ekvidistantna, ne igra nikakvu ulogu. To nije slučaj sa sledećom propozicijom.

Propozicija 2.3.7. *Neka su ispunjeni uslovi Propozicije 2.3.6, kao i pretpostavka $\mathcal{A}_2$. Tada, za svako $0<r\le \big(M+2+[M\vee \frac{q}{2}]\big)p$, važi*

$$E\big\|x_t^n - x_{t_k}^n\big\|^r \le \bar{B}\delta_n^{r/2}, \quad t\in[t_k,t_{k+1}],\ k\in\{0,\dots,n-1\},$$

gde je $\bar{B}$ pozitivna konstanta nezavisna od n i od δ_n.

Dokaz. Prezentovan je dokaz za $r\ge 2$. U slučaju $0<r<2$ važi analogna analiza kao u dokazu Propozicije 2.3.6.

Neka je $t\in[t_k,t_{k+1}]$ za fiksirano $k\in\{0,\dots,n-1\}$ i neka su definisani skupovi S_1 i S_2 kao $S_1=\{t\in[t_0-\tau,T]\,|\,t-\tau<t_0\}$ i $S_2=\{t\in[t_0-\tau,T]\,|\,t_k-\tau<t_0\le t-\tau\}$. Tada je

$$E\big\|x_t^n - x_{t_k}^n\big\|^r \le E_1+E_2+E_3, \tag{2.3.32}$$

gde je

$$\begin{aligned} E_1 &= E\sup_{u\in[t_k-\tau,t_0+t_k-t]}\big|\eta(u+t-t_k-t_0)-\eta(u-t_0)\big|^r\cdot\chi_{S_1}(t),\\ E_2 &= E\sup_{u\in[t_0+t_k-t,t_0]}\big|x^n(u+t-t_k)-\eta(u-t_0)\big|^r\cdot\chi_{S_1\cup S_2}(t),\\ E_3 &= E\sup_{u\in[t_0,t_k]}\big|x^n(u+t-t_k)-x^n(u)\big|^r. \end{aligned}$$

Da bi dokaz bio kompletan, navedeni su neki delovi dokaza [61, Proposition 2]. Skoro izvesna neprekidnost procesa x^n i kompaktnost segmenta $[t_0,t_k]$ impliciraju da postoje $i\in\{0,\dots,k-1\}$ i $v\in[t_i,t_{i+1}]$ tako da važi $\sup_{u\in[t_0,t_k]}|x^n(u+t-t_k)-x^n(u)|^r = |x^n(v+t-t_k)+x^n(v)|^r$. Razlikovanjem slučaja kada $v+t-t_k$ pripada $[t_i,t_{i+1}]$ ili $[t_{i+1},t_{i+2}]$, dodavanjem i oduzimanjem člana $x^n(t_i)$, odnosno $x^n(t_i)$ i $x^n(t_{i+1})$, respektivno, primenom (1.5.3) i Propozicije 2.3.6, sledi da važi

$$E_3 \le 3^rC\delta_n^{r/2}. \tag{2.3.33}$$

Kako je

$$E_2 \leq 2^{r-1}\Big[E \sup_{u\in[t_0+t_k-t,t_0]} \big|x^n(u+t-t_k) - x^n(t_0)\big|^r + E \sup_{u\in[t_0+t_k-t,t_0]} \big|\eta(0) - \eta(u-t_0)\big|^r\Big],$$

primenom pretpostavke $\mathcal{A}_2$ sledi da važi

$$\big|\eta(0) - \eta(u-t_0)\big|^r \leq D'^{r/2}(1 + |u-t_0|^{q'})^{r/2}|u-t_0|^r,$$

gde $u - t_0$ pripada segmentu $[-\tau, 0]$, preciznije $u - t_0 \in [t_k - t, 0]$. Stoga važi da je

$$\big|\eta(0) - \eta(u-t_0)\big|^r \leq D'^{r/2}(1 + \tau^{q'})^{r/2}\big(1 \wedge \tau\big)^{r/2}\delta_n^{r/2}.$$

Kombinujući prethodne relacije sa Propozicijom 2.3.6 dolazi se do zaključka

$$E_2 \leq 2^{r-1}\Big[C + D'^{r/2}(1 + \tau^{q'})^{r/2}\big(1 \wedge \tau\big)^{r/2}\Big]\delta_n^{r/2}. \tag{2.3.34}$$

Slično, za ocenu izraza E_1, dobija se

$$\begin{aligned}&\big|\eta(u+t-t_k-t_0) - \eta(u-t_0)\big|^r \\ &\qquad\leq D'^{r/2}(1 + |u+t-t_k-t_0|^{q'} + |u-t_0|^{q'})^{r/2}|t-t_k|^r.\end{aligned}$$

Obe vrednosti $u + t - t_k - t_0$ i $u - t_0$ pripadaju segmentu $[-\tau, 0]$, tako da je

$$E_1 \leq D'^{r/2}(1 + 2\tau^{q'})^{r/2}\big(1 \wedge \tau\big)^{r/2}\delta_n^{r/2}. \tag{2.3.35}$$

Na kraju, relacije (2.3.33), (2.3.34) i (2.3.35), zajedno sa (2.3.32), impliciraju neposredno dokaz propozicije sa pozitivnom konstantom

$$\bar{B} = 3^r C + 2^{r-1}\big[C + D'^{r/2}(1 + \tau^{q'})^{r/2}\big(1 \wedge \tau\big)^{r/2}\big] + D'^{r/2}(1 + 2\tau^{q'})^{r/2}\big(1 \wedge \tau\big)^{r/2},$$

koja je nezavisna od n i od δ_n. $\square$

U sledećoj teoremi određuje se red L^p konvergencije uvedenog analitičkog metoda. Dokazano je da ako stepeni Tejlorovih aproksimacija funkcionala a i b rastu, onda raste i bliskost rešenja x i x^n u smislu L^p–norme.

Teorema 2.3.8. *Neka važe sve pretpostavke Propozicije 2.3.7, neka je x rešenje jednačine* (2.3.1) *sa početnim uslovom* (1.3.15)*, i neka su x^n rešenja jednačina* (2.3.3)*. Tada, za svako $p > 0$ važi*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t) - x^n(t)\big|^p \leq H\delta_n^{(m+1)p/2},$$

gde je $m = m_1 \wedge m_2$, i H je konstanta nezavisna od n i od δ_n.

Dokaz. Analogno dokazima propozicija 2.3.6 i 2.3.7, razmatraće se samo slučaj $p \geq 2$.

Neka je j najveći ceo broj tako da je $t \in [t_j, T]$. Primenjujući Helderovu nejednakost sa konjugovanim eksponentima $(p, p/(p-1))$ na odgovarajući Lebegov integral, Helderovu nejednakost sa konjugovanim eksponentima $(p/2, p/(p-2))$, Burkholder–Dejvis–Gandijevu nejednakost (za $p > 2$), izometriju Itoa, Dubovu martingalnu nejednakost (za $p = 2$) za odgovarajući Itov integral i Fubinijevu teoremu, dobija se

$$\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} \big|x(s) - x^n(s)\big|^p \\
&\qquad \le 2^{p-1}(T-t_0)^{p-1} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\big|a(x_u,u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p\, du \\
&\qquad\quad + 2^{p-1}(T-t_0)^{p-1} \int_{t_j}^{t} E\big|a(x_u,u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p\, du \\
&\qquad\quad + 2^{p-1}c_p(T-t_0)^{p/2-1} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\big|b(x_u,u) - B(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p\, du \\
&\qquad\quad + 2^{p-1}c_p(T-t_0)^{p/2-1} \int_{t_j}^{t} E\big|b(x_u,u) - B(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p\, du. \qquad (2.3.36)
\end{aligned}$$

Lako je proveriti da, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \ldots, j\}$, važi

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u,u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p du \\
&\quad = \int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u,u) - a(x_u^n,u) + a(x_u^n,u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p du \\
&\quad \le 2^{p-1}\bigg(\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u,u) - a(x_u^n,u)\big|^p du + \int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u^n,u) - A(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p du\bigg). \qquad (2.3.37)
\end{aligned}$$

Prilikom ocenjivanja prvog sabirka u (2.3.37) potrebno je uočiti da polinomijalni uslov $\mathcal{A}_5$ i nejednakost Koši–Švarc–Bunjakovskog povlače

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u,u) - a(x_u^n,u)\big|^p du \\
&\quad \le \int_{t_k}^{t} E\Big[D_a\big(1 + \|x_u\|^{q_a} + \|x_u^n\|^{q_a}\big)\|x_u - x_u^n\|^2\Big]^{p/2} du \\
&\quad \le D_a^{p/2} \int_{t_k}^{t} \bigg\{E\Big[\big(1 + \|x_u\|^{q_a} + \|x_u^n\|^{q_a}\big)\|x_u - x_u^n\|\Big]^p\bigg\}^{1/2} \Big\{E\|x_u - x_u^n\|^p\Big\}^{1/2} du. \qquad (2.3.38)
\end{aligned}$$

Primenjujući nejednakosti Koši–Švarc–Bunjakovskog i (1.5.3), kao i $\mathcal{A}_6$, može se zaključiti da je

$$\begin{aligned}
&E\Big[\big(1 + \|x_u\|^{q_a} + \|x_u^n\|^{q_a}\big)\|x_u - x_u^n\|\Big]^p \\
&\qquad \le 3^{p-1}2^{p-1} E\Big[\big(1 + \|x_u\|^{pq_a} + \|x_u^n\|^{pq_a}\big)\big(\|x_u\|^p + \|x_u^n\|^p\big)\Big] \\
&\qquad \le 6^{p-1}\Big[E\|x_u\|^p + E\|x_u^n\|^p + E\|x_u\|^{p(1+q_a)} + E\|x_u^n\|^{p(1+q_a)} \\
&\qquad\qquad + \big(E\|x_u\|^{2p}\big)^{1/2}\big(E\|x_u^n\|_V^{2pq_a}\big)^{1/2} + \big(E\|x_u\|^{2pq_a}\big)^{1/2}\big(E\|x_u^n\|^{2p}\big)^{1/2}\Big] \\
&\qquad \le 6^p(1+Q).
\end{aligned}$$

Tada (2.3.38) postaje

$$\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u,u)-a(x_u^n,u)\big|^p du \leq D_a^{p/2}\big(6^p(1+Q)\big)^{1/2}\int_{t_k}^{t}\big(E\|x_u-x_u^n\|^p\big)^{1/2}du. \tag{2.3.39}$$

Drugi sabirak u (2.3.37) se ocenjuje primenom uslova $\mathcal{A}_1$ i relacije (1.6.3), tako da je

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u^n,u)-A(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du\\
&\quad\equiv \int_{t_k}^{t} E\left|\frac{a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar{\theta}\Delta_u^n,u)}(\Delta_u^n,\dots,\Delta_u^n)}{(m_1+1)!}\right|^p du \qquad (2.3.40)\\
&\quad\leq \big[(m_1+1)!\big]^{-p}\int_{t_k}^{t} E\Big(\sup_{\bar{\theta}\in[0,1]}\|a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar{\theta}\Delta_u^n,u)}\|^p_{m_1+1}\|\Delta_u^n\|^{(m_1+1)p}\Big)du,
\end{aligned}$$

gde je $\Delta_u^n=x_s^n-x_{t_k}^n$, kao u Propoziciji 2.3.7. Primena relacije (1.5.3) više puta, kao i $\mathcal{A}_4$ i $\mathcal{A}_5$, povlači

$$\begin{aligned}
&\sup_{\bar{\theta}\in[0,1]}\big\|a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar{\theta}\Delta_u^n,u)}\big\|^p_{m_1+1}\\
&\quad\leq 2^{p-1}\Big\{\big\|a^{(m_1+1)}_{(0,u)}\big\|^p_{m_1+1}+\sup_{\theta\in[0,1]}\big\|a^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n+\bar{\theta}\Delta_u^n,u)}-a^{(m_1+1)}_{(0,u)}\big\|^p_{m_1+1}\Big\}\\
&\quad\leq 2^{p-1}\bigg\{(K_a')^p+\sup_{\theta\in[0,1]}\Big[D_a'\big(1+\|x_{t_k}^n+\bar{\theta}\Delta_u^n\|^{q_a'}\big)\|x_{t_k}^n+\bar{\theta}\Delta_u^n\|^2\Big]^{p/2}\bigg\}\\
&\quad\leq 2^{p-1}\bigg\{(K_a')^p+(D_a')^{p/2}2^{3p/2-2}\Big[\sup_{\bar{\theta}\in[0,1]}\big(\|x_{t_k}^n\|^p+\bar{\theta}^p\|\Delta_u^n\|^p\big)\\
&\qquad\quad+2^{pq_a'/2}\sup_{\bar{\theta}\in[0,1]}\big(\|x_{t_k}^n\|^{p(1+q_a'/2)}+\bar{\theta}^{p(1+q_a'/2)}\|\Delta_u^n\|^{p(1+q_a'/2)}\big)\Big]\bigg\}\\
&\quad\leq 2^{p-1}\bigg\{(K_a')^p+(D_a')^{p/2}2^{3p/2-2}\Big[\|x_{t_k}^n\|^p+\|\Delta_u^n\|^p\\
&\qquad\quad+2^{pq_a'/2}\big(\|x_{t_k}^n\|^{p(1+q_a'/2)}+\|\Delta_u^n\|^{p(1+q_a'/2)}\big)\Big]\bigg\}.
\end{aligned}$$

Tada (2.3.40) postaje

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|a(x_u^n,u)-A(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du\\
&\quad\leq\frac{2^{p-1}}{\big[(m_1+1)!\big]^p}\\
&\qquad\cdot\int_{t_k}^{t} E\bigg\{\Big[(K_a')^p+(D_a')^{p/2}2^{3p/2-2}\Big(\|x_{t_k}^n\|^p+\|\Delta_u^n\|^p\\
&\qquad\qquad+2^{pq_a'/2}\big(\|x_{t_k}^n\|^{p(1+q_a'/2)}+\|\Delta_u^n\|^{p(1+q_a'/2)}\big)\Big)\Big]\|\Delta_u^n\|^{(m_1+1)p}\bigg\}du\\
&\quad\equiv\int_{t_k}^{t} E\Big[K_1\|\Delta_u^n\|^{(m_1+1)p}+K_2\|\Delta_u^n\|^{(m_1+2)p}+K_3\|\Delta_u^n\|^{(m_1+2+q_a'/2)p}\\
&\qquad\qquad+K_4\|x_{t_k}^n\|^p\|\Delta_u^n\|^{(m_1+1)p}+K_5\|x_{t_k}^n\|^{p(1+q_a'/2)}\|\Delta_u^n\|^{(m_1+1)p}\Big]du, \qquad (2.3.41)
\end{aligned}$$

gde je

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{2^{p-1}(K_a')^p}{\big[(m_1+1)!\big]^p}, \quad K_2 = K_4 = \frac{2^{5p/2-3}(D_a')^{p/2}}{\big[(m_1+1)!\big]^p},\\
K_3 &= K_5 = \frac{2^{p(5/2+q_a'/2)-3}(D_a')^{p/2}}{\big[(m_1+1)!\big]^p}.
\end{aligned}
\tag{2.3.42}
$$

Na kraju, primenjujući relaciju (1.5.3), nejednakost Koši–Švarc–Bunjakovskog, pretpostavku $\mathcal{A}_6$ i Propoziciju 2.3.7, (2.3.41) povlači da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_k}^t E\big|a(x_u^n,u) - A(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du\\
&\quad \le \int_{t_k}^t \Big\{E\Big[K_1\|\Delta_u^n\|^{(m_1+1)p} + K_2\|\Delta_u^n\|^{(m_1+2)p} + K_3\|\Delta_u^n\|^{(m_1+2+q_a'/2)p}\Big]\\
&\qquad\qquad + K_4\big(E\|x_{t_k}^n\|^{2p}\big)^{1/2}\big(E\|\Delta_u^n\|^{2(m_1+1)p}\big)^{1/2}\\
&\qquad\qquad + K_5\big(E\|x_{t_k}^n\|^{2p(1+q_a'/2)}\big)^{1/2}\big(E\|\Delta_u^n\|^{2(m_1+1)p}\big)^{1/2}\Big\}du\\
&\quad \le \int_{t_k}^t \Big\{E\Big[K_1\|\Delta_u^n\|^{(m_1+1)p} + K_2\|\Delta_u^n\|^{(m_1+2)p} + K_3\|\Delta_u^n\|^{(m_1+2+q_a'/2)p}\Big]\\
&\qquad\qquad +(1+Q)^{1/2}\Big[K_4\big(E\|\Delta_u^n\|^{2(m_1+1)p}\big)^{1/2}+K_5\big(E\|\Delta_u^n\|^{2(m_1+1)p}\big)^{1/2}\Big]\Big\}du\\
&\quad \le \Big[\bar{B}\Big(K_1\delta_n^{(m_1+1)p/2} + K_2\delta_n^{(m_1+2)p/2} + K_3\delta_n^{(m_1+2+q_a'/2)p/2}\Big)\\
&\qquad\quad + (K_4+K_5)\big((1+Q)\bar{B}\big)^{1/2}\delta_n^{(m_1+1)p/2}\Big](t-t_k).
\end{aligned}
$$

Kako je $(m_1+1)p/2 = \big[(m_1+1)p/2\big] \wedge \big[(m_1+2)p/2\big] \wedge \big[(m_1+2+q_a'/2)p/2\big]$ i δ_n manje od 1, tada je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_k}^t E\big|a(x_u^n,u) - A(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du\\
&\qquad \le \big[\bar{B}(K_1+K_2+K_3) + ((1+Q)\bar{B})^{1/2}(K_4+K_5)\big]\delta_n^{(m_1+1)p/2}(t-t_k).
\end{aligned}
\tag{2.3.43}
$$

Imajući u vidu (2.3.39) i (2.3.43), na osnovu nejednakosti (2.3.37) sledi da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_k}^t E\big|a(x_u,u) - A(x_u^n,u;x_{t_k}^n)\big|^p du\\
&\quad \le 2^{p-1}\Big[D_a^{p/2}\big(6^p(1+Q)\big)^{1/2}\int_{t_k}^t \big(E\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2}du\\
&\qquad\quad +\big[\bar{B}(K_1+K_2+K_3)+\big((1+Q)\bar{B}\big)^{1/2}(K_4+K_5)\big]\delta_n^{(m_1+1)p/2}(t-t_k)\Big].
\end{aligned}
\tag{2.3.44}
$$

Analogno se mogu dokazati slični rezultati za funkcionale b i B za svako $k \in \{0,\dots,j\}$

i $t \in [t_k, t_{k+1}]$, odnosno

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} E\big|b(x_u,u) - B(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\big|^p du \\
&\quad\le 2^{p-1}\Big[D_b^{p/2}\big(6^p(1+Q)\big)^{1/2}\int_{t_k}^{t}\big(E\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2}du \\
&\qquad + \big[\bar{B}(K_1'+K_2'+K_3') + \big((1+Q)\bar{B}\big)^{1/2}(K_4'+K_5')\big]\delta_n^{(m_2+1)p/2}(t-t_k)\Big],
\end{aligned} \tag{2.3.45}$$

gde su konstante K_i' istog oblika kao K_i, $i = 1,\dots,5$, u (2.3.42), dok su m_1, K_a', D_a' i q_a' redom zamenjene sa m_2, K_b', D_b' i q_b'.

Nejednakosti (2.3.44) i (2.3.45) primenjene na (2.3.36) daju

$$\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}\big|x(s) - x^n(s)\big|^p \\
&\quad\le 2^{5p/2-2}3^{p/2}(1+Q)^{1/2}(T-t_0)^{p/2-1}\big[(T-t_0)^{p/2}D_a^{p/2} + c_p D_b^{p/2}\big] \\
&\qquad\cdot\int_{t_0}^{t}\big(E\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2}du \\
&\qquad + 2^{2p-2}(T-t_0)^{p/2-1}\big[(T-t_0)^{p/2} + c_p\big]\bar{B}^{1/2}(t-t_0) \\
&\qquad\cdot\Big\{\big[\bar{B}^{1/2}(K_1+K_2+K_3) + (1+Q)^{1/2}(K_4+K_5)\big]\delta_n^{(m_1+1)p/2} \\
&\qquad\quad + \big[\bar{B}^{1/2}(K_1'+K_2'+K_3') + (1+Q)^{1/2}(K_4'+K_5')\big]\delta_n^{(m_2+1)p/2}\Big\} \\
&\quad\le L_1\int_{t_0}^{t}\big(E\|x_u - x_u^n\|^p\big)^{1/2}du + L_2\delta_n^{(m+1)p/2} \\
&\quad\le L_1\int_{t_0}^{t}\big(E\sup_{s\in[t_0-\tau,u]}|x(s) - x^n(s)|^p\big)^{1/2}du + L_2\delta_n^{(m+1)p/2},
\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

jer je δ_n manje od 1, gde je

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2^{5/2p-2}3^{p/2}(1+Q)^{1/2}(T-t_0)^{p/2-1}\big[(T-t_0)^{p/2}D_a^{p/2} + c_p D_b^{p/2}\big], \\
L_2 &= 2^{2p-2}(T-t_0)^{p/2}\big[(T-t_0)^{p/2} + c_p\big]\bar{B}^{1/2} \\
&\quad\cdot\big[\bar{B}^{1/2}(K_1+K_2+K_3) + (1+Q)^{1/2}(K_4+K_5) \\
&\qquad + \bar{B}^{1/2}(K_1'+K_2'+K_3') + (1+Q)^{1/2}(K_4'+K_5')\big].
\end{aligned}$$

Relacija (2.3.46) ima oblik (1.5.6) i nejednakost Biharijevog tipa (Teorema 1.5.13) primenjena na (2.3.46) dokazuje teoremu ako važe sve njene pretpostavke. Zaista, neka je funkcija $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definisana kao $\varphi(y) = y^{1/2}$ i ona je neopadajuća, pozitivna za pozitivne argumente i zadovoljava relaciju $\varphi(y) \le \alpha\varphi(y/\alpha)$, za svako $y \in [0,\infty)$ i $\alpha \ge 1$. Takođe, izraz $E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}\big|x(s) - x^n(s)\big|^p$, posmatran kao funkcija argumenta t, $t \in [t_0, T]$, je nenegativna i neprekidna funkcija. Tada, primenom Teoreme 1.5.13 sledi

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}\big|x(s) - x^n(s)\big|^p \le L_2\delta_n^{(m+1)p/2}\frac{1}{4}\big(2 + L_1T\big)^2 = H\delta_n^{(m+1)p/2},$$

gde je $G(y) = \int_0^y \frac{ds}{\varphi(s)}ds = 2y^{1/2}$, za $y > 0$, a njena inverzna funkcija je $G^{-1}(y) = \frac{1}{4}y^2$. Konstanta $H = \frac{L_2}{4}\big(2 + L_1T\big)^2$ je nezavisna od δ_n i od n.

Sledeća teorema dokazuje se analogno kao teoreme 2.1.4 i 2.2.4. Dokaz skoro izvesne konvergencije niza rešenja aproksimativnih jednačina (2.3.3) ka rešenju polazne jednačine (2.3.1) zasniva se na primeni Borel–Kantelijeve leme.

Teorema 2.3.9. *Neka važe pretpostavke Teoreme 2.3.8. Tada niz* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rešenja jednačina* (2.3.3) *konvergira skoro izvesno ka rešenju* x *jednačine* (2.3.1).

Sledeći primer ilustruje prethodna teorijska razmatranja.
Razmatra se jednodimenzionalna ($d = 1$) SFDJ

$$\begin{aligned} dx(t) = \Big[-\alpha(t)C(x(t)) + 0.5\beta(t)\sin\Big(2\int_{-\tau}^{0} K(\theta)x_t(\theta)d\theta\Big)\Big]dt \\ + a_1(t)\sin\Big(\int_{-\tau}^{0} K(\theta)x_t(\theta)d\theta\Big)dw(t), \quad t\in[t_0,T], \end{aligned} \tag{2.3.47}$$

sa početnim uslovom $x_0 = \eta = \{\theta \,|\, \theta \in [-\tau, 0]\}$ nezavisnim od jednodimenzionalnog ($d_1 = 1$) Braunovog kretanja w, gde je $C(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy, x \in \mathbb{R}$ Frenelov[4] integral a α, β i a_1 su nenegativne neprekidne funkcije iz $[0,T]$ u $\mathbb{R}$, te su stoga i ograničene. Pritom je za svako $t \in [t_0, T]$, $\alpha(t) \le \bar{\alpha}$, $\beta(t) \le \bar{\beta}$ i $a_1(t) \le \bar{a}_1$.

Koeficijent prenosa

$$a(x_t, t) = -\alpha(t)C(x(t)) + 0.5\beta(t)\sin\Big(2\int_{-\tau}^{0} K(\theta)x_t(\theta)d\theta\Big)$$

i koeficijent difuzije

$$b(x_t, t) = a_1(t)\sin\Big(\int_{-\tau}^{0} K(\theta)x_t(\theta)d\theta\Big)$$

se razmatraju za proizvoljan fiksiran argument $t \in [t_0, T]$. Drugim rečima, ovi koeficijenti se mogu predstaviti kao funkcionali $a_t \equiv a = f \circ \underline{h} + A_1 : V \to \mathbb{R}$ i $b_t \equiv b = g \circ \underline{h} : V \to \mathbb{R}$, gde je funkcional $\underline{h} : V \to \mathbb{R}$ definisan kao

$$\underline{h}(v) = \int_{-\tau}^{0} K(\theta)v(\theta)d\theta, \quad v \in V,$$

neprekidna funkcija $K : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^+$ zadovoljava uslov $\int_{-\tau}^{0} K(\theta)d\theta = 1$, dok su funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 0.5\beta(t)\sin(2x)$ i $g(x) = a_1(t)\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, a funkcional $A_1 : V \to \mathbb{R}$ je definisan sa $A_1(v) = \alpha(t)C(v(0))$, $v \in V$. Neka je funkcija K izabrana tako da je

$$K(\theta) = \frac{1}{\tau}, \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Koeficijenti prenosa i difuzije iz (2.3.47) su neprekidno diferencijabilni (po prvom argumentu) i oni su globalno Lipšic neprekidni. Preciznije, postoje pozitivne konstante $L_a = 2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)$ i $L_b = \bar{a}_1^2$ tako da, za svako $u, v \in V$ i svako $t \in [t_0, T]$, važi

$$|a(u,t) - a(v,t)|^2 \le L_a\|u - v\|^2, \quad |b(u,t) - b(v,t)|^2 \le L_b\|u - v\|^2.$$

Razmatraće se prvi Frešeovi izvodi koeficijenata $a \equiv a_t$ i $b \equiv b_t$. Jednostavno se utvrđuje da su realne funkcije realnih argumenata f i g diferencijabilne beskonačno mnogo puta u svakoj realnoj tački x, te stoga postoje Frešeovi izvodi f'_x i g'_x u $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ funkcija f i g, respektivno, u tački x. Lako je utvrditi (videti na primer [9, 15]) da je za svako $y \in \mathbb{R}$, $f'_x(y) = f'(x) \cdot y \in \mathbb{R}$ i $g'_x(y) = g'(x) \cdot y \in \mathbb{R}$, gde su izvodi na levoj strani ovih

[4]Fresnel A. J. (1788–1827) - francuski fizičar

jednakosti Frešeovi izvodi, a izvodi sa desne strane obični izvodi realnih funkcija realnih argumenata.

Očigledno, $\underline{h}$ pripada prostoru $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, odnosno to je ograničen linearan operator, tako da za svako $u \in V$, postoji Frešeov izvod $\underline{h}'_u = \underline{h} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ u tački u. Takođe, postoji drugi Frešeov izvod u u, $\underline{h}''_u = \mathbf{0} \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R}))$, što nije teško proveriti (videti [9, 15]).

Neka je $u \in V$ proizvoljno. Da bi se odredio A'_{1u} eksplicitno, ako postoji, formira se razlika

$$A_1(u+h) - A_1(u) = L_{A_1}h + R_{A_1}(u,h), \quad h \in V.$$

Ako je moguće napraviti ovu dekompoziciju tako da važi $|R_{A_1}(u,h)|/\|h\| \to 0$ kada $\|h\| \to 0$, i $L_{A_1} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, tada je $L_{A_1} = A'_{1u}$. Jednostavno se utvrđuje da postoji Frešeov izvod $A'_{1u} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ od A_1 za proizvoljno $u \in V$ i on je definisan za svako $v \in V$ kao $A'_{1u}(v) = -\alpha(t)\cos(u^2(0))v(0)$.

Na osnovu izvoda kompozicije funkcija (na primer, [15, p. 171]), postoji prvi Frešeov izvod $a'_u = (f \circ \underline{h} + A_1)'_u = f'_{\underline{h}(u)}\underline{h}'_u + A'_{1u} = f'_{\underline{h}(u)}\underline{h} + A'_{1u} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ u svakoj tački $u \in V$, što znači da za svako $v \in V$ važi

$$\begin{aligned} a'_u(v) &= f'(\underline{h}(u))\underline{h}(v) + A'_{1u}(v) \\ &= -\alpha(t)\cos\big(u^2(0)\big)v(0) + \beta(t)\cos\Big(2\int_{-\tau}^{0} K(\theta)u(\theta)d\theta\Big)\int_{-\tau}^{0} K(\theta)v(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Takođe, $b'_u = g'_{\underline{h}(u)}\underline{h} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ za svako $u \in V$. Drugim rečima, važi da je

$$b'_u(v) = g'(\underline{h}(u))\underline{h}(v) = a_1(t)\cos\Big(\int_{-\tau}^{0} K(\theta)u(\theta)d\theta\Big)\int_{-\tau}^{0} K(\theta)v(\theta)d\theta.$$

Ako postoji drugi Frešeov izvod od $a : V \to \mathbb{R}$ u $u \in V$, tada $a''_u \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R}))$. Drugi Frešeov izvod od a u tački u je zapravo prvi Frešeov izvod od $v \mapsto a'_v$ u tački $u \in V$, odnosno to je prvi Frešeov izvod funkcije $c : V \to \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ definisane sa $c(v) = a'_v$, imajući u vidu da prvi Frešeov izvod od a postoji u svakoj tački vektorskog prostora V. Da bi se eksplicitno odredio a''_u, formira se razlika

$$c(u+h) - c(u) = L_c h + R_c(u,h), \quad h \in V.$$

Ako je moguće napraviti ovu dekompoziciju tako da $\|R_c(u,h)\|_{\mathcal{L}(V,\mathbb{R})}/\|h\| \to 0$ kada $\|h\| \to 0$ i $L_c \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R}))$, tada je $L_c = c'_u = a''_u \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R}))$. Tada, za svako $v_1, v_2 \in V$, zadovoljeno je

$$a''_u(v_1)(v_2) = 2\alpha(t)u(0)\sin u^2(0)v_1(0)v_2(0) - 2\beta(t)\sin\big(2\underline{h}(u)\big)\underline{h}(v_1)\underline{h}(v_2) \in \mathbb{R}.$$

Na sličan način se može zaključiti da je, za svako $v_1, v_2 \in V$,

$$b''_u(v_1)(v_2) = -a_1(t)\sin\big(\underline{h}(u)\big)\underline{h}(v_1)\underline{h}(v_2) \in \mathbb{R}.$$

Za funkcionale a, b, a'' i b'' važi polinomijalni uslov $\mathcal{A}_5$ sa konstantama

$$\begin{aligned} &q'_a = 4,\ D'_a = 16[(\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\beta}^2) \vee 3\bar{\alpha}^2];\quad q'_b = 0,\ D'_b = \bar{a}_1^2; \\ &q_a = 0,\ D_a = 2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2);\quad q_b = 0,\ D_b = \bar{a}_1^2. \end{aligned}$$

Očigledno da uslovi $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_4$ važe za svako $K_a, K_b, K'_a, K'_b > 0$, jer je

$$a(0,t) = b(0,t) = a''(0,t) = b''(0,t) = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

Polinomijalni uslov $\mathcal{A}_2$ je ispunjen za početni uslov η sa konstantama $D' = 1$ i $q' = 0$. Uslov $\mathcal{A}_6$ važi za rešenje x jednačine (2.3.47) na osnovu teorema 1.3.26 i 1.3.28.

Treba napomenuti da drugi izvod koeficijenta prenosa ove jednačine nije ravnomerno ograničen, te se stoga rezultati u vezi L^p i skoro izvesne konvergencije iz [61] ne mogu biti primeniti. Štaviše, u nastavku se dokazuju egzistencija, jedinstvenost i ograničenost p–tog momenta (za svako $p \geq 2$) odgovarajućeg aproksimativnog rešenja ove jednačine.

Koristeći Tejlorov razvoj prvog reda ($m_1 = m_2 = 1$) u okolini tačaka $x^n(t_k)$, za $k \in \{0, \dots, n-1\}$, jednačine (2.3.3) postaju

$$x^n(t) = x^n(t_k) + \int_{t_k}^{t} A(x_s^n, s; x_{t_k}^n)ds + \int_{t_k}^{t} B(x_s^n, s; x_{t_k}^n)dw(s), \tag{2.3.48}$$

$t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, gde su koeficijenti prenosa i difuzije

$$\begin{aligned} A(x_t^n, t; x_{t_k}^n) &= -\alpha(t)C(x^n(t_k)) + 0.5\beta(t)\sin\big(2\underline{h}(x_{t_k}^n)\big) \\ &\quad - \alpha(t)\cos\big(x^n(t_k)\big)^2\big[x^n(t) - x^n(t_k)\big] \\ &\quad + \beta(t)\cos\big(2\underline{h}(x_{t_k}^n)\big)\big[\underline{h}(x_t^n) - \underline{h}(x_{t_k}^n)\big], \\ B(x_t^n, t; x_{t_k}^n) &= a_1(t)\sin\underline{h}(x_{t_k}^n) + a_1(t)\cos\underline{h}(x_{t_k}^n)\big[\underline{h}(x_t^n) - \underline{h}(x_{t_k}^n)\big]. \end{aligned}$$

Pogodnosti radi, uvode se stepenasti procesi

$$\begin{aligned} z^n(t+\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t) x^n(t_k + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \\ z^n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t) x^n(t_k), \quad t \in [t_0, T] \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

i može se primetiti da iz (2.3.49) sledi $z_t^n = x_{t_k}^n$, $t \in [t_k, t_{k+1})$. Stoga se jednačine (2.3.48) mogu predstaviti kao

$$x^n(t) = \eta(0) + \int_{t_0}^{t} A(s, x_s^n, z_s^n)ds + \int_{t_0}^{t} B(s, x_s^n, z_s^n)dw(s), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.3.50}$$

gde, za svako $s \in [t_0, T]$, važi

$$\begin{aligned} A(s, x_s^n, z_s^n) &= -\alpha(s)C(z^n(s)) - \alpha(s)\cos\big(z^n(s)\big)^2(x^n(s) - z^n(s)) \qquad (2.3.51) \\ &\quad + \frac{1}{2}\beta(s)\sin(2\underline{h}(z_s^n)) + \beta(s)\cos(2\underline{h}(z_s^n))(\underline{h}(x_s^n) - \underline{h}(z_s^n)), \\ B(s, x_s^n, z_s^n) &= a_1(s)\sin(\underline{h}(z_s^n)) + a_1(s)\cos(\underline{h}(z_s^n))(\underline{h}(x_s^n) - \underline{h}(z_s^n)). \qquad (2.3.52) \end{aligned}$$

U nastavku se primenjuje pristup Hasminskog da bi se dokazale egzistencija, jedinstvenost i ograničenost momenata rešenja jednačine (2.3.50). Ovaj pristup je uspešno primenjivan u mnogim radovima, kao na primer u [69] u kontekstu SFDJ. Imajući u vidu da koeficijenti jednačine (2.3.50) zadovoljavaju lokalni Lipšicov uslov, sledi da za početni uslov η postoji jedinstveno lokalno rešenje $\{x(t), t \in [t_0 - \tau, \tau_e)\}$, gde je τ_e vreme eksplozije. Na osnovu zadatog početnog uslova η proizilazi da postoji prirodan broj r_0 tako da je

$$\|\eta\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} |\eta(\theta)| = \tau < r_0.$$

Za svaki prirodan broj $r \geq r_0$, definiše se vreme zaustavljanja

$$\tau_r = T \wedge \inf\{t \in [t_0, \tau_e) : |x^n(t)| \geq r\}, \tag{2.3.53}$$

pri čemu je $\inf \emptyset = \infty$. Očigledno, τ_r raste kada $r \to \infty$. Definiše se $\tau_\infty = \lim_{r\to\infty} \tau_r$, tako da je $\tau_\infty \leq \tau_e$ skoro izvesno. Cilj je pokazati da je $\tau_\infty = T$ skoro izvesno, što implicira da je $\tau_e = T$, odnosno rešenje $\{x(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ ne eksplodira u konačnom vremenu.

Pretpostavlja se, radi jednostavnosti, da je $p \geq 2$. Koristeći Itovu formulu, dobija se

$$\begin{aligned} E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x^n(s\wedge\tau_r)|^p \leq E\|\eta\|^p &+ pE\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} |x^n(s)|^{p-1}|A(s,x_s^n,z_s^n)|ds \\ &+ \frac{p(p-1)}{2}E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} |x^n(s)|^{p-2}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^2 ds \\ &+ pE\sup_{s\in[t_0,t]}\Big|\int_{t_0}^{s\wedge\tau_r}(x^n(u))^{p-1}B(u,x_u^n,z_u^n)dw(u)\Big|. \end{aligned} \tag{2.3.54}$$

Na osnovu Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti, sledi da je

$$\begin{aligned} &pE\sup_{s\in[t_0,t]}\Big|\int_{t_0}^{s\wedge\tau_r}(x^n(u))^{p-1}B(u,x_u^n,z_u^n)dw(u)\Big| \\ &\leq \sqrt{32}pE\left[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|x^n(s)|^{2p-2}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^2ds\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{32}pE\left[\Big(\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}|x^n(s)|^p\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|x^n(s)|^{p-2}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^2ds\Big)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq \frac{1}{2}E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x^n(s\wedge\tau_r)|^p + 16p^2E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|x^n(s)|^{p-2}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^2ds. \end{aligned} \tag{2.3.55}$$

Zamenom (2.3.55) u (2.3.54) proizilazi da važi

$$\begin{aligned} E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x^n(s\wedge\tau_r)|^p \leq 2E\|\eta\|^p &+ 2pE\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|x^n(s)|^{p-1}|A(s,x_s^n,z_s^n)|ds \\ &+ [p(p-1)+32p^2]E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|x^n(s)|^{p-2}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^2ds. \end{aligned} \tag{2.3.56}$$

Primena Jangove nejednakosti povlači

$$|x^n(s)|^{p-1}|A(s,x_s^n,z_s^n)| \leq \frac{p-1}{p}|x^n(s)|^p + \frac{1}{p}|A(s,x_s^n,z_s^n)|^p, \tag{2.3.57}$$

$$|x^n(s)|^{p-2}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^2 \leq \frac{p-2}{p}|x^n(s)|^p + \frac{2}{p}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^p. \tag{2.3.58}$$

Na osnovu (2.3.57) i (2.3.58), ocena (2.3.56) postaje

$$\begin{aligned} &E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x^n(s\wedge\tau_r)|^p \\ &\quad\leq 2E\|\eta\|^p + 3p(11p-21)\int_{t_0}^{t}E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x^n(u\wedge\tau_r)|^pds \\ &\quad+ 2E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|A(s,x_s^n,z_s^n)|^pds + 2(33p-1)E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|B(s,x_s^n,z_s^n)|^pds. \end{aligned} \tag{2.3.59}$$

Imajući u vidu (2.3.51), kao i činjenicu da je Frenelov integral ograničen konstantom 0.977451424 (približno 1), dobija se

$$|A(s,x_s^n,z_s^n)|^p \le 4^{p-1}\left\{\left[\bar{\alpha}^p + \left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)^p\right] + \bar{\alpha}^p|x^n(s)-z^n(s)|^p + \bar{\beta}^p|\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(z_s^n)|^p\right\}.$$

Tada postoji konstanta $C_1 > 0$, tako da važi

$$C_1^p \ge 4^{p-1}\max\left\{\bar{\alpha}^p + \left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)^p, \bar{\beta}^p\right\}$$

i

$$|A(s,x_s^n,z_s^n)|^p \le C_1^p\left[1+|x^n(s)-z^n(s)|^p + |\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(z_s^n)|^p\right]. \tag{2.3.60}$$

Na osnovu (2.3.52) važi

$$|B(s,x_s^n,z_s^n)|^p \le 2^{p-1}\left[\bar{a}_1^p + \bar{a}_1^p|\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(z_s^n)|^p\right],$$

tako da postoji konstanta $C_2 > 0$, za koju je $C_2^p \ge 2^{p-1}\bar{a}_1^p$ i

$$|B(s,x_s^n,z_s^n)|^p \le C_2^p\left[1+|\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(z_s^n)|^p\right]. \tag{2.3.61}$$

Zamenom (2.3.60) i (2.3.61) u (2.3.59) dobija se da, za svako $t\in[t_0,T]$, važi

$$\begin{aligned} E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x^n(s\wedge\tau_r)|^p \le\, & 2E\|\eta\|^p + 2\Big[C_1^p + (33p-1)C_2^p\Big](T-t_0) \\ & + 3p(11p-21)\int_{t_0}^t E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x^n(u\wedge\tau_r)|^p ds \\ & + 2C_1^p E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|x^n(s)-z^n(s)|^p ds \\ & + 2\Big[C_1^p + (33p-1)C_2^p\Big]E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}|\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(z_s^n)|^p ds. \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

U nastavku se ocenjuje izraz

$$|\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(z_s^n)|^p = |\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(x_{t_k}^n)|^p,\ s\in[t_k,t_{k+1}\wedge t], k\in\{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Primena Helderove nejednakosti povlači

$$\begin{aligned} |\underline{h}(x_s^n)-\underline{h}(x_{t_k}^n)|^p &= \left|\int_{-\tau}^0 \frac{1}{\tau}\big(x^n(s+\theta)-x^n(t_k+\theta)\big)d\theta\right|^p \\ &\le \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^0 |x^n(s+\theta)-x^n(t_k+\theta)|^p d\theta \\ &\le 2^{p-1}\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x^n(u)|^p. \end{aligned} \tag{2.3.63}$$

Na osnovu (2.3.63), izraz (2.3.62) postaje

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x^n(s\wedge\tau_r)|^p \le H_1(p) + H_2(p)\int_{t_0}^t E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x^n(u\wedge\tau_r)|^p ds,$$

gde je

$$H_1(p) = 2E\|\eta\|^p + 2\Big[C_1^p + (33p-1)C_2^p\Big](T-t_0),$$
$$H_2(p) = 3p(11p-21) + 2^{p+1}C_1^p + 2^p(33p-1)C_2^p.$$

Primena Grunval–Belmanove leme povlači

$$E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x^n(s\wedge\tau_r)|^p \le H_1(p)e^{H_2(p)(T-t_0)}, \quad r\ge r_0,\ t\in[t_0,T].$$

Specijalno, važi

$$E \sup_{s\in[t_0-\tau,T]} |x^n(s\wedge\tau_r)|^p \le H_1(p)e^{H_2(p)(T-t_0)}, \quad r\ge r_0. \tag{2.3.64}$$

Na osnovu (2.3.53) i (2.3.64), sledi

$$\begin{aligned} r^pP\{\tau_r\le T\} &\le E\Bigg[\sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x^n(s\wedge\tau_r)|^p I_{\{\tau_r\le T\}}\Bigg] \\ &\le E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x^n(s\wedge\tau_r)|^p \\ &\le H_1(p)e^{H_2(p)(T-t_0)}, \quad r\ge r_0. \end{aligned}$$

Kada $r\to\infty$ u poslednjoj nejednakosti dobija se da je $P\{\tau_\infty\le T\}=0$, odnosno $P\{\tau_\infty>T\}=1$. Sa druge strane, kada $r\to\infty$, relacija(2.3.64) implicira

$$E \sup_{s\in[t_0-\tau,T]} |x^n(s)|^p \le H_1(p)e^{H_2(p)(T-t_0)}.$$

Tada se može zaključiti da postoji jedinstveno rešenje jednačine (2.3.50) sa ograničenim p–tim momentima za svako $p\ge 2$, što povlači $\mathcal{A}_6$.

Teorema 2.3.8 daje red bliskosti u L^p-smislu, odnosno

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|\, x(t)-x^n(t)\big|^p \le H\delta_n^p.$$

2.4 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenskim kašnjenjem

U ovom poglavlju se razmatra metod analitičke aproksimacije zasnovan na Tejlorovoj formuli za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa konstantnim kašnjenjem, kod kojih neutralni član i koeficijenti prenosa i difuzije zadovoljavaju polinomijalni uslov. Za razliku od postojećih rezultata, vezanih za primenu Tejlorovog razvoja za aproksimaciju rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina [10, 11, 12, 27, 28, 56, 58, 59, 60, 61], u ovom poglavlju se dokazuje egzistencija i jedinstvanost rešenja aproksimativnih jednačina, kao i ograničenost njihovih momenata proizvoljnog reda, pod određenim pretpostavkama za izvode koeficijenata jednačine. Glavni rezultati su vezani za L^p i skoro izvesnu konvergenciju niza aproksimativnih rešenja ka rešenju polazne jednačine. Dokazuje se da red L^p–bliskosti raste kada se povećava red izvoda u Tejlorovim razvojima koeficijenata polazne jednačine.

U radu [56] je pretpostavljena uniformna ograničenost prvog izvoda neutralnog člana, ograničenost prvog i drugog izvoda koeficijenata prenosa i difuzije, kao i drugi izvod neutralnog člana, dok aproksimativna jednačina ima koeficijente koji su Tejlorovi razvoji prvog reda odgovarajućih koeficijenata. U ovom poglavlju Tejlorovi razvoji koeficijenata aproksimativne jednačine mogu biti proizvoljnog reda, a za prve naredne izvode koeficijenata, koji ne učestvuju u Tejlorovoj aproksimaciji, se zahteva polinomijalni uslov.

U ovom poglavlju su izloženi rezultati koji još uvek nisu objavljeni.

2.4.1 Formiranje metoda

U ovom poglavlju se razmatra d–dimenzionalna neutralna stohastička diferencijalna jednačina (NSDJ) sa konstantnim kašnjenjem (1.3.19) sa početnim uslovom (1.3.20). Integralni oblik jednačine (1.3.19) je

$$\begin{aligned} x(t) - D\big(t, x(t-\tau)\big) = \eta(0) - D\big(t_0, \eta(-\tau)\big) + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x(s-\tau)\big) ds \\ + \int_{t_0}^{t} g\big(s, x(s), x(s-\tau)\big) dw_s, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Pretpostavlja se da koeficijenti jednačine (2.4.1) zadovoljavaju sledeće uslove:

$\mathcal{A}_1$. Postoji nenegativna konstanta r_0 tako da je za početni uslov (1.3.20) zadovoljeno $\|\eta\| \leq r_0$ $s.i.$;

$\mathcal{A}_2$. Funkcija D zadovoljava polinomijalni uslov, odnosno postoje nenegativni realni brojevi L_1 i ℓ_1 tako da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\big|D(t, y) - D(t, \bar{y})\big| \leq L_1\big(1 + |y|^{\ell_1} + |\bar{y}|^{\ell_1}\big)|y - \bar{y}|.$$

Štaviše, $D(t, 0) = 0$ za svako $t \in [t_0, T]$;

$\mathcal{A}_3$. Postoje nenegativne konstante $K_2, K_3, L_2, L_3, \ell_2$ i ℓ_3 takve da je $L_2 \vee L_3 > 0$ i da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\begin{aligned} \big|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\big| &\leq K_2|x - \bar{x}| + L_2\big(1 + |y|^{\ell_2} + |\bar{y}|^{\ell_2}\big)|y - \bar{y}|, \\ \big|g(t, x, y) - g(t, \bar{x}, \bar{y})\big| &\leq K_3|x - \bar{x}| + L_3\big(1 + |y|^{\ell_3} + |\bar{y}|^{\ell_3}\big)|y - \bar{y}|. \end{aligned}$$

Takođe, postoje nenegativne konstante $\bar{f}$ i $\bar{g}$ tako da važi $|f(t, 0, 0)| \leq \bar{f}$ i $|g(t, 0, 0)| \leq \bar{g}$, za svako $t \in [t_0, T]$.

Može se uočiti da, na osnovu Jangove nejednakosti i elementarne nejednakosti (1.5.3), pretpostavke $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$ impliciraju da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, važi da je

$$\begin{aligned} &\big\langle x - D(t, y) - \bar{x} + D(t, \bar{y})\, ,\, f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\big\rangle \\ &\quad \leq \frac{1}{2}\big|x - D(t, y) - \bar{x} + D(t, \bar{y})\big|^2 + \frac{1}{2}\big|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\big|^2 \\ &\quad \leq |x - \bar{x}|^2 + L_1^2\big(1 + |y|^{\ell_1} + |\bar{y}|^{\ell_1}\big)^2|y - \bar{y}|^2 + \frac{K_2^2}{2}|x - \bar{x}|^2 \\ &\qquad + \frac{L_2^2}{2}\big(1 + |y|^{\ell_2} + |\bar{y}|^{\ell_2}\big)^2|y - \bar{y}|^2 \\ &\quad \leq \bigg(1 + \frac{K_2^2}{2}\bigg)|x - \bar{x}|^2 + 9\bigg(L_1^2 + \frac{L_2^2}{2}\bigg)\big(1 + |y|^{\ell_1 \vee \ell_2} + |\bar{y}|^{\ell_1 \vee \ell_2}\big)^2|y - \bar{y}|^2 \end{aligned}$$

i Lema 1.3.35 garantuje da jednačina (2.4.1) ima jedinstveno globalno rešenje x, odnosno $\{x(t),\, t\in[t_0-\tau,T]\}$, sa početnim uslovom (1.3.20), koje za $p\geq 2$ zadovoljava uslov

$$E\sup_{t\in[t_0,T]}\big|x(t)\big|^p\leq C\big(E\|\eta\|^{\ell^j p}\big)=C^{(\ell^j p)}, \tag{2.4.2}$$

gde je

$$\ell=1+\max\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\},\quad j=\left\lceil\frac{T-t_0}{\tau}\right\rceil. \tag{2.4.3}$$

Aproksimativne jednačine će biti definisane na ekvidistantnim particijama vremenskog intervala $[t_0-\tau,T]$. Za prirodne brojeve n i n' koji zadovoljavaju $n'(T-t_0)=n\tau$, razmatra se ekvidistantna particija

$$t_0-\tau=t_{-n'}<\cdots<t_{-1}<t_0<t_1<\cdots<t_n=T,\quad \delta_n=\frac{T-t_0}{n}=\frac{\tau}{n'}. \tag{2.4.4}$$

Neophodno je uvesti sledeće pretpostavke.

$\mathcal{B}_1$. Funkcija D ima Tejlorovu aproksimacuju reda m_1 po drugom argumentu i funkcionali f i g imaju Tejlorove aproksimacije reda m_2 i m_3, respektivno, po trećem argumentu.

Razmatraju se sledeće jednačine

$$\begin{aligned} x^n(t)-\sum_{i=0}^{m_1}\frac{D^{(i)}_{(t,x^n(t_k-\tau))}}{i!}\big(x^n(t-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big)^i\\ =x^n(t_k)-D\big(t_k,x^n(t_k-\tau)\big)+\int_{t_k}^t\sum_{i=0}^{m_2}\frac{f^{(i)}_{(s,x^n(s),x^n(t_k-\tau))}}{i!}\big(x^n(s-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big)^i ds\\ +\int_{t_k}^t\sum_{i=0}^{m_3}\frac{g^{(i)}_{(s,x^n(s),x^n(t_k-\tau))}}{i!}\big(x^n(s-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big)^i dw_s,\quad t\in[t_k,t_{k+1}], \end{aligned}\tag{2.4.5}$$

za $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ sa početnim uslovom (1.3.20) za $k=0$ i $\{x^n(t_k+\theta)\,,\,\theta\in[-\tau,0]\}$ za $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, koji su izvedeni iz rešenja prethodnih jednačina. Rešenja jednačina (2.4.5) aproksimiraju rešenje $x=\{x(t)\,,\,t\in[t_0-\tau,T]\}$ jednačine (2.4.1) na particiji (2.4.4). Aproksimativno rešenje $x^n=\{x^n(t)\,,\,t\in[t_0-\tau,T]\}$, konstruisano na osnovi (2.4.5) sukcesivnim povezivanjem procesa $\{x^n(t),\,t\in[t_k,t_{k+1}]\}$ sa η u tačkama t_k, za $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, je skoro izvesno neprekidan proces.

Radi jednostavnosti, za svako $t\in[t_k,t_{k+1}]$ i $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ uvode se oznake

$$\begin{aligned} \tilde{D}\big(t,x^n(t-\tau);x^n(t_k-\tau)\big)&=\sum_{i=0}^{m_1}\frac{D^{(i)}_{(t,x^n(t_k-\tau))}}{i!}\big(x^n(t-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big)^i,\\ F\big(t,x^n(t),x^n(t-\tau);x^n(t_k-\tau)\big)&=\sum_{i=0}^{m_2}\frac{f^{(i)}_{(t,x^n(t),x^n(t_k-\tau))}}{i!}\big(x^n(t-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big)^i,\\ G\big(t,x^n(t),x^n(t-\tau);x^n(t_k-\tau)\big)&=\sum_{i=0}^{m_3}\frac{g^{(i)}_{(t,x^n(t),x^n(t_k-\tau))}}{i!}\big(x^n(t-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big)^i. \end{aligned}$$

Neka je $z^n=\{z^n(t)\,,\,t\in[t_0-\tau,T-\tau]\}$ stohastički proces koji je definisan sa

$$z^n(t-\tau)=\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)x^n(t_k-\tau),\quad t\in[t_0,T], \tag{2.4.6}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ i neka je

$$y_t^n = x^n(t-\tau) \quad \text{i} \quad z_t^n = z^n(t-\tau), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.4.7}$$

Tada se jednačine (2.4.5) mogu zapisati u jednostavnijem obliku

$$\begin{aligned} x^n(t) - \tilde{D}\big(t, y_t^n; z_t^n\big) =& \eta(0) - D\big(t_0, \eta(-\tau)\big) + \int_{t_0}^t F\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big) ds \\ &+ \int_{t_0}^t G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big) dw_s, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Pretpostavlja se da su svi Lebegovi i Itovi integrali dobro definisani. Biće dokazano da postoji jedinstveno rešenje jednačine (2.4.8) sa početnim uslovom (1.3.20) pod određenim pretpostavkama:

$\mathcal{B}_2$. Funkcija $D^{(m_1+1)}$ zadovoljava polinomijalni uslov, odnosno postoje nenegativne konstante L_1' i ℓ_1' tako da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\big\| D^{(m_1+1)}_{(t,y)} - D^{(m_1+1)}_{(t,\bar{y})} \big\|_{m_1+1} \leq L_1' \big(1 + |y|^{\ell_1'} + |\bar{y}|^{\ell_1'}\big) |y - \bar{y}|.$$

Takođe, postoji nenegativna konstanta $\bar{c}_1$ tako da je $\|D^{(m_1+1)}(t,0)\|_{m_1+1} \leq \bar{c}_1$ za svako $t \in [t_0, T]$;

$\mathcal{B}_3$. Funkcionali $f^{(m_2+1)}$ i $g^{(m_3+1)}$ zadovoljavaju polinomijalni uslov po trećem argumentu, odnosno postoje nenegativne konstante L_2', L_3', ℓ_2' i ℓ_3' tako da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\begin{aligned} \big\| f^{(m_2+1)}_{(t,x,y)} - f^{(m_2+1)}_{(t,x,\bar{y})} \big\|_{m_2+1} &\leq L_2' \big(1 + |y|^{\ell_2'} + |\bar{y}|^{\ell_2'}\big) |y - \bar{y}|, \\ \big\| g^{(m_3+1)}_{(t,x,y)} - g^{(m_3+1)}_{(t,x,\bar{y})} \big\|_{m_3+1} &\leq L_3' \big(1 + |y|^{\ell_3'} + |\bar{y}|^{\ell_3'}\big) |y - \bar{y}|; \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_4$. Funkcionali $f^{(m_2+1)}(\cdot,\cdot,0)$ i $g^{(m_3+1)}(\cdot,\cdot,0)$ su uniformno ograničeni, odnosno postoje nenegativne konstante $\bar{f}'$ i $\bar{g}'$ tako da važi

$$\sup_{(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^d} \big\| f^{(m_2+1)}_{(t,x,0)} \big\|_{m_2+1} \leq \bar{f}', \qquad \sup_{(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^d} \big\| g^{(m_3+1)}_{(t,x,0)} \big\|_{m_3+1} \leq \bar{g}'.$$

U ovom poglavlju je funkcija $\mathbf{s}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definisana kao $\mathbf{s}\,(o) \equiv \tilde{o} = 1 \vee o,\ o \in \mathbb{R}$. Sada će biti dokazano da jednačina (2.4.8) ima jedinstveno globalno rešenje na $[t_0 - \tau, T]$ sa početnim uslovom (1.3.20) i da su njegovi momenti reda p ograničeni.

Teorema 2.4.1. *Pretpostavlja se da su ispunjeni uslovi $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ i $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4$. Neka funkcional $D^{(i_1)}$, $i_1 \in \{1, \dots, m_1\}$, posmatran kao funkcija definisana na $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ i funkcionali $f^{(i_2)}$, $i_2 \in \{1, \dots, m_2\}$ i $g^{(i_3)}$, $i_3 \in \{1, \dots, m_3\}$, posmatrani kao funkcije definisane na $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, zadovoljavaju sledeće lokalne Lipšicove uslove: za prirodan broj k postoji nenegativna konstanta K_k tako da, za svako $t \in [t_0, T]$, $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, za koje je $|x| \vee |\bar{x}| \vee |y| \vee |\bar{y}| \leq k$, važi*

$$\begin{aligned} &\big\| D^{(i_1)}_{(t,y)} - D^{(i_1)}_{(t,\bar{y})} \big\|_{i_1} \leq K_k |y - \bar{y}|, \quad i_1 \in \{1, \dots, m_1\}, \\ &\big\| f^{(i_2)}_{(t,x,y)} - f^{(i_2)}_{(t,\bar{x},\bar{y})} \big\|_{i_2} \leq K_k \big(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|\big), \quad i_2 \in \{1, \dots, m_2\}, \\ &\big\| g^{(i_3)}_{(t,x,y)} - g^{(i_3)}_{(t,\bar{x},\bar{y})} \big\|_{i_3} \leq K_k \big(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|\big), \quad i_3 \in \{1, \dots, m_3\}. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Tada jednačina (2.4.8) *ima jedinstveno globalno rešenje* $x^n = \{x^n(t)\,,\, t \in [t_0-\tau, T]\}$ *sa početnim uslovom* (1.3.20). *Takođe, za svako* $p \geq 2$ *važi da je*

$$E \sup_{s\in[t_0,T]} \big|x^n(s)\big|^p \leq C_j^{(\gamma^{j-1}p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma^j p}\big) = C_j^{(\gamma^{j-1}p)}, \tag{2.4.10}$$

gde je vrednost j *data sa* (2.4.3), *dok je*

$$\gamma = 1 + \max\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_1' + m_1 + 1, \ell_2' + m_2 + 1, \ell_3' + m_3 + 1\}.$$

Dokaz. Nije teško pokazati primenom uslova $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{B}_1$ i (2.4.9) da za svaki prirodan broj k za koji je, $|x| \vee |\bar{x}| \vee |y| \vee |\bar{y}| \vee |z| \vee |\bar{z}| \leq k$, postoji nenegativna konstanta $\bar{K}_k$, tako da je

$$\big|F(t,x,y;z) - F(t,\bar{x},\bar{y};\bar{z})\big| \leq \bar{K}_k\big(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|\big).$$

Kako funkcionali $\tilde{D}$ i G zadovoljavaju slične pretpostavke, sledi da postoji jedinstveno lokalno rešenje $x^n = \{x^n(t)\,,\, t \in [t_0-\tau, \tau_e)\}$ jednačine (2.4.8), gde τ_e predstavlja vreme eksplozije.

Da bi se dokazalo da je x^n globalno rešenje, dovoljno je pokazati da važi (2.4.10). Na osnovu $\mathcal{A}_1$, za svaki prirodan broj $r \geq r_0$ definiše se vreme zaustavljanja τ_r kao

$$\tau_r = \inf\big\{t \in [t_0, \tau_e)\,\big|\, |x^n(t)| \geq r\big\} \wedge T,$$

gde je $\inf\emptyset = +\infty$. Kako je niz $(\tau_r)_{r\in\mathbb{N}\cap[r_0,\infty)}$ neopadajući, to postoji $\lim_{r\to\infty}\tau_r = \tau_\infty \leq \tau_e$ s.i. Ako se dokaže da je $\tau_\infty = T$ s.i., tada je $\tau_e = T$ s.i. i prema tome x^n je globalno rešenje.

Primenom Itove formule na $V(t,x,y) = |x|^p$, a potom uzimajući supremum i matematičko očekivanje, na osnovu jednačine (2.4.8) dobija se

$$\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^p \\
&\leq E\Big|\eta(0) - D\big(t_0, \eta(-\tau)\big)\Big|^p + p\,E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p-1}\Big|F\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|ds \\
&\quad + \frac{p(p-1)}{2}\,E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p-2}\Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^2 ds \\
&\quad + pE\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\int_{t_0}^{s} \big|x^n(u) - \tilde{D}\big(u, y_u^n; z_u^n\big)\big|^{p-2}\big\langle x^n(u) - \tilde{D}\big(u, y_u^n; z_u^n\big), G\big(u, x^n(u), y_u^n; z_u^n\big)dw_u\big\rangle \\
&\equiv S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad t \in [t_0, T].
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Pretpostavka $\mathcal{A}_2$ i nejednakost (1.5.3) impliciraju

$$\begin{aligned}
S_1 &\equiv E\Big|\eta(0) - D\big(t_0, \eta(-\tau)\big)\Big|^p \\
&\leq 2^{p-1}\Big[E\big|\eta(0)\big|^p + E\Big|D\big(t_0, \eta(-\tau)\big) - D(t_0, 0)\Big|^p\Big] \\
&\leq 2^{p-1}E\big|\eta(0)\big|^p + 2^{p-1}L_1^p E\Big[\Big(1 + \big|\eta(-\tau)\big|^{\ell_1}\Big)^p\big|\eta(-\tau)\big|^p\Big] \\
&\leq 2^{p-1}E\|\eta\|^p + 2^{2p-2}L_1^p\big(E\|\eta\|^p + E\|\eta\|^{(\ell_1+1)p}\big) \\
&\leq 2^{p-1}(1 + 2^p L_1^p)\big(1 + E\|\eta\|^{\gamma p}\big).
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Jangova nejednakost sa konjugovanim eksponentima $\left(\frac{p}{p-1}, p\right)$ i $\left(\frac{p}{p-2}, \frac{p}{2}\right)$ (drugi je za $p > 2$) implicira

$$\begin{aligned}
S_2 &\equiv p\, E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p-1} \Big|F\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big| ds \\
&\le (p-1) E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} ds + E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|F\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} ds, \quad (2.4.13) \\
S_3 &\equiv \frac{p(p-1)}{2}\, E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p-2} \Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{2} ds \qquad (2.4.14) \\
&\le (p-1)\left[\frac{p-2}{2} E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} ds + E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} ds\right].
\end{aligned}$$

Može se primetiti da je relacija (2.4.14) zadovoljena i za vrednost $p = 2$. Primena Burkholder–Dejvis–Gandijeve i Jangove nejednakosti na sabirak S_4 iz (2.4.11) povlači

$$\begin{aligned}
S_4 &\equiv pE \sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \int_{t_0}^{s} \Big|x^n(u) - \tilde{D}\big(u, y_u^n; z_u^n\big)\Big|^{p-2} \Big\langle x^n(u) - \tilde{D}\big(u, y_u^n; z_u^n\big), G\big(u, x^n(u), y_u^n; z_u^n\big) dw_u \Big\rangle \\
&\le \sqrt{32} p\; E\left(\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{2p-2} \Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{2} ds\right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{32} p\; E\Bigg[\left(\sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p}\right)^{1/2} \\
&\qquad \cdot \left(\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p-2} \Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{2} ds\right)^{1/2} \Bigg] \\
&\le \frac{1}{2}\; E \sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} \qquad (2.4.15) \\
&\quad + 16p^2 E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p-2} \Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{2} ds.
\end{aligned}$$

Drugi sabirak u (2.4.15) može se oceniti na isti način kao sabirak S_3 u (2.4.14).

Zamenom (2.4.12)–(2.4.15) u (2.4.11) dobija se ocena

$$\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} \\
&\quad \le 2^p (1 + 2^p L_1^p)\big(1 + E\|\eta\|^{\gamma p}\big) + (33p - 65)p\; E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} ds \\
&\qquad + 2E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|F\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} ds + (66p - 2)E \int_{t_0}^{t\wedge\tau_r} \Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} ds \\
&\quad \equiv M_1 + M_2 + M_3 + M_4. \qquad (2.4.16)
\end{aligned}$$

Na osnovu relacija (1.5.3) i (2.4.16) zaključuje se da je

$$\begin{aligned}
E \sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \big|x^n(s)\big|^p &= E \sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big) + \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} \\
&\le 2^{p-1}\left[E \sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \Big|\tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p} + E \sup_{s\in[t_0, t\wedge\tau_r]} \Big|x^n(s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{p}\right] \\
&\equiv 2^{p-1}(M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4). \qquad (2.4.17)
\end{aligned}$$

Nejednakost (1.5.3) i pretpostavke $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{B}_2$, za neko $\theta_1 \in (0,1)$, impliciraju da se sabirak M_0 može oceniti na sledći način

$$
\begin{aligned}
M_0 &\equiv E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \Big|D\big(s,y_s^n\big) + \tilde{D}\big(s,y_s^n;z_s^n\big) - D\big(s,y_s^n\big)\Big|^p \\
&\le 2^{p-1} E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \Big|D\big(s,y_s^n\big) - D(s,0)\Big|^p \\
&\quad + \frac{2^{p-1}}{\big[(m_1+1)!\big]^p} E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \Big|\big(D^{(m_1+1)}_{(s,0)} + D^{(m_1+1)}_{(s,z_s^n+\theta_1(y_s^n-z_s^n))} - D^{(m_1+1)}_{(s,0)}\big)\big(y_s^n - z_s^n\big)^{m_1+1}\Big|^p \\
&\le 2^{p-1} L_1^p E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \Big[\Big(1+\big|y_s^n\big|^{\ell_1}\Big)^p \big|y_s^n\big|^p\Big] + \frac{2^{2p-2}\bar{c}_1^p}{\big[(m_1+1)!\big]^p} E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \big|y_s^n - z_s^n\big|^{(m_1+1)p} \\
&\quad + \frac{2^{2p-2}(L_1')^p}{\big[(m_1+1)!\big]^p} \qquad\qquad (2.4.18) \\
&\quad \cdot E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \Big[\Big(1+\big|z_s^n + \theta_1(y_s^n - z_s^n)\big|^{\ell_1'}\Big)^p \big|z_s^n + \theta_1(y_s^n-z_s^n)\big|^p \big|y_s^n - z_s^n\big|^{(m_1+1)p}\Big].
\end{aligned}
$$

Na osnovu oznaka (2.4.6) i (2.4.7), kao i relacije

$$
\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \big|z_s^n\big| \le \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \big|y_s^n\big|, \quad t\in[t_0,T],
$$

zaključuje se da, za $\alpha,\beta \ge 0$, važi

$$
E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \big|y_s^n\big|^\alpha \big|z_s^n\big|^\beta \le E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \big|y_s^n\big|^{\alpha+\beta}
$$

i

$$
\big|z_s^n\big|^\alpha \sup_{u\in[t_0,s]} \big|y_u^n\big|^\beta \le \sup_{u\in[t_0,s]} \big|y_u^n\big|^{\alpha+\beta}, \quad \big|y_s^n\big|^\alpha \sup_{u\in[t_0,s]} \big|y_u^n\big|^\beta \le \sup_{u\in[t_0,s]} \big|y_u^n\big|^{\alpha+\beta}. \tag{2.4.19}
$$

Takođe, na osnovu (1.5.3), za $s\in[t_0,T]$, $r\ge 2$ i $\alpha,\beta\in[0,1]$ tako da je $\alpha+\beta=1$, važi

$$
\big|\alpha y_s^n + \beta z_s^n\big|^r \le \big(\alpha \sup_{u\in[t_0,s]} \big|y_u^n\big| + \beta \sup_{u\in[t_0,s]} \big|y_u^n\big|\big)^r = \sup_{u\in[t_0,s]} \big|y_u^n\big|^r. \tag{2.4.20}
$$

Stoga, prema (1.5.3), (2.4.7), (2.4.19) i (2.4.20), relacija (2.4.18) postaje

$$
M_0 \le N_0^{(p)} \Big(1 + E \sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]} \big|y_s^n\big|^{\gamma p}\Big), \tag{2.4.21}
$$

gde je

$$
N_0^{(p)} = 2^{2p-1} \Big\{ \big(\tilde{L}_1\big)^p + \frac{2^{(m_1+1)p-1}}{\big[(m_1+1)!\big]^p} \Big[(\tilde{\bar{c}}_1)^p + 2^p \big(\tilde{L}_1'\big)^p\Big]\Big\}. \tag{2.4.22}
$$

Drugi sabirak u (2.4.17) i prvi u (2.4.16), prema (2.4.12), jeste

$$
M_1 = N_1^{(p)} \big(1 + E\|\eta\|^{\gamma p}\big), \tag{2.4.23}
$$

gde je

$$
N_1^{(p)} = 2^p \Big[1 + 2^p \big(\tilde{L}_1\big)^p\Big]. \tag{2.4.24}
$$

Poznata nejednakost (1.5.3) i ocena (2.4.21) impliciraju

$$\begin{aligned}
M_2 &\equiv (33p-65)p\ E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big|x^n(s)-\tilde{D}\big(s,y_s^n;z_s^n\big)\Big|^p ds\\
&\le 2^{p-1}(33p-65)p\Big[E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\big|x^n(s)\big|^p ds+(T-t_0)E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\Big|\tilde{D}\big(s,y_s^n;z_s^n\big)\Big|^p\Big],\\
&\le N_2^{(p)}\Big[E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\big|x^n(s)\big|^p ds+(T-t_0)N_0^{(p)}\Big(1+E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|y_s^n\big|^{\gamma p}\Big)\Big],
\end{aligned}\tag{2.4.25}$$

gde je

$$N_2^{(p)}=2^{p-1}(33p-65)p.\tag{2.4.26}$$

Na osnovu pretpostavki $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{B}_4$ i $\mathcal{B}_3$, uz (1.5.3), dobija se da postoji $\theta_2\in(0,1)$ tako da je

$$\begin{aligned}
M_3 &\equiv 2E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big|f\big(s,x^n(s),y_s^n\big)+F\big(s,x^n(s),y_s^n;z_s^n\big)-f\big(s,x^n(s),y_s^n\big)\Big|^p ds\\
&\le 2^pE\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big|f(s,0,0)+f\big(s,x^n(s),y_s^n\big)-f(s,0,0)\Big|^p ds\\
&\quad+2^pE\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\left|\frac{f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),z_s^n+\theta_2(y_s^n-z_s^n))}\big(y_s^n-z_s^n\big)^{m_2+1}}{(m_2+1)!}\right|^p ds\\
&\le 2^{2p-1}\Big[E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\big|f(s,0,0)\big|^p ds+E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big|f\big(s,x^n(s),y_s^n\big)-f(s,0,0)\Big|^p ds\Big]\\
&\quad+\frac{2^{2p-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\,E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big|f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),0)}\big(y_s^n-z_s^n\big)^{m_2+1}\Big|^p ds\\
&\quad+\frac{2^{2p-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\,E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big|\Big(f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),z_s^n+\theta_2(y_s^n-z_s^n))}-f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),0)}\Big)\big(y_s^n-z_s^n\big)^{m_2+1}\Big|^p ds\\
&\le 2^{2p-1}\Big\{\bar{f}^p(T-t_0)+E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big[K_2\big|x^n(s)\big|+L_2\Big(1+\big|y_s^n\big|^{\ell_2}\Big)\big|y_s^n\big|\Big]^p ds\Big\}\\
&\quad+\frac{2^{2p-1}(\bar{f}')^p}{\big[(m_2+1)!\big]^p}E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\big|y_s^n-z_s^n\big|^{(m_2+1)p}ds\\
&\quad+\frac{2^{2p-1}(L_2')^p}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\\
&\quad\cdot E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big(1+\big|z_s^n+\theta_2(y_s^n-z_s^n)\big|^{\ell_2'}\Big)^p\big|z_s^n+\theta_2(y_s^n-z_s^n)\big|^p\big|y_s^n-z_s^n\big|^{(m_2+1)p}ds\\
&\le 2^{3p-2}K_2^p\,E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\big|x^n(s)\big|^p ds+N_3^{(p)}\Big(1+E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|y_s^n\big|^{\gamma p}\Big),
\end{aligned}\tag{2.4.27}$$

gde je, na osnovu (2.4.19) i (2.4.20)

$$N_3^{(p)}=2^{2p-1}(T-t_0)\Big\{\big(\tilde{\bar{f}}\big)^p+2^{2p-1}\Big\{\big(\tilde{L}_2\big)^p+\frac{2^{(m_2+1)p}}{\big[(m_2+1)!\big]^p}\Big[\big(\tilde{\bar{f}}'\big)^p+2^p\big(\tilde{L}_2'\big)^p\Big]\Big\}\Big\}.\tag{2.4.28}$$

Slično, važi da je

$$\begin{aligned} M_4 &\equiv (66p-2)E\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\Big|G\big(s,x^n(s),y_s^n;z_s^n\big)\Big|^p ds \\ &\le 2^{3p-2}(33p-1)K_3^pE\int_{t_0}^{t\wedge\tau_r}\big|x^n(s)\big|^p ds + N_4^{(p)}\Big(1+E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|y_s^n\big|^{\gamma p}\Big), \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

gde je

$$N_4^{(p)} = 2^{2p-1}(33p-1)(T-t_0)\bigg\{(\tilde{\bar{g}})^p + 2^{2p-1}\bigg\{\big(\tilde{L}_3\big)^p + \frac{2^{(m_3+1)p}}{\big[(m_3+1)!\big]^p}\Big[(\tilde{\bar{g}}')^p + 2^p\big(\tilde{L}_3'\big)^p\Big]\bigg\}\bigg\}. \tag{2.4.30}$$

Zamenom (2.4.21), (2.4.23), (2.4.25), (2.4.27) i (2.4.29) u (2.4.17), kao i na osnovu Fubinijeve teoreme, dobija se da je

$$\begin{aligned} E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p \le& 2^{p-1}N_1^{(p)}E\|\eta\|^{\gamma p} + P_1^{(p)} + P_2^{(p)}E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|y_s^n\big|^{\gamma p} \\ &+ P_3^{(p)}\int_{t_0}^t E\sup_{u\in[t_0,s\wedge\tau_r]}\big|x^n(u)\big|^p ds, \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

gde je

$$\begin{aligned} P_1^{(p)} &= 2^{p-1}\big[N_0^{(p)} + N_1^{(p)} + (T-t_0)N_0^{(p)}N_2^{(p)} + N_3^{(p)} + N_4^{(p)}\big], \\ P_2^{(p)} &= 2^{p-1}\big[N_0^{(p)} + (T-t_0)N_0^{(p)}N_2^{(p)} + N_3^{(p)} + N_4^{(p)}\big], \\ P_3^{(p)} &= 2^{p-1}\Big[N_2^{(p)} + 2^{3p-2}\Big(\big(\tilde{K}_2\big)^p + (33p-1)\big(\tilde{K}_3\big)^p\Big)\Big], \end{aligned}$$

imajući u vidu (2.4.22), (2.4.24), (2.4.26), (2.4.28) i (2.4.30). Relacija (2.4.31) je ekvivalentna sa

$$H(t) \le H_1(t) + P_3^{(p)}\int_{t_0}^t H(s)ds, \quad t\in[t_0,T], \tag{2.4.32}$$

gde je $H:[t_0,T]\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija definisana kao

$$H(t) = E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p,$$

$P_3^{(p)}$ ne zavisi od t a $H_1:[t_0,T]\to\mathbb{R}$ je nenegativna, neopadajuća funkcija definisana sa

$$H_1(t) = 2^{p-1}N_1^{(p)}E\|\eta\|^{\gamma p} + P_1^{(p)} + P_2^{(p)}E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s-\tau)\big|^{\gamma p}.$$

Primena Grunval–Belmanove nejednakosti na (2.4.32) obezbeđuje da, za svako $t\in[t_0,T]$, važi da je

$$E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p \le e^{P_3^{(p)}(T-t_0)}\Big(2^{p-1}N_1^{(p)}E\|\eta\|^{\gamma p} + P_1^{(p)} + P_2^{(p)}E\sup_{s\in[t_0-\tau,(t-\tau)\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^{\gamma p}\Big). \tag{2.4.33}$$

Kako je

$$\begin{aligned} E\sup_{s\in[t_0-\tau,(t-\tau)\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^{\gamma p} &\le E\sup_{s\in[t_0-\tau,t_0]}\big|x^n(s)\big|^{\gamma p} + E\sup_{s\in(t_0,t_0\vee((t-\tau)\wedge\tau_r))]}\big|x^n(s)\big|^{\gamma p} \\ &= E\|\eta\|^{\gamma p} + E\sup_{s\in(t_0,t_0\vee((t-\tau)\wedge\tau_r))]}\big|x^n(s)\big|^{\gamma p}, \end{aligned}$$

pri čemu se podrazumeva da je $\sup\emptyset = 0$, ocena (2.4.33) se može zapisati u ekvivalentnoj formi kao

$$E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p \le C_1^{(p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma p}\big) + Q^{(p)}E\sup_{s\in(t_0,t_0\vee((t-\tau)\wedge\tau_r)]}\big|x^n(s)\big|^{\gamma p}, \quad t\in[t_0,T], \tag{2.4.34}$$

gde je

$$\begin{aligned}C_1^{(p)}(E\|\eta\|^{\gamma p}) &= R_1^{(p)} + U_1^{(p)}E\|\eta\|^{\gamma p}, \quad Q^{(p)} = P_2^{(p)}e^{P_3^{(p)}(T-t_0)},\\ R_1^{(p)} &= P_1^{(p)}e^{P_3^{(p)}(T-t_0)}, \quad U_1^{(p)} = e^{P_3^{(p)}(T-t_0)}(2^{p-1}N_1^{(p)} + P_2^{(p)}).\end{aligned}$$

Za $t\in[t_0,t_0+\tau]$, iz (2.4.34) sledi ocena

$$E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p \le C_1^{(p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma p}\big). \tag{2.4.35}$$

Za $t\in[t_0+\tau,t_0+2\tau]$, kako je $\gamma\ge 1$, relacije (2.4.34) i (2.4.35) impliciraju

$$\begin{aligned}E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p &\le C_1^{(p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma p}\big) + Q^{(p)}E\sup_{s\in[t_0,(t_0+\tau)\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^{\gamma p}\\ &\le C_1^{(p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma p}\big) + Q^{(p)}C_1^{(\gamma p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma^2 p}\big).\end{aligned}$$

Kako je $R_1^{(\gamma^a p)} \le R_1^{(\gamma^b p)}$, $U_1^{(\gamma^a p)} \le U_1^{(\gamma^b p)}$ i $Q^{(\gamma^a p)} \le Q^{(\gamma^b p)}$, gde je $0\le a\le b$, tada je

$$E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p \le C_2^{(\gamma p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma^2 p}\big),$$

gde je

$$\begin{aligned}C_2^{(\gamma p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma^2 p}\big) &= R_2^{(\gamma p)} + U_2^{(\gamma p)}E\|\eta\|^{\gamma^2 p},\\ R_2^{(\gamma p)} =& R_1^{(\gamma p)}(1+Q^{(p)}) + U_1^{(\gamma p)}, \quad U_2^{(\gamma p)} = U_1^{(\gamma p)}(1+Q^{(p)}).\end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom dokazuje se da, za $t\in[t_0+(i-1)\tau,t_0+i\tau]$, $3\le i\le j$, važi da je

$$E\sup_{s\in[t_0,t\wedge\tau_r]}\big|x^n(s)\big|^p \le C_i^{(\gamma^{i-1}p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma^i p}\big), \tag{2.4.36}$$

gde je

$$\begin{aligned}C_i^{(\gamma^{i-1}p)}\big(E\|\eta\|^{\gamma^i p}\big) &= R_i^{(\gamma^{i-1}p)} + U_i^{(\gamma^{i-1}p)}E\|\eta\|^{\gamma^i p},\\ R_i^{(\gamma^{i-1}p)} &= R_1^{(\gamma^{i-1}p)}\frac{(Q^{(\gamma^{i-2}p)})^i - 1}{Q^{(\gamma^{i-2}p)} - 1} + U_1^{(\gamma^{i-2}p)}\frac{(Q^{(\gamma^{i-3}p)})^{i-1} - 1}{Q^{(\gamma^{i-3}p)} - 1},\\ U_i^{(\gamma^{i-1}p)} &= U_1^{(\gamma^{i-1}p)}\frac{(Q^{(\gamma^{i-2}p)})^i - 1}{Q^{(\gamma^{i-2}p)} - 1}.\end{aligned}$$

Prema tome, za $t=T$, primenom (2.4.36) dokazuje se da važi (2.4.10), tako da je x^n jedinstveno globalno rešenje jednačine (2.4.8). $\square$

Lako je uočiti da primena Helderove nejednakosti implicira da Teorema 2.4.1 važi i za svako $0<p<2$.

2.4.2 Glavni rezultati

Pod određenim dodatnom pretpostavkama za koeficijente jednačina (2.4.1) i (2.4.8) biće dokazaćeno da x^n konvergira ka x u L^p–smislu.

$\mathcal{C}_1$. Postoje nenegativne konstante $K_2'', K_3'', L_2'', L_3'', \ell_2''$ i ℓ_3'' tako da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\begin{aligned}
\big\| f^{(m_2+1)}_{(t,x,y)} - f^{(m_2+1)}_{(t,\bar{x},\bar{y})} \big\|_{m_2+1} &\leq K_2''|x-\bar{x}| + L_2''\big(1+|y|^{\ell_2''}+|\bar{y}|^{\ell_2''}\big)|y-\bar{y}|,\\
\big\| g^{(m_3+1)}_{(t,x,y)} - g^{(m_3+1)}_{(t,\bar{x},\bar{y})} \big\|_{m_3+1} &\leq K_3''|x-\bar{x}| + L_3''\big(1+|y|^{\ell_3''}+|\bar{y}|^{\ell_3''}\big)|y-\bar{y}|;
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_2$. Funkcional D zadovoljava polinomijalni uslov po prvom argumentu, odnosno postoje nenegativni realni brojevi L_0 i ℓ_0 tako da, za svako $s_1, s_2 \in [t_0, T]$ i $y \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\big|D(s_1, y) - D(s_2, y)\big| \leq L_0\big(1 + s_1^{\ell_0} + s_2^{\ell_0}\big)|s_1 - s_2|.$$

$\mathcal{C}_3$. Početni uslov (1.3.20) zadovoljava polinomijalni uslov, odnosno postoje nenegativni realni brojevi Λ i λ tako da, za svako $\theta', \theta'' \in [-\tau, 0]$, važi

$$\big|\eta(\theta') - \eta(\theta'')\big| \leq \Lambda\big(1 + |\theta'|^{\lambda} + |\theta''|^{\lambda}\big)|\theta' - \theta''| \ s.i.$$

Propozicija 2.4.2. *Neka je x^n rešenje jednačine* (2.4.8) *sa početnim uslovom* (1.3.20) *i neka su uslovi $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_4$ i $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_3$ zadovoljeni. Tada za svako $r > 0$, važi*

$$E \sup_{s \in [t_k, t]} \big|x^n(s) - x^n(t_k)\big|^r \leq \Theta_j^{(\gamma^{j-1} r)} \delta_n^{r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0, \ldots, n-1\}, \tag{2.4.37}$$

gde je $\Theta_j^{(\gamma^{j-1} r)}$ konstanta nezavisna i od n i δ_n, pri čemu je vrednost j data u (2.4.3).

Dokaz. Biće razmatran samo slučaj kada je $r \geq 2$. Slučaj $0 < r < 2$ se jednostavno dokazuje na osnovu Helderove nejednakosti sa konjugovanim eksponentima $(2/r, 2/(2-r))$. Jednostavnosti radi, i u ovom dokazu će biti korišćene oznake (2.4.6) i (2.4.7).

Primenom nejednakosti (1.5.3), Helderove nejednakosti za odgovarajući Lebegov integral sa konjugovanim eksponentima $(r, r/(r-1))$, Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti i Helderove nejednakosti sa konjugovanim eksponentima $(r/2, r/(r-2))$ (za $r > 2$), izometrije Itoa (za $r = 2$) i Fubinijeve teoreme za odgovarajući stohastički integral, dobija se da je

$$E \sup_{s \in [t_k, t]} \big|x^n(s) - x^n(t_k)\big|^r \leq 3^{r-1}\big[I_1(t) + (t - t_k)^{r-1} I_2(t) + c_r (t - t_k)^{(r-2)/2} I_3(t)\big], \tag{2.4.38}$$

za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, za svako $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, gde je

$$I_1(t) = E \sup_{s \in [t_k, t]} \big|\tilde{D}(s, y_s^n; y_{t_k}^n) - D(t_k, y_{t_k}^n)\big|^r,$$

$$I_2(t) = \int_{t_k}^{t} E\big|F\big(s, x^n(s), y_s^n; y_{t_k}^n\big)\big|^r ds, \quad I_3(t) = \int_{t_k}^{t} E\big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; y_{t_k}^n\big)\big|^r ds$$

i konstanta $c_r > 0$ je dobijena primenom Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti.

Na osnovu (1.5.3), $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{A}_2$, postoji $\bar{\theta}_1 \in (0,1)$ tako da važi

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &\equiv E \sup_{s\in[t_k,t]} \Big|\tilde{D}\big(s, y_s^n; y_{t_k}^n\big) - D\big(s, y_s^n\big) + D\big(s, y_s^n\big) - D\big(t_k, y_s^n\big) + D\big(t_k, y_s^n\big) - D\big(t_k, y_{t_k}^n\big)\Big|^r \\
&\le 3^{r-1} E \sup_{s\in[t_k,t]} \Bigg\{ \Bigg| \frac{\big(D^{(m_1+1)}_{(s, y_{t_k}^n + \bar{\theta}_1(y_s^n - y_{t_k}^n))} - D^{(m_1+1)}_{(s,0)} + D^{(m_1+1)}_{(s,0)}\big)\big(y_s^n - y_{t_k}^n\big)^{m_1+1}}{(m_1+1)!}\Bigg|^r \\
&\qquad + \Big|D\big(s, y_s^n\big) - D\big(t_k, y_s^n\big)\Big|^r + \Big|D\big(t_k, y_s^n\big) - D\big(t_k, y_{t_k}^n\big)\Big|^r \Bigg\} \\
&\le \frac{6^{r-1}(L_1')^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r} E \sup_{s\in[t_k,t]} \Big[\Big(1 + \big|y_{t_k}^n + \bar{\theta}_1(y_s^n - y_{t_k}^n)\big|^{\ell_1'}\Big)^r \big|y_{t_k}^n + \bar{\theta}_1(y_s^n - y_{t_k}^n)\big|^r \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_1+1)r}\Big] \\
&\quad + \frac{6^{r-1}(\bar{c}_1)^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r} E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_1+1)r} + 3^{r-1} L_0^r \sup_{s\in[t_k,t]} \Big[\big(1 + s^{\ell_0} + t_k^{\ell_0}\big)^r |s - t_k|^r\Big] \\
&\quad + 3^{r-1} L_1^r E \sup_{s\in[t_k,t]} \Big[\big(1 + |y_s^n|^{\ell_1} + |y_{t_k}^n|^{\ell_1}\big)^r \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^r\Big].
\end{aligned}
$$

Slično sa (2.4.19) i (2.4.20), primenom (1.5.3), zaključuje se da je

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &\le \frac{12^{r-1}(L_1')^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r} E \sup_{s\in[t_k,t]} \Big[\Big(\sup_{u\in[t_k,s]} \big|y_u^n\big|^r + \sup_{u\in[t_k,s]} \big|y_u^n\big|^{(\ell_1'+1)r}\Big) \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_1+1)r}\Big] \\
&\quad + \frac{6^{r-1}(\bar{c}_1)^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r} E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_1+1)r} + 3^{r-1} L_0^r (1 + 2T^{\ell_0})^r (t - t_k)^r \\
&\quad + 9^{r-1} L_1^r E \sup_{s\in[t_k,t]} \Big[\big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^r + \big|y_s^n\big|^{\ell_1 r} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^r + \big|y_{t_k}^n\big|^{\ell_1 r} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^r\Big].
\end{aligned}
$$

Helderova nejednakost sa konjugovanim eksponentima $\big(\frac{\gamma}{\gamma - m_1 - 1}, \frac{\gamma}{m_1+1}\big)$ i $\big(\frac{\gamma}{\gamma-1}, \gamma\big)$, kao i definicija broja γ, povlače

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &\le \frac{12^{r-1}(L_1')^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r} \Bigg[\Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n\big|^{\frac{\gamma r}{\gamma - m_1 - 1}}\Big)^{\frac{\gamma - m_1 - 1}{\gamma}} \Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}} \\
&\qquad + \Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n\big|^{\frac{\gamma(\ell_1'+1)r}{\gamma - m_1 - 1}}\Big)^{\frac{\gamma - m_1 - 1}{\gamma}} \Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}}\Bigg] \\
&\quad + \frac{6^{r-1}(\bar{c}_1)^r}{\big[(m_1+1)!\big]^r} \Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}} + 3^{r-1} L_0^r (1 + 2T^{\ell_0})^r (t - t_k)^r \\
&\quad + 9^{r-1} L_1^r \Bigg[\Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} + 2\Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n\big|^{\frac{\gamma \ell_1 r}{\gamma - 1}}\Big)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Na osnovu Teoreme 2.4.1 sledi da je

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &\le \frac{6^{r-1}}{\big[(m_1+1)!\big]^r} \Bigg\{2^{r-1}(L_1')^r \Bigg[\Big(C_j^{(\frac{\gamma^j r}{\gamma - m_1 - 1})}\Big)^{\frac{\gamma - m_1 - 1}{\gamma}} + \Big(C_j^{(\frac{\gamma^j(\ell_1'+1)r}{\gamma - m_1 - 1})}\Big)^{\frac{\gamma - m_1 - 1}{\gamma}}\Bigg] + (\bar{c}_1)^r\Bigg\} \\
&\quad \cdot \Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}} \qquad (2.4.39) \\
&\quad + 9^{r-1} L_1^r \Bigg[1 + 2\Big(C_j^{(\frac{\gamma^j \ell_1 r}{\gamma - 1})}\Big)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\Bigg] \Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} + 3^{r-1} L_0^r (1 + 2T^{\ell_0})^r (t - t_k)^r.
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu (1.5.3), $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{B}_4$, $\mathcal{A}_3$, postoji $\bar{\theta}_2 \in (0,1)$ tako da je

$$
\begin{aligned}
I_2(t) \equiv & \int_{t_k}^{t} E\Big|F\big(s, x^n(s), y_s^n; y_{t_k}^n\big) - f\big(s, x^n(s), y_s^n\big) + f\big(s, x^n(s), y_s^n\big) - f(s,0,0) + f(s,0,0)\Big|^r ds \\
\leq & 3^{r-1}\Bigg\{ \int_{t_k}^{t} E\left| \frac{\big(f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),y^n_{t_k}+\bar{\theta}_2(y^n_s-y^n_{t_k}))} - f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(t_k),0)} + f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(t_k),0)}\big)\big(y_s^n - y_{t_k}^n\big)^{m_2+1}}{(m_2+1)!}\right|^r ds \\
& + \int_{t_k}^{t} E\Big|f\big(s, x^n(s), y_s^n\big) - f(s,0,0)\Big|^r ds + \int_{t_k}^{t} \big|f(s,0,0)\big|^r ds \Bigg\} \\
\leq & \frac{6^{r-1}(L_2'')^r}{\big[(m_2+1)!\big]^r} \int_{t_k}^{t} E\Big(1 + \big|y_{t_k}^n + \bar{\theta}_2(y_s^n - y_{t_k}^n)\big|^{\ell_2''}\Big)^r \big|y_{t_k}^n + \bar{\theta}_2(y_s^n - y_{t_k}^n)\big|^r \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_2+1)r} ds \\
& + \frac{6^{r-1}(\bar{f}')^r}{\big[(m_2+1)!\big]^r} \int_{t_k}^{t} E\big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_2+1)r} ds \\
& + 3^{r-1} \int_{t_k}^{t} E\Big[K_2\big|x^n(s)\big| + L_2\Big(1 + \big|y_s^n\big|^{\ell_2}\Big)\big|y_s^n\big|\Big]^r ds + 3^{r-1}(\bar{f})^r(t - t_k).
\end{aligned}
$$

Na kraju, na osnovu (1.5.3), (2.4.19) i (2.4.20), važi da je

$$
\begin{aligned}
I_2(t) \leq & \frac{12^{r-1}(L_2'')^r}{\big[(m_2+1)!\big]^r} \int_{t_k}^{t} E\Big(\sup_{u\in[t_k,s]} \big|y_u^n\big|^r + \sup_{u\in[t_k,s]} \big|y_u^n\big|^{(\ell_2''+1)r}\Big) \big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_2+1)r} ds \\
& + \frac{6^{r-1}(\bar{f}')^r}{\big[(m_2+1)!\big]^r} \int_{t_k}^{t} E\big|y_s^n - y_{t_k}^n\big|^{(m_2+1)r} ds + 6^{r-1}K_2^r \int_{t_k}^{t} E\big|x^n(s)\big|^r ds \\
& + 12^{r-1}L_2^r \int_{t_k}^{t} E\Big(\big|y_s^n\big|^r + \big|y_s^n\big|^{(\ell_2+1)r}\Big) ds + 3^{r-1}(\bar{f})^r(t - t_k) \\
\leq & \frac{2^{(m_2+3)r-2}3^{r-1}(L_2'')^r}{\big[(m_2+1)!\big]^r} \int_{t_k}^{t} E\Big(\sup_{u\in[t_k,s]} \big|y_u^n\big|^{(m_2+2)r} + \sup_{u\in[t_k,s]} \big|y_u^n\big|^{(\ell_2''+m_2+2)r}\Big) ds \\
& + \frac{2^{(m_2+2)r-1}3^{r-1}(\bar{f}')^r}{\big[(m_2+1)!\big]^r} \int_{t_k}^{t} E\sup_{u\in[t_k,s]} \big|y_u^n\big|^{(m_2+1)r} ds + 6^{r-1}K_2^r \int_{t_k}^{t} E\big|x^n(s)\big|^r ds \\
& + 12^{r-1}L_2^r \int_{t_k}^{t} E\Big(\big|y_s^n\big|^r + \big|y_s^n\big|^{(\ell_2+1)r}\Big) ds + 3^{r-1}(\bar{f})^r(t - t_k).
\end{aligned}
$$

Na osnovu Teoreme 2.4.1 i definicije broja γ sledi da je

$$
\begin{aligned}
I_2(t) \leq & \Bigg\{ \frac{2^{(m_2+2)r-1}3^{r-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^r} \Big[2^{r-1}(L_2'')^r\Big(C_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+2)r)} + C_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+\ell_2''+2)r)}\Big) + (\bar{f}')^r C_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+1)r)}\Big] \\
& + 3^{r-1}\Big[2^{r-1}\Big((K_2^r + 2^{r-1}L_2^r)C_j^{(\gamma^{j-1}r)} + 2^{r-1}L_2^r C_j^{(\gamma^{j-1}(\ell_2+1)r)}\Big) + (\bar{f})^r\Big]\Bigg\}(t - t_k). \quad (2.4.40)
\end{aligned}
$$

Potpuno analogno može se dokazati da je

$$
\begin{aligned}
I_3(t) \leq & \Bigg\{ \frac{2^{(m_3+2)r-1}3^{r-1}}{\big[(m_3+1)!\big]^r} \Big[2^{r-1}(L_3'')^r\big(C_j^{(\gamma^{j-1}(m_3+2)r)} + C_j^{(\gamma^{j-1}(m_3+\ell_3''+2)r)}\big) + (\bar{g}')^r C_j^{(\gamma^{j-1}(m_3+1)r)}\Big] \\
& + 3^{r-1}\Big[2^{r-1}\big((K_3^r + 2^{r-1}L_3^r)C_j^{(\gamma^{j-1}r)} + 2^{r-1}L_3^r C_j^{(\gamma^{j-1}(\ell_3+1)r)}\big) + (\bar{g})^r\Big]\Bigg\}(t - t_k). \quad (2.4.41)
\end{aligned}
$$

Tada relacije (2.4.39), (2.4.40) i (2.4.41), zamenjene u (2.4.38), daju

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \qquad\qquad (2.4.42)\\
&\quad\le A_1^{(r)}\Big(E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|y_s^n-y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}} + A_2^{(r)}\Big(E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|y_s^n-y_{t_k}^n\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} + B^{(r)}(t-t_k)^{r/2},
\end{aligned}
$$

gde, na osnovu toga što je $\delta_n<1$, važi da je

$$
\begin{aligned}
A_1^{(r)} &= \frac{18^{r-1}}{\big[(m_1+1)!\big]^r}\Big\{2^{r-1}(\tilde{L}_1')^r\Big[\Big(C_j^{(\frac{\gamma^j r}{\gamma-m_1-1})}\Big)^{\frac{\gamma-m_1-1}{\gamma}} + \Big(C_j^{(\frac{\gamma^j(\ell_1'+1)r}{\gamma-m_1-1})}\Big)^{\frac{\gamma-m_1-1}{\gamma}}\Big] + (\tilde{\tilde{c}}_1)^r\Big\},\\
A_2^{(r)} &= 27^{r-1}(\tilde{L}_1)^r\Big[1+2\Big(C_j^{(\frac{\gamma^j\ell_1 r}{\gamma-1})}\Big)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\Big],\\
B^{(r)} &= 9^{r-1}\Big\{(\tilde{L}_0)^r(1+2T^{\ell_0})^r+\big(\tilde{\tilde{f}}\big)^r+c_r(\tilde{\tilde{g}})^r+2^{2(r-1)}\big[(\tilde{L}_2)^rC_j^{(\gamma^{j-1}(\ell_2+1)r)}+c_r(\tilde{L}_3)^rC_j^{(\gamma^{j-1}(\ell_3+1)r)}\big]\\
&\quad+\frac{2^{(m_2+2)r-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^r}\Big[2^{r-1}(\tilde{L}_2'')^r\big(C_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+2)r)}+C_j^{(\gamma^{j-1}(\ell_2''+m_2+2)r)}\big)+\big(\tilde{\tilde{f}}'\big)^rC_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+1)r)}\Big]\\
&\quad+\frac{2^{(m_3+2)r-1}c_r}{\big[(m_3+1)!\big]^r}\Big[2^{r-1}(\tilde{L}_3'')^r\big(C_j^{(\gamma^{j-1}(m_3+2)r)}+C_j^{(\gamma^{j-1}(\ell_3''+m_3+2)r)}\big)+(\tilde{\tilde{g}}')^rC_j^{(\gamma^{j-1}(m_3+1)r)}\Big]\\
&\quad+2^{r-1}C_j^{(\gamma^{j-1}r)}\Big[(\tilde{K}_2)^r+2^{r-1}(\tilde{L}_2)^r+c_r\big[(\tilde{K}_3)^r+2^{r-1}(\tilde{L}_3)^r\big]\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Za $t\in[t_k,t_{k+1}]$, ako $k\in\{0,\dots,(n'-1)\wedge(n-1)\}$, primenom polinomijalnog uslova iz pretpostavke $\mathcal{C}_3$, relacija (2.4.42) implicira

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r\\
&\quad\le A_1^{(r)}\Big(E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|\eta(s-t_0-\tau)-\eta(t_k-t_0-\tau)\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}}\\
&\qquad+A_2^{(r)}\Big(E\sup_{s\in[t_k,t]}\big|\eta(s-t_0-\tau)-\eta(t_k-t_0-\tau)\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}+B^{(r)}(t-t_k)^{r/2}\\
&\quad\le A_1^{(r)}\Lambda^{(m_1+1)r}\big(1+|t-t_0-\tau|^\lambda+|t_k-t_0-\tau|^\lambda\big)^{(m_1+1)r}(t-t_k)^{(m_1+1)r}\\
&\qquad+A_2^{(r)}\Lambda^r\big(1+|t-t_0-\tau|^\lambda+|t_k-t_0-\tau|^\lambda\big)^r(t-t_k)^r+B^{(r)}(t-t_k)^{r/2}\\
&\quad\le\Theta_1^{(r)}(t-t_k)^{r/2}, \qquad\qquad (2.4.43)
\end{aligned}
$$

gde na osnovu toga što je $\delta_n<1$, važi

$$
\Theta_1^{(r)}=2A_0^{(r)}(\tilde{\Lambda}_0)^{\gamma r}+B^{(r)},\quad A_0^{(r)}=A_1^{(r)}\vee A_2^{(r)},\quad \Lambda_0=\Lambda(1+2\tau^\lambda).
$$

Za $t\in[t_k,t_{k+1}]$, ako $k\in\{n'\wedge(n-1),\dots,(2n'-1)\wedge(n-1)\}$, primenom relacija (2.4.42) i (2.4.43), dolazi se do ocene

$$
\begin{aligned}
E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r &\le A_1^{(r)}\Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}} \\
&\quad + A_2^{(r)}\Big(E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s-\tau)-x^n(t_k-\tau)\big|^{\gamma r}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} + B^{(r)}(t-t_k)^{r/2} \\
&\le A_1^{(r)}\big(\Theta_1^{(\gamma r)}\big)^{\frac{m_1+1}{\gamma}}(t-t_k)^{(m_1+1)r/2} + A_2^{(r)}\big(\Theta_1^{(\gamma r)}\big)^{\frac{1}{\gamma}}(t-t_k)^{r/2} \\
&\quad + B^{(r)}(t-t_k)^{r/2}.
\end{aligned}
$$

Očigledno je $A_i^{(\gamma^\alpha r)} \le A_i^{(\gamma^\beta r)}$ za $i\in\{1,2\}$, $B^{(\gamma^\alpha r)} \le B^{(\gamma^\beta r)}$, i za konstante iz Burkholder–Dejvis–Gandijeve nejednakosti važi $c_{\gamma^\alpha r} \le c_{\gamma^\beta r}$, gde je $0\le\alpha\le\beta$. Kako je $A_2^{(r)} \ge 1$, odnosno $A_0^{(r)} \ge 1$, sledi da je

$$
E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \le \Theta_2^{(\gamma r)}(t-t_k)^{r/2},
$$

gde je

$$
\Theta_2^{(\gamma r)} = 2^2\big(A_0^{(\gamma r)}\big)^2\big(\tilde{\Lambda}_0\big)^{\gamma^2 r} + B^{(\gamma r)}\big(1+2A_0^{(\gamma r)}\big).
$$

Slično, za $t\in[t_k,t_{k+1}]$, ako $k\in\{(2n')\wedge(n-1),\ldots,(3n'-1)\wedge(n-1)\}$, prema relacijama (2.4.42) i (2.4.43), dobija se

$$
E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \le \Theta_3^{(\gamma^2 r)}(t-t_k)^{r/2},
$$

gde je

$$
\Theta_3^{(\gamma^2 r)} = 2^3\big(A_0^{(\gamma^2 r)}\big)^3\big(\tilde{\Lambda}_0\big)^{\gamma^3 r} + B^{(\gamma^2 r)}\Big(1+2A_0^{(\gamma^2 r)} + 2^2\big(A_0^{(\gamma^2 r)}\big)^2\Big).
$$

Za $t\in[t_k,t_{k+1}]$, ako $k\in\{((i-1)n')\wedge(n-1),\ldots,(in')\wedge(n-1)\}$, $3\le i\le j$, na osnovu matematičke indukcije zaključuje se da je

$$
E \sup_{s\in[t_k,t]} \big|x^n(s)-x^n(t_k)\big|^r \le \Theta_i^{(\gamma^{i-1} r)}(t-t_k)^{r/2}, \tag{2.4.44}
$$

gde je

$$
\Theta_i^{(\gamma^{i-1} r)} = 2^i\big(A_0^{(\gamma^{i-1} r)}\big)^i\big(\tilde{\Lambda}_0\big)^{\gamma^i r} + B^{(\gamma^{i-1} r)}\frac{2^i\big(A_0^{(\gamma^{i-1} r)}\big)^i-1}{2A_0^{(\gamma^{i-1} r)}-1}.
$$

Prema tome, ocena (2.4.44) za $i=j$ implicira (2.4.37). $\square$

Teorema 2.4.3. *Neka važe sve pretpostavke Propozicije 2.4.2 i neka je x rešenje jednačine* (2.4.1) *sa početnim uslovom* (1.3.20). *Tada, za svako $\bar{p}\ge 0$ i $q>1$, važi*

$$
E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} \big|x(t)-x^n(t)\big|^{\bar{p}} \le \bar{C}\delta_n^{(m+1)\bar{p}/2-1/q},
$$

gde je $m=m_1\wedge m_2\wedge m_3$ i $\bar{C}$ je konstanta nezavisna od n.

Dokaz. Dokaz se razmatra za $\bar{p} \geq 2$, dok slučaj $0 < \bar{p} < 2$ sledi na osnovu Helderove nejednakosti. Neka je $t \in [t_0, T]$ proizvoljno i fiksirano, i neka je $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tako da je $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Tada, standardna procedura koja je primenjena na početku dokaza Propozicije 2.4.2 implicira

$$E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} \big|x(s) - x^n(s)\big|^{\bar{p}} \leq 3^{\bar{p}-1}\big[J_1(t) + (t-t_0)^{\bar{p}-1} J_2(t) + c_{\bar{p}}(t-t_0)^{(\bar{p}-2)/2} J_3(t)\big], \quad (2.4.45)$$

gde je

$$\begin{aligned}
J_1(t) &= E \sup_{s\in[t_0,t]} \Big|D(s, y_s) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{\bar{p}},\\
J_2(t) &= \int_{t_0}^{t} E\Big|F\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big) - f\big(s, x(s), y_s\big)\Big|^{\bar{p}} ds,\\
J_3(t) &= \int_{t_0}^{t} E\Big|G\big(s, x^n(s), y_s^n; z_s^n\big) - g\big(s, x(s), y_s\big)\Big|^{\bar{p}} ds,
\end{aligned}$$

i

$$y_s = x(s-\tau), \quad s \in [t_0, T].$$

Dodajući i oduzimajući $D(s, y_s^n)$, izraz $J_1(t)$ se može oceniti na osnovu pretpostavki $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{B}_1$, kao i nejednakosti (1.5.3). Tada postoji $\theta_D \in (0,1)$ tako da je

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq 2^{\bar{p}-1}\bigg\{E \sup_{s\in[t_0,t]} \Big|D(s, y_s) - D\big(s, y_s^n\big)\Big|^{\bar{p}} + E \sup_{s\in[t_0,t]} \Big|D\big(s, y_s^n\big) - \tilde{D}\big(s, y_s^n; z_s^n\big)\Big|^{\bar{p}}\bigg\}\\
&\leq 2^{\bar{p}-1}\bigg\{L_1^{\bar{p}} E \sup_{s\in[t_0,t]} \Big(1 + |y_s|^{\ell_1} + \big|y_s^n\big|^{\ell_1}\Big)^{\bar{p}} \big|y_s - y_s^n\big|^{\bar{p}}\\
&\qquad + E \sup_{s\in[t_0,t]} \left|\frac{D^{(m_1+1)}_{(s, z_s^n + \theta_D(y_s^n - z_s^n))}\big(y_s^n - z_s^n\big)^{m_1+1}}{(m_1+1)!}\right|^{\bar{p}}\bigg\}.
\end{aligned}$$

Na osnovu Helderove nejednakosti i uslova $\mathcal{B}_2$, slično kao u relaciji (2.4.20), dobija se

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq 6^{\bar{p}-1} L_1^{\bar{p}}\bigg[E \sup_{s\in[t_0,t]} \big|y_s - y_s^n\big|^{\bar{p}} + E \sup_{s\in[t_0,t]} \Big(|y_s|^{\ell_1\bar{p}} \big|y_s - y_s^n\big|^{\bar{p}}\Big) + E \sup_{s\in[t_0,t]} \Big(\big|y_s^n\big|^{\ell_1\bar{p}} \big|y_s - y_s^n\big|^{\bar{p}}\Big)\bigg]\\
&\quad + \frac{2^{\bar{p}-1}}{\big[(m_1+1)!\big]^{\bar{p}}} E \sup_{s\in[t_0,t]} \Big(\big\|D^{(m_1+1)}_{(s, z_s^n + \theta_D(y_s^n - z_s^n))} - D^{(m_1+1)}_{(s,0)} + D^{(m_1+1)}_{(s,0)}\big\|^{\bar{p}}_{m_1+1} \big|y_s^n - z_s^n\big|^{(m_1+1)\bar{p}}\Big)\\
&\leq 6^{\bar{p}-1} L_1^{\bar{p}}\Big[\big(E \sup_{s\in[t_0,t]} |y_s - y_s^n|^{2\bar{p}}\big)^{1/2} + \big(E \sup_{s\in[t_0,t]} |y_s|^{2\ell_1\bar{p}}\big)^{1/2} \big(E \sup_{s\in[t_0,t]} |y_s - y_s^n|^{2\bar{p}}\big)^{1/2}\\
&\qquad + \big(E \sup_{s\in[t_0,t]} |y_s^n|^{2\ell_1\bar{p}}\big)^{1/2} \big(E \sup_{s\in[t_0,t]} |y_s - y_s^n|^{2\bar{p}}\big)^{1/2}\Big]\\
&\quad + \frac{2^{\bar{p}-1}}{\big[(m_1+1)!\big]^{\bar{p}}} \Big(E \sup_{s\in[t_0,t]} \big\|D^{(m_1+1)}_{(s, z_s^n + \theta_D(y_s^n - z_s^n))} - D^{(m_1+1)}_{(s,0)} + D^{(m_1+1)}_{(s,0)}\big\|^{q\bar{p}/(q-1)}_{m_1+1}\Big)^{(q-1)/q}\\
&\quad \cdot \big(E \sup_{s\in[t_0,t]} |y_s^n - z_s^n|^{q(m_1+1)\bar{p}}\big)^{1/q},
\end{aligned}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
J_1(t) &\le 6^{\bar p-1}L_1^{\bar p}\Big[E\sup_{s\in[t_0,t]}\big|y_s-y_s^n\big|^{\bar p}+E\sup_{s\in[t_0,t]}\Big(|y_s|^{\ell_1\bar p}\big|y_s-y_s^n\big|^{\bar p}\Big)+E\sup_{s\in[t_0,t]}\Big(\big|y_s^n\big|^{\ell_1\bar p}\big|y_s-y_s^n\big|^{\bar p}\Big)\Big]\\
&\le 6^{\bar p-1}L_1^{\bar p}\Big[1+\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s|^{2\ell_1\bar p}\big)^{1/2}+\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n|^{2\ell_1\bar p}\big)^{1/2}\Big]\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}\\
&\quad+\frac{2^{2\bar p-2+1/q}}{\big[(m_1+1)!\big]^{\bar p}}\Big\{(L_1')^{\bar p}E\sup_{s\in[t_0,t]}\Big[\big(1+|z_s^n+\theta_D(y_s^n-z_s^n)|^{\ell_1'}\big)^{\bar p}\big|z_s^n+\theta_D(y_s^n-z_s^n)\big|^{\bar p}\Big]+(\bar c_1)^{\bar p}\Big\}\\
&\quad\cdot\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n-z_s^n|^{q(m_1+1)\bar p}\big)^{1/q}\\
&\le 6^{\bar p-1}L_1^{\bar p}\Big[1+\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s|^{2\ell_1\bar p}\big)^{1/2}+\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n|^{2\ell_1\bar p}\big)^{1/2}\Big]\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}\\
&\quad+\frac{2^{2\bar p-2+1/q}}{\big[(m_1+1)!\big]^{\bar p}}\Big[2^{\bar p-1}(L_1')^{\bar p}\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n|^{\bar p}+E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n|^{(\ell_1'+1)\bar p}\big)+(\bar c_1)^{\bar p}\Big]\\
&\quad\cdot\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n-z_s^n|^{q(m_1+1)\bar p}\big)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Primenom Teoreme 2.4.1 i relacije (2.4.2), sledi da je

$$
J_1(t)\le \Gamma_{1d}\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}+\Gamma_{2d}\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n-z_s^n|^{q(m_1+1)\bar p}\big)^{1/q}, \tag{2.4.46}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{1d}&=6^{\bar p-1}\tilde L_1^{\bar p}\Big[1+\big(C^{(2\ell^j\ell_1\bar p)}\big)^{1/2}+\big(C_j^{(2\gamma^{j-1}\ell_1\bar p)}\big)^{1/2}\Big],\\
\Gamma_{2d}&=\frac{2^{2\bar p-2+1/q}}{\big[(m_1+1)!\big]^{\bar p}}\Big[2^{\bar p-1}(\tilde L_1')^{\bar p}\big(C_j^{(\gamma^{j-1}\bar p)}+C_j^{(\gamma^{j-1}(\ell_1'+1)\bar p)}\big)+(\tilde{\bar c}_1)^{\bar p}\Big].
\end{aligned}
$$

Na osnovu pretpostavke $\mathcal{C}_3$ i Propozicije 2.4.2, kao i nejednakosti (1.5.3), za drugi sabirak u (2.4.46) važi ocena

$$
\begin{aligned}
&\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s^n-z_s^n|^{q(m_1+1)\bar p}\big)^{1/q}\\
&\quad\le \Lambda^{(m_1+1)\bar p}(1+2\tau^\lambda)^{(m_1+1)\bar p}(n')^{1/q}\delta_n^{(m_1+1)\bar p}+\big(\Theta_j^{(\gamma^{j-1}q(m_1+1)\bar p)}\big)^{1/q}(k-n'+1)^{1/q}\delta_n^{(m_1+1)\bar p/2}\\
&\quad\le \Big[\Lambda^{(m_1+1)\bar p}(1+2\tau^\lambda)^{(m_1+1)\bar p}\tilde\tau+\big(\Theta_j^{(\gamma^{j-1}q(m_1+1)\bar p)}\big)^{1/q}(T\perp t_0)\Big]\delta_n^{(m_1+1)\bar p/2-1/q}.
\end{aligned}\tag{2.4.47}
$$

Relacije (2.4.46) i (2.4.47) na kraju impliciraju

$$
J_1(t)\le \Gamma_{1d}\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}+\Gamma_{3d}\delta_n^{(m_1+1)\bar p/2-1/q}, \tag{2.4.48}
$$

gde je

$$
\Gamma_{3d}=\Gamma_{2d}\Big[\tilde\Lambda^{(m_1+1)\bar p}(1+2\tau^\lambda)^{(m_1+1)\bar p}\tilde\tau+\big(\Theta_j^{(\gamma^{j-1}q(m_1+1)\bar p)}\big)^{1/q}(T\perp t_0)\Big].
$$

Za $t\in[t_0,T]$ postoji $k\in\{0,\dots n-1\}$ tako da je $t\in[t_k,t_{k+1}\wedge t]$. Da bi se ocenio izraz $J_2(t)$, dodaje se i oduzima $f(s,x^n(s),y_s^n)$, i stoga za svako $u\in[t_i,t_{i+1}\wedge t]$, $i\in\{0,\dots,k\}$, važi da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{u} E\Big|F\big(s,x^n(s),y^n_s;z^n_s\big)-f\big(s,x(s),y_s\big)\Big|^{\bar p}ds \qquad (2.4.49)\\
&\quad\le 2^{\bar p-1}\int_{t_i}^{u} E\Big[\big|f(s,x^n(s),y^n_s)-f(s,x(s),y_s)\big|^{\bar p}+\big|F(s,x^n(s),y^n_s;z^n_s)-f(s,x^n(s),y^n_s)\big|^{\bar p}\Big]ds.
\end{aligned}
$$

Ponavljajući proceduru primenjenu u dokazu Teoreme 2.4.1 prilikom ocenjivanja izraza M_3, pretpostavke $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3$ i $\mathcal{B}_4$ impliciraju da postoji $\theta_f\in(0,1)$ tako da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{u} E\Big|F\big(s,x^n(s),y^n_s;z^n_s\big)-f\big(s,x^n(s),y^n_s\big)\Big|^{\bar p}ds\\
&\quad\le \frac{2^{\bar p-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^{\bar p}}\bigg\{\int_{t_i}^{u} E\big\|f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),z^n_s+\theta_f(y^n_s-z^n_s))}-f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),0)}\big\|^{\bar p}_{m_2+1}\big|y^n_s-z^n_s\big|^{(m_2+1)\bar p}ds\\
&\qquad\qquad+\int_{t_i}^{u} E\big\|f^{(m_2+1)}_{(s,x^n(s),0)}\big\|^{\bar p}_{m_2+1}\big|y^n_s-z^n_s\big|^{(m_2+1)\bar p}ds\bigg\}\\
&\quad\le \frac{2^{\bar p-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^{\bar p}}\bigg\{(L_2')^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E\Big(1+\big|z^n_s+\theta_f(y^n_s-z^n_s)\big|^{\ell_2'}\Big)^{\bar p}\big|z^n_s+\theta_f(y^n_s-z^n_s)\big|^{\bar p}\big|y^n_s-z^n_s\big|^{(m_2+1)\bar p}ds\\
&\qquad\qquad+(\bar f')^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E\big|y^n_s-z^n_s\big|^{(m_2+1)\bar p}ds\bigg\}. \qquad (2.4.50)
\end{aligned}
$$

Na osnovu Propozicije 2.4.2, slično relaciji (2.4.20), nejednakost Koši–Švarc–Bunjakovskog i Teorema 2.4.1 primenjene na ocenu (2.4.50) impliciraju da, za svako $t\in[t_k,t_{k+1}]$, $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, $i\in\{0,\ldots,k\}$ i $u\in[t_i,t_{i+1}\wedge t]$, važi da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{u} E\Big|F\big(s,x^n(s),y^n_s;z^n_s\big)-f\big(s,x^n(s),y^n_s\big)\Big|^{\bar p}ds\\
&\quad\le \frac{4^{\bar p-1}(L_2')^{\bar p}}{\big[(m_2+1)!\big]^{\bar p}}\int_{t_i}^{u} E\bigg[\Big(\big|z^n_s+\theta_f(y^n_s-z^n_s)\big|^{\bar p}+\big|z^n_s+\theta_f(y^n_s-z^n_s)\big|^{(\ell_2'+1)\bar p}\Big)\big|y^n_s-z^n_s\big|^{(m_2+1)\bar p}\bigg]ds\\
&\qquad+\frac{2^{\bar p-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^{\bar p}}(\bar f')^{\bar p}\Theta_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+1)\bar p)}\delta_n^{(m_2+1)\bar p/2}(u-t_i)\\
&\quad\le \frac{4^{\bar p-1}(L_2')^{\bar p}}{\big[(m_2+1)!\big]^{\bar p}}\int_{t_i}^{u} \Big[\big(E\sup_{v\in[t_i,s]}|y^n_v|^{2\bar p}\big)^{1/2}+\big(E\sup_{v\in[t_i,s]}|y^n_v|^{2(\ell_2'+1)\bar p}\big)^{1/2}\Big]\big(E|y^n_s-z^n_s|^{2(m_2+1)\bar p}\big)^{1/2}ds\\
&\qquad+\frac{2^{\bar p-1}(\bar f')^{\bar p}\Theta_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+1)\bar p)}}{\big[(m_2+1)!\big]^{\bar p}}\delta_n^{(m_2+1)\bar p/2}(u-t_i)\\
&\quad\le \Gamma\delta_n^{(m_2+1)\bar p/2}(u-t_i), \qquad (2.4.51)
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\Gamma=\frac{2^{\bar p-1}}{\big[(m_2+1)!\big]^{\bar p}}\bigg\{&2^{\bar p-1}(\tilde L_2')^{\bar p}\Big[\big(C_j^{(2\gamma^{j-1}\bar p)}\big)^{1/2}+\big(C_j^{(2\gamma^{j-1}(\ell_2'+1)\bar p)}\big)^{1/2}\Big]\big(\Theta_j^{(2\gamma^{j-1}(m_2+1)\bar p)}\big)^{1/2}\\
&+\big(\widetilde{\bar f}'\big)^{\bar p}\Theta_j^{(\gamma^{j-1}(m_2+1)\bar p)}\bigg\}.
\end{aligned}
$$

Prvi sabirak u (2.4.49) može se oceniti primenom pretpostavke $\mathcal{A}_3$, nejednakosti Koši–Švarc–Bunjakovskog i (1.5.3), tako da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{u} E\Big|f\big(s,x^n(s),y_s^n\big)-f\big(s,x(s),y_s\big)\Big|^{\bar p}ds\\
&\quad\le 2^{\bar p-1}K_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E\big|x(s)-x^n(s)\big|^{\bar p}ds+2^{\bar p-1}L_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E\Big[\big(1+|y_s|^{\ell_2}+|y_s^n|^{\ell_2}\big)^{\bar p}|y_s-y_s^n|^{\bar p}\Big]ds\\
&\quad\le 2^{\bar p-1}K_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E\big|x(s)-x^n(s)\big|^{\bar p}ds+6^{\bar p-1}L_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E|y_s-y_s^n|^{\bar p}ds\\
&\qquad+6^{\bar p-1}L_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u}\big(E|y_s|^{\ell_2\bar p}|y_s-y_s^n|^{\bar p}+E|y_s^n|^{\ell_2\bar p}|y_s-y_s^n|^{\bar p}\big)ds\\
&\quad\le 2^{\bar p-1}K_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E\big|x(s)-x^n(s)\big|^{\bar p}ds\\
&\qquad+6^{\bar p-1}L_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u}\Big[1+\big(E|y_s|^{2\ell_2\bar p}\big)^{1/2}+\big(E|y_s^n|^{2\ell_2\bar p}\big)^{1/2}\Big]\big(E|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}ds.
\end{aligned}
$$

Na osnovu (2.4.2) i Teoreme 2.4.1, dobija se da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{u} E\Big|f\big(s,x^n(s),y_s^n\big)-f\big(s,x(s),y_s\big)\Big|^{\bar p}ds\\
&\qquad\le 2^{\bar p-1}K_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u} E\big|x(s)-x^n(s)\big|^{\bar p}ds+\Delta^{(\bar p)}\int_{t_i}^{u}\big(E|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}ds,
\end{aligned}
\tag{2.4.52}
$$

gde je

$$
\Delta^{(\bar p)}=6^{\bar p-1}\tilde L_2^{\bar p}\Big[1+\big(C^{(2\ell^j\ell_2\bar p)}\big)^{1/2}+\big(C_j^{(2\gamma^{j-1}\ell_2\bar p)}\big)^{1/2}\Big].
$$

Zamenom (2.4.51) i (2.4.52) u (2.4.49), za svako $u\in[t_i,t_{i+1}\wedge t]$, $i\in\{0,\dots,k\}$, sledi da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{u} E\Big|F\big(s,x^n(s),y_s^n;z_s^n\big)-f\big(s,x(s),y_s\big)\Big|^{\bar p}ds\\
&\quad\le 2^{\bar p-1}\Big\{\Gamma\delta_n^{(m_2+1)\bar p/2}(u-t_i)+2^{\bar p-1}K_2^{\bar p}\int_{t_i}^{u}E\big|x(s)-x^n(s)\big|^{\bar p}ds+\Delta^{(\bar p)}\int_{t_i}^{u}\big(E|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}ds\Big\}
\end{aligned}
$$

i tada je

$$
\begin{aligned}
J_2(t)\le 2^{\bar p-1}\Big\{&\Gamma\delta_n^{(m_2+1)\bar p/2}(t-t_0)+2^{\bar p-1}K_2^{\bar p}\int_{t_0}^{t}E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}\big|x(u)-x^n(u)\big|^{\bar p}ds\\
&+\Delta^{(\bar p)}\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}(t-t_0)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.4.53}
$$

Očigledno da se isto može uraditi za funkcional g, sa odgovarajućim konstantama, odnosno važi

$$
\begin{aligned}
J_3(t)\le 2^{\bar p-1}\Big\{&\Gamma'\delta_n^{(m_+1)\bar p/2}(t-t_0)+2^{\bar p-1}K_3^{\bar p}\int_{t_0}^{t}E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}\big|x(u)-x^n(u)\big|^{\bar p}ds\\
&+\Delta'^{(\bar p)}\big(E\sup_{s\in[t_0,t]}|y_s-y_s^n|^{2\bar p}\big)^{1/2}(t-t_0)\Big\},
\end{aligned}
\tag{2.4.54}
$$

gde je

$$\Gamma' = \frac{2^{\bar p-1}}{\big[(m_3+1)!\big]^{\bar p}}\bigg\{2^{\bar p-1}(\tilde L_3')^{\bar p}\Big[\big(C_j^{(2\gamma^{j-1}\bar p)}\big)^{1/2}+\big(C_j^{(2\gamma^{j-1}(\ell_3'+1)\bar p)}\big)^{1/2}\Big]\big(\Theta_j^{(2\gamma^{j-1}(m_3+1)\bar p)}\big)^{1/2}$$
$$+(\widetilde{g}')^{\bar p}\Theta_j^{(\gamma^{j-1}(m_3+1)\bar p)}\bigg\},$$
$$\Delta'^{(\bar p)} = 6^{\bar p-1}\tilde L_3^{\bar p}\Big[1+\big(C^{(2\ell^j\ell_3\bar p)}\big)^{1/2}+\big(C_j^{(2\gamma^{j-1}\ell_3\bar p)}\big)^{1/2}\Big].$$

Zamenom (2.4.48), (2.4.53) i (2.4.54) u (2.4.45), a kako je n dovoljno veliko tako da je $\delta_n < 1$, dobija se

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^{\bar p} \le K_{01}^{(\bar p)}\delta_n^{(m+1)\bar p/2-1/q}+K_{02}^{(\bar p)}\int_{t_0}^{t}E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}\big|x(u)-x^n(u)\big|^{\bar p}ds$$
$$+K_{03}^{(\bar p)}\Big(E\sup_{s\in[t_0,t]}\big|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)\big|^{2\bar p}\Big)^{1/2}, \qquad (2.4.55)$$

gde je

$$K_{01}^{(\bar p)} = 3^{\bar p-1}\Big\{\Gamma_{3d}+2^{\bar p-1}(T - t_0)^{\bar p/2}\big[(T - t_0)^{\bar p/2}\Gamma+c_{\bar p}\Gamma'\big]\Big\},$$
$$K_{02}^{(\bar p)} = 12^{\bar p-1}(T - t_0)^{\bar p/2-1}\big[(T - t_0)^{\bar p/2}\tilde K_2^{\bar p}+c_{\bar p}\tilde K_3^{\bar p}\big],$$
$$K_{03}^{(\bar p)} = 3^{\bar p-1}\Big\{\Gamma_{1d}+2^{\bar p-1}(T - t_0)^{\bar p/2}\big[(T - t_0)^{\bar p/2}\Delta^{(\bar p)}+c_{\bar p}\Delta'^{(\bar p)}\big]\Big\}.$$

Primena Grunvalove nejednakosti na (2.4.55) dovodi do ocene

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^{\bar p} \le L_1^{(\bar p)}\bigg[\delta_n^{(m+1)\bar p/2-1/q}+\Big(E\sup_{s\in[t_0,t]}\big|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)\big|^{2\bar p}\Big)^{1/2}\bigg], \qquad (2.4.56)$$

gde je

$$L_1^{(\bar p)} = \big(K_{01}^{(\bar p)}\vee K_{03}^{(\bar p)}\big)e^{K_{02}^{(\bar p)}(T-t_0)}.$$

Očigledno, za $t\in[t_0,t_0+\tau]$, (2.4.56) postaje

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^{\bar p} \le L_1^{(\bar p)}\delta_n^{(m+1)\bar p/2-1/q}. \qquad (2.4.57)$$

Za $t\in[t_0+\tau,t_0+2\tau]$, primenom (2.4.56) i (2.4.57), dobija se da je

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^{\bar p} \le L_1^{(\bar p)}\delta_n^{(m+1)\bar p/2-1/q}+L_1^{(\bar p)}\Big(E\sup_{s\in[t_0,t]}\big|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)\big|^{2\bar p}\Big)^{1/2}$$
$$\le L_2^{(\bar p)}\delta_n^{(m+1)\bar p/2-1/q},$$

jer je $K_{0i}^{(\alpha)} \le K_{0i}^{(\beta)}$, za $2\le\alpha\le\beta$, $i\in\{1,2,3\}$ i $0<\delta_n<1$, gde je

$$L_2^{(\bar p)} = L_1^{(2\bar p)}\Big[1+\big(L_1^{(2\bar p)}\big)^{1/2}\Big].$$

Slično, za $t \in [t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$, važi

$$\begin{aligned} E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x(s) - x^n(s)|^{\bar{p}} &\le L_1^{(\bar{p})} \delta_n^{(m+1)\bar{p}/2-1/q} + L_1^{(\bar{p})} \Big(E \sup_{s\in[t_0,t]} \big|x(s-\tau) - x^n(s-\tau)\big|^{2\bar{p}} \Big)^{1/2} \\ &\le \Big[L_1^{(\bar{p})} + L_1^{(\bar{p})} \big(L_2^{(2\bar{p})} \big)^{1/2} \Big] \delta_n^{(m+1)\bar{p}/2-1/q} \\ &\le L_3^{(\bar{p})} \delta_n^{(m+1)\bar{p}/2-1/q}, \end{aligned}$$

gde se, na osnovu relacije (1.5.3), dobija

$$L_3^{(\bar{p})} = L_1^{(2^2\bar{p})} + \big(L_1^{(2^2\bar{p})}\big)^{1+1/2} + \big(L_1^{(2^2\bar{p})}\big)^{1+1/2+1/2^2}.$$

Na osnovu matematičke indukcije se zaključuje da, za $t \in [t_0 + (i-1)\tau, t_0 + i\tau]$, važi ocena

$$E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x(s) - x^n(s)|^{\bar{p}} \le L_i^{(\bar{p})} \delta_n^{(m+1)\bar{p}/2-1/q},$$

gde je

$$L_i^{(\bar{p})} = L_1^{(2^{i-1}\bar{p})} + \big(L_1^{(2^{i-1}\bar{p})}\big)^{1+1/2} + \cdots + \big(L_1^{(2^{i-1}\bar{p})}\big)^{1+1/2+1/2^2+\cdots+1/2^{i-1}} \le i \big(L_1^{(2^{i-1}\bar{p})}\big)^{2(1-1/2^i)},$$

za svako $i \in \{1, \ldots, j\}$.

Dokaz je sada kompletan za $i = j$ i u tom slučaju je $\bar{C} = L_j^{(\bar{p})}$. $\square$

Zaključak

Tema ove doktorske disertacije je primena Tejlorove formule na koeficijente različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina, u cilju aproksimacija njihovih rešenja pod uslovima koji nisu standardni kao globalni Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta. Pod određenim pretpostavkama pokazuje se konvergencija niza aproksimativnih rešenja ka rešenju polazne jednačine, u skoro izvesnom smislu i u srednjem reda $p > 0$. Red konvergencije u L^p–smislu se povećava ukoliko se povećaju redovi izvoda u Tejlorovim aproksimacijama koeficijenata polazne jednačine. Dobijeni rezultati se ilustruju kroz primere koji su koncipirani tako da nisu zadovoljeni globalni Lipšicov uslov i/ili uslov linearnog rasta za koeficijente prenosa i difuzije, te je na taj način opravdavana potreba za dokazanim rezultatima. Tehnike primenjene u dokazima su uslovljene tipom jednačine koja se razmatra, kao i uslovima koji su pretpostavljeni za koeficijente jednačina.

Pored tipova SDJ razmatranih u ovoj disertaciji postoje i njihova različita uopštenja, kao što su SDJ sa Puasonovim skokom, sa Levijevim skokom, sa Markovskim prelazima, impulsivne i druge. Imajući u vidu da su i one retko eksplicitno rešive, proučavanje kvalitativnih i kvantitativnih osobina njihovih tačnih i aproksimativnih rešenja, pod drugačijim uslovima za koeficijente od onih pretpostavljenih u ovoj doktorskoj disertaciji, mogu biti predmet daljih istraživanja. Kako je poznato da postoje i stohastički integrali koji nisu zasnovani na Braunovom kretanju, već na proizvoljnom martingalu, u daljem izučavanju mogu biti od interesa SDJ sa stohastičkim integralima u odnosu na martingalne mere.

Literatura

[1] Atalla, M. A.: Finite-difference approximations for stochastic differential equations, Probabilistic Methods for the Investigation of Systems with an Infinite number of Degrees of freedom, Inst. of Math. Acad. of Science USSR, Kiev, (1986) 11–16 (in Russian)

[2] Atalla, M. A.: On one approximating method for stochastic differential equations, Asymptotic Methods for the Theory of Stochastic processes, Inst. of Math. Acad. of Science USSR, Kiev, (1987) 15–21 (in Russian)

[3] Bahar, A., Mao, X.: Stochastic delay Lotka-Volterra model, J. Math. Anal. Appl., 292 (2004) 364–380

[4] Bahar, A., Mao, X.: Stochastic delay population dynamics, International J. Pure and Applied Math., 11 (2004) 377–400

[5] Baker, C.T.H., Buckwar, E.: Numerical analysis of explicit one-step methods for stochastic delay differential equations, LMS J. Comput. Math., 3 (2000) 315–335

[6] Beuter, A., Bélair, J., Labrie, C., Bélair, J.: Feedback and delays in neurological diseases: a modelling study using dynamical systems, Bull. Math. Biol., 55 (1993) 525–541

[7] Buckwar, E.: One-step approximation for stochastic functional differential equations, Appl. Numerical Math., 56 (2006) 667–681

[8] Buckwar, E., Shardlow, T.: Weak approximation of stochastic differential delay equations, IMA J. Numer. Anal., 25:1 (2005) 57–86

[9] Collatz, L.: Functional analysis and numerical mathematics. Academic Press, New York - San Francisco - London, 1966.

[10] Djordjević, D. D.: A Taylor Method for Stochastic Differential Equations with Time-Dependent Delay via the Polynomial Condition, Stochastic Analysis and Applications, (2021), https://doi.org/10.1080/07362994.2021.1936041

[11] Djordjević, D. D., Jovanović, M.: On the approximations of solutions to stochastic differential equations under polynomial condition, Filomat, 35:1 (2021) 11–25, https://doi.org/10.2298/FIL2101011D

[12] Djordjević, D. D., Milošević, M.: An approximate Taylor method for Stochastic Functional Differential Equations via polynomial condition, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta: Seria Matematica, 29:3 (2021)

[13] Eurich, C.W., Milton, J.G.: Noise-induced transitions in human postural sway, Phys. Rev., 54 (1996) 6681–6684

[14] Feng, L., Li, S.: The Almost Sure Asymptotic Stability and Boundedness of Stochastic Functional Differential Equations with Polynomial Growth Condition, Abstract and Applied Analysis, (2014) Article ID 629426, 11 pages

[15] Flett, T. M.: Differential analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[16] Gikhman, I.I., Skorokhod A.V.: Stochastic differential equations. Springer, Berlin, 1972.

[17] Gikhman, I.I., Skorokhod A.V.: Stochastic Differential Equations and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev, (1982) (in Russian)

[18] Griffel, D. H.: Applied Functional Analysis. Dover Publications, 2002.

[19] Guo, Q., Liu, W., Mao, X., Yue, R.: The truncated Milstein method for stochastic differential equations, J. of Comp. and Appl. Math., 338 (2018) 298–310

[20] Guo, Y., Zhao, W., Ding, X.: Input-to-state stability for stochastic multi-group models with multy-disperal and time-varying delay, App. Math. Comp., 343 (2019) 114–127

[21] Han, M., Ma, Q., Ding, X.: The projected explicit Itô-Taylor methods for stochastic differential equations under locally Lipschitz conditions and polynomial growth conditions, J. Comp. Appl. Math., 348 (2019) 161–180

[22] Higham, D. J., Mao, X., Stuart, A. M.: Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations, SIAM J. Numer. Anal., 40(3)(2002) 1041–1063

[23] Hu, Y., Mohamed, S. E. A., Yan, F.: Discrete-time approximations of stochastic delay equations: the Milstein scheme, The Annals of Probability 32 (2004) 265–314

[24] Huston, V., Pym, J. S., Cloud, M. J.: Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Elsevier, 2005.

[25] Hutzenthaler, M., Jentzen, A., Kloeden, P. E.: Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with nonglobally Lipschitz continuous coefficients, Ann. Appl. Probab., 22(4) (2012) 1611–1641

[26] Izgi B., Cetin, C.: Milstein-type semi-implicit split-step numerical methods for nonlinear SDE with locally Lipschitz drift terms. Thermal Science, 23 (2019) S1–S12.

[27] Janković, S., Ilić, D.: An analytic approximation of solutions of stochastic differential equations, Computers & Math. with Appl., 47 (2004) 903–912

[28] Janković, S., Ilić, D.: An analytic approximate method for solving stochastic integrodifferential equations, J. Math. Anal. Appl., 320 (2006) 230–245

[29] Janković, S., M. Jovanović.: Analytic approximations of solutions to stochastic differential equations. Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, 2008.

[30] Jansen, M., Pfaffelhuber, P.: Stochastic gene expression with delay, J. Theor. Biol., 364 (2015) 355–363

[31] Jovanović, M., Krstić, M.: The influence of time-dependent delay on behavior of stochastic population model with the Allee effect, App. Math. Modell., 39(2) (2015) 733–746

[32] Kloeden, P. E., Platen E.: Numerical Solution of Stochastic Differential Equation. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999.

[33] Kloeden, P. E., Platen E., Wright, W.: The approximation of the multiple stochastic integrals, Stoch. Anal. and Appl., 10 (1992) 431–441

[34] Kloeden, P. E., Shardlow, T.: The Milstein scheme for stochastic delay differential equations without using anticipative calculus, Stoch. Anal. Appl., 30(2) (2012) 181–202

[35] Kolmanovskii, V. B., Nosov, V. R.: Stability of Functional Differential Equations. Academic Press, 1986.

[36] Krstić, M.: The effect of stochastic perturbation on a nonlinear delay malaria epidemic model, Math. Comput. Simulat., 82(4) 558–569

[37] Küchler, U., Platen, E.: Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay, Mathematics and Computers in Simulation, 54 (2000) 189–205

[38] Kumar, C., Sabanis, S.: Strong Convergence of Euler Approximations of Stochastic Differential Equations with Delay Under Local Lipschitz Condition, Stochastic Analysis and Application, 32 (2014) 207–228

[39] Liptser, R. S., Shiryaev, A. N.: Statistics of Random Processes I, II. Springer, New York, 1977.

[40] Liu, M., Bai, C., Jin, Y.: Population dynamical behavior of a two-predator one-prey stochastic model with time delay, Discrete Contin. Dyn. Sys., 37(5) (2017) 2513–2538

[41] Liu, Q., Jiang, D., Hayat, T., Alsaedi, A.: Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with distributed delay and degenerate diffusion, J. Frankl. Inst., 356(13) (2019) 7347–7370

[42] Luo, Q., Mao, X., Shen, Y.: New criteria on exponential stability of neutral stochastic differential delay equations, Systems Control Lett., 55 (2006) 826–834

[43] Kanagawa, S.: On the rate of convergence for Maruyama's approximate solutions of stochastic differential equations, Yokohama Math. J., 36 (1988) 79–85

[44] Kanagawa, S.: The rate of convergence for approximate solutions of stochastic differential equations, Tokyo J. Math., 12(1) (1989) 31–48

[45] Lan, G., Yuan, C.: Exponential stability of the exact solutions and θ-EM approximations to neutral SDDEs with Markov switching, J. Comput. Appl. Math. 285 (2015) 230–242

[46] Liu, W., Mao, X.: Strong convergence of the stopped Euler-Maruyama method for nonlinear stochastic differential equations, Appl. Math. and Comp., 223 (2013) 389–400

[47] Luo, J., Zou, J., Hou, Z.: Comparison principle and stability criteria for stochastic differential delay equations with Markovian switching, Sci. China Series A, 46 (2003) 129–138

[48] Mao X.: Stochastic differential equations and applications. Horwood Publishing, Chichester, 2008.

[49] Mao X.: Exponential Stability for Stochastic Differential Equations. Marcel Dekker, 1994.

[50] Mao, X.: Exponential stability of equidistant Euler-Maruyama approximations of stochastic differential delay equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 200 (2007) 297–316

[51] Mao X.: Numerical solutions of stochastic functional differential equations, London Math. Society, 6 (2003), 141–161

[52] Mao, X., Rassias, M.: Khasminskii-Type Theorems for Stochastic Differential Delay Equations, Stochastic Analysis and Applications, 23 (2005) 1045–1069

[53] Mao, X., Sabanis, S.: Numerical solutions of stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition, J. Comput. Appl. Math., 151 (2003) 215–227

[54] Mao, X., Szpruch, L.: Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients, J. Comput. Appl. Math., 238 (2013) 14–28

[55] Maruyama, G.: Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. math. Palermo, 4 (1955) 48–90

[56] Milošević, M.: An explicit analytic approximation of solutions for a class of neutral stochastic differential equations with time-dependent delay based on Taylor expansion, Applied Mathematics and Computation, 274 (2016) 745–761

[57] Milošević, M.: Highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the Euler-Maruyama method, Math. Comput. Modelling 54 (2011) 2235–2251

[58] Milošević, M.: On the approximations of solutions to stochastic differential delay equations with Poisson random measure via Taylor series, Filomat, 27(1) (2013) 201–214

[59] Milošević, M., Jovanović, M.: A Taylor polynomial approach in approximations of solution to pantograph stochastic differential equations with Markovian switching, Math. and Comp. Modell., 53(1–2) (2011) 280–293

[60] Milošević, M., Jovanović, M.: An application of Taylor series in the approximation of solutions to stochastic differential equations with time-dependent delay, J. Comput. Appl. Math., 235(15) (2011) 4439–4451

[61] Milošević, M., Jovanović, M., Janković, S.: An approximate method via Taylor series for stochastic functional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 363 (2010) 128–137

[62] Mohammed, S. E. A.: Stochastic functional differential equations. Harlow, UK: Longman Scientific and Tehnical, 1986.

[63] Obradović, M., Milošević, M.: Stability of a class of neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching and the Euler-Maruyama method, J. Comput. Appl. Math., 309 (2017) 244–266

[64] Oguntuase, J. A.: On integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type in several variables, J. Ineq. Pure Appl. Math., 1(2) (2000).

[65] Øksendal, B., Sulem, A., Zhang, T.: Optimal control of stochastic delay equations and time-advanced backward stochastic differential equations, Adv. Appl. Probab., 43(2) (2011) 572–596

[66] Papapantoleon A.: Old and new approaches to LIBOR modeling, Statistica Neederlanica, 64(3) (2010) 257–275

[67] Papapantoleon A., Siopacha M.: Strong Taylor approximation of stochastic differential equations and application to the Levy LIBOR model, Proceedings of the Actuarial and Financial Mathematical Conference, Brussels, Belgium, (2011) 47–62

[68] Rosli, N., Bahar, A., Yeak, S. H., Mao, X.: A Systematic Derivation of Stochastic Taylor Methods for Stochastic Delay Differential Equations, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), 36(3) (2013) 555-576

[69] Song, M., Hu, L., Mao, X., Zhang, L.: Khasminskii-type theorems for stochastic functional differential equations, Discrete and continuous dynamical systems, series B, 18(6) (2013) 1697–1714

[70] Siopacha M., Teichmann J.: Weak and strong Taylor methods for numerical solutions of stochastic differential equations, Quantitative Finance, 11(4) (2011) 517–528

[71] Tan, L., Yuan, C.: Convergence rates of theta-method for neutral SDDEs under non-globally Lipschitz continuous coefficients, Bull. Math. Sci., 9(2) (2019)

[72] Tojtovska, B., Janković, S.: General decay stability analysis of impulsive neural networks with mixed time delays, Neurocomputing, 142 (2014) 438–446

[73] Vasilova, M.: Asymptotic behavior of a stochastic Gilpin–Ayala predator-prey system with time-dependent delay, Math. Comp. Model., 57(3-4) (2013) 764–781

[74] Volterra, V.: Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires, J. Math. Pures Appl., 7 (1928) 249–298

[75] Wang X., Gan S.: The tamed Milstein method for commutative stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients, J. Differ. Equ. Appl., 19(3) (2013) 466–490

[76] Wang, G., Wang, S., Wang, M.: Taylor approximation of stochastic functional differential equations with the Poisson jump, Advances in Difference Equations, (2013) Article number: 230

[77] Wang, X., Yu, J., Li, C., Wang, H., Huang, T.,Huang, J.: Robust stability of stochastic fuzzy delayed neural networks with impulsive time window, Neural Networks, 67 (2015) 84–91

[78] Wu, F, Mao, X.: Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations, SIAM J. Numer. Anal., 46 (2008) 1821–1841

[79] Xu, Y., Zhu, S., Hu, S.: A stochastic Lotka-Volterra model with variable delay. In: The Sixth International Symposium on Neural Networks, Adv. Soft Comput., 56 (2009) 91–100

[80] Xue, M., Zhou, S., Hu, S.: Stability of nonlinear neutral stochastic functional differential equations, Journal of Applied Mathematics, (2010) Article ID 425762

Biografija

Dušan D. Đorđević rođen je 25.09.1991. godine u Leskovcu. Osnovnu školu "Kole Rašić" u Nišu i gimnaziju "Svetozar Marković" u Nišu, specijalizovano odeljenje za nadarene matematičare, završio je kao nosilac Vukovih diploma. U osnovnoj i srednjoj školi učestvovao je na takmičenjima iz matematike, fizike i geografije. Osnovne akademske studije Matematika je upisao na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu školske 2010/2011. godine i iste završio 2013. godine ostvarivši prosečnu ocenu 10 (deset) za vreme studiranja. Master akademske studije Matematika je upisao na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu školske 2013/2014. godine i iste završio 28.10.2015. ostvarivši prosečnu ocenu 10 (deset) i odbranivši master rad pod nazivom "Jednostavniji populacioni procesi Markova". Doktorske akademske studije je upisao školske 2015/2016. na istom fakultetu i položio sve ispite ostvarivši prosečnu ocenu 10 (deset).

U toku studiranja bio je korisnik Republičke stipendije (Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja), Dositeje (stipendija fonda za mlade talente Republike Srbije, Ministarstvo omladine i sporta) i Stipendije za izuzetno nadarene učenike i studente (Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja). Dobitnik je Plakete grada Niša kao diplomirani student Univerziteta u Nišu koji je u 2015. godini diplomirao sa prosečnom ocenom 10.

Od školske 2014/2015. godine izvodi vežbe kao student master akademskih studija a potom i kao saradnik u nastavi. Od naredne školske godine izvodi vežbe i u zvanju asistenta na Prirodno-matematičkom fakultetu, Medicinskom fakultetu i gimnaziji "Svetozar Marković" u Nišu. Do sada je bio angažovan na predmetima: Verovatnoća sa matematičkom statistikom (gimnazija "Svetozar Maković"), Matematika (Medicinski fakultet Univerziteta u Nišu), Matematika (Departman za hemiju), Verovatnoća i statistika u biologiji (Departman za biologiju i ekologiju), Matematička analiza 1, Matematička analiza 2, Uvod u kompleksnu analizu, Uvod u verovatnoću, Teorija verovatnoća, Stohastički procesi, Aktuarska matematika (Departman za matematiku) na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu.

Učestvovao je na projektu: "Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene", OI 174007, Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije. Učestvovao je na raznim konferencijama, festivalima nauke, DAAD i bilateralnim projektima. Autor je ili koautor tri naučna rada u međunarodnim časopisima sa impakt faktorom.

Bibliografija naučnih radova

1. Djordjević, D. D.: *A Taylor Method for Stochastic Differential Equations with Time-Dependent Delay via the Polynomial Condition*, Stochastic Analysis and Applications, (2021), https://doi.org/10.1080/07362994.2021.1936041 **(M22)**

2. Djordjević, D. D., Jovanović, M.: *On the approximations of solutions to stochastic differential equations under polynomial condition*, Filomat, 35:1 (2021) 11–25, https://doi.org/10.2298/FIL2101011D **(M22)**

3. Djordjević, D. D., Milošević, M.: *An approximate Taylor method for Stochastic Functional Differential Equations via polynomial condition*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta: Seria Matematica, 29:3 (2021) **(M22)**

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕШЕЊА СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРИМЕНОМ TAYLOR-ОВИХ РЕДОВА

која је одбрањена на Природно – математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 14.09.2021.

Потпис аутора дисертације:

Душан Ђорђевић

Душан Д. Ђорђевић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕШЕЊА СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРИМЕНОМ TAYLOR-ОВИХ РЕДОВА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 14.09.2021.

Потпис аутора дисертације:

Душан Д. Ђорђевић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕШЕЊА СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРИМЕНОМ TAYLOR-ОВИХ РЕДОВА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 14.09.2021.

Потпис аутора дисертације:

Душан Д. Ђорђевић