

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, одржаног 19. априла 2019. године, именовани смо у Комисију за преглед и оцену докторске дисертације Марка Пешовића

Комбинаторика уопштених пермутоедара

Комисија је прегледала дисертацију и подноси следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Марко Пешовић је рођен 29. маја 1990. године у Краљеву. Гимназију у Рашки је завршио као носилац Вукове дипломе и ђак генерације. Основне студије Математичког факултета Универзитета у Београду је уписао 2009. године и дипломирао на смеру Теоријска математика и примене 2013. године са просечном оценом 9,14. Мастер студије на студијском програму Математика-Теоријска математика и примене завршио је 2014. године са просечном оценом 10,00. Мастер рад под називом *Класичне групе и „ботаника” подгрупа изабраних линеарних група* је одбранио под руководством проф. др Гојка Калајџића. Докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду је уписао 2014. године при Катедри за алгебру и математичку логику.

Од 2013. до 2014. године је био запослен као сарадник у настави на Математичком факултету Универзитета у Београду, Катедра за математичку анализу. Од 2014. године је запослен као асистент-студент докторских студија на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, Катедра за математику, физику и нацртну геометрију.

2. Списак научних радова кандидата

1. Владимир Грујић, Марко Пешовић, Тања Стојадиновић, *Weighted quasisymmetric enumerator for generalized permutohedra*, Journal of Algebraic Combinatorics, **51** (2) (2020), 247–272, ISSN: 0925-9899, doi:10.1007/s10801-019-00874-x, IF2018: 0,854, **M22**

2. Марко Пешовић, *Integer points enumerator of hypergraphic polytopes*, Publications de l'Institut Mathematique, ISSN:0350-1302, doi:10.2298/PIM200205001P, **M24**

3. Марко Пешовић, Тања Стојадиновић, *Weighted P-partitions enumerator*, Appllicable Analysis and Discrete Mathematics ISSN:1452-8630, IF2019:1,500, **M21**, (прихваћен)

3. Излагања на научним конференцијама

1. Марко Пешовић, *Face enumeration on matroid base polytope*, XIV Српски математички конгрес, Крагујевац, Србија, 2018.

2. Марко Пешовић, *Hypergraфички политопи*, X Симпозијум Математика и примене, Београд, Србија, 2019.

3. Зоран Пуцановић, Марко Пешовић, *Mathematical lectures of Dr. Milutin Milanković*, Живот и дело Милутина Миланковића: прошлост, садашњост, будућност, Београд, Србија, 2019.

4. Предмет докторске дисертације

Тема докторске дисертације припада областима Алгебарске и Геометријске комбинаторике. Основни објекти проучавања су комбинаторне Хопфове алгебре и уопштени пермутоедри, једна класа конвексних политопса са богатом комбинаторном структуром.

Хопфове алгебре у комбинаторици је први применио италијански математичар Ђан-Карло Рота седамдесетих година прошлог века. Многе класичне комбинаторне инваријанте се могу изразити

помоћу формализма Хопфових алгебри, као што су Мебијусова функција посета, f -вектор градуисаних посета, хроматски полином графа и друге.

Теорија комбинаторних Хопфових алгебри је постављена у раду Агијара, Бержерона и Сотила из 2006. године и од тада се интензивно проучава и примењује. Примери комбинаторних Хопфових алгебри су хроматске Хопфове алгебре графова и хиперграфова, Хопфова алгебра матроида, Хопфова алгебра посета и друге. Симетричне и квазисиметричне функције се у комбинаторици јављају као генераторне функције енумеративних инваријанти комбинаторних објеката. Њихове стандардне линеарне базе су означене партицијама и композицијама природних бројева. Хопфове алгебре симетричних и квазисиметричних функција су терминални објекти у категорији градуисаних Хопфових алгебри са карактером. Многе класичне енумеративне инваријанте комбинаторних објеката се добијају као резултат универзалног морфизма из одговарајућих комбинаторних Хопфових алгебри у симетричне или квазисиметричне функције. Међу њима су неки од централних објеката проучавања у Алгебарској комбинаторици, као Стенлијева хроматска симетрична функција графа и Геселова енумераторна функција P -партиција.

У Геометријској комбинаторици се комбинаторном објекту додељује неки геометријски објекат. На пример, простом графу се могу придружити графички аранжман хиперравни и конвексан политоп познат као графички зонотоп. Матроидима одговарају политопи база матроида. Нестоедри и граф-асоциедри, који су уопштење асоциедара и циклоедара, се описују градивним скуповима, једном класом хиперграфова. Наведене класе политопа припадају широј класи познатој као уопштени пермутоедри, који се добијају као деформације стандардног пермутоедра.

Главни предмет дисертације је проучавање енумераторних функција добијених алгебарски из универзалног морфизма комбинаторних Хопфових алгебри у симетричне и квазисиметричне функције и добијених геометријски као енумератора целобројних тачака одређених нормалним лепезама уопштених пермутоедара.

5. Приказ дисертације

Дисертација је написана на 96 страна текста. Поред Увода и Литературе која садржи 41 библиографску јединицу, дисертација се састоји од три Главе. Прве две главе су уводног карактера, док су у трећој глави представљени оригинални резултати кандидата.

Прва глава је посвећена теорији комбинаторних Хопфових алгебри. Дати су основни појмови и дефиниције Хопфових алгебри закључно са рекурзивном формулом за одређивање антипода у градуисаној Хопфовој алгебри. Затим су уведени појмови симетричних и квазисиметричних функција и представљене њихове стандардне линеарне базе индексирани партицијама и композицијама. Помоћу мономијалне базе квазисиметричних функција, уведена је структура комбинаторне Хопфове алгебре квазисиметричних функција $(QSym, \zeta_Q)$. Симетричне функције су централни објекат Алгебарске комбинаторике и појављују се у многим применама у Теорији репрезентација и Енумеративној комбинаторици. Квазисиметричне функције су њихово уопштење, које је увео Стенли седамдесетих година прошлог века, а затим први применио Гесел у једној енумеративној техници на посетима, познатој као P -партиције. На крају је дат Ротин пример Хопфове алгебре на посетима.

У другој глави су дати основни појмови из теорије политопа. Описана је мрежа страна политопа, појам дуалног политопа, дефинисани прости и симплицијални политопи и описане основне конструкције са политопима, као што су сечења и Минковски сума. Уведен је појам лепезе конуса у еуклидском простору и дефинисани лепезе страна и нормалне лепезе придружене конвексним политопима. На крају је дат преглед главних енумеративних теорема везаних за f -векторе и h -векторе простих политопа, као што су Ден-Сомервилове релације.

У трећој глави су изнети главни резултати дисертације. На почетку је детаљно описана комбинаторика стандардног пермутоедра и његове нормалне лепезе која представља лепезу аранжмана плетеница. Његове стране су описане као композиције и као заставе на коначном скупу. Уопштени пермутоедри су класа политопа одређена условом да су њихове нормалне лепезе профињене нормалном лепезом стандардног пермутоедра. Уопштене пермутоедре су највише проучавали Постников, Рајнер и Вилијамс у радовима из 2008 и 2009. године. Многе класе политопа придружене комбинаторним објектима спадају у уопштене пермутоедре. Међу њима су хиперграфички политопи, политопи база матроида, нестоедри, од којих као подкласа граф-асоциедри и други. Овим класама су посвећена појединачна поглавља у трећој глави.

Главни резултати су добијени из једне опште конструкције. Уопштеном пермутоедру Q одговара енумератор $F(Q)$ генеричких позитивних целобројних вектора, који зависи од максималних страна нормалне лепезе и тежински енумератор $F_q(Q)$ који је q -профињење полазног енумератора $F(Q)$ и који узима у обзир целу мрежу страна нормалне лепезе. Веза између њих је дата са

$$F(Q) = F_q(Q)|_{q=0}.$$

Користећи посебно дефинисану функцију ранга на посету страна уопштеног пермутоедра, енумератор $F_q(Q)$ се може представити у мономијалној бази квазисиметричних функција. Посебно, из

главне специјализације енумератора $F_q(Q)$ се добија f -вектор уопштеног пермутоедра.

Испоставља се да за различите класе уопштених пермутоедара, енумератори $F(Q)$ представљају уопштења класичних енумеративних инваријанти. Тако се Стенлијева хроматска симетрична функција графа добија као енумератор целобројних тачака придружен графичком зонотопу, Биљера-Јиа-Рајнерова квазисиметрична функција матроида се добија као енумератор целобројних тачака придружен политопу база матроида. Ова конструкција је довела и до дефиниције нових инваријанти посматрајући друге класе политопа, посебно нестоедре и графичке асоциедре. Случај граф-асоциедара производи нову инваријанту графа која има интерпретацију квазисиметричног енумератора уређених бојења графа.

У дисертацији су описане комбинаторне Хопфове алгебре хиперграфова, графова, градивних скупова и матроида. За енумераторе целобројних тачака придружене уопштеним пермутоедрима је показано да се, за одговарајуће класе комбинаторних објеката, поклапају са универзалним морфизмом из комбинаторних Хопфових алгебри, конструисаних на датим класама објеката.

У последњем поглављу Главе 3 је конструкција енумератора изведена у случају проширених уопштених пермутоедара. У случају конуса посета добијена је нова енумеративна инваријанта која је уопштење Геселових енумератора P -партиција и дата његова алгебарска интерпретација помоћу комбинаторне Хопфове алгебре посета.

6. Закључак

Докторска дисертација **Комбинаторика уопштених пермутоедара** кандидата Марка Пешовића се бави актуелном темом Алгебарске и Геометријске комбинаторике. Резултати који су представљени у дисертацији су интересантни и представљају леп допринос овој области. Добијене су нове интерпретације неких класичних енумеративних инваријанти. Њихова q -уопштења представљају профићења ових инваријанти који до сада нису разматрани. Показана је значајна веза између комбинаторних Хопфових алгебри и комбинаторике уопштених пермутоедара. Дисертација указује и на нове могућности истраживања.

Марко Пешовић је овом дисертацијом показао одлично познавање области, оригиналност и способност за самосталан истраживачки рад. Комисија са задовољством предлаже Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да потврди овај рад као докторску дисертацију и одреди Комисију за њену одбрану.

У Београду, 15. фебруар 2021.

Чланови Комисије:

проф. др Владимир Грујић (ментор), ванредни професор

Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Александар Липковски, редовни професор

Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Зоран Петрић, научни саветник

Математички институт САНУ, Београд

др Тања Стојадиновић, доцент

Математички факултет, Универзитет у Београду

