

Nastavno-naučnom veću
Matematičkog fakulteta
Univerziteta u Beogradu

Na sednici Nastavno-naučnog veća Matematičkog fakulteta određeni smo u komisiju za pregled i ocenu doktorske disertacije,

Kombinatorna topologija i grafovski kompleksi

master matematičarke Marije Jelić Milutinović. Komisija je podnešenu disertaciju pažljivo pregledala i nakon konsultacija podnosi Veću sledeći,

IZVEŠTAJ

1. Kratka naučna biografija

Marija Jelić Milutinović je rođena 1. jula 1989. godine u Beogradu. Matematičku gimnaziju u Beogradu je završila 2008. godine kao đak generacije. Osnovne studije matematike je završila 2012. godine na Matematičkom fakultetu u Beogradu sa prosečnom ocenom 10 kao najbolji student generacije Univerziteta u Beogradu. Master studije je završila sa prosečnom ocenom 10 na Matematičkom fakultetu u Beogradu 2013. godine odbranivši master rad "Ekvivarijantna teorija indeksa", urađen pod rukovodstvom prof. dr Siniše Vrećice.

Kao đak i student, učestvovala je u mnogobrojnim takmičenjima iz matematike (3 Međunarodne matematičke olimpijade, 3 studentska takmičenja) i na svakom osvajala nagradu ili medalju (11 medalja samo na međunarodnim takmičenjima). Pored toga, osvojila je i 3 prve nagrade na republičkim odnosno saveznim takmičenjima iz fizike.

Zaposlena je na Matematičkom fakultetu u Beogradu od 2012. godine kao saradnik u nastavi a od 2015. godine kao asistent.

Iako je tek na početku svoje naučne karijere, učestvovala je u radu brojnih konferencija i skupova (između ostalog u Berkliju, Moskvi, Pragu, Hajdelbergu, Berlinu, Obervolfahu, Đenovi, Lisabonu, na nekoliko američkin univerziteta, kao i na nekim skupovima u našoj zemlji) i imala saopštenje na dva od tih skupova.

2. Publikovani naučni radovi

Marija Jelić Milutinović je do sada objavila 6 sledećih radova.

1. M. Jelić, On Knaster's problem, *Publications de l'Institut Mathématique* 99 (113), 43–49, 2016. (M23)
2. M. Jelić, Methods of Equivariant Topology in Two Nice Discrete Geometry Problems, *The Graduate Journal of Mathematics* 1(1), 18–27, 2016. (M24)
3. F.D. Jevtić, M. Jelić, R. T. Živaljević, Cyclohedron and Kantorovich-Rubinstein polytopes, *Arnold Mathematical Journal* 4, Issue 1, 87–112, 2018. (M24)
4. C. Camacho, S. Fernandez-Merchant, M. Jelić Milutinović, R. Kirsch, L. Kleist, E. Bailey Matson, J. White, Bounding the tripartite-circle crossing number of complete tripartite graphs, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae* 88(3), 515–520, 2019. (M24)
5. M. Bayer, B. Goekner, M. Jelić Milutinović, Manifold Matching Complexes, *Mathematika* 66, 973–1002, 2020. (M22)
6. M. Jelić Milutinović, D. Jojić, M. Timotijević, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, Combinatorics of unavoidable complexes, *European J. Combinatorics* 83, 2020. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.103004> (M21)

Takođe, još dva rada su joj već neko vreme na recenziji, od kojih je drugi proširena verzija gornjeg rada pod 4.

1. M. Jelić Milutinović, H. Jenne, A. McDonough, J. Vega, Matching complexes of trees and applications of the matching tree algorithm, arXiv:1905.10560.
2. C. Camacho, S. Fernandez-Merchant, M. Jelić Milutinović, R. Kirsch, L. Kleist, E. Bailey Matson, J. White, Bounding the tripartite-circle crossing number of complete tripartite graphs, arXiv:1910.06963.

3. Oblast doktorske disertacije

Oblast ove disertacije je izrazito multidisciplinarna i pokriva topologiju, kombinatoriku i kombinatornu geometriju sa posebnim naglaskom na kombinatornu topologiju i topološku kombinatoriku, odnosno na primene ovih oblasti jedne u drugoj. Ova oblast doživljava ubrzani razvoj krajem 20. i početkom 21. veka.

Razni grafovski kompleksi su jedan od centralnih objekata oblasti. Radi se o pridruživanju gde nekom grafu dodelimo na neki način simplicijalni kompleks i pokazujemo da topološke osobine tog kompleksa impliciraju neke kombinatorne osobine grafa. Jedan od najpoznatijih primera je svakako "kompleks susedstva" kojeg je L. Lovas asociirao nekom grafu i potom pokazao da homološke osobine tog kompleksa omogućavaju određivanje hromatskog broja polaznog grafa. Ovo mu je omogućilo da dokaže 20 godina staru Knezerovu hipotezu i bilo je jedan od glavnih pokretača razvoja ove oblasti.

Možda još važniji primer su kompleksi uparivanja o kojima će posebno biti mnogo reči u ovoj disertaciji. Ovo su simplicijalni kompleksi čija temena odgovaraju ivicama polaznog grafa, a neka temena razapinju simpleks ako nikoje dve od odgovarajućih ivica nemaju zajedničko teme.

Kompleksi uparivanja nekih klasa grafova su se pojavili na razne načine u raznorodnim matematičkim oblastima od algebre preko topologije do geometrije i kombinatorike. Kompleks uparivanja kompletnog bipartitnog grafa $M(K_{m,n})$ se pojavio prvo u algebri vezano za Titsove zgrade kao koset kompleks simetrične grupe po familiji podgrupa koje stabilizuju neke elemente domena, u topologiji kao umanjeni spoj ("deleted join") nekih kompleksa vezano za problem određivanja minimalne dimenzije euklidskog prostora koji dopušta utapanje određenog kompleksa (van Kampen-Floresova teorema), u diskretnoj geometriji vezano za probleme Tverbergovog tipa, naravno u teoriji grafova. Kompleks uparivanja kompletnog grafa na n temena, $M(K_n)$, se javlja u algebarskoj teoriji grupa vezano za Braunov kompleks i Kvilenov kompleks, i naravno u kombinatorici.

Dobar deo disertacije je posvećen proučavanju takozvanih r -neizbežnih kompleksa. Ovo su kompleksi koji imaju osobinu da za svaku particiju skupa temena u r disjunktih skupova, bar jedan od tih skupova čini skup temena jednog simpleksa tog kompleksa. Trivijalno se proverava da su Aleksanderovi auto-dualni kompleksi specijalan slučaj 2-neizbežnih kompleksa. r -neizbežni kompleksi čija r -neizbežnost potiče od mere date na skupu temena su prag kompleksi i predstavljaju važan primer tih kompleksa. Još interesantnije pitanje je postojanje i konstrukcija onih r -neizbežnih kompleksa koji nisu prag kompleksi i koji od njih što više odstupaju.

r -neizbežni kompleksi imaju važnu ulogu u problemima utapanja kao i u problemima Tverbergovog tipa. Klasičan specijalan slučaj, auto-dualni kompleksi, se osim u topologiji kod problema utapanja, javljaju i u geometriji konfiguracionih prostora, u optimizaciji i u teriji igara i teoriji društvenih izbora kao "proste igre" fon Nojmana i Morgensterna.

4. Prikaz disertacije sa akcentom na originalnim doprinosima

Disertacija obuhvata 156 strana teksta. Pored Uvoda i pregleda rezultata i Literature sa 106 bibliografskih jedinica, sastoji se od 6 glava.

Glava 1, Osnovni pojmovi i definicije, je preglednog karaktera. U njoj je izložen materijal vezan za teoriju simplicijalnih kompleksa, konstrukcija kompleksa uparivanja grafa, kao i osnovne ideje i metode ekvivarijantne topologije uključujući i teoriju indeksa (posebno Fadel-Huseinijev kohomološki indeks) u obimu neophodnom za čitanje centralnih glava teze. Posebno je opisan i "konfiguracioni prostor - test preslikavanje" metod koji se često i uspešno koristi u svođenju geometrijskih i kombinatornih problema na probleme ekvivarijantne topologije (topologija prostora sa dejstvom neke grupe).

Glave 2, 3, 4, 5 i 6, koje sadrže originalne doprinose, baziraju se na naučnim radovima kandidatkinje koji su gore pobrajani.

Druga glava je zasnovana na radu navedenom gore pod 5 i posvećena je kompleksima uparivanja. U prethodnoj literaturi uglavnom su se proučavale relevantne topološke osobine kompleksa uparivanja nekih važnih klasa grafova. U ovoj glavi se tretira vrlo prirodno i interesantno pitanje koje homološke mnogostrukosti i homološke mnogostrukosti sa rubom mogu da se realizuju kao kompleksi uparivanja nekih grafova. Prikazuje se kompletan odgovor na ovo pitanje, dakle tačno su u teoremama 2.18 i 2.19 navedene sve zatvorene mnogostrukosti, a u teoremama 2.24 i 2.25 sve mnogostrukosti sa rubom koje se dobijaju kao kompleksi uparivanja nekih grafova. Šta više, za svaku od tih mnogostrukosti navedeni su svi grafovi čiji kompleksi uparivanja su homeomorfni toj mnogostrukosti.

Treća i četvrta glava su takođe posvećene kompleksima uparivanja i zasnovane su na originalnom preprintu navedenom gore pod 1 među radovima koji su još uvek na recenziji.

Treća glava počinje prikazom poznatog rezultata koji kaže da je kompleks uparivanja šume kontraktibilan ili je homotopski ekvivalentan buketu sfera. Međutim, dimenzije tih sfera nisu poznate. U ovoj glavi se određuje tačan homotopski tip kompleksa uparivanja nekih klasa drveta, konkretno gusenica ("caterpillar graphs"), dakle i dimenzije sfera u gore pomenutom buketu. Takođe, navodi se i drugi dokaz glavne teoreme u ovoj glavi 3.17 baziran na Kvilenovoj teoremi o fibrama preslikavanja poseta.

U četvrtoj glavi se određuje povezanost kompleksa uparivanja dve klase grafova - nekih klasa poligonalnih popločavanja i savršenih binarnih stabala. Konkretno, posmatraju se linijska popločavanja i popločavanja šestouglovima (saća). Metod koji se koristi u ovoj glavi je kombinatoran i tehnički složeniji, takozvani MTA algoritam. To je verzija diskretne teorije Morsa, kombinatornog analogona klasične teorije Morsa, bazirane na ideji kolapsiranja kompleksa koja očuvava homotopski tip kompleksa.

Peta glava je posvećena r -neizbežnim kompleksima i specijalnom slučaju, prag kompleksima koji su zadati nekom verovatnosnom merom na skupu temena, i zasnovana je na originalnom radu navedenom gore pod 6. Uvode se dve osnovne invarijante ovih kompleksa, particiona invarijanta $\pi(K)$ koja predstavlja minimalni nivo neizbežnosti koju kompleks K poseduje i karakteristični prag $\rho(K)$ koji opisuje maksimalni prag kompleks sadržan u kompleksu K . Daje se procena "nivoa neizbežnosti" spoja simplicijalnih kompleksa u terminima nivoa neizbežnosti odgovarajućih komponenti. Ovo omogućava procenu dimenzije geometrijske realizacije datog kompleksa.

Glavna i veoma korisna veza između gornjih invarijanti je data nejednakošću $\pi(K) \leq \lceil \frac{1}{\rho(K)} \rceil + 1$. Pokazuje se da se ova nejednakost svodi na jednakost tačno kada kompleks K sadrži neizbežan kompleks koji je indukovao merom. Ova činjenica ukazuje na poseban značaj kompleksa za koje važi stroga nejednakost, tj. one koji su r -neizbežni iz nekih dubljih razloga. Konstruisani su kompleksi u kojima je razlika leve i desne strane u gornjoj nejednakosti proizvoljno velika, i to kao spojevi minimalnih triangulacija projektivnih ravni (za koje se pokazuje da su auto-dualni kompleksi koji nisu zadati merom).

Šesta glava teze se zasniva na originalnom radu navedenom gore pod 1, i posvećena

je poznatom Knasterovom problemu, koji za datu konfiguraciju tačaka $A_1, \dots, A_k \in S^{n-1}$ pita da li za svako neprekidno preslikavanje $f : S^{n-1} \rightarrow R^m$ postoji rotacija sfere ρ takva da je $f(\rho(A_1)) = \dots = f(\rho(A_k))$.

Prikazan je novi i kraći dokaz Jangovog slučaja Knasterovog problema u teoremi 6.2. Dokaz se zasniva na originalnom uopštenju (teorema 6.1) poznate Doldove teoreme iz ekvivarijantne topologije, koje je dokazano korišćenjem Lere-Serovog spektralnog niza. Razmatraju se i neki novi slučajevi Knasterovog problema.

5. Zaključak

Doktorska disertacija "Kombinatorna topologija i grafovski kompleksi" kandidatkinje Marije Jelić Milutinović predstavlja veoma interesantan, sadržajan i lep prilog teoriji grafovskih kompleksa, kao i kombinatornoj topologiji i topološkoj kombinatorici uopšte. Reč je o modernoj disciplini koja izučava klasične objekte kojom se bave istaknuti svetski matematičari. Dobijeni rezultati su novi i aktuelni i zanimljivi širokom krugu naučnika, a neki od njih su već naišli na odjek i citiraju se.

Disertacija je po sadržaju i metodama veoma multidisciplinarna, i dotiče se širokog spektra oblasti od topologije, preko algebre i geometrije do kombinatorike. Autorka disertacije Marija Jelić Milutinović je pokazala sjajno poznavanje svih ovih disciplina, i pored izražene sposobnosti da pronikne u dubinu složenih tema, i zavidnu širinu sagledavanja problematike i njenog mesta i uloge u matematici, što je veoma retko za matematičare na početku karijere. Ona je više nego jasno demonstrirala sposobnost za samostalni naučni rad.

Sa zadovoljstvom predlažemo Naučno-nastavnom veću Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu da prihvati ovaj rad kao doktorsku disertaciju i odredi komisiju za njenu javnu odbranu.

prof. dr Siniša Vrećica (mentor)
redovni profesor
Matematički fakultet Beograd


prof. dr Rade Živaljević
redovni profesor
Matematički institut SANU



prof. dr Zoran Petrić
naučni savetnik
Matematički institut SANU

prof. dr Vladimir Grujić
vanredni profesor
Matematički fakultet Beograd

Beograd, februar 2021.