UNIVERZITET U NOVOM SADU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

JENSEN-STEFENSENOV TIP NEJEDNAKOSTI ZA INTEGRALE BAZIRANE NA FAZI BI-MERAMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor:
Prof. dr Biljana Mihailović
Prof. dr Mirjana Štrboja

Kandidat:
Miloš Todorov

Novi Sad, 2021. godine

“Matematika – to je jezik kojim govore sve prirodne nauke. Ne postoji ni jedna matematička oblast, ma kako ona apstraktna bila, koja se ne bi mogla primeniti na pojave realnog sveta.”

Nikolaj Lobačevski

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ **ОБРАЗАЦ – 5а**
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА[1]

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Милош Тодоров
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	др Биљана Михаиловић, редовни професор, Факултет техничких наука, Нови Сад др Мирјана Штрбоја, ванредни професор, Природно-математички факултет, Нови Сад
Наслов рада:	Јенсен-Стефенсенов тип неједнакости за интеграле базиране на фази би-мерама
Језик публикације (писмо):	Српски (латиница)
Физички опис рада:	Унети број: Страница 109 Поглавља 6 Референци 69 Табела 0 Слика 4 Графикона 0 Прилога 0
Научна област:	Примењена математика
Ужа научна област (научна дисциплина):	Примењена анализа
Кључне речи / предметна одредница:	фази би-мере, дискретни биполарни псеудо-интеграл, фази интеграли, Јенсен-Стефенсенова неједнакост
Резиме на језику рада:	Биполарни пан интеграл, као нови тип интеграла базираног на фази би-мерама је приказан у оквиру дисертације. Поред тога, у оквиру ове дисертације приказана је Јенсенова неједнакост за: дискретни биполарни псеудо-интеграл, нови биполарни Шокеов г-интеграл, биполарни Шилкретов и биполарни Сугенов интеграл.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	11.07.2019.
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: др Ивана Штајнер Папуга, редовни професор Члан: др Александар Перовић, редовни професор Члан: др Љубо Недовић, доцент Ментор: др Биљана Михаиловић, редовни професор Ментор: др Мирјана Штрбоја, ванредни професор
Напомена:	

[1] Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:
5б – Изјава о ауторству;
5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;
5г – Изјава о коришћењу.
Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES

KEY WORD DOCUMENTATION[2]

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Miloš Todorov
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Biljana Mihailović Phd, full professor, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad Mirjana Štrboja Phd, associate professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Thesis title:	Jensen-Steffensen type inequality for integrals with respect to bi-capacities
Language of text (script):	Serbian language (latin script)
Physical description:	Number of: Pages 109 Chapters 6 References 69 Tables 0 Illustrations 4 Graphs 0 Appendices 0
Scientific field:	Applied mathematics
Scientific subfield (scientific discipline):	Applied analysis
Subject, Key words:	bi-capacity, discrete bipolar pseudo-integral, fuzzy integrals, Jensen-Steffensen type inequality
Abstract in English language:	The bipolar pan-integral as new type of integral based on bi-capacities is introduced in the thesis. The main purpose of the thesis is to establish conditions under which the Jensen type inequality is valid for: the discrete bipolar pseudo-integral, the new bipolar Choquet g-integral, the bipolar Shilkret and the bipolar Sugeno integral.
Accepted on Scientific Board on:	11.07.2019.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President: Ivana Štajner-Papuga Phd, full professor Member: Aleksandar Perović Phd, full professor Member: Ljubo Nedović Phd, assistant professor Menthor: Biljana Mihailović Phd, full professor Menthor: Mirjana Štrboja Phd, associate professor
Note:	

[2] The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:
5б – Statement on the authority,
5в – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,
5г – Statement on copyright licenses.
The paper and e-versions of Statements are held at he faculty and are not included into the printed thesis.

Apstrakt

Koncept fazi bi-mera sa vrednostima na bipolarnoj skali se može posmatrati kao uopštenje realnih klasičnih mera. Diskretni bipolarni pseudo-itegral se može razmatrati za tri kanonička slučaja u odnosu na dve binarne operacije, simetričnog pseudo-sabiranja i simetričnog pseudo-množenja: ($\oplus$, $\odot$). U prvom slučaju operacije su generisane sa neparnom, strogo rastućom i neprekidnom funkcijom, dok u drugom slučaju su generisane sa simetričnim maksimumom i ne-idempotentnom operacijom, a u trećem slučaju sa simetričnim maksimumom i simetričnim minimumom. Prema definiciji, diskretnog bipolarnog pseudo-integrala funkcije f na konačnom skupu X, gde su vrednosti u okviru simetričnog intervala, fazi bi-mera **m** je $\oplus$-dekompozabilna.

U okviru drugog poglavlja disertacije prikazan je bipolarni pan integral. Ovaj novi tip integrala je definisan u odnosu na fazi bi-mere. Pored definicije, date su i osobine, kao i veza sa bipolarnim Šokeovim integralom i bipolarnim pseudo-integralom.

Jedna od najčešće primenjivanih nejednakosti u odnosu na Lebegov integral, jeste Jensenova nejednakost. U okviru ove disertacije analizirana je Jensenova nejednakost za diskretni bipolarni pseudo-integral.

U četvrtom poglavlju disertacije istražena je specijalna klasa bipolarnog univerzalnog integrala, koja je u vezi sa bipolarnim Šokeovim integralom. Definisan je nov bipolarni Šokeov g-integral. Prikazana je Jensen-Stefensenova nejednakost za diskretni bipolarni Šokeov g-integral. Pored određenih osobina bipolarnog Šilkretovog i Sugenovog integrala, prikazana je Jensenova nejednakost za ove integrale. Dati su primeri koji ilustruju dobijene rezultate.

U okviru ove disertacije predstavljena je primena ovih integrala za reprezentaciju preferencije u procesu višekriterijumskog odlučivanja. Rezultati mogu biti od značaja i imati primenu u mnogim drugim oblastima kao što su informacione nauke, mašinsko učenje, optimizacija, aktuarske nauke i druge, gde je potrebno doneti određenu odluku na osnovu realnih ulaza.

Teza se završava zaključkom i listom citirane literature.

Abstract

The concept of a bi-capacity with values in a bipolar scale was observed as a generalization of a capacity. Discrete bipolar pseudo-integral has been considered three canonical cases of two binary operations, symmetric pseudo-addition and symmetric pseudo-multiplication: $(\oplus, \odot)$. In the first case the operations are generated by an odd, strictly increasing and continuous function, in the second case that are the symmetric maximum and a non-idempotent operation, and in the third case the symmetric maximum and the symmetric minimum. The definition of the discrete bipolar pseudo-integral of a function f, defined on a finite set X, with values in some symmetric interval, requires that the underlying bi-capacity $\mathbf{m}$ is $\oplus$-decomposable.

In second chapter of the thesis the notion of the bipolar pan-integral is introduced. This new type of integral is based on bi-capacities. The bipolar pan-integral is defined and its main properties and relations with bipolar Choquet integral and bipolar pseudo-integral are considered.

One of the most studied and used inequality concerning Lebesgue integral is the Jensen's inequality. The main purpose of the thesis is to establish new conditions under which the Jensen type inequality is valid for the discrete bipolar pseudo-integral.

In the fourth chapter of the thesis, a special class of the bipolar universal integrals is investigated, as a new type of integral which is related to the bipolar Choquet integral. The discrete bipolar Choquet g-integral is introduced. The Jensen-Steffensen type inequality for bipolar Choquet g-integral is considered and illustrated in given examples. Furthermore, an overview of the bipolar Shilkret and Sugeno integrals is given and conditions are proposed for the validity of the corresponding Jensen type inequality. Obtained results are illustrated by the adequate examples.

Within this thesis is presented the usage of these integrals for preference relation modeling in multicriteria decision analysis. Results of the thesis can be applied in many different areas like information sciences, machine learning algorithms, optimization, actuarial sciences and others, which include decision making based on aggregation of real inputs.

The thesis ends with conclusion and a list of cited references.

Zahvalnica

Rad na ovoj disertaciji, kao i onome što joj je prethodilo, bilo je dragoceno životno iskustvo. Da bi ostvarili ono što zamislimo, moramo pre svega da imamo dovoljno hrabrosti da verujemo u sebe i vredno radimo. Mnogi su mi pružili pomoć, kako u radu, tako i moralnu podršku. Koristim ovu priliku da im se zahvalim.

Najveću zahvalnost dugujem, pre svega, mojim mentorkama, prof. dr Biljani Mihailović i prof. dr Mirjani Štrboja, koje su imale strpljenja da prate moj rad i nesebično mi pomognu, kako tokom doktorskih studija, tako i tokom izrade ove disertacije. Pored stručne pomoći, zahvaljujem im na ljubaznosti, predusretljivosti, ukazivanju na moje propuste, kao i savetima kako da se problemi i prepreke prevaziđu i reše. Veliko je zadovoljstvo sarađivati sa njima.

Zahvaljujem se i članovima komisije prof. dr Ivani Štajner-Papugi, prof dr. Aleksandru Peroviću i dr Ljubi Nedoviću na važnim napomenama i korisnim savetima.

Veliku zahvalnost dugujem svojim roditeljima Todorov Nadi i Todorov Bogdanu koji su mi uvek bili najveća podrška u mojim životnim poduhvatima.

Ovu disertaciju posvećujem mom preminulom ocu, koji me je pre svega naučio da budem čovek, kao i da se u životu borim časno, znanjem i radom.

Sadržaj

Uvod

Linearne funkcije kao što su aritmetička sredina, zatim ponderisana aritmetička sredina (sa težinskim koeficijentima) imaju primenu u agregaciji, ili fuziji podataka. One se mogu reprezentovati Lebegovim integralom, definisanim u odnosu na klasičnu meru. Međutim, u nekim praktičnim problemima donošenja odluka u uslovima neodređenosti, ove se funkcije mogu koristiti za agregaciju samo kada ne postoji interakcija između kriterijuma, ili se interakcija može zanemariti.

Klase skupovnih funkcija koje nisu aditivne u literaturi su poznate pod različitim nazivima, kao na primer: neaditivne mere, monotone mere, fazi mere, ili kapaciteti. Neaditivni integrali u odnosu na fazi mere, kao što su Šokeov [10], Sugenov [49], Šilkretov [48], univerzalni integral [25] i pseudo-integral [42], prikladni su za rešavanje praktičnih problema koji uključuju interakcije među kriterijima.

Poznate su brojne primene neaditivnih (fazi) integrala u donošenju odluka na osnovu agregiranih podataka. Istaknuta klasa funkcija agregacije, takozvani OWA-operatori (uređene sredine sa težinama), mogu se predstaviti pomoću Šokeovog integrala, koji je uveo francuski matematičar Gustav Šoke 1953. godine. Ovaj integral nije linearan, ali u slučaju kada je definisan u odnosu na klasičnu meru, Šokeov integral se podudara s Lebegovim integralom.

Teorija fazi mera i integrala primenjuje se u mnogim disciplinama matematike, inženjerstva, ekonomije, u teoriji odlučivanja, uopšteno u problemima koji zahtevaju neku proceduru agregacije i / ili modeliranje neodređenosti [2, 19, 12, 25, 40, 43, 65].

Većina radova posvećena fazi merama i integralima fokusirana je na slučaj kada su njihove vrednosti nenegativne [6, 41]. Neki od istraživača proučavaju fazi integrale i mere kada su skale bipolarne, odnosno na skupovima vrednosti koje uključuju i negativne i pozitivne vrednosti, kao i neutralni elemenat [14, 15, 17, 21, 22].

Uopštenje fazi mere (monotono neopadajuće, nenegativne skupovne funkcije, koja se anulira na praznom skupu) poznato je pod različitim imenima kao što su bipolarni kapacitet, bi-kapacitet, fazi bi-mera, a detaljno je proučavana u [14, 15]. Definicija pseudo-integrala [29, 34, 36, 42, 50, 52] vezana je za koncept poluprstena (definisanih pomoću dve binarne operacije sa određenim osobinama) i skupovnim funkcijama koje predstavljaju uopštenje fazi mere u odnosu na pseudo-operacije ($\oplus$-mera).

U novijoj literaturi jedna od intezivno proučavanih primena neaditivnih integrala je Cumulative prospect theory (CPT), uvedena u [65]. CPT je numerički model za upoređivanje alternativa pomoću izračunavanja dva iznosa u odnosu na dva para skupova, koje određuju pozitivne i negativne osobine alternativa.

Lehrer [28] je definisao konkavni integral u odnosu na fazi meru, koji je baziran na dekompoziciji (slučajna promenljiva kao pozitivna linearna kombinacija indikatora). Yang [66, 68] je uveo pan integral, koji se definiše pomoću dve pseudo-operacije, pan-sabiranja $\oplus$ i pan-množenja $\otimes$. Pan-integrali bazirani na sabiranju i množenju $(+, \cdot)$ su proučavani u [35, 69].

Nedavno su uvedeni bipolarni integrali [21, 22, 23] u odnosu na fazi bi-meru, kao što su bipolarni Šokeov integral, bipolarni Sugenov integral i bipolarni Šilkretov integral, koji su takođe izučavani u [58]. Diskretni bipolarni univerzalni integral, koji pokriva sva tri pomenuta bipolarna integrala je uveden u [23]. Diskretni bipolarni pseudo-integral je definisan kao razlika dva pseudo-integrala [53, 54, 56]. Bipolarni pan integral je uveden u [59].

U okviru uopštene teorije mere proučavana je Jensenova nejednakost za integrale zasnovane na fazi merama [1, 7, 44, 45, 46, 47, 57, 61]. Ova nejednakost ima značajnu ulogu ne samo u teoriji verovatnoće, već i u mnogim disciplinama primenjene matematike, teoriji informacije, aktuarskoj matematici, statističkoj fizici itd. Kako dolazi do sve veće primene bipolarnih integrala u ovim oblastima, potrebno je posvetiti posebnu pažnju nejednakosti Jensenovog (Jensen-Stefensenovog) tipa za bipolarne integrale (integrale bazirane na fazi bi-merama).

Prema tome, glavni cilj ove disertacije jeste da se ispita Jensen-Stefensenov tip nejednakosti za bipolarne integrale bazirane na fazi bi-merama (bipolarni Šokeov g-integral, bipolarni Sugenov, bipolarni Šilkretov i bipolarni pseudo-integral). Pored toga, zadatak je i da se predstavi primena funkcija agregacije zasnovanih na ovim integralima u procesu višekriterijumskog odlučivanja.

U prvom delu predstavljene su osnovne definicije i osobine funkcija agregacije. Nakon toga su prikazani pregled pojmova, definicija, teorema, primera i metoda vezanih za fazi mere i fazi bi-mere. Od neaditivnih integrala posebno su razmatrani fazi integrali i to Šokeov, Sugenov, kao i Šilkretov integral. Zatim su predstavljene pseudo-operacije, pseudo-integral i simetrične pseudo-operacije, kao i definicije i osobine vezane za njih.

U drugoj glavi su definisani bipolarni integrali bazirani na fazi bi-merama. Pored toga su dati originalni rezultati prikazani u [59], a u okviru kojih je uveden i nov tip integrala, diskretni bipolarni pan integral. Između ostalog, ispitana je i međusobna veza različitih tipova bipolarnih dekompozabilnih integrala, što takođe predstavlja originalne rezultate.

Nakon toga, u trećoj glavi su dokazane nove teoreme Jensen-Stefensenovog tipa nejednakosti za diskretni bipolarni pseudo-integral, a što predstavlja originalne rezultate prikazane u [61, 62]. Posebno se razmatraju tri slučaja simetričnih pseudo-operacija, sabiranja $\oplus$ i množenja $\odot$.

U četvrtoj glavi je uveden nov tip integrala, a to je bipolarni Šokeov g-integral. Pored toga su definisane i dokazane nove teoreme Jensen-Stefensenovog tipa nejednakosti za bipolarni Šokeov g-integral, a što je prikazano u [38]. U okviru ove glave su takođe prikazani originalni rezultati Jensen-Stefensenovog tipa nejednakosti za bipolarni Sugenov integral i bipolarni Šilkretov integral, a što je prikazano u [60].

Glava 1

Neaditivni integrali

U okviru ove glave dat je prikaz funkcije agregacije. Pored toga, definisana je fazi mera, kao i fazi bi-mera. Od neaditivnih integrala, predstavljeni su fazi integrali koji su značajni za dalji rad, kao što su Šokeov, Sugenov, Šilkretov integral i pseudo-integral. Takođe je dat pregled pseudo-operacija i simetričnih pseudo-operacija, uz prateće definicije, teoreme, osobine i primere. Detaljnije informacije se mogu naći u [3, 6, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 25, 27, 30, 32, 42, 48, 49, 50, 54, 56, 59, 63, 64, 65, 66].

1.1 Funkcije agregacije

Pomoću funkcije agregacije [3, 8, 9, 19, 32, 63] se sažimanjem (agregacijom) n ulaznih vrednosti dobija jedna izlazna vrednost, pri čemu ulazne i izlazne vrednosti pripadaju istom skupu, a to je najčešće skup realnih brojeva. Uopšteno možemo reći da agregacijom više različitih izvora informacija dolazimo do nekog jedinstvenog izlaza [19, 63]. Klasifikacija funkcija agregacija je vezana za prirodu podataka, odnosno ulaznih vrednosti, gde možemo da razmatramo numeričke i kategorijske podatke. Najpoznatiji primeri operatora agregacije su težinska i aritmetička sredina.

Neka je $\mathbf{D}$ neprazan interval realnih brojeva, koji može biti ograničen, ili neograničen. Uvedimo oznaku $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, gde $x_i \in \mathbf{D}$ za $i = 1, 2, ..., n$. Skup $\{x_1, ..., x_n\}$ je skup podataka koji treba da budu agregirani (rezutati, ocene, usluga itd.). Sledi opšta definicija funkcije agregacije nad proizvoljnim intervalom $\mathbf{D}$.

Definicija 1.1. [19] Funkcija $\mathbf{A} : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$, koja je neopadajuća (po svakoj promenljivoj) i monotona, a zadovoljava sledeće granične uslove:

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}^n} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \inf \mathbf{D} \quad \text{i} \quad \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}^n} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sup \mathbf{D}, \tag{1.1}$$

se naziva n-arna funkcija agregacije.

U nastavku su posmatrane n-arne funkcije agregacije za koje je $\mathbf{D} = [-1, 1]$, tj. funkcije agregacije čiji je domen skup $[-1, 1]^n$, a kodomen interval $[-1, 1]$. U tom slučaju se granični uslovi (1.1) svode na

$$\mathbf{A}(-\mathbf{1}) = -1 \text{ i } \mathbf{A}(\mathbf{1}) = 1,$$

gde je $-\mathbf{1} = (-1, \ldots, -1)$ i $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

Uočeno je da odgovarajući izbor funkcije agregacije zavisi od određenih osobina, pa iz tog razloga, slede neke osobine koje su korišćene u daljem radu. Kažemo da je funkcija agregacije $\mathbf{A} : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$

- *idempotentna* ako za svako $\mathbf{x} = (x, \ldots, x) \in \mathbf{D}^n$ važi $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = x$;
- *homogena* ako za sve $\mathbf{x} \in \mathbf{D}^n$ i $c > 0$ za koje $c \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{D}^n$, važi $\mathbf{A}(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$;
- *aditivna* ako za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}^n$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbf{D}^n$, važi $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})+\mathbf{A}(\mathbf{y})$;
- *bipolarno komonotono aditivna* ako za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}^n$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{D}^n$ koji su *bipolarno komonotoni*, odnosno takvi da $(|x_i| - |x_j|)(|y_i| - |y_j|) \geq 0$ i $x_i y_i \geq 0$, za sve i, j, važi $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y})$.

1.2 Fazi mere i fazi bi-mere

Neka je sa X obeležen neprazan skup, sa $\mathcal{A}$ je označena $\sigma-$algebra podskupova na X. Tada $(X, \mathcal{A})$ nazivamo merljiv prostor.

1.2.1 Fazi mere

Aditivnost klasične mere u višekriterijumskom odlučivanju se pokazala previše restriktivnom. Iz tog razloga se javlja potreba za uvođenjem monotonone skupovne funkcije, odnosno fazi mere [42, 64].

Definicija 1.2. [42] Neka je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor, fazi mera m na $(X, \mathcal{A})$ je funkcija $m : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava sledeće uslove:

(i) $m(\emptyset) = 0$,

(ii) za svako $A, B \in \mathcal{A}$, ako je $A \subseteq B$, tada je $m(A) \leq m(B)$ (monotonost).

Primetimo da je funkcija verovatnoće, kao i svaka klasična mera u stvari fazi mera, jer aditivnost implicira monotnost. Sa druge strane ne važi obrnuto, odnosno monotonost ne implicira aditivnost.

Definicija 1.3. [42] Neka je $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}^{+} = [0, +\infty]$ *fazi mera* na $(X, \mathcal{A})$, tada se trojka $(X, \mathcal{A}, m)$ zove prostor fazi mere.

Definicija 1.4. [42] Neka je m fazi mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$. Tada je m:

- *normalizovana* ako važi $m(X) = 1$;
- *aditivna* ako $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ kada je $A \cap B = \emptyset$;
- *subaditivna* ako $m(A) + m(B) \geq m(A \cup B) + m(A \cap B)$;
- *superaditivna* ako $m(A) + m(B) \leq m(A \cup B) + m(A \cap B)$;
- *neprekidna odozgo* ako važi: $A_n \in \mathcal{A}, \quad A_n \searrow A \Longrightarrow m(A_n) \searrow m(A)$;
- *neprekidna odozdo* ako važi: $A_n \in \mathcal{A}, \quad A_n \nearrow A \Longrightarrow m(A_n) \nearrow m(A)$.

1.2.2 Fazi bi-mere

Fazi bi-mere (bi-kapaciteti) predstavljaju uopštenje klasičnih mera. Jedna od njihovih mnogobrojnih primena je u problemu odlučivanja gde su skale bipolarne sa negativnim (lošim) i pozitivnim (dobrim) vrednostima uključujući neutralnu vrednost, što omogućuje modeliranje bipolarnosti. Tipični primeri takve skale su $[-1, 1]$ (ograničen interval), $\mathbb{R}$ (neograničen interval), {veoma loš, loš, srednji, dobar, odličan} (ordinalna skala). Osnovni problem kod uvođenja ovakvih skala jeste definisanje odnosa između dva kriterijuma. Uzmimo skalu $[-1, 1]$, sa neutralnim elementom 0. Najprostiji način, jeste da se kaže da su "*pozitivni*" i "*negativni*" delovi simetrični. Za više detalja videti [14, 15].

Kompleksniji model razmatra nezavisno pozitivne i negativne delove. Tada se može reći da pozitivna binarna alternativa definiše fazi meru m^+, dok negativna binarna alternativa definiše fazi meru m^-. Ovo predstavlja poznati Cumulative prospect theory (CPT) model koji je prikazan u [65]. Međutim, nije teško naći primere gde želje onog koji pravi model ne mogu biti intepretirane pomoću CPT modela. U [14, 15, 27] predložen je još uopšteniji model pod pretpostavkom da ne postoji nezavinost između pozitivnih i negativnih delova, kojim se *ternarnim alternativama* dodeljuje broj iz intervala $[-1, 1]$. Ovaj broj će se označavati sa $\mathbf{m}(A, B)$, odnosno kao vrednost funkcije dve promenljive, čiji je prvi argument skup kriterijuma koji su totalno zadovoljeni, dok je drugi argument skup kriterijuma koji nisu totalno zadovoljeni, dok se preostali kriterijumi vode pod neutralnim nivoom. Ovakva funkcija se naziva *fazi bi-mera*.

Neka je $\mathcal{Q}(X) := \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) | A \cap B = \emptyset\}$, tj. $\mathcal{Q}(X)$ je skup svih disjuktnih parova podskupova od X. U odnosu na binarnu relaciju $\preceq$

koja je definisanu sa

$$(A,B) \preceq (C,D) \text{ akko je } A \subseteq C \text{ i } B \supseteq D\ ,$$

skup $\mathcal{Q}(X)$ je parcijalno uređen skup u kom svaka dva elementa imaju jedinstven supremum $(A,B) \vee (C,D) = (A \cup C, B \cap D)$ i jedinstven infimum $(A,B) \wedge (C,D) = (A \cap C, B \cup D)$. Struktura $(\mathcal{Q}(X), \preceq)$ je mreža tipa 3^n. Najveći elemenat je $(X, \varnothing)$, a najmanji $(\varnothing, X)$.

Definicija 1.5. [14] Funkcija $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to \mathbb{R}$ je fazi bi-mera ako zadovoljava:

(i) $\mathbf{m}(\emptyset, \emptyset) = 0$,

(ii) $A \subseteq B$ implicira $\mathbf{m}(A, \cdot) \leq \mathbf{m}(B, \cdot)$ i $\mathbf{m}(\cdot, A) \geq \mathbf{m}(\cdot, B)$.

Pored toga, $\mathbf{m}$ je **normalizovana** fazi bi-mera ako važi $\mathbf{m}(X, \emptyset) = 1 = -\mathbf{m}(\emptyset, X)$.

Primetimo da definicija implicira da $\mathbf{m}(\emptyset, \cdot) \leqslant 0$ i $\mathbf{m}(\cdot, \emptyset) \geqslant 0$. Fazi bi-mera $\mathbf{m}$ je ***CPT-tipa*** ako postoje dve (normalizovane) fazi mere m_1, m_2, takve da za svako $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$ važi $\mathbf{m}(A,B) = m_1(A) - m_2(B)$. Za više detalja pogledati [14, 15].

1.3 Fazi integrali

U okviru ovog poglavlja razmatrani su fazi integrali u odnosu na prethodno definisane fazi mere, a koji su prikazani u [6]. Motivacija za njihovo definisanje dolazi iz potrebe da u teoriji odlučivanja donesemo određenu odluku. Neka je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor.

1.3.1 Osnovni pojmovi

Svakoj funkciji $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, pridružujemo familiju $C_f =: \{C_f(x) | x \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{C_f'(x) | x \in \overline{\mathbb{R}}\}$, gde je

$$C_f(x) = \{t \in X | f(t) > x\} \text{ i } C_f'(x) = \{t \in X | f(t) \geq x\}.$$

C_f nazivamo lanac pridružen funkciji f, a on je totalno uređen (parcijalno) u odnosu na skupovnu inkluziju.

Komonotonost (zajednička monotonost) *funkcija* može nadograditi koncept aditivnosti (maksitivnosti) integrala. Za više detalja videti [11]. Svaka funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ određuje na X relaciju polu uređenja:

$$t_1 <_f t_2 \Longleftrightarrow f(t_1) < f(t_2).$$

Odnos između dve relacije polu-uređenja, predstavljene pomoću funkcija f i g, određuje binarnu relaciju $\sim$ u $\overline{\mathbb{R}}^X$ koja je simetrična, refleksivna, ali ne i tranzitivna.

Definicija 1.6. [6] f i g su komonotone ($f \sim g$) ako ne postoji par t_1, t_2 u X, takav da važi da je $t_1 <_f t_2$ i $t_2 <_g t_1$.

1.3.2 Osnovne i proste funkcije

Označimo sa $\mathcal{F}(X)$, ili kratko $\mathcal{F}$ familiju svih merljivih ($\mathcal{A}$-merljivih) funkcija iz X u $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$. To znači da lanac C_f pridružen funkciji $f \in \mathcal{F}(X)$ je podskup od $\mathcal{A}$. Ova definicija merljivosti podudara se sa klasičnom, pošto je $\mathcal{A}$ $\sigma-$algebra.

Za svako $a \in \overline{\mathbb{R}}^+$ i za svako $A \in \mathcal{A}$, funkcija $b(a, A)$ definisana sa:

$$b(a, A)(x) = \begin{cases} a, & \text{ako} \quad x \in A \\ 0, & \text{ako} \quad x \notin A \end{cases}$$

se zove *osnovna* funkcija.

Funkcija $s : X \to \mathbb{R}^+$ je ***prosta*** ako je njen skup vrednosti konačan. Familiju prostih funkcija iz X u $\overline{\mathbb{R}}^+$, možemo označiti sa $S(X)$.

Neka je funkcija s prosta, sa kodomenom $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, bazirana na pojmu konačne podele skupa X, tako da važi $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, gde je $A_i = \{x \in X | s(x) = a_i\}$. Tada, ako je $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, važi sledeće:

$$s = \sum_{i=1}^{n} b(a_i, A_i) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} b(a_i, A_i). \tag{1.2}$$

U izrazu (1.2), brojač može da krene od jedinice, odnosno nula može biti izostavljena, pretpostavljajući da važi:

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \tag{1.3}$$

na osnovu čega se može dobiti klasičan standardni prikaz, sa minimalnim brojem osnovnih funkcija.

Lebegov integral proste funkcije s na skupu X date sa (1.2), u odnosu na meru m, definisan je na sledeći način:

$$\int sdm = \int \left(\sum_{i=1}^{n} b(a_i, A_i) \right) dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i).$$

Struktura klasičnog merljivog prostora ($\sigma-$aditivnost mere) dozvoljava da se koristi bilo koja aditivna reprezentacija pomoću osnovnih funkcija. U cilju da se izrazi komonotona aditivnost Šokeovog integrala i komonotona maksitivnost Sugenovog integrala, pogodno je uvesti komonotonu reprezentaciju prostih funkcija.

Tvrđenje 1.1. *[6] Svaka prosta funkcija s zadovoljava komonotono aditivni prikaz*

$$s = \sum_{i=1}^{n} b(c_i, C_i) \tag{1.4}$$

i komonotono maksitivan prikaz

$$s = \bigvee_{i=1}^{n} b(a_i, C_i) \tag{1.5}$$

gde je $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \emptyset$ *(strogo).*

1.3.3 Šokeov integral

Šokeov integral [10] je uveo francuski matematičar Gustav Choquet, 1953. godine, a kasnije je proučavan od strane mnogih autora [6, 10, 11, 42].

Definicija 1.7. [10] Šokeov integral funkcije $f \in \mathcal{F}(X)$ u odnosu na fazi meru $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je:

$$Ch(f, m) = \int_0^\infty m(C_f(x))dx, \tag{1.6}$$

dok se na diskretnom skupu definiše na sledeći način,

$$Ch(f, m) = \sum_{i=1}^{n} f_{\sigma(i)}(m(C_{\sigma(i)}) - m(C_{\sigma(i+1)})) = \sum_{i=1}^{n} (f_{\sigma(i)} - f_{\sigma(i-1)})m(C_{\sigma(i)}), \tag{1.7}$$

gde σ predstavlja permutaciju skupa indeksa za koju važi $0 \leq f_{\sigma(1)} \leq ... \leq f_{\sigma(n)} \leq 1$, $f_{\sigma(0)} = 0$ i $C_{\sigma(i)} = \{x_{\sigma(i)}, ..., x_{\sigma(n)}\}$.

Razmotrimo sada realne funkcije f i označimo sa:

$$f^+ = f \vee 0 \quad \text{i} \quad f^- = (-f) \vee 0. \tag{1.8}$$

Asimetričan Šokeov integral funkcije $f : X \to [-1, 1]$ u odnosu na fazi meru $m : \mathcal{A} \to [0, 1]$ je definisan sa

$$\overline{Ch}(f, m) = Ch(f^+, m) - Ch(f^-, \bar{m}),$$

gde je $\bar{m}$ dualna skupovna funkcija konačne fazi mere m definisana sa $\bar{m}(C) = m(X) - m(C^c)$, za sve $C \subseteq X$, dok je *simetričan* Šokeov integral (ili *Šipošov integral*) definisan sa

$$\widehat{Ch}(f, m) = Ch(f^+, m) - Ch(f^-, m),$$

gde je bar jedan od prethodnih integrala konačan. Ovi integrali su posebni slučajevi CPT modela, gde su m^+, m^- dve fazi mere:

$$CPT_{m^+, m^-}(f) = Ch(f^+, m^+) - Ch(f^-, m^-).$$

Navodimo fundamentalne osobine Šokeovog integrala [6].

- ***Osnovne vrednosti*** Za svaku prostu funkciju uz uslov $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$, važi $Ch(b(c, C), m) = c \cdot m(C)$, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}^+, \forall C \in \mathcal{A}$.

  Za $c = 1$, osnovna funkcija se podudara sa karakterističnom funkcijom 1_C na skupu C i Šokeov integral rekonstruiše datu fazi meru $Ch(1_C, m) = m(C)$, $\forall C \in \mathcal{A}$.

- ***Homogenost*** $Ch(c \cdot f, m) = c \cdot Ch(f, m)$, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}^+$.

- ***Monotonost*** $f \leq g \Longrightarrow Ch(f, m) \leq Ch(g, m)$.

- ***Komotona aditivnost*** $f \sim g \Longrightarrow Ch(f + g, m) = Ch(f, m) + Ch(g, m)$.

- ***Neprekidnost odozdo*** Ako je fazi mera m neprekidna odozdo, tada je Šokeov integral takođe neprekidan odozdo, tj. za svaki neopadajući niz $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, važi da je $Ch(\sup_n f_n, m) = \sup_n Ch(f_n, m)$.

- ***Horizontalna aditivnost*** Neka je data merljiva funkcija f i $c \in \overline{\mathbb{R}}^+$, tada se može dobiti horizontalna aditivna dekompozicija na sledeći način:

  $$f = (f \wedge c) + f_c^+, \quad \text{gde je} \quad f_c^+(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je} \quad f(x) \leq c, \\ f(x) - c, & \text{ako} \quad f(x) > c. \end{cases}$$

  Za svaku horizontalnu aditivnu dekompoziciju Šokeov integral je aditivan $Ch(f, m) = Ch(f \wedge c, m) + Ch(f_c^+, m)$.

Teorema 1.2. *[6] Ako je m σ-aditivna mera, tada se Šokeov integral podudara sa Lebegovim integralom:*

$$Ch(f, m) = \int_X f dm.$$

Takođe važi, ako je fazi mera m neprekidna odozdo, tada Šokeov integral funkcije f, može biti predstavljen Lebegovim integralom iste funkcije u prostoru mere $(X, \mathcal{A}_f, m_f)$, koji naravno zavisi od f.

Teorema 1.3. *[6] U prostoru fazi mere $(X, \mathcal{A}, m)$, gde je m neprekidna odozdo, Šokeov integral bilo koje funkcije f se podudara sa Lebegovim integralom na prostoru mere $(X, \mathcal{A}_f, m_f)$:*

$$Ch(f, m) = \int_X f dm_f,$$

gde je $\mathcal{A}_f$ σ-algebra generisana sa C_f i m_f je σ-aditivna mera na $\mathcal{A}_f$, koja predstavlja proširenje restrikcije fazi mere m sa C_f na $\mathcal{A}_f$.

1.3.4 Sugenov integral

Pojam i osnovne osobine, Sugenovog integrala [49] je uveo japanski naučnik Mihio Sugeno, 1972. godine. Razlika u odnosu na prethodno prikazani Šokeov integral (1.7) jeste u tome da se proizvod i zbir zamenjuju minimumom i maksimumom [6, 49].

Neka je $(X, \mathcal{A}, m)$ prostor fazi mere, gde je $m : \mathcal{A} \to [0, 1]$ i familija $\mathcal{V}(X)$ je skup svih merljivih funkcija iz X u $[0, 1]$.

Definicija 1.8. [49] Sugenov integral je $f \in \mathcal{V}(X)$ u odnosu na fazi meru $m : \mathcal{A} \to [0, 1]$ je:

$$Su(f, m) = \bigvee_{x \in [0,1[} (x \wedge m(C_f(x))), \tag{1.9}$$

dok se na diskretnom skupu definiše na sledeći način,

$$Su(f, m) = \bigvee_{i=1}^{n} f_{\sigma(i)} \wedge m(C_{\sigma(i)}), \tag{1.10}$$

gde σ predstavlja permutaciju skupa indeksa za koju važi $0 \leq f_{\sigma(1)} \leq ... \leq f_{\sigma(n)} \leq 1$, $f_{\sigma(0)} = 0$, $c_{\sigma(i)} = \{x_{\sigma(i)}, ..., x_{\sigma(n)}\}$ i $\vee = \max, \wedge = \min$.

Fundamentalne osobine Sugenovog integrala su prikazane u [6].

- ***Osnovne vrednosti*** Za svaku prostu funkciju važi

$$Su(b(c,C),m) = c \wedge m(C)\ ,\ \forall c \in [0,1],\ \forall C \in \mathcal{A}.$$

  Jedinični element za operaciju $\wedge$ na intervalu $[0,1]$ je 1. Sugenov integral karakteristične funkcije rekonstruiše fazi meru $Su(1_c, m) = m(C)$, $\forall C \in \mathcal{A}$.

- $\wedge$***-homogenost*** $Su(c \wedge f, m) = c \wedge Su(f, m)\ ,\ \forall c \in [0,1]$.

- ***Monotonost*** $f \leq g \Longrightarrow Su(f,m) \leq Su(g,m)$.

- ***Komotona maksitivnost*** $f \sim g \Rightarrow Su(f \vee g, m) = Su(f,m) \vee Su(g,m)$.

- ***Neprekidnost odozdo*** Ako je fazi mera m neprekidna odozdo, tada je Sugenov integral neprekidan odozdo, odnosno za svaki monotono neopadajući niz $\{f_n\}_{n \in N}$, važi da je $Su(sup_n f_n, m) = sup_n Su(f_n, m)$.

- ***Horizontalna maksitivnost*** Datoj merljivoj funkciji $f \in \mathcal{V}(X)$ i $c \in]0,1[$, pridružujemo horizontalnu maksitivnu dekompoziciju na sledeći način:

$$f = (f \wedge c) \vee f_c^{\vee} \qquad \text{gde je} \qquad f_c^{\vee}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako} \quad f(x) \leq c, \\ f(x), & \text{ako} \quad f(x) > c. \end{cases}$$

  Za svaku horizontalnu maksitivnu dekompoziciju Sugenov integral je maksitivan $Su(f,m) = Su(f \wedge c, m) \vee Su(f_c^{\vee}, m)$.

1.3.5 Šilkretov integral

Niel Šilkret je 1971. godine uveo Šilkretov integral [48] u odnosu na maksitivnu meru. Razlika u odnosu na Sugenov integral (1.10) je u tome što se kao operacija koristi proizvod umesto minimuma. Za početak sledi prikaz maksitivne mere.

Definicija 1.9. [48] Maksitivna mera je skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ koja zadovoljava sledeće osobine:

(i) $m(\varnothing) = 0$,

(ii) za svaki niz $A_1, A_2, \ldots$, međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$, važi: $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Sledi pregled ovog integrala.

Definicija 1.10. [48] *Šilkretov integral* merljive funkcije $f : X \to [0, \infty]$ u odnosu na maksitivnu meru $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definisan je sa

$$Sh(f, m) = \bigvee_{x>0} (x \cdot m(C_f(x))). \tag{1.11}$$

Ako je s prosta funkcija data sa (1.2), tada važi:

$$Sh(s, m) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i \cdot m(A_i). \tag{1.12}$$

Ovaj tip integrala može biti definisan i u odnosu na opštiju skupovnu funkciju, tj. fazi meru, za više detalja videti [13].

U nastavku su prikazane fundamentalne osobine Šilkretovog integrala.

- ***Osnovne vrednosti*** Za svaku prostu funkciju važi

  $$Sh(b(c, C), m) = c \cdot m(C) \ , \ \forall c \geq 0 \ , \ \forall C \in \mathcal{A}.$$

  Za Šilkretov integral karakteristične funkcije skupa C važi da je

  $$Sh(1_c, m) = m(C) \ , \ \forall C \in \mathcal{A}.$$

- ***Homogenost*** $Sh(c \cdot f, m) = c \cdot Sh(f, m) \ , \ \forall c \geq 0.$

- ***Monotonost*** $f \leq g \Longrightarrow Sh(f, m) \leq Sh(g, m).$

- ***Maksitivnost*** $Sh(f \vee g, m) = Sh(f, m) \vee Sh(g, m).$

- ***Neprekidnost odozdo*** Šilkretov integral u odnosu na maksitivnu meru m je neprekidan odozdo, tj. za svaki monotono neopadajući niz merljivih funkcija $\{f_n\}_{n \in N}$, važi da je $Sh(sup_n f_n, m) = sup_n Sh(f_n, m)$.

1.3.6 Primena fazi integrala u teoriji odlučivanja

U teoriji odlučivanja relacija preferencije je bazirana na fazi integralima. Neka je funkcionela T definisana sa

$$T(f, m) = J(f, m),$$

gde $J(f, m)$ može da bude Šokeov, Sugenov, ili Šilkretov integral funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ u odnosu na fazi meru m.

Relacija preferencije $\succsim$ (binarna relacija $\succsim$ je relacija slabog uređenja na nepraznom konačnom skupu $\mathcal{G}$) se definiše na sledeći način:

$$A \succsim B \Leftrightarrow T(f_A, m) \geq T(f_B, m),$$

gde $A, B \in \mathcal{G}$, dok su f_A i f_B preslikavanja $f_A, f_B : X \to \mathbb{R}$ (X je neprazan konačan skup kriterijuma).

Da bi fazi integrale prikazali kroz primere, definisaćemo početne uslove.

Pretpostavimo da imamo izbor 3 hotela za koji turisti treba da se odluče. Te hotele treba da odaberu na osnovu tri svojstva:

- svojstvo 1 = tip usluge
- svojstvo 2 = udaljenost hotela od mora
- svojstvo 3 = broj zvezdica hotela

Svakom svojstvu dodeljujemo ocenu iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Određuje se značajnost svakog svojstva, kao i njihova međusobna interakcija, primenjujući fazi meru m definisanu sa:

(1) $m(\{S_1\}) = m(\{S_2\}) = 0.3$, $m(\{S_3\}) = 0.2$,

(2) $m(\{S_1, S_2\}) = 0.5$,

(3) $m(\{S_1, S_3\}) = m(\{S_2, S_3\}) = 0.9$,

(4) $m(X) = 1$.

Rangiranje opcija (hotela) treba da bude utvrđeno na osnovu dodeljenih ocena njihovim određenim svojstvima.

Sledeći primeri ilustruju primenu fazi integrala na diskretnom skupu u teoriji odlučivanja, na osnovu prethodno zadatog problema.

Primer 1.1.

	$Svojstvo1(S_1)$	$Svojstvo2(S_2)$	$Svojstvo3(S_3)$
$Opcija(hotel)1$	2	5	3
$Opcija(hotel)2$	3	3	5
$Opcija(hotel)3$	3	2	5

Za prvi hotel sledi da je $x_0 = 0 < x_1 = 2 < x_2 = 3 < x_3 = 5$, pa iz toga imamo da je

- $C_1 = \{t|f(t) \geq x_1\} = \{S_1, S_2, S_3\} \Rightarrow m(C_1) = 1$
- $C_2 = \{t|f(t) \geq x_2\} = \{S_2, S_3\} \Rightarrow m(C_2) = 0.9$
- $C_3 = \{t|f(t) \geq x_3\} = \{S_2\} \Rightarrow m(C_3) = 0.3$

Na osnovu skupa kriterijuma (svojstava hotela) i definisanih vrednosti fazi mere (značajnost svojstava), određuje se Šokeov integral:

$$Ch(f_1, m) = (2 - 0) \cdot 1 + (3 - 2) \cdot 0.9 + (5 - 3) \cdot 0.3 = 3.5.$$

Vrednosti za ostale opcije (hotele) iznose $Ch(f_2, m) = 3.4$, $Ch(f_3, m) = 3.3$. Ukoliko se preferencija modelira Šokeovim integralom, može da se zaključi da *opcija* 1, odnosno prvi hotel je najpoželjnija alternativa turisti.

Da bi primenili Sugenov integral, ocene svojstava hotela treba svesti na interval $[0, 1]$.

Primer 1.2.

	$Svojstvo1(S_1)$	$Svojstvo2(S_2)$	$Svojstvo3(S_3)$
$Opcija(hotel)1$	0.5	0.9	0.8
$Opcija(hotel)2$	0.8	0.8	0.9
$Opcija(hotel)3$	0.8	0.5	0.9

.

Primenjujući Sugenov integral za *opciju* 1 se dobija:

$$Su(f_1, m) = \max(\min(0.5, 1), \min(0.9, 0.9), \min(0.8, 0.3)) = 0.9,$$

dok vrednosti za ostale opcije(hotele) iznose, $Su(f_2, m) = 0.8, Su(f_3, m) = 0.8$. Na osnovu dobijenih vrednosti Sugenovog integrala, može da se zaključi, da je *opcija* 1, odnosno prvi hotel, najpoželjnija opcija turisti.

Ulazne vrednosti, odnosno skup kriterijuma koje su se koristile u slučaju Sugenovog integrala će se koristiti i za Šilkretov integral. Pored toga, biće upotrebljena ista fazi mera kao u slučaju Šokeovog integrala.

Primer 1.3. Za prvi hotel dobijamo:

$$Sh(f_1, m) = \max(0.5 \cdot 1, 0.9 \cdot 0.9, 0.8 \cdot 0.3) = 0.81,$$

dok vrednosti za ostale opcije(hotele) iznose, $Sh(f_2, m) = 0.8, Sh(f_3, m) = 0.8$. Ukoliko se preferencija modelira na osnovu dobijenih vrednosti Šilkretovog integrala, dolazi se do istog zaključka, kao i u prethodnom primeru.

1.4 Pseudo-operacije

U prethodnim poglavljima prikazan je Šokeov integral koji je zasnovan na operacijama sabiranja $+$ i množenja $\cdot$ na intervalu $[0, +\infty]$, Sugenov integral na operacijama $\vee$ i $\wedge$ na intervalu $[0, 1]$, dok je Šilkretov zasnovan na operacijama $\vee$ i $\cdot$ na intervalu $[0, +\infty]$. U cilju da se nađe zajednički okvir ova tri integrala integrala uvodi se pseudo-sabiranje $\oplus$ i pseudo-množenje $\odot$

na zatvorenom intervalu $[a,b] \subseteq [-\infty,\infty]$.

Neka je $\preceq$ totalni poredak na $[a,b]$.

Definicija 1.11. [55] Pseudo-sabiranje je funkcija $\oplus : [a,b]^2 \to [a,b]$ koja je neopadajuća u odnosu na totalni poredak $\preceq$ na intervalu $[a,b]$, komutativna, asocijativna, sa neutralnim elementom $\mathbf{0}$.

Definicija 1.12. [55] Pseudo-množenje je funkcija $\odot : [a,b]^2 \to [a,b]$ koja je pozitivno neopadajuća u odnosu na totalni poredak $\preceq$ na intervalu $[a,b]$, odnosno $x\odot z \preceq y\odot z$, za sve $x,y \in [a,b]$, gde je $x \preceq y$ i $z \succeq \mathbf{0}$, komutativna, asocijativna sa neutralnim elementom $\mathbf{1} \in [a,b]$, gde važi $x\odot\mathbf{1} = x$, $x \in [a,b]$.

Napomena: Uređena trojka $([a,b],\oplus,\odot)$ je poluprsten. Važi standardno pravilo o redosledu operacija, odnosno $x\odot z\oplus y\odot z$ akko $(x\odot z)\oplus(y\odot z)$. Neka je pseudo-množenje $\odot$ distributivno u odnosu na pseudo-sabiranje $\oplus$, tada sledi $x\odot(y\oplus z) = (x\odot y)\oplus(x\odot z)$. Algebarska svojstva neaditvnih integrala odgovaraju svojstvima operacija $\oplus$ i $\odot$ (videti [4, 5, 18, 25, 30, 50, 66]).

Neka je data metrika d na intervalu $[a,b]$ uz sledeći uslov:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0.$$

Važe sledeće osobine:

(C1) $d(x\oplus y, x'\oplus y') \le d(x,x') + d(y,y')$,

(C2) $d(x\oplus y, x'\oplus y') \le \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$,

(C3) $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n\oplus z, y_n\oplus z) = 0$,

(C4) $x \le z \le y \Longrightarrow d(x,y) \ge \sup\{d(y,z), d(x,z)\}$.

U ovom radu posmatramo pseudo-operacije koje su neprekidne, sem eventualno u nekim graničnim slučajevima, odnosno tačkama $(\mathbf{0},a)$,$(a,\mathbf{0})$, ili $(\mathbf{0},b)$,$(b,\mathbf{0})$. Za navedene pseudo-operacije razmatramo tri slučaja. Za više detalja pogledati [35].

Slučaj I_{po} $g - poluprsten$

Neka je data funkcija $g : [a, b] \to [0, \infty]$ koja je bijekcija. Operacije su definisane na sledeći način $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$ uz uslove $g^{-1}(0) = \mathbf{0}$ i $g^{-1}(1) = \mathbf{1}$.

Ako razmotrimo strogo rastuće generatore, tada je $a = \mathbf{0}$ i važi uobičajeni poredak na intervalu $[a, b]$, odnosno imamo da je $x \preceq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$.

U slučaju generatora koji su strogo opadajući, imamo da je $a = \mathbf{0}$ i važi obrnuti poredak od uobičajenog, odnosno $x \preceq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$.

Slučaj II_{po}: Idempotentno $\oplus$ i neidempotentno $\odot$

$x \oplus y = \sup(x, y)$, $\odot$ je proizvoljno neidempotentno pseudo-množenje na intervalu $[a, b]$, gde važi totalni poredak, ako je $x \preceq y \Leftrightarrow \sup(x, y) = y$. Takođe imamo da je $a = \mathbf{0}$ i $g^{-1}(1) = \mathbf{1}$. Pseudo množenje je generisano sa rastućom bijekcijom $g : [a, b] \to [0, \infty]$, tako da važi $x \odot y = g^{-1}\Big(g(x) \cdot g(y)\Big)$.

Slučaj III_{po}: Idempotentno $\oplus$ i idempotentno $\odot$

$x \oplus y = \sup(x, y)$, $x \odot y = \inf(x, y)$ na intervalu $[a, b]$, gde je $a = \mathbf{0}, b = \mathbf{1}$ i važi uobičajeni poredak.

1.4.1 $\sigma - \oplus$-mera

Definicija 1.13. [55] Neka je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor, $\mathcal{A}$ je σ-algebra podskupova od X. Skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [a, b]$ je $\sigma - \oplus -$mera ako zadovoljava sledeće uslove:

(i) $m(\emptyset) = \mathbf{0}$,

(ii) $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} m\left(A_i\right)$ za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjuktnih skupova iz $\mathcal{A}$.

Klasa merljivih funkcija $\mathcal{S}_{po}$, kao i $\mathcal{M}_{po}$ klasa svih $\sigma - \oplus -$mera m ima drugačije značenje u zavisnosti od tipa poluprstena.

Slučaj I_{po}: g-poluprsten

Sa $\mathcal{S}_{po}$ ćemo označiti klasu svih merljivih funkcija $f : X \to [a, b]$, takvih da je $f(x) \leq M < b$ (ili u slučaju neopadajućih generatora $f(x) \geq M > a$) za sve $x \in X$ i neko $M \in [a, b)$ (ili $M \in (a, b]$ resp.).

Sa $\mathcal{M}_{po}$ ćemo označiti klasu svih $\sigma-\oplus-$mera $m : \mathcal{A} \to [a, b]$ na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$ sa svojstvom $m(X) < b$ (ili $m(X) > a$ resp.).

Slučaj II_{po}: Idempotentno $\oplus$ i neidempotentno $\odot$

Sa $\mathcal{S}_{po}$ ćemo označiti klasu svih merljivih funkcija $f : X \to [a, b]$, takvih da je $f(x) \leq M < b$ za sve $x \in X$ i neko $M \in [a, b)$.

Sa $\mathcal{M}_{po}$ ćemo označiti klasu svih $\sigma-\oplus-$mera $m : \mathcal{A} \to [a, b]$ na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$.

Slučaj III_{po}: Idempotentno $\oplus$ i idempotentno $\odot$

Sa $\mathcal{S}_{po}$ ćemo označiti klasu svih merljivih funkcija $f : X \to [a, b]$.

Sa $\mathcal{M}_{po}$ ćemo označiti klasu svih $\sigma-\oplus-$mera $m : \mathcal{A} \to [a, b]$ na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$.

1.5 Pseudo-integral

Neka je dat poluprsten $([a, b], \oplus, \odot)$. Predstavljamo definiciju pseudo-integrala funkcije na nepraznom skupu X i njegove osobine ([42], [54], [55], [56], [59]).

Pseudo-karakteristična funkcija na skupu $A_i \subseteq X$, $i = 1, \ldots, k$ se definiše na sledeći način:

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad x \notin A_i, \\ \mathbf{1} & , \quad x \in A_i. \end{cases}$$

Jednostavna (prosta) funkcija je preslikavanje $e : X \to [a, b]$ koje se definiše na sledeći način $e = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \chi_{Ai}$, za $a_i \in [a, b]$, gde su $A_i \in \mathcal{A}$ parovi disjuktnih skupova, ako je $\oplus$ neidempotentno.

Definicija 1.14. [55] Neka je data $\sigma - \oplus -$mera $m \in \mathcal{M}_{po}$.

(i) Pseudo-integral jednostavne funkcije $e : X \to [a, b]$ se definiše na sledeći način:

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \chi_{Ai}. \tag{1.13}$$

(ii) Pseudo-integral funkcije $f \in \mathcal{S}_{po}$ se definiše na sledeći način:

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = \lim_{n \to \infty} \int_X^{\oplus} e_n(x) \odot dm, \tag{1.14}$$

gde je $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz jednostavnih funkcija takav da $d(e_n(x), f(x))$ uniformno konvergira ka 0 kad $n \to \infty$.

Ako su operacije generisane sa monotonom i neprekidnom funkcijom $g : [a, b] \to [0, \infty]$ (slučaj I_{po}), tada se pseudo-integral funkcije $f \in \mathcal{S}_{po}$ može izraziti kao:

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\Big(\int_X (g \circ f) d(g \circ m) \Big),$$

gde je integral na desnoj strani Lebegov integral. Kada je $X = [a, b]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ i $m = g^{-1} \circ \mu$ gde je μ Lebegova mera na $[a, b]$, tada koristimo sledeću oznaku:

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} f(x) dx = \int_X^{\oplus} f \odot dm.$$

Ovaj pseudo-integral je poznat i kao g-integral, a za više detalja videti [42].

U slučajevima II_{po} i III_{po}, kada poluprsten $([a,b], \sup, \odot)$ i funkcija $\phi : X \to [a,b]$ definiše $\sigma - \sup -$meru m na sledeći način $m(A) = \sup_{x \in A} \phi(x)$, tada pseudo-integral funkcije $f \in \mathcal{S}_{po}$ može se prikazati na sledeći način:

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x \in X} \left(f(x) \odot \phi(x) \right).$$

Ako posmatramo poluprsten $([0,b], \oplus, \odot)$ i pretpostavimo da je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, tada distributivnost $\odot$ nad $\oplus$ na $[0,b]$ implicira

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i \odot m(\{x_i\}), \quad \text{za} \quad f_i = f(x_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Dokazano je u [42] da pseudo-integral ima osobine monotonosti, $\oplus$-aditivnosti i $\odot$-homogenosti, pa imamo da za $f, g \in \mathcal{S}_{po}$ i $m \in \mathcal{M}_{po}$ važe sledeće osobine:

(i) $\displaystyle\int_X^{\oplus} (f \oplus g) \odot dm = \int_X^{\oplus} f \odot dm \oplus \int_X^{\oplus} g \odot dm$,

(ii) $\displaystyle\int_X^{\oplus} (c \odot f) \odot dm = c \odot \int_X^{\oplus} f \odot dm$ za sve $c \in [a,b]$,

(iii) ako je $f \preceq g$ tada je $\displaystyle\int_X^{\oplus} f \odot dm \preceq \int_X^{\oplus} g \odot dm$.

Sledeće dve teoreme o monotnoj konvergenciji dokazane su u [52]. Prvo će biti prikazana teorema za slučaj I_{po}.

Teorema 1.4. *[52] Neka je generator $g : [a,b] \to [0,\infty]$ strogo monotona i neprekidna funkcija. Za dati merljivi prostor $(X, \mathcal{A})$, neka su funkcije $f_n \in \mathcal{S}_{po}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, takve da je $f_1(x) \preceq f_2(x) \preceq \ldots \preceq f_n(x)$, za svako $x \in X$ i $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, za svako $x \in X$. Tada za svaku $\sigma - \oplus -$meru $m \in \mathcal{M}_{po}$ važi:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} f_n \odot dm = \int_X^{\oplus} f \odot dm.$$

Sledi teorema o monotonoj konvergenciji za slučajeve II_{po} i III_{po} polu-prstena.

Teorema 1.5. *[52] Neka je $([a,b], sup, \odot)$ poluprsten slučajeva II_{po} i III_{po}. Za merljivi prostor $(X, \mathcal{A})$, neka su funkcije $f_n \in \mathcal{S}_{po}$, $n \in \mathbb{N}$ takve da je niz funkcija $f_1(x) \preceq f_2(x) \preceq \ldots \preceq f_n(x), x \in X$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X$. Tada za svaku fazi meru $m \in \mathcal{M}_{po}$ važi:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} f_n \odot dm = \int_X^{\oplus} f \odot dm.$$

1.6 Simetrične pseudo-operacije

Neka je $[-F, F], F \in \overline{\mathbb{R}}^+$ zatvoren, simetričan interval. Važi da je $([-F, F], \leq)$ totalno uređen skup sa uobičajenim poretkom. Slede definicije i osobine simetričnih pseudo-operacija, a koje su prikazane u [54, 56].

Definicija 1.15. [54] Simetrično pseudo-sabiranje je funkcija

$$\oplus : [-F, F]^2 \to [-F, F]$$

koja zadovoljava sledeće osobine:

(i) $x \oplus y = y \oplus x$ za sve $x, y \in [-F, F]$,

(ii) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ za sve $x, y, z \in [0, F]$,

(iii) ako je $x \leq y$, tada $x \oplus z \leq y \oplus z$ za sve $z \in [-F, F]$,

(iv) $x \oplus 0 = x$ za sve $x \in [-F, F]$,

(v) $-(x \oplus y) = (-x) \oplus (-y)$ za sve $(x, y) \in [-F, F]^2 \setminus \{(-F, F), (F, -F)\}$.

Definicija 1.16. [54] Simetrično pseudo-množenje je funkcija

$$\odot : [-F, F]^2 \to [-F, F]$$

koja zadovoljava sledeće osobine:

(i) $x \odot y = y \odot x$ za sve $x, y \in [-F, F]$,

(ii) $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ za sve $x, y, z \in [-F, F]$,

(iii) ako je $x \leq y$ i $z \geq 0$, tada $x \odot z \leq y \odot z$,

(iv) postoji $e \in (0, F]$ takvo da je $x \odot e = x$ za sve $x \in [-F, F]$,

(v) $x \odot y = (-x) \odot (-y)$ za sve $x, y \in [-F, F]$.

Zahteva se da odgovarajuće simetrično pseudo-množenje bude distributivno u odnosu na simetrično pseudo-sabiranje na $[0, F]$, odnosno da za sve $x, y, z \in [0, F]$ važi:

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z),$$

uz uslov $0 \odot x = 0$, za sve $x \in [-F, F]$, kao i distributivnost $\odot$ nad $\oplus$ na $[0, F]$.

Pseudo-operacije, simetrični maksimum $\oplus = \ovee$ i simetrični minimum $\odot = \owedge$, $\ovee, \owedge : [-F, F]^2 \to [-F, F]$, definisane su sa

$$x \ovee y = \operatorname{sgn}(x + y)(|x| \vee |y|), \tag{1.15}$$

$$x \owedge y = \operatorname{sgn}(x \cdot y)(|x| \wedge |y|), \tag{1.16}$$

uz konvenciju $\operatorname{sign}(-F + F) = 0$ i $\operatorname{sign}(F \cdot 0) = 0$, za $F = \infty$.

Simetrični maksimum $\ovee$ zadovoljava svojstvo definicije 1.15(v) za sve $(x, y) \in [-F, F]^2$ i važi da je $x \ovee (-x) = (-x) \ovee x = 0$, za sve $x \in [-F, F]$. Očigledno na $[0, F]$ sledi $\ovee = \vee$ i $\owedge = \wedge$.

Usvaja se sledeće pravilo. Za proizvoljan skup I elemenata iz $[-F, F]$, simetrični maksimum je:

$$\bigovee_{x_i \in I} x_i = \sup_{x_i \geq 0} x_i \bigovee \inf_{x_i < 0} x_i. \tag{1.17}$$

Dalja proučavanja će se usmeriti na sledeća tri slučaja, za više detalja videti [54].

Slučaj I

$$\oplus = \oplus_g \ , \odot = \odot_g \tag{1.18}$$

Neka je funkcija $g : [-F, F] \to [-\infty, \infty]$, $g(F) = \infty$, neparna, strogo rastuća i neprekidna. Simetrične pseudo-operacije $\oplus, \odot : [-F, F]^2 \to [-F, F]$ su definisane sa

$$x \oplus y \ = \ g^{-1}(g(x) + g(y)), \tag{1.19}$$

uz konvenciju $\infty - \infty = \infty$ i

$$x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y)), \tag{1.20}$$

uz uslov $0 \cdot \infty = 0$. U ovom slučaju, struktura $(]-F, F[, \oplus, \odot)$ je polje, gde neutralni elemenat za $\odot$ je $e = g^{-1}(1)$. Pošto su g i g^{-1} neparne funkcije i $g(0) = 0$, za svako $x \in [-F, F]$ važi $x \oplus (\ominus x) = (\ominus x) \oplus x = 0$, gde je $\ominus x \in [-F, F]$ i $\ominus x = g^{-1}(-g(x)) = -x$. Funkcija g se naziva generatorska funkcija, ili generator za $\oplus$ i $\odot$ (aditivni generator za $\oplus$ i multiplikativni generator za $\odot$).

Slučaj II

$$\oplus = \circledvee \ , \odot = \odot_g \tag{1.21}$$

Operacije $\oplus$, $\odot : [-F, F]^2 \to [-F, F]$ su definisane na sledeći način: pseudo-sabiranje je simetrični maksimum $\oplus = \circledvee$ definisan sa (1.15), a pseudo-množenje $\odot_g$ je isto kao i u slučaju (1.20), gde je g neparna, strogo rastuća i neprekidna funkcija. $\odot$ je distributivno u odnosu na $\circledvee$ (vidi [37]).

Slučaj III

$$\oplus = \varovee \ , \ \odot = \varowedge \tag{1.22}$$

Pseudo-sabiranje je simetrični maksimum $\oplus = \varovee$ definisan sa (1.15), a pseudo-množenje $\odot$ je simetrični minimum $\odot = \varowedge$ definisan sa (1.16).

U slučaju I i slučaju II distributivnost pseudo-množenja $\odot$ nad pseudo-sabiranjem $\oplus$ važi na intervalu $]-F, F[$ (u slučaju II, ako je $F = e$ tada važi na intervalu $[-F, F]$), dok u slučaju III važi jedino na $[0, F]$ (ili $[-F, 0]$). Za više detalja videti [14, 16, 37, 56].

Primetimo da je interval $[0, F]$ sa pseudo-množenjem $\odot$ i pseudo-sabiranjem $\oplus$ poluprsten koji se označava sa $([0, F], \oplus, \odot)$ (videti [26, 42]).

U sledećem primeru biće ilustrovan par simetričnih pseudo-operacija za slučaj I (simetrično g-sabiranje i simetrično g-množenje).

Primer 1.4. (i) Simetrično pseudo-sabiranje $\oplus$ i odgovarajuće simetrično pseudo-množenje $\odot$ su definisani sa generatorskom funkcijom $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $g(\infty) = -g(-\infty) = \infty$, za neparan ceo broj p. Imamo da je za sve $x, y \in [-\infty, \infty]$:

$$x \oplus y = \left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\right)^{p},$$

$$x \odot y = x \cdot y,$$

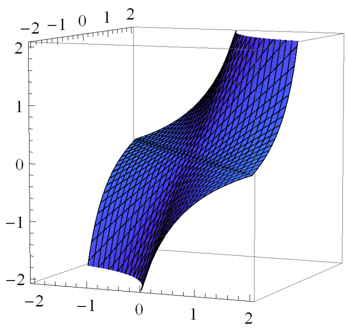
uz konvenciju $\infty - \infty = \infty$, $0 \cdot \infty = 0$. Neutralni elemenat za $\odot$ je $e = 1$.

(ii) Neka su dati simetrično pseudo-sabiranje $\oplus$ i odgovarajuće simetrično pseudo-množenje $\odot$, generisani sa $g(x) = \operatorname{sgn}(x)\ln(1 + |x|)$, $x \in (-\infty, \infty)$, uz konvenciju $g(\infty) = -g(-\infty) = \infty$. Za sve $x, y \in [-\infty, \infty]$ imamo da je:

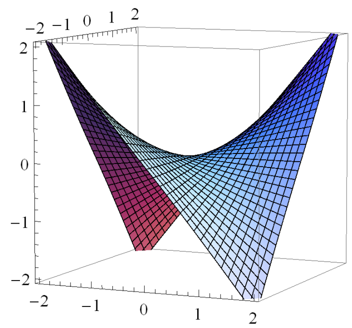
$$x \oplus y = \begin{cases} x + y + \operatorname{sgn}(x) \cdot x \cdot y, & \operatorname{sgn}(x \cdot y) \geq 0, \\ \frac{x+y}{1+(|x| \wedge |y|)}, & \operatorname{sgn}(x \cdot y) < 0, \end{cases}$$

$$x \odot y = \operatorname{sgn}(x \cdot y)\Big(\exp\Big(\ln(1+|x|)\ln(1+|y|)\Big) - 1\Big),$$

uz konvenciju $\infty - \infty = \infty$, $0 \cdot \infty = 0$, $\ln(1+\infty) = \infty$ i $\exp(\infty) = \infty$. Ovako definisano pseudo-sabiranje je prikazano na slici 1.1, a pseudo-množenje na slici 1.2. Neutralni elemenat za $\odot$ je $e = \exp(1) - 1$.



Slika 1.1



Slika 1.2

Simetrično pseudo-množenje koje je distributivno nad simetričnim maksimumom (slučaj II) je ilustrovano u narednom primeru.

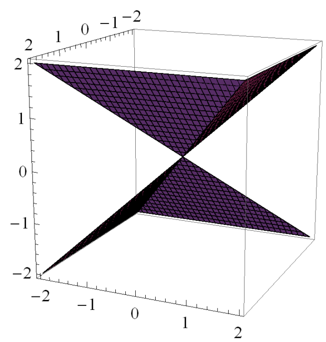
Primer 1.5. (i) Simetrično pseudo-sabiranje je simetrični maksimum $\oplus = \otimes$ na intervalu $[-1,1]$ i odgovarajuće pseudo-množenje $\odot = \cdot$ je klasično množenje, definisano na intervalu $[-1,1]$ sa (1.20), gde je generatorska funkcija data sa $g(x) = x$. Neutralni elemenat za $\odot$ je $e = F = 1$.

(ii) Simetrično pseudo-sabiranje je simetrični-maksimum $\oplus = \otimes$ (slika 1.3) definisan na intervalu $[-\infty, \infty]$. Odgovarajuće pseudo-množenje $\odot$ (slika 1.4), za sve $x, y \in [-\infty, \infty]$ je definisan sa (1.20), gde je g multiplikativni generator dat sa:

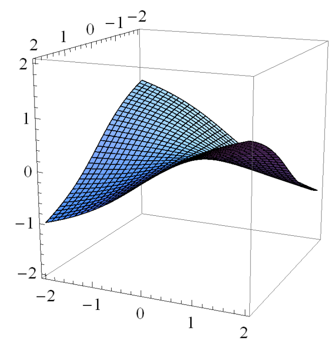
$$g(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x,$$

$g(\infty) = -g(-\infty) = 1$. Neutralni elemenat za $\odot$ je $e = F = \infty$. Za sve $x, y \in [-\infty, \infty]$, gde je $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}) = \infty$ i $\mathrm{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$, važi:

$$x \odot y = \mathrm{sgn}(x \cdot y)\, \mathrm{tg}\Big(\frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{arctg}\, |x| \cdot \mathrm{arctg}\, |y|\Big).$$



Slika 1.3



Slika 1.4

Sledeća lema razmatra posebne slučajeve pseudo-operacija na intervalu $[-F, F]$, a prikazana je kao originalan rezultat u [62].

Lema 1.6. *(i) Neka je $\oplus$ simetrično pseudo-sabiranje. Tada za sve $x_i \in [-F, F]$ (u slučaju I za sve $x_i \in [-F, F]$) važi*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} (-x_i) = -\bigoplus_{i=1}^{n} x_i.$$

(ii) Neka je $\odot$ simetrično pseudo-množenje. Tada za sve $x, y \in [-F, F]$, važi $x \odot (-y) = -(x \odot y)$.

Dokaz. (i) Neka je $\oplus = \oplus_g$. Pošto je $\oplus$ asocijativno, a g i g^{-1} su neparne, za sve $x_i \in [-F, F]$ imamo

$$\bigoplus_{i=1}^{n} (-x_i) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g(-x_i)\right) = -g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right) = -\bigoplus_{i=1}^{n} x_i.$$

Neka je $\oplus = \textcircled{\vee}$. Koristeći (1.17) i svojstvo (v) od $\oplus$, za sve $x_i \in [-F, F]$ imamo

$$\bigcirc\!\!\!\!\!\vee_{i=1}^{n}(-x_i) = \sup_{-x_i \geq 0}(-x_i) \textcircled{\vee} \inf_{-x_i<0}(-x_i) = (-\inf_{x_i \leq 0} x_i) \textcircled{\vee} (-\sup_{x_i>0} x_i) = -\bigcirc\!\!\!\!\!\vee_{i=1}^{n} x_i.$$

(ii) Neka je $\odot$ simetrično pseudo-množenje i $x, y \in [-F, F]$. Na osnovu svojstava (ii), (iv) i (v) od $\odot$ važi sledeće

$$\begin{aligned} -(x \odot y) &= (-(x \odot y)) \odot e = (x \odot y) \odot (-e) \\ &= x \odot (y \odot (-e)) = x \odot ((-y) \odot e) = x \odot (-y). \end{aligned}$$

$\square$

1.6.1 $\oplus$-mera

Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ neprazan konačan skup, $\mathcal{A}$ je $\sigma-$algebra podskupova od X i $\oplus$ je dato pseudo-sabiranje.

Definicija 1.17. [54] Skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [0, F]$ ($[-F, F]$ resp.) se zove $\oplus$-mera (realna $\oplus$-mera), ako ima sledeća svojstva:

- $m(\varnothing) = 0$
- $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} m(A_i)$ za svaki skup $A_1, A_2, \ldots, A_n$ iz $\mathcal{A}$, gde važi $A_i \cap A_j = \varnothing$, za sve $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, $i \neq j$,

Definicija 1.18. [54]

(i) Za fazi bi-meru $\mathbf{m}$ kažemo da je $\oplus$-dekompozabilna ako je

$$\mathbf{m}(A, B) = \mathbf{m}(E_1, F_1) \oplus \mathbf{m}(E_2, F_2),$$

za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$ i (E_1, F_1), $(E_2, F_2) \in \mathcal{Q}(X)$ takve da važi $E_1 \cup E_2 = A$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, i $F_1 \cup F_2 = B$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

(ii) Za fazi bi-meru $\mathbf{m}$ kažemo da je $\oplus$-CPT tipa ako postoje dve fazi mere m_1 i m_2 sa svojstvom:

$$\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) \oplus (-m_2(B)) \text{ za sve (A, B)} \in \mathcal{Q}\text{(X)}.$$

Sledeće tvrđenje razmatra kada fazi bi-mera $\mathbf{m}$ je $\oplus$-CPT tipa.

Tvrđenje 1.7. *[54] Ako je fazi bi-mera* $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to [-F, F]$ *$\oplus$-dekompozabilna, tada fazi bi-mera* $\mathbf{m}$ *je $\oplus$-CPT tipa sa $\oplus$-merama* m_1 *i* m_2 *definisanim sa:*

$$m_1(E) = \mathbf{m}(E, \varnothing) \quad i \quad m_2(E) = -\mathbf{m}(\varnothing, E), \tag{1.23}$$

za sve $E \subseteq X$.

Suprotan smer za tvrđenje 1.7 važi u slučaju I, međutim u slučajevima II i III ne važi, odnosno ako je fazi bi-mera $\mathbf{m}$ $\circledvee$-CPT tipa, dok m_1 i m_2 su $\vee$-mere, $\mathbf{m}$ ne mora da bude $\circledvee$-dekompozabilna (videti, primer 10 u [54]). Ako je $\mathbf{m}$ $\circledvee$-CPT tipa, gde su m_1 i m_2, $\vee$-mere, takve da $m_1(\{x_i\}) \neq m_2(\{x_j\})$, za svako $i \neq j$, tada $\mathbf{m}$ je $\circledvee$-dekompozabilno. Međutim, to nije dovoljan uslov za $\circledvee$-dekompozabilnost od $\mathbf{m}$. Određivanje potrebnog i dovoljnog uslova da fazi bi-mera bude $\circledvee$-dekompozabilna u oostavljeno je kao otvoren problem (videti [53]).

Glava 2

Bipolarni integrali

U ovoj glavi, kao što i sam naslov ukazuje, prikazane su definicije i najznačajnija svojstva bipolarnih integrala, kao što su diskretni bipolarni pseudo-integral, bipolarni Šokeov, bipolarni Šilkretov i bipolarni Sugenov integral, a koji su uvedeni i detaljno izučavani u [14, 15, 20, 21, 42, 54, 56, 58]. U radu [22] Greco i Rindone su predstavili fazi bi-mere i dali su karakterizaciju bipolarnih fazi integrala.

Takođe, u okviru ove glave je predstavljen nov bipolarni pan integral, a što predstavlja originalne rezultate prikazane u [59]. Pored toga ilustrovane su neke od njegovih osobina. Pozabavićemo se i poređenjem tog integrala sa drugim bipolarnim integralima.

2.1 Diskretni bipolarni pseudo-integral

Neka je dat poluprsten $([0, F], \oplus, \odot)$. Posmatrajmo pseudo-integral (1.14) nad skupom $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Diskretni bipolarni pseudo-integral funkcije $f : X \to [-F, F]$ je definisan kao razlika dva pseudo-integrala sa vrednostima u intervalu $[0, F]$.

Posmatrajmo funkciju $f : X \to [-F, F]$ i fazi bi-meru $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to [-F, F]$. U nastavku rada klasu koja sadrži sve funkcije $f : X \to [-F, F]$ označena je sa $\mathcal{S}$, pretpostavljajući da u slučaju I $Ran(f) \subseteq]-F, F[$, dok je sa $\mathcal{B}$ označena klasa svih pseudo-karakterističnih funkcija iz $\mathcal{S}$ i njihovih simetričnih parova:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \mathcal{B}^{+} \cup \mathcal{B}^{-} \cup \mathcal{B}^{0} \\ &= \{\chi_A \in \mathcal{S} \,|\, \varnothing \neq A \subseteq X\} \cup \{-\chi_A \in \mathcal{S} \,|\, \varnothing \neq A \subseteq X\} \cup \{\chi_{\varnothing}\}.\end{aligned}$$

Klasa svih $\oplus$-dekompozabilnih fazi bi-mera $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to [-F, F]$ će biti označena sa $\mathcal{M}$, pretpostavljajući da $Ran(\mathbf{m}) \subseteq]-F, F[$.

Za funkciju $f \in \mathcal{S}$, koristiće se sledeće oznake

$$X^{+} = \{x_i \in X \,|\, f(x_i) > 0\}, \qquad X^{-} = \{x_i \in X \,|\, f(x_i) < 0\},$$

$$X^{0} = \{x_i \in X \,|\, f(x_i) = 0\}, \qquad supp(f) = X^{+} \cup X^{-} = X \setminus X^{0}.$$

Dalje,

$$X^{+0} = X^{+} \cup X^{0} \text{ i } X^{-0} = X^{-} \cup X^{0}.$$

Neka je $\mathbf{m}$ fazi bi-mera. Za $f \in \mathcal{S}$, skupovne funkcije $\mu_{f^+}, \tilde{\mu}_{f^+} : \mathcal{P}(X) \to [-F, F]$ date su sa:

$$\mu_{f^+}(A) = \mathbf{m}(A \cap X^{+0},\, A \cap X^{-}). \tag{2.1}$$

$$\tilde{\mu}_{f^+}(A) = \mathbf{m}(A \cap X^{+},\, A \cap X^{-0}). \tag{2.2}$$

Sledeće tvrđenje je dokazano u [54].

Tvrđenje 2.1. *[54] Ako $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$, tada $\mu_{f^+} : \mathcal{P}(X) \to [-F, F]$ definisana sa (2.1) je realna $\oplus$-mera, za svako $f \in \mathcal{S}$.*

Funkcija $f \in \mathcal{S}$ može da se prikaže na sledeći način:

$$\begin{aligned} f &= \Big(\bigoplus_{i=1}^{n} f_i^{+} \odot \chi_{\{x_i\} \cap X^{+0}}\Big) \oplus \Big(-\bigoplus_{i=1}^{n} f_i^{-} \odot \chi_{\{x_i\} \cap X^{-}}\Big) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} |f_i| \odot \Big(\chi_{\{x_i\} \cap X^{+0}} \oplus (-\chi_{\{x_i\} \cap X^{-}})\Big), \end{aligned}$$

gde je $f_i^+ = f_i \vee 0$ i $f_i^- = (-f_i) \vee 0$, $i = 1, \dots, n$.

Pojam diskretnog bipolarnog pseudo-integrala je uveden u [54].

Definicija 2.1. [54] Neka je dato $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$, a neka su m_1 i m_2 date $\oplus$-mere definisane sa (1.23). Bipolarni pseudo-integral funkcije $f \in \mathcal{S}$ baziran na fazi bi-meri $\mathbf{m}$ je definisan sa

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} = \Big(\int_X^{\oplus} f^+ \odot dm_1 \Big) \oplus \Big(- \int_X^{\oplus} f^- \odot dm_2 \Big). \tag{2.3}$$

Sa druge strane, diskretni bipolarni pseudo-integral može biti predstavljen pomoću realne $\oplus$-mere μ_{f^+}. Naime, važe sledeća tvrđenja koja su dokazana u [54].

Tvrđenje 2.2. *[54] Bipolarni pseudo-integral funkcije $f \in \mathcal{S}$ baziran na fazi bi-meri $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ može biti zapisan u sledećoj formi*

$$\int_X^{\oplus} f \odot \, d\mathbf{m} = \bigoplus_{i=1}^{n} |f_i| \odot \mu_{f^+}(\{x_i\}) \, .$$

Napomena 2.1. Očigledno, ako imamo da je $\mu_{f^+}(A) = \tilde{\mu}_{f^+}(A)$ za sve $A \subseteq supp(f)$, tada jednakost iz prethodne teoreme važi.

Pokazano je u [54] da diskretni bipolarni pseudo-integral poseduje sledeća svojstva.

Tvrđenje 2.3. *[54] Bipolarni pseudo-integral funkcije $f \in \mathcal{S}$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ ima sledeće osobine:*

(i) monotonost: za sve $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ i za sve $f, \, h \in \mathcal{S}$, važi

$$f \leq h \Rightarrow \int_X^{\oplus} f \odot \, d\mathbf{m} \leq \int_X^{\oplus} h \odot \, d\mathbf{m};$$

(ii) *monotonost u odnosu na fazi bi-meru* $\mathbf{m}$*: za sve* $\mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}} \in \mathcal{M}$ *i za sve* $f \in \mathcal{S}$*, imamo da je*

$$\mathbf{m} \leq \tilde{\mathbf{m}} \Rightarrow \int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} \leq \int_X^{\oplus} f \odot d\tilde{\mathbf{m}};$$

(iii) *osnovna vrednost: za sve* $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ *i za sve pseudo-karakteristične funkcije* $\chi_A \in \mathcal{S}$*, gde je* $A \subseteq X$*, kao i za svako* $c \in [-F, F]$*, važi*

$$\int_X^{\oplus} (c \odot \chi_A) \odot d\mathbf{m} = \begin{cases} c \odot m_1(A), & c \geq 0 \\ c \odot m_2(A), & c < 0. \end{cases}$$

(iv) *pozitivna* $\odot$*-homogenost: u slučaju I i u slučaju II, za sve* $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$*, kao i za sve* $f \in \mathcal{S}$*, gde za svako* $c \in (0, F]$*, važi da je*

$$\int_X^{\oplus} (c \odot f) \odot d\mathbf{m} = c \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m};$$

(v) *asimetričnost: za sve* $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ *i za sve* $f \in \mathcal{S}$*, imamo da je*

$$\int_X^{\oplus} (-f) \odot d\mathbf{m} = -\int_X^{\oplus} f \odot d\hat{\mathbf{m}},$$

gde je $\hat{\mathbf{m}}(A, B) = -\mathbf{m}(B, A)$*, za sve* $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$ *i* $\hat{\mathbf{m}} \in \mathcal{M}$*.*

Sledeća lema predstavlja originalni naučni rezultat publikovan u [62].

Lema 2.4. *Neka je data funkcija* $f \in \mathcal{S}$*,* $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$*. Neka su* μ_{f^+} *i* $\tilde{\mu}_{f^+}$ *skupovne funkcije definisisane sa (2.1) i (2.2) na* $\mathcal{P}(X)$*. Ako je* $\hat{\mathbf{m}}(A, B) = -\mathbf{m}(B, A)$*, za sve* $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$*, tada važi:*

(i) $\hat{\mathbf{m}} \in \mathcal{M}$*;*

(ii) *za sve* $E \in \mathcal{P}(X)$*, takve da* $E \subseteq supp(f)$*, važi* $\mu_{f^+}(E) = -\hat{\mu}_{(-f)^+}(E)$*.*

(iii) za sve $E \in \mathcal{P}(X)$, važi $\mu_{f^+}(E) = -\tilde{\hat{\mu}}_{(-f)^+}(E)$ i $\tilde{\mu}_{f^+}(E) = -\hat{\mu}_{(-f)^+}(E)$.

Dokaz. (i) Neka $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ i $\hat{\mathbf{m}} : \mathcal{Q}(X) \to [-F, F]$. Definišimo sa $\hat{\mathbf{m}}(A, B) = -\mathbf{m}(B, A)$, za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$. Na osnovu tvrđenja 1.7 za fazi $\oplus$-mere $m_1, m_2 : \mathcal{P}(X) \to [0, F]$ date sa (1.23) važi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}(A, B) &= -\mathbf{m}(B, A) \\ &= -(m_1(B) \oplus (-m_2(A)) \\ &= m_2(A) \oplus (-m_1(B)). \end{aligned}$$

Pošto je $m_1(\varnothing) = m_2(\varnothing) = 0$, a m_1 i m_2 su monotono neopadajuće skupovne funkcije, po definiciji 1.5 sledi da je $\hat{\mathbf{m}}$ fazi bi-mera.

Treba pokazati da $\hat{\mathbf{m}}$ je $\oplus$-dekompozabilna. Neka je $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$. Za sve (E_1, F_1), $(E_2, F_2) \in \mathcal{Q}(X)$, takve da je $E_1 \cup E_2 = A$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ i $F_1 \cup F_2 = B$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, obzirom da je $\mathbf{m}$ $\oplus$-dekompozabilna važi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}(A, B) &= -\mathbf{m}(B, A) \\ &= -(\mathbf{m}(F_1, E_1) \oplus \mathbf{m}(F_2, E_2)) \\ &= \hat{\mathbf{m}}(E_1, F_1) \oplus \hat{\mathbf{m}}(E_2, F_2). \end{aligned}$$

Iz toga sledi da je $\hat{\mathbf{m}}$ $\oplus$-dekompozabilna, kao i da $\hat{\mathbf{m}} \in \mathcal{M}$.

(ii) Za funkciju $f \in \mathcal{S}$ i za $E \in \mathcal{P}(X)$, gde je $E \subseteq supp(f)$, važi sledeće

$$\begin{aligned} E \cap X_f^{+0} &= E \cap \{x_i \in X \mid f(x_i) \geq 0\} \\ &= E \cap \{x_i \in X \mid f(x_i) > 0\} \\ &= E \cap (X \setminus \{x_i \in X \mid -f(x_i) \geq 0\}) \\ &= E \cap (X \setminus \{x_i \in X \mid -f(x_i) > 0\}) \\ &= E \cap X_{-f}^{-}. \end{aligned}$$

Neka je $E \cap X_f^- = E \cap X_{-f}^{+0}$. Označimo sa $X_f^{+0} = X^{+0}$. Sada na osnovu (2.1) za $E \subseteq supp(f)$ važi sledeće

$$\mu_{f^+}(E) = \mathbf{m}(E \cap X^{+0}, E \cap X^-) = -\hat{\mathbf{m}}(E \cap X^-, E \cap X^{+0}) = -\hat{\mu}_{(-f)^+}(E).$$

(iii) Zaključak sledi na osnovu definicija skupovnih funkcija datih sa (2.1) i (2.2). $\square$

Koznačne funkcije (eng. co-signed) se uvode u cilju dokazivanja karakterizacije teoreme za bipolarni pseudo-integral koja je prikazana u [54].

Definicija 2.2. [54] Funkcije $f, h \in \mathcal{S}$ se nazivaju koznačnim funkcijama ako je $f(x) \cdot h(x) \geq 0$ za sve $x \in X$.

Označimo sa

$$supp(BPS) = \left\{ f \in \mathcal{S} \mid \int_X^{\oplus} f \odot \, d\mathbf{m} \neq 0 \right\} \quad \text{i} \quad BPS^0 = \mathcal{S} \setminus supp(BPS).$$

Tvrđenje 2.5. *[54] Neka su $\oplus = \ovee$ i $\odot = \odot_g$ (ili $\odot = \owedge$) par simetričnih pseudo-operacija. Za svako $\mathbf{m}$, kao i za sve koznačne funkcije $f, h \in \mathcal{S}$, gde važi $f \oplus h \in supp(BPS)$ ili $f, h \in BPS^0$, bipolarni pseudo-integral funkcije $f \in \mathcal{S}$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ ima sledeće svojstvo:*

$$\int_X^{\oplus} (f \oplus h) \odot \, d\mathbf{m} = \int_X^{\oplus} f \odot \, d\mathbf{m} \oplus \int_X^{\oplus} h \odot \, d\mathbf{m}.$$

Predstavićemo kroz sledeću definiciju funkcionelu $\mathbf{I}$, koja je neophodna za dokazivanje naredne teoreme prikazane u [54].

Definicija 2.3. [54] Neka je $\mathbf{I} : \mathcal{S} \to [-F, F]$. Funkcionela $\mathbf{I}$ je

(i) monotona na $\mathcal{B}$: ako za sve $\chi_A, \chi_B \in \mathcal{S}$, takvi da je $A \subseteq B \subseteq X$, važi sledeće

$$\mathbf{I}(\chi_A) \leq \mathbf{I}(\chi_B) \quad i \quad \mathbf{I}(-\chi_A) \geq \mathbf{I}(-\chi_B);$$

(ii) pozitivno $\odot$-homogeno na $\mathcal{B}$: ako za sve $\chi_A \in \mathcal{S}$, $A \subseteq X$, kao i za sve $c \in [0, F]$, važi da je

$$\mathbf{I}(c \odot \chi_A) = c \odot \mathbf{I}(\chi_A) \quad i \quad \mathbf{I}(c \odot (-\chi_A)) = c \odot \mathbf{I}(-\chi_A);$$

(iii) koznačno $\oplus$-aditivna: ako za sve koznačne funkcije $f,\ h \in \mathcal{S}$, sledi da je

$$\mathbf{I}\,(f \oplus h) = \mathbf{I}\,(f) \oplus \mathbf{I}\,(h)\,; \tag{2.4}$$

(iv) $\oplus$-deljiva na $\mathcal{B}$: ako za sve $\chi_A,\ -\chi_B \in \mathcal{S}$, takve da je $A \cap B = \varnothing$, kao i za sve $\chi_{E_1},\ -\chi_{F_1},\ \chi_{E_2},\ -\chi_{F_2} \in \mathcal{S}$ takve da je $E_1 \cup E_2 = A$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ i $F_1 \cup F_2 = B$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, važi

$$\mathbf{I}\,(\chi_A \oplus (-\chi_B)) = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{I}(\chi_{E_1} \oplus (-\chi_{F_1})) = -\mathbf{I}(\chi_{E_2} \oplus (-\chi_{F_2})).$$

Naredna teorema se odnosi na diskretni bipolarni pseudo-integral za slučaj I (1.18).

Teorema 2.6. *[54] Neka su $\oplus = \oplus_g$ i $\odot = \odot_g$ par simetričnih pseudo-operacija. Neka je dato $\mathbf{I} : \mathcal{S} \to [-F, F]$. Funkcionela $\mathbf{I}$ je monotona na $\mathcal{B}$, pozitivno $\odot$-homogena na $\mathcal{B}$ i koznačno $\oplus$-aditivna ako i samo ako postoji $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ takvo da je*

$$\mathbf{I}\,(f) = \int_X^{\oplus} f \odot\, d\mathbf{m},\ f \in \mathcal{S}.$$

Za slučajeve II (1.21) i III (1.22), važi slična teorema. Označimo sa

$$supp(\mathbf{I}) = \{\, f \in \mathcal{S} \mid \mathbf{I}(f) \neq 0 \,\} \quad \text{i} \quad \mathbf{I}^0 = \mathcal{S} \setminus supp(\mathbf{I}).$$

Teorema 2.7. *[54] Neka su $\oplus = ⓥ$ i $\odot = \odot_g$ (ili $\odot = ⓐ$) par simetričnih pseudo-operacija. Neka je $\mathbf{I} : \mathcal{S} \to [-F, F]$. Funkcionela $\mathbf{I}$ je monotona na $\mathcal{B}$, pozitivno $\odot$-homogena na $\mathcal{B}$, $\oplus$-deljiva na $\mathcal{B}$, koznačno $\oplus$-aditivna (2.4) za sve koznačne funkcije $f,\ h \in \mathcal{S}$ takve da je $f \oplus h \in supp(\mathbf{I})$ ili $f,\ h \in \mathbf{I}^0$ ako i samo ako postoji $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$, takvo da za sve $f \in \mathcal{S}$, važi sledeće*

$$\mathbf{I}\,(f) = \int_X^{\oplus} f \odot\, d\mathbf{m}.$$

U sledećem tvrđenju, dokazana je asimetričnost bipolarnog pseudo-integrala, što predstavlja originalne rezultate publikovane u [62].

Tvrđenje 2.8. *Ako je* $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ *i* $\hat{\mathbf{m}}(A,B) = -\mathbf{m}(B,A)$, *za* $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$, *tada za sve* $f \in \mathcal{S}$ *imamo*

$$\int_X^{\oplus} (-f) \odot d\mathbf{m} = -\int_X^{\oplus} f \odot d\hat{\mathbf{m}}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$. Definišimo $\hat{\mathbf{m}}(A,B) = -\mathbf{m}(B,A)$, za sve $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$. Po lemi 2.4(i) imamo $\hat{\mathbf{m}} \in \mathcal{M}$. Asimetričnost bipolarnog pseudo-integrala sledi iz tvrđenja 2.2, leme 2.4(ii)) i leme 1.6, pošto za sve $f \in \mathcal{S}$ imamo

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} &= \bigoplus_{i:\, x_i \in supp(f)} |f_i| \odot \mu_{f^+}(\{x_i\}) \\
&= \bigoplus_{i:\, x_i \in supp(-f)} |-f_i| \odot (-\hat{\mu}_{(-f)^+}(\{x_i\})) \\
&= -\bigoplus_{i:\, x_i \in supp(-f)} |-f_i| \odot \hat{\mu}_{(-f)^+}(\{x_i\}) \\
&= -\int_X^{\oplus} (-f) \odot d\hat{\mathbf{m}}.
\end{aligned}$$

□

Sledi definicija pseudo-razlike $\ominus$, koja je neophodna za dokazivanje narednog tvrđenja.

Definicija 2.4. Za sve $(x,y) \in [-F,F]^2 \setminus \{(F,F),(-F,-F)\}$ pseudo-razlika $\ominus$ je:

$$x \ominus y = x \oplus (-y) = g^{-1}(g(x) - g(y)).$$

U sledećem tvrđenju biće prezentovan bipolarni pseudo-integral u slučaju I (1.18), uz korišćenje pseudo-razlike, a što predstavlja originalne rezultate publikovane u [62].

Tvrđenje 2.9. *Bipolarni pseudo-integral funkcije* $f : X \to]-F, F[$ *bazirani na* $\oplus$*-dekompozabilnoj fazi bi-meri* $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to]-F, F[$ *u slučaju I (1.18) može biti prikazan na sledeći način:*

$$\begin{aligned}\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} &= \bigoplus_{i=1}^{n} \big(|f_{\sigma(i)}| \ominus |f_{\sigma(i-1)}|\big) \odot \mu_{f^+}(A_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} |f_{\sigma(i)}| \odot \Big(\mu_{f^+}(A_i) \ominus \mu_{f^+}(A_{i+1})\Big),\end{aligned}$$

gde $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ *označava permutaciju skupa indeksa,* A_i *su skupovi* $A_i = \{x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\}$*, za* $i \geq 2$*,* $A_1 = X$*,* $A_{n+1} = \emptyset$ *i* $f_{\sigma(0)} = 0$.

Dokaz. Pošto je $\mathbf{m}$ $\oplus$-dekompozabilna fazi bi-mera, prema tvrđenju 2.1, imamo da je μ_{f^+} realna $\oplus$-mera, pa je $g \circ \mu_{f^+}$ klasična mera. Za permutaciju skupa indeksa σ, pošto je $\oplus$ asocijativno, po tvrđenju 2.2, imamo

$$\begin{aligned}\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} &= \bigoplus_{i=1}^{n} |f_i| \odot \mu_{f^+}\left(\{x_i\}\right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} \left|f_{\sigma(i)}\right| \odot \mu_{f^+}\left(\left\{x_{\sigma(i)}\right\}\right) \\ &= g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g(\left|f_{\sigma(i)}\right|) \cdot (g(\mu_{f^+}(A_i)) - g(\mu_{f^+}(A_{i+1})))\right) \\ &= g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} (g\left(\left|f_{\sigma(i)}\right|\right) - g\left(\left|f_{\sigma(i-1)}\right|\right)) \cdot g(\mu_{f^+}(A_i))\right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} \big(|f_{\sigma(i)}| \ominus |f_{\sigma(i-1)}|\big) \odot \mu_{f^+}(A_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} |f_{\sigma(i)}| \odot \Big(\mu_{f^+}(A_i) \ominus \mu_{f^+}(A_{i+1})\Big),\end{aligned}$$

gde je $A_i = \{x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\}$, za $i \geq 2$, $A_1 = X$, $A_{n+1} = \varnothing$ i $f_{\sigma(0)} = 0$. $\square$

Za proizvoljne tri permutacije indeksa, prethodni rezultati će biti prikazani kroz naredni primer.

Primer 2.1. Neka je dato $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i funkcija f koja je definisana na sledeći način $f(x_1) = 0.1$, $f(x_2) = -0.3$, $f(x_3) = 0.5$. Funkcija $g(x) = \frac{x}{2}$, za $x \in [-\infty, \infty]$ je generator za $\oplus = \oplus_g, \odot = \odot_g$. Definišimo operacije $x \oplus y = x + y$, $x \odot y = \frac{xy}{2}$ za $x, y \in [-\infty, \infty]$. Neka m_1 i m_2 su mere date sa

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$
m_1	1.2	1.5	1.4
m_2	1.7	0.7	1.8

i $\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) - m_2(B)$, za $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$. Tada $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$. Po definiciji bipolarnog pseudo-integrala funkcije f baziranog na fazi bi-meri $\mathbf{m}$, dolazimo do sledećeg proračuna.

$$\begin{aligned} \int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} &= ((0.1 \odot 1.2) \oplus (0.5 \odot 1.4)) \oplus (-0.3 \odot 0.7) \\ &= \frac{0.1 \cdot 1.2}{2} + \frac{0.5 \cdot 1.4}{2} + \frac{-0.3 \cdot 0.7}{2} = 0.305. \end{aligned}$$

Uvedimo sledeću oznaku:

$$R = \bigoplus_{i=1}^{3} \left(|f_{\sigma(i)}| \ominus |f_{\sigma(i-1)}|\right) \odot \mu_{f^+}(A_i),$$

gde su $A_1 = X$, $A_2 = \{x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\}$, $A_3 = \{x_{\sigma(3)}\}$ i $f_{\sigma(0)} = 0$. Imamo

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	X
μ_{f^+}	1.2	−0.7	1.4	0.5	2.6	0.7	1.9

.

(i) Za $\sigma = (1, 2, 3)$ i $A_1 = X$, $A_2 = \{x_2, x_3\}$, $A_3 = \{x_3\}$, imamo

$$\begin{aligned} R &= ((0.1 - 0) \odot 1.9) \oplus ((0.3 - 0.1) \odot 0.7) \oplus ((0.5 - 0.3) \odot 1.4) \\ &= \frac{0.1 \cdot 1.9}{2} + \frac{0.2 \cdot 0.7}{2} + \frac{0.2 \cdot 1.4}{2} = 0.305. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $\sigma = (2, 3, 1)$ i $A_1 = X$, $A_2 = \{x_1, x_3\}$, $A_3 = \{x_1\}$, imamo

$$\begin{aligned} R &= ((0.3 - 0) \odot 1.9) \oplus ((0.5 - 0.3) \odot 2.6) \oplus ((0.1 - 0.5) \odot 1.2) \\ &= \frac{0.3 \cdot 1.9}{2} + \frac{0.2 \cdot 2.6}{2} + \frac{-0.4 \cdot 1.2}{2} = 0.305. \end{aligned}$$

(iii) Za $\sigma = (3,1,2)$ $A_1 = X$, $A_2 = \{x_1, x_2\}$, $A_3 = \{x_2\}$ važi

$$\begin{aligned} R &= ((0.5-0)\odot 1.9)\oplus((0.1-0.5)\odot 0.5)\oplus((0.3-0.1)\odot(-0.7)) \\ &= \frac{0.5\cdot 1.9}{2} + \frac{-0.4\cdot 0.5}{2} + \frac{0.2\cdot(-0.7)}{2} = 0.305. \end{aligned}$$

U sledećem primeru ilustrovano je kako se bipolarni pseudo-integral može koristiti kao integralni model za reprezentaciju relacije preferencije. Za više detalja videti [56].

Primer 2.2. Osoba donosi odluku o izboru jedne od tri opcije, sudeći na osnovu sledećeg skupa kriterijuma $X = \{Svojstvo1, Svojstvo2, Svojstvo3\}$.

	$Svojstvo1$	$Svojstvo2$	$Svojstvo3$
$Opcija1$	0.5	−0.5	0.3
$Opcija2$	−0.3	0.5	−0.5
$Opcija3$	0	−0.3	0.3

Neka je $\mathbf{I}(f) = \bigotimes_{i=1}^{3} |f_i| \cdot \mu_{f^+}(\{i\})$, gde je $\oplus = \otimes$, $\odot = \cdot$ i odgovarajuća dekompozabilna fazi bi-mera $\mathbf{m}$ (njene vrednosti određuju važnost (težinu) svakog para disjunktnih podskupova skupa kriterijuma) definisana sa $\mathbf{m}(A,B) = (m_1(A)) \oplus (-m_2(B))$, za $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$, gde su m_1 i m_2 $\oplus$-mere ($\vee$-mere) date sa

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
m_1	0.2	0.4	0.3
m_2	0.1	0.1	0.5

Kako je

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(f^{o1}) &= (0.5\cdot 0.2) \otimes (0.3\cdot 0.3) \otimes (-0.5\cdot 0.1) \\ &= 0.1 \otimes 0.09 \otimes (-0.05) = 0.1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(f^{o2}) &= (-0.3\cdot 0.1) \otimes (0.5\cdot 0.4) \otimes (-0.5\cdot 0.5) \\ &= (-0.03) \otimes 0.2 \otimes (-0.25) = -0.25, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(f^{o3}) &= (-0.3 \cdot 0.1) \otimes (0.3 \cdot 0.3)\\ &= (-0.03) \otimes 0.09 = 0.09,\end{aligned}$$

zaključujemo da će donosilac odluke preferirati $Opciju1$.

2.2 Bipolarni Šokeov integral

Posmatra se skup $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Neka je funkcija $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to [-1, 1]$ normalizovana fazi bi-mera. Za funkciju $f : X \to [-1, 1]$ neka važi $f_i = f(x_i), i = 1, ..., n$. Klasa svih funkcija $f : X \to [-1, 1]$ je označena sa $\widehat{\mathcal{S}}$.

Klasa svih normalizovanih fazi bi-mera na intervalu $[-1, 1]$, odnosno preslikavanja $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to [-1, 1]$, takva da važi $\mathbf{m}(X, \varnothing) = 1 = -\mathbf{m}(\varnothing, X)$ je označena sa $\widehat{\mathcal{M}}$.

Za svako $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$ na intervalu $[-1, 1]$, karakteristična funkcija $\chi_{(A,B)} \in \widehat{\mathcal{S}}$ može da se prikaže na sledeći način

$$\chi_{(A,B)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ -1, & x \in B, \\ 0, & x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Očigledno, za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, važi sledeće $\chi_{(A,B)} = \chi_A - \chi_B$

Za $t \in]0, 1]$, par skupova $(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}, \{x \in X \mid f(x) \leq -t\})$, skraćeno označenih sa $(\{f \geq t\}, \{f \leq -t\})$, pripada $\mathcal{Q}(X)$. Za slučaj kada je $t = 0$, umesto para skupova $(\{f \geq 0\}, \{f \leq 0\})$, koristićemo sledeći par $(\{f \geq 0\}, \{f < 0\})$.

Označimo sa X_n konačan skup kardinalnosti n, za sve $n \in \mathbb{N}$. Uvedimo oznaku $\mathcal{S}_n$ za klasu svih funkcija koje preslikavaju X_n u interval $[-1, 1]$, dok je $\mathcal{M}_n$ klasa svih normalizovanih fazi bi-mera na $\mathcal{Q}(X_n)$.

Definicija 2.5. [22] Bipolarni Šokeov integral funkcije $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ je definisan sa

$$BCh(f, \mathbf{m}) = \int_0^{+\infty} \mathbf{m}(\{x_i \in X : f_i > t\}, \{x_i \in X : f_i < t\})dt. \qquad (2.5)$$

Za više detalja videti [15, 23].

Bipolarni Šokeov integral za diskretni slučaj u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m}$ za svako $f : X \to [-1, 1]$ može biti predstavljen na sledeći način

$$BCh(f, \mathbf{m}) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(|f_{\sigma(i)}| - |f_{\sigma(i-1)}|)\mathbf{m}(\{x_j \in X : f_j \geq |f_{\sigma(i)}|\}, \{x_j \in X : f_j \leq -|f_{\sigma(i)}|\})$$

gde σ označava permutaciju elemenata skupa takvu da važi $0 = |f_{\sigma(0)}| \leq |f_{\sigma(1)}| \leq ... \leq |f_{\sigma(n)}|$.

Na osnovu rezultata prikazanih u [23] i osobina bipolarnog Šokeovog integrala datih u [21, 22] imamo sledeća svojstva ovog integrala:

(Ch1) $BCh(c \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m}) = c \cdot \mathbf{m}(A, B)$, za sve $c \in [0, 1]$ i za sve $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_n$, $(A, B) \in \mathcal{Q}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$;

(Ch2) Za sve parove $(f, \mathbf{m}_1) \in \mathcal{S}_{n_1} \times \mathcal{M}_{n_1}$, i $(g, \mathbf{m}_2) \in \mathcal{S}_{n_2} \times \mathcal{M}_{n_2}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju

$$\mathbf{m}_1(\{f \geq t\}, \{f \leq -t\}) \geq \mathbf{m}_2(\{g \geq t\}, \{g \leq -t\}), \qquad (2.6)$$

za svako $t \in]0, 1]$, važi da je

$$BCh(f, \mathbf{m}_1) \geq BSh(g, \mathbf{m}_2).$$

U sledećoj teoremi je dat potreban i dovoljan uslov da je funkcija agregacije bipolarni Šokeov integral.

Teorema 2.10. *[22] Funkcija agregacije* $\mathbf{A} : [-1, 1]^n \to [-1, 1]$ *je idempotenta i bipolarno komonotono aditivna akko postoji fazi bi-mera* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ *takva da za svaku funkciju* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *važi* $\mathbf{A}(\mathbf{f}) = BCh(f, \mathbf{m})$, *gde je* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$.

Za više detalja videti [14, 15, 22, 23, 58, 59].

2.3 Bipolarni Šilkretov integral

Definicija 2.6. [22] Bipolarni Šilkretov integral funkcije $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ je dat sa

$BSh(f, \mathbf{m}) =$

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mid f_i \mid \cdot \mathbf{m}\Big(\{x_j \in X : f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X : f_j \leq - \mid f_i \mid\}\Big). \tag{2.7}$$

Sledeći primer ilustruje prethodno navedenu definiciju 2.7.

Primer 2.3. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i $\mathbf{m}$ normalizovana fazi bi-mera takva da važi $\mathbf{m}(\{x_1, x_2\}, \{x_3\}) = 0.6$, $\mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_3\}) = 0.4$ i $\mathbf{m}(\emptyset, \{x_3\}) = -0.5$. Vrednosti funkcije određujemo na sledeći način $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0.6$, $f(x_3) = -0.8$. Iz definicije bipolarnog Šilkretovog integrala imamo:

$$\begin{aligned} BSh(f, \mathbf{m}) &= (0 \cdot \mathbf{m}(\{x_1, x_2\}, \{x_3\})) \otimes (0.6 \cdot \mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_3\})) \\ &\quad \otimes (0.8 \cdot \mathbf{m}(\emptyset, \{x_3\})) \\ &= (0 \cdot 0.6) \otimes (0.6 \cdot 0.4) \otimes (0.8 \cdot (-0.5)) \\ &= 0 \otimes 0.24 \otimes (-0.4) = -0.4. \end{aligned}$$

Na osnovu rezultata uvedenih u [23] i osobina bipolarnog Šilkretovog integrala datih u [22] imamo sledeća svojstva ovog integrala:

(Sh1) Za sve $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$, $c \in [0, 1]$ i $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$ važi

$$BSh(c \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m}) = c \cdot \mathbf{m}(A, B).$$

(Sh2) Za sve parove $(f, \mathbf{m}_1) \in \mathcal{S}_{n_1} \times \mathcal{M}_{n_1}$ i $(g, \mathbf{m}_2) \in \mathcal{S}_{n_2} \times \mathcal{M}_{n_2}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju

$$\mathbf{m}_1(\{f \geq t\}, \{f \leq -t\}) \geq \mathbf{m}_2(\{g \geq t\}, \{g \leq -t\}) \tag{2.8}$$

za svako $t \in]0, 1]$, važi da je

$$BSh(f, \mathbf{m}_1) \geq BSh(g, \mathbf{m}_2).$$

(Sh3) Bipolarni Šilkretov integral je bipolarno komonotono maksitivan, odnosno za realne brojeve l_j, $j = 1, ..., k$ takve da važi $0 < l_1 < l_2 < ... < l_k \leq 1$ i za $(A_j, B_j) \in \mathcal{Q}(X)$, $j = 1, 2, ..., k$ takve da $A_{j+1} \subseteq A_j$ i $B_{j+1} \subseteq B_j$ za sve $j = 1, 2, ..., k-1$ imamo da je

$$BSh(\bigvee_{j=1}^{k} l_j \cdot \chi_{(A_j,B_j)}, \mathbf{m}) = \bigvee_{j=1}^{k} BSh(l_j \cdot \chi_{(A_j,B_j)}, \mathbf{m}).$$

Pre nego što bude navedena teorema, koja daje potreban i dovoljan uslov da je funkcija agregacije jednaka bipolarnom Šilkretovom integralu, uvešćemo određene oznake i pojmove. Sa $\mathbf{1}_{(A,B)}$ se obeležava n-torka $(y_1, y_2, ..., y_n)$ gde je

$$y_i = \begin{cases} 1, & x_i \in A, \\ -1, & x_i \in B, \\ 0, & x_i \notin A \cup B, \end{cases}$$

za svako $i = 1, 2, ..., n$. Ako pretpostavimo da su $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k$ elementi skupa $[-1, 1]^n$ i $K = \{1, 2, ..., k\}$, tada n-torka $\bigvee_{j \in K} \mathbf{x}^k$ ima i-tu koordinatu $\bigvee_{s=1}^{k} x_i^s$. Neka su l_j, $j = 1, ..., k$ realni brojevi takvi da važi $0 < l_1 < l_2 < ... < l_k \leq 1$ i $(A_j, B_j) \in \mathcal{Q}(X)$, $j = 1, 2, ..., k$ dok je $A_{j+1} \subseteq A_j$ i $B_{j+1} \subseteq B_j$ za sve $j = 1, 2, ..., k-1$. Kažemo da je funkcija agregacije $\mathbf{A} : [-1, 1]^n \to [-1, 1]$ *bipolarno komonotono maksitivna* ako važi

$$\mathbf{A}(\bigvee_{j \in K} l_j \cdot \mathbf{1}_{(A_j,B_j)}) = \bigvee_{j \in K} \mathbf{A}(l_j \cdot \mathbf{1}_{(A_j,B_j)}).$$

U sledećoj teoremi je dat potreban i dovoljan uslov da je funkcija agregacije bipolarni Šilkretov integral.

Teorema 2.11. *[22] Funkcija agregacije $\mathbf{A} : [-1, 1]^n \to [-1, 1]$ je idempotenta, homogena i bipolarno komonotono maksitivna akko postoji fazi bi-mera $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ takva da za svaku funkciju $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ važi $\mathbf{A}(\mathbf{f}) = BSh(f, \mathbf{m})$, gde je $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$.*

Za više detalja videti [14, 15, 22, 23, 59].

2.4 Bipolarni Sugenov integral

Definicija 2.7. [22] Bipolarni Sugenov integral funkcije $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ je dat sa

$$BSu(f,\mathbf{m}) =$$
$$\bigovee_{i=1}^{n} \mid f_i \mid \owedge \mathbf{m}\Big(\{x_j \in X : f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X : f_j \leq - \mid f_i \mid\}\Big). \tag{2.9}$$

Sledeći primer ilustruje izračunavanje bipolarnog Sugenovog integrala.

Primer 2.4. Posmatrajmo funkciju f i fazi bi-meru $\mathbf{m}$ date u primeru 2.3. Iz definicije bipolarnog Sugenovog integrala imamo da vrednost ovog integrala iznosi:

$$\begin{aligned} BSu(f,\mathbf{m}) &= (0 \owedge \mathbf{m}(\{x_1,x_2\},\{x_3\})) \ovee (0.6 \owedge \mathbf{m}(\{x_2\},\{x_3\})) \\ &\quad \ovee (0.8 \owedge \mathbf{m}(\emptyset,\{x_3\})) \\ &= (0 \owedge 0.6) \ovee (0.6 \owedge 0.4) \ovee (0.8 \owedge (-0.5)) \\ &= 0 \ovee 0.4 \ovee (-0.5) = -0.5. \end{aligned}$$

Na osnovu rezultata uvedenih u [23] i osobina bipolarnog Sugenovog integrala datih u [21, 22] imamo sledeća svojstva ovog integrala:

(Su1) Za sve $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$, $c \in [0,1]$ i $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$ važi

$$BSu(c \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m}) = c \owedge \mathbf{m}(A,B).$$

(Su2) Za sve parove $(f,\mathbf{m}_1) \in \mathcal{S}_{n_1} \times \mathcal{M}_{n_1}$ i $(g,\mathbf{m}_2) \in \mathcal{S}_{n_2} \times \mathcal{M}_{n_2}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, za koje je zadovoljena nejednakost (2.8), za svako $t \in]0,1]$, važi da je

$$BSu(f,\mathbf{m}_1) \geq BSu(g,\mathbf{m}_2).$$

(Su3) Bipolarni Sugenov integral je bipolarno komonotono maksitivan, odnosno važi

$$BSu(\bigovee_{j=1}^{k} l_j \cdot \chi_{(A_j,B_j)}, \mathbf{m}) = \bigovee_{j=1}^{k} BSu(l_j \cdot \chi_{(A_j,B_j)}, \mathbf{m}).$$

za sve realne brojeve l_j, $j = 1, ..., k$ i parove skupova $(A_j, B_j) \in \mathcal{Q}(X)$, $j = 1, 2, ..., k$.

(Su4) Bipolarni Sugenov integral je bipolarno stabilan u odnosu na znak, odnosno za svako $a, b \in]0,1]$ i za svako $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$ važi

$$BSu(a \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m}) \cdot BSu(b \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m}) > 0$$

ili

$$BSu(a \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m}) = BSu(b \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m}) = 0.$$

(Su5) Bipolarni Sugenov integral je bipolarno stabilan u odnosu na minimum, odnosno za svako $a, b \in]0,1]$ takvo da je $a > b$ i za svako $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$ važi

$$\left|BSu(a \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m})\right| \geq \left|BSu(b \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m})\right|$$

i ako je

$$\left|BSu(a \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m})\right| > \left|BSu(b \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m})\right|$$

tada je

$$\left|BSu(b \cdot \chi_{(A,B)}, \mathbf{m})\right| = b.$$

Naredni primer ilustruje tri prethodno definisana bipolarna integrala u odnosu na fazi bi-meru koja je CPT-tipa.

Primer 2.5. Neka je $\mathbf{m}$ fazi bi-mera CPT-tipa definisana sa $\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) - m_2(B)$, za $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, m_1 i m_2 su aditivne fazi mere date sa

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
m_1	0.2	0.7	0.1
m_2	0.5	0.2	0.3

.

Neka je $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0.6, f(x_3) = -0.8$. Iz definicije bipolarnog Šokeovog integrala sledi

$$\begin{aligned} BCh(f,\mathbf{m}) &= 0 \cdot \mathbf{m}(\{1,2\},\{3\}) + 0.6 \cdot \mathbf{m}(\{2\},\{3\}) + 0.2 \cdot \mathbf{m}(\emptyset,\{3\}) \\ &= 0 \cdot (0.9 - 0.3) + 0.6 \cdot (0.7 - 0.3) + 0.2 \cdot (-0.3) = 0.18. \end{aligned}$$

Bipolarni Šilkretov integral se može izračunati na sledeći način:

$$\begin{aligned} BSh(f,\mathbf{m}) &= (0 \cdot \mathbf{m}(\{1,2\},\{3\})) \varovee (0.6 \cdot \mathbf{m}(\{2\},\{3\})) \varovee (0.8 \cdot \mathbf{m}(\emptyset,\{3\})) \\ &= (0.6 \cdot (0.7 - 0.3)) \varovee (0.8 \cdot (-0.3)) = 0. \end{aligned}$$

Bipolarni Sugenov integral se može izračunati na sledeći način:

$$BSu(f,\mathbf{m}) = (0 \varowedge 0.6) \varovee (0.6 \varowedge 0.4) \varovee (0.8 \varowedge (-0.3)) = 0.4.$$

U sledećoj teoremi je dat potreban i dovoljan uslov da je funkcija agregacije bipolarni Sugenov integral.

Teorema 2.12. *[22] Funkcija agregacije* $\mathbf{A} : [-1,1]^n \to [-1,1]$ *je idempotenta, bipolarno komonotono maksitivna, bipolarno stabilna u odnosu na znak i u odnosu na minimum akko postoji fazi bi-mera* $\mathbf{m}$ *takva da za svaku funkciju* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *važi* $\mathbf{A}(\mathbf{f}) = BSu(f,\mathbf{m})$, *gde je* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$.

2.5 Diskretni bipolarni pan integral

Neki autori [4, 30, 35, 66] su proučavali pan-operacije. Pan-operacije zadovoljavaju sve osobine pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$, a pomoću kojih se definiše pan-integral (za više detalja videti [66, 67]). U ovom poglavlju su pan integrali bazirani na klasičnim operacijama sabiranja $(+)$ i množenja $(\cdot)$.

U okviru ovog poglavlja predstavljeni su originalni rezultati prikazani u [59], koji se odnose na definisanje novog diskretnog bipolarnog pan integrala, proučavanje njegovih osobina uz primere, kao i poređenje ovog integrala sa prethodno navedenim bipolarnim integralima.

Neka je funkcija $f : X \to [0, \infty[$, $(A_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{R}$, $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i = X$, i $a_i \geq 0$, za sve $i \in \mathcal{I}$, gde $\mathcal{R}$ je klasa svih konačnih particija od $\mathcal{P}(X)$. Za svako $i \in \mathcal{I}$, definišimo $z_i : X \to [0, \infty[$ gde je

$$z_i = a_i \cdot 1_{A_i}, \tag{2.10}$$

odnosno

$$z_i(x) = \begin{cases} a_i, & \text{ako } x \in A_i, \\ 0, & \text{ako } x \notin A_i. \end{cases}$$

Označimo sa $\mathcal{Z}$ klasu svih funkcija z_i.

Definicija 2.8. [66] Neka je $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty[$ data fazi mera. Pan integral funkcije $f : X \to [0, \infty[$ u odnosu na fazi meru m je dat sa

$$PanI(f, m) = \sup\left\{\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i \cdot m(A_i) :\ z_i \in \mathcal{Z},\ \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i \leq f\right\}. \tag{2.11}$$

Iz definicije imamo sledeći prikaz pan integrala funkcije $f : X \to [0, \infty[$, u odnosu na meru m:

$$PanI(f, m) = \sup\left\{\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\inf_{x\in A_i} f(x)\right) \cdot m(A_i) : (A_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{R}\right\}. \tag{2.12}$$

Bipolarni pan integral funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ na konačnom skupu X će biti definisan u odnosu na fazi bi-meru CPT-tipa na sledeći način.

Definicija 2.9. Neka je $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to \mathbb{R}$ data fazi bi-mera CPT-tipa. Bipolarni pan integral funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m}$ je

$$BPanI(f, \mathbf{m}) = PanI(f^+, m_1) - PanI(f^-, m_2). \tag{2.13}$$

gde su m_1 i m_2 date sa (1.23), dok su f^+,f^- date sa (1.8).

Ilustracija ovog integrala je prikazana u narednom primeru.

Primer 2.6. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $f : X \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$f(x) = \begin{cases} -0.2, & x = 1, \\ -0.6, & x = 2, \\ 0.8, & x = 3. \end{cases}$$

Neka je $\mathbf{m}$ fazi bi-mera definisana na $\mathcal{Q}(X)$ takva da važi

$$\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) - m_2(B), \text{ za sve } (A, B) \in \mathcal{Q}(X),$$

gde su m_1 i m_2 date sa

E	$m_1(E)$	$m_2(E)$
$\{1\}$	0.5	0.5
$\{2\}$	0.2	0.4
$\{3\}$	0.2	0.4
$\{1, 2\}$	0.5	0.6
$\{2, 3\}$	0.3	0.4
$\{1, 3\}$	0.5	0.8
$\{1, 2, 3\}$	1	1

Na osnovu (2.12), računamo $PanI(f^+, m_1) = 0.8 \cdot m_1(\{3\}) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$, i $PanI(f^-, m_2)$ uzimajući supremum (maksimum) sledećih brojeva:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0.2 \cdot m_2(\{1\}) + 0.6 \cdot m_2(\{2\}) \\ &= 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.4 = 0.34; \\ n_2 &= 0.2 \cdot m_2(\{1\}) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1; \\ n_3 &= 0.6 \cdot m_2(\{2\}) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24; \\ n_4 &= 0.2 \cdot m_2(\{1, 2\}) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12. \end{aligned}$$

Imamo da je, $PanI(f^-, m_2) = \sup\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = 0.34$ i konačno dobijamo

$$BPanI(f, \mathbf{m}) = 0.16 - 0.34 = -0.18.$$

Po definiciji se lako može videti da je bipolarni pan integral pozitivno homogen i monoton.

2.5.1 Poređenje bipolarnih integrala

U okviru ovog poglavlja proučene su veze između bipolarnog pan integrala, bipolarnog Šokeovog integrala i bipolarnog pseudo-integrala.

U [15] je dokazano da ako je $\mathbf{m}$ fazi bi-mera CPT-tipa, tada se bipolarni Šokeov integral (2.5) može izraziti kao razlika dva Šokeova integrala na sledeći način:

$$BCh(f, \mathbf{m}) \quad = \quad ChI(f^+, m_1) - ChI(f^-, m_2). \tag{2.14}$$

Teorema 2.13. *Neka je data fazi bi-mera* $\mathbf{m}$ *CPT-tipa.*

(i) Ako je m_1 *superaditivna i* m_2 *je subaditivna, tada za sve* $f : X \to \mathbb{R}$ *važi:*

$$BPanI(f, \mathbf{m}) \leq BCh(f, \mathbf{m}).$$

(ii) Ako je m_1 *subaditivna i* m_2 *je superaditivna, tada za sve* $f : X \to \mathbb{R}$ *važi:*

$$BPanI(f, \mathbf{m}) \geq BCh(f, \mathbf{m}).$$

Dokaz. Na osnovu [67], [69], ako je fazi mera $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty[$ superaditivna, tada za sve $f : X \to [0, \infty[$ važi sledeće:

$$PanI(f, m) \leq Ch(f, m).$$

Ako je m subaditivna, tada za sve f, važi obrnuta nejednakost. Sledi da na osnovu definicije 2.9 tvrđenje važi. $\square$

Kroz naredni primer biće data ilustracija prethodne teoreme.

Primer 2.7. Neka su funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i fazi bi-mera $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to \mathbb{R}$ definisane kao u primeru 2.6. Izračunajmo bipolarni Šokeov integral funkcije f u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m}$ koristeći definiciju 1.7. Imamo

$$Ch(f^+, m_1) = 0.8 \cdot m_1(\{3\}) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$$

i

$$\begin{aligned} Ch(f^-, m_2) &= 0.2 \cdot m_2(\{1,2\}) + (0.6 - 0.2) \cdot m_2(\{2\}) \\ &= 0.2 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.4 \\ &= 0.28. \end{aligned}$$

Sledi da je

$$\begin{aligned} BCh(f, \mathbf{m}) &= Ch(f^+, m_1) - ChI(f^-, m_2) \\ &= 0.16 - 0.28 \\ &= -0.12. \end{aligned}$$

Iz primera 2.6 imamo

$$\begin{aligned} BPanI(f, \mathbf{m}) &= PanI(f^+, m_1) - PanI(f^-, m_2) \\ &= 0.16 - 0.34 = -0.18, \end{aligned}$$

i takođe važi

$$-0.18 = BPanI(f, \mathbf{m}) < BCh(f, \mathbf{m}) = -0.12.$$

Međutim, m_1 nije superaditivna i m_2 je subaditivna fazi mera, pa ova nejednakost ne mora da važi za sve funkcije, npr. za f^- imamo $BPanI(f^-, \mathbf{m}) > BCh(f^-, \mathbf{m})$, pošto je

$$BPanI(f^-, \mathbf{m}) = PanI(f^-, m_1) = 0.22,$$

$$BCh(f^-, \mathbf{m}) = Ch(f^-, m_1) = 0.18.$$

Jedan specijalan slučaj bipolarnog diskretnog integrala je diskretni bipolarni pseudo-integral (2.1) koji je definisan u [53], baziran na operacijama $\oplus = +$ i $\odot = \cdot$ u odnosu na aditivnu fazi bi-meru $\mathbf{m}$.

Za svako $f : X \to \mathbb{R}$, imamo

$$f = f^+ - f^- = \sum_{i=1}^{k} |f_i| \cdot (1_{A_i \cap X^+} - 1_{A_i \cap X^-}),$$

gde je $|f_i| = |f(x)|$, za sve $x \in A_i$ i gde su A_i disjuktni skupovi, a $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X$. Ako je $\mathbf{m}$ aditivna fazi bi-mera, tada je μ_{f^+} aditivna skupovna funkcija, bipolarni pseudo-integral, tj. $\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}$ može biti izražen kao:

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} |f_i| \cdot \mu_{f^+}(\{x_i\}).$$

Teorema 2.14. *Neka je* $\mathbf{m}$ *aditivna fazi bi-mera. Tada za sve* $f : X \to \mathbb{R}$ *važi:*

$$BPanI(f, \mathbf{m}) = BCh(f, \mathbf{m}) = \int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{m}$ aditivna fazi bi-mera. Tada važi:

$$\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) - m_2(B),$$

gde su mere m_1, m_2, date sa (1.23), pa na osnovu definicija 2.1, 2.5 i 2.9, tvrđenje sledi. $\square$

Neka je $\mathbf{m}$ fazi bi-mera. Definišimo fazi bi-meru $\hat{\mathbf{m}}$ sa:

$$\hat{\mathbf{m}}(A, B) = -\mathbf{m}(B, A),$$

za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$. Neka BDI označava bilo koji od tri integrala: $BPanI$, BCh, $\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}$, dok je u poslednjem slučaju $\mathbf{m}$ aditivna.

Teorema 2.15. *Neka je* $\mathbf{m}$ *fazi bi-mera CPT-tipa i neka je dato preslikavanje* $f : X \to \mathbb{R}$. *Tada važi:*

$$BDI(f, \mathbf{m}) = BDI(f^+, \mathbf{m}) - BDI(f^-, \hat{\mathbf{m}}).$$

Dokaz. Neka je fazi bi-mera $\mathbf{m}$ CPT-tipa. Za date fazi mere m_1 i m_2, koje su date sa (1.23), važi da za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, sledi da je:

$$\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) - m_2(B).$$

Takođe važi da je:

$$\hat{\mathbf{m}}(A, B) = -\mathbf{m}(B, A) = m_2(A) - m_1(B).$$

Pošto je $\hat{\mathbf{m}}$ fazi bi-mera CPT-tipa, tada po definiciji 2.9 tvrđenje važi za $BPanI(f, \mathbf{m})$, dok na osnovu jednakosti (2.14) tvrđenje važi za $BCh(f, \mathbf{m})$. U slučaju bipolarnog pseudo-integrala, $\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}$, tvrđenje sledi na osnovu definicije 2.1. $\square$

Glava 3

Jensenova nejednakost za bipolarni pseudo-integral

Jensenova nejednakost dobila je ime po danskom matematičaru Johan Ludwig Jensenu (1859 – 1925). Značaj Jensenove nejednakosti se ogleda u tome da su iz nje izvedene mnoge druge nejednakosti. Među njima su Čebiševljeva nejednakost, zatim nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, kao i druge.

Jedna od najčešće proučavanih i korišćenih nejednakosti koju zadovoljava Lebegov integral je Jensenova nejednakost. Ova nejednakost ima primenu u mnogim disciplinama, posebno u teoriji verovatnoće, informacionim naukama, teoriji optimizacije, matematičkoj ekonomiji itd. U okviru primene teorije odlučivanja u privredi postoji potreba za razvojem integrala kod kojih su skale bipolarne. Upravo iz tog razloga cilj ove disertacije jeste da se ispita specijalan tip Jensen-Stefensenove nejednakosti [51], koji predstavlja tip Jensenove nejednakosti za uređene ponderisane sredine sa realnim težinskim koeficijentima. Prema tome, glavni zadatak ove disertacije jeste da ispita ovu nejednakost u okviru teorije neaditivnih mera i integrala, a koja ima uticaj na razvoj nauke i istraživanja, kao i mnogobrojne primene.

U okviru ove glave prikazane su nove teoreme, odnosno originalni rezultati Jensen-Stefensenove nejednakosti za bipolarni pseudo-integral, a koji su publikovani u [61, 62]. Posebno će biti razmatrana tri slučaja u odnosu na tri tipa simetričnih pseudo-operacija sabiranja $\oplus$ i množenja $\odot$.

3.1 Jensenova nejednakost za bipolarni pseudo-integral

Neka je data funkcija $f \in \mathcal{S}$, fazi bi-mera $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ i $e = g^{-1}(1)$, a koje su definisane u poglavlju 2.1. U slučaju I (1.18), važi da je $Ran(f) \subseteq]-F, F[$ i $Ran(\mathbf{m}) \subseteq]-F, F[$. Oznaka $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f)$ označava *signum bipolarnog pseudo-integrala funkcije* f *u odnosu na fazi bi-meru* $\mathbf{m}$.

Par neparnih funkcija $\varphi : [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$ i $g : [-F, F] \to [-\infty, \infty]$, se naziva *konveksno-konkavni par funkcija* ako su sledeća svojstva zadovoljena:

- φ je konveksna, strogo rastuća i neprekidna na $[0, \infty]$,

- g je konkavna, strogo rastuća i neprekidna na $[0, F]$,

- $\varphi(F) \leq F$ i $g \circ \varphi$ je konveksna funkcija na $[0, F]$.

Primetimo da zbog neparnosti funkcija g i φ i prethodnih osobina važi sledeće:

- φ je konkavna, strogo rastuća i neprekidna na $[-\infty, 0]$,
- g je konveksna, strogo rastuća i neprekidna na $[-F, 0]$,

- $\varphi(-F) \geq -F$ i $g \circ \varphi$ je konkavna funkcija na $[-F, 0]$.

Definicija 3.1. Neka su date funkcije $\varphi : [-F, F] \to [-F, F]$, $g : [-F, F] \to [-\infty, \infty]$, gde je g strogo rastuća i kompozicija $g \circ \varphi \circ g^{-1} : [-N, M] \to [-\infty, \infty]$ je dobro definisana. Pored toga važi da je $M = g(F)$ i $N = -g(-F)$. Funkcija φ je g-konveksno-konkavna (ili φ je g-konkavno-konveksna) ako je kompozicija $g \circ \varphi \circ g^{-1}$ konveksna funkcija (ili konkavna funkcija) na $[g(0), M]$ i važi da je $g \circ \varphi \circ g^{-1}$ je konkavna funkcija (konveksna funkcija) na $[-N, g(0)]$.

Može se primetiti da ako su funkcije φ i g iz prethodne definicije neparne funkcije, tada je $g \circ \varphi \circ g^{-1} : [-M, M] \to [-\infty, \infty]$ isto neparna funkcija, gde je $M = g(F)$.

Važi sledeća lema.

Lema 3.1. *Neka su date $\varphi : [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$ i $g : [-F, F] \to [-\infty, \infty]$.*

(i) Ako su φ i g neparne i rastuće funkcije, tada za svako $x \in [-\infty, \infty]$ i za sve $t \in [-F, F]$ važi

$$\varphi(|x|) = |\varphi(x)|, \qquad g(|t|) = |g(t)|.$$

(ii) Ako je φ rastuća funkcija, tada za svako $x_i \in [0, \infty]$, $i = 1, \ldots, n$ važi

$$\varphi\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(x_i), \qquad \varphi\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi(x_i).$$

(iii) Ako je funkcija φ g-konveksno-konkavna i $\varphi(0) = g(0) = 0$, tada za sve $x \in [0, F]$ i $0 \leq \lambda \leq e$ važi

$$\varphi(\lambda \odot x) \leq \lambda \odot \varphi(x),$$

a za svako $x \in [-F, 0]$ i $0 \leq \lambda \leq e$, važi

$$\varphi(\lambda \odot x) \geq \lambda \odot \varphi(x).$$

Dokaz. Stavke (i) i (ii) se dokazuju direktno. Dokažimo tvrđenje leme 3.1(iii). Pošto je $\varphi(0) = g(0) = 0$, $g \circ \varphi \circ g^{-1}$ konveksna funkcija na $[0, M]$, gde je $M = g(F)$ i g je strogo rastuća, za $x \in [0, F]$ i $0 \leq \lambda \leq e$, onda važi sledeće $0 \leq g(\lambda) \cdot g(x) \leq M$. Imamo da je

$$\begin{aligned}
g\left(\varphi(\lambda \odot x)\right) &= g\left(\varphi(g^{-1}\left(g\left(\lambda\right) \cdot g\left(x\right)\right))\right) \\
&= g\left(\varphi(g^{-1}\left(g\left(\lambda\right) \cdot g\left(x\right) + \left(1 - g\left(\lambda\right)\right) \cdot 0\right))\right) \\
&\leq g\left(\lambda\right) \cdot g\left(\varphi(g^{-1}\left(g\left(x\right)\right))\right) + \left(1 - g\left(\lambda\right)\right) \cdot g\left(\varphi(g^{-1}\left(0\right))\right) \\
&= g\left(\lambda\right) \cdot g\left(\varphi(x)\right).
\end{aligned}$$

Sledi da za sve $x \in [0, F]$ i $0 \leq \lambda \leq e$, važi sledeće

$$\varphi(\lambda \odot x) \leq g^{-1}\left(g\left(\lambda\right) \cdot g\left(\varphi(x)\right)\right) = \lambda \odot \varphi(x).$$

Pošto je $g \circ \varphi \circ g^{-1}$ konkavna funkcija na $[-N, 0]$, obrnuta nejednakost se pokazuje analogno. □

Lema 3.2. *Neka su $\varphi : [-F, F] \to [-F, F]$ i $g : [-F, F] \to [-\infty, \infty]$ neparne funkcije.*

(i) Ako je φ strogo rastuća i g-konkavno-konveksna, tada je φ^{-1} strogo rastuća i g-konveksno-konkavna.

(ii) Ako je φ strogo opadajuća i g-konkavno-konveksna, tada je $-\varphi$ strogo rastuća i g-konveksno-konkavna.

(iii) Ako je φ strogo opadajuća i g-konveksno-konkavna, tada je $-\varphi^{-1}$ strogo rastuća i g-konveksno-konkavna.

U cilju dokazivanja Jensenove nejednakosti za bipolarne pseudo-integrale uvodi se pojam $|f|$-lančane pozitivnosti(negativnosti) fazi bi-mere $\mathbf{m}$ za $f \in \mathcal{S}$.

Definicija 3.2. Neka je $f \in \mathcal{S}$. Označimo sa $\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(n))$ permutaciju skupa indeksa tako da važi $0 \leq \left|f_{\alpha(1)}\right| \leq \left|f_{\alpha(2)}\right| \leq ... \leq \left|f_{\alpha(n)}\right|$. Skupovi

A_i su takvi da je $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\}$, $i = 1, \ldots, n$, $A_1 = X$ i $A_{n+1} = \emptyset$. Fazi bi-mera $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to [-F, F]$ je:

(i) $|f|$-lančano pozitivna ako postoji α takvo da važi $0 \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq e$, za sve $i = 2, \ldots, n$ i $\mu_{f^+}(X) = e$, ili $0 \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq e$ za sve $i = 2, \ldots, n$ i $\tilde{\mu}_{f^+}(X) = e$.

(ii) $|f|$-lančano negativna ako postoji α takvo da važi $-e \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq 0$, za sve $i = 2, \ldots, n$ i $\mu_{f^+}(X) = -e$, ili $-e \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq 0$, za sve $i = 2, \ldots, n$ i $\tilde{\mu}_{f^+}(X) = -e$.

Primer 3.1. Neka su $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i funkcija f dati kao u primeru 2.1.

(i) Neka su generator g za $\oplus$ i $\odot$ i fazi bi-mera $\mathbf{m}$ definisani na isti način kao u primeru 2.1. Razmotrimo $-f$. Za $\alpha = (1, 2, 3)$, imamo $|-f_1| \leq |-f_2| \leq |-f_3|$ i $A_1 = X$, $A_2 = \{x_2, x_3\}$, $A_3 = \{x_3\}$, kao i $\mu_{(-f)^+}(\{x_3\}) = -1.8$, $\mu_{(-f)^+}(\{x_2, x_3\}) = 1.5 - 1.8 = -0.3$, $\mu_{(-f)^+}(X) = -1.7 + 1.5 - 1.8 = -2 = -e$. Iz toga se zaključuje da je fazi bi-mera $\mathbf{m}$ $|-f|$-lančano negativna.

(ii) Neka su $g\,(x) = \sqrt{x}$ za $x \in [0, \infty]$, i $g\,(x) = -\sqrt{-x}$ za $x \in [-\infty, 0[$ generatorske funkcije za pseudo-operacije sabiranja $\oplus = \oplus_g$, kao i množenja $\odot = \odot_g$. Neka su $\oplus$-mere m_1 i m_2 definisane na sledeći način:

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$
m_1	0.64	0.1	0.36
m_2	0	0.16	0.3

i neka važi $\mathbf{m}\,(A, B) = m_1\,(A) \oplus (-m_2\,(B))$, za $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$. Za indekse $\alpha = (1, 2, 3)$, imamo $|f_1| \leq |f_2| \leq |f_3|$ i $\mu_{f^+}(\{x_3\}) = 0.36$, $\mu_{f^+}(\{x_2, x_3\}) = (\sqrt{0.36} - \sqrt{0.16})^2 = 0.04$, $\mu_{f^+}(X) = (\sqrt{0.64} - \sqrt{0.16} + \sqrt{0.36})^2 = 1 = e$. Iz toga se zaključuje da je fazi bi-mera $\mathbf{m}$ je $|f|$-lančano pozitivna.

Lema 3.3. *Neka je* $\mathbf{m}$ *fazi bi-mera i* $f \in \mathcal{S}$*. Neka su skupovne funkcije* μ_{f^+} *i* $\tilde{\mu}_{f^+}$ *date sa (2.1) i (2.2) na* $\mathcal{P}(X)$ *i* $\hat{\mathbf{m}}(A,B) = -\mathbf{m}(B,A)$*, za sve* $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$*. Neka je* $\varphi : [-F,F] \to [-F,F]$ *neparna strogo rastuća funkcija. Tada važi:*

(i) za sve $E \in \mathcal{P}(X)$*, imamo* $\mu_{f^+}(E) = \mu_{(\varphi(f))^+}(E)$ *i* $\tilde{\mu}_{f^+}(E) = \tilde{\mu}_{(\varphi(f))^+}(E)$*;*

(ii) $\mathbf{m}$ *je* $|f|$*-lančano pozitivna akko* $\mathbf{m}$ *je* $|\varphi(f)|$*-lančano pozitivna;*

(iii) $\mathbf{m}$ *je* $|f|$*-lančano negativna akko* $\hat{\mathbf{m}}$ *je* $|-f|$*-lančano pozitivna.*

Dokaz. Kako važi da je

$$X^+ = \{x_i \in X \mid f(x_i) > 0\} \ = \{x_i \in X \mid \varphi(f(x_i)) > 0\} \ ,$$

$$X^0 = \{x_i \in X \mid f(x_i) = 0\} \ = \{x_i \in X \mid \varphi(f(x_i)) = 0\} \ ,$$

tvrđenje (i) sledi. Dokažimo (ii). Za permutaciju skupa indeksa α neka važi

$$0 \leq \left|f_{\alpha(1)}\right| \leq \left|f_{\alpha(2)}\right| \leq ... \leq \left|f_{\alpha(n)}\right| \ \text{ i } \ 0 \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq e \ \ (0 \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq e)$$

za sve $i = 2, \ldots, n$ i $\mu_{f^+}(X) = e$ ($\tilde{\mu}_{f^+}(X) = e$). Pošto je φ neparna strogo rastuća funkcija, lema 3.1 *(i)* obezbeđuje

$$0 \leq \left|(\varphi\,(f))_{\alpha(1)}\right| \leq \left|(\varphi\,(f))_{\alpha(2)}\right| \leq ... \leq \left|(\varphi\,(f))_{\alpha(n)}\right|.$$

Sada, na osnovu tvrđenja (i) može da se zaključi da fazi bi-mera $\mathbf{m}$ je $|f|$-lančano pozitivna akko $\mathbf{m}$ je $|\varphi(f)|$-lančano pozitivna.
Tvrđenje (iii) sledi iz definicije 3.2 i leme 2.4. □

3.1.1 Slučaj $\oplus = \oplus_g, \odot = \odot_g$

Posmatrajmo slucaj I (1.18) iz poglavlja 1.6. U ovom slučaju ćemo koristi rezultate publikovane u [7], a koji prikazuju da Jensenov tip nejednakosti ne mora da sadrži samo pozitivne težinske koeficijente, a što će biti prikazano kroz narednu teoremu.

Teorema 3.4. *[7] Neka je $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ i za svako $a_i \in I$, $1 \leq i \leq n$, važi $a_1 \leq ... \leq a_n$, ili $a_1 \geq ... \geq a_n$. Tada sledi:*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi\left(a_i\right),$$

za sve $p_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, za koje važi $0 \leq \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \leq 1$, $1 \leq k \leq n-1$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Na osnovu prethodne teoreme sledi naredna lema.

Lema 3.5. *Neka je funkcija $\varphi : [-F, F] \to [-F, F]$, g-konveksno-konkavna, gde je g generatorska funkcija za simetrične pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$. Neka za $a_i \in [0, F[$, $1 \leq i \leq n$, važi $a_1 \leq ... \leq a_n$, ili $a_1 \geq ... \geq a_n$. Tada sledi:*

$$\varphi\left(\bigoplus_{i=1}^{n} p_i \odot a_i\right) \leq \bigoplus_{i=1}^{n} p_i \odot \varphi\left(a_i\right), \tag{3.1}$$

za $p_i \in]-F, F[$, $1 \leq i \leq n$, koji zadovoljavaju $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} p_i = e$, $0 \leq \bigoplus\limits_{i=1}^{k} p_i \leq e$, $1 \leq k \leq n-1$.

Dokaz. Na osnovu zadatih uslova za g, p_i i a_i, $i = 1, \ldots, n$, sledi da važi $0 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} g\left(p_i\right) g\left(a_i\right) < M$, gde je $M = g(F)$ i $g(0) = 0$. Kompozicija $g \circ \varphi \circ g^{-1}$ je konveksna na $[0, M[$, pa na osnovu teoreme 3.4 važi

$$g\left(\varphi\left(g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(p_i\right) g\left(a_i\right)\right)\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} g\left(p_i\right) g\left(\varphi\left(a_i\right)\right).$$

Time je nejednakost (3.1) dokazana. $\square$

U narednoj teoremi prikazana je Jensenova nejednakost za bipolarni pseudo-integral.

Teorema 3.6. *Neka je φ neparna, strogo rastuća funkcija i g-konveksno-konkavna, gde je g generator za simetrične pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$. Neka je fazi bi-mera $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to]-F, F[$ $\oplus$-dekompozabilna. Za funkciju $f : X \to\ ]-F, F\ [$ važi da ako je:*

(i) $\mathbf{m}$ *$|f|$-lančano pozitivna, tada važi* $\varphi\left(\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \int\limits_X^{\oplus} \varphi\left(f\right) \odot d\mathbf{m}$.

(ii) $\mathbf{m}$ *$|f|$-lančano negativna, tada važi* $\varphi\left(\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \geq \int\limits_X^{\oplus} \varphi\left(f\right) \odot d\mathbf{m}$.

Dokaz. (i) Neka je data funkcija $f : X \to]-F, F[$ i neka je fazi bi-mera $\mathbf{m}$ $|f|$-lančano pozitivna.

Na osnovu definicije 3.2, postoji permutacija indeksa α takva da važi

$$0 \leq \left|f_{\alpha(1)}\right| \leq \left|f_{\alpha(2)}\right| \leq ... \leq \left|f_{\alpha(n)}\right|,$$

gde je $0 \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq e$ i $\mu_{f^+}(X) = e$, ili $0 \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq e$, i $\tilde{\mu}_{f^+}(X) = e$, gde je $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\}$, za $i = 2, \ldots, n$, $A_1 = X$. Označimo sa $f_{\alpha(0)} = 0$ i $A_{n+1} = \emptyset$.

Sada, na osnovu tvrđenja 2.2 i 2.9, kao i napomene 2.1, važi da je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) \geq 0$. Dalje, na osnovu leme 3.3, sledi da je $\mathbf{m}$ je $|\varphi(f)|$-lančano pozitivna i analogno može da se zaključi da je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) \geq 0$.

U slučaju da važi $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) = 0$, tada sledi da je $\varphi(0) = 0$ i $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) \geq 0$, pa nejednakost važi.

U slučaju $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) > 0$, ako je $0 \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq e$, za $i = 2, \ldots, n$ i $\mu_{f^+}(X) = e$, tada za $i = 1, \ldots, n$ definišemo $p_i = \mu_{f^+}(A_i) \ominus \mu_{f^+}(A_{i+1})$. Pošto je μ_{f^+} realna $\oplus$-mera, imamo:

- $p_i = \mu_{f^+}\left(\left\{x_{\alpha(i)}\right\}\right)$, za sve $i = 1, \ldots, n$,

- $0 \leq \bigoplus_{i=1}^{k} p_i = \mu_{f^+}(A_1) \ominus \mu_{f^+}(A_{k+1}) \leq e$, za sve $k = 1, \ldots, n-1$,

- $\bigoplus_{i=1}^{n} p_i = \mu_{f^+}(A_1) = e$.

Na osnovu tvrđenja 2.9, leme 3.5, leme 3.1 (i) i leme 3.3, može da se zaključi da je

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) &\leq \bigoplus_{i=1}^{n} \varphi\left(\left|f_{\alpha(i)}\right|\right) \odot \mu_{f^+}\left(\left\{x_{\alpha(i)}\right\}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(f_{\alpha(i)}\right)\right| \odot \mu_{(\varphi(f))^+}\left(\left\{x_{\alpha(i)}\right\}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(f_i\right)\right| \odot \mu_{(\varphi(f))^+}\left(\left\{x_i\right\}\right) \\
&= \int_X^{\oplus} \varphi\left(f\right) \odot d\mathbf{m}.
\end{aligned}
$$

Sledi da nejednakost važi u ovom slučaju. Ako je $0 \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq e$, za $i = 2, \ldots, n$, i $\tilde{\mu}_{f^+}(X) = e$, tada se gornja nejednakost može dokazati na isti način definišući $p_i = \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \ominus \tilde{\mu}_{f^+}(A_{i+1})$ za $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Neka je data funkcija $f : X \rightarrow]-F, F[$ i fazi bi-mera $\mathbf{m}$ $|f|$-lančano negativna.

Analogno prethodnom slučaju (i), može da se zaključi da je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) \leq 0$ i $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) \leq 0$.

U slučaju da važi $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) = 0$, nejednakost tada sledi, pošto je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) \leq 0$ i $\varphi(0) = 0$.

Kada je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) < 0$, tada na osnovu asimetričnosti bipolarnog pseudo-integrala (tvrđenje 2.8), pošto je φ neparna, imamo da je

$$\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) = -\varphi\left(\int_X^{\oplus} (-f) \odot d\hat{\mathbf{m}}\right), \tag{3.2}$$

$$\int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m} = -\int_X^{\oplus} \varphi(-f) \odot d\hat{\mathbf{m}}, \tag{3.3}$$

gde je $\hat{\mathbf{m}} \in \mathcal{M}$. Na osnovu leme 3.3 (iii) sledi da je fazi bi-mera $\hat{\mathbf{m}}$ $|-f|$-lančano pozitivna, pošto je $\mathbf{m}$ $|f|$-lančano negativna. Kako imamo da je $\mathcal{S}BPI_{\hat{\mathbf{m}}}(-f) > 0$ i $\mathcal{S}BPI_{\hat{\mathbf{m}}}(\varphi(-f)) \geq 0$, na osnovu prethodnog slučaja (i) sledi da važi nejednakost, a na osnovu jednačina (3.2) i (3.3) važi i obrnuta nejednakost, pa je tvrđenje validno. $\square$

Može se uočiti da za sve $0 < \mathbf{c} < a$, ako $\mathbf{c} \odot \mathbf{m} \in \mathcal{M}$ je $|f|$-lančano pozitivna ($|f|$-lančano negativna), tada važi

$$\varphi\left(\mathbf{c} \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \mathbf{c} \odot \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}$$

$$\varphi\left(\mathbf{c} \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \geq \mathbf{c} \odot \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}.$$

Koristeći lemu 3.2 (i) i lemu 3.3 (ii), dobijamo narednu posledicu teoreme 3.6.

Posledica 3.7. *Neka je φ neparna i strogo rastuća funkcija i g-konkavno-konveksna funkcija, gde je g generator za simetrične pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$. Neka je $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to]-F, F[$ $\oplus$-dekompozabilna fazi bi-mera. Ako je funkcija $f : X \to]-F, F[$ takva da je*

(i) $\mathbf{m}$ *$|f|$-lančano pozitivna, tada važi* $\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \geq \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}$.

(ii) $\mathbf{m}$ *$|f|$-lančano negativna, tada važi* $\varphi\left(\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \int\limits_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}$.

Slično, na osnovu leme 3.2 (ii) i (iii), leme 3.3 (ii) i asimetričnosti bipolarnog pseudo-integrala, imamo narednu posledicu teoreme 3.6.

Posledica 3.8. *Neka je φ neparna, strogo opadajuća funkcija i g-konkavno-konveksna funkcija, gde je g generator za simetrične pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$. Neka je fazi bi-mera $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to]-F, F[$ $\oplus$-dekompozabilna fazi bi-mera. Ako je funkcija $f : X \to]-F, F[$ takva da $\mathbf{m}$ je $|f|$-lančano pozitivna ($|f|$-lančano negativna), tada važi*

$$\varphi\left(\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \geq \int\limits_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\hat{\mathbf{m}},$$

$$\varphi\left(\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \int\limits_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\hat{\mathbf{m}}.$$

Posledica 3.9. *Neka je φ neparna, strogo opadajuća funkcija i g-konkavno-konveksna funkcija, gde je g generator za simetrične pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$. Neka je $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to]-F, F[$ $\oplus$-dekompozabilna fazi bi-mera. Ako je funkcija $f : X \to]-F, F[$ takva da je $\mathbf{m}$ $|f|$-lančano pozitivna ($|f|$-lančano negativna), tada važi*

$$\varphi\left(\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \int\limits_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\hat{\mathbf{m}},$$

$$\varphi\left(\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \geq \int\limits_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\hat{\mathbf{m}}.$$

Napomena 3.1. Uočava se da za nenegativnu funkciju f i g-konveksno-konkavnu, kao i za nenegativnu funkciju φ na intervalu $[0, \infty[$ važi

$X_f^{+0} = X_{\varphi(f)}^{+0} = X$ i $X_f^- = X_{\varphi(f)}^- = \emptyset$. Zbog toga, na osnovu tvrđenja 2.9 i leme 3.5, za funkcije φ i f, kao i fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ datu sa $\mathbf{m}(A,B) = m_1(A) \ominus m_2(B)$, za sve $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$, gde su m_1 i m_2 date $\oplus$-mere iz $\mathcal{P}(X)$, $m_1(X) = e$, može da se zaključi da je

$$\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot dm_1\right) \leq \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot dm_1.$$

Prethodni rezultat je pokazan u okviru teoreme 4 u [44]. Tvrđenje teoreme 4 u [44] je validno pod slabijim uslovima koji zahtevaju konveksnost kompozicije $g \circ \varphi \circ g^{-1}$. Međutim, rezultat iz [44] se odnosi na klasičan pseudo-integral baziran na $\oplus$-meri, dok se u ovoj disertaciji razmatra isključivo diskretni bipolarni slučaj.

U narednom primeru je ilustrovan rezultat teoreme 3.6.

Primer 3.2. Razmotrimo funkciju f datu u primeru 3.1, kao i funkciju g i fazi bi-meru $\mathbf{m}$ datu u primeru 3.1 *(ii)*.

(i) Po definiciji bipolarnog pseudo-integrala funkcije f u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m}$, za linearnu funkciju $\varphi(x) = 3x$, $x \in [-\infty, \infty]$, sledi da je

$$\begin{aligned}\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) &= \varphi\left(((0.1 \odot 0.64) \oplus (0.5 \odot 0.36)) \oplus (-0.3 \odot 0.16)\right) \\ &= 3\left(\sqrt{0.1 \cdot 0.64} + \sqrt{0.5 \cdot 0.36} - \sqrt{0.3 \cdot 0.16}\right)^2 \\ &= 0.62972\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m} &= ((\varphi(0.1) \odot 0.64) \oplus (\varphi(0.5) \odot 0.36)) \oplus (\varphi(-0.3) \odot 0.16) \\ &= \left(\sqrt{3 \cdot 0.1 \cdot 0.64} + \sqrt{3 \cdot 0.5 \cdot 0.36} - \sqrt{3 \cdot 0.3 \cdot 0.16}\right)^2 \\ &= 0.62972.\end{aligned}$$

U ovom slučaju važi nejednakost.

(ii) Ako je $\varphi(x) = x^3$, $x \in [-\infty, \infty]$, sledi da je

$$\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) = \left(\sqrt{0.1 \cdot 0.64} + \sqrt{0.5 \cdot 0.36} - \sqrt{0.3 \cdot 0.16}\right)^6 = 0.00925,$$

i

$$\int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m} = \left(\sqrt{0.1^3 \cdot 0.64} + \sqrt{0.5^3 \cdot 0.36} - \sqrt{0.3^3 \cdot 0.16}\right)^2 = 0.02948.$$

Dakle, $\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}$, pa nejednakost sledi.

3.1.2 Slučaj $\oplus = \oslash$, $\odot = \odot_g$

Posmatrajmo slucaj II (1.21) iz poglavlja 1.6.

Teorema 3.10. *Neka je φ neparna, strogo rastuća funkcija i g-konveksno-konkavna, gde je g generator za simetrično pseudo-množenje $\odot$. Neka je $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ fazi bi-mera.*

Za funkciju $f \in \mathcal{S}$ u odnosu na fazi bi-meru $|\,\mathbf{m}(X^{+0}, X^-)\,| = e$ važi:

(i) ako je $\mathcal{SBPI}_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0$, tada sledi $\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}$,

(ii) ako je $\mathcal{SBPI}_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) < 0$, tada sledi $\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \geq \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}$.

Dokaz. Bipolarni pseudo-integral se može izraziti na sledeći način:

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} = \bigoslash_{i=1}^{n} |f_i| \odot \mu_{f^+}(\{x_i\}) = (\mathcal{SBPI}_{\mathbf{m}}(f)) \cdot \bigvee_{i=1}^{n} |f_i| \odot |\mu_{f^+}(\{x_i\})|\,.$$

(i) Neka je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0$.

Stroga nejednakost trivijalno važi za f kada je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) \leq 0$.

Za $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) > 0$, po lemi 3.1(ii), važi da je

$$\begin{aligned}\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) &= \varphi\left((\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f)) \cdot \bigvee_{i=1}^{n} |f_i| \odot |\mu_{f^+}(\{x_i\})|\right) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} \varphi\left(|f_i| \odot |\mu_{f^+}(\{x_i\})|\right).\end{aligned}$$

Prema tvrđenju 2.1, sledi da je μ_{f^+} realna $\oplus$-mera i onda važi

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mu_{f^+}(\{x_i\}) = \mu_{f^+}(X),$$

kao i da je $|\,\mathbf{m}(X^{+0}, X^{-})\,| = |\mu_{f^+}(X)\,| = e$. Dakle, može da se izvede zaključak da je $|\mu_{f^+}(\{x_i\})| \leq e$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Na osnovu leme 3.1(i), 3.1(iii), leme 3.3(i) i definicije simetričnih pseudo-operacija, važi sledeće

$$\begin{aligned}\bigvee_{i=1}^{n} \varphi\left(|f_i| \odot |\mu_{f^+}(\{x_i\})|\right) &\leq \bigvee_{i=1}^{n} |\varphi(f_i)| \odot |\mu_{f^+}(\{x_i\})| \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} |\varphi(f_i)| \odot \mu_{(\varphi(f))^+}(\{x_i\}) \\ &= \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}.\end{aligned}$$

(ii) Analogno prethodnom slučaju, ako se pretpostavi $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) < 0$, dobija se obrnuta nejednakost, a time je teorema dokazana.

$\square$

Neka je $|\,\mathbf{m}(X^{+0}, X^{-})\,| = \mathbf{c}$, gde je $0 < \mathbf{c} \leq e$.

Koristeći lemu 3.2, analogno posledici 3.7, posledici 3.8 i posledici 3.9, dokazuje se Jensenov tip nejednakosti za bipolarne pseudo-integrale u slučaju II.

U slučaju $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) = 0$, nejednakost u teoremi 3.10 ne mora biti zadovoljena, a što je ilustrovano u narednom primeru.

Primer 3.3. Za $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i $f : X \to [-1, 1]$, definiše se $f(x_1) = \sqrt{0.4}$, $f(x_2) = -\sqrt{0.8}$, $f(x_3) = \sqrt{0.1}$. Neka su $\oplus = \bigvee$, $\odot = \cdot$ i $\oplus$-mere m_1 i m_2 definisane sa

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$
m_1	0.6	0.1	1
m_2	0.2	0.3	0.4

Fazi bi-mera $\mathbf{m} : \mathcal{Q}(X) \to [-1, 1]$ je definisana na sledeći način:

$$\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) \oplus (-m_2(B)),$$

za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$.

Pošto je $m_1(\{x_i\}) \neq m_2(\{x_j\})$, za $i \neq j$, važi da je $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$.

Za neparnu funkciju $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi(x) = x^2$, na intervalu $x \in [0, \infty]$, sledi da je

$$\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) = \varphi\left((\sqrt{0.4} \cdot 0.6) \bigvee (-\sqrt{0.8} \cdot 0.3) \bigvee (\sqrt{0.1} \cdot 1)\right) =$$

$$= \left(\sqrt{0.4} \cdot 0.6\right)^2 = 0.144 >$$

$$> \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m} = (0.4 \cdot 0.6) \bigvee (-0.8 \cdot 0.3) \bigvee (0.1 \cdot 1) = 0.$$

Sa druge strane, na osnovu jednačina 3.2 i 3.3 važi sledeća nejednakost

$$\varphi\left(\int_X^{\oplus} (-f) \odot d\hat{\mathbf{m}}\right) = -\,0.144 < \int_X^{\oplus} \varphi(-f) \odot d\hat{\mathbf{m}} = 0.$$

3.1.3 Slučaj $\oplus = \textcircled{\vee}$, $\odot = \textcircled{\wedge}$

Posmatrajmo slucaj III (1.22) iz poglavlja 1.6.

Teorema 3.11. *Neka je* $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ *i* $\varphi : [-F, F] \to [-F, F]$ *neparna i rastuća, neprekidna funkcija i* $\varphi(x) \leq x$ *na* $[0, F]$. *Za funkciju* $f \in \mathcal{S}$ *važi:*

(i) Ako je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0$, *tada je* $\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \leq \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}.$

(ii) Ako je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) < 0$, *tada je* $\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) \geq \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m}.$

Dokaz. Bipolarni pseudo-integral u ovom slučaju se može izraziti na sledeći način:

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} = \bigotimes_{i=1}^{n} |f_i| \textcircled{\wedge} \mu_{f^+}(\{x_i\}) = (\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f)) \cdot \bigvee_{i=1}^{n} |f_i| \wedge |\mu_{f^+}(\{x_i\})| .$$

(i) Neka je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0$.

Stroga nejednakost trivijalno važi ako je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) \leq 0$.

U slučaju da je $\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f) > 0$, tada po lemi 3.1(ii), imamo

$$\begin{aligned} \varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) &= \varphi\left((\mathcal{S}BPI_{\mathbf{m}}(f)) \cdot \bigvee_{i=1}^{n} |f_i| \wedge |\mu_{f^+}(\{x_i\})|\right) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} \varphi\left(|f_i| \wedge |\mu_{f^+}(\{x_i\})|\right). \end{aligned}$$

Na osnovu leme 3.1(i) i (ii), uslova $\varphi(x) \leq x$ na $[0, F]$, kao i leme 3.3(i), može da se zaključi da je

$$\begin{aligned}\bigvee_{i=1}^{n}\varphi\left(|f_i|\wedge|\mu_{f^+}\left(\{x_i\}\right)|\right) &= \bigvee_{i=1}^{n}\varphi\left(|f_i|\right)\wedge\varphi\left(|\mu_{f^+}\left(\{x_i\}\right)|\right)\\ &\leq \bigvee_{i=1}^{n}\varphi\left(|f_i|\right)\wedge|\mu_{f^+}\left(\{x_i\}\right)|\\ &= \bigovee_{i=1}^{n}|\varphi\left(f_i\right)|\,\owedge\mu_{(\varphi(f))^+}\left(\{x_i\}\right)\\ &= \int_X^{\oplus}\varphi\left(f\right)\odot d\mathbf{m}.\end{aligned}$$

(ii) Analogno (i). □

Napomena 3.2. (i) Zamenjujući pretpostavku u teoremi 3.11 da je $\varphi\left(x\right)\leq x$ na $[0,F]$ sa nejednakošću $\varphi\left(x\right)\geq x$ na $[0,F]$, dobijaju se suprotne nejednakosti.

(ii) Ako se pretpostavka u teoremi 3.11 da je funkcija φ strogo rastuća i $\varphi\left(x\right)\leq x$ na $[0,F]$, zameni da je funkcija φ strogo opadajuća i da važi $\varphi\left(x\right)\leq -x$ (ili $\varphi\left(x\right)\geq -x$) na $[0,F]$, tada se analogno posledici 3.8 (ili posledici 3.9), može dokazati Jensenov tip nejednakosti bipolarnog pseudo-integrala funkcije f u slučaju III.

Primer 3.4. Neka su $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $f\left(x_1\right)=-1$, $f\left(x_2\right)=-4$, $f\left(x_3\right)=2$. Simetrične pseudo-operacije $\oplus=\ovee$, $\odot=\owedge$, na intervalu $[-4,4]^2$ i $\oplus$-mere m_1 i m_2 su definisane na sledeći način:

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$
m_1	1	0.5	2.5
m_2	1	3.5	3

.

Fazi bi-mera $\mathbf{m}:\mathcal{Q}(X)\rightarrow[-4,4]$ je definisana kao $\mathbf{m}(A,B)=m_1(A)\oplus(-m_2(B))$, za sve $(A,B)\in\mathcal{Q}(X)$. Sledi da $\mathbf{m}\in\mathcal{M}$.

Neka je data funkcija $\varphi(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in [0,4]$.

(i) Za bipolarni pseudo-integral funkcije f, važi sledeće

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) &= \varphi\left((1 \owedge (-1)) \ovee (4 \owedge (-3.5)) \ovee (2 \owedge 2.5)\right) \\
&= \varphi\left((-1) \ovee (-3.5) \ovee 2\right) = \varphi(-3.5) = -0.77778
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m} &= (0.5 \owedge (-1)) \ovee (0.8 \owedge (-3.5)) \ovee (0.66667 \owedge 2.5) \\
&= (-0.5) \ovee (-0.8) \ovee 0.66667 = -0.8.
\end{aligned}$$

Sledi da obrnuta Jensenova nejednakost važi.

(ii) Ako se uzme da je $m_2(\{x_2\}) = 4$, umesto $m_2(\{x_2\}) = 3.5$, tada sledi da je $\varphi\left(\int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m}\right) = -0.8$ i $\int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m} = -0.8$, pa nejednakost važi.

Glava 4

Jensenova nejednakost za bipolarne fazi integrale

U okviru teorije neaditivne mere, Jensenovu nejednakost za Sugenov integral, Šokeov integral, pseudo-integral i ostale integrale zasnovane na fazi merama pročavali su mnogi autori [1, 7, 44, 45, 46, 47, 57, 61, 62]. Jensen-Stefensenova nejednakost [51] je tip Jensenove nejednakosti za uređene ponderisane sredine sa realnim težinskim koeficijentima. U ovoj glavi je prikazana Jensen-Stefensenova nejednakost za bipolarne fazi integrale.

U ovoj glavi definisan je nov bipolarni Šokeov g-integral i ispitane su njegove osobine koje su ilustravane uz odgovarajuće primere. Fokus interesovanja u okviru datog poglavlja je prikaz originalnih rezultata Jensen-Stefensenovog tipa nejednakosti za bipolarni Šokeov g-integral, a koji su publikovani u [38, 39].

U okviru ove glave prikazani su originalni naučni rezultati, Jensen-Stefensenovog tipa nejednakosti za bipolarni Sugenov integral i bipolarni Šilkretov integral, a koji su publikovani u [39, 60].

4.1 Diskretni bipolarni Šokeov g-integral

Specijalna klasa bipolarnog univerzalnog integrala je bipolarni Šokeov integral (2.5). U okviru ovog poglavlja, a na osnovu definicije 2.5, definisan je nov bipolarni Šokeov g-integral i proučene su neke od njegovih osobina uz odgovarajuće primere, a koje su publikovane u [38, 39].

Neka su $\oplus = \oplus_g$ i $\odot = \odot_g$ par simetričnih pseudo-operacija definisanih na $[-F, F]^2$, gde je $F = \infty$.

Neka je neutralni element za simetrično g-množenje $g^{-1}(1) = 1$.

Semikopula je monotona funkcija $\otimes : [0,1]^2 \to [0,1]$, gde je 1 neutralni element. Za svako x, y, t i $z \in [0,1]$ sledeće aksiome su zadovoljene:
(i) $x \otimes y \leq t \otimes z$, kada je $x \leq t$ i $y \leq z$;
(ii) $1 \otimes x = x \otimes 1 = x$.
Očigledno, ako je $g^{-1}(1) = 1$, onda je restrikcija $\odot_g$ na $[0,1]^2$ semikopula.

Na osnovu poglavlja 2.2, klasa svih nenegativnih funkcija iz $\widehat{\mathcal{S}}$ će biti označena sa $\widehat{\mathcal{S}}^+$, $\widehat{S}^+ = \widehat{\mathcal{S}} \setminus \widehat{\mathcal{S}}^-$.

Definicija 4.1. Neka je data funkcija $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ i $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$. Neka je funkcija g generator za simetrične operacije. Bipolarni Šokeov g-integral funkcije f u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m}$ je definisan sa:

$$BCh^g(f, \mathbf{m}) = g^{-1}(BCh(g \circ f, g \circ \mathbf{m})), \tag{4.1}$$

gde je $BCh(g \circ f, g \circ \mathbf{m})$ bipolarni Šokeov g-integral kompozicije $g \circ f$ u odnosu na $g \circ \mathbf{m}$.

Na osnovu jednakosti (4.1) i činjenice da su g i g^{-1} strogo rastuće funkcije, lako može biti dokazano da $BCh^g : \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n \times \mathcal{M}_n \to [-1, 1]$, za sve $n \in \mathbb{N}$, jeste u stvari bipolarni univerzalni integral koji je definisan u [23]. Potreban i dovoljan uslov teoreme 2 prezentovane u [23] je zadovoljen, jer važi:

(1) $BCh^g(c \cdot (\chi_A - \chi_B), \mathbf{m}) = \mathrm{sgn}(\mathbf{m}(A, B))(c \otimes |\mathbf{m}(A, B)|)$, za sve $c \in [0, 1]$ i za sve $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_n$, $(A, B) \in \mathcal{Q}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gde je $\otimes$ semikopula;

(2) $BCh^g(f,\mathbf{m}_1) \geq BCh^g(h,\mathbf{m}_2)$, za sve parove $(f,\mathbf{m}_1) \in \mathcal{S}_{n_1} \times \mathcal{M}_{n_1}$ i $(h,\mathbf{m}_2) \in \mathcal{S}_{n_2} \times \mathcal{M}_{n_2}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, takve da za sve $t \in]0,1]$ važi

$$\mathbf{m}_1(\{f \geq t\}, \{f \leq -t\}) \geq \mathbf{m}_2(\{h \geq t\}, \{h \leq -t\}).$$

Očigledno, ako je $g \equiv id$, tada je $BCh^{id} = BCh$.

Neka je $\hat{\mathbf{m}}(A,B) = -\mathbf{m}(B,A)$, za sve $(A,B) \in \mathcal{Q}(X)$. Na osnovu definicije (1.5) može biti pokazano da važi $\hat{\mathbf{m}} \in \widehat{\mathcal{M}}$. Neka su date skupovne funkcije $\mu_{f^+}(A)$ (2.1) i $\tilde{\mu}_{f^+}(A)$ (2.2).

Za funkciju $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ i odgovarajući par simetričnih operacija, važi sledeća reprezentacija:

$$\begin{aligned} f &= \bigoplus_{i=1}^{n} (|f_{\alpha(i)}| \ominus |f_{\alpha(i-1)}|) \odot (\chi_{A_i \cap X^{+0}} - \chi_{A_i \cap X^-}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} (|f_{\alpha(i)}| \ominus |f_{\alpha(i-1)}|) \odot (\chi_{A_i \cap X^{+}} - \chi_{A_i \cap X^{-0}}), \end{aligned}$$

gde je α permutacija indeksa takva da važi $0 \leq |f_{\alpha(1)}| \leq |f_{\alpha(2)}| \leq \cdots \leq |f_{\alpha(n)}|$, $f_{\alpha(0)} = 0$ i $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\}$ za sve i. Bipolarni Šokeov g-integral može da se prikaže na sledeći način.

Tvrđenje 4.1. *Neka su $\oplus = \oplus_g$ i $\odot = \odot_g$ simetrične pseudo-operacije. Bipolarni Šokeov g-integral funkcije $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ može se izraziti kao:*

$$\begin{aligned} BCh^g(f,\mathbf{m}) &= \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(|f_{\alpha(i)}| \ominus |f_{\alpha(i-1)}|\Big) \odot \mu_{f^+}(A_i) && (4.2) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(|f_{\alpha(i)}| \ominus |f_{\alpha(i-1)}|\Big) \odot \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) && (4.3) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} |f_{\alpha(i)}| \odot \Big(\mu_{f^+}(A_i) \ominus \mu_{f^+}(A_{i+1})\Big). && (4.4) \end{aligned}$$

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ i fazi bi-mera $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$. Za proizvoljnu permutaciju indeksa α, takvu da važi $0 \leq |f_{\alpha(1)}| \leq |f_{\alpha(2)}| \leq \cdots \leq |f_{\alpha(n)}|$,

$f_{\alpha(0)} = 0$ i $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \dots, x_{\alpha(n)}\}$, označimo $K = \{j \,|\, |f_{\alpha(j)}| \neq |f_{\alpha(j-1)}|\}$. Za sve $i \in K$ imamo:

$$\mathbf{m}(\{f \geq |f_{\alpha(i)}|\}, \{f \leq -|f_{\alpha(i)}|\}) = \mu_{f^+}(A_i) = \tilde{\mu}_{f^+}(A_i).$$

Pošto je g neparna i strogo rastuća imamo $g(0) = 0$, $g(|x|) = |g(x)|$ za sve $x \in [-1, 1]$ i važi da je $\mu_{f^+} = \mu_{(g\circ f)^+}$. Dalje, $\oplus$ je asocijativno i $\odot$ je distributivno u odnosu na $\oplus$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
BCh^g(f, \mathbf{m}) &= g^{-1}(BCh(g \circ f, g \circ \mathbf{m})) \\
&= g^{-1}\left(\sum_{i \in K}(|g(f_{\alpha(i)})| - |g(f_{\alpha(i-1)})|)g(\mu_{(g\circ f)^+}(A_i))\right) \\
&= g^{-1}\left(\sum_{i \in K}(g(|f_{\alpha(i)}|) - g(|f_{\alpha(i-1)}|))g(\mu_{f^+}(A_i))\right) \\
&= \bigoplus_{i \in K}(|f_{\alpha(i)}| \ominus |f_{\alpha(i-1)}|) \odot \mu_{f^+}(A_i) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}(|f_{\alpha(i)}| \ominus |f_{\alpha(i-1)}|) \odot \mu_{f^+}(A_i) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} |f_{\alpha(i)}| \odot \Big(\mu_{f^+}(A_i) \ominus \mu_{f^+}(A_{i+1})\Big),
\end{aligned}$$

gde je $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \dots, x_{\alpha(n)}\}$, za $i \geq 2$, $A_1 = X$, $A_{n+1} = \varnothing$ i $f_{\alpha(0)} = 0$. Na osnovu toga, (4.2) i (4.4) važe, dok (4.3) je zadovoljena, jer je $\mu_{f^+}(A) = \tilde{\mu}_{f^+}(A)$ za sve $A \subset supp(f)$. $\square$

Primer 4.1. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vrednosti funkcije f su zadate na sledeći način $f(x_1) = 0.2$, $f(x_2) = -0.2$, $f(x_3) = 0, f(x_4) = -0.4$. Sledi da je $X^{+0} = \{x_1, x_3\}$, $X^- = \{x_2, x_4\}$. Funkcija $g(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$, za neparno $k \in \mathbb{N}$ je generatorska funkcija za simetrične pseudo-operacije $\oplus = \oplus_g$, $\odot = \odot_g$. Neka je $\mathbf{m}$ normalizovana fazi bi-mera na $\mathcal{Q}(X)$, $card(\mathcal{Q}(X)) = 3^4 = 81$.

Za $\alpha_1 = (3, 1, 2, 4)$, imamo da je $0 = |f_3| \leq |f_1| \leq |f_2| \leq |f_4|$. Na osnovu tvrđenja 4.1, bipolarni Šokeov g-integral funkcije f u odnosu na fazi bi-meru

$\mathbf{m}$ iznosi:

$$
\begin{aligned}
BCh^g(f,\mathbf{m}) &= \Big((|0| \ominus |0|) \odot \mu_{f^+}(\{x_3, x_1, x_2, x_4\})\Big) \\
&\oplus \Big((|0.2| \ominus |0|) \odot \mu_{f^+}(\{x_1, x_2, x_4\})\Big) \\
&\oplus \Big((|-0.2| \ominus |0.2|) \odot \mu_{f^+}(\{x_2, x_4\})\Big) \\
&\oplus \Big((|-0.4| \ominus |-0.2|) \odot \mu_{f^+}(\{x_4\})\Big) \\
&= \Big(|0.2|^k \cdot \mu_{f^+}(\{x_1, x_2, x_4\})^k + \\
&+ \ (|-0.4|^k - |-0.2|^k) \cdot \mu_{f^+}(\{x_4\})^k\Big)^{\frac{1}{k}}.
\end{aligned}
$$

Takođe za $\alpha_2 = (3,2,1,4)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, važi $0 = |f_3| \leq |f_2| \leq |f_1| \leq |f_4|$ i dobije se isti rezultat:

$$
\begin{aligned}
BCh^g(f,\mathbf{m}) &= \Big((|-0.2| \ominus |0|) \odot \mu_{f^+}(\{x_2, x_1, x_4\})\Big) \\
&\oplus \Big((|-0.4| \ominus |0.2|) \odot \mu_{f^+}(\{x_4\})\Big) \\
&= \Big(|-0.2|^k \cdot \mu_{f^+}(\{x_2, x_1, x_4\})^k \\
&+ \ (|-0.4|^k - |0.2|^k) \cdot \mu_{f^+}(\{x_4\})^k\Big)^{\frac{1}{k}},
\end{aligned}
$$

pošto je $\mu_{f^+}(\{x_2, x_1, x_4\}) = \mu_{f^+}(\{x_1, x_2, x_4\}) = \mathbf{m}(\{x_1\}, \{x_2, x_4\})$ i $\mu_{f^+}(\{x_4\}) = \mathbf{m}(\emptyset, \{x_4\})$.

Može da se primeti da je bipolarni Šokeov g-integral funkcije $f \in \widehat{\mathcal{S}}^+$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ jednak specijalnom tipu opšteg Šokeovog integrala prikazanog u [31]. Naime, za date simetrične operacije generisane sa generatorskom funkcijom g, važi $BCh^g(f,\mathbf{m}) = Ch^g(f,m)$, odnosno bipolarni Šokeov g-integral funkcije $f \in \widehat{\mathcal{S}}^+$ u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ je jednak specijalnom tipu opšteg Šokeovog integrala funkcije $f \in \widehat{\mathcal{S}}^+$ u odnosu na $m = \mu_{f^+} \in \widehat{\mathcal{M}}^+$:

$$
Ch^g(f,m) = \bigoplus_{i=1}^{n} (f_{\alpha(i)} \ominus f_{\alpha(i-1)}) \odot m\left(A_i\right), \tag{4.5}
$$

gde je $\alpha = (\alpha(1), \dots \alpha(n))$ permutacija skupa indeksa takva da važi $0 \le f_{\alpha(1)} \le f_{\alpha(2)} \le \dots \le f_{\alpha(n)}$, $f_{\alpha(0)} = 0$ i $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \dots, x_{\alpha(n)}\}$ za sve i.

Drugi prikaz bipolarnog Šokeovog g-integrala je u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ koja je $\oplus$-CPT tipa, takva da važi $\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) \ominus m_2(B)$, za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, gde su m_1, $m_2 \in \widehat{\mathcal{M}}^+$ se razmatra u narednom tvrđenju.

Tvrđenje 4.2. *Neka je fazi bi-mera* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ *$\oplus$-CPT tipa, takva da važi* $\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) \ominus m_2(B)$, *za sve* $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, *gde su* m_1 *i* m_2 *dve normalizovane fazi mere. Bipolarni Šokeov* g*-integral funkcije* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *u odnosu na fazi bi-meru* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ *ima sledeću formu:*

$$BCh^g(f, \mathbf{m}) = Ch^g(f^+, m_1) \ominus Ch^g(f^-, m_2). \tag{4.6}$$

Primer 4.2. Ako se posmatra fazi bi-mera $\mathbf{m}$ koja je data u primeru 4.1 takva da je $\mathbf{m}(A, B) = m_1(A) \ominus m_2(B)$, za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, gde su m_1, $m_2 \in \widehat{\mathcal{M}}^+$, sledi da je fazi bi-mera $\mathbf{m}$ $\oplus$-CPT tipa. Tada za $f^+ = f \vee 0$ i $f^- = (-f) \vee 0$, $f^+, f^- \in \widehat{\mathcal{S}}^+$ na osnovu jednačine (4.5), važi da je
$Ch^g(f^+, m_1) = \Big(0.2^k \cdot m_1(\{x_1\})^k\Big)^{\frac{1}{k}}$ i
$Ch^g(f^-, m_2) = \Big(0.2^k \cdot m_2(\{x_2, x_4\})^k + (0.4^k - 0.2^k) \cdot m_2(\{x_4\})^k\Big)^{\frac{1}{k}}$.

Pošto je $\mu_{f^+}(\{x_2, x_1, x_4\}) = \mu_{f^+}(\{x_1, x_2, x_4\}) = \mathbf{m}(\{x_1\}, \{x_2, x_4\}) = m_1(\{x_1\}) \ominus m_2(\{x_2, x_4\})$ i $\mu_{f^+}(\{x_4\}) = \mathbf{m}(\emptyset, \{x_4\}) = m_1(\emptyset) \ominus m_2(\{x_4\})$, važi sledeća jednakost:

$$BCh^g(f, \mathbf{m}) = Ch^g(f^+, m_1) \ominus Ch^g(f^-, m_2).$$

4.2 Nejednakost Jensena za bipolarni Šokeov g-integral

U okviru ovog poglavlja dokazani su originalni rezultati Jensen-Stefensenove nejednakosti za bipolarni Šokeov g-integral (4.1) publikovani u [38, 39].

U narednom tvrđenju osobina asimetričnosti bipolarnog Šokeovog g-integrala je dokazana na osnovu leme (2.4) iz [62].

Tvrđenje 4.3. *Ako* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ *i* $\hat{\mathbf{m}}(A, B) = -\mathbf{m}(B, A)$, *za sve* $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, *tada za svaku funkciju* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *važi*

$$BCh^g(-f, \mathbf{m}) = -BCh^g(f, \hat{\mathbf{m}}).$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ i neka je $\hat{\mathbf{m}}(A, B) = -\mathbf{m}(B, A)$, za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$. Koristeći lemu 2.4(i), sledi da je $\hat{\mathbf{m}} \in \widehat{\mathcal{M}}$. Na osnovu tvrđenja 4.1, važi

$$BCh^g(f, \mathbf{m}) = \bigoplus_{i=1}^{n} |f_{\alpha(i)}| \odot \left(\mu_{f^+}(A_i) \ominus \mu_{f^+}(A_{i+1})\right),$$

gde su dati α i A_i i gde je $A_{n+1} = \emptyset$. Na osnovu leme 2.4 stavke (ii), pošto je g neparna funkcija, za sve $f \in \widehat{\mathcal{S}}$, može da se zaključi da je:

$$\begin{aligned} BCh^g(-f, \mathbf{m}) &= \bigoplus_{i:\, x_{\alpha(i)} \in supp(-f)} |f_{\alpha(i)}| \odot \big(\mu_{(-f)^+}(A_i) \ominus \mu_{(-f)^+}(A_{i+1})\big) \\ &= -\bigoplus_{i:\, x_i \in supp(f)} |f_{\alpha(i)}| \odot \left(\hat{\mu}_{f^+}(A_i) \ominus \hat{\mu}_{f^+}(A_{i+1})\right) \\ &= -BCh^g(f, \hat{\mathbf{m}}). \end{aligned}$$

□

U narednoj teoremi Jensen-Stefensenov tip nejednakosti za bipolarni Šokeov integral je dokazan na osnovu teoreme 3.4 iz odeljka 3.1.1 i tvrđenja 4.1 (gde je $g(x) = x$, za sve $x \in [-1, 1]$).

Teorema 4.4. *Neka je funkcija* $\varphi : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $\varphi(1) = 1$ *neparna i strogo rastuća, takva da je konveksna na* $[0, 1]$ *i* $c > 0$. *Neka je* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *i* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$. *Ako postoji permutacija skupa indeksa* α, *takva da je* $|f_{\alpha(i)}| \leq |f_{\alpha(j)}|$, *za sve* $i \leq j$ *i za sve* $i, j = 1, \ldots, n$, *je* $\mu_{f^+}(A_i)\mu_{f^+}(A_j) \geq 0$, $|\mu_{f^+}(A_i)| \leq c$ *i*

$|\mu_{f^+}(A_1)| = c$, *ili* $\tilde{\mu}_{f^+}(A_i)\tilde{\mu}_{f^+}(A_j) \geq 0$, $|\tilde{\mu}_{f^+}(A_i)| \leq c$, *i* $|\tilde{\mu}_{f^+}(A_1)| = c$, *gde je* $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\}$, *tada važi naredna nejednakost:*

$$\varphi\left(\frac{1}{c} \mid BCh\,(f, \mathbf{m}) \mid\right) \leq \frac{1}{c} \mid BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \mid . \tag{4.7}$$

Dokaz. Neka je $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ i $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$, gde je α odgovarajuća permutacija. Tada postoje dva moguća slučaja.

Slučaj I Za sve , $i = 1, \ldots, n$ važe sledeće nejednakosti $0 \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq c$ i $\mu_{f^+}(A_1) = c > 0$, ili $0 \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq c$ i $\tilde{\mu}_{f^+}(A_1) = c > 0$.
Na osnovu tvrđenja 4.1 u oba podslučaja, važi da je $BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \geq 0$ i $BCh\,(f, \mathbf{m}) \geq 0$. Ako pretpostavimo da je $BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) = 0$, tada sledi $BCh\,(f, \mathbf{m}) = 0$.
Neka važi sledeća pretpostavka: $BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) > 0$ i za sve $i = 1, \ldots, n$. Sledi da je $0 \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq c$ i $\mu_{f^+}(A_1) = c > 0$. Na osnovu tvrđenja 4.1 može da se zaključi da je:

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\frac{1}{c} \;\mid BCh(f, \mathbf{m}) \mid\Big) &= \varphi\Big(\frac{1}{c}\; BCh(f, \mathbf{m})\Big) \\
&= \varphi\Big(\frac{1}{c}\; \sum_{i=1}^{n} |f_{\alpha(i)}| \;\; (\mu_{f^+}(A_i) - \mu_{f^+}(A_{i+1}))\Big) \\
&= \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} |f_{\alpha(i)}| \; \Big(\frac{\mu_{f^+}(A_i)}{c} - \frac{\mu_{f^+}(A_{i+1})}{c}\Big)\Big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \varphi(|f_{\alpha(i)}|) \; \Big(\frac{\mu_{f^+}(A_i)}{c} - \frac{\mu_{f^+}(A_{i+1})}{c}\Big) \\
&= \frac{1}{c} \; \Big(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(f_{\alpha(i)})| \; \Big(\mu_{f^+}(A_i) - \mu_{f^+}(A_{i+1})\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{c} \; BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \\
&= \frac{1}{c} \; \mid BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \mid,
\end{aligned}$$

gde nejednakost važi na osnovu teoreme 3.4, tj. na dobro poznatom Jensenovom tipu nejednakosti za uređene težinske sredine sa realnim težinama p_i, takvim da je $0 \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \leq 1$, za sve $k = 1, \ldots, n-1$ i $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Analogno se dokazuje tvrdnja drugog podslučaja, odnosno za sve $i = 1, \ldots, n$ važi $0 \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq c$ i $\tilde{\mu}_{f^+}(A_1) = c > 0$.

Slučaj II Za sve $i = 1, \ldots, n$ važi $-c \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq 0$ i $\mu_{f^+}(A_1) = -c < 0$, ili važi $-c \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq 0$ i $\tilde{\mu}_{f^+}(A_1) = -c < 0$. U oba podslučaja, na osnovu tvrđenja 4.1, može da se zaključi da je $BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \leq 0$ i $BCh\,(f, \mathbf{m}) \leq 0$. Na osnovu toga sledi

$$\mid BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \mid = -BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m})\,, \quad \text{i} \quad \mid BCh(f, \mathbf{m}) \mid = -BCh(f, \mathbf{m}).$$

Ako važi pretpostavka da je $BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) = 0$, tada sledi $BCh\,(f, \mathbf{m}) = 0$.

U nastavku, ako pretpostavimo da je $BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) < 0$ i da za sve $i = 1, \ldots, n$ važi $-c \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq 0$, kao i $\mu_{f^+}(A_1) = -c < 0$. Na osnovu jednakosti (2.2), sledi da su za sve $i = 1, \ldots, n$, zadovoljene sledeće nejednakosti: $0 \leq \tilde{\hat{\mu}}_{(-f)^+}(A_i) \leq c$ i $\tilde{\hat{\mu}}_{(-f)^+}(A_1) = c > 0$. Bazirano na slučaju I, važi da je

$$\varphi\Big(\frac{1}{c} \ \mid BCh(-f, \hat{\mathbf{m}}) \mid \Big) \leq \frac{1}{c} \ \mid BCh\,(\varphi(-f), \hat{\mathbf{m}}) \mid .$$

Konačno, na osnovu tvrđenja 4.3 i prethodne nejednakosti, dobija se

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\frac{1}{c} \ \mid BCh(f, \mathbf{m}) \mid \Big) &= \varphi\Big(\frac{1}{c} \ BCh(-f, \hat{\mathbf{m}})\Big) \\
&= \varphi\Big(\frac{1}{c} \ \mid BCh(-f, \hat{\mathbf{m}}) \mid \Big) \\
&\leq \frac{1}{c} \ \mid BCh\,(\varphi(-f), \hat{\mathbf{m}}) \mid \\
&= \frac{1}{c} \ \mid BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \mid .
\end{aligned}$$

Analagno važi i za drugi podslučaj, odnosno kada za sve $i = 1, \ldots, n$, važi da je $-c \leq \tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq 0$ i $\tilde{\mu}_{f^+}(A_1) = -c < 0$. $\square$

Važi sledeća posledica prethodne teoreme.

Posledica 4.5. *Neka je funkcija* $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$, $\varphi(1) = 1$ *neparna i strogo rastuća, takva da je konkavna na* $[0,1]$ *i* $c > 0$. *Neka je* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *i* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$. *Ako postoji permutacija skupa indeksa* α, *takva da je* $|f_{\alpha(i)}| \leq |f_{\alpha(j)}|$, *za sve* $i \leq j$ *i za sve* $i, j = 1, \ldots, n$, *je* $\mu_{f^+}(A_i)\mu_{f^+}(A_j) \geq 0$, $|\mu_{f^+}(A_i)| \leq c$ *i* $|\mu_{f^+}(A_1)| = c$, *ili* $\tilde{\mu}_{f^+}(A_i)\tilde{\mu}_{f^+}(A_j) \geq 0$, $|\tilde{\mu}_{f^+}(A_i)| \leq c$, *i* $|\tilde{\mu}_{f^+}(A_1)| = c$, *gde je* $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\}$, *tada važi naredna nejednakost:*

$$\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \mid BCh\,(f, \mathbf{m}) \mid\right) \;\geq\; \frac{1}{c} \cdot \mid BCh\,(\varphi(f), \mathbf{m}) \mid . \tag{4.8}$$

Dokaz. Dokaz sledi iz činjenice da je φ^{-1} neparno i strogo rastuće na $[-1,1]$ i konveksno na $[0,1]$. $\square$

Teorema 4.6. *Neka je funkcija* φ *neparna, strogo rastuća i g-konveksno-konkavna, gde je* g *generatorska funkcija za simetrične pseudo-operacije* $\oplus$ *i* $\odot$. *Neka su date fazi bi-mera* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ *i funkcija* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$. *Ako je* $|\,\mathbf{m}(X^+, X^-)\,| = g^{-1}(c)$, $c > 0$, $\mathbf{c} = g^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$ *i postoji permutacija skupa indeksa* α *takva da je* $0 \leq |f_{\alpha(1)}| \leq |f_{\alpha(2)}| \leq \cdots \leq |f_{\alpha(n)}|$ *onda sledi:*

(i) $\mu_{f^+}(A_i) \geq 0$, *za sve* i, *ili* $\tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \geq 0$, *za sve* i, *gde je* $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\}$, *tada je*

$$\varphi\Big(\mathbf{c} \odot BCh^g\,(f, \mathbf{m})\Big) \leq \mathbf{c} \odot BCh^g\,(\varphi(f), \mathbf{m}).$$

(ii) $\mu_{f^+}(A_i) \leq 0$, *za sve* i, *ili* $\tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq 0$, *za sve* i, *gde je* $A_i = \{x_{\alpha(i)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\}$, *tada je*

$$\varphi\Big(\mathbf{c} \odot BCh^g\,(f, \mathbf{m})\Big) \geq \mathbf{c} \odot BCh^g\,(\varphi(f), \mathbf{m}).$$

Na osnovu leme 3.2(i), pod pretpostavkom da je neparna funkcija φ strogo rastuća i g-konkavno konveksna, uz ostale pretpostavke teoreme 4.6, dobijamo da važe obrnute nejednakosti navedene u teoremi 4.6.

Na osnovu leme 3.2(ii), pod pretpostavkom da je neparna funkcija φ strogo opadajuća i g-konkavno-konveksna, uz ostale uslove teoreme 4.6 dobijamo:

(i) ako je $\mu_{f^+}(A_i) \geq 0$, za sve i, ili $\tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \geq 0$, za sve i, tada je

$$\varphi\Big(\mathbf{c} \odot BCh^g\,(f, \mathbf{m})\Big) \geq \mathbf{c} \odot BCh^g\,(\varphi(f), \hat{\mathbf{m}})\,,$$

(ii) ako je $\mu_{f^+}(A_i) \leq 0$, za sve i, ili $\tilde{\mu}_{f^+}(A_i) \leq 0$, za sve i, tada je

$$\varphi\Big(\mathbf{c} \odot BCh^g\,(f, \mathbf{m})\Big) \leq \mathbf{c} \odot BCh^g\,(\varphi(f), \hat{\mathbf{m}})\,.$$

Na osnovu leme 3.2(iii), pod pretpostavkom da je neparna funkcija φ strogo opadajuća i g-konveksno-konkavna, uz ostale uslove teoreme 4.6, dobijamo obrnute nejednakosti u odnosu na poslednje navedene.

Primer 4.3. Neka su dati $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i funkcija f definisane sa $f\,(x_1) = -0.2$, $f\,(x_2) = 0.4$, $f\,(x_3) = -0.6$, i $f\,(x_4) = 0.8$.

(i) Fazi bi-mera $\mathbf{m}$ je definisana sa $\mathbf{m}\,(A, B) = m_1\,(A) - m_2\,(B)$, za sve $(A, B) \in \mathcal{Q}(X)$, gde su m_1 i m_2 mere (stoga $\mathbf{m}$ je + dekompozabilna) definisane sa

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4\}$
m_1	0.1	0.4	0.1	0.4
m_2	0	0.5	0.2	0.3

.

Neka je dato $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ i $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)\left(1 - e^{-|x|}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Očigledno, φ je neparna funkcija, konkavna na $[0, \infty[$ i konveksna na $]-\infty, 0]$. Na dalje sledi da je, $|f_1| \leq |f_2| \leq |f_3| \leq |f_4|$, za $\alpha = (1, 2, 3, 4)$ i $A_1 = X$, $A_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$, $A_3 = \{x_3, x_4\}$, $A_4 = \{x_4\}$, kao i $\mu_{f^+}(\{x_4\}) = 0.4$, $\mu_{f^+}(\{x_3, x_4\}) = -0.2 + 0.4 = 0.2$, $\mu_{f^+}(\{x_2, x_3, x_4\}) = 0.4 - 0.2 + 0.4 = 0.6$, $\mu_{f^+}(X) = 0 + 0.4 - 0.2 + 0.4 = 0.6 \neq 0$.
Koristeći tvrđenje 4.1, dobija se:

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\frac{1}{0.6}\cdot BCh(f,\mathbf{m})\Big) &= \varphi\Big(\frac{1}{0.6}\cdot\Big((0.2-0)\cdot 0.6+(0.4-0.2)\cdot 0.6+ \\
&+ (0.6-0.4)\cdot 0.2+(0.8-0.6)\cdot 0.4\Big)\Big) \\
&= 1-e^{-\frac{0.36}{0.6}} \\
&\approx 0.451;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.6}\cdot BCh(\varphi(f),\mathbf{m}) &= \frac{1}{0.6}\cdot\Big((\varphi(0.2)-\varphi(0))\cdot 0.6+(\varphi(0.4)-\varphi(0.2))\cdot 0.6+ \\
&+ (\varphi(0.6)-\varphi(0.4))\cdot 0.2+(\varphi(0.8)-\varphi(0.6))\cdot 0.4\Big) \\
&= \frac{1}{0.6}\cdot\Big((1-e^{-0.2})\cdot 0.6+(e^{-0.2}-e^{-0.4})\cdot 0.6+ \\
&+ (e^{-0.4}-e^{-0.6})\cdot 0.2+(e^{-0.6}-e^{-0.8})\cdot 0.4\Big) \\
&\approx 0.437.
\end{aligned}$$

Imamo da je

$$\varphi\Big(\frac{1}{0.6}\cdot BCh(f,\mathbf{m})\Big)\geq\frac{1}{0.6}\cdot BCh(\varphi(f,\mathbf{m})),$$

pošto je φ strogo rastuća i g-konkavno-konveksna, gde je $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. Ova činjenica takođe sledi na osnovu prve navedene posledice teoreme 4.6.

(ii) Neka $g(x)=\sqrt{x}$, za $x\in[0,\infty]$ i $g(x)=-\sqrt{-x}$, za $x\in[-\infty,0[$ generatorska funkcija za $\oplus=\oplus_g,\odot=\odot_g$. Neka su $\oplus$-mere ν_1 i ν_2 definisane na sledeći način

$$\nu_1=g^{-1}\circ m_1,\quad \nu_2=g^{-1}\circ m_2,$$

gde su m_1 i m_2 date u stavki (i) ovog primera. Fazi bi-mera ν je definisana za sve $(A,B)\in\mathcal{Q}(X)$, kao

$$\nu(A,B)=\nu_1(A)\ominus\nu_2(B).$$

Za funkciju f u okviru (i) ovog primera i ν (ν je $\oplus$-dekompozabilna), za $\alpha=(1,2,3,4)$, i $|f_1|\leq|f_2|\leq|f_3|\leq|f_4|$. Imamo da je $\mu_{f^+}(\{x_4\})=0.16$,

$\mu_{f^+}(\{x_3, x_4\}) = (-\sqrt{0.04} + \sqrt{0.16})^2 = 0.04$, $\mu_{f^+}(\{x_2, x_3, x_4\}) = (\sqrt{0.16} - \sqrt{0.04} + \sqrt{0.16})^2 = 0.36$ i $\mu_{f^+}(X) = (\sqrt{0.16} - \sqrt{0.04} + \sqrt{0.16})^2 = 0.36 \neq 0$. Neka je $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)\left(1 - e^{-|x|}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Funkcija φ je neparna i g konkavno-konveksno, jer je funkcija

$$g \circ \varphi \circ g^{-1}(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

konkavna na intervalu $[0, \infty[$ i konveksna na $]-\infty, 0]$. Na osnovu tvrđenja 4.1, gde je $\mathbf{c} = g^{-1}\left(\frac{1}{g(0.36)}\right)$, važi da je

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\mathbf{c} \odot BCh^g(f, \nu)\Big) &= \varphi\Big(g^{-1}\Big(\tfrac{1}{g(0.36)} \cdot BCh(g \circ f, g \circ \nu)\Big)\Big) \\
&= \varphi\Big(\Big(\frac{1}{\sqrt{0.36}}\Big(\sqrt{0.2}\sqrt{0.36} + (\sqrt{0.4} - \sqrt{0.2})\sqrt{0.36} + \\
&+ (\sqrt{0.6} - \sqrt{0.4})\sqrt{0.04} + (\sqrt{0.8} - \sqrt{0.6})\sqrt{0.16}\Big)\Big)^2\Big) \\
&\approx 0.4385.
\end{aligned}$$

Slično, može se izračunati

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} \odot BCh^g(\varphi(f), \nu) &= g^{-1}\Big(\frac{1}{g(0.36)} \cdot BCh(g \circ \varphi(f), g \circ \nu)\Big) \\
&\approx 0.4272.
\end{aligned}$$

Konačno, važi sledeće

$$\varphi(\mathbf{c} \odot BCh^g(f, \nu)) \geq \mathbf{c} \odot BCh^g(\varphi(f), \nu).$$

4.3 Nejednakost Jensena za bipolarni Šilkretov i Sugenov integral

U okviru ovog odeljka dokazani su originalni rezultati Jensenove nejednakosti za bipolarni Šilkretov (2.7) i bipolarni Sugenov integral (2.9), koji su publikovani u [39, 60].

Da bi se uprostile oznake, koristiće se notacije $\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(f)$ i $\mathcal{S}BSu_{\mathbf{m}}(f)$ za *signum bipolarnog Šilkretovog integrala i signum bipolarnog Sugenovog integrala* funkcije f u odnosu na fazi bi-meru $\mathbf{m}$, redom.

Lema 4.7. *Neka je data funkcija $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$ i $f \in \widehat{\mathcal{S}}$.*

(i) Ako je φ strogo rastuća i neparna funkcija, tada za svako $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ važi

$$\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\} = \{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \geq \mid \varphi(f_i) \mid\}$$

i

$$\{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\} = \{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \leq - \mid \varphi(f_i) \mid\}$$

(ii) Ako je φ konveksna funkcija na $[0,1]$ i konkavna na $[-1,0]$, takva da je $\varphi(0) = 0$, tada važi

$$\varphi(\lambda \cdot x) \leq \lambda \cdot \varphi(x),$$

za sve $x \in [0,1]$ i ako je $\lambda \in [0,1]$, tada važi

$$\varphi(\lambda \cdot x) \geq \lambda \cdot \varphi(x),$$

za sve $x \in [-1,0]$ i $\lambda \in [0,1]$.

Dokaz. Može se primetiti da je (ii) specijalan slučaj leme 3.1(iii). □

Sledeća teorema razmatra uslove pod kojima važi Jensenova nejednakost za bipolarni Šilkretov integral.

Teorema 4.8. *Neka je $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ i neka je $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$ neparna, strogo rastuća funkcija, koja je konveksna na intervalu $[0,1]$. Tada za $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ važi:*

(i) Ako je $\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0$, tada važi

$$\varphi\left(BSh(f, \mathbf{m})\right) \leq BSh(\varphi\left(f\right), \mathbf{m}).$$

(ii) Ako je $\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) < 0$, *tada važi*

$$\varphi\left(BSh(f,\mathbf{m})\right) \geq BSh(\varphi\left(f\right),\mathbf{m}).$$

Dokaz. Na osnovu definicije bipolarni Šilkretov integral može biti zapisan kao

$$BSh(f,\mathbf{m}) =$$

$$= \Big(\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(f)\Big)\bigvee_{i=1}^{n} \mid f_i \mid \cdot |\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)| \,. \tag{4.9}$$

(i) Neka važi sledeća pretpostavka $\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0$.

Očigledno, ako je $\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(f) \leq 0$, tada je stroga nejednakost validna. Neka je $\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(f) > 0$. Na osnovu (4.9) i leme 3.1(ii), može da se zaključi da je

$$\varphi\left(BSh(f,\mathbf{m})\right) =$$

$$= \varphi\Big(\textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \mid f_i \mid \cdot |\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)| \Big)$$

$$= \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi\Big(\mid f_i \mid \cdot |\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)| \Big).$$

Dalje, na osnovu leme 4.7 sledi

$$\varphi\left(BSh(f,\mathbf{m})\right) \leq$$

$$\leq \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi\Big(\mid f_i \mid \Big) \cdot |\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \geq \mid \varphi(f_i) \mid\}, \{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \leq - \mid \varphi(f_i) \mid\}\right)|$$

$$= \bigovee_{i=1}^{n} |\varphi\left(f_i\right)| \cdot \mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \geq \mid \varphi(f_i) \mid\}, \{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \leq - \mid \varphi(f_i) \mid\}\right)$$

$$= BSh(\varphi\left(f\right),\mathbf{m}).$$

(ii) Dokazuje se analogno (i). $\square$

Lako se uočava da pod uslovima teoreme 4.8, za sve $f \in \widehat{\mathcal{S}}$, $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$, ako je $BSh(f,\mathbf{m}) = 0$, važi $\varphi\left(\mid BSh\left(f,\mathbf{m}\right)\mid\right) \leq \mid BSh\left(\varphi(f),\mathbf{m}\right)\mid$.

Posledica 4.9. *Neka je* $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$, $\varphi(1) = 1$, *neparna i strogo rastuća funkcija koja je konkavna na* $[0,1]$. *Za sve* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *i* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$, *ako je* $BSh(f,\mathbf{m}) \neq 0$, *tada važi*

$$\varphi\left(\mid BSh\left(f,\mathbf{m}\right)\mid\right) \geq \mid BSh\left(\varphi(f),\mathbf{m}\right)\mid .$$

Dokaz. Koristeći činjenicu da je φ^{-1} neparno i strogo rastuće na $[-1,1]$ i konkavno na $[0,1]$, može da se zaključi da je

$$\varphi^{-1}\left(\mid BSh\left(\varphi(f),\mathbf{m}\right)\mid\right) \leq \mid BSh(\varphi^{-1}(\varphi(f)),\mathbf{m})\mid = \mid BSh\left(f,\mathbf{m}\right)\mid,$$

pa sledi da ovo tvrđenje važi. $\square$

Može da se uoči da navedena nejednakost važi, čak i ako je navedeni uslov $\varphi(1) = 1$ izostavljen.

Primer 4.4. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Neka su funkcija f i fazi bi-mera $\mathbf{m}$ definisani, kao u primeru 2.3. Na osnovu definicije bipolarnog Šilkretovog integrala dobija se: $BSh(f,\mathbf{m}) = -0.4$

(i) Neka je funkcija φ je definisana na sledeći način $\varphi\left(x\right) = \frac{x}{2-|x|}$, $x \in \left[-1,1\right]$. Koristeći rezultat iz primera 2.3 imamo

$$\varphi\left(BSh(f,\mathbf{m})\right) = \frac{-0.4}{2-0.4} = -0.25.$$

Za bipolarni Šilkretov integral funkcije $\varphi(f)$, imamo da je:

$$\begin{aligned} BSh(\varphi\left(f\right),\mathbf{m}) &= (\varphi(0)\cdot\mathbf{m}(\{x_1,x_2\},\{x_3\}))\circledvee(\varphi(0.6)\cdot\mathbf{m}(\{x_2\},\{x_3\})) \\ &\quad \circledvee\left(\varphi\left(0.8\right)\cdot\mathbf{m}(\emptyset,\{x_3\})\right) \\ &= (\varphi(0.6)\cdot 0.4)\circledvee\left(\varphi\left(0.8\right)\cdot(-0.5)\right) \\ &\approx 0.17143\circledvee(-0.33333) = -0.33333. \end{aligned}$$

Na osnovu toga, nejednakost data u teoremi 4.8 (ii) je validna.

(ii) Neka je funkcija φ je definisana na sledeći način $\varphi(x) = ax$, $x \in [-1,1]$, gde je $0 < a \leq 1$. Imamo da je

$$\varphi(BSh(f,\mathbf{m})) = -0.4a.$$

Za bipolarni Šilkretov integral funkcije $\varphi(f)$, sledi

$$\begin{aligned} BSh(\varphi(f), \mathbf{m}) &= (0 \cdot 0.6) \varovee (0.6a \cdot 0.4) \varovee (0.8a \cdot (-0.5)) \\ &= 0.24a \varovee (-0.4a) \\ &= -0.4a. \end{aligned}$$

U ovom slučaju važi jednakost.

(iii) Neka je data funkcija $\varphi(x) = \frac{2x}{1+|x|}$, $x \in [-1,1]$. Očigledno, φ je konkavna na $[0,1]$. Dobijamo da je

$$\varphi(BSh(f,\mathbf{m})) = \frac{2 \cdot (-0.4)}{1+ \mid -0.4 \mid} = -\frac{4}{7} \approx -0.57143.$$

Izračunajmo bipolarni Šilkretov integral funkcije $\varphi(f)$:

$$\begin{aligned} BSh(\varphi(f), \mathbf{m}) &= (\varphi(0) \cdot \mathbf{m}(\{x_1, x_2\}, \{x_3\})) \varovee (\varphi(0.6) \cdot \mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_3\})) \\ &\quad \varovee (\varphi(0.8) \cdot \mathbf{m}(\emptyset, \{x_3\})) \\ &= (\varphi(0.6) \cdot 0.4) \varovee (\varphi(0.8) \cdot (-0.5)) \\ &\approx 0.3 \varovee (-0.44444) = -0.44444. \end{aligned}$$

Sledi da je $\varphi(\mid BSh(f,\mathbf{m}) \mid) = \frac{4}{7} > \frac{4}{9} = \mid BSh(\varphi(f), \mathbf{m}) \mid$, odnosno nejednakost data u posledici 4.9 je zadovoljena.

Ako važi $\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) = 0$, tada nejednakosti date u teoremi 4.8 (i), kao i u teoremi 4.8 (ii) ne moraju biti zadovoljene, što je ilustrovano narednim primerima.

Primer 4.5. Neka je dat skup $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i funkcija f definisana sa $f(x_1) = \sqrt[3]{0.4}$, $f(x_2) = -\sqrt[3]{0.8}$, $f(x_3) = \sqrt[3]{0.1}$, i $\varphi(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$.

(i) Neka je fazi bi-mera $\mathbf{m}$ normalizovana, takva da vazi $\mathbf{m}(\varnothing, \{x_2\}) = -0.3$, $\mathbf{m}(\{x_1, x_3\}, \{x_2\}) = 1$ i $\mathbf{m}(\{x_1\}, \{x_2\}) = 0.6$. Imamo:

$$\begin{aligned}
BSh(f, \mathbf{m}) &= (\sqrt[3]{0.4} \cdot \mathbf{m}(\{x_1\}, \{x_2\})) \circledvee (\sqrt[3]{0.8} \cdot \mathbf{m}(\varnothing, \{x_2\})) \\
&\quad \circledvee (\sqrt[3]{0.1} \cdot \mathbf{m}(\{x_1, x_3\}, \{x_2\})) \\
&= \left(\sqrt[3]{0.4} \cdot 0.6\right) \circledvee (\sqrt[3]{0.8} \cdot (-0.3)) \circledvee (\sqrt[3]{0.1} \cdot 1) \\
&\approx 0.44208 \circledvee (-0.27850) \circledvee 0.46416 \\
&= 0.46416,
\end{aligned}$$

pored toga je $\varphi(BSh(f, \mathbf{m})) = 0.1$, kao i

$$\begin{aligned}
BSh(\varphi(f), \mathbf{m}) &= (0.4 \cdot \mathbf{m}(\{x_1\}, \{x_2\})) \circledvee (0.8 \cdot \mathbf{m}(\emptyset, \{x_2\}\})) \\
&\quad \circledvee (0.1 \cdot \mathbf{m}(\{x_1, x_3\}, \{x_2\})) \\
&= (0.4 \cdot 0.6) \circledvee (0.8 \cdot (-0.3)) \circledvee (0.1 \cdot 1) \\
&= 0.24 \circledvee (-0.24) \circledvee 0.1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dakle, važi da je $\varphi(BSh(f, \mathbf{m})) > BSh(\varphi(f), \mathbf{m})$.

(ii) Neka je data normalizovana fazi bi-mera $\mathbf{m}$ sa sledećim vrednostima $\mathbf{m}(\{x_2\}, \varnothing) = 0.3$, $\mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_1, x_3\}) = -1$ i $\mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_1\}) = -0.6$, kao i $g = -f$. Na osnovu toga sledi:

$$\begin{aligned}
BSh(g, \mathbf{m}) &= (\sqrt[3]{0.4} \cdot \mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_1\})) \circledvee (\sqrt[3]{0.8} \cdot \mathbf{m}(\{x_2\}, \emptyset)) \\
&\quad \circledvee (\sqrt[3]{0.1} \cdot \mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_1, x_3\})) \\
&= \left(\sqrt[3]{0.4} \cdot (-0.6)\right) \circledvee (\sqrt[3]{0.8} \cdot 0.3) \circledvee (\sqrt[3]{0.1} \cdot (-1)) \\
&\approx (-0.44208) \circledvee 0.27850 \circledvee (-0.46416) = -0.46416,
\end{aligned}$$

pa sledi da je $\varphi(BSh(g,\mathbf{m})) = -0.1$, kao i

$$\begin{aligned} BSh(\varphi(g),\mathbf{m}) &= (0.4\cdot\mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1\}))\circledvee(0.8\cdot\mathbf{m}(\{x_2\},\varnothing)) \\ &\quad \circledvee(0.1\cdot\mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1,x_3\})) \\ &= (0.4\cdot(-0.6))\circledvee(0.8\cdot 0.3))\circledvee(0.1\cdot(-1)) \\ &= (-0.24)\circledvee 0.24\circledvee(-0.1) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(BSh(g,\mathbf{m})) < BSh(\varphi(g),\mathbf{m})$.

(iii) Ako se uzme da je $\varphi(x) = x$, $x \in [-1,1]$ i ista fazi bi-mera $\mathbf{m}$ data pod (i), tada za funkciju h koja zadovoljava $h(x_1) = 0.4$, $h(x_2) = -0.8$, $h(x_3) = 0.1$, dobijamo $\varphi(BSh(h,\mathbf{m})) = BSh(\varphi(h),\mathbf{m}) = 0$.

Primer 4.6. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Funkcija f neka je definisana sa $f(x_1) = \sqrt[5]{0.3}$, $f(x_2) = -\sqrt[5]{0.6}$, $f(x_3) = \sqrt[5]{0.1}$, a funkcija $\varphi(x) = x^5$, $x \in [-1,1]$.

(i) Ako $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$, gde je $\mathbf{m}(\{x_1,x_3\},\{x_2\}) = 1$, $\mathbf{m}(\{x_1\},\{x_2\}) = 0.8$ i $\mathbf{m}(\varnothing,\{x_2\}) = -0.4$, dobijamo:

$$\begin{aligned} BSh(f,\mathbf{m}) &= (\sqrt[5]{0.3}\cdot\mathbf{m}(\{x_1\},\{x_2\}))\circledvee(\sqrt[5]{0.6}\cdot\mathbf{m}(\varnothing,\{x_2\})) \\ &\quad \circledvee(\sqrt[5]{0.1}\cdot\mathbf{m}(\{x_1,x_3\},\{x_2\})) \\ &= \left(\sqrt[5]{0.3}\cdot 0.8\right)\circledvee(\sqrt[5]{0.6}\cdot(-0.4))\circledvee(\sqrt[5]{0.1}\cdot 1) \\ &\approx 0.62880\circledvee(-0.36115)\circledvee 0.63096 \\ &= 0.63096, \end{aligned}$$

dok je $\varphi(BSh(f,\mathbf{m})) = 0.1$, a važi i

$$\begin{aligned} BSh(\varphi(f),\mathbf{m}) &= (0.3\cdot\mathbf{m}(\{x_1\},\{x_2\}))\circledvee(0.6\cdot\mathbf{m}(\emptyset,\{x_2\}\})) \\ &\quad \circledvee(0.1\cdot\mathbf{m}(\{x_1,x_3\},\{x_2\})) \\ &= (0.3\cdot 0.8)\circledvee(0.6\cdot(-0.4))\circledvee(0.1\cdot 1) \\ &= 0.24\circledvee(-0.24)\circledvee 0.1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(\mid BSh(f,\mathbf{m})\mid) > \mid BSh(\varphi(f),\mathbf{m})\mid = 0$.

(ii) Ako $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ je takvo da važi $\mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1,x_3\}) = -1$, $\mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1\}) = -0.8$, $\mathbf{m}(\{x_2\},\varnothing) = 0.4$ i $g = -f$. Tada sledi:

$$\begin{aligned} BSh(g,\mathbf{m}) &= (\sqrt[5]{0.3}\cdot \mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1\})) \circledvee (\sqrt[5]{0.6}\cdot \mathbf{m}(\{x_2\},\emptyset)) \\ &\quad \circledvee (\sqrt[5]{0.1}\cdot \mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1,x_3\})) \\ &= \left(\sqrt[5]{0.3}\cdot(-0.8)\right) \circledvee (\sqrt[5]{0.6}\cdot 0.4) \circledvee (\sqrt[5]{0.1}\cdot(-1)) \\ &\approx (-0.62880) \circledvee 0.36115 \circledvee (-0.63096) = -0.63096, \end{aligned}$$

pa imamo da je $\varphi(BSh(g,\mathbf{m})) = -0.1$, kao i

$$\begin{aligned} BSh(\varphi(g),\mathbf{m}) &= (0.3\cdot \mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1\})) \circledvee (0.6\cdot \mathbf{m}(\{x_2\},\varnothing)) \\ &\quad \circledvee (0.1\cdot \mathbf{m}(\{x_2\},\{x_1,x_3\})) \\ &= (0.3\cdot(-0.8)) \circledvee (0.6\cdot 0.4)) \circledvee (0.1\cdot(-1)) \\ &= (-0.24) \circledvee 0.24 \circledvee (-0.1) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(\mid BSh(g,\mathbf{m})\mid) > \mid BSh(\varphi(g),\mathbf{m})\mid = 0$.

(iii) Ako se uzme da je $\varphi(x) = x,\ \ x \in [-1,1]$, zatim $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ koje je dato pod (i) i $h \in \mathcal{M}$, a koje je definisano sa $h(x_1) = 0.3$, $h(x_2) = -0.6$, $h(x_3) = 0.1$, tada se dobija $\varphi(\mid BSh(h,\mathbf{m})\mid) = \mid BSh(\varphi(h),\mathbf{m})\mid = 0$.

U narednoj teoremi je dokazana Jensenova nejednakost za diskretni bipolarni Sugenov integral.

Teorema 4.10. *Neka je data fazi bi-meru* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$ *i rastuća, neparna funkcija* $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$, *koja zadovoljava* $\varphi(x) \le x$ *na intervalu* $[0,1]$. *Za funkciju* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$, *važi sledeće:*

(i) ako je $\mathcal{S}BSu_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0$, *tada sledi*

$$\varphi(BSu(f,\mathbf{m})) \le BSu(\varphi(f),\mathbf{m}),$$

(ii) ako je $\mathcal{S}BSu_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) < 0,$ *tada sledi*

$$\varphi\left(BSu(f,\mathbf{m})\right) \geq BSu(\varphi(f),\mathbf{m}).$$

Dokaz. Koristiće se sledeća formula za bipolarni Sugenov integral:

$$BSu(f,\mathbf{m}) =$$

$$= \Big(\mathcal{S}BSh_{\mathbf{m}}(f)\Big) \bigvee_{i=1}^{n} \mid f_i \mid \wedge \left|\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)\right|. \tag{4.10}$$

(i) Neka je $\mathcal{S}BSu_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) > 0.$

Očigledno, ako se pretpostavi da je $\mathcal{S}BSu_{\mathbf{m}}(f) \leq 0$, stroga nejednakost važi.

Ako je $\mathcal{S}BSu_{\mathbf{m}}(f) > 0$, na osnovu (4.10) i leme 3.1(ii) zaključujemo:

$$\varphi\left(BSu(f,\mathbf{m})\right) =$$

$$= \varphi\Big(\textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \mid f_i \mid \wedge \left|\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)\right| \Big)$$

$$= \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi\Big(\mid f_i \mid \wedge \left|\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)\right| \Big)$$

$$= \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi(\mid f_i \mid) \wedge \varphi(\left|\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)\right|).$$

Na osnovu uslova $\varphi(x) \leq x$ na $[0,1]$ i leme 3.1(i), važi da je:

$$\varphi\left(BSu(f,\mathbf{m})\right)$$

$$\leq \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi(\mid f_i \mid) \wedge \left|\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid f_j \geq \mid f_i \mid\}, \{x_j \in X \mid f_j \leq - \mid f_i \mid\}\right)\right|$$

$$= \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi(\mid f_i \mid) \wedge \left|\mathbf{m}\left(\{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \geq \mid \varphi(f_i) \mid\}, \{x_j \in X \mid \varphi(f_j) \leq - \mid \varphi(f_i) \mid\}\right)\right|$$

$BSu(\varphi(f), \mathbf{m})$.

(ii) Analogno dokazu (i). $\square$

Sledi posledica teoreme 4.10.

Posledica 4.11. *Neka je* $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$, $\varphi(1) = 1$, *neparna i strogo rastuća funkcija, takva da je* $\varphi(x) \geq x$ *na* $[0,1]$, *koja je konkavna na* $[0,1]$. *Za sve* $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ *i* $\mathbf{m} \in \widehat{\mathcal{M}}$, *ako je* $BSu(f, \mathbf{m}) \neq 0$, *tada važi*

$$\varphi\left(\mid BSu\left(f, \mathbf{m}\right) \mid\right) \geq \mid BSu\left(\varphi(f), \mathbf{m}\right) \mid .$$

Dokaz je sličan dokazu posledice 4.9.
Kao kod bipolarnog Šilkretovog integrala, može se uočiti da navedena nejednakost važi čak i ako je navedeni uslov $\varphi(1) = 1$ izostavljen.

Primer 4.7. Neka su funkcija f i fazi bi-mera $\mathbf{m}$ date kao u primeru 4.4.

(i) Funkcija φ je zadata na sledeći način $\varphi(x) = \operatorname{sign}(x) \ln(1 + |x|)$, $x \in [-1,1]$. Na osnovu primera 2.4, sledi da je vrednost bipolarnog Sugenovog integrala funkkcije f jednaka: $BSu(f, \mathbf{m}) = -0.5$. Sledi da je:

$$\varphi\left(BSu(f, \mathbf{m})\right) = -\ln\left(1 + 0.5\right) \approx -0.40547.$$

Zatim važi da je:

$$\begin{aligned} BSu(\varphi(f), \mathbf{m}) &= (\varphi(0) \owedge 0.6) \ovee (\varphi(0.6) \owedge 0.4) \ovee (\varphi(0.8) \owedge (-0.5)) \\ &= (0.47 \owedge 0.4) \ovee (0.58779 \owedge (-0.5)) \\ &= 0.4 \ovee (-0.5) = -0.5. \end{aligned}$$

Pošto je

$$\varphi(|BSu(f, \mathbf{m})|) = 0.40547 \leq 0.5 = |BSu(\varphi(f), \mathbf{m})|,$$

dobija se da je nejednakost u teoremi 4.10 zadovoljena.

(ii) Neka je $\varphi(x) = \frac{2x}{1+|x|}$, $x \in [-1,1]$. Očigledno, važi $\varphi(x) \geq x$, za svako $x \in [0,1]$.
Sledi da je $\varphi(BSu(f,\mathbf{m})) = \frac{2\cdot(-0.5)}{1+|-0.5|} = -\frac{2}{3}$ i

$$\begin{aligned} BSu(\varphi(f),\mathbf{m}) &= (\varphi(0) \owedge 0.6) \ovee (\varphi(0.6) \owedge 0.4) \ovee (\varphi(0.8) \owedge (-0.5)) \\ &\approx (0.75 \owedge 0.4) \ovee (0.88889 \owedge (-0.5)) \\ &= 0.4 \ovee (-0.5) = -0.5. \end{aligned}$$

Dakle, nejednakost data u posledici 4.11 je zadovoljena, jer važi da je

$$\varphi(|BSu(f,\mathbf{m})|) = \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2} = |BSu(\varphi(f),\mathbf{m})|.$$

U sledećem primeru biće ilustrovano da ako je $\mathcal{S}BSu_{\mathbf{m}}(\varphi(f)) = 0$, tada postoje tri mogućnosti:

1) $\varphi(BSu(f,\mathbf{m})) = BSu(\varphi(f),\mathbf{m})$,
2) $\varphi(BSu(f,\mathbf{m})) > BSu(\varphi(f),\mathbf{m})$,
3) $\varphi(BSu(f,\mathbf{m})) < BSu(\varphi(f),\mathbf{m})$.

Primer 4.8. Neka su X i funkcija f dati kao u primeru 2.3, a funkcija $\varphi(x) = \mathrm{sign}(x)\, x^2$, $x \in [-1,1]$.

(i) Neka je $\mathbf{m}$ normalizovana fazi bi-mera, takva da je $\mathbf{m}(\{x_1,x_2\},\{x_3\}) = 0.6$, $\mathbf{m}(\{x_2\},\{x_3\}) = 0.36$ i $\mathbf{m}(\emptyset,\{x_3\}) = -0.36$. Sledi da je:

$$\begin{aligned} \varphi(BSu(f,\mathbf{m})) &= \varphi((0 \owedge 0.6) \ovee (0.6 \owedge 0.36) \ovee (0.8 \owedge (-0.36)) \\ &= \varphi(0.36 \ovee (-0.36)) = \varphi(0) = 0, \end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned} BSu(\varphi(f),\mathbf{m}) &= (0 \owedge 0.6) \ovee (0.36 \owedge 0.36) \ovee (0.64 \owedge (-0.36)) \\ &= 0.36 \ovee (-0.36) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(BSu(f,\mathbf{m})) = BSu(\varphi(f),\mathbf{m})$.

(ii) Neka je $\mathbf{m}$ normalizovana fazi bi-mera, takva da je $\mathbf{m}(\{x_1, x_2\}, \{x_3\}) = 0.6$, $\mathbf{m}(\{x_2\}, \{x_3\}) = 0.4$ i $\mathbf{m}(\emptyset, \{x_3\}) = -0.36$. Dobijamo:

$$\begin{aligned}\varphi(BSu(f, \mathbf{m})) &= \varphi((0 \owedge 0.6) \ovee (0.6 \owedge 0.4) \ovee (0.8 \owedge (-0.36)) \\ &= \varphi(0.4 \ovee (-0.36)) = \varphi(0.4) = 0.16,\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}BSu(\varphi(f), \mathbf{m}) &= (0 \owedge 0.6) \ovee (0.36 \owedge 0.4) \ovee (0.64 \owedge (-0.36)) \\ &= 0.36 \ovee (-0.36) = 0.\end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(BSu(f, \mathbf{m})) > BSu(\varphi(f), \mathbf{m})$.

(iii) Neka je $\mathbf{m}$ normalizovana fazi bi-mera, takva da je $\mathbf{m}(\{x_1, x_3\}, \{x_2\}) = -0.3$, $\mathbf{m}(\{x_3\}, \{x_2\}) = -0.4$ i $\mathbf{m}(\{x_3\}, \emptyset) = 0.36$, kao i $g = -f$. Tada imamo da je:

$$\begin{aligned}\varphi(BSu(g, \mathbf{m})) &= \varphi((0 \owedge (-0.3)) \ovee (0.6 \owedge (-0.4)) \ovee (0.8 \owedge 0.36) \\ &= \varphi((-0.4) \ovee 0.36) = \varphi(-0.4) = -0.16\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}BSu(\varphi(g), \mathbf{m}) &= (0 \owedge (-0.3)) \ovee (0.36 \owedge (-0.4)) \ovee (0.64 \owedge 0.36) \\ &= (-0.36) \ovee 0.36 = 0.\end{aligned}$$

U ovom slučaju važi: $\varphi(BSu(g, \mathbf{m})) < BSu(\varphi(g), \mathbf{m})$.

Glava 5

Zaključak

5.1 Zaključak sprovedenog istraživanja

U poslednjim godinama, pažnja naučnika je usmerena na razvoj novih fazi integrala gde su skale bipolarne [21, 22, 23]. U okviru ove disertacije su uvedeni novi tipovi bipolarnih integrala. Jensenov tip nejednakosti ima primenu u mnogim oblastima kao što su matematička ekonomija, verovatnoća, teorija optimizacije itd. Jensen-Stefensenova nejednakost za integrale sa bipolarnim skalama je analizirana u okviru ove disertacije.

Originalni rezultati ove disertacije mogu biti značajni za razvoj teorije odlučivanja koja već ima široku primenu ne samo u ekonomiji, već i u različitim inženjerskim granama i u procesima gde je potrebno doneti određene odluke na osnovu ulaznih parametara.

U prvom delu su predstavljene definicija i osobine funkcija agregacija. Pored toga, prikazan je pregled osnovnih pojmova, definicija, teorema, primera i metoda vezanih za fazi mere, fazi bi-mere i fazi integrale. Zatim su pokazane pseudo-operacije i simetrične pseudo-operacije, uz navođenje njihovih osobina.

Potom, u drugoj glavi su definisani, kao i dati primeri za bipolarne integrale u odnosu na fazi bi-mere. Prikazan je diskretni bipolarni pseudo-integral [53, 54, 56]. U okviru ovog poglavlja dokazane su dve nove teoreme, koje su publikovane u [62]. Zatim su prezentovane definicije i data karakterizacija, bipolarnog Šokeovog, bipolarnog Šilkretovog i bipolarnog Sugenovog integrala, a koji su predstavljeni u [22, 23]. Ovaj tip integrala je proučavan i od drugih autora [58].

Bazirano na definiciji pan integrala [67], gde je korišćeno klasično sabiranje i množenje $(+, \cdot)$, prikazani su originalni rezultati za novi tip diskretnog bipolarnog pan integrala u odnosu na fazi bi-meru, a koji je publikovan u [59]. Pored toga je i ispitana međusobna veza različitih tipova bipolarnih dekompozabilnih integrala. U tvrđenju 2.14 ukazano je kada su jednaki bipolarni integrali.

Nakon toga, u trećoj glavi, dokazane su nove teoreme Jensen-Stefensenovog tipa za nejednakosti za diskretni bipolarni pseudo-integral u odnosu na $\oplus$-dekompozabilnu fazi bi-meru. Ovi rezultati su publikovani u [61, 62]. Posebno su bila razmatrana tri slučaja, u odnosu na tri tipa simetričnih pseudo-operacija.

Na osnovu uslova iz tvrđenja 3.6, tvrđenja 3.10 i tvrđenja 3.11 iz poglavlja 3.1, opšti rezultat za bipolarni pseudo-integral može se izraziti sa:

$$0 < \varphi\left(\left| \int_X^{\oplus} f \odot d\mathbf{m} \right| \right) \leq \left| \int_X^{\oplus} \varphi(f) \odot d\mathbf{m} \right|.$$

Dobijeni rezultati Jensen-Stefensenovog tipa nejednakosti za bipolarni pseudo-integral nenegativne funkcije su u korelaciji sa odgovarajućom nejednakošću za Sugenov integral koji je prikazan u [47] i za Šokeov integral koji je prikazan u [33].

Pored primene novih teorijskih rešenja u okviru naučnih istraživanja vezanih za diskretni bipolarni integral, gledajući iz pravca primene istih, predložena nejednakost za bipolarni pseudo-integral može biti korisna za probleme odlučivanja gde je primenjena skala sa bipolarnim vrednostima. Ovi rezultati mogu takođe biti primenjeni na aktuarskim modelima za predstavljanje mera rizika.

U okviru četvrte glave, prikazani su originalni rezultati, koji su definisali novi bipolarni Šokeov g integral. To je publikovano u [38, 39], uz navođenje osnovnih pojmova, definicija, teorema, kao i primera vezanih za ovaj integral. On može biti korišćen u primeni integrala zasnovanim na fazi bi-merama, a u cilju reprezentacije modela odlučivanja, ili inženjerskim problemima. Bipolarni Šokeov g integral baziran na odgovarajućoj $\oplus$-dekompozabilnoj fazi bi-meri se podudara sa specijalnim tipom diskretnog bipolarnog pseudo-integrala koji je prikazan u [54]. Takođe je ispitana Jensen-Stefensenova nejednakost za ovaj integral, a što je publikovano u [38, 39].

Zatim su predstavljeni originalni rezultati u vidu novih teorema Jensen-Stefensenovog tipa za bipolarni Šilkretov i bipolarni Sugenov integral u odnosu na fazi bi-mere, a koji su publikovani u [39, 60]. Pored toga su prikazani i primeri, koji ilustruju primenu datih rezultata.

5.2 Budući rad

Savremeni izazovi modernog sveta, zahtevaju smanjenje i optimizaciju troškova, povećanje produktivnosti, kao i donošenje investicionih odluka na osnovu preciznih matematičkih algoritama. Baš iz tog razloga, dolazi do ubrzanog razvoja vestačke inteligencije, machine learning algoritama, modela baziranih na vremenskim serijama, kao i drugih, a koji su zasnovani na praktičnoj primeni modela odlučivanja.

Polje primene integrala sa bipolarnim skalama je veoma široko. Sledeći pravac daljeg istraživanja, odnosno budućeg rada, jeste u smeru razvoja novih integrala sa skalama koje su bipolarne, a koji bi mogli da nađu primenu u privredi.

Bibliografija

[1] Abbaszadeh S., Gordji M. E., Pap E., Szakál A., Jensen-type inequalities for Sugeno integral, Inform. Sci.376, (2017), 148-157

[2] Baets De B., Idempotent uninorms, Europ. J. Oper. Research 180, (1999), 631–642.

[3] Beliakov G., Pradera A., Calvo T., Aggregation Functions, a Guide for Practitioners, Springer, Heidelberg, (2007).

[4] Benvenuti P., Mesiar R., Integrals with respect to a general fuzzy measure. In: M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno, eds. Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications, Physica- Verlag, Heidelberg, (2000), 205–232.

[5] Benvenuti P., Mesiar R., Pseudo-arithmetical operations as a basis for the general measure and integration theory, Inform. Sci. vol. 160, (2004), 1–11.

[6] Benvenuti P., Mesiar R., Vivona D., Monotone Set Functions-Based Integrals, Handbook of Measure Theory (Ed. E. Pap), Elsevier, Amsterdam, (2002), 1329–1379.

[7] Bullen P.S., Accentuate the negative, Mathematica Bohemica, vol.134, (2009), 427–446.

[8] Benvenuti P., Vivona D., Divari M., Aggregation operators and associated fuzzy measures Int. Journal on Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-Based Systems, vol.9, n.2, (2001), 197–204.

[9] Calvo T., Kolesarova A., Komornikova M., Mesiar R., Aggregation operators: properties, classes and construction methods, Physica-Verlag, Heidelbeg, (2002), 3–104.

[10] Choquet G., Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 5, (1953/54), 131–295.

[11] Denneberg D., Non-additive Measure and Integral, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1994).

[12] Halmos P. R., Measure Theory. Van Nostrand, New York, (1950).

[13] Gahfil J. A., Raheem I. M., A Generalized Integral of Shilkret and Choquet Integrals, Iraqi Journal of Science, Vol. 57, n.3A, (2016), 1813–1818.

[14] Grabisch M., Labreuche C., Bi-capacities, Part I: definition, Möbius transform and interaction, Fuzzy Sets Syst. 151, (2005), 211–236.

[15] Grabisch M., Labreuche C., Bi-capacities, Part II: the Choquet integral, Fuzzy Sets Syst. 151, (2005), 237–259.

[16] Grabisch M., Baets De B., Fodor J., The Quest for Rings on Bipolar Scales, Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12, (2004), 499–512.

[17] Grabisch M., Labreuche Ch., Vansnick J. C., On the extension of pseudo-Boolean functions for the aggregation of interacting bipolar criteria, European J. Oper. Res. 148, (2003), 28-47

[18] Grabisch M., Murofushi T., Sugeno M., eds., Fuzzy Measures and Integrals. Theory and Applications. Physica-Verlag, Heidelberg, (2000).

[19] Grabisch M., Marichal J., Mesiar R., Pap E., Aggregation functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 127. Cambridge University Press, Cambridge, (2009).

[20] Greco S., Matarazzo B., Giove S., The Choquet integral with respect to a level dependent capacity, Fuzzy Sets Syst. 175, (2011), 1–35.

[21] Greco S., Matarazzo B., Slowinski R., Bipolar Sugeno and Choquet integrals, in: G. Pasi B. De Baets, J. Fodor (Eds.), Workshop on Information Systems (EUROFUSE 2002), Varenna, Italy, (2002), 191–196.

[22] Greco S., Rindone F., Bipolar fuzzy integrals, Fuzzy Sets Syst. 220, (2013), 21–33.

[23] Greco S., Mesiar R., Rindone F., Discrete bipolar universal integrals, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 252, (2014), 55-65.

[24] Klement E. P., Mesiar R., Pap E., A Universal Integral as Common Frame for Choquet and Sugeno Integral, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 18, (2010), 178–187.

[25] Klement E. P., Mesiar R., Pap E., Generated triangulars norma, Kybernetika,volume 36, n. 3, (2000), 363–377.

[26] Kuich W., Semirings, Automata, Languages,Springer, Berlin, (1986).

[27] Labreuche Ch., Grabisch M., Generalized Choquet integral on ratio scales, Fourteenth Mini-EURO Conf. on Human Centered Processes, (2003), 261–265.

[28] Lehrer E., A new integral for capacities, Econ.Theory 39, (2009), 157-176

[29] Maslov V. P. , Asymptotic methods for solving pseudo-differential equations, (in Russian), Nauka, Moscow, (1987).

[30] Mesiar R., Compensatory operators based on triangular norms. Proceedings EUFIT'95, Aachen, (1995), 131–135.

[31] Mesiar R., Choquet-like integrals, Journal of Mathematical Analysis and Applications 194 (1995) 477–488.

[32] Mesiar R., Komorníková M., Aggregation Operators, Proceeding of the XI Conference on applied Mathematics PRIM' 96, Herceg D., Surla K. (eds.), Institute of Mathematics, Novi Sad, 193–211, (1997).

[33] Mesiar R., Li J., Pap E., The Choquet integral as Lebesgue integral and related inequalities, Kybernetika 46 (2010), 1098–1107.

[34] Mesiar R., Li J., Pap E., Discrete pseudo-integrals, International Journal of Approxi-mate Reasoning 54 (2013), 357–364.

[35] Mesiar R., Rybárik J., Pan-operations structure, Fuzzy Sets Syst 74, (1995), 365–369.

[36] Mihailović B., Pap E., Decomposable signed fuzzy measures, Proc. EUSFLAT'07, Ostrava, Czech Republic, (2007), 265–269.

[37] Mihailović B., Manzi M., Đapić P., The Shilkret-like integral on the symmetric interval, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 77 Number 3, (2015), 29-40.

[38] Mihailović B., Štrboja M., Todorov M., The bipolar Choquet g-integrals, Proceedings of 17th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2019), 173–178.

[39] Mihailović B., Štrboja M., Todorov M., Jensen type inequality for the bipolar Shilkret, Sugeno and Choquet integrals, Acta Polytechnica Hungarica (2021), prihvaćen za objavljivanje.

[40] Mosteri P. S., Shields A. L., On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. Annals of Mathematics, 65, (1957), 117–143.

[41] Pap E. (ed.), Handbook of Measure Theory, Elsevier Science, Amsterdam, (2002).

[42] Pap E., Null–Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1995).

[43] Pap E., Pseudo-Additive Measures and Their Applications, Handbook of Measure Theory In: E. Pap, editor, Handbook of Measure Theory, Vol II, Elsevier, (2002), 1403–1465.

[44] Pap E., Štrboja M., Generalization of the Jensen inequality for pseudo-integral, Information Sciences 180, (2010), 543-548.

[45] Pap E., Štrboja M., Jensen type inequality for extremal universal integrals, Proceedings of 10th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2012), 525-529.

[46] Pap E., Štrboja M., Jensen type inequality for the pseudo-integral based on the smallest universal integral, Proceedings of 12th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2014), 143-147.

[47] Román-Flores H., Flores-Franulič A., Chalco-Cano Y., A Jensen type inequality for fuzzy integrals, Inform. Sci.177, (2007), 3192–3201.

[48] Shilkret N., Maxitive measure and integration, Indag. Math. 74, (1971), 109–116.

[49] Sugeno M., Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, (1974).

[50] Sugeno M. , Murofushi T., Pseudo-additive measures and integrals, J. Math. Anal. Appl. 122 (1987) 197–222.

[51] Steffensen J. F., On certain inequalities and methods of approximation. J. Inst. Actuar.51 (1919) 274-297.

[52] Štrboja M., Pap E., Mihailović B., A monotone convergence related to pseudo-integral, Proceedings of 13th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2015), 95–100.

[53] Štrboja M., Pap E., Mihailović B., Discrete bipolar pseudo-integral, Proceedings of 14th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2016), 123–127.

[54] Štrboja M., Pap E., Mihailović B., Discrete bipolar pseudo-integral, Information Science 468 (2018) 72–88.

[55] Štrboja M., Pap E., Mihailović B., Transformation of the pseudo-integral and related convergence theorem, Fuzzy sets and systems 355 (2019),67–82.

[56] Štrboja M., Mihailović B., Todorov M., The discrete bipolar pseudo-integral, The Second Conference on Mathematics in Engineering:Theory and Applications, Novi Sad, (2017), 105–110.

[57] Štrboja M., Grbić T., Štajner-Papuga I., Grujić G., Medić S., Jensen and Chebyshev inequalities for pseudo-integrals of set-valued functions, Fuzzy Sets and Systems, 222, (2013), 18–32.

[58] Todorov M., Mihailović B., Štrboja M., The bipolar fuzzy integrals, The Third Conference on Mathematics in Engineering:Theory and Applications, Novi Sad, (2018), 86–91.

[59] Todorov M., Štrboja M., Mihailović B., Bi-capacities based pan-integral, Proceedings of 16th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2018), 301–304.

[60] Todorov M., Štrboja M., Mihailović B., Jensen type inequality for the bipolar Shilkret and Sugeno integrals, Proceedings of 17th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2019), 179–184.

[61] Todorov M., Štrboja, M., Pap E., Mihailović B., On the Jensen type inequality for the bipolar pseudo-integrals, Abstracts of FSTA 2018, Liptovsky Jan, Slovak Republic, (2018), 104.

[62] Todorov M., Štrboja, M., Pap E., Mihailović B., Jensen type inequality for the bipolar pseudo-integrals. Fuzzy Sets and Systems, 379, (2020), 82–101.

[63] Torra V., Narukawa Y., Modeling Decision, Springer, Berlin, (2007).

[64] Torra V., Narukawa Y., Sugeno M. Editors, Non-Additive Measures:Theory and Application, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, (2013).

[65] Tversky A. , Kahmenam D., Advances in prospect theory. Cumulative representation of uncertanity, Risk and Uncertanity 5, (1992), 297–323.

[66] Wang Z., Klir G. J., Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, (1992).

[67] Z. Wang, Klir G. J., Generalized Measure Theory, Springer, (2009).

[68] Yang Q., The pan-integral on fuzzy measure space, Fuzzy Math 3, (1985), 107–114 (Na kineskom)

[69] Yang Q., Li J., Mesiar R., On linearity of pan integral and pan integrable function space, International Journal of Approximate Reasoning, Volume 90, (2017), 307–318.

Biografija

Rođen sam 01.12.1982. u Somboru. Završio sam, osnovnu školu „Sonja Marinković“ u Novom Sadu, a Srednje tehničku školu u Somboru. Od oktobra 2002. godine sam bio redovan student Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, odsek za matematiku i informatiku, smer inženjer matematike. Diplomirao sam sa prosečnom ocenom 8.40. Master studije primenjene statistike upisujem 2011. godine. Sve ispite sam položio u roku, sa prosečnom ocenom 9.13.

Za vreme osnovnih studija sa proizvodom Magnetni omekšivač vode, za koji posedujem i veliki patent, sam učestovao na takmičenjima iz oblasti inovacija, osvajajući mnogobrojna međunarodna i domaća priznanja. Trgovao sam akcijama Beogradske berze od 2005. do 2011. godine. Kao dvostruki finalista takmičenja „Najbolja tehnološka inovacija“, koje je organzovano od strane Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj i Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, ovladao sam tehnikama za pisanje biznis planova.

Tri godine sam predavao, matematiku, verovatnoću i statistiku u gimnaziji „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu. Četiri godine sam proveo u Republičkom zavodu za statistiku. Posedujem mnogobrojne kompjuterske sertifikate. Prošao sam i troipomesečno stručno usavršavanje 2019. godine, na temu „Big data in official statistics” u Bugarskom nacionalnom statističkom institutu, a koje je organizovano pod pokroviteljstvom Evropske agencije za statistiku (EUROSTAT).

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Јенсен-Стефенсенов тип неједнакости за интеграле базиране на фази би-мерама
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а)Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука б) в)
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
1. Опис података
1.1 Врста студије *Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају* ***У овој студији нису прикупљани подаци*** ____ ____ ____ 1.2 Врсте података а) квантитативни б) квалитативни 1.3. Начин прикупљања података

а) анкете, упитници, тестови

б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи

в) генотипови: навести врсту ___________________________________

г) административни подаци: навести врсту _________________________

д) узорци ткива: навести врсту____________________________________

ђ) снимци, фотографије: навести врсту_______________________________

е) текст, навести врсту ____

ж) мапа, навести врсту ____

з) остало: описати ____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

a) Excel фајл, датотека ___________________

b) SPSS фајл, датотека ___________________

c) PDF фајл, датотека ____________________

d) Текстфајл, датотека ___________________

e) JPG фајл, датотека ____________________

f) Остало, датотека _____________________

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли ____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _______________________

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је ________________________________

б) варијабле које се више пута мере односе се на __________________________________

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____________

Напомене: ____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити ____

____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип ____

б) корелационо истраживање, навести тип ______________________________________

ц) анализа текста, навести тип ____

д) остало, навести шта ____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

____

____

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? ___________________________

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

____

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

____

____

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

____

____

3. Третман података и пратећа документација

3.1.Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у ___________________________________ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса ____

3.1.3. DOI ____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) Да

б) Да, али после ембарга који ће трајати до ____________________________________

в) Не

Ако је одговор не, навести разлог ____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

____

____

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? ___________________________________

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

____

____

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

____

____

____

____

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму?________________________

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

____

____

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности(*https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html*) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

____

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

а) Подаци нису у отвореном приступу

б) Подаци су анонимизирани

ц) Остало, навести шта

____

____

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

а) јавно доступни

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

____

____

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

____

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима