

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ

Магдалена С. Драговић

**Конструктивни поступци у  
просторним трансформацијама  
површи једнограног елиптичког  
хиперболоида**

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF ARCHITECTURE

Magdalena S. Dragović

**The Constructive Procedures in the  
Spatial Transformations of the Surface  
Elliptical Hyperboloid of One Sheet**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ

Комисија за одбрану дисертације:

**Др Миодраг Несторовић, (ментор)**

Редовни професор Универзитета у Београду, Архитектонски факултет

**Др Александар Чучаковић,**

Ванредни професор Универзитета у Београду, Грађевински факултет

**Др Бранислав Попконстантиновић**

Ванредни професор Универзитета у Београду, Машински факултет

Датум одбране дисертације:

2013.

## ИЗЈАВЕ ЗАХВАЛНОСТИ

*"Ако корачаш сам – стићи ћеш брже;  
ако корачаш у друштву – стићи ћеш даље."*

Захваљујем свим мојим драгим професорима, колегама и сарадницима, који су ми током узрастања у науци помогли својим предавањем знања, стрпљењем, искуством, професионалношћу и човекољубљем, да стекнем потребно искуство и савладам још један степен у професионалном развоју.

Посебну захвалност упућујем професору, колеги и пријатељу, Александру Чучаковићу, који ме је у дугогодишњем заједничком раду смерницама и стручном подршком водио и помагао, несебично и са пуно поверења, делећи љубав према позиву и геометрији.

Драгој професорки Милеси Срећковић хвала за помоћ, бодрење и све оно ситно "тек–тако": зарезе и слова, формуле.... што ме је подстицало, храбрило и убрзавало. Драгом Банету и Луки хвала на спретној техничкој и стручној помоћи.

Захваљујем свим члановима комисије на стручним сугестијама и спремности да својим ауторитетом стану иза мог рада на докторској дисертацији.

Својим најближима, породици и супругу, драгим пријатељима, хвала на љубави, разумевању, помоћи и бодрењу, из којих сам црпела снагу и инспирацију за рад.



*За вашу радост и понос,  
мама, тата, тетка и Ненаде!*

# Конструктивни поступци у просторним трансформацијама површи једнограног елиптичког хиперболоида

## Резиме

Једнограни елиптички хиперболоид (JEX) је најопштији случај површи двоструке закривљености, из породице правоизводних површи, која настаје клизањем једне трансверзале–генератрисе, дуж три директрисе – мимоилазне праве простора. Дисертација даје одговор на другачији прилаз за постављање конструктивно–геометријског оквира површи у простор. Задавањем просторног шестотеменика – носача водила површи, у различитим варијантама положаја, два пута по три изводнице, из различитих система изводница, у новом оквиру, развијен је низ конструктивних поступака, којима се генерише површ и одређују главни параметри JEX–а: средиште, главне ортогоналне осе и равни симетрије, стрикциона елипса и темена и утврђују њихове међусобне релације. Поступцима и научно заснованим методама пројективне синтетичке геометрије, нацртне геометрије и алатима компјутерске графике, у 3D окружењу (уз употребу софтвера *Auto CAD*), теза даје научни допринос, кроз решења – конструктивне поступке и теоретске закључке, у сфери геометрије правоизводне површи JEX–а и њених типова.

У конструктивним поступцима просторних афиних трансформација једнограног хиперболоида, чије су водиле уписане у тростране призме, утврђене су инваријанте типова трансформација. На постављеним принципима иницирана су даља истраживања релација општих и специјалних типова JX, у оквиру исте фамилије површи. Анализом свих типова пресека површи JEX–а са равнима, уз успостављање корелација са поларним карактеристикама површи, створена је теоријска база знања, корисна за практичну примену целе површи, или њених исечака, у поступцима геометријског 3D моделовања. Модели–структуре, са задатим правилним матрицама, креирани 3D поступцима, од исечака правога или козога типа JEX–а, представљају прототип за широку палету могућности примене у архитектонском обликовању кровних површина или целих објеката. Сличан, практично применљив, резултат дао је и део истраживања везан за продоре

основних површи другог степена и JEX-а. Овакве комбинације површи, у поступцима просторног геометријског моделовања су скуп смерница, као део иницијативе и инспирације за пројектанте и градитеље. Резултати истраживања су реализовани и кроз две апликације у софтверу *Auto CAD* (писану *Auto-lisp* програмским језиком), која користи кружне пресеке JEX-а, за генерисање жичаног и површинског модела површи, са триангулисаном мрежом. Апликативност пресека површи по изводницама и кружницама, од значаја је за праксу грађења, која тежи једноставности извођења, а да при томе не умањује естетску вредност целокупне форме.

Ова докторска теза носи и тежину едукативног значаја, јер на примеру једног типа правоизводне површи другог реда – једнограног елиптичког хиперблоида, пружа увиде и указује на могућности постављања нових геометријско–конструктивних оквира, у области теорије и практичне примене геометријских површи.

*Кључне речи:* једнограни елиптички хиперблоид (JEX), конструктивни поступци, главни параметри JEX, просторне трансформације, геометријско 3D моделовање

# **The Constructive Procedures in Spatial Transformations of the Surface – Elliptic Hyperboloid of One Sheet**

## **Abstract**

Elliptic hyperboloid of one sheet (EHOS) is the general case of a double curved surface, from the family of ruled surfaces, which generates by ruling of a line-generator along three directing skewed lines, in the space. The dissertation gives an answer to a task – finding a new approach in creating constructive-geometry "boundaries" for this surface in the space settlement. A wide range of constructive procedures, for the determination and mutual relations of the main parameters of EHOS: center of the surface, orthogonal axes, planes of symmetry, minimal section curve (elliptical "throat") and its vertexes came out from the concept of hexagramic spatial "carrier" of two times three directors – skewed lines, in variety of their positions. The employment of procedures and scientifically based methods of Projective Synthetic Geometry, Descriptive Geometry and tools of computer graphics, in 3D surroundings (using Auto CAD software for engineers), are of importance for the scientific contributions of this dissertation, achieved solutions – constructive procedures and theoretical conclusions, in the sphere of geometry of ruled surface EHOS and its types.

In the constructive procedures of spatial affine transformations of hyperboloids of one sheet, whose directing lines are "inscribed" in three sided prisms, the invariants of all the types of transformations are determined. Further investigations, concerning relations of general and special types of HOS, inside the same family of surfaces, are initiated by settled principles. The analysis of all the types of sections of EHOS, including the correlation to the polar properties of the surface, resulted with theoretical base, as an input for the practical application of "whole" surface or its fragments, in the procedures of 3D geometrical modeling. The models – structures, above regular patterns (polygons) are created by 3D procedures and tools, using fragments of straight or inclined EHOS. They represent the prototypes for the creative palette of possible architectural shapes of roofs or buildings. Very similar results came out of the part of research, concerning intersections of EHOS and basic second order surfaces (primitives): cone, cylinder and sphere. The "combinations" of such surfaces, in 3D

geometrical modeling procedures, offered just some directions, like an initiation and inspiration for the architects and civil engineers.

Some results of the research are realized through the two applications in the engineering software Auto CAD (written in Auto-lisp programming language), which uses circular sections of EHOS, for the procedure of generating wire frame or realistic surface model, with triangulated net. The applicability of the sections, along the generator (line) and circles, is very important for the building practice, which needs the simplicity, while the aesthetic values of the form are maintained.

This thesis brought up the significance of educational contributions, because of it's incite and the indications of possibilities of new geometric-constructive settings for the practical use of the geometrical surfaces.

*Key words:* elliptic hyperboloid of one sheet (EHOS), constructive procedures, main parameters of EHOS, spatial transformations, 3D geometrical modeling

## Кључна документациона информација

Тип документа:	Монографска публикација
Тип записа:	Текстуални штампани материјал
Врста рада (ВР):	Докторска дисертација
Аутор (АУ):	Мр Магдалена С. Драговић, дипл.инж.арх.
Ментор (МН):	Проф. др Миодраг Несторовић, дипл.инж.арх.
Наслов рада:	Конструктивни поступци у просторним трансформацијама површи једнограног елиптичког хиперболоида
Језик публикације (ЈП):	Српски
Земља публикавања (ЗП):	Република Србија
Година издавања (ГИ):	2013.
Издавач (ИЗ):	Ауторски репринт
Место и адреса (МС):	11030 Београд, Бул. Краља Александра 73/II
Физички опис рада (бр.погл./страна/лит.навода/табела/слика/прилога):	8/176/57/1/124/1
Научна област (НО):	Архитектура и урбанизам
Научна дисциплина (ДИС):	Геометрија архитектонске форме
Предметна одредница/кључна реч (ПО):	Једногранни елиптички хиперболоид (ЈЕХ), конструктивни поступци, главни параметри ЈЕХ, просторне трансформације, геометријско 3D моделовање
УДК:	514.18(043.3)
Чува се (ЧУ):	Библиотека архитектонског факултета, 11030 Београд, Бул.Краља Александра 73/ II
Примедбе (П):	
Извод (ИЗ):	Увођењем конструктивног оквира са просторним шестотемеником, као носачем водиља за два система изводница површи ЈЕХ, сачињен је низ геометријских поступака којима се одређују главни параметри површи. Просторним афиним трансформацијама повезани су различити типови ЈЕХ, значајни за теорију геометрије и едукацију. Поступцима 3D геометријског моделовања креиране су структуре, од целих и исечака површи ЈЕХ и указано на могућности његове примене у архитектонско–грађевинској пракси.
Датум прихватања теме (ДП):	30.09.2008.

## Key word documentation

Document type:	Monographic publication
Type of record:	Textual printed article
Contents code (CC):	Ph D Thesis
Author (AU):	MSc Magdalena S. Dragović, Arch.
Menthor (MN):	Prof. PhD Miodrag Nestorovi, Arch.
Title (TI):	Constructive Procedures in the Spatial Transformations of the Surface– Elliptic Hyperboloid of One Sheet
Language of text (LT):	Serbian
Country of publication (CP):	Serbia
Publication year (PY):	2013.
Publisher (PB):	Author's reprint
Publication place (PL):	11000 Belgrade, Bul. Kralja Aleksandra 73/II
Physical description (PD):	8/176/57/1/124/1
Scientific field (SF):	Architecture and Urbanism
Scientific discipline (SD):	Geometry of the Architectural Form
Subject/Key words (SW):	Elliptic Hyperboloid of One Sheet (EHOS), constructive procedures, spatial transformations, the main parameters of EHOS, 3D geometric modeling
UDC:	514.18(043.3)
Holding data (HD):	Library of Faculty of Architecture, 11000 Belgrade, Bul. Kralja Aleksandra 73/ II
Notes (N):	
Abstract (AB):	The constructive settlement with spatial hexagramic carrier for directors of two systems of generators of EHOS, produced a range of geometrical procedures for determination of the main parameters of the surface. Spatial affine transformations connected different types of hyperboloids of one sheet, significant for the theory of geometry and education. The models of structures, created from "whole", or fragments of surface, as the results of 3D modeling procedures, pointed out the possibilities of the application of this surface in the architectural and engineering practice.
Accepted by Scientific Board on (ASB):	30.09.2013.

### Скраћенице

- ПП правоизводна површ  
ЈЕХ једнограни елиптички хиперболоид  
ЈРХ једнограни ротациони хиперболоид  
ЈХ једнограни хиперболоид  
ПЈРХ прав једнограни ротациони хиперболоид  
ПЈЕХ прав једнограни елиптички хиперболоид  
КЈЕХ коси једнограни елиптички хиперболоид  
ПИР – пирамида  
ПРИЗ – призма  
С – симетричан (носач)  
А – асиметричан (носач)  
к – коначна (тачка површи)  
б – бесконачно далека (тачка површи)  
и – ивица (просторног носача)  
д – дијагонала (просторног носача)  
П – правилан носач  
Н – неправилан носач



Поглавље ..... 2.2

**K** – закривљеност

**K<sub>1</sub>** – прва галавна кривина

**K<sub>2</sub>** – друга главна кривина

**r** – радијус

**d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>, d<sub>3</sub>** – водиле (директрисе)

**i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>** – изводнице (генератрисе)

**α, β, γ, δ ...** – равни

**α<sub>1</sub>, β<sub>1</sub>, γ<sub>1</sub>, δ<sub>1</sub>...** – трагови равни

**e<sub>s</sub>** – грлена (стрикциона) елипса ЈЕХ

**a** и **b** – полуосе елипсе **e<sub>s</sub>**

**x, y, z** – осе координатног система

**φ<sub>1</sub>, φ<sub>2</sub>, φ<sub>3</sub>** – равни симетрије ЈЕХ–а

**h<sub>1</sub>, h<sub>2</sub>** – хиперболе у равнима симетрије ЈЕХ–а

**k<sub>s</sub>** – грлена (стрикциона) кружница ЈРХ–а

**φ** – раван симетрије ЈРХ–а

Поглавље ..... 3.2

**a, a', a''** – три мимоилазне праве простора

**[α'], [α'']** – два прамена равни

**α<sub>1</sub>', α<sub>2</sub>', α<sub>3</sub>'** – равни из прамена равни **[α']**

**[A'], [A'']** – два прамена правих

**(a)** – низ тачака

**1, 1', 1'''** – тачке низа (на правој)

**t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, t<sub>3</sub>** – трансверзале

**p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, p<sub>3</sub>... p<sub>n</sub>** – пресечнице (праве)

**P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>... P<sub>n</sub>; P<sub>1</sub>', P<sub>2</sub>', P<sub>3</sub>'... P<sub>n</sub>'** – продори прамењача кроз одговарајуће равни

**k** – коника (крива 2. реда)

**π** – раван конике **k**

Поглавље..... 3.3

**e, e<sub>1</sub>** – елипсе (пресечне криве ЈЕХ)

**E, E<sub>1</sub>** – центри елипси **e, e<sub>1</sub>**

**e<sub>as</sub>** – елипса (пресечна крива асимптотског конуса ЈЕХ)

- $e_{min}$  –стрикциона елипса JEX  
 $O$  – средиште површи JEX  
 $o_1, o_2, o_3$  – ортогоналне осе површи  
 $H$ – висина хиперболоида  
 $AB, CD$  – задате изводнице површи JEX из два система  
 $k, k_I$ – кружнице (пресечне криве JEX)  
 $K, K_I$ – центри кружница  $k, k_I$   
*Поглавље* .....3.4  
 $d_1, d_2, d_3$  – три водиље једног система JEX, у просторном шестотеменику  
 $r_1, r_2, r_3$  – три водиље другог система JEX, у просторном шестотеменику  
 $1, 2, 3, 4, 5, 6$  – темена просторног шестотеменика  
 $S_1, S_2, S_3$  – тачке пресека ивица носача –шестотеменика  
 $I, II, III$  – тачке пресека одговарајућих парова водиља из два система JEX  
 $ABCDEFGH$  – темена правилне четворостране призме  
 $r_1', r_2', r_3'$ – ортогоналне пројекције водиља једног система изводница JEX  
 $d_1', d_2', d_3'$ – ортогоналне пројекције водиља другог система изводница JEX  
*Поглавље*.....3.5.1  
 $V$ – врх асимптотског конуса JEX  
 $0-11$ – тачке пресечне криве  $e$  (узастопни положаји крајњих тачака изводница)  
 $0_g-11_g$ –тачке пресечне криве  $e_I$  (узастопни положаји крајњих тачака изводница)  
 $s, s_1, s_2$ – изводница конуса и две изводнице JEX у тангенцијалној равни  
 асимптотског конуса  
 $a_{as}, b_{as}$ – полуосе пресечне елипсе  $e_{as}$  асимптотског конуса JEX  
 $h_\alpha$  – пресечна хипербола JEX у равни  $\alpha$   
 $as_{1,2}$ – асимптоте пресечне хиперболе  
 $t_{1as}$  – траг тангенцијалне равни асимптотског конуса  
*Поглавље*.....3.5.2  
 $M_\infty, Q_\infty, W_\infty, R_\infty, T_\infty, N_\infty$  – бесконачно далеке тачке на изводницама JEX–а  
 $d_1''', d_2''', d_3'''$  – ортогоналне пројекције водиља на помоћну раван  $3$   
*Поглавље*.....3.5.3/1  
 $H_I$ – центар хиперболе  $h_I$  у равни симетрије  $\phi_I$   
 $tg_3, tg_4, tg_6$  – тангенцијалне равни у тачкама 3,4,6 просторног шестотеменика

$C_i$  – центар инволуције

$G_\infty$  – бесконачно далеки пол поларе  $k'$

$g, g', p, p', a, a'$  – парови коњугованих полара, инволуторног прамена у средишту  $O$

$s$  – инволуторни низ тачака 2. реда (кружница)

$11', 22', 33'$  – парови инволуторно придружених тачака на кружници  $s$

Поглавље.....3.5.3/2

$\theta$  – једнограни елиптички хиперболоид

$\tau$  – асимптотски конус ЈЕХ –  $\theta$

$\tau_1$  – прав кружни конус, са изводницама нагиба  $45^\circ$

$V'$  – ортогонална пројекција врха асимптотског конуса

$\{S_\tau\}$  – колокални инволуторни свежањ правих и равни, у односу на конус  $\tau$

$\{S_{\tau_1}\}$  – колокални инволуторни свежањ правих и равни, у односу на конус  $\tau_1$

$k$  – пресечна коника (елипса) асимптотског конуса  $\tau$

$k_I$  – пресечна коника (кружница) кружног конуса  $\tau_1$

$K, K_I$  – центри коника  $k$  и  $k_I$  – радијус кружнице конике  $k_I$

$\xi$  – пресечна раван коника  $k$  и  $k_I$

$P_o, Q_o, R_o$  – аутополарни троугао конике  $k$

$p, q, r$  – поларе полова  $P_o, Q_o, R_o$  у односу на конику  $k$

$\pi_1, \pi_2, \pi_3$  – три равни симетрије асимптотског конуса  $\tau$

$O_c$  – ортоцентар аутополарног троугла  $P_o, Q_o, R_o$

$(\alpha, \beta)$  и  $(\alpha_I, \beta_I)$  – парови колокалних корелативно придружених поља (тачке и праве)

$D_1, D_2, D_3$  – двоструке тачке колокалних колинеарних поља тачака  $\alpha$  и  $\alpha_I$

$r, i_I$  – недогледнице поља  $\alpha$  и  $\alpha_I$

$K_I$  – инверзни пол полу  $K$

$t_\infty, t_{I_\infty}$  – бесконачно далеке праве поља  $\alpha$  и  $\alpha_I$

$A_\infty, B_\infty, C_\infty$  – полови на бесконачно далеким правама  $t_\infty, t_{I_\infty}$

$(a, b, c)$  – прамен полара у темену  $K$ , конике  $k$ , за полове  $A_\infty, B_\infty, C_\infty$

$(a_I, b_I, c_I)$  – прамен полара у темену  $K_I$ , конике  $k_I$ , за полове  $A_{I_\infty}, B_{I_\infty}, C_{I_\infty}$

$(a, a_I); (b, b_I); (c, c_I)$  – парови међусобно придружених полара

$(e, e_I); (f, f_I)$  – два међусобно ортогонална пара придружених полара

$h$  – Аполонијева (правоугла) хипербола

- $A_h, B_h, C_h$  – тачке Аполонијеве (правоугле) хиперболе  $h$
- $E_{h\infty}, F_{h\infty}$  – бесконачно далеке тачке хиперболе  $h$
- $(R)$  и  $(R_I)$  – два пројективно придружена прамена правих у теменима  $R_\infty$  и  $R_{I\infty}$
- $(a)$  и  $(a_I)$  – два перспективна низа тачака
- $G$  и  $G_I$  – два недогледа за перспективне низове  $(a)$  и  $(a_I)$
- $C_p$  – центар перспективитета за низове  $(a)$  и  $(a_I)$
- $L, M; L_I, M_I$  – парови жижа (Лагерових тачака) за колинеарна поља  $\alpha$  и  $\alpha_I$
- $P$  – центар инволуције на недогледници  $r$
- $O_I$  – центар инволуције на недогледници  $i_I$
- $W$  и  $Q_I$  недогледи на недогледницама  $r$  и  $i_I$  (за правце  $W_{I\infty}$  и  $Q_\infty$ )
- $g_n$  и  $g_{nI}$  – две главне нормале за колинеарна поља  $\alpha$  и  $\alpha_I$
- $l$  – кружница коју производе праменови правих у жижама  $L, L_I$
- $(x, y, z)$  – прамен правих у жижи  $M$
- $(x_o, y_o, z_o)$  – прамен правих симетричан прамену  $(x, y, z)$  у односу на  $g_n$
- $(x_I, y_I, z_I)$  – прамен правих у жижи  $M_I$
- $m$  – кружница
- $h_2$  – Аполонијева хипербола
- Поглавље.....3.5.3/3
- $O'$  – ортогонална пројекција средишта  $O$  ЈЕХ
- $k$  и  $k_{Ig}$  – кружни пресеци којима се задаје ЈЕХ
- $k_{as}$  – пресечна кружница асимптотског конуса ЈЕХ
- $r$  и  $r_{Ig}$  – радијуси кружница  $k$  и  $k_{Ig}$
- $k_{min}$  – минимални кружни пресек
- $i_1, i_2$  – пар изводница асимпт. конуса, чије су симетрале угла главне осе  $o_1$  и  $o_2$
- $tg_{0-6}$  – тангенцијална раван у тачки стрикционе елипсе
- $as_{10-10}, as_{5-5}, as_{1-1}$  – трагови асимптотских равни
- Поглавље.....3.5.4
- $T_2, T_2$  – темена хиперболе  $h_1$  на главној осе  $o_2$  ПЈЕХ
- $T_3, T_3$  – темена хиперболе  $h_2$  на главној осе  $o_3$  ПЈЕХ
- $\Psi$  – асимптотска раван коју образују водиле  $d_2 r_2$
- $h_\alpha, h_\beta$  – пресечне хиперболе ПЈЕХ у равнима  $\alpha$  и  $\beta$
- $I_4 - I_4, I_5 - I_5$  – коњуговани парови прачника стрикционе елипсе

$3O, 2O$  – изводнице асимптотског конуса ПЈЕХ

$e'_{min}$  – ортогонална пројекција стрикционе елипсе  $e_{min}$

$II-II, III-III$  – главни ортогонални пречници елипсе  $e'_{min}$

$tg_{II}, tg_{III}, tg_{IV}$  – трагови тангенцијалних равни

Поглавље.....4.1

$ABC$  – 'неједнакостранични троугао

$A'B'C'$  – 'једнакостранични троугао

$ABCA_1B_1C_1$  – темена тростране призме са базисом – троуглом  $ABC$

$A'B'C'A_1'B_1'C_1'$  – темена тростране призме са базисом – троуглом  $A'B'C'$

$a.p.$  – оса афинитета

$O_c$  – ортоцентар троугла

$k_s$  – кружница уписана у троугао  $A'B'C'$

$e_s$  – елипса уписана у троугао  $A'B'C'$

$k'$  и  $k_1'$  – пресечне криве – кружнице ЈРХ

$e$  и  $e_1$  – пресечне криве – елипсе ПЈЕХ

$i_1' - i_{12}'$  – изводнице ЈРХ

$i_1 - i_{12}$  – изводнице ПЈЕХ

Поглавље.....4.2.1

$v$  – вектор смицања

$\pi$  – раван коинциденције базиса две тростране призме

$\theta_r$  – ЈРХ са пресечним кривама–кружницама

$\theta_e$  – КЈЕХ са пресечним кривама–кружницама

$k \equiv k'$  – коинцидентне пресечне кружнице хиперблоида  $\theta_r$  и  $\theta_e$  у равни  $\pi$

$k_{as} \equiv k_{as}'$  – коинцидентне пресечне кружнице асимптотских конуса у равни  $\pi$

$o_1', o_2', o_3'$  – ортогоналне осе површи КЈЕХ

$s$  – стрикциона кружница ЈРХ

$s'$  – кружница у равни кроз средиште  $O'$  површи  $\theta_e$

$s_1$  – стрикциона елипса површи  $\theta_e$

Поглавље.....4.2.2

$\theta$  – ПЈЕХ са две познате равни симетрије

$\theta'$  – КЈЕХ са једном познатом равни симетрије

$e \equiv e'$  – коинцидентне пресечне елипсе хиперблоида  $\theta$  и  $\theta'$  у равни  $\pi$

$e_s$ – стрикциона елипса ПЈЕХ $\theta$	
$e_s'$ – стрикциона елипса КЈЕХ $\theta'$	
Поглавље.....	4.2.3
$\theta''$ – КЈЕХ без познатих равни симетрије (општи случај)	
$e' \equiv e''$ – коинцидентне пресечне елипсе хиперболоида $\theta'$ и $\theta''$ у равни $\pi$	
$e_s''$ – пресечна елипса КЈЕХ $\theta''$ у равни кроз средиште $O''$	
Поглавље.....	5.1
$P$ – пол	
$p$ – полара пола $P$ , у односу на конику	
$k_\mu$ – коника елипса у равни $\mu$	
$\pi$ – поларна раван пола $P$ површи ПЈЕХ	
$m$ – произвољна сечица површи ПЈЕХ	
$\mu$ – раван кроз сечицу $m$	
$P_1, P_2$ – продори сечице кроз површ ПЈЕХ	
$(P M P_1 P_2)$ – хармонијска четворка тачака на сечици	
$\xi$ – раван пресека ПЈЕХ–а	
$(m, l, s)$ – прамен сечица хиперболоида кроз пол $P$	
$(\mu, \lambda, \pi)$ – три равни које пролазе сечицама $m, l, s$	
$k_\mu, h_\lambda, h_\pi$ – три пресечне конике ПЈЕХ–а у равнима $\mu, \lambda, \pi$	
$P_m$ – продор сечице $m$ кроз раван $\xi$	
$tg_1, tg_2$ – тангенцијалне равни на асимпт. конус кроз тачку $P_m$	
$k_1, j_1, i_1$ – две изводнице ПЈЕХ и једна изводница асимпт. конуса у равни $tg_1$	
$k_2, j_2, i_2$ – две изводнице ПЈЕХ и једна изводница асимпт. конуса у равни $tg_2$	
$\sigma$ – раван кроз врх асимпт. конуса, са изводницама $i_1$ и $i_2$	
$h_\sigma$ – пресечна хипербола ПЈЕХ и равни $\sigma$	
$\delta$ – раван из система равни паралелних равни $\sigma$	
Поглавље .....	5.2
$e_h$ – елипса, пресек равни и ЈЕХ–а	
$e_k$ – елипса, пресек равни и асимптотског конуса ЈЕХ–а	
$e_o$ – елипса, пресек са равни која пролази средиштем ЈЕХ–а	
$p_h$ – парабола, пресек равни и ЈЕХ–а	
$p_k$ – парабола, пресек равни $\gamma$ и асимптотског конуса ЈЕХ–а	

$h_h$ – хипербола, пресек равни и ЈЕХ–а	
$h_k$ – хипербола, пресек равни и асимпт. конуса ЈЕХ–а	
$h_o$ – хипербола, пресек са равни $\eta$ , која пролази средиштем ЈЕХ–а	
$\delta, \varepsilon, \gamma, \omega, \eta, \mu$ ..... – равни пресека ЈЕХ–а	
$\kappa$ – равни кружних пресека ЈЕХ–а	
<i>Поглавље</i> .....	5.2.1
$F_h$ – фокус елипсе $e_h$	
$F_k$ – фокус елипсе $e_k$	
$h_f$ – хипербола по којој се крећу фокуси	
$C$ – заједнички центар елипси $e_h$ и $e_k$	
$as_{1f}, as_{2f}$ – асимптоте хиперболе (геом. место фокуса пресечних елипси)	
$s$ – оса колинеације	
$g_h$ – елипса, пресек равни равни произвољног положаја и ЈЕХ–а	
$g_k$ – елипса, пресек равни произвољног положаја и асимптотског конуса ЈЕХ–а	
$C_\gamma$ – центар елипсе у равни $\gamma$	
$1_\gamma, 2_\gamma, 3_\gamma, 4_\gamma$ – тачке конике у равни $\gamma$	
$S_\infty, M_\infty$ – бесконачно далеки полови	
$A, B$ – полови у коначности	
$h_\rho, h_\sigma$ – пресечне хиперболе у равнима $\rho, \sigma$	
<i>Поглавље</i> .....	5.2.2
$p_h$ – пресечна парабола ЈЕХ–а	
$p_k$ – пресечна парабола асимптотског конуса ЈЕХ–а	
$P_h$ – тачка пресечне параболе ЈЕХ–а на нагибници	
$P_{h\infty}$ – бесконачно далека тачка пресечне параболе ЈЕХ–а на нагибници	
$P_k$ – тачка пресечне параболе асимптотског конуса на нагибници	
$T_h$ – теме параболе на површи ЈЕХ	
$T_{h\infty}$ – бесконачно далеко теме параболе	
$T_k$ – теме пресечне параболе на асимптотском конусу ЈЕХ–а	
$g_\tau$ – нагибница равни $\tau$	
$\gamma_1, \delta_1, \beta_1, \omega_1$ – трагови пресечних равни у равни базиса ЈЕХ–а	
$t_1$ – изводница асимптотског конуса у тнгенцијалној равни	

<i>Поглавље</i> .....	5.2.3
$h_h$ – пресечна хипербола ЈЕХ–а	
$h_k$ – пресечна хипербола асимптотског конуса ЈЕХ–а	
$s_1, s_2$ – пар изводница асимптотског конуса ЈЕХ–а	
$T_h$ – теме пресечне хиперболе на површи ЈЕХ	
$T_k$ – теме пресечне хиперболе на асимптотском конусу ЈЕХ–а	
$T_n$ – теме пресечне хиперболе на површи ЈЕХ, на стрикционој елипси	
$m$ – линија центара пресечних хипербола за систем паралелних равни	
$q_{1,2}; t_{1,2}$ – парови изводница ЈЕХ–а, који образују две паралелне дирне равни	
$h_\eta, h_\nu, h_\sigma$ – пресечне хиперболе у равима $\eta, \nu, \sigma$	
$I_h, I_h, I_m, I_m$ – темена хипербола у коњугованим равнима	
$K$ – центар хиперболе у произвољно постављеној равни, кроз средиште ЈЕХ–а	
<i>Секција под поглавља</i> .....	5.1.3/ц
$k_r$ – кружница– базис ротационог конуса са изводницама нагиба $45^\circ$	
$h_\alpha, h_\beta$ – Аполонијеве – правоугле хиперболе у равнима $\alpha$ и $\beta$	
$as_{1\alpha, 2\alpha}; as_{1\beta, 2\beta}$ – асимптоте хипербола $h_\alpha, h_\beta$	
<i>Поглавље</i> .....	5.1.4
$k$ – контурна кружница сфере	
$\theta$ – сфера	
$L$ – центар сфере	
$V$ – врх асимптотског конуса	
$\xi, \xi_I$ – тангенцијалне равни сфере	
$K, K_I$ – двоструке тачке продорне криве сфере и асимптотског конуса	
$C_{1,2}; C_{3,4}$ – центри кружних пресека асимптотског конуса	
$\lambda$ – раван управна на равни кружних пресека	
$c, c_I$ – кружни пресеци асимптотског конуса	
$\gamma, \gamma_g$ – две равни које секу ЈЕХ паралелним кружним пресецима	
$q_{min}$ – минимални кружни пресек ЈЕХ–а	
$e_{min}$ – стрикциона елипса ЈЕХ–а	
<i>Поглавље</i> .....	5.3.1
$e, e_I$ – две елипсе–распад продорне криве ЈЕХ и конуса	
$D_1, D_2$ – две двоструке тачке продорне криве ЈЕХ и конуса	



$g_1, g_2$  – две гране продорне криве ЈЕХ и конуса

$a, b$  – полуосе стрикционе елипсе ЈЕХ–а

Поглавље.....5.3.2

$m, m_1$  – две елипсе–распад продорне криве ЈЕХ и облице

$e_s$  – стрикциона елипса ЈЕХ–а

$d_1, d_2$  – две гране симетричне продорне криве ЈЕХ и облице

Поглавље.....5.3.3

$c_1, c_2$  – две кружнице – распад продорне криве ЈЕХ и сфере

$k$  – самопресечна продорна крива ЈЕХ и сфере

$l$  – двограна симетрична продорна крива ЈЕХ и сфере

$s$  – продорна крива ЈЕХ и сфере са изолованом тачком

$M$  – изолована тачка продорне криве ПЈЕХ и сфере

Поглавље.....7.1

$k$  – кружница, базисна крива ЈЕХ

$k_{as}$  – кружница, базисна крива асимптотског конуса ЈЕХ

$r_k$  – радијус базисне криве  $k$

$r_{as}$  – радијус базисне криве  $k_{as}$

$\Delta r$  – разлика радијуса

$H_{JEH}$  – висина ЈЕХ–а

$H_{AS}$  – висина асимптотског конуса ЈЕХ

$n$  – број изводница површи ЈЕХ

- Сл. 1 Култура и традиција, *Азади кула*, Техеран, арх. Хусеин Аманат., 1971  
<http://www.flickr.com/photos/csabx/4462818903/?q=azadi>
- Сл. 2 *High Life Textile Factory*, Mexico City, Ф. Кандела 1955.  
[http://www.gregcookland.com/journal/2009/09/08/felix\\_candela/](http://www.gregcookland.com/journal/2009/09/08/felix_candela/)
- Сл. 3 ТВ торањ, *Kanton Tower – Guangzhou*, Кина, М. Hemel, В. Kuit, 2010.  
[http://www.e-architect.co.uk/images/jpgs/guangzhou/guangzhou\\_tv\\_tower\\_iba141108\\_2.jpg](http://www.e-architect.co.uk/images/jpgs/guangzhou/guangzhou_tv_tower_iba141108_2.jpg)
- Сл. 4 Површи чије су изводнице праве линије
- Сл. 5 Површи чије су изводнице криве линије
- Сл. 6 а–в Примери три различита типа закривљености
- Сл. 7 Кретање изводнице (изводи површ) која сече водиле:  $k_1, k_2, k_3$
- Сл. 8 Елиптички хиперболоид
- Сл. 9 Хиперболички параболоид
- Сл. 10 Коноид – 3D модел
- Сл. 11 Хеликоид – 3D модел
- Сл. 12 Завојна торза – жичани 3D модел
- Сл. 13 Једнограни елиптички хиперболоид – 3D модел
- Сл. 14 Скица уз једначину (11)
- Сл. 15 Једнограни ротациони хиперболоид – 3D модел
- Сл. 16 Трансверзале три мимоилазне праве простора – изводнице ЈЕХ
- Сл. 17 Пресечнице два пројективно придружена прамена равни – изводнице ЈЕХ
- Сл. 18 Спојнице придружених тачака низова на правама  $a$  и  $a'$  – изводнице ЈЕХ
- Сл. 19 Прав ЈЕХ са две задате равни симетрије – 3D модел
- Сл. 20 Коси ЈЕХ са једном задатом равни симетрије – 3D модел
- Сл. 21 Коси ЈЕХ без задате равни симетрије – 3D модел
- Сл. 22 Типови просторних шестотеменика – носача водиле ЈЕХ
- Пример 1– Четворострана призма – квадар / водиле – *ивице носача*/
- Пример 2 – Четворострана призма – квадар (или коцка)  
/ водиле – *дијагонале и ивице носача*/
- Пример 3 – Четворострана неправилна косо зарубљена призма  
/ водиле – *ивице носача*/
- Пример 4 – Четворострана неправилна призма  
/ водиле – *дијагонале и ивице носача*/
- Пример 5 – Четворострана косо зарубљена пирамида / водиле – *ивице носача*/

- Пример 6 – Четворострана косо зарубљена пирамида  
/ водиле – дијагонале и ивице носача/
- Пример 7 – Четворострана косо зарубљена пирамида / водиле – ивице носача/
- Пример 8 – Четворострана косо зарубљена пирамида  
/ водиле – дијагонале и ивице носача/
- Пример 9 – Шестострана права призма /водиле – дијагонале носача/
- Пример 10 – Шестострана неправилна косо зарубљена призма  
/водиле–дијагонале носача/
- Пример 11 – Шестострана косо зарубљена неправилна призма  
/ водиле дијагонале носача/
- Пример 12 – Шестострана зарубљена неправилна пирамида  
/водиле – дијагонале носача/
- Пример 13 – Шестострана неправилна косо зарубљена пирамида  
/водиле дијагонале носача/
- Сл. 23 Водиле површи уписане у просторни шестостраник – квадар ABCDEFG
- Сл. 24 Постављање изводница ЈЕХ у зочној пројекцији водиле  $d_1$
- Сл. 25 Један систем изводница ЈЕХ у просторном приказу
- Сл. 26 Два система изводница површи ЈЕХ за носач бр.2а у просторном приказу
- Сл. 27 Асимптотски конус површи право ЈЕХ–а
- Сл. 28 Пресек право ЈЕХ–а и асимптотског конуса дијаметралном равни
- Сл. 29а Примери конструисања средишта носача – тип а)
- Пример 1– Квадар са квадратном основом / носач и површ имају исту равну симетрију  $\varphi_1$ /
- Пример 2 – Квадар са правоугаоном основом
- Пример 2 а – Коцка / носач и површ имају исту равну симетрију  $\varphi_1$  /
- Пример 9 – Шестострана призма / носач и површ имају исту равну симетрију  $\varphi_1$  /
- Сл.29 б Примери конструисања средишта носача – тип б)
- Пример 5 – Четворострана зарубљена пирамида (позната равна симетрија носача)
- Пример 4 – Четворострана неправилна призма (није позната равна симетрија)
- Пример 10 – Шестострана неправилна косо зарубљена призма
- Сл. 30 Две коначне и једна бесконачно далека тачка ЈЕХ у равни  $\varphi_1$ – тип а)
- Пример 2а – Зрачна пројекција тангенцијалних равни ЈЕХ; носач– четворострана

призма

Пример 1 – Зрачна пројекција тангенцијалних равни ЈЕХ; носач – четворострана призма

Пример 9 – Зрачна пројекција тангенцијалних равни ЈЕХ; носач – шестострана призма

Сл. 31 Пар главних оса површи ( две коначне тачке ЈЕХ у равни  $\phi_1$ ) – тип а)

Сл. 32 Три коначне тачке ЈЕХ у равни симетрије  $\phi_1$  носача ЈЕХ – тип б)

Пример 10 – Зрачна пројекција тангенцијалних равни ЈЕХ; носач – косо зарубљена шестострана призма

Сл. 33 Пар главних оса површи ( три коначне тачке у равни симетрије  $\phi_1$ ) – тип б)

Сл. 34 Конструкција главних оса ЈЕХ – поставка конуса  $\tau$  и  $\tau_1$

Сл. 35 Три главне осе  $o_1 o_2 o_3$  и равни симетрије  $\pi_1 \pi_2 \pi_3$  КЈЕХ

Сл. 36 Два прамена пројективно придружених полара у теменима  $K$  и  $K_1$

Сл. 37 Конструисање Аполонијеве хиперболе  $h_1$

Сл. 38 Конструисање парова жижа за два колинеарна поља  $a$  и  $a_1$

Сл. 39 Три двоструке тачке колинеарно придружених поља  $a$  и  $a_1$

Сл. 40 Ортогонални трокрак – главне осе конуса  $\tau$  са пресечном кривом елипсом

Сл. 40а Главне осе косог једнограног елиптичког хиперболоида  $\theta$  и конуса  $\tau$

Сл. 41 Један систем изводница ЈЕХ задатог кружним пресецима и изводницом

Сл. 42 Поглед на зрачну пројекцију тангенцијалних равни кружног пресека  $k_{min}$

Сл. 43 Конструисана површ ЈЕХ са свим главним параметрима

Сл. 44 Три пресечне криве ЈЕХ–а са равнима симетрије

Сл. 45 Стриксиона елипса и темена површи за случај водилља на носачу бр.2а

Сл. 45а Зрачна пројекција стрикционе елипсе и парова водилља носача бр.2

Сл. 46 Положај стрикционе елипсе у односу на водилље за носач бр.5

Сл. 46а Зрачна пројекција стрикционе елипсе и парова водилља носача бр.5

Сл. 47 Положај стрикционе елипсе у односу на водилље носача бр.10

Сл. 47а Зрачна пројекција стрикционе елипсе и парова водилља носача бр.10

Сл. 48 Тангенцијалне равни у теменима стрикционе елипсе

Сл. 49 Парови тангенцијалних равни у тачкама стрикционе елипсе носача бр. 2а

Сл. 50 Конструисана површ ЈЕХ са свим главним параметрима – носач бр. 10

Сл. 51 Афино придружени базиси две праве тростране призме

- Сл. 52 Зрачне пројекције тангенцијалних равни два афино придружена ЈХ
- Сл. 53 Просторни модел афино трансформисаног ЈРХ у ПЈЕХ
- Сл. 54 Трансформација праве у косу тространу призму смицањем базиса
- Сл. 55 Трансформација ЈРХ у КЈЕХ – заједничка пресечна крива је кружница
- Сл. 56а Трансформација ПЈЕХ у КЈЕХ са заједничком равни симетрије
- Сл. 56б Трансформација ПЈЕХ у КЈЕХ општег случаја
- Сл. 57 Основа две афино придружене праве тростране призме са уписаним стрикционим кривама два ЈХ
- Сл. 58 Просторни жичани модел трансформације ЈРХ у прав ЈЕХ
- Сл. 59 Просторни жичани модел трансформације ПЈЕХ у општи случај КЈЕХ
- Сл. 60 Поларитет у једној равни пресека ЈЕХ
- Сл. 61 Поларна раван  $\pi$  правог једнограног хиперболоида за задати пол  $P$
- Сл. 62 Релације елемената две тангенцијалне равни асимптотског конуса
- Сл. 63 Конструкција поларне равни  $\pi$ , квадрике – косог ЈЕХ, за задати пол  $P$
- Сл. 64а Модел ЈЕХ–а са пресечним равнима; пресек – елипса
- Сл. 64б Модел ЈЕХ–а са пресечним равнима; пресек – парабола
- Сл. 64в Модел ЈЕХ–а са пресечним равнима; пресек – хипербола
- Сл. 65 Преглед положаја равни са типовима пресечних кривих
- Сл. 66 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\beta$  – елипсе
- Сл. 66а Пресеци ПЈЕХ–а са равнима управним на  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ; пресечне криве – елипсе
- Сл. 67 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\alpha$  – елипсе
- Сл. 67а Пресеци ПЈЕХ са равнима управним на  $\varphi_1$ ; пресечне криве – елипсе
- Сл. 68 Колинеарна придруженост тачака базисне елипсе  $e_h$  и пресечне елипсе  $b_h$
- Сл. 69 Поступак конструисања центра и оса пресечне елипсе у равни  $\gamma$
- Сл. 70 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\gamma$  – елипсе
- Сл. 70а Пресеци ПЈЕХ–а са произвољно постављеним равнима; пресечне криве – елипсе
- Сл. 71 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\pi$  – параболе
- Сл. 71а Пресеци ПЈЕХ са равнима управним на раван  $\varphi_2$ ; пресечне криве – параболе
- Сл. 71б Зрачни приказ равни пресека ЈЕХ–а управних на раван  $\varphi_2$  ( параболе)
- Сл. 72 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\gamma$  – параболе

- Сл. 72а Пресеци ЈЕХ–а са равнима паралелним произвољној тангенцијалној равни  $\gamma$  асимптотског конуса – пресечне криве параболе
- Сл. 72б Зрачни приказ равни пресека ПЈЕХ паралелних равни  $\gamma$  – параболе
- Сл. 73 Пресечне конике ЈЕХ–а и асимптотског конуса са равни  $\sigma$  – хиперболе
- Сл. 73а Пресеци ПЈЕХ –а са равнима управним на  $\phi_1$ –пресечне криве хиперболе
- Сл. 73б Положајне карактеристике пресечних хипербола за задати систем равни
- Сл. 73в Пресечне конике ЈЕХ–а и асимптотског конуса са равни  $\delta$  – хиперболе
- Сл. 73г Зрачни приказ равни пресека ПЈЕХ паралелних равни  $\eta$
- Сл. 74 Пресек ЈЕХ и асимптотског конуса са равни  $\mu$ ; пресечне конике – хиперболе
- Сл. 74а Пресеци ПЈЕХ–а са равнима паралелним произвољној равни  $\mu$ – пресечне криве хиперболе
- Сл. 74б Зрачни приказ равни пресека ПЈЕХ паралелних равни  $\mu$
- Сл. 75 Пресек ПЈЕХ са равнима  $\alpha \beta$ ; пресечне криве– Аполонијеве хиперболе
- Сл. 76 Зрачни приказ пресека ПЈЕХ са равнима  $\alpha \beta$
- Сл. 77 Две равни кроз произвољну изводницу  $m$  асимптотског конуса, које секу ПЈЕХ по Аполонијевим хиперболама
- Сл. 78 Систем паралелних равни које секу ПЈЕХ по Аполонијевим хиперболама
- Сл. 79 Кружни пресеци  $c_1$  и  $c_2$  асимптотског конуса
- Сл. 80 Један систем кружних пресека ЈЕХ–а
- Сл. 81 Зрачни приказ ва система кружних пресека КЈЕХ
- Сл. 82 Продор ПЈЕХ–а и конуса ; просторна крива се распада на две елипсе
- Сл. 83 Продор ПЈЕХ–а и конуса ; продорна крива је дводелна симетрична
- Сл. 84 Продор ПЈЕХ–а и конуса; продорна крива је дводелна асиметрична
- Сл. 85 Продор ПЈЕХ–а и облице; продорна крива се распада на две елипсе
- Сл. 86 Продор ПЈЕХ–а и облице; продорна крива се распада на елипсу и две праве
- Сл. 87 Продор ПЈЕХ–а и облице; продорна крива је дводелна симетрична
- Сл. 88 Продор ПЈЕХ–а и сфере; продорна крива се распада на две елипсе
- Сл. 89 Продор ПЈЕХ–а и сфере; продорна крива има самопресечну тачку
- Сл. 90 Продор ПЈЕХ–а и сфере; крива је дводелна, симетрична
- Сл. 91 Продор ПЈЕХ–а и сфере; крива је једноделна са изолованом тачком
- Сл. 92 Неколико фаза у моделовању, приликом креирања исечка површи ЈЕХ–а
- Сл. 93 Креирање троугаоне матрице поларном мултипликацијом исечака ЈЕХ

- Сл. 94 Допунски елементи структуре креирани у 3D режиму моделовања  
Структуре моделоване од исечака површи ЈЕХ
- Сл. 95а Троугаона матрица , површински модел, допунска структура
- Сл. 95б Квадратна матрица , површински модел, допунска структура
- Сл. 95в Петоугаона матрица , површински модел
- Сл. 96а Троугаона матрица–3D модел
- Сл. 96б Четвороугаона матрица–3D модел
- Сл. 96в Петоугаона матрица–3D модел
- Сл. 97 Исечак површи косог ЈЕХ по изводницама и кружним пресецима  
Структуре моделоване комбиновањем ЈЕХ–а и површи другог степена
- Сл. 98а Троугаона матрица и површински модел
- Сл. 98б Троугаона матрица – 3D модел са основом
- Сл. 99а Четвороугаона матрица и површински модел
- Сл. 99б Четвороугаона матрица– 3D модел са основом
- Сл. 100а Петоугаона матрица и површински модел
- Сл. 100б Петоугаона матрица– 3D модел са основом
- Сл. 101 Поступак креирања структуре комбиновањем ПЈЕХ–а и сфере (основа и 3D модел)
- Сл. 102 Почетне фазе моделовања –интерсекција облице и ПЈЕХ структуре;  
језгро продора две облице
- Сл. 103 Завршне фазе моделовања структуре од елемената ПЈЕХ–а и облице
- Сл. 103а Основа моделоване структуре
- Сл. 104а Фазе моделовања елемента – љуске добијене комбиновањем конуса и ПЈЕХ–а
- Сл. 104б 3 Д модел структуре – "колонаде"
- Сл. 104в Основа "колонаде" (везни део је закривљен)
- Сл. 105а Фазе моделовања елемента – љуске добијене комбиновањем конуса и ПЈЕХ–а
- Сл. 105б 3 Д модел структуре – "колонаде"
- Сл. 105в Основа "колонаде" (везни део је равански)
- Сл. 106 Фазе моделовања елемента – љуске добијене комбиновањем сфере и ПЈЕХ–а (основе и 3D модели)

- Сл. 107 Креирање структуре од делова љуске ПЈЕХ–а и везног елемента (основе и 3D модели)
- Сл. 108 Динамички покренут објекат облика инспирисаног једнограмим хиперболоидом "Кућа која плеше", арх. F. Garry и В. Милунић  
<http://www.tumblr.com/tagged/dancing/dancing-house/>
- Сл. 109 Еко архитектура са хиперболоидном формом; Пројекат *Al Masdar–Headquarters*, Абу Даби, арх. A.Smith, G.Gil Architecture  
[http://worldarchitecturenews.com/news\\_images/2298\\_1\\_Masdar2big.jpg](http://worldarchitecturenews.com/news_images/2298_1_Masdar2big.jpg)
- Сл. 110 Хиперболоидне форме на цркви "Sagrada Famillia", арх. Гауди  
[http://www.sagradafamilia.cat/imgs/imgs\\_inst/arq2/cons\\_0502.jpg](http://www.sagradafamilia.cat/imgs/imgs_inst/arq2/cons_0502.jpg)
- Сл. 111 Полазни параметри површи ЈЕХ који се задају у *Auto Lisp* апликацији
- Сл. 112 Алгоритам апликације за креирање површи ЈЕХ помоћу кружних пресека
- Сл. 113 а–в Три жичана модела површи ЈЕХ – *Апликација 1*
- Сл. 114 а–в Три површинска модела ЈЕХ – *Апликација 2* ( приказ "wireframe")
- Сл. 115 Три површинска модела ЈЕХ креирана *Апликациојм 2* у реалном приказу
- Сл. 116 Хиперболоидни зупчаници, <http://meskanen.com/images/cutter.2jpg>
- Сл. 117 Музички инструмент – *тарабука* са резонатором облика ЈРХ  
<http://www.skala.rs/kategorija/Udaraljke/1/34.html>
- Сл. 118 Унутрашњост објекта *L'église Sant Jean a Grenoble*, арх. М. Blanc, инж. R. Serger  
[http://www.aha-helico-air.asso.fr/saint\\_jean.htm](http://www.aha-helico-air.asso.fr/saint_jean.htm),
- Сл. 119 *Пешиачки мост*, Манчестер, Енглеска, арх. Hodder and Partners 1999.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation\\_Street\\_Bridge/](http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation_Street_Bridge/),
- Сл. 120 Ентеријер *Хиперболоидног моста*, Манчестер, Енглеска  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation\\_Street\\_Bridge/](http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation_Street_Bridge/),
- Сл. 121 Стуб облика ЈЕХ – *Palazzo dela Regione*, у Тренту, Италија  
<http://en.structurae.de/structures/data/photos.cfm?ID=186475>,
- Сл. 122 Дизајн на форми елиптичког хиперболоида  
<http://brlcad.org/gallery/s/renderings/primitives/hyp.png.html>



### **Коришћене Web адресе (link-ови)**

*Sagrada Familia Parish School* (стр.7) –

[http://www.gaudiclub.com/ingles/i\\_vida/fotobras/escoles/escoles11.jpg](http://www.gaudiclub.com/ingles/i_vida/fotobras/escoles/escoles11.jpg)

*Church of Our Lady of Miraculous Medal* (стр.7) –

[http://classconnection.s3.amazonaws.com/830/flashcards/400830/jpg/piccandela.church-of-our-lady\\_interiorweb-790744.jpg](http://classconnection.s3.amazonaws.com/830/flashcards/400830/jpg/piccandela.church-of-our-lady_interiorweb-790744.jpg)

*Спортско рекреативни центар 25.мај* (стр.8) –

<http://www.srcmgm.rs/sr/o-centru/istorijat-centra/>

*Mc Donnell Planetarium* (стр.8) – <http://en.wikipedia.org/wiki/File:McDonnell-Planetarium.jpg>

*Alamillo bridge* (стр.8) – <http://www.flickr.com/photos/musely/13043993/in/photostream/>

*Gare Saint Exupéry* (стр.8) –

<http://m.cdn.blog.hu/mi/mistinguett/image/lyon-st-exupery-gare-tgv-2.jpg>

*Spiral Tower* (стр.8) –

[http://api.ning.com/files/uNAvuUSID9SpAEQL\\*rItPHkc99qT9qSu8rfLdgIohFE0KesMK22EUt6EctUpul5ii-aVYwuMAGjj9H3JRGTWnlUT-866jIJ6/ModeGakuenSpiralTowers2.jpg](http://api.ning.com/files/uNAvuUSID9SpAEQL*rItPHkc99qT9qSu8rfLdgIohFE0KesMK22EUt6EctUpul5ii-aVYwuMAGjj9H3JRGTWnlUT-866jIJ6/ModeGakuenSpiralTowers2.jpg)

*Водоторањ Нижњи Новгород* (стр.8) –

[http://www.google.rs/imgres?imgurl=http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/First\\_Hyperboloid\\_Tower\\_by\\_Vladimir\\_Shukhov\\_1896.jpg&imgrefurl=http://commons.wikimedia.org/wiki/File:First\\_Hyperboloid\\_Tower\\_by\\_Vladimir\\_Shukhov\\_1896.jpg&usq=IJjMphXNN](http://www.google.rs/imgres?imgurl=http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/First_Hyperboloid_Tower_by_Vladimir_Shukhov_1896.jpg&imgrefurl=http://commons.wikimedia.org/wiki/File:First_Hyperboloid_Tower_by_Vladimir_Shukhov_1896.jpg&usq=IJjMphXNN)

*Fedala Reservoir* (стр.8) - <http://en.structurae.de/structures/data/index.cfm?ID=s0002124>

*Cooling tower, Jacksonville* (стр.8) -

<http://www.structuremag.org/article.aspx?articleid=326>

*L'église St. Jean à Grenoble* (стр.9) - [http://www.aha-helico-air.asso.fr/saint\\_jean.htm](http://www.aha-helico-air.asso.fr/saint_jean.htm)

*Катедрала Бразилија* (стр. 9) –

<http://unusual-architecture.com/cathedral-of-brasilia-brasil/>

*Објекат спортске хале у Ђенови* (стр.9) -

<http://www.ebay.co.uk/itm/Suspension-Roof-design-UFO-shaped-sports-arena-Genoa-Italy-1964-Article-/360472607585>

*Asian games torch tower* (стр.163)

<http://www.businessinsider.com/the-torch-doha-hotel-opens-in-qatar-2012-6?op=1>

Списак скраћеница .....	I
Списак коришћених ознака .....	II
Списак слика .....	XI
1. <u>УВОДНА РАЗМАТРАЊА</u> .....	1
1.1 Предмет истраживања .....	1
1.2 Остварени циљеви истраживања .....	1
1.3 Остварени задаци истраживања .....	2
1.4 Полазне хипотезе.....	2
1.5 Методологија .....	3
1.5.1 Опште методе.....	3
1.5.2 Основне посебне научне методе.....	3
1.6 Научна оправданост дисертације, резултати и практична примена.....	4
2. <u>УВОД</u> .....	6
2.1 Преглед правоизводних површи кроз историју.....	6
2.1.1 Развој хиперболоидних структура.....	8
2.2 Општа класификација правоизводних површи.....	10
2.2.1 Врсте једнограних хиперболоида .....	16
3. <u>ЈЕДНОГРАНИ ЕЛИПТИЧКИ ХИПЕРБОЛОИД (ЈЕХ)</u> .....	19
3.1 Дефиниција и конструисање ЈЕХ (општи случај).....	19
3.2 Конструисање ЈЕХ методама пројективне – синтетичке геометрије.....	19
3.2.1 ЈЕХ –производ трансверзала три мимоилазне праве у простору.....	19
3.2.2 ЈЕХ – производ два пројективно придружена прамена.....	19
3.2.3 ЈЕХ –Производ два пројективно придружена низа тачака.....	20
3.3 Класификација ЈЕХ у односу на задате равни симетрије.....	22
3.3.1 Прав ЈЕХ са две задате равни симетрије.....	22
3.3.2 Коси ЈЕХ са једном задатом равни симетрије.....	23
3.3.3 Коси ЈЕХ без задате равни симетрије.....	24
3.4 Положајна анализа директриса код ЈЕХ–а.....	28
3.4.1 Начин конструисања површи ЈЕХ када су задата три пара директриса из различитих система, уписана у просторни шестотеменик.....	35
3.5 Анализа параметара ЈЕХ–а .....	38
3.5.1 Асимптотски конус површи ЈЕХ–а.....	38

3.5.2	Средиште површи ЈЕХ–а.....	40
3.5.3	Главне осе ЈЕХ–а и равни симетрије.....	44
3.5.3/1	Конструкција главних оса ЈЕХ за задати носач и раван симетрије.....	45
3.5.3/2	Конструкција главних оса за ЈЕХ и његов асимптотски конус.....	49
3.5.3/3	Конструкција главних оса за ЈЕХ задат кружним пресецима.....	59
3.5.4	Стриксиона елипса и темена ЈЕХ–а.....	62
4.	<u>ПРОСТОРНЕ КОЛИНЕАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ЈХ</u> .....	72
4.1	Трансформације ЈХ афиним придруживањем базиса .....	72
4.2	Трансформације ЈХ, ако постоји коинцидентна пресечна крива.....	75
4.2.1	Трансформација ЈРХ, или ЈЕХ у коси ЈЕХ.....	76
4.2.2	Трансформација ЈРХ у општи случај косога ЈЕХ.....	81
5.	<u>ПРЕСЕЦИ ЈЕХ И ПРОДОРИ СА ОСНОВНИМ ПОВРШИМА 2. СТЕПЕНА</u> .....	85
5.1	Поларитет квадрика.....	85
5.2	Равни пресеци ЈЕХ.....	91
5.2.1	Пресек ЈЕХ по елипси.....	95
5.2.2	Пресек ЈЕХ по параболи.....	103
5.2.3	Пресек ЈЕХ по хиперболи.....	108
5.2.4	Кружни пресеци ЈЕХ (метода "помоћних лопти").....	118
5.3	Продори ЈЕХ са општим површима 2. степена.....	123
5.3.1	Продор ЈЕХ и конуса.....	123
5.3.2	Продор ЈЕХ и облице.....	127
5.3.3	Продор ЈЕХ и сфере.....	131
6.	<u>ПРОСТОРНЕ СТРУКТУРЕ СА ПРИМЕНОМ ЈЕХ</u> .....	136
6.1	Примери просторних структура добијених комбиновањем исечака ЈЕХа.....	136
6.1.1	Структуре од исечака површи ПЈЕХ чије су "ивице" криве линије...136	
6.1.2	Структуре од исечака површи КЈЕХ чије су ивице праве и кружни пресеци.....	141
6.2	Просторне структуре добијене комбиновањем површи ЈЕХ са основним површима 2. степена.....	144

7. <u>ГРАФИЧКА ПРЕЗЕНТАЦИЈА И ПРИМЕНА ПОВРШИ ЈЕХ</u> .....	152
7.1 Апликације за 3D модел површи ЈЕХ–а, базиране на кружним пресецима.....	155
7.2 Примена површи једнограног хиперболоида (ЈХ).....	162
7.2.1 Примена површи ЈХ–а у архитектури и грађевинарству.....	163
7.2.2 Примена површи ЈХ–а у уметности и дизајну.....	166
7.2.3 Примена површи ЈХ–а у другим гранама технике и .....	166
8. <u>ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА</u> .....	168
Прилог 1.....	174
Литература.....	177
Биографија.....	182

## 1.1 Предмет истраживања

Предмет истраживања дисертације: "Конструктивни поступци у просторним трансформацијама површи једнограног елиптичког хиперболоида", из области геометријског конструисања, моделовања и анализе, двоструко закривљене правоизводне површи другог реда – једнограног елиптичког хиперболоида (JEX), је до сада, недовољно проучен. Расположиви теоријски оквири, из стручне литературе, представљају само смернице за низ конструктивно–геометријских решења за конструисање површи и њених главних параметара, као и за утврђивање њихових међусобних релација.

Површ JEX је аналитичко–математички дефинисана општом једначином или се јавља у параметарском облику. У градитељско–архитектонској пракси, овај начин приказивања не даје њену јасну просторну представу. Стога је део рада посвећен проналажењу једноставнијег и сврсисходнијег полазног, конструктивног оквира, за њену представу и примену.

Како је JEX у мањој мери присутан, у реалном животном окружењу и теорији, у односу на друге сродне типове правоизводних површи, ова теза је морала да оствари и остварила је своје специфичне поступке и практична решења, како би ова површ добила равноправан третман, са онима које су већ афирмисане.

## 1.2 Остварени циљеви истраживања

Теза је указала на практичан приступ положајног дефинисања површи JEX, како би се проширила и поједноставила њена апликативност у пракси: градитељству, дизајну и другим научним дисциплинама.

Применом научно заснованих, метода нацртне геометрије, пројективне–синтетичке геометрије и савременим методама графичког представљања (уз употребу софтверског пакета *Auto CAD*, актуелног у области инжењерске графике) и његових 3D софтверских алата, приказане су и анализиране геометријске конструкције површи и поступци за одређивање њених главних параметара и њихових положајних релација.

У циљу приказа теоријског значаја тезе, утврђене карактеристике површи и инваријанте, су формулисане кроз закључке, чиме је дат допринос у едукативној и научној сфери.

У поступном вођењу кроз поступке конструктивног генерисања површи, геометријског моделовања површи 3D софтверским алатима, стигло се до креативне базе за обликовање просторних структура, применом исечака површи, или њеним комбиновањем са основним површима другог степена.

Из дела резултата истраживачке геометријско–конструктивне „базе података“, остварена је и дигитална "просторна" представа површи, у форми апликације за креирање 3D модела, са акцентом на елементе апликативне у градитељско–архитектонској пракси.

### 1.3 Остварени задаци истраживања

1. Сачињена је положајна анализа директриса површи, за све типове једнограних елиптичких хиперблоида.
2. Конструктивно–геометријски су одређени главни параметри површи ЈЕХ: средиште, главне ортогоналне осе, стрикциона елипса, асимптотски конус и темена у равнима главних оса.
3. Установљене су корелације параметара површи ЈЕХ и њених директриса.
4. Успостављене су везе између специјалних и општих случајева површи, кроз њихове просторне трансформације и инваријанте.
5. Дат је приказ зона пресечних коника са карактеристичним, граничним, као и специјалним случајевима пресека површи ЈЕХ.
6. Креиране су две апликације у програмском језику "Auto lisp" за генерисање жичаног и површинског модела површи ЈЕХ.
7. На сложеним просторним структурама, кроз површинске 3D моделе, приказане су могућности комбиновања сегмената ЈЕХ међусобно, у задатом геометријском систему, као и комбинације ЈЕХ са другим општим површима другог степена.

### 1.4 Полазне хипотезе

1. Једнограни елиптички хиперблоид је правоизводна површ, која настаје „клизањем“ („ruled surfaces“) једне трансверзале дуж три коначне праве–водиље. Потпуно је одређен са три мимоилазне праве у простору, које пресецају праве – њихове трансверзале (изводнице површи). Практично, постављање ових водиља у простору, могуће је извршити коришћењем помоћних тела (четворостране и шестостране призме или пирамиде), односно

- њихових ивица и дијагонала, у распореду просторног шестостраника, или шестотеменика.
2. Као најопштији случај правоизводне површи другог реда, ЈЕХ има све типове пресечних коника, укључујући и два система кружних пресека. Кружни пресеци су важни елементи површи, за ефикасну конструктивну обради површи.
  3. Пројективним придруживањем праменова равни, или низова тачака на мимоилазним правама у простору, одређују се изводнице површи једнограног елиптичког хиперблоида.
  4. Једнограни елиптички хиперблоид је површ, која има три међусобно ортогоналне осе, које пролазе кроз средиште површи. Применом поларитета (аутополарног тетраедра и поларних равни), дворазмере и хармонијског двојног односа, за све типове ЈЕХ–а, може се одредити положај главних оса у простору.
  5. Поступком колинеарних афиних трансформација површи у простору, могу се придружити две површи ЈХ–а различитог типа.
  6. Поступци геометријског конструисања и моделовања, софтверским 3D алатима, директно у "просторном" окружењу, омогућавају ефикаснији, прецизнији и визуелно јаснији приступ сложеним задацима тезе.
  7. Геометријско–конструктивна "база података" је основ за дигитализацију поступака којима се, у специфичном приступу, моделује и креира.

### 1.5 Методологија

#### 1.5.1 Опште методе

Примењене опште методе у дисертацији базирају на познавању теоретских знања из области:

1. *Геометрије правоизводних површи* ( методе генерисања и конструисања)
2. *Теорије површи другог степена* (хиперболичке квадрике) из области синтетичке геометрије

#### 1.5.2 Основне посебне научне методе

Изабране методе рада базирају на познавању :

1. *Нацртне геометрије* (теорије и поступака):
  - теорије *пројекција* (централне и паралелне–ортогоналне)

– поступака *трансформације, ротације, колинеације, афинитета*

### 2. Синтетичке геометрије (теорије и поступака)

– теорије *пресликавања геометријских елемената у равни и простору*,

– поступака *пројективних и инволуторних пресликавања*

– поступака *колинеарних пресликавања*

### 3. Компјутерске графике (конструктивних поступака)

– поступака *конструисања* у 3D окружењу (програмски пакет *Auto-CAD*)

– поступака *3D моделовања* (програмски пакет *Auto-CAD*)

– креирања апликација за *Auto-CAD*, у "*Auto – lisp*" програмском језику

## 1.6 Научна оправданост дисертације, резултати и практична примена

Како једнограни елиптички хиперболоид као најопштији случај правоизводне површи другог степена, није до сада конструктивно–геометријски обрађиван, у односу на представнике сродних типова површи ( ротационог хиперболоида, хиперболичког параболоида, коноида...), сасвим је оправдан темељни научни приступ, у његовој геометријско–конструктивној анализи. Присуство и примена сродних врста површи, у различитим животним сферама и научним дисциплинама, иницирали су потребу и дали значај истраживању ове проблематике и у геометријско – конструктивној сфери. Иако су савремена алгебарска геометрија и геометријско моделовање омогућили схватање геометријских објеката (дефинисаних алгебарски) и креирање виртуелних облика (применом алгебарских модела), за разрешавање компликованих просторних проблема, приступ приказан у дисертацији је од значаја у делу просторне визуелизације, имагинације и предикције, што је веома важно за архитектонску праксу. Анализом најопштијег случаја површи једнограног елиптичког хиперболоида, кроз конструктивне поступке и просторне трансформације, створена је допуна конструктивно теоријског оквира за све врсте правоизводних површи другог степена.

Дисертација садржи приказе конструктивних поступака за одређивање параметара и метричких релација основних елемената различитих типова површи, као и просторних трансформација површи, познатим методама нацртне и пројективне (синтетичке) геометрије. Примери карактеристичних пресека површи



са равнима и продора ЈЕХ, са другим површима другог степена, отварају широко поље за креирање сложених просторних структура апликативних у архитектури и дизајну.

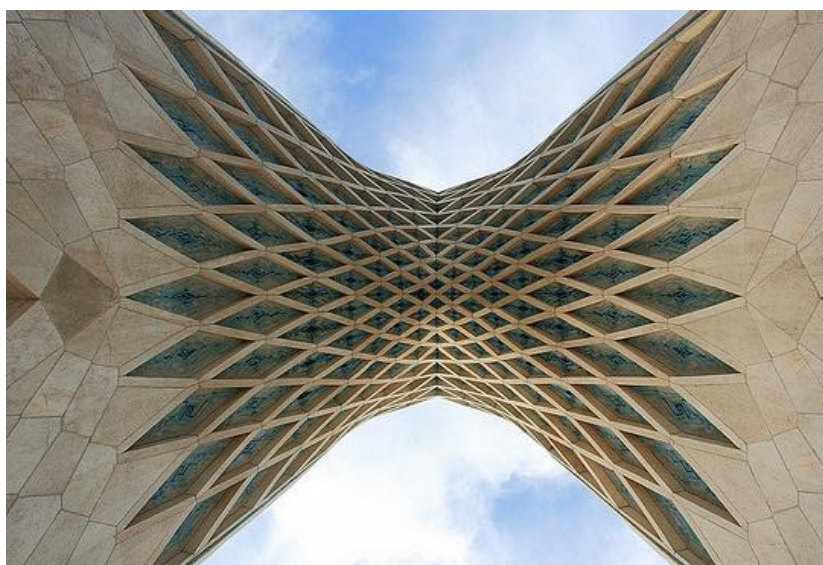
Коришћењем базе креираних геометријских поступака отворена је и иницирана могућност њихове дигитализације, кроз апликације у софтверу Auto CAD, за моделовање површи ЈЕХ.

Очекује се да ће приказани резултати дати допринос и у многим другим практичним и теоретским дисциплинама.

## 2. УВОД

---

Градитељски подухвати сежу у дубоку прошлост људског постојања. Природна потреба човека да свој животни простор заштити, наткрије или огради од спољњих утицаја, коз историју је давала најразличитије креативне резултате у архитектури и грађевинарству [21]. Они су били, за сваку епоху, у складу са искуственим, традиционалним, и научним сазнањима. Разноликост облика је карактерисала преваходно кровне површине. Сходно природним условима и потребама, диктирано расположивим материјалом, временским условима, културом (сл.1) или наслеђем, грађено је по одређеним „моделима“: искуственим *емпиријским* или *геометријским* (по строго геометријским законитостима).



Сл. 1 Традиција и савременост, Азади кула (1971), Техеран, арх. Хусеин Аманат <http://www.flickr.com/photos/csabx/4462818903/> уз захвалност Csaba Peter-y

Површи, као градитељски елемент, у својој развојној путањи, служиле су намени покривања објекта, а потом, обликовању целокупне форме објекта или ентеријера и коначно дизајна. Појавом нових технологија и материјала (пре свега бетона, челика комбинованог са стаклом, композита...), посебно после индустријске револуције, потпуно су се изједначиле ове улоге. Разноликост примењених облика кроз време је расла и добијала на сложености и елеганцији.

### 2.1 Преглед правоизводних површи кроз историју

Геометрија је после G. Desargues-a (1591–1661), G. Monge-a (1746–1818) и F. Klein-a<sup>1</sup> (1849–1925) отворила пут ка бољем разумевању и сагледавању

---

<sup>1</sup> Три великана су дала доприносе у сферама: пројективне, дескриптивне и геометрије површи.

## 2. УВОД

---

геометријских површи [38].

Честа примена правоизводних површи у грађевинарству уследила је из њихових карактеристика:

- " имају једноставнију генезу од општих површи;
- њихова правоизводна структура погодује грађењу, због лаког постављања оплате и арматуре;
- за њихово извођење могуће је користити различите материјале: армирани бетон, дрво, челик...;
- јављају се у богатству форми, понаособ и у комбинацијама;
- лако се комбинују међусобно (спојеви по изводницама или водилама), као и са општим површима (површи вишег реда, које имају реалне правце);
- одвођење воде са правоизводне површи врло лако се решава" [25].

Архитектура је ушла већ у модерно доба, када је почетком 20. века, архитекта А. Гауди (1852–1926) код својих објеката слободних, покренутих, форми уврстио и правоизводне површи (*Sagrada Familia Parish School*, Barcelona, 1908. [6]). За њим, по узору танких бетонских љуски архитекте Е. Торохе (1899–1961) [1], 30–их година прошлог века, Ф. Кандела (1910–1997), између 1950. и 1960. (*Church of Our Lady of Miraculous Medal*, Mexico City, 1955.) у бројним варијантама користи површи облика хиперболичких параболоида [36].



Сл. 2 *High Life Textile Factory*, Mexico City, Ф. Кандела 1955.  
[http://www.gregcookland.com/journal/2009/09/08/felix\\_candela/](http://www.gregcookland.com/journal/2009/09/08/felix_candela/)

Архитектура индустријских објеката због посебних услова осветљења, великих распона (карактеристичних статичких потреба) [9], налази примену: цилиндричних, коноидних љуски, хиперболичких параболоида (*Спортско рекреативни центар 25.мај* – Београд, арх. И. Антић 1973. ) и ротационог хипер-болоида, током читаве друге половине 20.века, широм Европе и света.

Елеганција модерних структура почиње креацијама архитекте С. Калатраве крајем 20. века, инспирисана истим геометријским површима и њиховим елементима, али потпомогнута новим технолошким достигнућима (видљиве затеге, челични носачи у решеткастој структури...итд.). Осим мање инспиративне индустријске архитектуре, примена површи је била присутна у изградњи јавних објеката посебне намене (*Mc Donnell Planetarium*, St. Louis, Missouri, Gyo Obata 1963.), мостова (*Alamillo bridge*, S. Calatrava 1992.), аеродрома (*Gare Saint Exupéry* – Lyon, S. Calatrava 1994.), сакралних објеката, спортских објеката итд.

Савремена архитектура 21. века, је архитектура великих висина и слободних форми ("free form"), готово вајарски устројена, са применом дијагрид конструктивног система [28], који је заогрунут "плаштом" – фасадом, геометрије површи виших редова. Изазов за пројектанте су тордиране површи (*Spiral Tower*, G. Gill & A. Smith арх.) са отклоном од вертикале по висини.

### 2.1.1 Развој хиперболоидних структура

Родоначелником хиперболоидних структура у архитектури, сматра се руски инжењер В.Шуков (1853–1939), који је статичке и геометријске особине површи једнограног хиперболоида искористио у градњи грациозних решеткастих челичних структура водоторњева (*Нижњи Новгород*, Русија, 1896.), радиоторњева (Москва, Русија, 1922.), светионика итд. Сличне инспирације у варијацијама конструкције објеката (комбинације хиперболоида, хиперболоиди кружних или елиптичких основа), исте намене, јављају се током читавог 20. века (*Fedala Reservoir*, Моггосо, Е. Тоггоја, 1957.). Квалитет који у смислу носивости, стабилности и отпорности на различите утицаје, пружа бетонска љуска облика једнограног хиперболоида, дао је одредницу, у индустријском окружењу, многим расхладним кулама и силосима (*Cooling tower, Jacksonville*, Florida, 1987.).

Кружна структура, која „тежи“ у вис, инспирисала је градитеље модерног

## 2. УВОД

---

доба да пројектују сакралне објекте (*L'église St. Jean à Grenoble*, Француска, арх. М. Вланс; *катедрали Бразилија* у Бразилу, арх. О. Нимајер 1970.), где хипер-болоидни кров оставља утисак тежње ка бесконачном. Подкуполна мембранска форма, за *објекат спортске хале у Ђенови*, из 1964.год, арх. П. Л. Нерви-ја, са несумњивом асоцијацијом на спортски реквизит-мрежицу коша, је такође облика хиперболоида. Истраживања на тему носеће, хоризонтално положене хипер-болоидне конструкције, у челику и стаклу, у 1998. год., резултовала су пројектом хиперболоидног пешачког моста у Манчестеру, арх. Hodder and Partners (погл. 7, сл.119). Изузетно високе грађевине 21. века, негују естетику и функционалност применом решеткасте структуре – "опне" једноставног облика (сл.3).



Сл.3 ТВ торањ *Kanton Tower* – Guangzhou, Кина , арх. М. Hemel, В. Kuit  
[http://www.e-architect.co.uk/images/jpgs/guangzhou/guangzhou\\_tv\\_tower\\_iba141108\\_2.jpg](http://www.e-architect.co.uk/images/jpgs/guangzhou/guangzhou_tv_tower_iba141108_2.jpg)

Са сигурношћу се може рећи да је ова тема, коју су великани архитектуре уткали у своје пројекте, неисцрпна и да ће развојем технологија и материјала, у будућности бити инспирација градитељским замислима и подухватима.



### 2.2 Општа класификација правоизводних површи

Геометријске површи су у потпуности математички дефинисане и настају кретањем једне линије – изводнице (*генератриса*) по линијама – водиљама (*директрисе*). Површи се класификују по облику изводнице или водиље, као и по реду и разреду.

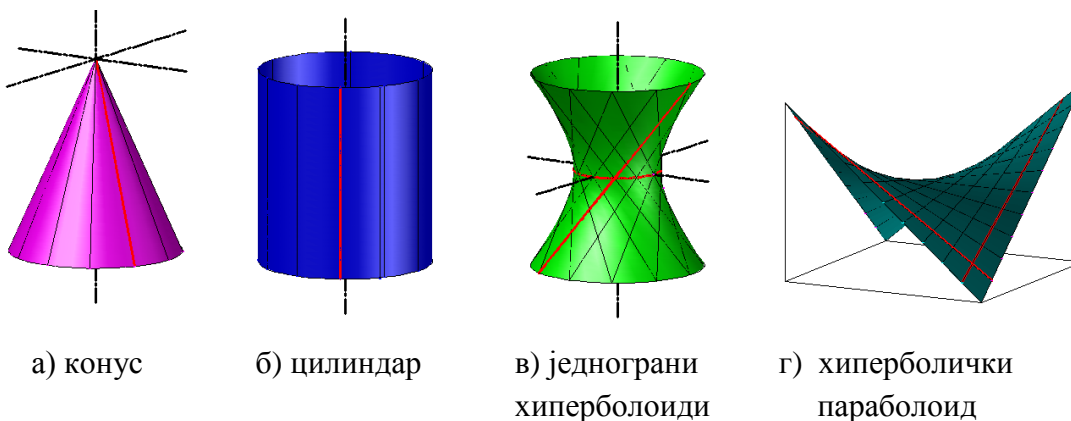
#### II Класификација – према броју продора праве кроз површ

1. алгебарске (права продира површ у *одређеном* броју продора\*),
2. трансцедентне (права продира површ у *неодређеном* броју продора).

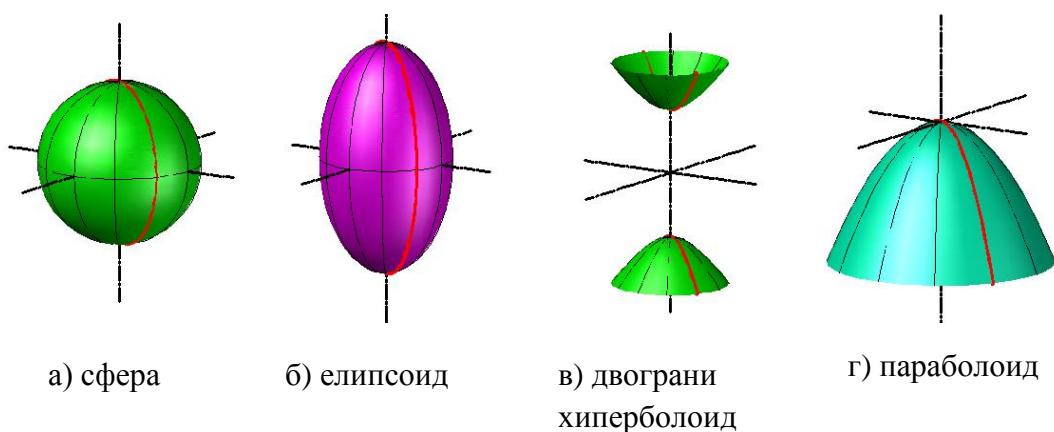
\*Број *продора праве* кроз алгебарску површ одређује њен РЕД, а број *дирних равни*, које можемо поставити кроз једну њену тачку, дефинише РАЗРЕД. Када су ред и разред исти, тада је површ тог истог СТЕПЕНА.

#### I Класификација – према облику изводнице

– правоизводне – „правчасте“ (сл. 4) и кривоизводне – опште (сл.5)



Сл. 4а–г Површи чије су изводнице праве линије



Сл. 5а–г Површи чије су изводнице криве линије

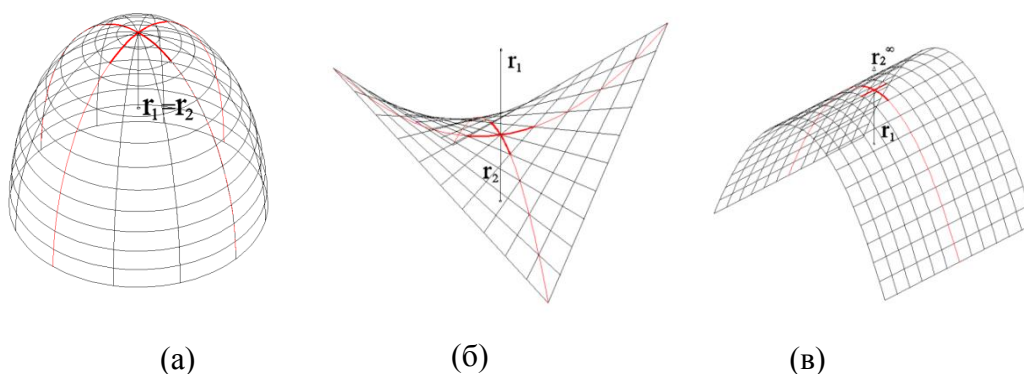
## 2. УВОД

---

Свака од ових површи у својим тачкама има одређену *закривљеност* која се дефинише помоћу Гаусове кривине.<sup>2</sup> „Облик површине у близини тачке у првом реду је повезан са природом кривине.“ [30, стр.77]

### III Класификација – према закривљености површи

1. Двоструко закривљене
  - а) *елиптичка површина* са позитивном кривином (сл. ба),
  - б) *хиперболичка површина* са негативном кривином (сл. бб).
2. Једноструко закривљене – један радијус је бесконачно велики (сл. бв)



Сл. ба–в Примери три различита типа закривљености површи

Површи се у овом случају класификују према предзнаку Гаусове кривине, представљене формулом:  $K = K_1 \times K_2 = \frac{1}{r_1 \times r_2}$ , при чему је  $K_1 = \frac{1}{r_1}$  – прва главна кривина, а  $K_2 = \frac{1}{r_2}$  – друга главна кривина у тачки површи [30, стр. 77].

У случају :

1а – двоструко закривљене површи са позитивном закривљеношћу.....  $K > 0$   
(тачке површи су *елиптичке*; тангентна раван у тачки површи додирује површ само у једној тачки),

1б – двоструко закривљене површи са негативном закривљеношћу.....  $K < 0$   
(тачке површи су *хиперболичке*; тангентна раван у тачки површи сече површ по правцима нулте кривине , а површ у околини тачке је "седласта"[2]<sup>3</sup>),

1в – једноструко закривљене површи.....  $K = 0$ , тј.  $r_2 = \infty$

---

<sup>2</sup> Гаусова кривина је производ њених главних кривина  $R_1$  и  $R_2$  у равнина главних тангенти површи.

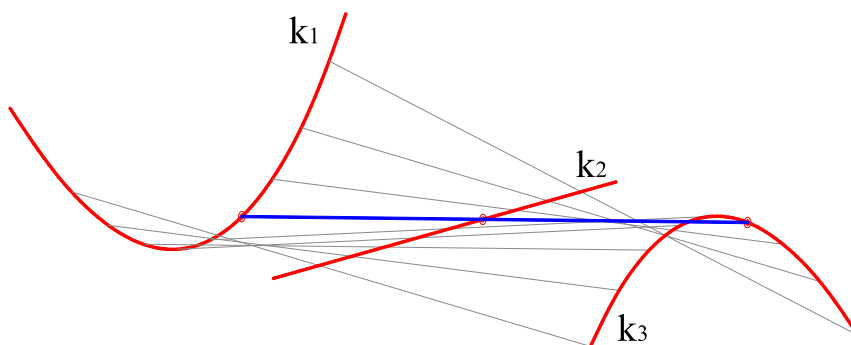
<sup>3</sup> А. Велуаев у реф. [2] даје објашњење да кривина у нормалној равни (на тангентну раван) два пута има вредност нула, током полу-ротације нормалне равни око нормале у тачки површи.

## 2. УВОД

---

(тачке површи су *параболичке*; најмање једна главна кривина има вредност  $\infty$ ).

*Правоизводне површи* настају када се права, по одређеној законитости креће кроз простор. Узастопни положаји које она заузима у простору приликом кретања се називају изводнице површи (*генератресе*). Законитост кретања се дефинише помоћу три праве или криве:  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  (сл. 7), у коначности или бесконачности, које изводница непрекидно сече. Ове линије се називају водилје (*директрисе*).



Сл. 7 Кретање изводнице (изводи површ) која сече водилје:  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$

У зависности од комбинација типова водилја (криве или праве) и тога да ли се оне налазе у коначности, или су бесконачно далеке, настају различите површи.

### I Класификација ПП<sup>4</sup> – према типу водилја

а) три праве у коначности

/ елиптички хиперболоиди (сл. 8), ротациони хиперболоид<sup>5</sup>/;

б) две праве у коначности и једна у бесконачности

/ хиперболички параболоид (сл. 9)/;

в) две праве (једна у коначности и једна у бесконачности) и крива (раванска) у коначности /коноиди (сл. 10)/;

г) две криве (раванске) и једна права у бесконачности

/цилиндроиди/;

д) две праве (једна у коначности и једна у бесконачности) и просторна крива у коначности /хеликоиди (сл. 11)/.

---

<sup>4</sup> ПП– скр. за правоизводну површ.

<sup>5</sup> Ротациони хиперболоид је специјални случај елиптичког хиперболоида.



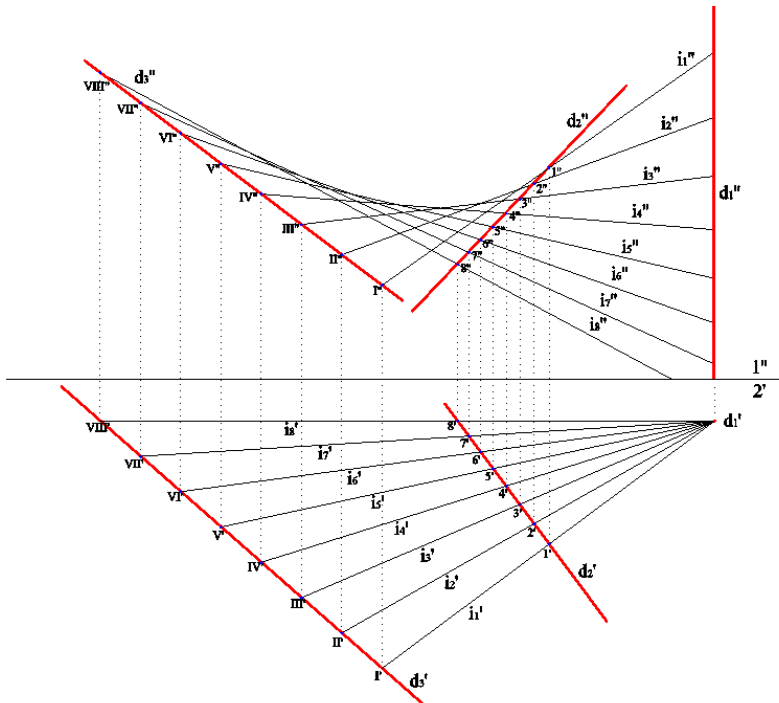
II Класификација ПП – према броју система изводница

а) површи са једним системом изводница (вишег реда од 2)

/пликеров коноид, цилиндроиди, хеликоиди/;

б) са два система изводница (другог реда)

/хиперболички параболоид, елиптички и ротациони хиперболоид /.



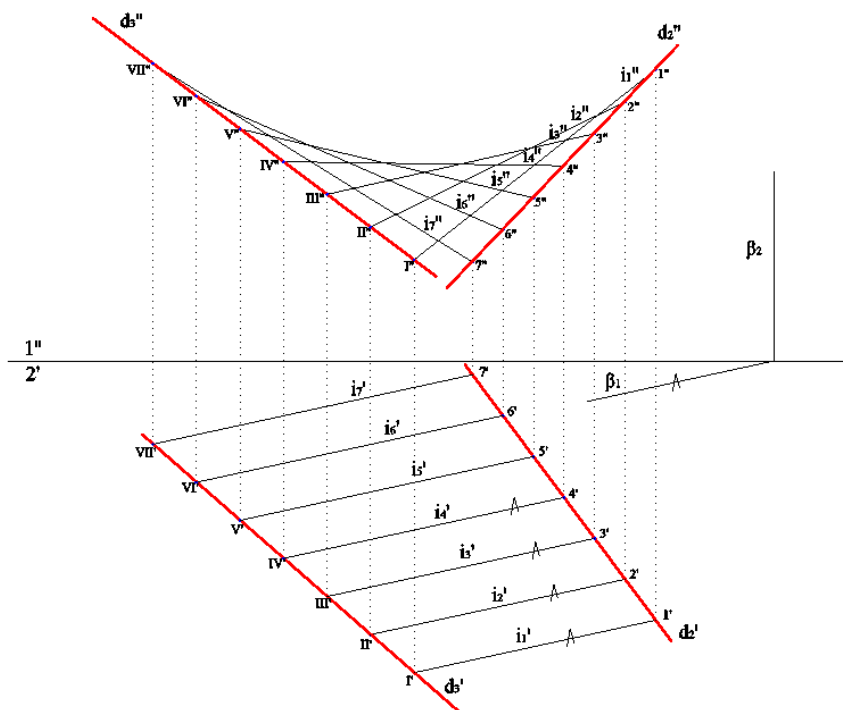
Сл. 8 Елиптички хиперболоид

Пример наведеног принципа настанка правоизводне површи је површ општег типа – *елиптички хиперболоид* (сл.8). Генерише се кретањем изводнице – трансверзале  $i_1-i_8$  дуж три задате водиле у коначности, праве:  $d_1, d_2, d_3$ . Ради једноставнијег конструктивног поступка, једна од правих–водиља ( $d_1$ ) задата је у вертикалном положају. У првој ортогоналној пројекцији она се сагледава као тачка, те се у датом погледу може нацртати “прамен“ изводница  $i_1-i_8$  које секу и усвојене водиле  $d_2'$  и  $d_3'$ . Потом се пресечне тачке пројекцијским зрацима преносе у другу ортогоналну пројекцију на одговарајућа места.

На примеру *хиперболичког параболоида* (сл. 9) приказана је површ са две коначне ( $d_2$  и  $d_3$ ) и једном бесконачно далеком правом, водилџом ( $d_1$ ). Бесконачно далека права неке равни ( $\beta$ ) се задаје њеним траговима ( $\beta_1, \beta_2$ ). Све праве просто–

## 2. УВОД

ра које су паралелне некој равни ( $\beta$ ) продиру кроз њу у тачкама које леже на њеној бесконачно далекој правој. И обрнуто, свака права простора која сече бесконачно далеку праву неке равни, мора бити паралелна самој равни. Тако су изводнице хиперболичког параболоида  $i_1'-i_7'$ , у првој ортогоналној пројекцији паралелне (леже у паралелним равнима) и секу бесконачно далеку праву равни  $\beta$  – водиљу  $d_1$ .



Сл. 9 Хиперболички параболоид – ортогоналне пројекције

### III Класификација III – према међусобном односу суседних изводница

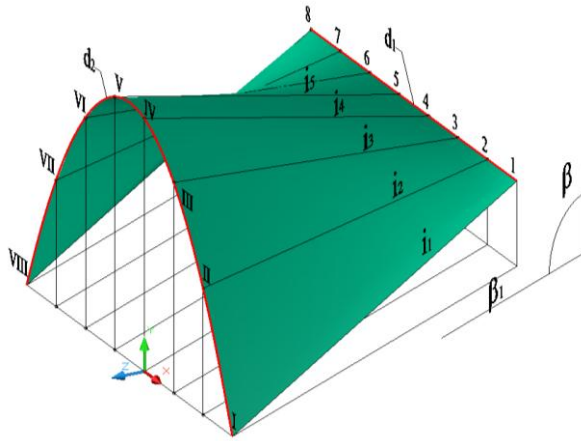
1. две бесконачно блиске изводнице су мимоилазне  
витоперне – неразвојне  
*/коноид, цилиндроиди, хиперболички параболоид, хеликоиди, једнограни елиптички хиперболоид, ротациони хиперболоид/;*
2. две бесконачно блиске изводнице се секу  
развојне <sup>6</sup> / конус, облица, завојна торза /.

У уџбенику прве Високе школе у Београду, далеке 1874. год., Емилијан Јосимовић, у књизи *Основи пауртне геометрије и перспективе*, неразвојне површи назива "витопернице" [19].

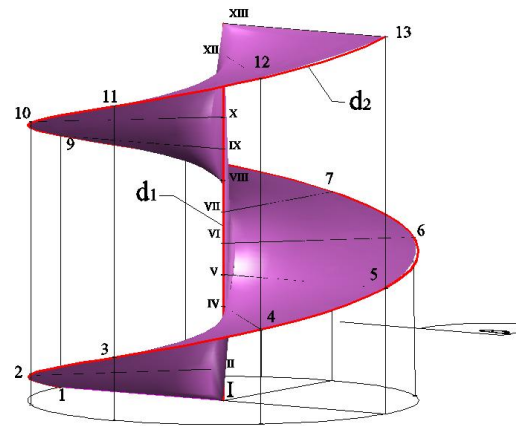
<sup>6</sup> Developable (engl.)– дуж сваке изводнице постоји само једна дирна раван.

## 2. УВОД

На примеру *коноида* (сл.10) и *хеликоида* (сл.11) приказане су површи чије су изводнице мимоилазне праве (класиф. III/1), тј. леже у паралелним равнима и секу бесконачно даелеку водиљу  $\mathbf{d}_3$ . Коноид је задат хоризонталном правом –  $\mathbf{d}_1$ , параболом –  $\mathbf{d}_2$  у вертикалној равни и вертикалном директрисном равни  $\beta$  (чија је водиља  $\mathbf{d}_3$  – бесконачно далека права).



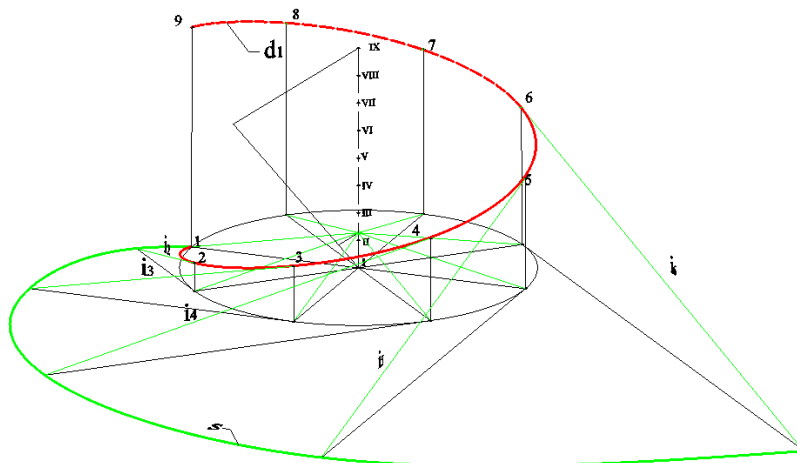
Сл. 10 *Коноид* – 3D модел



Сл. 11 *Хеликоид* – 3D модел

*Хеликоид* (сл. 11) је задат вертикалном правом –  $\mathbf{d}_1$ , завојницом –  $\mathbf{d}_2$  са висином од једног ипо хода и хоризонталном директрисном равни  $\beta$  (чија је водиља  $\mathbf{d}_3$  – бесконачно далека права).

Посебну групу представљају оне површи које се могу развити. То следи из особине, да се дуж једне изводнице може поставити само једна дирна раван.



Сл.12 *Завојна торза* – 3D жичани модел

Пример једне од оваких површи је *завојна торза*, сачињена као омотач од тангенти просторне криве – завојнице. На сл.12 је приказана завојна торза задата половином завојнице – водиље  $\mathbf{d}_1$  са њеним карактеристичним изводницама – тангентама завојнице  $\mathbf{i}_1$ – $\mathbf{i}_6$ , ограничена хоризонталном равни – пресечном кривом  $s$ .

„Правчасте“<sup>7</sup> квадрике су површи другог степена. Бесконечно далека раван сече сваку површ другог степена по некој коници. Она може бити реална или имагинарна.

Класификација ПП према пресечној кривој по којој површи сече апсолуту<sup>8</sup>

1. бесконачно далека коника се дегенерише у две праве

*/хиперболички параболоид/;*

2. бесконачно далека коника није дегенерисана:

- а) два пута додирује апсолуту

*/једнограни ротациони хиперболоид/;*

- б) сече апсолуту у два пара к.и. тачака

*/једнограни елиптички хиперболоид/.*

### 2.2.1 Врсте једнограних хиперболоида

- а) Једнограни *елиптички хиперболоид* ЈЕХ – особине :

1. једначина у Картезијанском облику

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

произилази из поставке да се генератриса – елипса (са променљивим полуосама  $\alpha$  и  $\beta$ ) креће по директрисама – хиперболама  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  у равнима  $\mathbf{Oxz}$  и  $\mathbf{Oyz}$ . (сл.34);

2. може се задати и у параметарском облику [57] :

$$x(u, v) = a \sqrt{1 + u^2} \cos v \quad (2)$$

$$y(u, v) = b \sqrt{1 + u^2} \sin v \quad (3)$$

$$z(u, v) = c u \quad \text{за } v \in [0, 2\pi], \text{ или} \quad (4)$$

---

<sup>7</sup> Израз – синоним за правоизводне површи

<sup>8</sup> Апсолута је геометријско место двоструких коњуговано имагинарних тачака елиптичке инволуције, на бесконачно далеких правама простора.

$$x(u, v) = a (\cos u \pm v \sin u) \quad (5)$$

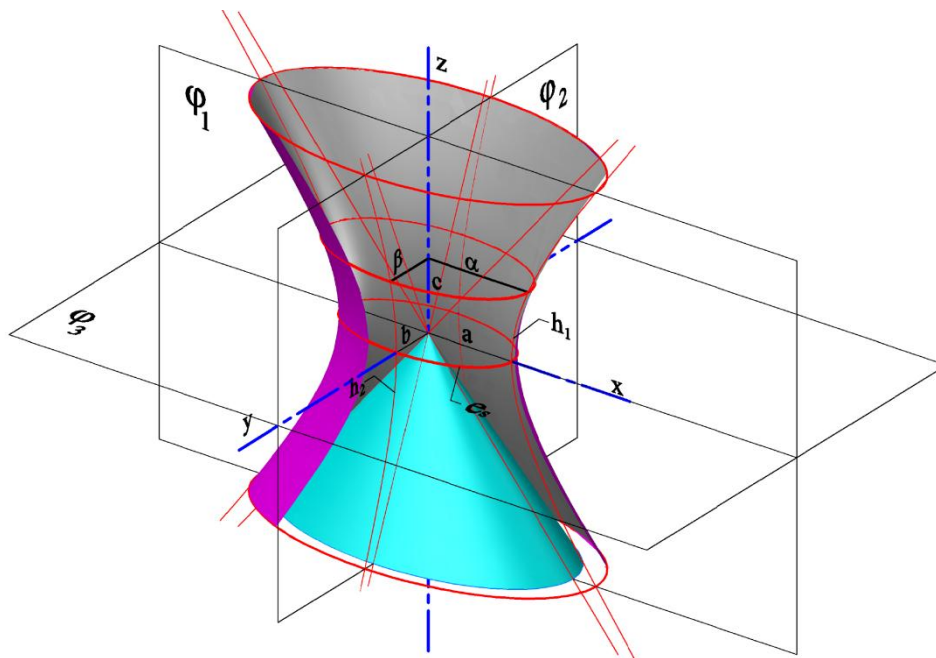
$$y(u, v) = b (\sin u \pm v \cos u) \quad (6)$$

$$z(u, v) = \pm c v, \text{ или} \quad (7)$$

$$x(u, v) = \cosh v \cos u \quad (8)$$

$$y(u, v) = b \cosh v \sin u \quad (9)$$

$$z(u, v) = c \sinh v \quad (10)$$



Сл. 13 Једнограни елиптички хиперболоид – 3D модел

3. површ је могуће конструисати на неколико начина (в. погл. 3 );
4. праве – изводнице ЈЕХ заклапају различите углове са равни симетрије  $\phi$  управном на његову главну осу –  $\mathbf{z}$  ;
5. пресеци са равнима управним на главну осу –  $\mathbf{z}$  су елипсе;
6. пресеци са равнима кроз главну осу –  $\mathbf{z}$  су хиперболе;
7. грлена (стрикциона) крива  $es$  је елипса са полу–осама  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ;
8. елиптички хиперболоид има два система кружних пресека;
9. пратећа површ елиптичког хиперболоида је коси – елиптички конус (в. погл. 3.5.1 ).

б) Једнограни *ротациони хиперболоид* ЈРХ – особине:

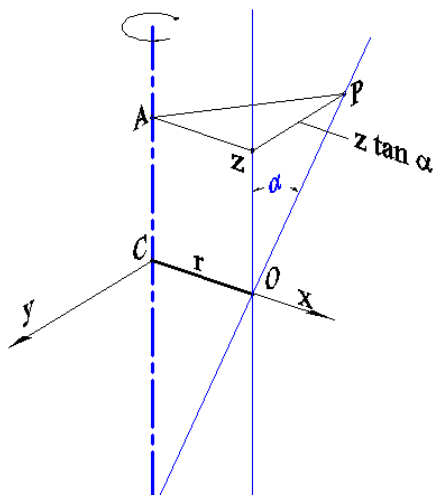
1. Једнограни ротациони хиперболоид (сл. 15) је специјални случај ЈЕХ, тј. настаје када је крива у  $xu$ -равни кружница ( $a=b$ ).

2. Настаје ротацијом једне праве **m**, или хиперболе **h**, око дате осовине **z**;
3. Према Ј. В. Calvert–у, за хиперболоид који настаје ротацијом праве са нагибним углом  $\alpha$  око једне осе, на растојању **r** (сл. 14) [43], једначина површи облика :

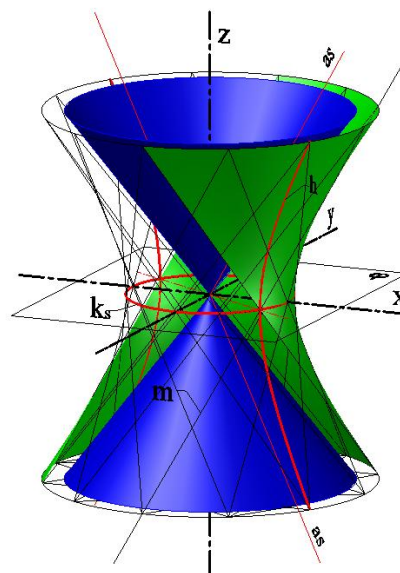
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{JEX}), \text{ ако је } a = b = r, \quad c = \frac{R}{\tan \alpha}, \text{ тада за JPH гласи :}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 + z^2 \tan^2 \alpha \quad (11)$$

4. Конструира се уцртавањем узастопних положаја изводница по кружној путањи;
5. Све изводнице једнограног *ротационог хиперболоида* заклапају исти угао са равни симетрије  $\phi$  управном на његову главну осу – **z**;
6. Пресеци са равнима управним на главну осу – **z** су кружнице;
7. Грлена (стрикциона) крива је кружница **k<sub>s</sub>**, чији је полупречник једнак најкраћем растојању осе – **z** и изводнице која око ње ротира;
8. Пресеци хиперболоида са равнима дају конике другог реда;<sup>9</sup>
9. Пратећа површ ротационог хиперболоида је прав – ротациони конус, тј. дегенерацијом JPH настаје ротациони конус [43].



Сл. 14 Скица уз једначину (11)



Сл. 15 Једнограни ротациони хиперболоид

<sup>9</sup>Пресечне криве могу бити: хипербола, парабола, елипса и кружница.

### 3. Једнограни елиптички хиперboloид (JEX)

---

#### 3.1 Дефиниција и конструисање JEX (општи случај)

Коси једнограни елиптички хиперboloид (JEX)<sub>2</sub> као најопштији случај површи типа једнограног хиперboloида, настаје кретањем праве дуж три коначне, међусобно мимоилазне праве [33, стр.164], произвољног положаја у простору (погл. 2.2 – сл.8). Односно, ове три праве су водиле – директрисе, а њихове трансверзале су изводнице JEX.

С' обзиром да је JEX површ другог степена, са два система изводница, ако се било које три изводнице једног система узму за водиле, изводнице другог система биће трансверзале за те три изводнице (водиле првог система), и обрнуто.

#### 3.2 Конструисање JEX методама пројективне – синтетичке геометрије

У теорији пројективне – синтетичке геометрије познато је да JEX може настати на неколико начина:

1. као *производ трансверзала три мимоилазне праве* (водиле) у простору,
2. као *производ два пројективно придружена прамена равни* и
3. као *производ два пројективно придружена низа тачака на мимоилазним правама*.

##### 3.2.1 JEX – производ трансверзала три мимоилазне праве у простору

За усвојене три мимоилазне праве простора:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{a}''$  (сл.16) важи: Спајањем сваке тачке (1,2,3...) низа тачака на правој  $\mathbf{a}$ , са правама  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{a}''$ , добијају се два прамена равни  $[\alpha']$  и  $[\alpha'']$ , који су са низом тачака ( $\mathbf{a}$ ) у перспективном односу. Добијени праменови равни су међусобно пројективни. Пресечнице  $t_1, t_2, t_3...$  пројективно придружених праменова равни  $[\alpha'] \wedge [\alpha'']$  су трансверзале, које у тачкама (1,1',1''), (2,2',2'') и (3,3',3'') секу три праве:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{a}''$ , респективно. Њихова творевина је правоизводна површ [37, стр.5].

##### 3.2.2 JEX – производ два пројективно придружена прамена равни

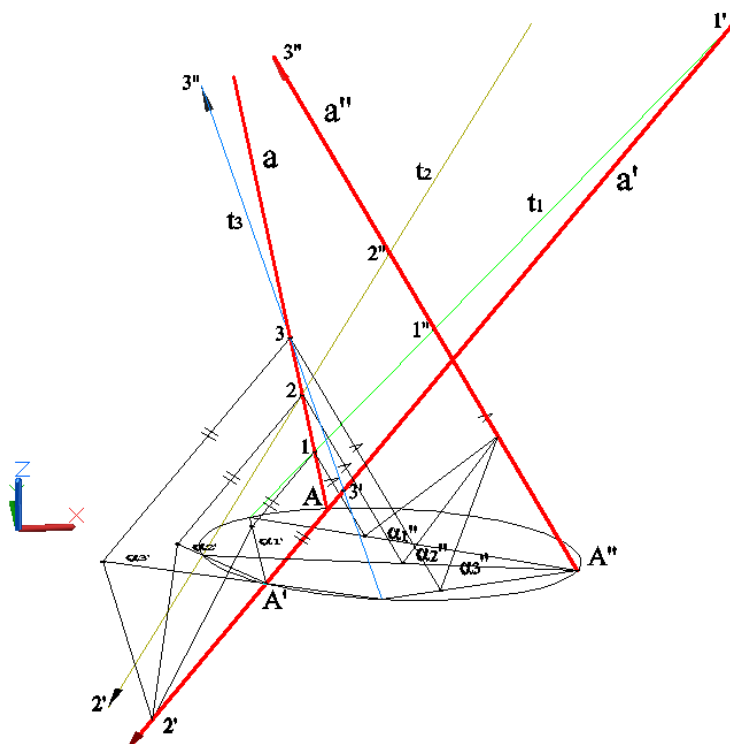
Две мимоилазне праве простора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  (сл. 17), усвојене су за праменавање два пројективно придружена прамена равни  $[\alpha] \wedge [\alpha']$ . Пресечница придруженог пара равни се креће кроз простор, када раван  $\alpha_1$  прамена  $[\alpha]$  „ротира“ око

прамењаче  $a$ , а њој придружена раван  $\alpha_1'$  прамена  $[\alpha']$  „ротира“ око прамењаче  $a'$ . Узастопни положаји пресечница –  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$  су изводнице тако настале правоизводне површи.

Произволна раван  $\pi$  простора би секла два усвојена прамена равни  $[\alpha] \wedge [\alpha']$  по пресечницама  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n; p_1', p_2', p_3', \dots, p_n'$ , које образују два пројективно придружена прамена правих  $(A) \wedge (A')$ , у теменима  $A$  и  $A'$ , чији је производ коника  $k$  – крива 2. реда [37, стр.3]. Због тога је и настала правоизводна површ другог реда.

#### 3.2.3 JEX – производ два пројективно придружена низа тачака

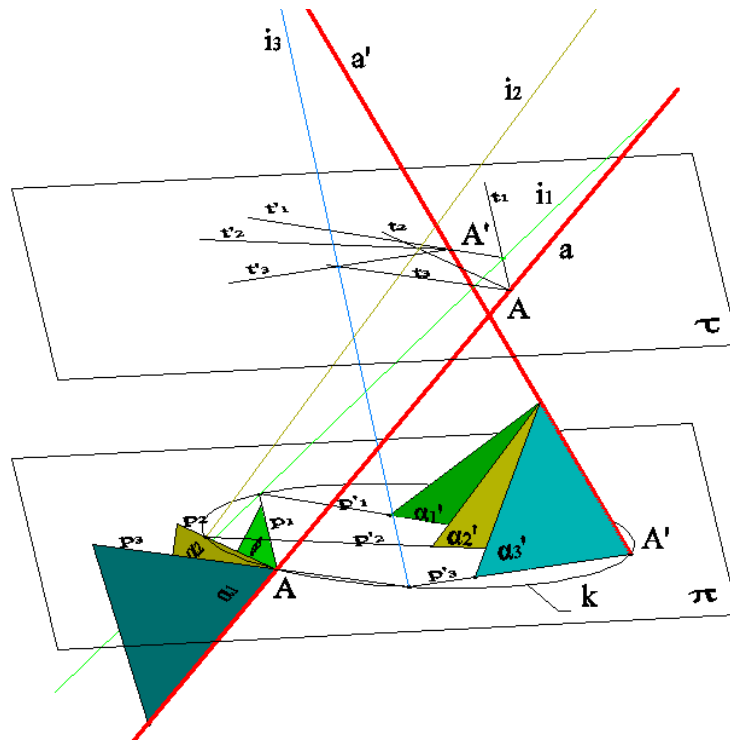
Прамењаче  $a$  и  $a'$ , мимоилазне праве, (сл. 18) два пројективно придружена прамена равни  $[\alpha], [\alpha']$ , продиру ове праменове равни у тачкама  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n / P_1', P_2', P_3', \dots, P_n'$ , образујући тако два пројективно придружена низа продорних тачака  $(a) \wedge (a')$ . Спојнице одговарајућих парова продорних тачака  $(P_1, P_1'), (P_2, P_2'), (P_3, P_3'), \dots, (P_n, P_n')$  придружених низова тачака су изводнице  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$  површи JEX [37, стр.4]. Таква површ је производ два пројективно придружена низа тачака на мимоилазним правама.



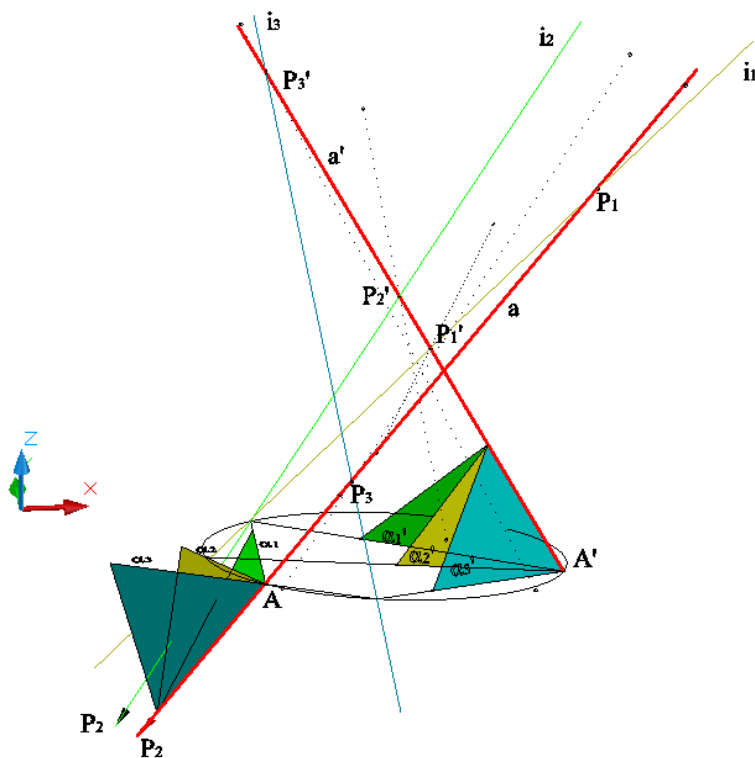
Сл. 16 Трансверзале три мимоилазне праве простора – изводнице JEX



### 3. Једнограни елиптички хиперболоид (JEX)



Сл. 17 Пресечнице два пројективно придружена рамена равни – изводнице JEX<sup>10</sup>



Сл.18 Спојнице придружених тачака низова на правама **a** и **a'** – изводнице JEX

<sup>10</sup> Из разлога конструисања пресечница  $i_1$ ,  $i_2$ , и  $i_3$ , на сл. 17 је уведена још једна раван  $\tau$ .

#### 3.3 Класификација JEX у односу на задате равни симетрије

У аналитичким дефиницијама JEX се задаје у облику датом једначином:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

где се осе –  $x$ ,  $y$  и  $z$  поклапају са три главне ортогоналне осе ( сл. 13, погл.3.2.1) површи, које образују три главне равни симетрије. Међутим, ако се повуче "паралела" са класификацијом конусних површи [24, стр.65–69] Кривошапка и Иванова, имајући на уму да је конус пратећа површ JEX, тада се, из практичних, разлога адекватног препознавања, може усвојити слична класификација.

*JEX се може задати – поставити у простор: пресечним кривама<sup>11</sup>, изводницом и равнима симетрије.* (1)

Из наведеног у ставу (1) следи класификација:

- а) прав JEX /са 2 задате равни симетрије и пресечним кривама – елипсама/
- б) коси JEX /са 1 или без задатих равни симетрије /:
  - пресечне криве су елипсе,
  - пресечне криве су кружнице.

#### 3.3.1 Прав JEX са две задате равни симетрије

*Прав једнограни елиптички хиперboloид* је могуће задати са две водиле елипсе (једнаке или неједнаке–концентричне)  $e$  и  $e_1$ , произвољном изводницом  $AB$  и две равни симетрије  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Модел правог JEX, на сл. 19, задат је са две идентичне елипсе  $e$  и  $e_1$  које леже у паралелним хоризонталним равнима, једна изнад друге, на растојању  $H$ . Две задате *равни симетрије* површи  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  су међусобно ортогоналне и пролазе великом и малом осом пресечних коника  $e$  и  $e_1$ .

*Средиште* површи  $O$  је не половини растојања  $H$  две пресечне криве.

Три *главне осе* површи  $o_1$ ,  $o_2$  и  $o_3$  пролазе средиштем  $O$ . Главна оса површи  $o_1$  је спојница центара  $E$  и  $E_1$  две пресечне елипсе и нормална је на пресечне равни. Друге две осе  $o_2$  и  $o_3$  су ортогоналне на осу  $o_1$  и паралелне правцима мале и велике осе пресечних елипси.

*Два система изводница* су представљена са по дванаест изводница које

---

<sup>11</sup> У моделу косог JEX–а, из конструктивних разлога, могу се за базисне криве усвојити и кружнице.

спајају тачке пресечних елипси  $e: 0-11$  и  $e_1: 0_g -11_g$ . Изводница  $AB$ , која припада првом систему, се креће дуж водила  $e$  и  $e_1$  у позитивном смеру, а њој одговарајућа  $CD$ , из другог система, заузима положаје у негативном смеру.

*Стрикциона елипса ( $e_{min}$ )* JEX, са центром у средишту површи  $O$ , је паралелна и концентрична двома пресечним елипсама.

*Асимптотски конус*, пратећа површ правог JEX–а, је прав елиптички конус [24, стр. 67], са пресечним елипсама  $e_{as}$ , концентричним елипсама  $e$  и  $e_1$  JEX–а, симетричан у односу на раван стрикционе елипсе и равни симетрије  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

#### 3.3.2 Коси JEX са једном задатом равни симетрије

Један од могућих начина задавања *косог једнограног елиптичког хиперболоида* је са две једнаке или неједнаке–концентричне пресечне конике<sup>12</sup> [50], једном произвољном изводницом  $AB$  и једном равни симетрије  $\varphi_1$ . Две елипсе  $e$  и  $e_1$ , са центрима  $E$  и  $E_1$ , леже у две паралелне хоризонталне равни, са заједничком равни симетрије  $\varphi_1$ , на растојању  $H$  (сл.20).

*Раван симетрије  $\varphi_1$*  садржи велике осе пресечних елипси.

*Средиште* површи  $O$  је на половини дужине спојнице центара  $E - E_1$ .

Три *главне осе* површи  $o_1, o_2$  и  $o_3$  пролазе средиштем  $O$ . Њихов положај је могуће одредити методом примењеном за осе асимптотског конуса JEX (погл. 3.5.3).

*Два система изводница* су представљена са по дванаест изводница које спајају тачке пресечних елипси  $e: 0-11$  и  $e_1: 0_g -11_g$ . Изводница  $AB$ , која припада првом систему, се "креће" дуж водила  $e$  и  $e_1$  у позитивном смеру, а њој одговарајућа  $CD$ , из другог система, заузима положаје кретањем у негативном смеру<sup>13</sup>.

*Стрикциона елипса ( $e_{min}$ )*, са центром у средишту површи  $O$ , лежи у равни две главне осе  $o_2$  и  $o_3$  површи JEX.

*Асимптотски конус*, пратећа површ правог JEX–а, је коси елиптички конус [24, стр.69], са пресечним елипсама  $e_{as}$ , концентричним елипсама  $e$  и  $e_1$  JEX–а, симетричан у односу на раван стрикционе елипсе  $e_{min}$  и равни симетрије  $\varphi_1$ .

---

<sup>12</sup> У случају KJEX–а као практичне варијанте пресечних коника користе се елипсе или кружнице.

<sup>13</sup> Начин одређивања другог система изводница приказан је у поглављу 3.5.3.

#### 3.3.3 Коси JEX без задате равни симетрије

*Коси једнограни елиптички хиперболоид* је могуће задати са две једнаке или неједнаке–концентричне пресечне конике и једном произвољном изводницом. У моделу на сл. 21, то су две кружнице  $k$  и  $k_1$ , различитих радијуса  $r$  и  $r_1$  и изводница  $AB$ . Кружнице  $k$  и  $k_1$  леже у две паралелне хоризонталне равни, „смакнуто“, где је  $K_1' \neq K$ , без задате заједничке равни симетрије, на растојању  $h$ .

*Равни симетрије* се одређују једноставним конструктивним поступком<sup>14</sup>.

Три главне осе  $o_1$ ,  $o_2$  и  $o_3$  површи пролазе средиштем  $O$ . Положај *средишта*  $O$  и главних оса се конструује поступком бр. 3 објашњеним у погл. 3.5.3.

Два система изводница су представљена са по дванаест изводница које спајају тачке базисних кружница  $k$ :  $0-11$  и  $k_1$ :  $0_g-11_g$ . Изводница  $AB$ , која припада првом систему, се креће дуж водиља  $k$  и  $k_1$  у позитивном смеру. Други систем формирају изводнице паралелне изводницама првог система (нпр.  $A'B' \parallel AB$ ), које леже у асимптотским равнима JEX–а (в. погл. 2.5.3).

*Стрикциона елипса* ( $e_{\min}$ ), са центром у средишту површи  $O$ , лежи у равни две главне осе<sup>15</sup>  $o_2$  и  $o_3$  површи JEX.

*Асимптотски конус*, пратећа површ KJEX–а је коси кружни конус [24, стр 68], са пресечним кружницама  $k_{as}$  и  $k_{1as}$  које су концентричне кружницама  $k$  и  $k_1$  JEX–а.

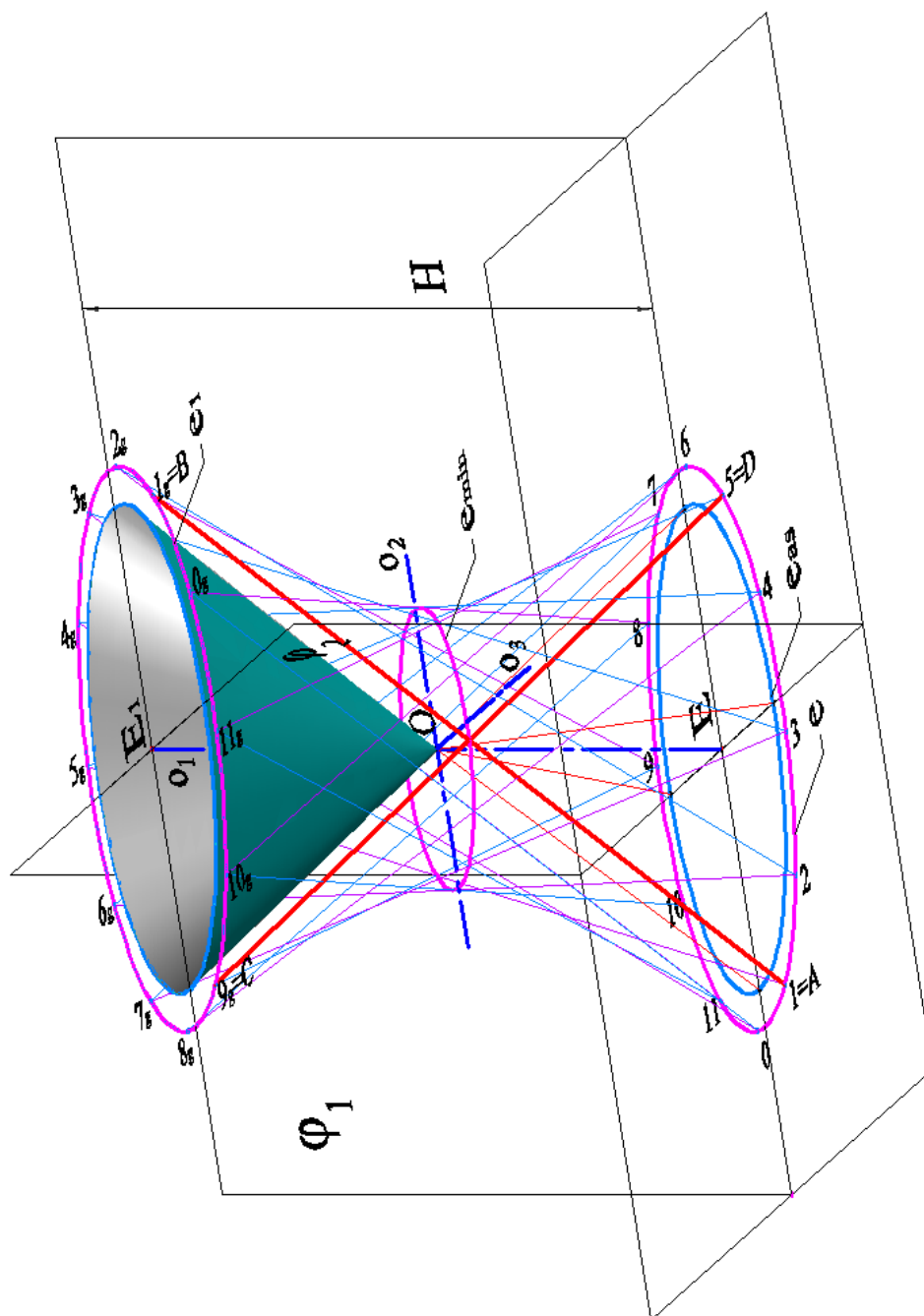
*Минимални кружни пресек*<sup>16</sup> је у равни која пролази средиштем површи  $O$  (тзв. "циклична" раван) и паралелна је равнима пресечних кружница  $k$  и  $k_1$ .

---

<sup>14</sup> Исти поступак, бр. 3 из поглавља 2.5.3 се односи на конструисање равни симетрија и главних оса.

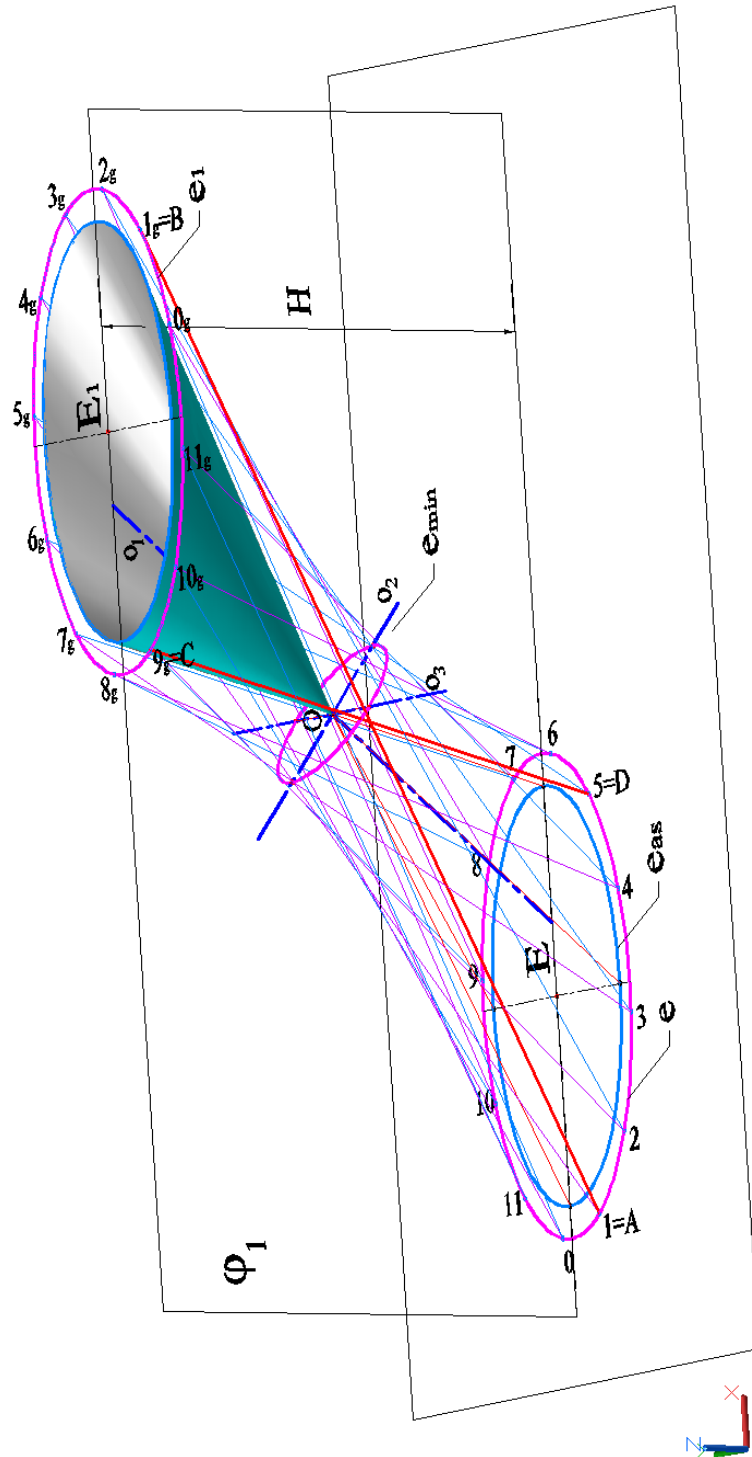
<sup>15</sup> Одређивање дужине оса стрикционе елипсе је обрађено у ауторском раду реф. [50]

<sup>16</sup> Детаљније у ауторском раду реф. бр [50].

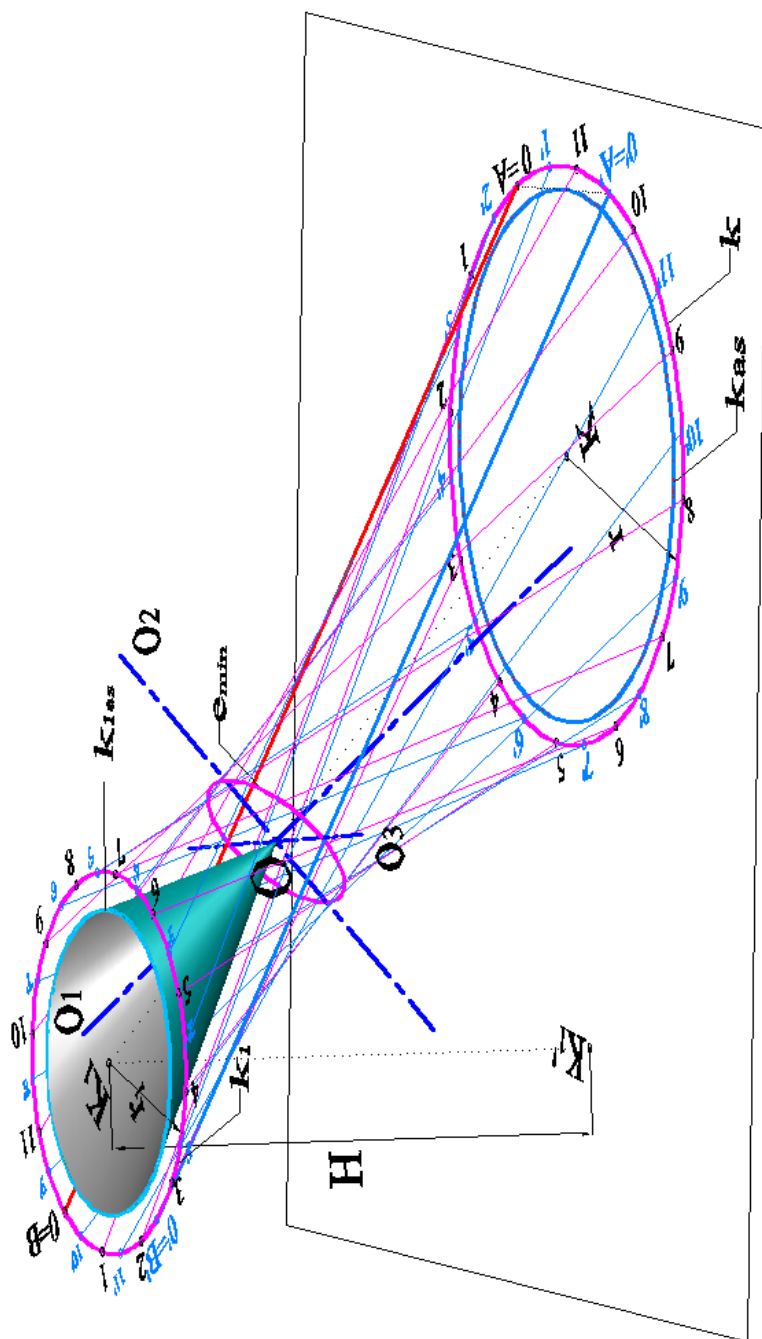


Сл. 19 Прав JEX са две задате равни симетрије – 3D модел

### 3. Једнограни елиптички хиперблоид (JEX)



Сл. 20 Коси JEX са једном задатом равни симетрије – 3D модел



Сл. 21 Коси ЈЕХ без задаге равни симетрије – 3D модел

#### 3.4 Положајна анализа директриса код ЈЕХ

Истраживања на тему међусобних релација површи и правилних полиедара дају квалитет апликативности површи у пракси, што је од посебног значаја у области конструктивних система [31]. Радови Н. Navlicek–а и G. Weiss–а (2002.) , X. Dan–а (2003.), или D. Huylebrouck–а (2012.), на тему међусобних релација једнограног хиперboloида и правилних полиедара, показали су да се у једнограни ротациони<sup>17</sup> хиперboloид могу "уписати" ортоцентрични тетраедар [40], октаедар [10], коцка [51], као и да темена неких сложених полиедара (четворо–, пето–, шесто– и седмоstrане анти призме) [42] леже на овој површи. Другим речима, мимоилазне изводнице ових полиедара "генеришу" једнограни хиперboloид.

Овај део рада се односи на слично истраживање, у коме су анализиране могућности уписивања водиља–изводница ЈЕХ–а у правилне или неправилне "носаче" – призме или пирамиде.

Већ је речено, да се у пројективној геометрији, ЈЕХ задаје са три мимоилазне праве простора, као водиље површи, по којима „клиза“ трансверзала – изводница површи. Уколико се за водиље ЈЕХ изабере три мимоилазне праве простора, у сасвим произвољном положају, дефинисање њених главних параметара (средиште, главне осе и равни симетрије, стрикциона крива...) геометријским „алатима“ је комплексан проблем. Стога, се могу усвојити два пута по три коначне водиље, (међусобно мимоилазне праве простора) из различитих система изводница, дефинисаног међусобног положаја [45].

На основу два поменута важна услова код усвајања водиља правоизводних површи другог степена:

1. свака изводница једног система треба да сече све изводнице другог система и
2. водиље једног система изводница су трансверзале (изводнице) водиља другог система изводница, произилази став :

*Два пута по три водиље ЈЕХ образују једну просторну полигоналну линију–шестостраник, тј. шестотеменик. Три праве – водиље првог задатог система могу заузети сасвим произвољан положај у простору, док водиље другог система*

---

<sup>17</sup> У литератури се помињу две врсте ЈРХ: тзв. "equilateral" и "non–equilateral", који се разликују по типу хиперболе која генерише површ ротацијом око осе. " Equilateral" ЈРХ настаје ротацијом равностране (Аполонијеве) хиперболе.



*морају сећи све три усвојене водиле првог система, у коначној или бесконачно далекој тачки.* (1)

То значи да свака водилја једног система изводница мора бити постављена у простору тако, да са сваком водилјом другог система образује посебну раван. То је заправо тангенцијална раван површи ЈЕХ у диралитшту – тачки пресека две водиле. На основу претходног следи:

*Површи ЈЕХ се из конструктивних разлога задаје просторним шестостраником / шестотемеником, који образују два пута по три водиле, из различитих система изводница. Водиле су, ивице или дијагонале носача – четворостране или шестостране призме, тј. пирамиде.*

#### **Закљ. III/ 1**

У раду су представљене и обрађене варијанте просторних шестостраника [45], са циљем једноставног и практичног начина задавања површи, којим се на лак конструктивни начин могу одредити њени главни параметри (нпр. средиште, главне осе...). Систематизација просторних шестотеменика у табели 1. је сачињена према:

- врсти носача водилја (призма или пирамида),
- броју страна носача (4 или 6),
- према начину "зарубљивања" носача,
- облику основе носача (квадрат, правоугаоник, шестоугаоник...)
- правилности полигона у основи (правилан/неправилан) и
- симетричности носача.

За ивице просторног шестотеменика (водиле површи)<sup>18</sup> се могу изабрати:

- а) *шест* (од дванаест) *карактеристичних ивица* просторног носача,
- б) комбинација *две ивице* и *четири дијагонале страна* просторног носача.

Примери на сл.22, од 1 до 13 приказују просторне моделе шестотеменика и усвојених носача водилја ЈЕХ, са ознакама темена **1–6** и његова два система водилја **d<sub>1-3</sub>** и **r<sub>1-3</sub>**.

---

<sup>18</sup> Водиле различитих система, ради прегледности, приказане су и различитом бојом.

### 3. Једнограни елиптички хиперболоид – ЈЕХ

Табела 1. Систематизација просторних шестотеменика и њихових носача

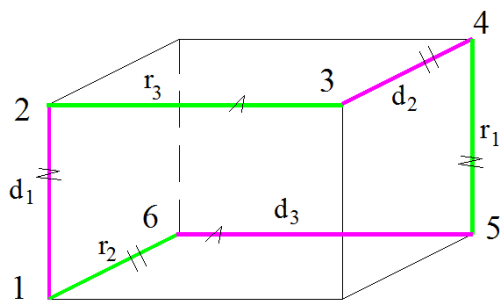
р.бр. носача	Врста носача призма / пирамида	Бр. страна носача	Засацање са равни: хоризонтално/ косо	Облик основе носача	правилан / неправилан	Симетричност носача С/А <sup>19</sup>	Положај водила на носачу ивице / ив. и дијагијанале	Бр. тачака у равни симетрије коначне / бесконачне
1	ПРИЗ	4	хориз	правоугаоник	Н		6 ивица	$2к^{20} + 1б$
2			хориз	квадрат	П	С	2 и+ 4д <sup>21</sup>	2к + 1б
3			косо	четвороугао	Н	А	6 ивица	нема
4			косо	четвороугао	Н	А	2 и + 4д	нема
5	ПИР	4	хориз	квадрат	П	С	6 ивица	3к
6			хориз	квадрат	П	С	2 и + 4д	3к
7			косо	четвороугао	Н	А	6 ивица	нема
8			косо	четвороугао	Н	А	2 и+ 4д	3к
9	ПРИЗ	6	хориз	шестоугаоник	Н		6 д	2к + 1б
10			косо	шестоугаоник	Н		6 д	3к
11			косо	шестоугаоник	Н		6 д	нема
12	ПИР	6	хориз	шестоугаоник	Н		6 д	3к
13			косо	шестоугаоник	Н		6 д	нема

<sup>19</sup> Скраћенице: С– симетричан, А– асиметричан

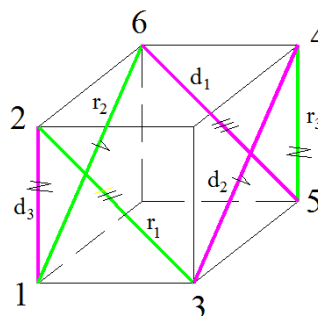
<sup>20</sup> Скраћенице: к–коначна, б–бесконачна

<sup>21</sup> Скраћенице: и– ивица, д– дијагонала

Четворостране призме :



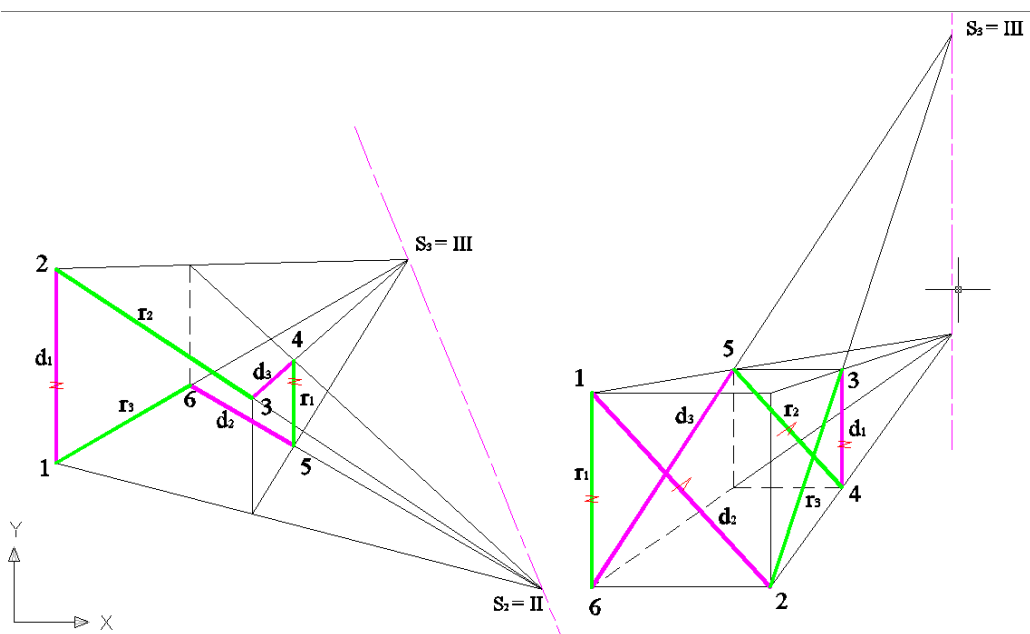
Пример 1



Пример 2

1. Четворострана призма – квадар<sup>22</sup> / водиле – ивице носача/

2. Четворострана призма – квадар (или коцка) / водиле – дијагонале и ивице носача/



Пример 3

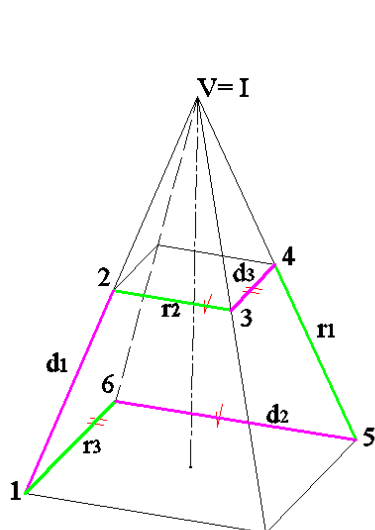
Пример 4

3. Четворострана неправилна косо зарубљена призма / водиле – ивице носача/

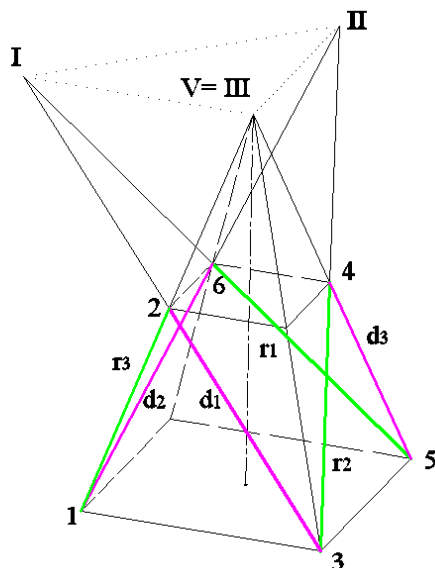
4. Четворострана неправилна призма / водиле – дијагонале и ивице носача/

<sup>22</sup> Да би постојала раван симетрије, две паралелне стране морају бити квадратног облика.

Четворостране пирамиде :

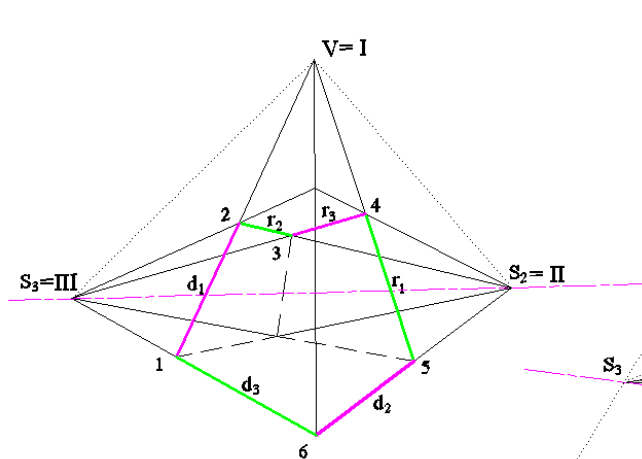


Пример 5

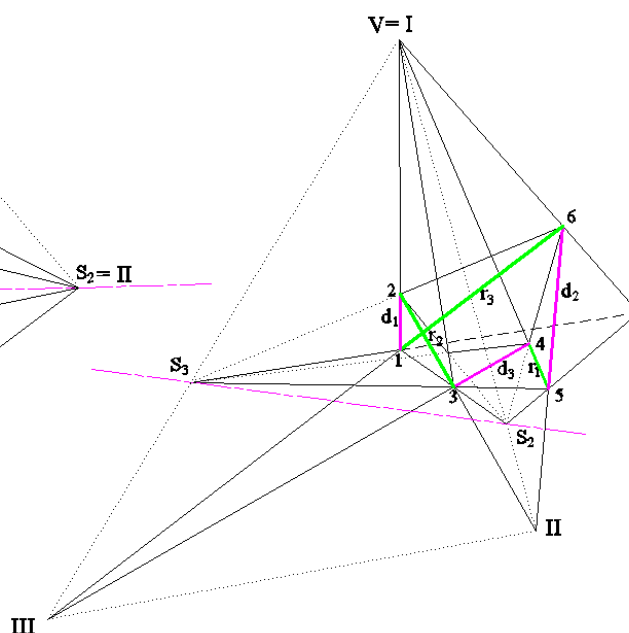


Пример 6

5. Четворострана косо зарубљена пирамида / водиле – ивице носача/
6. Четворострана косо зарубљена пирамида / водиле – дијагонале и ивице носача/



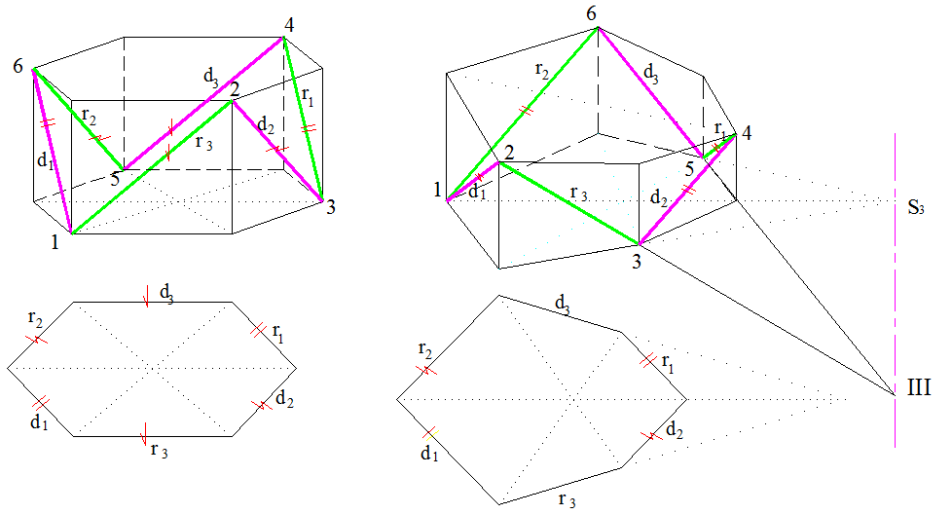
Пример 7



Пример 8

7. Четворострана косо зарубљена пирамида / водиле – ивице носача/
8. Четворострана косо зарубљена пирамида / водиле – дијагонале и ивице носача/

Шестостране призме:

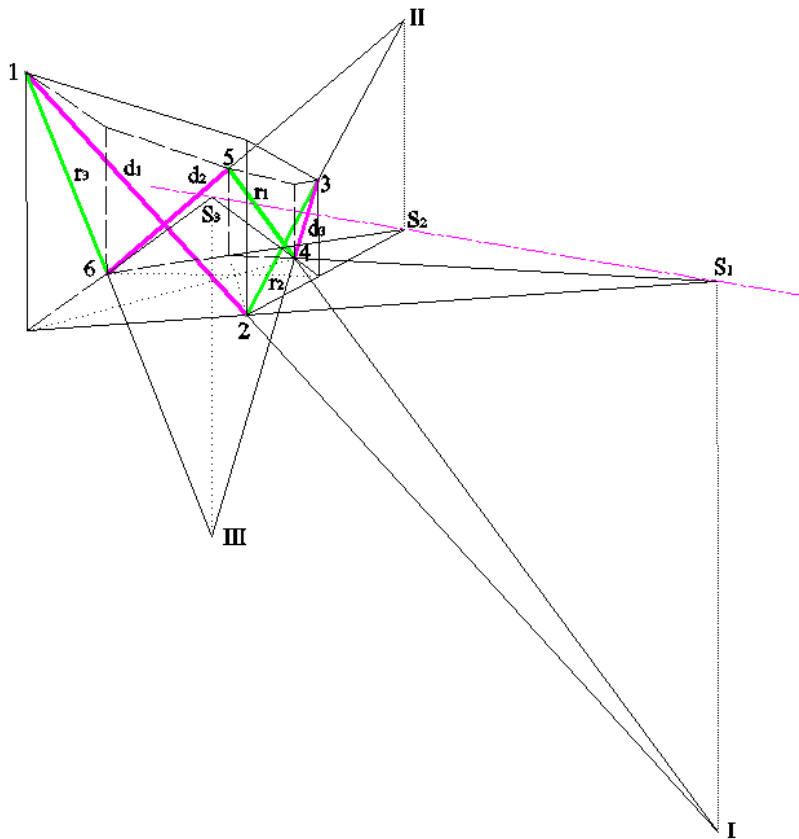


Пример 9

Пример 10

9. Шестострана права призма /водиље – дијагонале носача/

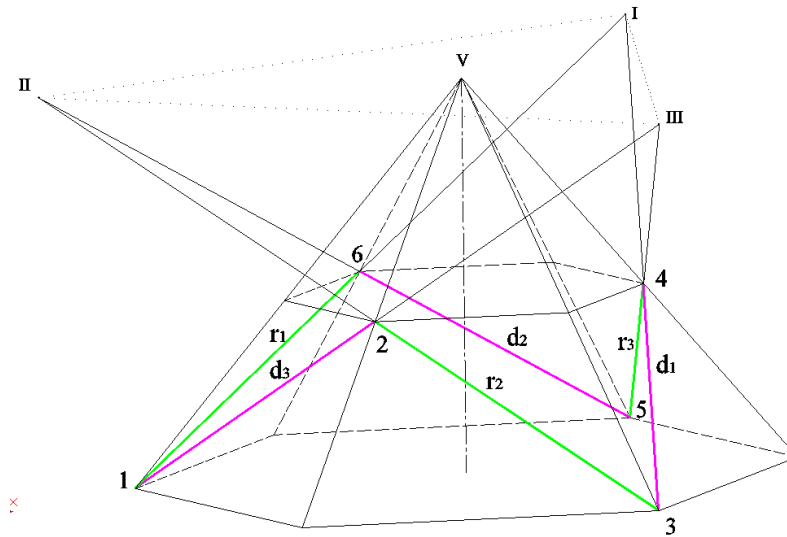
10. Шестострана неправилна косо зарубљена призма /водиље–дијагонале носача/



Пример 11

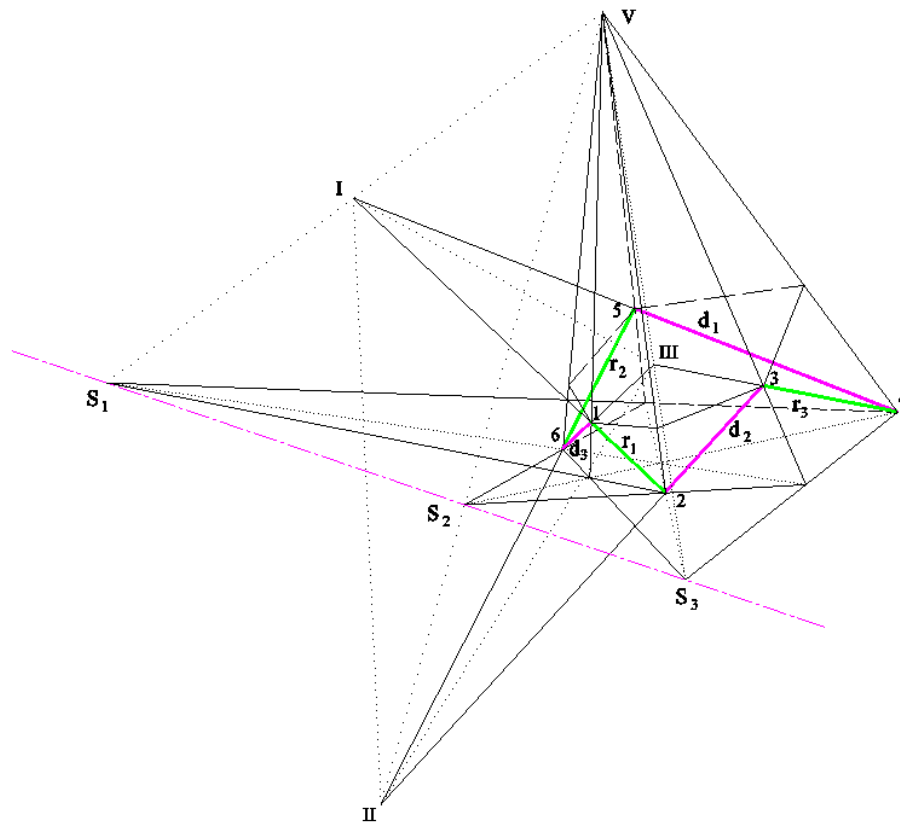
Шестострана косо зарубљена неправилна призма / водиље – дијагонале носача/

Шестостране пирамиде:



Пример 12

Шестострана зарубљена неправилна пирамида /водиље – дијагонале носача/



Пример 13

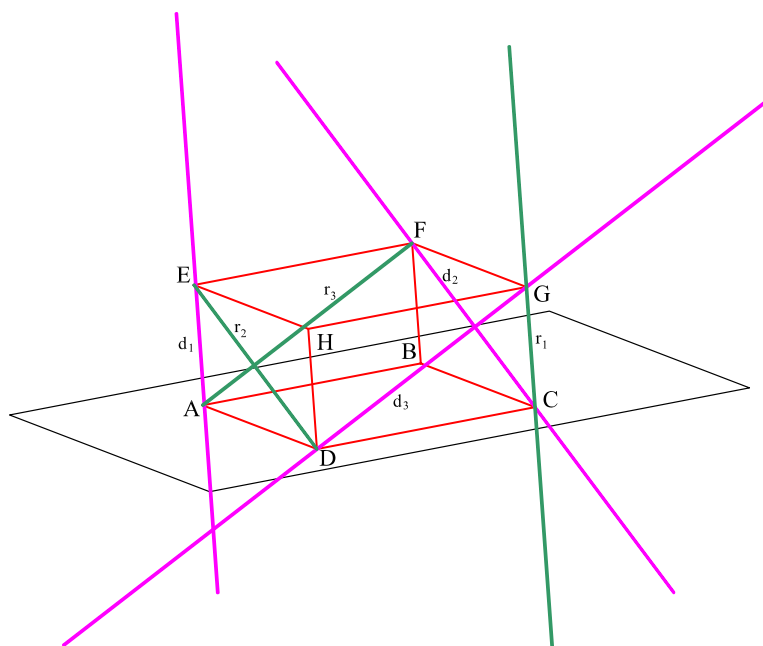
Шестострана неправилна косо зарубљена пирамида /водиље – дијагонале носача/

Сл. 22 Типови просторних шестотеменика – носача водиља ЈЕХ

#### 3.4.1 Начин конструисања површи JEX када су задата три пара директриса из различитих система, уписана у просторни шестостеменик

На примеру модела носача бр. 2, приказан је начин конструисања JEX који је задат, према *закљ. III/1*, водиљама два система изводница, уписаним у правилну четворострану призму ABCDEFGH, над квадратном основом ABCD, у 3D моделу. Просторни шестостраник (сл.23) чине:

- |   |  |
|---|--|
| 1. водиље <i>првог система</i> изводница: | 2. водиље <i>другог система</i> изводница: |
| – $d_1$ ... AE, вертикална ивица призме   | – $r_1$ ...CG, вертикална ивица призме     |
| – $d_2$ ...CF, дијагонала стране BCFG     | – $r_2$ ...DE, дијагонала стране ADEH      |
| – $d_3$ ...DG, дијагонала стране CDGH     | – $r_3$ ...AF, дијагонала стране ABEF      |



Сл. 23 Водиље површи уписане у просторни шестостраник – квадар ABCDEFG

Поступак конструисања KJEX у пројекцијама (коса, отогонална или аксонометрија), или пак у 3D моделу, је најједноставнији у случајевима:

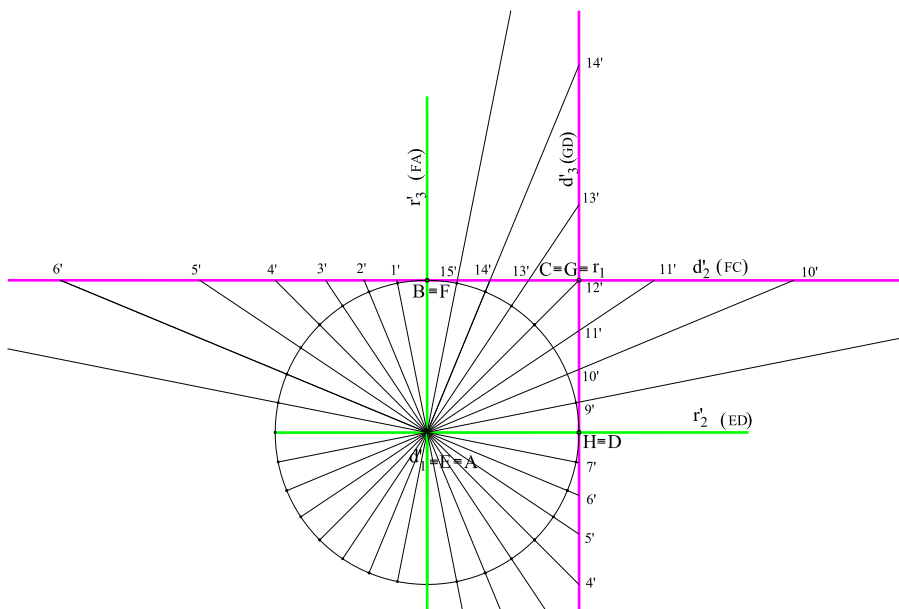
- једна водиља изабраног система изводница се види као тачка;
- по једна водиља из оба система изводница се види као тачка;
- било која изводница површи се види као тачка.

Поступак конструисања је следећи. Око зрчане пројекције једне водиље, као центра, се описује круг произвољног полупречника, по коме се распоређује одређени број изводница (12, 16, 24, 32....). Спојнице тачака круга са центром дају

### 3. Једнограни елиптички хиперboloид – ЈЕХ

пројекције изводница КЈЕХ. Пресечне тачке пројекција изводница и пројекција водиља првог система изводница се пројекцијским зрацима „враћају“ у простор. Спајањем одговарајућих парова тачака на водиљама у простору, формира се први систем изводница хиперboloида.

За изабрани модел бр. 2 усвојена је варијанта „а“ (сл.24) у којој је водиља  $\mathbf{d}_1$ (АЕ) приказана у зрачном положају [53]. Полупречник описаног круга око ње је једнак најкраћем растојању до водиља  $\mathbf{d}_3$ (DC) и  $\mathbf{d}_2$ (CB). У равни зрачне пројекције водиља  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{e}_1$ , уцртане су пројекције првог система изводница хиперboloида уз помоћ поделе помоћног круга на 32 једнака дела.

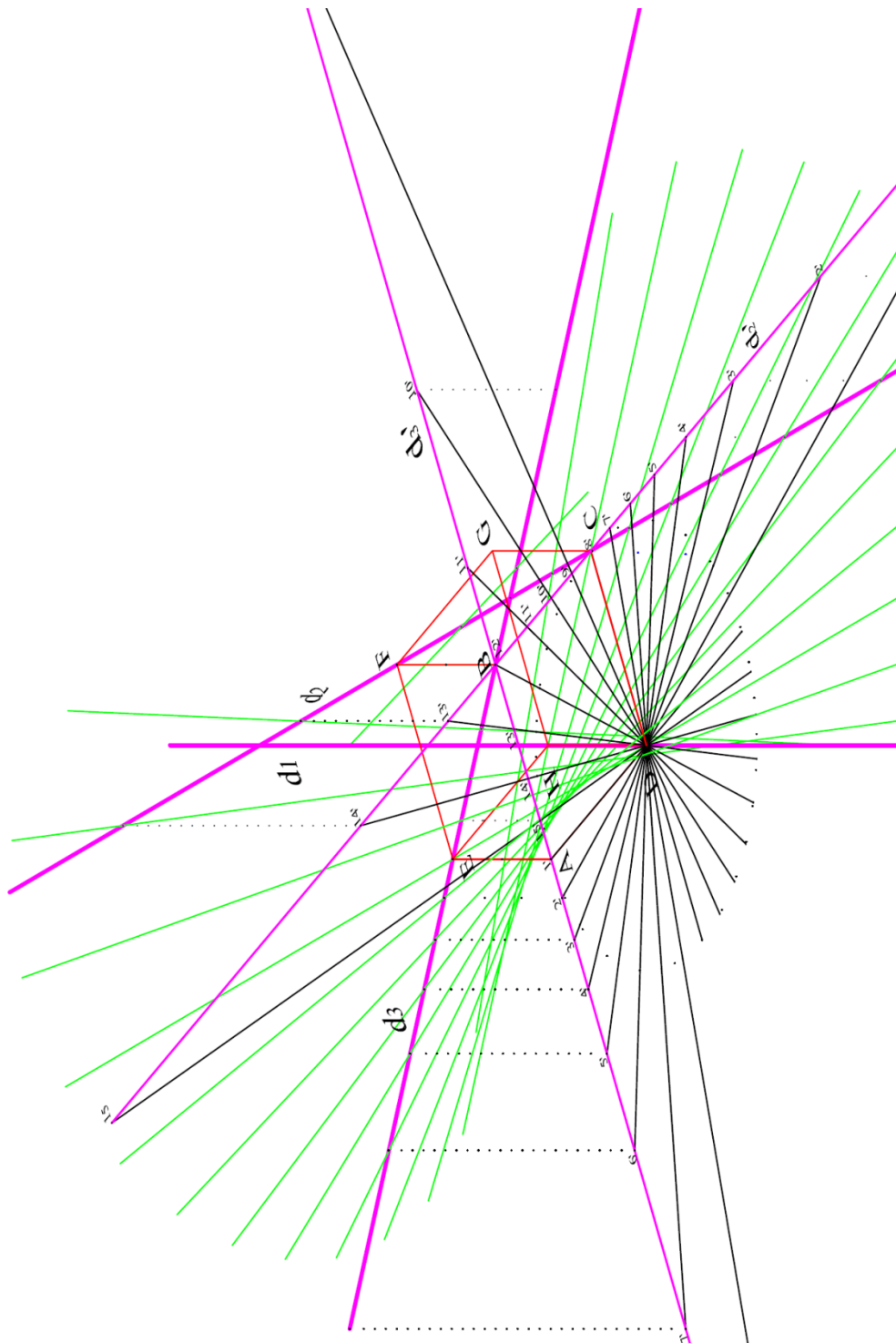


Сл.24<sup>23</sup> Постављање изводница ЈЕХ у зрачној пројекцији водиље  $\mathbf{d}_1$

Пресечне тачке 1'–15' пројекција изводница првог система изводница и пројекција водиља  $\mathbf{d}_2'$  и  $\mathbf{d}_3'$  су пренете у простор на водиље  $\mathbf{d}_2$  (1–15) и  $\mathbf{d}_3$  (1–15). Спојнице парова тачака 1–1 до 15–15 са водиља  $\mathbf{d}_2$  и  $\mathbf{d}_3$ , које секу и водиљу  $\mathbf{d}_1$ , чине први систем изводница у простору датог косог једнограног елиптичког хиперboloида. (сл.25)

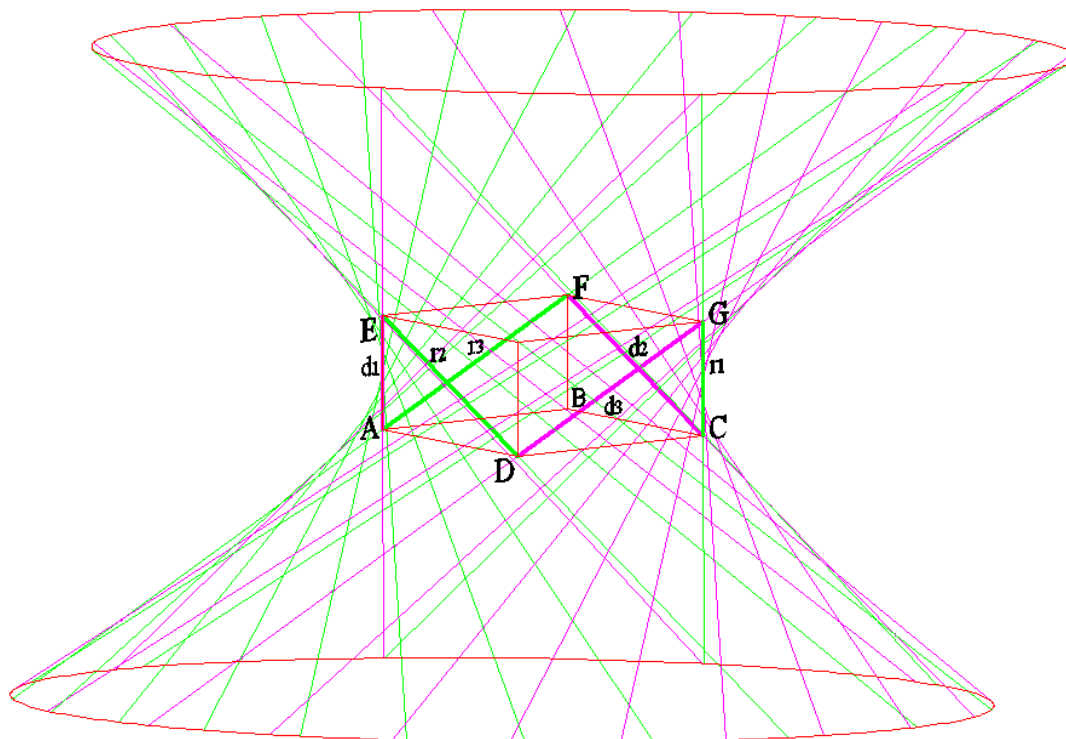
<sup>23</sup> Слика је преузета из ауторског рада кандидата, са листе референци под бр. [3]





Сл.25 Један систем изводница ЈЕХ у просторном приказу

Поступак се понавља у истој или новој пројекцији (са другом изабраном водиљом) да би се, затим, у простору конструисале изводнице другог система (сл.26)



Сл. 26 Два система изводница површи ЈЕХ за носач бр.2а у просторном приказу

#### 3.5 Анализа параметара ЈЕХ –а

##### 3.5.1 Асимптотски конус површи ЈЕХ–а

Познато је да су изводнице асимптотског конуса паралелне изводницама површи ЈЕХ, односно, да асимптотски конус настаје транслаторним померањем изводница површи у њено средиште (сл.27), тако да су средиште површи и врх асимптотског конуса коинцидентни, а две површи (конус и ЈЕХ) коаксијалне.

*Један асимптотски конус са пресечном кривом елипсом  $e_{as}$ , главних пречника  $a_{as}$  и  $b_{as}$ , је заједнички за бесконачан број површи ЈЕХ–а, чије су изводнице паралелне изводницама конуса, под условом да је однос пречника две криве  $e$  и  $e_{as}$  такав да је  $a > a_{as}$  и  $b > b_{as}$ .*

$$(1)$$

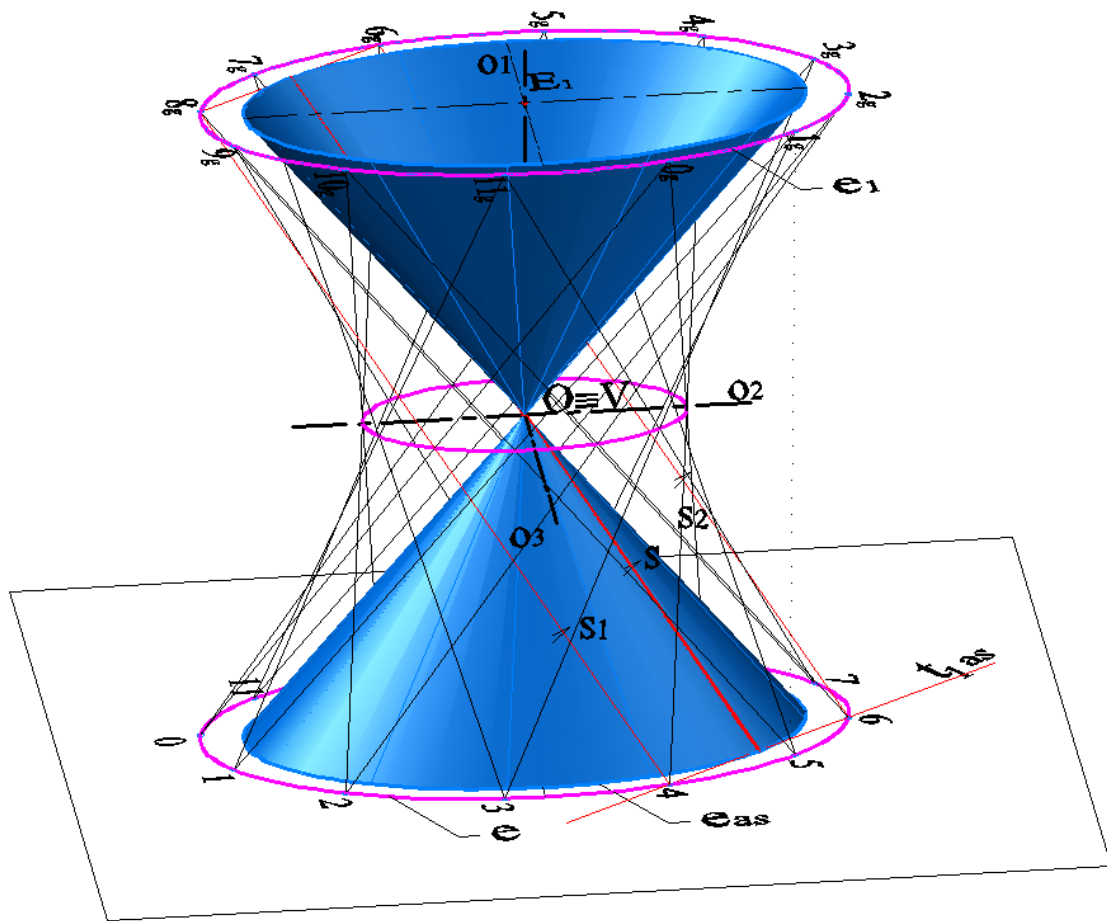
### 3. Једнограни елиптички хиперboloид – ЈЕХ

---

Конус, као развојна површ, има линијски додир по изводници ( $s$ ) са својом тангенцијалном равни. Она садржи још две паралелне изводнице  $s_1$  и  $s_2$  површи ЈЕХ-а, које са изводницом конуса, образују асимптотску раван површи ( $t_{1as}$ ).

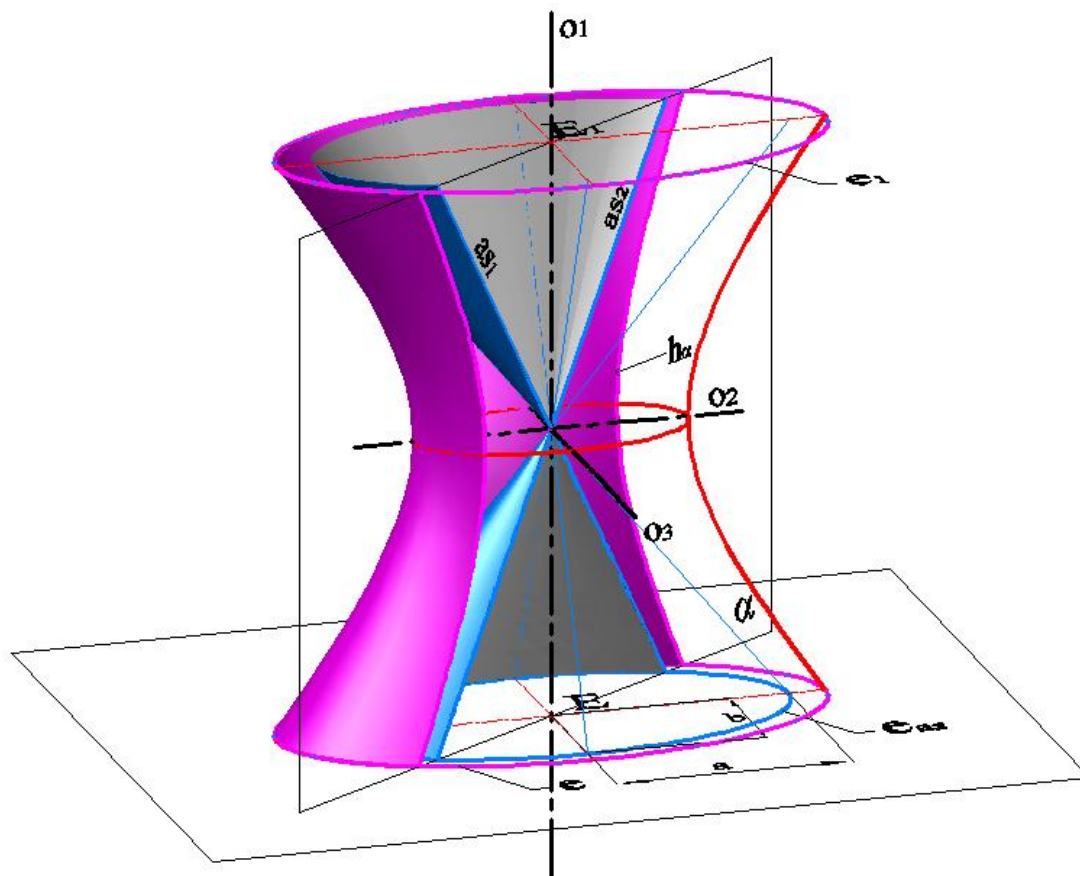
*Изводнице асимптотског конуса су асимптоте пресечних хипербола површи ЈЕХ-а, у прамену равни које пролазе главном осом  $o_1$  ЈЕХ.*

(2)



Сл. 27 Асимптотски конус површи право ЈЕХ-а

Све равни пресека ЈЕХ-а, чија је прамењача унутрашња оса  $o_1$ , секу хиперboloид по хиперболама, чије су асимптоте изводнице асимптотског конуса. Сл.28 илуструје дијаметралну раван  $\alpha$ , која пресеца ЈЕХ по хиперболи  $h_\alpha$ , чије су асимптоте  $as_{1,2}$  изводнице асимптотског конуса.



Сл. 28 Пресек правог ЈЕХ–а и асимптотског конуса дијаметралном равни

### 3.5.2 Средиште површи ЈЕХ–а

Како је пратећа површ ЈЕХ–а његов асимптотски конус, бесконачно далека раван сече обе површи по бесконачно далекој коници<sup>24</sup> [23, стр.91]. Јасно је стога, да ће се тангенцијалне равни конуса (које додирују ову бесконачну конику) сећи у врху конуса, који је коинцидентан средишту ЈЕХ–а.

*Две паралелне изводнице, из различитих система изводница површи, образују тангенцијалну раван површи у бесконачно далекој тачки њиховог заједничког правца.* (1)

Из става (1) следи:

*Било која три пара паралелних изводница, тј. водиља површи ЈЕХ, из различитих система, формирају три тангенцијалне (асимптотске) равни површи њене бесконачно далеке конике, које се секу у тачки – средишту површи.*

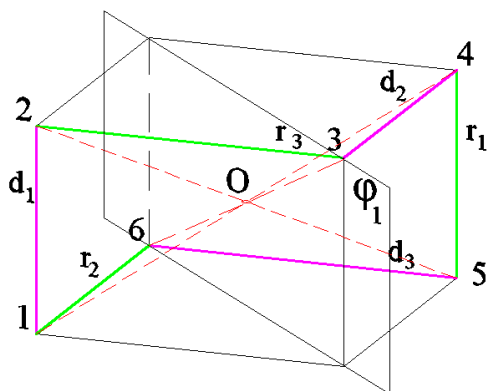
**Зак. III/2**

<sup>24</sup> Асимптотски конус и површ имају заједничку бесконачно далеку конику.

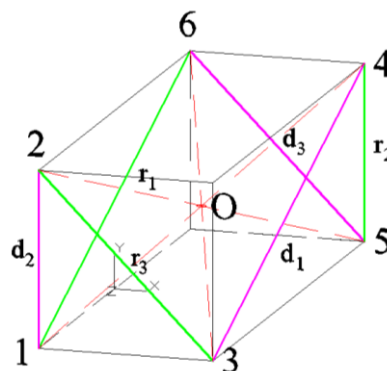
### 3. Једнограни елиптички хиперboloид – ЈЕХ

Према закључку III/2, за поједине носаче (сл.29а) конструисано је средиште површи. У зависности од облика носача разликују се два случаја:

а) Средиште површи  $O$  је коинцидентно средишту носача водиља.

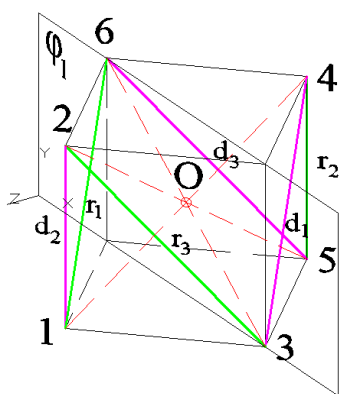


Пример 1.

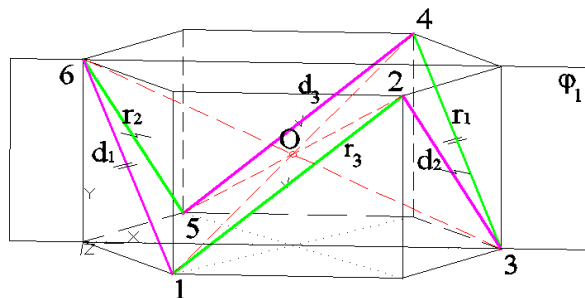


Пример 2.

1. Квадар са квадратном основом / носач и површ имају исту раван симетрије  $\phi_1$ /
2. Квадар са правоугаоном основом



Пример 2а.



Пример 9.

- 2а. Коцка / носач и површ имају исту раван симетрије  $\phi_1$  /.
9. Шестострана призма / носач и површ имају исту раван симетрије  $\phi_1$  /

Сл. 29а Примери конструисања средишта носача – тип а)

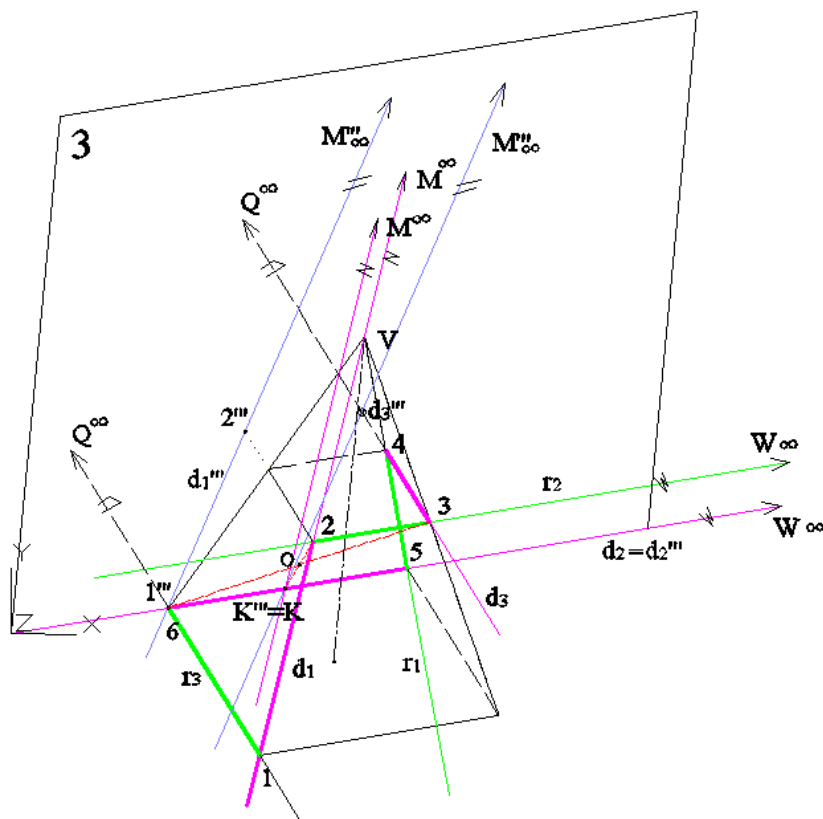
На основу приказаних примера и закључка III/2, јасно је да у случајевима:

*Када је раван симетрије задатог носача просторног шестотеменика, у који су уписане водиље површи ЈЕХ-а, коинцидентна равни симетрије површи, и средиште површи  $O$  је коинцидентно средишту носача.* (2)

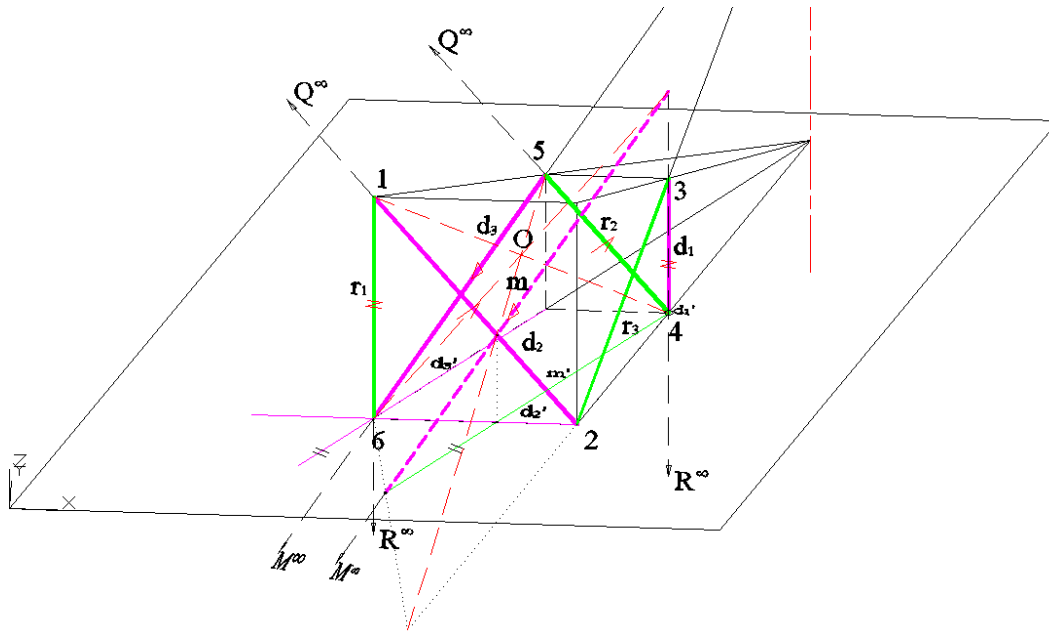
б) Средиште површи  $O$  је тачка пресека три асимптотске равни

Поступак одређивања средишта површи, на сл.29б, приказује случај када је носач водиља четворострана пирамида (пример бр. 5, погл. 3.4), зарубљена хоризонталном равни, а водиље ЈЕХ су ивице носача. Два пара паралелних водиља  $r_3d_3$  и  $r_2d_2$  се секу у тачкама  $Q_\infty$  и  $W_\infty$ . Да би био одређен и трећи пар (у правцу тачке  $M_\infty$  водиље  $d_1$ ), кроз водиљу  $d_2$  постављена је раван  $3 \perp d_3(r_3)$ , на којој су одређене пројекције водиље  $d_1'''$  и њој паралелне изводнице – кроз зрачну пројекцију водиље  $d_3'''$ . Из тачке пресека  $K''' \equiv K$  са пројекцијом водиље  $d_2''' \equiv d_2$  полази изводница, у простору паралелна водиљи  $d_1$ . У пресеку пресечница ове три равни је добијено средиште површи  $O$ , које се налази у дијагоналној равни носача – правилне четворостране пирамиде. Средиште  $O$  се налази на половини растојања спојнице темена 6–3. У теменима 6 и 3 се налазе дирне тачке тангенцијалних равни површи, које образују парови водиља  $r_3d_2$  и  $d_2 r_3$ , при чему је  $d_3 // r_3$  и  $d_2 // r_2$ .

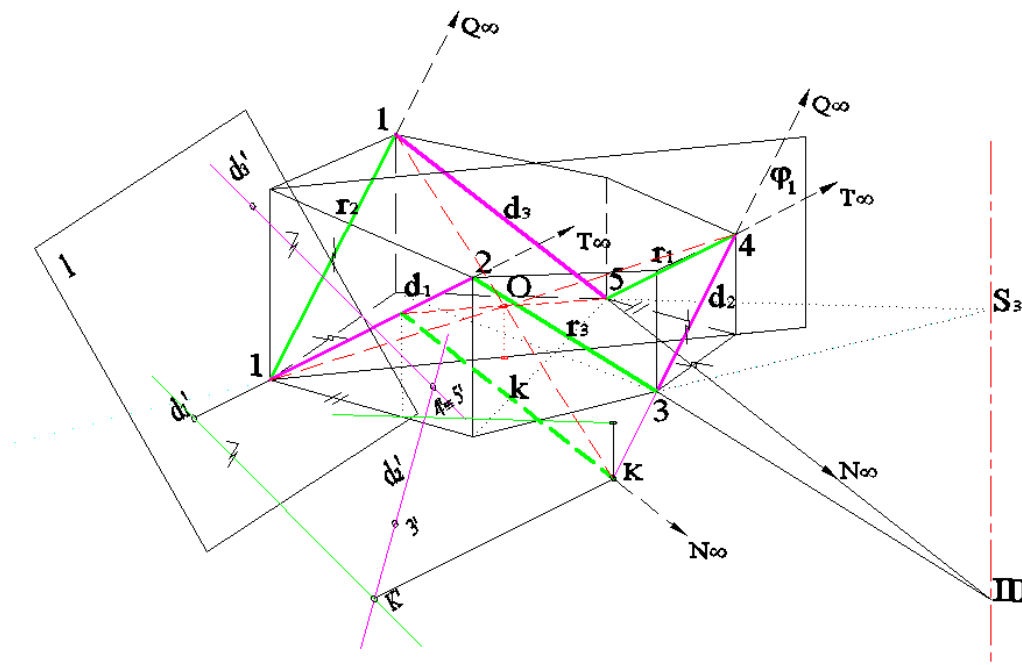
Поступак одређивања средишта изведен је и за примере носача бр. 4 и 10.



Пример 5 . Четворострана зарубљена пирамида (позната раван симетрије носача)



Пример 4. Четворострана неправилна призма (није позната равна симетрије)



Пример 10. Шестострана неправилна косо зарубљена призма<sup>25</sup>

Сл.29 б Примери конструисања средишта носача – тип б)

На основу конструисаног средишта површи  $O$  за претходна три случаја задатих носача бр. 5., 4., и 10., са или без задате равни симетрије носача и просторног шестотеменика, следи закључак:

<sup>25</sup> Равна симетрије носача је коинцидентна равни симетрије  $\Phi_1$  JEX-a

*Средиште површи ЈЕХ се налази на средини растојања дирних тачака (два темена просторног шестотеменика) две паралелне тангенцијалне равни површи. При томе су парови правих (две изводнице површи), из различитих система, које образују тангенцијалне равни у тим тачкама, међусобно паралелни и припадају двама асимптотским равнима површи.*

**Закљ. III/3**

#### **3.5.3 Главне осе ЈЕХ–а и равни симетрије**

Како бесконачно далека раван простора садржи бесконачно далеку конику површи и апсолутну кружницу, које се у случају ЈЕХ–а секу у четири коњуговано имагинарне тачке, тако ове две конике имају заједнички аутополарни троугао. *Спојнице темена аутополарног троугла бесконачно далеке конике површи са средиштем ЈЕХ–а су његове главне осе  $o_1o_2o_3$  [37, стр.12].*

“Поларним пољем апсолуте је одређена ортогоналност у коначности...” [37, стр.13], из чега следи да ће *главне осе површи и главне равни*, које оне образују, бити међусобно ортогоналне. Три главне равни су *равни симетрије површи ЈЕХ*.

Захваљујући својој елегантној апаратури [55], пројективна геометрија омогућава да се геометријски проблем одређивања главних оса површи ЈЕХ, који аналитичко математички приступ решава дијагонализацијом матрице [17], савлада на више начина.

Важно је истаћи да је конструисање главних оса површи повезано са одређивањем њених равни симетрије. Стога је поступак конструисања оса знатно поједностављен, у случајевима када је раван симетрије, која пролази кроз унутрашњу осу површи (дијаметрална раван), позната. У раду ће бити приказана три конструктивна поступка:

1. коришћењем *задатих носача водиља* површи / позната једна раван симетрије/,
2. коришћењем *асимптотског конуса*<sup>26</sup> површи и
3. коришћењем *кружних пресека* површи.<sup>27</sup>

---

<sup>26</sup> Ортогоналне осе асимптотског конуса су истовремено и осе површи ЈЕХ

<sup>27</sup> Овај поступак је објашњен у поглављу 4.1.4 Кружни пресеци површи

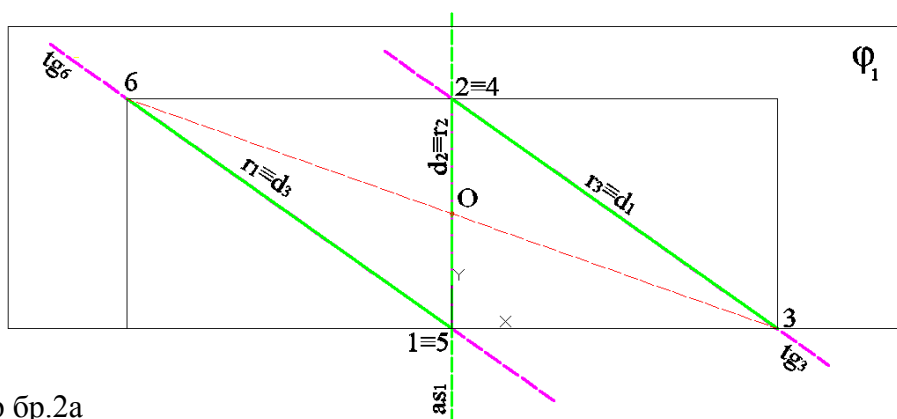


3.5.3/1. Конструкција главних оса JEX за задати носач и раван симетрије

Први конструктивни поступак подразумева да је остварен услов:

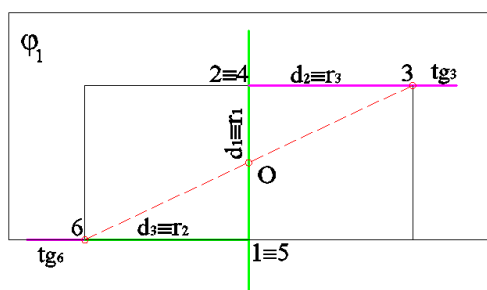
Раван симетрије задатог просторног носача водиља је коинцидентна равни симетрије  $\varphi_1$  JEX-a. (1)

Носач водиља, који задовољава услов (1), у заједничкој равни симетрије  $\varphi_1$ , у зависности од распореда водиља (видети погл. 3.4), може имати: а) две коначне и једну бесконачно далеку тачку (сл.30), или б) три коначне тачке површи. Пресек површи JEX-a са равни симетрије у коначној тачки је главна тангента њене дирне равни, а у бесконачно далекој тачки је то асимптота пресечне конике површи.

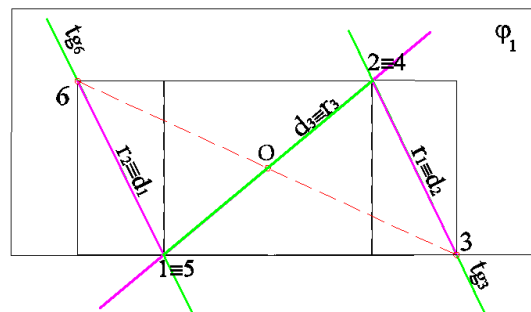


Пример бр.2а

Зрачна пројекција тангенцијалних равни JEX; носач– четворострана призма



Пример бр. 1



Пример бр. 9

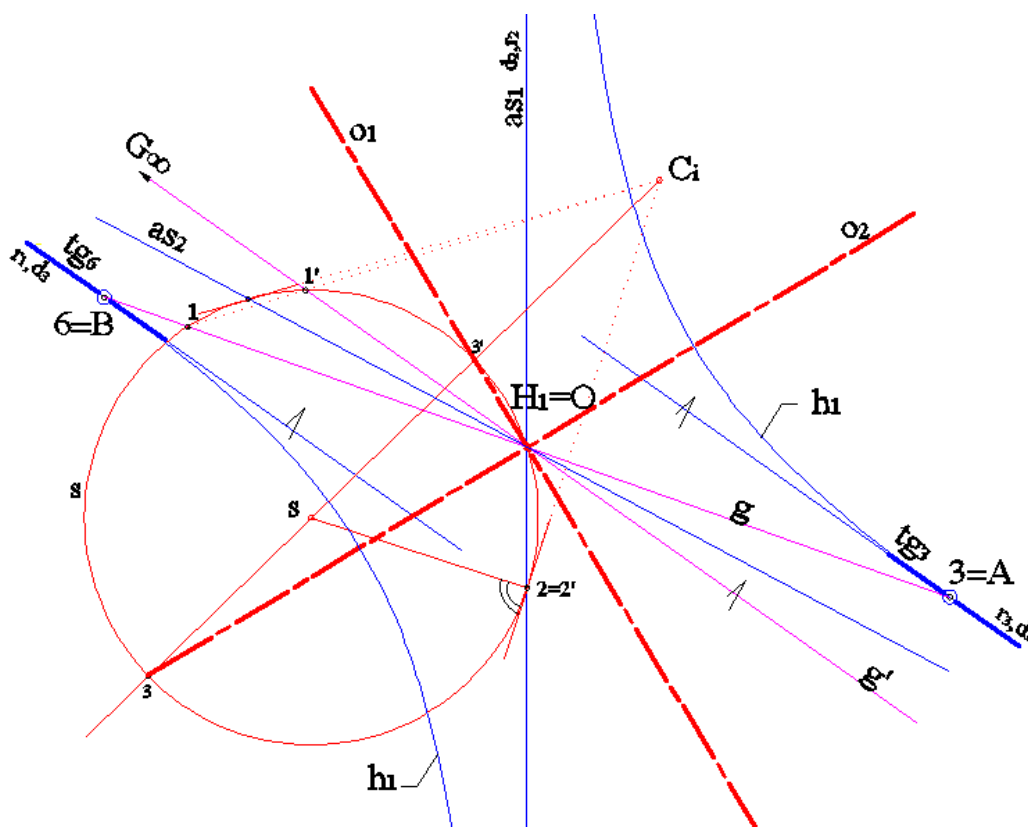
1. Зрачна пројекција тангенцијалних равни JEX; носач – четворострана призма

9. Зрачна пројекција тангенцијалних равни JEX; носач – шестострана призма

Сл. 30 Две коначне и једна бесконачно далека тачка JEX у равни  $\varphi_1$ – тип а)

Пар ортогоналних оса пресечне криве у равни симетрије  $\varphi_1$  је коинцидентан са две главне осе површи. (2)

Конструктивни поступак је спроведен је на примеру носача водиља бр.2а – квадра са квадратном основом, чија је задата раван симетрије  $\varphi_1$  истовремено и раван симетрије површи ЈЕХ–а. У тачкама површи **3** и **6**, на носачу бр.2а (сл.30), водиље  $r_1, d_3$  и  $r_3, d_1$  образују две паралелне тангенцијалне равни површи, док пар паралелних водиља  $r_2, d_2$  образује њену асимптотску раван. Према закљ. III/3, средина спојнице **3–6** је центар површи **O**. Раван симетрије  $\varphi_1$  сече две тангенцијалне и једну асимптотску раван површи ЈЕХ–а по правцима две главне тангенте  $tg_3$  и  $tg_6$  (главна тангента је симетрала угла између две водиље–изводнице у тачки површи) и једне асимптоте  $as_1$  (права кроз центар површи **O**, паралелна водиљама  $d_2$  и  $r_2$ ) пресечне криве. Исти конструктивни поступак важи и за случајеве носача бр.1 и бр.9 (сл.30).



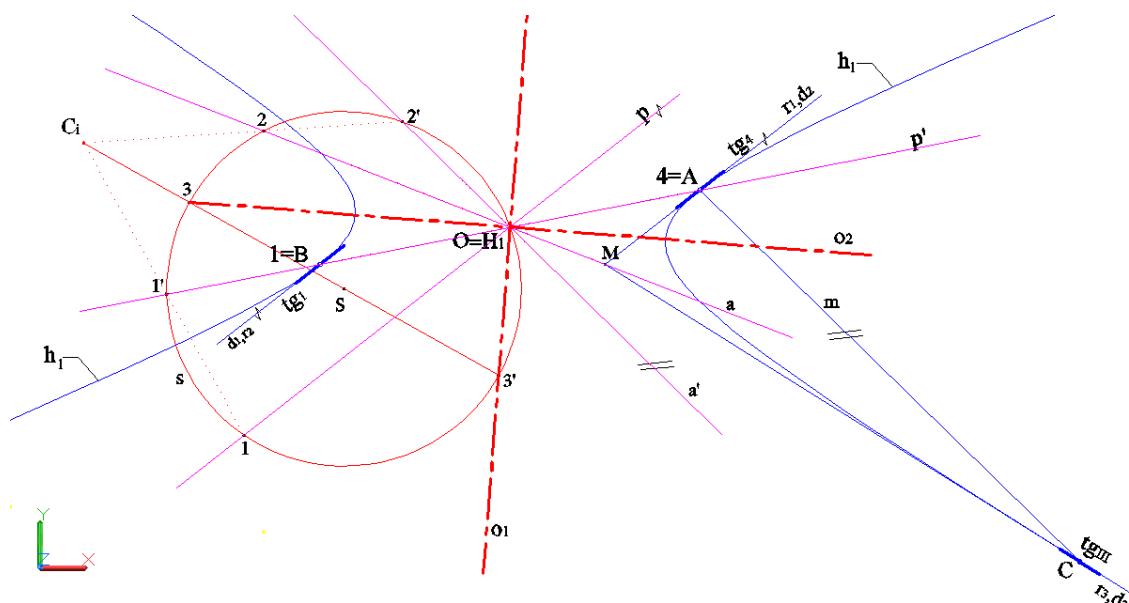
Сл. 31 Пар главних оса површи ( две коначне тачке ЈЕХ у равни  $\varphi_1$ ) – тип а)

Раван симетрије  $\varphi_1$ , као дијаметрална, сече површ по хиперболи  $h_1$ <sup>28</sup> (сл.31) која је дефинисана: тачкама  $A \equiv 3$  и  $B \equiv 6$ , правцима тангенти у њима, центром  $H_1 \equiv O$

<sup>28</sup> За конструктивни поступак одређивања оса није неопходно конструисати хиперболу  $h_1$



инволуторно придружена полара  $a'$  (паралелна полари  $m$ -спојници тачака  $A=4$  и  $C$ ). Даљи поступак је потпуно истоветан као у примеру носача бр. 2а.



Сл.33 Пар главних оса површи (три коначне тачке у равни симетрије  $\phi_1$ ) – тип б)

На анализираним примерима, показано је да:

У заједничкој равни симетрије носача и површи JEX, зависно од типа носача, постоје:

а) две коначне тачке површи са главним тангентима и једна бесконачно далека–правац асимптоте пресечне хиперболе,

б) три коначне тачке површи са главним тангентима. (3)

Раван симетрије JEX–а, коинцидентна равни симетрије задатог носача водилца, сече површи по кривој–хиперболи, којој припадају и три тачке носача (коначне или бесконачне) са одговарајућим тангентима – главним тангентима површи JEX–а.

(4)

На основу ставова (3) и (4) следи:

У задатој равни симетрије  $\phi_1$  површи JEX која сече површи по хиперболи  $h_1$ , постоји јединствени пар оса површи  $o_1o_2$ , коинцидентан са паром оса хиперболе  $h_1$ . Хипербола  $h_1$  је пресечна крива површи JEX–а и његове равни симетрије. При томе су осе  $o_1o_2$  ортогонални пар придружених полара, у инволуторном прамену полара, са теменом у средишту површи  $O \equiv H_1$ , коинцидентном центру хиперболе  $h_1$ .

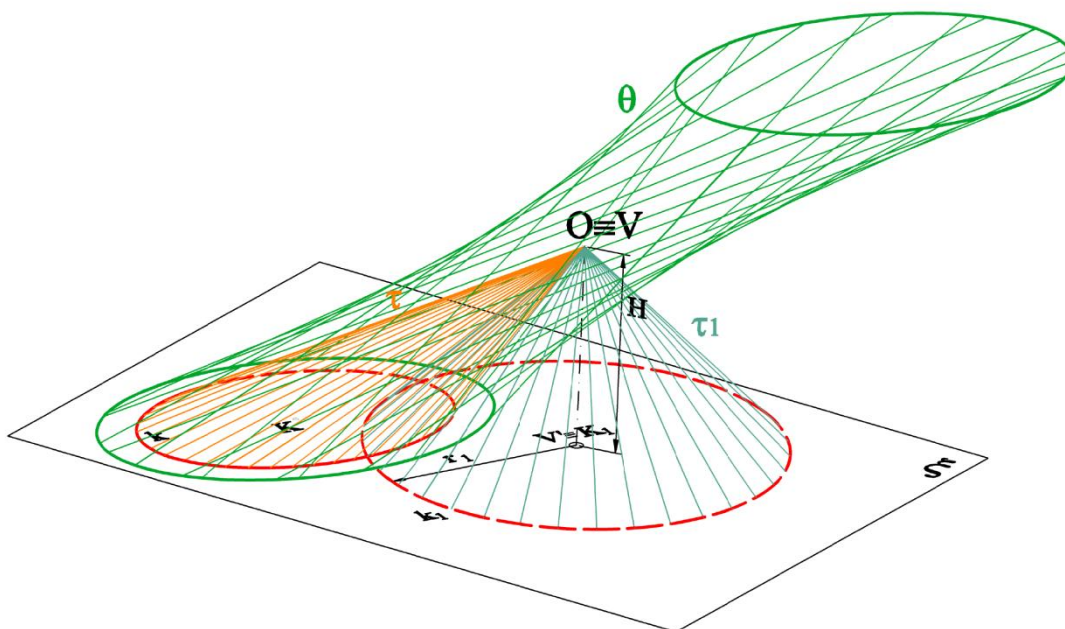
Закљ. III/4

3.5.3/2. Конструкција главних оса за ЈЕХ и његов асимптотски конус

Полазиште за други конструктивни поступак је:

Нека је  $O$  средиште ЈЕХ–а  $\theta$ , а  $V$  врх његовог асимптотског конуса, тада постоји јединствени ортогонални троугао оса  $o_1o_2o_3$ , у темену  $O \equiv V$ , заједнички за ЈЕХ и његов асимптотски конус. (5)

Имајући у виду тврђење (5), под претпоставком да је асимптотски конус површи ЈЕХ–а општи случај конуса другог реда, у темену  $O \equiv V$  – заједничком врху два конуса (један коси–општи<sup>29</sup>, а други правилан – кружни), постављају се два колокална свежња правих, тј. два колокална свежња равни, у односу на задате конусе, чији су заједнички елементи – три праве, тј. три равни простора [32, стр. 115]. Познато је да су двоструки елементи два колокална свежња правих у заједничком врху  $V$  ова два конуса – главне осе, тј. двоструки елементи два колокална свежња равни – равни симетрије општег конуса [18, стр.25].



Сл. 34 Конструкција главних оса ЈЕХ – поставка конуса  $\tau$  и  $\tau_1$

Применом корелативне (инволуторне), тј. колинеарне, придружености између тачака и правих, која постоји у хоризонталној равни базисних кривих два

<sup>29</sup> Односи се на асимптотски конус ЈЕХ–а.

конуса одређују се заједнички–двоструки елементи усвојених свежњева. У даљем тексту следи објашњење конструктивног поступка.

Два колокална инволуторна свежња правих и равни су постављена у односу на два конуса (сл.34) са заједничким врхом  $V$ : први свежањ  $\{S_\tau\}$  – у односу на асимптотски конус  $\tau$  (дат базисном кривом  $k$  – елипсом<sup>30</sup>, са центром  $K$ ), а други  $\{S_{\tau_1}\}$  – у односу на правилан кружни конус  $\tau_1$  (дат базисном кривом – кружницом  $k_1$ , центром  $K_1$ , и условима  $K_1 \equiv V'$  и  $r_1 = K_1 V^{31}$ ). Базисне криве оба конуса леже у хоризонталној равни  $\xi$ . Тачке и праве равни  $\xi$ , спојене са врхом  $V$  конуса  $\tau$ , формирају ова два свежња правих и равни. Између њих постоји корелативна придруженост.

Свежањ  $\{S_\tau\}$  се састоји од поларних оса придружених поларним равнима, у односу на конус  $\tau$ . У њему постоји један ортогонални трокрак оса  $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2\mathbf{o}_3$  и триедар равни  $\pi_1\pi_2\pi_3$ , такав да је по једна полара (оса) нормална на одговарајућу поларну раван.

У свежњу правих и равни  $\{S_{\tau_1}\}$ , у односу на правилан кружни конус  $\tau_1$ , све поларне осе и коресподентне равни су међусобно ортогоналне [40, стр.8]. Стога, *заједнички елементи два колокална свежња  $\{S_\tau\}$  и  $\{S_{\tau_1}\}$  представљају ортогонални трокрак правих  $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2\mathbf{o}_3$  и триедар равни  $\pi_1\pi_2\pi_3$ , тј. главне осе и равни симетрије конуса [18, стр.25].*

Са друге стране, имајући у виду да су главне осе  $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2\mathbf{o}_3$  површи ЈЕХ–а спојнице аутополарног троугла њене бесконачно далеке конике, са средиштем површи  $O$  [22, 47], може се закључити:

*Нека је  $k$  базисна коника асимптотског конуса  $\tau$  једнограног хиперboloида  $\theta$ , у равни  $\xi$ , са врхом  $V$  ван равни. Тада постоји јединствени аутополарни троугао  $P_oQ_oR_o$  конике  $k$ , такав да је ортогонална пројекција  $V'$  врха  $V$  на раван  $\xi$  коинцидентна ортоцентру  $O_c$ , троугла  $P_oQ_oR_o$ . При томе су, спојнице темена  $P_o, Q_o$  и  $R_o$  са врхом  $V$  асимптотског конуса  $\tau$ , три главне осе  $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2\mathbf{o}_3$  заједничке за конус и једнограни хиперboloид  $\theta$ . (сл.35)*

**Закљ. III/5**

Шире гледано, ове три осе су заједничке за прамен конфокалних квадрика [56], од којих су овде разматрани само ЈЕХ и његов асимптотски конус.

---

<sup>30</sup> Коника  $k$  може бити такође парабола, или хипербола [49].

<sup>31</sup> У реф.[40], аутори Navlicek и Weiss називу овај конус "equilateral" – равностранни (прев.)



Раван  $\xi$  сече два колокална корелативно придружена свежња  $\{S_\tau\}$  и  $\{S_{\tau_1}\}$ , у два пара колокалних корелативно придружених поља тачака и правих  $(\alpha, \beta)$  и  $(\alpha_1, \beta_1)$ . Када се поља правих  $\beta$  и  $\beta_1$  доведу до поклапања, два поља тачака  $\alpha$  и  $\alpha_1$  постају колинеарно придружена. Два прамена правих, у колинеарно придруженим пољима тачака  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , чија су темена произвољно усвојени пар придружених тачака, производе криву 2. реда. На тај начин произведене три криве [12, стр.2] пролазе кроз три тачке – двоструке тачке  $D_1, D_2, D_3$ , – темена аутоколинеарног троугла ових поља тачака.

*Три конике, као скупови тачака пресека три пара пројективно придружених праменова правих, у два колокална колинеарна поља тачака  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , дефинишу прамен коника, такав да свака од њих пролази кроз три двоструке тачке аутоколинеарног троугла  $D_1D_2D_3$  поља  $\alpha$  и  $\alpha_1$ .* (6)

Аутоколинеарни троугао  $D_1D_2D_3$ , у овом случају, постаје и аутополарни троугао (према ставу (6)) у односу на базисну криву  $k$  конуса  $\tau$ . Спојнице три двоструке тачке  $D_1, D_2, D_3$  две колинеарне равни  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , са врхом  $V$  формирају аутополарни триедар у односу на конусе  $\tau$  и  $\tau_1$ , чије су ивице  $VD_1, VD_2$  и  $VD_3$  међусобно ортогоналне и представљају три ортогоналне осе конуса  $\tau$ . Стране овог триедра, са базисом – аутополарним троуглом  $d_1, d_2, d_3$  (двоструке праве равни  $\alpha$  и  $\alpha_1$ ) образују неправилни ортоцентрични тетраедар [46], чији се ортоцентар налази у врху  $V$ .

За дефинисање два колинеарно придружена поља тачака  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , потребан је пар придружених тачака и недогледнице поља – праве колинеарно придружене бесконачно далеких правама поља  $\alpha$  и  $\alpha_1$ <sup>32</sup>:

– за пар колинеарно придружених тачака, усвојени су центри коника  $K$  и  $K_1$  две базисне криве  $k$  и  $k_1$  конуса  $\tau$  и  $\tau_1$ <sup>33</sup>.

– недогледница  $r$  је полара пола  $K_1$ , у односу на конику  $k$ , док је недогледница  $i_1$  антиполара пола  $K$ , у односу на конику  $k_1$  (сл.36).

Инволуторно придружени коњуговани пречници конике  $k$  формирају инволуторни прамен правих у тачки  $K$ , док коњуговани пречници кружнице  $k_1$  формирају циркуларни инволуторан прамен правих у тачки  $K_1$ . Када се поља  $\beta$  и

---

<sup>32</sup> Детаљно описане међусобне релације полова и полара дате су у ауторском раду – реф. бр. [12]

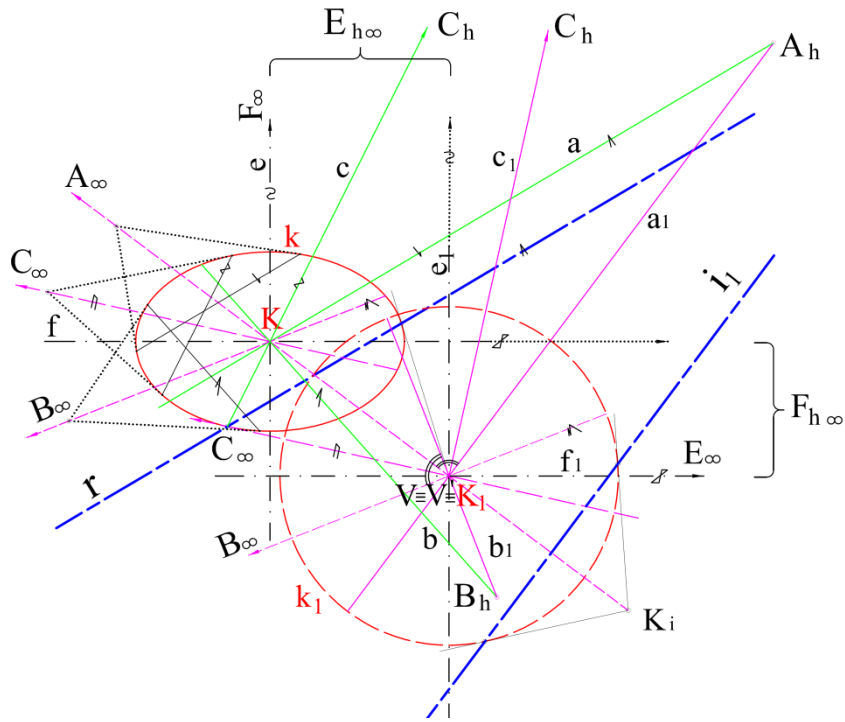
<sup>33</sup> Обе тачке су корелативно придружене правама  $t_\infty \equiv t_{1\infty}$  у равни  $\beta \equiv \beta_1$



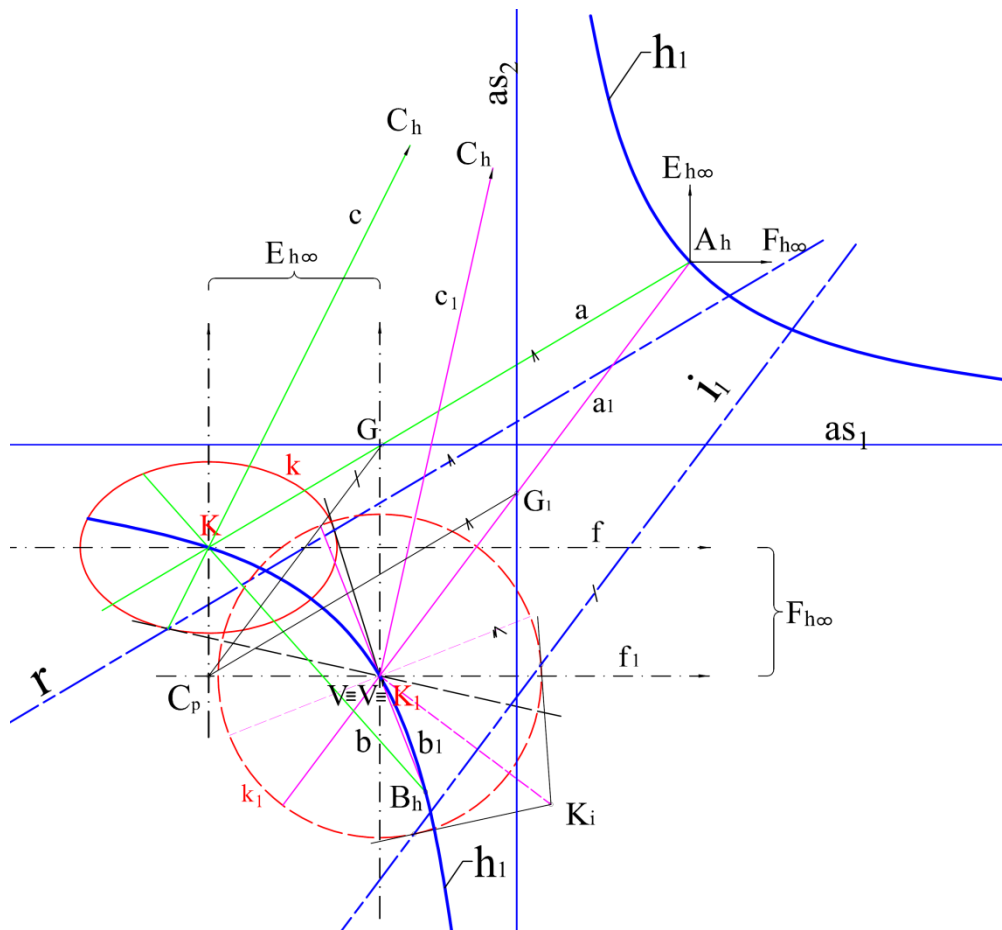
$\beta_1$ , доведу до поклапања, парови придружених тачака на бесконачно далеких правама  $t_\infty \equiv t_{I_\infty}$  ових равни, постају коинцидентни. Тачке  $A_\infty$ ,  $B_\infty$  и  $C_\infty$  на њима су полови за придружене парове полара:  $(a, a_1)$ ,  $(b, b_1)$  и  $(c, c_1)$  у односу на конике  $k$  и  $k_I$ . Два формирана прамена полара:  $(a, b, c)$  и  $(a_1, b_1, c_1)$  са теменима  $K$  и  $K_I$  се секу у тачкама  $A_h, B_h, C_h$ , које припадају кривој другог реда.

У два пројективно придружена прамена полара, у теменима  $K$  и  $K_I$ , постоје два, међусобно ортогонална пара придружених паралелних полара  $e, e_I$  и  $f, f_I$  (сл. 37). То су правци оса коника:  $k$  и  $k_I$  које се секу у бесконачно далеких тачкама нове криве – хиперболе  $h_I$ . Правце ортогоналних асимптота одређују две бесконачно далеке тачке  $E_{h_\infty}$  и  $F_{h_\infty}$ , а добијена крива је *Аполонијева хипербола*  $h_I$ . Положај асимптота  $as_{1,2}$  је одређен помоћу два пројективно придружена прамена правих у бесконачно далеких теменима  $E_{h_\infty}$  и  $F_{h_\infty}$ . Ови праменови правих су пресечени са правцима  $a$  и  $a_I$  на којима се формирају два перспективно придружена низа тачака. Центар перспективитета за низове  $(a)$  и  $(a_I)$  је тачка  $C_p$ . Недогледи  $G$  и  $G_I$  низова су тачке кроз које пролазе асимптоте хиперболе  $h_I$ .

Познато је да у колинеарним пољима  $\alpha$  и  $\alpha_I$  постоје два пара жижа [15, стр.16], специјалних тачака – темена циркуларних инволуторних праменова правих. Жиже  $L, M$  и  $L_I, M_I$  су конструктивно одређене (сл.38) на следећи начин. Најпре су формирана два колокална пројективна прамена правих у теменима  $K$  и  $K_I$  и одређен ортогонални пар правих  $d_1, d_2$  [48], као правци асимптота хиперболе  $h_I$ . Потом су допуњавањем ова два прамена правих (Штајнерова конструкција – сл.38, доњи десни угао) одређени центри инволуција  $P$  и  $O_I$  на недогледницама  $r$  и  $i_I$ . На основу особине, да придружене праве, из два прамена правих, који пролазе жижама  $L$  и  $L_I$ , са одговарајућим недогледницама поља  $r$  и  $i_I$  заклапају углове исте величине [15, стр.11], користећи одговарајуће недогледе  $W$  и  $Q_I$  праваца  $W_{I_\infty}$  и  $Q_\infty$ , којима пролазе ове праве (под углом), одређене су жиже  $L$  и  $L_I$  а потом и њима, у односу на недогледнице симетричне,  $M$  и  $M_I$ . Парови жижа налазе се на две главне нормале  $g, g_I$  колинеарних поља  $\alpha$  и  $\alpha_I$ , које пролазе центрима инволуције  $P$  и  $O_I$ . Јединствена особина је да два пројективно придружена прамена правих, постављена у жижама  $L$  и  $L_I$ , производе криву – кружницу  $l$  (садржи три тачке:  $L, L_I$  и пресечну тачку главних нормала  $g, g_I$ ).



Сл. 36 Два прамена пројективно придружених полара у теменима  $K$  и  $K_1$

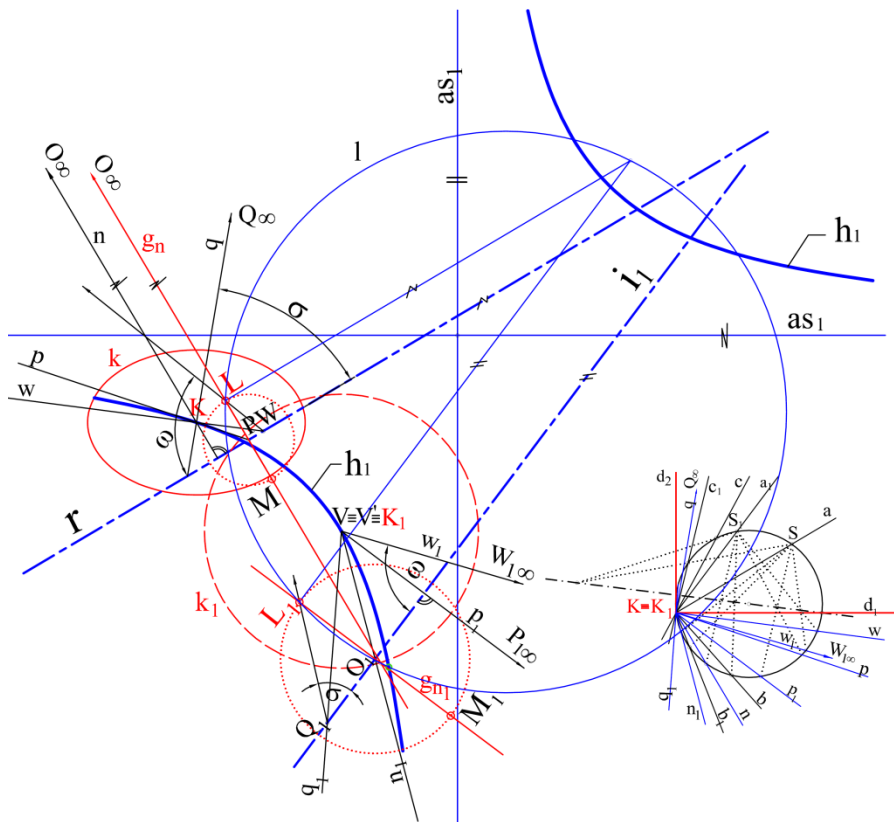


Сл. 37 Конструкција Аполонијеве хиперболе  $h_1$

Дакле, два пара пројективно придружених праменова правих са теменима  $K, K_I$  и  $L, L_I$  (жижама) производе две криве 2. реда: Аполонијеву хиперболу  $h_I$  и кружницу  $l$  [47, стр.57], респективно. У пресеку ове две конике постоје четири пресечне тачке. Три, од четири тачке, су  $D_I, D_2$  и  $D_3$  – двоструке тачке колинеарно придружених поља  $\alpha$  и  $\alpha_I$ . Да би биле изабране три одговарајуће тачке, могуће је:

а) *конструисати још једну конику* (из прамена коника, из става (6)), користећи нов пар пројективно придружених праменова правих, или

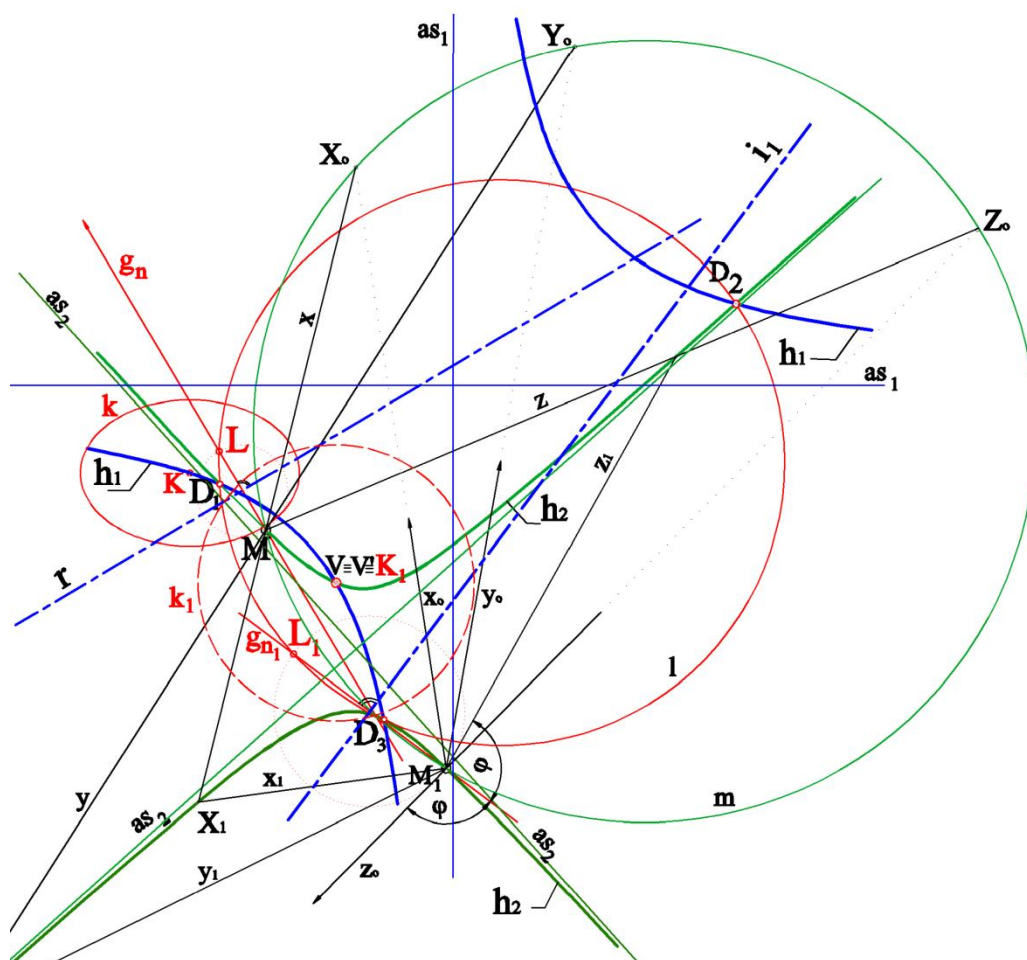
б) користити *методу елиминације* и одредити, које три тачке испуњавају услов ауто–колинеарног троугла: "одстојање од две двоструке тачке – темена на двострукој правој аутоколинеарног троугла, је подједнако с обзиром на пресечне тачке недогледница и двоструке праве " [15] (нпр. одстојања од двоструких тачака  $D_I D_2$ , до пресечних тачака са недогледницама  $r$  и  $i_I$ , на двострукој правој  $d_3$  аутоколинеарног троугла, су подједнака).



Сл. 38 Конструисање парова жижа за два колинеарна поља  $\alpha$  и  $\alpha_I$

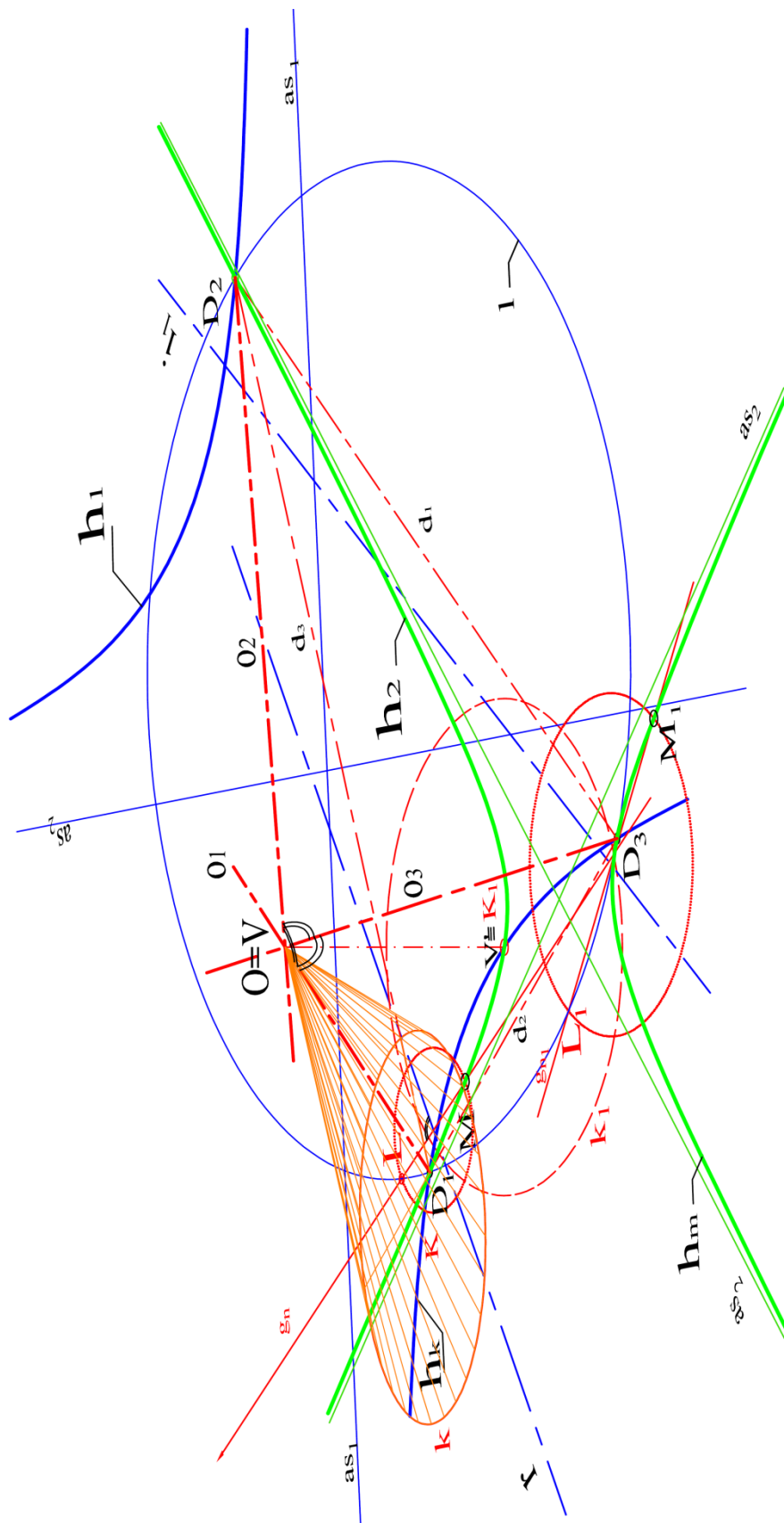
Према ставу (6), изабран је приступ генерисања нове – треће конике. За други пар жижа  $M, M_I$  у колинеарно придруженим пољима  $\alpha$  и  $\alpha_I$  важи особина:

ако се за један од два пројективно придружена прамена правих у тачкама  $M, M_1$ , изведе симетрична трансформација, око главне нормале  $g_{n1}$ , они ће генерисати нову Аполонијеву хиперболу  $h_2$ . У пресеку три конике, недвосмислено ће се издвојити три двоструке тачке  $D_1, D_2, D_3$  два колинеарно придружена поља  $\alpha$  и  $\alpha_1$ . Тако су (сл. 39) зраци прамена правих  $(x_o, y_o, z_o)$  симетрично трансформисани у односу на нормалу  $g_{n1}$ , у положај  $(x, y, z)$ . У пресеку са одговарајућим зрацима прамена  $(x_1, y_1, z_1)$ , добијене су тачке правоугле хиперболе  $h_2$ .

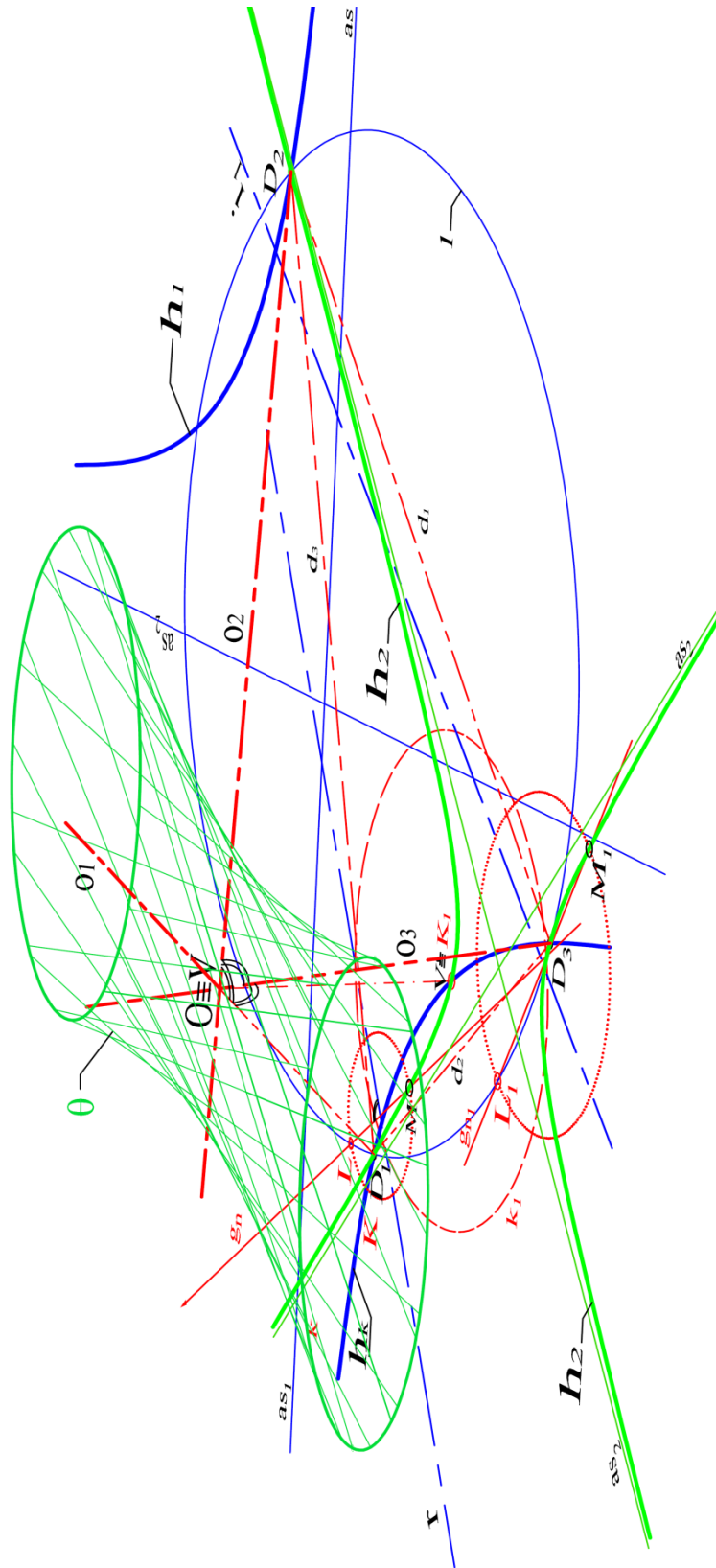


Сл. 39 Три двоструке тачке колинеарно придружених поља  $\alpha$  и  $\alpha_1$

Три конике: хипербола  $h_1$ , кружница  $l$  и хипербола  $h_2$ , у пресеку одређују три двоструке тачке  $D_1, D_2, D_3$  колинеарних поља  $\alpha$  и  $\alpha_1$ . Спојнице ових тачака са врхом  $V$ , су ивице ортогоналног троуглака  $o_1, o_2, o_3$  – три осе конуса  $\tau$  (сл. 40). Ивице и стране овог ортогоналног триедра су двоструке праве и равни колокалног свежња правих и равни, са теменом  $O \equiv V$ , у односу на коси асимптотски конус  $\tau$  и кружни конус  $\tau_1$ , истовремено, главне осе и равни симетрије површи  $\theta$  (сл. 41а).



Сл. 40 Ортогонални трокрак – осе  $o_1, o_2, o_3$  конуса  $\tau$  са пресечном кривом - елипсом

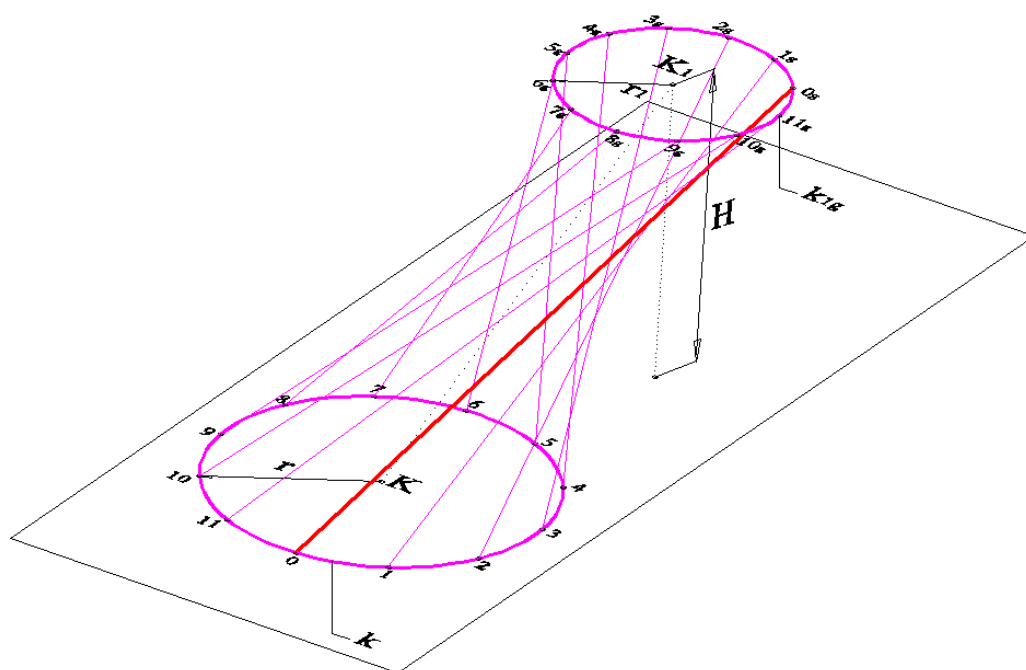


Сл. 40а Главне осе  $o_1o_2o_3$  КЈЕХ-а  $\theta$  и асимптотског конуса  $\tau$

### 3.5.3/3 Конструкција главних оса за ЈЕХ задат кружним пресецима

Утврђивањем релација кружних пресека и изводница површи ЈЕХ [50], установљено је да је са два произвољна кружна пресека ЈЕХ (као директрисе) у паралелним равнима и произвољно изабраном њиховом спојницом (као генератрисом), могуће задати површ ЈЕХ (видети погл. 4.1.4 ). Од три<sup>34</sup> могућности, у наредном примеру је изабрана варијанта, у којој су две усвојене пресечне кружнице неједнаких полупречника, са различитих страна цикличне равни.<sup>35</sup>

Две произвољне кружнице  $k$  и  $k_{Ig}$ , са центрима  $K$  и  $K_I$ , су кружни пресеци површи ЈЕХ, у две хоризонталне равни на растојању  $H$ . Кружнице су подељене на 12 једнаких сегмената. Спојница  $0-0_g$  је изабрана изводница, која клизи по водиљама, кружницама  $k$  и  $k_{Ig}$ , заузимајући положаје до  $11-11_g$ , образујући први систем изводница (сл. 41).



Сл. 41 Један систем изводница ЈЕХ задатог кружним пресецима и изводницом

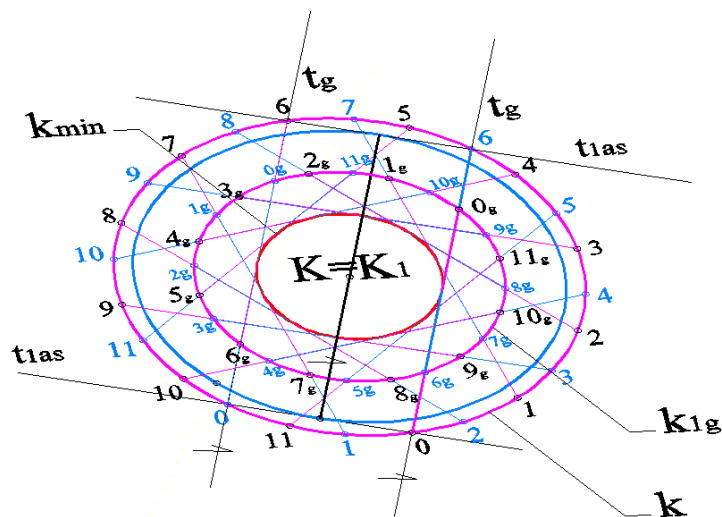
Карактеристични поглед (сл. 42), у коме се спојница центара  $K, K_I$  види као тачка, а све главне криве – кружнице у карактеристичним међусобним релацијама, је погодан за сагледавање површи и решење проблема конструисања другог

<sup>34</sup> У референтном ауторском раду [50] дате су три могућности задавања директриса–кружница.

<sup>35</sup> Назив за фиксну раван у центру површи паралелну равнима кружних пресека.

### 3. Једнограни елиптички хиперboloид – JEX

система изводница. Како тангентну раван површи JEX, у тачки кружнице  $k_{min}$ , образује пар изводница из различитих система (нпр. раван  $tg$  0–6 садржи изводнице 0–0<sub>g</sub> и 6–6<sub>g</sub>), то ће пресеци зрачне<sup>36</sup>  $tg$  равни (постављене кроз изводницу 0–0<sub>g</sub>) са кружницама  $k$  и  $k_I$  дати тачке (6–6<sub>g</sub>) чија је спојница тражена изводница другог система.



Сл. 42 Зрачна пројекција тангенцијалних равни мин. кружног пресека  $k_{min}$

За конструисану површ JEX–а, следи поступак одређивања три главне ортогоналне осе:

У пресеку пресечница три асимптотске равни  $as_{10-10}$ ,  $as_{5-5}$  и  $as_{1-1}$  (закљ. III/2) налази се средиште површи  $O$  (сл. 43). Трагови асимптотских равни су тангенте базиса асимптотског конуса – кружнице  $k_{as}$ . У равни симетрије асимптотског конуса  $\varphi_I$  (одређена је тачкама  $OO'K$ ) лежи пар изводница конуса  $i_{1,2}$ , чије су симетрале угла две главне осе површи,  $o_1$  и  $o_2$ . Трећа оса површи  $o_3$  је нормала равни  $\varphi_I$  коју образују прве две осе.

*За површи JEX–а, задату са два произвољна кружна пресека и једном изводницом, главне осе су коинцидентне главним осам његовог асимптотског косог конуса са кружном основом.* (7)

*За површи косог асимптотског конуса, са кружном основом, у врху конуса постоји јединствени пар ортогоналних оса  $o_1o_2$  – коинцидентних главним*

<sup>36</sup> Раван која пролази изводницом површи 0–0<sub>g</sub>, паралелна правој  $KK_I$ , а тангира минималну кружницу  $k_{min}$



### 3. Једнограни елиптички хиперboloид – ЈЕХ

---

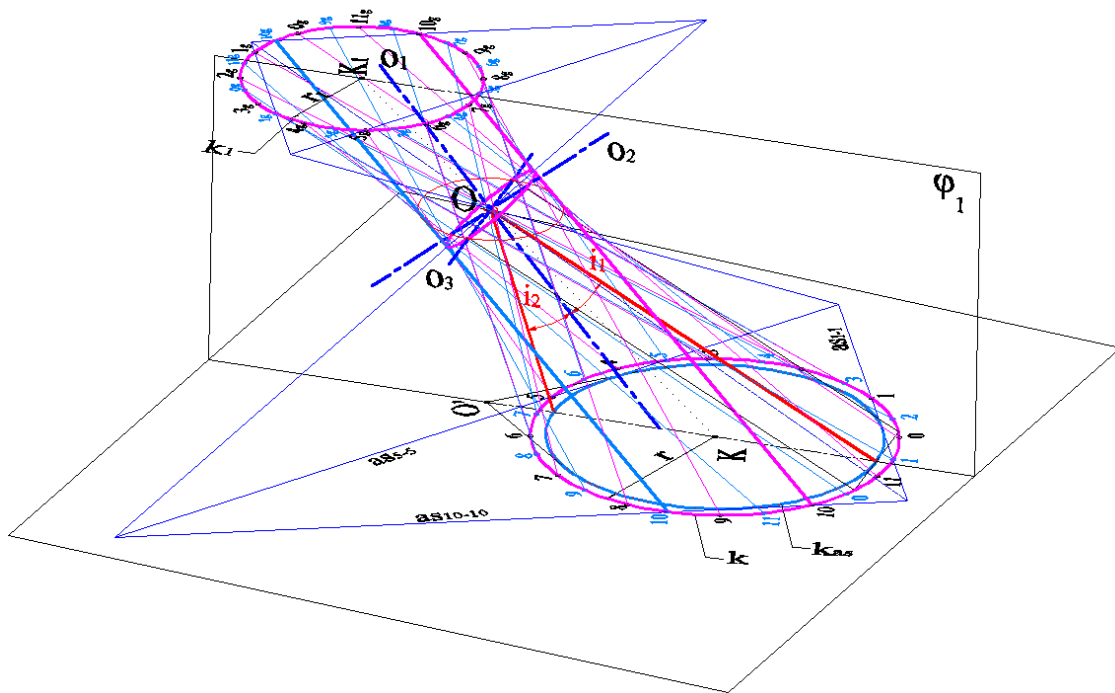
осама површи, које су симетрале угла који заклапају две изводнице конуса  $i_1$  и  $i_2$  у његовој равни симетрије  $\varphi_1$ . Трећа оса,  $o_3$  је нормала на раван  $\varphi_1$ .

(8)

Из претходна два става (7) и (8), може се закључити:

Главне осе ЈЕХ-а,  $o_1$  и  $o_2$  површи ЈЕХ-а, који је задат са два произвољна кружна пресека и једном изводницом, пролазе средиштем  $O$ , су симетрале угла две изводнице асимтотског конуса површи у његовој равни симетрије  $\varphi_1$ . Оса  $o_3$  је ортогонална на раван прве две осе.

**Закљ. III/6**



Сл. 43 Конструисана површ ЈЕХ са свим главним параметрима

#### 3.5.4 Стрикциона елипса и темена ЈЕХ

Ако кроз било коју изводницу површи поставимо раван управну на њену асимптотску раван, то ће бити тангенцијална раван површи за дирaлиште – централну тачку те изводнице. *Геометријско место централних тачака површи је стрикциона крива* [32, стр. 189]. Раван управна на главну унутрашњу осу  $\mathbf{o}_1$  сече површ по минималној пресечној кривој  $\mathbf{e}_{min}$ , која се назива – стрикциона или грлена елипса.

Равни симетрије секу површ ЈЕХ–а по "нормалним" пресецима и то:

- $\varphi_1$  као раван највећег подужног пресека – крива је хипербола  $\mathbf{h}_1$ ,
- $\varphi_2$  као раван најмањег подужног пресека – крива је хипербола  $\mathbf{h}_2$  и
- $\varphi_3$  као раван најмањег попречног пресека – крива је елипса  $\mathbf{e}_{min}$ , (сл.44).

*Осе стрикционе елипсе су коинцидентне правцима главних оса  $\mathbf{o}_2$  и  $\mathbf{o}_3$  површи ЈЕХ–а, истовремено и реалних оса хипербола  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  у равнима симетрије  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .*

(1)

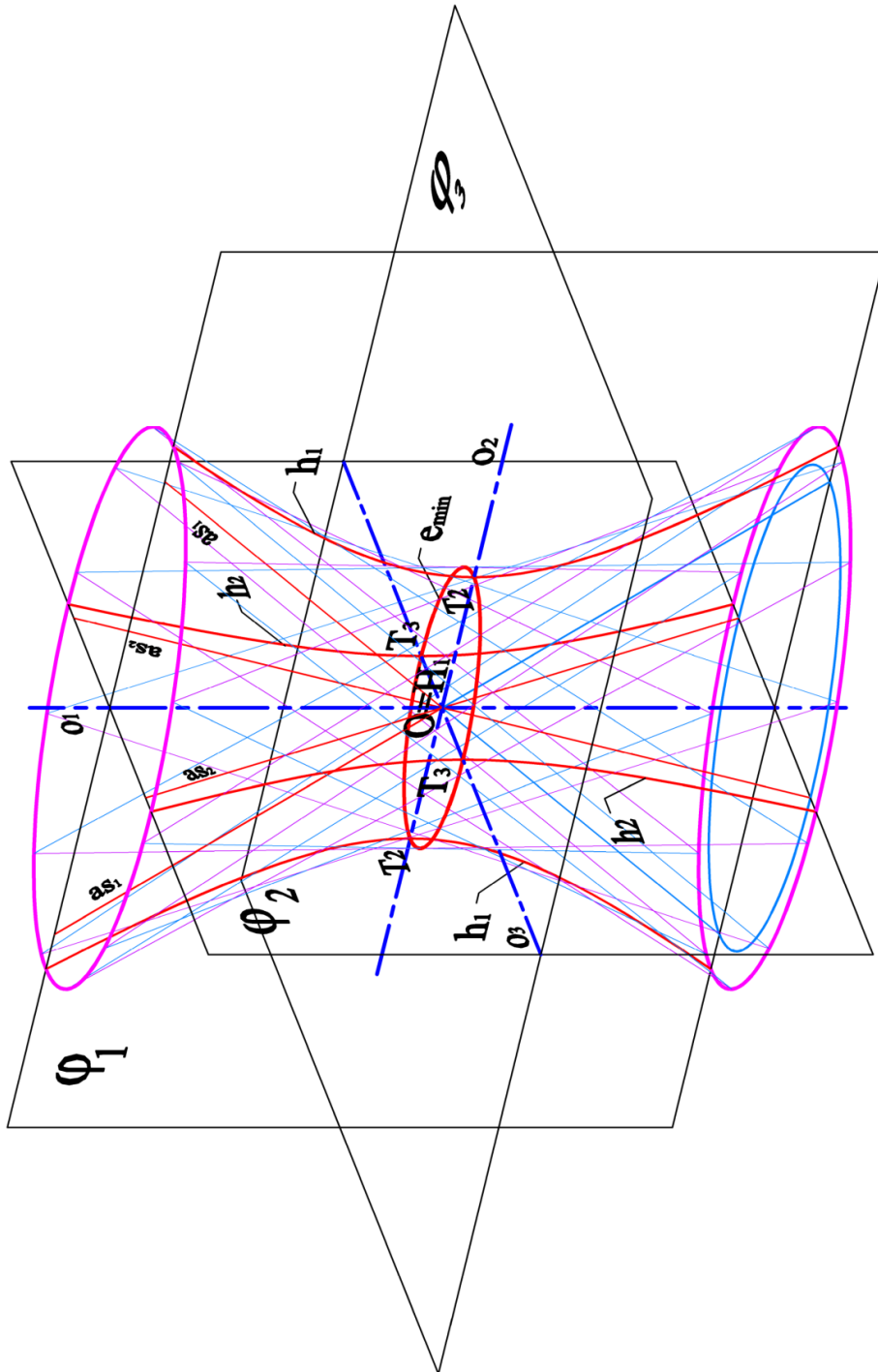
Крајње тачке на осама елипсе су *темена површи*. На главној оси  $\mathbf{o}_2$ , у равни симетрије  $\varphi_1$ , коинцидентна су теменима  $T_2T_2$  хиперболе  $\mathbf{h}_1$  (пресечна коника ЈЕХ–а и равни  $\varphi_1$ ), док се други пар тачака, на оси површи  $\mathbf{o}_3$ , поклапа са теменима  $T_3T_3$  хиперболе  $\mathbf{h}_2$  (пресечна коника ЈЕХ–а и равни  $\varphi_2$ ).

На следећим примерима је приказан принцип конструисања темених тачака стрикционе елипсе, за различите случајеве носача водиља, код којих је позната једна раван симетрије:

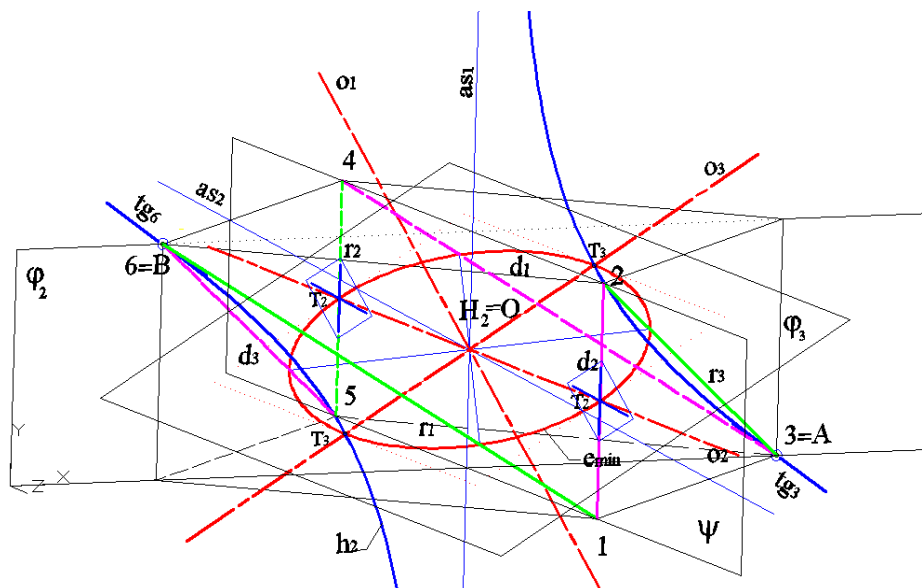
1) За носач водиља бр.2а (сл. 45), конструисана је стрикциона елипса ЈЕХ у равни симетрије  $\varphi_3$ . Тачке  $T_3T_3$ , на главној оси  $\mathbf{o}_3$ , су темена површи, конструисана као темена хиперболе  $\mathbf{h}_2$  (наставак погл. 3.5.3; сл.31) у равни симетрије  $\varphi_2$ . За конструкцију темена довољно је да су познате асимптоте<sup>37</sup> и једна тачка хиперболе. Други пар темена  $T_2T_2$  је конструисан као пресек осе  $\mathbf{o}_2$  и водиља  $\mathbf{d}_2$  и  $\mathbf{r}_2$ , које образују асимптотску раван  $\psi \perp \varphi_2$ . Парови паралелних водиља носача (асимптотске равни)  $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{r}_3 \parallel \mathbf{d}_3$  додирују стрикциону елипсу  $\mathbf{e}_{min}$  у паровима крајњих тачака нових пречника елипсе.

---

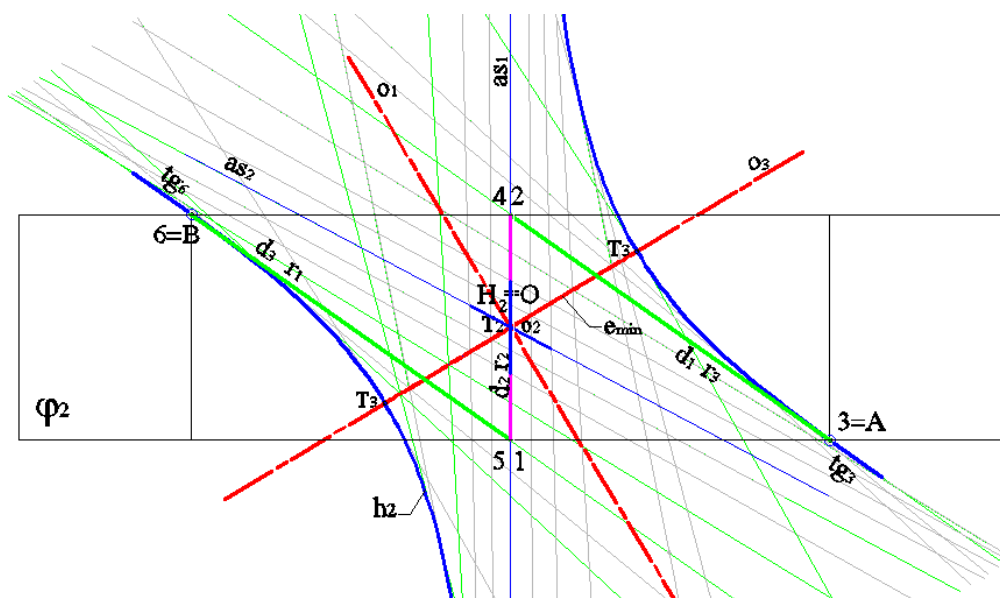
<sup>37</sup> У поступку у погл. 3.5.3 који се односи на сл.31 конструисане су асимптоте хиперболе у равни симетрије.



Сл.44 Три пресечне конике ЈЕХ-а у равнина симетрије  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$



Сл.45 Стрикциона елипса и темена површи за случај водиља на носачу бр.2а



Сл.45а Зрачна пројекција стрикционе елипсе и парова водиља носача бр.2

Због релација  $d_2 \parallel r_2 \parallel as_1$ , где је  $as_1$  – асимптота контурне хиперболе  $h_2$  у равни  $\varphi_2$ , поједностављен је поступак конструисања темена  $T_2T_2$  стрикционе елипсе. Стога, тангенцијалне равни површи у тим тачкама образују по две изводнице паралелне асимптотама  $as_{1,2}$  хиперболе  $h_2$  (сл. 45а).

2) Стрикциона елипса је конструисана и у случају носача водиља бр. 5 (сл. 46). Пар темена  $T_2T_2$  је коинцидентан теменима хиперболе  $h_1$  (наставка поступка 1. из погл. 2.5.3), у равни симетрије  $\varphi_1$  носача – четворостране зарубљене пирамиде.



Други пар тачака  $T_3T_3$ , конструисан је као пар темена Аполонијеве хиперболе  $h_A$ , која лежи у равни  $\alpha$  кроз средиште  $O$ , паралелно са две тангенцијалне равни у тачкама површи  $3=A$  и  $6=B$ . Асимптоте  $as_{1a}/as_{2a}$  хиперболе  $h_A$  су паралелне ортогоналним паровима водиља:  $as_{1a} \parallel d_3 \parallel r_3$  и  $as_{2a} \parallel d_2 \parallel r_2$ , које образују ове две тангенцијалне равни површи.

У пројекцији управној на раван симетрије  $\varphi_I$  (сл. 46а), приказане су међусобне релације елемената конструкције: зрачни положаји две тангенцијалне равни у тачкама  $A (d_3 \equiv r_2)$  и  $B (d_2 \equiv r_3)$ , хипербола  $h$  у равни  $\varphi_I$  са асимптотама  $as_{1,2}$ , теменима  $T_2T_2$  и главним тангентима површи  $tg_3$  и  $tg_6$ , пресечна раван  $\alpha$  која сече површ по хиперболи  $h_A$  и стрикциона елипса  $e_{min}$  у зрачном положају.

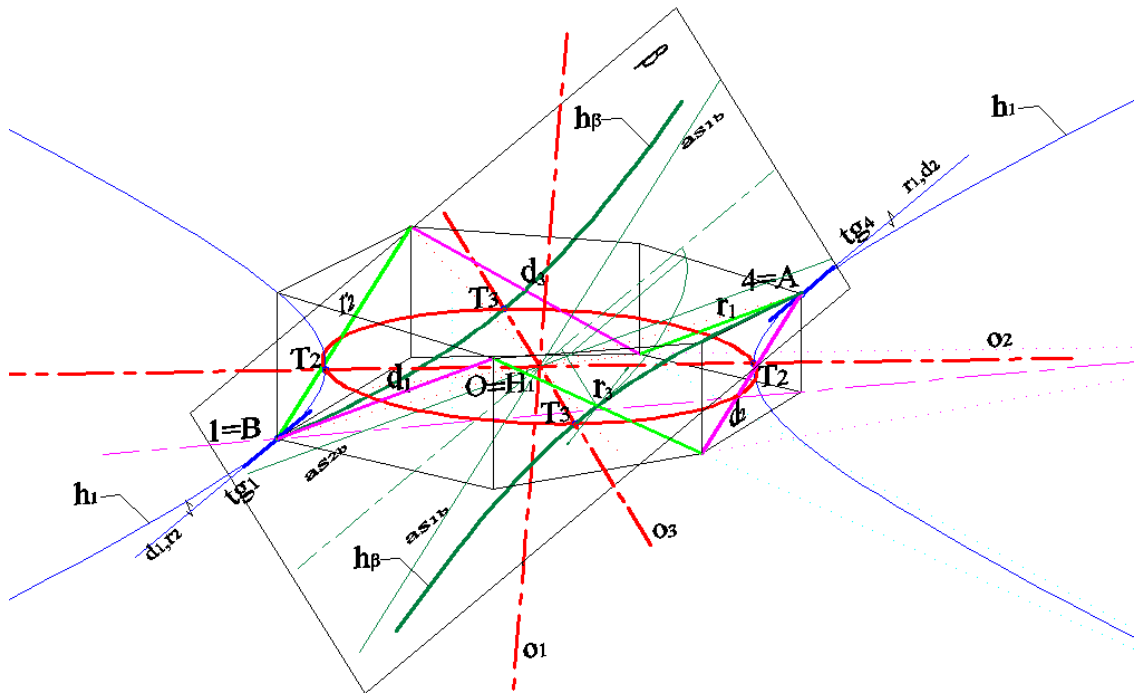
3) На примеру носача бр.10 – неправилне шестостране призме (сл.47), стрикци–она елипса је конструисана по истим принципима примењеним у случају носача бр.5. Темена  $T_2 T_2$  хиперболе  $h_I$ , у симетралној равни  $\varphi_I$ , коинцидентна су крајњим тачкама велике осе стрикционе елипсе.

Други пар темена – мале осе стрикционе елипсе коинцидентан је теменима  $T_3 T_3$  хиперболе  $h_\beta$  у равни  $\beta$ , која пролази средиштем  $O$  и осом  $o_3$  површи ЈЕХ–а. У две паралелне тангенцијалне равни површи, у тачкама  $1=B$  и  $4=A$ , које припадају хиперболи  $h$  леже парови водиља  $r_2d_1$  и  $d_2r_1$  паралелни правцима асимптота  $as_{1,2b}$  хиперболе  $h_\beta$ .

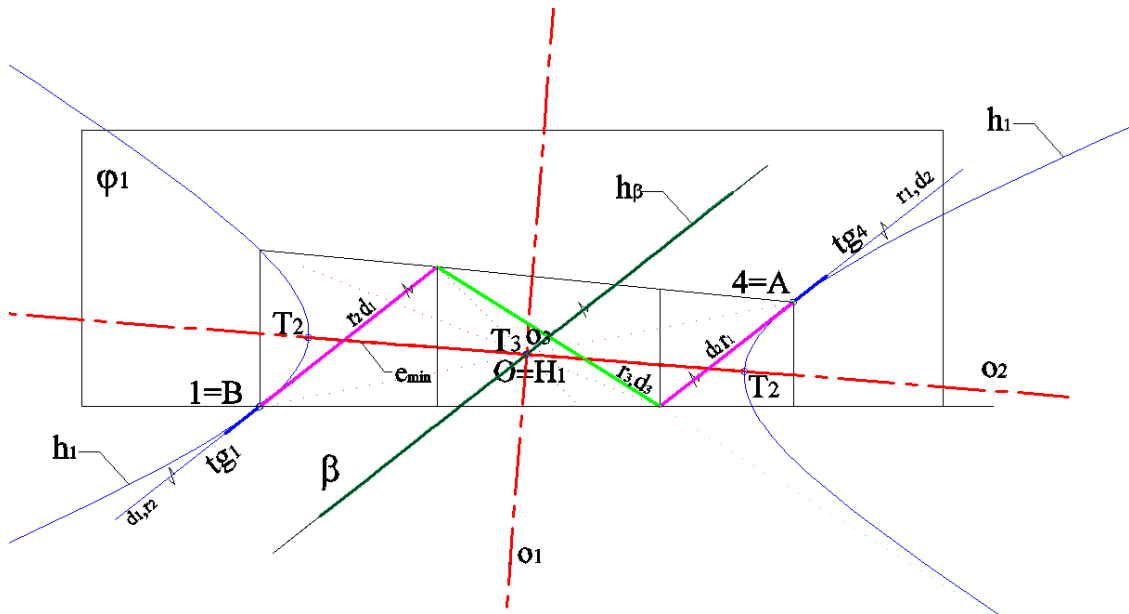
У пројекцији управној на раван симетрије  $\varphi_I$ , (сл. 47а) приказане су међусобне релације елемената конструкције: зрачни положаји две тангенцијалне равни у тачкама  $A (d_2 \equiv r_1)$  и  $B (d_1 \equiv r_2)$ , хипербола  $h_I$  у равни  $\varphi_I$ , теменима  $T_2T_2$  и главним тангентима површи  $tg_4$  и  $tg_1$ , пресечна раван  $\beta$ , која сече површ по хиперболи  $h_\beta$  и стрикциона елипса  $e_{min}$  у зрачном положају.

У оба случаја задатих носача водиља бр.5 и бр.10, за конструктивно одређивање парова темена стрикционе елипсе елементи конструкције су:

- парови водиља који образују две паралелне тангенцијалне равни у тачкама површи, које припадају познатој равни симетрије и пресечној хиперболи  $h$  и
- пресечна крива (хипербола) у равни управној на познату раван симетрије, а паралелна са две тангенцијалне равни у крајњим тачкама на дијаметру површи (А и В у датим примерима).



Сл. 47 Положај стрикционе елипсе у односу на водиље носача бр.10



Сл. 47а Зрачна пројекција стрикционе елипсе и парова водиља носача бр.10

На примерима са задатом равни симетрије носача, показано је следеће:

*Пар темена – крајњих тачака осе стрикционе елипсе на осам површи  $o_2$  и  $o_3$  је коинцидентан пару темена контурне хиперболе у равни симетрије  $\varphi_1$ , тј.  $\varphi_2$  JEX*

**Закљ. III/7**

Прамен равни ( $P$ ) постављен кроз главну осу ( $o_2$  или  $o_3$ ) у равни стрикционе елипсе ( $\varphi_3$ ) сече површи JEX по прамену хипербола ( $P_h$ ) са заједничким паром темена  $T_h T_h$  на оси – крајњим тачкама осе стрикционе елипсе. Асимптоте ових хипербола су пресечнице равни прамена и асимптотског конуса JEX.

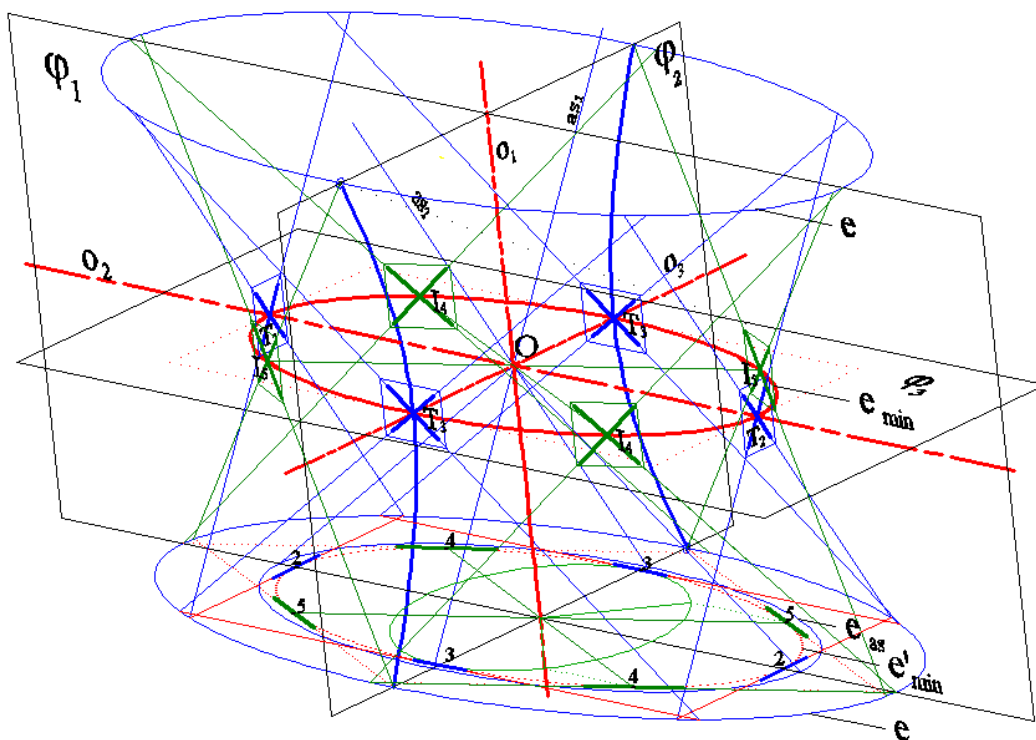
#### Закљ. III/8

Тангенцијалне равни површи JEX-а у теменима стрикционе елипсе (две изводнице површи из различитих система се секу у диралитшту) су паралелне одговарајућим равнима симетрије JEX-а и управне на асимптотске равни изводница, које образују тангенцијалну раван. (2)

Ова правилност произилази из познатих особина асимптотског конуса. Пар изводница асимптотског конуса  $3O-3O$  ( $as_{1,2}$ ), у симетралној равни  $\varphi_2$  је паралелан пару изводница у тангенцијалним равнима темена  $T_2, T_2$  на главној оси  $o_2$  (сл. 48). Пар изводница асимптотског конуса  $2O-2O$ , у симетралној равни  $\varphi_3$  је паралелан изводницама у тангенцијалним равнима темена  $T_3, T_3$ . У складу са тим, тангенцијалне равни у тачкама стрикционе елипсе  $I_4 I_4$  су паралелне равни, која пролази главном осом хиперболоида  $o_1$  и коњугованим правцем  $I_5 I_5$  и обрнуто. Спојнице тачака  $I_4 -I_4$  и  $I_5 - I_5$  на стрикционој елипси представљају коњуговани пар пречника. Први трагови тангенцијалних равни су тангенте пројекције стрикционе елипсе  $e_{min}$  на базисну раван хиперболоида.

Пример на сл.49 (носач бр. 2а) приказује конструисане парове тангенцијалних равни у теменима  $T_2 T_2$  и  $T_3 T_3$  стрикционе елипсе  $e_{min}$ , помоћу базисних кривих:  $e$  – базис JEX-а и  $e_{as}$  – одговарајућег асимптотског конуса, за површ задату носачем бр.2а. Базисна елипса  $e$  је конструисана као концентрична елипси  $e'_{min}$  (ортогонална пројекција стрикционе елипсе на раван базиса  $\alpha$ ), која пролази тачком  $A$  просторног носача водиља. Трећа концентрична крива –  $e_{as}$ , базис асимптотског конуса, пролази тачкама продора асимптота  $as_1$  и  $as_2$  хиперболе  $h_2$  – изводница асимптотског конуса кроз раван  $\alpha$ . У крајњим тачкама II–II и III–III главних ортогоналних пречника елипсе  $e'_{min}$ , уцртани су правци трагова тангенцијалних равни (тангенте  $tg_{II}$ ,  $tg_{III}$ ). Изводнице у овим тангенцијалним равнима су паралелне изводницама асимптотског конуса у паралелним равнима – равнима симетрије кроз средиште  $O$  површи JEX-а, тј. паровима асимптота ( $as_{1,2}$ ) пресечних хипербола ( $h_1$  и  $h_2$ ).





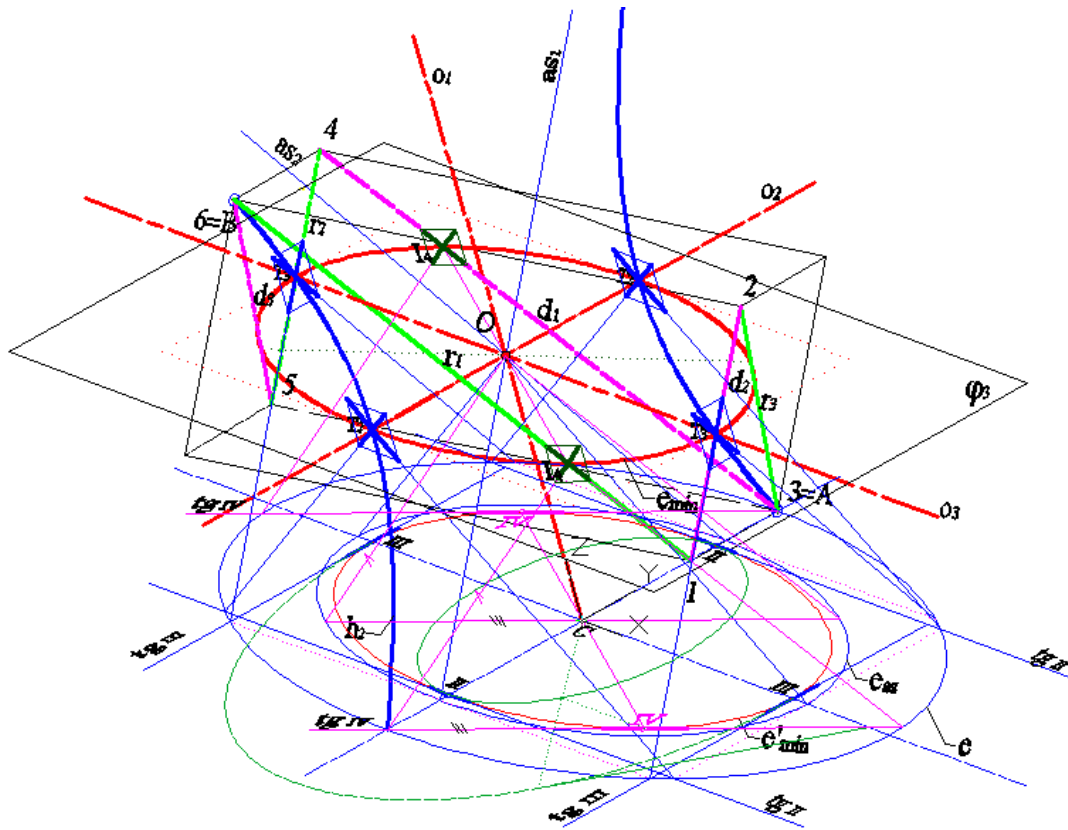
Сл. 48 Тангенцијалне равни у теменима стрикционе елипсе

Исти принцип важи и за произвољно изабрани пар тачака  $I_4 I_4$  на дијаметру стрикционе елипсе (додир водиља  $r_I$  и  $d_I$  са стрикционом елипсом), у коме су такође конструисане тангенцијалне равни површи ЈЕХ–а. У равни базиса, помоћу афине кружнице, конструисан је коњуговани правац, правац тангенте тачке  $IV$ , правцу дијаметра  $I_4 I_4$ ; изводнице тангенцијалне равни (у диралитима  $I_4 I_4$ ) полазе из тачака пресека трага равни  $tg_4$  и базисне елипсе  $e$ , а паралелне су изводницама асимптотског конуса (у равни кроз средиште  $O$  и осу  $o_1$ ), чији је први траг паралелан трагу  $tg_{IV}$ .

Из претходних разматрања може се закључити:

*Парови изводница површи ЈЕХ–а, које чине тангенцијалне равни у теменима стрикционе елипсе, на осам површи  $o_2$  и  $o_3$ , су паралелни правцима асимптота пресечних хипербола  $h_1, h_2$  у симетралним равнима  $\varphi_1, \varphi_2$  респективно, тј. изводницама асимптотског конуса у овим равнима.*

**Закљ. III/9**

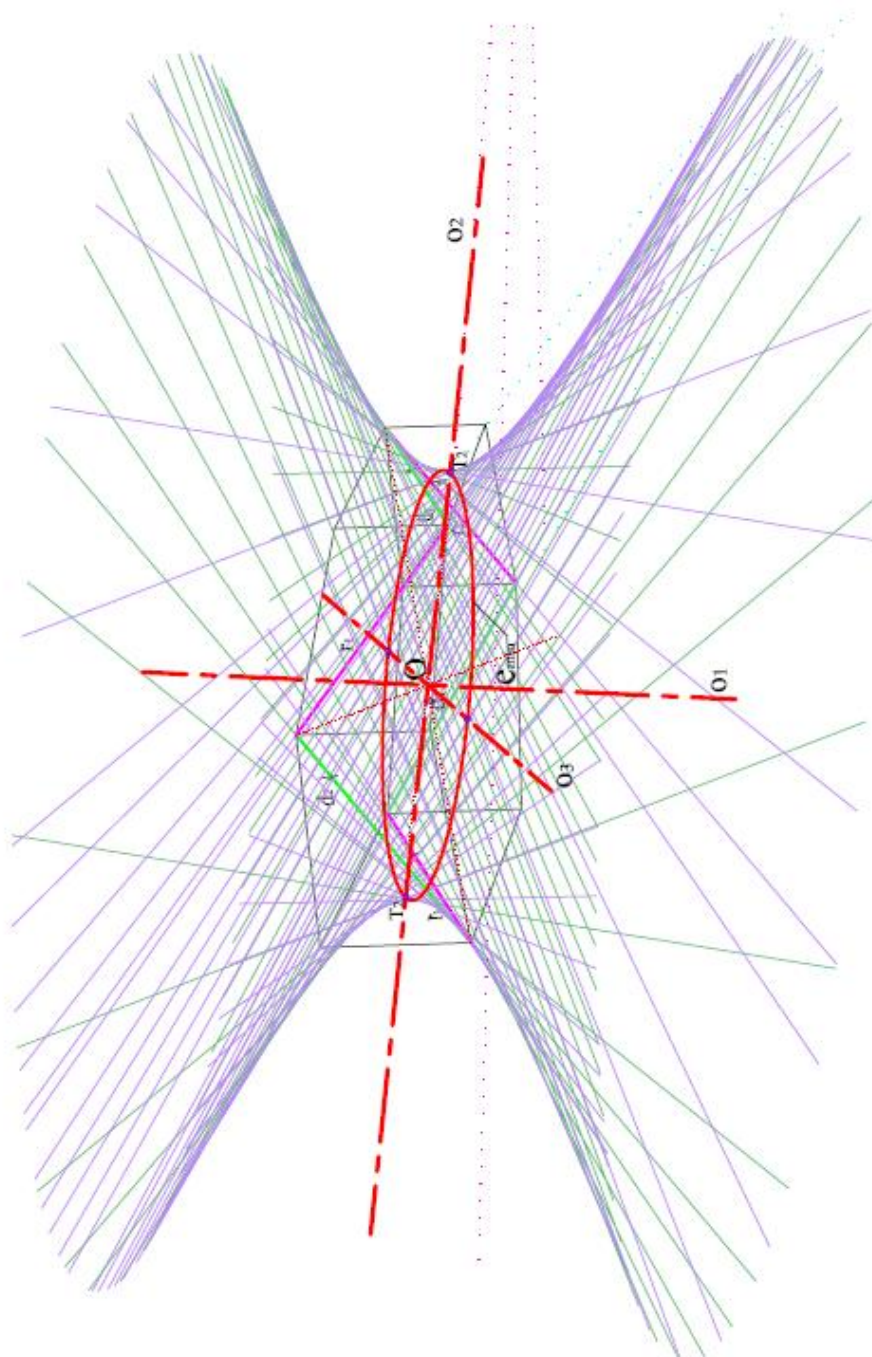


Сл.49 Парови тангенцијалних равни у тачкама стрикционе елипсе носача бр. 2а

*Парови изводница површи ЈЕХ – а, који образују паралелне тангенцијалне равни у крајњим тачкама неког дијаметра стрикционе елипсе, су паралелни пару асимптота пресечне хиперболе (пар изводница асимптотског конуса) површи, у равни која садржи главну осу  $o_1$  и дијаметар стрикционе елипсе коњугован изабраном.*

**Закљ. III/10**

Пример на сл.50 приказује финално конструисану површ ЈЕХ, са два система изводница, у задатим оквирима носача бр.10 са најважнијим параметрима: главним осама, стрикционом елипсом и теменима.



Сл. 50 Конструисана површ ЈЕХ са свим главним параметрима – носач бр. 10

## 4. Просторне колинеарне трансформације ЈХ

---

Пошавши од познате особине ЈЕХ, да настаје кретањем једне трансверзале по три водиле – мимоилазне праве простора, које се могу „уписати“ у једну праву призму, као дијагонале њених страна, сачињен је концепт конструисања ЈЕХ применом просторне афине трансформације.

У поглављу 3.2.1 је описан поступак генерисања ЈЕХ помоћу трансверзале три мимоилазне праве простора. За конструкцију, која је тема ове секције, важно је тврђење:

*„Изводнице једног и другог система (ЈЕХ) чине скуп мимоилазних правих у простору, које су паралелне изводницама једног елиптичког дирекционог конуса. Изводнице елиптичког конуса заклапају различите нагибне углове према равни управној на осовину елиптичког дирекционог конуса“ [52, стр.10]<sup>38</sup>. (1)*

Ова чињеница омогућава да се три мимоилазне праве – водиле ЈЕХ поставе као дијагонале страна праве тростране призме, са базисом, разнокраким троуглом  $ABC$ .

Са друге стране, узмимо да :

*Изводнице оба система ротационог хиперboloида чине скуп мимоилазних правих простора, које су паралелне изводницама једног ротационог дирекционог конуса, чије све изводнице заклапају исти угао са равни управном на осовину конуса. (2)*

У овом, специјалном случају једнограног хиперboloида, задатом са три мимоилазне праве, може се задати да су дијагонале страна праве тростране призме, са базисом једнакостраничним троуглом  $A'B'C'$ , водиле ЈРХ<sup>39</sup>.

### 4.1 Трансформације ЈХ афиним придруживањем базиса

Могућност афиног придруживања два троугла: разностраничног и једнакостраничног, са одговарајућим положајем осе афинитета, повезала је у простору две праве тростране призме: правилну, са једнакостраничним троуглом као базисом и неправилну, са разностраничним троуглом као базисом. У њих су "уписане" водиле ЈРХ и ЈЕХ (по три мимоилазне праве простора), као дијагонале страна обе призме. На овај начин су међусобно афино придружени и хиперboloиди ЈРХ и ЈЕХ, који настају "кретањем" једне трансверзале дуж три

---

<sup>38</sup> Цитат је део ауторског рада кандидата, наведеног у референцама под бр. [52]

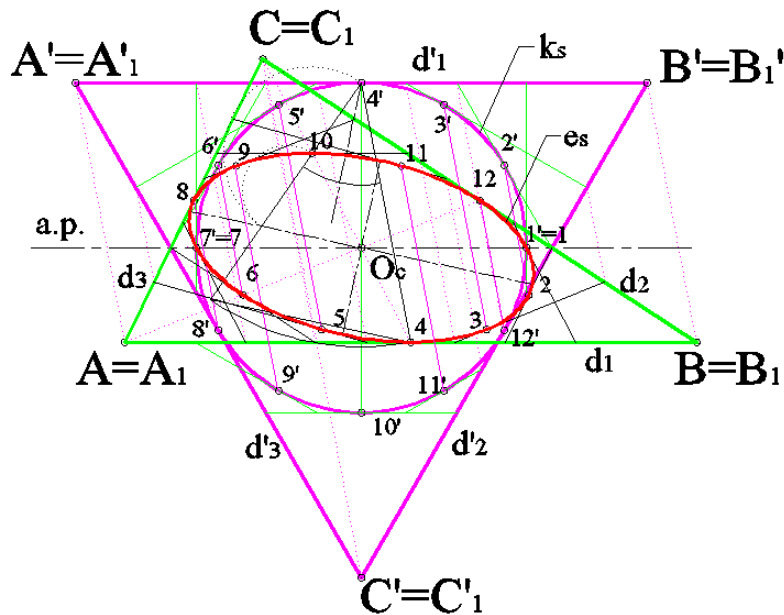
<sup>39</sup> Скраћеница за једнограни ротациони хиперboloид

#### 4. Просторне колинеарне трансформације ЈХ

задате водиле – дијагонале страна усвојених призма. Дакле:

*Придруживање две праве тростране призме са базисима једнакокраким и разнокраким троуглом, тако да су дијагонале страна ових призма – по три мимоилазне изводнице (из истог система) два једнограна хиперboloида, је специјални случај колинеарне (афине) трансформације  $JPX$  у прав  $JEX$ .* **Закљ. IV/1**

На сл. 51, приказана је прва ортогонална (зрачна) пројекција две тростране афино придружене праве призме  $ABCA_1B_1C_1$  и  $A'B'C'A'_1B'_1C'_1$ . Базису призме-разнокраком троуглу  $ABC$ , афино је придружен базис - једнакокраки троугао  $A'B'C'$ , при чему је уписаном кругу  $k_s$  првог троугла, придружена уписана елипса  $e_s$  другог троугла, са истим центром  $O_c$ , којим пролази оса  $a.p.$  афинитета. Изабрана оса афинитета је паралелна ивици троугла  $AC$ <sup>40</sup> [52].



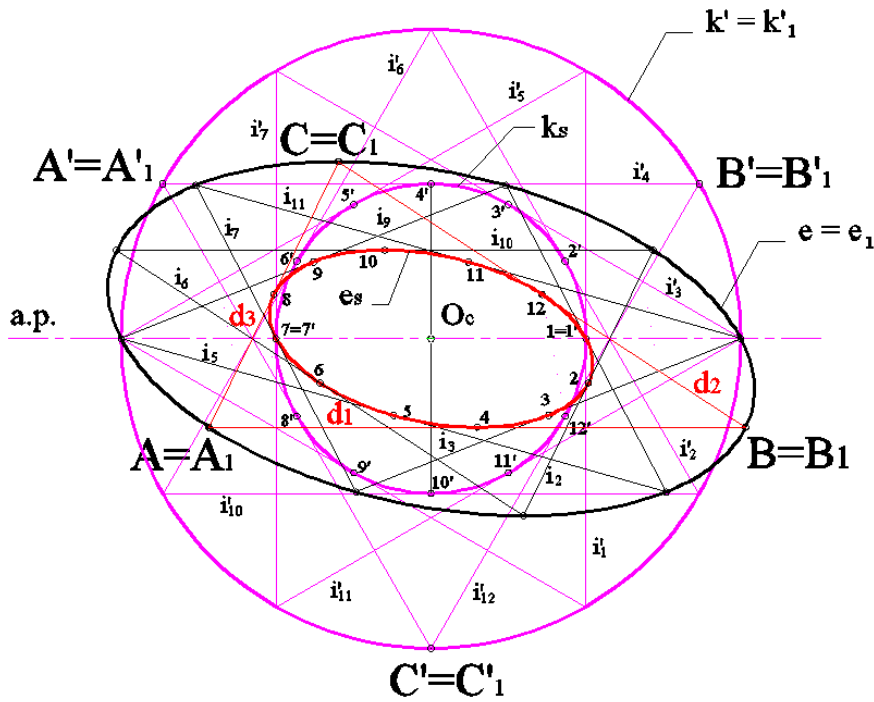
Сл. 51 Афино придружени базиси две праве тростране призме

У просторној диспозицији, приказане зрачне пројекције страна двеју призма представљају пројекције водиле – три мимоилазне праве простора два једнограна хиперboloида  $JPX$  и  $JEX$  и то:

<sup>40</sup> У ауторском раду, реф. бр. [52], ради једноставности конструктивног поступка, за положај осе афинитета, изабран је онај, који је паралелан једној (било којој) ивици разнокраког троугла  $ABC$ .

#### 4. Просторне колинеарне трансформације JX

- у призму  $ABCA_1B_1C_1$ :  $d_1 (AB_1)$ ,  $d_2 (BC)$ ,  $d_3 (CA)$  уписан  $JEX$  ;
- у призму  $A'B'C'A'_1B'_1C'_1$ :  $d_1' (A'B')$ ,  $d_2' (B'C')$ ,  $d_3' (C'A')$  уписан  $JPX$ .

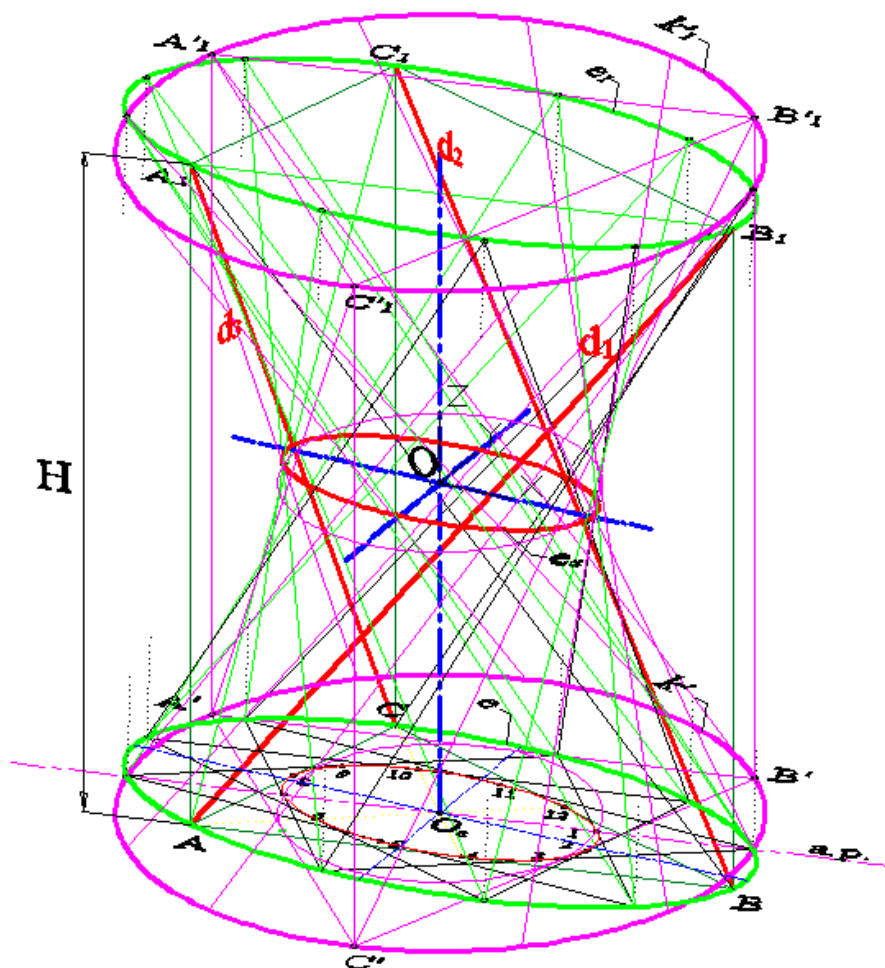


Сл. 52 Зрачне пројекције тангенцијалних равни два афино придружена JX

Кружница  $k_s$  и елипса  $e_s$  представљају прве ортогоналне пројекције стрикционе кружнице  $JPX$  и стрикционе елипсе  $JEX$  (сл.52). Међусобно афино придружене тангенте кружнице  $k_s$  ( $i'_1 - i'_{12}$ ) и елипсе  $e_s$  ( $i_1 - i_{12}$ ), у придруженим паровима тачака две криве ( $1-1'$ ) до ( $12-12'$ ) су пројекције изводница (тј. зрачне пројекције тангенцијалних равни у тачкама стрикционих кривих) два хиперboloида. Описане кружнице  $k' = k'_1$  (око троугла  $A'B'C'$ ) и описане елипсе  $e = e_1$  (око троугла  $ABC$ ) представљају базисне криве два афино придружена хиперboloида  $JPX$  и  $JEX$ .

3D модел JX је у потпуности дефинисан задавањем висине призме, односно, растојањем две базисне криве  $k-k_1$  и  $e-e_1$ . У изабраном случају, приказаном на сл. 53, дефинисана је висина  $H$  призме  $A'B'C'A'_1B'_1C'_1$ , идентична висини њој афино придружене призме  $ABCA_1B_1C_1$ .

Стрикционе криве  $k_s$ , као и  $e_s$ , налазе се на половини висине  $H$ . Положај изводница у простору, је дефинисан првом ортогоналном пројекцијом. Спајањем одговарајућих парова тачака базиса елипси  $e$  и  $e_1$  добијен је 3D модел ПЈЕХ-а.



Сл. 53 Просторни модел афино трансформисаног ЈРХ у ПЈЕХ

#### 4.2 Трансформације ЈХ, ако постоји коинцидентна пресечна крива

Идеја "уписивања три мимоилазне праве – водиље ЈХ, као дијагонале страна, у тространу призму", отвара нове могућности поступком афиног трансформисања праве тростране призме, у косу, са једнаким базисима, једноставним смицањем горњег базиса (*shear mapping* или *transvection*)<sup>41</sup> (сл.54). Вектор смицања је паралелан равни коинциденције, у којој леже два поклопљена базиса, праве и косе призме.

*Дијагонале страна (уписане водиље ЈРХ) праве правилне тростране призме имају исти угао нагиба према равни базиса, док дијагонале страна*

<sup>41</sup> Термини на енглеском језику за ову врсту трансформације.



## 4. Просторне колинеарне трансформације ЈХ

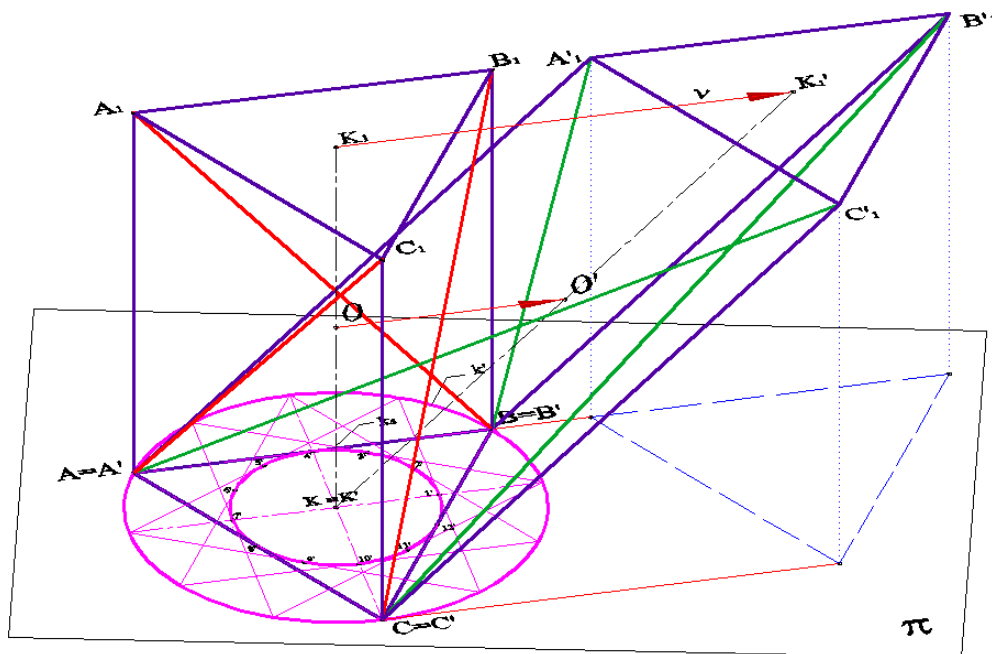
трансформисане косе правилне призме, граде различите углове према коинцидентној равни базиса. (3)

На основу става (3), може се закључити:

Нека су у две тростране призме, исте висине, праву и косу, са равни коинциденције  $\pi$ , у којој лежи њихов заједнички базис, једнакостранични троугао, као дијагонале страна, уписане по три водиле  $JPX$ -а ( $\theta_r$ ) и косог  $JEX$ -а ( $\theta_e$ ), респективно, тада важи законитост:

Просторном трансформацијом – смицањем једног кружног пресека ( $k$ )  $JPX$ -а ( $\theta_r$ ), за усвојени вектор  $v$ , паралелан равни коинциденције  $\pi$ , у којој леже две поклопљене пресечне криве  $k \equiv k_1$ , настаје коси  $JEX$  ( $\theta_e$ ), чије су једна раван симетрије и сви кружни пресеци, паралелни равни коинциденције  $\pi$ , инваријанте трансформације.

Закљ. IV/2



Сл.54 Трансформација праве у косу тространу призму смицањем базиса

### 4.2.1 Трансформација $JPX$ , или $JEX$ , у коси $JEX$

Задати вектор смицања  $KK_1'$ , у примеру на сл.55, је хоризонталан, паралелан са равни коинциденције  $\pi$  (хоризонтална раван две пресечне криве  $k \equiv k_1$ ) и везује се за тежиште горњег базиса – једнакостраничног троугла праве правилне тростране.  $JPX$  је задат базисним кривама, кружницама  $k$  и  $k_g$ , чији су



#### 4. Просторне колонеарне трансформације ЈХ

---

центри  $K$  и  $K_1$  тежишта троуглова  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  респективно, базиса задате призме (према моделу на сл.54), са по дванаест правих изводница у оба система. Изводнице ЈРХ, означене ознакама  $1,1g - 12,12g$ , после трансформације (смицањем горњег базиса за вектор  $K_1-K'$ ), постају изводнице ЈЕХ, са ознакама  $1',1'g - 12',12'g$ . Добијени хиперболоид је елиптички, са кружним базисима. Главне осе  $o'_1o'_2o'_3$  заузимају нов положај. Наиме, оса ЈЕХ–а  $o'_1$  је оса симетрије угла између две изводнице  $i_1$  и  $i_2$ , које припадају асимптотском конусу ЈЕХ и леже у заједничкој равни симетрије  $\varphi_1 (o_1o_2)$  два хиперболоида. Положај друге две главне осе  $o'_2$  и  $o'_3$  је дефинисан условом ортогоналности  $o'_1 \perp o'_2 \perp o'_3$ .

Стриксиона кружница  $s$  ЈРХ, после трансформације постаје најмањи кружни пресек  $s'$  ЈЕХ–а, док нова стриксиона крива – елипса  $s_t$ , лежи у равни коју образују две главне осе  $o'_2$  и  $o'_3$  и има два заједничка темена са кружницом  $s'$ .

На основу закљ. IV/2, по аналогiji, може се закључити да се поступак трансформације (в. погл. 3.2.2) смицањем једне пресечне криве хиперболоида, по правцу вектора  $v$ , може применити и у случају трансформисања правога ЈЕХ–а у коси ЈЕХ(сл. 56а). Стога:

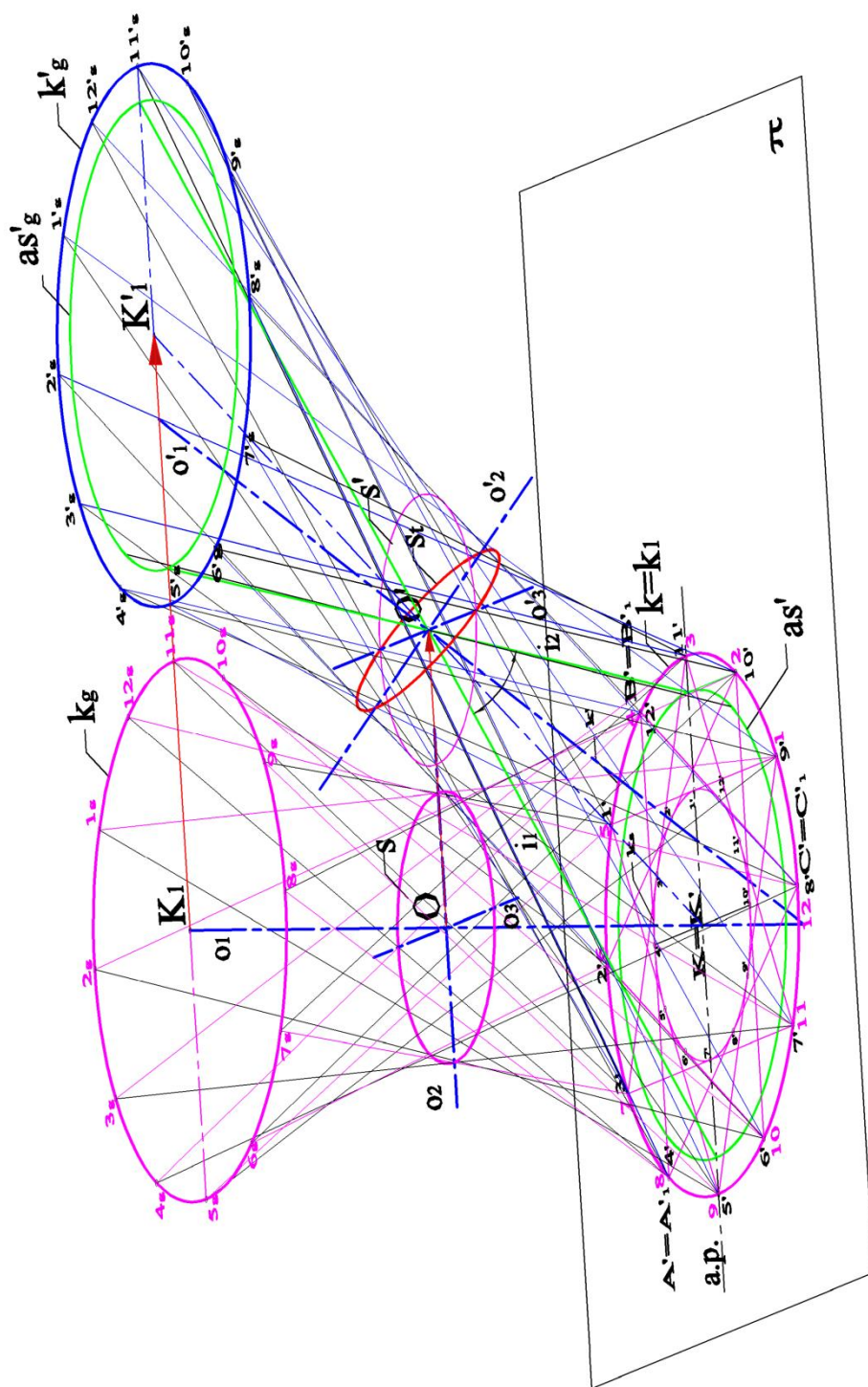
*Просторном трансформацијом – смицањем једног елиптичког пресека ЈЕХ ( $\theta$ ), за усвојени вектор  $v$ , у његовој равни симетрије ( $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ ), паралелан равни коинциденције  $\pi$ , у којој леже поклопљене пресечне криве  $e \equiv e'$  два хиперболоида ( $\theta$  и  $\theta'$ ), настаје коси ЈЕХ ( $\theta'$ ), чије су инваријанте трансформације, једна равна симетрије и сви пресеци површи паралелни равни коинциденције  $\pi$ .*

#### **Закљ. IV/3**

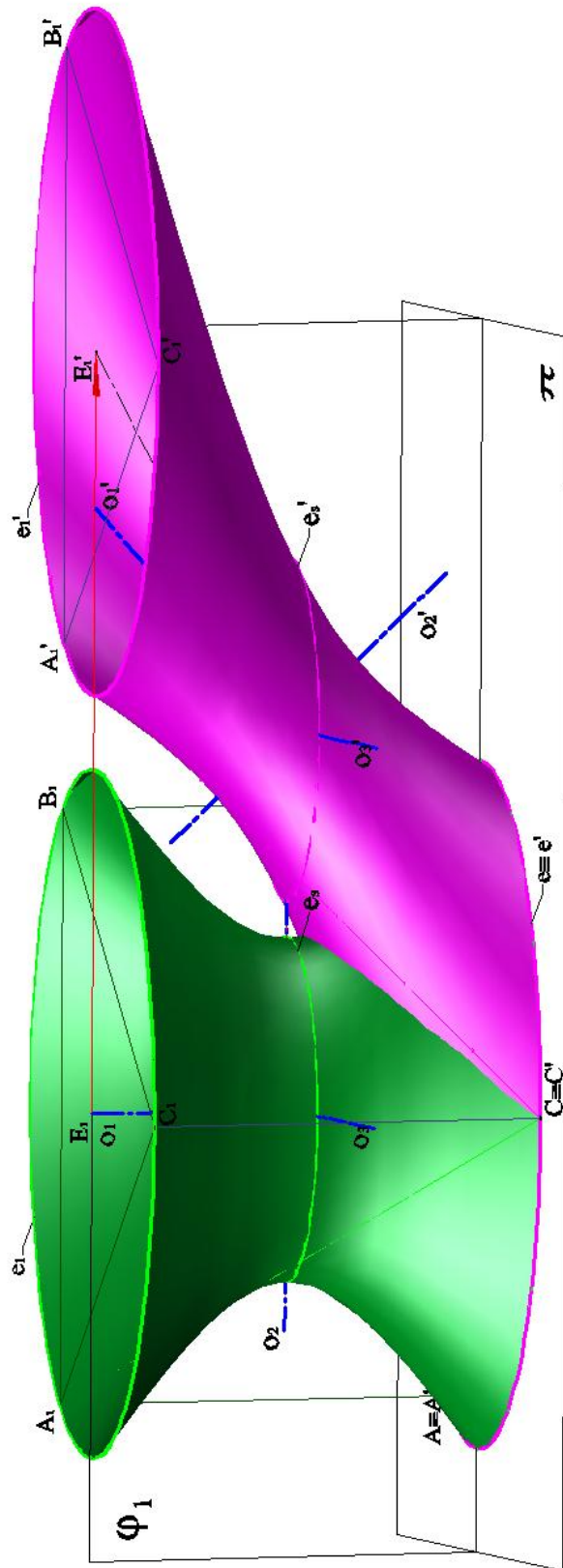
Слично, дефинисањем правца вектора смицања, трансформацијом се од ПЈЕХ добија општи случај КЈЕХ (сл. 56б). То значи да:

*Просторном трансформацијом – смицањем једног елиптичког пресека ЈЕХ за усвојени вектор  $v$ , ван равни симетрије ( $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ ), паралелан равни коинциденције  $\pi$ , у којој леже поклопљене пресечне криве  $e' \equiv e''$  два хиперболоида ( $\theta'$  и  $\theta''$ ), настаје коси ЈЕХ општег случаја, чије су инваријанте трансформације, сви пресеци површи паралелни равни коинциденције  $\pi$ .*

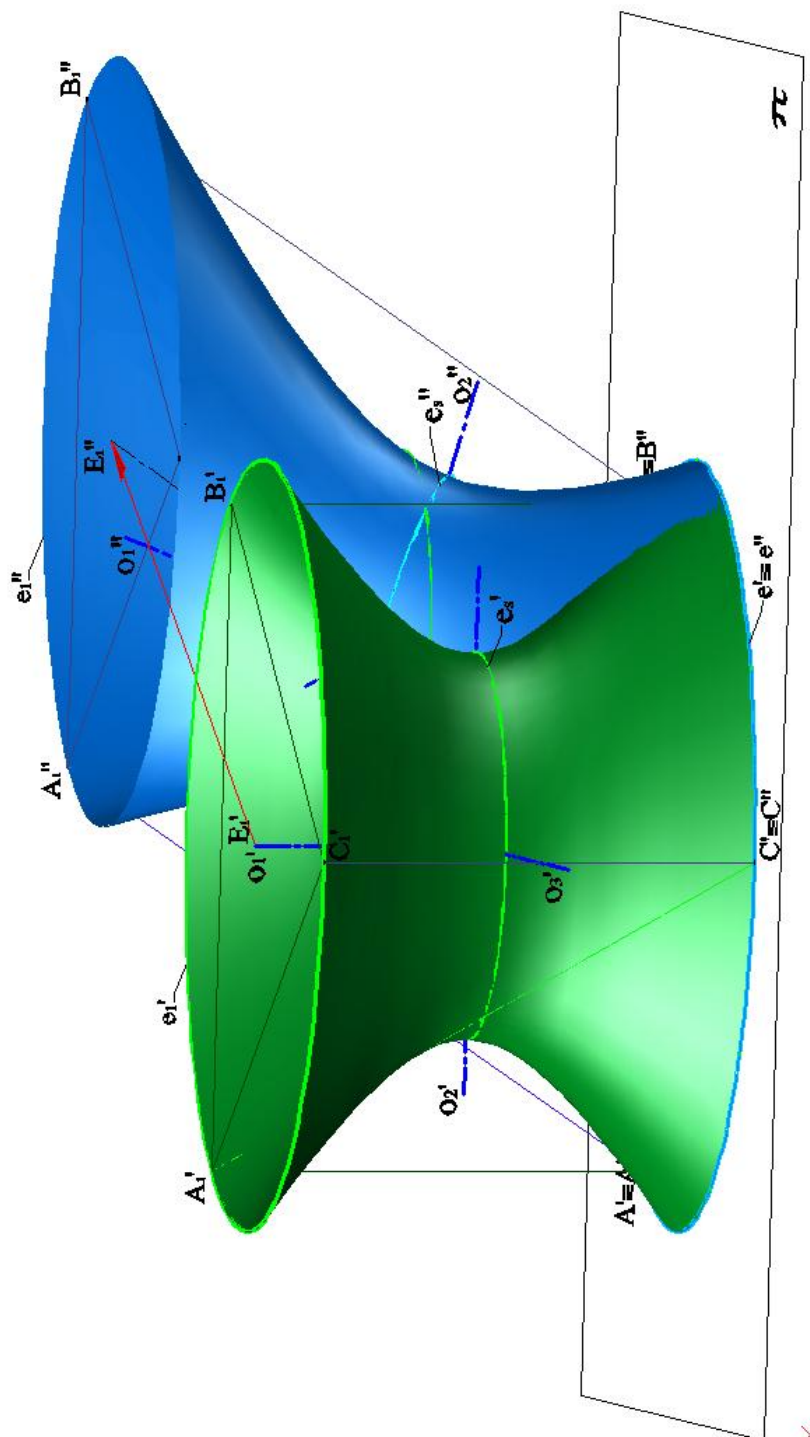
#### **Закљ. IV/4**



Сл. 55 Трансформација ЈХ у КЈЕХ – заједничка пресечна крива је кружница



Сл. 56а Трансформација ПЈЕХ у КЈЕХ са заједничком равни симетрије

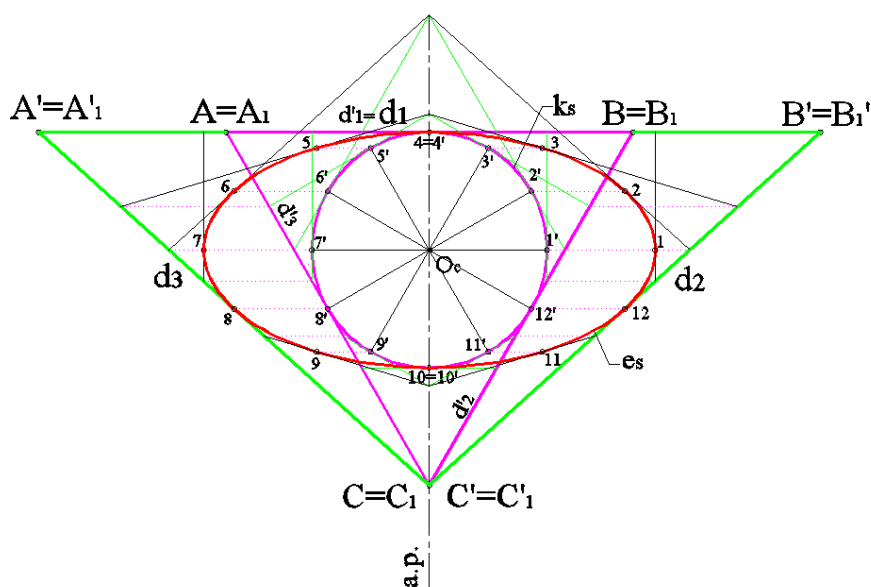


Сл. 566 Трансформација ПЈЕХ у КЈЕХ општег случаја

### 4.2.2 Трансформација ЈРХ у општи случај косог ЈЕХ

Обједињавањем два претходно образложена поступка (из погл. 4.1 и 4.2), може се спровести трансформација ЈРХ, у општи случај косог ЈЕХ. Први "корак" је трансформација ЈРХ у прав ЈЕХ, а други, трансформација конструисаног правог ЈЕХ у коси ЈЕХ, општег случаја (према закљ. III/4).

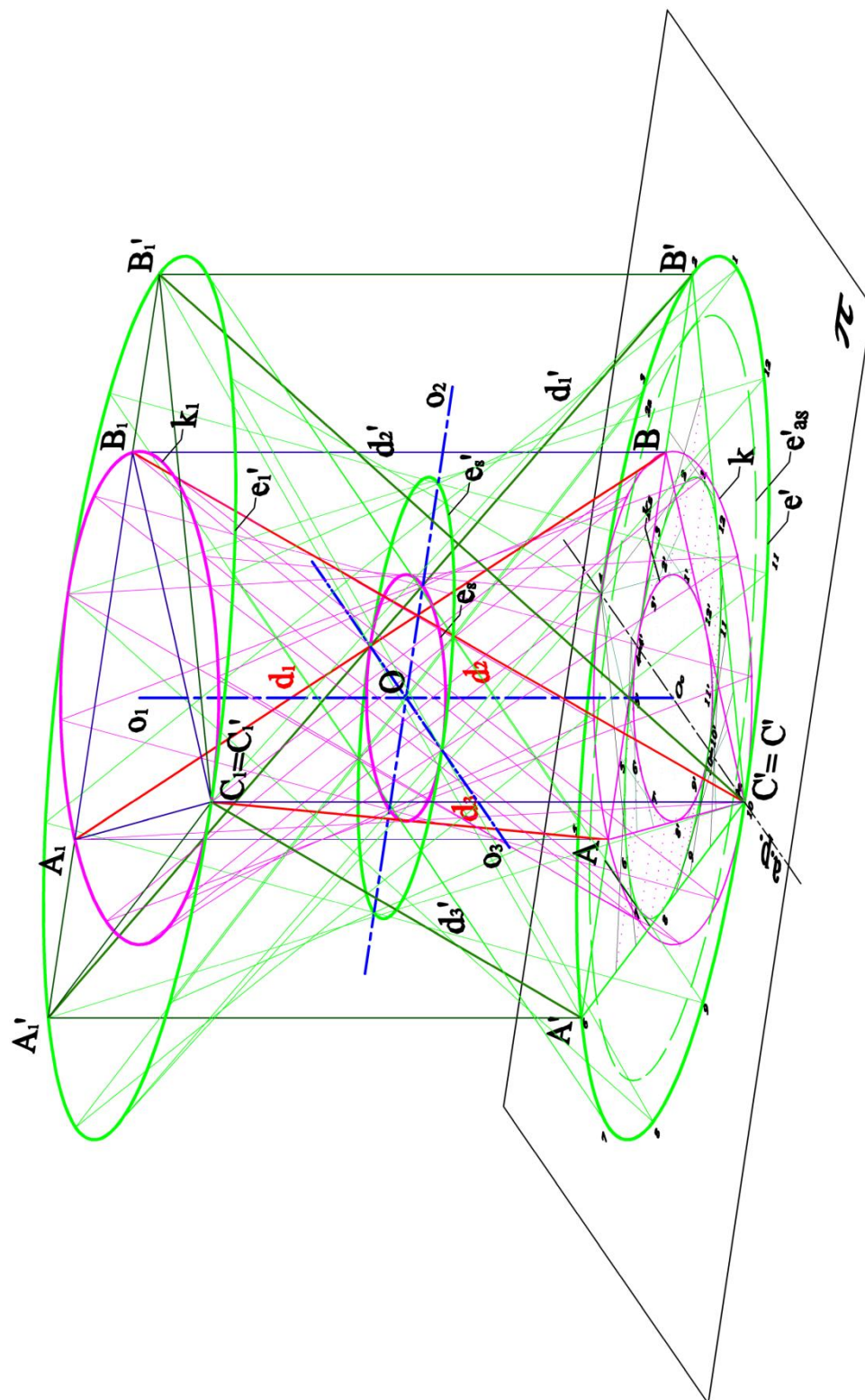
Трансформација ЈРХ у прав ЈЕХ, по принципима приказаним у погл. 3.2.1, у случају када је усвојена оса *a.p.* афинитета, за два троугла: једнакостранични и једнакокраки – базиса две праве тростране призме  $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$  и  $ABCA_1B_1C_1$ , заједничка оса симетрије (сл.57), је у конструктивном смислу, специјални (једноставнији) случај, у односу на претходно обрађен пример са сл.51.



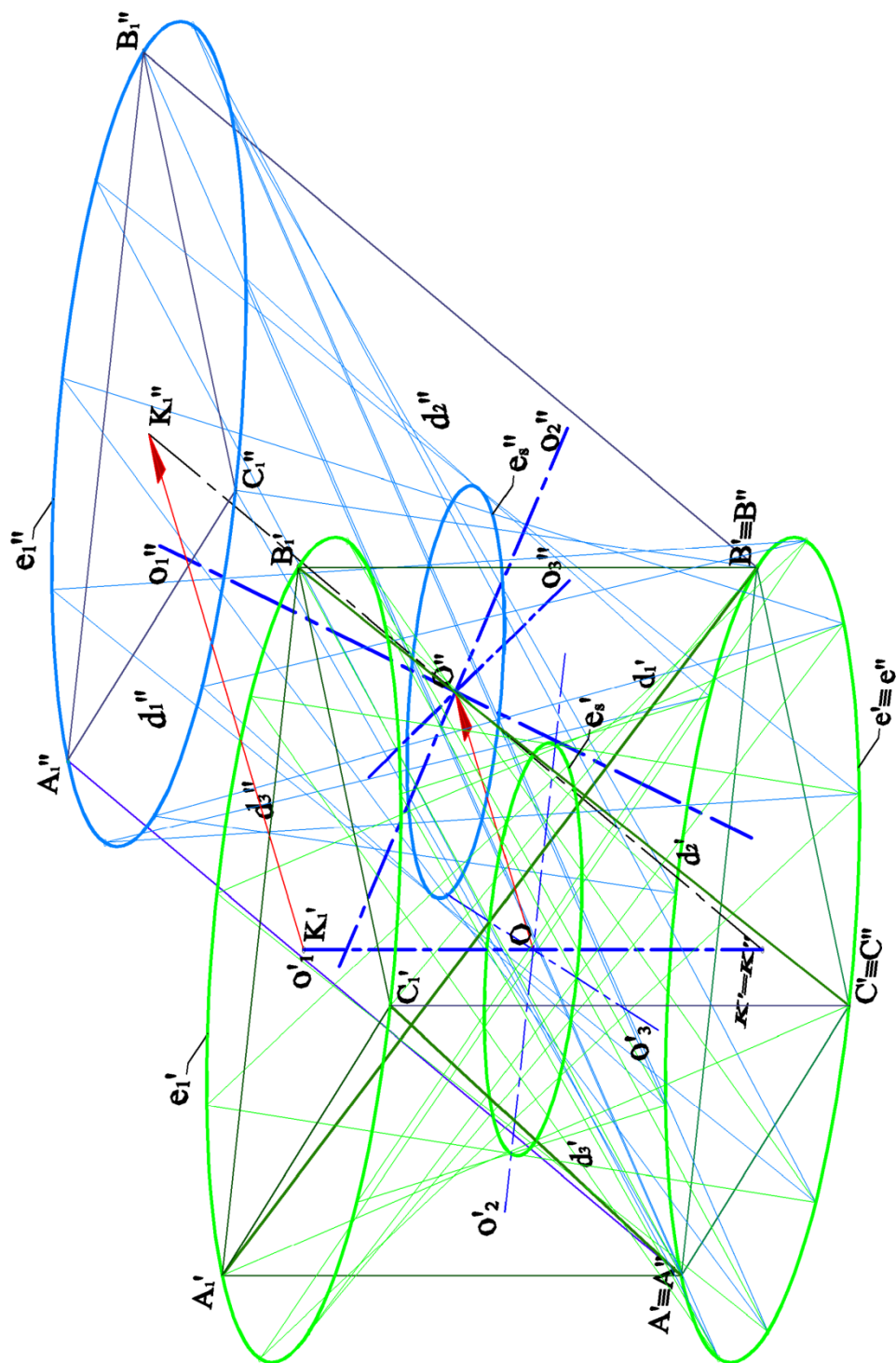
Сл. 57 Основа две афино придружене праве тростране призме са уписаним стрикционим кривама два ЈХ

Кратким конструктивним поступком, после уцртавања тангенти (пројекције изводница хиперблоида), у изабраном броју тачака обе стрикционе криве  $e_s$  и  $k_s$ , пресечне тачке пројекција тангенти и пројекција водиља се "враћају" у простор, на водиље и добијају изводнице ЈЕХ (сл.58). Продори изводница ЈЕХ, кроз раван базиса, одређују пресечну елипсу  $e$ , идентичну елипси  $e_1$ , у равни горњег базиса призме. Главне осе  $o_1o_2o_3$ , за конструисане површи ЈРХ и ЈЕХ, су коинцидентне.





Сл. 58 Просторни жичани модел трансформације ЈХ у прав ЈЕХ



Сл. 59 Просторни жичани модел трансформације ПЈЕХ у општи случај КЈЕХ

#### 4. Просторне колонеарне трансформације ЈХ

---

У специјалном случају афине просторне трансформације  $JPX$  у  $ПЈЕХ$ , помоћу две афино придружене праве тростране призме, где су базиси призми једнакостранични и једнакократи троугао, а оса афинитета – њихова заједничка оса симетрије, инваријанта трансформације је ортогонални трокрак главних оса и триедар равни симетрије.

##### Закљ. IV/5

За другу трансформацију, задат је вектор смицања  $K_I'K_I''$  горње пресечне криве  $e_I'$ , трансформацијом добијеног правога ЈЕХ (сл.59). Све тачке пресека изводница и криве  $e_I'$ , смицањем за исти задати вектор, заузимају нове положаје на кривој, елипси  $e_I''$ . Уцртавањем изводница у новом положају, тј. спајањем тачака пресечне криве  $e' \equiv e''$ , у равни коинциденције  $\pi$  и одговарајућих тачака пресечне криве  $e_I''$ , конструисан је жичани модел косога ЈЕХ. На примеру пресечне елипсе  $e_s'$ , која се смицањем, за одговарајућу величину вектора  $O'O''$ , транслира у нови положај  $e_s''$ , показано је да су инваријанте ове трансформације, пресечне криве, паралелне равни коинциденције  $\pi$ . За конструкцију главних оса косога ЈЕХ, примењена је метода бр. 2 образложена у погл. 3.5.3.



## 5. Пресеци ЈЕХ и продори са основним површима 2. степена

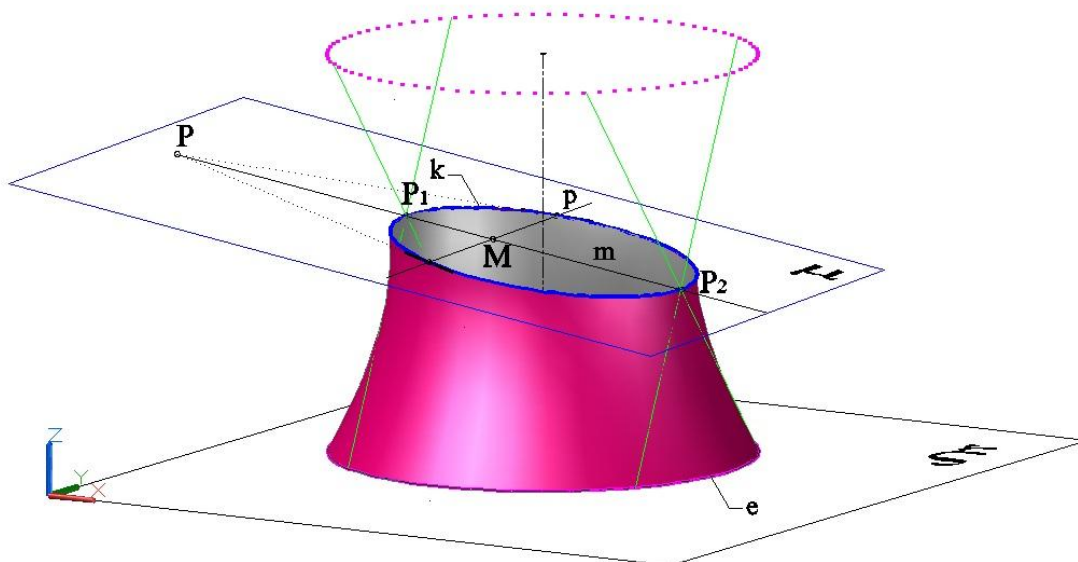
### 5.1 Поларитет квадрика

"Свака површ другог степена индукује један поларни систем, при чему је она сама геометријско место полова инцидентних својим поларним равнима" [37,стр.10].

*Сви полови простора (унутар, на и изван површи) имају одговарајуће инволуторно придружене поларне равни, где су придружени елементи хармонијски коњуговани:*

- поларна раван, коњугована произвољном полу  $P$  ван површи, сече ЈХ по хиперболи;
- поларна раван, коњугована произвољном полу  $P$  унутар површи, сече ЈХ по елипси;
- поларна раван, коњугована произвољном полу  $P$  на површи асимптотског конуса, сече површ ЈХ по параболи;
- поларна раван коњугована изабраном полу  $P$  на самој површи ЈХ, је њена тангенцијална раван, која сече површ по две изводнице које пролазе полом  $P$ .

(1)

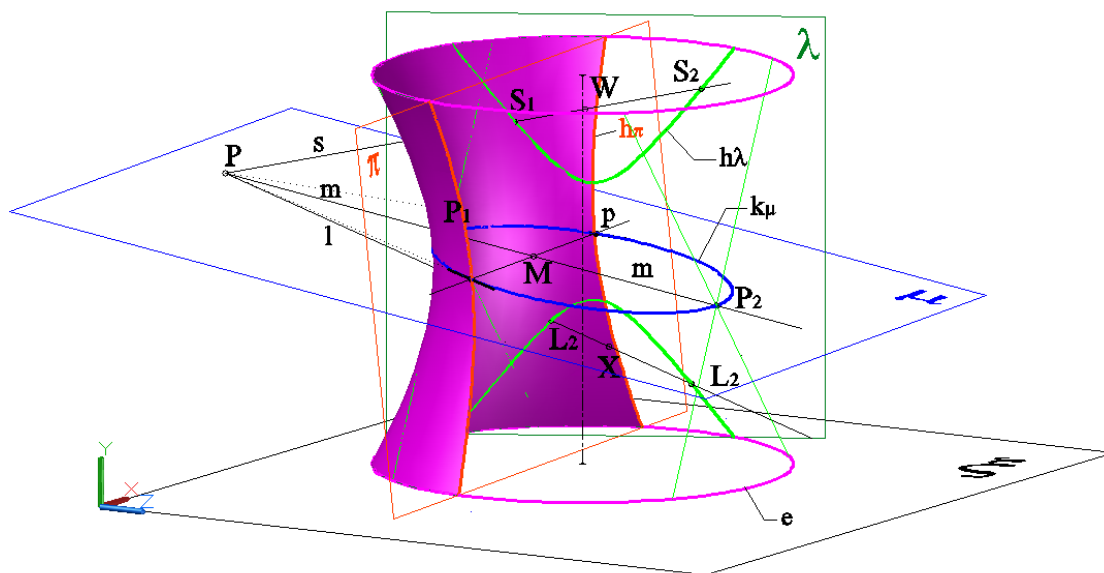


Сл. 60 Поларитет у једној равни пресека ЈЕХ

Узевши у обзир, да је поларна раван "геометријско место хармонијски спрегнутих полова  $Q_n$  полу  $P$ , у односу на парове продора сечица квадрике, из свежња правих  $\{P\}$ ," [37, стр.10] у произвољној равни  $\mu$ , која сече површ по

кривој  $k$  (елипси), изабран је правац  $m$ , који пролази произвољним полом  $P$  и продире површ ЈХ у две тачке  $P_1$  и  $P_2$ . На њему је одређена четврта тачка  $M$ , тако да вредност хармонијског односа износи  $(P M P_1 P_2) = -1$  (сл.60). Тачка  $M$  припада и полари  $p$ , пола  $P$ , у односу на конику  $k$ . Поларитет, као корелација елемената инволуторног карактера, осим у равни, фигурише и у простору, те је тако, полу  $P$  инволуторно придружена поларна раван  $\pi$ , која пролази тачком  $M$ .

Како би се у потпуности дефинисала (конструисала) раван  $\pi$ , из прамена правих  $\{P\}$ , који пролазе полом  $P$ , изабрана су још два правца  $s$  и  $l$ , у произвољно постављеној вертикалној равни  $\lambda$ . Ова раван сече површ по кривој  $h_\lambda$  (хиперболи), која са правцима  $s$  и  $l$  има парове заједничких тачака  $S_1, S_2$  и  $L_1, L_2$ , респективно. На оба правца су одређене хармонијски спрегнуте тачке  $W$  и  $X$ , у односу на пол  $P$ , тако да је испуњен услов:  $(PW S_1S_2) = -1$  и  $(PXL_1L_2) = -1$ . На тај начин, конструисане три тачке:  $M, W$  и  $X$ , дефинишу поларну равну  $\pi$  квадрике, за задати пол  $P$ . Коначно, пресек површи и поларне равни  $\pi$  је крива  $h_\pi$ — хипербола (сл. 61).



Сл. 61 Поларна раван  $\pi$  правој једнограног хиперболоида за задати пол  $P$

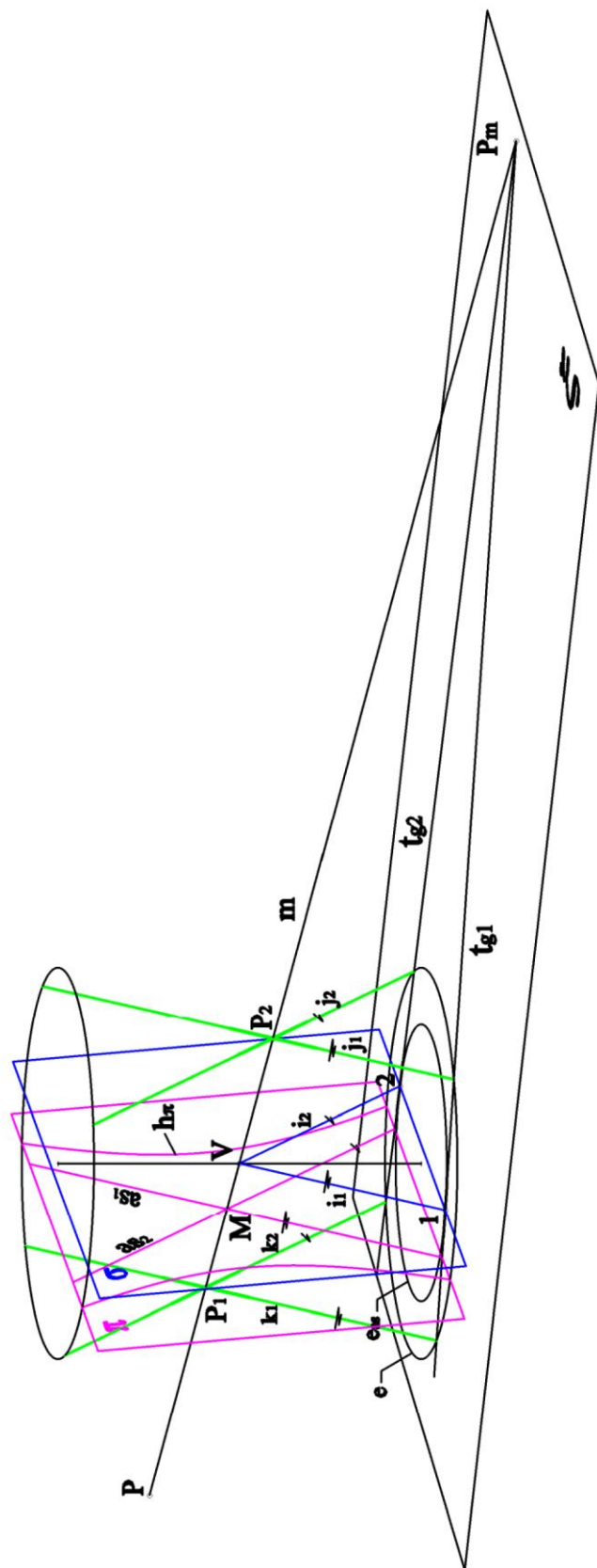
Приказани поступак је изведен 3D алатима софтвера *Auto CAD*, тако што су пресечне криве  $k_\mu, h_\lambda$  и  $h_\pi$ , у равнима  $\mu, \lambda$ , и  $\pi$  добијене пресецањем 3D–солида (моделованог пуног тела) једнограног хиперболоида, без посебних графичких конструкција. Међутим, неке од досада обрађених карактеристика површи, се у

контексту ове теме, могу применити у конструктивне сврхе. Тако је, код конструисања "четворке" хармонијских тачака карактеристичан случај сечице, која пролази средиштем површи ЈЕХ–а, тј. врхом асимптотског конуса  $V$ .

На сл. 62 су приказане релације сечице  $m$  (којој припада хармонијска четворка тачака: изабрани пол  $P$ , продори  $P_1$  и  $P_2$  сечице  $m$  кроз површ и тачка  $M$ ), тангенцијалних равни површи у тачкама  $P_1$  и  $P_2$  и равни  $\sigma$  и  $\delta$ . Наиме, изабраним правцем  $m$  пролазе две тангенцијалне равни асимптотског конуса ЈЕХ, које су представљене траговима  $t_{g1}$  и  $t_{g2}$ , са заједничком тачком  $P_m$ , продора правца  $m$  кроз раван  $\xi$ , пресечне криве  $e_{as}$  конуса. Осим изводница  $i_1$  и  $i_2$  асимптотског конуса, тангенцијалне равни (истовремено и асимптотске равни површи ЈЕХ) садрже још по две паралелне изводнице ЈЕХ–а, тако да је:  $k_1 \parallel i_1 \parallel j_1$  и  $k_2 \parallel i_2 \parallel j_2$ . Ове релације омогућавају да се конструктивно одреде продорне тачке  $P_1$  и  $P_2$ , правца  $m$  кроз површ ЈЕХ–а. Потребно је конструисати парове изводница  $k_1, j_1$  и  $k_2, j_2$  (паралелно одговарајућим изводницама  $i_1$ , тј.  $i_2$ ), у асимптотским равнима, а потом одредити тачке  $P_1$  и  $P_2$ , као међусобне пресеке изводница  $k_1, k_2$  и  $j_1, j_2$ , респективно. Са друге стране, парови изводница  $k_1, k_2$ , тј.  $j_1, j_2$  формирају тангенцијалне равни површи ЈЕХ–а у тачкама  $P_1$  и  $P_2$ , које су паралелне равнима  $\sigma$  (раван кроз врх  $V$  асимптотског конуса) и  $\delta$  (раван кроз тачку  $M$ ). Ове четири паралелне равни су карактеристичне равни једног система, од  $\infty^1$  паралелних равни, које секу површ ЈЕХ по хиперболама, са асимптотама  $as_1, as_2$ , паралелним пару изводница  $i_1, i_2$  асимптотског конуса ЈЕХ.

Имајући на уму поларитет конике  $e$  у равни, у односу на задати пол, који може бити: а) ван конике  $e$ , б) унутар конике  $e$  и в) на коници  $e$ , поларитет у простору, из става (1) и претходна разматрања, може се извести закључак:

*Две, од четири, карактеристичне паралелне пресечне равни ЈЕХ–а, које пролазе тачкама једне произвољне сечице  $m$ , која садржи врх асимптотског конуса  $V \equiv O$ , коинцидентан средишту ЈЕХ–а, су тангенцијалне равни површи ЈЕХ–а у тачкама продора  $P_1$  и  $P_2$  сечице  $m$ . Друге две равни пресека секу површ по коници другог реда: елипси, хиперболи или параболои. Ако је продорна тачка  $P_m$ , сечице  $m$ , кроз раван базисне криве  $e$  ЈЕХ–а:*



Сл. 62 Релације елемената две тангенцијалне равни асимптотског конуса

- ван криве  $e$ , пресечне конике су хиперболе
- унутар криве  $e$ , пресечне конике су елипсе
- на кривој  $e_{as}$ , пресечне конике су параболе.

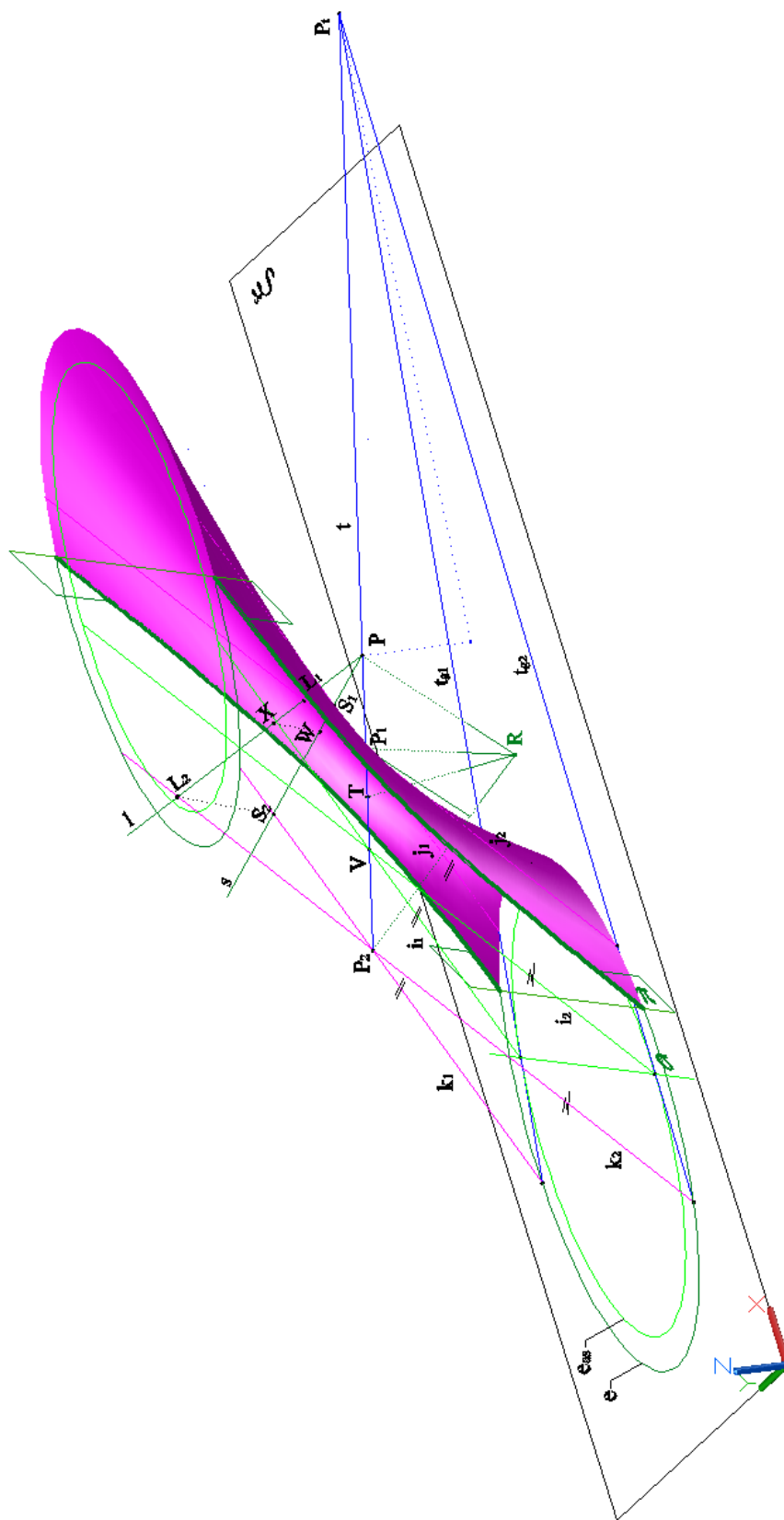
**Закљ. V/1**

Квалитет релација наведених у закључку V/1, везан за сечице у асимптотским равнима ЈЕХ – тангенцијалним равнима асимптотског конуса (које пролазе врхом асимптотског конуса  $V$ ), примењен је у поступку конструисања поларне равни  $\pi$  за пол  $P$ , задатог косог ЈЕХ–а, који је пресечен са равни  $\xi$  по коници  $e$  – елипси. (сл.63). За сечицу  $t$ , која пролази врхом  $V$  конструисана је хармонијска четворка тачака  $(PTP_1P_2)$ . Одређена је тачка продора  $Pt$  сечице  $t$  кроз раван  $\xi$  и пар трагова тангенцијалних равни на конику  $e_{as}$  асимптотског конуса. У пресеку парова изводница  $k_1$  и  $k_2$ , као и  $j_1$  и  $j_2$  површи ЈЕХ, у тангенцијалним равнима  $tg_1$  и  $tg_2$  одређен је коњуговани пар тачака продора  $P_1$  и  $P_2$  – диралишта две тангенцијалне равни површи КЈЕХ. Четврта тачка  $T$  је конструисана помоћу хармонијске четворке правих у произвољном темену  $R$  и дворазмере. Потом су изабрана су још два правца  $s$  и  $l$ , у одговарајућим асимптотским равнима, на којима су одређене хармонијске четворке тачака  $(PWS_1S_2)$  и  $(PXL_1L_2)$ . Прецизније, продори  $S_1$  и  $S_2$  сечице  $s$  кроз површ, се налазе у пресеку сечице и изводница  $k_1$  и  $j_1$ , док је четврта тачка –  $W$  конструисана помоћу сличности троуглова. Поступак је поновљен за сечицу  $l$ . Конструисане три тачке  $T$ ,  $W$  и  $X$  дефинишу поларну раван  $\pi$ .

Стога, као специјални случај принципа конструисања поларне равни, за задати пол у простору, уочена правилност је формулисана кроз закључак:

*Нека је  $P$  произвољни пол за поларну раван  $\pi$  површи ЈЕХ, чија је пресечна коника  $k$ . Тада, раван  $\pi$  дефинишу три тачке  $M$ ,  $W$  и  $X$ , које припадају хармонијским четворкама тачака  $(PM P_1P_2) = -1$ ,  $(PW S_1S_2) = -1$   $(P X L_1L_2) = -1$ , на три сечице  $m, s$  и  $l$  респективно, из прамена сечица  $\{P\}$ . При томе сечица  $m$  пролази средиштем  $O$  површи ЈЕХ, а друге две припадају асимптотским равнима, које пролазе тачком  $P$   $m$ – продором сечице кроз раван пресечне конике  $k$ .*

**Закљ. V/2**



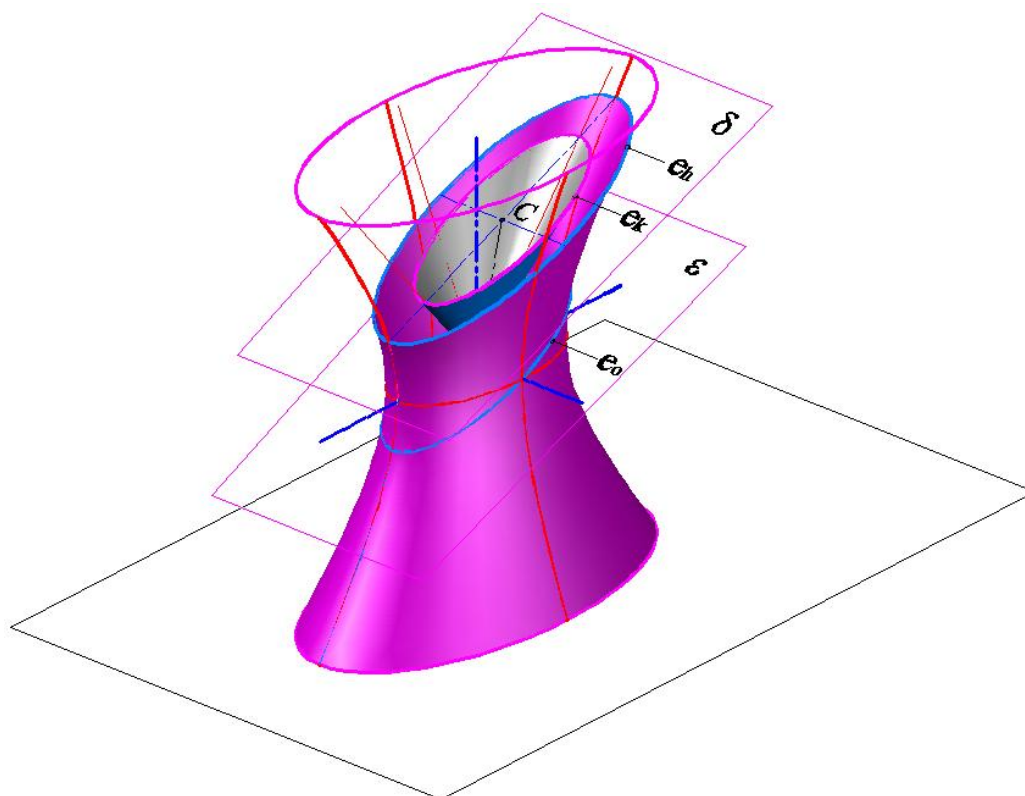
Сл. 63 Конструкција поларне равни  $\pi$ , квадрикe – косог ЈЕХ, за задати пол  $P$

### 5.2 Равни пресеци ЈЕХ

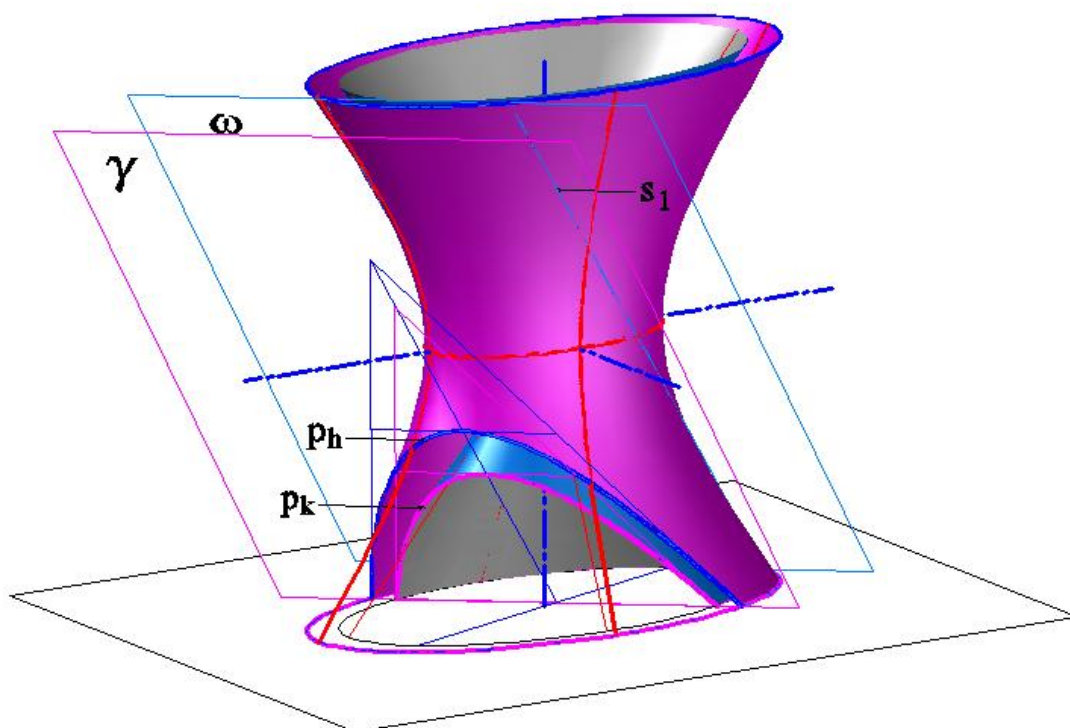
Површ ЈЕХ, и његов асимптотски конус, карактеришу исти типови пресечних коника. Раван која сече површ по одређеној коници  $k_h$ , сече и асимптотски конус по коници  $k_k$  истог типа, која у специјалним случајевима може бити концентрична коници  $k_h$ . По аналогији са конусним пресецима, у зависности од типа пресека равни, постављене кроз врх асимптотског конуса задате површи, паралелне са пресечном равни, одређује се врста пресечне криве (сл. 64 а–в). Одатле се може закључити:

*У свежњу равни које пролазе врхом асимптотског конуса ЈЕХ–а, постоје равни које секу конус:*

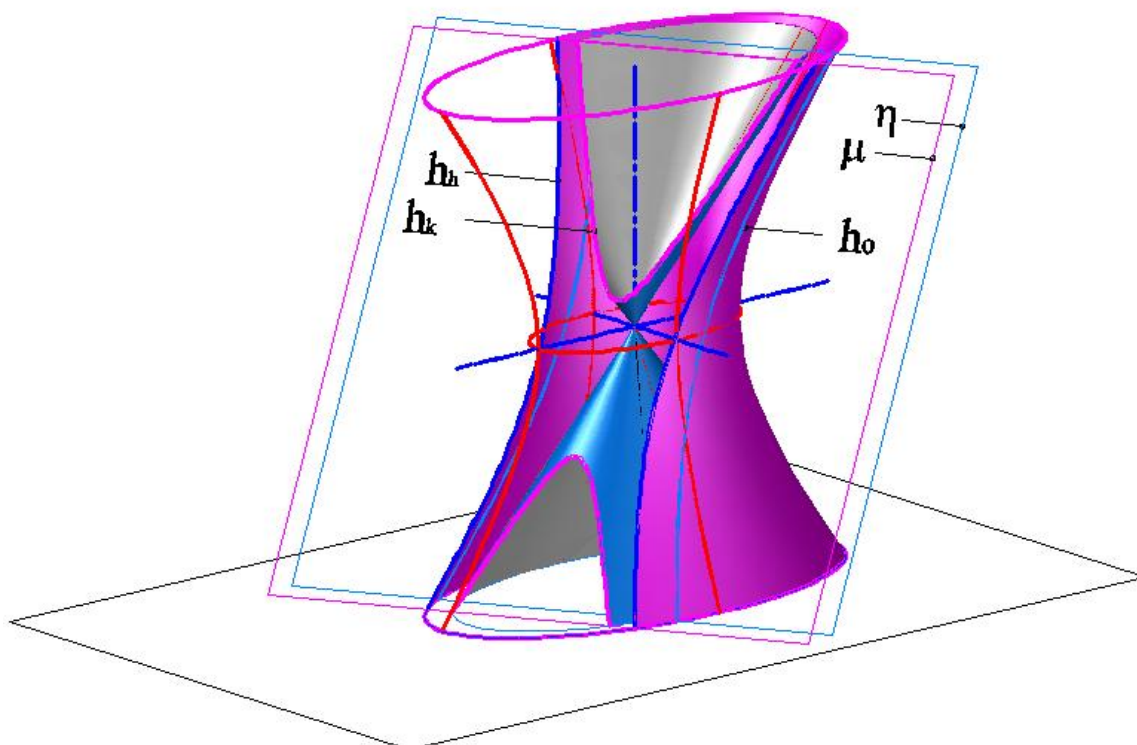
- а) само у врху конуса, а њој паралелне равни секу површ ЈЕХ по елипсама, или у специјалном случају, по кружницама*
- б) по једној изводници, а њој паралелне равни секу површ ЈЕХ по параболама*
- в) по двема изводницама, а њој паралелне равни секу површ ЈЕХ по хиперболама*



Сл. 64а Модел ЈЕХ–а са пресечним равнима; пресек – елипса



Сл. 64б Модел ЈЕХ–а са пресечним равнима; пресек – парабола



Сл. 64в Модел ЈЕХ–а са пресечним равнима; пресек – хипербола



Раван  $\delta$ , паралелна равни  $\varepsilon$ , која пролази врхом асимптотског конуса ЈЕХ–а, тј. средиштем хиперболоида, сече обе површи по сличним елипсама:  $e_h$  (пресек ЈЕХ–а) и  $e_k$  (пресек асимптотског конуса). При томе, раван  $\varepsilon$  сече асимптотски конус само у његовом врху, а површ ЈЕХ, такође по елипси  $e_o$  (сл.64а).

Раван  $\gamma$ , паралелна равни  $\omega$ , која пролази врхом асимптотског конуса ЈЕХ–а, тј. средиштем хиперболоида, сече обе површи по параболама:  $p_h$  (хиперболоид) и  $p_k$  (асимптотски конус). При томе, раван  $\omega$  сече (тангира) асимптотски конус по једној његовој изводници, а површ ЈЕХ, по две изводнице  $s_1$  и  $s_2$ , из различитих система (сл. 64б). Раван  $\mu$ , паралелна равни  $\eta$ , која пролази врхом асимптотског конуса ЈЕХ–а, тј. средиштем хиперболоида, сече обе површи по хиперболама:  $h_h$  (хиперболоид) и  $h_k$  (асимптотски конус). При томе, раван  $\eta$  сече асимптотски конус по две изводнице, а површ ЈЕХ, по хиперболи  $h_o$  (сл. 64в).

Са становишта *пројективне геометрије*, свака пресечна раван површи ЈЕХ је и њена поларна раван за одређени пол у простору. Пол може бити коначна или бесконачно далека тачка простора. Тако, ако је пол бесконачно далека тачка, одговарајућа поларна раван пролази средиштем површи, а ако је пол у коначности (на неком од праваца бесконачно далеких полова), његова поларна раван ће бити паралелна равни кроз средиште, која одговара бесконачно далеком полу истог правца. Стога ће сваки од анализираних пресека бити разматран и са овог аспекта.

Три наведена типа пресека хиперболоида, по елипси, параболи и хиперболи, ће бити анализирана по основу два карактеристична положаја, који равни заузимају у односу на изабрани модел правог ЈЕХ–а:

а) пресеци са равнима управним на равни симетрије ЈЕХ

*Пресечна раван и раван симетрије површи се секу по правцу једне осе пресечне криве, док је друга оса ортогонална на претходну, у равни пресека.* (2)

б) произвољно изабрани положај равни

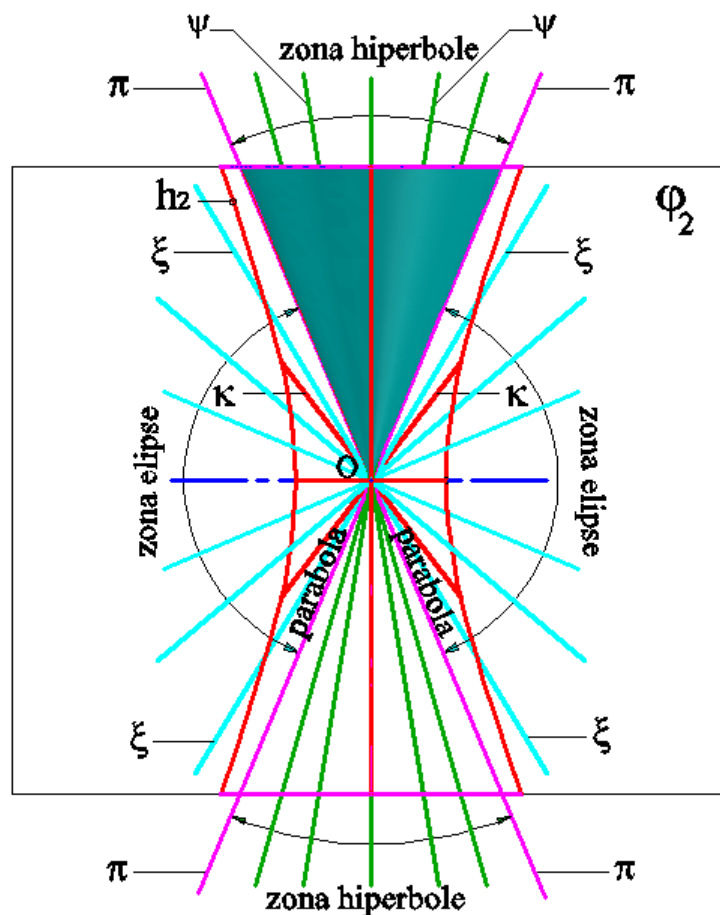
*Пресечна раван произвољног положаја сече површ ЈЕХ и његов асимптотски конус по слично постављеним коникама. Конструисање праваца оса коника захтева<sup>42</sup>:*

---

<sup>42</sup> Метод "i" се примењује у случају конике – елипсе, а метод "ii" код параболе и хиперболе

- i) увођење кружних пресека ЈЕХ-а и асимптотског конуса које "премошћава" и поједностављује проблем конструисања коњугованих дијаметара конике
- ii) увођење помоћне паралелне равни постављене кроз врх асимптотског конуса и одговарајуће – "зрачне пројекције" које омогућавају конструисање праваца коњугованих дијаметара пресечне криве,<sup>43</sup> у равни пресека. (3)

Тип пресечне конике хиперboloида, са равни која је управна на раван симетрије  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ , је исти као и за његов асимптотски конус. Сл.65 приказује равни пресека асимптотског конуса ЈЕХ-а и тип пресечне криве за обе површи:



Сл. 65 Преглед положаја равни са типовима пресечних кривих

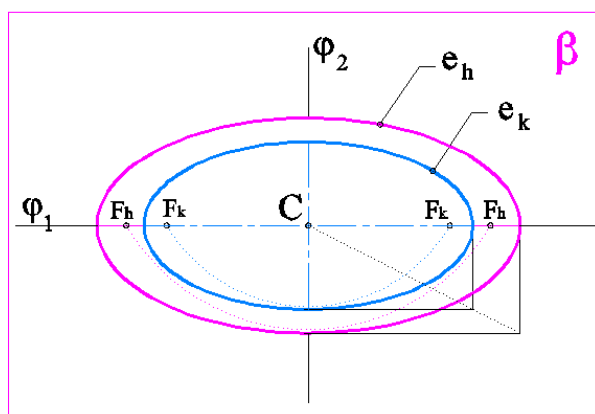
<sup>43</sup> D. Dennis и S. Addington у свом раду (реф. [11]) "Аполоније и конусни пресеци" образлажу примену Аполонијеве теореме о коњугованим дијаметрима коника, у контексту алгебарског израза за конике, где је могуће користи не-ортогоналну координатизацију (усклађену са правцима дијаметара).

- системи равни паралелни са равнима  $\xi$  секу ЈЕХ по *елипсама*
- системи равни паралелних са равнима  $\pi$  секу ЈЕХ по *параболама*
- системи равни паралелних са равнима  $\psi$  секу ЈЕХ по *хиперболама*
- системи равни паралелних са равнима  $\kappa$  секу ЈЕХ по *кружницама*.

### 5.2.1 пресек ЈЕХ по елипси

*a) Пресеци са равнима управним на симетралне равни ЈЕХ–а*

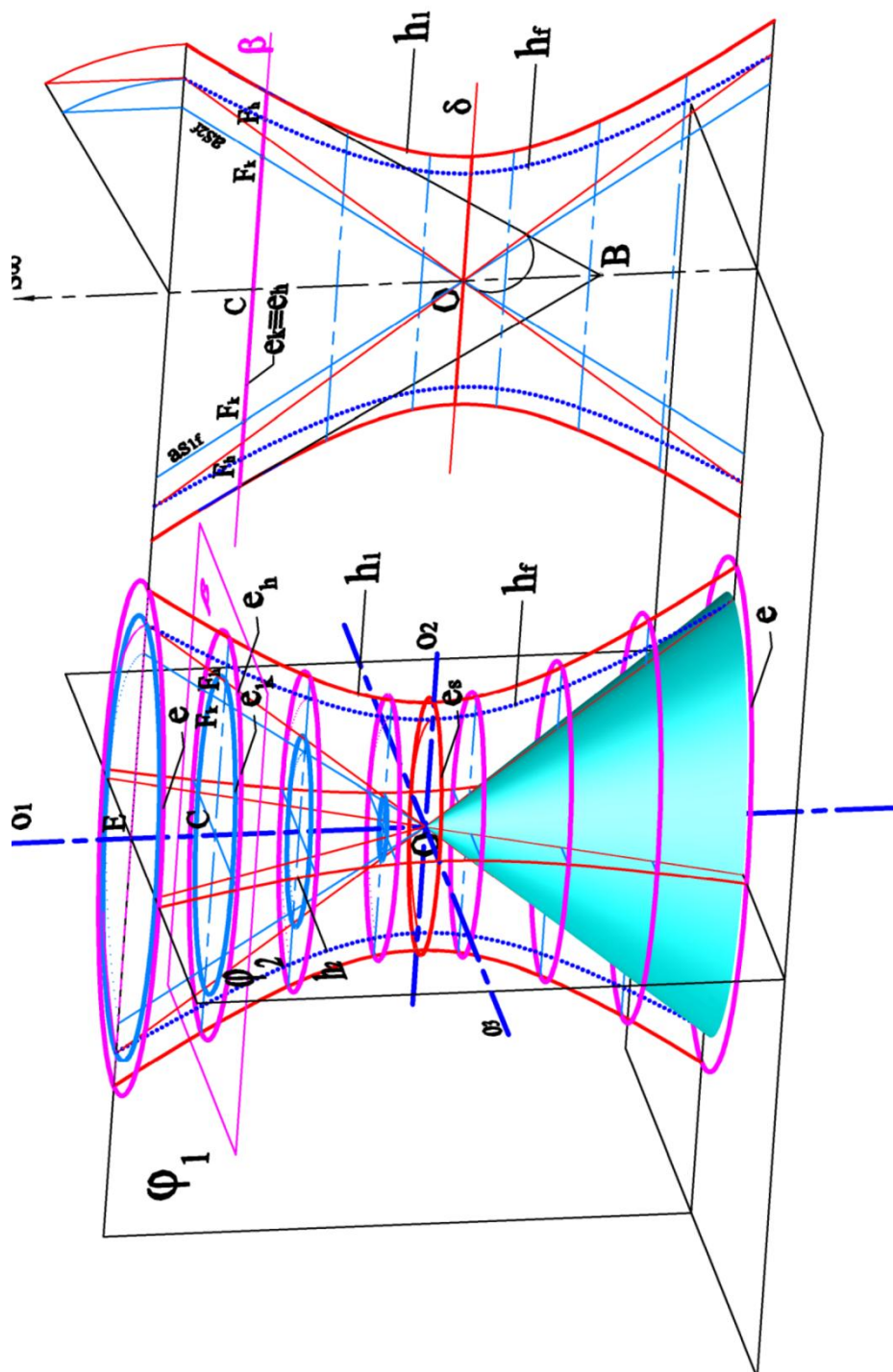
1) Равни паралелне равни  $\beta$ , која је управна на обе равни симетрије  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  секу ПЈЕХ и његов асимптотски конус по серији парова концентричних пресечних елипси:  $e_h$  и  $e_k$  (приказ пресека у равни  $\beta$  – сл. 66). Геометријско место темена елипси  $e_h$  су контурне хиперболе  $h_1$  и  $h_2$ , а за темене тачке елипси  $e_k$ , то су парови асимптота ових хипербола (респективно), које леже у симетралним равнима  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Заједнички центар  $C$  за две елипсе  $e_k$  и  $e_h$  је на главној оси  $o_1$  ПЈЕХ–а (сл. 66а).



Сл. 66 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\beta$  – елипсе

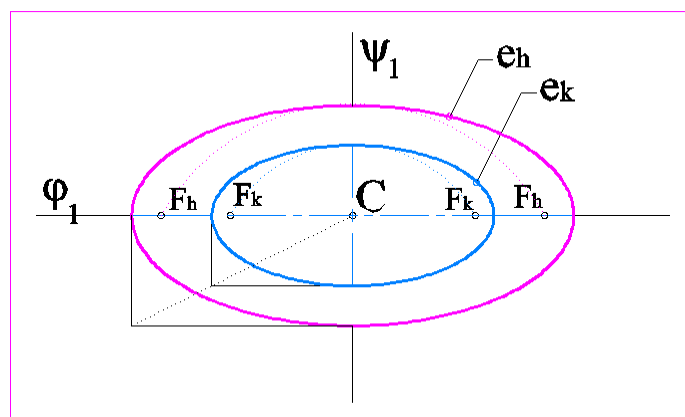
Фокуси обе елипсе (сл.66а), такође имају законитост "кретања": фокуси  $F_h$  за елипсе  $e_h$  се налазе на хиперболи  $h_f$ , док фокуси  $F_k$ , на елипсама  $e_k$ , леже дуж асимптота  $as_{1f}$ ,  $as_{2f}$  хиперболе  $h_f$  (издвојени приказ на сл. 66а–десно).

Бесконечно далека тачка  $S_\infty$ , на правцу линије центара – главне осе  $o_1$ , представља пол за поларну раван  $\delta$ , која пролази средиштем  $O$  ЈЕХ–а. Коначна тачка  $B$ , на истом правцу, је пол за одговарајућу поларну раван  $\beta$ , паралелну равни  $\delta$ .



Сл. 66а Пресеци ПЈЕХ–а са равнина управним на  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ; пресечне криве –елипсе

2) Равни паралелне произвољној равни  $\alpha$ ,<sup>44</sup> управне на симетралну раван  $\varphi_I$ , секу прав ЈЕХ по елипсама  $e_h$ , а асимптотски конус по њима сличним елипсама  $e_k$  (сл.67). У равни симетрије  $\varphi_I$ , њихови заједнички центри припадају правој  $m$ , која пролази средиштем хиперboloида  $O$  (сл.67а).



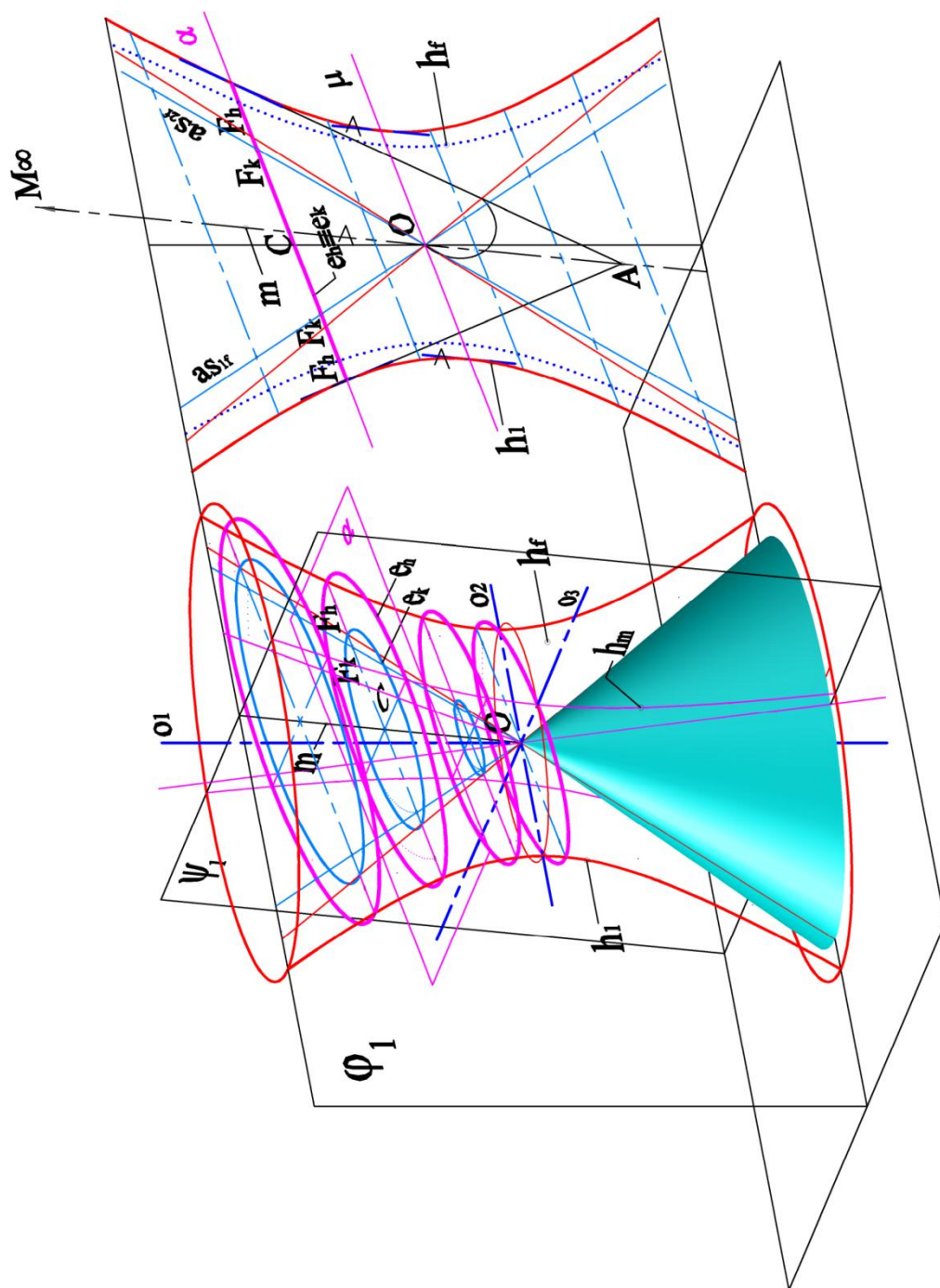
Сл. 67 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\alpha$  – елипсе

Права  $m$  полови растојање две асимптоте контурне хиперболе  $h_I$ , дуж нагибнице сваке пресечне равни, на којој леже велике осе пресечних елипси . (издвојен пресек, десно на сл.67а). Геометријско место темена великих оса елипси  $e_h$  је контурна хипербола  $h_I$ , а за елипсе  $e_k$  – њене асимптоте  $as_{1f}$ ,  $as_{2f}$ . Мале осе леже у равни  $\psi_I \perp \varphi_I$ . Геометријско место темена за мале осе елипси  $e_h$  је хипербола  $h_m$  (пресечна крива равни  $\psi_I$  и  $\varphi_I$ ), а за елипсе  $e_k$ , су то њене асимптоте.

Геометријско место фокуса  $F_h$  за елипсе  $e_h$  су хиперболе  $h_f$ , док фокуси  $F_k$  елипси  $e_k$  припадају правама – асимптотама  $as_{1f}$ ,  $as_{2f}$  хиперболе  $h_f$  (приказ десно, на сл.67а).

Бесконечно далека тачка  $M_\infty$ , на правцу  $m$  представља пол за поларну раван  $\mu$ , која пролази средиштем  $O$  ПЈЕХ–а. Коначна тачка – пол  $A$ , на истом правцу, одговара поларној равни  $\alpha$ , паралелној равни  $\mu$ .

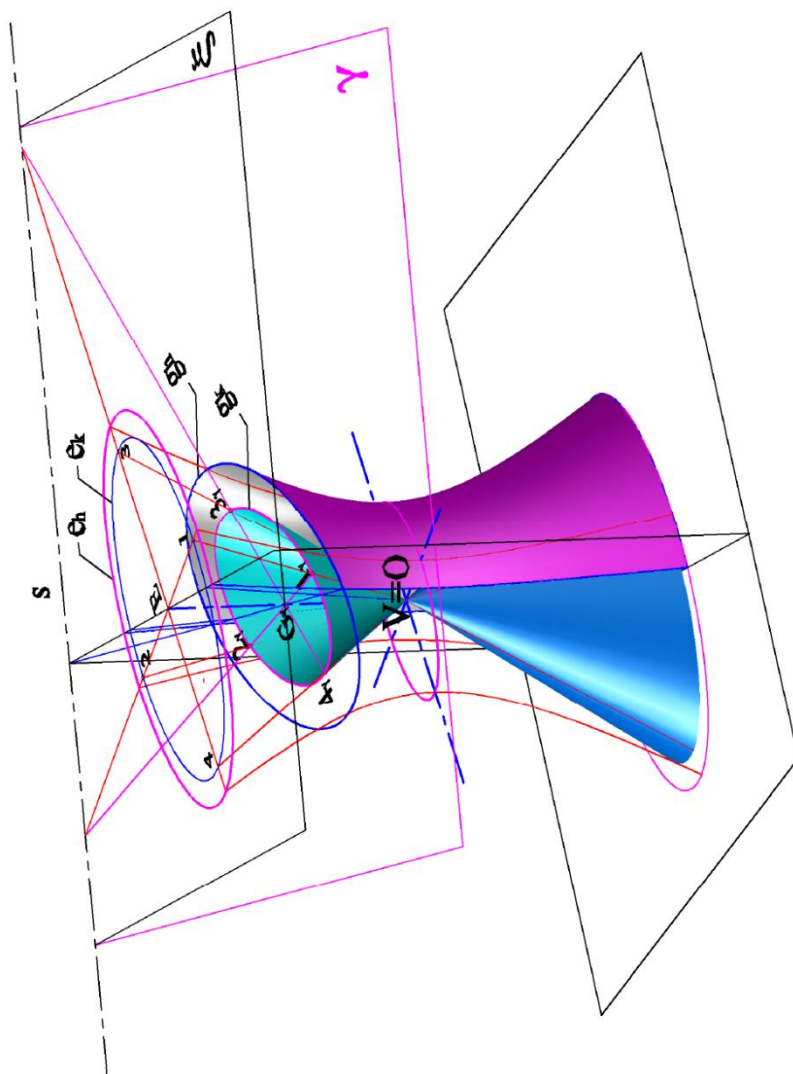
<sup>44</sup> Видети сл. 65 са прегледом положаја равни за одређени тип пресечне криве



Сл. 67а Пресеци ПЈЕХ–са равнина управним на  $\varphi_1$ ; пресечне криве – елипсе

б) Пресеци са произвољно постављеним равнима

Равни паралелне произвољно изабраној равни пресека  $\gamma$  секу ПЈЕХ по елипсама  $g_h$  и његов асимптотски конус по елипсама  $g_k$  (сл.70, 70а). Код овог типа пресека, јавља се проблем конструктивног одређивања заједничког центра  $S$  и оса за ове две елипсе. Ако колинеарно придружимо раван базиса  $\xi$  ПЈЕХ са равни  $\gamma$  пресечне криве, тада базисној елипси  $e_h$  хиперболоида одговара пресечна елипса  $g_h$ , тј. базисној елипси асимптотског конуса  $g_k$  одговара елипса  $e_k$  (сл. 68).

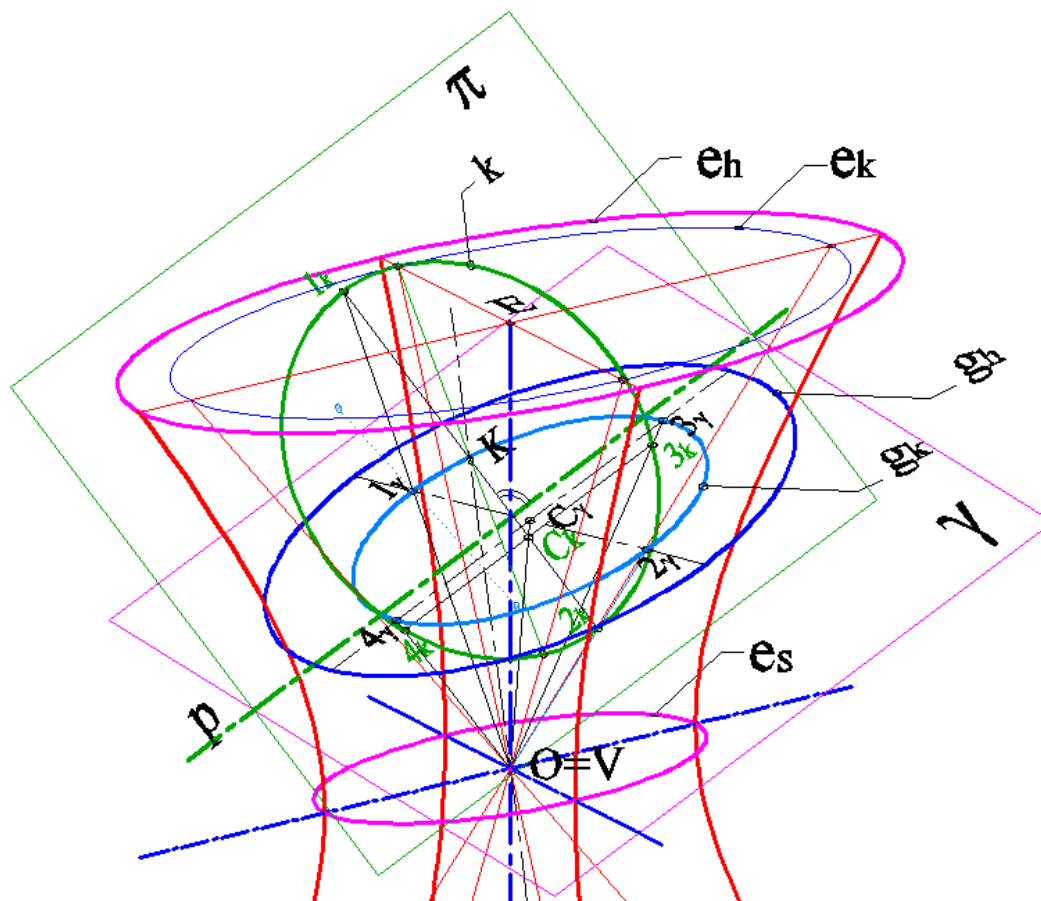


Сл. 68 Колинеарна придруженост тачака базисне елипсе  $e_h$  и пресечне елипсе  $g_h$



За центар колинеације – врх конуса  $V = O$  и осу колинеације  $s$ , придружени парови тачака су:  $E-G_\gamma$  и  $1-1_\gamma, 2-2_\gamma, 3-3_\gamma, 4-4_\gamma$ . Очигледно је да центру  $E$  елипсе равни базиса није придружен центар  $C$  пресечне елипсе. Да би се поступак налажења центра  $C$ , у равни  $\gamma$ , конструктивно лакше извео уводи се раван кружног пресека<sup>45</sup> хиперboloида тј. његовог асимптотског конуса.

За задати асимптотски конус ПЈЕХ конструктивно је одређен положај равни кружних пресека, поступком "помоћне лопте" (видети погл. 5.1.4), а потом усвојена раван  $\pi$  са кружним пресеком  $k$  и центром  $K$  (сл.69). За раван  $\pi$  и раван  $\gamma$  одређена је пресечница  $p$  – оса колинеације кружног пресека  $k$  и елипсе  $g_k$ . Придруживањем одговарајућих радијуса:  $1_k-2_k$  са кружнице  $k$  и  $1_\gamma-2_\gamma$  са елипсе  $g_k$ , одређен је центар елипсе  $C_\gamma$ , а потом и други пар тачака коњуговане осе  $3_\gamma-4_\gamma$ .



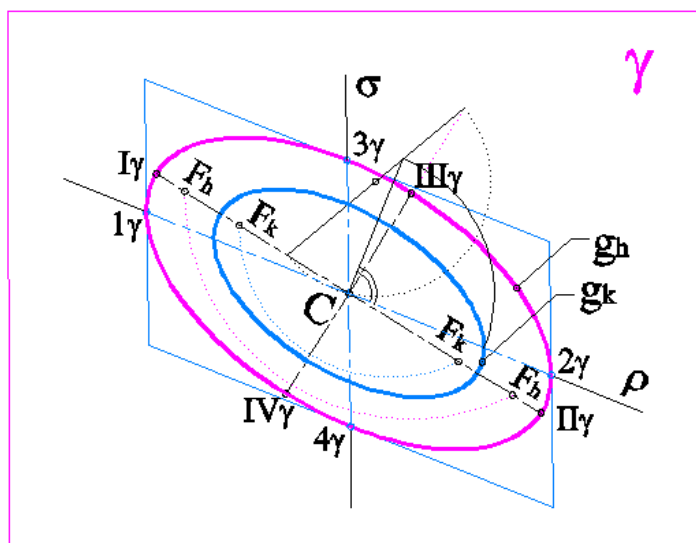
Сл. 69 Поступак конструисања центра и оса пресечне елипсе у равни  $\gamma$

<sup>45</sup> У поглављу 5.1.4 обрађен је поступак конструисања кружних пресека хиперboloида



Коњуговани пар оса није ортогоналан (сл. 70), па је потребно, неком од познатих конструкција (нпр. Рицовом) одредити велику и малу осу елипсе  $b_k$ .

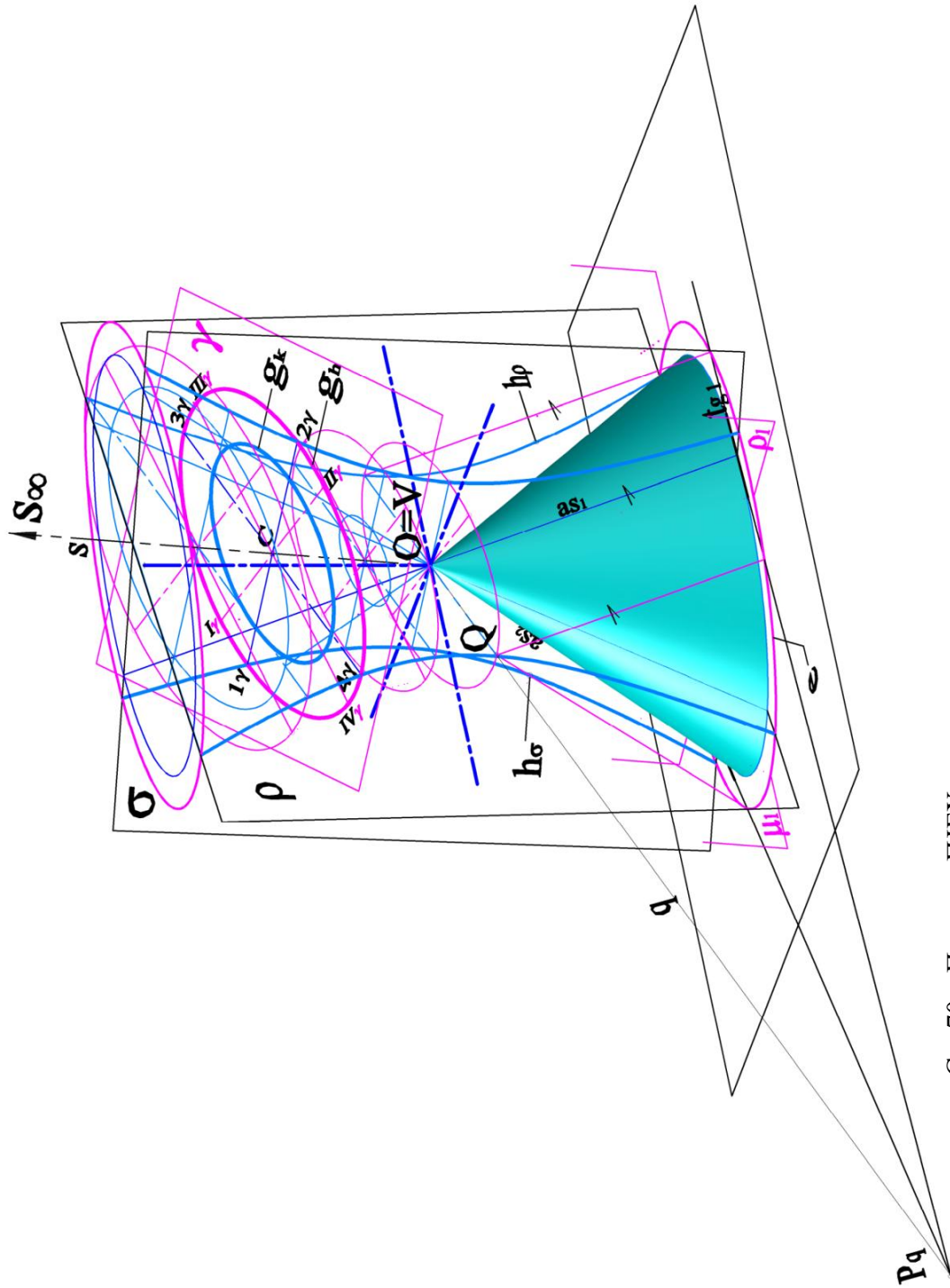
За све пресечне равни ПЈЕХ–а, паралелне равни  $\gamma$ , карактеристични пар коњугованих пречника пресечних елипси лежи у две коњуговане равни  $\sigma$  и  $\xi$ , које се секу по пресечници  $s$  – линији центра  $C$  пресечних кривих (сл. 70а). Геометријско место темена за елипсе  $e_h$  су две хиперболе  $h_\xi$  и  $h_\sigma$ , а за елипсе  $e_k$ , њихове асимптоте.



Сл. 70 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\gamma$  – елипсе

Геометријско место темена  $I_\gamma, II_\gamma, III_\gamma, IV_\gamma$  за елипсе  $g_h$  представља специјални, ортогонални пар хипербола, из прамена хипербола у пресечним равнима, које пролазе пресечницом  $s$ .

Како се у тангенцијалним равнима асимптотског конуса, дуж асимптота две хиперболе  $h_\rho$  и  $h_\sigma$  налазе још по две, њима паралелне изводнице површи ЈЕХ–а, постоји могућност да се и на други начин конструишу карактеристичне тачке пресечних елиписа  $e_h$ . У складу са закљ. V/2, из поглавља 5.1, на сл. 70а, трагови две тангенцијалне равни  $t_{g1}$  и  $t_{g2}$ , се секу у тачки  $Pq$  – продору сечице  $q$ . Њена тачка продора  $Q$  кроз површ ЈЕХ је и тачка пресека две изводнице површи ЈЕХ паралелне асимптотама  $as_1$  и  $as_2$  хиперболе  $h_\rho$ . Тачка  $Q$  је и теме пресечне елипсе (раван кроз средиште површи, паралелна са равни  $\gamma$ ), на хиперболи  $h_\sigma$ .



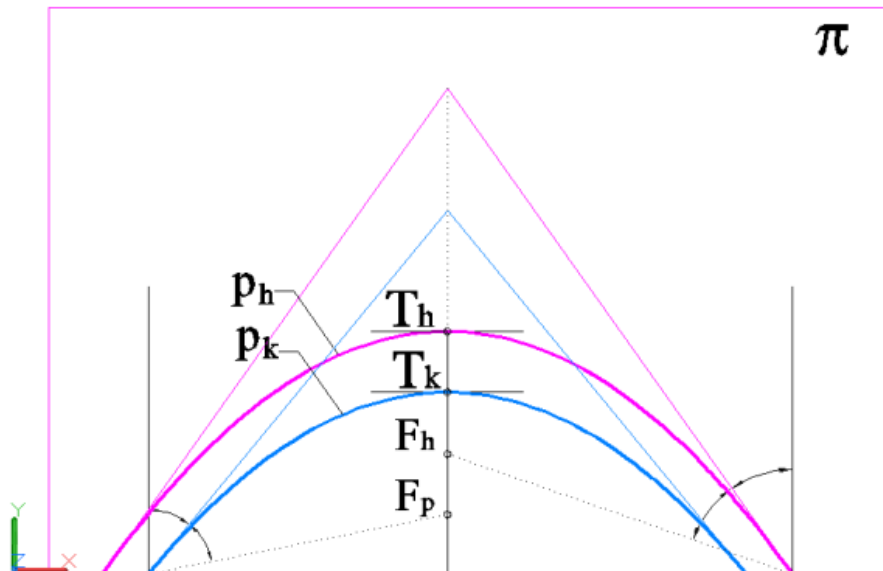
Сл. 70а Пресеци ПЈЕХ–а са произвољно постављеним равнинама, пресечне криве – елипсе

Са аспекта поларитета, правац бесконачно далеке тачке  $S_\infty$ , сечице  $s$ , представља пол за пресечну елипсу која пролази средиштем  $O$  површи ЈЕХ, док остали полови на правцу  $S_\infty$ , одговарају равнима из система паралелних равни, задатог са равни  $\gamma$ .

### 5.2.2 пресек ЈЕХ по параболи

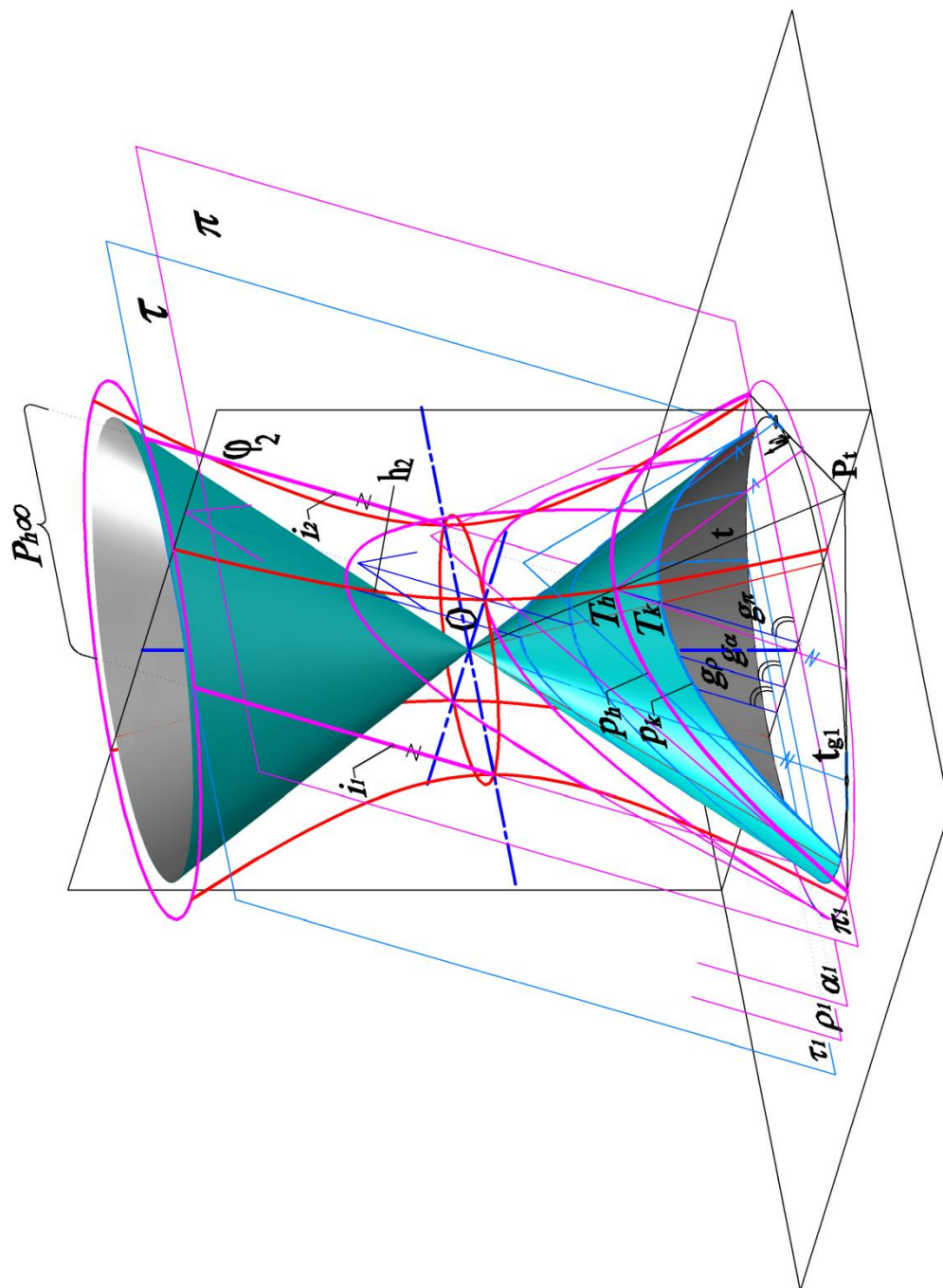
#### а) Пресеци са равнима управним на симетралне равни ЈЕХ

Поштујући услов (1) из погл. 5.1, раван  $\pi \perp \varphi_2$  и паралелна тангенцијалној равни  $\tau$  асимптотског конуса, пресеца ЈЕХ по параболи  $p_h$ , а асимптотски конус по параболи  $p_k$  (сл. 71). Тангенцијална раван  $\tau$  додирује асимптотски конус по његовој изводници – асимптоти хиперболе  $h_2$  ЈЕХ–а. Она је истовремено прва нагибница  $g_\tau$  равни  $\tau$ , која пролази врхом конуса, тј. средиштем  $O$  површи ЈЕХ–а, у равни симетрије  $\varphi_2$  (сл.71а). Раван  $\pi // \tau$  и њој паралелне равни секу симетралну раван  $\varphi_2$  по нагибницама паралелним  $g_\tau$ , на којима леже темена пресечних парабола  $T_h$  и  $T_k$  обе површи. За пресечне параболе, раван  $\varphi_2$  је раван симетрије.



Сл.71 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\pi$  – параболе

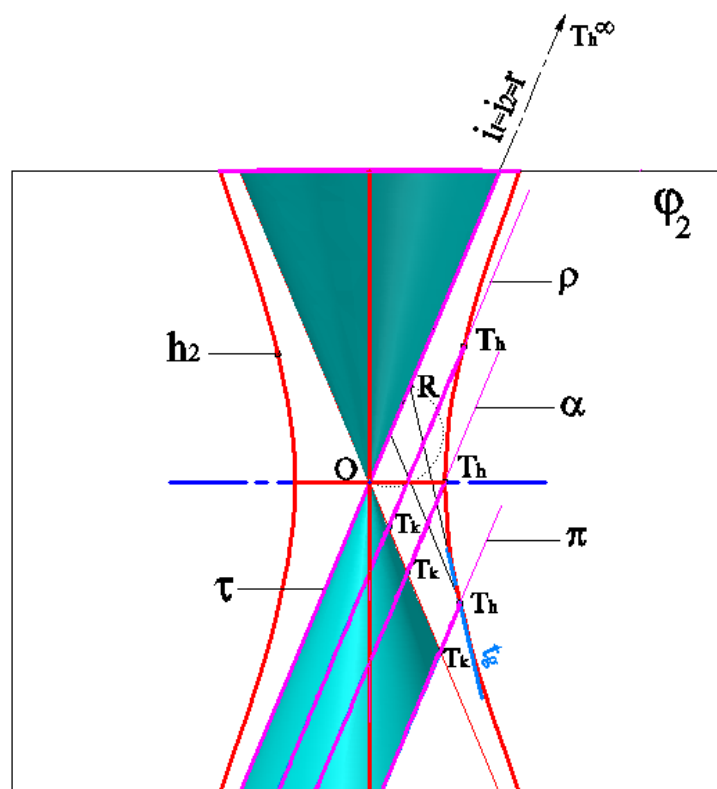
Геометријско место темена  $T_h$  парабола  $p_h$  је хипербола  $h_2$ , у симетралној равни  $\varphi_2$ , док је геометријско место темена пресечних парабола асимптотског конуса – изводница асимптотског конуса у истој симетралној равни.



Сл. 71а Пресеци ПЈЕХ са равнима управним на раван  $\varphi_2$ ; пресечне криве – параболе

## 5. Пресеци ЈЕХ и продори са основним површима 2. степена

Начин конструисања темена  $T_h$ , за параболе  $p_h$ , базира на принципу конструисања парова паралелних изводница ЈЕХ и асимптотског конуса, у две асимптотске равни ЈЕХ-а, тј. тангенцијалне равни асимптотског конуса, са траговима  $tg_1$  и  $tg_2$  (детаљно у погл. 5.1, уз сл.62), које се секу по пресечници  $t$ . Трагови ових равни пролазе пресечним тачкама трага  $\pi$  и базисне елипсе  $e$  ЈЕХ-а и тачком  $P_t$ . Пресек две изводнице ЈЕХ-а и спојнице  $P_t V$  дефинише положај темена  $T_h$  и тангенцијалне равни површи у њој.



Сл. 71б Зрачни приказ равни пресека ЈЕХ-а управних на раван  $\phi_2$  - параболе

Транслаторним померањем (узастопни положаји паралелних равни:  $\pi$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$  и тангенцијална  $\tau$ ) пресечне равни, теме  $T_h$  параболе  $p_h$ , "клиза" по контурној хиперболи  $h_2$ , ка њеној бесконачно далекој тачки  $T_h^\infty$ , у равни  $\tau$ , када се пресечна параболола "распада" на две паралелне праве  $i_1$  и  $i_2$  (сл. 71б). Ово је гранични положај пресечне равни за површ ЈЕХ, тј. тангенцијални за асимптотски конус. Праве  $i_1$  и  $i_2$  су изводнице површи ЈЕХ-а из различитих система и образују његову асимптотску раван. Упоредо са теменом  $T_h$ , теме  $T_k$  "клиза" дуж асимптоте хиперболе  $h_2$  – изводнице асимптотског конуса.

Произвољно изабраном полу  $R$ , на контурној изводници  $r$  асимптотског

конуса, у равни  $\varphi_2$ , одговара поларна раван  $\pi$ , једне од пресечних парабола. Другим речима, пол  $\mathbf{R}$  је тачка пресека изводнице  $\mathbf{r}$  и правца тангенте (tg) хиперболе  $h_2$ , у темену  $T_h$  параболе, у поларној равни  $\pi$ . На тај начин се за сваку пресечну (поларну) раван и поларну криву – параболу, у њој, може конструисати одговарајући пол.

Из наведених разматрања може се закључити :

У симетралним равнима  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  постоје по два пара контурних изводница асимптоског конуса ЈЕХ–а. Свака од њих је паралелна са по једним системом (паралелних) равни, управних на симетралне, које секу ЈЕХ и асимптотски конус по параболама.

*Четири система паралелних равни управних на симетралне равни  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  ЈЕХ–а секу површ по параболама. Сваки од њих је паралелан са одговарајућом изводницом асимптотског конуса, која припада симетралној равни ЈЕХ–а. Геометријско место темена свих пресечних парабола ЈЕХ–а, у равнима управним на његове симетралне равни  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , су контурне хиперболе  $h_1$  и  $h_2$  респективно.*

### Закљ. V/3

*Геометријско место полова за четири система паралелних равни , управних на симетралне равни  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  ЈЕХ–а, које секу ЈЕХ по параболама, су два пута по две изводнице асимптотског конуса у овим симетралним равнима.*

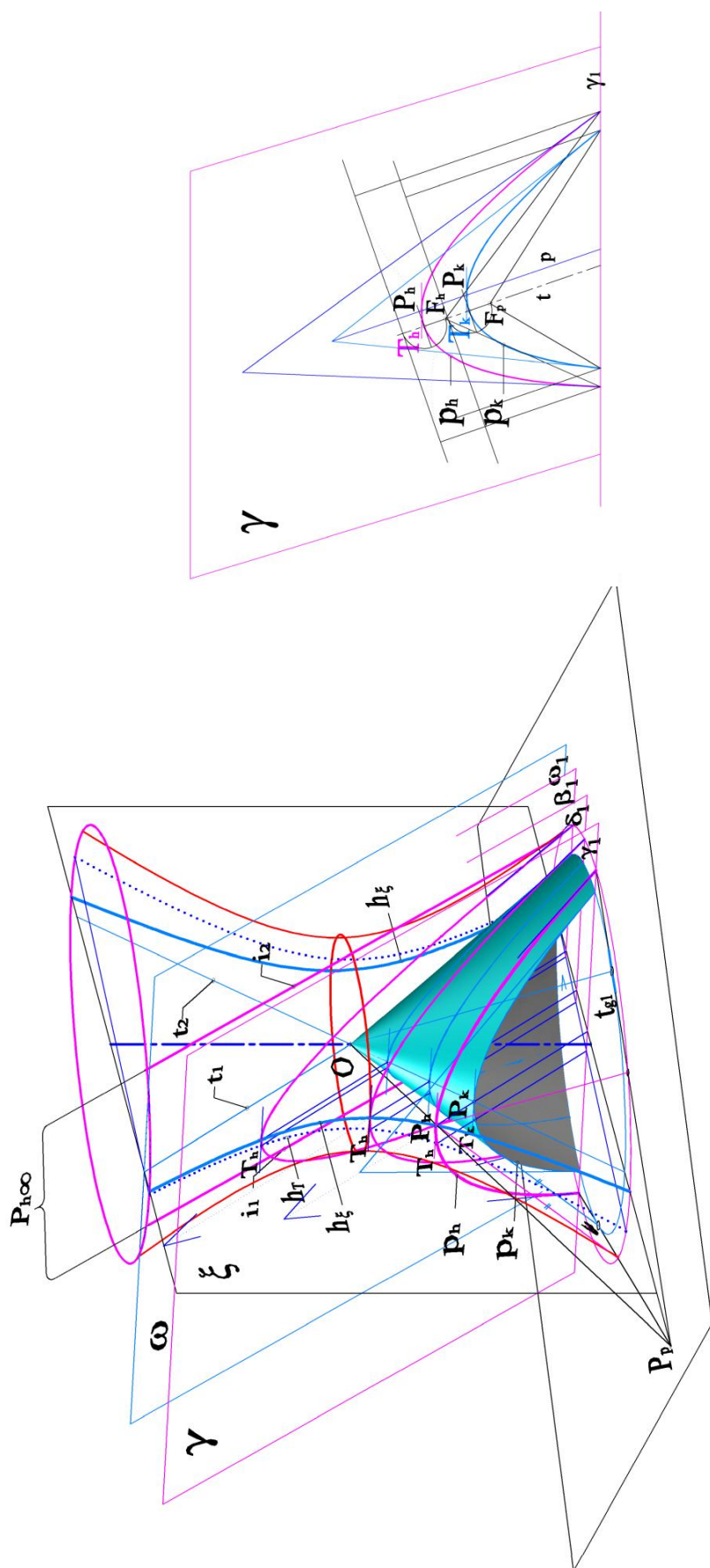
### Закљ. V/4

#### б) Пресеци са произвољно постављеним равнима

Раван  $\gamma$ , паралелна произвољно изабраној тангенцијалној равни  $\omega$  асимптотског конуса, сече ЈЕХ по параболи  $p_h$ , а асимптотски конус по параболи  $p_k$  (сл. 72). Како је раван  $\gamma$  произвољног положаја, конструктивни поступак одређивања параметара пресечне криве  $p_h$  је спроведен, у њој коњугованој равни  $\xi$  (раван кроз главну осу ЈЕХ–а). Стога су одређени правци њених пречника - коњуговани правци  $p$  и  $\gamma_1$ . Дијаметрална раван  $\zeta^{46}$  ЈЕХ–а сече равни  $\omega$  и  $\gamma$  по две паралелне пресечнице, од којих је  $t_l$  - дирна изводница асимптотског конуса и

---

<sup>46</sup> Први траг  $\xi_1$  равни  $\xi$  је коњуговани пречник базисне елипсе асимптотског конуса, за први траг  $\omega_1$  тангенцијалне равни  $\omega$ .



Сл. 72 Пресечне конике ПЈЕХ и асимптотског конуса у равни  $\gamma$  – параболе

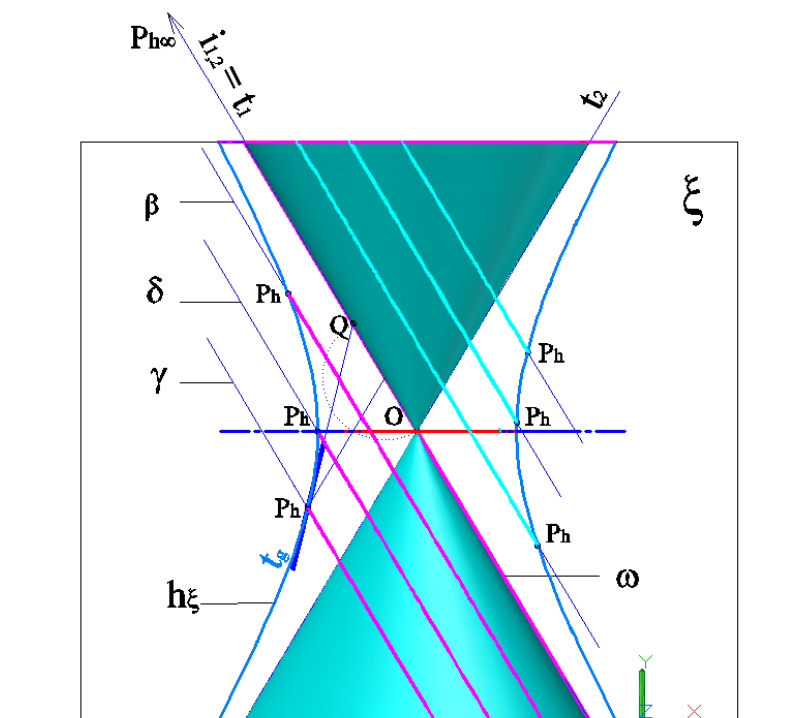
Сл. 72а Пресеци ПЈЕХ–а са равнима паралелним произвољној тангенцијалној равни  $\gamma$  асимптотског конуса – пресечне криве параболе



## 5. Пресеци ЈЕХ и продори са основним површима 2. степена

тангенцијалне равни  $\omega$  (сл. 72а). Друга пресечница, у равни  $\gamma$ , продире површ ЈЕХ-а у тачки  $P_h$  на хиперболи  $h_\xi$  равни  $\xi$ , а асимптотски конус, у тачки  $P_k$ , на асимптоти контурне хиперболе  $h_\xi$  (тј. изводници конуса). Тако је геометријско место тачака  $P_k$  – хипербола  $h_\xi$ , равни  $\xi$ . Геометријско место темена  $T_h$ , парабола  $p_h$ , је хипербола  $h_T$ , која припада прамену пресечних равни ЈЕХ-а са прамењачом – изводницом  $t_I$  конуса.

Принцип конструисања, тачке  $P_h$  је исти као и у објашњењу уз сл. 71а.



Сл. 72б Зрачни приказ равни пресека ПЈЕХ и пресечних кривих – парабола

Транслација пресечне равни (приказана кроз узастопне паралелне положаје:  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  и гранични –  $\omega$ ), узрокује кретање тачке  $P_h$  дуж хиперболе  $h_\xi$ , до бесконачно далеке тачке  $P_h^\infty$  хиперболе, када се пресечна парабола "распада" на две паралелне праве  $i_1$  и  $i_2$  – изводнице ЈЕХ из два различита система изводница (сл. 72б). Ове две праве леже у тангенцијалној равни  $\omega$  асимптотског конуса, односно, асимптотској равни ЈЕХ-а.

Произвољно изабраном полу  $Q$ , на изводници  $t_I$ , одговара поларна раван  $\gamma$ . Принцип конструисања је исти као у случају на сл.71б. То значи да је геометријско место полова, за систем равни паралелних равни  $\gamma$  изводница  $t_I$  асимптотског конуса, у коњугованој равни  $\xi$ .



### 5.2.3 пресек ЈЕХ по хиперболи

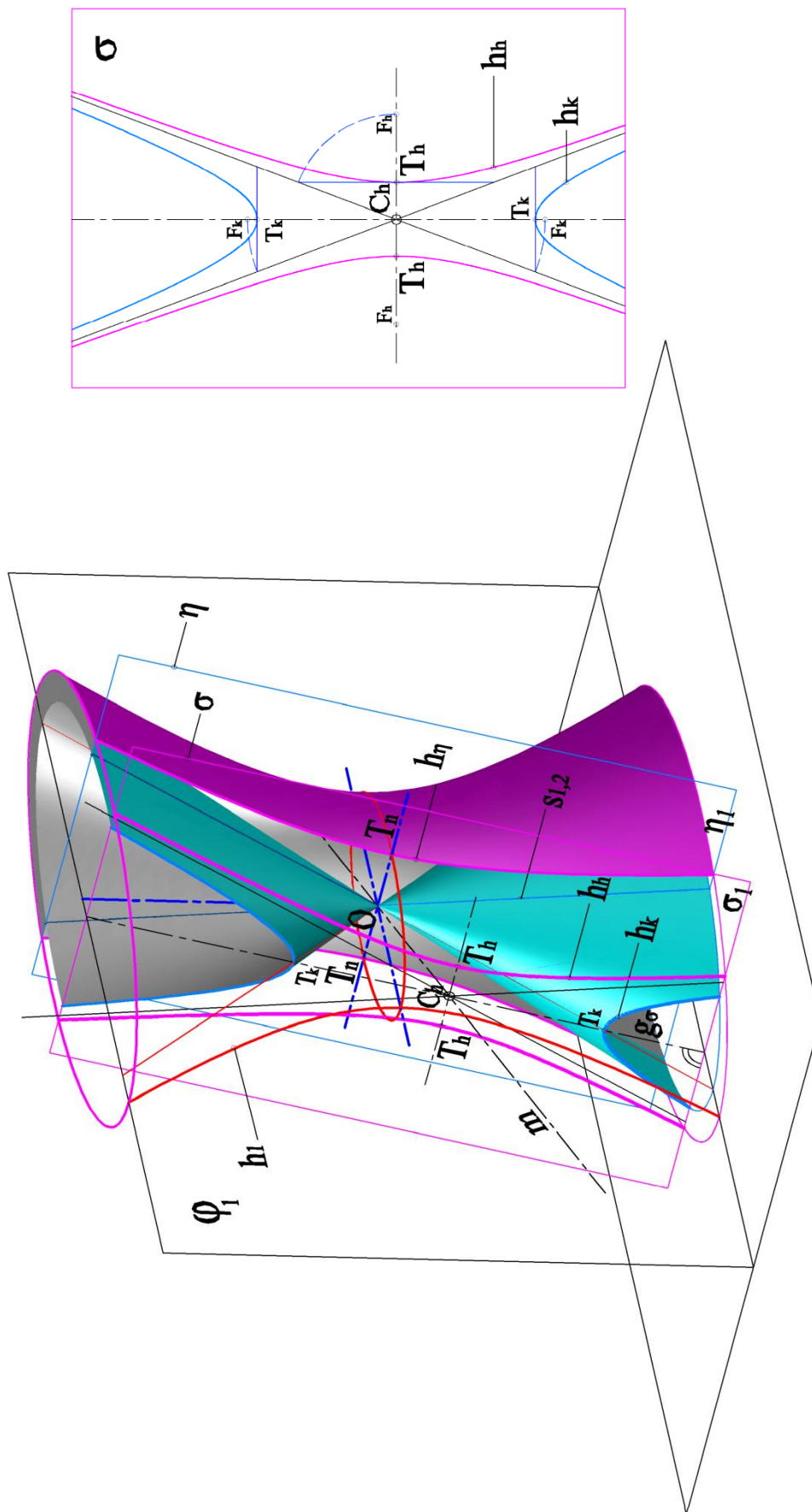
*a) пресеци са равнима које су управне на симетралну раван ЈЕХ*

Раван  $\sigma \perp \varphi_1$ , паралелна равни  $\eta \perp \varphi_1$ , (сл. 73), која је постављена кроз врх  $O$  асимптотског конуса (коинцидентан средишту ЈЕХ–а) и сече конус по две његове изводнице  $s_{1,2}$ , пресеца ЈЕХ по хиперболи  $h_h$ , а асимптотски конус по хиперболи  $h_k$ . Две хиперболе (сл. 73а) имају заједничко средиште  $C_h$  и пар асимптота, паралелних изводницама  $s_{1,2}$  асимптотског конуса, у равни  $\eta$ . Темена хипербола  $T_h-T_h$  и  $T_k-T_k$  се налазе на пару ортогоналних оса, симетрала углова две асимптоте. Пар темена  $T_k-T_k$ , хиперболе  $h_k$ , лежи у тачкама пресека прве нагибнице  $g_\sigma$  равни  $\sigma$  и изводнице асимптотског конуса, у симетралној равни  $\varphi_1$ .

Транслаторним померањем равни, центри пресечних криви се крећу дуж праве  $m$  (сл. 73б), ка средишту  $O$  (хипербола  $h_n$  – највећа површина пресека). Темена  $T_n-T_n$  хиперболе  $h_n$  се, налазе у крајњим тачкама стрикционе елипсе, на оси  $o_2$  површи ЈЕХ–а, управној на раван симетрије  $\varphi_1$ .

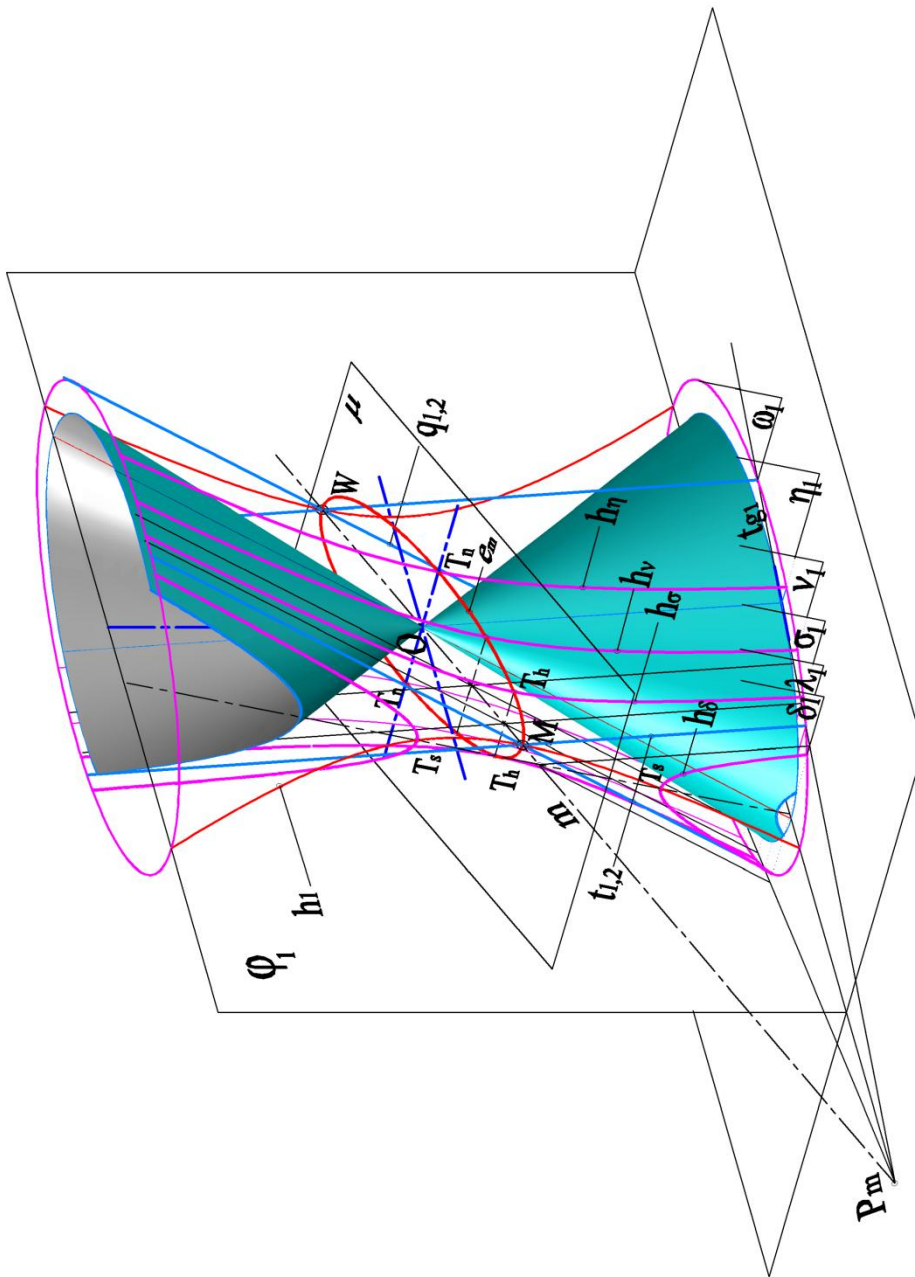
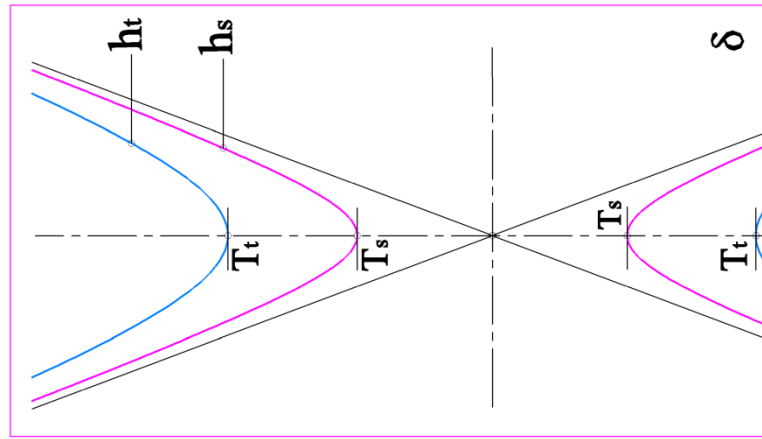
М. Chasles, у разматрању особина једнограног хиперboloида [44, стр.36], закључује да: "Свака раван која додирује једнограни хиперboloид садржи две праве – његове изводнице, а паралелна раван кроз центар хиперboloида сече асимптотски конус по две његове изводнице паралелне изводницама хиперboloида." У складу са овим тврђењем, према периферији површи, гране пресечне хиперболе се приближавају, док раван не заузме тангенцијални положај, у тачкама  $M$  и  $W$ , када се пресечна крива "распада" на две праве – изводнице  $t_{1,2}$  и  $q_{1,2}$  површи ЈЕХ–а, које у тим тачкама образују дирне равни  $\lambda$  и  $\omega$  (сл. 73г). Геометријско место темена ( $T_n-T_n, T_h-T_h...$ ) пресечних хипербола ( $h_\eta, h_\nu, h_\sigma...$ ), у равнима између  $\lambda$  и  $\omega$ , закључно са тачкама додира ( $M, W$ ) представља коника – елипса  $e_m$ . Крива припада поларној равни  $\mu$  хиперboloида, која пролази средиштем  $O$  ЈЕХ–а, и одговара бесконачно далеком полу  $N_\infty$ . Пресечне хиперболе ЈЕХ–а, са равнима ван овог подручја (нпр. раван  $\delta$ ), задржавају исти положај оса, с тим што реална оса постаје имагинарна и обрнуто (сл. 73в), а темена  $T_s-T_s$ , пресечне хиперболе  $h_\delta$ , припадају контурној хиперболи  $h_1$ .

Са становишта поларитета, бесконачно далеки пол  $M_\infty$  је пол за поларну раван  $\eta$ , која пролази средиштем  $O$  ЈЕХ–а, док коначним половима на правој  $m$



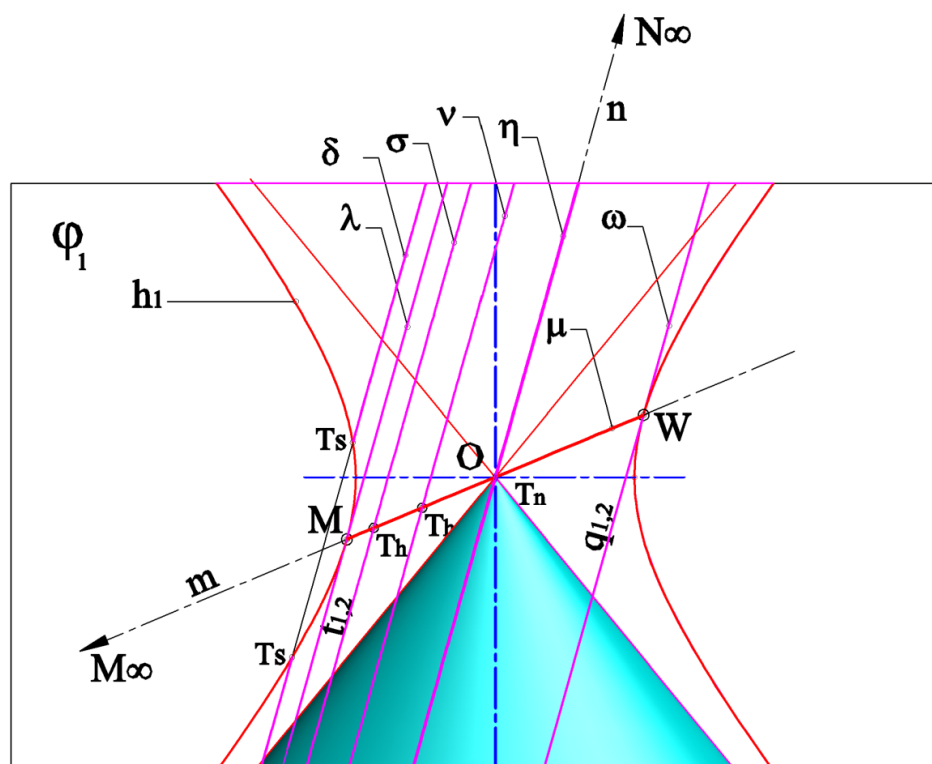
Сл. 73а Пресеци ПЈЕХ –а са равнина управним на  $\varphi_1$ –пресечне криве хиперболе

Сл. 73 Пресечне конике ПЈЕХ–а и асимптотског конуса са равни  $\sigma$



Сл.73в Пресечне конике ЈЕХ-а и асим-  
птотског конуса са равни  $\delta$  – хиперболе

Сл. 73б Положајне карактеристике пресечних хипербола  
за задати систем равни



Сл. 73г Зрачни приказ равни пресека ПЈЕХ паралелних равни  $\eta$  одговарају поларне равни из система паралелних равни, задатог са равни  $\sigma$ . Прецизније, тачке додира две тангенте на елипсу  $e_m$ , из изабраног пола ( на правој  $m$ ) су темена ( $T_h$ ) хиперболе, која припада одговарајућој поларној равни.

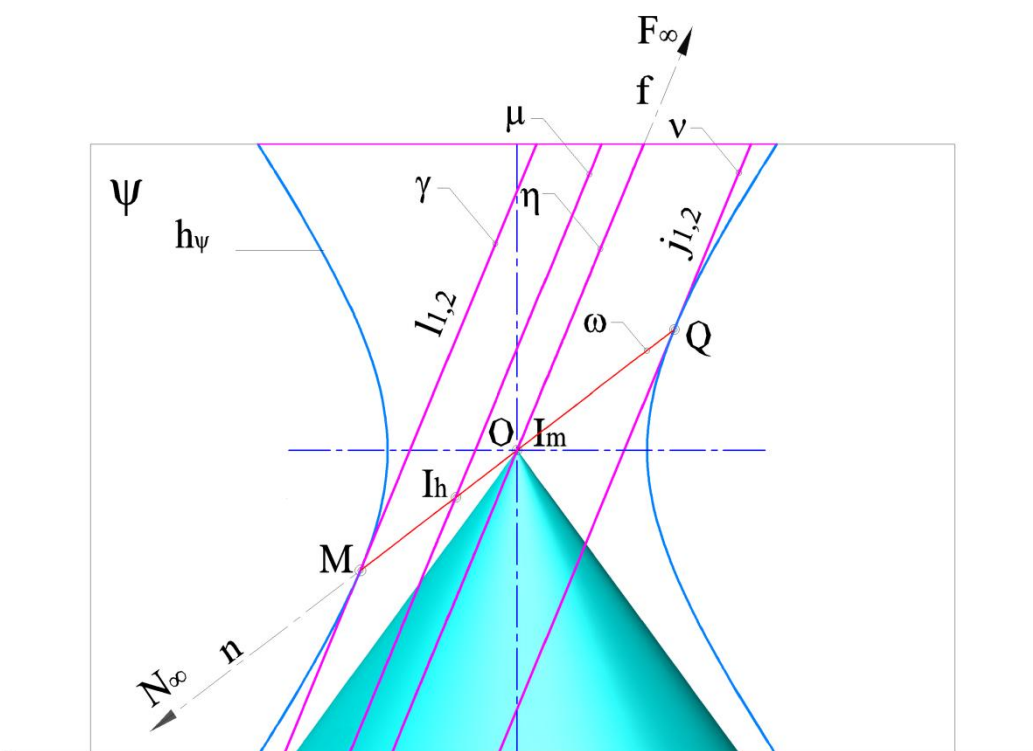
*б) пресеци са произвољно постављеним равнима*

Произвољно постављена раван  $\mu$ , паралелна равни  $\eta$ , која пролази средиштем  $O$  ЈЕХ–а и пресеца асимптотски конус по две изводнице  $i_{1,2}$ , сече хиперболоид по хиперболи  $h_h$ , а асимптотски конус по хиперболи  $h_k$  (сл.74). Заједничке асимптоте за две криве су паралелне изводницама  $i_{1,2}$  и секу се у тачки  $C_h$  – заједничком центру.

У равни базисних кривих конуса и хиперболоида, за правац првог трага равни  $\mu_l$ , конструктивно је одређен коњуговани правац  $\psi_l$  – први траг равни  $\psi$  која садржи подужну осу ЈЕХ–а. Пресек равни  $\psi$  и хиперболоида је хипербола  $h_\psi$ . Пресечнице равни  $\psi$  са равнима  $\mu$  и  $\eta$  су пречници хипербола  $h_h$  и  $h_m$ , а њима коњуговани пречници су паралелни првим траговима  $\mu_l$  тј.  $\eta_l$  (сл. 96а). Крајње тачке  $I_h-I_h$  и  $I_m-I_m$ , ових пречника, се налазе на елипси  $e_\omega$ .



Транслаторним померањем пресечне равни од средишта ка контури, гране пресечне хиперболе се приближавају, до тангентних положаја равни  $\gamma$  и  $\nu$ , када се хипербола "распада" на две праве:  $l_1, l_2$ , тј.  $j_1, j_2$ , паралелне изводницама  $i_{1,2}$ , у равни  $\eta$ . Тачке  $M$  и  $Q$  су пресечне тачке изводница  $l_1, l_2$ , тј.  $j_1, j_2$  и додири тангенцијалних равни  $\gamma$  и  $\nu$ , које ови парови правих формирају на површи ЈЕХ-а. Изводнице  $l_1, l_2$  и  $j_1, j_2$  пролазе тачкама  $1,2$  и  $3,4$  – пресецима трагова  $tg_1$  и  $tg_2$  тангенцијалних равни асимптотског конуса и базисне елипсе хиперболоида. Овим тачкама пролазе и први трагови равни  $\eta$  и  $\nu$ .



Сл. 74 б Зрачни приказ равни пресека ПЈЕХ паралелних равни  $\mu$

За бесконачно далеки пол  $N_\infty$ , на правцу  $n$ , поларна равни  $\eta$  пролази средиштем  $O$  ЈЕХ-а. За коначне полове овог правца, одговарајуће поларне равни су паралелне равни  $\eta$ . Половина, на правцу  $n$ , ван површи ЈЕХ-а, су придружене поларне равни унутар равни  $\gamma$  и  $\nu$ , док половина између тачака  $M$  и  $Q$  одговарају поларне равни, са пресечним хиперболама, чија су темена на контурној хиперболи  $h_\psi$ . Начин конструисања је исти као у случају објашњеном уз сл. 73б. Правац  $n$  је коњугован правцу  $f$  (пресечница равни  $\psi$  и  $\eta$ ), чија је тачка  $F_\infty$  - пол равни  $\omega$ .

*ц) пресеци ЈЕХ по Аполонијевој (правоуглој хиперболи)*

Специјални случај хиперболе је Аполонијева хипербола (правоугла, или равнострана), чије асимптоте заклапају угао од  $90^\circ$ . "У случају равностраног<sup>47</sup> ротационог хиперболоида, све равни управне на неку његову изводницу, секу површ по равностраној хиперболи", доказују Havlicek и Weiss [40]. У системима равни које секу ЈЕХ по хиперболама, постоји и овај специјални тип. Овде ће бити приказана положајна анализа пресека правог ЈЕХ по Аполонијевим хиперболама.

У случају, правог ЈЕХ, задатог са две идентичне пресечне криве - елипсе и изводницом, важи следећа правилност:

*Ако у асимптотском конусу, задатог ПЈЕХ-а, постоји раван кроз његову осовину  $o_1$ , у којој пар пресечних изводница заклапа угао  $\varphi=90^\circ$ , пресечна хипербола, по којој иста раван сече и ЈЕХ, ће бити Аполонијева хипербола.* (1)

Претпоставимо да је у врху **O** правог елиптичког асимптотског конуса површи ЈЕХ-а постављен још један прав ротациони конус чије изводнице заклапају угао од  $45^\circ$  са пресечном равни, тј.  $r=h$  (радијус  $r$  пресечне кружнице  $k_r$  је једнак висини  $h$ ). Њихов пресек може бити: пар изводница (ако се конуси додирују), четири изводнице (ако се конуси секу) и имагинарни пар изводница (ако се конуси не секу).

*Нека су  $a$  и  $b$  велика и мала полуоса (респективно) пресечне елипсе асимптотског конуса. Тада важи следеће:*

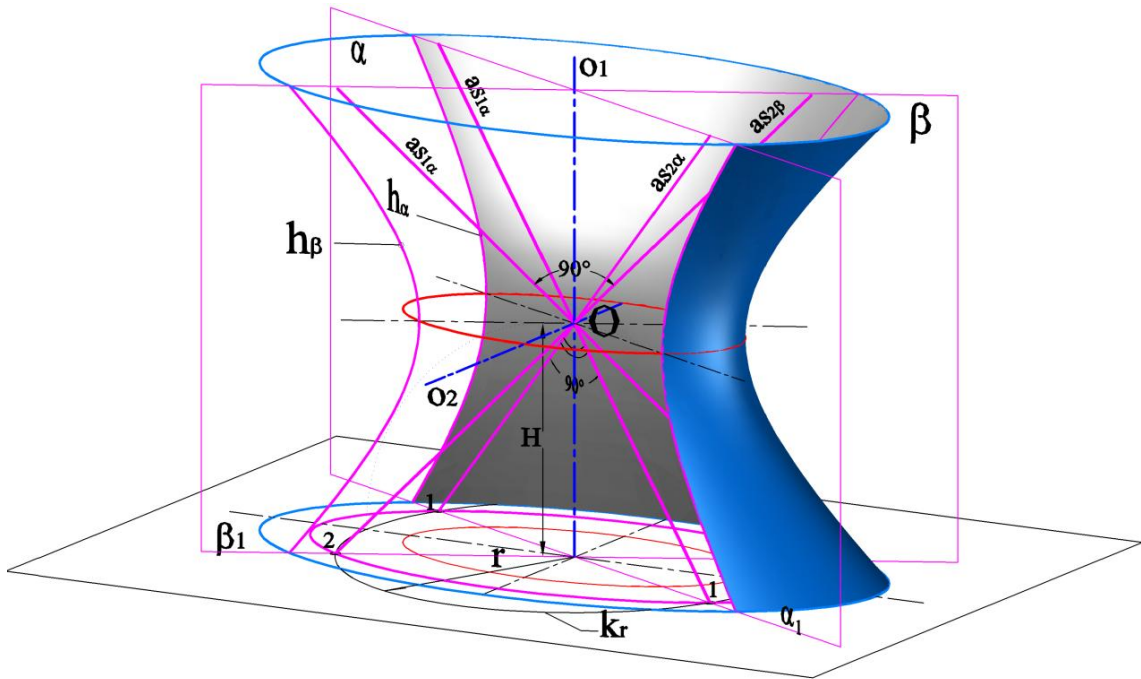
- а) додир два конуса по две изводнице..... ако је  $a=r$ , или  $b=r$*
- б) пресек два конуса по четири изводнице..... ако је  $b < r < a$*
- ц) конуси се не секу ..... ако је  $r < b$ , или  $r > a$ .* (2)

На сл. 75 и 76 је приказан случај у коме се два конуса: асимптотски конус ЈЕХ, са пресечном кривом – елипсом  $e$  и ротациони, са пресечном кривом – кружницом  $k_r$ , код кога је  $r=H$ , секу по два пара изводница 1O-1O и 2O-2O, у равнима  $\alpha$  и  $\beta$  које пролазе осовином  $o_1$  ЈЕХ-а. Оне су асимптоте  $as_{1\alpha,2\alpha}$  и  $as_{1\beta,2\beta}$  пресечних правоуглих – Аполонијевих хипербола  $h_\alpha$  и  $h_\beta$ . Све равни паралелне равнима  $\alpha$  и  $\beta$ , према ставу (1) сећи ће ЈЕХ по Аполонијевим хиперболама.

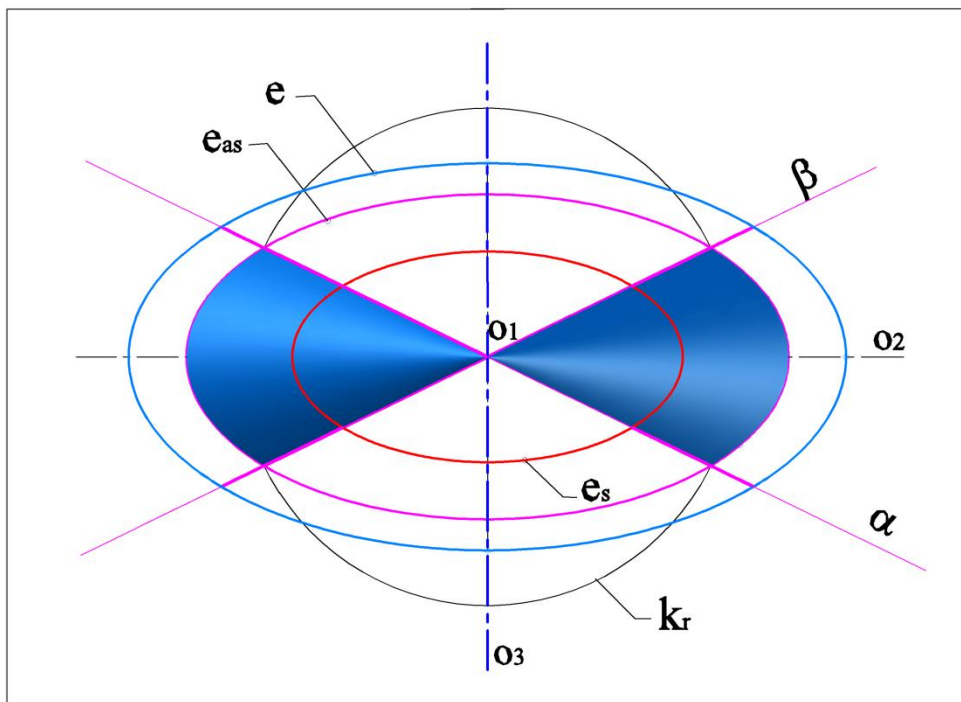
---

<sup>47</sup> Специјални случај ротационог хиперболоида ,аутори рада реф. [20] називају "equilateral hyperboloid".





Сл. 75 Пресек ПЈЕХ са равнима  $\alpha \beta$ ; пресечне криве– Аполонијеве хиперболе



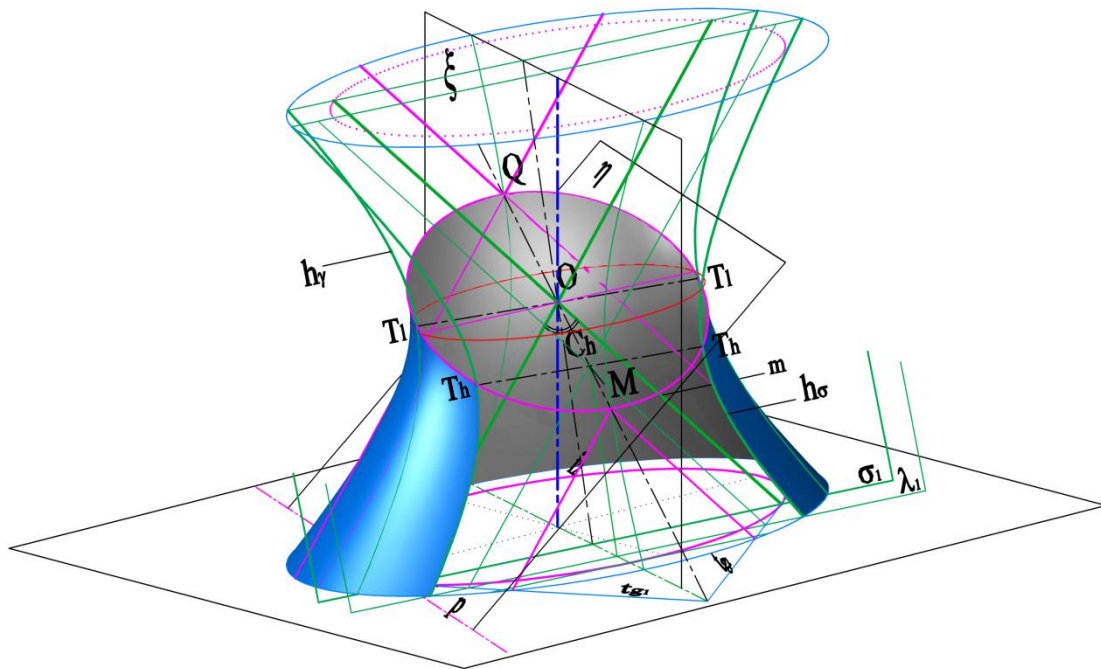
Сл. 76 Зрачни приказ пресека ПЈЕХ са равнима  $\alpha$  и  $\beta$





Изабрана произвољна изводница  $m$  асимптотског конуса задатог правог ЈЕХ, која испуњава услов (2), послужила је за конструисање нормалне равни  $\eta$  (сл.77). Пресек равни  $\eta$  и равни базиса хиперболоида је права  $p$  која сече пресечну елипсу асимптотског конуса у две тачке. Њима пролазе изводнице конуса  $i_1$  и  $i_2$ . Изводница  $m$  са изводницама  $i_1$  и  $i_2$  образује две равни  $\sigma$  и  $\omega$  које секу ЈЕХ по правоуглим хиперболама  $h_\sigma$  и  $h_\omega$ . Све равни паралелне овим двома равнима, такође секу ЈЕХ по тзв. равностраним или Аполонијевим хиперболама.

На сл. 78 приказан је систем равни паралелних са равни коју образују изводнице  $m$  и  $i_2$  (са сл. 77). Овај случај пресека има карактеристике групе пресека 5.1.3б, те неће бити посебно разматран.



Сл. 78 Систем паралелних равни које секу ПЈЕХ по Аполонијевим хиперболама

#### 5.2.4 кружни пресеци ЈЕХ (метода "помоћних лопти")

Добро позната особина конуса другог реда, још из времена Декарта је да "постоје два система кружних пресека општег конуса, који се налазе у равнима паралелним двома фиксним равнима" [44, стр.3]. Даље, у својим разматрањима особина хиперболоида изведеним из особина конуса другог реда [44, стр.36] М. Chasles закључује да су равни кружних пресека једнограног хиперболоида и

његовог асимптотског конуса паралелне, као и да су пресечне конике ових површи са равнима паралелним "цикличним" – концентричне кружнице. То значи да је потребно одредити положај кружног пресека асимптотског конуса, а потом, у истој равни, њему концентричан кружни пресек једнограног хиперboloида.

### *Кружни пресеци асимптотског конуса ЈЕХ–а*

У случају када је позната једна раван симетрије асимптотског конуса, геометријска конструкција се изводи на следећи начин :

У конус се уписује „помоћна“ лопта<sup>48</sup> [35], са циљем да се одреде њихови заједнички кружни пресеци. Сфера и конус, у општем случају, се секу по просторној кривој четвртог реда. Познато је да када је остварен услов двоструког додира сфере и конуса (две заједничке тангенцијалне равни), тј. просторна крива четвртог реда има две двоструке тачке, долази до њеног распада на две криве другог реда–кружнице.

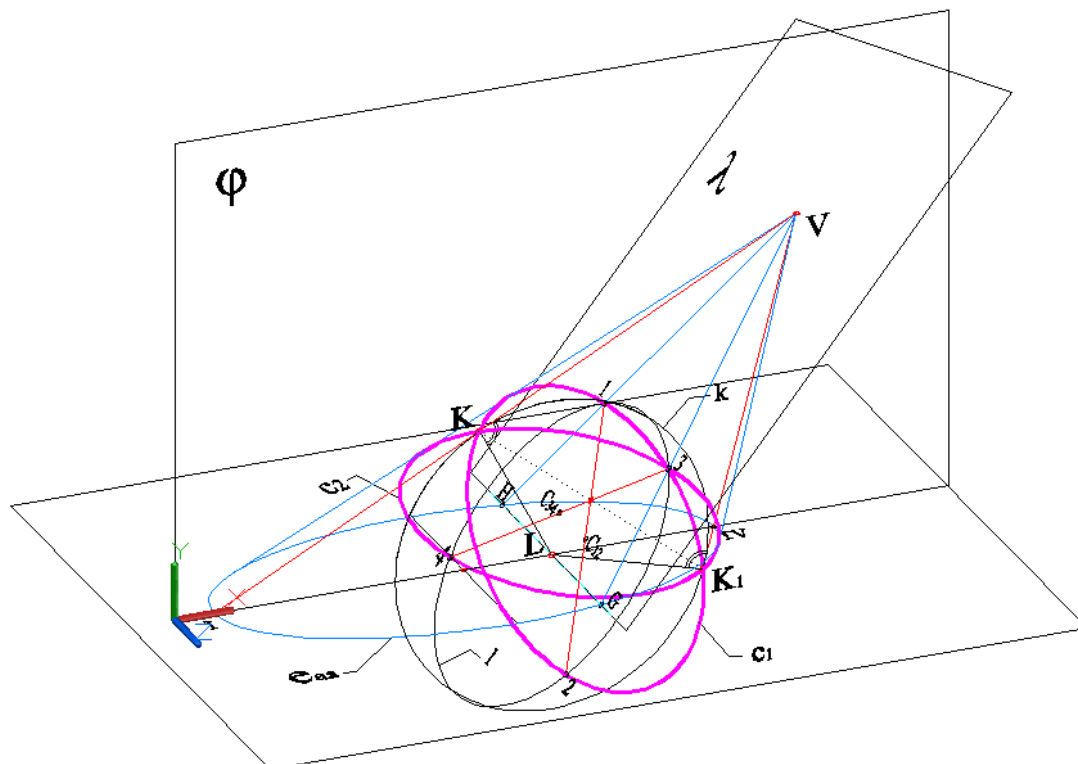
Коеpetsky и Sach су у свом раду [20] приказали случај пресека правог елиптичког конуса по кружним пресецима. Конструкција, за случај косог елиптичког конуса, мора имати "корак" више. Задат је асимптотски конус  $\tau$  површи ЈЕХ базисном елипсом  $e_{as}$  у хоризонталној равни, равни симетрије  $\varphi$  и врхом  $V$  у њој. Нека је контурна кружница  $k$  произвољне сфере  $\theta$ , у задатој равни симетрије  $\varphi$  асимптотског конуса, уписана у највећи пресек конуса<sup>49</sup>, са центром у тачки  $L$ , на симетрала угла две изводнице  $I-V$  и  $IV-V$  асимптотског конуса. Тада су тачке додира  $K$  и  $K_1$ , кружнице  $k$  и ове две изводнице, двоструке тачке пресечне криве конуса и сфере. (сл.79)

*Линија  $l$  центара  $L_{1-n}$  уписаних лопти  $\theta_{1-n}$  које испуњавају услов двоструког додира, тј. имају две заједничке тангенцијалне равни  $\zeta$  и  $\zeta_1$  у тачкама  $K$  и  $K_1$ , са површи косог елиптичког асимптотског конуса ЈЕХ–а, који има једну познату раван симетрије  $\varphi_1$ , је симетрала угла контурних изводница  $s_1$  и  $s_2$ , у равни његовог највећег пресека ( $\varphi_1$ ).* (1)

---

<sup>48</sup> Видети погл. 4.2.3 – Продори ЈЕХ и лопте

<sup>49</sup> У литератури– симетрална раван која пролази врхом конуса и има највећу површину пресека обухваћену са две контурне изводнице и великом осом базисне елипсе конуса.



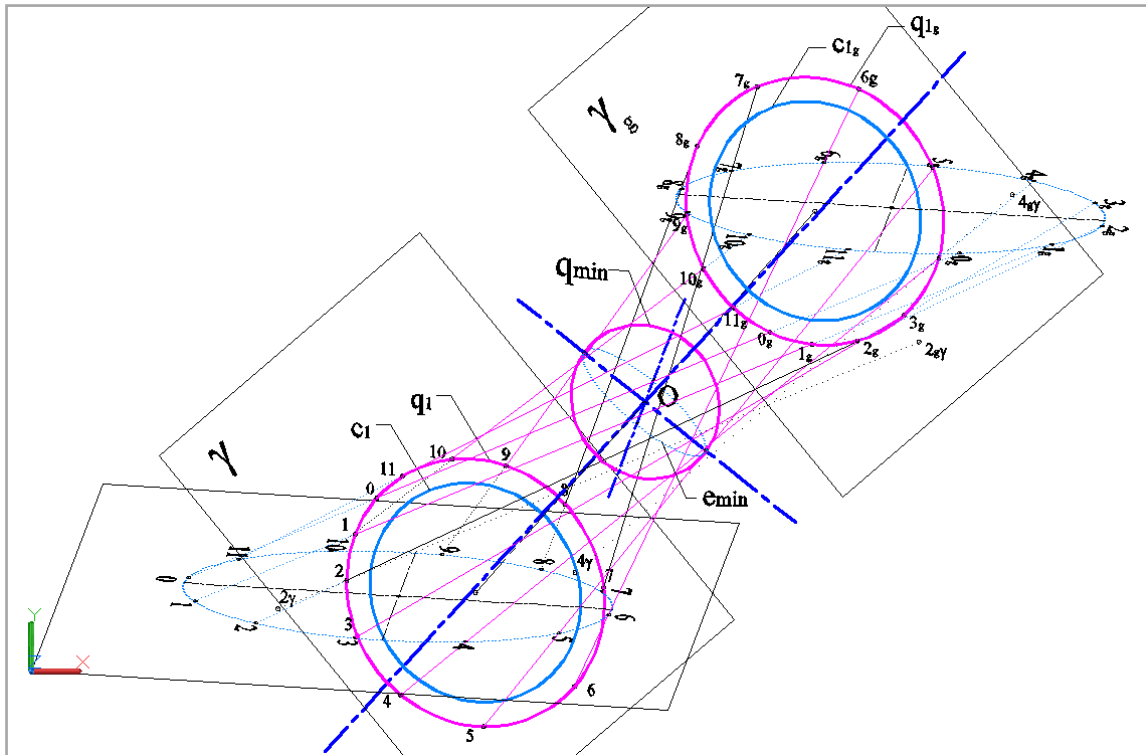
Сл.79 Кружни пресеци  $c_1$  и  $c_2$  асимптотског конуса<sup>50</sup>

Како обе кружнице морају проћи тачкама  $K$  и  $K_1$ , јасно је да је спојница ових тачака – пресечница равни кружних пресека. Стога се два кружна пресека  $c_1$  и  $c_2$  виде зрчно из правца спојнице  $KK_1$ , као пречници, чије крајње тачке 1- 2 и 3- 4 леже у пресеку контурне кружнице  $l$  и изводница  $GV$  и  $HV$  у равни  $\lambda$  [20, стр. 39]. Центри кружница  $C_{12}(c_1)$  и  $C_{34}(c_2)$  кружних пресека су на половини пречника 1–2 и 3–4, а конструисане кружнице леже у равнима управним на раван  $\lambda$ .

У равни  $\lambda \perp \phi_1$  која пролази линијом центара  $l$  кружних пресека, у пресеку контурних изводница  $i_1$  и  $i_2$  асимптотског конуса  $\tau$  и контурних кружница  $k_1-k_n$  лопти  $\theta_1-\theta_n$ , налазе се четири тачке пресека којима пролазе дијаметри кружних пресека конуса. Кружни пресеци леже у равнима управним на раван  $\lambda$ .

(2)

<sup>50</sup> Слика је део ауторског рада реф. [50], Нови Сад, 2012.



Сл.80 Један систем кружних пресека ЈЕХ-а

*Кружни пресеци ЈЕХ-а*

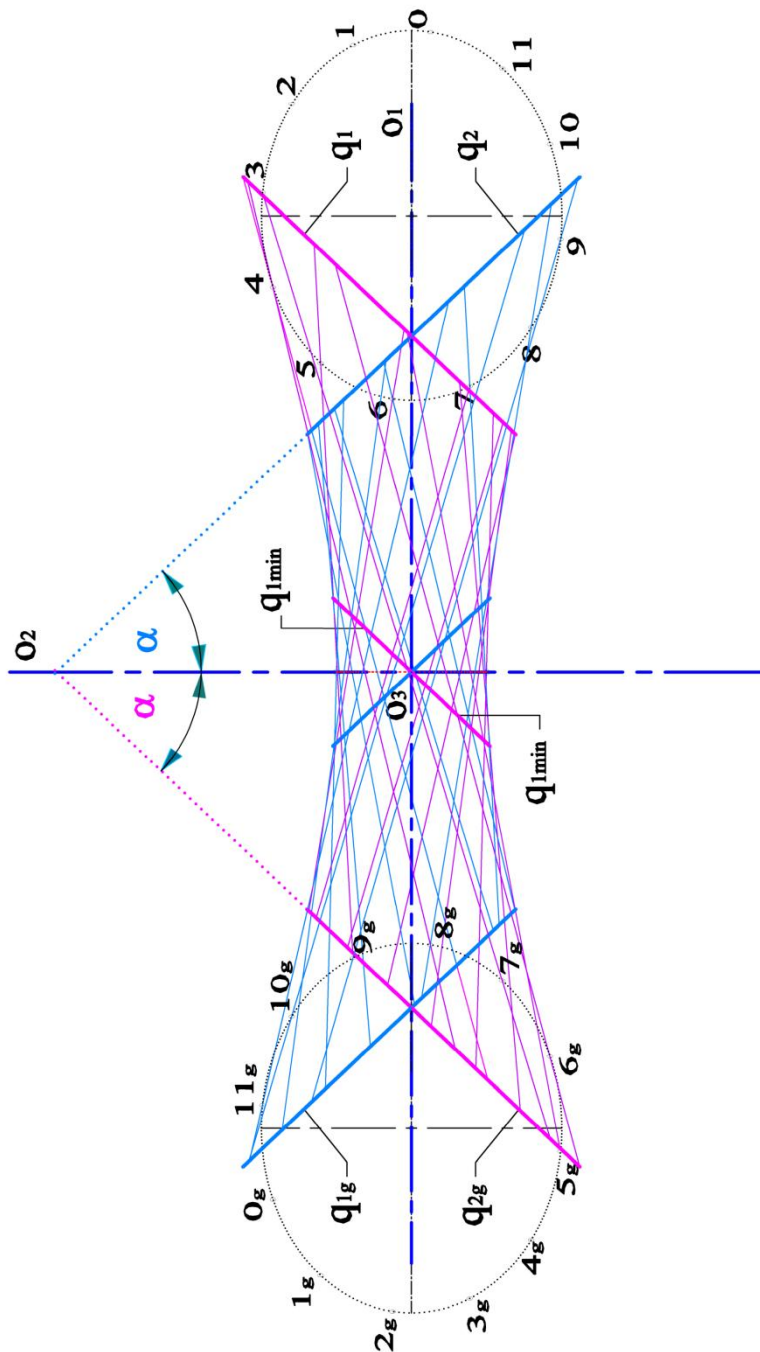
ЈЕХ је пресечен двама паралелним равнима :  $\gamma$  и  $\gamma_g$ , тако да их изабране изводнице продиру у тачкама  $0-11$  и  $0_g-11_g$  којима пролазе кружнице  $q_1$  и  $q_{1g}$ , које су концентричне претходно конструисаним кружницама  $c_1$  и  $c_{1g}$  (кружни пресеци) асимптотског конуса (сл.80). Радијуси кружница  $c_1$  и  $c_{1g}$  су идентични и представљају растојање од одговарајућег центра до продора произвољно изабране изводнице ( $2-2_g$ , и  $4-4_g$ ) кроз једну од две пресечне равни. Минимални кружни пресек  $q_{min}$  ЈЕХ-а, који припада тзв. "цикличној"<sup>51</sup> равни, има један дијаметар поклопљен са великом осом најмање пресечне елипсе  $e_{min}$  ЈЕХ-а (стрикциона елипса).

Важна особина два система кружних пресека, на основу које је А. Г. Walker, давне 1841. год., дао конструкцију за жичани модел ЈЕХ-а [54], је да су симетрично постављени у односу на равни симетрије  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , које формирају

<sup>51</sup> У раду "Два геометријска мемоара: о општим особинама конуса другог реда и о сферним коникама", М. Chasles-а, аутор користи термин "циклична", за равни које секу конус у врху, а паралелне су са два система равни његових кружних пресека. [44, стр.7]

## 5. Пресеци ЈЕХ и продори са основним површима 2. степена

парови главних оса  $o_1o_2$  и  $o_3o_2$  површи респективно. Ово се јасно сагледава у пројекцији у којој се равни кружних пресека и њихове пресечнице виде зрочно (сл.81).



Сл. 81 Зрочни приказ два система кружних пресека КЈЕХ

### 5.3 Продори ЈЕХ са општим површима 2. степена

#### 5.3.1 Продор ЈЕХ и конуса

Продорна крива површи конуса и ЈЕХ–а је крива 4. реда. У зависности од међусобног положаја два тела биће приказано неколико карактеристичних случајева продорне криве.

а) продорна крива 4. реда се распада на *две елипсе*

Продорна крива 4. реда за ЈЕХ и ротациони конус (сл.82) се у случају приказаном на сл.80а распада на две елипсе  $e_1$  и  $e_2$ . Главне (унутрашње) осе две површи су ортогоналне и секу се у средишту хиперболоида. Конус је постављен тако да у хоризонталној равни његовог највећег пресека, две контурне изводнице додирују стрикциону елипсу ЈЕХ–а у две тачке  $D_1$  и  $D_2$ . Из разлога ове две двоструке тачке, тј. двоструког додира два тела, крива 4. реда има распад.

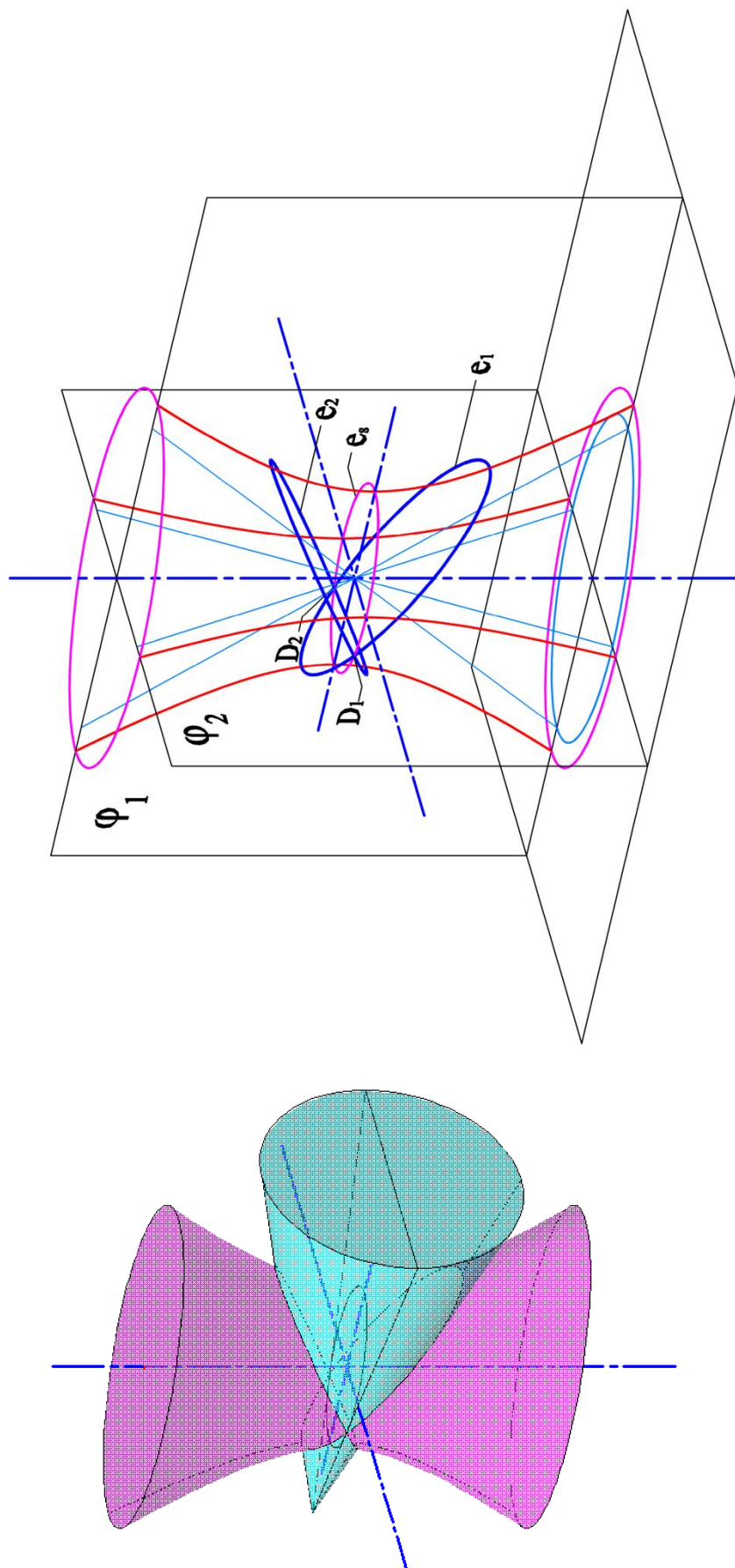
б) продорна крива 4. реда је *дводелна симетрична*

Продор ЈЕХ–а и правог ротационог конуса, у случају када се њихове главне осе секу у средишту хиперболоида и ортогоналне су, приказан је на сл.83. Полупречник конуса  $r$  је задат ( $r > b$ ) тако да продорна просторна крива 4. реда има две независне затворене гране  $g_1$  и  $g_2$ , симетричне у односу на симетралну раван  $\varphi_2$  и раван стрикционе елипсе хиперболоида (сл.83а).

ц) продорна крива 4. реда је *дводелна асиметрична*

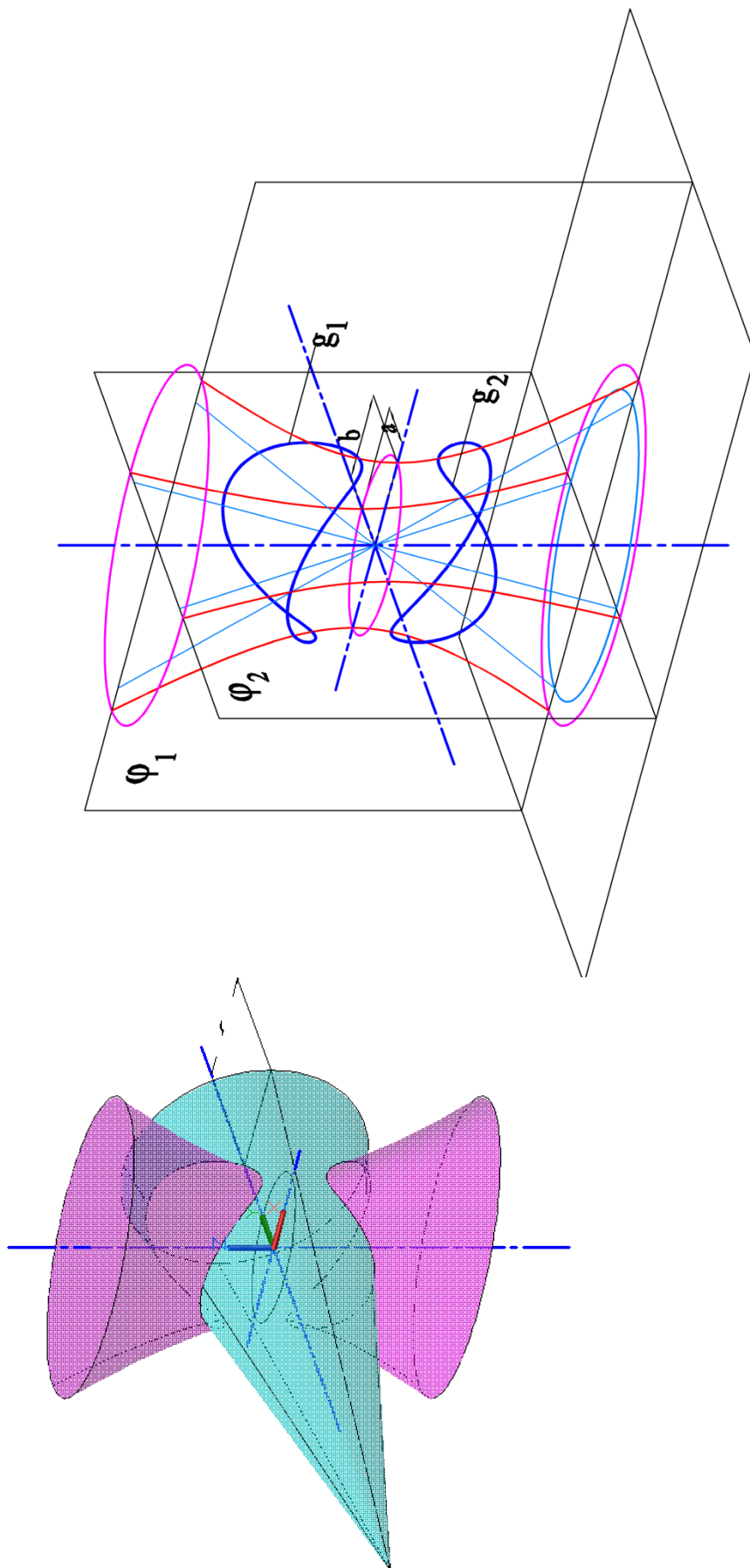
ЈЕХ и ротациони конус (сл. 84) су постављени у положај да им је главна (унутрашња) оса коинцидентна, а базиси – елипса и круг, леже у истој хоризонталној равни, са заједничким центром. Полупречник  $r$  круга, на конусу, је идентичан великој полу осе елипсе, на хиперболоиду. Врх конуса, на главној осе, је задат тако да контурне изводнице конуса у симетралној равни  $\varphi_1$  пролазе теменим тачкама велике осе стрикционе елипсе  $e_3$ . Просторна крива 4. реда  $k$  је дводелна асиметрична (сл.84а). Други део просторне криве је на слици, због ограничавања тела равнима „невидљив“.



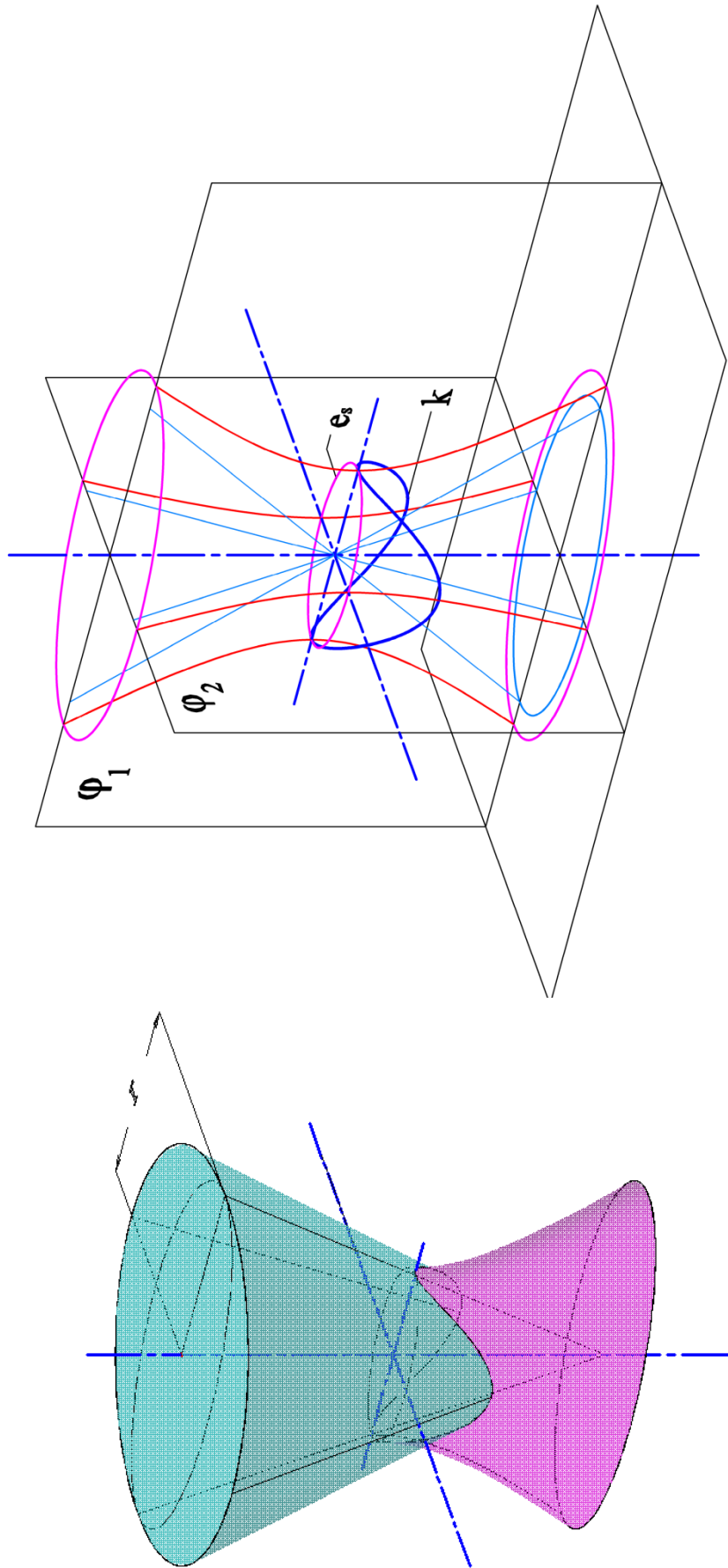


Сл. 82 Продор ПЈЕХ-а и конуса ; просторна крива се распада на две елипсе





Сл. 83 Продор ПЈЕХ–а и конуса ; продорна крива је дводелна симетрична



Сл. 84 Продор ПЈЕХ-а и конуса; продорна крива је дводелна асиметрична

### 5.3.2 Продор ЈЕХ и облице

Продорна крива површи облице и ЈЕХ–а је крива 4. реда. У зависности од међусобног положаја два тела, приказани су следећи карактеристични типови:

а) продорна крива 4. реда се распада на *две елипсе*

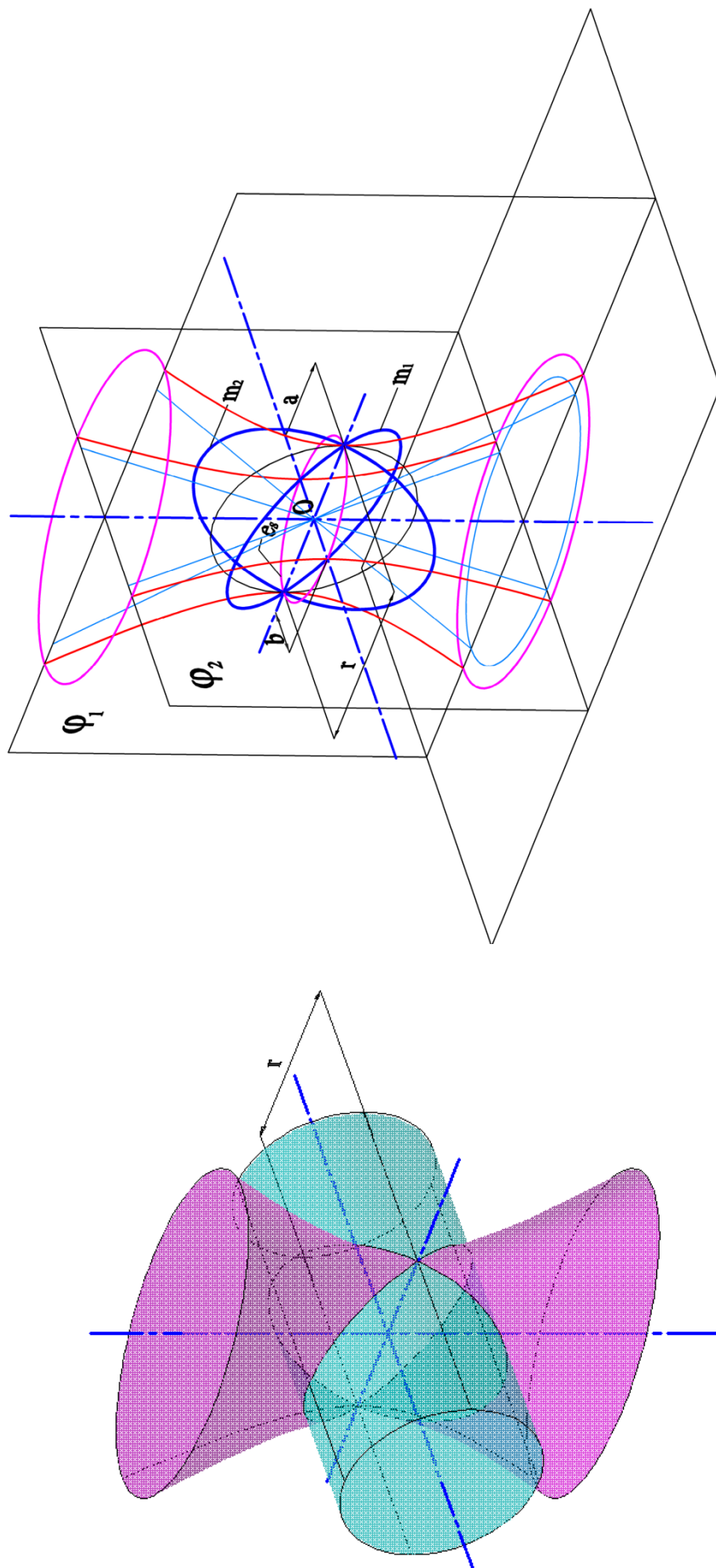
Цилиндар и ЈЕХ имају две заједничке тангенцијалне равни у крајњим тачкама темена стрикционе елипсе (сл.85) Осовине две површи су ортогоналне и секу се у средишту  $O$  хиперболоида. Радијус облице је једнак великој осе стрикционе елипсе ( $r=2a$ ). Просторна крива 4. реда се распада на две криве 2. реда – елипсе  $m_1$  и  $m_2$ .

б) продорна крива 4. реда се распада на *елипсу и две праве*

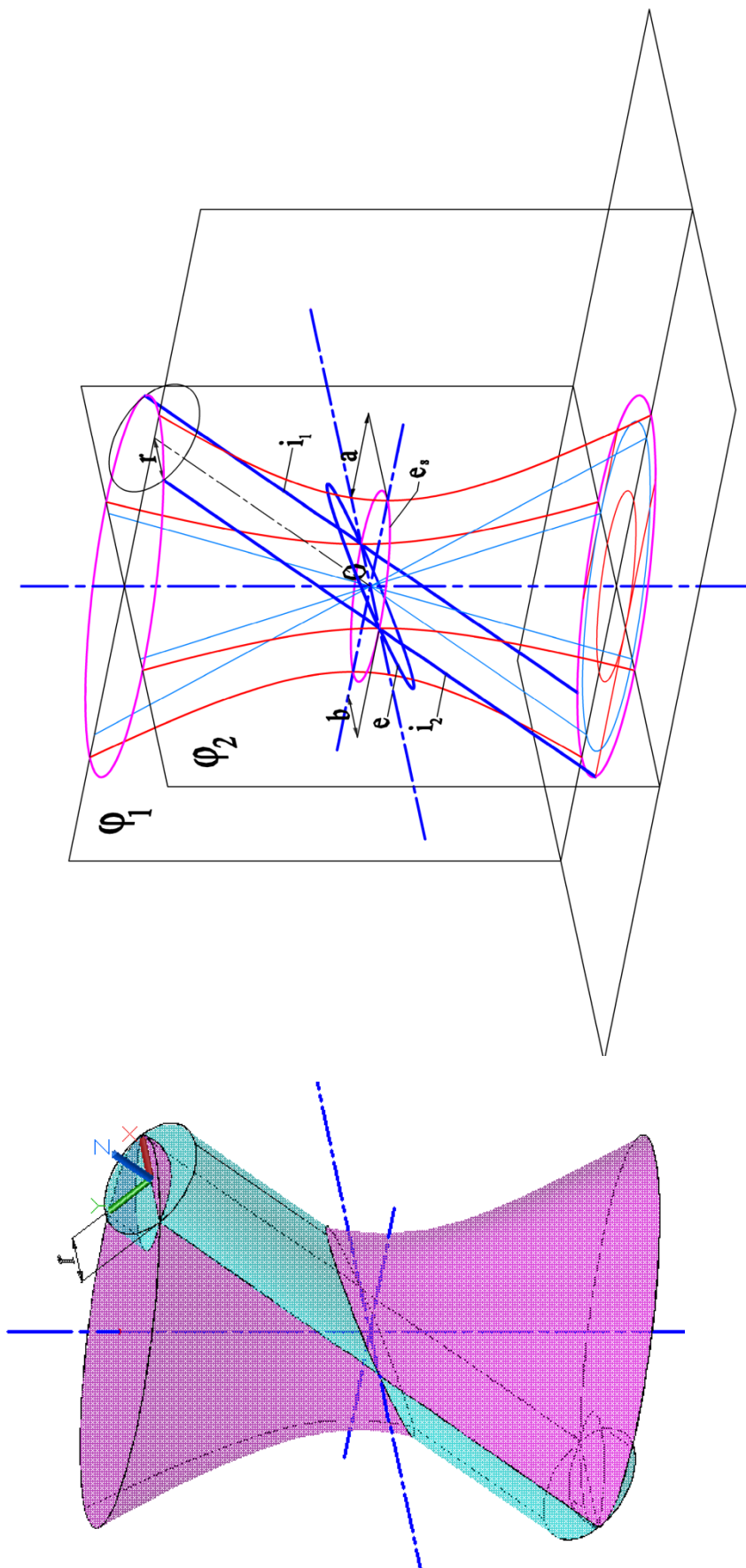
Комбинација у којој цилиндар и ЈЕХ имају две заједничке изводнице  $i_1$  и  $i_2$  и пресечну елипсу  $e$  (сл. 86), настаје када је центар базиса правога цилиндра на изводници асимптотског конуса, у равни његовог највећег пресека, са полупречником  $r$  једнаким најкраћем растојању ове изводнице конуса и њој паралелне изводнице хиперболоида. Две двоструке тачке, тј. двоструки додир два тела је у теменим тачкама мале осе стрикционе елипсе ЈЕХ–а.

в) продорна крива 4. реда има *две симетричне "гране"*

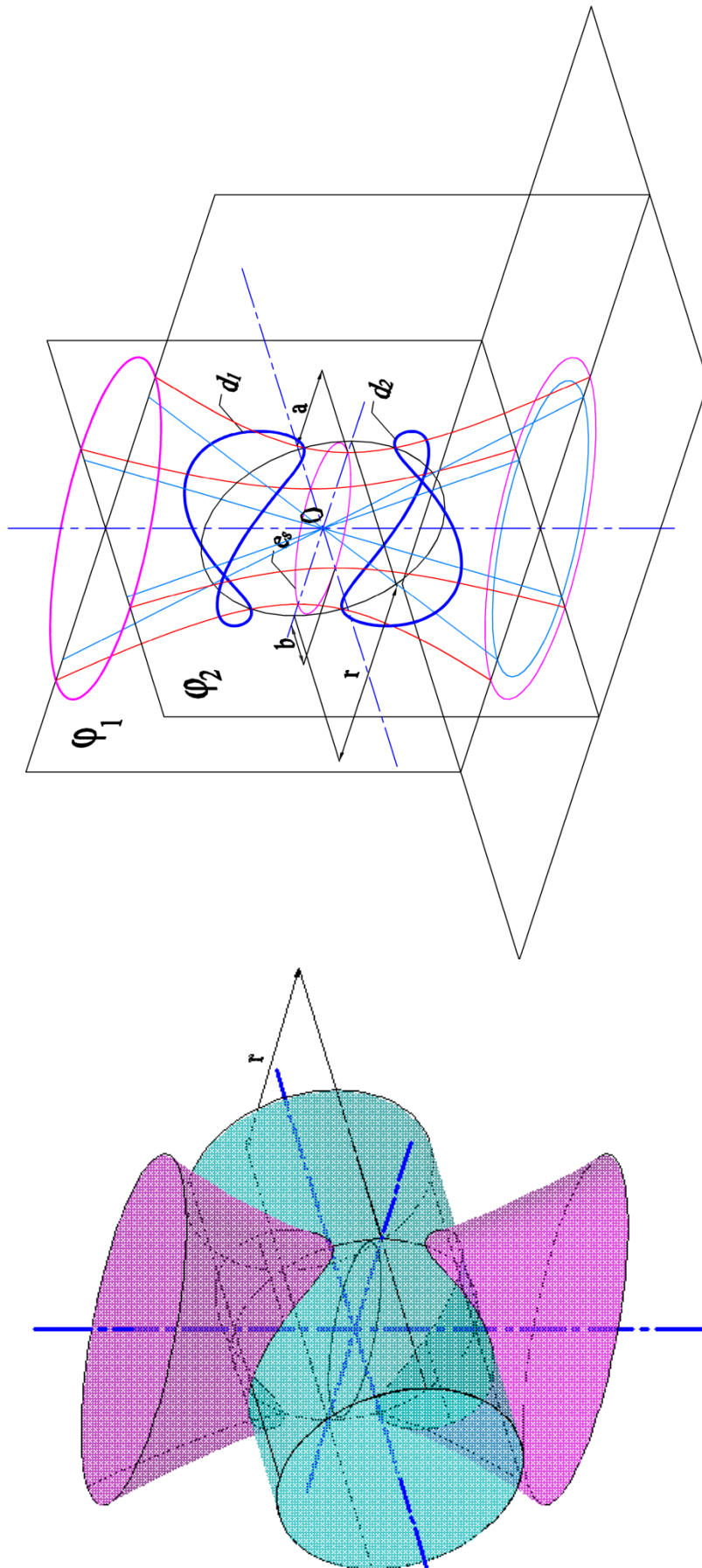
Цилиндар и ЈЕХ (сл. 87) су постављени у положај да су осе две површи међусобно ортогоналне, и секу се у средишту  $O$  хиперболоида. Радијус облице је већи од велике осе стрикционе елипсе  $e_s$  ЈЕХ–а ( $r>2a$ ). Просторна крива 4. реда има две истоветне и симетричне гране  $d$  и  $d_1$ , при чему је раван симетрије – раван стрикционе елипсе  $e_s$  ЈЕХ–а.



Сл. 85 Продор ПЈЕХ-а и облице; продорна крива се распада на две елипсе



Сл. 86 Продор ПЈЕХ-а и облице; продорна крива се распада на елипсу и две праве



Сл.87 Продор ПЈЕХ–а и облице, продорна крива је дводелна симетрична



### 5.3.3 Продор ЈЕХ и сфере

Просторна крива 4. реда која настаје тзв. Буловом операцијом између површи ЈЕХ–а и сфере, је приказана кроз карактеристичне случајеве:

а) продорна крива 4. реда се распада на *две кружнице*

На сл.88 приказан је продор лопте и правог ЈЕХ–а, такав да је центар хиперблоида коинцидентан центру сфера ( $O \equiv L$ ), а радијус лопте ( $r=2a$ ) једнак дужини велике осе стрикционе елипсе хиперблоида. Под тим условима, ЈЕХ и сфера имају две заједничке тангенцијалне равни, са тачкама додира (двоструке тачке) у крајњим тачкама велике осе стрикционе елипсе  $e_s$  ЈЕХ–а. Због две двоструке тачке, просторна крива се распада на *две кружнице*<sup>52</sup>  $c_1$  и  $c_2$ .

б) продорна крива 4. реда са *самопресечном тачком*

Центар сфера  $L$  је постављен у десном крајњем темену велике осе стрикционе елипсе ЈЕХ–а, а радијус ( $r=2a$ ) лопте је једнак дужини осе (сл.89). Тако ЈЕХ и сфера имају једну заједничку тангенцијалну раван, у левом темену стрикционе елипсе на њеној великој осе. Просторна крива  $k$  добија самопресечну – двоструку тачку и симетрична је. Раван симетрије криве је коинцидентна равни стрикционе елипсе  $e_s$  ЈЕХ–а.

в) просторна крива 4. реда има две симетричне, истоветне "гране"

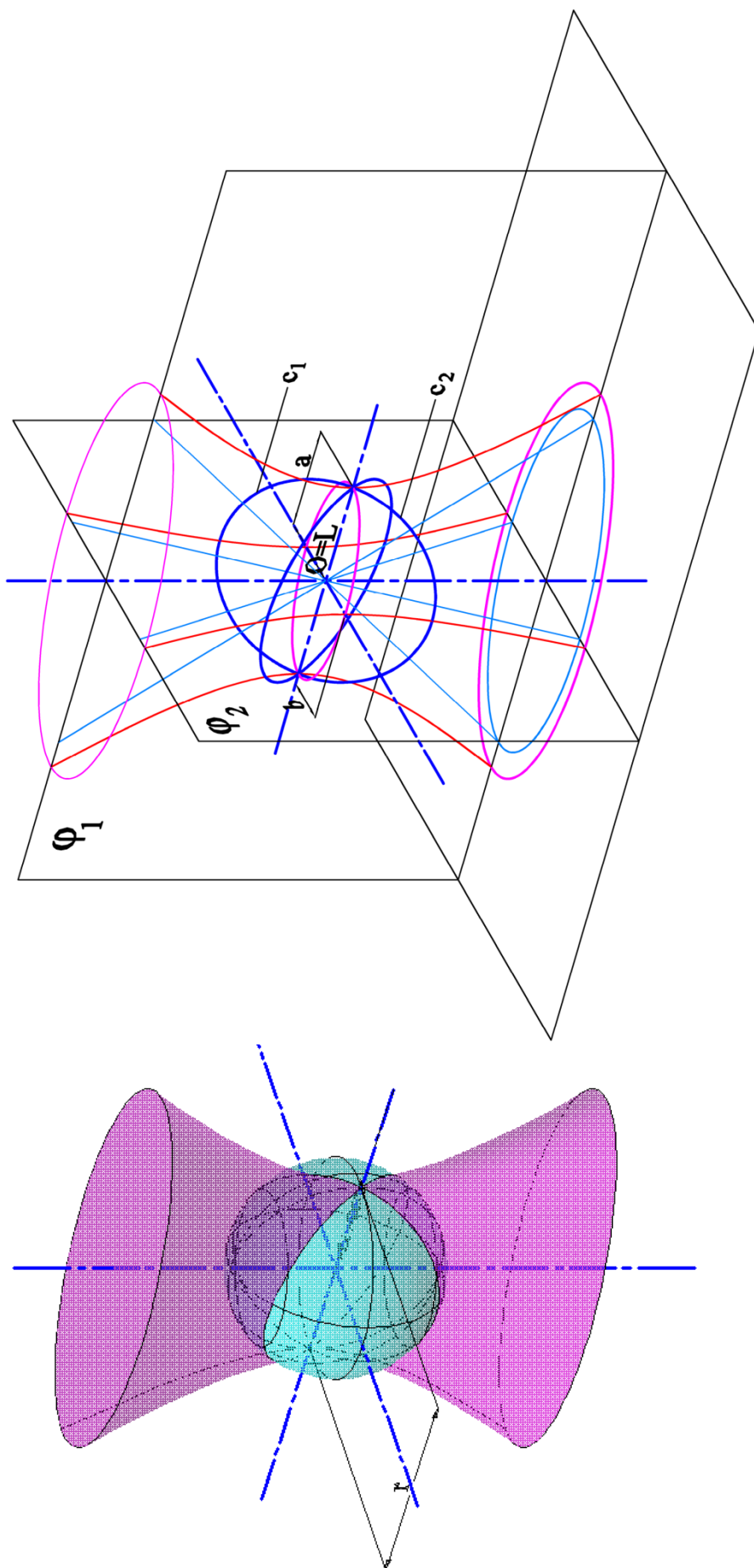
Сфера је постављена са центром  $L$  у средиште  $O$  хиперблоида (сл.90). Радијус је већи од веће полуосе ( $r > a$ ) стрикционе елипсе ЈЕХ–а. Просторна продорна крива  $l$  има две одвојене гране, симетричне у односу на раван стрикционе елипсе  $e_s$  хиперблоида (једне од равни симетрије ЈЕХ–а).

г) продорна крива 4. реда има *изоловану тачку*

Сфера и ЈЕХ имају додир (сл.91) са "задње" стране, тј. заједничку тангенцијалну раван. Центар  $L$  се налази са предње стране ЈЕХ–а, у крајњој тачки мале осе елипсе, а радијус ( $r=2b$ ) је једнак дужини мале осе. Продорна крива  $s$  има једну грану симетричну у односу на раван стрикционе елипсе  $e_s$  и *изоловану тачку*  $M$ , у другој крајњој (теменој) тачки мале осе стрикционе елипсе.

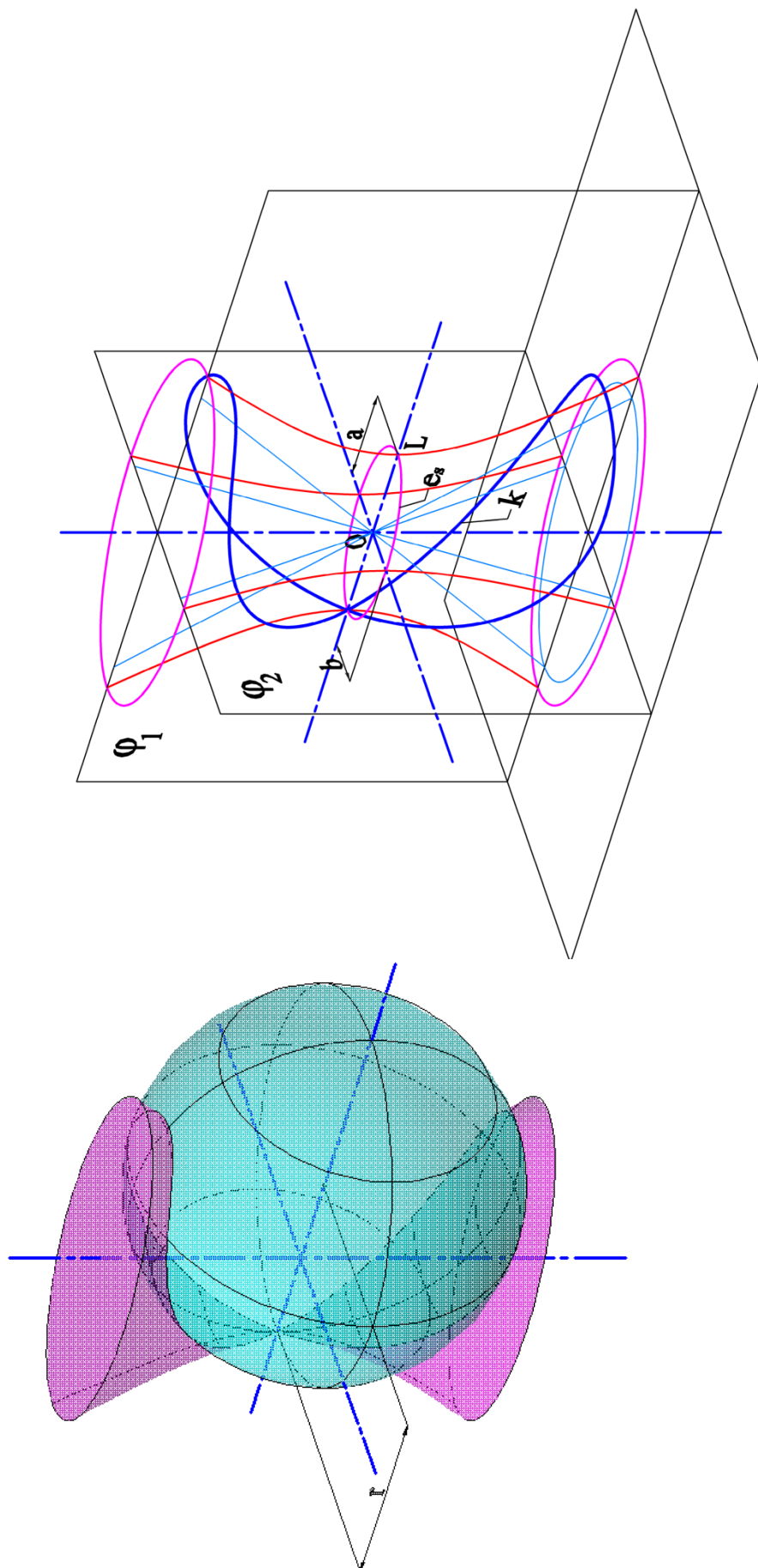
---

<sup>52</sup> Погледати део 4.1.4 са кружним пресецима ЈЕХ.

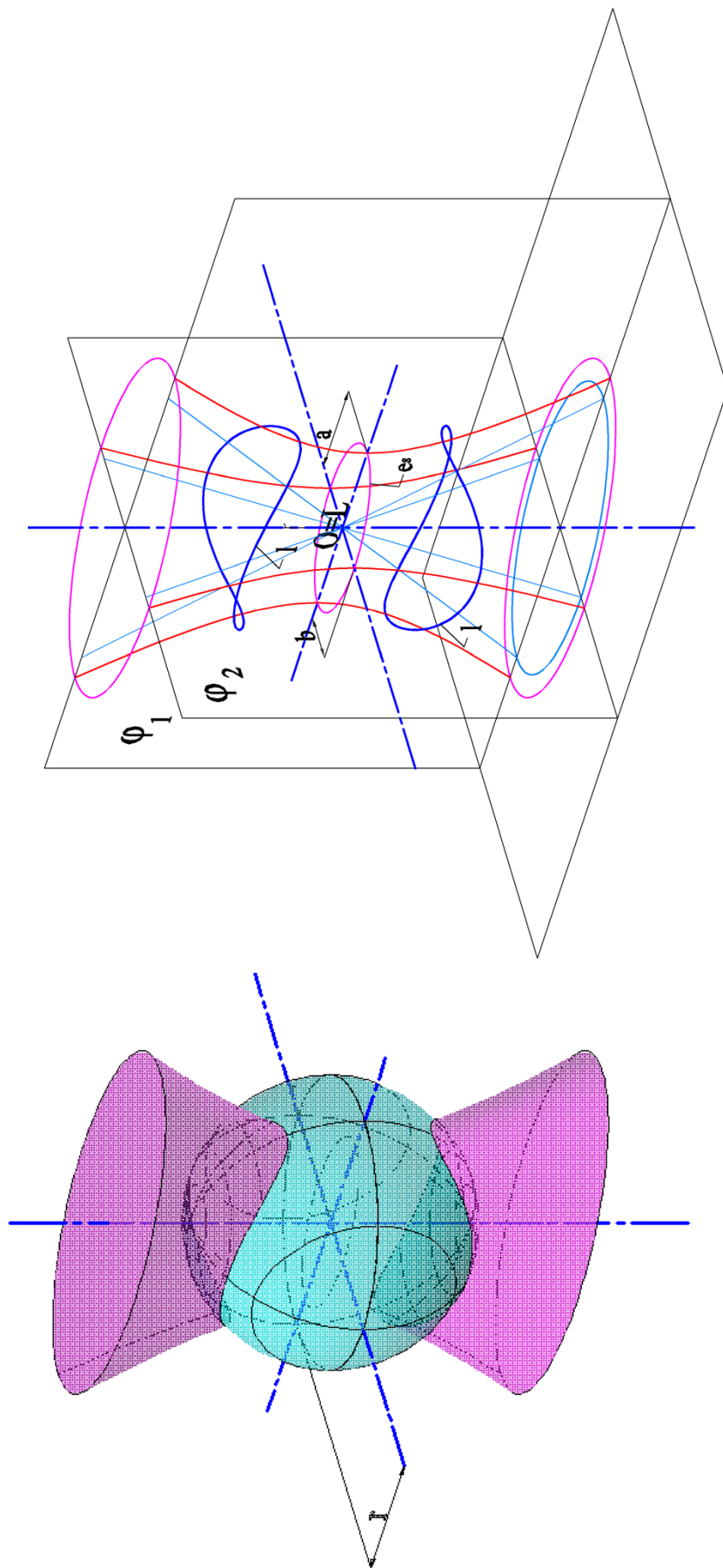


Сл. 88 Продор ПЈЕХ-а и сфере; продорна крива се распада на две елипсе

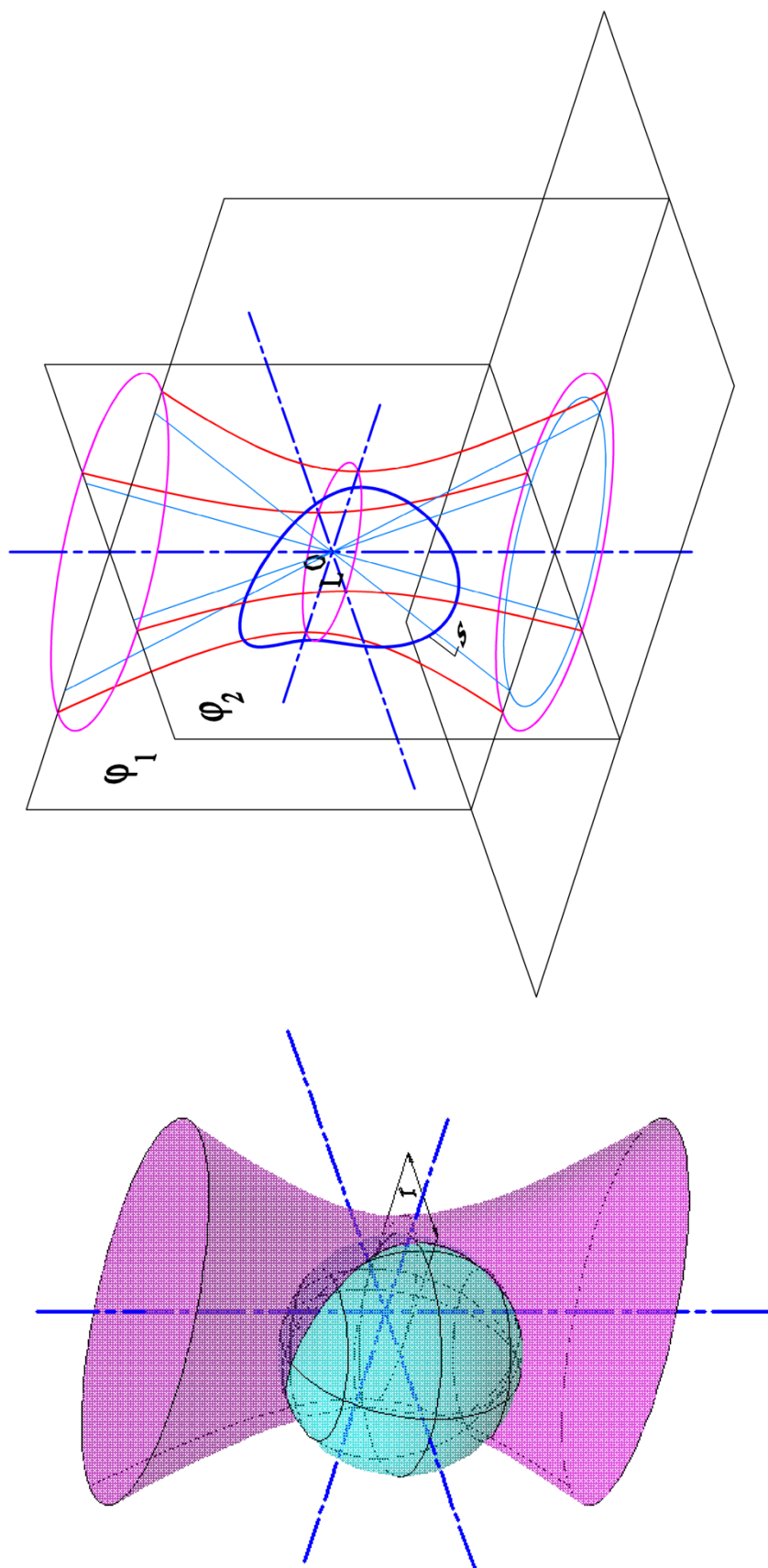




Сл. 89 Продор ПЈЕХ–а и сфере; продорна крива има самопресечну тачку



Сл. 90 Продор ПЈЕХ–а и сфере; крива је дводелна, симетрична



Сл. 91 Продор ПЈЕХ-а и сфере; крива је једноделна са изолованом тачком

## 6. Просторне структуре са применом ЈЕХ

---

Говорећи о примени љуски, аутори Bradshaw и други [3] истичу: "*Постоје две једноставне обсервације у вези љуски: све представљају део много сложенијег геометријског облика и све геометријске површи ће се простирати у бесконачност, или се међусобно сећи...*" Широка палета могућности примене површи једнограног елиптичког хиперболоида, у креирању просторних форми, је у тези "ограничена" у два правца: креирање просторних структура сачињених од елемената – исечака ЈЕХ, или комбиновањем ЈЕХ–а и основних површи другог степена. У претходним поглављима подробно су анализирани пресеци (погл. 5.1) и карактеристични продори ЈЕХ–а са основним површима 2. реда (погл. 5.2), те су резултати истраживања нашли адекватну примену у ова два изабрана правца креирања.

Приликом "исечања" површи ЈЕХ–а, значајну улогу има положај пресечне равни. У складу са системом комбиновања елемената, може се направити избор врсте пресека: по правцу изводница, или по некој од пресечних кривих ЈЕХ–а.

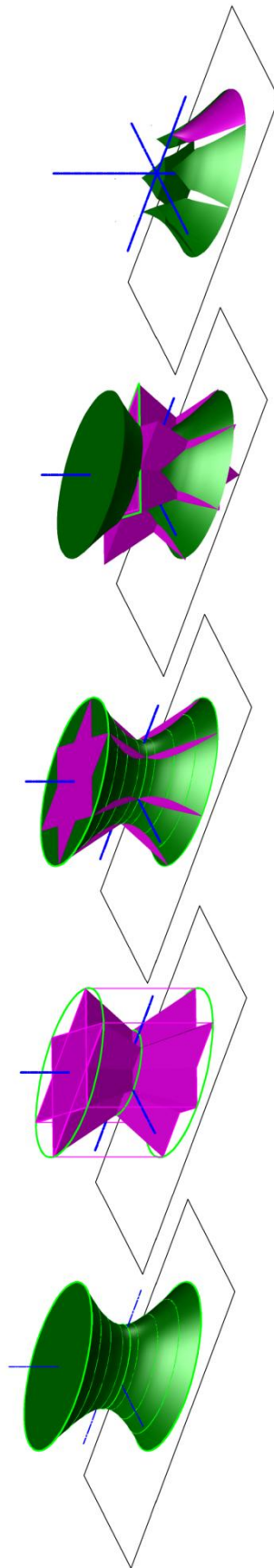
У случају продора са површима 2. степена, овај проблем је нешто сложенији. Просторне криве 4. реда, које се добијају, у општем случају, продирањем две површи 2. степена, у специјалним случајевима, који су разматрани, се "распадају" на две криве 2. реда. То је "олакшица" за комбинације површи овог типа, када је у питању њихова примена и извођење у архитектонској пракси.

### 6.1 Примери просторних структура добијених комбиновањем исечака ЈЕХ–а

Ово поглавље доноси неколико предлога компоновања исечака ЈЕХ–а, који су добијени исечањем по раванским кривама 2. реда и по изводницама, у оквиру три задате матрице: троугаоне, квадратне и петугаоне. Решења су 3D површински модели, урађени у софтверу *Auto CAD*, добијени поступцима сечења, интерсекцијом пуних тела (*Boolean operations*) и осталим 3D алатима. Свако од решења је представљено: системом слагања елемената–исечака у оквиру задате матрице, површинском представом (ортогонална пројекција) и 3D моделом структуре.

#### 6.1.1 Комбиновање исечака површи ПЈЕХ, чије су "ивице" криве линије

Пуни модел ("солид") ЈЕХ, генерисан помоћу низа узастопних пресека – елипса (тзв. "loft") и "звездаста" форма праве би–пирамиде, уписана у ЈЕХ, као резултат продора формирају низ делова површи ЈЕХ седластог облика (сл. 92).

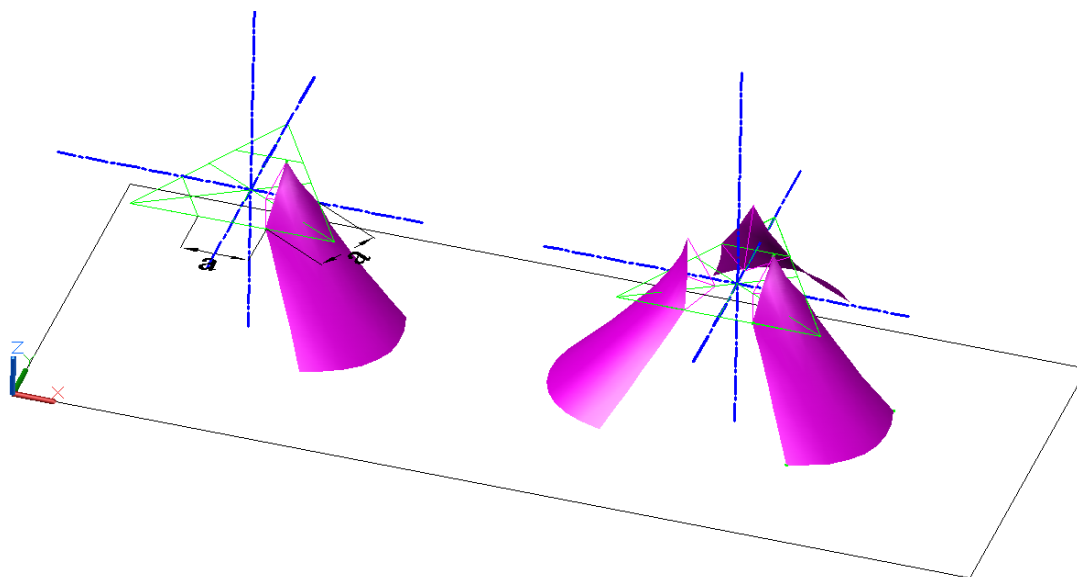


Сл. 92 Неколико фаза у моделовању, приликом креирања исечка површи ЈЕХ

## 6. Просторне структуре са применом ЈЕХ

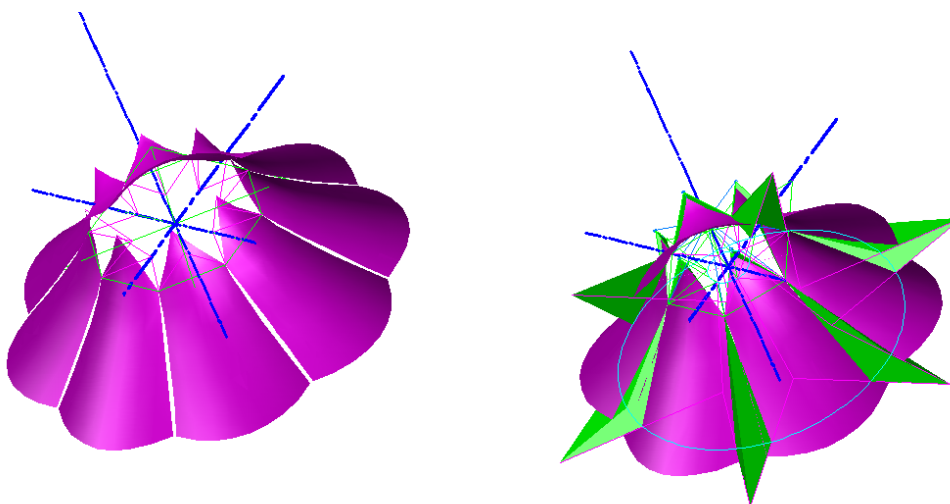
---

Издавање исечка површи и формирање троугаоне матрице, на основу њених референтних димензија ("стрела" мањег распона исечка – димензије "а"), извршено је у просторном режиму цртања (сл. 93).



Сл. 93 Креирање троугаоне матрице поларном мултипликацијом исечака ЈЕХ

Обзиром на систем креирања задате матрице у основи, без претходног прорачуна, код креирања исечка површи ЈЕХ, простор између исечака матрице, "затворен" је површима – равнима одговарајућег нагиба (нагиби равни "звездасте" би–пирамиде), које обликовно подсећају на форму цвета (сл. 95а–в и сл.96а–в). Сличан избор решења, примењен је код допунске структуре (сл.94), због криволинијских ивица исечака површи ЈЕХ.

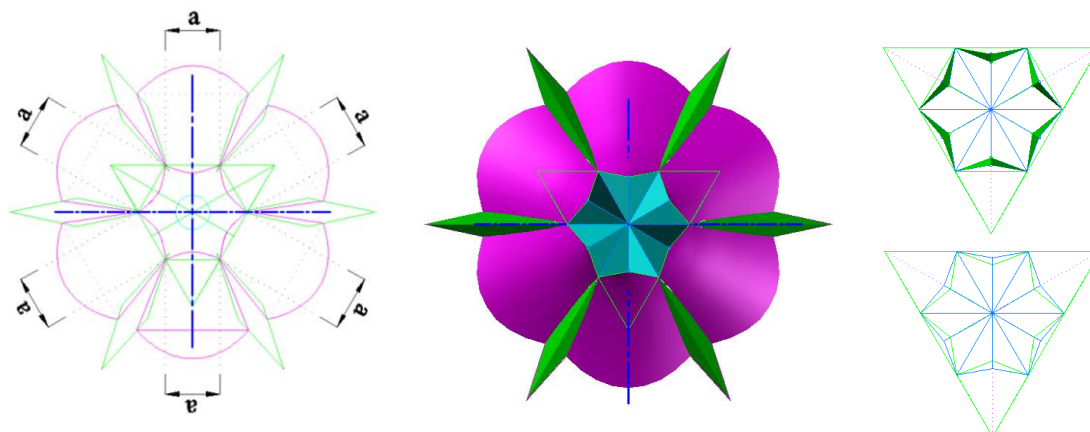


Сл. 94 Допунски елементи структуре креирани у 3D режиму моделовања

## 6. Просторне структуре са применом ЈЕХ

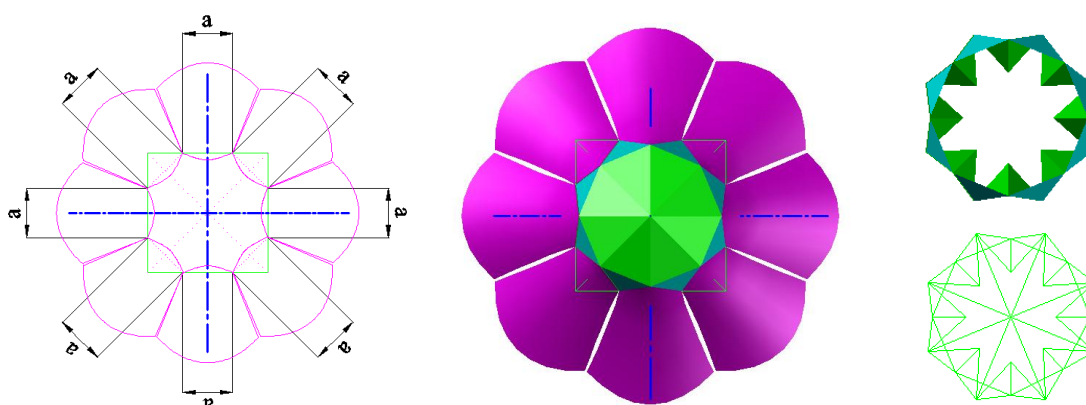
---

### *Троугаона матрица*



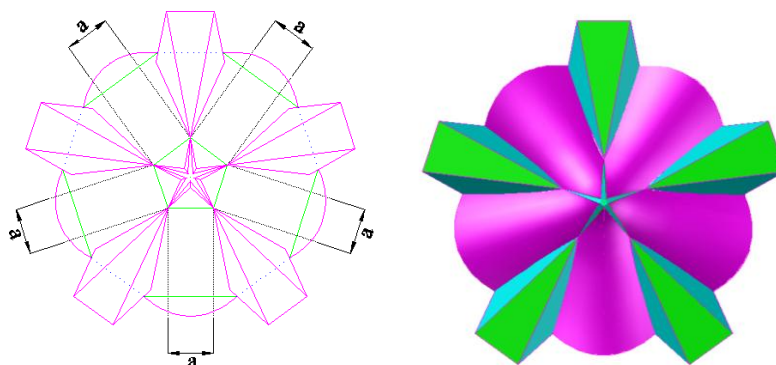
Сл. 95а Матрица (лево), површински модел (средина), допунска структура (десно)

### *Квадратна матрица*



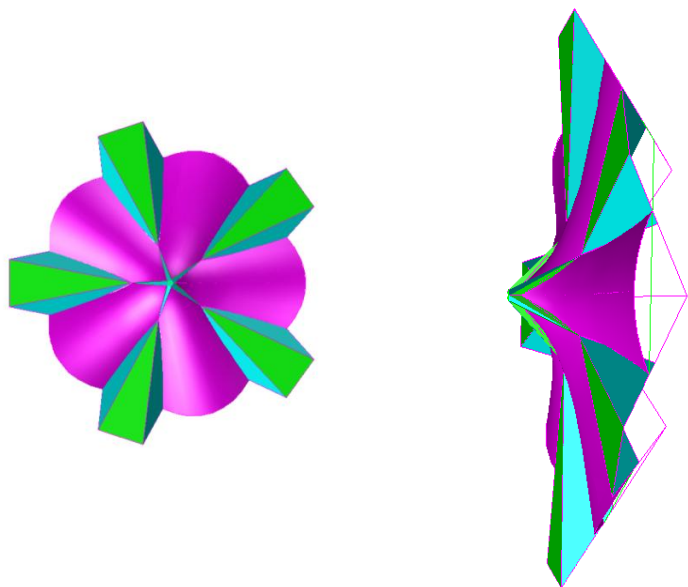
Сл. 95б Матрица (лево), површински модел (средина), допунска структура (десно)

### *Петоугаона матрица*



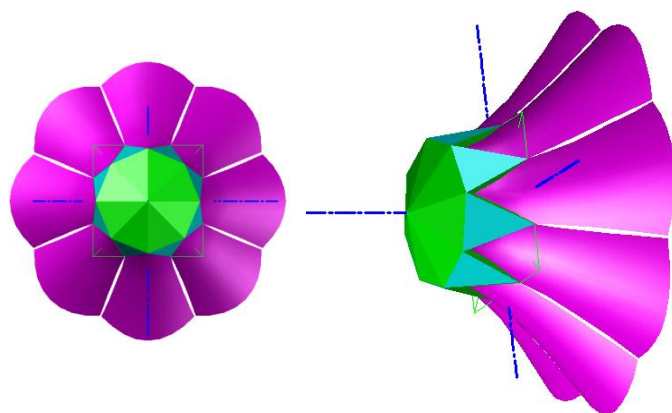
Сл. 95в Матрица (лево), површински модел (десно)





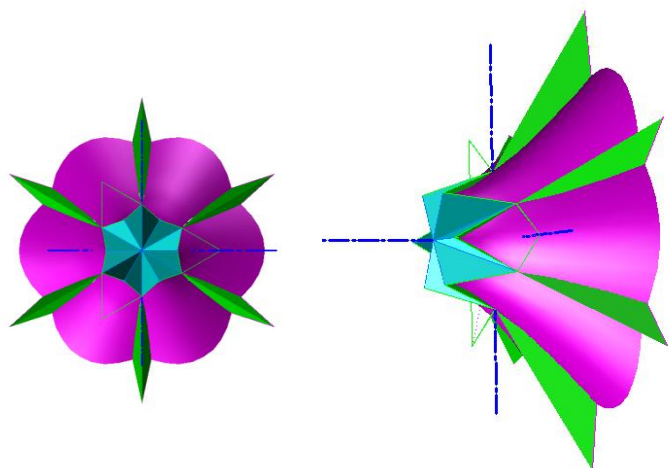
Сл. 96в

Петоугаона матрица–3D модел



Сл. 96б

Четвороугаона матрица–3D модел



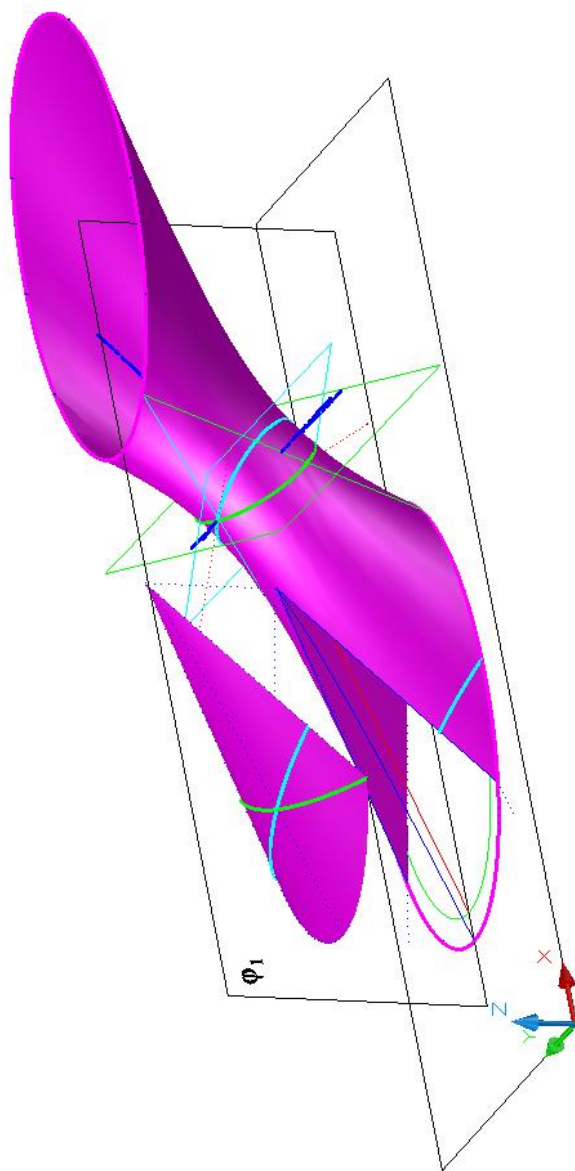
Сл. 96а

Троугаона матрица–3D модел

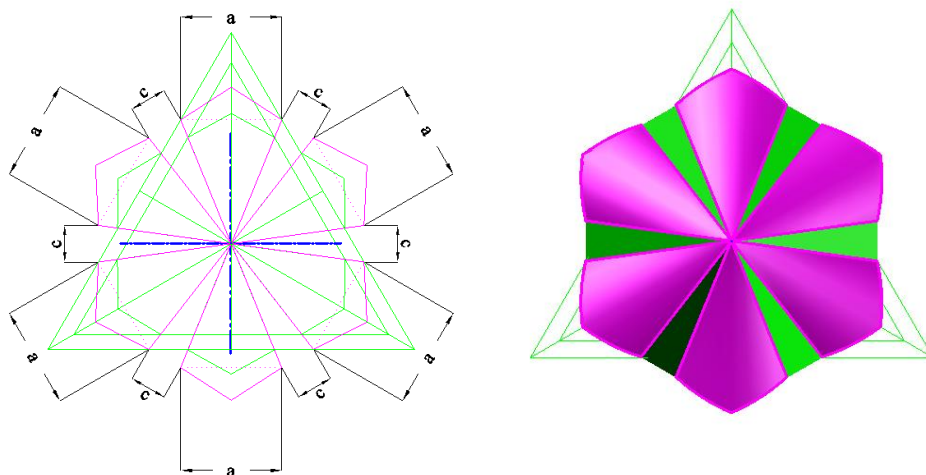


### 6.1.2 Структуре од исечака површи КЈЕХ, чије су ивице праве и кружни пресеци

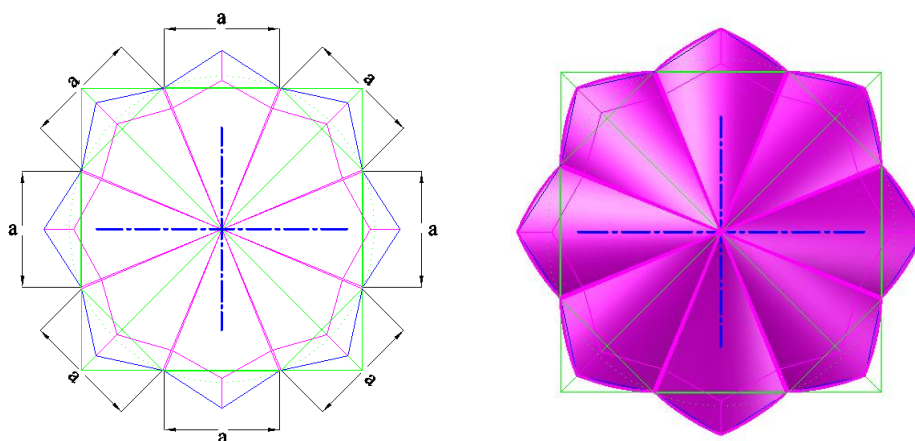
За креирање сегмента ЈЕХ–а, чије су ивице праве, тј, изводнице површи, коришћен је, уз пуни модел површи и жичани модел косог ЈЕХ, са једном задатом равни симетрије. Симетричним засецањем ЈЕХ–а, вертикалним равнима, по две изводнице, из различитих система, добијен је део пуног модела, који је потом засечен са две нове равни, које ЈЕХ секу по кружним пресецима (сл. 97). Потом је овај исечак коришћен за три "прототипа" структуре (98а–в – 100а–в).



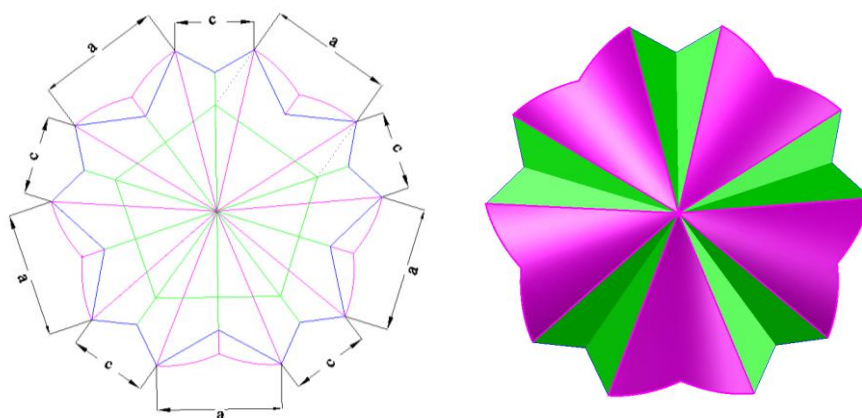
Сл. 97 Исечак површи косог ЈЕХ по изводницама и кружним пресецима



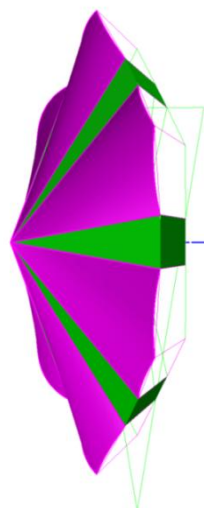
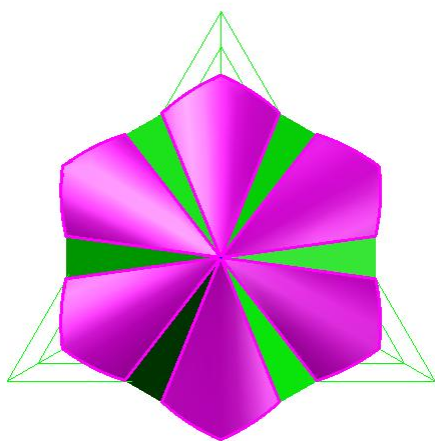
Сл. 98а Тространа матрица (лево) и површински модел (десно)



Сл. 99а Четвороугаона матрица (лево) и површински модел (десно)

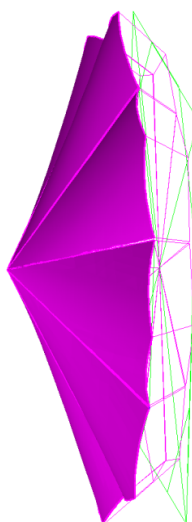
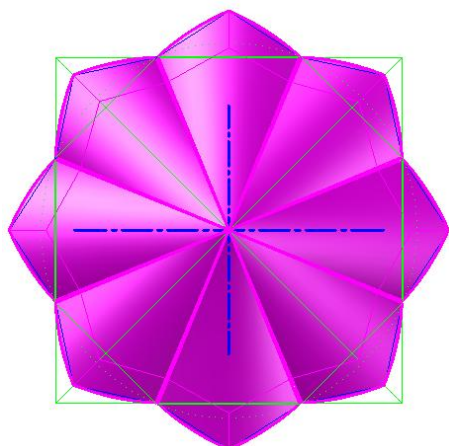


Сл. 100а Петоугаона матрица (лево) и површински модел (десно)



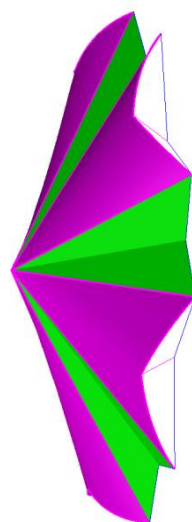
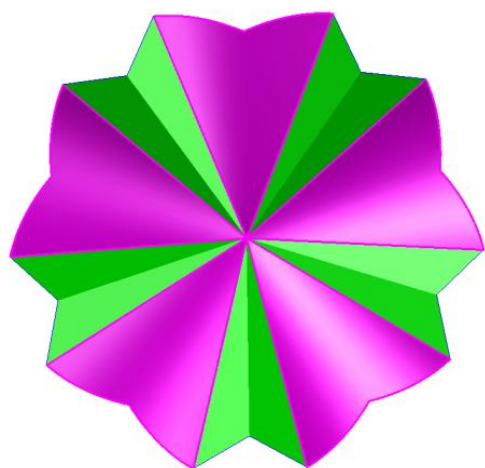
Сл. 98б

Троугаона матрица – 3D модел



Сл. 99б

Четвороугаона матрица – 3D модел  
са ОСНОВОМ



Сл. 100б

Петоугаона матрица – 3D модел  
са ОСНОВОМ

## 6. Просторне структуре са применом ЈЕХ

---

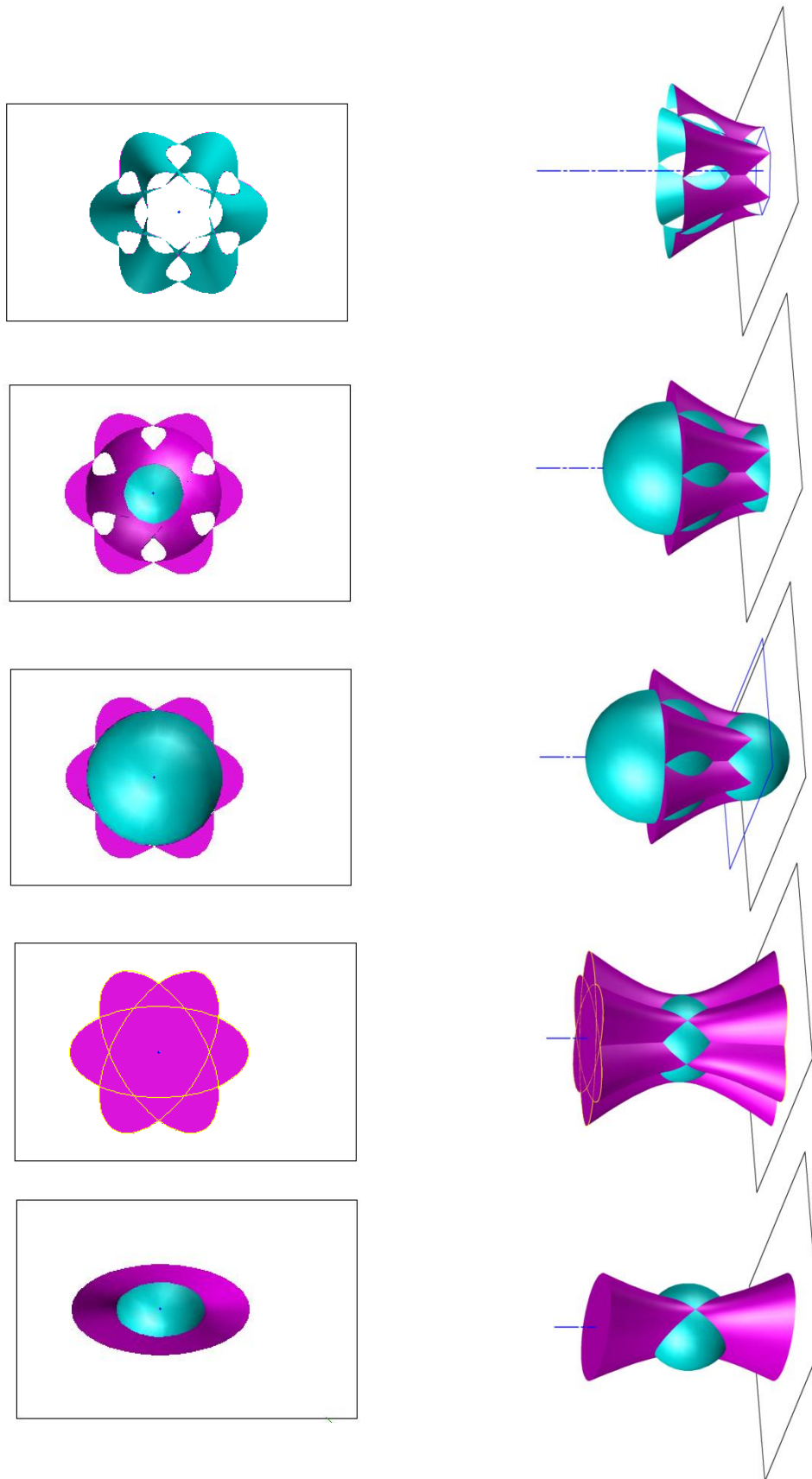
### 6.2 Просторне структуре добијене комбиновањем површи ЈЕХ и основних површи 2. степена

Интерсекцијом, тј. продором две површи 2. реда, ( анализираним у погл. 5.3) слично претходно приказаним примерима исецања површи ЈЕХ равнима, се добијају карактеристичне, сложене структуре специфичне закривљености, у широком спектру могућности, коришћењем поступака translације, ротације, огледаљења и сл.

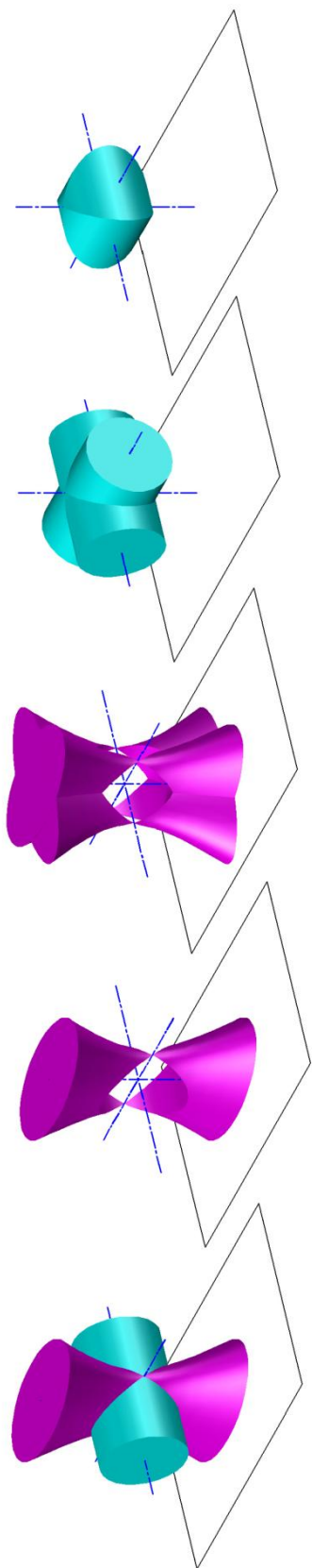
Употребну вредност имају једнако, структуре сачињене од две или више површи, као и елементи–исечци добијени њиховом међусобном интерсекцијом. Примери на сликама 101–107 приказују поступно, кроз 3D операције, изведене софтверским алатима, композиције површи или исечака сачињене интерсекцијом ЈЕХ–а са лоптом, облицом и конусом.

Пример структуре на сл. 101 је настао интерсекцијом *лопте и ПЈЕХ* који имају две заједничке тангенцијалне равни (модел према сл.88., погл. 5.3.3а) ПЈЕХ је поларном ротацијом ("polar aray") око вертикалне осе резултирао шестоделним обликом основе. Делови продорне криве (две елипсе) са лоптом, у њеним двоструким тачкама, по истом обрасцу формирају правилан шестоугаоник. У средишту форме, од "уписане" лопте је одсечена доња половина, док је, са центром у средишту горњег базиса хиперболоида, уписана нова лопта, величине радијуса – одстојања од центра до пресечних тачака базисних елипси три хиперболоида. Структура може бити апликативна у два смера: као комбинација исечака четири површи, или као шестоугаона форма од љуски–исечака хиперболоида

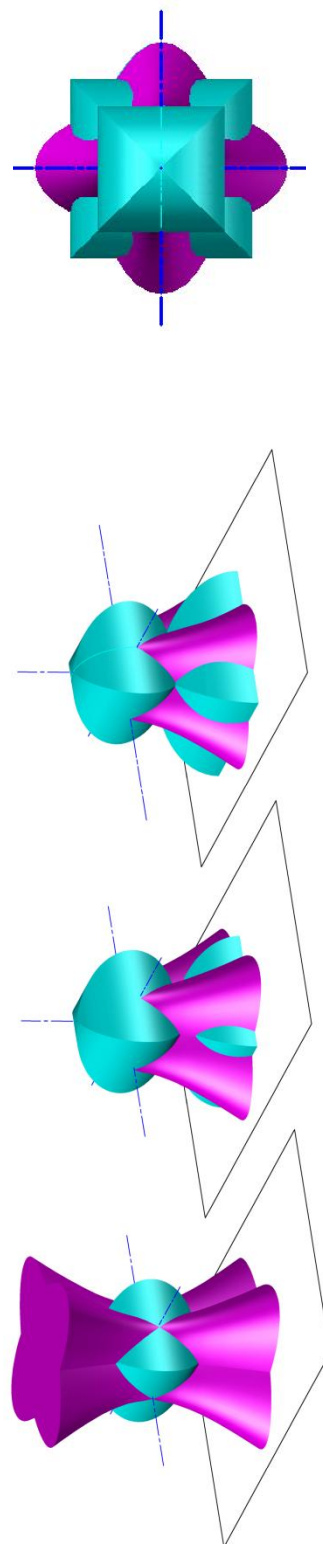
Комбиновање *ПЈЕХ и облице*, у специјалном случају, када се продорна крива распада на две елипсе ( сл.85, погл.5.3.2), је изведено, ротацијом елемената једног и другог *солида* (сл. 102). Продором добијена форма ПЈЕХ је ротирана за 90°, а потом, у случају облице , је издвојено језгро пресека. Из прве композиције две компатибилне форме, издвојен је доњи део, са два хиперболоида и језгро пресека две облице (сл.103). Половина језгра продора облица је поновљена у бази структуре, и увећана, тако да се, на четири места, шест сегмената продорних елипси сучељавају у једној тачки базног свода.



Сл. 101. Поступак креирања структуре комбиновањем ПЈЕХ-а и сфере (основа и 3D модел)



Сл. 102 Поступак креирања структуре комбиновањем ПЈЕХ–а и лопте



Сл. 103 Завршне фазе моделовања структуре од елемената

Сл. 103а. Основа моделоване структуре

ПЈЕХ и облице

## 6. Просторне структуре са применом ЈЕХ

---

Продор конуса и ПЈЕХ, по моделу дводелне асиметричне криве 4. реда, приказане на сл.84, у поглављу 5.3.1, је прва операција (сл.104а), од неколико у низу, којима је креирана структура – "колонада", сачињена од два пута по четири симетрично постављене љуске ЈЕХ–а.

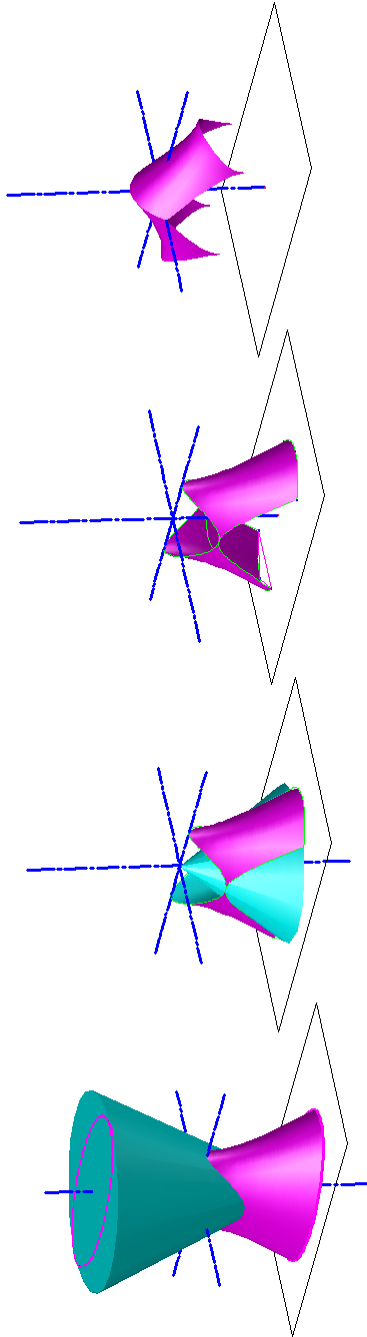
*Тип а)* Још један конус, који у другом "кораку" даје нову пресечну криву са ПЈЕХ, постављен је тако да се две криве секу у тачки. Две добијене гране–хиперболоидне љуске доведене су у нови положај, у вертикалну раван, поклапањем (алатком "3d align") делова базисне елипсе ПЈЕХ (последњи приказ у низу, на сл. 104а). Због продора ЈЕХ–а са конусном површи, пресечна крива није раванска, већ 4. реда. Тако су "ивице" љуске просторне криве. Могућност повезивања креираних љуски, у "колонаду" се може остварити само са закривљеном површи (сл.104б). Љуске су размакнуте и повезане везним елементима.

*Тип б)* Доњи део хиперболоида је засечен са две равни које секу ЈЕХ по две његове изводнице. Као и у претходном случају, љуске су доведене у нови положај (сл.105а), поклапањем делова базисне елипсе (последња слика у низу). ПЈЕХ. Како су ивице љуске сада праве линије, приликом формирања "колонаде", везни делови могу бити равански – троугаоног, или трапезног облика (размицањем). У овом примеру, коришћени су троугаони везни елементи (сл.105б).

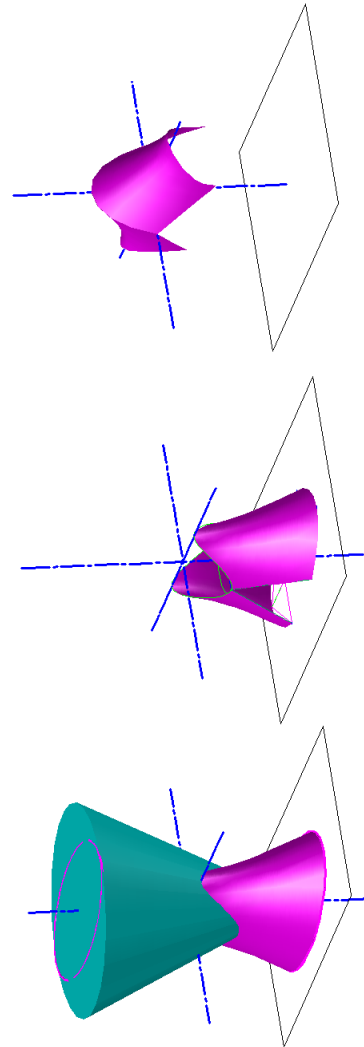
*Тип в)*.....Још један тип структуре – љуске са везним елементом, која се може у низу мултипликовати, је сачињен комбиновањем ПЈЕХ–а и лопте, према примеру датом у погл. 5.2 (сл.91). После интерсекције лопте и ПЈЕХ–а, површ је пресечена са две равни симетрије и издвојена као елемент (сл. 106), који се поставља у хоризонталну раван и двоструком симетријом, ротира око задатих оса. Две "седласте" површи, врло налик хиперболичком параболоиду, су повезане цилиндридом (сл. 107).. Његова крива водила је половина просторне продорне криве ЈЕХ и лопте, а изводнице које га генеришу су хоризонтале.

На приказаним примерима комбиновања површи ЈЕХ–а са другим примитивима, јасно се уочава да су могућности комбиновања неограничене, али да у процесу реализације идеје, креатор мора сасвим да влада геометријским знањима о примењеним површима, поступцима моделовања и просторном "предикцијом" замишљених геометријских модела, како би резултат била форма–структура, која задовољава услове стабилности, функционалности и естетике.



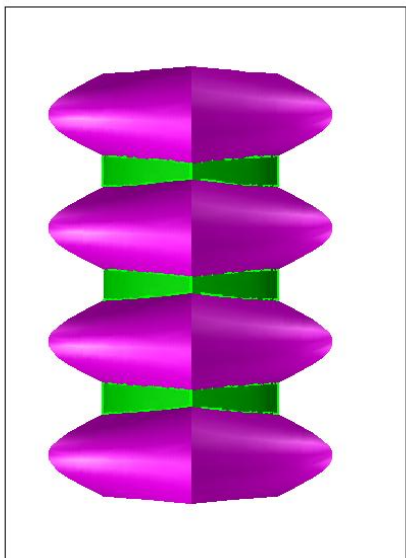


Сл. 104а Фазе моделовања елемента – лјуске добијене комбиновањем конуса и ЈЕХ–а

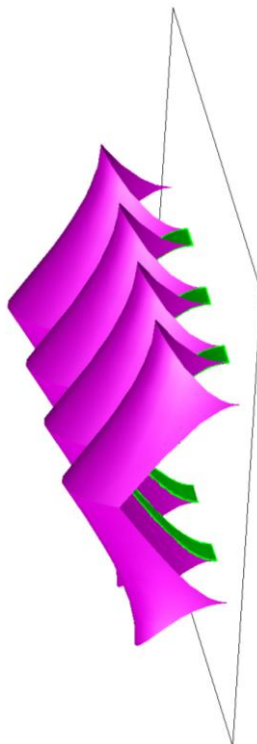


Сл. 105а Фазе моделовања елемента – лјуске добијене комбиновањем конуса и ЈЕХ–а

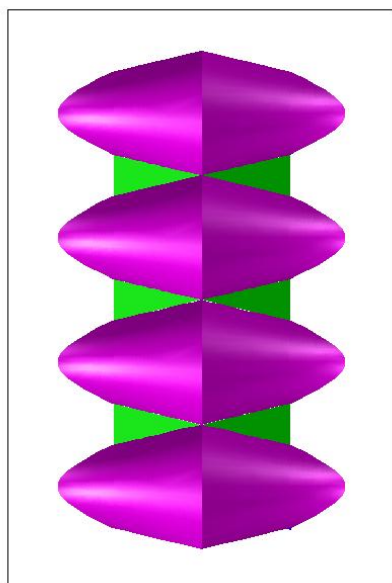




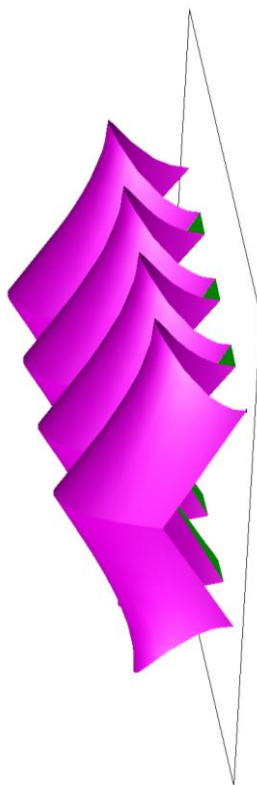
Сл. 104в Основа "колонаде" (везни део је закривљен)



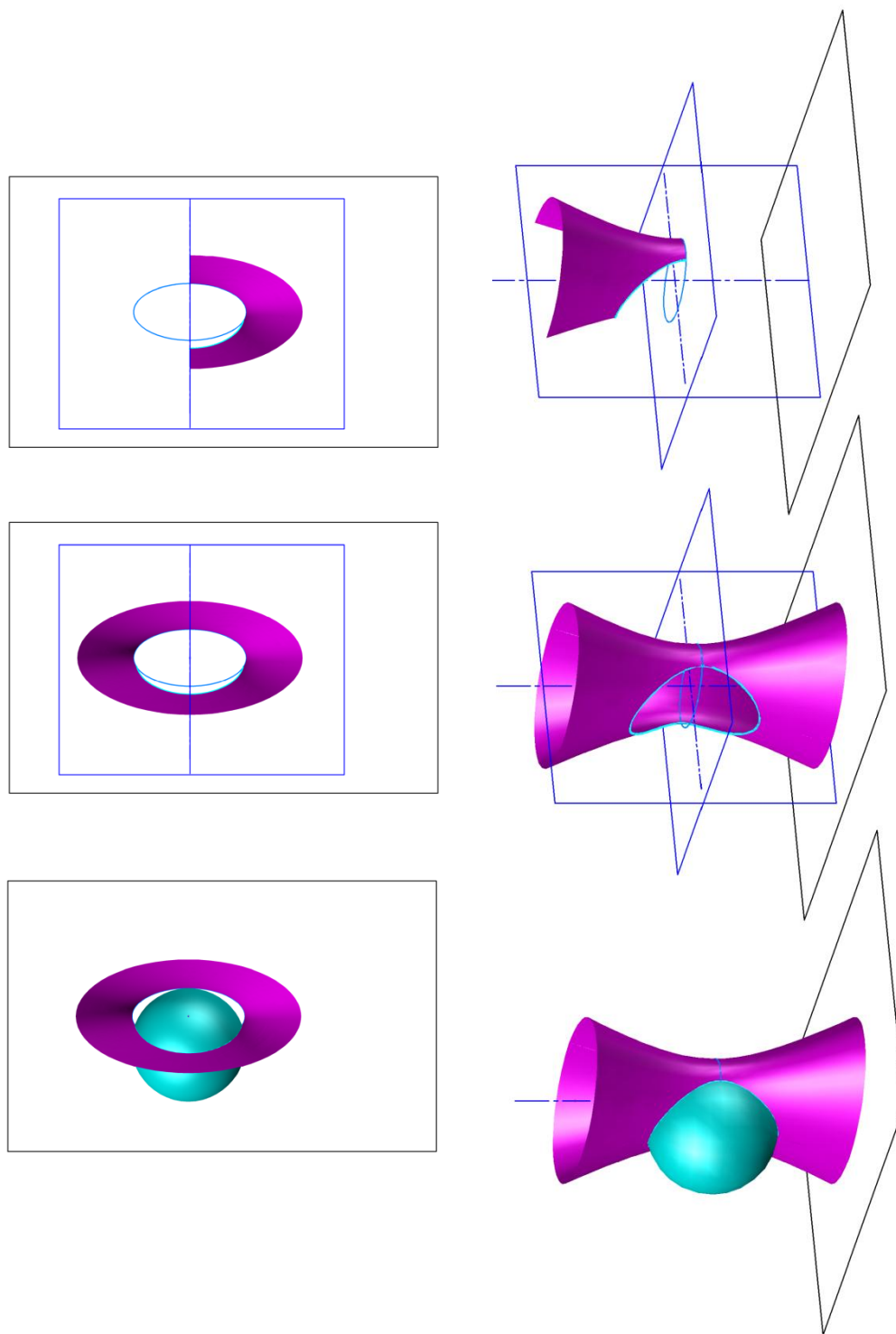
Сл. 104б 3 Д модел структуре – "колонаде"



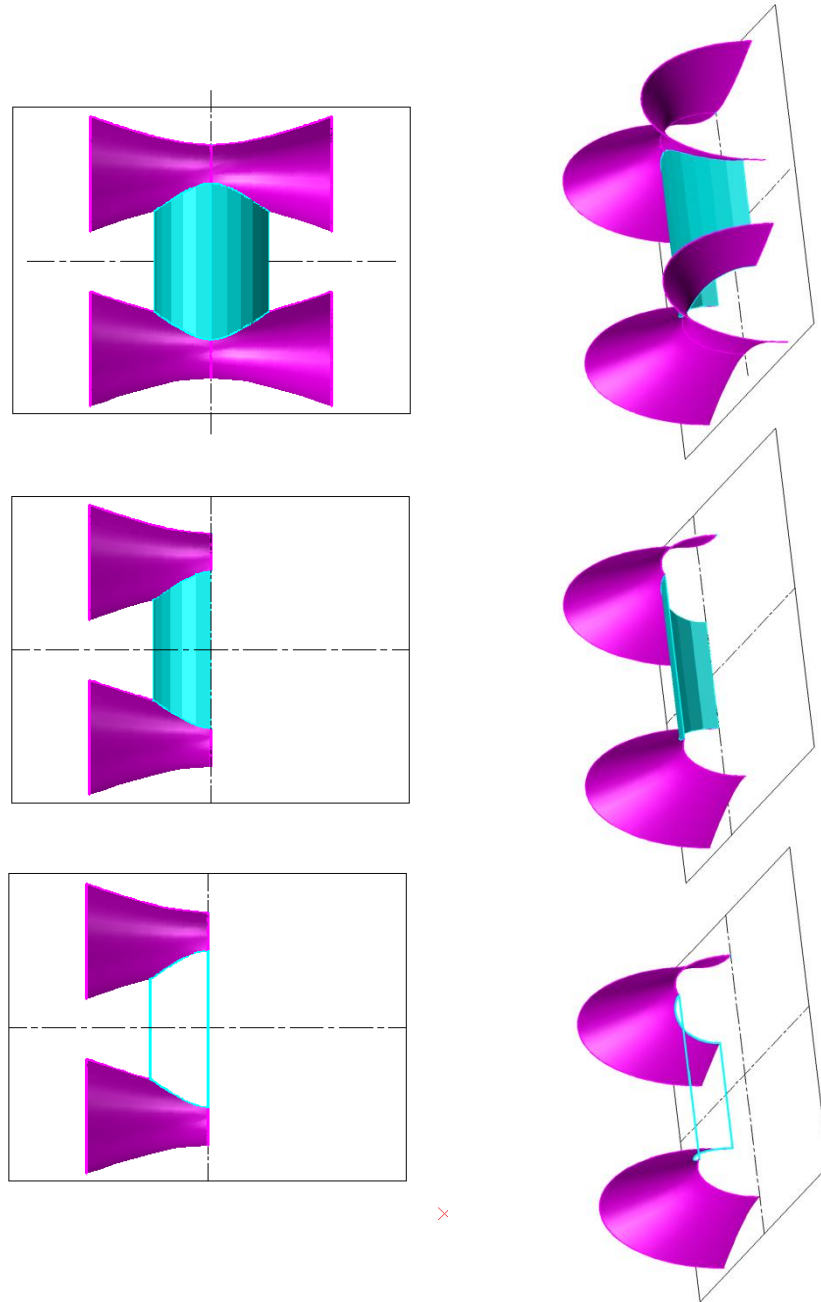
Сл.105 в Основа "колонаде" (везни део је равански)



Сл. 105б 3 Д модел структуре – "колонаде"



Сл. 106 Фазе моделовања елемента – љуске добијене комбиновањем сфере и ПЈЕХ–а (основе и 3D модели)



Сл. 106 Креирање структуре од делова луске ПЈЕХ-а и везног елемента (основе и 3D модели)

## 7. Графичка презентација и примена површи ЈЕХ

---

"Присуство и све распрострањенија примена рачунара", са мноштвом софтвера који се из дана у дан усавршавају, "у многоме утиче на обликовне форме у градитељству и квалитет дизајна. Тако креирани и примењени облици доносе револуцију у размишљању о (градитељском) простору, те су се са стабилног, метричког (Еуклидског) концепта уздигли ка више динамичком (сл.108), нестабилном и непредвидивом моделу, који је блиско повезан са нашим разумевањем природног (биолошког) раста, облика и еволуције" [4, стр.437].



Сл.108 Динамички покренут објекат облика инспирисаног једнограним хиперболоидом . "Кућа која плеше", арх. F. Garry и В. Милунић  
<http://www.tumblr.com/tagged/dancing/dancing-house/>

Концепт пројеката модерних објеката, који прате захтеве савремене градње: елегантна конструктивна решења, разиграна форма у мрежном систему, енергетска ефикасност (еко–архитектура) итд., у делу графичке презентације подразумева изузетно прецизне и маштовите 3D моделе, какав је нпр. награђени рад за *Al Masdar–Headquarters* (Централни објекат еко града *Al Masdar*) у Абу Дабију (сл.109).

Од тренутка када су В. Шуков, А. Гауди [4,6] и Ф. Кандела применили облике једнограног хиперболоида у својим пројектима, читава технолошка





## 7. Графичка презентација и примена површи ЈЕХ

---

унапређен могућностима програмских 3D алата, увелико олакшан и значајно прецизнији, у односу на претходни "век", у коме су се ови проблеми решавали искључиво дво–димензионалним средствима, тј. пројекцијама и мануелним цртањем. Методологија конструисања је стога усклађена са радним окружењем.



Сл. 110 Хиперболоидне форме на цркви "*Sagrada Família*", арх. Гауди  
[http://www.sagradafamilia.cat/imgs/imgs\\_inst/arq2/cons\\_0502.jpg](http://www.sagradafamilia.cat/imgs/imgs_inst/arq2/cons_0502.jpg)

Тако је, у делу рада који се односи на теоријско разматрање геометријских карактеристика површи ЈЕХ–а (поглавља 3., 4. и 5.) наизменично коришћен 3D жичани (цртањем) и 3D површински (моделовањем) модел површи, уз употребу

## 7. Графичка презентација и примена површи ЈЕХ

---

програмом доступних опција за сагледавање ("3d orbit", "3d views").

У ова три централна дела дисертације, примењени су поступци за креирање пуног тела ЈЕХ-а, његових пресека са равнима, интерсекција са површима другог степена (3D "примитивима"), издвајања пресечних коника (без њиховог конструисања, изузимајући главне параметре – темена, фокусе, тангенте), разлагања солида на површинске елементе и 3D манипулација. Од посебне важности, овде, је опција 3D моделовања солида, дата програмском алатком "loft", која је незаменљива у случају креирања површи са истим типом узастопних пресечних коника (елипсе или кружнице), какав је ЈЕХ и његов асимптотски конус. Међусобни продори креираних "солида", у поглављима 5. и 6. су изведени Буловим операцијама ("Bullean operations"): продирања, уније и издвајања језгра. Од значаја за креирање просторних структура, у поглављу 7., су биле опције за 3D манипулације једним елементом – исечком површи: "3drotate, 3darray, 3align, 3dmirror", тј. ротација и мултипликација у поларном систему, поклапање површина истог пресека, огледаљење итд.

### 7.1 Апликације за 3D модел површи ЈЕХ-а базиране на кружним пресецима

Ова секција, са ослонцем на теоријска разматрања [50] положаја кружних пресека површи (погл. 5.1.4), даје као резултат две апликације написане у програмском језику *Auto-Lisp*, које су "уезене" у програм и са неколико "корака" – упита, задатих у командној линији "*Auto CAD*-а" генеришу жичани и површински модел ЈЕХ.

Различитим приступима, кроз параметарске једначине, уз помоћ пројективне диференцијалне, дискретне геометрије и сл. понуђена су решења за генерисање модела ЈХ [7,34]. Апликације, које су резултат овог истраживања, су руковођене међусобним релацијама површи ЈЕХ и његовог асимптотског конуса. На основу става у поглављу 3.5.1, да је један асимптотски конус заједнички за бесконачно велики број површи ЈЕХ-а, може се закључити да је задавањем асимптотског конуса пресечном-базисном кривом – кружницом  $k_{as}$  и врхом  $V$  (при чему центар  $C$  кружнице  $k_{as}$  мора бити различит од пројекције  $V'$  врха  $V$ , на раван базисне криве) дефинисано средиште површи ЈЕХ-а  $O \equiv V$  и нагибни углови његових изводница (паралелно изводницама конуса) према заједничкој

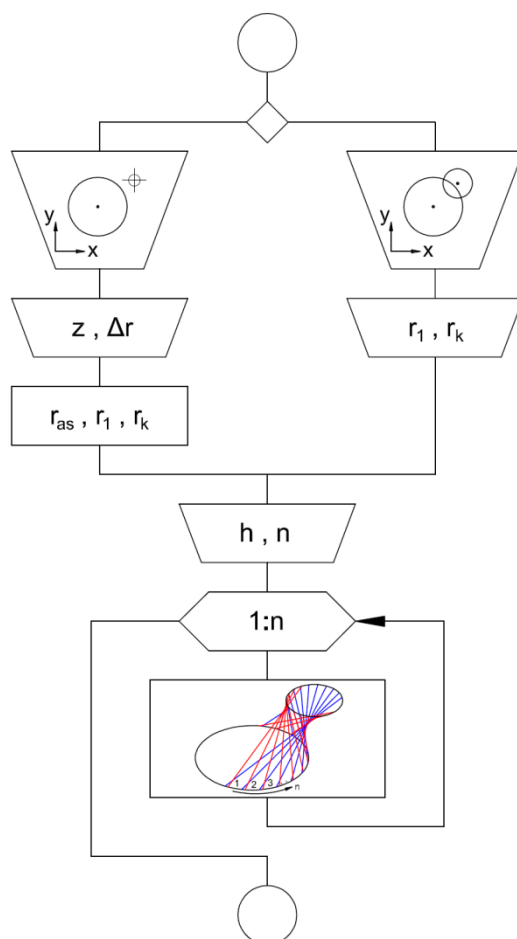




## 7. Графичка презентација и примена површи ЈЕХ

- висину хиперболоида  $H_{JEH}$
- број изводница површи  $n$  (број једнаких сегмената базисног круга)

Предност оваквог концепта задавања површи је варијетет облика хиперболоида (различити радијуси кривих–водиља  $k$ ), са неограниченим бројем варијанти у висини, који су одређени само једним асимптотским конусом. Висине хиперболоида  $H_{JEH}$ , на примерима (сл. 113 а–в) креираним апликацијом 1, су у односу на висину асимптотског конуса  $H_{AS}$ :  $H_{JEH} < H_{AS}$  (а),  $H_{JEH} > H_{AS}$  (б) и  $H_{JEH} = H_{AS}$  (в).



Сл. 112 Алгоритам апликације за креирање површи ЈЕХ помоћу кружних пресека

Недостатак ове апликације је што је за њено адекватно коришћење потребна способност предикције корисника, или искуство у моделовању, како би се као резултат добила површ одговарајућих – задовољавајућих сразмера (односи висине креиране површи, пречника базисних кривих, најмањег пресека....итд).

Друга опција апликације базира на идеји да се модел површи ЈЕХ–а

## 7. Графичка презентација и примена површи JEX

---

дефинише са два кружна пресека површи и једном њеном изводницом – спојницом кружних пресека. За ову опцију, важан елемент, који утиче на димензионисање површи, је положај изабране изводнице  $i_o$ , из једног система изводница (видети погл.3.5.3, под бр.3 – сл. 41). Кроз "корак" исписане у командној линији "Auto CAD-a" ова опција прати избор леве гране алгоритма на сл. 112).

б) Опција захтева избор:

- пресечне криве  $k$  – кружнице
- пресечне криве  $k_I$  ( у равни WCS, у којој лежи и крива  $k$  )
- висину хиперблоида  $H_{JEX}$  ( растојање између равни кривих  $k$  и  $k_I$  )
- почетну и крајњу тачку спојнице ( на оба базисна круга<sup>53</sup> ) – изводнице из једног система површи JEX
- број изводница површи  $n$ .

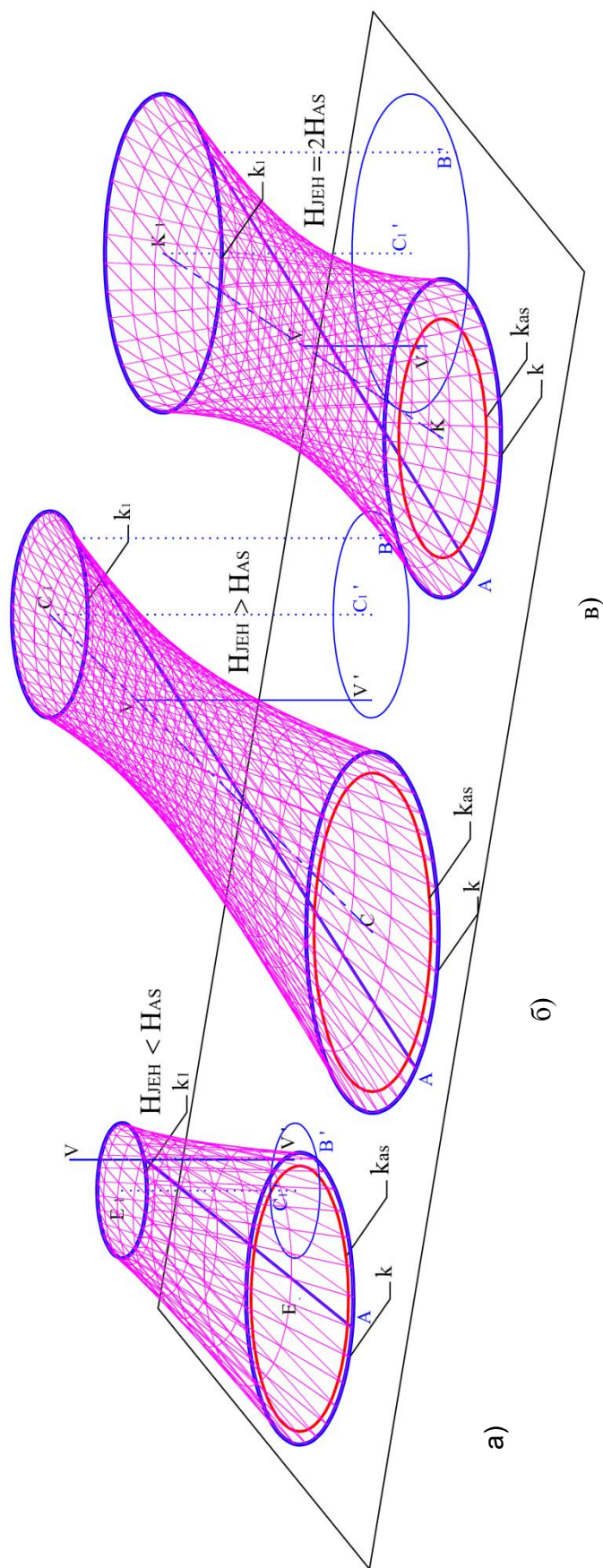
Предности овог начина моделовања су предвидивост и сагледивост форме (визуелизација) готове површи, пре но што рачунар "искреира" модел. То је посебно значајно, уколико су, приликом пројектовања објекта форме JEX-a дефинисане површине, – нивои кружних пресека (нпр. спратне етаже кружног облика).

Апликација 1 представља "улаз" за Апликацију 2, која од жичаних модела површи, креира триангулисани површински модел JEX-a (сл.114). Апликација узима у обзир постојеће тачке пресека изводница, којима пролазе ниво – линије кружних пресека и од њих креира одговарајућу мрежу троугаоних површина. Троуглови су у равни, тј. занемарује се закривљеност површи (сл.115). Стога је у претходном уносу, у апликацији 1, важно да се пажљиво осмисли број изводница површи, како би, просторна представа готовог објекта облика хиперблоида била што приближнија реално закривљеној.

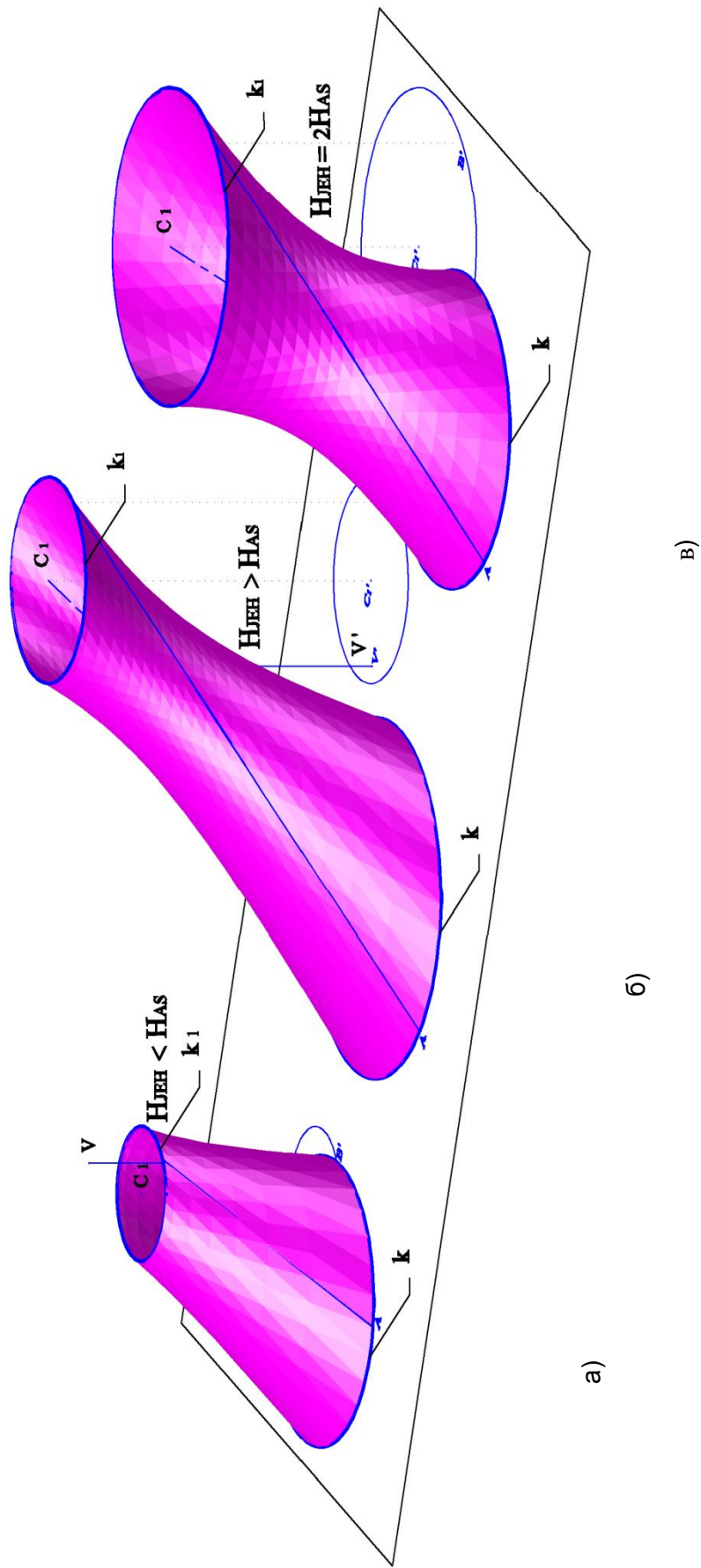
---

<sup>53</sup> На обе криве се бирају тачке у пројекцији базисне криве, уз проверу положаја у простору, манипулацијом 3D модела.





Сл. 114 а-в Три површинска модела ЈЕХ креирана Апликацијом 2 – приказ "wireframe"



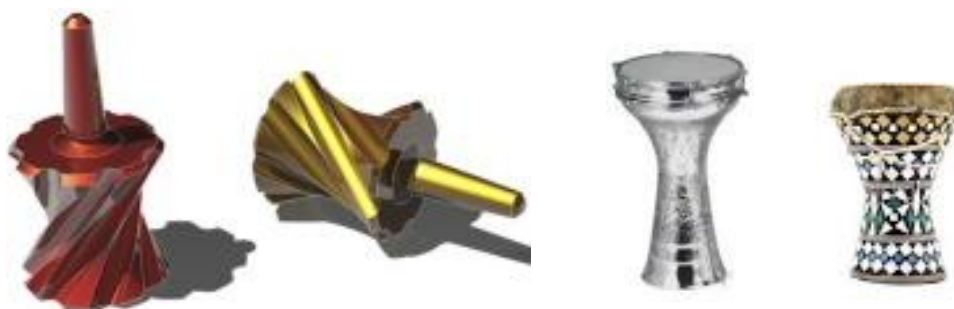
Сл. 115 а-в Три површинска модела ЈЕХ креирана Апликацијом 2 у реалном приказу

### 7.2 Примена површи једнограног хиперблоида (ЈХ)

За дискусију је постављање проблема да ли је математички облик претходио стварности на Земљи и у Космосу, или је неки дво-, тро-, или  $n$ -димензионални облик препознат и представљен математичким апаратом, нумериком, аналитиком, или се креира кроз кластере софтвера, који се појављују у савременој свакодневници и реалности.

Облик и структура, једнограног хиперблоида заузима значајно место у разноврсним сферама живота, науке, инжењерства, културе и њене баштине. Ову тему отвара Хиперблоид инжењера Гарина, са праскозорја научне фантастике, у књижевности.

Ван градитељске сфере, задатак тражења примене, по математичким формулацијама диференцијалних једначина, у презентацији путем: електричних, магнетних, механичких и других величина, би дао једну теоријску слику, а пракса је, са друге стране, већ остварила своја решења, кроз зупчанике<sup>54</sup> (сл.116), резонаторе музичких инструмената (сл. 117) и друге различите експонате.



Сл. 116 Хиперблоидни зупчаници (лево)

<http://meskanen.com/images/cutter.2jpg>

Сл.117 Музички инструмент – *тарабука* са резонатором облика ЈРХ (десно)

<http://www.skala.rs/kategorija/Udaraljke/1/34.html>

Кретања у Космосу и решавања путања небеских тела су одавно потврдила облике путања, које се крећу, од праволинијских до хиперболичких и параболичких. Посматрање кроз гране "прозваних" области: машинства [43], електротехнике [39], грађевинарства, архитектуре, итд. би показала да су неки облици специфични за дате области, али да има много заједничких области, које

---

<sup>54</sup> J. B. Calvert, представља хиперблоид у инжењерству, кроз кинематику зупчаника, који имају облик ротационог хиперблоида [43].



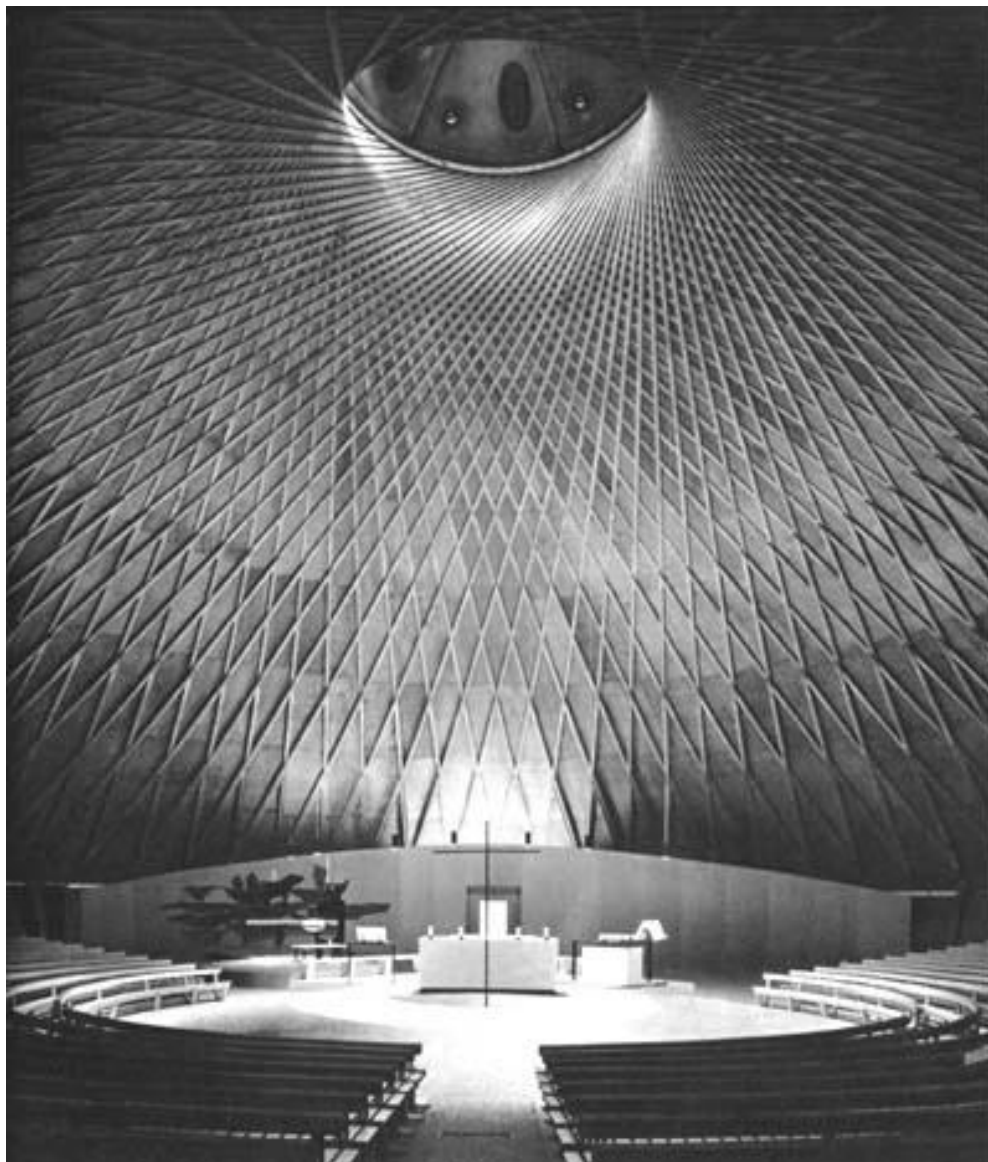
су последица њихових преплитања.

Зато ће овде бити изабрано само неколико области, по критеријуму савремених и по критеријуму типичних, или аспецифичних места за налажење једнограних хиперболоида, уз подсећање да је примена и налажење ротационих хиперболоида много мање присутна од елиптичких.

### 7.2.1 Примена ЈХ–а у архитектури и грађевинарству

У фамилији површи једнограних хиперболоида, ротациони хиперболоид је специјални случај, врло распрострањен и широког спектра примене у градитељској пракси. Неки изграђени објекти овог облика су већ споменути у поглављу 1., у делу историјата примене правоизводних површи, као представници са значајном иницијалном улогом приликом увођења нових материјала, или технологија [1,4]. Постоје оправдани разлози да се неки од њих поново појаве и у овом поглављу. То је, пре свега, могућност да се исте или сличне особине елиптичког хиперболоида, у будућности, искористе и реализују, уз предности које нуди развојни пут "паметних" грађевинских материјала и технолошка интелигенција.

- Велика носивост и одговарајући распоред напона код танких бетонских љуски облика ЈХ, као код преднапрегнутих структура арх. Е. Тороје, одговарају намени расхладних кула и резервоара [1].
- Решеткаста правоизводна самоносећа челична структура, по потреби мултипликована, са два система праволинијских носећих елемената, је сврсисходна за торњеве различитих функција (водоторњеви, ТВ и радиоторњеви...), или конструкције посебне намене (нпр. *Asian games torch tower*, *The Aspire sports Academy*, у Дохи).
- Естетски утисак који у ентеријеру оставља хиперболоидна бетонска структура која стреми увис, у "бесконечно", је примерена "своду" сакралног објекта (са видним "преплетом" носача у ентеријеру цркве Св. Јована јеванђелисте, у Греноблу (сл. 118), или објекту специфичне намене, какав је Научни центар – планетаријум *McDonnell* у Ст. Луису (в. стр.8).



Сл. 118 Унутрашњост објекта *L'église Sant Jean a Grenoble*, арх. М. Blanc, инж. R. Serger  
[http://www.aha-helico-air.asso.fr/saint\\_jean.htm](http://www.aha-helico-air.asso.fr/saint_jean.htm)

- Решеткаста конструкција облика хиперболоида која игра улогу "затеге", одговара намени кровне решеткасте мембране над великим распонем спортске хале кружног облика у Ђенови, коју је пројектовао П. Л. Нерви (в.стр.9).
- Стубови облика правог елиптичког хиперболоида у екстеријеру јавног објекта у Тренту, у Италији (сл. 121), који је саградио Adalberto Libera (између 1954 и 1961.год), су редак пример овог типа површи, примењеног у архитектури.
- Хоризонтално положена, транспарентна, хиперболоидна конструкција пешачког моста, одговара намени повезивања два пословна објекта преко постојеће саобраћајнице, у централном делу Манчестера, у Енглеској ( сл.119).



## 7. Графичка презентација и примена површи ЈЕХ

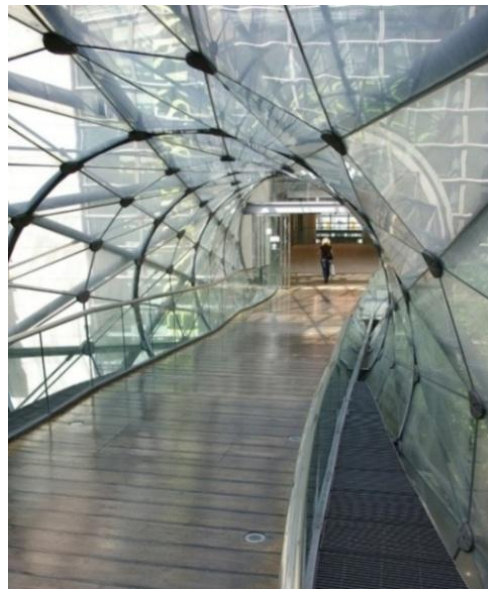
---



Сл.119 *Пешички мост*, Манчестер, Енглеска, арх. Hodder and Partners 1999.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation\\_Street\\_Bridge/](http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation_Street_Bridge/),



Сл. 121 Стуб облика ЈЕХ – *Palazzo della Regione*, у Тренту, Италија (лево)  
<http://en.structurae.de/structures/data/photos.cfm?ID=186475>



Сл.120 Ентеријер *Хиперболоидног моста*, Манчестер, Енглеска (десно)  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation\\_Street\\_Bridge/](http://en.wikipedia.org/wiki/Corporation_Street_Bridge/),

### 7.2.2 Примена површи ЈХ–а у уметности и дизајну

- Елементи естетике у ентеријеру, у форми светлосних ефеката, као и уметнички или дизајнерски експонати, су инспирација истраживачима, на тему облика ЈХ (сл. 122).



Сл. 122 Дизајн на форми елиптичког хиперболоида  
<http://brlcad.org/gallery/s/renderings/primitives/hyp.png.html>

- Могућности технике "оригами" [41, стр. 247–252] којом се од папира, савијањем, добија ротациони хиперболоид испирисала је индустријске дизајнере за креирање форме амбалаже.

### 7.2.3 Примена ЈХ–а у другим гранама технике и ....

Једна од области, где ће се појавити проблеми заједничког типа, је везана са осветљењем. Начин простирања дневног – сунчевог осветљења, у објектима карактеристичног облика површина (хиперболичке закривљености), пред проје-

## 7. Графичка презентација и примена површи ЈЕХ

---

ктанта, или дизајнера, представља посебан задатак за дизајнирање просторија, постављање прозора, врата, и сл. У склопу истог, је и задатак вештачког осветљења таквог простора, за свакодневни живот, или за специјалне захтеве обављања радних задатака, уз захтеве различитих осветљености [13]. Друга област везује начин избора светиљки [14] и светлосних извора са макроскопским решењима, или на бази фибер оптике, итд. Са једне стране је питање начина осветљења простора облика елиптичког хиперболоида, а друго, како са одабраном техником, ускладити захтеве животних и радних услова.

Поменуте оптика, осветљење и сл., у савременим развојним тенденцијама, у својим областима, траже решење питања концентратора соларне [27] и друге енергије, који се решавају дизајном огледала и материјалом. У микроталасној техници, облик хиперболоида се појављује у конструкцији таласовода, резонатора [29,5] и сл.

Проблеми простирања светлости, у таласној представи, су већ дуги низ година предмет проучавања, у смислу решења основних теоретских једначина простирања, или представа у разним координатиним системима. Међу њима су и представе Гаусовог снопа у специфичним координатама, повезивање облика и трансформације снопа на путањама. Гаусов облик је међу најчешће проучаваним [26], а добија у актуелности, већ од појава првих квантних генератора масера<sup>55</sup> и ласера, за њихову модну структуру, кохерентне особине, дивергенцију, поларизацију и сл. Геометријске представе модова се везују за изводнице ЈРХ, а апарат представе и за нацртну геометрију. Може се додати и *ray tracing* [8], формулацијама које укључују и матричну оптику.

---

<sup>55</sup> MASER—mase microwave ( molecular) amplification by stimulated emission of radiation; LASER—laser light amplification by stimulated emission of radiation

## 8. Закључна разматрања

---

Предмет истраживања докторске дисертације припада области геометријског конструисања, моделовања и визуелизације двоструко закривљене правоизводне површи другог реда – једнограног елиптичког хиперболоида (JEX), који је, у том домену, до сада, недовољно истражен. Располовиви теоријски оквири из стручне литературе представљају само смернице за одређивање низа конструктивно–геометријских параметара ове површи и њихових међусобних релација.

Начин генерисања површи је математички дефинисан општом једначином (или у параметарском облику) и има својих недостатака за потребе практичне примене у градитељско–архитектонској пракси. Стога је део рада дао допринос у проналажењу новог, сврсисходнијег полазног конструктивног оквира за њену примену.

Како је једнограни елиптички хиперболоид у мањој мери присутан, у реалном животном простору и окружењу, у односу на друге сродне типове правоизводних површи, то је дисертација управо посвећена томе да прошири сазнања, подстакне идеје и да смернице за његову примену.

Циљеви истраживања који су постављени за израду дисертације у оквиру полазних хипотеза су и остварени. У току израде тезе појавио се и низ нових задатака, који су решени. Резултат рада читаве тезе се може сагледати кроз следеће:

- Остварен је нов приступ положајног дефинисања површи JEX, како би се проширила и олакшала њена апликативност у пракси: градитељству, дизајну и другим научним дисциплинама теоријске и техничке природе.
- Научно заснованим методама нацртне геометрије, синтетичке и пројективне геометрије, приказани су поступци конструисања површи и одређивања њених главних параметара, са међусобним положајним релацијама. Примењене су и класичне и савремене методе графичког представљања, уз употребу афирмисаног софтверског пакета Auto CAD, актуелног у области инжењерске графике.
- Теоријски значај утврђених карактеристика површи и инваријанти приликом просторних трансформација површи, приказан је кроз формулисане закључке сваке целине, чиме је остварен допринос у едукативној, научној и креативној градитељско–дизајнерској сфери.

## 8. Закључна разматрања

---

- Приказани су поступци геометријског моделовања и креирања просторних структура применом сегмената површи ЈЕХ и комбинацијама ЈЕХ са површима другог степена.
- Остварена је креативна веза између истраживачке „базе података“, просторне визуелизације, имагинације и графичког представљања, предлогом примене у архитектонској пракси.

### Резултати истраживања:

Конкретније изражено, процес рада и анализе су резултирале:

- Оствареном положајном анализом директриса површи, за све типове једнограних елиптичких хиперболоида, коришћењем помоћних тела – носача (четворостране и шестостране призме, или пирамиде) у које су уписане водиле ЈЕХ. Установљене су инваријанте код конструисања површи у овим случајевима;
- Конструктивним поступцима за одређивање главних параметара површи ЈЕХ: средишта, главних ортогоналних оса, стрикционе елипсе, асимптотског конуса и темена у равнима главних оса;
- Успостављеном везом између специјалних и општих случајева површи, кроз поступке просторних колинеарних афиних трансформација;
- Приказом зона са карактеристичним, граничним, као и специјалним случајевима пресека површи ЈЕХ;
- Примерима сложених просторних структура, кроз геометријске 3D моделе. Дата су решења за задате облике матрица, сачињене од сегмената ЈЕХ–а, као и комбинације са другим општим површима 2. степена.

Научна оправданост урађене тезе се сагледава кроз споменуте ставове да једнограни елиптички хиперболоид, као најопштији случај правоизводне површи другог степена, није до сада конструктивно–геометријски обрађиван и у много мањој мери је присутан у пракси, у односу на представнике сродних типова површи, као што су: ротациони хиперболоид, хиперболички параболоид, коноид, итд. Присуство и примена ове површи у различитим животним сферама и научним дисциплинама даје значај њеној темељној анализи и у геометријско – конструктивном смислу. Иако су савремена алгебарска геометрија и геометријско моделовање омогућили схватање геометријских објеката (дефинисаних алгебар-

## 8. Закључна разматрања

---

ски) и креирање виртуелних облика (применом алгебарских модела), за разрешавање компликованих просторних проблема, приступ приказан у дисертацији има значаја у делу: ефикасности (без рогобатних прорачуна и формула), просторне визуелизације, имагинације и предикције, од важности за архитектонску праксу. Анализом најопштијег случаја површи једнограног елиптичког хиперболоида ствара се допуна конструктивно–теоријског оквира за све врсте правоизводних површи другог степена.

Дисертација садржи приказе конструктивних поступака за одређивање параметара и метричких релација основних елемената различитих типова површи, као и просторних трансформација површи, познатим методама нацртне и пројективне (синтетичке) геометрије. Примери карактеристичних пресека површи са равнима и продора ЈЕХ са другим површима другог степена отварају широко поље за креирање сложених просторних структура апликативних у архитектури и дизајну. Резултати ове дисертације се могу применити и на друге практичне и научне дисциплине .

Конкретно, закључци дати у оквиру појединих поглавља су везани за:

1) *Начин задавања површи у простору* - погл. 3.4:

Површ ЈЕХ се из конструктивних разлога задаје просторним шестостраником (шестотемеником) који образују два пута по три водиле, из различитих система изводница. Водиле су, ивице или дијагонале носача – четворостране или шестостране призме, тј. пирамиде.

2) *Конструисање средишта површи* - погл. 3.5.2:

а) Било која три пара паралелних изводница, тј. водиле површи ЈЕХ–а, из различитих система, формирају три тангенцијалне (асимптотске) равни површи њене бесконачне конике, које се секу у тачки – средишту површи.

б) Средиште површи ЈЕХ се налази на средини растојања дирних тачака (два темена просторног шестотеменика) две паралелне тангенцијалне равни површи. При томе су парови правих – изводница површи, из различитих система, које образују тангенцијалне равни у тим тачкама, међусобно паралелни, и припадају двама асимптотским равнима површи.

3) *Конструисање оса површи ако је позната једна њена раван симетрије* - погл. 3.5.3: а) У задатој равни симетрије  $\varphi_1$  површи ЈЕХ–а, која сече површ по

## 8. Закључна разматрања

---

хиперболи  $h_1$ , постоји јединствени пар оса површи  $o_1o_2$ , коинцидентан пару оса хиперболе  $h_1$ . При томе је хипербола  $h_1$  пресечна крива површи ЈЕХ–а и његове равни симетрије, а осе  $o_1$  и  $o_2$  представљају ортогонални пар придружених полара, у инволуторном прамену полара, са теменом у средишту површи  $O \equiv H$ , коинцидентном центру хиперболе  $h_1$ ;

б) Нека је  $k$  базисна коника асимптотског конуса  $\tau$  једнограног хиперболоида  $\theta$  у равни  $H$ , са врхом  $V$  ван равни. Тада постоји јединствени аутополарни троугао  $P_oQ_oR_o$  конике  $k$ , такав да је ортогонална пројекција  $V'$  врха  $V$  на раван  $H$  коинцидентна ортоцентру  $O_c$  троугла  $P_oQ_oR_o$ . При томе су, спојнице темена  $P_o, Q_o$  и  $R_o$  са врхом  $V$  асимптотског конуса  $\tau$ , три главне осе заједничке за конус и једнограни хиперболоид;

в) Главне осе површи ЈЕХ–а,  $o_1$  и  $o_2$ , која је задата са два произвољна кружна пресека и једном изводницом, пролазе средиштем  $O$ , су симетрале угла две изводнице асимптотског конуса површи, у његовој равни симетрије  $\varphi$ . Оса  $o_3$  је ортогонална на раван коју образује прве две осе.

### 4) *Контруисање темена стрикционе елипсе површи* – погл. 3.5.4:

а) Пар темена – крајњих тачака осе стрикционе елипсе на осам површи  $o_2$  и  $o_3$  је коинцидентан пару темена контурне хиперболе у равни симетрије  $\varphi_1$  тј.  $\varphi_2$  ЈЕХ–а.

б) Прамен равни ( $P$ ) постављен кроз главну осу ( $o_2$  или  $o_3$ ) у равни стрикционе елипсе ( $\varphi_3$ ) сече површ ЈЕХ по прамену хипербола ( $P_h$ ) са заједничким паром темена  $T_hT_h$  на оси – крајњим тачкама осе стрикционе елипсе. При томе су асимптоте ових хипербола, пресечнице равни прамена и асимптотског конуса.

в) Парови изводница површи ЈЕХ–а које чине тангенцијалне равни у теменима стрикционе елипсе (на осам површи  $o_2$  и  $o_3$ ) су паралелни правцима асимптота пресечних хипербола  $h_1$  и  $h_2$  у равнима  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  респективно, тј. изводницама асимптотског конуса у овим равнима.

г) Парови изводница површи ЈЕХ, који образују паралелне тангенцијалне равни у крајњим тачкама неког дијаметра стрикционе елипсе, су паралелни пару асимптота пресечне хиперболе (пар изводница асимптотског конуса) површи, у равни која садржи главну осу  $o_1$  и дијаметар стрикционе елипсе коњугован изабраном.

### 5) *Колинеарне трансформације једнограних хиперболоида* – погл. 4.1

а) Придруживање две праве тростране призме са базисима једнакостраничним и

## 8. Закључна разматрања

---

разностраничним троуглом, тако да су дијагонале страна ових призми – по три мимоилазне изводнице (из истог система) два једнограна хиперboloида, је специјални случај колинеарне (афине) трансформације  $JPX$  у прав  $JEX$ .

б) Нека су у две тростране призме, исте висине, праву и косу, са равни коинциденције  $\pi$ , у којој лежи њихов заједнички базис, једнакостранични троугао, као дијагонале страна, уписане по три водиље  $JPX$ -а ( $\theta_r$ ) и косог  $JEX$ -а ( $\theta_e$ ), респективно, тада важе законитости:

– Просторном трансформацијом – смицањем једног кружног пресека ( $k$ )  $JPX$ -а ( $\theta_r$ ), за усвојени вектор  $v$ , паралелан равни коинциденције  $\pi$ , у којој леже две поклопљене пресечне криве  $k \equiv k_1$ , настаје коси  $JEX$  ( $\theta_e$ ), чије су једна раван симетрије и сви кружни пресеци, паралелни равни  $\pi$ , инваријанте трансформације.

– Просторном трансформацијом – смицањем једног елиптичког пресека  $JEX$ -а ( $\theta$ ), за усвојени вектор  $v$ , у његовој равни симетрије ( $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ ), паралелан равни коинциденције  $\pi$ , у којој леже поклопљене пресечне криве  $e \equiv e'$  два хиперboloида ( $\theta$  и  $\theta'$ ), настаје коси  $JEX$  ( $\theta'$ ), чије су инваријанте трансформације, једна раван симетрије и сви пресеци површи паралелни равни коинциденције  $\pi$ .

– Просторном трансформацијом – смицањем једног елиптичког пресека  $JEX$  за усвојени вектор  $v$ , ван равни симетрије ( $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ ), паралелан равни коинциденције  $\pi$ , у којој леже поклопљене пресечне криве  $e' \equiv e''$  два хиперboloида ( $\theta'$  и  $\theta''$ ), настаје коси  $JEX$  општег случаја, чије су инваријанте трансформације, сви пресеци површи паралелни равни коинциденције  $\pi$ .

б) *Поларитет квадрике –  $JEX$ -а*, погл. 5.1:

а) Две, од четири, паралелне пресечне равни  $JEX$ -а, које пролазе једном хармонијском "четворком" тачака (брдног хармонијског односа је  $-1$ ), на једној произвољној сечици  $m$ , која садржи врх асимптотског конуса  $V \equiv H$ , коинцидентан средишту  $JEX$ -а, су тангенцијалне равни површи у тачкама продора  $P_1$  и  $P_2$  сечице  $m$ . Друге две равни пресека секу површ по коници другог реда: елипси, хиперболи или параболи. Ако је продорна тачка  $P_m$ , сечице  $m$ , кроз раван базисне криве  $e$   $JEX$ -а:

- ван криве  $e$ , пресечне конике су хиперболе
- унутар криве  $e$ , пресечне конике су хиперболе
- на кривој  $e_{as}$ , пресечне конике су параболе.



## 8. Закључна разматрања

---

б) Нека је  $\mathbf{P}$  произвољни пол за поларну раван  $\pi$  површи ЈЕХ, чија је пресечна коника  $\mathbf{k}$ . Тада, раван  $\pi$  дефинишу три тачке  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{X}$ , које припадају хармонијским четворкама тачака  $(\mathbf{PM P}_1\mathbf{P}_2) = -1$ ,  $(\mathbf{PW S}_1\mathbf{S}_2) = -1$   $(\mathbf{P X L}_1\mathbf{L}_2) = -1$ , па три сечице  $\mathbf{m}, \mathbf{s}$  и  $\mathbf{l}$  респективно, из прамена сечица  $\{\mathbf{P}\}$ . При томе сечица  $\mathbf{m}$  пролази средиштем  $\mathbf{O}$  површи ЈЕХ, а друге две припадају асимптотским равнима, које пролазе тачком  $\mathbf{P}_m$  – продором сечице кроз раван пресечне конике  $\mathbf{k}$ .

в) За  $2n$  изводница асимптотског конуса ЈЕХ–а, које испуњавају услов да са главном (унутрашњом) осом конуса граде угао  $\alpha \geq 45^\circ$ , постоји  $n$  система паралелних равни које које секу ЈЕХ по Аполонијевој хиперболи.

Даља истраживања: При изради дисертације појавио се низ занимљивих питања и проблема који би били од интереса за даља истраживања, међу којима су: геометријски поступак пресликавања сфере у површ ЈЕХ, геометрија фрактала на фасади објекта облика хиперболоида, релације полиедара и једнограног елиптичког хиперболоида, примена дијагрид конструктивног система на површ ЈЕХ-а итд.

## Кратак опис поступка за конструисање главних оса косог конуса

(прилог уз секцију 3.5.3/2)

1. За избрани коси конус и пресечну криву (базис)  $k$ , са истим врхом, поставља се одговарајући ротациони конус (базис је кружница  $k_I$ ), чије изводнице са равни пресека заклапају угао од  $45^\circ$ .

2. Да би се успоставила два колинеарна поља тачака у пресечној равни за сваки од центара–полова ( $K$  и  $K_I$ ) пресечних кривих оба конуса конструише се полара, тј. антиполара у односу на одговарајућу криву. За пол  $K_I$  полара је у односу на пресечну криву косог конуса, а за пол  $K$  конструише се анти–полара у односу на кружницу  $k_I$ – пресечну криву ротационог конуса. Полара пола  $K_I$  је недогледница  $r$ , а анти–полара пола  $K$  је недогледница  $i_I$ .

3. Два прамена полара (чији су полови на бесконачно далекој правој) у пару придружених тачака  $K$  и  $K_I$  као резултат пресека дају конику Аполонијеву хиперболу. Пар придружених полара  $a$  и  $a_I$  паралелних недогледницама  $r$  и  $i_I$  у пресеку даје једну тачку ове хиперболе, која такође пролази тачкама  $K$  и  $K_I$ . Потребно је конструисати темена и криву –хиперболу (користећи методу сечица нпр.).

4. За два перспективна низа тачака на правама  $a$  и  $a_I$  конструише се центар перспективитета  $C_i$ , у пресеку ортогоналног пара придружених полара, које пролазе центрима  $K$  и  $K_I$  коника  $k, k_I$  (било која од две могућности). Правцима паралелним одговарајућим поларама (и недогледницама) из  $C_i$ , на низовима  $a$  и  $a_I$  одређују се недогледи  $G$  и  $G_I$  (правац паралелан недогледници  $r$  на низу  $a_I$  одређује недоглед  $G_I$ ). Тачкама  $G$  и  $G_I$  пролазе ортогоналне асимптоте Аполонијеве хиперболе. Контрола положаја асимптота се врши помоћу произвољне сечице и једнаког растојања тачака хиперболе од асимптота.

5. Следећи корак је одређивање центара инволуције  $Vr$  и  $Hi$  на недогледницама  $r$  и  $i_I$ . У тачкама  $K$  и  $K_I$  постављене су поларе  $n \perp r$  и  $v_I \perp i_I$ :

- за полару  $n$  треба конструисати коњуговани правац (у односу на елипсу  $k$ ) одговарајућег бесконачно далеког пола  $N_\infty$ ; придружена полара  $n_I$ , из прамена у темену  $K_I$  (у односу на круг  $k_I$ ) је управна на правац  $N_\infty$ .

- за полару  $v_I$ , коњуговани правац (у односу на круг  $k_I$ ) је паралелан недогледници  $i_I$ , са бесконачно далеким полом  $I_I^\infty$ ; за овај пол треба конструисати одговарајућу

полару  $\nu$  (у односу на елипсу  $k$ ) из прамена у темену  $K$ .<sup>56</sup>

6. Поларе  $n_I$  и  $\nu$  секу недогледнице  $i_I$  и  $r$  у траженим центрима инволуције  $Hi$  и  $Vr$ , кроз које треба поставити пар главних нормала колинеарних поља  $g_{nI} \perp i_I$  и  $g_n \perp r$ .

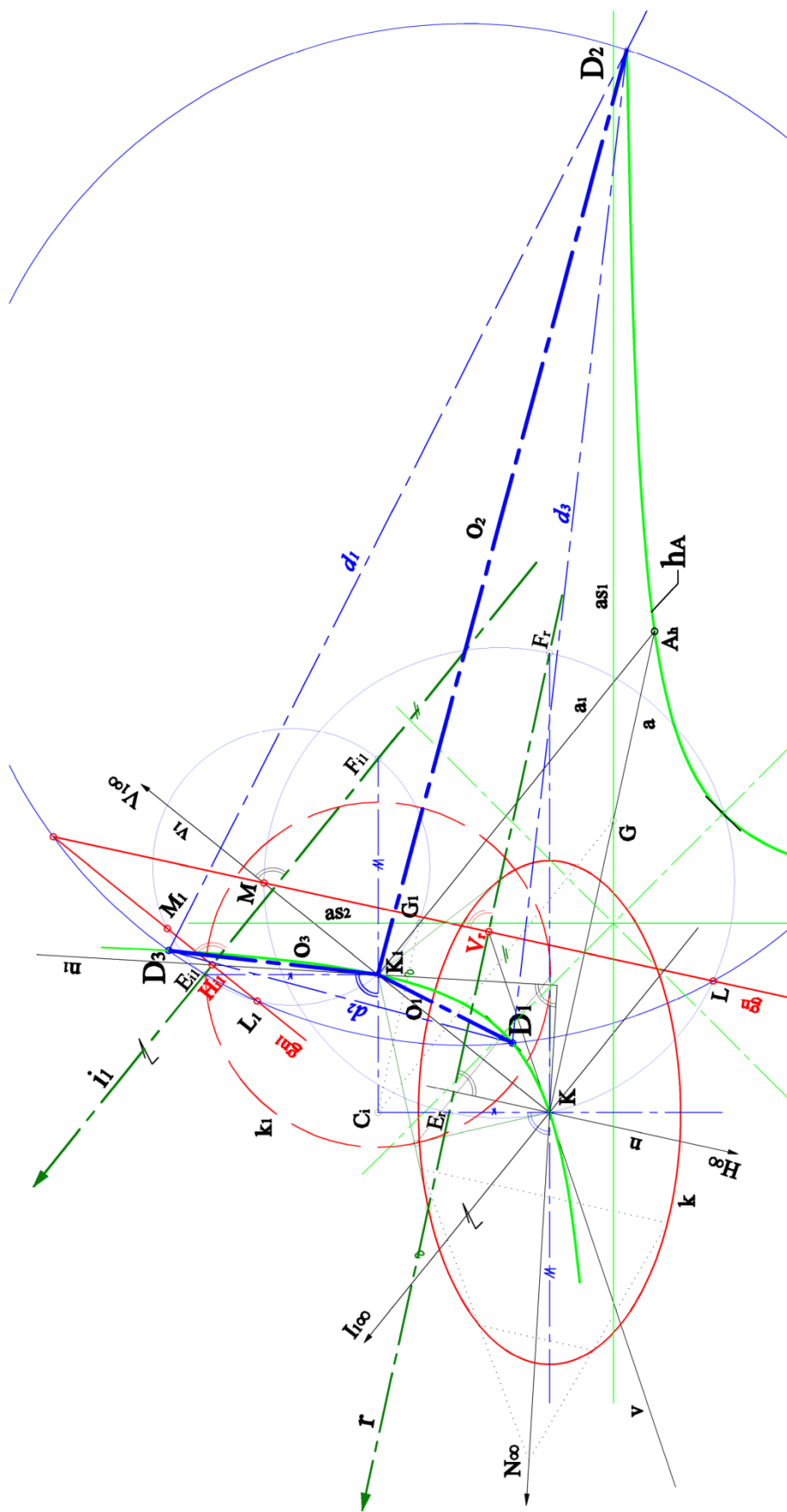
7. Пар придружених тачака, на инволуторном низу – недогледници  $r$ , чине пресечне тачке  $E_r, F_r$  пара ортогоналних оса конике  $k$  и недогледнице. Кроз овај пар тачака и центар конике  $K$ , треба описати кружницу, која сече главну нормалу  $g_n$  у пару  $L, M$  Лагерових тачака. Аналогно, кроз пар тачака  $E_{i_I}, F_{i_I}$ , на недогледници  $i_I$  и центар конике  $K_I$ , треба описати кружницу, која сече главну нормалу  $g_{nI}$ , у другом пару  $L_I, M_I$  Лагерових тачака.

8. Кроз три тачке:  $L, L_I$  и пресек две главне нормале  $g_n$  и  $g_{nI}$ , треба описати кружницу, која ће у пресеку са Аполонијевом хиперболом дати четири тачке пресека, од којих су три – двоструке тачке  $D_1D_2D_3$  аутоколинеарног троугла, у два задата колинеарна поља тачака.

9. Спојнице тачака  $D_1D_2D_3$  са врхом косог конуса су његове главне осе  $o_1o_2o_3$  (сл. 124 ). Провера се може извршити мерењем углова између парова оса, у врху конуса (у 3D режиму конструисања) или учртавањем висина троугла  $d_1d_2d_3$  које морају проћи орто–центром, тачком  $K_I$ . Такође мора бити испуњен услов једнаких одстојања двоструких тачака  $D_1D_2D_3$  од пресека са недогледницама, дуж сваке стране аутоколинеарног троугла.

---

<sup>56</sup> Детаљно објашњење се налази у раду - реф. [12].



Сл. 124 Конструктивни поступак за одређивање главних оса асимптотског конуса JEX у општем случају

1. Antuna J., (2010) *The work of Eduardo Torroja: Research for improving the quality of construction technology*, ICSA 2010 –1st International Conf. on Structures & Architecture, Guimaraes, Portugal pp.527–528, DOI:10.1201/b10428–257.
2. Belyaev A., *Gaussian Curvature. Shape from Contour. Special Surfaces.*, <http://www.mpi-sb.mpg.de/~belyaev>
3. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P., (2002) *Special Structures: Past Present and Future*, ASCE, Vol.128, No.6, pp.691–697  
DOI: 10.1061/(ASCE)0733–9445(2002)128:6(691).
4. Burry J. R., Burry M. C., (2006) *Gaudi and CAD*, Itcon Vol.II pp.437–445.
5. Bhowmik A., Cover R.A., Kennedy P.K., Bitterly S., Labbe R.H., (1988) *Design of performance of high gain free electron lasers with grazing incidence unstable ring resonators*, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol.24, issue 5, pp. 802–811.
6. Velimirović LJ., Cvetković M., Ćirić M., Velimirović N., (2010) *Gaudi surfaces*, Proc. of 2<sup>nd</sup> Int. Sci.Conf “moNGeometrija 2010“, pp.668–377, Beograd.
7. Vincent B., *Ruled Surfaces*, Students research in Honors 301 Project.  
<http://www.ms.uky.edu/~lee/visual05/gallery/ruledsurfaces.doc>
8. Glassner A., (1989) *An introduction to ray tracing*, Academic Press.  
ISBN: 9780122861604
9. Дамјановић В. (1972) *Индустријски комплекси и зграде*, Грађевинска књига, Београд.
10. Dan X., (2003) *Geometry and the imagination*, An academic research, Dept. Math. Nat. Univ. Singapore, <http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/project/xd.pdf>
11. Dennis D., Addington S., (2009) *Apollonius and Conic Sections*, Mathematical intentions, <http://quadrivium.info>
12. Dragović M., Čučaković A., Stojanović V., (2013) *Projective geometry approach to construction of the rectangular axes and planes of symmetry of the 2<sup>nd</sup> order surfaces specified with a quadric cone*, у току је рецензија рада.
13. Бокић Ј., (2007) *Осветљење у архитектури; Захтеви и смернице за пројектовање*, Архитектонски факултет Универзитета у Београду, Београд.  
ISBN –10 86–7924–002–8
14. Бокић Ј., (2012) *Осветљење урбаних елемената и простора; Хармонија кроз мастерплан*, Универзитет у Београду, Архитектонски факултет, Београд.

- ISBN 978–86–7924–076
15. Здравковић–Јовановић А., (1985) *Метричке и положајне инваријанте колинеарних простора*, Докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд.
  16. Zeid I., (1991), *CAD/CAM Theory and Practise*, Mc. Grow – Hill Inc., USA, ISBN 0–07–072857–7
  17. Zsombor P. – Murray, (2009) *Geometry in Mechanics: from Kinematic Geometry*, Trans. Can. Soc. Mech. Eng., <http://www.cim.mcgill.ca/paul/FPQAx69x.pdf>
  18. Јанићијевић, Р., (1989) *Просторна диспозиција кружних пресека на конусним површинама*, магистарска теза, Архитектонски факултет, Београд.
  19. Jevtić–Novaković K., Fontana–Giusti G., (2012) *Emilijan Josimović – the First Serbian urbanist and...*, Proc. of 3<sup>rd</sup> Int. Sci. Conf. "moNGeometrija 2012", pp. 409–422, Novi Sad.
  20. Коepetsky H.G., Sach H., (2007) *Quadratische Kegel und Auto CAD*, KoG, Vol.11, No.11, pp. 39–41, Zagreb.
  21. Красић С., (2012) *Геометријске површи у архитектури*, Грађевинско–архитектонски факултет, Универзитет у Нишу, Галаксија, Ниш.
  22. Krasić S.,Marković B., Pejić P.,(2012) *Analysis of Mapping of Hyperboloid of One Sheet With the Aid of Absolute Conic in General Collinear Spaces*,Proc. Of 3<sup>rd</sup> Int. Sci.Conf “moNGeometrija 2012“, pp.361–369, Novi Sad.
  23. Krasić S., Nikolić V., (2009), *Constructive procedure for determination of absolute conic figure in general collinear spaces*, Filomat, Vol.23, No.2, pp. 90–96.
  24. Krivoshapko S. N., Ivanov V. N., (2010) *Encyclopedia of Analytical Surfaces* (на руском), Moscow.
  25. Кучинић Б. и сарадници, (1992) *Обле форме у грађитељству*, Свеучилишна наклада, Загреб.
  26. Landesman B. (1989), *Geometrical representation of fundamental mode of a Gaussian beam in oblate spheroidal coordinates*, J. OPT.Soc.Am. A Vol.6. No 1, pp.5–17.
  27. Mallick T., *Solar Energy Research: Challenges and Opportunities*, Mech. Engineering, Heriot–watt University Edinburgh, UK.  
[http://www.see.ed.ac.uk/research/IES/msc/current/MSc\\_SES\\_Seminar\\_Mallick.pdf](http://www.see.ed.ac.uk/research/IES/msc/current/MSc_SES_Seminar_Mallick.pdf)

28. Meyer Boake T., (2013) *Diagrids - The New Stability System-Combining Architecture with Engineering*, Architectural Engineering Institute Conference, Penn State. <http://www.tboake.com/research.html>
29. Nefedov E. I., Rossiiskii I. M., Fialkovskii A. T., Khrapko, A. M., *Open coaxial resonator with a cylindrical external mirror and an internal mirror in the form of a hyperboloid of rotation*, Radiotekhnika i Elektronika, vol. 19, Dec. 1974, p.p 2629–2632 (на руском).
30. Несторовић М., (2000) *Конструктивни системи*, Архитектонски факултет, Универзитет у Београду, Београд.
31. Nestorović M., Čučaković A., Jović B., (2009) *Geometry of Geodesic Structure*, Applied Geometry and Graphic, The Interdepartmental Collection of Proceedings, Kyiv, issue No.82,pp.132–136.
32. Ниче В., (1956) *Увод у синтетичку геометрију*, Школска књига, Загреб.
33. Ниче В., (1979) *Дескриптивна геометрија*, I свеска, Школска књига, Загреб.
34. Odehnal B., (2009) *Note on Flecnodes*, Journal for Geometry and Graphics, Vol. 13, No.1, pp.29–40.
35. Попконстантиновић Б., Чуцаковић А., Димитријевић М. (2006) *Доказ Дандаленове теореме методама пројективно синтетичке геометрије*, Зборник радова XXIII стручног саветовања „моНГеометрија 2006“, стр.97–105, Нови Сад.
36. Rogers H., (2009) *Structural Form in History and the Construction of Complex Forms*", Proceedings of the Third International Congress on Construction History, Vol.3, pp.1273–1280, Cottbus.
37. Сбутега В., Живановић С., (1986), *Синтетичка геометрија III – Пројективна геометрија основних ликова прве врсте и њихових творевина*, Архитектонски факултет, Београд.
38. Smith D. (1906), Article 16: Modern Geometry, *History of modern Mathematics*, Chapman and Hall, London.
39. Spagnolo A. F., Segedy J. J., (1983) *Lambert scattering from a hyperboloid of one sheet*, Applied Optics, (ip 1.41), Vol. 22(9) pp.1397–1401.
40. Havlicek H., Weiss G., (2002) *Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms*, American Math Monthly, pp.679–693.

41. Hernandez J., *Mathematics and Origami*, ISBN 84–607–2169–8
42. Huylebrouck D., (2012) *Polyhedra on an equilateral hyperboloid*, Bridges 2012: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. pp.231–238.
43. Calvert J. B., (2007) *The hyperboloid and its Application to Engineering*, from web resource <http://mysite.du.edu/~etuttle/tech/hyperbo.htm>
44. Chasles M., (1841) *Two Geometric Memoirs: On the General properties of the Cones of Second Degree and On the Spherical Conics*, University Press, Dublin.
45. Чуцаковић А., Димитријевић М., (2008) *Варијанте међусобног положаја директриса косог једнограног елиптичког хиперboloида*, Зборник радова са XXIV стручног саветовања „моНГеометрија 2008“, стр. 25–37, Ниш.
46. Čučaković A., Dimitrijević M., (2008) *Properties of two collinear spaces where common tetrahedron is irregular – orthocentric*, XIII Int. Conf. Geom. Graph., Dresden, Zbl 1157.68463.
47. Чуцаковић А., Димитријевић М., (2010) *Главне осе косог конуса – Општи случај када је базис конуса – елипса*, Зборник радова са XXV међународног стручног саветовања „моНГеометрија“, стр.51–60, Београд. /Defining The Principal Axes of the Quadric Cone – A General Case with Elliptic Base Section Curve /
48. Чуцаковић А., Димитријевић М., Попконстантиновић Б., (2004) *Одређивање положаја два пара међусобно ортогоналних правих код два колокална пројективно придружена прамена правих*, Зборник радова стручног саветовања "МоНГеометрија 2004", Београд, стр.9–16.
49. Čučaković A., Dragović M., (2011) *The General Case of Main Axis for 2<sup>nd</sup> Order Cone*“, Book of Abstracts, pg.11, Scientific Colloquium on Geometry and Graphics, Tuheljske toplice, Croatia.
50. Чуцаковић А., Драговић М., (2012) *Конструкција једнограног елиптичког хиперboloида помоћу његових кружних пресека*“, XXVI стручно саветовање „моНГеометрија 2012“, стр. 279–288, Нови Сад. / The Construction Method of Elliptic Hyperboloid With Its Circular Sections/
51. Čučaković A., Popkonstantinović B., (2002) *Definition of Revolving Hyperboloid of One Sheet From Three Spatial Bypassing Straight Lines*, Proc. of 10<sup>th</sup> ICGG, Kyiv, Ukraine, pp.237–239.



52. Чучаковић А., Попконстантиновић Б., Димитријевић М., (2002) *Конструкција једнограног елиптичког хиперboloида који је задат са три коначне мимоилазне праве, применом афине трансформације простора*, Зборник радова XXI стручног саветовања „монНГеометрија 2002“, стр.9–14, Подгорица.
53. Чучаковић А., Попконстантиновић Б., Димитријевић М. (2007) *Начин задавања и конструктивна обрада косог једнограног елиптичког хиперboloида*, књига абстраката, стр.7, 12. Научно–стручни скуп ХДГГ , Вуковар, Хрватска.
54. Walker. A. G., (1945) *A model of a hyperboloid of one sheet and its asymptotic cone*, Edinburgh Math. Notes, 35, pp. 20–23.
55. Weiss G., (2009) *Visualisation–Interpretation Understanding: Travelling on the Royal Road to Mathematical Abstraction in Old Boots: Descriptive Geometry*. Filomat, 23(2), pp.1–11.
56. Weisstein E. W., *Confocal Quadrics*, from Math World–A Wolfram Web Recourse, <http://mathworld.wolfram.com/ConfocalQuadrics.html>
57. Weisstein E. W., *Elliptic Hyperboloid*, from MathWorld–A Wolfram Web Recourse, <http://mathworld.wolfram.com/EllipticHyperboloid.html>

# Биографија

---

Магдалена Драговић, рођ. Димитријевић  
ЈМБГ 3004966715231

## Образовање:

Факултетско : Архитектонски факултет у Београду

- год. уписа шк.1984/85.
- школске 1988/89. год апсолвирала са високом просечном оценом
- 03. 1993. дипломирала је са пројектом „Модна кућа у зони Карађорђевог ул. у Београду“ и оцењена оценом 10
- просечна оцена током студија је била 9.01

Звање: *дипломирани инжењер архитектуре*

последипломско : Курс из Нацртне геометрије, на последипломским студијама  
Архитектонског факултета у Београду

- год уписа шк.1995/96.год
- све обавезе предвиђене курсом завршила до марта 1999.год (ср оц.9.83)
- магистарска теза: „*Неке нове инваријанте опште колинеарних поља и њихово коришћење за конструктивне поступке пресликавања*“, одбрањена 13.02.2001.год

Звање: *магистар техничких наука за архитектуру и урбанизам*

- 30.09.2008. год. пријавила тему за докторску дисертацију под насловом: „*Конструктивни поступци у просторним трансформацијама површи једнограног елиптичког хиперболоида*“

## Стручни рад :

У периоду до одбране дипломског рада, као *апсолвент архитектуре*, радила је као сарадник у фирмама „Енергопројект“ (одсек за индустријско пројектовање), „Архитектура и урбанизам“, „Експресградња“ и у привреди Архитектонског факултета (у трајању од две ипо године), на пословима пројектовања и извођења објеката стамбене, колективне и индивидуалне градње, хотела, спортских и пословних објеката. Учествовала је на бројним конкурсима, од којих су награђени: стамбени комплекс у Лазаревцу и спортска хала у

Лозници.

По дипломирању је наставила сарадњу са Архитектонским факултетом и као *сарадник и аутор* учествовала у низу конкурса и изradi архитектонских идејних и главних пројеката.

### **Стручно–педагошки рад:**

- Од шк. 1994/95. год запослена на Грађевинском факултету у Београду, у настави, као *хонорарни сарадник*, на предмету Нацртна геометрија (за геодетски и грађевински смер).
- Ангажована као *хонорарни сарадник* на вежбама на предметима Нацртна геометрија и Перспектива, на Архитектонском факултету у Београду шк. 1994/95, 1995/96, 2000/01.
- 01.03. 1995. изабрана за *асистента приправника* на Грађевинском факултету у Београду.
- 04.10.2001. изабрана у звање *асистента* на Грађевинском факултету у Београду.
- Ангажована као *хонорарни сарадник* шк. 2006/07. на Саобраћајном факултету у Београду, на вежбама на предмету Нацртна геометрија.
- Ангажована као *хонорарни сарадник* шк. 2007/08, 2008/09, 2009/10 на Архитектонском факултету у Београду, на вежбама на предмету Геометрија облика 1 и Геометрија облика 2.
- Од шк.2008/09. до данас, као асистент, одржава вежбе на предмету Рачунарска геометрија.

### **Научни рад:**

- Кандидат има објављен 21 научни рад (и два у поступку рецензије), 1 збирку задатака, коаутор је 3 свеске подлога за предавања за студенте Грађевинског и Архитектонског факултета;
- Била је учесник је на 12 научних ( домаћих -8 и иностраних - 4) конференција, из три области: геометрије и компјутерске графике, информатике, механизма и машина;
- Два пута је била члан организационих одбора, један пут – одбора за рецензију и заменик уредника међународне научно-стручне конференције;

## Биографија

---

- Била је учесник једног научног пројекта Министарства за науку и технолошки развој Републике Србије;

### **Активности ван наставе:**

- Од 1997.-2009. год., у континуитету је била секретар Катедре за математику, физику, нацртну геометрију и друштвене науке.
- 2008. год. је била члан Организационе комисије за акредитацију Грађевинског факултета у Београду.

### **Чланства у удружењима:**

- Од 2000. год. члан је националног удружења за геометрију и графику (ЈУНГИГ- данашњи СУГИГ).

### **Остале способности :**

- У оквиру наставних активности (припрема испитних задатака, цртање решења, евиденција и сл.), за цртање цртежа и писање научних радова користи актуелне софтверске пакете програма *Auto CAD*, *Microsoft Office* и *TeX*.
- У активној конверзацији и писању научних радова служи се енглеским страним језиком.

### **Остало:**

У приватном животу, 20 година се активно бави хорским певањем. Четири године је била хоровађа и диригент црквеног хора "Тројеручица", при Храму Покрова Пресвете Богородице, у Београду, а последњих пет година, по потреби је заменик диригента, при истом храму, у мешовитом хору.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Магдалена С. Драговић

број уписа \_\_\_\_\_

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**Конструктивни поступци у просторним трансформацијама**

**једнограног елиптичког хиперблоида**

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 04. 04. 2013.

Магдалена С. Драговић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске  
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Магдалена С. Драговић

Број уписа \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада Конструктивни поступци у просторним трансформацијама  
једнограног елиптичког хиперболоида

Ментор Проф. Др. Миодраг Несторовић

Потписани \_\_\_\_\_

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, 04. 04. 2013.

Магдалена С. Драговић

## Прилог 3.

### Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

#### Конструктивни поступци у просторним трансформацијама

#### једнограног елиптичког хиперблоида

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 04. 04. 2013.

Магдалена С. Трајковић