



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U
NOVOM SADU



Mirjana Bojanić Šejat

MODELOVANJE MEHANIČKOG PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2021.

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Мирјана Бојанић Шејат
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	Др Александар Живковић, ванредни професор, Факултет техничких наука Др Милан Рацков, ванредни професор, Факултет техничких наука
Наслов рада:	Моделовање механичког понашања кугличних лежаја
Језик публикације (писмо):	Српски (_____ Латиница _____) или (навести ћирилица или латиница) _____
Физички опис рада:	Унети број: Страница _____ 203 _____ Поглавља _____ 10 _____ Референци _____ 107 _____ Табела _____ 31 _____ Слика _____ 200 _____ Графикона _____ 0 _____ Прилога _____ 0 _____
Научна област:	Машинско инжењерство
Ужа научна област (научна дисциплина):	Машински елементи, механизми и инжењерске графичке комуникације
Кључне речи / предметна одредница:	Котрљајни лежаји, лежаји са контактом у четири тачке, вибрације, динамичко понашање, математички модели
Резиме на језику рада:	У оквиру докторске дисертације спроведена је анализа статичког и динамичког понашања кугличних лежаја са посебним освртом на лежаје са контактом у четири тачке. Основни циљ истраживања у овом раду био је развој програмског решења за анализу статичког и динамичког понашања радијалних кугличних лежаја и лежаја са контактом у четири тачке, односно идентификацију понашања у експлоатацији и одређивање века примене математичких модела. У циљу провере резултата добијених применом развијених математичких модела, као и применом програмских система опште намене, који базирају на методи коначних елемената, спроведено је експериментално испитивање лежаја. Експериментално испитивање је спроведено за два типа лежаја: за радијални куглични лежај FKL 6006 и куглични лежај са контактом у четири тачке FKL LSQFR 308.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	27.05.2021.

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штапане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штапаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: др Милан Зељковић, редовни професор, Факултет техничких наука Члан: др Радивоје Митровић, редовни професор, Машински факултет у Београду Члан: др Миодраг Хаџистевић, редовни професор, Факултет техничких наука Члан: др Жарко Мишковић, доцент, Машински факултет у Београду
Напомена:	

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION²**

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Mirjana Bojanić Šejat
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	dr Aleksandar Živković, Associate Professor, Faculty of Tehnical Sciences dr Milan Rackov, Associate Professor, Faculty of Tehnical Sciences
Thesis title:	Modelling of ball bearing mechanical behaviour
Language of text (script):	Serbian language (_____ latin script _____) or (cyrillic or latin script) _____ language
Physical description:	Number of: Pages _____ 203 _____ Chapters _____ 10 _____ References _____ 107 _____ Tables _____ 31 _____ Illustrations _____ 200 _____ Graphs _____ 0 _____ Appendices _____ 0 _____
Scientific field:	Mechanical Engineering
Scientific subfield (scientific discipline):	Mechanical elements, mechanisms and engineering graphic communications
Subject, Key words:	Ball bearings, four point contact ball bearings, vibration, dynamic behavior, mathematical models
Abstract in English language:	In this thesies was conducted an analysis of the static and dynamic behavior of ball bearings, with special care on four-point contact ball bearing. The main goal of the research in this paper was to develop a software solution for the analysis of static and dynamic behavior of the deep grooved ball bearings and four-point contact ball bearing, apropose identification of behavior in exploations and determination fatigue life of bearings using mathematical models. Experimental bearing test was performed, in order to verify the results obtained by applying the developed mathematical models, as well as by applying general - purpose software systems, which are based on the finite element method. The experimental test was performed for two types of bearings: for the deep grooved ball bearing FKL 6006 and the four-point contact ball bearing FKL LSQFR 308.
Accepted on Scientific Board on:	05/27/2021
Defended: (Filled by the faculty service)	

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authority,

5b – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at he faculty and are not included into the printed thesis.

Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President: dr Milan Zeljković, Full professor, Faculty of Tehnical Sciences Member: dr Radivoje Mitrović, Full professor, Faculty of Mechanical Engineering in Belgrade Member: dr Miodrag Hadžistević, Full Professor, Faculty of Tehnical Sciences Member: dr Žarko Mišković, Assistant Professor, Faculty of Mechanical Engineering in Belgrade
Note:	

Ovu zahvalnicu posvećujem svima koji su bili uz mene, saosećali se sa mnom, radili, pomagali mi i pružali svoju nesebičnu i bezuslovnu podršku. Pre svega želela bih da izrazim ogromnu zahvalnost mentoru prof. dr Aleksandru Živkoviću, na veoma značajnoj stručnoj i moralnoj podršci i podsticaju, tokom svih ovih godina usavršavanja, na čemu sam mu beskrajno zahvalna, i bez čije svesredne pomoći i upornosti ovaj rad nikada ne bi ugledao svetlost dana.

Zahvaljujem se i svom drugom mentoru prof. dr Milanu Rackovu na nesebičnoj pomoći, strpljenju i posvećenosti tokom pisanja ovog rada.

Ovom prilikom želim da se zahvalim prof. dr Milanu Zeljkoviću, koji je bio moj savetnik, na moralnoj i stručnoj podršci, tokom svih ovih godina mog usavršavanja.

Želim da se zahvalim kolegama sa Katedre za mašinske elemente, teoriju mašina i mehanizama i poljoprivredno mašinstvo, kao i kolegama Laboratorije za mašine alatke, fleksibilne tehnološke sisteme i automatizaciju postupaka projektovanja, na podršci tokom izrade ovog rada.

Posebno se zahvaljujem prof. dr Slobodanu Navalušiću, na ljudskoj i stručnoj podršci i podsticaju, tokom svih ovih godina.

Takođe, zahvaljujem se članovima komisije za ocenu i odbranu doktorske disertacije prof. dr Miodragu Hadžisteviću, prof. dr Radivoju Mitroviću i prof. dr Žarku Miškoviću na brznoj recenziji i ključnim savetima pri izradi ovog rada.

I na kraju, ali ne na poslednjem mestu, želim da se zahvalim suprugu Strahinji, sinu Iliji, roditeljima, Mileni i Gojku, bratu Luki, kao i Svetlani i Draganu na ukazanoj podršci, ličnom odricanju i razumevanju za mene i moj rad tokom svih ovih godina.

Novi Sad, 2021.

Mirjana Bojanić Šejat

SADRŽAJ

1	UVOD.....	1
2	KONSTRUKCIONI PARAMETRI LEŽAJA SA KONTAKTOM U ČETIRI TAČKE	6
2.1	UVODNE NAPOMENE	6
2.2	SPOLJAŠNJA GEOMETRIJA KOTRLJAJNOG LEŽAJA SA KONTAKTOM U ČETIRI TAČKE	8
2.3	UNUTRAŠNJA GEOMETRIJA KOTRLJAJNOG LEŽAJA SA KONTAKTOM U ČETIRI TAČKE	8
2.3.1	Staze kotrljanja ležaja sa kontaktom u četiri tačke	9
2.3.2	Kotrljajna tela i kavez	12
2.3.3	Ugao kontakta i zazor ležaja sa kontaktom u četiri tačke.....	13
2.3.4	Krutost.....	16
2.3.5	Deformacije.....	17
2.4	MEHANIZMI NASTANKA VIBRACIJA KOD KOTRLJAJNIH LEŽAJA.....	20
2.4.1	Vibracije usled elemenata strukture ležaja	21
2.4.2	Vibracije usled periodične promene krutosti	22
2.4.3	Karakteristične frekvencije elemenata ležaja.....	23
2.4.4	Vibracije kao posledica dejstva okoline	24
3	PRIKAZ DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA.....	25
3.1	ISTRAŽIVANJA STATIČKOG PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA.....	28
3.2	ISTRAŽIVANJA DINAMIČKOG PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA	47
3.3	DEFINISANJE CILJA I PROBLEMA ISTRAŽIVANJA U OKVIRU RADA	58
4	KVAZISTATIČKI MODEL KUGLIČNIH LEŽAJA.....	61
4.1	KONTAKTNA OPTEREĆENJA I DEFORMACIJE KUGLIČNOG LEŽAJA.....	62
4.2	RASPODELA OPTEREĆENJA KUGLIČNIH LEŽAJA.....	66
4.2.1	Geometrija i odnos sila koje deluju na kuglični ležaj	67
4.2.1.1	Odnos sila kod radijalnog ležaja	67
4.2.1.2	Odnos sila kod kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke	71
4.3	ODREĐIVANJE VEKA KUGLIČNOG LEŽAJA	75
5	DEFINISANJE NUMERIČKOG MODELA LEŽAJA PRIMENOM MKE.....	78
5.1	STATIČKI MKE MODEL	79

5.1.1	Definisanje i izbor mreže konačnih elemenata	79
5.1.2	Definisanje kontaktnih parova, opterećenja i graničnih uslova	82
5.2	DINAMIČKI MKE MODEL	86
5.2.1	Modalna i harmonijska analiza	86
5.2.2	Eksplisitno dinamička analiza	87
5.2.2.1	<i>Granični uslovi i opterećenja.....</i>	<i>88</i>
5.2.2.2	<i>Definisanje kritične vrednosti vremenskog koraka.....</i>	<i>89</i>
5.2.3	Određivanje veka ležaja.....	91
5.2.3.1	<i>Predloženi model za određivanje veka ležaja.....</i>	<i>92</i>
5.2.3.2	<i>Statistički odziv strukture.....</i>	<i>93</i>
5.2.3.3	<i>Miner-ovo pravilo za određivanje zamora konstrukcije.....</i>	<i>94</i>
6	EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE DINAMIČKOG PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA	96
6.1	EKSPERIMENTALNA MODALNA ANALIZA KUGLIČNIH LEŽAJA	96
6.1.1	Eksperimentalno određivanje funkcije frekventnog odziva i modalnih parametara kugličnih ležaja	99
6.1.2	Eksperimentalna modalna analiza za ležaj 6006	101
6.1.3	Eksperimentalna modalna analiza za ležaj LSQFR 308	103
6.2	ISPITIVANJE VIBRACIJA RADIJALNOG LEŽAJA 6006.....	105
6.3	EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE VIBRACIJA I ODREĐIVANJE VEKA LEŽAJA SA KONTAKTOM U ČETIRI TAČKE	115
6.4	ANALIZA REZULTATA EKSPERIMENTALNOG ISPITIVANJA LEŽAJA LSQFR 308	117
6.4.1	Analiza uticaja zazora na dinamičko ponašanje ležaja sa kontaktom u četiri tačke.....	117
6.4.2	Određivanje veka ležaja sa kontaktom u četiri tačke eksperimentalnim ispitivanjem.....	119
7	VERIFIKACIJA REZULTATA MODELOVANJA MEHANIČKOG PONAŠANJA RADIJALNOG KUGLIČNOG LEŽAJA.....	122
7.1	VERIFIKACIJA REZULTATA MODELOVANJA STATIČKOG PONAŠANJA RADIJALNOG LEŽAJA	122
7.1.1	Analiza kontaktnih opterećenja i deformacije za ležaj 6006	123
7.1.2	Uticaj spoljašnjeg radijalnog opterećenja na broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja i krutost.....	125
7.1.3	Uticaj radijalnog zazora/preklopa na broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja i krutost ležaja.....	130
7.2	VERIFIKACIJA REZULTATA MODELOVANJA DINAMIČKOG PONAŠANJA RADIJALNOG LEŽAJA	135
7.2.1	Modalna analiza radijalnog ležaja	136
7.2.2	Eksplisitna dinamička analiza radijalnog ležaja.....	138

7.2.2.1	<i>Analiza dinamičkog ponašanja radijalnog ležaja u vremenskom domenu</i>	140
7.2.2.2	<i>Analiza uticaja zazora na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja</i>	143
7.2.2.3	<i>Analiza uticaja spoljašnjeg opterećenja na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja</i>	146
8	VERIFIKACIJA REZULTATA MODELOVANJA MEHANIČKOG PONAŠANJA KUGLIČNOG LEŽAJA SA KONTAKTOM U ČETIRI TAČKE	149
8.1	VERIFIKACIJA MODELOVANJA STATIČKOG PONAŠANJA LEŽAJA LSQFR 308.....	149
8.2	VERIFIKACIJA MODELOVANJA DINAMIČKOG PONAŠANJA LEŽAJA LSQFR 308.....	167
8.2.1	Modalna analiza ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308.....	167
8.2.2	Eksplisitna dinamička analiza ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308.....	170
8.2.2.1	<i>Analiza uticaja preklopa/zazora na dinamičko ponašanje ležaja LSQFR 308</i>	171
8.2.2.2	<i>Analiza uticaja spoljašnjeg opterećenja na dinamičko ponašanje ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308</i>	177
8.2.3	Analiza veka ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308.....	180
9	ZAVRŠNA RAZMATRANJA	183
9.1	SUMIRANJE REZULTATA ISTRAŽIVANJA.....	184
9.1.1	Sumiranje rezultata istraživanja radijalnog ležaja 6006.....	185
9.1.2	Sumiranje rezultata istraživanja ležaja LSQFR 308.....	190
9.2	PRAVCI BUDUĆEG ISTRAŽIVANJA.....	196
10	LITERATURA	197

SADRŽAJ SLIKA

Slika 1.1 Evolucija kotrljajnih ležaja [31]	2
Slika 1.2 Da Vinčijev koncept kotrljajnog ležaja [31].....	2
Slika 2.1 Ležaj sa kontaktom u četiri tačke [1] a) Tačke dodira b) Osnovni elementi kugličnog ležaja	6
Slika 2.2 Prenos opterećenja kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke: a) radijalno opterećenje b) aksijalno opterećenje c) kombinovano opterećenje	7
Slika 2.3 Usporedni prikaz kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke i dvoredog kugličnog ležaja sa kosim dodirnom	7
Slika 2.4 Spoljašnje mere kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke	8
Slika 2.5 Tačke kontakta staza kotrljanja i kotrljajnih tela kod kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke	9
Slika 2.6 Unutrašnja geometrija kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke	10
Slika 2.7 Kontakt dva tela.....	11
Slika 2.8 Kretanje kotrljajnih tela u kavezu i ugao između kuglica [103].....	12
Slika 2.9 Ležaj sa kontaktom u četiri tačke sa zazorom [21]	13
Slika 2.10 Konvencionalni radijalni ležaj sa zonom zaobljavanja i dobijeni ležaj sa dva luka [29]	14
Slika 2.11 Nominalni uglovi i uglovi kontakta [29]	15
Slika 2.12 Idealni krug unutrašnjeg zazora	15
Slika 2.13 Krutost radijalnog ležaja u zavisnosti od a) radijalnog opterećenja, b) paramera brzine, c) parametra materijala G, d) parametra eliptičnosti dodirnih površina k, e) parametra podmazivanja Λ , f) parametar površinske hrapavosti γ [76]	17
Slika 2.14 Površine u kontaktu, kotrljajno telo i staza kotrljanja (znatno uvećane) [77]	18
Slika 2.15 Deformacija u zavisnosti od opterećenja, za kontakt u tački [32].....	19
Slika 2.16 Kontaktna deformacija kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke sa preklapom	20
Slika 2.17 Oslanjanje unutrašnjeg prstena na neparan i paran broj kotrljajnih tela za a) $t=0$; b) $t=1/2[1/Z(f_{kaveza})]$ [32].....	22
Slika 2.18 Raspodela opterećenja [68]	22
Slika 3.1 Uticaj radijalnog zazora na raspodelu opterećenja na kotrljajnim telima: a) ležaj sa zazorom b) ležaj sa nultim zazorom c) ležaj sa preklapom	29
Slika 3.2 Uticaj odnosa relativnog pomeranja prstenova i polovine radijalnog zazora ($2w/G_r$) na broj aktivnih kotrljajnih tela koja učestvuju u prenosu spoljašnjeg radijalnog opterećenja za slučaj neparnog broja kotrljajnih tela [57]	30

Slika 3.3 Uticaj odnosa relativnog pomeranja prstenova i polovine radijalnog zazora ($2w/G_r$) na broj aktivnih kotrljajnih tela koja učestvuju u prenosu spoljašnjeg radijalnog opterećenja za slučaj parnog broja kotrljajnih tela [57].....	30
Slika 3.4 Promene kontaktne sile u zavisnosti od prednaprezanja [88].....	32
Slika 3.5 Raspodela napona u kontaktu između kuglice i leve-unutrašnje staze kotrljanja pri prednaprezanju od -0.03 mm [89].....	32
Slika 3.6 Uticaj aksijalnog zazora na maksimalnu kontaktnu silu i maksimalni ugao kontakta [17].....	33
Slika 3.7 Uticaj aksijalnog zazora na maksimalnu kontaktnu silu i broj opterećenih kotrljajnih tela [17].....	33
Slika 3.8 Dijagram aksijalnog pomeranja za različite aksijalne sile za teorijski model i model konačnih elemenata: a) za male ležaje, b) za velike ležaje [5].....	34
Slika 3.9 Dijagram radijalnog pomeranja za različite radijalne sile za teorijski model i model konačnih elemenata za male ležaje [5].....	34
Slika 3.10 Dijagram ugaonog pomeranja za različite momente za teorijski model i model konačnih elemenata za male ležaje [5].....	34
Slika 3.11 Moment trenja u zavisnosti od predopterećenja kotrljajnih tela pod uticajem (puna linija) i bez uticaja (isprekidana linija) grešaka u proizvodnji za: a) krute prstenove; b) deformabilne prstenove [37].....	36
Slika 3.12 Uticaj broja kotrljajnih tela na moment trenja [37].....	36
Slika 3.13 Aksijalno kretanje unutrašnjeg prstena u odnosu na spoljašnji prsten: a) referentni prsten, b) tanki prsten [57].....	38
Slika 3.14 a) Mogućnost nošenja kotrljajnog ležaja koji se upotrebljava u mobilnom kranu za različito radijalno prednaprezanje b) max i min ugao nošenja za različito radijalno prednaprezanje [106].....	39
Slika 3.15 Obrtni moment za kuglični ležaj sa kontaktom u četiri tačke [13].....	40
Slika 3.16 Grafički prikaz uslova čistog kotrljanja [63].....	41
Slika 3.17 Dijagram zavisnosti momenta-aksijane sile za ležaj sa kontaktom u četiri tačke [4].....	41
Slika 3.18 Maksimalna sila i napon u kontaktu koje deluju na jedno kotrljajno telo [36].....	42
Slika 3.19 Uticaj veličine ležaja na njegov vek [18].....	43
Slika 3.20 Ekvivalentno dinamičko opterećenje i vek ležaja [36].....	43
Slika 3.21 Uporedni prikaz deformacija dobijenih metodom konačnih elemenata i eksperimentalnim ispitivanjem [36].....	44
Slika 3.22 Maksimalni kontaktni napon i površina kontakta dobijeni Hertz-ovom teorijom kontakata i konačnim elementima [36].....	44
Slika 3.23 Poređenje maksimalnog kontaktnog opterećenja u zavisnosti od prečnika kotrljajnog tela [36].....	44
Slika 3.24 Deformacija spoljašnjeg prstena [36].....	45
Slika 3.25 Poređenje modela konačnih elemenata sa proračunom na osnovu Hertz-ove teorije kontakata: a) poređenje kontaktnih napona; b) poređenje kontaktne površine [36].....	45

Slika 3.26	Uticaj nominalnog ugla kontakta na maksimalnu kontaktnu silu i maksimalni ugao kontakta [17]	46
Slika 3.27	Uticaj nominalnog ugla kontakta na maksimalnu kontaktnu silu i broj opterećenih kotrljajnih tela [17]	46
Slika 3.28	Uticaj koeficijenta zakrivljenosti žleba na maksimalnu kontaktnu silu i ugao kontakta [17]	47
Slika 3.29	Uticaj radijalnog zazora na sopstvenu frekvenciju radijalnog ležaja [33].....	48
Slika 3.30	Uticaj radijalnog zazora na frekvenciju spoljnjeg prstena radijalnog ležaja [84]	48
Slika 3.31	Promena amplitude oscilovanja kotrljajnih tela u zavisnosti od zazora: a) $G_r=1 \mu\text{m}$; b) $G_r=6 \mu\text{m}$; c) $G_r=12 \mu\text{m}$; d) $G_r=20 \mu\text{m}$ [33]	49
Slika 3.32	Promena amplitude oscilovanja spoljašnjeg prstena u zavisnosti od zazora: a) $G_r=10 \mu\text{m}$; b) $G_r=20 \mu\text{m}$ [85]	49
Slika 3.33	Putanja centra kugličnog ležaja sa kosim dodirom pri $n=18000 \text{ o/min}$ sa prednaprežanjem (100 N): a) sa i b) bez dejstva centrifugalne sile [62]	50
Slika 3.34	Promena amplitude oscilovanja spoljašnjeg prstena kugličnog ležaja sa kosim dodirom u zavisnosti od prednaprežanja i broja obrtaja [15]	51
Slika 3.35	Prikaz amplituda vibracija u horizontalnom i vertikalnom pravcu usled valovitosti na spoljašnjoj stazi kotrljanja za različite brojeve talasa: a) $N_t = 7$; b) $N_t = 8$; c) $N_t = 9$; d) $N_t = 12$; [34].....	54
Slika 3.36	Prikaz amplituda vibracija u vertikalnom pravcu usled valovitosti na unutrašnjoj stazi kotrljanja za različite brojeve talasa: a) $N_T= 7$; b) $N_T= 8$; c) $N_T = 9$; d) $N_T = 12$; [35]....	55
Slika 3.37	Uticaj valovitosti na promenu broja obrtaja kaveza pri delovanju sila inercije za kuglični ležaj sa kosim dodirom [16].....	56
Slika 3.38	Frekvencije na kojima se javljaju maksimalne amplitude vibracija usled neravnomerne raspodele talasa na a) unutrašnjem prstenu, b) spoljašnjem prstenu [66]	56
Slika 4.1	Delovanje sila na kotrljajno telo kod ležaja sa kontaktom u dve tačke	61
Slika 4.2	Delovanje sila na kotrljajno telo kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke.....	61
Slika 4.3	Elipsasti kontakt kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke	65
Slika 4.4	Raspodela napona na elipsastoj površini kontakta	66
Slika 4.5	Šematski prikaz ležaja u neopterećenom stanju: a) radijalni ležaj; b) ležaj sa kontaktom u četiri tačke	67
Slika 4.6	Šematski prikaz razmatranih ležaja nakon delovanja aksijalnog opterećenja kod: a) radijalnog ležaja; b) ležaja sa kontaktom u četiri tačke.....	67
Slika 4.7	a) Pozicija centra zakrivljenosti radijalnog ležaja nakon delovanja kombinovanog opterećenja; b) ugaona pozicija kotrljajnih tela i kontaktno opterećenje pri preklopu; c) ugaona pozicija kotrljajnih tela i kontaktno opterećenje pri zazoru	68
Slika 4.8	Promena: a) ugla kontakta; b) kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela kod radijalnog ležaja	70
Slika 4.9	Pozicija centra kotrljajnog tela i centra zakrivljenosti staza kotrljanja pre i posle delovanja kombinovanog opterećenja	73

Slika 4.10 Delovanje kontaktnih opterećenja na kotrljajno telo.....	73
Slika 4.11 Promena: a) ugla kontakta; b) kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke za zazor $G_r = 20 \mu\text{m}$	75
Slika 4.12 Promena: a) ugla kontakta; b) kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke za preklop $G_r = 20 \mu\text{m}$	75
Slika 4.13 Algoritam matematičkog modela za kvazistatičku anallizu ponašanja kugličnih ležaja.....	77
Slika 5.1 Šematski pregled toka modelovanja mehaničkog ponašanja kugličnih ležaja	79
Slika 5.2 Diskretizovani analizirani modeli ležaja: a) FKL 6006; b) FKL LSQFR 308	81
Slika 5.3 Konvergencija mreže konačnih elementa za razmatrane ležaje	82
Slika 5.4 Strukturna greška napona na stazama kotrljanja a) unutrašnjeg; b) spoljašnjeg prstena za ležaj 6006.....	82
Slika 5.5 Definisane kontaktnih površina za analizirani ležaj 6006.....	83
Slika 5.6 Definisane kontakta između dva tela.....	84
Slika 5.7 Definisane početnog (nominalnog) radijalnog zazora između kuglica i unutrašnje staze kotrljanja	85
Slika 5.8 MKE model za modalnu i harmonijsku analizu	86
Slika 5.9 Promena unutrašnje energije i „nulte energije” u zavisnosti od broja ciklusa	90
Slika 5.10 Promena ukupne energije u zavisnosti od broja ciklusa.....	90
Slika 5.11 Predloženi model za određivanje veka ležaja.....	92
Slika 5.12 Promena ubrzanja određena eksplicitno - dinamičkom analizom na spoljašnjem prstenu ležaja LSQFR 308.....	93
Slika 5.13 Promena maksimalnih ekvivalentnih napona u vremenskom domenu za ležaja LSQFR 308	93
Slika 5.14 Gausova raspodela maksimalnih ekvivalentnih napona.....	94
Slika 5.15 S-N kriva za materijal GCr15SiMn (čelik za ležaje).....	95
Slika 6.1 Radijalni kuglični ležaj FKL 6006	97
Slika 6.2 Ležaj sa kontaktom u četiri tačke FKL LSQFR 308	97
Slika 6.3 Šematski prikaz eksperimenta za određivanje FRF ležaja	97
Slika 6.4 Pobudni čekić: a) izgled; b) dimenzije	98
Slika 6.5 Oprema korišćena za eksperimentalnu modalnu analizu: a) Senzor ubrzanja PCB 352C33 b) A/D kartica National Instrumets USB-4432	98
Slika 6.6 a) Realni; b) imaginarni deo funkcije frekventnog odziva	100
Slika 6.7 Procedura eksperimentalne modalne analize ležaja 6006	101
Slika 6.8 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=10 \mu\text{m}$	101
Slika 6.9 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=20 \mu\text{m}$	102
Slika 6.10 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=30 \mu\text{m}$	102

Slika 6.11 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=40 \mu\text{m}$	103
Slika 6.12 Postavka eksperimentalne modalne analize ležaja LSQFR 308.....	104
Slika 6.13 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj LSQFR 308 sa zazorom $G_r=20 \mu\text{m}$	104
Slika 6.14 Ispitivani ležaj 6006	105
Slika 6.15 Eksperimentalni uređaj za merenje vibracija.....	107
Slika 6.16 Šematski prikaz principa merenja pomoću elektrodinamičkog davača brzine.....	108
Slika 6.17 Blok dijagram merno-upravljačkog sistema.....	108
Slika 6.18 Transformacija signala vibracija iz vremenskog u frekventni domen [72]	110
Slika 6.19 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=0 \mu\text{m}$, $F_a=200 \text{ N}$	110
Slika 6.20 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=0 \mu\text{m}$, $F_a=400 \text{ N}$	111
Slika 6.21 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=0 \mu\text{m}$, $F_a=600 \text{ N}$	111
Slika 6.22 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=0 \mu\text{m}$, $F_a=800 \text{ N}$	111
Slika 6.23 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=0 \mu\text{m}$, $F_a=1000 \text{ N}$	112
Slika 6.24 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=200 \text{ N}$	112
Slika 6.25 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=400 \text{ N}$	112
Slika 6.26 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=600 \text{ N}$	113
Slika 6.27 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=800 \text{ N}$	113
Slika 6.28 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=1000 \text{ N}$	113
Slika 6.29 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od radijalnog zazora.....	114
Slika 6.30 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od aksijalnog opterećenja.....	115
Slika 6.31 Šematski prikaz eksperimentalnog štanda za ispitivanje veka ležaja	116
Slika 6.32 Izgled eksperimentalnog štanda za određivanje veka ležaja FKL LSQFR 308	116
Slika 6.33 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r=10 \mu\text{m}$	118
Slika 6.34 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r=20 \mu\text{m}$	118
Slika 6.35 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r=30 \mu\text{m}$	118
Slika 6.36 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r=40 \mu\text{m}$	119
Slika 6.37 Spektar vibracija ubrzanja dobijen Furijeovom transformacijom nakon 238 časova ispitivanja veka ležaja LSQFR 308 sa zazorom $G_r=10 \mu\text{m}$	120
Slika 6.38 Spektar vibracija ubrzanja dobijen Furijeovom transformacijom nakon 240 časova ispitivanja veka ležaja LSQFR 308 sa zazorom $G_r=10 \mu\text{m}$	120
Slika 6.39 Spektar vibracija ubrzanja dobijen Furijeovom transformacijom nakon 215 časova ispitivanja veka ležaja LSQFR 308 sa zazorom $G_r=40 \mu\text{m}$	121
Slika 6.40 Izgled oštećenih ležaja nakon ispitivanja a) $G_r=10 \mu\text{m}$ b) $40 \mu\text{m}$	121
Slika 7.1 Raspored maksimalnih kontaktnih napona: a) $G_r=0 \mu\text{m}$; b) $G_r=40 \mu\text{m}$	124
Slika 7.2 Raspored maksimalnih elastičnih deformacija na elementima ležaja 6006	125

Slika 7.3 Broj kotrljajnih tela koja prenose opterećenje.....	127
Slika 7.4 Promena: a) kontaktnih opterećenja; b) kontaktnih deformacija u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela	128
Slika 7.5 Promena maksimalnih kontaktnih deformacija i pomeranja centra ležaja u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja	129
Slika 7.6 Promena kontaktne krutosti u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za svaku poziciju kotrljajnog tela	130
Slika 7.7 Promena ukupne radijalne krutosti u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja.....	130
Slika 7.8 Promena radijalnog zazora ($G_r = 20 \mu\text{m}$) za svaku poziciju kotrljajnih tela usled spoljašnjeg opterećenja: a) $F_r = 1000 \text{ N}$; b) $F_r = 5000 \text{ N}$	131
Slika 7.9 Promena a) kontaktnih opterećenja; b) kontaktnih deformacija u zavisnosti od zazora za svaku poziciju kotrljajnih tela određenih kvazistatičkim modelom.....	132
Slika 7.10 Promena kontaktnih opterećenja određenih MKE modelom u zavisnosti od zazora	132
Slika 7.11 Promena radijalnog pomeranja centra ležaja i maksimalne kontaktne deformacija u zavisnosti od zazora/prekopa	133
Slika 7.12 Promena kontaktnog opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela u slučaju preklopa	133
Slika 7.13 Promena radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa pri radijalnom opterećenju $F_r = 1000 \text{ N}$	134
Slika 7.14 Promena kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja u zavisnosti od radijalnog opterećenja i zazora/preklopa.....	134
Slika 7.15 Promena radijalne krutosti ležaja u zavisnosti od radijalnog opterećenja i zazora/preklopa	135
Slika 7.16 Modovi oscilovanja radijalnog ležaja.....	136
Slika 7.17 Amplitudno frekventna karakteristika radijalnog ležaja određena MKE modelovanjem ...	137
Slika 7.18 Realni i imaginarni deo funkcije frekventnog odziva	137
Slika 7.19 Definisana opterećenja i ograničenja ležaja	139
Slika 7.20 Promena amplitude brzine tokom vremena za radijalni ležaj.....	141
Slika 7.21 Diskretizovano kotrljajno telo	141
Slika 7.22 Promena amplitude brzine tokom vremena za radijalni ležaj nakon filtriranja osnovnog signala	142
Slika 7.23 Amplitudno-frekventna karakteristika radijalnog ležaja u zavisnosti od zazora pri delovanju spoljašnjeg aksijalnog opterećenja $F_a = 200 \text{ N}$	144
Slika 7.24 Promena maksimalne (Peak) amplitde vrednosti brzine na frekvenciji f_0 u zavisnosti od zazora	144
Slika 7.25 a) Promena elastičnih deformacija tokom vremena na spoljašnjoj stazi kotrljanja; b) Raspored elastičnih deformacija na ležaju u trenutku $t = 0,025 \text{ s}$, pri zazoru $G_r = 0 \mu\text{m}$	145

Slika 7.26 a) Promena elastičnih deformacija tokom vremena na spoljašnjoj stazi kotrljanja; b) Raspored elastičnih deformacija na ležaju u trenutku $t = 0,025$ s, pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$	145
Slika 7.27 Amplitudno-frekventna karakteristika radijalnog ležaja pri zazoru od $30 \mu\text{m}$, pri delovanju: a) $F_a = 200$ N; b) $F_a = 1000$ N	147
Slika 7.28 a) Promena elastičnih deformacija tokom vremena na spoljašnjoj stazi kotrljanja; b) Raspored elastičnih deformacija na ležaju u trenutku $t = 0,025$ s, pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$ za različite varijante opterećenja	148
Slika 8.1 MKE model ležaja LSQFR 308 pri statičkoj analizi	150
Slika 8.2 Promena: a) aksijalnog pomeranja; b) aksijalne krutosti u zavisnosti od aksijalnog opterećenja za različite vrednosti zazora/preklopa	152
Slika 8.3 Promena kontaktnih opterećenja i ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela za $F_a = 2000$ N za ležaj LSQFR 308	153
Slika 8.4 Promena kontaktnih opterećenja i ugla kontakta u zavisnosti od zazora/preklopa za ležaj LSQFR 308	153
Slika 8.5 Raspored maksimalnih ekvivalentnih napona na: a) unutrašnjoj levoj; b) spoljašnjoj desnoj stazi kotrljanja pri $F_a = 2000$ N i $G_r = 0 \mu\text{m}$	154
Slika 8.6 Promena kontaktnih opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za različite vrednosti zazora/preklopa	155
Slika 8.7 Promena ugla kontakta u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za različite vrednosti zazora/preklopa	155
Slika 8.8 Promena aksijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i aksijalnog opterećenja za ležaj LSQFR 308	156
Slika 8.9 Promena radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i aksijalnog opterećenja za ležaj LSQFR 308	156
Slika 8.10 Raspodela opterećenja za: a) $G_r = -20 \mu\text{m}$, b) $G_r = 0 \mu\text{m}$ i c) $G_r = 20 \mu\text{m}$ u zavisnosti od spoljašnjeg radijalnog opterećenja za ležaj LSQFR 308	158
Slika 8.11 Promena kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela a) $G_r = -20 \mu\text{m}$, b) $G_r = 0 \mu\text{m}$ i c) $G_r = 20 \mu\text{m}$ u zavisnosti od spoljašnjeg radijalnog opterećenja za ležaj LSQFR 308	159
Slika 8.12 Promena ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela za različite vrednosti zazora/preklopa a) $F_r = 1000$ N, b) $F_r = 10000$ N za ležaj LSQFR 308	160
Slika 8.13 Zavisnost: a) aksijalne; b) radijalne krutosti od pozicije kotrljajnog tela pri $F_r = 1000$ N i $G_r = -20 \mu\text{m}$	160
Slika 8.14 Promena radijalne krutosti za svako kotrljajno telo za $F_r = 1000$ N i $G_r = -20 \mu\text{m}$	161
Slika 8.15 Promena a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i radijalnog opterećenja za ležaje	162
Slika 8.16 Promena kontaktnog opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazore/preklope pri $F_a = 2000$ N i $F_r = 6000$ N a) kvazistatički model; b) MKE model	164

Slika 8.17 Promena kontaktnog opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazore/preklope pri $F_a = 1600$ N i $F_r = 6000$ N; a) kvazi statički model; b) MKE model	164
Slika 8.18 Promena kontaktnog opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazore/preklope pri $F_a = 800$ N i $F_r = 6000$ N; a) kvazistatički model; b) MKE model	165
Slika 8.19 Promena ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazore/preklope pri $F_a = 2000$ N i $F_r = 6000$ N.....	165
Slika 8.20 Promena: a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti pri kombinovanom opterećenju za preklop $G_r = -20$ μ m.....	166
Slika 8.21 Promena: a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti pri kombinovanom opterećenju za nulti zazor.....	166
Slika 8.22 Promena: a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti pri kombinovanom opterećenju za zazor $G_r = 20$ μ m	167
Slika 8.23 MKE model ležaja LSQFR 308 za modalnu analizu	167
Slika 8.24 Modovi oscilovanja ležaja LSQFR 308	168
Slika 8.25 Amplitudno frekventna karakteristika ležaja LSQFR 308 određena MKE modelovanjem.....	169
Slika 8.26 Realni i imaginarni deo prenosne funkcije ležaja LSQFR 308 određen MKE modelovanjem.....	169
Slika 8.27 MKE model ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308.....	171
Slika 8.28 Promena amplitude ubrzanja pri preklopu $G_r = - 20$ μ m za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja	172
Slika 8.29 Promena amplitude ubrzanja pri preklopu $G_r = -10$ μ m za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja	173
Slika 8.30 Promena amplitude ubrzanja pri nultom zazoru za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja	173
Slika 8.31 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 10$ μ m za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja	173
Slika 8.32 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 20$ μ m za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja	174
Slika 8.33 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 30$ μ m za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja	174
Slika 8.34 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 40$ μ m za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja	174
Slika 8.35 Promena maksimalne amplitde ubrzanja na frekvenciji f_0 u zavisnosti od zazora određene eksperimentalnim ispitivanjima i MKE modelovanjem za ležaj LSQFR 308	175
Slika 8.36 a) Promena kontaktnih napona tokom vremena na levoj (σ_{s2}) i desnoj (σ_{s3}) spoljašnjoj stazi kotrljanja; b) raspored kontaktnih napona na levoj stazi kotrljanja u trenutku $t = 0,2$ s pri zazoru $G_r = 10$ μ m.....	176

Slika 8.37 a) Promena kontaktnih napona tokom vremena na levoj (σ_{s2}) i desnoj (σ_{s3}) spoljašnjoj stazi kotrljanja; b) raspored kontaktnih napona na levoj stazi kotrljanja u trenutku $t = 0,2$ s pri zazoru $G_r = 40 \mu\text{m}$	176
Slika 8.38 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQFR za $F_a = 400$ N i $F_r = 6000$ N pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$	178
Slika 8.39 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 800$ N i $F_r = 6000$ N pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$	178
Slika 8.40 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 1200$ N i $F_r = 6000$ N pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$	178
Slika 8.41 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 1600$ N i $F_r = 6000$ N pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$	179
Slika 8.42 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 2000$ N i $F_r = 6000$ N pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$	179
Slika 8.43 Promena amplitude ubrzanja u zavisnosti od preklopa/zazora za različita aksijalna opterećenja pri $F_r = 6000$ N.....	179
Slika 8.44 Promena veka ležaja LSQFR 308 u zavisnosti od zazora za različite metode određivanja veka pri $F_a = 13700$ N i $F_r = 26000$ N.....	180
Slika 8.45 Promena ležaja LSQR 308 u zavisnosti od zazora za različite vrednosti aksijalnog opterećenja pri konstantnom radijalnom opterećenju	182
Slika 8.46 Promena ležaja LSQR 308 u zavisnosti od zazora za različite vrednosti radijalnog opterećenja pri konstantnom aksijalnom opterećenju	182

SADRŽAJ TABELA

Tabela 3.1 Uporedne karakteristike ležaja [100].....	26
Tabela 4.1 Bezdimenzioni kontaktni parametri [30]	65
Tabela 5.1 Geometrija analiziranih ležaja	81
Tabela 5.2 Pregled usvojenog broja konačnih elemenata za diskretizaciju razmatranih ležaja	82
Tabela 6.1 Karakteristike pobudnog čekića.....	98
Tabela 6.2 Modalni parametri izračunati na osnovu eksperimenta i primene FRF	103
Tabela 6.3 Modalni parametri izračunati na bazi eksperimentalnih ispitivanja za ležaj LSQFR 308..	104
Tabela 6.4 Veličina radijalnog zazora prema klasama	106
Tabela 6.5 Plan eksperimenta	106
Tabela 6.6 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od radijalnog zazora	114
Tabela 6.7 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od aksijalnog opterećenja.....	115
Tabela 6.8 Prosečne vrednosti veka ležaja LSQFR 308 određene eksperimentalnim ispitivanjem	121
Tabela 7.1 Mehanička svojstva materijala za ležaj 6006	122
Tabela 7.2 Poređenje kontaktnih napona određenih kvazistatičkim i MKE modelom.....	123
Tabela 7.3 Poređenje kontaktnih deformacija određenih kvazistatičkim i MKE modelom	123
Tabela 7.4 Poređenje glavnih osa elipsaste kontaktne površine određenih kvazistatičkim i MKE modelom za radijalno opterećenje $F_r = 3000$ N.....	124
Tabela 7.5 Poređenje sopstvenih frekvencija određenih eksperimentalno u odnosu na MKE modelovanjem za $G_r = 20$ μ m	138
Tabela 7.6 Poređenje modalnih parametara određenih eksperimentom i MKE modelom	138
Tabela 7.7 Poređenje karakterističnih frekvencija elementa ležaja određenih kvazistatičkim pristupom i MKE modelovanjem.....	142
Tabela 7.8 Poređenje PEAK amplitude brzine na frekvenciji (f_0) određenih eksperimentalnim merenjima i MKE modelovanjem.....	148
Tabela 8.1 Razmatrani slučajevi opterećenja	150
Tabela 8.2 Mehanička svojstva materijala za ležaj LSQFR 308	150
Tabela 8.3 Aksijalna i radijalna krutost za različite vrednosti zazora/prekopa za ležaj LSQFR 308...	151
Tabela 8.4 Poređenje vrednosti maks. kontaktnog pritiska i deformacija određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem.....	154
Tabela 8.5 Poređenje vrednosti maksimalnog kontaktnog pritiska i napona određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem na levoj unutrašnjoj stazi kotrljanja.....	162

Tabela 8.6 Poređenje sopstvenih frekvencija određenih MKE modelovanjem u odnosu na eksperimentalne za ležaj LSQFR 308	168
Tabela 8.7 Poređenje modalnih parametara određenih eksperimentom i MKE modelom za ležaj LSQFR 308	169
Tabela 8.8 Amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za razmatrane varijante spoljašnjeg opterećenja u zavisnosti od preklopa/zazora	172
Tabela 8.9 Poređenje karakterističnih frekvencija elementa ležaja LSQFR 308 određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem.....	175
Tabela 8.10 Vrednosti frekvencija elementa LSQFR 308 u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja.....	177
Tabela 8.11 Poređenje veka određenog na bazi eksperimentalno dobijenog ubrzanja i ubrzanja određenog MKE modelovanjem	181

PREGLED KORIŠĆENIH OZNAKA

F', E'	eliptični integrali prve i druge vrste
a, b	glavna i pomoćna osa eliptičnog kontakta
C_p	dinamička nosivost ležaja [N]
D	prečnik spoljašnjeg prstena [mm]
d	prečnik unutrašnjeg prstena [mm]
B	širina ležaja
d_b	prečnik kotrljajnog tela [mm]
d_i	prečnik unutrašnje staze kotrljanja [mm]
d_m	srednji prečnik ležaja [mm]
d_o	prečnik spoljašnje staze kotrljanja [mm]
E_I, E_{II}	modul elastičnosti [N/mm ²]
F_a	spoljašnje aksijalno opterećenje [N]
f_b	frekvencija kotrljajnih tela [Hz]
f_c	frekvencija kaveza [Hz]
f_i	frekvencija unutrašnjeg prstena [Hz]
f_o	frekvencija spoljašnjeg prstena [Hz]
F_r	spoljašnje radijalno opterećenje [N]
f_r	frekvencija obrtanja [Hz]
G_a	aksijalni zazor [mm]
g_i	rastojanje između unutrašnjih centara zakrivljenosti [mm]
g_o	rastojanje između spoljašnjih centara zakrivljenosti [mm]
G_r	radijalni zazor [mm]
Q_i	kontaktna opterećenja sa unutrašnjom stazom kotrljanja [N]
Q_o	kontaktna opterećenja sa spoljašnjom stazom kotrljanja [N]
h	rastojanje između kotrljajnog tela i izvodnice [mm]
$J_r(\varepsilon)$	Sjovall-ov integral opterećenja
K	krutost ležaja [N/μm]
k	modalna krutost [N/m]
L_{10}	vek ležaja [obrtaja]
m	modalna masa [kg]
M_g	moment trenja [N·mm]
n	broj obrtaja [o/min]
r	radijus staze kotrljanja [mm]
R_{ci}	poluprečnik centra unutrašnje staze kotrljanja [mm]
R_{co}	poluprečnik centra spoljašnje staze kotrljanja [mm]
t	vreme [s]
Z	broj kotrljajnih tela
α	ugao kontakta [°]
ρ	radijus zakrivljenosti staze kotrljanja [mm]
φ	ugao između kotrljajnih tela [°]
κ	ugao punjenja [°]
α_0	nominalni ugao kontakta [°]
δ	Kontaktne elastične deformacije [μm]
ν_I, ν_{II}	Poissonov koeficijent

σ	naponi na stazama kotrljanja [Pa]
ω_c	ugaona brzina kaveza [rad/s]
Ω	ugaona brzina unutrašnjeg prstena sa vretenom [rad/s]
ζ	koficijent prigušenja
ω	sopstvene frekvencije
i	unutrašnji
l	levo
o	spoljašnji
r	desno

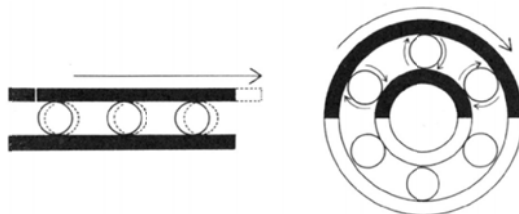
1 UVOD

Kotrljajni ležaji su jedni od najrasprostranjenijih mašinskih elemenata, čiji je zadatak da služe kao oslonci vratila i obrtnih osovina uz istovremeno prenošenje radijalnih i aksijalnih sila, kao i obezbeđenje tačnosti njihovog položaja. Gotovo da nema mašine, aparata ili uređaja, a da u svojoj konstrukciji ne sadrže veći ili manji broj kotrljajnih ležaja, od konvencionalnih električnih mašina do današnjih sofisticiranih uređaja za skladištenje informacija. Oni se koriste zbog male cene, velike preciznosti i pouzdanosti. Karakteristike ležaja značajno utiču na dinamičko ponašanje i procenjeni vek obrtnog sistema. Kao nosivi delovi obrtnih sistema, kotrljajni ležaji imaju važnu ulogu u prenosu opterećenja i vibracija. Uglavnom se smatraju kritičnim elementima u sklopu, od čijih radnih sposobnosti umnogome zavisi funkcionalnost, pouzdanost i eksploataciona svojstva celokupnog sklopa u koji se ugrađuju. Najčešće se koriste kuglični ležaji, te se njihove karakteristike analiziraju u velikom broju radova. Osnovni princip rada kugličnog ležaja je da se dva čelična prstena rotiraju jedan u odnosu na drugi zahvaljujući kotrljajnim telima koja se obrću po stazama kotrljanja. Zahvaljujući tome, vratilo i osovine se mogu obrtati u nepokretnom kućištu ili se npr. točak može obrtati oko nepokretne osovine. Između kotrljajnih tela nalazi se kavez, koji ravnomerno razdvaja i usmerava kotrljajne elemente.

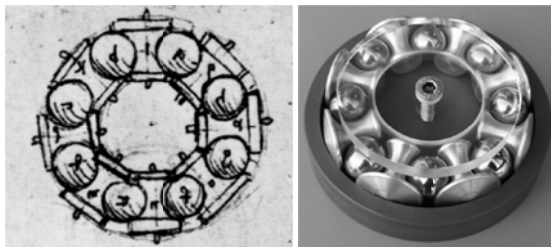
Od davnina čovek je poznao princip funkcionisanja ležaja kroz naivne, prirodne pojave kao što su klizanje po zaleđenoj površini. Počeci primene kotrljajnih ležaja, odnosno elemenata koji se koriste u kotrljajnim ležajima kakve danas poznajemo, vezuju se za sam početak razvitka ljudske civilizacije, odnosno kada je čovek primetio da mu je potreban manji napor da bi teret vukao preko kotrljajnih „tela“ nego da ga vuče preko površine. Arheološka istraživanja pokazuju da su Asirci 1100. godine pre nove ere koristili kotrljajne elemente ispod teških tereta (slika 1.1) kako bi ih lakše mogli transportovati [30]. U istorijskom osvrtu na kuglične ležaje svakako je potrebno, navesti i čuvenog Leonarda Da Vinčija (1452.–1519.) koji je u svom delu „*Codex Madrid*“, praktično definisao različite vrste kotrljajnih ležaja sa konkretnim kotrljajnim telima – kuglicama. U svojim crtežima on čak prikazuje i elemente koji drže kuglice unutar ležaja na konstantnom rastojanju (slika 1.2) [31].

Konkretna upotreba ležaja zaživela je tek nakon druge industrijske revolucije krajem XIX veka. Konstruktori su se na početku pre opredeljivali za klizne ležaje jer se tehnologija njihove izrade brže razvijala. Tokom šezdesetih godina prošlog veka počinje ekspanzija

upotrebe kotrljajnih ležaja. Razlog za porast upotrebe ovih ležaja u vezi je sa razvitkom specijalnih čelika. Upravo ovi čelici su omogućili izradu kvalitetnijih kotrljajnih ležaja, dok je razvoj mašina alatki omogućio postizanje veoma tačne geometrije elemenata ležaja što je značajno produžilo njihov vek. Ovako usavršeni kotrljajni ležaji počeli su se ugrađivati u mašinama alatkama, mehačkim prenosnicima i autoindustriji. Tokom sedamdesetih godina prošlog veka drastično se povećala njihova proizvodnja, što se odrazilo na nižu cenu [103].



Slika 1.1 Evolucija kotrljajnih ležaja [31]



Slika 1.2 Da Vinčijev koncept kotrljajnog ležaja [31]

Kvalitet ležaja sam za sebe nije dovoljan za ostvarenje svih projektovanih i konstrukcijom predviđenih karakteristika. Samo pod idealnim uslovima kotrljajni ležaji mogu da ostvare sve svoje projektovane performanse. U praksi se ovi uslovi gotovo nikada ne sreću. Oni se uvek, više ili manje, razlikuju od idealnih. Ležaji su često izloženi veoma nepovoljnim uslovima eksploatacije, izazvanim netačnom izradom kućišta i ostalih elemenata uležištenja, pogrešnom montažom, deformacijama vratila, visokom temperaturom i temperaturnim dilatacijama, nečistoćama, vlagom, i sl. Ove uticaje je u proizvodnim pogonima, najčešće nemoguće otkloniti. Iz tih razloga, jedna od vrlo važnih karakteristika svakog kotrljajnog ležaja je: „*Kolika je njegova sposobnost prilagođavanja nesavršenostima konstruktivnih elemenata koji ga okružuju*“? Kontrola, analizi i rešavanju problema vezanih za ležajeve kod mašinskih sistema mora se posvetiti posebna pažnja. Pravilnim izborom, montažom, korišćenjem i održavanjem ležajava može se mnogo toga uraditi na povećanju efikasnosti i produktivnosti mašinskih sistema.

Greške mikro i makrogeometrije koje nastaju tokom proizvodnje, zatim temperaturne dilatacije i deformacije nastale tokom ugradnje, kao i deformacije nastale u eksploatacije, usled spoljašnjeg opterećenja mogu značajno uticati na vrednost radijalnog zazora. Eksploatacioni uslovi u najvećem broju slučajeva izazivaju smanjenje zazora u ležaju. Radni zazor, gotovo je po pravilu, manji od zazora pre ugradnje. Mnogi otkazi mašinskih sistema posledica su upravo poništavanja zazora tokom eksploatacije ležaja. Zbog toga se u mnogim primenama, iz sigurnosnih razloga, izbegavaju naleganja s prednaprežanjem ili se, na primer,

preporučuje ugradnja ležaja s većim zazorima od nominalnih. Izbor zazora u ležaju treba biti takav, da se, s jedne strane dobije dovoljno mali radni zazor, s obzirom na potrebnu tačnosti obrtanja, a s druge strane da radni zazor bude dovoljno veliki s obzirom na njegovu promenu pri ugradnji i toplotnim i naponskim stanjima u eksploataciji. Za ostvarenje ovoga cilja potrebno je imati i efikasan matematički model koji će, što je moguće verodostojnije, opisati uticaj spoljašnjeg opterećenja i zazora na statičke i dinamičke karakteristike ležaja.

Već tokom samog projektovanja ležaja veoma je važno sistematski predvideti međusobno povezane uticaje statičkih i dinamičkih karakteristika za različite uslove eksploatacije. Za postizanje najpovoljnije konstrukcije, definisani model mora uzimati u obzir veliki broj parametara koji utiču na ponašanje odgovarajućeg ležaja [103]. Matematički model mora predstavljati vezu između ulaznih parametara koji utiču na ponašanje ležaja i izlaznih veličina koje definišu ponašanje kotrljajnih ležaja. Prema tome, kao ulazne veličine uzimaju se osnovne konstrukcione - eksploatacione karakteristike kotrljajnog ležaja. Kao izlazne karakteristike dobijaju se parametri koji definišu i određuju stanje kotrljajnih ležaja. S druge strane, eksperimentalna istraživanja su pokazala da se nijedan dosadašnje razvijen matematički model ležaja ne može generalizovati i primeniti na sve ležaje i njihove uslove rada.

Predmet istraživanja u ovome radu je analiza uticaja konstrukcionih (zazora/preklopa) i eksploatacionih (spoljašnjeg opterećenja) na statičke i dinamičke karakteristike kugličnih ležaja kao i određivanje veka s posebnim osvrtom na kuglični ležaj sa kontaktom u četiri tačke. Cilj istraživanja je razvoj odgovarajućih statičkih i dinamičkih modela kugličnih ležaja primenom kvazistatičkih relacija i metode konačnih elemenata (MKE), koji treba da omogućuje određivanje statičkih karakteristika kao što su: krutost ležaja, kontaktna opterećenja u ležaju, promena ugla kontakta raspodela opterećenja itd. i dinamičkih karakteristika kao što su: frekvencije elemenata ležaja, amplitude oscilovanja na karakterističnim frekvencija elemenata ležaja, oblici oscilovanja, sopstvene frekvencije, modalni parametri itd.

U *prvom poglavlju*, ukazano je na značaj samog projektovanja ležaja i predviđanja uticaja statičkih i dinamičkih karakteristika za različite uslove eksploatacije. Takođe su u ovom poglavlju pominje pojava prvih ležaja, pa do današnjih savremenih rešenje. Na kraju ovog poglavlja, dat je kratak opis svakog poglavlja.

U *drugom poglavlju*, prikazani su konstrukcioni parametri koji definišu spoljašnju i unutrašnju konstrukciju ležaja. Zatim je prikazan mehanizam nastanka vibracija u ležaju i ukazano je na tehnološke parametre koji utiču na njegovo ponašanje u eksploataciji.

U okviru *trećeg poglavlja*, kroz prikaz literature, pokazano je na statičko i dinamičko ponašanje radijalnog ležaja i kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke. Prikazano je ponašanje kugličnih ležaja kroz matematičke modele koji su dostupni u literaturi. Razvoj velikog broja proračunskih modela, uslovljava postojanje različitih parametara, koji treba da uspostave zavisnost između ulaznih i izlaznih veličina, uz uzimanje u obzir što većeg broja uticajnih faktora i pojava koje se javljaju tokom rada ležaja. Najvažniji parametri koji utiču na ponašanje ležaja su: raspodela opterećenja na kotrljajnim telima, veličine kontaktnih

napona i deformacija, ugao kontakta, zazor/preklop, nivo vibracija, i sl. Ovi parametri mogu se podeliti u tri osnovne grupe: konstrukcioni, tehnološki i eksploatacioni.

U **četvrtom poglavlju** opisan je analitički model za analizu kvazistatičke raspodele opterećenja u kotrljajnim ležajima sa dodirnom u dve i četiri tačke. Kvazistatički model je razvijen na bazi statičkog modela, primenom *Hertz-ove* teorije kontakta i *John-Harris-ove* raspodele opterećenja na kotrljajna tela. Model je u ovom radu proširen uvođenjem uticaja, preklopa/zazora u statičke jednačine ravnoteže. Na osnovu ovog modela moguće je odrediti krutost i vek ležaja. Vek ležaja se određuje u skladu sa *Ludenberg-Palmgren-ovom* teorijom.

U radu je pored kvazistatičkog modela razvijen i mehanički model kugličnih ležaja, modelovan u programskom sistemu opšte namene, baziranom na metodi konačnih elemenata (MKE). Model je prikazan u okviru **petog poglavlja** i sastoji se od statičkog i dinamičkog modela. Da bi se odredili početni uslovi (dobra početna aproksimacija, zadovoljavajuća veličina i broj konačnih elemenata) za dinamičku analizu, prvo se primenjuje statička nelinearna analiza, odnosno, dobijaju se rešenja u vidu pomeranja, napona na stazama kotrljanja i kotrljajnim telima kao rezultat delovanja spoljašnjeg opterećenja. Nelinearne jednačine su rešavane korišćenjem *Newton-Raphson-ove* metode. U sledećem koraku se određuju modovi oscilovanja i sopstvene frekvencije na bazi linearizovanih matrica krutosti dobijenih u statičkoj analizi. U trećem koraku se eksplicitnom dinamičkom analizom dobijaju promene ubrzanja, brzine, pomeranja, napona na elementima ležaja tokom vremena u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja, zazora i broja obrtaja ležaja. U poslednjoj fazi se na osnovu ubrzanja dobijenog u eksplicitnoj analizi za određene eksploatacione uslove, određuje vek ležaja primenom spektralne gustine amplitude.

Šesto poglavlje se odnosi na eksperimentalna istraživanja u cilju provere rezultata dobijenih primenom razvijenih programskih rešenja. U okviru ovog poglavlja prikazane su osnovne postavke eksperimentalnog ispitivanja, opisani su uređaji za ispitivanje i prikazani su neki od rezultata merenja. Eksperimentalno ispitivanje je sprovedeno za dva tipa ležaja: za radijalni kuglični ležaj FKL 6006 i kuglični ležaj sa kontaktom u četiri tačke FKL LSQFR 308. Eksperimentalno ispitivanje se može podeliti na tri dela. Prvi deo se bazira na određivanju sopstvenih frekvencija ležaja i modalnih parametara. U drugom delu su merene vibracija ležaja FKL 6006 na eksperimentalnom uređaju za merenje i kontrolu vibracija kotrljajnih ležaja, odnosno analiziran je uticaj spoljašnjeg aksijalnog opterećenja i zazora na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja. Treći deo eksperimentalnog ispitivanja odnosi se na određivanje veka ležaja FKL LSQFR 308. Ovo eksperimentalno mesto je iskorišćen i za ispitivanje uticaja zazora na dinamičko ponašanje ležaja FKL LSQFR 308.

Sveobuhvatno testiranje matematičkih modela izvršeno je za radijalni kuglični ležaj FKL 6006, u okviru **poglavlja sedam**. Pri tome je u okviru određenih analiza izvršena analiza uticaja koncepcionih (zazora), na eksploatacione karakteristike ležaja. Za proveru proračunom dobijenih vrednosti, kako primenom kvazistatičkog modela, tako i primenom programskih sistema opšte namene koji se baziraju na metodi konačnih elemenata, izvršena su eksperimentalna ispitivanja kako je prikazano u prethodnom poglavlju. Verifikacija statičkog ponašanja razmatranog ležaja je izvršena poređenjem rezultata dobijenih kvazistatičkim modelovanjem i rezultata dobijenih primenom metode konačnih elemenata.

Rezultati modelovanja dinamičkog ponašanja primenom metode konačnih elemenata su poređeni sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem. Zbog određenih ograničenja vezanih za obim rada, u okviru određenih matematičkih modela prikazan je samo deo njihovih mogućnosti.

U **osmom poglavlju je prikazana** analiza ponašanja ležaja sa kontaktom u četiri tačke FKL LSQFR 308 različite eksploatacione uslove. U okviru određenih analiza izvršena je analiza uticaja koncepcionih parametara (zazora i preklopa), na eksploatacione karakteristike ležaja. Za verifikaciju rezultata dobijenih primenom kvazistatičkog modela, kao i primenom programskih sistema opšte namene koji se baziraju na metodi konačnih elemenata, urađena su eksperimentalna ispitivanja. Verifikacija statičkog ponašanja ležaja LSQFR 308 je izvršena poređenjem rezultata dobijenih kvazistatičkim modelovanjem i rezultata dobijenih primenom metode konačnih elemenata. Na kraju su rezultati modelovanja dinamičkog ponašanja primenom metode konačnih elemenata poređeni sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem.

U **devetom poglavlju** data su zaključna razmatranja, na osnovu dobijenih rezultata, kritički osvrt na ostvarene rezultate, i pravci budućih istraživanja.

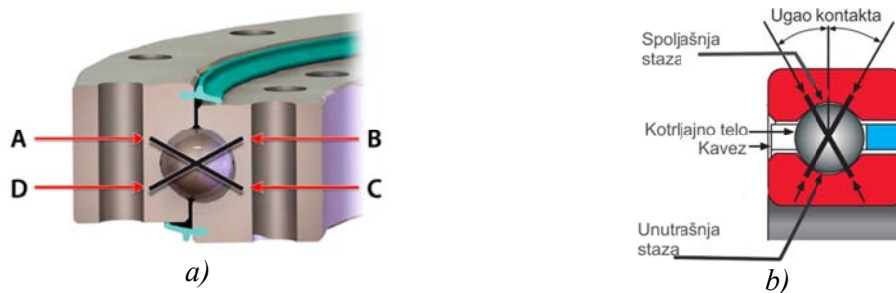
Deseto poglavlje prikazuje pregled korišćene literature, koja se sastoji od 107 referenci koje su većim delom citirane u samom radu.

2 KONSTRUKCIONI PARAMETRI LEŽAJA SA KONTAKTOM U ČETIRI TAČKE

2.1 Uvodne napomene

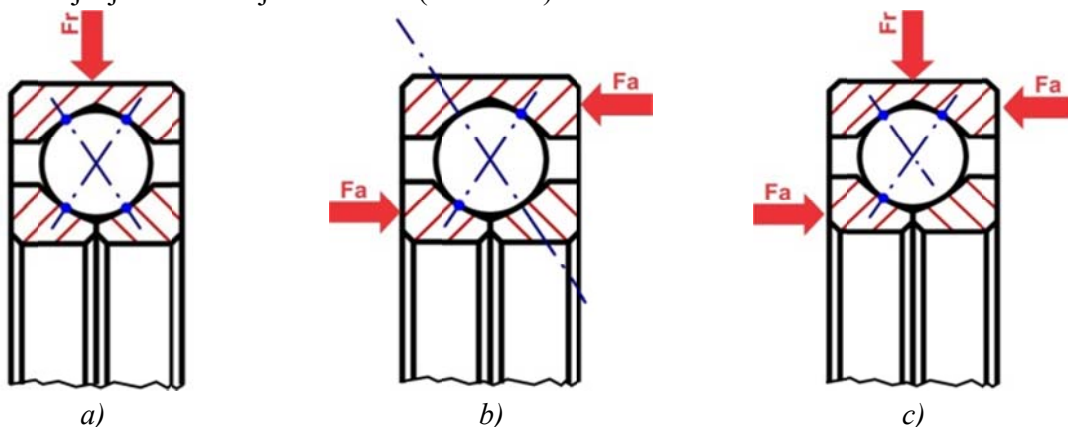
Složenost sklopova kakvi su ležaji, i njihov nesumnjivo veliki uticaj na ponašanje sklopa u koji se ugrađuje kao celine, uticali su da se predmet istraživanja u disertaciji usmeri na analizu statičkog i dinamičkog ponašanja radijalnih kugličnih ležaja i ležaja sa kontaktom u četiri tačke. Konstrukcija radijalnog ležaja je u većoj meri opšte poznata, pa će u nastavku detaljnije biti prikazna konstrukcija ležaja sa kontaktom u četiri tačke. Na slici 2.1a, prikazan je ležaj sa kontaktom u četiri tačke (tačke kontakta su označene slovima A, B, C i D). Ovi ležaji spadaju u grupu kugličnih jednoređih ili dvoređih ležaja sa kosim dodirom sa uglom kontakta između 25° i 35° . Žleb za kotrljajna tela na spoljašnjem i unutrašnjem prstenu sastoji se iz dva konusa sa vrhovima na sredini ležaja. Konusi su sa lučnom izvodnicom. Unutrašnji prsten se izrađuje kao jednodelni i dvodelni. Ležaji sa dvodelnim unutrašnjim prstenom spadaju u grupu rasklopivih ležaja, tako da se kod njih može ugraditi veći broj kotrljajnih tela čime se postiže i veća nosivost. Ovi ležaji mogu da prenesu radijalna i aksijalna opterećenja u oba smera.

Svaki kotrljajni ležaj, bez obzira na tip, čine isti elementi: unutrašnja staza kotrljanja (unutrašnji prsten), spoljašnja staza kotrljanja (spoljašnji prsten) i kotrljajna tela (kuglica ili valjak) smešteni u kavez (slika 2.1b).



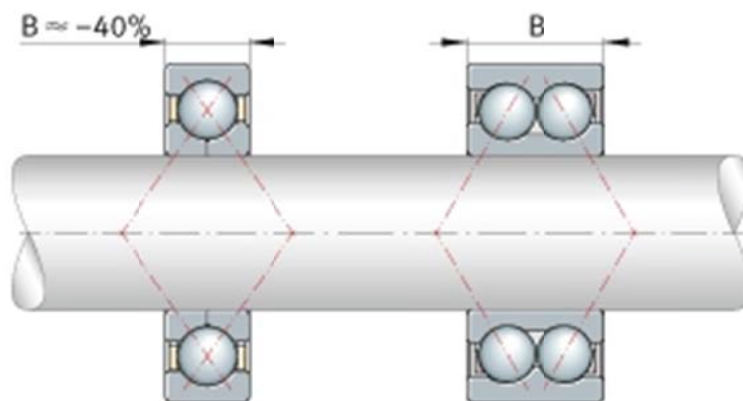
Slika 2.1 Ležaj sa kontaktom u četiri tačke [1]
a) Tačke dodira b) Osnovni elementi kugličnog ležaja

U današnje vreme najčešće se koriste kod poljoprivredne mehanizacije, mašina alatki, kao i kod transmisije motornih vozila. Uopšteno posmatrano, jedno kotrljajno telo pri delovanju radijalnog opterećenja ima kontakt sa prstenovima u četiri različite tačke (slika 2.2a). S druge strane, ako je ležaj opterećen sa dvosmernim aksijalnim opterećenjem, kotrljajno telo ostvaruje kontakt sa prstenovima u dve dijagonalno raspoređene tačke (slika 2.2b). Ove kontaktne tačke se pomeraju u suprotnim pravcima (pozicijama) ako aksijalno opterećenje menja pravac. Usled ovoga ovaj tip ležaja može primiti aksijalno opterećenje u oba smera. U slučaju delovanja kombinovanog opterećenja kontakt između kotrljajnih tela i staza kotrljanja se ostvaruje u tri tačke (slika 2.2c).



Slika 2.2 Prenos opterećenja kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke: a) radikalno opterećenje b) aksijalno opterećenje c) kombinovano opterećenje

Kada u primeni deluje aksijalno opterećenje u oba smera, uglavnom je potrebno postaviti dva ležaja sa kosim dodirom kako bi se ova opterećenja kompenzovala. U tim slučajevima ovi ležaji se moraju montirati u „O“ ili „X“ rasporedu. Na osnovu prethodno rečenog, dva ležaja sa kosim dodirom je moguće zameniti sa jednim kugličnim ležajem sa kontaktom u četiri tačke, slika 2.3 (B -širina ležaja). Ovo znači da kuglični ležaj sa kontaktom u četiri tačke, drugi ležaj čini nepotrebnim, što pruža prednosti ovih ležaja u odnosu na kuglične ležaje sa kosim dodirom kao što su: ušteda u prostoru, manja masa elemenata sklopa, veća tačnost obrtanja, brža i jednostavnija montaža i održavanje i dr.

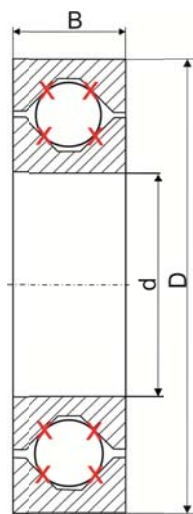


Slika 2.3 Uporedni prikaz kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke i dvoredog kugličnog ležaja sa kosim dodirom

Greške pri izradi kotrljajnih tela, greške oblika staza kotrljanja, valovitost i hrapavost, utiču na pojavu vibracija elemenata ležaja, a samim tim i na vibracije ležaja kao sklopa. Zbog toga konstruktori i dalje teže ka što boljem rešenju. U nastavku će biti prikazani osnovni parametri kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke koji utiču na njegovo ponašanje u eksploataciji. Konstrukcioni parametri kugličnog ležaja se definišu u fazi projektovanja. Pojedini parametri su propisani odgovarajućim standardima, dok ostale proizvođači usvajaju shodno svrsi i nameni ležaja. U konstrukcione parametre spadaju dimenzije koje su potrebne za definisanje spoljašnje i unutrašnje geometrije kugličnog ležaja, zatim, radijalni zazor i ugao kontakta. Konstrukcioni parametri imaju značajan uticaj na statičko i dinamičko ponašanje kugličnih ležaja, vek, brzinu obrtanja itd.

2.2 Spoljašnja geometrija kotrljajnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke

Spoljašnje, odnosno, ugradbene mere kotrljajnog ležaja neophodne su za njegov izbor za konkretne radne uslove, kao i za samu ugradnju. Spoljašnja geometrija kugličnih ležaja je standardizovana nacionalnim i međunarodnim standardima. Ovi standardi takođe propisuju tolerancije mera i oblika kotrljajnih ležaja. Spoljašnju geometriju kugličnih ležaja (slika 2.4) definišu spoljašnji prečnik (D), širina (B), i unutrašnji prečnik - prečnik provrta (d). Delovi idealnog kugličnog ležaja imaju apsolutno tačne dimenzije i oblik. U stvarnosti, geometrija ležaja nije idealna i potrebno je poštovati preporuke o tolerancijama mera i oblika, zato što odstupanja utiču na raspodelu opterećenja i deformacije spregnutih delova ležaja, pomeranja u ležaju, krutost i amplitude vibracija.



Slika 2.4 Spoljašnje mere kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke

2.3 Unutrašnja geometrija kotrljajnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke

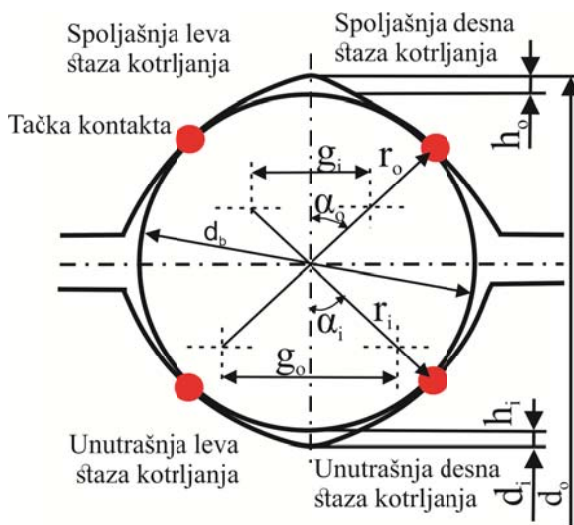
Geometrijske mere koje u potpunosti definišu dimenzije, oblik i položaj spregnutih elemenata ležaja, nazivaju se unutrašnja geometrija ležaja. Unutrašnja geometrija kugličnih ležaja nije propisana standardom, te proizvođači imaju mogućnost izbora oblika i dimenzija

unutrašnje geometrije u skladu sa sopstvenim tehnološkim mogućnostima. Određuju geometriju staza kotrljanja, kao i odgovarajuće zavisnosti između geometrijskih veličina, a prema prethodno obavljenim proračunima i analizama ponašanja ležaja, uz ispunjenje uslova mogućnosti smeštaja svih elemenata u prostor visine $(D - d)/2$ i širine B . Odnosi i veličine parametara unutrašnje geometrije značajno utiču na eksploatacione karakteristike ležaja (dinamička i statička nosivost, vek, dozvoljene vibracije, tačnost obrtanja, itd).

Kavez obezbeđuje, jednak raspored i položaj kotrljajnih tela po celom obimu prstena, a vođenje kaveza je bitan parametar pri definisanju unutrašnje geometrije kotrljajnog ležaja. Kavez treba da obezbedi rotaciju kuglica zajedno sa kavezom i uz to rotaciju kuglica oko sopstvene ose.

2.3.1 Staze kotrljanja ležaja sa kontaktom u četiri tačke

Kotrljajna tela se kreću po urezanim žlebovima koji se nazivaju staze kotrljanja. Moć nošenja je veća, što se više profil žleba prilagodi kotrljajnim telima. Međutim, isti poluprečnik staza kotrljanja i kotrljajnih tela, ima za posledicu povećanje otpora trenja. Ukoliko se malo poveća poluprečnik staze kotrljanja, neće doći do značajnog smanjenja nosivosti ležaja. Kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke spoljašnja i unutrašnja staza kotrljanja se sastoje iz dva dela, leve i desne strane, slika 2.5.



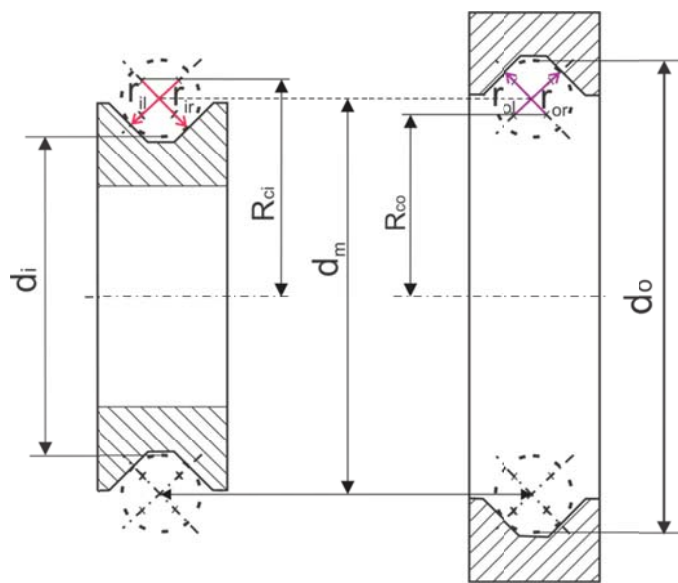
- α_o i α_i su uglovi kontakta sa spoljašnjom, odnosno unutrašnjom stazom kotrljanja
- g_o i g_i je rastojanja između centara spoljašnjih staza kotrljanja/ rastojanje između centara unutrašnjih staza kotrljanja
- h_o i h_i rastojanje između kotrljajnog tela i izvodnice sa spoljašnjom/ unutrašnjom stazom kotrljanja
- d_b prečnik kotrljajnog tela
- d_o, d_i prečnik spoljašnje/unutrašnje staze kotrljanja
- r_o, r_i poluprečnik krivine unutrašnje/ spoljašnje staze kotrljanja

Slika 2.5 Tačke kontakta staza kotrljanja i kotrljajnih tela kod kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke

Između kotrljajnih tela i staza kotrljanja, prema *Stribek-u* najpovoljniji odnos između kotrljajnih tela i staza kotrljanja je $r = 0,66 d_b$. U današnje vreme sve češće preporuke, koje se sreću u literaturi su zadate odnosom poluprečnika kotrljajnog tela i spoljašnje staze

kotrljanja gde treba zadovoljiti relaciju $r_o = 0,56 d_b$, a odnos između unutrašnje staze kotrljanja i kotrljajnog tela dat je relacijom $r_i = 0,52 d_b$ [30].

Na slici 2.6 prikazane su karakteristične dimenzije unutrašnje geometrije kugličnog ležaja:



- r_{il} - poluprečnik krivine unutrašnje leve staze kotrljanja,
- r_{ir} - poluprečnik krivine unutrašnje desne staze kotrljanja,
- r_{ol} - poluprečnik krivine spoljašnje leve staze kotrljanja,
- r_{or} - poluprečnik krivine spoljašnje desne staze kotrljanja,
- R_{co} - poluprečnik krivine staze kotrljanja na spoljašnjem prstenu,
- R_{ci} - poluprečnik krivine staze kotrljanja na unutrašnjem prstenu,
- d_o - prečnik po kome se kotrljajno telo kotrlja po spoljašnjem prstenu,
- d_i - prečnik po kome se kotrljajno telo kotrlja po unutrašnjem prstenu,
- d_b - prečnik kotrljajnog tela,
- d_m - srednji prečnik ležaja.

Slika 2.6 Unutrašnja geometrija kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke

Prečnici staza kotrljanja i srednji prečnik ležaja su veoma važna geometrijska karakteristika. Izražavaju se preko geometrijskih karakteristika staza kotrljanja:

$$d_i = 2(R_{ci} - r_i) = 2(R_{ci} - 0,52d_b) \quad (2.1)$$

$$d_o = 2(R_{co} + r_o) = 2(R_{co} + 0,56d_b) \quad (2.2)$$

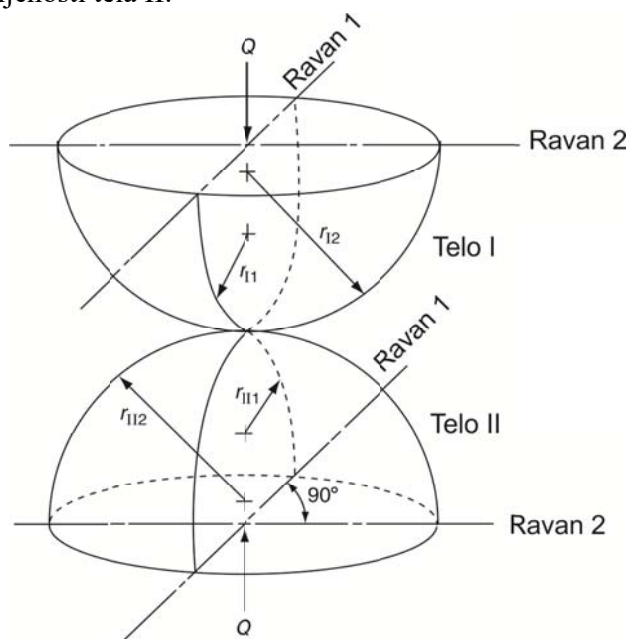
Srednji prečnik ležaja računa se prema:

$$d_m = (d_o + d_i) / 2 \quad (2.3)$$

Hertz je proučavao raspodelu opterećenja u kontaktu između dva tela, slika 2.7, pod pretpostavkama datim u poglavlju 4. Zbir radijusa zakrivljenosti:

$$\sum \rho = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22} \quad (2.4)$$

gde je r_{11} radijus zakrivljenosti tela I u ravni 1; r_{12} je radijus zakrivljenosti tela I u ravni 2; r_{111} je radijus zakrivljenosti tela II u ravni 1 i r_{112} je radijus zakrivljenosti tela II u ravni 2. Zakrivljenost se definiše kao recipročna vrednost pripadajućeg radijusa krivine r ($\rho=1/r$). Kod unutrašnjeg prstena, centar zakrivljenosti se nalazi unutar tela, pa je radijus zakrivljenosti pozitivan, dok se kod spoljašnjeg prstena, centar zakrivljenosti nalazi izvan tela, pa je radijus zakrivljenosti negativan. Negativna vrednost se odnosi na konkavnu površinu. $F(\rho)$ je funkcija zakrivljenosti površina u kontaktu. ρ_{I1} i ρ_{I2} su zakrivljenosti tela I, a ρ_{II1} i ρ_{II2} su zakrivljenosti tela II.



Slika 2.7 Kontakt dva tela

Prema parametrima ležaja, zakrivljenost kotrljajnog tela, unutrašnje i spoljašnje staze su:

$$\rho_{I1} = \frac{2}{d_b}; \quad \rho_{I2} = \frac{2}{d_b} \quad (2.5)$$

$$\rho_{II1} = -\frac{1}{f_i d_b}; \quad \rho_{II2} = \frac{2\gamma}{d_b(1-\gamma)} \quad (2.6)$$

gde je: $f_i = \frac{r_i}{d_b}$; $f_o = \frac{r_o}{d_b}$; $\gamma = \frac{d_b \cos \alpha}{d_m}$.

Zbir i razlika zakrivljenosti definišu se da bi dva tela u kontaktu bila posmatrana kao elipsast kontakt na ravnoj površini. Radijus zakrivljenosti se povećava ili smanjuje kada je spoljašnji prsten u kontaktu sa kotrljajnim telom. Isto se dešava i sa unutrašnjim prstenom koji u kontaktu ili smanjuje ili povećava radijus zakrivljenosti. Razlika zakrivljenosti se odnosi na razliku između ekvivalentnih unutrašnjih radijusa u ortogonalnoj ravni. Kod kotrljajnih tela, unutrašnji radijusi su jednaki, pa je razlika nula.

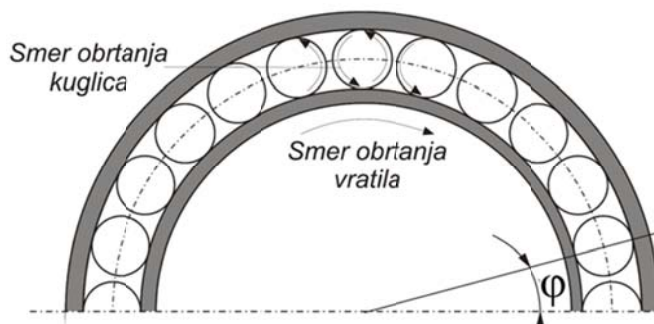
2.3.2 Kotrljajna tela i kavez

Kotrljajna tela treba slobodno da se rotiraju. Složeno rotaciono kretanje kotrljajnih tela, treba da obezbedi kavez, a to je: rotacija kotrljajnih tela oko ose kaveza zajedno sa kavezom, kao i rotacija kotrljajnih tela oko sopstvene ose koja se dalje sa njim obrće oko ose kaveza.

Uloga kaveza je vođenje i pridržavanje kotrljajnih tela, kao i održavanje jednakog ugaonog rastojanja između njih:

$$\varphi = \frac{2\pi}{Z} \quad (2.7)$$

Kotrljajna tela su istih prečnika i smeštena su u otvore kaveza. Centri kotrljajnih tela leže na jednoj osi - podeonoj osi kaveza ili srednjem prečniku ležaja, na jednakim rastojanjima, što se može videti sa slike 2.8.



Slika 2.8 Kretanje kotrljajnih tela u kavezu i ugao između kuglica [103]

Još jedna značajna geometrijska karakteristika je broj kotrljajnih tela. Statičko i dinamičko ponašanje ležaja u eksploataciji zavisi od raspodele opterećenja u ležaju, koje zavisi od broja kotrljajnih tela. Sa aspekta statičkog ponašanja potreban je što veći broj kotrljajnih tela. Sa druge strane, broj kotrljajnih tela je uslovljen konstrukcijom i montažom ležaja. Na dinamičko ponašanje ležaja u eksploataciji značajno utiče promena prečnika kotrljajnog tela. Prečnik kotrljajnog tela se može izračunati na sledeći način:

$$d_b = 0,3 \cos \alpha (D - d) \quad (2.8)$$

Zavisno od ugla punjenja (κ), maksimalan broj kotrljajnih tela se određuje prema izrazu:

$$Z = \frac{\kappa}{2 \arcsin \frac{d_b}{(d_i + d_o) / 2}} \quad (2.9)$$

gde je $\kappa = 186 \dots 194 [^\circ]$ - ugao punjenja kojim je određen najveći broj kotrljajnih tela koji se može smestiti kod uobičajenog načina montaže [83]. Na dinamičko ponašanje ležaja, vibracije kaveza imaju relativno mali uticaj, zbog toga što kavez nije u čvrstom mehaničkom kontaktu sa kotrljajnim telima (veliko prigušenje). Ako se kavez centrira preko kotrljajnih

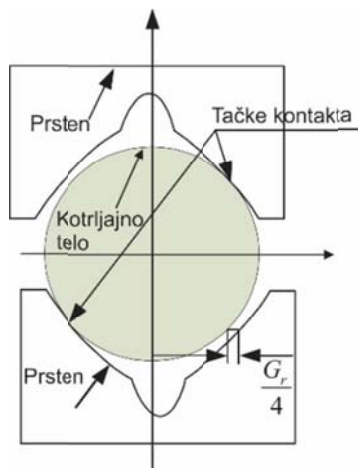
tela, može da se pomeri iz centralnog položaja za iznos zazora između džepova kaveza i kotrljajnih tela. Na frekvenciju kaveza se preslikavaju netačnosti nastale obradom i odstupanjem od simetrije kaveza.

2.3.3 Ugao kontakta i zazor ležaja sa kontaktom u četiri tačke

U literaturi se često koriste pojam teorijski zazor i merni zazor ležaja kao da imaju isto značenje. Zazor je aritmetička sredina radijalnih/aksijalnih rastojanja za koje se prsten ležaja može pomeriti iz jednog graničnog ekscentričnog položaja u suprotni iz različitih ugaonih položaja i bez spoljašnjeg opterećenja. Veličina zazora/preklopa (prednaprezanja) u ležaju utiče na tačnost obrtanja, krutost, dinamičko ponašanje, količinu razvijene toplote i vek ležaja. Unutrašnji radijalni zazor kotrljajnog ležaja je „srednja vrednost ukupnih pomeranja koja su upravna na osu provrta ležaja, pri čemu je jedan prsten pomerljiv, a drugi miruje“ (SRPS M.C3.754: 1974), pri tome se pretpostavlja da su prečnici staza kotrljanja prstenova i kotrljajnih tela, njihov oblik i položaj idealno tačni. Teorijski, radijalni zazor (slika 2.9) se može izračunati iz izraza:

$$G_r = d_o - d_i - 2d_b \quad (2.10)$$

gde je d_o - prečnik staze kotrljanja spoljašnjeg prstena, d_i - prečnik staze kotrljanja unutrašnjeg prstena, d_b - prečnik kotrljajnog tela.



Slika 2.9 Ležaj sa kontaktom u četiri tačke sa zazorom [21]

Kao posledica dejstva opterećenja elastične deformacije se uzimaju u obzir kod mernog zazora. Pri merenju kompletnog ležaja, radi se o mernom zazoru, zbog toga što je uvek prisutna sila pri merenju.

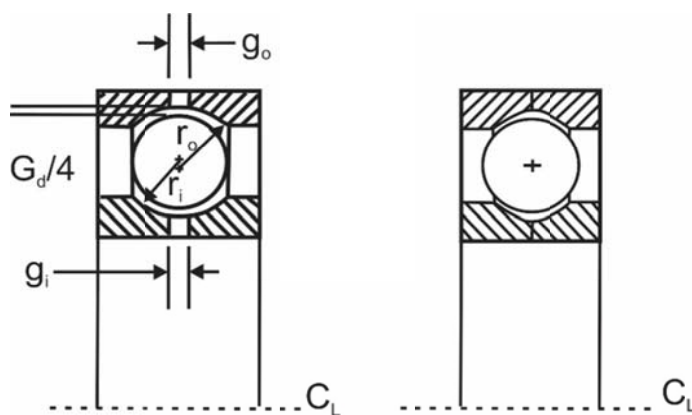
Zavisno od stanja ležaja, razlikuju se tri oblika zazora:

- zazor ležaja pre montaže - zazor u ležaju pre ugradnje,
- zazor ležaja nakon montaže - zazor u ležaju nakon ugradnje,
- eksploatacioni zazor - zazor koji se javlja u ležaju tokom rada, u radnim uslovima, pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja i pri radnoj temperaturi.

Zazor je od velikog značaja, ako se želi postići zadovoljavajući rad ležaja. Opšte pravilo je da u ležaju mora postojati zazor koji je veći od 0. Međutim, kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke, sa postojanjem zazora, dolazi do kontakta u samo dve tačke, što se vidi sa slike 2.9. Zbog toga kod ove vrste ležaja mora postojati preklop (prednaprezanje), da bi došlo do kontakta u sve četiri tačke. Prednaprezanje značajno povećava sile u kontaktu između kotrljajnih tela i staza kotrljanja.

Geometrija formirane staze kotrljanja najbolje je opisana razdvajanjem konvencionalnog radijalnog ležaja po sredini staze, uklanjanjem jednakih delova materijala sa obe polovine i ponovnim postavljanjem zajedno. Na slici 2.10 prikazan je ovaj koncept, a ležaj ove vrste često se naziva razdvojenim prstenom ili razdvojenim ležajem.

Uklonjen materijal, označen sa g_i za unutrašnju stazu i za spoljašnju stazu sa g_o , naziva se razmak između prstenova. Kako se zaobljenje povećava sa nule, početni radijalni zazor (P_d) se smanjuje i kotrljajno telo više nije u stanju da uspostavi kontakt u tački luka (nulti ugao kontakta).



Slika 2.10 Konvencionalni radijalni ležaj sa zonom zaobljavanja i dobijeni ležaj sa dva luka [29]

Da bi se održala ova ključna razlika između lučnog i konvencionalnog ležaja, S_d će se koristiti za označavanje radijalnog zazora izmenjenih staza kotrljanja, a G_d će označavati radijalni zazor originalnog kružnog profila staze kotrljanja.

Zakrivljene staze kotrljanja imaju uglove kontakta: nominalni ugao i ugao kontakta. Nominalni ugao α_0 , kao što je prikazano na slici 2.11, definisan je kao ugao kontakta nastao kada se kotrljajno telo nalazi na unutrašnjoj ili spoljašnjoj stazi kotrljanja (početni neopterećeni radijalni položaj kontakta). Ugao kontakta, koji je standardni način za definisanje ugla kontakta kod ležaja sa kosim dodirom, odnosi se na ugao u početnom neopterećenom položaju aksijalnog kontakta. Ova dva ugla kontakta ne treba mešati ili zameniti, jer se često razlikuju. Za sve konstrukcije ležaja sa kontaktom u četiri tačke, uglovi kontakta moraju biti veći ili jednaki nominalnom uglu. Ova dva ugla su jednaka kada u ležaju nema zazora.

Zakrivljene staze kotrljanja zahtevaju definisanje dodatnih parametara u poređenju sa konvencionalnim radijalnim ležajima ili sa ležajima sa kosim dodirom. Konkretno, dva od tri parametra moraju biti poznata da bi se definisao ležaj sa zakrivljenim stazama: unutrašnji zazor (S_d), nominalni uglovi ili dimenzije zakrivljenja (g_i i g_o). Najpraktičniji parametri za

Odnos između radijalnog zazora i ugla kontakta za konvencionalni ležaj sa kosim dodirom, prema *Jones-u* glasi:

$$G_d = 2Bd(1 - \cos\alpha) \quad (2.15)$$

gde je $B = f_i + f_o - 1$.

Međutim, za zakrivljenu stazu kotrljanja radijalni zazor je redukovan. Da bi se koristila prethodna jednačina (2.15), mora se uspostaviti originalni radijalni zazor, pre zakrivljenja. *Leveille* je utvrdio da se redukcija unutrašnjeg zazora za svaku zakrivljenu stazu kotrljanja izražava:

$$\Delta G_{d_i} = (2r_i - d)(1 - \cos\alpha_{0,i}) \quad (2.16)$$

$$\Delta G_{d_o} = (2r_o - d)(1 - \cos\alpha_{0,o}) \quad (2.17)$$

Prema tome, nezakrivljen radijalni zazor je suma S_d i redukcije zakrivljenja unutrašnje i spoljašnje staze. Prema ovome, preostale geometrijske veličine se izražavaju:

$$G_d = S_d + \Delta G_{d_i} + \Delta G_{d_o} \quad (2.18)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{G_d}{2Bd}\right) \quad (2.19)$$

$$S_e = 2Bdsin\alpha - g_i - g_o \quad (2.20)$$

$$R_{ci} = 0,5d_m + (f_i - 0,5)d\cos\alpha \quad (2.21)$$

$$R_{co} = 0,5d_m - (f_o - 0,5)d\cos\alpha \quad (2.22)$$

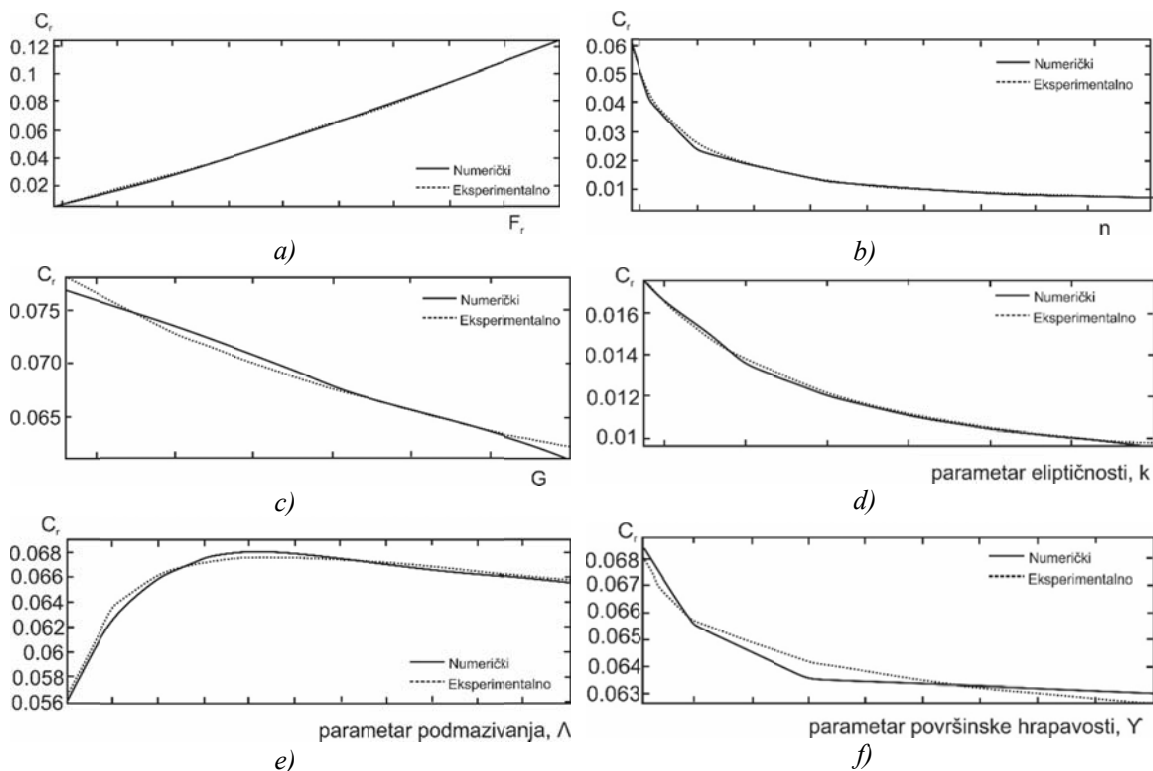
2.3.4 Krutost

Krutost je još jedan važan parametar kotrljajnog ležaja koja utiče na njegovo statičko i dinamičko ponašanje, na tačnost obrtanja, vek ležaja, kao i na dinamičku stabilnost. Može da se odredi eksperimentalnim putem, kao i analitički ili numerički. U zavisnosti od dejstva spoljašnjeg opterećenja, razlikuju se aksijalna i radijalna krutost. Aksijalna krutost je veoma važna kod kugličnih ležaja sa kosim dodirom, gde se zbog povećanja krutosti i tačnosti obrtanja glavnih vretena mašina alatki, uvodi aksijalno prednaprezanje.

Proračun krutosti je analitički rešio *Hertz* za kontakt u tački, ali odnos opterećenje-rasterećenje za linijski kontakt još uvek nije poznat. Zato su mnogi istraživači razvili sopstvene jednačine. Jednačine koje su razvili *Palmgren*, *Kunert* i *Houpert* pokazuju eksplicitnu korelaciju između opterećenja i rasterećenja [38, 39, 56, 74]. Na osnovu proračuna krutosti za jednu tačku kontakta, može se proračunati ukupna krutost ležaja između unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja u zoni opterećenja.

Neki od faktora koji utiču na radijalnu krutost, dati su na slici 2.13. Sa slike se vidi da su eksperimentalni rezultati isti ili približni, onim koji su dobijeni numeričkim putem. Na slici 2.13a, prikazan je uticaj radijalne sile, gde se vidi da krutost raste, sa porastom

radijalnog opterećenja. Na slici 2.13b prikazano je smanjenje krutosti, sa povećanjem bezdimenzionog parametra brzine, u opsegu $(0,5 - 5) \cdot 10^{-5}$. Sa povećanjem modula elastičnosti materijala, raste i parametar G , koji zavisi od karakteristika materijala, a sa tim dolazi do smanjenja krutosti, jer rastu deformacije na mestu kontakta što se vidi sa slike 2.13c. Do smanjenja krutosti dolazi i sa povećanjem parametra eliptičnosti dodirnih površina, što je prikazano na slici 2.13d. Krutost se povećava sa porastom parametra podmazivanja Λ , jer sa porastom debljine sloja maziva raste krutost ležaja, do graničn vrednosti nakon čegha dolazi do blagog opadanja, kao što je prikazano na slici 2.13e. Do pada krutost će doći sa promenom parametra hrapavosti na mestu kontakta, slika 2.13 f [76].



Slika 2.13 Krutost radijalnog ležaja u zavisnosti od a) radijalnog opterećenja, b) paramera brzine, c) parametra materijala G , d) parametra eliptičnosti dodirnih površina k , e) parametra podmazivanja Λ , f) parametar površinske hrapavosti γ [76]

2.3.5 Deformacije

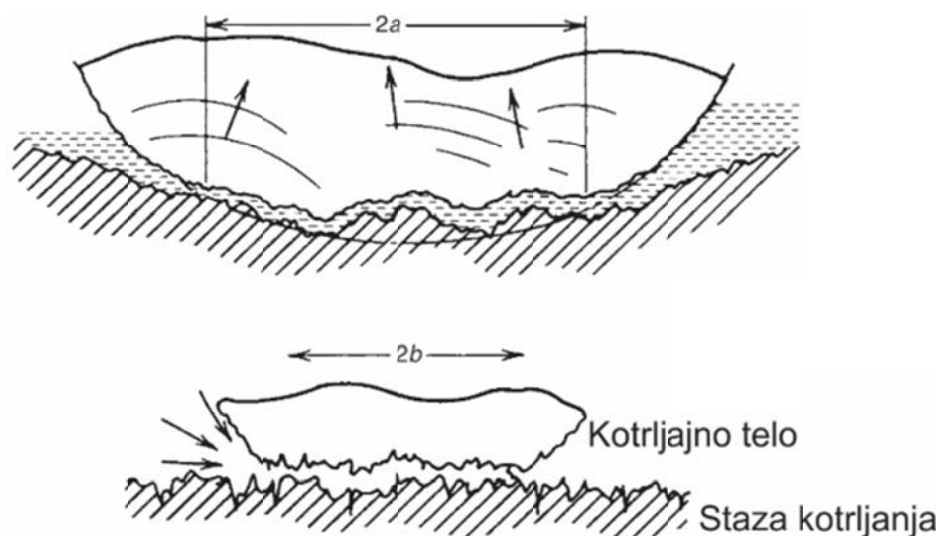
Na osnovu klasične *Hertz-ove* teorije elastičnog kontakta, deformacija u zoni kontakta, pod uslovom da je kontakt u tački, definiše se kao:

$$\delta = \delta^* \left[\frac{3F}{2 \sum \rho} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} \right] \frac{\sum \rho}{2} \quad (2.23)$$

Do elastičnih deformacija dolazi pod dejstvom opterećenja. Međutim, sama struktura materijala pokazuje ograničenja u vidu elastičnih deformacija, gde nakon prestanka opterećenja nije moguće da se telo vrati u prvobitni oblik, te dolazi do plastičnih deformacija. Slično se ponaša i opterećen ležaj izrađen od čelika. Dakle, kada se kotrljajno telo koje se

nalazi na stazi kotrljanja, opteret, udubljenje može ostati na stazi kotrljanja, a na kotrljajnom telu može ostati ravna površina nakon uklanjanja opterećenja. Ove trajne deformacije, ako su dovoljno velike, mogu prouzrokovati prekomerne vibracije i mogu izazvati značajne veličine koncentracije napona.

U praksi se male trajne deformacije javljaju čak i pri malim opterećenjima. Na slici 2.14, prikazano je veoma veliko uvećanje površina u kontaktu sa kotrljajnim elementima u tipičnom kugličnom ležaju u smeru kotrljanja i poprečno na taj smer. Napon se računa prema formuli: $\sigma = Q/A$. Sa slike se vidi pojava vrhova i dolina, što očigledno pokazuje da je raspodela opterećenja između kotrljajnog elementa i staza kotrljanja samo na manjoj površini kontaktnih vrhova, dajući mnogo veći napon od σ . Prema tome, izvesno je da je napon tečenja lokalno premašen i da su obe površine u kontaktu donekle zaravnjene i polirane tokom eksploatacije ležaja. Prema *Palmgrenu* [74], ovo zaravnanje ima mali uticaj na rad ležaja zbog izuzetno male veličine deformacije.

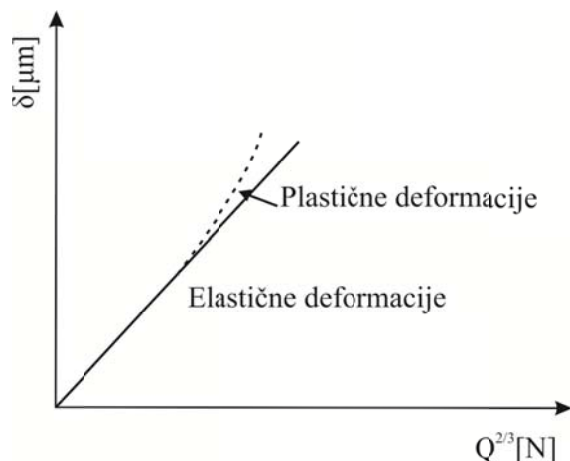


Slika 2.14 Površine u kontaktu, kotrljajno telo i staza kotrljanja (znatno uvećane) [77]

Prema *Harisu* [32] deformacije dva čvrsta čelična tela elastično opterećena kod kontakta u tački mogu se izraziti sledećom jednačinom:

$$\delta = 2,79 \cdot 10^{-4} \delta^* Q^{\frac{2}{3}} \sum \rho^{1/3} \quad (2.24)$$

gde je δ^* konstanta u zavisnosti od oblika dodirnih površina. Kako se povećava opterećenje između površina, deformacija postepeno odstupuje od one prikazane u jednačini (2.24) i postaje veća za bilo koje dato opterećenje što se vidi sa slike 2.15.



Slika 2.15 Deformacija u zavisnosti od opterećenja, za kontakt u tački [32]

Na osnovu empirijskih podataka za ležaj od čelika između 63,5 i 65,5 Rockvell C, *Palmgren* [74] je razvio sledeću formulu za kontakt u tački sa trajnom deformacijom:

$$\delta_s = 1,3 \cdot 10^{-7} \frac{Q^2}{D} (\rho_{I1} + \rho_{I2}) (\rho_{II1} + \rho_{II2}) \quad (2.25)$$

gde je ρ_{I1} zakrivljenost tela *I* u ravni 1 itd. Za kontakt kotrljajnog tela koje je kuglica i staze kotrljanja, jednačina (2.25) glasi:

$$\delta_s = 5,25 \cdot 10^{-7} \frac{Q^2}{D^3} \left[1 \pm \frac{\gamma}{(1 \pm \gamma)} \right] \left(1 - \frac{1}{2f} \right) \quad (2.26)$$

pri čemu se gornji znaci odnose na kontakt sa unutrašnjom stazom kotrljanja, a donji znaci na kontakt sa spoljašnjom stazom kotrljanja.

Krutost kontakta je nelinearna funkcija materijala kotrljajnog tela i prstenova i relativnog pomeranja između njih. U svakom kontaktu kotrljajno telo/staza kotrljanja, opterećenje kotrljajnog tela u smeru dodira jednako je [31]:

$$Q = K \delta^{\frac{2}{3}} \quad (2.27)$$

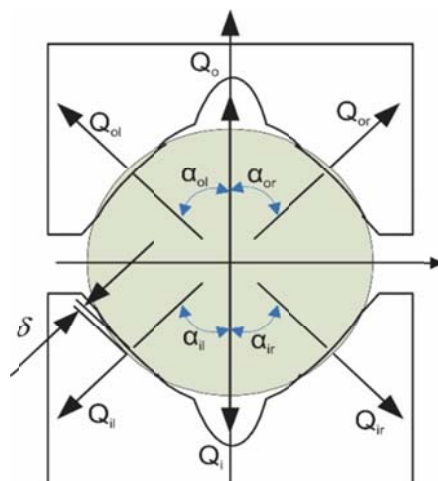
gde je *K* krutost kontakta.

Smatra se da elastične deformacije na kotrljajnim elementima ne menjaju veličine staza kotrljanja. Međutim, mnogo empirijskih podataka pokazuje da ove sile vrše promenu dimenzija staza kotrljanja [21]. Veličina spoljašnje staze se povećava, a veličina unutrašnje staze se smanjuje.

Slika 2.16 prikazuje poprečni presek kotrljajnog tela. Kao posledica negativnog zazora (preklopa), svako kotrljajno telo ima dve tačke kontakta sa unutrašnjim i spoljašnjim prstenom. Sile primenjene na jedan prsten, na primer Q_{ol} i Q_{or} na spoljašnjem prstenu, mogu biti složene u jednu silu (Q_o npr. na spoljašnjem prstenu). Generalno, ako je nominalni ugao

kontakta 45° , kao rezultat toga, svaki prsten ležaja izdržava sile /deformacije pod uglom od 90° , naime:

$$Q_o = \sqrt{2}Q_{ol} = \sqrt{2}Q_{or} \quad (2.28)$$



Slika 2.16 Kontaktna deformacija kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke sa preklopom

2.4 Mehanizmi nastanka vibracija kod kotrljajnih ležaja

Dinamičko ponašanje ležaja je uslovljeno dejstvom spoljašnjih i unutrašnjih sila koje nastaju kao posledica različitih uticaja u toku eksploatacije izazivajući oscilatorno kretanje elemenata ležaja, na različitim amplitudama i frekvencijama oscilovanja. Dinamičko ponašanje ležaja zavisi od dve karakteristične veličine, dejstva poremećajnih sila i dinamičke krutosti. Pri analizi dinamičkog ponašanja ležaja, važno je utvrditi promenu određenih parametara, dinamičke krutosti ili intenziteta poremećajnih sila. Pošto je merenje promene poremećajnih sila i dinamičke krutosti praktično nemoguće, vrši se merenje odziva ležaja usled promene spoljašnjeg opterećenja ili krutosti, koji se javlja kod kotrljajnih ležaja, stvarajući dinamički odziv određene jačine i oblika.

Samo u idealnim uslovima kotrljajni ležaji mogu da ostvare sve svoje projektovane karakteristike. Pri radu kotrljajnih ležaja, vibracije koje nastaju su pojava koju nije moguće izbeći. Ležaj direktno utiče na vibracije mašine ili nivo buke u koju je ugrađen na tri načina: kao strukturni element koji delimično određuje krutost same mašine, kao izvor vibracija na osnovu periodične promene opterećenja unutar samog ležaja i kao izvor vibracija zbog geometrijskih nesavršenosti od same proizvodnje, preko ugradnje do habanja i oštećenja tokom eksploatacije. Oštećenja ležaja u mašinama koje se koriste detektuju se merenjem vibracija i ovakav način detekcije oštećenja koristi se već duže vreme i poslednjih godina je postao ekonomičan i pouzdan. Merenjem vibracija na kućištu ležaja moguće je utvrditi da li postoje oštećenja na kotrljajnim telima i stazama kotrljanja.

Veoma je važno poznavati način funkcionisanja ležaja i prepoznati šta je uzrok pojave vibracija. Postoji više uzroka za generisanje vibracija kotrljajnih ležaja. Prema *Harris-u* [32] vibracije koje nastaju u kotrljajnom ležaju mogu se svrstati u sledeće četiri kategorije:

- strukturne vibracije,
- vibracije usled geometrijske nesavršenosti,
- vibracije usled oštećenja elemenata ležaja i
- vibracije kao posledica dejstva okoline.

Usled obrtanja elemenata ležaja dolazi do periodične promene elastičnih deformacija staza kotrljanja, pri dejstvu spoljašnjih sila, što dovodi do pojave vibracija ležaja. U praksi se pokazalo da najveće vibracije nastaju usled nesavršenosti unutrašnje geometrije ležaja, kao i usled odstupanja od hrapavosti i valovitosti staza kotrljanja.

2.4.1 Vibracije usled elemenata strukture ležaja

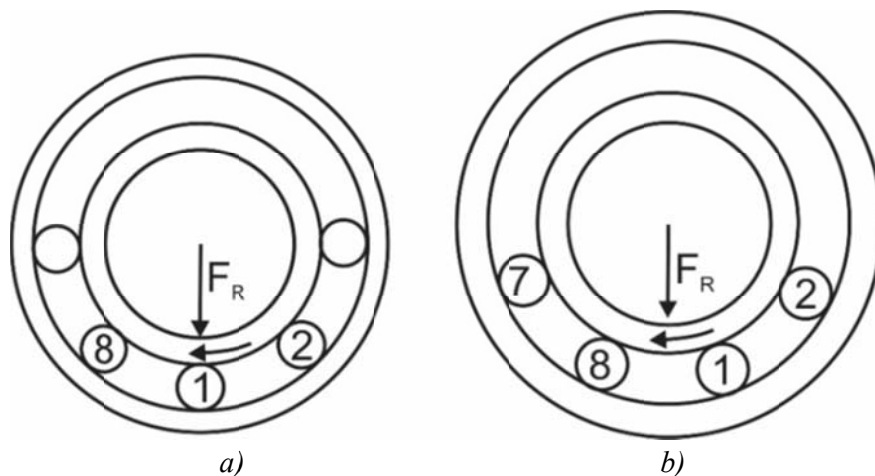
Kao što je rečeno, kotrljajni ležaji na tri načina utiču na vibracije mašine. Prvo kao strukturni element koji deluje kao opruga i dodaje masu sistemu. Ovaj uticaj ležaja delimično definiše odziv sistema na vibracije pod uticajem spoljašnje sile koja se menja u vremenu. Drugi i treći uticaj se javljaju, jer ležaji deluju kao izvor pobude, proizvodeći vremenski promenljive sile koje uzrokuju vibracije sistema. U drugom slučaju pobuda nastaje kao posledica konstrukcije kotrljajnih ležaja i ne može se izbeći. U trećem slučaju, ove sile su posledica geometrijskih nesavršenosti, koje se obično mogu izbeći ili smanjiti.

Vibracije koje nastaju u ležaju su posledica spoljašnjeg opterećenja, koje se prenosi na diskretne elemente čiji se ugaoni položaj u odnosu na pravac dejstva spoljašnjeg opterećenja neprekidno menja s vremenom. Ova promena položaja prouzrokuje periodično relativno kretanje unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja, čak i ako je ležaj geometrijski savršen. Osa unutrašnje staze kotrljanja, u odnosu na spoljašnju stazu kotrljanja, neprestano osciluje u toku rada. U prenošenju spoljašnjeg opterećenja učestvuju samo kotrljajna tela koja se nalaze ispod meridijanske ravni, odnosno ona kotrljajna tela koje imaju kontakt sa obe staze kotrljanja. Broj kotrljajnih tela preko kojih se opterećenje prenosi može biti paran ili neparan.

Na slici 2.17 prikazan je ležaj sa osam kotrljajnih tela u dva različita položaja. Na slici 2.17a, kotrljajno telo 1 se nalazi direktno ispod opterećenja, a opterećenje prenose kotrljajna tela sa brojevima 1, 2 i 8. Na slici 2.17b kotrljajna tela 1, 2, 7 i 8 prenose spoljašnje opterećenje i simetrično su raspoređena u odnosu na pravac spoljašnjeg opterećenja.

Radijalno rastojanje između prstenova ležaja je različito što je očigledno sa slike. Minimalno radijalno rastojanje između prstenova ležaja daje pozicija na slici 2.17a. Obrtanjem kotrljajnih tela, povećava se radijalno rastojanje između prstenova ležaja, sve dok kotrljajna tela ne dođu u simetričan položaj u odnosu na pravac spoljašnjeg opterećenja (slika 2.17b), gde je radijalno rastojanje između prstenova najveće. Prstenovi ležaja se vraćaju u svoju početnu poziciju daljim obrtanjem kotrljajnih tela, kada će kotrljajno telo broj 1 biti na pravcu spoljašnjeg opterećenja. Ove promene relativnog rastojanja između prstenova ležaja se dešavaju periodično sa obrtanjem kotrljajnih tela i kaveza. Tako da će frekvencija ovih vibracija biti jednaka frekvenciji obrtanja kaveza pomnoženoj sa ukupnim brojem kotrljajnih tela ležaja. Pored vertikalnog pomeranja prstenova ležaja, na istoj

frekvenciji, se javlja i horizontalno pomeranje, kada kotrljajna tela zauzmu asimetričan položaj u odnosu na pravac opterećenja [32].

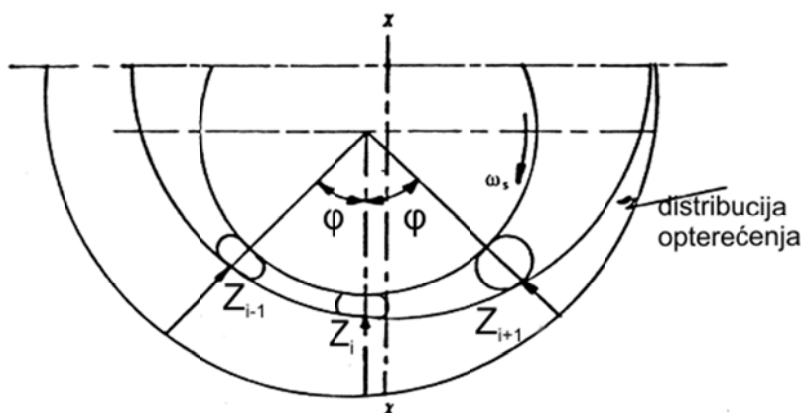


Slika 2.17 Oslanjanje unutrašnjeg prstena na neparan i paran broj kotrljajnih tela za a) $t=0$; b) $t=1/2[1/Z(f_{kaveza})]$ [32]

2.4.2 Vibracije usled periodične promene krutosti

Do elastičnih deformacija staza kotrljanja dolazi pod dejstvom kontaktnog opterećenja, u kontaktnu konačnog broja kotrljajnih tela sa prstenovima ležaja. Ove deformacije se mogu odrediti saglasno *Hertz-ovoj* teoriji kontakta i one su nelinearnog karaktera. Prema tome, kontakt između kotrljajnih tela i staza kotrljanja se posmatra kao nelinearna opruga, čija se deformacija nelinearno menja sa povećanjem opterećenja. Opruge se mogu koristiti za definisanje unutrašnjeg i spoljašnjeg kontakta u slučaju kada se zanemari masa kotrljajnih tela.

Tačka kontakta između staza kotrljanja i kotrljajnih tela se stalno pomera usled promene položaja kotrljajnih tela i sa obrtanjem prstena, usled toga se menja i raspored opterećenja, a time i intenzitet i pravac kontaktnih sila i kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja (slika 2.18) [68]. Iz prethodnog se može zaključiti da je intenzitet kontaktnih deformacija staza kotrljanja vremenski zavistan od položaja kotrljajnih tela na stazama kotrljanja.



Slika 2.18 Raspodela opterećenja [68]

Krutost ležaja se menja sa promenom pravca i intenziteta kontaktnih sila i kontaktnih deformacija. Vibracije između kotrljajnih tela i prstenova posledica su promena krutosti tokom vremena. Vibracije ove vrste javljaju se na frekvenciji obrtanja kotrljajnih tela preko spoljašnjeg prstena i predstavljaju kombinaciju vibracija od savijanja spoljašnjeg prstena i vibraciju krutih vratila, kada je u pitanju nepokretni spoljašnji prsten. Rezonanca koja se odlikuje veoma visokim i nestabilnim amplitudama nastaje kada se preklape frekvencije vibracija koje se javljaju u ležaju sa sopstvenim frekvencijama vratila. Kod kotrljajnog ležaja, kao nelinearnog sistema, parametri rezonance mogu značajno promeniti odziv sistema. Ponašanja slično haotičnim može nastati usled stanja ekstremnih vibracija. Tada je potrebno sprovesti obimno matematičko istraživanje i eksperimentalnu modalnu analizu. *Mével* i *Guyader* [70] su, među prvima istraživali ovaj fenomen.

2.4.3 Karakteristične frekvencije elemenata ležaja

Za određivanje uticaja pojedinih parametara ležaja od velikog značaja je poznavanje frekvencija elemenata ležaja, u odnosu na koje se definiše lokacija i izvor vibracija, odnosno uzrok pravilnog/nepravilnog rada ležaja. Kod kotrljajnih ležaja postoji pet frekvencija vibracija:

- frekvencija kaveza (f_c),
- frekvencija unutrašnjeg prstena (f_i),
- frekvencija spoljašnjeg prstena (f_o),
- frekvencija kotrljajnih tela (f_b),
- frekvencija obrtanja (f_r).

Osnovna frekvencija obrtanja je:

$$f_r = \frac{\Omega}{2\pi} \quad (2.29)$$

Frekvencija kaveza:

$$f_c = \frac{\omega_c}{2} \left(1 + \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_o \right) \quad (2.30)$$

Ugaona brzina kaveza uzimajući u obzir unutrašnju geometriju ležaja i promenu ugla kontakta sa stazama kotrljanja je:

$$\omega_c = \Omega \left[1 + \frac{(d_b / d_m + \cos \alpha_o)(\cos \alpha_o \cos \beta + \sin \alpha_o \sin \beta)}{(d_b / d_m - \cos \alpha_i)(\cos \alpha_i \cos \beta + \sin \alpha_i \sin \beta)} \right]^{-1} \quad (2.31)$$

gde su:

- ω_c - ugaona brzina kaveza [rad/s];
- Ω - ugaona brzina unutrašnjeg prstena sa vratilom [rad/s];
- d_b - prečnik kotrljajnih tela [mm];
- d_m - srednji prečnik ležaja [mm], $d_m = \frac{d_o + d_i}{2}$;

- α_i - ugao kontakta sa unutrašnjom stazom kotrljanja [rad];
- β - ugao nagiba kotrljajnih tela [rad].

Frekvencije unutrašnjeg (f_i) i spoljašnjeg prstena (f_o) su definisane kao frekvencija prelaska kotrljajnih tela preko tačke na unutrašnjoj odnosno spoljašnjoj stazi kotrljanja.

U slučaju kada je pokretan spoljašnji prsten frekvencije unutrašnjeg/spoljašnjeg prstena su:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{Z}{2\pi} \omega_c \left(1 - \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_i \right) \\ f_o &= \frac{Z}{2\pi} \omega_c \left(1 + \frac{d_b}{d_m} \cos \alpha_o \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Frekvencija kotrljajnih tela se može izraziti u funkciji ugaone brzine kotrljajnih tela, na osnovu srednjeg prečnika, prečnika kotrljajnih tela, ugla kontakta sa stazama kotrljanja i ugaone brzine kaveza:

$$f_b = \frac{\omega_c}{2\pi} \frac{d_k / d_m + \cos \alpha_o}{\cos \alpha_o \cos \beta + \sin \alpha_o \sin \beta} \quad (2.33)$$

2.4.4 Vibracije kao posledica dejstva okoline

Usled grešaka makrogeometrije i mikrogeometrije vratila i otvora u kućištu ležaja i grešaka nesaosnosti vratila, mogu se javiti izrazite vibracije koje značajno utiču na dinamičko ponašanje samog ležaja. Negativan uticaj okoline se ogleda u uslovima koji mogu biti posledica dejstva visokih temperatura, abrazivne ili hemijski nepovoljne sredine, uticaja nečistoća, visoke učestanosti obrtanja, dodatnih opterećenja koja su nastala nepravilnom montažom, itd.

3 PRIKAZ DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA

Veća primena kotrljajnih ležaja u današnje vreme je uslovljena visokim stepenom standardizacije i masovnom proizvodnjom u fabrikama koje su specijalizovane u toj oblasti. Prednosti primene kotrljajnih ležaja u odnosu na klizne sastoje se u sledećem: niža proizvodna cena i laka nabavka, relativno jednostavno konstrukciono izvođenje uležištenja, zadovoljavajuća nosivost za niže i srednje vrednosti broja obrtaja, jednostavno podmazivanje i održavanje, imaju tačno vođenje vratila, odnosno vretena, što je naročito važno kod elektro mašina i mašina alatki i dr. Kao i ostali mašinski elementi, kotrljajni ležaji imaju određene nedostatke u odnosu na klizne ležaje, kao što su: smanjena nosivost, odnosno vek pri većim brojevima obrtaja, veća osetljivost na udarna opterećenja, viši nivo buke i vibracija i dr. Kako bi se pronašao kompromis između prednosti i mana, izbor kotrljajnih ležaja se vrši na osnovu uslova u eksploataciji. Prvo je potrebno rešiti pitanje da li je ležaj namenjen da radi pri velikim opterećenjima, ili će raditi sa velikim brzinama obrtanja. Tako je u prvom slučaju važnija karakteristika krutost, a u drugom faktor brzohodnosti. U velikoj meri se uslovi rada donekle preklapaju, zato je uporedni prikaz karakteristika dat u Tabela 3.1.

I pored toga što su kotrljajni ležaji doživeli procvat pre više decenija, još uvek se, kao i u mnogim drugim oblastima, može reći da postoje otvorena pitanja, tj. područja interesantna za istraživanja. Potreba za različitim konstrukcijama kotrljajnih ležaja sa razvojem mašinske tehnike dolazi sve više do izražaja, tim pre što se za poslednjih nekoliko godina unutrašnja konstrukcija nije značajno menjala, a zahtevi za povećanjem broja obrtaja, krutosti i veka ležaja su se značajno povećali. To povećanje se posebno odnosi na kuglične ležaje sa kosim dodirnom sa kontaktom u dve i četiri tačke.

Kada se pažljivije posmatra osnovni mehanizam rada kotrljajnog ležaja, može se uočiti da je on zasnovan na značajnoj eksploataciji mehaničkih karakteristika materijala. Gotovo da ne postoji ni jedan mašinski element kod koga se sreću tako teški uslovi eksploatacije. Celokupno opterećenje se prenosi preko nekoliko kotrljajnih elemenata, koji sa prstenovima ostvaruju kontakt u tački ili duž linije. Čak i kod umerenih opterećenja, ovakva koncentracija izaziva ekstremno velike kontaktne sile/napone. Tačka kontakta se neprekidno pomera sa obrtanjem prstenova, tako da je materijal izložen i sa te strane ekstremnim uslovima koji imaju izraziti dinamički karakter opterećenja. Prema autorima *Antoine* i *Kang* [12], [52], [53] pod dejstvom takvih opterećenja, spregnuti delovi se deformišu po *Hertz-ovoj* teoriji

kontakta, pri čemu kontaktna površina ima oblik elipse. Prema *Mitroviću* [71] ako je vrednost radijusa staze kotrljanja približna vrednosti poluprečnika kuglice, povećava se nosivost ležaja usled čega se smanjuje maksimalni broj obrtaja i obrnuto. Takođe, treba konstatovati da je prisutan i fenomen gotovo trenutnog prelaza kotrljajnih elemenata iz neopterećenog u opterećeno stanje, što je praćeno intenzivnim impulsnim opterećenjima. Na kraju se kao problem javljaju značajne vibracije u samom ležaju iz nekoliko potencijalnih izvora: grešaka makro geometrije staza kotrljanja, periodične promene krutosti u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela, različitih svojstva elastičnosti materijala, prstenova i kotrljajnih tela, mikro neravnina usled hrapavosti staza, grubih defekata i sl. Imajući u vidu da ležaji danas rade u uslovima dobrog podmazivanja bez prisustva nečistoća i grubih defekata, prema *Harisu* [32] se kao najvažniji izvori vibracija pojavljuju elementi strukture ležaja (zazor/preklop, prednaprezanje) i greške makro i mikrogeometrije staza kotrljanja (valovitost i hrapavost). Prema *Ghafari-ju* [24] karakteristične vibracije ležaja zavise od brzine obrtanja, zazora, opterećenja, krutosti kotrljajnih elemenata, valovitosti i hrapavosti dodirnih površina. Složenost sklopova kakvi su ležaji, i njihov nesumnjivo veliki uticaj na ponašanje sklopa u koji se ugrađuje kao celine, uticali su da se predmet istraživanja u disertaciji usmeri na analizu statičkog i dinamičkog ponašanja radijalnih kugličnih ležaja i ležaja sa kontaktom u četiri tačke.

Tabela 3.1 Uporedne karakteristike ležaja [100]

Karakteristike	Tipovi ležišta				
	Kotrljajna	Hidrodinamička	Hidrostatička	Aerostatička	Magnetna
Velika brzohodnost	● ¹⁾	●	●	●	●
Vek	●	●	● ²⁾	● ²⁾	● ²⁾
Visoka tačnost	●	●	●	●	●
Veliko prigušenje	○	●	●	●	●
Velika krutost	●	●	●	●	●
Jednostavno podmazivanje	● ³⁾	●	○	●	○ ⁴⁾
Malo trenje	●	○	○	●	●
Niska cena	● ³⁾	●	●	●	○

Napomena: ● - vrlo dobro, ● - dobro, ● - srednje, ○ - nepovoljno

- 1) Zavisno od sistema i tipa ležišta
- 2) Postojanost neograničena u normalnoj eksploataciji
- 3) Srednje pri podmazivanju uljem
- 4) Velike poteškoće pri podešavanju veličine sile magneta

Kuglični ležaji predstavljaju složen sistem za modelovanje sa velikim brojem ulaznih i izlaznih parametara i složenim fizičkim i hemijskim procesima koji se javljaju tokom njihove eksploatacije. Iz tih razloga je praktično nemoguće formirati jedan sveobuhvatni matematički model za analizu ponašanja ležaja. Zbog toga se u praktičnoj primeni pri postavljanju matematičkog modela, pažnja više posvećuje parametrima koji utiču na ponašanje ležaja u eksploataciji [107]. Najvažniji parametri koji utiču na ponašanje ležaja su: raspodela opterećenja na kotrljajnim telima, veličine kontaktnih napona i deformacija, ugao

kontakta, zazor/preklop, nivo vibracija, i sl.[14]. Razmatranje ovih parametara zahteva podelu matematičkog modela na podmodele, u zavisnosti od karaktera fizičkih pojava koje oni opisuju i ponašanja koje se želi sa njima dobiti. Matematički model mora predstavljati vezu između ulaznih parametara koji utiču na ponašanje ležaja i izlaznih veličina koje definišu ponašanje kotrljajnih ležaja. Prema tome, kao ulazne karakteristike uzimaju se osnovne konstrukciono-eksploatacione karakteristike kotrljajnog ležaja. Kao izlazne karakteristike dobijaju se parametri koji definišu i određuju stanje kotrljajnih ležaja. S druge strane, eksperimentalna istraživanja su pokazala da se nijedan dosadašnje razvijen matematički model ležaja ne može generalizovati i primeniti na sve ležaje i njihove uslove rada.

Prethodno navedene činjenice su osnovni razlozi za neprestanu aktuelnost istraživanja u oblasti ponašanja kotrljajnih ležaja. U cilju poboljšanja konstrukcije ležaja veliki broj autora se bavi problematikom statičkog i dinamičkog ponašanja ležaja u eksploataciji. Već u samom projektovanju ležaja veoma je važno sistematski predvideti međusobno povezane uticaje statičkih i dinamičkih karakteristika za različite uslove eksploatacije. Efekti statičkog i dinamičkog ponašanja ležaja moraju sa velikom izvesnošću biti predviđeni još u fazi projektovanja. Da bi se dobila najpovoljnija konstrukcija, definisani statički i dinamički model mora da uzima u obzir veliki broj parametara koji utiču na ponašanje odgovarajućeg ležaja [103].

U nastavku će biti prikazano ponašanje kugličnih ležaja kroz matematičke modele koji su dostupni u literaturi. Kod kotrljajnih ležaja cilj matematičkog modelovanja je da se dobije takav model koji će objasniti karakteristike i ponašanje ležaja u eksploatacionim uslovima. Razvoj velikog broja proračunskih modela, uslovljava postojanje različitih parametara, koji treba da uspostave zavisnost između ulaznih i izlaznih veličina, uz uzimanje u obzir što većeg broja uticajnih faktora i pojava koje se javljaju tokom rada ležaja. Parametri se mogu podeliti u tri osnovne grupe:

Konstrukcioni parametri baziraju se na obezbeđenju normalnog rada ležaja u toku eksploatacije, pa zato ograničavaju vrednosti elastičnih deformacija prstenova. U konstrukcione parametre spadaju: konstrukcija ležaja, geometrija delova, svojstvo materijala, ugao kontakta, krutost i prednaprezanje.

Tehnološki parametri određuju kvalitet ležaja propisan tolerancijama mera, sa stanovništva statičkog i dinamičkog ponašanja ležaja, kao što su: greške geometrije elemenata (aksijalno i radijalno bacanje staza kotrljanja, odstupanje od kružnosti i valovitost staza kotrljanja prstenova, odstupanje od sferičnosti, valovitost i razlika u prečnicima kotrljajnih tela, hrapavost staza kotrljanja i kotrljajnih tela) i greške montaže (zakošenja prstenova ležaja i dr.).

Eksploatacioni parametri, propisuju uslove rada. U ovu grupu parametara spadaju: spoljašnje opterećenje, broj obrtaja, uslovi podmazivanja (svojstva maziva, način dovođenja i odvođenje maziva i dr.), toplotne karakteristike ležaja (količina generisane toplote, odvođenje toplote, spoljašnji uticaji, temperaturna stabilnost delova i dr.) i temperatura okoline.

3.1 Istraživanja statičkog ponašanja kugličnih ležaja

Uopšteno gledano, raspodela opterećenja na kotrljajna tela kod kugličnih ležaja je neravnomerna. Step en neravnomernosti i broj kotrljajnih tela koja u datom trenutku prenose spoljašnja opterećenja, kod kugličnih ležaja zavisi od pravca, smera i intenziteta spoljašnjeg opterećenja i geometrije ležaja, kao i od veličine zazora/preklopa. Kod ležaja sa kosim dodirom u dve i četiri tačke, pored prethodno navedenog, pri prenosu sile sa spoljašnjeg na unutrašnji prsten ili obrnuto, postoji i zakretanje napadne linije sile za veličinu ugla kontakta. Usled toga i pri prenosu čisto radijalne sile u ležaju se stvara i aksijalna sila koja dodatno opterećuje ležaj [32].

Karakteristike kugličnih ležaja sa kontaktom u dve i četiri tačke i radijalnih kugličnih ležaja, u velikoj meri zavise od prednaprezanja. Tokom proteklih decenija mnogi istraživači su sprovedli brojne studije kada je ležaj izložen kombinovanom opterećenju (moment, aksijalno ili radijalnom).

Na bazi *Hertz-ove* teorije kontakta i teorije kontrole staza kotrljanja, *Jones* [49] i *Harris* [30] predložili su klasičan model za analizu kotrljajnog ležaja, koji se i dalje koristi u simulaciji ležaja. *Jones* je predstavio opšti model ležaja kao složen mehanički sistem za određivanje elasto-deformacionih osobina idealnih ležaja bez grešaka makro i mikro geometrije prstenova i kotrljajnih tela. *Harris* je dalje u svojim radovima razvijao ovaj model, uzimajući u obzir centrifugalne sile i giroskopski moment koji deluju na kotrljajno telo. Na osnovu statičke ravnoteže kontaktnih i inercijalnih sila, na svakom kotrljajnom telu ležaja formira se sistem jednačina. Ovaj model razjašnjava mehaniku kotrljajnih ležaja, kao statički nelinearnog elastičnog sistema.

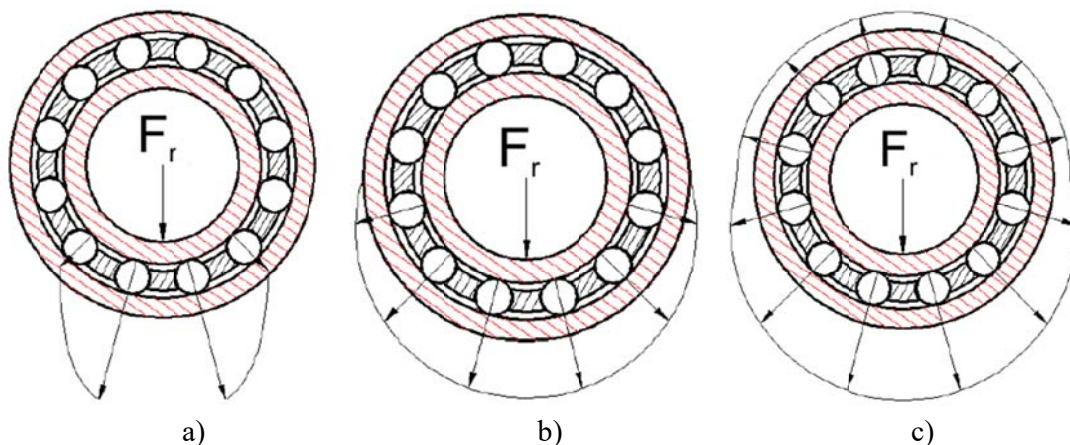
Pri analizama se ugao kontakta često smatra konstantnim, ali u stvarnosti nije tako. *Liao* [61] je predložio novi metod za analizu pomeranja i opterećenja u kugličnom ležaju sa promenljivim uglom kontakta. Umesto konstantne vrednosti, promenljiv ugao kontakta se smatra funkcijom ugaonog položaja kotrljajnog tela u ležaju. Ugao kontakta α i ugao položaja ψ za svako kotrljajno telo može se izraziti algebarskim jednačinama, i može se brzo rešiti *Njutnovom* metodom. Rešenja dobijena ovom metodom su u skladu sa rešenjima do kojih je došao *Harris*.

Wang [87] je razvio novi kvazistatički model za proračun kugličnih ležaja, koji su izloženi kombinovanom dejstvu radijalnih i aksijalnih sila kao i momenta. Posebno je dat naglasak na uticaj centrifugalnih sila i giroskopskog momenta. Kod ovog modela, kotrljajno telo dodiruje obe staze kotrljanja, spoljašnju i unutrašnju, uz istovremeno obrtanje i kotrljanje, što je bliže realnim uslovima. Ovaj model je izostavio teoriju kontrole staza kotrljanja, uvođenjem kontrolne jednačine srednjeg ugla. Model je numerički verifikovan i prikazana je mogućnost predviđanja karakterističnih parametara ležaja, kao što su ugao kontakta, sila u kontaktu i odnos između obrtanja i kotrljanja pod različitim eksploatacionim uslovima. Takođe, pokazano je da efekat centrifugalne sile ima značajan uticaj koji se ne sme zanemariti pri projektovanju i analizi kotrljajnih ležaja, posebno u uslovima velikih brzina.

Pomenuti istraživači su se uglavnom fokusirali na radijalne kuglične ležaje, tako da aksijalno opterećenje nije uzeto u razmatranje. Za kuglične ležaje sa kosim dodirom, u cilju

poboljšanja karakteristika ležaja, inicijalno prednaprezanje je uvek neophodno i javlja se preklop kao posledica kontaktnih deformacija između kotrljajnog tela i staze kotrljanja. Kada su spoljašnja opterećenja velika ili su male vrednosti prednaprezanja dolazi do razdvajanja kotrljajnih tela od staze kotrljanja i tada preklop prelazi u zazor. Fenomen razdvajanja kotrljajnog tela od staze kotrljanja kugličnog ležaja sa kosim dodirom je bio zanemaren u prethodnim istraživanjima.

Radijalni zazor ležaja u velikoj meri utiče na raspodelu opterećenja. Iznos radijalnog zazora je različit kod svakog ležaja i zavisi od vrste i primene ležaja u eksploataciji. Na slici 3.1 prikazana je zona opterećenja ležaja pod radijalnim opterećenjem koje deluje na unutrašnji prsten kotrljajnog ležaja, sa različitim radijalnim zazorima. Sa slike se jasno vidi da radijalni zazor igra važnu ulogu u raspodeli opterećenja kotrljajnih tela. Za određenu vrednost zazora i isto radijano opterećenje, maksimalna sila koja deluje na jedno kotrljajno telo veća je u odnosu na isto kotrljajno telo pri nultom zazoru, a manja je, ako je ležaj sa preklopom. Dalje, broj kotrljajnih tela takođe utiče na maksimalne sile koje deluju na svako pojedinačno kotrljajno telo, jer je različiti broj kotrljajnih tela u kontaktu u zoni opterećenja.

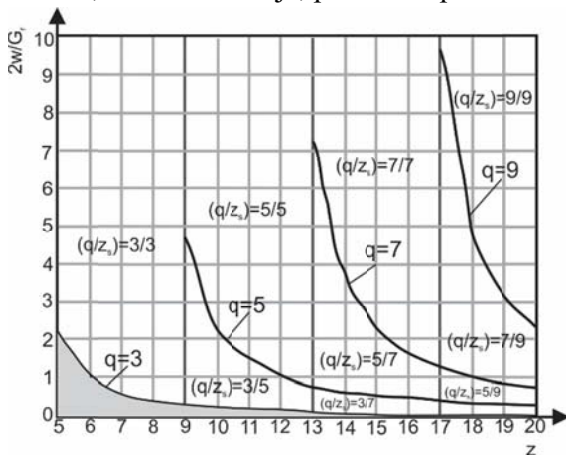


Slika 3.1 Uticaj radijalnog zazora na raspodelu opterećenja na kotrljajnim telima: a) ležaj sa zazorom b) ležaj sa nultim zazorom c) ležaj sa preklopom

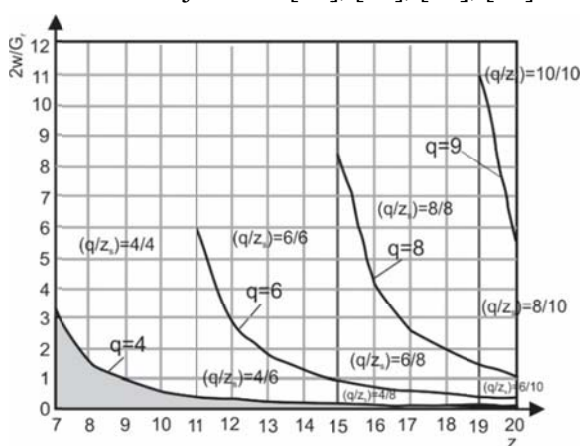
Broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenosu radijalnog opterećenja (q), za paran i neparan broj kotrljajnih tela, prikazan je na slikama 3.2 i 3.3 [57]. Takođe, prikazan je uticaj odnosa relativnog pomeranja prstenova ležaja (w) i polovine radijalnog zazora ($G_r/2$) na njihov broj. Maksimalan broj kotrljajnih tela koji se može naći u zoni opterećenja označen je sa z_s . Aktivan broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenosu spoljašnjeg opterećenja se povećava, sa porastom odnosa relativnog pomeranja prstenova ležaja i polovine radijalnog zazora. Razlog za povećanje je pomeranje unutrašnjeg prstena, koje je posledica povećanja spoljašnjeg opterećenja. Sa slike 3.2 se vidi da se sa povećanjem radijalnog zazora povećava nepravilnost raspodele opterećenja na kotrljajna tela. Opterećenje koje se prenosi samo preko jednog ili dva kotrljajna tela, obeležena su sivom bojom i do toga dolazi u slučaju malog spoljašnjeg opterećenja. Nepovoljniji slučaj raspodele opterećenja je kada se opterećenje prenosi preko neparanog broja kotrljajnih tela. U zavisnosti od kombinacije radijalnog zazora i spoljašnjeg radijalnog opterećenja menjaju se i veličine relativnog pomeranja centra ležaja usled kontaktnih deformacija, pa samim tim menja se i broj kotrljajnih tela koja učestvuju u

prenošenju spoljašnjeg opterećenja, što dovodi do promene raspodele spoljašnjeg opterećenja između kotrljajnih tela i prstenova.

Stribeck [80] je prvi istražio distribuciju opterećenja za radijalno opterećenje kugličnih ležaja sa nultim zazorom, a kasnije je proširio istraživanje na različite zapore kod kugličnih ležaja. Na osnovu *Stribeck*-ovog istraživanja, *Sjovall i dr.* [78] su istražili raspodelu opterećenja na kotrljajnim telima i stanja kontakta kotrljajno telo - staza kotrljanja kugličnog ležaja pod zadatim radijalnim i aksijalnim prednaprežanjem. Ta istraživanja su bazirana na statičkoj analizi i zanemareni su uticaji centrifugalne sile i giroskopskog momenta kotrljajnog tela. Optimalno prednaprežanje kotrljajnog ležaja sa kosim dodirom je posebno važno za krutost, tačnost obrtanja, porast temperature i vek sistema ležaj-vratilo [64], [42], [41], [81].



Slika 3.2 Uticaj odnosa relativnog pomeranja prstenova i polovine radijalnog zazora ($2w/G_r$) na broj aktivnih kotrljajnih tela koja učestvuju u prenosu spoljašnjeg radijalnog opterećenja za slučaj neparnog broja kotrljajnih tela [57]



Slika 3.3 Uticaj odnosa relativnog pomeranja prstenova i polovine radijalnog zazora ($2w/G_r$) na broj aktivnih kotrljajnih tela koja učestvuju u prenosu spoljašnjeg radijalnog opterećenja za slučaj parnog broja kotrljajnih tela [57]

Uz pretpostavku da je ugao kontakta isti za sva kotrljajna tela, *Sjovall* razmatra raspored opterećenja na kotrljajnim telima sa unutrašnjim zazorom. Takođe, pretpostavlja da u zoni opterećenja, postoji beskonačan broj kotrljajnih tela veoma malog prečnika. Na osnovu ovoga je konačne sume u jednačini za raspored opterećenja zamenio integralom $J_r(\varepsilon)$ (tzv. *Sjovall*-ov integral) [32], [30], gde je Q_{max} - maksimalno opterećenje na kotrljajnom telu, F_r - spoljašnje radijalno opterećenje, Z - broj kotrljajnih tela:

$$Q_{max} = \frac{F_r}{Z J_r(\varepsilon)} \quad (3.1)$$

Harris je na osnovu koncepta *Sjovall*-ovog integral [32] razvio dvodimenzionalni elasto-deformacioni model kotrljajnih ležaja. Problem definisanja kontaktne zone opterećenja rešava pomoću faktora rasporeda opterećenja (ε).

$$\frac{F_r}{Z K_n J_r(\varepsilon)} = \left(\delta_r - \frac{1}{2} G_r \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.2)$$

Za dati ležaj sa zazorom, pod delovanjem spoljašnjeg radijalnog opterećenja, raspored opterećenja se rešava iterativnim postupkom. U jednačini (3.2) K_n je *Hertz*-ova kontaktna

krutost, G_r je radijalni zazor. Vrednost δ_r se prvo pretpostavi, a ε se proračunava, iz čega sledi sledi $J_r(\varepsilon)$. Ukoliko obe strane jednačine nisu jednake, postupak se ponavlja.

Hagiu [28] je razvio teorijske i eksperimentalne metode kako bi se odredile vrednosti prednaprezanja koje osiguravaju veći vek kugličnih ležaja sa kosim dodirom za uležištenja glavnih vretena mašina alatki. Optimalne vrednosti prednaprezanja određene su na osnovu teorijskih i eksperimentalnih rezultata. Cilj ovog rada bio je određivanje optimalnog prednaprezanja ležaja u kontrolisanim eksploatacionim uslovima.

Xu [94] je predložio analitički metod koji precizno određuje optimalno prednaprezanje za različite raspone brojeva obrtaja. Koristio je matematičke modele kugličnih ležaja za proračun odgovarajućeg prednaprezanja. Prema Hiranovom kriterijumu, kritično prednaprezanje između klizanja i kotrljanja kugličnih ležaja je izračunato kao optimalno prednaprezanje. Eksperimentalni rezultati su potvrdili da predloženo optimalno prednaprezanje kugličnih ležaja daje zadovoljavajuće toplotne karakteristike.

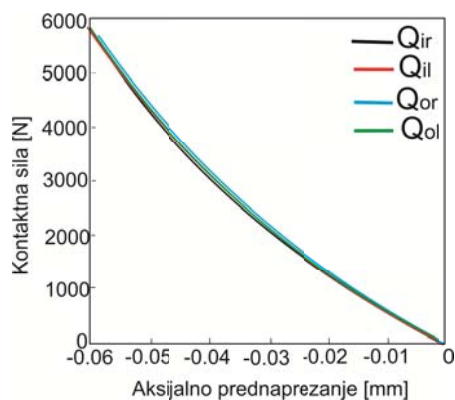
Sumiranjem pomenutih istraživanja vek kotrljanog ležaja je od velike važnosti za određivanje optimalnog prednaprezanja. Prema teoriji veka ležaja predložene od *Lundberg-a* i *Palmgren-a* [67] veličina i raspodela opterećenja igra značajnu ulogu. Prednaprezanje može izmeniti distribuciju i veličinu opterećenja ležaja koji su određeni na osnovu spoljašnjeg opterećenja i broja obrtaja. U cilju obezbeđenja dužeg veka kotrljajnog ležaja, neophodno je analizirati odnos prednaprezanja i zamor ležaja pod eksploatacionim uslovima, naročito za visokobrzinske kuglične ležaje gde se distribucija opterećenja i kontakti drastično menjaju zbog uticaja inercijalnih sila.

Zhang i dr. [101] analizom stanja kontakta kotrljajno telo-staza kotrljanja, predlažu kvazidinamički model da bi proučili distribuciju opterećenja kugličnog ležaja pod proizvoljnim prednaprežanjem. Zatim su novi model iskoristili za proučavanje uticaja spoljašnjeg opterećenja, broja obrtaja i prednaprezanja na stanje kontakta kotrljajno telo - staza kotrljanja. Na bazi dobijenih rezultata dalje su proračunali vek kugličnog ležaja pod eksploatacionim uslovima. Rezultati pokazuju da odgovarajuće prednaprezanje poboljšava raspodelu opterećenja i produžava vek kugličnog ležaja.

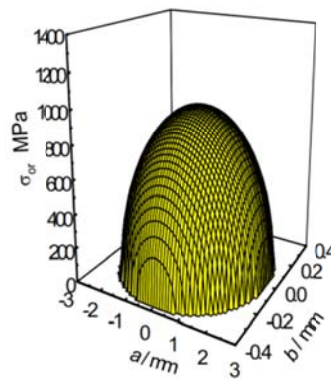
Hui-Yuan i dr. [40] su na osnovu *Hertz-ove* teorije kontakta predstavili model za analizu kontaktnih napona sa velikim prednaprežanjem kod kugličnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke. Ovi ležaji se široko koriste u dizalicama, vetrenjačama, radarima i teškim mašinama kao što su bageri. Ležaj koji su proučavali se koristi u specijalnim eksploatacionim uslovima, pa je potreban određeni početni obrtni moment. Prema tome, mora se koristiti ležaj sa preklopom. Drugim rečima, naleganje sa preklopom se zahteva između kotrljajnog tela i spoljašnje i unutrašnje staze. U tom slučaju na mestu kontakta kotrljajnog tela i staza kotrljanja pojaviće se kontaktni napon, koji ima značajan uticaj na moment trenja ležaja, zamor i habanje, što u velikoj meri određuje vek ležaja. Proračun kontaktnog napona je osnova u analizi kotrljajnog ležaja. U ovom radu su prikazani kontaktni napon, oblik i veličina kontaktnih površina za ležaj 3-465K obrtnog stola. Ovi podaci daju teorijsku osnovu i važni su za konstrukciju ležaja. Rezultati su pokazali da opterećenje na ležaju sa kontaktom u četiri tačke raste sa apsolutnom vrednošću prednaprezanja. Mala promena prednaprezanja ima veliki uticaj na kontaktna opterećenja.

Do istog zaključka došli su *Wang, Wu i Zhu* [88] pri analizi ležaja koji se koristi za vetrenjače. Vrednosti nominalnih kontaktnih opterećenja između kotrljajnog tela i unutrašnjeg/spoljašnjeg prstena ležaja proračunate su pri različitom aksijalnom prednaprezanju, bez primenjenih spoljašnjih opterećenja. Rezultati pokazuju da se opterećenja u četiri tačke kontakta povećavaju sa povećanjem apsolutne vrednosti prednaprezanja. Blaga promena aksijalnog prednaprezanja čini veliku promenu kontaktnih sila (Q), što se može videti sa slike 3.4. Rezultati istraživanja ovog rada pružaju teorijsku osnovu i daju važne podatke za projektovanje ležaja, kao i smernice za dalja teorijska istraživanja prednaprezanja ležaja sa kontaktom u četiri tačke.

Distribucija opterećenja pomoću kvazistatičke analize aksijalnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke je prikazao *Wang* [89]. Na bazi *Hertz-ove* teorije kontakta mogu se odrediti kontaktni naponi u bilo kojoj tački. Rezultati pokazuju da kotrljajno telo dolazi u kontakt sa unutrašnjom/spoljašnjom stazom kotrljanja u četiri tačke čije su kontaktne površine i raspodela kontaktnih napona približno iste. Kada je opseg prednaprezanja 0 do 0,06 mm, površina kontakta poraste više od 20 puta. Za isti opseg prednaprezanja, kontaktni naponi rastu sa 274,1 MPa na 982,7 MPa, što je porast približno 4 puta. Na slici 3.5 prikazana je raspodela kontaktnih napona između kuglice i leve-unutrašnje staze kotrljanja pri prednaprezanju od -0,03 mm, pri čemu je maksimalni kontaktni napon 975,5 MPa. Rezultati pokazuju da se kontaktni naponi i kontaktna površina povećavaju sa povećanjem apsolutne vrednosti prednaprezanja. Mala promena prednaprezanja ima veliki uticaj na površinu kontakta, pa se samim tim povećava i moment trenja.



Slika 3.4 Promene kontaktne sile u zavisnosti od prednaprezanja [88]

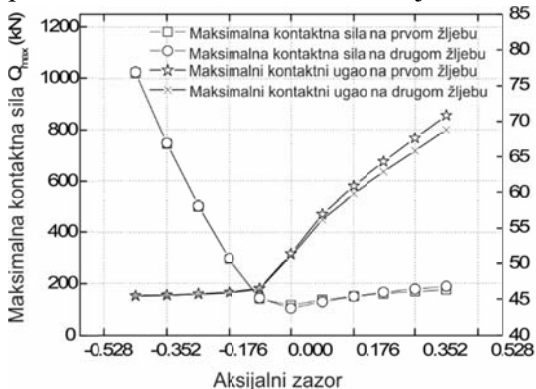


Slika 3.5 Raspodela napona u kontaktu između kuglice i leve-unutrašnje staze kotrljanja pri prednaprezanju od -0,03 mm [89]

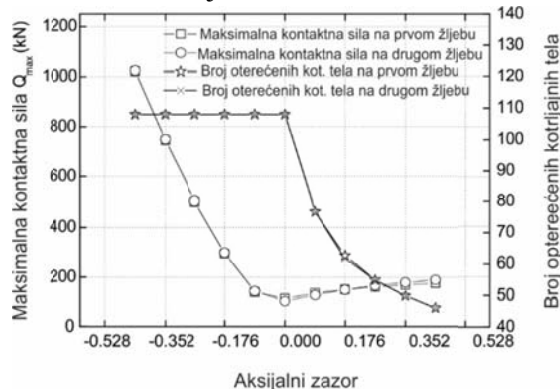
Kao što je već na početku rečeno, u ležaju uvek mora postojati zazor, ali zazor kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke dovodi do toga da postoji kontakt u samo dve tačke. Zbog toga je neophodno prednaprezanje. Prednaprezanje značajno povećava kontaktne sile između kotrljajnih tela i staza kotrljanja. Dosadašnji modeli za proračun opterećenja između staza kotrljanja i kotrljajnih tela, kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke, uzimaju staze kotrljanja kao krute i pretpostavljaju da do elastičnih deformacija dolazi samo na kotrljajnim telima. *Chen* [21] je eksperimentalnim putem pokazao da prednaprezanje značajno povećava kontaktne sile između kotrljajnih tela i staza kotrljanja i da ove sile prave elastične

deformacije na prstenovima ležaja. Matematički model koji je *Chen* uspostavio uzima u obzir elastične deformacije prstena, bez spoljašnjeg opterećenja i on predstavlja osnovu za izračunavanje raspodele opterećenja, nosivosti i veka ležaja. Na osnovu standarda koji se primenjuje u Kini JB/10471-2004, dozvoljeni minimalni i maksimalni aksijalni zazor ležaja je 0,2 - 0,44 mm. Budući da se negativni zazor koristi kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke, u radu [17] je analizirana raspodela opterećenja u dvoredom ležaju sa aksijalnim zazorom - 0,44 do +0,44 mm. Na slici 3.6 prikazan je uticaj aksijalnog zazora na maksimalnu kontaktnu silu i ugao kontakta. Maksimalne kontaktne sile na prvom i drugom žlebu rastu sa povećanjem negativnog aksijalnog zazora. Kada je aksijalni zazor blizu nule, maksimalna kontaktna sila u ležaju je najmanja. Maksimalne kontaktne sile rastu (za vrednost 73,61 kN) sa porastom pozitivnog aksijalnog zazora zbog smanjenja broja opterećenih kotrljajnih tela (slika 3.7). Takođe, maksimalni kontaktni uglovi rastu (za vrednost 24,36°) sa porastom pozitivnog aksijalnog zazora (od 0 do 0,44 mm). Dakle, aksijalni zazor blizu nule je najbolji. Što je manji aksijalni zazor, stvaraju se manje kontaktne sile.

Aguirrebeitia i dr. [5] su razmotrili uticaj prednaprezanja kotrljajnog tela. Prilagodili su teorijski model i model konačnih elemenata (MKE), da bi razmotrili uticaj prednaprezanja na statičku nosivost i ukupnu krutost ležaja sa kontaktom u četiri tačke. Analitički model pretpostavlja krute prstenove i to ukazuje da je manja tačnost rezultata u odnosu na one dobijene metodom konačnih elemenata. Ipak, pomeranja prstenova dobijena analitičkim modelom znatno su manja od pomeranja dobijenih metodom konačnih elemenata. Ovo ima smisla jer je u teorijskom modelu pomeranje prouzrokovano samo deformacijom opruga koje simuliraju kotrljajna tela (prstenovi su kruti). U modelu konačnih elemenata, deformacije prstenova izazivaju dodatna pomeranja. Bez obzira na to, mora se naglasiti da se analitičkim modelom dobro procenjuje uticaj prednaprezanja, nosivost i krutost. Slika 3.8 prikazuje krivu aksijalnog pomeranja pod aksijalnim opterećenjem za prednaprezanje $p = 0,0$; $p = 0,1$ i $p = 0,2$. Iako je tendencija ista i za teorijski i za MKE model, može se primetiti da je veličina pomeranja mnogo veća u rezultatima dobijenim metodom konačnih elemenata. Na slici 3.8a prikazani su rezultati za male ležaje, a na slici 3.8b za velike ležaje.



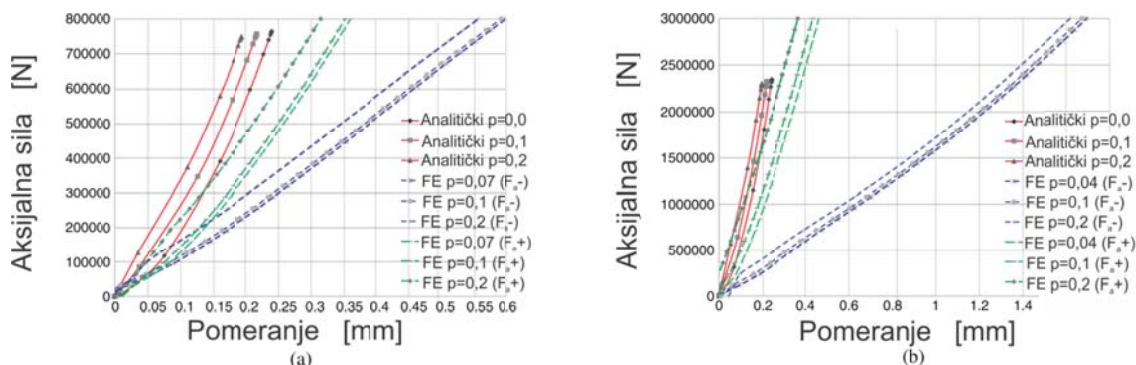
Slika 3.6 Uticaj aksijalnog zazora na maksimalnu kontaktnu silu i maksimalni ugao kontakta [17]



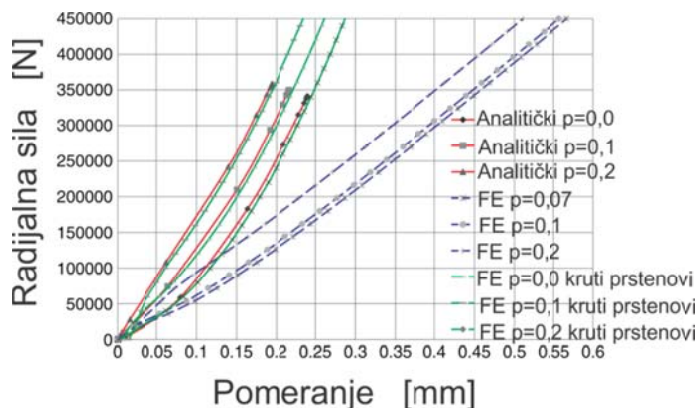
Slika 3.7 Uticaj aksijalnog zazora na maksimalnu kontaktnu silu i broj opterećenih kotrljajnih tela [17]

Slično, slika 3.9 prikazuje krivu radijalnog pomeranja pod radijalnim opterećenjem za prednaprezanje $p = 0,0$; $p = 0,1$ i $p = 0,2$. MKE analiza je urađena za elastične prstenove i

rezultati pokazuju da je veličina pomeranja mnogo veća u rezultatima dobijenim metodom konačnih elemenata. Međutim, kada su kod MKE uzeti kruti prstenovi, dobijeni rezultati se poklapaju sa rezultatima dobijenim teorijski. Ovo ukazuje da dolazi do greške u proračunu, kada se prstenovi smatraju krutim.

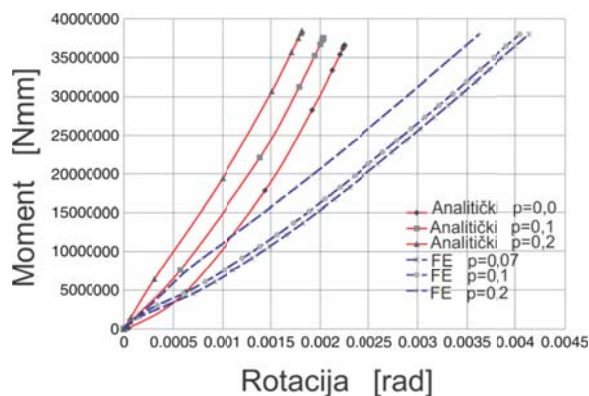


Slika 3.8 Dijagram aksijalnog pomeranja za različite aksijalne sile za teorijski model i model konačnih elemenata: a) za male ležaje, b) za velike ležaje [5]



Slika 3.9 Dijagram radijalnog pomeranja za različite radijalne sile za teorijski model i model konačnih elemenata za male ležaje [5]

Slika 3.10 prikazuje krivu ugaonog pomeranja pod uticajem momenta za vrednost prednaprezanja $p = 0,0$; $p = 0,1$ i $p = 0,2$. Analiza MKE je urađena za elastične prstenove i rezultati pokazuju da je veličina pomeranja mnogo veća u rezultatima dobijenim ovom metodom.



Slika 3.10 Dijagram ugaonog pomeranja za različite momente za teorijski model i model konačnih elemenata za male ležaje [5]

Moment trenja je jedan od ključnih parametara kod projektovanja ležajnog venca (*slewing bearings*). Ova vrsta specijalnih ležaja koristi se u mašinama poput dizalica ili vetrenjača, gde su uključena velika opterećenja, kao i u primeni gde je potrebna velika preciznost, poput robota, gde se zahteva manje opterećenje. Moment trenja u praznom hodu je moment koji je potreban za okretanje ležaja bez spoljašnjeg opterećenja i lako je merljiv u praznom hodu.

Prvi korak za izračunavanje momenta trenja sastoji se u određivanju raspodele opterećenja između kotrljajnih tela. Ovaj problem su analitički rešili *Zupan i Prebil* [106] kao i *Amasorrain* [10]. Oni su u svojim modelima pretpostavili da su prstenovi kruti. Slično, ali sa drugačijim fokusom, *Abasolo, Aguirrebeitia i dr.* [2], [4] predložili su proračun za kombinovano opterećenje, uzimajući u obzir prednaprezanje kotrljajnog tela i promenu ugla kontakta kotrljajnog tela sa spoljašnjim opterećenjem. Da bi se izračunao moment trenja, kada su poznata normalna opterećenja na kotrljajnim telima, potrebne su tangencijalne sile. U tom cilju, *Leblanc i dr.* [60] su razvili analitički model koji je rešio kinematiku kuglice, što su kasnije *Joshi i dr.* [50] iskoristili za definisanje momenta trenja. Ovaj model, koji se zasniva na *Jonesovim* jednačinama [49], pretpostavlja čisto klizanje u kontaktu kotrljajno telo - staza kotrljanja, tako da se uticaj proklizavanja u kontaktu ne uzima u obzir. Nedavno su *Aguirrebeitia i dr.* [3] razvili model konačnih elemenata (MKE) za proračun momenta trenja, pri čemu se efekat proklizavanja uzima u obzir.

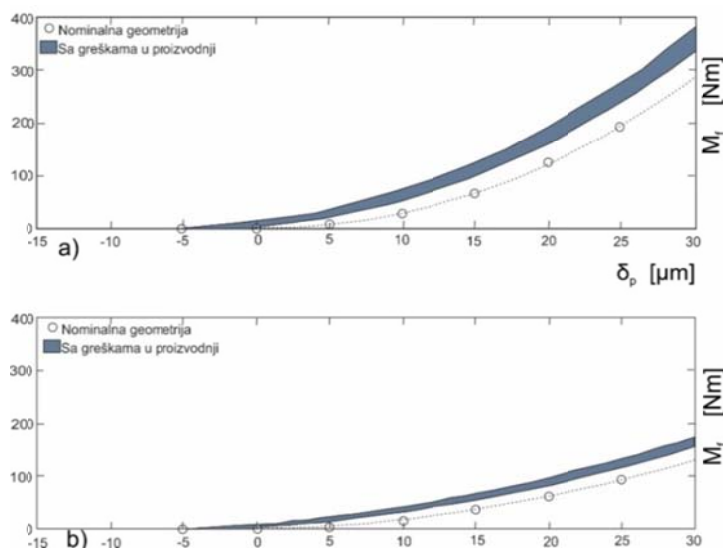
Ležaji su obično prednapregnuti ubacivanjem kotrljajnih tela većih dimenzija. Svrha prednaprezanja je poboljšanje ponašanja ležaja, smanjenje pojave vibracija i povećavanje njegove krutosti [51]. Međutim, prednaprezanje uključuje i povećanje momenta trenja, tako da se mora doći do rešenja koje će zadovoljiti i jedan i drugi uslov. Greške u proizvodnji su takođe faktor koji treba uzeti u obzir. Ovo su proučavali *Aithal i dr.* [6], koji su utvrdili da proizvodne tolerancije utiču na raspodelu opterećenja između kotrljajnih tela kod ove vrste ležaja.

Heras i dr. [37] pokazali su uticaj grešaka koje nastaju u proizvodnji na ležaje sa kontaktom u četiri tačke. Razmatrali su uticaj sa dva aspekta, relativni ugaoni položaj između prstenova, a sa druge strane toleranciju izrade kotrljajnih tela, što je u njihovom slučaju podrazumevalo odstupanje do 2 [μm] u prečniku kotrljajnog tela iz iste klase. Postupak se može primeniti na pojedinačne slučajeve gde je upotrebljena analiza konačnim elementima za proračun momenta trenja, uzimajući u obzir različita prednaprezanja. U analizi se koriste i kruti i deformabilni prstenovi kako bi se utvrdio uticaj krutosti prstenova, na momenat trenja u praznom hodu ležaja. Dobijeni rezultati se koriste pri proračunu konačnim elementima, gde je dokazano da i greške u proizvodnji i deformabilnost prstenova imaju značajan uticaj na moment trenja. Dakle, ako se ovi parametri ne uzmu u obzir dolazi se do rezultata koji nisu relevantni. Takođe, pokazali su da broj kotrljajnih tela ima značajan uticaj na moment trenja. Autori su izvršili analizu MKE, gde su uzeli u obzir deformabilne prstenove, varirali su broj kuglica i prednaprezanje, a zanemarili greške koje nastaju u proizvodnji. Predložili su jednačinu koju su potvrdili metodom konačnih elemenata, gde je moment trenja definisan u funkciji broja kotrljajnih tela i prednaprezanja:

$$M_f = C\delta_p^n \cdot \ln\left(\frac{N}{N_r} + 1\right) \quad (3.3)$$

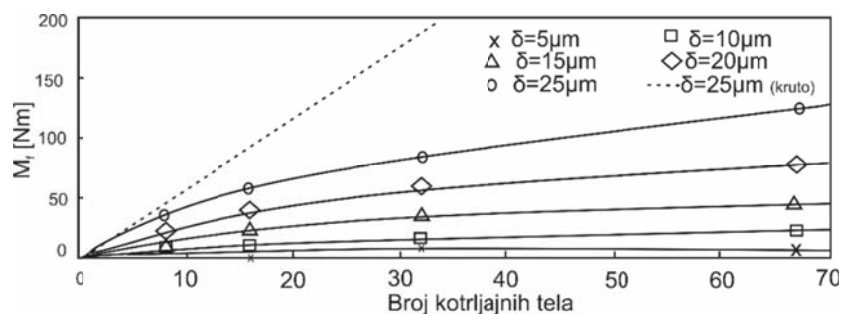
gde su: M_f - moment trenja, N - broj kotrljajnih tela, n, C, N_r - koeficijenti koji se određuju za svaki ležaj i δ_p - predopterećenje.

Na slici 3.11 prikazana je analiza metodom konačnih elemenata primenjena na ležaje sa kontaktom u četiri tačke, gde se posmatra uticaja predopterećenja u rasponu od $-5 [\mu\text{m}]$ do $+25 [\mu\text{m}]$, na moment trenja. Takođe je uzet u obzir uticaj grešaka kotrljajnog tela koje nastaju u proizvodnji i na slici su ovi podaci prikazani punom linijom. Rezultati koji su dobijeni bez uticaja grešaka koje nastaju u proizvodnji, prikazani su isprekidanom linijom. Može se primetiti da je uticaj ovih grešaka na momenat trenja veliki. Drugi parametar koji je posmatran je uticaj deformacije prstenova. Na slici 3.11a, su prikazani rezultati za kruta tela, a na slici 3.11b, za deformabilna tela.



Slika 3.11 Moment trenja u zavisnosti od predopterećenja kotrljajnih tela pod uticajem (puna linija) i bez uticaja (isprekidana linija) grešaka u proizvodnji za: a) krute prstenove; b) deformabilne prstenove [37]

Punim linijama na slici 3.12 prikazani su rezultati proračuna MKE, za deformabilne prstenove, gde se vidi da moment trenja raste po logaritamskom rasporedu sa povećanjem broja kotrljajnih tela. Rezultati za krute prstenove prikazani su za jedan slučaj prednaprezanja $25 \mu\text{m}$, isprekidanom linijom, pokazujući da moment trenja linearno raste sa porastom broja kotrljajnih tela.



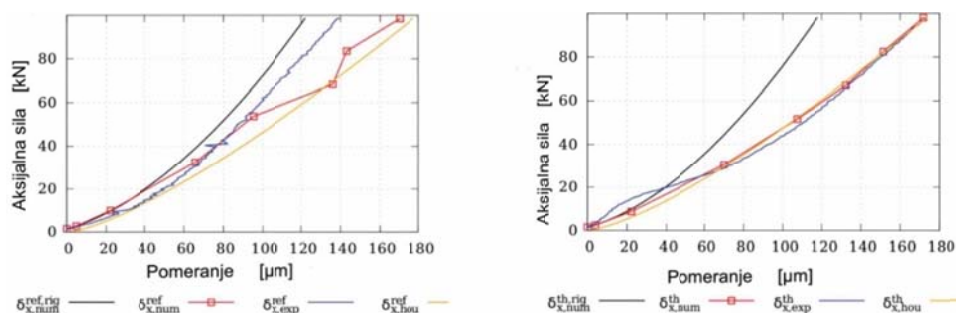
Slika 3.12 Uticaj broja kotrljajnih tela na moment trenja [37]

Obično se pretpostavlja da su prstenovi kod kugličnih ležaja beskonačno kruti s obzirom na njihovu širinu i dimenzije, osim lokalno, gde dolazi do elastičnih deformacija u tački kontakta između kotrljajnog tela i prstena.

Kod kugličnih ležaja deformacije prstenova i sklopa kućišta mogu uticati na geometriju staze kotrljanja i na položaj kotrljajnog tela i unutrašnju raspodelu opterećenja (dakle mogu uticati na celu unutrašnju kinematiku). Shodno tome, sile kod kugličnih ležaja, pomeranja i krutost mogu se značajno razlikovati kod krutih i fleksibilnih prstenova. Stone [79] je 1982. predstavio prvi uređaj za merenje krutosti. Ovaj eksperimentalni rad inspirisao je druge istraživače poput *Marsha* i *Ianteka* [69], koji su istraživali krutost preciznih ležaja, kao i *Gunduz-a* i dr. [25], [26], koji su se fokusirali na uticaj predopterećenja na krutost kugličnih ležaja sa kosim dodirom. *Lacroix* i dr. predložili su model koji uzima u obzir fleksibilnost prstena i lokalnu promenu usaglašenosti [58] spajanjem poluanalitičkog modela ležaja koji su razvili *Leblanc* i *Nelias* [59, 60] i modela konačnih elemenata (MKE) kako bi se objasnila fleksibilnost sklopa ležaja i kućišta. MKE model omogućava analizu složene geometrije kućišta, vratila i graničnih uslova. Linearna analiza omogućava predviđanje deformacije prstenova i kućišta. Obradom deformisane geometrije može se utvrditi modifikovana usaglašenost kao i položaj centra zakrivljenosti za svaku kontaktnu tačku. Ovi geometrijski parametri se zatim uvode u analitički model kako bi se izračunala nova kinematika i unutrašnja raspodela opterećenja, kao novi ulazni podaci za analizu MKE i tako dalje do konvergencije.

Lacroix i dr. [57] su eksperimentalnim putem analizirali ponašanje dva različita kuglična ležaja sa kontaktom u četiri tačke, postavljena na elastično vratilo i u elastično kućište; prvi ležaj je standardni ležaj koji se koristi kao referentni, sa relativno debelim prstenovima, a spoljašnja geometrija drugog ležaja je izmenjena tako da su prstenovi tanji i uži. Dobijene rezultate su uporedili sa rezultatima koji su dobijeni pomoću razvijenog numeričkog modela, pod pretpostavkom da su prstenovi i kućište kruti ili elastični. Eksperimentalni rezultati pokazuju da su prstenovi ležaja, kao i vratilo i kućište elastični, što naknadno umanjuje ukupnu krutost sklopa ležaja, ovi zaključci se odnose na oba ispitana ležaja. Drugim rečima, prstenove standardnog kugličnog ležaja ne bi trebalo smatrati krutim, kako se obično pretpostavlja. Kod referentnog ležaja greška je do 10%. Za modifikovani kuglični ležaj sa tanjim prstenovima, primećen je pad aksijalne krutosti, do 40% u poređenju sa teorijskim predviđanjem, gde su pretpostavljeni kruti prstenovi. Merenja su potvrdila da numerička analiza omogućava predviđanje kako se opterećenje prenosi kroz kontakt kotrljajno telo - prsten i kako se lokalno deformiše spoljašnja površina prstena. Naravno, numerički model pruža mnogo veći uvid u ponašanje kugličnih ležaja (unutrašnja kinematika i raspodela opterećenja, gubici snage itd).

Slika 3.13 prikazuje rezultate dobijene numeričkim i eksperimentalnim putem, gde se pretpostavlja da su prstenovi kruti, osim u tačkama kontakta. Na slici 3.13a, prikazani su rezultati za referentni ležaj, a na slici 3.13b za modifikovani ležaj sa tanjim prstenovima. Oznake korištene na dijagramu su sledeće: *ref* - referentni, *rig* - kruti, *num* - numerički, *exp* - eksperimentalno, *th* - tanki, *hou* - ukupno.



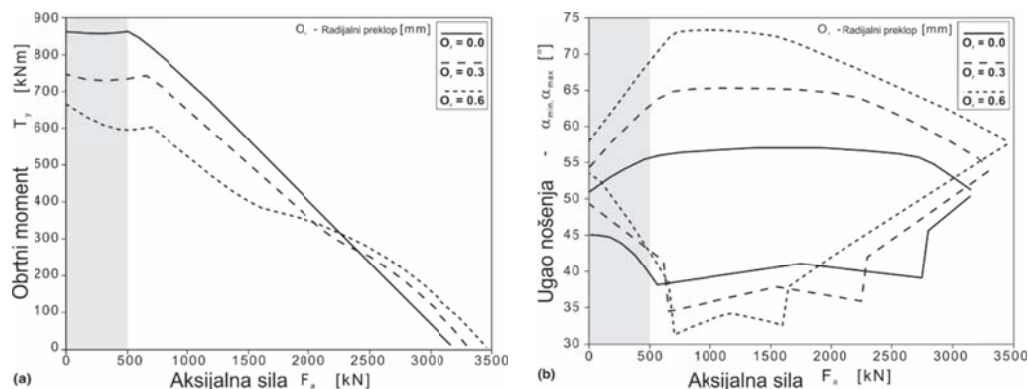
Slika 3.13 Aksijalno kretanje unutrašnjeg prstena u odnosu na spoljašnji prsten:
a) referentni prsten, b) tanki prsten [57]

Olave i dr. [73] opisali su dva različita načina koja prikazuju raspodelu opterećenja kod jednorednog kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke. Prvi način se zasniva na metodi konačnih elemenata, a drugi je postupak dobijanja raspodele opterećenja u ležaju uzimajući u obzir efekat elastičnosti konstrukcije. Rezultati dobijeni upotrebom krutog modela se razlikuju u odnosu na one koji se dobiju kod neravnomerne krutosti prstenova i noseće konstrukcije. Zato je neophodno proceniti uticaj elastičnosti na povećanje kontaktnih sila kako bi se mogao projektovati ležaj sa odgovarajućom unutrašnjom geometrijom staza kotrljanja. Vrednost sile najopterećenijeg kotrljajnog elementa se razlikuje u zavisnosti od oblika unutrašnje konstrukcije ležaja. Predstavljeni elastični model u ovom radu je nelinearan, pa da bi se došlo do zadovoljavajućeg rešenja potreban je iterativni postupak. Razvijeni model pokazuje veoma dobre rezultate.

Dvoredni kuglični ležaj sa dodirom u četiri tačke je tip ležaja koji se koristi za kombinovano opterećenje (sile i momenti). Za validno projektovanje i primenu ležaja, neophodno je da se nađe uticaj geometrijskih parametara na nosivost dvoredog kugličnog ležaja sa dodirom u četiri tačke. Nosivost se određuje parametrima geometrije i materijala. Geometrijski parametri koji određuju nosivost dvoredog kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke je teško definisati zbog nedostatka odgovarajućih teorija. *Chenu i dr.* [17] su razvili mehanički model koji razmatra uticaj rastojanja između staza kotrljanja koja se razlikuje od modela za jednoredni kuglični ležaj. U Matlab-u je razvijen model koji pokazuje uticaj geometrijskih parametara na nosivost ležaja. Prikazali su neke od sledećih karakteristika: rastojanje između staza kotrljanja treba da bude minimalno. Što je manji aksijalni zazor, manja je i sila koja se stvara u kontaktu. Da bi se izbegla veća sila, preklap bi trebao da bude blizu nule. Maksimalna sila kontakta opada sa povećanjem nominalnog ugla kontakta. Preporučeni nominalni ugao je u rasponu od 25°- 45°. Kao i kod drugih vrsta kugličnih ležaja i kod dvorednog kugličnog ležaja najkritičniji parametri za projektovanje koji utiču na statičku nosivost su koeficijent zakrivljenosti staze kotrljanja i zazor.

Zupan i Prebil [106] razvili su računarski model za proračun ugla nošenja i nosivost za jednoredni kuglični ležaj kao funkcija geometrijskih parametara kontakta kotrljanja i krutosti noseće konstrukcije. Njihovi rezultati potvrđuju raspored kontaktnog opterećenja za kruto oslonjenu strukturu na bazi kosinusne teoreme. Na slici 3.14, prikazana je analiza ležaja sa kontaktom u četiri tačke, koji se koristi u pokretnim kranovima. Nominalni ugao kontakta je 45°. Sa porastom zazora dolazi do opadanja obrtnog momenta. Siva zona na slikama predstavlja oblast mogućih opterećenja u realnim uslovima u kojima se može naći pokretni kran. Slika 3.14b prikazuje promenu minimalnog i maksimalnog ugla nošenja, na jednom

kotrljajnom telu u ležaju. Odstupanje od nominalnog ugla nošenja i razlika između minimalnog i maksimalnog ugla nošenja, proporcionalno raste sa radijalnim zazorom.



Slika 3.14 a) Mogućnost nošenja kotrljajnog ležaja koji se upotrebljava u mobilnom kranu za različito radijalno prednaprezanje b) max i min ugao nošenja za različito radijalno prednaprezanje [106]

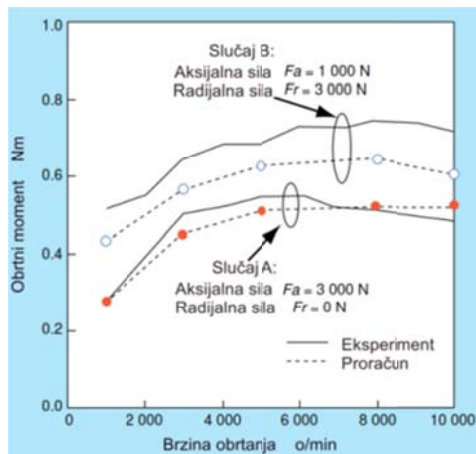
Na osnovu klasične teorije ležaja koju je razvio *Jones, Halpin i Tran* [29], razvijen je analitički model koji obuhvata kompleksnu kinematiku ležaja sa kontaktom u četiri tačke; čime se potpuno obezbeđuju odnosi između kotrljajnih elemenata i unutrašnje raspodele opterećenja ležaja u eksploatacionim uslovima. Model uključuje geometriju unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja, zajedno sa pripadajućim radiusima zakrivljenosti i na taj način je moguće obuhvatiti širok spektar eksploatacionih uslova. Rezultati su verifikovani i upoređeni sa drugim referencama. Pokazano je da zanemarivanje uticaja giroskopskog momenta, nema veliki uticaj pri malim i srednjim brojevima obrtaja ležaja. Teorija kontrole staza kotrljanja se zamenjuje teorijom minimalnog energetskog stanja kako bi se omogućila istovremena rotacija i klizanje koje se javlja u kontaktu kotrljajnog tela sa stazom kotrljanja.

Do sada je već rečeno da raspodela opterećenja u kotrljajnim elementima pruža veoma korisne informacije za proračun ležaja. S jedne strane, to govori koje je maksimalno opterećenje i ukazuje koji kotrljajni element ima najveće opterećenje. Takođe, pruža informacije za određivanje ekvivalentnog opterećenja za proračun dinamičke nosivosti ležaja za pojedinačna opterećenja svakog kotrljajnog elementa. *Amasorian i dr.* [10] razmatrali su postupak proračuna koji je bio nastavak opšte teorije ležaja sa dodirnom u četiri tačke, za određivanje rasporedele opterećenja na kotrljajnim elementima u ležaju sa jednim redom kotrljajnih tela pod opštim uslovima opterećenja (moment, aksijalna i radijalna sila). Ovaj postupak je implementiran u program za raspodelu opterećenja i omogućava da se kotrljajni element sa najvećim opterećenjem posmatra grafički, pored vrednosti opterećenja. Program, takođe, pruža i druge podatke, kao što su kontaktna površina svakog kontakta, aksijalno i radijalno pomeranje, ugao rotacije, itd. Vrednosti koje se dobiju za različita stanja opterećenja upoređene su sa drugim vrednostima koje se koriste u analizi ležaja i dobijeni su prihvatljivi rezultati.

U okviru rada, koji je predstavio *Leblanc* [60] izvršena je analiza kugličnog ležaja u okviru koje se razmatra uticaj centrifugalne sile i giroskopskog efekta. On je proširio konvencionalnu teoriju o ležajima, na ležaje sa kontaktom u tri i četiri tačke. U radu je predstavljen matematički model koji opisuje složenu unutrašnju kinematiku kugličnih ležaja pri uslovima koji se javljaju u toku eksploatacije. Takođe, kod ovog kvazistatičkog modela

uzeta je u obzir debljina maziva u nelinearnim jednačinama koje su rešene *Newton-Raphsonovom* metodom. U radu je predloženo proširenje jednačina kako bi se opisala ravnoteža kotrljajnog tela koja ima četiri tačke kontakta sa pet stepeni slobode na unutrašnjem prstenu. U svrhu pojednostavljenja, postupak opisan u ovom radu pretpostavlja da su staze kotrljanja krute, dok su deformacije u kontaktu između kotrljajnih elemenata uzete kao elastične (*Hertz-ov* kontakt).

Aramaki [13] je razvio programski paket pod nazivom „Brain”, koji simulira kinematiku i karakteristike kotrljajnih ležaja za različite uslove eksploatacije. Brain sadrži šest programa, gde je jedan od njih program za analizu kugličnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke. Sproveden je eksperiment u okviru kog je korišten kuglični ležaj sa dodirom u četiri tačke, da bi se uporedili eksperimentalni rezultati sa rezultatima koji su dobijeni proračunom. Urađena su dva eksperimenta, za slučaj A je korišteno čisto aksijalno opterećenje, dok je za slučaj B korišteno kombinovano aksijalno i radijalno opterećenje. Rezultati pokazuju da se u slučaju A ležaj ponaša kao kuglični ležaj sa kosim dodirom. Poređenja rezultata eksperimenta i proračuna u slučaju A i B prikazani su na slici 3.15. Pune linije na slici prikazuju eksperimentalne rezultate, a isprekidane rezultate proračuna. Ispod 3000 [o/min] obrtni moment brzo raste, međutim, nagib krive koja pokazuje obrtni moment je manji kako se povećava broj obrtaja. Čini se da smanjenje viskoznosti ulja usled porasta temperature igra važnu ulogu u ovoj pojavi. Razlika između eksperimenta i proračuna je ispod 10% za slučaj A. Obrtni momenat pri eksperimentu, pod kombinovanim radijalnim/aksijalnim opterećenjem (slučaj B) je oko 30% veći nego pri čistom aksijalnom opterećenju (slučaj A). U slučaju B je maksimalna razlika između eksperimenta i proračuna oko 16%.

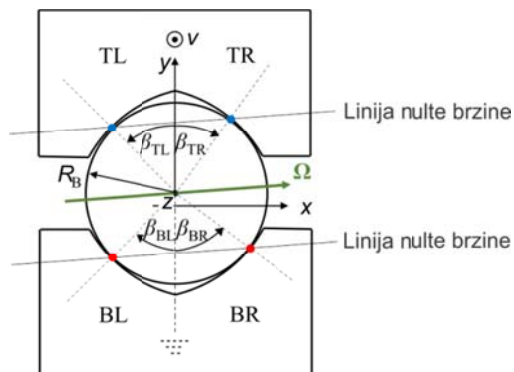


Slika 3.15 Obrtni moment za kuglični ležaj sa kontaktom u četiri tačke [13]

Kotrljajni ležaji sa kontaktom u četiri tačke se projektuju sa čistim kotrljanjem (tj. Bez klizanja u tačkama kontakta) radi smanjenja trenja. Međutim, ovaj idealan slučaj se ne može uvek postići, što dovodi do klizanja i veće sile trenja. U radu *Lin-a i dr.* [63] razvijen je pojednostavljen analitički model ponašanja kotrljanja/klizanja i trenja sa dodirom u četiri tačke, zasnovan na Coulombovom modelu trenja i kinematici čvrstog tela. Oni su došli do zaključka da je čisto kotrljanje moguće samo kad geometrija tačke kontakta zadovoljava određeni odnos. Odnos koji treba da se zadovolji dat je jednačinom (3.4), a grafička interpretacija je prikazana pomoću dve linije koje prolaze kroz dve kontaktne tačke na jednoj

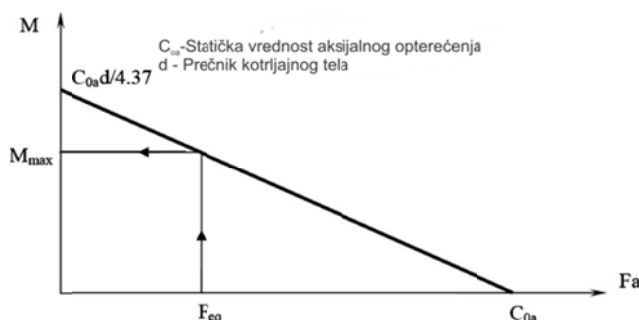
stazi kotrljanja, a paralelane su kao što je prikazano na slici 3.16. Dve linije takođe prikupljaju sve tačke sa relativnom brzinom nula, tako da su u ovom radu definisane kao „linije nulte brzine“. Kada stanje čistog kotrljanja nije moguće, tačka (tačke) klizanja mogu se analitički odrediti kao funkcija sila u kontaktu i uglova kontakta. Dalje su predstavili niz slučajeva kako bi pokazali da predloženi model može da razjasni nesaosnost, greške u proizvodnji i uslove opterećenja na ponašanje kotrljanja/klizanja i trenja.

$$\frac{\cos \beta_{BL} - \cos \beta_{BR}}{\sin \beta_{BL} + \sin \beta_{BR}} = - \frac{\cos \beta_{TL} - \cos \beta_{TR}}{\sin \beta_{TL} + \sin \beta_{TR}} \quad (3.4)$$



Slika 3.16 Grafički prikaz uslova čistog kotrljanja [63]

Aguirrebeitia i dr. [4] su prikazali proračun statičke nosivosti ležaja sa kontaktom u četiri tačke. U ovim proračunima uzet je nulti zazor u kontaktu, a prstenovi se smatraju kruti. Opterećenja koja deluju na ovaj tip ležaja obično sadrže aksijalne i radijalne sile, kao i moment. Proračun se zasnova na generalizaciji *Sjovellove* i *Rumbargerove* jednačine i daje osnovu za projektovanje i izbor ležaja ove vrste. U najnepovoljnijem slučaju opterećenja, radijalna sila je normalna na rezultantu momenta. Pomoću dijagrama moment-aksijalna sila, ekvivalentno opterećenje omogućava konstruktoru da dobije maksimalni dozvoljeni moment koji ležaj može da podnese, slika 3.17. Postoje neke varijacije u obliku i granicama prikazanog dijagrama. Ove varijacije nastaju zbog proizvođača koji su eksperimente sami sprovodili ili su preuzeli podatke drugih proizvođača. U svakom slučaju, uvek postoji određena dvosmislenost i nedostatak jasnog kriterijuma za definiciju ekvivalentnog opterećenja. Cilj ovog rada je razvoj proračuna koji definiše površinu sa graničnim vrednostima opterećenja F_a , F_r i M za ležaje sa kontaktom u četiri tačke. Dijagram sa slike 3.17 se može direktno koristiti da se utvrdi da li je određena kombinacija opterećenja prihvatljiva ili ne.

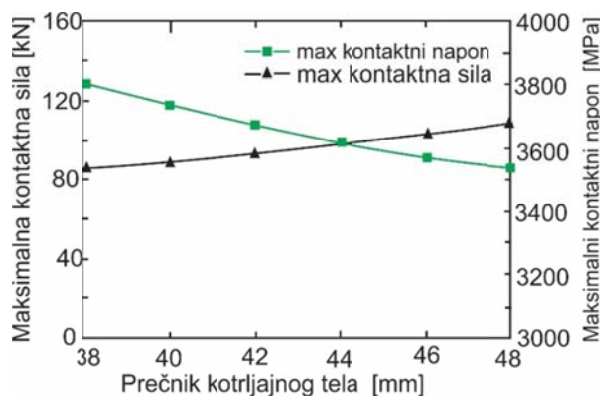


Slika 3.17 Dijagram zavisnosti momenta-aksijane sile za ležaj sa kontaktom u četiri tačke [4]

Kod *Abasolo-a i dr.* [2] izbor ležajnog venca Fzasnovan je na statičkoj nosivosti. Da bi se olakšao izbor, proizvođači daju krive za izbor ležaja u svojim katalogzima, koje su zasnovane na zavisnosti ekvivalentnog aksijalnog opterećenja i momenta. Međutim, proizvođači daju malo informacija o podacima na osnovu kojih su došli do krive. Autori su u ovom radu predstavili krive izbor ležaja sa kontaktom u četiri tačke, gde su podaci za razvoj krivih uzeti na osnovu teorijskih podloga, zasnovanih na prethodno objavljenim i potvrđenim radovima.

He i dr. [36] pokazali su da je za optimizaciju konstrukcionih parametara krupno gabaritnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke, neophodna sveobuhvatna analiza statičke nosivosti, veka, distribucije opterećenja, maksimalne kontaktne sile, maksimalnog napona u kontaktu. Oni su pokazali da se sa povećanjem prečnika kotrljajnog tela njihov broj smanjuje, a povećava se kontaktno opterećenje na pojedinačna kotrljajna tela, dok se maksimalni napon u kontaktu smanjuje. Aksijalno dinamičko opterećenje i zamorni vek ležaja se povećavaju. Sa smanjenjem prečnika, povećava se broj kotrljajnih tela, smanjuje se maksimalno opterećenje, ravnomernija je raspodela opterećenja i manja je ukupna deformacija spoljašnjeg prstena.

Maksimalno opterećenje kotrljajnog tela, u kontaktu, postepeno se povećava sa povećanjem prečnika, kao što je prikazano na slici 3.18. Kako se prečnik kotrljajnog tela povećava, površina kontakta se povećava, a napon u kontaktu opada.

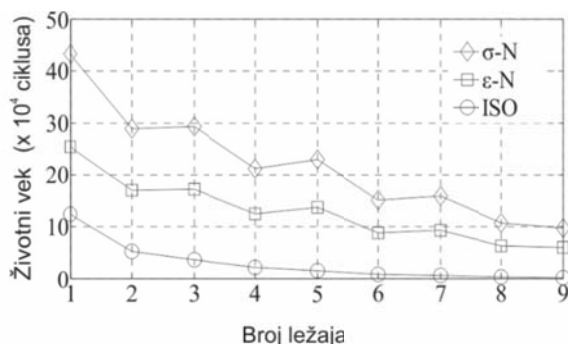


Slika 3.18 Maksimalna sila i napon u kontaktu koje deluju na jedno kotrljajno telo [36]

Iako postoji veliki broj studija koje se bave izučavanjem krupno gabaritnih kotrljajnih ležaja, analize koje se odnose na veličinu i dubinu ojačavanja staza kotrljanja, a koje se ujedno odnose i na njihov zamor su retke. Ovom problematikom su se bavili *Chen i Wen* [18] koji su u svom istraživanju uzeli za primer velike ležajne vence, sa različitim gabaritim dimenzijama. Brojem 1 je obeležen ležaj sa najmanjim prečnikom, a brojem 9 sa najvećim. Maksimalna kontaktna sila i podpovršinski napon na stazama kotrljanja dobijeni su metodom konačnih elemenata. Rezultati su pokazali da je očigledan uticaj dubine ojačavanja staza kotrljanja na vek ležaja. Stoga se ovaj uticaj ne može zanemariti pri proračunu veka ovih kotrljajnih ležaja. Kada se koriste ista opterećenja, kotrljajni ležaji sa velikim dimenzijama imaju manji zamorni vek.

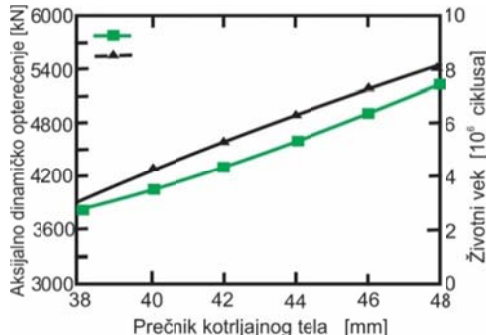
Chen i Wen [18] su izračunali zamor preko niskocikličnog ($\sigma - N$) i visokocikličnog zamora materijala ($\epsilon - N$) kao i prema preporukama koje su opisane međunarodnim

standardom (ISO). Dobijeni rezultati prikazani su na slici 3.19. Rezultati pokazuju da je vek na zamor maksimalan kada se računa preko niskocikličnog zamora ($\sigma - N$), a minimalan vek je izračunat ISO metodom za isti ležaj. Generalno, zamorni vek ležaja se smanjuje povećanjem veličine ležaja. Međutim, vek računat preko ($\sigma - N$), ($\varepsilon - N$) i ISO sa povećanjem veličine ležaja se smanjuje. To je zbog maksimalnih kontaktnih sila u ležajima koje se povećavaju sa povećanjem veličine ležaja pod istim uslovima opterećenja, što kao rezultat daje povećanje površinskih napona na stazama kotrljanja, a to dalje utiče na smanjenje veka ležaja.



Slika 3.19 Uticaj veličine ležaja na njegov vek [18]

He i dr. [36] su došli do zaključka da se sa povećanjem prečnika kotrljajnog tela dinamička nosivost i vek jednorednog kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke povećavaju. Krive imaju istu tendenciju porasta, što se vidi sa slike 3.20.

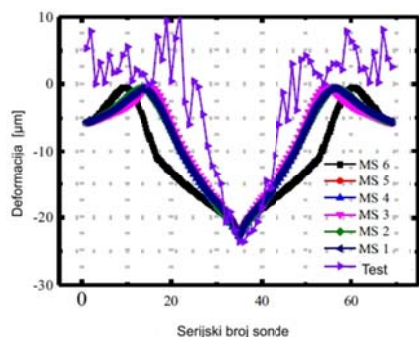


Slika 3.20 Ekvivalentno dinamičko opterećenje i vek ležaja [36]

Model konačnih elemenata koji su razvili He i dr. [36] koristi se kod simulacije kontaktnog ponašanja ležaja između staze kotrljanja i kotrljajnog tela. Rezultati pokazuju da je kontaktna deformacija kod ovog ležaja u osnovi ista, krive su usaglašene, kao što je prikazano na slici 3.21, pri ispitivanju ležaja metodom konačnih elemenata i pri eksperimentalnom ispitivanju. Primenom metode konačnih elemenata, menjana je veličina mreže od 1 - 6 mm (na slici označeno sa MS 1- MS 6).

Kada je ležaj opterećen, kotrljajno telo se pomera prema ivici staze kotrljanja i ugao kontakta se menja u stvarnim radnim uslovima. Opterećenje kotrljajnog tela nije normalno na stazu kotrljanja i ne zadovoljava pretpostavku koja se koristi u *Hertz-ovoj* teoriji kontakata, gde je opterećenje primenjeno na površinu kontakta normalno. Da bi se ovo izbeglo, na kotrljajno telo primenjuje se isto opterećenje kao početni ugao kontakta, kako bi se osiguralo

da su kotrljajno telo i staza kotrljanja uvek u vertikalnom kontaktu. Model konačnih elemenata zadovoljava hipotezu *Hertz-ove* teorije kontakata i može se koristiti za verifikaciju modela.

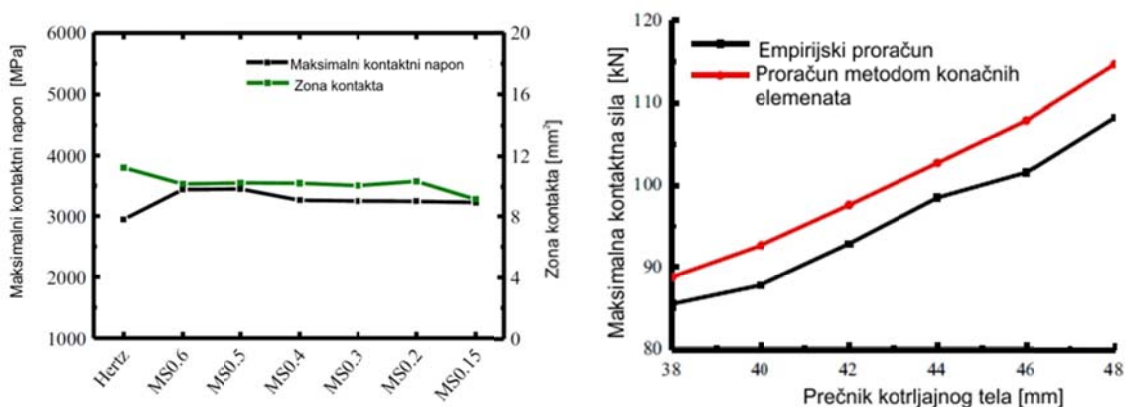


Slika 3.21 Uporedni prikaz deformacija dobijenih metodom konačnih elemenata i eksperimentalnim ispitivanjem [36]

Slika 3.22 prikazuje maksimalne vrednosti napona i površinu kontakta, dobijenih na osnovu *Hertz-ove* teorije kontakata i metoda konačnih elemenata. Kada se mreža konačnih elemenata promeni iz velike u malu, maksimalna vrednost napona u zoni kontakta postaje sve manja i manja.

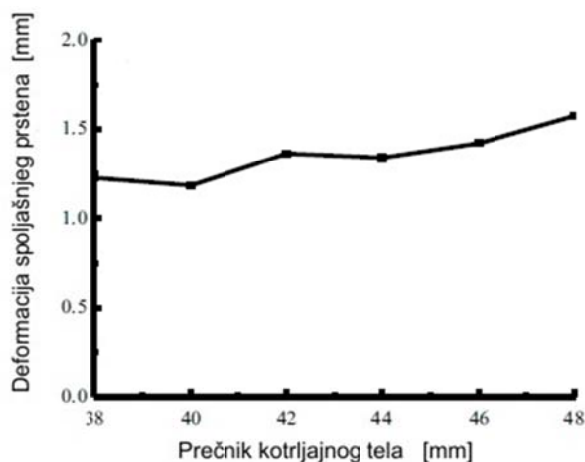
Maksimalno opterećenje u kontaktu dobijeno modelom konačnih elemenata je veće od opterećenja dobijenog na osnovu empirijske formule što je prikazano na slici 3.23. Ova razlika nastaje zbog toga što se u empirijskoj formuli pretpostavlja da dolazi do plastične deformacije, a deformacija u kontaktu se nalazi samo u području kontakta između kotrljajnih tela i staze kotrljanja.

Kako se prečnik kotrljajnog tela povećava, deformacija spoljašnjeg prstena ležaja blago raste, kao što je prikazano na slici 3.24. Kada je prečnik kotrljajnog tela 40 mm, deformacija spoljašnjeg prstena je najmanja. Kada je prečnik kotrljajnog tela 48 mm, deformacija spoljašnjeg prstena je veća od deformacije kod prečnika 40 mm.



Slika 3.22 Maksimalni kontaktni napon i površina kontakta dobijeni Hertz-ovom teorijom kontakata i konačnim elementima [36]

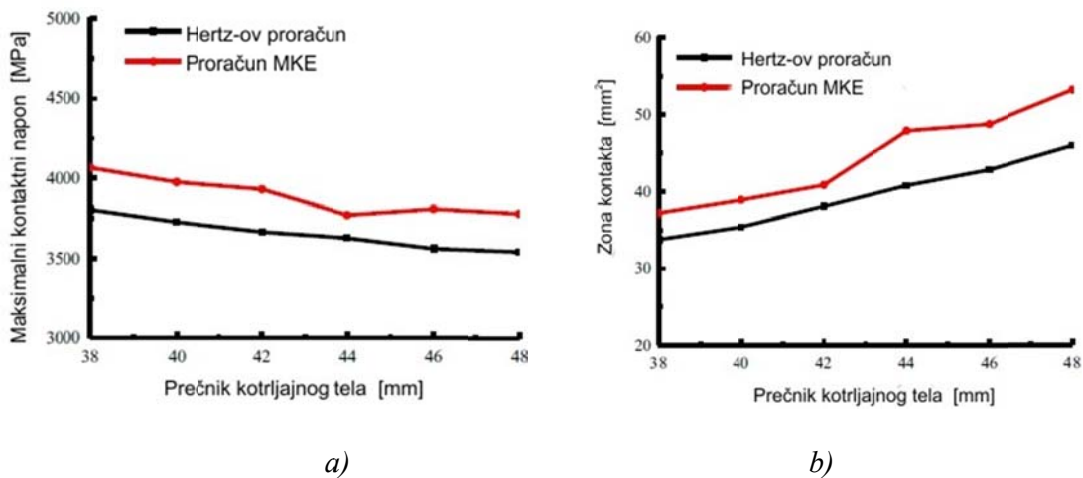
Slika 3.23 Poređenje maksimalnog kontaktnog opterećenja u zavisnosti od prečnika kotrljajnog tela [36]



Slika 3.24 Deformacija spoljašnjeg prstena [36]

Maksimalni naponi u kontaktu koji su dobijeni modelom konačnih elemenata veći su od dobijenih *Hertz-ovom* teorijom, kao što je prikazano na slici 3.25a. Ova razlika je posledica ugla kontakta između kotrljajnog tela i staze kotrljanja, koji se pri proračunu *Hertz-ovom* teorijom kontakta smatra konstantom, dok se opterećenje menja, a u modelu konačnih elemenata ugao kontakta je promenljiv. Sa porastom prečnika kotrljajnog tela napon na stazi kotrljanja se smanjuje, a razlika između dva proračuna je nepromenljiva.

Dalje, sa povećanjem prečnika kotrljajnog tela povećava se površina kontakta između kotrljajnog tela i staze kotrljanja nakon opterećenja ležaja, kako je prikazano na slici 3.25b.

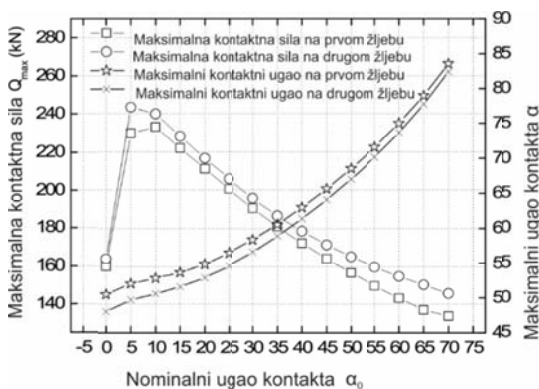


Slika 3.25 Poređenje modela konačnih elemenata sa proračunom na osnovu Hertz-ove teorije kontakata: a) poređenje kontaktnih napona; b) poređenje kontaktne površine [36]

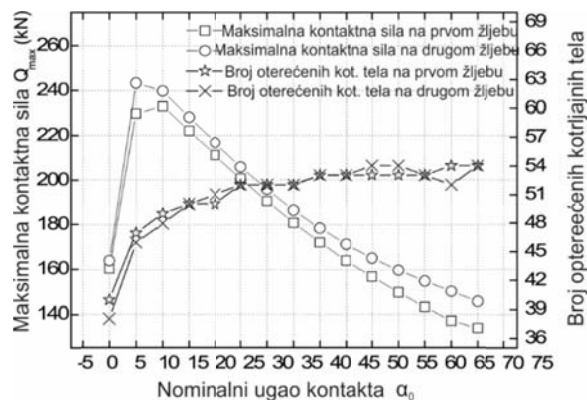
Živković i dr. [105] su dinamičku nosivost izračunali na osnovu unutrašnje geometrije ležaja, dok su statičku nosivost odredili modelom konačnih elemenata kada najopterećenije kotrljajno telo dostigne kontakti napon 4200 [MPa]. Tabelarno su prikazali promenu nosivosti i veka ležaja u zavisnosti od radijalnog zazora za razmatrani ležaj. Dalje su Živković i dr. [104] u svojim istraživanjima analizirali i uporedili ležaj sa kontaktom u dve i četiri tačke. Analiza MKE izvedena je u primenom programskog sistema Ansis Workbench.

Rezultati izvedene analize prikazuju raspodelu maksimalnog ekvivalentnog (Von Mises-ovog) napona za pomenute tipove kugličnih ležaja. Utvrdili su dinamičku i statičku nosivost, kao i vek ležaja, gde se može reći da će ležaj sa kontaktom u četiri tačke imati oko 25% duži vek od ležaja sa kontaktom u dve tačke.

Nominalni ugao kontakta ima veliki uticaj na aksijalnu nosivost ležaja. Slika 3.26 prikazuje uticaj nominalnog ugla kontakta na maksimalnu kontaktnu silu i ugao. Kada je nominalni ugao kontakta od 0 - 10°, maksimalna kontaktna sila raste. Ako je vrednost nominalnog ugla između 10 - 70°, maksimalne kontaktne sile naglo opadaju, jer se opterećenje kotrljajnog tela povećava, što se vidi sa slike 3.27. Elipsast ugao kontakta između kotrljajnog tela i staze kotrljanja se skraćuje kada je ugao kontakta prevelik. Zbog toga se nominalni ugao kontakta obično projektuje kao ugao od 30° i 45°. U radu [17] je nominalni ugao kontakta u opsegu 25 - 45°.

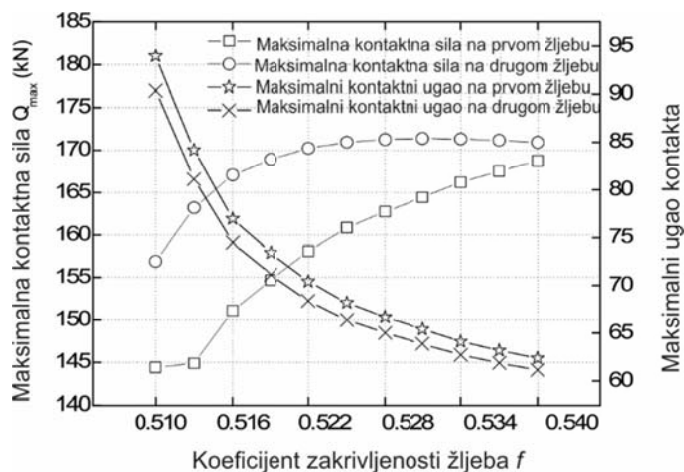


Slika 3.26 Uticaj nominalnog ugla kontakta na maksimalnu kontaktnu silu i maksimalni ugao kontakta [17]



Slika 3.27 Uticaj nominalnog ugla kontakta na maksimalnu kontaktnu silu i broj opterećenih kotrljajnih tela [17]

Odnos između poluprečnika kotrljajnog tela i poluprečnika zakrivljenosti staze kotrljanja preporučuje se u opsegu 0,92 - 0,98 (koeficijent zakrivljenosti žleba od 0,51 do 0,54) [106]. Povećanje koeficijenta zakrivljenosti žleba rezultira povećanjem maksimalnih kontaktnih sila, što se vidi sa slike 3.28. Kada je koeficijent zakrivljenosti žleba veći od 0,528, maksimalne kontaktne sile u drugom redu koje su ujedno i maksimalne kontaktne sile u ležaju, gotovo su nepromenjene. Međutim, maksimalne kontaktne sile u prvom redu se brzo povećavaju. Maksimalni uglovi kontakta se rapidno smanjuju (za 31,58°) sa porastom koeficijenta zakrivljenosti žleba sa vrednosti 0,51 na 0,54. Zbog toga se kontaktne elipse između kotrljajnih tela i staza kotrljanja smanjuju, dalje, ako je koeficijent zakrivljenosti žleba premali, sila u kontaktu se smanjuje. Koeficijent zakrivljenosti ležaja treba izabrati što je veći moguć kada sila u kontaktu to dozvoljava. Kod ležaja u radu [17], zadovoljavajući koeficijent zakrivljenosti žleba je 0,53.



Slika 3.28 Uticaj koeficijenta zakrivljenosti žleba na maksimalnu kontaktnu silu i ugao kontakta [17]

3.2 Istraživanja dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja

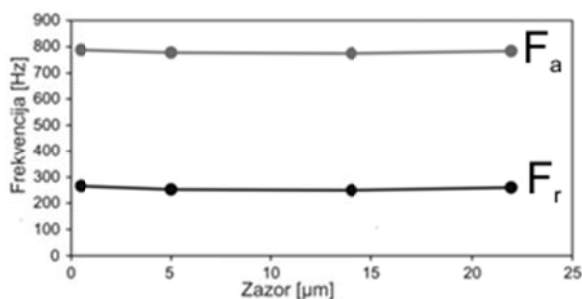
Istraživanje dinamičkog ponašanja ležaja motivisano je željom da se smanje buka i vibracije u njihovoj primeni, kao i da se poveća vek, krutost, brzohodost i tačnost obrtanja, te razvoj metoda za dijagnostiku i nadzor ležaja. Dinamičko ponašanje ležaja je regulisano dinamičkim ponašanjem njegovih kontrukcionih elemenata. Vibracije koje se javljaju u radu kotrljajnih ležaja su pojava koju nije moguće izbeći. Postoji više uzroka za generisanje vibracija kotrljajnih ležaja. Prema *Harris-u*, kao što je već rečeno, vibracije koje nastaju u kotrljajnom ležaju mogu se svrstati u četiri kategorije.

Zazor koji se projektuje da kompenzuje toplotno širenje elemenata ležaja je izvor vibracija i stvara nelinearnost u dinamičkom ponašanju. Uticaj nelinearnosti zazora na odziv rotora je privlači veliku pažnju u poslednje vreme zbog razvoja visokobrzinskih ležaja. Objavljen je veliki broj istraživanja nelinearnih vibracija kotrljajnog ležaja sa unutrašnjim zazorom. Nelinearnost zazora je različita od drugih nelinearnosti jer se ne može matematički aproksimirati. Kuglični ležaji često zahtevaju male unutrašnje zazore da bi obezbedili čvrsto naleganje i termičke napone. Unutrašnji zazor ima veliki uticaj na vek, vibracije, buku i porast temperature kugličnog ležaja.

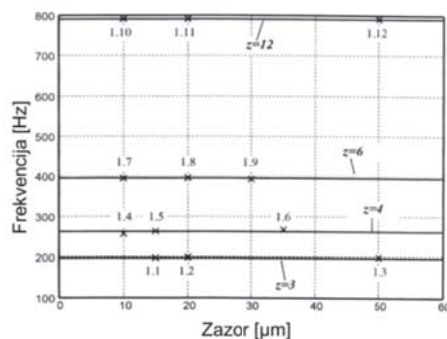
Mnogi autori su analizirali teorijski i eksperimentalno statičko ponašanje kugličnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke, međutim dinamičko ponašanje ovih ležaja se retko sreće u literaturi. *Yao i dr.* [96] su predložili dinamički model kugličnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke sa tri stepena slobode uzimajući u obzir uticaj zazora i tolerancija prečnika kotrljajnih tela. Sprovedena je analiza za kontaktne sile, udarne sile i kartu stabilnosti ležaja pod uticajem radijalnog, aksijalnog i kombinovanog opterećenja.

Zazor ima presudan uticaj na dinamičko ponašanje i stvaranje poremećajnih sila koje izazivaju oscilatorno kretanje i vibracije elemenata ležaja. Veličina radijalnog zazora ne utiče na sopstvenu frekvenciju ležaja [33, 85], kao ni na frekvencije obrtanja elemenata ležaja [84]. Sa slike 3.29 vidi se da je sopstvena frekvencija praktično konstantna za zazore od 1 do 20

μm , pri čemu je, takođe, konstantna i frekvencija obrtanja spoljašnjeg prstena ležaja (slika 3.30).



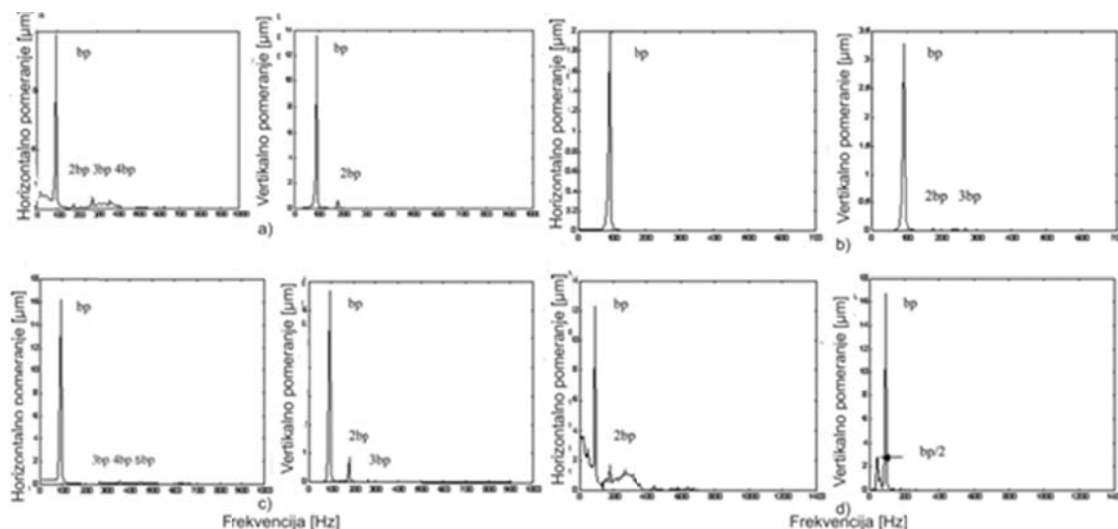
Slika 3.29 Uticaj radijalnog zazora na sopstvenu frekvenciju radijalnog ležaja [33]



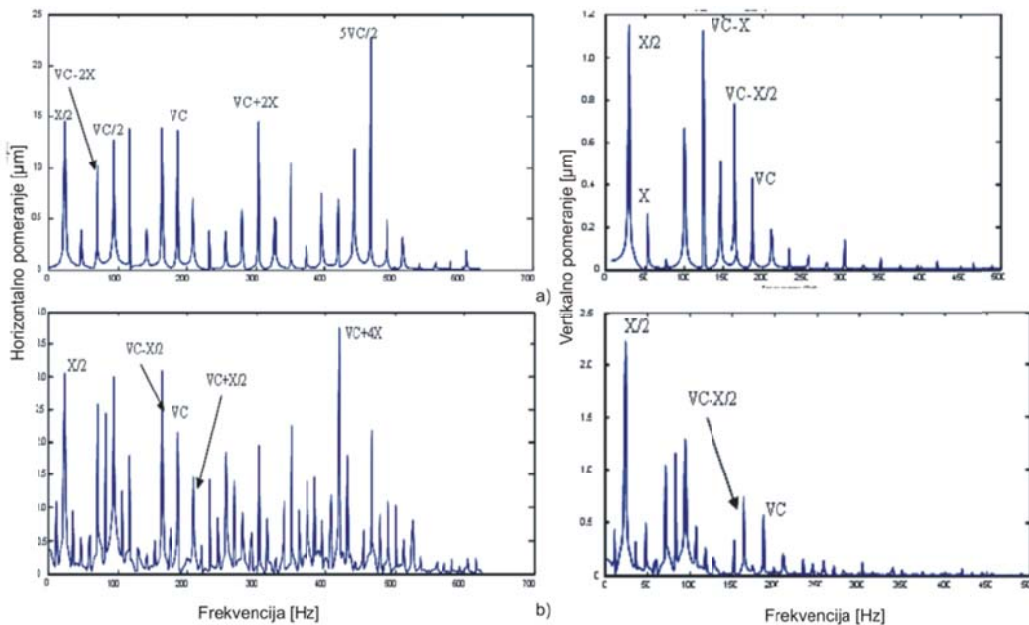
Slika 3.30 Uticaj radijalnog zazora na frekvenciju spoljnog prstena radijalnog ležaja [84]

Harsha [33] je predstavio model za proučavanje strukture vibracija u ležajima u zavisnosti od unutrašnjeg zazora. Matematički model je definisan za tangencijalno kretanje kotrljajnih elemenata, kao i unutrašnjeg i spoljašnjeg prstena, koristeći nelinearne izvore, kao što su *Hertz-ova* kontaktna sila i unutrašnji radijalni zazor. Autor uzima u obzir i raspored opterećenja od bezkontaktnog do kontaktnog stanja između kotrljajnih elemenata i spoljašnjeg prstena. Kontakt između kotrljajnih elemenata i prstena se posmatra kao nelinearna opruga, koja deluje jedino pri sabijanju, simulirajući kontaktnu deformaciju i rezultujuću silu. Nelinearna krutost se proračunava pomoću relacija *Hertz-ove* teorije za elastične kontaktne deformacije. Analiziran je i uticaj radijalnog zazora na ponašanje kotrljajnih elemenata, koja pokazuju periodična, kvazi-periodična i haotična kretanja.

Zavisno od veličine radijalnog zazora i kombinacije spoljašnjeg radijalnog opterećenja, menja se i veličina relativnog pomeranja centra ležaja usled kontaktnih deformacija, a to dalje dovodi do promene broja kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju spoljašnjeg opterećenja, što ima uticaj na promenu raspodele spoljašnjeg opterećenja između kotrljajnih tela i prstenova. Sa ovim se menja dinamički odziv kotrljajnih tela i spoljašnjeg prstena. Amplituda pomeranja na kotrljajnim telima blago opada i raste amplituda pomeranja na spoljašnjem prstenu (slika 3.31 i 3.32) sa povećanjem zazora [65, 85, 86]. Promena amplitude pomeranja spoljašnjeg prstena (u slučaju kada je unutrašnji prsten obrtan) može se uzeti kao važan dijagnostički parametar za procenu veličine radijalnog zazora u ležaju. Prema *Liquin-u* [65] optimalne veličine radijalnog zazora pri delovanju spoljašnjeg opterećenja od 5000 N se kreću od 1 do 26 μm i od 30 do 58 μm kada se opterećenje ravnomerno prenosi preko kotrljajnih tela, što dovodi do ravnomerne raspodele kontaktnih deformacija i periodičnog kretanja centra ležaja. Kada se vrednosti radijalnog zazora kreću od 26 do 30 μm dolazi do periodičnih bifurkacija kretanja centra ležaja. Pri veličinama radijalnog zazora od 58 do 67 μm dolazi do neperiodičnog kretanja centra ležaja usled neravnomernog prenošenja opterećenja i povećanja kontaktnih deformacija na spoljašnjem prstenu ležaja.



Slika 3.31 Promena amplitude oscilovanja kotrljajnih tela u zavisnosti od zazora: a) $G_r=1 \mu\text{m}$; b) $G_r=6 \mu\text{m}$; c) $G_r=12 \mu\text{m}$; d) $G_r=20 \mu\text{m}$ [33]



Slika 3.32 Promena amplitude oscilovanja spoljašnjeg prstena u zavisnosti od zazora: a) $G_r=10 \mu\text{m}$; b) $G_r=20 \mu\text{m}$ [85]

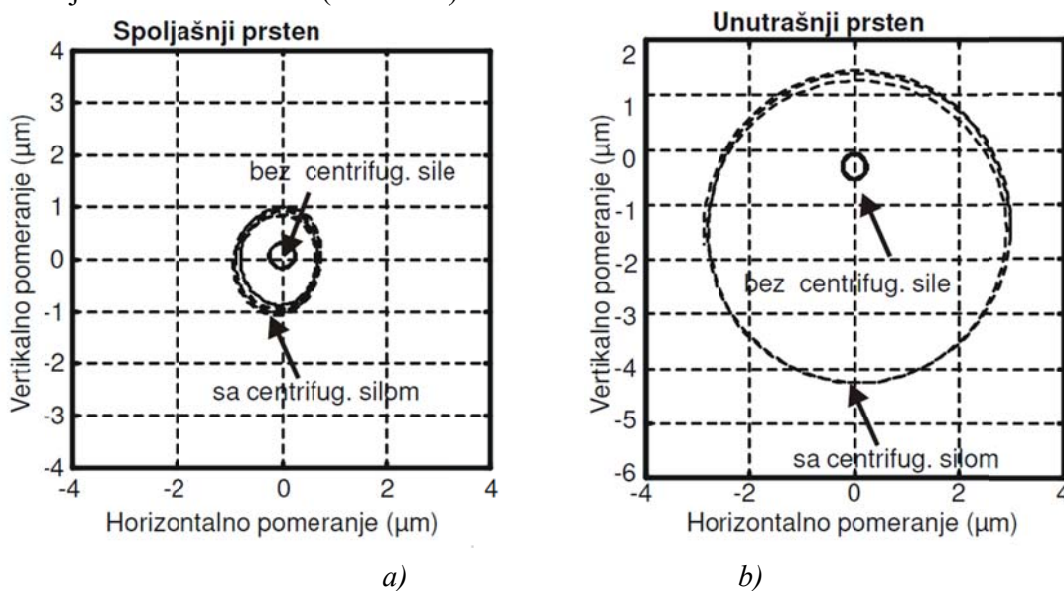
Yammamoto [95] je predložio analitički model za izučavanje vibracija vertikalno oslonjenog rotora na kuglične ležaje, uvodeći nelinearnost u *Jeffcott-ove* jednačine, gde je uzet u obzir uticaj zazora. Zaključak ovog rada pokazuje da maksimalna amplituda na kritičnim brzinama opada sa smanjenjem radijalnog zazora i kritična brzina nestaje, što zavisi i od veličine debalansa.

Tiwari [82] i ostali izučavali su teorijski i eksperimentalno uticaj unutrašnjeg zazora na dinamiku nelinearnog odziva balansirano i neuravnoteženog rotora oslonjenog na kuglične ležaje. Autori su došli do zaključka da postoji treći region nestabilnosti koji do sada nije bilo razmatran u radovima. Ovaj region nestabilnosti se povećava tokm vremena, usled

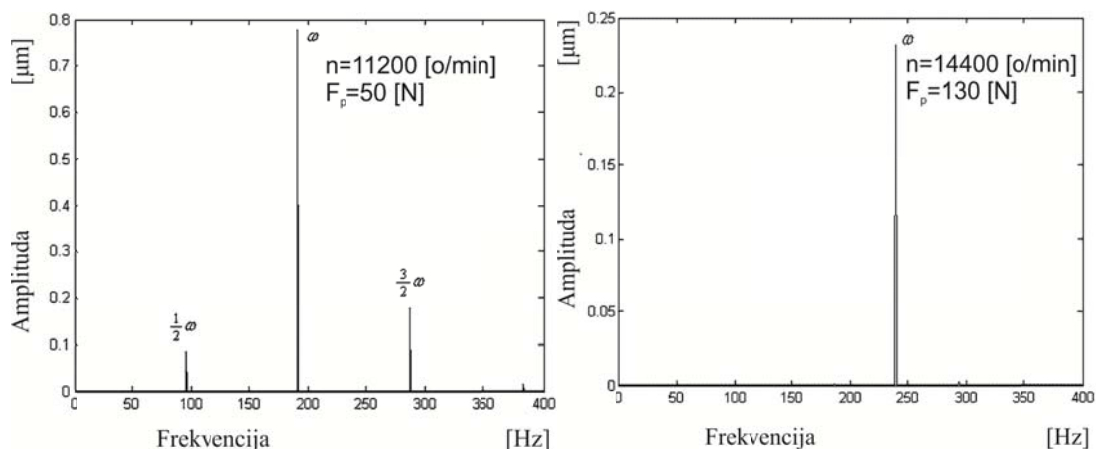
nelinearnost radijalnog zazora. Krutost ležaja i uticaj radijalnog zazora se ekperimentalno utvrđuju.

Gupta [27] je razvio dinamički model za simulaciju dinamičkih karakteristika kugličnog ležaja. *Saito* [75] istražuje uticaj radijalnog zazora na neuravnoteženi *Jeffcott-ov* rotor uležišten kugličnim ležajima, koristeći tehničku numeriku harmonijskog balansa. *De Mul* i ostali [23] prikazuju model sa pet stepeni slobode za izračunavanje jednačina i povezanost raspodele opterećenja na kugličnom ležaju. Takođe, razmatraju uticaj zazora i centrifugalnih sila. *Liew* [62] predstavlja četiri različita dinamička modela od sistema sa dva stepena slobode do sistema sa pet stepeni slobode sa ili bez centrifugalnih sila koji mogu biti primenjeni za određivanje vibracionog odziva sistema rotora uležištenog kugličnim ležajima.

Statička krutost ležaja raste pri delovanju centrifugalnih sila, dok dinamička krutost opada do 30% od početne vrednosti pri istim silama prednaprezanja [48]. Ovo može objasniti uticaje centrifugalne sile na kotrljajna tela, jer pri delovanju centrifugalne sile dolazi do dodatnog pomeranja kotrljajnih tela prema spoljašnjoj stazi kotrljanja i širenja unutrašnjeg prstena u radijalnom pravcu, što dovodi do povećanja preklopa, a samim tim i prednaprezanja i statičke krutosti (slika 3.33) [62]. Međutim, sa povećanjem broja obrtaja dolazi do smanjenja krutosti usled povećanja brzine odnosno gubljenja kontakta kotrljajnog tela sa spoljašnjom stazom kotrljanja, pa se povećanjem sile prednaprezanja mora smanjiti taj uticaj [49]. Takođe, *Bai* i dr. [15] su došli do zaključka da povećanje prednaprezanja smanjuje amplitudu oscilovanja prstenova ležaja, bez obzira na povećanje broja obrtaja, čime se obezbeđuje stabilnost sistema (slika 3.34).



Slika 3.33 Putanja centra kugličnog ležaja sa kosim dodirnom pri $n=18000$ o/min sa prednapreznjem (100 N): a) sa i b) bez dejstva centrifugalne sile [62]



Slika 3.34 Promena amplitude oscilovanja spoljašnjeg prstena kugličnog ležaja sa kosim dodirrom u zavisnosti od prednaprezanja i broja obrtaja [15]

Jiang [47] je predstavio metod rešavanja promenljivog prednaprezanja glavnog vretena mašine alatke za čitav opseg brzina kao i vratilo sa promenljivim prednaprezanjem koje se ostvaruje korišćenjem hidrauličnog cilindra. Kod opsega velikih brzina, koristi se metod konačnih elemenata za analizu distribucije temperature na vretenu, a promenljivo prednaprezanje vretena se određuje prema ograničenom porastu temperature ležaja. Pri malom broju obrtaja, prednaprezanje vretena je rešeno vekom ležaja. Dinamička krutost vretena sa promenljivim prednaprezanjem analizirana je korišćenjem metoda transfer matrica (MTM) i modela nelinearnog ležaja koji uključuje centrifugalnu silu i giroskopskog efekta. Predloženi metod za određivanje promenljivog prednaprezanja verifikovan je eksperimentalnim putem, merenjem dinamičke krutosti vretena i porasta temperature ispitnog ležaja. Rezultati pokazuju da promenljivo prednaprezanje vretena daje odlične rezultate, da je porast temperature pri velikoj brzini niži nego kod vretena sa konstantnim prednaprezanjem, a dinamička krutost pri malom opsegu brzina je značajno povećana.

Ambrozkiewicz [11] je predstavio bezdimenzioni matematički model sa dva stepena slobode za kuglične ležaje koji pokazuje odnos između bezdimenzionih karakteristika i njihovog uticaja na odziv sistema. Izvedeni matematički model razmatra nelinearne karakteristike kao što su krutost, prigušenje i radijalni zazor pozivajući se na *Hertz-ovu* teoriju kontakta. Takođe, uzimaju se u obzir važne karakteristike kao što su spoljašnje opterećenje, ekscentričnost sistema ležaj-vratilo i greške geometrije staza kotrljanja. Analiza dobijenih odziva brzom *Fourierovom* transformacijom i faznim graficima, pružaju izvor informacija o dinamici sistema i pomaže da se pronađe prelaz između periodičnog i haotičnog odziva.

Alfares i Elsharkawy [9] predložili su matematički model zasnovan na dinamičkom sistemu sa 5 stepeni slobode koji se koristi za proučavanje aksijalnog prednaprezanja kugličnih ležaja koje utiče na vibracije vretena brusilice. Sila brušenja (kao funkcija procenta trošenja tocila za 5 različitih materijala radnih predmeta) je korišćena za simulaciju spoljašnjeg opterećenja vretena brusilice. Rezultati pokazuju da početno aksijalno prednaprezanje koje deluje na ležaj ima značajnu ulogu u smanjenju nivoa vibracija vretena brusilice i rezultira boljim kvalitetom obrađene površine. Nivo vibracija vretena brusilice

raste kako se procenat trošenja tocila povećava i/ili se povećava tvrdoća obratka. Ova analiza se može upotrebiti za proračun optimalnog aksijalnog prednaprezanja kako bi se postigao dobar kvalitet završne obrade.

Vibracije nastale usled uticaja tehnoloških parametara su uslovljene greškama izrade i greškama ugradnje ležaja. Staze kotrljanja i kotrljajna tela uvek odstupaju od idealnog oblika zbog nepravilnosti tokom obrade. Ovaj vid odstupanja je uslovljen tačnošću obrade i uvek je prisutna kod kugličnih ležaja. Tipični oblici nesavršenosti staza kotrljanja i kotrljajnih tela su valovitost, hrapavost i varijacija prečnika kuglica. Valovitost se pri matematičkom modelovanju, uopšteno, posmatra preko sinusoidnih funkcija. Usled pojave kontaktnih deformacija elemenata ležaja, valovitost se može razmatrati i kod kugličnog ležaja sa idealnom unutrašnjom geometrijom [44].

Jedan od mogućih izvora vibracija je neujednačena sila ili geometrijska nesavršenost kotrljajnog elemenata. Neki istraživači su istražili silu i frekvencije koje potiču od valovitosti kugličnog ležaja. *Yhland* [98] je pomoću eksperimenata odredio veličine aksijalnih i radijalnih vibracija za različite valovitosti. *Wardle i Poon* [91] su istraživali odnos između broja kotrljajnih tela i veličine talasa i ustanovili su da kuglični ležaj generiše velike vibracije. Takođe su ustanovili da postoje tri slučaja geometrijskih nesavršenosti usled kojih nastaju vibracije u ležaju: valovitost i druge greške nastale aksijalnim i radijalnim kretanjem staza kotrljanja; mikroklizanja kotrljajnih tela preko vrhova neravnina na stazama kotrljanja i udara usled lokalnih elastičnih deformacija nastalih kotrljanjem kotrljajnih tela preko vrhova neravnina zbog odstupanja od dozvoljene hrapavosti.

Wardle [90], takođe, predviđa frekvencije koje nastaju iz nelinearne zavisnosti opterećenje - rasterećenje, a pomoću njegovog analitičkog modela kugličnog ležaja objasnio je odnos između valovitosti i pobudnih sila. Međutim, nije mogao da predvidi frekvencije u slučaju kada postoji valovitost na više kotrljajnih elemenata kugličnog ležaja. Navedena istraživanja nisu uključila dinamiku rotora tako da nisu mogli objasniti kvantitativne i kvalitativne karakteristike vibracija kugličnog ležaja.

Yhland [97] je koristio linearnu teoriju za proračun valovitosti kugličnog ležaja pomoću matrice krutosti i istražio je uticaj valovitosti kroz dinamički model rotora. Međutim, njegov model nije mogao da objasni nelinearni efekat opterećenja - rasterećenja jer nije uključivao promenu relativnog položaja kotrljajnih elemenata tokom obrtanja.

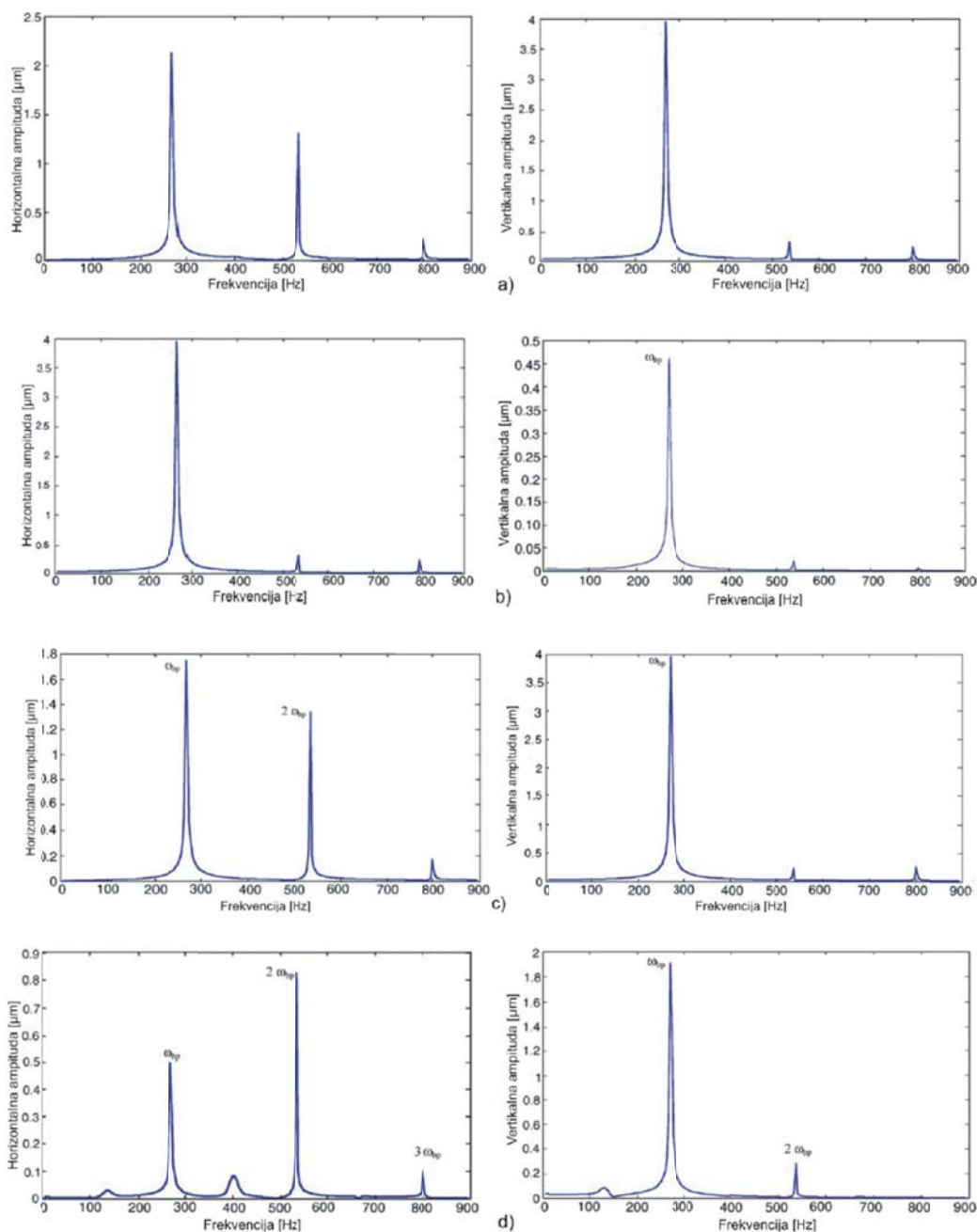
Akturk [8], [7] predlaže model vibracija kugličnog ležaja sa 3 stepena slobode, koji sadrži valovitosti na unutrašnjem i spoljašnjem prstenu i kotrljajnim telima ležaja i pokazuje da se većina vibracija na unutrašnjoj stazi kotrljanja javlja kada se prolazna frekvencija kotrljajnih tela i njenih harmonika poklapa sa sopstvenom frekvencijom. On nije uspeo da objasni vibracije kugličnog ležaja zbog uticaja obrtnog kretanja.

Jang i Jeong [46] predstavili su nelinearni model sa pet stepeni slobode za analizu vibracija kugličnog ležaja kao posledica valovitosti u krutom rotoru oslonjenom na dva ili više kugličnih ležaja. Predloženi model valovitosti može proračunati ugaona i translatorna pomeranja rotora oslonjenog na dva ili više kugličnih ležaja. Ovde se karakterišu frekvencije koje su rezultat različitih vrsta talasa u elementima kotrljanja, harmonične frekvencije koje su rezultat nelinearnih karakteristika rasterećenja - opterećenja kugličnog ležaja i bočne

frekvencije koje su rezultat nelinearnosti interakcije talasa. Numerički rezultati ovog istraživanja su u skladu sa prethodnim istraživačima.

Jang i Jeong [45] predlažu pobudni model sa pet stepeni slobode za ispitivanje uticaja valovitosti na vibracije ležaja. Oni razmatraju i uticaj centrifugalne sile i giroskopskog momenta na kotrljajna tela. *Jang i Jeong* [44] postavljaju analitički model za određivanje vibracija usled valovitosti kotrljajnih tela ležaja, pri čemu uzimaju u obzir centrifugalnu silu i giroskopski moment kotrljajnog tela. Valovitost kotrljajnog elementa je modelirana sinusoidnom funkcijom koja se nalazi u poziciji vektora centra krivine putanje. *Hertz-ova* teorija kontakta je primenjena pri proračunu elastičnih deformacija i nelinearnih sila kontakta. Centrifugalna sila i giroskopski moment kotrljajnog tela i valovitost kotrljajnih elemenata obuhvaćeni su kinematskim ograničenjima i jednačinom ravnoteže sila za kotrljajno telo. Predloženi model je potvrđen na bazi poređenja rezultata sa prethodnim ispitivanjima. Ispitivanje je pokazalo da centrifugalna sila i giroskopski moment kotrljajnih tela igraju značajnu ulogu u određivanju frekvencije uležištenja, odnosno glavne frekvencije, čiji su harmonici i bočne frekvencije rezultat valovitosti kotrljajnih elemenata uležištenja, kod kugličnih ležaja. Takođe, pokazano je da frekvencije vibracija ležaja nastaju usled valovitosti, ne samo između kotrljajnih elemenata, već i na stazama kotrljanja.

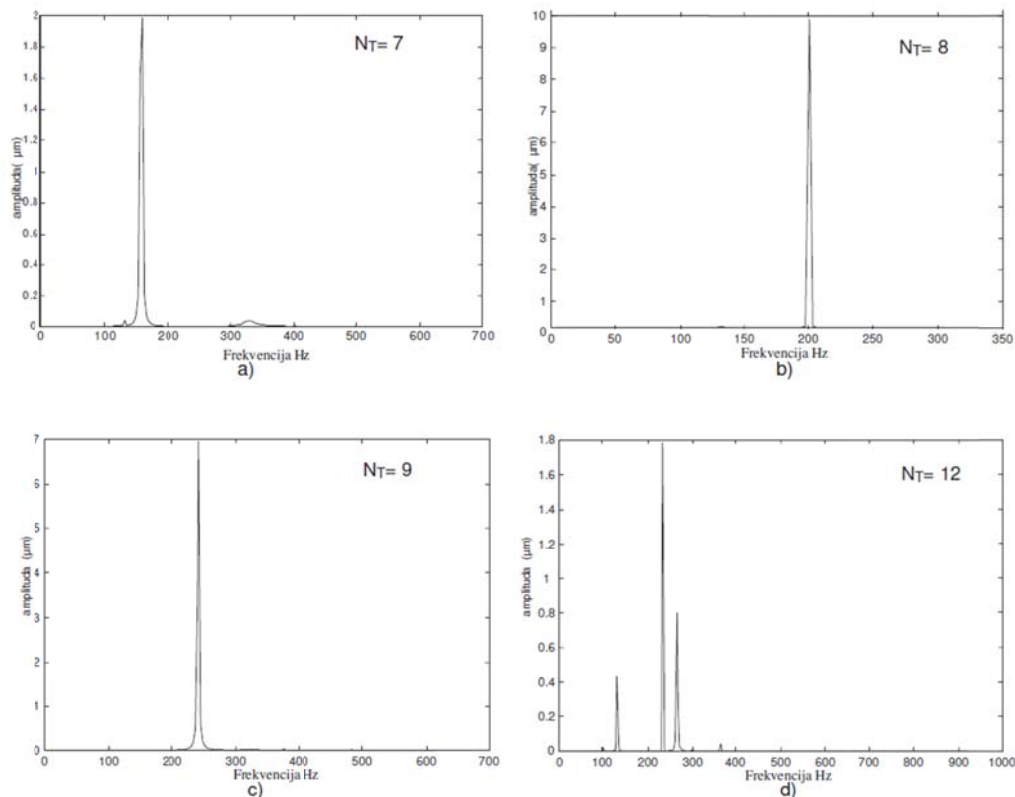
Oblik vibracija pobuđenih valovitošću zavisi od vrednosti odnosa broja talasa i broja kotrljajnih tela [34], [45]. Na slici 3.35 je prikazana amplitudno-frekventna karakteristika kugličnih ležaja sa kosim dodirnom sa osam kuglica u zavisnosti od broja talasa na spoljašnjoj stazi kotrljanja. Kada je broj talasa $N_t = 7$, maksimalna amplituda vibracija je na frekvenciji spoljašnjeg prstena ($f_o = 266,7$ Hz) sa prvim harmonikom na $2xf_o$. Maksimalna amplituda pomeranja u horizontalnoj i vertikalnoj ravni ležaja iznosi 2 i 4 μm (slika 3.35a). U slučaju kada je broj talasa $N_t = 8$, dolazi do periodičnog kretanja sa maksimalnom amplitudom pomeranja na frekvenciji spoljašnjeg prstena ($f_o = 266,7$ Hz). Vrednosti maksimalnih amplituda pomeranja u horizontalnoj i vertikalnoj ravni iznose 4 i 0,45 μm (slika 3.35b). Na slici 3.35c su prikazane amplitude pomeranja kada broj talasa iznosi 9. Sa slike 3.35c se vidi da se maksimalne amplitude pomeranja u horizontalnoj ravni javljaju na frekvenciji spoljašnjeg prstena ($f_o = 266,7$ Hz) i njegovom drugom harmoniku ($2xf_o = 533,3$ Hz) i iznose 1,75 i 1,25 μm , u vertikalnoj ravni maksimalna amplituda pomeranja se, takođe, javlja na f_o i iznosi 4 μm (slika 3.35c). Kada je broj talasa $N_t = 12$, maksimalna vrednost amplituda pomeranja se nalazi na $2xf_o$. u horizontalnoj ravni, vrednost maksimalne amplitude pomeranja iznosi 0,65 μm . Druge amplitude pomeranja nalaze se na $f_o = 266,7$ Hz i $3xf_o = 800$ Hz i iznose 0,5 i 0,15 μm , respektivno. U vertikalnoj ravni maksimalna amplituda pomeranja se javlja na $f_o = 266,7$ Hz i iznosi 2 μm , pri čemu u spektru postoji i mala amplituda pomeranja na $2xf_o$ koja iznosi 0,2 μm (slika 3.35d). Ovako male vrednosti amplituda pri $N_t = 12$ za isti ležaj sa 8 kuglica je dobio i *Akturk* u [7].



Slika 3.35 Prikaz amplituda vibracija u horizontalnom i vertikalnom pravcu usled valovitosti na spoljašnjoj stazi kotrljanja za različite brojeve talasa: a) $N_t = 7$; b) $N_t = 8$; c) $N_t = 9$; d) $N_t = 12$; [34]

Takođe, u radovima [44, 65, 92] se na osnovu dobijenih rezultata, prikazuje da se male amplitude pomeranja javljaju u radialnom pravcu usled valovitosti spoljašnje nepokretne staze kotrljanja na specifičnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena i njenim harmonicima, dok se veće amplitude pomeranja u aksijlanom pravcu javljaju kada je broj talasa po obimu spoljašnje staze kotrljanja jednak umnošku frekvencije spoljašnje staze kotrljanja i kotrljajnih tela $q(N_b \times \omega_b)$. Do istih zaključaka je došao i *Wardle* [91] eksperimentalnim ispitivanjem. Vibracije nastale usled valovitosti unutrašnje obrtne staze kotrljanja daju mnogo kompleksniji amplitudno-frekventni spektar nego vibracije na spoljašnjoj stazi kotrljanja [35]. Vibracije usled valovitosti obrtne unutrašnje staze kotrljanja

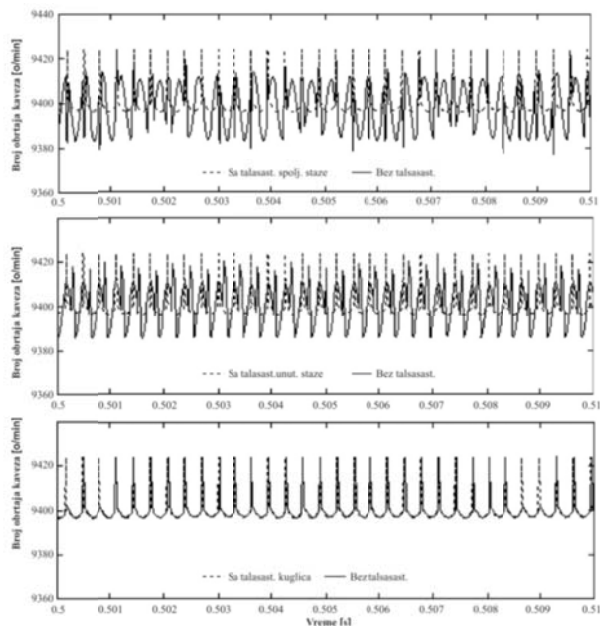
se nalaze na frekvenciji unutrašnjeg prstena f_o [34, 35]. Veliki broj autora [7, 16, 19, 20, 30, 33, 34, 44-46, 92] predlaže da se broj talasa na unutrašnjoj stazi može odrediti kao $k = N_b \pm p$, dok se vibracije nastale usled valovitosti određuju kao $q N_T (f_r - f_b) \pm p f_r$. Na osnovu toga, spektar vibracija dobijen za različiti broj talasa na unutrašnjoj stazi kotrljanja za kuglični ležaj sa osam kuglica je prikazao *Harsha-a* [35] (slika 3.36).



Slika 3.36 Prikaz amplituda vibracija u vertikalnom pravcu usled valovitosti na unutrašnjoj stazi kotrljanja za različite brojeve talasa: a) $N_T = 7$; b) $N_T = 8$; c) $N_T = 9$; d) $N_T = 12$; [35]

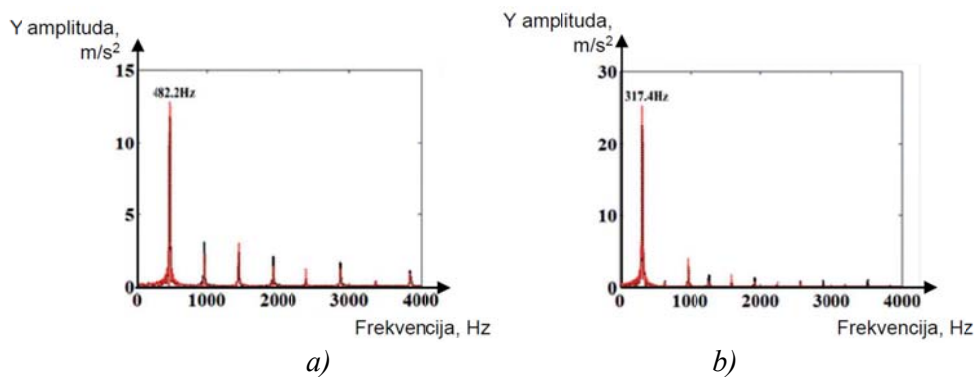
Kada je broj talasa $N_T = 7$, maksimalna amplituda vibracija se nalazi na $f_o - f_r$ (155 Hz) gde je $p = q = 1$, pri čemu maksimalna amplituda vibracija iznosi $2 \mu\text{m}$ (slika 3.37a). Za broj talasa $N_T = 8$, maksimalna amplituda vibracija se nalazi na specifičnoj frekvenciji unutrašnjeg prstena f_i (192 Hz) i iznosi $10 \mu\text{m}$, pri čemu je $q = 1$ i $p = 0$ (slika 3.37b). Kada je broj talasa $N_T = 9$, maksimalna amplituda vibracija se nalazi na $f_o + f_r$ (235 Hz) i iznosi $7 \mu\text{m}$, gde je $q = 1$ i $p = 1$ (slika 3.37c). U slučaju kada je broj talasa $N_T = 12$, maksimalna amplituda vibracija se nalazi $2 \times f_o - 4 \times f_r$ (220 Hz), pri čemu je $q = 2$ i $p = 4$ i iznosi $1,8 \mu\text{m}$ (slika 3.37d).

Usled delovanja centrifugalne sile i giroskopskog momenta menja se frekvencija kaveza, pa je uticaj valovitosti spoljašnje staze kotrljanja značajniji nego uticaj valovitosti unutrašnje staze i kuglica. U osnovi svi elementi ležaja imaju neku valovitost, tako da je ukupna pobuda u stvari superpozicija pojedinačnih pobuda koje se javljaju na ležajima. Na slici 3.37 je prikazan uticaj valovitosti na broj obrtaja kaveza za kuglične ležaje sa kosim dodirom.



Slika 3.37 Uticaj valovitosti na promenu broja obrtaja kaveza pri delovanju sila inercije za kuglični ležaj sa kosim dodirom [16]

Liu i Shao [66] analiziraju uticaj broja talasa i amplitude valovitosti na amplitude ubrzanja vibracija i frekvencije na kojima se maksimalne amplitude javljaju. Takođe, razmatraju uticaj neravnomerne raspodele talasa. Frekventnom analizom gde se javljaju maksimalne amplitude obuhvaćeni su slučajevi sa 12, 24 i 36 talasa na spoljašnjoj i unutrašnjoj stazi kotrljanja, koji su usvojeni kao kZ , gde je $k = 1, 2$ i 3 , a broj kotrljajnih tela je $Z = 12$. Na spoljašnjoj stazi kotrljanja, frekvencija prolaska kotrljajnih tela je 320 Hz, a na unutrašnjoj stazi 480 Hz. Maksimalne amplitude do kojih se došlo analizom pokazuje da se one javljaju na osnovnim frekvencijama pomnoženim sa k . To znači za 24 talasa, javljaju se na frekvenciji od $958,3$ Hz za unutrašnji prsten i $640,9$ Hz za spoljašnji prsten. U slučaju 36 talasa maksimalna amplituda se javlja na frekvenciji 1440 Hz za unutrašnji prsten i $958,3$ Hz za spoljašnji prsten. Frekvencije za neravnomernu raspodelu talasa na unutrašnjem i spoljašnjem prstenu, prikazane su na slici 3.38. Pokazano je da neravnomerna raspodela talasa nema uticaja na frekvencije na kojima se javljaju maksimalne amplitude.



Slika 3.38 Frekvencije na kojima se javljaju maksimalne amplitude vibracija usled neravnomerne raspodele talasa na a) unutrašnjem prstenu, b) spoljašnjem prstenu [66]

Dinamika ležaja je definisana dinamikom njegovih strukturnih elemenata, tj. unutrašnjeg i spoljašnjeg prstena i kotrljajnih elemenata, kao i EHL (*Elastohydrodynamic Lubrication* - elastohidrodinamičko podmazivanje) podmazivanjem koje povezuje strukturne elemente. Istraživanja dinamičkog ponašanja kotrljajnih elemenata ležaja je motivisano željom da se smanje vibracije u njihovoj primeni. Većina kugličnih ležaja podmazuje se da bi se smanjilo trenje, koje menja dinamičko ponašanje obrtnog sistema. Greška se može pojaviti u dinamičkom sistemu kada se podmazani kuglični ležaji posmatraju isto kao nepodmazani. Sloj maziva u zoni kontakta podmazanog kugličnog ležaja prenosi opterećenje i obezbeđuje prigušenje, dok je prigušenje zanemarivo u nepodmazanim kugličnim ležajima. Prigušenje značajno utiče na stabilnost sistema.

Sarangi, Majumdar i Sekhar [76] predstavili su numeričko rešenje za određivanje krutosti i prigušenja za izotermalne uslove, elastohidrodinamičkog podmazanog kontakta u zavisnosti od površinske hrapavosti i promene viskoziteta u zavisnosti od pritiska. Pažnju su usmerili na dobijanje empirijskih izraza za proračun koeficijenata krutosti i prigušenja podmazanih kontakata nelinearnom metodom najmanjih kvadrata, fitovanjem krive upotrebom različitih numerički dobijenih podataka, a pri tome skraćujući vreme potrebno za proračun. Dobijene matrice krutosti i prigušenja kugličnog ležaja daju pravilnu raspodelu opterećenja. Uporedili su dinamičko ponašanje sistema rotor - ležaj za nepodmazan kontakt, podmazan kuglični ležaj i klizni ležaj.

Dareing i Johnson [22] eksperimentalno su odredili karakteristiku prigušenja dva diska od čelika u kontaktu. U njihovim analizama prigušenje generisano EHL-om je razdvojeno od drugih oblika prigušenja, što pokazuje da EHL ima značajan uticaj na ukupno prigušenje u zoni kontakta i zavisi od viskoziteta sredstva za podmazivanje. *Kraus i ostali* [55] su upotrebom modalne analize utvrdili uticaj brzine i prednaprezanja na radijalno i aksijalno prigušenje u radijalnom kugličnom ležaju. *Zeillinger i ostali* [99] su predstavili ekperimentalni rad na proračunu koeficijenta prigušenja kugličnog ležaja. Eksperimenti su pokazali da je prigušenje formiranjem uljnog filma koji je pod značajnim uticajem viskoziteta sredstva za podmazivanje i zazora.

Zhang i ostali [102] obezbeđuju teorijske osnove za selekciju primene avio ulja, na osnovu niza elastohidrodinamičkih testova. Nelinearne dinamičke diferencijalne jednačine visokobrzinskog kugličnog ležaja sa kosim dodirom napisane su na osnovu dinamičke teorije kotrljajnih ležaja i rešene su algoritmom *gearstiff*-a sa promenljivim korakom. Ispitali su uticaj koefijenta trenja maziva na dinamičke karakteristike kaveza u visokobrzinskom kugličnom ležaju sa kosim dodirom.

Jacobs i ostali [43] su eksperimentalnim putem ispitali stvaranje sloja maziva kao i njegov uticaj na dinamičko ponašanje kod radijalnog kugličnog ležaja. Pomoću uređaja koji omogućava testiranje različitih ležaja u stvarnim uslovima, sprovedeno je ispitivanje. Ustanovili su da se tokom formiranja sloja maziva, krutost ležaja povećava za 3,2% dok se prigušenje povećava za 24%. Tokom zagrevanja ležaja viskozitet maziva jako opada, što rezultuje smanjenjem električnog otpora, krutosti i prigušenja. Ovi parametri se razlikuju pri različitim brzinama, nakon što je ležaj dostigao stacionarno temperaturno stanje pri svakom broju obrtaja. Posmatrali su i diskutovali kombinovani uticaj broja obrtaja i temperature.

Wijnant i ostali [93] razvili su računarske modele za probleme EHL da bi istražili uticaj maziva na dinamičko ponašanje radijalnog kugličnog ležaja. U ovom istraživanju opisana je interakcija između strukturnih elemenata pomoću nelinearnog modela opruga - prigušenje, koji se zasniva na numeričkom rešavanju kompletnog kontaktnog EHL problema. Ove relacije su naknadno dodate u strukturni model dinamičkog ponašanja ležaja. Upotrebom ovog modela, istražuje se uticaj pomeranja sopstvenih frekvencija ležaja kao rezultat podmazivanja i određuje se vrednost prigušenja za predopterećen ležaj. Pretpostavlja se da je promena sopstvenih frekvencija uglavnom uzrokovan promenom ugla kontakta.

U okviru doktorske disertacije *Kneževića* [54] analizirano je dinamičko ponašanje kotrljajnih ležaja primenom veštačkih neuronskih mreža. Na bazi rezultata eksperimentalnog ispitivanja obučene su veštačke neuronske mreže koje su sposobne da predvide amplitude brzine vibracija ležaja. Modeli dobijeni primenom veštačkih neuronskih mreža određuju zavisnosti između uticajnih parametara i amplituda brzine vibracija koje ležaj generiše. Validacija neuronskih modela izvršena je na osnovu eksperimentalnih rezultata. Analiziran je uticaj svakog parametra ležaja na amplitude brzine vibracija u karakterističnim područjima frekvencija. U radu su prikazani i rezultati međusobnog uticaja više parametara. Modelima su dobijene preporučene vrednosti uticajnih parametara ležaja. Pri analizi tehnoloških parametara uvedeni su: parametar ekvivalentne površinske hrapavosti, parametar ekvivalentne valovitosti i parametar ekvivalentnog odstupanja od kružnosti staza kotrljanja. Novouvedeni parametri omogućavaju bolje razumevanje uticaja na dinamičko ponašanje. U radu je pokazano da su neuronski modeli sposobni da na osnovu parametara ležaja predvide klasu kvaliteta ležaja.

Prikazani pristupi analizi mehaničkog ponašanja ležaja, kao i veliki broj navedenih kriterijuma sa značajnim međusobnim razlikama, pokazuju da još uvek nema ujednačenih kriterijuma za vrednovanje uticaja dozvoljenih deformacija i krutosti na statičko i dinamičko ponašanje posebno kugličnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke, pa je ovaj problem još uvek aktuelan kako sa teorijskog tako i sa praktičnog stanovišta.

3.3 Definisane cilja i problema istraživanja u okviru rada

Kotrljajni ležaji i/ili ležajni sklopovi su danas široko rasprostranjeni, počev od automobila, poljoprivredne mehanizacije, mašina svih namena, pa sve do proizvoda široke potrošnje. I pored toga što su ovi ležaji doživela svoj procvat pre više decenija, još uvek se, kao i u mnogim drugim oblastima, ne može govoriti da više ne postoje otvorena pitanja, tj. područja interesantna za istraživanja. Tokom svog razvoja, poznavanje kotrljajnih ležaja se obogatilo i proširilo na nova područja čiji nastanak diktiraju praktične potrebe. Počeci istraživanja vezuju se za statičke i kinematičke analize kotrljajnih ležaja i mašinskih sklopova u kojima su ležaji ugrađeni. S daljnjim razvojem pojavila se potreba za proračunima čvrstoće i stabilnosti. U novije vreme svedoci smo brzog razvoja novih pravaca i područja istraživanja, koja su prvenstveno vezana za poboljšanje sigurnosti rada kotrljajnih ležaja, kao i povećanje njihovog veka. Jedan od najvažnijih pravaca, koji je posebno aktuelan u posljednje vreme, jeste smanjenje gubitaka snage i povećanje energetske efikasnosti ležaja. U danjašnje vreme

proizvođači ležaja, usmeravaju svoje aktivnosti u razvoj ležaja sa kontaktom u četiri tačke jer isti pružaju neke veoma važne prednosti u odnosu na kuglične ležaje sa kontaktom u dve tačke kao što su: ušteda u prostoru, manja masa elemenata sklopa, bolja krutost, veća tačnost obrtanja, brža i jednostavnija montaža i održavanje i dr.

Na osnovu uvida u raspoloživu literaturu može se konstatovati da problematika identifikacije ponašanja ležaja/ležajnog sklopa predstavlja vrlo atraktivno područje istraživanja, o čemu svedoči veliki broj istraživača koji su se u dužem periodu vremena time bavili, a bave se i danas. Nedvosmislena je konstatacija svih istraživača da statičko - dinamičko ponašanje, uz tačnost obrtanja ležaja, predstavljaju osnovne pokazatelje kvaliteta ovog sklopa. Pristup problematici istraživanja ležaja je vrlo različit kod pojedinih istraživača, pri čemu mnogi od njih razmatraju samo toplotno, elastično ili dinamičko ponašanje ležaja sa kontaktom u dve tačke i to pretežno radijalnih ležaja. O uticaju nelinearne promene krutosti, tačnosti obrtanja, zazora/preklopa na statičko i dinamičko ponašanje kugličnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke u eksploataciji, još uvek nema dovoljno podataka jer je do pre jedne decenije uglavnom razmatrana problematika radijalnih i kugličnih ležaja sa kosim dodirnom u dve tačke. S druge strane, za ocenu valjanosti pojedinih konstrukcionih rešenja postoji niz kriterijuma sa značajnim međusobnim razlikama, što još više ukazuje na aktuelnost ove problematike kako sa teorijskog tako i sa praktičnog stanovišta. Problematika identifikacije ponašanja proizvoda u eksploataciji još u fazi projektovanja i danas predstavlja područje interesovanja velikog broja istraživača, posebno u domaćim uslovima gde primena savremenih metoda i opreme još uvek nije na zadovoljavajućem nivou. Pored toga, treba imati u vidu da su današnji pravci razvoja usmereni na potpunu integraciju u ovoj oblasti, putem jedinstvenih dijagnostičkih sistema, čemu teže svi veći proizvođači ležaja. Potreba za različitim konstrukcijama kotrljajnih ležaja sa razvojem mašinske tehnike dolazi sve više do izražaja, tim pre što se poslednjih decenija unutrašnja konstrukcija nije značajno menjala, a zahtevi za povećanjem broja obrtaja, krutosti i veka ležaja su se značajno povećali. To povećanje se posebno odnosi na kuglične ležaje sa kontaktom u četiri tačke.

Na osnovu prethodno iznetog, u okviru rada se želi sprovesti analiza statičkog i dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja sa posebnim osvrtom na ležaje sa kontaktom u četiri tačke. Kompletno istraživanje realizovaće se na principima savremene metodologije naučno-istraživačkog rada. Zbog specifičnosti teme, pored opštih naučnih metoda analize i sinteze, korištene su eksperimentalne metode i tehnike, posebno tehnike vezane za primenu računara. Pri tome se posebno ističu metode i tehnike numeričke matematike.

Shodno prethodnim konstatacijama, postavljen je cilj istraživanja u ovom radu: utvrđivanje uticaja konstrukcionih (zazora/preklopa), i eksploatacionih parametara (spoljašnjeg opterećenja) na statičko i dinamičko ponašanje, kao i vek kugličnih ležaja, odnosno identifikaciju ponašanja u eksploataciji i određivanje veka primenom matematičkih modela. Na osnovu sveobuhvatne i vrlo detaljne analize dosadašnjih istraživanja mehaničkog ponašanja kotrljajnih ležaja, u radu su postavljene sledeće hipoteze:

- Primenom metode konačnih elemenata je moguće odrediti uticaj konstrukcionih (zazora) i eksploatacionih (spoljašnjeg opterećenja) parametara na statičko ponašanje kotrljajnih ležaja.
- MKE modelovanjem je moguće eksplicitnom metodom odrediti dinamičke karakteristike (frekvencije elemenata ležaja i amplitudu brzine i/ili ubrzanja) kotrljajnih ležaja za odgovarajuće eksploatacione uslove.
- Metodom konačnih elemenata i spektralnom gustinom amplitude (PSD) preko Minerovog pravila i S-N krive je moguće sa velikom pouzdanošću odrediti vek ležaja.

Verifikacija razvijenih matematičkih modela u pojedinim fazama analize želi se izvršiti priznatim savremenim eksperimentalnim metodama. Na taj način će se vrednovati uticaj razmatranih parametara na statičko i dinamičko ponašanja kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke u eksploataciji.

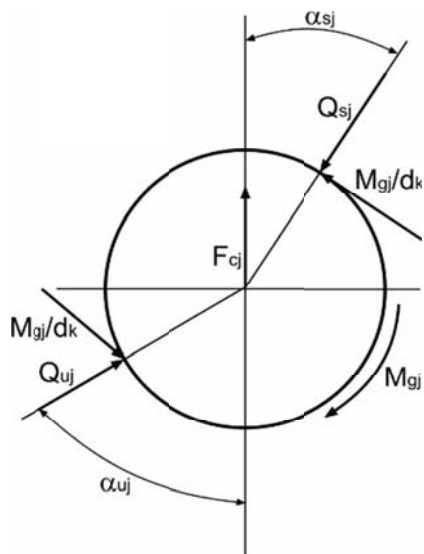
Potvrđivanje postavljenih hipoteza zahteva obimna teorijska i eksperimentalna ispitivanja koja podrazumevaju:

- detaljnu analizu konstrukcije ležaja sa kontaktom u četiri tačke
- razvoj matematičkog modela za statičku i dinamičku analizu ponašanja ležaja,
- identifikaciju uticaja parametara na statičko i dinamičko ponašanje,
- razvoj programskih rešenja za obradu i analizu podataka dobijenih eksperimentalnim ispitivanjem,
- eksperimentalno ispitivanje dinamičkog ponašanja i određivanje veka kugličnih ležaja sa kontaktom u četiri tačke.

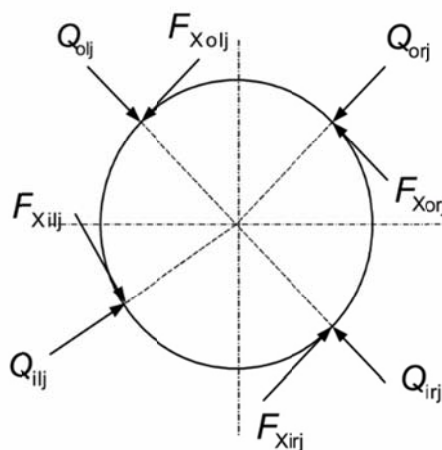
4 KVAZISTATIČKI MODEL KUGLIČNIH LEŽAJA

Na osnovu statičkog modela definišu se karakteristike spoljašnjeg opterećenja, intenzitet opterećenja pojedinih kotrljajnih tela, uglovi kontakta kotrljajnih tela sa stazama kotrljanja, kao i krutost samog ležaja.

Kvazistatički model za analizu statičkog ponašanja kugličnih ležaja je razvijen na bazi *Hertz-ove* teorije kontakta i *John-Harris-ove* raspodele opterećenja na kotrljajna tela. Model je u ovom radu proširen uvođenjem uticaja, preklopa/zazora u jednačine statičke ravnoteže. Na slici 4.1 i 4.2 prikazano je dejstvo sila na kotrljajno telo kod ležaja sa kontaktom u dve i četiri tačke, kod kvazistatičkog modela.



Slika 4.1 Delovanje sila na kotrljajno telo kod ležaja sa kontaktom u dve tačke



Slika 4.2 Delovanje sila na kotrljajno telo kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke

U ovom poglavlju opisan je analitički model za analizu kvazistatičke raspodele opterećenja u kotrljajnim ležajima sa dodirima u dve i četiri tačke. Model je razvijen primenom statičkog modela raspodele opterećenja za ležaj. Statička raspodela opterećenja prikazuje opterećenje (ili silu) na kotrljajnim elementima (kotrljajni element na stazu kotrljanja) unutar ležaja.

4.1 Kontaktna opterećenja i deformacije kugličnog ležaja

Do prvih zadovoljavajućih analiza proračuna kontaktnih napona i deformacija dva neopterećena elastična tela koja se dodiruju u jednoj tački došao je *Hertz* i takav kontakt se definiše kao kontakt u tački. Po *Hertz-u* je ova teorija dobila ime *Hertz-ova* klasična teorija kontakta. Ovaj kontakt je opisan sa četiri radijusa zakrivljenosti. Pozitivan radijus imaju konveksne površine, a negativan radijus konkavne. Površina kotrljajnog elementa je konveksna, dok je površina spoljašnje staze konkavna. Površina unutrašnje staze je konveksna u pravcu kretanja i konkavna u poprečnom pravcu. *Hertz-ova* teorija važi uz sledeće pretpostavke:

1. materijali delova u kontaktu su homogeni i izotropni,
2. površine delova u zoni kontakta imaju kontinualan geometrijski oblik,
3. opterećenje delova u kontaktu deluje u pravcu zajedničke normale u tački kontakta,
4. opterećenje koje deluje na delove u kontaktu, izaziva u zoni kontakta samo elastične deformacije.

Između kotrljajnog tela i staza kotrljanja se u neopterećenom stanju ostvaruje kontakt u tački (kod kugličnih ležaja) ili liniji (kod valjčastih ležaja). Ako deluje spoljašnje opterećenje, doći će do promene zone kontakta i ona će se promeniti iz tačke u elipsu kod kotrljajnih ležaja sa kuglicama, a ako su kotrljajna tela valjčići, oblik kontaktne površine biće promenjen iz linije u pravougaonik. Oblik i veličina površine kontakta zavisi od spoljašnjeg opterećenja, elastičnih osobina materijala delova u kontaktu i radijusa zakrivljenosti površina delova u kontaktu [30].

Zakrivljenost ρ je recipročna vrednost poluprečnika krivina r , pri čemu je kod konveksnih tela centar krivine u unutrašnjosti tela, dok je kod konkavnih tela centar krivine izvan tela.

$$\rho = \frac{1}{r} \quad (4.1)$$

Kod potpuno zakrivljenih tela mogu se uvesti dve međusobno upravne glavne ravni dodira. Na slici 2.7, u poglavlju dva, gornje telo označen je sa I, a donje sa II; glavne ravni krivine su označene sa 1 i 2. Dakle, radijus zakrivljenosti tela I u ravni 2 označen je sa r_{12} [32].

Da bi se opisao kontakt, koriste se sledeće definicije:

1. zbir zakrivljenosti,
2. razlika zakrivljenosti,
3. zakrivljenost kotrljajnog tela.

Ovi izrazi dati su relacijama (2.4), (2.5) i (2.6) u okviru poglavlja dva. Ako oba tela u tački kontakta imaju zajedničku tangentnu ravan i zajedničku normalu u kojoj leži sila opterećanja, na osnovu prethodnog, kontakt između kotrljajnog tela i staza kotrljanja se definiše preko:

1. Ekvivalentnog radijusa zakrivljenosti

Za kontakt sa unutrašnjom stazom kotrljanja, ekvivalentni radijus zakrivljenosti u pravcu glavne ose eliptičnog kontakta R_x i pomoćne ose R_y je definisan kao:

$$R_x = \frac{d_b}{2}(1 - \gamma_i) = \rho_{I2} \quad (4.2)$$

$$R_y = d_b \frac{f_i}{2f_i - 1} = \rho_{I1} \quad (4.3)$$

Gde su: $\gamma_i = \frac{d_b \cos \alpha_{i(n)}}{d_m}$, $f_i = \frac{r_i}{d_b}$, $n = 1, 2, 3, \dots, Z$, a Z je broj kotrljajnih tela.

Za kontakt sa spoljašnjom stazom kotrljanja R_x i R_y su:

$$R_x = d_b \frac{f_o}{2f_o - 1} = \rho_{II1} \quad (4.4)$$

$$R_y = \frac{d_b}{2}(1 + \gamma_o) = \rho_{II1} \quad (4.5)$$

Gde su: $\gamma_o = \frac{d_b \cos \alpha_{o(n)}}{d_m}$, $f_o = \frac{r_o}{d_b}$, $n = 1, 2, 3, \dots, Z$

2. Razlika zakrivljenosti

$$F_{(\rho)} = \frac{(k^2 + 1)E' - 2F'}{(k^2 - 1)} \quad (4.6)$$

Gde su F' i E' kompletni eliptični integrali prve vrste, respektivno, a k je koeficijent odnosa glavne i pomoćne ose eliptičnog kontakta.

$$F' = \int_0^{2\pi} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{-1/2} d\varphi \quad (4.7)$$

$$E' = \int_0^{2\pi} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{(1/2)} d\varphi \quad (4.8)$$

Ove relacije se pojednostavljeno mogu dobiti metodom najmanjih kvadrata, linearnom regresijom prema *Harrisu* [32]:

$$k \approx 1,0339 \left(\frac{R_y}{R_x} \right)^{0,636} \quad (4.9)$$

$$E' \approx 1,0003 + \frac{0,5968}{\frac{R_y}{R_x}} \quad (4.10)$$

$$F' \approx 1,5277 + 0,6023 \cdot \ln\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad (4.11)$$

Veza između deformacija i kontaktnih sila može da se dešiniše preko zbira i razlika zakrivljenosti dva tela u kontaktu gde se oni analiziraju kao elipsasti kontakt na ravnoj površini. *Hertz-ove* kontaktne sile između unutrašnje staze kotrljanja i kotrljajnih tela i spoljašnje staze kotrljanja i kotrljajnih tela mogu se odrediti [31]:

$$Q_{i/o} = K_{i/o} \delta_{i/o}^{3/2} \quad (4.12)$$

Gde indeksi i i o mogu biti: $i = l, r$ i $o = l, r$. Indeksi i/o , odnose se na unutrašnju/spoljašnju stazu kotrljanja, dok indeksi l i r označavaju levu i desnu stazu kotrljanja. δ - predstavlja kontaktne deformacije duž linije kontakta sa unutrašnjom/spoljašnjom stazom kotrljanja. $K_{i/o}$ je *Hertz-ova* normalna krutost unutrašnje/spoljašnje staze kotrljanja i definisana je preko ekvivalentnog radijusa zakrivljenosti i geometrije ležaja [30]:

$$K_{i/o} = \frac{\pi k E''}{3 F_{i/o}} \sqrt{\frac{2 E_{i/o} R_{x, y_{i/o}}}{F_{i/o}}} \quad (4.13)$$

gde je: $E'' = \frac{2}{\left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}}\right)}$ i $R_{x, y_{i/o}} = \frac{R_{x_{i/o}} \cdot R_{y_{i/o}}}{R_{x_{i/o}} + R_{y_{i/o}}}$.

Ose elipsastog kontakta određuju se preko sledećih relacija, a označene su kao glavna i pomoćna osa sa a i b , slika 4.3 [30]:

$$a = a^* \left[\frac{3Q}{2 \sum \rho} \left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \right]^{(1/3)} \quad (4.14)$$

$$a = 0,0236 a^* \left(\frac{Q}{\sum \rho} \right)^{(1/3)} \quad (\text{tela od čelika}) \quad (4.15)$$

$$b = b^* \left[\frac{3Q}{2 \sum \rho} \left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \right]^{1/3} \quad (4.16)$$

$$b = 0,0236 \cdot b^* \left(\frac{Q}{\sum \rho} \right)^{(1/3)} \quad (\text{tela od čelika}) \quad (4.17)$$

$$\delta = \delta^* \left[\frac{3Q}{2 \sum \rho} \left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \right]^{2/3} \frac{\sum \rho}{2} \quad (4.18)$$

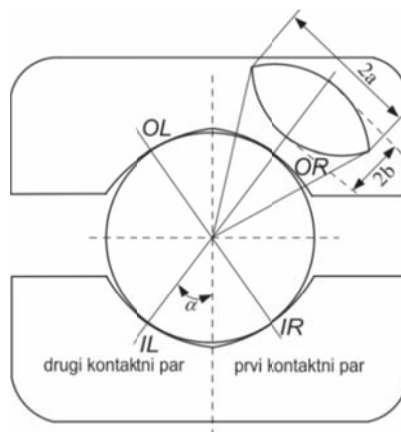
$$\delta = 2,79 \cdot 10^{-4} \delta^* Q^{2/3} \sum \rho^{1/3} \quad (\text{tela od čelika}) \quad (4.19)$$

gde su: E_I, E_{II} - modul elastičnosti i ν_I, ν_{II} - *Poisson-ov* koeficijent materijala delova ležaja.

$$a^* = \left(\frac{2k^2 E'}{\pi} \right)^{1/3} \quad (4.20)$$

$$b^* = \left(\frac{2E'}{\pi k} \right)^{1/3} \quad (4.21)$$

$$\delta^* = \frac{2F'}{\pi} \left(\frac{\pi}{2k^2 E'} \right)^{1/3} \quad (4.22)$$



Slika 4.3 Elipsasti kontakt kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke

Vrednosti bezdimenzionih veličina a^* , b^* i δ^* kao funkcije $F(\rho)$ date su u tabeli 4.1.

Tabela 4.1 Bezdimenzioni kontaktni parametri [30]

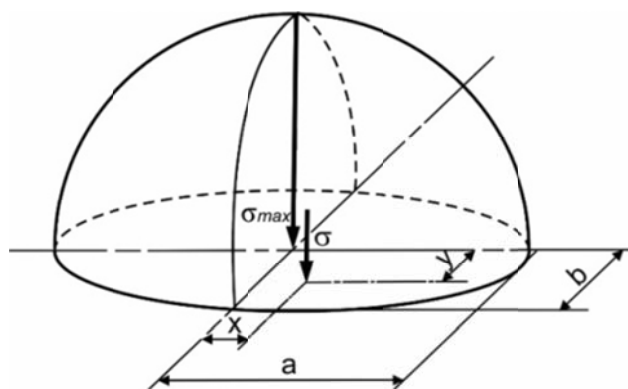
$F(\rho)$	a^*	b^*	δ^*
0	1	1	1
0,1075	1,0760	0,9318	0,9974
0,3204	1,2623	0,8114	0,9761
0,4795	1,4556	0,7278	0,9429
0,5916	1,6440	0,6687	0,9077
0,6716	1,8258	0,6245	0,8733
0,7332	2,011	0,5881	0,8394
0,7948	2,265	0,5480	0,7961
0,83495	2,494	0,5186	0,7602
0,87366	2,800	0,4863	0,7169
0,90999	3,233	0,4499	0,6636
0,93657	3,738	0,4166	0,6112
0,95738	4,395	0,3830	0,5551
0,97290	5,267	0,3490	0,4960
0,983797	6,448	0,3150	0,4352
0,990902	8,062	0,2814	0,3745
0,995112	10,222	0,2497	0,3176
0,997300	12,789	0,2232	0,2705
0,9981847	14,839	0,2072	0,2427
0,9989156	17,974	0,18822	0,2106
0,9994785	23,55	0,16442	0,17167
0,9998527	37,38	0,13050	0,11995
1	∞	0	0

Za elipsastu zonu kontakta, najveći napon je u geometrijskom centru, slika 4.4. Veličina ovog napona računa se prema izrazu:

$$\sigma_{\max_{i/o}} = \frac{3Q_{i/o}}{2\pi a_{i/o} b_{i/o}} \quad (4.23)$$

Kontaktni napon nema konstantnu vrednost u zoni kontakta, tako da se normalni naponi u drugim tačkama kontakta sa unutrašnjom/spoljašnjom stazom kotrljanja, za elipsastu površinu kontakta, računaju prema [30], slika 4.4:

$$\sigma_{i/o} = \frac{3Q_{i/o}}{2\pi a_{i/o} b_{i/o}} \left[1 - \left(\frac{x}{a_{i/o}} \right)^2 - \left(\frac{y}{b_{i/o}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.24)$$

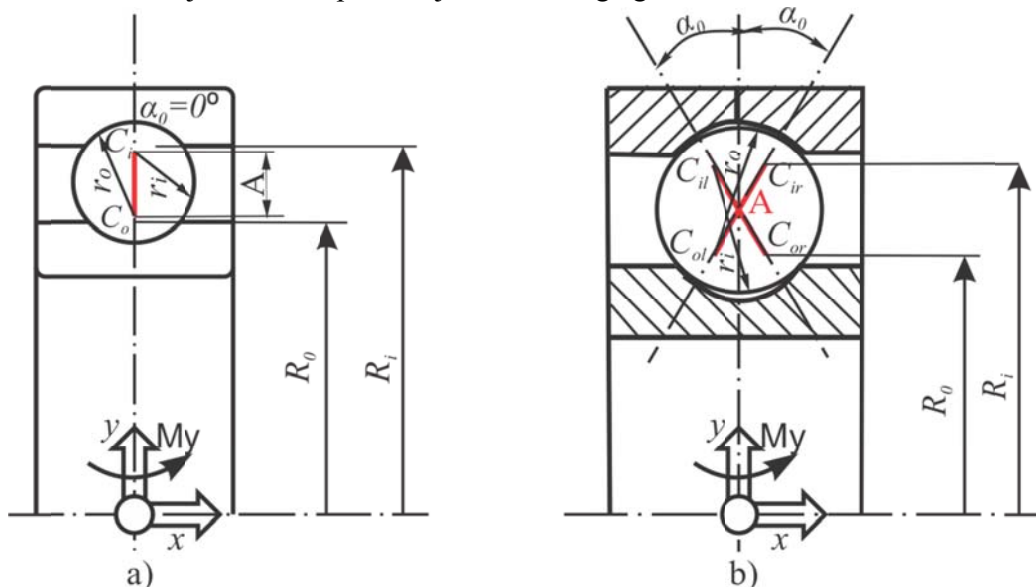


Slika 4.4 Raspodela napona na elipsastoj površini kontakta

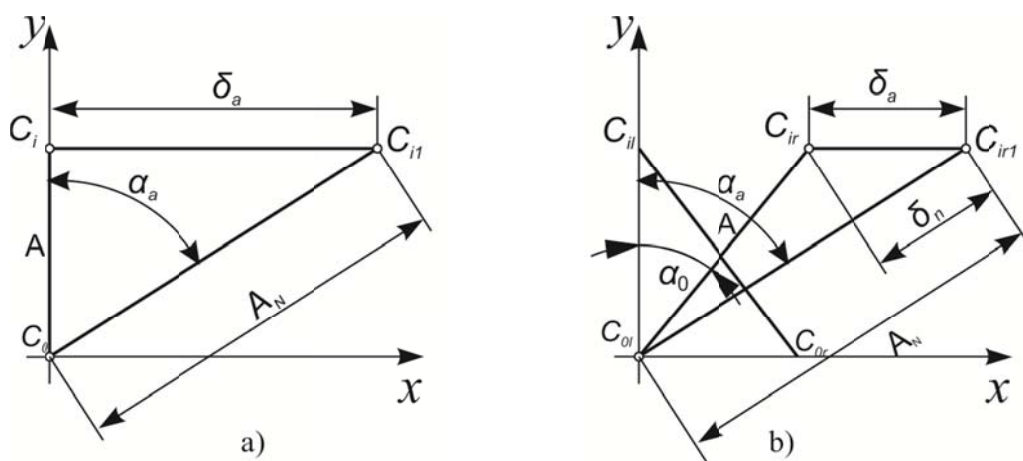
4.2 Raspodela opterećenja kugličnih ležaja

Kuglični ležaj se može ilustrovati u jednostavnom obliku kao što je prikazano na slici 4.5. Sposobnost kugličnog ležaja da prenosi opterećenja u velikoj meri zavisi od njegove unutrašnje geometrije. Takođe, sa slike 4.5 se vidi da je nominalni ugao kontakta definisan linijom koja prolazi kroz tačke kontakta kotrljajnih tela i staza kotrljanja i ravni upravne na osu obrtanja ležaja. U slučaju kada nema opterećenja, centri zakrivljenosti staza se nalaze na rastojanju $A = r_i + r_o - 2d_b$ kao što je prikazano na slici 4.5. Kod radijalnog ležaja u neopterećenom stanju nominalni ugao kontakta (α_0) jednak je nuli kao što se vidi sa slike 4.5a, dok je kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke (slika 4.5b) definisan preko relacije (2.19). Ako se pretpostavi da je spoljašnji prsten fiksni radijalni zazor kod oba tipa ležaja se može poništiti primenom aksijalnog opterećenja (prednaprezanjem) ili prelaskom u preklop. Usled aksijalnog opterećenja, rastojanje centra zakrivljenosti staza (A) se povećava za početnu kontaktnu deformaciju δ_n . Početna kontaktna deformacija i aksijalno pomeranje δ_a usled aksijalne sile F_a je prikazano na slici 4.6. Na ovoj slici je pretpostavljeno da je centar zakrivljenosti spoljašnje staze C_0 fiksni kod oba razmatrana ležaja. Aksijalno opterećenje F_a izaziva aksijalno pomeranje centra zakrivljenosti unutrašnje staze iz C_i do C_{i1} kod radijalnog ležaja (slika 4.6a). Kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke aksijalno opterećenje će izazvati pomeranje centra zakrivljenosti unutrašnje desne staze kotrljanja iz C_{ir} do C_{ir1} (slika 4.6b).

Ovo znači da će se pri čistom aksijalnom opterećenju, kontakt ostvarivati u dve tačke. Pri tome, kod oba ležaja dolazi do povećanja nominalnog ugla kontakta sa α_0 na α_a .



Slika 4.5 Šematski prikaz ležaja u neopterećenom stanju: a) radijalni ležaj; b) ležaj sa kontaktom u četiri tačke



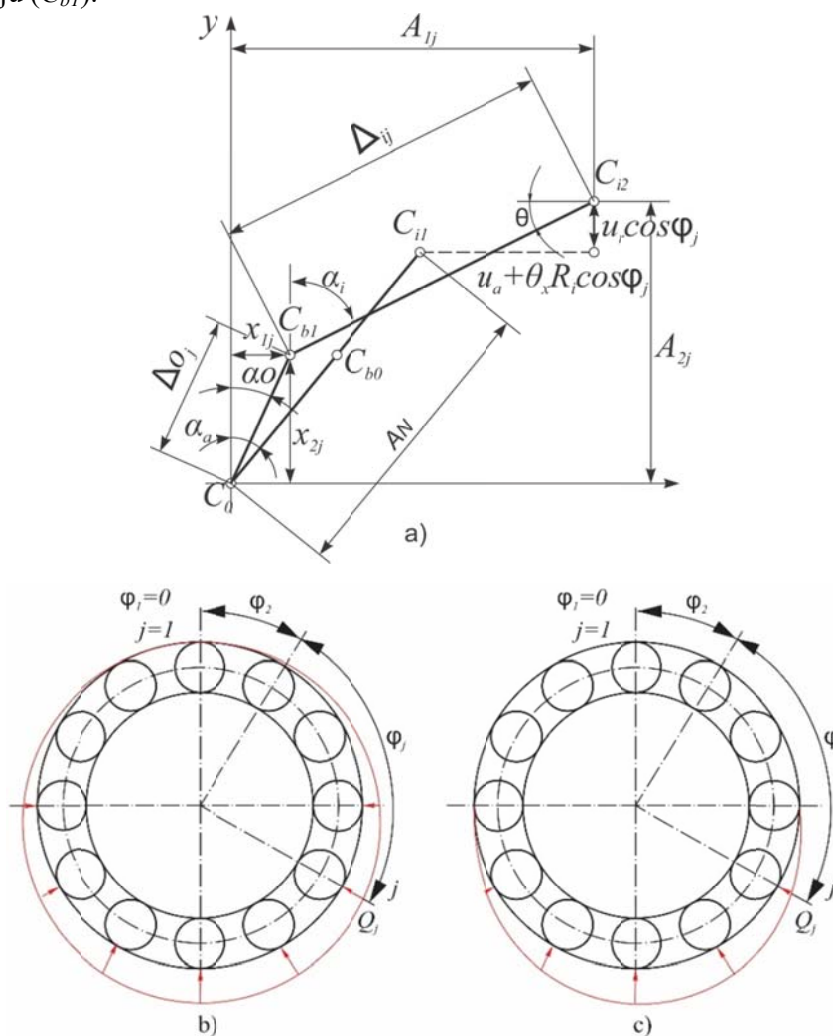
Slika 4.6 Šematski prikaz razmatranih ležaja nakon delovanja aksijalnog opterećenja kod: a) radijalnog ležaja; b) ležaja sa kontaktom u četiri tačke

4.2.1 Geometrija i odnos sila koje deluju na kuglični ležaj

4.2.1.1 Odnos sila kod radijalnog ležaja

Kada pored aksijalnog opterećenja deluju radijalno opterećenje i moment na radijalni ležaj, unutrašnji prsten je pomeren u odnosu na spoljašnji za aksijalno i radijalno pomeranje u_a i u_r i ugaono pomeranje θ kao što je prikazano na slici 4.7a. U tom slučaju kotrljajna tela neće biti ravnomernog opterećenja. Broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja će zavisti da li opterećenja deluju na prednapregnuti ležaj (slika 4.7b) ili na ležaj sa zazorom (slika 4.7c), i to važi za oba tipa razmatranih ležaja. Kada se povećava broj obrtaja centrifugalna sila

deluje na kotrljajana tela pa će se shodno tome kotrljajna tela kretati duž spoljašnje staze kotrljanja. Usled toga dolazi do promene pozicije centra kotrljajnih tela i centar zakrivljenosti staza kotrljanja neće biti kolinearna sa rastojanjem između centara staza kotrljanja (A). Takođe ni ugao kontakta sa stazama kotrljanja više neće biti isti. S druge strane ako su radijalno opterećenje i moment mnogo veći od aksijalnog opterećenja (ili je malo prednaprezanje) ili je radijalni zazor veliki, doći će do gubitka kontakta između kotrljajnih tela i staza kotrljanja u neopterećenoj zoni i pri malim brojevima obrtaja (malim vrednostima centrifugalne sile). Na slici 4.7a je predpostavljeno da je centar zakrivljenosti spoljašnje staze (C_o) fiksni u prostoru, i da se centar zakrivljenosti unutrašnje staze (C_{i1}) pomera relativno u odnosu na fiksni centar na poziciju (C_{i2}). Pri ovome se i centar kotrljajnog tela (C_{b0}) pomera u novu poziciju (C_{b1}).



Slika 4.7 a) Pozicija centra zakrivljenosti radijalnog ležaja nakon delovanja kombinovanog opterećenja; b) ugaona pozicija kotrljajnih tela i kontaktno opterećenje pri preklopu; c) ugaona pozicija kotrljajnih tela i kontaktno opterećenje pri zazoru

S obzirom da se unutrašnja ili spoljašnja staza obrću brzinom obrtanja obrtnog prstena, i centar kotrljajnih tela se obrće brzinom obrtanja kaveza, pa će pozicija kotrljajnih tela uvek biti definisana preko:

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{Z}(j-1), \quad n=1,2,3, \dots, Z \quad (4.25)$$

Kao što se vidi sa slike 4.6a, nakon primenjenog aksijalnog opterećenja rastojanje između centra zakrivljenosti staza kotrljanja (A) se povećava i novo rastojanje A_N se može definisati kao:

$$A_N = \frac{A}{\cos \alpha_a} \quad (4.26)$$

Kada se ležaj deformiše pod dejstvom spoljašnjeg kombinovanog opterećenja, rastojanje između centara zakrivljenosti unutrašnje staze i nove pozicije centra kotrljajnog tela i rastojanje između spoljašnje staze i nove pozicije centra kotrljajnog tela su:

$$\Delta_{i/o(j)} = (f_{i/o} - 0,5)d_b + \delta_{i/o(j)} \quad (4.27)$$

U skladu sa slikom 4.7a, radijalno i aksijalno rastojanje između pozicije centra zakrivljenosti, uzimajući u obzir novo rastojanje A_N , ugao kontakta nakon primenjenog aksijalnog opterećenja je:

$$\begin{aligned} A_{1j} &= A_N \sin \alpha_a + u_a + \theta_y R_i \sin(\varphi_j) \\ A_{2j} &= A_N \cos \alpha_a + u_r \cos(\varphi_j) \pm G_r \end{aligned} \quad (4.28)$$

U prethodnim relacijama znak $-G_r$ se uzima u slučaju zazora, a znak $+G_r$ u slučaju prekopa.

Sa slike 4.7a se dobija jednačina ravnoteže kinematskih ograničenja između kotrljajnih tela i staza kotrljanja:

$$\begin{aligned} [A_{1j} - X_{1j}]^2 + [A_{2j} - X_{2j}]^2 - \Delta_{ij}^2 &= 0 \\ X_{1j}^2 + X_{2j}^2 - \Delta_{oj}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Jednačina ravnoteže sila na kotrljajno telo u zoni opterećenja sa slike 4.1a glasi:

$$\begin{aligned} Q_{oj} \cos \alpha_{oj} - Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - \frac{M_{gj}}{d_b} (\sin \alpha_o - \sin \alpha_i) - F_{cj} &= 0 \\ Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - Q_{ij} \sin \alpha_{ij} + \frac{M_{gj}}{d_b} (\sin \alpha_o - \sin \alpha_i) &= 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Odnos između lokalnih *Hertz-ovih* kontaktnih sila $Q_{(j)}$ i ugiba $\delta_{(j)}$ između kotrljajnog tela i unutrašnje/spoljašnje staze kotrljanja se može napisati kao:

$$Q_{i,o(j)} = K_{i,o} \left(\delta_{i,o}^{3/2} \right)_j \quad (4.31)$$

U prethodnim izrazima indeksi i, o označavaju unutrašnju i spoljašnju stazu kotrljanja respektivno, $j = 1, 2, 3, \dots, Z$, gde je Z broj kotrljajnih tela; $K_{i/o}$ je *Hertz-ova* kontaktna krutost. Prethodna relacija važi za slučaj kada je $\delta_{i(j)} > 0$. Kada su kotrljajna tela van zone opterećenja ugao kontakta sa spoljašnjom stazom kotrljanja je jednak nuli, kao i giroskopski moment. U tom slučaju relacija (4.31) glasi:

$$\begin{aligned} Q_{i(j)} &= 0 \\ Q_{o(j)} &= F_{cj} \end{aligned} \quad (4.32)$$

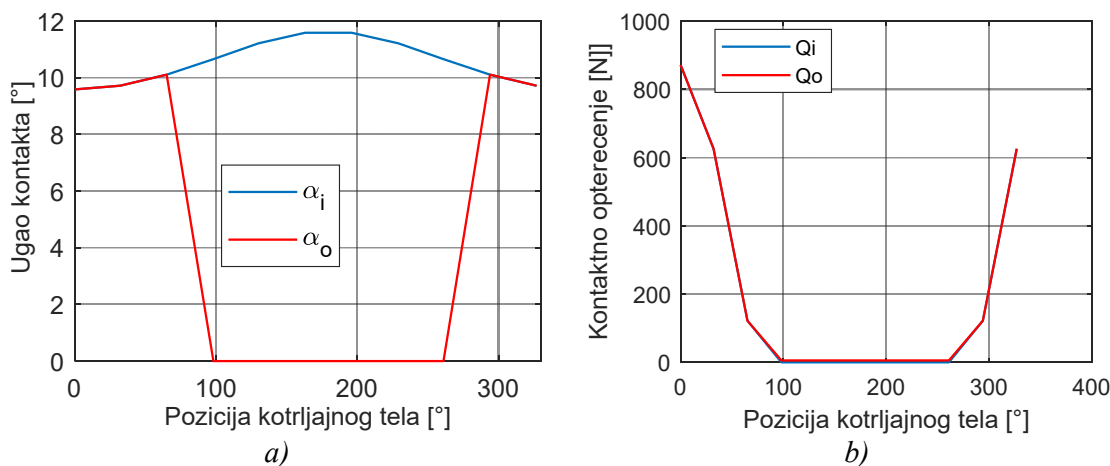
Kotrljajna tela koja su u zoni opterećenja uvek ostvaruju kontakt sa stazama kotrljanja, u tom slučaju mora biti ispunjen uslov:

$$\sqrt{\left(A_{1j}^2 + (A_{2j} - \Delta_{oj})^2\right)} \leq (f_i - 0,5) d_b \quad (4.33)$$

Da bi se odredile vrednosti relativnog pomeranja prstenova za poznato spoljašnje opterećenje, formirane su jednačine delovanja sila na prstenove ležaja kao:

$$\begin{aligned} F_{(i,o)x} &= \sum_{j=1}^Z \left(Q_{i,o(j)} \sin \alpha_{i,o(j)} + \frac{M_{gj}}{d_b} \cos \alpha_{i,o(j)} \right) \\ F_{(i,o)y} &= \sum_{j=1}^Z \left(\pm Q_{i,o(j)} \cos \alpha_{i,o(j)} \mp \frac{M_{gj}}{d_b} \sin \alpha_{i,o(j)} \right) \cos \varphi_j \\ M_{(i,o)y} &= \pm \sum_{i=1}^Z \left\{ r_{i,o} \left(Q_{i,o(j)} \sin \alpha_{i,o(j)} + \frac{M_{gj}}{d_b} \cos \alpha_{i,o(j)} \right) \mp f_{i,o} M_{gj} \right\} \sin \varphi_j \end{aligned} \quad (4.34)$$

Na slici 4.8 je prikazana promena ugla kontakta radijalnog ležaja pri delovanju aksijalnog opterećenja $F_a = 400$ N i radijalnog opterećenja $F_r = 2000$ N za broj obrtaja $n = 1800$ o/min za zazor $G_r = 20$ μ m.



Slika 4.8 Promena: a) ugla kontakta; b) kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela kod radijalnog ležaja

Usled delovanja sila inercije i kombinovanog opterećenja na kotrljajna tela dolazi do neravnomerne raspodele kontaktnih sila i neravnomerne promene ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela kao što je prikazano na slici 4.8. Posledica ovoga je promena krutosti ležaja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela. U ovom radu koeficijenti krutosti za svako kotrljajno telo predstavljaju kombinaciju uticaja kinematskih i elastičnih svojstava na ležaj. Krutost ležaja se sastoji od niza kombinovanih krutosti kotrljajnog tela / unutrašnja staza kotrljanja i kotrljajnog tela / spoljašnja staza kotrljanja. Prema tome, aksijalna (k_{xx}) i radijalna (k_{yy}) krutost ležaja su:

$$k_{xx(j)} = \frac{1}{\frac{1}{k_{ixx(j)}} + \frac{1}{k_{oxx(j)}}}; k_{yy(j)} = \frac{1}{\frac{1}{k_{iyj(j)}} + \frac{1}{k_{oyy(j)}}} \quad (4.35)$$

Radijalna i aksijalna krutost za kontaktnu krutost kotrljajnih tela sa unutrašnjom i spoljašnjom stazom kotrljanja, uzimajući u obzir elastičnost, se može izračunati kao:

$$k_{(i,o)xx} = \left(1,5K_{(i,o)j} \delta_{(i,o)j}^{0,5}\right) \sin \alpha_{(i,o)j} \quad (4.36)$$

$$k_{(i,o)yy} = \left(1,5K_{(i,o)j} \delta_{(i,o)j}^{0,5}\right) \cos \alpha_{(i,o)j}$$

Uglovi kontakta sa spoljašnjom (α_o) i unutrašnjom (α_i) stazom kotrljanja se određuju sa slike 4.7a:

$$\tan \alpha_{oj} = X_{1j} / X_{2j} \quad (4.37)$$

$$\tan \alpha_{ij} = (A_{1j} - X_{1j}) / (A_{2j} - X_{2j})$$

4.2.1.2 Odnos sila kod kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke

Na slici 4.9 je prikazana unutrašnja kinematika kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke, odnosno pozicija centra kotrljajnog tela i pozicija centra zakrivljenosti unutrašnje staze kotrljanja sa i bez delovanja kombinovanog opterećenja na kotrljajna tela u odnosu na centar zakrivljenosti spoljašnje staze, za koji se u ovom slučaju pretpostavlja da je fiksni. Prikazane pozicije centra kotrljajnog tela na slici 4.9, označene sa W , V , α_{ir} , α_{il} , α_{or} , α_{ol} , Δ_{ir} , Δ_{il} , Δ_{or} i Δ_{ol} su aksijalne i radijalne komponente pozicije centra kotrljajnog tela, ugao kontakta sa unutrašnjom desnom i levom, kao i sa spoljašnjom desnom i levom stazom kotrljanja i rastojanje između centra kotrljajnog tela i centra zakrivljenosti sa unutrašnjom desnom i levom, odnosno spoljašnjom desnom i levom stazom kotrljanja. Pri delovanju spoljašnjeg kombinovanog opterećenja na kotrljajna tela, usled različitih uglova kontakta između kotrljajnog tela i spoljašnje, odnosno unutrašnje staze kotrljanja, linija delovanja opterećenja neće biti kolinearna sa rastojanjem između centara.

Svi elementi ležaja se deformišu pod dejstvom spoljašnjeg kombinovanog opterećenja, odnosno, dolazi do relativnog pomeranja unutrašnjeg prstena u odnosu na spoljašnji prsten koji je fiksni. Usled ovih promena dolazi do menjanja rastojanja između centra zakrivljenosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja i nove pozicije centra kotrljajnog tela. Prema tome, pri delovanju kombinovanog opterećenja dolazi do relativnog pomeranja

unutrašnjeg prstena u odnosu na spoljašnji za veličinu aksijalnog i radijalnog pomeranja u_a , u_r kao i ugaonog pomeranja θ (slika 4.9). Pri ovome se centar zakrivljenosti desne staze kotrljanja (C_{ir0}) pomera u novu poziciju (C_{ir1}) pri čemu se i centar zakrivljenosti leve staze kotrljanja pomera iz početne pozicije (C_{il0}) u novu poziciju (C_{il1}). U ovom slučaju kotrljajna tela će ostvarivati kontakt sa stazama kotrljanja u tri ili četiri tačke, što će zavisiti od veličine aksijalnog opterećenja i veličine zazora/preklopa u ležaju.

Nakon primenjenog aksijalnog opterećenja rastojanje između centra zakrivljenosti staza kotrljanja (A) se povećava i novo rastojanje A_N kao što je prikazano na slici 4.6b se može definisati kao:

$$A_N = A \cos(\alpha_a - \alpha_0) + \delta_n \quad (4.38)$$

Kada se ležaj deformiše pod dejstvom dodatnog radijalnog opterećenja i momenta, rastojanje između centara zakrivljenosti desne unutrašnje staze i nove pozicije centra kotrljajnog tela i rastojanje između leve spoljašnje staze i nove pozicije centra kotrljajnog tela su:

$$\begin{aligned} \Delta_{i,r(j)} &= (f_{i/o} - 0,5)d_b + \delta_{i,r(j)} \\ \Delta_{o,l(j)} &= (f_{i/o} - 0,5)d_b + \delta_{o,l(j)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Na isti način se definišu i ostala rastojanja centara zakrivljenosti:

$$\begin{aligned} \Delta_{i,l(j)} &= (f_{i/o} - 0,5)d_b + \delta_{i,l(j)} \\ \Delta_{o,r(j)} &= (f_{i/o} - 0,5)d_b + \delta_{o,r(j)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

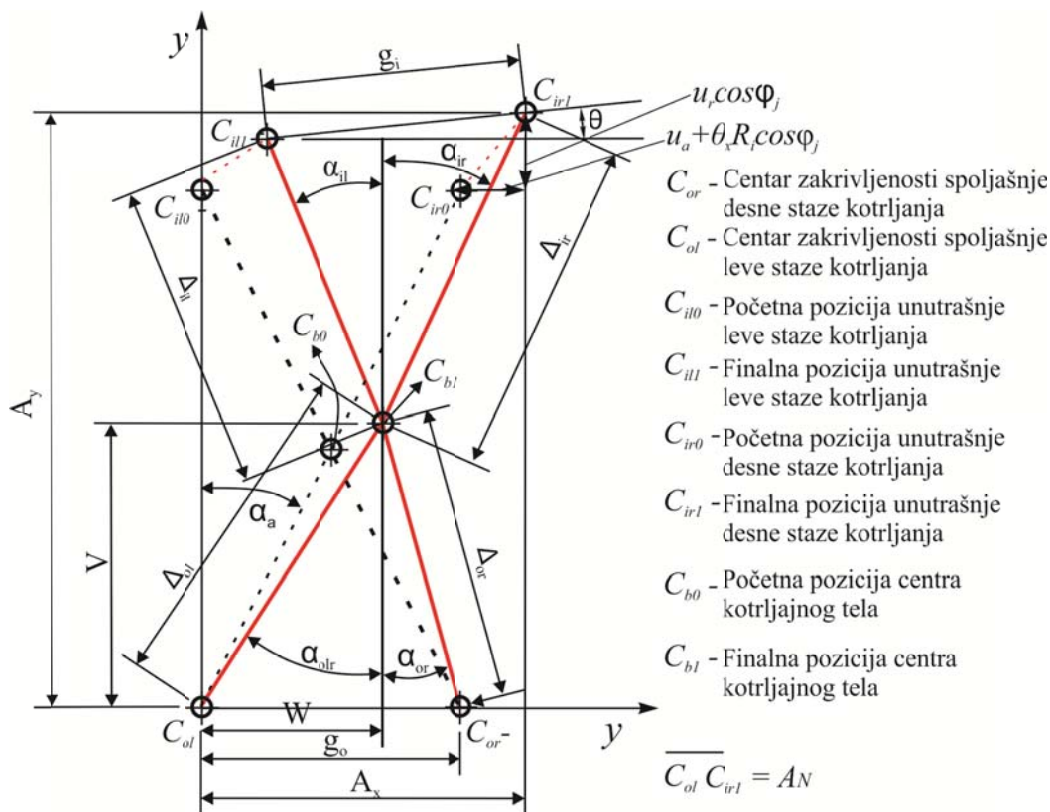
Rastojanje između dve pozicije vektora centra zakrivljenosti unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja se može razložiti na radijalni (A_y) i aksijalni (A_x) pravac i prema slici 4.9 za bilo koju poziciju kotrljajnog tela je:

$$\begin{aligned} A_x &= A_N \sin \alpha_a + u_a + \theta_y R_i \sin(\varphi_j) \\ A_y &= A_N \cos \alpha_a + u_r \cos(\varphi_j) \pm G_r \end{aligned} \quad (4.41)$$

Kao i kod radijalnog ležaja - G_r se uzima u slučaju zazora, a znak + G_r u slučaju prekopa.

Jednačine ravnoteže kinematskih ograničenja između kotrljajnih tela i staza kotrljanja sa slike 4.9 su:

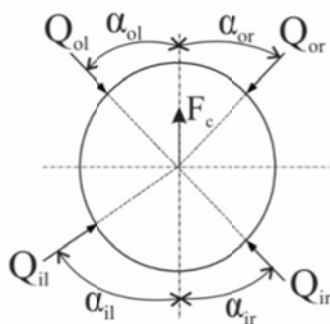
$$\begin{aligned} [A_{yj} - V_j]^2 + [A_{yj} - W_j]^2 - \Delta_{il,j}^2 &= 0 \\ [A_{yj} - V_j - g_i \sin \theta]^2 + [g_i \cos \theta - A_{yj} + W_j]^2 - \Delta_{ir,j}^2 &= 0 \\ V_j^2 + W_j^2 - \Delta_{or,j}^2 &= 0 \\ V_j^2 + (g_o - W_j)^2 - \Delta_{ol,j}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$



Slika 4.9 Pozicija centra kotrljajnog tela i centra zakrivljenosti staza kotrljanja pre i posle delovanja kombinovanog opterećenja

Pošto je model kvazistatički, svako kotrljajno telo mora biti u stanju statičke ravnoteže. Jednačine ravnoteže za svako kotrljajno telo prema slici 4.10 su:

$$\begin{aligned} Q_{il} \sin \alpha_{il} + Q_{ol} \sin \alpha_{ol} - Q_{ir} \sin \alpha_{ir} - Q_{or} \sin \alpha_{or} &= 0 \\ Q_{il} \cos \alpha_{il} + Q_{ir} \cos \alpha_{ir} - Q_{ol} \cos \alpha_{ol} - Q_{or} \cos \alpha_{or} + F_c &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$



Slika 4.10 Delovanje kontaktnih opterećenja na kotrljajno telo

Nelinearne jednačine pomeranja (4.42), kao i jednačine ravnoteže (4.43) se rešavaju simultano koristeći iterativni *Newton-Raphson-ov* metod za određivanje nepoznatih V , W , δ_{il} , δ_{ir} , δ_{or} i δ_{ol} .

Za svaki kontakt između kotrljajnog tela i staze kotrljanja, kontaktno opterećenje se može izraziti kao u jednačini (4.31), pod uslovom da je $\delta > 0$. Kada su kotrljajna tela van

zone opterećenja, ugao kontakta sa spoljašnjom desnom i levom stazom kotrljanja je jednak nuli. U tom slučaju relacija (4.31) glasi:

$$\begin{aligned} Q_{i,l(j)} &= Q_{i,r(j)} = 0 \\ Q_{o,l(j)} &= Q_{i,r(j)} = F_{cj}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

Da bi sva kotrljajna tela bila u kontaktu sa stazama kotrljanja mora biti ispunjen uslov:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(A_{xj}^2 + (A_{yj} - \Delta_{o,rj})^2\right)} &\leq (f_i - 0,5)d_b \\ \sqrt{V_j^2 + (g_o - W)_j^2 - \Delta_{ol,j}^2} &\leq (f_i - 0,5)d_b \end{aligned} \quad (4.45)$$

Uglovi kontakta sa spoljašnjom desnom i levom ($\alpha_{o,r}$, $\alpha_{o,l}$) i unutrašnjom desnom i levom ($\alpha_{i,r}$, $\alpha_{i,l}$) stazom kotrljanja se određuju sa slike 4.9:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{i,l(j)} &= \frac{A_{x(j)} - W_{(j)}}{A_{y(j)} - V_{(j)}} & \operatorname{tg} \alpha_{o,l(j)} &= \frac{g_o - W_{(j)}}{V_{(j)}} \\ \operatorname{tg} \alpha_{i,r(j)} &= \frac{g_i \cos(\theta_{(j)}) - A_{x(j)} + W_{(j)}}{A_{y(j)} - V_{(j)} - g_i \sin(\theta_{(j)})} & \operatorname{tg} \alpha_{o,r(j)} &= \frac{W_{(j)}}{V_{(j)}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sile reakcije ležaja dobijaju se sabiranjem komponenti sile za svaki kontakt unutrašnjeg prstena.

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{j=1}^z [Q_{il,j} \sin \alpha_{il,j} - Q_{ir,j} \sin \alpha_{ir,j}] \\ F_y &= \sum_{j=1}^z [Q_{il,j} \cos \alpha_{il,j} + Q_{ir,j} \cos \alpha_{ir,j}] \cos \varphi \\ M_y &= \sum_{j=1}^z [Q_{il,j} \cos \alpha_{il,j} + Q_{ir,j} \cos \alpha_{ir,j}] \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.47)$$

Analogno radijalnom ležaju aksijalna (k_{xx}) i radijalna (k_{yy}) krutost ležaja su:

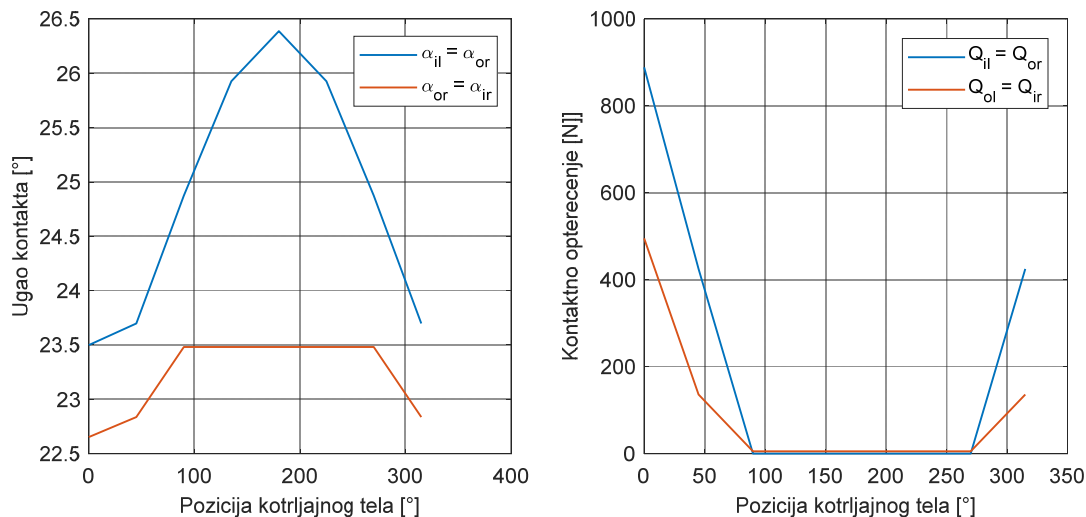
$$k_{xx(j)} = \frac{1}{\frac{1}{k_{ix(j)}} + \frac{1}{k_{ox(j)}}}; k_{yy(j)} = \frac{1}{\frac{1}{k_{iy(j)}} + \frac{1}{k_{oy(j)}}} \quad (4.48)$$

Radijalna i aksijalna krutost za kontaktnu krutost kotrljajnih tela sa unutrašnjom i spoljašnjom stazom kotrljanja uzimajući u obzir prethodno se izračunava kao:

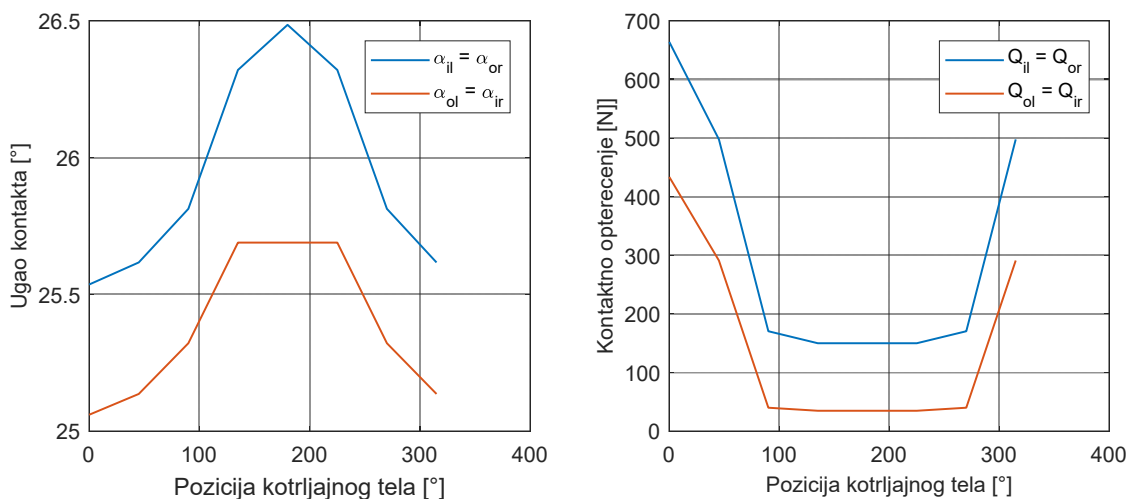
$$\begin{aligned} k_{(i,o),m(x)} &= \left(1, 5K_{(i,o)j} \delta_{(i,o,m)j}^{0,5}\right) \sin \alpha_{(i,o,m)j} \\ k_{(i,o),m(y)} &= \left(1, 5K_{(i,o)j} \delta_{(i,o,m)j}^{0,5}\right) \cos \alpha_{(i,o,m)j} \end{aligned} \quad (4.49)$$

gde indeks m označava levu ili desnu stazu kotrljanja.

Na slici 4.11 je prikazana promena ugla kontakta i kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela za zazor $G_r = 20 \mu\text{m}$, pri delovanju spoljašnjeg opterećenja $F_a = 400 \text{ N}$ i $F_r = 2000 \text{ N}$. Promena ugla kontakta i kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela za preklop $G_r = 20 \mu\text{m}$ za isti slučaj opterećenja je prikazana na slici 4.12.



Slika 4.11 Promena: a) ugla kontakta; b) kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke za zazor $G_r = 20 \mu\text{m}$



Slika 4.12 Promena: a) ugla kontakta; b) kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke za preklop $G_r = 20 \mu\text{m}$

4.3 Određivanje veka kugličnog ležaja

Maksimalno kontaktno opterećenje na stazama kotrljanja utiče na smanjenje veka ležaja. U skladu sa *Ludenberg-Palmgren-ovom* teorijom vek ležaja se može odrediti kao:

$$L_{10} = \left(\frac{C_p}{Q_e} \right)^3 \cdot 10^6 [\text{obrtaja}] \quad (4.50)$$

Pošto je jednačina L_{10} jedino što je trenutno dostupno u literaturi, ona će se jednostavno proširiti tako da obuhvati sve četiri tačke kontakta, kako bi se uzelo u obzir dodatno klizanje u ležaju sa kontaktom u četiri tačke. U slučaju kotrljajnog tela sa četiri tačke dodira, nasuprot samo dve tačke dodira, jasno je da se ciklusi naprezanja kotrljajnog tela moraju povećati, a samim tim i kumulativna oštećenja od zamora; ipak sledeći proračuni L_{10} ovo nisu u stanju da objasne. Dinamička nosivost ležaja će se izračunati za svaku tačku kontakta. Po *Harris-u* [30], dinamička nosivost ležaja u tački kontakta na stazi kotrljanja definisana je jednačinom (4.51) za prečnike kotrljajnih tela do 25,4 mm i jednačinom (4.52) za veća kotrljajna tela.

$$C_p = A_p \left[\frac{2f}{2f-1} \right]^{0,41} \frac{(1 \mp \gamma)^{1,39}}{(1 \pm \gamma)^{1/3}} \left[\frac{d}{d_m} \right]^{0,3} \frac{d^{1,8}}{Z^{1/3}} \quad (4.51)$$

$$C_p = A_p \left[\frac{2f}{2f-1} \right]^{0,41} \frac{(1 \mp \gamma)^{1,39}}{(1 \pm \gamma)^{1/3}} \left[\frac{d}{d_m} \right]^{0,3} \frac{d^{1,4}}{Z^{1/3}} \quad (4.52)$$

Gde je f odnos radijusa staza kotrljanja. Gornji znak u jednačini (4.51) i (4.52) se odnosi na unutrašnje staze kotrljanja, a donji znak se koristi za kontakte sa spoljašnjim stazama. Sa definisanom dinamičkom nosivošću jednog kontakta, sledeći korak je uspostavljanje veka svake staze kotrljanja. Vek svake staze kotrljanja, izražen u obrtajima, utvrđuje se po *Harris-u* [30] za pokretne i nepokretne staze kotrljanja. Ove dve jednačine će se ponoviti za levu i desnu stazu kotrljanja kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke.

Vek L_{10} za pokretnu stazu kotrljanja glasi:

$$L_{10r,r} = \left(\frac{C_p}{\left[\frac{1}{Z} \sum_{n=1}^z Q_n^3 \right]^{1/3}} \right)^3 10^6 \quad (4.53)$$

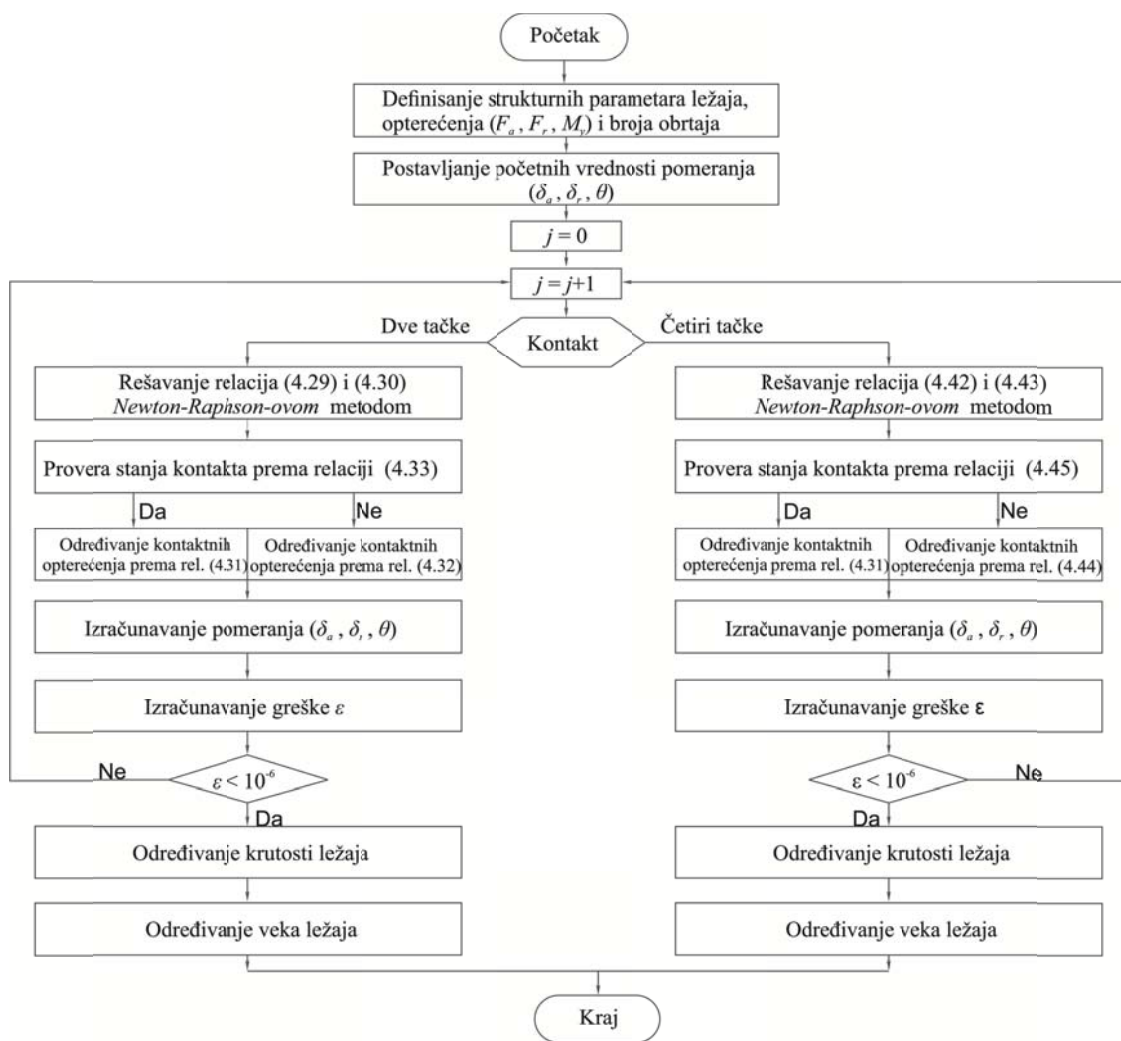
Vek L_{10} za stazu kotrljanja koja je nepokretna u odnosu na spoljašnje opterećenje je:

$$L_{10r,s} = \left(\frac{C_p}{\left[\frac{1}{Z} \sum_{n=1}^z Q_n^{10/3} \right]^{3/10}} \right)^3 10^6 \quad (4.54)$$

Vek svake staze kotrljanja se zatim kombinuje da bi se odredio ukupan vek ležaja. U slučaju ležaja sa kontaktom u četiri tačke, konačan vek L_{10} , izražen brojem obrtaja, postaje:

$$L_{104Pt} = \left[\frac{1}{L_{10il}^{10/9}} + \frac{1}{L_{10ir}^{10/9}} + \frac{1}{L_{10or}^{10/9}} + \frac{1}{L_{10ol}^{10/9}} \right]^{-9/10} \quad (4.55)$$

Dijagram toka za analizu kugličnih ležaja je prikazan na slici 4.13. Nakon definisanja potrebnih geometrijskih podataka i eksplicitnih uslova definišu se pretpostavljene vrednosti relativnog pomeranja prstenova (u_a , u_r , θ). Za početne uslove se rešavaju kinematske jednačine ravnoteže, kao i jednačine ravnoteže opterećenja koje deluju na kotrljajno telo da bi se odredili parametri koji definišu poziciju centra kotrljajnih tela kao i deformacija na kontaktu između kotrljajnih tela i staza kotrljanja primenom *Newton-Raphson-ove* metode za svaku poziciju kotrljajnog tela. Nakon toga se procenjuje stanje kontakta sa unutrašnjom stazom kotrljanja preko odgovarajućih relacija u zavisnosti koji se ležaj posmatra. Ako je zadovoljen uslov da su kotrljajna tela u kontaktu sa unutrašnjom stazom kotrljanja onda se, preko relacije (4.31) određuju kontaktna opterećenja za sva kotrljajna tela. U suprotnom se određuju kontaktna opterećenja samo za kotrljajna tela u kontaktu preko relacija (4.32), odnosno, (4.44). Nakon toga se na bazi jednačina ravnoteže delovanja spoljašnjih sila za izračunate deformacije i poznatih sila određuju nove vrednosti pomeranja (u_a , u_r , θ). Ako je greška ispod postavljene vrednosti određuje se krutost ležaja, kao i njegov vek.

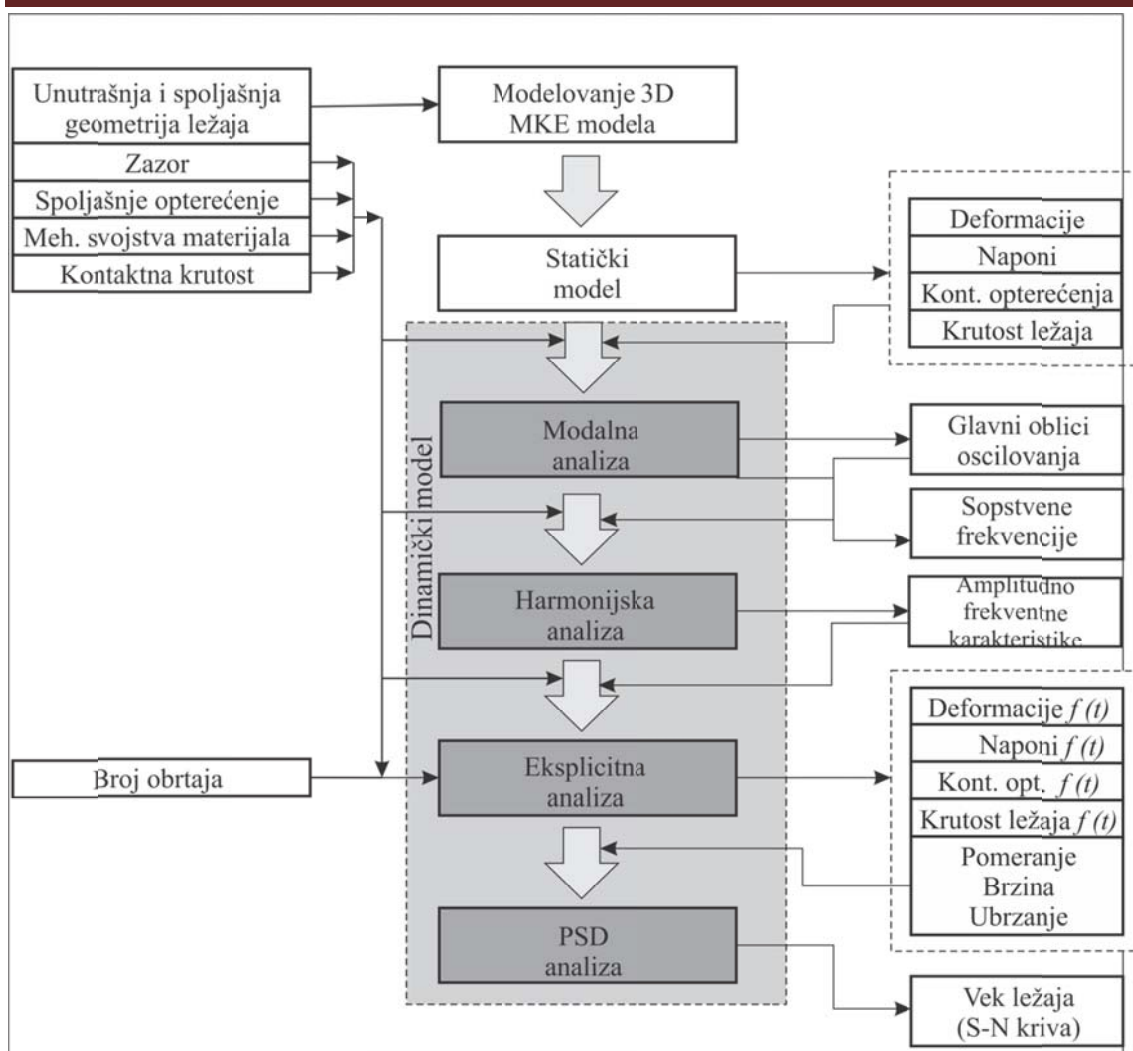


Slika 4.13 Algoritam matematičkog modela za kvazistatičku anallizu ponašanja kugličnih ležaja

5 DEFINISANJE NUMERIČKOG MODELA LEŽAJA PRIMENOM MKE

Sveobuhvatna analiza kugličnih ležaja podrazumeva kompleksno ispitivanje parametara koji utiču na ponašanje ležaja u eksploataciji. Za ovakve analize se moraju koristiti metode koje omogućavaju uzimanje u obzir što većeg broja parametara koji definišu elemente strukture ležaja i uslove za njegovo funkcionisanje pri različitim eksploatacionim uslovima. Posebno treba uzeti u obzir uticaj broja obrtaja, zazora, opterećenja, kao i promenu elastičnih deformacija na dinamičke karakteristike ležaja. Kotrljajni ležaji su praktično složeni za simulaciju, zbog nelinearnosti samog sistema, složenosti mehaničkih pojava i fenomena koji se dešavaju u samom ležaju tokom eksploatacije. Da bi se ispitaio uticaj konstrukcionih i eksploatacionih parametara na ponašanje kugličnih ležaja, u radu je pored kvazistatičkog modela razvijen i numerički model kugličnih ležaja, modelovan u programskom sistemu opšte namene, baziranom na metodi konačnih elemenata (MKE). Prikazani model se sastoji iz statičkog i dinamičkog modela. Šematski prikaz modelovanja mehaničkog ponašanja kugličnih ležaja je dat na slici 5.1.

Da bi se pronašli početni uslovi (dobra početna aproksimacija, zadovoljavajuća veličina i broj konačnih elemenata) za dinamičku analizu, prvo se sprovodi statička nelinearna analiza, odnosno, dobijaju se rešenja u vidu pomeranja, napona na stazama kotrljanja i kotrljajnim telima kao rezultat delovanja spoljašnjeg opterećenja. Nelinearne jednačine se rešavaju korišćenjem *Newton-Raphson-ove* metode. U sledećem koraku se određuju modovi oscilovanja i sopstvene frekvencije na bazi linearizovanih matrica krutosti dobijenih u statičkoj analizi. U trećem koraku se eksplicitnom dinamičkom analizom dobijaju promene ubrzanja, brzine, pomeranja, napona na elementima ležaja tokom vremena u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja, zazora i broja obrtaja ležaja. Za rešavanje jednačina u eksplicitnoj dinamičkoj analizi se koristi solver koji se bazira na vremenskom integracionom algoritmu zasnovanom na metodi centralne razlike. Prethodno, znači da se za određivanje nepoznatih veličina u trenutku vremena ($t+\Delta t$) koristi veličine (pomeranja, ubrzanja, napone itd.) i njihove izvode u vremena (t).



Slika 5.1 Šematski pregled toka modelovanja mehaničkog ponašanja kugličnih ležaja

U poslednjoj fazi se na osnovu ubrzanja dobijenog u eksplicitnoj analizi za određene eksploatacione uslove, određuje vek ležaja primenom spektralne gustine amplitude (*Power Density Spectar* PSD). Svrha ove analize je utvrđivanje pojedinih statističkih svojstava odziva strukture, obično standardnim odstupanjem (1σ , 2σ , 3σ) pomeranja, sile ili napona da bi se odredio vek zamora konstrukcije.

5.1 Statički MKE model

5.1.1 Definisane i izbor mreže konačnih elemenata

Diskretizacija modela je važan korak u analizi konačnih elemenata, jer tačnost rezultata zavisi od kvaliteta mreže, veličine i odnosa stranica elemenata. Elementi sa lošom razmerom konačnih elemenata mogu dovesti do ozbiljnih (elementarnih) izobličenja ili smanjenja krutosti konačnog elementa usled korišćenja manjeg broja čvorova za predstavljanje elementa.

Postoji nekoliko uslova koji su ključni za tačno modelovanje mehaničkog ponašanja ležaja u realnom vremenu.

Tokom rada ležaja, kotrljajna tela moraju da imaju neprekidni kontakt kotrljanja sa spoljnjom i unutrašnjom stazom kotrljanja kako bi preneli opterećenje između staza. Za diskretizaciju kotrljajnih tela i prstenova ležaja, optimalna veličina elementa je određena na osnovu usaglašenosti rezultata statičke analize sa sledeća dva uslova:

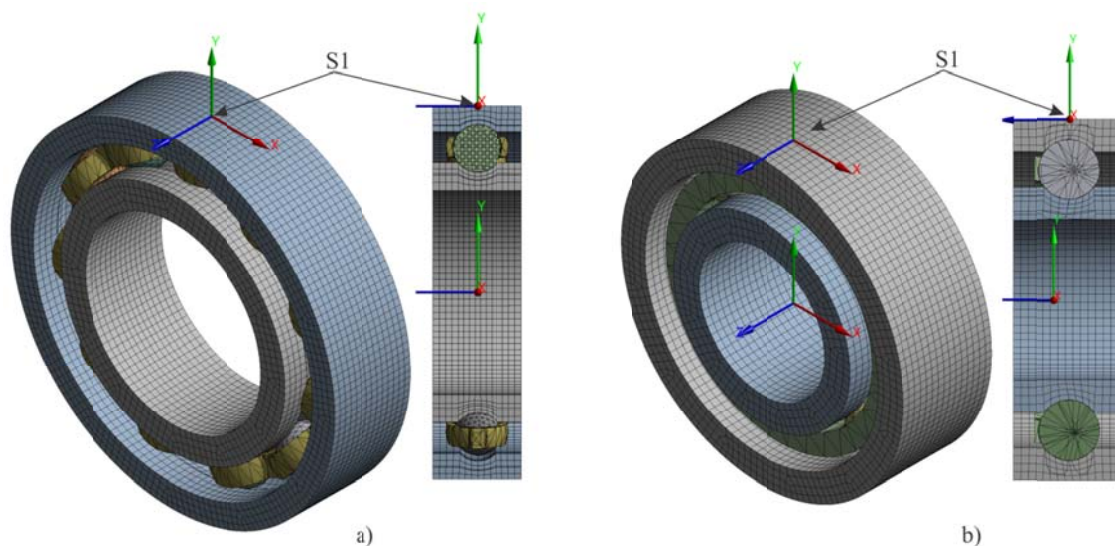
1. površine staza kotrljanja i kotrljajnih tela koji su ispod uticaja zone opterećenja, treba da budu u kontaktu sve vreme tokom simulacije;
2. kotrljajna tela treba da se pretežno kotrljaju i ne klize po stazama kotrljanja tokom simulacije.

Međutim, u praksi postoji mali koeficijent klizanja ili klizanja povezana sa kotrljajnim telima. Ispunjavanje prvog uslova je neophodno da bi se postigla tačna raspodela opterećenja na kotrljajnim telima. Ispunjavanje drugog uslova je neophodno za precizno postizanje ugaone brzine kotrljajnih tela i kaveza što bi na kraju rezultiralo tačnim predviđanjem kinematike ležaja; odnosno frekvencija elemenata ležaja tokom simulacije u eksplicitnoj analizi.

Prema tome, prethodna dva stanja su međusobno povezana, jer će gubitak kontakta kotrljajnog tela sa stazom kotrljanja (ili stazama kotrljanja) uticati na ugaonu brzinu kotrljajnih tela, što rezultira njihovim klizanjem, i na kraju netačnim izračunavanjem karakterističnih frekvencija elemenata ležaja.

Da bi prethodno navedeni uslovi bili zadovoljeni statički model je iskorišćen za test konvergencije mreže, na osnovu čega se odredio optimalni broj elemenata na modelu, odnosno, optimalne veličine konačnog elementa. Pri ovome, je posmatran broj, odnosno, veličina konačnih elemenata prstenova, odnosno elemenata koji leže na stazama kotrljanja, pošto se opterećenje od kotrljajnih tela prenose na njih. Početni (inicijalni) broj konačnih elemenata je iznosio od 150 do 11352 konačnih elemenata u zavisnosti od razmatranog ležaja. Veličina konačnog elementa za diskretizaciju kotrljajnih tela i kaveza je bila konstantna i iznosila je 0,5 mm, za ležaj 6006 i 1 mm za ležaj LSQFR 308. Za ovu analizu je primenjeno radijalno opterećenje ležaja u pravcu Y -ose ($F_r = 2500$ N za ležaj 6006 i $F_r = 4500$ N za ležaj LSQFR 308. Vrednosti sila odogovaraju polovini maksimalne sile, kojom su ovi ležaji izloženi u eksploataciji.) na unutrašnji prsten, pri čemu je posmatrano pomeranje tačke S1 koja se nalazi na spoljašnjem prstenu ležaja, kao što je prikazano na slici 5.2. Ova tačka je izabrana jer se koristi kao lokacija davača brzine i ubrzanja kako pri eksperimentalnim ispitivanjima vibracija, tako i pri matematičkom modelovanju dinamičkog ponašanja. S duge strane, su posmatrani maksimalni ekvivalentni naponi na stazama kotrljanja, odnosno, moguća greška i lokacija greške usled nedovoljne veličine konačnih elemenata.

Modelovanje mehaničkog ponašanja je vršeno za kuglične ležaje FKL 6006 kao tipičnog predstavnika radijalnih ležaja i ležaj FKL LSQFR 308 kao predstavnika kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke. U tabeli 5.1 su prikazane geometrijske karakteristike analiziranih ležaja.



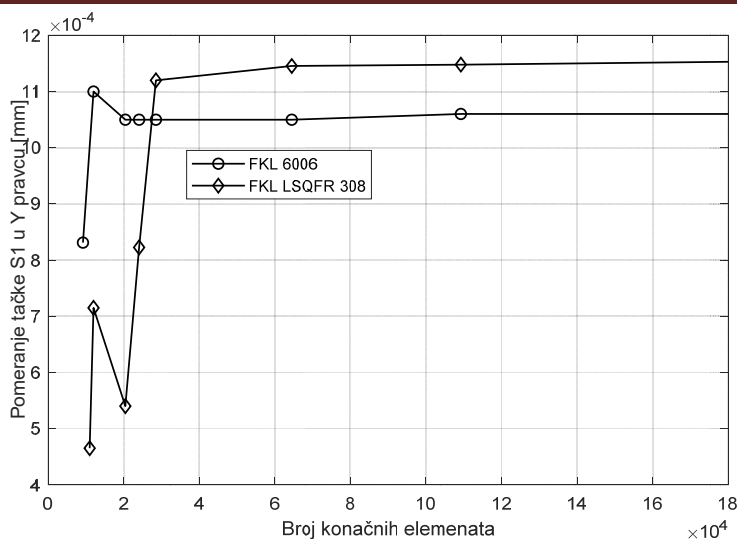
Slika 5.2 Diskretizovani analizirani modeli ležaja: a) FKL 6006; b) FKL LSQFR 308

Tabela 5.1 Geometrija analiziranih ležaja

Tip ležaja	Unutrašnji prečnik d [mm]	Spoljašnji prečnik D [mm]	Prečnik kotr. tela d_b [mm]	Širina B [mm]	Nominalni ugao kontakta α_0 [°]	Broj kotr. tela Z [-]
FKL 6006	30	55	7,124	13	0	11
FKL LSQFR 308	40	90	15,081	28	25	8

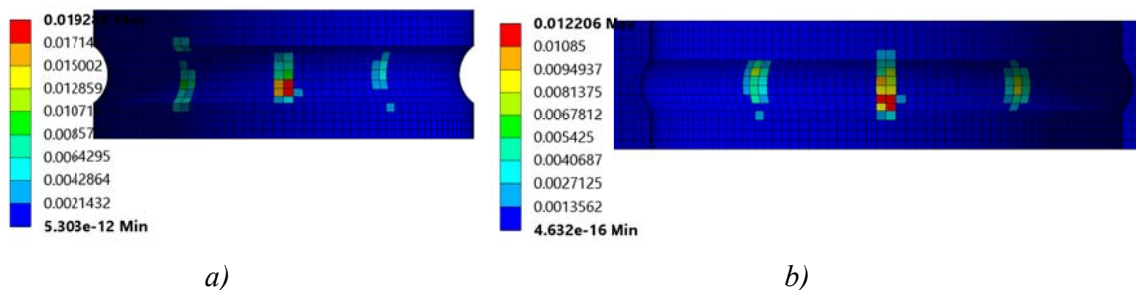
Pošto se modelovanje mehaničkog ponašanja zasniva na povezanim različitim analizama, to i diskretizacija modela mora biti apsolutno ista za sve analize, pogotovo što eksplicitna analiza ne podržava elemente oblika piramide. Iz tog razloga za sve analize korišćena je mreža konačnih elemenata oblika heksaedra i tetraedra. Elementi analiziranih ležaja su diskretizovani izoparametarskim konačnim elementima (SOLID 185) pri čemu je korišćena mapirna diskretizacija (*mapped meshing*) gde je broj elemenata variran prema gore navedenom načinu. Kotrljajna tela i kavez diskretizovani sa algoritmom nezavisnih poravnavanja (*patch-independent*). Prednost ovakve vrste generisanja mreže je mogućnost ignorisanja tačaka u modelu koje nemaju veze sa proračunom. Takođe je efikasna metoda za rad sa CAD modelima lošeg kvaliteta, što može uštedeti značajno vreme u generisanju mreže.

Rezultati analize konvergencije diskretizacije koji pokazuju promenu broja elemenata u odnosu na pomeranje tačke S1 su prikazani na slici 5.3. Sa slike 5.3 se može zaključiti da za ležaj 6006 pomeranje tačke S1 daje male razlike sa povećanjem broja elementa nakon 20359 elemenata što ukazuje da su rešenja konvergirala (slika 5.3). Odnosno, nakon ovog broja elemenata, greška pomeranja u tački S1, s povećanjem broja elementa iznosi oko 0,003% u odnosu kada je model diskretizovan sa 20359 elemenata. Analiza konvergencije mreže za ležaj LSQFR 308 pokazuje da su rešenja konvergirala nakon 28473 konačna elementa (slika 5.3). Greška pomeranja u tački S1 na ovom broju elemenata u odnosu na dalje povećanje iznosi oko 0,2%.



Slika 5.3 Konvergencija mreže konačnih elemenata za razmatrane ležaje

Na slici 5.4 je prikazana strukturna greška napona za ležaja FKL 6006 sa usvojenim brojem konačnih elemenata. Strukturna greška napona iznosi 0,019 MJ na unutrašnjoj stazi kotrljanja i oko 0,012 MJ na spoljašnjoj stazi kotrljanja na mestu kontakta staza sa kotrljajnim telom, pri čemu se ista greška javlja i kod drugog analiziranog ležaja. Strukturna greška napona je mera diskontinuiteta polja napona od elementa do elementa.



Slika 5.4 Strukturna greška napona na stazama kotrljanja a) unutrašnjeg; b) spoljašnjeg prstena za ležaj 6006

Na osnovu prethodnog usvojeni broj konačnih elemenata za razmatrane ležaje je prikazan u tabeli 5.2.

Tabela 5.2 Pregled usvojenog broja konačnih elemenata za diskretizaciju razmatranih ležaja

Tip ležaja	Broj konačnih elemenata	Broj čvorova	Prosečan kvalitet elementa	Standardno odstupanje
FKL 6006	20359	37529	0,842	0,19
FKL LSQFR 308	28473	49959	0,715	0,22

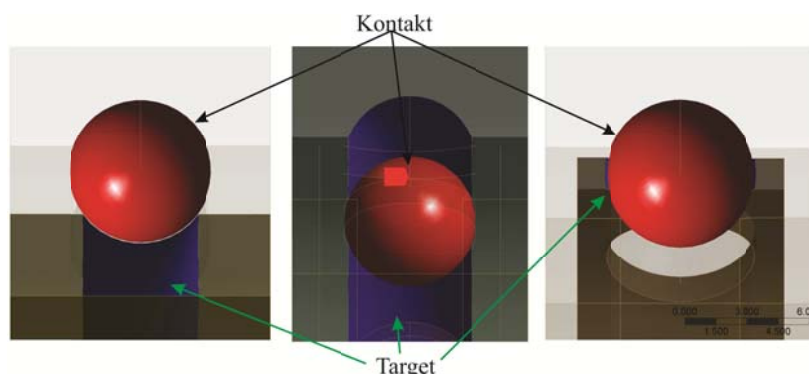
5.1.2 Definsanje kontaktnih parova, opterećenja i graničnih uslova

Dva odvojena elementa u numeričkom (MKE) modelu mogu doći u kontakt i kotrljati se i/ili klizati jedan po drugom. Kod kotrljajnih ležaja postoji i u ovom modelu je definisan, kontakt između kotrljajnih tela i staza kotrljanja, kao i između kotrljajnih tela i kaveza. U

opštem fizičkom smislu, površine koje su u kontaktu pri modelovanju ponašanja kotrljajnih ležaja imaju sledeće karakteristike:

- površine ne prodiru (zadiru) jedna u drugu;
- mogu se prenositi normalne sile na pritisak i tangencijalne sile trenja;
- često se ne mogu prenositi normale zatezne sile. Površine koje su u kontaktu slobodno se odvajaju i pomeraju jedna od druge;
- kontakt je uvek nelinearan, odnosno, krutost sistema zavisi od statusa kontakta, bilo da se delovi dodiruju ili odvajaju.

Pri definisanju kontaktnih parova, odnosno, kontakta „površina – površina” prvo se mora odrediti koja površina je kontaktna (*contact body*), a koja površina je ciljna (*target*) kao što je prikazano na slici 5.5. Ove površine moraju biti definisane u paru i imati iste vrednosti realnih konstanti (npr. koef. trenja, krutost itd.).



Slika 5.5 Definisavanje kontaktnih površina za analizirani ležaj 6006

Postoji nekoliko principa, odnosno, smernica za pravilno definisanje kontaktnih površina:

- Ako konveksna površina dođe u kontakt sa ravnom ili konkavnom površinom, ravna ili konkavna površina treba da bude ciljna (*target*) površina.
- Ako jedna površina ima grubu mrežu, a druga finu, površina grube mreže trebalo bi da bude ciljna (*target*) površina.
- Ako je jedna površina ima bolja mehanička svojstva od druge, površina sa boljim svojstvima materijala treba biti ciljna (*target*) površina.
- Ako je jedna površina definisana sa elementima višeg, a druga nižeg reda, površina sa elementima nižeg reda treba da bude ciljna (*target*) površina.
- Ako je jedna površina veća od druge, veća površina treba da bude ciljna (*target*) površina.

Uzimajući u obzir prethodno, na analiziranim modelima, kotrljajna tela su kontaktna površina, dok su površine staza kotrljanja i površine na otvorima kaveza ciljna (*target*) površina kao što je prikazano na slici 5.5. Pri definisanju kontaktne površine korišćen je konačni element CONTA 174 sa osam čvorova, a za definisanje ciljne površine je korišćen konačni element TARGET 170 koji ima tri čvora. Svaki od čvorova za oba konačna elementa ima po tri translatorska stepena slobode.

Drugi problem pri modelovanju ležaja se javlja pri definisanju odnosa između kotrljajnih tela i staza kotrljanja odnosno kaveza, kako bi se sprečilo međusobno zadiranje

tokom analize. Ovo sprečavanje zadiranja se naziva kompatibilnost kontakta. Za različite analize i probleme koriste se i različiti algoritmi kako bi se dobila kompatibilnost kontakta. Programski sistemi opšte namene na bazi konačnih elementa poseduju nekoliko vrsta algoritama u zavisnosti od tipa analize. Pri modelovanju prikazanih kugličnih ležaja ovde je korišćen *Penalty* metod. Prvo ova metoda uvodi krutost opruge kao parametar da bi se zadovoljila kinematska ograničenja kontakta. Krutost opruge se između ostalog može definisati direktnim unosom kontaktne krutosti između kotrljajnih tela i staza kotrljanja dobijenih u kvazistatičkom modelu za svako kotrljajno telo.

Kako bi se razumelo funkcionisanje ove metode može se napisati sledeći jednostavni oblik relacije koji važi za sve konačne elemente sa kontaktnim problemom kao:

$$\delta\Pi = \int_V \sigma^T \delta\varepsilon dV - \int_V f \delta u dV - \int_V t \delta u dA + 'kont.uslov' = 0 \quad (5.1)$$

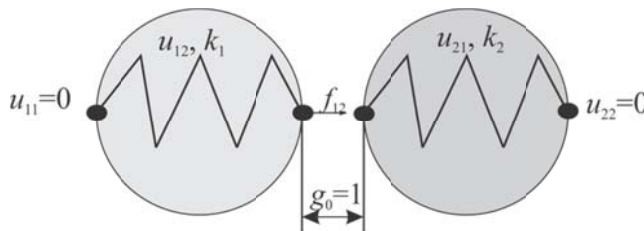
Odnosno, razlika između unutrašnje i spoljašnje energije mora biti jednaka nuli kako bi rešenje moglo pronaći tačku ravnoteže i kako bi konvergiralo ka nuli. Za *Penalty* metod kontaktni uslovi glase:

$$'kont.uslov' = \int_V (k_n g_n \delta g_n + k_t g_t \delta g_t) dA \quad (5.2)$$

Zamenom relacije (5.1) u relaciju (5.2) dobija se sistem jednačina u matricnom obliku:

$$[K + k \cdot g \cdot g^T] u = f \quad (5.3)$$

Ako se sa dve opruge (k_1, u_{12} i k_2, u_{21}) predstave na primeru kotrljajno telo i staza kotrljanja, a sa g_0 inicijalni (nominalni zazor) i ako je $k_1 = k_2 = 2$, pri čemu na oprugu 1 deluje sila $f_{12} = 5$ (slika 5.6). Gde su k - krutost opruge ; u - ugib; f - sila i x - pomeranje.



Slika 5.6 Definisaje kontakta između dva tela

Dalje u skladu sa *Hukovim* zakonom $f = k \cdot x$, odnosno $u_{12} = f_{12}/k_1 = 2,5$, znači da će za zadatu silu i dobijeno pomeranje zazor između prikazanih tela odnosno zadiranje iznositi $u_{12} - g_0 = 1,5$. Ako se ovo poistoveti sa elementima ležaja, to bi značilo da bi za zadato opterećenje došlo do poništavanja zazora, odnosno prelaska u preklop.

U skladu sa relacijom (5.3) ako se krutost napiše u matricnom obliku:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ i vektor sila u obliku } f = \begin{Bmatrix} f_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ onda će na osnovu } Penalty$$

metode, prema relaciji (5.3) rešenja biti:

$$u_1 = \frac{10 + 5k_n}{4 + 4k_n}, \quad u_2 = \frac{5k_n}{4 + 4k_n}, \quad g = \frac{-5}{4 + 4k_n}, \quad (5.4)$$

Iz jednačine (5.4) se može zaključiti da krajnji rezultat kod *Penalty* metode zavisi od kontaktne krutosti k_n što u ovom slučaju predstavlja dobro rešenje. Prethodno znači da se na modelu može definisati nominalni zazor između kotrljajnih tela i staza kotrljanja, koji će se vremenom menjati usled spoljašnjeg opterećenja, s jedne strane, a s druge strane je moguće kontaktnom krutošću uticati na promenu zazora ili prekopa tokom delovanja opterećenja. Drugim rečima, pri ovako definisanim kontaktnim parovima je moguće odrediti i silu koja je potrebna da bi se ostvario preklap kod nekih ležaja ili silu sa kojom se ne sme delovati na ležaj da se ne bi poništio zazor. Kontaktne krutosti između kotrljajnih tela i staza kotrljanja određene u kvazistatičkom modelu su definisane kao ulazni parametar za svako kotrljajno telo pri MKE modelovanju. Pored toga, za sve kontaktne parove je definisan i nominalni zazor koji je iznosio od 0 do 30 μm za ležaj LSQR 308 i od 0 do 40 μm za radialni ležaj 6006. Na slici 5.7 je prikazan definisani radialni zazor od 0 μm , za ležaj 6006 za pojedina kotrljana tela. Prema podacima proizvođača zazor između kotrljajnih tela i kaveza za analizirane ležaje iznosi oko 0,1 mm. Za sve analize je korišćen isti način definisanja kontaktnih parova, pri čemu je koeficijent statičkog trenja iznosio 0,003 za trenje između kotrljajnih tela i staza kotrljanja i 0,0002 za trenje između kotrljajnih tela i kaveza [92].

Ovde je važno napomenuti da gustina mreže odnosno veličina tipa konačnog elementa utiče na početno rastojanje između kotrljajnih tela i prstenova, prvenstveno jer nakon generisanja mreže konačnih elemenata npr. kotrljajna tela i staze kotrljanja nemaju idealni oblik. Usled toga, nakon početnog definisanja kontaktnih parova će se pojaviti ili preveliki zazor ili zadiranje (preklap), između elemenata ležaja. Ovo znači da se za svaki kontaktni par mora definisati vrednost (dužina konačnog elementa između kontaktnih parova), koja će sa početnom vrednosti dati odgovarajući zazor ili preklap kako je prikazano na slici 5.7.

Name	Contact Side	Type	Status	Number Contacting	Penetration (mm)	Gap (mm)
Frictional - kuglica.1 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	2.5002e-014	0.
Frictional - kuglica.1 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.2 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.2 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.3 To UP	Contact	Frictional	Near Open	0.	0.	2.4184e-015
Frictional - kuglica.3 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.4 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.4 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.5 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.5 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.6 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.6 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.7 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.7 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.8 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.8 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.9 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.9 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.10 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.
Frictional - kuglica.10 To UP	Target	Frictional	Inactive	N/A	N/A	N/A
Frictional - kuglica.11 To UP	Contact	Frictional	Closed	1.	0.	0.

Slika 5.7 Definisane početnog (nominalnog) radialnog zazora između kuglica i unutrašnje staze kotrljanja

Pošto, se kod oba ispitivana ležaja obrće unutrašnji prsten sa vratilom, dok spoljašnji prsten miruje, to je za razmatrani slučaj pri statičkoj analizi primenjeno isto ograničenje. Čeonj površini sa zadnje strane spoljašnjeg prstena, slika 5.2, su oduzeti svi stepeni slobode,

dok je prednjoj čeonj površini oduzeto pomeranje u vertikalnom pravcu (u_y). Spoljašnja površina spoljašnjeg prstena je ostala slobodna da bi se moglo pratiti pomeranje tačke S1, kako je naglašeno u prethodnom delu. Bočnoj površini unutrašnjeg prstena je oduzeto pomeranje u aksijalnom pravcu (u_z), kako bi se simuliralo sedište ležaja. Radijalno i aksijalno opterećenje je zadato na unutrašnjoj površini unutrašnjeg ležaja.

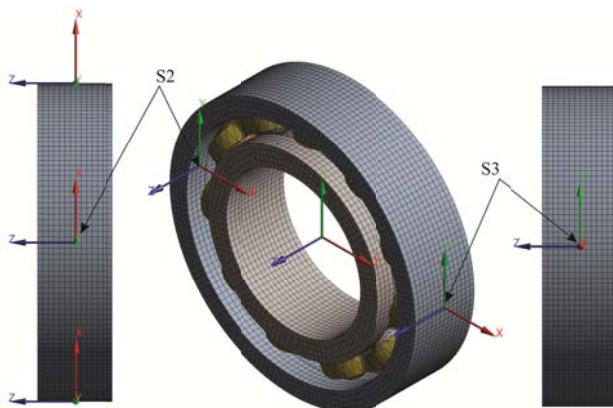
5.2 Dinamički MKE model

Model za dinamičku analizu se sastoji iz više podmodela koji služe za modalnu, harmonijsku i eksplicitno dinamičku analizu, kao i za određivanje veka na bazi opterećenja u vidu ubrzanja dobijenog u eksplicitnoj analizi. Pored statičke analize, koja je kao bazna analiza za sve ostale, modalna i harmonijska su od velikog značaja u postavljenom dinamičkom modelu. Naime, na bazi ove dve analize između ostalog je određena i maksimalna sopstvena frekvencija u posmatranom frekventnom opsegu, a koja je veoma značajna kod određivanja ulaznih parametara za eksplicitnu analizu.

5.2.1 Modalna i harmonijska analiza

Modalna analiza je osnova za harmonijsku analizu jer se njome definišu glavni modovi oscilovanja i određuju sopstvene frekvencije posmatranih ležaja. Dok će harmonijskom analizom za određene sopstvene frekvencije i zadatu pobudu biti definisane amplitudno frekventne karakteristike za ispitivane ležaje.

Za obe ove analize definisanje mreže konačnih elemenata kao i definisanje kontaktnih parova je urađeno na isti način kao i kod statičke analize. Obe analize su rađene za različite vrednosti zazora za posmatrane ležaje kao što je već naglašeno u prethodnom delu teksta. Modalna analiza je izvršena bez zadavanja opterećenja, dok je kod harmonijske analize zadato opterećenje koje odgovara opterećenju (pobudi čekićem) iz eksperimentalnih ispitivanja, kako bi se mogli verifikovati matematički modeli. Analiza je rađena za slobodno oslonjen sistem, dok je opterećenje kod harmonijske analize zadato u tački S2, pri čemu je praćen odziv u tački S3. Obe tačke su izabrane na osnovu eksperimentalnih uslova ispitivanja i nalaze se na sredini spoljašnje površine spoljašnjeg prstena, kao što je prikazano na slici 5.8. Pri modalnoj analizi je pretpostavljeno da je sistem linearan.



Slika 5.8 MKE model za modalnu i harmonijsku analizu

5.2.2 Eksplicitno dinamička analiza

Rešavanje dinamičkih jednačina ravnoteže metodom konačnih elemenata se može vršiti primenom dve metode: metodom direktne integracije i metodom superponiranja modova oscilovanja. Pri rešavanju metodom direktne integracije dinamičke jednačine se integrišu procedurom korak po korak, odnosno u određenim vremenskim intervalima. Ova metoda ne zahteva transformaciju postavljenih dinamičkih jednačina u drugi oblik. Direktna integracija se zasniva na rešavanju postavljenih jednačina eksplicitnim i implicitnim metodama. Osnovna jednačina kretanja pri rešavanju implicitnom metodom je:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (5.5)$$

U bilo kom trenutku vremena (t) ove jednačine kretanja se mogu smatrati skupom „statičkih” jednačina ravnoteže, koji uzimaju u obzir sile inercije i sile prigušenja. Za rešavanje ovih jednačina se najčešće koristi *Newmark-ov* metod vremenske integracije u diskretnim vremenskim intervalima $t+\Delta t$ u obliku:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\}^{t+\Delta t} &= \{\dot{x}\}^t + \frac{\Delta t}{2} \left(\{\ddot{x}\}^t + \{\ddot{x}\}^{t+\Delta t} \right) \\ \{x\}^{t+\Delta t} &= \{x\}^t + \frac{\Delta t}{2} \left(\{\dot{x}\}^t + \{\dot{x}\}^{t+\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vremenski inkrement (priraštaj vremena) $t+\Delta t$ između uzastopnih vremenskih tačaka naziva se vremenski korak integracije. Kod ove metode vremenski korak je uslovljen željom za tačnošću, odnosno ova metoda uvek zahteva bezuslovno stabilna rešenja, što se može posmatrati i kao prednost i kao mana.

Suprotno implicitnoj, eksplicitni metod za nelinearne analize ne zahteva inverziju nelinearnih ekvivalentnih matrica krutosti. Ova prednost eksplicitne metode se sa druge strane gubi zbog ograničenja u veličini vremenskog koraka koji mora biti manji od kritičnog, a koji obezbeđuje stabilnost rešenja. Vrednost kritičnog vremenskog inkrementa (priraštaja) zavisi od najveće sopstvene frekvencije sistema konačnih elemenata, drugim rečima se može reći da zavisi od diskretizacije (veličine elemenata). Ukoliko je analiza nelinearna, vrednost vremenskog inkrementa se menja u toku vremena, pošto zavisi od trenutne geometrije i osobina materijala. Pri dinamičkoj eksplicitnoj analizi najčešće se primenjuje vremenski integracioni algoritam zasnovan na metodi centralne razlike (poznata i kao *Leapfrog* metoda [102]). Po ovoj metodi ubrzanje i brzina se pretpostavljaju u funkciji pomeranja. Sa određenim ubrzanjem $\ddot{x} = F_i / m + b_i$ u vremenskom trenutku (t), brzina u vremenskom trenutku $t+1/2$ se dobija iz:

$$\{\dot{x}_i\}^{t+\frac{1}{2}} = \{\dot{x}_i\}^{t-\frac{1}{2}} + \{\ddot{x}_i\} \Delta t_n^t \quad (5.7)$$

Na kraju se određuju novi položaji čvorova (pomeranja) u vremenu $t+1$ integraljenjem brzine kao:

$$\{x_i\}^{t+\frac{1}{2}} = \{x_i\}^t + \left\{ \dot{x}_i^{t+\frac{1}{2}} \Delta t_n^{t+\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.8)$$

gde su: x_i , \dot{x}_i , \ddot{x}_i , komponente pomeranja brzine i ubrzanja u čvorovima $i = 1, 2, 3, \dots, n$, t_n vremenski korak, F_i – sile koje deluju u čvorovima, b_i – komponente ubrzanja tela i m – masa koja se pripisuje čvoru. Dinamička jednačina kretanja (5.5) u trenutku vremena t ima oblik:

$$[M]\{\ddot{x}\}(t_n) + [C]\{\dot{x}\}(t_n) + [K]\{x\}(t_n) = \{F(t_n)\} \quad (5.9)$$

Uslov stabilnosti metoda centralne razlike jeste da vrednost vremenskog koraka (t_n) integracije mora biti manja od kritičnog $\Delta t_n \leq \Delta t_{n(krit.)}$. Određivanje kritične vrednosti vremenskog koraka će biti kasnije prikazano.

5.2.2.1 Granični uslovi i opterećenja

Sledeći granični uslovi su primenjeni na MKE model kugličnih ležaja kako bi se simulirao rad ležaja u realnom vremenu. Ovi granični uslovi, takođe, odgovaraju eksperimentalnim uslovima koji su korišćeni pri eksperimentalnim ispitivanjima, o čemu će biti reči u narednim poglavljima.

- Pri analizi ležaja 6006 je primenjena aksijalna sila od 200 do 1000 N na bočnu površinu spoljašnjeg prstena, kako bi se simuliralo eksperimentalno ispitivanje prema standardu SRPS ISO 17025:2006. U sledećem delu je primenjeno radijalno opterećenje na unutrašnji prsten kako bi se simulirali eksploatacioni uslovi koji odgovaraju datom tipu ležaja.
- Pri analizi ležaja LSQFR 308 je prvo primenjeno radijalno opterećenje od 27000 N i aksijalno opterećenje od 13400 N kako bi se simulirali eksperimentalni uslovi pri određivanju veka ovog tipa ležaja. U narednom koraku je primenjeno radijalno i aksijalno opterećenje na unutrašnji prsten ležaja koje odgovara tačno definisanim eksploatacionim uslovima za konkretnu upotrebu ovog ležaja za poljoprivrednu mehanizaciju. O vrednostima opterećenja i načinu definisanja će detaljnije biti reči u poglavlju koje se odnosi na prikaz analize rezultata.
- Unutrašnji prsten oba ležaja se obrće konstantnom brzinom u suprotnom smeru kazaljke na satu i to za ležaj 6006 $n = 1800$ o/min, dok je kod ležaja LSQFR 308 broj obrtaja iznosio $n = 200$ o/min.
- Kao što je već bilo rečeno ranije statički koeficijent trenja između kotrljajnih tela i unutrašnje staze kotrljanja i kotrljajnih tela i spoljašnje staze kotrljanja je iznosio 0,003, dok je koeficijent trenja između kotrljajnih tela i kaveza iznosio 0,002. Pored modelovanja kontaktnih površina na pomenutim kontaktnim parovima, formulacija kontakta na bazi *Penalty* metode je korišćena i pri ovoj analizi kao što je opisano u 5.1.2.
- Za potrebe ove analize korišćeno je strukturno prigušenje od 2%, pri čemu su ispitane i veće vrednosti prigušenja od 3 do 7%, ali su ove vrednosti značajno uticale na brzinu obrtanja kotrljajnih tela, uzrokujući proklizavanja, što je na kraju rezultiralo netačnim rezultatima vezanim za kinematiku ležaja (ugaone brzine obrtanja elemenata ležaja). U ovom radu uticaj prigušenja na kinematiku ležaja ne treba mešati sa njegovim uticajem na vibracije koje se javljaju u ležaju. Opšte je

poznato da prigušenje u mehaničkim sistemima redukuje rezonantni odziv sistema u pogledu amplitude oscilovanja i sopstevnih frekvencija preko faktora $(1-\zeta^2)^{1/2}$.

- S druge strane kada su trenje i prigušenje uključeni u kretanje između dva tela (kotrljajna tela i staze kotrljanja) relativno kretanje između njih će se smanjiti ako se oni ne kreću kontinualno (ako nema kontinualnog opterećenja), što će na kraju uticati na ugaone brzine obrtnih elemenata. Naime, da bi se kotrljajna tela kotrljala po stazama kotrljanja, mora postojati kontaktno trenje između kotrljajnog tela i staza kotrljanja. Ako je kontakt bez trenja, tada bi kotrljajna tela klizala oko staza kotrljanja. Međutim, kada je u modelu uključeno trenje, ako kotrljajno telo nije kontinualno opterećeno može se očekivati da se ono jednostavno zaustavi. Usled toga, nijedna vrsta ograničenja nije primenjena na kotrljajna tela, ali je zato definisano trenje između kotrljajnih tela i staza kotrljanja, kao i kaveza. Pri ovoj analizi ograničenje je primenjeno na spoljašnju površinu spoljašnjeg prstena i to oduzimanjem svih stepeni slobode osim pomeranja u y pravcu, dok su spoljašnjoj površini kaveza oduzeti svi stepeni slobode osim obrtanja oko z ose. Primenjena ograničenja se odnose na oba tipa ležaja (Koordinatni sistem odgovara koordinatnom sistemu sa slika 5.2 i 5.8).

5.2.2.2 Definisane kritične vrednosti vremenskog koraka

Da bi se osigurala stabilnost tačnosti rešenja, veličina vremenskog koraka (t_n) je definisana (ograničena) CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) uslovima. Ovaj uslov podrazumeva da vremenski korak bude tako ograničen da poremećaj (talas napona), koji se prenosi kroz ceo model, ne može putovati duže u jednom vremenskom koraku, nego što iznosi dimenzija najmanjeg konačnog elementa na sistemu (objektu analize).

U programskom sistemu koji je korišćen, kritični vremenski korak i veličina vremenskog koraka se određuje kao:

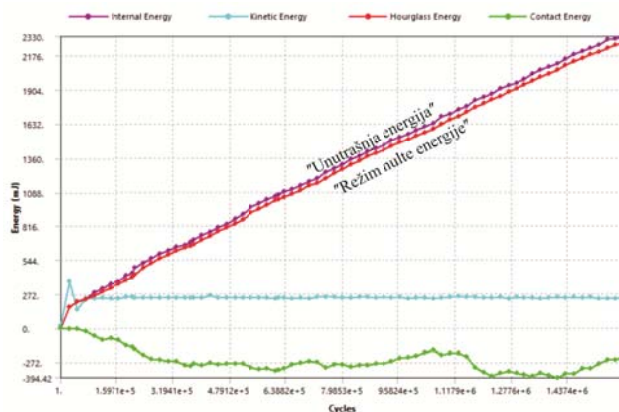
$$\Delta t_{n(krit.)} = \left(\frac{h}{c}\right)_{\min}, \quad \Delta t_n = f \left(\frac{h}{c}\right)_{\min} \quad (5.10)$$

gde je f vremenska stabilnost koraka i iznosi 0,9 (podrazumevana vrednost), h je karakteristična dimenzija konačnog elementa za korišćene konačne elemente se dobija kao „najmanja dužina $K.E \times (2/3)^{1/2}$ ”, i c je brzina zvuka u materijalu.

Teorijski posmatrano iz relacije (5.10) se može zaključiti, da je stabilnost rešenja u vremenu uvek obezbeđena ako se koristi podrazumevana vrednost faktora vremenske stabilnosti $\Delta t_n = 0,9 \Delta t_{n(krit.)}$.

Jedan aspekt tačnosti analize metodom konačnih elemenata je povezan sa distorzijom elemenata unutar diskretizovanog modela, dok ostali aspekti uglavnom uključuju postizanje podudaranja rešenja između numeričkih, analitičkih metoda i eksperimentalnih ispitivanja. Verifikacija MKE modela, odnosno eksplicitne dinamičke analize je izvršena proverom distorzije elemenata tačnosti rešenja na principu greške energije koja se javlja pri rešavanju problema, kao i upoređivanjem numeričkih rezultata sa odgovarajućim eksperimentalnim rezultatima.

U korišćenom programskom sistemu, značajna distorzija elemenata koja dovodi do lošeg odnosa širine i visine konačnog elementa naziva se režim nulte energije¹. Generalno se preporučuje da nulta energija elementa bude manja za 10% od njegove unutrašnje energije. Za prikazanu eksplicitnu simulaciju kugličnih ležaja, sa slike 5.9 se može videti da je nulta energija manja za oko 2% od unutrašnje energije, što ukazuje na zanemarljivu distorziju elemenata.

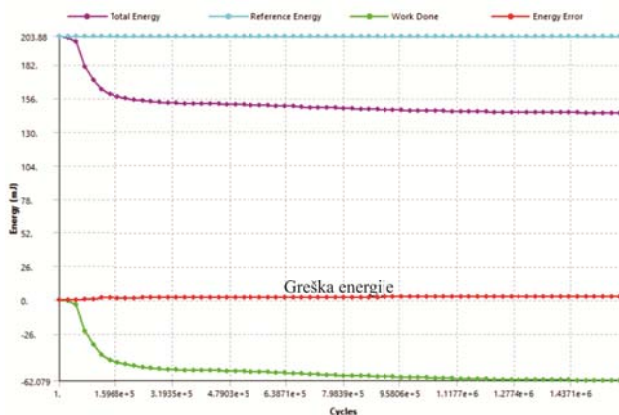


Slika 5.9 Promena unutrašnje energije i „nulte energije“ u zavisnosti od broja ciklusa

S druge strane, eksplicitna dinamika koristi princip konverzacije energije za praćenje tačnosti rešenja u obliku „Referentna Energija“ + „Pronađeno rešenje“ = „Trenutna Energija“. Pri ovome se ukupna energija izračunava u svakom vremenskom koraku. Ako greška energije dostigne vrednost od 10% referentne energije, rešavanje problema se zaustavlja. Greška energije se određuje kao:

$$Gr.energije = \frac{|Tren.energ. - R.ener. - Pr.rešenje|}{\max |Tren.energ., R.ener. Kin. energ|} \quad (5.11)$$

Na slici 5.10 je prikazana greška energije koja se javljala tokom rešavanja za posmatrane ležaje. Na osnovu toga se može zaključiti da su rešenja prilično stabilna tokom celog vremenskog intervala rešavanja.



Slika 5.10 Promena ukupne energije u zavisnosti od broja ciklusa

¹Režim u kojem pomeranja koja nastaju proizvode nulte deformacije i ne proizvode napone.

Jedan od razloga za tako nisku „nultu energiju“ i prilično stabilno rešenje, je jednolična diskretizacija modela ležaja u konačne elemente koristeći uglavnom heksaedarske elemente i dovoljno velika gustina mreže koja može da primi primenjena opterećenja. Na osnovu prtehdnog se može konstatovati da je statičkim modelom izvršena pravilna i dobra diskretizacija oba modela ležaja.

5.2.3 Određivanje veka ležaja

Sve veća potražnja za pouzdanim metodama za određivanje veka ležaja inspirisao je mnoge istraživače da razviju različite analitičke i statističke metode. U početku XX veka, proizvođači ležaja počeli su da istražuju eksperimentalne i analitičke metode za određivanje veka ležaja. Prvi pokušaj sproveo je *Stribeck*, koji je izvršio ispitivanja zamora na ležajima. Ova metoda je korišćena kao osnova za većinu teorija određivanja veka ležaja. *Palmgren* i *Lundberg* su primenili *Veibullovu* statističku analizu za procenu pouzdanosti elementa kotrljajnih ležaja. Na bazi ovoga je kasnije nastala relacija za određivanje veka na bazi dinamičke nosivosti i ekvivalentnog opterećenja. Relacija za određivanje dinamičke nosivosti zavisi od: veličine kotrljajnih tela, broja kotrljajnih tela, broja redova kotrljajnih tela, ugla kontakta i unutrašnje geometrije ležaja (koja je u funkciji i mehaničkih svojstava materijala). Međutim, *Lundberg-Palmgren-ov* model ima sledeća ograničenja:

1. Model pretpostavlja da ležaji iste veličine i tipa su identično proizvedeni. Bilo koje individualnosti zbog mikropukotina, zaostalih naprežanja ili promene podmazivanja su zanemarene.
2. Sam kriterijum L_{10} predstavlja nesigurnost u proračunu veka ležaja i primorava korisnika da prihvati da će 10% celokupne serije ležaja otkazati ranije od predviđenog, odnosno ovaj kriterijum pokazuje da će 90% posmatranih ležaja imati na ovaj način određen vek.
3. Ležaji istog tipa imaju istu dinamičku nosivost, što podrazumeva da pod istim uslovima rada imaju i isti vek L_{10} .

Proizvođači ležaja oslanjaju se na ovaj model za određivanje veka kotrljajnih ležaja. Zbog ovih ograničenja, proizvođači su uveli odgovarajuće korekzione faktore. Međutim, razvijeni faktori imaju stepen nesigurnosti i rezultiraju netačnim rezultatima zbog jedinstvenosti svakog ležaja. S druge strane, eksperimentalna ispitivanja dugo traju, jer je potrebno izvršiti veliki broj ispitivanja, da bi se sa velikom sigurnošću mogao odrediti vek ležaja.

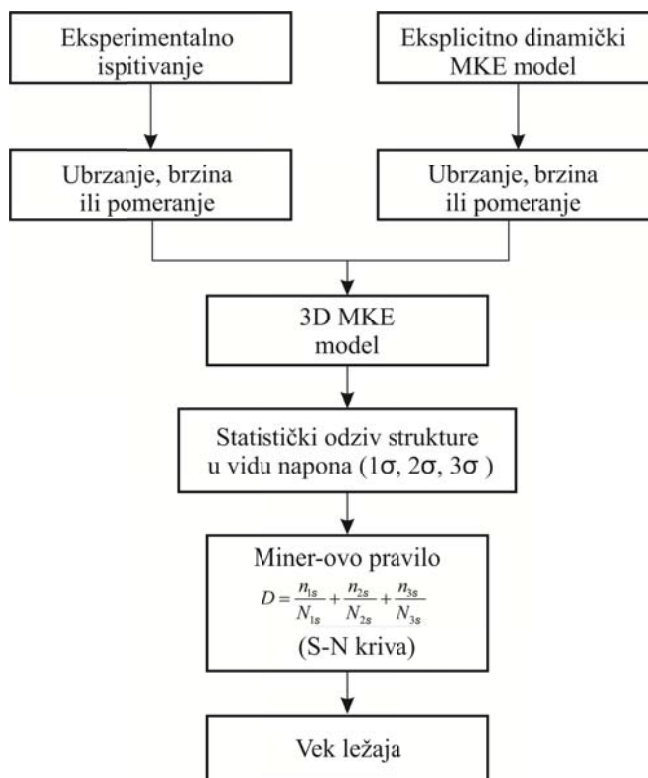
Na vek ležaja pored opterećenja utiču i geometrijske nesavršenosti staza kotrljanja, podmazivanje, greške nastale u montaži ležaja i dr. Može se reći da je promena veka ležaja posledica dejstva spoljašnjih u unutrašnjih sila koje nastaju usled različitih uticaja u toku eksploatacije ležaja čime izazivaju oscilatorno kretanje elemenata ležaja, na različitim amplitudama i frekvencijama oscilovanja. Signal vibracija (brzine, ubrzanja, pomeranja), matematički određen i/ili snimljen pri eksperimentalnim ispitivanjima sadrži poremećaje od različitih uticaja (zazora, broja obrtaja, spoljašnjeg opterećenja i valovitosti staza kotrljanja, podmazivanja, greške oblika staza kotrljanja itd.) koji mogu uticati na ponašanje ležaja, kao i njegov vek.

5.2.3.1 Predloženi model za određivanje veka ležaja

Usled toga, u ovoj disertaciji je predloženo da se vek ležaja određuje na bazi: signala vibracija dobijenog u eksplicitno - dinamičkoj analizi ili određenog eksperimentalnim ispitivanjima, statističkih odziva strukture standradnim odstupanjem (1σ) i *Miner-ovog* pravila na bazi *S-N* krive. Na slici 5.11 je prikazan dijagram toka predložene metode za određivanje veka ležaja.

Predloženi model (procedura) za određivanje veka ležaja se sastoji u sledećem:

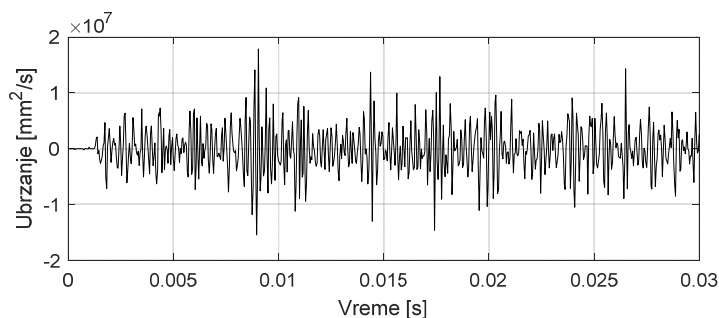
- Određivanje ubrzanja, brzine ili pomeranja na bazi prikazanog eksplicitno dinamičkog modela ili merenje istih eksperimentalnim ispitivanjem.
- Modelovanje 3D modela ležaja i zadavanje prethodno određenog ubrzanja (brzine ili pomeranja). U ovom koraku ubrzanje se može zadati kao rezultat MKE eksplicitno dinamičkog ili kao podatak sa eksperimentalnih ispitivanja. Ubrzanje se zadaje na spoljašnju površinu spoljašnjeg prstena, dok su ograničenja ista kao kod modalne i harmonijske analize za posmatrane ležaje.
- Na osnovu prethodno definisanih ulaznih podataka određuju se naponi, deformacije ili pomeranja na elementima ležaja u vidu statističkih parametara (1σ , 2σ , 3σ). Naponi se mogu posmatrati kao maksimalni naponi na celom ležaju, a moguće je i posmatrati napone za svaki element posebno. Drugim rečima, predloženom metodom je moguće definisati vek svakog elementa ležaja pojedinačno.
- Na kraju se na bazi određenih napona *Miner-ovim* pravilom i *S-N* krivom određuje vek ležaja.



Slika 5.11 Predloženi model za određivanje veka ležaja

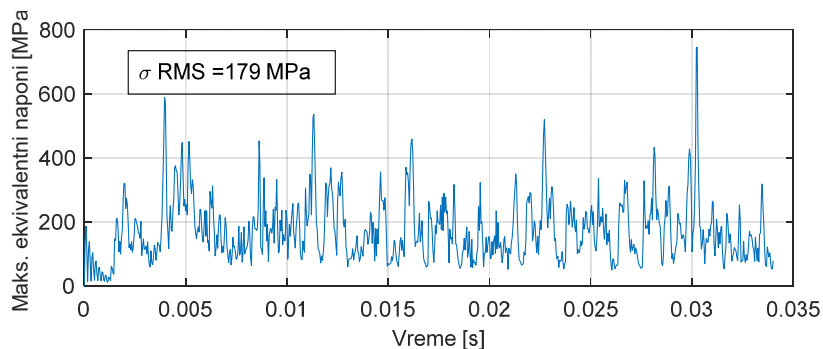
5.2.3.2 Statistički odziv strukture

Statistički odziv strukture je određen analizom slučajnih vibracija primenom metode konačnih elemenata. Analiza slučajnih vibracija je spektralna metoda koja se zasniva na primeni spektralne gustine amplitude (*Power Density Spectar* PSD). Svrha ove analize je utvrđivanje nekih statističkih svojstava odziva strukture, obično standardnim odstupanjem (1σ) pomeranja, sile ili napona pri čemu se 1σ koristi i za određivanje veka zamora konstrukcije. Naime, pri datoj frekvenciji, amplituda pobude se stalno menja, ali za mnoge procese njegova prosečna vrednost obično ostaje relativno konstantna. Ulazna veličina je pobuda (ubrzanje) koje je dobijno eksplicitnom dinamičkom analizom (ili eksperimentalnim ispitivanjem) u vremenskom domenu kao što je prikazano na slici 5.12.



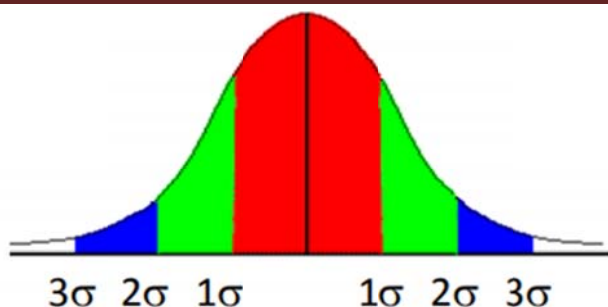
Slika 5.12 Promena ubrzanja određena eksplicitno - dinamičkom analizom na spoljašnjem prstenu ležaja LSQFR 308

Na bazi pobude, odnosno, ubrzanja u vremenskom domenu dobija se promena odziva strukture, (u ovom slučaju napona, slika 5.13), takođe, u vremenskom domenu, pri čemu se određuje srednji kvadratni koren (RMS). RMS je prosečno ili standardno odstupanje odziva (1σ).



Slika 5.13 Promena maksimalnih ekvivalentnih napona u vremenskom domenu za ležaja LSQFR 308

Ključni koncept prethodno rečenog, je činjenica da mnogi slučajni procesi prate *Gaussovu* raspodelu. Srednja vrednost *Gaussove* krive verovatnoće definisana je kao standardno odstupanje (ili sigma vrednost) raspodele. Pošto se pretpostavlja da je raspodela normalna, nikada se ne može iskazati 100% mogućih pobuđenja, a kako je pobuda linearnog sistema *Gaussov* proces, onda je odziv generalno drugačiji slučajni proces, ali još uvek normalne raspodele. Iz ovih razloga je uobičajeno koristiti 3σ kao gornju granicu kao što je prikazano na slici 5.14.



Slika 5.14 Gausova raspodela maksimalnih ekvivalentnih napona

Pošto površina ispod krive daje odziv „srednjeg kvadrata“. Kvadratni koren srednjeg kvadrata je „srednji kvadratni koren“ („*root mean square*“ RMS) to će u konkretnom slučaju prema slikama 5.14 i 5.15 značiti sledeće:

- 1xRMS (1σ) – ukupan odziv sistema, (u ovom slučaju napona) na spoljašnju pobudu će biti u granicama od 68.27%, odnosno 68% napona će imati vrednost od 179 MPa.
- 2xRMS (2σ) - ukupan odziv sistema, (u ovom slučaju napona) na spoljašnju pobudu će biti u granicama od 27.651% ili drugim rečima 27% napona će imati vrednost od 358 MPa.
- 3xRMS (3σ) - ukupan odziv sistema, (u ovom slučaju napona) na spoljašnju pobudu će biti u granicama od 4.049%, ili 4% napona će iznositi 537 MPa.

5.2.3.3 Miner-ovo pravilo za određivanje zamora konstrukcije

Kod obrtanja ležaja su opterećenja sa promenljivom amplitudom jer svaki element ležaja pri različitoj vrednosti amplitude na svojoj karakterističnoj frekvenciji, pa je usled toga ovde primenjeno *Miner-ovo* pravilo za određivanje veka u kombinaciji sa *Gaussovom* raspodelom i *S-N* krivom, za određeni materijal ležaja. *Miner-ovo* pravilo glasi: ako oštećenje od jednog ciklusa raspona naprezanja $\Delta\sigma_{a1}$ iznosi $1/N_{f1}$, gdje je N_{f1} zamorni vek pri konstantnoj amplitudi raspona naprezanja $\Delta\sigma_{a1}$, onda se kumulativno oštećenje uzrokovano rasponima naprezanja $\Delta\sigma_{a1}$, $\Delta\sigma_{a2}$, $\Delta\sigma_{an}$ primenjeno u n_1 , n_2 , n_n ciklusa, određuje prema izrazu:

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} \quad (5.12)$$

odnosno u konkretnom slučaju, uzimajući prethodno opisanu *Gaussov*u raspodelu napona vek ležaja se određuje kao:

$$D = L_{ležaja} = \frac{n_{1\sigma}}{N_{1\sigma}} + \frac{n_{2\sigma}}{N_{2\sigma}} + \frac{n_{3\sigma}}{N_{3\sigma}} \quad (5.13)$$

gde je $n_{1\sigma}$ trenutni broj ciklusa na ili ispod 1σ , odnosno $n_{1\sigma} = 0,6827\omega_0$, analogno tome $n_{2\sigma} = 0,27651\omega_0$ i $n_{3\sigma} = 0,04049\omega_0$.

Za uskopojasni stacionarni proces statistička srednja vrednost frekvencije se može definisati kao:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega}} \quad \text{gde je } S(\omega) \text{ spektralna gustina amplitude ulaznog (PSD) signala.}$$

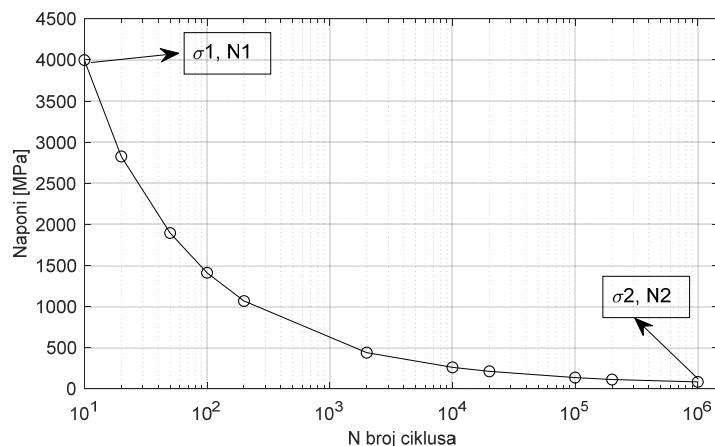
Dozvoljen broj ciklusa ($N_{i\sigma}$, gde je $i=1,2,3$) (sa S - N krive) za nivo napona 1σ , 2σ i 3σ se određuje kao:

$$N_{i\sigma} = 10^{\log i \sigma - \frac{B}{A}}, \text{ gde je } i = 1, 2 \text{ i } 3.$$

A i B su koeficijenti dobijeni sa S - N krive kao:

$$A = \frac{\log \sigma_1 - \log \sigma_2}{\log N_1 - \log N_2}, \quad i \quad B = \log \sigma_1 - A \log N_1, \text{ gde su } \sigma_1, \sigma_2, \text{ maksimalni i minimalni naponi za}$$

adekvatne cikluse N_1 i N_2 , sa S - N krive prikazane na slici 5.15.



Slika 5.15 S - N kriva za materijal $GCr15SiMn$ (čelik za ležaje)

6 EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE DINAMIČKOG PONAŠANJA KUGLIČNIH LEŽAJA

U cilju provere rezultata dobijenih primenom razvijenih matematičkih modela, kao i primenom programskih sistema opšte namene, koji baziraju na metodi konačnih elemenata, sprovedeno je eksperimentalno ispitivanje ležaja. Matematičkim modelima je teško uzeti u obzir pojedine faktore, vezane za grešku izrade, geometrijske nesavršenosti staza kotrljanja (posebno valovitost i hrapavost) i montaže elemenata ležaja, što ukazuje na potrebu eksperimentalnog ispitivanja realnih sistema. U okviru ovog poglavlja prikazane su osnovne postavke eksperimentalnog ispitivanja, opisani su uređaji za ispitivanje i prikazani su neki od rezultata merenja. Eksperimentalno ispitivanje je sprovedeno za dva tipa ležaja: za radijalni kuglični ležaj FKL 6006 i kuglični ležaj sa kontaktom u četiri tačke FKL LSQFR 308. Eksperimentalno ispitivanje se može podeliti na tri dela.

Prvi deo se bazira na određivanju sopstvenih frekvencija ležaja i modalnih parametara. U drugom delu su merene vibracija ležaja FKL 6006 na eksperimentalnom uređaju za merenje i kontrolu vibracija kotrljajnih ležaja, odnosno analiziran je uticaj spoljašnjeg aksijalnog opterećenja i zazora na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja. Prvi i drugi deo merenja je izveden u prostorijama Laboratorije za mašine alatke, fleksibilne tehnološke sisteme i automatizaciju postupaka projektovanja, na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Treći deo eksperimentalnog ispitivanja odnosi se na određivanje veka ležaja FKL LSQFR 308, koji je sproveden u fabrici za proizvodnju kotrljajnih ležaja „FKL“ u Temerinu. Ovaj štand je iskorišćen i za ispitivanje uticaja zazora na dinamičko ponašanje ležaja FKL LSQFR 308.

6.1 Eksperimentalna modalna analiza kugličnih ležaja

Na osnovu identifikovanih modalnih parametara moguće je dobiti matematički model dinamičkog ponašanja koji opisuje dinamičko ponašanje kotrljajnih ležaja pri dejstvu spoljašnjeg opterećenja. Eksperimentalna ispitivanja predstavljaju jednu od metoda određivanja modalnih parametara budući da su, uglavnom, jednostavna, brza i što je veoma važno pri ispitivanju bez razaranja materijala. Eksperimentalna modalna analiza predstavlja eksperimentalno definisanje modalnih parametara linearnog, vremenski invarijantnog sistema koji predstavljaju značajnu osnovu za analizu dinamičkog ponašanja kotrljajnih ležaja. Ova

analiza se zasniva na istovremenoj analizi signala pobude i odziva u vremenskom ili češće u frekventnom domenu.

U cilju analize dinamičkog ponašanja kotrljajnog ležaja, neophodno je prvo odrediti njegove modalne parametre primenom eksperimentalnog ispitivanja, kao i sopstvene frekvencije posmatranih ležaja.

Eksperimentalno ispitivanje sprovedeno je na četiri ležaja FKL 6006 sa različitim vrednostima zazora, na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Modalni parametri su, takođe, određeni eksperimentalnim ispitivanjem za ležaj sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308. Ispitivani ležaji, prikazani su na slikama 6.1 i 6.2.

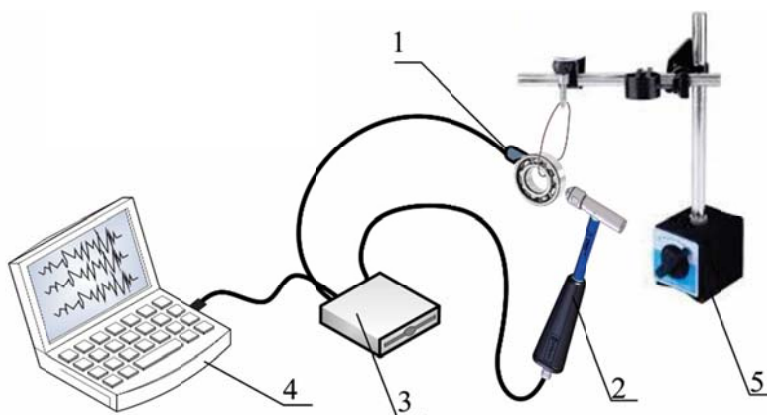


Slika 6.1 Radijalni kuglični ležaj FKL 6006



Slika 6.2 Ležaj sa kontaktom u četiri tačke FKL LSQFR 308

Da bi se odredili modalni parametri posmatranih kugličnih ležaja, tj. sopstvena frekvencija, modalna krutost i koeficijent prigušenja, potrebno je eksperimentalno definisati funkciju frekventnog odziva signala kugličnih ležaja na osnovu ulaznog signala (pobude) i izlaznog signala (u ovom slučaju ubrzanja). Na slici 6.3 prikazan je eksperimentalni model za određivanje funkcije frekventnog odziva ležaja, koji se sastoji od senzora (davača) ubrzanja (1), kojim se meri oscilovanje na spoljašnjem prstenu ležaja, i pobudnog čekića (2), kojim se pobuđuje ležaj. Pobudni čekić i senzor ubrzanja su povezani sa A/D karticom (3), koja prikupljene podatke šalje direktno na računar (4). Ležaj je slobodno oslonjen pomoću gumenog kanapa na magnetni držač (5), da bi se izbegao uticaj držača na dobijene rezultate.



Slika 6.3 Šematski prikaz eksperimenta za određivanje FRF ležaja

Za potrebe ovog istraživanja korišćen je piezo-električni senzor ubrzanja, frekventnog opsega do 10 kHz, raspona amplituda, ± 50 g i osetljivosti 100 mV/g. Nemogućnost merenja

frekvencija bliskih nuli, kao ograničavajućeg faktora pri primeni piezo-električnih davača ubrzanja, u ovom slučaju ne predstavlja smetnju, budući da se posmatra frekventni opseg od 50 - 10000 Hz.

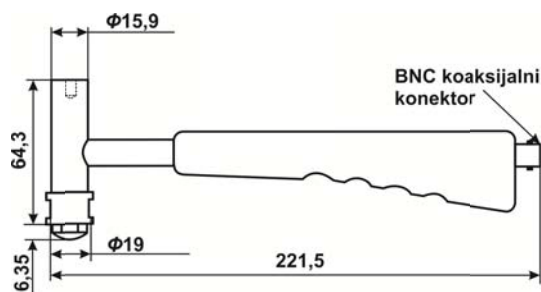
Pod uticajem pobude javljaju se inercijalne sile, pomeranja i deformacije, koje su vremenski zavisni. U okviru ovog istraživanja korišten je impulsni čekić koji ima ugrađen senzor sile, čije su karakteristike date u tabeli 6.1, a izgled i dimenzije na slici 6.4.

Tabela 6.1 Karakteristike pobudnog čekića

Proizvođač:	Bruel & Kjaer
Tip/Serijski br.:	8206/56777
Referentna osetljivost na 21,9 [°C]:	23,28 [mV/N]
Merni opseg sile (pri ± 5 [V]):	220 [N]
Opseg radne temperature:	-73 ÷ +60 [°C]
Maksimalna pobudna sila:	4448 [N]
Efektivna seizmička masa:	100 [g]
Dodatna seizmička masa:	40 [g]
Materijal vrha:	Aluminijum



a)



b)

Slika 6.4 Pobudni čekić: a) izgled; b) dimenzije

Akvizicija signala se izvodi pomoću instrumentalne opreme koja se sastoji od senzora ubrzanja i analogno/digitalne (A/D) kartice. Na slici 6.5a prikazan je jednoosni senzor ubrzanja *PCB 352C33*, koji je korišćen za merenja. Senzor ubrzanja se pomoću specijalnog voska postavlja na spoljašnji prsten ležaja, tako da njegova merna osa bude u pravcu delovanja pobudne sile. Analogno-digitalna kartica sa pojačavačem NI USB 4432 je korišćena za prikupljanje podataka sa senzora ubrzanja i pobudnog čekića. AD NI USB 4432 kartica (slika 6.5b) ima pet analognih ulaza, opsega napona ± 5 V i maksimalne brzine odabiranja (semplovanja) signala po kanalu $104,6 \cdot 10^3$ kS/s.



a)



b)

Slika 6.5 Oprema korišćena za eksperimentalnu modalnu analizu: a) Senzor ubrzanja *PCB 352C33* b) A/D kartica *National Instruments USB-4432*

Signal koj je prikupljen pomoću senzora ubrzanja i signal čekića se preko A/D kartice šalju na PC računar gde se primenom programskog sistema *MatLab* skladište u tabelarnom obliku. Kreiranjem algoritma u *MatLAB* okruženju, omogućena je brza Furijeova transformacija (*FFT*) dobijenih signala i određivanje funkcije frekventnog odziva posmatranog sistema. Funkcija frekventnog odziva sistema prikazuje se kao realni i imaginarni deo. Treba napomenuti da je prilikom definisanja realnog i imaginarnog dela funkcije frekventnog odziva ležaja primenjeno filtriranje signala ispod 50 Hz i iznad 10 kHz kako bi se uklonio nepotreban šum iz snimljenih signala, i kako bi se dobili što jasniji dijagrami.

6.1.1 Eksperimentalno određivanje funkcije frekventnog odziva i modalnih parametara kugličnih ležaja

Eksperimentalna modalna analiza sa impulsnom pobudnom silom je najjednostavnija metoda za određivanje funkcije frekventnog odziva, te se kao takva najčešće primenjuje za definisanje modalnih parametara ležaja. Prenosna funkcija određena merenjem za jedan mod oscilovanja, za „realni“ i „imaginarni deo“ je prikazana na slici 6.6. Maksimalna vrednost amplitude nije na $\omega/\omega_n=1$ već pri nižim vrednostima, a prigušena sopstvena frekvencija ima vrednost $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$. Analogno vredi i za minimalnu vrednost prenosne funkcije $\omega_d = \omega_n \sqrt{1+\xi^2}$. Modalni koeficijent prigušenja se prema [92] može odrediti iz realnog dela prenosne funkcije kao:

$$2\xi = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + 1} \quad (6.1)$$

Kada se snimljeni podaci u vremenskom domenu primenom brze Furijeove transformacije, transformišu u frekventni domen, dobija se funkcija frekventnog odziva (*Frequency Response Function* - FRF) između tačke u kojoj je meren odziv sistema (*i*) i tačke u kojoj je delovala pobudna sila (*j*), koja može biti prikazana na sledeći način:

$$FRF_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)} \quad (6.2)$$

Takođe, treba napomenuti da je u većini slučajeva kao odziv sistema potrebno dobiti pomeranje *X*. Međutim, ukoliko se merenje izvodi sensorima ubrzanja, prethodna jednačina ima oblik [72]:

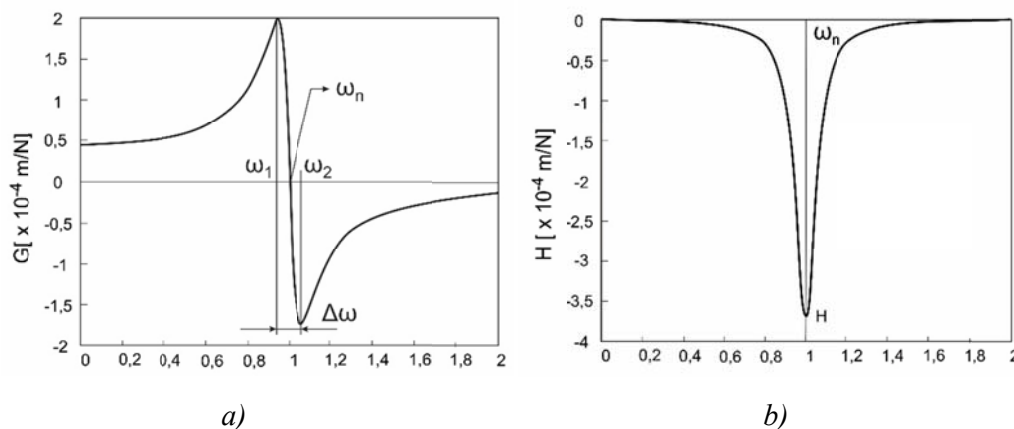
$$FRF(\omega) = \frac{\ddot{x}}{F(\omega)} = \frac{A(\omega)}{F(\omega)} \quad (6.3)$$

Pretvaranje ubrzanja u pomeranje, moguće je sprovesti tako što se signal prikupljen akcelerometrom podeli sa $(i\omega)^2$, odnosno sa $-\omega^2$.

Funkcija frekventnog odziva sistema, dobijena na prethodno opisan način je kompleksna, odnosno sastoji se od realnog G i imaginarnog H dela:

$$FRF(\omega) = G + iH \quad (6.4)$$

Na slici 6.6 prikazan je izgled realnog i imaginarnog dela funkcije frekventnog odziva.



Slika 6.6 a) Realni; b) imaginarni deo funkcije frekventnog odziva

Realni i imaginarni deo njegove funkcije frekventnog odziva mogu se izračunati na osnovu sledećih izraza:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{X}{F}\right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2} \right) \quad (6.5)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{X}{F}\right) = \frac{1}{k} \left(\frac{-2 \cdot \zeta \cdot r}{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2} \right) \quad (6.6)$$

gde je : $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, pri $\omega = \omega_n$ (trenutak kada nastupa rezonanca) imaginarni deo prenosne funkcije ima vrednost $H = -1/(2\zeta k)$, odnosno

$$k = \frac{-1}{2\zeta H} \quad (6.7)$$

Imajući u vidu da je sopstvena frekvencija $\omega^2 = k/m$, modalna masa m se može izraziti kao:

$$m = \frac{k}{\omega_n^2} \quad (6.8)$$

gde je: ζ - koeficijent prigušenja; k - modalna krutost, pri čemu je H minimum imaginarnog dela FRF; m - modalna masa.

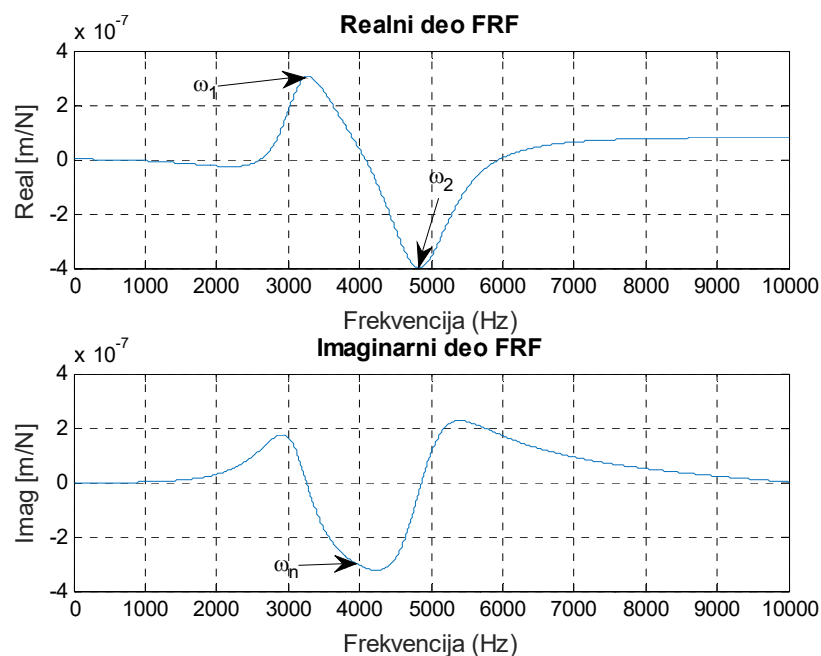
6.1.2 Eksperimentalna modalna analiza za ležaj 6006

Eksperimentalna modalna analiza se izvodi tako što se za ležaj, koji je oslonjen na magnetni držač, pomoću elastične gumice, uz upotrebu senzora ubrzanja meri odziv ležaja na pobudnu silu generisanu pobudnim čekićem u tački koja se nalazi na sredini spoljašnje površine spoljašnjeg prstena. Na slici 6.7 prikazana je procedura eksperimentalne modalne analize.

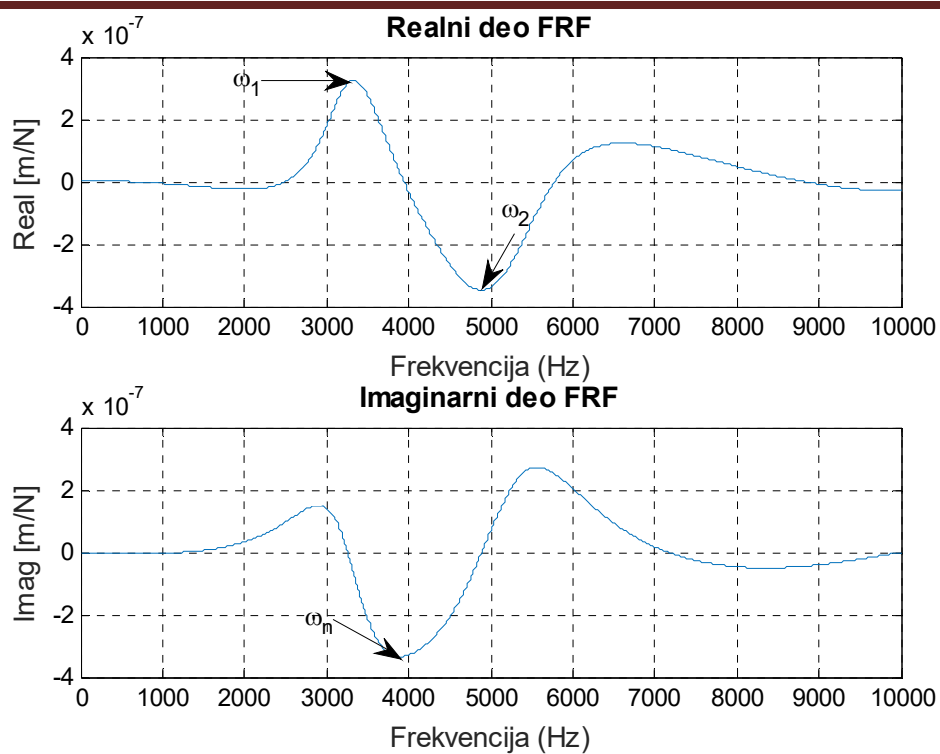
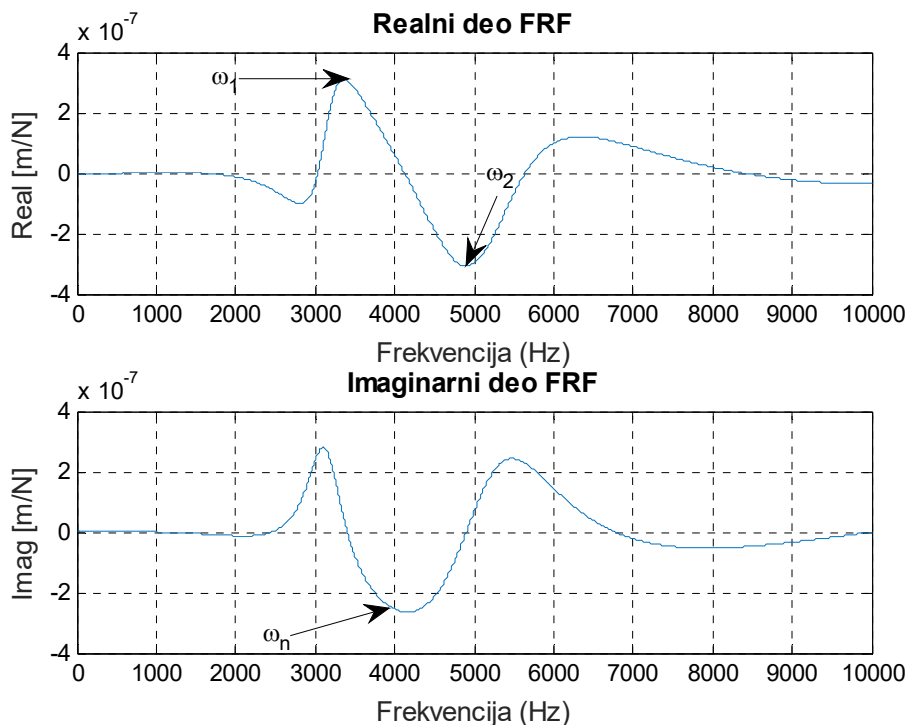


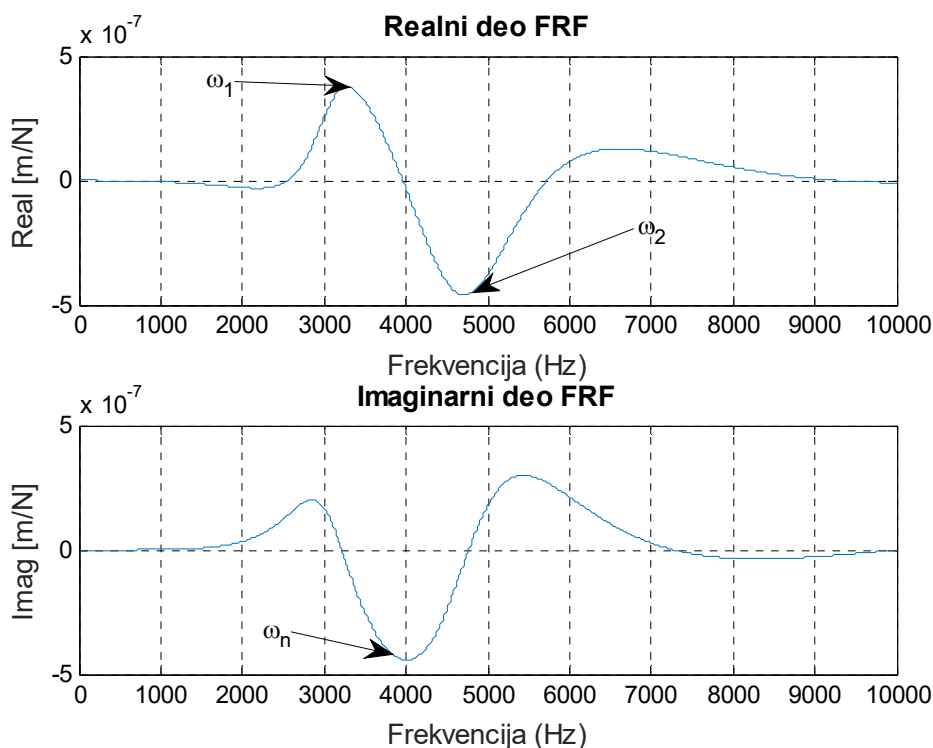
Slika 6.7 Procedura eksperimentalne modalne analize ležaja 6006

Na slikama 6.8, 6.9, 6.10 i 6.11 prikazan je izgled realnog i imaginarnog dela FRF za ispitivani ležaj 6006 i vrednosti zazora: 10, 20, 30 i 40 μm , respektivno. Sa slika je uočljivo da ispitivani ležaji u posmatranom frekventnom opsegu imaju samo jedan dominantan mod, pa su modalni parametri ležaja određeni samo za taj mod, na osnovu relacija (6.7) - (6.8). Izračunati rezultati su prikazani u tabeli 6.2.



Slika 6.8 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=10 \mu\text{m}$

Slika 6.9 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=20 \mu\text{m}$ Slika 6.10 Realan i imaginaran deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=30 \mu\text{m}$



Slika 6.11 Realan i imaginarni deo FRF za ležaj 6006 i zazor $G_r=40 \mu\text{m}$

Tabela 6.2 Modalni parametri izračunati na osnovu eksperimenta i primene FRF

Zazor	ω_1	ω_2	ω_n	ζ	k [N/m]	m [kg]
10	3296	4853	4267	0,36	$0,22 \times 10^7$	0,119
20	3337	4866	3919	0,38	$0,19 \times 10^7$	0,123
30	3384	4889	4121	0,35	$0,20 \times 10^7$	0,117
40	3323	4708	3995	0,33	$0,18 \times 10^7$	0,113

Na osnovu prethodnih dijagrama i tabele 6.2 može se zaključiti da zazor ne utiče na sopstvene frekvencije, kao ni na modalne parametre radijalnog ležaja.

6.1.3 Eksperimentalna modalna analiza za ležaj LSQFR 308

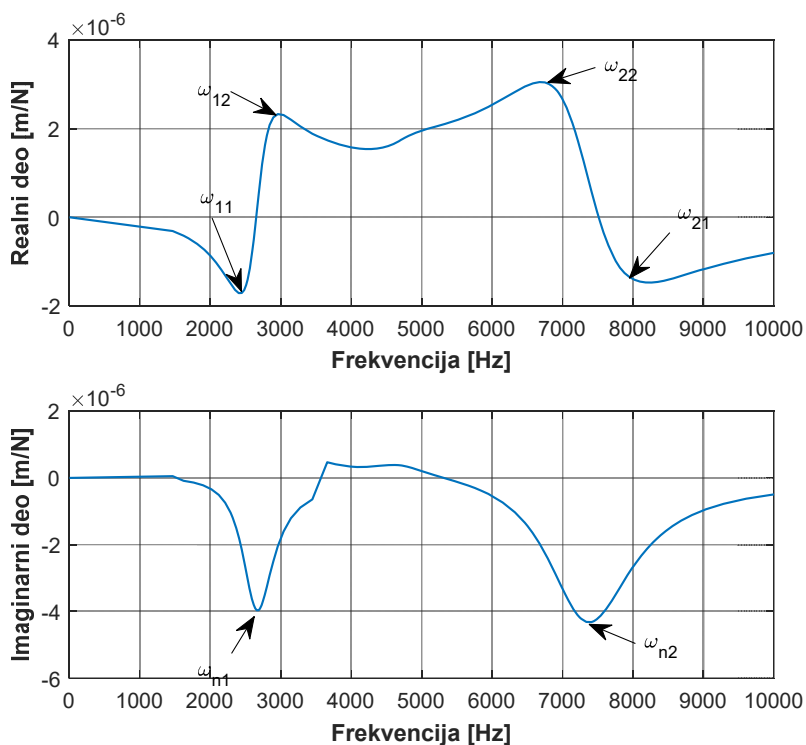
Postupak eksperimenta za ležaj LSQFR 308 je isti kao i za prethodni ležaj. Ležaj za koji se radi modalna analiza oslonjen je na magnetni držač, pomoću gumice, uz upotrebu senzora ubrzanja meri se odziv ležaja na pobudnu silu generisanu impulsnim čekićem u tački koja se nalazi na sredini spoljašnje površine spoljašnjeg prstena. Na slici 6.12 prikazana je postavka eksperimenta za ležaj sa kontaktom u četiri tačke.

Na osnovu sveobuhvatnog ispitivanja oba tipa ležaja, ustanovljeno je da zazor nema uticaja na sopstvene frekvencije kada se ispituje slobodno oslonjen ležaj te će u nastavku biti prikazani rezultati modalne analize kugličnog ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308 pri zazoru od $20 \mu\text{m}$. Na slici 6.13 je prikazan realni i imaginarni deo FRF za ispitivani ležaj LSQFR 308 pri zazoru od $20 \mu\text{m}$. Sa dijagrama na slici 6.13 se može konstatovati da ispitivani ležaj u posmatranom frekventnom opsegu ima dva dominantna moda, pa su

modalni parametri za ovaj ležaj određeni za oba moda oscilovanja, na osnovu relacija (6.7) - (6.8). Rezultati izračunatih modalnih parametara su prikazani u tabeli 6.3.



Slika 6.12 Postavka eksperimentalne modalne analize ležaja LSQFR 308



Slika 6.13 Realan i imaginarni deo FRF za ležaj LSQFR 308 sa zazorom $G_r = 20 \mu m$

Tabela 6.3 Modalni parametri izračunati na bazi eksperimentalnih ispitivanja za ležaj LSQFR 308

Mod	ω_{1i} [Hz]	ω_{2i} [Hz]	ω_{ni} [Hz]	ζ_i	k [N/m]	m [kg]
1	2403	2893	2658	0,18	$0,75 \times 10^6$	1,06
2	6747	7909	7335	0,15	$0,77 \times 10^6$	0,014

Prema literaturnim podacima, modalna masa na prvom modu oscilovanja je oko 85% od celokupne mase analizirane konstrukcije. Prema tabelama 6.2 i 6.3, eksperimentalno određene modalne mase na prvom modu oscilovanja odgovaraju tim vrednostima. Masa radijalnog ležaja je oko 0,120 kg, dok je masa ležaja LSQR 308 oko 1,2 kg.

Potrebno je napomenuti, da postoje određena ograničenja, pri ispitivanju ležaja i ostalih struktura, impulsnom pobudom. Prvo, za povezivanje akvizicione opreme potrebno je primeniti dobro izolovane kablove što je moguće manje dužine u cilju smanjenja šuma u snimljenom signalu. Drugo, treba voditi računa pri izboru senzora, čija masa utiče na njegovu osetljivost i merni opseg. Dalje, materijal, dimenzije i geometrija vrha pobudnog čekića moraju biti izabrani tako da se obezbedi adekvatna pobuda strukture za definisani opseg frekvencija. Pored svega navedenog, potreban je određeni stepen praktičnog iskustva, da bi se obezbedila tačnost ispitivanja dinamičkog ponašanja elemenata.

6.2 Ispitivanje vibracija radijalnog ležaja 6006

Kao što je već rečeno, eksperimentalno ispitivanje, koje se odnosi na merenje vibracija je sprovedeno u Laboratoriji za mašine alatke, fleksibilne tehnološke sisteme i automatizaciju postupaka projektovanja. Vibracije ležaja su izmerene na eksperimentalnom uređaju za merenje vibracija kotrljajnih ležaja. Pri merenju vibracija, rezultati o vibracijama ležaja zapisuju se u digitalnom obliku i pogodni su za dalju analizu.

Ispitivanje je sprovedeno na radijalnom ležaju FKL 6006, slika 6.14. Ispitivanje je sprovedeno na uzorku od 30 ležaja različitih klasa radijalnog zazora. Pretpostavljeno je da je geometrija kotrljajnih tela idealna.



Slika 6.14 Ispitivani ležaj 6006

Prema standardu ISO 5753-1:2009 propisano je pet klasa radijalnog zazora za radijalne kuglične ležaje i to C2, C0 (nominalni zazor), C3, C4 i C5. U klasu C2 spadaju ležaji sa radijalnim zazorom koji je manji od nominalnog, dok u klase C3, C4 i C5 spadaju ležaji koji imaju zazole veće od nominalnog. Vrednosti radijalnog zazora date su u tabeli 6.4.

Geometrija ležaja koji se koriste u ispitivanju je poznata. Poznati su poluprečnici staza kotrljanja u preseku upravnom na osu kotrljanja kotrljajnih tela, hrapavost, valovitost i odstupanje od kružnosti staze kotrljanja spoljašnjeg i unutrašnjeg prstena.

Tabela 6.4 Veličina radijalnog zazora prema klasama

Klasa zazora	C2	C0	C3	C4	C5
Veličina zazora [μm]	1-11	5-20	13-28	23-41	30-53

Eksperiment je izvršen u laboratorijskim uslovima, na sobnoj temperaturi u uslovima koje propisuju standardi ISO 554, ISO 558 i ISO 3205, odnosno eliminisan je uticaj drugih potencijalnih izvora vibracija. Plan eksperimenta prikazan je u tabeli 6.5 u svrhu utvrđivanja uticaja konstrukcionih i eksploatacionih parametara na amplitude vibracija ležaja.

Tabela 6.5 Plan eksperimenta

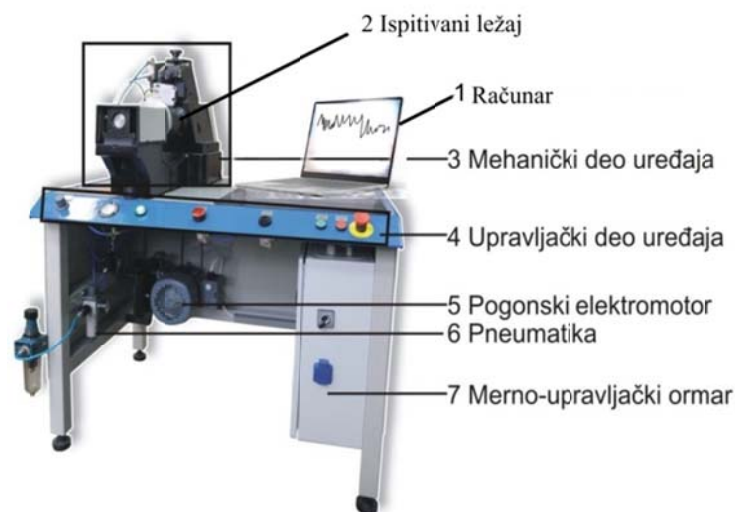
Uzorak/oznaka ležaja	Broj ponavljanja merenja	Aksijalno opterećenje [N]								
		200	300	400	500	600	700	800	900	1000
11, 12, 13, 14, 15, 16 31, 32, 33, 34, 35, 36 41, 42, 43, 44, 45, 46 51, 52, 53, 54, 55, 56 61, 62, 63, 64, 65, 66	3									
30 uzoraka	3 merenja za svaki uzorak i opterećenje	9 različitih opterećenja								

Zbog provere ponovljivosti rezultata, svako merenje je izvršeno 3 puta. Ispitivanje je započeto na ležaju sa oznakom 11, pa sve do ležaja sa oznakom 66, respektivno. Prvo se postavi ležaj na uređaj za merenje vibracija, pa se na spoljašnji prsten ležaja dovede minimalno aksijalno opterećenje od 200 N i nakon toga se uključi obrtanje vretena. Sačeka se da uređaj dostigne konstantan broj obrtaja, pa se započinje sa merenjem. Nakon završetka prvog merenja, izvršeno je drugo i treće merenje, bez isključivanja obrtanja vretena. Minimalno aksijalno opterećenje usvojeno je prema standardu SRPS ISO 15242-2. Veličina aksijalnog opterećenja povećava se do maksimalnih 1000 N, sa korakom od 100 N. Rezultati su zabeleženi za 810 merenja vibracija ležaja u datotekama ekstenzije *.mat*, a upravljanje uređajem za merenje i obrada podataka je sprovedena programskim paketom *Matlab*.

Sistem za merenje i kontrolu vibracija je ugrađen na merno-kontrolni uređaj koji služi za ispitivanje, analizu i dijagnostiku kotrljajnih ležaja i zasniva se na merenju vibracija kotrljajnih ležaja pomoću elektrodinamičkog davača brzine. Merno-kontrolni uređaj se koristi za dijagnostiku grešaka mikro i makro geometrije ležaja, kao i za detekciju oštećenja elemenata ležaja nastalih prilikom proizvodnje ili montaže ležaja. Ispitivanje ležaja na uređaju vrši se u poluautomatskom režimu rada, gde je jedino manipulacija ležajima ručni zahvat, što obuhvata njegovo postavljanje na merni trn i skidanje nakon ispitivanja.

Na slici 6.15 prikazan je eksperimentalni uređaj za merenje amplituda vibracija kotrljajnih ležaja. Uređaj se sastoji od ispitnog stola na koji su postavljeni računar (1) i

mehanički deo (3) koji se sastoji od hidrodinamičkog vretena sa mernim trnom, davača brzine i pneumatskog cilindra. Upravljački deo (4) čine tasteri za pokretanje i zaustavljanje vretena, tasteri za uključivanje pneumatskog cilindra, za zadavanje odgovarajućeg opterećenja kao i taster za hitno zaustavljanje svih kretanja. Pored pomenutih delova eksperimentalni uređaj čine još i pogonski elektromotor (5), koji posredstvom kaišnog prenosiča pogoni hidrodinamičko vreteno, merno-upravljački ormar (7) u kome je smešten sistem za upravljanje uređajem kao i sistem za merenje i prikupljanje podataka merenja i pneumatske instalacije (6).

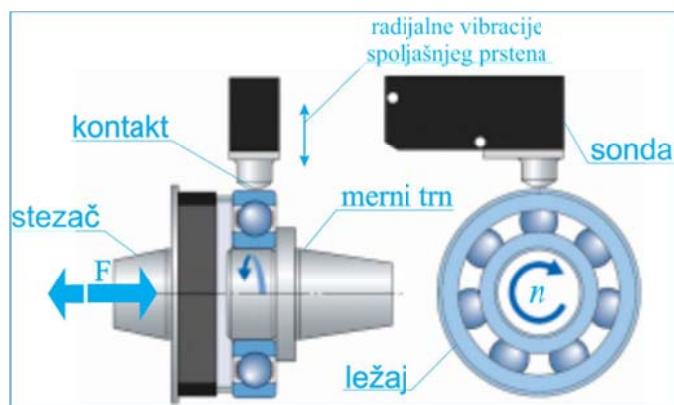


Slika 6.15 Eksperimentalni uređaj za merenje vibracija

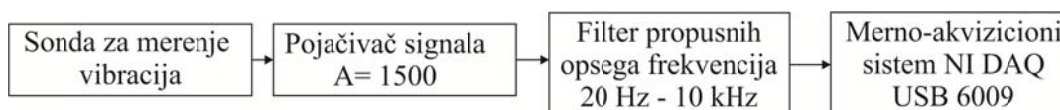
Šematski princip merenja vibracija kotrljajnih ležaja prikazan je na slici 6.16. Ležaj (označen na slici sa 2) se preko unutrašnjeg prstena postavlja na merni trn posredstvom konusa i navojne veze spojen je sa vretenom koje je uležišteno hidrodinamičkim ležajima. Tokom merenja vreteno se obrće konstantnim brojem obrtaja 1800 o/min. Spoljašnji prsten je nepokretan i opterećen aksijalnom silom preko posebno projektovanog pribora. Elektrodinamički davač brzine se pomoću mehanizma spušta kako bi ostvario kontakt sa spoljašnjim prstenom ležaja (koji osciluje usled grešaka na nekom od delova ležaja). Osnovni element u lancu merenja vibracija predstavlja elektrodinamički davač brzine (sonda), koji je preko USB kabla povezan sa računarnom. Merenje traje 5 sekundi, od trenutka kada ležaj dostigne konstantnu brzinu obrtanja, a eksperimentom se upravlja pomoću programa napisanog u *Matlab*-u. Ovaj program, takođe, omogućava i zapisivanje izmerenih vrednosti.

Pošto je amplituda signala koji se dobija pomoću elektrodinamičke sonde mala, za digitalnu obradu i prikaz signal je pojačan primenom pojačivača. Na slici 6.17 prikazan je blok dijagram sistema za ispitivanje vibracija kotrljajnih ležaja. Za analognu obradu signala koriste se pojačivač i filter propusnih opsega. Zadatak pojačivača je da pojača nivo signala sa elektrodinamičkog davača brzine na nivo koji je pogodan za digitalnu obradu i prikaz. Korišćen je pojačivač sa pojačanjem od 1500, što je dovoljna amplituda signala za digitalnu obradu. Filter ima zadatak da ograniči spektar signala dobijenog sa pojačivača i da propušta opseg frekvencija od 20 Hz do 10 kHz. Projektovani filter uvodi relativno malo slabljenje vibracija talasa u jednom i više frekventnih opsega i relativno veliko slabljenje za vibracije

drugih frekvencija (ispod 50 Hz i iznad 10 kHz) prema standardu SRPS ISO 15242-1 (Kotrljajni ležaji - Metode merenja vibracija Deo 1: Osnove). Propusni opseg filtra je, takođe, definisan na osnovu pomenutog standarda. Digitalizacija signala se vrši primenom merno-akvizicionog sistema NI DAQ USB-6009. Frekvencija semplovanja iznosi 48 kHz, dok je rezolucija internog A/D konvertora 13 bit-a. Na ovaj način je obezbeđena kvalitetna priprema signala primenom elektrodinamičkog davača brzine i njegova digitalizacija za dalju računarsku obradu.



Slika 6.16 Šematski prikaz principa merenja pomoću elektrodinamičkog davača brzine



Slika 6.17 Blok dijagram merno-upravljačkog sistema

Rezultati dobijeni merenjem mogu se prikazati u četiri karakteristična frekvencijska opsega:

- LOW (nizak),
- MEDIUM (srednji),
- HIGH (visok) i
- PEAK (maksimalna vrednost amplitude u spektru).

U zavisnosti od broja obrtaja vretena, granice opsega su:

- Za niske brojeve obrtaja (700 o/min) vrednosti opsega su u granicama: 20-120 Hz; 120-700 Hz; 700-4000 Hz i 20-4000 Hz.
- Za visoke brojeve obrtaja (1800 o/min) vrednosti opsega su u granicama: 50-300 Hz; 300-1800 Hz; 1800-10000 Hz i 50-10000 Hz.

Izmereni signal se prvo propušta kroz modul za digitalnu obradu signala, da bi se dobile informacije u ova četiri opsega. Pomoću digitalne obrade signala dobijaju se stubovi efektivnih vrednosti vibracija u željenim frekvencijskim područjima, kao i vrednosti amplituda na karakterističnim frekvencijama ispitivanog ležaja. Kao što je već rečeno, sirovi signal sa sonde se prvo pojačava i filtrira. Ovako pojačan i filtriran signal se dovodi na merno-akvizicionu karticu. Prvi element pri digitalnoj obradi signala je modul za efikasno izračunavanje Furijeove transformacije:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}; k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.9)$$

gde su x_n odbirci ulaznog signala, X_k odbirci spektralne gustine koji su kompleksni brojevi i N je broja tačaka u kojima se izračunava Furijeova transformacija. Da bi se dobila spektralna gustina amplituda, neophodno je izračunati moduo jednačine (6.9), tj.:

$$|X_k| = \sqrt{\operatorname{Re}\{X_k\}^2 + \operatorname{Im}\{X_k\}^2} \quad (6.10)$$

Za izračunavanje efektivne vrednosti vibracija u željenim frekvencijskim područjima, neophodno je sprektalnu gustinu amplituda pretvoriti u spektralnu gustinu efektivnih vrednosti, tj.:

$$|X_k|_{RMS} = \frac{|X_k|}{\sqrt{2}} \quad (6.11)$$

Granice željenih frekvencijskih područja označene su sa f_{lo} , f_{med} , f_{hi} i f_{end} u okviru tri frekvencijska opsega (LOW, MEDIUM, HIGH) nad kojima se računa efektivna vrednost:

$$\begin{aligned} f_I &\in [f_{lo}, f_{med}] \\ f_{II} &\in [f_{med}, f_{hi}] \\ f_{III} &\in [f_{hi}, f_{end}] \end{aligned} \quad (6.12)$$

Efektivne vrednosti za ova tri frekvencijska područja se izračunava kao:

$$\begin{aligned} RMS_I &= \sqrt{|X_{f_{lo}}|^2 + |X_{f_{lo+1}}|^2 + \dots + |X_{f_{med}}|^2} \\ RMS_{II} &= \sqrt{|X_{f_{med}}|^2 + |X_{f_{med+1}}|^2 + \dots + |X_{f_{hi}}|^2} \\ RMS_{III} &= \sqrt{|X_{f_{hi}}|^2 + |X_{f_{hi+1}}|^2 + \dots + |X_{f_{end}}|^2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

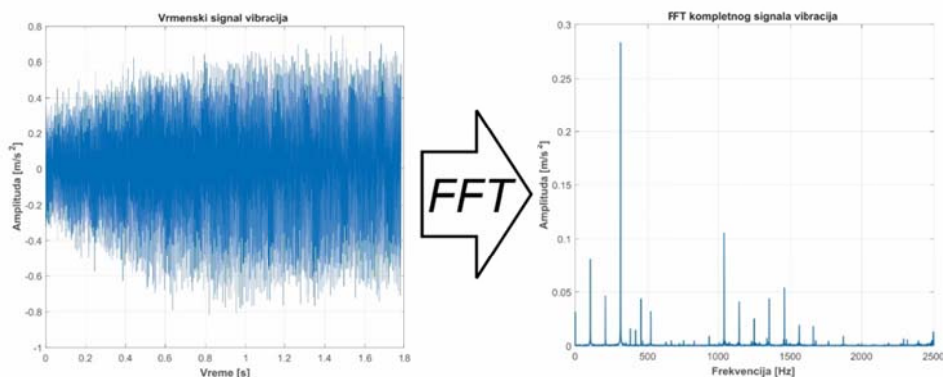
Vrednosti dobijene pomoću relacije (6.13), predstavljaju stubove efektivnih vrednosti vibracija LOW, MEDIUM i HIGH. PEAK vrednost predstavlja maksimalnu amplitudu vibracija u spektru i izračunava se kao:

$$X_{peak} = \max \{|X_k|\}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.14)$$

Pri eksperimentalnom ispitivanju sopstvenih vibracija odgovarajućim sensorima se prikuplja signal vibracija u vremenskom domenu. Ovakav signal, ne daje mnogo informacija o karakteristikama vibracija, te ga je neophodno transformisati u frekventni domen (slika 6.18). Signal se transformiše primenom brze Furijeove transformacije (*Fast Fourier transform* - FFT), razlažući se na komponente različitih frekvencija. Svaka od komponenti ima svoju frekvenciju, amplitudu i fazni ugao. Svaki uređaj, kao i mašina, odnosno elementi od kojih je sastavljen, generišu vibracije, prilikom obrtanja, na karakterističnim

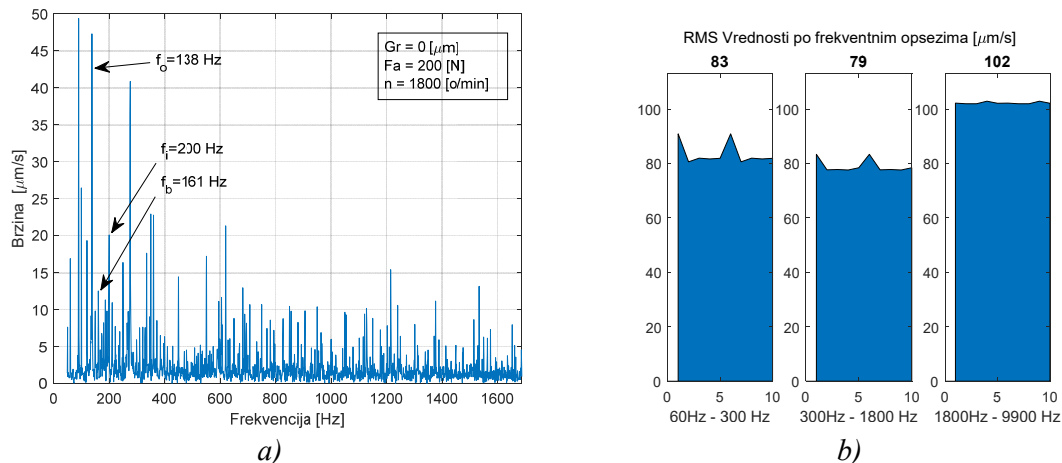
frekvencijama. Za analizu vibracijskog signala u frekventnom domenu, potrebno je poznavati karakteristične frekvencije svih elemenata, pa je na osnovu dobijenih frekvencija moguće utvrditi koji element mašine ili ležaja generiše vibracije.

Razlog zbog koga se prelazi iz vremenskog u frekventni domen, primenom brze Furijeove transformacije, je jasno uočavanje frekvencije vibracija koje odgovaraju karakterističnim pojavama u frekventnom domenu.

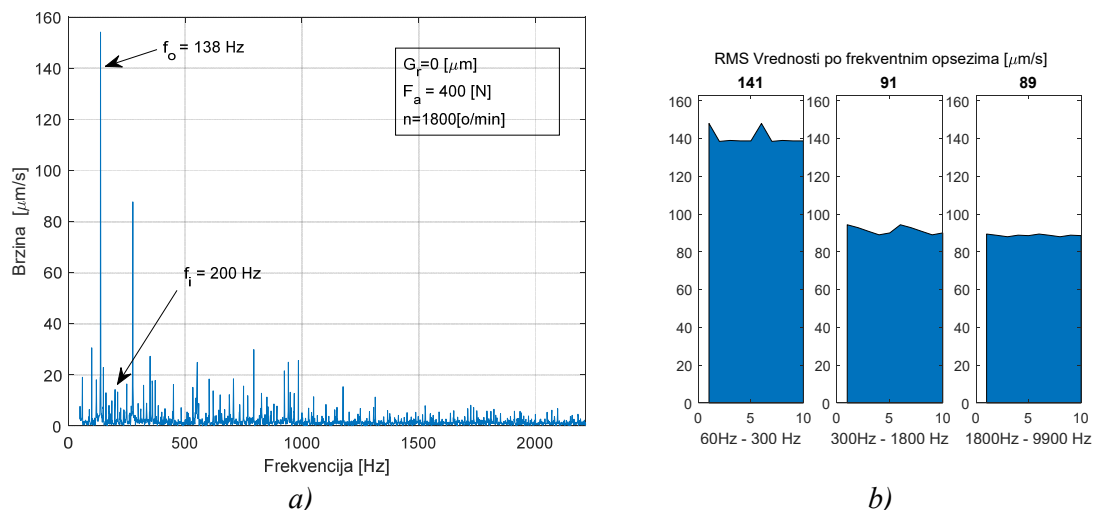


Slika 6.18 Transformacija signala vibracija iz vremenskog u frekventni domen [72]

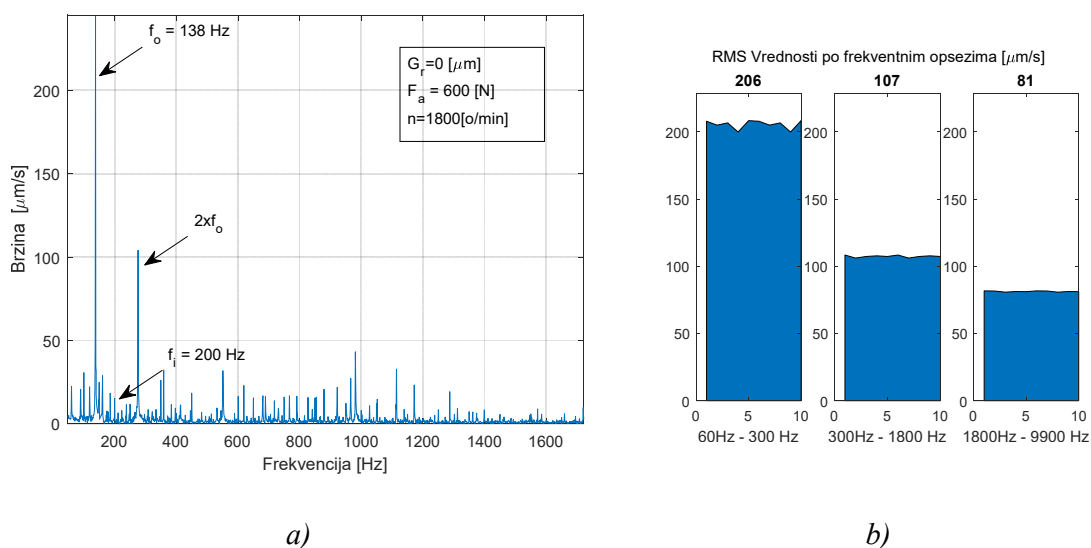
U nastavku su analizirani zabeleženi signali primenom FFT u tri karakteristična područja prema standardu, a to su 50-300 Hz, 300-1800 Hz i 1800-10 000 Hz, za analizu ležaja manjih dimenzija. Na slikama 6.19a – 6.23a, prikazani su dijagrami signala u frekventnom domenu, za vrednost radijalnog zazora $G_r=0 \mu\text{m}$, za aksijalno opterećenje od $F_a = 200\text{-}1000 \text{ N}$, sa korakom od 200 N. Na slikama od 6.19b 6.23b, prikazani su rezultati analize za RMS brzine vibracija za sva područja, za iste ležaje kao i na slikama pod a. Na slikama od 6.24a – 6.28a, prikazani su dijagrami signala u frekventnom domenu, za vrednost radijalnog zazora $G_r = 30 \mu\text{m}$, za aksijalno opterećenje od $F_a = 200\text{-}1000 \text{ N}$, sa korakom od 200 N. Na slikama od 6.24b -6.28b, prikazani su rezultati analize za RMS brzine vibracija za sva područja, za iste ležaje kao i na slikama pod a. Analizom signala u frekventnom domenu može se utvrditi na kojim frekvencijama se javljaju dominantne amplitude kao i koji element ležaja ih izaziva. Rezultati merenja mogu se koristiti za utvrđivanje klase kvaliteta ležaja.



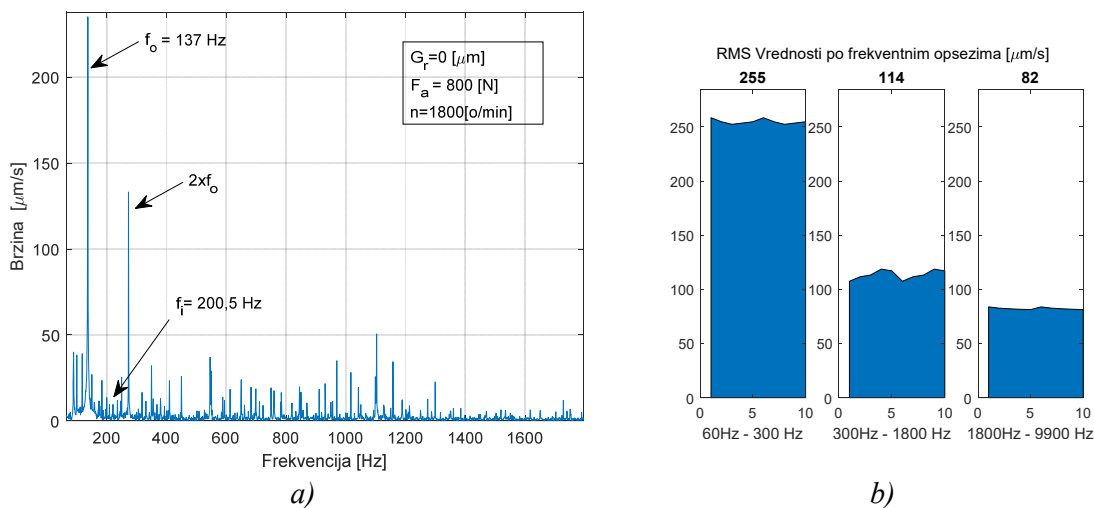
Slika 6.19 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=0 \mu\text{m}$, $F_a=200 \text{ N}$



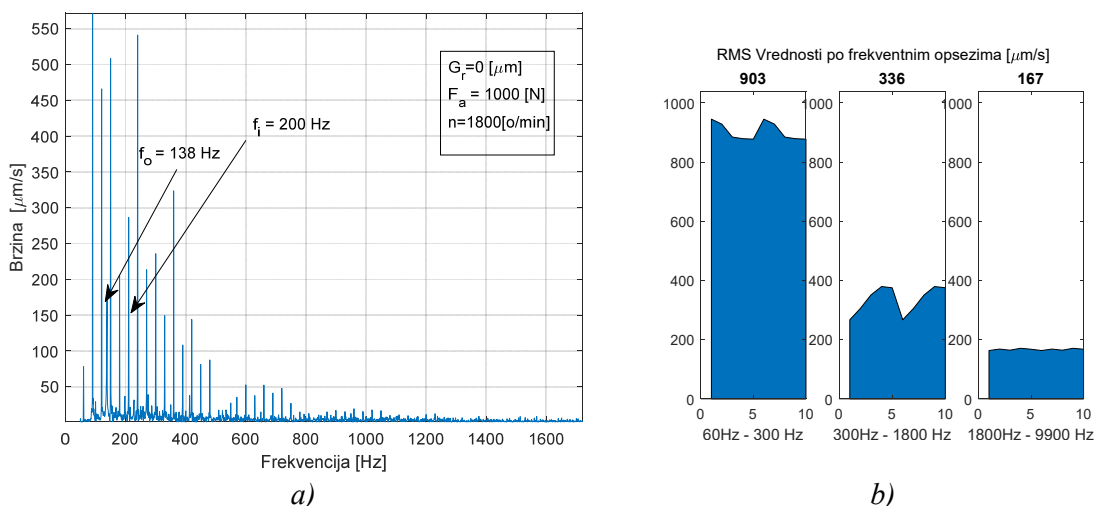
Slika 6.20 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r = 0 \mu\text{m}$, $F_a = 400$ N



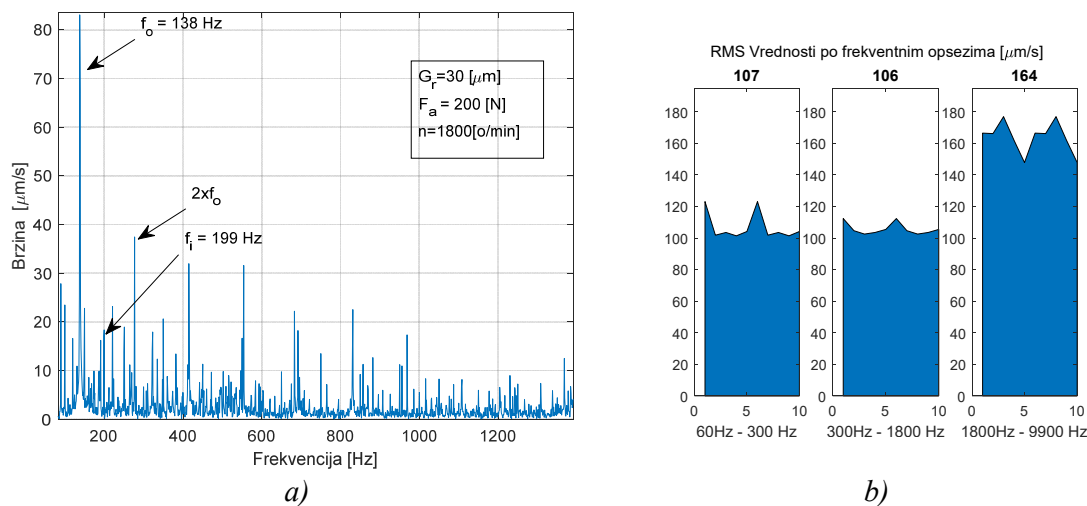
Slika 6.21 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r = 0 \mu\text{m}$, $F_a = 600$ N



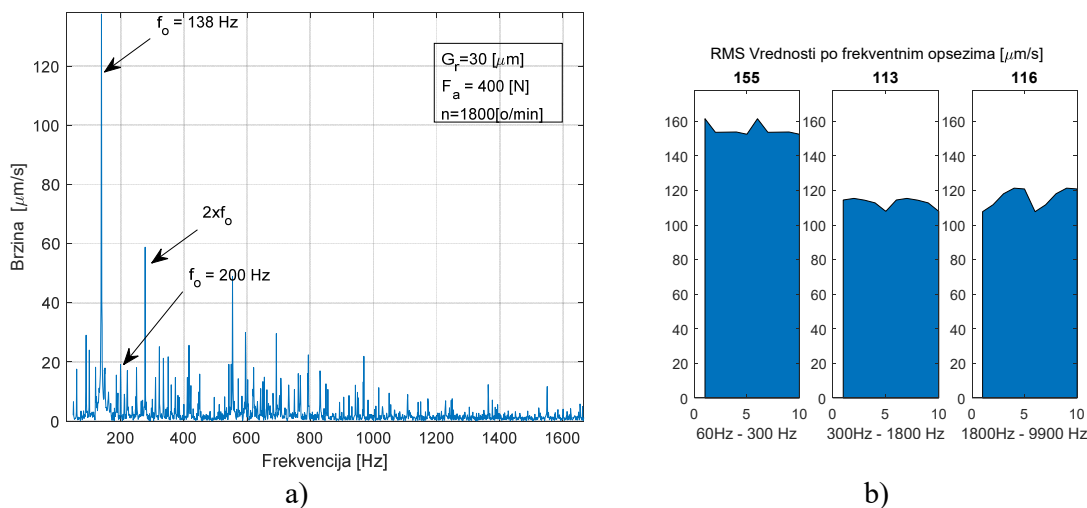
Slika 6.22 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r = 0 \mu\text{m}$, $F_a = 800$ N



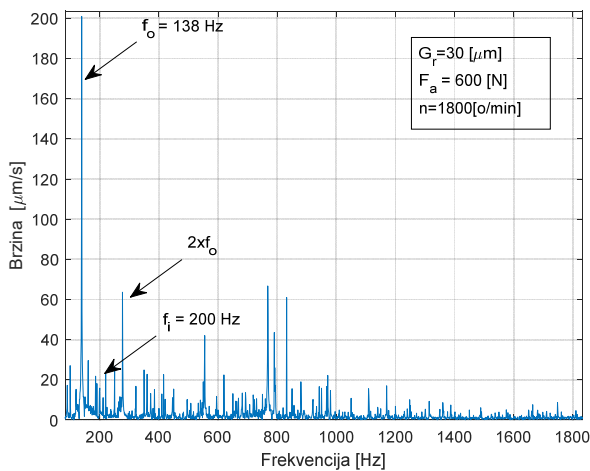
Slika 6.23 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=0 \mu\text{m}$, $F_a=1000 \text{ N}$



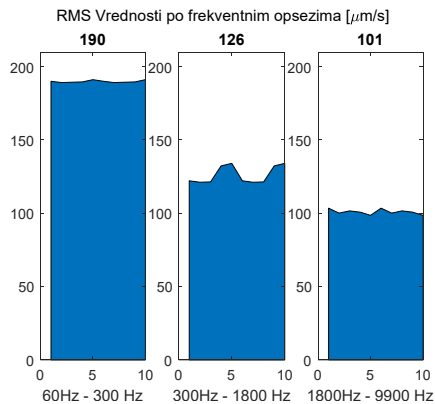
Slika 6.24 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=200 \text{ N}$



Slika 6.25 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=400 \text{ N}$

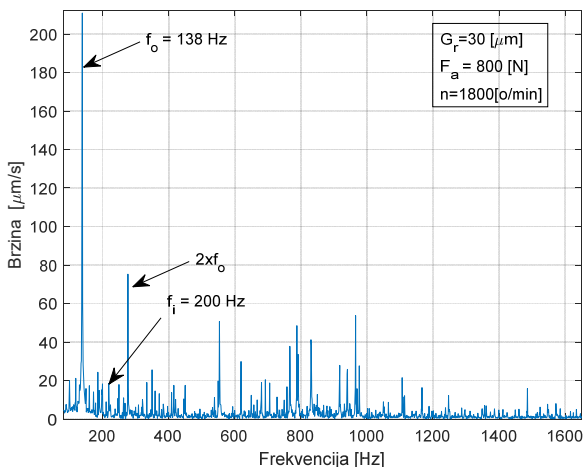


a)

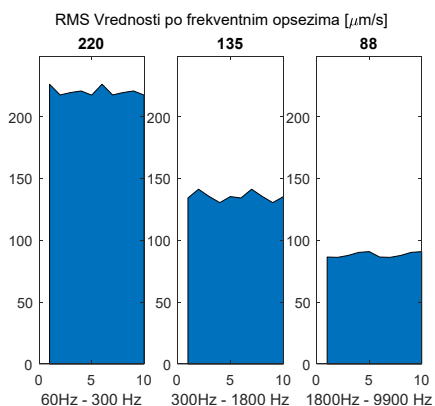


b)

Slika 6.26 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=600 \text{ N}$

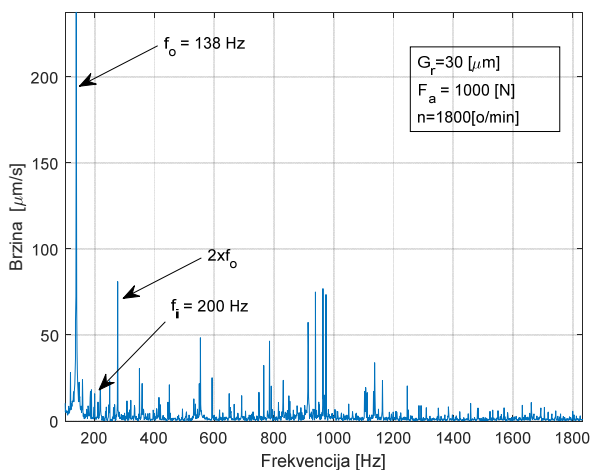


a)

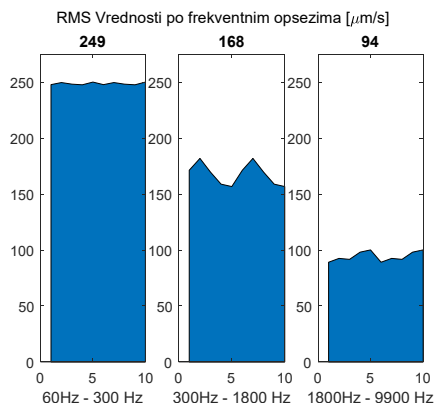


b)

Slika 6.27 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=800 \text{ N}$



a)



b)

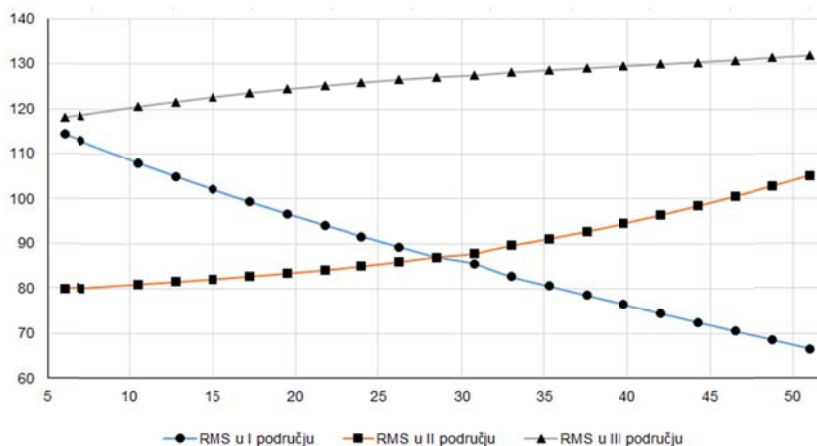
Slika 6.28 Analiza vibracija u frekventnom domenu $G_r=30 \mu\text{m}$, $F_a=1000 \text{ N}$

Analizirajući dobijene RMS vrednosti amplitude brzine vibracija sa slika 6.19b -6.23b i slika 6.24b – 6.28b, može se zaključiti da dolazi do porasta RMS vrednosti u polju niskih i srednjih frekvencija sa porastom aksijalnog opterećenja. U polju visokih frekvencija dolazi do opadanja RMS vrednosti sa povećanjem aksijalnog opterećenja do vrednosti opterećenja 800 N. Kod opterećenja koje iznosi 1000 N i u polju visokih frekvencija dolazi do porasta RMS vrednosti, za oba ležaja, odnosno za obe vrednosti radijalnog zazora ($G_r=0 \mu\text{m}$ i $G_r=30 \mu\text{m}$).

U nastavku su tabelarno dati podaci koji su prikupljeni eksperimentalnim putem. U tabeli 6.6 prikazani su rezultati merenja za različite vrednosti radijalnog zazora po RMS područjima. Dobijeni podaci iz pomenute tabele, zatim su prikazani grafički na slici 6.29, gde se vidi zavisnost RMS vrednosti brzine vibracija u karakterističnim područjima od veličine radijalnog zazora. U području srednjih i visokih frekvencija, povećanje radijalnog zazora izaziva blago povećanje RMS vrednosti brzine vibracija, dok u području niskih frekvencija, dolazi do intenzivnog smanjenja RMS vrednosti.

Tabela 6.6 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od radijalnog zazora

Radijalni zazor		6	7	10,5	12,7	15	17,2	19,5	21,7	24	26,2
RMS po područjima	I	114	113	108	105	102	99	97	94	92	89
	II	80	80	81	82	82	83	83	84	85	86
	III	118	119	121	122	123	124	124	125	126	127
Radijalni zazor		28,5	30,7	33	35,2	37,5	39,7	42	44,2	46,5	48,7
RMS po područjima	I	87	86	83	81	79	77	75	73	71	69
	II	87	88	90	91	93	94	96	98	101	103
	III	127	127	128	129	129	129	130	130	131	131



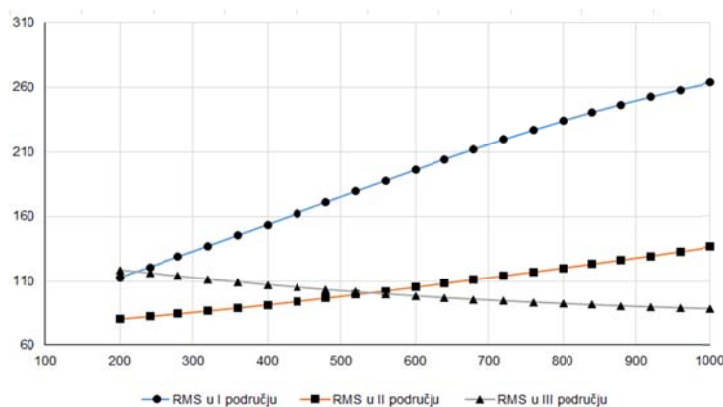
Slika 6.29 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od radijalnog zazora

U tabeli 6.7 prikazani su rezultati merenja za različite vrednosti aksijalnog opterećenja po RMS područjima. Zatim su ti rezultati prikazani grafički na slici 6.30. Iz tabele i sa dijagrama, može se zaključiti da sa povećanjem aksijalnog opterećenja u području niskih frekvencija, izaziva intenzivan rast amplitude brzine vibracija. Dalje, u području srednjih

frekvencija dolazi do blažeg rasta amplituda. U oblasti visokih frekvencija dolazi do smanjenja amplituda brzine vibracija, sa povećanjem aksijalnog opterećenja.

Tabela 6.7 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od aksijalnog opterećenja

Aksijalna sila		200	240	280	320	360	400	440	480	520	560
RMS po područjima	I	113	121	129	137	146	154	162	171	179	188
	II	80	82	84	87	89	91	94	97	99	102
	III	119	116	114	112	109	107	105	103	102	100
Aksijalna sila		600	640	680	720	760	800	840	880	920	1000
RMS po područjima	I	196	204	212	220	227	234	240	247	253	258
	II	105	108	111	114	117	120	123	126	130	133
	III	98	98	96	95	93	92	91	91	90	98



Slika 6.30 Zavisnost RMS vrednosti amplitude brzine vibracija od aksijalnog opterećenja

6.3 Eksperimentalno ispitivanje vibracija i određivanje veka ležaja sa kontaktom u četiri tačke

Ležaj LSQFR 308 se koristi za uležištenje poljoprivredne mehanizacije, odnosno za uležištenje diskova sejačice. Na slici 6.31 šematski je prikazan eksperimentalni štand na kome su ispitivane vibracije i vek ležaja FKL LSQFR 308. Elektromotor preko spojnice (1) i prirubnice (2) prenosi obrtni moment na vratilo (8) koje je uležišteno sa ispitivanim ležajima (5). Na vratilu se nalazi doboš (4) koji simulira disk sejalice i koji se okreće zajedno sa vratilom (8). Ležaj je opterećen radijalnom i aksijalnom silom, od 27000 N i 13400 N, respektivno, preko hidraulične instalacije za spoljašnje opterećenje (7). Senzor ubrzanja (3) je povezan sa A/D karticom (9), koja prikupljene podatke šalje direktno na računar (10). Na slici 6.32 prikazan je eksperimentalni štand u fabrici kotrljajnih ležaja FKL u kome je izvršeno ispitivanje veka ovog ležaja. U cilju simuliranja realnih uslova eksploatacije, unutrašnji prsten ležaja je opterećen radijalnom i aksijalnom silom konstantnog intenziteta. Radijalno i aksijalno opterećenje se ostvaruje preko poluga (6), (7) hidrauličkim putem pomoću hidrocilindara i hidroagregata. Spoljašnje opterećenje se prenosi na unutrašnje prstene ležaja preko vratila (8). Za merenje vibracija na kućištu ležaja (5) korišćeni su davači ubrzanja PCB 352C33 (opisan u prethodnom delu) i DYATRON P22. Osetljivost ovog

6.4 Analiza rezultata eksperimentalnog ispitivanja ležaja LSQFR 308

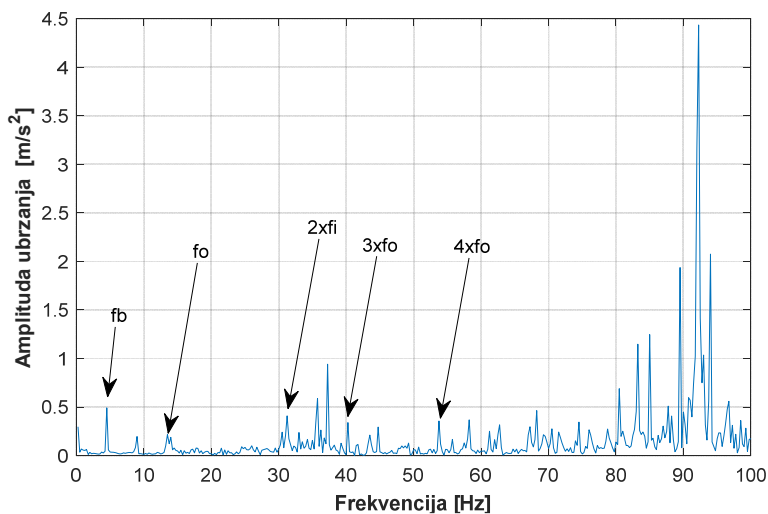
Detekcijom postojećih komponenti frekvencija elemenata ležaja u frekventnom spektru, njihove amplitude, prisustva harmonika (celobrojnih umnožaka) i komponenti modulacije, dolazi se do zaključka o uticaju pojedinih parametara na njegovo dinamičko ponašanje. S druge strane, u naučnim radovima, se konstatuje da otkaz ležaja nastaje kada u frekventnom spektru veličina amplituda ubrzanja na nekoj od karakterističnih frekvencija poraste 30% od svoje početne vrednosti.

6.4.1 Analiza uticaja zazora na dinamičko ponašanje ležaja sa kontaktom u četiri tačke

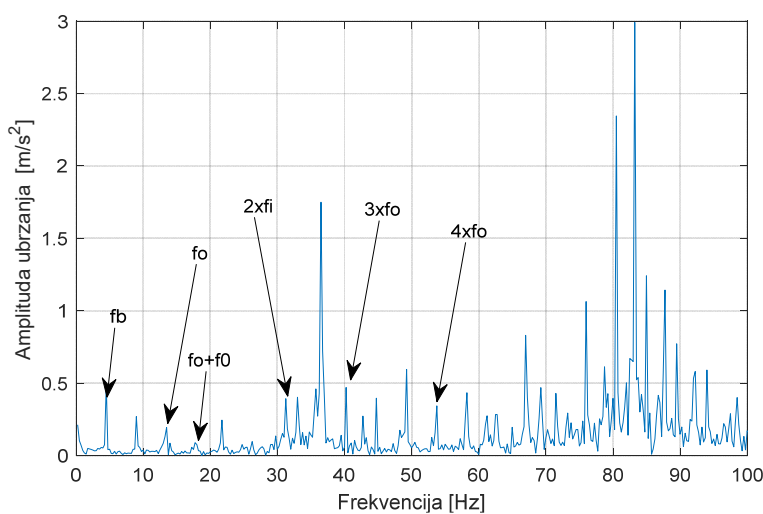
Pri ispitivanju uticaja zazora za eksperimentalno ispitivanje su izabrani ležaji sa zazorom 10 do 40 μm . Analiza uticaja zazora je izvršena pod kombinovanim opterećenjem, pri čemu je broj obrtaja iznosio 200 o/min. Opterećenje i broj obrtaja je određen na osnovu eksploatacionih uslova razmatranog ležaja. Sveobuhvatnim matematičkim modelovanjem i eksperimentalnim ispitivanjem je konstatovano da se maksimalne amplitude ubrzanja javljaju u radijalnom pravcu, te se u nastavku prikazuju rezultati promene amplituda ubrzanja u radijalnom pravcu u vertikalnoj ravni ležaja.

Na slici 6.33 prikazane su frekvencije pojedinih elemenata ležaja pri zazoru od 10 μm pri delovanju opterećenja. Frekvencija spoljašnjeg prstena (f_o) od 13,5 Hz je prikazana sa harmonicima 3x na 40,5 Hz i 4x na 54 Hz. Amplituda ubrzanja na ovim frekvencijama iznosi 0,21 m/s^2 , 0,33 m/s^2 i 0,35 m/s^2 , respektivno. Spektralna linija od 4,5 Hz sa amplitudama ubrzanja od 0,49 m/s^2 odgovara frekvenciji kotrljajnih tela (f_b). S desne strane spektralne linije koja odgovara (f_o) se nalazi frekvencija od 19,1 Hz koja predstavlja zbir frekvencije unutrašnjeg prstena i osnovne frekvencije obrtanja vretena ($f_r = 6,66$ Hz). Spektralna linija od 32,08 Hz sa amplitudama ubrzanja od 0,4 odgovara frekvenciji unutrašnjeg prstena (f_i). Spektar vibracija u frekventnom domenu za zazor od 20 μm pri delovanju opterećenja je prikazan na slici 6.34. Kao i u prethodnom slučaju, frekvencija unutrašnjeg prstena od 13,5 Hz je prikazana sa sa harmonicima na 40,5 Hz i 54 Hz. Amplituda ubrzanja na ovim frekvencijama iznosi 0,22 m/s^2 , 0,47 m/s^2 i 0,38 m/s^2 , respektivno. S desne strane spektralne linije koja odgovara (f_o) se nalazi frekvencija od 19,1 Hz koja predstavlja zbir frekvencije unutrašnjeg prstena i osnovne frekvencije obrtanja vretena ($f_r = 6,66$ Hz).

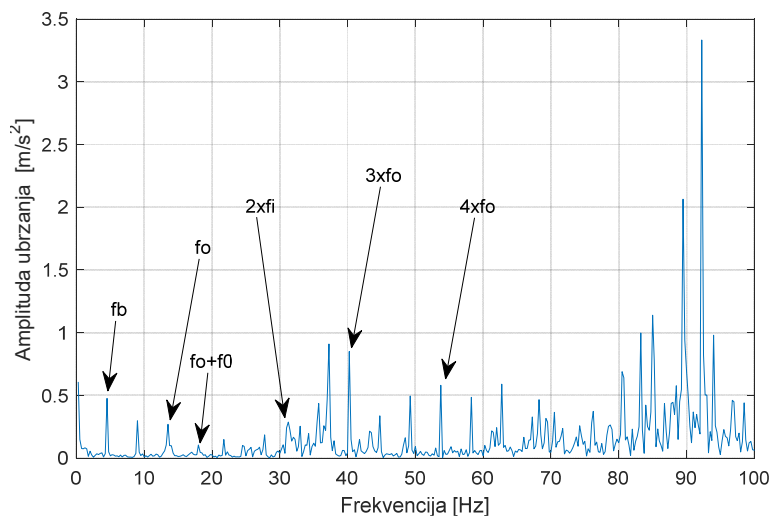
Na slici 6.35 su prikazane frekvencije pojedinih elemenata ležaja pri zazoru od 30 μm . Pri daljem povećanju zazora na 30 μm dolazi do povećanja amplitude ubrzanja na 0,26 m/s^2 na frekvenciji spoljašnjeg prstena, pri čemu rastu i amplitude na njenim harmonicima na 0,85 i 0,58 m/s^2 . Pri ovome se amplituda ubrzanja na frekvenciji kotrljajnih tela veoma malo menja, dok amplituda na unutrašnjem prstenu opada.



Slika 6.33 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r = 10 \mu\text{m}$

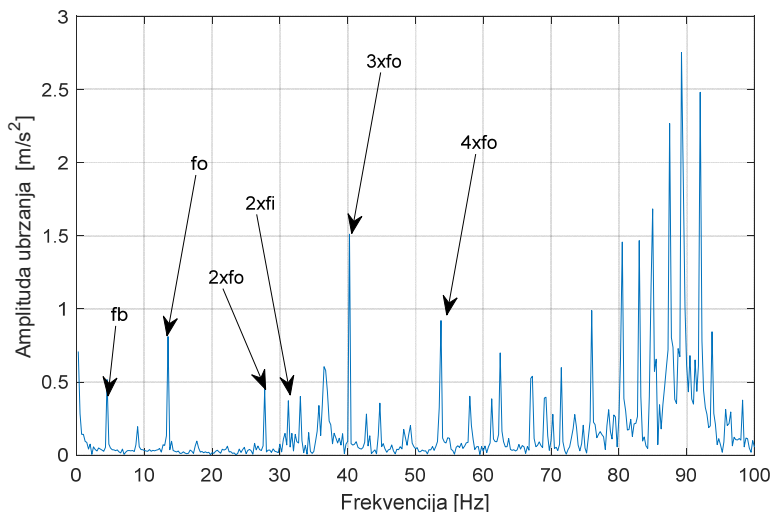


Slika 6.34 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r = 20 \mu\text{m}$



Slika 6.35 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r = 30 \mu\text{m}$

Spektar vibracija u frekventnom domenu za zazor $40\ \mu\text{m}$ pri delovanju opterećenja je prikazan na slici 6.36. Pri zazoru $40\ \mu\text{m}$ dolazi do značajnog povećanja vibracija ubrzanja na trećem i četvrtom harmoniku frekvencije spoljašnjeg prstena na 1,51, odnosno $0,96\ \text{m/s}^2$, pri čemu i amplituda ubrzanja na osnovnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena raste na $0,86\ \text{m/s}^2$. Pored prethodnog u spektru se uočava i amplituda ubrzanja od $0,49\ \text{m/s}^2$ na drugom harmoniku frekvencije spoljašnjeg prstena.

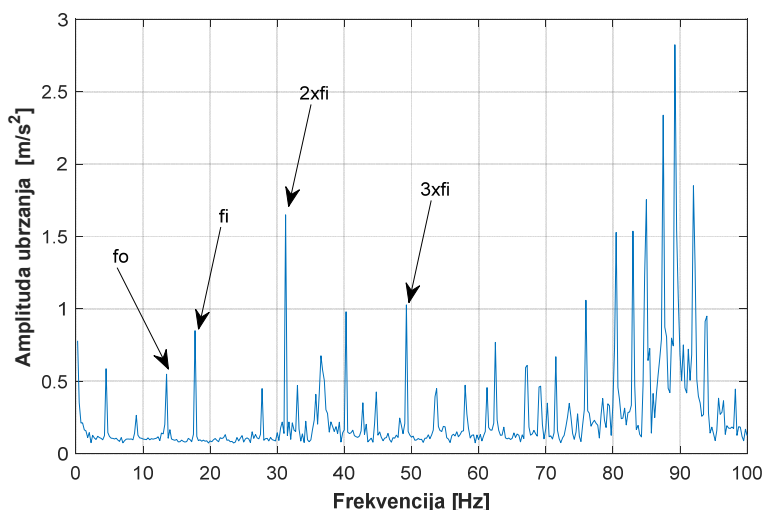


Slika 6.36 Prikaz spektra vibracija u frekventnom domenu za zazor $G_r = 40\ \mu\text{m}$

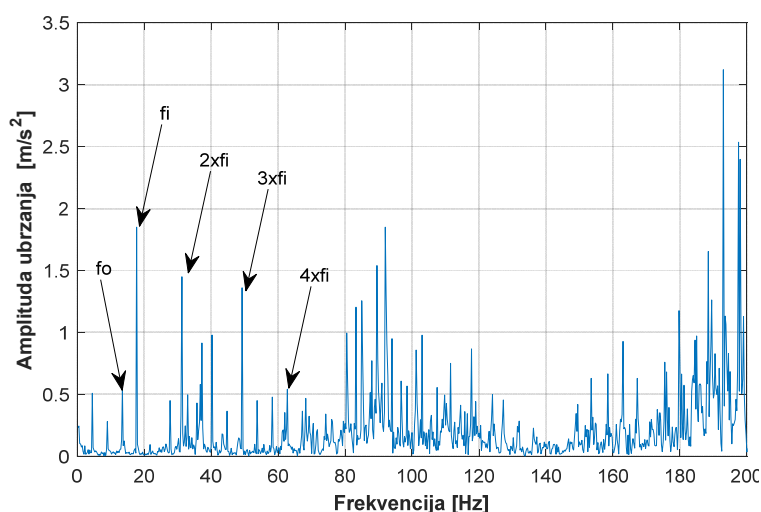
Pri analizi rezultata dobijenih eksperimentalnim ispitivanjem, došlo se do zaključka da se maksimalne amplitude ubrzanja javljaju na frekvenciji spoljašnjeg prstena, te da su amplitude ubrzanja na ostalim frekvencijama elemenata ležaja značajno manje. S druge strane, nije uočena promena frekvencija elemenata ležaja, promenom zazora.

6.4.2 Određivanje veka ležaja sa kontaktom u četiri tačke eksperimentalnim ispitivanjem

Za eksperimentalno određivanje veka ležaja i uticaja zazora na vek izabrana su tri zazora: prvi sa zazorom $10\ \mu\text{m}$ i drugi sa zazorom $20\ \mu\text{m}$ i treći sa zazorom $40\ \mu\text{m}$. Iz svake grupe ležaja sa istim vrednostima zazora je ispitano po 8 ležaja, odnosno ukupno je testirano 24 ležaja. Izabrani ležaji spadaju u grupu ležaja koja se koristi u eksploataciji. Pošto je određivanje veka prikazanom metodom dugotrajan proces, a da bi se ubrzalo ispitivanje koje se odnosi i na vek ležaja zadato je maksimalno opterećenje koje ležaj može da izdrži i to $F_r = 27000\ \text{N}$ i $F_a = 13400\ \text{N}$. Trenutak otkaza ležaja, odnosno zaustavljanje eksperimentalnog ispitivanja je vršeno kada temperatura kućišta ležaja pređe $110\ \text{°C}$. Maksimalna temperatura je određena na osnovu preporuke proizvođača ležaja. Na slici 6.33 je prikazan spektar vibracija za zazor $10\ \mu\text{m}$ na početku ispitivanja. Na slikama 6.37 i 6.38 je prikazan spektar vibracija ubrzanja nakon 238 časova i 240 časova ispitivanja veka ležaja sa zazorom $10\ \mu\text{m}$.

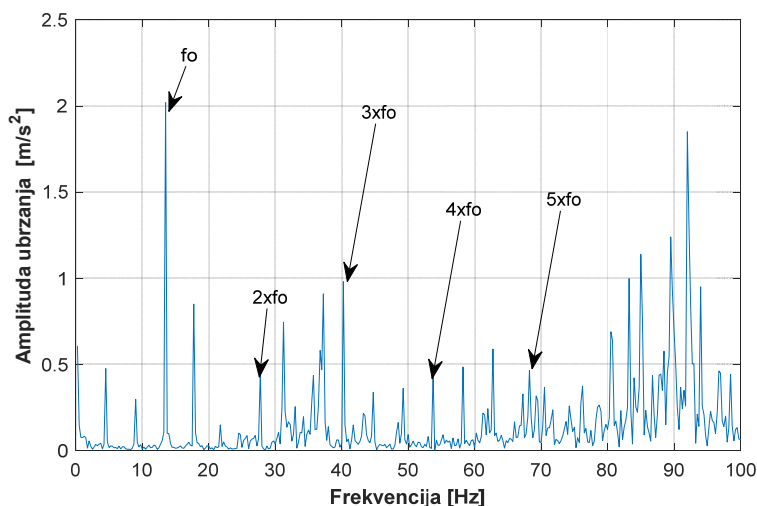


Slika 6.37 Spektar vibracija ubrzanja dobijen Furijeovom transformacijom nakon 238 časova ispitivanja veka ležaja LSQFR 308 sa zazorom $G_r = 10 \mu\text{m}$



Slika 6.38 Spektar vibracija ubrzanja dobijen Furijeovom transformacijom nakon 240 časova ispitivanja veka ležaja LSQFR 308 sa zazorom $G_r = 10 \mu\text{m}$

Nakon 238 časova rada ležaja (slika 6.37) dolazi do pojave harmonika na frekvenciji unutrašnjeg prstena $2xf_i$ i $3xf_i$, pri čemu se povećava amplituda ubrzanja na frekvenciji spoljašnjeg prstena na $0,54 \text{ m/s}^2$. Posle 240 časova rada ležaja (slika 6.38), odnosno u trenutku dostizanja granične temperature koja indukuje zaustavljanje ispitivanja, dolazi i do pojave $4xf_i$, uz povećanje amplitude ubrzanja na frekvenciji unutrašnjeg prstena. Sve ovo prethodno ukazuje na otkaz ležaja, odnosno oštećenje na unutrašnjoj stazi kotrljanja. Spektar vibracija nakon 215 časova rada za ležaj LSQFR 308 sa zazorom $40 \mu\text{m}$ je prikazan na slici 6.39. U odnosu na početno stanje (slika 6.36) se vidi da je došlo do znatnog povećanja amplituda ubrzanja na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena, što u ovom slučaju ukazuje na oštećenja na spoljašnjoj stazi kotrljanja. Na slici 6.40 su prikazani ispitivani ležaj sa oštećenjem na unutrašnjem i spoljašnjem prstenu u vidu pitinga unutrašnje staze kotrljanja za različite vrednosti zazora.



Slika 6.39 Spektar vibracija ubrzanja dobijen Furijeovom transformacijom nakon 215 časova ispitivanja veka ležaja LSQFR 308 sa zazorom $G_r = 40 \mu\text{m}$



Slika 6.40 Izgled oštećenih ležaja nakon ispitivanja a) $G_r = 10 \mu\text{m}$ b) $40 \mu\text{m}$

Na osnovu eksperimentalnih podataka određen je vek ležaja LSQFR 308 na bazi dva parametra. Prvi parametar je temperatura zaustavljanja eksperimentalnog štanda, dok je drugi parametar povećanje nivoa vibracija dobijenih iz prikazanog spektra. Prosečne vrednosti veka ležaja u časovima su prikazani u tabeli 6.8.

Tabela 6.8 Prosečne vrednosti veka ležaja LSQFR 308 određene eksperimentalnim ispitivanjem

Zazor [μm]	10		20		40	
Parametar određivanja veka	Temperatura	Vibracija	Temperatura	Vibracija	Temperatura	Vibracija
Vek ležaja [h]	245	236	232	225	219	205

7 VERIFIKACIJA REZULTATA MODELOVANJA MEHANIČKOG PONAŠANJA RADIJALNOG KUGLIČNOG LEŽAJA

Sveobuhvatno testiranje matematičkih modela izvršeno je za radijalni kuglični ležaj FKL 6006. Pri tome je u okviru određenih analiza izvršena analiza uticaja koncepcionih (zazora), na eksploatacione karakteristike ležaja. Zbog određenih ograničenja vezanih za obim rada, u okviru nekih matematičkih modela prikazuje se samo deo njihovih mogućnosti. Verifikacija statičkog ponašanja razmatranog ležaja je izvršena poređenjem rezultata dobijenih kvazistatičkim modelovanjem i rezultata dobijenih primenom metode konačnih elemenata. Rezultati modelovanja dinamičkog ponašanja primenom metode konačnih elemenata su poređeni sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem.

7.1 Verifikacija rezultata modelovanja statičkog ponašanja radijalnog ležaja

Analiza statičkog ponašanja radijalnog ležaja 6006 je izvršena za spoljašnje radijalno opterećenje od 1000 do 5000 N, pri čemu su posmatrani ležaji sa radijalnim zazorom 0, 10, 20, 30 i 40 μm . Analizom su obuhvaćeni uticaji kontaktnih deformacija, kontaktnih opterećenja, pomeranja centra ležaja i krutosti, pri delovanju datih opterećenja, u stacionarnom stanju i za brojeve obrtaja od 1000 do 6000 o/min. Opterećenja su usvojena na bazi maksimalne statičke i dinamičke nosivosti posmatranog ležaja u zavisnosti od broja obrtaja. Maksimalni broj obrtaja je usvojen kao $(2/3) \cdot n_{\text{max}}$. Mehanička svojstva materijala za razmatrani ležaj su data u tabeli 7.1.

Tabela 7.1 Mehanička svojstva materijala za ležaj 6006

Element ležaja	Materijal	Modul elastičnosti [MPa]	Gustina [kg/m^3]	Paosonov koeficijent
Un. prsten	GCr15SiMn	$2,16 \times 10^5$	7820	0,29
Sp. prsten	GCr15SiMn	$2,16 \times 10^5$	7820	0,29
Kotr. tela	GCr15SiMn	$2,16 \times 10^5$	7820	0,29
Kavez	Mesing	1×10^5	8500	0,32

7.1.1 Analiza kontaktnih opterećenja i deformacije za ležaj 6006

Pri definisanju kvazistatičkog modela za određivanje napona i deformacija je korišćena *Hertz-ova* teorija kontakta. Na primer s jedne strane, maksimalni kontaktni naponi između kotrljajnih tela i unutrašnje staze kotrljanja iznose 2852 MPa pri delovanju radijalnog opterećenja od 3000 N, pri čemu maksimalne kontaktne deformacije iznose 13,38 μm . Pri ovome glavna osa elipsaste kontaktne površine je 1,3451 mm, dok je pomoćna osa veličine 0,1477 mm. S druge strane maksimalni kontaktni naponi između spoljašnje staze kotrljanja i kotrljajnih tela iznose 2499 MPa i maksimalne kontaktne deformacije 12,96 μm . Glavna osa elipsaste kontaktne površine sa spoljašnjom stazom kotrljanja je 1,31 mm, dok je pomoćna osa veličine 0,177 mm.

Pri modelovanju istog slučaja metodom konačnih elemenata dobijeni su slični rezultati sa odstupanjima od 2% do 8% zavisno od opterećenja. U tabeli 7.2 su prikazani rezultati modelovanja kontaktnih opterećenja u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja, dok su u tabeli 7.3 prikazane kontaktne deformacije određene preko razmatranih modela. Veličine osa elipsastog kontakta za spoljašnju i unutrašnju stazu kotrljanja pri delovanju radijalnog opterećenja je prikazano u tabeli 7.4. U pomenutim tabelama rezultati se odnose na ležaj 6006 sa nultim zazorom.

Tabela 7.2 Poređenje kontaktnih napona određenih kvazistatičkim i MKE modelom

Elem. ležaja	Sila [N]	Maks. kontaktni napon [MPa]		Odstupanje %
		Kvazistatički model	MKE model	
Un. prsten	1000	1982	2077	-4,57
	2000	2497	2686	-7,04
	3000	2858	2933	-2,56
	4000	3146	3507	-10,29
	5000	3389	3809	-11,03
Sp. prsten	1000	1698	1813	-6,34
	2000	2139	2280	-6,18
	3000	2449	2536	-3,43
	4000	2695	3059	-11,90
	5000	2903	3293	-11,84

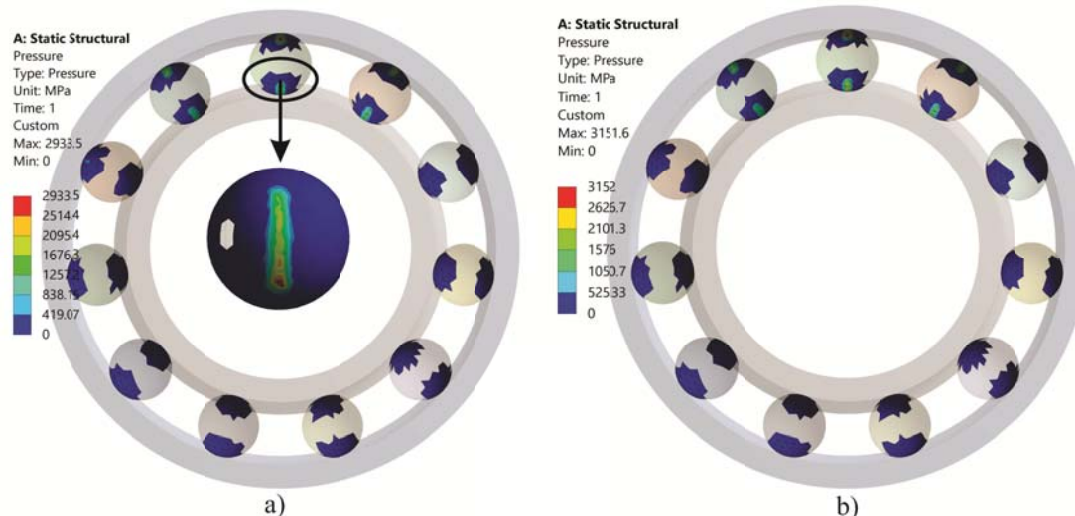
Tabela 7.3 Poređenje kontaktnih deformacija određenih kvazistatičkim i MKE modelom

Elem. ležaja	Sila [N]	Maks. kontaktne deformacije [μm]		Odstupanje %
		Kvazistatički model	MKE model	
Un. prsten	1000	6,43	7,11	-9,56
	2000	10,21	11,35	-10,04
	3000	13,38	14,9	-10,20
	4000	16,21	18,12	-10,54
	5000	18,81	21,08	-10,77
Sp. prsten	1000	6,23	6,86	-9,18
	2000	9,89	11,08	-10,74
	3000	12,96	14,62	-11,35
	4000	15,7	17,66	-11,10
	5000	18,21	20,62	-11,69

Tabela 7.4 Poređenje glavnih osa elipsaste kontaktne površine određenih kvazistatičkim i MKE modelom za radijalno opterećenje $F_r = 3000\text{ N}$

Elem. ležaja	Osa elipsastog kontakta	Veličina osa [mm]		Odstupanje %
		Kvazistatički model	MKE model	
Un. prsten	Glavna osa elipse (a_i)	1,3451	1,3178	2,07
	Pomoćna osa elipse (b_i)	0,1477	0,1375	7,42
Sp. prsten	Glavna osa elipse (a_o)	1,31006	1,20631	8,60
	Pomoćna osa elipse (b_o)	0,17771	0,16445	8,06

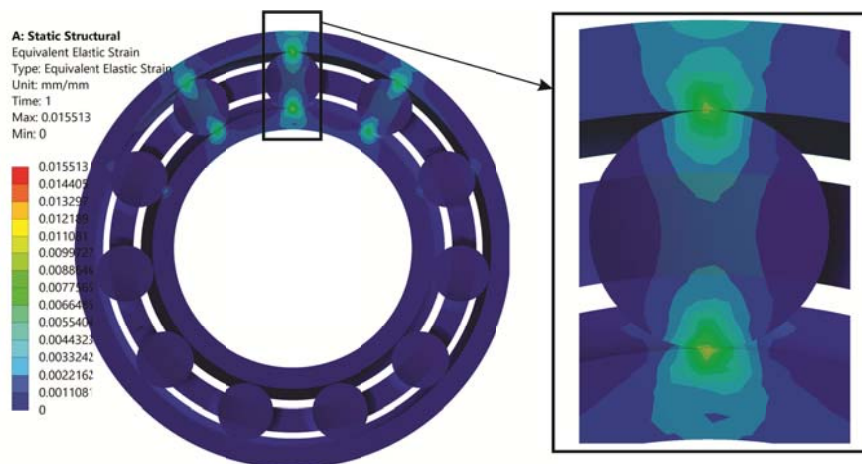
Na slici 7.1 je prikazana raspodela maksimalnih kontaktnih napona između staza kotrljanja i kotrljajnih tela pri delovanju radijalnog opterećenja od 3000 N za zazor od 0 i 40 μm .

Slika 7.1 Raspored maksimalnih kontaktnih napona: a) $G_r = 0\ \mu\text{m}$; b) $G_r = 40\ \mu\text{m}$

Maksimalni kontaktni naponi se nalaze na kontaktnoj tački između najvišeg kotrljajnog tela i unutrašnje staze kotrljanja, odnosno spoljašnje staze kotrljanja, pri čemu se kontaktno opterećenje smanjuje od vrha prema donjoj polovini ležaja. Razlog ovome leži u činjenici da je prvo (najviše) kotrljajno telo postavljeno odmah iznad linije spoljašnjeg opterećenja ležaja i mnogo je bliže liniji delovanja opterećenja, tako da je kontaktna površina veća. Kontaktni naponi između donjeg dela kotrljajnih tela i staza kotrljanja (tela ispod medijalne ravni ležaja) imaju napone jednake nuli. Svaka kontaktna površina između kotrljajnih tela i staza kotrljanja je prikazana u obliku eliptične raspodele, pri čemu se kontaktni naponi postepeno smanjuju od središta kotrljajnih tela ka spolja (slika 7.1a), što je u skladu sa *Hertz-ovom* teorijom kontakta. Kontaktni naponi postoje samo na malom lokalnom području, pa čak i da kontaktni naponi prelaze granicu dozvoljenih napona (4200 MPa), mikroskopske plastične deformacije se javljaju samo u lokalnom području. Kontaktne površine postaju veće nakon plastičnih deformacija i kontaktni napon opada ispod granice tečenja materijala, tako da ni pri većim opterećenjima neće doći do strukturnih oštećenja u

kratkom vremenskom periodu, ali pri tome treba imati u vidu da kotrljajna tela povremeno ulaze u zonu opterećenja, pri čemu se kontaktne naponi i deformacije nestabilno (periodično) menjaju tokom vremena.

Na slici 7.2 su prikazane maksimalne elastične deformacije za $F_r = 3000$ N i $G_r = 40$ μm . Veća kontaktna pomeranja su koncentrisana na gornjem delu unutrašnjeg prstena na mestu gde se javljaju i najveći kontaktne naponi. Najveće pomeranje ležaja iznosi 44 μm , dok najveća elastična deformacija iznosi 15 μm . U konkretnom slučaju, pri delovanju radijalnog opterećenja od 3000 N i radijalnom zazoru od 40 μm , najveće pomeranje se javlja na spoljašnjem prstenu, dok se na najopterećenijem kotrljajnom telu javlja maksimalna elastična deformacija, što je u skladu sa prethodno navedenim činjenicama.

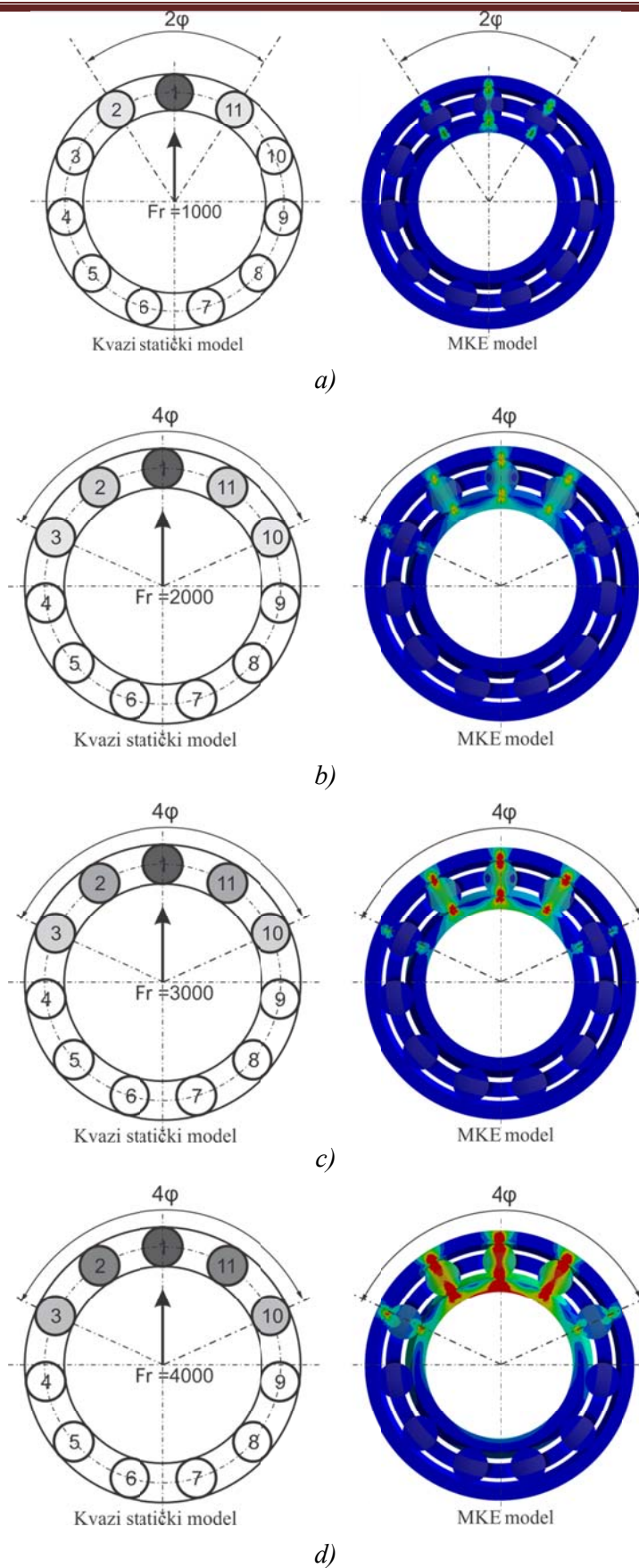


Slika 7.2 Raspored maksimalnih elastičnih deformacija na elementima ležaja 6006

7.1.2 Uticaj spoljašnjeg radijalnog opterećenja na broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja i krutost

Analiza je urađena pod pretpostavkom da je ležaj opterećen konstantnom radijalnom silom čiji pravac prolazi kroz centar prstenova i usmeren je u pozitivnom pravcu Y ose (slika 5.2). Ukupno spoljašnje opterećenje kotrljajnog ležaja sa jednog prstena na drugi se prenosi posredstvom samo određenog broja kotrljajnih tela. Prema tome, sva kotrljajna tela ne učestvuju u prenošenju opterećenja, nego samo kotrljajna tela koja imaju kontakt sa oba prstena ležaja. Kotrljajna tela koja prenose opterećenje između prstenova ležaja određuju zonu opterećenja ležaja. Spoljašnje radijalno opterećenje mogu prenositi samo kotrljajna tela koja se nalaze iznad ili ispod medijalne ravni ležaja (zavisno kako deluje opterećenje), ako su ležaji sa radijalnim zazorom.

Na slici 7.3 je prikazan raspored opterećenja ležaja, odnosno broj kotrljajnih tela koja prenose opterećenje za zazor od 20 μm u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja pri modelovanju kvazistatičkim i MKE modelom. Na slici 7.4 je prikazana promena kontaktnih opterećenja i kontaktnih deformacija u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za svaku poziciju kotrljajnih tela pri zazoru od 20 μm .

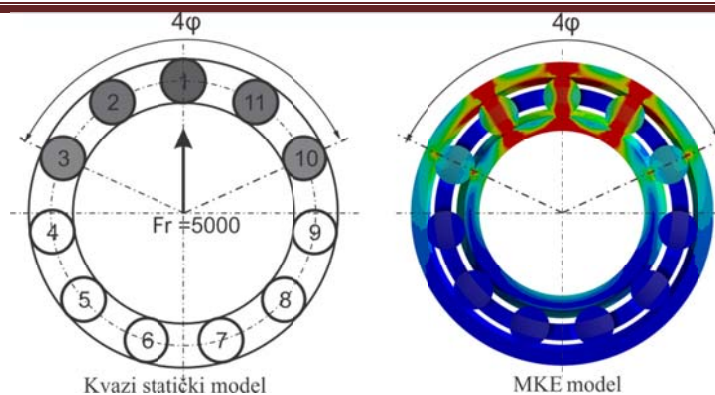


a)

b)

c)

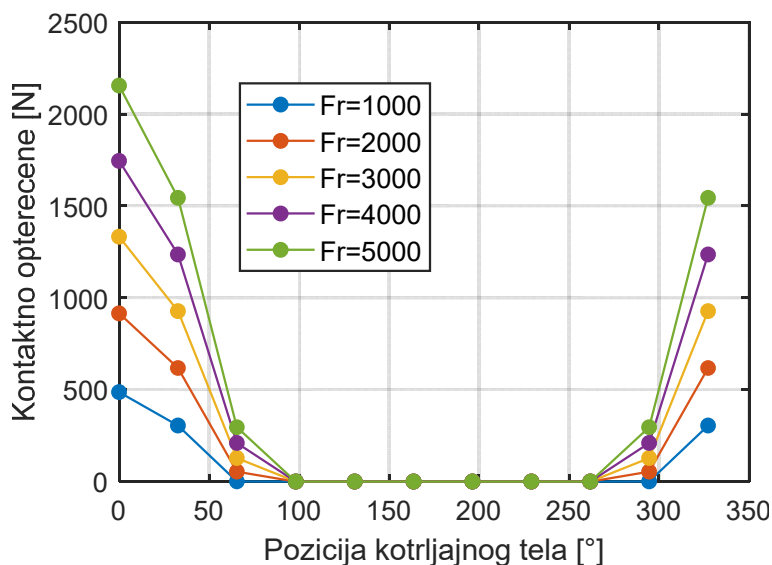
d)



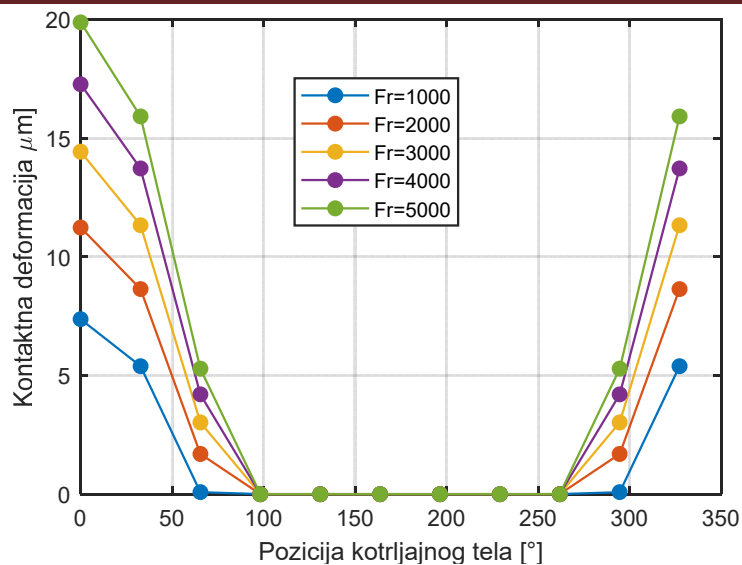
e)

Slika 7.3 Broj kotrljajnih tela koja prenose opterećenje

Sa slike 7.3 se može videti da, u zavisnosti od veličine opterećenja, broj kotrljajnih tela, pri zazoru, koja učestvuju u prenošenju spoljašnjeg opterećenja, se može kretati u intervalu od 1 do 5. Pored toga, u prenošenju opterećenja kotrljajna tela ležaja ne učestvuju podjednako. Pri manjim opterećenjima, oslanjanje unutrašnjeg prstena se naizmenično prenosi sa jednog na dva i tri kotrljajna tela. Ugao zone kontakta tada iznosi 2φ (slika 7.3a). Međutim, opterećenje se još uvek prenosi, preko samo jednog kotrljajnog tela, jer su kontaktna opterećenja i kontaktne deformacije na kotrljajnim telima 2 i 11 mala (slika 7.4a i 7.4b). Ako se dalje nastavi sa povećanjem spoljašnjeg opterećenja, u prenošenju počinju učestvovati tri kotrljajna tela (kotrljajna tela 2 i 11) (slika 7.3b), jer dolazi do povećanja kontaktnih napona i deformacija na tim kotrljajnim telima (slika 7.4a i 7.4b). U ovom slučaju zona kontakta iznosi 4φ ali i dalje kotrljajna tela 3 i 10 ne prenose opterećenje usled malih kontaktnih napona i deformacija (slika 7.3b). Daljim povećanjem spoljašnjeg opterećenja dolazi do značajnog povećanja kontaktnih napona i deformacija (slika 7.4a i 7.4b), pa u zahvat sa prstenovima ležaja ulaze nova kotrljajna tela. Tako se broj kotrljajnih tela koja prenose opterećenja povećava sa 3 na 4 i 5 (slika 7.3c, 7.3d i 7.3e) pri čemu će zona kontakta iznositi 4φ .



a)



b)

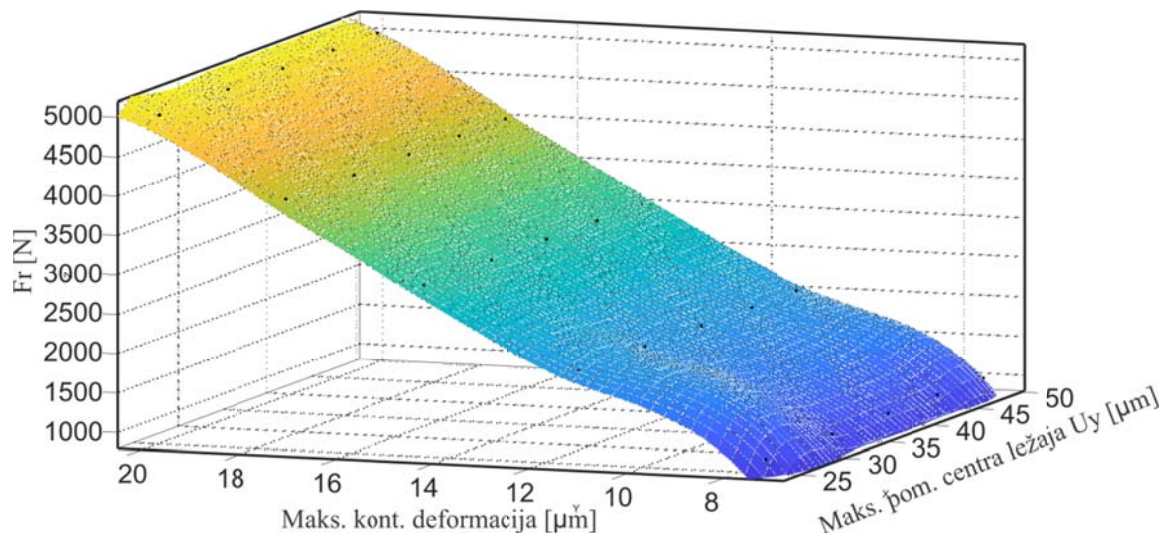
Slika 7.4 Promena: a) kontaktnih opterećenja; b) kontaktnih deformacija u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela

Usled delovanja spoljašnjeg opterećenja, u kontaktu između kotrljajnih tela ležaja i staza kotrljanja javljaju se elastične kontaktne deformacije. Kontaktne deformacije su nelinearne i postoji izvesna nelinearna zavisnost između uticaja veličine spoljašnjeg opterećenja i pomeranja centra ležaja na nivo kontaktnih deformacija (slika 7.5). Kod većih vrednosti spoljašnjeg opterećenja, relativno pomeranje prstenova ležaja usled kontaktnih deformacija je značajnije. To omogućava ulazak novih kotrljajnih tela u prenošenje opterećenja. Na slici 7.5 je prikazana promena kontaktnih deformacija i pomeranja centra ležaja u pravcu dejstva spoljašnjeg opterećenja za zazor od 20 μm . Sa slike 7.5 se može videti da radijalno opterećenje od 1000 N izaziva kontaktne deformacije oko 7,3 μm što odgovara pomeranju centra ležaja od 24,5 μm . Daljim povećanjem radijalnog opterećenja sa 1000 N na 5000 N dovodi do porasta maksimalnih kontaktnih deformacija za 63%, čime se i pomeranje centra ležaja povećava za oko 51%.

Za slučaj spoljašnjeg opterećenja malog intenziteta, javljaju se male kontaktne deformacije, pa će se unutrašnji prsten ležaja oslanjati na jedno ili dva kotrljajna tela. Prvi položaj, koji je prikazan na slici 7.3a, predstavlja najnepovoljniji slučaj prenošenja opterećenja kod kotrljajnih ležaja. Kod ovoga slučaja celokupno spoljašnje opterećenje ležaja prenosi se preko samo jednog kotrljajnog tela, jer su kontaktna opterećenja (slika 7.4a) i kontaktne deformacije na kotrljajnim telima 2 i 11 male (oko 5 μm , slika 7.4b) da bi izazvale dodatno pomeranje centra ležaja (slika 7.5).

Da bi veći broj kotrljajnih tela, kod ležaja sa radijalnim zazorom bio u zoni opterećenja, potrebno je ostvariti odgovarajuće međusobno (relativno) pomeranje prstenova ležaja. Ovo je moguće jedino ako se ostvari odgovarajući nivo kontaktnih deformacija elemenata ležaja, odnosno, potrebno je i odgovarajuće spoljašnje radijalno opterećenje ili preći iz zazora u preklap.

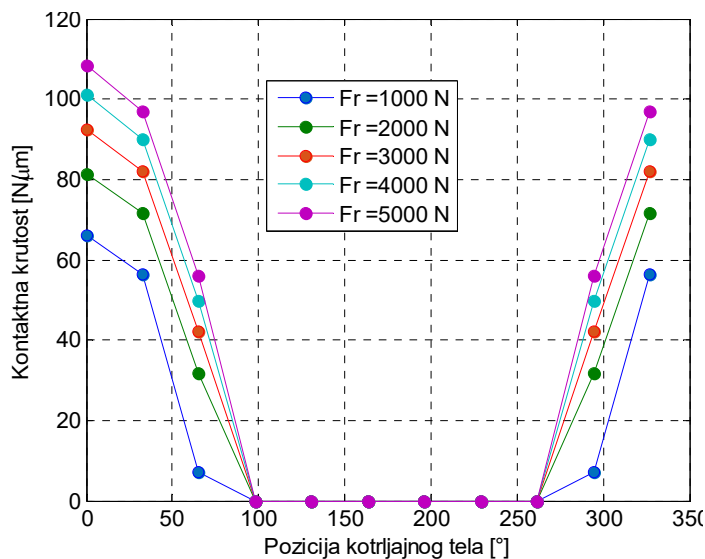
Ovde treba napomenuti da su kontaktna opterećenja, kao i kontaktne deformacije iste na obe staze kotrljanja. Naime, za razmatrane brojeve obrtaja centrifugalna sila na kotrljajnim telima je ispod 1 N što je daleko manja vrednost od primenjenog radijalnog opterećenja, pa se može reći da centrifugalna sila ne utiče na kontaktne opterećenja. Sveobuhvatnom analizom se dolazi do zaključka da bi centrifugalna sila imala uticaja tek kada bi broj obrtaja bio veći od 15000 o/min, međutim, maksimalni broj obrtaja za ovaj tip ležaja iznosi 8000 o/min.



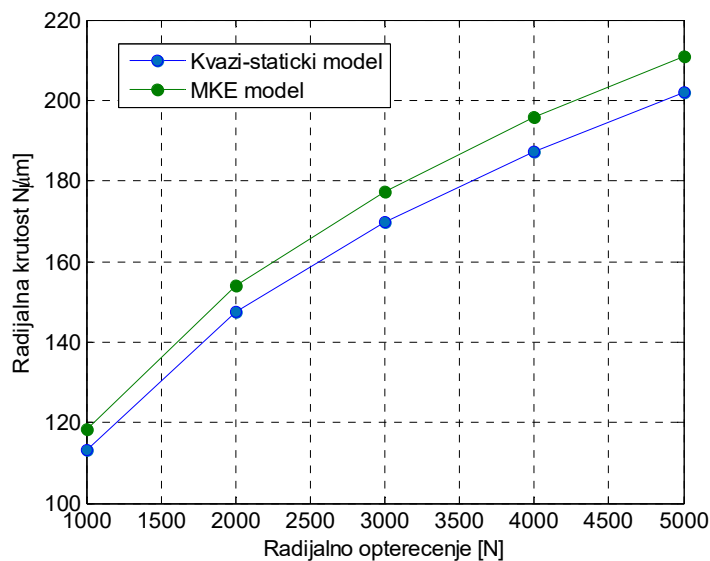
Slika 7.5 Promena maksimalnih kontaktnih deformacija i pomeranja centra ležaja u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja

S druge strane, broj kotrljajnih tela u ležaju indirektno utiče i na radijalnu krutost ležaja. Manji broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja je posledica manjih kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja. Pošto je radijalna krutost recipročna vrednosti zbira kontaktnih krutosti za svako kotrljajno telo, pri manjim deformacijama, manji je broj kotrljajnih tela u zoni kontakta, pa će i ukupna radijalna krutost ležaja biti manja. Na slici 7.6 je prikazana promena kontaktne krutosti u zavisnosti od opterećenja za svaku poziciju kotrljajnih tela, dok je na slici 7.7 prikazana promena ukupne radijalne krutosti u zavisnosti od razmatranog spoljašnjeg opterećenja pri zazoru od 20 μm . Sa slike 7.6 se može zaključiti da se najmanja kontaktna krutost javlja na mestima gde dolazi do najmanjih kontaktnih deformacija. Povećanjem kontaktnih deformacija na najopterećenijem kotrljanom telu sa 1000 na 5000 N, povećavaju se kontaktne deformacije na najopterećenijem kotrljajnom telu za 65%, što dovodi do rasta kontaktne krutosti na mestu kontakta kotrljanog tela sa stazama kotrljanja za 47%. Povećanjem spoljašnjeg opterećenja, povećava se nivo kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja, što povećava broj kotrljajnih tela koja prenose opterećenje, pa se samim tim povećava ukupna radijalna krutost za 42% (slika 7.7). Takođe, sa slike 7.7 se može videti da je radijalna krutost određena preko MKE modela veća za oko 5% u odnosu na radijalnu krutost određenu kvazistatičkim modelom, što u potpunosti odgovara odstupanjima koja su dobijena i pri poređenju kontaktnih opterećenja, kontaktnih napona i kontaktnih deformacija. Pri MKE modelovanju statičkog ponašanja kontaktne deformacije su veće za oko 10%, pri čemu su kontaktne opterećenja veća za oko 2,5%. Pri ovome se pri MKE modelovanju dobija da su ose elipse, pa i same površine kontakta manje

za oko 3%, što na kraju rezultuje da su kontaktni naponi u proseku veći pri MKE modelovanju za oko 7%.



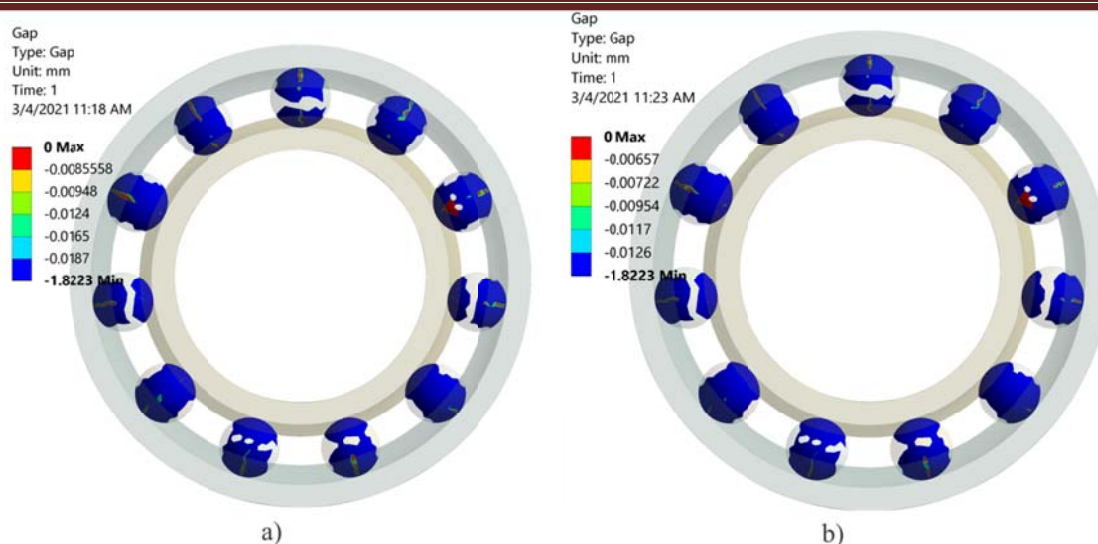
Slika 7.6 Promena kontaktne krutosti u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za svaku poziciju kotrljajnog tela



Slika 7.7 Promena ukupne radijalne krutosti u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja

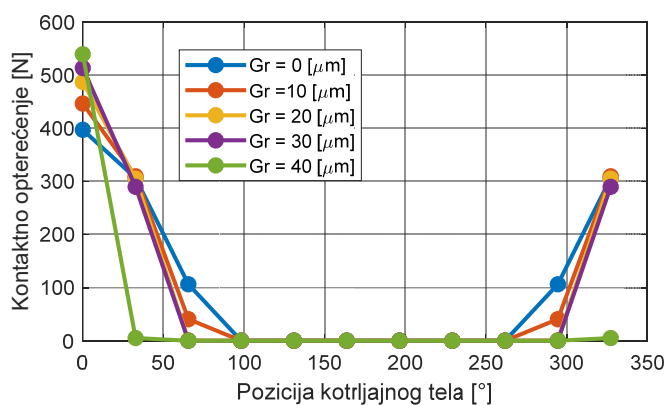
7.1.3 Uticaj radijalnog zavora/preklopa na broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja i krutost ležaja

Pri povećanju spoljašnjeg radijalnog opterećenja povećava se i ukupna kontaktna deformacija između kotrljajnih tela i staza kotrljanja, a radijalni zavor između neopterećenih kotrljajnih tela i staza kotrljanja ležaja se smanjuje. Na slici 7.8 je prikazana promena radijalnog zavora između kotrljajnih tela i staza kotrljanja za $F_r=1000$ i $F_r=5000$ N pri nominalnom radijalnom zavoru $G_r = 20 \mu\text{m}$.

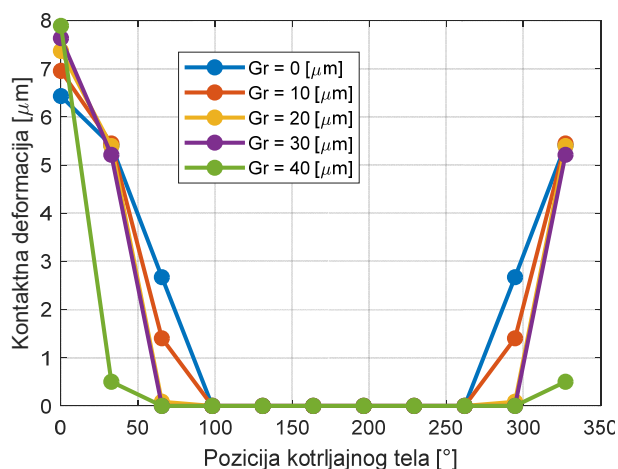


Slika 7.8 Promena radijalnog zazora ($G_r = 20 \mu\text{m}$) za svaku poziciju kotrljajnih tela usled spoljašnjeg opterećenja: a) $F_r = 1000 \text{ N}$; b) $F_r = 5000 \text{ N}$

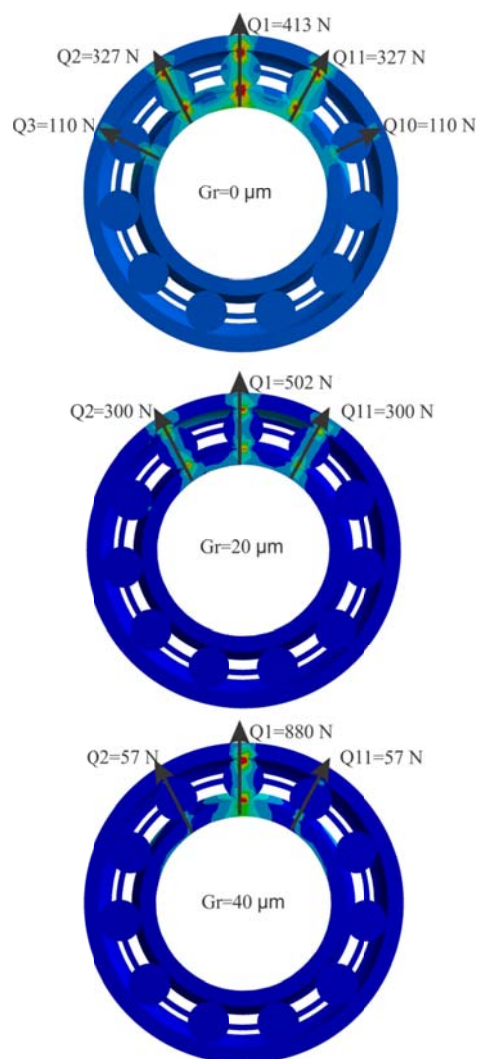
Na slici 7.9 i slici 7.10 su prikazane promene kontaktnih opterećenja i deformacija određenih kvazistatičkim modelom i MKE modelom u zavisnosti od veličine radijalnog zazora pri spoljašnjem opterećenju od $F_r = 1000 \text{ N}$. Unutrašnji radijalni zazor ima značajan uticaj na veličinu kontaktnih deformacija i promenu pomeranja centra ležaja usled ovih deformacija. Pored intenziteta spoljašnjeg opterećenja, na nivo kontaktnih deformacija presudan uticaj ima i broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju spoljašnjeg opterećenja. Sa slike 7.9a i 7.10 se može videti da opterećenje na mestu najopterećenije kuglice raste, povećanjem zazora, dok se opterećenja na ostalim kotrljajnim telima smanjuju, a samim tim se smanjuje i nivo kontaktnih deformacija istih (slika 7.9b). Naime, kada manji broj kotrljajnih tela učestvuje u prenošenju spoljašnjeg opterećenja, ukupno spoljašnje opterećenje se deli na taj broj kotrljajnih tela. Prema tome, u slučaju maksimalno razmatranog zazora od $40 \mu\text{m}$, samo jedno kotrljajno telo prima najveći deo spoljašnjeg opterećenja. Smanjenjem zazora ukupno spoljašnje opterećenje se deli na veći broj kotrljajnih tela, pa se i ravnomernije raspoređuje između njih. Kako radijalni zazor ima direktan uticaj na broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju spoljašnjeg opterećenja, direktno utiče i na veličinu kontaktnih deformacija. Drugim rečima, povećanjem vrednosti radijalnog zazora, potrebno je ostvariti veće kontaktne deformacije elemenata ležaja, pa da i -to kotrljajno telo bude u kontaktu sa stazama kotrljanja. Prema tome, za posmatrani ležaj, sa povećanjem broja kotrljajnih tela, koja treba da budu u kontaktu sa stazama kotrljanja, povećava se uticaj radijalnog zazora na veličinu kontaktnih deformacija, koje bi omogućile da veći broj kotrljajnih tela bude u kontaktu sa obe staze kotrljanja. Međutim, za to je potrebno i veće spoljašnje opterećenje, koje ne sme preći vrednosti koje su dozvoljene maksimalnom statičkom i dinamičkom nosivosti ležaja. Broj kotrljajnih tela koja se nalaze u zoni opterećenja određen je odnosom relativnog pomeranja prstenova ležaja, odnosno centra ležaja usled kontaktnih deformacija i polovine radijalnog zazora.



a)



b)



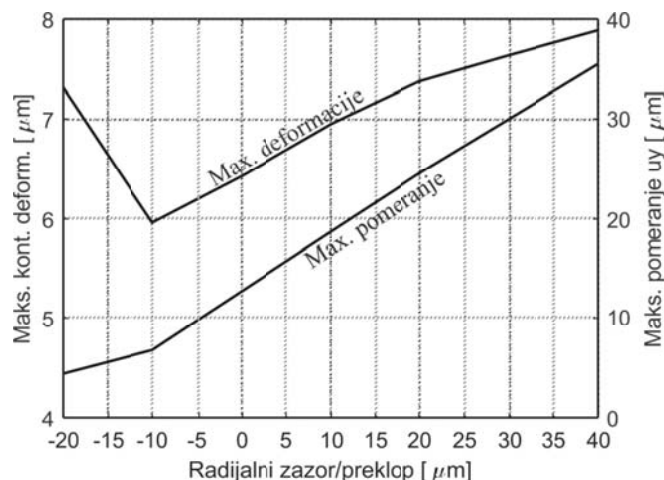
Slika 7.9 Promena a) kontaktnih opterećenja;
b) kontaktnih deformacija u zavisnosti od zazora za svaku poziciju kotrljajnih tela određenih kvazistatičkim modelom

Slika 7.10 Promena kontaktnih opterećenja određenih MKE modelom u zavisnosti od zazora

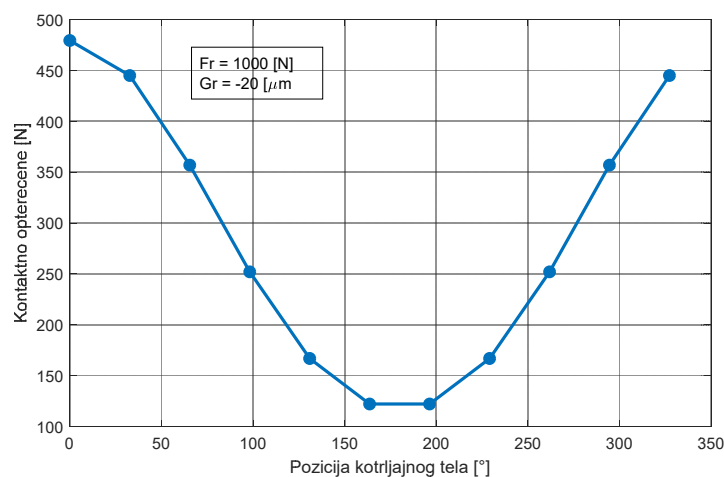
Na slici 7.11 je prikazana promena pomeranja centra ležaja i maksimalnih kontaktnih deformacija u zavisnosti od radijalnog zazora/preklopa ležaja, dok je na slici 7.12 prikazana promena kontaktnih opterećenja u slučaju preklopa od 20 μm pri konstantnom spoljašnjem opterećenju $F_r=1000$ N.

Sa stanovišta raspodele opterećenja, pa i krutosti ležaja, povoljnije je da što veći broj kotrljajnih tela bude u zoni opterećenja kako bi se spoljašnje opterećenje što ravnomernije rasporedilo. Uzimajući u obzir prethodno znači, da je povoljniju raspodelu opterećenja lakše ostvariti ako je unutrašnji radijalni zazor u ležaju manji, odnosno ako se pređe u preklop, jer su tada potrebna manja relativna pomeranja centra ležaja, kako bi se postigla veličina kontaktnih deformacija (pri istom spoljašnjem opterećenju) (slika 7.11), pa da sva kotrljajna tela, koja se nalaze ispod meridijanske ravni, uđu u kontakt sa stazama kotrljanja kao što je prikazano na slici 7.12. Za veće vrednosti unutrašnjeg radijalnog zazora potrebno je ostvariti

veće radijalno pomeranje centra (relativno pomeranje prstenova) ležaja. Broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju spoljašnjeg opterećenja je veoma važan parametar kotrljajnog ležaja, sa direktnim uticajem na statičku i dinamičku nosivost ležaja, vek, pouzdanost, krutost ležaja, tačnost obrtanja i vibracije. Dakle, broj kotrljajnih tela koji učestvuju u prenošenju spoljašnjeg opterećenja, direktno je zavistan od radijalnog zazora/preklopa u ležaju i veličine radijalnog pomeranja centra ležaja. Za veće vrednosti radijalnog zazora potrebno je ostvariti i veća pomeranja centa ležaja, pa da veći broj kotrljajnih tela bude u zoni opterećenja.



Slika 7.11 Promena radijalnog pomeranja centra ležaja i maksimalne kontaktne deformacije u zavisnosti od zazora/prekopa

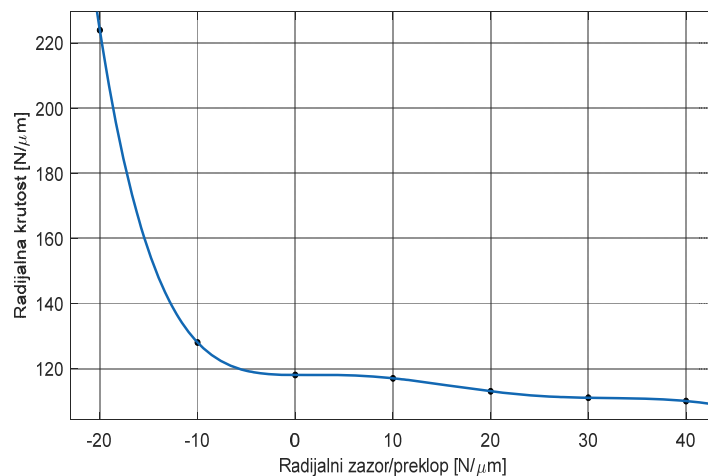


Slika 7.12 Promena kontaktnog opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela u slučaju preklopa

Sa slike 7.9a i slike 7.12 se može videti da smanjenjem zazora sa $40\ \mu\text{m}$ i prelaskom na preklop od $20\ \mu\text{m}$ dolazi do smanjenja maksimalnog kontaktnog opterećenja sa $900\ \text{N}$ na oko $460\ \text{N}$ uz istovremeno povećanje kontaktnih opterećenja na ostalim kotrljajnim telima koja se pri preklopu nalaze u zoni opterećenja. Pri ovome dolazi i do smanjenja maksimalnih kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja (slika 7.11). Ova pravilnija raspodela opterećenja pri preklopu će uticati i na povećanje radijalne krutosti ležaja.

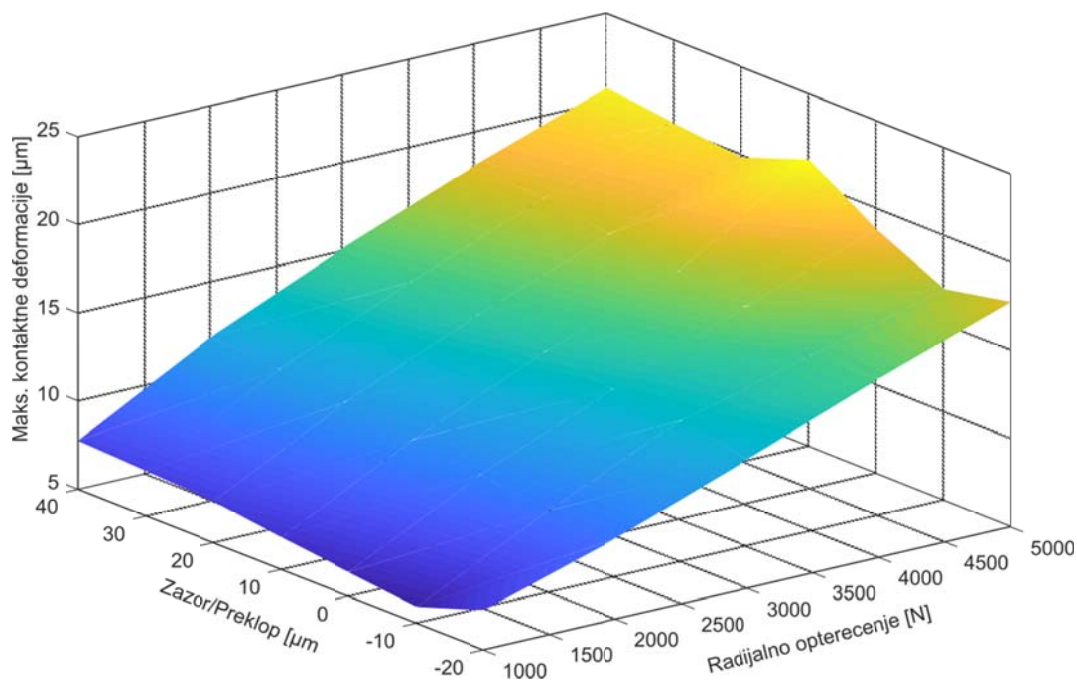
Na slici 7.13 je prikazana promena radijalne krutosti u zavisnosti od preklopa i zazora. Radijalna pomeranja ležaja se smanjuju za 86% prelaskom iz zazora u preklop

(prelaskom iz preklopa od $-20 \mu\text{m}$ u zazor od $40 \mu\text{m}$), pri čemu dolazi i do povećanja radijalne krutosti za oko 54%.



Slika 7.13 Promena radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa pri radijalnom opterećenju $F_r=1000 \text{ N}$

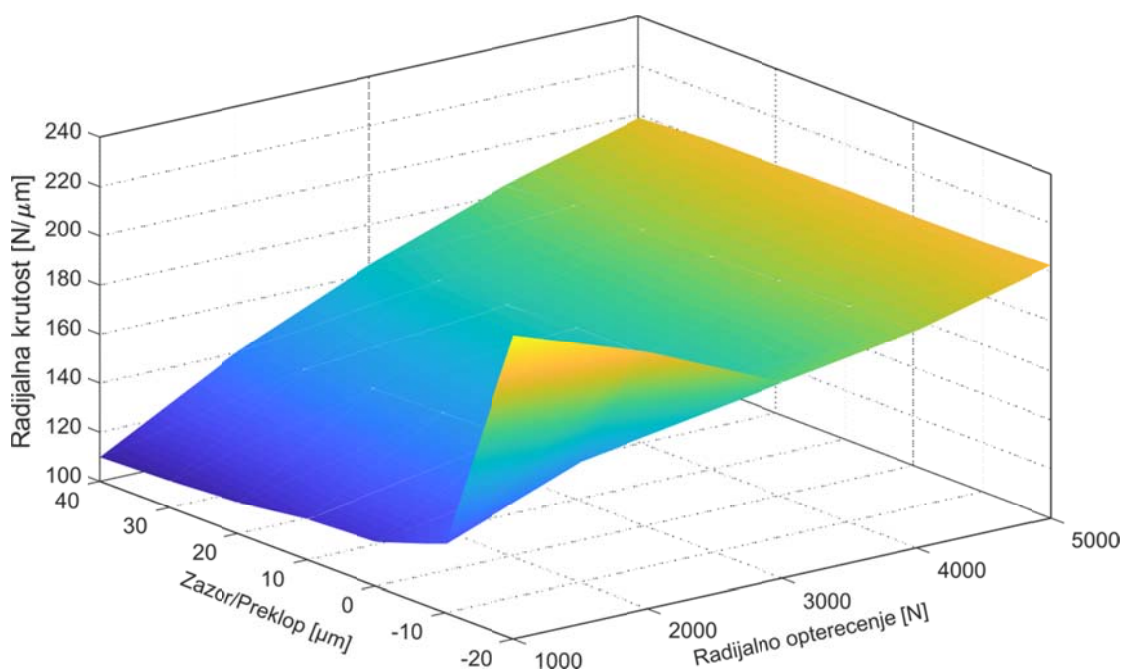
Prethodna analiza je pokazala veliki uticaj veličine radijalnog zazora i veličine spoljašnjeg radijalnog opterećenja na broj kotrljajnih tela, u zoni opterećenja. Kontaktne deformacije elemenata ležaja rastu sa povećanjem nivoa spoljašnjeg radijalnog opterećenja, ali i sa povećanjem veličine unutrašnjeg radijalnog zazora, odnosno opadaju, smanjenjem zazora i prelaskom u preklop. Međutim, povećanje kontaktnih deformacija je znatno izraženije kod porasta spoljašnjeg radijalnog opterećenja. To se jasno vidi na dijagramu sa slike 7.14. Sa druge strane, ovaj porast je mnogo blaži, ako se analizira uticaj unutrašnjeg radijalnog zazora.



Slika 7.14 Promena kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja u zavisnosti od radijalnog opterećenja i zazora/preklopa

U odnosu na nivo spoljašnjeg radijalnog opterećenja, na dijagramu sa slike 7.14 se mogu razlikovati dva karakteristična područja promene kontaktnih deformacija. U prvom području usled preklopa, porast spoljašnjeg radijalnog opterećenja, povećava nivo kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja. Prema tome, u ovom području raspodela spoljašnjeg opterećenja na kotrljajna tela ležaja je ravnomernija, veći broj kotrljajnih tela je u zoni opterećenja. U drugom području, području zazora, dolazi do znatnog povećanja nivoa kontaktnih deformacija usled povećanja spoljašnjeg opterećenja. Usled zazora, spoljašnje radijalno opterećenje je nedovoljno za ulazak većeg broja kotrljajnih tela u zonu opterećenja. Manji broj kotrljajnih tela koja prenose spoljašnje opterećenje, izaziva nepovoljnu raspodelu opterećenja unutar ležaja i veći porast kontaktnih deformacija.

Usled prethodnog, radijalna krutost u području preklopa ima značajnu porast, dok povećanjem veličine radijalnog zazora krutost opada pri manjim vrednostima spoljašnjeg radijalnog opterećenja kao što je prikazano na slici 7.15.



Slika 7.15 Promena radijalne krutosti ležaja u zavisnosti od radijalnog opterećenja i zazora/preklopa

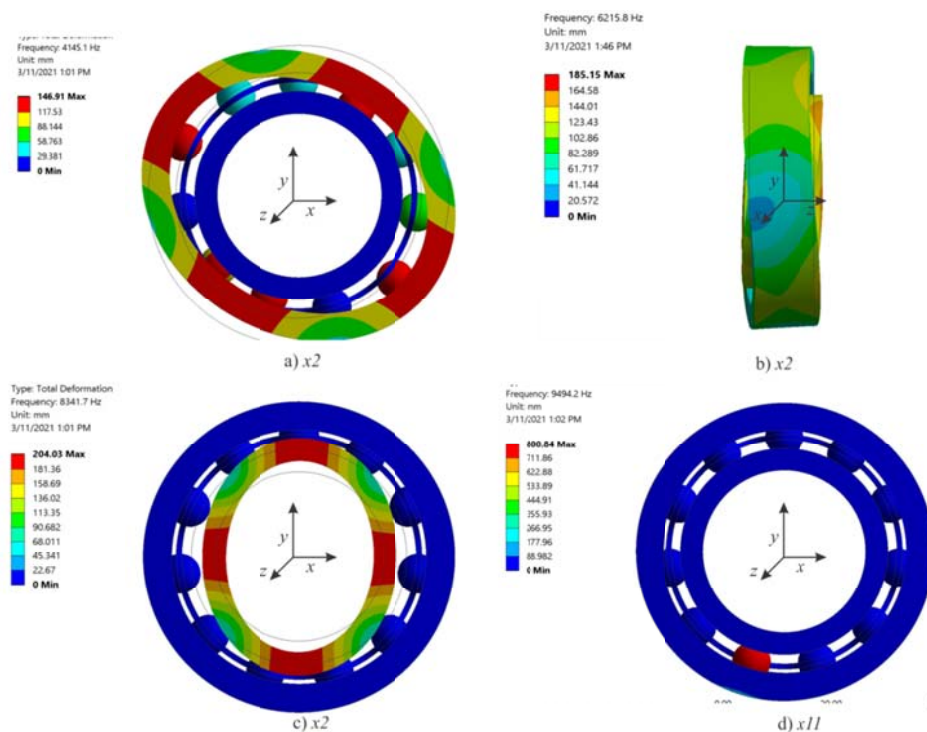
7.2 Verifikacija rezultata modelovanja dinamičkog ponašanja radijalnog ležaja

Dinamički model ležaja je definisan primenom metode konačnih elemenata. Analiza dinamičkog ponašanja radijalnog ležaja se sastoji iz dva dela. Prvi deo se odnosi na modalnu analizu, odnosno određivanje sopstvenih frekvencija, glavnih oblika oscilovanja i prigušenja za razmatrani ležaj. Drugi deo analize se odnosi na eksplicitno dinamičku analizu, odnosno određivanje uticaja konstrukcionih parametara (zazor/preklopa) na karakteristične frekvencije elemenata ležaja. Rezultati matematičkog modelovanja su upoređeni sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjima kako je objašnjeno u prethodnom poglavlju.

7.2.1 Modalna analiza radijalnog ležaja

Modalna analiza je sprovedena za različite zazore (0, 10, 20, 30 i 40 μm) za slučaj slobodno oslonjenog ležaja, kako bi se rezultati uporedili sa eksperimentalnim ispitivanjima. Na slici 7.16 su prikazani glavni oblici vibracija posmatranog ležaja za radijalni zazor od 20 μm .

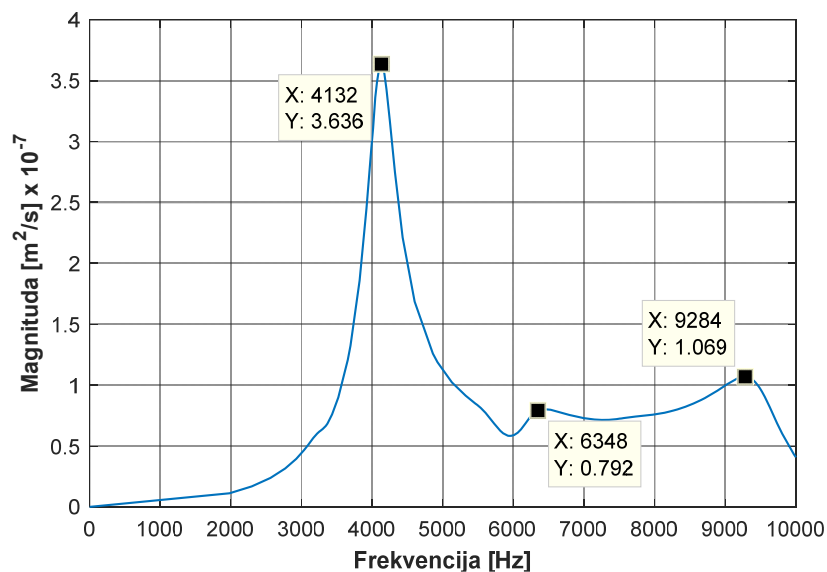
Sve sopstvene frekvencije elemenata ležaja se nalaze u opsezima srednjih i visokih frekvencija. Prva dva moda predstavljaju vibracije spoljašnjeg prstena duž osa X i Y , pri čemu se frekvencije poklapaju (slika 7.16a). U ovom slučaju modalna masa je približno jednaka masi spoljašnjeg prstena. Sledeća dva moda su modovi nagiba prstena oko Z ose, odnosno ležaj se pomera iz radijalne ravni (slika 7.16b) pri čemu se, takođe, obe frekvencije poklapaju. U svakom slučaju amplituda sopstvene frekvencije (posmatrana na spoljašnjem prstenu) je vrlo mala usled male ugaone krutosti, pa se ova sopstvena frekvencija teško može registrovati pri eksperimentalnom merenju. Naredna dva moda su modovi oscilovanja unutrašnjeg prstena duž X i Y ose (slika 16c), pri čemu postoji vrlo mala razlika između sopstvenih frekvencija (manja od 2%). U ovom slučaju je amplituda spoljašnjeg prstena skoro jednaka 0 što kazuje da će ove modove biti teško otkriti tokom eksperimentalnih ispitivanja. Naredni jedanaest modova su takozvani modovi oscilovanja kotrljajnih tela. Svaki pojedinačni mod kotrljajnih tela ima odgovarajuće sopstvene frekvencije koje se vrlo malo razlikuju (oko 1%) (slika 16d). Takođe, i u ovom slučaju amplituda spoljašnjeg prstena je jednaka 0 pa će i ovi modovi teško biti uočljivi pri merenju.



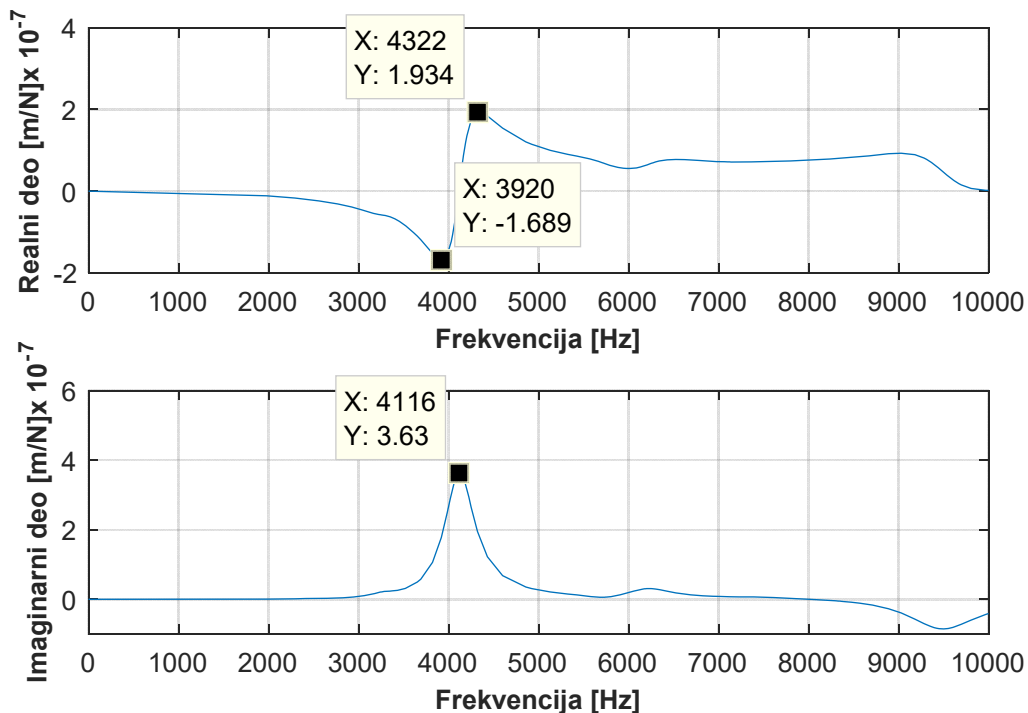
Slika 7.16 Modovi oscilovanja radijalnog ležaja

Na slici 7.17 je prikazan amplitudno frekventni dijagram dobijen pri MKE modelovanju radijalnog ležaja. Sa dijagrama na slici 7.17 se vidi da je dominantna sopstvena frekvencija koja se javlja usled oscilovanja spoljašnjeg prstena ležaja. Takođe, na dijagramu

se uočavaju i sopstvene frekvencije drugog moda odnosno, amplituda vibracija prstenova ležaja oko Z ose ($\omega_{02} = 6348$ Hz), kao i amplituda vibracija kotrljajnih tela ($\omega_{03} = 9284$ Hz). Modalni parametri ležaja na bazi MKE modelovanja su određeni funkcijom frekventnog odziva, kao i pri eksperimentalnom ispitivanju, kako je prikazano u prethodnom poglavlju. Pošto u posmatranom frekventnom opsegu razmatrani ležaji bez obzira na zazor imaju jedan dominantan mod, to su modalni parametri određeni samo za taj jedan mod. Na slici 7.18 su prikazani realni i imaginarni deo funkcije frekventnog odziva za razmatrani ležaj sa zazorom $20 \mu\text{m}$.



Slika 7.17 Amplitudno frekventna karakteristika radijalnog ležaja određena MKE modelovanjem



Slika 7.18 Realni i imaginarni deo funkcije frekventnog odziva

Poređenje sopstvenih frekvencija za prva tri moda oscilovanja određenih eksperimentalnim ispitivanjem i MKE modelovanjem su prikazane u tabeli 7.5.

Tabela 7.5 Poređenje sopstvenih frekvencija određenih eksperimentalno u odnosu na MKE modelovanjem za $G_r = 20 \mu\text{m}$

Sopstvena frekvencija	Eksperiment [Hz]	MKE model [Hz]	Odstupanje %
ω_1	3450	4132	-16,51 %
ω_2	6379	6348	0,49 %
ω_3	9146	9284	-1,49%

Na osnovu definisanog realnog i imaginarnog dela FRF, na već prikazan način, određeni su modalni parametri ležaja. U tabeli 7.6 su prikazani izračunati modalni parametri za posmatrani ležaj sa zazorom $20 \mu\text{m}$ i njihovo poređenje sa eksperimentalno određenim podacima.

Tabela 7.6 Poređenje modalnih parametara određenih eksperimentom i MKE modelom

Modalni parametri	Eksperiment	MKE model	Odstupanje
ω_n [Hz]	3919	4116	-4,79%
Kx [N/ μm]	19	21	-9,52%

Poređenjem vrednosti karakterističnih frekvencija iz tabele 7.5 može se uočiti da je najveće odstupanje između frekvencija određenih MKE modelovanjem i eksperimentalno, na prvom modu, koji je ujedno i najveći. Međutim, kako je maksimalno odstupanje oko -16%, može se zaključiti da MKE modelovanje daje zadovoljavajuće rezultate, pogotovo s obzirom da je razlika između MKE modelovanja i eksperimentalnog ispitivanja na frekvenciji f_n (tabela 7.6) samo -4,79%. Sveobuhvatnom analizom rezultata je, takođe, ustanovljeno da promena zazora pri ovakvom načinu ispitivanja (slobodno oslonjeni ležaj) ima zanemarljivo mali uticaj na promenu sopstvenih frekvencija, kao i na promenu modalnih parametara.

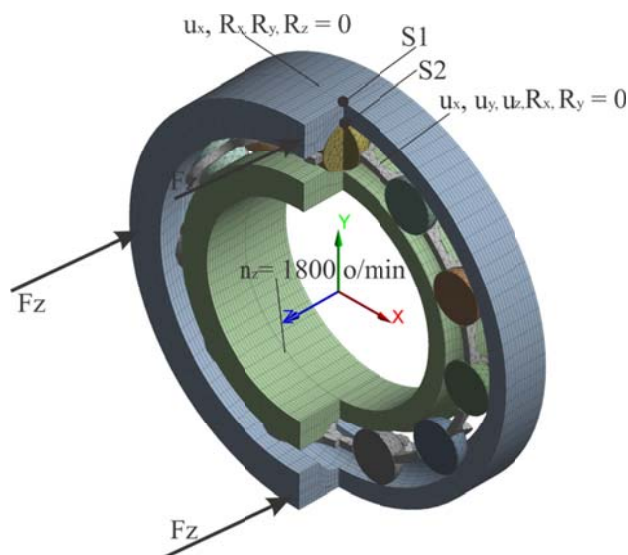
7.2.2 Eksplicitna dinamička analiza radijalnog ležaja

Eksplicitna analiza dinamičkog ponašanja radijalnog ležaja 6006 je izvršena za spoljašnje aksijalno opterećenje od 200 do 1000 N, pri čemu su posmatrani ležaji sa radijalnim zazorom 0, 10, 20, 30 i 40 μm . Aksijalno opterećenje je izabrano na osnovu eksperimentalnih ispitivanja posmatranog ležaja. Uslovi opterećenja pri eksperimentalnom ispitivanju odgovaraju standardu SRPS ISO 17025: 2006. Geometrijske karakteristike radijalnog ležaja su prikazane u tabeli 5.1, dok su u tabeli 7.1 prikazana mehanička svojstva materijala za razmatrani ležaj. Način diskretizacije i definisanje kontaktnih parova je prikazan u poglavlju 5. Spoljašnje aksijalno opterećenje je zadato na bočnoj površini spoljašnjeg prstena kako bi se što verodostojnije simulirala eksperimentalna ispitivanja. S druge strane, spoljašnjoj površini spoljašnjeg prstena su oduzeti svi stepeni slobode osim pomeranja u Y i Z pravcu, dok su spoljašnjoj površini kaveza oduzeti svi stepeni slobode osim rotacije oko Z ose. Na unutrašnjoj površini unutrašnjeg prstena je zadata brzina obrtanja od 1800 o/min. Definisana opterećenja i ograničenja su prikazana na slici 7.19. Promena amplitude brzine i ubrzanja je praćena u tački S1 i S2. Tačka S1 odgovara poziciji davača brzine pri

eksperimentalnom ispitivanju, dok se tačka S2 nalazi ispod tačke S1 na spoljašnjoj stazi kotrljanja.

Za obezbeđivanje stabilnosti graničnih rešenja, veličina vremenskog koraka (t_n) (relacija 5.10), je proverena i preko maksimalne kružne frekvencije (ω_{max}) spoljašnjeg prstena i prigušenja (ζ) za maksimalni mod oscilovanja preko relacije [92]:

$$\Delta t_{\min} \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \sqrt{1 + \zeta^2} - \zeta \quad (7.1)$$



Slika 7.19 Definisana opterećenja i ograničenja ležaja

Maksimalna kružna frekvencija spoljašnjeg prstena je izabrana zato što je pri analizama posmatrano ubrzanje, brzina i pomeranje na spoljašnjoj površini spoljašnjeg prstena, kako je prikazano na slici 7.19. Ovo znači, da oscilovanja koja se javljaju u ležaju moraju da prođu kroz širinu spoljašnjeg prstena da bi se pravilno i tačno registrovala na njegovoj spoljašnjoj površini. Pomenuta maksimalna kružna frekvencija se može odrediti kao [92]:

$$f_{o,\max} = \frac{1}{2\pi r_m} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (7.2)$$

gde je $r_m = (D + d_o)/2$, pri čemu je d_o prečnik spoljašnje staze kotrljanja. Za dimenzije spoljašnjeg prstena razmatranog ležaja maksimalna frekvencija iznosi oko 16500 Hz. Na osnovu dijagrama sa slike 7.17 i tabele 7.5 vidi se da je to $4x f_{11}$, odnosno da je maksimalna frekvencija spoljašnjeg prstena četvrti harmonik sopstvene frekvencije istog, koja je dobijena pri modalnoj analizi u kojoj je posmatran interval do 10000 Hz (kao što predviđa SRPS ISO 17025: 2006). Uzimajući u obzir prethodno, veličina vremenskog koraka pri analizi posmatranog ležaja prema relaciji (7.1) iznosi $1,51 \times 10^{-7}$ s, dok prema relaciji (5.10) iznosi $3,22 \times 10^{-7}$ s. Za analizu posmatranog ležaja je usvojena veličina vremenskog koraka kao srednja aritmetička vrednost koja je iznosila $2,365 \times 10^{-7}$ s. Pri određivanju vremenskog intervala preko relacije (5.10) brzina zvuka c je iznosila 2510 m/s i određena je kao [92]:

$$c = \sqrt{f_{o,\max}} \left[\frac{E \cdot h_o}{12(1-\nu^2)\rho} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (7.3)$$

gde je h_o -debljina spoljašnjeg prstena.

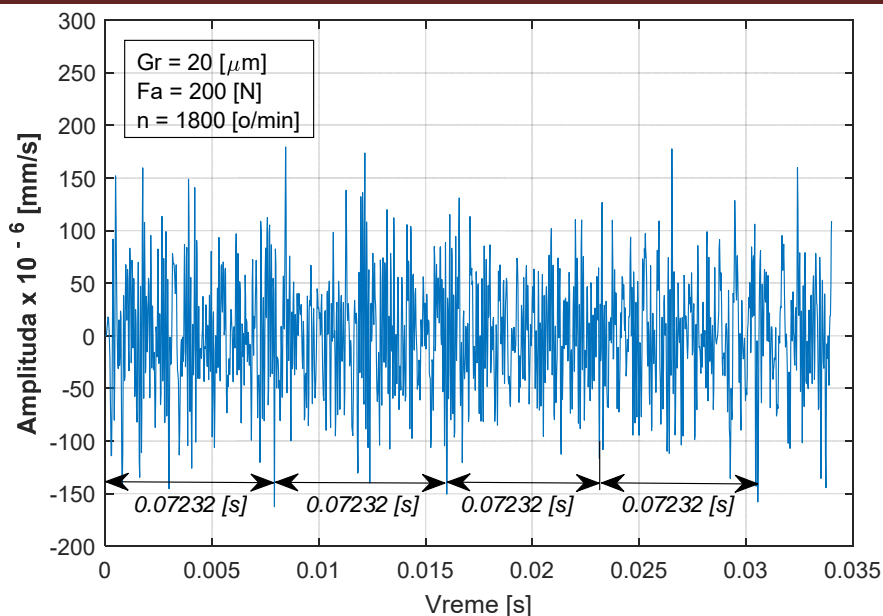
Vreme analize, odnosno obrtanja ležaja je definisano tako, da se unutrašnji prsten ležaja obrne za pun krug tj. $T = 1/f = (1 \times 60)/1800 = 33,33 \text{ ms} \approx 34 \text{ ms}$.

Kao što je već napomenuto u poglavlju 5, da bi se procenila tačnost numeričke simulacije (ova procena tačnosti se odnosi na tačnost rešenja za definisanu mrežu konačnih elementa, granične uslove i opterećenja), koristi se princip održanja energije. Smatra se da rešenja imaju zadovoljavajuću tačnost ako je greška energije manja 10% od referentne energije i da je „režim nulte energije” manji do 10%, od unutrašnje energije pri čemu ukupna energija sistema mora da bude konstantna (zakon o održanju energije). Pri analizi razmatranog ležaja, „nulta energija“ je manja oko 0,05% od unutrašnje energije što ukazuje da je primenjena veličina mreže konačnih elemenata adekvatna. Greška energije od 0,8% ukazuje da pri analizi nema numeričke nestabilnosti rešenja, i da su rešenja zadovoljavajuće tačnosti za postavljene granične uslove.

7.2.2.1 Analiza dinamičkog ponašanja radijalnog ležaja u vremenskom domenu

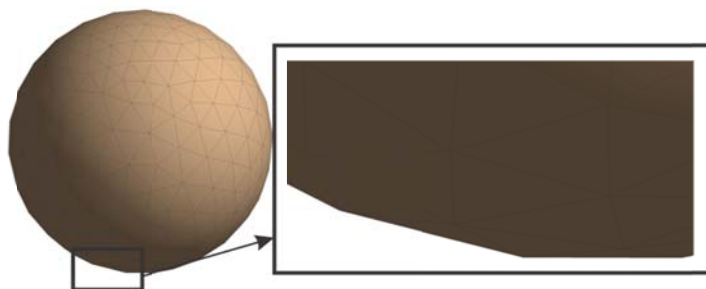
Na slici 7.20 je prikazana promena brzine tačke S1 u vremenu dobijena MKE modelovanjem za ležaj sa zazorom $20 \mu\text{m}$, pri delovanju spoljašnjeg aksijalnog opterećenja od 200 N. Na dijagramu se mogu uočiti četiri uzastopna impulsa koja su razdvojena za približno $0,007232 \text{ s}$, što odgovara karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena (frekvenciji prolaska kotrljajnih tela kroz fiksnu tačku na spoljašnjem prstenu) (f_o) koja iznosi oko $138,27 \text{ Hz}$.

Za razmatrani ležaj kvazistatički određena karakteristična frekvencija spoljašnjeg prstena prema relaciji (2.31) iznosi $f_o = 137,34 \text{ Hz}$, što je samo za 0,67% manja frekvencija, nego frekvencija dobijena MKE modelovanjem. Mala razlika između numeričkog (MKE) i analitičkog određivanja karakteristične frekvencije spoljašnjeg prstena nastaje jer relacija (2.31) ne uzima u obzir klizanje kotrljajnog tela, koje je pri definisanju MKE modela uzeto u obzir. Sa dijagrama na slici 7.20 se može videti da su maksimalni trenutni pikovi impulsa u opsegu od 0 do $\pm 180 \text{ mm/s}$, ili od 0 do $\pm 100 \text{ mm/s}$, dok se sve ostale promene brzine kreću u opsegu od 0 do 50 mm/s . Može se reći da, osim karakteristične frekvencije spoljašnjeg prstena i njenih harmonika, ostale frekvencije nisu vidljive, odnosno teško su uočljive u prikazanom vremenskom spektru. Prethodno je neizbežna pojava pri MKE modelovanju eksplicitnom metodom i dešava se uglavnom iz dva razloga. Prvo signal pri MKE modelovanju je prikupljan sa rezolucijom semplovanja od 48000 Hz , pri čemu je simulacija rađena samo za 34 ms , što je rezultiralo samo sa 1632 uzorka (sempla) nakon interpolacije na osnovu minimalnog vremenskog inkrementa. Usled manjeg broja tačaka pojedine frekvencije neće biti vidljive ni u amplitudno frekventnom domenu.



Slika 7.20 Promena amplitude brzine tokom vremena za radialni ležaj

Drugi razlog je pojava numeričkog šuma u MKE modelu zato što su kotrljajni elementi diskretizovani sa određenim brojem konačnih elemenata, odnosno ivice kotrljajnih elementa su transformisane iz kružnog poprečnog preseka u poligonalni. Na slici 7.21 je prikazano diskretizovano kotrljajno telo, gde se jasno vidi da se ono sastoji iz više linija koje obrazuju poligonalni poprečni presek.



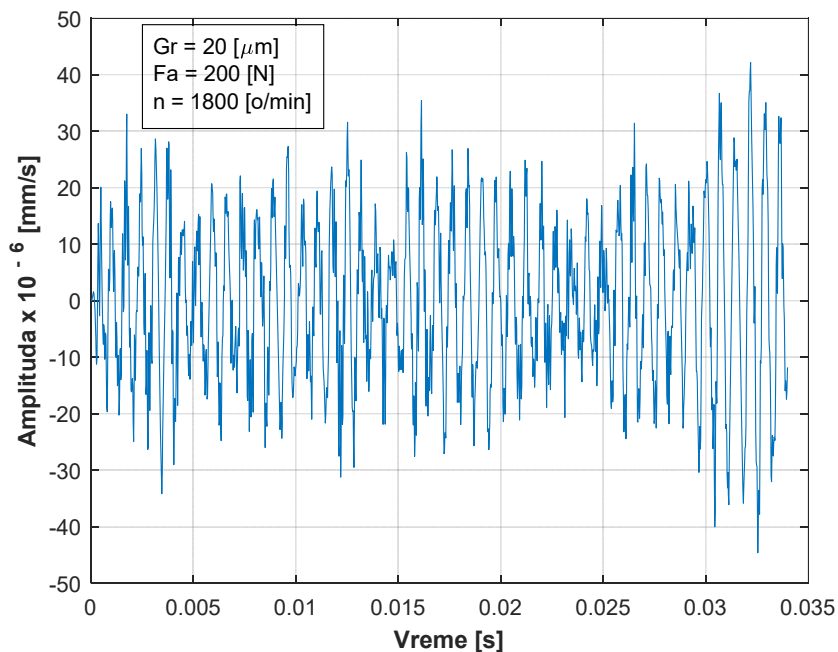
Slika 7.21 Diskretizovano kotrljajno telo

Kotrljajna tela su diskretizovana sa elementima veličine 0,5 mm, koji su generisali poligonalni omotač od 453 linije (ivice) $(= \frac{4\pi r_b^2}{l_{ke}\sqrt{3}/4})$. Pri kotrljanju poligonalnih kotrljajnih tela tokom simulacije stvaraju se mali udari (impulsi) u tačkama kontakta sa spoljašnjom i unutrašnjom stazom kotrljanja što dovodi do pojave numeričkog šuma. U ovom slučaju frekvencija šuma je u funkciji veličine konačnog elementa (l_{ke}) koji se koristi za diskretizaciju kotrljajnih tela, ugaone brzine obrtanja ($\omega_c=2\pi f_c$) prečnika unutrašnje i spoljašnje staze kotrljanja ($d_{i,o}$) u obliku [92]:

$$f_{\text{suma}}^{i-o} = \frac{2\pi f_c d_{i,o}}{l_{ke}} \quad (7.4)$$

Rešavanjem jednačine (7.4) za vrednosti $d_i=38,2$ mm i $d_o=49,644$ mm, dobija se frekvencija šuma pri kotrljanju tela preko unutrašnjeg i spolajšnjeg prstena $f_{\text{suma}}^{\dot{}} = 3304$ Hz,

$f_{\text{suma}}^{\circ} = 4294$ Hz. Na osnovu ovoga izvršeno je filtriranje signala u vremenskom domenu između ovih frekvencija i njihovih harmonika, kako bi kasnije na osnovu Furijeove transformacije mogao da se ispita uticaj pojedinih parametara na ponašanje ležaja, kao i da se rezultati MKE modelovanja uporede sa eksperimentalnim ispitivanjima. Na slici 7.22 je prikazana promena brzine u vremenskom domenu nakon filtriranja signala za zazor $20 \mu\text{m}$ pri delovanju spoljašnjeg aksijalnog opterećenja od 200 N .



Slika 7.22 Promena amplitude brzine tokom vremena za radijalni ležaj nakon filtriranja osnovnog signala

U tabeli 7.7 je prikazano poređenje karakterističnih frekvencija elemenata ležaja određenih na bazi kvazistatičkih i MKE proračuna. Kao što se vidi iz tabele 7.7 sve frekvencije elemenata ležaja su manje pri kvazistatičkom modelovanju za 0,13 do 4,51% u odnosu na frekvencije dobijene MKE pristupom preko relacija (2.29) do (2.32). Ova mala razlika se javlja zbog toga što pomenute relacije ne uzimaju u obzir klizanje kotrljajnih tela. Poklapanje karakterističnih frekvencija elemenata ležaja između kvazistatičkog i MKE modela ukazuje na zadovoljavajuće rezultate simulacije osnovne kinematike radijalnog ležaja.

Tabela 7.7 Poređenje karakterističnih frekvencija elementa ležaja određenih kvazistatičkim pristupom i MKE modelovanjem

Frekvencija ležaja	Kvazistatički	MKE model	Odstupanje [%]
F_r [Hz]	30	30,04	-0,13
f_c [Hz]	12,49	13,08	-4,51
f_i [Hz]	192,62	197,54	-2,49
f_o [Hz]	137,34	138,27	-0,67
f_b [Hz]	148,92	151,23	-1,53

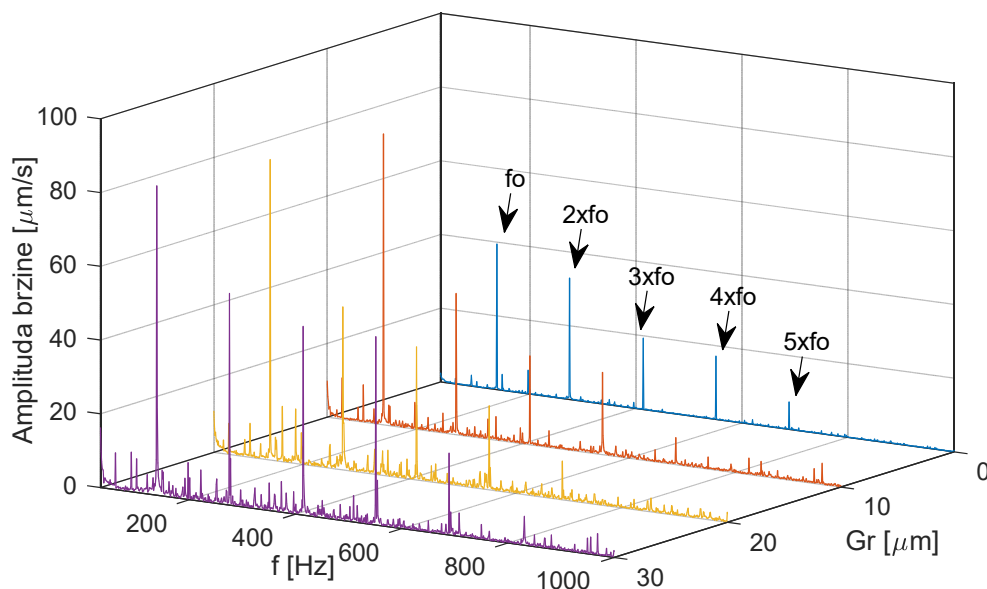
U narednom delu će kroz analizu uticaja pojedinih parametara na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja biti prikazano i poređenje rezultata MKE modelovanja sa podacima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjima.

7.2.2.2 Analiza uticaja zazora na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja

Analiza uticaja zazora na amplitude i frekvencije elemenata ležaja je sprovedena za zazore od 0, 10, 20 i 30 μm . Analiza je rađena na 1800 o/min pri spoljašnjem aksijalnom opterećenju $F_a = 200\text{ N}$. U slučaju kada je unutrašnji prsten obrtan, vibracije koje se javljaju na frekvenciji spoljašnjeg prstena i njenim harmonicima, predstavljaju direktan pokazatelj uticaja zazora na dinamičko ponašanje ležaja. Veličina zazora, takođe, ima i uticaja na veličine amplitude pomeranja u različitim frekventnim opsezima kako je pokazano pri eksperimentalnim merenjima. Amplituda vibracija koje se javljaju na frekvenciji spoljašnjeg prstena, direktno zavisi od veličine zazora, jer zazor ima značajan uticaj na raspodelu opterećenja unutar kotrljajnog ležaja, a preko toga i na nivo kontaktnih deformacija kao što je prikazano pri analizi statičkog ponašanja. Naime, pored intenziteta i karaktera opterećenja, na nivo kontaktnih deformacija presudan uticaj ima i broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju opterećenja. Kako se povećanjem zazora, a pri istom spoljašnjem aksijalnom opterećenju, smanjuje broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenosu opterećenja, smanjuju se i ukupna kontaktna opterećenja na pojedina kotrljajna tela kao i kontaktne deformacije, što će direktno uticati na veličinu amplitude u pojedinim frekventnim opsezima. Odnosno, može se reći da su vibracije nastale kao posledica zazora direktna i indirektna posledica specifične konstrukcije ležaja i kinematike. Ove vibracije se svrstavaju prema literaturi u strukturne vibracije ili vibracije nastale usled promene pravca i intenziteta delovanja kontaktnog opterećenja kojima kotrljajna tela deluju na staze kotrljanja (*variable elastic compliance*). Promena intenziteta delovanja kontaktnih sila je, prema opštoj teoriji ležaja, direktna posledica zazora ili preklopa u ležaju, pa se iz tog razloga ovakve vibracije mogu posmatrati kroz promenu zazora odnosno preklopa.

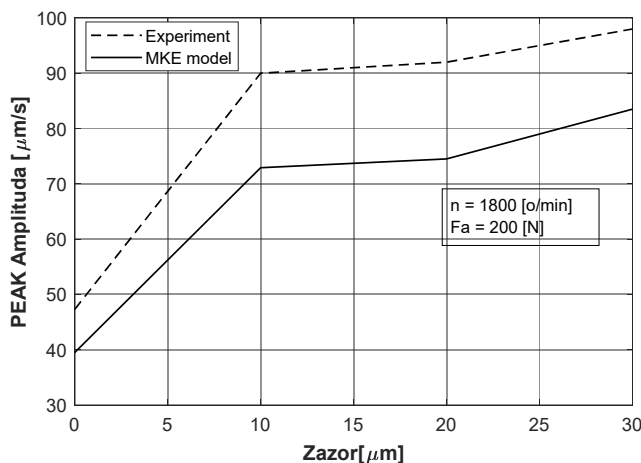
Na dijagramu na slici 7.23 je prikazana amplitudno-frekventna karakteristika razmatranog ležaja u zavisnosti od zazora, pri delovanju aksijalnog opterećenja. Povećanjem zazora, dolazi do povećanja veličine amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena. Povećanjem zazora sa 0 μm , na 10 μm veličina amplitude brzine se povećava sa 39,5 na 76,5 $\mu\text{m/s}$, dok se daljim povećanjem zazora na 40 μm , veličina amplitude brzine povećava na 83,5 $\mu\text{m/s}$. Povećanjem zazora od 10 do 40 μm , amplituda brzine se povećava za 8%. Povećanjem zazora od 0 do 10 μm dolazi do naglog skoka veličine amplitude brzine, što je karakteristično za sve frekvencije elemenata ležaja. Na nižim frekvencijama, odnosno u nižem frekventnom domenu dominantne su vibracije nastale usled zazora i promenljive krutosti, dok su u srednjem i visokom frekventnom domenu dominantne vibracije nastale usled geometrijskih nesavršenosti (valovitosti, hrapavosti, radijalnog bacanja staza kotrljanja itd). Usled toga, a pošto je MKE model definisan sa idealnim stazama kotrljanja, poređenja sa eksperimentalnim rezultatima (PEAK vrednosti amplitude brzine) imaju smisla samo u nižem frekventnom području (50 do 300 Hz).

Na slici 7.24 je prikazano poređenje maksimalne (PEAK) vrednosti amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena (f_o) dobijene MKE modelovanjem i eksperimentom. Poređenje sa RMS vrednostima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem, takođe, nema mnogo smisla, jer RMS vrednost predstavlja srednju kvadratnu vrednost amplitude vibracija na svim frekvencijama (frekvencijama nastalim usled geometrijske nesavršenosti) u posmatranom frekventnom opsegu.



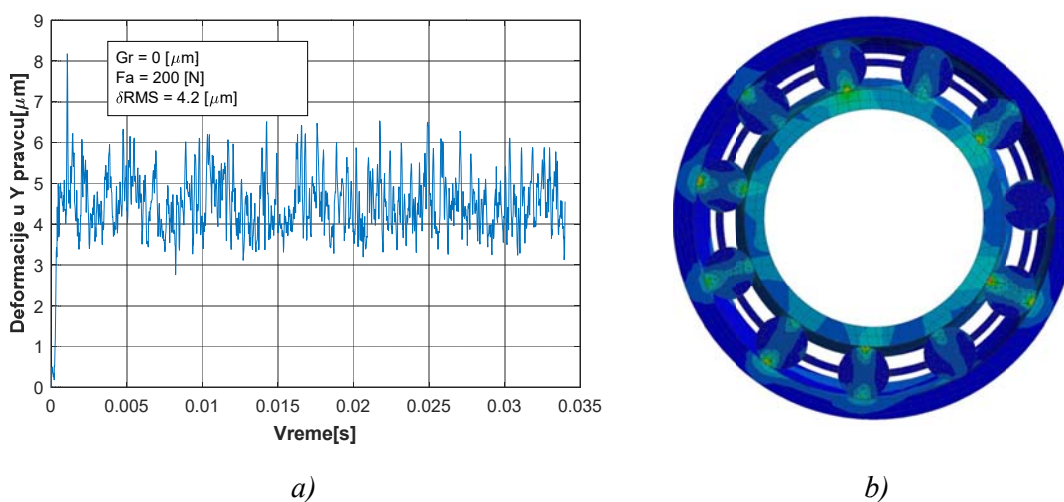
Slika 7.23 Amplitudno-frekventna karakteristika radijalnog ležaja u zavisnosti od zazora pri delovanju spoljašnjeg aksijalnog opterećenja $F_a = 200 \text{ N}$

Sa slike 7.24 se vidi da povećanje zazora sa 0 na 30 μm dovodi do povećanja amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena za 47% pri eksperimentalnim ispitivanjima, odnosno za 51% pri MKE modelovanju. Pri zazoru $G_r=0 \mu\text{m}$, odstupanje amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena dobijenog MKE modelovanjem u odnosu na eksperimentalna ispitivanja iznosi 21%, dok pri zazoru od 30 μm iznosi oko 15%. Manje vrednosti amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena određene MKE modelovanjem su posledica idealne staze kotrljanja kao i idealnog kotrljajnog tela (nisu razmatrane geometrijske nesavršenosti). Ako se uzme u obzir da se MKE modelovanjem idealnog ležaja, dobijaju vibracije koje su čisto posledica promene zazora i krutosti ležaja, onda se rezultati mogu smatrati zadovoljavajućim. Analizom dijagrama sa slike 7.24 se vidi, da sa povećanjem veličine unutrašnjeg radijalnog zazora do 10 μm , linearno raste i veličina amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena, za vrednost zazora 10 μm do 20 μm , amplituda ima malu tendenciju porasta, a nakon 20 μm opet raste linearno.

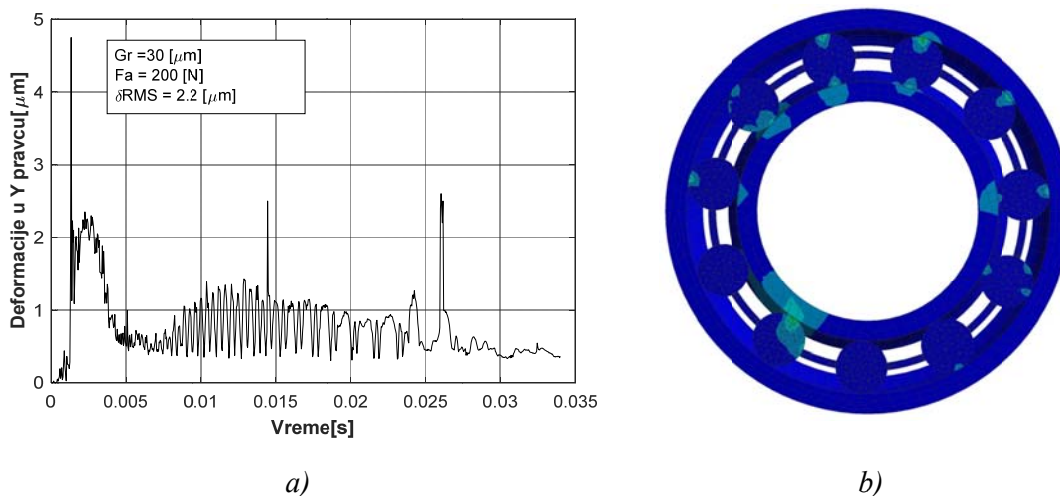


Slika 7.24 Promena maksimalne (Peak) amplitude vrednosti brzine na frekvenciji f_o u zavisnosti od zazora

Pri manjim vrednostima zazora broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja je veći (npr. za nulti zazor broj i aksijalno opterećenje od 200 N sva kotrljajna tela su u zoni opterećenja (slika 7.25)), što rezultira manjim promenama, kako elastičnih deformacija na stazama kotrljanja (slika 7.25) tokom vremena, tako i krutosti. Naime, promenom intenziteta i pravca kontaktnih sila i kontaktnih deformacija između kotrljajnih tela i staza kotrljanja (slika 7.25 i 7.26) ležaja, tokom rada, menja se i njegova kontaktna krutost ($K_r = dQ/d\delta$). Pri zazoru od 30 μm , primenjeno aksijalno opterećenje nije dovoljno da se poveća broj tela u zonu opterećenja, već se celokupno opterećenje deli na tri kotrljajna tela što dovodi do većih (intenzivnih) promena elastičnih deformacija tokom vremena kao što je prikazano na slici 7.26. Uopšteno gledano, ova vremenska promenljivost krutosti prouzrokuje vibracije između prstenova ležaja i kod idealnog ležaja. Ove vibracije kao i vibracije nastale od zazora (diskretne strukture elemenata ležaja) su dominantne na specifičnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena ležaja kao što se vidi sa dijagrama na slici 7.23.



Slika 7.25 a) Promena elastičnih deformacija tokom vremena na spoljašnjoj stazi kotrljanja;
b) Raspored elastičnih deformacija na ležaju u trenutku $t = 0,025$ s, pri zazoru $G_r = 0 \mu\text{m}$

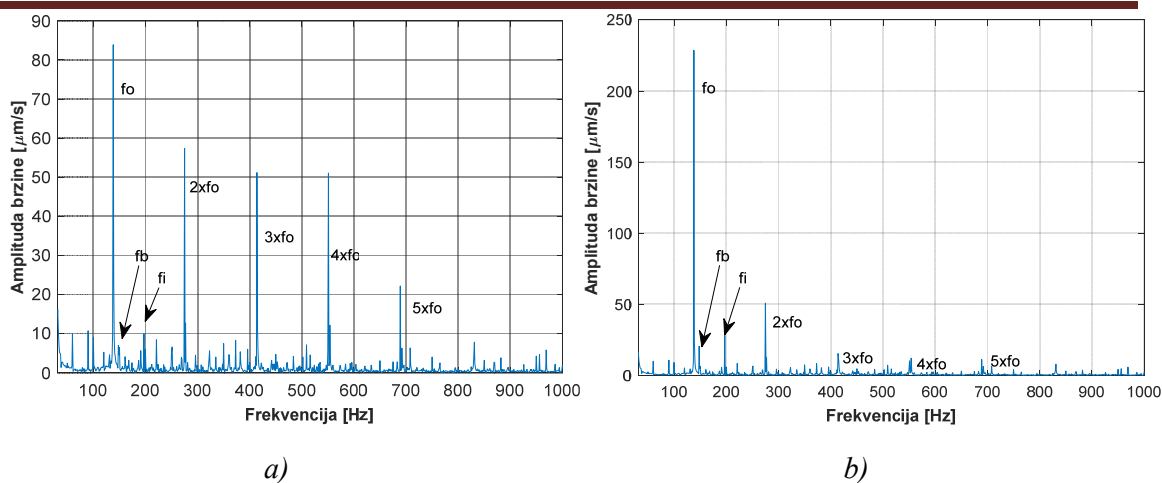


Slika 7.26 a) Promena elastičnih deformacija tokom vremena na spoljašnjoj stazi kotrljanja;
b) Raspored elastičnih deformacija na ležaju u trenutku $t = 0,025$ s, pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$

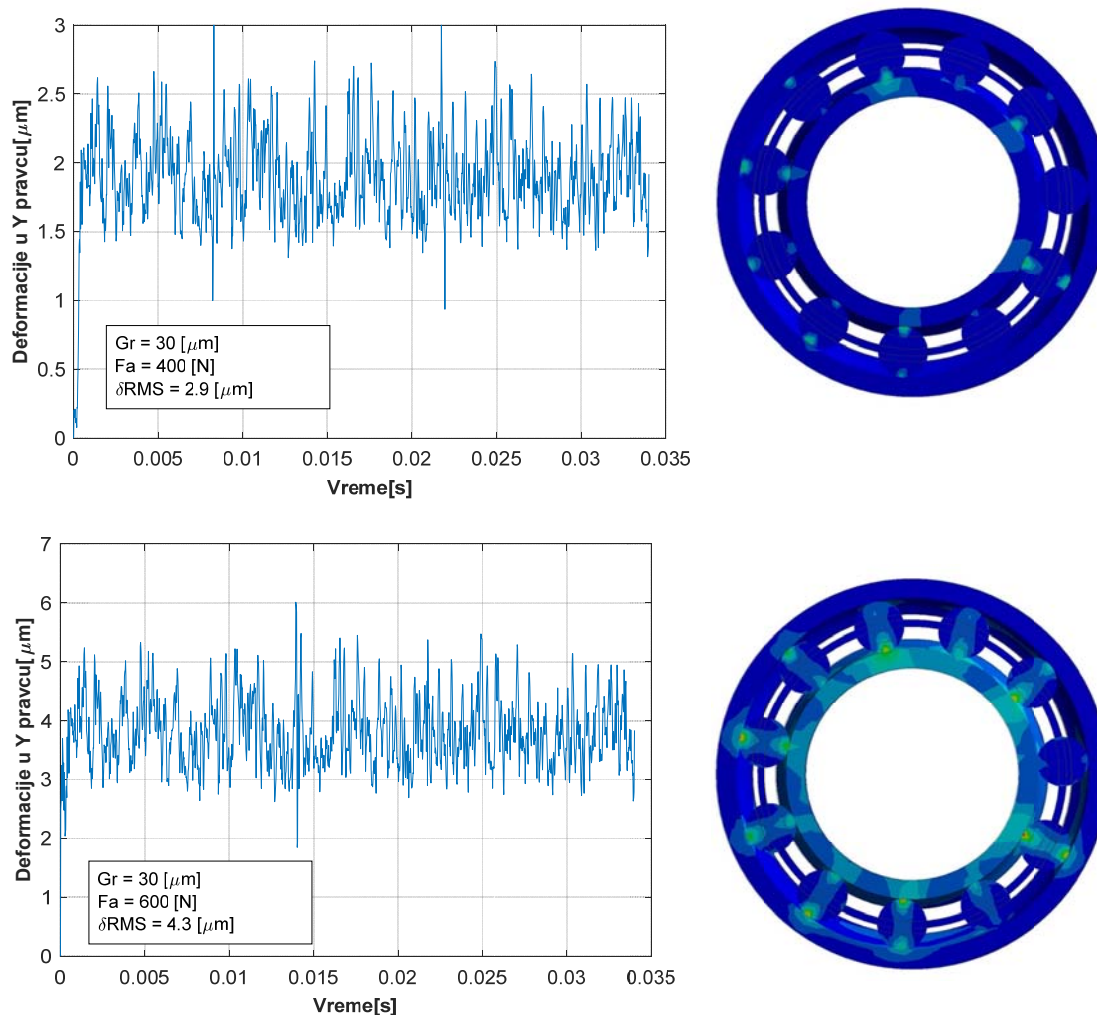
7.2.2.3 Analiza uticaja spoljašnjeg opterećenja na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja

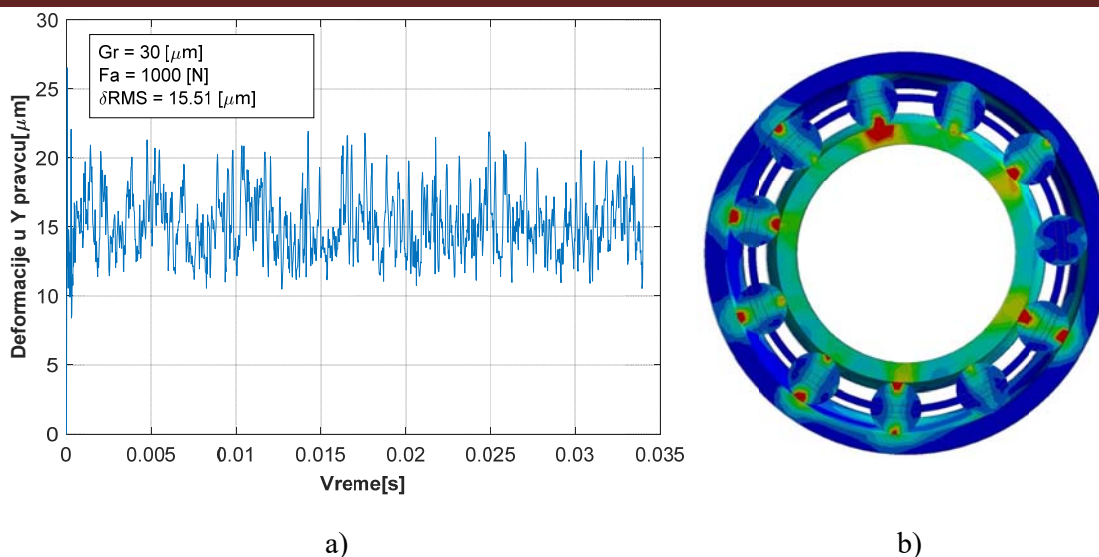
Analiza uticaja spoljašnjeg opterećenja na amplitude i frekvencije elemenata ležaja je sprovedena za zazor od 30 μm , pri spoljašnjem aksijalnom opterećenju od 200 do 1000 N. Analiza je vršena za $n = 1800$ o/min. Kada se usled eksploatacionih uslova moraju koristiti radijalni ležaji sa većim zazorom, prednaprezanje ležaja (aksijalno opterećenje) se primenjuje kako bi se smanjile velike promene amplitude oscilovanja tokom vremena. Na slici 7.27 je prikazana promena amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena (f_o) za zazor od 30 μm pri delovanju aksijalnog opterećenja od 200 i 1000 N. Kao što se vidi sa dijagrama na slici 7.27, povećanjem opterećenja sa 200 na 1000 N povećava se amplituda brzine na frekvenciji f_o sa 83,5 $\mu\text{m/s}$ na 228,7 $\mu\text{m/s}$, ali se zato amplitude brzine na njenim harmonicima smanjuju za 10% na harmoniku $2xf_o$ do 80% na harmoniku $4xf_o$. Pri ovome dolazi do povećanja amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji unutrašnjeg prstena (f_i) za 30%, odnosno, povećanja amplitude na frekvenciji kotrljajnih tela (f_b) za 20%. Aksijalno opterećenje u ovom slučaju teži da zadrži kontakt između staza kotrljanja i kotrljajnog tela. Kako se kotrljajno telo okreće oko ose ležaja, postoji tendencija da kotrljajno telo zaostaje ili napreduje u odnosu na svoj centralni položaj u kavezu, što zavisi od spoljašnjeg aksijalnog opterećenja i zazora. Na ovaj način se stvara veća ili manja razlika između kontaktnih opterećenja i kontaktnih deformacija tokom vremena.

Porastom aksijalnog opterećenja sa 200 N (slika 7.26a) na 1000 N, deformacije na spoljašnjoj stazi kotrljanja rastu sa 2,2 μm na 15,51 μm (slika 7.28a). Na slici 7.28 je prikazana promena deformacija na spoljašnjem prstenu za zazor od 30 μm za različite vrednosti aksijalnog opterećenja. Sa dijagrama se može videti da se porastom aksijalnog opterećenja povećava broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja (sa 3 kotrljajna tela pri $F_a = 200$ N (slika 7.26b) na devet kotrljajnih tela pri $F_a = 1000$ N (slika 7.28b)). Pri tome dolazi do povećanja deformacija, ali i ravnomernijoj promeni deformacija tokom vremena (slika 7.28a), što dovodi i do smanjivanja amplitude brzine na harmonicima karakteristične frekvencije spoljašnjeg prstena (slika 7.27b). Pri aksijalnom opterećenju od 1000 N, devet od mogućih jedanaest kotrljajnih tela učestvuje u prenošenju opterećenja, pa se kontaktna opterećenja i kontaktne deformacije ravnomernije dele između kotrljajnih tela, a samim tim će i promena krutosti tokom vremena biti manja, odnosno, ravnomernija, što takođe utiče na amplitude vibracija. Usled ovoga, odnosno manjih vrednosti amplitude brzine na harmonicima karakteristične frekvencije spoljašnjeg prstena, RMS vrednost vibracija će se u nižem frekventnom domenu (50 – 300 Hz) smanjivati kako je i utvrđeno eksperimentalnim ispitivanjima.



Slika 7.27 Amplitudno-frekventna karakteristika radialnog ležaja pri zazoru od $30\ \mu\text{m}$, pri delovanju:
 a) $F_a = 200\text{ N}$; b) $F_a = 1000\text{ N}$





Slika 7.28 a) Promena elastičnih deformacija tokom vremena na spoljašnjoj stazi kotrljanja;
 b) Raspored elastičnih deformacija na ležaju u trenutku $t = 0,025$ s, pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$ za različite varijante opterećenja

U tabeli 7.8 je prikazano poređenje maksimalne amplitude brzine (PEAK vrednosti) na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena (f_o) određene eksperimentalnim ispitivanjima i MKE modelovanjem za zazor od $30 \mu\text{m}$, pri različitim vrednostima spoljašnjeg aksijalnog opterećenja.

Tabela 7.8 Poređenje PEAK amplituda brzine na frekvenciji (f_o) određenih eksperimentalnim merenjima i MKE modelovanjem

Aksijalno opterećenje F_a [N]	PEAK amplituda brzine [$\mu\text{m/s}$]		Odstupanje [%]
	Eksperimentalno	MKE model	
200	97,05	83,80	15,81
400	137,60	121,65	13,11
600	201,21	197,54	1,85
800	210,90	201,62	4,60
1000	237,74	228,48	4,05

Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 7.8 se vidi da odstupanje PEAK amplituda brzine na frekvenciji f_o , kada se kao referentna vrednost uzmu eksperimentalni rezultati, kreće se u granicama od oko 2 do 16%, te se može konstatovati da prikazani MKE eksplicitno dinamički model može sa velikom tačnošću predvideti frekvencije i amplitude vibracija za idealni ležaj.

8 VERIFIKACIJA REZULTATA MODELOVANJA MEHANIČKOG PONAŠANJA KUGLIČNOG LEŽAJA SA KONTAKTOM U ČETIRI TAČKE

Analiza ponašanja ležaja sa kontaktom u četiri tačke (FKL LSQFR 308) je izvršena za različite eksploatacione uslove. U okviru određenih analiza izvršena je analiza uticaja koncepcionih parametara (zazora i preklopa), na eksploatacione karakteristike ležaja. Za verifikaciju rezultata dobijenih primenom kvazistatičkog modela, kao i primenom programskih sistema opšte namene koji se baziraju na metodi konačnih elemenata, urađena su eksperimentalna ispitivanja. Verifikacija statičkog ponašanja ležaja LSQFR 308 je izvršena poređenjem rezultata dobijenih kvazistatičkim modelovanjem i rezultata dobijenih primenom metode konačnih elemenata. Na kraju su rezultati modelovanja dinamičkog ponašanja primenom metode konačnih elemenata poređeni sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem.

8.1 Verifikacija modelovanja statičkog ponašanja ležaja LSQFR 308

U poljoprivredi kao i svim oblastima industrije rastu zahtevi koji se postavljaju pred mašine i opremu. U današnjoj poljoprivrednoj industriji se ide ka razvoju ležaja zasnovanih na smanjenju mase, dimenzija, a da se pri tome povećaju eksploatacione karakteristike ležaja. Tipični ležaj koji se sve češće koristi u poljoprivrednoj mehanizaciji je ležaj sa kontaktom u četiri tačke (LSQFR 308) koji se, između ostalog, koristi za uležištenje diska sejalice. Analiza statičkog ponašanja ležaja LSQFR 308 je izvršena za spoljašnje aksijalno i radijalno opterećenje pri čemu se posmatraju ležaji sa radijalnim zazorom, odnosno preklopom od -20 do 30 μm . Analizom su obuhvaćeni uticaji kontaktnih deformacija, kontaktnih opterećenja, pomeranja centra ležaja i krutosti, pri delovanju datih opterećenja. Analize su rađene pri broju obrtaja $n = 200$ o/min, što odgovara brzini kretanja poljoprivredne mehanizacije od 20 km/h. Primenjena opterećenja su definisana na osnovu eksploatacionih uslova obrade zemlje za slučajeve prikazane u tabeli 8.1. Mehanička svojstva materijala za razmatrani ležaj su data u tabeli 8.2. Na osnovu tabele 8.1 su usvojena sledeća opterećenja $F_a = 400 - 2000$ N i $F_r = 1000 - 10\,000$ N. Sve navedene analize su sprovedene za aksijalnu silu pritezanja unutrašnjeg prstena ležaja (aksijalno prednaprezanje) od 2000 N. Sila pritezanja je usvojena na bazi preporuke proizvođača ležaja za analizirane eksploatacione uslove.

Tabela 8.1 Razmatrani slučajevi opterećenja




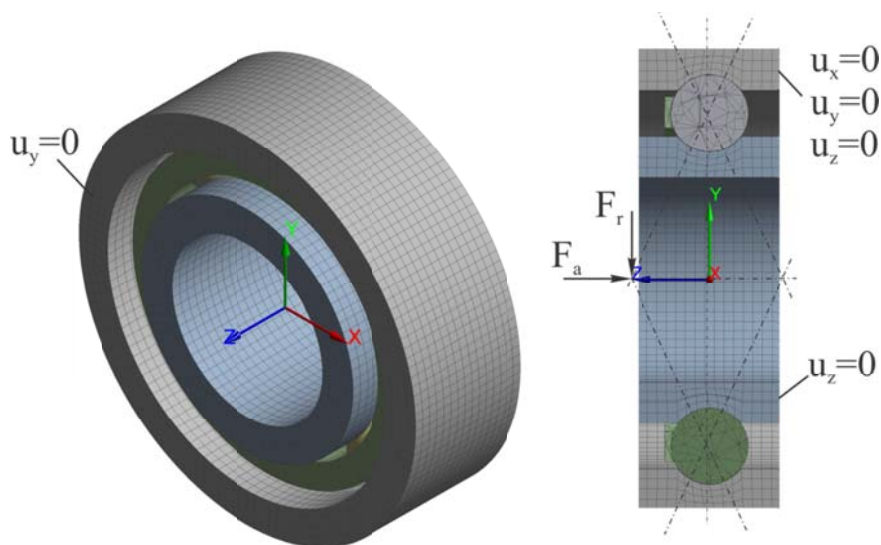
Radni uslovi			
Opterećenje	Radna pozicija	Transportna pozicija	Zaokretanje
$F_{a \max}$	2000 N	400 N	1700 N
$F_{r \max}$	6000 N	7200 N	9100 N

Tabela 8.2 Mehanička svojstva materijala za ležaj LSQFR 308

Element ležaja	Materijal	Modul elastičnosti [MPa]	Gustina [kg/m ³]	Paosonov koeficijent
Un. prsten	GCr15SiMn	2,16x10 ⁵	7820	0,29
Sp. prsten	GCr15SiMn	2,16x10 ⁵	7820	0,29
Kotr. tela	GCr15SiMn	2,16x10 ⁵	7820	0,29
Kavez	Polietilen	1100	950	0,42

Pri matematičkom modelovanju (kvazistatičkom i MKE) ležaja sa kontaktom u četiri tačke, spoljašnje aksijalno i radijalno opterećenje je zadato u preseku ose ležaja i linije opterećenja kako je prikazano na slici 8.1. S druge strane pri modelovanju metodom konačnih elemenata čeonj površini sa zadnje strane spoljašnjeg prstena su oduzeti svi stepeni slobode, dok je prednjoj čeonj površini oduzeto pomeranje u vertikalnom pravcu (u_y). Bočnoj površini unutrašnjeg prstena je oduzeto pomeranje u aksijalnom pravcu (u_z), kako bi se simuliralo sedište ležaja. Definisana opterećenja i ograničenja su prikazana na slici 8.1.



Slika 8.1 MKE model ležaja LSQFR 308 pri statičkoj analizi

Analiza uticaja zazora/preklopa je sprovedena za slučaj delovanja aksijalnog opterećenja, radijalnog opterećenja i kombinovanog opterećenja. Sve navedene analize su

urađene za zazor/preklop od -20 do 30 μm . Prvo je izvršeno poređenje aksijalne i radijalne krutosti ležaja LSQFR 308 pri delovanju aksijalnog opterećenja za različite vrednosti zazora, odnosno preklopa. U tabeli 8.3 je prikazano poređenje aksijalne i radijalne krutosti određene kvazistatičkim modelom za različite vrednosti zazora/preklopa pri delovanju aksijalnog opterećenja $F_a = 400 \text{ N}$.

Tabela 8.3 Aksijalna i radijalna krutost za različite vrednosti zazora/preklopa za ležaj LSQFR 308

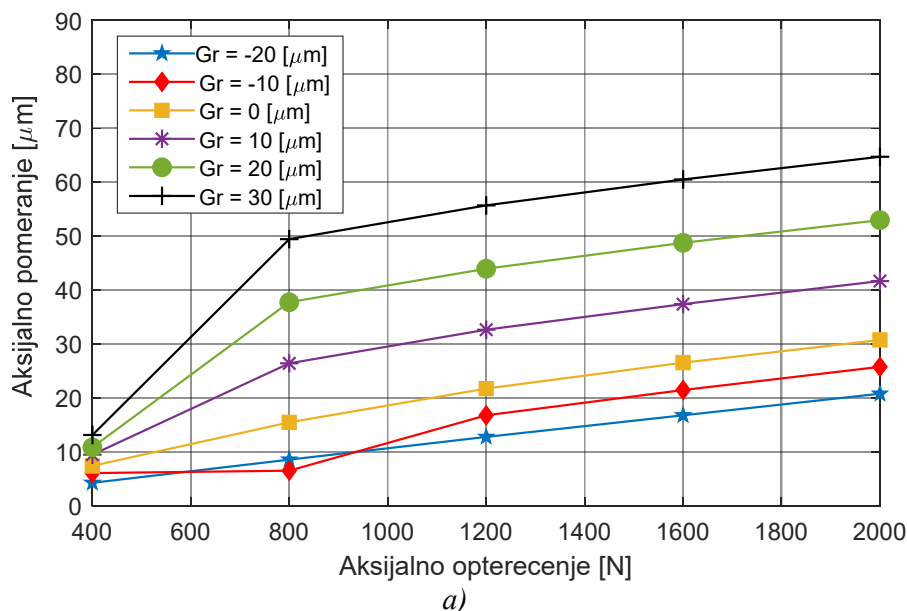
Zazor/preklop [μm]	Aksijalna krutost [$\text{N}/\mu\text{m}$]	Radijalna krutost [$\text{N}/\mu\text{m}$]
-20	93,2	193,5
-10	65,9	153,9
0	57,1	143,9
10	40,7	138,5
20	32,8	124,8
30	30,5	124,4

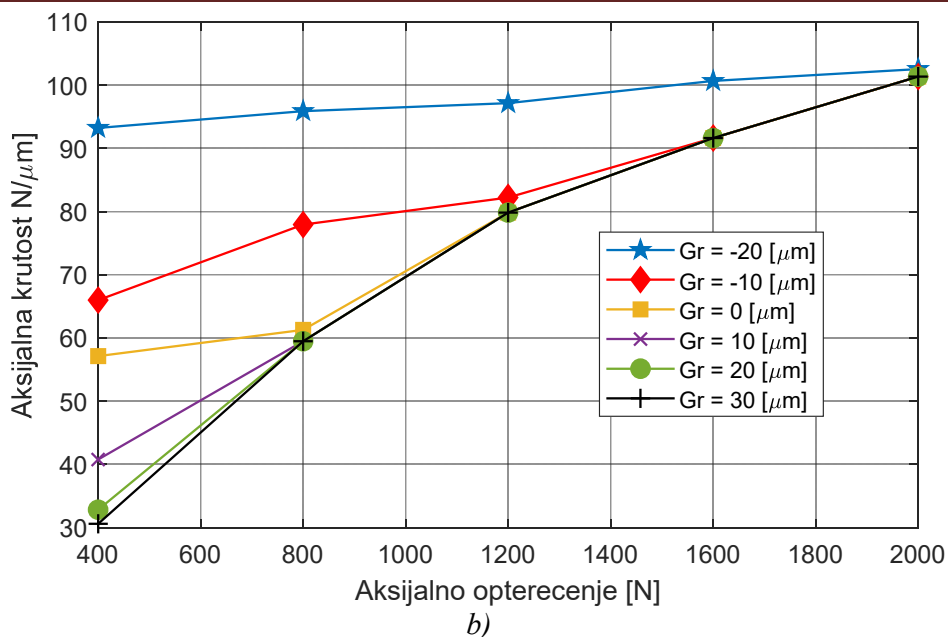
Prelaskom iz preklopa na nulti zazor, aksijalna krutost opada za 39%, pri čemu dolazi do smanjenja i radijalne krutosti za 25%. Daljim povećanjem zazora sa 0 na 30 μm , aksijalna krutost se smanjuje za 46% dok radijalna krutost opada sa 143,9 na 124,4 $\text{N}/\mu\text{m}$, odnosno za oko 13%. Na osnovu vrednosti iz tabele 8.3 može se uspostaviti veza aksijalne i radijalne krutosti za kuglični ležaj sa kosim dodirom sa kontaktom u četiri tačke gde je $\alpha = 25^\circ$ kao:

$$K_y \approx 2,31 \cdot K_z \quad \text{N}/\mu\text{m} \text{ za preklop uključujući i nulti zazor i}$$

$$K_y \approx 3,73 \cdot K_z \quad \text{N}/\mu\text{m} \text{ za zazor.}$$

Da bi se ispitaio uticaj zazora/preklopa i spoljašnjeg opterećenja na krutost, prvo je izvršena analiza aksijalne krutosti pri delovanju aksijalnog opterećenja za različite vrednosti zazora/preklopa. Veza između aksijalnog pomeranja i spoljašnjeg aksijalnog opterećenja je prikazana na slici 8.2a, dok je zavisnost aksijalne krutosti od spoljašnjeg aksijalnog opterećenja prikazana na slici 8.2b.



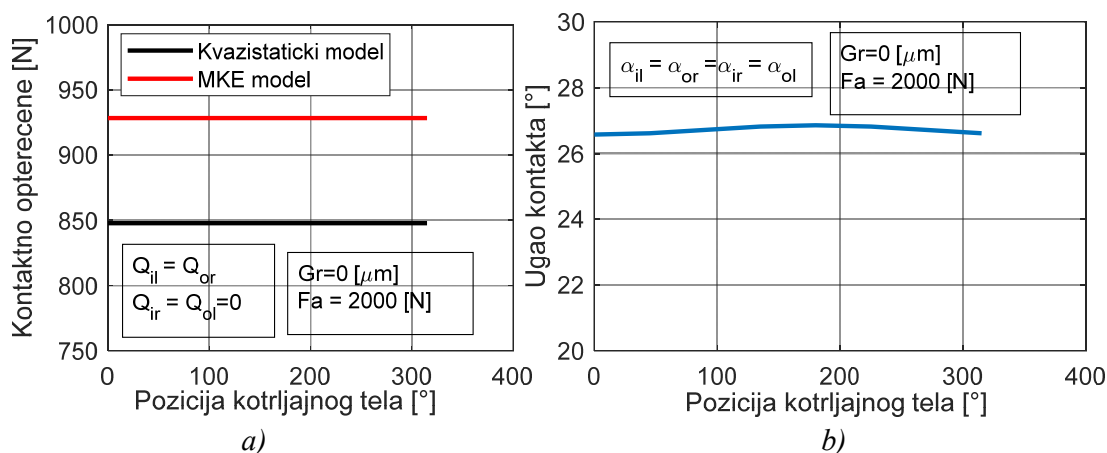


Slika 8.2 Promena: a) aksijalnog pomeranja; b) aksijalne krutosti u zavisnosti od aksijalnog opterećenja za različite vrednosti zazora/preklopa

Sa prethodnih slika se može videti da je pomeranje centra ležaja, kao i krutost ležaja nelinearna u području preklopa i manjih aksijalnih opterećenja. Kako opterećenje raste, tako krutost iz nelinearnosti prelazi u linearnost kada je ležaj sa zazorom. Takođe, sa slike 8.2b se može videti da pri veći vrednostima aksijalnog opterećenja ($F_a > 800$ N) radijalna krutost je približno ista za sve vrednosti zazora. Iz prethodnih analiza se može zaključiti da se aksijalna i radijalna krutost ležaja značajno povećava sa povećanjem aksijalnog opterećenja i prelaskom iz zazora u preklop. U ovom slučaju sa stanovišta krutosti aksijalno opterećenje se ponaša kao sila prednaprezanja, što se može videti sa slike 8.2b. Pri $F_a = 1600$ N aksijalna krutost je ista za preklop od $-10 \mu\text{m}$ i za sve vrednosti zazora, dok je pri $F_a = 2000$ N aksijalna krutost približno ista za sve vrednosti razmatranog preklopa/zazora. Takođe, pomeranje centra ležaja se smanjuje sa smanjenjem zazora i prelaskom u preklop. Prema tome, krutost i pomeranje centra ležaja pri dejstvu većeg aksijalnog opterećenja imaju isti trend rasta ili opadanja nezavisno od zazora u ležaju dok je vrednost aksijalne krutosti približno ista. Iz ovog razloga, a i zbog velikog broja analiziranih podataka, u nastavku će biti prikazana analiza statičkog ponašanja u zavisnosti od zazora/preklopa pod dejstvom aksijalnog opterećenja $F_a = 2000$ N.

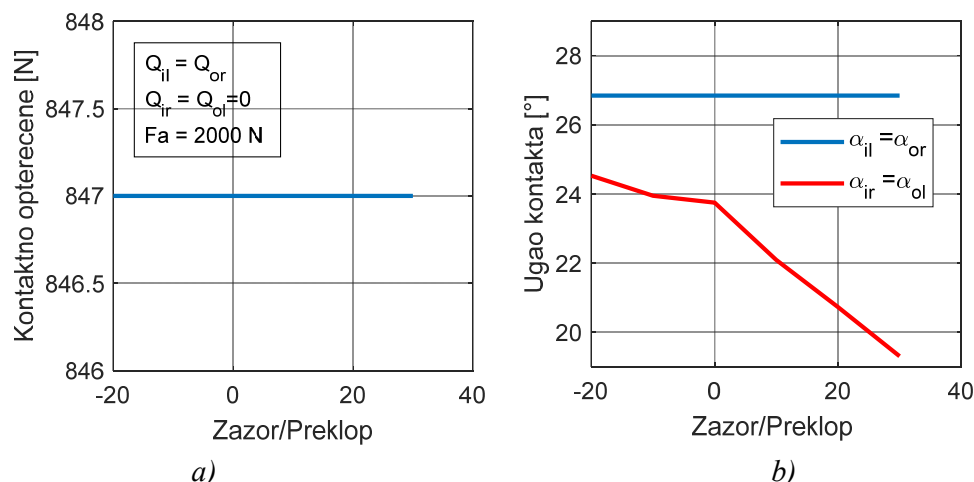
Pri razmatranom broju obrtaja kontaktna opterećenja su ista sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja za svaku poziciju kotrljanog tela (slika 8.3a), pri čemu su kontaktna opterećenja sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja približno jednaka nuli. Pri ovome je ugao kontakta sa stazama kotrljanja isti (slika 8.3b). Pošto je krutost ležaja kombinacija krutosti kontakta sa unutrašnjom levom i desnom, odnosno spoljašnjom levom i desnom stazom kotrljanja, maksimalna krutost se pri maksimalnom razmatranom preklopu ($-20 \mu\text{m}$). Smanjenjem preklopa i povećanjem zazora ugao kontakta sa unutrašnjom desnom, odnosno, sa spoljašnjom levom stazom kotrljanja opada, dok je kontaktno opterećenje, kao i ugao kontakta sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja konstantan (slika 8.4a i b). Prema tome, opterećenje se ravnomerno

prenosi na unutrašnju levu i spoljašnju desnu stazu kotrljanja, drugim rečima pri čistom aksijalnom opterećenju, ovaj ležaj prenosi opterećenje kao klasičan ležaj sa kosim dodirom sa kontaktom u dve tačke. Prema tome, ukoliko ležaj mora biti sa većim zazorom, treba povećavati aksijalno opterećenje da bi kotrljajna tela bila u kontaktu sa stazama kotrljanja, odnosno, da bi se povećala aksijalna krutost ležaja. Kao što se vidi iz relacije (4.48), krutost za svako kotrljajno telo je u funkciji kontaktnih deformacija i ugla kontakta. Prema tome, promenom preklopa ili zazora, kontaktna opterećenja su konstantna pa su i kontaktne deformacije konstantne. Ovo znači da je smanjenje ukupne radijalne i aksijalne krutosti (tabela 8.3) pri većim zazorima isključivo posledica opadanja ugla kontakta sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja. Na slici 8.3 je prikazan dijagram zavisnosti ugla kontakta i kontaktnih opterećenja od pozicije kotrljajnih tela za $F_a = 2000$ N pri nultom zazoru. Promena ugla kontakta i kontaktnih opterećenja u zavisnosti od zazora/preklopa pri $F_a = 2000$ N je prikazana na slici 8.4. Raspored maksimalnih ekvivalentnih napona sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja za $F_a = 2000$ N je prikazan na slici 8.5.

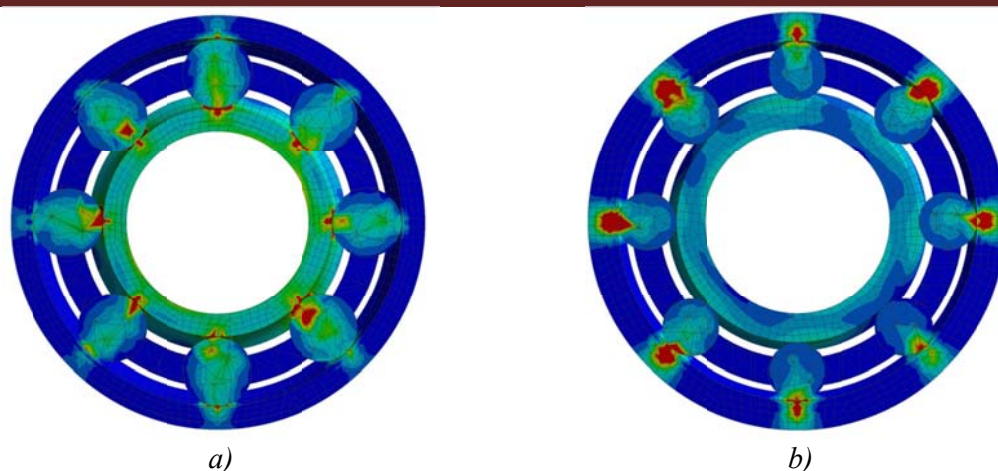


Slika 8.3 Promena kontaktnih opterećenja i ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela za $F_a = 2000$ N za ležaj LSQFR 308

Kao što se vidi sa slike 8.3a razlika između kontaktnih opterećenja određenih kvazistatičkim modelom i MKE modelovanjem je mala i iznosi oko 9,6%.



Slika 8.4 Promena kontaktnih opterećenja i ugla kontakta u zavisnosti od zazora/preklopa za ležaj LSQFR 308



Slika 8.5 Raspored maksimalnih ekvivalentnih napona na: a) unutrašnjoj levoj; b) spoljašnjoj desnoj stazi kotrljanja pri $F_a=2000$ N i $G_r=0$ μ m

U tabeli 8.4 je prikazano poređenje maksimalnog kontaktnog pritiska i maksimalnih kontaktnih deformacija određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem za različita aksijalna opterećenja pri nultom zazoru. Vrednosti dobijene kvazistatičkim modelom su uzete kao referentne.

Tabela 8.4 Poređenje vrednosti maks. kontaktnog pritiska i deformacija određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem

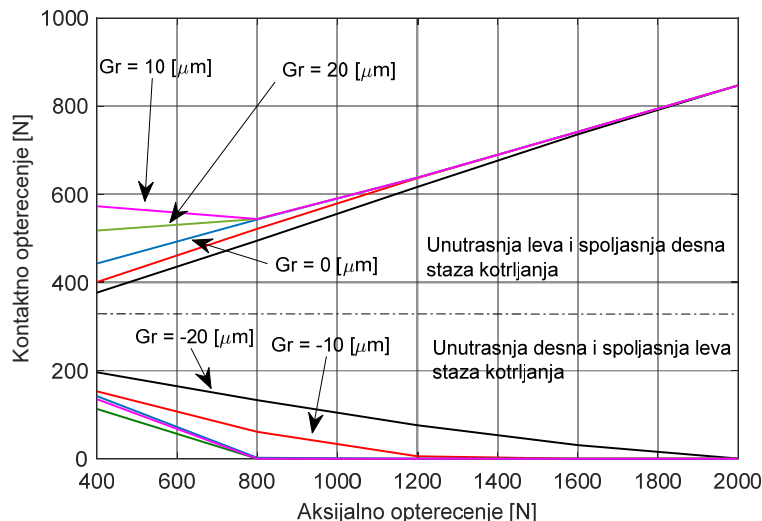
Opterećenje F_a [N]	Kvazistatički model		MKE model		Odstupanje %	
	Kontakt pritisak [MPa]	Deformacije [μ m]	Kontakt pritisak [Mpa]	Deformacije [μ m]	Kontakt pritisak	Deformacije
400	1395	5,9	1467	6,25	-4,91	-5.60
800	1493	6,8	1618	7,37	-7,73	-7,73
1200	1575	7,6	1630	7,98	-3,37	-4,76
1600	1655	8,4	1697	8,83	-2,47	-7,87
2000	1729	9,2	1830	9,82	-5,52	-6.31

Kontaktno opterećenje sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja pri $F_a = 400$ N i nultim zazorom iznosi 430 N (slika 8.6), dok kontaktno opterećenje sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja iznosi 153 N. Pri ovome ugao kontakta sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja iznosi $26,5^\circ$, pri čemu ugao kontakta sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja iznosi 25° (slika 8.7). Pri aksijanom opterećenju od 2000 N, dolazi do povećanja kontaktnog opterećenja na 847 N sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja (slika 8.6) i gubitku kontakta sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja. Pri ovome ugao kontakta sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja raste na 27° , dok ugao kontakta sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja opada na $23,3^\circ$.

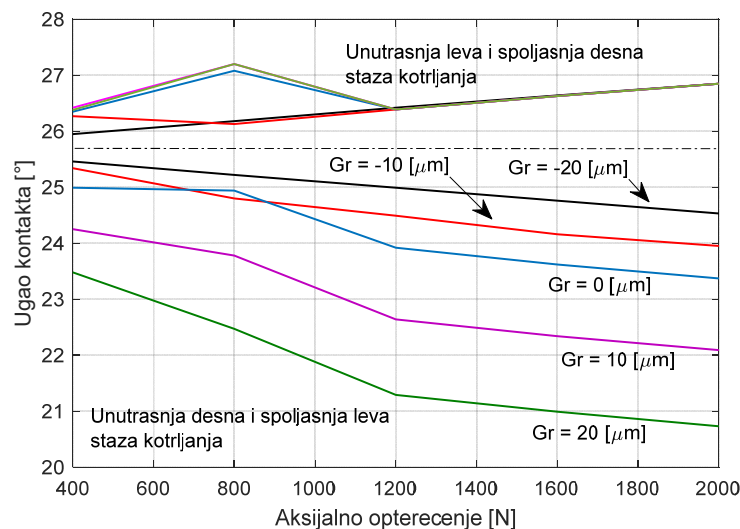
Pri povećanju aksijalnog opterećenja (slika 8.6) dolazi do povećanja kontaktnih opterećenja sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja uz smanjenje kontaktnih opterećenja sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja. S druge strane ugao kontakta sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja se

povećava dok se sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja smanjuje (slika 8.7).

Pri ovom, kao što se vidi sa slike 8.6 i 8.7, povećanjem zazora povećava se odnos između kontaktnih opterećenja na stazama kotrljanja, uz istovremeno povećanje odnosa između uglova kontakta pogotovo na manjim aksijalnim opterećenjima ($F_a < 1200$ N), što će uticati i na promenu radijalne i aksijalne krutosti. Na slici 8.8 i 8.9 je prikazana promena aksijalne i radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i spoljašnjeg aksijalnog opterećenja.



Slika 8.6 Promena kontaktnih opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za različite vrednosti zazora/preklopa

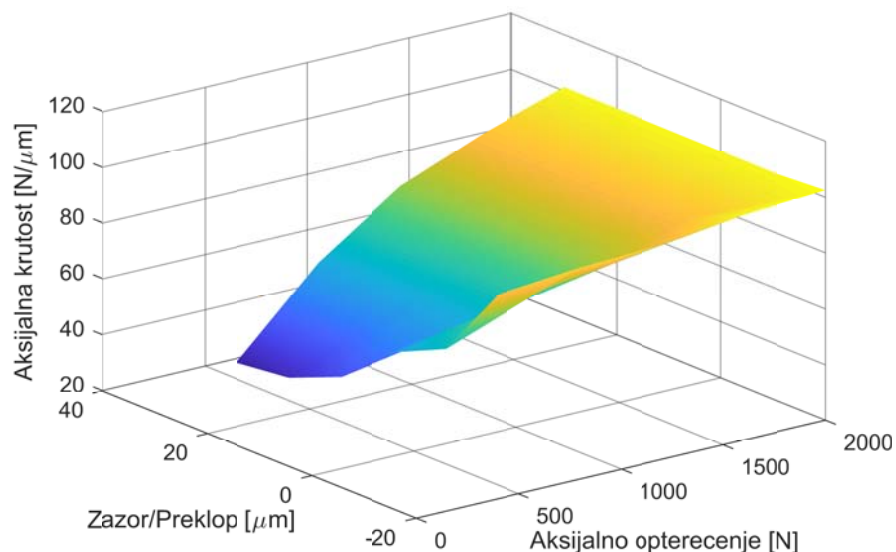


Slika 8.7 Promena ugla kontakta u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za različite vrednosti zazora/preklopa

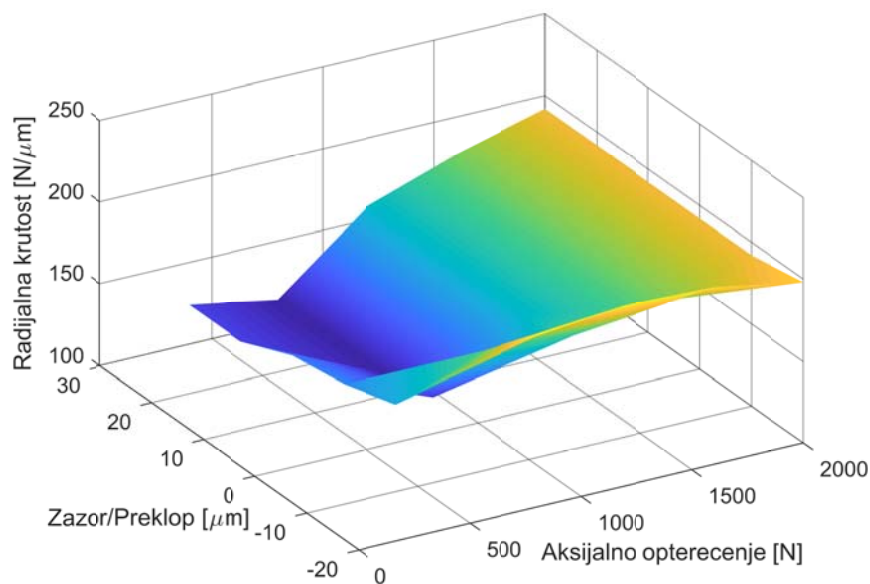
Na osnovu analize rezultata može se zaključiti da pri višim vrednostima zazora treba povećati aksijalno opterećenje (ili aksijalno silu prednaprezanja). Ukoliko se opadanje ili porast krutosti razmatra od nultog zazora, onda je pri $G_r = 30$ μm pad aksijalne krutosti oko 47% i radiljalne oko 16% u odnosu na krutost pri $G_r = 0$ μm . S druge strane, pri preklopu od -

20 μm aksijalna krutost raste za 37% uz porast radijalne krutosti za 25% u odnosu na krutosti pri nultom zazoru.

Sa slika 8.8 i 8.9 se može zaključiti da se povećanjem zazora smanjuje aksijalna i radijalna krutost. Međutim, povećanjem aksijalnog opterećenja dolazi do porasta aksijalne i radijalne krutosti. Povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$, povećava se aksijalna krutost za 70%. Pri preklopu od $-20 \mu\text{m}$ povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N, dolazi do blagog povećavanja aksijalne krutosti za 8%. Radijalna krutost se povećava za oko 35%, povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$, dok se pri preklopu od $-20 \mu\text{m}$ povećava samo za oko 2,5%.



Slika 8.8 Promena aksijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i aksijalnog opterećenja za ležaj LSQFR 308



Slika 8.9 Promena radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i aksijalnog opterećenja za ležaj LSQFR 308

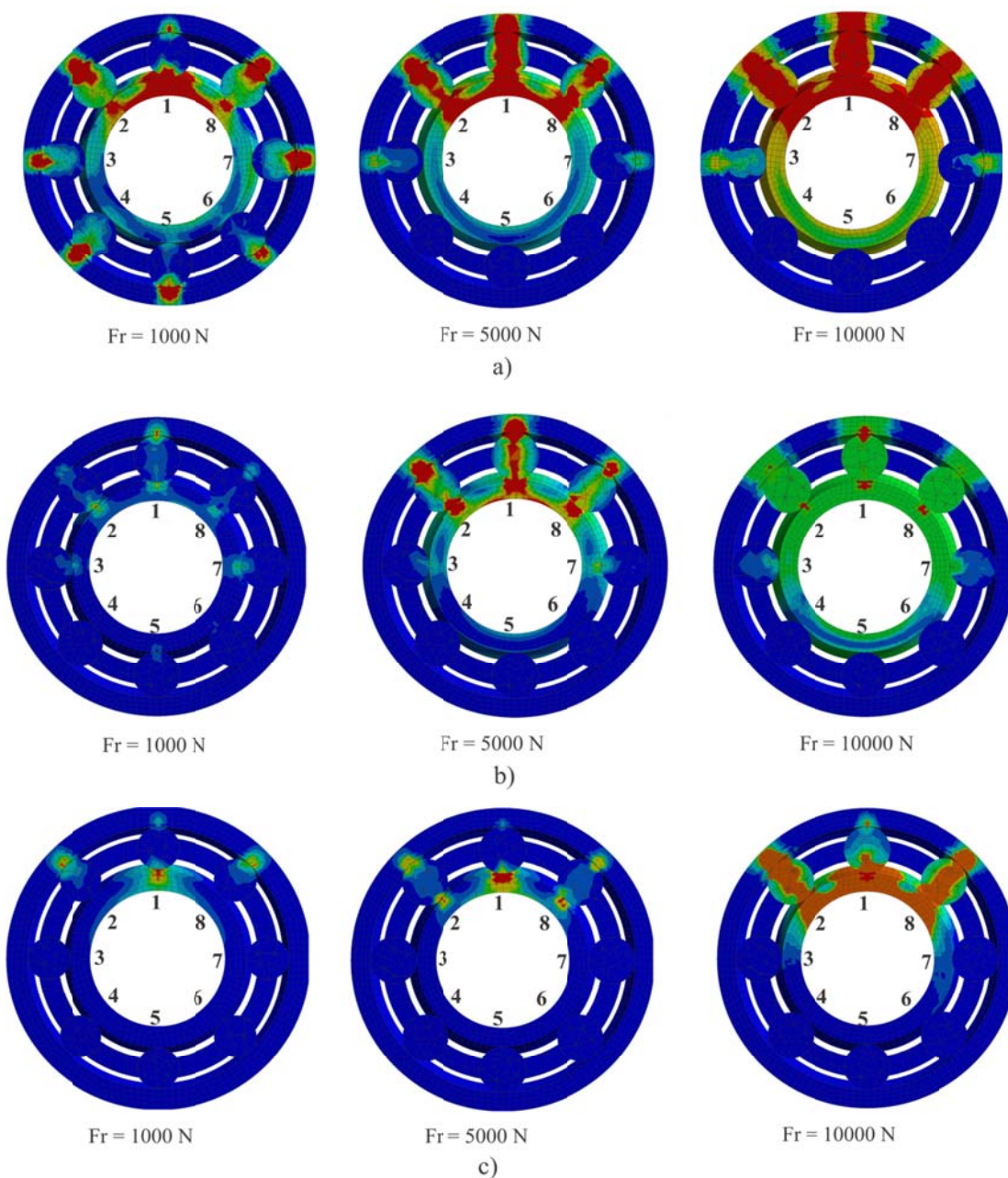
Usled povećanja zazora smanjuje se krutost ležaja iz dva razloga. Prvi razlog leži u činjenici da se redukuju (smanjuju) kontaktna opterećenja na unutrašnjoj desnoj odnosno spoljašnjoj levoj stazi kotrljanja. Pošto je *Hertz-ova* kontaktna krutost proporcionalna kontaktnom opterećenju, krutost spoljašnje leve i unutrašnje desne staze kotrljanja će opadati dok krutost unutrašnje leve i spoljašnje desne staze će rasti. Drugi razlog smanjenja krutosti leži u činjenici da pri povećanju zazora dolazi do povećanja razlike ugla kontakta sa unutrašnjom/spoljašnjom stazom kotrljanja. Povećanje zazora, će usloviti povećanje ugla kontakta sa unutrašnjom levom i desnom spoljašnjom stazom kotrljanja, (ili će pri većim opterećenjima ovaj ugao ostati konstantan) odnosno smanjenje ugla kontakta sa spoljašnjom levom i unutrašnjom desnom stazom kotrljanja, pri čemu dolazi do opadanja krutosti u svim pravcima.

U prethodnom delu je pokazano da se pri dejstvu spoljašnjeg aksijalnog opterećenja, opterećenja prenose na sva kotrljajna tela. Dakle, sva kotrljajna tela učestvuju u prenosu opterećenja samo što se kontakt između kotrljajnih tela i staza kotrljanja ostvaruje u dve tačke. Pored toga, u prenošenju opterećenja sva kotrljajna tela u većoj ili manjoj meri učestvuju podjednako. Jasno je da se povećanjem broja kotrljajnih tela koja prenose opterećenja, stvara ravnomernija raspodela opterećenja i povećava nosivost ležaja, pri čemu aksijalno opterećenje ne sme preći statičku i dinamičku nosivost ležaja.

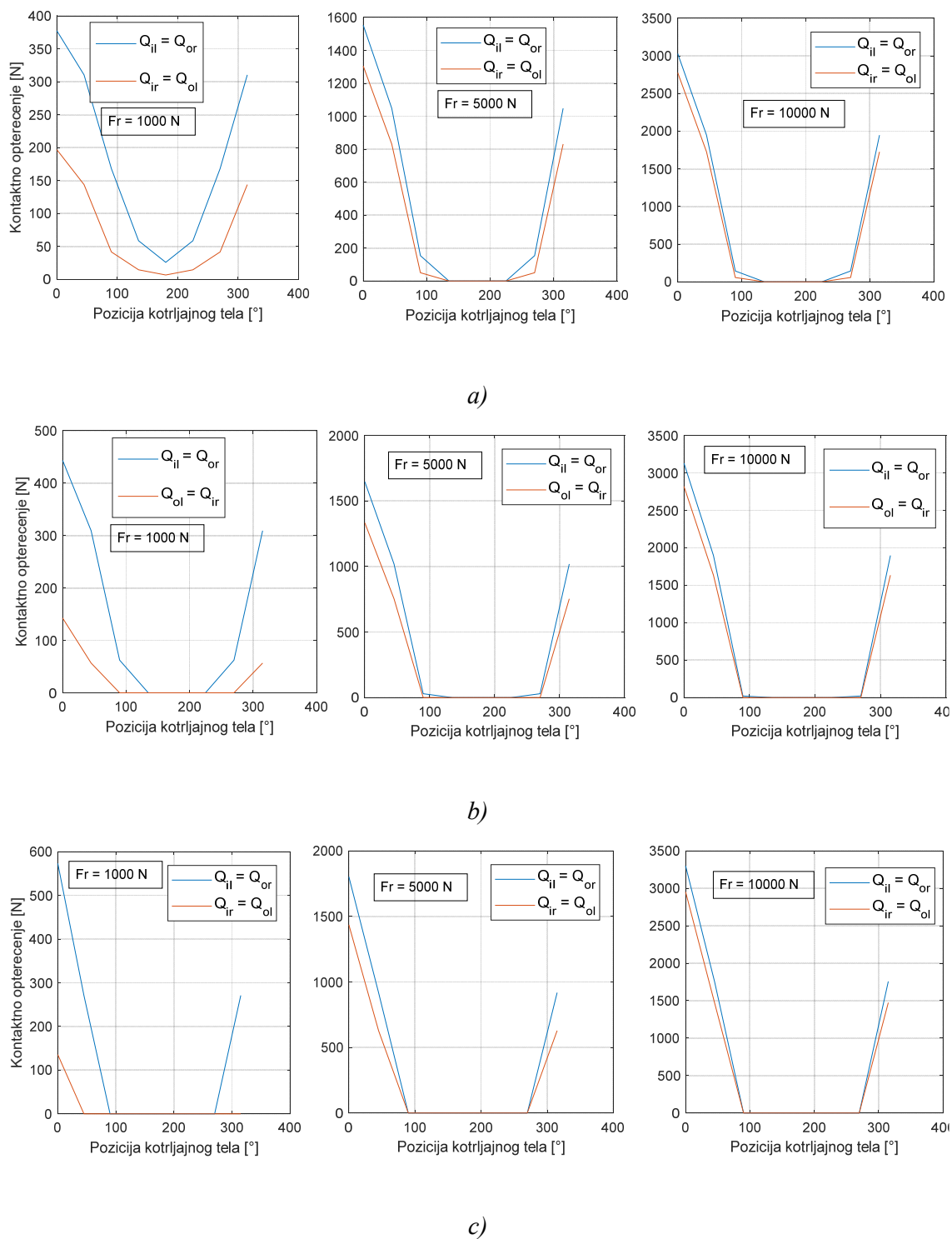
Pri delovanju radijalnog opterećenja na ležaj sa kontaktom u četiri tačke, dolazi do neravnomerne raspodele opterećenja na kotrljajna tela, s tim da će od veličina zazora ili preklopa s jedne strane zavisiti broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju opterećenja, a sa druge strane da li će kontakt biti u dve, tri ili četiri tačke. Povećanjem preklopa ili smanjenjem zazora (ili povećanjem aksijalnog opterećenja) povećava se broj kotrljajnih tela koja prenose radijalno opterećenje kao i broj kontaktnih tačaka između kotrljajnih tela i staza kotrljanja, što značajno smanjuje stepen neravnomernosti raspodele u prenošenju spoljašnjeg opterećenja.

Na slici 8.10 je prikazan broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju opterećenja u zavisnosti od zazora/preklopa za različite vrednosti spoljašnjeg radijalnog opterećenja. Broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju opterećenja za preklop od 20 μm prikazan je na slici 8.10a, za zazor od 0 μm na slici 8.10b i za zazor od 20 μm na slici 8.10c. Pri preklopu od 20 μm i radijalnom opterećenju od 1000 N, sva kotrljajna tela učestvuju u prenošenju opterećenja i ostvaruju kontakt u četiri tačke sa stazama kotrljanja, dok pri istom preklopu i radijalnom opterećenju od 5000 N, tri kotrljajna tela su neopterećena (4, 5, 6 (slika 8.10a i 8.11a)), isti slučaj je i kod opterećenja od 10000 N, samo je intenzitet opterećenja različit. Pri ovim opterećenjima pet kotrljajnih tela učestvuje u prenošenju opterećenja i ostvaruje kontakt u četiri tačke sa stazama kotrljanja (slika 8.10a i 8.11a). Kod nultog zazora pri radijalnom opterećenju od 1000 (slika 8.10b i 8.11b) u prenošenju opterećenja učestvuje pet kotrljajnih tela (1, 2, 3, 7 i 8) s tim da kotrljajna tela 7 i 8 ostvaruju kontakt u dve tačke (sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja (slika 8.11b)). Pri istom zazoru i opterećenju od 5000 N i 10000 N je isti slučaj, ali je intenzitet opterećenja različit (slika 8.11b i 8.11c). U slučaju zazora od 20 μm i pri radijalnom opterećenju od 1000 N tri kotrljajna tela prenose opterećenje (1, 2 i 8 (slika 8.10c i 8.11c)), ali samo prvo kotrljajno telo ostvaruje kontakt u četiri tačke dok kotrljajna tela 2 i 8 ostvaruju kontakt samo u dve tačke i to sa unutrašnjom

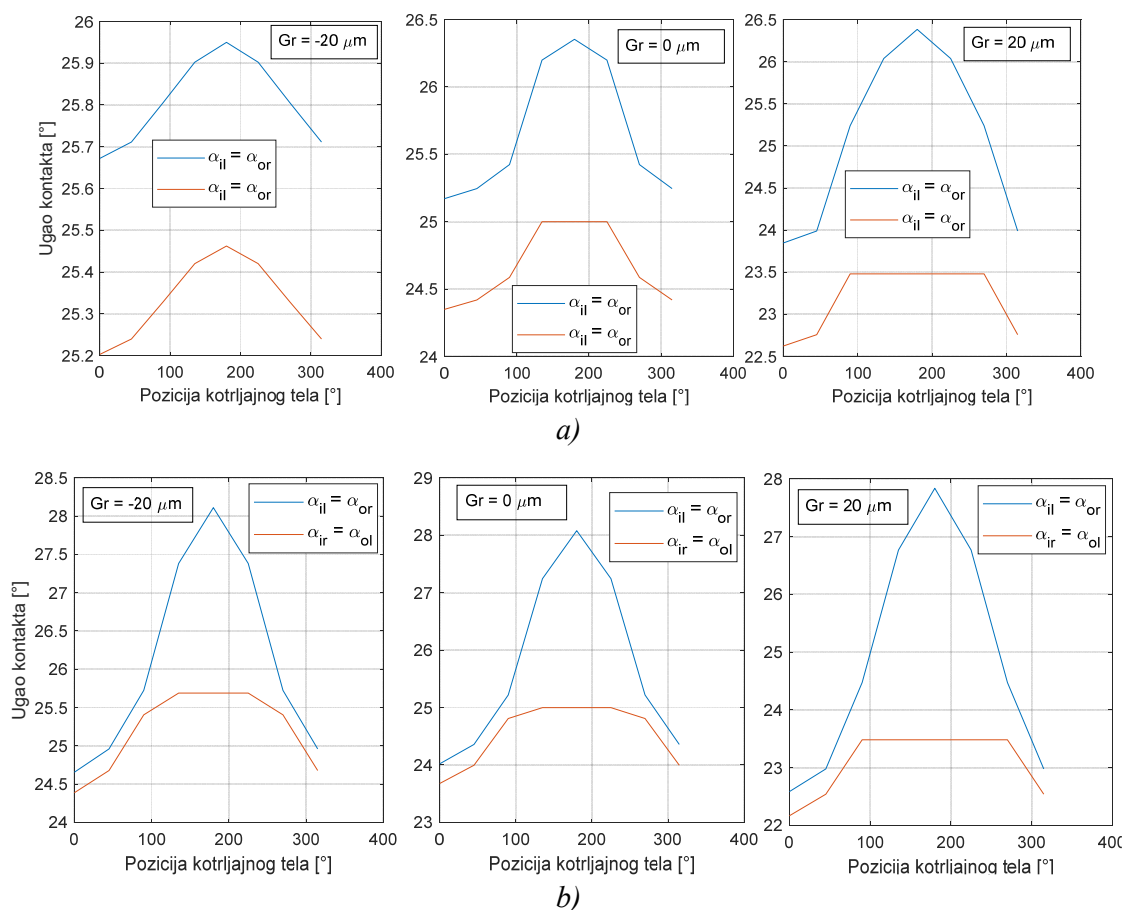
levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja. Kod istog zazora pri opterećenju od 5000 N i 10000 N, tri kotrljajna tela prenose opterećenje i ostvaruju kontakt u četiri tačke sa stazama kotrljanja (slika 8.10c i 8.11c). Promenom opterećenja na kotrljajnim telima, menja se ugao kontakta, odnosno raste ugao kontakta sa stazama kotrljanja, dok pri istom opterećenju smanjenjem preklopa ili povećanjem zazora raste ugao kontakta sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja, dok opada ugao kontakta sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja (slika 8.12a i 8.12b). Intenzitet opterećenja određen kvazistatičkim modelovanjem na kotrljajnim telima u zavisnosti od zazora/preklopa je prikazan na slici 8.11: a) za $G_r = -20 \mu\text{m}$, b) $G_r = 0 \mu\text{m}$, i c) $G_r = 20 \mu\text{m}$. Na slici 8.12 je prikazana promena ugla kontakta u zavisnosti od zazora/preklopa za a) $F_r = 1000 \text{ N}$ i b) $F_r = 10000 \text{ N}$.



Slika 8.10 Raspodela opterećenja za: a) $G_r = -20 \mu\text{m}$, b) $G_r = 0 \mu\text{m}$ i c) $G_r = 20 \mu\text{m}$ u zavisnosti od spoljašnjeg radialnog opterećenja za ležaj LSQFR 308

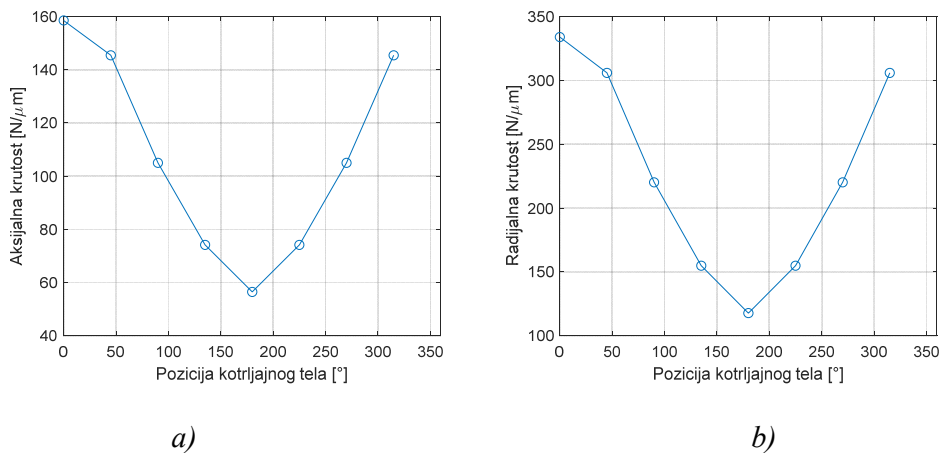


Slika 8.11 Promena kontaktnih opterećenja u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela
 a) $G_r = -20 \mu\text{m}$, b) $G_r = 0 \mu\text{m}$ i c) $G_r = 20 \mu\text{m}$
 u zavisnosti od spoljašnjeg radialnog opterećenja za ležaj LSQFR 308



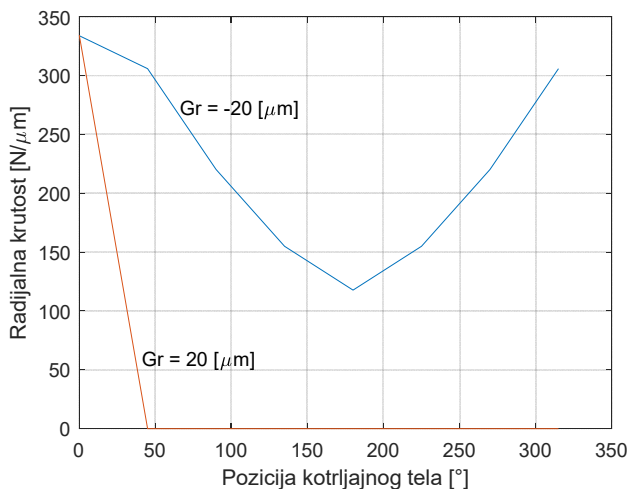
Slika 8.12 Promena ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela za različite vrednosti zazora/preklopa a) $F_r = 1000\text{ N}$, b) $F_r = 10000\text{ N}$ za ležaj LSQFR 308

Radijalna i aksijalna krutost ležaja sa kontaktom u četiri tačke pri delovanju radijalnog opterećenja nisu iste u svim pravcima. Usled neravnomerne raspodele opterećenja na kotrljajna tela i neravnomerne promene ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnih tela i krutost će se menjati promenom pozicije kotrljajnih tela. Na slici 8.13 je prikazana raspodela aksijalne i radijalne krutosti za svako kotrljajno telo pri delovanju radijalnog opterećenja od $F_r = 1000\text{ N}$ za preklop od $20\text{ }\mu\text{m}$.



Slika 8.13 Zavisnost: a) aksijalne; b) radijalne krutosti od pozicije kotrljajnog tela pri $F_r = 1000\text{ N}$ i $G_r = -20\text{ }\mu\text{m}$

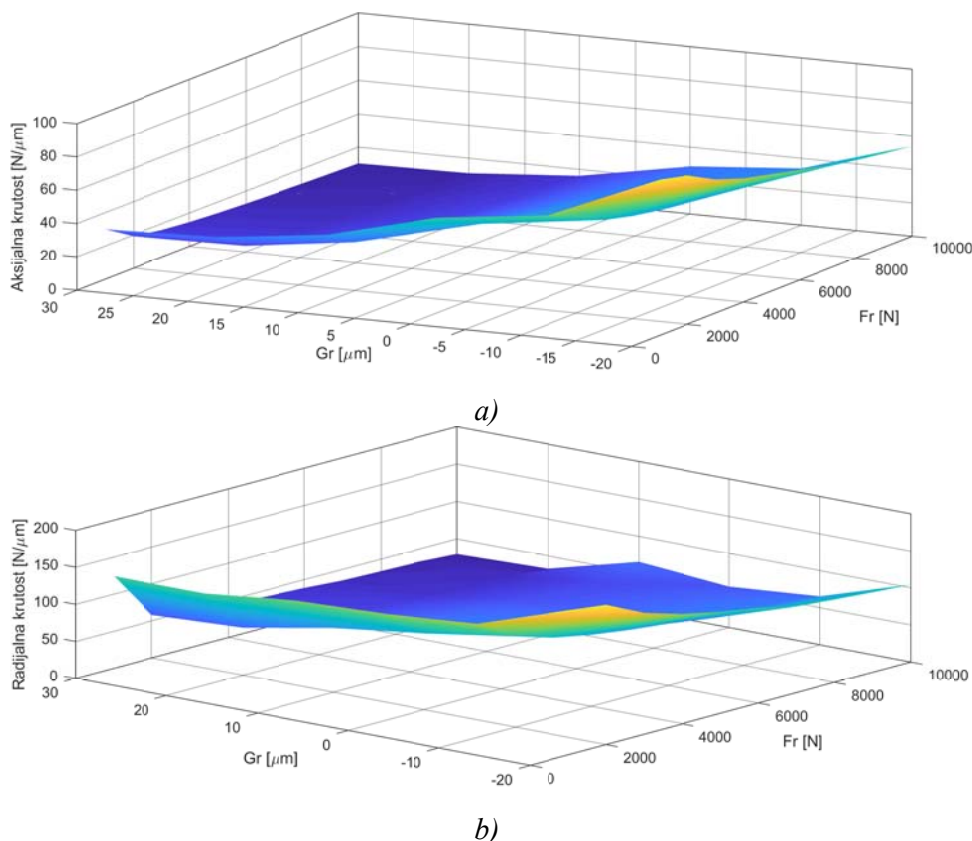
Na slici 8.14 je prikazana promena radijalne krutosti u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za preklop od $20\ \mu\text{m}$ i zazor od $20\ \mu\text{m}$, za slučaj delovanja radijalnog opterećenja od $1000\ \text{N}$.



Slika 8.14 Promena radijalne krutosti za svako kotrljajno telo za $F_r = 1000\ \text{N}$ i $G_r = -20\ \mu\text{m}$

Iz prethodnog dela se vidi da pri dejstvu radijalnog opterećenja, dolazi do neravnomerne raspodele opterećenja. Određenim preklopom ili zazorom se može uticati do određene mere na raspodelu opterećenja na kotrljajnim telima. Razlika u odnosu na delovanje aksijalnog opterećenja se ogleda u tome da su vrednosti kontaktnih opterećenja i uglova kontakta različite u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela. Pri povećanju zazora kontaktna opterećenja se povećavaju, ali se smanjuje broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju opterećenja. Kontaktno opterećenje i sa spoljašnjom i sa unutrašnjom stazom kotrljanja (slika 8.11) se povećava, dok se pri aksijalnom opterećenju kontaktno opterećenje sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom smanjuje. Pošto povećanjem radijalnog opterećenja dolazi do rasta kontaktnih opterećenja sa svim stazama kotrljanja, a povećanjem zazora ili smanjenjem preklopa se smanjuje broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja, kontaktna krutost će opadati sa porastom zazora, što dovodi do opadanja ukupne krutosti u pravcu dejstva opterećenja (slika 8.14). Na slici 8.15 je prikazana promena aksijalne i radijalne krutosti ležaja sa kontaktom u četiri tačke u zavisnosti od radijalnog opterećenja za razmatrane zazore. Povećavanjem radijalnog opterećenja sa 1000 na $10000\ \text{N}$ aksijalna krutost opada za oko 41% , pri preklopu od $20\ \mu\text{m}$ ili za 66% pri zazoru od $30\ \mu\text{m}$ dok povećanjem zazora ili smanjenjem preklopa (-20 do $+30\ \mu\text{m}$) aksijalna krutost opada za 67% pri najmanjem radijalnom opterećenju, dok pri maksimalnom opterećenju povećanjem zazora ili smanjenjem preklopa aksijalna krutost opada za 81% . Ovako veliki pad aksijalne krutosti se može objasniti time da zazor/preklop imaju dominantan uticaj preko broja kotrljajnih tela u zoni opterećenja, pa radijalno opterećenje značajno menja aksijalnu krutost pri njegovom delovanju. Promena radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i radijalnog opterećenja je prikazana na slici 8.15b. Povećanjem radijalnog opterećenja sa najmanje na najveću vrednost, radijalna krutost opada za oko 40% pri preklopu od $20\ \mu\text{m}$ ili za oko 63% pri zazoru od $30\ \mu\text{m}$. Pri povećanju zazora ili smanjenjem preklopa radijalna krutost opada za 30% za slučaj najmanjeg radijalnog opterećenja ili za oko 71% pri najvećem radijalnom opterećenju. Iz prethodnog se može zaključiti da radijalna i aksijalna krutost imaju približno

isti pad, što se objašnjava činjenicom da radijalno opterećenje i radijalni zazor/prekop ima dominantni uticaj na radijalnu krutost.



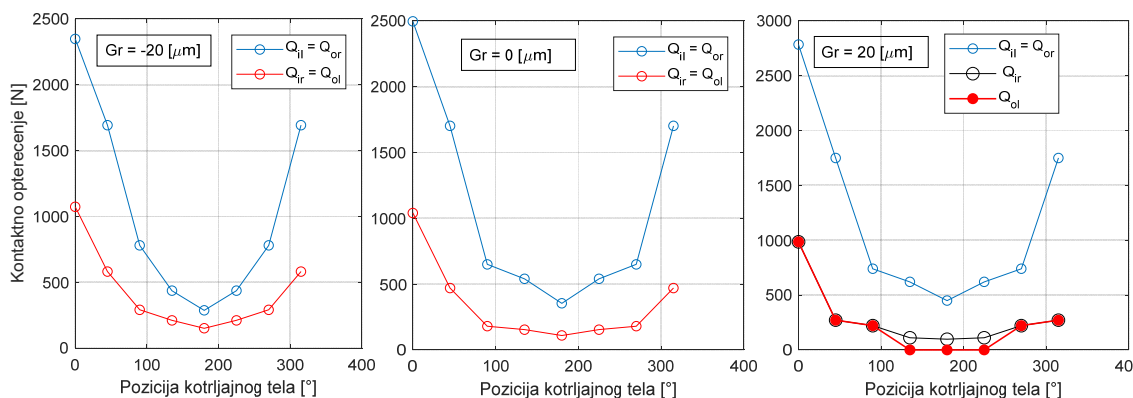
Slika 8.15 Promena a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti u zavisnosti od zazora/preklopa i radijalnog opterećenja za ležaje

U tabeli 8.5 je prikazano poređenje maksimalnog kontaktnog pritiska i maksimalnih kontaktnih opterećenja na levoj unutrašnjoj stazi kotrljanja određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem za različita radijalna opterećenja pri nultom zazoru. Kao baza se posmatra kvazistatički model.

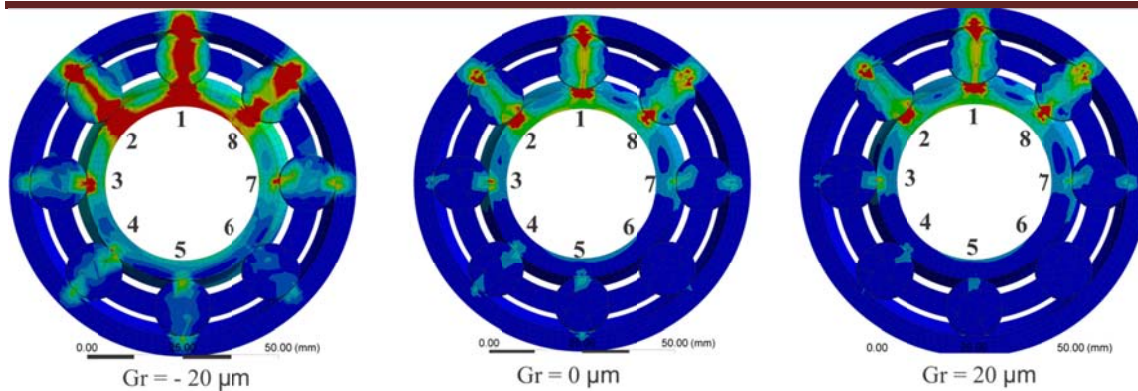
Tabela 8.5 Poređenje vrednosti maksimalnog kontaktnog pritiska i napona određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem na levoj unutrašnjoj stazi kotrljanja

Opterećenje F_r [N]	Kvazistatički model		MKE model		Odstupanje %	
	Kontaktne pritisak [Mpa]	Kontaktne opterećenja [N]	Kontaktne pritisak [Mpa]	Kontaktne opterećenja [N]	Kontaktne pritisak	Kontaktne opterećenja
1000	1275	443	1293	485	-1,39	-8,66
2000	1663	749	1886	771	-11,82	-2,85
3000	1861	1050	1947	1100	-4,42	-4,55
4000	2023	1349	2097	1487	-3,53	-9,28
5000	2163	1647	2251	1705	-3,91	-3,40
6000	2286	1944	2305	1997	-0,82	-2,65
7000	2397	2241	2464	2305	-2,72	-2,78
8000	2499	2537	2554	2621	-2,15	-3,20
9000	2592	2833	2635	2901	-1,63	-2,34
10000	2680	3129	2785	3198	-3,77	-2,16

Pri delovanju kombinovanog aksijalnog i radijalnog opterećenja, ugao kontakta i kontaktna opterećenja su različita za svaku poziciju kotrljajnog tela. Aksijalno opterećenje u ovom slučaju teži da zadrži kontakt između staza i kotrljajnog tela, dok radijalno opterećenje na pojedinim mestima teži da razdvoji kotrljajna tela od staze kotrljanja. U ovom slučaju pored zazora/preklopa, od odnosa ova dva opterećenja zavisice raspodela i veličina opterećenja koje će prenositi pojedina kotrljajna tela. Usled zazora, odnosno preklopa, i zbog promene ugla kontakta, kako se kotrljajno telo okreće oko ose ležaja, postoji tendencija da kotrljajno telo zaostaje ili napreduje u odnosu na svoj centralni položaj u kavezu, što zavisi od spoljašnjeg opterećenja. Na ovaj način se stvara veća ili manja razlika između ugla kontakta sa unutrašnjim i spoljašnjim stazama kotrljanja kao i razlika između kontaktnih opterećenja. U slučaju kombinovanog opterećenja smanjenjem preklopa, i povećanjem zazora dolazi do porasta kontaktnih opterećenja sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom i opadanja kontaktnih opterećenja sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja (slika 8.16, 8.17 i 8.18). Promena ugla kontakta ima isti trend kao i kod čistog radijalnog opterećenja samo su razlike manje usled delovanja i aksijalnog opterećenja (slika 8.19). Pri preklopu od 20 μm i aksijalnom opterećenju od 2000 N i radijalnom opterećenju od 6000 N, sva kotrljajna tela učestvuju u prenošenju opterećenja i ostvaruju kontakt u četiri tačke sa stazama kotrljanja. Isti slučaj je i pri nultom zazoru kao i pri preklopu i aksijalnom opterećenju od 1600 N, i radijalnom opterećenju od 6000 N (slika 8.17a i 8.17b). Pri zazoru od 20 μm i $F_a = 2000$ N i $F_r = 6000$ N u prenošenju opterećenja učestvuju sva kotrljajna tela, ali pri tome kotrljajna tela 4, 5, 6 (slika 8.16a i 8.16b) ostvaruju kontakt u tri tačke (sa unutrašnjom levom i desnom kao i sa spoljašnjom desnom stazom kotrljanja), što je isti slučaj i kod nultog zazora pri $F_a = 1600$ N i $F_r = 6000$ N, kao i kod preklopa pri $F_a = 800$ N i $F_r = 6000$ N, samo je intenzitet opterećenja različit. Pri $F_a = 1600$ N i $F_r = 6000$ N i zazoru od 20 μm pet kotrljajnih tela učestvuje u prenošenju opterećenja i ostvaruju kontakt u četiri tačke, dok su tri kotrljajna tela rasterećena (slike 8.17a i 8.17b). Pri $F_a = 800$ N i $F_r = 6000$ N i nultom zazoru sva kotrljajna tela učestvuju u prenošenju opterećenja pri čemu kotrljajna tela 3, 4, 5, 6 i 7 (slika 8.18a i 8.18b) ostvaruju kontakt u tri tačke (sa unutrašnjom levom i desnom kao i sa spoljašnjom desnom stazom kotrljanja). Pri zazoru od 20 μm i opterećenju $F_a = 800$ N i $F_r = 6000$ N u prenošenju opterećenja učestvuju tri kotrljajna tela (1, 2 i 8) (slika 8.18a i 8.18b), dok su ostala kotrljajna tela rasterećena.



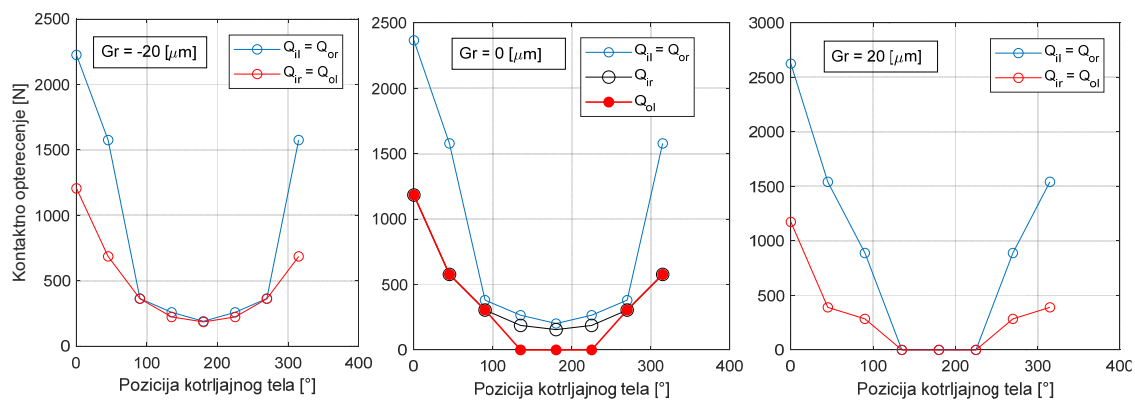
a)



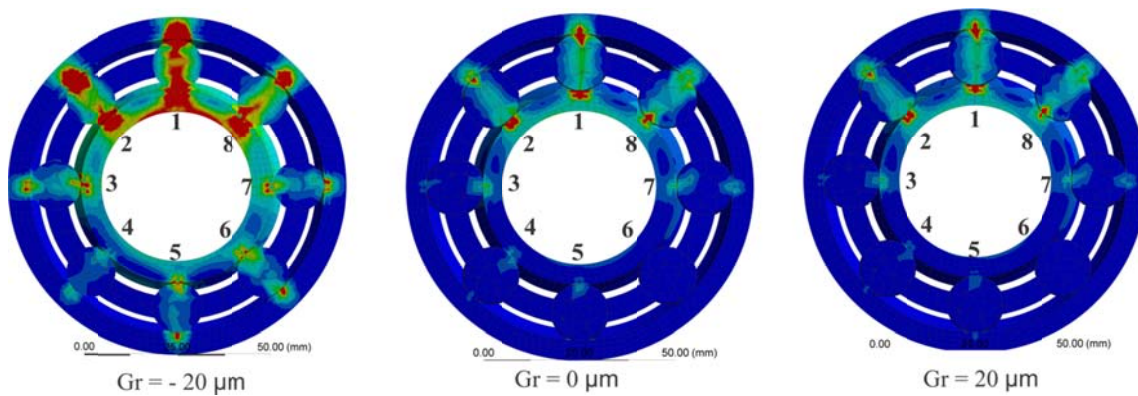
b)

Slika 8.16 Promena kontaktnog opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazore/preklope pri $F_a = 2000\text{ N}$ i $F_r = 6000\text{ N}$

a) kvazistatički model; b) MKE model



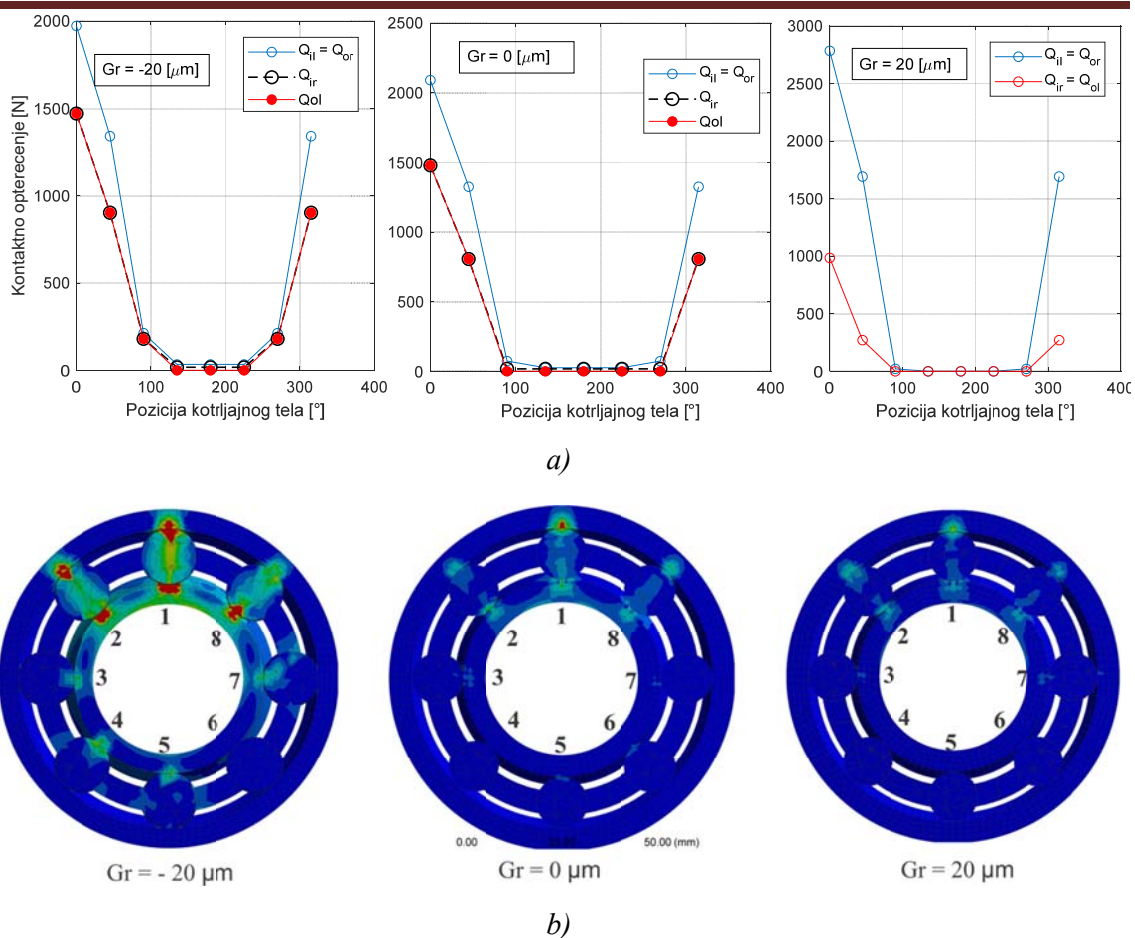
a)



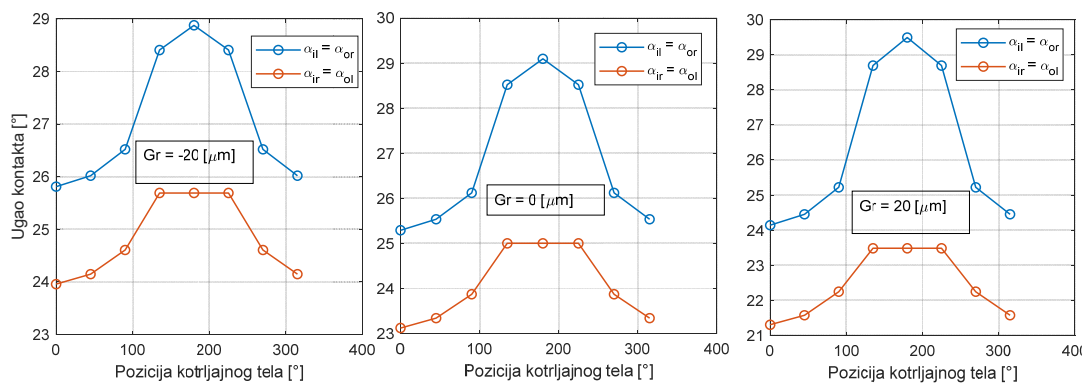
b)

Slika 8.17 Promena kontaktnog opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazore/preklope pri $F_a = 1600\text{ N}$ i $F_r = 6000\text{ N}$;

a) kvazi statički model; b) MKE model



Slika 8.18 Promena kontaktnog opterećenja na stazama kotrljanja u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazor/preklope pri $F_a = 800 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$; a) kvazistatički model; b) MKE model

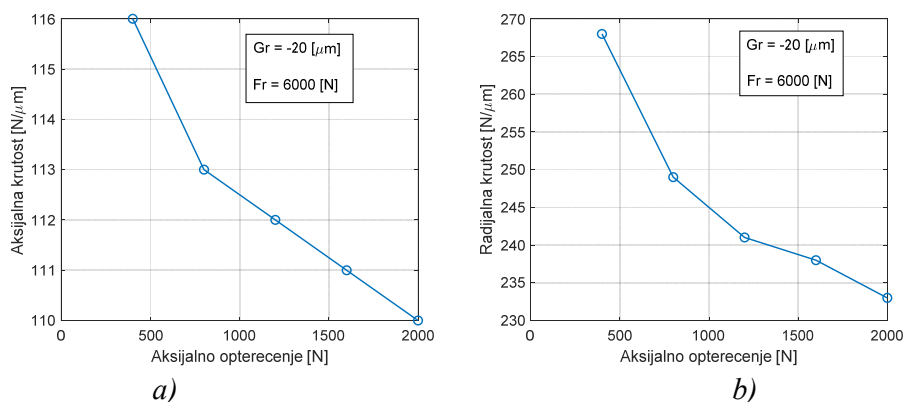


Slika 8.19 Promena ugla kontakta u zavisnosti od pozicije kotrljajnog tela za različite zazor/preklope pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$

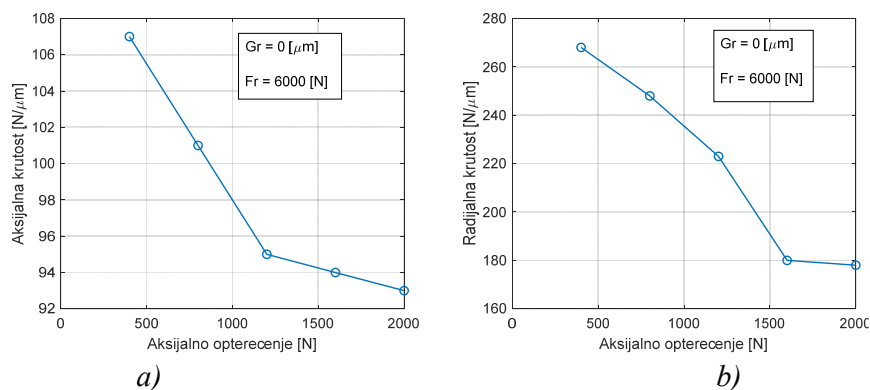
Kao što je rečeno na početku ovog poglavlja sve navedene analize su rađene za aksijalnu silu pritezanja unutrašnjeg prstena od $F_p = 2000 \text{ N}$ prema preporukama proizvođača ležaja. Na osnovu sveobuhvatane analize, došlo se do zaključka da bi silu pritezanja (aksijalno prednaprezanje) trebalo povećati na 3600 N pri $F_r = 6000 \text{ N}$ i pri zazoru od $20 \mu\text{m}$, da bi sva kotrljajna tela bila u zoni opterećenja i da bi se kontakt ostvarivao u četiri tačke.

Prema tome, a na osnovu većeg broja analiziranih rezultata, određena je minimalna veličina sile pritezanja unutrašnjeg prstena da bi sva kotrljajna tela bila u zoni opterećenja i da bi se kontakt ostvarivao u četiri tačke pri zazorima do $30\ \mu\text{m}$, a to je $F_p/F_r > 1.31 \cdot \text{tg } \alpha$.

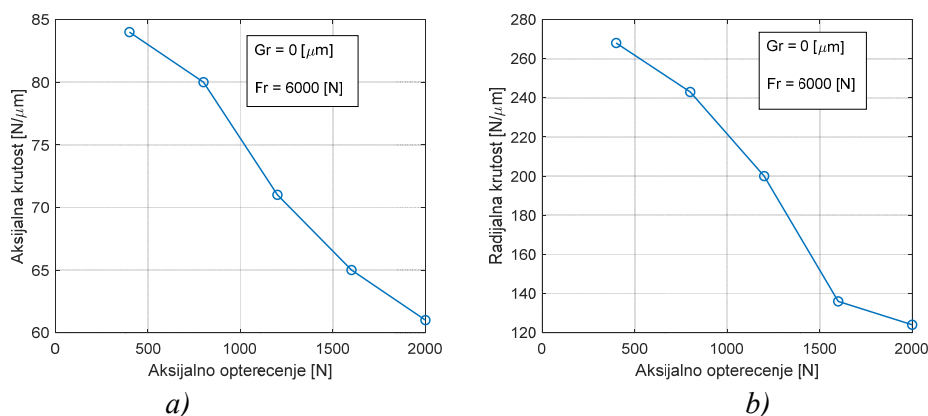
Usled neravnomerne raspodele opterećenja i ugla kontakta na stazama kotrljanja, dolazi do nejednake krutosti na levoj i desnoj stazi kotrljanja u zavisnosti od zazora/preklopa koji će uticati na opadanje aksijalne i radijalne krutosti smanjenjem preklopa, odnosno, povećanjem zazora. Kao što je bilo prikazano na slici 8.2 pri čistom aksijalnom opterećenju krutosti rastu, dok pri čestom radijalnom opterećenju krutosti opadaju (slika 8.15). Prema tome, aksijalno opterećenje kod razmatranog ležaja teži da poveća krutost, dok radijalno opterećenje teži istu da smanji. Pri kombinovanom opterećenju od njihovog odnosa će zavisiti da li će doći do opadanja ili porasta krutosti i koliko će procentualno krutosti da opadnu ili porastu. Na slici 8.20 je prikazana promena krutosti za preklop od $20\ \mu\text{m}$ i $F_r = 6000\ \text{N}$ u zavisnosti od aksijalnog opterećenja. Pri razmatranom preklopu i spoljašnjim opterećenjima aksijalna krutost opada samo za 5% (slika 8.20a), pri čemu se radijalna smanjuje za 13% (slika 8.20b). Pri nultom zazoru i kombinovanom opterećenju aksijalna krutost opada za 13% (slika 8.21a), dok radijalna opada za 33% (slika 8.21b). Pri zazoru od $20\ \mu\text{m}$ dolazi do pada aksijalne krutosti za 27% (slika 8.22a), pri čemu radijalna krutost opada za oko 53%. Povećanjem zazora sa 0 na $20\ \mu\text{m}$, aksijalna krutost pri kombinovanom opterećenju $F_a = 2000\ \text{N}$ i $F_r = 6000\ \text{N}$ opada za 21% dok radijalna krutost opada za oko 50%.



Slika 8.20 Promena: a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti pri kombinovanom opterećenju za preklop $G_r = -20\ \mu\text{m}$



Slika 8.21 Promena: a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti pri kombinovanom opterećenju za nulti zazor



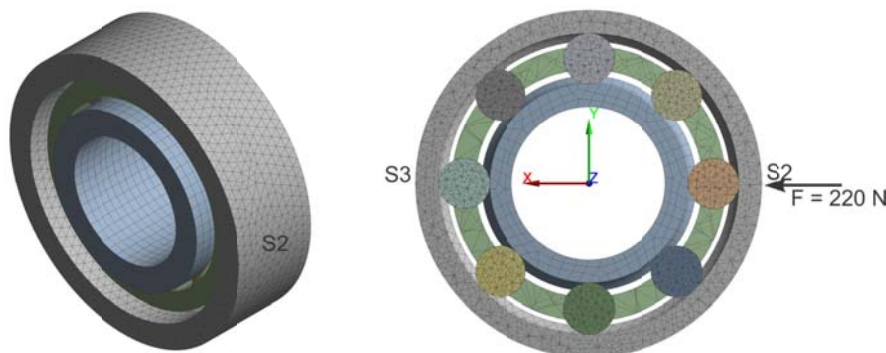
Slika 8.22 Promena: a) aksijalne krutosti; b) radijalne krutosti pri kombinovanom opterećenju za zazor $G_r = 20 \text{ } \mu\text{m}$

8.2 Verifikacija modelovanja dinamičkog ponašanja ležaja LSQFR 308

Dinamički model ležaja sa kontaktom u četiri tačke je isto kao i radijalni ležaj modelovan primenom metode konačnih elemenata. Analiza dinamičkog ponašanja ležaja se sastoji iz dva dela. Prvi deo se odnosi na modalnu analizu, odnosno određivanje sopstvenih frekvencija, glavnih oblika oscilovanja i prigušenja za razmatrani ležaj. Drugi deo analize se odnosi na dinamičku analizu primenom eksplicitnog dinamičkog modela, odnosno, određivanje uticaja konstrukcionih parametara (zazor/preklop) na karakteristične frekvencije elemenata ležaja i amplitude oscilovanja. Rezultati matematičkog modelovanja su upoređeni sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjima.

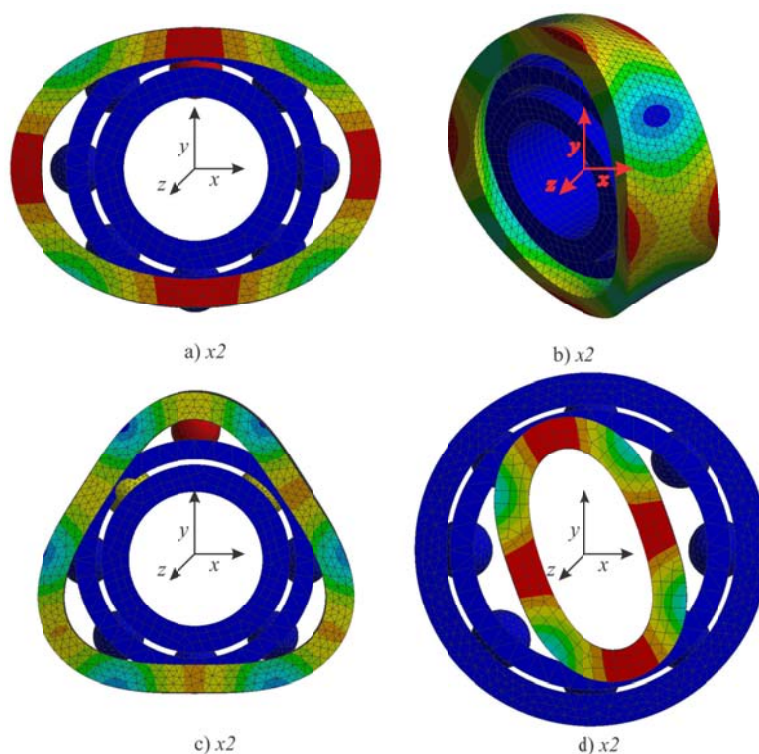
8.2.1 Modalna analiza ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308

Modalna analiza je sprovedena za slučaj slobodno oslonjenog ležaja, kako bi se rezultati uporedili sa eksperimentalnim ispitivanjem. Na slici 8.23 je prikazan MKE model ležaja LSQFR 308 za modalnu analizu. Pobuda od 220 N je zadata u tački S2, a odziv je praćen u tački S3 (slika 8.23) kako bi se simulirala eksperimentalna ispitivanja. Sveobuhvatnim analizama radijalnog ležaja i ležaja sa kontaktom u četiri tačke je ustanovljeno da pri modalnoj analizi slobodno oslonjenog ležaja zazor ne utiče na sopstvene frekvencije i modove oscilovanja, to su na slici 8.24 prikazani glavni oblici oscilovanja posmatranog ležaja za radijalni zazor od $20 \text{ } \mu\text{m}$.



Slika 8.23 MKE model ležaja LSQFR 308 za modalnu analizu

Prva dva moda vibracija predstavljaju vibracije spoljašnjeg prstena duž X ose, pri čemu su frekvencije približno iste (razlika je manja od 2%) (slika 8.24a). Sledeća dva moda su modovi nagiba prstena oko Z ose, odnosno ležaj se okreće iz radijalne ravni (slika 8.24b) pri čemu se, takođe, obe frekvencije podudaraju (razlika je manja od 1%). Naredna dva moda su modovi oscilovanja spoljašnjeg prstena duž X i Y ose (slika 8.24c), pri čemu postoji vrlo mala razlika između sopstvenih frekvencija (manja od 3%). Poslednja dva moda su modovi oscilovanja unutrašnjeg prstena duž X i Y ose. U ovom slučaju je amplituda spoljašnjeg prstena skoro jednaka 0 što kazuje da će ove modove biti teško otkriti tokom eksperimentalnih ispitivanja.



Slika 8.24 Modovi oscilovanja ležaja LSQFR 308

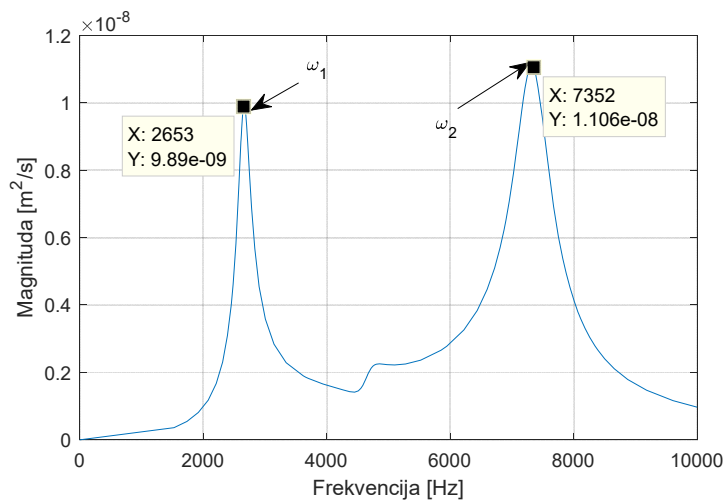
Na slici 8.25 je prikazan amplitudno frekventni dijagram dobijen pri MKE modelovanju ležaja LSQFR 308. Sa dijagrama na slici 8.25 se vidi da je dominantna sopstvena frekvencija koja se javlja usled oscilovanja spoljašnjeg prstena ležaja. Modalni parametri ležaja na bazi MKE modelovanja su određeni funkcijom frekventnog odziva, kao i pri eksperimentalnom ispitivanju, kako je prikazano u šestom poglavlju. Na slici 8.26 su prikazani realni i imaginarni deo funkcije frekventnog odziva za razmatrani ležaj LSQR 308.

Poređenje karakterističnih frekvencija određenih MKE modelovanjem i eksperimentalnim ispitivanjem su prikazane u tabeli 8.6.

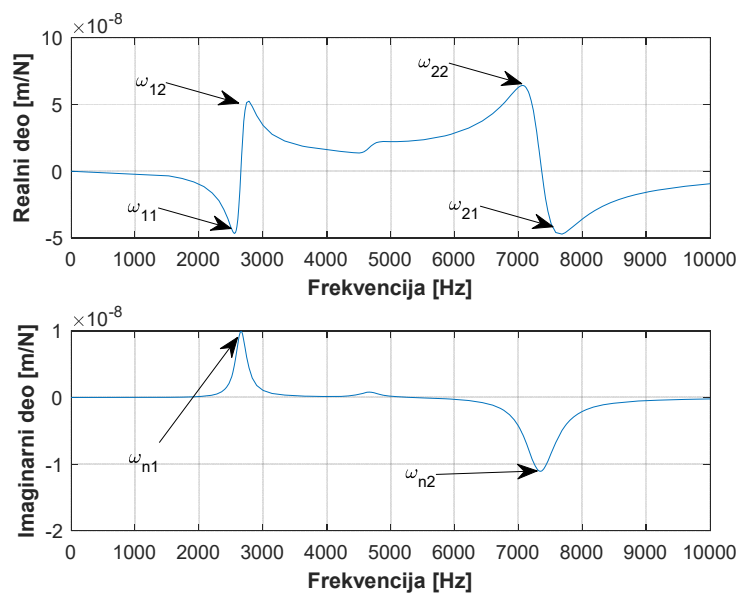
Tabela 8.6 Poređenje sopstvenih frekvencija određenih MKE modelovanjem u odnosu na eksperimentalne za ležaj LSQFR 308

MOD	ii	MKE model [Hz]	Eksperiment [Hz]	Odstupanje %
Mod 1	ω_1	2653	2760	3,8
Mod 2	ω_2	7352	7451	1,3

Na osnovu definisanog realnog i imaginarnog dela FRF, na već prikazan način, određeni su modalni parametri ležaja. U tabeli 8.7 su prikazani izračunati modalni parametri za posmatrani ležaj sa zazorom i njihovo poređenje sa eksperimentalno određenim podacima.



Slika 8.25 Amplitudno frekventna karakteristika ležaja LSQFR 308 određena MKE modelovanjem



Slika 8.26 Realni i imaginarni deo prenosne funkcije ležaja LSQFR 308 određen MKE modelovanjem

Tabela 8.7 Poređenje modalnih parametara određenih eksperimentom i MKE modelom za ležaj LSQFR 308

Modalni parametri	Eksperiment	MKE model	Odstupanje
ω_{11} [Hz]	2403	2555	-6%
ω_{12} [Hz]	2893	2747	5%
ω_{22} [Hz]	7335	7052	4%
ω_{21} [Hz]	7909	7683	3%
ω_{n1} [Hz]	2658	2641	0,6%
ω_{n2} [Hz]	7335	7290	0,6%
K_x [N/ μ m]	75	51,9	44%

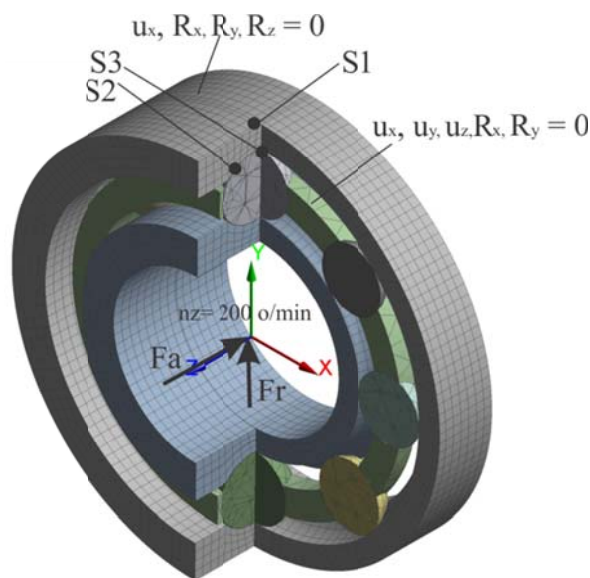
Poređenjem vrednosti karakterističnih frekvencija iz tabele 8.7 može se uočiti da je najveće odstupanje između frekvencija određenih eksperimentalno i MKE modelovanjem određenih frekvencija na prvom modu. Međutim, kako je maksimalno odstupanje oko 6%, može se zaključiti da MKE modelovanje daje zadovoljavajuće rezultate. Veća razlika kod modalne krutosti između eksperimentalnih i MKE rezultata je najviše posledica većeg prigušenja za 40% i veće amplitude pri MKE modelovanju.

8.2.2 Eksplicitna dinamička analiza ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308

Za analizu uticaja preklopa/zazora, kao i opterećenja na frekvencije i amplitude vibracija kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke razmatrani su ležaji sa različitim vrednostima preklopa/zazora koji se kreću u dijapazonu od -20 do 40 μm sa inkrementom od 10 μm . Razmatrani zazori/preklopi su izabrani na osnovu merenja preklopa/zazora na uzorku od 24 ležaja. S druge strane, na osnovu analize uticaja preklopa/zazora pri matematičkom modelovanju, izvršeno je poređenje sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem. Geometrijske karakteristike ležaja sa kontaktom u četiri tačke su prikazane u tabeli 5.1, dok su u tabeli 8.2 prikazana mehanička svojstva materijala za razmatrani ležaj. Način diskretizacije i definisanje kontaktnih parova je prikazan u poglavlju 5. Kako bi se moglo izvršiti poređenje sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim merenjem, pri matematičkom modelovanju dinamičkog ponašanja analiza je izvršena za ležaje opterećene: radijalnim opterećenjem ($F_r = 27000 \text{ N}$), aksijalnim opterećenjem ($F_a = 13400 \text{ N}$) i kombinovanim opterećenjem. Na ovaj način se omogućava simuliranje eksploatacionih uslova ležaja LSQFR 308 i poređenje rezultata matematičkog modelovanja sa rezultatima eksperimentalnog ispitivanja. Spoljašnje aksijalno i radijalno opterećenje je zadato na unutrašnjoj površini unutrašnjeg prstena kako bi se što verodostojnije simulirala eksperimentalna ispitivanja. S druge strane, spoljašnjoj površini spoljašnjeg prstena su oduzeti svi stepeni slobode osim pomeranja u Y i Z pravcu, dok su spoljašnjoj površini kaveza oduzeti svi stepeni slobode osim rotacije oko Z ose. Na unutrašnjoj površini unutrašnjeg prstena je zadata brzina obrtanja 200 o/min. Definisana opterećenja i ograničenja su prikazana na slici 8.27. Promena amplitude ubrzanja je praćena u tački S1, dok je promena kontaktnih napona posmatrana u tačkama S2 i S3. Tačka S1 odgovara poziciji davača ubrzanja pri eksperimentalnom ispitivanju, dok se tačka S2 i S3 nalaze na spoljašnjoj stazi kotrljanja.

Maksimalna frekvencija spoljašnjeg prstena prema relaciji (7.2) iznosi oko 13314 Hz, što znači da je to $5x\omega_1$ (tabela 8.7), odnosno da je maksimalna frekvencija spoljašnjeg prstena, peti harmonik sopstvene frekvencije istog, koja je dobijena pri MKE modalnoj analizi. Veličina vremenskog koraka pri analizi ležaja sa kontaktom u četiri tačke prema relaciji (7.1) iznosi $2,41 \times 10^{-4}$ s dok prema relaciji (5.10) iznosi $4,35 \times 10^{-7}$ s. Kako je zbog održanja energije bolje koristiti veći vremenski korak, u ovom slučaju je usvojena veličina vremenskog koraka koja je iznosila $4,35 \times 10^{-7}$ s. Za postavljene granične uslove i veličinu vremenskog koraka pri analizi razmatranog ležaja „nulta energija” je bila manja za oko 1% od unutrašnje energije što ukazuje da je primenjena veličina mreže konačnih elemenata adekvatna. Greška energije od 1,2% je ukazivala da pri analizi nema numeričke nestabilnosti rešenja, i da su rešenja zadovoljavajuće tačnosti za postavljene granične uslove. Vreme

analize, odnosno obrtanja ležaja je definisano tako, da se unutrašnji prsten ležaja obrne za pun krug tj. $T = 1/f = (1 \times 60)/200 = 300$ ms.



Slika 8.27 MKE model ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308

8.2.2.1 Analiza uticaja preklopa/zazora na dinamičko ponašanje ležaja LSQFR 308

Promena intenziteta delovanja kontaktnih sila je, prema opštoj teoriji ležaja, direktna posledica zazora ili preklopa u ležaju, pa se iz tog razloga ovakve vibracije mogu posmatrati kroz promenu zazora odnosno preklopa. Maksimalne amplitude ubrzanja kod razmatranog ležaja sa kontaktom u četiri tačke se javljaju na frekvenciji spoljašnjeg prstena (spoljašnji prsten je nepokretan) u pravcu y ose. Pošto su amplitude ubrzanja u y pravcu značajno veće u odnosu na z pravac, dok su približno iste u x pravcu, u daljem delu disertacije usled velikog broja analiziranih podataka će biti prikazane amplitude ubrzanja u y pravcu (slika 8.27).

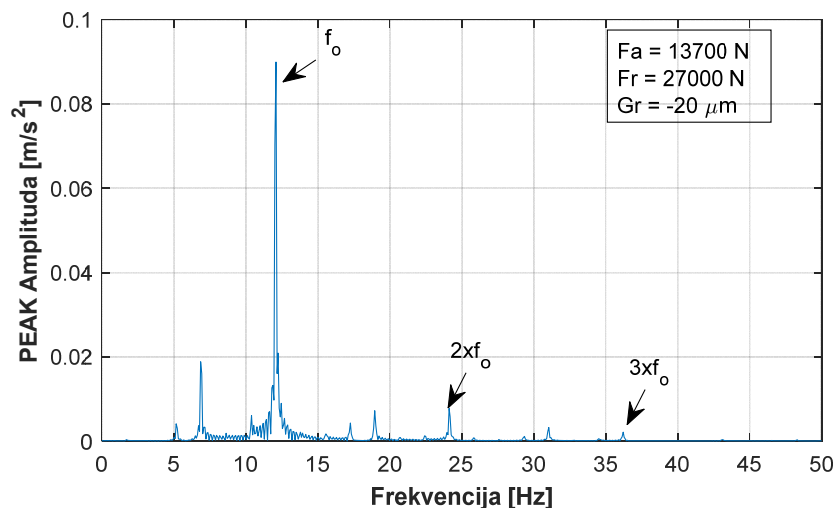
Smanjenjem preklopa, pa zatim prelaskom u zazor i povećanjem zazora, značajno se povećava amplituda ubrzanja. Smanjenjem preklopa sa $-20 \mu\text{m}$ i prelaskom u zazor do $20 \mu\text{m}$ veličina amplitude ubrzanja se povećava sa $0,13$ na $0,31 \text{ m/s}^2$, dok se daljim povećanjem zazora na $40 \mu\text{m}$, veličina amplitude ubrzanja naglo raste na $0,78 \text{ m/s}^2$, pri delovanju radijalnog opterećenja. Pod dejstvom aksijalnog opterećenja pri preklopu od $-20 \mu\text{m}$, dolazi do smanjenja veličine amplitude ubrzanja za 38% u odnosu na amplitudu ubrzanja pri delovanju radijalnog opterećenja, odnosno za 30% pri delovanju kombinovanog opterećenja. Pri zazoru od $40 \mu\text{m}$ amplituda ubrzanja se smanjuje za 33% pri delovanju aksijalnog opterećenja u odnosu na radijalno opterećenje. Delovanjem kombinovanog opterećenja pri vrednostima preklopa i malim zazorima do $10 \mu\text{m}$, amplitude ubrzanju su približno iste kao i u slučaju delovanja samo aksijalnog opterećenja. Međutim, povećavanjem zazora od 10 do $40 \mu\text{m}$, amplitude ubrzanja se povećavaju od 14% do 16% . Pri maksimalnom razmatranom zazoru amplituda ubrzanja je pri delovanju radijalnog opterećenja veća za 33% u odnosu na slučaj kada na ležaj deluje samo aksijalno opterećenje i veća za 21% u slučaju delovanja kombinovanog opterećenja. U tabeli 8.8 su prikazane amplitude ubrzanja spoljašnjeg prstena

ležaja LSQFR 308 za razmatrane slučajeve opterećenja ($F_a = 13400$ N i $F_r = 27000$ N) u zavisnosti od preklopa/zazora.

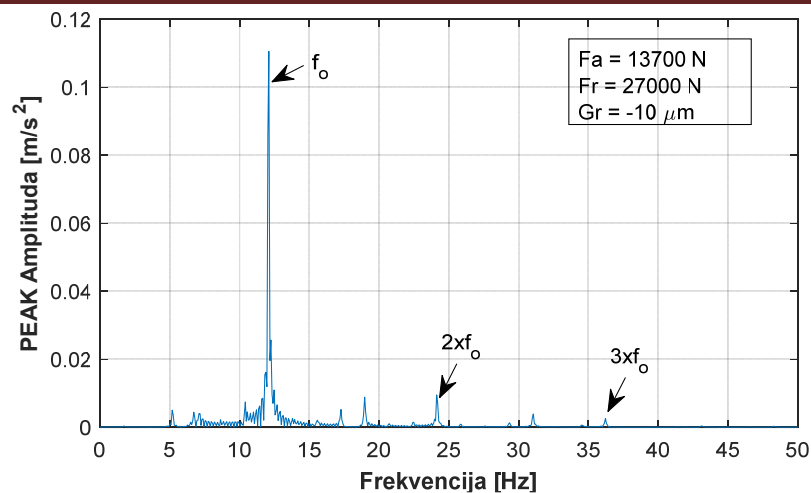
Tabela 8.8 Amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za razmatrane varijante spoljašnjeg opterećenja u zavisnosti od preklopa/zazora

Opterećenje	Ubrzanje	Preklop [μm]		Zazor [μm]				
		-20	-10	0	10	20	30	40
F_r	a_y	0,13	0,19	0,23	0,25	0,31	0,39	0,78
F_a	a_y	0,08	0,10	0,13	0,14	0,15	0,19	0,52
F_r+F_a	a_y	0,09	0,11	0,13	0,15	0,18	0,22	0,61

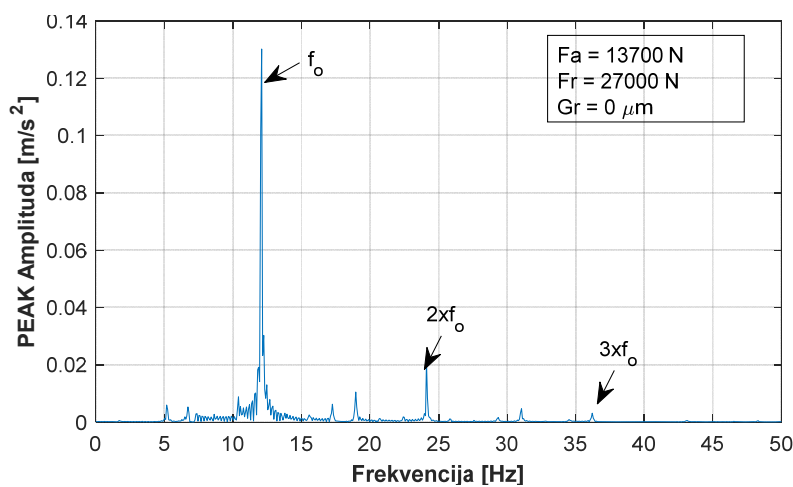
Na dijagramu na slikama od 8.28 do 8.34 je prikazana amplitudno frekventna karakteristika razmatranog ležaja pri delovanju kombinovanog opterećenja u zavisnosti od preklopa, odnosno zazora. Sa dijagrama se vidi da smanjenjem preklopa i prelaskom u zazor do 20 μm , dolazi do blagog porasta amplitude ubrzanja na svim frekvencijama elemenata ležaja. Povećanjem zazora od 20 do 40 μm dolazi do naglog skoka veličine amplitude ubrzanja, što je karakteristično za sve frekvencije elemenata ležaja pri delovanju kombinovanog opterećenja. Sa prikazanih dijagrama se takođe može konstatovati da prelaskom u zazor dolazi i do povećanja amplituda na harmonicima spoljašnjeg prstena. Pri zazoru od 20 μm amplituda na drugom harmoniku raste za 30% i 40% na trećem harmoniku u odnosu na amplitude pri preklopu od 20 μm . Ako se kao referentne vrednosti uzmu amplitude na frekvenciji spoljašnjeg prstena na nultom zazoru, onda se može reći da amplituda ubrzanja opada pri preklopu od 20 μm za 30% i amplitude ubrzanja rastu pri povećanju zazora do 71% pri zazoru od 40 μm . Pri delovanju aksijalnog opterećenja dolazi do istog ponašanja amplituda ubrzanja na svim frekvencijama elemenata ležaja.



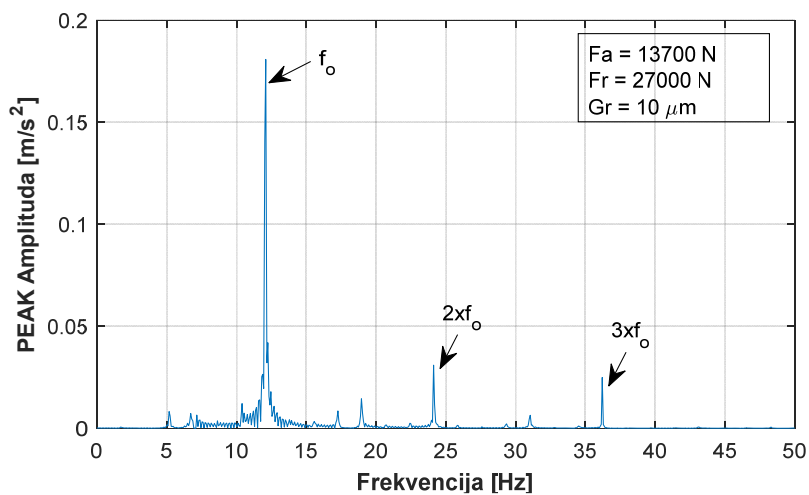
Slika 8.28 Promena amplitude ubrzanja pri preklopu $G_r = -20$ μm za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja



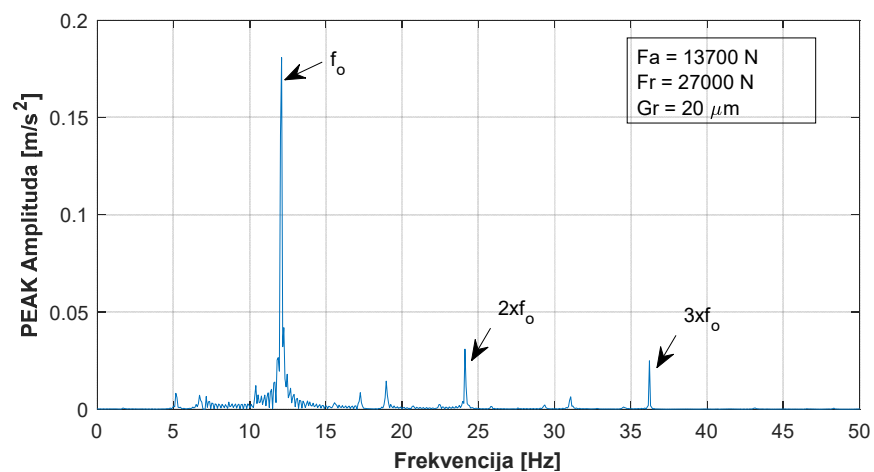
Slika 8.29 Promena amplitude ubrzanja pri preklopu $G_r = -10 \mu\text{m}$ za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja



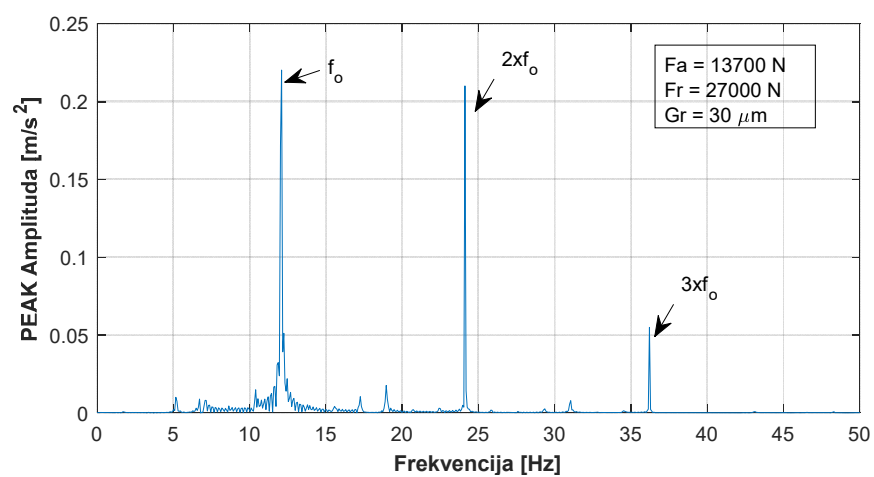
Slika 8.30 Promena amplitude ubrzanja pri nultom zazoru za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja



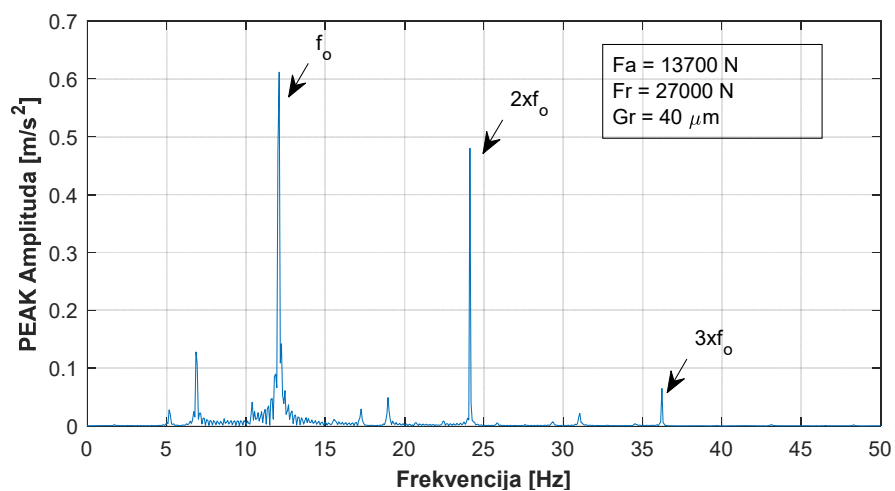
Slika 8.31 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 10 \mu\text{m}$ za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja



Slika 8.32 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 20 \mu\text{m}$ za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja



Slika 8.33 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$ za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja



Slika 8.34 Promena amplitude ubrzanja pri zazoru $G_r = 40 \mu\text{m}$ za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja

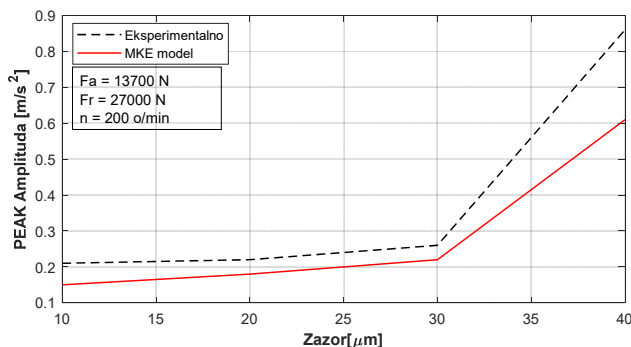
U tabeli 8.9 je prikazano poređenje karakterističnih frekvencija elemenata ležaja određenih na bazi kvazistatičkog i MKE modelovanja. Kao što se vidi iz tabele 8.9 sve frekvencije elementa ležaja su veće pri MKE modelovanju za 11 do 27% u odnosu na frekvencije dobijene kvazistatički preko relacija (2.29) do (2.32). Ova razlika se javlja zbog toga što pomenute relacije ne uzimaju u obzir klizanje kotrljajnih tela. Poklapanje karakterističnih frekvencija elemenata ležaja između kvazistatičkog i MKE modela ukazuje na zadovoljavajuće rezultate simulacije osnovne kinematike ležaja sa kontaktom u četiri tačke.

Tabela 8.9 Poređenje karakterističnih frekvencija elementa ležaja LSQFR 308 određenih kvazistatičkim i MKE modelovanjem

Frekvencija ležaja	Kvazistatički	MKE model	Odstupanje [%]
f_0 [Hz]	3,33	3,84	13
f_c [Hz]	1,04	1,26	17
f_i [Hz]	16,04	18,57	13
f_o [Hz]	10,73	12,1	11
f_b [Hz]	5,75	5,16	-11

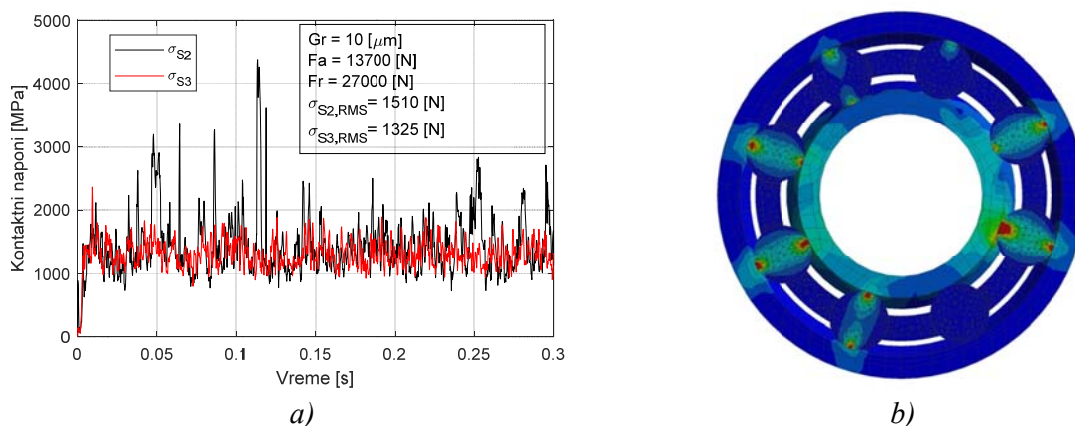
Na slici 8.35 je prikazano poređenje maksimalne (PEAK) vrednosti amplitude ubrzanja na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena (f_o) dobijene MKE modelovanjem i eksperimentalnim ispitivanjem.

Sa slike 8.35 se vidi da povećanje zazora sa 10 na 40 μm dovodi do povećanja amplitude ubrzanja na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena za oko 75% pri eksperimentalnim ispitivanjima, i pri MKE modelovanju. Pri zazoru $G_r = 10 \mu\text{m}$ odstupanje amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena dobijenog MKE modelovanjem u odnosu na eksperimentalna ispitivanja iznosi 28% dok pri zazoru od 40 μm iznosi oko 29%. Manje vrednosti amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena određene MKE modelovanjem su posledica modelovanja ležaja sa idealnim stazama kotrljanja i idealnim kotrljajnim telima. Ako se uzme u obzir da se MKE modelovanjem idealnog ležaja, dobijaju strukturne vibracije ili vibracije nastale usled promene pravca i intenziteta delovanja kontaktnog opterećenja kojima kotrljajna tela deluju na staze kotrljanja, onda se rezultati mogu smatrati zadovoljavajućim. Analizom dijagrama sa slike 8.35 se vidi, da sa povećanjem veličine unutrašnjeg radijalnog zazora, linearno raste i veličina amplitude ubrzanja na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena.

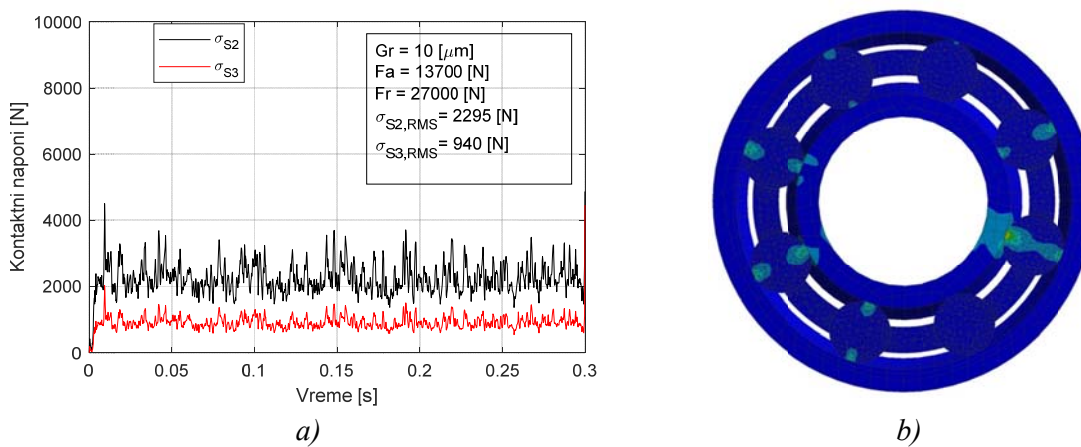


Slika 8.35 Promena maksimalne amplitude ubrzanja na frekvenciji f_o u zavisnosti od zazora određene eksperimentalnim ispitivanjima i MKE modelovanjem za ležaj LSQFR 308

Pri manjim vrednostima zazora broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja je veći s jedne strane, s druge strane veći broj kotrljajnih tela ostvaruje kontakt u četiri tačke što rezultira manjim promenama kako elastičnih deformacija, tako i kontaktnih napona na stazama kotrljanja (slika 8.36) tokom vremena, a tako i krutosti. Naime, promenom intenziteta i pravca kontaktnih opterećenja i kontaktnih napona između kotrljajnih tela i staza kotrljanja (slika 8.36 i 8.37) ležaja, tokom rada, menja se i njegova kontaktna krutost. Pri zazoru od 10 μm opterećenje se skoro podjednako deli na sva kotrljajna tela koja ostvaruju kontakt u četiri tačke sa stazama kotrljanja, pa će i RMS vrednost kontaktnih napona na obe staze biti približno jednaki (slika 8.36). Pri zazoru od 40 μm , primenjeno aksijalno opterećenje nije dovoljno da bi veći broj tela prenosio opterećenje u četiri tačke, već se celokupno opterećenje deli na kotrljajna tela koja ostvaruju kontakt u dve ili tri tačke što dovodi do većih (intenzivnijih) razlika između kontaktnih napona na levoj i desnoj stazi kotrljanja tokom vremena, kao što je prikazano na slici 8.37. Uopšteno gledano, ova vremenska promenljivost napona, kontaktnih opterećenja, deformacija prouzrokuje vibracije između prstenova ležaja i kod idealnog ležaja. Ove vibracije kao i vibracije nastale od zazora (diskretne strukture elemenata ležaja) su dominantne na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena ležaja kao što se vidi sa dijagrama na slici 8.28 do 8.34.



Slika 8.36 a) Promena kontaktnih napona tokom vremena na levoj (σ_{s2}) i desnoj (σ_{s3}) spoljašnjoj stazi kotrljanja; b) raspored kontaktnih napona na levoj stazi kotrljanja u trenutku $t = 0,2$ s pri zazoru $G_r = 10 \mu\text{m}$



Slika 8.37 a) Promena kontaktnih napona tokom vremena na levoj (σ_{s2}) i desnoj (σ_{s3}) spoljašnjoj stazi kotrljanja; b) raspored kontaktnih napona na levoj stazi kotrljanja u trenutku $t = 0,2$ s pri zazoru $G_r = 40 \mu\text{m}$

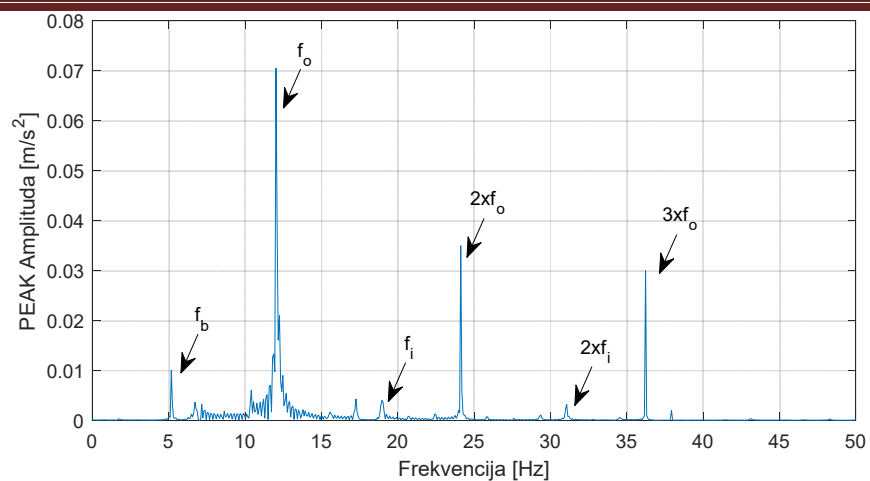
8.2.2.2 Analiza uticaja spoljašnjeg opterećenja na dinamičko ponašanje ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308

U prethodnom delu je prikazan uticaj zazora/preklopa na dinamičko ponašanje ležaja sa kontaktom u četiri tačke pri delovanju aksijalnog opterećenja $F_a = 13700$ N i radijalnog $F_r = 27000$ N kako bi bilo moguće uporediti rezultate MKE modelovanja sa eksperimentalnim ispitivanjima. Analiza uticaja spoljašnjeg opterećenja na amplitude i frekvencije elemenata ležaja je sprovedena za zazor od $30 \mu\text{m}$, pri spoljašnjem aksijalnom opterećenju od 400 do 2000 N i radijalnom opterećenju $F_r = 6000$ N. Opterećenja su izabrana na osnovu realnih eksploatacionih uslova prema tabeli 8.1. Analiza je kao i u prethodnom slučaju vršena za $n = 200$ o/min. Amplitude ubrzanja na ostalim frekvencijama elemenata ležaja, kao i same frekvencije, se vrlo malo menjaju u odnosu na amplitudu ubrzanja unutrašnjeg prstena za razmatrani zazor. Najveća promena frekvencija elementa ležaja se dešava pri promeni opterećenja, odnosno, promeni spoljašnjeg aksijalnog opterećenja. Povećanjem aksijalnog opterećenja od 400 do 2000 N dolazi do smanjivanja frekvencije spoljašnjeg prstena za 5% sa 12,84 na 12,11 Hz, nakon čega je ova frekvencija konstantna. Pri ovome se frekvencija kotrljajnih tela povećava za 9%, a frekvencija kaveza za 19%. Frekvencije ostalih elemenata ležaja se smanjuju za ispod 1%. Povećanje frekvencije kotrljajnih tela i kaveza je uslovljeno povećanjem spoljašnjeg opterećenja, posebno aksijalnog. Povećanje aksijalnog opterećenja dovodi do povećanja broja kotrljajnih tela koja prenose opterećenje, a samim tim do smanjenja razlike između uglova kontakta sa levom i desnom stazom kotrljanja. Usled ovoga dolazi do povećanja i frekvencija kotrljajnih tela i kaveza, a smanjenja frekvencija prstenova. U tabeli 8.10 su date vrednosti frekvencija elemenata ležaja u zavisnosti od spoljašnjeg aksijalnog opterećenja za zazor od $30 \mu\text{m}$.

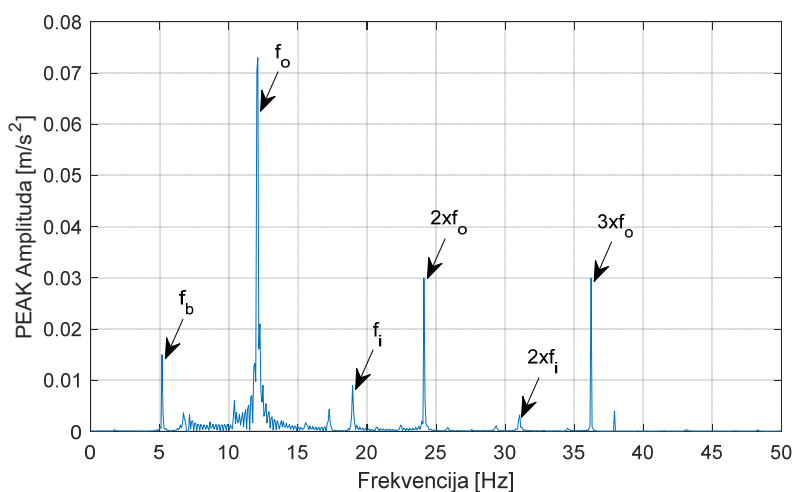
Tabela 8.10 Vrednosti frekvencija elementa LSQFR 308 u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja

F_a [N]	F_r [N]	Frekvencije [Hz]			
		f_b	f_i	f_o	f_c
400	6000	4,65	18,51	12,84	1,01
800		4,98	18,512	12,83	1,03
1200		4,99	18,514	12,83	1,08
1600		5,12	18,514	12,21	1,25
2000		5,16	18,571	12,11	1,26

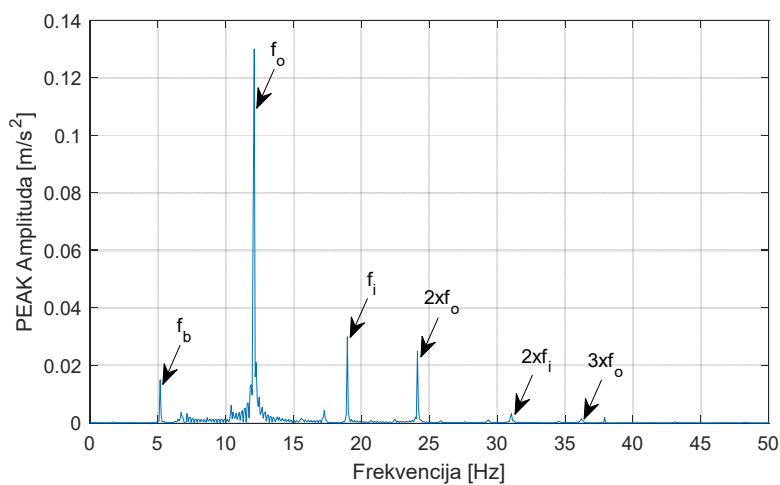
Od slike 8.38 do 8.42 je prikazana promena frekvencija i amplituda ubrzanja elemenata ležaja LSQFR 308 u zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja za zazor od $30 \mu\text{m}$. Povećanjem aksijalnog opterećenja od 400 do 1200 N pri konstantnom radijalnom opterećenju, raste amplituda ubrzanja na frekvenciji spoljašnjeg prstena sa $0,07 \text{ m/s}^2$ na $0,13 \text{ m/s}^2$ uz opadanje amplituda ubrzanja na njegovim harmonicima. Pri ovom dolazi i do povećanja amplituda ubrzanja na frekvenciji kotrljajnih tela (oko 6%) i frekvenciji unutrašnjeg prstena (oko 8%) uz istovremeno opadanje amplituda na harmonicima ovih frekvencija. Daljim povećanjem opterećenja sa 1200 na 2000 N, povećava se amplituda ubrzanja na frekvenciji spoljašnjeg prstena za 46%, pri čemu rastu i amplitude ubrzanja na frekvenciji kotrljajnih tela i unutrašnjeg prstena za oko 86% odnosno 70%, ali se pri tome harmonici na frekvencijama spoljašnjeg i unutrašnjeg prstena gube iz spektra.



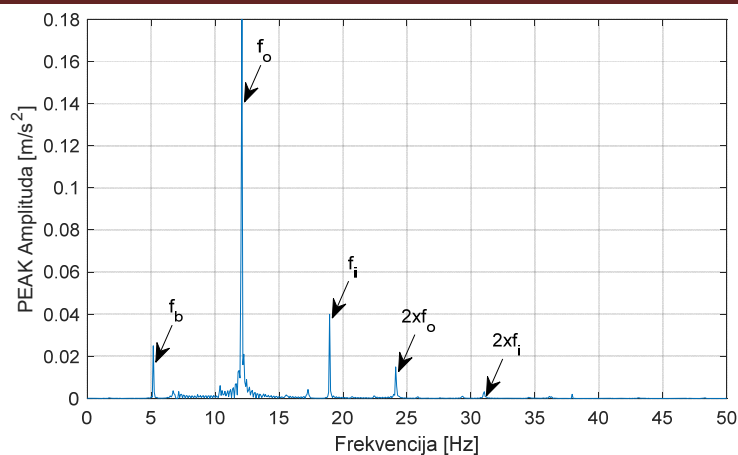
Slika 8.38 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQFR za $F_a = 400 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$



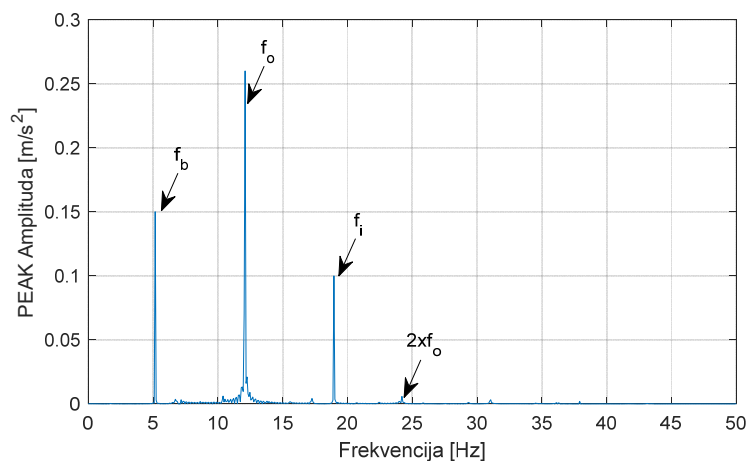
Slika 8.39 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 800 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$



Slika 8.40 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 1200 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$

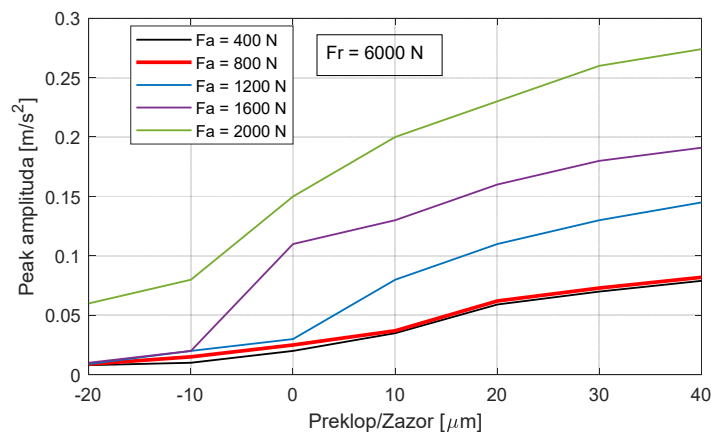


Slika 8.41 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 1600 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$



Slika 8.42 Promena amplitude ubrzanja ležaja LSQR 308 za $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ pri zazoru $G_r = 30 \mu\text{m}$

Na slici 8.43 je prikazana promena amplitude ubrzanja na frekvenciji spoljašnjeg prstena u zavisnosti od zazora/preklopa za različite vrednosti spoljašnjeg aksijalog opterećenja pri konstantnom radijalnom opterećenju od $F_r = 6000 \text{ N}$.



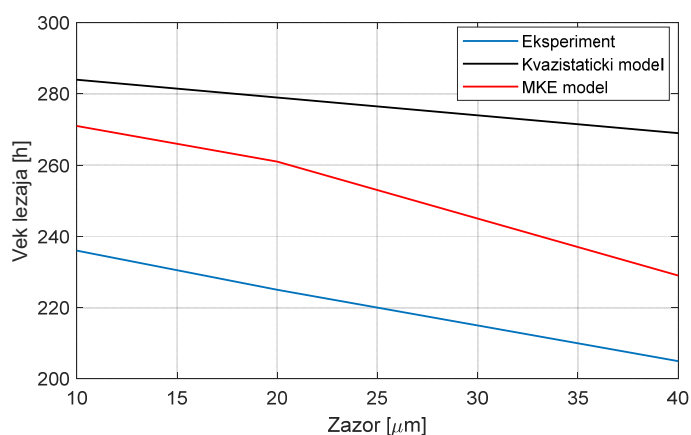
Slika 8.43 Promena amplitude ubrzanja u zavisnosti od preklopa/zazora za različita aksijalna opterećenja pri $F_r = 6000 \text{ N}$

Povećanjem aksijalnog opterećenja od 400 do 1200 N, dolazi do povećanja veličine amplitude ubrzanja sa 0,02 na 0,035 m/s², u području preklopa. U području zazora od 0 do 40 μm amplituda ubrzanja raste sa 0,035 na 0,14 m/s², povećanjem opterećenja od 400 N do 1200 N. Daljim povećanjem aksijalnog opterećenja od 1200 do 2000 u području preklopa, povećava se amplituda ubrzanja za 40%, dok se u području zazora od 0 do 40 μm amplituda ubrzanja povećava za oko 50% (slika 8.43).

8.2.3 Analiza veka ležaja sa kontaktom u četiri tačke LSQFR 308

Dinamičko ponašanje kotrljajnog ležaja je veoma kompleksne prirode, a posledica je dejstva poremećajnih sila koje se generišu usled različitih uticaja u toku njihovog rada (strukturne vibracije, vibracije usled geometrijske nesavršenosti itd.) koje izazivaju oscilatorno kretanje sastavnih delova ležaja, na različitim amplitudama i frekvencijama. Analizom dinamičkog ponašanja ležaja moguće je veoma pouzdano i vrlo rano predvideti najveći broj nedostataka vezanih za kotrljajne ležaje. U prvom redu zbog toga što dinamičko ponašanje veoma dobro odslikava skoro sve karakteristike konstrukcije, izrade, montaže i eksploatacije ležaja. S obzirom da svaki mehanički problem koji se može javiti kod kotrljajnih ležaja, generiše dinamički odziv (vibracije) određene jačine i oblika, u disertaciji je predloženo da se vek ležaja određuje na bazi signala vibracija. Odnosno, u konkretnom slučaju na osnovu ubrzanja određenog MKE modelovanjem ili eksperimentalnim ispitivanjem kako je objašnjeno u petom poglavlju (slika 5.11).

Analiza veka ležaja LSQR 308 se sastoji iz dva dela, prvi deo se odnosi na određivanje veka za kombinovano opterećenje prema eksperimentalnim uslovima ($F_a = 13700$ N i $F_r = 27000$ N), kako bi se verifikovao matematički model. Drugi deo se odnosi na analizu veka na bazi eksploatacionih uslova prema tabeli 8.1. U prvom slučaju su analizirani ležaji sa zazorom 10, 20 i 40 μm, dok su u drugom slučaju analizirani ležaji sa preklpom/zazorom - 20 do 30 μm. Na slici 8.44 je prikazana promena veka ležaja LSQR 308 određena MKE modelovanjem, kvazistatičkim modelom korišćenjem *Lundberg-Palmgren-ov* modela i eksperimentalnim ispitivanjem koje je prikazano u šestom poglavlju.



Slika 8.44 Promena veka ležaja LSQFR 308 u zavisnosti od zazora za različite metode određivanja veka pri $F_a = 13700$ N i $F_r = 26000$ N

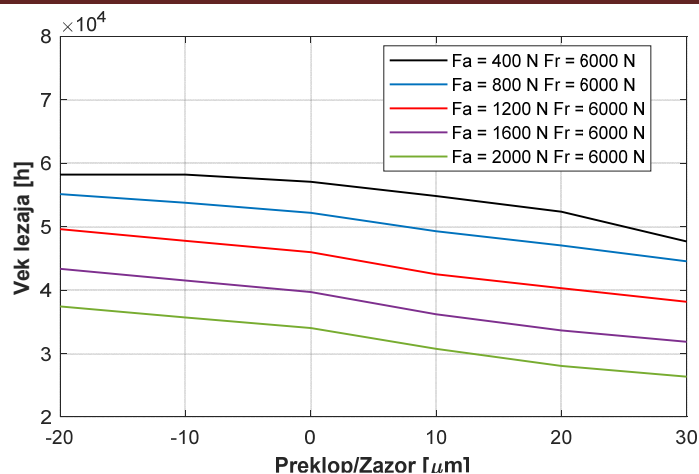
Vek ležaja LSQR 308 opada povećanjem zazora u ležaju. Povećanjem zazora sa 10 na 40 μm vek opada za 13% pri eksperimentalnim ispitivanjima, 5% pri kvazistatičkom modelovanju i 19% pri MKE modelovanju. Ako se kao referentna vrednost uzme vek određen eksperimentalnim ispitivanjem na bazi ubrzanja (tabela 6.8), onda vek ležaja određen kvazistatičkim modelovanjem odstupa za 20% pri zazoru od 10 μm , 24% pri zazoru od 20 μm , i 31% pri zazoru od 40 μm . Vek ležaja određen MKE modelovanjem odstupa od eksperimentalno dobijenog veka za 14% pri zazoru od 10 μm , 16% pri zazoru 20 μm i 11% pri zazoru od 40 μm . S druge strane ako se kao referentna vrednost uzme vek određen eksperimentalnim ispitivanjem na bazi temperature (tabela 6.8), onda vek određen kvazistatičkim modelom odstupa za oko 15%, dok vek određen MKE modelom odstupa za oko 12%. U tabeli 8.11 je prikazan vek određen preko MKE modela pri čemu je kao ulaz zadato ubrzanje određeno eksperimentalnim ispitivanjem i MKE modelovanjem.

Tabela 8.11 Poređenje veka određenog na bazi eksperimentalno dobijenog ubrzanja i ubrzanja određenog MKE modelovanjem

Zazor [μm]	Ubrzanje dobijeno		Odstupanje
	Eksperimentalno	MKE	
	Vek ležaja [h]		
10	280	271	3,2%
20	268	262	2,6%
40	257	229	10%

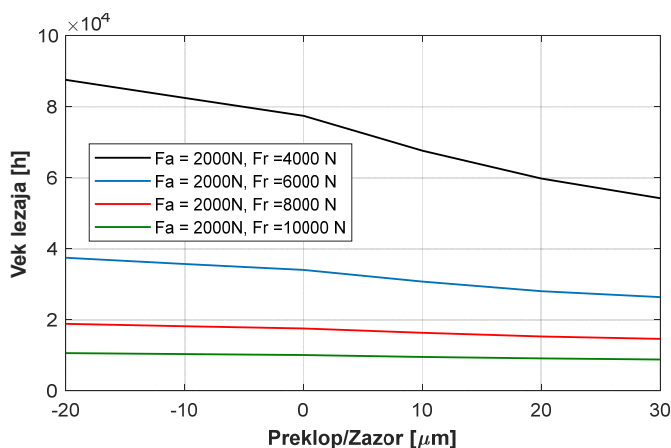
Na osnovu prethodnog se može konstatovati da predloženi model daje zadovoljavajuće rezultate pri određivanju veka posmatranog ležaja.

Na slici 8.45 je prikazana promena veka ležaja LSQR 308 određena MKE modelovanjem u zavisnosti od preklopa, odnosno zazora za različite vrednosti aksijalnog opterećenja pri konstantnom radijalnom opterećenju. Vek ležaja se smanjuje porastom aksijalnog opterećenja s jedne strane, dok s druge strane opada povećanjem zazora u ležaju. Povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N, vek opada za 35% pri preklopu od -20 μm , ili za 44% pri zazoru od 30 μm . U području preklopa do nultog zazora pri opterećenju $F_a = 400$ N i $F_r = 6000$ N vek opada samo za oko 2%. Pri ostalim opterećenjima u istom području vek opada za oko 8%. U području zazora od 0 do 30 μm vek ležaja pri opterećenju $F_a = 400$ N i $F_r = 6000$ N opada za 16%, dok pri ostalim opterećenjima za isto područje zazora vek opadne oko 19 do 22%.



Slika 8.45 Promena ležaja LSQR 308 u zavisnosti od zazor za različite vrednosti aksijalnog opterećenja pri konstantnom radijalnom opterećenju

Na slici 8.46 je prikazana promena veka ležaja LSQR 308 određena MKE modelovanjem u zavisnosti od preklopa, odnosno zazor za različite vrednosti radijalnog opterećenja pri konstantnom aksijalnom opterećenju.



Slika 8.46 Promena ležaja LSQR 308 u zavisnosti od zazor za različite vrednosti radijalnog opterećenja pri konstantnom aksijalnom opterećenju

Povećanjem radijalnog opterećenja smanjuje se značajno vek ležaja, pri čemu povećanjem zazor vek ležaja ima blagi pad pri većim vrednostima radijalnog opterećenja. Povećanjem radijalnog opterećenja sa 4000 na 10000 N vek opada za 87% pri preklopu od $-20 \mu\text{m}$, ili za 62% pri zazoru od $30 \mu\text{m}$. U području preklopa do nultog zazor pri opterećenju $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 10000 \text{ N}$ vek opada samo za oko 5%. Pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 8000 \text{ N}$ u istom području preklopa vek opada za oko 7%, dok pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ vek se smanjuje za oko 12%. U području zazor od 0 do $30 \mu\text{m}$ vek ležaja pri opterećenju $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 1000 \text{ N}$ opada za 12%, dok pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 8000 \text{ N}$ opada za 16%. Pri opterećenju $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ za isto područje zazor vek opadne oko 25%. Najveće smanjenje veka ležaja u području zazor je pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 4000 \text{ N}$ i iznosi oko 40%.

9 ZAVRŠNA RAZMATRANJA

Prikazana doktorska disertacija predstavlja pokušaj da se razvije programsko rešenje mehaničkog ponašanja kugličnih ležaja. Jedan pravac ispitivanja se odnosi na radijalne kuglične ležaje, a drugi na ležaje sa kontaktom u četiri tačke.

Sveobuhvatna analiza kugličnih ležaja podrazumeva kompleksno ispitivanje parametara koji utiču na ponašanje ležaja u eksploataciji. Pri kotrljanju opterećenih kotrljajnih tela po stazama kotrljanja ležaja nastaju elastične kontaktne deformacije, koje ne spadaju u čisto periodične vibracije, zbog nelinearnih zavisnosti između kontaktnih deformacija i dejstva sile. Ove vibracije nastaju uvek pa i pri idealnoj geometriji ležaja. Za vreme kotrljanja nastaju naizmenične raspodele napona u ležaju, elastične kontaktne deformacije, a kao posledica, periodične savojne vibracije. Pri radijalnom opterećenju su radijalane vibracije unutrašnjeg prstena u pravcu dejstva sile, kod aksijalnog opterećenja nastaju vibracije spoljašnjeg ili unutrašnjeg prstena koji se obrće sa kotrljajnim telima. Kuglični ležaji predstavljaju složen sistem za modelovanje sa velikim brojem ulaznih i izlaznih parametara i kompleksnim fizičkim i hemijskim procesima koje se javljaju tokom njihove eksploatacije. Iz tih razloga je praktično nemoguće formirati jedan sveobuhvatni matematički model za analizu ponašanja ležaja. Zbog toga se u praktičnoj primeni pri postavljanju matematičkog modela, pažnja više posvećuje parametrima koji utiču na ponašanje ležaja u eksploataciji. Najvažniji parametri koji utiču na ponašanje ležaja su: raspodela opterećenja na kotrljajnim telima, veličine kontaktnih napona i deformacija, ugao kontakta, zazor/preklop, nivo vibracija, i sl. Razmatranje ovih parametara zahteva podelu mehaničkog matematičkog modela na podmodele, u zavisnosti od karaktera fizičkih pojava koje oni opisuju i ponašanja koje se želi sa njima postići. Matematički model mora predstavljati vezu između ulaznih parametara i izlaznih veličina koje određuju ponašanje kotrljajnih ležaja. Prema tome, kao ulazne karakteristike uzimaju se osnovne konstrukciono-eksploatacione karakteristike kotrljajnog ležaja. Kao izlazne karakteristike dobijaju se parametri koji definišu i određuju stanje kotrljajnih ležaja. S druge strane, eksperimentalna istraživanja su pokazala da se nijedan dosadašnje razvijen matematički model ležaja ne može generalizovati i primeniti na sve ležajeve i njihove uslove rada. Prethodno navedene činjenice su osnovni razlozi za neprestanu aktuelnost istraživanja u oblasti ponašanja kotrljajnih ležaja.

9.1 Sumiranje rezultata istraživanja

U okviru rada je sprovedena analiza statičkog i dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja sa posebnim osvrtom na ležaje sa kontaktom u četiri tačke. Kompletno istraživanje realizovano je na principima savremene metodologije naučno-istraživačkog rada. Zbog specifičnosti teme, pored opštih naučnih metoda analize i sinteze, korišteni su i savremeni metodološki pristupi, eksperimentalne metode i tehnike, posebno tehnike vezane za primenu računara. Pri tome se posebno ističu metode i tehnike numeričke matematike.

Osnovni cilj istraživanja u ovom radu bio je razvoj programskog rešenja za analizu statičkog i dinamičkog ponašanja radijalnih kugličnih ležaja i ležaja sa kontaktom u četiri tačke, odnosno identifikaciju ponašanja u eksploataciji i određivanje veka primenom matematičkih modela.

Matematički model je podeljen na dva podmodela. Prvi podmodel je baziran na kvazistatičkim jednačinama ravnoteže i služi za određivanje statičkih karakteristika ležaja kao što su: kontaktna opterećenja, deformacije na stazama kotrljanja, statička krutost i nosivost. Ovi rezultati su ujedno i ulazni podaci za drugi podmodel. Drugi podmodel je definisan na bazi metode konačnih elemenata i služi za određivanje dinamičkih karakteristika ležaja kao što su: dinamička krutost, kontaktna opterećenja, deformacije na stazama kotrljanja, soptvene frekvencije i vek ležaja.

Model za dinamičku analizu se sastoji iz više podmodela koji služe za modalnu, harmonijsku i eksplicitno dinamičku analizu, kao i za određivanje veka na bazi opterećenja u vidu ubrzanja dobijenog u eksplicitnoj analizi. Pored statičke analize, koja je kao bazna analiza za sve ostale, modalna i harmonijska su od velikog značaja u postavljenom dinamičkom modelu. Naime, na bazi ove dve analize između ostalog je određena i maksimalna sopstvena frekvencija u posmatranom frekventnom opsegu, a koja je veoma značajna kod određivanja ulaznih parametara za eksplicitnu analizu.

U cilju provere rezultata dobijenih primenom razvijenih matematičkih modela, kao i primenom programskih sistema opšte namene, koji baziraju na metodi konačnih elemenata, sprovedeno je eksperimentalno ispitivanje ležaja. Teško je uzeti u obzir pojedine faktore, vezane za grešku izrade, geometrijske nesavršenosti staza kotrljanja (posebno valovitost i hrapavost) i montaže elemenata ležaja, što je ukazalo na potrebu eksperimentalnog ispitivanja realnih sistema. Eksperimentalno ispitivanje je sprovedeno za dva tipa ležaja: za radijalni kuglični ležaj FKL 6006 i kuglični ležaj sa kontaktom u četiri tačke FKL LSQFR 308. Eksperimentalno ispitivanje se može podeliti na tri dela. Prvi deo se bazira na određivanju sopstvenih frekvencija ležaja i modalnih parametara. U drugom delu su merene vibracije ležaja FKL 6006 na eksperimentalnom uređaju za merenje i kontrolu vibracija kotrljajnih ležaja, odnosno analiziran je uticaj spoljašnjeg aksijalnog opterećenja i zazora na dinamičko ponašanje radijalnog ležaja. Treći deo eksperimentalnog ispitivanja odnosi se na određivanje veka ležaja FKL LSQFR 308. Ovaj štand je iskorišćen i za ispitivanje uticaja zazora na dinamičko ponašanje ležaja FKL LSQFR 308.

9.1.1 Sumiranje rezultata istraživanja radijalnog ležaja 6006

Eksperimentalno ispitivanje, koje se odnosi na merenje vibracija je sprovedeno na radijalnom ležaju FKL 6006, na uzorku od 30 ležaja različitih grupa radijalnog zazora. Pretpostavljeno je da je geometrija kotrljajnih tela idealna. Ležaj je prvo opterećen sa minimalnim aksijalnim opterećenjem od 200 N. Veličina aksijalnog opterećenja se menja do maksimalnih 1000 N, sa korakom od 100 N.

Pri eksperimentalnom ispitivanju vibracija odgovarajućim sensorima se prikuplja signal vibracija u vremenskom domenu. Ovakav signal, ne daje mnogo informacija o karakteristikama vibracija, te ga je neophodno transformisati u frekventni domen. Signal se transformiše primenom brze Furijeove transformacije, razlažući se na komponente različitih frekvencija. Svaka od komponenti ima svoju frekvenciju, amplitudu i fazni ugao. Za analizu signala vibracija u frekventnom domenu, posebno je poznavati karakteristične frekvencije svih elemenata, pa je na osnovu dobijenih frekvencija moguće utvrditi koji element mašine ili ležaja generiše vibracije. Razlog zbog koga se prelazi iz vremenskog u frekventni domen, primenom brze Furijeove transformacije, je jasno uočavanje frekvencije vibracija koje odgovaraju karakterističnim pojavama u frekventnom domenu. Zabeleženi signali su analizirani primenom FFT u tri frekventna područja prema standardu, a to su 50 – 300 Hz, 300 – 1800 Hz i 1800 – 10 000 Hz, za analizu ležaja manjih dimenzija.

Analizirajući dobijene RMS vrednosti amplitude brzine vibracija može se zaključiti da dolazi do porasta RMS vrednosti u polju niskih i srednjih frekvencija sa porastom aksijalnog opterećenja. U polju visokih frekvencija dolazi do opadanja RMS vrednosti sa povećanjem aksijalnog opterećenja do vrednosti opterećenja 800 N. Kod opterećenja koje iznosi 1000 N i u polju visokih frekvencija dolazi do porasta RMS vrednosti. Dobijeni podaci prikazuju zavisnost RMS vrednosti brzine vibracija u karakterističnim područjima od veličine radijalnog zazora. Ako se analiziraju ti rezultati, može se zaključiti da u području srednjih i visokih frekvencija, povećanje radijalnog zazora izaziva povećanje RMS vrednosti brzine vibracija, dok u području niskih frekvencija, dolazi do smanjenja RMS vrednosti. Dalje su u radu analizirani rezultati merenja za različite vrednosti aksijalnog opterećenja po frekventnim područjima. Iz analiziranih rezultata se može zaključiti da sa povećanjem aksijalnog opterećenja u području niskih frekvencija, dolazi do intenzivnog rasta amplitude brzine vibracija. Dalje, u području srednjih frekvencija dolazi do blažeg rasta amplituda. U oblasti visokih frekvencija dolazi do smanjenja amplituda brzine vibracija, sa povećanjem aksijalnog opterećenja.

Verifikacija rezultata statičkog ponašanja ležaja 6006 je izvršena poređenjem rezultata dobijenih kvazistatičkim modelovanjem i rezultata dobijenih primenom metode konačnih elemenata. Analiza statičkog ponašanja radijalnog ležaja 6006 je izvršena za spoljašnje radijalno opterećenje od 1000 do 5000 N, pri čemu su posmatrani ležaji sa radijalnim zazorom 0, 10, 20, 30 i 40 μm . Maksimalni kontakti naponi javljaju se pri delovanju maksimalnog radijalnog opterećenja od 5000 N. Maksimalni kontakti naponi između kotrljajnih tela i unutrašnje staze kotrljanja dobijeni kvazistatičkim modelovanjem i primenom MKE, su 3389 MPa, odnosno 3809 MPa, pri čemu maksimalne kontaktne deformacije iznose 18,81 μm , odnosno 21,08 μm , reaspektivno. Maksimalno odstupanje

između ova dva modela je oko 12% i za maksimalne vrednosti napona i za maksimalne deformacije. Za iste vrednosti spoljašnjeg radijalnog opterećenja, maksimalni kontaktne naponi između kotrljajnih tela i spoljašnje staze kotrljanja dobijeni kvazistatičkim modelovanjem i primenom MKE, su 2903 MPa, odnosno 3293 MPa, pri čemu maksimalne kontaktne deformacije iznose 18,21 μm , odnosno 20,62 μm , reaspektivno. Maksimalno odstupanje između ova dva modela je oko 13% i za maksimalne vrednosti napona i za maksimalne deformacije. Rezultati se odnose na ležaj 6006 sa nulnim zazorom. U okviru ovog rada, a u skladu sa *Hertz-ovom* teorijom kontakta, svaka kontaktne površina između kotrljajnih tela i staza kotrljanja je prikazana u obliku eliptične raspodele, pri čemu se kontaktne naponi postepeno smanjuju od središta kotrljajnih tela ka spolja.

Pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja u zoni kontakta javljaju se elastične kontaktne deformacije. Problem kontaktnih deformacija je nelinearan i postoji izvesna nelinearna zavisnost između uticaja veličine spoljašnjeg opterećenja i pomeranja centra ležaja koji utiču na kontaktne deformacije. Kod većih vrednosti spoljašnjeg opterećenja, relativno pomeranje prstenova ležaja usled kontaktnih deformacija je značajnije. To omogućava ulazak novih kotrljajnih tela u prenošenje opterećenja. Za ležaj sa zazorom 20 μm koji je radijalno opterećen sa 1000 N dolazi do kontaktnih deformacija oko 7,3 μm što odgovara pomeranju centra ležaja od 24,5 μm . Daljim povećanjem radijalnog opterećenja na 5000 N dolazi do porasta maksimalnih kontaktnih deformacija za 63%, čime se i pomeranje centra ležaja povećava za oko 51%. Za slučaj spoljašnjeg opterećenja malog intenziteta, javljaju se male kontaktne deformacije, pa će se unutrašnji prsten ležaja oslanjati na jedno ili dva kotrljajna tela. Ako se opterećenje prenosi preko samo jednog kotrljajnog tela, to je najnepovoljniji slučaj. Da bi veći broj kotrljajnih tela, kod ležaja sa radijalnim zazorom bio u zoni opterećenja, potrebno je ostvariti odgovarajuće međusobno (relativno) pomeranje prstenova ležaja. Ovo je moguće jedino ako se ostvare odgovarajuće kontaktne deformacije elemenata ležaja, odnosno, potrebno je i dovoljno spoljašnje radijalno opterećenje ili smanjenjem zazora i prelaskom u preklop. Ovde treba napomenuti da su kontaktne opterećenja, kao i kontaktne deformacije iste na obe staze kotrljanja. Naime, za razmatrane brojeve obrtaja centrifugalna sila na kotrljajnim telima je ispod 1 N što je daleko manja vrednost od primenjenog radijalnog opterećenja, pa se može reći da centrifugalna sila ne utiče na kontaktne opterećenja. Sveobuhvatnom analizom se dolazi do zaključka da bi centrifugalna sila imala uticaja tek kada bi broj obrtaja bio veći od 15000 o/min, međutim, maksimalni broj obrtaja za ovaj tip ležaja iznosi 8000 o/min.

S druge strane, broj kotrljajnih tela indirektno utiče i na radijalnu krutost ležaja. Manji broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja je posledica manjih kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja. Pošto je radijalna krutost recipročna vrednosti zbira kontaktnih krutosti za svako kotrljajno telo, pri manjim deformacijama, manji je broj kotrljajnih tela u zoni kontakta pa će i ukupna radijalna krutost ležaja biti manja. Dalje se može zaključiti da se najmanja kontaktne krutost javlja na mestima gde dolazi do najmanjih kontaktnih deformacija. Povećanjem kontaktnih deformacija na najopterećenijem kotrljajnom telu (povećanjem opterećenja sa 1000 na 5000 N) za 65% povećava se kontaktne krutost na mestu kontakta kotrljanog tela sa stazama kotrljanja za 47%. Povećanjem spoljašnjeg opterećenja, povećavaju se kontaktne deformacije na stazama kotrljanja, što povećava broj kotrljajnih tela

koja prenose opterećenje, pa se samim tim povećava ukupna radijalna krutost za 42%. Takođe, se u radu može videti da je radijalna krutost određena preko MKE modela veća za oko 5% u odnosu na radijalnu krutost određenu kvazistatičkim modelom, što u potpunosti odgovara odstupanjima koja su dobijena i pri poređenju kontaktnih opterećenja, kontaktnih napona i kontaktnih deformacija. Pri MKE modelovanju statičkog ponašanja kontaktne deformacije su veće za oko 10%, pri čemu su kontaktna opterećenja veća za oko 2,5%. Pri ovome se pri MKE modelovanju dobija da su ose elipse, pa i same površine kontakta manje za oko 3%, što na kraju rezultuje da su kontaktni naponi u proseku veći pri MKE modelovanju za oko 7%.

Broj kotrljajnih tela koji učestvuju u prenošenju spoljašnjeg opterećenja, direktno je zavistan od radijalnog zazora/preklopa u ležaju i veličine radijalnog pomeranja centra ležaja. Za veće vrednosti radijalnog zazora potrebno je ostvariti i veća pomeranja centra ležaja, pa da veći broj kotrljajnih tela bude u zoni opterećenja. Radijalna pomeranja centra ležaja se smanjuju za 86% prelaskom iz zazora u preklop (prelaskom iz preklopa od $-20\ \mu\text{m}$ u zazor od $40\ \mu\text{m}$), pri čemu dolazi i do povećanja radijalne krutosti za oko 51%.

Kontaktne deformacije elemenata ležaja rastu sa povećanjem spoljašnjeg radijalnog opterećenja, ali i sa povećanjem veličine radijalnog zazora, odnosno opadaju, smanjenjem zazora i prelaskom u preklop. Međutim, povećanje kontaktnih deformacija je znatno izraženije kod porasta spoljašnjeg radijalnog opterećenja. Sa druge strane, ovaj porast je mnogo blaži, ako se analizira uticaj radijalnog zazora. U odnosu na nivo spoljašnjeg radijalnog opterećenja, mogu se razlikovati dva karakteristična područja promene elastičnih kontaktnih deformacija. U prvom području usled preklopa, porast spoljašnjeg radijalnog opterećenja, neznatno povećava nivo elastičnih kontaktnih deformacija na stazama kotrljanja. Prema tome, u ovom području raspodela spoljašnjeg opterećenja na kotrljajna tela ležaja je ravnomernija, veći broj kotrljajnih tela je u zoni opterećenja. U drugom području, području zazora, dolazi do znatnog povećanja nivoa elastičnih deformacija usled povećanja spoljašnjeg opterećenja. Usled zazora, spoljašnje radijalno opterećenje je nedovoljno za ulazak većeg broja kotrljajnih tela u zonu opterećenja. Manji broj kotrljajnih tela koja prenose spoljašnje opterećenje, izaziva nepovoljnu raspodelu opterećenja unutar ležaja i veći porast kontaktnih deformacija. Usled prethodnog, radijalna krutost u području preklopa ima značajan porast, dok povećanjem radijalnog zazora krutost opada pri manjim vrednostima spoljašnjeg radijalnog opterećenja.

Dinamički model ležaja je definisan primenom metode konačnih elemenata. Analiza dinamičkog ponašanja radijalnog ležaja se sastoji iz dva dela. Prvi deo se odnosi na modalnu analizu, odnosno određivanje sopstvenih frekvencija, glavnih oblika oscilovanja i prigušenja za razmatrani ležaj. Drugi deo analize se odnosi na eksplicitno dinamičku analizu, odnosno određivanje uticaja konstrukcionih parametara (zazor/preklopa) na karakteristične frekvencije elemenata ležaja. Rezultati matematičkog modelovanja su upoređeni sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjima.

Modalna analiza, kao što je već rečeno, je osnova za harmonijsku analizu jer se njome određuju frekvencije i definišu glavni modovi oscilovanja posmatranih ležaja. Dok su harmonijskom analizom za određene frekvencije i zadatu pobudu definisane amplitudno

frekventne karakteristike za ispitivane ležaje. Analizirajući eksperimentalne rezultate u okviru modalne analize, došlo se do zaključka da zazor ne utiče na frekvencije, kao ni na modalne parametre ležaja. Rezultati modalne analize za oba tipa ležaja pokazuju da zazor nema uticaja na frekvencije, kao ni na modalne parametre, kada se ispituje slobodno oslonjen ležaj. Prema literaturnim podacima [92], modalna masa na prvom modu oscilovanja je oko 15% manja od celokupne mase analizirane konstrukcije. Eksperimentalno određene modalne mase na prvom modu oscilovanja odgovaraju tim vrednostima.

Modalna analiza je sprovedena za različite zazore (0, 10, 20, 30 i 40 μm) za slučaj slobodno oslonjenog ležaja, kako bi se rezultati uporedili sa eksperimentalnim ispitivanjima. Poređenjem vrednosti karakterističnih frekvencija može se uočiti da je najveće odstupanje između frekvencija određenih MKE modelovanjem i eksperimentalno određenih frekvencija na prvom modu. Međutim, kako je maksimalno odstupanje oko 19%, može se zaključiti da MKE modelovanje daje zadovoljavajuće rezultate, pogotovo s obzirom da je razlika između MKE modelovanja i eksperimentalnog ispitivanja na frekvenciji f_n samo 5%. Sveobuhvatnom analizom rezultata je, takođe, ustanovljeno da promena zazora pri ovakvom načinu ispitivanja (slobodno oslonjeni ležaj) ima zanemarljivo mali uticaj na promenu sopstvenih frekvencija, kao i na promenu modalnih parametara (oko 2%). Međutim, u slučaju opterećenog ležaja, kako se smanjuje zazor, a povećava spoljašnje opterećenje, sopstvene frekvencije će se smanjivati. Ovo je povezano sa *Hertz-ovom* teorijom kontakta, naime, kako se smanjuje zazor i pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja veći broj kotrljajnih tela je u zoni opterećenja, što će dovesti do povećanja krutosti ležaja.

Eksplisitna analiza dinamičkog ponašanja radijalnog ležaja 6006 je izvršena za spoljašnje aksijalno opterećenje od 200 do 1000 N, pri čemu su posmatrani ležaji sa radijalnim zazorom 0, 10, 20, 30 i 40 μm . Aksijalno opterećenje je izabrano na osnovu eksperimentalnih ispitivanja posmatranog ležaja. Na unutrašnjoj površini unutrašnjeg prstena je zadat broj obrtaja od 1800 o/min.

Da bi se procenila tačnost numeričke simulacije, u okviru ovog rada korišten je princip održanja energije. Pri analizi razmatranog ležaja, „nulta energija“ je manja oko 0,05% od unutrašnje energije što ukazuje da je primenjena veličina mreže konačnih elemenata adekvatna. Greška energije od 0,8% ukazuje da pri analizi nema numeričke nestabilnosti rešenja, i da su rešenja zadovoljavajuće tačnosti za postavljene granične uslove.

Poređenje karakterističnih frekvencija elemenata ležaja određenih na bazi MKE modelovanjem i kvazistatičkim proračunima dolazi se do zaključka da su sve frekvencije elemenata ležaja veće pri MKE modelovanju za 0,1 do 2,5% u odnosu na frekvencije dobijene kvazistatičkim pristupom. Ova mala razlika se javlja zbog toga što relacije u kvazistatičkom postupku ne uzimaju u obzir klizanje kotrljajnih tela. Poklapanje karakterističnih frekvencija elemenata ležaja između kvazistatičkog pristupa i MKE modela ukazuje na zadovoljavajuće rezultate kinematike radijalnog ležaja.

Analiza uticaja zazora na amplitude i frekvencije elemenata ležaja je sprovedena za zazore od 0, 10, 20 i 30 μm . Analiza je sprovedena za 1800 o/min pri spoljašnjem aksijalnom opterećenju $F_a = 200$ N. Povećanjem zazora, dolazi do povećanja veličine amplitude brzine na

karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena. Povećanjem zazora sa 0 μm , na 10 μm veličina amplitude brzine se povećava sa 39,5 na 76,5 $\mu\text{m/s}$, dok se daljim povećanjem zazora na 40 μm , veličina amplitude brzine povećava na 83,5 $\mu\text{m/s}$. Povećanjem zazora od 10 do 40 μm , amplituda brzine se povećava za 8%. Povećanjem zazora od 0 do 10 μm dolazi do naglog skoka veličine amplitude brzine, što je karakteristično za sve frekvencije elemenata ležaja. Na nižim frekvencijama, odnosno u nižem frekventnom području dominantne su vibracije nastale usled zazora i promenljive krutosti, dok su u srednjem i visokom frekventnom području dominantne vibracije nastale usled geometrijskih nesavršenosti (valovitosti, hrapavosti, radijalnog bacanja staza kotrljanja itd). Usled toga, a pošto je MKE model definisan sa idealnim stazama kotrljanja, poređenja sa eksperimentalnim rezultatima (PEAK vrednosti amplitude brzine) imaju smisla samo u nižem frekventnom području (50 do 300 Hz). Dalje, ako se analizira povećanje zazora sa 0 na 30 μm vidi se da dolazi do povećanja amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena za 47% pri eksperimentalnim ispitivanjima, odnosno za 51% pri MKE modelovanju. Pri zazoru $G_r = 0$ μm , odstupanje amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena dobijenog MKE modelovanjem u odnosu na eksperimentalna ispitivanja iznosi 21%, dok pri zazoru od 30 μm iznosi oko 15%. Manje vrednosti amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena određene MKE modelovanjem su posledica idealne staze kotrljanja kao i idealnog kotrljajnog tela. Ako se uzme u obzir da se MKE modelovanjem idealnog ležaja, dobijaju vibracije koje su čisto posledica promene zazora i krutosti ležaja, onda se rezultati mogu smatrati zadovoljavajućim. Može se zaključiti iz navedenog da sa povećanjem veličine unutrašnjeg radijalnog zazora, linearno raste i veličina amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena.

Analiza uticaja spoljašnjeg opterećenja na amplitude i frekvencije obrtanja elemenata ležaja je sprovedena za zazor od 30 μm , pri spoljašnjem aksijalnom opterećenju od 200 do 1000 N. Analiza je izvršena za $n = 1800$ o/min. Kada se usled eksploatacionih uslova moraju koristiti radijalni ležaji sa većim zazorom, prednaprezanje ležaja (aksijalno opterećenje) se primenjuje kako bi se smanjile velike promene amplitude oscilovanja tokom vremena. Sa povećanjem opterećenja od 200 na 1000 N povećava se amplituda brzine na frekvenciji f_o sa 83,5 $\mu\text{m/s}$ na 228,7 $\mu\text{m/s}$, ali se zato amplituda brzine na njenim harmonicima smanjuju za 10% na harmoniku $2xf_o$ do 80% na harmoniku $4xf_o$. Pri ovome dolazi do povećanja amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji unutrašnjeg prstena f_i za 30%, odnosno, povećanja amplitude na frekvenciji kotrljajnih tela f_b za 20%. Aksijalno opterećenje u ovom slučaju teži da zadrži kontakt između staza kotrljanja i kotrljajnog tela. Kako se kotrljajno telo okreće oko ose ležaja, postoji tendencija da kotrljajno telo zaostaje ili napreduje u odnosu na svoj centralni položaj u kavezu, što zavisi od spoljašnjeg aksijalnog opterećenja i zazora. Na ovaj način se stvara veća ili manja razlika između kontaktnih opterećenja i kontaktnih deformacija tokom vremena.

Sa promenom opterećenja, deformacije na spoljašnjoj stazi kotrljanja rastu sa 2,2 μm na 15,51 μm . Sa porastom aksijalnog opterećenja povećava se broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja (sa 3 kotrljajna tela pri $F_a = 200$ N na devet kotrljajnih tela pri $F_a = 1000$ N). Pri tome dolazi do povećanja deformacija, ali i ravnomernijoj promeni deformacija tokom vremena, što dovodi i do smanjivanja amplitude ubrzanja na harmonicima karakteristične

frekvencije spoljašnjeg prstena. Pri aksijanom opterećenju od 1000 N, devet od mogućih jedanaest kotrljajnih tela učestvuje u prenošenju opterećenja, pa se kontaktne opterećenja i kontaktne deformacije ravnomernije raspoređuju između kotrljajnih tela, a samim tim će i promena krutosti tokom vremena biti manja, odnosno, ravnomernija, što takođe utiče na amplitude vibracija. Usled ovoga, odnosno manjih vrednosti amplituda brzine na harmonicima karakteristične frekvencije spoljašnjeg prstena, RMS vrednost vibracija će se u nižem frekventnom području (50 – 300 Hz) smanjivati kako je i utvrđeno eksperimentalnim ispitivanjima.

Na osnovu prikazanih rezultata u radu vidi se da odstupanje PEAK amplituda brzine na frekvenciji f_o kreće u granicama od oko 2 do 14%, te se može konstatovati da prikazani MKE eksplicitno dinamički model može sa velikom tačnošću predvideti frekvencije i amplitude vibracija za idealni ležaj.

9.1.2 Sumiranje rezultata istraživanja ležaja LSQFR 308

Detekcijom postojećih komponenti frekvencija elemenata ležaja u frekventnom spektru, njihove amplitude, prisustva njihovih harmonika (celobrojnih umnožaka) i komponenti modulacije, dolazi se do zaključka o uticaju pojedinih parametara na njegovo dinamičko ponašanje. S druge strane, u mnogim naučnim radovima, se konstatuje da otkaz ležaja nastaje kada u frekventnom spektru veličina amplituda ubrzanja na nekoj od karakterističnih frekvencija pređe 30% od svoje početne vrednosti.

Pri ispitivanju uticaja zazora ležaja LSQFR 308, za eksperimentalno ispitivanje su izabrani ležaji sa zazorom 10 do 40 μm . Analiza uticaja zazora je izvršena pod kombinovanim opterećenjem, pri čemu je broj obrtaja iznosio 200 o/min. Opterećenje i broj obrtaja je određen na osnovu eksploatacionih uslova razmatranog ležaja. Sveobuhvatnim matematičkim modelovanjem i eksperimentalnim ispitivanjem je konstatovano da se maksimalne amplitude ubrzanja javljaju u radijalnom pravcu, te se u radu prikazani rezultati promene amplituda ubrzanja u radijalnom pravcu u vertikalnoj ravni ležaja.

Pri analizi rezultata dobijenih eksperimentalnim ispitivanjem, može se zaključiti da se maksimalne amplitude ubrzanja javljaju na frekvenciji spoljašnjeg prstena, te da su amplitude ubrzanja na ostalim frekvencijama elemenata ležaja značajno manje u odnosu na nju. S druge strane, pri analizi rezultata dobijenih eksperimentalnim ispitivanjima nije uočena promena frekvencija elemenata ležaja, promenom zazora.

Analiza statičkog ponašanja ležaja LSQFR 308 je izvršena za spoljašnje aksijalno i radijalno opterećenje pri čemu se posmatraju ležaji sa radijalnim zazorom, odnosno preklopom od -20 do 30 μm . Analizom su obuhvaćeni uticaji kontaktnih deformacija, kontaktnih opterećenja, pomeranja centra ležaja i krutosti, pri delovanju opterećenja. Analize su izvršene pri broju obrtaja $n = 200$ o/min, što odgovara brzini kretanja poljoprivredne mehanizacije od 20 km/h. Pri analizi su usvojena opterećenja od $F_a = 400 - 2000$ N i $F_r = 1000 - 10\ 000$ N. Analize su sprovedene za aksijalnu silu pritezanja unutrašnjeg prstena ležaja (aksijalno prednaprezanje) od 2000 N.

Analiza uticaja zazora/preklopa je urađena kvazistatičkim modelom za slučaj delovanja aksijalnog opterećenja, radijalnog opterećenja i kombinovanog opterećenja. Pri analizi dobijenih rezultata, došlo se do zaključka da prelaskom iz preklopa na nulti zazor, aksijalna krutost opada za 39%, pri čemu dolazi do smanjenja i radijalne krutosti za 25%. Daljim povećanjem zazora sa 0 na 30 μm , aksijalna krutost se smanjuje za 46% dok radijalna krutost opada sa 143,9 na 124,4 N/ μm , odnosno za oko 13%.

Pomeranje centra ležaja, kao i krutost ležaja je nelinearno u području preklopa i manjih aksijalnih opterećenja. Kako opterećenje raste, tako krutost iz nelinearnosti prelazi u linearnost kada je ležaj sa zazorom, a pri većim vrednostima aksijalnog opterećenja ($F_a > 800$ N) radijalna krutost je približno ista za sve vrednosti zazora. Može se zaključiti da se aksijalna i radijalna krutost ležaja značajno povećavaju sa povećanjem aksijalnog opterećenja i prelaskom iz zazora u preklop. Takođe pomeranje centra ležaja se smanjuje sa smanjenjem zazora i prelaskom u preklop. Prema tome kontaktna krutost i pomeranje centra ležaja pri dejstvu većeg aksijalnog opterećenja imaju isti trend rasta ili opadanja nezavisno od zazora u ležaju dok je vrednost aksijalne krutosti približno ista.

Pri povećanju aksijalnog opterećenja dolazi do povećanja kontaktnih opterećenja sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja uz smanjenje kontaktnih opterećenja sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja. S druge strane ugao kontakta sa unutrašnjom levom i spoljašnjom desnom stazom kotrljanja se povećava dok se sa unutrašnjom desnom i spoljašnjom levom stazom kotrljanja smanjuje.

Povećanjem zazora povećava se odnos između kontaktnih opterećenja na stazama kotrljanja, uz istovremeno povećanje odnosa i između uglova kontakta pogotovo na manjim aksijalnim opterećenjima ($F_a < 1200$ N), što utiče na promenu radijalne i aksijalne krutosti. Na osnovu analize rezultata može se zaključiti da pri višim vrednostima zazora treba povećati aksijalno opterećenje (ili aksijalno silu prednaprezanja). Ukoliko se opadanje ili porast krutosti razmatra od nultog zazora, onda je pri $G_r = 30$ μm pad aksijalne krutosti oko 47% i radijalne oko 16% u odnosu na krutost pri $G_r = 0$ μm . S druge strane pri preklopu od -20 μm aksijalna krutost raste za 37% uz porast radijalne krutosti za 25% u odnosu na krutost pri nultom zazoru.

Sa povećanjem aksijalnog opterećenja dolazi do porasta aksijalne i radijalne krutosti. Povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N pri zazoru $G_r = 30$ μm povećava se aksijalna krutost za 70%. Pri preklopu od -20 μm povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N dolazi do blagog povećavanja aksijalne krutosti za 8%. Radijalna krutost se povećava za oko 35%, povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N pri zazoru $G_r = 30$ μm , dok se pri preklopu od -20 μm povećava samo za oko 2,5%.

Pri delovanju radijalnog opterećenja na ležaj sa kontaktom u četiri tačke, dolazi do neravnomerne raspodele opterećenja na kotrljajna tela, s tim da će od veličina zazora ili preklopa s jedne strane zavisiti broj kotrljajnih tela koja učestvuju u prenošenju opterećenja, a sa druge strane da li će kontakt biti u dve, tri ili četiri tačke. Povećanjem preklopa ili smanjenjem zazora (ili povećanjem aksijalnog opterećenja) povećava se broj kotrljajnih tela koja prenose radijalno opterećenje kao i broj kontaktnih tačaka između kotrljajnih tela i staza

kotrljanja, što značajno smanjuje stepen neravnomernosti raspodele u prenošenju spoljašnjeg opterećenja.

Povećavanjem radijalnog opterećenja sa 1000 na 10000 N aksijalna krutost opada za oko 41%, pri preklopu $-20\ \mu\text{m}$ ili za 66% pri zazoru $30\ \mu\text{m}$ dok povećanjem zazora ili smanjenjem preklopa (-20 do $+30\ \mu\text{m}$) aksijalna krutost opada za 67% pri najmanjem radijalnom opterećenju, dok pri maksimalnom opterećenju povećanjem zazora ili smanjenjem preklopa aksijalna krutost opada za 81%. Ovako veliki pad aksijalne krutosti se može objasniti time da zazor/preklop imaju dominantan uticaj preko broja kotrljajnih tela u zoni opterećenja, pa radijalno opterećenje značajno menja aksijalnu krutost pri delovanju radijalnog opterećenja. Povećanjem radijalnog opterećenja sa najmanje na najveću vrednost, radijalna krutost opada za oko 40% pri preklopu $-20\ \mu\text{m}$ ili za oko 63% pri zazoru $30\ \mu\text{m}$. Pri povećanju zazora ili smanjenjem preklopa radijalna krutost opada za 30% za slučaj najmanjeg radijalnog opterećenja ili za oko 71% pri najvećem radijalnom opterećenju. U radu je napomenuto da su sve navedene analize urađene za aksijalnu silu pritezanja unutrašnjeg prstena od $F_p = 2000\ \text{N}$ prema preporukama proizvođača ležaja. Na osnovu sveobuhvatane analize, došlo se do zaključka da bi silu pritezanja (aksijalno prednaprezanje) trebalo povećati na $3600\ \text{N}$ pri $F_r = 6000\ \text{N}$ i pri zazoru $-20\ \mu\text{m}$, da bi sva kotrljajna tela bila u zoni opterećenja i da bi se kontakt ostvarivao u četiri tačke. Prema tome, a na osnovu većeg broja analiziranih podataka, određena je minimalna veličina sile pritezanja unutrašnjeg prstena da bi sva kotrljajna tela bila u zoni opterećenja i da bi se kontakt ostvarivao u četiri tačke pri zazorima do $30\ \mu\text{m}$, a to je $F_p/F_r > 1,31 \cdot \text{tga}$.

Pri čistom aksijalnom opterećenju krutosti rastu, dok pri čistom radijalnom opterećenju krutosti opadaju. Prema tome, aksijalno opterećenje kod razmatranog ležaja teži da poveća krutost, dok radijalno opterećenje teži da smanji istu. Pri kombinovanom opterećenju od njihovog odnosa će zavistiti da li će doći do opadanja ili porasta krutosti i koliko će procentualno krutosti da opadnu ili porastu. Pri promeni krutosti za preklop $-20\ \mu\text{m}$ i $F_r = 6000\ \text{N}$ u zavisnosti od aksijalnog opterećenja, aksijalna krutost opada samo za 5%, pri čemu se radijalna smanjuje za 13%. Pri nultom zazoru i kombinovanom opterećenju aksijalna krutost opada za 13%, dok radijalna opada za 33%. Pri zazoru $-20\ \mu\text{m}$ dolazi do značajnog pada aksijalne krutosti za 27%, pri čemu radijalna krutost opada za oko 53%. Povećanjem zazora sa 0 na $20\ \mu\text{m}$, aksijalna krutost pri kombinovanom opterećenju $F_a = 2000\ \text{N}$ i $F_r = 6000\ \text{N}$ opada za 21% dok radijalna krutost opada za oko 50%.

Modalna analiza je sprovedena za slučaj slobodno oslonjenog ležaja, pobuđenog sa silom od $220\ \text{N}$, kako bi se rezultati uporedili sa eksperimentalnim ispitivanjem. Sveobuhvatnim analizama radijalnog ležaja i ležaja sa kontaktom u četiri tačke je ustanovljeno da pri modalnoj analizi slobodno oslonjenog ležaja zazor ne utiče na sopstvene frekvencije i modove oscilovanja. Analizom rezultata vidi se da je dominantna sopstvena frekvencija koja se javlja usled oscilovanja spoljašnjeg prstena ležaja. Modalni parametri ležaja na bazi MKE modelovanja su određeni funkcijom frekventnog odziva. Poređenjem vrednosti može se uočiti da je najveće odstupanje između karakterističnih frekvencija određenih MKE modelovanjem i eksperimentalno, na prvom modu. Međutim, kako je maksimalno odstupanje oko 6%, može se zaključiti da MKE modelovanje daje

zadovoljavajuće rezultate. Veća razlika kod modalne krutosti između eksperimentalnih i MKE rezultata je najviše posledica većeg prigušenja za 40% i veće amplitude pri MKE modelovanju.

Za analizu uticaja preklopa/zazora, kao i opterećenja na frekvencije i amplitude oscilacija kod ležaja sa kontaktom u četiri tačke razmatrani su ležaji sa različitim vrednostima preklopa/zazora koji se kreću u dijapazonu od -20 do 40 μm sa inkrementom od 10 μm . Na osnovu analize uticaja preklopa/zazora pri matematičkom modelovanju, izvršeno je poređenje sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem. Maksimalne amplitude ubrzanja kod razmatranog ležaja sa kontaktom u četiri tačke se javljaju na frekvenciji spoljašnjeg prstena u pravcu y ose, pa su rezultati analizirani za y osu. Smanjenjem preklopa, dolazi do povećanja veličine amplitude ubrzanja, daljim prelaskom u zazor i povećanjem zazora, zanačajno se povećava amplituda ubrzanja. Smanjenjem preklopa sa -20 μm i prelaskom u zazor do 20 μm veličina amplitude ubrzanja se povećava sa 0,13 na 0,31 m/s^2 , dok se daljim povećanjem zazora na 40 μm , veličina amplitude ubrzanja naglo raste na 0,78 m/s^2 , pri delovanju radijalnog opterećenja. Za preklop od -20 μm pri delovanju aksijalnog opterećenja, dolazi do smanjenja veličine amplitude ubrzanja za 38% u odnosu na amplitudu ubrzanja pri delovanju radijalnog opterećenja, odnosno za 30% pri delovanju kombinovanog opterećenja. Pri zazoru od 40 μm amplituda ubrzanja smanjuje za 33% pri delovanju aksijalnog opterećenja u odnosu na radijalno opterećenje. Delovanjem kombinovanog opterećenja pri vrednostima preklopa i malim zazorima do 10 μm , amplitude ubrzanja su približno iste kao i u slučaju delovanja samo aksijalnog opterećenja. Međutim, povećavanjem zazora od 10 do 40 μm , amplitude ubrzanja se povećavaju od 14% do 16%. Pri maksimalnom razmatranom zazoru od 40 μm amplituda ubrzanja je pri delovanju radijalnog opterećenja veća za 33% u odnosu na slučaj kada na ležaj deluje samo aksijalno opterećenje i 21% za slučaj delovanja kombinovanog opterećenja.

Dalje, sa prelaskom u zazor dolazi i do povećanja amplituda na harmonicima spoljašnjeg prstena. Pri zazoru od 20 μm amplituda na drugom harmoniku raste za 30% i 40% na trećem harmoniku u odnosu na amplitude pri preklopu od -20 μm . Ako se kao referentne vrednosti uzmu amplitude na frekvenciji spoljašnjeg prstena na nultom zazoru, onda se može reći da amplituda ubrzanja opada pri preklopu od -20 μm za 30%, dok pri povećanju zazora na 40 μm amplituda ubrzanja raste za 71%. Pri delovanju aksijalnog opterećenja dolazi do istog ponašanja amplituda ubrzanja na svim sopstvenim frekvencijama elemenata ležaja.

Poređenjem karakterističnih frekvencija elemenata ležaja određenih na bazi MKE modelovanjem i kvazistatičkim proračunima vidi se da sve frekvencije elementa ležaja su veće pri MKE modelovanju za 11 do 26% u odnosu na frekvencije dobijene kvazistatičkim pristupom. Ova razlika se javlja zbog toga što relacije u okviru analitičkog postupka ne uzimaju u obzir klizanje kotrljajnih tela. Poklapanje karakterističnih frekvencija elemenata ležaja između analitičkog pristupa i MKE modela ukazuje na zadovoljavajuće rezultate simulacije osnovne kinematike ležaja sa kontaktom u četiri tačke.

Povećanje zazora sa 10 na 40 μm dovodi do povećanja amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena za oko 75% pri eksperimentalnim

ispitivanjima, i pri MKE modelovanju. Pri zazoru $G_r = 10 \mu\text{m}$ odstupanje amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena dobijenog MKE modelovanja u odnosu na eksperimentalna ispitivanja iznosi 28% dok pri zazoru od $40 \mu\text{m}$ iznosi oko 29%. Manje vrednosti amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena određene MKE modelovanjem su posledica modelovanja ležaja sa idealnim stazama kotrljanja i idealnim kotrljajnim telima. Ako se uzme u obzir da se MKE modelovanjem idealnog ležaja, dobijaju strukturne vibracije ili vibracije nastale usled promene pravca i intenziteta delovanja kontaktnog opterećenja kojima kotrljanja tela deluju na staze kotrljanja, onda se rezultati mogu smatrati zadovoljavajućim. Sa povećanjem veličine unutrašnjeg radijalnog zazora, linearno raste i veličina amplitude brzine na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena.

Pri manjim vrednostima zazora broj kotrljajnih tela u zoni opterećenja je veći s jedne strane, s druge strane veći broj kotrljajnih tela ostvaruje kontakt u četiri tačke što rezultira manjim promenama kako elastičnih deformacija, tako i kontaktnih napona na stazama kotrljanja tokom vremena.. Naime, promenom intenziteta i pravca kontaktnih opterećenja i kontaktnih napona između kotrljajnih tela i staza kotrljanja ležaja, tokom rada, menja se i njegova kontaktna krutost. Pri zazoru od $10 \mu\text{m}$ opterećenje se skoro podjednako deli na sva kotrljajna tela koja ostvaruju kontakt u četiri tačke sa stazama kotrljanja, pa će i RMS vrednost kontaktnih napona na obe staze biti približno jednaki. Pri zazoru od $40 \mu\text{m}$, primenjeno aksijalno opterećenje nije dovoljno da bi veći broj tela prenosio opterećenje u četiri tačke, već se celokupno opterećenje deli na kotrljajna tela koja ostvaruju kontakt u dve ili tri tačke što dovodi do većih (intenzivnijih) razlika između kontaktnih napona na levoj i desnoj stazi kotrljanja tokom vremena. Uopšteno gledano, ova vremenska promenljivost napona, kontaktnih opterećenja, deformacija prouzrokuje vibracije između prstenova ležaja i kod idealnog ležaja. Ove vibracije kao i vibracije nastale od zazora (diskretne strukture elemenata ležaja) su dominantne na karakterističnoj frekvenciji spoljašnjeg prstena ležaja.

Najveća promena frekvencija elementa ležaja se dešava pri promeni opterećenja, odnosno, promeni spoljašnjeg aksijalnog opterećenja. Povećanjem aksijalnog opterećenja od 400 do 2000 N dolazi do smanjivanja frekvencije spoljašnjeg prstena za 5% sa 12,84 na 12,1 Hz, nakon čega je ova frekvencija konstantna. Pri ovome se frekvencija kotrljajnih tela povećava za 9%, a frekvencija kaveza za 19%. Frekvencije ostalih elemenata ležaja se smanjuju za ispod 1%. Povećanje frekvencije kotrljajnih tela i kaveza je uslovljeno povećanjem spoljašnjeg opterećenja, posebno aksijalnog. Povećanje aksijalnog opterećenja dovodi do povećanja broja kotrljajnih tela koja prenose opterećenje, a samim tim do smanjenja razlike između uglova kontakta sa levom i desnom stazom kotrljanja. Usled ovoga dolazi do značajnog povećanja i frekvencija kotrljajnih tela i kaveza, a smanjenja frekvencija prstenova.

Za vrednost zazora $30 \mu\text{m}$ sa povećanjem aksijalnog opterećenja od 400 do 1200 N pri konstantnom radijalnom opterećenju, raste amplituda ubrzanja na frekvenciji spoljašnjeg prstena sa $0,07 \text{ m/s}^2$ na $0,13 \text{ m/s}^2$ uz opadanje amplituda ubrzanja na njegovim harmonicima. Pri ovom dolazi i do povećanja amplituda ubrzanja na frekvenciji kotrljajnih tela (oko 6%) i frekvenciji unutrašnjeg prstena (oko 8%) uz istovremeno opadanje amplituda na harmonicima

ovih frekvencija. Daljim povećanjem opterećenja sa 1200 na 2000 N, povećava se amplituda ubrzanja na frekvenciji spoljašnjeg prstena za 46%, pri čemu rastu i amplitude ubrzanja na frekvenciji kotrljajnih tela i unutrašnjeg prstena za oko 86% odnosno 70%, ali se pri tome harmonici na frekvencijama spoljašnjeg i unutrašnjeg prstena gube iz spektra.

Amplitude ubrzanja na frekvenciji spoljašnjeg prstena u zavisnosti od zazora/preklopa pri konstantnom radijalnom opterećenju od $F_r = 6000$ N i promenljivom aksijalnom opterećenju od 400 do 1200, raste sa 0,02 na 0,035 m/s^2 , u području preklopa. U području zazora od 0 do 40 μm amplituda ubrzanja raste sa 0,03 na 0,14 μm , povećanjem opterećenja od 400 N do 1200 N. Daljim povećanjem aksijalnog opterećenja od 1200 do 2000 u području preklopa, povećava se amplituda ubrzanja za 40%, dok se u području zazora od 0 do 40 μm amplituda ubrzanja povećava za oko 50%.

Vek ležaja LSQFR 308 određen je na osnovu eksperimentalnih podataka na bazi dva parametra. Prvi parametar je temperatura na kojoj dolazi do zaustavljanja eksperimentalnog štanda, dok je drugi parametra povećanje nivo vibracija dobijenih iz analiziranog spektra prikazanog u poglavlju 6. Ako se posmatra prvi parametar, odnosno temperatura, može se zaključiti da sa povećanjem zazora sa 10 na 40 μm , dolazi do smanjenja veka ležaja sa 245 na 219 h. Takođe i kod povećanja nivoa vibracija dolazi do smanjenja veka ležaja sa 236 na 205 h, za iste vrednosti zazora kao i kod prvog parametra. Ovo znači da povećanje nivoa vibracija ima veći uticaja na vek ležaja od temperature koja je preporučena za zaustavljanje štanda.

Vek ležaja LSQR 308 opada sa povećanjem zazora u ležaju. Povećanjem zazora sa 10 na 40 μm vek opada za 13% pri eksperimentalnim ispitivanjima, 5% pri kvazistatičkom modelovanju i 19% pri MKE modelovanju. Ako se kao referentna vrednost uzme vek određen eksperimentalnim ispitivanjem na bazi ubrzanja, onda vek ležaja određen kvazistatičkim modelovanjem odstupa za 20% pri zazoru od 10 μm , 24% pri zazoru od 20 μm , i 31% pri zazoru od 40 μm . Vek ležaja određen MKE modelovanje odstupa od eksperimentalno dobijenog veka za 14% pri zazoru od 10 μm , 16% pri zazoru 20 μm i 11% pri zazoru od 40 μm . S druge strane ako se kao referentna vrednost uzme vek određen eksperimentalnim ispitivanjem na bazi temperature onda vek određen kvazistatičkim modelom odstupa za oko 15%, dok vek određen MKE modelom odstupa za oko 12%. Na osnovu prethodnog se može konstatovati da predloženi modeli daju zadovoljavajuće rezultate pri određivanju veka posmatranog ležaja.

Vek ležaja se smanjuje porastom aksijalnoog opterećenja s jedne strane, dok s druge strane opada povećanjem zazora u ležaju. Povećanjem aksijalnog opterećenja sa 400 na 2000 N vek opada za 35% pri preklopu od -20 μm , ili za 44% pri zazoru od 30 μm . U području preklopa do nultog zazora pri opterećenju $F_a = 400$ N i $F_r = 6000$ N vek opada samo za oko 2%. Pri ostalim opterećenjima u istom području preklopa vek opada za oko 8%. U području zazora od 0 do 30 μm vek ležaja pri opterećenju $F_a = 400$ N i $F_r = 6000$ N opada za 16%, dok pri ostalim opterećenjima za isto područje zazora vek opadne oko 19 do 22%.

Povećanjem radijalnog opterećenja smanjuje se značajno vek ležaja, pri čemu povećanjem zazora vek ležaja ima blagi pad pri većim vrednostima radijalnog opterećenja. Povećanjem radijalnog opterećenja sa 4000 na 10000 N vek opada za 87% pri preklopu od -

20 μm , ili za 62% pri zazoru od 30 μm . U području preklopa do nultog zazora pri opterećenju $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 10000 \text{ N}$ vek opada samo za oko 5%. Pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 8000 \text{ N}$ u istom području preklopa vek opada za oko 7%, dok pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ vek se smanjuje za oko 12%. U području zazora od 0 do 30 μm vek ležaja pri opterećenju $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 1000 \text{ N}$ opada za 12%, dok pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 8000 \text{ N}$ opada za 16%. Pri opterećenju $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 6000 \text{ N}$ za isto područje zazora vek opadne oko 25%. Najveće smanjenje veka ležaja u području zazora je pri $F_a = 2000 \text{ N}$ i $F_r = 4000 \text{ N}$ i iznosi oko 40%.

Na osnovu sveobuhvatne i vrlo detaljne numeričke i eksperimentalne analize mehaničkog ponašanja kotrljajnih ležaja, na kraju se može zaključiti, da su u radu potvrđene sledeće hipoteze:

- Primenom metode konačnih elemenata je moguće odrediti uticaj konstrukcionih (zazora) i eksploatacionih (spoljašnjeg opterećenja) parametara na statičko ponašanje kotrljajnih ležaja.
- MKE modelovanjem je moguće eksplicitnom metodom odrediti dinamičke karakteristike (frekvencije elemenata ležaja i amplitudu brzine i/ili ubrzanja) kotrljajnih ležaja za odgovarajuće eksploatacione uslove.
- Metodom konačnih elemenata i spektralnom gustinom amplitude (PSD) preko Minerovog pravila i S-N krive je moguće sa velikom pouzdanošću odrediti vek ležaja.

9.2 Pravci budućeg istraživanja

Analizom dosadašnjih rezultata istraživanja statičkog i dinamičkog ponašanja radijalnih ležaja i ležaja sa kontaktom u četiri tačke, na osnovu dostupnih literaturnih informacija, kao i na osnovu sopstvenih iskustava i rezultata, moguće je predložiti neke od pravca budućih istraživanja, kao što su:

- Unapređenje korisničkog interfejsa za razvijena programska rešenja,
- Definisane matematičkih modela za analizu cilindrično valjčasti i konično valjačasti ležaja i njihova eksperimentalna verifikacija, kao i razvoj odgovarajućih programskih rešenja,

Na kraju treba konstatovati da je razvoj ležaja sa kontaktom u četiri tačke još uvek aktuelna i nedovoljno istražena oblast, stoga, analiza i ispitivanje uticaja bilo kog parametra ovog ležaja, na statičko i dinamičko ponašanje istog, može predstavljati pravac budućih istraživanja.

10 LITERATURA

- [1.] www.kaydonbearings.com/white_papers_7.htm, Pristupljeno: [19.11.2020.].
- [2.] Abasolo, M., Coria, I., Plaza, J., Aguirrebeitia, J.: *New selection curves for four contact point slewing bearings*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016. **230**(10): pp. 1715-1725.
- [3.] Aguirrebeitia, J., Abasolo, M., Avilés, R., de Bustos, I.F.: *General static load-carrying capacity for the design and selection of four contact point slewing bearings: Finite element calculations and theoretical model validation*, Finite Elements in Analysis and Design, 2012. **55**: pp. 23-30.
- [4.] Aguirrebeitia, J., Avilés, R., Fernández de Bustos, I., Abasolo, M.: *Calculation of general static load-carrying capacity for the design of four-contact-point slewing bearings*, Journal of Mechanical Design, 2010. **132**(6).
- [5.] Aguirrebeitia, J., Plaza, J., Abasolo, M., Vallejo, J.: *Effect of the preload in the general static load-carrying capacity of four-contact-point slewing bearings for wind turbine generators: theoretical model and finite element calculations*, Wind Energy, 2014. **17**(10): pp. 1605-1621.
- [6.] Aithal, S., Siva Prasad, N., Shunmugam, M., Chellapandi, P.: *Effect of manufacturing errors on load distribution in large diameter slewing bearings of fast breeder reactor rotatable plugs*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016. **230**(9): pp. 1449-1460.
- [7.] Aktürk, N.: *The effect of waviness on vibrations associated with ball bearings*, Journal of tribology, 1999. **121**(4): pp. 667-677.
- [8.] Akturk, N., Uneeb, M., Gohar, R.: *The effects of number of balls and preload on vibrations associated with ball bearings*, 1997.
- [9.] Alfares, M.A., Elsharkawy, A.A.: *Effects of axial preloading of angular contact ball bearings on the dynamics of a grinding machine spindle system*, Journal of Materials Processing Technology, 2003. **136**(1-3): pp. 48-59.
- [10.] Amasorrain, J.I., Sagartzazu, X., Damian, J.: *Load distribution in a four contact-point slewing bearing*, Mechanism and Machine Theory, 2003. **38**(6): pp. 479-496.
- [11.] Ambrozkiewicz, B., Litak, G., Georgiadis, A., Meier, N., Gassner, A.: *Analysis of Dynamic Response of a Two Degrees of Freedom (2-DOF) Ball Bearing Nonlinear Model*, Applied Sciences, 2021. **11**(2): pp. 787.

-
- [12.] Antoine, J.-F., Abba, G., Molinari, A.: *A new proposal for explicit angle calculation in angular contact ball bearing*, Journal of Mechanical Design, 2006. **128**(2): pp. 468-478.
- [13.] Aramaki, H.: *Rolling bearing analysis program package BRAIN*, Motion & Control, 1997. **3**: pp. 15-24.
- [14.] Arumugam, P., Swarnamani, S., Prabhu, B.S.: *An Experimental Investigation on the Static and Dynamic Characteristics of Journal Bearings Under the Influence of Twisting Misalignment*, Journal of Tribology, 1997. **119**(1): pp. 188-192.
- [15.] Bai, C., Zhang, H., Xu, Q.: *Effects of axial preload of ball bearing on the nonlinear dynamic characteristics of a rotor-bearing system*, Nonlinear Dynamics, 2008. **53**(3): pp. 173-190.
- [16.] Changqing, B., Qingyu, X.: *Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness*, Journal of Sound and Vibration, 2006. **294**(1-2): pp. 23-48.
- [17.] Chen, G., Jia, P., He, J.: *Effects of geometric parameters on static load capacity of a double-row four-point contact ball bearing*, Journal of Mechanical Science and Technology, 2013. **27**(4): pp. 1053-1061.
- [18.] Chen, G., Wen, J.: *Effects of size and raceway hardness on the fatigue life of large rolling bearing*, Journal of Mechanical Science and Technology, 2015. **29**(9): pp. 3873-3883.
- [19.] Chen, J.-H., Lee, A.-C.: *Estimation of linearized dynamic characteristics of bearings using synchronous response*, International journal of mechanical sciences, 1995. **37**(2): pp. 197-219.
- [20.] Chen, J.-H., Lee, A.-C.: *Identification of linearized dynamic characteristics of rolling element bearings*, 1997.
- [21.] Chen, L., Zhang, Y., Xia, X.: *Contact stress and deformation of blade bearing in wind turbine*, 2010 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2010. IEEE. pp. 833-836.
- [22.] Dareing, D., Johnson, K.: *Fluid film damping of rolling contact vibrations*, Journal of Mechanical Engineering Science, 1975. **17**(4): pp. 214-218.
- [23.] De Mul, J., Vree, J., Maas, D.: *Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction—Part II: application to roller bearings and experimental verification*, Journal of Tribology, 1989.
- [24.] Ghafari, S., Abdel-Rahman, E., Golnaraghi, F., Ismail, F.: *Vibrations of balanced fault-free ball bearings*, Journal of Sound and Vibration, 2010. **329**(9): pp. 1332-1347.
- [25.] Gunduz, A., Dreyer, J.T., Singh, R.: *Effect of bearing preloads on the modal characteristics of a shaft-bearing assembly: Experiments on double row angular contact ball bearings*, Mechanical Systems and Signal Processing, 2012. **31**: pp. 176-195.
- [26.] Gunduz, A., Singh, R.: *Stiffness matrix formulation for double row angular contact ball bearings: Analytical development and validation*, Journal of Sound and Vibration, 2013. **332**(22): pp. 5898-5916.
-

-
- [27.] Gupta, P.: *Dynamics of rolling-element bearings—Part I: Cylindrical roller bearing analysis*, 1979.
- [28.] Hagi, G., Gafitanu, M.: *Preload-service life correlation for ball bearings on machine tool main spindles*, *Wear*, 1994. **172**(1): pp. 79-83.
- [29.] Halpin, J.D., Tran, A.N.: *An Analytical Model of Four-Point Contact Rolling Element Ball Bearings*, *Journal of Tribology*, 2016. **138**(3).
- [30.] Harris, T.A.: *Rolling bearing analysis*. 2001: John Wiley and sons.
- [31.] Harris, T.A., Kotzalas, M.N.: *Advanced concepts of bearing technology: rolling bearing analysis*. 2006: CRC press.
- [32.] Harris, T.A., Kotzalas, M.N.: *Essential concepts of bearing technology*. 2006: CRC press.
- [33.] Harsha, S.: *Nonlinear dynamic response of a balanced rotor supported by rolling element bearings due to radial internal clearance effect*, *Mechanism and Machine Theory*, 2006. **41**(6): pp. 688-706.
- [34.] Harsha, S., Kankar, P.: *Stability analysis of a rotor bearing system due to surface waviness and number of balls*, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2004. **46**(7): pp. 1057-1081.
- [35.] Harsha, S., Sandeep, K., Prakash, R.: *Non-linear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness*, *Journal of Sound and Vibration*, 2004. **272**(3-5): pp. 557-580.
- [36.] He, P., Wang, Y., Liu, H., Guo, E., Wang, H.: *Optimization design of structural parameters of single-row four-point contact ball slewing bearing*, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020. **42**(291): pp. 291.
- [37.] Heras, I., Aguirrebeitia, J., Abasolo, M.: *Friction torque in four contact point slewing bearings: Effect of manufacturing errors and ring stiffness*, *Mechanism and Machine Theory*, 2017. **112**: pp. 145-154.
- [38.] Houpert, L.: *An engineering approach to Hertzian contact elasticity—part I*, *J. Trib.*, 2001. **123**(3): pp. 582-588.
- [39.] Houpert, L.: *An engineering approach to non-hertzian contact elasticity—Part II*, *J. Trib.*, 2001. **123**(3): pp. 589-594.
- [40.] Hui-yuan, Y., Chun-xi, Z., Wu-Xing, L.: *Contact analysis on large negative clearance four-point contact ball bearing*, *Procedia Engineering*, 2012. **37**: pp. 174-178.
- [41.] Hwang, Y.-K., Lee, C.-M.: *Development of a simple determination method of variable preloads for high speed spindles in machine tools*, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2015. **16**(1): pp. 127-134.
- [42.] Hwang, Y.-K., Lee, C.-M.: *A review on the preload technology of the rolling bearing for the spindle of machine tools*, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2010. **11**(3): pp. 491-498.
- [43.] Jacobs, W., Boonen, R., Sas, P., Moens, D.: *The influence of the lubricant film on the stiffness and damping characteristics of a deep groove ball bearing*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014. **42**(1-2): pp. 335-350.
- [44.] Jang, G., Jeong, S.-W.: *Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness*, *Journal of Sound and Vibration*, 2004. **269**(3-5): pp. 709-726.
-

- [45.] Jang, G., Jeong, S.: *Analysis of a ball bearing with waviness considering the centrifugal force and gyroscopic moment of the ball*, J. Trib., 2003. **125**(3): pp. 487-498.
- [46.] Jang, G., Jeong, S.: *Nonlinear excitation model of ball bearing waviness in a rigid rotor supported by two or more ball bearings considering five degrees of freedom*, J. Trib., 2002. **124**(1): pp. 82-90.
- [47.] Jiang, S., Mao, H.: *Investigation of variable optimum preload for a machine tool spindle*, International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2010. **50**(1): pp. 19-28.
- [48.] Jiang, S., Zheng, S.: *A modeling approach for analysis and improvement of spindle-drawbar-bearing assembly dynamics*, International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2010. **50**(1): pp. 131-142.
- [49.] Jones, A.: *A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions*, 1960.
- [50.] Joshi, A., Kachhia, B., Kikkari, H., Sridhar, M., Nelias, D.: *Running torque of slow speed two-point and four-point contact bearings*, Lubricants, 2015. **3**(2): pp. 181-196.
- [51.] Kang, S.-H., Tesar, D.: *An analytical comparison between ball and crossed roller bearings for utilization in actuator modules for precision modular robots*, in *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2003. pp. 1221-1230.
- [52.] Kang, Y., Huang, C.-C., Lin, C.-S., Shen, P.-C., Chang, Y.-P.: *Stiffness determination of angular-contact ball bearings by using neural network*, Tribology International, 2006. **39**(6): pp. 461-469.
- [53.] Kang, Y., Shen, P.-C., Huang, C.-C., Shyr, S.-S., Chang, Y.-P.: *A modification of the Jones-Harris method for deep-groove ball bearings*, Tribology international, 2006. **39**(11): pp. 1413-1420.
- [54.] Knežević, I.: *Analiza dinamičkog ponašanja kugličnih ležaja primenom veštačkih neuronskih mreža*, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, 2020.
- [55.] Kraus, J., Blech, J., Braun, S.: *In situ determination of rolling bearing stiffness and damping by modal analysis*, 1987.
- [56.] Kunert, K.: *Spannungsverteilung im Halbraum bei elliptischer Flächenpressungsverteilung über einer rechteckigen Druckfläche*, Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A, 1961. **27**(6): pp. 165-174.
- [57.] Lacroix, S., Nélias, D., Leblanc, A.: *Experimental study of four-point contact ball bearing with deformable rings*, Tribology Transactions, 2015. **58**(6): pp. 963-970.
- [58.] Lacroix, S., Nélias, D., Leblanc, A.: *Four-point contact ball bearing model with deformable rings*, Journal of Tribology, 2013. **135**(3).
- [59.] Leblanc, A., Nelias, D.: *Analysis of ball bearings with 2, 3 or 4 contact points*, Tribology transactions, 2008. **51**(3): pp. 372-380.
- [60.] Leblanc, A., Nelias, D.: *Ball motion and sliding friction in a four-contact-point ball bearing*, 2007.
- [61.] Liao, N.T., Lin, J.F.: *A new method for the analysis of deformation and load in a ball bearing with variable contact angle*, J. Mech. Des., 2001. **123**(2): pp. 304-312.

- [62.] Liew, A.: *A study of a rotor system with ball bearing induced non-linearities; and the development of transfer matrix techniques suitable for analysing such systems*, 1977.
- [63.] Lin, B., Duan, M., Okwudire, C.E., Wou, J.S.: *A Simplified Analytical Model of Rolling/Sliding Behavior and Friction in Four-Point-Contact Ball Bearings and Screws*, in *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2017. American Society of Mechanical Engineers. pp.
- [64.] Lin, C.-W., Tu, J.F.: *Model-based design of motorized spindle systems to improve dynamic performance at high speeds*, *Journal of Manufacturing Processes*, 2007. **9**(2): pp. 94.
- [65.] Liqin, W., Li, C., Dezhi, Z., Le, G.: *Nonlinear dynamics behaviors of a rotor roller bearing system with radial clearances and waviness considered*, *Chinese Journal of Aeronautics*, 2008. **21**(1): pp. 86-96.
- [66.] Liu, J., Shao, Y.: *Vibration modelling of nonuniform surface waviness in a lubricated roller bearing*, *Journal of Vibration and Control*, 2017. **23**(7): pp. 1115-1132.
- [67.] Lundberg, G.: *Dynamic capacity of rolling bearings*, IVA Handlingar, 1947. **196**: pp. 12.
- [68.] Lynagh, N., Rahnejat, H., Ebrahimi, M., Aini, R.: *Bearing induced vibration in precision high speed routing spindles*, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2000. **40**(4): pp. 561-577.
- [69.] Marsh, E.R., Yantek, D.: *Experimental measurement of precision bearing dynamic stiffness*, *Journal of Sound and Vibration*, 1997. **202**(1): pp. 55-66.
- [70.] Mevel, B., Guyader, J.: *Routes to chaos in ball bearings*, *Journal of Sound and Vibration*, 1993. **162**(3): pp. 471-487.
- [71.] Mitrović, R.: *Istraživanje uticaja konstruktivnih i triboloških parametara kotrljajnog kugličnog ležaja na radnu sposobnost pri velikim učestanostima obrtanja*, 1992 Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Mašinski Fakultet
- [72.] Mladenović, C.: *Dinamičko ponašanje obradnih sistema za mikroobradu*, 2020, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka.
- [73.] Olave, M., Sagartzazu, X., Damian, J., Serna, A.: *Design of four contact-point slewing bearing with a new load distribution procedure to account for structural stiffness*, *Journal of Mechanical Design*, 2010. **132**(2).
- [74.] Palmgren, A.: *Ball and roller bearing engineering*, brbe, 1959.
- [75.] Saito, S.: *Calculation of nonlinear unbalance response of horizontal Jeffcott rotors supported by ball bearings with radial clearances*, 1985.
- [76.] Sarangi, M., Majumdar, B., Sekhar, A.: *Stiffness and damping characteristics of lubricated ball bearings considering the surface roughness effect. Part 2: numerical results and application*, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2004. **218**(6): pp. 539-548.
- [77.] Sayles, R., Poon, S.: *Surface topography and rolling element vibration*, *Precision Engineering*, 1981. **3**(3): pp. 137-144.
- [78.] Sjoval, H.: *The load distribution within ball and roller bearings under given external radial and axial load*, *Tekniks Tidskrift Mek.*, 1933(9).
- [79.] Stone, B.: *The state of the art in the measurement of the stiffness and damping of rolling element bearings*, *CIRP Annals*, 1982. **31**(2): pp. 529-538.

- [80.] Stribeck, R.: *Ball bearings for various loads*, Trans. ASME, 1907. **29**: pp. 420-463.
- [81.] Than, V.-T., Huang, J.H.: *Nonlinear thermal effects on high-speed spindle bearings subjected to preload*, Tribology International, 2016. **96**: pp. 361-372.
- [82.] Tiwari, M., Gupta, K., Prakash, O.: *Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor*, Journal of Sound and Vibration, 2000. **238**(5): pp. 723-756.
- [83.] Tomović, R.: *Istraživanje uticaja konstrukcionih parametra kotrljajnih ležaja na stanje njihove radne ispravnosti*, 2009, Doktorska disertacija, Univerziteta u Nišu, Mašinski fakultet
- [84.] Tomovic, R., Miltenovic, V., Banic, M., Miltenovic, A.: *Vibration response of rigid rotor in unloaded rolling element bearing*, International Journal of Mechanical Sciences, 2010. **52**(9): pp. 1176-1185.
- [85.] Upadhyay, S., Harsha, S., Jain, S.: *Analysis of nonlinear phenomena in high speed ball bearings due to radial clearance and unbalanced rotor effects*, Journal of Vibration and Control, 2010. **16**(1): pp. 65-88.
- [86.] Villa, C., Sinou, J.-J., Thouverez, F.: *Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008. **13**(4): pp. 804-821.
- [87.] Wang, W.-z., Hu, L., Zhang, S.-g., Zhao, Z.-q., Ai, S.: *Modeling angular contact ball bearing without raceway control hypothesis*, Mechanism and Machine Theory, 2014. **82**: pp. 154-172.
- [88.] Wang, Y.S., Wu, Y., Zhu, H.F.: *Quasi-Static Analysis on a Large-Sized Four Contact-Point Slewing Bearing with Negative Axial Play*, in *Applied Mechanics and Materials*, 2013. Trans Tech Publ. pp. 219-222.
- [89.] Wang, Y.S., Zhu, H.F.: *Contact Stress Analysis on a Large-Sized Four Contact-Point Slewing Bearing with Negative Axial Play*, *Applied Mechanics and Materials*, 2013. Trans Tech Publ. pp. 223-226.
- [90.] Wardle, F.: *Vibration forces produced by waviness of the rolling surfaces of thrust loaded ball bearings Part 1: Theory*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1988. **202**(5): pp. 305-312.
- [91.] Wardle, F., Poon, S.: *Rolling bearing noise-cause and cure*, Chartered Mechanical Engineer, 1983. **30**: pp. 36-40.
- [92.] Wensing, J.A.: *On the dynamics of ball bearings*, Twente University, 1998.
- [93.] Wijnant, Y.H., Wensing, J., Nijen, G.v.: *The influence of lubrication on the dynamic behaviour of ball bearings*, Journal of Sound and Vibration, 1999. **222**(4): pp. 579-596.
- [94.] Xu, T., et al.: *A preload analytical method for ball bearings utilising bearing skidding criterion*, Tribology International, 2013. **67**: pp. 44-50.
- [95.] Yamamoto, T.: *On the vibration of a shaft supported by bearing having radial clearance*, Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineering, 1955. **21**(103): pp. 182-192.

- [96.] Yao, T., Wang, L., Liu, X., Huang, Y.: *Multibody dynamics simulation of thin-walled four-point contact ball bearing with interactions of balls, ring raceways and crown-type cage*, Multibody System Dynamics, 2020. **48**(3): pp. 337-372.
- [97.] Yhland, E.: *A Linear Theory of Vibrations Caused by Ball Bearings With Form Errors Operating at Moderate Speed*, Journal of Tribology, 1992. **114**(2): pp. 348-359.
- [98.] Yhland, E.: *Paper 29: Waviness Measurement-An Instrument for Quality Control in Rolling Bearing Industry*, in *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, 1967. SAGE Publications Sage UK: London, England. pp. 438-445.
- [99.] Zeillinger, R., Springer, H., Kötttritsch, H.: *Experimental determination of damping in rolling bearing joints*, in *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, 1994. American Society of Mechanical Engineers. pp. V005T14A016.
- [100.] Zeljković, M.: *Sistem za automatizovano projektovanje i predikciju ponašanja sklopa glavnog vretena mašina alatki*, 1996., Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
- [101.] Zhang, J., Fang, B., Hong, J., Zhu, Y.: *Effect of preload on ball-raceway contact state and fatigue life of angular contact ball bearing*, Tribology International, 2017. **114**: pp. 365-372.
- [102.] Zhang, W., Deng, S., Chen, G., Cui, Y.: *Impact of lubricant traction coefficient on cage's dynamic characteristics in high-speed angular contact ball bearing*, Chinese Journal of Aeronautics, 2017. **30**(2): pp. 827-835.
- [103.] Živković, A.: *Računarska i eksperimentalna analiza ponašanja kugličnih ležaja za specijalne namene*, 2013., Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka.
- [104.] Živković A., Knežev M., Zeljković M., Bojanić Šejat M., Mijušković M.: *Analysis static behaviour of ball bearing with two and four contact points*, Machine Design, 2019. **11**(1821-1259): pp. 131-134.
- [105.] Živković A., Knežev M., Zeljković M., Mijušković M.: *Static Analysis of Four – Point Contact Ball Bearings for Agricultural Mechnization*, Proceedings of 14th International Conference on Accomplishments in Mechanical and Industrial Engineering DEMI, 2017. Banja Luka: University of Banja Luka. pp. 43-50.
- [106.] Zupan, S., Prebil, I.: *Carrying angle and carrying capacity of a large single row ball bearing as a function of geometry parameters of the rolling contact and the supporting structure stiffness*, Mechanism and Machine Theory, 2001. **36**(10): pp. 1087-1103.
- [107.] Zverev, I., Eun, I.-U., Lee, C.: *Simulation of spindle units running on rolling bearings*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2003. **21**(10-11): pp. 889-895.

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
<i>Моделовање механичког понашања кугличних лежаја</i>
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука, Департман за производно машинство б) ФКЛ, Темерин
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
<i>Савремени прилази у развоју специјалних решења улежиштења у машинству и медицинској протетици</i>
1. Опис података
1.1 Врста студије <i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i> <i>Докторска дисертација</i>
1.2 Врсте података а) квантитативни б) квалитативни
1.3. Начин прикупљања података а) анкете, упитници, тестови б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи в) генотипови: навести врсту _____ г) административни подаци: навести врсту _____

д) узорци ткива: навести врсту _____

ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____

е) текст, навести врсту: **Литературни извори**

ж) мапа, навести врсту _____

з) остало: описати: **Експериментална испитивања**

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека: **.xlsx**

б) SPSS фајл, датотека _____

в) PDF фајл, датотека: **.pdf**

г) Текст фајл, датотека: **.docx**

д) JPG фајл, датотека: **.jpg, .png**

е) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли: **Велики број**

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.): **Велики број**

1.3.3. Поновљена мерења

а) **да**

б) **не**

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је: **6 минута**

б) варијабле које се више пута мере односе се на: **Испитивање сопствених и самопобудних вибрација котрљајних лежаја**

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) **Да**

б) **Не**

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип:

Експериментално испитивање сопствених и самопобудних вибрација котрљајних лежаја

б) корелационо истраживање, навести тип _____

ц) анализа текста, навести тип:

Прикупљање података анализом доступне литературе

д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

- Аналогно/дигитална картица за снимање сигнала вибрација: **National Instrumets USB-4432**
- Сензор убрзања: **PCB 352C33**
- Побудни чекић: **Bruel & Kjaer 8206/56777**

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да **Не**

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да **Не**

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

Квалитет података је контролисан при експерименталном испитивању понављањем мерења у истим условима и поређењем добијених резултата.

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

Контрола уноса података у матрицу је изведена поређењем добијених података са литературним подацима.

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у Репозиторијуму докторских дисертација на Универзитету у Новом Саду.

3.1.2. URL адреса <https://cris.uns.ac.rs/searchDissertations.jsf>

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) **Да**

б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____

в) **Не**

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2. Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? _____

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да **Не**

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да **Не**

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да **Не**

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да **Не**

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да **Не**

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- а) Подаци нису у отвореном приступу
- б) Подаци су анонимизирани
- ц) Остало, навести шта

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

а) јавно доступни

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

Ауторство – некомерцијално – без прераде

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

Мирјана Бојанић Шејат bojanicm@uns.ac.rs

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

Мирјана Бојанић Шејат bojanicm@uns.ac.rs

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима

Мирјана Бојанић Шејат bojanicm@uns.ac.rs
