



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У  
НОВОМ САДУ



Саво Ђукић

**РЕДУКЦИЈА ДИНАМИЧКИХ МОДЕЛА  
ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТСКОГ СИСТЕМА  
ПРИМЕНОМ ТЕОРИЈЕ БАЛАНСНИХ  
РЕАЛИЗАЦИЈА И АПРОКСИМАТИВНИХ  
БИСИМУЛАЦИОНИХ РЕЛАЦИЈА И  
ФУНКЦИЈА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2014.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА  
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, <b>РБР:</b>	
Идентификациони број, <b>ИБР:</b>	
Тип документације, <b>ТД:</b>	Монографска публикација
Тип записа, <b>ТЗ:</b>	Текстуални штампани материјал
Врста рада, <b>ВР:</b>	Докторска дисертација
Аутор, <b>АУ:</b>	Саво Ђукић
Ментор, <b>МН:</b>	Ванр. проф. др Андрија Сарић
Наслов рада, <b>НР:</b>	Редукција динамичких модела електроенергетског система применом теорије баланских реализација и апроксимативних бисимулационих релација и функција
Језик публикације, <b>ЈП:</b>	Српски
Језик извода, <b>ЈИ:</b>	Српски
Земља публиковања, <b>ЗП:</b>	Србија
Уже географско подручје, <b>УГП:</b>	АП Војводина, Нови Сад
Година, <b>ГО:</b>	2014.
Издавач, <b>ИЗ:</b>	Ауторски репринт
Место и адреса, <b>МА:</b>	ФТН, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Физички опис рада, <b>ФО:</b> (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	9/107/164/7/20/0/0
Научна област, <b>НО:</b>	Електроенергетика
Научна дисциплина, <b>НД:</b>	Електротехника
Предметна одредница/Кључне речи, <b>ПО:</b>	Динамички модел електроенергетског система/Редукција/Теорија баланских реализација/Апроксимативна бисимулациона релација
<b>УДК</b>	
Чува се, <b>ЧУ:</b>	Библиотека ФТН-а, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Важна напомена, <b>ВН:</b>	
Извод, <b>ИЗ:</b>	Дисертацијом су описане постојеће технике редукције динамичких модела које се користе у теорији управљања и постојеће технике за редукцију динамичких модела и еквивалентирање електроенергетских система. Предложен је нов приступ на физици проблема заснованој редукцији динамичког модела електроенергетског система коришћењем теорије баланских реализација. Такође се предлаже коришћење апроксимативних бисимулационих релација за редукцију динамичких модела електроенергетског система. Постојеће технике и предложени приступи и алгоритми су примењени за редукцију динамичких модела два разматрана тест система.
Датум прихватања теме, <b>ДП:</b>	15.07.2013.
Датум одбране, <b>ДО:</b>	15.02.2014.
Чланови комисије, <b>КО:</b>	Председник: Ред. проф. др Владимир Стрезоски Члан: Ред. проф. др Драган Поповић Члан: Ред. проф. др Веран Васић Члан: Доц. др Предраг Стефанов Члан, ментор: Ванр. проф. др Андрија Сарић
	Потпис ментора



## KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, <b>ANO</b> :	
Identification number, <b>INO</b> :	
Document type, <b>DT</b> :	Monographic publication
Type of record, <b>TR</b> :	Textual printed document
Contents code, <b>CC</b> :	PhD thesis
Author, <b>AU</b> :	Savo Đukić
Mentor, <b>MN</b> :	Associate Professor PhD Andrija Sarić
Title, <b>TI</b> :	Reduction of power system dynamic models based on the balanced realization theory and approximate bisimulation relations and functions
Language of text, <b>LT</b> :	Serbian
Language of abstract, <b>LA</b> :	Serbian
Country of publication, <b>CP</b> :	Serbia
Locality of publication, <b>LP</b> :	Autonomous Province of Vojvodina, Novi Sad
Publication year, <b>PY</b> :	2014.
Publisher, <b>PB</b> :	Authors reprint
Publication place, <b>PP</b> :	Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Physical description, <b>PD</b> : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	9/107/164/7/20/0/0
Scientific field, <b>SF</b> :	Power Engineering
Scientific discipline, <b>SD</b> :	Electrical Engineering
Subject/Key words, <b>S/KW</b> :	Power system dynamic model/Reduction/Balanced realization theory/Approximate bisimulation relation
<b>UC</b>	
Holding data, <b>HD</b> :	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Note, <b>N</b> :	
Abstract, <b>AB</b> :	Dissertation describes the existing dynamic model reduction techniques used in control theory and existing techniques that are used for the reduction (equivalencing) of power system dynamic models. A new approach to physics-based reduction of power system dynamic model based on the balanced realization theory is proposed. Use of approximate bisimulation relations for reduction of power system dynamic models is also proposed. Existing techniques and proposed approaches and algorithms are applied to reduce the dynamic models of two considered test systems.
Accepted by the Scientific Board on, <b>ASB</b> :	15.07.2013.
Defended on, <b>DE</b> :	15.02.2014.
Defended Board, <b>DB</b> :	President: Professor PhD Vladimir Strezoski
	Member: Professor PhD Dragan Popović
	Member: Professor PhD Veran Vasić
	Member: Assistant Professor PhD Predrag Stefanov
	Member, Mentor: Associate Professor PhD Andrija Sarić
	Mentor's sign

REZIME	6
SUMMARY	7
SPISAK SLIKA	8
SPISAK TABELA	10
UVOD	11
1. POTREBA ZA ISTRAŽIVANJEM I CILJEVI ISTRAŽIVANJA	15
2. FORMULACIJA PROBLEMA ISTRAŽIVANJA	17
3. POSTOJEĆE METODE REDUKCIJE DINAMIČKIH MODELA	21
3.1. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA LINEARNIH SISTEMA	21
3.1.1. Analiza singularnih perturbacija	22
3.1.2. Modalna analiza	22
3.1.3. Metode dekompozicije na bazi singularnih vrednosti	23
3.1.4. Krylov-e metode (metode koje se baziraju na poklapanju momenata)	25
3.1.5. Kombinacija metoda dekompozicije na bazi singularnih vrednosti i Krylov-ih metoda	26
3.1.6. Ostale metode	27
3.2. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA NELINEARNIH SISTEMA	27
3.2.1. Pravilna ortogonalna dekompozicija	29
3.2.2. Metoda trajektorije linearnih delova	29
3.2.3. Metode na bazi balansiranja	30
3.2.4. Redukcija optimizacijom sistemskih matrica	31
3.2.5. Projekcije dobijene analizom linearizovanog modela	31
3.2.6. Ostale metode	32
3.3. REDUKCIJA I EKVIVALENTIRANJE DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA	33
3.3.1. Koherencija	33
3.3.2. Sinhronizam	35
3.3.3. Analiza singularnih perturbacija	38
3.3.4. Modalna analiza	38
3.3.5. Identifikacija	39
3.3.6. Ostale metode	39
4. TEORIJA BALANSNIH REALIZACIJA	41
5. BISIMULACIONE I APROKSIMATIVNE BISIMULACIONE RELACIJE	46
5.1. OZNAČENI TRANZICIONI (PRELAZNI) SISTEMI	47
5.2. KONTINUALNI SISTEMI	48
6. NOVI PRISTUPI REDUKCIJI DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA	54
6.1. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM TEORIJE BALANSNIH REALIZACIJA	54
6.1.1. Linearni model u formi standardnog prostora stanja	54
6.1.2. Algoritam	55
6.2. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM APROKSIMATIVNIH BISIMULACIONIH RELACIJA	59
6.2.1. Analiza tranzijentne stabilnosti	59
6.2.2. Prednosti korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija pri analiziranju fenomena u vremenskom domenu	60
6.2.3. Dinamički model elektroenergetskog sistema u deskriptor formi i formi standardnog prostora stanja	60
6.2.4. Aproksimativne bisimulacione relacije i bisimulacione funkcije za dinamički model u deskriptor formi	61

6.2.5. Algoritam	65
7. TEST SISTEMI I NJIHOVI DINAMIČKI MODELI	68
7.1. NEW ENGLAND TEST SISTEM	68
7.2. ELEKTROENERGETSKI SISTEM SRBIJE	69
8. PRIMENA	70
8.1. POSTOJEĆE METODE REDUKCIJE DINAMIČKIH MODELA – BALANSNO I MODALNO ODSECANJE	70
8.2. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM TEORIJE BALANSNIH REALIZACIJA	72
8.2.1. New England test sistem	72
8.2.2. Elektroenergetski sistem Srbije	77
8.3. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM APROKSIMATIVNIH BISIMULACIONIH RELACIJA	79
8.3.1. Redukcija dinamičkog modela u formi standardnog prostora stanja	79
8.3.1.1. New England test sistem	79
8.3.1.2. Elektroenergetski sistem Srbije	83
8.3.2. Redukcija dinamičkog modela u deskriptor formi	85
8.3.2.1. New England Test System	85
8.3.2.2. Elektroenergetski sistem Srbije	94
9. ZAKLJUČAK	96
LITERATURA	98

## REZIME

Redukcija dinamičkih modela elektroenergetskog sistema predstavlja vrlo aktuelnu oblast istraživanja, iz više razloga: sve veća veličina elektroenergetskih sistema, veliki broj analiza koje treba izvršiti, ograničeni kapaciteti računara, potreba da se bolje sagledaju uzroci dinamičkog ponašanja sistema, itd. Redukcijom se dati matematički model sistema ili procesa zamenjuje modelom koji je manji ili jednostavniji od originalnog i koji i dalje, aproksimativno u skladu sa zadatim kriterijumom, opisuje određene aspekte sistema ili procesa.

Disertacijom su opisane postojeće tehnike redukcije dinamičkih modela koje se koriste u teoriji upravljanja, kao i tehnike koje se uobičajeno koriste za redukciju dinamičkih modela i ekvivalentiranje elemenata i/ili delova elektroenergetskog sistema. Takođe, predloženi su novi pristupi i algoritmi, koji su primenjeni za redukciju dinamičkih modela razmatranih test sistema.

Disertacijom je predložen nov pristup na fizici problema zasnovanoj redukciji dinamičkog modela elektroenergetskog sistema. Predloženi pristup na nov način upotrebljava teoriju balansnih realizacija i pogodan je za razmatranje različitih problema. Problem koji je detaljnije analiziran je promena modula napona na sabirnicama sistema, pri promeni referentnih napona automatskih regulatora napona. Pokazano je da postoji veliki broj promenljivih stanja koje ne utiču značajno na prirodu problema koji se razmatra, te se mogu eliminisati iz modela sa malim uticajem na tačnost rezultata. Takođe je pokazano da na predloženi pristup ne utiče značajno promena radne tačke, što predstavlja jednu od važnijih prednosti predloženog pristupa. Zaključeno je da se predloženi algoritam može uspešno primeniti za redukciju linearizovanih dinamičkih modela elektroenergetskih sistema realnih dimenzija.

Disertacijom se takođe predlaže korišćenje aproksimativnih bisimulacionih relacija za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema. Korišćenje aproksimativnih bisimulacionih relacija pri analiziranju fenomena u vremenskom domenu ima nekoliko prednosti u odnosu na konvencionalne tehnike redukcije. Data je teorijska osnova njihovog korišćenja za redukciju modela elektroenergetskog sistema u deskriptor formi. Predlaže se primena za analizu tranzijentne stabilnosti, iako su i druge primene moguće, posebno imajući u vidu da predložena procedura u velikoj meri čuva sopstvene vrednosti originalnog sistema. Predstavljen je algoritam za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon velikog poremećaja, koji se bazira na linearizaciji i redukciji korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija. Takođe, pokazano je da se redukcijom na bazi korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija dimenzija dinamičkog modela može smanjiti bar na polovinu, bez značajnog uticaja na tačnost rezultata koji se dobijaju korišćenjem redukovanog modela. Demonstrirano je da se aproksimativne bisimulacione relacije mogu efikasno koristiti za redukciju dinamičkih modela realnih elektroenergetskih sistema.

## SUMMARY

Power system dynamic model reduction is a relevant research area, for various reasons: increasing the size of power systems, large number of analysis to be performed, limited computer capacity, the need to understand the causes of the dynamic behavior of power systems, etc. The problem of model reduction is to replace a given mathematical model of a system or process by a model that is smaller or simpler than the original one, yet still describes (at least approximately) certain aspects of the system or process.

Dissertation describes the existing dynamic model reduction techniques used in control theory, and techniques that are commonly used for the reduction (equivalencing) of power system dynamic models. New approaches and algorithms, which are applied to reduce the dynamic models of the considered test systems, are proposed.

Dissertation proposes a new approach to physics-based reduction of power system dynamic model. The proposed approach uses the balanced realization theory in a new way and is suitable for the consideration of different problems. The problem that is analyzed in more detail is the change of voltage magnitudes at system buses, when changing the automatic voltage regulator reference voltages. It is shown that there are state variables that do not affect the nature of the considered problem significantly, and can be eliminated from the model almost without affecting the accuracy of the results. It is also shown that the proposed approach is not significantly affected by the change of the operating point, which is one of the important advantages of the proposed approach. It is concluded that the proposed algorithm can be successfully applied for reducing real-world power system linearized dynamic models.

Dissertation also proposes the use of approximate bisimulation relations for reduction of power system dynamic models. The approximate bisimulation-based dynamic model reduction has several advantages for power system time domain analysis over conventional reduction techniques. A theoretical basis for the use of approximate bisimulation relations for reduction of power system dynamic models in descriptor form is provided. While the application for transient stability assessment is proposed, other applications are certainly possible, bearing in mind that the proposed procedure preserves the original system eigenvalues to a large extent. An linearization- and approximate bisimulation-based algorithm for identifying whether the power system is able to maintain the synchronism after a large disturbance is presented. It is also shown that the dimension of the dynamic model can be reduced at least by a half, with no significant impact on the accuracy of the results that are obtained by using the reduced model. It is demonstrated that approximate bisimulation relations can be effectively used to reduce dynamic models of the realistic power systems.

## SPISAK SLIKA

- Slika 6.1. Algoritam predložene tehnike za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema
- Slika 6.2. Grafička ilustracija *Koraka 4* predložene tehnike za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema
- Slika 6.3. Blok dijagram predloženog algoritma za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon poremećaja, koji se bazira na linearizaciji i redukciji korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija
- Slika 7.1. Jednopolna šema New England test sistema
- Slika 8.1. Moduli napona na sabirnicama 1, 5, 9, 14 i 17, pri povećanju vrednosti referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 5 %, za: 1) originalni model, 2) model redukovano balansnim odsecanjem, i 3) model redukovano modalnim odsecanjem
- Slika 8.2. Moduo napona na sabirnici 39, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 0,05 r.j., za originalni i redukovani dinamički model u **Slučaju 1**
- Slika 8.3. Moduo napona na sabirnici 38, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 0,05 r.j., za originalni i redukovani dinamički model u **Slučaju 1**
- Slika 8.4. Amplitude frekventnih odziva originalnog i redukovanog dinamičkog modela u **Slučaju 2**
- Slika 8.5. Amplitude frekventnih odziva originalnog i redukovanog dinamičkog modela u **Slučaju 4**
- Slika 8.6. Moduo napona na sabirnici 34580, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G46 za 0,05 r.j., za: 1) originalni model, 2) model redukovano u **Slučaju 5**, i 3) model redukovano u **Slučaju 8**
- Slika 8.7. Amplituda frekventnog odziva: 1) originalnog modela, 2) modela redukovanog u **Slučaju 5**, i 3) modela redukovanog u **Slučaju 8**, za moduo napona na sabirnici 34580 kao izlazne promenljive
- Slika 8.8. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaj 1**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (za različite početne vrednosti  $r$ )
- Slika 8.9. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaj 2**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (početna vrednost  $r = 90$ )
- Slika 8.10. Relativne promene matrice  $A$  i vektora  $u$  (u odnosu na one dobijene linearizacijom nelinearnog modela odmah nakon poremećaja) nakon dva analizirana poremećaja (mereno Frobenius-ovom normom)



- Slika 8.11. Razlika uglova rotora sinhronih generatora G3 i G6 za  $u(1) = 0,05$  r.j., za originalni i redukovani linearizovani dinamički model (za različite vrednosti  $r$ )
- Slika 8.12. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaj 1**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (za različite početne vrednosti  $r$ )
- Slika 8.13. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za dva poremećaja, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (početna vrednost  $r = 120$ )
- Slika 8.14. Relativne promene matrice  $A$  i vektora  $c$  (u odnosu na one dobijene linearizacijom nelinearnog modela odmah nakon poremećaja) nakon tri analizirana poremećaja (mereno Frobenius-ovom normom)
- Slika 8.15. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za tri razmatrana poremećaja, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli, pri povećanju vrednosti parametra  $\Delta z_r^{max}$  na 0,2 (početna vrednost  $r = 120$ )
- Slika 8.16. Razlika uglova rotora sinhronih generatora G1 i G6 za  $\delta_1(0) = 0,05$  rad, za originalni i redukovani linearizovani dinamički model (za različite vrednosti  $r$ )

## SPISAK TABELA

- Tabela 7.1. Osnovne karakteristike dinamičkog modela New England test sistema
- Tabela 7.2. Osnovne karakteristike dinamičkog modela elektroenergetskog sistema Srbije
- Tabela 8.1. Pregled promenljivih stanja eliminisanih iz dinamičkog modela New England test sistema, za analizirane **Slučajeve 1–4**
- Tabela 8.2. Lista polova koji su očuvani u modelima redukovanim u **Slučaju 1** i **Slučajevima 2–4**
- Tabela 8.3. Broj promenljivih stanja eliminisanih iz modela elektroenergetskog sistema Srbije, za različite vrednosti  $\xi$
- Tabela 8.4. Vremena, relativno u odnosu na **Slučaj 4**, potrebna da računar izvrši *Korak 4* predloženog algoritma
- Tabela 8.5. Lista polova koji su očuvani redukcijom na bazi aproksimativnih bisimulacionih relacija, odnosno primenom procedure sinhronog modalnog ekvivalentiranja

## UVOD

U praksi, u velikom broju slučajeva, model dinamičkog sistema koji se posmatra i analizira može biti veoma kompleksan. Komplikovani matematički modeli velikih dimenzija tačno i precizno reprezentuju dati dinamički sistem, ali su često neodgovarajući za primenu (za analize, rešavanja optimizacionih problema, podešavanja uređaja za upravljanje, itd.). S obzirom da računari imaju ograničenu mogućnost memorisanja i obrade podataka, razvile su se metode koje pojednostavljuju te modele, tako da, sa aspekta željene primene, budu obuhvaćene najvažnije osobine originalnog dinamičkog sistema [1, Preface].

Jedan od načina da se prevaziđu problemi poput slabe uslovljenosti sistema i ograničenja u memoriji računara i vremenu potrebnom da se izvrše proračuni je redukcija modela [2]. *Redukcija modela je način da se dobije pojednostavljen model kojim su očuvane željene karakteristike originalnog sistema.* Željene karakteristike koje treba očuvati pri redukciji zavise od primene redukovano modela. Iako je vrlo važno da se redukcijom smanji vreme trajanja proračuna ili simulacija, to ne mora biti odlučujući faktor primene redukcije. Ponekad je vrlo važno da se stekne uvid u pravi uzrok analiziranog fenomena [3], a često je najvažnije da se dobije model sa najmanjim mogućim brojem promenljivih [4].

Pri aproksimiranju sistema treba znati koje karakteristike i osobine sistema treba očuvati pri redukciji. U određenim naučnim disciplinama, oblastima ili situacijama, od interesa je ponašanje autonomnog dinamičkog sistema (sistem koji nema spoljašnjih ulaza koji ga pokreću). U slučaju regulisanih sistema, od interesa je modelovanje odnosa između ponašanja sistema sa jedne strane i ulaza (aktuatora) i izlaza (senzora) sa druge strane [5].

Redukcija modela podrazumeva kompromis između veličine modela i stepena u kojem su karakteristike sistema očuvane redukovanim modelom. Pošto značaj različitih karakteristika sistema zavisi od željene primene, univerzalni algoritam redukcije modela ne može postojati. Redukovani model elektroenergetskog sistema koji je pogodan za proučavanje jednog fenomena nije neophodno pogodan za proučavanje drugih fenomena [6]. Najbolje čemu se neko može nadati jeste skup dobrih alata za redukciju i pouzdane smernice i uputstva za njihovo korišćenje [7]. Pri primeni redukcije dinamičkog modela, važno je imati na umu ograničenja redukovano modela. Strogo govoreći, redukovani model važi samo u opsegu uslova i scenarija koji se koriste pri njegovom generisanju [4].

Zadatak redukcije modela je da dati matematički model sistema ili procesa zameni modelom koji je dosta manji od originalnog i koji i dalje, bar aproksimativno, opisuje određene aspekte sistema ili procesa (na primer, u teoriji upravljanja to je ulazno-izlazno ponašanje sistema). Ukoliko je greška aproksimacije u granicama tolerancije, dovoljno je razmatrati i simulirati samo manji model sistema, što će generalno zahtevati mnogo manje računarskog vremena i memorije nego što bi to bilo potrebno kada bi se simulirao veći (originalni) sistem [8, Part I, Chapter 6].

Imajući u vidu složenost konteksta u kojem se vrši redukcija modela, prava validacija bilo kojeg pristupa redukciji mora da leži u kvalitetu rezultata koji se dobijaju u praksi, kao i u lakoći sa kojom se dobijaju ti rezultati [9]. Redukcija modela uključuje niz interesantnih izazova [8, Part I, Chapter 1], [10, Part I, Paper 8], [10, Part I, Paper 5], [11], [12]:

- Izbor odgovarajuće šeme aproksimacije (tehnike redukcije). Vrlo je važno da se odredi odgovarajuća dimenzija (red) redukovano modela i da se identifikuju promenljive koje treba sačuvati. Ponekad se red modela može izabrati tokom same redukcije, a ponekad se mere kvaliteta redukovano modela mogu proceniti unapred.
- Očuvanje ključnih osobina razmatranog sistema i njemu odgovarajućeg originalnog modela.
- Predviđanje greške redukcije, tj. određivanje koliko se model može redukovati a da se pritom očuvaju željene karakteristike i zadovoljavajuća tačnost modela. Jedan pouzdan metod je jednostavno poređenje ponašanja (na primer vremenskog ili frekventnog odziva) originalnog i redukovano sistema.
- Karakterizacija kvaliteta dobijenog redukovano modela (kako odrediti tačnost primenjene metode redukcije i kako garantovati da je redukovani model dovoljno tačna aproksimacija originalnog modela).
- Izdvajanje podataka iz originalnog modela koji su neophodni da bi se dobio redukovani model.
- Efikasan i numerički stabilan proračun redukovano modela itd.

Zadatak redukcije modela može se definisati i na sledeći način [1, Chapter 1], [2]: za dati dinamički sistem, odnosno njegov detaljan dinamički model, pronaći model manjih dimenzija, tako da su zadovoljene sledeće karakteristike:

- greška aproksimacije je mala i poznate su globalne granice greške,
- zahtevane osobine sistema (na primer, njegova stabilnost) su očuvane redukcijom, i
- procedura redukcije je numerički stabilna i efikasna.

Redukcijom modela se rešava redudantnost, i manje važne veličine zamenjuju značajnijim. Rešavanjem problema manjih dimenzija brže se dobijaju informacije o performansama sistema [8, Preface]. Redukovani model može da se koristi kao zamena originalnog pri simulacijama, ili može da se koristi za razvoj kontrolera malih dimenzija, koji onda mogu da se koriste u analizama u realnom vremenu [2]. Međutim, pri redukciji treba biti oprezan; ukoliko se model previše redukuje, rezultati koji se dobijaju njegovim korišćenjem ponekad mogu biti nepouzdana.

U više naučnih oblasti (posebno u elektrotehnici, mehanici i teoriji upravljanja) je predložen veliki broj metoda redukcije, i dobijen veliki broj modela malih dimenzija za velike sisteme. Dinamički modeli realnih sistema su obično nelinearni, te najpre treba proučavati metode koje se bave aproksimacijom nelinearnih sistema [1, Chapter 1]. Ekvivalentiranje sistema koji se modeluju nelinearnim modelom je vrlo težak problem, zbog nedostatka generalnih analitičkih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina [13]. Međutim, fizički sistemi, poput elektroenergetskih sistema, su lokalno linearni, tako da se, u primeni, dinamički model sistema može linearizovati u okolini radne tačke od interesa. Takođe, teorija kojom se obrađuju linearni sistemi je obimna i nudi koherentnu i jasnu sliku o istim. Postoje pokušaji da se razvije teorija aproksimacije nelinearnih modela, međutim, uglavnom se takvi pokušaji završavaju na metodama koje se mogu primenjivati samo u određenim specijalnim slučajevima i ne mogu se generalizovati [1, Chapter 1].

Neke metode redukcije zadržavaju važne sopstvene vrednosti ili važne promenljive stanja, dok druge određuju redukovani model tako da on, u nekom smislu, predstavlja optimalnu aproksimaciju originalnog sistema, ne vodeći računa da li će se sopstvene vrednosti ili promenljive stanja originalnog i redukovano modela poklapati [14 i literatura u 14]. Neke metode redukuju model izdvajajući podskup od skupa originalnih promenljivih stanja, dok druge koriste modifikovan skup promenljivih stanja, koje nemaju fizičko značenje. Neke

metode su odgovarajuće za redukciju stabilnih, druge za redukciju nestabilnih sistema. Razvijene su i metode koje su vrlo efikasne za redukciju dinamičkih sistema vrlo visokog reda. Veliki napredak u ovoj oblasti je postignut na polju mehanike fluida [4 i literatura u 4].

Ponekad, određena disciplina preferira određenu(e) tehniku(e) redukcije, kao što na primer strukturalna dinamika preferira modalnu analizu i statičku redukciju, mehanika fluida preferira pravilnu ortogonalnu dekompoziciju, mikroelektronika preferira Padé-ove tehnike aproksimacije koje se baziraju na Krylov-im metodama, itd. [10, Part I, Paper 1]. Redukcija modela je polje istraživanja koje se jako razvija, kako u oblasti sistema i upravljanja, tako i u numeričkoj matematici. Za budući razvoj redukcije modela neophodne su metode raznih oblasti matematike.

Teorija upravljanja daje veliki broj metoda koje se mogu koristiti za redukciju različitih fizičkih sistema. Te metode su uglavnom dobro matematički zasnovane, imaju za cilj aproksimaciju ulazno-izlaznog ponašanja razmatranog sistema i uobičajeno ne vode računa šta se pri redukciji dešava sa strukturom sistema i sa fizičkim značenjem originalnih promenljivih. Redukovani model je samo matematički ekvivalent originalnog modela u ulazno-izlaznom smislu. Međutim, pri analizi nekog fizičkog sistema, potreba da se zadrži fizička interpretacija promenljivih je obično veoma važna [15]. Gubitak fizičkog značenja promenljivih stanja može dovesti do određenih poteškoća kada je originalni model deo nekog većeg sistema. Takva situacija je vrlo česta pri modelovanju velikih elektroenergetskih sistema [14].

Pri analiziranju velikih elektroenergetskih sistema, inženjeri su obično fokusirani na ponašanje određenog dela tog sistema. Ovaj ključni deo sistema se označava kao unutrašnji (pod)sistem, a ostatak sistema se označava kao spoljašnji (pod)sistem. Redukcija modela se uobičajeno koristi da smanji veličinu spoljašnjeg sistema, uz zadržavanje uticaja spoljašnjeg sistema na unutrašnji [16]. Unutrašnji sistem se obično ostavlja nepromenjenim. Redukovani model spoljašnjeg sistema se kreira pod pretpostavkom da se poremećaji javljaju samo unutar unutrašnjeg sistema. Čvorovi između unutrašnjeg i spoljašnjeg sistema se ponekad nazivaju graničnim čvorovima [17, Chapter 14]. S obzirom da je uglavnom bitno da se očuva uticaj spoljašnjeg sistema na unutrašnji sistem, tehnike koje se koriste u teoriji upravljanja imaju direktnu primenu u redukciji dinamičkih modela elektroenergetskog sistema [18], [19].

Za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema koji se koriste za analiziranje elektromehaničke stabilnosti, empirijske metode koje se baziraju na koherenciji [6], [13], sinhronizmu [20], itd. se uobičajeno koriste, jer su jednostavne i čuvaju fizičku strukturu modela. Veze između tih metoda i metoda koje se koriste u teoriji upravljanja su istraživane u nekoliko radova [11], [18], [21], [22]. U [21] je predložen metod procene mogućeg stepena redukcije dinamičkih modela elektroenergetskog sistema korišćenjem teorije balansnih realizacija. Ova procena mogućeg stepena redukcije je korišćena da se odredi kada treba da se zaustavi agregacija diktirana modalno-koherentnom analizom. Autori rada [11] su predstavili teorijske rezultate kojima su uspostavili analitičku vezu između koherencije i teorije balansnih realizacija. U radu [22] je predložena redukcija korišćenjem teorije balansnih realizacija kojom se čuva struktura modela elektroenergetskog sistema. U radu [18] je uspostavljena veza između koherencije i tehnike za redukciju dinamičkih modela koja se bazira na Krylov-im potprostorima (tehnike na bazi Krylov-ih potprostora takođe se vrlo često koriste u teoriji upravljanja).

Direktna primena tehnika redukcije koje se koriste u teoriji upravljanja ima jednu veliku manu: promenljive stanja i druge promenljive redukovanih modela nemaju fizičko značenje. Sa druge strane, empirijske metode, iako se vrlo jednostavno primenjuju, nisu tako dobro

matematički zasnovane i ne pokrivaju širu klasu fenomena koji se razmatraju i analiziraju pri proučavanju elektroenergetskih sistema.

U računarskim naukama, za definisanje spoljašnje ekvivalencije sistema, koriste se bisimulacije. *Bisimulacija je binarna relacija definisana između dva sistema koji se ponašaju na isti način*, u smislu da jedan sistem oponaša drugi i obrnuto. To omogućava prebacivanje sa jednog prikaza sistema na drugi i zamenu sistema sistemom koji mu je ekvivalentan ali na neki način jednostavniji (na primer manjih dimenzija). Aproksimativne bisimulacione relacije generalizuju egzaktne bisimulacione relacije i dozvoljavaju određeni stepen različitosti između dva sistema, te omogućavaju veću kompresiju modela (aproksimaciju originalnog modela modelom sa manjim brojem promenljivih).

Aproksimativne bisimulacione relacije se mogu karakterisati funkcijama koje su slične Lyapunov-im funkcijama i koje su nazvane bisimulacione funkcije. U [23] je pokazano da, za klasu linearnih sistema sa ograničenim skupovima početnih stanja i ulaza, bisimulacione funkcije mogu karakterisati aproksimativne bisimulacione relacije na numerički efikasan način, na bazi sledećeg:

- bisimulacione funkcije se karakterišu diferencijalnim nejednačinama koje su slične Lyapunov-im diferencijalnim nejednačinama;
- za klasu bisimulacionih funkcija koje se baziraju na kvadratnim formama te nejednačine se mogu interpretirati linearnim matricnim nejednačinama i optimalnim vrednostima statičkih igara;
- izvedena je metoda koja ocenjuje preciznost aproksimativne bisimulacione relacije između linearnog sistema sa ograničenim skupovima početnih stanja i ulaza i njegove projekcije.

Disertacija je organizovana na sledeći način: u prvoj glavi su dati razlozi zbog kojih je nastalo istraživanje obrađeno disertacijom, kao i ciljevi istraživanja; u drugoj glavi je formulisani problem istraživanja; opis postojećih metoda redukcije dinamičkih modela linearnih i nelinearnih sistema, kao i postojećih metoda redukcije dinamičkih modela i ekvivalentiranja elektroenergetskih sistema, dat je u trećoj glavi; teorija balansnih realizacija i teorijske osnove bisimulacionih relacija, aproksimativnih bisimulacionih relacija i bisimulacionih funkcija obrađene su u glavama četiri i pet, respektivno; u glavi šest su definisani pristupi i načini redukcije dinamičkih modela elektroenergetskog sistema koji se predlažu ovom disertacijom; u glavi sedam je dat kratak opis dinamičkih modela test sistema korišćenih za primenu predloženih metoda i algoritama; u glavi osam su neke od postojećih metoda, kao i metode i algoritmi koji se predlažu disertacijom primenjeni na dinamičke modele test sistema; zaključci disertacije su dati u devetoj glavi.

## 1. POTREBA ZA ISTRAŽIVANJEM I CILJEVI ISTRAŽIVANJA

Elektroenergetski sistemi su iz godine u godinu sve veći i složeniji, kako zbog povećanja broja sistema u interkonekciji, tako i zbog sve većeg broja distribuiranih generatora. Danas, interkonektivni elektroenergetski sistemi pokrivaju velike geografske oblasti i sadrže na hiljade uređaja, tako da njihovi dinamički modeli mogu lako imati nekoliko hiljada ili čak nekoliko desetina hiljada promenljivih.

Problem modelovanja tako velikih elektroenergetskih sistema nastaje iz više razloga, uključujući [17, Chapter 14]:

- Ograničenje zahtevane veličine memorije računara.
- Preterano vreme potrebno za izvršavanje analiza, posebno kada se radi o dinamičkim simulacijama i programima za analizu stabilnosti elektroenergetskog sistema.
- Delovi elektroenergetskog sistema koji su udaljeni od razmatranog poremećaja imaju mali efekat na dinamiku sistema, te nema potrebe da se detaljno modeluju.
- Često delovi velikih elektroenergetskih sistema (ili interkonekcija) pripadaju različitim kompanijama. Svaka od tih kompanija ima svoj upravljački centar koji tretira druge delove sistema kao spoljašnje podsisteme.
- Privatne kompanije su međusobno konkurentne, pa zato nerado otkrivaju detaljne tehničke podatke o svojim uređajima i elektroenergetskoj mreži. To znači da pojedini podaci koji su bitni za formiranje dinamičkog modela celog elektroenergetskog sistema mogu biti nedostupni.
- Čak i pod pretpostavkom da su svi podaci o elektroenergetskom sistemu dostupni, ažuriranje odgovarajuće baze podataka je dosta teško i skupo.

Postoje i drugi razlozi zbog kojih je redukcija dinamičkih modela elektroenergetskog sistema vrlo aktuelna oblast istraživanja, uključujući [16], [18], [24]:

- Nije praktično ni svrsishodno vršiti dinamičke analize i studije stabilnosti elektroenergetskog sistema (poput elektromehaničke ili elektromagnetne tranzijentne analize, određivanja dinamičke sigurnosti sistema, studija stabilnosti, analiza osetljivosti putanje, podešavanja različitih uređaja za upravljanje sistemom i drugih analiza i studija) na originalnom detaljnom modelu.
- Sistem sadrži veliki broj informacija koje nisu od vitalnog značaja za razmatrani fenomen. Iako se na prvi pogled može činiti da veliki broj promenljivih utiče na fenomen koji se analizira, obično je samo određeni podskup skupa promenljivih od suštinskog značaja za razmatrani fenomen.
- Lakše je razumeti odnose i međusobne uticaje u sistemu, kao i proučavati fizičke fenomene od interesa na manjem elektroenergetskom sistemu.

Ciljevi istraživanja doktorske disertacije su:

- Sagledavanje postojećih metoda za redukciju dinamičkih modela (sistema diferencijalno-algebarskih jednačina) koje se koriste u teoriji upravljanja i računarskim naukama.

## *1. Potreba za istraživanjem i ciljevi istraživanja*

- Primena onih metoda koje se koriste u teoriji upravljanja i računarskim naukama, a koje se po svojim potencijalima mogu efikasno koristiti za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema.
- Novi pristupi primeni metoda koje se koriste u teoriji upravljanja i računarskim naukama za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema.



## 2. FORMULACIJA PROBLEMA ISTRAŽIVANJA

Elektroenergetski sistem predstavlja skup interaktivnih uređaja koji transformišu energiju primarnog izvora (na primer toplotu) u električnu energiju, a potom električnu energiju u drugu vrstu energije (na primer mehaničku). Električna energija se od generatora do potrošača prenosi različitim naponskim nivoima odgovarajućom mrežom transformatora, prenosnih i distributivnih vodova [25, Chapter 1].

Model elektroenergetskog sistema je uprošćeno predstavljanje elektroenergetskog sistema pogodno za izražavanje u formi matematičkih jednačina i prevođenje u računarski programski kod. Najopštiji model koji može biti korišćen za predstavljanje elektroenergetskog sistema je [25, Chapter 1]:

$$\dot{\xi} = \psi(\xi, \eta, t). \quad (2.1)$$

gde su:

- $\xi$  – vektor promenljivih stanja;
- $\eta$  – vektor diskretnih promenljivih;
- $t$  – vreme;
- $\psi$  – skup diferencijalnih jednačina.

Vremenske konstante fenomena koji se analiziraju u elektroenergetskom sistemu obuhvataju širok spektar, od nekoliko mikrosekundi do nekoliko časova. Uzimanje u obzir dinamike svih fenomena u okviru jednog modela rezultovalo bi sistemom koji se ne bi mogao praktično koristiti. Uobičajeno rešenje ovog problema je podela vektora promenljivih stanja ( $\xi$ ) u tri vektora [25, Chapter 1]:

- $\xi_s$  – vektor promenljivih stanja koje karakteriše spora dinamika, odnosno velike vremenske konstante;
- $\xi_i$  – vektor promenljivih stanja koje karakteriše dinamika od interesa;
- $\xi_b$  – vektor promenljivih stanja koje karakteriše brza dinamika, odnosno male vremenske konstante.

Podelom vektora promenljivih stanja dobija se sledeći skup jednačina [25, Chapter 1]:

$$\dot{\xi}_s = \psi_s(\xi_s, \xi_i, \xi_b, \eta, t); \quad \dot{\xi}_i = \psi_i(\xi_s, \xi_i, \xi_b, \eta, t); \quad \dot{\xi}_b = \psi_b(\xi_s, \xi_i, \xi_b, \eta, t). \quad (2.2)$$

Vremenski razvoj promenljivih stanja vektora  $\xi_s$  može se smatrati toliko sporim da se njihove promene mogu zanemariti, tj. njihove vrednosti smatrati konstantnim. Sa druge strane, vremenski razvoj promenljivih stanja vektora  $\xi_b$  može se smatrati toliko brzim da se njihove promene mogu smatrati trenutnim. Posledice ove aproksimacije su: vrednosti promenljivih stanja vektora  $\xi_s$  su konstantne i mogu se smatrati kontrolabilnim parametrima sistema; promenljive stanja vektora  $\xi_b$  mogu se smatrati algebarskim promenljivima, tj. promenljivima čije su promene trenutne. Rezultat je model elektroenergetskog sistema opisan sledećim skupom diferencijalnih i algebarskih jednačina, respektivno [25, Chapter 1]:

$$\dot{x} = f(x, y, \eta, \mu, t); \quad 0 = g(x, y, \eta, \mu, t), \quad (2.3)$$

gde su:

- $\mathbf{x}$  – vektor promenljivih stanja;
- $\mathbf{y}$  – vektor algebarskih promenljivih;
- $\boldsymbol{\mu}$  – vektor kontrolabilnih parametara;
- $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  – skup diferencijalnih i algebarskih jednačina, respektivno.

Najpogodniji model elektroenergetskog sistema za analizu tranzijentne stabilnosti (stabilnosti sistema pri velikim poremećajima) je sledeći skup diferencijalnih i algebarskih jednačina [25, Chapter 8]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t); \quad \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (2.4)$$

Modeli generatora, automatskih regulatora napona, sistema turbinskih regulatora, dinamičkih opterećenja, itd., su u formi diferencijalnih i algebarskih jednačina, dok su prenosne i distributivne mreže modelovane algebarskim jednačinama [17, Chapter 13]. U nastavku je dat primer dinamičkog modela elektroenergetskog sistema u kojem su sinhrona mašine modelovane dvoosnim modelom, pobudni sistemi IEEE-Tip I modelom, a turbine i turbinski regulatori modelom parne turbine bez dodatnog zagrevanja i modelom hidrauličnog regulatora, respektivno [26, Chapter 6]:

$$T'_{doi} \frac{dE'_{qi}}{dt} = -E'_{qi} - (X_{di} - X'_{di}) I_{di} + E_{fdi} \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.5)$$

$$T'_{qoi} \frac{dE'_{di}}{dt} = -E'_{di} + (X_{qi} - X'_{qi}) I_{qi} \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_i - \omega_s \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.7)$$

$$\frac{2H_i}{\omega_s} \frac{d\omega_i}{dt} = T_{Mi} - E'_{di} I_{di} - E'_{qi} I_{qi} - (X'_{qi} - X'_{di}) I_{di} I_{qi} - D_i (\omega_i - \omega_s) \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.8)$$

$$T_{Ei} \frac{dE_{fdi}}{dt} = - (K_{Ei} + S_{Ei}(E_{fdi})) E_{fdi} + V_{Ri} \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.9)$$

$$T_{Fi} \frac{dR_{fi}}{dt} = -R_{fi} + \frac{K_{Fi}}{T_{Fi}} E_{fdi} \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.10)$$

$$T_{Ai} \frac{dV_{Ri}}{dt} = -V_{Ri} + K_{Ai} R_{fi} - \frac{K_{Ai} K_{Fi}}{T_{Fi}} E_{fdi} + K_{Ai} (V_{refi} - V_i) \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.11)$$

$$T_{Chi} \frac{dT_{Mi}}{dt} = -T_{Mi} + P_{SVi} \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.12)$$

$$T_{SVi} \frac{dP_{SVi}}{dt} = -P_{SVi} + P_{Ci} - \frac{1}{R_{Di}} \left( \frac{\omega_i}{\omega_s} - 1 \right) \quad i = 1, \dots, n_{sm}, \quad (2.13)$$

$$0 = V_i e^{j\theta_i} + (R_{si} + jX'_{di})(I_{di} + jI_{qi}) e^{j\left(\delta_i - \frac{\pi}{2}\right)} - (E'_{di} + (X'_{qi} - X'_{di})I_{qi} + jE'_{qi}) e^{j\left(\delta_i - \frac{\pi}{2}\right)} \quad i = 1, \dots, n_{sm} \quad (2.14)$$

$$V_i e^{j\theta_i} (I_{di} - jI_{qi}) e^{-j\left(\delta_i - \frac{\pi}{2}\right)} + P_{Li}(V_i) + jQ_{Li}(V_i) = \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k Y_{ik} e^{j(\theta_i - \theta_k - \alpha_{ik})} \quad i = 1, \dots, n_{sm} \quad (2.15)$$

$$P_{Li}(V_i) + jQ_{Li}(V_i) = \sum_{k=1}^{n_b} V_i V_k Y_{ik} e^{j(\theta_i - \theta_k - \alpha_{ik})} \quad i = n_{sm} + 1, \dots, n_b \quad (2.16)$$

gde su:

- $T'_{doi}, T'_{qoi}$  – tranzijentna vremenska konstanta praznog hoda sinhronne mašine  $i$  po podužnoj (d) i poprečnoj (q) osi, respektivno;
- $E'_{di}, E'_{qi}$  – tranzijentna elektromotorna sila sinhronne mašine  $i$  po d i q osi, respektivno;
- $X_{di}, X_{qi}$  – sinhrona reaktansa sinhronne mašine  $i$  po d i q osi, respektivno;
- $X'_{di}, X'_{qi}$  – tranzijentna reaktansa sinhronne mašine  $i$  po d i q osi, respektivno;
- $I_{di}, I_{qi}$  – struja sinhronne mašine  $i$  po d i q osi, respektivno;
- $E_{fdi}$  – pobudni napon sinhronne mašine  $i$ ;
- $\delta_i, \omega_i$  – ugao i ugaona brzina obrtanja rotora sinhronne mašine  $i$ , respektivno;
- $\omega_s$  – sinhrona ugaona brzina;
- $H_i$  – konstanta inercije vratila sinhronne mašine  $i$ ;
- $T_{Mi}$  – mehanički obrtni moment primenjen na vratilu sinhronne mašine  $i$ ;
- $D_i$  – koeficijent prigušenja sinhronne mašine  $i$ ;
- $T_{Ei}, T_{Fi}, T_{Ai}$  – vremenska konstanta pobudnog kola, stabilizatora i pojačavača automatskog regulatora napona  $i$ , respektivno;
- $K_{Ei}$  – koeficijent integralnog odstupanja za pobudno kolo automatskog regulatora napona  $i$ ;
- $K_{Fi}, K_{Ai}$  – pojačanje stabilizatora i pojačavača automatskog regulatora napona  $i$ , respektivno;
- $V_{Ri}, R_{fi}$  – promenljiva stanja pojačavača i stabilizatora automatskog regulatora napona  $i$ , respektivno;
- $S_{Ei}$  – zasićenje pobudnog napona (funkcija kojom je pobudni napon ograničen) automatskog regulatora napona  $i$ ;
- $V_{refi}$  – referentni napon automatskog regulatora napona  $i$ ;
- $T_{CHi}$  – vremenska konstanta parovoda turbine  $i$ ;
- $P_{SVi}$  – snaga parnog ventila turbine  $i$ ;
- $T_{SVi}$  – vremenska konstanta parnog ventila turbine  $i$ ;
- $P_{Ci}$  – podešenje (za delovanje pri promeni snage) turbinskog regulatora  $i$ ;

- $R_{Di}$  – koeficijent zavisnosti promene mehaničke snage koja se dovodi turbini od promene učestanosti obrtanja iste (speed-droop) za turbinski regulator  $i$ ;  
 $V_i, \theta_i$  – moduo i ugao napona na sabirnici  $i$ , respektivno;  
 $R_{si}$  – otpornost statorskog namotaja sinhronne mašine  $i$ ;  
 $P_{Li}, Q_{Li}$  – aktivno i reaktivno opterećenja na sabirnici  $i$ , respektivno;  
 $Y_{ik}, \alpha_{ik}$  – moduo i ugao admitanse grane između sabirnica  $i$  i  $k$ , respektivno;  
 $n_{sm}, n_b$  – ukupan broj sinhronih mašina i sabirnica, respektivno.

Prikazani dinamički model elektroenergetskog sistema je nelinearan (deo jednačina je linearan, a deo nelinearan). Statorske jednačine i jednačine elektroenergetske mreže su prikazane u kompleksnoj formi. Prelazne pojave su zanemarene, a ograničenja izostavljena.

Pri analiziranju stabilnosti elektroenergetskog sistema pri malim poremećajima izučava se tačka ravnoteže (equilibrium point), odnosno stacionarna tačka  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  koja zadovoljava [25, Chapter 7]:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0); \quad \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad (2.17)$$

kroz analizu sopstvenih vrednosti matrice stanja sistema  $(A_S)$ . Ova matrica se dobija od kompletne Jacobian-ove matrice  $(A_C)$ , koja je definisana linearizacijom skupa diferencijalnih i algebarskih jednačina u stacionarnoj tački [25, Chapter 7]:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x & \mathbf{f}_y \\ \mathbf{g}_x & \mathbf{g}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{y} \end{bmatrix} = A_C \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Matrica stanja  $(A_S)$  dobija se eliminisanjem algebarskih promenljivih (implicitno se pretpostavlja da matrica  $\mathbf{g}_y$  nije singularna), te se dobija [25, Chapter 7]:

$$A_S = \mathbf{f}_x - \mathbf{f}_y \mathbf{g}_y^{-1} \mathbf{g}_x; \quad (2.19)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A_S \Delta \mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Predmet istraživanja doktorske disertacije je redukcija linearnih (koji se koriste za analizu malih poremećaja i podešenja uređaja za regulaciju i upravljanje) i nelinearnih dinamičkih modela elektroenergetskog sistema (koji se koriste za analizu velikih poremećaja), kojom se originalni sistem diferencijalno-algebarskih jednačina zamenjuje sistemom manjih dimenzija u skladu sa sledećim zahtevima:

- Za fenomen koji se analizira, redukovani sistem mora dovoljno tačno predstavljati originalni.
- Metode koje se koriste moraju biti primenljive na velike elektroenergetske sisteme.
- Potrebno vreme i memorijski zahtevi generisanja redukovanog modela moraju biti manji od izvođenja analiza na originalnom modelu.

### 3. POSTOJEĆE METODE REDUKCIJE DINAMIČKIH MODELA

Ovom glavom su obrađene postojeće metode redukcije dinamičkih modela linearnih sistema (*Poglavlje 3.1.*), nelinearnih sistema (*Poglavlje 3.2.*), kao i metode koje se uobičajeno koriste za redukciju dinamičkih modela i ekvivalentiranje elemenata i/ili delova elektroenergetskog sistema (*Poglavlje 3.3.*).

#### 3.1. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA LINEARNIH SISTEMA

U ovom poglavlju se razmatraju tehnike koje se uobičajeno koriste u teoriji upravljanja za redukciju linearnih modela. Najveći broj metoda redukcije se fokusira na linearne vremenski nepromenljive (matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  u jednačini (3.1) se ne menjaju u vremenu) kontinualne i diskretne sisteme, koji, u mnogim slučajevima, vrlo tačno opisuju fizičke sisteme. Linearni vremenski nepromenljivi kontinualni sistemi se, u teoriji upravljanja, opisuju sledećim skupom jednačina [10, Part I, Paper 1]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.1)$$

gde su:

- $\mathbf{x}$  – vektor promenljivih stanja;
- $\mathbf{u}$  – vektor ulaznih promenljivih;
- $\mathbf{p}$  – vektor izlaznih promenljivih;
- $\mathbf{x}_0$  – vektor početnih vrednosti promenljivih stanja;
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ;
- $\mathbb{R}$  – skup realnih brojeva;
- $n$  – red sistema;
- $m$  – broj ulaznih promenljivih;
- $p$  – broj izlaznih promenljivih.

Pridružena matrica prenosnih funkcija (frekventni odziv sistema) dobijena Laplace-ovom transformacijom modela opisanog jednačinama (3.1), uz pretpostavku da je  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , data je sledećim izrazom [10, Part I, Paper 1]:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (3.2)$$

gde je  $s$  Laplace-ova promenljiva, a  $\mathbf{I}$  jedinična matrica.

Zadatak redukcije je da pronade linearni vremenski nepromenljivi kontinualni sistem reda  $r$  ( $r \ll n$ ) sa odgovarajućom matricom prenosnih funkcija  $\hat{\mathbf{G}}(s)$  koja dovoljno dobro aproksimira matricu  $\mathbf{G}(s)$ .

Skup diferencijalno-algebarskih jednačina (3.1) se naziva *standardni model prostora stanja*. *Deskriptor model*, odnosno *generalizovan model prostora stanja*, ima sledeću formu [10, Part I, Paper 3]:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.3)$$

pri čemu matrica  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  može biti singularna.

U zavisnosti od karakteristika originalnog sistema koje treba očuvati, postoje različite tehnike redukcije modela, koje se baziraju na:

- analizi singularnih perturbacija;
- modalnoj analizi, poput modalnog odsecanja;
- dekompoziciji na bazi singularnih vrednosti, kao što su balansno odsecanje, aproksimacija na bazi Hankel-ove norme, itd;
- poklapanju momenata, poznate kao Krylov-e metode, kao što su Lanczos-ova metoda, Arnoldi-eva metoda, itd;
- kombinaciji metoda koje se baziraju na dekompoziciji na osnovu singularnih vrednosti i Krylov-ih metoda, kao što su metode tipa ADI (alternating direction implicit) i tipa Smith.

Mnoge od metoda za redukciju modela mogu biti klasifikovane kao metode koje se baziraju na projekciji, kao što su modalno odsecanje, balansno odsecanje, Krylov-e metode itd. Takve metode generišu redukovani model korišćenjem Petrov–Galerkin (Galerkin) projekcije pomoću dve (jedne) matrice projekcije čije kolone formiraju bazu za relevantne potprostore prostora stanja. Metode koje se baziraju na projekciji se međusobno razlikuju po načinu na koji se biraju matrice projekcije. Izborom matrice projekcije definišu se karakteristike sistema koje će biti sačuvane nakon redukcije [8, Part II, Chapter 12].

### 3.1.1. Analiza singularnih perturbacija

Interakcija brzih (sa malim vremenskim konstantama) i sporih (sa velikim vremenskim konstantama) fenomena u dinamičkim sistemima rezultuje numeričkim problemima koji su teški za rešavanje i zahtevaju “skupe” tehnike numeričke integracije. Jedna od najpoznatijih metoda koja olakšava rešavanje takvih problema i koja je primenljiva i na linearne i na nelinearne modele je metoda singularnih perturbacija [27], [28]. Ta metoda se bazira na pretpostavci da se jednačine sistema mogu razdvojiti na dva dela, na takozvane brze i spore modove. Metoda smanjuje red modela ignorisanjem brzih modova dinamičkog sistema, a zatim poboljšava kvalitet aproksimacije, tako što efekat brzih modova obuhvati određenim korekcijama koje proračunava u odvojenim vremenskim skalama. Koncept dominantnog potprostora je izbegnut pretpostavkom da pri modelovanju nekih dinamičkih sistema postoje brzi i spori modovi, i umesto čistog odsecanja nedominantnog dela dinamičkog sistema, uvažava se efekat njegovog ustaljenog stanja [29]. Pojedina važna pitanja u vezi sa ovom metodom, poput problema početnog stanja sistema i stabilnosti redukovanog modela se razmatraju u [27].

### 3.1.2. Modalna analiza

Metode redukcije modela koje se baziraju na modalnoj analizi identifikuju i čuvaju određene modove (polove matrice  $G(s)$ , sopstvene vrednosti matrice  $A$ ) od interesa. Modalno odsecanje je verovatno jedna od najstarijih tehnika redukcije modela [12], [30]. Osnovna ideja metode modalnog odsecanja je projekcija dinamike linearnog vremenski nepromenljivog sistema na  $A$ -invarijantan potprostor koji odgovara dominantnim modovima sistema. Dominantni modovi su oni koji dominantno utiču na ponašanje sistema. Jedan očigledan, mada sigurno ne uvek i optimalan, izbor dominantnih modova je selekcija onih sopstvenih vrednosti matrice  $A$  čiji realni delovi imaju nenegativne ili male negativne vrednosti. U

osnovi, te sopstvene vrednosti dominiraju sporopromenljivom dinamikom rešenja (komponente rešenja koje odgovaraju sopstvenim vrednostima čiji realni delovi imaju velike negativne vrednosti brzo opadaju i uglavnom igraju manje važnu ulogu). Takav način izbora dominantnih modova možda nije najbolji, s obzirom da ne uzima u obzir tranzijentno ponašanje dinamičkog sistema, oscilacije izazvane velikim imaginarnim delovima sopstvenih vrednosti, kao ni osetljivost sopstvenih vrednosti na male poremećaje. Prednost modalnog odsecanja je što su polovi redukovanog modela takođe i polovi originalnog sistema [10, Part I, Paper 1].

Kod modalnog odsecanja matrica prenosnih funkcija sistema se dekomponuje na sledeći način:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s), \quad (3.4)$$

tako da  $\mathbf{G}_1(s)$  sadrži  $r$  dominantnih modova, dok  $\mathbf{G}_2(s)$  sadrži ostalih  $n - r$  modova sistema. Odsecaju se modovi sadržani u  $\mathbf{G}_2(s)$ , a model koji odgovara  $\mathbf{G}_1(s)$  aproksimira originalni sistem. Opisana metoda modalnog odsecanja je primenjena u *Poglavlju 8.1*.

U [12] je predložen metod za redukciju linearnih sistema koji konstruiše sistem manjih dimenzija koji ima iste dominantne sopstvene vrednosti i vektore kao i originalni sistem. Princip metode je da se zanemare sopstvene vrednosti originalnog sistema koje su najudaljenije od koordinatnog početka kompleksne ravni i da se zadrže samo dominantne sopstvene vrednosti (dominantne vremenske konstante) originalnog sistema u redukovanom modelu. Promenljive relevantne sa tog aspekta se zadržavaju, a ostale se izražavaju pomoću njih. U [31] su autori istraživali koje modove sistema treba zadržati u redukovanom modelu, kako bi se očuvale najvažnije promenljive stanja. U [32] modovi su korišćeni za određivanje optimalnog reda redukovanog modela i promenljivih stanja koje treba očuvati u modelu. U [15] je predložen metod za izbor najvažnijih promenljivih stanja; prvo su identifikovani dominantni modovi, a zatim su isti korišćeni za identifikaciju promenljivih stanja u kojima su ti modovi značajno zastupljeni.

### 3.1.3. Metode dekompozicije na bazi singularnih vrednosti

Balansno odsecanje je verovatno najpoznatija metoda redukcije projekcijom i dekompozicijom na bazi singularnih vrednosti. To je verovatno posledica njene jednostavnosti: konstrukcija redukovanog modela se bazira na jednostavnim dekompozicijama teorije linearne algebre [10, Part I, Paper 5]. Da bi se balansno odsecanje primenilo, sistem se transformiše u predstavu stanja u kojoj su stanja koja su teško dostižna istovremeno i teška za posmatranje. To se postiže jednovremenom dijagonalizacijom Gramian-ovih matrica kontrolabilnosti i observabilnosti, koje su rešenja Lyapunov-ih jednačina kontrolabilnosti i observabilnosti. Pozitivne vrednosti dijagonalnih elemenata Gramian-ovih matrica date u opadajućem redosledu zovu se Hankel-ove singularne vrednosti sistema. Redukovani model se dobija odsecanjem (eliminisanjem) stanja koja odgovaraju najmanjim Hankel-ovim singularnim vrednostima. Rezultat je redukovani model koji sadrži manje stanja od originalnog modela. Eliminisanje stanja koja odgovaraju manjim Hankel-ovim singularnim vrednostima rezultuje modelom čije ulazno-izlazno ponašanje blisko aproksimira ponašanje originalnog modela. Što se model više redukuje, veća su i odstupanja između vrednosti izlaznih promenljivih originalnog i redukovanog modela za date vrednosti ulaznih promenljivih [33]. Broj stanja koja mogu biti eliminisana iz modela zavisi od samog sistema i tačnosti koja se zahteva za redukovani model [3]. Metoda balansnog odsecanja je primenjena u *Poglavlju 8.1*.

Jedna osobina balansnog odsecanja je da se aproksimacija dinamičkog sistema eksplicitno bazira na njegovim ulazno-izlaznim karakteristikama [8, Part II, Chapter 14]. Metoda balansnog odsecanja čuva nekoliko osobina sistema, poput stabilnosti i pasivnosti, i obezbeđuje granicu greške aproksimacije [10, Part I, Paper 1]. Postojanje apriori granice greške aproksimacije omogućava prilagodljiv izbor dimenzije prostora stanja redukovano modela u zavisnosti od toga koliko tačna treba da bude aproksimacija [10, Part I, Paper 3]. Mogućnost da se izračuna granica greške suštinski izdvaja tehniku balansnog odsecanja od drugih pristupa redukciji modela [8, Part I, Chapter 3]. Balansno odsecanje rezultuje dobrom aproksimacijom originalnog sistema na celom frekventnom opsegu. Mana ove tehnike je što ne čuva stacionarno stanje originalnog sistema. Ukoliko je važno da se očuva stacionarno stanje originalnog sistema, rezidualizacija daje bolje rezultate od odsecanja. Rezidualizacija se bazira na ideji da se izvodi stanja koja odgovaraju malim Hankel-ovim singularnim vrednostima mogu aproksimirati nulom, dok se ostatak sistema zadržava [3].

Redukcija modela balansnim odsecanjem zahteva balansiranje celog sistema, praćeno odsecanjem. Ovaj pristup može biti numerički neefikasan i slabo uslovljen, posebno za velike sisteme. Razlog tome je što Gramian-ove matrice često imaju numerički nizak rang (u poređenju sa redom sistema  $n$ ). U mnogim slučajevima to je posledica brzog opadanja Hankel-ovih singularnih vrednosti. Stoga, vrlo je važno izbegavati formule koje uključuju proračun inverzne matrice. U [1, Chapter 7] je dato nekoliko algoritama balansiranja i balansnog odsecanja. Iako je teorijska osnova tih tehnika slična, u praksi algoritmi imaju poprilično različite numeričke osobine. Takođe, u nizu radova su predstavljeni osnovni numerički algoritmi balansnog odsecanja [34–37]. Proširenje metode balansnog odsecanja na deskriptor modele je razmatrano u radovima [38–40].

Pored osnovne (Lyapunov-e) metode balansiranja, postoje i drugi tipovi balansiranja, poput: stohastičkog balansiranja, ograničenog realnog balansiranja, pozitivnog realnog balansiranja, linearnog kvadratnog Gauss-ovog balansiranja, balansiranja ponderisanog frekvencijom, itd. Metoda stohastičkog balansiranja je najpre predložena u [41] za balansiranje stohastičkih sistema, a potom je generalizovana u [42]. Relativna granica greške za stohastičko balansiranje je razmatrana u [42]. Za razliku od osnovne metode balansiranja, algoritam stohastičkog balansiranja zahteva rešavanje jedne Lyapunov-e i jedne Riccati-jeve jednačine. Pozitivno realno balansiranje je blisko povezano sa osnovnom metodom balansiranja [41], a primenjuje se za redukciju modela pozitivno realnih (pasivnih) sistema kao vrlo važne potklase dinamičkih sistema. Metoda pozitivnog realnog balansiranja se može posmatrati kao metoda stohastičkog balansiranja primenjena na spektralni faktor datog pasivnog sistema i zahteva rešavanje dve pozitivno realne Riccati-jeve jednačine. Još jedna metoda koja zahteva rešavanje dve Riccati-jeve jednačine je ograničeno realno balansiranje koje se primenjuje na ograničene realne sisteme. Ova metoda je prvi put predstavljena u [43], gde je definisana i apsolutna granica greške aproksimacije iste metode. Linearno kvadratno Gauss-ovo balansiranje, koje se takođe pominje kao balansiranje zatvorene petlje, je najpre predstavljeno u [44], i uglavnom se koristi za redukciju modela upravljačkih uređaja (kontrolera) pri projektovanju istih. U literaturi je predstavljeno nekoliko načina balansiranja ponderisanog frekvencijom. Većina zahteva ulazne i izlazne pondere [45–49], koji uobičajeno nisu eksplicitno specificirani, i redukuju model tako da se redukcijom minimizira ponderisana greška. Međutim, često je problem definisan tako da je potrebno aproksimirati matricu prenosnih funkcija na nekom intervalu učestanosti  $[\omega_1, \omega_2]$  i pritom nisu specificirani ulazni i izlazni ponderi. U [50] je predstavljena tehnika redukcije ovom vrstom balansiranja, gde se za dati opseg učestanosti  $[\omega_1, \omega_2]$ , izbegava generisanje pondera korišćenjem reprezentacije Gramian-ovih matrica u frekventnom domenu. Iako je ova metoda vrlo efikasna, ne garantuje



očuvanje stabilnosti modela i ne postoje granice greške aproksimacije. Slična metodi balansiranja ponderisanog frekvencijom na određenom opsegu učestanosti, u [50] je predstavljena metoda balansiranja na određenom vremenskom opsegu (Gramian-ove matrice se računaju na konačnom vremenskom intervalu  $[t_1, t_2]$ ).

U [1, Chapter 7] je istraživano balansiranje nestabilnih sistema. Metoda balansnog odsecanja može da redukuje nestabilne sisteme, pomoću modalne dekompozicije ili pomoću uzajamno jednostavnih faktorizacionih tehnika [10, Part I, Paper 9 i literatura u 10, Part I, Paper 9]. U [10, Part I, Paper 3] je predstavljeno istraživanje o redukciji modela balansnim odsecanjem za linearne vremenski nepromenljive kontinualne deskriptor modele (3.3). U [51] je razmatrana redukcija modela balansnim odsecanjem za linearne diskretne periodične sisteme sa vremenski promenljivim dimenzijama.

Tehnika redukcije modela blisko povezana sa balansnim odsecanjem i Hankel-ovim singularnim vrednostima je aproksimacija na bazi Hankel-ove norme, koja se zasniva na izuzetnim rezultatima tri ruska matematičara (Arov-a, Adamjan-a i Krein-a) [1, Preface]. Kada se primeni na stabilne dinamičke sisteme, ovaj pristup garantuje očuvanje stabilnosti i obezbeđuje granice greške aproksimacije [52].

#### 3.1.4. Krylov-e metode (metode koje se baziraju na poklapanju momenata)

U industriji elektronike, prvim korakom redukcije modela se uobičajeno smatra metoda koja se naziva „Asymptotic Waveform Evaluation“ [53]. Suština metode je vrlo jednostavna: aproksimacija momenata matrice prenosnih funkcija sistema. Momenti matrice prenosne funkcije opadaju, tako da je izračunavanje određenog konačnog broja momenata dovoljno za dobru aproksimaciju matrice prenosnih funkcija. Ubrzo nakon objavljivanja ove metode, zaključeno je da ista ima numeričke probleme. Da bi se prevazišle numeričke poteškoće u vezi sa ovom metodom, u [54] je predložena primena Krylov-e metode koja je nazvana „Padé-via-Lanczos“. Pokazano je da ova metoda čuva momente matrice prenosnih funkcija modela. Ta metoda je pokazala da se Krylov-e metode, korišćene uglavnom u oblasti numeričke linearne algebre, mogu koristiti i za redukciju modela [8, Part I, Chapter 1].

Osobina metoda koje se baziraju na poklapanju momenata jeste da se vodeći koeficijenti razvoja prenosne funkcije redukovano modela u red oko definisane tačke poklapaju sa istim koeficijentima prenosne funkcije originalnog modela. Dok metode dekompozicije na bazi singularnih vrednosti dobro globalno aproksimiraju model u frekventnom domenu, tehnike na bazi poklapanja momenata imaju dobre performanse u ograničenom opsegu učestanosti. Ipak, metode koje se baziraju na poklapanju momenata su manje numerički i memorijski zahtevne [18].

U [1, Chapter 11] je predstavljen čitav skup Krylov-ih metoda. Krylov-e metode mogu da se sprovode iterativno. Iterativni proces se uobičajeno zaustavlja kada je razlika između uzastopnih iteracija manja od određene granične vrednosti [8, Part I, Chapter 1]. Te šeme su u originalu razvijene za izračunavanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora, ali se mogu primeniti za redukciju modela tehnikama poklapanja momenata. Tipično, te metode zahtevaju samo broj operacija reda  $O(n^2)$ , a poklapanje momenata se postiže bez proračunavanja momenata. Krylov-e metode su atraktivne za velike retke sisteme, s obzirom da se zahtevaju samo operacije množenja matrice i vektora, i lako mogu biti generalizovane na deskriptor modele [10, Part I, Paper 3]. Njihovi nedostaci su to što ne daju globalne granice greške aproksimacije, značajno zavise od izbora određenih parametara, rezultujući redukovani modeli samo lokalno dobro opisuju originalne modele i što imaju poteškoće sa očuvanjem određenih osobina sistema, kao što su stabilnost ili pasivnost (obično je potrebna dodatna

obrada redukovano modela da bi se realizovale te osobine [8, Part I, Chapter 3]). Široka lista osobina Krylov-ih metoda data je u [1, Chapter 11].

U [55] su diskutovane Krylov-e metode i predložena tri algoritma: 1) „dual rational Arnoldi“, 2) „rational Lanczos“ i 3) „rational power Krylov“ metoda. Tehnike za izbor učestanosti na kojima se poklapaju momenti, ocena greške aproksimacije, obezbeđenje očuvanja stabilnosti, tretiranje sistema sa više ulaza i više izlaza, paralelno procesiranje, neka su od pitanja obrađivana u [55].

### 3.1.5. Kombinacija metoda dekompozicije na bazi singularnih vrednosti i Krylov-ih metoda

Metode dekompozicije na bazi singularnih vrednosti i Krylov-e metode imaju svoje prednosti i nedostatke, kao što je već napred pomenuto. Da bi se efikasno primenile na velike sisteme, metode dekompozicije na bazi singularnih vrednosti se moraju kombinovati sa iterativnim metodama koje se mogu realizovati samo pomoću množenja vektora i matrica, što dovodi do Krylov-ih metoda. Ovom tačkom se obrađuju metode koje kombinuju najbolje osobine metoda dekompozicije na bazi singularnih vrednosti i Krylov-ih metoda.

Za male sisteme i sisteme srednje veličine, metoda balansnog odsecanja može biti efikasno implementirana, korišćenjem metode Bartels-Stewart [56], modifikovane od strane Hammarling-a [57], za rešavanje dve Lyapunov-e jednačine. Međutim, ta metoda zahteva  $O(n^3)$  aritmetičkih operacija i memoriju reda  $O(n^2)$ . Za velike retke sisteme, preferiraju se iterativne metode, s obzirom da one zadržavaju retkost sistema i mnogo su pogodnije za paralelno procesiranje. Smith-ova metoda [58], ADI iterativna metoda [59] i Smith(l)-ova metoda [60] su najpopularnije iterativne šeme razvijene za rešavanje velikih retkih Lyapunov-ih jednačina. Nažalost, iako je broj aritmetičkih operacija redukovano, sve ove metode za rezultat daju rešenje u gustoj formi, tako da zahtevaju memoriju reda  $O(n^2)$  [10, Part I, Paper 2].

Poznato je da Gramian-ove matrice često imaju nizak numerički rang (tj. sopstvene vrednosti Gramian-ovih matrica brzo opadaju). Takva struktura Gramian-ovih matrica se može iskoristiti da bi se dobila aproksimativna rešenja istih. Većina takvih metoda, kao što su [61–64], su bazirane na Krylov-im metodama. Kao što je navedeno u [60], iako ove metode redukuju zahteve za računarskom memorijom, one obično daju aproksimativno rešenje nezadovoljavajuće tačnosti. Da bi se postigla zadovoljavajuća tačnost, obično je potreban veliki broj iteracija, koje na kraju daju rešenje relativno velikog ranga (videti [60]). Za velike retke Lyapunov-e jednačine, efikasnija šema tog tipa koja se bazira na ADI iteracijama je nezavisno predstavljena u [60] i [65]. Metoda je nazvana ADI iterativna metoda niskog ranga (LR-ADI) u [60] i Cholesky faktor ADI iterativna metoda (CF-ADI) u [65]. Iako su ove dve metode u teorijskom smislu identične, CF-ADI je manje zahtevna i efikasnija za implementaciju. Štaviše, LR-ADI se može posmatrati kao međukorak u izvođenju algoritma CF-ADI metode. Još jedna šema takvog tipa koja se bazira na ADI iteracijama je predstavljena u [60]. Metoda se zove ciklična Smith-ova metoda niskog ranga (LR-Smith(l)) i ona predstavlja specijalan slučaj metode LR-ADI, gde je  $l$  broj pomeraja koji se koriste na cikličan način (u svakom ciklusu istih  $l$  pomeraja). Pri rešavanju Lyapunov-e jednačine, gde  $B$  ima  $m$  kolona, metode LR-ADI i LR-Smith(l) dodaju  $m$  i  $(m \times l)$  kolona tekućem rešenju u svakom koraku, respektivno. Stoga, za iteracije koje sporo konvergiraju rešenju i u slučajevima kada je  $m$  veliko (na primer  $m = 10$ ), broj kolona aproksimativnog Cholesky faktora niskog ranga može premašiti kapacitete računarske memorije. Da bi se taj problem prevazišao, modifikovana LR-Smith(l)-ova metoda, koja sprečava da se broj kolona proizvoljno povećava u svakom koraku, predstavljena je u [66]. U suštini, ta metoda zahteva

samo broj kolona  $r$  koji je potreban da bi se zadovoljila unapred specificirana tolerancija metode balansnog odsecanja. Zbog brzog opadanja Hankel-ovih singularnih vrednosti, taj broj  $r$  je obično vrlo mali u odnosu na  $n$ . Kao posledica toga, zahtevi za memorijom se drastično smanjuju. Pošto ove metode generišu Cholesky faktore rešenja Lyapunov-e jednačine, posebno su pogodne za korišćenje u kombinaciji sa metodom balansnog odsecanja za redukciju velikih linearnih sistema [10, Part I, Paper 2].

Referenca [10, Part I, Paper 2] istražuje metode tipova Smith i ADI koje se koriste za rešavanje velikih retnih Lyapunov-ih jednačina, a samim tim i za metodu balansnog odsecanja pri redukciji odgovarajućih velikih retnih dinamičkih sistema. Numerički i memorijski zahtevi izračunavanja faktora pri korišćenju metoda tipova Smith i ADI su proporcionalni broju nenultih elemenata u matrici  $A$ . Na taj način, implementacija metode balansnog odsecanja uz korišćenje tih metoda je u istoj klasi kompleksnosti kao i Padé-aproksimacija i metoda pravilne ortogonalne dekompozicije [10, Part I, Paper 1]. Veze između različitih metoda tipova Smith i ADI, konvergencija i gornje granice greške aproksimacije se diskutuju u [10, Part I, Paper 2].

U [52] je dato poređenje sedam algoritama za redukciju modela: balansnog odsecanja, aproksimativnog balansnog odsecanja, metode na bazi analize singularnih perturbacija, aproksimacije na bazi Hankel-ove norme, Lanczos-ove metode, Arnoldi-eve metode i racionalne Krylov-e metode.

### 3.1.6. Ostale metode

U [14] je predložen kriterijum za izbor najvažnijih stanja velikog linearnog sistema koje treba sačuvati u redukovanom modelu. Efektivni udeo svakog stanja je procenjen određivanjem njegovog doprinosa ukupnoj energiji impulsnog odziva na izlazu sistema i opisana je procedura za dobijanje redukovanog modela na bazi tog kriterijuma. Stanja redukovanog modela zadržavaju svoje fizičko značenje. Metoda se može posmatrati kao kombinacija analize singularnih perturbacija i agregacije [67].

U [4] je prezentovana metoda za redukciju velikih linearnih sistema koja kombinuje pravilnu ortogonalnu dekompoziciju i koncepte teorije balansnih realizacija. Metoda je posebno efikasna kada je od interesa mali broj izlaza.

U [68] optimizacija metodom roja jedinki (particle swarm optimization) i optimizacija genetskim algoritmom (genetic algorithm optimization) se koriste za pronalaženje redukovanih modela velikih linearnih sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom. Za dati kriterijum, optimizuju se parametri aproksimativne prenosne funkcije. Obe tehnike optimizacije garantuju stabilnost redukovanog modela ako je originalni model stabilan. Pokazano je da se stacionarna stanja redukovanih modela dobijenih korišćenjem obe tehnike poklapaju sa stacionarnim stanjem originalnog modela, a da su tranzijentna ponašanja redukovanih modela vrlo bliska tranzijentnom ponašanju originalnog modela.

## 3.2. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA NELINEARNIH SISTEMA

Nelinearan dinamički sistem sa svojim upravljačkim uređajima generalno može biti opisan sledećim skupom diferencijalno-algebarskih jednačina [17, Chapter 1]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.5)$$

gde su:

$\mathbf{x}(t)$  – vektor promenljivih stanja sistema;

- $\mathbf{u}(t)$  – vektor upravljačkih signala koji utiču na sistem tako da se postigne željeno ponašanje istog (vektor ulaznih promenljivih);
- $\mathbf{y}(t)$  – vektor izlaznih signala koji služe da se proceni da li su upravljački signali postigli željeni cilj (vektor izlaznih promenljivih);
- $\mathbf{x}_0$  – vektor početnih vrednosti promenljivih stanja;
- $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  – skupovi diferencijalnih i algebarskih jednačina, respektivno, koji opisuju odnos između ulaznih promenljivih i promenljivih stanja, odnosno ulaznih promenljivih, promenljivih stanja i izlaznih promenljivih.

Cilj redukcije je da se originalni model (3.5) zameni manje složenim modelom, tako da je ulazno-izlazno ponašanje sistema dovoljno dobro aproksimirano.

Metode i odgovarajuće teorije za redukciju linearnih modela su dobro utemeljene u prošlosti. Za nelinearne modele trenutno ne postoji kompletna, dobro ustanovljena teorija za redukciju modela [3]. Još u 19. veku matematičar Henri Poincaré je pokazao da je nemoguće pronaći generalno analitičko rešenje za nelinearne sisteme. Štaviše, nelinearni dinamički sistemi, i kada imaju svega nekoliko promenljivih stanja, mogu imati veoma kompleksno ponašanje koje bi bilo nemoguće predvideti, a kamoli analizirati, direktno na osnovu njihove strukture. Stoga, u odsustvu “velike unificirane teorije” za dinamičke sisteme, potrebno je osloniti se na simulacije, kako bi se ustanovilo dinamičko ponašanje sistema implicirano njegovom strukturom [69].

Pri transferu pristupa i tehnika koje se koriste za redukciju linearnih dinamičkih sistema, posebno metoda koje se baziraju na projekciji, pojavljuju se fundamentalne razlike (za detalje videti [8, Part II, Chapter 17]). Uštede u vremenu se teško mogu postići ukoliko se ne primene neke dodatne mere ili sprovedu neke dodatne strategije [8, Part II, Chapter 17]. Mnogi su čak vrlo skeptični da metoda koja je izvedena iz teorije linearnih sistema može biti od bilo kakve koristi za redukciju nelinearnih dinamičkih modela [69].

Bez obzira na značajan napredak postignut u oblasti redukcije dinamičkih modela u toku nekoliko poslednjih decenija, robusna uopštena procedura redukcije nelinearnih sistema još nije ustanovljena. Nije ni za očekivati da se veoma veliki nelinearni sistemi mogu lako redukovati, osim ako sistem nema specifičnu strukturu [8, Part II, Chapter 18]. Veći nelinearni modeli se mogu rešavati samo korišćenjem specifičnih informacija o odgovarajućem sistemu. Može se očekivati da se za dobijanje dovoljno dobrog redukovanog modela mora koristiti i veliki broj (reda miliona) izmerenih vrednosti ili vrednosti dobijenih simulacijom [8, Part I, Chapter 1].

Postoji veliki interes za redukciju modela nelinearnih sistema, međutim, u suštini se samo nekoliko grupa metoda pokazalo korisnim u praktičnoj primeni, kao što su:

- Pravilna ortogonalna dekompozicija (dekompozicija Karhunen–Loève).
- Metoda trajektorije linearnih delova.
- Metode na bazi balansiranja.
- Redukcija optimizacijom matrica sistema.
- Projekcije dobijene analizom linearizovanog modela.

Jedna od najpopularnijih metoda redukcije nelinearnih sistema je pravilna ortogonalna dekompozicija. Ona generiše matricu uzoraka iz različitih vremenskih trenutaka, potom proračunava matricu korelacija i vrši njenu dekompoziciju na bazi singularnih vrednosti. Vektori koji odgovaraju najvećim singularnim vrednostima koriste se za formiranje baze rešenja. Metoda trajektorije linearnih delova je takođe veoma popularna. Međutim, treba biti oprezan pri korišćenju metode pravilne ortogonalne dekompozicije i metode trajektorije

linearnih delova, s obzirom da su te tehnike veoma osetljive na izbor određenih parametara [8, Part II, Chapter 17]. U oblasti dinamičkih sistema i teorije upravljanja, metode koje su razvili Fujimoto i Scherpen [70] i Verriest [71] su obećavajuće, iako je do sada primena tih metoda limitirana na male nelinearne sisteme [8, Part I, Chapter 1].

### 3.2.1. Pravilna ortogonalna dekompozicija

Pravilna ortogonalna dekompozicija je metoda koja se vrlo često koristi za određivanje efikasne baze za konstruisanje matrice projekcije. U toj metodi se, za fiksirane vrednosti ulaznih promenljivih, mere trajektorije promenljivih stanja u određenim vremenskim trenucima i čuvaju u matrici uzoraka. Ukoliko singularne vrednosti te matrice brzo opadaju, matrica se može aproksimirati matricom nižeg ranga. Dominantan potprostor u smislu ove metode je deo prostora stanja koji absorbuje najveći deo energije (fiksiranih) ulaza [29]. Izlazno ponašanje sistema (odnos promenljivih stanja i izlaznih promenljivih) se ne uzima u obzir [72].

Opseg u kojem se uzimaju uzorci se određuje procenom opsega učestanosti bitnog za problem(e) od interesa. Da bi se odredili vremenski trenuci u kojima se vrši uzorkovanje koristi se kombinacija iskustva i intuicije. Vrlo često, zahtevana gustina uzimanja uzoraka se određuje naknadno na osnovu ponašanja redukovano modela. Ukoliko željena dinamika nije dovoljno dobro očuvana u redukovanom modelu, potrebno je uključiti više uzoraka u proces, a vektore baze ponovo proračunati [4].

Pravilna ortogonalna dekompozicija u suštini daje ortonormalnu bazu za predstavljanje datih podataka u nekom smislu najmanjeg kvadratnog odstupanja. Izdvajanjem takve baze obezbeđuje se jedan način pronalaženja, u nekom smislu, optimalne aproksimacije manje dimenzije, za dati skup podataka. Pored toga što je optimalna u smislu kvadratnog odstupanja, pravilna ortogonalna dekompozicija ima osobinu da koristi modalnu dekompoziciju koja u potpunosti zavisi od podataka i ne podrazumeva nikakvo prethodno znanje o procesu koji generiše te podatke [73].

Pravilna ortogonalna dekompozicija ne daje redukovani model, već samo bazu prostora rešenja. U kombinaciji sa Galerkin projekcijom, ona obezbeđuje moćan metod za redukciju nelinearnih dinamičkih sistema [1, Chapter 9], [10, Part I, Paper 10], [73]. Analiza greške za nelinearne dinamičke sisteme i odnos sa balansiranjem su diskutovani u [1, Chapter 9] i [10, Part I, Paper 10] i literatura u [10, Part I, Paper 10]. Osetljivost rezultata dobijenih korišćenjem pravilne ortogonalne dekompozicije na perturbacije u podacima koji se koriste za formiranje redukovano modela, kao i efikasnost korišćenja ovog pristupa za redukciju modela su istraživani u [73].

### 3.2.2. Metoda trajektorije linearnih delova

Metoda trajektorije linearnih delova je obećavajuća tehnika redukcije nelinearnih dinamičkih sistema. Ideja ove metode je reprodukcija tipičnog ponašanja kompletnog nelinearnog sistema variranjem kombinacija iz skupa redukovanih linearnih modela. U tu svrhu bira se odgovarajući ulaz koji će odvesti sistem u tipična stanja (situacije). Tranzijenta simulacija sa izabranim ulazom daje kolekciju tačaka koje aproksimiraju trajektoriju. Na trajektoriji se biraju tačke oko kojih se nelinearne funkcije linearizuju. Svaki od dobijenih linearnih modela se zasebno redukuje, čime se dobijaju lokalni redukovani potprostori. Nakon toga se konstruiše zajednički potprostor koji opisuje osnovne informacije svih lokalnih potprostora. Svi linearni modeli se projektuju na taj prostor. Za izbor linearnih modela koji su validni u određenoj situaciji se koristi ponderisanje [8, Part II, Chapter 17].

Prva suštinska tačka metode trajektorije linearnih delova je izbor kriterijuma dodavanja linearnog modela (koji daje odgovor na pitanje kada dodati nov linearni model) tokom simulacije (izbor tačaka u kojima se nelinearni model linearizuje). Previše linearnih modela može napraviti finalni model sporim, a premalo netačnim. Da bi se obezbedila jednostavnost finalnog modela potrebno je izabrati kombinaciju što manjeg broja linearnih modela. Stoga se funkcija ponderisanja bira tako da je obuhvaćeno samo nekoliko (u idealnom slučaju samo jedan) dominantnih linearnih modela. Za redukciju linearnih modela može biti primenjena bilo koja tehnika redukcije linearnih modela. Ono što treba imati u vidu jeste da redukcija linearnih modela ima efekat na tačnost aproksimacije nelinearnog modela [8, Part II, Chapter 17 i literatura u 8, Part II, Chapter 17].

Metoda trajektorije linearnih delova ima nekoliko prednosti u odnosu na druge metode. Prva je to što se ubrzavaju simulacije, s obzirom da se samo manji linearni sistemi rešavaju, umesto većeg originalnog nelinearnog modela. Druga prednost je to što se za redukciju modela mogu koristiti dobro ustanovljene i efikasne tehnike za redukciju linearnih modela. Efikasnost tehnike se može poboljšati ukoliko se konstruiše dobra procedura ponderisanja. Metoda trajektorije linearnih delova ima jednu lepu osobinu, a to je da je skalabilna. To znači da se korišćenjem različitih tehnika redukcije linearnih modela i različitih procedura ponderisanja, metoda može menjati od veoma brze, ali ne tako tačne, do sporije, ali i mnogo tačnije. To znači da korisnik sam može birati ono što želi: brzinu ili tačnost [74, Chapter 7].

#### 3.2.3. Metode na bazi balansiranja

Još jedna vrlo poznata metoda redukcije nelinearnih dinamičkih modela je nelinearno balansiranje koje u suštini predstavlja proširenje teorije balansiranja razvijene za linearne modele (videti *Tačku 3.1.3.*) u smislu da se bazira na proširenoj definiciji balansiranja i Hankel-ovim singularnim funkcijama [75]. Ova metoda, slično konceptu balansiranja za linearne modele, pronalazi koordinatnu transformaciju koja balansira sistem, prema proširenoj definiciji balansiranja za nelinearne sisteme. Neki rezultati u vezi sa tim su dati u [76], [77]. Kao što se može naslutiti, sa jedne strane, procedura balansiranja nelinearnog modela je veoma zahtevna, što ograničava njenu primenu na manje nelinearne sisteme. Sa druge strane, procedura je veoma značajna, jer pronalazi koordinatnu transformaciju kojom je specificiran dominantan potprostor prostora stanja u smislu energije koja se od ulaza, preko promenljivih stanja, prenosi na izlaze sistema [29].

Najveća mana procedure predložene u [75] je što je numerički vrlo zahtevna, čak i za male sisteme [78]. Jedina numerička implementacija metode prezentovane u [75], koja koristi Monte Carlo pristup, data je u [78]. Međutim, nakon što se primeni koordinatna transformacija i čak bez redukcije modela, transformisan sistem nema isto ulazno-izlazno ponašanje kao i originalni sistem, zbog aproksimacija i pretpostavki koje su korišćene tokom procedure transformacije [33].

Aproksimacija balansiranja nelinearnih sistema pomoću koncepta empirijskih Gramian-ovih matrica je predstavljena u [3], [5], [79]. Empirijske Gramian-ove matrice zahvate deo nelinearnog ponašanja sistema, pri čemu se vrlo jednostavno izračunavaju [3], [5]. One se proračunavaju korišćenjem podataka dobijenih simulacijama ili eksperimentima (za različite vrednosti ulaznih promenljivih i početnih uslova), tako da se identifikuje dinamičko ulazno-izlazno ponašanje sistema, a nakon toga se balansiraju istom procedurom koja se koristi za linearne modele. Balansna transformacija se koristi u okviru Galerkin projekcije kako bi se nelinearni sistem transformisao u balansnu formu. Rezultujuće nelinearne jednačine mogu se redukovati korišćenjem različitih tipova odsecanja ili rezidualizacije. Broj promenljivih stanja

redukovanog modela može se korigovati korišćenjem procedure „proba-greška“ radi postizanja optimalnih performansi.

U [33], [80] predlažu se kovarijansne matrice kontrolabilnosti i observabilnosti kao proširenja empirijskih Gramian-ovih matrica. Kovarijansne matrice se određuju na osnovu podataka skupljenih u operativnom regionu razmatranog procesa i imaju određene prednosti u odnosu na empirijske Gramian-ove matrice. Kovarijansne matrice se mogu koristiti za proračunavanje transformacije bliske balansiranju nakon čije primene sledi redukcija modela pomoću odsecanja ili rezidualizacije [72]. Procedura rezultuje modelom redukovanog veličine koji opisuje ulazno-izlazno ponašanje sistema lokalno, pri čemu se nikakvi zaključci o globalnom ponašanju sistema ne mogu izvući [33]. Razlog zbog kojeg redukovani model ne opisuje globalno ponašanje originalnog sistema je taj što su kovarijansne matrice samo lokalno definisane. Međutim, informacije sadržane u kovarijansnim matricama daju bolju refleksiju dinamike sistema u datom operativnom regionu u odnosu na informacije sadržane u modelu linearizovanom u radnoj tački.

U [8, Part II, Chapter 17 i literatura u 8, Part II, Chapter 17] razmatrana je metoda balansnog odsecanja za redukciju nelinearnih modela.

U [74] istraživano je nekoliko metoda redukcije nelinearnih diferencijalno-algebarskih modela: pravilna ortogonalna dekompozicija, metoda trajektorije linearnih delova, empirijsko balansno odsecanje i Volterra nizovi, pri čemu su analiza kompleksnosti tih tehnika, izbor optimalnih tačaka linearizacije i procedura ponderisanja takođe razmatrani.

#### 3.2.4. Redukcija optimizacijom sistemskih matrica

Redukcija modela optimizacijom sistemskih matrica je još jedna metoda redukcije nelinearnih sistema specifične strukture [81]. U toj metodi određivanje dominantnih promenljivih stanja (dominantnog potprostora) je od velikog značaja za kvalitet redukcije. Prva ideja za izdvajanje dominantnih promenljivih stanja je inženjerski utisak, odnosno inženjerska intuicija, koja može biti od velike pomoći za mnoge vrste problema, ali za kompleksnije tehničke sisteme odabir dominantnih promenljivih stanja obično nije jednostavan zadatak, te su potrebne naprednije metode i alati [29]. Kada su dominantne promenljive određene, sistemske matrice redukovanog modela se određuju rešavanjem optimizacionih problema, koji su definisani tako da minimizuju razliku u ponašanju originalnog i redukovanog modela.

#### 3.2.5. Projekcije dobijene analizom linearizovanog modela

Kod metoda koje pripadaju ovoj grupi, redukovani model se dobija analizom linearnih modela, dobijenih linearizacijom originalnog nelinearnog sistema u određenim radnim tačkama. Modeli dobijeni redukcijom tih linearnih modela dobro aproksimiraju ponašanje originalnog sistema samo u okolini radne tačke. Ta okolina može biti proširena dodavanjem nekih nelinearnosti redukovanom modelu. To se može uraditi korišćenjem neke tehnike za redukciju linearnih modela na bazi projekcije, tako što se za linearni model proračuna matrica projekcije, a potom ta projekcija direktno primeni na originalni nelinearni sistem. Iako se u ovom pristupu vrši linearizacija nelinearnog modela, dobijeni redukovani sistem je nelinearan. Međutim, treba imati u vidu da pronalaženje odgovarajućeg linearizovanog modela može biti vrlo težak zadatak [82 i literatura u 82].

### 3.2.6. Ostale metode

Pri redukciji modela linearnih sistema, Krylov-e metode generišu model smanjenih dimenzija, tako da se određeni momenti matrice prenosnih funkcija originalnog i redukovanog modela poklapaju. S obzirom da za nelinearne modele ne postoji ekvivalent prenosne funkcije, Krylov-e metode se primenjuju na dva tipa sistema koji se mogu izvesti iz opšteg nelinearnog problema: bilinearne sisteme i linearne periodično vremenski promenljive sisteme [8, Part II, Chapter 17].

U [83] je istraživana procedura u kojoj se linearna transformacija pronalazi iz kovarijanske matrice proračunate korišćenjem podataka prikupljenih duž trajektorija sistema. Te trajektorije predstavljaju ponašanje sistema za konstantne ulaze, ali sa različitim početnim uslovima. U [84] taj pristup redukciji je proširen na modele sistema koji se opisuju diferencijalno-algebarskim jednačinama. Metoda se sastoji od generisanja trajektorija stanja, proračunavanja kovarijanske matrice na osnovu prikupljenih podataka, izdvajanja glavnih komponenti kovarijanske matrice i izvođenja projekcije na originalnom sistemu. Istraživan je slučaj pri kojem se trajektorije generišu pri konstantnim ulazima za različite početne uslove, kao i slučaj pri kojem se trajektorije generišu pokretanjem iz stacionarne radne tačke promenom ulaza u koracima. Iako postoje sličnosti između ovih metoda i metoda koje koriste teoriju balansnih realizacija, treba naglasiti da suština tih metoda nije da očuvaju ili aproksimiraju ulazno-izlazno ponašanje sistema [33].

Procedura redukcije modela predstavljena u [72] kombinuje elemente metoda koje koriste teoriju balansnih realizacija i tehnike identifikacije sistema za redukciju diferencijalnih i algebarskih jednačina, uz očuvanje kontrolno relevantnih osobina modela. Procedura se sastoji iz tri glavna koraka. U prvom koraku, transformacije se primenjuju i na diferencijalne i na algebarske jednačine. Transformacija za diferencijalne jednačine se proračunava balansiranjem kovarijanske matrice ili pomoću pravilne ortogonalne dekompozicije, dok se transformaciona matrica za algebarske jednačine dobija dekompozicijom kovarijanske matrice stanja, proračunate za različite pobude sistema, na bazi singularnih vrednosti. U drugom koraku, i diferencijalne i algebarske jednačine transformisanog sistema mogu se redukovati procedurom odsecanja. Model se dalje redukuje (treći korak) zamenom algebarskih jednačina identifikovanim modelom (kojim će biti očuvan uticaj eliminisanih algebarskih jednačina). Poređenje rezultata dobijenih korišćenjem pravilne ortogonalne dekompozicije i rezultata dobijenih balansiranjem ukazuje da balansiranje daje bolje rezultate, s obzirom da se pri balansiranju istovremeno uzimaju u obzir i odnos ulaznih promenljivih i promenljivih stanja, kao i odnos promenljivih stanja i izlaznih promenljivih, dok se kod pravilne ortogonalne dekompozicije samo razmatra odnos ulaznih promenljivih i promenljivih stanja.

U [29] je predložena procedura za redukciju nelinearnih sistema korišćenjem kombinacije linearnog balansiranja i optimizacije. Metoda se sastoji iz sledećih koraka: generisanje uzoraka, linearizacija nelinearnog sistema, pronalaženje dominantnog potprostora i primena optimizacione procedure za identifikovanje sistemskih matrica.

U [82] je predstavljen pristup redukciji nelinearnih sistema, koji ne zahteva simulacije originalnog modela. Odvajanjem linearnih i nelinearnih delova originalnog nelinearnog modela, ideja je da se nelinearnosti sistema posmatraju kao dodatni ulazi u sistem. Dobijeni rezultati potvrđuju da redukcija koja ne zahteva simulacije može dati sasvim prihvatljive rezultate, a da pritom bude brza i jednostavna za implementiranje.



### 3.3. REDUKCIJA I EKVIVALENTIRANJE DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA

Dinamički modeli elektroenergetskog sistema su teški za analiziranje, zbog svoje veličine, kompleksnosti i nelinearnosti (generalno gledano). Redukcija modela i ekvivalentiranje elemenata ili delova elektroenergetskog sistema su važni alati kojima se rešavaju problemi veličine i kompleksnosti, s obzirom da daju redukovanu reprezentaciju sistema, a čuvaju, sa razumnom tačnošću, dinamičke karakteristike od interesa. Kao što je već i napomenuto, redukcija i ekvivalentiranje nelinearnog modela predstavljaju teške zadatke, zbog nedostatka generalnih analitičkih metoda koje bi se mogle koristiti za tretiranje nelinearnih jednačina kojima se ti modeli opisuju [13].

Metode za redukciju i ekvivalentiranje modela elektroenergetskog sistema se mogu, u širem smislu, podeliti u dve grupe, u zavisnosti da li zahtevaju ili ne zahtevaju bilo kakvo znanje o konfiguraciji ili parametrima razmatranog sistema. Metode koje ne zahtevaju poznavanje sistema se koriste za on-line procenu sigurnosti sistema i tipično koriste merenja određenih električnih veličina da bi formirale ekvivalent sistema. Metode koje zahtevaju podatke o sistemu se koriste za off-line analize sistema [17, Chapter 14].

Veliki broj tehnika za redukciju i ekvivalentiranje modela elektroenergetskog sistema su prilagođeni za različite primene: podešavanje upravljačkih uređaja, tranzijentnu analizu, analizu malih poremećaja itd. [18]. Koncepti kao što su:

- koherencija tretirana u [13], [85–89],
- sinhronizam predstavljen u [90], [91],
- analiza singularnih perturbacija data u [92–95],
- modalna analiza predstavljena u [93], [96–101], i
- identifikacija korišćena u [16], [102–111],

formiraju osnovu za širok spektar razvijenih alata za redukciju modela elektroenergetskog sistema.

Među postojećim softverskim alatima za ekvivalentiranje su DIGSILENT, DYNRED i PSS/E [16].

#### 3.3.1. Koherencija

Koherencija je veoma poznat koncept dinamičkog ekvivalentiranja elektroenergetskih sistema. Koherencijom se u suštini opisuje sličnost u ponašanju generatora nakon poremećaja [112]. Koherentna grupa generatorskih jedinica je, za dati poremećaj, grupa generatora koji osciluju sa istom ugaonom brzinom, pri čemu su naponi na priključcima generatora u konstantnom kompleksnom odnosu [113]. Obično je moguće identifikovati grupe koherentnih generatora zato što pojedine grupe generatora u sistemu imaju prirodnu tendenciju da zajedno osciluju [17, Chapter 14]. Ono čemu se neko može nadati jeste da se, za dovoljno širok opseg poremećaja, recimo za sve kvarove koji su električno udaljeni, sastav tih grupa može smatrati konstantnim [13].

Svaka koherentna grupa mašina može se zameniti velikom ekvivalentnom mašinom. Dinamički ekvivalent je jedna jedina generatorska jedinica koja ima istu brzinu, napon i ukupnu mehaničku i električnu snagu grupe tokom bilo kojeg poremećaja za koji te generatorske jedinice ostaju koherentne [113]. Ekvivalentni generator obično je predstavljen klasičnim modelom sa konstantnom ekvivalentnom tranzijentnom elektromotornom silom i jednačinom njihanja (swing equation). Ukoliko se koriste detaljniji modeli, parametri ekvivalentne jedinice mogu se identifikovati poklapanjem karakteristika frekventnog odziva

ekvivalentne jedinice sa karakteristikama jedinica koherentne grupe. Detalji se mogu pronaći u [113], [114].

Dovoljni uslovi za postojanje teorijske koherencije su [115]: (1) identični parametri i modeli mašina i upravljačkih uređaja i jednaki nivoi izlazne snage; (2) identične admitanse kojima su generatorske sabirnice povezane sa svakom graničnom sabirnicom (sibirnicom kojom se deo sistema koji se ekvivalentira povezuje sa ostatkom sistema). Ukoliko su uslovi za teorijsku koherenciju zadovoljeni, poremećaj neće izazvati oscilacije između mašina koherentne grupe. Ako se posmatra sa strane, oscilacije tih mašina se vide kao da potiču od jedne mašine [115]. Kod modalne analize, to odgovara situaciji u kojoj modalne promenljive koje predstavljaju oscilacije rotora generatora unutar koherentne grupe nisu pobuđene poremećajem. Poremećaji pobuđuju samo one modalne promenljive koje predstavljaju oscilacije cele koherentne grupe u odnosu na ostatak sistema [17, Chapter 14]. Kod realnih elektroenergetskih sistema (osim u trivijalnom slučaju identičnih generatorskih jedinica koje rade paralelno na istoj sabirnici) egzaktna koherencija se praktično ne pojavljuje, ali je sama definicija korisna za teorijska razmatranja. Odstupanje od teorijske koherencije znači da će sve dinamičke karakteristike originalnog modela biti očuvane ekvivalentnim (redukovanim) modelom samo u nekom određenom stepenu. Stoga se može očekivati i da će sopstvene vrednosti i sopstveni vektori ekvivalentnog modela biti samo aproksimativno jednaki sa sopstvenim vrednostima i sopstvenim vektorima originalnog modela. Vrlo je važno da ekvivalentan model očuva što je moguće preciznije one modalne promenljive koje su snažno pobuđene poremećajima u unutrašnjem sistemu i koje stoga imaju najveći uticaj na oscilacije u unutrašnjem sistemu (dominantne modalne promenljive) [17, Chapter 14].

Analitički uslovi za koherenciju su diskutovani u [116–120]. Aproksimativna koherencija je proučavana u [88], [89]. Spora koherencija, ili koherencija u najsporijim modovima sistema je razmatrana u [118], [121]. Koncept spore koherencije grupiše generatore na bazi apriori pretpostavke da ekvivalent treba da očuva samo najsporije modove sistema.

Proces redukcije dinamičkog modela elektroenergetskog sistema korišćenjem koncepta koherencije se može podeliti u tri faze: 1) identifikacija koherencije, 2) grupisanje (sažimanje) koherentnih generatora i njihovih upravljačkih uređaja, i 3) redukcija mreže. U literaturi su predložene različite metode za identifikaciju koherencije [88], [122–129]. Za generisanje ekvivalenta koherentnih generatora i njihovih upravljačkih uređaja razvijene su različite metode [87], [121], [130]. Godine 1993. Institut za istraživanje elektroenergetskih sistema (EPRI) je izdao softverski paket za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema (DYNRED), koji uključuje čitav opseg načina za identifikovanje koherencije i opcija za redukciju dinamičkih modela [130–132]. U [6] je opisano iskustvo autora sa radom i primenom alata DYNRED na redukciju dinamičkih modela tri velika elektroenergetska sistema sa značajno različitim karakteristikama u svrhu analize tranzijentne stabilnosti i stabilnosti pri malim poremećajima. U [133] je predstavljen softverski alat, koji pojednostavljuje i ubrzava proračune potrebne za tri pobrojane faze procesa redukcije dinamičkog modela elektroenergetskog sistema korišćenjem koncepta koherencije.

Ekvivalent spoljašnjeg sistema generisan korišćenjem koncepta koherencije ne zahteva bilo kakvu vrstu međuveze sa modelom unutrašnjeg sistema, zato što je ekvivalent u formi modela stvarnih fizičkih komponenti. Za tehniku koherencije je ustanovljeno da je efikasna i zadovoljavajuće tačnosti. Nelinearnosti se mogu uneti u model ekvivalentne mašine, čime se proširuje validnost ekvivalenta za analize velikih poremećaja. Mana tehnike koherencije je što je čisto empirijska. Kvalitet dobijenog ekvivalenta zavisi od poremećaja koji su izabrani za identifikaciju koherencije, a davanje nekih uputstava za optimalan izbor poremećaja predstavlja vrlo težak zadatak [134]. Koherencija generatorskih jedinica je zavisna od

početnih uslova, tako da informacije o koherenciji koje su dobijene za jedne početne uslove možda neće biti odgovarajuće za neke druge početne uslove [104]. Za druge početne uslove je možda potrebno ponovo proceniti koherentno ponašanje generatora. Taj proces je dugotrajan, posebno za velike interkonektivne elektroenergetske sisteme. U [112] je predstavljen sistematizovan pristup predviđanja promena u obrascu sporo-koherentnog ponašanja generatora za različite početne uslove i formiranja odgovarajuće granične oblasti uključivanjem kritičnih generatora iz spoljašnjeg sistema, koji za određene početne uslove postaju koherentni sa generatorima unutrašnjeg sistema, na bazi osetljivosti sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora. S obzirom da koherencija nameće oblasti na koje se elektroenergetski sistem može podeliti, nije uvek moguće redukovati dati deo mreže [16]. Pristupi koji obezbeđuju očuvanje datog dela elektroenergetske mreže su predstavljeni u [103], [135], [136].

Još jedna stvar važna za dinamičke simulacije elektroenergetskih sistema je uticaj greške koja se unosi ekvivalentiranjem generatora iz spoljašnjeg sistema korišćenjem koncepta koherencije, na tačnost simulacija dinamičkog odziva u unutrašnjem sistemu. Što su generatori koji se grupišu više udaljeni od unutrašnjeg sistema, to je i uticaj greške na tačnost simulacija manji [17, Chapter 14].

### 3.3.2. Sinhronizam

Još jedan vrlo poznat koncept dinamičkog ekvivalentiranja elektroenergetskih sistema, koji generalizuje koncept spore koherencije, je sinhronizam, predstavljen u [90]. Sinhronizam se definiše za izabrani podskup modova linearizovanog modela. Taj podskup se zove *akord*. Dva generatora se nazivaju tačno ili aproksimativno sinhronim u akordu  $\nu$ , odnosno  $\nu$ -sinhronim, ukoliko su promene njihovih uglova tačno ili aproksimativno u konstantnom odnosu za svaki poremećaj za koji se pobuđuju samo modovi u akordu  $\nu$ . Za razliku od sinhronizma,  $\nu$ -koherencija zahteva tačnu ili aproksimativnu jednakost promena uglova, a spora koherencija ograničava  $\nu$  na najsporije elektromehaničke modove sistema. Maksimalan skup  $\nu$ -sinhronih generatora čini sinhronu grupu ili sinhronu oblast [137]. Algoritam za identifikaciju takvih grupa (oblasti) i dodeljivanje referentne mašine svakoj grupi, je predložen u [90].

Referenca [20] razrađuje sinhronizam i pokazuje kako ovaj koncept može formirati bazu za efikasno generisanje dinamičkog ekvivalenta grupisanjem. Takođe je opisan i pristup za odabir odgovarajućih modova akorda koji se pobuđuju pri oscilacijama između dva elektroenergetska sistema u interkonekciji. Prezentovan je algoritam za prepoznavanje aproksimativnog sinhronizma, poboljšan u odnosu na standardni algoritam za prepoznavanje spore koherencije.

U [91] je predloženo sinhrono modalno ekvivalentiranje, metod za dinamičko ekvivalentiranje koji se bazira na konceptu sinhronizma i modalnog ekvivalentiranja, i dati su algoritmi za konstruisanje dinamičkih ekvivalentenata sinhronih mašina modelovanih klasičnim modelom. U [137] je taj pristup generalizovan u smislu konstruisanja dinamičkih ekvivalentenata sinhronih mašina modelovanih detaljnijim modelima. U [9] autori rezimiraju određene dodatke i pojednostavljena sinhronog modalnog ekvivalentiranja i oblikuju predloženu proceduru za taj pristup dinamičkoj redukciji.

Procedura sinhronog modalnog ekvivalentiranja se odvija u tri etape [9]. U prvoj etapi se vrši priprema različitih dinamičkih modela, koja se sastoji iz tri koraka:

1. Formiranje detaljnog nelinearnog modela i određivanje nominalne radne tačke.
2. Linearizacija modela u okolini nominalne radne tačke i eliminisanje algebarskih promenljivih.

3. Kreiranje jednostavnog linearizovanog modela sa jednačinama njihanja rotora mašine, bez prigušenja, koji se dobija tako što se iz matrice stanja izdvajaju redovi koji odgovaraju priraštaju ugaone brzine rotora generatora i kolone koje odgovaraju priraštaju ugla rotora generatora. Dobijeni model se naziva jezgro modela (umesto ovog modela može da se koristi klasični linearizovani model sa jednačinama njihanja rotora mašine, bez prigušenja). Red jezgra modela je jednak broju generatora u elektroenergetskom sistemu. Matrica jezgra modela je dijagonalno slična simetričnoj, negativno semidefinitnoj matrici i poseduje jednu sopstvenu vrednost u nuli, sa svim ostalim sopstvenim vrednostima koje su realne i negativne. Prirodne učestanosti jezgra modela koje su jednake (čisto imaginarnim) kvadratnim korenima tih sopstvenih vrednosti, predstavljaju dobre procene učestanosti modova oscilacija elektroenergetskog sistema.

Druga etapa procedure posvećena je analizi modalne strukture prvom etapom dobijenog linearizovanog elektromehaničkog modela sistema, i vodi ka izboru odgovarajućeg akorda i dekompoziciji modela na sinhronne grupe (svakoj grupi odgovara jedan poseban bazni generator), te izboru studijske grupe. Druga etapa sastoji se iz sledeća dva koraka:

4. Za dobijeni jednostavan model, izabrati dobar akord, pronaći bazne generatore za jednodimenzioni sinhronizam i formirati sinhronne grupe. Sinhronizam u datom akordu se može prepoznati ispitivanjem redova akordne matrice (matrice čije su kolone sopstveni vektori jezgra matrice koji su povezani sa izabranim akordom). Ono što treba napomenuti jeste da svaki red akordne matrice (akordni red) odgovara određenom generatoru. Generator ispoljava egzaktni jednodimenzioni sinhronizam sa baznim generatorom ako je njemu odgovarajući akordni red pozitivni ili negativni umnožak akordnog reda koji odgovara baznom generatoru. Aproksimativni sinhronizam uključuje aproksimativno ravnanje akordnih redova, a stepen sinhronizma služi kao mera za kvantifikovanje stepena poravnanja. Stepenn sinhronizma između dva generatora je definisan u [20] kao kosinus ugla između odgovarajućih akordnih redova. Sinhrona udaljenost datog generatora od baznog generatora definisana je u [138], kao rastojanje između njegovog akordnog reda i projekcije tog reda na akordni red baznog generatora. Za obe navedene mere, može biti od prednosti korišćenje ponderisanih verzija akordnih redova. Za odabir baznih generatora za dati akord, doktorska disertacija [138] predlaže algoritam koji je značajno jednostavniji od procedure fazi (fuzzy) grupisanja koja je originalno predložena u [20]. U ovom jednostavnom algoritmu, za prvi bazni generator bira se onaj sa najvećim ukupnim učešćem u izabranom akordu [139], pri čemu se ukupno učešće izračunava na neki jednostavan način [9]. Za drugi bazni generator bira se onaj koji ima najveću sinhronu udaljenost u odnosu na prvi bazni generator. Taj postupak se nastavlja dok se ne dobije željeni broj baznih generatora, pri čemu se svaki naredni bazni generator bira tako da se maksimizuje njegova minimalna sinhrona udaljenost u odnosu na postojeće bazne generatore. Nakon što se odrede bazni generatori, definišu se sinhronne grupe tako što se svaki nebazni generator dodeljuje baznom generatoru sa kojim je u najvećem stepenu sinhronizma. Proces izbora akorda teče sekvencijalno. Najpre se procedura startuje sa dva moda jezgra modela (možda dva najsporija ili dva najveće višestrukosti), potom se traže tri sinhronne grupe u tom akordu, korišćenjem prethodno opisanog postupka. Tim grupama odgovaraju tri između-grupna moda; dva od ta tri moda su dobre aproksimacije akorda sa kojim se startovalo, dok je treći mod dobra aproksimacija nekog dodatnog moda. Taj mod se dodaje akordu, i procedura se

nastavlja tako što se traže četiri grupe u novonastalom akordu od tri moda. Proces se okončava kada se dobije akord sa željenim brojem modova, što je istovremeno i željeni broj sinhronih grupa. Ono što ostaje kao otvoreno pitanje jeste kako odrediti konačan broj modova u akordu, odnosno konačan broj sinhronih grupa. Jedan od mogućih odgovora jeste da konačan broj sinhronih grupa treba da bude onaj pri kojem je najveća unutar-grupna sinhrona udaljenost mala u odnosu na najmanju između-grupnu sinhronu udaljenost, jer to odgovara situaciji sa udaljenim, dobro definisanim sinhronim grupama. Drugi odgovori uključuju obim redukcije kojem se teži, praktična ograničenja pri izboru studijske grupe (videti naredni korak procedure), i tako dalje.

5. Izbor studijske grupe. Izbor prema kojem će jedna sinhrona grupa ili više sinhronih grupa zajedno konsituisati studijsku grupu zavisi od konkretnih događaja koji žele da se istraže. Jasno je da studijska grupa treba da sadrži sve generatore koji će biti podvrgnuti poremećajima. Za poremećaje na potrošačkim čvorovima ili prenosnim vodovima koji nisu čvrsto povezani samo sa unutrašnjim sistemom, pravilan izbor studijske grupe možda i nije tako očigledan (potrebna su dalja istraživanja i iskustvo kako bi se precizirao izbor studijske grupe u takvim situacijama). Vodeći princip je, međutim, da unutar-grupni modovi spoljašnjih (nestudijskih) sinhronih grupa ne treba da budu značajno pobuđeni poremećajima od interesa. To zauzvrat podrazumeva da studijska grupa treba da se sastoji iz jedne ili više čitavih sinhronih grupa, a ne njihovih delova. To znači da studijska grupa ne treba da bude proizvoljno definisana; dekompozicija u sinhronu grupe pokazuje gde dozvoljene granice studijske grupe mogu biti.

U trećoj etapi procedura se vraća originalnom, velikom, neredukovanom, nelinearnom modelu elektroenergetskog sistema, da bi se na njega primenila strukturalna dekompozicija ustanovljena prethodnim analizama pojednostavljenog modela. Treću etapu čine tri koraka:

6. Originalnom, neredukovanom modelu uvesti strukturu izvedenu korišćenjem koncepta sinhronizma. Postupak se vraća detaljnom linearizovanom modelu kojem se dodeljuje struktura dobijena analizama pojednostavljenog modela. U linearizovanom modelu promenljive stanja se razdvajaju na relevantne (koje uključuju promenljive stanja koje odgovaraju generatorima u studijskoj grupi i spoljašnjim baznim generatorima) i manje relevantne (koje uključuju promenljive stanja koje odgovaraju manje bitnim (tj. nebaznim, spoljašnjim) generatorima).
7. Dobiti (izvesti) ekvivalent originalnog modela. U ovom koraku se manje relevantne promenljive izražavaju preko relevantnih (pomoću faktora modalne korekcije), tako da ekvivalent sadrži samo relevantne promenljive. Modeli svih generatora studijske grupe i svih baznih generatora izvan studijske grupe zadržavaju se u originalnom nelinearnom obliku (sa svim detaljima). Model svakog preostalog manje bitnog generatora zamenjuje se jednostavnim nedinamičkim linearnim kolom koje sadrži zavisani strujni izvor koji pokreću bazni generatori (svojim oscilovanjem). Potrošački čvorovi koji su samo međusobno povezani i sa čvorovima u kojima su priključeni manje važni generatori mogu se eliminisati standardnom redukcijom Ward tipa, a njihovi efekti mogu se uvažiti dodavanjem članova koji su linearno zavisni od napona svih sabirnica na koje su priključeni manje bitni generatori kao promenljivih koje dodatno pokreću zavisne strujne izvore. Ostatak mreže se zadržava nepromenjen.
8. Proračunavanje faktora modalne korekcije. U [9] se predlažu četiri različita načina proračunavanja, odnosno odabira faktora modalne korekcije, pri čemu se napominje da čak i najjednostavniji način daje zadovoljavajuće rezultate.

Sinhrono modalno ekvivalentiranje ima za cilj ekvivalentiranje dinamičkih modela velikih elektroenergetskih sistema uz očuvanje njihove strukture. Ono je motivisano konceptom spore koherencije za podelu elektroenergetskog sistema i grupisanje, ali su formulacija i odgovarajući algoritmi tog pristupa opštiji u nekim važnim aspektima [9]. Opisana procedura sinhronog modalnog ekvivalentiranja primenjena je u *Tački 8.3.2.*

### 3.3.3. Analiza singularnih perturbacija

Dinamika elektroenergetskih sistema obuhvata odzive u širokom vremenskom opsegu, u rasponu od nekoliko mikrosekundi (atmosfera pražnjenja) do perioda od više minuta (automatska regulacija snage). U okviru vremenskog opsega koji odgovara analizi stabilnosti takođe postoji nekoliko vremenskih skala zbog različitih brzina odziva različitih uređaja, kao što su sinhrona mašine i pobudni sistemi, kao i usled interkonekcija koje postoje u okviru velikih elektroenergetskih sistema [95]. Razdvajanje vremenskih skala rezultuje modelovanjem u vremenskim skalama i analizom singularnih perturbacija.

Analiza singularnih perturbacija se najpogodnije primenjuje na sisteme sa dve vremenske skale, koji su već dati u eksplicitnoj formi (razdvojene sporopromenljive i brzopromenljive promenljive), što je razrađeno u [27], [28]. Međutim, nisu svi modeli elektroenergetskih sistema u eksplicitnoj formi. Tako, prvi zadatak modelovanja u vremenskim skalama je identifikacija parametra singularnih perturbacija (odnos vremenskih skala sporih i brzih fenomena [93, Chapter 2]), koji može biti rezultat odnosa malih i velikih vremenskih konstanti, slabih i jakih konekcija itd., i formulacija fizičkih transformacija potrebnih za razdvajanje sporopromenljivih i brzopromenljivih promenljivih. Jednom kada je sistem u eksplicitnoj formi, setovanjem parametra singularnih perturbacija na nulu, sporopromenljivi i brzopromenljivi podsystemi se mogu razdvojiti i analizirati nezavisno [95].

U [93, Chapter 3] je pokazano kako se druge važne forme singularno perturbovanih sistema mogu redukovati u eksplicitnu formu. U [95] je tehnika modelovanja u dve vremenske skale primenjena na nekoliko problema modelovanja elektroenergetskih sistema. Rezultati opisani u [95] ilustruju ulogu analize singularnih perturbacija, kao analitičkog alata za modelovanje elektroenergetskog sistema i na nivou jednog uređaja i na nivou sistema. Takođe je ilustrovano kako se u procesu primene ove tehnike može steći dodatni uvid u dinamiku razmatranog elektroenergetskog sistema.

### 3.3.4. Modalna analiza

U modalnoj analizi, kompleksni nelinearni model elektroenergetskog sistema se transformiše u linearnu formu jednačina stanja (2.20). Tehnika modalne analize zahteva proračunavanje sopstvenih vrednosti matrice  $A_S$  definisane jednačinom (2.19), što je vrlo zahtevno, i daje redukovani sistem diferencijalnih jednačina koji, generalno, ne može biti interpretiran modelima fizičkih jedinica (modelima elemenata elektroenergetskog sistema), odnosno ekvivalenti dobijeni korišćenjem ove tehnike nemaju strukturni identitet [113]. Međutim, metode modalne analize imaju rigoroznu matematičku osnovu i daju dobar uvid u različite modove oscilacija koje su prisutne u elektroenergetskom sistemu. Za razliku od ekvivalenta dobijenog korišćenjem koncepta koherencije, kvalitet ekvivalenta dobijenog korišćenjem ove metode ne zavisi od podesnosti poremećaja koji se bira za konstruisanje ekvivalenta [134]. Modalna analiza se pokazala efikasnom, mada problem pronalaženja kompletnog skupa dominantnih modova još uvek nije do kraja rešen, iako je postignut značajan napredak u tom pravcu [99], [100].

Modalno-koherentna metoda [134], [140–143] je razvijena za izvođenje dinamičkih ekvivalenata, tako da se kombinuju prednosti modalne analize i koncepta koherencije. Modalno-koherentan ekvivalent može očuvati ne samo koherentne grupe modela originalnog sistema, već i pojedine originalne modove oscilacija. Tehnika modalno-koherentnog ekvivalentiranja je vredan alat za analizu tranzijentne stabilnosti, s obzirom da se ekvivalent, za dati elektroenergetski sistem, konstruiše samo jednom i može se koristiti za analizu bilo kojeg poremećaja u istom.

#### 3.3.5. Identifikacija

Pristupi koji pripadaju ovoj grupi metoda baziraju se na različitim tehnikama identifikacije parametara sistema. Cilj je estimacija skupa parametara modela koji predstavlja deo sistema, na osnovu merenja bitnih signala. Tehnike takvog tipa su privlačne iz razloga što ne zahtevaju detaljne informacije o delu elektroenergetskog sistema koji se ekvivalentira. Suština metoda koje se baziraju na identifikaciji jeste poređenje signala iz realnog sistema sa vrednostima tih signala proračunatih korišćenjem modela, te korekcija parametara modela kako bi se smanjila razlika ta dva signala [110].

#### 3.3.6. Ostale metode

Dobro ustanovljena rešenja za redukciju dinamičkih modela postoje u teoriji upravljanja i baziraju se na teoriji balansiranja (videti *Tačku 3.1.3.*). Međutim, direktna primena tih tehnika na redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema suočava se sa dva velika izazova [22]. Prvo, redukovani model bi trebao da očuva strukturu fizičkog sistema, tj., diferencijalne i algebarske jednačine za generatore i njihove regulatore, i algebarske jednačine za elektroenergetsku mrežu. Prema tome, promenljive stanja koje nemaju fizičko značenje najčešće nisu odgovarajuće. Drugo, veličina modela je bitan aspekt kada se razmatraju realni elektroenergetski sistemi.

U [21] je teorija balansiranja kombinovana sa modalno-koherentnom analizom u svrhu estimacije dinamičkog ekvivalenta dobijenog korišćenjem koncepta koherencije za primenu u analizama tranzijentne stabilnosti. Istraživan je odnos između modalno-koherentne metode i teorije balansnih realizacija. Predložena je metoda za estimaciju mogućeg stepena redukcije korišćenjem teorije balansnih realizacija. Ta ocena mogućeg stepena redukcije koristi se kako bi se odredilo kada zaustaviti grupisanje generatorskih jedinica koje diktira modalno-koherentna analiza. Taj pristup je odgovarajući za elektroenergetske sisteme srednje veličine [144]. U [144] je razmatran alternativni pristup odgovarajući za velike elektroenergetske sisteme, koji se bazira na tabeli u kojoj su parovi generatora rangirani prema stepenu međusobne koherencije, i taj pristup je poređen sa pristupom na bazi teorije balansnih realizacija (predloženim u [21]). U [11] su dati teorijski rezultati koji uspostavljaju analitičku vezu između koherencije i teorije balansnih realizacija. Uspostavljene su analitičke veze koje povezuju koherentno ponašanje generatora sa redudantnošću u Gramian-ovim matricama (redudantnost promenljivih stanja) linearnog modela elektroenergetskog sistema.

U [22] je koncept graničnog sinhronizma korišćen za generisanje akorda, te kombinovan sa tehnikama grupisanja predloženim u [12], [67], kako bi se, primenom tehnike balansiranja, dobio redukovani model kojim je očuvana struktura elektroenergetskog sistema. U istom radu su istraživane veze između koncepta sinhronizma i nedostatka kontrolabilnosti i observabilnosti modela elektroenergetskog sistema, u opštem kontekstu. Dobijeni rezultati popunjavaju prazninu između dva pristupa (sinhronizma i balansiranja) i čine vezu između nekoliko postojećih karakterizacija redudantnosti kod elektroenergetskih sistema

(redundantnosti generatorskih jedinica, parametara i promenljivih modela, itd.), poput koncepta sinhronizma i spore koherencije, i principa koji se uobičajeno koriste u teoriji upravljanja. Osnovna prednost, u odnosu na klasičan pristup redukciji korišćenjem koncepta balansiranja, jeste da je rezultat redukcije fizički elektroenergetski sistem, a ne samo matematički model u realizaciji prostora stanja sa promenljivim koje nemaju fizičko značenje. U [145] je predložen metod za konstruisanje dinamičkih ekvivalenata elektroenergetskog sistema za studije analize stabilnosti tipa „dan unapred“. U istom radu je korišćen pojam graničnog sinhronizma predstavljen u [22]. Pojam graničnog sinhronizma obezbeđuje određivanje, na robustan način, klasa električnih mašina iz spoljašnjeg sistema koje imaju isti uticaj na unutrašnji sistem, bez korišćenja informacija iz unutrašnjeg sistema. Nakon što se odrede te klase, metode grupisanja [12], [67] koriste se kako bi se dobio fizički dinamički ekvivalent (dinamički ekvivalent koga čine generatorske jedinice, njihovi regulatori, vodovi, itd.), tj. redukovani model sa očuvanom strukturom elektroenergetskog sistema.

U [146] je predložena tehnika redukcije modela koja se bazira na proračunavanju potprostora proizvoda Gramian-ovih matrica, korišćenjem formulacije predložene u [36], sa izmenom koja obezbeđuje očuvanje slabo prigušenih i nestabilnih modova originalnog sistema u redukovanom modelu. Redukovani model pokazuje modalne karakteristike slične originalnom modelu u opsegu učestanosti koji odgovara modovima oscilovanja, i može se koristiti za podešavanje uređaja za prigušenje oscilacija.

U [19] je tehnika, nazvana retka LR(CF)-ADI metoda, korišćenja za redukciju dinamičkih modela velikih elektroenergetskih sistema koji su opisani deskriptor formom (3.3). Predložena tehnika je u stvari poboljšana LR(CF)-ADI metoda (videti *Tačku 3.1.5.*), i koristi osobinu retkosti modela elektroenergetskog sistema opisanih deskriptor formom.

Spoljašnji sistem je važan samo onoliko koliko ima uticaj (za razmatrani fenomen) na unutrašnji sistem, i često se predstavlja linearnim modelom (kada se analiziraju određeni fenomeni, poput analize stabilnosti pri malim poremećajima). Štaviše, često je slučaj da je ulazno-izlazno ponašanje spoljašnjeg elektroenergetskog sistema od interesa samo u nekom opsegu učestanosti (na primer, samo učestanosti do 2 Hz), u zavisnosti od prirode njegove interkonekcije sa unutrašnjim elektroenergetskim sistemom i nivoa u kojem se modeluju generatorske jedinice. To čini Krylov-e metode (videti *Tačku 3.1.4.*) pogodne za primenu za redukciju dinamičkog modela spoljašnjeg elektroenergetskog sistema. U [18] je istraživano korišćenje Krylov-ih metoda za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema. Dodatno je istraživana veza između Krylov-ih metoda i koncepta koherencije, sa ciljem da se očuva fizička veza između redukovanog i originalnog modela. Metod redukcije predložen u [18] razmatra spoljašnji elektroenergetski sistem kao ulazno-izlazni sistem.



## 4. TEORIJA BALANSNIH REALIZACIJA

Realizacija jednog linearnog vremenski nepromenljivog sistema opisanog jednačinama (3.1) je skup četiri matrice:

$$(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}. \quad (4.1)$$

Generalno, jedan linearan vremenski nepromenljiv sistem ima beskonačno mnogo realizacija, s obzirom da je njegova matrica prenosnih funkcija invarijantna u odnosu na transformacije prostora stanja [10, Part I, Paper 1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow T\mathbf{x} \\ (A, B, C, D) &\rightarrow (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D), \end{aligned} \quad (4.2)$$

što demonstrira prost proračun:

$$\mathbf{G}_T(s) = D + (CT^{-1}) + (sI - TAT^{-1})^{-1} + (TB) = C(sI - A)^{-1} B + D = \mathbf{G}(s), \quad (4.3)$$

gde je  $\mathbf{G}_T(s)$  matrica prenosnih funkcija sistema dobijenog transformacijom prostora stanja  $T$ . To nije jedina nejedinstvenost povezana sa predstavom linearnog vremenski nepromenljivog sistema. Dodavanjem stanja koja ne utiču na ulazno-izlazno ponašanje sistema, što znači da se za iste ulaze dobijaju isti izlazi, dobija se realizacija istog linearnog vremenski nepromenljivog sistema [10, Part I, Paper 1].

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da red sistema ( $n$ ) može biti proizvoljno povećan, a da se pritom ne menja ulazno-izlazno ponašanje sistema. Sa druge strane, za svaki sistem postoji jedinstven minimalan broj stanja (promenljivih stanja) neophodan da se kompletno opiše njegovo ulazno-izlazno ponašanje. Taj broj  $n_m$  se zove McMillan-ov stepen sistema. Minimalna realizacija sistema je realizacija  $(A_m, B_m, C_m, D_m)$  reda  $n_m$ . Ono što treba napomenuti jeste da je jedino McMillan-ov stepen jedinstven; primenom bilo koje transformacije prostora stanja dobija se druga minimalna realizacija istog sistema. Pronalaženje minimalne realizacije datog sistema može se smatrati prvim korakom redukcije modela, s obzirom da se iz sistema eliminišu redundantna (neminimalna) stanja [10, Part I, Paper 1].

Iako su realizacije nejedinstvene, stabilni linearni vremenski nepromenljivi sistemi imaju određen skup invarijanti u odnosu na transformacije prostora stanja koje daju motiv pronalaženju redukovanih modela. Iz Lyapunov-e teorije stabilnosti (videti na primer [147, Chapter 13]) jasno je da za stabilnu matricu  $A$ , Lyapunov-e jednačine:

$$AP + PA^T = -BB^T; \quad A^T Q + QA = -C^T C, \quad (4.4)$$

imaju jedinstvena pozitivno semidefinitna rešenja  $P$  i  $Q$ . Ta rešenja predstavljaju Gramian-ovu matricu kontrolabilnosti ( $P$ ) i observabilnosti ( $Q$ ) sistema. Gramian-ove matrice kontrolabilnosti i observabilnosti definisane su sledećim jednačinama [1, Chapter 7]:

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t} dt; \quad \mathbf{Q} = \int_0^{\infty} e^{A^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{At} dt. \quad (4.5)$$

Ukoliko je  $\mathbf{P}$  pozitivno definitna matrica, onda je sistem kontrolabilan, a ukoliko je  $\mathbf{Q}$  pozitivno definitna matrica, sistem je observabilan. Kontrolabilnost plus observabilnost je ekvivalentno minimalnosti sistema, tako da za minimalne sisteme, sve sopstvene vrednosti proizvoda Gramian-ove matrice kontrolabilnosti i Gramian-ove matrice observabilnosti su striktno pozitivni realni brojevi. Kvadratni koreni tih sopstvenih vrednosti, obeleženi po opadajućem redosledu na sledeći način [10, Part I, Paper 1]:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (4.6)$$

su poznati kao *Hankel-ove singularne vrednosti* linearnog vremenski nepromenljivog sistema i one su invarijante sistema. Neka:

$$(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{D}) = (\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T} \mathbf{B}, \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1}, \mathbf{D}) \quad (4.7)$$

predstavlja transformisanu realizaciju sistema sa pripadajućom Lyapunov-om jednačinom kontrolabilnosti:

$$\mathbf{0} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{A}}^T + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}} (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{A}^T \mathbf{T}^T + \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T. \quad (4.8)$$

To je ekvivalentno sa:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} (\mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{P}} (\mathbf{T}^{-1})^T) + (\mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{P}} (\mathbf{T}^{-1})^T) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T. \quad (4.9)$$

Jedinstvenost rešenja Lyapunov-e jednačine (videti na primer [147]) implicira:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T}^T, \quad (4.10)$$

i, analogno:

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}. \quad (4.11)$$

Stoga važi sledeća jednakost:

$$\hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}, \quad (4.12)$$

koja pokazuje da je:

$$\Lambda(\hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}}) = \Lambda(\mathbf{P} \mathbf{Q}) = \{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2\}, \quad (4.13)$$

gde je  $\Lambda$  spektralni operator. Ono što treba napomenuti jeste da se proširenjem prostora stanja neminimalnim stanjima samo dodaju Hankel-ove singularne vrednosti jednake nuli, dok nenulte Hankel-ove singularne vrednosti ostaju nepromenjene [10, Part I, Paper 1]. U mnogim slučajevima sopstvene vrednosti matrica  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$ , kao i Hankel-ove singularne vrednosti opadaju vrlo brzo [10, Part I, Paper 2].

Vrlo važan tip realizacije predstavljaju *balansne realizacije*. Realizacija sistema se zove balansnom ukoliko su Gramian-ove matrice kontrolabilnosti i observabilnosti jednake i dijagonalne [10, Part I, Paper 1]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \quad (4.14)$$

sa opadajućim Hankel-ovim singularnim vrednostima na dijagonali. Hankel-ove singularne vrednosti daju meru važnosti promenljivih stanja balansne realizacije dinamičkog modela, jer

su promenljive stanja sa najvećim Hankel-ovim singularnim vrednostima one na koje najviše utiču ulazne promenljive i one koje najviše utiču na izlazne promenljive. Dakle, promenljive stanja koje odgovaraju najvećim Hankel-ovim singularnim vrednostima dominantno utiču na ulazno-izlazno ponašanje sistema [3]. Izbacivanje promenljivih stanja koje odgovaraju manjim Hankel-ovim singularnim vrednostima rezultuje modelom čije ulazno-izlazno ponašanje blisko aproksimira ulazno-izlazno ponašanje originalnog modela. Naravno, što se model više redukuje, mogu se očekivati veća odstupanja između ponašanja redukovano i originalnog modela.

Sa konceptom balansiranja su se prvi susreli Mullis i Roberts pri projektovanju digitalnih filtera [148]. Teorijski značaj koncepta balansiranja je nekoliko godina kasnije prepoznao Moore. On je teoriju balansnih realizacija predstavio u [7], sa ciljem da je koristi kao alat za redukciju linearnih vremenski nepromenljivih dinamičkih sistema opisanih jednačinama (3.1).

Koncept balansiranja se u suštini sastoji u jednovremenoj dijagonalizaciji dve pozitivno semidefinitne matrice ( $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$ ). Međutim, treba napomenuti da su rešenja različitih Riccati-jevih jednačina takođe pozitivno definitne matrice, te da postoje i drugi tipovi balansiranja (stohastičko balansiranje, pozitivno realno balansiranje itd.) [1, Chapter 7].

Balansna realizacija modela opisanog jednačinama (3.1) se dobija primenom matrice transformacije  $\mathbf{T}_b$  ( $\Delta \mathbf{x}_b = \mathbf{T}_b \Delta \mathbf{x}$ ), čime se dobija druga predstava stanja modela:

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b \mathbf{u}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{D}_b \mathbf{u}, \quad (4.15)$$

sa matricama  $\mathbf{A}_b = \mathbf{T}_b \mathbf{A} \mathbf{T}_b^{-1}$ ,  $\mathbf{B}_b = \mathbf{T}_b \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_b = \mathbf{C} \mathbf{T}_b^{-1}$  i  $\mathbf{D}_b = \mathbf{D}$ .

Matrica  $\mathbf{T}_b$  se dobija rešavanjem sledećeg optimizacionog problema [1, Chapter 7]:

$$\min_{\mathbf{T}} \left\{ \text{trace}(\mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T}^T + (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}) \right\}. \quad (4.16)$$

Vrednost optimizacione funkcije (4.16) za  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_b$  jednaka je dvostrukoj sumi Hankel-ovih singularnih vrednosti.

Za minimalnu realizaciju uvek postoji regularna matrica  $\mathbf{T}_b \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; za neminimalne sisteme Gramian-ove matrice takođe mogu biti transformisane u dijagonalne matrice sa vodećim submatricama dimenzija  $\hat{n} \times \hat{n}$  jednakim  $\text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\hat{n}}\}$ , i:

$$\hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}} = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{\hat{n}}^2, 0, 0, \dots, 0\}. \quad (4.17)$$

Za minimalan i asimptotski stabilan linearan vremenski nepromenljiv sistem matrica  $\mathbf{T}_b$  se dobija na sledeći način [10, Part I, Paper 2]:

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{\Gamma}^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{R}^{-1}, \quad (4.18)$$

gde su:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T; \quad \mathbf{R}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Gamma}^2 \mathbf{U}^T. \quad (4.19)$$

Generalno, matrica transformacije sistema u balansnu predstavu je definisana na sledeći način: neka postoji  $q$  udaljenih Hankel-ovih singularnih vrednosti  $\sigma_i$  višestrukosti  $m_i$ ; matrica transformacije sistema u balansnu predstavu  $\hat{\mathbf{T}}_b$  ima formu  $\hat{\mathbf{T}}_b = \mathbf{V} \mathbf{T}_b$ , gde je  $\mathbf{T}_b$  definisana jednačinom (4.18), a  $\mathbf{V}$  je blok dijagonalna unitarna matrica sa  $q$  blokova proizvoljnih unitarnih matrica dimenzija  $m_i \times m_i$  [10, Part I, Paper 2].

Da bi se dobila balansna realizacija modela, Gramian-ove matrice  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  se moraju izračunati. Gramian-ove matrice se dobijaju rešavanjem Lyapunov-ih jednačina (4.4). Za male i srednje sisteme, Lyapunov-e jednačine se mogu rešiti efikasno [56], [57]. Za velike retke sisteme, iterativne metode imaju prednost, s obzirom da čuvaju retkost sistema i mnogo su pogodnije za paralelnu obradu na više računara [10, Part I, Paper 2]. Najpopularnije iterativne šeme koje se koriste za rešavanje velikih retkih Lyapunov-ih jednačina su Smith-ova metoda [58], ADI iterativna metoda [59], Smith(l)-ova metoda [60], LR-ADI iterativna metoda [60], CF-ADI iterativna metoda [65], LR-Smith(l)-ova metoda [60] i Modifikovana LR-Smith(l)-ova metoda [66].

U balansnoj realizaciji dobijenoj pomoću transformacione matrice  $\mathbf{T}_b$ , Hankel-ove singularne vrednosti daju energetsko značenje stanjima. Posebno, minimalna energija potrebna da se sistem iz nultog stanja u  $t = -\infty$  prevede u stanje  $\mathbf{x}_0$  u  $t = 0$  je jednaka [10, Part I, Paper 2]:

$$E_r = \min_{\mathbf{x}(-\infty)=0, \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0} \|\mathbf{u}(t)\|^2, \quad t \leq 0. \quad (4.20)$$

Ta energija je jednaka [10, Part I, Paper 1]:

$$E_r = (\mathbf{x}_0)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 = (\hat{\mathbf{x}}_0)^T \hat{\mathbf{P}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k} \hat{x}_k^2, \quad (4.21)$$

gde je  $\hat{\mathbf{x}}_0 = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \dots \quad \hat{x}_n]^T = \mathbf{T}_b \mathbf{x}_0$ ; stoga male Hankel-ove singularne vrednosti odgovaraju stanjima koja su teško dostižna. Izlazna energija koja je rezultat početnog stanja  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{u}(t) = 0$  za  $t > 0$  (dobijena posmatranjem izlaza za početno stanje  $\mathbf{x}_0$  bez ulaza) je jednaka [10, Part I, Paper 2]:

$$E_o = \|\mathbf{p}(t)\|^2, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u}(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.22)$$

Ta energija je jednaka [10, Part I, Paper 1]:

$$E_o = (\mathbf{x}_0)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_0 = (\hat{\mathbf{x}}_0)^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{x}}_0 = \sum_{k=1}^n \sigma_k \hat{x}_k^2. \quad (4.23)$$

Stoga, velike Hankel-ove singularne vrednosti odgovaraju stanjima koja sadrže najveći deo energije sistema. Hankel-ove singularne vrednosti predstavljaju i mere koliko su određena stanja uključena u prenos energije od ulaza ka izlazima.

Iz gore navedenog sledi da su stanja koja su teško dostižna, tj. zahtevaju veliku energiju  $E_r$ , obuhvaćena sopstvenim vektorima matrice  $\mathbf{P}$  koji odgovaraju malim sopstvenim vrednostima. Štaviše, stanja koja su teška za posmatranje, tj. daju malu energiju observacije  $E_o$ , su obuhvaćena sopstvenim vektorima matrice  $\mathbf{Q}$  koji odgovaraju malim sopstvenim vrednostima. Stoga, prethodne jednačine daju način za određivanje stepena kontrolabilnosti i stepena observabilnosti stanja datog sistema. Redukovani model može se dobiti eliminisanjem stanja koja su teško dostižna i teška za posmatranje. Međutim, može da se desi da stanja koja su teško dostižna nisu teška za posmatranje i obrnuto (koncepti dostižnosti i observabilnosti su zavisni od predstave stanja modela). Kada je sistem balansiran, stanja koja su teško dostižna su istovremeno i teška za posmatranje (stepen dostižnosti i stepen opservabilnosti svakog stanja su jednaki) [1, Chapter 7].

Ukratko, čini se razumnim da se redukovani model dobije eliminisanjem stanja koja su najmanje kontrolabilna, zadržavajući stanja koja sadrže najveći deo energije sistema, jer su to

stanja koja su najviše uključena u prenos energije od ulaza ka izlazima, tj. zadržavanjem stanja kojima odgovaraju najveće Hankel-ove singularne vrednosti. To je upravo i ideja balansnog odsecanja.

Balansno odsecanje se sastoji iz tri glavna koraka [19]. Prvi korak je proračun Gramian-ovih matrica  $P$  i  $Q$  rešavanjem Lyapunov-ih jednačina (4.4). Drugi korak je faktorizacija matrica  $P$  i  $Q$   $P = RR^T$  i  $Q = LL^T$ , gde su  $R$  i  $L$  Cholesky faktori. Ovi faktori se potom množe i njihov proizvod se dekomponuje na sledeći način:

$$R^T L = W \Gamma Y^T = [W_1 \quad W_2] \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

pri čemu se  $W_1$  i  $Y_1$  sastoje od vodećih  $r$  kolona matrica  $W$  i  $Y$ , respektivno. Matrica  $\Gamma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$  sadrži singularne vrednosti proizvoda  $U^T L$ , odnosno Hankel-ove singularne vrednosti sistema.

Treći korak je konstrukcija redukovanog modela (u formi jednačina (3.1)) reda  $r \ll n$  pomoću matrica:

$$A_{11} = T_L^T A T_R; \quad B_1 = T_L^T B; \quad C_1 = C T_R; \quad D_1 = D, \quad (4.25)$$

gde su matrice  $T_L$  i  $T_R$  definisane na sledeći način:

$$T_L = L Y_1 \Gamma_1^{-1/2}; \quad T_R = U W_1 \Gamma_1^{-1/2}. \quad (4.26)$$

Matrice  $Y_1$ ,  $W_1$  i  $\Gamma_1$  su izabrane tako da su  $r$  najvećih Hankel-ovih singularnih vrednosti i  $r$  odgovarajućih promenljivih stanja očuvani u redukovanom modelu.

Aproksimacija balansnim odsecanjem čuva stabilnost sistema, a  $H^\infty$  norma (maksimum frekventnog odziva) greške koja se pritom pravi je sa gornje strane ograničena dvostrukom sumom Hankel-ovih singularnih vrednosti koje odgovaraju promenljivim stanja koje su izbačene iz modela ( $2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n)$ ).

U [10, Part I, Paper 3] su definisani osnovni koncepti teorije balansnih realizacija (realizacije (minimalne i balansne), kontrolabilnost i observabilnost, Gramian-ove matrice, Hankel-ove singularne vrednosti) za deskriptor sisteme.

## 5. BISIMULACIONE I APROKSIMATIVNE BISIMULACIONE RELACIJE

Zajednički predmet istraživanja teorije računarskih nauka i teorije upravljanja jeste karakterizacija sistema koji su spoljašnje ekvivalentni. Dva sistema se smatraju različitim samo ako se razlika može detektovati spoljašnjim sistemom koji je u interakciji sa tim sistemima. To omogućava prebacivanje sa jedne na drugu spoljašnje ekvivalentnu reprezentaciju jednog te istog sistema i zamenu originalnog sistema spoljašnje ekvivalentnim, ali jednostavnijim sistemom. Razvoj teorije spoljašnje ekvivalencije u dve navedene oblasti nauke je tekao poprilično nezavisno. Jedan od razloga te dihotomije je to što su matematički formalizmi za opisivanje sistema u računarskim naukama (diskretni dinamički procesi) i teoriji upravljanja (kontinualni dinamički procesi) različiti. Međutim, sa rastom interesovanja za hibridne sisteme (oni sa povezanim diskretnim i kontinualnim dinamičkim procesima) postoji jasna potreba za povezivanjem korišćenih pristupa [149].

Klasični pojmovi u teoriji upravljanja su ekvivalencija prostora stanja dinamičkih sistema i zamena dinamičkog sistema ekvivalentnim sistemom sa minimalnom dimenzijom prostora stanja (minimalnom realizacijom). Pojam koji se široko koristi u računarskim naukama je bisimulacija. Bisimulacija je binarna relacija između sistema, gde se asociirani sistemi ponašaju na isti način (u smislu da jedan sistem simulira drugi i obrnuto). Milner [150] i Park [151] su predstavili bisimulaciju kao koncept koji obezbeđuje efikasnu redukciju kompleksnosti konkurentnih procesa i izučavanje ekvivalencije automata. U prethodnoj deceniji, ovaj koncept je počeo da se koristi i za kontinualne dinamičke sisteme (videti [152] i [153]).

Bisimulacija kombinuje ideje ekvivalencije ponašanja i ekvivalencije prostora stanja. Za dva sistema u prostoru stanja koja su kontrolabilna i observabilna, ekvivalencija u smislu bisimulacija i ekvivalencija prostora stanja su iste. Štaviše, bilo koji sistem u prostoru stanja je bisimilaran sa svojom minimalnom realizacijom. Tako, ekvivalencija u smislu bisimulacija je opštija. Štaviše, ona predstavlja dobar spoj ekvivalencije prostora stanja i jednakosti ulazno-izlaznog ponašanja sistema [154].

Pojam bisimulacije je egzaktan, zahtevajući da spoljašnje ponašanje dva sistema bude identično. U interakciji sa fizičkim svetom, egzaktan pojam ekvivalencije je poprilično restriktivan i nije robustan za praktičnu primenu. Kako ne dozvoljava ni najmanje odstupanje, bisimulacija ograničava kompresiju sistema koja se može postići. Aproksimativne bisimulacije koje generalizuju egzaktan pojam bisimulacije kao poseban slučaj i koje dozvoljavaju mogućnost odstupanja u ponašanju sistema (s obzirom da zahtevaju da odstupanje u spoljašnjem ponašanju dva sistema bude manje ili jednako od određene vrednosti), sigurno omogućuju veću kompresiju sistema [155].

### 5.1. OZNAČENI TRANZICIONI (PRELAZNI) SISTEMI

Pojam bisimulacije je jedan od najčešće korišćenih za redukciju kompleksnosti označenih tranzicionih sistema [152]. Označen tranzicioni sistem sa observacijama je šestorka  $T = (\Psi, \Sigma, \rightarrow, \Psi^0, \Pi, \langle\langle \cdot \rangle\rangle)$  koja se sastoji od [156]:

- (moguće beskonačnog) skupa stanja  $\Psi$ ,
- (moguće beskonačnog) skupa oznaka  $\Sigma$ ,
- prelazne relacije  $\rightarrow \subseteq \Psi \times \Sigma \times \Psi$ ,
- (moguće beskonačnog) skupa početnih stanja  $\Psi^0 \subseteq \Psi$ ,
- (moguće beskonačnog) skupa observacija  $\Pi$ , i
- funkcije koja preslikava elemente skupa stanja u elemente skupa observacija  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle: \Psi \rightarrow \Pi$ .

Tranzicija  $(\psi, \zeta, \psi') \in \rightarrow$  se označava  $\psi \xrightarrow{\zeta} \psi'$ . Označeni tranzicioni sistemi se mogu posmatrati kao grafovi, moguće sa beskonačnim brojem stanja ili prelaza [156].

Trajektorija stanja označenog tranzicionog sistema  $T$  predstavlja beskonačan niz prelaza [156]:

$$\psi^0 \xrightarrow{\zeta^0} \psi^1 \xrightarrow{\zeta^1} \psi^2 \xrightarrow{\zeta^2} \dots, \quad (5.1)$$

gde  $\psi^0 \in \Psi^0$ , dok  $\zeta^i \in \Sigma$ ,  $i \in \mathbb{N}^0$ . Odgovarajuća eksterna trajektorija  $\pi^0 \xrightarrow{\zeta^0} \pi^1 \xrightarrow{\zeta^1} \pi^2 \xrightarrow{\zeta^2} \dots$  (gde je  $\pi^i = \langle\langle \psi^i \rangle\rangle$  za svako  $i \in \mathbb{N}^0$ ) opisuje evoluciju observacija u skladu sa dinamikom označenog tranzicionog sistema [156].

Neka su  $T_1 = (\Psi_1, \Sigma_1, \rightarrow_1, \Psi_1^0, \Pi_1, \langle\langle \cdot \rangle\rangle_1)$  i  $T_2 = (\Psi_2, \Sigma_2, \rightarrow_2, \Psi_2^0, \Pi_2, \langle\langle \cdot \rangle\rangle_2)$  dva označena tranziciona sistema sa istim skupom oznaka ( $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ ) i istim skupom observacija ( $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$ ). Relacija  $R \subseteq \Psi_1 \times \Psi_2$  se zove bisimulaciona relacija između  $T_1$  i  $T_2$  ako za svako  $(\psi_1, \psi_2) \in R$  [155]:

1.  $\langle\langle \psi_1 \rangle\rangle_1 = \langle\langle \psi_2 \rangle\rangle_2$ ,
2.  $\forall \psi_1 \xrightarrow{\zeta} \psi'_1, \exists \psi_2 \xrightarrow{\zeta} \psi'_2$  tako da  $(\psi'_1, \psi'_2) \in R$ ,
3.  $\forall \psi_2 \xrightarrow{\zeta} \psi'_2, \exists \psi_1 \xrightarrow{\zeta} \psi'_1$  tako da  $(\psi'_1, \psi'_2) \in R$ .

Ukoliko je svako početno stanje označenog tranzicionog sistema  $T_1$  u relaciji sa nekim početnim stanjem označenog tranzicionog sistema  $T_2$  i obrnuto, onda  $T_1$  i  $T_2$  simuliraju jedan drugog –  $T_1$  i  $T_2$  su bisimilarni.  $T_1$  i  $T_2$  su bisimilarni (što se označava  $T_1 \cong T_2$ ) ukoliko postoji  $R$ , bisimulaciona relacija između  $T_1$  i  $T_2$  tako da, za svako  $\psi_1 \in \Psi_1^0$ , postoji  $\psi_2 \in \Psi_2^0$  tako da  $(\psi_1, \psi_2) \in R$  i obrnuto. Relacija  $\cong$  je relacija ekvivalencije na skupu tranzicionih sistema [155].

Egzaktna bisimulacija između dva označena tranziciona sistema zahteva da su njihove observacije identične. Aproksimativna bisimulacija koja generalizuje egzaktnu bisimulacionu relaciju je manje stroga, s obzirom da samo zahteva da su observacije sistema proizvoljno

bliske [156]. Da bi se aproksimativne bisimulacione relacije mogle definisati, a kvalitet aproksimacije dobijene korišćenjem istih mogao kvantifikovati, razmatrane tranzicione sisteme treba opremiti nekom topološkom strukturom indukovanom metrikama na prostoru stanja i prostoru observacija. Tranzicioni sistem  $T = (\Psi, \Sigma, \rightarrow, \Psi^0, \Pi, \langle\langle \cdot \rangle\rangle)$  se zove *metrički tranzicioni sistem* ukoliko su  $(\Psi, d_\Psi)$  i  $(\Pi, d_\Pi)$  metrički prostori [155].

U nastavku je definisana aproksimativna bisimulaciona relacija na bazi metrike definisane na skupu observacija relaksiranjem uslova jednakosti observacija koji je postavljen za egzaktne bisimulacione relacije [23].

Relacija  $R_\varepsilon \subseteq \Psi_1 \times \Psi_2$  je  $\varepsilon$ -aproksimativna bisimulaciona relacija između dva označena tranziciona sistema  $T_1$  i  $T_2$  ako za svako  $(\psi_1, \psi_2) \in R_\varepsilon$  [155]:

1.  $d_\Pi(\langle\langle \psi_1 \rangle\rangle_1, \langle\langle \psi_2 \rangle\rangle_2) \leq \varepsilon$ ,
2.  $\forall \psi_1 \xrightarrow{\varsigma_1} \psi'_1, \exists \psi_2 \xrightarrow{\varsigma_2} \psi'_2$  tako da  $(\psi'_1, \psi'_2) \in R_\varepsilon$ ,
3.  $\forall \psi_2 \xrightarrow{\varsigma_2} \psi'_2, \exists \psi_1 \xrightarrow{\varsigma_1} \psi'_1$  tako da  $(\psi'_1, \psi'_2) \in R_\varepsilon$ .

Za dva označena tranziciona sistema  $T_1$  i  $T_2$  se kaže da su aproksimativno bisimilarni sa preciznošću  $\varepsilon$  (što se označava  $T_1 \cong_\varepsilon T_2$ ) ukoliko postoji  $R_\varepsilon$ ,  $\varepsilon$ -aproksimativna bisimulaciona relacija između  $T_1$  i  $T_2$  tako da, za svako  $\psi_1 \in \Psi_1^0$ , postoji  $\psi_2 \in \Psi_2^0$  tako da  $(\psi_1, \psi_2) \in R_\varepsilon$  i obrnuto [155].

Ukoliko su  $T_1$  i  $T_2$  aproksimativno bisimilarni sa preciznošću  $\varepsilon$ , onda za svaku eksternu trajektoriju sistema  $T_1$  (respektivno  $T_2$ ),  $\pi_1^0 \xrightarrow{\varsigma_0} \pi_1^1 \xrightarrow{\varsigma_1} \pi_1^2 \xrightarrow{\varsigma_2} \dots$ , postoji eksterna trajektorija sistema  $T_2$  (respektivno  $T_1$ ) sa istim nizom oznaka  $\pi_2^0 \xrightarrow{\varsigma_0} \pi_2^1 \xrightarrow{\varsigma_1} \pi_2^2 \xrightarrow{\varsigma_2} \dots$  tako da za svako  $i \in \mathbb{N}^0$ ,  $d_\Pi(\pi_1^i, \pi_2^i) \leq \varepsilon$  [156].

Bisimulaciona metrika je funkcija definisana na sledeći način [155]:

$$d_R(T_1, T_2) = \inf \{ \varepsilon \mid T_1 \cong_\varepsilon T_2 \}. \quad (5.2)$$

Ukoliko su dva označena tranziciona sistema  $T_1$  i  $T_2$  egzaktno bisimilarna, onda je  $d_R(T_1, T_2) = 0$  [155].

## 5.2. KONTINUALNI SISTEMI

U nastavku se razmatraju kontinualni sistemi u sledećoj formi:

$$\Delta = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}(t)); \mathbf{x}(0) \in \mathbf{I}; \end{cases} \quad (5.3)$$

gde su:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  – vektor promenljivih stanja;
- $\mathbf{I}$  – kompaktan podskup skupa  $\mathbb{R}^n$ ;



- $\mathbf{u} \in U$  – vektor ulaznih promenljivih, gde je  $U$  kompaktan podskup skupa  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{u}$  se može posmatrati kao vektor kontrolnih ulaza, unutrašnjih poremećaja ili neizvesnosti koje unose nedeterminizam u ponašanje sistema  $\Delta$ );
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$  – vektor izlaznih promenljivih (observacija);
- $\mathbf{h}, \mathbf{q}$  – skup diferencijalnih i algebarskih jednačina, koje opisuju odnos između ulaznih promenljivih i promenljivih stanja, odnosno između promenljivih stanja i izlaznih promenljivih, respektivno.

Iz kontinualnog sistema (5.3) može se izvesti označeni tranzicioni sistem  $T = (\Psi, \Sigma, \rightarrow, \Psi^0, \Pi, \langle\langle \cdot \rangle\rangle)$  na sledeći način [157]:

- skup stanja je  $\Psi = \mathbb{R}^n$ ,
- oznake reprezentuju vreme, tj.  $\Sigma = \mathbb{R}^+$ ,
- prelazna relacija  $\rightarrow$  je data tranzicijom  $\psi \rightarrow \psi'$  ako i samo ako  $\mathbf{x}(0) = \psi$ ,  $\mathbf{x}(t) = \psi'$  i ako postoji funkcija  $\mathbf{u}$  tako da za svako  $s$  iz intervala  $[0, t]$ ,  $\mathbf{u}(s) \in U$  i  $\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s))$ ,
- skup početnih stanja je  $\Psi^0 = I$ ,
- skup observacija je  $\Pi = \mathbb{R}^p$ , i
- funkcija koja preslikava elemente skupa stanja u elemente skupa observacija je jednaka funkciji  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ , tj.  $\langle\langle \mathbf{x} \rangle\rangle = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ .

Neka su data dva kontinualna sistema u formi (5.3):

$$\Delta_k = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t)); \\ \mathbf{p}_k(t) = \mathbf{q}_k(\mathbf{x}_k(t)); \mathbf{x}_k(0) \in I_k; \end{cases} \quad k = 1, 2, \quad (5.4)$$

sa istim prostorom observacija, tj.  $\mathbb{R}^{p_1} = \mathbb{R}^{p_2} = \mathbb{R}^p$ .

Kao što je već rečeno, aproksimativne bisimulacione relacije relaksiraju uslov jednakosti observacija ( $\mathbf{p}_k(t)$ ) – one zahtevaju da odstojanje između observacija dva dinamička sistema bude ograničeno parametrom  $\varepsilon$  [23].

Relacija  $R_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  se zove  $\varepsilon$ -aproksimativnom bisimulacionom relacijom između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  ako za svako  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in R_\varepsilon$  [23]:

- 1)  $\|\mathbf{q}_1(\mathbf{x}_1) - \mathbf{q}_2(\mathbf{x}_2)\| \leq \varepsilon$ ,
- 2) za svako  $T > 0$ , za sve ulaze  $\mathbf{u}_1$  sistema  $\Delta_1$  postoji ulaz  $\mathbf{u}_2$  sistema  $\Delta_2$ , tako da rešenja diferencijalnih jednačina  $\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t))$ ,  $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k0}$  zadovoljavaju  $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) \in R_\varepsilon$  za svako  $t \in [0, T]$ .
- 3) za svako  $T > 0$ , za sve ulaze  $\mathbf{u}_2$  sistema  $\Delta_2$  postoji ulaz  $\mathbf{u}_1$  sistema  $\Delta_1$ , tako da rešenja diferencijalnih jednačina  $\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t))$ ,  $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k0}$  zadovoljavaju  $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) \in R_\varepsilon$  za svako  $t \in [0, T]$ .

Za  $\varepsilon = 0$  iz uslova 1), dobija se definicija egzaktne bisimulacione relacije. Pojam aproksimativnih bisimulacionih relacija omogućava kvantifikovanje, pomoću parametra  $\varepsilon$ , koliko su dva dinamička sistema daleko od toga da budu bisimilarni [23].

Dinamički sistemi  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  su aproksimativno bisimilarni sa preciznošću  $\varepsilon$  (što se označava  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$ ), ukoliko postoji  $R_\varepsilon$ ,  $\varepsilon$ -aproksimativna bisimulaciona relacija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ , tako da za svako  $\mathbf{x}_1 \in I_1$ , postoji  $\mathbf{x}_2 \in I_2$  tako da  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in R_\varepsilon$  i obrnuto [23].

Dakle, ako važi  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$ , onda za sve izlaze  $\mathbf{p}_1$  posmatrane iz  $\Delta_1$ , postoji neki izlaz  $\mathbf{p}_2$  posmatran iz  $\Delta_2$ , tako da je njihovo odstojanje ograničeno preciznošću  $\varepsilon$ . Problem proračunavanja preciznosti sa kojom su dva dinamička sistema aproksimativno bisimilarna je vrlo važan, a može se praktičnije rešiti dualnim pristupom na bazi funkcija pre nego na bazi relacija [23].

Aproksimativne bisimulacione relacije se mogu karakterisati klasom funkcija koje su slične Lyapunov-im funkcijama i koje su nazvane *bisimulacione funkcije*. Bisimulaciona funkcija je funkcija čije hiperpovršine definišu aproksimativne bisimulacione relacije [23].

Funkcija  $V: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  je bisimulaciona funkcija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  ako je za svako  $\varepsilon \geq 0$  [23]:

$$R_\varepsilon = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \varepsilon\} \quad (5.5)$$

zatvoren skup i  $\varepsilon$ -aproksimativna bisimulaciona relacija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ .

Nula hiperpovršina bisimulacione funkcije predstavlja egzaktnu bisimulacionu relaciju. Za datu bisimulacionu funkciju, gornja granica najmanje vrednosti  $\varepsilon$  za koju važi  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$  može se proceniti rešavanjem dve statičke igre (static game) [23]:

$$\varepsilon \geq \max \left( \sup_{\mathbf{x}_1 \in I_1} \left\{ \inf_{\mathbf{x}_2 \in I_2} V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\}, \sup_{\mathbf{x}_2 \in I_2} \left\{ \inf_{\mathbf{x}_1 \in I_1} V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\} \right). \quad (5.6)$$

Ukoliko je dobijena vrednost  $\varepsilon$  konačna, onda važi  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$  [23].

Da bi se bisimulacione funkcije mogle karakterisati na računski efikasan način, potrebno je definisati sledeće notacije:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) \\ \mathbf{h}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_1(\mathbf{x}_1) - \mathbf{q}_2(\mathbf{x}_2). \quad (5.7)$$

Intuitivno, bisimulaciona funkcija je funkcija koja ograničava odstojanje između observacija sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  i koja se ne povećava tokom paralelne evolucije razmatranih sistema. Ta Lyapunov-a osobina omogućava stvaranje računski efikasnih metoda za proračunavanje bisimulacionih funkcija. Za glatke funkcije koje uzimaju konačne vrednosti na domenu  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  važi sledeće [23]:

Neka je  $w: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^+$  kontinualna diferencijabilna funkcija i  $\alpha \geq 0$ . Ako za svako  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  važi:

$$w(\mathbf{x}) \geq \|\mathbf{q}(\mathbf{x})\|^2, \quad (5.8)$$

i za svako  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ , za koje je  $w(\mathbf{x}) \geq \alpha^2$ , važi:

$$\sup_{\mathbf{u}_1 \in U_1} \left\{ \inf_{\mathbf{u}_2 \in U_2} \nabla w(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \right\} \leq 0, \quad (5.9)$$

$$\sup_{\mathbf{u}_2 \in U_2} \left\{ \inf_{\mathbf{u}_1 \in U_1} \nabla w(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \right\} \leq 0, \quad (5.10)$$

tada je  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \max(\sqrt{w(\mathbf{x})}, \alpha)$  bisimulaciona funkcija između sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ .

Data forma bisimulacione funkcije može se tumačiti na sledeći način: funkcija  $w(\mathbf{x})$  predstavlja grešku aproksimacije tranzijentne dinamike, dok  $\alpha$  predstavlja grešku aproksimacije asimptotske dinamike, te je nezavisna od početnog stanja sistema [23].

Neka su data dva linearna sistema:

$$\Delta_k = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k(t); \\ \mathbf{p}_k(t) = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k(t); \mathbf{x}_k(0) \in \mathbf{I}_k; \end{cases} \quad k=1, 2, \quad (5.11)$$

pri čemu  $\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}_k$  i  $\mathbf{I}_k$  imaju isto značenje kao u (5.3).  $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$  i  $\mathbf{C}_k$  su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Neka su definisane sledeće notacije:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad -\mathbf{C}_2]; \quad \bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Pretpostavlja se da su oba sistema ( $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ ) asimptotski stabilna (tj. sve sopstvene vrednosti matrica  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$  imaju striktno negativne realne delove).

U pogledu nejednačina (5.9) i (5.10), prirodno je, za ograničene linearne sisteme, za bisimulacione funkcije usvojiti formu ograničenih kvadratnih funkcija [23]:

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \max(\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}, \alpha), \quad (5.13)$$

gde je  $\mathbf{M}$  pozitivno semidefinitna matrica. Na taj način, karakterizacija bisimulacionih funkcija u formi linearnih matričnih nejednačina i optimizacionih problema daje sledeći rezultat [23]:

Ukoliko postoji realan broj  $\lambda > 0$ , tako da važi:

$$\mathbf{M} \geq \mathbf{C}^T \mathbf{C}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{A} + 2\lambda \mathbf{M} \leq \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

$$\alpha \geq \frac{1}{\lambda} \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 1} \left( \sup_{\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}_1} \left\{ \inf_{\mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}_2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} (\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}_1 + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}_2) \right\} \right), \quad (5.16)$$

$$\alpha \geq \frac{1}{\lambda} \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 1} \left( \sup_{\mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}_2} \left\{ \inf_{\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}_1} \mathbf{x}^T \mathbf{M} (\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}_1 + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}_2) \right\} \right), \quad (5.17)$$

tada je funkcija  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \max(\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}, \alpha)$  bisimulaciona funkcija između sistema  $\Delta_1$  and  $\Delta_2$ .

Važna posledica prethodno datih rezultata jeste da je klasa ograničenih kvadratnih bisimulacionih funkcija univerzalna za klasu stabilnih linearnih kontinualnih sistema sa ograničenim skupovima ulaza i početnih stanja [23].

Neka su  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  dva asimptotski stabilna linearna kontinualna dinamička sistema sa ograničenim skupovima ulaza i početnih stanja, tada postoji bisimulaciona funkcija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  u formi (5.13). Na osnovu prethodno navedenog stava može se zaključiti sledeće: Ako su  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  dva asimptotski stabilna linearna kontinualna sistema sa ograničenim skupovima ulaza i početnih stanja, onda su  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  aproksimativno bisimilarni [23].

Prethodni rezultat navodi da se bilo koja dva asimptotski stabilna linearna kontinualna dinamička sistema sa ograničenim skupovima ulaza i početnih stanja mogu posmatrati kao aproksimacija jedan drugog. Međutim, preciznost  $\varepsilon$  sa kojom su dinamički sistemi aproksimativno bisimilarni može biti veoma velika. Stoga je neophodna procena te preciznosti, kako bi se dobila korisna informacija o tome koliko dobro  $\Delta_2$  aproksimira  $\Delta_1$  i obrnuto [23].

Projekcije se vrlo često koriste za aproksimiranje linearnih dinamičkih sistema, kako u klasičnim tehnikama redukcije modela [52], tako i u pristupima koji se baziraju na egzaktnim simulacionim i bisimulacionim relacijama [152], [153]. U nastavku je opisana metoda za proračun preciznosti aproksimativne bisimulacione relacije između linearnog sistema  $\Delta_1$  u formi (5.11) i njegove projekcije  $\Delta_2$ . Za datu surjektivnu funkciju  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{H}\mathbf{x}_1$  projekcija sistema  $\Delta_1$  je sistem  $\Delta_2$  u formi (5.11), opisan matricama  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{H}\mathbf{A}_1\mathbf{H}^+$ ,  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{H}\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{H}^+$ , i skupovima početnih stanja i ulaza  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{H}\mathbf{I}_1$  i  $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$ , gde  $\mathbf{H}^+$  označava Moore-Penrose-ovu pseudoinverziju matrice  $\mathbf{H}$ .

Neka se pretpostavi da je matrica  $\mathbf{H}$  takva da sve sopstvene vrednosti matrice  $\mathbf{H}\mathbf{A}_1\mathbf{H}^+$  imaju striktno negativne realne delove. Tada se, iz prethodno navedenog, može zaključiti da postoji bisimulaciona funkcija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  u formi (5.13).

Neka su matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_2$  i  $\mathbf{C}$  definisane kao u (5.12) i neka postoji matrica  $\mathbf{M}$  i realan broj  $\lambda > 0$  koji zadovoljavaju jednačine (5.14) i (5.15). Neka je definisana matrica  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

i  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} \sup_{\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}_1} \sqrt{\mathbf{u}_1^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1}. \quad (5.19)$$

Tada je funkcija  $V: \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definisana izrazom  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \max\left(\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}, \alpha\right)$  bisimulaciona funkcija između sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  [23]. Preciznost aproksimativne bisimulacione relacije između sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  se onda može proceniti rešavanjem dve statičke igre date izrazom (5.6).

Neka je  $\alpha$  definisano kao u (5.19), a  $\beta$  na sledeći način:

$$\beta = \sup_{\mathbf{x}_1 \in \mathbf{I}_1} \sqrt{\mathbf{x}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_1}. \quad (5.20)$$

Neka je  $\varepsilon = \max(\alpha, \beta)$ . Tada važi  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$  [23].

Prethodno prezentovana metoda ocene preciznosti aproksimativne bisimulacione relacije između kontinualnog linearnog sistema sa ograničenim skupovima ulaza i početnih stanja i njegove projekcije zahteva rešavanje linearnih matričnih nejednačina (5.14) i (5.15). Nakon toga, preciznost aproksimativne bisimulacione relacije može se izračunati rešavanjem dva linearna kvadratna programa data jednačinama (5.19) i (5.20). Linearne matrične nejednačine mogu se rešiti semidefinitnim programiranjem [158]. Treba napomenuti da što je manja matrica  $\mathbf{Q}$ , to je manja i vrednost  $\varepsilon$ . Stoga, da bi se vrednost preciznosti aproksimativne bisimulacione relacije između sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  dobro ocenila, korisno je semidefinitnom programu dodati linearnu funkciju cilja koja može biti, na primer, trag matrice  $\mathbf{Q}$ . Važan

parametar predložene metode je striktno pozitivan skalar  $\lambda$ . Sa jedne strane,  $\lambda$  mora biti dovoljno malo, tako da sve sopstvene vrednosti matrice  $A + \lambda I$  imaju striktno negativne realne delove. Sa druge strane, pokazuje se da što je veća vrednost parametra  $\lambda$ , preciznost aproksimativne bisimulacione relacije između dinamičkih sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  se može bolje oceniti [23].

Otvoreno pitanje je kako izabrati surjektivno preslikavanje  $H$ , tako da preciznost aproksimativne bisimulacione relacije između kontinualnog linearnog dinamičkog sistema sa ograničenim skupovima ulaza i početnih stanja ( $\Delta_1$ ) i njegove projekcije željenih dimenzija ( $\Delta_2$ ) bude minimalno. Na primer,  $H$  se može izabrati prema tradicionalnim tehnikama redukcije dinamičkih modela, kao što je balansno odsecanje [52]. U praksi se pokazuje da u kontekstu aproksimativnih bisimulacija te tehnike daju poprilično slabe rezultate [23]. To je posledica činjenice da tradicionalne tehnike redukcije dinamičkih modela imaju za cilj aproksimaciju ulazno-izlaznog ponašanja sistema: tranzijentno ponašanje dinamičkog sistema je u potpunosti ignorisano (pretpostavlja se da je početno stanje 0). U kontekstu aproksimativnih bisimulacija, tranzijentna faza je podjednako važna kao i asimptotska. Stoga, te tehnike redukcije dinamičkih modela nisu od velike pomoći za izbor preslikavanja  $H$ . Preslikavanje  $H$  se može izabrati korišćenjem sledećeg heurističkog pristupa. Neka se  $H$  definiše kao projekcija na potprostor prostora  $\mathbb{R}^n$ , željenih dimenzija i invarijantan u odnosu na  $A_1$ , koja će najverovatnije minimizovati optimalne vrednosti optimizacionih problema (5.19) i (5.20). Eksperimentalno se pokazuje da, u najvećem broju slučajeva, predloženi heuristički pristup daje bolje rezultate od tradicionalnih tehnika redukcije modela. Međutim, takav pristup očigledno nije optimalan. Dalja istraživanja su definitivno potrebna kako bi se osmislile bolje metode za utvrđivanje preslikavanja  $H$ .

Opisana metoda je implementirana u Matlab-ov toolbox MATISSE. Programski paket MATISSE omogućava redukciju linearnog dinamičkog sistema sa ograničenim skupovima ulaza i početnih stanja, za izabranu dimenziju redukovano modela, kao i proračun preciznosti aproksimativne bisimulacione relacije između originalnog i redukovano modela. U [23] je MATISSE korišćen u kontekstu problema verifikacije sigurnosti.

U [157] su autori primenili aproksimativne bisimulacije za aproksimaciju nelinearnih dinamičkih sistema. Predložena je metodologija za proračun bisimulacionih funkcija za nelinearne autonomne dinamičke sisteme. Iako je računarski pristup razvijen, potrebno je sprovesti dodatna istraživanja kako bi se predložena metoda mogla efikasno koristiti za redukciju nelinearnih dinamičkih modela.

## **6. NOVI PRISTUPI REDUKCIJI DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA**

### **6.1. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM TEORIJE BALANSNIH REALIZACIJA**

U ovom poglavlju je opisan nov pristup redukciji linearizovanog dinamičkog modela elektroenergetskog sistema korišćenjem teorije balansnih realizacija. Pristupom koji se predlaže, originalni linearizovani model se, za problem koji se analizira, zamenjuje modelom manjih dimenzija, pri čemu se čuva fizičko značenje promenljivih stanja u redukovanom modelu. Predložena tehnika može se koristiti za redukciju modela elektroenergetskog sistema pri analiziranju različitih fenomena. S obzirom da se bazira na linearizovanom modelu, predloženi pristup može se efikasno koristiti pri analiziranju malih poremećaja, kao što su promene u opterećenju i promene u proizvodnji aktivne i reaktivne snage, analiziranju rada i podešavanju upravljačkih uređaja (regulatora), itd. Predloženi pristup je primenjen za proučavanje jednog karakterističnog fenomena. Pored toga, predložena tehnika može se posmatrati kao preliminarni korak za izvođenje procedura za redukciju i hibridnih linearno-nelinearnih i nelinearnih dinamičkih modela.

Osnovni princip pristupa koji se predlaže nije da se dobije najmanji mogući dinamički model, već da se očuva fizičko značenje promenljivih u redukovanom modelu. Na taj način, redukovani model baziran na fizičkim komponentama može se efikasno koristiti za analiziranje fizičke prirode problema koji se razmatra. Takođe, za datu tehniku nije bitno da li je potrebno redukovati spoljašnji ili unutrašnji sistem, dokle god su dostupni potrebni podaci o sistemu koji se redukuje.

Na bazi prvog koraka procedure predložene u [22], predloženom tehnikom biraju se ulazne i izlazne promenljive u skladu sa kriterijumom redukcije, ili drugim rečima, u skladu sa problemom koji se analizira. Date su mogućnosti, kao i poteškoće i ograničenja u primeni takvog pristupa za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema. Za samu redukciju linearizovanog modela elektroenergetskog sistema korišćena je teorija balansnih realizacija, s tim da se datim pristupom čuva fizičko značenje promenljivih u redukovanom modelu. Predložena tehnika ne samo da redukuje veličinu (dimenzije) modela, već i, za fenomen koji se analizira, razdvaja važne promenljive od onih manje važnih. Broj promenljivih koje se mogu eliminisati iz dinamičkog modela zavisi od samog modela elektroenergetskog sistema i od zahtevane tačnosti.

#### **6.1.1. Linearni model u formi standardnog prostora stanja**

Model je pojednostavljeno predstavljanje elektroenergetskog sistema pogodno za izražavanje u formi matematičkih jednačina i prevedeno u kompjuterski kod [25, Chapter 1]. Nelinearni model elektroenergetskog sistema koji se uobičajeno koristi za studije i analize dinamičkih procesa opisan je skupom diferencijalnih i algebarskih jednačina (2.4).

Prvi korak procedure koja se predlaže jeste definisanje ulaznih i izlaznih promenljivih u skladu sa sledećim:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t); \quad \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t); \quad \mathbf{p} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t), \quad (6.1)$$

gde su:

$\mathbf{y}_1$  – vektor algebarskih promenljivih koje su izabrane za ulazne promenljive (vektor ulaznih promenljivih);

$\mathbf{y}_2$  – vektor ostalih algebarskih promenljivih ( $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T \quad \mathbf{y}_2^T]^T$ );

$\mathbf{p}$  – vektor izlaznih promenljivih;

$\mathbf{h}$  – skup algebarskih jednačina kojima se definišu izlazne promenljive.

Linearan vremenski nepromenljiv dinamički model dobija se linearizacijom jednačine (6.1) u stacionarnoj radnoj tački:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{F}_{y_1} \Delta \mathbf{y}_1 + \mathbf{F}_{y_2} \Delta \mathbf{y}_2; \quad \mathbf{0} = \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{G}_{y_1} \Delta \mathbf{y}_1 + \mathbf{G}_{y_2} \Delta \mathbf{y}_2; \\ \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{H}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{H}_{y_1} \Delta \mathbf{y}_1 + \mathbf{H}_{y_2} \Delta \mathbf{y}_2 \end{aligned}, \quad (6.2)$$

gde su:

$$\mathbf{F}_x = \partial \mathbf{f}(\cdot) / \partial \mathbf{x}; \quad \mathbf{F}_{y_1} = \partial \mathbf{f}(\cdot) / \partial \mathbf{y}_1; \quad \mathbf{F}_{y_2} = \partial \mathbf{f}(\cdot) / \partial \mathbf{y}_2; \quad (6.3a)$$

$$\mathbf{G}_x = \partial \mathbf{g}(\cdot) / \partial \mathbf{x}; \quad \mathbf{G}_{y_1} = \partial \mathbf{g}(\cdot) / \partial \mathbf{y}_1; \quad \mathbf{G}_{y_2} = \partial \mathbf{g}(\cdot) / \partial \mathbf{y}_2; \quad (6.3b)$$

$$\mathbf{H}_x = \partial \mathbf{h}(\cdot) / \partial \mathbf{x}; \quad \mathbf{H}_{y_1} = \partial \mathbf{h}(\cdot) / \partial \mathbf{y}_1; \quad \mathbf{H}_{y_2} = \partial \mathbf{h}(\cdot) / \partial \mathbf{y}_2. \quad (6.3c)$$

Dobijeni skup jednačina (6.2) je u deskriptor formi [19]. Vektor  $\Delta \mathbf{y}_2$  može se izraziti kao linearna kombinacija vektora  $\Delta \mathbf{x}$  i  $\Delta \mathbf{y}_1$  korišćenjem drugog skupa jednačina (6.2). Konačno, linearni model u formi standardnog prostora stanja može se opisati sledećim skupom jednačina:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{y}_1; \quad \Delta \mathbf{p} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{y}_1, \quad (6.4)$$

gde su:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{y_2} \mathbf{G}_{y_2}^{-1} \mathbf{G}_x; \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}_{y_1} - \mathbf{F}_{y_2} \mathbf{G}_{y_2}^{-1} \mathbf{G}_{y_1}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}_{y_2} \mathbf{G}_{y_2}^{-1} \mathbf{G}_x; \quad \mathbf{D} = \mathbf{H}_{y_1} - \mathbf{H}_{y_2} \mathbf{G}_{y_2}^{-1} \mathbf{G}_{y_1}. \quad (6.5)$$

### 6.1.2. Algoritam

Tehnika koja se predlaže ima za cilj redukciju dinamičkog modela elektroenergetskog sistema, datog u formi standardnog prostora stanja, eliminisanjem promenljivih stanja koje su manje važne za fizički problem koji se analizira, uz očuvanje fizičkog značenja promenljivih u redukovanom modelu.

Tehnika se može sažeti u sledećim koracima, videti Sliku 6.1:

**Korak 1. Definisanje kriterijuma redukcije** u skladu sa fizičkim fenomenom koji se analizira, pri čemu se za definisanje kriterijuma redukcije koriste ulazne i izlazne promenljive (videti transformaciju iz (2.4) u (6.1)). Na primer:

1. Pri analiziranju fenomena promene modula napona na sabirnicama pri promeni vrednosti referentnog napona automatskih regulatora napona, vrednosti referentnog napona ( $v_k^{ref}$ ) treba deklarirati za ulazne promenljive, a module napona na sabirnicama ( $V$ ) za izlazne promenljive:

$$\mathbf{y}_1 = [v_1^{ref} \quad v_2^{ref} \quad \dots \quad v_k^{ref}]^T; \quad \mathbf{p} = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_m]^T, \quad (6.6)$$

gde su  $k$  i  $m$  ukupan broj automatskih regulatora napona i sabirnica, respektivno.

2. Pri analiziranju fenomena promene tokova aktivnih snaga po granama pri promeni aktivnog opterećenja u čvorovima, aktivna opterećenja u čvorovima ( $P^l$ ) treba proglasiti ulaznim promenljivim, a tokove aktivnih snaga po granama ( $P^b$ ) izlaznim promenljivim:

$$\mathbf{y}_1 = [P_1^l \ P_2^l \ \dots \ P_s^l]^T; \quad \mathbf{p} = [P_1^b \ P_2^b \ \dots \ P_t^b]^T, \quad (6.7)$$

gde su  $s$  i  $t$  ukupan broj potrošačkih čvorova i grana, respektivno.

Pomenuti problemi mogu se analizirati razmatranjem svih automatskih regulatora napona (potrošačkih čvorova) i sabirnica (grana) u elektroenergetskom sistemu. Takođe, može se analizirati i neki određen (redukovan) slučaj problema; na primer, deklarisanjem referentnog napona određenog automatskog regulatora napona za ulaznu promenljivu, a modula napona na nekoliko sabirnica koje su najbliže tom automatskom regulatoru napona za izlazne promenljive.

Da bi se predloženi pristup implementirao, potrebno je fizički fenomen od interesa za analiziranje definisati pomoću ulaznih i izlaznih promenljivih. Takođe, pri definisanju ulaznih i izlaznih promenljivih postoje određena važna ograničenja: ulazne promenljive mogu biti samo algebarske promenljive (ne i promenljive stanja), dok izlazne promenljive mogu biti promenljive stanja, algebarske promenljive ili promenljive dobijene primenom algebarskih operacija nad promenljivim stanja i algebarskim promenljivim.

**Korak 2. Linearizacija modela** u stacionarnoj radnoj tački koja se razmatra (videti transformaciju iz (6.1) u (6.2)). Na taj način dobija se model elektroenergetskog sistema u deskriptor formi (6.2).

**Korak 3. Eliminisanje algebarskih promenljivih.** Rezultat je model u formi standardnog prostora stanja (6.4).

**Korak 4. Proračun vektora MIOSV** (definisani izrazom (6.10)). Teorija balansnih realizacija se koristi za redukciju modela u formi standardnog prostora stanja, tako da su u redukovanom modelu očuvane samo one originalne promenljive stanja koje imaju dominantan uticaj na analizirani fizički fenomen.

Inverzija matrice  $\mathbf{T}_b$  projektuje promenljive balansne realizacije originalnog modela na originalne promenljive na sledeći način:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{T}_b^{-1} \Delta \mathbf{x}_b. \quad (6.8)$$

Tako, svaka originalna promenljiva predstavlja ponderisanu sumu promenljivih balansne realizacije:

$$\Delta x_i = T_{bi1}^{inv} \Delta x_{b1} + \dots + T_{bij}^{inv} \Delta x_{bj} + \dots + T_{bin}^{inv} \Delta x_{bn}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \mathbf{T}_b^{inv} = \mathbf{T}_b^{-1}. \quad (6.9)$$

S obzirom da (apsolutne) vrednosti  $T_{bij}^{inv}$  kvantifikuju stepen u kojem je  $\Delta x_{bj}$  sadržana u  $\Delta x_i$ , te vrednosti se koriste za projekciju Hankel-ovih singularnih vrednosti, kako bi se dobile mere važnosti originalnih promenljivih stanja (MIOSV – „Measure of the Importance of the Original State Variable“), videti Sliku 6.2:

$$\mathbf{MIOSV} = \mathbf{T}^o \times \mathbf{HSV}, \quad (6.10)$$

gde su:

$$\mathbf{MIOSV} = [\mathbf{MIOSV}_1 \ \mathbf{MIOSV}_2 \ \dots \ \mathbf{MIOSV}_n]^T; \quad (6.11a)$$



6. Novi pristupi redukciji dinamičkih modela elektroenergetskog sistema

$$HSV = [HSV_1 \quad HSV_2 \quad \dots \quad HSV_n]^T; \quad T_{ij}^O = \left| T_{bij}^{inv} \right| \in \mathbf{T}^O. \quad (6.11b)$$

Promenljive stanja kojima odgovaraju najveće MIOSV najviše utiču na analizirani fenomen.

- Korak 5. Postavljanje vrednosti  $\xi$** , kojom se definiše zahtevana tačnost redukovano modela.
- Korak 6. Eliminisanje promenljive stanja kojoj odgovara najmanja MIOSV.** Iz skupa promenljivih stanja koje su u tekućoj iteraciji očuvane u modelu, eliminisati onu kojoj odgovara najmanja MIOSV.
- Korak 7. Kriterijum očuvanja stabilnosti sistema.** Generalno, pristup redukciji modela koji se predlaže, ne garantuje stabilnost redukovano dinamičkog modela. Kako bi se očuvala stabilnost modela, dodatno se uvodi ovaj korak. U tekućoj iteraciji proverava se stabilnost dinamičkog modela. Ukoliko dinamički model ima pol(ove) sa pozitivnim realnim delom, proces redukcije (algoritam) se prekida.
- Korak 8. Proračun greške ( $E$ ).** Kriterijum kvaliteta redukovano modela definisan je u frekventnom domenu, a sastoji se od poređenja amplituda frekventnih odziva originalnog i redukovano modela. Greška ( $E$ ) kojom se definiše kvalitet redukovano modela računa se na sledeći način:

$$E = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n_{io}\}} \left\{ \frac{1}{n_f} \sum_{k=1}^{n_f} \left\| |H(j\omega)_{ik}^o| - |H(j\omega)_{ik}^r| \right\| \right\}, \quad (6.12)$$

gde su:

$H(j\omega)_{ik}^o, H(j\omega)_{ik}^r$  – frekventni odziv  $i$ -tog ulazno-izlaznog para na  $k$ -toj učestanosti za originalni ( $o$ ) i redukovani ( $r$ ) model, respektivno;

$n_f$  – broj učestanosti na kojima se porede amplitude frekventnih odziva originalnog i redukovano modela;

$n_{io}$  – broj ulazno-izlaznih parova.

- Korak 9. Kriterijum konvergencije.** Proces konvergira kada je proračunata greška ( $E$ ) veća od specificirane tolerancije ( $\xi$ ):

$$E > \xi. \quad (6.13)$$

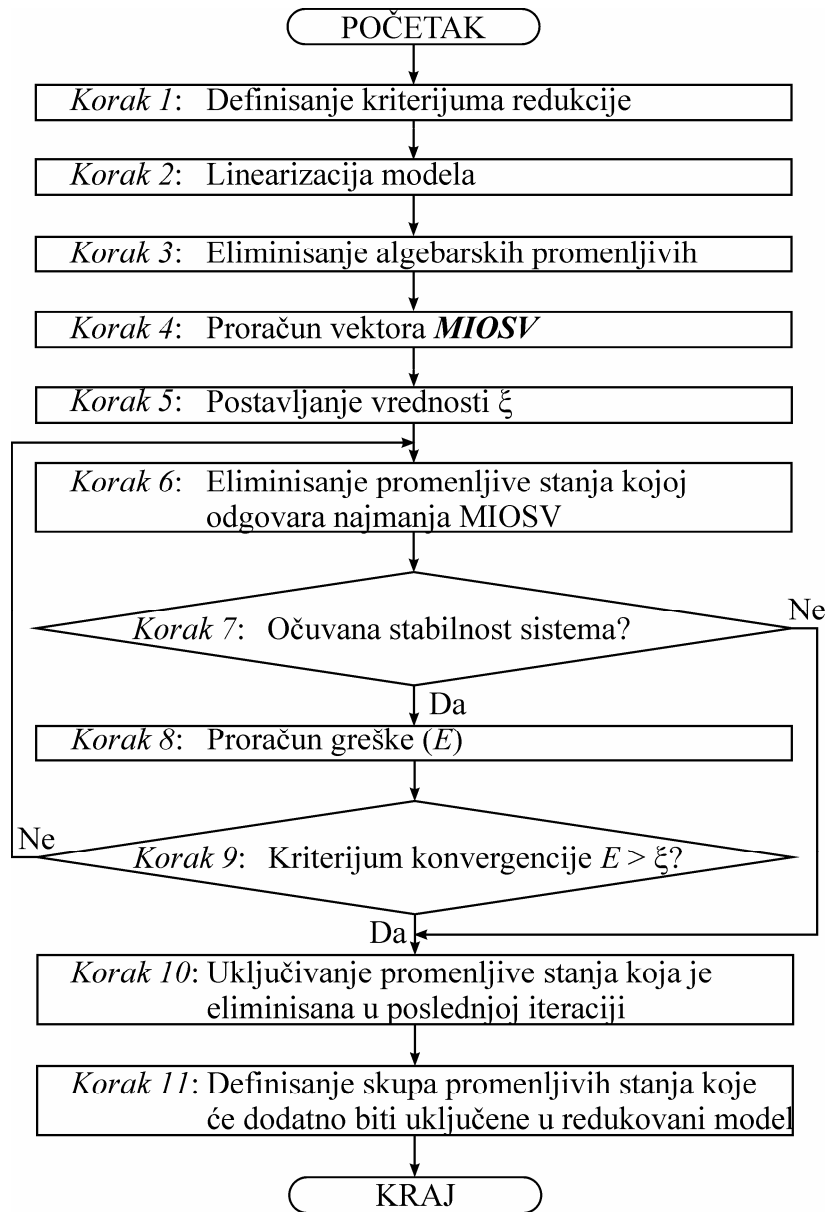
- Korak 10. Uključivanje promenljive stanja koja je eliminisana u poslednjoj iteraciji.** Kada je zadovoljen kriterijum konvergencije, promenljiva stanja koja je eliminisana u poslednjoj iteraciji vraća se u redukovani dinamički model, kako bi se obezbedilo da greška bude manja od specificirane granične vrednosti ( $E \leq \xi$ ).

- Korak 11. Definisavanje skupa promenljivih stanja koje će dodatno biti uključene u redukovani model.** Predloženim pristupom obezbeđeno je da korisnik tačno zna koje su promenljive stanja eliminisane iz originalnog modela. U ovom koraku korisniku je omogućeno da definiše skup promenljivih stanja koje su primenom algoritma eliminisane iz dinamičkog modela, ali, iz nekog razloga, treba da budu očuvane u redukovano dinamičkom modelu. Na primer, ukoliko su sve promenljive stanja, koje opisuju dinamičko ponašanje generatorske jedinice, njenog automatskog regulatora napona i turbinskog regulatora, osim jedne, očuvane predloženom tehnikom redukcije, korisnik može zaključiti da je korisno da u redukovani dinamički model vrati tu promenljivu, te na taj način očuva kompletan

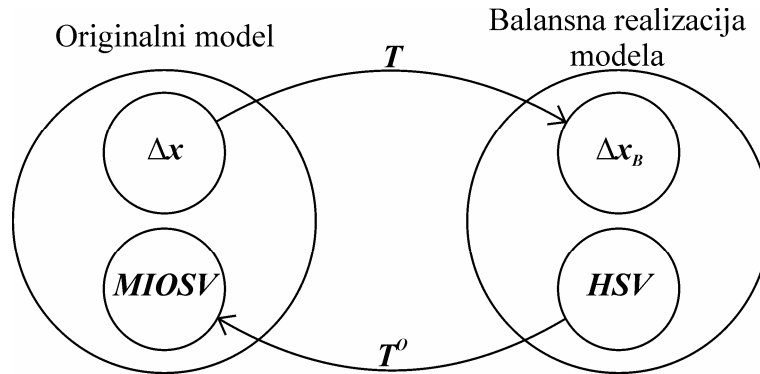
## 6. Novi pristupi redukciji dinamičkih modela elektroenergetskog sistema

skup promenljivih stanja modela date generatorske jedinice i njenih upravljačkih uređaja.

Slika 6.1 prikazuje algoritam predložene tehnike za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema.



Slika 6.1. Algoritam predložene tehnike za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema



Slika 6.2. Grafička ilustracija Koraka 4 predložene tehnike za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema

## 6.2. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM APROKSIMATIVNIH BISIMULACIONIH RELACIJA

U ovom poglavlju predložen je nov pristup redukciji dinamičkih modela elektroenergetskog sistema na bazi aproksimativnih bisimulacionih relacija, te njegova primena za analizu tranzijentne stabilnosti elektroenergetskog sistema.

U prvom delu poglavlja opisani su ciljevi analize tranzijentne stabilnosti i kako se ona izvodi. U drugom delu istaknute su prednosti korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija pri analiziranju fenomena u vremenskom domenu u odnosu na tehnike redukcije koje se uobičajeno koriste u teoriji upravljanja. U trećem delu poglavlja prezentovane su deskriptor forma i forma standardnog prostora stanja dinamičkog modela elektroenergetskog sistema dobijenog linearizacijom nelinearnog dinamičkog modela opisanog jednačinama (2.4), koji se uobičajeno koristi za analizu tranzijentne stabilnosti. U četvrtom delu data je teorijska osnova (definicije, pretpostavke i teoreme) za korišćenje aproksimativnih bisimulacionih relacija za redukciju dinamičkog modela u deskriptor formi.

U petom delu poglavlja predložen je algoritam za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon velikog poremećaja. Tokom simulacije, originalni nelinearni model se linearizuje (u diskretnim vremenskim trenucima), transformiše u odgovarajuću formu (formu standardnog prostora stanja ili deskriptor formu) i redukuje korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija. Redukovani linearizovani dinamički model koristi se u numeričkoj integraciji umesto originalnog nelinearnog dinamičkog modela, dok god je kriterijum tačnosti zadovoljen. Primenom predloženog algoritma koji se bazira na linearizaciji modela i korišćenju aproksimativnih bisimulacionih relacija, može se odrediti da li elektroenergetski sistem (generatorske jedinice) ostaje u sinhronizmu nakon poremećaja.

### 6.2.1. Analiza tranzijentne stabilnosti

Jedna od ključnih primena analiza elektroenergetskog sistema u vremenskom domenu jeste određivanje elektro-mehaničkog dinamičkog odziva nakon velikog poremećaja. Taj pristup se označava kao *analiza tranzijentne stabilnosti* [25, Chapter 8]. Osnovni cilj analize tranzijentne stabilnosti jeste da se utvrdi da li je trajektorija dinamičkog sistema nakon poremećaja stabilna. Najveći broj analiza vrši se da bi se definisalo da li je sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon velikog poremećaja [25, Chapter 8]. Poremećaji se modeluju

promenama koeficijenata (parametara) modela, ili nenultim početnim uslovima diferencijalnih jednačina [17, Chapter 1]. Tipično analizirani poremećaji su ispadi elemenata i kratki spojevi. Rešenje dinamičkog modela (2.4) definiše elektro-mehaničko ponašanje elektroenergetskog sistema u bilo kom vremenskom trenutku.

Analize u vremenskom domenu uobičajeno se izvode korišćenjem metoda numeričke integracije, koje su vrlo zahtevne, posebno uzimajući u obzir da se analize izvode za celu listu poremećaja (kratkih spojeva, ispada opterećenja, generatora i dalekovoda, itd.). Iako moderni računari mogu izvoditi numeričku integraciju za realne elektroenergetske sisteme prilično brzo, breme kompletnih analiza je i dalje veliko [25, Chapter 8]. Redukcija se može koristiti da smanji dimenzije dinamičkog modela elektroenergetskog sistema, čime se olakšavaju analize na istom. Veliki broj tehnika redukcije, koje se baziraju na konceptima poput koherencije (Tačka 3.3.1.), sinhronizma (Tačka 3.3.2.), analize singularnih perturbacija (Tačka 3.3.3.), modalne analize (Tačka 3.3.4.), identifikacije (Tačka 3.3.5.), teorije balansnih realizacija (Tačka 3.3.6.) i Krylov-ih potprostora (Tačka 3.3.6.), koristi se pri analizama tranzijentne stabilnosti.

Dinamički model elektroenergetskog sistema (2.4) koji se uobičajeno koristi za analizu tranzijentne stabilnosti je nelinearan. Iz tog razloga potrebno je istraživati metode redukcije koje se mogu primeniti na nelinearan model. Ekvivalentnu reprezentaciju sistema koji je modelovan nelinearnim modelom je teško dobiti, zato što ne postoji generalna analitička metoda za tretiranje nelinearnih jednačina [13]. Potraga za tehnikama koje se mogu primenjivati je potpomognuta određenim specijalnim osobina dinamičkog modela elektroenergetskog sistema, naročito njegovom lokalnom linearnošću, tako da se u praksi, u okolini radne tačke, umesto originalnog nelinearnog modela može analizirati model linearizovan u toj radnoj tački, te dobiti vrlo korisne informacije [159]. Linearizovan model dobija se razvojem nelinearnih funkcija dinamičkog modela u Taylor-ov red i zanemarivanjem njegovih nelinearnih članova.

### 6.2.2. Prednosti korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija pri analiziranju fenomena u vremenskom domenu

Tehnike redukcije dinamičkih modela koje se uobičajeno koriste u teoriji upravljanja (metode dekompozicije na bazi singularnih vrednosti (videti Tačku 3.1.3.), Krylov-e metode (videti Tačku 3.1.4.) itd.) aproksimiraju matricu prenosnih funkcija originalnog modela [24]. U poređenju sa tim tehnikama, redukcija sistema korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija mnogo je prirodnija za simulacije u vremenskom domenu [160]. Prvo, ne pretpostavlja se da se sistem inicijalno nalazi u tački ravnoteže. Tranzijentna dinamika sistema se ne ignoriše tokom procesa aproksimacije (ne pretpostavlja se da je početno stanje nula). U kontekstu aproksimativnih bisimulacija tranzijentna faza je podjednako važna kao i asimptotska faza. Zapravo, kvalitet aproksimacije može biti vrlo zavisen od skupa početnih vrednosti promenljivih stanja. Drugo, granice greške baziraju se na  $L^\infty$  normi, koja ima najviše smisla za analize u vremenskom domenu, dok se tehnike redukcije modela koje se koriste u teoriji upravljanja bave  $L^2$  ili  $H^\infty$  normom [23].

### 6.2.3. Dinamički model elektroenergetskog sistema u deskriptor formi i formi standardnog prostora stanja

U ovoj tački prezentovani su dinamički modeli elektroenergetskog sistema u deskriptor formi i formi standardnog prostora stanja, dobijeni linearizacijom originalnog nelinearnog modela (2.4) (koji se najčešće koristi za analize tranzijentne stabilnosti) u radnoj tački:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{F}_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{F}_y(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{F}_x\mathbf{x} + \mathbf{F}_y\mathbf{y} + \mathbf{c}_1; \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{G}_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{G}_y(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{G}_x\mathbf{x} + \mathbf{G}_y\mathbf{y} + \mathbf{c}_2; \quad (6.14b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (6.14c)$$

gde su:

$$\mathbf{F}_x = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{y}=\mathbf{y}_0}; \quad \mathbf{F}_y = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{y}=\mathbf{y}_0}; \quad (6.15a)$$

$$\mathbf{G}_x = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{y}=\mathbf{y}_0}; \quad \mathbf{G}_y = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{y}=\mathbf{y}_0}; \quad (6.15b)$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{F}_x\mathbf{x}_0 - \mathbf{F}_y\mathbf{y}_0; \quad \mathbf{c}_2 = -\mathbf{G}_x\mathbf{x}_0 - \mathbf{G}_y\mathbf{y}_0. \quad (6.15c)$$

Dobijeni skup linearizovanih jednačina (6.14a,b,c) predstavlja dinamički model elektroenergetskog sistema u deskriptor formi i može se kompaktnije opisati sledećim skupom diferencijalnih i algebarskih jednačina:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{c}; \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (6.16)$$

gde su:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x & \mathbf{F}_y \\ \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Izražavanjem vektora  $\mathbf{y}$  kao funkcije vektora  $\mathbf{x}$  korišćenjem jednačine (6.14b), dobija se dinamički model u formi standardnog prostora stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + (\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_y\mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{G}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.18)$$

gde su:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_x - \mathbf{F}_y\mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{G}_x; \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}; \quad (6.19a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad (6.19b)$$

gde je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica.

#### 6.2.4. Aproksimativne bisimulacione relacije i bisimulacione funkcije za dinamički model u deskriptor formi

Primena rezultata istraživanja opisanih u [23] zahteva dinamički model u formi standardnog prostora stanja. Za velike elektroenergetske sisteme, proračunavanje dinamičkog modela u formi standardnog prostora stanja predstavlja dugotrajan zadatak. Dodatno, pri nekoj promeni u sistemu (na primer, pri promeni u podešenju upravljačkog uređaja ili promeni u topologiji elektroenergetske mreže), kompletna matrica stanja treba ponovo da se proračuna (zato što se mnogi elementi matrice mogu značajno promeniti).

U ovom delu doktorske disertacije su teorijski rezultati (definicije, pretpostavke i teoreme) dati u [23], [156] i izloženi u *Poglavlju 5.2.* preformulisani (generalizovani), tako da tretiraju dinamički model elektroenergetskog sistema u deskriptor formi (6.16). Na taj način značajno se povećava efikasnost algoritma koji se predlaže u *Tački 6.2.5.*, s obzirom da nije neophodno izvršiti vremenski i memorijski zahtevne transformacije dinamičkog modela u deskriptor formi (6.16) u model u formi standardnog prostora stanja (6.18).

U nastavku su predstavljene aproksimativne bisimulacione relacije i bisimulacione funkcije za model elektroenergetskog sistema u deskriptor formi, zajedno sa računski efikasnom karakterizacijom bisimulacionih funkcija datom u formi linearnih matričnih nejednačina i optimizacionih problema.

Neka se razmatraju dva kontinualna linearna dinamička sistema u sledećoj formi:

$$\Delta_k = \begin{cases} E_k \dot{z}_k(t) = A_k z_k(t) + c_k; \\ p_k(t) = C_k z_k(t); z_k(0) = z_{0k}; \end{cases} \quad k = 1, 2, \quad (6.20)$$

gde su:

- $z_k \in \mathbb{R}^{n_k}$  – vektor promenljivih stanja dimenzije  $n_k$ ;
- $p_k \in \mathbb{R}^p$  – vektor izlaznih promenljivih dimenzije  $p$ ;
- $c_k \in \mathbb{R}^{n_k}$  – vektor konstantnih vrednosti dimenzije  $n_k$ ;
- $E_k, A_k, C_k$  – matrice odgovarajućih dimenzija.

**Definicija 1:** Relacija  $R_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  se zove  $\varepsilon$ -aproksimativna bisimulaciona relacija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  ako su za svako  $(z_1, z_2) \in R_\varepsilon$  zadovoljeni sledeći uslovi:

- 1)  $\|C_1 z_1 - C_2 z_2\| \leq \varepsilon$ ,
- 2) Za svako  $T > 0$  (gde je  $T$  vremenski interval) rešenja sistema  $E_k \dot{z}_k(t) = A_k z_k(t) + c_k$ ,  $z_k(0) = z_{0k}$ ,  $k = 1, 2$  za svako  $t \in [0, T]$  zadovoljavaju  $(z_1(t), z_2(t)) \in R_\varepsilon$ .

Za  $\varepsilon = 0$  u uslovu 1), dobija se definicija egzaktne bisimulacione relacije. Parametar  $\varepsilon$  predstavlja meru koja opisuje koliko su dinamički sistemi  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  daleko od toga da budu egzaktno bisimilarni [23].

**Definicija 2:** Dinamički sistemi  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  su aproksimativno bisimilarni sa preciznošću  $\varepsilon$  (što se obeležava  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$ ), ukoliko postoji  $R_\varepsilon$ ,  $\varepsilon$ -aproksimativna bisimulaciona relacija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ .

Aproksimativne bisimulacione relacije mogu se karakterisati klasom funkcija koje su slične Lyapunov-im funkcijama i koje se zovu bisimulacione funkcije [23].

**Definicija 3:** Funkcija  $V: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  je bisimulaciona funkcija između dinamičkih sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  ako je za svako  $\varepsilon \geq 0$ :

$$R_\varepsilon = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid V(z_1, z_2) \leq \varepsilon\}, \quad (6.21)$$

zatvoren skup i  $\varepsilon$ -aproksimativna bisimulaciona relacija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  (videti (5.5)). Bisimulaciona funkcija je funkcija koja ograničava odstojanje između observacija dinamičkih sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  i koja se ne povećava tokom paralelne evolucije razmatranih sistema [23]. Neka je  $V$  bisimulaciona funkcija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  i neka važi sledeća nejednakost (videti (5.6)):

$$\varepsilon \geq V(z_{10}, z_{20}). \quad (6.22)$$

Ukoliko je vrednost  $\varepsilon$  u (6.22) konačna, tada su dva dinamička sistema aproksimativno bisimilarna, ili  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$  [23].

Neka su definisane sledeće notacije:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}; \quad (6.23a)$$

$$C = [C_1 \quad -C_2]; \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \quad (6.23b)$$

**Pretpostavka 1:** Neka je  $q: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^+$  kontinualno diferencijabilna funkcija. Ako za svako  $z \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  važi:

$$q \geq z^T C^T C z; \quad (6.24a)$$

$$\nabla q^T E^+ (Az + c) \leq 0, \quad (6.24b)$$

gde  $E^+$  označava Moore-Penrose-ovu pseudoinverziju matrice  $E$ , onda je  $V(z_1, z_2) = \sqrt{q(z)}$  bisimulaciona funkcija između  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ .

U [161] su predloženi potencijalni kandidati za Lyapunov-u funkciju autonomnih dinamičkih sistema u deskriptor formi. S obzirom da se radi o kvadratnim funkcijama, prirodno je, za sisteme u formi (6.20), za bisimulacione funkcije usvojiti formu ograničenih kvadratnih funkcija (videti (5.13)):

$$V(z_1, z_2) = \max \left\{ \sqrt{z^T E^T M E z}, \alpha \right\}, \quad (6.25)$$

gde je  $M$  simetrična pozitivno semidefinitna matrica i  $\alpha \geq 0$ . U funkciji (6.25), član  $\sqrt{z^T E^T M E z}$  predstavlja grešku aproksimacije tranzijentnog ponašanja, dok  $\alpha$  predstavlja grešku aproksimacije asimptotskog ponašanja. Karakterizacija bisimulacionih funkcija u formi (6.25) je data sledećom teoremom.

**Teorema 1:** Ukoliko postoji  $\lambda > 0$ , tako da je:

$$E^T M E \geq C^T C; \quad (6.26a)$$

$$A^T (E^+)^T E^T M E + E^T M E E^+ A + 2\lambda E^T M E \leq \mathbf{0}; \quad (6.26b)$$

$$\alpha \geq \frac{1}{\lambda} \max_{z^T E^T M E z = 1} \left\{ z^T E^T M E E^+ c \right\}, \quad (6.26c)$$

tada je funkcija  $V(z_1, z_2) = \max \left\{ \alpha, \sqrt{z^T E^T M E z} \right\}$  bisimulaciona funkcija između dinamičkih sistema  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ .

**Dokaz:** Neka je  $q(z) = \max \left\{ \alpha^2, z^T E^T M E z \right\}$ , tada je  $V(z_1, z_2) = \sqrt{q(z)}$ . Treba dokazati da  $q(z)$  zadovoljava uslove **Pretpostavke 1**. Prvo, jasno je iz nejednačine (6.26a) da je nejednačina (6.24a) zadovoljena. Neka je  $z \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  takvo da  $z^T E^T M E z \geq \alpha^2$ , tada nejednačina (6.26c) implicira sledeće:

$$z^T E^T M E E^+ c \leq \lambda \alpha \sqrt{z^T E^T M E z}. \quad (6.27)$$

Dakle, jasno je da važi:

$$\nabla q^T E^+ (Az + c) \leq z^T A^T (E^+)^T E^T M E z + z^T E^T M E E^+ A z + 2\lambda \alpha \sqrt{z^T E^T M E z}. \quad (6.28)$$

Potom, iz nejednačine (6.26b) dobija se sledeće:

$$\begin{aligned} \nabla q^T E^+ (Az + c) &\leq -2\lambda z^T E^T M E z + 2\lambda \alpha \sqrt{z^T E^T M E z} \\ &\leq -2\lambda \sqrt{z^T E^T M E z} \left( \sqrt{z^T E^T M E z} - \alpha \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

Stoga, ukoliko važi  $z^T E^T M E z \geq \alpha^2$ , tada je nejednačina (6.24b) zadovoljena. Ukoliko važi  $z^T E^T M E z \leq \alpha^2$ , tada je  $\nabla q(z) = 0$ , te je nejednačina (6.24b) takođe zadovoljena.

Karakterizacija data **Teoremom 1** je prilično efikasna iz računске tačke gledišta. Matrica  $M$  može se proračunati rešavanjem skupa linearnih matricnih nejednačina (6.26a,b) (koje mogu biti efikasno rešene korišćenjem semidefinitnog programiranja [158]), dok se  $\alpha$  može dobiti proračunavanjem optimalne vrednosti (ili nad-aproksimacije) optimizacionog problema (6.26c).

Neka su definisane sledeće dve matrice:

$$P = \begin{bmatrix} I & H^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} I & H^T \end{bmatrix} E^T M E \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

gde je  $H$  surjektivno preslikavanje  $z_2 = H z_1$ , koje definiše projekciju dinamičkog sistema  $\Delta_1$  kao kontinualni linearni dinamički sistem  $\Delta_2$ , opisan matricama  $E_2 = H E_1 H^+$ ,  $A_2 = H A_1 H^+$ ,  $C_2 = C_1 H^+$  i vektorom  $c_2 = H c_1$ .

**Teorema 2:** Neka se  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\varepsilon$  definišu na sledeći način, respektivno:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} \sqrt{c_1^T P c_1}; \quad (6.31)$$

$$\beta = \sqrt{z_{10}^T Q z_{10}}; \quad (6.32)$$

$$\varepsilon = \max \{ \alpha, \beta \}. \quad (6.33)$$

Tada važi  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$ .

**Dokaz:** Može se primetiti da je:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} \sqrt{c_1^T \begin{bmatrix} I & H^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix} c_1} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{c^T M c}. \quad (6.34)$$

Ako se definiše vektor  $d$  tako da važi:

$$c = E d, \quad (6.35)$$

tada se dobija:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{d^T E^T M E d} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{d^T E^T (E^+)^T E^T M E E^+ E d} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{c^T (E^+)^T E^T M E E^+ c} = \frac{1}{\lambda} \max_{z^T E^T M E z = 1} \{ z^T E^T M E E^+ c \} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Takođe, vidi se da je:



$$\beta = \sqrt{z_{10}^T \begin{bmatrix} I & H^T \end{bmatrix} E^T M E \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix} z_{10}} = \sqrt{z_0^T E^T M E z_0}, \quad (6.37)$$

pa se dobija:

$$\varepsilon = \max\{\alpha, \beta\} \geq \max\left\{\alpha, \sqrt{z_0^T E^T M E z_0}\right\} = V(z_{10}, z_{20}). \quad (6.38)$$

S obzirom da je nejednakost (6.22) zadovoljena i da je vrednost  $\varepsilon$  konačna, može se zaključiti da važi uslov aproksimativne bisimulacije dva dinamička sistem, tj.  $\Delta_1 \sim_\varepsilon \Delta_2$ .

Surjektivno preslikavanje  $H$  može se izabrati korišćenjem sledećeg heurističkog pristupa (slično se predlaže u [23]): neka se  $H$  definiše kao projekcija na potprostor prostora  $\mathbb{R}^{n_1}$ , željenih dimenzija sa bazom desnih generalizovanih sopstvenih vektora para  $(A_1, E_1)$ , koja će najverovatnije minimizovati vrednosti  $\alpha$  i  $\beta$ . Definisanjem matrice  $H$  i proračunavanjem  $\varepsilon$  određeni su i aproksimacija originalnog modela i granica greške aproksimacije.

### 6.2.5. Algoritam

U ovoj tački dat je algoritam za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon poremećaja, u kojem se originalni nelinearni dinamički model elektroenergetskog sistema transformiše u odgovarajuću formu i redukuje korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija. Prikazanim algoritmom tretirana je transformacija nelinearnog dinamičkog modela u formu standardnog prostora stanja (izrazi za deskriptor formu su dati u zagradama (za one izraze koji se razlikuju)). Predloženi algoritam može se sažeti u sledećim koracima:

**Korak 1. Definisanje vektora izlaznih promenljivih ( $p$ ).** S obzirom da je od interesa utvrđivanje da li generatorske jedinice ostaju u sinhronizmu nakon poremećaja, za izlazne promenljive biraju se razlike uglova rotora sinhronih mašina  $(\Delta\delta_s)^1$ :

$$p = [\Delta\delta_1 \quad \cdots \quad \Delta\delta_s \quad \cdots \quad \Delta\delta_p]^T; \Delta\delta_s = \delta_l - \delta_k; \quad (6.39)$$

$$l = 1, 2, \dots, n_{sm}; k = 1, 2, \dots, n_{sm}; l \neq k$$

gde je  $n_{sm}$  broj sinhronih mašina u sistemu. Time je vektor izlaznih promenljivih definisan na sledeći način:

$$p = Cx \quad (p = Cz), \quad (6.40)$$

gde je  $C$  matrica dimenzija  $(p \times n)$  sa elementima iz skupa  $\{0, 1, -1\}$ .

**Korak 2. Postavljanje vrednosti  $\Delta\delta^{max}$ ,** koja predstavlja maksimalnu dozvoljenu razliku dva ugla rotora za koju generatorske jedinice ostaju u sinhronizmu.

**Korak 3. Postavljanje vrednosti  $\Delta x_r^{max}$  ( $\Delta z_r^{max}$ ),** kojom se kontroliše tačnost linearizovanog modela. Redukovani linearizovani model koristi se u numeričkoj integraciji, dokle je ispunjen sledeći uslov:

<sup>1</sup> S obzirom da je spoljašnje ponašanje dinamičkog sistema definisano izlaznim promenljivim, definisanjem vektora izlaznih promenljivih ( $p$ ) određuje se kriterijum redukcije (aspekt(i) sistema koje treba očuvati u redukovanom modelu). Za druge vrste analiza, vektor izlaznih promenljivih može se definisati na sličan način.

$$\Delta x_r = \left\| \frac{\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r^{I_{prev}}}{\mathbf{x}_r^{I_{prev}}} \right\| \leq \Delta x_r^{max} \left( \Delta z_r = \left\| \frac{\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_r^{I_{prev}}}{\mathbf{z}_r^{I_{prev}}} \right\| \leq \Delta z_r^{max} \right), \quad (6.41)$$

gde su:

$\mathbf{x}_r(\mathbf{z}_r)$  – tekući redukovani vektor promenljivih;

$\mathbf{x}_r^{I_{prev}}(\mathbf{z}_r^{I_{prev}})$  – redukovani vektor promenljivih dobijen na kraju numeričke integracije prethodno korišćenog redukovanog linearizovanog modela.

**Korak 4. Postavljanje vrednosti  $\Delta t$** , koja predstavlja dužinu vremenskog koraka numeričke integracije.

**Korak 5. Postavljanje početne vrednosti  $r$** , gde je  $r$  red redukovanih linearizovanih modela.

**Korak 6. Linearizacija originalnog modela u radnoj tački  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$** , korišćenjem Taylor-ovog razvoja u red. Zanimarivanjem viših članova Taylor-ovog reda, dobija se linearizovani model u formi (6.14a,b,c), koji se potom transformiše u odgovarajuću formu (standardnu formu prostora stanja ili deskriptor formu).

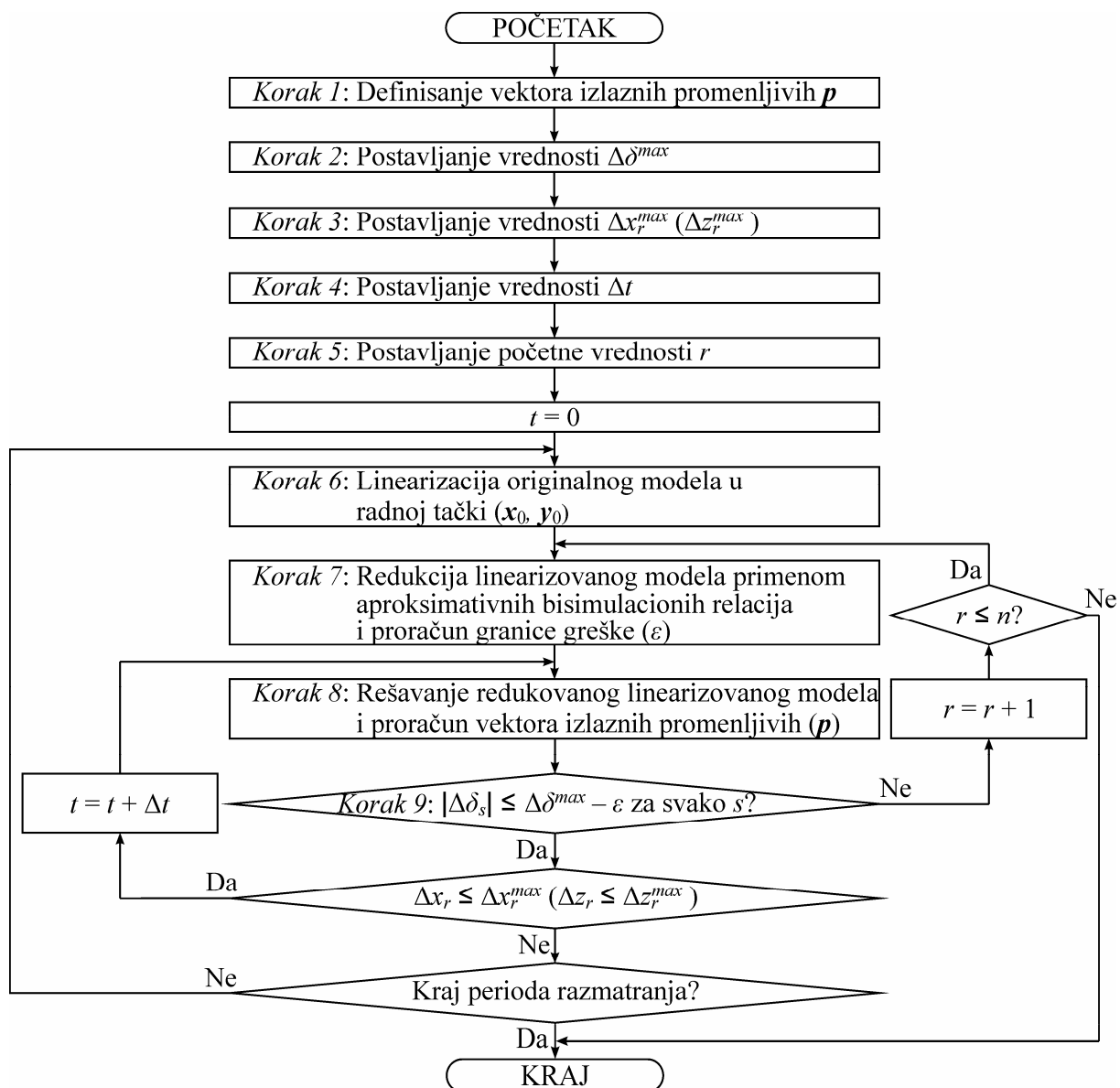
**Korak 7. Redukcija linearizovanog modela** (definisano jednačinama (6.18) i (6.40) za model u standardnoj formi prostora stanja, odnosno jednačinama (6.16) i (6.40) za model u deskriptor formi) **primenom aproksimativnih bisimulacionih relacija i proračun granice greške  $(\varepsilon)$** .

**Korak 8. Rešavanje redukovanog linearizovanog modela** (metodom numeričke integracije<sup>2</sup>) **i proračun vektora izlaznih promenljivih  $(\mathbf{p})$** , dok je kriterijum tačnosti (6.41) zadovoljen.

**Korak 9. Provera da li su apsolutne vrednosti elemenata vektora  $\mathbf{p}$   $(\Delta\delta_s)$  manje od  $\Delta\delta^{max} - \varepsilon$** . Ukoliko su apsolutne vrednosti  $\Delta\delta_s$  veće od  $\Delta\delta^{max} - \varepsilon$ , povećava se red redukovanog modela ( $r$ ), čime se smanjuje granica greške aproksimacije ( $\varepsilon$ ).

Ukoliko su apsolutne vrednosti  $\Delta\delta_s$  manje od  $\Delta\delta^{max} - \varepsilon$  na kraju perioda razmatranja, može se zaključiti da generatorske jedinice ostaju u sinhronizmu. Slika 6.3 prikazuje blok dijagram predloženog algoritma.

<sup>2</sup> S obzirom da nakon redukcije modela u deskriptor formi matrica  $\mathbf{E}$  može biti slabo uslovljena, ili čak singularna, treba koristiti implicitne metode za rešavanje redukovanog linearizovanog modela [162].



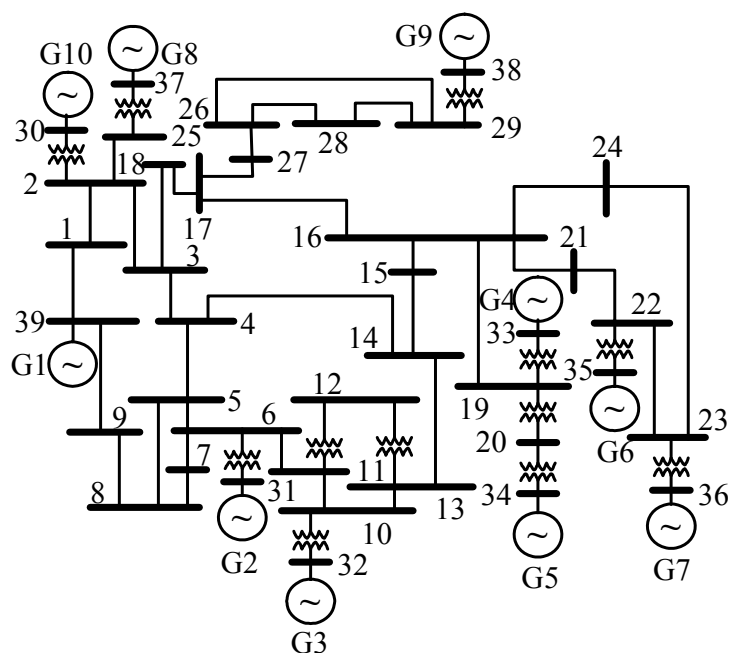
Slika 6.3. Blok dijagram predloženog algoritma za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon poremećaja, koji se bazira na linearizaciji i redukciji korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija

## 7. TEST SISTEMI I NJIHOVI DINAMIČKI MODELI

Predloženi algoritmi redukcije biće primenjeni na dinamičke modele dva elektroenergetska sistema: New England test sistema sa 10-generatorskih jedinica i 39 čvorova i elektroenergetskog sistema Srbije.

### 7.1. NEW ENGLAND TEST SISTEM

Jednopolna šema New England test sistema prikazana je na Slici 7.1. Parametri i podaci o sistemu dati su u [163, Appendix A]. Osnovne karakteristike dinamičkog modela ovog sistema date su u Tabeli 7.1.



Slika 7.1. Jednopolna šema New England test sistema

Tabela 7.1. Osnovne karakteristike dinamičkog modela New England test sistema

Sinhroni generatori		Automatski regulatori napona	Turbinski regulatori	Čvorovi	Ukupno
Red modela/Broj jedinica					
3/1	4/9	4/10	3/10	0/39	
Broj promenljivih stanja/algebarskih promenljivih					
3/3	4/3	4/1	3/2	0/2	109/138

**7.2. ELEKTROENERGETSKI SISTEM SRBIJE**

Ulazni podaci za elektroenergetski sistem Srbije dati su u [164]. Osnovne karakteristike dinamičkog modela ovog sistema date su u Tabeli 7.2.

Tabela 7.2. Osnovne karakteristike dinamičkog modela elektroenergetskog sistema Srbije

Sinhroni generatori		Automatski regulatori napona	Turbinski regulatori	Čvorovi	Ukupno
Red modela/Broj jedinica					
5/43	6/30	4/73	3/73	0/441	
Broj promenljivih stanja/algebarskih promenljivih					
5/3	6/3	4/1	3/2	0/2	906/1320

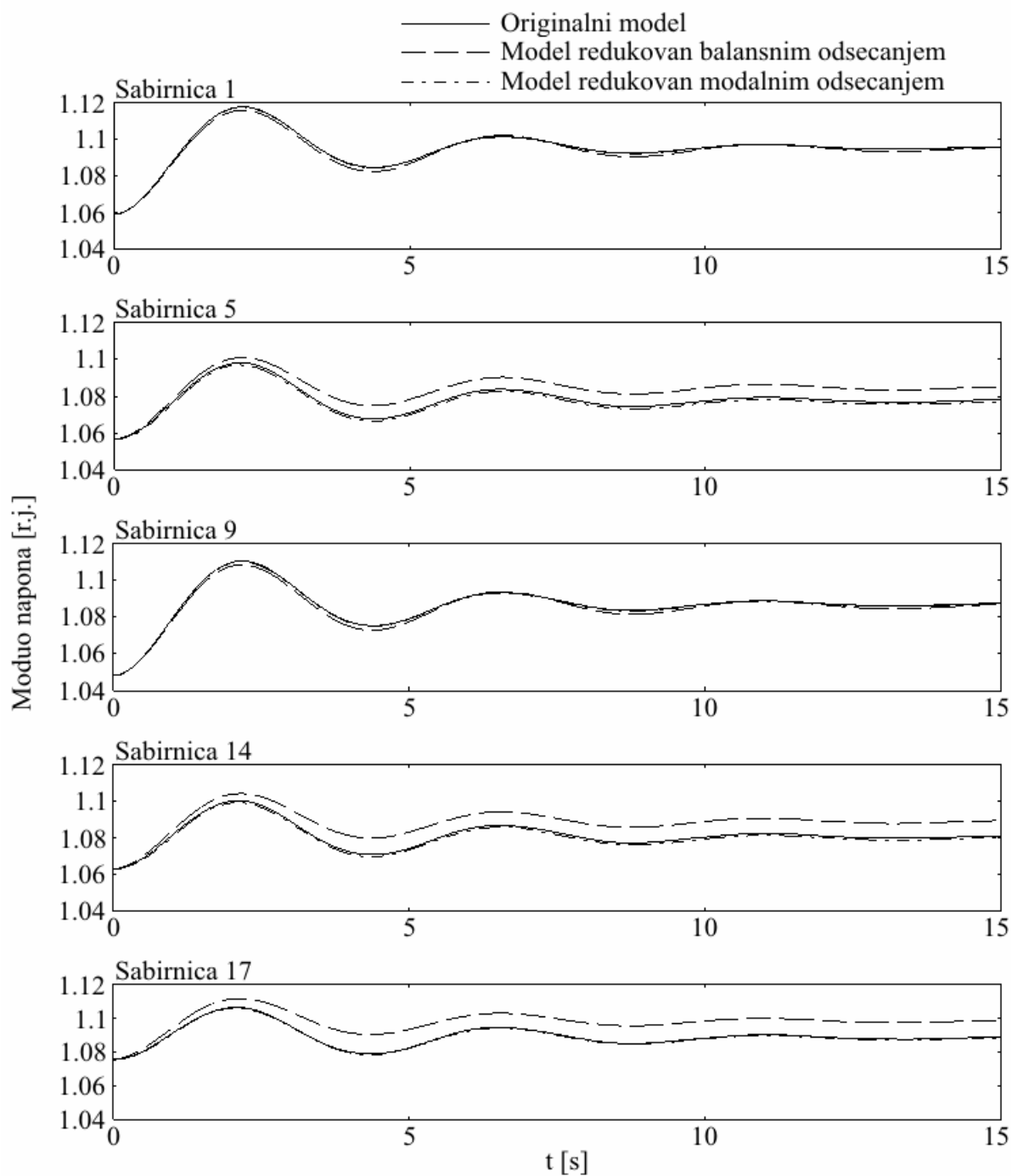
## 8. PRIMENA

### 8.1. POSTOJEĆE METODE REDUKCIJE DINAMIČKIH MODELA – BALANSNO I MODALNO ODSECANJE

U ovom poglavlju, dve od najčešće korišćenih tehnika redukcije linearnih modela, balansno odsecanje (videti *Tačku 3.1.3.* i *Glavu 4.*) i modalno odsecanje (videti *Tačku 3.1.2.*), su primenjene na New England test sistem.

Nakon inicijalizacije podataka i proračuna tokova snaga, nelinearni model New England test sistema linearizovan je u toj radnoj tački. Algebarske promenljive (tj. vektor perturbacija algebarskih promenljivih) eliminisane su iz modela. Referentni napon automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1, i moduli napona na sabirnicama 1, 5, 9, 14 i 17, su izabrani za ulaznu i izlazne promenljive, respektivno. Tako je dinamički model, korišćen za primenu ove dve tehnike redukcije, opisan jednačinama (6.4).

Slika 8.1 daje uporedni prikaz modula napona na sabirnicama 1, 5, 9, 14 i 17, pri povećanju vrednosti referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 5 %, za originalni model, model redukovan balansnim odsecanjem i model redukovan modalnim odsecanjem (u ovom primeru, za dominantne modove izabrani su oni sa najmanjom apsolutnom vrednošću, tj. modovi sa malom realnom i imaginarnom vrednošću – moduli malog modula i učestanosti). Promenljive stanja (modovi) izbacivani su iz modela dok god su forme modula napona na sabirnicama 1, 5, 9, 14 i 17 odgovarale formama dobijenim korišćenjem originalnog modela. Od 109 promenljivih stanja, metoda balansnog odsecanja eliminisala je 106, a metoda modalnog odsecanja 77 promenljivih stanja. Metoda modalnog odsecanja sačuvala je 32 dominantna moda originalnog modela, zanemarujući one manje važne. Nakon balansiranja dinamičkog sistema (pri čemu su promenljive stanja izgubile svoje fizičko značenje), metoda balansnog odsecanja eliminisala je stanja koja su manje važna za ulazno-izlazno ponašanje dinamičkog modela elektroenergetskog sistema. Metoda balansnog odsecanja nije očuvala stacionarno stanje originalnog modela (videti module napona na sabirnicama 5, 14 i 17). Kao što je već napomenuto, ukoliko je važno da se očuva stacionarno stanje originalnog dinamičkog modela, rezidualizacija može dati bolje rezultate od odsecanja (videti *Tačku 3.1.3.*).



Slika 8.1. Moduli napona na sabirnicama 1, 5, 9, 14 i 17, pri povećanju vrednosti referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 5 %, za:

- 1) originalni model,
- 2) model redukovano balansnim odsecanjem, i
- 3) model redukovano modalnim odsecanjem

## 8.2. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM TEORIJE BALANSNIH REALIZACIJA

Predložena tehnika redukcije na bazi teorije balansnih realizacija primenjena je na dinamičke modele New England test sistema (*Tačka 8.2.1.*) i elektroenergetskog sistema Srbije (*Tačka 8.2.2.*). Fizički fenomen podoban za primenu predloženog algoritma je promena modula napona na sabirnicama sistema pri promeni referentnih napona automatskih regulatora napona (opisan jednačinama (6.6)). I drugi fizički fenomeni mogu se tretirati na sličan način.

New England test sistem korišćen je da se pokaže koje promenljive stanja više, a koje manje, utiču na prirodu fizičkog fenomena koji se analizira. Najpre, problem je analiziran uzimanjem u obzir referentnih napona svih automatskih regulatora napona i modula napona svih sabirnica za ulazno-izlazne promenljive modela. Nakon toga, analizirano je nekoliko karakterističnih slučajeva (redukovani vektori ulaznih i izlaznih promenljivih). Istraživana je zavisnost broja promenljivih stanja koje se mogu eliminisati iz dinamičkog modela od broja i izbora ulaznih i izlaznih promenljivih (od karakterističnog slučaja). Dodatno je razmatrano šta se dešava sa stabilnošću dinamičkog modela pri redukciji (koliko su polovi dinamičkog sistema očuvani redukcijom). Na kraju, razmatranjem nekoliko različitih radnih tačaka, istraživano je kako se važnost originalnih promenljivih stanja menja sa promenom radne tačke.

Na modelu elektroenergetskog sistema Srbije pokazano je da se predložena metodologija može primeniti na modele realnih elektroenergetskih sistema. Dinamički model elektroenergetskog sistema Srbije korišćen je za kvantifikaciju kompromisa između reda i tačnosti redukovano modela. Razmatrana je zavisnost broja promenljivih stanja koje se mogu zanemariti u modelu od zahtevane tačnosti redukovano modela (kriterijuma konvergencije (6.13)). Na modelu elektroenergetskog sistema Srbije analizirano je i koliko je predložena metodologija računski zahtevna.

### 8.2.1. New England test sistem

U ovoj tački detaljnije su analizirana i diskutovana četiri karakteristična slučaja:

- Slučaj 1:** Referentni naponi svih automatskih regulatora napona i moduli napona na svim sabirnicama deklarirani su za ulazne i izlazne promenljive, respektivno.
- Slučaj 2:** Referentni napon automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 i moduo napona na sabirnici 39 (na kojoj je povezan G1) izabrani su za ulaznu i izlaznu promenljivu, respektivno.
- Slučaj 3:** Referentni napon automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 i moduli napona na sabirnicama koje su najbliže sinhronom generatoru G1 (sabirnice 1, 2, 8 i 9) izabrani su za ulaznu i izlazne promenljive, respektivno.
- Slučaj 4:** Referentni napon automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 i moduo napona na sabirnici 38 (koja je jedna od najudaljenijih od sinhronog generatora G1) izabrani su za ulaznu i izlaznu promenljivu, respektivno.

Vrednost kriterijuma konvergencije je postavljena na  $\xi = 1$  (videti *Korak 5*). Razmatrane učestanosti su  $(10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2}, \dots, 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1}, \dots, 1, 2, \dots, 10, 20, \dots, 10^2)$  [rad/s], tako da je broj učestanosti na kojima se porede amplitude frekventnih odziva originalnog i redukovano modela u jednačini (6.12)  $n_f = 37$ . Tabela 8.1 prikazuje broj i tipove promenljivih stanja eliminisanih iz dinamičkog modela, za četiri analizirana slučaja. Ono što je bitno napomenuti jeste da su promenljive istog tipa grupisane vrednostima elemenata vektora *MIOSV*, kao

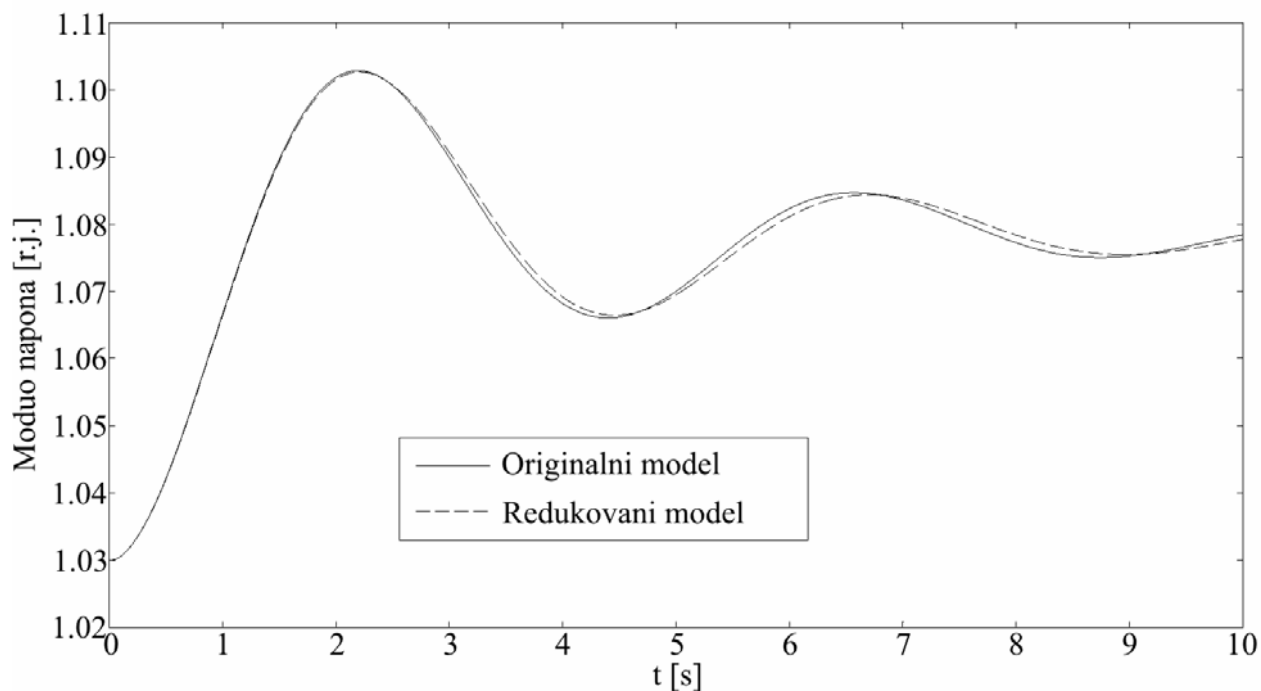


rezultat činjenice da su MIOSV promenljivih istog tipa istog reda veličine. Na primer, MIOSV promenljivih stanja jedinica za dogrevanje medijuma koji pokreće turbinu su reda  $10^{-4}$ , MIOSV ugaonih brzina rotora generatora su reda  $10^{-3}$ , dok su MIOSV promenljivih stanja merenog napona automatskih regulatora napona reda  $10^0$ . Slika 8.2 daje uporedni prikaz odziva modula napona na sabirnici 39, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 0,05 r.j., za originalni i redukovani dinamički model u **Slučaju 1**.

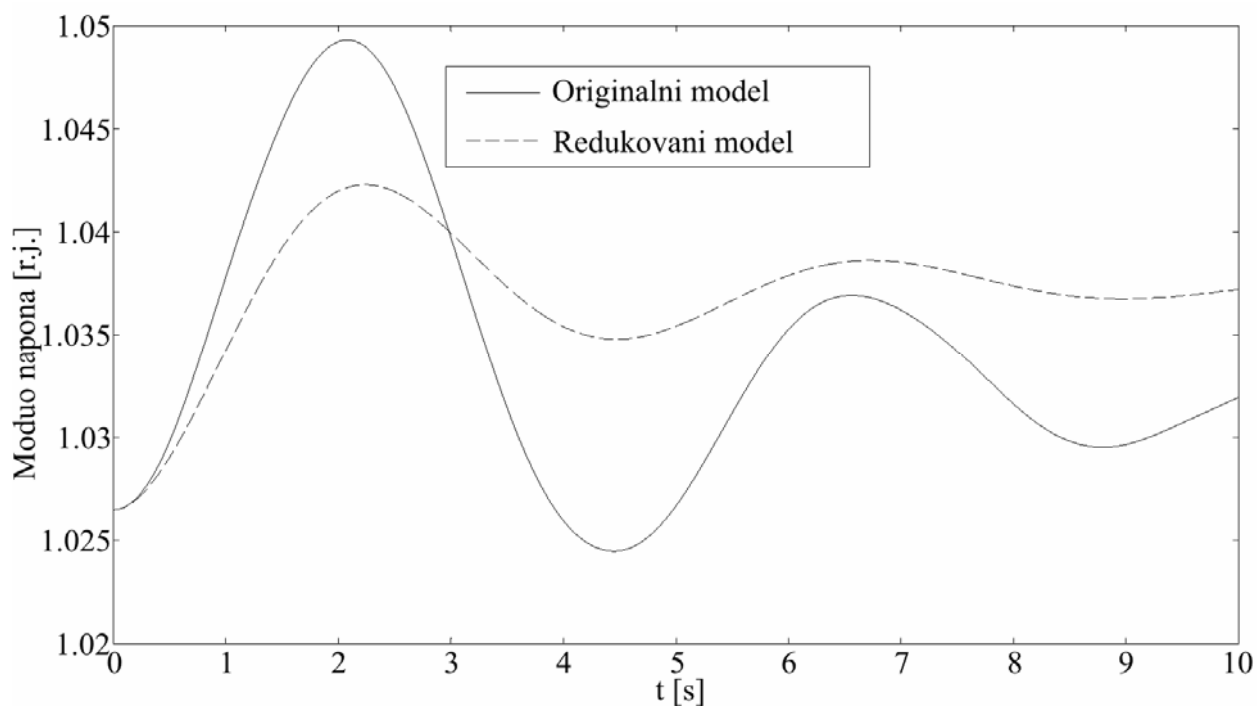
Tabela 8.1. Pregled promenljivih stanja eliminisanih iz dinamičkog modela New England test sistema, za analizirane **Slučajeve 1–4**

Slučaj	Broj eliminisanih promenljivih stanja	Tipovi eliminisanih promenljivih stanja
<b>Slučaj 1</b>	69	<ul style="list-style-type: none"> <li>- promenljive stanja svih turbinskih regulatora</li> <li>- promenljive stanja ugaone brzine rotora svih sinhronih generatora</li> <li>- promenljive stanja tranzijentnog napona po d osi svih sinhronih generatora</li> <li>- promenljive stanja tranzijentnog napona po q osi svih sinhronih generatora (osim sinhronih generatora G1 i G7)</li> <li>- promenljive stanja merenog napona svih automatskih regulatora napona (osim automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1)</li> <li>- promenljive stanja ulaza u pobudnicu (<math>v_{r2}</math>) automatskih regulatora napona sinhronih generatora G5, G9, G10</li> </ul>
<b>Slučaj 2</b>	79	<ul style="list-style-type: none"> <li>- sve promenljive stanja kao u <b>Slučaju 1</b></li> <li>- promenljive stanja tranzijentnog napona po q osi sinhronog generatora G7</li> <li>- promenljive stanja ulaza u pobudnicu (<math>v_{r2}</math>) automatskih regulatora napona sinhronih generatora G3, G4, G6, G8</li> <li>- promenljive stanja napona pobude automatskih regulatora napona sinhronih generatora G3, G4, G5, G6, G8</li> </ul>
<b>Slučaj 3</b>	79	- sve promenljive stanja kao u <b>Slučaju 2</b>
<b>Slučaj 4</b>	79	- sve promenljive stanja kao u <b>Slučaju 2</b>

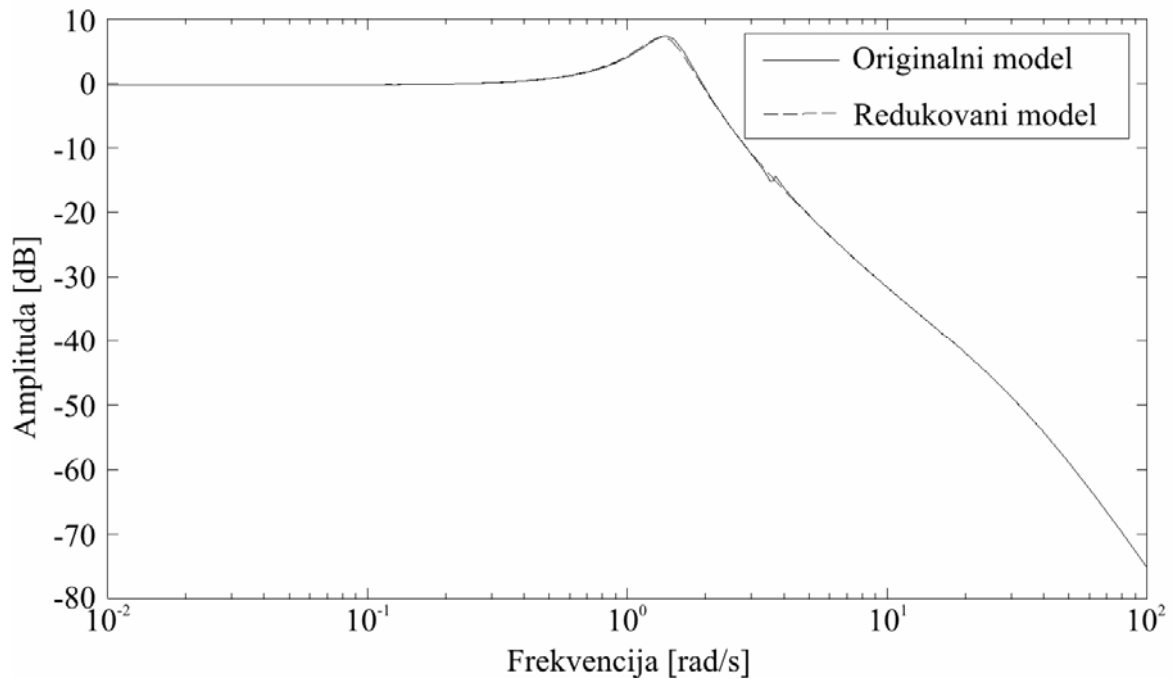
Slika 8.3 daje uporedni prikaz odziva modula napona na sabirnici 38, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 0,05 r.j., za originalni i redukovani dinamički model u **Slučaju 1**. Slike 8.4 i 8.5 daju uporedni prikaz amplituda frekventnih odziva originalnog i redukovanih dinamičkih modela u **Slučaju 2** i **Slučaju 4**, respektivno.



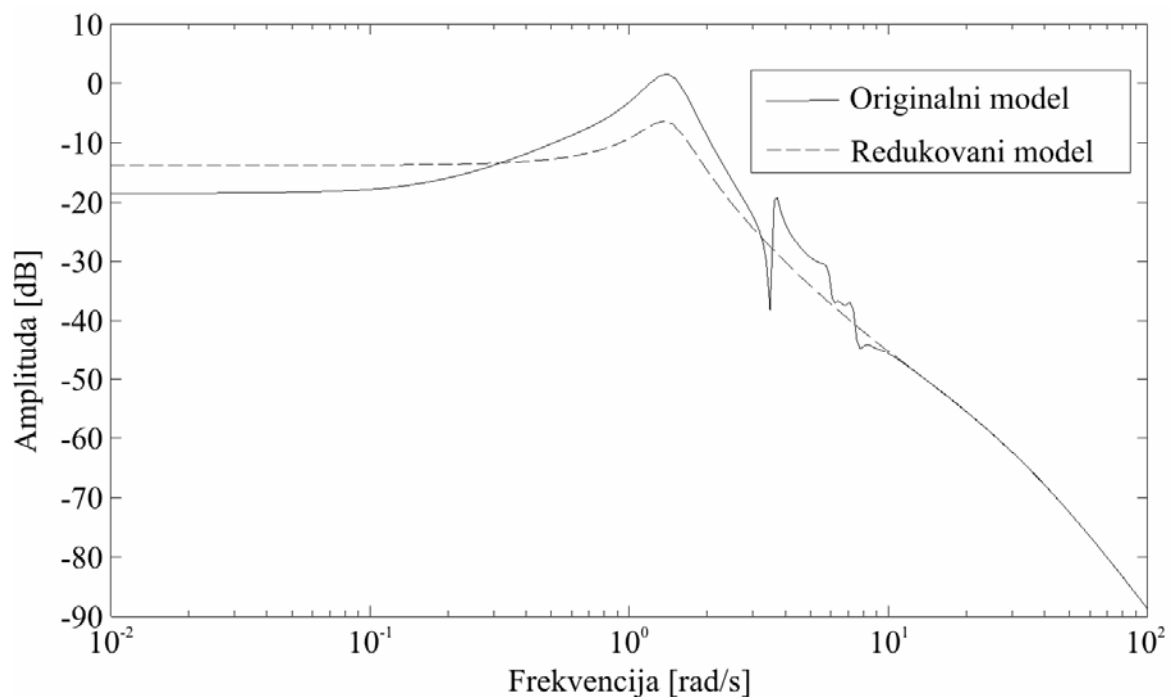
Slika 8.2. Moduo napona na sabirnici 39, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 0,05 r.j., za originalni i redukovani dinamički model u **Slučaju 1**



Slika 8.3. Moduo napona na sabirnici 38, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G1 za 0,05 r.j., za originalni i redukovani dinamički model u **Slučaju 1**



Slika 8.4. Amplitude frekventnih odziva originalnog i redukovanog dinamičkog modela u **Slučaju 2**



Slika 8.5. Amplitude frekventnih odziva originalnog i redukovanog dinamičkog modela u **Slučaju 4**

**Slučaj 1** pokazuje da promenljive stanja turbinskih regulatora i sinhronih generatora imaju mali uticaj na prirodu analiziranog problema. Najveći broj promenljivih može se eliminisati iz modela ukoliko su referentni naponi svih automatskih regulatora napona i moduli napona na svim sabirnicama deklarirani za ulazne i izlazne promenljive, respektivno. Ukoliko se analizira neki određen slučaj razmatranog fizičkog problema (sa redukovanim brojem ulaznih i/ili izlaznih promenljivih), određen broj dodatnih promenljivih stanja može se

izbaciti iz modela. Za izabranu tačnost redukovanog modela, izbor izlaznih promenljivih nije uticao na broj i tipove promenljivih stanja koje su eliminisane iz dinamičkog modela. Međutim, postoji značajna razlika u podudaranju originalnog i redukovanog modela za različit izbor izlaznih promenljivih. Dobijene razlike su rezultat električne udaljenosti ulaza i izlaza, pri čemu manja električna udaljenost rezultuje manjom razlikom u podudaranju dinamičkih odziva originalnog i redukovanog modela. Može se zaključiti da bi za drugačije izabranu tačnost redukovanog modela, izbor izlaznih promenljivih uticao na broj promenljivih stanja koje mogu biti eliminisane iz dinamičkog modela.

U Tabeli 8.2 data je lista polova koji su očuvani u modelima redukovanim u **Slučaju 1** i **Slučajevima 2–4**. Osim prikazanih polova, polovi originalnog i redukovanih dinamičkih modela nisu isti.

Osim one već razmatrane u gornjim slučajevima, analizirane su tri dodatne radne tačke za **Slučaj 1**, kako bi se istražilo kako se menja važnost originalnih promenljivih stanja (MIOSV) sa promenom radne tačke. Dodatne radne tačke dobijene su promenom:

**Slučaj 1.1:** opterećenja u čvorovima 4, 7, 8, 16 i 39;

**Slučaj 1.2:** proizvodnje aktivne snage generatora povezanih na sabirnice 30, 32, 36 i 38;

**Slučaj 1.3:** modula napona koji se održava konstantnim na sabirnicama 33, 34, 35, 37 i 39.

Tabela 8.2. Lista polova koji su očuvani u modelima redukovanim u **Slučaju 1** i **Slučajevima 2–4**

Polovi originalnog modela	Polovi modela redukovanog u <b>Slučaju 1</b>	Polovi modela redukovanih u <b>Slučajevima 2–4</b>
-1000,0	-1000,0	-1000,0
-38,0	-38,0	–
-37,3	-37,3	–
-21,1	-21,1	–
-1,6	-1,6	–
-1,5	-1,5	–
-30,1±j5,9	-30,1±j5,9	-30,1±j5,9
-21,1±j20,0	-21,1±j20,0	-21,1±j20,0
-14,2±j11,9	-14,2±j11,9	–
-14,1±j11,8	-14,1±j11,8	–
-0,3±j1,4	-0,3±j1,4	-0,3±j1,4

**Slučajevi 1.1–1.3** pokazuju da vrednosti MIOSV mogu varirati u nekoj meri, ali ne menjaju red veličine pri promeni radne tačke. Tako, sve promenljive stanja ostaju u istoj kategoriji važnosti (važne promenljive ostaju važne, dok manje važne promenljive ostaju manje važne). Za  $\xi = 1$ , istih 69 promenljivih stanja (kao u **Slučaju 1**) eliminisano je iz modela, u sva tri slučaja nabrojana gore (**Slučajevi 1.1–1.3**). Za drugačije izabranu vrednost  $\xi$ , broj i tipovi promenljivih stanja koje mogu biti eliminisane iz dinamičkog modela možda ne bi bili apsolutno isti (u svim razmatranim radnim tačkama), ali bi sasvim sigurno bili vrlo slični.

### 8.2.2. Elektroenergetski sistem Srbije

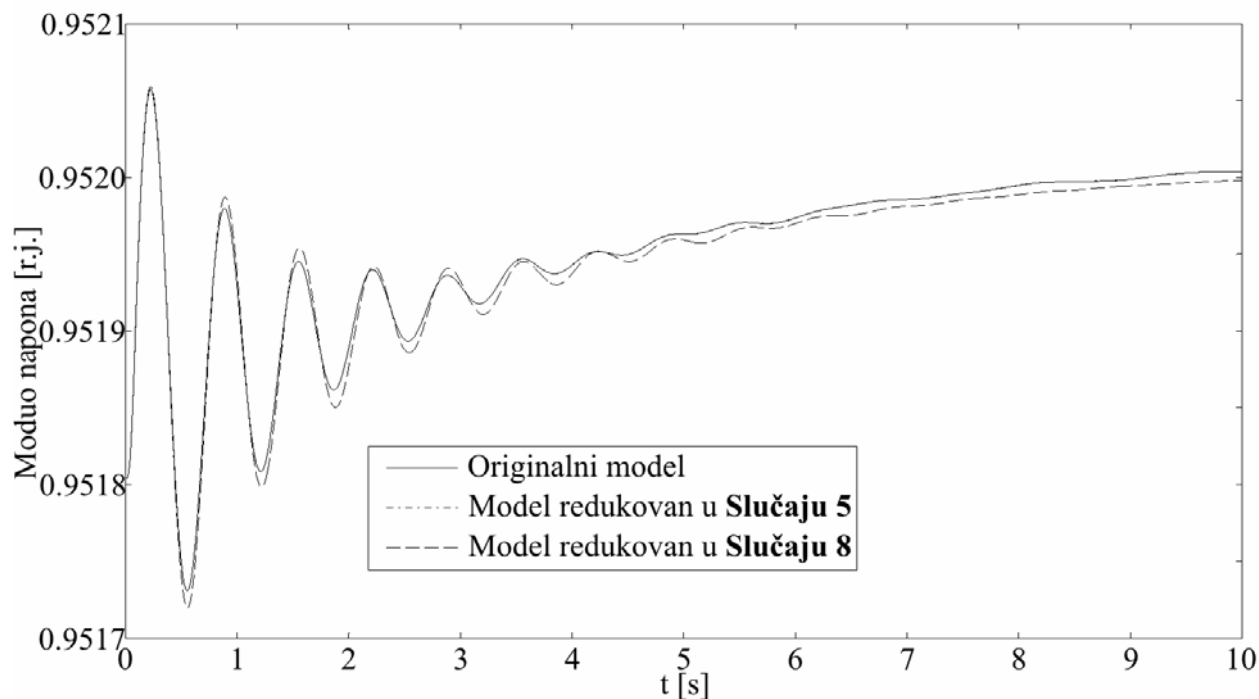
Referentni napon automatskog regulatora napona sinhronog generatora G46, i moduli napona na sabirnici 35161 (na kojoj je povezan G46) i sabirnicama koje su najbliže sinhronom generatoru G46 (sabirnice 34775, 34464, 34525, 34580 i 34657), izabrani su za ulaznu i izlazne promenljive, respektivno. Modifikovana LR-Smith(l)-ova metoda korišćena je za rešavanje Lyapunov-ih jednačina [66]. Razmatrane učestanosti su iste kao u *Tački 8.2.1.*

Tipovi promenljivih imaju MIOSV istog reda veličine kao i u modelu New England test sistema. Tabela 8.3 daje pregled broja promenljivih stanja eliminisanih iz dinamičkog modela, za četiri različite vrednosti kriterijuma konvergencije ( $\xi$ ) (**Slučajevi 5–8**). Slika 8.6 daje uporedni prikaz odziva modula napona na sabirnici 34580, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G46 za 0,05 r.j., za originalni i dva modela redukovana predloženom tehnikom (**Slučaj 5** i **Slučaj 8**). Slika 8.7 daje uporedni prikaz amplituda frekventnih odziva originalnog i redukovanih dinamičkih modela u **Slučaju 5** i **Slučaju 8**, za moduo napona na sabirnici 34580 kao izlazne promenljive (frekventni odziv definiše se za jedan ulazno-izlazni par promenljivih). Kao što je i očekivano, sa povećanjem vrednosti  $\xi$ , povećava se i broj promenljivih stanja eliminisanih iz dinamičkog modela (videti Tabelu 8.3). Za analizirani problem, veliki broj promenljivih stanja može biti eliminisan iz modela gotovo bez uticaja na tačnost rezultata dobijenih korišćenjem preostalog (redukovanog) dinamičkog modela (videti Tabelu 8.3, **Slučajeve 5–7**).

Tabela 8.3. Broj promenljivih stanja eliminisanih iz modela elektroenergetskog sistema Srbije, za različite vrednosti  $\xi$

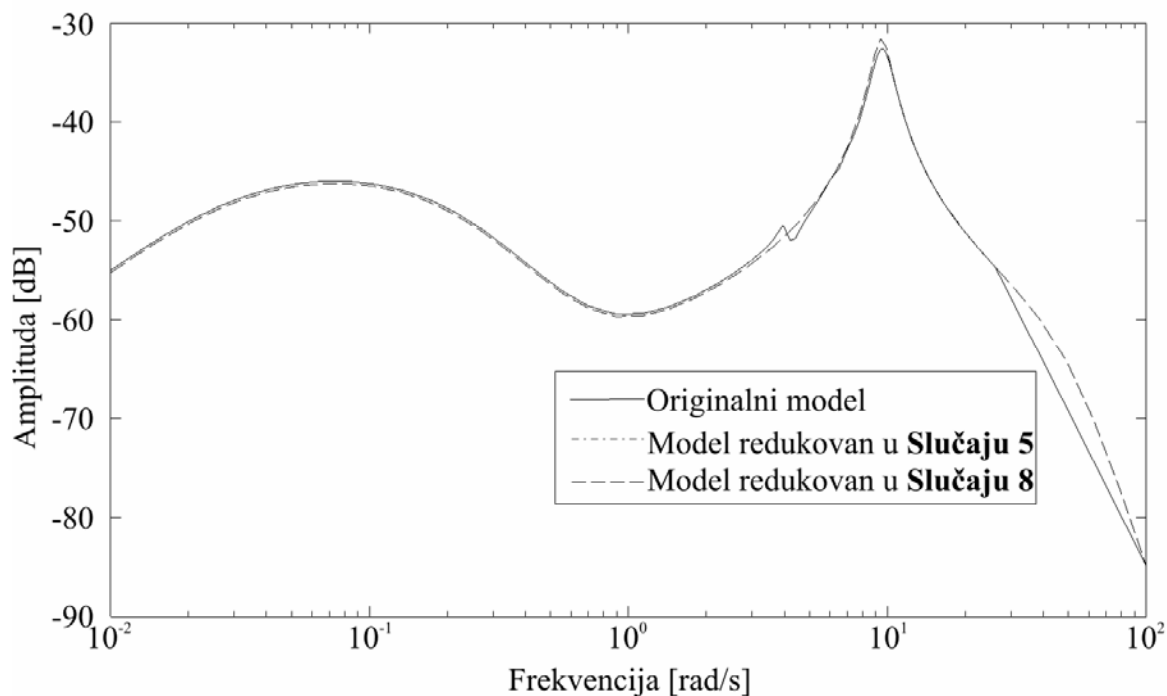
Slučaj	$\xi$	Broj eliminisanih promenljivih stanja
<b>Slučaj 5</b>	$10^{-10}$	339
<b>Slučaj 6</b>	$10^{-7}$	344
<b>Slučaj 7</b>	$10^{-4}$	461
<b>Slučaj 8</b>	$10^{-1}$	832

Na kraju bi trebalo obratiti pažnju i na računsku efikasnost predloženog algoritma. *Korak 4* predloženog algoritma je računski najintenzivniji. Vreme potrebno da se proračuna vektor *MIOSV*, što uključuje rešavanje Lyapunov-ih jednačina, proračunavanje matrice projekcije (*T*), njene inverzije i Hankel-ovih singularnih vrednosti, zavisi od veličine analiziranog dinamičkog modela i broja ulaznih i izlaznih promenljivih. Tabela 8.4 daje prikaz vremena, relativno u odnosu na **Slučaj 4**, potrebnih da računar izvrši *Korak 4* predložene procedure, za slučajeve analizirane u prethodnoj i ovoj tački.



Slika 8.6. Moduo napona na sabirnici 34580, pri povećanju referentnog napona automatskog regulatora napona sinhronog generatora G46 za 0,05 r.j., za:

- 1) originalni model,
- 2) model redukovano u **Slučaju 5**, i
- 3) model redukovano u **Slučaju 8**



Slika 8.7. Amplituda frekventnog odziva:

- 1) originalnog modela,
  - 2) modela redukovano u **Slučaju 5**, i
  - 3) modela redukovano u **Slučaju 8**,
- za moduo napona na sabirnici 34580 kao izlazne promenljive

Tabela 8.4. Vremena, relativno u odnosu na **Slučaj 4**, potrebna da računar izvrši *Korak 4* predloženog algoritma

Slučaj	Relativno vreme potrebno da računar izvrši <i>Korak 4</i>
<b>Slučaj 1</b>	6,55
<b>Slučaj 2</b>	1,01
<b>Slučaj 3</b>	1,09
<b>Slučaj 4</b>	1,00
<b>Slučajevi 5–8</b>	183,66

### 8.3. REDUKCIJA DINAMIČKIH MODELA ELEKTROENERGETSKOG SISTEMA PRIMENOM APROKSIMATIVNIH BISIMULACIONIH RELACIJA

#### 8.3.1. Redukcija dinamičkog modela u formi standardnog prostora stanja

U ovoj tački je predloženi algoritam za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon poremećaja (*Tačka 6.2.5.*), za varijantu transformacije linearizovanog modela u formu standardnog prostora stanja, primenjen na New England test sistem. Ovaj test sistem koristi se za grubu procenu greške koja se unosi korišćenjem jednog (redukovano) linearizovanog modela u okolini radne tačke u kojoj je kriterijum tačnosti (6.41) zadovoljen (*Korak 8* algoritma predloženog u *Tački 6.2.5.*). Dinamički model elektroenergetskog sistema Srbije koristi se za demonstraciju primenljivosti aproksimativnih bisimulacionih relacija i bisimulacionih funkcija za redukciju dinamičkih modela u formi standardnog prostora stanja realnih elektroenergetskih sistema.

##### 8.3.1.1. New England test sistem

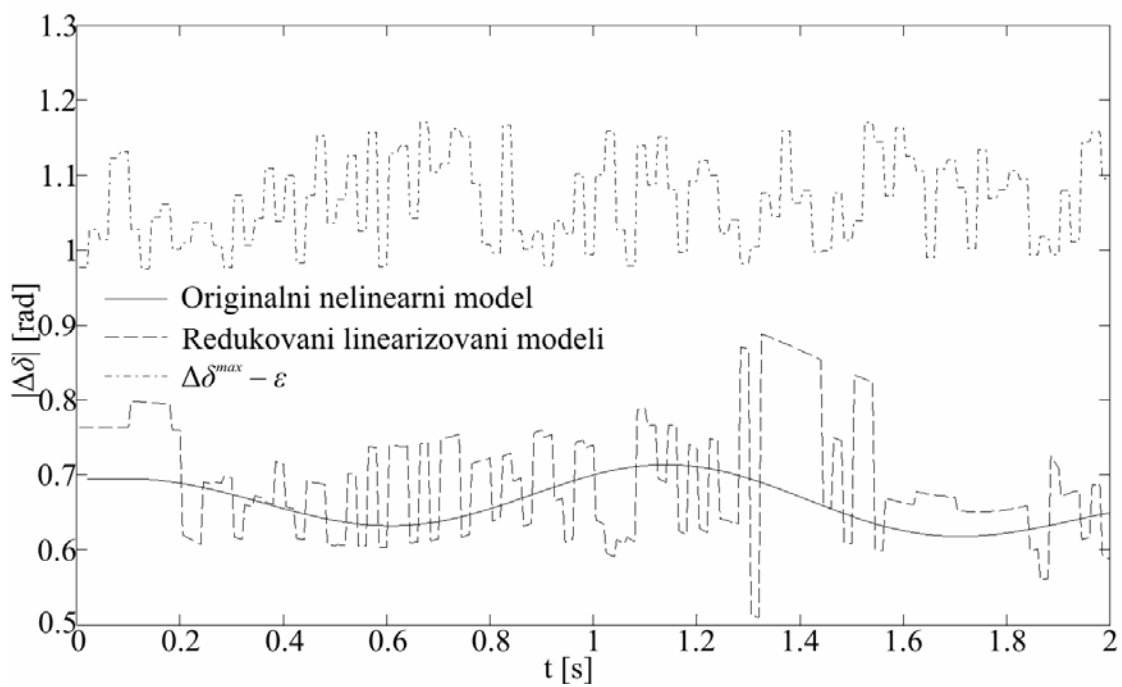
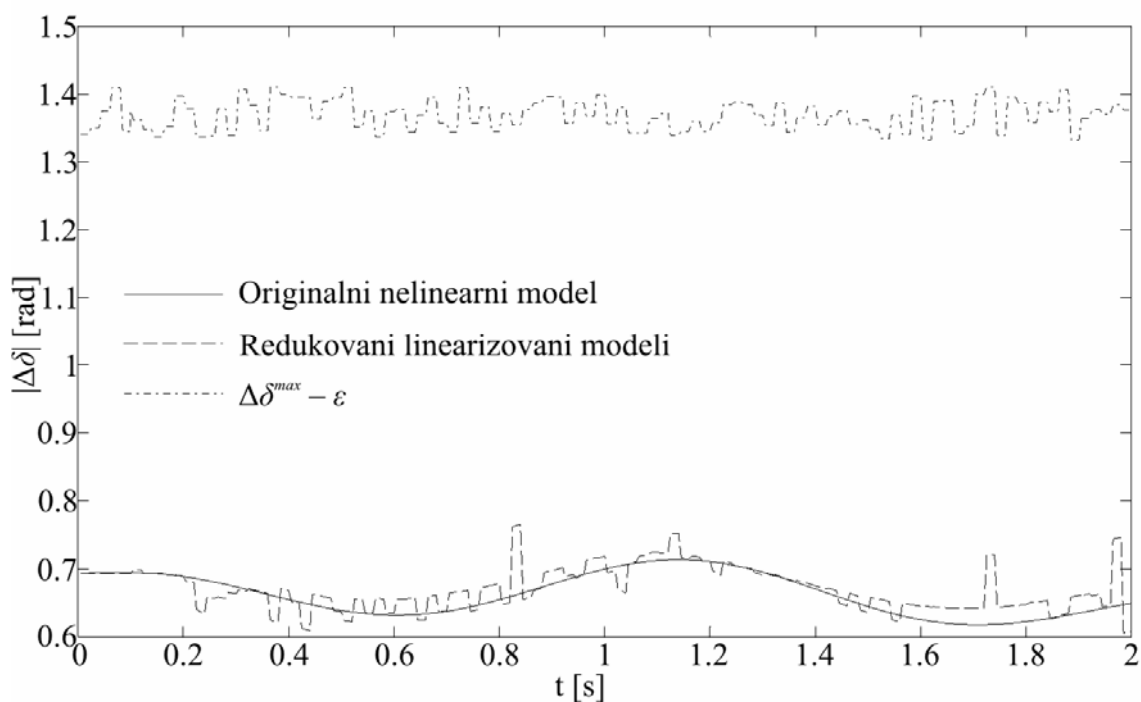
Analizirana su dva karakteristična poremećaja:

**Poremećaj 1:** Ispad dalekovoda koji povezuje sabirnice 2 i 3, u trenutku 0,1 s.

**Poremećaj 2:** Ispad opterećenja u čvoru 8, u trenutku 0,1 s.

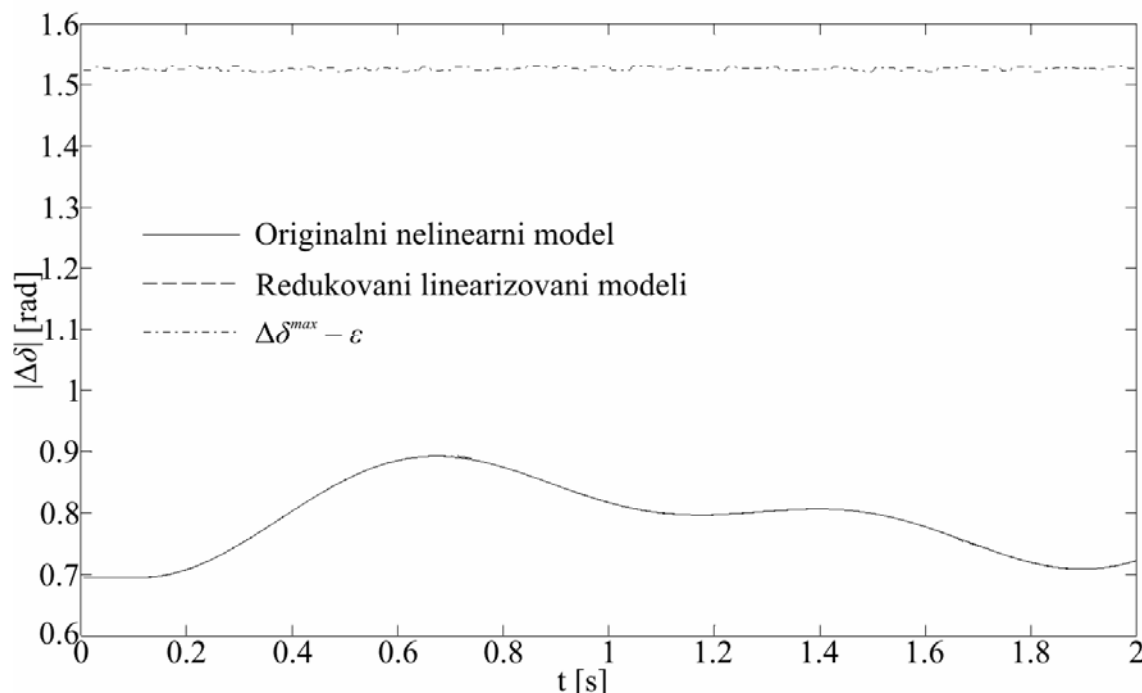
Dužina perioda razmatranja je 2 s, dok je usvojena vrednost maksimalne razlike dva ugla rotora za koju sinhroni generatori ostaju u sinhronizmu  $\Delta\delta^{max} = \pi/2$ ; vremenski korak numeričke integracije je postavljen na vrednost  $\Delta t = 0,005$ .

Slika 8.8 daje uporedni prikaz apsolutnih vrednosti razlike uglova rotora generatora G1 i G2 za **Poremećaj 1**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli. Vrednost  $\Delta x_r^{max}$  postavljena je na 0,1, dok su početne vrednosti reda redukovanih linearizovanih modela postavljene na  $r = 50$  (a.) i  $r = 75$  (b.). Slika 8.9 daje uporedni prikaz apsolutnih vrednosti razlike uglova rotora generatora G1 i G2 za **Poremećaj 2**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli. Vrednost  $\Delta x_r^{max}$  je ista kao za **Poremećaj 1**, dok je početna vrednost reda redukovanih linearizovanih modela postavljena na  $r = 90$ . Treća kriva na Slikama 8.8 i 8.9 predstavlja razliku vrednosti  $\Delta\delta^{max}$  i  $\varepsilon$ .

a.  $r = 50$ b.  $r = 75$ 

Slika 8.8. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaj 1**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (za različite početne vrednosti  $r$ )



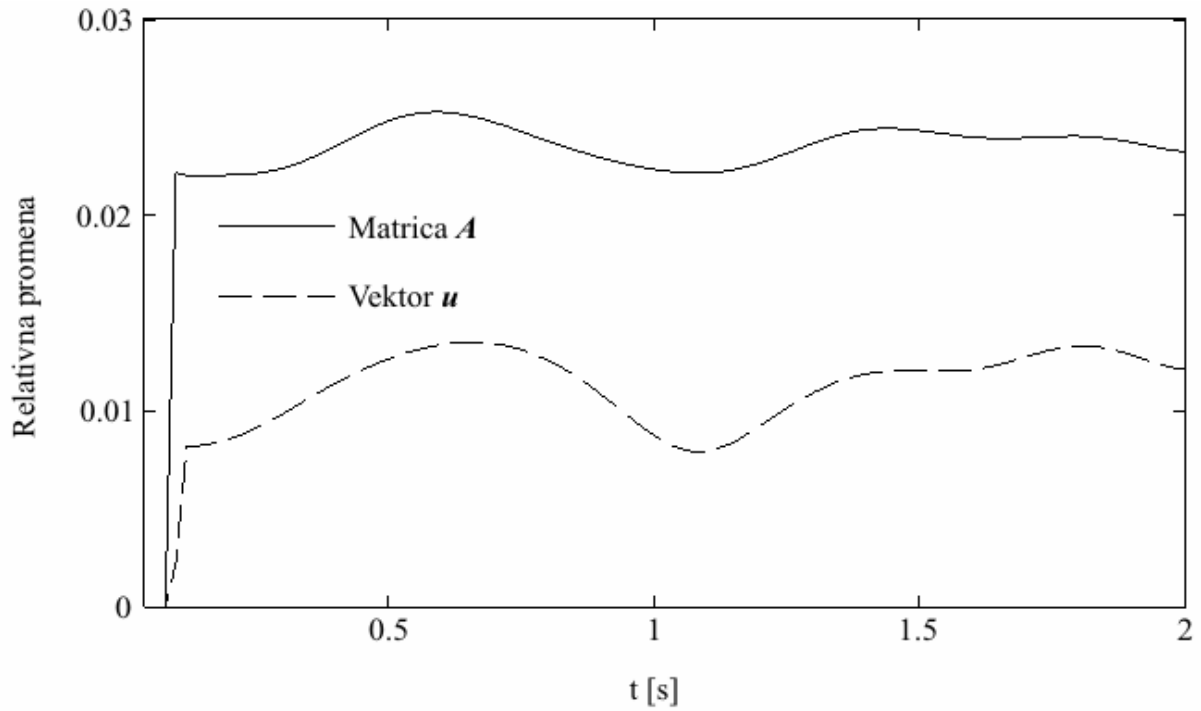


Slika 8.9. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaj 2**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (početna vrednost  $r = 90$ )

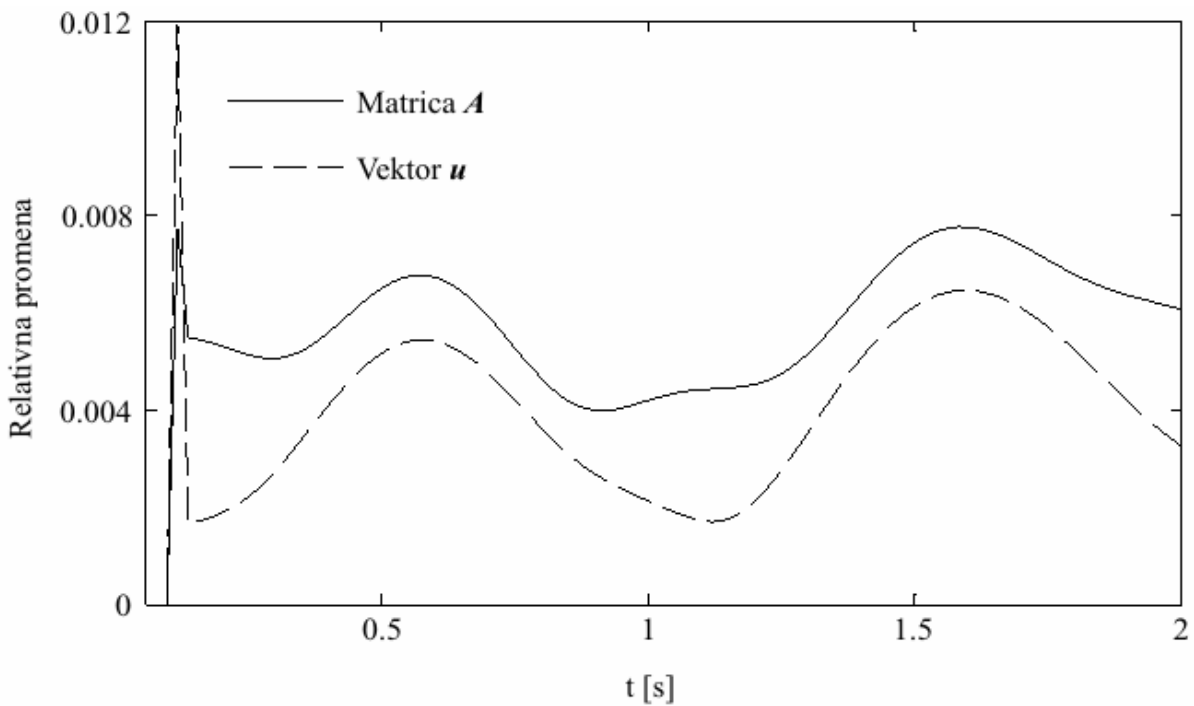
Slike 8.8 i 8.9 pokazuju kako se menjaju granica greške ( $\epsilon$ ) i odstupanje dve krive (dobijene korišćenjem originalnog nelinearnog modela i redukovanih linearizovanih modela) sa početnom vrednošću  $r$ . Veća početna vrednost  $r$  implicira manje odstupanje krivih i manju vrednost granice greške ( $\epsilon$ ). Ono što treba napomenuti jeste da odstupanje krivih nije posledica samo redukcije, već i rešavanja jednog (redukovanog) linearizovanog modela, dok je zahtevana tačnost zadovoljena (videti *Korak 8* algoritma predloženog u *Tački 6.2.5.*).

Važno je napomenuti da se smanjenjem vrednosti  $\Delta x_r^{max}$  povećava broj linearizovanih modela, kao i broj redukcija modela, što rezultuje sporijom, ali tačnijom simulacijom. Takođe, može se zaključiti da robusniji elektroenergetski sistem (u smislu analiziranog problema – tranzijentne stabilnosti) omogućava veću kompresiju modela – manje apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora ( $\Delta\delta_s$ ) omogućavaju veću vrednost granice greške ( $\epsilon$ ), a time i manju vrednost reda redukovanih linearizovanih modela ( $r$ ).

U ovoj tački takođe se razmatra kako se matrica  $\mathbf{A}$  i vektor  $\mathbf{u}$  matrične jednačine (6.18) menjaju nakon velikog poremećaja, kako bi se dobila procena reda veličine greške koja se unosi korišćenjem jednog linearizovanog modela u okolini radne tačke. Frobenius-ova norma se koristi kao mera promena matrice (vektora) (koristi se formulacija slična onoj datoj u nejednačini (6.41)). Slika 8.10 ilustruje rezultate nakon **Poremećaja 1** i **2**, gde svaka tačka krive predstavlja promenu matrice  $\mathbf{A}$  (vektora  $\mathbf{u}$ ) relativno u odnosu na matricu  $\mathbf{A}$  (vektor  $\mathbf{u}$ ) dobijenu linearizacijom nelinearnog modela odmah nakon poremećaja. Može se zaključiti da se matrica  $\mathbf{A}$  i vektor  $\mathbf{u}$  ne menjaju značajno nakon ispada nadzemnog voda (**Poremećaj 1**) ili ispada opterećenja (**Poremećaj 2**). Tako, može se zaključiti da greška koja se unosi *Korakom 8* predloženog algoritma nije kritična, što omogućava povećanje vrednosti  $\Delta x_r^{max}$ . Takav zaključak je vrlo bitan za numeričku efikasnost predloženog algoritma pri primeni na realne elektroenergetske sisteme.



a. Poremećaj 1



b. Poremećaj 2

Slika 8.10. Relativne promene matrice  $A$  i vektora  $u$  (u odnosu na one dobijene linearizacijom nelinearnog modela odmah nakon poremećaja) nakon dva analizirana poremećaja (mereno Frobenius-ovom normom)

## 8.3.1.2. Elektroenergetski sistem Srbije

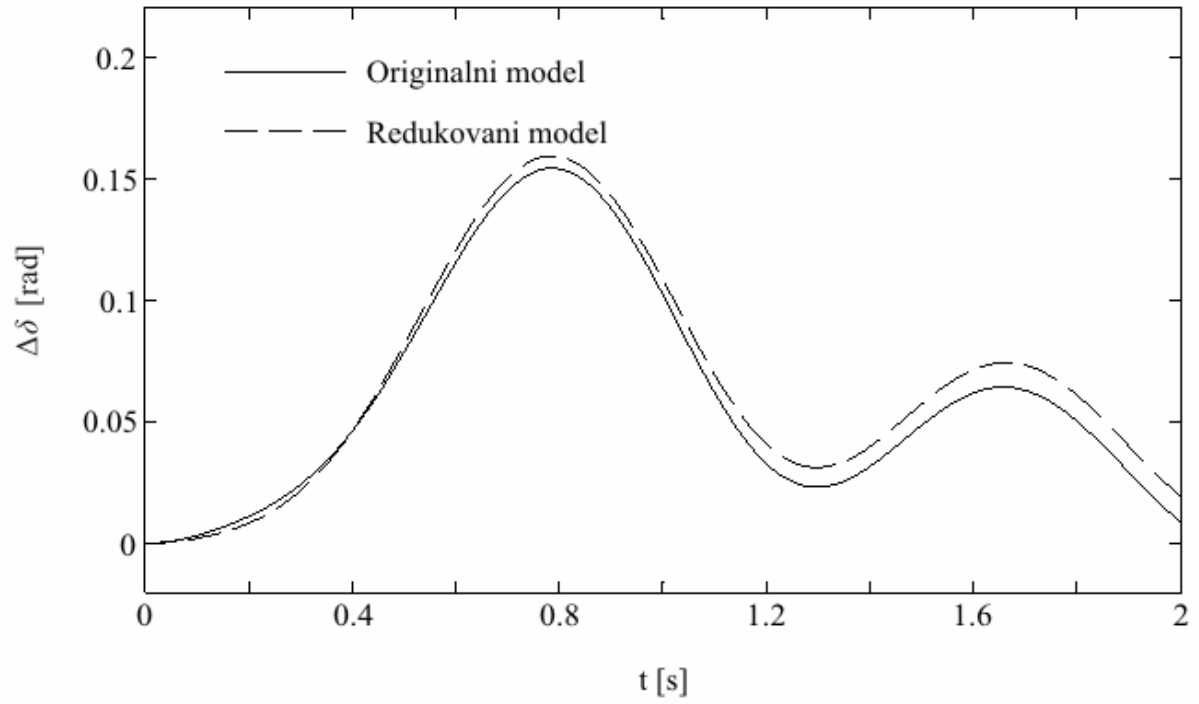
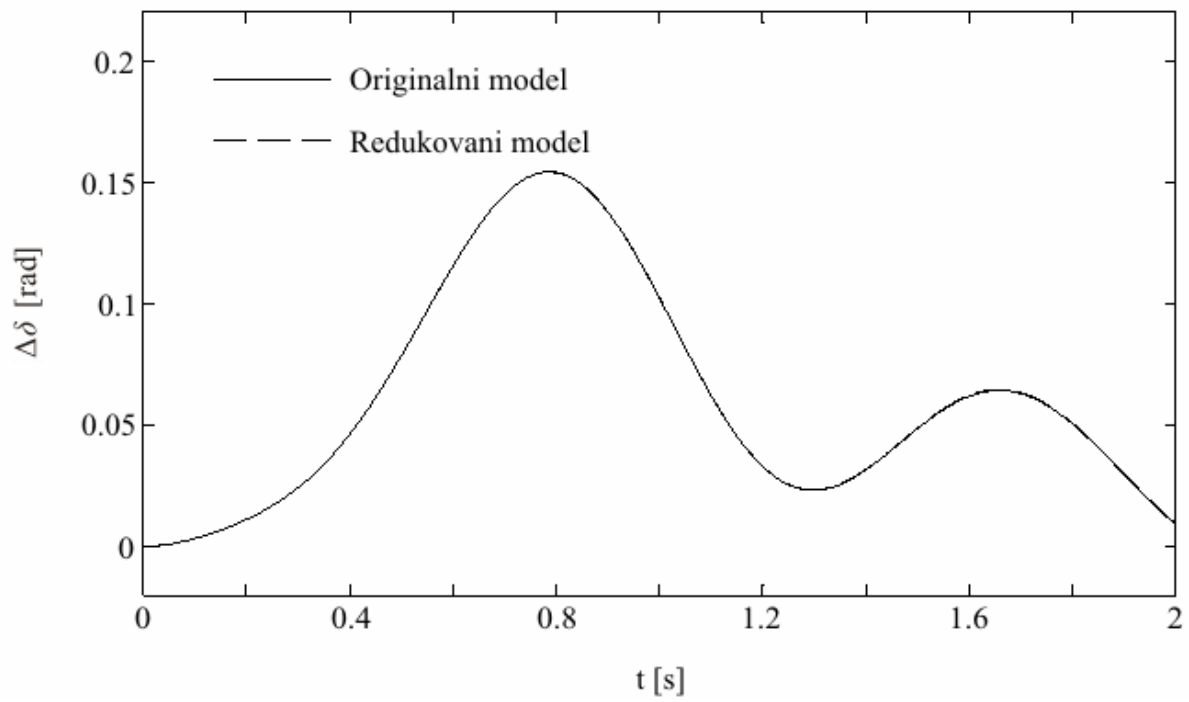
Pri analiziranju realnih elektroenergetskih sistema treba imati u vidu sledeće činjenice:

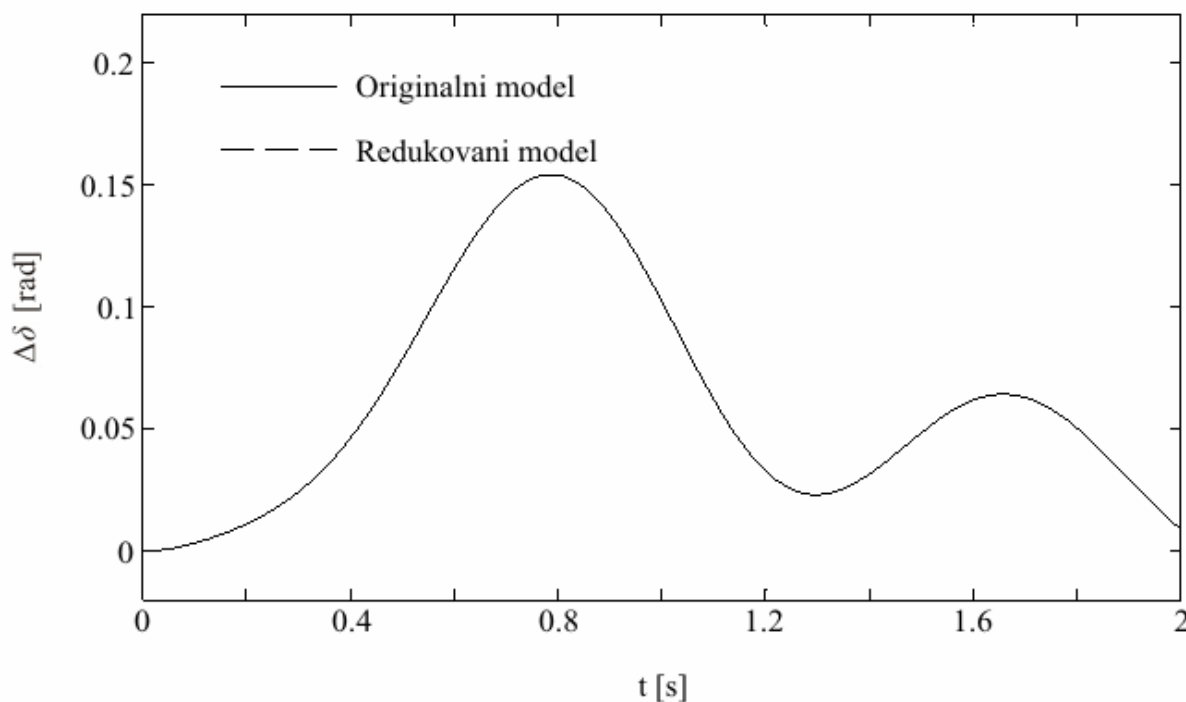
- izvođenje analiza tranzijentne stabilnosti računski je vrlo zahtevno;
- kao što je prethodno zaključeno, matrica  $A$  i vektor  $\mathbf{u}$  se sa vremenom ne menjaju značajno nakon razmatranih poremećaja;
- redukcija se uobičajeno koristi za smanjenje kompleksnosti (veličine) modela spoljašnjeg sistema; vrlo je verovatno da se spoljašnji sistem može predstaviti modelom koji je dobijen linearizacijom originalnog nelinearnog modela u izabranoj radnoj tački, posebno ukoliko je poremećaj koji se analizira na „većoj“ (električnoj) udaljenosti od spoljašnjeg sistema.

Uvažavajući prethodno iznete činjenice, algoritam predložen u *Tački 6.2.5.* neće direktno biti primenjen na elektroenergetski sistem Srbije. Elektroenergetski sistem Srbije se koristi da se demonstrira da se aproksimativne bisimulacione relacije mogu efikasno koristiti za redukciju modela u formi standardnog prostora stanja realnih elektroenergetskih sistema.

Model koji se redukuje dobijen je linearizacijom nelinearnog modela (videti transformaciju iz (2.4) u (6.14)), pri čemu se umesto promenljivih koriste njihovi priraštaji ( $\Delta \mathbf{x}$  i  $\Delta \mathbf{y}$  umesto  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ ). Radi poređenja originalnog i redukovano modela, zadata je nenulta vrednost vektora  $\mathbf{u}$  (vrednost prvog elementa vektora  $\mathbf{u}$  je postavljena na 0,05 r.j.). Zbog jednostavnosti, razlike uglova rotora samo šest sinhronih generatora (G1–G6) izabrane su za izlazne promenljive.

Slika 8.11 daje uporedni prikaz razlike uglova rotora sinhronih generatora G3 i G6, za originalni i redukovani linearizovani dinamički model. Vrednosti reda redukovanih linearizovanih modela su postavljene na  $r = 200$  (a.),  $r = 300$  (b.) i  $r = 500$  (c.). Vrednosti granice greške su  $\varepsilon = 10,097$  ( $r = 200$ ),  $\varepsilon = 0,310$  ( $r = 300$ ) i  $\varepsilon = 0,003$  ( $r = 500$ ). Može se zaključiti da se primenom aproksimativnih bisimulacionih relacija dimenzija linearizovanog dinamičkog modela u formi standardnog prostora stanja može značajno redukovati gotovo bez uticaja na tačnost rezultata dobijenih korišćenjem preostalog (redukovano) dinamičkog modela.

a.  $r = 200$ b.  $r = 300$



c.  $r = 500$

Slika 8.11. Razlika uglova rotora sinhronih generatora G3 i G6 za  $u(1) = 0,05$  r.j., za originalni i redukovani linearizovani dinamički model (za različite vrednosti  $r$ )

### 8.3.2. Redukcija dinamičkog modela u deskriptor formi

U ovoj tački primenjen je predloženi algoritam za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon poremećaja (Tačka 6.2.5.), za varijantu transformacije linearizovanog modela u deskriptor formu, na primeru New England test sistem. Ovaj test sistem se ponovo koristi za grubu procenu greške koja se unosi korišćenjem jednog linearizovanog modela u okolini radne tačke u kojoj je kriterijum tačnosti (6.41) zadovoljen. New England test sistem se takođe koristi da se pokaže kako predložena procedura čuva sopstvene vrednosti originalnog modela. Dinamički model elektroenergetskog sistema Srbije se koristi za demonstraciju primenljivosti aproksimativnih bisimulacionih relacija za redukciju dinamičkih modela u deskriptor formi realnih elektroenergetskih sistema.

#### 8.3.2.1. New England Test System

Analizirana su tri karakteristična poremećaja:

**Poremećaj 1:** Ispad dalekovoda koji povezuje sabirnice 2 i 3, u trenutku 0,1 s.

**Poremećaj 2:** Ispad opterećenja u čvoru 8, u trenutku 0,1 s.

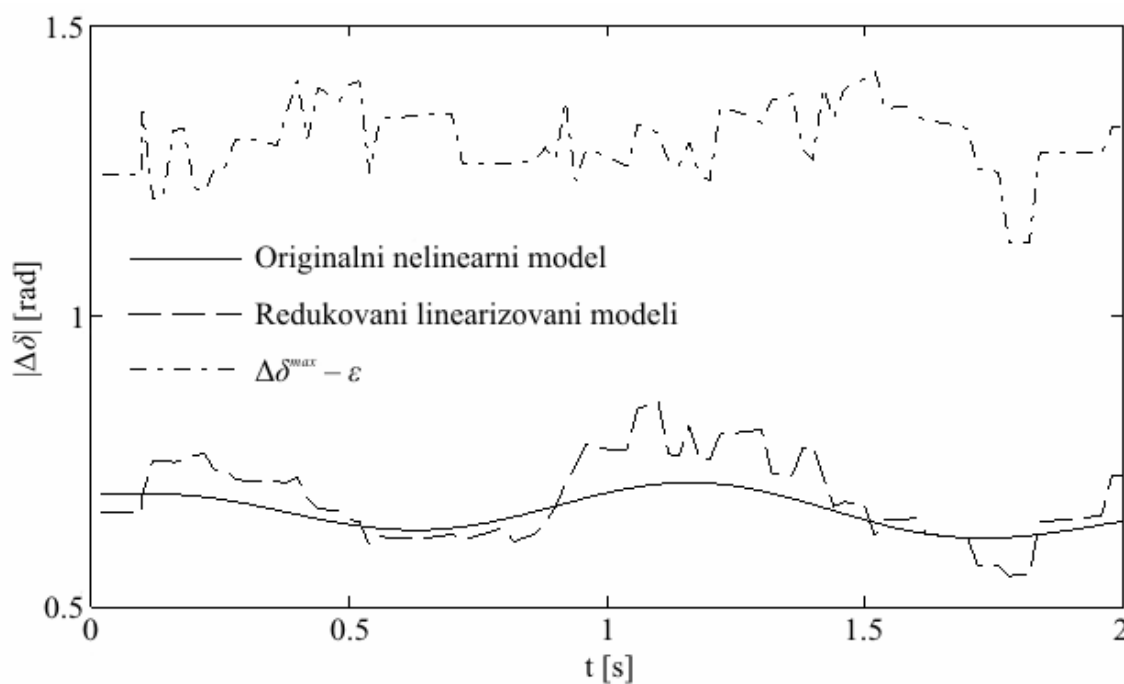
**Poremećaj 3:** Trofazni kratak spoj na sabirnici 3, u trenutku 0,1 s, eliminisan u trenutku 0,2 s.

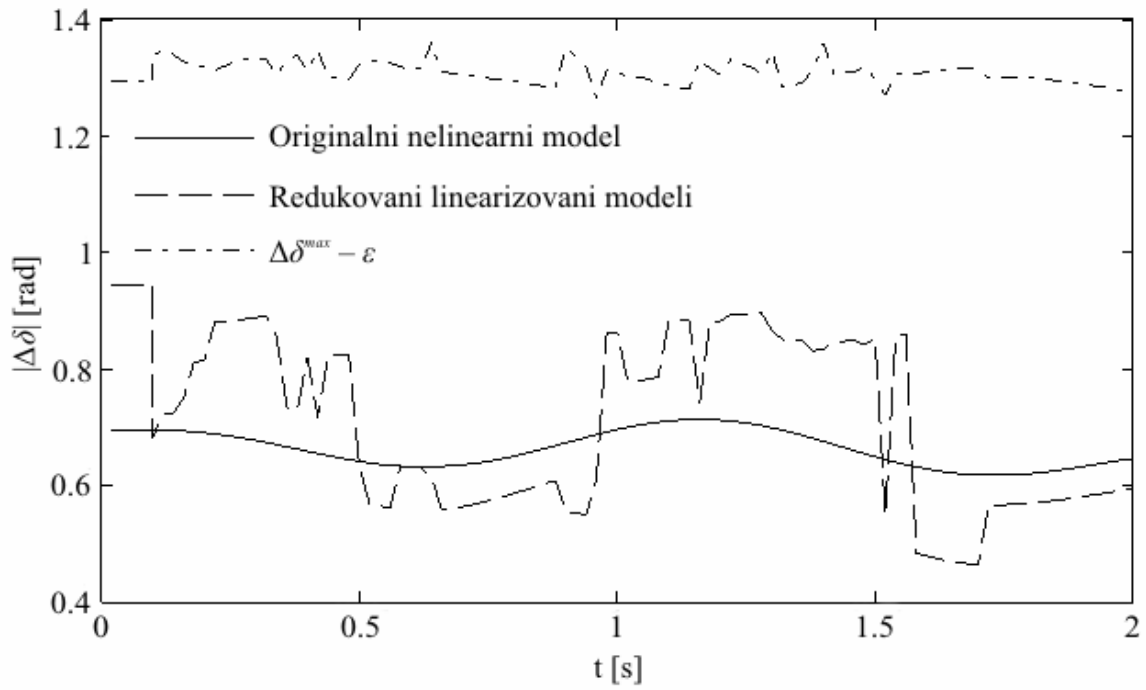
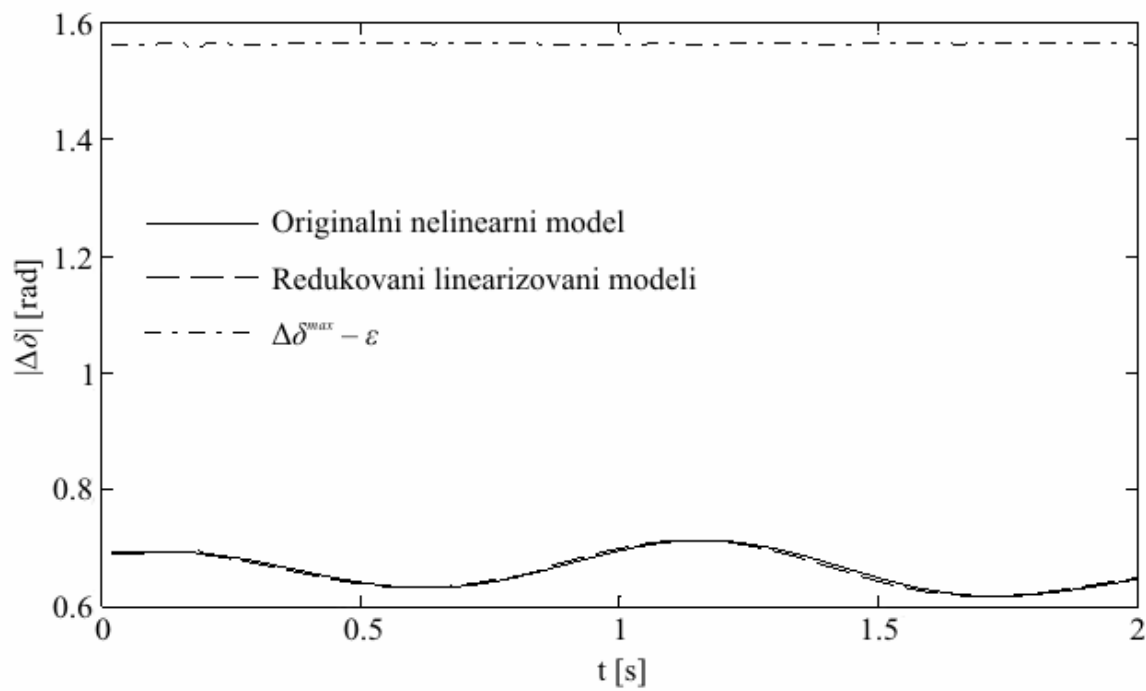
Dužina perioda razmatranja je 2 s, dok je usvojena vrednost maksimalne razlike dva ugla rotora za koju sinhroni generatori ostaju u sinhronizmu  $\Delta\delta^{max} = \pi/2$ ; vremenski korak numeričke integracije postavljen je na vrednost  $\Delta t = 0,02$ .

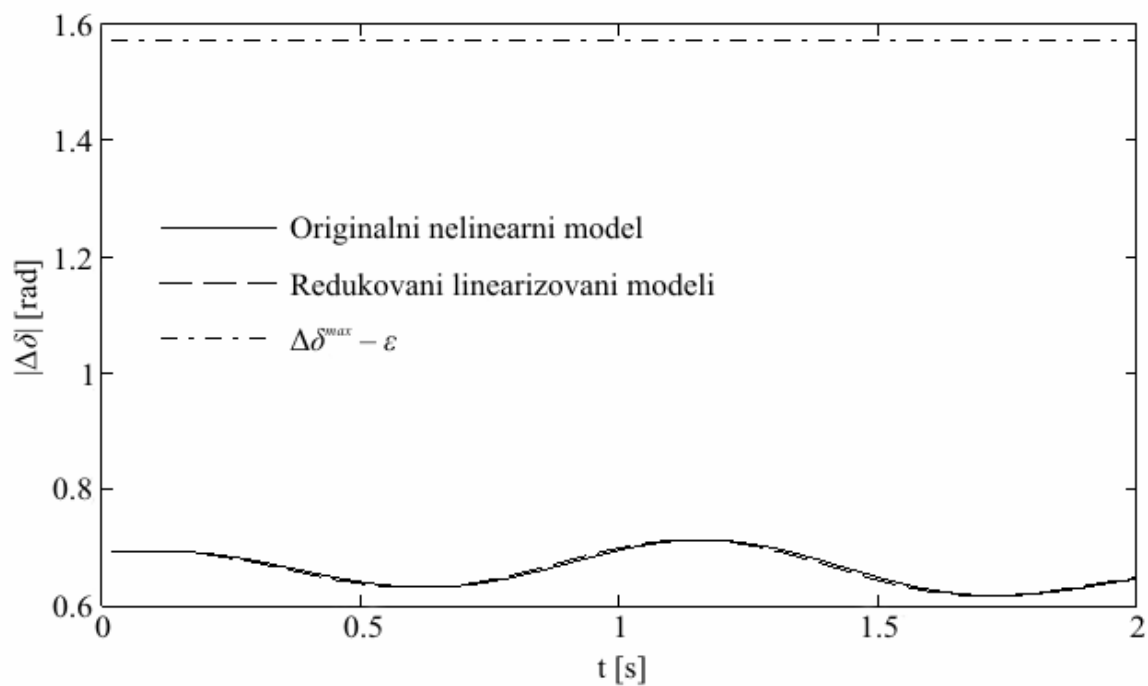
Slika 8.12 daje uporedni prikaz apsolutnih vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaj 1**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli. Treća kriva na Slici 8.12 (i Slikama 8.13 i 8.15) predstavlja

razliku vrednosti  $\Delta\delta^{max}$  i  $\varepsilon$ . Vrednost  $\Delta z_r^{max}$  je postavljena na 0,1, dok su početne vrednosti reda redukovanih linearizovanih modela (u deskriptor formi to je ukupan broj promenljivih stanja i algebarskih promenljivih) postavljene na  $r = 60$  (a.),  $r = 90$  (b.),  $r = 120$  (c.) i  $r = 150$  (d.). Broj promenljivih stanja redukovanih linearizovanih modela je 60 (za  $r = 60$ ), 90 (za  $r = 90$ ) i 109 (za  $r = 120$  i  $r = 150$ ). Rezultati dobijeni za  $r = 120$  i  $r = 150$  su vrlo slični – granica greške i greška aproksimacije su vrlo male, a broj promenljivih stanja je isti kao za originalni model. Dakle, nema potrebe da početna vrednost  $r$  bude veća od 120; ova vrednost je korišćena i za druga dva analizirana poremećaja.

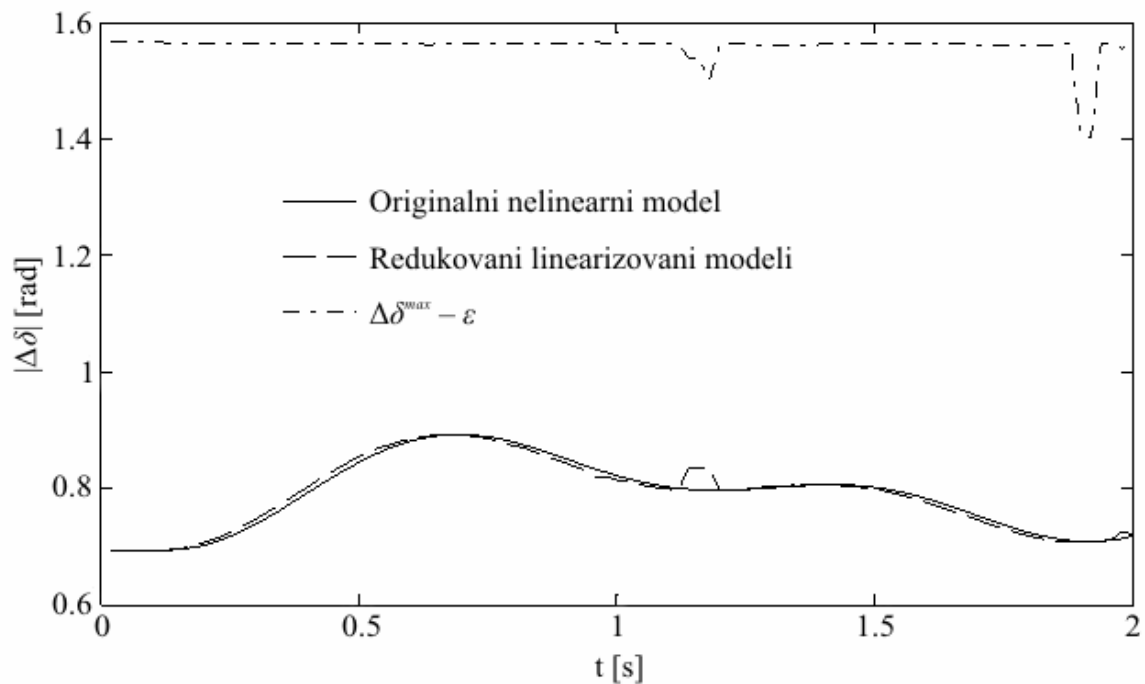
Slika 8.13 daje uporedni prikaz apsolutnih vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaje 2 i 3**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli. Vrednosti  $\Delta z_r^{max}$  su iste kao za **Poremećaj 1**, dok su početne vrednosti reda redukovanih linearizovanih modela postavljene na  $r = 120$ . Može se primetiti da su rezultati vrlo slični onima koji su dobijeni za **Poremećaj 1** (za  $r = 120$ ). Može se zaključiti da se veličina modela može smanjiti za više od pola (120 u odnosu na 247), bez značajnog efekta na tačnost rezultata.

a.  $r = 60$

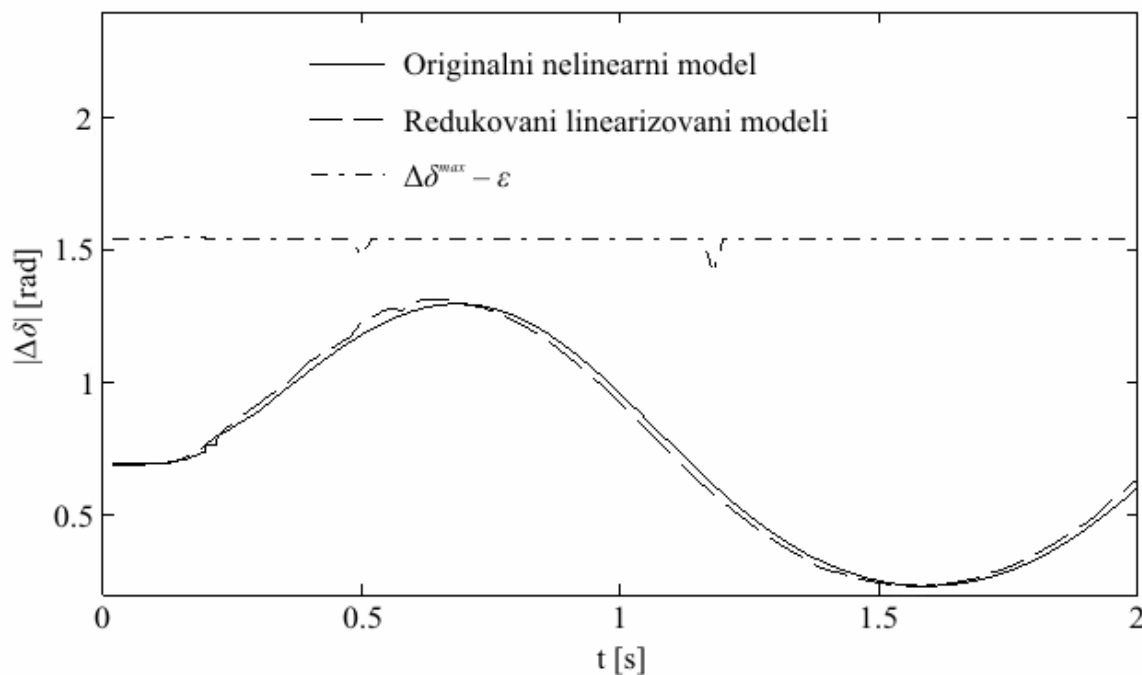
b.  $r=90$ c.  $r=120$

d.  $r = 150$ 

Slika 8.12. Absolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za **Poremećaj 1**, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (za različite početne vrednosti  $r$ )

a. **Poremećaj 2**





### b. Poremećaj 3

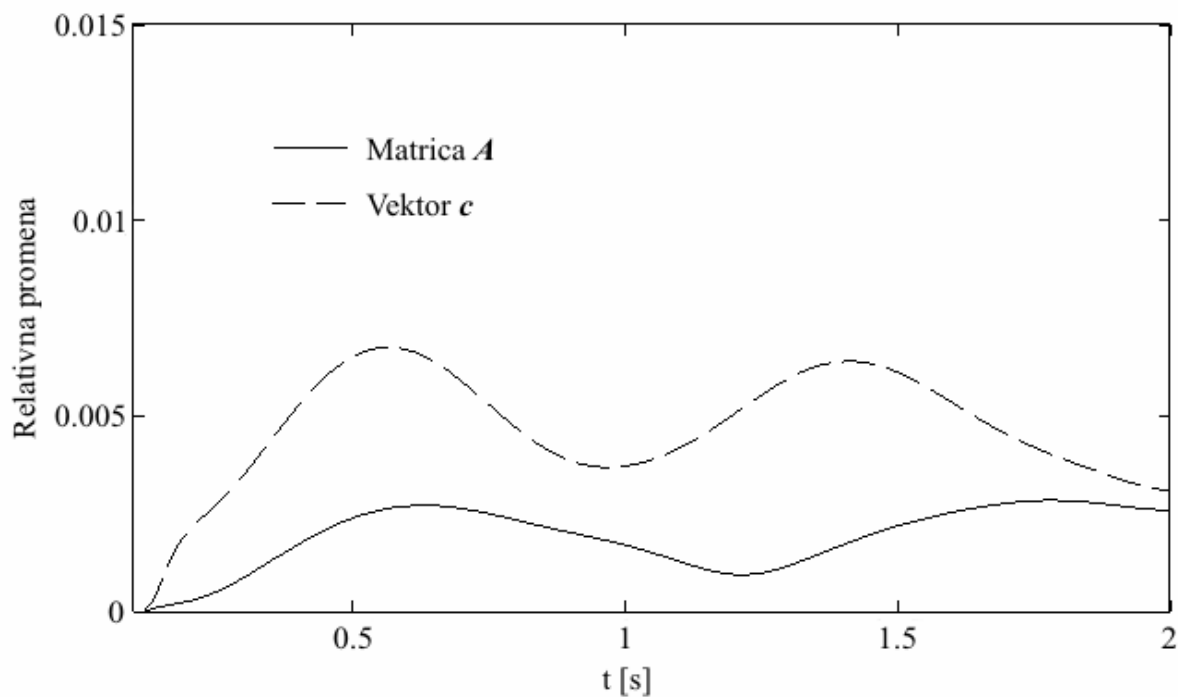
Slika 8.13. Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za dva poremećaja, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli (početna vrednost  $r = 120$ )

Zaključci slični onima datim u Tački 8.3.1.1. se mogu izvesti: veća početna vrednost  $r$  implicira manje odstupanje krivih i manju vrednost granice greške ( $\varepsilon$ ). Smanjenje vrednosti  $\Delta z_r^{max}$  rezultuje sporijom, ali tačnijom simulacijom. Robusniji elektroenergetski sistem omogućava veću kompresiju modela – manje apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora ( $\Delta\delta_s$ ) omogućavaju veću vrednost granice greške ( $\varepsilon$ ), a time i manju vrednost reda redukovanih linearizovanih modela ( $r$ ).

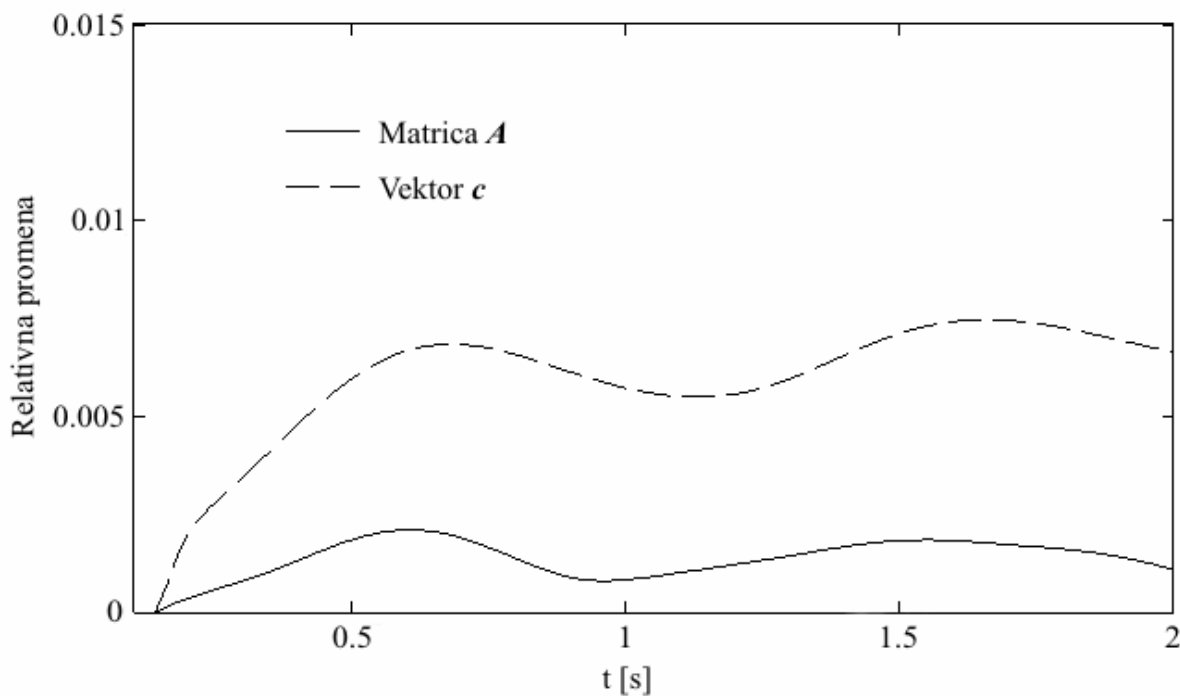
U ovoj tački se razmatra kako se matrica  $A$  i vektor  $c$  matricne jednačine (6.16) menjaju nakon velikog poremećaja, ponovo radi procene reda veličine greške koja se unosi korišćenjem jednog linearizovanog modela u okolini radne tačke. Frobenius-ova norma se ponovo koristi kao mera promena matrice (vektora). Slika 8.14 ilustruje rezultate nakon **Poremećaja 1–3**, gde svaka tačka krive predstavlja promenu matrice  $A$  (vektora  $c$ ) relativno u odnosu na matricu  $A$  (vektor  $c$ ) dobijenu linearizacijom nelinearnog modela odmah nakon poremećaja. Može se zaključiti da se matrica  $A$  i vektor  $c$  ne menjaju značajno nakon ispada prenosnog voda (**Poremećaj 1**) ili ispada opterećenja (**Poremećaj 2**). Iako se matrica  $A$  i vektor  $c$  značajno menjaju nakon kratkog spoja (**Poremećaj 3**), može se primetiti da su te promene dominantne samo neposredno nakon trenutka nastajanja (0,1 s) i trenutka otklanjanja (0,2 s) kratkog spoja. Tako, ponovo se može zaključiti da greška koja se unosi *Korakom 8* predloženog algoritma nije kritična.

U svetlu prethodno izvedenih zaključaka, vrednost parametra  $\Delta z_r^{max}$  je povećana na 0,2, dok su početne vrednosti reda redukovanih linearizovanih modela postavljene na  $r = 120$  (vrednosti ostalih podesivih parametara su zadržane kao u prethodno analiziranim slučajevima). Rezultati za sva tri razmatrana poremećaja su prikazani na Slici 8.15. Kao što se

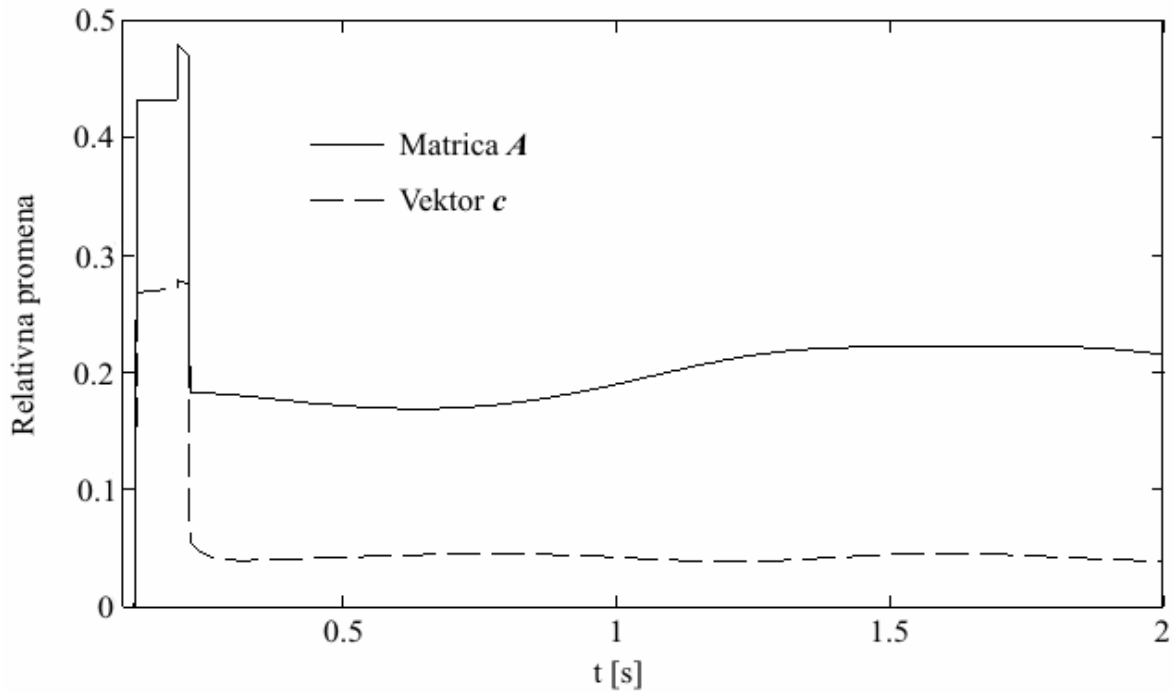
može primetiti, povećanje vrednosti parametra  $\Delta z_r^{max}$  nije značajno uticalo na tačnost dobijenih rezultata.



a. Poremećaj 1

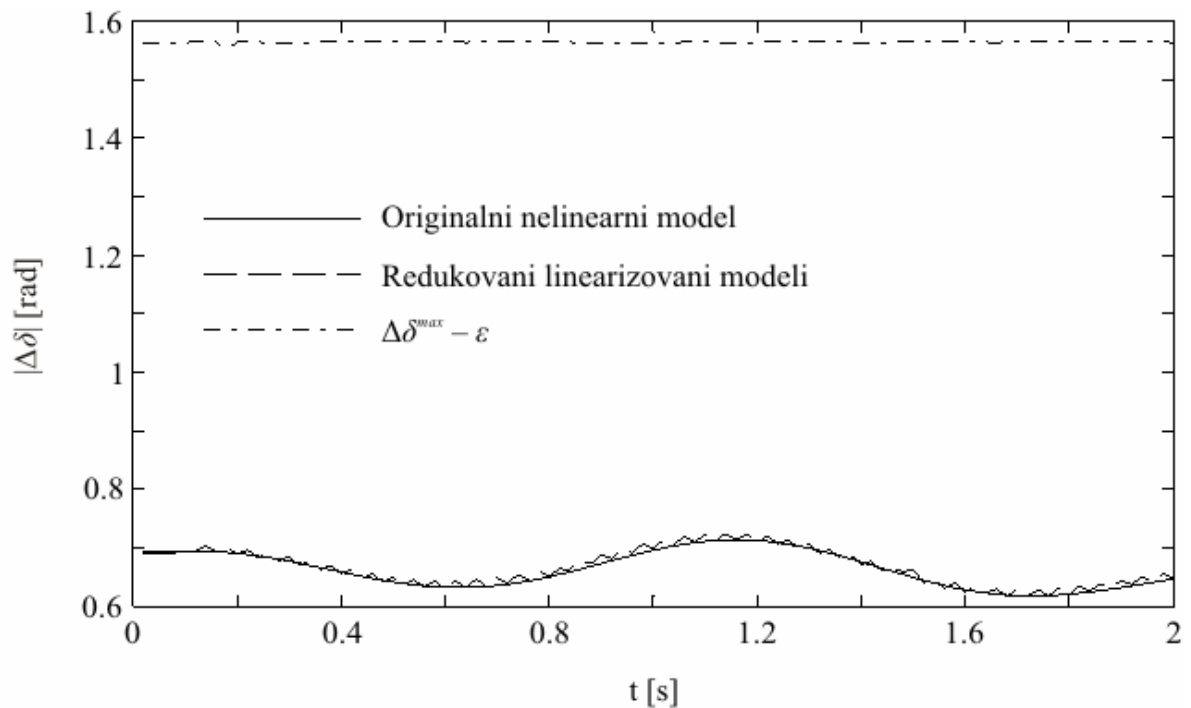


b. Poremećaj 2

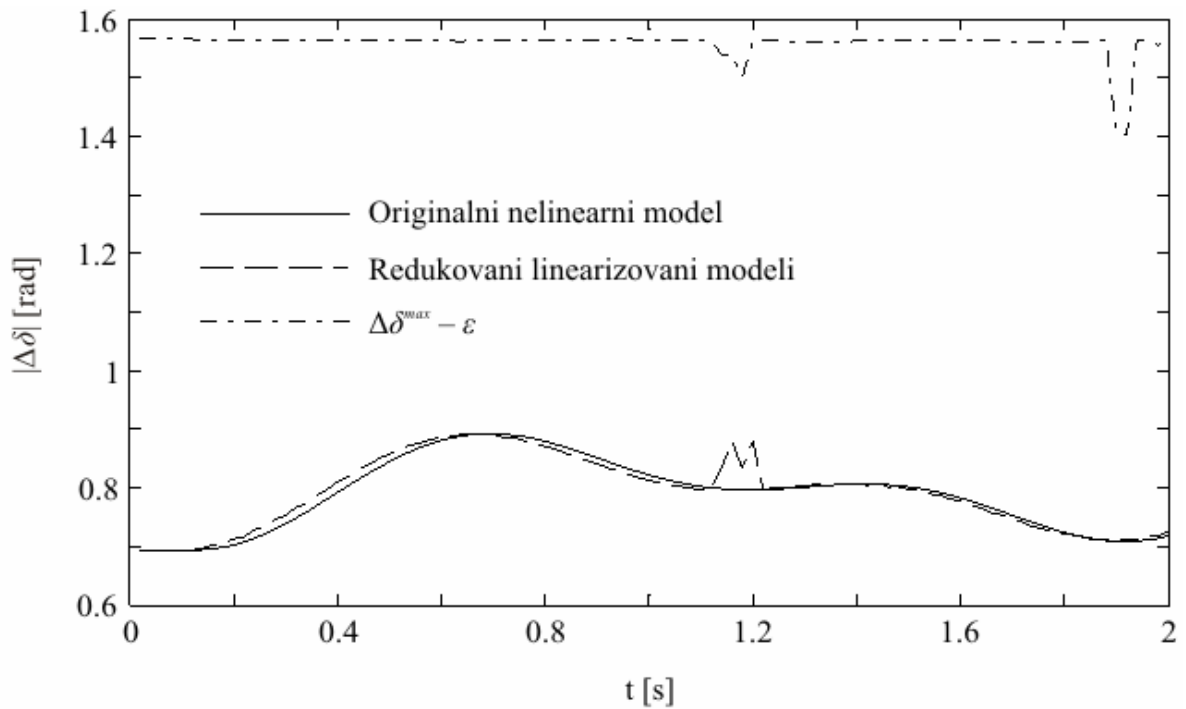


## c. Poremećaj 3

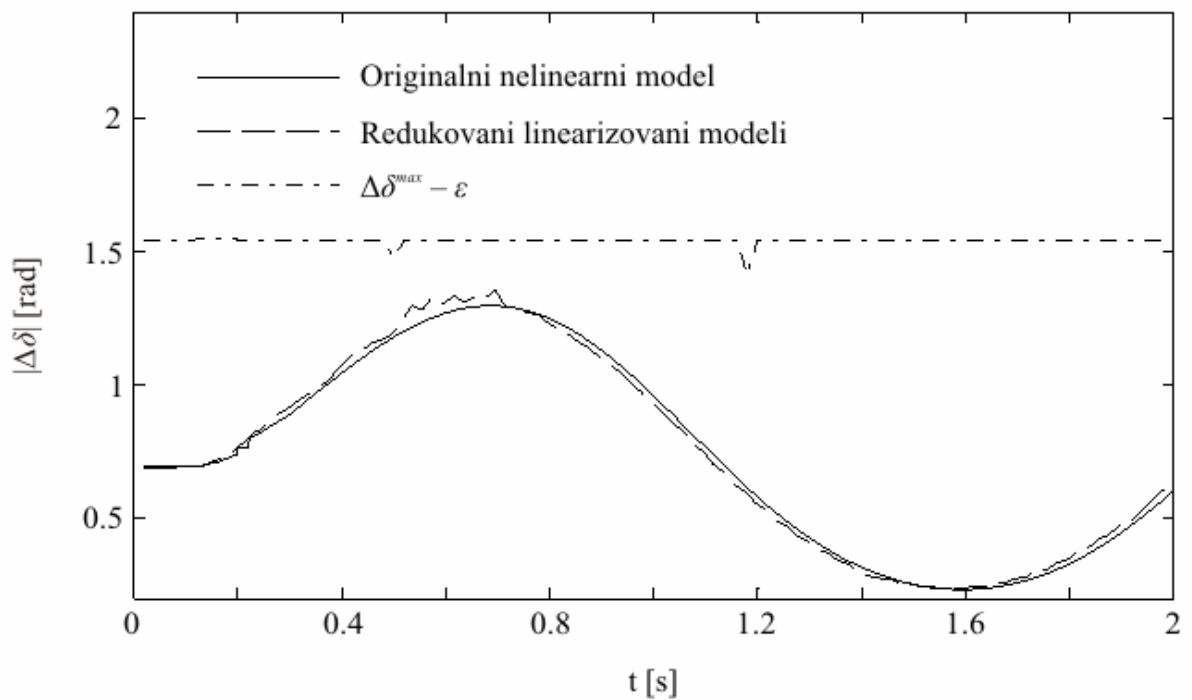
Slika 8.14. Relativne promene matrice  $A$  i vektora  $c$  (u odnosu na one dobijene linearizacijom nelinearnog modela odmah nakon poremećaja) nakon tri analizirana poremećaja (mereno Frobenius-ovom normom)



## a. Poremećaj 1



b. Poremećaj 2



c. Poremećaj 3

Slika 8.15 Apsolutne vrednosti razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G2 za tri razmatrana poremećaja, kada se koristi originalni nelinearni model i redukovani linearizovani dinamički modeli, pri povećanju vrednosti parametra  $\Delta z_r^{max}$  na 0,2 (početna vrednost  $r = 120$ )

Takođe je istraživano kako se redukcijom na bazi korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija čuvaju polovi originalnog sistema. Radi poređenja sa postojećim

tehnikama koje se koriste za redukciju modela (ekvivalentiranje) elektroenergetskih sistema, dati su rezultati i za proceduru sinhronog modalnog ekvivalentiranja [9]. U Tabeli 8.5 data je lista polova originalnog sistema (u proizvoljno izabranoj radnoj tački) očuvanih redukcijom na bazi aproksimativnih bisimulacionih relacija (za  $r = 60$ ), odnosno primenom procedure sinhronog modalnog ekvivalentiranja (pet ekvivalentiranih sinhronih generatora). Polovi koji nisu očuvani nijednom od dve korišćene tehnike nisu prikazani. Može se zaključiti da se redukcijom na bazi aproksimativnih bisimulacionih relacija u velikoj meri čuvaju polovi originalnog sistema.

Tabela 8.5. Lista polova koji su očuvani redukcijom na bazi aproksimativnih bisimulacionih relacija, odnosno primenom procedure sinhronog modalnog ekvivalentiranja

Polovi originalnog modela	Polovi modela redukovano korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija	Polovi modela redukovano primenom procedure sinhronog modalnog ekvivalentiranja
-1000,0	–	-1000,0
-45,5	–	-45,5
-38,0	–	-38,0
-21,1	–	-21,1
-15,2	–	-15,2
-10,1	-10,1	–
-10,0	-10,0	-10,0
-8,2	-8,2	-8,2
-7,5	-7,5	–
-6,8	-6,8	–
-5,0	-5,0	-5,0
-2,2	-2,2	-2,2
-2,1	-2,1	–
-2,0	-2,0	–
-1,8	-1,8	–
-1,7	–	-1,7
-1,6	-1,6	–
-1,5	-1,5	–
-0,7	-0,7	-0,7
-0,5	-0,5	-0,5
-0,4	-0,4	-0,4
-0,3	-0,3	-0,3
-38,6±j26,8	–	-38,6±j26,8
-30,5±j21,2	–	-30,5±j21,2
-14,5±j12,1	–	-14,5±j12,1
-0,4±j9,5	-0,4±j9,5	-0,4±j9,5
-0,6±j9,4	-0,6±j9,4	–
-0,5±j9,3	-0,5±j9,3	–
-0,3±j8,0	-0,3±j8,0	–

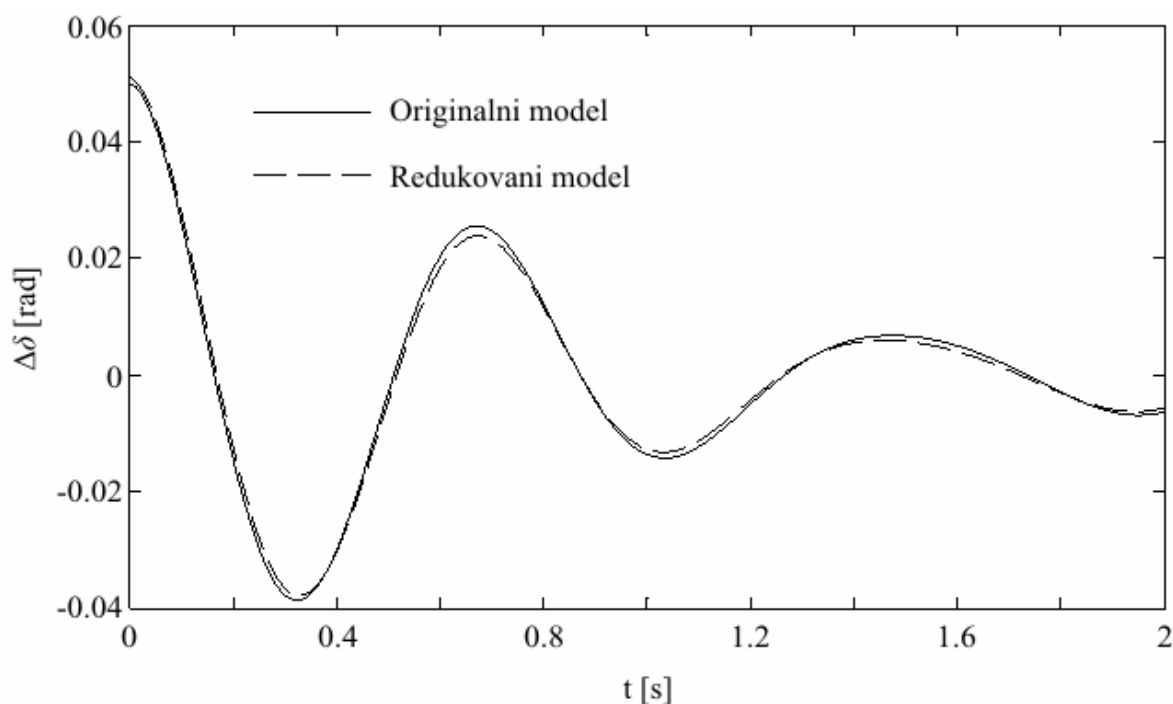
$-0,3\pm j7,2$	$-0,3\pm j7,2$	–
$-0,3\pm j6,2$	$-0,3\pm j6,2$	–
$-0,1\pm j4,0$	$-0,1\pm j4,0$	–
$-0,8\pm j0,4$	$-0,8\pm j0,4$	–
$-1,3\pm j0,2$	$-1,3\pm j0,2$	–
$-1,1\pm j0,1$	$-1,1\pm j0,1$	–

### 8.3.2.2. Elektroenergetski sistem Srbije

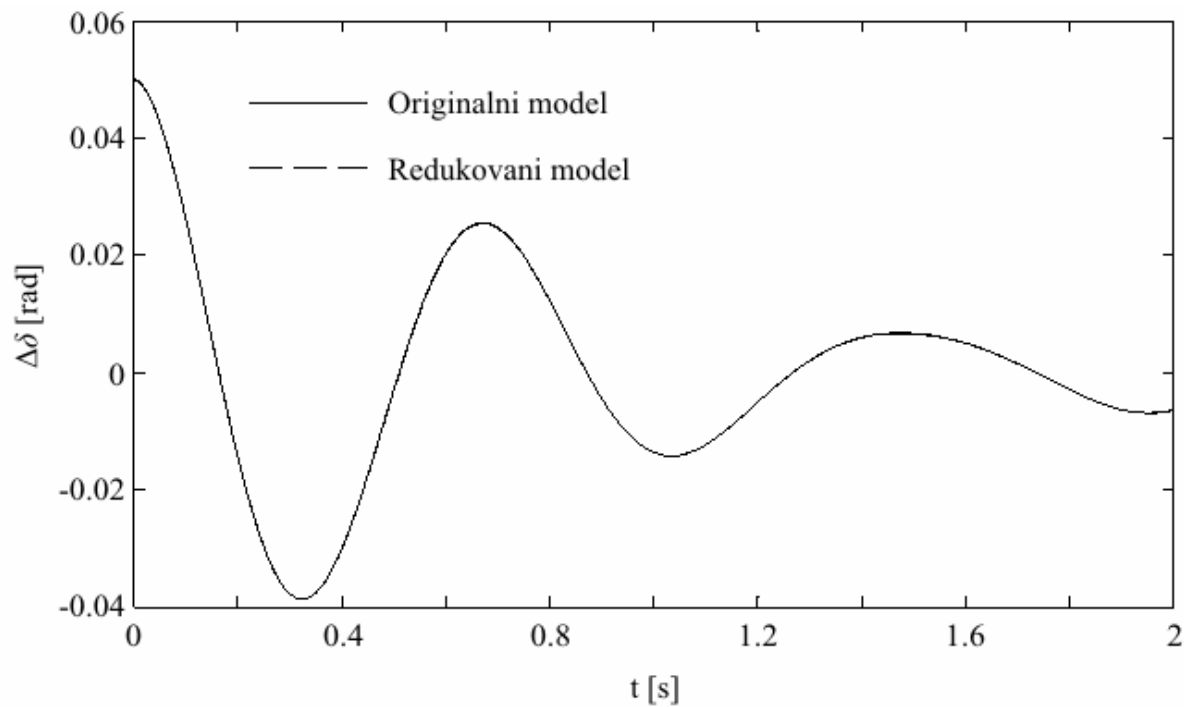
Iz razloga navedenih u Tački 8.3.1.2. predloženi algoritam neće biti direktno primenjen na elektroenergetski sistem Srbije. Ovaj sistem se koristi da demonstrira da se aproksimativne bisimulacione relacije mogu efikasno koristiti za redukciju modela u deskriptor formi realnih elektroenergetskih sistema.

Model koji se redukuje dobijen je linearizacijom nelinearnog modela, pri čemu se umesto promenljivih koriste njihovi priraštaji. Radi poređenja originalnog i redukovanog modela, zadata je nenulta početna vrednost priraštaja ugla rotora sinhronog generatora G1 ( $\delta_1(0) = 0,05$  rad). Razlike uglova rotora samo šest sinhronih generatora (G1–G6) su izabrane za izlazne promenljive.

Slika 8.16 daje uporedni prikaz razlike uglova rotora sinhronih generatora G1 i G6, za originalni i redukovani linearizovani dinamički model. Vrednosti reda redukovanih linearizovanih modela (u deskriptor formi to je ukupan broj promenljivih stanja i algebarskih promenljivih) su postavljene na  $r = 10$  (a.) i  $r = 50$  (b.). Vrednosti granice greške su  $\varepsilon = 0,026$  ( $r = 10$ ) i  $\varepsilon = 0,003$  ( $r = 50$ ). Može se zaključiti da se primenom aproksimativnih bisimulacionih relacija dimenzija linearizovanog dinamičkog modela u deskriptor formi može značajno redukovati gotovo bez uticaja na tačnost rezultata dobijenih korišćenjem redukovanog dinamičkog modela.



a.  $r = 10$



b.  $r = 50$

Slika 8.16. Razlika uglova rotora sinhronih generatora G1 i G6 za  $\delta_1(0) = 0,05$  rad, za originalni i redukovani linearizovani dinamički model (za različite vrednosti  $r$ )

## 9. ZAKLJUČAK

Redukcija dinamičkih modela elektroenergetskog sistema se u praksi zahteva iz različitih razloga: veličina sistema, veliki broj analiza koje treba izvršiti, ograničeni memorijski i procesorski kapaciteti računara, potreba da se bolje sagledaju uzroci dinamičkog ponašanja sistema, itd. Redukcijom se može dobiti pojednostavljen dinamički model kojim su očuvane željene karakteristike originalnog sistema. U tom smislu, redukcijom je potrebno postići balans između kompleksnosti i tačnosti modela. Ono što se zahteva jeste redukovani model minimalne kompleksnosti, koji aproksimira originalni model na zadovoljavajući način, tj. sa što manjim odstupanjem.

Doktorskom disertacijom opisane su postojeće tehnike redukcije dinamičkih modela koje se koriste u teoriji upravljanja, kao i tehnike koje se uobičajeno koriste za redukciju dinamičkih modela i ekvivalentiranje elemenata i/ili delova elektroenergetskog sistema. Komentarisane su prednosti i mane korišćenja postojećih pristupa i metoda. *Glavom 6.* su predloženi novi pristupi i algoritmi, koji su u *Glavi 8.* primenjeni za redukciju dinamičkih modela test sistema opisanih u *Glavi 7.*

Doktorska disertacija predlaže nov pristup fizičkoj redukciji dinamičkog modela elektroenergetskog sistema (*Poglavlje 6.1.*) koji linearizovani model redukuje eliminisanjem originalnih promenljivih stanja koje ne utiču značajno na fizički fenomen koji se analizira. Kao rezultat, tačno je poznato koje su promenljive stanja eliminisane iz originalnog dinamičkog modela. Predloženi pristup na nov način upotrebljava teoriju balansnih realizacija. Algoritam redukcije je primenjen na modele New England test sistema i elektroenergetskog sistema Srbije. Problem koji je detaljnije analiziran je promena modula napona na sabirnicama sistema, pri promeni referentnih napona automatskih regulatora napona. Najpre je problem analiziran deklarisanjem referentnih napona svih automatskih regulatora napona i modula napona na svim sabirnicama za ulazne i izlazne promenljive, respektivno. Takođe, razmatrano je i nekoliko određenih slučajeva sa redukovanim brojem ulaznih i izlaznih promenljivih. Pokazano je da postoji veliki broj promenljivih stanja koje ne utiču značajno na prirodu problema koji se razmatra. Najveći deo promenljivih stanja može se eliminisati ukoliko se referentni naponi svih automatskih regulatora napona i moduli napona na svim sabirnicama deklariraju za ulazne i izlazne promenljive. Određen broj promenljivih može se dodatno eliminisati, ukoliko se razmatra neki određen slučaj analiziranog problema. Takođe je pokazano da na predloženi pristup ne utiče značajno promena radne tačke. Stoga, nije neophodno pokretati predloženu proceduru redukcije za svaku radnu tačku, što predstavlja jednu od važnijih prednosti predloženog pristupa. Primer realnog elektroenergetskog sistema demonstrirao je da je moguće eliminisati veliki broj promenljivih stanja, skoro bez uticaja na tačnost dinamičkog modela. Takođe je pokazano kako se menja broj promenljivih stanja koje se mogu eliminisati iz modela sa zahtevanom tačnošću. Na kraju je zaključeno da se predloženi algoritam, što se tiče računске efikasnosti, može uspešno primeniti za redukciju linearizovanih dinamičkih modela elektroenergetskih sistema realnih dimenzija. Budući rad bi se mogao usmeriti na generalizovanje predložene metodologije za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema u deskriptor formi.



Doktorskom disertacijom se takođe predlaže korišćenje aproksimativnih bisimulacionih relacija za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema (*Poglavlje 6.2.*). Navedene su prednosti korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema pri analiziranju fizičkih fenomena u vremenskom domenu u odnosu na konvencionalne tehnike redukcije. Data je teorijska osnova korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija za redukciju dinamičkog modela elektroenergetskog sistema u deskriptor formi. Istraživane su neke praktične implikacije korišćenja aproksimativnih bisimulacija za redukciju dinamičkih modela elektroenergetskog sistema. Iako se predlaže primena za analizu tranzijentne stabilnosti, druge primene su sigurno moguće, posebno imajući u vidu da predložena procedura u velikoj meri čuva sopstvene vrednosti originalnog sistema. U tom smislu, redukcija na bazi korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija je uporediva sa postojećim tehnikama. Redukcija na bazi aproksimativnih bisimulacionih relacija bi se mogla koristiti u mnogim slučajevima kada se traži selektivan nivo detalja dinamičkog modela, kao na primer pri modelovanju mikro-mreža, solarnih elektrana i vetro-parkova, kao i modela koji se kreiraju na bazi merenja. Algoritam za identifikovanje da li je elektroenergetski sistem sposoban da ostane u sinhronizmu nakon velikog poremećaja, koji se bazira na linearizaciji i redukciji korišćenjem aproksimativnih bisimulacionih relacija primenjen je na standardnom New England test sistemu. U odnosu na standardnu proceduru numeričke integracije, predloženi algoritam dodatno zahteva definisanje vektora izlaznih promenljivih i postavljanje vrednosti nekoliko parametara. Pokazano je da se redukcijom na bazi korišćenja aproksimativnih bisimulacionih relacija dimenzija dinamičkog modela može smanjiti bar za pola, bez značajnog uticaja na tačnost rezultata koji se dobijaju korišćenjem redukovanog modela. Primećeno je da robusniji elektroenergetski sistem (u smislu tranzijentne stabilnosti) omogućava veću kompresiju dinamičkog modela. Takođe, pokazano je da greška, koja se unosi korišćenjem jednog (redukovanog) linearizovanog modela u okolini u kojoj je predloženi kriterijum tačnosti zadovoljen, nije značajna. Na primeru elektroenergetskog sistema Srbije demonstrirano je da se aproksimativne bisimulacione relacije mogu efikasno koristiti za redukciju dinamičkih modela realnih elektroenergetskih sistema. Na kraju, što se tiče računске efikasnosti, može se primetiti da proračunavanje aproksimacije i odgovarajuće granice greške može biti dugotrajan proces pri primeni na modele velikih elektroenergetskih sistema (rešavanje linearnih matričnih nejednačina je računski najintenzivnije). Poboljšanje računске efikasnosti redukcije dinamičkih modela na bazi aproksimativnih bisimulacionih relacija predstavlja važan izazov za buduće istraživanje u ovoj oblasti. Budući pravac istraživanja bi mogao biti i ispitivanje koliko su dva različita modela nekog dinamičkog elementa elektroenergetskog sistema (na primer klasični elektromehanički model drugog reda i model nekog višeg reda sinhrona mašine) daleko od toga da budu egzaktno bisimilarni kada se posmatraju određene promenljive stanja dinamičkog modela.

## LITERATURA

- [1] A.C. Antoulas: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 2005.
- [2] S. Gugercin, A.C. Antoulas: A Survey of Model Reduction by Balanced Truncation and Some New Results, *International Journal of Control*, Vol. 77, No. 8, May 2004, pp. 748-766.
- [3] J. Hahn, T.F. Edgar: An Improved Method for Nonlinear Model Reduction Using Balancing of Empirical Gramians, *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 26, No. 10, October 2002, pp. 1379-1397.
- [4] K. Willcox, J. Peraire: Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 11, November 2002, pp. 2323-2330.
- [5] S. Lall, J.E. Marsden, S. Glavaški: A Subspace Approach to Balanced Truncation for Model Reduction of Nonlinear Control Systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 12, No. 6, May 2002, pp. 519-535.
- [6] L. Wang, M. Klein, S. Yirga, P. Kundur: Dynamic Reduction of Large Power Systems for Stability Studies, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 12, No. 2, May 1997, pp. 889-895.
- [7] B.C. Moore: Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 1, February 1981, pp. 17-32.
- [8] P. Benner, M. Hinze, E.J.W. Maten: Model Reduction for Circuit Simulation, *Lecture Notes in Electrical Engineering*, Vol. 74, Springer, Dordrecht, Netherlands, 2011.
- [9] G.N. Ramaswamy, C. Evrard, G.C. Verghese, O. Fillâtre, B.C. Lesieutre: Extensions, Simplifications, and Tests of Synchronic Modal Equivalencing (SME), *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 12, No. 2, May 1997, pp. 896-905.
- [10] P. Benner, V. Mehrmann, D.C. Sorensen: Dimension Reduction of Large-Scale Systems, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 45, Springer, Berlin, Germany, 2005.
- [11] G. Troullinos, J. Dorsey: Coherency and Model Reduction: State Space Point of View, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 4, No. 3, August 1989, pp. 988-995.
- [12] E.J. Davison: A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 11, No. 1, January 1966, pp. 93-101.
- [13] A. Chang, M.M. Adibi: Power System Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 89, No. 8, November 1970, pp. 1737-1743.
- [14] G.J. Lastman, N.K. Sinha, P. Rózsa: On the Selection of States to be Retained in a Reduced-Order Model, *IEE Proceedings D on Control Theory and Applications*, Vol. 131, No. 1, January 1984, pp. 15-22.

- [15] M.A. Johnson, M.W. Daniels: Identification of Essential States for Reduced-Order Models Using a Modal Analysis, *IEE Proceedings D on Control Theory and Applications*, Vol. 132, No. 3, May 1985, pp. 111-118.
- [16] F. Milano, K. Srivastava: Dynamic REI Equivalents for Short Circuit and Transient Stability Analyses, *Electric Power Systems Research*, Vol. 79, No. 6, June 2009, pp. 878-887.
- [17] J. Machowski, J. Bialek, J. Bumby: *Power System Dynamics: Stability and Control*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2008.
- [18] D. Chaniotis, M.A. Pai: Model Reduction in Power Systems Using Krylov Subspace Methods, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 20, No. 2, May 2002, pp. 888-894.
- [19] F.D. Freitas, J. Rommes, N. Martins: Gramian-Based Reduction Method Applied to Large Sparse Power System Descriptor Models, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 23, No. 3, August 2008, pp. 1258-1270.
- [20] G.N. Ramaswamy, G.C. Verghese, L. Rouco, C. Vialas, C.L. DeMarco: Synchrony, Aggregation, and Multi-Area Eigenanalysis, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 4, November 1995, pp. 1986-1993.
- [21] G. Troullinos, J. Dorsey, H. Wong, J. Myers, S. Goodwin: Estimating Model Reduction for Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 104, No. 12, December 1985, pp. 3475-3481.
- [22] B. Marinescu, B. Mallem, L. Rouco: Large-Scale Power System Dynamic Equivalents Based on Standard and Border Synchrony, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 25, No. 4, November 2010, pp. 1873-1882.
- [23] A. Girard, G.J. Pappas: Approximate Bisimulation Relations for Constrained Linear Systems, *Automatica*, Vol. 43, No. 8, August 2007, pp. 1307-1317.
- [24] S.D. Đukić, A.T. Sarić: Dynamic Model Reduction: an Overview of Available Techniques with Application to Power Systems, *Serbian Journal of Electrical Engineering (SJEE)*, Vol. 9, No. 2, June 2012, pp. 131-169.
- [25] F. Milano: *Power System Modelling and Scripting*, Springer, London, UK, 2010.
- [26] P.W. Sauer, M.A. Pai: *Power System Dynamics and Stability*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1998.
- [27] P.V. Kokotovic, R.E. O'Malley, P. Sannuti: Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory - An Overview, *Automatica*, Vol. 12, No. 2, March 1976, pp. 123-132.
- [28] V.R. Saksena, J. O'Reilly, P.V. Kokotovic: Singular Perturbation and Time-Scale Methods in Control Theory - Survey, *Automatica*, Vol. 20, No. 3, May 1984, pp. 273-293.
- [29] A. Yousefi, B. Lohmann: Balancing and Optimization for Order Reduction of Nonlinear Systems, *American Control Conference*, Boston, Massachusetts, USA, June/July 2004, pp. 108-112.
- [30] S.A. Marschall: An Approximate Method for Reducing the Order of a Linear System, *International Journal of Control*, Vol. 10, 1966, pp. 642-648.
- [31] L. Litz: Order Reduction of Linear State Space Models via Optimal Approximation of the Non-Dominant Modes, *IFAC Symposium*, Toulouse, France, June 1980, pp. 195-202.
- [32] D. Bonvin, D.A. Mellichamp: A Generalised Structural Dominance Method for the Analysis of Large Scale Systems, *International Journal of Control*, Vol. 35, No. 5, May 1982, pp. 807-827.

- [33] J. Hahn, T.F. Edgar: A Balancing Approach to Minimal Realization and Model Reduction of Stable Nonlinear Systems, *Industrial and Engineering Chemical Research*, Vol. 41, No. 9, April 2002, pp. 2204-2212.
- [34] A.J. Laub, M.T. Heath, C.C. Paige, R.C. Ward: Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No. 2, February 1987, pp. 115-122.
- [35] M.S. Tombs, I. Postlethwaite: Truncated Balanced Realization of a Stable Non-Minimal State-Space System, *International Journal of Control*, Vol. 46, No. 4, April 1987, pp. 1319-1330.
- [36] M.G. Safonov, R.Y. Chiang: A Schur Method for Balanced Truncation Model Reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, July 1989, pp. 729-733.
- [37] A. Varga: Efficient Minimal Realization Procedure Based on Balancing, *IMACS Symposium on Modelling and Control of Technological Systems*, Lille, France, May 1991, pp. 42-47.
- [38] W.Q. Liu, V. Sreeram: Model Reduction of Singular Systems, *39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, December 2000, pp. 2373-2378.
- [39] K. Perev, B. Shafai: Balanced Realization and Model Reduction of Singular Systems, *International Journal of Systems Science*, Vol. 25, No. 6, June 1994, pp. 1039-1052.
- [40] T. Stykel: Gramian-Based Model Reduction for Descriptor Systems, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, Vol. 16, No. 4, March 2004, pp. 297-319.
- [41] U.B. Desai, D. Pal: A Transformation Approach to Stochastic Model Reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 29, No. 12, December 1984, pp. 1097-1100.
- [42] M. Green: A Relative Error Bound for Balanced Stochastic Truncation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 10, October 1988, pp. 961-965.
- [43] P.C. Opdenacker, E.A. Jonckheere: A Contraction Mapping Preserving Balanced Reduction Scheme and its Infinity Norm Error Bounds, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 35, No. 2, February 1988, pp. 184-189.
- [44] E.A. Jonckheere, L.M. Silverman: A New of Invariants for Linear System—Application to Reduced Order Compensator Design, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No. 10, October 1983, pp. 953-964.
- [45] D. Enns: Model Reduction with Balanced Realizations: An Error Bound and a Frequency Weighted Generalization, *23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, December 1984, pp. 127-132.
- [46] C.-A. Lin, T.-Y. Chiu: Model Reduction via Frequency Weighted Balanced Realization, *Control – Theory and Advanced Technology*, Vol. 8, 1992, pp. 341-351.
- [47] V. Sreeram, B.D.O Anderson, A.G. Madievski: Frequency Weighted Balanced Reduction Technique: Generalization and an Error Bound, *34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Louisiana, USA, December 1995, pp. 3576-3581.
- [48] G. Wang, V. Sreeram, W.Q. Liu: A New Frequency Weighted Balanced Truncation Method and an Error Bound, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 9, September 1999, pp. 1734-1737.
- [49] K. Zhou: Frequency-Weighted  $L_\infty$  Norm and Optimal Hankel Norm Model Reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 10, October 1995, pp. 1687-1699.

- [50] W. Gawronski, J.-N. Juang: Model Reduction in Limited Time and Frequency Intervals, *International Journal of Systems Science*, Vol. 21, No. 2, February 1990, pp. 349-376.
- [51] A. Varga: Balanced Truncation Model Reduction of Periodic Systems, *39th Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, December 2000, pp. 2379-2384.
- [52] A.C. Antoulas, D.C. Sorensen, S. Gugercin: A Survey of Model Reduction Methods for Large-Scale Systems, *Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering*, AMS, 2001, pp. 193-219.
- [53] L.T. Pillage, R.A. Rohrer: Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Vol. 9, No. 4, April 1990, pp. 352-366.
- [54] P. Feldmann, R. Freund: Efficient Linear Circuit Analysis by Padé Approximation via the Lanczos Process, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Vol. 14, No. 5, May 1995, pp. 639-649.
- [55] E.J. Grimme: *Krylov Projection Methods for Model Reduction*, Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, Illinois, USA, 1997.
- [56] R.H. Bartels, G.W. Stewart: Solution of the Matrix Equation  $AX + XA = C$ : Algorithm, *Communications of the Association for Computing Machinery*, Vol. 15, No. 9, September 1972, pp. 820-826.
- [57] S. Hammarling: Numerical Solution of the Stable, Non-Negative Definite Lyapunov Equation, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 2, No. 3, July 1982, pp. 303-323.
- [58] R.A. Smith: Matrix Equation,  $XA + BX = C$ , *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 16, No. 1, January 1968, pp. 198-201.
- [59] E. Wachspress: Iterative Solution of the Lyapunov Matrix Equation, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 1, No. 1, 1988, pp. 87-90.
- [60] T. Penzl: A Cyclic Low-Rank Smith Method for Large Sparse Lyapunov Equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 21, No. 4, 1999, pp. 1401-1418.
- [61] A.S. Hodel, K.P. Poola, B. Tenison: Numerical Solution of the Lyapunov Equation by Approximate Power Iteration, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 236, March 1996, pp. 205-230.
- [62] D.Y. Hu, L. Reichel: Krylov Subspace Methods for the Sylvester Equation, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 172, July 1992, pp. 283-313.
- [63] I.M. Jaimoukha, E.M. Kasenally: Krylov Subspace Methods for Solving Large Lyapunov Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 31, No. 1, February 1994, pp. 227-251.
- [64] Y. Saad: Numerical Solution of Large Lyapunov Equations, *International Symposium MTNS-89*, Boston, Massachusetts, USA, 1990, pp. 503-511.
- [65] J.-R. Li, J. White: Low Rank Solution of Lyapunov Equations, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 24, No. 1, 2002, pp. 260-280.
- [66] S. Gugercin, D.C. Sorensen, A.C. Antoulas: A Modified Low-Rank Smith Method for Large-Scale Lyapunov Equations, *Numerical Algorithms*, Vol. 32, No. 1, January 2003, pp. 27-55.
- [67] M. Aoki: Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 13, No. 3, June 1968, pp. 246-253.
- [68] S. Panda, J.S. Yadav, N.P. Patidar, C. Ardil: Evolutionary Techniques for Model Order Reduction of Large Scale Linear Systems, *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 5, No. 1, 2009, pp. 22-28.

- [69] C.E. Kampmann, R. Oliva: Structural Dominance Analysis and Theory Building in System Dynamics, *Systems Research and Behavioral Science*, Vol. 25, No. 4, July 2008, pp. 505-519.
- [70] K. Fujimoto, J.M.A. Scherpen: Singular Value Analysis and Balanced Realizations for Nonlinear Systems, *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, Springer, Berlin, Germany, 2008, pp. 251-272.
- [71] E.I. Verriest: Time Variant Balancing and Nonlinear Balanced Realizations, *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, Springer, Berlin, Germany, 2008, pp. 213-250.
- [72] C. Sun, J. Hahn: Reduction of Stable Differential-Algebraic Equation Systems via Projections and System Identification, *Journal of Process Control*, Vol. 15, No. 6, September 2005, pp. 639-650.
- [73] M. Rathinam, L.R. Petzold: A New Look at Proper Orthogonal Decomposition, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 41, No. 5, 2004, pp. 1893-1925.
- [74] T. Voß: Model Reduction for Nonlinear Differential Algebraic Equations, M.Sc. Thesis, University of Wuppertal, Germany, 2005.
- [75] J.M.A. Scherpen: Balancing for Nonlinear Systems, *Systems and Control Letters*, Vol. 21, No. 2, August 1993, pp. 143-153.
- [76] K. Fujimoto, J.M.A. Scherpen: Singular Value Analysis of Hankel Operators for General Nonlinear Systems, *7th European Control Conference*, Cambridge, UK, September 2003, pp. 1-6.
- [77] A.J. Krener: Reduced Order Modeling of Nonlinear Control Systems, *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems, In Honor of Alberto Isidori*, Springer, Berlin, Germany, 2008, pp. 41-62.
- [78] A. Newman, P.S. Krishnaprasad: Computing Balanced Realizations for Nonlinear Systems, *14th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Perpignan, France, June 2000, pp. 1-10.
- [79] S. Lall, J.E. Marsden, S. Glavaški: Empirical Model Reduction of Controlled Nonlinear Systems, *14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, July 1999, pp. 473-478.
- [80] J. Hahn, T.F. Edgar, W. Marquardt: Controllability and Observability Covariance Matrices for the Analysis and Order Reduction of Stable Nonlinear Systems, *Journal of Process Control*, Vol. 13, No. 2, March 2003, pp. 115-127.
- [81] B. Lohmann: Application of Model Order Reduction to a Hydropneumatic Vehicle Suspension, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 3, No. 1, March 1995, pp. 102-109.
- [82] B. Salimbahrami, B. Lohmann: A Simulation-Free Nonlinear Model Order-Reduction Approach and Comparison Study, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Vol. 10, No. 3-4, 2004, pp. 317-329.
- [83] U. Pallaske: Ein Verfahren zur Ordnungsreduktion mathematischer Prozessmodelle (An Order Reduction Algorithm for Mathematical Process Models), *Chemie Ingenieur Technik*, Vol. 59, No. 7, July 1987, pp. 604-605.
- [84] H.-P. Löffler, W. Marquardt: Order Reduction of Nonlinear Differential-Algebraic Process Models, *Journal of Process Control*, Vol. 1, No. 1, January 1991, pp. 32-40.
- [85] B. Avramovic, P.V. Kokotovic, J.R. Winkelmann, J.H. Chow: Area Decomposition for Electromechanical Models of Power Systems, *Automatica*, Vol. 16, No. 6, November 1980, pp. 637-648.

- [86] P.V. Kokotovic, B. Avramovic, J.H. Chow, J.R. Winkelman: Coherency Based Decomposition and Aggregation, *Automatica*, Vol. 18, No. 1, January 1982, pp. 47-56.
- [87] R. Podmore, A. Germond: *Development of Dynamic Equivalents for Transient Stability Studies*, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, USA, Technical Report No. EL-456, Project 763, 1977.
- [88] R. Podmore: Identification of Coherent Generators for Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 97, No. 4, July 1978, pp. 1344-1354.
- [89] M.A. Pai, R.P. Adgaonkar: Identification of Coherent Generators Using Weighted Eigenvectors, *IEEE Power Engineering Society Winter Meeting*, New York, New York, USA, January/February 1979.
- [90] G.N. Ramaswamy, G.C. Verghese, C. Vialas, C.L. DeMarco: Going Beyond Coherency: Synchrony as a Basis for Dynamic Equivalencing in Power System Models, *North American Power Symposium*, Howard University, Washington, D.C., USA, October 1993.
- [91] G.N. Ramaswamy, G.C. Verghese, L. Rouco, B.C. Lesieutre, O. Fillâtre: Synchronic Modal Equivalencing (SME): A New Framework for Constructing Dynamic Equivalents in Power Systems, *North American Power Symposium*, Manhattan, Kansas, USA, September 1994.
- [92] P.V. Kokotovic, J. Allemong, J.R. Winkelman, J.H. Chow: Singular Perturbation and Iterative Separation of Time Scales, *Automatica*, Vol. 16, No. 1, January 1980, pp. 23-33.
- [93] J.H. Chow: Time Scale Modeling of Dynamic Networks with Applications to Power Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 46, Springer, Berlin, Germany, 1982.
- [94] P.V. Kokotovic, P.W. Sauer: Integral Manifold as a Tool for Reduced Order Modeling of Nonlinear Systems: A Synchronous Machine Case Study, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 36, No. 3, March 1989, pp. 403-410.
- [95] J.H. Chow, J.R. Winkelman, M.A. Pai, P.W. Sauer: Singular Perturbation Analysis of Large-Scale Power Systems, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 12, No. 2, April 1990, pp. 117-126.
- [96] J.M. Undrill, A.E. Turner: Construction of Power System Electro-Mechanical Equivalents by Modal Analysis, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 90, No. 5, September 1971, pp. 2049-2059.
- [97] J.M. Undrill, J.A. Casazza, E.M. Gulachenski, L.K. Kirchmayer: Electro-Mechanical Equivalents for Use in Power System Stability Studies, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 90, No. 5, September 1971, pp. 2060-2071.
- [98] W.W. Price, E.M. Gulachenski, P. Kundur, F.J. Lange, G.C. Loehr, B.A. Roth, R.F. Silva: Testing of the Modal Dynamic Equivalents Technique, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 97, No. 4, July 1978, pp. 1366-1372.
- [99] N. Martins, L.T.G. Lima, H.J.C.P. Pinto: Computing Dominant Poles of Power System Transfer Functions, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, No. 1, February 1996, pp. 162-170.
- [100] N. Martins, P.E.M. Quintao: Computing Dominant Poles of Power System Multivariable Transfer Functions, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 18, No. 1, February 2003, pp. 152-159.

- [101] G.C. Verghese, J.I. Péres-Arriaga, F.C. Schweppe, K.W. Tsai: *Selective Modal Analysis in Power Systems*, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, USA, Technical Report No. EL-2830, Project 1764-8, 1983.
- [102] W.W. Price, D.N. Ewart, E.M. Gulachenski, R.F. Silva: Dynamic Equivalents from On-Line Measurements, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 94, No. 4, July 1975, pp. 1349-1357.
- [103] M.A.H. Ibrahim, O.M. Mostafa, A.H. El-Abiad: Dynamic Equivalents Using Operating Data and Stochastic Modeling, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 95, No. 5, February 1976, pp. 1713-1722.
- [104] D.J. Trudnowski: Order Reduction of Large Scale Linear Oscillatory System Models, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 9, No. 1, February 1994, pp. 451-458.
- [105] Y.-N. Yu, M.A. El-Sharkawi: Estimation of External Dynamic Equivalents of a Thirteen-Machine System, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 100, No. 3, March 1981, pp. 1324-1332.
- [106] M. Djukanovic, D.J. Sobajic, Y.H. Pao: Artificial Neural Network Based Identification of Dynamic Equivalents, *Electric Power Systems Research*, Vol. 24, No. 1, July 1992, pp. 39-48.
- [107] L. Wehenkel, Y. Jacquemart: Use of Kohonen Feature Maps for the Analysis of Voltage Security Related Electrical Distances, *International Conference of Artificial Neural Networks*, Paris, France, October 1995, pp. 8.3.1-8.3.7.
- [108] P. Ganapati, K.M. Sanjay, R.M. Rasmi: Adaptive Identification of the Parameters of Nonlinear Systems Using Higher Order Statistics, *Conference ICSPAT-96*, Boston, Massachusetts, USA, October 1996, pp. 200-204.
- [109] L. Wehenkel: A Statistical Approach to the Identification of Electrical Regions in Power Systems, *Stockholm Power Tech*, Stockholm, Sweden, June 1995, pp. 530-535.
- [110] J.M.R. Arredondo: Obtaining Dynamic Equivalents through the Minimization of a Line Flows Function, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 21, No. 5, June 1999, pp. 365-373.
- [111] A.M. Stanković, A.T. Sarić, M. Milošević: Identification of Nonparametric Dynamic Power System Equivalents with Artificial Neural Network, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 18, No. 4, November 2003, pp. 1478-1486.
- [112] F. Ma, V. Vittal: Right-Sized Power System Dynamic Equivalents for Power System Operation, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 26, No. 4, November 2011, pp. 1998-2005.
- [113] A.J. Germond, R. Podmore: Dynamic Aggregation of Generating Unit Models, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 97, No. 4, July/August 1978, pp. 1060-1068.
- [114] Y.Q. Cai, C.S. Wu: A Novel Algorithm for Aggregating Coherent Generating Units, *IFAC Symposium on Power System and Power Plant Control*, Beijing, China, August 1986.
- [115] R.J. Galarza, J.H. Chow, W.W. Price, A.W. Hargrave, P.M. Hirsch: Aggregation of Exciter Models for Constructing Power System Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 3, August 1998, pp. 782-788.
- [116] M. Brucoli, R. Sbrizzai, F. Torelli, M. Trovato: Structural Coherency in Interconnected Power Systems, *Large Scale Systems*, Vol. 5, 1983, pp. 169-178.
- [117] U.D. Caprio: Conditions for Theoretical Coherency in Multimachine Power Systems, *Automatica*, Vol. 17, No. 5, September 1981, pp. 687-701.



- [118] U.D. Caprio: Theoretical and Practical Dynamic Equivalents in Multimachine Power Systems, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 4, No. 4, October 1982, pp. 224-232.
- [119] J. Dorsey, R.A. Schlueter: Structural Archetypes for Coherency: A Framework for Comparing Power Systems Equivalents, *Automatica*, Vol. 20, No. 3, October 1984, pp. 349-352.
- [120] F. Wu, N. Narasimhamurthi: Coherency Identification for Power Systems Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 30, No. 3, March 1983, pp. 140-147.
- [121] J.H. Chow, R.J. Galarza, P. Accari, W.W. Price: Inertial and Slow Coherency Aggregation Algorithms for Power System Dynamic Model Reduction, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 2, May 1995, pp. 680-685.
- [122] S.T.Y. Lee, F.C. Schweppe: Distance Measures and Coherency Recognition Transient Stability Equivalents, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 92, No. 5, September 1973, pp. 1550-1557.
- [123] W.A. Middlestadt: *Proposed Algorithms for Approximate Reduced Dynamic Equivalents*, Bonneville Power Administration Internal Memorandum, 1973.
- [124] T.M. McCauley: Disturbance Dependent Electromechanical Equivalents for Transient Stability Studies, *IEEE Winter Power Meeting*, New York, New York, USA, January 1975.
- [125] R. Nath, S.S. Lamba, K.S.P. Rao: Coherency Based System Decomposition into Study and External Areas Using Weak Coupling, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 104, No. 6, June 1985, pp. 1443-1449.
- [126] J.H. Chow, J.R. Winkelman, M.A. Pai, P.W. Sauer: Model Reduction and Energy Function Analysis of Power System Using Singular Perturbation Techniques, *25th IEEE Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, December 1986, pp. 1206-1211.
- [127] H. You, V. Vittal, X. Wang: Slow Coherency-Based Islanding, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 19, No. 1, February 2004, pp. 483-491.
- [128] J. Machowski, A. Cichy, F. Gubina, P. Omahen: External Subsystem Equivalent Model for Steady-State and Dynamic Security Assessment, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 3, No. 4, November 1988, pp. 1456-1463.
- [129] T. Singhavilai, O. Anaya-Lara, K.L. Lo: Identification of the Dynamic Equivalent of a Power System, *44th International Universities Power Engineering Conference (UPEC)*, Glasgow, UK, September 2009, pp. 1-5.
- [130] P. Kundur, G.J. Rogers, D.Y. Wong, J. Ottevangers, L. Wang: *Dynamic Reduction*, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, USA, Technical Report No. 102234, Project 2447-01, 1993.
- [131] H. You, V. Vittal, Z. Yang: Self-Healing in Power Systems: An Approach Using Islanding and Rate of Frequency Decline-Based Load Shedding, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 18, No. 1, February 2003, pp. 174-181.
- [132] W.W. Price, A.W. Hargrave, B.J. Hurysz, J.H. Chow, P.M. Hirsch: Large-Scale System Testing of a Power System Dynamic Equivalencing Program, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 3, August 1998, pp. 768-773.
- [133] A.B. Almeida, R. Reginatto, R.J.G.C. da Silva: A Software Tool for the Determination of Dynamic Equivalents of Power Systems, *2010 IREP Symposium – Bulk Power System Dynamics and Control – VIII (IREP)*, Buzios, Brazil, August 2010, pp. 1-10.

- [134] S. Geeves: A Modal-Coherency Technique for Deriving Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 3, No. 1, February 1988, pp. 44-51.
- [135] M. Brucoli, M. La Scala, N. Pitrone, M. Trovato: Dynamic Modelling for Retaining Selected Portions of Interconnected Power Networks, *IEE Proceedings C on Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 135, No. 2, March 1988, pp. 118-123.
- [136] Y. Tsai, N. Narasimhamurthi, F.F. Wu: Structure-Preserving Model Reduction with Applications to Power System Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 29, No. 8, August 1982, pp. 525-535.
- [137] G.N. Ramaswamy, L. Rouco, O. Fillâtre, G.C. Verghese, P. Panciatici, B.C. Lesieutre, D. Peltier: Synchronic Modal Equivalencing (SME) for Structure-Preserving Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, No. 1, February 1996, pp. 19-26.
- [138] G.N. Ramaswamy: *Modal Structures and Model Reduction, with Application to Power System Equivalencing*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA, 1995.
- [139] I.J. Pérez Arriaga, G.C. Verghese, F.L. Pagola, J.L. Sancha, F.C. Schweppe: Developments in Selective Modal Analysis of Small-Signal Stability in Electric Power Systems, *Automatica*, Vol. 26, No. 2, March 1990, pp. 215-231.
- [140] R.A. Schlueter, H. Akhtar, H. Modir: An RMS Coherency Measure: A Basis for Unification of Coherency and Modal Analysis Model Aggregation Techniques, *IEEE PES Summer Power Meeting*, Los Angeles, California, USA, July 1978.
- [141] R.A. Schlueter, U. Ahn: Modal Analysis Equivalents Derived Based on the RMS Coherency Measure, *IEEE PES Winter Power Meeting*, New York, New York, USA, February 1979.
- [142] J. Lawler, R.A. Schlueter, P. Rusche, D.L. Hackett: Modal-Coherent Equivalents Derived from an RMS Coherency Measure, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 99, No. 4, July 1980, pp. 1415-1425.
- [143] J. Lawler, R.A. Schlueter: Computational Algorithms for Constructing Modal-Coherent Dynamic Equivalents, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 101, No. 5, May 1982, pp. 1070-1078.
- [144] G. Troullinos, J. Dorsey, H. Wong, J. Myers: Reducing the Order of Very Large Power System Models, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 3, No. 1, February 1988, pp. 127-133.
- [145] B. Mallem, B. Marinescu: Dynamic Equivalent of Neighbor Power System for Day-Ahead Stability Studies, *Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT Europe), 2010 IEEE PES*, Gothenburg, Sweden, October 2010, pp. 1-6.
- [146] J.J. Sanchez-Gasca, J.H. Chow: Power System Reduction to Simplify the Design of Damping Controllers for Interarea Oscillations, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, No. 3, August 1996, pp. 1342-1348.
- [147] P. Lancaster, M. Tismenetsky: *The Theory of Matrices*, Academic Press, Orlando, Florida, USA, 1985.
- [148] C.T. Mullis, R.A. Roberts: Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 23, No. 9, September 1976, pp. 551-562.
- [149] A. van der Schaft: Equivalence of Hybrid Dynamical systems, *Proceedings of the Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2004)*, Leuven, Belgium, July 2004.

- [150] R. Milner: *Communication and Concurrency*, Prentice Hall, New York, New York, USA, 1989.
- [151] D. Park: Concurrency and Automata on Infinite Sequences, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 104, Springer, Berlin, Germany, 1981, pp. 167-183.
- [152] G.J. Pappas: Bisimilar Linear Systems, *Automatica*, Vol. 39, No. 12, December 2003, pp. 2035-2047.
- [153] A. van der Schaft: Equivalence of Dynamical Systems by Bisimulation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, No. 12, December 2004, pp. 2160-2172.
- [154] H. Vinjamoor, A. van der Schaft: On Achievable Bisimulations for Linear Time-Invariant Systems, *Proceedings of the European Control Conference*, Budapest, Hungary, August 2009, pp. 794-801.
- [155] A. Girard, G.J. Pappas: Approximation Metrics for Discrete and Continuous Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, No. 5, May 2007, pp. 782-798.
- [156] A. Girard, G.J. Pappas: Approximate Bisimulations for Constrained Linear Systems, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, December 2005, pp. 4700-4705.
- [157] A. Girard, G.J. Pappas: Approximate Bisimulations for Nonlinear Dynamical Systems, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, December 2005, pp. 684-689.
- [158] J.F. Sturm: Using SEDUMI 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization over Symmetric Cones, *Optimization Methods and Software*, Vol. 11, No. 1-4, 1999, pp. 625-653.
- [159] S.D. Đukić, A.T. Sarić: A New Approach to Physics-Based Reduction of Power System Dynamic Models, *Electric Power Systems Research*, Vol. 101, No. 1, August 2013, pp. 17-24.
- [160] S.D. Đukić, A.T. Sarić, A.M. Stanković: Approximate Bisimulation-Based Reduction of Power System Dynamic Model With Application to Transient Stability Analysis, *Proceedings of the 45th North American Power Symposium*, Kansas State University, Manhattan, Kansas, USA, September 2013, pp. 1-6.
- [161] J.Y. Ishihara, M.H. Terra: On the Lyapunov Theorem for Descriptor Systems, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA, December 2001, pp. 2860-2864.
- [162] R.F. Sincovec, A.M. Erisman, E.L. Yip, M.A. Epton: Analysis of Descriptor Systems Using Numerical Algorithms, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 1, February 1981, pp. 139-147.
- [163] M.A. Pai: *Energy Function Analysis for Power System Stability*, Springer, London, UK, 1989.
- [164] V.S. Perić, A.T. Sarić, D.I. Grabež: Coordinated Tuning of Power System Stabilizers Based on Fourier Transform and Neural Networks, *Electric Power Systems Research*, Vol. 88, No. 1, July 2012, pp. 78-88.