UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Slavica Medić

Nejednakosti Jensena i Čebiševa za intervalno-vrednosne funkcije

doktorska disertacija

Novi Sad, 2014.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:		
Идентификациони број, **ИБР**:		
Тип документације, **ТД**:	монографска документација	
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални штампани материјал	
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација	
Аутор, **АУ**:	Славица Медић	
Ментор, **МН**:	др Александар Перовић, др Татјана Грбић	
Наслов рада, **НР**:	Неједнакости Јенсена и Чебишева за интервално-вредносне функције	
Језик публикације, **ЈП**:	српски (латиница)	
Језик извода, **ЈИ**:	српски/енглески	
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија	
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина	
Година, **ГО**:	2014.	
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт	
Место и адреса, **МА**:	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад	
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	3/122/66/0/0/0/0	
Научна област, **НО**:	Примењена математика	
Научна дисциплина, **НД**:	Анализа	
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	полупрстен, $\oplus$-мера, псеудо-интеграл, неједнакост Чебишева, неједнакост Јенсена	
УДК		
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека Факултета техничких наука, Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6	
Важна напомена, **ВН**:		
Извод, **ИЗ**:	Интегралне неједнакости Јенсена и Чебишева уопштене су за интеграле базиране на неадитивним мерама. Прво уопштење доказано је за псеудо-интеграл скуповно-вредносне функције, а друго за псеудо-интеграл реално-вредносне функције у односу на интервално-вредносну $\oplus$-меру. Доказана је и уопштена неједнакост Чебишева за псеудо-интеграл реално-вредносне функције и њена два интервално-вредносна облика. Неједнакост Јенсена је примењена у принципу премије, а неједнакост Чебишева на процену вероватноће.	
Датум прихватања теме, **ДП**:	27.12.2013.	
Датум одбране, **ДО**:		
Чланови комисије, **КО**: Председник:	др Ивана Штајнер-Папуга	
Члан:	др Илија Ковачевић	
Члан:	др Биљана Михаиловић	
Члан:	др Платон Совиљ	Потпис ментора
Члан, ментор:	др Александар Перовић	
Члан, ментор:	др Татјана Грбић	

Образац **Q2.НА.06-05-**Издање 1

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES 21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monograph documentation
Type of record, **TR**:	Textual printed material
Contents code, **CC**:	PhD thesis
Author, **AU**:	Slavica Medić
Mentor, **MN**:	Aleksandar Perović, PhD, Tatjana Grbić, PhD
Title, **TI**:	Jensen and Chebyshev inequalities for interval-valued functions
Language of text, **LT**:	Serbian (Latin)
Language of abstract, **JA**:	Serbian/English
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2014
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref/tables/ pictures/graphs/appendixes)	3/122/66/0/0/0/0
Scientific field, **SF**:	Applied mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	Semiring, $\oplus$-measure, pseudo-integral, Chebyshev inequality, Jensen inequality
UC	
Holding data, **HD**:	The Library of the Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	Integral inequalities of Jensen and Chebyshev type are generalized for integrals based on nonadditive measures. The first generalization is proven for the pseudo-integral of a set valued function and the second one for the pseudo-integral of a real-valued function with respect to the interval-valued $\oplus$-measure. Generalized Chebyshev inequality for the pseudo-integral of a real-valued function and its two interval-valued forms are proven. Jensen inequality is applied in the premium principle and Chebyshev inequality is applied to the probability estimation.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	27/12/2013
Defended on, **DE**:	

Defended board, **D**B:	President:	Ivana Štajner-Papuga, PhD	
	Member:	Ilija Kovačević, PhD	
	Member:	Biljana Mihailović, PhD	
	Member:	Platon Sovilj, PhD	Menthor's sign
	Member, Menthor:	Aleksandar Perović, PhD	
	Member, Menthor:	Tatjana Grbić, PhD	

Sažetak

U ovoj tezi, integralne nejednakosti Jensena i Čebiševa uopštene su za integrale bazirane na neaditivnim merama.

Prvo su dati osnovni pojmovi, kao što su pseudo-operacije, poluprsteni i pseudo-integrali, sa posebnim akcentom na g-poluprstene, kod kojih je generator g monotona neprekidna funkcija i pseudo-operacije su definisane sa $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$.

Definisan je nov tip pseudo-aditivne mere, intervalno-vrednosna $\oplus$-mera. Opisana je konstrukcija pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru i dokazane su neke osobine ovog novog integrala.

Kako skupovno-vrednosne funkcije i intervalno-vrednosne mere imaju veliku primenu, ova teza fokusirana je na ova dva pristupa, kao i na odgovarajuća uopštenja integralnih nejednakosti Jensena i Čebiševa.

Prvo uopštenje dokazano je za pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru, a drugo za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru.

Jensenova nejednakost primenjena je u principu premije. Teza nudi nov pristup principu maksimizacije očekivane korisnosti (takođe poznat kao princip ekvivalencije) zasnovan na pseudo-integralu, kako realno-vrednosne, tako i intervalno-vrednosne funkcije. Razmatrana su svojstva ovih novih principa i dati su ilustrativni primeri.

Dokazana je i uopštena nejednakost Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije i njena dva intervalno-vrednosna oblika. Nejednakost Čebiševa primenjena je na procenu verovatnoće. Dobijeni teorijski rezultati ilustrovani su na primerima slučajnih promenljivih diskretnog i apsolutno neprekidnog tipa, za različite izbore generatora g.

Teza se završava listom citiranih referenci.

Abstract

In this thesis, integral inequalities of Jensen and Chebyshev type are generalized for integrals based on nonadditive measures.

Firstly, preliminary notions, such as pseudo-operations, semirings and pseudo-integrals are given, with the particular emphasis on the g-semirings, where the generator g is a monotone continuous function and the pseudo-operations are defined by $x \oplus y = g^{-1}(g(x)+g(y))$ and $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$.

Interval-valued $\oplus$-measure, a new type of pseudo-additive measure, is defined. The construction of the pseudo-integral of a real-valued function with respect to the interval-valued $\oplus$-measure is described and some properties of this new integral are proven.

Since set-valued functions and interval-valued measures have applications in a number of practical areas, this thesis is focused on these two approaches and the corresponding generalizations of Jensen and Chebyshev integral inequalities.

The first generalization is proven for the pseudo-integral of a set-valued function with respect to the $\oplus$-measure and the second one for the pseudo-integral of a real-valued function with respect to the interval-valued $\oplus$-measure.

Jensen inequality is applied in the premium principle. The thesis offers a novel approach to the expected utility maximization principle (also known as the equivalence principle) based on the pseudo-integral of either real-valued or interval-valued functions. The main properties of these new principles are considered and illustrative examples are given.

Generalized Chebyshev inequality for the pseudo-integral of a real-valued function and its two interval-valued forms are proven. Chebyshev inequality is applied to the probability estimation. The results are illustrated using examples with discrete and continuous random variables with the suitable choice of the generator g.

The thesis ends with a list of cited references.

Predgovor

Predmet istraživanja ove doktorske disertacije pripada oblasti koja je zasnovana na dostignućima matematičke analize, teorije mere i teorije verovatnoće. U disertaciji su izučavane integralne nejednakosti Jensenovog i Čebiševljevog tipa bazirane na pseudo-integralu skupovno-vrednosne funkcije i pseudo-integralu realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru kao i njihova primena u aktuarskoj matematici i proceni verovatnoća.

Integralne nejednakosti tipa Jensena i Čebiševa prvo su dokazane za Lebegov integral realno-vrednosne funkcije. S obzirom na to da je Lebegov integral definisan u odnosu na aditivnu meru, kao i da modelovanje mnogih pojava nije moguće pomoću aditivne mere, kao ni pomoću realno-vrednosne funkcije, javlja se potreba za uopštavanjem poznatih integralnih nejednakosti.

Jensenova nejednakost ima primenu u pojašnjavanju veze između konkavnosti funkcije korisnosti i averzije prema riziku, tj. konveksnosti funkcije korisnosti i sklonosti prema riziku.

Uopštena nejednakost Čebiševa se pokazala kao veoma značajna u brzoj i efikasnoj proceni verovatnoća. Nejednakost Čebiševa formulisana preko Lebegovog integrala ne može da se koristi za sve raspodele jer odgovarajući momenti ne postoje.

Originalni doprinosi ove disertacije su:

• formulacija i dokaz nejednakosti Jensena i nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru ([54, 55]),

• formulacija i dokaz nejednakosti Jensena i nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru ([20]),

• formulacija i dokaz uopštene nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru ([21]),

• formulacija i dokaz uopštene intervalno-vrednosne nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral intervalno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru i pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru ([21]),

• definisanje neto pseudo-principa premije zasnovanog na pseudo-integralu realno-vrednosne funkcije i procena minimalne prihvatljive premije pomoću Jensenove nejednakosti i neto pseudo-principa premije ([32]),

• pokazano je kako se može izvršiti procena verovatnoće primenom uopštene nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral, za slučajne promenljive sa različitim raspodelama. Posebno je skrenuta pažnja na slučajnu promenljivu sa zasečenom Košijevom raspodelom, za koju ne postoje momenti reda k, $k \in \mathbb{N}$, te se ne može primeniti (klasična) nejednakost Čebiševa ([21]).

Pored uvodnog poglavlja, disertacija je organizovana u tri celine.

Prvi deo nazvan je *Integrali bazirani na $\oplus$-merama* i u njemu je na zatvorenom ili poluzatvorenom intervalu $[a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$ data definicija pseudo-operacija ([38, 39]). Pseudo-operacije su proširene i na neprazne podskupove intervala $[a, b]$ ([22]). Potom je definicija $\oplus$-mere uopštena na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru i prikazani su neki interesantni primeri ove $\oplus$-mere.

Na osnovu rezultata iz [40, 41, 42], data je definicija pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije kao i neke njegove osobine poput pseudo-aditivnosti, pseudo-homogenosti i monotonosti. Predstavljen je pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru po ugledu na radove [18, 19]. Posmatrane su dve važne klase skupovno-vrednosnih funkcija: pseudo-integrabilno ograničene i intervalno-vrednosne funkcije.

Deo ove glave sadrži originalne rezultate publikovane u [20], koji se odnose na konstrukciju pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru. Pokazano je da je pseudo-integral merljive funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru jednak intervalu. Dokazane su osobine ovog integrala kao što su pseudo-aditivnost, pseudo-homogenost i monotonost u odnosu na $\preceq_S$. Koristeći novodefinisani pseudo-integral definisana je nova intervalno-vrednosna skupovna funkcija i pokazano da je ona intervalno-vrednosna $\oplus$-mera. Takođe, za ovu novu $\oplus$-meru pokazana je apsolutna neprekidnost tipa I i apsolutna neprekidnost tipa VI, što su rezultati publikovani u [52].

Glava dva, *Nejednakost Jensena*, odnosi se na razne tipove integralne nejednakost Jensena. Osnovni motivi za uopštavanja, koja predstavljaju originalne rezultate teze, su nejednakost Jensena za Lebegov integral i nejednakost Jensena za pseudo-integral baziran na $\oplus$-meri.

Prva generalizacija se odnosi na Jensenovu nejednakost za skupovno-vrednosnu funkciju u odnosu na $\oplus$-meru i dokazana je za dve klase poluprstena. Dati su primeri kojima su ilustrovane dobijene nejednakosti Jensena za skupovno-vrednosnu funkciju. Prikazani rezultati su originalni i publikovani su u [55].

Druga generalizacija se odnosi na nejednakost Jensena za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru i izvedeni su dokazi u slučaju da je poredak jednak uobičajenom poretku.

Originalni teorijski rezultati iz [32] predstavljeni u prethodnom poglavlju primenjeni su u oblasti aktuarske matematike u problemima određivanja premije neživotnog osiguranja. Definisan je neto pseudo-princip premije i ilustrovano je primerima određivanje minimalne prihvatljive premije za osiguravača koja ga obavezuje da pokrije deo gubitka, kao i maksimalna prihvatljiva premija za osiguranika. Pomoću Jensenove nejednakosti primenjene na neto pseudo-princip premije data je procena minimalne prihvatljive premije.

Takođe, Jensenova nejednakost primenjena je na intervalno-vrednosni neto pseudo-princip premije, a primena je ilustrovana odgovarajućim primerom.

Treća glava, *Nejednakost Čebiševa*, posvećena je različitim oblicima nejednakosti Čebiševa. Na početku, kao motiv za istraživanja u ovoj tezi, date su nejednakost Čebiševa za Lebegov integral i nejednakost Čebiševa za pseudo-integral. Prvo je pokazana nejednakost Čebiševa za pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije. Pokazane su odgovarajuće teoreme za dva tipa poluprstena: g-poluprsten sa rastućim generatorom i poluprsten u kom je pseudo-sabiranje jednako max, a pseudo-množenje dato preko generatora. Odgovarajućim primerom ilustrovana je dobijena nejednakost.

U nastavku, pokazana je nejednakost Čebiševa za intervalno-vrednosne funkcije. Ovde treba istaći da se nejednakost Čebiševa dobija pomoću graničnih funkcija intervalno-vrednosne funkcije. Primene nejednakosti Čebiševa ilustrovane su primerima u kojima su granične funkcije iste monotonosti, kao i primerima u kojima granične funkcije nisu iste monotonosti. Navedeni rezultati su originalni deo istraživanja i publikovani su u [55].

Nejednakost Čebiševa za realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru, kao originalni deo istraživanja, takođe je sastavni deo ove glave.

Treća glava se završava prikazom originalnih rezultata iz [21]. Pokazana je uopštena nejednakost Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije. Takođe, pokazane su uopštene intervalno-vrednosne nejednakosti Čebiševa i to u dva slučaja. Prvi slučaj je za intervalno-vrednosnu funkciju i dat je preko njenog pseudo-integrala u odnosu na $\oplus$-meru. Drugi slučaj je za realno-vrednosnu funkciju i dat je preko njenog pseudo-integrala u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru. Dobijeni teorijski rezultati ilustrovani su u procenama verovatnoća za slučajne promenljive sa uniformnom, eksponencijalnom, binomnom i Poasonovom raspodelom. Posebno treba istaći da su dobijeni rezultati primenjeni i na procenu verovatnoća za dve slučajne promenljive (jedna je diskretnog, a druga apsolutno neprekidnog tipa) kod kojih se (klasična) uopštena nejednakost Čebiševa ne može primeniti jer momenti reda k, $k \in \mathbb{N}$, ne postoje.

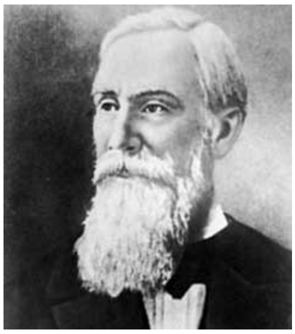
Primena nejednakosti Čebiševa za intervalno-vrednosnu funkciju ilustrovana je primerom u kom granične funkcije imaju eksponencijalnu raspodelu. Na osnovu dobijenih rezultata mogu se dobiti procene i za intervalno-vrednosne funkcije kod kojih granične funkcije imaju neke druge raspodele.

Istorijske napomene

Johan Jensen (1859−1925) je danski matematičar i inženjer. Rođen je u Danskoj, ali je veći deo detinjstva proveo u Švedskoj. Na Tehnološkom fakultetu u Kopenhagenu izučavao je razne oblasti nauke, poput fizike, hemije i matematike. Interesantan je podatak da se matematikom bavio iz hobija i da je radni vek proveo kao inženjer u telefonskoj kompaniji u Kopenhagenu. Između ostalog, bavio se Rimanovom hipotezom, velikom Fermaovom teoremom, teorijom redova, funkcionalnom i kompleksnom analizom. Integralnu nejednakost koja nosi njegovo ime objavio je 1906. godine u časopisu Acta Mathematica.

J. Jensen

Pafnuti Čebišev (1821−1894) je ruski matematičar. Diplomirao je na Univerzitetu u Moskvi, gde je i započeo akademsku karijeru. Kasnije je prešao u Petrograd, gde je osnovao jednu od najvažnijih ruskih matematičkih škola koja danas nosi njegovo ime. Predmet njegovog istraživanja bila je teorija verovatnoće. Pokazao je slabi zakon velikih brojeva koji nosi njegovo ime. Među njegovim studentima bili su i poznati matematičari kao što su Markov, Ljapunov i Korkin.



P. Čebišev

◇ ◇ ◇

Zahvaljujem se mentorima dr Tatjani Grbić i dr Aleksandru Peroviću na dugogodišnjoj saradnji i pomoći prilikom izrade disertacije.

Zahvaljujem se članovima komisije dr Iliji Kovačeviću, dr Ivani Štajner-Papuga, dr Biljani Mihailović i dr Platonu Sovilju na detaljnom čitanju rukopisa disertacije i primedbama i sugestijama koje su uticale na njeno konačno formiranje.

Konačno, želela bih da se zahvalim svima koji su sve vreme bili uz mene i pružali mi podršku tokom izrade disertacije.

◇ ◇ ◇

U Novom Sadu, Slavica Medić

20.01.2014.

Sadržaj

Glava 1

Integrali bazirani na $\oplus$-merama

Prebrojivo-aditivne mere i Lebegov integral čine osnovu klasične teorije mere ([49]). S obzirom na to da je kod modelovanja pojava aditivnost često narušena, javlja se potreba za uvođenjem skupovnih funkcija, koje nemaju osobinu aditivnosti i koje predstavljaju uopštenje klasične mere i integrala baziranih na neaditivnim skupovnim funkcijama. Integral koji se koristi u istraživanjima u ovoj tezi se naziva pseudo-integral i za njegovu konstrukciju potrebno je definisati pseudo-operacije i $\oplus$-mere.

U Sekciji 1.1 predstavljene su operacije pseudo-sabiranja i pseudo-množenja, kao i pseudo-stepen, definisane na nekom zatvorenom (ili poluzatvorenom) podintervalu $[a, b]$ intervala $[-\infty, +\infty]$. Uveden je pojam poluprstena i navedene su tri klase poluprstena koje će biti predmet istraživanja ([38, 39, 40, 42, 43]). Takođe, pseudo-operacije su proširene na podskupove intervala $[a, b]$ i prikazana je njihova forma za sve tri klase poluprstena ([22]).

U Sekciji 1.2 data je definicija i osnovne osobine specijalne neaditivne mere, takozvane $\oplus$-mere, koja predstavlja uopštenje klasične mere ([38, 40]). Za tu meru, kao što je rečeno, ne važi osobina aditivnosti, već pseudo-aditivnosti. Definisana je još jedna pseudo-aditivna mera, čije vrednosti nisu realni brojevi već intervali. U disertaciji se ta mera pominje pod nazivom intervalno-vrednosna $\oplus$-mera ([20, 31]).

Konstrukcija pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru kao i njegove osnovne osobine ([38, 39]) predstavljeni su u Sekciji 1.3.

Jedno uopštenje pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru predstavljeno je u Sekciji 1.4. Rezultati su bazirani na [18, 22]. Data je konstrukcija pseudo-integrala skupovno-vrednosne funkcije kao i osnovne osobine. Posebna pažnja posvećena je skupovno-vrednosnim funkcijama čije su vrednosti intervali, tj. intervalno-vrednosnim funkcijama.

Sekcija 1.5 sadrži konstrukciju pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru. Pokazane su osobine ovog novog pseudo-integrala. Rezultati ovog dela disertacije su publikovani u [20, 31] i predstavljaju deo originalnih rezultata istraživanja.

1.1 Pseudo-operacije

Pseudo-sabiranje i pseudo-množenje moguće je smatrati uopštenjima klasičnih operacija sabiranja i množenja na skupu realnih brojeva. Na osnovu njih, definisani su različiti pristupi uopštavanju mere i odgovarajućeg integrala. Pseudo-operacije koje posmatramo u ovoj disertaciji bazirane su na rezultatima iz [38, 39, 40]. Obe pseudo-operacije definišu se na zatvorenom podintervalu $[a, b] \subset [-\infty, \infty]$. U nekim slučajevima posmatraće se poluzatvoreni intervali, kako bi se izbegli slučajevi $(+\infty) + (-\infty)$ ili $0 \cdot (+\infty)$.

Neka je $\preceq$ relacija totalnog uređenja, tj. totalnog poretka na $[a, b]$ (posmatra se uobičajeni poredak $\leq$ ili poredak $\geq$, obrnut uobičajenom poretku).

Definicija 1.1 Operacija $\oplus$ *pseudo-sabiranja* je funkcija $\oplus : [a, b]^2 \to [a, b]$ sa osobinama:

i) komutativna je, tj. za svako $x, y \in [a, b]$ važi da je $x \oplus y = y \oplus x$,

ii) neopadajuća je u odnosu na relaciju totalnog uređenja $\preceq$, tj. za svako $x, y, z \in [a, b]$ takvo da je $x \preceq y$ važi da je $x \oplus z \preceq y \oplus z$,

iii) asocijativna je, tj. za svako $x, y, z \in [a, b]$ važi da je

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$$

iv) postoji neutralni elemenat, u oznaci $\mathbf{0}$, tj. za svako $x \in [a, b]$ važi da je $\mathbf{0} \oplus x = x$.

Neutralni elemenat za pseudo-sabiranje je kod *striktnog* pseudo-sabiranja a ili b. Ako je poredak uobičajeni, neutralni elemenat za pseudo-sabiranje je a, a ako je poredak obrnut uobičajenom poretku, neutralni elemenat za pseudo-sabiranje je b.

Neka je $[a, b]_+ = \{x \in [a, b] \mid \mathbf{0} \preceq x\}$.

Definicija 1.2 Operacija $\odot$ *pseudo-množenja* je funkcija $\odot : [a,b]^2 \to [a,b]$ sa osobinama:

i) komutativna je, tj. za svako $x, y \in [a,b]$ važi da je $x \odot y = y \odot x$,

ii) pozitivno je neopadajuća, tj. $x \preceq y$ implicira da je $x \odot z \preceq y \odot z$, za svako $x, y \in [a,b]$ i $z \in [a,b]_+$,

iii) asocijativna je, tj. za svako $x, y, z \in [a,b]$ važi da je

$$x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z,$$

iv) postoji neutralni elemenat, u oznaci $\mathbf{1}$, tj. za svako $x \in [a,b]$ važi da je $\mathbf{1} \odot x = x$.

Definicija 1.3 *Poluprsten* je struktura $([a,b], \oplus, \odot)$, gde je $\oplus$ operacija pseudo-sabiranja data Definicijom 1.1 i $\odot$ operacija pseudo-množenja data Definicijom 1.2, takva da važi

i) za svako $x \in [a,b]$ je $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$,

ii) pseudo-množenje $\odot$ je distributivno u odnosu na pseudo-sabiranje $\oplus$, tj. za svako $x, y, z \in [a,b]$ je

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z).$$

Koristeći definiciju pseudo-množenja, za svako $x \in [a,b]$ i svako $n \in \mathbb{N}$, može se definisati *pseudo-stepen* $x^{(n)}$ na sledeći način.

Definicija 1.4 *Pseudo-stepen* je operacija $^{(n)} : [a,b]^n \to [a,b]$ definisana sa

$$x^{(n)} = \underbrace{x \odot x \odot x \cdots \odot x}_{n-puta},$$

za $x \in [a,b]$.

Na osnovu ovih operacija razvijen je jedan nov pristup teoriji neaditivnih mera, kao i nov pristup integralnom računu, takozvani pseudo-integralni račun, koji se koristi za rešavanje nelinearnih običnih i parcijalnih diferencijalnih i diferencnih jednačina [39]. Ako je pseudo-sabiranje idempotentna operacija, razne primene pseudo-integralnog računa mogu se pronaći u [26, 29, 30].

U ovoj disertaciji posmatraćemo sledeće tri važne klase poluprstena kod kojih su obe pseudo-operacije neprekidne (neprekidnost pseudo-množenja može biti narušena u rubnim tačkama $(\mathbf{0}, a)$ i $(a, \mathbf{0})$ ili $(\mathbf{0}, b)$ i $(b, \mathbf{0})$).

Slučaj I: Prvu klasu čine poluprsteni u kojima je operacija pseudo-sabiranja idempotentna operacija, dok operacija pseudo-množenja nije idempotentna operacija.

Primer 1.1 a) $([a, b], \max, \odot)$, gde je $\odot$ proizvoljno neidempotentno pseudo-množenje na $[a, b]^2$ koje je kancelativno na $(a, b)^2$. Neutralni elemenat za operaciju $\oplus$ pseudo-sabiranja je $\mathbf{0} = a$. Idempotentna operacija max indukuje totalni poredak $\preceq$ na sledeći način:

$$x \preceq y \quad \text{ako i samo ako} \quad \max(x, y) = y,$$

što je uobičajeni poredak. Pokazano je (videti [38, 39]) da je operacija $\odot$ pseudo-množenja generisana rastućom bijekcijom $g : [a, b] \to [0, \infty]$, tj. da je $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$. Neutralni elemenat za operaciju pseudo-množenja je $\mathbf{1} = g^{-1}(1)$.

b) $([a, b], \min, \odot)$, gde je $\odot$ proizvoljno neidempotentno pseudo-množenje na $[a, b]^2$ koje je kancelativno na $(a, b)^2$. Neutralni elemenat za operaciju $\oplus$ pseudo-sabiranja je $\mathbf{0} = b$. Idempotentna operacija min indukuje totalni poredak $\preceq$ na sledeći način:

$$x \preceq y \quad \text{ako i samo ako} \quad \min(x, y) = y,$$

što je poredak obrnut uobičajenom poretku. U ovom slučaju je operacija $\odot$ pseudo-množenja generisana opadajućom bijekcijom $g : [a, b] \to [0, \infty]$, tj. $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$. Neutralni elemenat za operaciju pseudo-množenja je $\mathbf{1} = g^{-1}(1)$.

Primetimo da je kod poluprstena u kom je operacija $\oplus$ pseudo-sabiranja idempotentna operacija totalno uređenje $\preceq$ indukovano na sledeći način:

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad x \oplus y = y,$$

gde je pseudo-sabiranje $\oplus$ jednako max ili min.

Specijalni slučajevi navedenih poluprstena su:

- Poluprsten $((-\infty, +\infty], \min, +)$, gde je $\mathbf{0} = +\infty$ i $\mathbf{1} = 0$, a poredak je obrnut uobičajenom poretku. Uz konvenciju da je $+\infty + (-\infty) = +\infty$, može se posmatrati i poluprsten $([-\infty, +\infty], \min, +)$.

- Poluprsten $([-\infty, +\infty), \max, +)$, gde je $\mathbf{0} = -\infty$ i $\mathbf{1} = 0$, a poredak je uobičajeni poredak. Uz konvenciju da je $+\infty + (-\infty) = -\infty$, može se posmatrati i poluprsten $([-\infty, +\infty], \max, +)$.

- $([a,b], \min, \odot)$ i $([a,b], \max, \odot)$, gde je pseudo-množenje $\odot$ dato strogo monotonom i neprekidnom funkcijom $g : [a,b] \to [0,\infty]$ sa

$$x \odot y = g^{-1}\left(g(x) \cdot g(y)\right).$$

  Uzimajući u ovom slučaju za generator g operacije $\odot$ pseudo-množenja funkciju $g(x) = x$ dobijaju se sledeći poluprsteni:

  a) Poluprsten $((0, +\infty], \min, \cdot)$, gde je $\mathbf{0} = +\infty$ i $\mathbf{1} = 1$, a poredak je obrnut uobičajenom poretku. Uz konvenciju da je $0 \cdot (+\infty) = +\infty$, može se posmatrati i poluprsten $([0, +\infty], \min, \cdot)$.

  b) Poluprsten $([0, +\infty), \max, \cdot)$, gde je $\mathbf{0} = 0$ i $\mathbf{1} = 1$, a poredak je jednak uobičajenom poretku. Može se posmatrati i poluprsten $([0, +\infty], \max, \cdot)$, uz konvenciju da je $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Slučaj II: U drugom slučaju, obe pseudo-operacije su generisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora $g : [a,b] \to [0,\infty]$ ([39, 40]). Posmatra se samo striktno pseudo-sabiranje, tj. neprekidna i striktno monotona operacija $\oplus$ na $(a,b)^2$. Na osnovu [4], pseudo-sabiranje $\oplus$ se može predstaviti pomoću monotone i neprekidne funkcije $g : [a,b] \to [0,\infty]$, za koju je $g(\mathbf{0}) = 0$ i

$$x \oplus y = g^{-1}\left(g(x) + g(y)\right).$$

Ako je neutralni elemenat za pseudo-sabiranje a, generator g je rastući i tada je $g(a) = 0$ i $g(b) = +\infty$. U slučaju da je neutralni elemenat za pseudo-sabiranje b, generator g je opadajuća funkcija i važi da je $g(b) = 0$ i $g(a) = +\infty$. Funkcija g je izomorfizam polugrupa $([a,b], \oplus)$ i $([0, +\infty], +)$.

Uz konvenciju da je $0 \cdot (+\infty) = 0$, sa

$$x \odot y = g^{-1}\left(g(x) \cdot g(y)\right)$$

može se na jedinstven način (do na konstantu) definisati operacija $\odot$ pseudo-množenja distributivnog u odnosu na pseudo-sabiranje.

Kada je generator g rastuća funkcija, operacija pseudo-sabiranja indukuje uobičajeni poredak. U slučaju da je generator g opadajuća funkcija, indukovani poredak je obrnut uobičajenom poretku.

Dakle, u slučaju da je pseudo-sabiranje $\oplus$ dato generatorom g, poredak na intervalu $[a, b]$ indukovan je sa

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \leq g(y).$$

Ovako definisane pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$ nazivaju se *g-sabiranje* i *g-množenje,* a odgovarajući poluprsten naziva se *g-poluprsten.*

Funkcija g je neprekidna i striktno monotona, pa je bijekcija i predstavlja izomorfizam g-poluprstena $([a, b], \oplus, \odot)$ i poluprstena $([0, +\infty], +, \cdot)$. Kako se pri izomorfizmu neutralni elemenat preslikava na neutralni elemenat, to je $g(\mathbf{0}) = 0$ i $g(\mathbf{1}) = 1$.

Lema 1.1 *Ako je pseudo-množenje dato generatorom g, tada važi*

$$x^{(n)} = g^{-1}(g^n(x)), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in [a, b].$$

Ako je operacija $\odot$ idempotentna operacija, tada je

$$x^{(n)} = x, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in [a, b].$$

Dokaz: Primetimo da važi

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x = g^{-1}(g(x)), \\ x^{(2)} &= x \odot x = g^{-1}(g(x) \cdot g(x)) = g^{-1}(g^2(x)). \end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da je $x^{(k)} = g^{-1}(g^k(x))$, tada je

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} \odot x \\ &= g^{-1}(g(x^{(k)}) \cdot g(x)) \\ &= g^{-1}(g(g^{-1}(g^k(x)) \cdot g(x)) \\ &= g^{-1}(g^k(x) \cdot g(x)) \\ &= g^{-1}(g^{k+1}(x)), \end{aligned}$$

tako da za svako $n \in N$ važi

$$x^{(n)} = g^{-1}(g^n(x)), \quad \text{tj.} \quad g^{-1}(x^{(n)}) = g^n(x).$$

Jedine idempotentne operacije pseudo-množenja su max i min. Za pseudo-množenje koje je jednako max važi

$$x^{(n)} = \max\{\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n-puta}\} = x.$$

Dokaz je sličan u slučaju je pseudo-množenje jednako min. $\square$

Primer 1.2 a) Posmatrajmo poluprsten $([-\infty,+\infty],\oplus,\odot)$, gde su pseudo-sabiranje i pseudo-množenje zadati pomoću generatora $g(x)=e^{-x}$, uz konvenciju da je $(-\infty)+\infty=+\infty$. Tada je $g^{-1}(x)=-\ln x$, $x\in(0,+\infty]$ i

$$x\oplus y=-\ln(e^{-x}+e^{-y}),\quad x\odot y=x+y.$$

Pseudo-stepen $x^{(n)}$ u ovom slučaju je $x^{(n)}=nx$.

b) Posmatrajmo poluprsten $([0,+\infty],\oplus,\odot)$, gde su operacije pseudo-sabiranja i pseudo-množenja zadate pomoću generatora $g(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>0$, uz konvenciju da je $0\cdot(+\infty)=0$. Tada je $g^{-1}(x)=x^{\frac{1}{\alpha}}$, $x\in[0,+\infty]$ i

$$x\oplus y=(x^{\alpha}+y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}},\quad x\odot y=x\cdot y,$$

a pseudo-stepen $x^{(n)}$ je (uobičajeni) stepen, tj. $x^{(n)}=x^n$.

c) Posmatrajmo poluprsten $([0,\infty],\oplus,\odot)$, gde su operacije pseudo-sabiranja i pseudo-množenja zadate generatorom $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, uz konvenciju da je $(+\infty)\cdot 0=+\infty$. U ovom slučaju je $g^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in(0,1]$, a pseudo-operacije su

$$x\oplus y=\frac{\sqrt{x^2y^2-1-2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}},\, x\odot y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}.$$

Pseudo-stepen $x^{(n)}$ za $x\in[0,\infty]$ je $x^{(n)}=\sqrt{(1+x^2)^n-1}$.

Slučaj III: Treću klasu čine poluprsteni sa obe idempotentne pseudo-operacije.

Primer 1.3 Jedini poluprsteni sa obe idempotentne pseudo-operacije su:

a) $([a,b],\max,\min)$, gde su neutralni elementi pseudo-operacija $\oplus$ i $\odot$ redom $\mathbf{0}=a$ i $\mathbf{1}=b$, a indukovani poredak je uobičajeni poredak,

b) $([a,b],\min,\max)$, gde su neutralni elementi pseudo-operacija $\oplus$ i $\odot$ redom $\mathbf{0}=b$ i $\mathbf{1}=a$, a indukovani poredak je obrnut uobičajenom poretku.

Kao i kod poluprstena prve klase, kod poluprstena treće klase pseudo-sabiranje je idempotentna operacija, te je totalno uređenje $\preceq$ indukovano na isti način, tj.

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad x \oplus y = y.$$

Svako totalno uređenje $\preceq$ na nepraznom skupu A indukuje *striktno totalno uređenje* $\prec$ na sledeći način:

$$x \prec y \quad \text{ako i samo ako} \quad x \preceq y \wedge x \neq y,$$

za svako $x, y \in A$.

Napomena 1.1 Možemo primetiti da je u našim istraživanjima operacija $\oplus$ idempotentna operacija ili je data preko generatora g. Potklasa poluprstena prve klase kod kojih je pseudo-množenje definisano generatorom g sa $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$ je od posebnog značaja. Jedan takav primer je i poluprsten $([0, \infty], \max, +])$, pri čemu je operacija pseudo-množenja, tj. operacija sabiranja generisana sa $g(x) = e^{-x}$. O važnosti u primenama ovog poluprstena u teoriji odlučivanja, principu velikih devijacija i optimizaciji videti u [1, 2, 3]. U [33] pokazano je da takve pseudo-operacije mogu da se dobiju kao granične vrednosti pseudo-operacija iz familije poluprstena druge klase generisanih sa g^λ, tj. kada $\lambda \to +\infty$

$$x \oplus_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}\left(g^\lambda(x) + g^\lambda(y)\right) \longrightarrow \max\{x, y\}$$

ako je g rastući generator i

$$x \oplus_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}\left(g^\lambda(x) + g^\lambda(y)\right) \longrightarrow \min\{x, y\}$$

ako je g opadajući generator. Kada $\lambda \to -\infty$ situacija je obrnuta. Za ovaj izbor pseudo-operacija i generatora važi

$$x \odot_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}\left(g^\lambda(x) g^\lambda(y)\right) = x \odot y.$$

U [33] je takođe pokazana i veza između poluprstena druge i treće klase, tako da, zbog svega navedenog, sa teorijskog aspekta g-poluprsteni predstavljaju najinteresantniju klasu poluprstena, pa im stoga u ovoj disertaciji posvećujemo najviše pažnje.

Još jedan pristup izučavanju pseudo-operacija, kod kojih je pseudo-sabiranje definisano na intervalu $[0, F]$, gde $F \in (0, \infty]$ i pseudo-množenje saglasno sa datim pseudo-sabiranjem $\odot : [0, F] \times [0, M] \to [0, F]$, gde je $M \in (0, \infty]$, može se pronaći u [8]. Treba istaći da se ovde ne pretpostavlja komutativnost pseudo-množenja, a u opštem slučaju ne pretpostavlja se ni postojanje neutralnog elementa za pseudo-množenje.

U [51] je data još jedna definicija pseudo-operacija, kao i integrala definisanih preko njih. Operacije pseudo-sabiranja i pseudo-množenja definisane su na intervalu $[0, \infty]$, a pseudo-množenje definisano u ovom radu nema delitelja nule i nije komutativno.

1.1.1 Pseudo-operacije na skupovima

Rad sa skupovima i intervalima, kao njihovim specijalnim slučajem, predmet je istraživanja ove teze. Iz tog razloga potrebno je proširiti pseudo-operacije na neprazne podskupove intervala $[a, b]$, gde je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase.

Definicija 1.5 Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten iz jedne od tri osnovne klase. Neka su A i B dva proizvoljna neprazna podskupa od $[a, b]$ i neka je $\alpha \in [a, b]$. Tada je *pseudo-zbir skupova A i B*, *pseudo-proizvod skupova A i B* i *pseudo-proizvod skupa A i skalara α* jednak

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x \oplus y \mid x \in A \text{ i } y \in B\}, \\ A \odot B &= \{x \odot y \mid x \in A \text{ i } y \in B\}, \\ \alpha \odot A &= \{\alpha \odot x \mid x \in A\}. \end{aligned}$$

Za primene posebno je interesantna klasa $\mathcal{I}$ svih zatvorenih podintervala intervala $[a, b]_+$, tj.

$$\mathcal{I} = \{[u, v] \mid u \leq v \;\text{ i }\; [u, v] \subseteq [a, b]_+\}. \tag{1.1}$$

Na osnovu [22], imamo sledeće.

Definicija 1.6 Neprazan skup $A \subseteq [a, b]$ je *pseudo-konveksan* ako za svako $x, y \in A$ i $\alpha, \beta \in [a, b]_+$ za koje je $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$ važi uslov pseudo-konveksnosti

$$\alpha \odot x \oplus \beta \odot y \in A.$$

Tvrđenje 1.1 *Svako $[u, v] \subseteq [a, b]_+$ je pseudo-konveksan skup.*

Kao što je naglašeno u Napomeni 1.1, najviše pažnje u istraživanju biće posvećeno g-pseudo-operacijama, tj. operacijama definisanim preko generatora g. Ako su $A_1 = [u_1, v_1]$ i $A_2 = [u_2, v_2]$ elementi klase $\mathcal{I}$ i $\alpha \in [a, b]_+$, tada je za rastući generator g

$$\begin{aligned}
A_1 \oplus A_2 &= [g^{-1}(g(u_1) + g(u_2)), g^{-1}(g(v_1) + g(v_2))] \\
&= g^{-1}\left([g(u_1) + g(u_2), g(v_1) + g(v_2)]\right), \\
A_1 \odot A_2 &= [g^{-1}(g(u_1)g(u_2)), g^{-1}(g(v_1)g(v_2))] \\
&= g^{-1}\left([g(u_1)g(u_2), g(v_1)g(v_2)]\right), \\
\alpha \odot A_1 &= [g^{-1}(g(\alpha)g(u_1)), g^{-1}(g(\alpha)g(v_1))] \\
&= g^{-1}\left([g(\alpha)g(u_1), g(\alpha)g(v_1))]\right),
\end{aligned}$$

dok za opadajući generator g važi

$$\begin{aligned}
A_1 \oplus A_2 &= [g^{-1}(g(u_1) + g(u_2)), g^{-1}(g(v_1) + g(v_2))] \\
&= g^{-1}\left([g(v_1) + g(v_2), g(u_1) + g(u_2)]\right), \\
A_1 \odot A_2 &= [g^{-1}(g(u_1)g(u_2)), g^{-1}(g(v_1)g(v_2))] \\
&= g^{-1}\left([g(v_1)g(v_2), g(u_1)g(u_2)]\right), \\
\alpha \odot A_1 &= [g^{-1}(g(\alpha)g(u_1)), g^{-1}(g(\alpha)g(v_1))] \\
&= g^{-1}\left([g(\alpha)g(v_1), g(\alpha)g(u_1))]\right).
\end{aligned}$$

Specijalno, ako je pseudo-sabiranje jednako max i pseudo-množenje dato preko generatora g tada je

$$A_1 \oplus A_2 = [\max\{u_1, u_2\}, \max\{v_1, v_2\}],$$

a pseudo-proizvod dva intervala i pseudo-proizvod intervala i skalara ima jedan od ranije navedenih oblika, u zavisnosti od toga da li je generator g pseudo-množenja rastuća ili opadajuća funkcija.

Za pseudo-množenje dato opadajućim generatorom g i pseudo-sabiranje jednako min se na sličan način mogu izvesti pseudo-zbir i pseudo-proizvod intervala, kao i pseudo-proizvod skalara i intervala.

Napomena 1.2 Definicija pseudo-zbira $A_1 \oplus A_2$ za intervale $A_1 = [u_1, v_1]$ i $A_2 = [u_2, v_2]$ može da se proširi na pseudo-zbir prebrojivo mnogo intervala $A_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, na sledeći način

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{i=1}^{\infty}[u_i, v_i] &= \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n}[u_i, v_i] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\bigoplus_{i=1}^{n} u_i, \bigoplus_{i=1}^{n} v_i\right] \\
&= \left[\lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} u_i, \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} v_i\right] \\
&= \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} u_i, \bigoplus_{i=1}^{\infty} v_i\right],
\end{aligned}$$

u slučaju da $\lim\limits_{n\to\infty} \bigoplus\limits_{i=1}^{n} u_i$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \bigoplus\limits_{i=1}^{n} v_i$ postoje.

Relacija totalnog uređenja može se definisati na podskupovima intervala $[a, b]$ kao u narednoj definiciji.

Definicija 1.7 Za $C, D \subseteq [a, b]$ je $C \preceq_S D$ ako i samo ako za svako $x \in C$ postoji $y \in D$ takvo da je $x \preceq y$ i za svako $y \in D$ postoji $x \in C$ takvo da je $x \preceq y$.

1.2 $\oplus$-mera

Predmet istraživanja klasične teorije mere su specijalne skupovne funkcije, definisane na nepraznoj familiji podskupova prostora X, koje su nenegativne i prebrojivo aditivne za disjunktne skupove, tj.

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz Σ. Naravno, ove skupovne funkcije imaju osobinu aditivnosti, tj.

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \quad A \cap B = \emptyset.$$

Aditivnost je često narušena u problemima iz prakse, te se javlja potreba za uvođenjem novih klasa mera, takozvanih neaditivnih mera, specijalnih skupovnih funkcija koje imaju osobinu monotonosti.

U ovoj disertaciji posmatraju se takozvane $\oplus$-mere koje se mogu smatrati, na određeni način, bliskim klasičnim merama. Kod njih je operacija sabiranja zamenjena operacijom pseudo-sabiranja.

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten na intervalu $[a, b] \subset [-\infty, \infty]$, koji pripada jednoj od tri osnovne klase (umesto zatvorenog intervala $[a, b]$ može se posmatrati i poluzatvoren podinterval intervala $[-\infty, \infty]$). Neka je sa Σ obeležena σ-algebra podskupova nepraznog skupa X.

Definicija 1.8 Skupovna funkcija $\mu : \Sigma \to [a, b]_+$ je $\oplus$-*mera* ako su zadovoljeni uslovi:

i) $\mu(\emptyset) = \mathbf{0}$,

ii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz Σ.

U slučaju da je pseudo-sabiranje idempotentna operacija, uslov *i)* da je $\mu(\emptyset) = \mathbf{0}$ i uslov disjunktnosti skupova $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u uslovu *ii)* mogu da budu izostavljeni.

Uslov *ii)* predstavlja analogon prebrojive aditivnosti Lebegove mere i može se pronaći pod nazivom σ-$\oplus$-*aditivnost.*

Specijalne $\oplus$-dekompozabilne mere, značajne u mnogim primenama, su takozvane max-dekompozabilne mere. O primenama ovih mera pogledati [1, 2, 3, 30].

Za meru μ kažemo da je max-*dekompozabilna* ili *maksitivna* mera ako za svako $A, B \in \Sigma$ važi $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$, tj. $\oplus = \max$.

Mera μ je *kompletna* maksitivna mera ako za svaku familiju skupova $\{A_i\}_{i \in I}$ važi

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \mu(A_i).$$

Ako je skup indeksa I prebrojiv, tada za meru μ kažemo da je σ-maksitivna.

Primer 1.4 Svakom funkcijom $\psi : X \to [0, +\infty)$ i za svako $A \in \mathcal{P}(X)$, gde je sa $\mathcal{P}(X)$ označen partitivni skup skupa X, kompletna maksitivna mera μ definisana je sa

$$\mu(A) = \sup_{x \in A} \psi(x).$$

Takođe, ako je μ maksitivna mera na partitivnom skupu $\mathcal{P}(X)$, funkcija $\psi : X \to [0, +\infty)$ definisana je sa

$$\psi(x) = \mu(\{x\}), \quad x \in X,$$

a naziva se *funkcija gustine.*

Primer 1.5 Ako je m klasična mera nad σ-algebrom podskupova nepraznog skupa X i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju je $f(0) = 0$, tada je sa

$$\mu(A) = f(m(A)), \quad A \in \Sigma$$

definisana neaditivna monotona skupovna funkcija koja se naziva *deformisana mera.* Ako je mera m verovatnosna mera (verovatnoća), tada se μ naziva *deformisana verovatnoća.* Važne osobine i primene deformisane mere i deformisane verovatnoće mogu se pronaći u [12].

Više o neaditivnim merama i njihovim osobinama kao i specijalni slučajevi ovih mera, kao što su mera mogućnosti i mera neophodnosti, može se pronaći u [40].

1.2.1 Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera

Intervalno-vrednosna mera predstavlja uopštenje mere i svaka mera je njen specijalan slučaj, što će biti ilustrovano Primerom 1.6 *a*). Istraživanja intervalno-vrednosnih mera kao i njihove primene mogu se pronaći u [20, 28, 66].

Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten iz jedne od tri osnovne klase i $\mathcal{I}$ klasa zatvorenih podintervala intervala $[a,b]_+$ data sa (1.1).

Definicija *intervalno-vrednosne $\oplus$-mere* je uvedena u [31].

Definicija 1.9 Neka je sa Σ označena σ-algebra podskupova od X. Funkcija $\overline{\mu}:\Sigma\to\mathcal{I}$ je *intervalno-vrednosna $\oplus$-mera* ako su zadovoljeni uslovi:

i) $\overline{\mu}(\emptyset)=[\mathbf{0},\mathbf{0}]=\{\mathbf{0}\}$,

ii) $\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigoplus_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}(A_i)=\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n}\overline{\mu}(A_i)$, gde je $(A_i)_{i\in N}$ niz disjunktnih skupova iz Σ.

Ako je operacija $\oplus$ pseudo-sabiranja idempotentna operacija, uslov disjunktnosti skupova u prethodnoj definiciji može da se izostavi.

Definicija 1.10 Neka je $\mathcal{M}$ neprazna familija $\oplus$-mera, definisanih na σ-algebri Σ podskupova nepraznog skupa X, takvih da je $(\mathcal{M},\preceq)$ gusto linearno uređenje sa krajevima. *Intervalno-vrednosna skupovna funkcija* $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}:\Sigma\to\mathcal{I}$ za familiju $\mathcal{M}$, ako je poredak uobičajeni, je

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}}=[\mu_l,\mu_r],\quad \mu_l,\mu_r\in\mathcal{M},$$

a ako je poredak obrnut uobičajenom

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}}=[\mu_r,\mu_l],\quad \mu_l,\mu_r\in\mathcal{M},$$

gde je

$$\mu_l(A)\preceq\mu(A)\preceq\mu_r(A),\ \text{za svako } \mu\in\mathcal{M} \text{ i } A\in\Sigma.$$

Napomena 1.3 Na osnovu Tvrđenja 1.1 sledi da svako $\mu\in[\mu_l,\mu_r]$ može da se prikaže kao pseudo-linearna kombinacija mera μ_l i μ_r, tj.

$$\mu=\alpha\odot\mu_l\oplus\beta\odot\mu_r,\quad \alpha\oplus\beta=\mathbf{1}.$$

Ako je $\mu_l=\mu_r$ onda je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}=[\mu_l,\mu_l]=\{\mu_l\}=\mu_l$.

Primer 1.6 a) Ako je $\mu : \Sigma \to [a,b]_+$ $\oplus$-mera, tada je za svako $A \in \Sigma$

$$\overline{\mu}(A) = [\mu(A), \mu(A)] = \{\mu(A)\}$$

intervalno-vrednosna $\oplus$-mera.

b) Ako je $\mu : \Sigma \to [a,b]_+$ $\oplus$-mera, gde je $\oplus = \max$ ili je $\oplus$ dato rastućim generatorom g, tada je za svako $A \in \Sigma$

$$\overline{\mu}(A) = [\mathbf{0}, \mu(A)]$$

intervalno-vrednosna $\oplus$-mera.

c) Ako je $\mu : \Sigma \to [a,b]_+$ $\oplus$-mera, gde je $\oplus = \min$ ili je $\oplus$ dato opadajućim generatorom g, tada je za svako $A \in \Sigma$

$$\overline{\mu}(A) = [\mu(A), \mathbf{0}]$$

intervalno-vrednosna $\oplus$-mera.

Rezultati prikazani u delu koji sledi predstavljaju originalni deo istraživanja i publikovani su u [20].

Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.1 *Intervalno vrednosna skupovna funkcija $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ zadovoljava uslove Definicije 1.9, tj. $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ je intervalno-vrednosna $\oplus$-mera.*

Dokaz. Tvrđenje sledi direktno iz definicije $\oplus$-mere i definicije pseudo-zbira intervala. □

Napomena 1.4 Neka je $\mathcal{M}_0$ familija $\oplus$-mera, definisanih na σ-algebri Σ podskupova nepraznog skupa X, koja uključuje i takozvanu trivijalnu $\oplus$-meru μ_0, tj. $\oplus$-meru oblika $\mu_0(A) = \mathbf{0}$ za svako $A \in \Sigma$, takvih da je $(\mathcal{M}_0, \preceq)$ gusto linearno uređenje sa krajevima.

Ako je poredak jednak uobičajenom poretku $\leq$, intervalno-vrednosna skupovna funkcija $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}$ je oblika

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = [\mathbf{0}, \mu_r].$$

Ako je poredak $\geq$, tj. obrnut uobičajenom poretku, tada je intervalno-vrednosna skupovna funkcija $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}$ oblika

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = [\mu_r, \mathbf{0}].$$

1.3 Pseudo-integral realno-vrednosne funkcije

U ovom delu disertacije predstavljeni su osnovni pojmovi pseudo-integralnog računa. Opisan je postupak konstrukcije pseudo-integrala funkcije $f : X \to [a, b]$ u odnosu na $\oplus$-meru μ, kao i osnovne osobine ovog integrala. Takođe, dat je oblik psedo-integrala za g-poluprsten, takozvani g-integral i poluprsten prve klase u kom je pseudo-množenje dato preko generatora g.

Rezultati prikazani u ovom delu disertacije zasnovani su na [33, 38, 39, 40].

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase. Neka su $([a, b], \oplus)$ i $([a, b], \odot)$ polugrupe koje su kompletne mreže sa poretkom, što znači da za svaki neprazan skup $A \subset [a, b]$ ograničen odozgo (odozdo) postoji $\sup A$ ($\inf A$).

Pretpostavićemo da je na intervalu $[a, b]$ data metrika d kompatibilna sa $\limsup$ i $\liminf$, tj. iz $\limsup x_n = x$ i $\liminf x_n = x$ sledi da je $\lim x_n = x$, koja zadovoljava bar jedan od sledećih uslova:

a) $d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq d(x, x') + d(y, y')$,

b) $d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$.

Takođe, pretpostavićemo monotonost metrike d, tj. da za svako $x, y, z \in [a, b]$ važi

$$x \preceq z \preceq y \quad \Rightarrow \quad \max\{d(y, z), d(x, z)\} \leq d(x, y).$$

Konstrukcija pseudo-integrala, slično kao i konstrukcija Lebegovog integrala, započinje pseudo-integracijom elementarne funkcije.

Definicija 1.11 Preslikavanje $e : X \to [a, b]$ naziva se *elementarna funkcija* ako ima sledeću reprezentaciju

$$e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \chi_{A_i}, \tag{1.2}$$

gde $a_i \in [a, b]$, $i \in \mathbb{N}$ i skupovi $A_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$ su disjunktni skupovi, a preslikavanje

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad x \notin A \\ \mathbf{1} & , \quad x \in A \end{cases}$$

je *pseudo-karakteristična funkcija* skupa A. Ako je pseudo-sabiranje idempotentna operacija skupovi A_i ne moraju da budu disjunktni.

Definicija 1.12 *Pseudo-integral elementarne funkcije* e date sa (1.2) u odnosu na $\oplus$-meru μ je

$$\int_X^{\oplus} e \odot d\mu = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu\left(A_i\right). \tag{1.3}$$

Definicija 1.13 *Pseudo-integral merljive*[1] *funkcije* $f : X \to [a, b]$ u odnosu na σ-algebru Σ i $\oplus$-meru μ je

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\mu, \tag{1.4}$$

gde je $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz elementarnih funkcija izabranih tako da kada $n \to \infty$, $d\left(\varphi_n(x), f(x)\right) \to 0$ uniformno, pri čemu je d ranije uvedena metrika.

Pseudo-integral definisan na ovaj način ne zavisi od izbora niza elementarnih funkcija $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 1.14 *Pseudo-integral merljive funkcije* f *na proizvoljnom nepraznom podskupu* A *skupa* X je definisan sa

$$\int_A^{\oplus} f \odot d\mu = \int_X^{\oplus} (f \odot \chi_A) \odot d\mu,$$

gde je χ_A pseudo-karakteristična funkcija skupa A.

Osnovne osobine pseudo-integrala date su u narednim tvrđenjima.

Tvrđenje 1.2 *Neka su operacije* $\oplus$ *i* $\odot$ *neprekidne i* $\oplus$ *beskonačno komutativna i asocijativna operacija. Tada važe osobine:*

[1]Funkcija $f : X \to [a, b]$ je *merljiva od dole* ako za svako $c \in [a, b]$ skupovi $\{x : f(x) \le c\}$ i $\{x : f(x) < c\}$ pripadaju Σ.
Funkcija $f : X \to [a, b]$ je *merljiva* ako je merljiva od dole i ako za svako $c \in [a, b]$ skupovi $\{x : f(x) \ge c\}$ i $\{x : f(x) > c\}$ pripadaju Σ.

i) $\int\limits_X^{\oplus} (f_1 \oplus f_2) \odot d\mu = \int\limits_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu \oplus \int\limits_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu,$

ii) $\int\limits_X^{\odot} (c \odot f_1) \odot d\mu = c \odot \int\limits_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu, \quad c \in [a,b].$

Tvrđenje 1.3 *Neka su A i B neprazni disjunktni podskupovi od X, takvi da $A, B \in \Sigma$. Tada važi*

i) $\int\limits_{A\cup B}^{\oplus} f \odot d\mu = \int\limits_A^{\oplus} f \odot d\mu \oplus \int\limits_B^{\oplus} f \odot d\mu,$

ii) ako je $f_1 \preceq f_2$, tada je $\int\limits_A^{\oplus} f_1 \odot d\mu \preceq \int\limits_A^{\oplus} f_2 \odot d\mu.$

Primer 1.7 a) Za poluprsten prve klase takav da je

$$x \oplus y = \sup\{x, y\}$$

i pseudo-množenje $\odot$ dato preko generatora g sa

$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)),$$

na osnovu [33], pseudo-integral merljive funkcije $f : X \to [a,b]$ je

$$\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mu = \sup_{x \in X} (f(x) \odot \psi(x)),$$

gde funkcija $\psi : X \to [a,b]$ definiše sup-meru μ.

Slična forma se dobija ako je $\oplus$ dato sa $x \oplus y = \inf\{x, y\}$, a $\odot$ dato preko generatora g, tj. sa $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$.

b) Kao što je već rečeno, u slučaju da pseudo-sabiranje nije idempotentno, razmatraćemo poluprstene druge klase, kod kojih su pseudo-operacije generisane funkcijom $g : [a, b] \to [0, \infty]$ koja je strogo monotona neprekidna funkcija. Pseudo-integral merljive funkcije $f : X \to [a, b]$ oblika je (videti [39, 40])

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mu = g^{-1}\left(\int_X (g \circ f) d(g \circ \mu)\right),$$

gde je $g \circ \mu$ Lebegova mera, a integral sa desne strane jednakosti je Lebegov integral.

Integral iz ovog primera nazivamo g-integral.

U opštem slučaju, konstrukcija pseudo-integrala kada je pseudo-sabiranje idempotentno dodatno zahteva da za svako $\varepsilon > 0$ postoji monotona ε-mreža u $f(X)$. Više o ovome može se pronaći u [38, 40].

U [33] pokazano je da, ako je dekompozabilna mera data pomoću gustine ψ koja je neprekidna i pseudo-množenje dato preko generatora g, odgovarajući pseudo-integral može da se dobije kao granična vrednost odgovarajućih g-integrala.

Za funkciju $f : X \to [a, b]$ kažemo da je *pseudo-integrabilna* ako njen integral postoji kao konačna vrednost u smislu posmatranog poluprstena. Ograničenost u smislu poluprstena i pseudo-integrabilnost je ilustrovana sledećim primerom ([22]).

Primer 1.8 a) U poluprstenu $([-\infty, \infty], \max, \odot)$ važi da je $\mathbf{0} = -\infty$, $[a, b]_+ = [a, b] = [-\infty, \infty]$, uz konvenciju $-\infty + \infty = -\infty$. Funkcija $f : X \to [a, b]$ je ograničena u smislu datog poluprstena ako je $f(x) \leq M < \infty$, za svako $x \in X$ i neko $M \in [-\infty, \infty)$, tj. ako je $f(x) \preceq M \prec b$, za svako $x \in X$.

Druga mogućnost, kada se izbegava konvencija $-\infty+\infty = -\infty$, je da se posmatra poluprsten $([-\infty, \infty), \max, \odot)$ i funkcija $f : X \to [-\infty, \infty)$.

Funkcija f je pseudo-integrabilna ako $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu$ postoji kao konačna vrednost u smislu datog poluprstena, što u ovom slučaju znači da je $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu \prec b$.

b) U poluprstenu $([-\infty, \infty], \min, \odot)$ je $\mathbf{0} = +\infty$ i važi da je $[a,b]_+ = [a,b] = [-\infty, \infty]$, uz konvenciju da je $-\infty + \infty = +\infty$. Funkcija $f : X \to [a,b]$ je ograničena u smislu datog poluprstena ako je $f(x) \geq M > -\infty$, za svako $x \in X$ i neko $M \in (-\infty, \infty]$, tj. ako je $f(x) \preceq M \prec a$, za svako $x \in X$.

Usvajanje konvencije $-\infty + \infty = +\infty$ može da se izbegne ako se posmatra poluzatvoren interval, tj. poluprsten $((-\infty, +\infty], \min, \odot)$.

U ovom slučaju je funkcija f pseudo-integrabilna ako je $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu \prec a$.

c) Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten druge klase tj. pseudo-operacije su date generatorom $g : [a,b] \to [0, \infty]$. Sada je $\mathbf{0} = g^{-1}(0)$, $\mathbf{1} = g^{-1}(1)$ i $[a,b]_+ = [a,b]$, uz konvenciju $0 \cdot (+\infty) = 0$.

i) Ako je g rastuća bijekcija, tada je $\mathbf{0} = a$. Funkcija $f : X \to [a,b]$ je ograničena u smislu datog poluprstena ako je $f(x) \leq M < b$, za svako $x \in X$ i neko $M \in [a,b)$, tj. ako je $f(x) \preceq M \prec b$, za svako $x \in X$.

Funkcija f je pseudo-integrabilna ako je $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu \prec b$.

ii) Za opadajuću bijekciju g je $\mathbf{0} = b$. Funkcija $f : X \to [a,b]$ je ograničena u smislu datog poluprstena ako je $f(x) \geq M > a$, za svako $x \in X$ i neko $M \in (a,b]$, tj. ako je $f(x) \preceq M \prec a$, za svako $x \in X$.

Funkcija f je pseudo-integrabilna ako je $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu \prec a$.

Postoje još neki integrali koji su konstruisani u odnosu na dekompozabilne mere. Neki od njih su Veberov integral i Morofuši-Sugenov integral ([51, 63]). Više o integralima u odnosu na neaditivne mere i njihovim primenama se može pronaći u [7, 25, 62].

1.4 Pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije

Skupovno-vrednosne funkcije imaju veliku primenu u ekonomskim istraživanjima ([24]). Prvi rezultati vezani za integraciju skupovno-vrednosnih funkcija bazirani su na Lebegovom integralu i mogu se pronaći u [6]. Integracija skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na meru koja nije aditivna izučavana je u radovima [22, 58, 59, 60].

Rezultati prikazani u ovom delu baziraju se na rezultatima iz [18, 22].

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase. Neka je X neprazan skup, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ i (X, Σ, μ) prostor mere, gde je μ $\oplus$-mera. Neka je $f : X \to [a,b]_+$ merljiva realno-vrednosna pseudo-integrabilna funkcija ograničena u smislu posmatranog poluprstena.

Označimo sa $L^1_{\oplus}(\mu)$ klasu svih funkcija $f : X \to [a,b]_+$ koje su merljive, pseudo-integrabilne i ograničene u smislu posmatranog poluprstena.

Neka je $\mathcal{F}$ klasa svih zatvorenih podskupova od $[a,b]_+$.

Definicija 1.15 *Skupovno-vrednosna funkcija* F je funkcija iz X u $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, tj. $F : X \to \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$.

Definicija 1.16 Neka je F merljiva[2] skupovno-vrednosna funkcija. *Pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije F na skupu $A \in \Sigma$ je*

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \int_A^{\oplus} f \odot d\mu \mid f \in \mathrm{S}(F) \right\}, \tag{1.5}$$

gde je

$$\mathrm{S}(F) = \{f \in L^1_{\oplus}(\mu) \mid f(x) \in F(x) \text{ za skoro svako } x \in X\}. \tag{1.6}$$

Specijalno, ako je μ Lebegova mera, tada je pseudo-integral (1.5) skupovno-vrednosne funkcije F Aumanov integral ([6]).

Sve skupovno-vrednosne funkcije koje se posmatraju u ovoj disertaciji su merljive.

[2]Skupovno-vrednosna funkcija $F : X \to \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ je *merljiva* ako je njen grafik merljiv, tj. ako

$$Gr(F) = \{(x,r) \in X \times [a,b]_+ \mid r \in F(x)\} \in \Sigma \times \mathcal{B}([a,b]_+),$$

gde je $\mathcal{B}([a,b]_+)$ Borelovo σ-polje na $[a,b]_+$.

Definicija 1.17 Za merljivu skupovno-vrednosnu funkciju $F : X \to \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ kažemo da je *pseudo-integrabilna* na nekom skupu $A \in \Sigma$ ako je njen pseudo-integral nad tim skupom neprazan skup, tj.

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu \neq \emptyset.$$

Pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije za sva tri slučaja poluprstena je predstavljen u sledećem primeru.

Primer 1.9 a) Posmatrajmo poluprsten prve klase, tj. $([a, b], \max, \odot)$, gde pseudo-množenje $\odot$ nije idempotentna operacija. Tada je $\oplus$-mera μ data funkcijom gustine $\psi : \mathbb{R} \to [a, b]$ sa $\mu(A) = \sup\limits_{x \in A} \psi(x)$ za svako $A \in \Sigma$ (videti [38, 39, 40]). U ovom slučaju, pseudo-integral merljive skupovno-vrednosne funkcije F je oblika

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \sup_{x \in A} \left(f(x) \odot \psi(x) \right) \mid f \in \mathrm{S}(F) \right\}.$$

- U specijalnom slučaju, ako je pseudo-množenje $\odot$ dato generatorom $g(x) = e^x$, sledi

$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)) = x + y,$$

pa je pseudo-integral oblika

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \sup_{x \in A} \left(f(x) + \psi(x) \right) \mid f \in \mathrm{S}(F) \right\}.$$

- Ako je pseudo-množenje $\odot$ dato generatorom $g(x) = \dfrac{1}{x}$, sledi

$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)) = xy,$$

pa je pseudo-integral oblika

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \sup_{x \in A} \left(f(x)\psi(x) \right) \mid f \in \mathrm{S}(F) \right\}.$$

b) Ako je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten druge klase, pseudo-operacije su date generatorom $g:[a,b]\to[0,\infty]$, a pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije F je

$$\int_A^{\oplus} F\odot d\mu=\left\{g^{-1}\left(\int_A g\circ f\, d(g\circ\mu)\right)\;\Big|\; f\in \mathrm{S}(F)\right\}.$$

c) Poluprsten $([a,b],\min,\max)$ je jedan primer poluprstena treće klase. Tada je $\oplus$-mera μ data funkcijom gustine $\psi:\mathbb{R}\to[a,b]$ sa $\mu(A)=\inf\limits_{x\in A}\psi(x)$, za svako $A\in\Sigma$. U ovom slučaju, pseudo-integral merljive skupovno-vrednosne funkcije F oblika je

$$\int_A^{\oplus} F\odot d\mu=\left\{\inf_{x\in A}\left(\max(f(x),\psi(x))\right)\mid f\in \mathrm{S}(F)\right\}.$$

Pojam pseudo-integrabilnosti merljive funkcije $f:X\to[a,b]$ se proširuje na pojam pseudo-integrabilnosti merljive skupovno-vrednosne funkcije $F:X\to\mathcal{F}\backslash\{\emptyset\}$ i u tesnoj je vezi sa osobinom pseudo-integrabilne ograničenosti.

Definicija 1.18 Skupovno-vrednosna funkcija F je *pseudo-integrabilno ograničena* ako postoji funkcija $h\in L^1_{\oplus}(\mu)$ takva da:

i) $\bigoplus\limits_{\alpha\in F(x)}\alpha\preceq h(x)$, za idempotentno pseudo-sabiranje,

ii) $\sup\limits_{\alpha\in F(x)}\alpha\preceq h(x)$, za pseudo-sabiranje dato rastućim generatorom g,

iii) $\inf\limits_{\alpha\in F(x)}\alpha\preceq h(x)$, za pseudo-sabiranje dato opadajućim generatorom g.

U [22] je pokazano da važe sledeća tvrđenja.

Tvrđenje 1.4 *Ako je F pseudo-integrabilno ograničena skupovno-vrednosna funkcija, tada je F pseudo-integrabilna.*

Tvrđenje 1.5 *Neka je F pseudo-integrabilna skupovno-vrednosna funkcija, F_1 i F_2 pseudo-integrabilno ograničene skupovno-vrednosne funkcije i neka su $A,B\in\Sigma$. Tada važi:*

i) ako je $A \subset B$ *tada je* $\int_A^{\oplus} F \odot d\mu \preceq_S \int_B^{\oplus} F \odot d\mu,$

ii) ako je $F_1 \preceq_S F_2$ *tada je* $\int_X^{\oplus} F_1 \odot d\mu \preceq_S \int_X^{\oplus} F_2 \odot d\mu,$

iii) ako su A i B disjunktni skupovi iz Σ *(u slučaju da je* $\oplus$ *idempotentna operacija, uslov disjunktnosti može da se izostavi) tada je*

$$\int_{A\cup B}^{\oplus} F \odot d\mu = \int_A^{\oplus} F \odot d\mu \oplus \int_B^{\oplus} F \odot d\mu,$$

iv) ako je $\mu(A) = \mathbf{0}$ *tada je* $\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \{\mathbf{0}\},$

v) ako je $\mathbf{0} \prec \alpha$ *tada je* $\int_X^{\oplus} (\alpha \odot F) \odot d\mu = \alpha \odot \int_X^{\oplus} F \odot d\mu,$

gde je $\preceq_S$ *relacija uvedena Definicijom 1.7.*

Još jedna važna osobina pseudo-integrala skupovno-vrednosne funkcije je osobina pseudo-konveksnosti.

Tvrđenje 1.6 *Neka je F skupovno-vrednosna funkcija takva da su skupovi* $F(x)$ *pseudo-konveksni za svako* $x \in X$*. Tada je* $\int_X^{\oplus} F \odot d\mu$ *pseudo-konveksan podskup od* $[a, b]_+$.

1.4.1 Pseudo-integral intervalno-vrednosne funkcije

Kao rezultate merenja raznih fizičkih pojava, usled uticaja spoljašnjih faktora, ne dobijaju se tačne vrednosti već intervali u kojima se te vrednosti nalaze. Usled navedenog, potrebno je posmatrati funkcije čije vrednosti nisu realni brojevi već intervali. Iz tog razloga, došlo se do definicije posebne klase skupovno-vrednosnih funkcija, takozvanih intervalno-vrednosnih funkcija, koja ima veliku primenu u praksi.

Definicija 1.19 *Intervalno-vrednosna funkcija* F je funkcija iz X u $\mathcal{I}$, tj. $F : X \to \mathcal{I}$, gde je $\mathcal{I}$ dato sa (1.1).

Kao i sve skupovno-vrednosne funkcije koje posmatramo u ovoj disertaciji, intervalno-vrednosne funkcije koje ćemo posmatrati, u odnosu na prethodno dat prostor mere, merljive su.

Zbog svog specifičnog oblika, intervalno-vrednosna funkcija F može se predstaviti pomoću *graničnih funkcija* $l, r : X \to [a,b]_+$ na sledeći način:

$$F(x) = [l(x), r(x)]\,, \quad x \in X. \tag{1.7}$$

Granične funkcije l i r su merljive i $l(x), r(x) \in F(x)$ za skoro svako $x \in X$.

Postavlja se pitanje ograničenosti i pseudo-integrabilnosti graničnih funkcija.

Primer 1.10 Neka je $([a,b], \max, \odot)$ poluprsten prve klase, $F : X \to \mathcal{I}$ intervalno-vrednosna funkcija data sa $F(x) = [\omega_x, \mathbf{1}]$, gde su ω_x proizvoljne vrednosti iz $(a, \mathbf{1})$ i neka je $\mu(X) = b$. Za ovakav izbor funkcije F, desna granična funkcija je funkcija oblika $r(x) = \mathbf{1}$ za svako $x \in X$, a kako je

$$\int_X^{\oplus} r \odot d\mu = \mathbf{1} \odot \mu(X) = b,$$

ona nije pseudo-integrabilna i prema tome ne pripada $\mathrm{S}(F)$, gde je $\mathrm{S}(F)$ dato sa (1.6).

Ako se u ovom primeru pseudo-množenje izabere na takav način da je $\mathbf{1} = b$, desna granična funkcija r nije ni ograničena u smislu posmatranog poluprstena.

Na osnovu prethodnog primera sledi da granične funkcije intervalno-vrednosne funkcije ne moraju biti pseudo-integrabilne. Rezultat iz [22] daju odgovor na pitanje za koju klasu intervalno-vrednosnih funkcija će granične funkcije biti pseudo-integrabilne.

Tvrđenje 1.7 *Ako je intervalno-vrednosna funkcija $F : X \to \mathcal{I}$ pseudo-integrabilno ograničena, tada njene granične funkcije pripadaju klasi* $\mathrm{S}(F)$.

Za granične funkcije pseudo-integrabilno ograničene intervalno-vrednosne funkcije F važi

$$l(x) = \inf_{f \in \mathrm{S}(F)} f(x) \quad \text{i} \quad r(x) = \sup_{f \in \mathrm{S}(F)} f(x).$$

Pseudo-zbir i pseudo-proizvod dve intervalno-vrednosne funkcije F_1 i F_2, kao i pseudo-proizvod intervalno-vrednosne funkcije F_1 i proizvoljnog skalara $\alpha \in [a, b]_+$ takođe su oblika (1.7), sa odgovarajućim graničnim funkcijama ([22]).

Tvrđenje 1.8 *Neka su F_1 i F_2 intervalno-vrednosne funkcije sa graničnim funkcijama l_1, r_1, l_2 i r_2, tj. $F_1(x) = [l_1(x), r_1(x)]$ i $F_2(x) = [l_2(x), r_2(x)]$. Tada, na osnovu reprezentacije (1.7) i osobina operacija $\oplus$ i $\odot$ za tri osnovne klase poluprstena, važi da je*

$$(F_1 \oplus F_2)(x) = F_1(x) \oplus F_2(x) = [l_1(x) \oplus l_2(x), r_1(x) \oplus r_2(x)],$$

$$(F_1 \odot F_2)(x) = F_1(x) \odot F_2(x) = [l_1(x) \odot l_2(x), r_1(x) \odot r_2(x)]$$

i

$$(\alpha \odot F_1)(x) = \alpha \odot F_1(x) = [\alpha \odot l_1(x), \alpha \odot r_1(x)],$$

za $\alpha \in [a, b]_+$.

Kako su intervalno-vrednosne funkcije specijalan slučaj skupovno-vrednosnih funkcija, za njih važe i sve osobine navedene za pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije. Imajući na umu specifičan oblik skupa vrednosti intervalno-vrednosne funkcije, potrebna su dodatna ispitivanja pseudo-konveksnosti i oblika rezultujućeg pseudo-integrala.

Pseudo-integracija merljive skupovno-vrednosne funkcije F za koju su skupovi $F(x)$ pseudo-konveksni podskupovi od $[a, b]_+$, za rezultat daje pseudo-integral $\int_X^{\oplus} F \odot d\mu$ koji je takođe pseudo-konveksan podskup od $[a, b]_+$.

Posledica 1.1 *Neka je F intervalno-vrednosna funkcija. Tada je* $\int_X^{\oplus} F \odot d\mu$ *pseudo-konveksan podskup od* $[a,b]_+$.

Na osnovu reprezentacije intervalno-vrednosne funkcije pomoću graničnih funkcija, prethodna posledica može da se proširi na sledeći način.

Lema 1.2 *Neka je F intervalno-vrednosna funkcija predstavljena preko graničnih funkcija l i r koje su ograničene u smislu datog poluprstena. Tada je*

$$\int_X^{\oplus} F \odot d\mu \subseteq \left[\int_X^{\oplus} l \odot d\mu, \int_X^{\oplus} r \odot d\mu\right].$$

Dalje, važi sledeća lema.

Lema 1.3 *Neka je F intervalno-vrednosna funkcija predstavljena preko graničnih funkcija l and r ograničenih u smislu datog poluprstena. Tada se sve vrednosti iz otvorenog intervala*

$$\left(\int_X^{\oplus} l \odot d\mu, \int_X^{\oplus} r \odot d\mu\right)$$

mogu predstaviti kao pseudo-konveksne kombinacije

$$\int_X^{\oplus} l \odot d\mu \quad i \quad \int_X^{\oplus} r \odot d\mu.$$

U radu [22] je razmatran primer poluprstena koji ne pripada nijednoj od tri osnovne klase, koje su predmet istraživanja ove teze. U tom slučaju pokazano je da se proizvoljna vrednost iz (l^*, r^*) ne može uvek dobiti kao pseudo-konveksna kombinacija l^* i r^*.

Za pseudo-integrabilno ograničenu intervalno-vrednosnu funkciju F važi da je njen pseudo-integral jednak intervalu

$$\left[\int_X^{\oplus} l \odot d\mu, \int_X^{\oplus} r \odot d\mu\right],$$

gde su l i r granične funkcije funkcije F, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 1.2 *Neka je F pseudo-integrabilno ograničena intervalno-vrednosna funkcija sa graničnim funkcijama l i r. Tada je*

$$\int_X^{\oplus} F \odot d\mu = \left[\int_X^{\oplus} l \odot d\mu, \int_X^{\oplus} r \odot d\mu \right]. \tag{1.8}$$

1.4.2 $\oplus$-mera definisana pomoću pseudo-integrala intervalno-vrednosne funkcije

Jedna od primena pseudo-integrala intervalno-vrednosne funkcije je konstruisanje intervalno-vrednosne $\oplus$-mere. Ovaj deo disertacije sadrži definiciju intervalno-vrednosne $\oplus$-mere date preko pseudo-integrala intervalno-vrednosne funkcije. Neke osobine ovako definisane $\oplus$-mere pokazane su u [22].

Definicija 1.20 Neka je $F : X \to \mathcal{I}$ pseudo-integrabilno ograničena intervalno-vrednosna funkcija sa graničnim funkcijama l i r. *Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera* je intervalno-vrednosna skupovna funkcija $\overline{\mu}_F$

$$\overline{\mu}_F(A) = \int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left[\int_A^{\oplus} l \odot d\mu, \int_A^{\oplus} r \odot d\mu \right],$$

gde je $A \subseteq X$.

Neke osobine mere $\overline{\mu}_F$ date su narednom teoremom.

Teorema 1.3 *Neka je $F : X \to \mathcal{I}$ pseudo-integrabilno ograničena intervalno-vrednosna funkcija sa graničnim funkcijama l i r i neka je $\overline{\mu}_F$ intervalno-vrednosna skupovna funkcija zasnovana na intervalno-vrednosnom pseudo-integralu funkcije F. Tada važi:*

i) $\overline{\mu}_F(\emptyset) = [\mathbf{0}, \mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$,

ii) $\overline{\mu}_F$ *je* monotona u odnosu na relaciju poretka $\preceq_S$, *tj. za* $A, B \in \Sigma$ *važi*

$$\text{ako je } A \subseteq B, \text{ tada je } \overline{\mu}_F(A) \preceq_S \overline{\mu}_F(B),$$

iii) $\overline{\mu}_F$ *je* $\oplus$-aditivna*, tj.*

$$\overline{\mu}_F\,(A \cup B) = \overline{\mu}_F(A) \oplus \overline{\mu}_F(B),$$

gde je A *i* B *par disjunktnih skupova iz* Σ *(ako je* $\oplus$ *idempotentna operacija, disjunktnost može da se izostavi),*

iv) $\overline{\mu}_F$ *je* σ-$\oplus$-aditivna*, tj.*

$$\overline{\mu}_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}_F(A_i),$$

gde je $(A_i)_{i\in N}$ *niz disjunktnih skupova iz* Σ *(ako je* $\oplus$ *idempotentna operacija, uslov disjunktnosti može da se izostavi).*

Za specijalne izbore intervalno-vrednosne funkcije F dobijaju se intervalno-vrednosne $\oplus$-mere iz Primera 1.6.

Primer 1.11 *i*) Ako je $\mu : \Sigma \to [a,b]_+$ $\oplus$-mera i $F(x) = \{\mathbf{1}\}$ za svako $x \in X$, tada je odgovarajuća intervalno-vrednosna $\oplus$-mera data sa

$$\overline{\mu}_F(A) = [\mu(A), \mu(A)] = \{\mu(A)\}.$$

ii) Ako je $\mu : \Sigma \to [a,b]_+$ $\oplus$-mera i $F(x) = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ za svako $x \in X$, tada je odgovarajuća intervalno-vrednosna $\oplus$-mera data sa

$$\overline{\mu}_F(A) = [\mathbf{0}, \mu(A)].$$

Napomena 1.5 Primetimo da je u Primeru 1.11 *ii*) posmatrani poredak jednak uobičajenom poretku.

Napomena 1.6 Prethodnim primerom može da se ilustruje neophodnost uvođenja relacije $\preceq_S$. Ako bismo u Primeru 1.11 *i*) koristili relaciju $\subseteq$ umesto $\preceq_S$, odgovarajuća intervalno-vrednosna $\oplus$-mera ne bi zadovoljavala osobinu monotonosti. Međutim, u nekim specijalnim slučajevima, kao u Primeru 1.11 *ii*), relacije $\preceq_S$ i $\subseteq$ se poklapaju.

1.4.3 Zakon velikih brojeva za intervalno-vrednosne funkcije

Sve statističke zakonitosti su povezane sa masovnim pojavama i one poseduju osobinu stabilnosti. Pri svakom merenju iste veličine slučajna odstupanja su neizbežna i razlikuju se po vrednosti i po predznaku. U masovnim pojavama se slučajne greške mogu smanjiti računanjem srednje vrednosti ponovljenih merenja. Stabilnost prosečnih vrednosti masovnih pojava čini fizički sadržaj zakona velikih brojeva. Suština zakona velikih brojeva je da pri velikom broju slučajnih eksperimenata srednja vrednost prestaje da bude slučajna i može se predvideti sa velikom pouzdanošću. U teoriji verovatnoće su poznati različiti oblici zakona velikih brojeva. Više o ovoj temi videti u [9, 10, 14, 15, 46].

Uopštenje zakona velikih brojeva u okvirima pseudo-analize je dato u radu [37]. Dalje uopštenje rezultata može se pronaći u [19, 22] gde je izučavan zakon velikih brojeva za intervalno-vrednosne funkcije.

Pretpostavićemo da je $\mu(X) = \mathbf{1}$.

Napomena 1.7 Uz pretpostavku $\mu(X) = \mathbf{1}$, mera μ, u slučaju poluprstena druge klase, oblika je $\mu(A) = g^{-1} \circ P(A)$, $A \in \Sigma$, gde je P klasična verovatnoća i g aditivni generator. Kao što je rečeno u Primeru 1.5, u ovom slučaju mera μ naziva se i deformisana verovatnoća (videti [12, 37]).

Neka je $d : [a,b]^2 \to [a,b]_+$ metrika na poluprstenu $([a,b], \oplus, \odot)$. Preslikavanje $D : \mathcal{I}^2 \to [0, +\infty]$ oblika

$$D(A,B) = \max\{d(\inf A, \inf B), d(\sup A, \sup B)\}, \tag{1.9}$$

je Hausdorfova metrika. Na osnovu jednakosti (1.9), moguće je definisati konvergenciju u $\oplus$-meri μ za intervalno-vrednosne funkcije.

Definicija 1.21 Niz $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ intervalno-vrednosnih funkcija *konvergira u $\oplus$-meri μ* ka intervalno-vrednosnoj funkciji F ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid D(F_n(x), F(x)) \geq \varepsilon\}\right) = \mathbf{0}.$$

Pojam slučajnih promenljivih koje imaju istu raspodelu, iz teorije verovatnoće, može se proširiti i na intervalno-vrednosne funkcije, tj. pojam iste raspodele definiše se u smislu posmatranog poluprstena $([a,b], \oplus, \odot)$ za intervalno-vrednosne funkcije.

Definicija 1.22 Intervalno-vrednosne funkcije F_1 i F_2 predstavljene graničnim funkcijama l_1, r_1, l_2 i r_2 sa $F_1(x) = [l_1(x), r_1(x)]$ i $F_2(x) = [l_2(x), r_2(x)]$ imaju *istu raspodelu* ako za svako $w \in [a, b]$ važi

$$\mu(x \,|\, l_1(x) \prec w) = \mu(x \,|\, l_2(x) \prec w) \quad \text{i} \quad \mu(x \,|\, r_1(x) \prec w) = \mu(x \,|\, r_2(x) \prec w).$$

Posmatrajmo poluprsten druge klase generisan generatorom g. Neka je S_n^* *pseudo-aritmetička sredina* data sa

$$S_n^* = n^* \odot \bigoplus_{i=1}^{n} F_i,$$

gde je $n^* = g^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Zakon velikih brojeva za pseudo-aritmetičku sredinu S_n^* formulisan je u narednoj teoremi.

Teorema 1.4 *Neka je* $([a, b], \oplus, \odot)$ *poluprsten druge klase i* $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *niz pseudo-integrabilno ograničenih intervalno-vrednosnih funkcija sa istom raspodelom. Tada*

$$S_n^* \text{ konvergira u } \oplus\text{-meri } \mu \text{ ka } \int_X^{\oplus} F_1 \odot \, d\mu.$$

Napomena 1.8 Ako je $F(x)$ oblika $F(x) = \{f(x)\}$ gde je $f : X \to [a, b]_+$, Teorema 1.4 je zapravo zakon velikih brojeva koji je dokazan u [37].

Ako su pseudo-operacije date generatorom $g(x) = x$, dobija se zakon velikih brojeva iz klasične teorije verovatnoće.

Primenom rezultata iz [33], Teorema 1.4 može se proširiti na poluprstene prve klase kod kojih je pseudo-sabiranje idempotentna operacija, a pseudo-množenje dato generatorom g.

Teorema 1.5 *Neka je* $([0, \infty], \sup, \odot)$ *poluprsten u kom je* $\odot$ *generisano rastućim generatorom* g. *Neka je* μ sup-*dekompozabilna mera takva da je*

$$\mu(A) = \operatorname*{ess\,sup}_{\nu}(\psi(x) \,|\, x \in A), \tag{1.10}$$

gde je ν Lebegova mera na $\mathbb{R}$ i $\psi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ neprekidna funkcija gustine. Neka je $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ niz pseudo-integrabilno ograničenih intervalno-vrednosnih funkcija iste raspodele. Neka su funkcije iz $S(F_i)$ neprekidne za svako $i \in \mathbb{N}$. Tada

$$S_n^* \text{ konvergira u } \oplus\text{-meri } \mu \text{ ka } \int_X^{\sup} F_1 \odot d\mu,$$

gde je $S_n^* = n^* \odot \sup\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} F_i$ *i* $n^* = g^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Odgovarajućim izborom generatora g za poluprsten iz druge klase dobijaju se neke poznate sredine kao što su aritmetička, kvadratna, harmonijska, geometrijska i eksponencijalna sredina ([22]).

Primer 1.12 Neka su $F_i(x) = [l_i(x), r_i(x)]$, $i \in \mathbb{N}$ pseudo-integrabilno ograničene intervalno-vrednosne funkcije sa istom raspodelom. Neka je poluprsten $([a,b], \oplus, \odot)$ druge klase dat generatorom g.

a) Ako je $g(x) = x^\alpha$, tada je S_n^* intervalna stepena sredina, tj.

$$S_n^*(x) = \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(l_i(x))^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i(x))^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Specijalno, za $\alpha = 1$ i $\alpha = 2$ dobijaju se intervalna aritmetička i intervalna kvadratna sredina, respektivno.

b) Neka je $g(x) = x^{-1}$. Tada je S_n^* intervalna harmonijska sredina, tj.

$$S_n^*(x) = \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(l_i(x))^{-1}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i(x))^{-1}\right)^{-1}\right].$$

c) Za $g(x) = \log x$, S_n^* je intervalna geometrijska sredina, tj.

$$S_n^*(x) = \left[\left(\prod_{i=1}^{n} l_i(x)\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\prod_{i=1}^{n} r_i(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

d) Kada je $g(x) = e^{\alpha x}$, S_n^* je intervalna eksponencijalna sredina, tj.

$$S_n^*(x) = \left[\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha l_i(x)}\right), \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha r_i(x)}\right)\right].$$

1.5 Pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru

Uopštenje definicije pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije predstavljeno je u ovom delu disertacije. Umesto $\oplus$-mere posmatra se intervalno-vrednosna $\oplus$-mera i u odnosu na nju konstruiše se pseudo-integral. Značaj intervalno-vrednosne $\oplus$-mere, pa samim tim i integrala konstruisanog u odnosu na nju, ogleda se u modelovanju neodređenosti preko intervalno-vrednosnih verovatnoća, intervalno-vrednosnih entropija, fazi slučajnih promenljivih i slučajnih skupova. Rezultati prikazani u ovom delu teze predstavljaju originalna istraživanja i publikovani su u [20].

Konstrukcija pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru je proširenje pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru proučavanog u [40].

Kao i kod konstrukcije pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije, prvi korak je definisanje pseudo-integrala elementarne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ datu Definicijom 1.10.

Definicija 1.23 *Pseudo-integral elementarne funkcije e* date sa (1.2), u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ datu Definicijom 1.10 je

$$\int_X^{\oplus} e \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A_i).$$

Pseudo-integral elementarne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ ima reprezentaciju datu u sledećoj teoremi. Teorema je dokazana za slučaj $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r]$, tj. kada je posmatrani poredaj jednak uobičajenom.

Teorema 1.6 *Ako je e elementarna funkcija data sa (1.2), tada važi*

$$\int_X^{\oplus} e \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \left[\int_X^{\oplus} e \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} e \odot d\mu_r \right],$$

gde su integrali sa desne strane jednakosti pseudo-integrali elementarne funkcije dati jednakošću (1.3) i $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ je intervalno-vrenosna mera data Definicijom 1.10.

Dokaz. Dokaz sledi iz definicije pseudo-integrala elementarne funkcije date sa (1.3) i definicije pseudo-zbira prebrojivo mnogo intervala iz Napomene 1.2.

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} e \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} &= \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot [\mu_l(A_i), \mu_r(A_i)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} [a_i \odot \mu_l(A_i), a_i \odot \mu_r(A_i)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \mu_l(A_i), \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \mu_r(A_i) \right] \\
&= \left[\lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \mu_l(A_i), \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \mu_r(A_i) \right] \\
&= \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu_l(A_i), \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu_r(A_i) \right] \\
&= \left[\int_X^{\oplus} e \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} e \odot d\mu_r \right]
\end{aligned}$$

□

Definicija pseudo-integrala proizvoljne merljive realno-vrednosne funkcije f u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ se dobija preko definicije pseudo-integrala elementarne funkcije.

Definicija 1.24 *Pseudo-integral merljive funkcije $f : X \to [a,b]$ u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$* datu Definicijom 1.10 je

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}, \tag{1.11}$$

gde je $(\varphi_n)_{n\in N}$ niz elementarnih funkcija izabranih tako da kada $n \to \infty$, $d(\varphi_n(x), f(x)) \to 0$ uniformno.

Slično kao u definiciji pseudo-integrala na proizvoljnom podskupu A skupa X datoj u [40], pseudo-integral u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ funkcije f na proizvoljnom podskupu A od X se definiše na sledeći način

$$\int_A^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \int_X^{\oplus} (f \odot \chi_A) \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}, \tag{1.12}$$

gde je χ_A pseudo-karakteristična funkcija skupa A.

U narednoj teoremi prikazuje se veza između pseudo-integrala (1.11) u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r]$ i pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije f date sa (1.4).

Teorema 1.7 *Ako je $f : X \to [a,b]$ merljiva funkcija, tada je*

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \left[\int_X^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r \right]. \tag{1.13}$$

Dokaz. Primenom Definicije 1.24, Tvrđenja 1.6 i Napomene 1.2 dobija se

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} &= \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\mu_r \right]
\end{aligned}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\int_X^{\oplus}\varphi_n\odot d\mu_l, \lim_{n\to\infty}\int_X^{\oplus}\varphi_n\odot d\mu_r\right]$$

$$= \left[\int_X^{\oplus} f\odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f\odot d\mu_r\right].$$

$\square$

U [38, 39] je pokazano da pseudo-integral realno-vrednosne funkcije ne zavisi od niza elementarnih funkcija koji uniformno konvergira ka posmatranoj funkciji. Na osnovu navedene činjenice, Teoreme 1.7 i Definicije 1.24 dobija se da je pseudo-integral merljive funkcije f u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ takođe nezavisan od izbora niza elementarnih funkcija koji uniformno konvergira ka funkciji f.

Primenom osobina pseudo-integrala realno-vrednosne merljive funkcije dokazaćemo neke osnovne osobine pseudo-integrala u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r]$, što je publikovano u [20].

Teorema 1.8 *Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ g-poluprsten sa rastućim generatorom g ili poluprsten iz prve klase u kom je pseudo-sabiranje jednako* max *i pseudo-množenje dato pomoću generatora g. Neka su $f, f_1, f_2 : X \to [a,b]$ merljive funkcije, $\alpha \in [a,b]_+$ i $A \in \Sigma$. Tada važi:*

i) $$\int_X^{\oplus}(f_1\oplus f_2)\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \int_X^{\oplus} f_1\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} \oplus \int_X^{\oplus} f_2\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}},$$

ii) $$\int_X^{\oplus}(\alpha\odot f)\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \alpha\odot\int_X^{\oplus} f\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}},$$

iii) $$\int_A^{\oplus}\alpha\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \alpha\odot\overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A),$$

iv) ako je $f_1 \preceq f_2$ onda je $$\int_X^{\oplus} f_1\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} \preceq_S \int_X^{\oplus} f_2\odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}.$$

Dokaz. Dokaz pod *i*), *ii*) i *iii*) sledi na osnovu Teoreme 1.7, osobina pseudo-integrala merljive funkcije datih u Tvrđenju 1.2 i definicije pseudo-zbira intervala, budući da na osnovu svega navedenog važe sledeći nizovi jednakosti:

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} (f_1 \oplus f_2) \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} &= \left[\int_X^{\oplus} (f_1 \oplus f_2) \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} (f_1 \oplus f_2) \odot d\mu_r\right] \\
&= \left[\int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_l \oplus \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r \oplus \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r\right] \\
&= \left[\int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r\right] \oplus \left[\int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r\right] \\
&= \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} \oplus \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} (\alpha \odot f) \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} &= \left[\int_X^{\oplus} (\alpha \odot f) \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} (\alpha \odot f) \odot d\mu_r\right] \\
&= \left[\alpha \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_l, \alpha \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right] \\
&= \alpha \odot \left[\int_X^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right] \\
&= \alpha \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_A^{\oplus} \alpha \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} &= \left[\int_A^{\oplus} \alpha \odot d\mu_l, \int_A^{\oplus} \alpha \odot d\mu_r\right] \\
&= \left[\alpha \odot \int_A^{\oplus} d\mu_l, \alpha \odot \int_A^{\oplus} d\mu_r\right] \\
&= \alpha \odot \left[\int_A^{\oplus} d\mu_l, \int_A^{\oplus} d\mu_r\right] \\
&= \alpha \odot [\mu_l(A), \mu_r(A)] \\
&= \alpha \odot \overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A).
\end{aligned}
$$

Da bismo pokazali da važi *iv*) potrebno je pokazati da ako je $f_1 \preceq f_2$

za svako $x \in \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ postoji $y \in \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ takvo da je $x \preceq y$,

kao i da

za svako $y \in \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ postoji $x \in \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ takvo da je $x \preceq y$.

Neka $x \in \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$, tj.

$$
x \in \left[\int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r\right].
$$

Tada se x može napisati u obliku

$$
x = \alpha \odot \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_l \oplus \beta \odot \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r, \quad \alpha \oplus \beta = \mathbf{1}.
$$

Pretpostavimo da je f_1 elementarna funkcija, tj. funkcija oblika (1.2). Tada se primenom definicije pseudo-integrala elementarne funkcije, tj. primenom jednakosti (1.3) i Teoreme 1.6 dobija

$$x \in \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu_l(A_i), \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu_r(A_i) \right].$$

Zbog osobine pseudo-konveksnosti intervala, dobija se sledeći niz jednakosti

$$\begin{aligned} x &= \alpha \odot \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu_l(A_i) \right) \oplus \beta \odot \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu_r(A_i) \right) \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \alpha \odot a_i \odot \mu_l(A_i) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \beta \odot a_i \odot \mu_r(A_i) \right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Big(\alpha \odot a_i \odot \mu_l(A_i) \oplus \beta \odot a_i \odot \mu_r(A_i) \Big) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \Big(\alpha \odot \mu_l(A_i) \oplus \beta \odot \mu_r(A_i) \Big). \end{aligned}$$

Dakle, postoji $\mu = \alpha \odot \mu_l \oplus \beta \odot \mu_r \in \mathcal{M}$, takvo da je $\mu_l \preceq \mu \preceq \mu_r$ i da je $x = \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu$.

Kako iz uslova $f_1 \preceq f_2$ zbog osobina pseudo-integrala sledi da je

$$\int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu \preceq \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu$$

i kako

$$\int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu \in \left[\int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r \right],$$

to je traženo $y = \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu$.

Ako f_1 nije elementarna, već proizvoljna merljiva funkcija, tvrđenje teoreme važi na osnovu jednakosti (1.4).

Drugi deo dokaza, da za svako $y \in \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ postoji $x \in \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ takvo da je $x \preceq y$ je sličan.

□

Napomena 1.9 Primetimo da Teorema 1.7 važi i prilikom integracije na proizvoljnom skupu $A \in \Sigma$.

Takođe, Teoreme 1.6, 1.7 i 1.8 mogu se pokazati u slučaju da je poredak obrnut uobičajenom poretku, tj. kada je $\overline{\mu} = [\mu_r, \mu_l]$.

Napomena 1.10 Ako se prilikom konstrukcije intervalno-vrednosne skupovne funkcije $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$, posmatra familija $\mathcal{M}_0$ iz Napomene 1.4, koja uključuje i trivijalnu meru i ako je posmatrani poluprsten g-poluprsten sa rastućim generatorom ili poluprsten iz prve klase u kom je pseudo-sabiranje jednako max, a pseudo-množenje dato pomoću generatora g, integral (1.13) je oblika

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = \left[\mathbf{0}, \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right].$$

U slučaju da je posmatrani poluprsten g-poluprsten sa opadajućim generatorom ili poluprsten iz prve klase u kom je pseudo-sabiranje jednako min, a pseudo-množenje dato pomoću generatora g, integral (1.13) je oblika

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = \left[\int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r, \mathbf{0}\right].$$

1.5.1 Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera zasnovana na pseudo-integralu u odnosu na $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$

U ovom delu teze prikazana je konstrukcija nove intervalno-vrednosne mere $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$, zasnovane na pseudo-integralu merljive funkcije f u odnosu na intervalno-vrednosnu meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$.

Rezultati predstavljeni u ovom delu su originalni deo istraživanja i publikovani su u [20].

Neka je $\mathcal{M}$ neprazna familija $\oplus$-mera μ iz Definicije 1.10.

Definicija 1.25 Neka je $f : X \to [a,b]_+$ merljiva funkcija. Intervalno-vrednosna skupovna funkcija $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ zasnovana na pseudo-integralu funkcije f u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r]$ data je sa

$$\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A) = \int_A^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \left[\int_A^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_A^{\oplus} f \odot d\mu_r \right], \quad A \subseteq X. \tag{1.14}$$

Teorema 1.9 *Ako važe pretpostavke iz Definicije 1.25, tada za intervalno-vrednosnu skupovnu funkciju $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$, definisanu sa (1.14) važi:*

i) $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(\emptyset) = [\mathbf{0}, \mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$,

ii) $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ monotona je u odnosu na $\preceq_S$, *tj. za* $A, B \in \Sigma$ *važi*

$$\text{ako je } A \subseteq B, \text{ tada je } \overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A) \preceq_S \overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(B),$$

iii) $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ *je* $\oplus$-aditivna, *tj.*

$$\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A \cup B) = \overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A) \oplus \overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(B),$$

gde su A i B disjunktni skupovi iz Σ (ako je $\oplus$ idempotentna operacija, uslov disjunktnosti može da se izostavi).

iv) $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ *je* σ-$\oplus$-aditivna, *tj.*

$$\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A_i),$$

gde je $(A_i)_{i \in N}$ niz disjunktnih skupova iz Σ (ako je $\oplus$ idempotentna operacija, uslov disjunktnosti može da se izostavi).

Dokaz.

i) $$\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(\emptyset) = \left[\int_{\emptyset}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_{\emptyset}^{\oplus} f \odot d\mu_r \right] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}.$$

ii) Dokaz se zasniva na Teoremi 1.7. Neka su A i B dva skupa iz Σ takvi da je $A \subseteq B$. Uz oznake

$$A_l = \int_A^{\oplus} f \odot d\mu_l, \quad A_r = \int_A^{\oplus} f \odot d\mu_r,$$

$$B_l = \int_B^{\oplus} f \odot d\mu_l, \quad B_r = \int_B^{\oplus} f \odot d\mu_r,$$

imamo da je

$$\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A) = [A_l, A_r] \quad \text{i} \quad \overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(B) = [B_l, B_r].$$

Kako iz $A \subseteq B$ i nenegativosti u smislu posmatranog poluprstena funkcije f sledi

$$A_l \preceq B_l \quad \text{i} \quad A_r \preceq B_r,$$

to postoje samo dve mogućnosti za intervale $[A_l, A_r]$ i $[B_l, B_r]$ i to:

$$A_l \preceq A_r \preceq B_l \preceq B_r \quad \text{ili} \quad A_l \preceq B_l \preceq A_r \preceq B_r.$$

U oba slučaja očigledno je da za svako $x \in [A_l, A_r]$ postoji $y \in [B_l, B_r]$ takvo da je $x \preceq y$ i da za svako $y \in [B_l, B_r]$ postoji $x \in [A_l, A_r]$ takvo da je $x \preceq y$, tj. $[A_l, A_r] \preceq_S [B_l, B_r]$.

iii) Na osnovu Teoreme 1.7, osobina pseudo-integrala datih u Tvrđenju 1.3 i definicije pseudo-zbira intervala sledi da važi

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A \cup B) &= \int_{A\cup B}^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} \\
&= \left[\int_{A\cup B}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_{A\cup B}^{\oplus} f \odot d\mu_r \right] \\
&= \left[\int_A^{\oplus} f \odot d\mu_l \oplus \int_B^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_A^{\oplus} f \odot d\mu_r \oplus \int_B^{\oplus} f \odot d\mu_r \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\int\limits_A^{\oplus} f\odot d\mu_l, \int\limits_A^{\oplus} f\odot d\mu_r\right] \oplus \left[\int\limits_B^{\oplus} f\odot d\mu_l, \int\limits_B^{\oplus} f\odot d\mu_r\right]\\
&= \overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A)\oplus\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(B).
\end{aligned}
$$

iv) Primenom definicije zbira prebrojivo mnogo intervala date u Napomeni 1.2 dobijamo da važi

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \left[\int\limits_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}^{\oplus} f\odot d\mu_l, \int\limits_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}^{\oplus} f\odot d\mu_r\right]\\
&= \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty}\int\limits_{A_i}^{\oplus} f\odot d\mu_l, \bigoplus_{i=1}^{\infty}\int\limits_{A_i}^{\oplus} f\odot d\mu_r\right]\\
&= \bigoplus_{i=1}^{\infty}\left[\int\limits_{A_i}^{\oplus} f\odot d\mu_l, \int\limits_{A_i}^{\oplus} f\odot d\mu_r\right]\\
&= \bigoplus_{i=1}^{\infty}\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A_i),
\end{aligned}
$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Na osnovu Teoreme 1.9 možemo da kostatujemo da je $\oplus$-mera $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ data sa (1.14) monotona intervalno-vrednosna $\oplus$-mera u odnosu na $\preceq_S$, tj. da važi naredna teorema.

Teorema 1.10 *Skupovno-vrednosna funkcija $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ je intervalno-vrednosna $\oplus$-mera.*

1.5.2 Apsolutna neprekidnost intervalno-vrednosne $\oplus$-mere

U teoriji neaditivnih mera, pa i fazi mera kao jednog njihovog slučaja, postoji dvadeset i jedno uopštenje koncepta apsolutne neprekidnosti iz klasične teorije mere (videti [31, 52, 64]). U ovom delu disertacije biće prikazani originalni rezultati publikovani u [31] vezani za dva tipa apsolutne neprekidnosti intervalno-vrednosnih $\oplus$-mera i oni predstavljaju uopštenja rezultata iz [52].

Neka su μ_1 i μ_2 $\oplus$-mere na σ-algebri Σ koje su konačne u smislu posmatranog poluprstena.

Definicija 1.26 Mera μ_2 je *apsolutno neprekidna tipa I* u odnosu na meru μ_1 ako i samo ako je $\mu_2(A) = \mathbf{0}$ za svako $A \in \Sigma$ za koje je $\mu_1(A) = \mathbf{0}$.

Mera μ_2 je *apsolutno neprekidna tipa VI* u odnosu na meru μ_1 ako i samo ako $\mu_2(A_n) \to \mathbf{0}$ za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ takav da $\mu_1(A_n) \to \mathbf{0}$.

Pokazano je da važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.11 *Neka je $f : X \to [a,b]_+$ merljiva funkcija, $\oplus$-mera μ konačna u smislu posmatranog poluprstena i $A \in \Sigma$. Tada je funkcija μ_f definisana preko pseudo-integrala sa*

$$\mu_f(A) = \int_A^{\oplus} f \odot d\mu$$

određuje novu $\oplus$-meru na Σ, nenegativnu u smislu posmatranog poluprstena. $\oplus$-mera μ_f je apsolutno neprekidna tipa I i apsolutno neprekidna tipa VI u odnosu na $\oplus$-meru μ.

Koristeći metriku datu sa (1.9) može da se definiše apsolutna neprekidnost intervalno-vrednosne $\oplus$-mere $\overline{\mu}_1$ u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_2 = [\mu_l, \mu_r]$, gde su μ_l i μ_r konačne u smislu posmatranog poluprstena.

Pretpostavimo da su za intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_2 = [\mu_l, \mu_r]$, $\oplus$-mere μ_l i μ_r konačne u smislu posmatranog poluprstena.

Definicija 1.27 Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{\mu}_1$ je *apsolutno neprekidna tipa I* u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_2$ ako i samo ako je $\overline{\mu}_1(A) = \{\mathbf{0}\}$ za svako $A \in \Sigma$ takvo da je $\overline{\mu}_2(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{\mu}_1$ je *apsolutno neprekidna tipa VI* u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_2$ ako i samo ako $D(\overline{\mu}_1(A_n), \{\mathbf{0}\}) \to 0$ za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ takav da $D(\overline{\mu}_2(A_n), \{\mathbf{0}\}) \to 0$, gde je D metrika data sa (1.9).

Teorema 1.12 *Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ definisana sa (1.14) je apsolutno neprekidna tipa I u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ datu Definicijom 1.10.*

Dokaz. Dokaz sledi iz Definicije 1.25 intervalno-vrednosne $\oplus$-mere $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ i osobina pseudo-integrala merljive funkcije ograničene u smislu posmatranog poluprstena. Neka je $A \in \Sigma$ takvo da je

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A) = [\mu_l(A), \mu_r(A)] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}.$$

Tada je

$$\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A) = \int_A^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \left[\int_A^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_A^{\oplus} f \odot d\mu_r \right] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}. \qquad \square$$

Teorema 1.13 *Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ definisana sa (1.14) je apsolutno neprekidna tipa VI u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$.*

Dokaz. Dokaz kad $n \to \infty$ sledi iz niza jednakosti

$$\begin{aligned} D\left(\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A_n), \{\mathbf{0}\}\right) &= D\left(\int_{A_n}^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}, [\mathbf{0}, \mathbf{0}]\right) \\ &= D\left(\left[\int_{A_n}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_{A_n}^{\oplus} f \odot d\mu_r\right], [\mathbf{0}, \mathbf{0}]\right) \\ &= \max\left\{ d\left(\int_{A_n}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \mathbf{0}\right), d\left(\int_{A_n}^{\oplus} f \odot d\mu_r, \mathbf{0}\right)\right\} \\ &= \max\{0, 0\} = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Glava 2

Nejednakost Jensena

Klasična Jensenova nejednakost ima ulogu u raznim teorijskim i praktičnim poljima. Ona omogućava razumevanje i predviđanje varijacija u dinamičkim sistemima u smislu klasičnog očekivanja.

U ovoj glavi dati su originalni rezultati iz [20, 55] vezani za uopštenje Jensenove nejednakosti za pseudo-integral intervalno-vrednosne funkcije i pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno vrednosnu $\oplus$-meru. Pokazana je Jensenova nejednakost za dva slučaja poluprstena, g-poluprsten i poluprsten u kom je pseudo-sabiranje idempotentna operacija, a pseudo-množenje dato preko generatora g.

U ovom delu, predstavljeni su rezultati istraživanja vezani za neto pseudo-princip premije, novi neto princip premije zasnovan na pseudo-integralu realno-vrednosne funkcije. Takođe, prikazani su rezultati vezani za princip maksimizacije očekivane koristi zasnovan na pseudo-integralu intervalno-vrednosnih funkcija. Mogućnost primene predloženog modela biće ilustrovana na nekoliko primera. Ovi rezultati predstavljaju originalni dao teze i mogu se pronaći u [32].

Nejednakosti Jensena za Lebegov integral i za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije su predstavljene u Sekciji 2.1 i u Sekciji 2.2. Predstavljeni rezultati bazirani su na [9, 45, 46].

Sekcija 2.3 sadrži originalni deo teze, pokazana je Jensenova nejednakost za skupovno-vrednosnu funkciju za g-poluprsten sa rastućim generatorom i za poluprsten iz prve klase u kom je pseudo-sabiranje jednako $\max$. Takođe, dobijeni teorijski rezultati ilustrovani su odgovarajućim primerima.

Još jedno uopštenje Jensenove nejednakosti za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije dokazano je u Sekciji 2.4. Posmatran je pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru. Dobijeni rezultati su originalni deo istraživanja i publikovani su u [20].

Osnovni pojmovi principa premije, principa premije zasnovanog na funkciji korisnosti, kao i maksimizacije očekivane korisnosti sastavni su deo Sekcije 2.5 i bazirani su na rezultatima iz [23, 57].

U Sekcijama 2.6 i 2.7 definisani su neto pseudo-princip premije i intervalno-vrednosni neto pseudo-princip premije. Ilustrovana je primena Jensenove nejednakosti na oba navedena principa premije. Izloženi rezultati su originalni deo teze i mogu se pronaći u [32].

2.1 Integralna nejednakost Jensena za Lebegov integral

Jedna od integralnih nejednakosti vezana za konveksne funkcije je Jensenova nejednakost. Ova nejednakost u klasičnoj analizi data je sledećim tvrđenjem ([49]).

Tvrđenje 2.1 *Neka je (X, Σ) merljiv prostor, $X \neq \emptyset$ univerzalan skup, Σ je σ-algebra njegovih podskupova i neka je μ mera na Σ takva da je $\mu(X) = 1$. Neka je h realna funkcija koja pripada $L^1(\mu)$, $a < h(x) < b$, za svako $x \in X$. Ako je Φ konveksna funkcija na (a, b), tada važi*

$$\Phi\left(\int_\Omega h d\mu\right) \leq \int_\Omega (\Phi \circ h) d\mu.$$

U teoriji verovatnoće se Jensenova nejednakost najčešće upotrebljava u sledećem obliku ([9]).

Tvrđenje 2.2 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće (X, Σ, P) i Φ konveksna funkcija na skupu vrednosti slučajne promenljive f. Ako za slučajne promenljive f i $\Phi(f)$ postoji matematičko očekivanje, tada važi*

$$\Phi(E[f]) \leq E[\Phi(f)].$$

2.2 Nejednakost Jensena za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije

Teorija fazi mere i fazi integrala proučavana je i uopštena u [50] kao alat za modelovanje nedeterminističkih problema. Zbog svoje široke primene u praksi, kao i zastupljenosti u literaturi, dva najznačajnija fazi integrala su takozvani Šokeov integral i Sugenov integral ([13, 50]). U radovima [48, 65] definisani su uslovi pod kojima Jensenova nejednakost važi za oba pomenuta integrala. Za dobijanje Jensenove nejednakosti za Sugenov integral neki uslovi pod kojima važi klasična nejednakost Jensena moraju biti promenjeni, tj. klasična nejednakost Jensena ne važi u opštem slučaju za Sugenov integral. Za Sugenov integral, uslov konveksnosti funkcije Φ se menja uslovom da je Φ strogo rastuća funkcija za koju je $\Phi(x) \leq x$ na nekom specifičnom ograničenom intervalu, koji zavisi od vrednosti Sugenovog integrala posmatrane funkcije f. Ovi rezultati mogu se pronaći u [48].

Šokeov integral, još jedan primer integrala baziranog na neaditivnoj meri, ima veliku primenu u teoriji odlučivanja. S obzirom na to da je Jensenova nejednakost našla svoju primenu u teoriji odlučivanja, javila se potreba za izučavanjem Jensenove nejednakosti za Šokeov integral. Pretpostavlja se da je fazi mera μ regularna ([41]), da je funkcija Φ konveksna i da je Šokeov integral posmatrane funkcije konačan. Pod navedenim uslovima važi Jensenova nejednakost za Šokeov integral ([65]). U radu je pokazano da se regularnost mere ne može izostaviti.

Nejednakost Jensena za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije proučavana je u [45, 53]. Rezultati prikazani u navedenom radu predstavljaju uopštenje Jensenove nejednakosti za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije za dva slučaja poluprstena. U prvom slučaju pseudo-operacije na poluprstenu $([a,b], \oplus, \odot)$ su definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora g, a u drugom slučaju je na poluprstenu $([a,b], \sup, \odot)$, gde je pseudo-množenje definisano pomoću generatora g, a pseudo-sabiranje je idempotentna operacija $\sup$. Navedeni rezultati predstavljaju motivaciju za dalja uopštenja koja predstavljaju originalni deo istraživanja.

Tvrđenje 2.3 *Neka je X neprazan skup, Σ je σ-algebra njegovih podskupova i μ je $\oplus$-mera na Σ takva da je $\mu(X) = \mathbf{1}$. Neka je $[a,b] \subseteq [0,\infty]$ i $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten druge klase dat generatorom $g : [a,b] \to [a,b]$ koji je konveksna i rastuća funkcija. Ako je funkcija Φ konveksna i nerastuća na*

$[a,b]$, tada važi

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} f\odot d\mu\right) \preceq \int_X^{\oplus} (\Phi\circ f)\odot d\mu, \tag{2.1}$$

gde je $f : X \to [a,b]$ i $f \in L^1_{\oplus}(\mu)$.

Slično tvrđenje važi ako je generator g konveksna i opadajuća funkcija i funkcija Φ konkavna i neopadajuća.

Takođe, na osnovu rezultata iz [33] u [45] pokazano je da važi Jensenova nejednakost u poluprstenu $([a,b], \sup, \odot)$.

Tvrđenje 2.4 *Neka je $([0,\infty], \sup, \odot)$ poluprsten u kom je pseudo-množenje $\odot$ definisano strogo rastućom konveksnom funkcijom. Ako je μ definisano sa (1.10) tada za neprekidnu funkciju $f : [0,1] \to [0,\infty]$, važi nejednakost (2.1), tj.*

$$\Phi\left(\int_X^{\sup} f\odot d\mu\right) \preceq \int_X^{\sup} (\Phi\circ f)\odot d\mu,$$

pri čemu $f \in L^1_{\oplus}(\mu)$ i funkcija Φ je konveksna i nerastuća funkcija na $[0,\infty]$.

Odgovarajući oblik Jensenove nejednakosti može se dobiti i za poluprsten u kom je pseudo-sabiranje jednako inf, a pseudo-množenje dato pomoću generatora g.

Napomena 2.1 Može se pokazati da Tvrđenje 2.4 važi i za proizvoljnu pseudo-integrabilnu funkciju $f : [c,d] \to [a,b]$, gde je $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$.

2.3 Nejednakost Jensena za pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije

Nejednakost Jensena za pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije pokazana je u [20] i deo je originalnih rezultata ove teze.

Neka je Φ funkcija iz U u V, gde su U i V proizvoljni skupovi i neka je $A \subset U$. Koristićemo oznaku

$$\Phi(A) = \{\Phi(x) \mid x \in A\}. \tag{2.2}$$

Neka je $[a,b] \subset [0,\infty]$ i neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ g-poluprsten. Neka je X neprazan skup i Σ neka je σ-algebra njegovih podskupova. Neka je μ $\oplus$-mera i $g \circ \mu$ Lebegova mera na Σ. Neka je F skupovno-vrednosna funkcija na X. Uvešćemo oznaku:

$$\mathrm{range}F = \bigcup \{\mathrm{range}f \mid f \in \mathrm{S}(F)\} \subseteq [a,b]_+,$$

gde je $\mathrm{range}f$ skup vrednosti funkcije f.

Lema 2.1 *Neka je* $\mu(X) = \mathbf{1}$ *i neka je* $\Phi : [a,b]_+ \to [a,b]_+$ *konveksna, opadajuća funkcija na intervalu* $[a,b]_+$ *koji sadrži* $\mathrm{range}F$*, ograničena u smislu posmatranog poluprstena. Ako je* F *pseudo-integrabilna skupovno-vrednosna funkcija na* X *i* f *proizvoljna funkcija koja pripada* $\mathrm{S}(F)$*, tada važi*

$$\int_X^{\oplus} \Phi(f) \odot d\mu \in \int_X^{\oplus} \Phi(F) \odot d\mu. \tag{2.3}$$

Dokaz. Kako je funkcija F pseudo-integrabilna skupovno-vrednosna funkcija na X, skup $\mathrm{S}(F)$ je neprazan, tj. postoji bar jedna funkcija $f \in \mathrm{S}(F)$. U skupu $\mathrm{S}(F)$ se nalaze funkcije čiji pseudo-integral je konačan u smislu posmatranog poluprstena, tj. $f \in L^1_{\oplus}(\mu)$. Kako je Φ konveksna, opadajuća funkcija ograničena u smislu posmatranog poluprstena, to za svako $x \in X$ i neko $M \in (a,b)$ važi

$$\Phi(f(x)) \preceq M \prec b.$$

Koristeći osobine pseudo-integrala imamo da je

$$\int_X^{\oplus} \Phi(f) \odot d\mu \preceq M \odot \mu(X) = M \odot \mathbf{1} = M \prec b.$$

Drugim rečima, $\Phi(f) \in L^1_{\oplus}(\mu)$. Primenom (2.2) dobija se da za skoro svako $x \in X$ važi $\Phi(f(x)) \in \Phi(F(x))$, tako da $\Phi(f) \in S(\Phi(F))$ pa važi (2.3).

□

Dakle, pseudo-integrabilnost skupovno-vrednosne funkcije F povlači da je $\Phi(F)$ takođe pseudo-integrabilna skupovno-vrednosna funkcija na X.

Teorema 2.1 *Neka je $\mu(X) = \mathbf{1}$ i neka je $\Phi : [a,b]_+ \to [a,b]_+$ konveksna, opadajuća funkcija na intervalu $[a,b]_+$ koji sadrži* $\mathrm{range}F$, *ograničena u smislu posmatranog poluprstena. Ako je generator g konveksna i rastuća funkcija i F pseudo-integrabilno ograničena skupovno-vrednosna funkcija na X, tada važi*

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} F \odot d\mu\right) \preceq_S \int_X^{\oplus} (\Phi \circ F) \odot d\mu. \tag{2.4}$$

Dokaz. Kako je F pseudo-integrabilno ograničena skupovno-vrednosna funkcija na X, važi da je $\int_X^{\oplus} F \odot d\mu \neq \emptyset$, pa je i skup $\Phi\left(\int_X^{\oplus} F \odot d\mu\right)$ neprazan.

Treba pokazati da

za svako $u \in \Phi\left(\int_X^{\oplus} F \odot d\mu\right)$ postoji $v \in \int_X^{\oplus} (\Phi \circ F) \odot d\mu$ takvo da je $u \preceq v$,

kao i da

za svako $v \in \int_X^{\oplus} (\Phi \circ F) \odot d\mu$ postoji $u \in \Phi\left(\int_X^{\oplus} F \odot d\mu\right)$ takvo da je $u \preceq v$.

Neka je u proizvoljan elemenat iz $\Phi\left(\int_X^{\oplus} F \odot d\mu\right)$. Na osnovu Definicije 1.16 pseudo-integrala skupovno-vrednosne funkcije i na osnovu (2.2), sledi da postoji $f \in \mathrm{S}(F)$ takvo da $f(x) \in F(x)$ za skoro svako $x \in X$ pri čemu je

$$u = \Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mu\right).$$

Iz nejednakosti Jensena (2.1) i Leme 2.1 sledi da je

$$u = \Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mu\right) \preceq \int_X^{\oplus} \Phi(f) \odot d\mu \in \int_X^{\oplus} \Phi(F) \odot d\mu, \tag{2.5}$$

pa zaključujemo da je $v = \int_X^{\oplus} \Phi(f) \odot d\mu$.

Dalje, neka je $v \in \int\limits_X^{\oplus} \Phi(F) \odot d\mu$. To znači da postoji $k \in S(\Phi(F))$ takvo da je $v = \int\limits_X^{\oplus} k \odot d\mu$. Kako $k(x) \in \Phi(F(x))$ za skoro svako $x \in X$, to postoji funkcija h takva da $h(x) \in F(x)$ za skoro svako $x \in X$, za koju je $k(x) = \Phi(h(x))$. Skupovno-vrednosna funkcija F je pseudo-integrabilno ograničena na X i postoji funkcija $t \in L^1_{\oplus}(\mu)$ takva da je za svako $x \in X$

$$h(x) \preceq t(x).$$

Odavde zbog osobine monotonosti pseudo-integrala i ograničenosti u smislu poluprstena pseudo-integrala funkcije t sledi

$$\int\limits_X^{\oplus} h \odot d\mu \preceq \int\limits_X^{\oplus} t \odot d\mu \prec b,$$

tj. pseudo-integral funkcije h je ograničen u smislu posmatranog poluprstena. Na osnovu navedenog sledi da $h \in L^1_{\oplus}(\mu)$ i $h \in \mathrm{S}(F)$. Osobine funkcije Φ i nejednakost Jensena (2.1) povlače da važi

$$\Phi\left(\int\limits_X^{\oplus} F \odot d\mu\right) \ni \Phi\left(\int\limits_X^{\oplus} h \odot d\mu\right) \preceq \int\limits_X^{\oplus} (\Phi \circ h) \odot d\mu = v. \tag{2.6}$$

Stoga, iz (2.5) i (2.6), kao i na osnovu definicije relacije $\preceq_S$, sledi da važi (2.4), što je i trebalo pokazati. □

Slično tvrđenje može se formulisati u slučaju opadajućeg generatora g.

Teorema 2.2 *Neka je $\mu(X) = \mathbf{1}$ i neka je $\Phi : [a,b]_+ \to [a,b]_+$ konveksna, opadajuća funkcija na intervalu $[a,b]_+$ koji sadrži* range$F$*, ograničena u smislu posmatranog poluprstena. Ako je generator g konveksna i opadajuća funkcija i F pseudo-integrabilno ograničena skupovno-vrednosna funkcija na X, tada važi*

$$\Phi\left(\int\limits_X^{\oplus} F \odot d\mu\right) \preceq_S \int\limits_X^{\oplus} (\Phi \circ F) \odot d\mu.$$

Dokaz teoreme je sličan prethodnom dokazu, samo treba voditi računa o tome da generator g indukuje poredak obrnut uobičajenom, tako da uslov da funkcija $f \in L^1_{\oplus}(\mu)$ znači da je $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu \prec a$, tj. $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu > a$.

Na osnovu rezultata iz [33, 45] i Teoreme 2.1 dobijeni rezultat može da se proširi na poluprstene iz prve klase kod kojih je pseudo-množenje dato preko generatora g.

Teorema 2.3 *Neka je $([a,b], \sup, \odot)$ poluprsten gde je $\odot$ definisano generatorom g. Neka je $\mathcal{B}([c,d])$ Borelova σ-algebra na intervalu $[c,d]$ takvom da je $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$, gde je μ definisano sa (1.10). Neka je Φ konveksna, opadajuća funkcija na intervalu $[a,b]_+$ koji sadrži* range$F$*, ograničena u smislu posmatranog poluprstena. Ako je F pseudo-integrabilno ograničena skupovno-vrednosna funkcija na $[c,d]$ takva da su sve funkcije iz* $\mathrm{S}(F)$ *neprekidne, tada važi*

$$\Phi\left(\int_X^{\sup} F \odot d\mu\right) \preceq_S \int_X^{\sup} (\Phi \circ F) \odot d\mu.$$

U primeru koji sledi pokazujemo da se ograničenost u smislu posmatranog poluprstena funkcije $\Phi : [a,b]_+ \to [a,b]_+$ ne može izostaviti.

Primer 2.1 Posmatrajmo poluprsten druge klase $([0,\infty], \oplus, \odot)$ generisan sa $g(x) = x^2$, skupovno-vrednosnu funkciju $F(x) = \{\sqrt{x}\}$ i funkciju $\Phi(x) = \dfrac{1}{x}$, uz konvencije $\dfrac{1}{0} = \infty$ i $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

U ovom slučaju važi da je $[a,b]_+ = [a,b] = [0,\infty]$ i posmatrana funkcija $\Phi : [a,b]_+ \to [a,b]_+$ nije ograničena u smislu posmatranog poluprstena jer je $\Phi(a) = b$, tj. $\Phi(0) = \infty$. Sada je

$$\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\oplus} F \odot d\mu\right) = \left\{\sqrt{2}\right\} \quad \text{i} \quad \int_{[0,1]}^{\oplus} \Phi(F) \odot d\mu = \emptyset,$$

pa nejednakost (2.4) nije zadovoljena.

U naredna dva primera zadovoljeni su svi uslovi Teorema 2.1 i 2.3 tako da su u njima dobijene odgovarajuće nejednakosti Jensena za skupovno-vrednosne funkcije.

Primer 2.2 Neka je $([0,\infty],\oplus,\odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x)=x^2$. Posmatrajmo skupovno-vrednosnu funkciju $F(x)=[x,1]$, $x\in[0,1]$ i funkciju $\Phi(x)=\dfrac{1}{1+x}$, uz konvenciju $\dfrac{1}{\infty}=0$.

Za granične funkcije $l(x)=x$ i $r(x)=1$ važi da je

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} x\odot d\mu=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{i} \quad \int_{[0,1]}^{\oplus} 1\odot d\mu=1.$$

Iz jednakosti (1.8) sledi da je

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} F\odot d\mu=\left[\int_{[0,1]}^{\oplus} x\odot d\mu,\int_{[0,1]}^{\oplus} 1\odot d\mu\right]=\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right].$$

Primenom posmatrane funkcije $\Phi(x)=\dfrac{1}{1+x}$ na pseudo-integral posmatrane intervalno-vrednosne funkcije F imamo da je

$$\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\oplus} F\odot d\mu\right)=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right].$$

Ako prvo primenimo datu funkciju Φ na intervalno-vrednosnu funkciju F dobija se

$$\Phi(F(x))=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{1+x}\right],$$

te se računanjem pseudo-integrala graničnih funkcija skupovno-vrednosne funkcije $\Phi\circ F$ dolazi do

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} \frac{1}{2}\odot d\mu=\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \int_{[0,1]}^{\oplus} \frac{1}{1+x}\odot d\mu=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Primenom jednakosti (1.8) sledi da je

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} \Phi(F) \odot d\mu = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

i nejednakost (2.4) je zadovoljena, tj.

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right] \preceq_S \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Primer 2.3 Neka je $([0,\infty], \sup, \odot)$ poluprsten prve klase gde je pseudo-množenje generisano sa $g(x) = x$. Neka je μ sup-mera na $([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$ data funkcijom gustine $\Phi(x) = x$. Posmatrajmo intervalno-vrednosnu funkciju $F(x) = [0, 2x]$, $x \in [0,1]$ i funkciju $\Phi(x) = (2-x)^2$.

Za levu graničnu funkciju $l(x) = 0$ funkcije F je

$$\int_{[0,1]}^{\sup} 0 \odot d\mu = 0.$$

Primenom rezultata iz [33] na desnu graničnu funkciju $r(x) = 2x$ funkcije F sledi da je

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]}^{\sup} 2x \odot d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]}^{\oplus_n} 2x \odot d\mu_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 2^n x^{2n} dx \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Primenom jednakosti (1.8) na funkciju F i funkcije Φ na njen sup-integral sledi

$$\int_{[0,1]}^{\sup} F \odot d\mu = [0,2] \quad \text{i} \quad \Phi\left(\int_{[0,1]}^{\sup} F \odot d\mu\right) = [0,4].$$

Ako prvo primenimo funkciju Φ na intervalno-vrednosnu funkciju F, dobija se $\Phi(F(x)) = \left[(2-2x)^2, 4\right]$.

Pseudo-integrali graničnih funkcija su

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]}^{\sup} 4 \odot d\mu &= 4,\\
\int_{[0,1]}^{\sup} (2-2x)^2 \odot d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]}^{\oplus_n} (2-2x)^2 \odot d\mu_n\\
&= 4 \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 (1-x)^{2n} x^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\
&= 4 \lim_{n\to\infty} \left(B\left(n+1, 2n+1\right)\right)^{\frac{1}{n}}\\
&= 4 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!n!}{(3n+1)!}\right)^{\frac{1}{n}}\\
&= \frac{16}{27}.
\end{aligned}$$

Primenom pseudo-integrala skupovno-vrednosne funkcije na funkciju $\Phi(F)$ dobija se

$$\int_{[0,1]}^{\sup} \Phi\left(F\right) \odot d\mu = \left[\frac{16}{27}, 4\right],$$

tj.

$$[0,4] \preceq_S \left[\frac{16}{27}, 4\right],$$

te tvrđenje Teoreme 2.3 važi.

Jensenov tip nejednakosti koji ima intervalni oblik i koji je definisan preko Šokeovog integrala izučavan je u [65]. Treba istaći da se u navedenom rezultatu pretpostavlja regularnost fazi mere, komonotonost posmatranih funkcija, kao i da je funkcija $\Phi : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ konveksna funkcija dve promenljive. U našim istraživanjima Φ je funkcija jedne promenljive.

2.4 Nejednakost Jensena za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru

Još jedan intervalni oblik Jensenove nejednakosti za pseudo-interval realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = [\mathbf{0}, \mu_r]$ izučavan je u [20] i predstavlja originalni deo teze. Kao i u dosadašnjim istraživanjima, izučavan je poluprsten druge klase, tj. g-poluprsten sa rastućim generatorom i poluprsten prve klase u kom je pseudo-množenje dato preko generatora g, a pseudo sabiranje je $\max$.

Neka je $\mathcal{M}_0$ familija $\oplus$-mera iz Napomene 1.4, tj. familija $\oplus$-mera koja uključuje i takozvanu trivijalnu $\oplus$-meru μ_0, oblika $\mu_0(A) = \mathbf{0}$ za svako $A \in \Sigma$.

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$, gde je $[a,b] \subseteq [0,\infty]$, poluprsten druge klase dat rastućim generatorom g. Neka je $f : X \to [a,b]_+$ merljiva pseudo-integrabilna funkcija, tj. pseudo-integral $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu$ postoji kao konačna vrednost u smislu posmatranog poluprstena za svaku meru $\mu \in \mathcal{M}_0$.

Pretpostavimo da je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}(X) = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Jensenov oblik nejednakosti u ovom slučaju daćemo u terminologiji intervalno-vrednosnih $\oplus$-mera. Naravno, pokazane nejednakosti se koristeći definiciju intervalno-vrednosne $\oplus$-mere mogu zapisati u drugačijim oblicima, koje ćemo takođe navesti.

Teorema 2.4 *Neka je $\Phi : [a,b]_+ \to [a,b]_+$ konveksna, opadajuća i ograničena funkcija. Ako je generator g konveksna i rastuća funkcija, tada važi*

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{\Phi\circ f}(X) \preceq_S \Phi\left(\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f}(X)\right).$$

Dokaz. Primenom (1.14) na funkciju $\Phi \circ F$ i koristeći osobine familije $\mathcal{M}_0$ dobija se nova intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{\Phi\circ f}$ oblika

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{\Phi\circ f}(X) = \left[\mathbf{0}, \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot d\mu_r\right].$$

Primenom (1.14) na funkciju f i primenom funkcije Φ na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f}$ dobija se

$$\Phi\left(\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f}(X)\right) = \Phi\left(\left[\mathbf{0}, \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right]\right).$$

Zbog monotonosti funkcije Φ, za proizvoljnu vrednost $\omega \in \Phi\left(\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f}(X)\right)$ važi

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right) \preceq \omega \preceq \Phi(\mathbf{0}).$$

Primenom nejednakosti Jensena (2.1) na pseudo-integral realno-vrednosne funkcije f sledi da je

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right) \preceq \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot d\mu_r.$$

Na osnovu osobina pseudo-integrala, nenegativnosti funkcije f u smislu posmatranog poluprstena i monotonosti funkcije Φ je

$$\int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot d\mu_r \preceq \Phi(\mathbf{0}).$$

Na osnovu navedenog važi

$$\mathbf{0} \preceq \Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right) \preceq \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot d\mu_r \preceq \Phi(\mathbf{0}),$$

tj. sledi tvrđenje teoreme. □

Kao što je prethodno rečeno, nejednakost Jensena za realno-vrednosnu funkciju i intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru, može da se zapiše u obliku

$$\left[\mathbf{0}, \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot d\mu_r\right] \preceq_S \Phi\left(\left[\mathbf{0}, \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right]\right).$$

Naravno, slično tvrđenje važi i za opadajući generator g, ali treba voditi računa o tome da je intervalno vrednosna $\oplus$-mera jednaka $[\mu_l, \mathbf{0}]$.

Na osnovu rezultata iz [33] i [45], prethodni rezultat može da se proširi na poluprstene iz prve klase kod kojih je pseudo-množenje dato generatorom g, što ilustruje sledeća teorema.

Teorema 2.5 *Neka je $([a, b], \sup, \odot)$ poluprsten gde je $\odot$ dato generatorom g. Neka je $\mathcal{B}([c, d])$ Borelova σ-algebra na intervalu $[c, d]$ i $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}([c, d]) = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, a $\oplus$-mera $\mu \in \mathcal{M}_0$ data sa (1.10). Neka je Φ konveksna, opadajuća i ograničena funkcija. Tada, za neprekidnu funkciju $f : X \to [a, b]_+$ važi*

$$\overline{\mu}^{\Phi\circ f}_{\mathcal{M}_0}([c, d]) \preceq_S \Phi\left(\overline{\mu}^{f}_{\mathcal{M}_0}([c, d])\right).$$

Jensenova nejednakost iz Teoreme 2.5 može se u ovom slučaju napisati u obliku

$$\left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\sup} (\Phi \circ f) \odot d\mu_r\right] \preceq_S \Phi\left(\left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\sup} f \odot d\mu_r\right]\right).$$

2.5 Princip premije

Aktuarska matematika se bavi procenama rizika u osiguranju i finansijama. Rizik je sinonim za mogućnost gubitka, neizvesnost, događaj koji može, a ne mora da se dogodi i sa sobom nosi određene negativne finansijske posledice. U matematičkom smislu, on predstavlja nenegativnu slučajnu promenljivu. Cena koju korisnik osiguranja plaća osiguravajućem društvu da bi se potpuno ili delimično osigurao od nekog rizika naziva se *premija*. Određivanje što tačnijeg iznosa premije veoma je značajno, jer suviše mala ili visoka premija dovodi do gubitka klijenata. Nedvosmisleno, principi premije su heurističke metode za dodeljivanje premije nekom riziku. U velikoj meri oni slede određene, čvrsto utemeljene, doktrine u ekonomiji. Matematički sadržaj principa premije uključuje aparat teorije mere, preciznije teorije verovatnoće, gde dominantnu ulogu imaju pojmovi kao što su očekivana vrednost i integral. Jensenova nejednakost predstavlja spoj elegantnog i prirodnog sredstva za dobijanje adekvatne procene premije.

Kako je pseudo-analiza grana matematike razvijena prvenstveno da pruži teorijski i praktični okvir za rukovanje nepreciznim i nepotpunim podacima, budući da se procena rizika temelji upravo na takvoj vrsti podataka, smatrali smo da bi bilo prirodno i korisno primeniti tehnike pseudo-analize u postupcima procene rizika.

U ovom delu je data definicija neto pseudo-principa premije koji se može smatrati uopštenjem neto principa premije. Velik je broj srodnih istraživanja relevantnih za naš rad. Samo neke od knjiga i radova koji su nas inspirisali da počnemo da se bavimo ovom temom, vezane za ekonomiju, aktuarsku matematiku i posebno za princip premije, su [23, 24, 57].

Neka je sa $\mathfrak{F}(\Omega)$, Ω[1] $\neq \emptyset$, označena klasa svih nenegativnih slučajnih promenljivih na prostoru verovatnoće (Ω, Σ, P). Element f klase $\mathfrak{F}(\Omega)$ naziva se *rizik* ([9, 23, 57]). *Princip premije* je pravilo

$$\Pi : \mathfrak{F}(\Omega) \to [0, \infty]$$

kojim se dodeljuje premija $\Pi[f]$ riziku $f : \Omega \to [0, \infty)$. Princip premije je proizvoljna funkcija od f i može se definisati na različite načine.

Za rizik f, tj. za nenegativnu slučajnu promenljivu, za koju postoji matematičko očekivanje $E[f]$, *neto princip premije* definiše se kao njeno matematičko očekivanje

$$\Pi[f] = E[f].$$

Ovaj princip računanja premije poznat je i kao *princip ekvivalencije* i široko je rasprostranjen u literaturi.

Pored neto principa premije, koriste se i sledeći principi premije:

- *princip očekivane korisnosti*:

$$\Pi[f] = (1 + \alpha)E[f], \quad \alpha > 0,$$

[1] Do sada je neprazan skup koji smo posmatrali označavan sa X. S obzirom na to da prelazimo na prostor verovatnoće, gde je uobičajeno da se skup elementarnih događaja označava sa Ω, u daljem delu ove sekcije koristićemo ovu oznaku.

- *princip varijanse*[2]:

$$\Pi[f] = E[f] + \alpha Var[f], \quad \alpha > 0,$$

- *princip standardne devijacije*:

$$\Pi[f] = E[f] + \alpha\sqrt{Var[f]}, \quad \alpha > 0,$$

- *eksponencijalni princip*:

$$\Pi[f] = \frac{1}{\alpha}\ln(E[e^{\alpha f}]), \quad \alpha > 0.$$

Princip premije Π definisan na klasi $\mathfrak{F}(\Omega)$ može da zadovoljava osobine nezavisnosti, premijskog dodatka, bez neopravdanog premijskog dodatka, maksimalnog gubitka, neprekidnosti, aditivnosti, translatorne invarijantnosti, skalne invarijantnosti, monotonosti. Neto princip premije zadovoljava sve navedene osobine, dok za razliku od njega ostali navedeni principi premije zadovoljavaju samo pojedine navedene osobine (videti [23, 57]).

2.5.1 Princip premije zasnovan na funkciji korisnosti

Pojam korisnosti kapitala prvi je predložio Bernuli. On je pretpostavio da se zadovoljstvo posedovanjem kapitala, tj. korisnost kapitala x može predstaviti funkcijom $u(x)$ koja, u opštem slučaju, nije linearna. Korisnost kapitala može da objasni zašto su osiguranici spremni da plate premiju koja je veća od matematičkog očekivanja osiguranog gubitka ([23]). Bernuli je pretpostavio da funkcija u opisuje lični način vrednovanja kapitala pojedinca, da predstavlja preslikavanje između fizičke mere kapitala i naše percipirane vrednosti tog kapitala. Ovakve funkcije nazivaju se *funkcije korisnosti.* Uobičajena je pretpostavka da je funkcija korisnosti konkavna, zbog činjenice da se konkavnost funkcije korisnosti povezuje sa averzijom prema riziku. Takođe, to je neopadajuća funkcija jer je korisnost kapitala veća ukoliko je kapital veći. Neke najčešće korišćene klase funkcija korisnosti (videti [23]) su:

- *linearna funkcija korisnosti*:

$$u(x) = x,$$

[2]Sa $Var[f]$ je označena varijansa, tj. disperzija slučajne promenljive f.

- *kvadratna funkcija korisnosti*:

$$u(x) = -(\alpha - x)^2, \quad x \leq \alpha,$$

- *logaritamska funkcija korisnosti*:

$$u(x) = \log(\alpha + x), \quad x > -\alpha,$$

- *eksponencijalna funkcija korisnosti*:

$$u(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0,$$

- *stepena funkcija korisnosti*:

$$u(x) = x^c, \quad x > 0, 0 < c \leq 1.$$

2.5.2 Maksimizacija očekivane korisnosti

Moderna ekonomija kaže da, u slučaju suočenosti sa nesigurnošću, odluke treba temeljiti na očekivanoj korisnosti.

Ako je osoba sa početnim kapitalom w, sa funkcijom korisnosti u, izložena mogućem gubitku X, postavlja se pitanje koliku je premiju ta osoba spremna da plati da bi se osigurala od rizika. Kapital ove osobe nakon uplate premije osiguranja G bio bi $w - G$, a bez ugovora o osiguranju njen kapital bi bio $w - X$. U skladu sa principom maksimizacije očekivane korisnosti, premija G će biti prihvatljiva za ovu osobu kada je korisnost njenog kapitala nakon uplate premije veća od očekivane korisnosti kapitala kojim raspolaže ukoliko ne osigura svoj rizik, tj. iznos premije određuje se iz uslova

$$u(w - G) \geq E[u(w - X)].$$

Maksimalna prihvatljiva premija $G_{\max}$ za osiguranika zadovoljava jednakost

$$u(w - G_{\max}) = E[u(w - X)]. \tag{2.7}$$

Što se tiče osiguravača sa funkcijom korisnosti u_1 i početnim kapitalom w_1, prihvatljiva premija H koja obavezuje osiguravača da pokrije gubitak X mora da zadovoljava nejednakost

$$u_1(w_1) \leq E[u_1(w_1 + H - X)],$$

tako da minimalna prihvatljiva premija $H_{\min}$ za osiguravača zadovoljava jednakost

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H_{\min} - X)]. \tag{2.8}$$

Premija P koja je prihvatljiva i za osiguranika i za osiguravača trebalo bi da zadovoljava uslov

$$H_{\min} \leq P \leq G_{\max}.$$

Pomoću (2.7) i (2.8) su date procene za minimalnu prihvatljivu premiju za osiguravača i maksimalnu prihvatljivu premiju za osiguranika, ukoliko se želi osigurati ceo gubitak.

Isti princip može se primeniti i kod složenijih oblika osiguranja. Na primer, u slučaju da klijent želi da osigura samo deo pX, $p \in (0,1]$ potencijalnog gubitka X, maksimalna prihvatljiva premija $G_{\max}$ za osiguranika može da se dobije rešavajući jednačinu

$$E[u(w - (1-p)X - G_{\max})] = E[u(w - X)].$$

U opštem slučaju premija zavisi od početnog kapitala w. U nekim specijalnim slučajevima, na primer kada je funkcija korisnosti eksponencijalnog oblika, zbog osobina eksponencijalne funkcije, visina premije ne zavisi od početnih kapitala osiguranika i osiguravača.

Tvrđenje 2.2, Jensenova nejednakost, u terminologiji funkcije korisnosti i rizika ima sledeću formu

$$E[u(f)] \leq u(E[f]), \tag{2.9}$$

gde je f rizik i u konkavna funkcija korisnosti. Jensenova nejednakost pojašnjava vezu konkavnosti funkcije korisnosti i averzije prema riziku ([23]).

Ako klijent nije sklon riziku, funkcija korisnosti je konkavna, tako da na osnovu (2.7) i (2.9) imamo

$$u(w - G_{\max}) = E[u(w - X)] \leq u(E[w - X]) = u(w - E[X]).$$

Iz činjenice da je funkcija u neopadajuća sledi da je

$$w - G_{\max} \leq w - E[X], \quad \text{tj.} \quad G_{\max} \geq E[X],$$

što znači da će ugovor o osiguranju biti povoljan za osiguravajuću kompaniju.

Napomena 2.2 Ako je klijent sklon riziku, funkcija korisnosti bi bila konveksna. U ovom slučaju Jensenova nejednakost za konveksnu funkciju u i rizik f je

$$E[u(f)] \geq u(E[f]).$$

Primenom osobina matematičkog očekivanja i Jensenove nejednakosti za konveksnu funkciju dobija se

$$G_{\max} \leq E[X],$$

tako da u ovom slučaju ugovor ne bi bio potpisan.

Osiguravač se suočava sa sličnim problemom. Kao što je ranije pomenuto, minimalna premija koju će osiguravač prihvatiti mora da zadovoljava jednakost (2.8). Koristeći nejednakost Jensena (2.9) dobija se

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H_{\min} - X)] \leq u_1(E[w_1 + H_{\min} - X]) = u_1(w_1 + H_{\min} - E[X]).$$

Kako je u_1 neopadajuća funkcija, odavde sledi

$$H_{\min} - E[X] \geq 0, \text{ tako da je i } H_{\min} \geq E[X].$$

Kako funkcije korisnosti ne mogu da se odrede na jedinstven način, različiti agenti i klijenti koriste različite funkcije korisnosti, pri čemu svaka od njih ima svoje prednosti i mane. Izbor funkcije korisnosti objedinjuje matematiku, ekonomiju i psihologiju i kompleksan je problem koji, kao što smo rekli, nije jednoznačno rešiv. Više o ovoj temi može se pronaći u [23, 57].

2.6 Neto pseudo-princip premije zasnovan na pseudo-integralu realno-vrednosne funkcije

Rezultati predstavljeni u ovom delu su originalni deo istraživanja i mogu se naći u [32].

U duhu uopštenja rezultata iz principa premije korišćenjem matematičkog aparata pseudo-analize, nadalje posmatramo poluprsten $([a,b], \oplus, \odot)$ koji pripada jednoj od tri osnovne klase, neprazan skup Ω, prostor mere (Ω, Σ, μ), gde je μ $\oplus$-mera takva da je $\mu(\Omega) = \mathbf{1}$ i merljivu funkciju $f : \Omega \to [a,b]_+$, ograničenu u smislu posmatranog poluprstena.

Kao što je već rečeno, $L^1_\oplus(\mu)$ je familija merljivih, pseudo-integrabilnih funkcija ograničenih u smislu posmatranog poluprstena. Naglasimo da su u ovom delu teze posmatrane funkcije $f : \Omega \to [a,b]_+$ nenegativne u smislu posmatranog poluprstena. Kao u klasičnom slučaju, ove funkcije zvaćemo *rizicima*.

Definicija 2.1 Neka $\Pi^{\oplus,\odot} : L^1_\oplus(\mu) \to [a,b]_+$. *Neto pseudo-princip premije* za rizik $f : \Omega \to [a,b]_+$ definiše se sa

$$\Pi^{\oplus,\odot}[f] = \int_\Omega^\oplus f \odot d\mu.$$

Ako je $\oplus$-mera μ jednaka Lebegovoj meri, onda je neto pseudo-princip premije zapravo jednak neto principu premije, tako da Definicija 2.1 predstavlja prirodno uopštenje definicije neto principa premije.

Teorema 2.6 *Neto pseudo-princip premije* $\Pi^{\oplus,\odot} : L^1_\oplus(\mu) \to [a,b]_+$ *zadovoljava sledeće osobine:*

i) nema neopravdanog premijskog dodatka:

$$\Pi^{\oplus,\odot}[f] = c,$$

ako je rizik f identički jednak konstanti $c \in [a,b]_+$,

ii) pseudo-aditivnosti*: za svako $f_1, f_2 \in L^1_\oplus(\mu)$ važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[f_1 \oplus f_2] = \Pi^{\oplus,\odot}[f_1] \oplus \Pi^{\oplus,\odot}[f_2],$$

iii) pseudo-translatorne invarijantnosti*: za svako $f \in L^1_\oplus(\mu)$ i $c \in [a,b]_+$ važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[f \oplus c] = \Pi^{\oplus,\odot}[f] \oplus c,$$

iv) pseudo-skalne invarijantnosti*: za svako $f \in L^1_\oplus(\mu)$ i $c \in [a,b]_+$ važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[c \odot f] = c \odot \Pi^{\oplus,\odot}[f],$$

v) monotonosti*: za svako $f_1, f_2 \in L^1_\oplus(\mu)$ takve da je $f_1 \preceq f_2$ važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[f_1] \preceq \Pi^{\oplus,\odot}[f_2].$$

Dokaz. Sledi iz osobina pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije. □

Još jedno uopštenje neto principa premije, definisano preko Šokeovog integrala izučavano je u [34].

U primerima koji slede biće ilustrovano kako se može odrediti minimalna prihvatljiva premija H za osiguravača koja ga obavezuje da pokrije deo gubitka pX, $p \in (0,1]$. Dakle, posmatramo složeniji oblik osiguranja kada klijent želi da osigura samo deo potencijalnog gubitka X. Naravno, uzimajući da je $p = 1$, dobija se premija koja osiguravača obavezuje da pokrije ceo gubitak X. Takođe će biti pokazano kako se može odrediti maksimalna prihvatljiva premija G za osiguranika, a sve to korištenjem neto pseudo-principa premije.

Primer 2.4 Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten druge klase sa generatorom g. Neka je funkcija korisnosti osiguravača $u_1(x) = x^c$, $c \in (0,1]$. Neka je početni kapital osiguravača $w_1 = 1$ i slučajni gubitak X osiguranika ima uniformnu raspodelu na intervalu $(0,1)$, tj. $X : \mathcal{U}(0,1)$. Ako klijent želi da osigura deo pX, $p \in (0,1]$ mogućeg gubitka X, prihvatljiva premija H koja obavezuje osiguravača na pokriće gubitka X mora da zadovoljava nejednakost

$$u_1(w_1) \leq \Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H - pX)], \tag{2.10}$$

tako da minimalna prihvatljiva premija koju je osiguravač spreman da prihvati mora da zadovoljava jednakost

$$u_1(w_1) = \Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H - pX)]. \tag{2.11}$$

Važi da je $u_1(w_1) = 1$ i

$$\begin{aligned}
\Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H - pX)] &= \Pi^{\oplus,\odot}[(1 + H - pX)^c] \\
&= \int_{\Omega}^{\oplus} (1 + H - pX)^c \odot d\mu \\
&= g^{-1}\left(\int_0^1 g((1 + H - px)^c) \cdot 1 \cdot dx\right).
\end{aligned}$$

Neka su pseudo-operacije u poluprstenu date generatorom $g(x) = e^{-x}$. Tada je $g^{-1}(x) = -\ln x$, pa je

$$\begin{aligned} \Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H - pX)] &= -\ln\left(\int_0^1 e^{-(1+H-px)^c}dx\right) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{p}\int_{1+H-p}^{1+H} e^{-t^c}dt\right), \end{aligned}$$

gde je $t = 1 + H - px$. Posmatrajmo dalje slučaj $c = \dfrac{1}{2}$. Tada je

$$\Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H - pX)]$$

$$= -\ln\left(\frac{2}{p}e^{-\sqrt{1+H-p}}(\sqrt{1+H-p}+1) - \frac{2}{p}e^{-\sqrt{1+H}}(\sqrt{1+H}+1)\right).$$

Minimalna premija H_{min} koju će osiguravač prihvatiti mora da zadovoljava jednakost (2.11), tj. u posmatranom slučaju se dobija jednačina

$$-\ln\left(\frac{2}{p}e^{-\sqrt{1+H-p}}(\sqrt{1+H-p}+1) - \frac{2}{p}e^{-\sqrt{1+H}}(\sqrt{1+H}+1)\right) = 1.$$

Za $p = 1$, tj. kada je ceo gubitak osiguran, dobijamo jednačinu

$$2e^{-\sqrt{H}}(\sqrt{H}+1) - 2e^{-\sqrt{1+H}}(\sqrt{1+H}+1) = e^{-1},$$

čije približno rešenje je $H_{min} \approx 0.541920$.

Za $p = \dfrac{1}{2}$, tj. kada je tačno polovina mogućeg gubitka osigurana, dobijamo jednačinu

$$4e^{-\sqrt{\frac{1}{2}+H}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+H}+1\right) - 4e^{-\sqrt{1+H}}(\sqrt{1+H}+1) = e^{-1},$$

čije približno rešenje je $H_{min} \approx 0.260432$.

Primer 2.5 Neka važe sve pretpostavke iz Primera 2.4 ali sa pseudo-operacijama datim generatorom $g(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$. Tada je $g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ i

$$\begin{aligned}\Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H - pX)] &= \left(-\frac{1}{p}\frac{(1+H-px)^{c\alpha+1}}{c\alpha+1}\Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\frac{1}{p}\frac{(1+H)^{c\alpha+1}}{c\alpha+1} - \frac{1}{p}\frac{(1+H-p)^{c\alpha+1}}{c\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Prema tome, nejednakost (2.10) svodi se na

$$1 \leq \left(\frac{1}{p}\frac{(1+H)^{c\alpha+1}}{c\alpha+1} - \frac{1}{p}\frac{(1+H-p)^{c\alpha+1}}{c\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Minimalna premija H_{min} koju će osiguravač prihvatiti mora da zadovoljava jednakost (2.11) koja za posmatrani poluprsten ima sledeći oblik

$$(1+H)^{c\alpha+1} - (1+H-p)^{c\alpha+1} = p(c\alpha+1).$$

Treba naglasiti da se uzimajući $\alpha = 1$, tj. ako je generator $g(x) = x$, ovaj primer svodi na klasičan slučaj.

Ako izaberemo da je $\alpha = 1$ i $c = \frac{1}{2}$, jednačina (2.11) se svodi na

$$(1+H)^{\frac{3}{2}} - (1+H-p)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}p.$$

Za $\alpha = 1$, $c = \frac{1}{2}$ i $p = 1$ dobijamo jednačinu

$$(1+H)^{\frac{3}{2}} - (H)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2},$$

čije približno rešenje je $H_{min} \approx 0.521297$.

Za $\alpha = 1$, $c = \frac{1}{2}$ i $p = \frac{1}{2}$, dobijamo jednačinu

$$(1+H)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2} + H\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4},$$

čije približno rešenje je $H_{min} \approx 0.255236$.

Ako posmatramo generator $g(x) = x^2$, dobijamo sledeće rezultate.
Za $\alpha = 2$, $c = \dfrac{1}{2}$ i $p = 1$ dobijamo jednačinu

$$(1 + H)^2 - H^2 = 2,$$

čije rešenje je $H_{min} = 0.5$.

Za $\alpha = 2$, $c = \dfrac{1}{2}$ i $p = \dfrac{1}{2}$, dobijamo jednačinu

$$(1 + H)^2 - \left(\frac{1}{2} + H\right)^2 = 1,$$

čije rešenje je $H_{min} = 0.25$.

Napomena 2.3 U Primeru 2.5 za $\alpha = 1$ dobijeni rezultati se poklapaju sa rezultatima koji se dobijaju u klasičnom slučaju, kada se problem svodi na rešavanje jednačine (2.8). Time je potvrđeno da poznati rezultati koji se odnose na princip premije predstavljaju specijalan slučaj rezultata vezanih za pseudo-principa premije.

Za $\alpha = 2$ dobijeni rezultati su bliži ljudskoj intuiciji o minimalnoj prihvatljivoj premiji za osiguravača. Razlog je u tome što gubitak osiguranika ima uniformnu raspodelu i očekivana vrednost gubitka osiguranika je 0.5.

U primerima koji slede, korišćenjem funkcije korisnosti i alata pseudo-analize, biće određivana maksimalna prihvatljiva premija za osiguranika, tj. fokus istraživanja prenosimo na stanovište osiguranika.

Primer 2.6 Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x) = e^{-x}$. Neka je funkcija korisnosti osiguranika $u(x) = x^c$, $c \in (0, 1]$. Neka je početni kapital osiguranika $w = 1$ i njegov slučajan gubitak X ima uniformnu raspodelu, tj. $X : \mathcal{U}(0, 1)$. Ako klijent želi da osigura deo pX, $p \in (0, 1)$ mogućeg gubitka X, premija G prihvatljiva za njega mora da zadovoljava nejednakost

$$\Pi^{\oplus,\odot}[u(w - G - (1 - p)X) \geq \Pi^{\oplus,\odot}[u(w - X)]. \tag{2.12}$$

Za datu funkciju korisnosti, generator g i uzimajući da je $\omega = 1$, primenom definicije neto pseudo-principa premije dobija se

$$\begin{aligned}
\Pi^{\oplus,\odot}[u(w-X)] &= \Pi^{\oplus,\odot}[(1-X)^c] \\
&= \int_{\Omega}^{\oplus} (1-X)^c \odot d\mu \\
&= g^{-1}\left(\int_0^1 g((1-x)^c)\cdot 1 \cdot dx\right) \\
&= -\ln\left(\int_0^1 e^{-(1-x)^c} dx\right),
\end{aligned}$$

kao i da je

$$\begin{aligned}
\Pi^{\oplus,\odot}[u(w-G-(1-p)X)] &= \Pi^{\oplus,\odot}[(1-G-(1-p)X)^c] \\
&= \int_{\Omega}^{\oplus} (1-G-(1-p)X)^c \odot d\mu \\
&= g^{-1}\left(\int_0^1 g((1-G-(1-p)x)^c)\cdot 1 \cdot dx\right) \\
&= -\ln\left(\int_0^1 e^{-(1-G-(1-p)x)^c} dx\right).
\end{aligned}$$

Posmatrajmo slučaj $c = \dfrac{1}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned}
-\ln\left(\int_0^1 e^{-(1-x)^c} dx\right) &= -\ln\left(\int_0^1 e^{-\sqrt{1-x}} dx\right) \\
&= -\ln\left(2 - \frac{4}{e}\right),
\end{aligned}$$

$$-\ln\left(\int_0^1 e^{-(1-G-(1-p)x)^c}dx\right) = -\ln\left(\int_0^1 e^{-\sqrt{1-G-(1-p)x}}dx\right)$$

$$= -\ln\left(-\frac{2e^{-\sqrt{1-G+(p-1)x}}(1+\sqrt{1-G+(p-1)x})}{p-1}\Bigg|_0^1\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{2e^{-\sqrt{1-G}}(1+\sqrt{1-G}) - 2e^{-\sqrt{p-G}}(1+\sqrt{p-G})}{p-1}\right).$$

Maksimalna premija G_{max} koju bi osiguranik platio mora da zadovoljava jednakost

$$\frac{2e^{-\sqrt{1-G}}(1+\sqrt{1-G}) - 2e^{-\sqrt{p-G}}(1+\sqrt{p-G})}{p-1} = 2 - \frac{4}{e}.$$

Za $p = \frac{1}{2}$ dobija se rešenje $G_{max} = 0.321942$ dok je na primer za $p = \frac{1}{4}$ rešenje poslednje jednačine je $G_{max} = 0.168977$.

U graničnom slučaju, kada $p \to 1$, tj. kada bi klijent želeo da osigura ceo gubitak, mora da važi jednakost

$$\lim_{p\to 1}\frac{2e^{-\sqrt{1-G}}(1+\sqrt{1-G}) - 2e^{-\sqrt{p-G}}(1+\sqrt{p-G})}{p-1} = 2 - \frac{4}{e}.$$

Kako je

$$\lim_{p\to 1}\frac{2e^{-\sqrt{1-G}}(1+\sqrt{1-G}) - 2e^{-\sqrt{p-G}}(1+\sqrt{p-G})}{p-1} = e^{-\sqrt{1-G}},$$

to se prethodna jednakost svodi na jednakost

$$e^{-\sqrt{1-G}} = 2 - \frac{4}{e},$$

čije približno rešenje je $G_{\max} \approx 0.59328$.

Ista jednakost se, naravno, dobija i ako se krene od jednačine

$$u(w-G) \geq \Pi^{\oplus,\odot}[u(w-X)], \tag{2.13}$$

koju maksimalna prihvatljiva premija za osiguranika mora da zadovoljava ako on želi da osigura ceo dobitak.

Primer 2.7 Neka važe sve pretpostavke iz Primera 2.6 ali sa generatorom $g(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Tada je $g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$. Ako klijent želi da se osigura od mogućeg gubitka X, premija G prihvatljiva za njega mora da zadovoljava nejednakost (2.13). Iz date funkcije korisnosti sledi da je

$$u(w - G) = (1 - G)^c.$$

Primenom definicije neto pseudo-principa premije, za posmatrani generator g, uzimajući da je $w = 1$, dobija se

$$\begin{aligned}
\Pi^{\oplus,\odot}[u(w - X)] &= \Pi^{\oplus,\odot}[(1 - X)^c] \\
&= \int_{\Omega}^{\oplus} (1 - X)^c \odot d\mu \\
&= g^{-1}\left(\int_0^1 g((1 - x)^c) \cdot 1 \cdot dx\right) \\
&= \left(-\frac{(1 - x)^{c\alpha+1}}{c\alpha + 1}\Bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(\frac{1}{c\alpha + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Prema tome, nejednakost (2.13) se svodi na

$$(1 - G)^c \geq \left(\frac{1}{c\alpha + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dakle, maksimalna premija G_{max} prihvatljiva za osiguranika mora da zadovoljava jednakost

$$1 = (c\alpha + 1)(1 - G)^{c\alpha}. \tag{2.14}$$

Za $\alpha = 1$ i $c = \dfrac{1}{2}$ dobija se rešenje $G_{max} = \dfrac{5}{9} \approx 0.55555$.

Za $\alpha = 2$ i $c = \dfrac{1}{2}$ dobija se rešenje $G_{max} = 0.5$.

Sa druge strane, ako klijent želi da osigura samo deo pX, $p \in (0,1)$, mogućeg gubitka X, premija G prihvatljiva za njega mora da zadovoljava nejednakost (2.12). Važi da je

$$\begin{aligned}
\Pi^{\oplus,\odot}[u(w-G-(1-p)X)] &= \left(\int_0^1 (1-G-(1-p)x)^{c\alpha}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(\frac{(1-G+(p-1)x)^{c\alpha+1}}{(p-1)(c\alpha+1)}\Big|_0^1\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(\frac{(p-G)^{c\alpha+1}-(1-G)^{c\alpha+1}}{(p-1)(c\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Prema tome, maksimalna premija G_{max} prihvatljiva za osiguranika koji želi da osigura deo pX, $p \in (0,1)$ mogućeg gubitka X, mora da zadovoljava jednakost

$$\frac{1}{c\alpha+1} = \frac{(p-G)^{c\alpha+1}-(1-G)^{c\alpha+1}}{(p-1)(c\alpha+1)},$$

tj.

$$\frac{(p-G)^{c\alpha+1}-(1-G)^{c\alpha+1}}{p-1} = 1.$$

Primetimo da posmatrani izraz nije definisan za $p=1$.

Za $\alpha = 1$ i $c = \frac{1}{2}$ i $p = \frac{1}{2}$ dobija se rešenje $G_{max} = 0.29350$.

Za $\alpha = 2$ i $c = \frac{1}{2}$ i $p = \frac{1}{2}$ dobija se rešenje $G_{max} = \frac{1}{4} = 0.25$.

Šta se dešava sa maksimalnom prihvatljivom premijom za osiguranika u slučaju kada p teži ka 1? Tada mora da važi jednakost

$$\lim_{p\to1}\frac{(p-G)^{c\alpha+1}-(1-G)^{c\alpha+1}}{p-1} = 1.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to1}\frac{(p-G)^{c\alpha+1}-(1-G)^{c\alpha+1}}{p-1} &= \lim_{p\to1}\frac{(c\alpha+1)(p-G)^{c\alpha}}{1} \\
&= (c\alpha+1)(1-G)^{c\alpha},
\end{aligned}$$

to se prethodna jednakost svodi na

$$(c\alpha + 1)(1 - G)^{c\alpha} = 1,$$

tj. na jednakost (2.14). Dakle, i ovim primerom ilustrovano je da se u slučaju da $p \to 1$, nejednakost (2.12) svodi na nejednakost (2.13).

Na osnovu primera može se videti da se korišćenjem iste funkcije korisnosti i različitih generatora g dobijaju različiti rezultati. Istaknimo još jednom da smo u svim primerima pretpostavili da je slučajan gubitak X osiguranika uniformno raspoređen u intervalu $(0, 1)$.

Izborom generatora $g(x) = x^2$, kao što je već rečeno, dobijaju se rezultati $G_{max} = 0.5$ (ukoliko želimo da osiguramo ceo gubitak) i $G_{max} = 0.25$ (ukoliko želimo da osiguramo pola gubitka). Ovo se u potpunosti slaže sa intuitivnim očekivanjima što nije slučaj sa rezultatima dobijenim korišćenjem Lebegovog integrala, tj. korišćenjem generatora $g(x) = x$. Zbog navedenog, smatramo da je opravdana primena pseudo-analize za određivanje premije neživotnog osiguranja.

2.6.1 Procene minimalne prihvatljive premije pomoću Jensenove nejednakosti

U ovom delu disertacije predstavićemo primere u kojima će biti izvršena procena maksimalne premije G prihvatljive za osiguranika i minimalne premije H prihvatljive za osiguravača, korišćenjem Jensenove nejednakosti za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije ([45]). Dobijene procene predstavljaju originalni deo istraživanja.

Primer 2.8 Procena premije H_{min} iz Primera 2.4, korištenjem nejednakosti Jensena (2.9), dobija se rešavanjem nejednakosti

$$u_1(1) \leq u_1 \left(\int_{\Omega}^{\oplus} (1 + H - pX) \odot d\mu \right). \tag{2.15}$$

Kako je

$$\int_{\Omega}^{\oplus}(1+H-pX)\odot d\mu = -\ln\left(\int_0^1 e^{-(1+H-px)}dx\right)$$
$$= (1+H)+\ln p-\ln(e^p-1),$$

nejednakost (2.15) svodi se na

$$1\le ((1+H)+\ln p-\ln(e^p-1))^c.$$

Za $p=1$ dobijamo procenu $H\ge 0.54132$ za H, a u Primeru 2.4 izračunali smo da je $H_{min}\approx 0.541920$.

Za $p=\dfrac{1}{2}$ dobijamo procenu $H\ge 0.260395$ za H, a u Primeru 2.4 izračunali smo da je $H_{min}\approx 0.260432$.

Možemo zaključiti da korišćenjem Jensenove nejednakosti dobijamo veoma dobru procenu za minimalnu prihvatljivu premiju za osiguravača.

Napomena 2.4 Primetimo da Jensenova nejednakost za konveksan i opadajući generator g i konkavnu i neopadajuću funkciju korisnosti u ne može da se primeni za procenu premije G prihvatljive za osiguranika iz Primera 2.6 koji želi da osigura mogući gubitak X. Razlog ovome jeste činjenica da nejednakost Jensena ima sledeći oblik

$$\left(\int_{\Omega}^{\oplus}(1-X)\odot d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \ge \int_{\Omega}^{\oplus}(1-X)^{\frac{1}{2}}\odot d\mu$$

tj. premija G prihvatljiva za osiguranika mora da zadovoljava nejednakost

$$(1-G)^{\frac{1}{2}}\ge \int_{\Omega}^{\oplus}(1-X)^{\frac{1}{2}}\odot d\mu.$$

Primetimo da nejednakost Jensena za konveksan i opadajući generator g i konkavnu i neopadajuću funkciju korisnosti u ne može da se primeni za procenu premije G iz Primera 2.6.

Takođe, nejednakost Jensena ne može da se primeni u Primeru 2.5 kao ni u Primeru 2.6 jer su funkcije korisnosti $u_1(x) = u(x) = x^c$, $c \in (0,1]$ konkavne, a generatorna funkcija $g(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$ je rastuća funkcija. U slučaju da je generator rastuća funkcija Jensenova nejednakost mogla bi da se primeni u proceni ako je funkcija korisnosti konveksna, tj. ako je klijent sklon riziku, a ovaj slučaj nije predmet našeg istraživanja.

2.7 Princip maksimizacije očekivane korisnosti zasnovan na pseudo-integralu intervalno-vrednosne funkcije

U svim primerima iz Poglavlja 2.6, posmatrali smo slučajeve složene vrste osiguranja gde klijent može osigurati ne samo ceo mogući gubitak X već i deo pX, $p \in (0,1)$, mogućeg gubitka X. Na temelju toga, bilo bi opravdano definisati *intervalno-vrednosni rizik* F na sledeći način.

Definicija 2.2 *Intervalno-vrednosni rizik* F je intervalno-vrednosna funkcija

$$F = [f_l, f_r],$$

gde su f_l i f_r rizici.

Nadalje, pretpostavićemo da su sve intervalno-vrednosne funkcije rizika $F = [f_l, f_r]$ pseudo integrabilno ograničene. Rizike f_l i f_r zvaćemo *granični rizici.*

Sledeći korak u našem radu je definicija *intervalno-vrednosnog neto pseudo-principa premije.*

Definicija 2.3 Neka je F intervalno-vrednosna, pseudo integrabilno ograničena funkcija rizika. *Intervalno-vrednosni neto pseudo-princip premije* za intervalno-vrednosni rizik $F : \Omega \to \mathcal{I}$, definisaćemo sa

$$\Pi^{\oplus,\odot}[F] = \int_{\Omega}^{\oplus} F \odot d\mu.$$

Teorema 2.7 *Intervalno-vrednosni neto pseudo-princip premije za intervalno-vrednosne rizike F, F_1 i F_2 zadovoljava sledeće osobine:*

i) $\Pi^{\oplus,\odot}[F] = \left[\int_{\Omega}^{\oplus} f_l \odot d\mu, \int_{\Omega}^{\oplus} f_r \odot d\mu \right]$,

ii) $\Pi^{\oplus,\odot}[F] = \Pi^{\oplus,\odot}[f]$, *za* $F(x) = \{f(x)\}$,

iii) nema neopravdanog premijskog dodatka: *ako je* $F(x) = \{c\}$, *tada*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[F] = \Pi^{\oplus,\odot}[\{c\}] = \{c\} = [c, c],$$

iv) pseudo-aditivnosti*: za svako* F_1, F_2 *važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[F_1 \oplus F_2] = \Pi^{\oplus,\odot}[F_1] \oplus \Pi^{\oplus,\odot}[F_2],$$

v) pseudo-translatorne invarijantnosti*: za svako* F *i* $c \in [a, b]_+$ *važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[F \oplus \{c\}] = \Pi^{\oplus,\odot}[F] \oplus \{c\},$$

vi) pseudo-skalne invarijantnosti*: za svako* F *i* $c \in [a, b]_+$ *važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[c \odot F] = c \odot \Pi^{\oplus,\odot}[F],$$

vii) monotonosti*: za svako* F_1, F_2 *takve da je* $F_1 \preceq_S F_2$ *važi*

$$\Pi^{\oplus,\odot}[F_1] \preceq \Pi^{\oplus,\odot}[F_2].$$

Dokaz. Sledi iz osobina pseudo-integrala skupovno-vrednosne funkcije i osobina neto pseudo-principa premije. □

2.7.1 Primena Jensenove nejednakosti na intervalno-vrednosni neto pseudo-princip premije

U delu koji sledi pokazano je kako se može napraviti procena intervala u kom se nalazi minimalna prihvatljiva premija za osiguravača pomoću Jensenove nejednakosti. Dakle, u ovom slučaju će se dobiti intervalna procena za minimalnu prihvatljivu premiju za osiguravača. Dobijeni rezultati su deo originalnih istraživanja.

Posmatrajmo model u kom klijent ima mogućnost da izabere koji deo pX mogućeg gubitka X želi da osigura. U zavisnosti od vrednosti parametra $p \in (0,1]$, osiguravač treba da donese odluku o visini minimalne premije H koju će on prihvatiti, kako bi pokrio gubitak pX.

Rizik koji posmatramo u našem istraživanju je funkcija oblika

$$f_p = w_1 + H - pX,$$

gde $p \in (0,1]$ i w_1 je početni kapital osiguravača.

Neka je $F = [f_{p_1}, f_{p_2}]$ intervalno-vrednosni rizik, gde $f_{p_i} = w_1 + H - p_i X$, $0 < p_1 \leq p_2 \leq 1$. Za početni kapital w_1, za procenu intervala $\mathcal{H}_{min} = [H_{p_1}, H_{p_2}]$ kome pripada minimalna premija prihvatljiva za osiguravača sledeći uslov mora biti zadovoljen

$$\begin{aligned}
\{u_1(w_1)\} &= [u_1(w_1), u_1(w_1)] \\
&\preceq_S [\Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H_{p_1} - p_1 X)], \Pi^{\oplus,\odot}[u_1(w_1 + H_{p_2} - p_2 X)]] \\
&= \Pi^{\oplus,\odot}[[u_1(w_1 + H_{p_1} - p_1 X), u_1(w_1 + H_{p_2} - p_2 X)]] \\
&= \Pi^{\oplus,\odot}[u_1([w_1 + H_{p_1} - p_1 X, w_1 + H_{p_2} - p_2 X])] \\
&\preceq_S u_1\left(\Pi^{\oplus,\odot}[[w_1 + H_{p_1} - p_1 X, w_1 + H_{p_2} - p_2 X]]\right),
\end{aligned}$$

tj.

$$\{u_1(w_1)\} \preceq_S u_1\left(\Pi^{\oplus,\odot}[[w_1 + H_{p_1} - p_1 X, w_1 + H_{p_2} - p_2 X]]\right). \tag{2.16}$$

Primer 2.9 Koristeći definiciju relacije $\preceq_S$ i rezultate iz Primera 2.4 za $p_1 = \frac{1}{2}$ i $p_2 = 1$, nejednakost (2.16) daje $\mathcal{H}_{min} \approx [0.260432, 0.541920]$.

Glava 3

Nejednakost Čebiševa

Nejednakost Čebiševa, u literaturi poznata kao nejednakost Čebiševa za monotone funkcije, kao i nejednakost kovarijanse, ima široku primenu u ekonomiji, finansijama, teoriji odlučivanja i statistici.

Motivaciju za istraživanja predstavljena u ovom delu disertacije pronašli smo u integralnoj nejednakosti Čebiševa za Lebegov integral ([49]) i nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral ([5]). Navedeni rezultati predstavljeni su u Sekciji 3.1 i Sekciji 3.2 ove glave.

Nejednakost Čebiševa za skupovno-vrednosne funkcije i intervalno-vrednosne funkcije kao njihov specijalan slučaj formulisane su i dokazane u Sekciji 3.3. Odgovarajući teorijski rezultati ilustrovani su reprezentativnim primerima. Izloženi rezultati publikovani su u [54, 55].

Originalni rezultati iz [20] predstavljeni su u Sekciji 3.4.

Uopštena nejednakost Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije i uopštena intervalno-vrednosna nejednakost Čebiševa predstavljene su u Sekciji 3.5. Dobijeni teorijski rezultati ilustrovani su za slučajne promenljive sa uniformnom, eksponencijalnom, binomnom, Poasonovom, kao i zasečenom Košijevom raspodelom ([21]).

3.1 Integralna nejednakost Čebiševa za Lebegov integral

Nejednakost Čebiševa za nenegativne funkcije iste monotonosti data je sledećim tvrđenjem ([11]).

Tvrđenje 3.1 *Neka su f i g nenegativne merljive funkcije na $[a,b]$ koje su obe rastuće ili obe opadajuće. Tada važi nejednakost*

$$\int_a^b f dm \cdot \int_a^b g dm \leq \int_a^b dm \cdot \int_a^b f g dm,$$

gde je m mera na $\mathbb{R}$.

Zbog velike primene u statistici, u teoriji verovatnoće veoma je zastupljen sledeći oblik ove nejednakosti ([56, 61]).

Tvrđenje 3.2 *Ako je Y slučajna promenljiva i f, g funkcije koje su obe rastuće ili obe opadajuće, tada važi nejednakost*

$$E(f(Y))E(g(Y)) \leq E(f(Y)g(Y)),$$

pod uslovom da navedena matematička očekivanja postoje.

3.2 Nejednakost Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije

Nejednakost Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije proučavana je u [5, 53]. Za ovaj tip nejednakosti potrebno je uvesti dodatne restrikcije za pseudo-integrabilne funkcije, tj. uvodi se uslov komonotonosti funkcija.

Definicija 3.1 Proizvoljne funkcije $f, h : X \to \mathbb{R}$ su *komonotone* ako za svako $x, y \in X$ važi

$$(f(x) - f(y))(h(x) - h(y)) \geq 0.$$

Rezultati iz [5] dobijeni za jedinični interval mogu se uopštiti za interval $[c,d]$, za koji je $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$ tako da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.3 *Neka je* $([a,b], \oplus, \odot)$ *poluprsten druge klase sa rastućim generatorom* g, $[c,d]$ *interval i* $([c,d], \Sigma, \mu)$ *prostor mere gde je* μ $\oplus$*-mera i* $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$. *Neka su* $f, h : [c,d] \to [a,b]$ *dve komonotone merljive funkcije. Tada važi*

$$\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} h \odot d\mu \right) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} (f \odot h) \odot d\mu. \tag{3.1}$$

Tvrđenje 3.4 *Neka je* $([0,\infty], \sup, \odot)$ *poluprsten gde je* $\odot$ *dato rastućim generatorom* g, $[c,d]$ *interval i* $([c,d], \Sigma, \mu)$ *prostor mere gde je* μ *definisano sa (1.10) i* $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$. *Ako su* $f, h : [c,d] \to [0,\infty]$ *merljive komonotone funkcije, tada važi odgovarajući oblik nejednakosti (3.1), tj.*

$$\left(\int_{[c,d]}^{\sup} f \odot d\mu \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\sup} h \odot d\mu \right) \preceq \int_{[c,d]}^{\sup} (f \odot h) \odot d\mu. \tag{3.2}$$

.

Nejednakost Čebiševa za pseudo-integral posmatrana je i u radu [44]. Data su dva uopštenja nejednakosti Čebiševa kao i njihova primena u pseudo-verovatnoći. Takođe, pokazana je posledica nejednakosti Čebiševa koja je u literaturi poznata pod imenom nejednakost Stolarskog.

Generalizacija nejednakosti Čebiševa za monotone funkcije za Sugenov integral pokazana je u [16]. Još jedan oblik nejednakost Čebiševa za Sugenov integral dokazan je u [17]. Šokeov integral i nejednakost Čebiševa izučavani su u [65], gde je pokazano u kom slučaju se nejednakost Čebiševa svodi na nejednakost Markova.

3.3 Nejednakost Čebiševa za pseudo-integral skupovno-vrednosne funkcije

U ovom delu teze predstavljeni su originalni rezultati i data je nejednakost Čebiševa za dve klase skupovno-vrednosnih funkcija. Prvu klasu čine takozvane monotone pseudo-integrabilne skupovno-vrednosne funkcije. Monotonost pseudo-integrabilnih skupovno-vrednosnih funkcija u izvesnom smislu predstavlja analogon komonotonosti realno-vrednosnih funkcija. Drugu klasu za koju je izučavana nejednakost Čebiševa čine pseudo-integrabilno ograničene intervalno-vrednosne funkcije. Rezultati iz ovog dela publikovani su u [55].

Kao i u dosadašnjem radu, pretpostavimo da je $([a,b],\oplus,\odot)$ g-poluprsten sa rastućim generatorom ili proizvoljan poluprsten prve klase u kom je pseudo-sabiranje $\oplus$ jednako sup, a pseudo-množenje dato preko generatora g.

U ovom delu disertacije pretpostavljamo da je $X=[c,d]$ i $\mu([c,d])=\mathbf{1}$.

Definicija 3.2 Skupovno vrednosna funkcija $F: X \to \mathcal{F}\setminus\{\emptyset\}$ je *monotona* ako za svako $x,y\in X$, $u\in F(x)$ i $v\in F(y)$ važi

$$(x-y)(g(u)-g(v))\geq 0,$$

gde je g rastući generator iz posmatranog poluprstena.

Teorema 3.1 *Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ proizvoljan g-poluprsten. Neka su $F_1,F_2:[c,d]\to\mathcal{F}\setminus\{\emptyset\}$, gde je $\mu([c,d])=\mathbf{1}$, monotone pseudo-integrabilne skupovno-vrednosne funkcije takve da za svako $f_1\in \mathrm{S}(F_1)$ i $f_2\in \mathrm{S}(F_2)$ važi*

$$f_1\odot f_2\in L^1_{\oplus}(\mu).$$

Ako je generator g rastuća funkcija, tada je

$$\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_1\odot d\mu\right)\odot\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_2\odot d\mu\right)\preceq_S \int_{[c,d]}^{\oplus}(F_1\odot F_2)\odot d\mu. \tag{3.3}$$

Dokaz. Iz pseudo-integrabilnosti skupovno-vrednosnih funkcija F_1 i F_2 sledi da su skupovi $\int_{[c,d]}^{\oplus} F_1\odot d\mu$ i $\int_{[c,d]}^{\oplus} F_2\odot d\mu$ neprazni, pa je njihov pseudo-proizvod neprazan skup, tj. $\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_1\odot d\mu\right)\odot\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_2\odot d\mu\right)\neq\emptyset.$

Posmatrajmo proizvoljan elemenat

$$u \in \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu \right).$$

Pokažimo da postoji

$$v \in \int_{[c,d]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu$$

takvo da je $u \preceq v$. Na osnovu definicije pseudo-integrala skupovno-vrednosne funkcije i definicije pseudo-proizvoda dva skupa sledi da postoje funkcije $f_1 \in \mathrm{S}(F_1)$ i $f_2 \in \mathrm{S}(F_2)$ takve da je

$$u = \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu \right).$$

Kako su F_1 i F_2 monotone skupovno-vrednosne funkcije, na osnovu Definicije 3.2, imamo da za skoro svako $x, y \in [c,d]$, $f_i(x) \in F_i(x)$ i $f_i(y) \in F_i(y)$, $i = 1, 2$, važi da je

$$(x - y)(g \circ f_i(x) - g \circ f_i(y)) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Odavde sledi da je

$$(g \circ f_1(x) - g \circ f_1(y))(g \circ f_2(x) - g \circ f_2(y)) \geq 0,$$

što znači da su funkcije $g \circ f_1$ i $g \circ f_2$ komonotone funkcije. Primenom nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije, tj. primenom nejednakosti (3.1) sledi da je

$$\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu \right) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu. \tag{3.4}$$

Na osnovu pretpostavke $f_1 \odot f_2 \in L^1_{\oplus}(\mu)$ i definicije pseudo-proizvoda skupova sledi da $f_1 \odot f_2 \in \mathrm{S}(F_1 \odot F_2)$. Ako izaberemo da je

$$v = \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu,$$

važi da

$$v \in \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu \quad \text{i} \quad u \preceq v,$$

tako da je traženo $v = \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu$.

Pokažimo i da važi obrnuto, tj. da za svako

$$v \in \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu$$

postoji

$$u \in \left(\int\limits_{[c,d]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int\limits_{[c,d]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu \right)$$

takvo da je $u \preceq v$. Neka je dato proizvoljno

$$v \in \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu.$$

Tada postoji $f_1 \odot f_2 \in \mathrm{S}(F_1 \odot F_2)$ takvo da je

$$v = \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu.$$

Kako su funkcije $g \circ f_1$ i $g \circ f_2$ komonotone, nejednakost (3.4) sledi iz nejednakosti (3.1). Dalje, zbog nejednakosti (3.4) i pretpostavke da je $f_1 \odot f_2 \in L^1_{\oplus}(\mu)$ sledi da je $f_1 \in \mathrm{S}(F_1)$ i $f_2 \in \mathrm{S}(F_2)$. Prema tome, traženo u za koje važi $u \preceq v$ je

$$u = \left(\int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu \right).$$

$\square$

Naredna teorema odnosi se na poluprstene prve klase kod kojih je pseudo-množenje dato preko generatora g i kao u slučaju nejednakosti Jensena, zasniva se na rezultatima iz [33] i [45].

Teorema 3.2 *Neka je* $([a,b], \sup, \odot)$ *poluprsten u kom je* $\odot$ *dato rastućim generatorom* g. *Neka je* $\mathcal{B}([c,d])$ *Borelova* σ*-algebra na intervalu* $[c,d]$, *gde je* $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$ *i* μ *definisano sa (1.10). Neka su* $F_1, F_2 : [c,d] \to \mathcal{F}\backslash\{\emptyset\}$ *monotone pseudo-integrabilne skupovno-vrednosne funkcije takve da su sve funkcije iz* $\mathrm{S}(F_1)$ *i* $\mathrm{S}(F_2)$ *neprekidne i za svako* $f_1 \in \mathrm{S}(F_1)$ *i* $f_2 \in \mathrm{S}(F_2)$ *važi*

$$f_1 \odot f_2 \in L^1_{\oplus}(\mu).$$

Tada važi

$$\left(\int_{[c,d]}^{\sup} F_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\sup} F_2 \odot d\mu \right) \preceq_S \int_{[c,d]}^{\sup} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu.$$

Nejednakost Čebiševa za još jednu klasu skupovno-vrednosnih funkcija pokazaćemo u sledećoj teoremi.

Teorema 3.3 *Neka je* $([a,b], \oplus, \odot)$ *proizvoljan* g*-poluprsten. Neka su skupovno-vrednosne funkcije* $F_1, F_2 : [c,d] \to \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, *gde je* $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$, *monotone i pseudo-integrabilno ograničene i neka je funkcija* $F_1 \odot F_2$ *pseudo-integrabilno ograničena skupovno-vrednosna funkcija. Ako je generator* g *rastuća funkcija, tada je*

$$\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu \right) \preceq_S \int_{[c,d]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu.$$

Dokaz. Neka je za pseudo-integrabilno ograničenu funkciju $F_1 \odot F_2$ sa h označena odgovarajuća funkcija iz Definicije 1.18.

Posmatrajmo proizvoljnu funkciju $f_1 \odot f_2 : [c,d] \to [a,b]_+$ takvu da važi $(f_1 \odot f_2)(x) \in (F_1 \odot F_2)(x)$. Funkcija $f_1 \odot f_2$ je merljiva. Kako funkcija h pripada klasi $L^1_{\oplus}(\mu)$, imamo da je

$$(f_1 \odot f_2)(x) \preceq \sup_{\alpha \in F_1(x) \odot F_2(x)} \alpha \preceq h(x).$$

Na osnovu osobine monotonosti pseudo-integrala i pseudo-integrabilnosti funkcije h sledi da je

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} h \odot d\mu.$$

Dakle, $f_1 \odot f_2 \in L^1_{\oplus}(\mu)$, pa na osnovu Teoreme 3.2 sledi tvrđenje teoreme.

□

Sledi odgovarajuća teorema za poluprstene prve klase kod kojih je pseudo-množenje dato preko generatora g.

Teorema 3.4 *Neka je* $([a,b], \sup, \odot)$ *poluprsten u kom je* $\odot$ *dato rastućim generatorom* g. *Neka je* $\mathcal{B}([c,d])$ *Borelova* σ*-algebra na intervalu* $[c,d]$, *gde je* $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$ *i* μ *je definisano sa (1.10). Neka su* $F_1, F_2 : [c,d] \to \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ *monotone pseudo-integrabilno ograničene skupovno-vrednosne funkcije takve da su sve funkcije iz* $\mathrm{S}(F_1)$ *i* $\mathrm{S}(F_2)$ *neprekidne. Neka je i skupovno-vrednosna funkcija* $F_1 \odot F_2$ *pseudo-integrabilno ograničena. Tada važi*

$$\left(\int_{[c,d]}^{\sup} F_1 \odot d\mu\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\sup} F_2 \odot d\mu\right) \preceq_S \int_{[c,d]}^{\sup} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu.$$

U primeru koji sledi biće ilustrovana nejednakost Čebiševa za zadate funkcije F_1 i F_2 i generator g.

Primer 3.1 Neka je poluprsten $([-\infty, \infty], \oplus, \odot)$ druge klase dat generatorom $g(x) = e^x$. Tada je

$$x \oplus y = \ln\left(e^x + e^y\right) \quad \text{i} \quad x \odot y = x + y.$$

U ovom slučaju je $\mathbf{0} = -\infty$ i usvajamo konvenciju $-\infty + \infty = -\infty$.

Posmatrajmo skupovno-vrednosne funkcije

$$F_1(x) = \left\{-\frac{1}{3}\ln(1-x)\right\} \quad \text{i} \quad F_2(x) = \left\{-\frac{1}{6}\ln(1-x)\right\}.$$

Njihov pseudo-proizvod je skupovno-vrednosna funkcija

$$(F_1 \odot F_2)(x) = \left\{ -\frac{1}{2} \ln (1-x) \right\}.$$

Kako je

$$\int\limits_{[0,1]}^{\oplus} \left(-\frac{1}{3} \ln (1-x) \right) \odot d\mu = \ln \frac{3}{2}, \quad \int\limits_{[0,1]}^{\oplus} \left(-\frac{1}{6} \ln (1-x) \right) \odot d\mu = \ln \frac{6}{5}$$

i

$$\int\limits_{[0,1]}^{\oplus} \left(-\frac{1}{2} \ln (1-x) \right) \odot d\mu = \ln 2,$$

to je

$$\int\limits_{[0,1]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu = \left\{ \ln \frac{3}{2} \right\}, \quad \int\limits_{[0,1]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu = \left\{ \ln \frac{6}{5} \right\}, \quad \int\limits_{[0,1]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu = \{\ln 2\}$$

i

$$\left(\int\limits_{[0,1]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu \right) \odot \left(\int\limits_{[0,1]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu \right) = \left\{ \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{6}{5} \right\} = \left\{ \ln \frac{18}{10} \right\}.$$

Prema tome, vidimo da važi nejednakost (3.3).

U delu koji sledi biće formulisan oblik nejednakosti Čebiševa za slučaj pseudo-integracije intervalno-vrednosnih funkcija, specijalnog slučaja skupovno-vrednosnih funkcija. Intervalno-vrednosne funkcije su zbog svog specifičnog oblika interesantne zbog mogućnosti primene u oblasti konveksnih fazi slučajnih promenljivih i slučajnih skupova [27, 35, 36, 47].

Prikazani rezultati slede iz nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije, tj. nejednakosti (3.1), (3.2) i oblika pseudo-integrala ograničene intervalno-vrednosne funkcije F koja je zadata graničnim funkcijama, tj. jednakosti (1.8).

Teorema 3.5 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *proizvoljan g-poluprsten dat rastućim generatorom g. Neka su* $F_1, F_2 : [c,d] \to \mathcal{F}\setminus\{\emptyset\}$ *pseudo-integrabilno ograničene intervalno-vrednosne funkcije predstavljene preko graničnih funkcija* l_1, r_1, l_2 *i* r_2 *respektivno, gde je* $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$. *Neka je* $F_1 \odot F_2$ *pseudo-integrabilno ograničena intervalno-vrednosna funkcija. Ako su funkcije* $g\circ l_1$ *i* $g\circ l_2$ *komonotone i funkcije* $g\circ r_1$ *i* $g\circ r_2$ *komonotone, tada važi*

$$\left[\int_{[c,d]}^{\oplus} l_1\odot d\mu, \int_{[c,d]}^{\oplus} r_1\odot d\mu\right] \odot \left[\int_{[c,d]}^{\oplus} l_2\odot d\mu, \int_{[c,d]}^{\oplus} r_2\odot d\mu\right]$$
$$\preceq_S \left[\int_{[c,d]}^{\oplus} (l_1\odot l_2)\odot d\mu, \int_{[c,d]}^{\oplus} (r_1\odot r_2)\odot d\mu\right]. \tag{3.5}$$

Teorema 3.6 *Neka je* $([a,b],\sup,\odot)$ *poluprsten u kom je pseudo-množenje* $\odot$ *dato rastućim generatorom g. Neka je* $\mathcal{B}([c,d])$ *Borelova* σ*-algebra na intervalu* $[c,d]$ *gde je* $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$ *i* μ *definisano sa (1.10). Neka su* $F_1, F_2 : [c,d] \to \mathcal{F}\setminus\{\emptyset\}$ *pseudo-integrabilno ograničene intervalno-vrednosne funkcije sa neprekidnim graničnim funkcijama* l_1, r_1, l_2 *i* r_2 *respektivno, takve da je* $F_1 \odot F_2$ *pseudo-integrabilno ograničena intervalno-vrednosna funkcija. Ako su funkcije* $g\circ l_1$ *i* $g\circ l_2$ *komonotone i funkcije* $g\circ r_1$ *i* $g\circ r_2$ *komonotone, tada važi*

$$\left[\int_{[c,d]}^{\sup} l_1\odot d\mu, \int_{[c,d]}^{\sup} r_1\odot d\mu\right] \odot \left[\int_{[c,d]}^{\sup} l_2\odot d\mu, \int_{[c,d]}^{\sup} r_2\odot d\mu\right]$$
$$\preceq_S \left[\int_{[c,d]}^{\sup} (l_1\odot l_2)\odot d\mu, \int_{[c,d]}^{\sup} (r_1\odot r_2)\odot d\mu\right].$$

Interesantna osobina nejednakosti Čebiševa za intervalno-vrednosne funkcije je da je, iako je cela konstrukcija prebačena na granične funkcije, nejednakost zadovoljena bez obzira na monotonost funkcija l_1 i r_1, tj. funkcija l_2 i r_2. U Primeru 3.2 ilustrovano je da nejednakost Čebiševa važi ako su funkcije l_1 i r_1 (l_2 i r_2) iste monotonosti, dok su u Primeru 3.3 funkcije l_1 i r_1 (l_2 i r_2) različite monotonosti.

Primer 3.2 Neka je g-poluprsten $([0,\infty],\oplus,\odot)$ dat generatorom $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Tada je

$$x \oplus y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 \quad \text{i} \quad x \odot y = x \cdot y,$$

pri čemu je $\mathbf{0} = 0$ i usvojena je konvencija $0 \cdot \infty = 0$.

Posmatrajmo sledeće dve intervalno-vrednosne funkcije F_1 i F_2 sa graničnim funkcijama iste monotonosti:

$$F_1(x) = \left[x^6, x\right] \quad \text{i} \quad F_2(x) = \left[8x^3, (2+x)^3\right].$$

Pseudo-proizvod intervalno-vrednosnih funkcija F_1 i F_2 jednak je

$$(F_1 \odot F_2)(x) = \left[8x^9, x(2+x)^3\right].$$

Iz (1.8), sledi da je

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu \;=\; \left[\int_{[0,1]}^{\oplus} x^6 \odot d\mu, \int_{[0,1]}^{\oplus} x \odot d\mu\right] = \left[\frac{1}{27}, \frac{27}{64}\right],$$

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu \;=\; \left[\int_{[0,1]}^{\oplus} 8x^3 \odot d\mu, \int_{[0,1]}^{\oplus} (2+x)^3 \odot d\mu\right] = \left[1, \frac{125}{8}\right]$$

i

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu \;=\; \left[\int_{[0,1]}^{\oplus} 8x^9 \odot d\mu, \int_{[0,1]}^{\oplus} x(2+x)^3 \odot d\mu\right] = \left[\frac{1}{27}, \frac{125}{64}\right].$$

Na osnovu dobijenih rezultata vidi se da važi nejednakost (3.5), tj.

$$\left[\frac{1}{27}, \frac{27}{64}\right] \odot \left[\frac{1}{27}, \frac{125}{64}\right] \preceq_S \left[1, \frac{125}{8}\right]$$

Primer 3.3 Neka je $([0,1],\oplus,\odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Uz konvenciju $\dfrac{1}{0} = \infty$, kod ovog poluprstena su operacije pseudo-sabiranja i pseudo-množenja

$$x \oplus y = \frac{x+y-2xy}{1-xy} \quad \text{i} \quad x \odot y = \frac{xy}{2xy-y-x+1}.$$

Posmatrajmo sledeće dve intervalno-vrednosne funkcije F_1 i F_2 čije granične funkcije l_i i r_i, $i = 1, 2$ nisu iste monotonosti:

$$F_1(x) = \left[\frac{x}{1+x}, \frac{4-x}{5-x}\right] \quad \text{i} \quad F_2(x) = \left[\frac{x^2}{1+x^2}, \frac{3-x}{4-x}\right].$$

Primenom definicije pseudo-proizvoda intervala i pseudo-proizvoda posmatranog u ovom primeru dobija se da je pseudo-proizvod intervalno-vredosnih funkcija F_1 i F_2 intervalno-vrednosna funkcija

$$(F_1 \odot F_2)(x) = \left[\frac{x^3}{1+x^3}, \frac{x^2-7x+12}{x^2-7x+13}\right].$$

Na osnovu oblika pseudo-integrala intervalno-vrednosne funkcije, tj. jednakosti (1.8), sledi da je

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu = \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right], \int_{[0,1]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu = \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{7}\right] \text{ i } \int_{[0,1]}^{\oplus} (F_1 \odot F_2) \odot d\mu = \left[\frac{1}{5}, \frac{53}{59}\right].$$

Kako je

$$\left(\int_{[0,1]}^{\oplus} F_1 \odot d\mu\right) \odot \left(\int_{[0,1]}^{\oplus} F_2 \odot d\mu\right) = \left[\frac{1}{7}, \frac{35}{39}\right],$$

vidimo da nejednakost (3.5) važi, tj.

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right] \odot \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{7}\right] \preceq_S \left[\frac{1}{7}, \frac{35}{39}\right].$$

Rezultati prikazani u ovoj sekciji su proširenja originalnih rezultata publikovanih u [54], gde je nejednakost Čebiševa posmatrana za skupovno-vrednosne funkcije i jedinični interval $[0, 1]$, pri čemu je $\mu = g^{-1} \circ \lambda$ i λ je Lebegova mera.

3.4 Nejednakost Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru

Rezultati prikazani u ovom delu su originalni deo teze i pokazani su u [20] za g-poluprsten sa rastućim generatorom i poluprsten iz prve klase u kom je pseudo-sabiranje jednako sup, a pseudo-množenje dato preko rastućeg generatora g.

Teorema 3.7 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *proizvoljan* g*-poluprsten sa rastućim generatorom* g *i* $f_1, f_2 : [c,d] \to [a,b]_+$ *merljive funkcije, gde je* $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) = [\mathbf{0},\mathbf{1}]$. *Ako su* f_1 *i* f_2 *komonotone funkcije, tada važi*

$$\overline{\mu}^{f_1}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) \odot \overline{\mu}^{f_2}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) \preceq_S \overline{\mu}^{f_1 \odot f_2}_{\mathcal{M}_0}([c,d]). \tag{3.6}$$

Dokaz. Pokažimo prvo da za svako $u \in \overline{\mu}^{f_1}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) \odot \overline{\mu}^{f_2}_{\mathcal{M}_0}([c,d])$ postoji $v \in \overline{\mu}^{f_1 \odot f_2}_{\mathcal{M}_0}([c,d])$ takvo da je $u \preceq v$.

Posmatrajmo proizvoljno $u \in \overline{\mu}^{f_1}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) \odot \overline{\mu}^{f_2}_{\mathcal{M}_0}([c,d])$. Na osnovu oblika intervalno-vrednosnih mera $\overline{\mu}^{f_i}_{\mathcal{M}_0}$, $i = 1,2$ (videti Napomenu 1.10) sledi

$$\overline{\mu}^{f_1}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) = \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r\right] \quad \text{i} \quad \overline{\mu}^{f_2}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) = \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r\right],$$

pa primenom definicije pseudo-proizvoda intervala dobijamo

$$\left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r\right] \odot \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r\right] = \left[\mathbf{0}, \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r\right)\right].$$

Sledi da

$$u \in \left[\mathbf{0}, \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r\right)\right],$$

što znači da postoji $\oplus$-mera $\mu \in \mathcal{M}_0$[1], takva da je $\mathbf{0} \preceq \mu \preceq \mu_r$ i da je

$$u = \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu\right).$$

[1] $\oplus$-mera μ oblika je $\mu = \beta \odot \mu_r$, $\beta \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

Na osnovu Teoreme 3.1, pošto su funkcije f_1 i f_2 komonotone, važi da je

$$\left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu\right) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu.$$

Zbog načina izbora mere μ je

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu \in \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu_r\right] = \overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f_1 \odot f_2}([c,d]),$$

pa se za traženo $v \in \overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f_1 \odot f_2}([c,d])$ takvo da je $u \preceq v$ može uzeti da je

$$v = \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu.$$

Dokaz da za svako $v \in \overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f_1 \odot f_2}([c,d])$ postoji $u \in \overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f_1}([c,d]) \odot \overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}^{f_2}([c,d])$ takvo da je $u \preceq v$ je sličan.

□

Kao što smo uradili kod nejednakosti Jensena, nejednakost (3.6) iz Teoreme 3.7 može da se zapiše u obliku

$$\left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot d\mu_r\right] \odot \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot d\mu_r\right] \preceq_S \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu_r\right]. \quad (3.7)$$

Odgovarajuće tvrđenje važi ako je g-poluprsten dat opadajućim generatorom g i intervalno-vrednosna $\oplus$-mera je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = [\mu_r, \mathbf{0}]$.

Formulacija nejednakosti Čebiševa koja predstavlja proširenje prethodnog rezultata na poluprstene prve klase $([a,b], \sup, \odot)$, gde je $\odot$ dato rastućim generatorom g, data je u narednoj teoremi.

Teorema 3.8 *Neka je $([a,b], \sup, \odot)$ poluprsten gde je $\odot$ dato rastućim generatorom g. Neka je $\mathcal{B}([c,d])$ Borelova σ-algebra na intervalu $[c,d]$ tako da je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}([c,d]) = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, gde je μ iz $\mathcal{M}_0$ oblika (1.10). Neka su funkcije $f_1, f_2 : [c,d] \to [a,b]_+$ neprekidne. Ako su f_1 i f_2 komonotone, tada važi nejednakost (3.6).*

Nejednakost (3.6) može i u ovom slučaju da se napiše u sledećem obliku

$$\left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\sup} f_1 \odot d\mu_r\right] \odot \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\sup} f_2 \odot d\mu_r\right] \preceq_S \left[\mathbf{0}, \int_{[c,d]}^{\sup} (f_1 \odot f_2) \odot d\mu_r\right].$$

3.5 Uopštene nejednakosti Čebiševa bazirane na pseudo-integralima

U ovom delu predstavljeni su originalni rezultati, uopštena nejednakost Čebiševa za pseudo-integral realno-vrednosne funkcije, koji se mogu pronaći u [21]. Takođe, predstavljeni su primeri ove nejednakosti za g-integral i za slučajne promenljive koje se najčešće susreću u primenama.

Neka je $f : [c, d] \to [a, b]_+$, tj. nenegativna funkcija u smislu posmatranog poluprstena i $\mu([c, d]) = \mathbf{1}$.

Teorema 3.9 *Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase. Neka je $([c, d], \Sigma, \mu)$ merljiv prostor, gde je μ $\oplus$-mera i $\mu([c, d]) = \mathbf{1}$. Tada za $\mathbf{0} \prec \varepsilon$ i merljivu funkciju $f : [c, d] \to [a, b]_+$ važi*

$$\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Ako je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten druge klase, nejednakost (3.8) je oblika

$$g^{-1}\left(g(\varepsilon^{(n)}) \cdot g(\mu(\varepsilon \preceq f))\right) \preceq g^{-1}\left(\int_{[c,d]} g\left(f^{(n)}\right) d(g \circ \mu)\right). \tag{3.9}$$

Specijalno, ako je generator g strogo rastuća funkcija nejednakost (3.9) svodi se na

$$P(f \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{g^n(\varepsilon)} \int_{[c,d]} g^n(f) dP,$$

a ako je generator g strogo opadajuća funkcija, nejednakost (3.9) svodi se na

$$P(f \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{g^n(\varepsilon)} \int\limits_{[c,d]} g^n(f) dP,$$

pri čemu je $P = g \circ \mu$, gde je P verovatnosna mera i integrali sa desnih strana nejednakosti su Lebegovi integrali u odnosu na verovatnosnu meru P.

Dokaz: Neka je $A = \{x \in [c,d] \mid \mathbf{0} \prec \varepsilon \preceq f(x)\}$, što ćemo kraće zapisivati $A = \{\varepsilon \preceq f\}$. Kako je pseudo-množenje pozitivno neopadajuća funkcija, to za $\mathbf{0} \prec \varepsilon \preceq f$ važi da je $\varepsilon^{(n)} \preceq f^{(n)}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Primenom osobina pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije za svaki neprazan skup B iz $\mathbf{0} \preceq f^{(n)}$ sledi da je $\mathbf{0} \preceq \int\limits_B^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu$.

Dalje, imamo da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f) &= \varepsilon^{(n)} \odot \int\limits_A^{\oplus} d\mu \\
&= \int\limits_A^{\oplus} \varepsilon^{(n)} \odot d\mu \\
&\preceq \int\limits_A^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu \\
&\preceq \int\limits_A^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu \oplus \int\limits_{\overline{A}}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu \\
&= \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu,
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

U slučaju da je g rastuća funkcija, poredak na poluprstenu $([a,b],\oplus,\odot)$ je uobičajeni poredak $\leq$, pa se nejednakost (3.9) uz primenu Leme 1.1 svodi na

$$g^{-1}\left(g^n(\varepsilon)\cdot g(\mu(f\geq\varepsilon))\right)\leq g^{-1}\left(\int_{[c,d]}(g^n\circ f)d(g\circ\mu)\right).$$

Kako je tada i g^{-1} rastuća funkcija, sledi da je

$$g^n(\varepsilon)\cdot g(\mu(f\geq\varepsilon))\leq\int_{[c,d]}(g^n\circ f)d(g\circ\mu),$$

tj.

$$g^n(\varepsilon)\cdot P(f\geq\varepsilon)\leq\int_{[c,d]}(g^n\circ f)dP.$$

Kako je $g(\varepsilon)>0$, važi da je

$$P(f\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{g^n(\varepsilon)}\int_{[c,d]}(g^n\circ f)dP,\quad n\in\mathbb{N}.$$

U slučaju da je generator g opadajuća funkcija, poredak na poluprstenu $([a,b],\oplus,\odot)$ je $\geq$, tj. obrnut od uobičajenog poretka, pa se nejednakost (3.9) svodi na

$$g^{-1}(g^n(\varepsilon)\cdot g(\mu(f\leq\varepsilon)))\geq g^{-1}\left(\int_{[c,d]}(g^n\circ f)d(g\circ\mu)\right).$$

U tom slučaju je i g^{-1} opadajuća funkcija, pa sledi da je

$$g^n(\varepsilon)\cdot g(\mu(f\leq\varepsilon))\leq\int_{[c,d]}(g^n\circ f)d(g\circ\mu),$$

tj.

$$g^n(\varepsilon)\cdot P(f\leq\varepsilon)\leq\int_{[c,d]}(g^n\circ f)dP.$$

Kako je $g(\varepsilon) > 0$ odavde sledi da je

$$P(f \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{g^n(\varepsilon)} \int\limits_{[c,d]} (g^n \circ f) dP, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Napomena 3.1 Kao što je prethodno rečeno, merljivu funkciju f nazivamo *jednostavna funkcija* ako je njen skup vrednosti $\mathrm{Range}(f)$ diskretan skup. Neka je

$$\mathrm{Range}(f) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

skup različitih vrednosti jednostavne funkcije f. Tada se primenom jednakosti (1.2) za funkciju $f : [c, d] \to [a, b]_+$ dobija da je

$$f = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \chi_{A_i}, \quad a_i \in [a, b]_+$$

(ako $\oplus$ nije idempotentna operacija, skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ su disjunktni). Nejednakost (3.8) ovom slučaju svodi se na

$$\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f) \preceq \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} \odot d\mu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Ako je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten druge klase sa rastućim generatorom g, nejednakost (3.10) se svodi na

$$P(f \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{g^n(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\infty} g^n(a_i) P(\{a_i\}),$$

a u slučaju da je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten druge klase sa opadajućim generatorom g, nejednakost (3.10) se svodi na

$$P(f \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{g^n(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\infty} g^n(a_i) P(\{a_i\}),$$

pri čemu je $\mu(A) = g^{-1} \circ P(A)$, gde je P verovatnosna mera.

U ovom delu dokazana su i dva tipa intervalno-vrednosne nejednakosti Čebiševa. Prva se zasniva na pseudo-integralu intervalno vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru, dok je druga bazirana na pseudo-integralu realno-vrednosne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru. Rezultati predstavljaju originalni dao teze.

Teorema 3.10 *Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase. Neka je $([c,d],\Sigma,\mu)$ merljiv prostor, gde je μ $\oplus$-mera i $\mu([c,d]) = \mathbf{1}$. Neka je $\mathbf{0} \prec \varepsilon$ i $F : [c,d] \to \mathcal{I}$ pseudo-integrabilno ograničena intervalno-vrednosna funkcija predstavljena graničnim funkcijama f_1, f_2, tj. $F = [f_1, f_2]$. Tada je*

$$\varepsilon^{(n)} \odot [\mu(\{\varepsilon\} \preceq f_1), \mu(\{\varepsilon\} \preceq f_2)] \preceq_S \int_{[c,d]}^{\oplus} F^{(n)} \odot d\mu, \tag{3.11}$$

gde je $F^{(n)} = \underbrace{F \odot F \odot \ldots \odot F}_{n-puta}$.

Specijalno, ako je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten druge klase, tada ako su pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$ date rastućim generatorom g, nejednakost (3.11) se svodi na

$$g^n(\varepsilon) \cdot [P(\{\varepsilon\} \preceq f_1), P(\{\varepsilon\} \preceq f_2)] \preceq_S \left[\int_{[c,d]} (g^n \circ f_1) dP, \int_{[c,d]} (g^n \circ f_2) dP \right],$$

a ako je generator g opadajuća funkcija, nejednakost (3.11) se svodi na

$$\left[\int_{[c,d]} (g \circ f_2^{(n)}) dP, \int_{[c,d]} (g \circ f_1^{(n)}) dP \right] \preceq_S g^n(\varepsilon) \cdot [P(\{\varepsilon\} \preceq f_2), P(\{\varepsilon\} \preceq f_1)].$$

gde je P verovatnosna mera, pri čemu je $P = g \circ \mu$.

Dokaz: Treba pokazati da za svako

$$x \in \varepsilon^{(n)} \odot [\mu(\{\varepsilon\} \preceq f_1), \mu(\{\varepsilon\} \preceq f_2)]$$

postoji

$$y \in \int_{[c,d]}^{\oplus} F^{(n)} \odot d\mu$$

takvo da je $x \preceq y$ i da za svako

$$y \in \int_{[c,d]}^{\oplus} F^{(n)} \odot d\mu$$

postoji

$$x \in \varepsilon^{(n)} \odot [\mu(\{\varepsilon\} \preceq f_1), \mu(\{\varepsilon\} \preceq f_2)]$$

takvo da je $x \preceq y$.

Neka je dato proizvoljno $x \in \left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_1), \varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_2)\right]$. Kako je interval $\left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_1), \varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_2)\right]$ pseudo-konveksan, to postoje $\alpha, \beta \in [a,b]_+$, takvi da je $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$ i da je

$$x = \alpha \odot \left(\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_1)\right) \oplus \beta \odot \left(\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_2)\right).$$

Na osnovu Teoreme 3.9 važi da je

$$\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_1) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} f_1^{(n)} \odot d\mu,$$

kao i da je

$$\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_2) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2^{(n)} \odot d\mu.$$

Primenom osobina pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije sledi da za $\alpha, \beta \in [a,b]_+$ važi

$$\alpha \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_1)) \preceq \alpha \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f_1^{(n)} \odot d\mu$$

i

$$\beta \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_2)) \preceq \beta \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2^{(n)} \odot d\mu,$$

pa je i

$$\alpha \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_1)) \oplus \beta \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu(\varepsilon \preceq f_2)) \preceq$$

$$\preceq \alpha \odot \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_1^{(n)} \odot d\mu \oplus \beta \odot \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_2^{(n)} \odot d\mu.$$

Kako je interval $\left[\int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_1^{(n)} \odot d\mu, \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_2^{(n)} \odot d\mu\right]$ pseudo-konveksan, to

$$\alpha \odot \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_1^{(n)} \odot d\mu \oplus \beta \odot \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_2^{(n)} \odot d\mu \in \left[\int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_1^{(n)} \odot d\mu, \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_2^{(n)} \odot d\mu\right]$$

te je traženo $y = \alpha \odot \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_1^{(n)} \odot d\mu \oplus \beta \odot \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f_2^{(n)} \odot d\mu.$

Slično se pokazuje da za svako

$$y \in \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} F^{(n)} \odot d\mu$$

postoji

$$x \in \varepsilon^{(n)} \odot \left[\mu\left(\{\varepsilon\} \preceq f_1\right), \mu\left(\{\varepsilon\} \preceq f_2\right)\right]$$

takvo da je $x \preceq y$.

Nejednakost (3.11) za poluprsten druge klase za svako $n \in \mathbb{N}$ oblika je

$$g^{-1}(g(\varepsilon^{(n)}) \cdot g([\mu\left(\{\varepsilon\} \preceq f_1\right), \mu\left(\{\varepsilon\} \preceq f_2\right)]))$$

$$\preceq_S \left[g^{-1}\left(\int\limits_{[c,d]} (g \circ f_1^{(n)}) d(g \circ \mu)\right), g^{-1}\left(\int\limits_{[c,d]} (g \circ f_2^{(n)}) d(g \circ \mu)\right)\right]. \qquad (3.12)$$

Očigledno je da za neprekidnu i strogo monotonu funkciju g važi da je $g([x,y]) = [g(x), g(y)]$ ako je funkcija g rastuća, a ako je funkcija g opadajuća važi da je $g([x,y]) = [g(y), g(x)]$.

Takođe, za neprekidnu i strogo monotonu funkciju g i neprazne skupove A i B takve da je $A \preceq_S B$, ako je g rastuća funkcija važi da je $g(A) \preceq_S g(B)$, a ako je g opadajuća funkcija važi da je $g(B) \preceq_S g(A)$.

Imajući ovo u vidu, ako je funkcija g rastuća, nejednakost (3.12) se svodi na

$$g^{-1}(g^n(\varepsilon) \cdot [(g \circ \mu)(\{\varepsilon\} \preceq f_1), (g \circ \mu)(\{\varepsilon\} \preceq f_2)])$$

$$\preceq_S g^{-1}\left(\left[\int\limits_{[c,d]} (g \circ f_1^{(n)}) d(g \circ \mu), \int\limits_{[c,d]} (g \circ f_2^{(n)}) d(g \circ \mu)\right]\right),$$

odakle sledi da je

$$g^n(\varepsilon) \cdot [P(\{\varepsilon\} \preceq f_1), P(\{\varepsilon\} \preceq f_2)] \preceq_S \left[\int\limits_{[c,d]} (g^n \circ f_1) dP, \int\limits_{[c,d]} (g^n \circ f_2) dP\right].$$

Ako je funkcija g opadajuća, nejednakost (3.12) se svodi na

$$g^{-1}(g^n(\varepsilon) \cdot [(g \circ \mu)(\{\varepsilon\} \preceq f_2), (g \circ \mu)(\{\varepsilon\} \preceq f_1)])$$

$$\preceq_S g^{-1}\left(\left[\int\limits_{[c,d]} (g \circ f_2^{(n)}) d(g \circ \mu), \int\limits_{[c,d]} (g \circ f_1^{(n)}) d(g \circ \mu)\right]\right),$$

a odavde je

$$\left[\int\limits_{[c,d]} (g \circ f_2^{(n)}) dP, \int\limits_{[c,d]} (g \circ f_1^{(n)}) dP\right] \preceq_S g^n(\varepsilon) \cdot [P(\{\varepsilon\} \preceq f_2), P(\{\varepsilon\} \preceq f_1)].$$

□

Teorema 3.11 *Neka je* $([a,b], \oplus, \odot)$ *poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase. Neka je* $\mathcal{M}$ *neprazna familija* $\oplus$*-mera* μ *iz Definicije 1.10, definisanih na* σ*-algebri* Σ *podskupova intervala* $[c,d]$*, gde je* $\mu([c,d]) = \boldsymbol{1}$*, za svako* $\mu \in \mathcal{M}$*. Neka je* $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ *intervalno-vrednosna* $\oplus$*-mera određena familijom* $\mathcal{M}$*. Neka je* $\boldsymbol{0} \prec \varepsilon$*. Tada je*

$$\varepsilon^{(n)} \odot \overline{\mu}(\varepsilon \preceq f) \preceq_S \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}.$$

Dokaz: U slučaju da je poredak jednak uobičajenom poretku, tj. $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r]$, potrebno je pokazati da važi

$$\varepsilon^{(n)} \odot [\mu_l(\varepsilon \preceq f), \mu_r(\varepsilon \preceq f)] \preceq_S \left[\int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_r \right]. \tag{3.13}$$

Kako je nejednakost (3.13) ekvivalentna sa

$$\left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f), \varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)\right] \preceq_S \left[\int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_r \right],$$

to je dovoljno pokazati da za svako

$$x \in \left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f), \varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)\right]$$

postoji

$$y \in \left[\int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_r \right]$$

takvo da je $x \preceq y$ kao i da za svako

$$y \in \left[\int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_r \right]$$

postoji

$$x \in \left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f), \varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)\right]$$

takvo da je $x \preceq y$.

Neka je dato proizvoljno $x \in \left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f), \varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)\right]$. Kako je interval $\left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f), \varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)\right]$ pseudo-konveksan, to postoje $\alpha, \beta \in [a, b]_+$, takvi da je $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$ i da je

$$x = \alpha \odot \left(\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f)\right) \oplus \beta \odot \left(\varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)\right).$$

Na osnovu Teoreme 3.9 važi da je

$$\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_l,$$

i da je

$$\varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f) \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_r.$$

Primenom osobina pseudo-integrala realno-vrednosne funkcije sledi da za $\alpha, \beta \in [a,b]_+$ važi

$$\alpha \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f)) \preceq \alpha \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_l$$

i

$$\beta \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)) \preceq \beta \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_r,$$

pa je

$$\alpha \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f)) \oplus \beta \odot (\varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f)) \preceq$$
$$\preceq \alpha \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_l \oplus \beta \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_r.$$

Kako je interval $\left[\int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_l, \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_r\right]$ pseudo-konveksan, to

$$\alpha \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_l \oplus \beta \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_r \in \left[\int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_l, \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_r\right],$$

te je traženo $y = \alpha \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_l \oplus \beta \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f^{(n)} \odot d\mu_r$.

Slično se pokazuje da za svako

$$y \in \left[\int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int\limits_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu_r \right]$$

postoji

$$x \in \left[\varepsilon^{(n)} \odot \mu_l(\varepsilon \preceq f), \varepsilon^{(n)} \odot \mu_r(\varepsilon \preceq f) \right]$$

takvo da je $x \preceq y$.

U slučaju da je poredak obrnut uobičajenom poretku, dokaz je sličan. □

Prikazani rezultati biće ilustrovani u primerima koji slede sa slučajnim promenljivama diskretnog i neprekidnog tipa. Počnimo sa dve slučajne promenljive čije matematičko očekivanje ne postoji, tako da procena verovatnoće korišćenjem (klasične) nejednakosti Čebiševa nije moguća. Posmatrani primeri predstavljaju motivaciju za ovaj deo našeg istraživanja.

Primer 3.4 Posmatrajmo poluprsten druge klase $([0, \infty], \oplus, \odot)$, iz Primera 1.2 c).

a) Neka je f slučajna promenljiva koja ima zasečenu Košijevu raspodelu, tj. njena funkcija gustine raspodele verovatnoća je

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \geq 0.$$

Kako integrali

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2} dx \quad \text{i} \quad \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} dx$$

ne konvergiraju, to $E[f]$ i $E[f^2]$ za ovu slučajnu promenljivu ne postoje, gde je sa E označeno matematičko očekivanje. Koristeći odgovarajući oblik nejednakosti (3.9) za posmatrani generator g, za $n \in \{1, 2, 3\}$ dobijaju se sledeće procene.

$$
\begin{aligned}
\text{Za } n=1: \quad P(f \le \varepsilon) &\le \frac{1}{g(\varepsilon)} \int\limits_0^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\varepsilon^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\varepsilon^2} \cdot 1 \\
&= \frac{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\pi}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Za } n=2: \quad P(f \le \varepsilon) &\le \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \int\limits_0^{+\infty} g^2(x)\varphi(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}(1+\varepsilon^2) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{2}{\pi}(1+\varepsilon^2)\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1+\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Za } n=3: \quad P(f \le \varepsilon) &\le \frac{1}{g^3(\varepsilon)} \int\limits_0^{+\infty} g^3(x)\varphi(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{(1+\varepsilon^2)^3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}} \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{(1+\varepsilon^2)^3}\frac{2}{3} \\
&= \frac{4\sqrt{(1+\varepsilon^2)^3}}{3\pi}.
\end{aligned}
$$

b) Za diskretnu slučajnu promenljivu f sa skupom vrednosti

$$\mathcal{R} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$$

i verovatnoćama

$$P(\{n\}) = \frac{1}{2^n},$$

tj. sa zakonom raspodele verovatnoća

$$f : \begin{pmatrix} 2^1 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^n & \dots \\ \frac{1}{2^1} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots & \frac{1}{2^n} & \dots \end{pmatrix}$$

ne postoje $E[f]$ i $E[f^2]$, budući da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = +\infty.$$

Iz odgovarajućeg oblika uopštene nejednakosti Čebiševa, nejednakosti (3.9), za posmatrani generator g, za $n \in \{1,2,3\}$ dobijaju se sledeće procene.

$$\begin{aligned} \text{Za } n=1: \quad P(f \le \varepsilon) &\le \frac{1}{g(\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} g(2^n) \frac{1}{2^n} \\ &= \sqrt{1+\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4^n}} \frac{1}{2^n} \\ &\approx 0,304945\sqrt{1+\varepsilon^2}. \\ \text{Za } n=2: \quad P(f \le \varepsilon) &\le \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} g^2(2^n) \frac{1}{2^n} \\ &= (1+\varepsilon^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4^n} \frac{1}{2^n} \\ &\approx 0,116907(1+\varepsilon^2). \end{aligned}$$

$$\text{Za } n = 3: \quad P(f \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{g^3(\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} g^3(2^n) \frac{1}{2^n}$$
$$= \sqrt{(1+\varepsilon^2)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+8^n}} \frac{1}{2^n}$$
$$\approx 0,0190065 \sqrt{(1+\varepsilon^2)^3}.$$

Primer 3.5 Neka je slučajna promenljiva f sa uniformnom $\mathcal{U}(a,b)$ raspodelom, gde su $a, b \in \mathbb{R}$ i $0 < a < b$. Funkcija gustine raspodele verovatnoća ove slučajne promenljive je

$$\varphi(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in (a,b).$$

Za slučajnu promenljivu sa uniformnom raspodelom na intervalu (a,b) je

$$E[f] = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad E[f^2] = \frac{b^2+ab+a^2}{3},$$

pa za $\varepsilon > 0$ (klasična) nejednakost Čebiševa ima oblik

$$P(f \geq \varepsilon) \leq \frac{b^2+ab+a^2}{3\varepsilon^2}. \tag{3.14}$$

a) Neka je $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten iz Primera 1.2 c). Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$, tj. $\varepsilon < \infty$, na osnovu nejednakosti (3.9) iz Teoreme 3.9, uzimajući da je $n = 2$ je

$$P(f \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \int_a^b g^2(x)\varphi(x)dx$$
$$= \frac{1+\varepsilon^2}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \frac{1+\varepsilon^2}{b-a} \operatorname{arctg} x \Big|_a^b$$
$$= \frac{1+\varepsilon^2}{b-a} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a).$$

Kako je verovatnosna mera P aditivna funkcija, imamo

$$\begin{aligned} P(f \geq \varepsilon) &= 1 - P(f < \varepsilon) \\ &= 1 - P(f \leq \varepsilon) \\ &\geq 1 - \frac{1+\varepsilon^2}{b-a}(\arctan b - \arctan a). \end{aligned}$$

Iz prethodne nejednakosti i nejednakosti (3.14) dobijamo za $P(f \geq \varepsilon)$ procenu

$$1 - \frac{1+\varepsilon^2}{b-a}(\arctan b - \arctan a) \leq P(f \geq \varepsilon) \leq \frac{b^2+ab+a^2}{3\varepsilon^2},$$

tj. za $P(f \geq \varepsilon)$ dobijamo intervalnu procenu

$$P(f \geq \varepsilon) \in \left[1 - \frac{1+\varepsilon^2}{b-a}(\arctan b - \arctan a), \frac{b^2+ab+a^2}{3\varepsilon^2}\right].$$

b) Neka je $([-\infty, \infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten iz Primera 1.2 a). Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$, tj. $\varepsilon < \infty$, na osnovu nejednakosti (3.9), uzimajući da je $n = 2$, je

$$\begin{aligned} P(f \leq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \int_a^b g^2(x)\varphi(x)dx \\ &= \frac{e^{2\varepsilon}}{b-a} \int_a^b e^{-2x}dx \\ &= -\frac{e^{2\varepsilon}}{2(b-a)} e^{-2x}\Big|_a^b \\ &= \frac{e^{2\varepsilon}}{2(b-a)}(e^{-2a} - e^{-2b}). \end{aligned}$$

Iz osobine aditivnosti verovatnosne mere P sledi

$$\begin{aligned} P(f \geq \varepsilon) &= 1 - P(f < \varepsilon) \\ &= 1 - P(f \leq \varepsilon) \\ &\geq 1 - \tfrac{e^{2\varepsilon}}{2(b-a)}(e^{-2a} - e^{-2b}), \end{aligned}$$

tako da se korišćenjem poslednje nejednakosti i nejednakosti (3.14) dobija da za $P(f \geq \varepsilon)$ važi procena

$$1 - \frac{e^{2\varepsilon}}{2(b-a)}(e^{-2a} - e^{-2b}) \leq P(f \geq \varepsilon) \leq \frac{b^2 + ab + a^2}{3\varepsilon^2},$$

tj.

$$P(f \geq \varepsilon) \in \left[1 - \frac{e^{2\varepsilon}}{2(b-a)}(e^{-2a} - e^{-2b}), \frac{b^2 + ab + a^2}{3\varepsilon^2}\right].$$

c) Neka je $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten iz Primera 1.2 b), gde je generator $g(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$. Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$, tj. $\varepsilon > 0$ i $n = 2$ je

$$\begin{aligned} P(f \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \int_a^b g^2(x)\varphi(x)dx \\ &= \frac{1}{(b-a)\varepsilon^{2\alpha}} \int_a^b x^{2\alpha} dx \\ &= \frac{1}{(b-a)\varepsilon^{2\alpha}} \frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\Big|_a^b \\ &= \frac{b^{2\alpha+1} - a^{2\alpha+1}}{(b-a)\varepsilon^{2\alpha}(2\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Specijalno, uzimajući da je $\alpha = 1$, tj. da je generator $g(x) = x$ dobija se

$$P(f \geq \varepsilon) \leq \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)\varepsilon^2} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3\varepsilon^2},$$

tj. dobijena nejednakost se poklapa sa nejednakošću (3.14).

Primerom 3.5 ilustrovano je da za uniformnu raspodelu i opadajući generator možemo da dobijemo donje i gornje ograničenje za $P(f \geq \varepsilon)$. Gornje ograničenje za $P(f \geq \varepsilon)$ se uvek dobija iz klasične nejednakosti Čebiševa, a donja ograničenja se dobijaju na osnovu Teoreme 3.9 odabirom generatora koji su opadajuće funkcije.

Kada se kaže nejednakost Čebiševa, u teoriji verovatnoće, smatra se da je $n = 2$ u uopštenoj nejednakosti Čebiševa. Iz tog razloga su u Primeru 3.5 i Primeru 3.6 numerički rezultati dati za slučaj $n = 2$.

Primer 3.6 Slučajna promenljiva kod koje je očekivana vrednost jednaka standardnoj devijaciji je slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom. Neka je slučajna promenljiva f sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom, gde je $\lambda > 0$. Njena funkcija gustine raspodele verovatnoća je

$$\varphi(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

a) Za poluprsten $([0, \infty], \oplus, \odot)$ iz Primera 1.2 c), za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$ i $n = 2$ je

$$\begin{aligned} P(f \leq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \int\limits_0^\infty g^2(x)\varphi(x)dx \\ &= \lambda(1+\varepsilon^2) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Integral sa desne strane nejednakosti konvergira, ali se odgovarajući neodređeni integral ne može predstaviti u konačnom obliku, tj. preko konačnog broja elementarnih funkcija.

b) Za poluprsten druge klase $([-\infty, \infty], \oplus, \odot)$ iz Primera 1.2 a), za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$ i $n = 2$ je

$$\begin{aligned}
P(f \leq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \int_0^\infty g^2(x)\varphi(x)dx \\
&= \lambda e^{2\varepsilon} \int_0^\infty e^{-(2+\lambda)x} dx \\
&= \lambda e^{2\varepsilon} \frac{e^{-(2+\lambda)x}}{-\lambda - 2}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{\lambda e^{2\varepsilon}}{\lambda + 2}.
\end{aligned}$$

c) Posmatrajmo g-poluprsten $([0, \infty], \oplus, \odot)$ sa generatorom $g(x) = x^\alpha$, $\alpha \geq 1$, iz Primera 1.2 b). Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$ i $n = 2$ je

$$\begin{aligned}
P(f \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \int_0^\infty g^2(x)\varphi(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{\varepsilon^{2\alpha}} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{2\alpha} dx \\
&= \frac{1}{(\lambda\varepsilon)^{2\alpha}} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha} dt \\
&= \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{(\lambda\varepsilon)^{2\alpha}}.
\end{aligned}$$

Specijalno, uzimajući da je $\alpha = 1$, tj. da je generator $g(x) = x$ dobija se rezultat koji daje i klasična nejednakost Čebiševa

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\Gamma(3)}{(\lambda\varepsilon)^2} = \frac{2}{(\lambda\varepsilon)^2} = \frac{E[f^2]}{\varepsilon^2}.$$

Primer 3.7 Ako slučajna promenljiva f ima binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0, 1)$, njen skup vrednosti je $\mathcal{R} = \{0, 1, \ldots, n\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i \in \mathcal{R}.$$

a) Posmatrajmo poluprsten druge klase $([0,\infty], \oplus, \odot)$, iz Primera 1.2 c). Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$, tj. $\varepsilon < \infty$, na osnovu Teoreme 3.9 je

$$\begin{aligned} P(f \leq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \sum_{i=0}^{n} g^2(i) p(i) \\ &= (1+\varepsilon^2) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i^2} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}. \end{aligned}$$

b) Posmatrajmo g-poluprsten $([-\infty,\infty], \oplus, \odot)$, sa generatorom $g(x) = e^{-x}$, uz konvenciju $(-\infty) + \infty = +\infty$. Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$ i $n = 2$ na osnovu Teoreme 3.9 je

$$\begin{aligned} P(f \leq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \sum_{i=0}^{n} g^2(i) p(i) \\ &= e^{2\varepsilon} \sum_{i=0}^{n} e^{-2i} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}. \end{aligned}$$

c) Posmatrajmo g-poluprsten $([0,\infty], \oplus, \odot)$, sa generatorom $g(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$, uz konvenciju $0 \cdot (+\infty) = 0$. Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$, na osnovu Teoreme 3.9, uzimajući da je $n = 2$ je

$$\begin{aligned} P(f \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)} \sum_{i=0}^{n} g^2(i) p(i) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{n} i^{-2\alpha} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}. \end{aligned}$$

Primer 3.8 Neka je f slučajna promenljiva koja ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$. Njen skup vrednosti je $\mathcal{R} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, a odgovarajuće verovatnoće za $i \in \mathcal{R}$ su

$$p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

a) Za g-poluprsten $([0,\infty],\oplus,\odot)$, sa generatorom $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, uz konvenciju $0\cdot(+\infty)=+\infty$, za proizvoljno $\mathbf{0}\prec\varepsilon$ i za $n=2$ na osnovu Teoreme 3.9 je

$$\begin{aligned} P(f\leq\varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)}\sum_{i=0}^{\infty} g^2(i)p(i) \\ &= (1+\varepsilon^2)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1+i^2}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}. \end{aligned}$$ [2]

b) Za g-poluprsten $([-\infty,\infty],\oplus,\odot)$, sa generatorom $g(x)=e^{-x}$, uz konvenciju $(-\infty)+\infty=+\infty$, za proizvoljno $\mathbf{0}\prec\varepsilon$, na osnovu Teoreme 3.9, uzimajući da je $n=2$ je

$$\begin{aligned} P(f\leq\varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)}\sum_{i=0}^{\infty} g^2(i)p(i) \\ &= e^{2\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-2i}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \\ &= e^{2\varepsilon}e^{\frac{\lambda}{e^2}-\lambda} \\ &= e^{2\varepsilon+\frac{\lambda}{e^2}-\lambda}. \end{aligned}$$

c) Za g-poluprsten $([0,\infty],\oplus,\odot)$, sa generatorom $g(x)=x^{\alpha},\alpha>1$, uz konvenciju $0\cdot(+\infty)=0$, za proizvoljno $\mathbf{0}\prec\varepsilon$, na osnovu Teoreme 3.9, uzimajući da je $n=2$ je

$$\begin{aligned} P(f\geq\varepsilon) &\leq \frac{1}{g^2(\varepsilon)}\sum_{i=0}^{\infty} g^2(i)p(i) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}}\sum_{i=0}^{\infty} i^{-2\alpha}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}. \end{aligned}$$ [3]

[2] Dobijeni red je konvergentan
[3] Dobijeni red je konvergentan

U Primeru 3.8 pronađene su različite aproksimacije, u zavisnosti od g-poluprstena. U nekim slučajevima može samo da se utvrdi da je dobijeni red konvergentan, ali se ne može uvek odrediti i njegova suma.

U primeru koji sledi biće ilustrovana nejednakost Čebiševa za intervalno-vrednosnu funkciju i to u slučaj kada granične funkcije imaju eksponencijalnu raspodelu. Za uopštenu intervalno-vrednosnu nejednakost Čebiševa koristićemo procenu iz Primera 3.6. Korišćenjem ostalih primera iz ove sekcije i primenom transformacija slučajnih promenljivih mogu, na sličan način, da se dobiju procene za intervalno-vrednosne funkcije kod kojih granične funkcije imaju neke druge raspodele.

Primer 3.9 Neka je slučajna promenljiva f sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom, gde je $\lambda > 0$. Za $0 < c < d$ slučajna promenljiva cf ima eksponencijalnu $\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$ raspodelu, a slučajna promenljiva df ima eksponencijalnu $\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{d}\right)$ raspodelu. Neka je $F = [cf, df]$, $0 < c < d$, intervalno-vrednosna funkcija. Posmatrajmo g-poluprsten $([-\infty,\infty],\oplus,\odot)$, sa generatorom $g(x) = e^{-x}$, uz konvenciju $(-\infty) + \infty = +\infty$. Za proizvoljno $\mathbf{0} \prec \varepsilon$, na osnovu Teoreme 3.10, uzimajući da je $n = 2$ dobija se da važi nejednakost

$$\left[\frac{\lambda}{d}\int_0^\infty e^{-(2d+\frac{\lambda}{d})x}dx, \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-(2c+\frac{\lambda}{c})x}dx\right] \preceq_S e^{-2\varepsilon}\cdot\left[P\left(\{\varepsilon\}\preceq df,\right)P\left(\{\varepsilon\}\preceq cf\right)\right]. \tag{3.15}$$

Kako je

$$\int_0^\infty e^{-(2c+\frac{\lambda}{c})x}dx = -\frac{ce^{-\frac{x(2c^2+\lambda)}{c}}}{2c^2+\lambda}\Bigg|_0^\infty = \frac{c}{2c^2+\lambda},$$

to se nejednakost (3.15) svodi na nejednakost

$$\left[\frac{\lambda}{2d^2+\lambda}, \frac{\lambda}{2c^2+\lambda}\right] \preceq_S e^{-2\varepsilon}\cdot\left[P\left(\{\varepsilon\}\preceq df\right), P\left(\{\varepsilon\}\preceq cf\right)\right],$$

koja je intervalno-vrednosna procena verovatnoće za intervalno-vrednosnu funkciju čije granične funkcije imaju eksponencijalne raspodele.

Literatura

[1] M. Akian, *Theory of cost measures: convergence and decision variables,* INRIA Report (1995)

[2] M. Akian, *Densities of idempotent measure and large deviations,* Transactions of the American Mathematical Society 351, no. 11, 4515−4543 (1999)

[3] M. Akian, J. P. Quadrat, M. Viot, *Duality between Probability and Optimization,* In Idempotency (J. Gunavardena, ed.), Publication of Isaac Newton Institute, Cambridge University press (1998)

[4] J. Azcél, *Lectur on Functional Equations and their Applicationses,* Academic Press, New York (1969)

[5] H. Agahi, R. Mesiar, Y. Ouyang, *Chebyshev type inequalities for pseudo-integrals,* Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Volume 72, Issue 6, 2737−2743 (2010)

[6] R. J. Aumann, *Integrals of set-valued functions,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 12, Issue 1, 1−12 (1965)

[7] P. Benvenuti, R. Mesiar, *Integrals with Respect to a General Fuzzy Measure,* Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications (M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno, eds.), Springer-Verlag Company, 205−232 (2000)

[8] P. Benvenuti, R. Mesiar, D. Vivona, *Monotone set functions-based integrals,* Handbook of Measure Theory, Volume II (E. Pap, ed.) Elsevier, North-Holland, 1329−1379 (2002)

[9] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, 1st edition, John Wiley and sons, Inc., New York (1968)

[10] P. Billingsley, *Probability and Measures,* 3rd edition, New York: John Wiley and Sons, Inc. (1995)

[11] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Boston - London (2003)

[12] A. Chateauneuf, *Decomposable capacities, distorted probabilities and concave capacities,* Mathematical Social Sciences, Volume 31, Issue 1 19−37 (1996)

[13] G. Choquet, *Theory of capacities,* Annales de l'institut Fourier, tome 5, 131−259 (1954)

[14] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Tehniques and Applications,* 2nd edition, Springer-Verlag, New York (1998)

[15] J. M. Deushel, D. W. Strock, *Large Deviation,* Academic Press, San Diego (1998)

[16] A. Flores-Franulič, H. Román-Flores, *A Chebyshev type inequality for fuzzy integrals,* Applied Mathematics and Computation, Volume 190, Issue 2, 1178−1184 (2007)

[17] A. Flores-Franulič, H. Román-Flores, Y. Chalco-Cano, *Markov type inequalities for fuzzy integrals,* Applied Mathematics and Computation, Volume 207, Issue 1, 242−247 (2009)

[18] T. Grbić, I. Štajner-Papuga, Lj. Nedović, *Pseudo-integral of set-valued funtions,* Proceedings of EUSFLAT 2007, Volume 1, Ostrava, 221−225 (2007)

[19] T. Grbić, I. Štajner-Papuga, *Pseudo-integral of interval-valued functions and some limit properties,* Proceedings of SISY 2008, Subotica (2008)

[20] T. Grbić, S. Medić, I. Štajner-Papuga, T. Došenović, *Inequalities of Jensen and Chebyshev Type for Interval-valued measures Based on Pseudo-integrals,* Springer-Verlag, 23−41 (2013)

[21] T. Grbić, S. Medić, A. Perović, M. Paskota, S. Buhmiler, *Inequalities of Chebyshev type based on pseudo-integrals,* u procesu recenzije

[22] T. Grbić, I. Štajner-Papuga, M. Štrboja, *An approach to pseudo-integration of set-valued functions,* Information Sciences, Volume 181, Issue 11, 2278−2292 (2011)

[23] R. Kass, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern acturial risk theory,* Springer (2009)

[24] E. Klein, A. C. Thompson, *Theory of Correspondences,* A Wiley-Interscience Publication, New York (1984)

[25] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000)

[26] V. N. Kolokoltsov, V.P. Maslov, *Idempotent Analysis and Its Applications,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997)

[27] V. Krätschmer, *Limit theorems for fuzzy-random variables,* Fuzzy Sets and Systems, Volume 126, Issue 2, 253−263 (2002)

[28] L. S. Li, Z. Sheng, *The fuzzy set-valued measures generated by random variables,* Fuzzy Sets and Systems, Volume 97, Issue 2, 203−209 (1998)

[29] V. P. Maslov, G. L. Litvinov (Editors), *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics,* Contemporary Mathematics 377, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2005)

[30] V. P. Maslov, S. N. Samborskij, *Idempotent Analysis,* American Mathematical Society, Providence (1992)

[31] S. Medić, I. Štajner-Papuga, T. Grbić, G. Grujić, *A note on absolute continuity for the interval-valued measures based on pseudo-integrals of real function based on an interval-valued measure,* Proceedings of SISY 2012, Subotica (2012)

[32] S. Medić, A. Perović, T. Grbić, B. Mihailović, N. Novković, *Application of pseudo-integrals in expected utility maximization principle,* u procesu recenzije

[33] R. Mesiar, E. Pap, *Idempotent integral as limit of g-integrals,* Fuzzy Sets and Systems, Volume 102, Issue 3, 385−392 (1999)

[34] B. Mihailović, P. Đapić, *Premium principles based on generated Choquet integrals,* Proceedings of SISY 2013, Subotica, 195−198 (2013)

[35] M. Michta, *On set-valued stochastic integrals and fuzzy stochastic equations,* Fuzzy Sets and Systems, Volume 177, Issue 1, 1−19 (2011)

[36] I. Molchanov, *Theory of Random Sets,* Springer, Berlin (2005)

[37] Lj. Nedović, T. Grbić, *The pseudo probability,* Journal of Electrical Engineering, Volume 53, no. 12/s, 27−30 (2002)

[38] E. Pap, *An integral generated by decomposable measure,* Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 20, 135−144 (1990)

[39] E. Pap, *g-calculus,* Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 23, 145−156 (1993)

[40] E. Pap, *Null-Additive Set Functions,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London (1995)

[41] E. Pap, *Fazi mere i njihova primena,* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu (1999)

[42] E. Pap, *Pseudo-additive measures and their application,* Handbook of Measure Theory, Volume II (E. Pap, ed.) Elsevier, Amsterdam, 1403−1468 (2002)

[43] E. Pap, *Generalized real analysis and its applications,* International Journal of Approximate Reasoning, Volume 47, Issue 3, 368−386 (2008)

[44] E. Pap, M. Štrboja, *Generalization of the Chebyshev inequality for pseudo-integral,* Proceedings of SISY 2009, Subotica (2009)

[45] E. Pap, M. Štrboja, *Generalization of the Jensen inequality for pseudo-integral,* Information Sciences, Volume 180, Issue 4, 543−548 (2010)

[46] A. Papoulis, S. Unnikrishna Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes, 4th edition,* McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering, Singapore (2002)

[47] M. L. Puri, D.A. Ralescu, *Fuzzy random variables,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 114, Issue 2, 409−422 (1986)

[48] H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, *A Jensen type inequality for fuzzy integrals,* Information Sciences, Volume 177, Issue 15, 3192−3201 (2007)

[49] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* 3rd edition, McGraw-Hill Book Company (1986)

[50] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology (1974)

[51] M. Sugeno, T. Murofushi, *Pseudo-additive measures and integrals,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 122, Issue 1, 197−222 (1987)

[52] I. Štajner-Papuga, T. Grbić, M. Štrboja, *A note on absolute continuity for the interval-valued measures based on pseudo-integral of interval-valued functions,* Proceedings of SISY 2009, Subotica (2009)

[53] M. Štrboja, *Nejednakosti za integrale bazirane na neaditivnim merama,* doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet (2011)

[54] M. Štrboja, T. Grbić, G. Grujić, B. Mihailović, S. Medić, *Chebyshev integral type inequalities for pseudo-integrals of set-valued functions,* Proceedings of SISY 2011, Subotica (2011)

[55] M. Štrboja, T. Grbić, T., I. Štajner-Papuga, G. Grujić, S. Medić, *Jensen and Chebyshev type inequalities for pseudo-integrals of set-valued functions,* Fuzzy Sets and Systems 222, 18−32 (2013)

[56] Y. L. Tong, *Relationship between stochastic inequalities and some classical mathematical inequalities,* Journal of Inequalities and Applications, Volume 1, 85−98 (1997)

[57] V. R. Young, *Premium principles,* Encyclopedia of Actuarial Science (J.L. Teugels, B. Sundt, eds), John Wiley & Sons, New York, 1322−1331 (2004)

[58] D. Zhang, C. Guo, *Generalized fuzzy integrals of set-valued functions,* Fuzzy Sets and Systems, Volume 76, Issue 3, 365−373 (1995)

[59] D. Zhang, C. Guo, *Integrals of set-valued functions for ⊥-decomposable measures,* Fuzzy Sets and Systems, Volume 78, Issue 3, 341−346 (1996)

[60] D. Zhang, Z. Wang, *On set-valued fuzzy integrals,* Fuzzy Sets and Systems Volume 56, Issue 2, 237−241 (1993)

[61] A. Wagener, *Chebyshev's algebraic inequality and comparative statics under uncertainty,* Mathematical Social Sciences, Volume 52, Issue 2, 217−221 (2006)

[62] Z. Wang, G. J. Klir, *Fuzzy Measure Theory,* Plenum Press, New York (1992)

[63] S. Weber, *Two integrals and some modified versions - critical remarks,* Fuzzy Sets and Systems, Volume 20, Issue 1, 97−105 (1986)

[64] Z. Wang, G. J. Klir, W. Wang, *Fuzzy measures defined by fuzzy integral and their absolute continuity,* Journal of Applied Analysis and Application, Volume 203, Issue 1, 150−165 (1996)

[65] R. S. Wang, *Some inequalities and convergence theorems for Choquet integrals,* Journal of Applied Mathematics and Computing, Volume 35, Issue 1−2, 305−321 (2011)

[66] K. Weichselberger, *The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty,* International Journal of Approximate Reasoning, Volume 24, Issues 2−3, 149−170 (2000)

Kratka biografija kandidata

Rođena sam 16. XII 1975. godine u Novom Sadu. Osnovnu i srednju školu završila sam u Novom Sadu.

Prirodno - matematički fakultet u Novom Sadu, Odsek za matematiku, smer diplomirani matematičar, upisala sam 1994. godine i diplomirala 12. VII 1999. godine. Master studije na Fakultetu tehničkih nauka, na studijskom programu Matematika u tehnici, završila sam 11. VI 2008. godine.

S. Medić

Od 15. X 1999. godine radim na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu kao asistent na raznim matematičkim predmetima. Koautor sam nekoliko zbirki i udžbenika koji se koriste u nastavi na Fakultetu tehničkih nauka.

Autor sam i koautor sedam naučnih radova. Jedan od njih je objavljen u časopisu kategorije M21, pet radova je štampano u celini, u recenziranim zbornicima međunarodnih konferencija (kategorija M33), a jedan u zborniku skupa nacionalnog značaja (kategorija M63).

U Novom Sadu, Slavica Medić
20.01.2014.