

**UNIVERZITET U NOVOM SADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA**

**Aleksandar Pančić**

**REOLOŠKO DINAMIČKA ANALIZA  
ZAMORA NEARMIRANIH BETONSKIH  
GREDA OPTEREĆENIH NA SAVIJANJE**

**doktorska disertacija**

**Subotica, 2021**

## Rezime

Betonske konstrukcije koje su izložene periodičnim opterećenjima mogu dobiti oštećenja koja nekad dovedu do loma. Ovaj fenomen pri kome se razvijaju oštećenja u materijalu pri naponima manjim od granice tečenja je poznat kao zamor materijala. Razvoj oštećenja u materijalu prilikom cikličnog djelovanja opterećenja se može posmatrati kroz tri faze: faza iniciranja prsline tj. stvaranje mikroprrsline, zatim faza formiranja i stabilnog rasta prsline i treća faza koja predstavlja nestabilni razvoj prsline koji dovodi do loma materijala. Problem zamora je prvobitno ispitan na metalima, a problem se matematički opisuje kroz poznati Parizov zakon kojim se može dosta precizno opisati druga faza razvoja oštećenja. Parizov zakon povezuje gradijent širenja prsline sa faktorom intenziteta napona, koji je veoma bitan parametar mehanike loma. Danas su nastale razne modifikacije Parizovog zakona, kako na primjeni kod metala, tako i kod cementnih materijala. Kod betona se manifestuje dodatni problem veličine uzorka (*size effect*) kojim se otežava opisivanje zamora. Za matematičko opisivanje Parizovog zakona je neophodno imati eksperimentalne podatke na osnovu kojih se definišu parametri u jednačini. Razvoj efektivnijeg matematičkog aparata tj. metode pomoću koje se opisuje propagacija prsline kod betona je neophodna. U ovom radu se za rješavanje ovoga problema primjenjuje reološko-dinamička analogija.

Reološko-dinamička analogija (RDA) je matematičko-fizička analogija koja je predložena u eksplicitnoj formi od strane Milašinovića D. D., a kojom se opisuje čitav niz neelastičnih i vremenski zavisnih problema vezanih 1D prizmatične elemente. Pomoću RDA se opisuje kritično mehaničko ponašanje viskoelastoplastičnih materijala pod dejstvom ciklične varijacije napona. U ovome radu se primjenjuje RDA teorija na problemu propagacije prsline betona koja se opisuje kroz primjere savijanja u tri tačke nearmiranih betonskih greda sa inicijalnom prsline. Ovo omogućava da se razvoj prsline pri eksperimentalnom ispitivanju postiže na planiranom mjestu tj. sredini grede. S druge strane ovo onemogućava primjenu poznatih izraza iz otpornosti materijala kod proračuna ugiba ili napona, pa je time potrebna primjena linearno elastične mehanike loma ili metode konačnih elemenata. U ovome radu se prikazuje novi pristup koji kombinuje RDA teoriju, linearno elastičnu mehaniku loma (*linear elastic fracture mechanics*-LEFM) i metodu konačnih elemenata kako kod dinamičkog (zamor) tako i kod statičkog testa greda. Prema RDA se može opisati viskoelastično histerezisno ponašanje betona i odrediti brzina oslobađanja energije koja u vezi sa energijom loma određuje broj ciklusa opterećenja. Primjenom metode konačnih elemenata ili preko analitičkih izraza iz LEFM se određuje računski napon u vrhu prsline kod greda koji je potreban kod određivanja brzine oslobađanja energije, pa se time lokalizuje karakter problema. Savojna krutost grede ulazi u izraz za brzinu oslobađanja energije, a njena promjena sa dužinom prsline se određuje pomoću metode konačnih elemenata. Relativna frekvencija koja predstavlja odnos sopstvene frekvencije i frekvencije opterećenja takođe ulazi u izraz za brzinu oslobađanja energije prema RDA i mijenja se sa povećanjem dužine prsline. Određivanje relativne frekvencije se sprovodi primjenom metode konačnih elemenata. Koeficijent tečenja se pojavljuje kao veoma bitan parametar za analizu, koji se određuje iz linearne veze za naponom prema RDA teoriji. Nova metoda proračuna se pored analize dugih prsline može koristiti i kod opisa kratkih prsline modifikovanjem ranga napona u vrhu prsline primjenom linearne veze između ranga napona i dužine prsline prema Kitagawa-Takahashi dijagramu. Kritična dužina prsline koja predstavlja granicu između kratkih i dugih prsline je neophodan ulazni parametar za analizu ove oblasti.

Svi rezultati se prikazuju u obliku krive dužina prsline-broj ciklusa opterećenja, a pokazana su veoma dobra slaganja sa eksperimentalnim rezultatima od strane različitih autora. Eksperimentalna mjerenja su sprovedena i za jednu gredu bez inicijalne prsline pri čemu je mjerenje dužine prsline sprovedeno fotogrametrijom. Pored zamora sproveden je i proračun statičkog testa prema RDA u obliku krivih sila-ugib ili sila-otvaranje prsline (*crack mouth opening displacement-CMOD*) jer su veoma bitni za analizu zamora. Za ove krive se sprovodi proračun uzlazne grane kontrolisanim povećavanjem sile tj. napona u vrhu prsline, koji je povezan preko koeficijenta tečenja sa ugibom ili CMOD. Kod proračuna silazne grane se sprovodi iterativni postupak relaksacije napona analogno postupku na radnom dijagramu betona koji je izveden od strane Milašinovića D. D.

Kroz primjere u ovome radu se pokazala i moguća primjena RDA teorije u kombinaciji sa drugim teorijama kojima se opisuje propagacija kratkih prslina kod betona kao i zamor metala kroz zamjenu modula elastičnosti sa RDA modulom. Na taj način se kod teorija koje se baziraju na Parizovom zakonu uvodi koeficijent tečenja i relativna frekvencija u razmatranje.

Upoređivanjem svih eksperimentalnih rezultata prema RDA se dobija veoma dobro slaganje, te se može zaključiti da se ovaj pristup može koristiti kod proračuna dužine prsline u betonu. Upravo zbog jednostavnog matematičkog proračuna i primjene metode konačnih elemenata ovo otvara mogućnosti za dalja ispitivanja na elementima sa složenijom geometrijom kao i kod drugih betonskih mješavina.

## Abstract

Concrete structures can be exposed to cyclic loads, which can damage the material and sometimes it leads to failure. This phenomenon in which damages develop in the material at stress less than yielding stress is known as fatigue. The development of damage in the material during the cyclic loads can be seen through three stages: crack initiation phase, stable crack growth and unstable crack growth which leads to failure. The problem of fatigue was at first researched on metals, and the problem is mathematically described through the Paris law, which can accurately describe the phase of stable crack growth. Paris law connects the crack growth with the stress intensity factor, which is a very important parameter of fracture mechanics. To date, many modifications of Paris law have been made for its application on metals and cement materials. By concrete, an additional problem of the size effect manifests itself, which makes it difficult to describe fatigue. For the mathematical description of Paris law is necessary to have the experimental data, which are used for defining the parameters in equation. The development of a more effective mathematical apparatus, i.e. methods for the concrete crack propagation is necessary. Rheological-dynamic analogy is applied to describe this problem.

Rheological-dynamic analogy (RDA) is a mathematical-physical analogy proposed in explicit form by Milašinović D. D. and it describes a inelastic and time-dependent problems related to 1D prismatic elements. The RDA describes the critical mechanical behavior of viscoelastic materials under the cyclic stress variation. The application of RDA is used in this paper to analyze the crack growth of plain concrete and it is described through examples of the monotonic and cyclic three-point bending tensile tests on notched beams. The application of the initial crack enables the crack growth in the experimental study to be achieved at the planned site, i.e. in the middle of the beam. On the other hand, this prevents the application of known expressions from the continuum mechanics for stress or deflection calculation and thus requires the application of linear elastic fracture mechanics (LEFM) or finite element methods (FEM). This paper presents a new approach that combines RDA theory, linear elastic fracture mechanics (LEFM) and finite element method for dynamic (fatigue) and static beam loads. According to the RDA, viscoelastic hysteretic behavior of concrete can be described and the rate of energy release can be determined in connection with the fracture energy, which determines the number of load cycles. By applying the finite element method or through analytical expressions from LEFM, the stress at the crack tip is determined. It is required for determining the rate of energy release and thus the character of problem is localized. The bending stiffness enters in the expression for the rate of energy release and its change with crack propagation can be determined using the finite element method. The relative frequency, which represents the ratio of eigenfrequency and load frequency, enters in the expression for the rate of energy release according to the RDA and it is also changed with the crack propagation. The determination of relative frequency is carried out using the finite element method. Creep coefficient is also shown as very important parameter for the analysis and it can be determined using linear law according RDA theory.

In addition to describing the long crack growth, the new method of calculation can also be used by the short crack growth analysis. It is necessary to modify the stress range at the crack tip and it is used a linear law between the stress range and the crack length according to the Kitagawa and Takahashi diagram. Critical crack length presents the border between short and long cracks and it is necessary for short crack analysis according RDA.

All results are shown in the form of the crack length-number of load cycles and they have a very good match with experimental results by different authors. Experimental measurements were also conducted for one beam without an initial crack, where the measurement of the crack length was carried out by photogrammetry. In addition fatigue tests, the results of RDA and experimental curves force-deflection or force-crack mouth opening displacement (CMOD) have been compared. These tests are necessary for fatigue calculation according RDA. For these curves, the calculation of the ascending branch is carried out, controlled by increasing the force, i.e. by increasing the stress in the crack tip, which is connected with creep coefficient and deflection or CMOD. During the calculation of the descending branch, an iterative stress relaxation procedure is carried out, analogous to the procedure on the working diagram of concrete performed by Milašinović D. D.

Through examples, the possible application of RDA theory has been shown in combination with other theories describing the propagation of short cracks by concrete as well as metal fatigue through the replacement of elasticity modulus with the RDA modulus. In this way, the paris law based theories introduce a creep coefficient and relative frequency into consideration.

By comparing all experimental results with RDA is obtained very good match and it can be concluded that this approach can be used by the calculation of the crack growth in concrete. Precisely because of the simple mathematical calculation and application of the finite element method, this opens up possibilities for further testing on elements with more complex geometry and other concrete mixtures.

## SADRŽAJ

<b>1</b>	<b>UVOD</b>	<b>8</b>
1.1	Predmet istraživanja	8
1.2	Obrazloženje o potrebama istraživanja	9
1.3	Cilj istraživanja	9
1.4	Primjenjena metodologija	9
1.5	Rezultati istraživanja i njihova primjena	10
1.6	Kratak sadržaj rada	10
<b>2</b>	<b>OSNOVE MEHANIKE LOMA</b>	<b>11</b>
2.1	Koncentracija napona oko otvora primjenom teorije elastičnosti	11
2.2	Analiza napona oko vrha prsline	14
2.3	Otvaranje prsline CMOD (crack mouth opening displacement)	19
2.4	Energija loma i žilavost	19
2.5	Teorijski pristupi mehanike loma betona	24
2.6	Parametri betona prema Evrokodu	30
<b>3</b>	<b>PONAŠANJE BETONA USLIJED ZAMORA</b>	<b>35</b>
3.1	Ciklična opterećenja	35
3.2	Razvoj oštećenja u betonu prilikom cikličnog djelovanja	36
3.3	Teorijski pristupi kod zamora betona	38
<b>4</b>	<b>ANALIZA ZAMORA PREMA REOLOŠKO-DINAMIČKOJ ANALOGIJI</b>	<b>43</b>
4.1	Uvod u reološko-dinamičku analogiju	43
4.2	Reološko-dinamički modul	45
4.3	Veza napona i koeficijenta tečenja	46
4.4	Veza Poasonovog koeficijenta i koeficijenta tečenja	47
4.5	Radni dijagram betona pri pritisku	48
4.6	Veza skalarne varijable oštećenja i koeficijenta tečenja	49
4.7	Energija loma prema RDA	50
4.8	Statički test prema RDA kod savijanja greda	51
4.9	Propagacija dugih prsline prema RDA kod savijanja greda	53
4.10	Propagacija kratkih prsline prema RDA kod savijanja greda	58
4.11	Primjena reološko-dinamičkog modula na druge teorije-problem kratkih prsline kod savijanja betonskih greda	59
4.12	Primjena reološko-dinamičkog modula na druge teorije-problem zamora metala	60
<b>5</b>	<b>NUMERIČKI PRIMJERI</b>	<b>65</b>

<b>5.1</b>	<b>Propagacija prsline u betonskim gredama dimenzija <math>S/D=4</math> sa varijacijom amplitude cikličnog opterećenja</b>	65
5.1.1	Parametri mehanike loma	66
5.1.2	Statički test	69
5.1.3	Uticaj mreže konačnih elemenata na proračun napona u vrhu prsline	74
5.1.4	Propagacija prsline prema Parizovom zakonu	78
5.1.5	Proračun zamora greda prema RDA – duge prsline	80
5.1.6	Proračun zamora greda prema RDA – kratke prsline	87
5.1.7	Primjena reološko-dinamičkog modula na Parizov zakon	89
5.1.8	Rezultati	91
<b>5.2</b>	<b>Propagacija prsline u betonskoj gredi dimenzija <math>S/D=8,9</math></b>	94
<b>5.3</b>	<b>Propagacija prsline u betonskim gredama (<math>S/D=4,5</math>) od normalnog i mikroarmiranog betona</b>	99
<b>5.4</b>	<b>Propagacija prsline u gredi od betona visoke čvrstoće (<math>S/D=2,5</math>)</b>	106
<b>5.5</b>	<b>Propagacija prsline u betonskim gredama različitih dimenzija (<math>S/D=4,0</math>)</b>	112
<b>6</b>	<b>ZAKLJUČAK</b>	122
	<b>LITERATURA</b>	125

# 1 UVOD

## 1.1 Predmet istraživanja

Zamor materijala je fenomen koji predstavlja oštećenje materijala uslijed djelovanja periodičnih opterećenja pri čemu se lom materijala može dogoditi pri znatno manjim naponima u odnosu na njegovu čvrstoću. Najveći napon koji materijal može podnijeti pri neograničenom broju ponavljanja se naziva dinamička čvrstoća materijala. Kod nekih građevinskih konstrukcija (npr. mostovi, tornjevi itd.) su dinamička opterećenja dominantna, pa je ovaj fenomen od posebne važnosti. Prva ispitivanja zamora su počela sa radovima Wöhler-a koji je ispitivao lomove željezničkih osovina i pri tome uočio da se sa smanjenjem amplitude napona produžava radni vijek konstrukcije. Nakon potapanja brodova napravljenih od krtih materijala u drugom svjetskom ratu počinje sve veće interesovanje za mehaniku loma kao i za praćenje razvoja oštećenja (prslina) u materijalima. Tako je mehanika loma dobila veliku ulogu kod analize zamora uvodeći nove parametre i metode ispitivanja. Generalno posmatrano u materijalu koji je izložen cikličnom djelovanju oštećenje tj. prslina prolazi kroz tri faze razvoja:

-faza iniciranja prslina

-faza stabilne propagacije prslina

-faza nestabilnog razvoja prslina

U prvoj fazi se javljaju nepovratne promjene na mikronivou koje dovode do stvaranja kratkih prslina koje po pravilu nisu opasne za konstrukciju dok ne dostignu svoju kritičnu vrijednost. Ova oblast, pogotovo u slučaju betona kao materijala, nije dovoljno istražena. Druga faza tj. slučaj kada su nastale makroprslina se može još podijeliti na dva dijela: stabilni i nestabilni rast prslina. U ovoj fazi razvoja oštećenja su nastala mnogobrojno teorijska i eksperimentalna ispitivanja kako pravca i smjera rasta prslina tako i dužine i širine otvaranja prslina. Prvi konkretan matematički model koji opisuje propagaciju prslina u ovoj fazi je Parizov zakon [1] (naziva se još Pariz-Erdogan zakon) iz 1963 godine, a bazira se na primjeni mehanike loma. U njemu je definisana veza gradijenta širenja prslina sa rangom faktora intenziteta napona. Stabilna propagacija prslina se odvija sve dok se ne dostigne žilavost materijala, nakon čega nastupa treća faza propagacije tj. nestabilni razvoj prslina, koji dovodi do loma. Žilavost materijala se može još izraziti i preko energije loma, a obe veličine su veoma bitni parametri kod analiziranja zamora materijala i za njihovo određivanje se sprovode statički testovi. Parizov zakon je do danas dobio razne modifikacije koje su predložene od strane raznih autora, a njegova primjena se pokazala uspješnija na metalima. Izvjestan broj autora je predlagao modifikaciju Parizovog zakona na primjeni kod betona. Neki značajni prijedlozi se mogu naći radovima Swartz S. E. i Go C. G. [2], Baluch M. H. i ostali [3] ili Ray S. i Kishen J. M. C [4] itd. Ono što dodatno otežava primjenu mehanike loma kod betona je fenomen efekta veličine (*size effect*) koji se može naći u radovima Bažant Z. P. i Kangming X. [5] ili Carpinteri A. i Spagnoli A. [6] koji uvode i empirijske koeficijente u svoje izraze. Predmet istraživanja ovog rada je analiza razvoja kratkih i dugih prslina kod betona sa primjenom nove metode koja se ne bazira na Parizovom zakonu, već na kombinaciji linearno elastične mehanike loma, metode konačnih elemenata i reološko-dinamičke analogije (RDA). Od 1998 godine u radovima Milašinovića D. D. je razvijena je matematičko-fizička analogija nazvana reološko-dinamička analogija (RDA) koja je predložena u eksplicitnoj formi na nizu



neelastičnih i vremenski zavisnih problema vezanih za 1D prizmatične štapove, kao što su izvijanje, zamor, itd. Ova teorija definiše kritična mehanička svojstva viskoelastoplastičnih (VEP) materijala. RDA se zasniva na prostiranju elastičnih talasa pod trenutnim nanošenjem uticaja. Uspješan teorijski pristup koji je zasnovan na RDA i njenim praktičnim aplikacijama dat je u vezi sa VEP ponašanjem metalnih šipki pri zatezanju. RDA teorija je primjenjiva i na problemu određivanja uzlazne i silazne grane radnog dijagrama betona pri pritisku. Pri tome je razvijen reološko-dinamički kontinuumski model koji povezuje RDA teoriju sa mehanikom oštećenja pri čemu su povezani Poasonov koeficijent i skalarna varijabla oštećenja. Granična deformacija u postkritičnom ponašanju se određuje sekantnom vezom napon-deformacija. Ovim modelom se određuju i parametri mehanike loma koji se baziraju na globalnoj analizi prilikom kritičnog pomjeranja odnosno međusobnog prodiranja u materijalu.

## **1.2 Obrazloženje o potrebama istraživanja**

U novije vrijeme se kod betonskih konstrukcija se sve više radi na povećanju čvrstoće, smanjivanju količine armature i sopstvene težine, pa se teže napraviti što tanje konstrukcije. Isto tako u praksi se mogu naći i neke nove vrste betona (npr. betoni visoke čvrstoće, mikroarmirani betoni, laki betoni itd) koji imaju drugačije materijalne karakteristike u odnosu na normalni beton. U praksi se analiza zamora betona uglavnom zasniva na primjenama hipoteza o akumulaciji oštećenja, a manje na mehanici loma. Izvjestan broj autora nastoji daljim modifikacijama Parizovog zakona da unaprijedi primjenu mehanike loma kod betona, ali to nije ni malo jednostavan zadatak.

Pošto se RDA teorija pokazala uspješnom kod analize zamora linijski opterećenih elemenata od čelika, onda se javlja potreba za dalju primjenu kod zamora betona pri čemu se po prvi put na sveobuhvatan način nastoji uključiti RDA teoriju u mehaniku loma. RDA je nelinearna teorija tako da je njenom primjenom u LEFM stvoren jedan "hibridni pristup" nelinearne mehanike loma.

## **1.3 Cilj istraživanja**

Primarni cilj ovog rada je analiza procesa širenja prsline i formulisanje matematičkog modela/metode kojom bi opisivao razvoj prsline u betonu tj. definisala veza dužina prsline-broj ciklusa opterećenja. Razvijanje metode se sprovodi na primjerima savijanja u tri tačke nearmiranih betonskih greda sa inicijalnom prsline koje su izložene cikličnom opterećenju. Razmatra se propagacija kratkih i dugih prsline prema RDA. Metoda bi se mogla i primijeniti i na ostale vidove naprezanja kao što su centrično zatezanje ili torzija itd. Pored problema zamora analizira se problem loma betona pri statičkim testovima tj. određivanje dijagrama sila-ugib i sila-otvaranje prsline (CMOD) prema RDA.

## **1.4 Primjenjena metodologija**

Istraživanje se temelji na metodama savremene nauke pri čemu se koristi matematičko modeliranje, reološko-dinamičko i numeričko modeliranje. Eksperimentalni rezultati su preuzeti iz literature od strane raznih autora. Na primjeru grede iz poglavlja 5.4 su sprovedena i eksperimentalna ispitivanja laboratoriji građevinskog fakulteta u Kaiserlaternu (Njemačka). Ta ispitivanja nisu dio istraživačkog projekta vezanog za ovaj rad.

## **1.5 Rezultati istraživanja i njihova primjena**

Metoda proračuna broja ciklusa opterećenja u zavisnosti od dužine kratkih i dugih prslina primjenom RDA teorije u kombinaciji sa mehanikom loma i metodom konačnih elemenata se pokazala veoma uspješna. Preduslov za to su ulazni parametri kao što su energija loma, napon u vrhu prslina, gustina mreže konačnih elemenata kao i statički test, koji moraju biti precizno definisani, jer su dosta osjetljivi na rezultate. Pored primjene na normalnom betonu ova metoda je kroz primjere verifikovana i kod betona visoke čvrstoće kao i mikroarmiranih betona koji imaju drugačije mehaničke parametre. Na primjeru u poglavlju 5.4 je pokazan uticaj geometrije grede na rezultate statičkog testa i zamora. Primijenjena metoda se može primijeniti kod analize razvoja oštećenja prslina nearmiranih ili mikroarmiranih betonskih greda koje su izložene savijanju. Dalja mogućnost istraživanja koja su primjena na raznim primjerima iz mehanike loma kao npr. centrično opterećena ploča sa zarezom kao i primjena kod armiranog betona.

## **1.6 Kratak sadržaj rada**

Pored uvoda u poglavlju 2 se daje ukratko pregled osnovnih jednačina iz mehanike loma kao i teorijski pristupi mehanike loma kod betona. U poglavlju 3 je detaljnije opisan problem zamora i dat pregled nekih teorija koje se koriste kod opisivanja problema zamora betona a koje su zasnovane na Parizovom zakonu. Poglavlje 4 daje pregled osnovnih jednačina RDA teorije, zatim izvođenje jednačina potrebnih za ispitivanje problema zamora kod betonskih greda opterećenih na savijanje. U poglavljima od 4.1 do 4.8 su prikazane osnovne jednačine RDA koje su potrebne kod poglavlja 4.8 – 4.12 gdje se predstavlja reološka-dinamička analiza zamora. Prikazana je moguća primjena RDA teorije na problemu zamora metala kao i na propagaciji kratkih prslina kod betona, a to se zasniva na korigovanju mehanike loma odnosno drugih teorija koje su zasnovane na Parizovom zakonu preko reološko-dinamičkog modula. Zatim slijedi poglavlje 5 u kome su urađeni numerički primjeri i time sprovedena verifikacija metode proračuna zamora prema RDA kod savijanja betonskih greda. U poglavlju 6 je dat zaključak.

## 2 OSNOVE MEHANIKE LOMA

Sa objavom radova Griffith-a A. A. iz 1920 [7] smatra se početak razvoja mehanike loma. On je razmatrao lom krčkog materijala koji je baziran na energetske hipotezi. Sa pojavom radova Irwina G. R. (1957) [8]- [9] i Williams M. L. (1956) [10] dolazi do napretka u istraživanju analize napona i deformacija oko vrha prsline a time i usavršavanje Griffith-ove teorije. Potapanje brodova napravljenih od krčkih materijala u drugom svjetskom ratu je bio jedan od glavnih razloga koji je doveo do ubrzanijeg razvoja mehanike loma. Mehanika loma je nauka u kojoj osnovu čine Mehanika, Nauka o materijalima, Matematika kao i Statistička Fizika [11].

Pod lomom materijala se može smatrati makroskopsko razdvajanje materijala koje rezultira gubitkom nosivosti konstrukcije. Kod loma nastaje razaranje atomske ili molekularne veze u materijalu čime se stvara nova površina. Čvrstoća je određena kohezionim silama na nivou atomske rešetke koje imaju velike vrijednosti i definišu tzv. teorijsku čvrstoću. Zbog defekata koji postoje u rešetkama čvrstoća materijala je dosta manja od teorijske te je u slučaju ispitivanja fizike loma od značaja posmatranje defekata u koje spadaju: dislokacije, manjak atoma u rešetki, strani atom ili atom pomjeren iz svoje pozicije. Dislokacije u kristalu nastaju kretanjem pojedinih oblasti kristala tokom njegovog rasta ili pri plastičnoj deformaciji što je svojstveno za metale koji imaju izraženu plastičnu deformaciju. U slučaju krčkih materijala kao što je beton kretanje dislokacija je onemogućeno pa se energija ne troši na promjenu oblika već na formiranje novih površina. Granice zrna, jači slojevi ili vlakna u kompozitnim materijalima su najčešće barijere za kretanje dislokacija pa se oko takvih prepreka stvara koncentracija napona koja dovodi do kidanja atomskih veza. Atomske veze kod krčkih materijala su najčešće takve da onemogućuju pojavu deformacije kretanjem dislokacijom što rezultira time da se krčka deformacija definiše kidanjem atomskih veza i odsustvom rezidualne deformacije nakon rasterećenja. Prilikom kidanja atomskih veza u materijalu se stvaraju prsline čija propagacija može biti od ključne važnosti za stabilnost čitave konstrukcije. Brzina i način propagacije zavise od geometrije, opterećenja, temperature i strukture materijala. Početna prsline postaje opasna samo kada energija koja kida atomske veze prevaziđe energiju potrebnu za stvaranje novih površina.

Principi određivanja polja lokalnih naprezanja i deformacija najčešće se dijele na linearno elastični pristup (eng. *Linear Elastic Fracture Mechanics* – LEFM) i nelinearni pristup koji se dalje dijeli na elastoplastični (eng. *Elastic-Plastic Fracture Mechanics* - EPFM), viskoelastični i viskoplastični pristup [12]. Linearno elastična mehanika loma daje jako dobre rezultate ako je tzv. procesna zona oko prsline u kojoj je dominirana koncentracija napona jako mala u odnosu na dužinu problema, pa u toj maloj zoni dolazi do plastične deformacije.

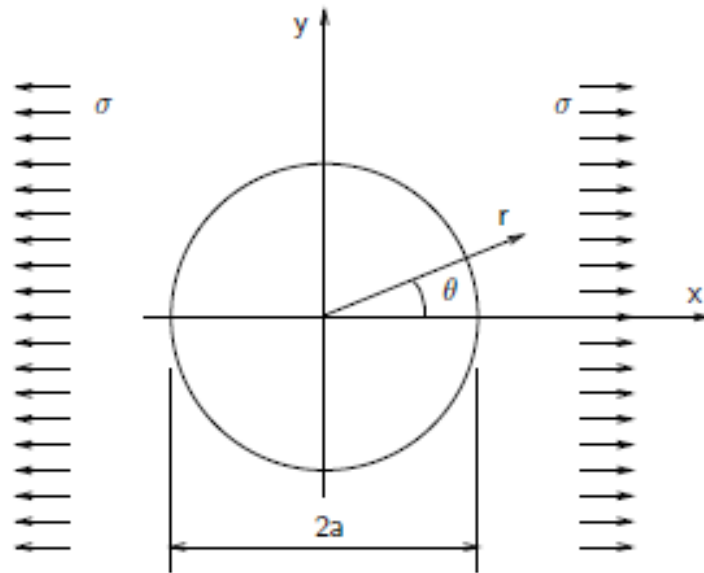
### 2.1 Koncentracija napona oko otvora primjenom teorije elastičnosti

Da bi se bolje shvatio problem analize napona oko vrha prsline ovdje se samo ukratko prikazuju specijalni problemi teorije elastičnosti koji pokazuju koncentracije napona oko otvora u ploči. Naime problem teorije elastičnosti se svodi na rješavanje sistema od petnaest jednačina sa petnaest nepoznatih veličina pri čemu su nepoznate 6 komponenta deformacije, 6 komponenta napona i 3 komponente pomjeranja. Zavisno od problema koji se posmatra nastoji se eliminacijom nekih nepoznatih pojednostaviti sistem jednačina [13]. Jedna od mogućnosti je traženje napona tako da se zadovolje jednačine kompatibilnosti i jednačine ravnoteže uz razmatranje odgovarajućih graničnih uslova. George Bidell Airy-a [14] je

predložio rješenje za dvodimenzionalne probleme, koji je baziran na formulisanju relacija tzv. funkcija napona  $\phi$ . Funkcija napona treba da bude tako izabrana da zadovoljava uslove ravnoteže kao i uslove kompatibilnosti i iz toga rezultira tzv. biharmonijska jednačina [15] koja je prikazana u sljedećoj jednačini (2.1),

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \quad (2.1)$$

Biharmonijska jednačina je pogodna je za izražavanje u drugim koordinatnim sistemima i može biti korištena prilikom analize različitih fizičkih problema. Ukoliko se biharmonijske jednačine koriste prilikom analize nekog problema neophodno je formulirati odgovarajuća rješenja tako da ona adekvatno opišu prirodu razmatranog problema. Jedan od problema na kojem se može primijeniti je slučaj aksijalno napregnute beskonačne ploče sa kružnim ili eliptičnim otvorom, slika 2.1.



Slika 2.1 Beskonačna ploča sa kružnim otvorom [15]

Rješavanjem biharmonijske jednačine dobijaju se rješenja za napone oko otvora [15] koji su dati u sljedećim jednačinama (2.2),

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^4} \right) \cos(2\theta) \right] \\ \sigma_{tt} &= \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \right] \\ \sigma_{rt} &= -\frac{\sigma}{2} \left[ 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right] \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Interesantno je posmatrati neke specijalne tačke sa različitim koordinatama,

$$\sigma_{rr}(r = a, \theta) = \sigma_{rt}(r = a, \theta) = \sigma_{rt}(r = a, \theta = 0) = 0$$

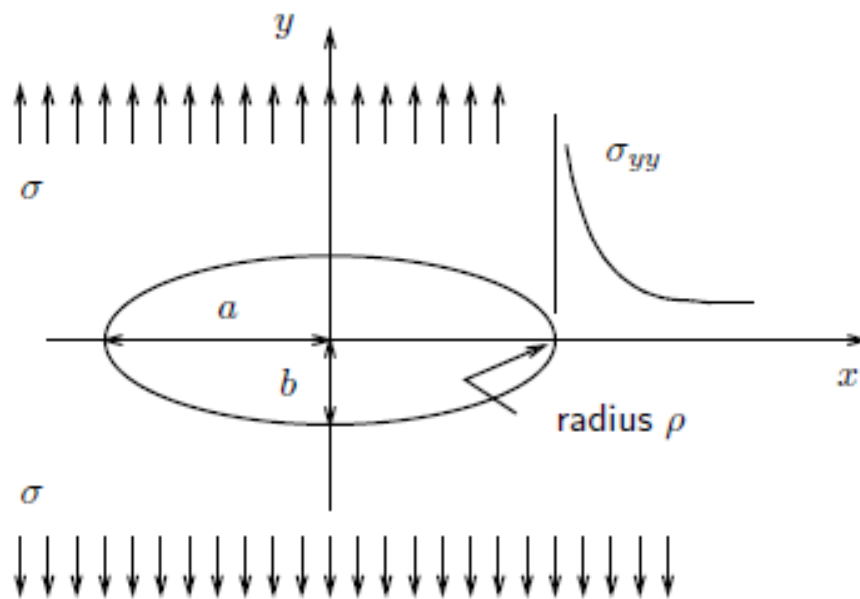
$$\sigma_{tt}(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}) = 3\sigma \quad (2.3)$$

$$\sigma_{tt}(r = a, \theta = 0) = -\sigma$$

gdje se za tangencijalni napon u slučaju koordinata  $r=a$  i  $\theta=\frac{\pi}{2}$  uvodi pojam faktor koncentracije napona koji iznosi,

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = 3 \quad (2.4)$$

Na analogan način se može riješiti problem aksijalno napregnute beskonačne ploče sa eliptičnim otvorom (slika 2.2).



Slika 2.2 Beskonačna ploča sa eliptičnim otvorom [15]

Ovdje su dobijaju naponi i faktor koncentracije napona prema sljedećim jednačinama [15],

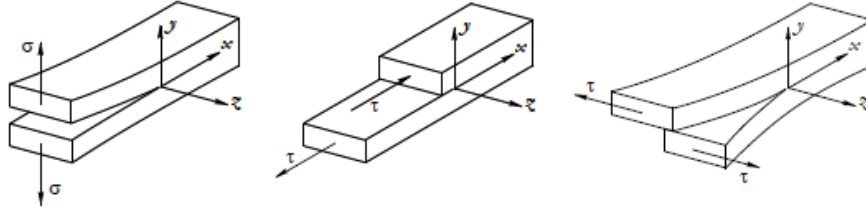
$$\sigma_{yy}(x = a, y = 0) = \sigma \left( 1 + 2\frac{a}{b} \right) = \sigma (1 + 2\sqrt{a/\rho}) \approx 2\sigma\sqrt{a/\rho} \quad (2.5)$$

$$K_t = 2\sqrt{a/\rho}$$

Na osnovu prethodnih jednačina se vidi da su komponentalni naponi realne funkcije polarnih koordinata i da su zavisni od geometrije otvora. Faktor koncentracije napona je kod eliptičnog otvora zavisi još i od radijusa otvora i sa opadanjem radijusa ovaj faktor se povećava. U граниčnom slučaju kada bi radijus bio nula dobile bi se beskonačne vrijednosti faktora koncentracije napona pa samim tim i napona ploče. Takva geometrija odgovara realnoj prslini a matematički gledano vrh prsline je singularna tačka pa upotreba prethodnih funkcija sa realnim argumentom nije dovoljna već se zahtjeva uvođenje kompleksnih funkcija i složeniji matematički pristup koji je problem mehanike loma.

## 2.2 Analiza napona oko vrha prsline

Kao što se pokazalo u prethodnom poglavlju problem određivanja napona i deformacije u elastičnom materijalu sa prslinom nije trivijalan problem i zahtjeva upotrebu kompleksne analize. U mehanici loma se razlikuju tri oblika (moda) deformacije prsline koji su prikazani na slici 2.5. Mod 1-otvaranje prsline, Mod 2-smicanje (klizanje) i Mod 3-smicanje izvan ravni, slika 2.3.



Slika 2.3 Oblici deformacije prsline (Mod 1-lijevo, Mod 2-sredina, Mod 3-desno) [12]

Kao što je već spomenuto, za razliku od kružne i eliptične šupljine u ploči koje imaju zaobljene vrhove kod realne prsline se radi o oštroj ivici gdje je radijus nula. Upravo zbog te singularnosti je potrebno prilikom rješavanja biharmonijske jednačine uvesti kompleksne promjenjive. Prvi koji je ovo predložio je bio Westergard H. M. [16] za slučaj aksijalno opterećene ploče za prslinom u sredini, Mod 1. Muskhelishvili N. I. [17] je 1963 godine uveo opšte kompleksne funkcije napona i tako je pokazano da Airy-eva funkcija napona predstavlja specijalan slučaj koji važi kod tijela (otvora) sa glatkim granicama. Da bi se riješio problem vrha prsline pomoću kompleksnih funkcija potrebno poznavati pravila kompleksne analize. Naponi i deformacije za tri moda otvaranja prsline su prikazani sledećim jednačinama u polarnim koordinatama, a detaljniji postupak izvođenja se može naći u [15].

Mod 1

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ 1 - \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right\} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ 1 + \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right\} \right] \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right] \\
 u_x &= \frac{K_I}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} \right] \\
 u_y &= \frac{K_I}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} \right] \\
 \vartheta &= \frac{E}{2(1 + \mu)}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Mod 2

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ 2 + \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right\} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right] \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ 1 - \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right\} \right] \\
 u_x &= \frac{K_{II}}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} \right] \\
 u_y &= \frac{K_{II}}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ -\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left\{ \kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Mod 3

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zx} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right] \\
 \sigma_{zy} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right] \\
 u_z &= \frac{2K_{III}}{\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

U prethodnim jednačinama se vidi da je za određivanje naponske slike u polarnom koordinatnom sistemu  $(r, \theta)$  oko vrha prsline potrebno poznavati faktore intenziteta napona  $K_I$ ,  $K_{II}$  i  $K_{III}$ , koji su veoma bitni parametri mehanike loma. Kod izraza za pomjeranje se pojavljuju još Poasonov koeficijent  $\mu$  i modul elastičnosti  $E$ . Pored opisanog postupka sa kompleksnim funkcijama rješenja naponsko-deformacijskog stanja oko vrha prsline je još moguće dobiti i primjenom tzv. Williamsove polinomne metode ili Eftis-Subramonian-Liebowitz-ovom metodom čija izvođenja se mogu naći u [18].

Ono što linearno elastičnu mehaniku loma čini veoma pogodnom je primjena superpozicije u slučaju složenog naprezanja tj. kombinovanje modova prsline. S druge strane nedostatak koji postoji je beskonačnost napona u vrhu prsline. Barentblatt G. I. (1959-1962) [19]- [20] je za slučaj cementnih materijala uveo hipotezu kojom se strogo ograničava primjena LEFM. Posmatrajući elastično-krti materijal on je uveo pretpostavku o postojanju sila kohezije koje se nalaze na dijelu prsline na kome je razmak između lica prsline reda veličine intermolekularnog rastojanja. Ove sile kohezije vuku lica prsline jedno prema drugome na sličan način kao što je to na makroskopskom dijelu. Kohezivne sile prouzrokuju tzv. kohezivni faktor intenziteta napona koje se dodaje makroskopskom faktoru intenziteta napona. Ukoliko je ukupni faktor intenziteta napona nula to znači da se beskonačna vrijednost napona pomjerila tj. da su naponi kontinuirani sa naponima u procesnoj zoni FPZ (*fracture proces zone*).

Barenblatt je pokazao da Griffith-ova teorija i primjena LEFM zavisna dvije veoma bitne hipoteze:

-veličina procesne zone je mala u odnosu na dužinu prsline i geometriju elementa.

-oblik površine prsline je isti tokom stabilnog rasta prsline

Prva hipoteza je veoma dobro poznata, dok se druga rijetko spominje, a veoma je važna kod propagacije prsline cementnih materijala. Prema linearno elastičnoj mehanici loma određivanje naponsko-deformacijske slike oko vrha prsline je moguće samo ukoliko se poznaju faktori intenziteta napona  $K_I$ ,  $K_{II}$  i  $K_{III}$  koji se određuju pomoću metode konačnih elemenata. Opšti izraz za faktor intenziteta napona je prikazan u sledećoj jednačini,

$$K = \sigma\sqrt{\pi a}Y \quad (2.9)$$

gdje je  $a$  dužina prsline, a  $Y$  faktor koji uzima u obzir geometrijske karakteristike elementa. Analitički izrazi za izračunavanje faktora intenziteta napreznja za uzorke jednostavne geometrije sa različitim oblicima prsline, te različito opterećenih mogu se pronaći u literaturi, kao recimo u radu od Tada H. i ostali [21]. U početnim studijama izračunavanja faktora intenziteta napreznja korišćenjem metode konačnih elemenata, da bi se riješio problem singularnosti polja napreznja, koristila se veoma gusta mreža elemenata. Kako je kod elastičnih materijala nemoguće singularnost postići standardnim elementima, razvijeni su hibridni elementi, tj. singularni izoparametarski četvrtinski elementi [3]. Najčešće korištene metode za izračunavanje faktora intenziteta napreznja su:

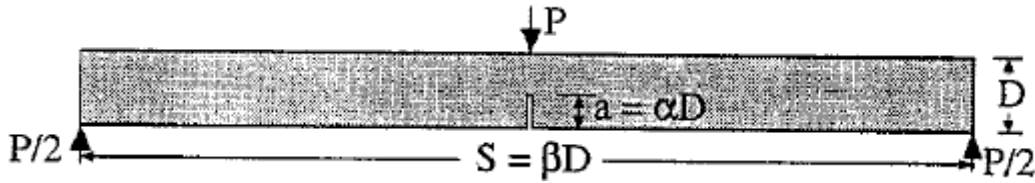
-Metoda korelacija pomaka (eng. *Displacement Correlation Technique*-DCT) koristi metodu konačnih elemenata za nalaženje pomjeranja oko vrha prsline a zatim se ta pomjeranja izjednačavaju sa analitičkim pomjeranjima koja se izražavaju preko faktora intenziteta napona.

-Faktor oslobođene potencijalne energije dobijen metodom modificiranog integrala zatvaranja prsline (eng. *Modified Crack Closure Integral Technique*-MCC) je postupak koji se zasniva na činjenici da je rad potreban za produbljenje prsline jednak radu potrebnom za zatvaranje prsline.

-Metoda  $J$ -integrala dobijenog pomoću ekvivalentnog površinskog integrala (eng. *Equivalent Domain Integral*-EDI) je zasnovana na krivolinijskom  $J$  integralu koji ne zavisi od oblika krive koja se definiše oko vrha prsline. Da bi se integracija pojednostavila krivolinijski integral se zamjeni površinskim integralom. Krivolinijski  $J$ -integral ima primjenu u nelinearnoj mehanici loma.

Kao što je već spomenuto za neke jednostavnije primjere u mehanici loma postoje analitički izrazi za faktori intenziteta napona koji se mogu naći u literaturi [21]. Ono što je od posebnog značaja za ovaj rad jeste određivanje faktora intenziteta napona za probleme savijanja greda sa inicijalnom prsline. Na takvim gredama se analizira propagacija prsline u materijalu i određuje žilavost materijala. U literaturi se mogu naći različite varijante s obzirom na dimenzije grede ili način opterećenja. Ovdje se prikazuju primjeri grede koje su opterećene na savijanje u tri tačke ali sa različitim geometrijama, slika 2.4.





Slika 2.4 Šematski prikaz grede sa inicijalnom prslinom - savijanje u tri tačke [22]

U literaturi se mogu najčešće naći primjeri grede koji imaju odnos raspona prema visini grede od  $\beta = S/D$  od 2,5 do 8,0.

Za slučaj grede  $S/D=2,5$  faktor intenziteta napona se određuje prema sledećoj jednačini (2.10) [5]

$$K_I = \frac{P f(\alpha)}{B\sqrt{D}}, \alpha = \frac{a}{D} \quad (2.10)$$

$$f(\alpha) = (1 - \alpha)^{-3/2} (1 - 2,5\alpha + 4,49\alpha - 3,98\alpha^3 + 1,33\alpha^4)$$

$B$  je širina poprečnog presjeka grede.

Za slučaj grede  $S/D=4$  se nalazi nekoliko formula u literaturi koje daju približno iste rezultate:

prema [11],

$$K_I = \frac{3PS}{2BD^2} \sqrt{\pi a} \left[ 1,09 - 1,73 \left(\frac{a}{D}\right) + 8,20 \left(\frac{a}{D}\right)^2 - 14,18 \left(\frac{a}{D}\right)^3 + 14,57 \left(\frac{a}{D}\right)^4 \right] \quad (2.11)$$

prema [15],

$$K_I = \frac{PS}{BD^{3/2}} \left[ 2,9 \left(\frac{a}{D}\right)^{1/2} - 4,6 \left(\frac{a}{D}\right)^{3/2} + 21,8 \left(\frac{a}{D}\right)^{5/2} - 37,6 \left(\frac{a}{D}\right)^{7/2} + 37,7 \left(\frac{a}{D}\right)^{9/2} \right] \quad (2.12)$$

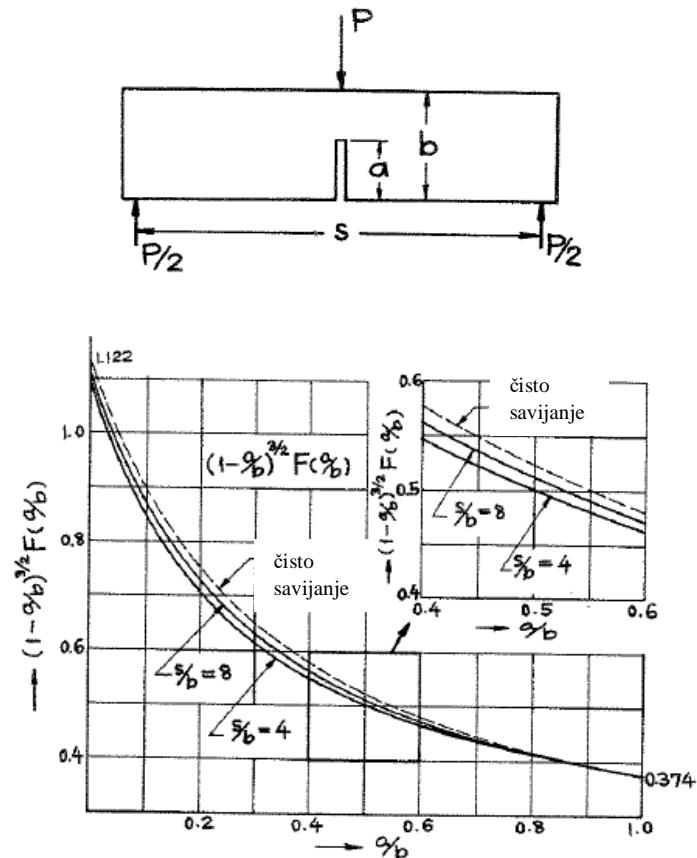
prema [23],

$$K_I = \frac{3PS}{2BD^2} \sqrt{a} \left[ 1,93 - 3,07 \left(\frac{a}{D}\right) + 14,53 \left(\frac{a}{D}\right)^2 - 25,11 \left(\frac{a}{D}\right)^3 + 25,80 \left(\frac{a}{D}\right)^4 \right] \quad (2.13)$$

U radu Tada H. i ostali [21] su prikazane vrijednosti geometrijske funkcije koja ulazi u izraz za faktor intenziteta napona kod grede koje su opterećenje na savijanje u tri tačke. Napon kao i faktor intenziteta napona se računaju prema sledećoj formuli (2.14) a na slici 2.5 se pokazuje zavisnost geometrijskih funkcija od odnosa dužine prsline i visine grede.

$$\sigma = \frac{6M}{b^2} \left( M = \frac{Ps}{4} \right) \quad (2.14)$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(a/b)$$



Slika 2.5 Promjena geometrijskih funkcija u izrazima za faktor intenziteta napona prema Tada H. i ostali [21]

U radu Guinea G. V. i ostali (1998) [22] se predlaže opšti izraz za faktor intenziteta napona u slučaju greda sa inicijalnom prslinom i to za slučaj  $\beta = S/D \geq 2,5$  što je dovoljno za praktičnu upotrebu. Pri tome se kombinuju dva referentna slučaja greda  $\beta = 4$  i slučaj  $\beta = \infty$  što bi se moglo posmatrati kao čisto savijanje. Izraz je prikazan u sledećoj jednačini,

$$\sigma_N = \frac{6M}{BD^2}$$

$$K_I = \sigma_N \sqrt{D} k_\beta(\alpha)$$

$$\alpha = a/D \quad (2.15)$$

$$k_\beta(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}(1+3\alpha)} \left[ p_\infty(\alpha) + \frac{4}{\beta} [p_4(\alpha) - p_\infty(\alpha)] \right]$$

$$p_4(\alpha) = 1.9 + 0.41\alpha + 0.51\alpha^2 - 0.17\alpha^3$$

$$p_\infty(\alpha) = 1.99 + 0.83\alpha + 0.31\alpha^2 - 0.14\alpha^3$$

### 2.3 Otvaranje prsline CMOD (crack mouth opening displacement)

Kod eksperimentalnog ispitivanja savijanja greda sa inicijalnom prslinom se pored ugiba vrši mjerenje otvaranja prsline CMOD (crack mouth opening displacement), jer je veoma pogodno na tome mjestu postaviti mjerače. CMOD je kao i ugib parametar kinematike koji se koristi na statičkim testovima, a koji su opet veoma bitni kao ulazne informacije kod analize zamora. Ovo je slučaj i kod primjene RDA teorije koja se razmatra u poglavljima 4 i 5. U radu Guinea G. V. i ostali (1998) [22] je definisan opšti izraz za otvaranje prsline CMOD kod greda sa inicijalnom prslinom, a koji je dat je sledećim jednačinama,

$$0 < \alpha < 1$$

$$\beta \geq 2.5$$

$$CMOD = \frac{4a\sigma_N}{E} v_\beta(\alpha)$$

$$v_\beta(\alpha) = v_\infty(\alpha) + \frac{4}{\beta} [v_4(\alpha) - v_\infty(\alpha)] \quad (2.16)$$

$$v_4(\alpha) = 0.76 + 2.28\alpha + 3.87\alpha^2 - 2.04\alpha^3 + \frac{0.66}{(1-\alpha)^2}$$

$$v_\infty(\alpha) = 0.76 - 1.7\alpha + 2.4\alpha^2 + \frac{0.66}{(1-\alpha)^2}$$

Analogno ovim izrazima postoje i analitički izrazi za ugib prema LEFM koji su prikazani u poglavlju 5.1.2.

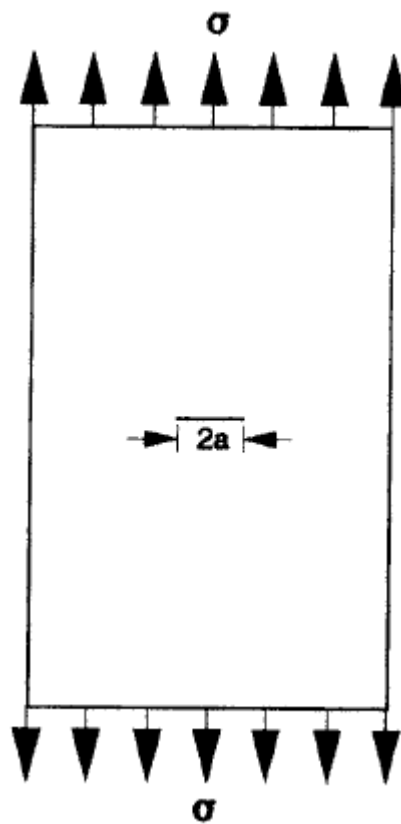
### 2.4 Energija loma i žilavost

Sa radom Griffith-a A. A. (1920) [7] koji je posmatrajući eksperiment sa staklom, koje se lomi krto bez gotovo i najmanje deformacije, izvedena je zavisnost između širenja prsline i vanjskog opterećenja. Energije koje nastaju u elastično krto tijelu sa prslinom su potencijalna energija spoljašnjeg opterećenja, energija deformacije i površinska energija. Ukoliko je ukupna potencijalna energija, koja je zbir potencijalne energije spoljašnjih i

unutrašnjih sila veća ili jednaka površinskoj energiji onda dolazi do širenja prsline. Promjena potencijalne energije koja je posljedica širenja prsline se naziva još i brzina oslobađanja energije. Ravnotežno stanje prema Griffith-u (2.17) je definisano sa znakom jednakosti između brzine oslobođene energije tokom širenja prsline i energije potrebne za stvaranje novih prsline. [15],

$$G = 2\gamma \quad (2.17)$$

Može se reći da specifična površinska energija predstavlja rad potreban za stvaranje jedinične površine prsline. Na slici 2.6 je prikazana ploča sa prslinom u sredini opterećena na zatezanje a izrazom (2.18) je data brzina oslobađanja energije prema Griffith-u [24],



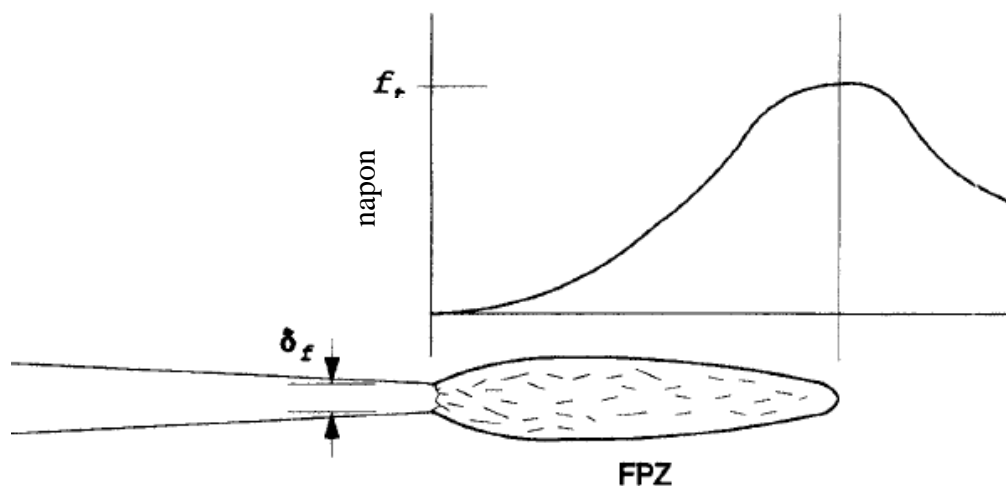
Slika 2.6 Zatezanje ploče sa centralnom prslinom [24]

$$G_I = \frac{1}{B} \frac{d\Pi}{d(2a)} = \frac{\sigma^2 \pi a}{E^*} \quad (2.18)$$

$B$  je debljina ploče a  $E^* = E$  Jungov modul elastičnosti u slučaju ravnog stanja napona, dok u slučaju ravnog stanja deformacije iznosi  $E^* = \frac{E}{1-\mu^2}$  pri čemu je  $\mu$  Poasonov koeficijent. Griffith je isto tako na osnovu uslova ravnoteže izračunao kritičnu vrijednost napona koja je data sledećim izrazom,

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma E^*}{\pi a}} \quad (2.19)$$

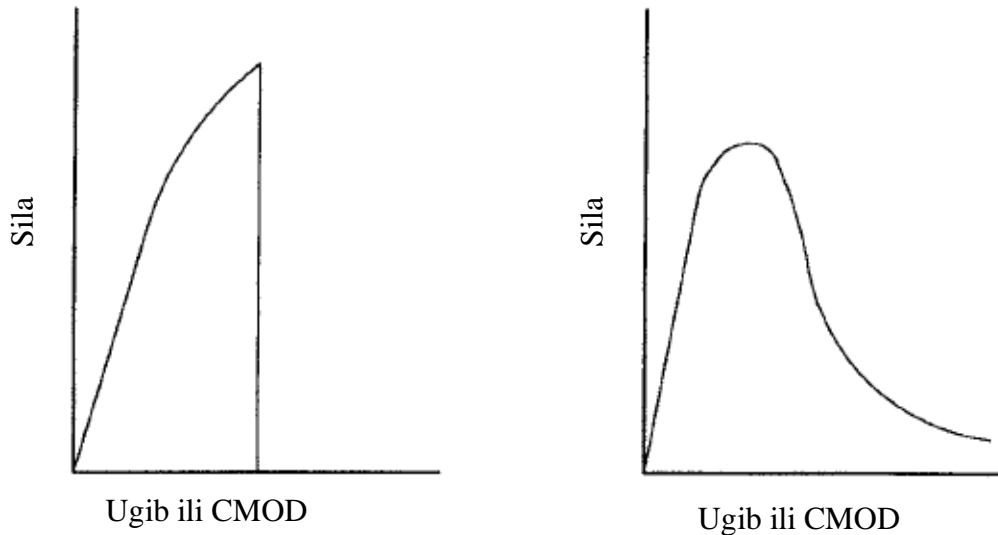
Većina materijala se ne ponaša kao idealno elastično-krt materijal i pored površinske energije je potrebno mnogo više rada za stvaranje loma. Pored površinske energije u vrhu prsline se obavlja i disipativni rad, koji se još naziva i plastični rad, pa se formira zona u kojoj se materijal ponaša neelastično. Ova zona se još naziva i procesna zona oko vrha prsline. Plastični rad se može posmatrati kao materijalna konstanta koja se dodaje površinskoj energiji. Postala je uobičajena praksa povezati plastični rad sa područjem loma jedne površine pa se površinska energija može i zanemariti. Kod cementnih materijala u procesnoj zoni FPZ (*fracture proces zone*) dolazi do razmekšavanja materijala koje nastaje razdvajanjem agregata i cementne paste. Kod cimente paste veličina procesne zone se kreće oko 1 mm, kod maltera do 30mm a kod betona može biti i do 500mm [24]. Na slici 2.7 je dat prikaz procesne zone oko vrha prsline sa distribucijom napona zatezanja koji kada dostigne granicu zatezanja dovodi do propagacije prsline.



Slika 2.7 Procesna zona oko vrha prsline [24]

Ukoliko je veličina procesne zone mala u odnosu na veličinu uzorka onda je moguća primjena linearno elastične mehanike loma LEFM.

Faktor intenziteta napona se povećava sa porastom opterećenja i porastom prsline i tako sve dok ne dostigne svoju kritičnu vrijednost koja se naziva žilavost materijala. Žilavost je karakteristika materijala koja se određuje eksperimentalno pa su za to razvijene standardne metode koje su čak i uvedene u propise kao što je ASTM E 399 i DD3 BSI [25]. S druge strane se propagacija prsline može opisati energetskim balansom izraženim preko energije loma. Pored savijanja grede u tri tačke, mjerenja žilavosti se sprovode i na optima zatezanja, koji su više u primjeni kod metala. Prilikom eksperimentalnog određivanja žilavosti je pogodno određivati dijagram opterećenje (sila) i pomjeranje (ugib) ili širinu otvaranja prsline CMOD. Na slici 2.8 se mogu uočiti razlike između krtog i duktilnog ponašanja materijala.



Slika 2.8 Krto ponašanje materijala (lijevo) i duktilno ponašanje materijala (desno) [24]

Irwin G. R. (1957) [8] je pokazao vezu brzine oslobađanja energije i faktora intenziteta napona u slučaju prvog moda i ravnog stanja deformacije prema sljedećem izrazu,

$$G_I = \frac{K_I^2}{E^*} \quad (2.20)$$

$$E^* = \frac{E}{1 - \mu^2}$$

U slučaju ravnog stanja napona se dobija,

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.21)$$

Ako je u pitanju složeno naprezanje onda se superpozicijom dobija ukupna brzina oslobađanja energije koja se za slučaj ravnog stanja deformacije dobija prema sledećoj jednačini [15],

$$G_I = \frac{(1 - \mu^2)}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{(1 + \mu)}{E} K_{III}^2 \quad (2.22)$$

Dok za slučaj ravnog stanja napona se dobija [15],

$$G_I = \frac{1}{E} (K_{IC}^2 + K_{IIc}^2) \quad (2.23)$$

Prilikom dostizanja kritične vrijednosti dužine prslina koja predstavlja granicu nakon koje prslina nestabilno raste i dovodi do loma sistema govori se kritičnoj vrijednosti faktora intenziteta napona ili žilavosti  $K_{IC}$ . U tome slučaju se umjesto brzine oslobađanja energije govori o energiji loma. U ovome radu se razmatra ravno stanje napona i prvi mod otvaranja prslina pa se jednačina (2.20) još prikazuje i na sledeći način,

$$G_{IF} = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (2.24)$$

Pošto se u daljem tekstu govori o prvom modu prsline za energiju loma se umjesto  $G_{IF}$  koristi oznaka  $G_F$ .

Koncept linearno-elastične mehanike loma, čija je veličina faktor intenziteta napona, ima primjenu za materijale koji se ponašaju linearno elastično i ako je plastično područje ispred vrha prsline malo u odnosu na razmjeru. U slučaju čelika najčešće dolazi do otkazivanja tek nakon velikog plastičnog deformisanja i stabilnog rasta prsline. Ograničena mogućnost korišćenja linearno-elastične mehanike loma za opis ponašanja materijala kod velikih plastičnih deformacija dovela je do razvoja nelinearne mehanike loma. Osnovne poteškoće u nelinearno-elastičnoj mehanici loma su sadržane u nemogućnosti da se razdvoje energije kretanja stabilne prsline i energije utrošene na razvoj plastične deformacije. U nelinearno-elastičnoj mehanici loma koristi se više kriterijuma, a najznačajniji su:

-CTOD (*crack tip opening displacement*) - kritično otvaranje vrha prsline,

- $J$  konturni integral.

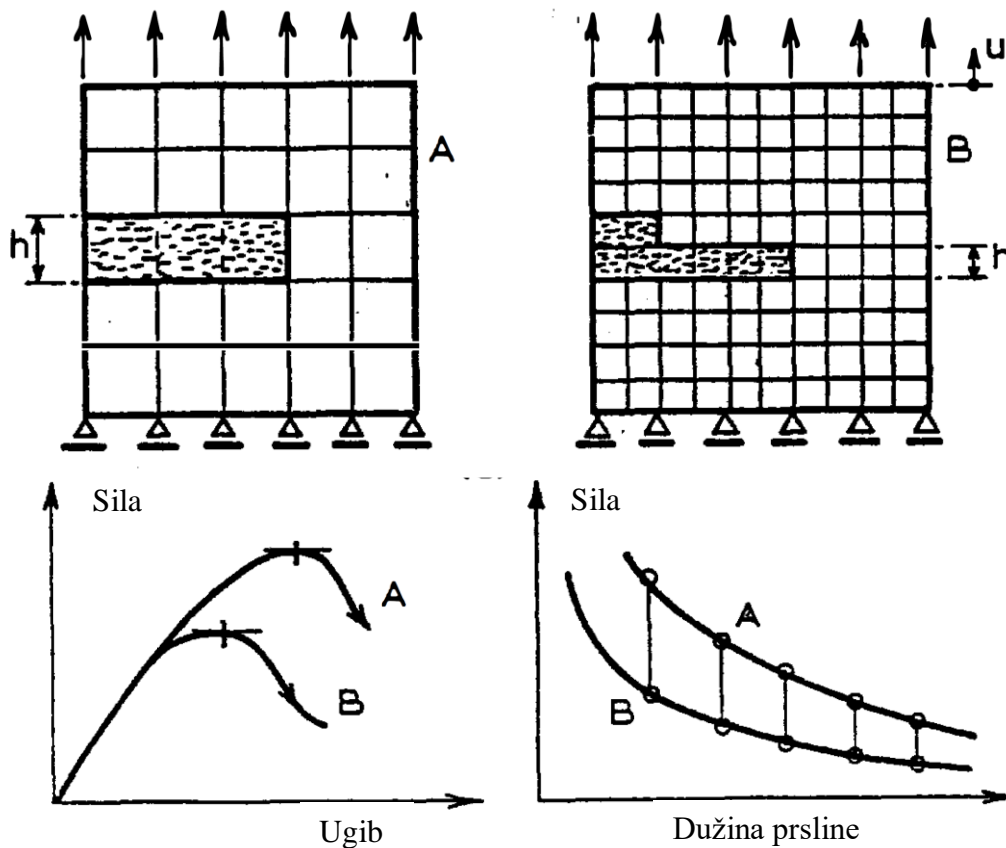
Invarijantnost integrala  $J$  u odnosu na bilo koju putanju, koja obuhvata vrh prsline, ukazuje na to da se može razmatrati kao promjenljiva koja karakteriše stanje u oblasti vrha prsline. Zbog toga, u problemima dvodimenzionalnog polja deformacije se može koristiti odgovarajuća vrijednost  $J$  integrala. Kriterijum  $Jc$  predstavlja metod proračuna protoka elastične energije u vrhu prsline po željenom konturnom (krivolinijskom) integralu zbog čega se i naziva  $J$  integral. Određivanje  $J$  integrala kao kriterijuma loma se ne ograničava isključivo na postojanje male plastične zone, pa se  $J$  integral može izračunati pri postojanju značajne plastične deformacije [25]. U ovome radu se ovi kriterijumi neće analizirati već se analiza ograničava na primjeni LEFM.

## 2.5 Teorijski pristupi mehanike loma betona

Prva istraživanja mehanike loma krutih materijala su počela sa radovima Coulomb C. A. (1776) [26] na ispitivanju stijena. Galileo G. (1638) [27] je prvi istraživao uticaj veličine uzorka na lom materijala. Međutim kao što je već spomenuto u prvom poglavlju savremeniji razvoj mehanike loma počinje sa radom Griffith-a A. A. (1920) [7] koji uvodi energetski pristup. Prvu primjenu mehanike loma na betonu je uradio Kaplan M. E. (1961) [28] koristeći se principima linearno elastične mehanike loma. Clintock F. A. i Walsh P. F. (1962) [29] su prvi uveli pojam trenja između lica prsline. Barenblatt G. I. (1959) [19] i Dugdale D. S. (1960) [30] su razvili teorije sa kohezionim silama vrhu prsline, ali sa ograničenjem na teoriju elastičnosti. Prvu nelinearnu teoriju mehanike loma betona predložili su Hilleborg A. i Petersson M. M. (1976) [31] godine i nazvali je modelom fiktivne prsline (*Fictitious Crack Model*). Ovaj je model sličan Dugdaleovu i Barenblatt-ovu modelu za elastoplastične materijale, a koristi se eksperimentalnim podacima dobijenim ispitivanjem uzoraka direktnim razvlačenjem. Kesler C. E. i ostali (1972) [32] su u svojim radovima potvrdili da linearno elastična mehanika loma nije adekvatna za primjenu na normalnom betonu što je još potvrdio Walsh P. F. (1972, 1976) [33] - [34] na svojim ispitivanjima na savijanju greda sa inicijalnom prsline. U radovima Bažant Z. P. (1976) [35] i Bažant Z. P. i Cedolin L. (1979) [36] se razvija metoda razmazanih prsline na betonu. Bažant Z. P. u svojim radovima uvodi parametar krtosti, koji kasnije uvodi i Carpinteri A. (1982) [37]. Pored toga Bažant Z. P. u svojim radovima razvija i teoriju veličine uzorka, koju je ispitivao i na problemima zamora. Pored ovdje navedenih autora koji su dali najveći doprinos razvoju mehanike loma na betona postoji veliki broj ostalih autora koji su dali svoj doprinos teorijskom, eksperimentalnom i numeričkom razvoju. U radu Murthy A. R. C i ostali [38] se prikazuje pregled značajnih radova u oblasti mehanike loma betona.

Mehanika loma u širem smislu je teorija koja koristi energetske kriterijume u kombinaciji s kriterijumima čvrstoće i uzima u obzir širenje loma kroz materijal. Betonske konstrukcije su dizajnirane i izgrađene prema propisima koji potpuno ignorišu teoriju mehanike loma. U novije vrijeme sa razvojem novih vrsta betona kao primjenom sve tanjih konstrukcija upotreba znanja iz mehanike loma je neophodna. Sa strogo fizičkog gledišta, iniciranje prsline zavisi od napona, odnosno propagacija prsline zahtjeva određenu energiju koja se naziva površinska energija materijala. Kod lokalnog problema loma betona izbor pogodne metode proračuna nije jednostavan zadatak, jer na rezultate mogu uticati gustina mreže konačnih elemenata kao i parametri loma. Bažant Z. P. [39] je analizirao ove probleme kod betona, gdje je pokazao na dijagramu sila-ugib (slika 2.9) da maksimalna vrijednost sile kao i čitava opadajuća grana dijagrama zavise od veličine konačnog elementa. Grubo rečeno, koeficijent proporcionalnosti je  $h^{-1/2}$  gdje je  $h$  veličina konačnog elementa.





Slika 2.9 Uticaj gustine konačnih elemenata na lokalnom problemu loma betona [39]

Površina ispod opadajućeg dijela dijagrama naprezanje-deformacija tzv. omekšavajućeg dijela (*softening*) predstavlja energiju loma koju element apsorbuje nakon dostizanja maksimalne vrijednosti sile (napona). Granica plastičnosti ne pruža informacije o sistemu nakon dostizanja maksimalne sile pa je stoga analiza pomoću mehanike loma neophodna. Proces loma se ne može posmatrati samo u jednoj tački. Zona procesa (*fracture process zone-FPZ*) ima konačnu vrijednost. Veličina procesne zone se i koristi kao jedan od kriterijuma primjene linearno elastične mehanike loma pa se time pored energije loma uvodi i drugi parametar tj. karakteristična dužina prsline. Hilleborg A. i Petersson M. M. (1976) [31] su prvi uveli ove parametre na svome modelu fiktivnih prsline. Karakteristična dužina prsline se koristi kao mjera veličine procesne zone. Prema Bažant Z. P. i Planas J. [40] i Hillerborg A. [41] veličina procesne zone ne bi trebalo da prelazi od 20% do 50% dužine prsline.

Prema Hilleborg A. i Petersson M. M. [31] kod betona karakteristična dužina se računa preko sledeće formule,

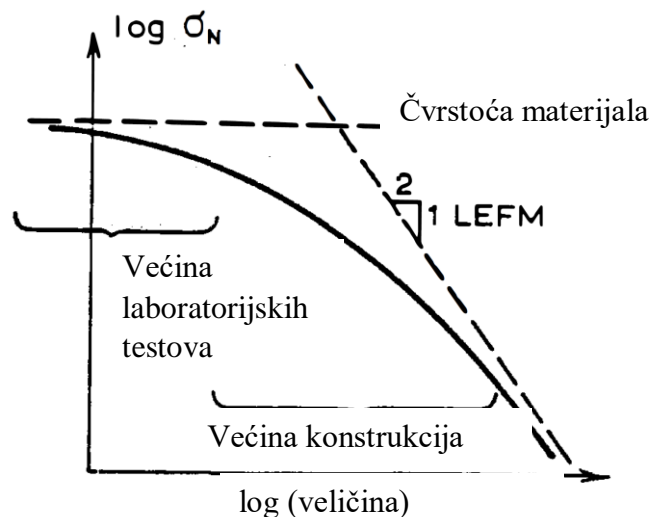
$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2} = \frac{K_{IC}^2}{f_t^2} \quad (2.25)$$

pri čemu je  $f_t$  zatežuća čvrstoća betona. Oni su procijenili da dužina procesne zone betona oko 200mm. Irwin G. R. [42] je definisao dužinu plastične zone  $r_p$  kod metala prema sljedećem izrazu,

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 = \frac{l_{ch}}{\pi} \quad (2.26)$$

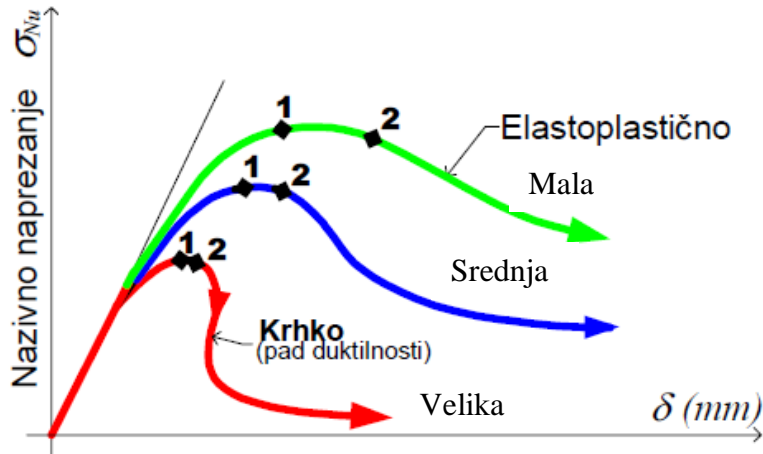
pri čemu se napon na granici tečenja  $\sigma_Y$  može zamjeniti sa čvrstoćom na zatezanje  $f_t$  i tako dobiti veza sa karakterističnom dužinom prsline kod cementnih materijala. Ova veza se može ostvariti zbog činjenice da je Irvin G. R. posmatrao konstantnu vrijednost napona tečenja u plastičnoj zoni metala, što odgovara pristupu Hilleborg A. i Petersson M. M kod karakteristične dužine betona.

Bažant Z. P. i Oh B. H. (1983) [43] su zaključili da procesna zona zavisi od veličine zrna agregata. Naime na problemima savijanja greda u tri tačke se dobija dužina i širina procesne zone približno  $12d_{max}$  i  $3d_{max}$  respektivno pri čemu je  $d_{max}$  maksimalna veličina zrna agregata. Mehanizam linearne elastične mehanike loma je primjenljiv samo kada je dužina procesne zone mnogo manja od poprečnog presjeka i dimenzije elementa. Međutim ovo stanje nije zadovoljeno za većinu konkretnih konstrukcija. Efekat veličine konstrukcije dodatno otežava čitavu analizu. Generalno posmatrano efekat veličine konstrukcije se može podijeliti na energetski koji razmatra brzinu oslobađanja energije u području loma i statistički koji je zasnovan na činjenici da je makroskopski lom iniciran mikroskopskim defektima u materijalu, pa što je veći volumen konstrukcije to je veća vjerovatnoća za postojanje defekata. Efekat veličine konstrukcije je definisan upoređivanjem geometrijski sličnih konstrukcija za koje je uveden pojam nominalnog napona koji se javlja pri maksimalnom sili opterećivanja konstrukcije, svejedno da li se radi o problemu savijanja, smicanja ili torzije. Bažant Z. P. [39] je analizirao ovaj fenomen i predstavio u vidu dijagrama nominalni napon-veličina uzorka, što je u slučaju savijanja greda visina poprečnog presjeka, slika 2.10.



Slika 2.10 Efekat veličine konstrukcija prema Bažantu Z. P. [39]

Bažant Z. P. je ovaj problem riješio uvođenjem empirijskih koeficijenata. Ukoliko je prsline u elastičnom materijalu velika u odnosu na dužinu procesne zone onda je nominalna čvrstoća materijala obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu veličine uzorka. U slučaju velike procesne zone ključan parametar je zatežuća čvrstoća, dok klasične teorije loma ostaju nezavisne od veličine uzorka jer se kod njih govori samo o graničnoj vrijednosti napona. Krolo J. [44] je potvrdio Bažant-ovu teoriju određujući parametre mehanike loma na tri geometrijski slične grede, gdje posmatrao krive sila-ugib za malu, srednju i veliku gredu. Ovo je šematski prikazano na slici 2.11 gdje se primjećuje da sa povećanjem visine grede dolazi do povećanja duktilnosti i opadanja maksimalne sile. To znači da manje grede pokazuju elastoplastično ponašanje za razliku od velikih (krtih) greda.

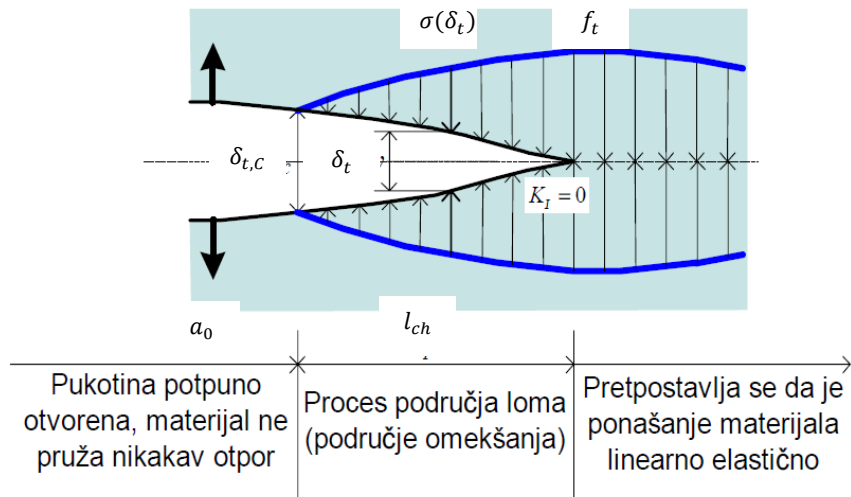


Slika 2.11 Dijagrami opterećenje-ugib za tri geometrijski slična uzorka prema Krolo J. [44]

Prema kriterijumu dopuštenog naprezanja ili prema teoriji plastičnosti nazivno naprezanje trebalo bi biti isto bez obzira na visinu grede. Male konstrukcije su duktilnije, pa se njihov proračun može sprovoditi npr. po teoriji plastičnosti, dok velike konstrukcije pokazuju veću krtost i njihove analize bi se mogle sprovoditi pomoću linearno elastične mehanike loma. Naročito se to odnosi na velike betonske konstrukcije sa minimalnom količinom armature. Za najveći dio armiranobetonskih konstrukcija (koje nisu male ni prevelike) analiza temeljena na mehanici loma je dosta složenija. Kod njih je potrebno analizu temeljiti na nelinearnoj teoriji mehanike loma koja uzima u obzir ponašanje betona na silaznoj grani dijagrama naprezanje-deformacija (*softvening*).

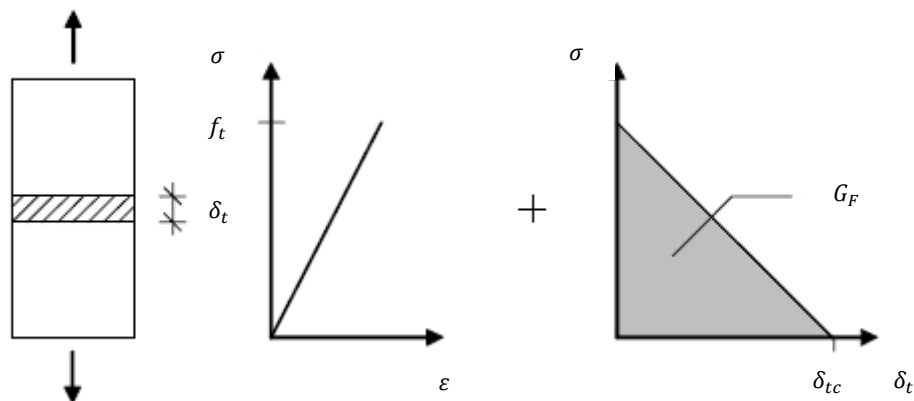
Na sličan način je Carpinteri A. [37] primjenom problema dimenzionalne analize uveo tzv. faktore krtosti koji se koriste na problemima mehanike loma, a koji pokazuju osjetljivost konstrukcije. Ovi faktori su u vezi sa žilavosti, graničnim naponom i veličinom uzorka. Ponašanje običnog betona pri lomu značajno odstupa od principa LEFM-a. To se odnosi i na slične materijale kao što su kamen, različite vrste keramike, ali i neke vrste metala. Određivanje energije loma kao i veličine područja omekšavanja zahtjeva više pažnje. Dugdale-ov [30] i Barenblatt-ov [20] model za elastoplastične materijale razmatraju plastičnu zonu oko vrha prsline i u toj zoni posmatraju napon na granici tečenja. Dugdale-ov koncept se zasniva na tome da se plastična zona oko vrha realne prsline razmatra kao uska oblast u kojoj se javlja napon zatezanja, pa se time realna prsline prikazuje tj. produžuje sa fiktivnim dijelom. Time se složeni elastoplastični problemi pojednostavljuju na elastične. Kod Barenblatt-ovog modela se još uzima u obzir promjena napona sa porastom deformacije. Hilleborg i Petersson-ov (1976) [31] model je sličan Barenblatt-ovom modelu i kod njega se mogu uočiti tri oblasti (slika 2.12). Oblast u kojoj je prsline potpuno otvorena tj. nema napona, odnosno materijal ne pruža nikakav otpor (lijeva strana). U sredini se nalazi procesna oblast ili područje omekšanja u kojoj napon zavisi od širine prsline. Naime kada se dostigne napon zatezanja u vrhu prsline nastaje propagacija pri čemu napon u vrhu opada sa povećanjem otvaranja njenog vrha. Pored već formirane prsline u ovoj oblasti se nalaze i tzv. mikroprsline. Treća oblast je oblast neoštećenog materijala u kojoj se materijal može posmatrati kao linearno elastičan gdje napon zavisi od dilatacije. Površina dijagrama do kritične vrijednosti širine prsline definiše energiju loma prema sljedećem izrazu,

$$G_F = \int_0^{\delta_{tc}} \sigma(\delta_t) d\delta_t \quad (2.27)$$



Slika 2.12 Model fiktivne prsline [44]

Postoje različite pretpostavke za slučaj funkcije  $\sigma(\delta_t)$  a to su linearna, bilinearna, konstanta i sl. Hilleborg A. i Petersson M. M. (1976) [31] su pretpostavili linearnu vezu kao na slici 2.13 gdje se vidi zavisnost napona od dilatacije za dio u kome nema prsline kao i oblast u kome je prsline.



Slika 2.13 Veza napon-dilatacija-otvaranje prsline [45]

Karakteristična dužina prsline tj. procesna oblast, prikazana izrazom (2.25), zasnovana je na pretpostavci da na čitavoj dužini napon odgovara zatežućoj čvrstoći. Materijal u tom području brzo omekšava i dolazi do razdvajanja čestica materijala. To je područje određeno stepenom nehomogenosti u mikrostrukturi i najvećom veličinom zrna agregata u betonu. Model trakastih prsline (*Crack Band Model*) koji su predložili Bažant Z. P. i Oh B. H. (1983) [43] predstavlja u suštini model razmazanih prsline. Za dovođenje u vezu neelastične deformacije sa širinom pukotine  $\delta_t$  i  $G_F$  potrebno je uvesti širinu trake u kojoj su se koncentrisale prsline. Dakle parametri loma su zatežuća čvrstoća betona, širina trake i energija loma, pa je dijagram omekšavanja funkcija ova tri parametra. Pri tome se napon i na području omekšavanja definiše kao funkcija dilatacije. Schwartz S. E. i ostali (1978) [46] su rješavali problem savijanja nearmirane betonske grede u tri tačke da bi riješili dužinu prsline i tako predložili kompilansnu metodu (*Compliance Method*) koja je kasnije dobila određene modifikacije ali se koristi kao eksperimentalna metoda za određivanje energije loma. Vrijednost kompilanse  $C$  kod savijanja greda se očitava na dijagramu sila-CMOD (slika 2.14) gdje se sa porastom dužine prsline dolazi i do promjene nagiba krivih. Upotreba kompilansne metode je najbolje predstavljena

kroz dvoparametrski model loma betona koji predložili su Jenq Y. i ostali (1985) [47]. Ovaj model uzima u obzir nelinearno ponašanje betonskog uzorka s početnim zarezom koje se izjednačava s ponašanjem uzorka koji sadrži efektivnu prslinu u elastičnom području. Uzorak sa početnim zarezom se na testu savijanja u tri tačke pri kontrolisanoj deformaciji optereti do 95% zatežuće čvrstoće pa se zatim rastereti. Pri tome se na dijagramu sila-otvaranje prsline-CMOD (slika 2.14) očitavaju vrijednosti kompilanse  $C_i$  i  $C_u$  pri opterećenju, a zatim pri rasterećenju, a zatim izračuna efektivna dužina prsline koja je ekvivalentna elastičnoj. Pri tome se koriste geometrijske funkcije iz linearno elastične mehanike loma koje su funkcija relativne dužine prsline. Na osnovu ovih geometrijskih funkcija je za svaku dužinu prsline moguće izračunati faktor intenziteta napona, modul elastičnosti kao i otvaranje vrha prsline  $\delta_t$ . Ovi izrazi za kritičnu vrijednost dužine prsline  $a_c$  su dati u sledećim formulama dok su geometrijske karakteristike grede prikazane na slici 2.14 (detaljniji opis se može naći u [45]).

$$K_{Ic} = \frac{3F_{max}s}{2d^2b} \sqrt{\pi a_c} F(\alpha)$$

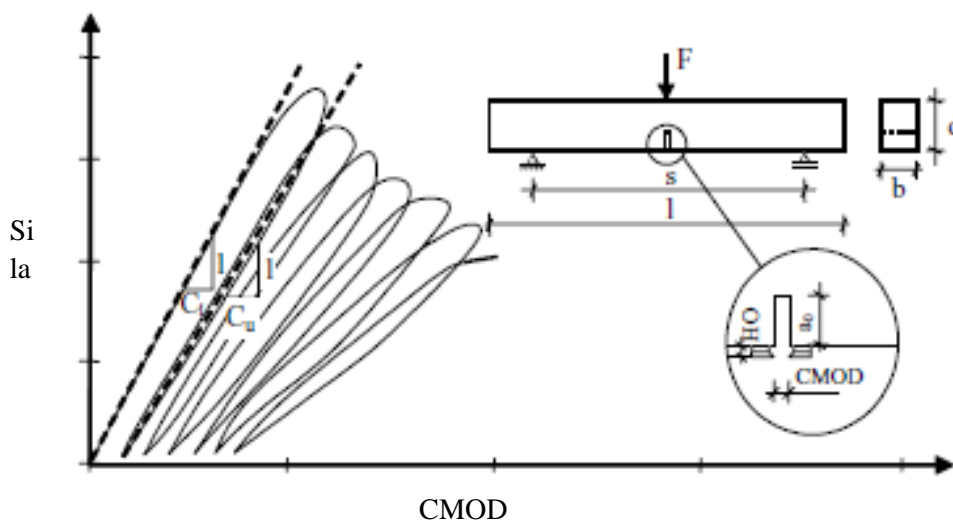
$$E = \frac{6sa_c V_1(\alpha)}{C_u d^2 b}$$

$$CTOD_c = \delta_{tc} = \frac{6F_{max}sa_c V_1(\alpha)}{Ed^2b} \sqrt{(1-\beta)^2 + (1,081 - 1,149\alpha)(\beta - \beta^2)} \quad (2.28)$$

$$\alpha = \frac{a_c}{d}$$

$$\beta = \frac{a_o}{a_c}$$

pri čemu se geometrijska funkcija  $V_1(\alpha)$  određuje iz LEFM [48]. Kriterijum loma je definisan kada se dobije kritična vrijednost faktora intenziteta napona kao i otvaranja vrha prsline. Oba ova parametra moraju istovremeno imati kritične vrijednosti. Testovi na gredama su pokazali da je ovaj model nezavisan od veličine uzorka.



Slika 2.14 Dijagram sila-CMOD za slučaj dvoparametrskog modela [45]

Model efektivne prsline koji su predložili Karihaloo B. L. i Nallathambi P. [49] je sličan dvoparametarskom modelu, samo se efektivna dužina prsline određuje na osnovu sekantne kompilanse pri maksimalnoj vrijednosti sile sa dijagrama sila-CMOD.

Pošto su opiti jednoaksijalnog zatezanja kod betona dosta komplikovani, kod određivanja jednoaksijalne čvrstoće na zatezanje i energije loma, u praksi se često koriste testovi savijanja. Prema RILEM TC 50-FMC [50] je recimo standardizovana metoda pomoću koje je moguće odrediti energiju loma kod betona na betonskim gredama sa inicijalnom prslinom.

## 2.6 Parametri betona prema Evrokodu

Prema Evrokodu 2 [51] se pokazalo veoma pogodnim za praktičnu primjenu povezivanje svih mehaničkih parametara betona u zavisnosti od čvrstoće na pritisak. Čvrstoća na pritisak se određuje na cilindrima prečnika  $150mm$  i visine  $300mm$  ili betonskim kockama dimenzije  $150mm$ . Izdanje Evrokoda 2 iz 2011 godine [51] se uglavnom bazira na preporukama fib Model Code 2010 [52] i CEP-FIB Model Code 1990 [53]. U narednoj tabeli su prikazani mehanički parametri prema Evrokodu koji su u zavisnosti od čvrstoće na pritisak a neki od njih se koriste u numeričkim primjerima u ovome radu zbog nedostatka eksperimentalnih vrijednosti.

Tabela 3.1 Pregled nekih značajnih relacija prema Evrokodu 2 [51]

$f_{ck} = 0,82 f_{ck,cube}$	Veza karakterističnih vrijednosti čvrstoće na pritisak betonskog cilindra i betonske kocke
$E_{cm} = 22.000 \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0,3}$	Veza srednjih vrijednosti modula elastičnosti i čvrstoće na pritisak
$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{\frac{2}{3}}$	Veza srednje vrijednosti čvrstoće na zatezanje i karakteristične čvrstoće na pritisak betonskog cilindra (formula važi za klase betona manje od C50/60)
$f_{ct} = 0,9 f_{ct,sp}$	Veza čvrstoće na zatezanje dobijene centričnim zatezanjem i cijepanjem
$f_{ctm} = \alpha_{fl} f_{ctm,fl}$ gdje je $\alpha_{fl} = \frac{0,06 h_b^{0,7}}{1 + 0,06 h_b^{0,7}}$	Veza srednjih vrijednosti čvrstoće na zatezanje dobijene centričnim zatezanjem i savijanjem

Veze između mehaničkih parametara betona iz prethodne tabele se odnose samo na normalne betone. Ako su u pitanju druge vrste betona kao što su npr. laki betoni ili reciklirani betoni onda se u prethodne relacije uvode dodatni koeficijenti za podešavanje koji su bazirani na eksperimentalnim ispitivanjima. U radu Pančić A. i Schnell J. [54] se mogu naći podešene jednačine iz tabele 3.1 za primjenu na recikliranim betonima.

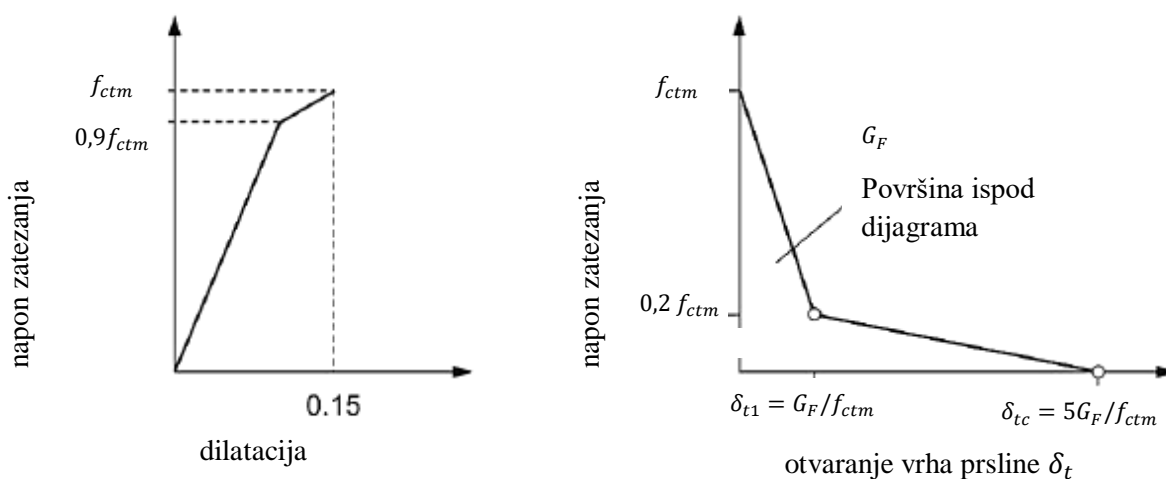
Tečenje je reološka osobina materijala koja se takođe pojavljuje i kod čvrstog betona. Ova osobina se prikazuje preko koeficijenta tečenja koji predstavlja odnos viskoelastične i elastične deformacije. Prema Evrokodu 2 [51] se koriste linearna i nelinearna viskoelastičnost. Linearni koeficijent tečenja se određuje prema sledećoj formuli,

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t, t_0) = \varphi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0) \beta_c(t, t_0) \quad (2.29)$$

gdje se vidi da je koeficijent tečenja u funkciji vremena  $t$ , srednje vrijednosti čvrstoće na pritisak betonskog cilindra  $f_{cm}$ , relativne vlažnosti vazduha  $RH$  i geometrije poprečnog presjeka. Sve funkcije iz jednačine (2.29) su prikazane u [51]. Nelinearni koeficijent tečenja se dobija kada se linearni koeficijent koriguje dodatnom eksponencijalnom funkcijom (detaljnije u Evrokodu 2 [51]).

Prema fib Model Code 2010 [52] se za betone opterećene naponima  $-0,6f_{ck} < \sigma_c < 0,8f_{ctk}$  predlaže vrijednost za Poasonov koeficijent od  $0,14$  do  $0,26$ . Vrijednost od  $0,2$  za betone bez prslina i vrijednost  $0,0$  za betone sa prslinama se usvajaju prema Evrokodu 2 [51] kao računске vrijednosti Poasonovog koeficijenta. Poasonov koeficijent i modul elastičnosti su elastične konstante koje su sastavni dio konstitutivne matrice prilikom primjene metode konačnih elemenata u rješavanju različitih problema teorije elastičnosti pa time i u traženju napona u vrhu prsline na modelima greda koje se koriste u poglavlju 5. Elastične konstante ulaze i u izraze za deformaciju u vrhu prsline kod sva tri moda prsline (vidi jednačine (2.6)-(2.8)). U izrazima za CMOD ili ugib prema LEFM se ne pojavljuje Poasonov koeficijent ako se razmatra slučaj ravnog stanja napona. Zbog toga je u mehanici loma veoma bitno shvatanje loma u slučaju ravnog stanja deformacije, ravnog stanja napona ili mješovitom slučaju. U radu Oruč M. i ostali [25] se mogu naći slučajevi ispitivanja ovih lomova na metalima. U ovome radu se dalje razmatra samo slučaj ravnog stanja napona betonskih greda.

Energija loma se definiše preko empirijskog izraza u funkciji pritisne čvrstoće, a ovdje je prikazan pregled značajnih formula koje se koriste u primjerima u poglavlju 5. Prema fib Model Code 2010 [52] je dat bilinearni dijagram zatežući napon-otvaranje vrha prsline kao i energija loma (slika 2.15) pri čemu se prelomna i krajnja tačka otvaranja prsline definišu preko čvrstoće na zatezanje, izrazi (2.30).



Slika 2.15 Napon zatezanja-deformacija-otvaranje prsline prema fib Model Code 2010 [52]

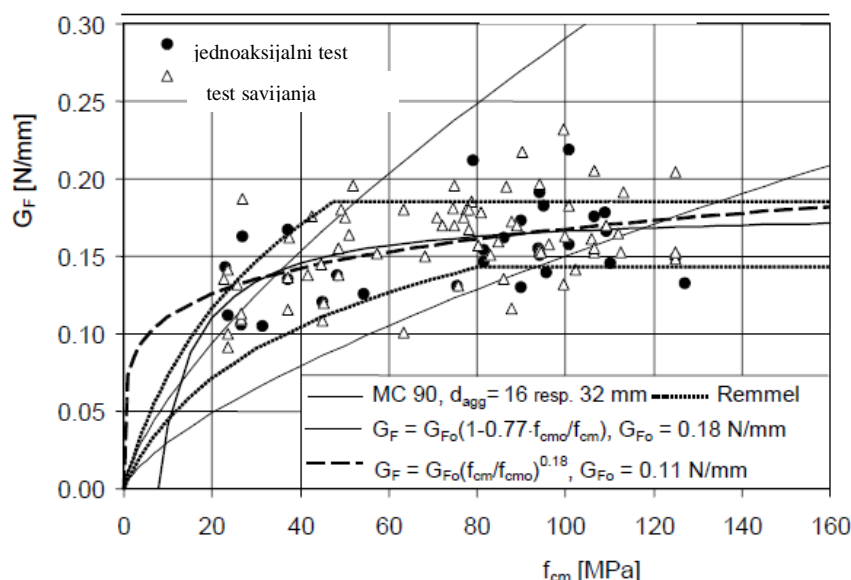
$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \left( 1.0 - 0.8 \cdot \frac{\delta_t}{\delta_{t1}} \right) \quad \text{za } \delta_t \leq \delta_{t1}$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \left( 0.25 - 0.05 \cdot \frac{\delta_t}{\delta_{t1}} \right) \quad \text{za } \delta_{t1} < \delta_t \leq \delta_{tc} \quad (2.30)$$

$$G_F = 73 f_{cm}^{0.18} \left[ \frac{N}{m} \right]$$

$f_{cm}$  je srednja vrijednost pritisne čvrstoće betona u MPa

Svi definisani izrazi u Model Code 2010 se odnose na betone pritisnih čvrstoća manjih od 120 MPa, a u tu grupu ulaze betoni normalnih čvrstoća do 50MPa kao i betoni visokih čvrstoća veći od 50MPa. U CEB-FIP-bulletin 42 [55] je dat pregled različitih izraza za proračun energije loma u zavisnosti od čvrstoće na pritisak, slika 2.16.



Slika 2.16 Eksperimentalni i teorijski rezultati za proračun energije loma u zavisnosti od čvrstoće na pritisak [55]

Prema CEB-FIP MC 90 [53] energija loma je data u zavisnosti od veličine zrna agregata sledećim izrazom,

$$G_F = G_{F0} \left( \frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} \left[ \frac{N}{mm} \right] \quad (2.31)$$

$$f_{cm0} = 10MPa$$

$G_{F0}$  zavisi od veličine zrna agregata i dato je sledećom tabelom 3.2

Tabela 3.2 Uticaj maksimalne veličine zrna agregata na energiju loma

$d_{max}$ (mm)	8	16	32
$G_{F0} \left( \frac{N}{mm} \right)$	0,025	0,03	0,058

Rimmel G. (1994) [56] je na osnovu eksperimentalnih ispitivanja sa maksimalnom veličinom zrna agregata od 16mm predložio sledeći izraz za proračun energije loma,



$$G_F = G_{F0} \ln\left(1 + \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right) \left[\frac{N}{mm}\right] \quad (2.32)$$

$$f_{cm0} = 10MPa$$

$G_{F0} = 0,065N/mm$  za betone sa riječnim agregatom

$G_{F0} = 0,106N/mm$  za betone sa lomljenim agregatom

Na osnovu eksperimentalnih ispitivanja predložene su u CEB-FIP-bulletin 42 [55] još dvije formule za energiju loma betona,

$$G_F = G_{F0} \left(1 - 0,77 \frac{f_{cm0}}{f_{cm}}\right) \left[\frac{N}{mm}\right] \quad (2.33)$$

$$f_{cm0} = 10MPa$$

$$G_{F0} = 0,18N/mm$$

$$G_F = G_{F0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)^{0,18} \left[\frac{N}{mm}\right] \quad (2.34)$$

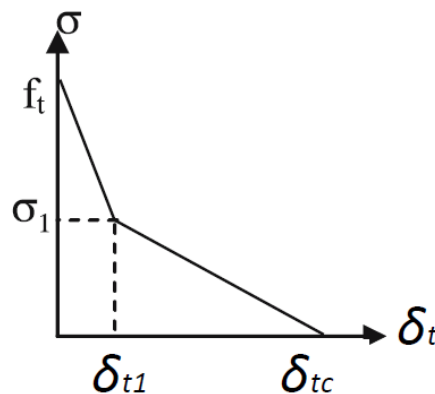
$$f_{cm0} = 10MPa$$

$$G_{F0} = 0,11 N/mm$$

Pored gore opisanih teorija u kojima se definiše veza između napona zatezanja i širine otvaranja vrha prsline postoje i drugi prijedlozi od strane raznih autora koji su proučavali parametre loma betona.

Bilinearna funkcija prema Roelfstra i Wittmann (1986) [57]

$$\sigma = \begin{cases} f_t - (f_t - \sigma_1)\delta_t/\delta_{t1} & \text{za } \delta_t \leq \delta_{t1} \\ \sigma_1 - \sigma_1(\delta_t - \delta_{t1})/(\delta_{tc} - \delta_{t1}) & \text{za } \delta_{t1} > \delta_t \end{cases} \quad (2.35)$$

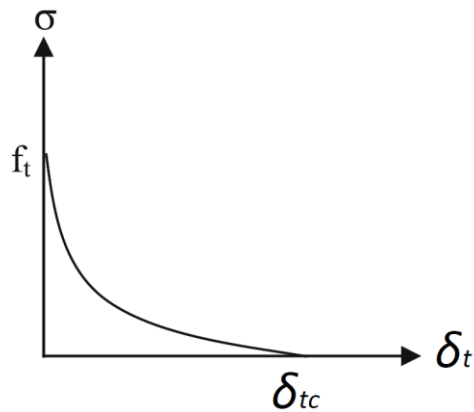


Slika 2.17 Prijedlog funkcije napon-otvaranje vrha prsline od strane Roelfstra i Wittmann (1986) [57]

Eksponecijalna funkcija prema Hordijk D. A. [58]

$$\sigma = f_c \left\{ \left[ 1 + \left( a_1 \frac{\delta_t}{\delta_{tc}} \right)^3 \right] \exp\left(-a_2 \frac{\delta_t}{\delta_{tc}}\right) - \frac{\delta_t}{\delta_{tc}} (1 + a_1^3) \exp(-a_2) \right\} \quad (2.36)$$

$a_1$  i  $a_2$  su parametri dobijeni aproksimacijom.



Slika 2.18 Prijedlog funkcije napon-otvaranje vrha prsline prema Hordijk D. A. [58]

Pored toga u radu Murthy A. R. C i ostali [38] se mogu naći i prijedlozi od nekih drugih autora.

### 3 PONAŠANJE BETONA USLIJED ZAMORA

Prilikom dinamičkog opterećenja, materijal može doživjeti lom pri znatno manjim naprezanjima od maksimalne čvrstoće, pa čak i granice razvlačenja što znači da se u materijalu prilikom cikličnog opterećenja razvijaju oštećenja. Otpornost materijala prema cikličkom naprezanju naziva se još dinamička izdržljivost materijala. Problem zamora materijala se počinje istraživati početkom 19 vijeka, a značajan napredak je postigao August Wöhler 1870 godine ispitivanjem zamora na metalima. Nakon toga sa razvojem auto- i avio-industrije počinje sve veće interesovanje za ovaj fenomen. Iskustva o zamoru metala poslužile su Van Ornum J. L. 1907 [59] godine za opisivanje zamora na nearmiranom betonu i armiranobetonskim gredama. U radu Müller F.P i ostali [60] se pokazalo da 60% svih otkaza armirano betonskih konstrukcija je uzrokovano zamorom. Postoji veliki broj autora koji su ispitivali beton pri cikličnom opterećenju i to na pritisak, zatezanje i savijanje. Uglavnom su ta ispitivanja zasnovana na empirijskoj bazi i sprovedena u laboratorijskim uslovima. Sa razvojem mjerne tehnike (rentgenska zračenja, fotogrametrija itd.) nastao je veliki broj radova u kojima su analizirana oštećenja i deformacije pri cikličnom opterećenju, a u radu od Hohberg R. [61] se može naći pregled radova vezanih za ispitivanje zamora betona. Pošto postoji izvjestan broj parametara koji utiču na određivanje broja ciklusa do loma betona onda se prilikom eksperimentalnih ispitivanja uglavnom definišu promjenjivi i nepromjenjivi parametri. Nepromjenjivi parametri su: čvrstoća, krutost, receptura betona, starost betona. U varijabilne parametre spadaju: veličina cikličnog opterećenja, kombinacije faze mirovanja i opterećenja, frekvencija opterećenja, uslovi sredine kao npr. vlažnost, temperatura i sl.

#### 3.1 Ciklična opterećenja

Opterećenja koja djeluju na konstrukcije se dijele na statička i dinamička. Pri statičkom djelovanju razaranje materijala zavisi prvenstveno od intenziteta napona kojim je element opterećen. Pri periodično promjenjivom opterećenju, lom ili razaranja materijala zavisi pored intenziteta napona i od broja njegovih promjena. Dinamička opterećenja se pored toga mogu podijeliti na kratkotrajna (udarna) i dugotrajna opterećenja.

Spoljašnje opterećenje ukoliko je cikličnog karaktera i konstantne amplitude može biti definisano pomoću odgovarajuće relacije za napon u kojoj figuriše tri ili više fizičkih veličina i to: amplitudni napon, srednji napon i frekvencija. Za većinu konstrukcija vremenska promjena napona se može opisati sinusoidnim zakonom kao što je dato sledećim izrazom koji se koristi i u primjeni RDA teorije koja je prikazana u sledećem poglavlju,

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_A \sin(\omega_\sigma t) \quad (3.1)$$

$\omega_\sigma = \omega_F$  je kružna frekvencija napona (sile).

Odnos maksimalnog i minimalnog napona se definiše preko tzv. stepena asimetrije ciklusa,

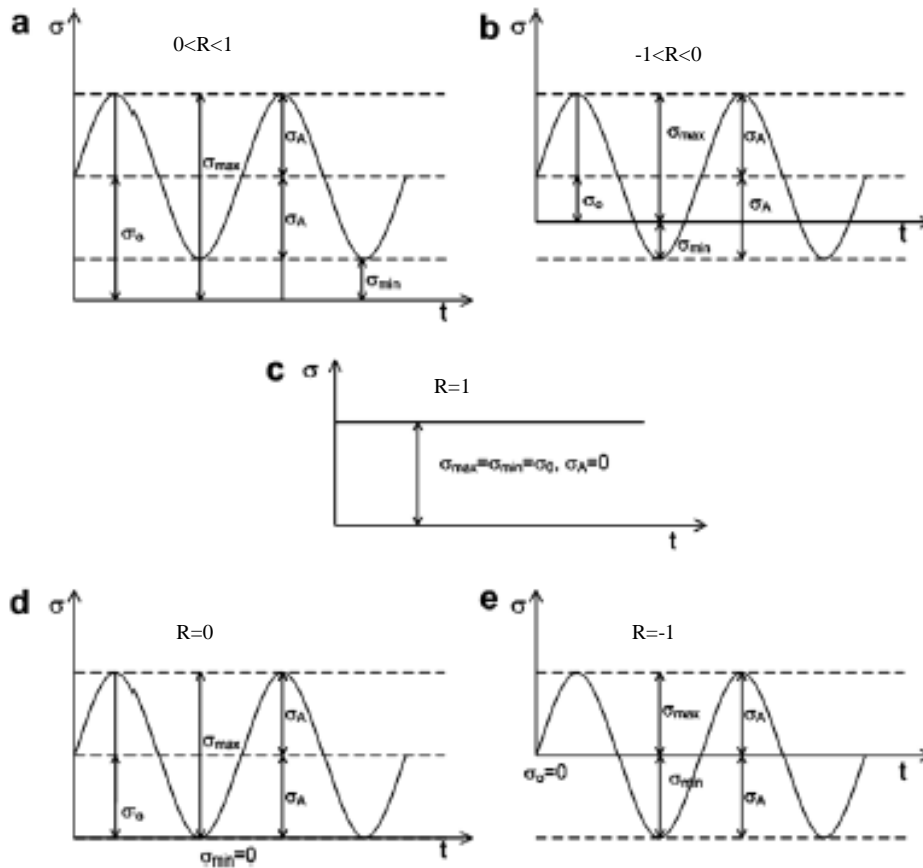
$$R = \sigma_{min}/\sigma_{max} \quad (3.2)$$

Konstante i varijabilne komponente ciklusa su date sljedećim izrazima,

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{max}(1 + R)}{2} \quad (3.3)$$

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{max}(1 - R)}{2}$$

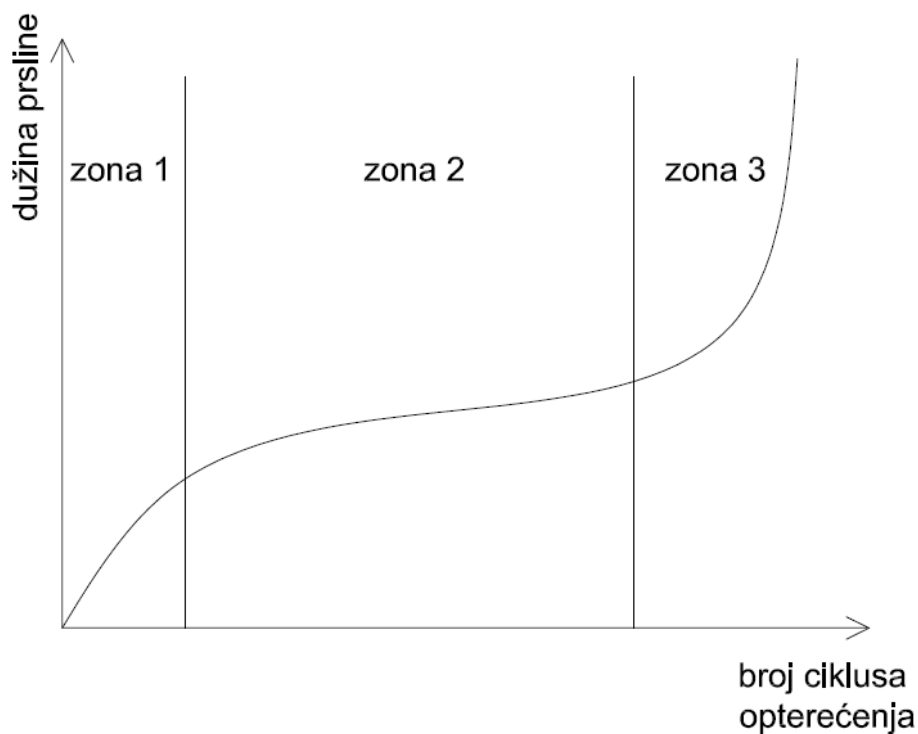
Na slici 3.1 su date različite varijante cikličnog opterećenja sa različitim vrijednostima stepena asimetrije.



Slika 3.1 Varijante cikličnog opterećenja [62]

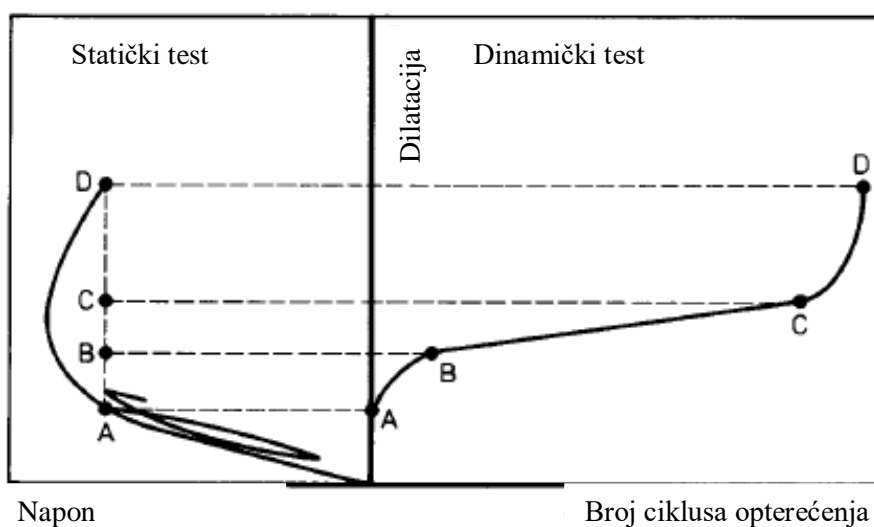
### 3.2 Razvoj oštećenja u betonu prilikom cikličnog djelovanja

Prilikom cikličnog djelovanja deformacije i oštećenja u betonu prolaze kroz tri različite faze i tako se definiše kriva tečenja betona (*cyclic creep curve*), slika 3.2. Oblik te krive je sličan bez obzira da li se radi o deformacijama pritiska, zatezanja ili savijanja i to se potvrđuje od strane više autora [61]. Na slici 3.2 je prikazana zavisnost dužine prsline od broja ciklusa opterećenja. Umjesto dužine prsline se može na vertikalnoj osi još prikazati i deformacija ili otvaranje prsline-CMOD.



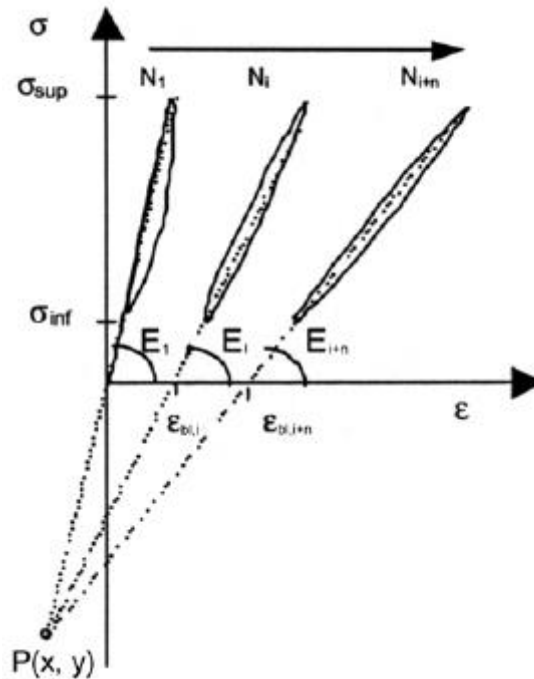
Slika 3.2 Faze oštećenja betona pri zamoru

U prvoj fazi dolazi do formiranja mikroprsline i preraspodjele napona u strukturi betona, a onda nakon dostizanja 10-20% od ciklusa loma nastupa druga faza u kojoj se javlja stabilan prirast deformacije sve do 80% od ciklusa loma. Prema Cornelissen H. A. W. [63] ova faza se skraćuje pri povećanju frekvencije opterećenja. Treća faza je oblast nestabilnog razvoja deformacije sve do loma. Na slici 3.3 se daje uporedni prikaz dijagrama napon-deformacija pri statičkom i dinamičkom testu da bi se dao bolji uvid kako se razvijaju deformacije.



Slika 3.3 Dijagram napon-deformacija pri statičkom testu (lijevo) i pri dinamičkom testu (desno) [63]

Sa povećanjem broja ciklusa betonu dolazi do povećanja oštećenja koja prouzrokuju priraštaj deformacije i opadanje krutosti sistema. To znači da se prilikom opterećenja i rasterećenja na dijagramu napon-deformacija formiraju histerezisne petlje i moduli elastičnosti koji predstavljaju nagib prema osi deformacije opadaju. Na osnovu ovoga se može definisati tačka presjeka  $P$  ovih linija nagiba, slika 3.4. Ova tačka se u literaturi naziva *common point* ili *focus point* a postoje i načini njenog definisanja u zavisnosti o toga da li se kombinuje pritisak i zatezanje.



Slika 3.4 Prikaz opadanja krutosti prilikom cikličnog napreznja [61]

Propagacija prslina u betonu se može analizirati sa tri različita nivoa:

-Makro-nivo na kome se beton posmatra kao homogen materijal sa svojim mehaničkim karakteristikama. Pošto beton pokazuje osobine tečenja onda se na ovome nivou može posmatrati kao viskoelastičan materijal. U ovome radu se razmatra makro-nivo, pri čemu reološko-dinamička teorija, koja je detaljnije objašnjena u narednom poglavlju uvodi koeficijent tečenja betona u analizu zamora.

-Mezo-nivo podrazumijeva posmatranje betona kao heterogenog materijala pri čemu se posmatraju veze cementnog kamena i agregata i pri tome odnosi između mikro i makro prslina.

-Mikro-nivo razmatra molekularni nivo cementnog kamena i pri tome analizira proces hidratacije cementa i emitovanje toplote.

### 3.3 Teorijski pristupi kod zamora betona

Generalno posmatrano u praksi se primjenjuju dva pristupa propagacije oštećenja u betonu prilikom cikličnog opterećenja.

- primjena hipoteze o akumulaciji oštećenja
- primjena mehanike loma

U prvom slučaju kod primjene hipoteze o akumulaciji oštećenja najjednostavnija je linearna hipoteza prema Palmgren (1924) i Miner (1945) koja je opisana pomoću parametra oštećenja. Drugim riječima parametar oštećenja koji nastane pri jednom ciklusu je  $D = 1/N_f$  pri čemu je  $N_f$  broj ponavljanja ciklusa sve do loma. Oštećenje sa  $n$  ciklusa je onda  $nD = n/N_f$ . Međutim tokom svog životnog vijeka beton koji je izložen različitim amplitudama napona u sebi akumulira oštećenja i onda kada parametar oštećenja dostigne  $D = 1$  nastupa lom. To znači da broj ciklusa  $n_i$  izaziva određeno oštećenje u betonu pri određenom rangu napona, dok  $N_i$  predstavlja ponavljanje tih ciklusa sve do loma i oni se određuju eksperimentalno, pa se onda sve može povezati sa poznatom Wöhler-ovom (S-N) krivom. Na krivoj se mogu u zavisnosti od broja ciklusa definisati niskociklični zamor (njem. *Kurzzeitfestigkeit*, eng. *low cycle fatigue*) i visokociklični zamor (njem. *Zeitfestigkeit*, eng. *high cycle fatigue*) kao i za jako niske vrijednosti napona tzv. trajna dinamička čvrstoća (njem. *Dauerschwingfestigkeit*, eng. *fatigue strength*). Granice između niskocikličnog i visoko cikličnog zamora kod betona nisu precizno definisane. Postoji veliki broj radova na kojima su ispitane Wöhler-ove krive za slučaj zatezanja, pritiska, savijanja ili cijepanja betona pri čemu su korištene konstantne ili varijabilne vrijednosti amplitudnih napona i pri tome se zaključilo da sa povećanjem ciklusa opterećenja napon opada, ali za razliku od metala, dinamička čvrstoća betona nije precizno definisana, jer čak i nakon nekoliko miliona ciklusa se pokazalo da dolazi lom. Stoga se kod betona može govoriti samo o kvazi-dinamičkoj čvrstoći [61]. Postoji veliki broj autora koji analitički opisivali Wöhler-ove krive za beton i one su uglavnom zasnovane na empirijskoj bazi. Prema CEB-FIP MC 90 [53] su definisani empirijski izrazi za Wöhler-ove krive u slučaju pritiska, zatezanja i kombinovanog djelovanja. Zbog svoje jednostavnosti ova hipoteza je našla primjenu u nekim propisima kao npr. Evrokod 2 [51], ali prema nekim autorima se smatra neprikladnom za beton upravo zbog nedostataka informacija o načinu opterećenja i frekvenciji. U radu Chen i ostali (2018) [64] se dalje daje prijedlog nelinearne hipoteze akumulacije oštećenja pri različitim varijantama amplitude oštećenja, ali o ovom pristupu se neće, u ovome radu, dalje govoriti.

Drugi pristup u analizi propagacije oštećenja odnosno prslina u betonu je primjenom zakona mehanike loma. Definisane adekvatnih matematičkih modela za simulaciju širenja prslina je jedan od najvažnijih aspekata prilikom procjene pouzdanosti konstrukcija. Analitički pristupi za opisivanje širenja prslina baziraju se na matematičkim modelima u kojima se uključuje gradijent širenja prslina, dužina prslina, zatim veličina zone plastifikacije, odgovarajuće konstante materijala, napon i dimenzije uzorka. Jedan od najznačajnijih matematičkih modela iz ovog pristupa je Parizov zakon (još se i naziva Pariz-Erdogan zakon) iz 1963 godine [1]. U njemu je definisana veza gradijenta širenja prslina sa rangom faktora intenziteta napona i njegov opšti oblik je dat sledećom jednačinom,

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (3.4)$$

pri čemu su  $C$  i  $m$  materijalne konstante određene eksperimentalnim putem, koje su zavisne od materijala, sredine i odnosa napona, dok je rang faktora intenziteta napona dat sledećim izrazom,

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} \quad (3.5)$$

Pošto je faktor intenziteta napona u vezi sa spoljašnjim opterećenjem (naponom) onda se opšti izraz za rang faktor intenziteta napona može pisati,

$$\Delta K = \Delta\sigma Y \sqrt{\pi a}, \quad (3.6)$$

U prethodnom izrazu se još dodaje geometrijska funkcija  $Y$  koja zavisi od posmatranog problema, a to se već prikazalo na u izrazima u drugom poglavlju.

Nakon integracije jednačine (3.4) dobija se broj ciklusa opterećenja do loma materijala,

$$\int_0^{N_f} dN = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{C(\Delta\sigma Y \sqrt{\pi a})^m} = \frac{1}{C(\Delta\sigma Y \sqrt{\pi})^m} = \int_{a_i}^{a_c} a^{-\frac{m}{2}} da \quad (3.7)$$

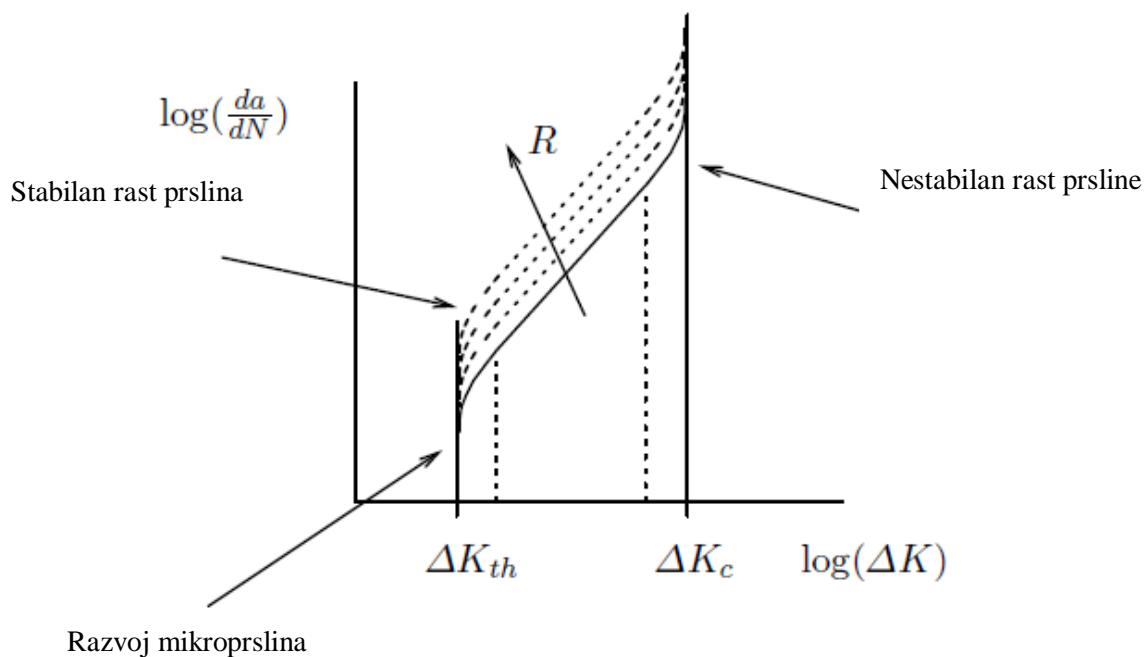
$$N_f = \frac{2 \left( a_c^{\frac{2-m}{2}} - a_i^{\frac{2-m}{2}} \right)}{(2-m)C(\Delta\sigma Y \sqrt{\pi})^m},$$

pri čemu je  $a_i$  početna vrijednost dužine prsline, a  $a_c$  vrijednost dužine prsline pri dotizanju žilavosti materijala.

U većini slučajeva je podintegralna funkcija složena upravo zbog geometrijskih funkcija koje se uvode pa je neophodno primijeniti neke od metoda numeričke integracije. Veoma je praktično matematičku vezu gradijenta prsline sa rangom faktora intenziteta napona prikazati u logaritamskoj razmjeri (slika 3.5) gdje se mogu uočiti sva tri stadijuma razvoja prsline.

Prsline se mogu inicirati na više načina, ali važno je istaknuti da se najčešće počinju stvarati na slobodnoj površini, stoga je važno stanje površine. Nesavršenost procesa izrade i obrade materijala je glavni uzrok površinskih oštećenja. Drugi korak predstavlja stvaranje makroprsline (tehničke prsline) iz niza mikroprsline iniciranih u prvom koraku. Ovdje dolazi do promjene smjera rasta prsline, a kada će do toga doći zavisi od veličine naprezanja. Kod vrlo velikih naprezanja (niskociklički zamor), korak iniciranja prsline je neprimjetan, tj. drugi korak zauzima gotovo cijelo područje lomne površine. Nakon prva dva koraka dolazi do naglog širenja prsline i nestabilnog loma konstrukcije. Kod materijala sklonih krtom lomu ova faza započinje u trenutku kada je postignuta žilavost, dok kod duktilnih materijala početak loma zavisi od naprezanja. Na slici 3.5 se kao granice između ovih oblasti definišu donja granica faktora intenziteta napona  $K_{th}$  ispod koje nema propagacije velikih prsline već samo kratkih mikroprsline i gornja granica  $K_c$  koja predstavlja žilavost materijala. Obe granice se određuju eksperimentalno, a kod metala njihovo određivanje je čak i standardizovano.





Slika 3.5 Faze propagacije prsline prema mehanici loma [15]

Parizov zakon se upravo odnosi na drugu oblast u kojoj važi linearni zakon koji se može prikazati sledećim izrazom,

$$\log \frac{da}{dN} = \log C + m \log \Delta K \quad (3.8)$$

Ovim se vidi da je  $\log C$  vrijednost presjecanja lineranog dijela dijagrama (oblast 2) sa osom  $\log \frac{da}{dN}$ , a  $m$  je nagib te linije prema osi  $\log \Delta K$ . U mehanici loma postoji veliki broj funkcionalnih zavisnosti, dobijenih empirijskim putem, kojim se može opisati proces širenja prslina, ali u današnje vrijeme relacija čiji je opšti oblik prikazan jednačinom (3.4) ima prednost prilikom primjene u odnosu na sve ostale relacije zbog velike jednostavnosti, ali i zbog činjenice da uključuje napon i dužinu prslina zahvaljujući uvođenju faktora intenziteta napona. Parizova relacija u kojoj se kao zavisno promenljiva pojavljuje faktor intenziteta napona je do danas doživjela različite modifikacije. Pored toga na problemima zamora metala su danas razvijeni razni matematički modeli za simulaciju širenja prslina bazirani na odgovarajućim relacijama za gradijent širenja prslina u kojima figurišu faktor intenziteta napona, dužina prslina i odgovarajuće konstante materijala. U poglavlju 5 se prikazuje jedna od tih teorija za koju će biti sproveden numerički primjer sa ciljem povezivanja sa reološko-dinamičkom analogijom. Veliki broj autora u svojim teorijama je primjenjivao Parizov zakon (Swartz S. E. i ostali. 1978 [46]; Swartz S. E. i Go 1984 [2], Baluch M. H. i ostali 1987 [3], Perdikaris P.C. i Calomino A. M. 1989 [65]). Jedan od najranijih pokušaja da se poveže problem zamora sa problemom veličine uzoraka su uradili Bažant Z. P. i Xu K. 1991 [5]. Oni su predložili modifikaciju Parizovog zakona prema sledećoj jednačini,

$$\frac{da}{dN} = C \left( \frac{\Delta K_I}{K_{IC}} \right)^m, \quad (3.9)$$

$$K_{IC} = K_{If} \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

pri čemu je  $K_{If}$  žilavost, a parametar  $\beta = D/D_0$  odnos visine grede  $D$  sa empirijskim parametrom  $D_0$ . Pored toga ovaj zakon je primjenjiv i za betone visokih čvrstoća Bažant Z. P. i Shell W. F. [66]. Ono što se u radovima Bažant-a primjećuje je da je kod primjene Parizovog zakona kod betona problem efekta veličine rješava empirijskim koeficijentima. Slowik V. i ostali (1996) [67] su predložili modifikaciju Parizovog zakona pri čemu se uzima u obzir i istorija opterećenja. Carpinteri A. i Spagnoli A. (2004) [6] su takođe analizirali fenomen veličine uzorka uvodeći dimenzionalnu analizu. Sain, T. i Kishen, J. M. C., 2007 [68] su napravili dalju modifikaciju pri čemu su predložili drugačiji oblik funkcije opterećenja i pri tome još uzeli u obzir i frekvenciju spoljašnjeg opterećenja. Ray S. i Kishen J.M.C (2010) [69] su napravili dalju modifikaciju Parizovog zakona čiji je opšti oblik dat sledećim izrazom,

$$\frac{da}{dN} = \Phi(\Delta G, G_F, \sigma_t, R, a, D, \omega, t) \quad (3.10)$$

gdje se umjesto faktora intenziteta napona i žilavosti uvodi energija loma  $G_F$ . Pored toga gradijent prsline je u zavisnosti od zatežuće čvrstoće  $\sigma_t$  i frekvencije  $\omega$  i stepena asimetrije opterećenja  $R$ . Na osnovu više različitih eksperimentalnih ispitivanja od strane različitih autora dalje modifikacije Parizovog zakona uz pomoć dimenzionalne analize se mogu naći još i u radovima Ray S. i Kishen J. M. C (2011) [69], Fathima K. M. P i Kishen J. M. C (2013) [70] i Prashanth M. H i ostali [71].

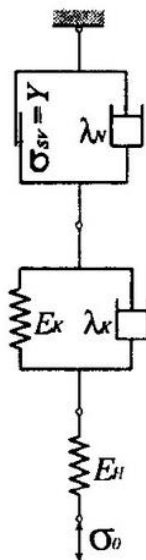
## 4 ANALIZA ZAMORA PREMA REOLOŠKO-DINAMIČKOJ ANALOGIJI

U proučavanju deformacija zavisnih od vremena značajnu ulogu imaju funkcija tečenja i funkcija relaksacije. Procese koji se odigravaju u viskoelastičnim tijelima je moguće predstaviti preko različitih modela koji se sastoje od opruga i prigušivača. Ako se pređe u područje viskoplastičnosti onda se uključuju i ploče među kojima postoji Coulomb-ovo trenje. Modeli mogu biti prosti i složeni sa više parametara. Među nekim poznatim modelima su: Hukov model, Kelvinov model, Maxwell-ov model, Newton-ovo tijelo, viskoplastično tijelo, elastoplastično tijelo sa linearnim ojačanjem itd.

U radovima Milašinovića D. D. se od 1996 godine do danas razvijala reološko-dinamička analogija (RDA) kojom su se analizirali neelastični i vremenski zavisni problemi vezani za 1D prizmatične štapove kao što su izvijanje ili viskoelastoplastične deformacije i sl. U poglavljima od 4.1 do 4.7 se u kratkim crtama daje opis najvažnijih pretpostavki i jednačina prema RDA pri čemu se citiraju različiti radovi od Milašinovića D. D.. To je neophodno da bi se mogla sprovesti analiza zamora greda prema RDA, koja je izložena u poglavljima 4.8 do 4.12.

### 4.1 Uvod u reološko-dinamičku analogiju

Kod reoloških modela se izvode diferencijalne jednačine za koje vrijedi da su naponi i deformacije funkcije vremena. Kod RDA se razmatra viskoelastoplastični model materijala za koji vrijedi veza u nizu između elastičnog (Hukov model), viskoelastičnog (Kelvinov model) i viskoplastičnog modela, slika 4.1. Kao i kod ostalih modela i kod ovog modela je primjenom određenih algebarskih operacija izvedena opšta diferencijalna jednačina u kojoj se na jednoj strani jednakosti nalaze funkcija deformacije i njeni izvodi a na drugoj strani jednakosti funkcija napona i njeni izvodi.



Slika 4.1 Model viskoelastoplastičnog materijala [72]

Zbog veze u nizu naponi se izražavaju odvojeno za svaki dio modela a ukupna deformacija se dobija superpozicijom. Opšta diferencijalna jednačina je data sledećim izrazom a detaljnije izvođenje se može naći u [73] i [72].

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}(t) + \dot{\varepsilon}(t) \cdot (E_K/\lambda_K + H'/\lambda_N) + \varepsilon(t) \cdot E_K \cdot H' / (\lambda_K \cdot \lambda_N) = \\ \ddot{\sigma}(t)/E_H + \dot{\sigma}(t) \cdot [E_K/(\lambda_K \cdot E_H) + H'/(\lambda_N \cdot E_H) + 1/\lambda_K + 1/\lambda_N] + \\ + \sigma(t) \cdot [(E_K + H')/(\lambda_K \cdot \lambda_N) + E_K \cdot H' / (\lambda_K \cdot \lambda_N \cdot E_H)] - \sigma \gamma \cdot E_K / (\lambda_K \cdot \lambda_N) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Da bi se jednačina mogla riješiti potrebno poznavati deformaciju ili napon kao funkciju vremena. U reologiji su ove funkcije poznate kao funkcija tečenja i funkcija relaksacije. Sinusoidna funkcija napona ima široku primjenu mehanici pogotovo kod problema zamora i može se shvatiti kao jedan opšti slučaj kojim se obuhvata čitav niz različitih slučajeva opterećenja. U izrazu (4.2) je prikazana sinusoidna funkcija napona kojoj je još dodana konstanta vrijednost napona.

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_A \cdot \sin(\omega_\sigma \cdot t) \quad (4.2)$$

Kada se jednačina (4.2) uvrsti u jednačinu (4.1) onda se dobija,

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}(t) \cdot m + \dot{\varepsilon}(t) \cdot c + \varepsilon(t) \cdot k = \sigma_A \left[ \left( \frac{k}{E_H} + \frac{E_K + H'}{\gamma} \right) - \omega_\sigma^2 \frac{m}{E_H} \right] \cdot \sin(\omega_\sigma \cdot t) + \\ + \sigma_A \left( \frac{c}{E_H} + \frac{\lambda_K + \lambda_N}{\gamma} \right) \cdot \omega_\sigma \cos(\omega_\sigma \cdot t) + \sigma_0 \left( \frac{k}{E_H} + \frac{E_K + H'}{\gamma} \right) - \sigma_\gamma \frac{E_K}{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

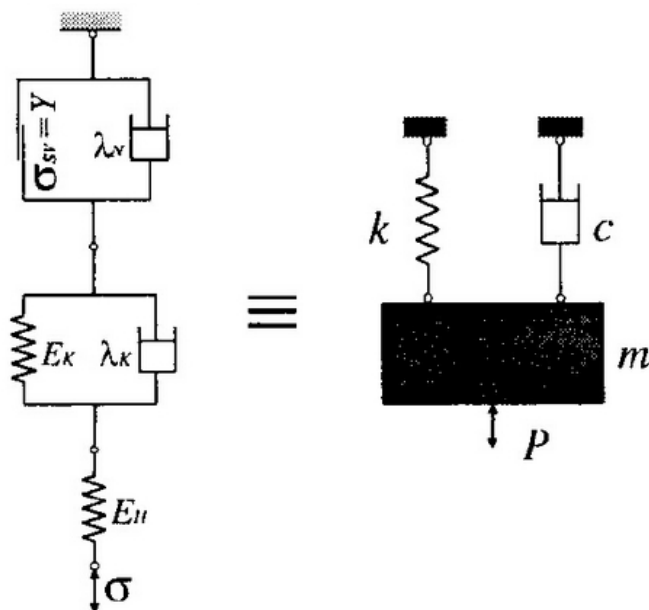
čije ukupno rješenje se sastoji od homogenog i partikularnog rješenja [72],

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_H + \varepsilon_p = \varepsilon_H + C + A \cdot \sin(\omega_\sigma \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_\sigma \cdot t) \quad (4.4)$$

Posmatrajući homogenu diferencijalnu jednačinu reološkog modela uočena je analogija sa homogenom diferencijalnom jednačinom prigušenih vibracija sistema sa jednim stepenom slobode pomjeranja pa je definisana matematičko-fizička analogija data sledećim relacijama,

$$\begin{aligned} \lambda_K \cdot \lambda_N &= [(N \cdot \text{sec}/m^2) \cdot (N \cdot \text{sec}/m^2)] = [kg \cdot (N/m^3)] = m \cdot \gamma, \\ E_K \cdot \lambda_N + H' \cdot \lambda_K &= [(N/m^2) \cdot (N \cdot \text{sec}/m^2)] = [(N \cdot \text{sec}/m) \cdot (N/m^3)] = c \cdot \gamma, \\ E_K \cdot H' &= [(N/m^2) \cdot (N/m^2)] = [(N/m) \cdot (N/m^3)] = k \cdot \gamma. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Na slici 4.2 je prikazana veza između reološkog i dinamičkog modela koja je predložena od strane Milašinovića D. D. [72].



Slika 4.2 Analogija između opšteg reološkog i dinamičkog modela [72]

Analogija prikazana u jednačini povezuje pet reoloških parametara sa tri dinamička parametra pa se rješavanje nelinearnog reološkog problema pojednostavilo na linearno dinamički problem. Dio homogenog rješenja zajedno sa konstantom  $C$  iz jednačine (4.4) predstavlja uticaj konstantnog napona  $\sigma_0$  i zavisi od početnih uslova dok partikularno rješenje daje uticaj ciklične varijacije tj. amplitude napona. Prilikom analize homogenog rješenja Milašinović D. D. [72] je analizirao vremena kašnjenja viskoelastične i viskoplatične deformacije koja su prema reološkim modelima proporcionalna koeficijentima prigušenja, a zbog analogije iz jednačine (4.5) su dovedene u vezu sa dinamičkim parametrima tj. masom, krutosti i prigušenjem. Unos napona se uvijek odvija u nekom vremenskom intervalu, a to rezultira deformaciju koja je takođe vremenska funkcija. Razgraničenje vremenski zavisnih i nezavisnih deformacija nije jasno pa se prema RDA pretpostavlja unos konstantnog napona  $\sigma_0$  pri udaru u nekom konačnom vremenskom intervalu, a deformacija mjeri kada taj napon bude postignut. Sa druge strane, uzimajući aspekt dinamike razmatra se kritično prigušenje kao najvažniji slučaj kojim se definišu stanja deformisanja. Povezivanje dinamičkih i reoloških parametara je izvedeno za jednodimenzionalan problem na štapu pri čemu se razmatra brzina prolaza mehaničkog talasa pri udaru. Tako je postavljena prva teorema reološko-dinamičke analogije koja glasi [74]:

*Ako je reološko vrijeme kašnjenja VE deformacije jednako vremenu kašnjenja VP deformacije tada su vremena jednaka dinamičkom vremenu kašnjenja pri propagaciji mehaničkog talasa u u štapu koji je u stanju kritičnog prigušenja.*

## 4.2 Reološko-dinamički modul

Milašinović D. D. [75] je posmatrajući partikularni dio rješenja diferencijalne jednačine (4.3) odredio cikličnu amplitudu deformacije kao i fazni ugao koji predstavlja zaostajanje deformacije za naponom. Na osnovu poznatih cikličnih amplituda napona i deformacije kao i faznog ugla koji su funkcije reoloških i dinamičkih parametara dobija se kompleksni modul elastičnosti koji može biti definisan kao odnos napona i deformacije Hukovim zakonom. Kompleksni modul elastičnosti je uz pomoć Moivreove teoreme moguće rastaviti na

dinamički i izgubljeni modul. Dinamički dio kompleksnog modula predstavlja tzv. reološko dinamički modul. Uzimajući još u obzir činjenicu da je brzina prolaza mehaničkog talasa kroz elastičnu sredinu veoma velika pa je stoga vrijeme kašnjenja mehaničkog talasa brojčano mala veličina, uvedena su pojednostavljena na VE dijelu modela što omogućilo da se izraz za reološko-dinamički modul viskoelastoplastičnog modela izvede u funkciji relativne frekvencije  $\delta$  i koeficijenta tečenja  $\varphi$  i modula elastičnosti  $E_H$ , izraz (4.6).

$$E_R = E_H \frac{1 + \delta^2 + \varphi_{vp}}{(1 + \varphi_{vp})^2 + \delta^2} \quad (4.6)$$

pri čemu relativna frekvencija sistema predstavlja odnos frekvencije spoljašnjeg opterećenja i sopstvene frekvencije,

$$\delta = \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (4.7)$$

U slučaju viskoelastičnog materijala kao što je beton u prethodnom izrazu se unosi viskoelastični koeficijent tečenja pa se dobija,

$$E_R = E_H \frac{1 + \delta^2 + \varphi}{(1 + \varphi)^2 + \delta^2} \quad (4.8)$$

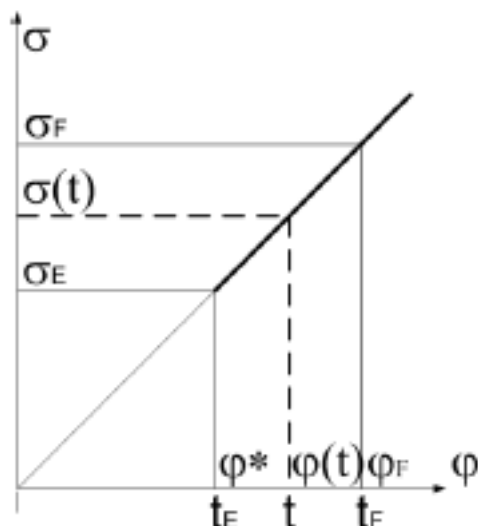
Prethodni izraz predstavlja veoma bitnu relaciju koja je korištena kod izvođenja potrebnih jednačina za zamor. Pored toga ovaj modul se može zamijeniti umjesto modula elastičnosti i kod drugih teorija zamora što se pokazuje u poglavlju 4.11 i 4.12.

U kvazi-statičkom slučaju je relativna frekvencija nula pa izraz za reološko-dinamički modul dobija sledeći oblik,

$$E_R = \frac{E_H}{1 + \varphi} \quad (4.9)$$

### 4.3 Veza napona i koeficijenta tečenja

U slučaju aksijalno napregnutih betonskih cilindara na pritisak Milašinović D. D. [76] uvodi linearni tok između napona i koeficijenta tečenja u vremenskom intervalu između dostizanja napona na granici elastičnosti  $\sigma_E$  i napona loma  $\sigma_F$ . Ova linearna veza je prikazana na slici 4.3.



Slika 4.3 Linearna veza napon-koeficijent tečenja [76]

Na osnovu poznatih napona na granici elastičnosti  $\sigma_E$  i koeficijenta tečenja na granici elastičnosti  $\varphi^*$  Milašinović D. D. [76] ovu linearnu predstavlja sledećom jednačinom,

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_E}{\varphi^*} \varphi(t) \quad (4.10)$$

$$\sigma_E = \frac{1}{K_E} \varphi^*$$

Da bi se odredila konstanta  $K_E$  potrebno je poznavati napon na granici elastičnosti ili vitkost fiktivnog betonskog stuba, čija dužina je mnogo veća od dužine betonskog cilindra. To nije ni malo jednostavno, pa je Milašinović D. D. [75] ovaj problem riješio izvođenjem veze vitkosti fiktivnog stuba sa koeficijentom tečenja na granici elastičnosti, koja je data sledećim izrazom,

$$\lambda_E = \pi^2 \frac{i^3}{I} \frac{1}{\gamma \varphi^*} \quad (4.11)$$

Brzina nanošenja sile koja zavisi od prese kojom se vrši mjerenje se može unijeti još u prethodni izraz tako što se uvede koeficijent ubrzanja  $f_y$  tj. važi  $\gamma = f_y \gamma_g$ , pri čemu je  $\gamma_g$  zapreminska težina. Koeficijent  $K_E$  je prikazan sledećim izrazom, a veoma je bitan parametar koji se dalje koristi kako kod statičkog testa tako i kod zamora savijanja betonskih greda,

$$K_E = \lambda_E \frac{i^3}{I} \frac{1}{E_H \gamma} \quad (4.12)$$

#### 4.4 Veza Poasonovog koeficijenta i koeficijenta tečenja

U radovima Milašinović D. D. [77] i [76] se izvodi veza između koeficijenta tečenja i Poasonovog koeficijenta koja je data u sledećoj jednačini,

$$\varphi = \frac{2\mu}{1 - 2\mu} \quad (4.13)$$

Relacija je izvedena na osnovu Bernulijeve jednačine koja prikazuje odnos između brzine, pritiska i gustine fluida u kretanju i suštini predstavlja zakon o očuvanju energije. Uspostavljanjem direktne veze između ova dva mehanička parametra, vrijeme kao parametar se isključuje, pa je traženje reološko-dinamičkog modula kako u dinamičkom tako i u kvazistatičkom slučaju dosta pojednostavljeno. Prethodnom relacijom se vidi da je i Poasonov koeficijent funkcija vremena tj. da je proporcionalan koeficijentu tečenja. Vrijednosti Poasonovog koeficijenta se kod betona prema eksperimentalnim mjerenjima kreću od 0,15 za manje vrijednosti napona pa do čak 0,4 u slučaju loma. Ako se za početnu vrijednosti Poasonov koeficijenta koristi vrijednost 0,15 onda se primjenom jednačine (4.13) prema RDA dobija početna vrijednost koeficijenta tečenja od 0,43. Sa povećanjem napona povećava se koeficijent tečenja a i Poasonov koeficijent, jer su sva tri parametra funkcionalno povezani.

#### 4.5 Radni dijagram betona pri pritisku

Za određivanje uzlazne grane radnog dijagrama betona pri pritisku Milašinović D. D. [76] koristi reološko-dinamički modul za kvazistatički slučaj koji je prikazan u jednačini (4.9) kao i linearnu vezu između kritičnog koeficijenta tečenja i napona pa postavlja kvadratnu jednačinu sa naponom kao nepoznatom. Rješenje ove kvadratne jednačine predstavlja relaciju za uzlaznu granu radnog dijagrama betona, gdje pored prethodno opisanog koeficijenta  $K_E$  ulazi modul elastičnosti u početnom neopterećenom stanju  $E(0)$ . Ova veza je data sledećom relacijom,

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2K_E} (\sqrt{1 + 4K_E E(0)\varepsilon} - 1) \quad (4.14)$$

pri čemu je

$$E(0) = E_H(1 + \varphi^*) \quad (4.15)$$

Relacija (4.14) se može iskoristiti i kod slučaja zatezanja tj. uzlazne grane radnog dijagrama zatezanja s tim da treba imati na umu da su deformacije kod zatezanja betona dosta manje pa je ponašanje u tom opsegu skoro linearno. To ima smisla, jer realno ponašanje nearmiranog betona pri centričnom zatezanju i jeste skoro linearno skoro do pred sam lom. To se vidi na dijagramu predloženom prema fib Model Code 2010 [52] prikazanom na slici 2.15. I kod uzlazne grane radnog dijagrama zatezanja bi se mogao koristiti isti koeficijent  $K_E$  koji se određuje na pritisnutom betonskom cilindru. Opadajući dio radnog dijagrama zatezanja je poseban problem, jer zahtjeva matematičku vezu između napona i otvaranja vrha prsline CTOD.

Opadajuću granu radnog dijagrama, a samim tim i žilavost pritisnutog cilindra Milašinović D. D. [74] izvodi uz pomoć ultimne deformacije kao i izvedenog rješenja za relaksaciju napona. Čitav postupak se sprovodi iterativno pri čemu se paralelno sprovodi proračun reološko-dinamičkog modula za kvazi statički slučaj datim izrazom (4.9). Kada napon prestane mijenjati modul, tada se prekida iterativni proračun. Deformacija i napon su dati sledećim izrazima,

$$\varepsilon_{sof}^{(i)} = \varepsilon_{cr}(1 + \varphi_{cr}^{(i-1)}) \quad (4.16)$$



$$\sigma_{cr,F}^{(i)} = \frac{\sigma_{cr,F}}{1 + \varphi_{cr}^{(i-1)}} \quad (4.17)$$

Primjena ove metode proračuna na drugim betonskim mješavinama (kao npr. reciklirani beton) kao i kod određivanja rotacionog kapaciteta armiranobetonskih greda se može naći u radu Milašinović D. D, Goleš D., Pančić A. i Čeh A. [78].

#### 4.6 Veza skalarne varijable oštećenja i koeficijenta tečenja

Poznato je iz mehanike oštećenja da problem određivanja skalarne varijable oštećenja nije jednostavan problem. Definiciju skalarne varijable oštećenja prvi je uveo Kachanov L. M. 1958 [79] godine u slučaju jednoosnog naprezanja pri čemu se ova varijabla definiše preko redukovane površine poprečnog presjeka tj.

$$D = \frac{A_D}{A} \quad (4.18)$$

pri čemu  $A_D$  predstavlja oštećeni dio poprečnog presjeka.

S druge strane postoji pristup baziran na redukciji modula elastičnosti koji su uveli Lemaitre J. i Chaboche J. L. [80], a koji zasnovan na hipotezi o ekvivalenciji deformacije gdje se modul elastičnosti izražava,

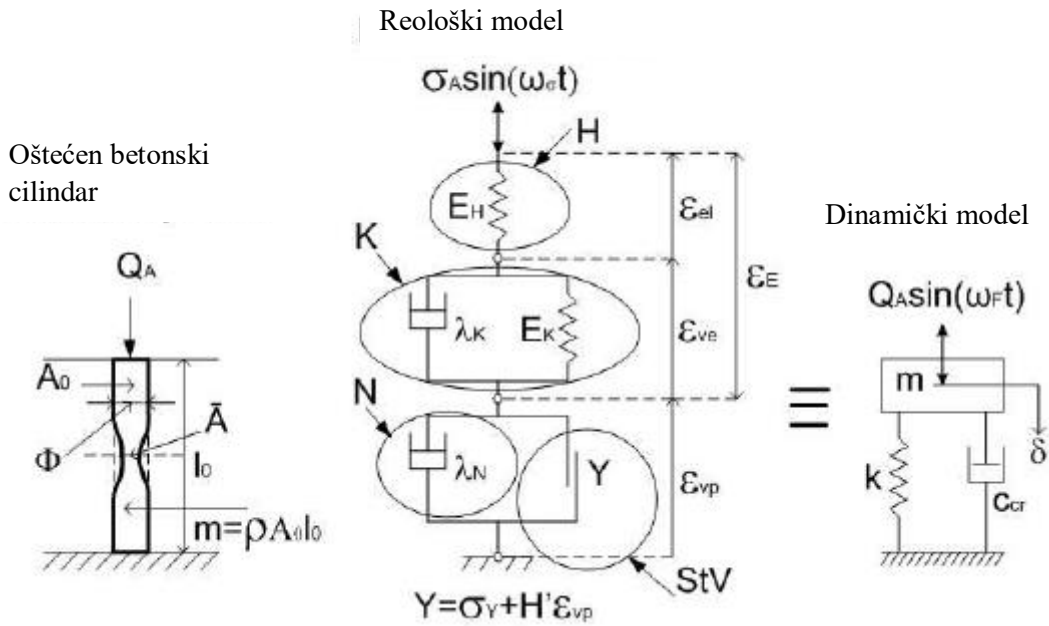
$$E(D) = (1 - D)E_H \quad (4.19)$$

U radu Milašinović D. D. [76] je prikazan reološko-dinamički kontinuumski model oštećenja betona kojim se prikazuje odziv betona izloženog jednoosijalnom pritisku čime je potvrđena hipoteza o ekvivalenciji deformacije iz mehanike oštećenja. Taj model prikazan je šematski na slici 4.4. Izvedena je relacija između koeficijenta tečenja i skalarne varijable oštećenja pri čemu je pretpostavljeno da je kritična skalarna varijabla oštećenja jednaka reološko-dinamičkom modulu VEP materijala,

$$D_{cr} = \frac{\varphi_{cr}(1 + \varphi_{cr})}{(1 + \varphi_{cr})^2 + \delta^2} \quad (4.20)$$

U kvazi statičkom slučaju je relativna frekvencija nula pa prethodna jednačina se pojednostavljuje tj.,

$$D_{cr} = \frac{\varphi_{cr}}{1 + \varphi_{cr}} \quad (4.21)$$



Slika 4.4 Reološko-dinamički kontinuumski model betonskog cilindra [76]

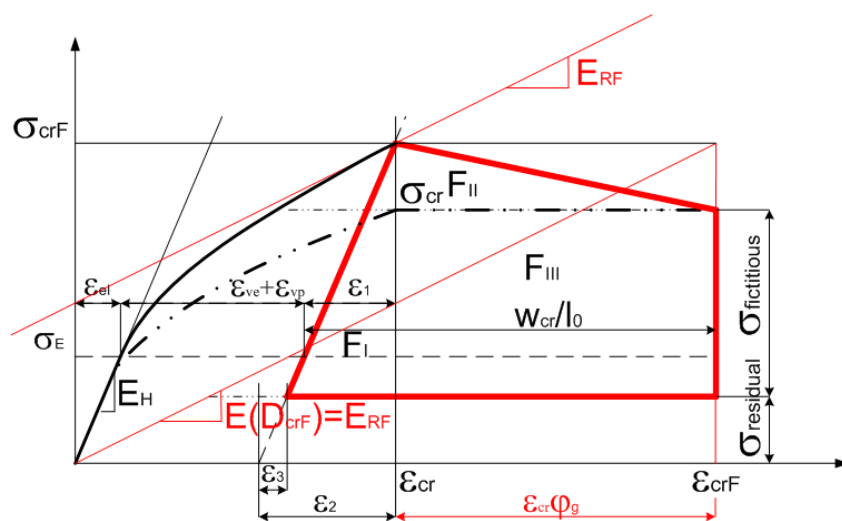
#### 4.7 Energija loma prema RDA

Pomoću radnog dijagrama betona izloženog pritisku Milašinović D. D. [76] je izveo izraz za energiju loma koja predstavlja markiranu oblast na slici 4.5 i određuje se prema sledećoj jednačini,

$$G_F = \left[ \frac{\sigma_{cr}^2}{2E_H} + \frac{1}{2} \sigma_{residual} (\epsilon_{crF} - \epsilon_{cr}) + (\sigma_{cr} - \sigma_{residual}) (\epsilon_{crF} - \epsilon_{cr}) \right] l_0 \quad (4.22)$$

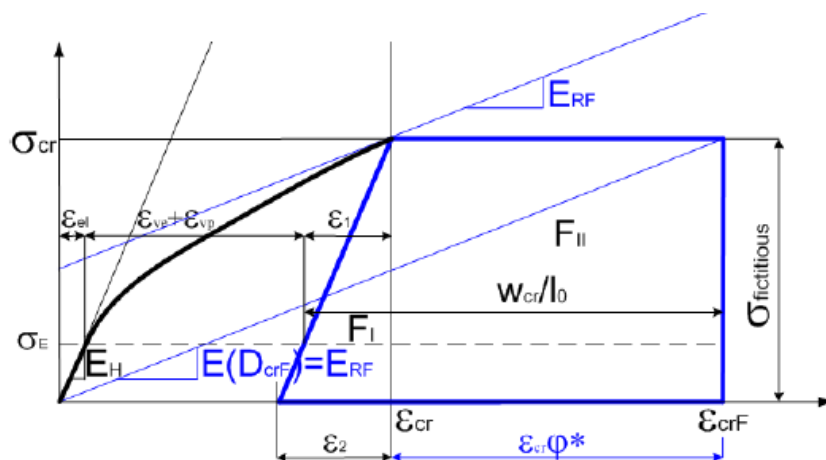
$$\sigma_{residual} = \sigma_{crF} - \sigma_{cr}$$

$$\epsilon_{crF} = \epsilon_{cr} (1 + \varphi)$$



Slika 4.5 Radni dijagram betonskog cilindra pri pritisku pri dinamičkom opterećenju [76]

Prethodni izraz predstavlja opšti slučaj tj. dinamički radni dijagram kojim se uzima u obzir i uticaj brzine nanošenja opterećenja. Ako se posmatra prethodni dijagram jasno je da oštar vrh dijagrama ne opisuje realno ponašanje. Stoga umjesto dinamičkog razmatra statički slučaj napona i na njemu se definiše energija loma, slika 4.6.



Slika 4.6 Radni dijagram betonskog cilindra pri pritisku pri statičkom opterećenju [76]

Na osnovu ovoga dijagrama se dobija sledeća jednačina za energiju loma za čije određivanje je potrebno poznavati Poasonov koeficijent, modul elastičnosti i čvrstoću betona [76].

$$G_F = \left[ \frac{\sigma_{cr}^2}{2E_H} + \sigma_{cr}(\varepsilon_{crF} - \varepsilon_{cr}) \right] l_0 \quad (4.23)$$

Ova energija se odnosi na energiju loma pri pritisku betona i određuje se na bazi globalne analize loma za razliku od energije loma zatezanja koja se određuje analizom prsline tj. površinom ispod opadajućeg dijela dijagrama zatezanje-otvaranje vrha prsline. Na primjeru u poglavlju 5.1 je prikazan proračun pritisnute energije loma prema RDA.

#### 4.8 Statički test prema RDA kod savijanja greda

Prilikom analize problema zamora kod greda izloženih savijanju statički test kako kod teorijskog tako i kod eksperimentalnog ispitivanja pruža dosta informacija o ponašanju greda. U literaturi se kod eksperimentalnih ispitivanja zamora od strane raznih autora nalaze uglavnom dijagrami u obliku sila-ugib ili sila-otvaranje prsline (CMOD). Stoga se i kod RDA analize nameće problem traženja ovih dijagrama. Analogno radnom dijagramu betona pri pritisku prema RDA koji je dobijen na pritisnutim betonskim cilindrima se dalje prikazuju uzlazne i silazne grane kod statičkog testa savijanja nearmiranih betonskih greda. Uzlazna kriva sila-ugib odnosno sila-CMOD se prema reološko-dinamičkom modelu može dobiti kao odstupanje od linearno elastičnog modela. Naime ako se posmatra izraz za deformaciju prema reološko-dinamičkom modelu u jednačini (4.22) uočava se da je RDA deformacija određena kao proizvod elastične deformacije i koeficijenta  $(1 + \varphi)$  pa se onda analogno tome za ugib odnosno CMOD prema RDA može pisati,

$$w_R = w_e(1 + \varphi) = w_e(1 + K_E \sigma) \quad (4.24)$$

$$CMOD_R = CMOD_e(1 + \varphi) = CMOD_e(1 + K_E \sigma)$$

Elastični dio ugiba se sastoji od ugiba bez prsline koji se računa prema poznatom izrazu iz otpornosti materijala kao i uticaja prsline  $w_{prslina}$ ,

$$w_e = \frac{PS^3}{48EI} + w_{prslina} \quad (4.25)$$

Određivanje elastičnog dijela ugiba  $w_e$  ili  $CMOD_e$  se može odrediti uz pomoć analitičkih izraza iz LEFM ili primjenom numeričke metode tj. metode konačnih elemenata na elastičnom modelu grede. Za ovaj drugi slučaj se u ovome radu za njihovo računanje koristi softverski paket Abaqus u kome se razmatra slučaj ravnog stanja napona. Na primjeru u poglavlju 5.5 se recimo proračun ugiba i CMOD sprovodi samo prema LEFM pa se time oba slučaja prikazuju u ovome radu. Koeficijent  $K_E$  je neophodan ulazni parametar koji je definisan na granici elastičnosti, a određuje se na betonskim cilindrima kao što je opisano u poglavlju 4.3. Prilikom analize nearmiranih betonskih greda sa inicijalnom prslinom kao mjerodavan parametar se nameće napon zatezanja u vrhu prsline tj. zatežući dio poprečnog presjeka grede se pokazuje kao mjerodavan kako za statički test tako i za zamor. Upravo problem određivanja napona u vrhu prsline predstavlja jedan od glavnih zadataka mehanike loma te njegovo određivanje nije ni malo jednostavan zadatak. U ovome radu se uvodi napon u vrhu prsline u razmatranje, a za njegovo određivanje se pored LEFM koristi i metoda konačnih elemenata tj. upotreba Abaqus-a u slučaju ravnog stanja naprezanja, dakle isti model, ulazni parametri i mreža konačnih elemenata koji se koriste kod određivanja elastičnog dijela ugiba i CMOD. Uticaj mreže konačnih elemenata na rezultate napona u vrhu prsline kao i upoređivanje rezultata za napon prema LEFM se može vidjeti na primjeru 5.1. Kontrolisanim povećanjem sile tj. napona u vrhu prsline raste koeficijent tečenja pa se time u jednačinama (4.24) RDA kriva sve više udaljava od linearno elastičnog dijela. Ujedno sa rastom koeficijenta tečenja dolazi do povećanja Poasonovog koeficijenta jer su funkcionalno povezani prema izrazu (4.13), a i do porasta skalarne varijable oštećenja. Povećavanje sile tj. napona u vrhu prsline se sprovodi kontrolisano sve do dostizanja maksimalne vrijednosti sile koja treba biti poznata iz eksperimentalnih ispitivanja. Na ovaj način se dobija uzlazna grana statičkog testa prema RDA.

Opadajući dio dijagrama sila-ugib odnosno sila-CMOD se dobija potpuno analogno opadajućem dijelu radnog dijagrama dobijenog na betonskim cilindrima, a koji je ukratko opisan u poglavlju 4.5. Postupak se sprovodi iterativno a za to se koriste sledeće jednačine,

$$w_{sof}^{(i)} = w_{cr} \left( 1 + \varphi_{cr}^{(i-1)} \right) = w_{cr} \left( 1 + K_E \sigma_{cr}^{(i-1)} \right) \quad (4.26)$$

$$CMOD_{sof}^{(i)} = CMOD_{cr} \left( 1 + \varphi_{cr}^{(i-1)} \right) = w_{cr} \left( 1 + K_E \sigma_{cr}^{(i-1)} \right)$$

$$\sigma_{cr,F}^{(i)} = \frac{\sigma_{cr,F}}{1 + \varphi_{cr}^{(i-1)}} = \frac{\sigma_{cr,F}}{1 + K_E \sigma_{cr,F}^{(i-1)}} \quad (4.27)$$

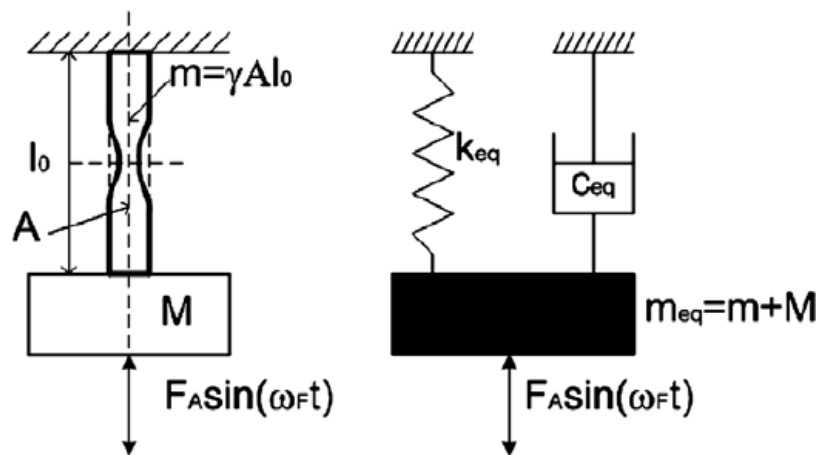
$$P(\sigma_{cr,F}^{(i)}) = \frac{P(\sigma_{cr,F})}{1 + K_E P(\sigma_{cr,F}^{(i-1)})}$$

Da bi se uvela sila umjesto napona u izraz za relaksaciju napona potrebno je prethodno na linearno elastičnom modelu naći matematičku vezu između sile koja djeluje u sredini grede i

napona u vrhu inicijalne prsline grede. Ova funkcija se traži numerički na elastičnom modelu primjenom metode konačnih elemenata, tako što se traže vrijednosti u nekoliko tačaka a onda se napravi funkcija. Koeficijent  $K_E$  se određuje na betonskim cilindrima kao što je opisano u poglavlju 4.3. Proračuni za statički test prema RDA se mogu naći na primjerima u poglavljima 5.1, 5.3 i 5.5.

#### 4.9 Propagacija dugih prsline prema RDA kod savijanja greda

Kao što se pokazalo u prethodnom poglavlju, kod uzlazne grane statičkog testa prema RDA se sila odnosno napon kontrolisano unosi, a kao odgovor se računaju kinematičke veličine. Sila tj. napon u statičkom testu jeste nezavisno promjenjiva iz koje se još može dobiti koeficijent tečenja koji raste veoma brzo do loma u kratkom vremenskom intervalu. Pošto je prema Evrokodu koeficijent tečenja funkcija vremena onda on ima mnogo veći značaj kod problema zamora koji traju u dužem vremenskom intervalu. S druge strane pri zamoru greda se razmatra konstantan rang sile tj. napona pa je stoga potrebno kao ulazni parametar posmatrati koeficijent tečenja. Da bi se objasnio problem dugih prsline kod betonskih greda potrebno primijeniti relaciju za histerezisnu petlju prema RDA koju je izveo Milašinović D. D. [62]. Fenomen histerezisa, koji se javlja u raznim granama fizike predstavlja zaostajanje magnetizacije iza magnetizirajuće sile, a poznata je kao histereza i bila je dugogodišnja tema istraživanja. Histerezis je pojava da učinci nekoga djelovanja kasne u odnosu na to djelovanje. Milašinović D. D. [62] je primijenio novi reološki model da bi dobio histerezisni odgovor materijala pod uticajem cikličnog dejstva sile (napona). Na slici 4.7 je prikazan reološko-dinamički model sa cikličnom varijacijom sile pri aksijalnom naprezanju štapa sa masom  $M$  [62].

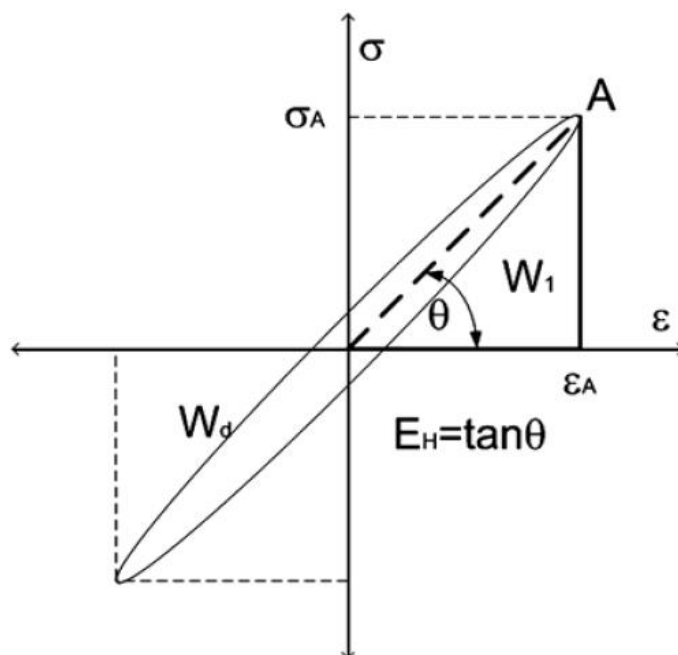


Slika 4.7 Reološko dinamički model štapa sa masom [62]

Ako je ovaj model rastegnut, elastična energija deformacije ostaje u materijalu odnosno nema gubitaka. Rad koji je potreban za istežanje ili kompresiju modela ne zavisi od težine modela. Shodno tome, gravitacija nije uključena u mjerenje elastične energije deformacije. Umjesto toga, rad potreban za istežanje ili kompresiju zavisi od modula elastičnosti i dat je sledećim izrazom,

$$W_1 = \frac{\sigma_{max}^2}{2E_H} A l_0 \quad (4.28)$$

Međutim prema RDA teoriji se posmatra neelastičan materijal pa stoga linije opterećenja i rasterećenja se ne poklapaju već zatvaraju površinu koja se naziva histerezijsna petlja, slika 4.8.



Slika 4.8 Prikaz histerezijsne petlje [62]

Histerezijsna petlja nastaje prilikom opterećenja nekog sistema koji je opterećen cikličnim opterećenjem i nastaje kao posljedica kašnjenja deformacije za cikličnom promjenom napona što je karakteristika za neelastične materijale. Upravo površina koja je zatvorena histerezijsnom petljom predstavlja brzinu oslobađanja energije pri ciklusu opterećenja. Kao što je već spomenuto rješenje diferencijalne jednačine prema RDA u slučaju ciklične promjene napona se sastoji od homogenog i partikularnog rješenja pri čemu partikularno rješenje rezultira od ciklične promjene napona. Uzimajući u obzir činjenicu da je napon proporcionalan brzini deformacije  $\dot{\epsilon}_p''(t)$  sa prigušenjem  $c$  kao faktorom proporcionalnosti Milašinović D. D. [62] polazi od sledeće jednačine,

$$\sigma''(t) = c\dot{\epsilon}_p''(t) = c\omega_\sigma \epsilon_A \cos(\omega_\sigma t - \alpha) \quad (4.29)$$

pri čemu je  $\omega_\sigma$  frekvencija napona,  $\epsilon_A$  amplitudna vrijednost defrmacije i  $\alpha$  fazni ugao.

Površinu histerezijsne petlje Milašinović D. D. [62] je dobio rješavanjem sledećeg krivolinijskog integrala,

$$\begin{aligned} W_d &= \oint \sigma''(t) \dot{\epsilon}_p''(t) dt = \oint c\dot{\epsilon}_p''(t)^2 dt = c\omega_\sigma^2 \epsilon_A^2 \int_0^{2\pi/\omega_\sigma} \cos^2(\omega_\sigma t - \alpha) dt \\ &= \pi c\omega_\sigma \epsilon_A^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Milašinović D. D. [62] je na aksijalno opterećenim štapovima izveo vezu između krutosti i prigušenja koju je ubacio u prethodnu jednačinu i time prikazao površinu histerezijsne petlje datu sledećom jednačinom za slučaj viskoelastičnog materijala,

$$W_{d,ve}(R) = 2\pi k \varepsilon_{max}^2 \frac{(1-R)^2 (1+\varphi)^2 + \delta^2}{4(1+\delta^2)} \delta \quad (4.31)$$

Dalje se može posmatrati slučaj viskoelastoplastičnog materijala,

$$W_{d,vep}(R) = 2\pi k \varepsilon_{max}^2 \frac{(1-R)^2 (1+\varphi_{vp})^2 + \delta^2}{4(1+\delta^2)} \delta \quad (4.32)$$

Ako se recimo posmatra slučaj štapa sa slike 4.6 koji ima površinu poprečnog presjeka  $A$  onda se ukupna disipacija energije dobija,

$$W_d = W_{d,ve} A \quad (4.33)$$

U specijalnom slučaju za  $\varphi \rightarrow 0$  za slučaj elastične energije se dobija,

$$W_{d,el}(R) = 2\pi k \varepsilon_{max}^2 \frac{(1-R)^2}{4} \delta \quad (4.34)$$

Za slučaj simetričnih ciklusa napona tj.  $R = -1$  dobija se,

$$W_{d,vep}(-1) = 2\pi k \varepsilon_{max}^2 \frac{(1+\varphi_{vp})^2 + \delta^2}{1+\delta^2} \delta \quad (4.35)$$

$$W_{d,ve}(-1) = 2\pi k \varepsilon_{max}^2 \frac{(1+\varphi)^2 + \delta^2}{1+\delta^2} \delta$$

$$W_{d,el}(-1) = 2\pi k \varepsilon_{max}^2 \delta$$

Pošto beton ima viskoelastične osobine u daljim razmatranjima zamora koristi se jednačina (4.31) gdje se vidi da brzina oslobađanja energije zavisi od koeficijenta asimetrije opterećenja, krutosti, relativne frekvencije, koeficijenta tečenja i maksimalne deformacije. U daljem tekstu slijedi objašnjenje za svaki od ovih parametara koji se koriste kod analize nearmiranih betonskih greda na savijanje.

Kao što je već spomenuto površina ispod opadajuće grane radnog dijagrama betona predstavlja energiju loma zatezanjem koja se u linearno elastičnoj mehanici loma pretpostavlja kao konstantna veličina. Beton tokom cikličnog opterećenja prolazi zavisno od amplitude opterećenja brže ili sporije kroz određene nivoe oštećenja koji se manifestuju u vidu prslina. Kada sistem tj. greda dostigne određenu dužinu prsline odnosno kritičnu vrijednost krutosti onda nastupa nestabilan rast prsline koji brzo vodi lomu grede. To znači da se površina ispod radnog dijagrama popunjava prilikom svakog ciklusa opterećenja sa histerezisnim petljama koje nastaju pri svakom ciklusu. Drugim riječima ako se površina histerezisne petlje odnosno oslobođene energije pri jednom ciklusu pomnoži sa brojem ciklusa opterećenja dobija se energija loma koja se prikazuje u sledećoj jednačini,

$$G_F = W_{d,ve} N \quad (4.36)$$

Kod testova na zamor se najčešće opterećenje (sila) unosi kontrolisano tj. u svakom ciklusu se dostiže ista amplituda napona pa se energija loma mora iskoristiti za propagaciju prslina koje dovode do opadanja krutosti, preraspodjela napona i promjene relativne frekvencije sistema. Pošto je određivanje energije loma najčešće moguće određivanjem iz statičkih testova onda se polazi od toga da je energija loma poznata vrijednost pa se broj ciklusa može izračunati,

$$N = G_F/W_{d,ve} \quad (4.37)$$

Pošto se u ovome radu razmatra savijanje u tri tačke nearmiranih betonskih greda sa inicijalnom prslinom potrebno je prilagoditi parametre iz jednačine (4.31) na savijanje grede. Krutost se definiše kao savojna krutost prema sledećoj jednačini,

$$k(a) = \frac{\Delta P}{w_e(a)} \quad (4.38)$$

pri čemu se vidi da je krutost odnos ranga sile i ugiba. Pošto je kod eksperimentalnih mjerenja rang sile konstanta vrijednost onda se kao odgovor grede povećava ugib sa porastom dužine prsline. Ugib se pri tome određuje na elastičnom modelu primjenom metode konačnih elemenata tj. na primjerima u poglavlju 5 se koristi softver Abaqus i to slučaj ravnog stanja naprezanja. Kao što se vidi elastični ugib jeste funkcija dužine prsline, pri čemu se ona određuje aproksimativno tako što se za nekoliko dužina prsline odrede ugibi u Abaqus-u. Treba imati na umu da se ovdje ne razmatra pravac kretanja prsline tj. pretpostavlja se da prsline propagira vertikalno u sredini grede tj. području iznad inicijalne prsline. Kod cikličnog testa se govori o rangu sile odnosno napona koji predstavlja razliku maksimalnog i minimalnog napona. Analogno statičkom testu koji je opisan poglavlju 4.8 i kod problema zamora se uvodi rang napona u vrhu prsline kao parametar za dalju analizu. Njegovo određivanje se sprovodi pomoću metode konačnih elemenata ili prema LEFM, a osjetljivost rezultata na izbor mreže konačnih elemenata tj. rastojanje od vrha prsline se prikazuje na primjeru 5.1. Za poznati rang napona u vrhu prsline se računa rang elastične deformacije koji ulazi u izraz (4.31),

$$\Delta \varepsilon_{max} = \frac{\Delta \sigma}{E_H} \quad (4.39)$$

Relativna frekvencija je dinamički parametar koji se pojavljuje u problemu zamora, a on se izražava jednačinom (4.7) kao odnos spoljašnje i sopstvene frekvencije grede. U primjerima koji se obrađuju, frekvencija spoljašnjeg opterećenja je poznata veličina iz eksperimenata, dok se sopstvena frekvencija određuje numerički primjenom softvera Abaqus, pri čemu se koristi ista mreža konačnih elemenata kojom se određuje napon u vrhu prsline i ugib. Pri tome treba imati u vidu da prilikom porasta prsline krutost sistema opada pa time i sopstvena frekvencija pa se time aproksimativno može odrediti relativna frekvencija kao funkcija dužine prsline, pa se može pisati,

$$\delta(a) = \frac{\omega_\sigma}{\omega(a)} \quad (4.40)$$



Kao što je već napomenuto problem zamora traje u dužem vremenskom intervalu, gdje je potrebno koeficijent tečenja poznavati kao funkciju vremena. Jedna od mogućnosti jeste da se koristi relacija za koeficijent tečenja prema Evrokodu, koja je data jednačinom (2.29). Prema ovoj relaciji promjena koeficijenta tečenja zavisna od vremena pri čemu se vrijeme izražava u danima. Pri tome je promjena u prvim nekoliko dana linearna pa onda nastupa nelinearnost. Na primjerima koji su prikazani u poglavlju 5 se može izračunati vrijeme trajanja eksperimentalnog mjerenja na osnovu poznate frekvencije napona i maksimalnog broja ciklusa do loma. Pokazalo se da je svim korištenim primjerima vrijeme trajanja iznosi maksimalno jedan dan, što kada se primjeni relacija prema Evrokodu daje zanemarivu promjenu koeficijenta tečenja. Iz toga razloga se na svim primjerima usvaja konstantna vrijednost koeficijenta tečenja koja se dobija pomoću relacije (4.10) tj.,

$$\varphi = K_E \Delta \sigma \quad (4.41)$$

Koeficijent  $K_E$  se dobija kao što je opisano u poglavlju 4.3. tj. na pritisnutim betonskim cilindrima.

Na osnovu do sada izloženog se zaključuje da se može izračunati broj ciklusa opterećenja do postizanja određene dužine prsline, pa se dužina prsline posmatra kao nezavisno promjenjiva tj. iz izraza (4.31) i (4.36) se dobija,

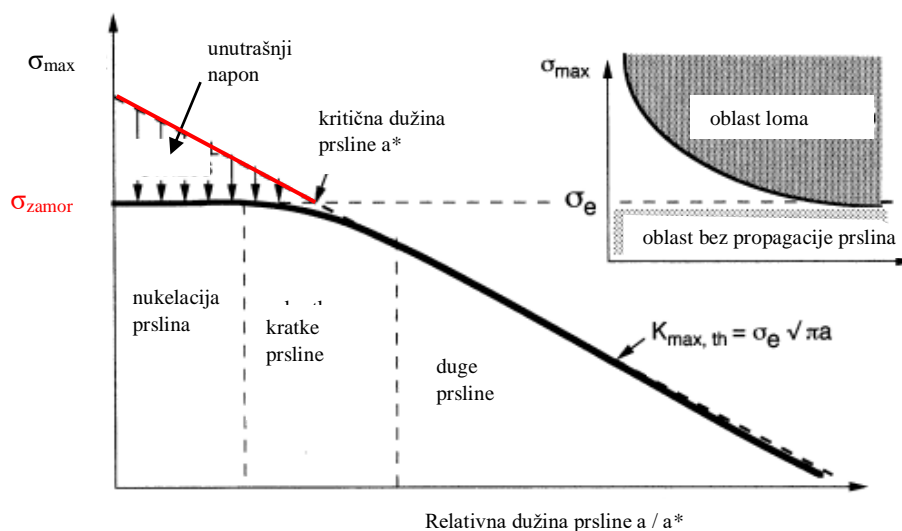
$$N(a) = \frac{G_F}{W_{a,ve}} = \frac{G_F}{2\pi \frac{\Delta P}{w_e(a)} \left(\frac{\Delta \sigma}{E_H}\right)^2 \frac{(1-R)^2 (1 + K_E \Delta \sigma)^2 + \delta(a)^2}{4} \frac{\delta(a)}{1 + \delta(a)^2}} \quad (4.42)$$

Kao što se vidi u prethodnoj jednačini da bi se izračunao broj ciklusa opterećenja za određenu dužinu prsline potrebno prije toga aproksimirati funkciju ugiba i relativne frekvencije, zatim poznavati energiju loma i rang napona u vrhu prsline, kao i materijalnu konstantu  $K_E$ . Na primjerima u poglavlju 5 se prilikom proračuna uočio uticaj svakog od ovih parametara na rezultate. Izraz dat jednačinom (4.42) se u literaturi prikazuje inverznom funkcijom gdje se na ordinati nalazi dužina prsline, a na apscisi broj ciklusa opterećenja pa se tako rezultati i prikazuju u poglavlju 5. Za razliku od Parizovog zakona u prethodnom izrazu nema empirijskih koeficijenata već je zasnovana na postavkama RDA teorije za viskoelastičan materijal i pri tome je potrebno primijeniti numeričke metode i LEFM. Ova jednačina bi se mogla primijeniti na različitim problemima, recimo centrični pritisak, zatezanje, savijanje itd. Jednačinom (4.42) se opisuje oblast stabilne propagacije prsline pa je pored eksperimentalnih rezultata u primjeru 5.1 izvršeno upoređivanje sa Parizovim zakonom. Prilikom dostizanja velike dužine prsline krutost grede počinje naglo da opada i sve to vodi ka nestabilnoj propagaciji koja rezultira lomom grede. Da bi ovo primijenili na prethodno opisani model dat jednačinom (4.42) potrebno je pored povećavanja dužine prsline povećavati koeficijent tečenja. Dakle sada prethodna funkcija broja ciklusa opterećenja ima još jednu promjenjivu. U suštini, postoje tri nepoznate a to su dužina prsline koja je granica između tzv. stabilne i nestabilne oblasti propagacije, broj ciklusa do loma i koeficijent tečenja. Od ove tri nepoznate dvije treba poznavati, a treća se može izračunati primjenom jednačine (4.42). Ova zona se analizira na primjerima u poglavlju 5 samo u jednom ili dva koraka da bi se pokazao uticaj povećanja koeficijenta tečenja.

Prethodno opisana analiza statičkog testa i propagacija dugih prslina su još predstavljene u radovima Pančić A., Milašinović D. D. i Goleš D. [81] i Pančić A. i Milašinović D. D [82].

#### 4.10 Propagacija kratkih prslina prema RDA kod savijanja gređa

Kao što je već ranije spomenuto prema Parizovom zakonu se propagacija dugih prslina odvija u području između donjeg i gornjeg praga žilavosti. Donji prag žilavosti se još naziva prag cikličnog oštećenja i bitan je parametar kod analize kratkih prslina, ali još uvijek je nedovoljno istražena oblast kako kod metala tako i kod cementnih materijala. Neki autori su na različitim vrstama metala eksperimentalno provjeravali uticaj koeficijenta asimetrije opterećenja  $R$  na donji prag žilavosti [83]. Pokazalo se da donji prag žilavosti opada sa povećanjem koeficijenta asimetrije opterećenja. Uticaj okoline takođe igra ulogu, jer se pri ispitivanju u vakuumu uticaj koeficijenta simetrije može zanemariti. Drugi bitan parametar koji je ključan kod propagacije prslina kod metala je tzv. unutrašnji napon (*internal stress*) koji zavisi od unutrašnje strukture i nepravilnosti strukture metala i koji se dodaje naponu koji je izazvan spoljašnjim opterećenjem. Određivanje ovog napona nije nimalo jednostavno, ali je poznato da on ima uticaj na faktor intenziteta napona koji je od značaja za razvoj prslina. Ovaj unutrašnji napon je jedna značajna veza između nukelacije i propagacije kratkih i dugih prslina. Upravo ova saznanja u vezi unutrašnjeg napona kod problema kratkih prslina nagovještava da se i prema RDA modelu koji opisan za duge prsline treba napraviti korekcija ranga napona kako bi se analizirale kratke prsline. Kitagawa H. i Takahashi S. [84] su prvi predložili grafičku metodu koja povezuje kratke i duge prsline sa granicom zamora. Vasudevan i ostali [83] analizirali kritične parametre za oblast kratkih i dugih prslina kod metala koristeći grafičku metodu Kitagawa i Takahashi, slika 4.9.



Slika 4.9 Šematski prikaz Kitagawa i Takahashi dijagrama [83] (linearna interpolacija za RDA prikazana crvenom linijom)

Prema njihovom dijagramu se pokazuje zavisnost napona i dužine prslina. U oblasti nukleacije prslina se čak pokazuje nezavisno ponašanje napona i dužine mikroprslina. Da bi se ranije opisani model prema RDA podesio za opis kratkih prslina iskorištava se linearna veza napona i dužine kratkih prslina tj. iskorištava se linearna interpolacija prikazana prethodnoj slici 4.9. Da bi se ta linearna funkcija izvela, potrebno je poznavati dvije tačke na grafiku. Za prvu tačku koja odgovara početnoj vrijednosti dužine prsline tj. inicijalnoj prslini

u sredini grede se usvaja vrijednost napona zatezanja u vrhu prsline  $\sigma_{max}$  dobijen pri statičkom testu. Za drugu tačku koja odgovara kritičnoj dužini prsline  $a^*$  tj. granici između kratkih i dugih prslina se uzima vrijednost ranga napona  $\sigma_{zamora} = \Delta\sigma$  u vrhu prsline koji se koristi pri testu zamora tj. kod dugih prslina. Oba napona se mogu odrediti primjenom metode konačnih elemenata tj. koristi se isti model i mreža konačnih elemenata kao kod analize dugih prslina. Na osnovu ovoga se vidi da je vrijednost napona u oblasti kratkih prslina veća nego kod dugih prslina. Na prethodnom dijagramu je takođe prikazana relacija između donjeg praga žilavosti, dužine prsline i granice zamora. Upravo za analizu kratkih prslina je potrebno poznavati dvije veličine a treća se može izračunati. Na primjerima u poglavlju 5 se pokazalo kao pogodno usvojiti kritičnu dužinu prsline kod betona u vrijednosti od 5 do 15mm. To je red veličine koji je veći u odnosu na metale kod kojih se prema nekim autorima smatra 1mm kao kritična dužina prsline. Kod betona treba imati na umu još i uticaj maksimalne veličine zrna agregata koja se za eksperimentalne uslove uglavnom i uzima do 10mm. Kroz primjere u poglavlju 5 u kojima je izvršeno upoređivanje sa eksperimentalnim rezultatima se pretpostavka kritične dužine prsline pokazala boljom nego pretpostavka donjeg praga žilavosti kod cementnih materijala za koju se u literaturi ne može naći dovoljno radova, a koja je dosta osjetljivija na rezultate što se pokazuje u poglavlju 4.11. S druge strane za granicu zamora kod betona postoje u literaturi razni prijedlozi u obliku S-N krivih gdje za obično za  $10^6$  ciklusa određuje rang napona. Linearnom interpolacijom napona u području mikroprslina i kratkih prslina kao i pretpostavkom kritičnoj dužini prsline se izbjegava traženje granice zamora betona i donjeg praga žilavosti, a omogućava primjena istog RDA modela kao za duge prsline.

Prethodno opisana analiza propagacije kratkih prslina je još predstavljena u radu Pančić A., Milašinović D. D. [85].

#### 4.11 Primjena reološko-dinamičkog modula na druge teorije-problem kratkih prslina kod savijanja betonskih greda

Kao što je već spomenuto prilikom cikličnog opterećenja oštećenja u betonu prolaze kroz tri faze (zone) oštećenja. Oblast ispod donjeg praga žilavosti (Zona 1) kod betona je nedovoljno ispitana oblast kojoj je potrebno posvetiti posebnu pažnju kod eksperimentalne i teorijske analize. U radu Nimmy M. A. i ostali [86] je predložena relacija za propagaciju kratkih prslina prema sledećem izrazu koji u suštini predstavlja modifikovan oblik Parizovog zakona,

$$\frac{da}{dN} = \frac{G_F}{\sigma_t} \left(\frac{\Delta G_I}{G_F}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\Delta G_{th}}{G_F}\right)^{\beta_2} \left(\frac{\sigma_t}{G_F} l_{ch}\right)^{\beta_3} \left(\frac{E}{\sigma_t}\right)^{\beta_4} \left(\frac{\sigma_t}{G_F} a\right)^{\beta_5} (1 - R)^{\beta_6} \phi_2\left(\frac{d}{D}\right) \quad (4.43)$$

Kao što se vidi priraštaj prsline sa brojem ciklusa je u funkciji od brzine oslobađanja energije  $\Delta G_I$ , donjeg praga žilavosti  $\Delta G_{th}$ , čvrstoće zatezanja  $\sigma_t$ , energije loma  $G_F$ , modula elastičnosti  $E$ , karakteristične dužine prsline  $l_{ch}$ , stepena asimetrije ciklusa  $R$ , i odnosa veličine zrna agregata prema visini grede  $d/D$ . Verifikacija ove teorije je sprovedena u radu [86] gdje je pokazano da je donji prag žilavosti najosjetljiviji parametar na rezultate što se i u ovome radu na primjeru 5.1 još jednom potvrdilo. Za razliku od Parizovog zakona gdje se propagacija prsline izražava preko faktora intenziteta napona u ovoj teoriji se propagacija prsline izražava preko energije, pa je za propagaciju malih prslina od ključnog značaja poznavanje donjeg praga žilavosti. U ovome radu se vrši dalja modifikacija izložene teorije iz jednačine (4.43) gdje se umjesto modula elastičnosti unosi reološko-dinamički modul

prikazan u jednačini (4.8) pa se time uvodi relativna frekvencija i koeficijent tečenja kao dva nova parametra. Zamjena modula elastičnosti ulazi u izraz za karakterističnu dužinu prsline datu jednačinom (2.25), zatim u izraz za brzinu oslobađanja energije koji se dovodi u vezu sa faktorom intenziteta napona, koji je promjenjiv sa porastom dužine prsline, a pri tome i u funkciji ranga sile. Nakon zamjene modula elastičnosti i integraljenja prethodne jednačine dobija se izraz za proračun broja ciklusa u funkciji dužine kratke prsline,

$$N = \int_{a_0}^{a_i} \frac{da}{\frac{G_F}{\sigma_i} \left( \frac{\Delta G_I}{G_F} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\Delta K_{th}^2 ((1+\varphi)^2 + \delta^2)}{G_F (E(1+\varphi + \delta^2))} \right)^{\beta_2} \left( \frac{E(1+\varphi + \delta^2)}{\sigma_i ((1+\varphi)^2 + \delta^2)} \right)^{\beta_3} \left( \frac{E(1+\varphi + \delta^2)}{\sigma_i ((1+\varphi)^2 + \delta^2)} \right)^{\beta_4} \left( \frac{\sigma_i a}{G_F} \right)^{\beta_5} (1-R)^{\beta_6} \Phi_2 \left( \frac{d}{D} \right)} \quad (4.44)$$

$$\phi_2 = \gamma_1 + \gamma_2 \left( \frac{d}{D} \right) + \gamma_3 \left( \frac{d}{D} \right)^2$$

Koeficijenti  $\beta_i$  i  $\gamma_i$  se preuzimaju iz rada [86] i iznose  $\beta_1 = -3,99$ ;  $\beta_2 = 7,79$ ;  $\beta_3 = -1,54$ ;  $\beta_4 = -1,36$ ;  $\beta_5 = 5,96$ ;  $\beta_6 = 0,09$ ;  $\gamma_1 = 11,46$ ;  $\gamma_2 = -421,24$ ;  $\gamma_3 = 3466,32$ .

Na primjeru u poglavlju 5.1 se prikazuje propagacija kratkih prsline sa upoređivanjem eksperimentalnih rezultata pri čemu se još definiše granica između prve i druge faze propagacije prsline kao i osjetljivost donjeg praga žilavosti na rezultate.

#### 4.12 Primjena reološko-dinamičkog modula na druge teorije-problem zamora metala

Kao što već spomenuto problem zamora se prvo ispitivao na metalima a matematički je opisan pomoću Parizovog zakona koji se zasniva na primjeni faktora intenziteta napona tj. poznavanjem mehanike loma. Za duktilnije materijale kao što je metal veličina procesne zone se ne može posmatrati kao mala, pa samim tim i primjena linearno elastične mehanike loma nije moguća. Postoje različiti pristupi koji analiziraju metale pri cikličnom opterećenju i uglavnom su svi oni modifikacija Parizovog zakona koja je za razliku od betona kod metala dobro primjenjiva. U ovome poglavlju se kroz primjer pokazuje primjena reološko-dinamičke analogije kod zamora metala zamjenom modula elastičnosti sa reološko-dinamičkim modulom datim u jednačini (4.8) koji je funkcija koeficijenta tečenja, odnosno Poasonovog koeficijenta kao i relativne frekvencije. Pristup koji se ovdje analizira se zasniva na gustini energije deformacije. Do širenja prsline tokom jednog ciklusa opterećenja dolazi, kada je apsorbirana energija u istom ciklusu dostigla vrijednost energije rasipanja pri plastičnoj deformaciji u zoni procesa. Prečnik zone procesa se definiše kao funkcija faktora intenziteta napona i žilavosti, a ciklični dijagram napon-deformacija pomoću Ramberg-Osgood-ove jednačine. Gradijent širenja prsline i broj ciklusa se računaju prema sledećim jednačinama koju su detaljnije objašnjene u radu [18],

$$\delta a = \frac{da}{dN} = \frac{(1 - n')\psi}{4EI_{n'}\sigma'_f \varepsilon'_f} (\Delta K_I - \Delta K_{th})^2, \quad (4.45)$$

$$N = \frac{4EI_{n'}\sigma'_f \varepsilon'_f a_f}{(1 - n')\psi a_0} \int \frac{da}{(\Delta K_I - \Delta K_{th})^2}$$

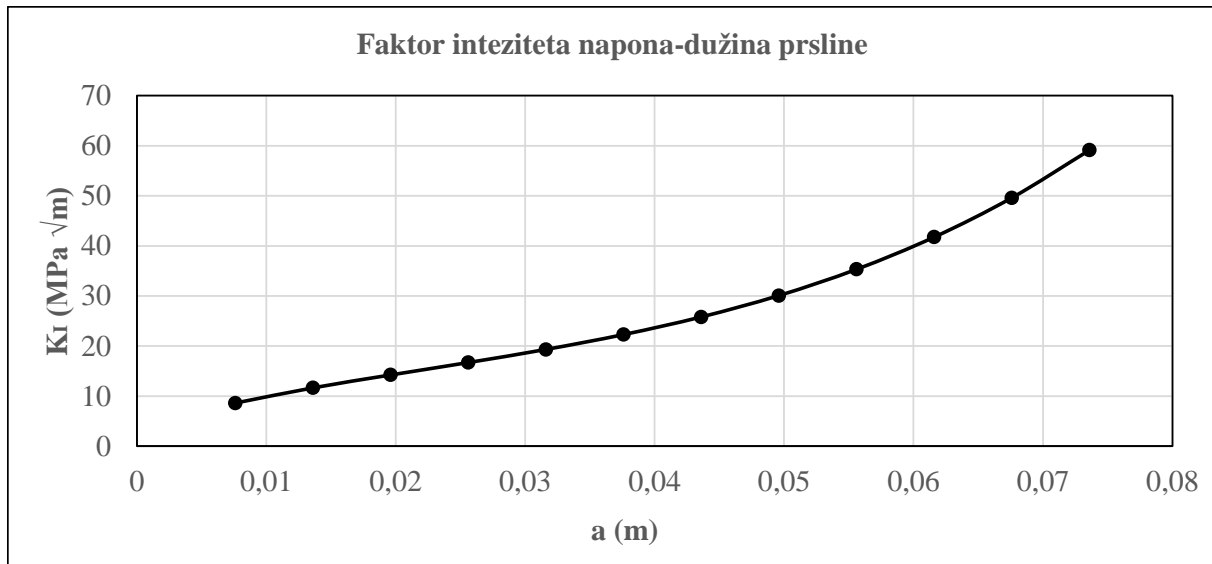
Ovdje se razmatra primjer koji je opisan u radu [18] pri čemu je  $n'$  eksponent deformacionog ojačanja,  $I_{n'}$  i  $\psi$  konstante koje zavise od  $n'$ ,  $\sigma'_f$  koeficijent čvrstoće pri zamoru,  $\varepsilon'_f$  koeficijent duktilnosti pri zamoru,  $\Delta K_{th}$  donji prag žilavosti i  $E$  modul elastičnosti. U pitanju je ploča sa centralnom prslineom napravljena od legure aluminijuma Al 2219 T851. Spoljašnje

ciklično opterećenje je aksijalno sa gornjom amplitudom  $\sigma_{max}=55,16MPa$ . Za definisani maksimalni napon  $\sigma_{max}$  razmatra se stepen asimetrije ciklusa  $R=0$ . Geometrijske karakteristike ploče sa jednom centralnom prslinom su:  $b = 152,4mm$ ,  $a_0 = 7,6mm$ . Potrebne karakteristike analizirane Al legure pri dejstvu cikličnih opterećenje su:  $\sigma'_f=613 MPa$ ,  $\varepsilon'_f=0.35$ ,  $n'=0.121$ ,  $E=7,1 \times 10^4 MPa$ ,  $K_{1c}=120MPa m^{1/2}$ ,  $I_{n'}=3.067$ ,  $\psi=0,95152$  i  $\Delta K_{th}=8MPa m^{1/2}$ .

Rang faktora intenziteta napona se računa prema sljedećem izrazu [18],

$$\Delta K_I = \left( 1 + 0.256 \left( \frac{a}{b} \right) - 1.152 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 12.2 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right) \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.46)$$

Kao što je već spomenuto u prvom poglavlju faktor intenziteta napona je funkcija geometrijskih karakteristika i spoljašnjeg opterećenja. Na slici 4.10 se prikazuje promjena faktora intenziteta napona sa porastom prsline a za gore navedenu geometriju ploče i spoljašnje opterećenje.



Slika 4.10 Promjena faktora inteziteta napona sa porastom dužine prsline [18]

Poasonov koeficijent za aluminijum iznosi 0,33 a koeficijent tečenja se određuje izrazom (4.13) i iznosi 1,94. Sopstvena frekvencija ploče se određuje izrazom iz dinamike konstrukcija,

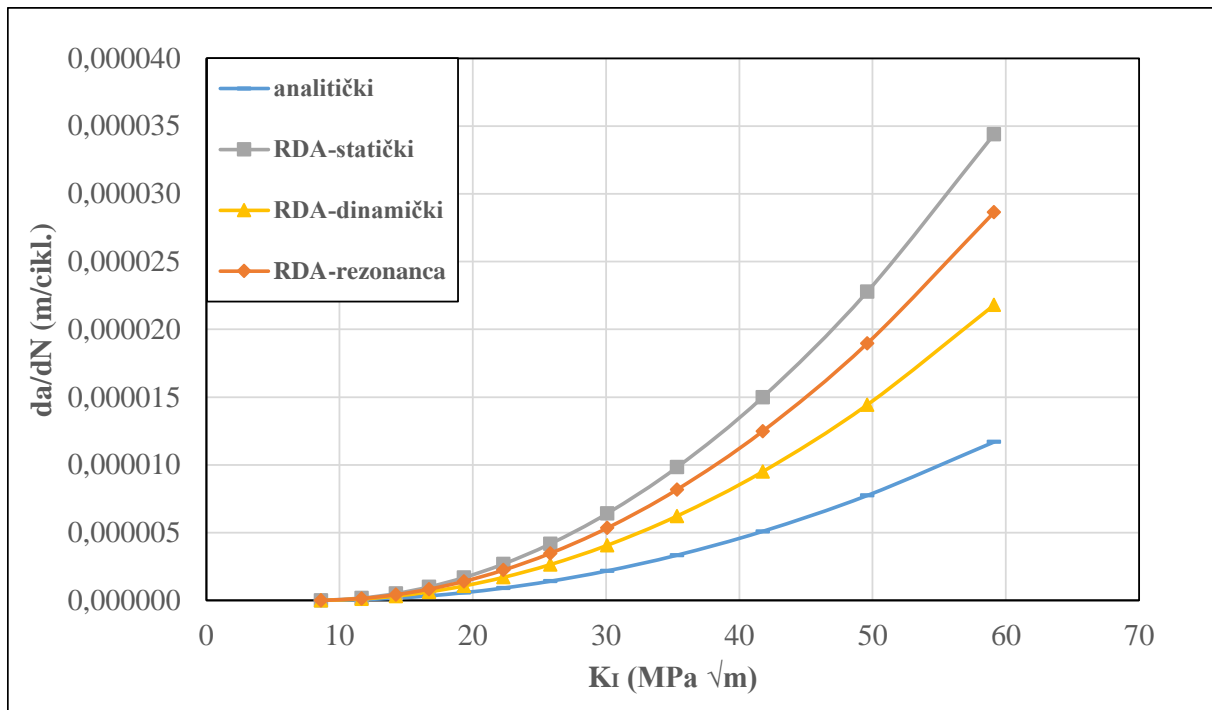
$$\omega = \sqrt{\frac{E_H g}{\gamma} \frac{1}{L}} = 15,66 \text{ rad/s} \quad (4.47)$$

pri čemu je na ovom primjeru usvojena dužina ploče od  $L = 1m$  i  $\gamma = 2840 kg/m^3$ . Frekvencija spoljašnjeg cikličnog opterećenja se prema teoriji izloženoj izrazima (4.45) ne uzima u razmatranje, pa se na ovom primjeru traži frekvencija spoljašnjeg opterećenja odnosno relativna frekvencija sistema za slučaj kada se broj ciklusa poklopi sa eksperimentalnom vrijednosti. Prema radu Milašinović D. D. [62] se u RDA teoriji izvodi povezivanje relativne frekvencije sa prigušenjem sistema koji je jedan od ključnih parametara dinamičke stabilnosti sistema. Konkretno se ovdje mogu analizirati četiri slučaja vezana za relativnu frekvenciju.

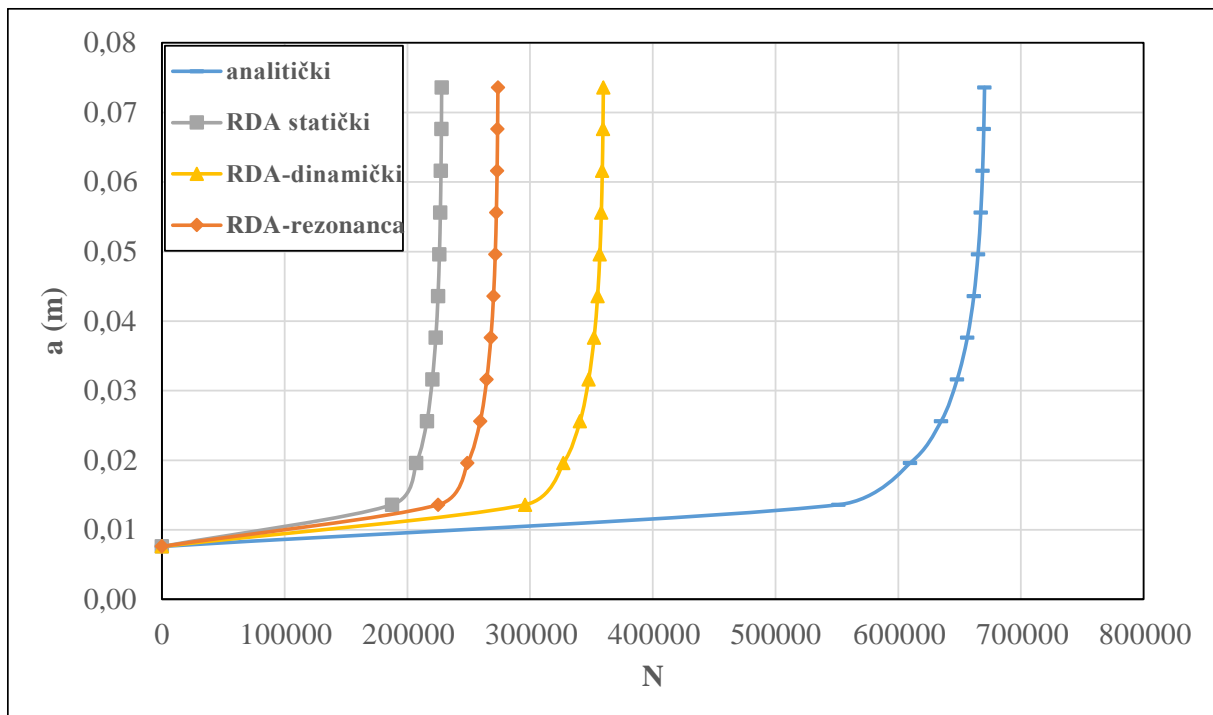
1.  $\delta = 0$  RDA statički slučaj
2.  $\delta = 1$  RDA rezonantni slučaj
3.  $\delta = 1,91$  RDA realan slučaj u skladu sa eksperimentom
4.  $\delta = \infty$  slučaj koji se poklapa sa analitičkim rješenjem

Vrijednosti statičkog modula elastičnosti za  $\delta = 0$  je  $E=24140MPa$ , a u slučaju relativne frekvencije  $\delta = 1,91$  koja odgovara vrijednosti spoljašnjeg opterećenja  $\omega_\sigma=30rad/s$  se dobija dinamički modul elastičnosti  $E_D=38097,784MPa$ . Za rezonantni slučaj se dobija  $E=28995,697MPa$ .

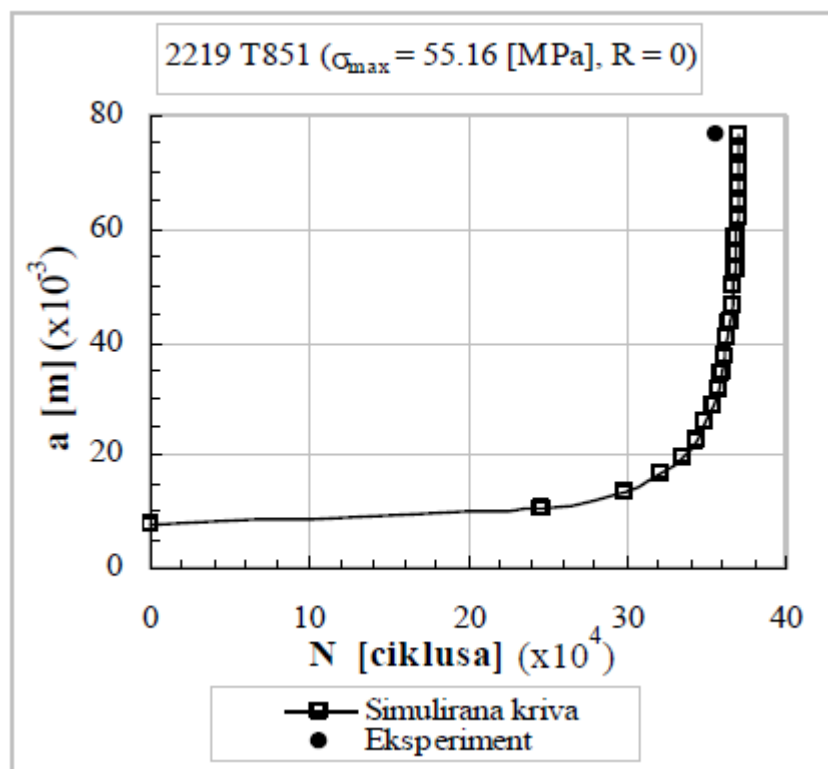
Prilikom određivanja broja ciklusa opterećenja do pojave loma razmatrane ploče sa prslinom u centru, prvo su izračunati faktori intenziteta napona primjenom jednačine (4.46) pa su određeni gradijenti širenja prsline za izabrane inkremente dužine prsline. Nakon određivanja gradijenata širenja prsline za izabrane inkremente dužine prsline tj. upotrebom integralne jednačine (4.45) moguće je procijeniti vijek odnosno odrediti broj ciklusa opterećenja do pojave loma. Pošto je podintegralna funkcija u jednačini složenog oblika prilikom određivanja broja ciklusa opterećenja do pojave loma korištena je metoda numeričke integracije upotrebom programa Wolfram Mathematica. Primjećuje se da u izrazu za faktor intenziteta napona ne ulazi dužina posmatrane ploče koja je primjenom reološko-dinamičke analogije uzeta u razmatranje preko izraza (4.47). Na slici 4.11 je data vrijednost dijagrama propagacije prsline i faktor intenziteta napona a na 4.12 dijagrami a-N za sva četiri slučaja prema RDA a na slici 4.13 su dati rezultati iz rada [18] sa eksperimentalnim brojem ciklusa.



Slika 4.11 Zavisnost gradijent širenja prsline i faktora intenziteta napona



Slika 4.12 Zavisnost dužine prsline od broja ciklusa



Slika 4.13 Analitički i ekeprimentalni rezultati propagacije prsline prema iz [18]

Sve dinamičke propagacije prsline prikazane dijagramom a-N se nalaze između RDA statičkog dijagrama i analitičkog dijagrama. Ovdje treba uzeti u obzir da je dužina ploče pretpostavljena a to ima uticaj na sopstvenu frekvenciju pa samim tim i na relativnu frekvenciju tj. prigušenje. Sa smanjivanjem dužine ploče sopstvena frekvencija se povećava a

ako bi spoljašnja bila konstanta onda bi se relativna frekvencija smanjila, a time bi sistem za manji broj ciklusa došao do loma. Iz izloženog primjera vidi da zamjena modula elastičnosti u jednačini (4.45) sa RDA modulom dovodi do poboljšanja postojeće teorije, jer se u čitavu analizu uključuje frekvencija spoljašnjeg opterećenja i sopstvena frekvencija koji su bitni parametri za dinamičke procese.

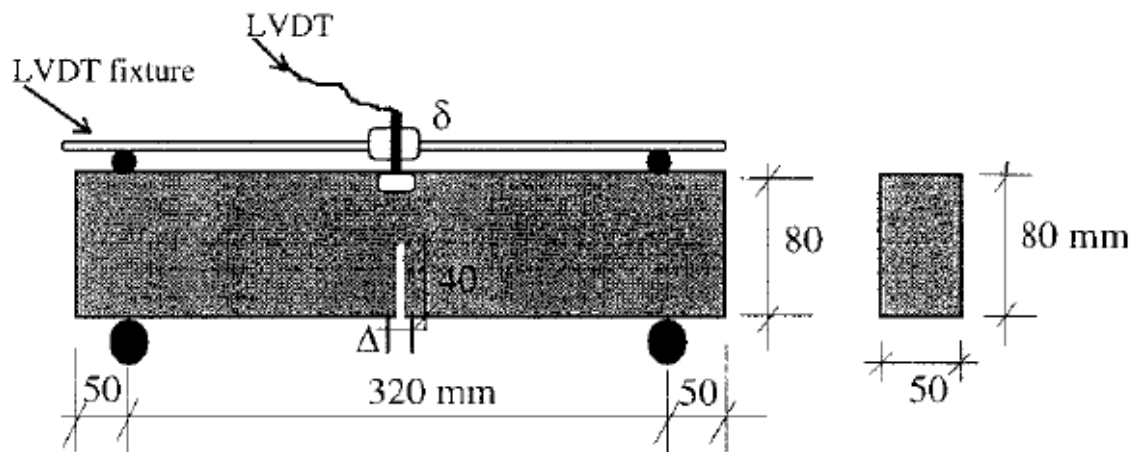


## 5 NUMERIČKI PRIMJERI

Metoda kojim se opisuje propagacija prslina u betonu pomoću RDA opisana u prethodnom poglavlju se verifikuje kroz različite numeričke primjere koji su prikazani u ovome poglavlju. Rezultati eksperimentalnih ispitivanja su preuzeti iz literature od strane nekoliko autora koji su ispitivali probleme zamora savijanjem u tri tačke betonskih greda sa inicijalnom prslinom. Eksperimentalna ispitivanja za savijanje grede u tri tačke koja je bez inicijalne prsline (poglavlje 5.4) su sprovedena u laboratoriji građevinskog fakulteta u Kaiserslauternu-Njemačka. Numerički primjeri se odnose na betonske grede napravljene od betona normalne i visoke čvrstoće kao i mikroarmiranog betona i različitih odnosa raspona prema visini grede  $S/D$ .

### 5.1 Propagacija prsline u betonskm gredama dimenzija $S/D=4$ sa varijacijom amplitude cikličnog opterećenja

Eksperimentalna ispitivanja za ovaj primjer su data u radu Toumi A. i ostali [87]. Ispitane su betonske grede sa dimenzijama na slici 5.1.



Slika 5.1 Dimenzije betonske grede [87]

Prije samog testa sa cikličnim opterećenjem sprovedeni su statički testovi do loma na 10 greda i dobijena je srednja vrijednost maksimalne sile u iznosu od  $P_u=920N$ . Nakon toga su urađeni testovi sa cikličnim sinusoidnim opterećenjem i to sa različitim gornjim amplitudnim vrijednostima sile gdje je za test korištena ista vrijednost donje granice za silu. Ovdje su razmatrani slučajevi sa gornjim amplitudama u iznosu od  $0,87P_u$ ,  $0,81P_u$  i  $0,76P_u$  pri čemu je minimalna vrijednosti sile  $0,23P_u$ . Na osnovu toga i koeficijent asimetrije opterećenja  $R=P_{min}/P_{max}$  ima vrijednosti  $0,264$ ,  $0,284$ , i  $0,302$ . Frekvencija spoljašnjeg opterećenja iznosi  $1Hz$ . Sve grede imaju iste dimenzije pri čemu odnos raspona prema visini grede iznosi  $4$ . Karakteristike betona su  $E=31600MPa$ ,  $\mu=0,18$ , pritisna čvrstoća betonskih cilindara dimenzija  $l_0/\phi = 236mm/118mm$  iznosi  $56,9MPa$ , zatežuća čvrstoća betona je  $4,2MPa$ . U eksperimentu je korišten lomljeni agregat sa maksimalnom veličinom zrna  $2,5mm$ .

### 5.1.1 Parametri mehanike loma

Vrijednosti žilavosti betona odnosno energije loma, koja je ključni parametar kako kod primjene Parizovog zakona tako i kod primjene RDA teorije je data u radu Toumi A. i ostali [87] i iznosi  $K_{IC}=19,92MPamm^{1/2}$  što primjenom jednačine (2.21) odgovara energiji loma  $G_F=0,0126 N/mm$  koja se dalje koristi kod RDA teorije. Treba spomenuti da se u radu Ray S. i Kishen J. M. C. [4] koristi isti eksperiment od Toumi A. i ostali [87] za potrebe verifikacije modifikovanog Parizovog zakona i pri tome koristi veća vrijednost energije loma u iznosu od  $0,07 N/mm$ , koja više odgovara vrijednosti dobijenoj prema CEB-FIP MC 90 [53]. U narednoj tabeli 5.1 se daje pregled proračuna energije loma prema formulama iz poglavlja 2, a koje su empirijskog karaktera i u funkciji čvrstoće betona.

Tabela 5.1 Proračun energije loma betona prema različitim formulama

$G_F = 73 \cdot f_{cm}^{0,18}$ prema [52]	$G_F = 0,151 N/mm$
$G_F = G_{F0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)^{0,7}$ prema [53]. Maksimalna veličina zrna je 2,5mm pri čemu su vrijednosti iz tabele 3.1 linearno interpolirane, $G_{F0} = 0,021$	$G_F = 0,071 N/mm$
$G_F = G_{F0} \ln\left(1 + \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)$ prema [56]. Za betonske mješavine upotrebljen je lomljeni agregat pa vrijedi $G_{F0} = 0,106 N/mm$	$G_F = 0,201 N/mm$
$G_F = G_{F0} \left(1 - 0,77 \cdot \frac{f_{cm0}}{f_{cm}}\right)$ prema [53]	$G_F = 0,156 N/mm$
$G_F = G_{F0} \cdot \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)^{0,18}$ prema [53]	$G_F = 0,150 N/mm$

Kao što se vidi u prethodnoj tabeli energija loma u iznosu od  $0,071 N/mm$  je najbliža energiji koja je data u radu Toumi i ostali [87]. To je slučaj prema CEB-FIP Model Code 1990 [53] gdje energija loma zavisi od veličine zrna agregata tj. vrijednosti  $G_{F0}$  koja se dobila interpolacijom. Prema ostalim izrazima se dobijaju veće vrijednosti energije loma što je posljedica veće veličine zrna agregata. Kod eksperimentalnih ispitivanja greda sa zarezom uticaj veličine zrna agregata je veoma bitan parametar.

Pored prethodnih izraza energija loma se može izračunati na osnovu prethodno sračunate karakteristične dužine prsline kao što je dato u radu [24],

$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2} = 110 \cdot a_d \cdot f_c^{-0,3} = 110 \cdot a_d \cdot 56,9^{-0,3} \quad (5.1)$$

pri čemu su vrijednost za koeficijent  $a_d$  dobijene linearnom interpolacijom vrijednosti prema tabeli 5.2. U tabeli 5.2 su takođe prikazane karakteristične dužine prema jednačini (5.1) i prema relaciji Irwina (2.26). Za veličinu zrna agregata od  $2,5mm$  dobija se karakteristična dužina prsline u iznosu od  $85,7mm$ , a onda energija loma iznosi  $0,048 N/mm$ . Kao što se vidi karakteristična dužina prsline je veća od visine grede pa je i primjena prethodne relacije ograničena tj. dosta zavisi od veličine zrna agregata tj. određivanja empirijskog koeficijenta  $a_d$ .

Tabela 5.2 Karakteristične dužine prsline

Veličina zrna agregata (mm)	$a_d$	$l_{ch}$ (mm)	$d_p$ (mm)
8	4	130,89	41,66
16	6	196,30	62,48
32	10	327,23	104,16

Na ovome primjeru se čvrstoća betona ispitivala na betonskim cilindrima dimenzija  $l_0/\phi = 236mm/118mm$  pa se ovdje sprovodi proračun energije loma i koeficijenta  $K_E$  prema RDA tj. pomoću jednačina za betonski cilindar koje su date u radu Milašinović .D.D. [76],

$$\varphi = \frac{2\mu}{1-2\mu} = \frac{2 * 0,18}{1 - 2 * 0,18} = 0,56$$

$$E(0) = E_H(1 + \varphi) = 31600 * (1 + 0,56) = 49375MPa$$

$$A_0 = \frac{\pi\phi^2}{4} = \frac{3,14 * 118^2}{4} = 10930,34mm^2$$

$$I = \frac{\pi\phi^4}{64} = \frac{3,14 * 118^4}{64} = 9512128,385mm^4$$

$$i = \frac{\phi}{4} = \frac{118}{4} = 29,5mm$$

$$\lambda_0 = \frac{l_0}{i} = \frac{236}{29,5} = 8$$

$$\frac{i^3}{I} = \frac{1}{\pi\phi} = 0,026989cm^{-1}$$

$$\gamma_g = 2350kg/m^3 \text{ - pretpostavka}$$

$$f_y = 1,37 \text{ - pretpostavljaju se isti eksperimentalni uslovi kao u radu [76].}$$

$$\gamma = f_y \gamma_g = 1,37 * 2350,00 = 3219,5 kg/m^3$$

$$\lambda_E = \pi^2 \frac{i^3}{I} \frac{1}{\gamma\varphi} = \pi^2 * 0,026989 \frac{1}{3,22 * 10^{-3} * 0,56} = 147,57$$

$$K_E = \lambda_E \frac{i^3}{I} \frac{1}{E_H \gamma} = 147,57 * 0,026989 * \frac{1}{31600 * 3,22 * 10^{-3}} = \mathbf{0,039}$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{E(0)} (1 + \sigma_{cr} K_E) = \frac{56,9}{49375} (1 + 56,9 * 0,039) = 0,00371$$

$$\varepsilon_{crF} = \varepsilon_{cr}(1 + \varphi) = 0,00371 * (1 + 0,56) = 0,00579$$

$$G_F = \left[ \frac{56,9^2}{2 * 31600} + 56,9 * (0,00579 - 0,00371) \right] * 236 = \mathbf{40,02N/mm}$$

Energija loma betona dobijena pri pritisku prema RDA u iznosu od  $40,02N/mm$  je dosta veća od energije loma zatezanjem koje se mogu dobiti eksperimentalnim mjerenjem žilavosti greda na savijanje ili izrazima iz tabele 5.2. Pritisna energija loma prema RDA zavisi od čvrstoće na pritisak, ali i od kritične i maksimalne deformacije, pa je radni dijagram betona neophodan ulazni parametar. Čvrstoća betona na pritisak se obično određuje na kockama ili cilindrima koji uglavnom zavise od propisa imaju odnos strana od 1 do 2. Milašinović D. D. [76] je posmatrao betonske cilindre kao stubove mijenjajući vitkost preko visine cilindra i pokazao da sa opadanjem vitkosti ispod 15 kritični napon ostaje jednak čvrstoći na pritisak. Kod savijanja greda je slika napona u pritisnutom dijelu betonskog presjeka drugačija pa se postavlja pitanje, koliko pritisne energije stoji na raspolaganju. Sa razvojem prsline opada visina pritisnutog djela presjeka pa se time može reći da dolazi do povećanja vitkosti pritisnutog dijela, a to ujedno dovodi do opadanja kritičnog napona, što prema RDA dalje dovodi do opadanja pritisne energije loma. To pokazuje da i pritisna energija loma nije konstanta vrijednost kao što se to pretpostavlja u LEFM. Pored toga zavisnost napona u betonu od visine grede još dodatno otežava ovaj problem. Međutim kao što se vidi iz tabele 5.2 energija loma zatezanjem ima dosta manje vrijednosti nego pritisna pa ostaje mjerodavna za dalja razmatranja kod zamora i pri tome se usvaja kao konstantna veličina, što je u skladu sa LEFM.

Kao što je već spomenuto prema jednačini (5.1) dobija se karakteristična dužina u zavisnosti od zrna agregata iznosu od  $85,9mm$ . Prema Hillerborg-u [31] tj. primjenom jednačine (2.25) dobija se

$$l_{ch} = \frac{19,92^2}{4,2^2} = 22,5mm \quad (5.2)$$

Prema Irwin-u [9] - jednačina (2.26) dužina procesne zone FPZ - (*fracture process zone*) za betone je,

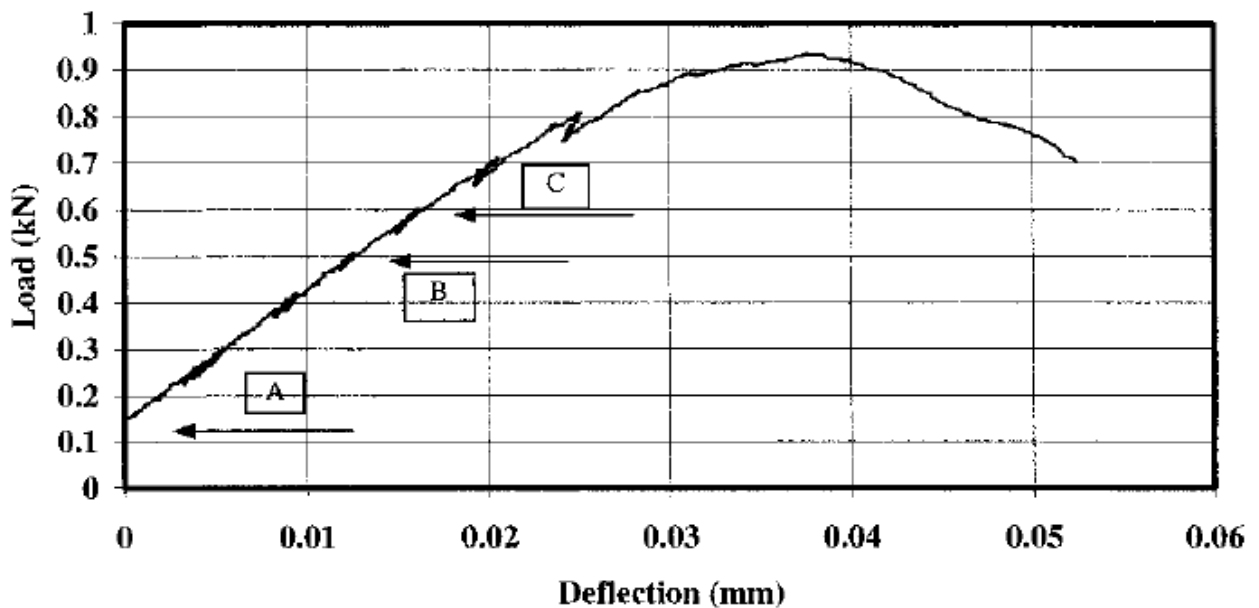
$$d_p = \frac{l_{ch}}{\pi} = \frac{22,5}{\pi} = 7,16mm \quad (5.3)$$

Prema prijedlogu Hillerborg-a se navodi tipična vrijednost karakteristične dužine za beton od  $l_{ch}=200mm$ . Dužina procesne zone se kreće od  $7,16mm$  do čak  $104,16mm$  iz tabele 5.2. ali ako usvojimo donju granicu iz tabele 5.2 u iznosu od  $41,66mm$ , to bi odgovaralo polovini visine grede.

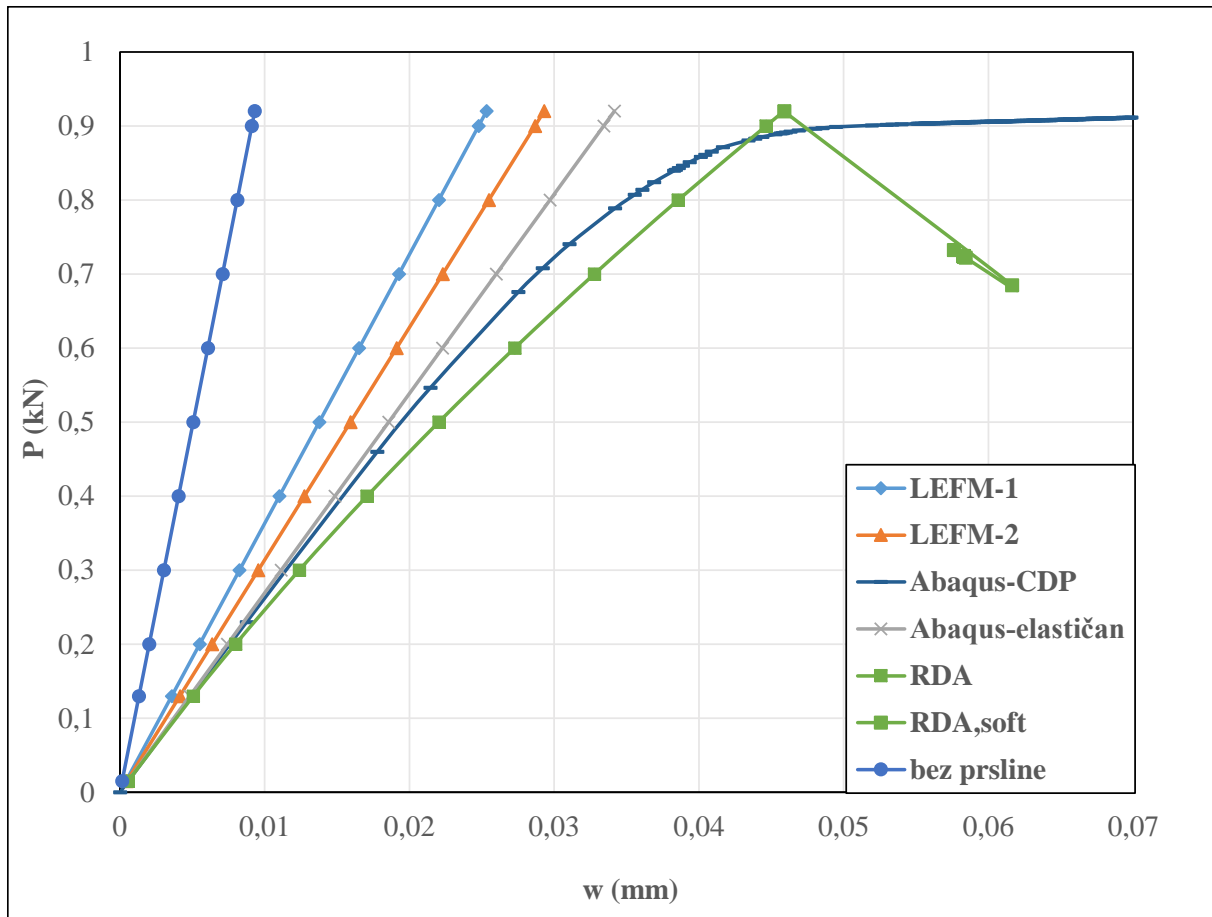
Prethodnom analizom se pokazuje koliko parametri mehanike loma imaju širok opseg rezultata u zavisnosti od primjene različitih teorija koje uglavnom na osnovu eksperimentalnih rezultata primjenjuju različite empirijske koeficijente. Pošto zatežuća energija prema RDA nije definisana, a pritisnuta energija loma je zasnovana na globalnoj analizi i uglavnom nije mjerodavna za analizu greda sa inicijalnom prsline ostaje da se u ovaj proračun koriste zatežuće energije loma dobijene eksperimentalno ili pomoću neke od prikazanih formula a to se pokazuje još i na narednim primjerima.

### 5.1.2 Statički test

Kao što je već spomenuto za potrebe ispitivanja problema zamora na betonskim gredama često se sprovode statički testovi na gredama da bi se odredili neki ulazni parametri neophodni za analiziranje zamora. Na ovom primjeru je sprovedeno upoređivanje nekoliko pristupa sa izmjerenim rezultatima na dijagramu sila-ugib u sredini grede. Na slici 5.2 prikazana je eksperimentalna kriva iz rada [87] a na slici 5.3 su prikazani dijagrami dobijeni prema linearno elastičnoj mehanici loma LEFM-*linear elastic fracture mechanic*, prema RDA teoriji (reološko-dinamička analogija), numerički proračun u Abaqusu na elastičnom modelu (Abaqus-elastičan-oštećen), prema modelu *Concrete Damage Plasticity* (u daljem tekstu CDP) i analitički pristup prema otpornosti materijala ali za gredu bez inicijalne prsline prema izrazu (4.25). Dalje slijede objašnjenja za svaki proračun.



Slika 5.2 Eksperimentalna kriva sila-ugib iz rada [87]



Slika 5.3 Dijagrami sila-ugib grede prema različitim teorijama

### Sila-ugib prema LEFM

Prema linearno elastičnoj mehanici loma se uz vrijednost ugiba neoštećene grede dodaje uticaj prsline (oštećenja) i na sličan način kao kod faktora intenziteta napona kod računanja ugiba se uvode geometrijske funkcije, pa je ukupan ugib dat prema sledećoj formuli,

$$w_e = w_0 + w_{prstine} = \frac{PS^3}{48EI} + w_{prstine} \quad (5.4)$$

pri tome su prikazane dvije varijante zavisno od toga koja formula za proračun  $w_{prstine}$  se koristi. Na gornjem dijagramu LEFM1 se odnosi na proračun ugiba od prsline kod grede  $S/D=4$  prema formuli (5.5) prema radu Šumarac D., Sekulović M., Krajčinović D. [88],

$$w_{prstine} = \frac{9P\pi S^2}{2BD^2E} \int_0^\alpha \alpha [F_P(\alpha)]^2 d\alpha$$

$$F_P(\alpha) = 1,107 - 2,120 \alpha + 7,71\alpha^2 - 13,55\alpha^3 + 14,25\alpha^4 \quad (5.5)$$

$$\alpha = a/D$$

$$w_{prstine} = \frac{9P\pi S^2}{2BD^2E} [0,61\alpha^2 - 1,56\alpha^3 + 5,39\alpha^4 - 12,54\alpha^5 + 24,74\alpha^6 - 38,48\alpha^7 + 50,42\alpha^8 - 42,91\alpha^9 + 20,31\alpha^{10}]$$

Integracija prethodne jednačine je izvršena pomoću programa Wolfram Mathematica.

Kod druge varijante LEFM2 se dio ugiba od prsline računa prema sledećoj formuli (5.6) iz rada Šumarac D. i Krajčinović D. [11],

$$w_{prslina} = \frac{6M}{EBD^2} SV(\alpha)$$

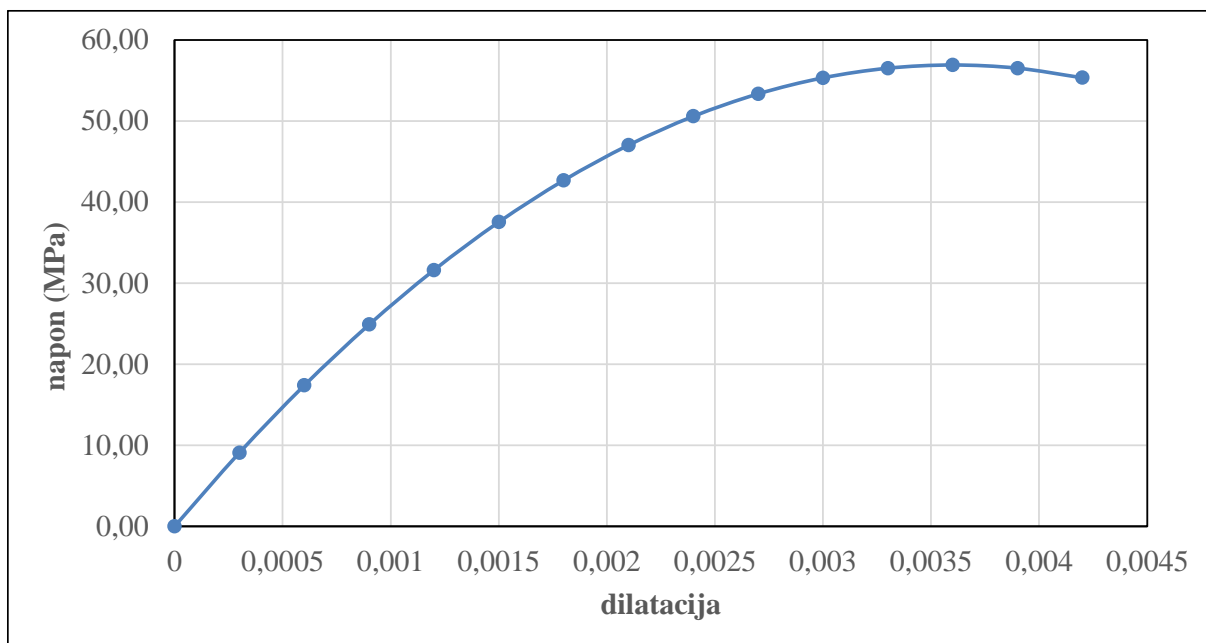
$$V(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 (5,58 - 19,57 \alpha + 36,82\alpha^2 - 34,94\alpha^3 + 12,77\alpha^4) \quad (5.6)$$

$$M = \frac{PS}{4}$$

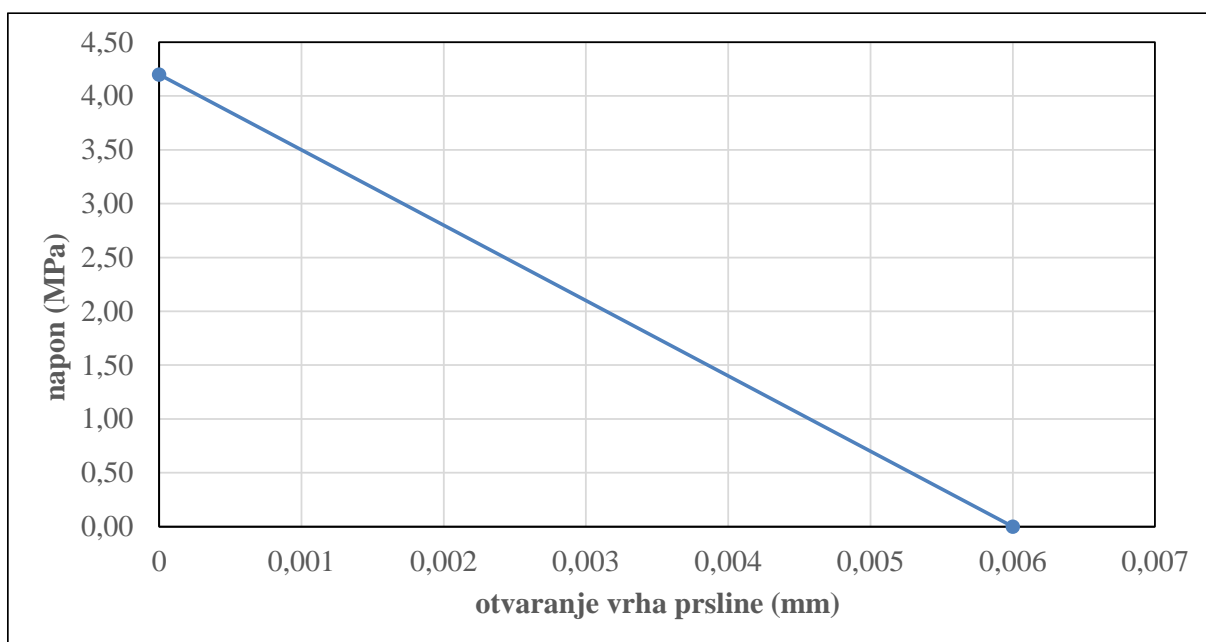
Kao što se vidi kod oba pristupa se za kontrolisani unos sile do njene maksimalne vrijednosti i konstantnu vrijednost relativne dužine prsline  $\alpha$  se dobija linearna funkcija sila-ugib. Razlika između ove dvije linije je posljedica različitih oblika geometrijskih funkcija koje se javljaju u izrazima.

### **Sila-ugib prema Concrete Damage Plasticity-CDP**

Kod primjene CDP (*Concrete Damage Plasticity*) teorije u programu Abaqus su neophodni ulazni parametri kako za pritisak tako i za zatezanje betona. Na osnovu preporuka za normalni beton iz (Abaqus Theory Manual-6.12) [89]. i (fib Model Code for Concrete Structures 2010) [52] su korišteni sledeći parametri: ugao dilatancije 40; ekscentricitet 0,1;  $f_{bo}/f_{bc}=1,16$ ;  $k=0,67$ , parametar viskoznosti je 0,0001. Naponi tečenja kao i neelastična deformacija su dobijeni su sa radnog dijagrama betona za pritisak koji se može odrediti prema (fib Model Code for Concrete Structures 2010) [52], slika 5.4. Dijagram zatezanje-otvaranje vrha prsline se pokazao kao veoma osjetljiv na rezultate prema CDP modelu pa je zbog mogućnosti izvršenja proračuna u Abaqusu usvojena linearna zavisnost sa maksimalnom vrijednosti otvaranja vrha prsline u iznosu od 0,006mm (slika 5.5). Prema fib Model Code for Concrete Structures 2010 [52] se razmatra bilinearni dijagram (slika 2.15) kod koga se vrijednosti otvaranja vrha prsline računaju pomoću energije loma (0,0126 N/mm) i napona zatezanja (4,2 N/mm<sup>2</sup>). Ako se primjene izrazi sa slike 2.15 onda se dobijaju sledeće vrijednosti otvaranja vrha prsline 0,0126/4,2=0,003mm i 5x0,0126/4,2=0,015mm. Pretpostavljena vrijednost otvaranja vrha prsline u iznosu od 0,006mm se nalazi između vrijednosti 0,003mm i 0,015mm pa se je izbor linearnog zakona opravdan. U proračunu je korišten je trougaoni konačni element CPS6M iz Abaqus-ove baze. Kod ovog modela je pored definisanja radnih dijagrama usvajanje viskoznog parametara od ključnog značaja ne samo zbog brzine proračuna već iz zbog njegovog uticaja na rezultate. Što je manja vrijednost to je rezultat realniji ali je vrijeme računanja duže.



Slika 5.4 Radni dijagram za pritisak kod upotrebe CDP



Slika 5.5 Dijagram zatezanje-otvaranje vrha prsline kod upotrebe CDP

Pored CDP prikazani su rezultati sila-ugib za gredu sa početnom prslinom modeliranu u Abaqus-u ali za idealno elastičan materijal. Pri tome se koristi ista mreža konačnih elemenata kao kod CDP modela.

### Sila-ugib prema RDA

Proračun ugiba prema RDA je opisan u poglavlju 4.8. Lokalni karakter problema prema RDA se unosi preko napona u vrhu prsline koji se dobija primjenom metode konačnih elemenata modeliranjem u Abaqus-u pa se stoga upotreba faktora intenziteta napona na ovome primjeru izostavlja. Proračun uzlazne grane je dat u tabeli 5.3 a silazne grane u tabeli 5.4.



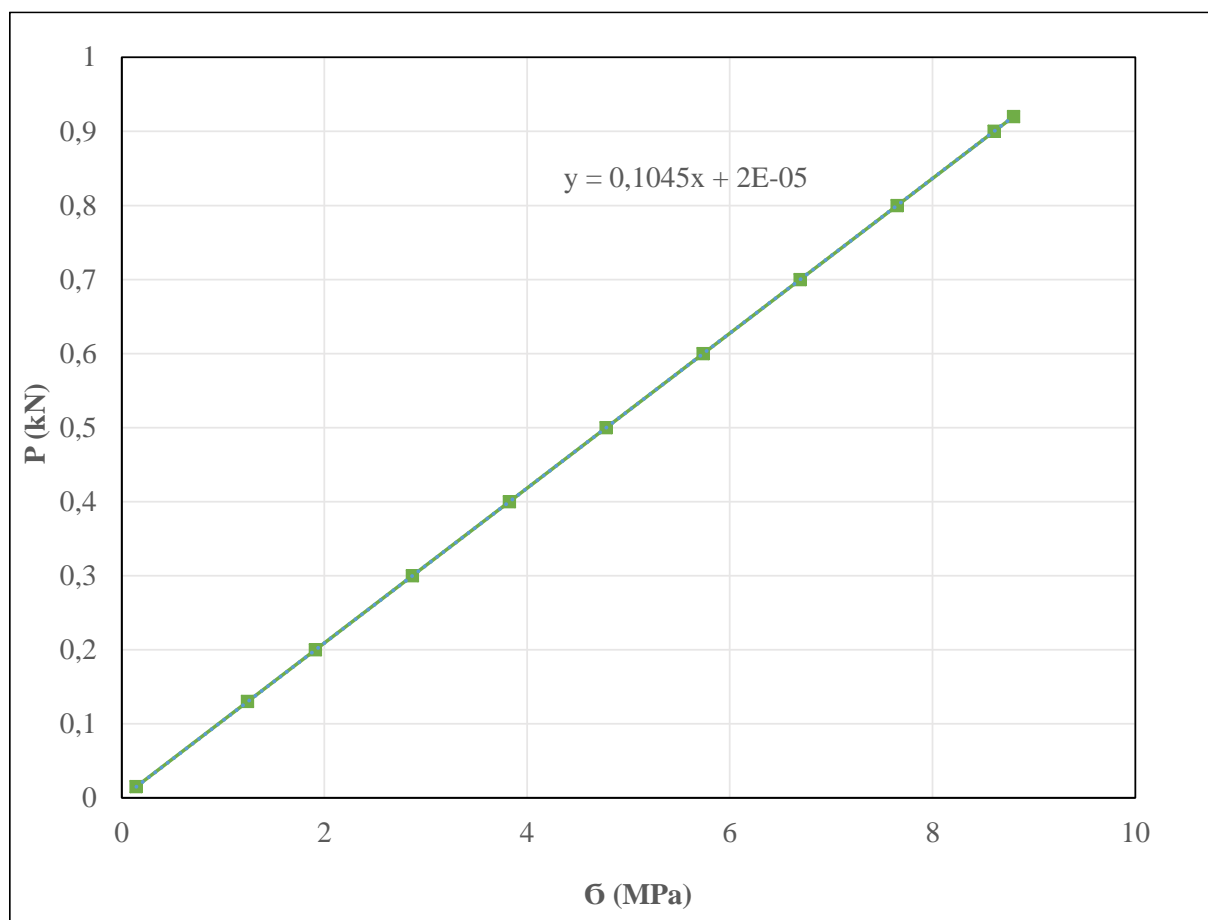
Tabela 5.3 Računanje ugiba grede prema RDA - uzlazna grana

P (kN)	$\bar{\sigma}_{vrh}$ (N/mm <sup>2</sup> ) Abaqus	w <sub>el</sub> (mm) Abaqus	E (N/mm <sup>2</sup> )	K <sub>E</sub>	φ	WRDA (mm)
0,015	0,14	0,0006	31600	0,039	0,01	0,0006
0,13	1,24	0,0048	31600	0,039	0,05	0,0051
0,20	1,91	0,0074	31600	0,039	0,07	0,0080
0,30	2,87	0,0111	31600	0,039	0,11	0,0124
0,40	3,83	0,0149	31600	0,039	0,15	0,0171
0,50	4,78	0,0186	31600	0,039	0,19	0,0220
0,60	5,74	0,0223	31600	0,039	0,22	0,0273
0,70	6,70	0,0260	31600	0,039	0,26	0,0328
0,80	7,65	0,0297	31600	0,039	0,30	0,0386
0,90	8,61	0,0334	31600	0,039	0,34	0,0446
0,92	8,80	0,0342	31600	0,039	0,34	0,0459

Tabela 5.4 Računanje ugiba grede prema RDA - silazna grana

K <sub>E</sub>	$\bar{\sigma}_{vrh,soft}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\varphi_{soft} = K_E * \bar{\sigma}_{vrh,soft}$	P <sub>soft</sub> = 0,104* $\bar{\sigma}_{vrh,soft}$ (kN)	WRDA <sub>,soft</sub> (mm)
0,039	8,80	0,3430	0,92	0,0459
0,039	6,55	0,2554	0,68	0,0616
0,039	7,01	0,2732	0,73	0,0576
0,039	6,91	0,2694	0,72	0,0584
0,039	6,93	0,2702	0,72	0,0582
0,039	6,93	0,2701	0,72	0,0583
0,039	6,93	0,2701	0,72	0,0583
0,039	6,93	0,2701	0,72	0,0583
0,039	6,93	0,2701	0,72	0,0583
0,039	6,93	0,2701	0,72	0,0583
0,039	6,93	0,2701	0,72	0,0583
0,039	6,93	0,2701	0,72	0,0583

Veza između napona u vrhu prsline i sile u sredini grede se koristi kod proračuna silazne grane, a prikazana je na sledećem dijagramu. Pored toga primjenom izraza (4.21) za vezu skalarnih varijabli oštećenja i koeficijenta tečenja moguće je izračunati kritičnu vrijednost ove varijable i ona iznosi  $0,34/(1 + 0,34) = 0,25$ .



Slika 5.6 Veza između napona u vrhu prsline i sile u sredini grede

### 5.1.3 Uticaj mreže konačnih elemenata na proračun napona u vrhu prsline

Da bi se provjerilo koliki uticaj na proračun napona ima gustina mreže konačnih elemenata kao i tip konačnog elementa u tabeli 5.5 se za slučaj statičkog testa pri maksimalnoj vrijednosti sile od 920N očitavala vrijednost napona u vrhu prsline dobijena u Abaqus-u.

Tabela 5.5 Uticaj gustine mreže i tipa konačnog elementa na rezultate

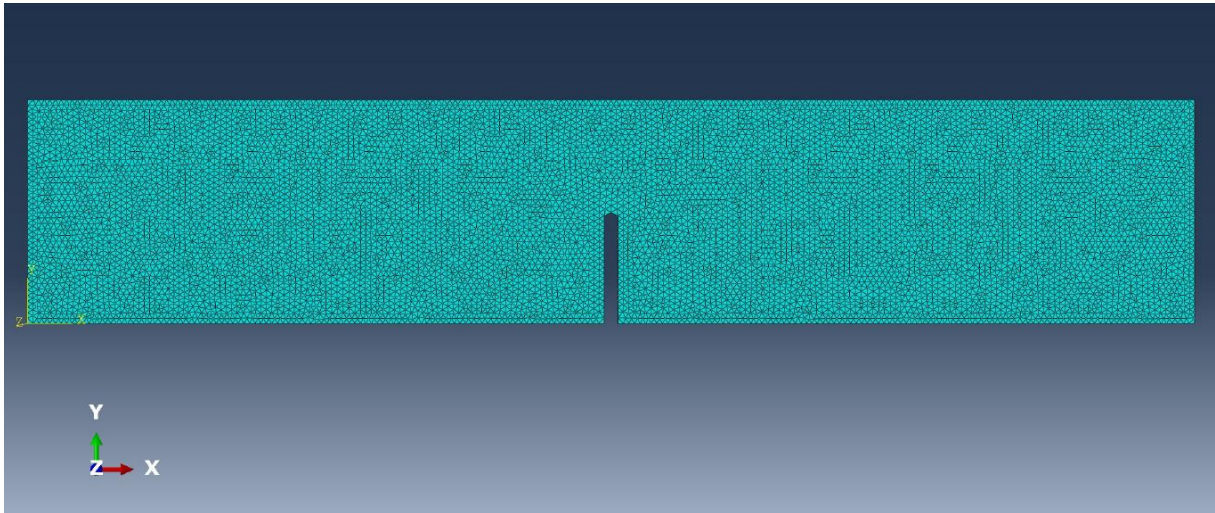
Broj elemenata	napon u vrhu prsline (MPa)	tip konačnog elementa
2866	7,5	CPS3-trougaoni
17116	8,8	CPS3-trougaoni
69092	12,3	CPS3-trougaoni
271578	16,8	CPS3-trougaoni
10144	8,0	CPS4R-četverougaoni
41608	11,0	CPS4R-četverougaoni

Modeliranje u Abaqus-u je analizirano kao slučaj ravnog stanja napona na elastičnom modelu koji zahtjeva poznavanje dvije materijalne konstante: Modul elastičnosti i Poasonov koeficijent. Razmatrani su standardni trougaoni i četvorougaoni konačni elementi iz Abaqus-ove palete. Pošto se na modelu grede razmatra prvi mod otvaranja prsline kao rezultat očitava se napon upravan na prslinu i to kao vrijednost sa pragom osrednjavanja od 75%. Zbog singularnosti vrha prsline potrebno je i rezultate koji se očitavaju u Abaqusu pažljivo posmatrati. Naime konačni elementi u Abaqusu imaju definisane tačke integracije u kojima se računaju vrijednosti napona, deformacija ili nekih drugih varijabli. Nakon dobijanja rezultata za dalje vizuelno prikazivanje rezultata sprovodi se ekstrapolacija između ovih tačaka kako bi se došlo do rezultata u čvorovima elemenata. Numerička interpolacija i ekstrapolacija su pojmovi iz numeričke matematike koji se primjenjuju na nekom skupu tačaka za koje je potrebno analitički definisati funkciju s tim da je ekstrapolacija nešto komplikovanija procedura. Red ekstrapolacije u Abaqus-u zavisi od tipa konačnog elementa pa se koriste linearna i ekstrapolacija drugog reda. Vrijednosti napona i deformacija su tenzorske veličine koje su ekstrapolirane u čvorovima pa je njihova konverzija u skalarne vrijednosti može uraditi prije i poslije osrednjavanja vrijednosti. U Abaqus-u se koristi najčešće konverzija prije osrednjavanja pa se tako za svaki čvor elementa dobija ekstrapolirana skalarna vrijednost a onda se sračuna srednja vrijednost u čvorovima mreže. Kod ovoga načina se može definisati i prag osrednjavanja koji se procentualno izražava. Ako je relativna razlika između vrijednosti koje se sabiraju u jednom čvoru veća onda nema osrednjavanja rezultata [89]. Prag osrednjavanja kontroliše osrednjavanje susjednih elemenata i za vrijednost od 0% nema osrednjavanja dok za vrijednost 100% su svi rezultati osrednjeni. Što je viši prag osrednjavanja to se dobijaju ujednačeni rezultati bez diskontinuiteta. U narednoj tabeli 5.6 su prikazani rezultati napona u vrhu prsline za istu silu kao iz tabele 5.5 ali sa variranjem praga osrednjavanja i tipa ekstrapolacije. Pri ovoj analizi se koristi 17116 trougaonih konačnih elemenata sa šest stepeni slobode pomjeranja CPS3.

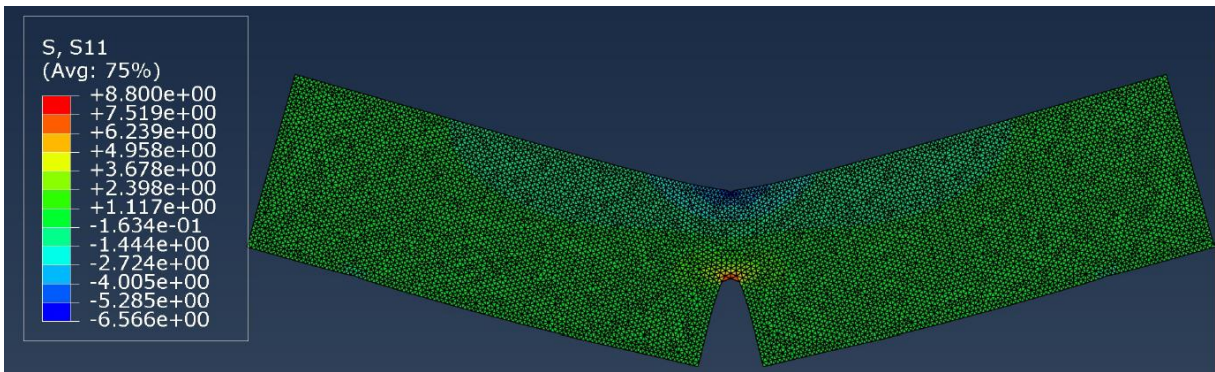
*Tabela 5.6* Uticaj praga osrednjavanja i reda ekstrapolacije na rezultate napona u vrhu prsline u Abaqus-u

Stepen osrednjavanja (%)	napon u vrhu prsline (MPa)
0% i linearna ekstrapolacija	11,00
75% i linearna ekstrapolacija	8,80
100% i linearna ekstrapolacija	8,80
0% i ekstrapolacija drugog reda	16,15
75% i ekstrapolacija drugog reda	14,32
100% i ekstrapolacija drugog reda	14,32

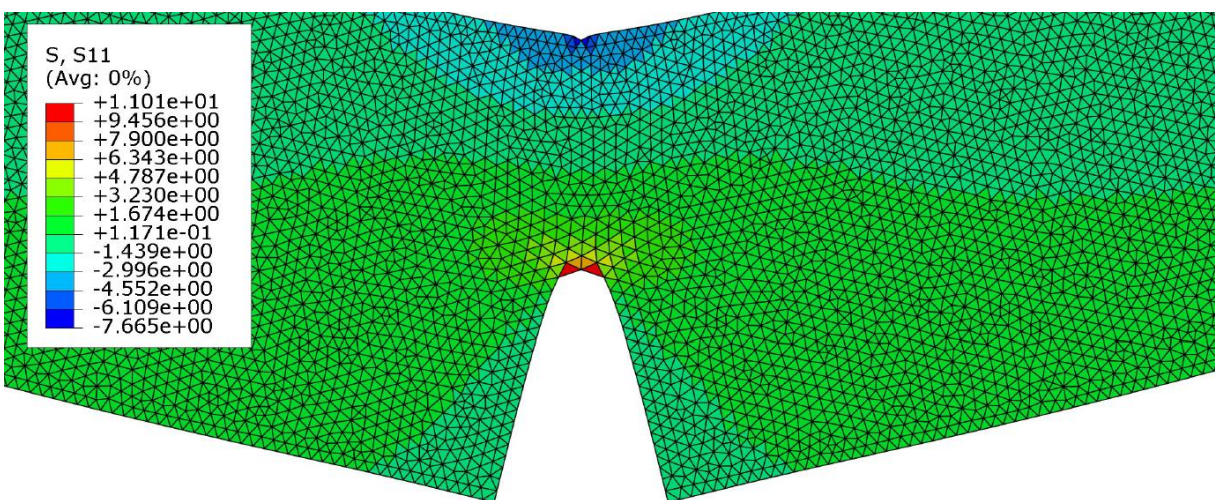
Na slici 5.7 prikazana je greda sa mrežom konačnih elemenata a na slikama 5.8, 5.9 i 5.10 prikazani rezultati za napone u vrhu prsline.



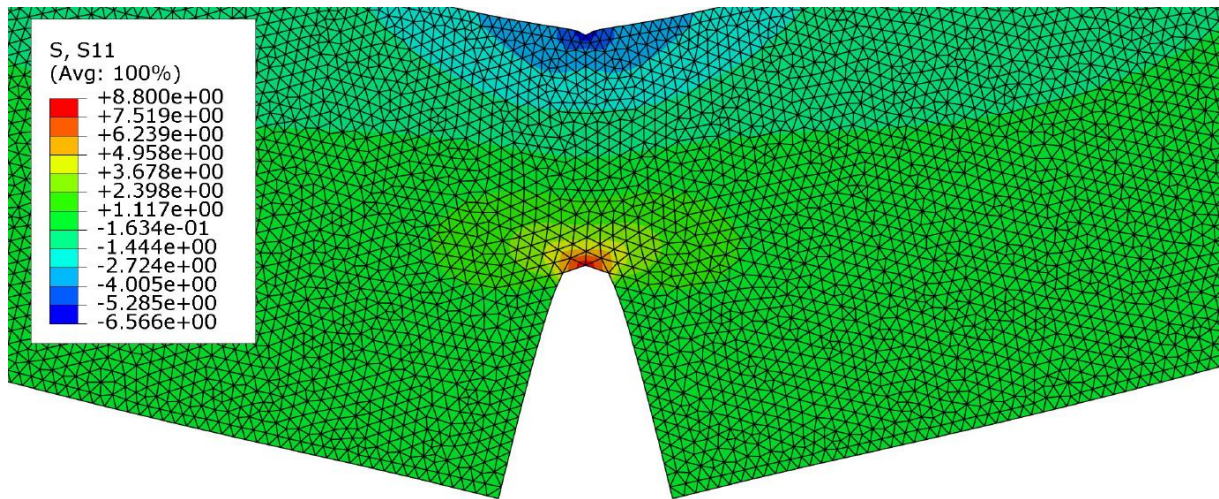
Slika 5.7 Greda sa mrežom konačnih elemenata



Slika 5.8 Slika napona u gredi pri maksimalnoj sili iz statičkog testa



Slika 5.9 Slika napona u vrhu prsline pri osrednjavanju od 0%-linearna ekstrapolacija



Slika 5.10 Slika napona u vrhu prsline pri osrednjavanju od 100%-linearna ekstrapolacija

Vrijednost napona dobijena preko formule iz otpornosti materijala pri primjeni redukovane visine poprečnog presjeka na mjestu prsline iznosi,

$$\sigma = \frac{M}{W} = 5,5 \text{ MPa}$$

$$M = \frac{PS}{4} \tag{5.7}$$

$$W = \frac{B(D - a_0)^2}{6}$$

pa može poslužiti orijentaciju kod određivanja veličine napona prema tabeli 5.4. Kao što se vidi vrijednost napona u vrhu prsline se ne mijenja znatno sa promjenom tipa konačnog elementa iz Abaqus-ove baze ali zato gustina mreže igra važnu ulogu u definisanju napona. Pored toga stepen osrednjavanja od 0% daje nešto veće napone ali i veće diskontinuitete. Ekstrapolacija drugog reda daje veće vrijednosti napona ali i duže vrijeme računanja isto kao i povećanje gustine mreže. Vrh prsline je modeliran kao što je to urađeno u eksperimentu tj. vrh ima nagib od  $60^\circ$  (slika 5.7). Naime pokazalo se da varijacija rezultata napona u vrhu prsline koji se dobijaju u Abaqus-u i za druge uglove tj. oblike vrha prsline ista kao na primjeru ove grede. Na eksperimentalnim analizama se zarez u gredi dobija najčešće ubacivanjem tanke pločice u oplatu prilikom betoniranja pa se vrh prsline oblikuje sa dvije oštre ivice što je slučaj na sledećim primjerima. Može se reći da se sve numerički dobijene vrijednosti napona u vrhu prsline nalaze između vrijednosti dobijene prema otpornosti materijala i beskonačne vrijednosti koju daje mehanika loma. Ako bi se napon računao pomoću formule iz mehanike loma onda bi se morao definisati određen razmak od vrha prsline da bi vrijednost bila konačna. U ovom slučaju za dobijanje napona prema izrazu (2.11) u iznosu od  $8,8 \text{ MPa}$  potrebno je usvojiti rastojanje od  $1 \text{ mm}$  jer je napon u vrhu prsline beskonačna vrijednost. Na ovom primjeru se koristi 17116 konačnih trougaonih elemenata (slučaj ravnog stanja napona - *Plane Stress*) sa šest stepeni slobode pomjeranja i linearna ekstrapolacija sa stepenom osrednjavanja od 75%, jer se to koristi u Abaqus-u kao preporučena vrijednost [89].

### 5.1.4 Propagacija prsline prema Parizovom zakonu

Na ovom primjeru se sprovodi proračun propagacije prsline i prema Parizovom zakonu za koji je neophodno imati eksperimentalne podatke kako bi se odredili koeficijenti  $C$  i  $m$ . Vrijednosti ovih koeficijenata su dati u narednoj tabeli 5.7, a Parizov zakon jednačinom (5.8). Da bi se odredio broj ciklusa u zavisnosti od dužine prsline sprovedena je numerička integracija jednačine (5.8) upotrebom programa Wolfram Mathematica (slika 5.10) Rezultati su prikazani u tabeli 5.8.

Tabela 5.7 Koeficijenti za Parizov zakon iz [87]

$P_{\max}/P_u$ (%)	87	81	76
$m$	4,18	2,31	2,25
$C$ ( $\mu\text{m}/\text{cycle}$ )	0,38	0,33	0,26

$$\frac{da}{dN} = C \left( \frac{\Delta K_I}{K_{IC}} \right)^m \quad (5.8)$$

```

For[i = 1, i < 43, i++,
  KIf = 19.92234926;
  C1 = 0.00033;
  n1 = 2.31;
  P1 = 501.12;
  b1 = 50;
  D1 = 80;
  l1 = 320;

  agornja = {{40}, {41}, {42}, {43}, {44}, {45}, {46}, {47}, {48}, {49}, {50}, {51}, {52}, {53}, {54}, {55},
    {56}, {57}, {58}, {59}, {60}, {61}, {62}, {63}, {64}, {65}, {66}, {67}, {68}, {69}, {70}, {71}, {72}, {73},
    {74}, {75}, {76}, {77}, {78}, {79}, {80}};

  Nciklus = Round[NIntegrate[
    
$$\frac{1}{C1 * \left( \frac{\left( \frac{3*P1+l1}{2*b1+D1} \right)^2 + \sqrt{a1} * \left( 1.93 - 3.07 * \frac{a1}{D1} - 14.53 * \left( \frac{a1}{D1} \right)^2 - 25.11 * \left( \frac{a1}{D1} \right)^3 + 25.80 * \left( \frac{a1}{D1} \right)^4 \right) } \right)^{n1}}, {a1, 40, agornja[[i, 1]]}]]

  Print[Nciklus]$$

```

Slika 5.11 Primjer proračuna broja ciklusa prema Parizovom zakonu upotrebom softvera Wolfram Mathematica za slučaj  $0,8IP_{\max}$

Tabela 5.8 Rezultati proračuna prema Parizovom zakonu

a(mm)	N-87%	N-81%	N-76%
0	0	0	0
1	13873	9530	14381,2
2	25562	18199	27495,2
3	35373	26068	39429,6
4	43578	33197	50268,6
5	50413	39641	60092,7
6	56086	45455	68978,9
7	60776	50688	77000,6
8	64641	55390	84227,6
9	67813	59607	90726,2
10	70408	63380	96558,9
11	72524	66750	101784
12	74244	69756	106458
13	75637	72431	110630
14	76762	74809	114350
15	77669	76919	117662
16	78398	78789	120606
17	78982	80444	123220
18	79449	81907	125537
19	79823	83199	127591
20	80120	84339	129409
21	80357	85344	131016
22	80545	86229	132436
23	80695	87008	133691
24	80813	87693	134798
25	80907	88296	135775
26	80981	88826	136637
27	81040	89291	137398
28	81087	89701	138068
29	81124	90060	138659
30	81153	90376	139180
31	81176	90654	139639
32	81194	90898	140044
33	81209	91113	140402
34	81220	91302	140717
35	81230	91468	140996
36	81237	91614	141242
37	81243	91743	141459
38	81247	91856	141651
39	81251	91956	141821
40	81254	92044	141971

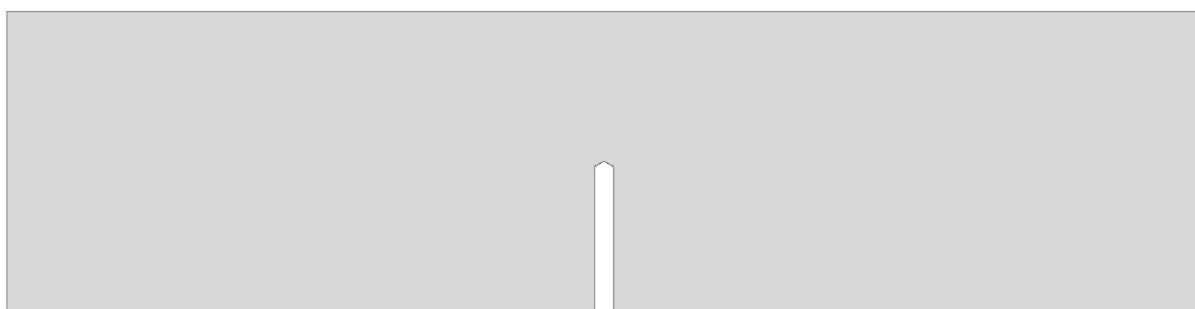
### 5.1.5 Proračun zamora greda prema RDA – duge prsline

Kao što već opisano u poglavlju 4.9 proračun broja ciklusa u problemu dugih prsline prema RDA se računa kao odnos poznate energije loma prema energiji disipacije koja se dobija iz površine histerezisne petlje a sve je izvedeno u jednačini (4.42). Da bi se broj ciklusa mogao odrediti potrebno je prije toga definisati zavisnost krutosti i relativne frekvencije od dužine prsline koje su date u jednačinama (4.38) i (4.40). Na ovom primjeru spoljašnja frekvencija sinusoidnog opterećenja iznosi  $1Hz$ , dok je sopstvena frekvencija određena numerički upotrebom programa Abaqus. Zbog kontrole frekvencije u Abaqus-u prvo je izvršeno upoređivanje rezultata sa analitičkim proračunom frekvencije za neoštećenu gredu bez prsline a zatim je izvršeno modeliranje grede u Abaqus-u. Formula za proračun kružne frekvencije neoštećene grede data je izrazom iz dinamike konstrukcija (5.9).

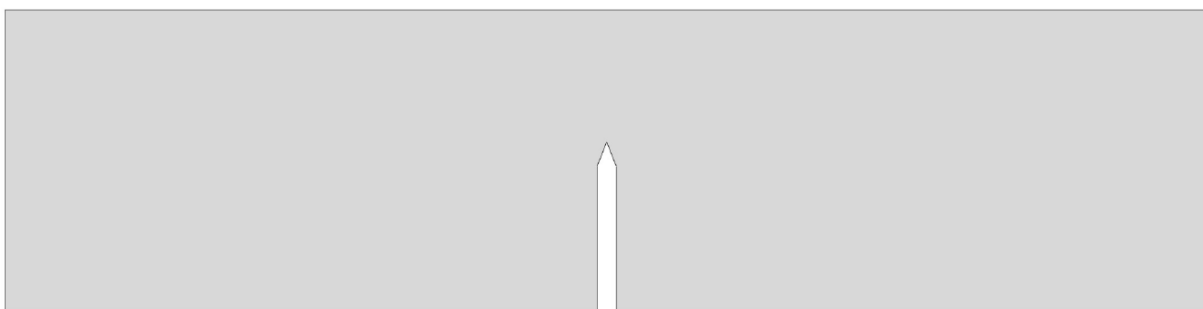
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{mS^3}} \quad (5.9)$$

Vrijednost sopstvene kružne frekvencije iznosi  $8427,35rad/s$  dok u Abaqus-u  $9209,93rad/s$ . Razlika se javlja zbog toga što je u Abaqus-u greda posmatrana kao problem ravnog stanja napona i na rezultate dosta utiče definisanje konturnih uslova nepokretnih oslonaca na krajevima grede. Vrijednosti sopstvenih kružnih frekvencija su određene u nekoliko tačaka odnosno za nekoliko različitih dužina prsline pri čemu je za svaki od ovih slučajeva izvršeno modeliranje u Abaqus-u i to na elastičnom modelu, slika 5.12.

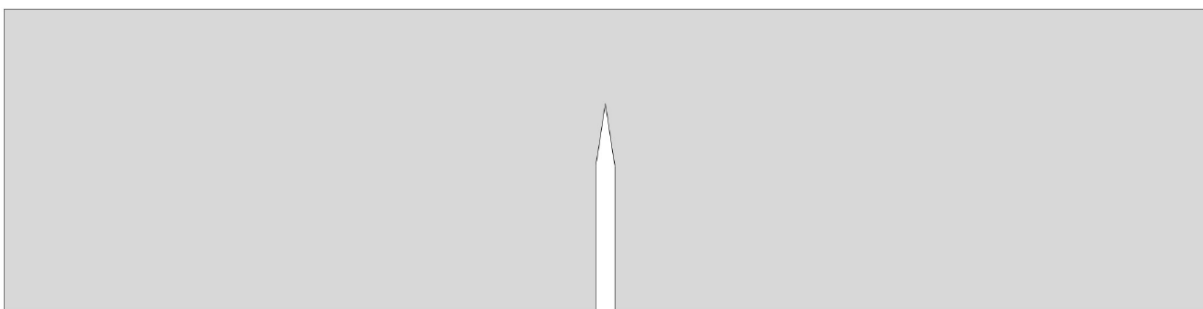




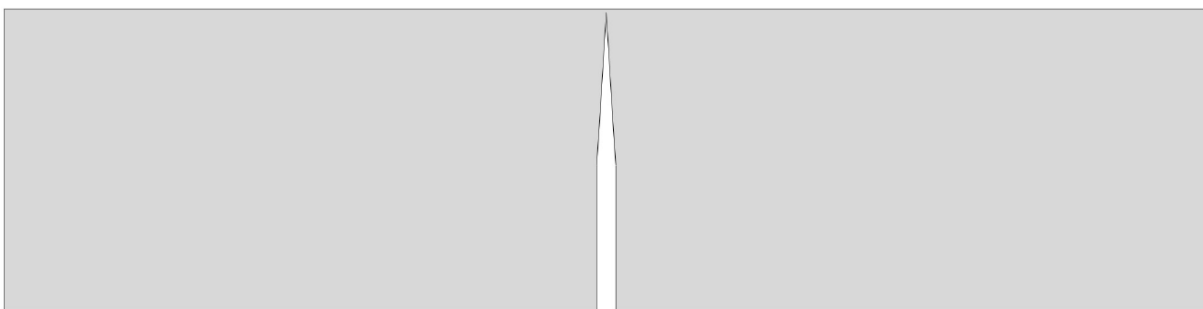
a=40mm



a=45mm



a=55mm



a=79mm

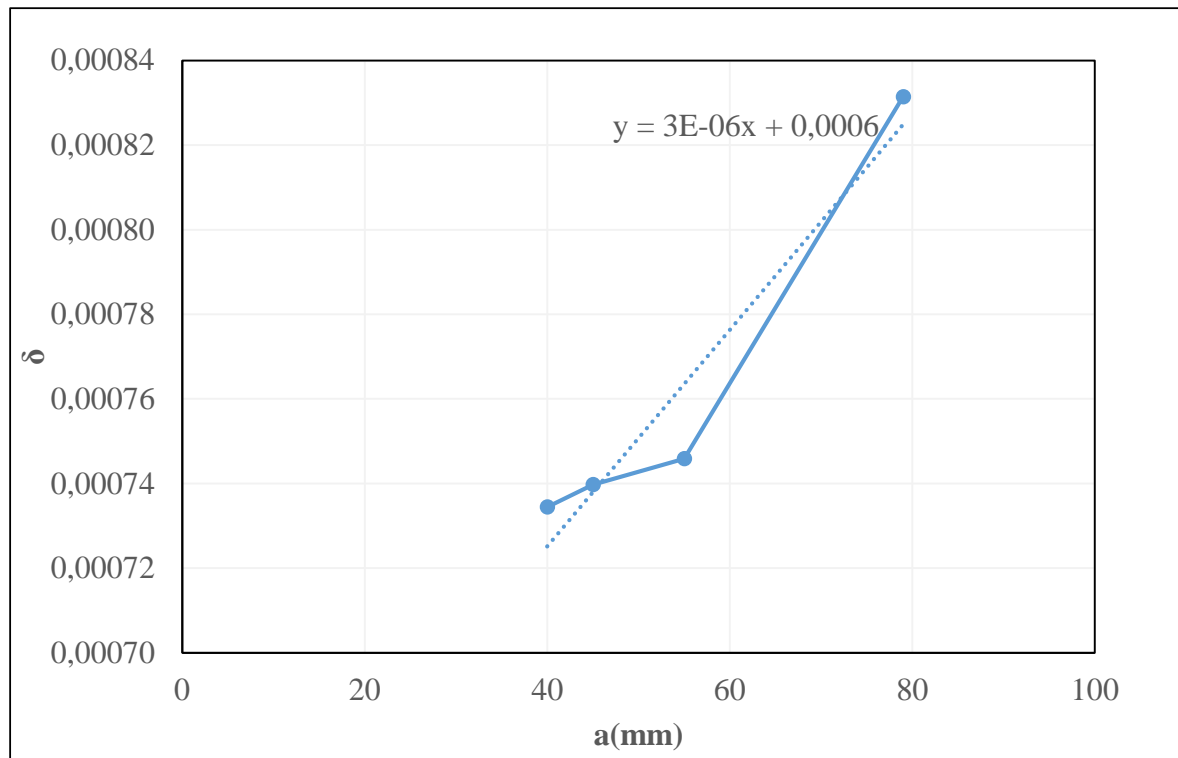
*Slika 5.12* Prikaz modela grede za nekoliko dužina prsline prilikom određivanja sopstvene frekvencije

U narednoj tabeli su dati rezultati sopstvene i relativne frekvencije koji su određeni za nekoliko dužina prsline. Na grafiku ispod je prikazana linearna aproksimacija između relativne frekvencije i dužine prsline.

Tabela 5.9 Proračun relativne frekvencije

a (mm)	$\omega$ (rad/s)	$\omega_{\sigma}$ (rad/s)	$\delta$
0	9209,93	6,28	0,00068187
40	8550,85	6,28	0,00073443
45	8489,30	6,28	0,00073975
55	8419,60	6,28	0,00074588
79	7552,96	6,28	0,00083146

Kao što se vidi iz prethodne tabele sa propagacijom prsline opada krutost grede pa samim i tim i sopstvena frekvencija dok relativna frekvencija raste. Grafički je to prikazano na slici 5.13



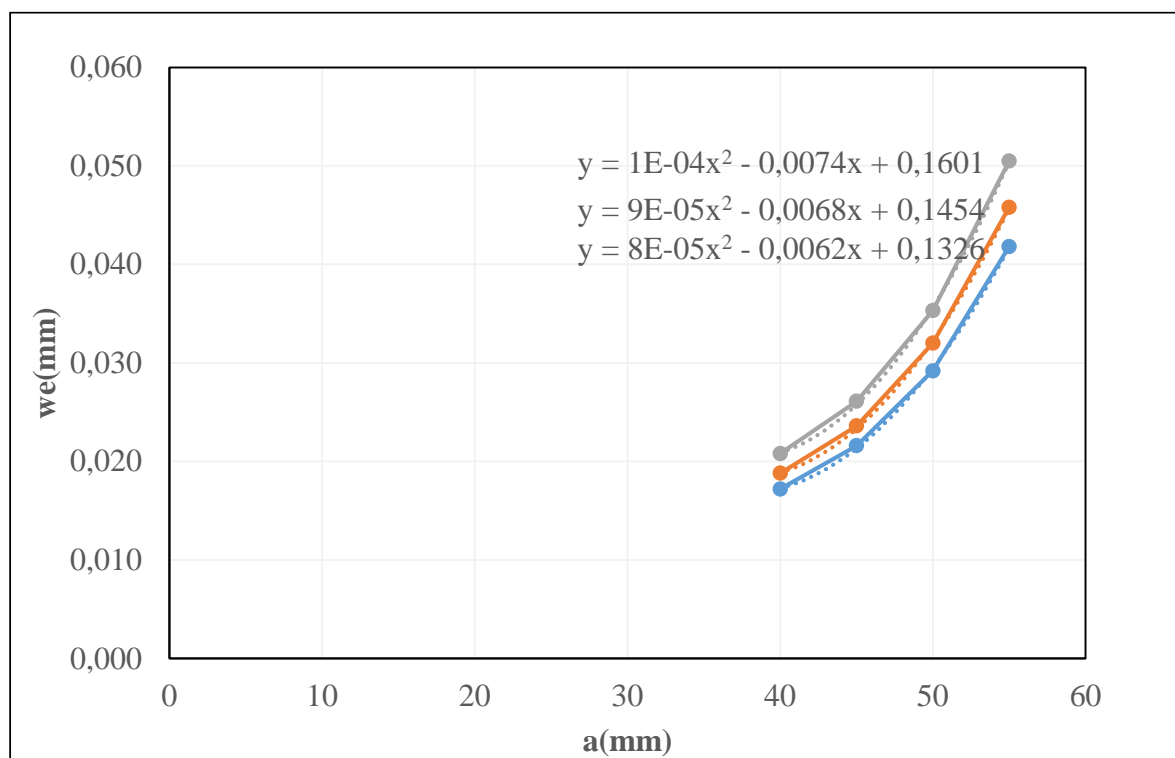
Slika 5.13 Zavisnost relativne frekvencije od dužine prsline

U proračun broja ciklusa prema RDA ulazi i vrijednost ranga napona u vrhu prsline koji se dobija isto kao u statičkom testu primjenom Abaqus-a. Vrijednosti ranga napona su dobijene kao odgovor elastičnog sistema uslijed djelovanja ranga sile  $\Delta P = P_{max} - P_{min}$  za tri slučaja gornje amplitudne vrijednosti  $0,87P_u$ ,  $0,81P_u$  i  $0,76P_u$ . Vrijednosti ranga napona su  $5,29MPa$ ,  $4,79MPa$  i  $4,38MPa$  i te vrijednosti ostaju konstantne u svakom koraku proračuna broja ciklusa, što predstavlja simuliranje eksperimenta kod kojeg je urađena kontrola preko sile. Krutost grede se određuje kao odnos sile i elastičnog ugiba koji se određuje uz pomoć Abaqus-a sa istom mrežom konačnih elemenata koja se koristi pri određivanju napona u vrhu

prslina. U narednoj tabeli su prikazani rezultati za ugib grede a na osnovu toga aproksimirane funkcije između ugiba i dužine prslina koje su prikazane na narednoj slici.

Tabela 5.10 Proračun ugiba u zavisnosti od dužine prslina

a (mm)	w <sub>e</sub> (mm)		
	ΔP=457,92 N	ΔP=501,12 N	ΔP=552,96 N
40	0,0172	0,0188	0,0208
45	0,0216	0,0236	0,0261
50	0,0292	0,0320	0,0353
55	0,0418	0,0458	0,0505



Slika 5.14 Zavisnost ugiba od dužine prslina

U narednim tabelama su prikazani cijeli proračun broja ciklusa za duge prslina prema RDA.

Tabela 5.11 Tabelarni prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA (duge prsline) za slučaj  $0,76P_u$

$\Delta P(N)$	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E(MPa)	$\Delta\sigma(MPa)$	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta(a)$	R	Wve(N/mm)	$G_F(N/mm)$	N	a=a <sub>0</sub> +a <sub>i</sub> (mm)
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,01288	35552,80	0,000723	0,302	5,17743E-07	0,0125601	24259	41,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,01332	34378,38	0,000726	0,302	5,02718E-07	0,0125601	24984	42,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,01392	32896,55	0,000729	0,302	4,83036E-07	0,0125601	26002	43,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,01468	31193,46	0,000732	0,302	4,59914E-07	0,0125601	27310	44,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,0156	29353,85	0,000735	0,302	4,34565E-07	0,0125601	28903	45,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,01668	27453,24	0,000738	0,302	4,08086E-07	0,0125601	30778	46,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,01792	25553,57	0,000741	0,302	3,81392E-07	0,0125601	32932	47,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,01932	23701,86	0,000744	0,302	3,55187E-07	0,0125601	35362	48,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,02088	21931,03	0,000747	0,302	3,29976E-07	0,0125601	38064	49,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,0226	20261,95	0,00075	0,302	3,06087E-07	0,0125601	41035	50,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,02448	18705,88	0,000753	0,302	2,8371E-07	0,0125601	44271	51,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,02652	17266,97	0,000756	0,302	2,6293E-07	0,0125601	47770	52,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,02872	15944,29	0,000759	0,302	2,43752E-07	0,0125601	51528	53,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,03108	14733,59	0,000762	0,302	2,26134E-07	0,0125601	55543	54,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,17	0,000138608	0,0336	13628,57	0,000765	0,302	2,09997E-07	0,0125601	59811	55,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,29	0,000138608	0,0486	9422,22	0,00078	0,302	1,79726E-07	0,0125601	69885	60,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	0,73	0,000138608	0,0906	5054,30	0,00081	0,302	1,80062E-07	0,0125601	69754	70,00
457,92	320	50	80	31600,00	4,38	1,13	0,000138608	0,14208	3222,97	0,000837	0,302	1,79856E-07	0,0125601	69834	79,00

Tabela 5.12 Tabela prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA (duge prsline) za slučaj  $0,81P_u$

$\Delta P(N)$	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E(MPa)	$\Delta\sigma(MPa)$	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta(a)$	R	Wve(N/mm)	$G_F(N/mm)$	N	a=a <sub>0</sub> +a <sub>i</sub> (mm)
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,01789	28011,18	0,000723	0,284	5,27457E-07	0,0125601	23813	41,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,01856	27000,00	0,000726	0,284	5,10526E-07	0,0125601	24602	42,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,01941	25817,62	0,000729	0,284	4,90186E-07	0,0125601	25623	43,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,02044	24516,63	0,000732	0,284	4,674E-07	0,0125601	26872	44,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,02165	23146,42	0,000735	0,284	4,43086E-07	0,0125601	28347	45,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,02304	21750,00	0,000738	0,284	4,18054E-07	0,0125601	30044	46,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,02461	20362,45	0,000741	0,284	3,92976E-07	0,0125601	31962	47,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,02636	19010,62	0,000744	0,284	3,68372E-07	0,0125601	34096	48,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,02829	17713,68	0,000747	0,284	3,44625E-07	0,0125601	36446	49,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,0304	16484,21	0,00075	0,284	3,21993E-07	0,0125601	39007	50,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,03269	15329,46	0,000753	0,284	3,00635E-07	0,0125601	41779	51,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,03516	14252,56	0,000756	0,284	2,80629E-07	0,0125601	44757	52,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,03781	13253,64	0,000759	0,284	2,61996E-07	0,0125601	47940	53,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,04064	12330,71	0,000762	0,284	2,44715E-07	0,0125601	51326	54,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,04365	11480,41	0,000765	0,284	2,28737E-07	0,0125601	54911	55,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,04684	10698,55	0,000768	0,284	2,13995E-07	0,0125601	58694	56,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,19	0,000151582	0,05021	9980,48	0,000771	0,284	2,00412E-07	0,0125601	62672	57,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,28	0,000151582	0,0614	8161,56	0,00078	0,284	1,9289E-07	0,0125601	65115	60,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	0,89	0,000151582	0,14165	3537,73	0,000825	0,284	1,92808E-07	0,0125601	65143	75,00
501,12	320	50	80	31600,00	4,79	1,06	0,000151582	0,16989	2949,67	0,000837	0,284	1,93756E-07	0,0125601	64824	79,00

Tabela 5.13 Tabelarni prikaz proračuna broja ciklusa RDA (duge prsline) za slučaj  $0,87P_u$

$\Delta P(N)$	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E (MPa)	$\Delta\sigma(MPa)$	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta(a)$	R	Wve(N/mm)	$G_F(N/mm)$	N	a=a0+ai(mm)
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0248	22296,77	0,000723	0,264	5,59007E-07	0,0125601	22469	41,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0257	21515,95	0,000726	0,264	5,41669E-07	0,0125601	23188	42,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0268	20632,84	0,000729	0,264	5,21583E-07	0,0125601	24081	43,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0281	19678,29	0,000732	0,264	4,995E-07	0,0125601	25145	44,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0296	18681,08	0,000735	0,264	4,76131E-07	0,0125601	26380	45,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0313	17666,45	0,000738	0,264	4,52108E-07	0,0125601	27781	46,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0332	16655,42	0,000741	0,264	4,27967E-07	0,0125601	29348	47,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	0,21	0,000167405	0,0353	15664,59	0,000744	0,264	4,04137E-07	0,0125601	31079	48,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	1,1	0,000167405	0,1321	4185,92	0,00081	0,264	3,56375E-07	0,0125601	35244	70,00
552,96	320	50	80	31600,00	5,29	1,5	0,000167405	0,1996	2770,34	0,000837	0,264	3,45407E-07	0,0125601	36363	79,00

Oblast nestabilne propagacije prslina koja nastupa pred lom grede se pojavljuje kada dužina prslina postane kritična je opisana samo u nekoliko tačaka podizanjem koeficijenta tečenja kao što je to već opisano u poglavlju 4.9.

### 5.1.6 Proračun zamora greda prema RDA – kratke prslina

Kao što je već opisano u poglavlju 4.10 prethodno opisani postupak za propagaciju dugih prslina prema RDA je potrebno modifikovati da bi se mogao primijeniti kod analize kratkih prslina. Pokazalo se da povećanje ranga napona u zoni kratkih prslina približava RDA krive eksperimentalnim, a što i jeste u skladu sa Kitagawa i Takahashi dijagramom prikazanim na slici 4.8. Za linearnu aproksimaciju ranga napona u ovoj oblasti potrebno je poznavati dvije tačke. S obzirom da je donji prag žilavosti betona nedovoljno istražena oblast i da je to teško pretpostavljati ovdje se pretpostavlja dužina prslina od  $10\text{mm}$  kao granična vrijednosti između dugih i kratkih prslina.

Tabela 5.14 Rang napona za oblast kratkih prslina

a (mm)	$\Delta\sigma(\text{MPa})$			
	$\Delta P=457,92\text{N}$	$\Delta P=501,12\text{N}$	$\Delta P=552,96\text{N}$	
0	8,80	8,80	8,80	Napon u vrhu prslina iz statičkog testa
10	4,38	4,79	5,29	Rang napona za zonu dugih prslina

U narednoj tabeli je prikazan proračun u oblasti kratkih prslina za slučaj  $0,76Pu$  a za ostale slučajeve se proračun sprovodi analogno.

Tabela 5.15 Tabelarni prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA (kratke prsline) za slučaj  $0,76P_u$

$\Delta P$ (N)	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E (MPa)	$\Delta\sigma$ (MPa)	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta$ (a)	R	Wve(N/mm)	$G_r$ (N/mm)	N	a=a <sub>0</sub> +a <sub>i</sub> (mm)
457,92	320	50	80	31600,00	8,80	0,17	0,000278481	0,0126	36342,86	0,00072	0,302	2,12751E-06	0,0125601	5904	40,00
457,92	320	50	80	31600,00	8,76	0,17	0,000277082	0,0126208	36282,96	0,0007203	0,302	2,10359E-06	0,0125601	5971	40,10
457,92	320	50	80	31600,00	8,58	0,17	0,000271487	0,01272	36000,00	0,0007215	0,302	2,00709E-06	0,0125601	6258	40,50
457,92	320	50	80	31600,00	8,40	0,17	0,000265892	0,0128448	35650,22	0,0007227	0,302	1,90968E-06	0,0125601	6577	40,90
457,92	320	50	80	31600,00	8,23	0,17	0,000260297	0,0129952	35237,63	0,0007239	0,302	1,81198E-06	0,0125601	6932	41,30
457,92	320	50	80	31600,00	8,05	0,17	0,000254703	0,0131712	34766,76	0,0007251	0,302	1,71458E-06	0,0125601	7326	41,70
457,92	320	50	80	31600,00	7,87	0,17	0,000249108	0,0133728	34242,64	0,0007263	0,302	1,61802E-06	0,0125601	7763	42,10
457,92	320	50	80	31600,00	7,70	0,17	0,000243513	0,0136	33670,59	0,0007275	0,302	1,52284E-06	0,0125601	8248	42,50
457,92	320	50	80	31600,00	7,52	0,17	0,000237918	0,0138528	33056,13	0,0007287	0,302	1,42949E-06	0,0125601	8786	42,90
457,92	320	50	80	31600,00	7,34	0,17	0,000232323	0,0141312	32404,89	0,0007299	0,302	1,3384E-06	0,0125601	9384	43,30
457,92	320	50	80	31600,00	7,16	0,17	0,000226728	0,0144352	31722,46	0,0007311	0,302	1,24992E-06	0,0125601	10049	43,70
457,92	320	50	80	31600,00	6,99	0,17	0,000221133	0,0147648	31014,30	0,0007323	0,302	1,16436E-06	0,0125601	10787	44,10
457,92	320	50	80	31600,00	6,81	0,17	0,000215538	0,01512	30285,71	0,0007335	0,302	1,08197E-06	0,0125601	11609	44,50
457,92	320	50	80	31600,00	6,63	0,17	0,000209943	0,0155008	29541,70	0,0007347	0,302	1,00294E-06	0,0125601	12523	44,90
457,92	320	50	80	31600,00	6,46	0,17	0,000204348	0,0159072	28786,96	0,0007359	0,302	9,27436E-07	0,0125601	13543	45,30
457,92	320	50	80	31600,00	6,28	0,17	0,000198753	0,0163392	28025,85	0,0007371	0,302	8,55542E-07	0,0125601	14681	45,70
457,92	320	50	80	31600,00	6,10	0,17	0,000193158	0,0167968	27262,34	0,0007383	0,302	7,87318E-07	0,0125601	15953	46,10
457,92	320	50	80	31600,00	5,93	0,17	0,000187563	0,01728	26500,00	0,0007395	0,302	7,22783E-07	0,0125601	17377	46,50
457,92	320	50	80	31600,00	5,75	0,17	0,000181968	0,0177888	25742,04	0,0007407	0,302	6,61919E-07	0,0125601	18975	46,90
457,92	320	50	80	31600,00	5,57	0,17	0,000176373	0,0183232	24991,27	0,0007419	0,302	6,04683E-07	0,0125601	20771	47,30
457,92	320	50	80	31600,00	5,40	0,17	0,000170778	0,0188832	24250,13	0,0007431	0,302	5,51005E-07	0,0125601	22795	47,70
457,92	320	50	80	31600,00	5,22	0,17	0,000165184	0,0194688	23520,71	0,0007443	0,302	5,00795E-07	0,0125601	25080	48,10
457,92	320	50	80	31600,00	5,04	0,17	0,000159589	0,02008	22804,78	0,0007455	0,302	4,53947E-07	0,0125601	27669	48,50
457,92	320	50	80	31600,00	4,87	0,17	0,000153994	0,0207168	22103,80	0,0007467	0,302	4,10343E-07	0,0125601	30609	48,90
457,92	320	50	80	31600,00	4,69	0,17	0,000148399	0,0213792	21418,95	0,0007479	0,302	3,69854E-07	0,0125601	33960	49,30

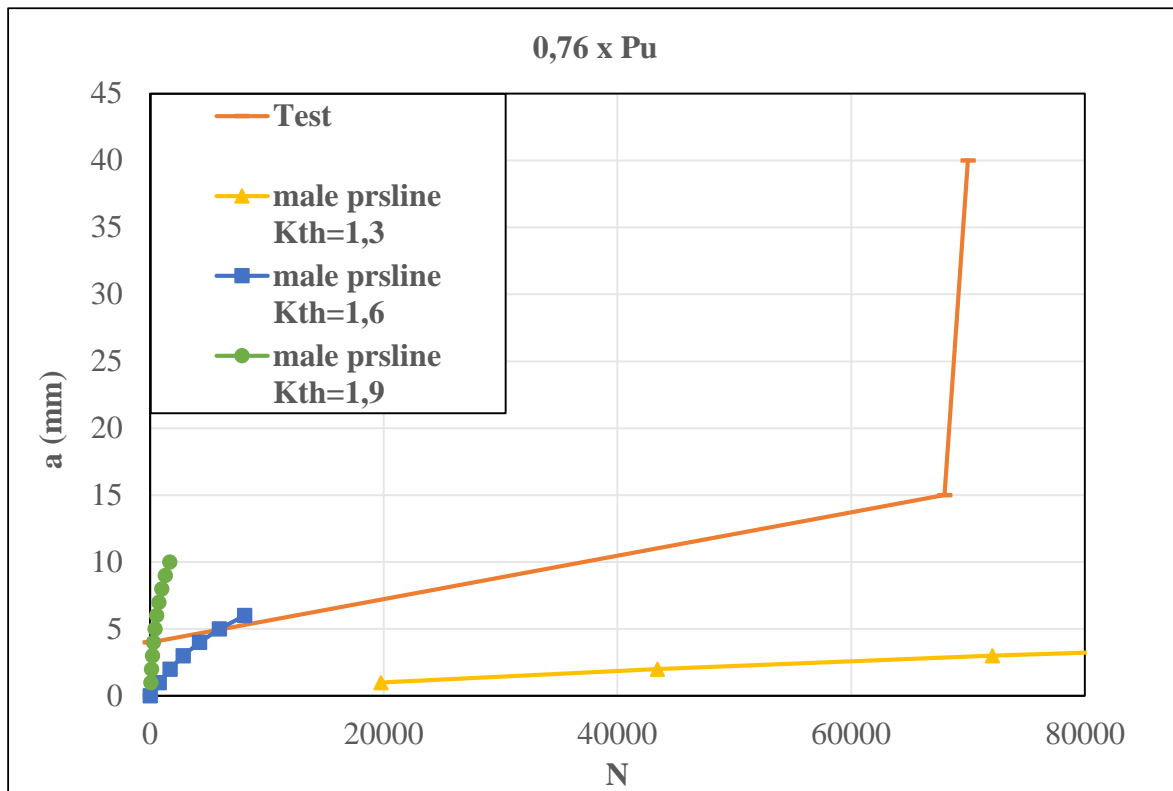


### 5.1.7 Primjena reološko-dinamičkog modula na Parizov zakon

Ovdje se dalje prikazuje proračun dužine malih prslina u zavisnosti od broja ciklusa prema prikazanoj teoriji iz jednačine (4.44) [86] pri čemu se modul elastičnosti zamjenjuje sa RDA modulom. Brzina oslobađanja energije deformacije se dobija pomoću jednačina (2.11) i (2.21) pa se dobija sledeći izraz,

$$\Delta G_I = \frac{1}{E_R} \frac{3\Delta PS}{2BD^2} \sqrt{\pi a} \left[ 1,09 - 1,73 \left(\frac{a}{D}\right) + 8,20 \left(\frac{a}{D}\right)^2 - 14,18 \left(\frac{a}{D}\right)^3 + 14,57 \left(\frac{a}{D}\right)^4 \right] \quad (5.10)$$

Pošto je promjena relativne frekvencije minimalna ovdje se usvaja konstantna vrijednost 0,0007. Ostale vrijednosti ulaznih parametara se preuzimaju kao u slučaju proračuna velikih prslina osim žilavosti betona na granici između malih i velikih prslina za koji se ispituje nekoliko vrijednosti i time se potvrđuje važnost ovog parametra u propagaciji kratkih prslina betona. Na slici 5.15 date su tri različite vrijednosti donjeg praga žilavosti koje se upoređuju sa rezultatima u slučaju amplitude 0,76P<sub>u</sub>.



Slika 5.15 Propagacija kratkih prslina u zavisnosti od donjeg praga žilavosti

Kao što se vidi na prethodnoj slici najbolji rezultati se postižu za vrijednost donjeg praga žilavosti 1,6 N/mm<sup>2</sup> √mm pa se ta vrijednost koristi u daljem proračunu. Na sledećoj slici 5.15 je prikazan primjer numeričke integracije jednačine (4.44) upotrebom softvera Wolfram Mathematica. Rezultati proračuna su dati na dijagramima u 5.1.8 pri čemu su označeni kao Mod. Parizov zakon – Zona 1.

```

Kth = 1.6;
Gf = 0.0126;
sigmat = 4.2;
Emodul = 31600;
dznno = 2.5;
P1 = 457.92;
b1 = 50;
D1 = 80;
l1 = 320;
R1 = 0.302;
a1 = 40;
fi = 0.43;
delta = 0.0007; :
agornja={ {40}, {41}, {42}, {43}, {44}, {45}, {46}, {47},
           {48}, {49}, {50}, {51}, {52}, {53}, {54}, {55}, {56}, {57}, {58}, {59} };

```

$$\text{Nciklus} = \text{Round} \left[ \text{NIntegrate} \left[ \frac{1}{\text{sigmat}} \left( \frac{\text{Gf}}{\text{sigmat}} \right) \left( \frac{\left( \frac{\left( \frac{3 \cdot P1 \cdot l1}{2 \cdot b1 \cdot D1} \sqrt{3.14 \cdot a1} \cdot \left( 1.090 - 1.735 \cdot \frac{a1}{D1} - 8.20 \cdot \left( \frac{a1}{D1} \right)^2 - 14.18 \cdot \left( \frac{a1}{D1} \right)^3 - 14.57 \cdot \left( \frac{a1}{D1} \right)^4 \right) \right)^2}{\left( \frac{\text{Emodul} \cdot \frac{1 - fi \cdot \text{delta}^2}{(1 - fi)^2 \cdot \text{delta}^2}}{\text{Gf}} \right)} \right)^{-3.99}} \right] \right.$$

$$\left. \left( \frac{\text{Kth}^2 / \left( \frac{\text{Emodul} \cdot \frac{1 - fi \cdot \text{delta}^2}{(1 - fi)^2 \cdot \text{delta}^2}}{\text{Gf}} \right)}{\text{Gf}} \right)^{7.79} \right.$$

$$\left. \left( \frac{\text{sigmat} \cdot \left( \frac{\text{Emodul} \cdot \frac{1 - fi \cdot \text{delta}^2}{(1 - fi)^2 \cdot \text{delta}^2}}{\text{Gf}} \right) \cdot \text{Gf} / \text{sigmat}^2}{\text{Gf}} \right)^{-1.54} \right.$$

$$\left. \left( \frac{\text{Emodul} \cdot \frac{1 - fi \cdot \text{delta}^2}{(1 - fi)^2 \cdot \text{delta}^2}}{\text{sigmat}} \right)^{-1.36} \cdot \left( \frac{\text{sigmat} \cdot a1}{\text{Gf}} \right)^{5.97} \cdot \left( (1 - R1)^{0.09} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \left( 11.46 - 421.24 \cdot \left( \frac{\text{dznno}}{D1} \right) + 3466.31 \cdot \left( \frac{\text{dznno}}{D1} \right)^2 \right) \right],$$

$$\{a1, 40, \text{agornja}[[i, 1]]\} \} \} \text{Print}[\text{Nciklus}]$$

```

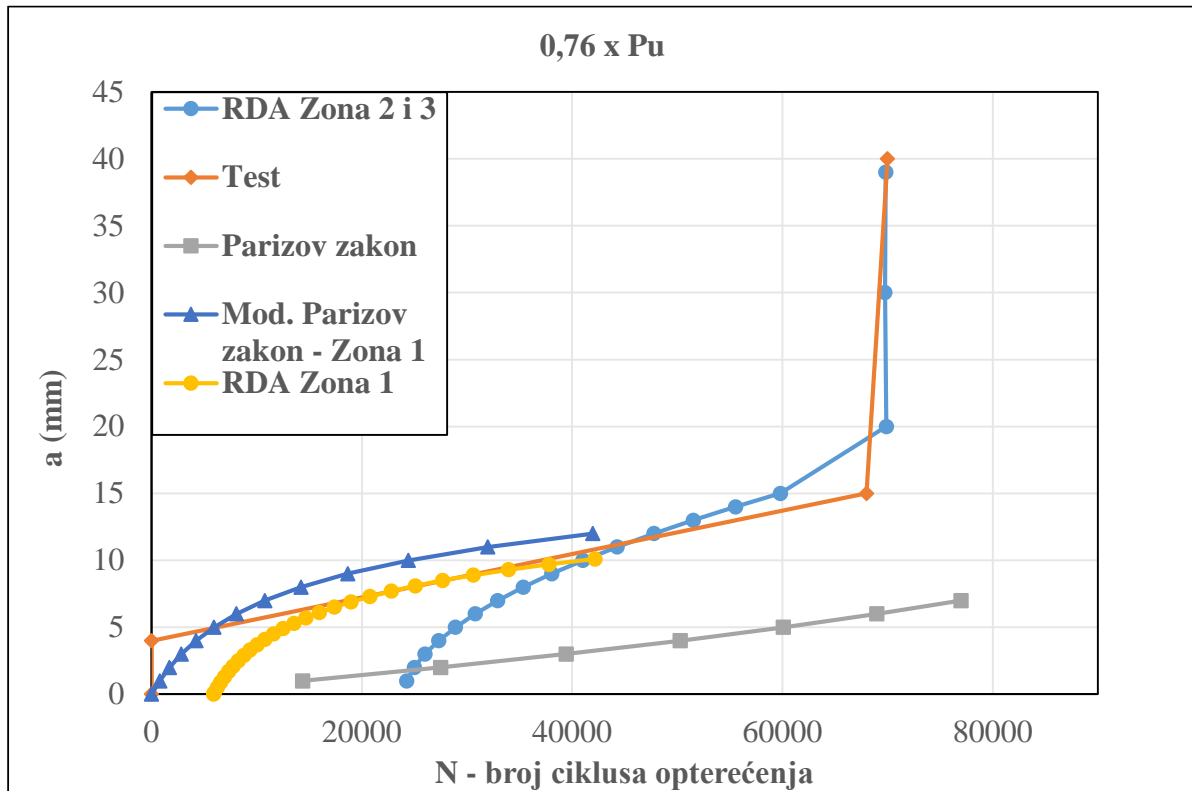
777
1708
2837
4220
5931
8071
10773
14219
18656
24421

```

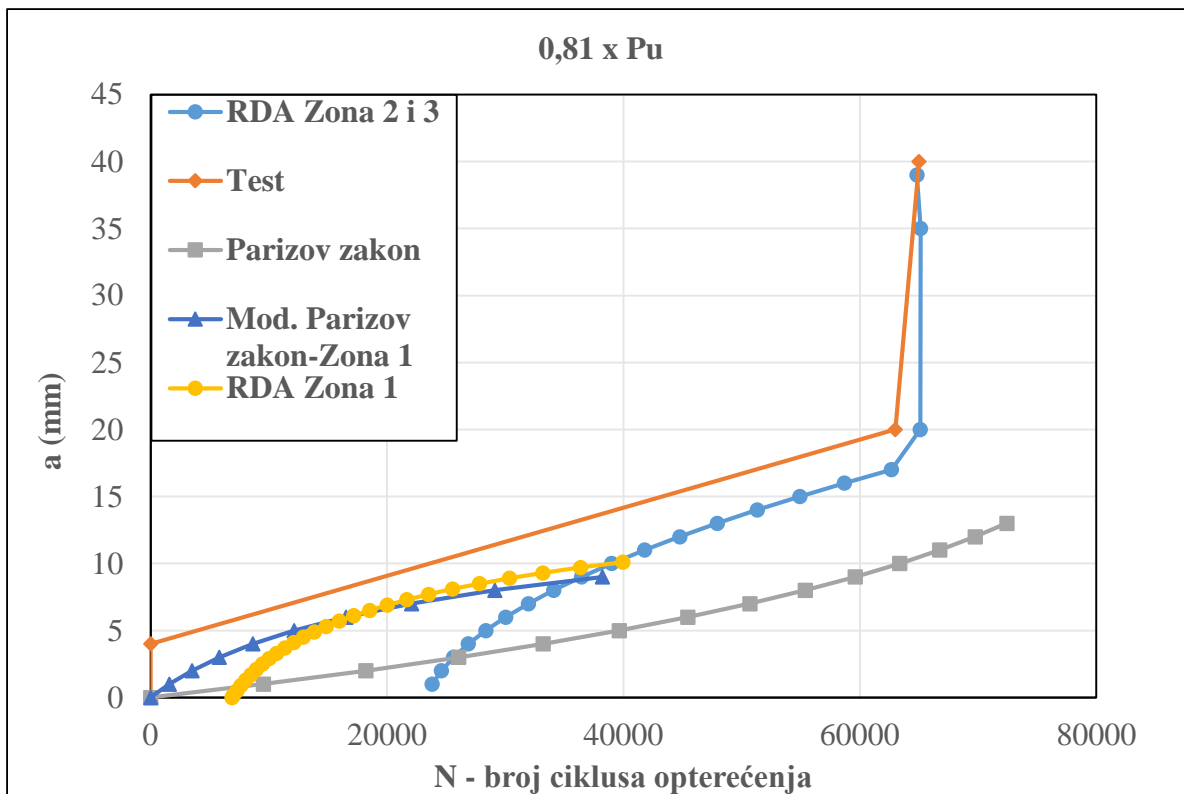
Slika 5.16 Proračun broja ciklusa za vrijednost gornje amplitude sile 0,76Pu u oblasti kratkih prslina primjenom Wolfram Mathematica

### 5.1.8 Rezultati

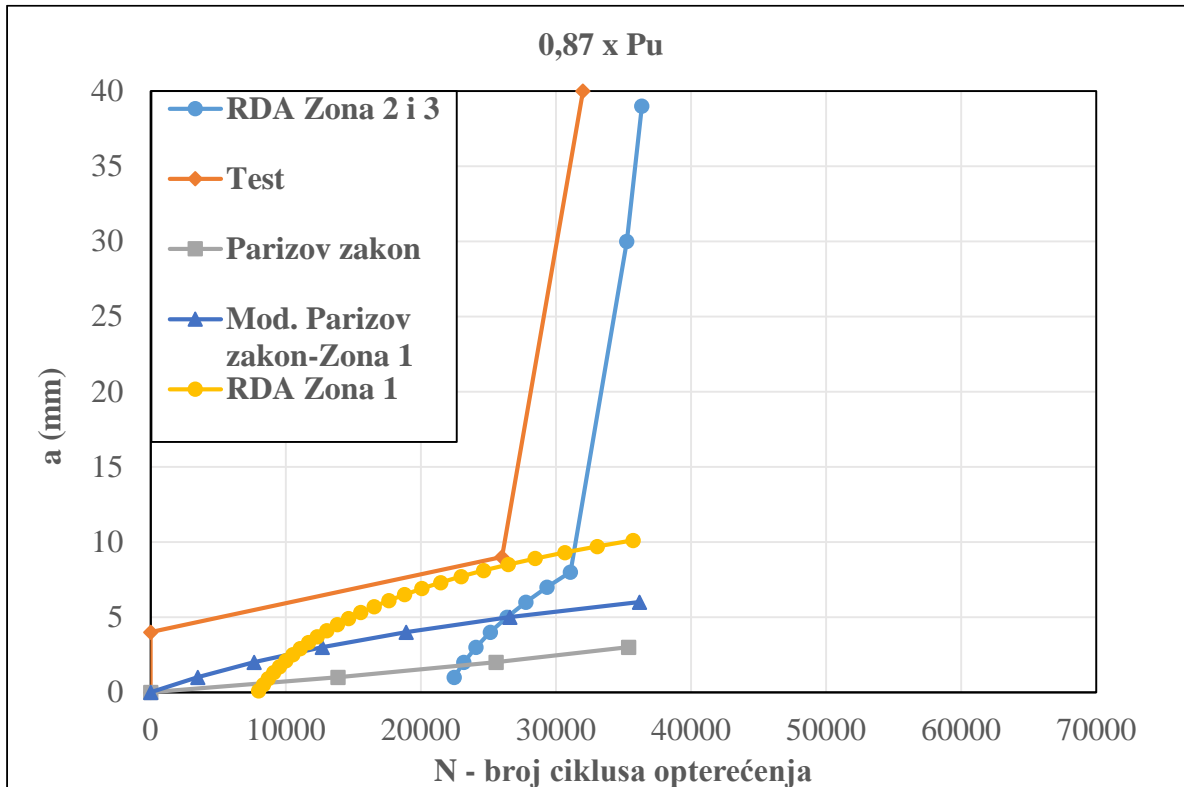
Na narednim slikama su prikazani svi rezultati ispitivanja problema zamora zajedno sa Parizovim zakonom i RDA teorijom uključujući propagaciju kratkih prslina. Dijagrami (dužina prsline-broj ciklusa opterećenja) su dobijeni tako što je za konstantne vrijednosti ranga sile (napona) izračunat odgovarajući broj ciklusa za odgovarajuće dužine prsline.



Slika 5.17 Dužina prsline – broj ciklusa za vrijednost gornje amplitude sile  $0,76P_u$

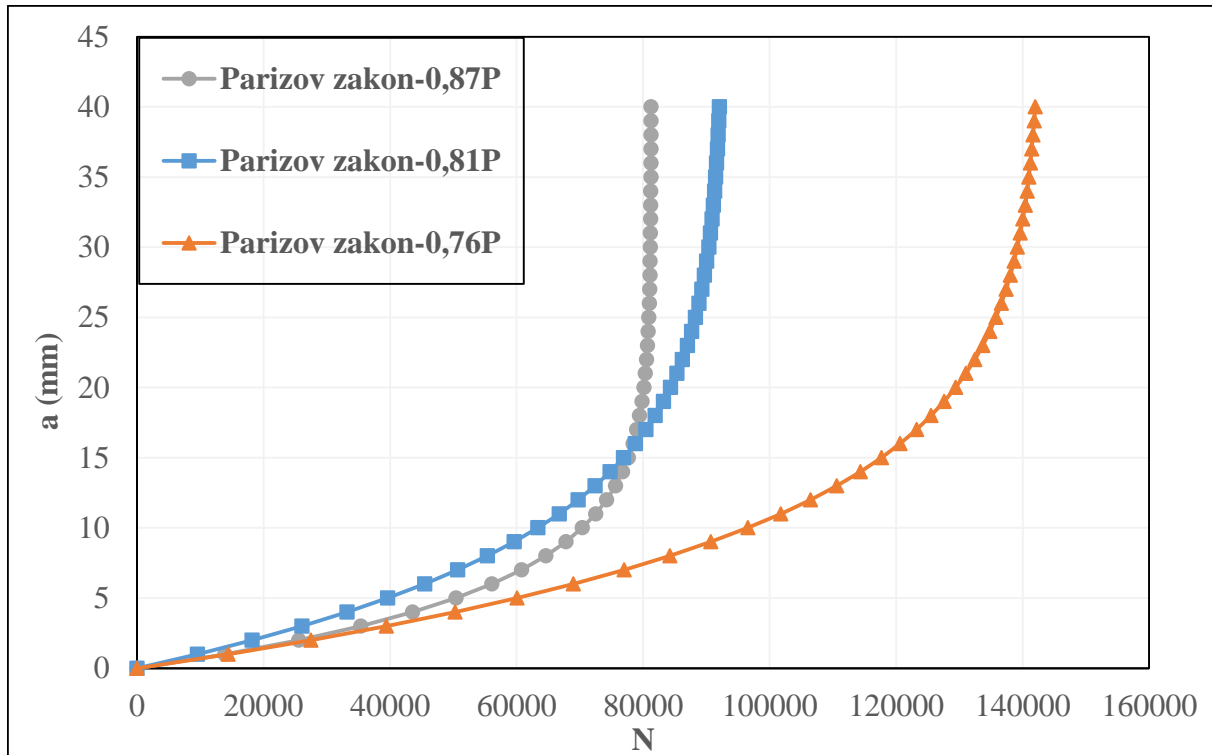


Slika 5.18 Dužina prsline – broj ciklusa za vrijednost gornje amplitude sile  $0,81P_u$



Slika 5.19 Dužina prsline – broj ciklusa za vrijednost gornje amplitude sile  $0,87P_u$

Na prethodnim slikama se može vidjeti da se oblast kratkih i dugih prslina dobro može opisati pomoću RDA teorije te da se Zona 2 RDA teorije za sva tri slučaja amplitudne sile dobro slaže sa eksperimentalnim mjerenjima, iako je matematički gledano oblik funkcije drugačiji u odnosu na Parizov zakon. Parizov zakon leži dosta niže što je sigurno posljedica usvojenih koeficijenata  $C$  i  $m$ . Isto tako se pokazuje da se oblast kratkih prslina može veoma dobro opisati prema RDA tj. ako se model koji se koristi za stabilnu propagaciju prsline modifikuje preko ranga napona. Na narednom dijagramu je dat prikaz rezultata pomoću Parizovog zakona na čitavom opsegu faktora intenziteta napona pa se vidi da njegova primjena na betonu zahtjeva uvođenje korektivnih faktora što i jeste pokušaj većine autora.



Slika 5.20 Rezultati Parizovog zakona

Generalno posmatrano kod RDA teorije kao i kod Parizovog zakona je problem odrediti trenutak kada prslina postaje opasna odnosno kada Parizov zakon prestaje da važi a RDA teorija prelazi u treću krivu koja vodi prema lomu. Jedna procjena bi se mogla dati pomoću faktora intenziteta napona tako što se za konstantnu vrijednost ranga sile traži vrijednost dužine prsline tako da se faktor intenziteta napona poklopi sa žilavosti. Na ovaj način vrijednosti dužina prsline se dobijaju za prethodne dijagrame  $0,76P_u - 13,22mm$ ,  $0,81P_u - 11,44mm$  i  $0,87P_u - 9,44mm$  što ima približno dobro slaganje sa eksperimentom i RDA teorijom pogotovo u slučaju  $0,76P_u$  i  $0,87P_u$ .

## 5.2 Propagacija prsline u betonskoj gredi dimenzija $S/D=8,9$

Na ovom primjeru je izvršen proračun propagacije prsline za greda dimenzija  $S/D=8,9$ . Eksperimentalni podaci za greda su prikazani u radu od Baluch M. H. i ostali [90]. Sproveden je proračun broja ciklusa samo po RDA teoriji i to na isti način kao u prethodnom primjeru. Greda ima raspon  $1360mm$ , širine  $51mm$  i visine  $152mm$ . Početna vrijednost prsline iznosi  $75mm$ . Čvrstoća betona je izračunata na betonskim cilindrima  $76 \times 152,4mm$  i iznosi  $27,6MPa$ . Na osnovu poznate čvrstoće cilindra izračunaju se vrijednosti za modul elastičnosti i čvrstoću zatezanja betona prema sledećim jednačinama iz propisa ACI 318 [91] i pri tome se mora voditi računa o jedinicama koje se unose u *psi*.

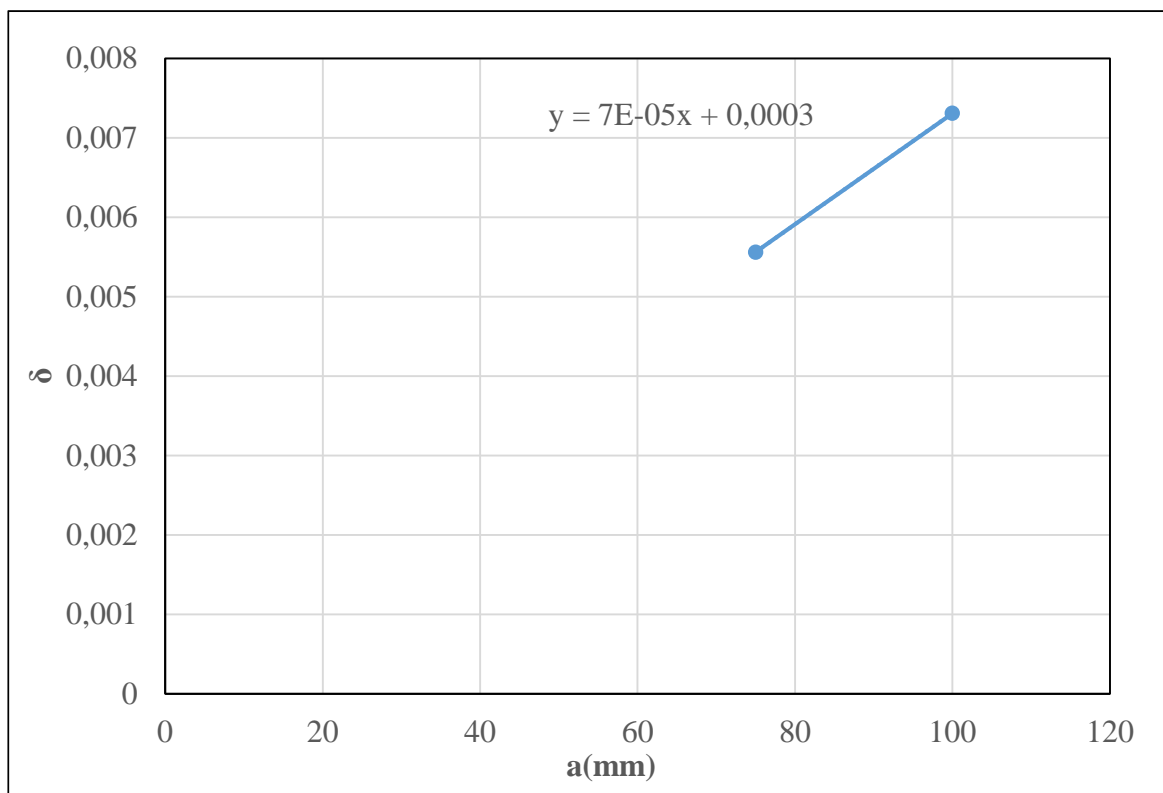
$$f_t = 6 \cdot \sqrt{f_c} \text{ [psi]} = 2,62MPa \quad (5.11)$$

$$E = 57000 \cdot \sqrt{f_c} \text{ [psi]} = 24865MPa$$

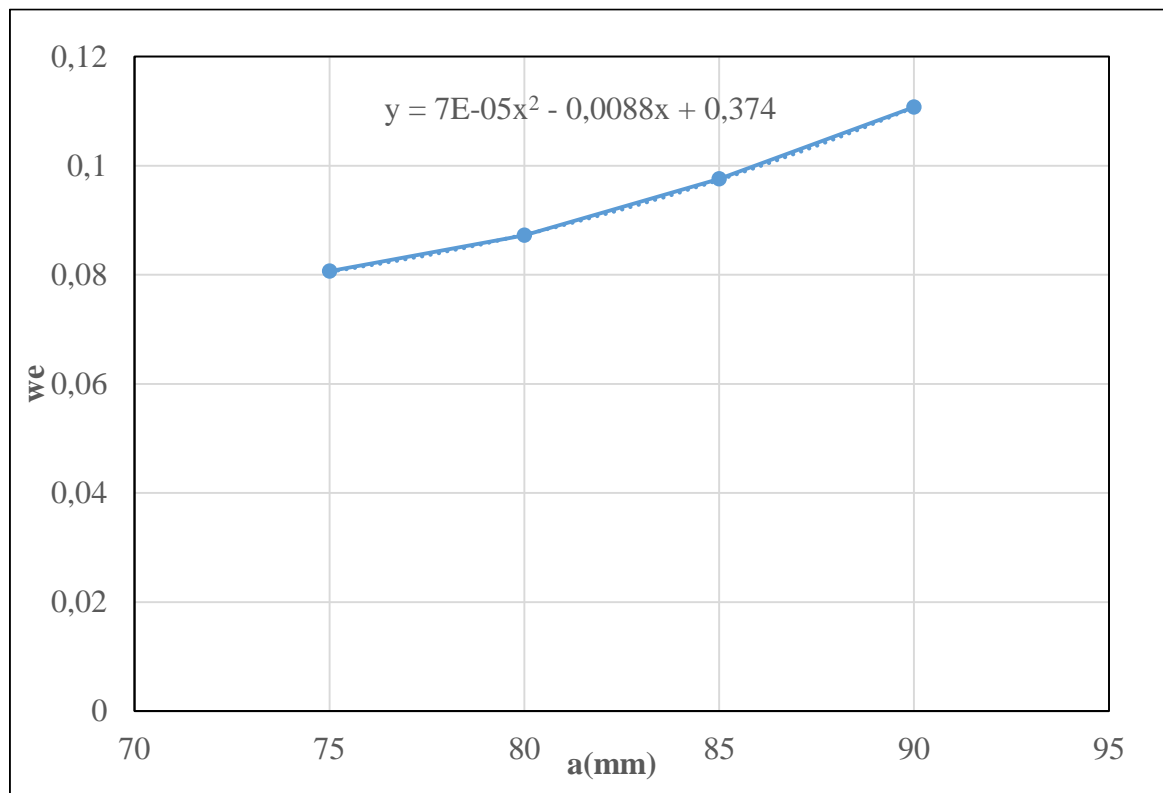
Rang sile kojim je greda opterećena u sredini je  $270N$  dok se za odnos amplitudnih vrijednosti dobija  $R=P_{min}/P_{max}=30/300=0,1$ . Poasonov koeficijent potreban za proračun u Abaqus-u je usvojen  $0,2$ . U radu [90] je data žilavost  $K_{IC}=36,68N/mm^{3/2}$  što primjenom jednačine (2.24) daje energiju loma u iznosu od  $0,054N/mm$  koja se dalje koristi kod proračuna broja ciklusa. Pošto je u radu [90] data i maksimalna veličina zrna agregata od  $2,36mm$  sprovi se i proračun energije loma prema izrazu (2.31) pa se dobija vrijednost  $0,043N/mm$ , dok primjenom jednačine (5.1) za proračun energije loma ulaze čvrstoća na pritisak, čvrstoća na zatezanje kao i modul elastičnosti pa se vrijednost energije loma dobija  $0,029N/mm$ .

Napon u vrhu prsline se dobijaju primjenom softvera Abaqus na isti način kao u prethodnom primjeru. Broj trougaonih konačnih elemenata sa šest stepeni slobode pomjeranja iznosi  $19024$ . Za vrijednost ranga sile od  $270N$  se dobija rang napona  $6,76MPa$ . Početna vrijednost koeficijenta tečenja se dobija primjenom izraza (4.41) tj.  $0,022 \times 6,76=0,15$ . Koeficijent  $K_E=0,022$  se određuje analogno kao u prethodnom primjeru na pritisnutim betonskim cilindrima.

Frekvencija spoljašnjeg opterećenja grede je  $0,5Hz$  dok su sopstvene frekvencije analogno prethodnom primjeru određene numerički primjenom programa Abaqus. Na sljedećem dijagramu je prikazana vrijednost relativne frekvencije za slučaj neoštećene grede kao i za vrijednosti dužina prsline  $75mm$  i  $100mm$  kao i funkcija ugiba i dužine prsline koja je određena analogno prethodnom primjeru, tj. upotrebom softvera Abaqus. U narednim tabelama je prikazan proračun broja ciklusa za kratke i duge prsline prema RDA. Kod proračuna kratkih prsline se pretpostavlja kritična dužina prsline u iznosu od  $4mm$ .



Slika 5.21 Zavisnost relativne frekvencije od dužine prsline



Slika 5.22 Zavisnost ugiba od dužine prsline pri konstantnom rangu sile

Tabela 5.16 Tabelarni prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA (duge prsline)

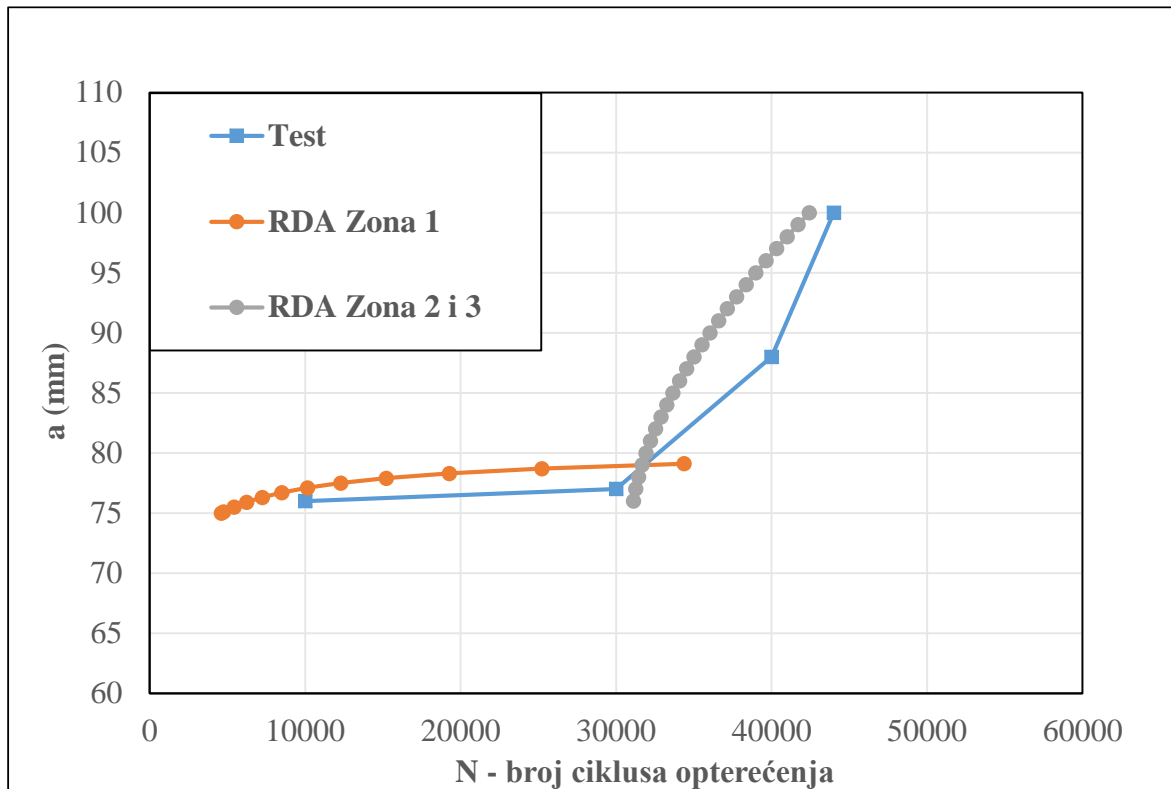
$\Delta P(N)$	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E(MPa)	$\Delta\sigma(MPa)$	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta(a)$	R	Wve(N/mm)	$G_F(N/mm)$	N	a=a <sub>0</sub> +a <sub>i</sub> (mm)
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,10952	2465,30	0,00562	0,1	1,73579E-06	0,054	31110	76,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,11143	2423,05	0,00569	0,1	1,72729E-06	0,054	31263	77,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,11348	2379,27	0,00576	0,1	1,71695E-06	0,054	31451	78,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,11567	2334,23	0,00583	0,1	1,70491E-06	0,054	31673	79,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,118	2288,14	0,0059	0,1	1,69131E-06	0,054	31928	80,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,12047	2241,22	0,00597	0,1	1,67629E-06	0,054	32214	81,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,12308	2193,70	0,00604	0,1	1,65998E-06	0,054	32531	82,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,12583	2145,75	0,00611	0,1	1,64252E-06	0,054	32876	83,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,12872	2097,58	0,00618	0,1	1,62404E-06	0,054	33250	84,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,13175	2049,34	0,00625	0,1	1,60466E-06	0,054	33652	85,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,13492	2001,19	0,00632	0,1	1,58451E-06	0,054	34080	86,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,13823	1953,27	0,00639	0,1	1,56369E-06	0,054	34534	87,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,14168	1905,70	0,00646	0,1	1,54233E-06	0,054	35012	88,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,14527	1858,61	0,00653	0,1	1,52051E-06	0,054	35514	89,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,149	1812,08	0,0066	0,1	1,49834E-06	0,054	36040	90,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,15287	1766,21	0,00667	0,1	1,4759E-06	0,054	36588	91,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,15688	1721,06	0,00674	0,1	1,45326E-06	0,054	37158	92,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,16103	1676,71	0,00681	0,1	1,43052E-06	0,054	37749	93,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,16532	1633,20	0,00688	0,1	1,40772E-06	0,054	38360	94,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,16975	1590,57	0,00695	0,1	1,38493E-06	0,054	38991	95,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,17432	1548,88	0,00702	0,1	1,3622E-06	0,054	39642	96,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,17903	1508,13	0,00709	0,1	1,33959E-06	0,054	40311	97,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,18388	1468,35	0,00716	0,1	1,31714E-06	0,054	40998	98,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,18887	1429,55	0,00723	0,1	1,29487E-06	0,054	41703	99,00
270	1360	51	152	24865,00	6,76	0,154506	0,000271868	0,194	1391,75	0,0073	0,1	1,27284E-06	0,054	42425	100,00



Tabela 5.17 Tabelarni prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA (kratke prsline)

$\Delta P(N)$	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E (MPa)	$\Delta\sigma(MPa)$	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta(a)$	R	Wve (N/mm)	G (N/mm)	N	a0+ai(mm)
270	1360	51	152	24865,00	17,52	0,154506	0,000704605	0,10775	2505,80	0,00555	0,1	1,17032E-05	0,054	4614	75,00
270	1360	51	152	24865,00	17,25	0,154506	0,000693786	0,1079207	2501,84	0,005557	0,1	1,13429E-05	0,054	4761	75,10
270	1360	51	152	24865,00	16,18	0,154506	0,000650513	0,1086175	2485,79	0,005585	0,1	9,95801E-06	0,054	5423	75,50
270	1360	51	152	24865,00	15,10	0,154506	0,000607239	0,1093367	2469,44	0,005613	0,1	8,66335E-06	0,054	6233	75,90
270	1360	51	152	24865,00	14,02	0,154506	0,000563965	0,1100783	2452,80	0,005641	0,1	7,45928E-06	0,054	7239	76,30
270	1360	51	152	24865,00	12,95	0,154506	0,000520692	0,1108423	2435,89	0,005669	0,1	6,346E-06	0,054	8509	76,70
270	1360	51	152	24865,00	11,87	0,154506	0,000477418	0,1116287	2418,73	0,005697	0,1	5,3236E-06	0,054	10144	77,10
270	1360	51	152	24865,00	10,80	0,154506	0,000434144	0,1124375	2401,33	0,005725	0,1	4,39208E-06	0,054	12295	77,50
270	1360	51	152	24865,00	9,72	0,154506	0,000390871	0,1132687	2383,71	0,005753	0,1	3,55131E-06	0,054	15206	77,90
270	1360	51	152	24865,00	8,64	0,154506	0,000347597	0,1141223	2365,88	0,005781	0,1	2,80106E-06	0,054	19278	78,30
270	1360	51	152	24865,00	7,57	0,154506	0,000304323	0,1149983	2347,86	0,005809	0,1	2,14101E-06	0,054	25222	78,70
270	1360	51	152	24865,00	6,49	0,154506	0,00026105	0,1158967	2329,66	0,005837	0,1	1,57073E-06	0,054	34379	79,10

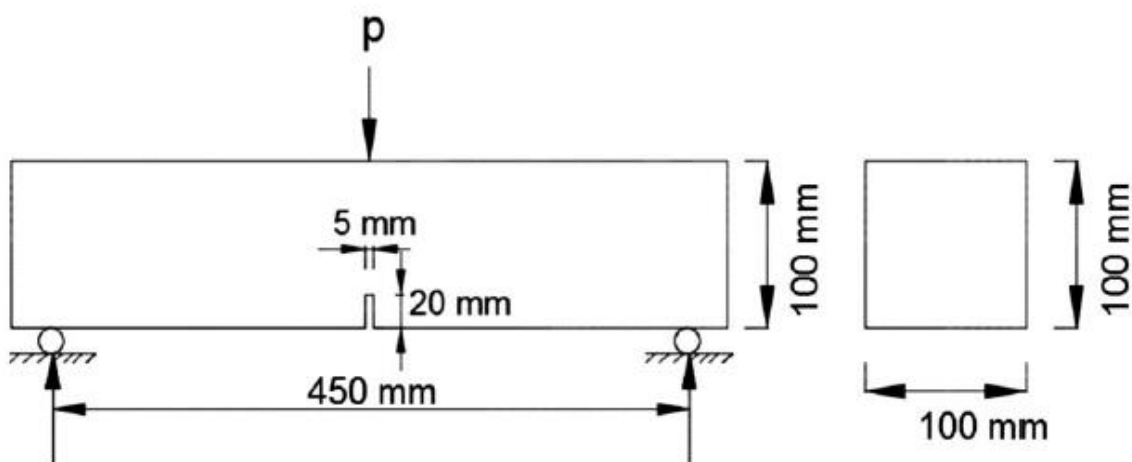
Na sljedećem dijagramu su dati rezultati dužina prsline-broj ciklusa za slučaj opisane grede prema RDA gdje se vidi veoma dobro poklapanje sa eksperimentalnom krivom.



Slika 5.23 Dužina prsline-broj ciklusa prema RDA

### 5.3 Propagacija prslina u betonskim gredama (S/D=4,5) od normalnog i mikroarmiranog betona

Na ovom primjeru se prikazuje primjena propagacije prslina prema RDA i to u slučaju greda dimenzija  $S/D=4,5$  izrađenim od normalnog i mikroarmiranog betona. Kod mikroarmiranog betona se posmatraju tri različite količine ugrađenih čeličnih vlakana koji imaju uticaj na mehaničke parametre koji su neophodni ulazni podaci za analizu zamora prema RDA. Eksperimentalna ispitivanja su data u radu Banjara N.K. i Ramanjaneyulu K. [92] gdje su sprovedeni statički testovi i testovi zamora na gredama sa dimenzijama prikazanim na sledećoj slici 5.24.



Slika 5.24 Geometrija ispitanih greda [92]

Materijalne karakteristike ispitanih greda potrebne za dalju analizu su date u sledećoj tabeli,

Tabela 5.18 Materijalne karakteristike betona prema [92]

Karakteristike materijala	Nearmirani beton	Mikroarmirani beton sa procentom čeličnih vlakana		
		0,5% V	1,0% V	2,0% V
Čvrstoća na pritisak (MPa)	44,70	48,60	49,10	47,20
Čvrstoća na zatezanje (MPa)	2,97	3,42	3,79	3,45
Modul elastičnosti (MPa)	31500	36900	38450	37240
Energija loma (N/mm)	0,126	0,190	0,289	0,425
$P_u$ (N) – statički test	4850,00	5000,00	5800,00	5100,00

Proračun napona u vrhu prsline kako za slučaj statičkog testa tako i za slučaj zamora se na ovom primjeru određuje prema LEFM tj. primjenom izraza,

$$\sigma(r) = K_I / \sqrt{2\pi r} \quad (5.12)$$

pri čemu se za faktor intenziteta napona računa prema izrazu (2.15), a za napon se uzima vrijednost koja odgovara rastojanju od vrha prsline u iznosu od  $0,3\text{mm}$  jer se za ovu vrijednost krive iz statičkog testa i zamora najviše približavaju eksperimentalnim vrijednostima.

Tabela 5.19 Proračun napona u vrhu prsline

P (N)	M (Nmm)	$\sigma_N$ (MPa)	$K_I$ (MPamm <sup>1/2</sup> )	E (N/mm <sup>2</sup> )	$G_F$ (N/mm)	r (mm)	$\sigma(r)$ (MPa)	
4850	545625	3,27	25,79	31500	0,021	0,3	18,79	Statika
5000	562500	3,38	26,59	36900	0,019	0,3	19,37	
5800	652500	3,92	30,85	38450	0,025	0,3	22,47	
5100	573750	3,44	27,12	37240	0,020	0,3	19,76	
3152,5	354656	2,13	16,77	31500	0,009	0,3	12,21	Zamor
3250	365625	2,19	17,28	36900	0,008	0,3	12,59	
3770	424125	2,54	20,05	38450	0,010	0,3	14,61	
3315	372937	2,24	17,63	37240	0,008	0,3	12,84	

U narednim tabelama je prikazan proračun za statički test sila-CMOD prema RDA za slučaj nearmiranog betona. Proračun otvaranja prsline CMOD je dobijen u Abaqus-u i analitički primjenom izraza (2.16).

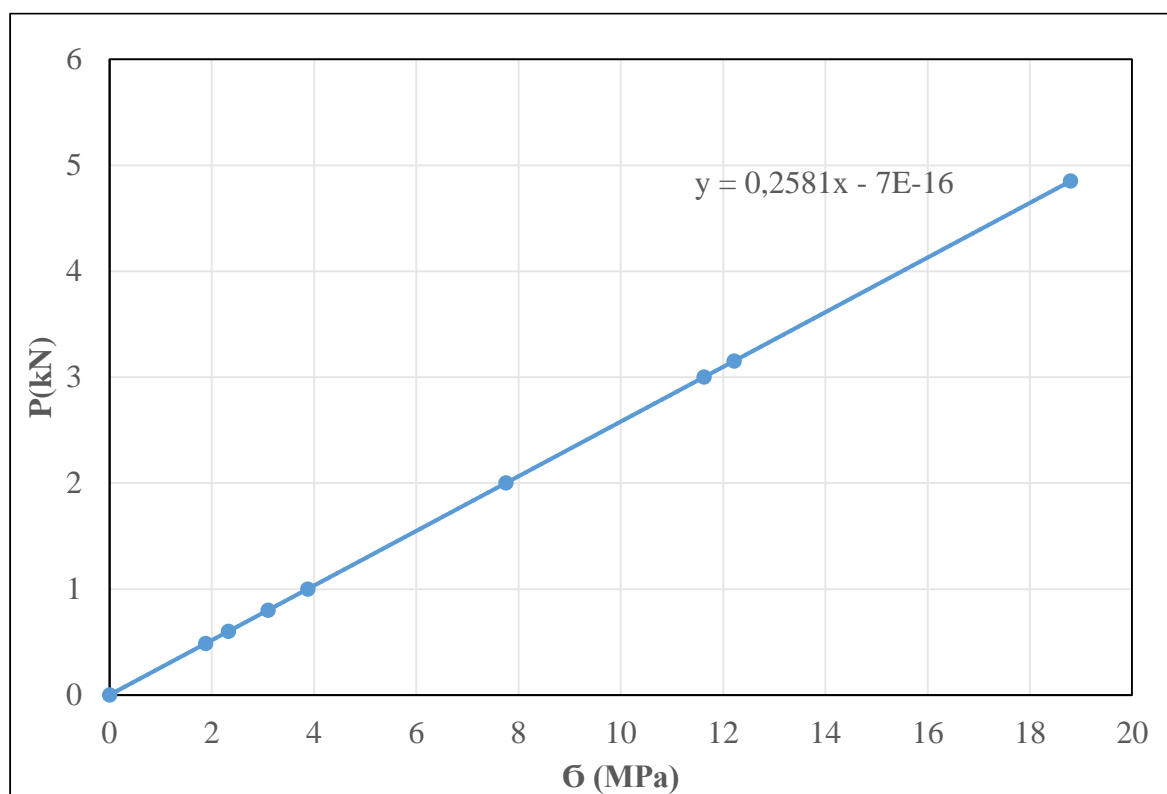
Tabela 5.20 Računanje sila - CMOD prema RDA za nearmirani beton - uzlazna grana

P(kN)	$\sigma$ (N/mm <sup>2</sup> ) Abaqus	$\sigma$ (N/mm <sup>2</sup> ) LEFM	$K_E$	$\varphi$	CMOD <sub>e</sub> (mm) Abaqus	CMOD <sub>e</sub> (mm) Analitički	CMOD <sub>RDA</sub> (mm)
0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,0000	0,0000	0,0000
0,48	1,04	1,88	0,02	0,03	0,0013	0,0012	0,0013
0,60	1,30	2,32	0,02	0,04	0,0017	0,0015	0,0016
0,80	1,73	3,10	0,02	0,06	0,0022	0,0020	0,0022
1,00	2,16	3,87	0,02	0,07	0,0028	0,0025	0,0027
2,00	4,32	7,75	0,02	0,14	0,0055	0,0051	0,0058
3,00	6,48	11,62	0,02	0,21	0,0082	0,0076	0,0092
3,15	6,81	12,21	0,02	0,22	0,0087	0,0080	0,0098
4,85	10,48	18,79	0,02	0,34	0,0133	0,0124	0,0165

Tabela 5.21 Računanje CMOD grede prema RDA za nearmirani beton - silazna grana

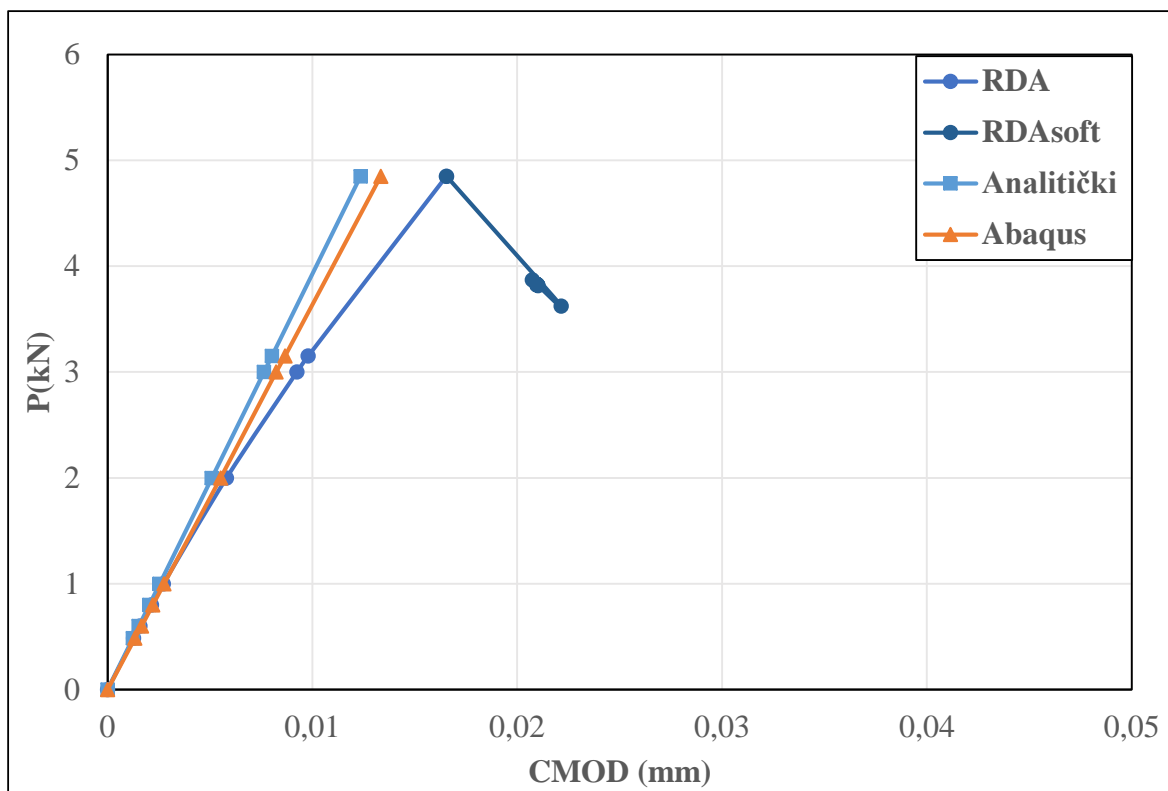
$\sigma_{\text{soft}}(\text{N/mm}^2)$	$K_E$	$\phi_{\text{soft}}$	$\text{CMOD}_{\text{cr}}(\text{mm})$	$\text{CMOD}_{\text{RDA,soft}}(\text{mm})$	$P_{\text{soft}}(\text{kN})$
18,79	0,02	0,339	0,0165	0,0165	4,85
14,03	0,02	0,253	0,0165	0,0222	3,62
15,00	0,02	0,271	0,0165	0,0207	3,87
14,79	0,02	0,267	0,0165	0,0210	3,82
14,83	0,02	0,268	0,0165	0,0210	3,83
14,82	0,02	0,267	0,0165	0,0210	3,83
14,83	0,02	0,267	0,0165	0,0210	3,83
14,83	0,02	0,267	0,0165	0,0210	3,83

Veza između napona u vrhu prsline i sile koja djeluje u sredini grede koja je potrebna u prethodnoj tabeli je prikazana na sledećoj slici,



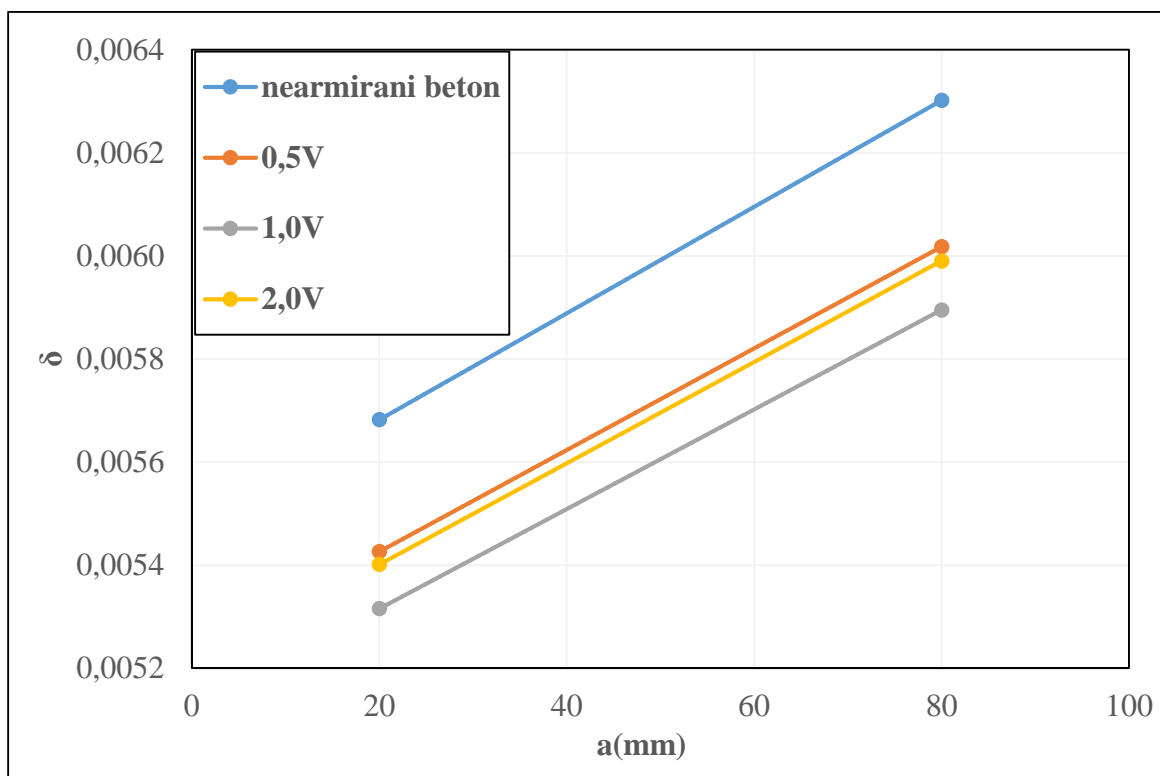
Slika 5.25 Linearna veza sile i napona u vrhu prsline

Kriva sila-CMOD za nearmirani beton prema RDA je prikazana na sledećoj slici.

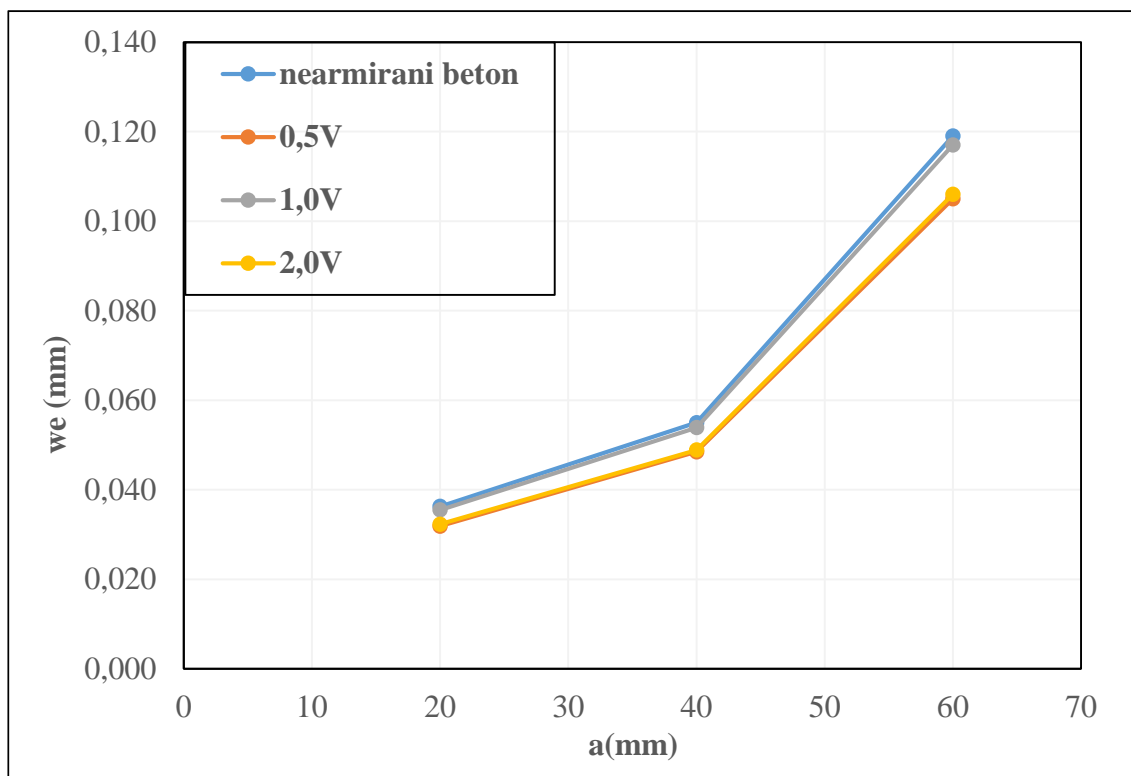


Slika 5.26 Sila-CMOD za nearmirani beton prema RDA

Za slučaj cikličkog testa posmatran je rang napona sile  $0,2P_u - 0,85P_u$  pri čemu je  $P_u$  maksimalna vrijednost sile iz statičkog testa. Frekvencija spoljašnjeg opterećenja je  $5Hz$  a na slikama je prikazana promjena relativne frekvencije i ugiba koji se dobijaju primjenom Abaqus-a na isti način kao u prethodnim primjerima.

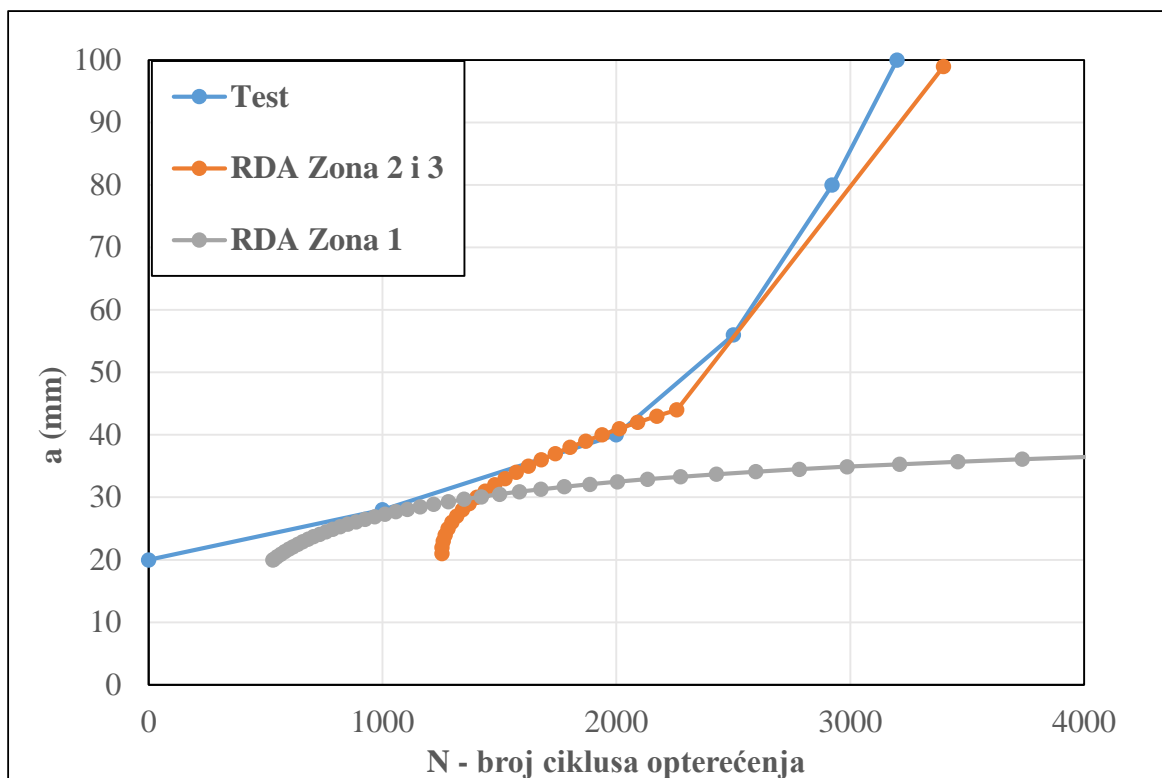


Slika 5.27 Promjena relativne frekvencije sa dužinom prsline

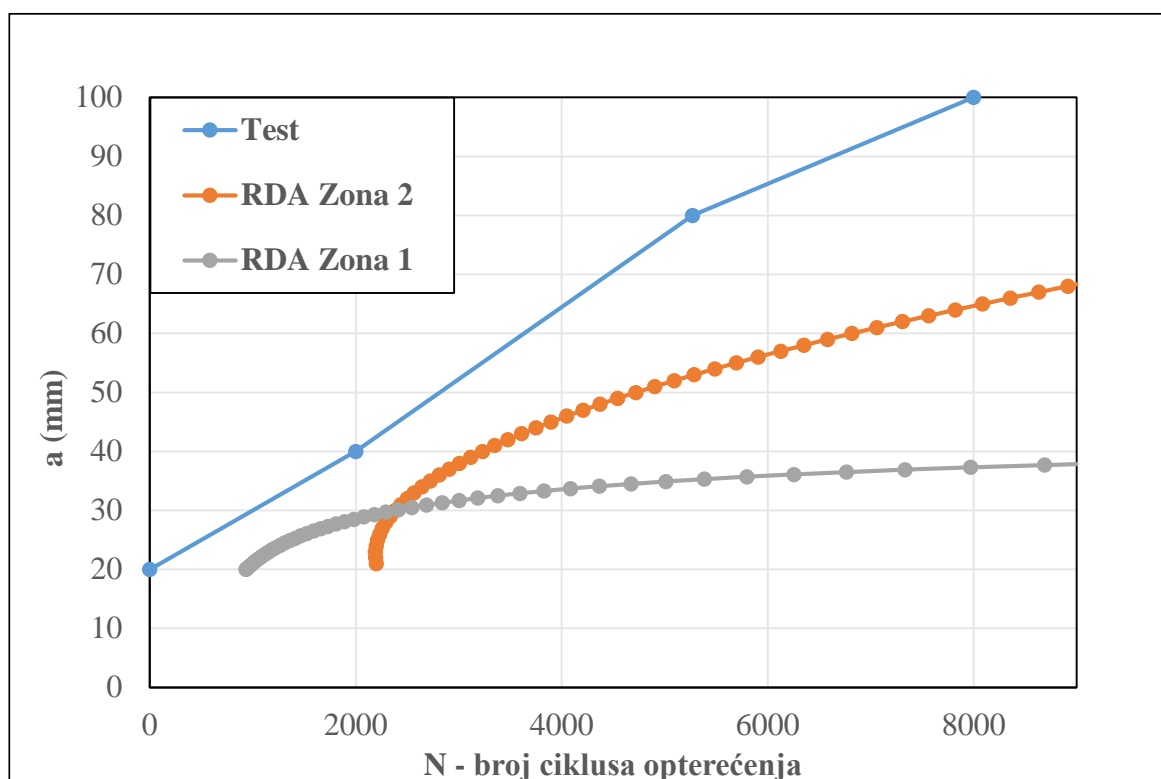


Slika 5.28 Promjena ugiba sa dužinom prsline

Kao što se vidi na prethodnom primjeru za betone sa većim modulom elastičnosti dobijaju se veće vrijednosti sopstvene frekvencije a sa tim manje vrijednosti relativne frekvencije. Promjena elastičnog ugiba takođe zavisi od modula elastičnosti i prikazana je na gornjoj slici. Na sledećim dijagramima su za četiri ispitana betona prikazane eksperimentalne i RDA krive (dužina prsline - broj ciklusa) koje se dobijaju na isti način kao u prethodnim primjerima pa se tabelarni prikazan na ovome primjeru izostavlja. Granična dužina prsline između Zone 1 (kratke prsline) i Zone 2 (duge prsline) iznosi  $10\text{mm}$  kod nearmiranog i  $0,5\text{V}$  betona, a  $15\text{mm}$  kod  $1,0\text{V}$  i  $2,0\text{V}$  betona.

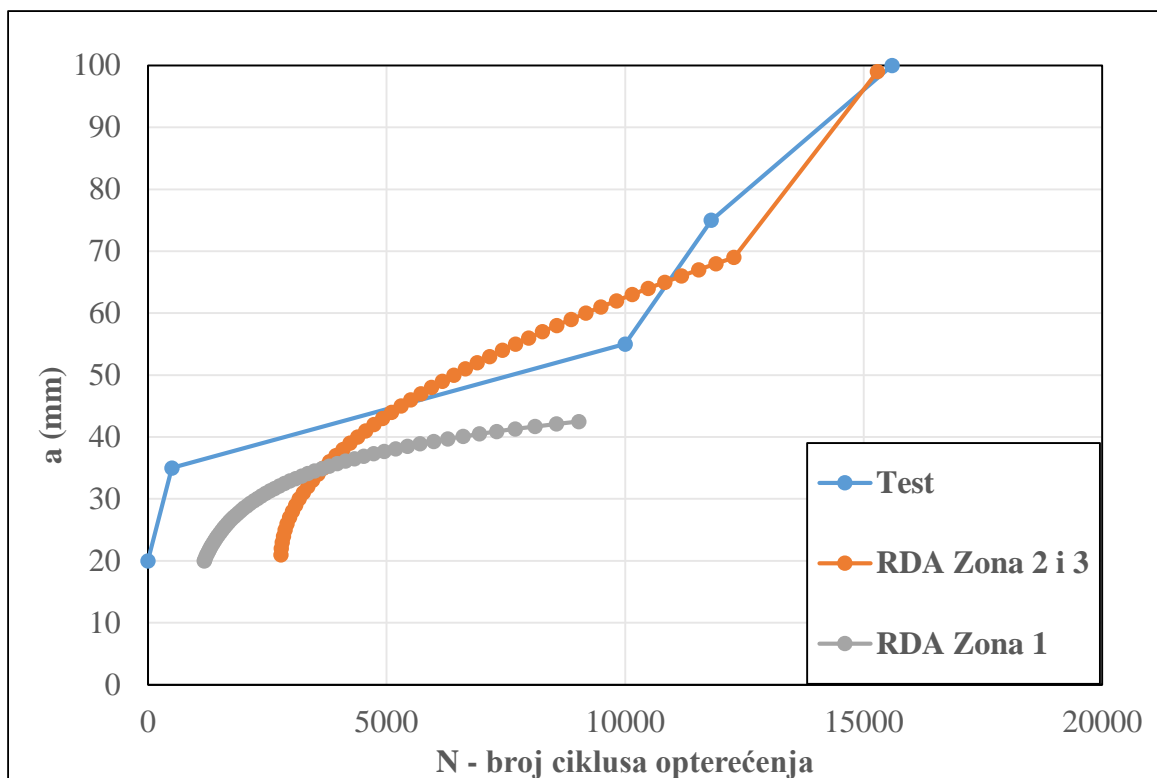


Slika 5.29 Zavisnost dužina prsline-broj ciklusa za nearmirani beton

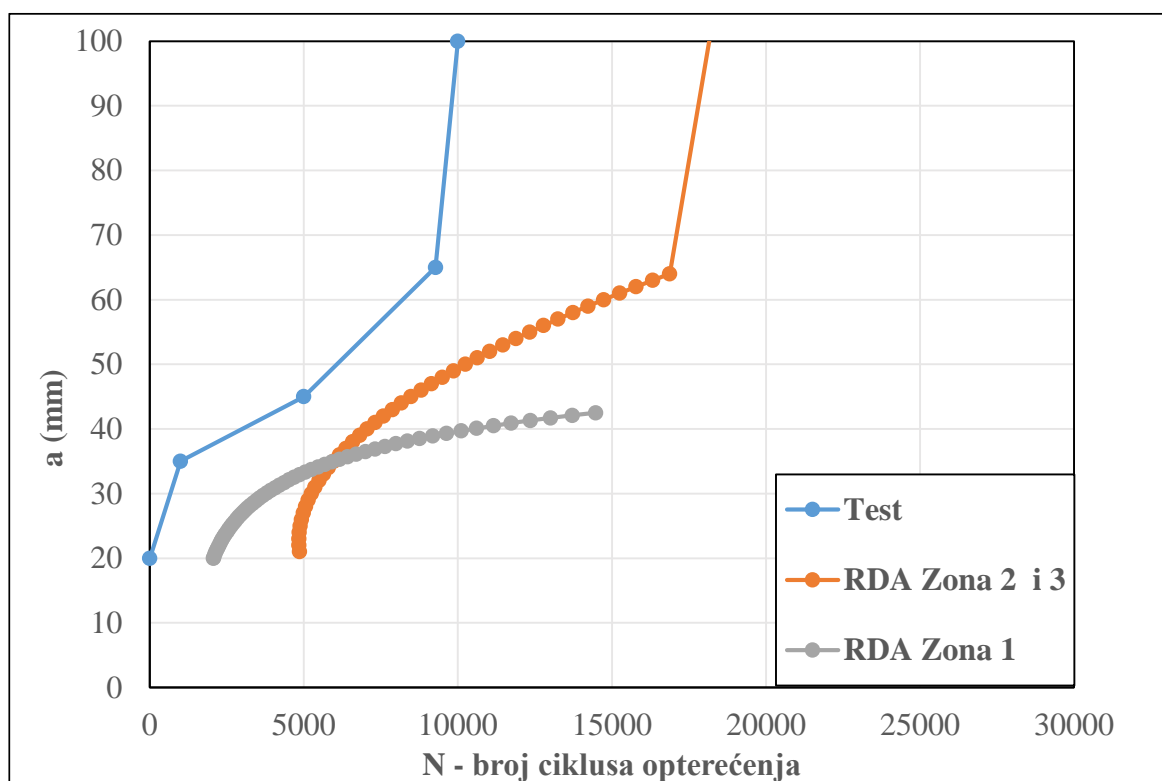


Slika 5.30 Zavisnost dužina prsline-broj ciklusa za mikroarmirani beton 0,5V





Slika 5.31 Zavisnost dužina prsline-broj ciklusa za mikroarmirani beton 1,0V



Slika 5.32 Zavisnost dužina prsline-broj ciklusa za mikroarmirani beton 2,0V

Kao što se vidi na prethodnim slikama i kod upotrebe mikroarmiranih betona primjena RDA teorije je dosta uspješna. Treba imati na umu da pored svih unaprijed definisanih ulaznih

parametara slaganje ovih krivih sa eksperimentalnim dosta zavisi od napona u vrhu prsline koji zavisi od mreže konačnih elemenata ili od unaprijed usvojenog rastojanja od vrha prsline ako se proračun sprovodi prema LEFM.

#### 5.4 Propagacija prsline u gredi od betona visoke čvrstoće (S/D=2,5)

Na ovome primjeru se prikazuje propagacija prsline kod grede od betona visoke čvrstoće koja je izložena cikličnom testu savijanja u tri tačke. Greda je bez inicijalne prsline pa je zbog primjene RDA teorije prilikom proračuna broja ciklusa potrebno usvojiti početnu vrijednost inicijalne prsline sa eksperimentalne krive. Eksperimentalna ispitivanja su sprovedena laboratoriji građevinskog fakulteta u Kaiserslauternu (Njemačka) i nisu predmet istraživanja u okviru ove disertacije, pa se dobijeni rezultati koriste da bi se verifikovala metoda proračuna prema RDA, analogno prethodnim primjerima.

Fotogrametrijskim mjerenjem je analizirana propagacija prsline. Upotrebom softvera GOM Inspect 2017 je izvršeno mjerenje dužine prsline na slikama koje su dobijene fotogrametrijom. Kao što se očekivalo prslina je nastala u sredini grede. Na slici 5.33 je prikazana prslina u sredini grede u cikličnom testu i to pred stanje loma. Kao što se vidi dužina prsline pred lom odgovara polovini visine grede. Na osnovu fotogrametrije određeni su parovi tačaka dužina prsline i broj ciklusa opterećenja, a vrijednosti između su linearno interpolirane. Eksperimentalna kriva je prikazana na slici 5.36.



*Slika 5.33 Test zamora - Prslina u gredi pred lom dobijena fotogramterijom*

Ulazni parametri potrebni za RDA analizu:

dimenzije grede: širina 40mm, visina 40mm, dužina 160mm,

razmak oslonaca 100mm,

modul elastičnosti 48000MPa,

Poasonov koeficijent  $0,20$

gustina betona  $2500\text{kg/m}^3$

čvrstoća na pritisak  $120\text{MPa}$

maksimalna sila dobijena statičkim testom  $5,15\text{kN}$

čvrstoća na zatezanje dobijena statičkim testom savijanja  $12,06\text{MPa}$

konstantna vrijednost gornje amplitude u cikličnom testu  $4,64\text{kN}$

konstantna vrijednost donje amplitude u cikličnom testu  $0,02\text{kN}$

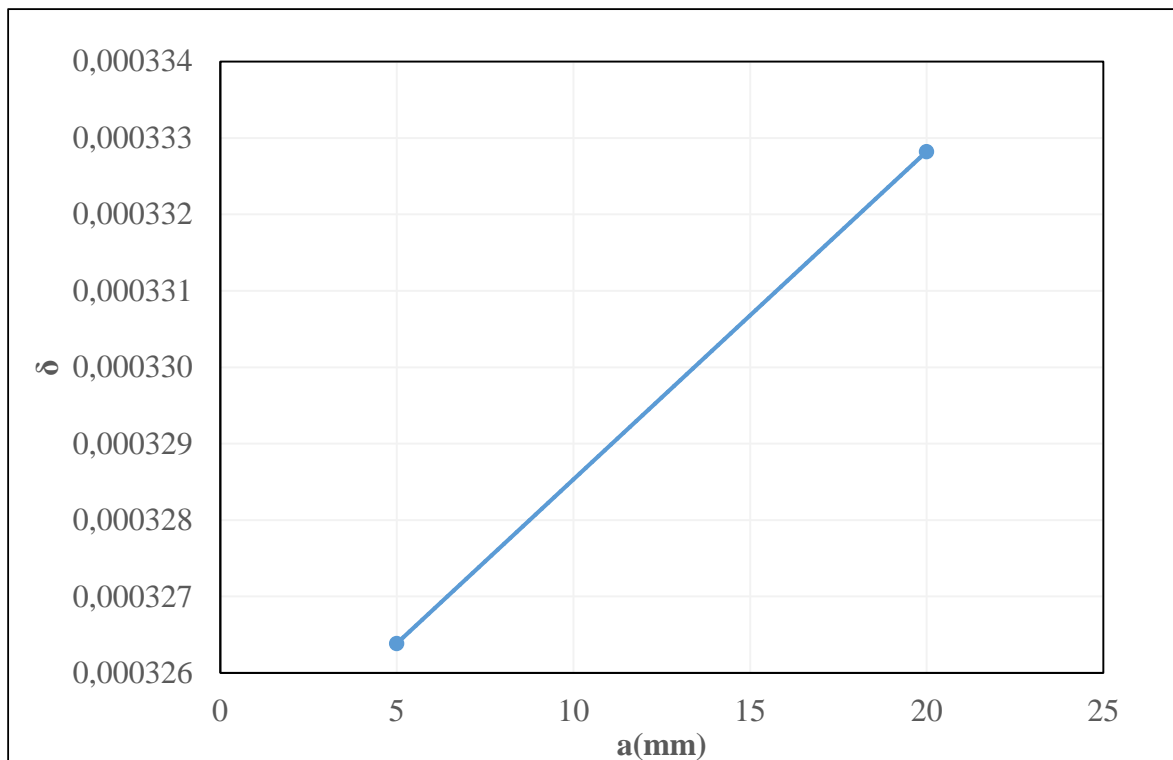
frekvencija cikličnog opterećenja  $2\text{Hz}$

Koeficijent  $K_E = 0,011$

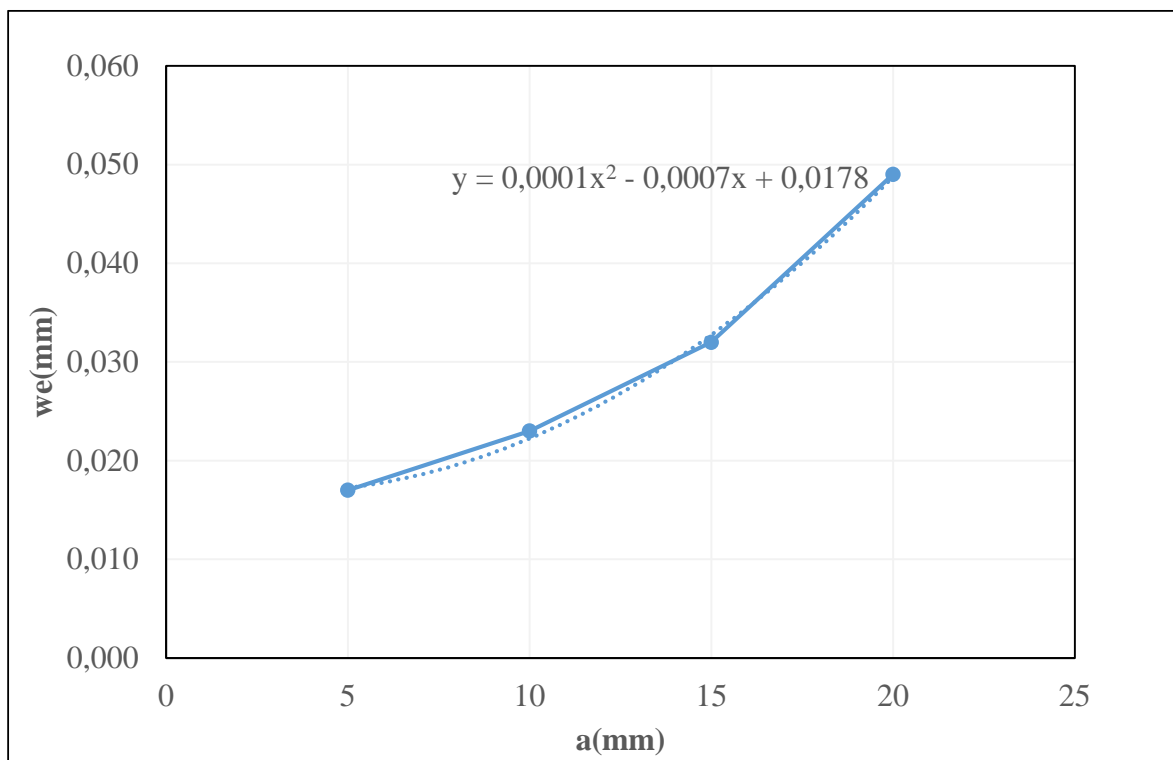
Sa eksperimentalne krive se vidi da je prilikom nanošenja sile na gredu nastala početna prslina dužine  $5\text{mm}$  pa se to dalje usvaja kao inicijalna prslina tj. u Abaqus-u se modelira greda sa ovom prslinom i trougaonom mrežom konačnih elemenata sa šest stepeni slobode pomjeranja (veličina  $KE$  u Abaqus-u je  $1\text{mm}$ ). Za početni otvor prsline na donjoj strani grede tj.  $CMOD$  se usvaja  $1,0\text{mm}$  što se približno slaže sa izmjerenom vrijednosti. Kada se na ovaj model u Abaqus-u unese rang sile od  $4,62\text{kN}$  onda se dobija napon u vrhu prsline u iznosu  $19,93\text{MPa}$  koji se dalje koristi kod proračuna broja ciklusa opterećenja prema RDA. Ova vrijednost napona u vrhu prsline odgovara vrijednosti koja se dobija računanjem preko izraza (5.12) za rastojanje od vrha prsline u iznosu od  $0,6\text{mm}$ .

Energija loma se računa prema izrazu (2.31) na osnovu maksimalne veličine zrna agregata koja iznosi  $5\text{mm}$  i iznosi  $0,131\text{ N/mm}$ .

Naredne slike pokazuju promjenu relativne frekvencije i ugiba u zavisnosti od dužine prsline.



Slika 5.34 Promjena relativne frekvencije sa dužinom prsline



Slika 5.35 Promjena ugiba sa dužinom prsline

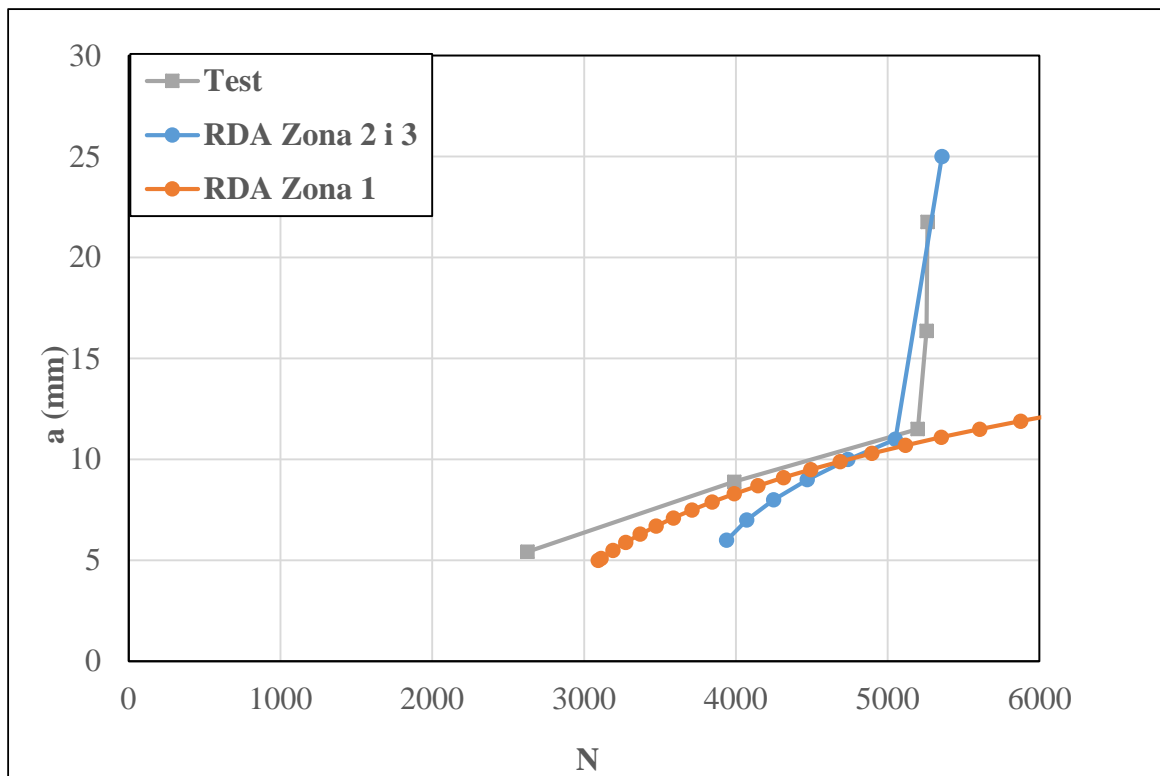
Proračun prema RDA kao i rezultati su prikazani na narednim stranama.

Tabela 5.22 Tabelarni prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA (duge prsline)

$\Delta P(N)$	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E (MPa)	$\Delta\sigma(MPa)$	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta(a)$	R	Wve(N/mm)	$G_F(N/mm)$	N	ai(mm)	a0(mm)	a0+ai(mm)
4615	100	40	40	48000,00	19,93	0,22	0,000415	0,0172	268313,95	0,0003024	0,0043	3,32545E-05	0,131	3939	1,00	5,00	6,00
4615	100	40	40	48000,00	19,93	0,22	0,000415	0,0178	259269,66	0,0003028	0,0043	3,21761E-05	0,131	4071	2,00	5,00	7,00
4615	100	40	40	48000,00	19,93	0,22	0,000415	0,0186	248118,28	0,0003032	0,0043	3,08329E-05	0,131	4249	3,00	5,00	8,00
4615	100	40	40	48000,00	19,93	0,22	0,000415	0,0196	235459,18	0,0003036	0,0043	2,92984E-05	0,131	4471	4,00	5,00	9,00
4615	100	40	40	48000,00	19,93	0,22	0,000415	0,0208	221875,00	0,000304	0,0043	2,76445E-05	0,131	4739	5,00	5,00	10,00
4615	100	40	40	48000,00	19,93	0,22	0,000415	0,0222	207882,88	0,0003044	0,0043	2,59352E-05	0,131	5051	6,00	5,00	11,00
4615	100	40	40	48000,00	19,93	1	0,000415	0,0628	73487,26	0,00031	0,0043	2,44488E-05	0,131	5358	20,00	5,00	25,00

Tabela 5.23 Tabela prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA (kratke prsline-kritična vrijednost 5mm)

$\Delta P(N)$	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E (MPa)	$\Delta\sigma(MPa)$	$\varphi$	$\Delta\varepsilon$	we(mm)	k(a)(N/mm)	$\delta(a)$	R	Wve(N/mm)	$G_F(N/mm)$	N	ai(mm)	a0(mm)	a0+ai(mm)
4615	100	40	40	48000,00	22,24	0,22	0,000463	0,0168	274702,38	0,000302	0,0043	4,23415E-05	0,131	3094	0,00	5,00	5,00
4615	100	40	40	48000,00	22,19	0,22	0,000462	0,016831	274196,42	0,00030204	0,0043	4,20937E-05	0,131	3112	0,10	5,00	5,10
4615	100	40	40	48000,00	22,01	0,22	0,000458	0,016975	271870,40	0,0003022	0,0043	4,10661E-05	0,131	3190	0,50	5,00	5,50
4615	100	40	40	48000,00	21,82	0,22	0,000455	0,017151	269080,52	0,00030236	0,0043	3,9986E-05	0,131	3276	0,90	5,00	5,90
4615	100	40	40	48000,00	21,64	0,22	0,000451	0,017359	265856,33	0,00030252	0,0043	3,88611E-05	0,131	3371	1,30	5,00	6,30
4615	100	40	40	48000,00	21,45	0,22	0,000447	0,017599	262230,81	0,00030268	0,0043	3,76991E-05	0,131	3475	1,70	5,00	6,70
4615	100	40	40	48000,00	21,27	0,22	0,000443	0,017871	258239,61	0,00030284	0,0043	3,65077E-05	0,131	3588	2,10	5,00	7,10
4615	100	40	40	48000,00	21,08	0,22	0,000439	0,018175	253920,22	0,000303	0,0043	3,52945E-05	0,131	3712	2,50	5,00	7,50
4615	100	40	40	48000,00	20,90	0,22	0,000435	0,018511	249311,22	0,00030316	0,0043	3,40669E-05	0,131	3845	2,90	5,00	7,90
4615	100	40	40	48000,00	20,71	0,22	0,000432	0,018879	244451,51	0,00030332	0,0043	3,2832E-05	0,131	3990	3,30	5,00	8,30
4615	100	40	40	48000,00	20,53	0,22	0,000428	0,019279	239379,64	0,00030348	0,0043	3,15963E-05	0,131	4146	3,70	5,00	8,70
4615	100	40	40	48000,00	20,34	0,22	0,000424	0,019711	234133,23	0,00030364	0,0043	3,03659E-05	0,131	4314	4,10	5,00	9,10
4615	100	40	40	48000,00	20,16	0,22	0,00042	0,020175	228748,45	0,0003038	0,0043	2,91463E-05	0,131	4495	4,50	5,00	9,50
4615	100	40	40	48000,00	19,97	0,22	0,000416	0,020671	223259,64	0,00030396	0,0043	2,79424E-05	0,131	4688	4,90	5,00	9,90
4615	100	40	40	48000,00	19,79	0,22	0,000412	0,021199	217698,95	0,00030412	0,0043	2,67587E-05	0,131	4896	5,30	5,00	10,30
4615	100	40	40	48000,00	19,61	0,22	0,000408	0,021759	212096,14	0,00030428	0,0043	2,55988E-05	0,131	5117	5,70	5,00	10,70
4615	100	40	40	48000,00	19,42	0,22	0,000405	0,022351	206478,46	0,00030444	0,0043	2,4466E-05	0,131	5354	6,10	5,00	11,10
4615	100	40	40	48000,00	19,24	0,22	0,000401	0,022975	200870,51	0,0003046	0,0043	2,33629E-05	0,131	5607	6,50	5,00	11,50
4615	100	40	40	48000,00	19,05	0,22	0,000397	0,023631	195294,32	0,00030476	0,0043	2,22916E-05	0,131	5877	6,90	5,00	11,90
4615	100	40	40	48000,00	18,87	0,22	0,000393	0,024319	189769,32	0,00030492	0,0043	2,12539E-05	0,131	6164	7,30	5,00	12,30
4615	100	40	40	48000,00	18,68	0,22	0,000389	0,025039	184312,47	0,00030508	0,0043	2,02509E-05	0,131	6469	7,70	5,00	12,70
4615	100	40	40	48000,00	18,50	0,22	0,000385	0,025791	178938,39	0,00030524	0,0043	1,92834E-05	0,131	6793	8,10	5,00	13,10



Slika 5.36 Dužina prsline-broj ciklusa opterećenja prema eksperimentu i RDA

## 5.5 Propagacija prsline u betonskim gredama različitih dimenzija (S/D=4,0)

Na ovom primjeru se ispituje zamor prema RDA, ali za slučaj tri grede različitih veličina kod kojih odnos raspona prema visini iznosi 4. Pored zamora traže se RDA krive iz statičkog testa sila-ugib kao i sila-CMOD pri čemu se proračun računskog napona u vrhu prsline kao i vrijednosti elastičnog ugiba i CMOD računaju uz pomoć izraza iz LEFM. Eksperimentalna ispitivanja propagacije prsline za tri grede različitih dimenzija su sprovedena u radu Keerthana K. i Kishen J.M.C. [93]. Dimenzije greda su prikazane u tabeli 5.25, a u tabeli 5.24 su date vrijednosti maksimalne sile uz statičkog testa kao i vrijednosti energije loma.

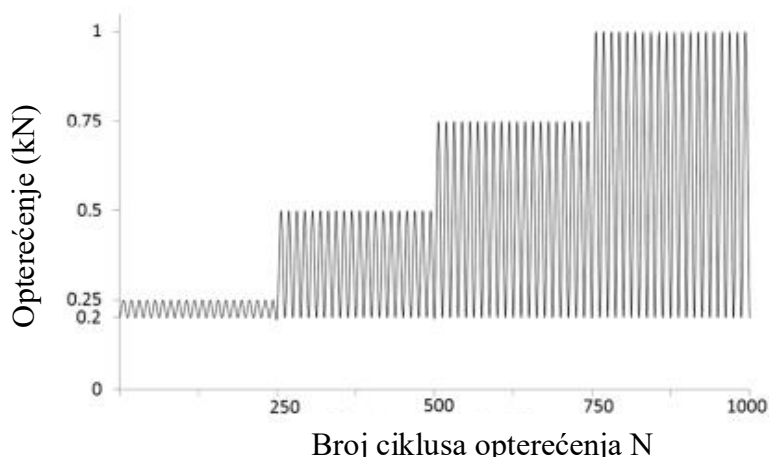
Tabela 5.24 Vrijednosti sila iz statičkog testa i i energije loma prema radu [93]

Greda	$P_u$ (kN)	$G_F$ (N/mm)
Mala	2,92	0,112
Srednja	4,89	0,241
Velika	8,57	0,240

Čvrstoća betona iznosi  $56,0\text{MPa}$  a modul elastičnosti  $35305\text{MPa}$ . Kod ispitivanja zamora korištena je skokovita promjena ranga napona koja je prikazana na narednoj slici, a frekvencija sile iznosi  $1,0\text{Hz}$ .

Tabela 5.25 Dimenzije greda iz rada [93]

Greda	Visina D(mm)	Raspon S(mm)	Širina B(mm)	Početna prsline $a_0$ (mm)
Mala	75	300	50	15
Srednja	150	600	50	30
Velika	300	1200	50	60



Slika 5.37 Skokovita promjena ranga opterećenja prilikom zamora prema radu [93]

Proračun broja ciklusa prema RDA je u ovome primjeru sproveden samo za slučaj maksimalne vrijednosti ranga napona jer je cilj da se pokaže uticaj parametara prema RDA na dijagrame statike i zamora, a ne uticaj ranga napona i koeficijenta asimetrije opterećenja na propagaciju prsline. Pored toga ako se posmatraju eksperimentalne krive može se reći da oblast dugačkih prsline počinje otprilike iznad 1000 ciklusa što odgovara rangu napona od



800N. Ukoliko bi se analizirale kratke prsline onda bi bilo potrebno rang napona i koeficijent asimetrije mijenjati u skladu sa brojem ciklusa i pored toga bi trebalo pretpostaviti granicu između kratkih i dugih prsline i rang napona povećati prema Kitagawa-Takahashi dijagramu. Ovo bi bilo dosta komplikovano, a s obzirom da je već pokazano u prethodnim primjerima ovdje se ta analiza ne sprovodi.

Sledećim izrazima se pokazuje postupak proračun zamora (zona 2) i statike prema RDA na ovome primjeru.

Funkcije sila-ugib i sila-CMOD se određuju prema sledećim izrazima,

$$w_R(P, r) = w_e(1 + \varphi) = \left( \frac{PS^3}{48EI} + w_{prslina} \right) (1 + K_E \sigma(r)) \quad (5.13)$$

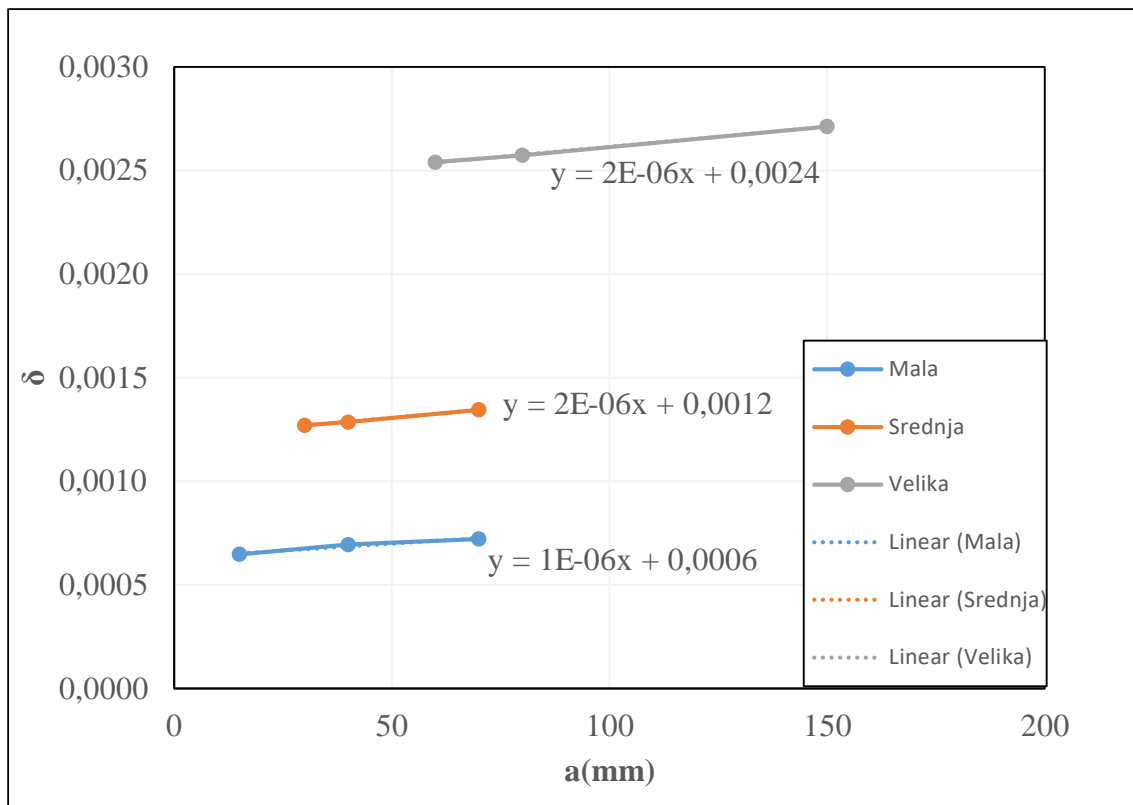
$$CMOD_R(P, r) = CMOD_e(P)(1 + \varphi) = CMOD_e(P)(1 + K_E \sigma(r))$$

Pri čemu se  $w_{prslina}$  računa prema izrazu (5.5) a  $CMOD_e$  prema (2.16). Napon  $\sigma(r)$  se računa prema izrazu iz LEFM kao funkcija rastojanja od vrha prsline prema izrazu (5.12), a faktor intenziteta napona prema (2.15). Koeficijent  $K_E$  se računa analogno primjeru iz poglavlja 5.1.1. i ovdje iznosi 0,033.

Funkcija dužina prsline – broj ciklusa za dugačke prsline se određuje uz pomoć izraza (4.42) koji sada dobija još jednu promjenjivu  $r$  (rastojanje od vrha prsline).

$$N(a, r) = \frac{G_F}{2\pi \frac{\Delta P}{w_e(a)} \left( \frac{\Delta \sigma(r)}{E_H} \right)^2 \frac{(1-R)^2 (1 + K_E \Delta \sigma(r))^2 + \delta(a)^2}{4} \delta(a)} \quad (5.14)$$

Proračun relativne frekvencije je sproveden u Abaqus-u analogno prethodnim primjerima a funkcije su prikazane na sledećoj slici,



Slika 5.38 Promjena relativne frekvencije sa dužinom prslina

U narednim tabelama su prikazani proračuni ugiba, CMOD i zamora prema RDA samo za malu gredu, jer se proračun za druge dvije grede sprovodi analogno.

Tabela 5.26 Proračun napona prema LEFM za malu gredu

B (mm)	D (mm)	a (mm)	S (mm)	P(N)	M (Nmm)	K1 (MPamm <sup>1/2</sup> )	r (mm)	σ (N/mm <sup>2</sup> ) prema LEFM	
50	75	15	300	50	3750	0,54	0,03	1,25	<b>Zamor</b>
50	75	15	300	300	22500	3,25	0,03	7,49	
50	75	15	300	550	41250	5,96	0,03	13,72	
50	75	15	300	800	60000	8,66	0,03	19,96	
50	75	15	300	0	0	0,00	0,03	0,00	<b>Statika</b>
50	75	15	300	200	15000	2,17	0,03	4,99	
50	75	15	300	400	30000	4,33	0,03	9,98	
50	75	15	300	600	45000	6,50	0,03	14,97	
50	75	15	300	800	60000	8,66	0,03	19,96	
50	75	15	300	1000	75000	10,83	0,03	24,95	
50	75	15	300	1500	112500	16,25	0,03	37,43	
50	75	15	300	2000	150000	21,66	0,03	49,91	
50	75	15	300	2920	219000	31,63	0,03	72,86	

Tabela 5.27 Računanje ugiba male grede prema RDA - uzlazna grana

P (kN)	$\bar{\sigma}_{vrh}$ (N/mm <sup>2</sup> ) LEFM	$w_{el}$ (mm) LEFM	E (N/mm <sup>2</sup> )	$K_E$	$\varphi$	WRDA (mm)
0,00	0,00	0,0000	35305	0,033	0,00	0,0000
0,20	4,99	0,0023	35305	0,033	0,17	0,0027
0,40	9,98	0,0045	35305	0,033	0,34	0,0061
0,60	14,97	0,0068	35305	0,033	0,51	0,0103
0,80	19,96	0,0091	35305	0,033	0,68	0,0152
1,00	24,95	0,0113	35305	0,033	0,85	0,0210
1,50	37,43	0,0170	35305	0,033	1,27	0,0387
2,00	49,91	0,0227	35305	0,033	1,70	0,0612
2,92	72,86	0,0331	35305	0,033	2,48	0,1151

Tabela 5.28 Računanje ugiba male grede prema RDA - silazna grana

$K_E$	$\bar{\sigma}_{vrh,soft}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\varphi_{soft} = K_E * \bar{\sigma}_{vrh,soft}$	$P_{soft} = 0,04 * \bar{\sigma}_{vrh,soft}$ (kN)	WRDA,soft (mm)
0,033	72,86	2,4761	2,92	0,1151
0,033	20,96	0,7123	0,84	0,4003
0,033	42,55	1,4461	1,71	0,1972
0,033	29,79	1,0123	1,19	0,2817
0,033	36,21	1,2305	1,45	0,2317
0,033	32,67	1,1101	1,31	0,2568
0,033	34,53	1,1734	1,38	0,2430
0,033	33,52	1,1393	1,34	0,2503
0,033	34,06	1,1575	1,37	0,2463
0,033	33,77	1,1477	1,35	0,2484
0,033	33,93	1,1529	1,36	0,2473

Tabela 5.29 Računanje CMOD male grede prema RDA - uzlazna grana

P(kN)	$\bar{\sigma}$ (N/mm <sup>2</sup> ) LEFM	$K_E$	$\varphi$	CMOD <sub>e</sub> (mm) LEFM	CMOD <sub>RDA</sub> (mm)
0,00	0,00	0,033	0,00	0,0000	0,0000
0,20	4,99	0,033	0,17	0,0008	0,0009
0,40	9,98	0,033	0,34	0,0016	0,0021
0,60	14,97	0,033	0,51	0,0024	0,0036
0,80	19,96	0,033	0,68	0,0032	0,0054
1,00	24,95	0,033	0,85	0,0040	0,0074
1,50	37,43	0,033	1,27	0,0060	0,0137
2,00	49,91	0,033	1,70	0,0080	0,0216
2,92	72,86	0,033	2,48	0,0117	0,0407

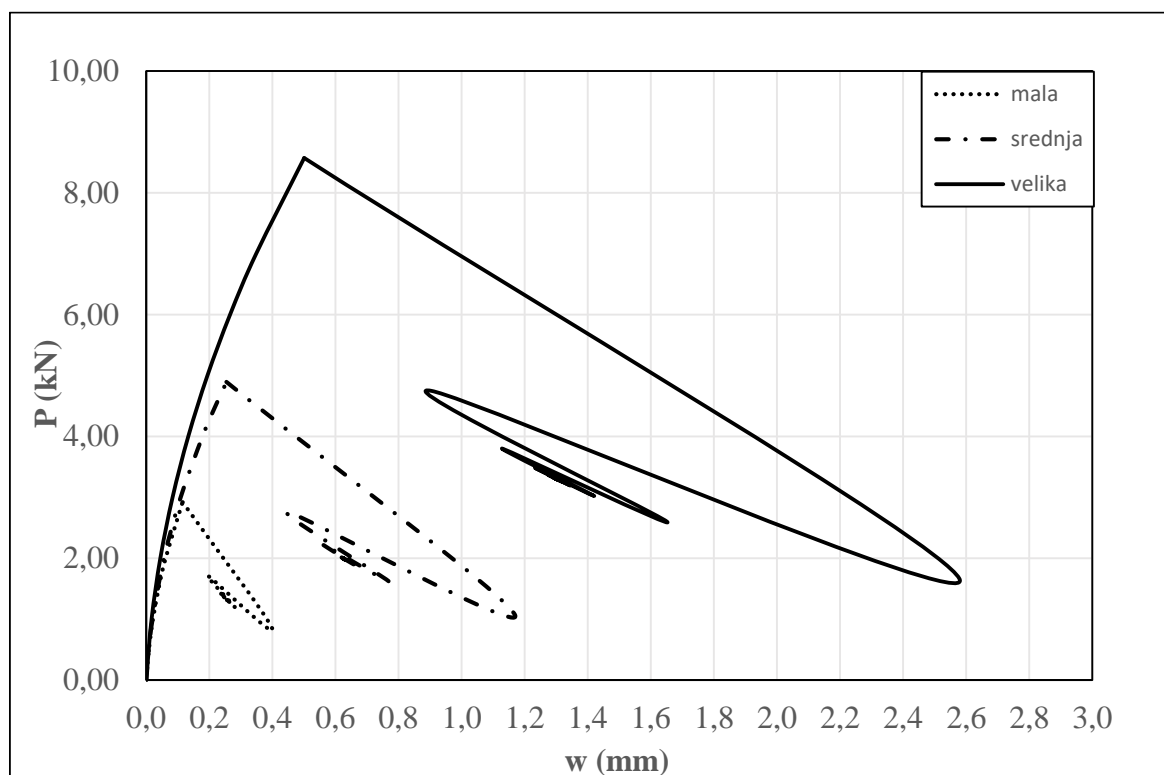
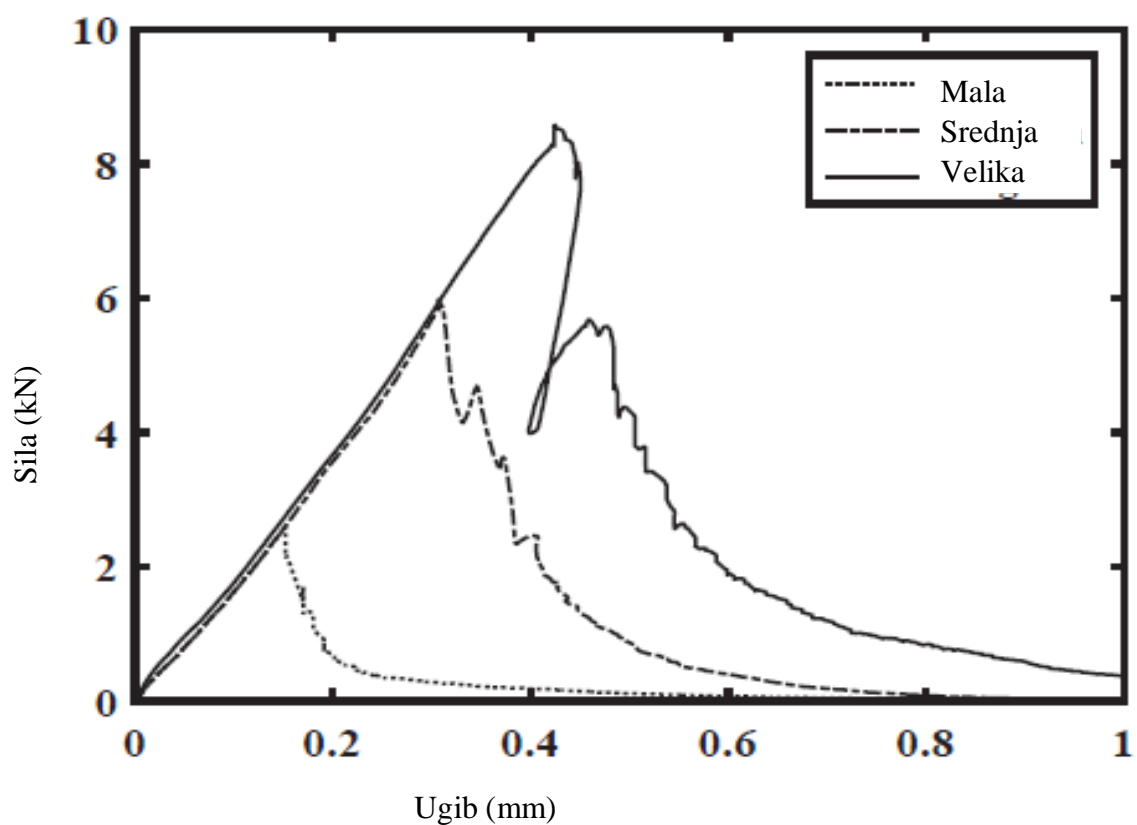
Tabela 5.30 Računanje CMOD male grede prema RDA - silazna grana

$\bar{\sigma}_{\text{soft}}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$K_E$	$\varphi_{\text{soft}}$	CMOD <sub>cr</sub> (mm)	CMOD <sub>RDA,soft</sub> (mm)	P <sub>soft</sub> (kN)
72,86	0,033	2,48	0,0407	0,0407	2,92
20,96	0,033	0,71	0,0407	0,1414	0,84
42,55	0,033	1,45	0,0407	0,0696	1,71
29,79	0,033	1,01	0,0407	0,0995	1,19
36,21	0,033	1,23	0,0407	0,0819	1,45
32,67	0,033	1,11	0,0407	0,0907	1,31
34,53	0,033	1,17	0,0407	0,0858	1,38
33,52	0,033	1,14	0,0407	0,0884	1,34
34,06	0,033	1,16	0,0407	0,0870	1,37
33,77	0,033	1,15	0,0407	0,0878	1,35
33,93	0,033	1,15	0,0407	0,0874	1,36

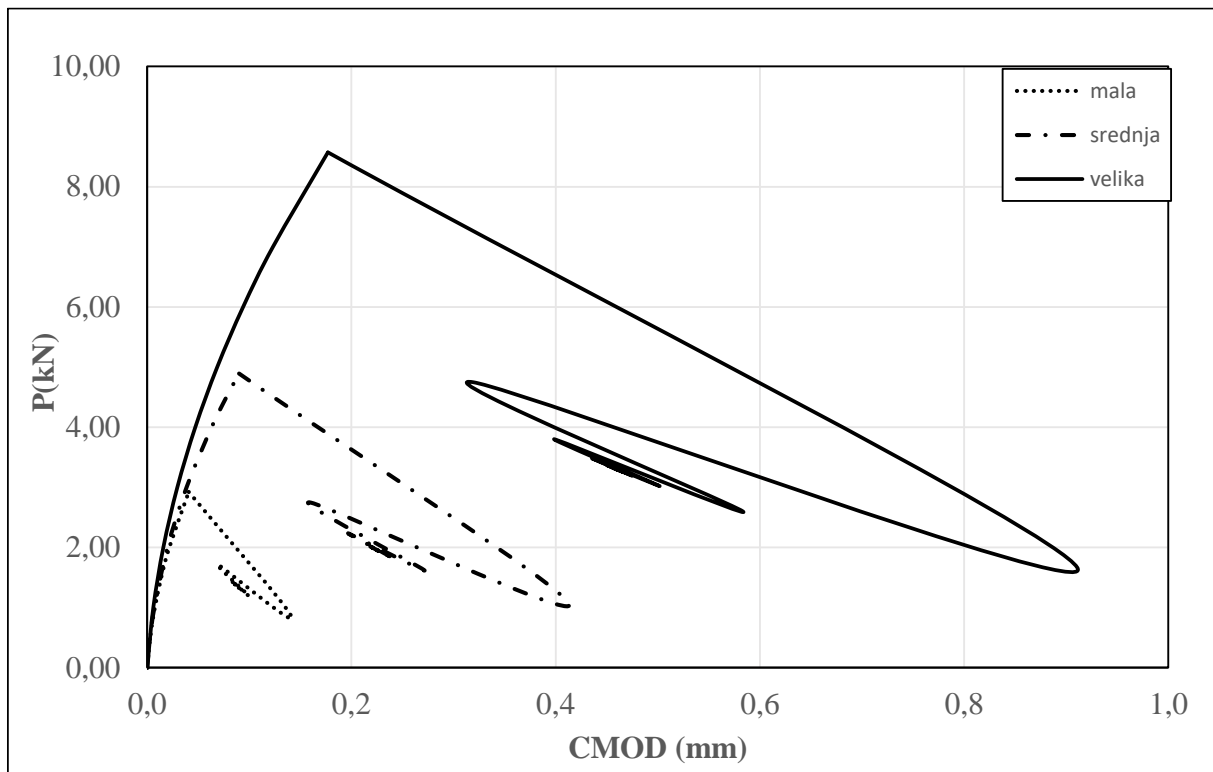
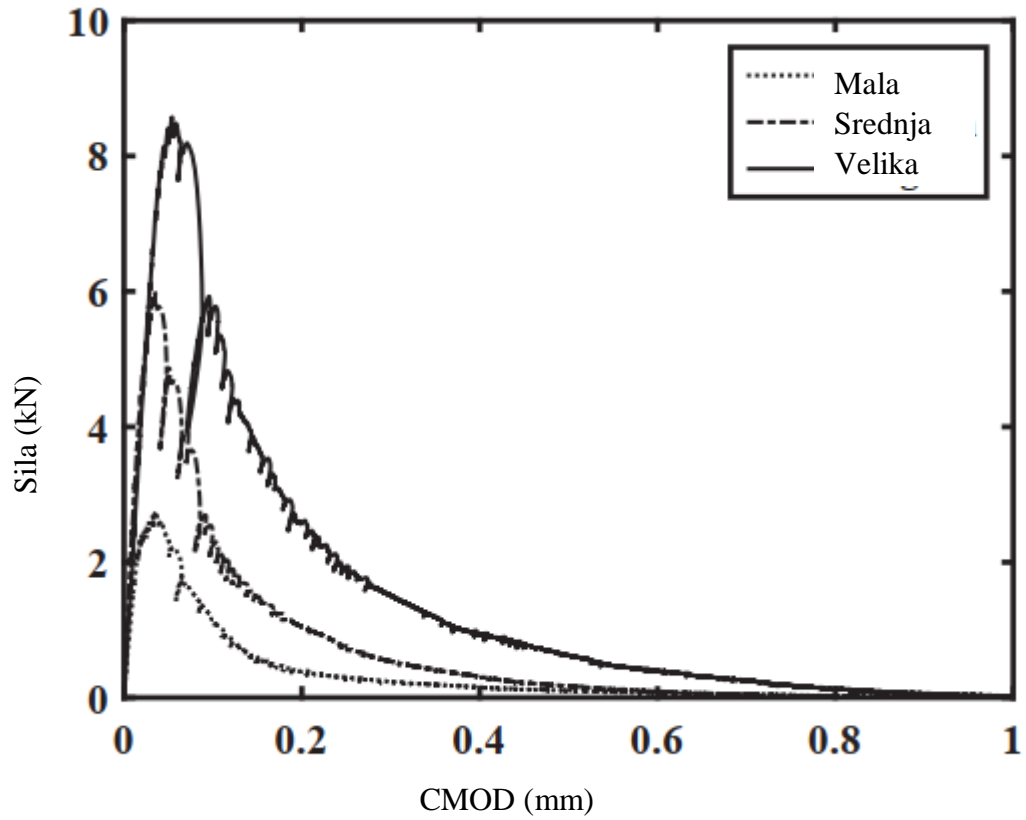
Tabela 5.31 Tabelarni prikaz proračuna broja ciklusa prema RDA za malu gredu

$\Delta P$ (N)	S(mm)	B(mm)	D(mm)	E (MPa)	$\Delta\sigma$ (MPa)	$\varphi$	$w_e$ (mm)	$k(a)$ (N/mm)	$\delta(a)$	R	$W_{ve}$ (N/mm)	$G_F$ (N/mm)	N	a/D
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0091	88149,60	0,000615	0,2	4,90591E-05	0,112	2283	0,200
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0093	85961,36	0,000616	0,2	4,7919E-05	0,112	2337	0,213
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0096	83756,30	0,000617	0,2	4,67656E-05	0,112	2395	0,227
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0098	81541,07	0,000618	0,2	4,56025E-05	0,112	2456	0,240
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0101	79321,45	0,000619	0,2	4,4433E-05	0,112	2521	0,253
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0104	77102,35	0,00062	0,2	4,32597E-05	0,112	2589	0,267
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0107	74887,96	0,000621	0,2	4,2085E-05	0,112	2661	0,280
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0110	72681,77	0,000622	0,2	4,0911E-05	0,112	2738	0,293
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0113	70486,64	0,000623	0,2	3,97392E-05	0,112	2818	0,307
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0117	68304,90	0,000624	0,2	3,8571E-05	0,112	2904	0,320
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0121	66138,33	0,000625	0,2	3,74074E-05	0,112	2994	0,333
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0125	63988,29	0,000626	0,2	3,62492E-05	0,112	3090	0,347
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0129	61855,74	0,000627	0,2	3,50971E-05	0,112	3191	0,360
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0134	59741,32	0,000628	0,2	3,39515E-05	0,112	3299	0,373
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0139	57645,37	0,000629	0,2	3,28125E-05	0,112	3413	0,387
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0144	55568,04	0,00063	0,2	3,16803E-05	0,112	3535	0,400
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0150	53509,30	0,000631	0,2	3,0555E-05	0,112	3666	0,413
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0155	51469,05	0,000632	0,2	2,94366E-05	0,112	3805	0,427
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0162	49447,16	0,000633	0,2	2,83249E-05	0,112	3954	0,440
800	300	50	75	35305,00	19,96	0,68	0,0169	47443,50	0,000634	0,2	2,72201E-05	0,112	4115	0,453

Na sledećim slikama su prikazani rezultati statičkog testa i zamora za sve tri grede.

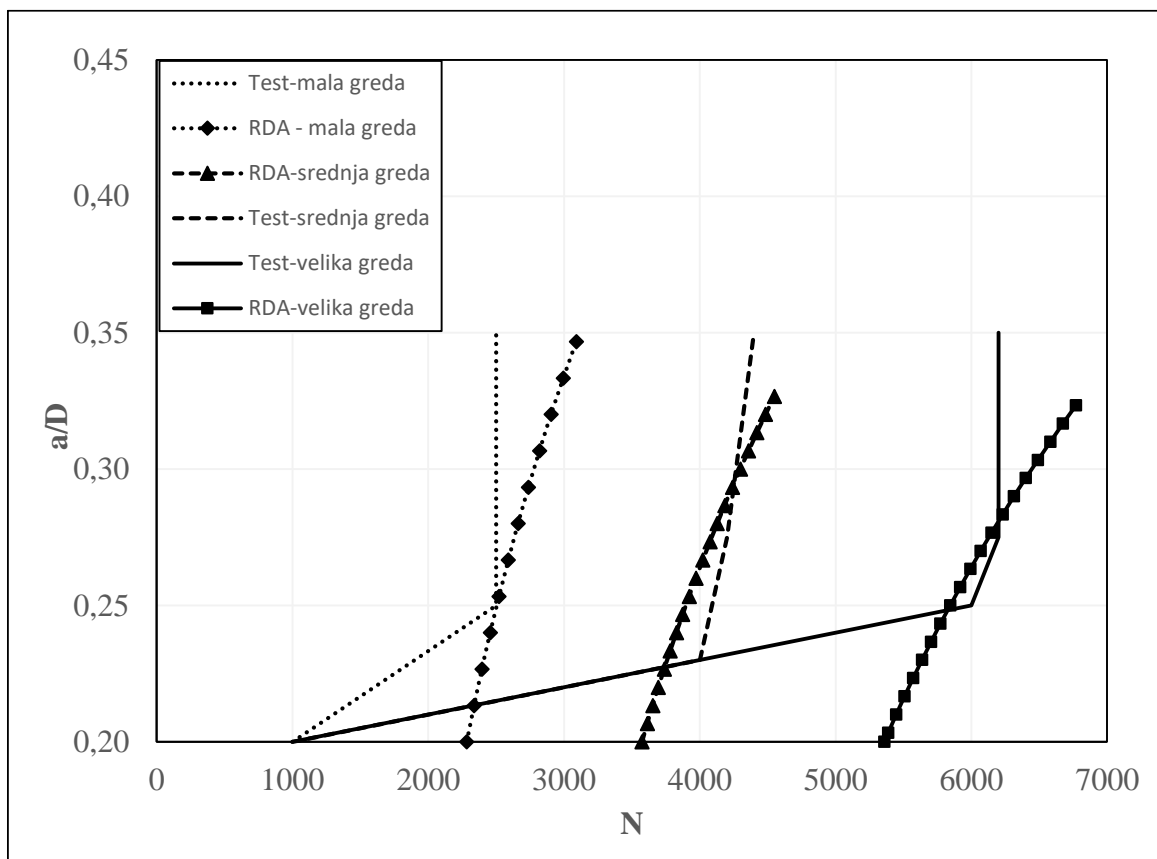
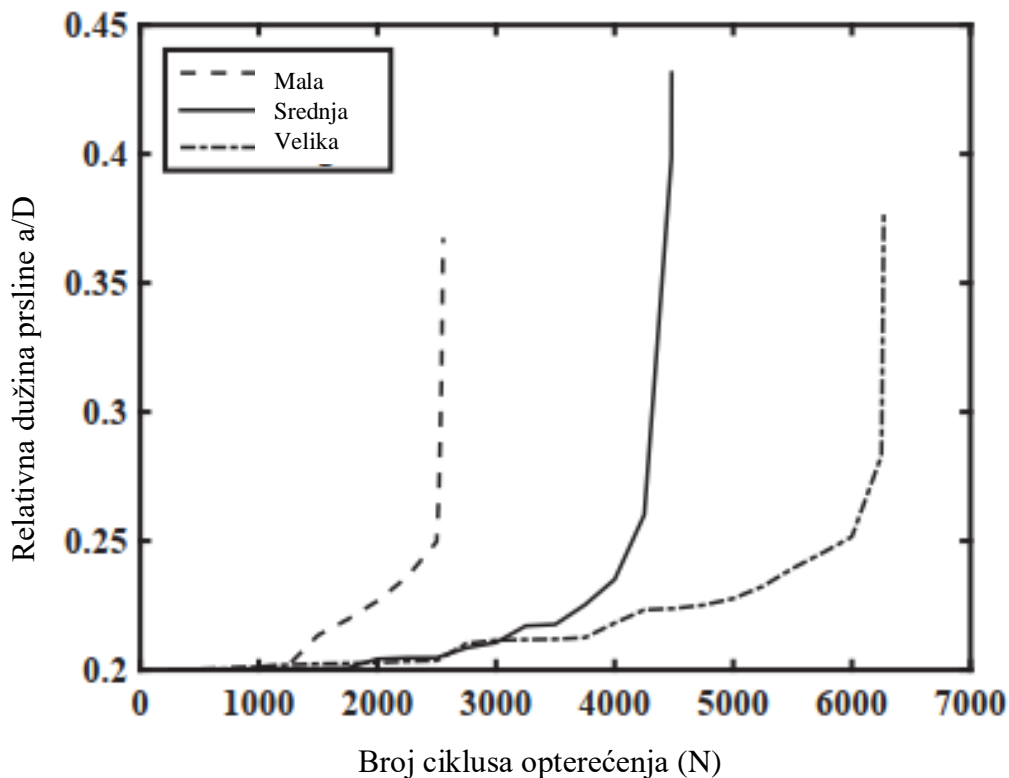


Slika 5.39 Sila –ugib prema eksperimentu (gore) i RDA (dole)



Slika 5.40 Sila-CMOD prema eksperimentu (gore) i RDA (dole)





Slika 5.41 Zamor (oblast dugih prsline) prema eksperimentu (gore) i RDA (dole)

Kao što se pokazalo na prethodnim dijagramima moguća je i primjena analitičkih izraza iz LEFM kod proračuna za statički test i zamor, ali je neophodno pored precizno izmjenjenih

ulaznih parametara definisati i rastojanje od vrha prsline koje se na primjerima ovih greda kreće od  $0,02\text{mm}$ - $0,03\text{mm}$ .

## 6 ZAKLJUČAK

Definisanje adekvatnih matematičkih modela za simulaciju širenja prsline je jedan od najvažnijih aspekata prilikom procjene pouzdanosti konstrukcija. Parizov zakon je jedan od najznačajnijih matematičkih modela koji ima veoma uspješnu primjenu kod metala. Razni autori su uvodili različite modifikacije kod ovog zakona kako bi opisali propagaciju prsline kod betona. Uloga mehanike loma kao i eksperimentalnih mjerenja je kod primjene Parizovog zakona veoma bitna. Fenomen veličine grede (*size effect*) dodatno opterećuje zamor betona, pa su neki autori predložili koeficijente bazirane na eksperimentalnim rezultatima za rješavanje toga problema. Uspješna primjena RDA teorije kod analize zamora linijski opterećenih elemenata od čelika je pružila mogućnost za dalja istraživanja i primjenu RDA teorije kod zamora betona, što je sprovedeno u ovome radu. Pri tome se po prvi put na sveobuhvatan način uključuje RDA teorija u mehaniku loma. Reološko-dinamička analogija (RDA) je teorija koja definiše kritična mehanička svojstva viskoelastoplastičnih (VEP) materijala i opisana je u mnogobrojnim radovima Milašinović-a D. D. Uspješan teorijski pristup koji je zasnovan na RDA i njenim praktičnim aplikacijama dat je u vezi sa VEP ponašanjem metalnih šipki pri zatezanju.

U ovome radu se primjena RDA teorije kod propagacije prsline betona sprovodi tako što se izvodi jednačina za proračun broja ciklusa opterećenja u funkciji dužine prsline. Pri tome se najprije sprovodi analiza dugih prsline, pri čemu se polazi od izraza za brzinu oslobađanja energije kod viskoelastičnih materijala, koji je izveden od strane Milašinovića D.D. Svaki parametar u tome izrazu je podešen za primjenu kod savijanja greda. Usvajajući pretpostavku da je energija loma konstantna vrijednost, što je u skladu sa LEFM, određuje se broj ciklusa opterećenja kao odnos energije loma i brzine oslobađanja energije. Preko izraza za brzinu oslobađanja energije se u proračun uvode tri veoma bitna parametra: krutost, relativna frekvencija i koeficijent tečenja. Savojna krutost se izražava u funkciji dužine prsline, pa se na taj način uspostavlja veza sa brojem ciklusa opterećenja. Promjena krutosti se određuje preko promjene ugiba u sredini grede koji zavisi od dužine prsline. Promjena ugiba se može odrediti numerički, primjenom metode konačnih elemenata na elastičnom modelu grede za slučaj ravnog stanja napona. Drugi način je primjena analitičkih izraza iz LEFM, koji su izvedeni samo za neke standardne slučajeve greda. Funkcija sopstvene frekvencije tj. relativne frekvencije u zavisnosti od dužine prsline se određuje primjenom MKE tj. korišćenjem softvera Abaqus, tako da se za konstantu vrijednost ranga sile povećava dužina prsline što dovodi do slabljenja sistema tj. opadanja sopstvene frekvencije. Koeficijent tečenja je funkcija vremena i može se mijenjati prema relaciji iz Evrokoda. Međutim pošto je kod posmatranih primjera trajanje eksperimenata zamora maksimalno jedan dan, onda se za koeficijent tečenja može usvojiti konstanta vrijednost, koja se određuje primjenom linearnog toka prema RDA tj. vezom sa naponom u vrhu prsline. Lokalni pristup problemu se ostvaruje razmatranjem napona tj. ranga napona u vrhu prsline koji takođe ulazi u izraz za brzinu oslobađanja energije prema RDA. Za njegovo određivanje se koristi metoda konačnih elemenata MKE tj. elastičan model grede u slučaju ravnog stanja napona ili analitički izrazi iz LEFM. U prvom slučaju su rezultati proračuna napona dosta osjetljivi na gustinu mreže konačnih elemenata, a u drugom slučaju na rastojanje od vrha prsline.

Tačan proračun napona u vrhu prsline takođe igra veliku ulogu kod proračuna statičkog testa prema RDA. U ovome radu se prikazuje proračun ulazne i silazne grane dijagrama sila-ugib i sila-CMOD. Kontrolisano povećanje sile tj. napona u vrhu prsline dovodi do povećanja koeficijenta tečenja jer su povezani linearnim zakonom. Na taj način se ugib tj. CMOD prema RDA udaljava od elastičnih vrijednosti tj. pokazuje odstupanje RDA teorije od idealno elastičnog oštećenog sistema. Na osnovu uzlaznih grana se sprovodio iterativni postupak relaksacije napona prema RDA i dobijene su opadajuće krive ovih dijagrama koje imaju solidno poklapanje sa eksperimentalnim krivama. Ono što se pokazalo kao bitan parametar koji značajno utiče na rezultate statičkog testa i zamora je određivanje konstante  $K_E$  za linearnu vezu između napona i koeficijenta tečenja. Za određivanje ove konstante je potrebno poznavati napon na granici elastičnosti. Međutim kako je to u slučaju savijanja greda jako teško odrediti, pokazalo se veoma uspješnim određivanje pomoću relacije za pritisnute betonske cilindre, što je pokazano u radovima od Milašinović D. D. Primjena linearnog toka se pokazala uspješnom i za oblast napona koji su ispod granice elastičnosti tj. za oblasti jako malog koeficijenta tečenja, što je slučaj posebno u oblasti početne propagacije prsline. Kod proračuna zamora i statičkog testa prema RDA je neophodno da se usvoji ista mreža konačnih elemenata odnosno isto rastojanje od vrha prsline pa se time pokazuje važnost statičkog testa kod ovih proračuna.

Pored propagacije dugih prslina u ovome radu se razmatra i propagacija kratkih prslina prema RDA. Za razliku od dugih prslina kod ovog proračuna se koristi linearno povećanje ranga napona u ovoj oblasti i to u skladu sa Kitagawa i Takahashi dijagramom. Za ovu linearnu interpolaciju je potrebno poznavati kritičnu dužinu prsline ili donji prag žilavosti, kao i vrijednosti napona u vrhu prsline iz statičkog testa. Oblast kratkih prslina je kod betona još uvijek nedovoljno istražena oblast pa se pretpostavka kritične dužine prsline pokazala kao veoma pogodna za sve sprovedene primjere u radu.

Kod zamora se u treću oblast nestabilnog razvoja prsline prelazi kada se dostigne gornja granica žilavosti. Tada nastupa nestabilna propagacija prsline koja veoma brzo vodi kao lomu. Kod RDA se prelaz u ovu oblast može sprovesti povećavanjem koeficijenta tečenja, što je u proračunu i sprovedeno samo u jednom koraku, kako bi se pokazao koliki uticaj koeficijent tečenja može imati na rezultate.

Opisana metoda u ovom radu se kroz primjere pokazala tačnom, što se vidi na primjerima greda sa različitim dimenzijama pa samim tim različitim krutostima, frekvencijama i naponima. Isto tako pokazana je uspješna primjena i na mikroarmiranom betonu kao i betonu visoke čvrstoće. Matematički gledano kod zamora prema RDA se broj ciklusa opterećenja, dužina prsline, rastojanje od vrha prsline kod proračuna ranga napona (ili gustina mreže konačnih elemenata) dovode u jednu relaciju, pod uslovom da je prethodno poznata energija loma, funkcija ugiba i relativne frekvencije u zavisnosti od dužine prsline. U primjerima je pokazana i uspješna primjena reološko-dinamičke teorije u kombinaciji sa drugim teorijama na problemima zamora metala ili kod primjene propagacije kratkih prslina preko modifikovanog Parizovog zakona, pa se time uticaj frekvencije ili koeficijenta tečenja uvode u razmatranje pomoću RDA modula.

Neke značajne prednosti ove metode proračuna su:

- Primjena metode konačnih elemenata na elastičnom modelu grede u slučaju ravnog stanja naprezanja kod porasta prsline omogućuje određivanje promjene krutosti sa

porastom prsline. Na osnovu ovoga upotreba analitičkih izraza iz mehanike loma koji su izvedeni samo za neke standardne slučajeve nije neophodna.

- Za razliku od Parizovog zakona ovdje su u proračun uključene sopstvena frekvencija kao frekvencija spoljašnjeg opterećenja jer su veoma bitni parametri kod dinamičkih procesa kao što je zamor.
- Za razliku od Parizovog zakona je omogućeno viskoelastično ponašanje uvođenjem koeficijenta tečenja koji je funkcija vremena.
- Pomoću napona u vrhu prsline na elastičnom modelu grede u slučaju ravnog stanja naprezanja je ostvaren lokalni karakter problema, pa upotreba mehanike loma nije neophodna.
- Pretpostavka kritične dužine prsline kao granice između kratkih i dugih prsline je pogodnija nego određivanje donjeg praga žilavosti, koji je kod betona ionako nedovoljno istražena oblast

Nedostaci metode proračuna su:

- Metoda proračuna ne razmatra pravac širenja prsline . Ovdje se pretpostavlja da prsline propagira vertikalno od svoje inicijalne vrijednosti.
- Osjetljivost rezultata na gustinu mreže konačnih elemenata kod proračuna napona ili na promjenjivu  $r$  (rastojanje od vrha prsline), ako se primjenjuju izrazi iz mehanike loma.
- Osjetljivost rezultata na proračun energije loma, za koju kod betona postoje različite prijedlozi bazirani uglavnom na pritisnoj čvrstoći

Može se zaključiti da primijenjena procedura za proračun propagacije prsline ima vrlo jednostavnu formulaciju bez upotrebe složenog matematičkog aparata. Pored toga, numerički pristupom ili primjenom LEFM se opisuje lokalni karakter problema, a i vrijeme računanja je optimalno.

Mogući pravci za dalja istraživanja su primjena za slučaj zamora ostalih primjera iz mehanike loma, kao što su recimo slučaj centrično zategnute ploče sa prslineom u sredini ili simetrično postavljenoj prslineom na oba kraja ploče, zatim mogućnost primjene na nekim drugim betonskim mješavinama sa drugim mehaničkim parametrima (npr. reciklirani beton) ili mogućnost primjene kod armiranog betona.

## LITERATURA

- [1] Paris P. C and Erdogan F., A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, No. 4, pp. 528-534, 1963.
- [2] Swartz S. E. and Go C.G., Validity of compliance calibration to cracked concrete beams in bending, *Exp. Mech.* Vol. 24 (2), pp. 129–134, 1984.
- [3] Baluch M. H., Qureshy A. B., and Azad A. K., Fatigue Crack Propagation in Plain Concrete, *Fracture of Concrete and Rock*, pp. 80-87, 1987.
- [4] Ray S. and Kishen J. M. C., Fatigue crack propagation model for plain concrete – An analogy with population growth, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, No. 17, pp. 3418-3433, 2010.
- [5] Bažant Z. P., Kangming X., Size Effect in Fatigue Fracture of Concrete, *ACI Materials Journal*, Vol. 88, No. 4, pp. 390-399, 1991.
- [6] Carpinteri, A. and Spagnoli, A., A fractal analysis of size effect on fatigue crack growth, *International Journal of Fatigue*, Vol. 26, No. 4, pp. 125–133, 2004.
- [7] Griffith A. A., The phenomena of Rupture and Flow in Solids, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A*, Vol. 221, pp. 163-198, 1920.
- [8] Irwin G. R., Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transvering a Plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364, 1957.
- [9] Irwin, G. R., Plastic zone near a crack and fracture toughness. *Proc. 7th Sagamore Conf.*, pp IV-63, 1960.
- [10] Williams M. L., On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, *Journal of Applied Mechanics* Vol. 24, pp. 109-114, 1956.
- [11] Šumarac D., Krajčinović D., *Osnovi mehanike loma*, Građevinski fakultet Beograd, IDP Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [12] Podrug S., *Mehanika loma-Kolegij*, Sveučilište u Splitu, 2009.
- [13] Dunjica Š., *Otpornost materijala-Uvod u mehaniku deformabilnog tijela-treće izdanje*, Građevinski fakultet Beograd, 2002.
- [14] Airy G. B., On the strains in the interior of beams, 32nd Meeting of Brit. Assoc. For Advance. Sci. Report, 1862.
- [15] Schreurs P. J. G., *Fracture Mechanics*, Eindhoven University of Technology, Netherlands, 2012.
- [16] Westergaard H. M., Bearing Pressures and Cracks, *Journal of Applied Mechanics, Series A*, Vol. 66, pp. 49-53, 1939.

- [17] Muskhelishvili N. I., Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. 3rd Edn., Noordhoof, Groningen, 1963.
- [18] Boljanović S. S., Numeričko modeliranje preostale čvrstoće strukturalnih elemenata u prisustvu prsline pri cikličnim opterećenjima - doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, 2012.
- [19] Barenblatt, G. I., The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 23, pp. 622-636, 1959.
- [20] Barenblatt, G. I., Advances in Applied Mechanics, Vol. 7, pp. 55-129, 1962.
- [21] Tada H., Paris P. C. and Irwin G. R., The Stress Analysis of Cracks Handbook 3rd Edition., ASME Press New York, pp.696, 2000.
- [22] Guinea G. V., Pastor J. Y., Planas J. and Elices M., Stress intensity factor, compliance and CMOD for a general three-point-bend beam, International Journal of Fracture 89, pp. 103–116, 1998.
- [23] Brown W. E. and Strawly J. E., Plain strain crack toughness testing of high strength metallic materials, Special technical publication, 1967.
- [24] Cotterell B. and Mai Y.W., Fracture Mechanics of Cementitious Materials, Chapman & Hall, Great Britain, 1996.
- [25] Oruč M., Sunulahpašić R., Lomovi i osnove mehanike loma, Univerzitet u Zenici – Fakultet za metalurgiju i materijale, Zenica, 2009.
- [26] Coulomb C. A., Remarque sur la rupture des corp, Memories presents par divers savants a l, Academic 7, 1776.
- [27] Galilei G., Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Elzeviri, Ledia, 1638.
- [28] Kaplan M. E., Crack propagation and fracture of concrete, J. American Concrete Institute, Vol. 58, pp. 591-610, 1961.
- [29] Clintock F. A. and Walsh P. F., Friction on Griffith cracks in rocks under compression, Proc. 4th National congress, Appl. Mech., Berkeley, 1962.
- [30] Dugdale, D. S., Yielding of Steel Plates Containing Slits, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 8, pp.100-108, 1960.
- [31] Hillerborg A. and Petersson M. M., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, Cement and Concrete Research, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.

- [32] Kesler C. E., Naus D. J. and Lott J. L., Fracture mechanics-its applicability to concrete. Proc. Int. Conf. on the Mechanical Behaviour of Materials, Vol. 4, Kyoto, The Society of Materials Science, 1972.
- [33] Walsh P. F., Fracture of plain concrete. Indian Concrete Journal 46, 1972.
- [34] Walsh P. F., Crack initiation in plain concrete. Mag. Concrete Res. Vol. 28, pp. 37–41, 1976.
- [35] Bažant Z. P., Instability, Ductility and size effect in strain-softening concrete. J. Engg. Mech., ASCE 102, pp. 331–344, 1976.
- [36] Bažant Z. P. and Cedolin L., Blunt crack bond propagation in finite element analysis. J. Eng. Mech., ASCE 105(2), pp. 297–315, 1979.
- [37] Carpinteri A., Notch sensitivity in fracture testig of aggregative materials, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 16, No. 4, pp. 467481, 1982.
- [38] Murthy A. R. C., Palani G. S. and Nagesh R., State-of-the-art review on fracture analysis of concrete structural components, Sadhana, Vol. 34, Part 2, pp. 345-367, 2009.
- [39] Bažant Z. P., Fracture Mechanics of Concrete Structures, Elsevier Applied Science, London and New York, 1992.
- [40] Bažant, Z. P. and Planas, J., Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials, CRC Press, Boca Raton, 1998.
- [41] Hillerborg, A., Analysis of one single crack, Report to RILEM TC 50- FMC, 1981.
- [42] Irwin G. R., Fracture. Handbook of Physics, Springer-Verlag Berlin, Vol. 6, pp. 551-590, 1958..
- [43] Bažant Z. P. and Oh B.H., Crack band theory for fracture of concrete, Materials and Structures, Vol. 16, pp. 155-177, 1983.
- [44] Krolo J., Određivanje parametara mehanike loma betona, Građevinar, Vol 57, No 12, pp. 967-976, 2005.
- [45] Kessler-Kramer C., Zugtragverhalten von Beton unter Ermüdungsbeanspruchung, Dissertation, Karlsruhe, 2002.
- [46] Swartz S . E., Hu K . K. and Jones G. 1., Compliance Monitoring of Crack Growth in Concrete, J. of the Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 104, No. EM4, pp. 789-800, 1978.
- [47] Jenq Y., Asce S. M., Surendra P. S. and Asce M. ,Two parameter fracture model for concrete, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 10, pp. 1227-1241,1985.
- [48] Tada H., Paris P. C. and Irwin G. R., The Stress Analysis of Cracks Handbook 2rd Edition., Paris Productions & Del Research Corp., 1985.

- [49] Karihaloo B. L. and Nallathambi, P., An Improved Effective Crack Model for the Determination of Fracture Toughness of Concrete, Cement and Concrete Research, Vol. 19, pp. 603-610, 1989.
- [50] RILEM draft recommendation (50-FMC), Determination of Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Bend Test on Notched Beams, Materials Structures, Vol. 18, 1985.
- [51] DIN EN 1992-1-1 (2011) Eurocode 2, Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992- 1 – 1:2004 + AC:2010, Berlin: Deutsches Institut für Norm.
- [52] fib Model Code for Concrete Structures 2010, Wilhelm Ernst & Sohn, 2013.
- [53] CEB-FIP Model Code 1990, Thomas Telford Services, 1993.
- [54] Pančić A., Schnell J., Berücksichtigung der Bemessungsansätze nach EC 2, Schlussberichte zum BMBF-Verbundforschungsvorhaben, R-Beton - Ressourcenschonender Beton – Werkstoff der nächsten Generation, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 2021.
- [55] CEP-FIB bulletin 42, Constitutive modelling of high strength / high performance concrete, 2008.
- [56] Rimmel G., On the Tensile and Shear Behaviour of High Strength Concrete Members (in German), Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Nr. 444, Beuth Verlag, Berlin, 1994.
- [57] Roelfstra R. E. and Wittmann F. H., A Numerical Method to Link Strain Softening with Fracture in Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy in Concrete, Elsevier Science, Vol.1, pp. 127–137, 1986.
- [58] Hordijk D. A., Local Approach to Fatigue of Concrete. Ph.D thesis, Technical University of Delft, 1991.
- [59] Van Ornum J. L., Fatigue of Concrete, Transactions ASCE 58, S. 294, 1907.
- [60] Müller F. P., Keintzel E., Charlier H., Dynamische Probleme im Stahlbetonbau, Teil I, Der Baustoff Stahlbeton unter dynamischer Beanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 342, 1983.
- [61] Hohberg R., Zum Ermüdungsverhalten von Beton, Dissertation, Berlin, 2004.
- [62] Milašinović D. D., Rheological–dynamical analogy: Prediction of damping parameters of hysteresis damper, International Journal of Solids and Structures Vol. 44, No. 22-23, pp. 7143–7166, 2007.
- [63] Cornelissen H. A. W., Fatigue Failure of Concrete in Tension, Heron, Vol. 29, Nr. 4, 1984.



- [64] Chen X. and Bu J., Nonlinear Damage Accumulation of Concrete Subjected to Variable Amplitude Fatigue Loading, *Bulletin of the polish academy of sciences technical sciences*, Vol. 66, 2018.
- [65] Perdikaris P. C. and Calomino A. M., *Kinetics of Crack Growth in Plain Concrete, Fracture of Concrete and Rock*, pp.64-69, 1989.
- [66] Bažant Z. P. and Schell W. F., *Fatigue Fracture of High-Strength Concrete and Size Effect*, *ACI Materials Journal*, Vol. 90, No. 5, pp. 472-478, 1993.
- [67] Slowik V., Plizzari G.A. and Saouma V.E., *Fracture of concrete under variable amplitude fatigue loading*, *ACI Materials Journal*, Vol. 93, No. 3, pp. 272–283, 1974.
- [68] Sain T. and Kishen J. M. C, *Prediction of fatigue strength in plain and reinforced concrete beams.*, *ACI Materials Journal*, Vol. 104, No. 5, pp. 621–628, 2007.
- [69] Ray S. and Kishen J. M. C., *Fatigue crack propagation model and size effect in concrete using dimensional analysis*, *Mechanics of Materials*, Vol. 43, pp. 75-86, 2011.
- [70] Fathima K. M. P. and Kishen J. M. C, *A thermodynamic framework for fatigue crack growth in concrete*, *International Journal of Fatigue*, Vol. 54, pp. 17-24, 2013.
- [71] Prashanth M. H., Parvinder S. and Kishen J. M. C., *Fatigue crack propagation in plain concrete beams by acoustic emission technique*, *9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures FraMCoS-9*, 2016.
- [72] Milašinović D. D., *Reološko-dinamička analogija*, *Mehanika materijali i konstrukcije, Naučni skup srpske akademije nauka i umjetnosti, Knjiga LXXXIII, Odjeljenje tehničkih nauka, Knjiga 2*, pp. 102-110, Beograd, 1996.
- [73] Milašinović D. D., *Metod konačnih traka u teoriji konstrukcija sa računarskim programima*, *Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka*, 1994.
- [74] Milašinović D. D, *Reološko dinamički koncepti neelastičnog deformisanja materijala i konstrukcija*, *Građevinski fakultet Subotica*, 2019.
- [75] Milašinović D. D., *Rheological-dynamical analogy: prediction of buckling curves of columns*, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 29, pp. 3965-4004, 2000.
- [76] Milašinović D. D., *Rheological-dynamical continuum damage model for concrete under uniaxial compression and its experimental verification*, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 42, No. 2, pp. 73–110, 2015.
- [77] Milašinović D. D., *Rheological-dynamical analogy: modeling of fatigue behavior*, *International Journal of Solids and Structures* Vol. 40, No. 1, pp. 181-217, 2003.
- [78] Milašinović D. D., Goleš D., Pančić A. and Čeh A., *Rheological-dynamical model of concrete and its application on RC beams*, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2020 .

- [79] Kachanov L. M., On time to rupture in creep conditions, *Izviestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk* 8, pp. 26-31, 1958.
- [80] Lemaitre J. and Chaboche J.L., *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994 .
- [81] Pančić A. Milašinović D. D. and Goleš D., Crack propagation in flexural fatigue of concrete using rheological-dynamical theory, *Computers and Concrete*, Vol. 27, No. 1, pp. 55-62, 2021.
- [82] Pančić A. and Milašinović D. D, Rheological-dynamical analysis of crack propagation in flexural fatigue of concrete, 14th International scientific conference iNDiS Novi Sad, 2018.
- [83] Vasudevan A. K., Sadananda K. and Glinka G., Critical parameters for fatigue damage, *International Journal of Fatigue* 23, S39–S53, 2001.
- [84] Kitagawa H. and Takahashi S., Applicability of fracture mechanics to very small cracks or cracks in the early stage, *Proceeding of second international conference on mechanical behavior of materials ASM*, pp. 627-631, 1976.
- [85] Pančić A. and Milašinović D. D., Short crack propagation of concrete using rheological-dynamical theory, 8th International conference contemporary achievements in civil engineering, Subotica, 2021.
- [86] Nimmy M. A., Keerthy M. S. and Kishen J. M. C., A study on fatigue crack growth in concrete in the pre-paris region, *International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures FraMCoS-8*.
- [87] Toumi A., Bascoul A. and Turatsinze A., Crack propagation in concrete subjected to flexural cyclic loading, *Materials and Structures/Matériaux et Constructions*, Vol. 31, pp. 451-458, 1998.
- [88] Šumarac D., Sekulović M. and Krajčinović D., Fracture of Reinforced Concrete Beams Subjected to Three Point Bending, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 12, No. 1, pp. 31-44, 2003.
- [89] Abaqus/CAE User's Manual 6.12, Dassault Systèmes' Centers of Simulation Excellence, 2012.
- [90] Baluch M. H., Qureshy A. B. and Azad A. K., Fatigue Crack Propagation in Plain Concrete. S. P. Shah, S. E. Swartz (eds.) *SEM/RILEM Int. Conf. on Fracture of Concrete and Rock*, Houston, pp. 80-87, 1987.
- [91] ACI 318-11, *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, reported by ACI committee, 2011.
- [92] Banjara N. K., Ramanjaneyulu K., Experimental Investigations and Numerical Simulations on the Flexural Fatigue Behavior of Plain and Fiber-Reinforced Concrete, *Journal of Materials in Civil Engineering*, Vol.30, 2018.

- [93] Keerthana K., Kishen J. M. C, An experimental and analytical study on fatigue damage in concrete under variable amplitude loading, International Journal of Fatigue, Vol. 111, pp. 278-288, 2018.