

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
NOVI SAD

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИМЉЕНО:	21 АПР 2000
ОРГАНИЗ ЈЕД	Б Р О Ј
0603	273/1

RATKO M. OBRADOVIĆ

DESKRIPTIVNO GEOMETRIJSKE METODE U
KOMPJUTERSKOJ GRAFICI: MEĐUSOBNI PRESECI
ROTACIONIH POVRŠI KORIŠĆENJEM POMOĆNIH
LOPTI I POMOĆNIH RAVNI

Doktorska disertacija

NOVI SAD, 2000.

Инв. бр. 21314



LISTA SLIKA

1 UVOD

- 1.1 Blok dijagram toka određivanja preseka dveju rotacionih površi.....4
 1.2 Blok dijagrami toka određivanja konture rotacione površi i projiciranja.....5

2 ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI

- 2.1 Četvorougona i trougaona struktura površi.....13
 2.2 Test razdvajanja za četiri para krivih sa graničnim paralelogramima.....14
 2.3 Presek dvaju površi korišćenjem metoda podeli i pobedi pomoću min-max paralelograma.....14
 2.4 (a) Min-max paralelogram definisan početnom i krajnjom tačkom krive;
 (b) Orijetisani granični paralelogram.....15
 2.5 Koparkar-Mudur algoritam.....15
 2.6 Farouki algoritam deljenja.....15
 2.7 Konveksni poligoni (levo) i mali konveksni poligoni (desno) za kvadratne i kubne krive.....16
 2.8 (a) Min-max kutija za Bezijeovu krivu;
 (b) Pravougaona traka za Bezijeovu krivu.....16
 2.9 Redukovane pravougaone trake za kvadratnu (gore) i kubne (dole) Bezijeove krive.....16
 2.10 Parametarska diskretizacija.....17
 2.11 Metod projekcije.....18
 2.12 Mreža parametarskih krivih na površi $X_1(u,v)$ sa presečnim tačkama 1, ..., 18 na izoparametarskim krivim linijama površi X_1 i kompozitna presečna kriva površi X_1 i X_2 koja se sastoji od segmenata a, \dots, p 18
 2.13 Tangenta presečne krive.....19
 2.14 Aksonometrija dvoparametarske površi, njena oblast i izohipse.....20
 2.15 Konstrukcija izohipse pomoću grid metode.....20
 2.16 Problem četiri tačke: mogući slučajevi.....21
 2.17 Spajanje tačaka i spajanje tačaka posle nove podele na četiri trougla.....21

3 PROJICIRANJE

- 3.1 Paralelno projiciranje.....24
 3.2 Centralno projiciranje.....25

4 KONTURA ROTACIONE POVRŠI

- 4.1 Normala krive.....29
 4.2 Centar pomoćne lopte.....30
 4.3 Konturne tačke pri paralelnom projiciranju.....31
 4.4 Globalni i lokalni koordinatni sistemi.....34
 4.5 Polaritet.....35

4.6	Konturne tačke pri centralnom projiciranju	37
-----	--	----

5 POMOĆNE RAVNI

5.1	Rotacione površi sa paralelnim osama.....	41
5.2	Polaritet u lokalnom koordinatnom sistemu.....	43
5.3	Rotacione površi sa mimoilaznim osama.....	45
5.4	Interval pomoćnih ravni.....	47
5.5	Specijalan slučaj ravnog preseka rotacione površi.....	53
5.6	Opšti slučaj ravnog preseka rotacione površi.....	55

6 POMOĆNE LOPTE

6.1	Oсна simetrija.....	61
6.2	Rotacione površi.....	63
6.3	Transformacija koordinatnog sistema.....	66
6.4	Proizvoljna pomoćna lopta.....	69
6.5	Paralelne ose.....	72
6.6	Dva pramena pomoćnih lopti.....	75

7 TRANSFORMACIJE

7.1	Rotacija tačke.....	81
7.2	Rotacija objekta oko ose x'	85
7.3	Rotacija oko x i y ose.....	87

8 OSNOVNA TELA I NJIHOVI ODNOSI

8.1	Kocka.....	90
8.2	Odnos dve kocke.....	92
8.3	Dve kocke se dodiruju.....	93
8.4	Paralelopiped.....	94
8.5	Cilindar.....	97
8.6	Odnos dva cilindra kada je $k_1=k_2$	99
8.7	Odnos dva cilindra kada je $k_1=1, k_2=3$	100
8.8	(a), (b) Lopta izvan cilindra; (c) Lopta unutar cilindra.....	104
8.9	Cilindar unutar lopte.....	105

9 RAVNE KRIVE U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI

9.1	Fizički splajn.....	109
9.2	Jedan segment kubnog splajna.....	110
9.3	Dva spojena kubna splajna.....	111
9.4	Proizvoljan deo kubnog splajna.....	112

9.5	Bezijeova kriva i poligon koji je definiše.....	117
9.6	Spojena Bezijeova kriva.....	122

10 POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI

10.1	Rotacioni cilindar: (a) Šema; (b) Rezultat.....	126
10.2	Rotacioni konus: (a) Šema; (b) Rezultat.....	126
10.3	Dvoparameterska rotaciona površ.....	127
10.4	Rotaciona površ dobijena rotacijom zatvorenog poligona: (a) Šema; (b) Rezultat .	128
10.5	Rotaciona površ sa osom rotacije u proizvoljnom položaju.....	131
10.6	Površ dobijena rotacijom elipse.....	133
10.7	Kubni splajn formira prostiruću površ: (a) Kriva; (b) Površ.....	136
10.8	Kvadrike.....	138
10.9	Određivanje vođene površi.....	144
10.10	Površ definisana sa dve vodilje.....	145
10.11	Linearna površ.....	146
10.12	Geometrija dela dvostruko kubne površi.....	148
10.13	Ravan presek lopte: (a) Presek po paraleli; (b) Presek po meridijanu.....	151
10.14	Sferna zakrpa.....	153
10.15	Trodimenzionalna kartografska površ: (a) x komponenta; (b) y komponenta; (c) z komponenta; (d) cela površ.....	155
10.16	Poligon za definisanje dvolinarnne površi.....	156
10.17	Označavanje na Bezijeovoj površi.....	157
10.18	Dvostruko kubna Bezijeova površ: (a) Baza površi; (b) Efekat promene oba tangentna vektora u tački $B_{0,0}$; (c) Efekat promene vektora tangente u $B_{3,3}$; (d) Promena vektora u $B_{0,0}$	159

PREGLED AKTUELNOG SOFTVERA

11.1	Ekran AutoCAD-a i icon meni 3D Objects.....	163
11.2	Neka osnovna tela u AutoCAD-u.....	164
11.3	Rotacione površi u AutoCAD-u.....	165
11.4	Preseci solida u AutoCAD-u.....	166

12 REZULTATI

12.1	Kocka pri paralelnom projiciranju (levo) i centralnom projiciranju (desno).....	168
12.2	Kontura rotacione površi pri paralelnom projiciranju.....	168
12.3	Kontura rotacione površi pri centralnom projiciranju.....	169
12.4	Tangente elipse čiji je centar u koordinatnom početku.....	169
12.5	Tangente elipse u globalnom koordinatnom sistemu.....	170
12.6	Tangente dveju elipsi i tangente sa minimalnim i maksimalnim odsečkom na y osi	170
12.7	Ravan presek rotacione površi sa ravni koja je u specijalnom položaju.....	171
12.8	Ravan presek rotacione površi sa ravni koja je u specijalnom položaju i koja seče grleni (strikcioni) krug površi.....	171

12.9 Ravan presek rotacione površi sa ravni koja je u opštem položaju.....	172
12.10 Minimalna i maksimalna lopta za dve rotacione površi čije se ose seku.....	173
12.11 Presek dveju rotacionih površi čije se ose seku sa loptom proizvoljnog prečnika, presečne paralele dveju površi sa pomoćnom loptom i presečne tačke prostorne presečne krive dveju površi.....	173
12.12 Presečna kriva dveju rotacionih površi čije se ose seku.....	174
12.13 Dve ortogonalne projekcije prostorne presečne krive dveju rotacionih površi čije su ose paralelne.....	174
12.14 Presek dveju rotacionih površi čije su ose paralelne za paralelne projicirajuće zrake.....	175
12.15 Presek dveju rotacionih površi čije se ose mimoilaze.....	175

SADRŽAJ

1	UVOD.....	1
2	ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI.....	7
2.1	PRESECI KRIVIH I POVRŠI.....	8
2.2	ALGEBARSKIE METODE.....	8
2.2.1	Direktna zamena.....	8
2.2.2	Teorija eliminacije.....	12
2.3	METODE DELJENJA.....	13
2.4	DISKRETNE METODE.....	17
2.4.1	Parametarska diskretizacija.....	17
2.4.1.1	Faza traganja.....	18
2.4.2	Grid metod.....	19
3	PROJICIRANJE.....	22
3.1	PROJICIRANJE.....	23
3.2	PARALELNO PROJICIRANJE.....	23
3.3	CENTRALNO PROJICIRANJE.....	23
4	KONTURA ROTACIONE POVRŠI.....	27
4.1	KONTURA ROTACIONE POVRŠI ZA PARALELNE PROJICIRAJUĆE ZRAKE.....	28
4.2	KONTURA ROTACIONE POVRŠI ZA CENTRALNO PROJICIRANJE....	34
5	POMOĆNE RAVNI.....	39
5.1	ODREĐIVANJE PRESEKA ROTACIONIH POVRŠI KORIŠĆENJEM POMOĆNIH RAVNI.....	40
5.1.1	Ose rotacionih površi su paralelne.....	40
5.1.2	Ose rotacionih površi se mimoilaze.....	44
5.1.3	Interval pomoćnih ravni.....	46
5.1.4	Tangente na elipsu.....	48
5.2	RAVAN PRESEK ROTACIONE POVRŠI.....	52
6	POMOĆNE LOPTE.....	58

6.1	POMOĆNE LOPTE.....	59
6.2	KORIŠĆENJE POMOĆNIH LOPTI KADA SE OSE ROTACIONIH POVRŠI SEKU.....	59
6.2.1	Ozna simetrija.....	59
6.2.2	Određivanje lopti minimalnog i maksimalnog poluprečnika.....	62
6.2.2.1	Procedura za određivanje presečnih tačaka meridijana.....	63
6.2.3	Transformacija koordinatnog sistema.....	65
6.2.4	Određivanje dodirne lopte.....	67
6.2.5	Presek rotacionih površi sa pomoćnom loptom.....	68
6.3	OSE ROTACIONIH POVRŠI SU PARALELNE.....	71
6.4	OSE ROTACIONIH POVRŠI SE MIMOILAZE.....	74
7	TRANSFORMACIJE.....	78
7.1	DVODIMENZIONALNE TRANSFORMACIJE.....	79
7.1.1	Prikazivanje tačke.....	79
7.1.2	Transformacija tačke.....	79
7.1.3	Rotacija.....	80
7.1.4	Homogene koordinate.....	82
7.2	TRODIMENZIONALNE TRANSFORMACIJE.....	82
7.2.1	Homogene koordinate.....	82
7.2.2	Rotacija.....	83
7.2.3	Translacija.....	84
7.2.4	Rotacija oko ose koja je paralelna koordinatnoj osi.....	84
7.2.5	Rotacija oko proizvoljne ose.....	85
8	OSNOVNA TELA I NJIHOVI ODNOSI.....	89
8.1	KOCKA.....	90
8.1.1	Odnos dve kocke.....	91
8.2	PARALELOPIPED.....	94
8.2.1	Odnos dva paralelopipeda.....	95
8.3	CILINDAR.....	97
8.4	LOPTA.....	101
8.4.1	Odnos dve lopte.....	101
8.4.2	Odnos lopte i paralelopipeda.....	101
8.4.3	Odnos lopte i cilindra.....	103
9	RAVNE KRIVE U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI.....	107
9.1	KUBNI SPLAJN.....	108
9.2	NORMALIZOVANI KUBNI SPLAJN.....	115
9.3	BEZIJEOVE KRIVE.....	117
9.3.1	Spajanje Bezijevovih krivih.....	121
9.3.2	Crtanje krive sa dodatim temenim tačkama poligona.....	123

10 POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI.....	125
10.1 ROTACIONE POVRŠI.....	126
10.1.1 Rotacione površi dobijene rotacijom kubnog splajna.....	130
10.2 PROSTIRUĆE POVRŠI.....	135
10.3 KVADRIKE.....	137
10.3.1 Parametarske jednačine.....	141
10.3.2 Geometrijska prezentacija kvadraka.....	143
10.4 VOĐENE I RAZVOJNE POVRŠI.....	144
10.5 KUNOVE LINEARNE POVRŠI.....	146
10.6 KUNOVE DVOSTRUKO KUBNE POVRŠI.....	148
10.7 PRIKAZIVANJE POVRŠI POMOĆU ZAKRPA.....	151
10.8 KARTOGRAFSKE PARAMETARSKE POVRŠI.....	154
10.9 DVOLINEARNE POVRŠI.....	156
10.10 BEZIJEOVE POVRŠI.....	157
11 PREGLED AKTUELNOG SOFTVERA.....	162
12 REZULTATI.....	167
13 ZAKLJUČAK.....	176
14 LITERATURA.....	178
15 PRILOG – LISTING PROGRAMA.....	186
16 BIOGRAFIJA.....	239
17 SPISAK RADOVA.....	242
18 KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA.....	245

1

UVOD

1 UVOD

U ovom radu je tretiran problem određivanja međusobnih preseka rotacionih površi korišćenjem kombinovanih metoda baziranih na deskriptivno geometrijskim pristupima uz korišćenje pomoćnih lopti i pomoćnih ravni. Pomoćne lopte se u deskriptivnoj geometriji koriste isključivo za određivanje preseka dveju rotacionih površi čije se ose seku, dok se pomoćne ravni ovde ne koriste zbog nepremostivih grafičkih teškoća u određivanju samih ravnih krivih, a posebno njihovih presečnih tačaka. Za određivanje presečne krive dveju površi čije se ose seku napravljen je matematički model pogodan za korišćenje računara u čijoj je osnovi poznati deskriptivno geometrijski metod pomoćnih lopti. U složenijim slučajevima, kada su ose rotacionih površi paralelne ili kada se mimoilaze, ne može se koristiti jedan pramen pomoćnih lopti već je formiran nov teoretski model kojim su u razmatranje uključena dva pramena pomoćnih lopti od kojih je svaki pramen pridružen jednoj površi sa centrom pramena na osi date površi (poglavlje POMOĆNE LOPTE). Takođe je uz korišćenje računara moguće odrediti presek dveju rotacionih površi korišćenjem pramena pomoćnih ravni i ovakav pristup daje tačnija rešenja od rešenja dobijenih korišćenjem pomoćnih lopti posebno u složenijim slučajevima kada su ose rotacionih površi paralelne ili kada se mimoilaze (POMOĆNE RAVNI).

Ranije je [Obr 97] formiran matematički model za određivanje preseka paraboličkih kvadraka u čijoj osnovi je deskriptivno geometrijski metod pomoćnih ravni, a u kojem su analizirani preseci pravoizvodnih površi. Pomoćne ravni su sekle paraboličke kvadrike (konuse i cilindre) po izvodnicama, a tačke prostorne presečne krive četvrtog reda u posmatranoj pomoćnoj ravni dobijane su u preseku parova izvodnica po kojima pomoćna ravan seče date površi.

Ukoliko se umesto prave za meridijan uzme ravna kriva tada se rotacijom oko koplanarne ose dobija rotaciona površ koja nije pravoizvodna, odnosno problem se znatno komplikuje. Uzimajući u obzir analogiju sa ranijim istraživanjima na ovom polju postavlja se pitanje da li se može doći do rešenja preseka dveju rotacionih površi korišćenjem pomoćnih ravni ili nekog drugog u osnovi deskriptivno geometrijskog pristupa?

Analiza postojećih metoda za određivanje međusobnog preseka dveju površi (pogledati poglavlje ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI) pokazuje da je svaki od tih metoda ograničen izvesnim nedostacima, npr. komplikovanim i dugotrajnim sračunavanjima i nizom manjih potproblema. Za presek dveju rotacionih površi koje imaju geometrijski opis jer nastaju rotacijom meridijana oko njima koplanarnih osa, prirodno bi bilo da se koristi deskriptivno geometrijski pristup. Naime, za površi koje se u kompjuterskoj grafici znatno eksploatišu (POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI) s obzirom na načine na koje se zadaju adekvatni su i postupci za određivanje njihovog preseka. Stoga se, upravo zbog geometrijske prirode problema, tragalo za rešenjima koje u osnovi imaju deskriptivno geometrijski pristup.

Tokom analize problema ustanovljeno je da se mogu koristiti sa nejednakim kvalitetom rezultata i pomoćne ravni i pomoćne lopte, odnosno iskristalisana je potreba za odvojeno posmatranje tri osnovna slučaja preseka dveju rotacionih površi, u zavisnosti od međusobnog odnosa osa tih površi:

1. Ose rotacionih površi se seku;



2. Ose su paralelne;
3. Ose se mimoilaze.

U prvom i drugom slučaju meridijani i ose rotacionih površi leže u jednoj ravni (može se usvojiti da je to ravan Oxz) dok u trećem slučaju meridijan i osa jedne površi leže u ravni (usvojeno je Oxz) koja je paralelna ravni u kojoj su meridijan i osa druge površi. Očigledno je da se ovim pojednostavljenjem ništa ne gubi na opštosti rešenja, jer se iz bilo kojeg položaja rotacione površi u prostoru može doći do pretpostavljenog, kombinovanom primenom trodimenzionalnih translacija i rotacija nad posmatranom površi (TRANSFORMACIJE).

U kompjuterskoj grafici se ističe težnja da se svaki složeni problem prikaže kao niz elementarnih pri čemu elementarni moraju biti detaljno analizirani a rešenja prikazana kroz odgovarajuće matematičke procedure. Rezultati nastojanja da se izdvoje elementarni zadaci u određivanju preseka dveju rotacionih površi prikazani su na slikama 1.1 i 1.2. Na slici 1.1 tokovi rešavanja u prioritarnim pristupima za odgovarajući međusobni položaj osa dveju površi prikazan je punom linijom, dok su isprekidanim linijama prikazani sekundarni pristupi. Tokom rešavanja problema primarni su izdvojeni jer dovode do elegantnijih rešenja sa jednostavnijim matematičkim aparatom ili je rešenje u primarnom pristupu znatno tačnije. Tekstovi u pravougaonicima označavaju ključne faze u algoritmu a u pravougaonicima sa zaobljenim temenima su prikazane procedure za sračunavanje elementarnih zadataka.

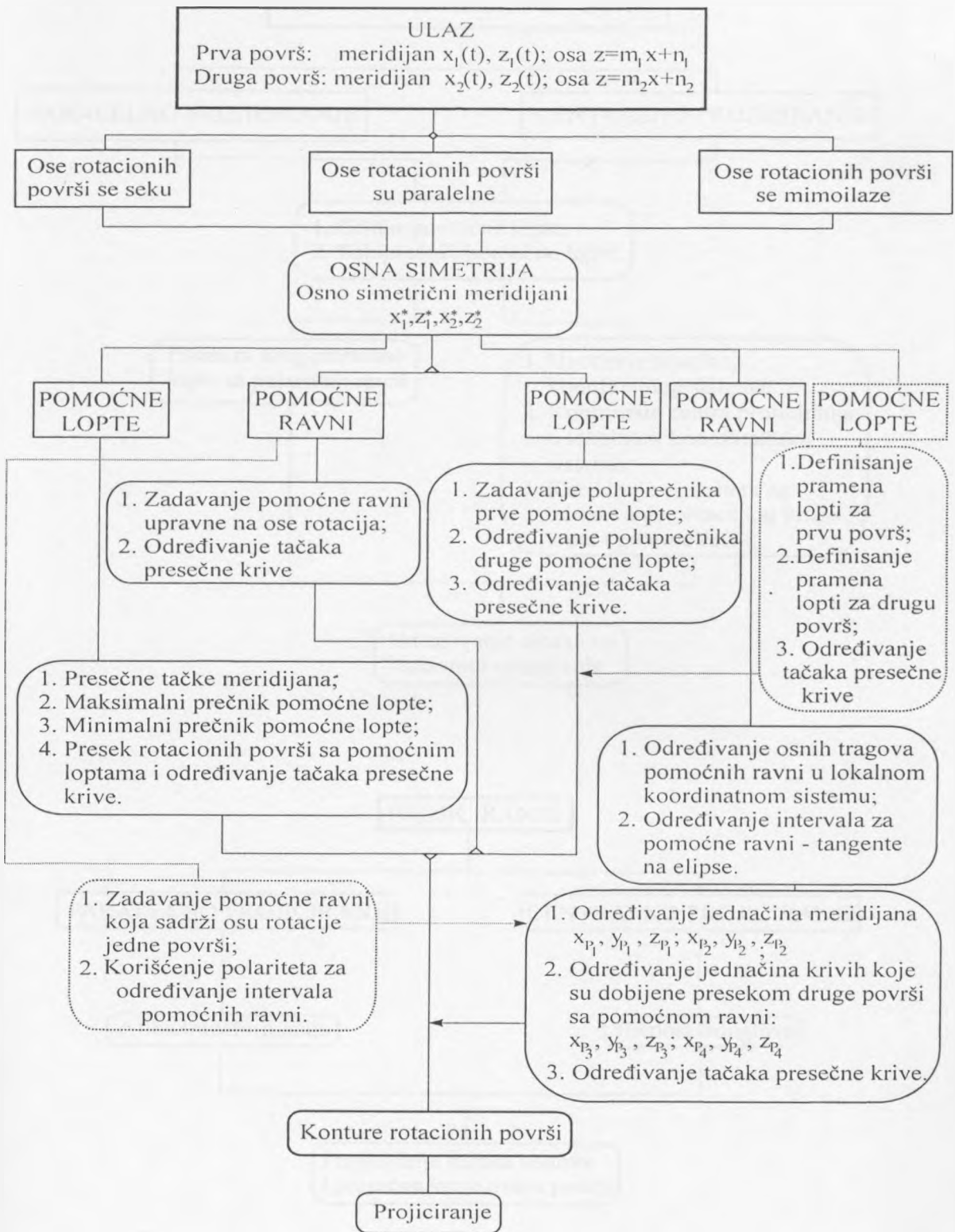
Osnovna poglavlja kroz koja se analizira i rešava problem određivanja preseka dveju rotacionih površi na osnovu kombinovanih deskriptivno geometrijskih pristupa su:

- ◆ PROJICIRANJE
- ◆ KONTURA ROTACIONE POVRŠI
- ◆ POMOĆNE RAVNI
- ◆ POMOĆNE LOPTE
- ◆ REZULTATI

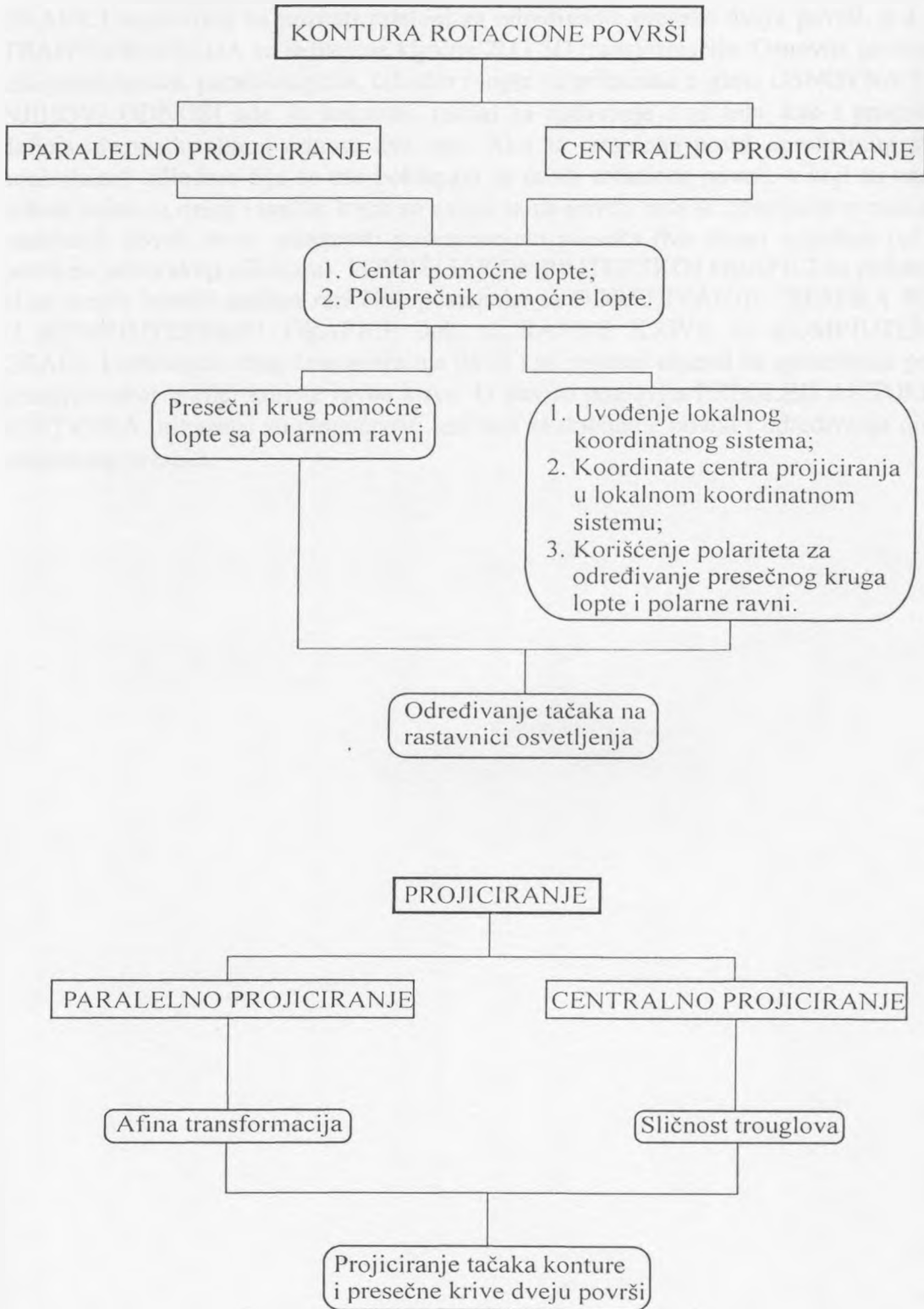
U okviru PROJICIRANJA određuje se dvodimenzionalna (2D) slika trodimenzionalne (3D) tačke (odnosno objekata – rotacionih površi i prostorne presečne krive) u slučajevima paralelnog i centralnog projiciranja. Prilikom određivanja KONTURE ROTACIONE POVRŠI koriste se pomoćne lopte koje za oba slučaja projiciranja dovode do 3D koordinata tačaka na konturi. Tačnost dobijene konture pretežno zavisi od broja pomoćnih lopti i ovaj problem se primenom računara lako prevazilazi. Kroz poglavlja POMOĆNE RAVNI i POMOĆNE LOPTE prikazani su postupci za određivanje 3D koordinata tačaka presečne krive dveju rotacionih površi.

Poglavlja bez kojih rad ne bi bio zaokružena celina su:

- ◆ ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI
- ◆ TRANSFORMACIJE
- ◆ OSNOVNA TELA I NJIHOVI ODNOSI
- ◆ RAVNE KRIVE U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI
- ◆ POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI
- ◆ PREGLED AKTUELNOG SOFTVERA



Sl. 1.1 Blok dijagram toka određivanja preseka dveju rotacionih površi



Sl. 1.2 Blok dijagrami toka određivanja konture rotacione površi i projiciranja

U poglavlju ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI analizirani su poznati pristupi za određivanje preseka dveju površi, a u okviru TRANSFORMACIJA su izdvojene ključne 2D i 3D transformacije. Osnovna geometrijska tela poput kocke, paralelopipeda, cilindra i lopte su prikazana u glavi OSNOVNA TELA I NJIHOVI ODNOSI gde su prikazani načini za zadavanje ovih tela, kao i procedure za definisanje međusobnog odnosa dva tela. Ako se rotaciona površ aproksimira skupom koaksijalnih cilindara čije se ose poklapaju sa osom rotacione površi, a koji su naslagani redom jedan na drugi i unutar kojih se nalazi sama površ, tada se postojanje preseka dveju rotacionih površi može ustanoviti posmatranjem preseka dva skupa cilindara (za svaku površ po jedan skup cilindara). POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI su prikazane da bi se mogla izvršiti analiza različitih postupaka za ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI, dok su RAVNE KRIVE U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI prikazane zbog čestog slučaja da se kao polazni objekti za generisanje površi u kompjuterskoj grafici koriste ravne krive. U okviru poglavlja PREGLED AKTUELNOG SOFTVERA prikazane su mogućnosti softvera za dobijanje površi i određivanje njihovog uzajamnog preseka.

2

ODREĐIVANJE PRESEKA POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI

2.1 PRESECI KRIVIH I POVRŠI

U mnogim aplikacijama potrebno je odrediti presečne tačke dveju krivih i presečne krive dveju površi:

- ◆ Za određivanje konture površi radi prikaza površi na grafičkom ekranu računara ([Štu94], [Obr97]);
- ◆ Radi primene Bulovih operacija na solidima ([Kri97], [KKM97a], [KKM97b]);
- ◆ Kod konstruisanja glatkih prelaza (smooth blending) sa jedne na drugu površ, odnosno krivu;
- ◆ Za formiranje ordinatnih krivih i površi pomoću NC (numerically controlled) mašina;

Dobar algoritam za određivanje preseka treba da ima sledeće osobine:

- ◆ Tačnost, u numeričkom smislu;
- ◆ Korektnost, u smislu da je presek teoretski korektno određen;
- ◆ Brzinu;
- ◆ Samokontrolu, u smislu da nije potrebna interaktivna pomoć korisnika.

Može se reći da ne postoji jedinstveni algoritam koji je optimalan za sve četiri navedene osobine već postoji više različitih, a svaki od njih ima svoje dobre i loše karakteristike. Tip algoritma koji treba izabrati zavisi od načina na koji su zadate krive i površi (implicitni, eksplicitni, parametarski) uključujući i određene specifične osobine preseka.

Moguće je izvršiti grupisanje postupaka u nekoliko dominantnih metoda za određivanje preseka dveju krivih i dveju površi:

- ◆ Algebarske metode;
- ◆ Metode deljenja;
- ◆ Diskretne metode.

2.2 ALGEBARSKE METODE

2.2.1 Direktna zamena

Kod korišćenja algebarskih metoda najjednostavniji matematički aparat je u slučaju određivanja preseka površi kada je jedna površ zadata u implicitnom obliku, a druga u parametarskoj formi:

$$\begin{aligned} & \text{Površ } \phi_1 \cap \text{Površ } \phi_2 \\ \phi_1: f(x,z,y)=0 & \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\phi_2: \mathbf{X}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \quad (2.2)$$

Podebljano (bold) slovo \mathbf{X} pokazuje da se radi o vektoru. Kombinovanjem jednačina (2.1) i (2.2) dobija se

$$f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0 \quad (2.3)$$

Zatim se uzima da je $u = u_0$ i pronalazi se nula $v = v_i$ iz poslednje jednačine. Usvajajući jednak priraštaj za parametar u , određuju se nule v_i , odnosno presečne tačke dveju površi $X(u_K, v_i)$, koje kada se spoje formiraju aproksimaciju presečne krive.

Ako su obe površi zadate u parametarskom obliku tada jednačine jedne površi treba prevesti u implicitnu formu i ovaj postupak prevođenja se naziva implicitizacija ([Sal85], [Wal50]). Za površ koja je zadata parametarskim jednačinama

$$x = \frac{x(s,t)}{w(s,t)}, y = \frac{y(s,t)}{w(s,t)}, z = \frac{z(s,t)}{w(s,t)} \quad (2.4)$$

eliminacijom parametara t i s dobija se

$$f(x,y,z)=0 \quad (2.5)$$

Problem predstavlja činjenica da nije uvek moguće izvršiti implicitizaciju mada postoje slučajevi kada se za površ koja je zadata u tačno određenom obliku parametarske forme može tvrditi da je implicitizacija moguća. Pošto se može uspostaviti analogija između analize krivih i površi, posmatra se racionalna kriva $X(t)=(x(t),y(t))$ gde su

$$x(t) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i t^i}{\sum_{i=0}^n c_i t^i} \quad y(t) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i t^i}{\sum_{i=0}^n c_i t^i} \quad (2.6)$$

Kriva se može predstaviti u implicitnoj formi [Sed87] preko determinante oblika

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} L_{n-1,n-1}(x,y) & \dots & L_{0,n-1}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1,0}(x,y) & \dots & L_{0,0}(x,y) \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

$$L_{ij}(x,y) = \alpha_{i,j}x + \beta_{i,j}y + \gamma_{i,j} = \sum_{\substack{l \leq \min(i,j) \\ l+m=i+j+1}} (b_m c_l - c_m b_l)x + (a_l c_m - a_m c_l)y + (a_m b_l - a_l b_m) \quad (2.8)$$

Ponekad je potrebno za poznate vrednosti koordinata presečnih tačaka odrediti pridružene vrednosti parametara. Za presečnu tačku $P_0(x_0,y_0)$ dveju krivih koja leži na ravnoj krivoj $X(t)$ radi određivanja parametra $t=t_0$ za koji je $X(t_0)=P_0$ potrebno je rešiti linearan sistem jednačina [Sed87]

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} L_{0,0}(x, y) & \dots & L_{0,n-1}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1,0}(x, y) & \dots & L_{n-1,n-1}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Algoritam za sračunavanje presečnih tačaka dveju ravnih racionalnih polinomnih krivih stepena n_1 i n_2 koje su date u parametarskom obliku

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(x(t), y(t)) \\ x(t) &= \frac{x_1(t)}{w_1(t)} \\ y(t) &= \frac{y_1(t)}{w_1(t)} \\ 0 &\leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} X_2(\tau) &= X_2(\xi(\tau), \eta(\tau)) \\ \xi(\tau) &= \frac{\xi_2(\tau)}{\omega_2(\tau)} \\ \eta(\tau) &= \frac{\eta_2(\tau)}{\omega_2(\tau)} \\ 0 &\leq \tau \leq 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

sastoji se od nekoliko koraka [Sed85, 87]:

- Određivanje implicitnog oblika $f_1(x, y, w) = 0$ od $X_1(t)$, gde je w homogena koordinata;
- Zamena parametarskih jednačina za $X_2(\tau)$ u implicitnu formulu za $X_1(t)$ što dovodi do jednačine $f_1(\xi(\tau), \eta(\tau), \omega(\tau)) = 0$ koja je stepena $n_1 n_2$;
- Sračunavanje realnih rešenja prethodne jednačine u intervalu $0 \leq \tau \leq 1$;
- Korišćenje parametarskih jednačina $X_2(\tau)$ i vrednosti parametara τ_i sračunatih u prethodnom koraku, a koje odgovaraju presečnim tačkama $S_i = X_2(\tau_i)$, radi određivanja koordinata (x, y) presečnih tačaka;
- Polazeći od jednačina $S_i = X_1(t_i)$ određuju se vrednosti parametra t za presečne tačke, koji je u intervalu $0 \leq t \leq 1$.

Presečna kriva bilo kakvih površi koje su zadate u parametarskoj formi može se odrediti korišćenjem algoritma [HL93] koji uključuje dvoparametarsku eliminaciju. Jedna površ je zadata sa

$$X_1(u, v) = X_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (2.12)$$

a druga

$$X_2(\mu, \nu) = X_2(\xi(\mu, \nu), \eta(\mu, \nu), \zeta(\mu, \nu)) \quad (2.13)$$

gde je

$$X_2(\mu, \nu) = \sum_{i=0}^{\bar{m}} \sum_{k=0}^{\bar{n}} A_{ik} \mu^i \nu^k \quad (2.14)$$

$$\mu, \nu \in [0, 1]$$

Neka su komponente vektora A_{ik} označene sa a_{ik} , b_{ik} i c_{ik} , tada se može uvesti smena

$$\alpha_{1k}(\mu) = \sum_{i=0}^m a_{ik} \mu^i$$

$$\alpha_{2k}(\mu) = \sum_{i=0}^m b_{ik} \mu^i \quad (2.15)$$

$$\alpha_{3k}(\mu) = \sum_{i=0}^m c_{ik} \mu^i$$

Presečna kriva dve površi opisana je pomoću tri jednačine

$$x(u, \nu) - \sum_{k=0}^n \alpha_{1k} \nu^k = 0$$

$$y(u, \nu) - \sum_{k=0}^n \alpha_{2k} \nu^k = 0 \quad (2.16)$$

$$z(u, \nu) - \sum_{k=0}^n \alpha_{3k} \nu^k = 0$$

Ako se uvedu u razmatranje novi vektori

$$B_0 = \begin{pmatrix} x(u, \nu) - \alpha_{10}(\mu) \\ y(u, \nu) - \alpha_{20}(\mu) \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k}(\mu) \\ \alpha_{2k}(\mu) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} y(u, \nu) - \alpha_{20}(\mu) \\ z(u, \nu) - \alpha_{30}(\mu) \end{pmatrix} \quad C_k = \begin{pmatrix} \alpha_{2k}(\mu) \\ \alpha_{3k}(\mu) \end{pmatrix}$$

tada je presečna kriva opisana izrazima

$$P = B_0 - \sum_{k=1}^n B_k \nu^k = 0 \quad (2.18)$$

$$Q = C_0 - \sum_{k=1}^n C_k \nu^k = 0$$

Tačke presečne krive su zajedničke nule poslednje dve jednačine.

2.2.2 Teorija eliminacije

Jedan od najjednostavnijih problema preseka je određivanje preseka dva polinoma koji su funkcije jedne promenljive. Za polinome

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ g(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \end{aligned} \quad (2.19)$$

formira se rezultanta [Wal 50] oblika

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

sa m vrsta sa konstantama a , i n vrsta sa konstantama b .

Rezultanta se može koristiti za određivanje preseka dve ravne krive, koje su definisane pomoću polinoma

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ g(x, y) &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \end{aligned} \quad (2.21)$$

gde su a , i b , polinomi u funkciji od y . Na primer, za funkcije oblika

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 4 \\ g(x, y) &= xy - 1 \end{aligned}$$

rezultanta je

$$R(y) = \begin{vmatrix} y^2 - 4 & 0 & 0 \\ -1 & y & 0 \\ 0 & -1 & y \end{vmatrix} = y^4 - 4y^2 + 1 = 0$$

a rešenje poslednje jednačine daje y koordinate presečnih tačaka dveju ravnih krivih

$$y = \pm \sqrt{-2 \pm \sqrt{3}}$$

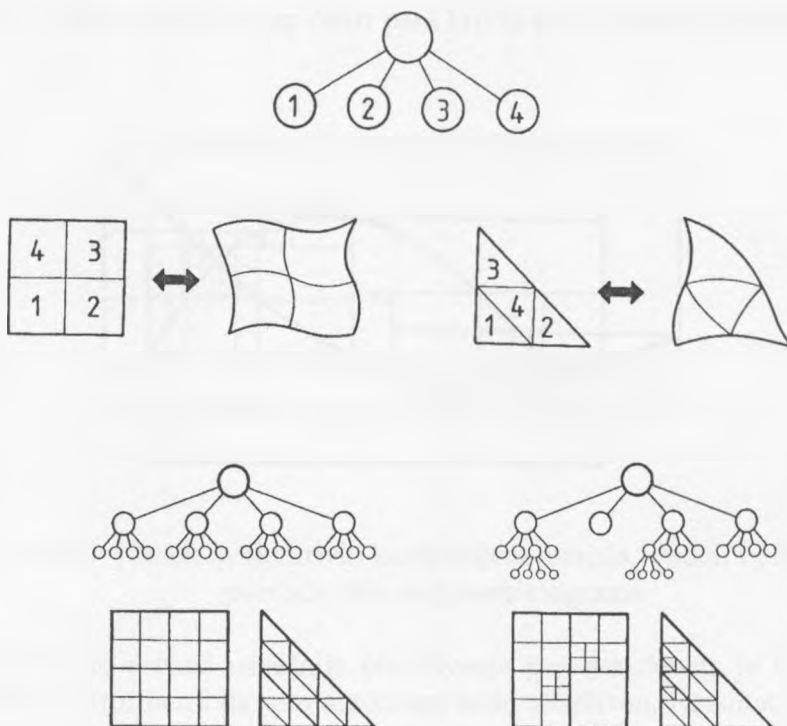
Za površi

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ g(x, y, z) &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \end{aligned} \quad (2.22)$$

gde su a_i i b_j polinomi u funkciji od y i z , rezultanta određuje ravnu krivu koja leži u ravni Oyz . Time je problem određivanja tačaka prostorne presečne krive dveju površi redukovano na određivanje ravne krive, što je znatno jednostavniji problem ([GW 89], [Har 77]).

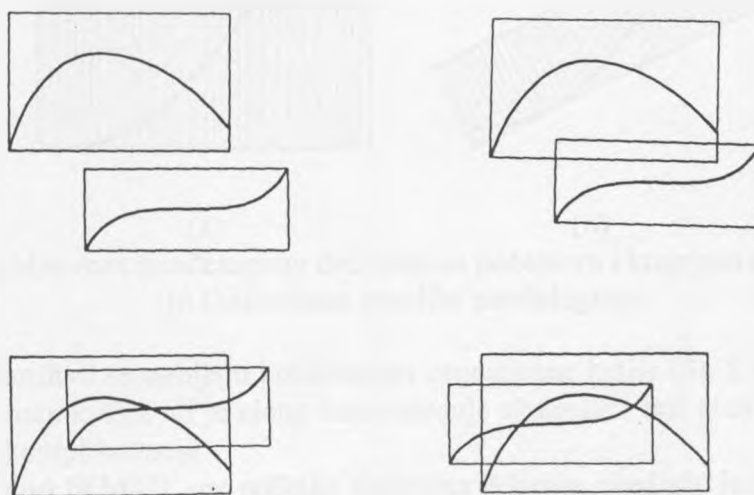
2.3 METODE DELJENJA

Kod algoritma deljenja (subdivision method), objekti (krive ili površi) se dele na više delova, a zatim se posmatra njihov presek. Najčešće se analiza pomoću sastavnih delova objekta koristi za aproksimativno određivanje presečnih tačaka dveju krivih. Raniji algoritmi su delili oba objekta uniformno i kompletno. Podela za krive je imala oblik uniformnog binarnog drveta, dok su površi deljene uniformno na četvrtine (Sl. 2.1). Ako se dvoparameterska površ podeli na n četvorougaoih zakrpa u oba parametarska pravca tada će ona biti aproksimirana sa n^2 četvorougaoih zakrpa. Naivni algoritam bi tražio presek dve površi testirajući preseke svih zakrpa jedne površi sa zakrpama druge površi, što je ukupno n^4 mogućih preseka, dakle sigurno mnogo više od stvarnog broja zakrpa koje se međusobno seku. Adaptiran metod deljenja deli površ na delove koji se aproksimativno mogu smatrati delovima ravni, a to se postiže posmatranjem veličine lokalne krivine površi i deo površi sa malom krivinom se aproksimativno zamenjuje sa ravnom zakrpom. Ovakvi postupci su zahtevali znatnu memoriju računara i samim tim bili su spori i skupi.

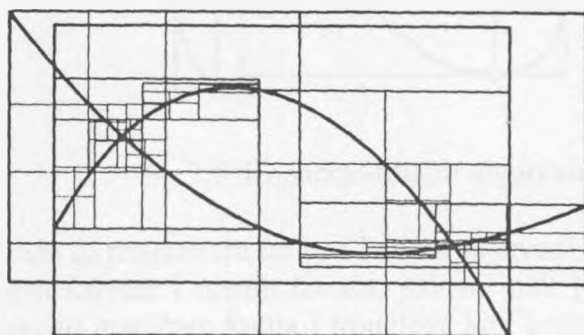


Sl. 2.1 Četvorougaoana i trougaona struktura površi

Značajna redukcija u kompjuterskom vremenu i kapacitetima memorije moguća je ukoliko se ubaci nekakav kriterijum koji će proceniti gde se mogući presek nalazi. U metodu deljenja koji su predložili Gleicher i Kass ([BK90], [GK92], [deF93]) formiraju se granične kutije oko formiranih četvorougona zakrpa. Zatim se posmatra presek graničnih kutija jedne površi sa graničnim kutijama druge površi (takozvani test razdvajanja, Sl. 2.2) i, za one parove kutija koji se ne seku, ne seku se ni zakrpe dveju površi unutar tih kutija. Ako se par graničnih kutija seče, tada se i pridružene zakrpe možda seku. U ovom slučaju posmatrane zakrpe se dele na manje, formiraju se novi skupovi graničnih kutija i postupak se ponavlja dok se sa određenom greškom ne odrede granične kutije u kojima se zakrpe seku i koje se tada aproksimativno proglašavaju tačkama presečne krive dveju površi.



Sl. 2.2 Test razdvajanja za četiri para krivih sa graničnim paralelogramima

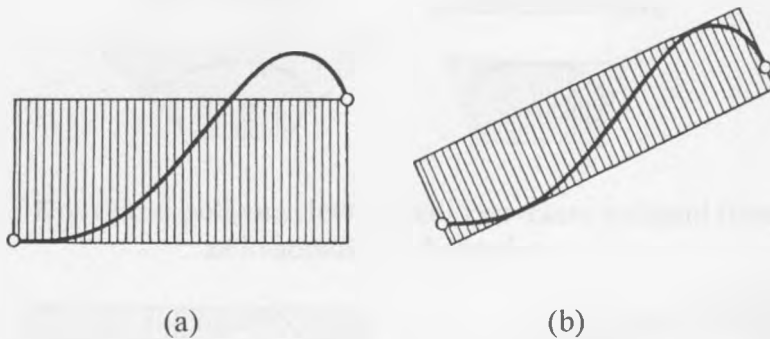


Sl. 2.3 Presek dveju krivih korišćenjem metoda "podeli i pobedi" pomoću min-max paralelograma

Težnja da se ostvari uspešnije određivanje preseka dovela je do ideje da proces deljenja bude neuniforman i da sam algoritam bude adaptivan. Rezultat ovakvog postupka koji se naziva "podeli i pobedi" (divide-and-conquer) prikazan je, za slučaj preseka dveju ravnih krivih, na slici 2.3. Očigledno je da do porasta tačnosti uvek dovodi još jedno

deljenje, a teškoće do kojih se dolazi primenom programa zavise isključivo od oblika preseka objekata.

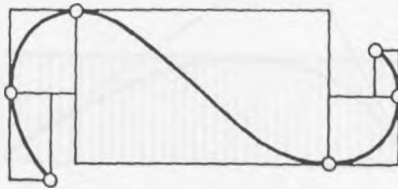
Različiti slučajevi preseka dovode do različitih strategija u formiranju algoritma za deljenje, kao i različitih definicija graničnih kutija. Skoro svi postupci zahtevaju inicijalni račun pomoću kojeg se određuje nekoliko tačaka objekta koje će se koristiti za formiranje granične kutije. Za krivu se obično koriste dve krajnje tačke, a za površ četiri temena kvadratne prostorne strukture. Tako se min-max kutija definiše kao najmanja kutija čije su ivice paralelne sa koordinatnim osama i koje sadrže polazne tačke (Sl. 2.4a).



Sl. 2.4 (a) Min-max paralelogram definisan sa početnom i krajnjom tačkom krive;
(b) Orijentisani granični paralelogram

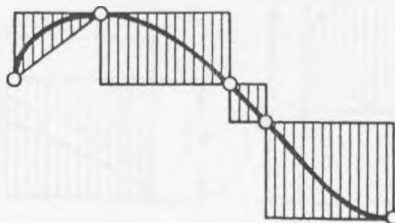
Bolji rezultati se dobijaju korišćenjem orijentisane kutije (Sl. 2.4b) koja se dobija rotacijom min-max kutije, ali je njeno konstruisanje složenije i test razdvajanja je u ovom slučaju znatno komplikovaniji.

Neki autori [KM83], pre početka algoritma deljenja, predlažu jedan korak u kojem se određuju tačke na krivoj koje imaju horizontalne i vertikalne tangente, a zatim se ove tačke koriste za konstruisanje min-max kutija (Sl. 2.5).



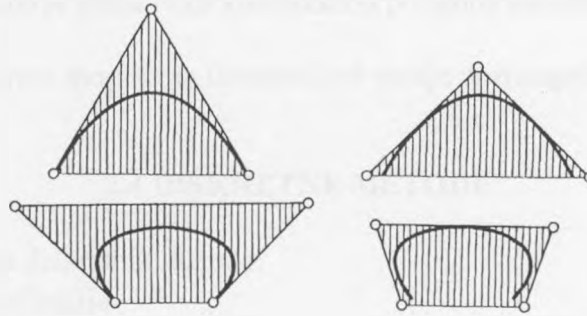
Sl. 2.5 Koparkar-Mudur algoritam

Sličan pristup je kada se posmatraju tačke u kojima su izvodi i diferencijalno-geometrijske karakteristike, poput krivine i njenih izvoda, jednaki nuli [Faro89]. Tada se ove tačke koriste za konstrukciju graničnih kutija i trouglova koji kompletno obuhvataju monotone segmente krive (Sl. 2.6).

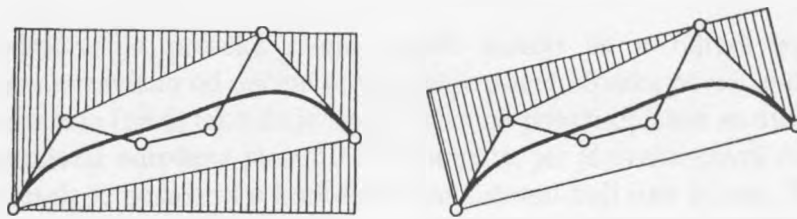


Sl. 2.6 Farouki algoritam deljenja

Često su u CAGD u upotrebi krive i površi zadate u parametarskom obliku koje su definisane pomoću kontrolnih poligona [Her89] sa osobinama koje su slične Bezijevima poligonima u Bezijevima reprezentacijama. Oko kontrolnih poligona definišu se konveksni poligoni (Sl. 2.7) i mali konveksni poligoni.



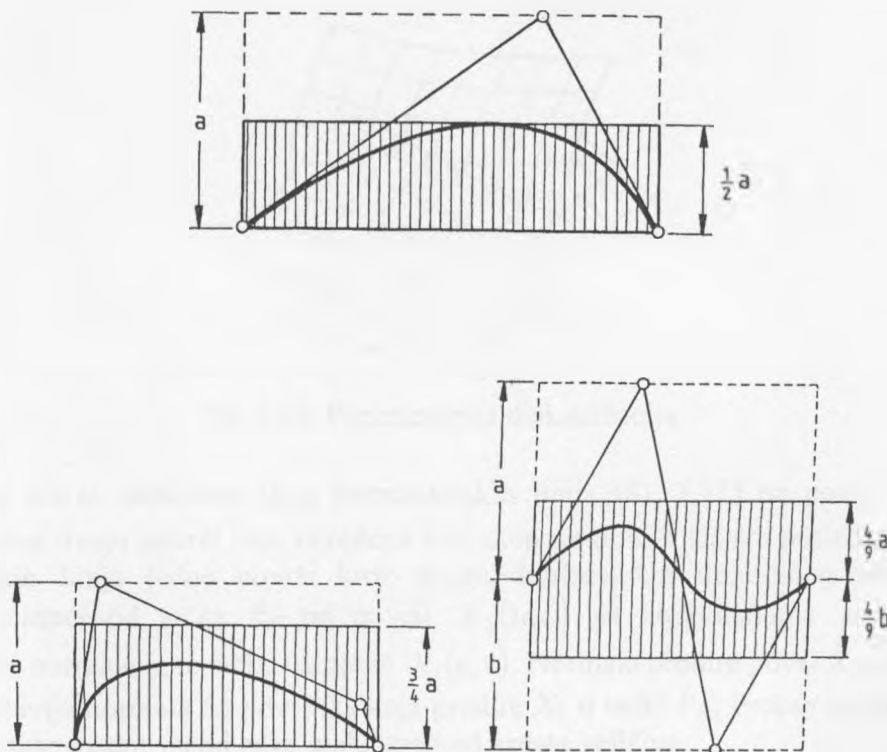
Sl. 2.7 Konveksni poligoni (levo) i mali konveksni poligoni (desno) za kvadratne i kubne krive



(a)

(b)

Sl. 2.8 (a) Min-max kutija za Bezijeovu krivu; (b) Pravougaona traka za Bezijeovu krivu



Sl. 2.9 Redukovane pravougaone trake za kvadratnu (gore) i kubne (dole) Bezijeove krive

Za objekte zadate u Beziijeovoj formi konstruiše se min-max kutija kao najmanji pravougaoni paralelepiped koji sadrži konveksni poligon (Sl. 2.8a). Brže se konstruiše min-max kutija korišćenjem krajnjih tačaka Beziijeovog poligona (Sl. 2.8b). Pravougaona traka definisana je kao najmanji pravougaonik koji gradi konveksni poligon nad Beziijeovim tačkama, ako je jedna ivica konveksnog poligona paralelna sa linijom b_0b_n .

Za kvadratne i kubne krive moguće je formirati još manje pravougaone trake (Sl. 2.9).

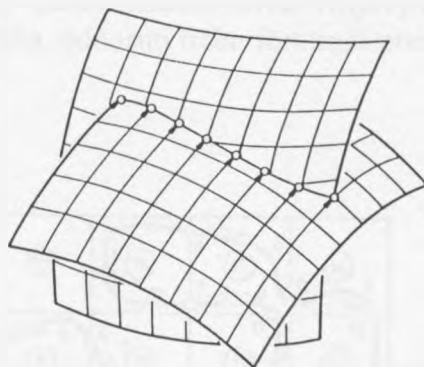
2.4 DISKRETNE METODE

Dominantna su dva tipa diskretnih metoda:

- Parametarska diskretizacija
- Grid metod

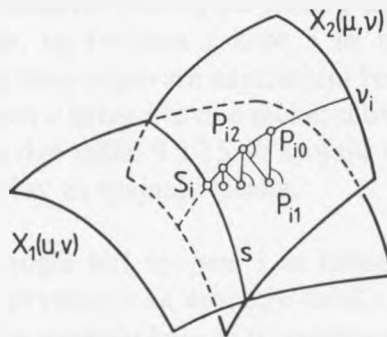
2.4.1 Parametarska diskretizacija

Problem određivanja preseka dveju površi sastoji se u određivanju sistema nelinearnih jednačina nezavisno od načina prezentacije površi. Svaka površ se diskretizuje, odnosno formira se mreža (grid) tako da je svaka tačka na površi opisana sa dva parametra. Presečna kriva dve površi određena je sa četiri parametra, jer je svaka površ definisana sa dva parametra, a presek se posmatra u koordinatnom sistemu koji ima tri ose. Tako opisan problem nije rešiv, stoga je potrebno izvršiti redukciju stepena slobode presečne krive sa četiri na tri što se postiže posmatranjem jedne površi kao skupa parametarskih krivih kod kojih je za svaku parametarsku krivu površi jedan parametar konstantan (Sl. 2.10).



Sl. 2.10 Parametarska diskretizacija

Neka je sa $v = v_i$ definisan skup parametarskih linija (Sl. 2.11) na površi $X_2(\mu, v)$. Presečna kriva dveju površi biće određena kao skup prodornih tačaka posmatranog skupa parametarskih linija jedne površi kroz drugu, korišćenjem iterativnog projektujućeg metoda. Polazeći od tačke P_{i0} na površi $X_2(\mu, v)$ sa koordinatama $\mu = \eta_{i0}, v = v_i$ konstruiše se normala iz te tačke na površ $X_1(u, v)$. Normala prodire površ X_1 u tački P_{i1} iz koje se postavlja normala na površ X_2 koja prodire X_2 u tački P_{i2} . Proces se prekida kada dužina normale spadne ispod neke male unapred zadate veličine.



Sl. 2.11 Metod projekcije

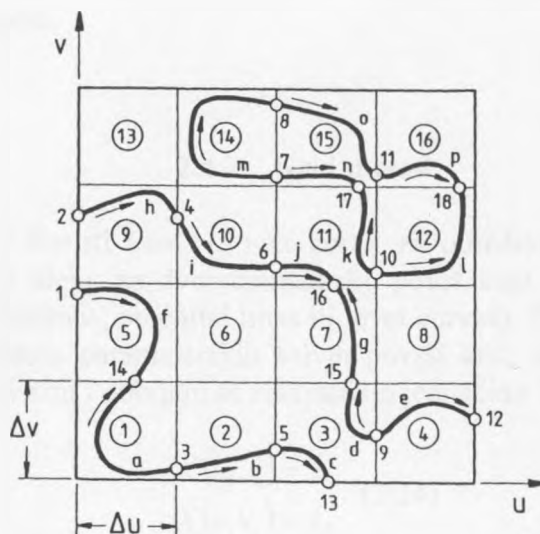
Svaki algoritam obično sadrži sledeće faze:

- Faza traženja (search phase) ili lova (hunting phase);
- Faza traganja (tracing phase) ili hoda (marching phase);
- Faza sortiranja (sorting phase).

Faza traženja sadrži u sebi diskretni metod i u njoj se određuju ulazni podaci za fazu traganja. U fazi traganja se formira presečna kriva spajanjem tačaka presečne krive, a u poslednjoj fazi se analiziraju singulariteti, slučajevi kada se javlja čvorna tačka ili tačke gde presečna kriva dodiruje granice dveju površi.

2.4.1.1 Faza traganja

Ulazni podatak za ovu fazu su tačke presečne krive koje su određene diskretnom metodom kao prodorne tačke parametarskih krivih $X_1(u,v)$ kroz površ $X_2(\mu,v)$. Sada je potrebno izvršiti spajanje tačaka, odnosno treba formirati presečnu krivu kao sumu njenih segmenata (Sl. 2.12).

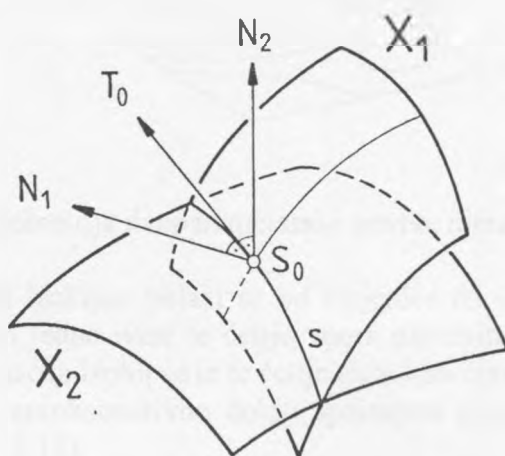


Sl. 2.12 Mreža parametarskih krivih na površi $X_1(u,v)$ sa presečnim tačkama 1, ..., 18 na izoparametarskim krivim linijama površi X_1 i kompozitna presečna kriva površi X_1 i X_2 koja se sastoji od segmenata a, ..., p

Ovo se postiže posmatranjem jednog po jednog dela (zakrpe) površi korišćenjem određene procedure; tako npr. na ivicama zakrpe 3 se nalaze tačke 5, 9, 13 i 15 i u razmatranju se polazi od tačke koja odgovara najmanjem broju. Tačka 5 se spaja sa jednom od preostalih tačaka segmentom c krive i te dve tačke; u ovom slučaju tačke 5 i 13 se više ne uzimaju u obzir. Preostale dve tačke 9 i 15 se spajaju segmentom d krive polazeći od tačke 9 jer se poštuju zadati uslov za spajanje tačaka.

Očigledno je da je tačka 5 mogla biti spojena i sa tačkama 9 ili 13, stoga je potrebno definisati nekakav kriterijum prvenstva za spajanje tačaka. Kod ovog problema u pomoć dolazi diferencijalna geometrija pomoću koje se u problematičnoj tački $X_1(u_0, v_0) = X_2(\mu_0, \nu_0)$ presečne krive konstruiše tangenta (Sl. 2.13), korišćenjem jednačine

$$T_0 = N_1(u_0, v_0) \times N_2(\mu_0, \nu_0) \quad (2.23)$$



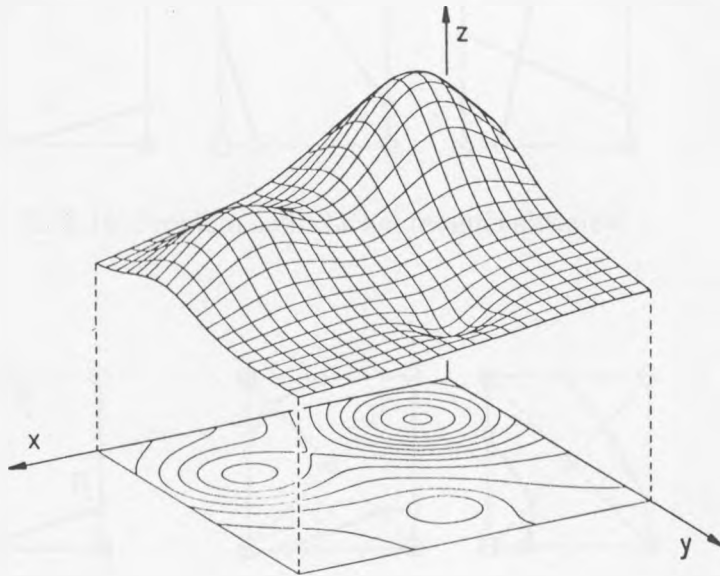
Sl. 2.13 Tangenta presečne krive

Tangenta je upravna na normale obe površi u posmatranoj tački, a presečna kriva se prostire u pravcu tangente.

2.4.2 Grid metod

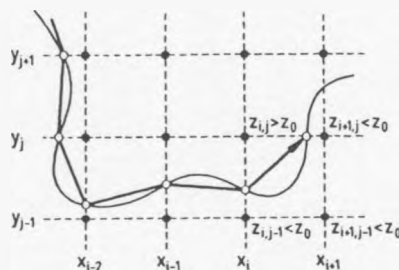
Ovaj metod se koristi kao osnovni korak za određivanje presečne krive dveju površi, prateći sledeću ideju: za dvoparametarsku površ koja je zadata tačkama $X(u, v_j)$ određuju se izohipse (isolines; potential lines ili level curves). Tačke izohipse (Sl. 2.14) na visini z_0 su tačke prodora parametarskih krivih površi kroz horizontalnu ravan koja se nalazi na posmatranoj visini i dobijaju se rešavanjem jednačina

$$\begin{aligned} X(u_i, v) &= z_0 \\ X(u, v_i) &= z_0 \end{aligned} \quad (2.24)$$



Sl. 2.14 Aksonometrija dvoparametarske površi, njena oblast i izohipse

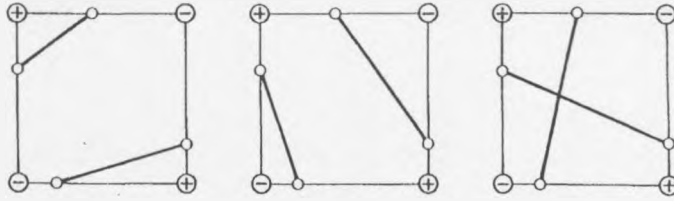
Za spajanje tačaka jedne izohipse polazi se od činjenice da izohipsa koja ulazi u jednu ćeliju mreže presecanjem jedne ivice te ćelije, mora napustiti tu ćeliju presecanjem bilo koje njene ivice. Izlazna tačka izohipse iz te ćelije služi kao ulazna tačka u sledeću ćeliju, a sama izohipsa može se aproksimativno dobiti spajanjem pomoću duži ulazne i izlazne tačke za svaku ćeliju (Sl. 2.15).



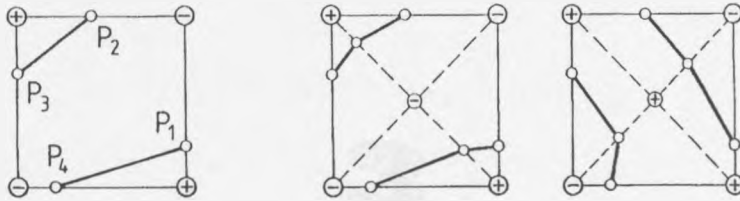
Sl. 2.15 Konstrukcija izohipse pomoću grid metode

Slučajevi kada izohipsa prolazi kroz temene tačke ćelija ili kada se delom poklapa sa ivicom ćelije zahtevaju dodatna razmatranja. Takođe je interesantno posmatrati izohipsu koja unutar jedne ćelije ima samopresečnu tačku, zatim slučaj kada se ulazna i izlazna tačka izohipse nalaze na istoj ivici ćelije, ili kada izohipsa seče sve četiri ivice ćelije. Poslednji slučaj predstavlja problem četiri tačke (four-point problem) kod koga je potrebno utvrditi uslove koji će garantovati da će algoritam ([PG86], [PK87]) davati uvek isti rezultat bez obzira na izbor polazne tačke ili ivice ćelije (Sl. 2.16).

Uslov za spajanje bi bio: za proizvoljno izabranu jednu od četiri tačke koja je na ivici a ona se uvek spaja sa tačkom koja leži na ivici b , ako ivice a i b imaju zajedničko teme i ako je vrednost funkcije površi u tom temenu veća od z_0 (Sl. 2.17).



Sl. 2.16 Problem četiri tačke: mogući slučajevi



Sl. 2.17 Spajanje tačaka i spajanje tačaka posle nove podele na četiri trougla

Alternativni pristup se dobija kada se ćelija crtanjem dijagonala podeli na četiri trougla i kada se tački u preseku dijagonala dodeli teme koje je na manjoj ili većoj visini od z_0 . Kada se odrede izohipse obe površi tada se presecanjem izohipsi koje su na istoj visini dobijaju tačke presečne krive posmatranih površi.

3

PROJICIRANJE

3.1 PROJICIRANJE

Svaka tačka u prostoru je definisana sa tri koordinate, a crtež na grafičkom ekranu je prikazan pomoću dve koordinate ([RA90], [HL93], [Štu94], [Obr97]), stoga je potrebno izvršiti transformaciju pomoću koje će se trodimenzionalni prostor (3D) svesti na dvodimenzionalnu ravan (2D). Svaka tačka iz 3D se projicira na izabranu likoravan L (izabrana je likoravan koja se poklapa sa koordinatnom ravni Oxz) projicirajućim zracima koji polaze iz zajedničke tačke S . Ukoliko se tačka S nalazi beskonačno daleko na proizvoljnom pravcu, onda su projicirajući zraci paralelni sa vektorom projiciranja $p=(p_x, p_y, p_z)$ i ovo je paralelno projiciranje (Sl. 3.1). Kada je tačka S u konačnosti (Sl. 3.2) tada svi projicirajući zraci polaze iz nje i ovo je centralno projiciranje (perspektiva).

3.2 PARALELNO PROJICIRANJE

Projiciranje je zadato sa likoravni Oxz i projicirajućim zracima koji su paralelni sa vektorom (Sl. 3.1)

$$p=(p_x, p_y, p_z) \quad (3.1)$$

Umesto vektora p može se zadati ugao $\angle(-xOy)=\varphi$ i skraćenje $\lambda = \frac{Y_S^K}{Y_S}$, a može se uspostaviti i sledeća veza [Štu94]

$$\begin{aligned} p_x &= \lambda \cos \varphi \\ p_y &= 1 \\ p_z &= \lambda \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Poznato je [Obr97] da se 3D prostor projicira u 2D ravan paralelnim projicirajućim zracima pomoću jednačina

$$\begin{aligned} x_{2D} &= x_{3D} - \lambda y_{3D} \cos \varphi \\ z_{2D} &= z_{3D} - \lambda y_{3D} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.3)$$

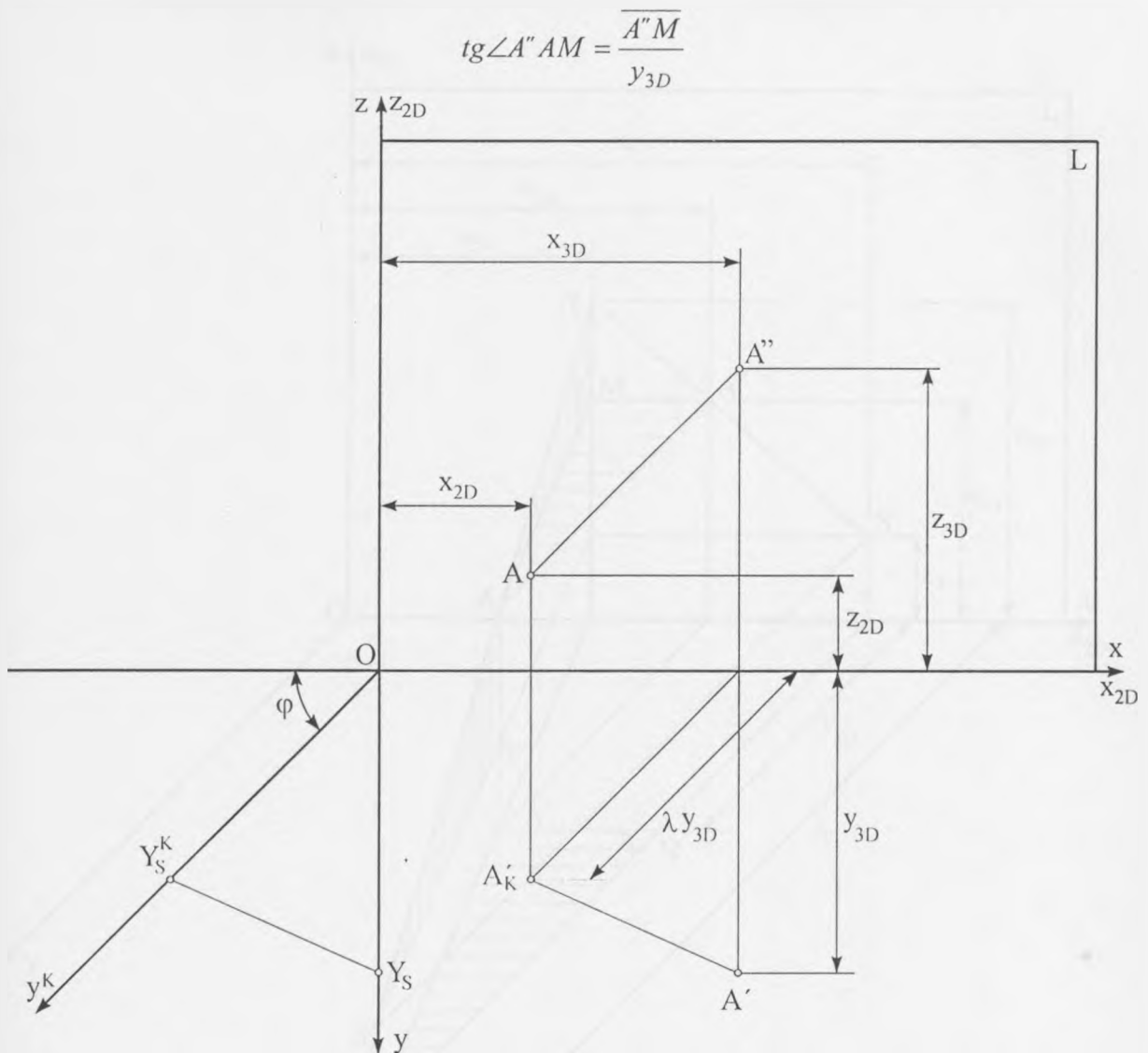
3.3 CENTRALNO PROJICIRANJE

Projiciranje je zadato sa likoravni Oxz i projicirajućim zracima koji polaze iz tačke $S(x_S, y_S, z_S)$ (Sl. 3.2).

Sa slike 3.2 se vidi

$$x_{2D} = x_{3D} - \overline{A''M}$$

a iz pravouglog trougla $\triangle AA''M$ je



Sl. 3.1 Paralelno projiciranje

Trouglovi $\triangle AA''M$ i $\triangle S'NA'$ su zbog paralelnih strana slični ($\triangle AA''M \approx \triangle S'NA'$) pa imaju jednake uglove, odnosno

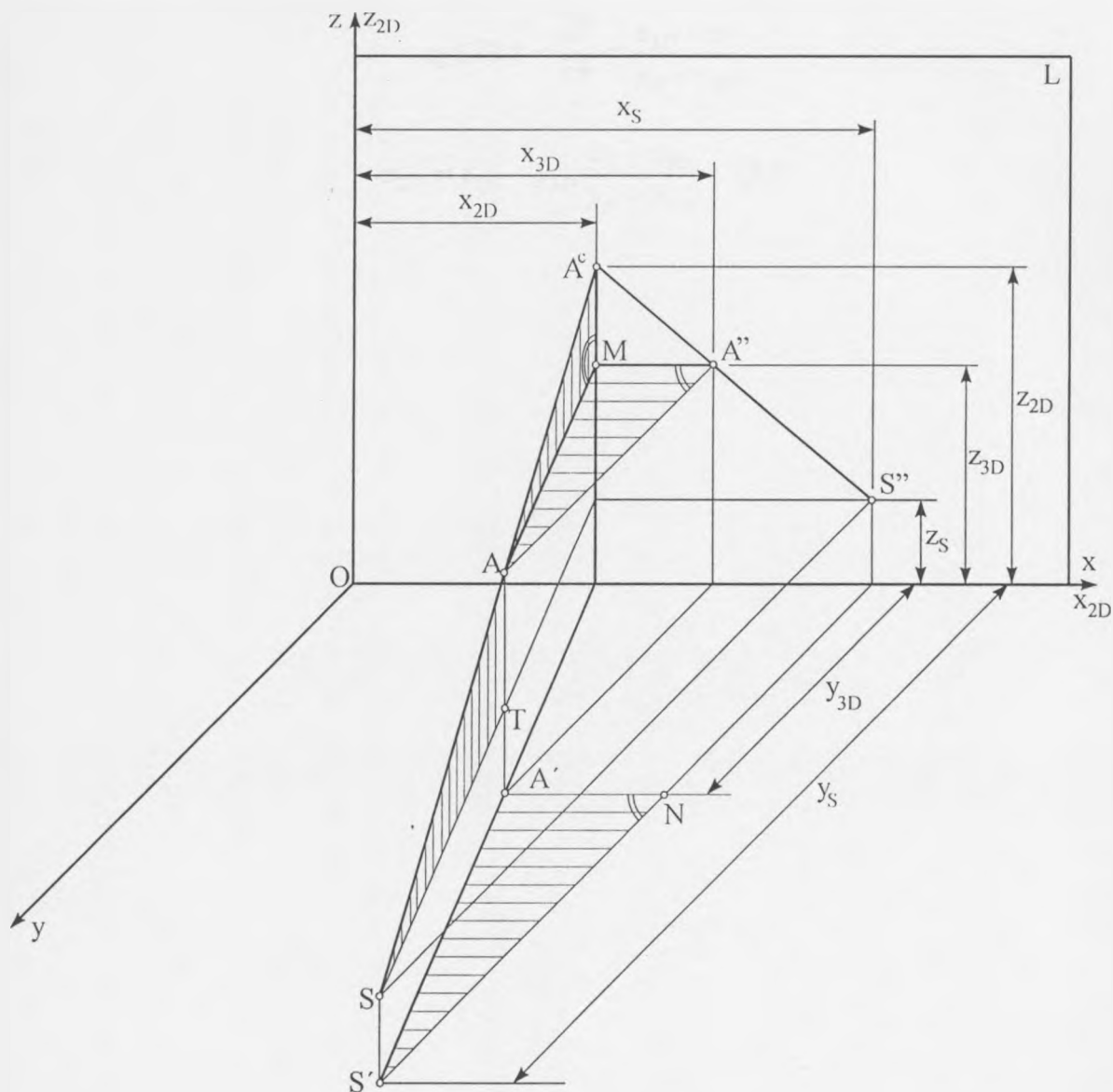
$$\angle A''AM = \angle NS'A'$$

Sa slike 3.2

$$\operatorname{tg} \angle NS'A' = \frac{\overline{NA'}}{\overline{S'N}} = \frac{x_S - x_{3D}}{y_S - y_{3D}}$$

Iz prikazanih jednačina se dobija

$$x_{2D} = x_{3D} - y_{3D} \frac{x_S - x_{3D}}{y_S - y_{3D}} \quad (3.4)$$



Sl. 3.2 Centralno projiciranje

Slično se određuje z koordinata

$$z_{2D} = z_{3D} + \overline{MA^c}$$

Iz $\triangle AMA^c$ se vidi

$$\operatorname{tg} \angle MAA^c = \frac{\overline{MA^c}}{y_{3D}}$$

Iz $\triangle STA \approx \triangle AMA^c$ sledi

$$\angle MAA^c = \angle TSA$$

$$\operatorname{tg} \angle TSA = \frac{\overline{AT}}{\overline{ST}} = \frac{z_{3D} - z_S}{y_S - y_{3D}}$$

$$z_{2D} = z_{3D} - y_{3D} \frac{z_S - z_{3D}}{y_S - y_{3D}} \quad (3.5)$$

4

**KONTURA
ROTACIONE POVRŠI**

4.1 KONTURA ROTACIONE POVRŠI ZA PARALELNE PROJICIRAJUĆE ZRAKE

Meridijan rotacione površi je ravna kriva koja leži u likoravni Oxz , osa površi je koincidentna sa osom z , a projicirajući zraci su paralelni sa vektorom $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$. Jednačine meridijana i ose su

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + z(t)\vec{k}; \quad y(t) = 0 \quad (4.1)$$

$$\vec{o} = (o_x, o_y, o_z) \quad (4.2)$$

$$o_x = 0$$

$$o_y = 0$$

$$o_z = 1$$

Parametarske jednačine rotacione površi su

$$\begin{aligned} u(t, \theta) &= x(t) \cos \theta \\ v(t, \theta) &= x(t) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$w(t, \theta) = z(t)$$

$$t \in [t_0, t_{\max}]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

tačka $M_i(x_i, y_i, z_i)$ je na meridijanu

$$x_i = x(t_i)$$

$$y_i = y(t_i) \quad (4.4)$$

$$z_i = z(t_i)$$

Normala rotacione površi u tački M_i

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \quad (4.5)$$

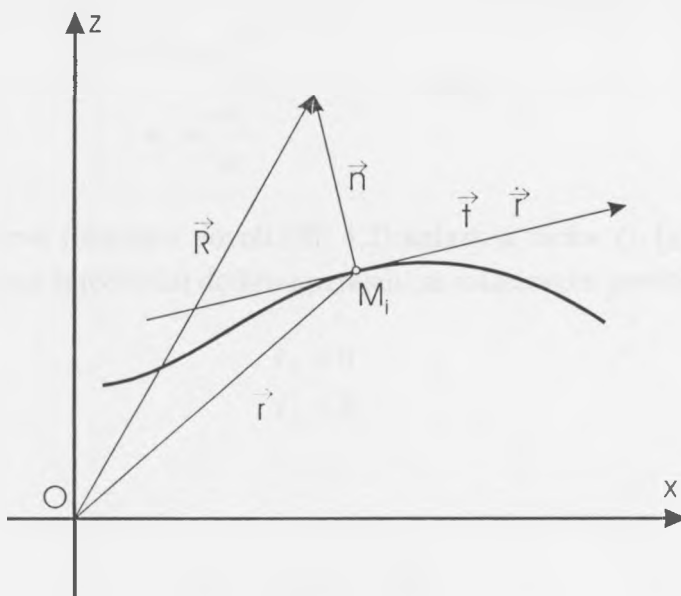
$$n_y = 0$$

Normala i tangenta grade prav ugao (Sl. 4.1) pa važi sledeće

$$(\vec{R} - \vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

$$\vec{R} = (X, Z)$$

$$\vec{r} = (x_i, z_i)$$



Sl. 4.1 Normala krive

Iz poslednje tri jednačine se dobija

$$\frac{X - x_i}{\frac{dz_i}{dt}} + \frac{Z - z_i}{\frac{dx_i}{dt}} = 0$$

Uvedimo smenu

$$\lambda = -\frac{X - x_i}{\frac{dz_i}{dt}} = \frac{Z - z_i}{\frac{dx_i}{dt}}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} X &= x_i - \lambda \frac{dz_i}{dt} \\ Z &= z_i + \lambda \frac{dx_i}{dt} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Jednačine normale su

$$\begin{aligned} X &= x_i + \lambda n_x \\ Z &= z_i + \lambda n_z \end{aligned} \quad (4.7)$$

Preostale dve komponente normale su

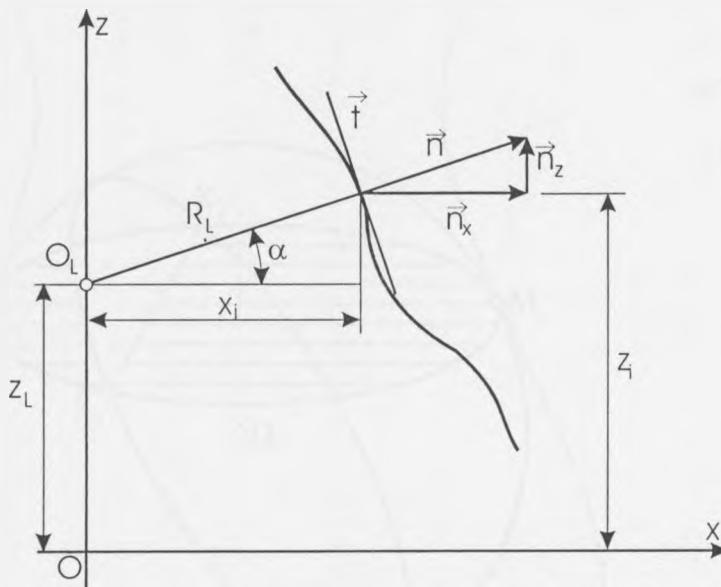
$$\begin{aligned} n_x &= -\frac{dz_i}{dz} \\ n_z &= \frac{dx_i}{dt} \end{aligned} \quad (4.8)$$

U preseku normale i ose rotacione površi (Sl. 4.2) nalazi se tačka $O_L(x_L, y_L, z_L)$, centar pomoćne lopte, koja ima zajedničku dodirnu paralelu sa rotacionom površi:

$$\begin{aligned} x_L &= 0 \\ y_L &= 0 \end{aligned}$$

Sa slike 4.2 se vidi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_z}{n_x} = \frac{z_i - z_L}{x_i}$$



Sl. 4.2 Centar pomoćne lopte

Odakle je

$$z_L = z_i - x_i \frac{n_z}{n_x}$$

Poluprečnik pomoćne lopte je jednak

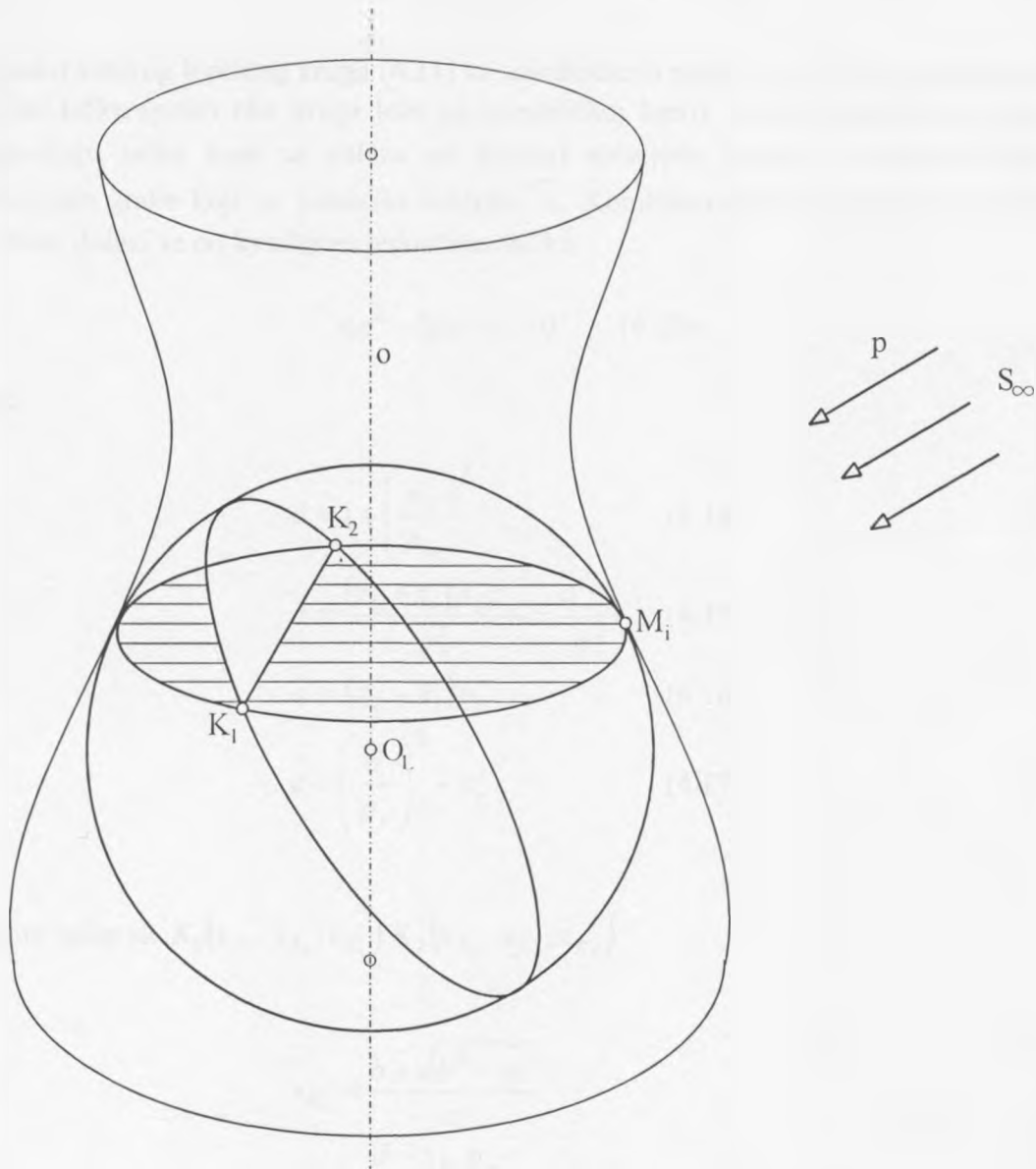
$$R_L^2 = x_i^2 + (z_i - z_L)^2$$

odnosno

$$R_L = x_L \sqrt{1 + \left(\frac{n_z}{n_x}\right)^2} \quad (4.9)$$

Polarna ravan za beskonačno daleki centar projiciranja koji se nalazi u pravcu vektora \vec{p} , seče loptu po velikom loptinom krugu (Sl. 4.3). Jednačina ravni je

$$(x - x_L)p_x + (y - y_L)p_y + (z - z_L)p_z = 0 \quad (4.10)$$



Sl. 4.3 Konturne tačke pri paralelnom projiciranju

Veliki loptin krug za pravac \vec{p} , dobija se kombinovanjem jednačina lopte i polarne ravni

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + (z - z_L)^2 &= R_l^2 \\xp_x + yp_y + (z - z_L)p_z &= 0\end{aligned}\quad (11)$$

Zajednička paralela lopte i rotacione površi je

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= R_p^2 \\z &= z_i \\R_p &= x_i\end{aligned}\quad (4.12)$$

U preseku velikog loptinog kruga (4.11) sa zajedničkom paralelom (4.12), dobijaju se dve presečne tačke (pošto oba kruga leže na zajedničkoj lopti). Ove dve tačke na visini z_i , predstavljaju tačke koje se nalaze na konturi rotacione površi u polarnoj ravni za projicirajuće zrake koji su paralelni vektoru \vec{p} . Kombinovanjem poslednja dva sistema jednačina, dolazi se do kvadratne jednačine oblika

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \quad (4.13)$$

gde su

$$a = 1 + \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \quad (4.14)$$

$$b = \frac{(z_L - z_i)p_z p_x}{p_y^2} = \frac{d p_x}{p_y^2} \quad (4.15)$$

$$d = (z_L - z_i)p_z \quad (4.16)$$

$$c = \left(\frac{d}{p_y}\right)^2 - x_i^2 \quad (4.17)$$

Presečne tačke su $K_1(x_{K_1}, y_{K_1}, z_{K_1}), K_2(x_{K_2}, y_{K_2}, z_{K_2})$

$$\begin{aligned}x_{K_1} &= \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\y_{K_1} &= \frac{d - x_{K_1} p_x}{p_y} \\z_{K_1} &= z_i\end{aligned}\quad (4.18)$$

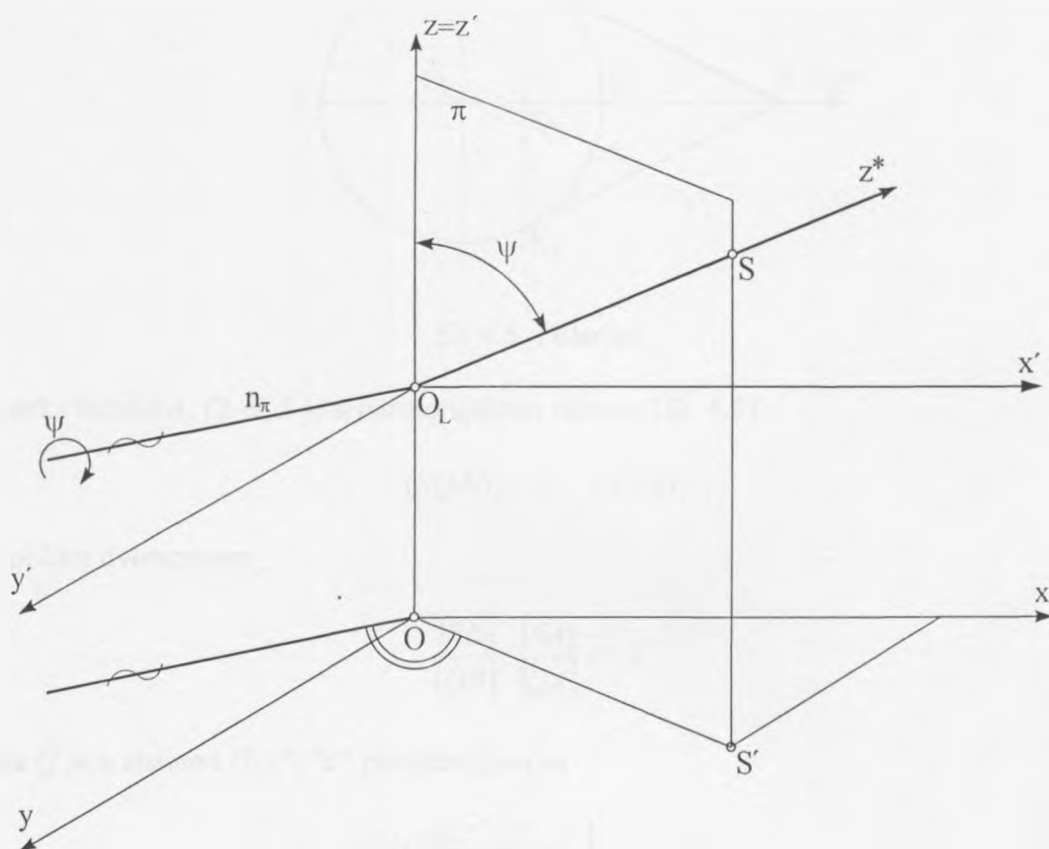
$$\begin{aligned}x_{K_2} &= \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\y_{K_2} &= \frac{d - x_{K_2} p_x}{p_y} \\z_{K_2} &= z_1\end{aligned}\quad (4.19)$$

Transformacijom koordinata se dobijaju kose projekcije tačaka

$$\begin{aligned}K_1^K(x_{K_1}^K, z_{K_1}^K) \\K_2^K(x_{K_2}^K, z_{K_2}^K)\end{aligned}\quad (4.20)$$

4.2 KONTURA ROTACIONE POVRŠI ZA CENTRALNO PROJICIRANJE

Meridijan (opisan jednačinom 4.1) rotira oko ose (4.2) i formira rotacionu površ (4.3). Normala površi u tački M_i ((4.5) i (4.8)) seče osu rotacije u tački O_L . Centar projiciranja je tačka S i neka osa rotacije z i prava $O_L S$ obrazuju ravan π (Sl. 4.4). Koordinatni sistem $O_L x' y' z'$ dobijen je translacijom sistema $Oxyz$ za vektor translacije OO_L . Rotacijom sistema $O_L x' y' z'$ oko normale n_π ravni π za ugao ψ dobija se sistem $O_L x^* y^* z^*$, pri čemu se osa z^* poklapa sa pravcem $O_L S$ [Štu94].



Sl. 4.4 Globalni i lokalni koordinatni sistemi

Koordinate centra projiciranja S u sistemu $O_L x^* y^* z^*$ su

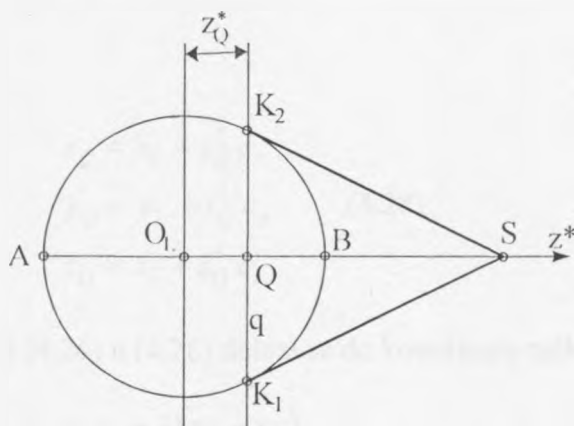
$$\begin{aligned} S &= S(x_S^*, y_S^*, z_S^*) \\ x_S^* &= y_S^* = 0 \\ z_S^* &= |O_L S| \end{aligned} \quad (4.21)$$

gde je sa $||$ označena dužina duži. U globalnom koordinatnom sistemu $Oxyz$ je

$$\begin{aligned} S &= S(x_S, y_S, z_S) \\ O_L &= (0, 0, z_L) \\ |O_L S| &= \sqrt{x_S^2 + y_S^2 + (z_S - z_L)^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Iz (4.21) i (4.22) se dobija

$$z_s^* = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + (z_s - z_L)^2} \quad (4.23)$$



Sl. 4.5 Polaritet

Četvorka tačaka A, Q, B, S je u harmonijskom odnosu (Sl. 4.5)

$$(SQAB) = -1 \quad (4.24)$$

ili u obliku dvorazmere

$$\frac{[SB]}{[QB]} : \frac{[SA]}{[QA]} = -1$$

Tačka Q je u sistemu $O_L x^* y^* z^*$ predstavljena sa

$$\begin{aligned} Q &= Q(x_Q^*, y_Q^*, z_Q^*) \\ x_Q^* &= y_Q^* = 0 \\ z_Q^* &= \frac{R_L^2}{z_S^*} \end{aligned} \quad (4.25)$$

a u sistemu $Oxyz$ sa koordinatama $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$. Kosinusi uglova prave $O_L S$ su

$$\begin{aligned} [c_x \quad c_y \quad c_z] &= \frac{[x_S - x_L \quad y_S - y_L \quad z_S - z_L]}{\sqrt{(x_S - x_L)^2 + (y_S - y_L)^2 + (z_S - z_L)^2}} = \\ &= \frac{[x_S - x_L \quad y_S - y_L \quad z_S - z_L]}{z_S^*} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Projektovanjem na koordinatne ose sistema $Oxyz$ dobijaju se jednačine

$$\begin{aligned}
 x_S - x_Q + z_Q \dot{c}_x &= x_S - x_L \\
 y_S - y_Q + z_Q \dot{c}_y &= y_S - y_L \\
 z_S - z_Q + z_Q \dot{c}_z &= z_S - z_L
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
 x_Q &= x_L + z_Q \dot{c}_x \\
 y_Q &= y_L + z_Q \dot{c}_y \\
 z_Q &= z_L + z_Q \dot{c}_z
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Zamenom jednačina (4.25) i (4.26) u (4.28) dolazi se do koordinata tačke Q

$$\begin{aligned}
 x_Q &= x_L + \lambda (x_S - x_L) \\
 y_Q &= y_L + \lambda (y_S - y_L) \\
 z_Q &= z_L + \lambda (z_S - z_L) \\
 \lambda &= \left(\frac{R_L}{z_S} \right)^2
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vektor centralnog projiciranja je (Sl. 4.6)

$$\begin{aligned}
 p &= p(p_x; p_y; p_z) \\
 p_x &= x_S - x_L \\
 p_y &= y_S - y_L \\
 p_z &= z_S - z_L
 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Zamenom (4.30) u (4.29) dobija se

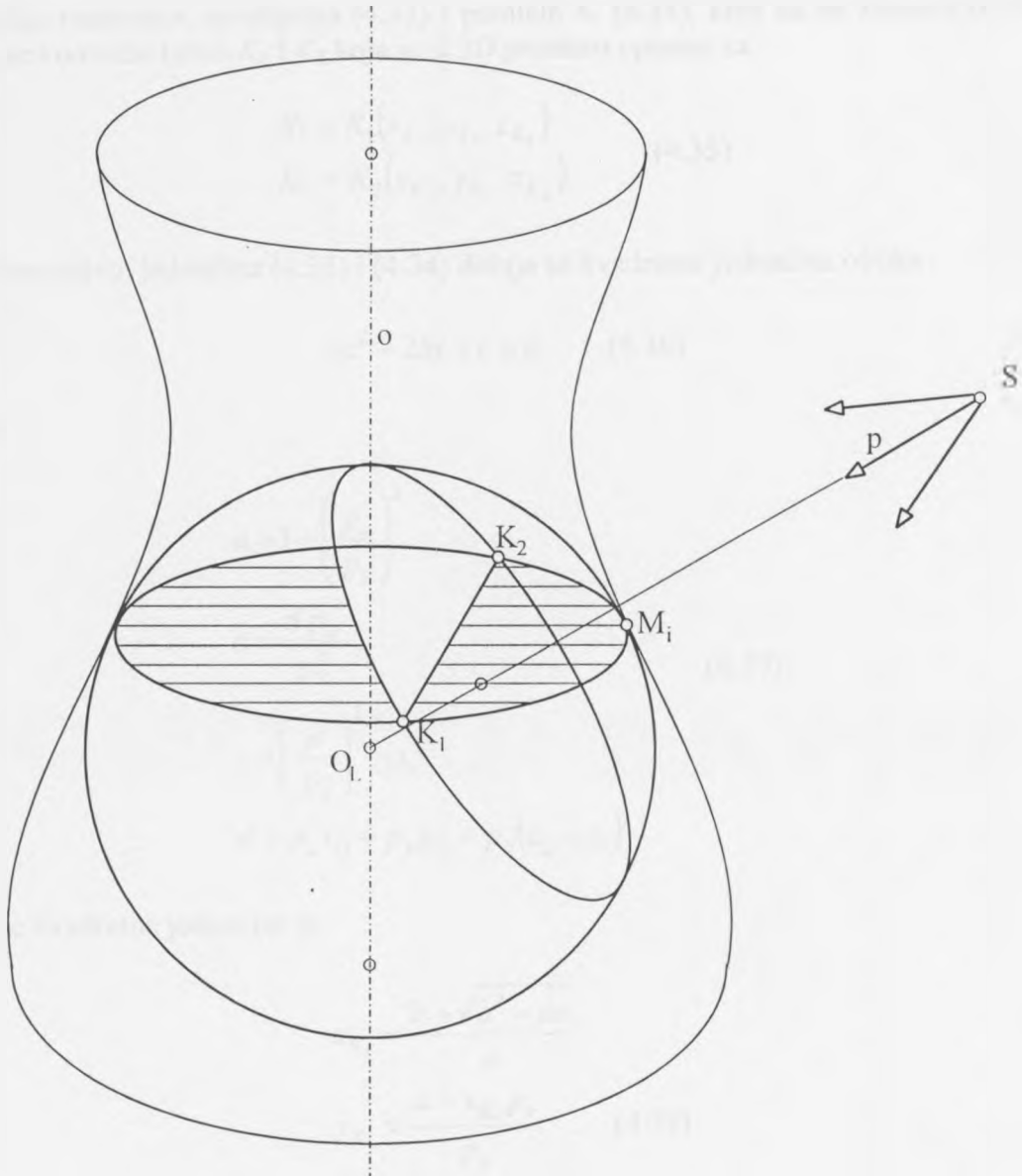
$$\begin{aligned}
 x_Q &= x_L + \lambda p_x \\
 y_Q &= y_L + \lambda p_y \\
 z_Q &= z_L + \lambda p_z
 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Polarna ravan lopte za centar projiciranja S , koja je definisana normalom SQ i tačkom Q , ima jednačinu

$$\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}_Q) = 0$$

odnosno

$$p_x(x - x_Q) + p_y(y - y_Q) + p_z(z - z_Q) = 0 \quad (4.32)$$



Sl. 4.6 Konturne tačke pri centralnom projiciranju

Krug na lopti, koji je rastavnica osvetljenja za centar projiciranja S , dobija se presekom lopte sa polarnom ravni, tj. određen je njihovim jednačinama

$$\begin{aligned} (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2 &= R_L^2 \\ p_x(x - x_Q) + p_y(y - y_Q) + p_z(z - z_Q) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Lopta seče rotacionu površ po paraleli K_i koja sadrži tačku $M_i(x_i; 0; z_i)$ i jednačina ove paralele je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x_i^2 \\ z &= z_i \end{aligned} \quad (4.34)$$

U preseku rastavnice osvetljenja (4.33) i paralele K_i (4.34), koje su na zajedničkoj lopti, nalaze se konturne tačke K_1 i K_2 koje su u 3D prostoru opisane sa

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1(x_{K_1}; y_{K_1}; z_{K_1}) \\ K_2 &= K_2(x_{K_2}; y_{K_2}; z_{K_2}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Kombinovanjem jednačina (4.33) i (4.34) dobija se kvadratna jednačina oblika

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \quad (4.36)$$

gde su

$$\begin{aligned} a &= 1 + \left(\frac{p_x}{p_y} \right)^2 \\ b &= \frac{d p_x}{p_y^2} \\ c &= \left(\frac{d}{p_y} \right)^2 - x_i^2 \\ d &= p_x x_Q + p_y y_Q + p_z (z_Q - z_i) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Rešenje kvadratne jednačine je

$$\begin{aligned} x_{K_1} &= \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ y_{K_1} &= \frac{d - x_{K_1} p_x}{p_y} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$z_{K_1} = z_i$$

$$\begin{aligned} x_{K_2} &= \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ y_{K_2} &= \frac{d - x_{K_2} p_x}{p_y} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$z_{K_2} = z_i$$

Transformacijom koordinata dobijaju se centralne projekcije tačaka

$$\begin{aligned} K_1^c(x_{K_1}^c, z_{K_1}^c) \\ K_2^c(x_{K_2}^c, z_{K_2}^c) \end{aligned} \quad (4.40)$$

5

POMOČNE RAVNI

5.1 ODREĐIVANJE PRESEKA ROTACIONIH POVRŠI KORIŠĆENJEM POMOĆNIH RAVNI

Posmatraju se dve rotacione površi, svaka je zadata meridijanom i osom. Meridijani su ravne krive reda m i n . Rotacijom svakog meridijana oko njemu pridružene ose dobijaju se rotacione površi reda $2m$ i $2n$. U preseku rotacionih površi dobija se prostorna kriva reda $4mn$ [Dov94]. Poznato je da se deskriptivno-geometrijski metod pomoćnih ravni može upotrebiti za određivanje preseka pravoizvodnih kvadratika [Obr97]. Takođe, postoji opšti deskriptivno-geometrijski postupak za određivanje ravnih preseka rotacione površi [Ska88] pa se postavlja pitanje da li je moguće pomoćne ravni koristiti i za određivanje preseka dveju rotacionih površi.

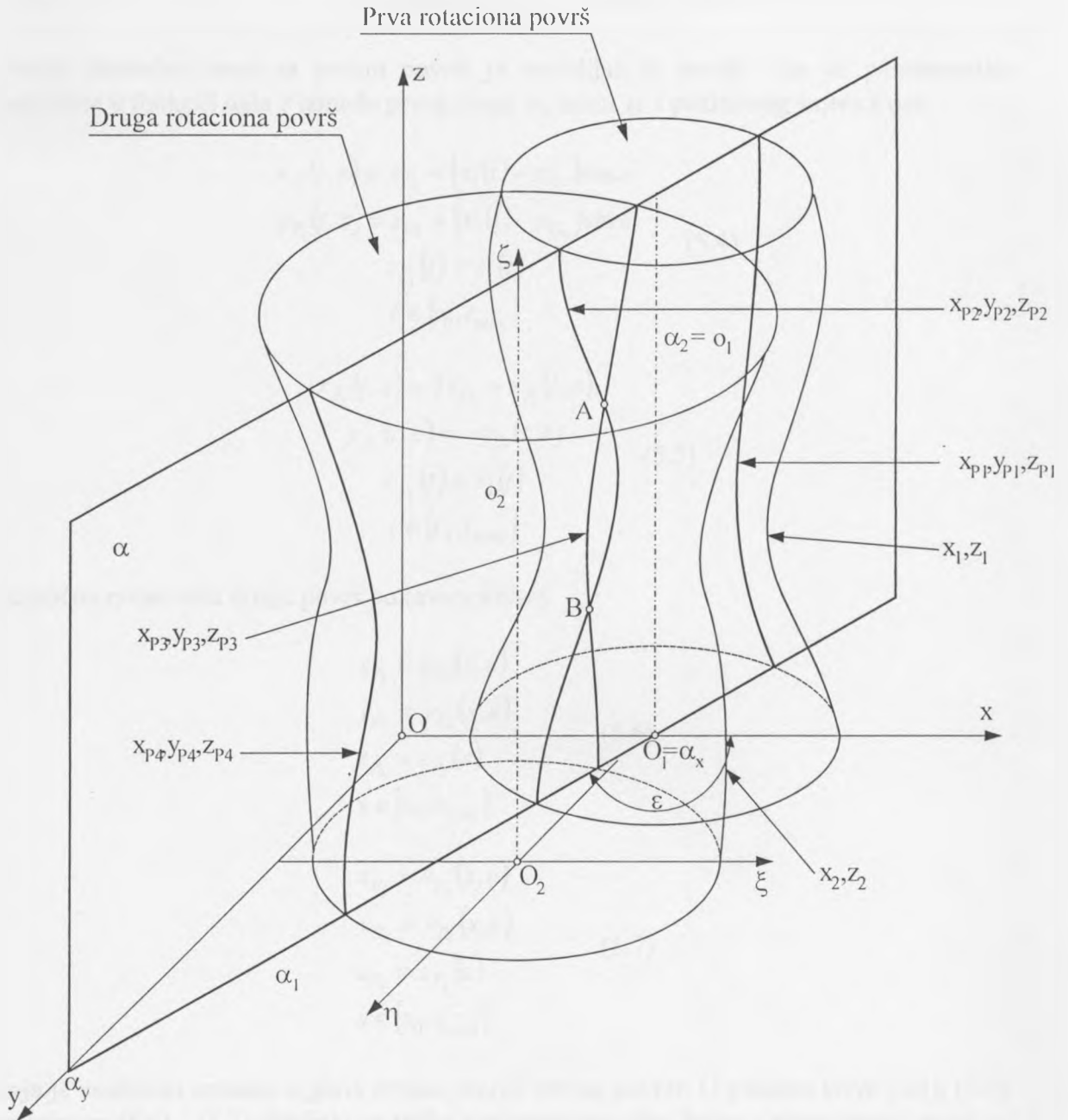
Korišćenjem pomoćnih ravni prostorni problem određivanja presečne krive dve rotacione površi se pokušava svesti na ravanski u kojem je potrebno odrediti presečne tačke dve ravne krive. Svaka ravan seče obe površi po ravnim krivim linijama i ukoliko se dve krive u istoj ravni realno seku, tada ove presečne tačke predstavljaju tačke prostorne presečne krive dveju površi u posmatranoj presečnoj ravni. Sada se postavlja pitanje kako izabrati pomoćne ravni. Opšti slučaj bi bio kada bi se, recimo, pomoćne ravni postavljale paralelno sa jednom projekcijskom ravni. Međutim, mogu se ove ravni postaviti i tako da se ništa ne izgubi na kvalitetu rešenja, a da procedura dobijanja rešenja bude pojednostavljena. Ako se pomoćne ravni organizuju kao pramen ravni čija je pramenjača poklopljena sa osom jedne rotacione površi, dobija se slučaj da ovakve pomoćne ravni u preseku sa tom površi daju meridijanski presek, a u preseku sa drugom površi neku ravnu krivu. Posle formiranja matematičkog aparata za ovu proceduru postaće jasnije zašto je ovakav položaj pomoćnih ravni ujedno i optimalan. Bilo bi još korisno kada bi se mogao odrediti presek dveju površi, a da se pri tome zaobiđe analiza o pitanjima kojeg su reda površi ili krive.

Jedna rotaciona površ biće zadata meridijanom i osom koji leže u frontalnici (ravan Oxz), a osa površi se poklapa sa z osom ili je paralelna sa njom. Druga rotaciona površ je zadata meridijanom i osom koji se nalaze u frontalnoj ravni $O_2\xi\zeta$ pri čemu je osa u proizvoljnom položaju. Očigledno je da se ovakvim izborom položaja meridijana i osa rotacionih površi ne gubi na opštosti, jer se svaki položaj rotacionih površi može svesti na izabrani, postavljanjem likoravni u paralelni položaj sa osama površi. Zbog izvesnih specifičnosti, posebno pokazujemo slučajeve kada su ose rotacionih površi paralelne i kada se one mimoilaze.

5.1.1 Ose rotacionih površi su paralelne

Prva rotaciona površ je zadata meridijanom i vertikalnom osom koja sadrži tačku $O_1(x_{O_1}, 0, 0)$ (Sl. 5.1). Parametarske jednačine meridijana su

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= z_1(t) \\ t &\in [t_0, t_{\max}] \end{aligned} \quad (5.1)$$



Sl. 5.1 Rotacione površi sa paralelnim osama

Vertikalna osa druge površi sadrži tačku $O_2(x_{O_2}, y_{O_2}, 0)$ dok je meridijan opisan jednačinama

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_2(s) \\
 y_2 &= y_{O_2} \\
 z_2 &= z_2(s) \\
 s &\in [s_0, s_{\max}]
 \end{aligned}
 \quad (5.2)$$

Pomoćna ravan je upravna na horizontalnicu i zadata je svojim osnim tragovima $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

$$\alpha = \alpha(\alpha_x, \alpha_y, \infty) \quad (5.3)$$

Presek pomoćne ravni sa prvom površi je meridijan te površi, čije su parametarske jednačine u funkciji ugla ε između prvog traga α_1 ravni α i pozitivnog smera x ose

$$\begin{aligned} x_{P_1}(t, \varepsilon) &= x_{O_1} + (x_1(t) - x_{O_1}) \cos \varepsilon \\ y_{P_1}(t, \varepsilon) &= x_{O_1} + (x_1(t) - x_{O_1}) \sin \varepsilon \\ z_{P_1}(t) &= z_1(t) \\ t &\in [t_0, t_{\max}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} x_{P_2}(t, \varepsilon) &= 2x_{O_1} - x_{P_1}(t, \varepsilon) \\ y_{P_2}(t, \varepsilon) &= -y_{P_1}(t, \varepsilon) \\ z_{P_2}(t) &= z_1(t) \\ t &\in [t_0, t_{\max}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pomoćna ravan seče drugu površ po ravnoj krivoj

$$\begin{aligned} x_{P_3} &= x_{P_3}(s, \varepsilon) \\ y_{P_3} &= y_{P_3}(s, \varepsilon) \\ z_{P_3} &= z_{P_3}(s) \\ s &\in [s_0, s_{\max}] \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} x_{P_4} &= x_{P_4}(s, \varepsilon) \\ y_{P_4} &= y_{P_4}(s, \varepsilon) \\ z_{P_4} &= z_{P_4}(s) \\ s &\in [s_0, s_{\max}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

koja je analitički opisana u glavi *Ravan presek obrtne površi*. U preseku krive (5.4), (5.5) sa krivom (5.6) i (5.7) dobijaju se tačke prostorne presečne krive u posmatranoj ravni α (na slici su označene sa A i B , mada je jasno da se broj realnih presečnih tačaka dveju krivih kreće od 0 do $4mn$).

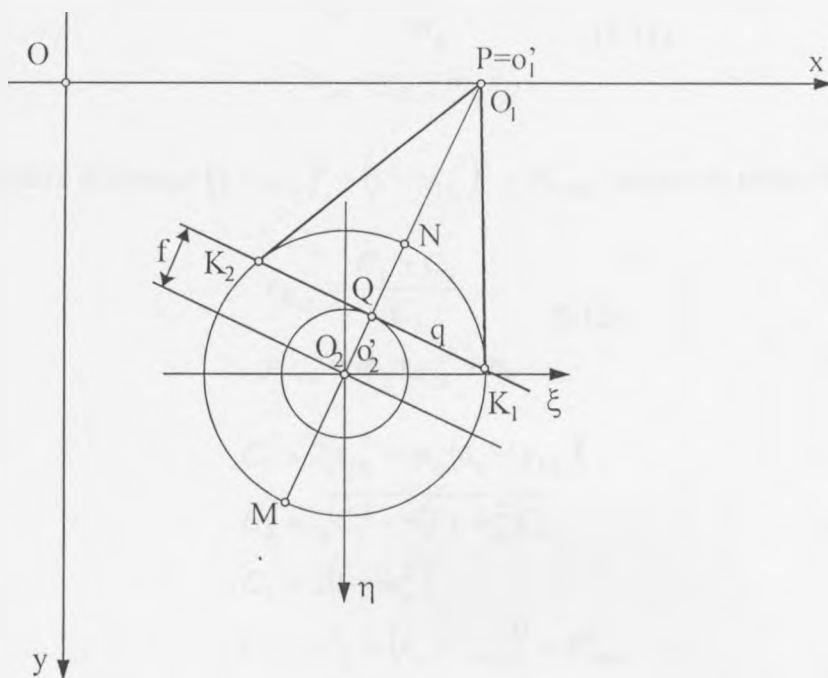
Dalje je potrebno odrediti interval pomoćnih ravni, odnosno prvu i poslednju ravan iz pramena pomoćnih ravni, koje daju realne tačke prostorne presečne krive. U ovom slučaju, problem se svodi na ravanski problem (Sl. 5.2) određivanja polare pola P , koji se poklapa sa prvom projekcijom ose prve rotacione površi ($P = o_1^+$), na krugu centra O_2 , a poluprečnika $R_{2\max}$ najveće paralele druge rotacione površi ([Obr97], [Štu94]). Tada je

$$f = \frac{R_{2\max}^2}{\sqrt{(x_{O_1} - x_{O_2})^2 + y_{O_2}^2}} \quad (5.8)$$

Pomoćne ravni je potrebno postaviti tako da prvi tragovi pomoćnih ravni pokrivaju ugao između pravih PK_1 i PK_2 . Do koordinata tačaka K_1 i K_2 dolazi se korišćenjem sledećeg niza jednačina [Obr97]:

Koordinate tačke Q

$$\begin{aligned}x_Q &= x_{O_2} + \xi_Q \\y_Q &= y_{O_2} + \eta_Q\end{aligned}\quad (5.9)$$



Sl. 5.2 Polaritet u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\xi_Q = f \frac{\frac{x_d}{|x_d|}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_d}{x_d}\right)^2}}$$

$$\eta_Q = \frac{y_d \xi_Q}{x_d}$$

$$x_d = x_{O_1} - x_{O_2}$$

$$y_d = -y_{O_2}$$

Dijametralna prava p

$$y = m_p x + n_p$$

$$m_p = \frac{y_{O_2}}{x_{O_2} - x_{O_1}} \quad (5.10)$$

$$n_p = -m_p x_{O_1}$$

Polara q

$$m_q = -\frac{1}{m_p} \quad (5.11)$$

$$n_q = y_{O_2} - m_q x_{O_2}$$

U preseku polare q i kruga $(x - x_{O_2})^2 + (y - y_{O_2})^2 = R_{2\max}^2$ nalaze se tačke K_1, K_2 :

$$x_{K_{1,2}} = \frac{C_1 \pm C_2}{C_3} \quad (5.12)$$

$$y_{K_{1,2}} = m_q x_{K_{1,2}} + n_q$$

$$C_1 = 2[x_{O_2} - m_q(n_q - y_{O_2})]$$

$$C_2 = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + m_q^2)C_4}$$

$$C_3 = 2(1 + m_q^2)$$

$$C_4 = x_{O_2}^2 + (n_q - y_{O_2})^2 - R_{2\max}^2$$

5.1.2 Ose rotacionih površi se mimoilaze

Osa druge rotacione površi (Sl. 5.3) se poklapa sa osom ζ_1 lokalnog koordinatnog sistema $O_2\xi_1\eta_1\zeta_1$ koji je dobijen rotacijom sistema $O_2\xi\eta\zeta$ oko ose η za ugao ψ . Ravan α seče prvu površ po meridijanu, a presek ravni α sa drugom površi je slučaj ravnog preseka kada ravan u lokalnom koordinatnom sistemu $O_2\xi_1\eta_1\zeta_1$ ima konačne osne tragove. Ravan je u globalnom koordinatnom sistemu predstavljena sa

$$\alpha = \alpha(\alpha_x, \alpha_y, \infty) \quad (5.13)$$

a u lokalnom

$$\alpha = \alpha(\alpha_{\xi_1}, \alpha_{\eta_1}, \alpha_{\zeta_1}) \quad (5.14)$$

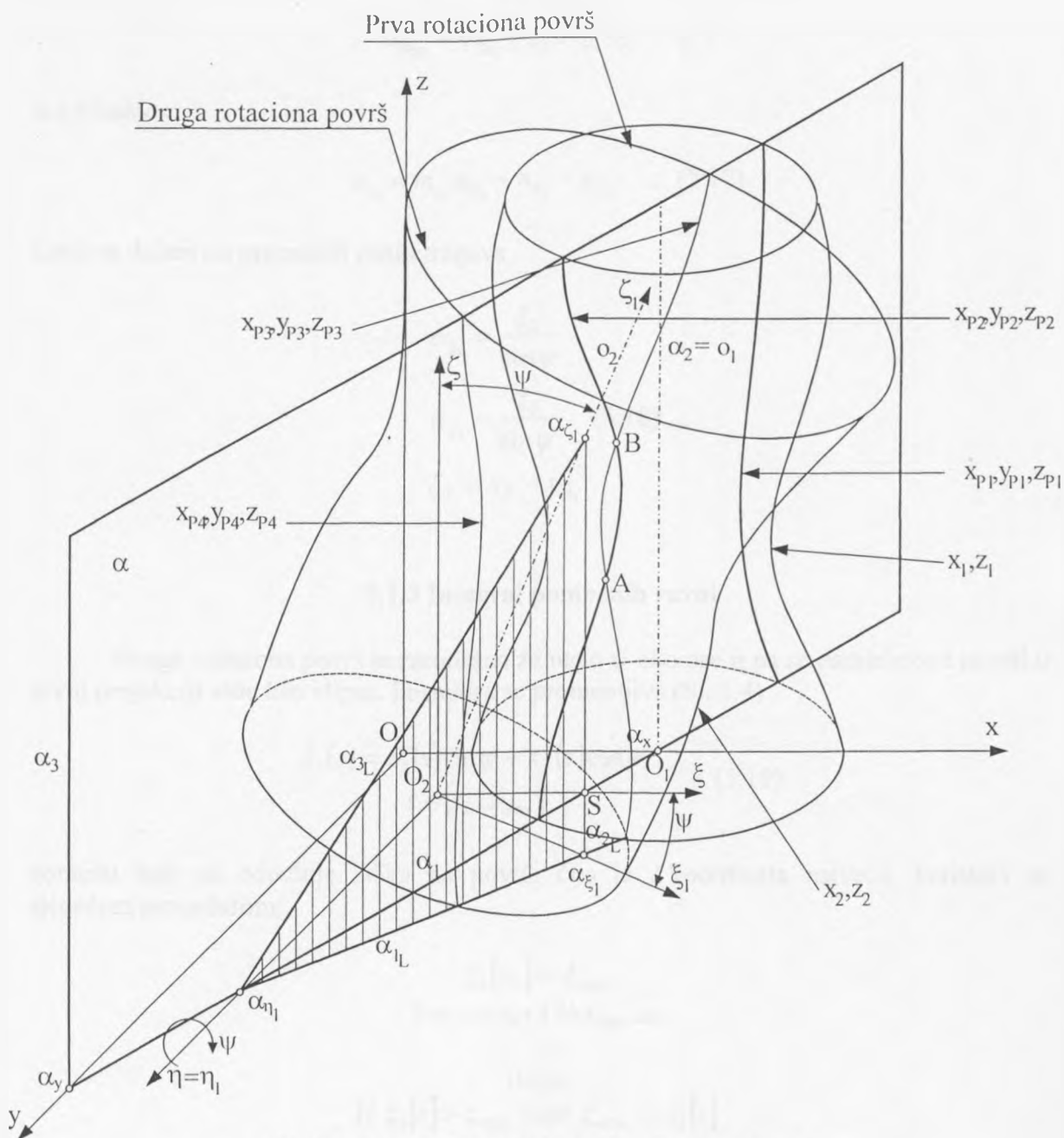
Osni tragovi (5.14) ravni α u lokalnom koordinatnom sistemu određuju se kao prodori koordinatnih osa tog sistema kroz datu ravan. Prve projekcije osa ξ_1 i ζ_1 se poklapaju sa osom ξ , jer je ravan π koju čine ose ξ, ζ, ξ_1 i ζ_1 vertikalna, a prodori osa ξ_1 i ζ_1 kroz ravan α se nalaze na pravoj koja je presečnica ravni α i π . Ova presečnica je vertikalna prava, čija se prva projekcija poklapa sa tačkom S koja se nalazi u preseku prvih tragova ravni α i

$\pi (\pi_1 = \xi)$. Povlačenjem vertikalne spone do preseka sa osama ξ_1 i ζ_1 određuju se prodori ovih osa kroz ravan α . Tragovi ravni α u globalnom koordinatnom sistemu $Oxyz$ su označeni sa α_1, α_2 i α_3 , a u lokalnom $O_2\xi_1\eta_1\zeta_1$ sa α_{1L}, α_{2L} i α_{3L} . Jednačina prvog traga α_1 ravni α u globalnom sistemu je

$$y = m_{\alpha_1} x + n_{\alpha_1} \quad (5.15)$$

$$n_{\alpha_1} = \alpha_y$$

$$m_{\alpha_1} = -\frac{n_{\alpha_1}}{\alpha_x}$$



Sl. 5.3 Rotacione površi sa mimoilaznim osama

Koordinate tačke S su

$$\begin{aligned} S &= S(x_S; y_S) \\ x_S &= \frac{y_{O_2} - n_{\alpha_1}}{m_{\alpha_1}} \\ y_S &= y_{O_2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Na osnovu izloženog, u globalnom sistemu je

$$\alpha_{\eta_G} = \alpha_{\eta_G}(x_{O_2}; m_{\alpha_1} x_{O_2} + n_{\alpha_1})$$

a u lokalnom

$$\alpha_{\eta_1} = m_{\alpha_1} x_{O_2} + n_{\alpha_1} - y_{O_2} \quad (5.17)$$

Lako se dolazi do preostalih osnih tragova

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi_1} &= \frac{\xi_S}{\cos \psi} \\ \alpha_{\xi_2} &= \frac{\xi_S}{\sin \psi} \\ \xi_S &= x_S - x_{O_2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.1.3 Interval pomoćnih ravni

Druga rotaciona površ je zarotirana za ugao ψ oko ose η pa se paralele ove površi u prvoj projekciji vide kao elipse. Posmatra se promenljiva (Sl. 5.4)

$$\begin{aligned} \xi_1(s) &= z_2(s) \sin \psi + x_2(s) \cos \psi \\ s &\in [s_0, s_{\max}] \end{aligned} \quad (5.19)$$

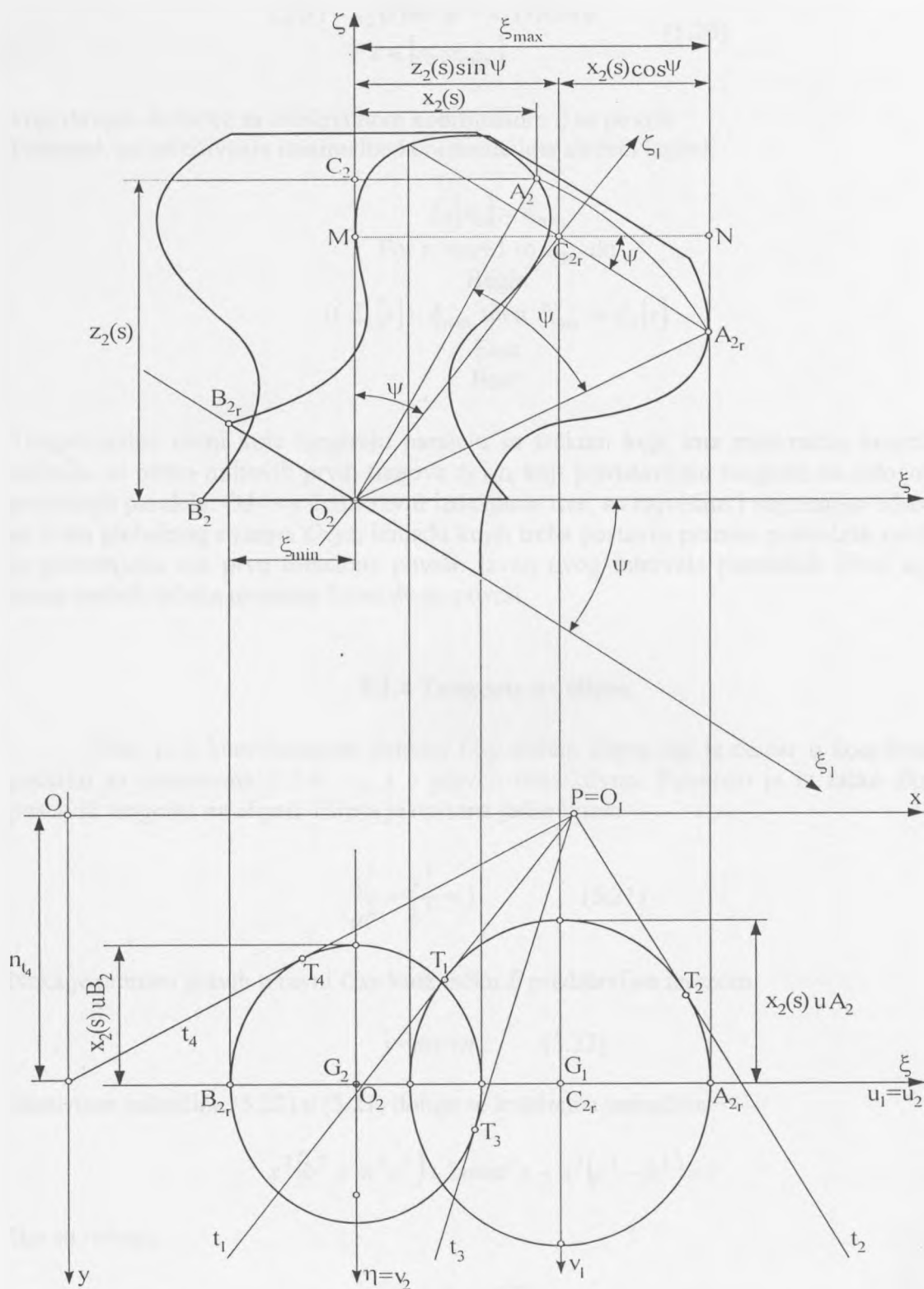
pomoću koje se određuje tačka na površi čija je ξ koordinata najveća, koristeći se sledećom procedurom:

```

\xi_1[s_0] := \xi_{\max}
For s := s_0 + 1 to s_{\max} do
  Begin
    If \xi_1[s] > \xi_{\max} then \xi_{\max} := \xi_1[s]
  Else
  End;

```

Sada je potrebno postaviti tangencijalne ravni na paralelu kojoj pripada tačka sa maksimalnom koordinatom ξ . U prvoj projekciji prvi tragovi t_1, t_2 ovih tangencijalnih



Sl. 5.4 Interval pomoćnih ravni

ravni su određeni kao tangente na elipsu, koja je ortogonalna projekcija posmatrane paralele. Uvodi se i druga promenljiva

$$\xi_2(s) = z_2(s)\sin\psi - x_2(s)\cos\psi \quad (5.20)$$

$$s \in [s_0, s_{\max}]$$

koja dovodi do tačke sa minimalnom koordinatom ξ na površi. Postupak za određivanje minimalne koordinate ima sledeći izgled:

```

 $\xi_2[s_0] := \xi_{\min}$ 
For  $s := s_0 + 1$  to  $s_{\max}$  do
  Begin
    If  $\xi_2[s] < \xi_{\min}$  then  $\xi_{\min} := \xi_2[s]$ 
  Else
  End;
```

Tangencijalne ravni koje tangiraju paralelu sa tačkom koja ima minimalnu koordinatu, definišu se preko njihovih prvih tragova t_3 i t_4 koji predstavljaju tangente na ortogonalnu projekciju paralele. Od ove četiri ravni izdvajamo dve, sa najvećim i najmanjim odsečkom na y osi globalnog sistema $Oxyz$, između kojih treba postaviti pramen pomoćnih ravni čija je pramenjača osa prve rotacione površi. Izvan ovog intervala pomoćnih ravni sigurno nema realnih tačaka presečne krive dveju površi.

5.1.4 Tangente na elipsu

Neka je u koordinatnom sistemu Oxy zadata elipsa čiji je centar u koordinatnom početku sa poluosama a i b u x i y pravcu respektivno. Potrebno je iz tačke $P(x_P, y_P)$ postaviti tangente na elipsu. Elipsa je opisana jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.21)$$

Neka je pramen pravih u ravni Oxy kroz tačku P predstavljen izrazom

$$y = mx + n \quad (5.22)$$

Zamenom jednačine (5.22) u (5.21) dobija se kvadratna jednačina

$$x^2(b^2 + m^2a^2) + 2mna^2x + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

čija su rešenja

$$x_{1,2} = \frac{-mna^2 \pm \sqrt{D_x}}{b^2 + m^2a^2} \quad (5.23)$$

gde je D_x diskriminanta oblika

$$D_x = a^2 b^2 (-n^2 + b^2 + m^2 a^2) \quad (5.24)$$

Kada su rešenja jednačine (5.23) realna i različita tada prava (5.22) seče elipsu (5.21) u dve tačke, a kada su rešenja realna i jednaka tada prava tangira elipsu. Da bi rešenja bila realna i jednaka diskriminanta (5.24) mora biti jednaka nuli i pošto su dužine poluosa elipse a i b veće od nule prava (5.22) će tangirati elipsu kada je

$$-n^2 + b^2 + m^2 a^2 = 0 \quad (5.25)$$

Iz uslova da prave sadrže tačku P dobija se odsečak pravih na y osi

$$n = y_p - m x_p \quad (5.26)$$

Zamenom (5.26) u (5.25) dobija se kvadratna jednačina po m promenljivoj

$$m^2 (a^2 - x_p^2) + 2x_p y_p m + b^2 - y_p^2 = 0$$

Rešenja ove jednačine su

$$m_{1,2} = \frac{-x_p y_p \pm \sqrt{D_m}}{a^2 - x_p^2} \quad (5.27)$$

$$D_m = a^2 y_p^2 + b^2 x_p^2 - a^2 b^2 \quad (5.28)$$

Kada je $D_m = 0$ tada je moguće povući samo jednu tangentu na elipsu iz zadate tačke, što je slučaj kada se tačka P nalazi na elipsi, odnosno

$$P(x_p, y_p) = P\left(x, \frac{\pm \sqrt{a^2 b^2 - x^2 b^2}}{a}\right) \Rightarrow D_m = 0 \quad (5.29)$$

Kada je $D_m < 0$ tada su rešenja jednačine (5.27) konjugovano kompleksna, a to je slučaj kada se tačka P nalazi unutar elipse, npr. neka se P poklapa sa koordinatnim početkom tada važi

$$P(x_p, y_p) = P(0,0) \Rightarrow D_m = -a^2 b^2 < 0 \quad (5.30)$$

Kada se tačka P nalazi izvan elipse tada je $D_m > 0$ i jednačina (5.27) ima dva realna i različita rešenja, odnosno postoje dve tangente na elipsu.

Procedura za određivanje koordinata dirališta T_1 i T_2 tangenata sastoji se od sledećih koraka:

- Izračunavanje vrednosti diskriminante D_m po jednačini (5.28);
- Određivanje koeficijenata pravaca m_1 i m_2 tangenata prema (5.27);
- Sračunavanje odsečaka n_1 i n_2 tangenata na y osi prema (5.26);

- Sračunavanje koordinata dirališta $T_1(x_{T_1}, y_{T_1})$, $T_2(x_{T_2}, y_{T_2})$ tangenata korišćenjem jednačina

$$\begin{aligned} x_{T_1} &= \frac{-m_1 n_1 a^2}{b^2 + m_1^2 a^2}; & y_{T_1} &= m_1 x_{T_1} + n_1 \\ x_{T_2} &= \frac{-m_2 n_2 a^2}{b^2 + m_2^2 a^2}; & y_{T_2} &= m_2 x_{T_2} + n_2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Na slici 5.4 elipse su u globalnom koordinatnom sistemu Oxy , a za njih su vezani lokalni sistemi $G_1 u_1 v_1$ i $G_2 u_2 v_2$. Centri elipsa su, u koordinatnom sistemu Oxy , predstavljeni izrazima

$$\begin{aligned} G_1(x_{G_1}, y_{G_1}), G_2(x_{G_2}, y_{G_2}) \\ x_{G_1} &= z_2(s_1) \sin \psi \\ x_{G_2} &= z_2(s_2) \sin \psi \\ s = s_1 &\Leftrightarrow \xi = \xi_{\max} \\ s = s_2 &\Leftrightarrow \xi = \xi_{\min} \\ y_{G_1} &= y_{G_2} = y_{O_2} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Tačka P je u lokalnim sistemima $G_1 u_1 v_1$ i $G_2 u_2 v_2$ opisana sa

$$\begin{aligned} u_{1P} &= x_1 - x_{G_1} \\ v_{1P} &= -y_{G_1} \\ u_{2P} &= x_1 - x_{G_2} \\ v_{2P} &= -y_{G_2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Koordinate dirališta T_1 i T_2 dobijaju se u koordinatnom sistemu $G_1 u_1 v_1$ korišćenjem jednačina

$$\begin{aligned} D_m &= a^2 v_{1P}^2 + b^2 u_{1P}^2 - a^2 b^2 \\ m_{1,2} &= \frac{-u_{1P} v_{1P} \pm \sqrt{D_m}}{a^2 - u_{1P}^2} \\ n_{1,2} &= v_{1P} - m_{1,2} u_{1P} \\ T_1(u_{1T_1}, v_{1T_1}), T_2(u_{1T_2}, v_{1T_2}) \\ u_{1T_1} &= \frac{-m_1 n_1 a^2}{b^2 + m_1^2 a^2}; & v_{1T_1} &= m_1 u_{1T_1} + n_1 \\ u_{1T_2} &= \frac{-m_2 n_2 a^2}{b^2 + m_2^2 a^2}; & v_{1T_2} &= m_2 u_{1T_2} + n_2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

U globalnom sistemu Oxy dirališta su opisana sa

$$\begin{aligned}x_{T_1} &= x_{G_1} + u_{1T_1} \\y_{T_1} &= y_{G_1} + v_{1T_1} \\x_{T_2} &= x_{G_1} + u_{1T_2} \\y_{T_2} &= y_{G_1} + v_{1T_2}\end{aligned}\quad (5.35)$$

Analogno se određuju i koordinate dirališta T_3 i T_4 na drugoj elipsi, u koordinatnom sistemu Oxy :

$$\begin{aligned}D_m &= a^2 v_{2P}^2 + b^2 u_{2P}^2 - a^2 b^2 \\m_{1,2} &= \frac{-u_{2P} v_{2P} \pm \sqrt{D_m}}{a^2 - u_{2P}^2} \\n_{1,2} &= v_{2P} - m_{1,2} u_{2P} \\T_3(u_{2T_3}, v_{2T_3}), T_4(u_{2T_4}, v_{2T_4}) & \\u_{2T_3} &= \frac{-m_1 n_1 a^2}{b^2 + m_1^2 a^2}; \quad v_{2T_3} = m_1 u_{2T_3} + n_1 \\u_{2T_4} &= \frac{-m_2 n_2 a^2}{b^2 + m_2^2 a^2}; \quad v_{2T_4} = m_2 u_{2T_4} + n_2\end{aligned}\quad (5.36)$$

$$\begin{aligned}x_{T_3} &= x_{G_2} + u_{2T_3} \\y_{T_3} &= y_{G_2} + v_{2T_3} \\x_{T_4} &= x_{G_2} + u_{2T_4} \\y_{T_4} &= y_{G_2} + v_{2T_4}\end{aligned}\quad (5.37)$$

Tangente t_i ($i=1, \dots, 4$), u ravni Oxy , određene su sa po dve tačke P i T_i , a ako ih predstavimo jednačinama

$$y = p_i x + r_i \quad (5.38)$$

tada su

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{y_{T_i}}{x_{T_i} - x_1} \\r_i &= -p_i x_1 \\i &= 1, \dots, 4\end{aligned}\quad (5.39)$$

Od četiri tangente potrebno je izdvojiti dve, sa najmanjim i najvećim odsečkom r na y osi, između kojih ćemo, prilikom određivanja preseka dveju površi, postavljati pomoćne ravni.

5.2 RAVAN PRESEK ROTACIONE POVRŠI

Rotaciona površ je data svojom vertikalnom osom i meridijanom u frontalnoj ravni (Sl. 5.5). Osa o sadrži tačku $O_1(x_1, y_1, 0)$, a meridijan je definisan jednačinom $z = f(x)$. Površ je presečena sa ravni α , koja je zadata svojim osnim tragovima $\alpha(\alpha_x, \alpha_y, \infty)$.

Vertikalna osa o se u drugoj projekciji vidi u pravoj veličini, a u prvoj projekciji kao tačka. Ravan α se u prvoj projekciji vidi kao linija koja se poklapa sa njenim prvim tragom α_1 . Presečne tačke rotacione površi sa ravni α mogu se odrediti korišćenjem horizontalnih pomoćnih ravni. Horizontalna ravan β na visini z_A seče rotacionu površ po krugu (paraleli površi) poluprečnika r_A . Presečna kriva se u prvoj projekciji vidi kao duž, a njene tačke se prebacuju u drugu projekciju pomoću paralela rotacione površi. Postavljanjem horizontalnih pomoćnih ravni po celoj visini površi i određivanjem presečnih tačaka za svaku pomoćnu ravan, dobija se presečna kriva površi i ravni α kao skup svih presečnih tačaka u horizontalnim pomoćnim ravnima. Očigledno je da tačnost u crtanju presečne krive zavisi od broja horizontalnih pomoćnih ravni što naravno ne predstavlja problem kada se ovakav postupak izvodi uz pomoć računara.

Svaka tačka $A''(x_A, z_A)$ sa meridijana, rotacijom oko ose o po krugu poluprečnika $r_A = x_A - x_1$ dovodi do osno simetrične tačke $A_1'(x_{A_1}, z_A)$ sa koordinatom

$$x_{A_1} = 2x_1 - x_A \quad (5.40)$$

Prvi trag α_1 ravni α može se predstaviti sledećim izrazom

$$\begin{aligned} y &= a_{\alpha_1} x + b_{\alpha_1} \\ a_{\alpha_1} &= -\frac{\alpha_y}{\alpha_x} \\ b_{\alpha_1} &= \alpha_y \end{aligned} \quad (5.41)$$

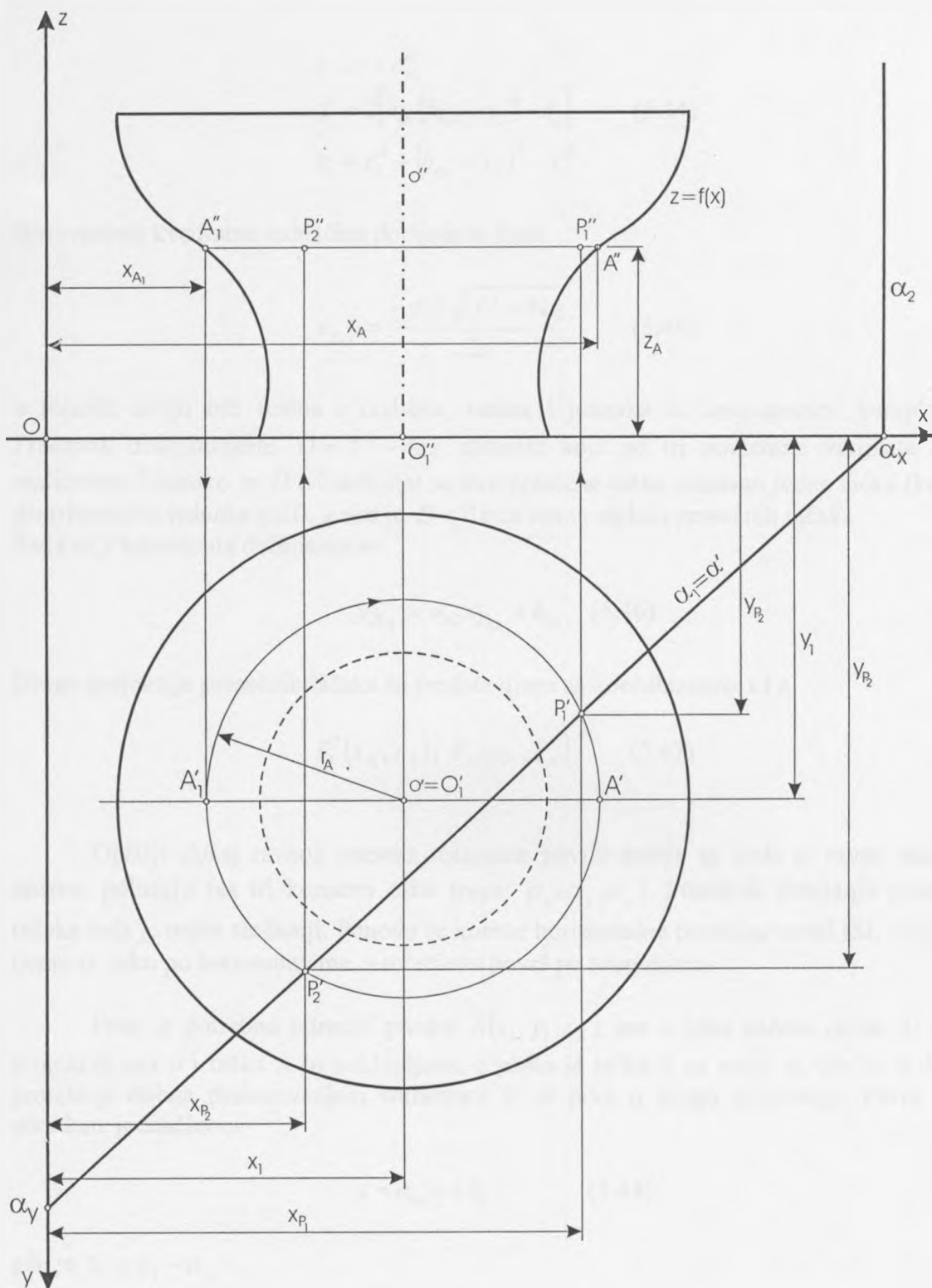
Tačke P_1, P_2 presečne krive, koje se nalaze na visini z_A tačke A , određuju se prvo u prvoj ortogonalnoj projekciji u preseku kruga poluprečnika r_A sa prvim tragom posmatrane ravni. Zamenom jednačine prvog traga u jednačinu kruga

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_A^2 \quad (5.42)$$

dobija se kvadratna jednačina oblika

$$ex^2 + fx + g = 0 \quad (5.43)$$

gde su vrednosti koeficijenata e, f i g



Sl. 5.5 Specijalan slučaj ravnog preseka rotacione površi

$$\begin{aligned}
 e &= 1 + a_{\alpha_1}^2 \\
 f &= 2[a_{\alpha_1}(b_{\alpha_1} - y_1) - x_1] \\
 g &= x_1^2 + (b_{\alpha_1} - y_1)^2 - r_A^2
 \end{aligned} \quad (5.44)$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijaju se izraz

$$x_{P_{1,2}} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4eg}}{2e} \quad (5.45)$$

a rešenja mogu biti realna i različita, realna i jednaka ili konjugovano kompleksna. Predznak diskriminante $D = f^2 - 4eg$ definiše koja od tri pomenute varijante će se realizovati. Ukoliko je $D \geq 0$ dobijaju se dve presečne tačke odnosno jedna tačka (kada je diskriminanta jednaka nuli), a ako je $D < 0$ tada nema realnih presečnih tačaka. Sada su y koordinate definisane sa

$$y_{P_{1,2}} = a_{\alpha_1} x_{P_{1,2}} + b_{\alpha_1} \quad (5.46)$$

Druge projekcije presečnih tačaka su predstavljene sa koordinatama x i z .

$$P_1''(x_{P_1}, z_A); P_2''(x_{P_2}, z_A) \quad (5.47)$$

Opštiji slučaj ravnog preseka rotacione površi dobija se kada je ravan zadata u opštem položaju (sa tri konačna osna traga: $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$). Postupak dobijanja presečnih tačaka tada je nešto složeniji. Ponovo se koriste horizontalne pomoćne ravni (Sl. 5.6), koje ravan α seku po horizontalama, a rotacionu površ po krugovima.

Prvo je potrebno odrediti prodor $S(x_1, y_1, z_S)$ ose o kroz zadatu ravan. U prvoj projekciji osa o i tačka S su poklopljene, a pošto je tačka S na ravni α , ona se u drugoj projekciji dobija prebacivanjem sutražnice h' iz prve u drugu projekciju. Prava h' je određena jednačinom

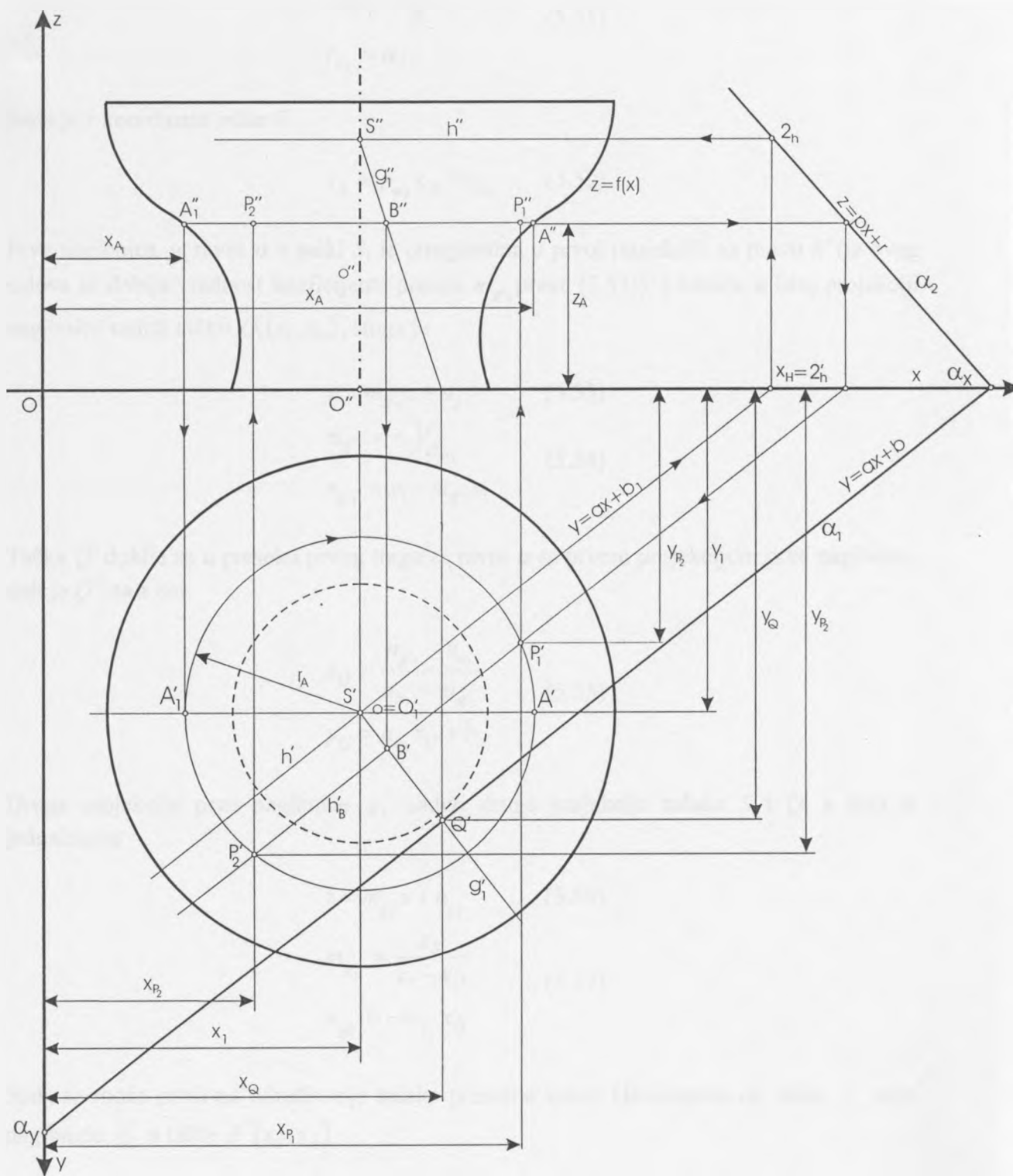
$$y = a_{\alpha_1} x + b_1 \quad (5.48)$$

gde je $b_1 = y_1 - a_{\alpha_1} x_1$.

U preseku h' sa x osom dobija se tačka $2_h'(x_{II}, 0)$ sa x koordinatom

$$x_{II} = -\frac{b_1}{a_{\alpha_1}} \quad (5.49)$$

Drugi trag α_2 ravni α u sistemu Oxz je prikazan sa



Sl. 5.6 Opšti slučaj ravnog preseka rotacione površi

$$z = p_{\alpha_2} x + r_{\alpha_2} \quad (5.50)$$

$$p_{\alpha_2} = -\frac{\alpha_z}{\alpha_x} \quad (5.51)$$

$$r_{\alpha_2} = \alpha_z$$

Sada je z koordinata tačke S

$$z_S = p_{\alpha_2} x_H + r_{\alpha_2} \quad (5.52)$$

Prva nagibnica g_1 ravni α u tački S , je ortogonalna u prvoj projekciji na pravu h' (iz ovog uslova se dobija vrednost koeficijenta pravca $m_{g'_1}$ prave (5.53)), a takođe u istoj projekciji nagibnica sadrži tačku $O_1(x_1, y_1)$, stoga je

$$y = m_{g'_1} x + n_{g'_1} \quad (5.53)$$

$$m_{g'_1} = -\frac{1}{a_{\alpha_1}} \quad (5.54)$$

$$n_{g'_1} = y_1 - m_{g'_1} x_1$$

Tačka Q' dobija se u preseku prvog traga α_1 ravni α sa prvom projekcijom prve nagibnice, dok je Q'' na x osi:

$$x_Q = \frac{n_{g'_1} - b_{\alpha_1}}{a_{\alpha_1} - m_{g'_1}} \quad (5.55)$$

$$y_Q = a_{\alpha_1} x_Q + b_{\alpha_1}$$

Druga projekcija prve nagibnice g_1^* sadrži druge projekcije tačaka S i Q , a data je jednačinom

$$z = m_{g_1^*} x + n_{g_1^*} \quad (5.56)$$

$$m_{g_1^*} = \frac{z_S}{x_1 - x_Q} \quad (5.57)$$

$$n_{g_1^*} = -m_{g_1^*} x_Q$$

Sada se može preći na određivanje tačaka presečne krive. Horizontala na visini z_A seče nagibnicu g_1^* u tački $B^*(x_B, z_B)$

$$x_B = \frac{z_A - n_{g_1^*}}{m_{g_1^*}} \quad (5.58)$$

Tačka $B(x_B, y_B)$ pripada nagibnici g_1

$$y_B = m_{g_1} x_B + n_{g_1} \quad (5.59)$$

Kroz B' postavljena je sutažnica h_B sa jednačinom

$$y = a_{\alpha_1} x + s \quad (5.60)$$

$$s = y_B - a_{\alpha_1} x_B \quad (5.61)$$

Zamenom jednačine sutažnice h_B u jednačinu paralele tačke A dobija se izraz

$$e_1 x^2 + f_1 x + g_1 = 0 \quad (5.62)$$

$$e_1 = 1 + a_{\alpha_1}^2$$

$$f_1 = 2[a_{\alpha_1}(s - y_1) - x_1] \quad (5.63)$$

$$g_1 = x_1^2 + (s - y_1)^2 - r_A^2$$

Presečne tačke za paralelu tačke A date su jednačinama

$$x_{P_{1,2}} = \frac{-f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - 4e_1 g_1}}{2e_1} \quad (5.64)$$

$$y_{P_{1,2}} = a_{\alpha_1} x_{P_{1,2}} + s \quad (5.65)$$

$$P_1^*(x_{P_1}, z_A); P_2^*(x_{P_2}, z_A) \quad (5.66)$$

6

POMOČNE LOPTE

6.1 POMOĆNE LOPTE

Metod pomoćnih lopti se u deskriptivnoj geometriji koristi kod određivanja preseka dveju rotacionih površi čije se ose seku ([Dov94], [Ana84]). Naime, ako se u tačku preseka osa rotacija dveju površi postavi centar svih pomoćnih lopti, tada svaka pomoćna lopta u opštem slučaju seče svaku rotacionu površ po k krugova-paralela čije su ravni upravne na osu rotacione površi ($k=2m$, jer je krug drugog reda a kriva koja obrazuje rotacionu površ je reda m). Za slučaj kada lopta seče obe površi po dvema paralelama, parovi paralela se seku u najviše 8 tačaka i te presečne tačke paralela su presečne tačke prostorne presečne krive dveju površi za posmatranu pomoćnu loptu. Menjanjem prečnika pomoćnih lopti dobijaju se nove paralele i u njihovom preseku nove tačke prostorne presečne krive. Spajanjem presečnih tačaka polazeći od najmanje ka najvećoj pomoćnoj lopti (ili obrnuto) dobija se presečna kriva.

Prikazanu ideju moguće je matematički formulirati i oformiti postupak u kojem neće biti važno kojim se redosledom spajaju presečne tačke za sve pomoćne lopte, jer će se procedura realizovati pomoću računara, pa će se, sa dovoljno velikim brojem pomoćnih lopti, problem spajanja presečnih tačaka izbeći. Takođe, potrebno je ispitati alternativne postupke za određivanje preseka rotacionih površi čije se ose ne seku, već su paralelne (seku se u beskonačnosti) ili se mimoilaze.

6.2 KORIŠĆENJE POMOĆNIH LOPTI KADA SE OSE ROTACIONIH POVRŠI SEKU

Svaka rotaciona površ je zadata osom rotacije i koplanarnom jednom granom meridijana, stoga je potrebno odrediti osno simetrični meridijan obe površi. Kod formiranja postupka za dobijanje osno simetričnog meridijana moguće je pratiti savremena iskustva iz kompjuterske grafike i svaki složen zadatak prikazati kao skup elementarnih.

6.2.1 Osna simetrija

Zadata je jedna grana meridijana u likoravni Oxz i osa rotacione površi u istoj ravni. Potrebno je odrediti jednačinu osno simetričnog meridijana zadatom meridijanu u odnosu na osu rotacije. Do rešenja ovog problema dolazi se kombinovanjem nekoliko ravanskih transformacija (Sl. 6.1). Redosled poteza je sledeći:

1. Translacija meridijana i ose do položaja u kojem osa rotacije sadrži koordinatni početak. Ova translacija može se obaviti u proizvoljnom smeru, međutim najpraktičnije je da se realizuje u pravcu jedne od koordinatnih osa (x ili z). U ovoj analizi translirano je duž z ose. Meridijan i osu rotacije možemo zajedno nazvati objekat;
2. Rotacija objekta dok se osa rotacije ne poklopi sa jednom osom koordinatnog sistema. U ovom slučaju postoje dve mogućnosti, da se osa rotacije poklopi sa x ili z osom koordinatnog sistema. Jednačine koje su prikazane u tekstu koji sledi odnose se na poklapanje ose rotacije sa x osom;
3. Transformacija meridijana osnom simetrijom, ako je osa simetrije x osa;

4. Rotacija objekta za ugao koji je ostvaren rotacijom u drugom potezu, ali u suprotnom smeru;
5. Translacija objekta duž z ose, za istu veličinu kao u prvom potezu, ali u suprotnom smeru.

Obrasci za navedene dvodimenzionalne transformacije su sledeći:

1. Prvi potez je translacija objekta duž z ose za veličinu odsečka n koji osa rotacije $z=mx+n$ odseca na z osi (Sl. 6.1b).

$$\begin{bmatrix} x^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z-n & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

2. Sledeći korak je rotacija objekta (Sl. 6.1c) dok se osa rotacije ne poklopi sa x osom za ugao $\theta = \arctg \left| \frac{n}{x_0} \right|$, gde je $x_0 = x\{y=0\}$. Matrica transformacije ima sledeći oblik

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

3. Zatim na red dolazi osna simetrija oko x ose (Sl. 6.1d)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

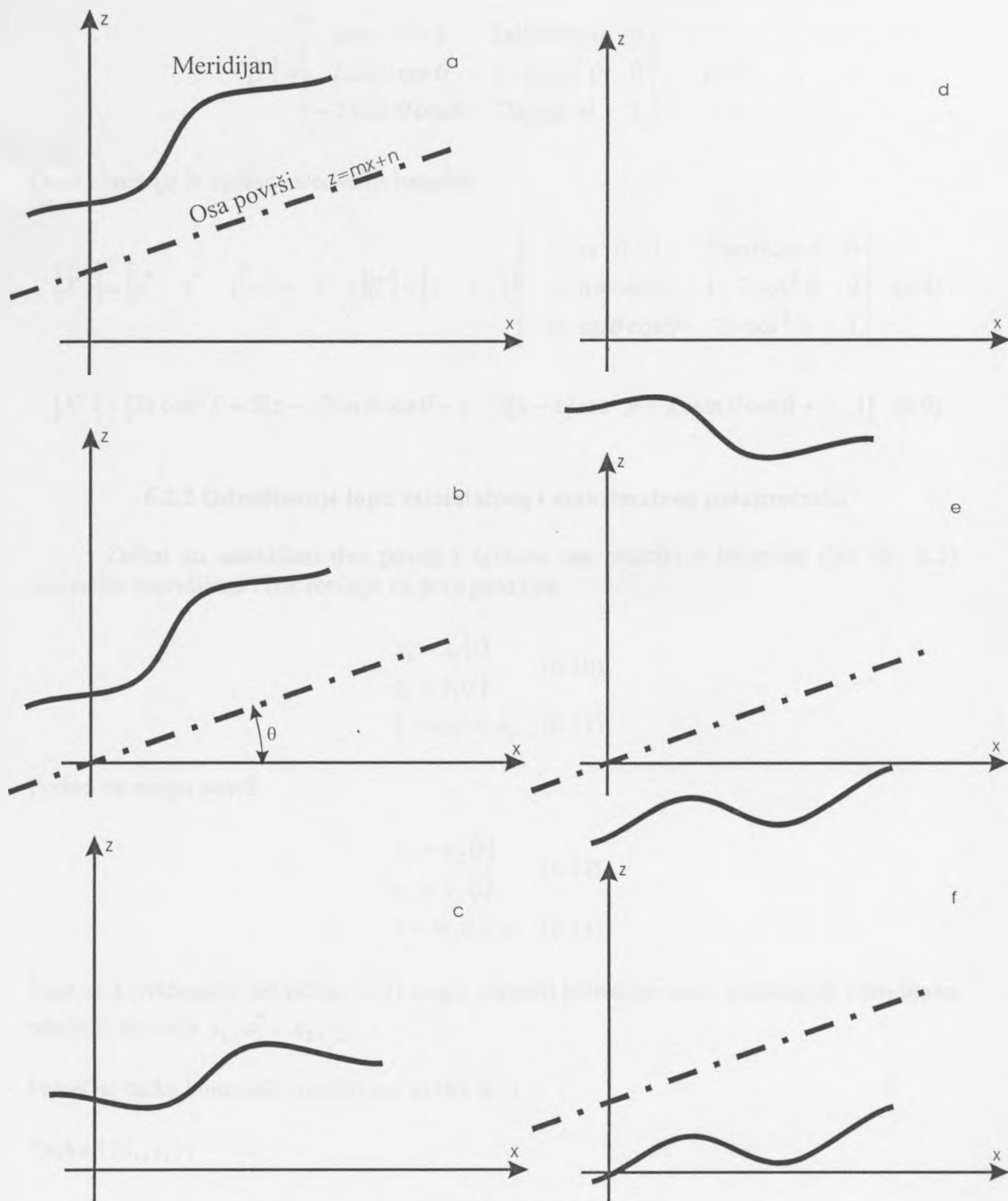
4. Rotacija oko koordinatnog početka (Sl. 6.1e)

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

5. Translacija (Sl. 6.1f)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Oсна simetrija meridijana oko ose rotacije dobija se kao proizvod svih navedenih transformacija.



Sl. 6.1 Osa simetrija

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & n & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta - 1 & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 1 - 2 \cos^2 \theta & 0 \\ -2n \sin \theta \cos \theta & 2n \cos^2 \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Oсна симетрија је описана следећим изразом

$$[X^*] = \begin{bmatrix} x^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z & 1 \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} x & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta - 1 & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 1 - 2 \cos^2 \theta & 0 \\ -2n \sin \theta \cos \theta & 2n \cos^2 \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$[X^*] = \begin{bmatrix} 2x \cos^2 \theta + 2(z - n) \sin \theta \cos \theta - x & 2(n - z) \cos^2 \theta + 2x \sin \theta \cos \theta + z & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

6.2.2 Određivanje lopti minimalnog i maksimalnog poluprečnika

Zadati su meridijani dve površi i njihove ose rotacija u likoravni Oxz (Sl. 6.2). Jednačine meridijana i ose rotacije za prvu površ su

$$x_1 = x_1(t) \quad (6.10)$$

$$z_1 = z_1(t)$$

$$z = m_1 x + n_1 \quad (6.11)$$

Podaci za drugu površ

$$x_2 = x_2(t) \quad (6.12)$$

$$z_2 = z_2(t)$$

$$z = m_2 x + n_2 \quad (6.13)$$

Sada se korišćenjem jednačine (6.9) mogu odrediti jednačine osno simetričnih meridijana, odnosno pronaći x_1^*, z_1^* i x_2^*, z_2^* .

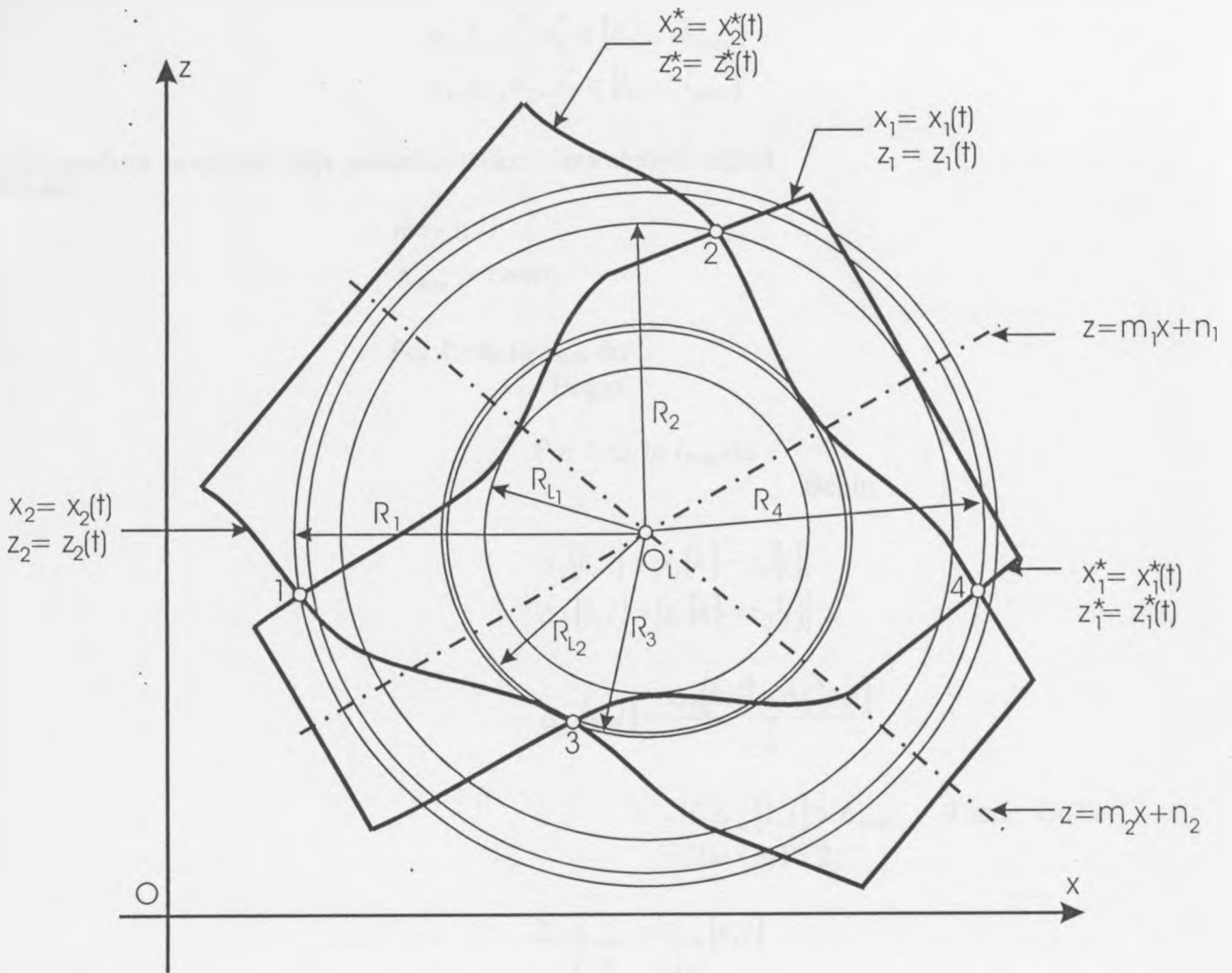
Presečne tačke konturnih meridijana su (Sl. 6.2)

Tačka 1 (x_1, z_1):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(t) \\ z_1 = z_1(t) \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_2(t) \\ z_2 = z_2(t) \end{array} \right\} \quad (6.14)$$

Tačka 2 (x_2, z_2):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(t) \\ z_1 = z_1(t) \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{l} x_2^* = x_2^*(t) \\ z_2^* = z_2^*(t) \end{array} \right\} \quad (6.15)$$



Sl. 6.2 Rotacione površi

Tačka 3 (x_3, z_3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = x_1^*(t) \\ z_1^* = z_1^*(t) \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_2(t) \\ z_2 = z_2(t) \end{array} \right\} \quad (6.16)$$

Tačka 4 (x_4, z_4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = x_1^*(t) \\ z_1^* = z_1^*(t) \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{l} x_2^* = x_2^*(t) \\ z_2^* = z_2^*(t) \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

6.2.2.1 Procedura za određivanje presečnih tačaka meridijana

Meridijani dveju površi su zadati parametarskim jednačinama

$$\begin{aligned}x_1, z_1, x_1^*, z_1^* &\in [k_0, \dots, k_{\max}] \\x_2, z_2, x_2^*, z_2^* &\in [l_0, \dots, l_{\max}]\end{aligned}$$

Procedura za određivanje presečne tačke 1 ima sledeći izgled

```

m := 1;
Δmin := const;

For k:=k0 to kmax do
    Begin
        For l:=l0 to lmax do
            Begin
                Δ1[k,l] = |x1[k] - x2[l]|
                Δ2[k,l] = |z1[k] - z2[l]|

                Δsr[k,l] =  $\frac{\Delta_1[k,l] + \Delta_2[k,l]}{2}$ 

                If Δsr[k,l] > Δmin Then GoTo 1
                Else GoTo 2;

                2: Δmin := Δsr[k,l]
                xp[m] := x1[k];
                zp[m] := z1[k];
                m:=m+1;
            1:End;
        End;
    End;

```

Presečna tačka dveju osa dobija se rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned}z &= m_1 x + n_1 \\z &= m_2 x + n_2\end{aligned}$$

Tačka $O_L(x_L, z_L)$

$$\begin{aligned}x_L &= \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} \\z_L &= \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_1 - m_2}\end{aligned} \quad (6.18)$$

Poluprečnici lopti (u ravni Oxz to su krugovi) sa centrom u tački O_L do tačaka 1, ..., 4 su definisani izrazom

$$R_i = \sqrt{(x_L - x_i)^2 + (z_L - z_i)^2} \quad (6.19)$$

$$i = 1, \dots, 4$$

Od posmatrana četiri poluprečnika potrebno je izdvojiti maksimalni, što se postiže korišćenjem petlje u sledećem obliku

Maksimalni poluprečnik:

$$\begin{aligned}
 & R_{\max} := R[1] \\
 & \text{for } i=2 \text{ to } 4 \text{ do} \\
 & \quad \text{Begin} \\
 & \quad \text{if } R[i] > R_{\max} \text{ then } R_{\max} = R[i] \\
 & \quad \quad \text{else} \\
 & \quad \quad \text{End;}
 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Sada je potrebno odrediti poluprečnike lopti koje su centra O_L , a koje dodiruju posmatrane rotacione površi. Da bi smo ovaj cilj ostvarili zgodnije je preći na lokalni koordinatni sistem, stoga se prvo mora analizirati postupak za transformaciju koordinatnog sistema.

6.2.3 Transformacija koordinatnog sistema

Potrebno je uspostaviti vezu između globalnog koordinatnog sistema Oxz i lokalnog Cuv (Sl. 6.3). Osa v lokalnog koordinatnog sistema poklapa se sa osom rotacije $z = mx + n$, a pošto je osa u upravna na osu v , jednačina prave koja se poklapa sa osom u je

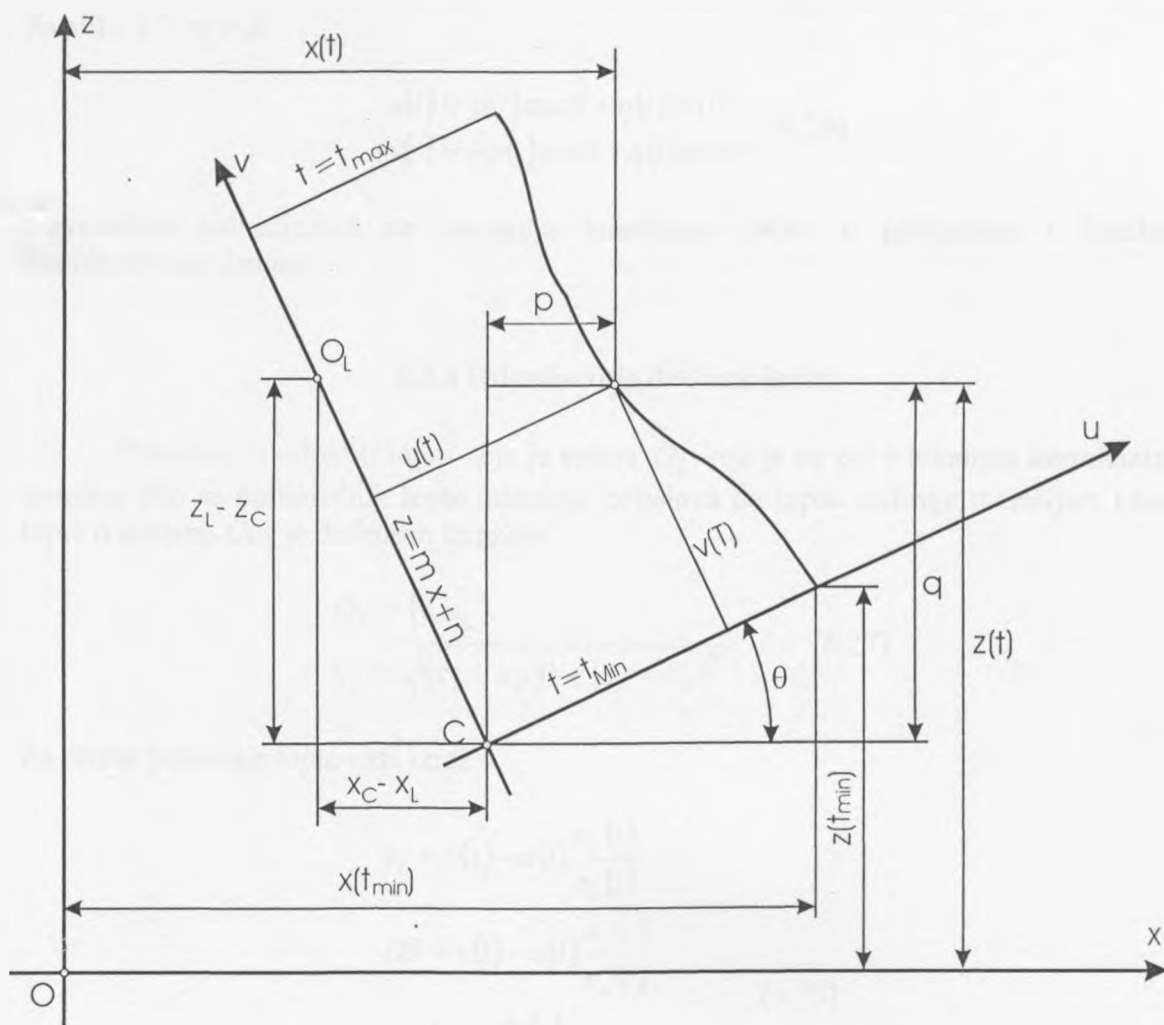
$$z = -\frac{1}{m}x + k \quad (6.21)$$

Na osi u nalazi se jedna tačka meridijana sa koordinatama $(x(t_{\min}), z(t_{\min}))$ u globalnom sistemu Oxz . Zamenom koordinata ove tačke u prethodnu jednačinu dobija se

$$k = z(t_{\min}) + \frac{1}{m}x(t_{\min}) \quad (6.22)$$

Tačka C je koordinatni početak sistema Cuv , a njene koordinate u sistemu Oxz dobijaju se kombinovanjem jednačina

$$\begin{aligned}
 z &= mx + n \\
 z &= -\frac{1}{m}x + k
 \end{aligned}$$



Sl. 6.3 Transformacija koordinatnog sistema

Tačka $C(x_C, z_C)$

$$x_C = \frac{k-n}{m^2+1} m \quad (6.23)$$

$$y_C = mx_C + n$$

Lokalni sistem Cuv može se dobiti translacijom i rotacijom sistema Oxz . Prvo se sistem Oxz translira za vektor OC , a zatim se rotira za ugao

$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (6.24)$$

$$\alpha = \arctg(m)$$

Uvedimo u razmatranje dve nove parametarske funkcije

$$p(t) = x(t) - x_C \quad (6.25)$$

$$q(t) = z(t) - z_C$$

Sa slike 6.3 se vidi

$$\begin{aligned} u(t) &= p(t)\cos\theta + q(t)\sin\theta \\ v(t) &= -p(t)\sin\theta + q(t)\cos\theta \end{aligned} \quad (6.26)$$

Navedenim jednačinama se povezuju koordinate tačke u globalnom i lokalnom koordinatnom sistemu.

6.2.4 Određivanje dodirne lopte

Potrebno je odrediti loptu koja je centra O_L koji je na osi v lokalnog koordinatnog sistema, ako se poluprečnik lopte određuje iz uslova da lopta dodiruje meridijan. Centar lopte u sistemu Cuv je definisan izrazom

$$\begin{aligned} O_L &= (0, v_L) \\ v_L &= \sqrt{(x_L - x_C)^2 + (z_L - z_C)^2} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Za centar pomoćne lopte važi izraz

$$\begin{aligned} v_L &= v(t) - u(t) \frac{n_v(t)}{n_u(t)} \\ DS &= v(t) - u(t) \frac{n_v(t)}{n_u(t)} \\ n_u(t) &= -\frac{dv(t)}{dt} \\ n_v(t) &= \frac{du(t)}{dt} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Kako je $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, a v_L je poznato, tada se do poluprečnika pomoćne lopte koja dodiruje meridijan i koja je centra O_L , dolazi zamenom vrednosti za t (od t_{\min} i ukoliko ima potrebe sve do t_{\max}) u jednačine (6.28) koje predstavljaju vrednosti komponenta normale $n_u(t), n_v(t)$, a zatim se sračunava desna strana jednačine DS i ukoliko je $v_L = DS$, tada je određen parametar t za traženu loptu. Neka je vrednost parametra t za dodirnu loptu označena sa t_L . Sada je

$$R_L = \sqrt{u(t_L)^2 + (v_L - v(t_L))^2} \quad (6.29)$$

Za jednu rotacionu površ (odnosno jedan meridijan i osu rotacije) dobija se poluprečnik dodirne lopte R_{L1} , a za drugu površ pridružen je odgovarajući poluprečnik R_{L2} .

Minimalni poluprečnik koji dodiruje jednu loptu a seče drugu je dat izrazom

$$R_{\min} = \max(R_{L1}; R_{L2}) \quad (6.30)$$

6.2.5 Presek rotacionih površi sa pomoćnom loptom

Rotacione površi i lopta se projiciraju u ravan Oxz , odnosno prostorni problem preseka površi se tretira kao ravanski problem. Lopta centra $O_L(0,0,z_L)$ (Sl. 6.4), poluprečnika R se u ravni Oxz vidi kao veliki loptin frontalni krug čija je jednačina

$$x^2 + (z - z_L)^2 = R^2 \quad (6.31)$$

a odavde je

$$x = \pm \sqrt{R^2 - (z - z_L)^2} \quad (6.32)$$

Krug seče zadati meridijan x_1, z_1 prve površi u tačkama P_1 i P_2 , a meridijan x_2, z_2 druge površi u tačkama P_3 i P_4 , kada su meridijani ravne krive drugog reda. Sve tačke P_1, \dots, P_4 određuju se pomoću jedinstvene procedure, koja za tačku P_1 ima sledeći izgled:

```

i:=1;
t:=t0;
3:   z[t]:=z1[t];
      x[t]=√(R² - (z1[t] - zL)²)

```

```

If |x[t] - x1[t]| < ε then GoTo 1

```

```

Else GoTo 2;

```

```

2: t:=t+1;

```

```

If t > tmax Then GoTo 4

```

```

Else GoTo3;

```

```

1: xP[i]:=x1[t];

```

```

zP[i]:=z1[t]; i:=i+1;

```

```

GoTo2;

```

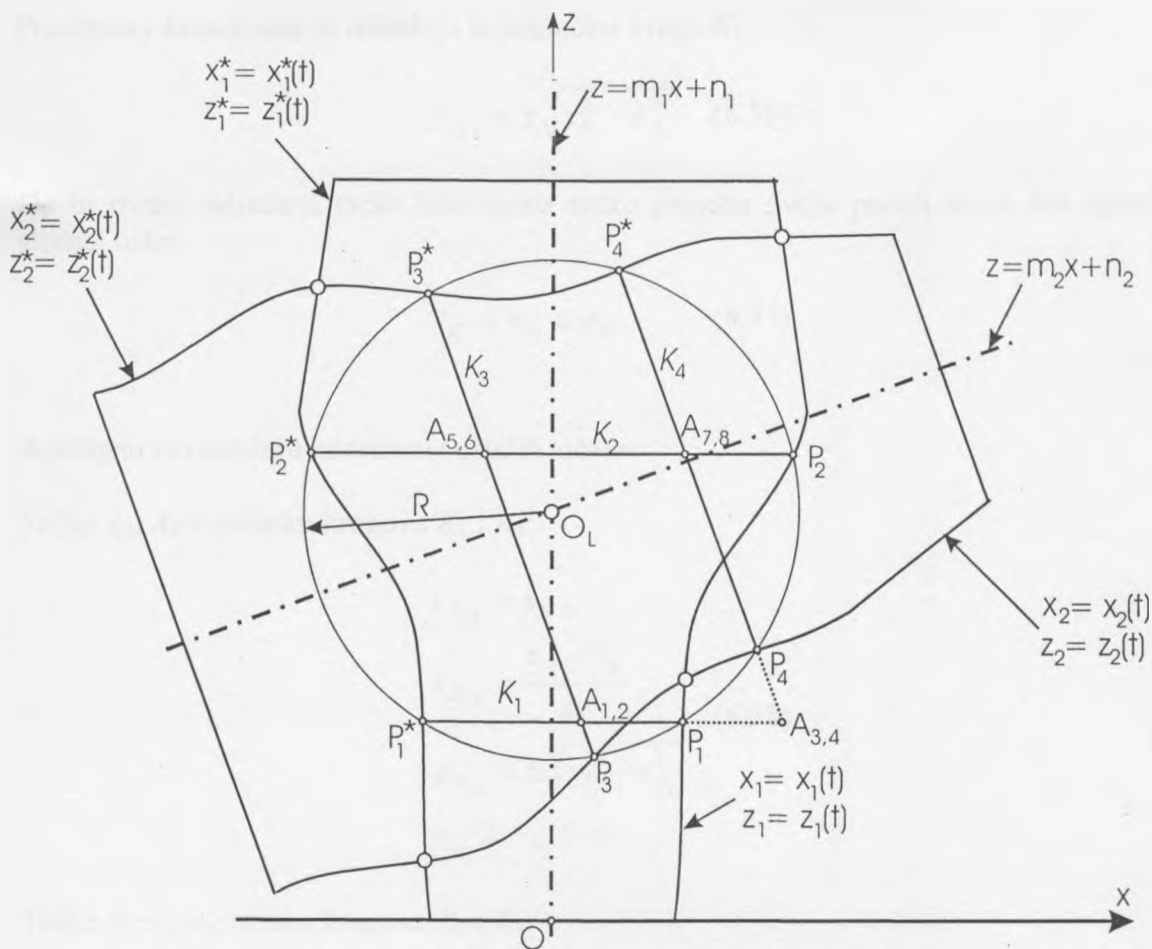
```

4:End;

```

Simetrične tačke $P_1^*(x_{P_1^*}, z_{P_1^*}), \dots, P_4^*(x_{P_4^*}, z_{P_4^*})$ dobijaju se osnosimetričnim preslikavanjem tačaka P_1, \dots, P_4 u odnosu na odgovarajuću osu rotacione površi. Krugovi K_1 i K_2 se u ravni Oxz vide kao prave čije su jednačine

$$z = z_{P_1} \quad \text{i} \quad z = z_{P_2} \quad (6.33)$$



Sl. 6.4 Proizvoljna pomoćna lopta

Krugovi K_3 i K_4 , preseka lopte sa drugom rotacionom površi, se u ravni Oxz vide kao linije koje su zadate sa po dve tačke P_3, P_3^* i P_4, P_4^* .

Jednačine tih pravih su:

$$\begin{aligned}
 z &= a_3x + b_3 & z &= a_4x + b_4 \\
 a_3 &= -\frac{1}{m_2} & i & a_4 = -\frac{1}{m_2} & (6.34) \\
 b_3 &= z_{P_3} - a_3x_{P_3} & b_4 &= z_{P_4} - a_4x_{P_4}
 \end{aligned}$$

Presekom krugova K_1 i K_3 dobijaju se tačke A_1 i A_2 , pri čemu se x i z koordinate tačaka dobijaju presecanjem pravih koje se u ravni Oxz poklapaju sa datim krugovima:

$$\begin{aligned}
 z_{A_1} &= z_{A_2} = z_{P_1} \\
 x_{A_1} &= x_{A_2} = \frac{z_{A_1} - b_3}{a_3} & (6.35)
 \end{aligned}$$

Preostale y koordinate se određuju iz jednačine kruga K_1 :

$$y_{A_{1,2}} = \pm \sqrt{x_{P_1}^2 - x_{A_1}^2} \quad (6.36)$$

Da bi ovako određene tačke bile zaista tačke preseka dveju površi mora biti ispunjen sledeći uslov

$$x_{P_1}^* \leq x_{A_1} \leq x_{P_1} \quad (6.37)$$

Analogno se određuju koordinate ostalih tačaka:

Tačke A_3, A_4 u preseku krugova K_1 i K_4 :

$$\begin{aligned} z_{A_{3,4}} &= z_{P_1} \\ x_{A_{3,4}} &= \frac{z_{P_1} - b_4}{a_4} \\ y_{A_{3,4}} &= \pm \sqrt{x_{P_1}^2 - x_{A_3}^2} \\ x_{P_1}^* &\leq x_{A_3} \leq x_{P_1} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Tačke A_5, A_6 u preseku krugova K_2 i K_3 :

$$\begin{aligned} z_{A_{5,6}} &= z_{P_2} \\ x_{A_{5,6}} &= \frac{z_{P_2} - b_3}{a_3} \\ y_{A_{5,6}} &= \pm \sqrt{x_{P_2}^2 - x_{A_5}^2} \\ x_{P_2}^* &\leq x_{A_5} \leq x_{P_2} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Tačke A_7, A_8 u preseku krugova K_2 i K_4 :

$$\begin{aligned} z_{A_{7,8}} &= z_{P_2} \\ x_{A_{7,8}} &= \frac{z_{P_2} - b_4}{a_4} \\ y_{A_{7,8}} &= \pm \sqrt{x_{P_2}^2 - x_{A_7}^2} \\ x_{P_2}^* &\leq x_{A_7} \leq x_{P_2} \end{aligned} \quad (6.40)$$

6.3 OSE ROTACIONIH POVRŠI SU PARALELNE

Površni su zadate meridijanima i osama koji su u ravni Oxz , a osa jedne površi se poklapa sa z osom koordinatnog sistema. U ovom slučaju može se koristiti pramen pomoćnih ravni čija je pramenjača horizontalna prava u beskonačnosti, odnosno sve pomoćne ravni su paralelne sa horizontalnicom (ravan Oxy). Posmatra se presek rotacionih površi sa horizontalnom ravni koja je na visini $z=z_p[i]$. Ravan seče prvu površ po krugu $p_1[i]$ i drugu po paraleli $p_2[i]$

$$p_1[i]: x^2 + y^2 = R_1^2[i] \quad (6.41)$$

$$p_2[i]: (x - x_{O_2})^2 + y^2 = R_2^2[i] \quad (6.42)$$

gde su

$$\begin{aligned} R_1[i] &= x_1[i] \\ R_2[i] &= x_2[i] - x_{O_2} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Posmatrani krugovi se dodiruju ili seku ako je ispunjen uslov

$$R_1[i] + R_2[i] \geq x_{O_2} \quad (6.44)$$

Kada je prethodni uslov ispunjen tada se mogu odrediti dve nepoznate koordinate x i y presečnih tačaka dva horizontalna kruga

$$x_1[i] = x_2[i] = \frac{R_1^2[i] - R_2^2[i] + x_{O_2}^2}{2x_{O_2}} \quad (6.45)$$

$$y_{1,2}[i] = \pm \sqrt{R_1^2[i] - x_1^2[i]}$$

Presečne tačke su $K_1[i](x_1[i], y_1[i], z_p[i])$ i $K_2[i](x_2[i], y_2[i], z_p[i])$.

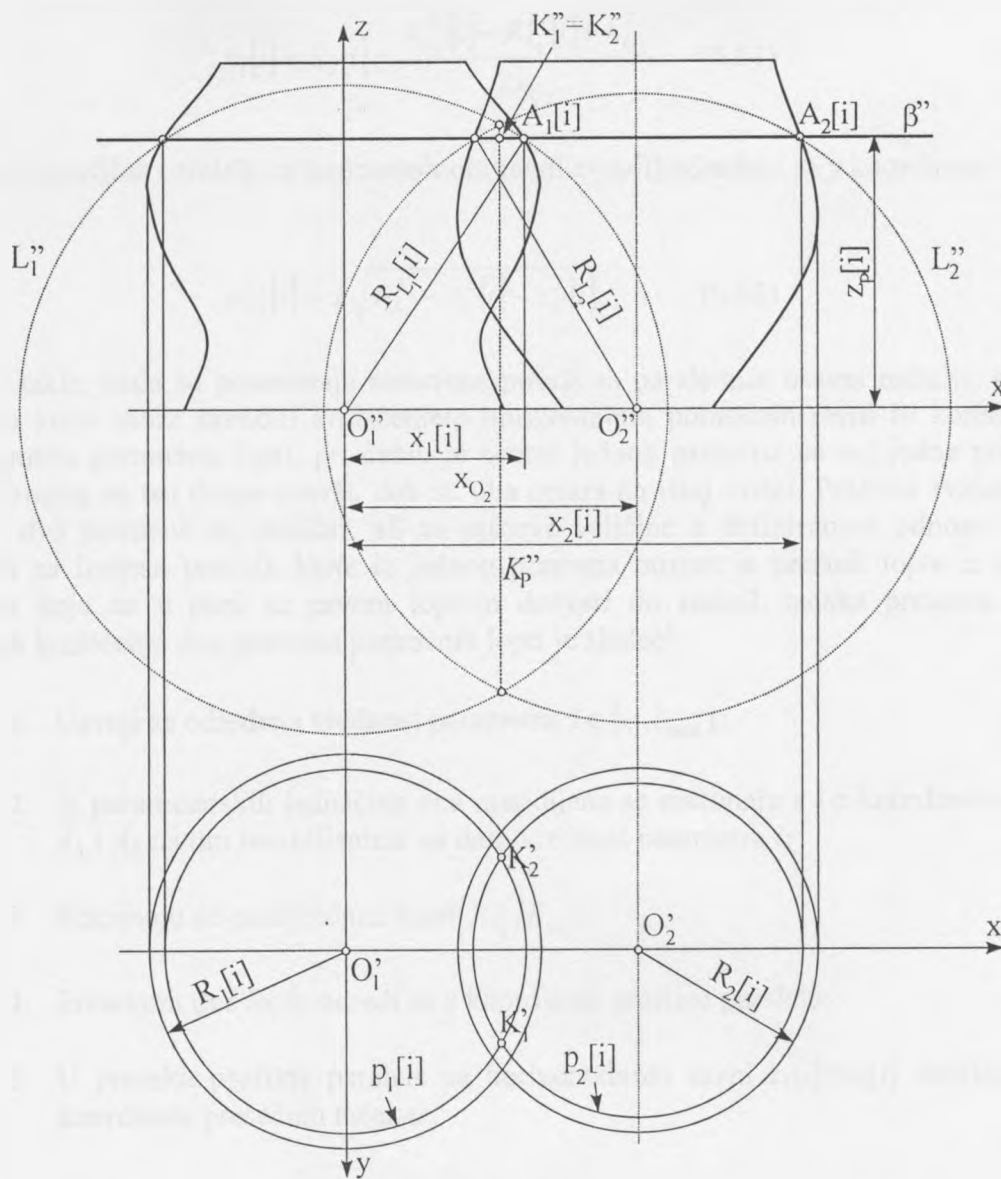
U ovom slučaju do istog rešenja može se doći korišćenjem dva pramena pomoćnih lopti, čiji se centri O_1 i O_2 nalaze respektivno na osama rotacionih površi i oni su na istoj z visini. Za posmatrane paralele na visini $z=z_p[i]$ poluprečnik lopte za prvu površ je

$$R_{L_1}^2[i] = R_1^2[i] + z_p^2[i] = x_1^2[i] + z_p^2[i] \quad (6.46)$$

Poluprečnik druge lopte je

$$R_{L_2}^2[i] = R_2^2[i] + z_p^2[i] = (x_2[i] - x_{O_2})^2 + z_p^2[i] \quad (6.47)$$

Iz poslednje dve jednačine se dobija relacija kojom je opisan odnos poluprečnika dve lopte iz različitih pramenova:



Sl. 6.5 Paralelne ose

$$R_{L_1}^2 = R_{L_2}^2 + x_1^2[i] - (x_2[i] - x_{O_2})^2 \quad (6.48)$$

Ako je ovaj uslov ispunjen tada lopte seku površi po paralelama koje se nalaze na istoj z visini i ukoliko se paralele seku to su tačke presečne krive dve površi. Jednačine dve uparene lopte su

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_{L_1}^2[i] \quad (6.49)$$

$$(x - x_{O_2})^2 + y^2 + z^2 = R_{L_2}^2[i] \quad (6.50)$$

Ove dve lopte seku se po profilnoj paraleli čija se x koordinata dobija kombinovanjem poslednje dve jednačine

$$x_1[i] = x_2[i] = \frac{R_{L_1}^2[i] - R_{L_2}^2[i] + x_{O_2}^2}{2x_{O_2}} \quad (6.51)$$

U preseku profilne paralele sa horizontalnom ravni $z=z_p[i]$ određuju se y koordinate tačaka K_1 i K_2

$$y_{1,2}[i] = \pm \sqrt{R_{L_1}^2 - x_1^2[i] - z_p^2[i]} \quad (6.52)$$

Dakle, kada se posmatraju rotacione površi sa paralelnim osama rotacije, tada se presečna kriva može odrediti korišćenjem horizontalnih pomoćnih ravni ili korišćenjem dva pramena pomoćnih lopti, pri čemu je centar jednog pramena na osi jedne površi, a centar drugog na osi druge površi, dok su oba centra na istoj visini. Prečnici svakog para lopti iz dva pramena su različiti, ali su njihove veličine u definisanom odnosu (6.48), odnosno za izabran prečnik lopte iz jednog pramena poznat je prečnik lopte iz drugog pramena koja će u paru sa prvom loptom dovesti do realnih tačaka presečne krive. Postupak korišćenja dva pramena pomoćnih lopti je sledeći:

1. Usvoji se određena vrednost parametra $i \in [i_0, i_{\max}]$;
2. Iz parametarskih jednačina oba meridijana se sračunaju x i z koordinate tačaka A_1 i A_2 na tim meridijanima za datu vrednost parametra i ;
3. Sračunaju se poluprečnici lopti R_{L_1}, R_{L_2} ;
4. Presekom dve lopte odredi se x koordinata profilne paralele;
5. U preseku profilne paralele sa horizontalnom ravni $z_1[i]=z_2[i]$ dobijaju se y koordinate presečnih tačaka.

6.4 OSE ROTACIONIH POVRŠI SE MIMOILAZE

Posmatrajmo presek dva cilindra (Sl. 6.6) čije se ose mimoilaze. Prvi cilindar zadat je vertikalnom osom o_1 i izvodnicom u ravni Oxz , a drugi osom o_2 i izvodnicom koje su u ravni paralelnoj sa Oxz . Najkraće rastojanje između osa cilindra označeno je sa O_1O_2 (leži na zajedničkoj normali n dveju osa). Ako su ose cilindra zadate jednačinama

$$o_1: \quad x = x_{O_1} \quad (6.53)$$

$$o_2: \quad \begin{aligned} z &= m_2x + n_2 \\ y &= y_{O_2} \end{aligned} \quad (6.54)$$

onda je presečna tačka P drugih projekcija osa zadata sa koordinatama

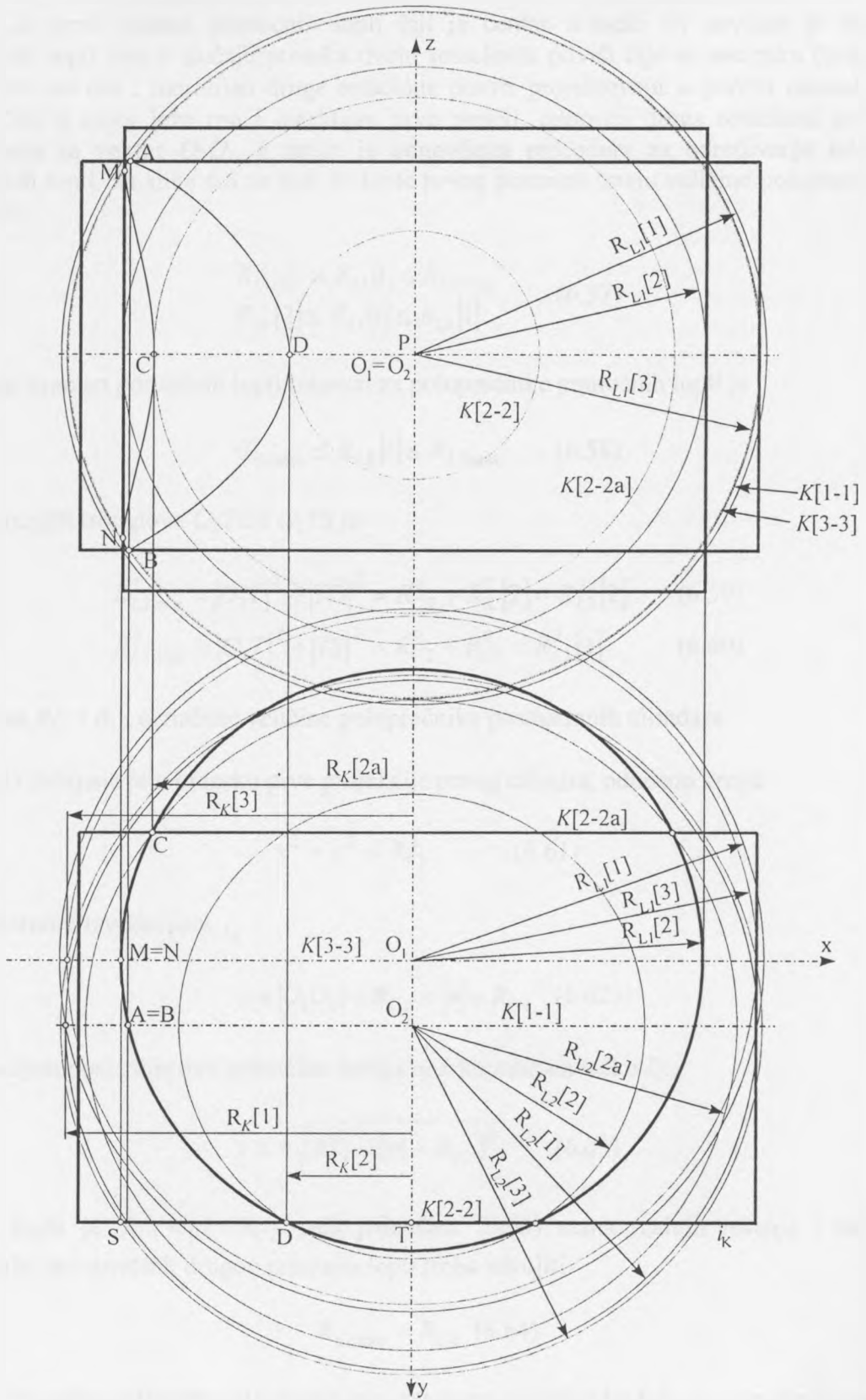
$$\begin{aligned} x_P &= x_{O_1} \\ y_P &= 0 \\ z_P &= m_2x_P + n_2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Kako se ose cilindra u drugoj projekciji (ravan Oxz) vide u pravoj veličini, normala n se vidi zračno u tački P pa se presečna tačka O_1 normale n i ose o_1 poklapa sa tačkom P , odnosno $O_1(x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}) = P(x_P, y_P, z_P)$. Normala n je upravna na ravan Oxz pa se tačka O_2 dobija presekom normale sa osom druge površi:

$$\begin{aligned} x_{O_2} &= x_{O_1} \\ y_{O_2} &= y_{O_2} \\ z_{O_2} &= z_{O_1} \end{aligned} \quad (6.56)$$

U tačke O_1 i O_2 postavljaju se centri dva pramena pomoćnih lopti, pri čemu prvi pramen pomoćnih lopti seče prvu rotacionu površ po njenim paralelama, a drugi pramen (centra O_2) seče drugu površ po njenim paralelama. Poluprečnici lopti iz prvog i drugog pramena su označeni sa $R_{L1}[i]$ i $R_{L2}[i]$.

Bilo koji par pomoćnih lopti sačinjen od po jedne lopte iz svakog pramena, seče se po frontalnom krugu (krug paralelan sa ravni Oxz). Poluprečnici frontalnih krugova označeni su sa $R_K[i]$, a sami krugovi sa $K[i-i]$. Prva lopta tog para lopti seče prvu površ po prvom skupu paralela, a druga lopta seče drugu površ po drugom skupu paralela, pri čemu broj presečnih paralela zavisi od reda ravne krive – meridijana. Frontalni krug seče prvi skup paralela u tačkama A_1, A_2, \dots, A_n , a drugi skup paralela u tačkama B_1, B_2, \dots, B_m i samo tačke $A_i=B_j$ sa istim koordinatama su tačke prostorne presečne krive za posmatrani par lopti. Najteže je u ovoj proceduri odrediti intervale za oba pramena pomoćnih lopti, odnosno lopte minimalnog i maksimalnog prečnika u oba pramena koje joj daju realne tačke prostorne presečne krive dveju rotacionih površi. Radi preglednosti postupka posmatraćemo prvo presek dva rotaciona cilindra, a rezultati će naknadno biti uopšteni za sve rotacione površi.



Sl. 6.6 Dva pramena pomoćnih lopti

Za prvi pramen pomoćnih lopti čiji je centar u tački O_1 usvojen je interval pomoćnih lopti kao u slučaju preseka dveju rotacionih površi čije se ose seku (poglavlje 6.2). Prvo su osa i meridijan druge rotacione površi projektovani u pravcu normale n u ravan Oxz u kojoj leže osa i meridijan prve površi, odnosno druga rotaciona površ je translirana za vektor O_2O_1 , a zatim je ponovljena procedura za određivanje intervala pomoćnih lopti. Sa slike 6.6 se vidi da lopte prvog pramena imaju veličine poluprečnika u intervalu

$$\begin{aligned} R_{L1\min} \leq R_{L1}[i] \leq R_{L1\max} \\ R_{L1}[2] \leq R_{L1}[i] \leq R_{L1}[1] \end{aligned} \quad (6.57)$$

Za drugi pramen pomoćnih lopti interval za poluprečnike pomoćnih lopti je

$$R_{L2\min} \leq R_{L2}[i] \leq R_{L2\max} \quad (6.58)$$

Iz pravougljih trouglova O_2TD i O_2TS je

$$R_{L2\min}^2 = |O_2T|^2 + |TD|^2 = R_{C2}^2 + R_K^2[2] = R_{L2}^2[2] \quad (6.59)$$

$$R_{L2\max}^2 = |O_2T|^2 + |TS|^2 = R_{C2}^2 + R_{C1}^2 = R_{L2}^2[3] \quad (6.60)$$

gde su sa R_{C1} i R_{C2} označene veličine poluprečnika posmatranih cilindara.

Tačka D dobijena je u preseku prve projekcije prvog cilindra, odnosno kruga

$$x^2 + y^2 = R_{C1}^2 \quad (6.61)$$

sa konturnom izvodnicom i_K

$$y = |O_1O_2| + R_{C2} = |n| + R_{C2} \quad (6.62)$$

Rešavanjem poslednje dve jednačine dobija se x koordinata tačke D :

$$x = \pm \sqrt{R_{C1}^2 - (|n| + R_{C2})^2} \quad (6.63)$$

Kada je $R_{C1} < |n| + R_{C2}$ tada jednačina (6.63) nema realnih rešenja i tada za minimalni poluprečnik drugog pramena lopti treba usvojiti

$$R_{L2\min} = R_{C2} \quad (6.64)$$

Presečne tačke dva cilindra (dveju rotacione površi) određuju se pomoću procedure u kojoj se za jednu loptu prvog pramena, čiji je poluprečnik fiksiran u intervalu (6.57), menjaju lopte iz drugog pramena, čiji su poluprečnici u intervalu (6.68), i za svaki par lopti se traže tačke presečne krive dveju površi. Kada se za jednu loptu iz prvog pramena lopti proanaliziraju njeni parovi među loptama iz drugog pramena, tada se menja poluprečnik

lopte iz prvog pramena i ona se ponovo posmatra u kombinaciji sa svim loptama iz drugog pramena lopti. Ako se kod analize polazi od lopti minimalnih poluprečnika iz oba pramena, tada tačnost presečne krive dveju površi zavisi od prirasta poluprečnika za svaku sledeću pomoćnu loptu i tačnost je obrnuto proporcionalna sa veličinom prirasta poluprečnika.

Ako se posmatra presek dve opšte rotacione površi čije se ose mimoilaze, tada se oko svake površi može postaviti tangencijalni cilindar. Za tako dobijene tangencijalne cilindre, korišćenjem jednačina (6.57), ..., (6.64), određuju se intervali za poluprečnike dva pramena pomoćnih lopti pomoću kojih će se određivati presek dveju zadatih rotacionih površi. Na ovaj način se povećava broj parova lopti koji ne daju realne tačke presečne krive, ali se dobijaju intervali poluprečnika pomoćnih lopti u oba pramena koji sigurno obuhvataju celu presečnu krivu dveju površi.

Korišćenjem dva pramena pomoćnih lopti prostorni problem preseka dveju rotacionih površi svodi se na analitički problem određivanja presečnih tačaka krugova na lopti, što vodi ka jednostavnom matematičkom modelu za rešavanje problema. Mana ovog postupka je to što ne omogućuje određivanje direktne veze između veličina poluprečnika parova lopti koje daju tačke presečne krive, ali pošto se procedura izvodi pomoću računara, brojna sračunavanja neće predstavljati značajniji problem.

7

TRANSFORMACIJE

7.1 DVODIMENZIONALNE TRANSFORMACIJE

Matematički aparat za dvodimenzionalne transformacije ([Mor89], [RA90], [HL93]) prikazuje se kroz analizu transformacija tačke i prave (duži), a svi ostali ravni objekti mogu se transformisati korišćenjem istih jednačina.

7.1.1 Prikazivanje tačke

Tačka se prikazuje matricom preko njenih koordinata (recimo u ravni Oxz), s tim što matrica može imati jednu vrstu i dve kolone ili dve vrste i jednu kolonu:

$$[x \quad z] \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

7.1.2 Transformacija tačke

Pomnožimo matricu koja predstavlja tačku sa matricom $[T]$ koja je dimenzija 2×2 , a naziva se matrica transformacije.

$$[X][T] = [x \quad z] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax + cz \quad bx + dz] = [x^* \quad z^*] = [X^*] \quad (7.1)$$

Ovim je prikazana transformacija polaznih koordinata (x, z) tačke u koordinate (x^*, z^*) , pri čemu važi

$$\begin{aligned} x^* &= ax + cz \\ z^* &= bx + dz \end{aligned} \quad (7.2)$$

Vrednosti brojeva a, b, c, d određuju različite ravanske transformacije, a kao interesantne slučajeve izdvajamo sledeće slučajeve:

1. $a=d=1$ i $c=b=0$;

$$[X][T] = [x \quad z] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad z] = [x^* \quad z^*] = [X^*]$$

Množenje matrice tačke sa matricom identiteta ne dovodi ni do kakvih promena.

2. $d=1$ i $b=c=0$;

$$[X][T] = [x \quad z] \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \quad z] = [x^* \quad z^*] = [X^*]$$

Sada je x koordinata pomnožena sa a i ova transformacija naziva se skaliranje.

3. $b=c=0$;

$$[X][T] = [x \ z] \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = [ax \ dz] = [x^* \ z^*] = [X^*]$$

Kada je $a=d$ tada je skaliranje po osama jednako, ako je $a=d>1$ tada je povećanje koordinata jednako, ako je $0<a=d<1$ dolazi do jednakog smanjenja koordinata.

Ako je a i (ili) d negativno tada se javlja osna simetrija oko jedne od koordinatnih osa.

4. $b=c=0$ i $d=1$ i $a=-1$;

$$[X][T] = [x \ z] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \ z] = [x^* \ z^*] = [X^*]$$

Rezultat je simetrija oko z ose.

5. Za $b=c=0$ i $d=-1$ i $a=1$, dobija se simetrija oko x ose.

6. Za $b=c=0$ i $a=d<0$ dolazi se do centralne simetrije, pri čemu je centar simetrije na pravoj koja spaja tačku sa koordinatnim početkom. Ako je $a=d=-1$ centar simetrije je koordinatni početak.

7. Posmatrajmo sada uticaj dijagonalnih članova matrice b i c . Neka je $a=d=1$, $c=0$.

$$[X][T] = [x \ z] \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ bx+z] = [x^* \ z^*] = [X^*]$$

x koordinata se ne menja, dok se y menja linearno u zavisnosti od polaznih koordinata. Ovaj efekat se naziva smicanje (Shear).

8. $a=d=1$, $b=0$; smicanje duž y ose.

7.1.3 Rotacija

Vektori za tačke P i P^* su predstavljeni izrazima (Sl. 7.1)

$$P = [x \ z] = [r \cos \phi \ r \sin \phi]$$

$$P^* = [x^* \ z^*] = [r \cos(\phi + \theta) \ r \sin(\phi + \theta)]$$

odnosno

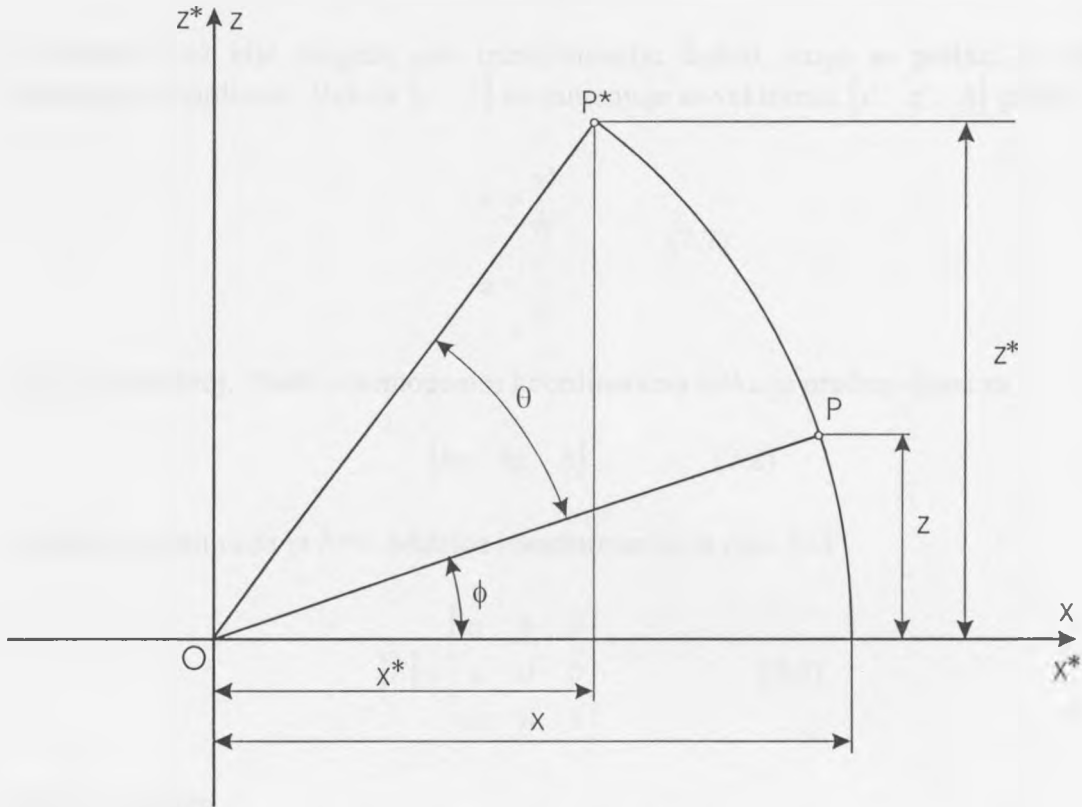
$$P^* = [x^* \ z^*] = [r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \quad r \sin \phi \cos \theta + r \cos \phi \sin \theta]$$

Korišćenjem jednačine za vektor P dobija se

$$P^* = \begin{bmatrix} x^* & z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - z \sin \theta & x \sin \theta + z \cos \theta \end{bmatrix}$$

Transformisana tačka ima koordinate

$$\begin{aligned} x^* &= x \cos \theta - z \sin \theta \\ z^* &= x \sin \theta + z \cos \theta \end{aligned} \quad (7.3)$$



Sl. 7.1 Rotacija tačke

ili korišćenjem matrica

$$[X^*] = \begin{bmatrix} x^* & z^* \end{bmatrix} = [X][T] = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Ovo je bila takozvana pozitivna rotacija, odnosno rotacija suprotno od smera kretanja kazaljke na satu. Za rotaciju u suprotnom smeru (negativna rotacija) matrica transformacije je

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

jer je

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \end{aligned}$$

7.1.4 Homogene koordinate

Ponekad je potrebno izvršiti translaciju tačke, naprimer koordinatnog početka, duž koordinatnih osa za veličine m i n .

$$\begin{aligned}x^* &= ax + cz + m \\z^* &= bx + dz + n\end{aligned}\quad (7.6)$$

U matrice 2×2 nije moguće ovu transformaciju dodati, stoga se prelazi na takozvane homogene koordinate. Vektor $[x \ z]$ se zamenjuje sa vektorom $[x' \ z' \ h]$ gde je

$$\begin{aligned}x &= \frac{x'}{h} \\z &= \frac{z'}{h}\end{aligned}\quad (7.7)$$

a h je realan broj. Znači u homogenim koordinatama tačka je predstavljena sa

$$[hx \ hz \ h] \quad (7.8)$$

najčešće se uzima da je $h=1$. Matrica transformacije je reda 3×3

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Sada je izrazom

$$[x^* \ z^* \ 1] = [x \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x+m \ z+n \ 1] \quad (7.10)$$

opisana navedena translacija tačke duž dve koordinatne ose.

7.2 TRODIMENZIONALNE TRANSFORMACIJE

7.2.1 Homogene koordinate

Tačka u trodimenzionalnom prostoru $[x \ y \ z]$ se prikazuje sa četiri dimenzionalnim vektorom pozicije [RA90]

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [x \ y \ z \ 1][T] \quad (7.11)$$

Prelazak sa homogenih na pravougle koordinate dat je izrazom

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{h} & \frac{y'}{h} & \frac{z'}{h} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Matrica transformacije je

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

7.2.2 Rotacija

Matrice rotacije za uglove θ , ϕ i ψ oko osa x , y i z su

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Trodimenzionalne rotacije nisu komutativne. Ako se posmatra kombinovana rotacija koja se redom sastoji od rotacije oko x ose i od rotacije oko y ose, tada je ukupna matrica transformacije jednaka (rotacija oko osa je za isti ugao θ)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica za rotacije oko y i x osa je

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poređenjem poslednje dve matrice $[T]$ vidi se da komutativnost ne važi.

7.2.3 Translacija

Matrica translacije je

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Translacija homogenih koordinata je opisana izrazom

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [xh \ yh \ zh \ h] = [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Odnosno

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [x+l \ y+m \ z+n \ 1] \quad (7.19)$$

U pravouglim koordinatama položaj tačke je dat sa

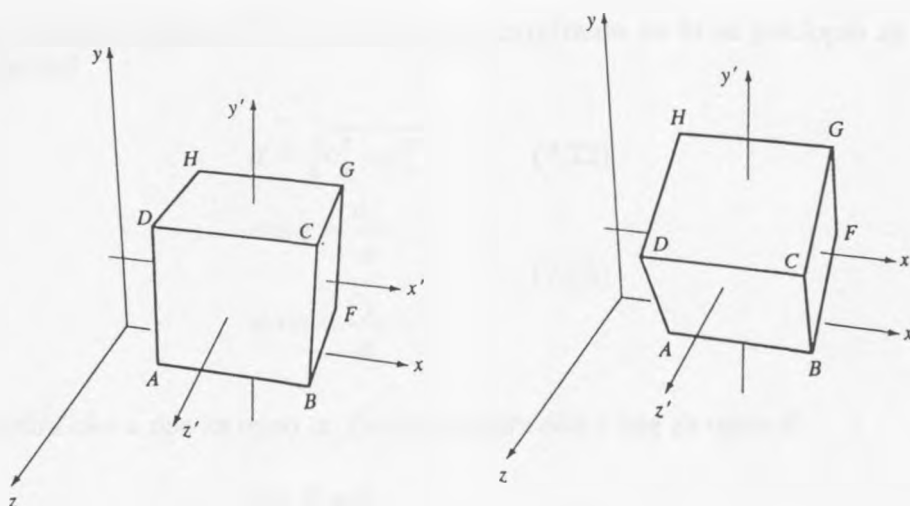
$$\begin{aligned} x^* &= x + l \\ y^* &= y + m \\ z^* &= z + n \end{aligned} \quad (7.20)$$

7.2.4 Rotacija oko ose koja je paralelna koordinatnoj osi

Posmatra se slučaj kada je za objekat koji se rotira vezan lokalni koordinatni sistem $O'x'y'z'$ čije su ose paralelne osama globalnog koordinatnog sistema $Oxyz$ ($x \parallel x', y \parallel y', z \parallel z'$). Rotacija objekta oko jedne od osa lokalnog koordinatnog sistema vrši se kroz nekoliko koraka (Sl. 7.2):

1. Translira se koordinatni sistem $O'x'y'z'$ dok ne postane koincidentan sa sistemom $Oxyz$;

2. Izvrši se rotacija oko željene ose (recimo x);
3. Translira se objekat nazad u početnu poziciju.

Sl. 7.2 Rotacija objekta oko ose x'

Prikazano pomoću matrica

$$[X^*] = [X][Tr][R_x][Tr]^{-1} \quad (7.21)$$

gde su

- $[X^*]$ transformisani objekat
- $[X]$ polazni objekat
- $[Tr]$ matrica translacije
- $[R_x]$ matrica rotacije oko koordinatne ose
- $[Tr]^{-1}$ inverzna matrica translacije

7.2.5 Rotacija oko proizvoljne ose

Osa rotacije sadrži tačku (x_0, y_0, z_0) i gradi kosinuse uglova sa osama koordinatnog sistema (c_x, c_y, c_z) . Rotacija objekta oko ose rotacije za ugao δ vrši se putem sledeće procedure:

1. Translacije tačke (x_0, y_0, z_0) u koordinatni početak;
2. Dve rotacije koje osu rotacije dovode u položaj da se poklapa sa z osom;
3. Rotacija oko z ose za zadati ugao δ ;

4. Inverzna kombinovana rotacija u odnosu na rotacije iz tačke 2;
5. Inverzna translacija u odnosu na tačku 1 procedure.

Posmatrajmo jedinični vektor OP koji želimo da zarotiramo da bi se poklopio sa z osom. Sa slike 7.3 se vidi

$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2} \quad (7.22)$$

$$\cos \alpha = \frac{c_z}{d} \quad (7.23)$$

$$\sin \alpha = \frac{c_y}{d}$$

Prvo se OP rotira oko x ose za ugao α . Zatim se rotira oko y ose za ugao β .

$$\begin{aligned} \cos \beta &= d \\ \sin \beta &= c_x \end{aligned} \quad (7.24)$$

Kombinovana matrica je

$$[M] = [T][R_x][R_y][R_\delta][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1} \quad (7.25)$$

Gde su:

- Matrica translacije

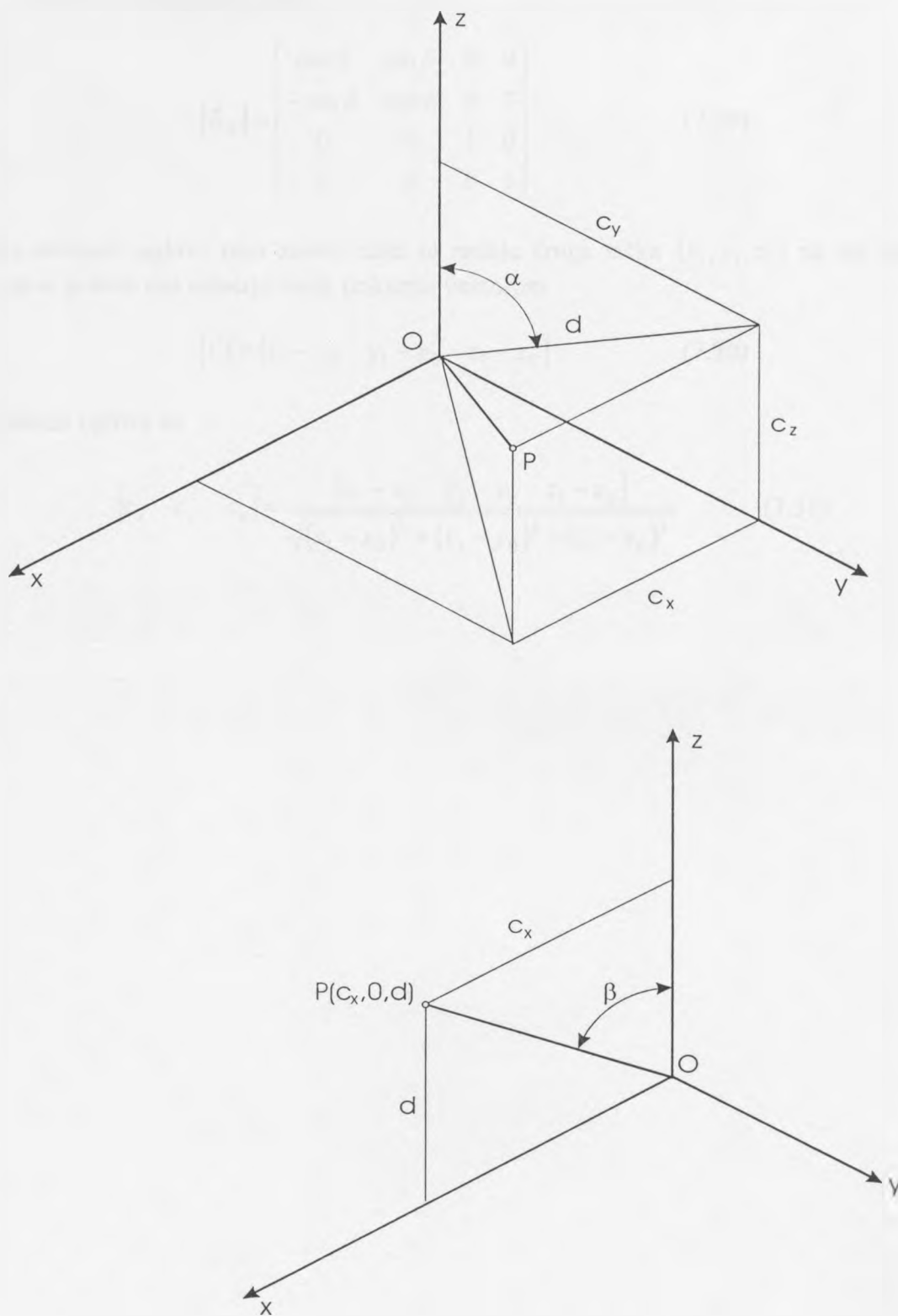
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

- Matrica rotacije oko x ose

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z/d & c_y/d & 0 \\ 0 & -c_y/d & c_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

- Matrica rotacije oko y ose

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Sl. 7.3 Rotacija oko x i y ose

- Matrica rotacije oko z ose

$$[R_\delta] = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

Ako kosinusi uglova nisu zadati, tada se zadaje druga tačka (x_1, y_1, z_1) na osi rotacije. Tada se pravac ose rotacije može prikazati vektorom

$$[V] = [x_1 - x_0 \quad y_1 - y_0 \quad z_1 - z_0] \quad (7.30)$$

Kosinusi uglova su

$$[c_x \quad c_y \quad c_z] = \frac{[x_1 - x_0 \quad y_1 - y_0 \quad z_1 - z_0]}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \quad (7.31)$$

8

**OSNOVNA TELA I
NJIHOVI ODNOSI**

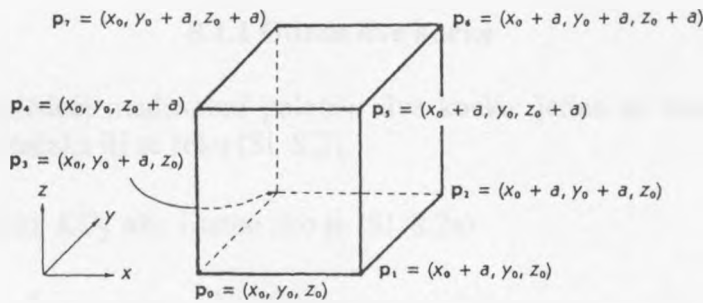
8.1 KOCKA

Kocka se zadaje pomoću onog temena kojem su sve tri koordinate minimalne (minimalno teme) i dužinom ivice kocke [Mor89]. Kocka, označena velikim slovima KO , određena je sa (Sl. 8.1)

$$KO = KO(x_0, y_0, z_0, a) \quad (8.1)$$

gde su x_0, y_0, z_0 koordinate minimalnog temena, dok je a dužina ivice kocke. Temena kocke imaju sledeće koordinate

$$\begin{aligned} p_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ p_1 &= (x_0 + a, y_0, z_0) \\ p_2 &= (x_0 + a, y_0 + a, z_0) \\ p_3 &= (x_0, y_0 + a, z_0) \\ p_4 &= (x_0, y_0, z_0 + a) \\ p_5 &= (x_0 + a, y_0, z_0 + a) \\ p_6 &= (x_0 + a, y_0 + a, z_0 + a) \\ p_7 &= (x_0, y_0 + a, z_0 + a) \end{aligned} \quad (8.2)$$



Sl. 8.1 Kocka

Temena sa minimalnim i maksimalnim koordinatama su

$$\begin{aligned} p_{\min} &= p_0 \\ p_{\max} &= p_6 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Centar (središte) kocke nalazi se u preseku telesnih dijagonala

$$p_C = \left(x_0 + \frac{a}{2}, y_0 + \frac{a}{2}, z_0 + \frac{a}{2} \right) \quad (8.4)$$

Proizvoljna tačka $P = (x, y, z)$ može se nalaziti unutar, na stranici kocke ili izvan kocke.

Tačka P je unutar kocke ako i samo ako su sva tri sledeća uslova ispunjena

$$x_{\min} < x < x_{\max} \quad (8.5.1)$$

$$y_{\min} < y < y_{\max} \quad (8.5.2)$$

$$z_{\min} < z < z_{\max} \quad (8.5.3)$$

P je izvan kocke ako je bar jedan od sledećih šest uslova ispunjen

$$x < x_{\min}, \quad x > x_{\max} \quad (8.6.1)$$

$$y < y_{\min}, \quad y > y_{\max} \quad (8.6.2)$$

$$z < z_{\min}, \quad z > z_{\max} \quad (8.6.3)$$

P je na stranici kocke ako je

$$\{x = x_{\min} \vee x = x_{\max}\} \wedge \{y_{\min} < y < y_{\max}\} \wedge \{z_{\min} < z < z_{\max}\} \quad (8.7.1)$$

$$\text{ili } \{y = y_{\min} \vee y = y_{\max}\} \wedge \{x_{\min} < x < x_{\max}\} \wedge \{z_{\min} < z < z_{\max}\} \quad (8.7.2)$$

$$\text{ili } \{z = z_{\min} \vee z = z_{\max}\} \wedge \{x_{\min} < x < x_{\max}\} \wedge \{y_{\min} < y < y_{\max}\} \quad (8.7.3)$$

8.1.1 Odnos dve kocke

Mogući su sledeći međusobni položaji dve kocke: jedna se nalazi unutar druge, nemaju zajedničkih tačaka ili se seku (Sl. 8.2).

Kocka KO_1 je u kocki KO_2 ako i samo ako je (Sl. 8.2a)

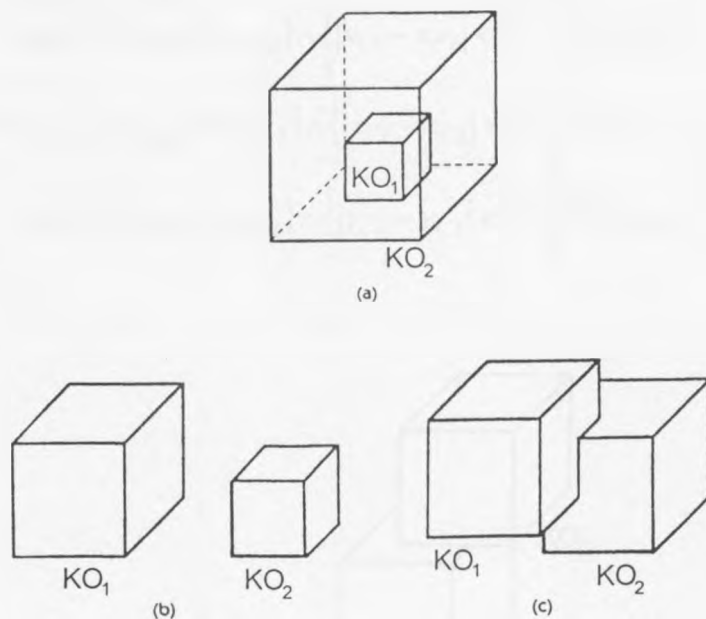
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\min 1} \geq x_{\min 2} \\ y_{\min 1} \geq y_{\min 2} \\ z_{\min 1} \geq z_{\min 2} \end{array} \right\} \text{ i } \left\{ \begin{array}{l} x_{\max 1} \leq x_{\max 2} \\ y_{\max 1} \leq y_{\max 2} \\ z_{\max 1} \leq z_{\max 2} \end{array} \right\} \quad (8.8)$$

KO_1 je izvan kocke KO_2 ako i samo ako je ispunjen jedan od šest sledećih uslova (Sl. 8.2b)

$$x_{\max 1} \leq x_{\min 2} \quad \vee \quad x_{\min 1} \geq x_{\max 2} \quad (8.9.1)$$

$$y_{\max 1} \leq y_{\min 2} \quad \vee \quad y_{\min 1} \geq y_{\max 2} \quad (8.9.2)$$

$$z_{\max 1} \leq z_{\min 2} \quad \vee \quad z_{\min 1} \geq z_{\max 2} \quad (8.9.3)$$



Sl. 8.2 Odnos dve kocke

KO_1 seče kocku KO_2 ako su tri uslova ispunjena (Sl. 8.2c)

$$\frac{|a_1 - a_2|}{2} < |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (8.10.1)$$

$$\frac{|a_1 - a_2|}{2} < |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (8.10.2)$$

$$\frac{|a_1 - a_2|}{2} < |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (8.10.3)$$

KO_1 sa spoljašnje strane tangira kocku KO_2 ako je jedan od tri uslova ispunjen (Sl. 8.3)

$$\{z_{\max 1} = z_{\min 2} \vee z_{\min 1} = z_{\max 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \wedge |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \right\}$$

ili

$$\{y_{\max 1} = y_{\min 2} \vee y_{\min 1} = y_{\max 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \right\}$$

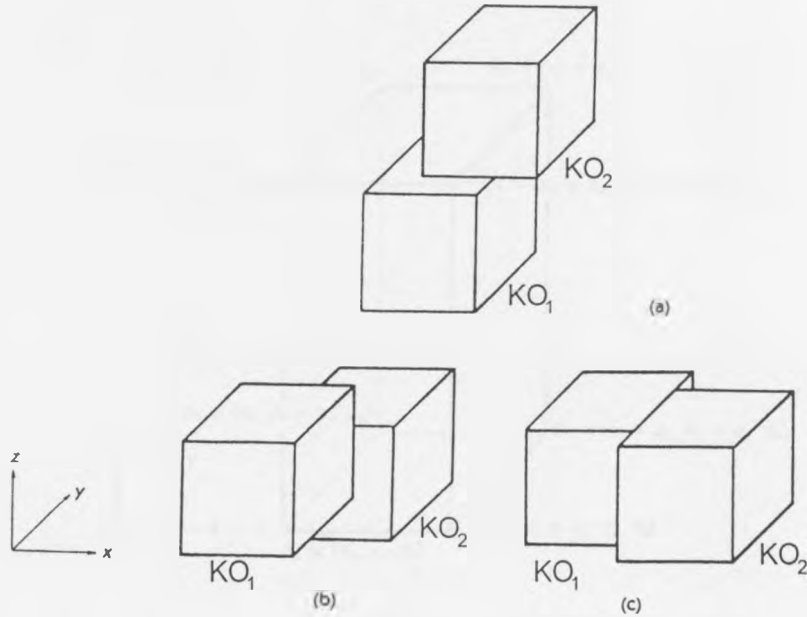
ili

$$\{x_{\max 1} = x_{\min 2} \vee x_{\min 1} = x_{\max 2}\} \wedge \left\{ |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \right\}$$

(8.11)

KO_1 seče i tangira kocku KO_2 ako je od tri uslova ispunjen jedan ili dva

$$\begin{aligned}
 & \{z_{\max 1} = z_{\max 2} \vee z_{\min 1} = z_{\min 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \wedge |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \right\} \\
 & \{y_{\max 1} = y_{\max 2} \vee y_{\min 1} = y_{\min 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \right\} \\
 & \{x_{\max 1} = x_{\max 2} \vee x_{\min 1} = x_{\min 2}\} \wedge \left\{ |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_1 + a_2}{2} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$



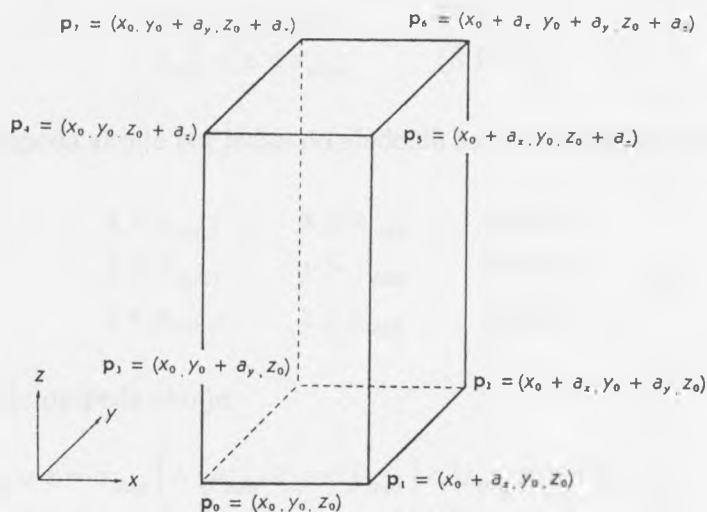
Sl. 8.3 Dve kocke se dodiruju

8.2 PARALELOPIPED

Zadaje se jednim temenom sa minimalnim koordinatama (minimalno teme) i dužinama njegovih ivica. Paralelepiped (Sl. 8.4), označen velikim slovima PA , određen je sa [Mor89]

$$PA = PA(x_0, y_0, z_0, a_x, a_y, a_z) \quad (8.13)$$

gde su x_0, y_0, z_0 koordinate minimalnog temena, dok su a_x, a_y, a_z dužine ivica.



Sl. 8.4 Paralelepiped

Temena paralelopipeda imaju sledeće koordinate

$$\begin{aligned} p_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ p_1 &= (x_0 + a_x, y_0, z_0) \\ p_2 &= (x_0 + a_x, y_0 + a_y, z_0) \\ p_3 &= (x_0, y_0 + a_y, z_0) \\ p_4 &= (x_0, y_0, z_0 + a_z) \\ p_5 &= (x_0 + a_x, y_0, z_0 + a_z) \\ p_6 &= (x_0 + a_x, y_0 + a_y, z_0 + a_z) \\ p_7 &= (x_0, y_0 + a_y, z_0 + a_z) \end{aligned} \quad (8.14)$$

Temena sa minimalnim i maksimalnim koordinatama su

$$\begin{aligned} p_{\min} &= p_0 \\ p_{\max} &= p_6 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Centar (središte) nalazi se u preseku telesnih dijagonala

$$p_C = \left(x_0 + \frac{a_x}{2}, y_0 + \frac{a_y}{2}, z_0 + \frac{a_z}{2} \right) \quad (8.16)$$

Proizvoljna tačka $P = (x, y, z)$ može se nalaziti unutar, na stranici tela ili izvan tela. Tačka P je unutar paralelopipeda ako i samo ako su sva tri sledeća uslova ispunjena

$$x_{\min} < x < x_{\max} \quad (8.17.1)$$

$$y_{\min} < y < y_{\max} \quad (8.17.2)$$

$$z_{\min} < z < z_{\max} \quad (8.17.3)$$

P je izvan paralelopipeda ako je bar jedan od sledećih šest uslova ispunjen

$$x < x_{\min}, \quad x > x_{\max} \quad (8.18.1)$$

$$y < y_{\min}, \quad y > y_{\max} \quad (8.18.2)$$

$$z < z_{\min}, \quad z > z_{\max} \quad (8.18.3)$$

P je na stranici paralelopipeda ako je

$$\{x = x_{\min} \vee x = x_{\max}\} \wedge \{y_{\min} < y < y_{\max}\} \wedge \{z_{\min} < z < z_{\max}\} \quad (8.19.1)$$

$$\text{ili } \{y = y_{\min} \vee y = y_{\max}\} \wedge \{x_{\min} < x < x_{\max}\} \wedge \{z_{\min} < z < z_{\max}\} \quad (8.19.2)$$

$$\text{ili } \{z = z_{\min} \vee z = z_{\max}\} \wedge \{x_{\min} < x < x_{\max}\} \wedge \{y_{\min} < y < y_{\max}\} \quad (8.19.3)$$

8.2.1 Odnos dva paralelopipeda

Mogući su sledeći međusobni položaji dva paralelopipeda: jedan se nalazi unutar drugog, nemaju zajedničkih tačaka ili se seku.

PA_1 je unutar PA_2 ako i samo ako je

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\min 1} \geq x_{\min 2} \\ y_{\min 1} \geq y_{\min 2} \\ z_{\min 1} \geq z_{\min 2} \end{array} \right\} \text{ i } \left\{ \begin{array}{l} x_{\max 1} \leq x_{\max 2} \\ y_{\max 1} \leq y_{\max 2} \\ z_{\max 1} \leq z_{\max 2} \end{array} \right\} \quad (8.20)$$

PA_1 je izvan PA_2 ako i samo ako je ispunjen jedan od šest sledećih uslova

$$x_{\max 1} \leq x_{\min 2} \quad \vee \quad x_{\min 1} \geq x_{\max 2} \quad (8.21.1)$$

$$y_{\max 1} \leq y_{\min 2} \quad \vee \quad y_{\min 1} \geq y_{\max 2} \quad (8.21.2)$$

$$z_{\max 1} \leq z_{\min 2} \quad \vee \quad z_{\min 1} \geq z_{\max 2} \quad (8.21.3)$$

PA_1 seče PA_2 ako su tri uslova ispunjena

$$\frac{|a_{x1} - a_{x2}|}{2} < |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_{x1} + a_{x2}}{2} \quad (8.22.1)$$

$$\frac{|a_{y1} - a_{y2}|}{2} < |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_{y1} + a_{y2}}{2} \quad (8.22.2)$$

$$\frac{|a_{z1} - a_{z2}|}{2} < |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_{z1} + a_{z2}}{2} \quad (8.22.3)$$

PA_1 sa unutrašnje strane tangira PA_2 ako je jedan od tri uslova ispunjen

$$\begin{aligned} & \{z_{\max 1} = z_{\min 2} \vee z_{\min 1} = z_{\max 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_{x1} + a_{x2}}{2} \wedge |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_{y1} + a_{y2}}{2} \right\} \\ & \text{ili} \\ & \{y_{\max 1} = y_{\min 2} \vee y_{\min 1} = y_{\max 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_{x1} + a_{x2}}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_{z1} + a_{z2}}{2} \right\} \\ & \text{ili} \\ & \{x_{\max 1} = x_{\min 2} \vee x_{\min 1} = x_{\max 2}\} \wedge \left\{ |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_{y1} + a_{y2}}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_{z1} + a_{z2}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (8.23)$$

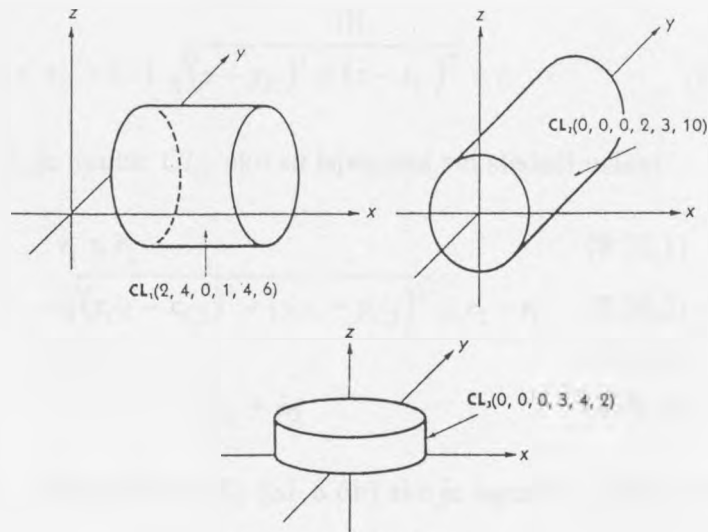
PA_1 seče i tangira PA_2 ako je od tri uslova ispunjen jedan ili dva

$$\begin{aligned} & \{z_{\max 1} = z_{\max 2} \vee z_{\min 1} = z_{\min 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_{x1} + a_{x2}}{2} \wedge |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_{y1} + a_{y2}}{2} \right\} \\ & \{y_{\max 1} = y_{\max 2} \vee y_{\min 1} = y_{\min 2}\} \wedge \left\{ |x_{C1} - x_{C2}| < \frac{a_{x1} + a_{x2}}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_{z1} + a_{z2}}{2} \right\} \\ & \{x_{\max 1} = x_{\max 2} \vee x_{\min 1} = x_{\min 2}\} \wedge \left\{ |y_{C1} - y_{C2}| < \frac{a_{y1} + a_{y2}}{2} \wedge |z_{C1} - z_{C2}| < \frac{a_{z1} + a_{z2}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (8.24)$$

8.3 CILINDAR

Cilindar se zadaje koordinatama centra jednog njegovog kružnog preseka, brojem k koji određuje orijentaciju ose cilindra prema osama koordinatnog sistema, zatim poluprečnikom r bazisnog kruga i visinom cilindra L [Mor89]. Kako kod cilindra postoje dva bazisna kruga, može se usvojiti da se zadaje onaj koji ima manje koordinate centra. Sada je cilindar CL definisan sa (Sl. 8.5)

$$CL = CL(x_C, y_C, z_C, k, r, L) \quad (8.25)$$



Sl. 8.5 Cilindar

Broj k uzima vrednosti 1, 2, i 3 u zavisnosti od toga da li je osa cilindra paralelna sa x , y ili z osom koordinatnog sistema. Geometrijski centar cilindra je opisan izrazom

$$p_C = \left(x_C + \frac{L}{2}, y_C, z_C \right) \text{ za } k=1 \quad (8.26.1)$$

$$p_C = \left(x_C, y_C + \frac{L}{2}, z_C \right) \text{ za } k=2 \quad (8.26.2)$$

$$p_C = \left(x_C, y_C, z_C + \frac{L}{2} \right) \text{ za } k=3 \quad (8.26.3)$$

Proizvoljna tačka $P = (x, y, z)$ može biti u različitim položajima u odnosu na cilindar:

1. Kada je $k=1$, P je unutar cilindra, ako i samo ako su zadovoljena dva uslova

$$x_C < x < x_C + L \quad (8.27.1)$$

$$\sqrt{(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} < r \quad (8.27.2)$$

Izraz $\sqrt{(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2}$ određuje rastojanje tačke P od ose cilindra.

2. Za $k=1$ tačka P je izvan cilindra, ako je bar jedan od tri uslova tačan

$$x < x_C \quad (8.28.1)$$

$$x > x_C + L \quad (8.28.2)$$

$$\sqrt{(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} > r \quad (8.28.3)$$

3. kada je $k=1$, P je na površini cilindra u sledećim slučajevima

$$\{x = x_C \vee x = x_C + L\} \wedge \sqrt{(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} \leq r \quad (8.29.1)$$

ili

$$x_C < x < x_C + L \text{ i } \sqrt{(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} = r \quad (8.29.2)$$

Kada je $k_1 = k_2$, CL_1 je unutar CL_2 ako su ispunjeni svi sledeći uslovi

$$r_1 \leq r_2 \quad (8.30.1)$$

$$\sqrt{(x_{C1} - x_{C2})^2 + (y_{C1} - y_{C2})^2} \leq r_2 - r_1 \quad (8.30.2)$$

$$z_{C1} > z_{C2} \quad (8.30.3)$$

$$z_{C1} + L_1 < z_{C2} + L_2 \quad (8.30.4)$$

Kada je $k_1 = k_2$, CL_1 je izvan CL_2 (Sl. 8.6b) ako je ispunjen jedan od uslova

$$\sqrt{(x_{C1} - x_{C2})^2 + (y_{C1} - y_{C2})^2} \geq r_2 - r_1 \quad (8.31.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{C1} \geq z_{C2} + L_2 \\ \text{ili} \\ z_{C1} + L_1 \leq z_{C2} \end{array} \right\} \quad (8.31.2)$$

U slučaju dva cilindra čije ose nisu paralelne ($k_1 \neq k_2$) postoji šest različitih kombinacija (Sl. 8.7), što se vidi iz $k_1 = i, k_2 = j$ gde $i, j = 1, 2, 3$ a $i \neq j$. Posmatra se, na primer, odnos $k_1 = 1, k_2 = 3$:

1. Cilindar CL_1 je unutar cilindra CL_2 ako su svi sledeći uslovi zadovoljeni (Sl. 8.7a)

$$\sqrt{(x_{C1} - x_{C2})^2 + (y_{C1} - r_1 - y_{C2})^2} < r_2 \quad (8.32.1)$$

$$\sqrt{(x_{C1} - x_{C2})^2 + (y_{C1} + r_1 - y_{C2})^2} < r_2 \quad (8.32.2)$$

$$\sqrt{(x_{C1} + L_1 - x_{C2})^2 + (y_{C1} - r_1 - y_{C2})^2} < r_2 \quad (8.32.3)$$

$$\sqrt{(x_{C1} + L_1 - x_{C2})^2 + (y_{C1} + r_1 - y_{C2})^2} < r_2 \quad (8.32.4)$$

$$z_{C1} + r_1 < z_{C2} + L_2 \quad (8.32.5)$$

$$z_{C1} - r_1 > z_{C2} \quad (8.32.6)$$

2. Cilindar CL_1 je izvan cilindra CL_2 ako je zadovoljen bar jedan od uslova (Sl. 8.7b)

$$x_{C1} - x_{C2} \geq r_2 \quad (8.33.1)$$

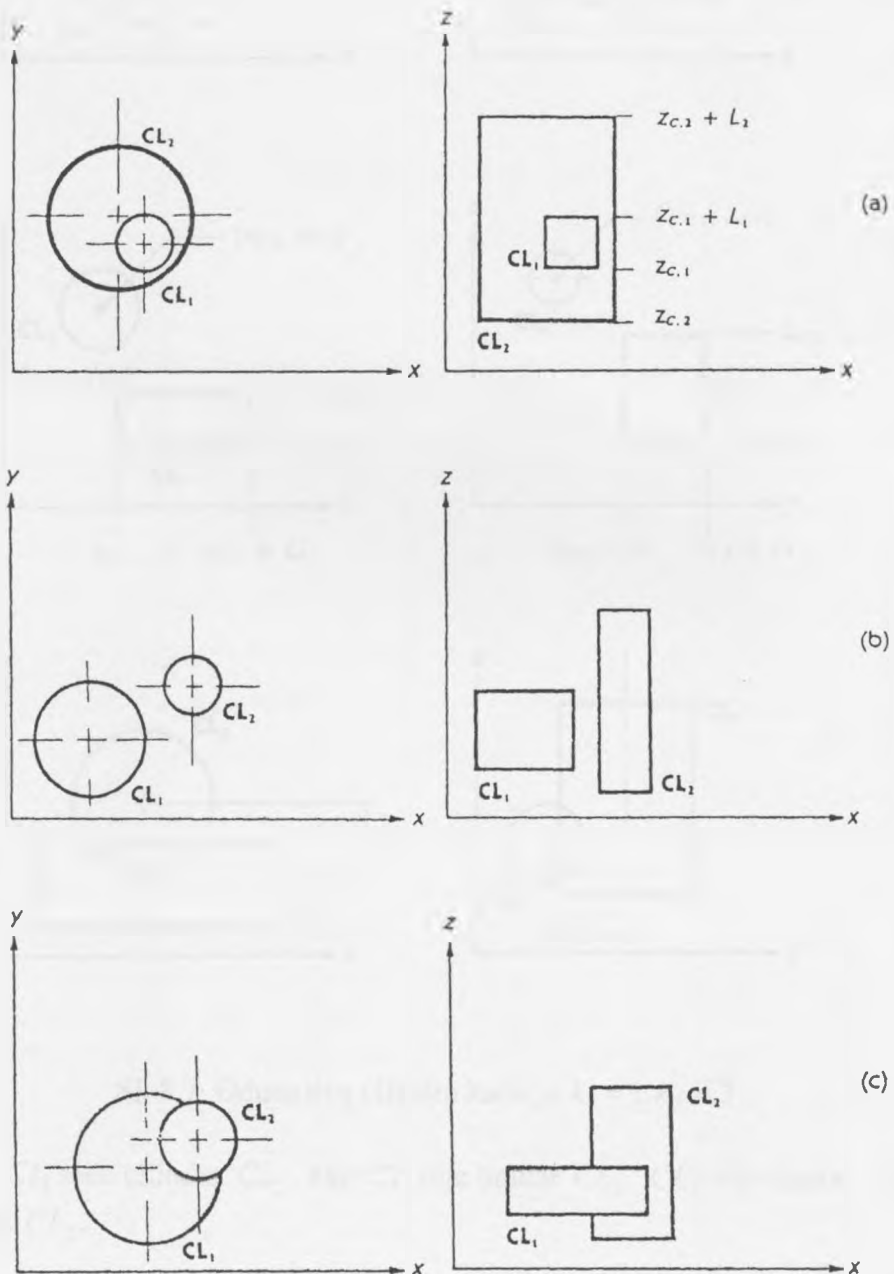
$$x_{C2} - x_{C1} \geq L_1 + r_2 \quad (8.33.2)$$

$$y_{C1} - y_{C2} \geq r_1 + r_2 \quad (8.33.3)$$

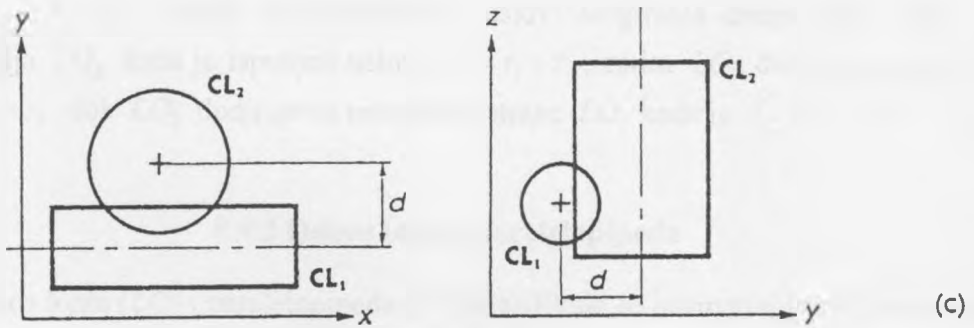
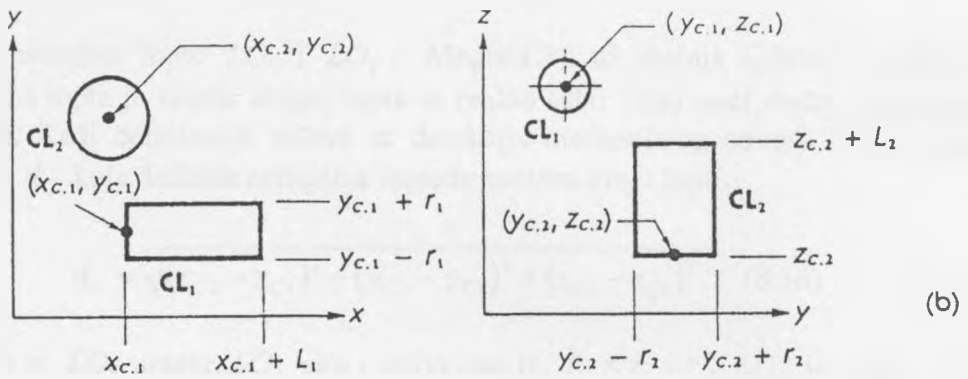
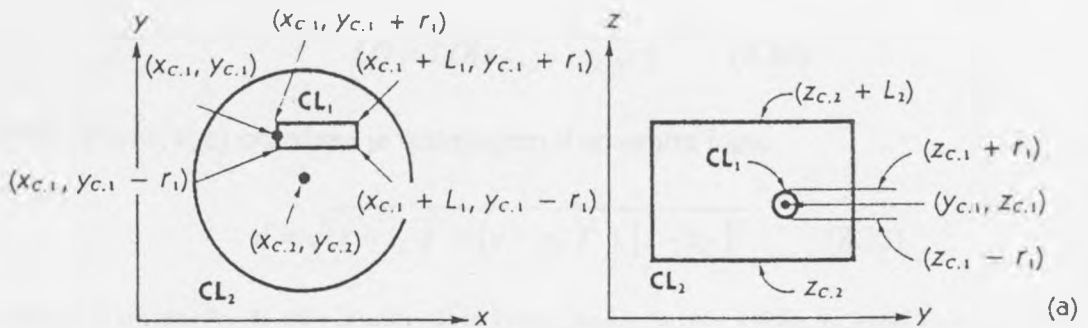
$$y_{C2} - y_{C1} \geq r_1 + r_2 \quad (8.33.4)$$

$$z_{C1} - z_{C2} \geq r_1 + L_2 \quad (8.33.5)$$

$$z_{C2} - z_{C1} \geq r_1 \quad (8.33.6)$$



Sl. 8.6 Odnos dva cilindra kada je $k_1 = k_2$



Sl. 8.7 Odnos dva cilindra kada je $k_1 = 1, k_2 = 3$

3. Cilindar CL_1 seče cilindar CL_2 , ako CL_1 nije unutar CL_2 , CL_2 nije unutar CL_1 i CL_1 nije izvan CL_2 .

8.4 LOPTA

Lopta LO se zadaje koordinatama njenog centra (x_C, y_C, z_C) i veličinom poluprečnika r [Mor89].

$$LO = LO(x_C, y_C, z_C, r) \quad (8.34)$$

Tačka $P = (x, y, z)$ određena je rastojanjem d od centra lopte.

$$d = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} \quad (8.35)$$

Tako je P unutar lopte ako je $d < r$, P je izvan lopte za $d > r$ i P je na lopti kada je $d = r$.

8.4.1 Odnos dve lopte

Posmatrajmo lopte LO_1 i LO_2 . Moguća su tri slučaja njihovog međusobnog odnosa: jedna lopta je unutar druge, lopte se realno seku i kao treći slučaj, jedna lopta je izvan druge. Radi definisanja uslova za detekciju međusobnog odnosa lopti, usvaja se promenljiva d_C koja definiše rastojanje između centara dveju lopti.

$$d_C = \sqrt{(x_{C2} - x_{C1})^2 + (y_{C2} - y_{C1})^2 + (z_{C2} - z_{C1})^2} \quad (8.36)$$

Sada je LO_1 unutar LO_2 ako i samo ako je $d_C \leq r_2 - r_1$, LO_2 je unutar LO_1 za $d_C \leq r_1 - r_2$, LO_1 izvan LO_2 kada je $d_C \geq r_1 + r_2$, LO_1 seče LO_2 kada je $r_2 - r_1 < d_C < r_1 + r_2$. Takođe su interesanti i uslovi tangiranja dveju lopti. Tako LO_1 tangira spolja LO_2 kada je ispunjen uslov $d_C = r_1 + r_2$, zatim LO_1 dodiruje iznutra LO_2 za $d_C = r_2 - r_1$, dok LO_2 dodiruje sa unutrašnje strane LO_1 kada je $d_C = r_1 - r_2$.

8.4.2 Odnos lopte i paralelopipeda

Odnos lopte (LO) i paralelopipeda (PA) klasifikuje se posmatranjem odnosa temena paralelopipeda prema površi lopte. Tema može biti unutar lopte, na njoj ili van nje. Postoji 45 različitih kombinacija, koje se mogu predstaviti tablicom. Gotovo polovina (21) tih kombinacija geometrijski nisu moguće, što je naznačeno u koloni klasifikacija.

Broj	Unutar lopte	Na lopti	Izvan lopte	Klasifikacija
1	8	0	0	<i>PA unutar LO</i>
2	0	8	0	<i>PA unutar LO</i>
3	0	0	8	Neodređeno
4	7	1	0	<i>PA unutar LO</i>
5	7	0	1	<i>PA seče LO</i>
6	1	7	0	Geometrijski nemoguće

7	0	7	1	Geometrijski nemoguće
8	1	0	7	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
9	0	1	7	<i>PA</i> dodiruje <i>LO</i>
10	6	2	0	<i>PA</i> unutar <i>LO</i>
11	6	0	2	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
12	2	6	0	Geometrijski nemoguće
13	2	0	6	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
14	0	2	6	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
15	0	6	2	Geometrijski nemoguće
16	6	1	1	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
17	1	6	1	Geometrijski nemoguće
18	1	1	6	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
19	5	3	0	Geometrijski nemoguće
20	5	0	3	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
21	3	5	0	Geometrijski nemoguće
22	3	0	5	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
23	0	3	5	Geometrijski nemoguće
24	0	5	3	Geometrijski nemoguće
25	5	2	1	Geometrijski nemoguće
26	5	1	2	Geometrijski nemoguće
27	2	5	1	Geometrijski nemoguće
28	2	1	5	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
29	1	5	2	Geometrijski nemoguće
30	1	2	5	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
31	4	4	0	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
32	4	0	4	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
33	0	4	4	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
34	4	3	1	Geometrijski nemoguće
35	4	1	3	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
36	3	4	1	Geometrijski nemoguće
37	3	1	4	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
38	1	4	3	Geometrijski nemoguće
39	1	3	4	Geometrijski nemoguće
40	4	2	2	<i>PA</i> seče <i>LO</i>
41	2	4	2	Geometrijski nemoguće
42	2	2	4	<i>PA</i> seče loptu
43	3	3	2	Geometrijski nemoguće
44	3	2	3	Geometrijski nemoguće
45	2	3	3	Geometrijski nemoguće

Tabela 1 Odnos lopte i paralelopipeda

LO je unutar *PA* ako je ispunjeno svih šest sledećih uslova

$$x_C - x_{\min} \geq r \quad (8.37.1)$$

$$x_{\max} - x_C \geq r \quad (8.37.2)$$

$$y_C - y_{\min} \geq r \quad (8.37.3)$$

$$y_{\max} - y_C \geq r \quad (8.37.4)$$

$$z_C - z_{\min} \geq r \quad (8.37.5)$$

$$z_{\max} - z_C \geq r \quad (8.37.6)$$

LO je izvan *PA* ako je bar jedan od uslova tačan

$$x_{\min} - x_C \geq r \quad (8.38.1)$$

$$x_C - x_{\max} \geq r \quad (8.38.2)$$

$$y_{\min} - y_C \geq r \quad (8.38.3)$$

$$y_C - y_{\max} \geq r \quad (8.38.4)$$

$$z_{\min} - z_C \geq r \quad (8.38.5)$$

$$z_C - z_{\max} \geq r \quad (8.38.6)$$

LO seče *PA* ako važi jedan od uslova

$$x_C - r \leq x_{\min} \leq x_C + r \quad (8.39.1)$$

$$x_C - r \leq x_{\max} \leq x_C + r \quad (8.39.2)$$

$$y_C - r \leq y_{\min} \leq y_C + r \quad (8.39.3)$$

$$y_C - r \leq y_{\max} \leq y_C + r \quad (8.39.4)$$

$$z_C - r \leq z_{\min} \leq z_C + r \quad (8.39.5)$$

$$z_C - r \leq z_{\max} \leq z_C + r \quad (8.39.6)$$

8.4.3 Odnos lopte i cilindra

Posmatrajmo slučaj kada je osa cilindra paralelna z osi koordinatnog sistema.

LO (lopta poluprečnika r_L , centra (x_C, y_C, z_C)) je izvan *CL* (cilindar poluprečnika r_C , centra bazisnog kruga (x_{CL}, y_{CL}, z_{CL})) ako važi jedan od uslova (Sl. 8.8a)

$$z_{CL} - z_C \geq r_L \quad (8.40.1)$$

$$z_C - (z_{CL} + L) \geq r_L \quad (8.40.2)$$

$$\sqrt{(x_C - x_{CL})^2 + (y_C - y_{CL})^2} \geq r_L + r_C \quad (8.40.3)$$

LO izvan ili dodiruje *CL* ako jedan od sledeća dva skupa uslova važi (Sl. 8.8)

$$0 \leq z_C - (z_{CL} + L) \leq r_L \quad (8.41.1)$$

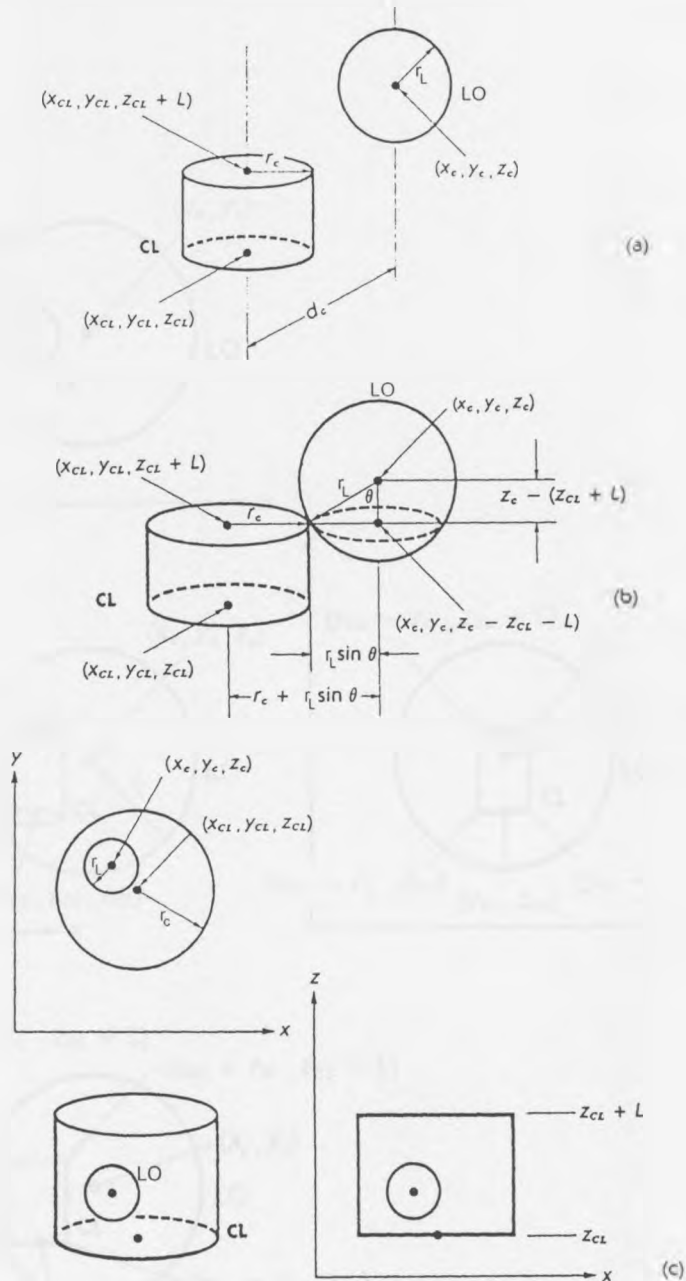
$$\sqrt{(x_C - x_{CL})^2 + (y_C - y_{CL})^2} \geq r_L \sin \theta + r_C \quad (8.41.2)$$

$$\theta = \arccos \frac{z_C - z_{CL} - L}{r_L} \quad (8.41.3)$$

ili

$$0 \leq z_{CL} - z_C \leq r_L \tag{8.42.1}$$

$$\sqrt{(x_C - x_{CL})^2 + (y_C - y_{CL})^2} \geq r_L \sin \theta + r_C \tag{8.42.2}$$



Sl. 8.8 (a), (b) Lopta izvan cilindra; (c) Lopta unutar cilindra

LO je unutar CL ako važi sledeće

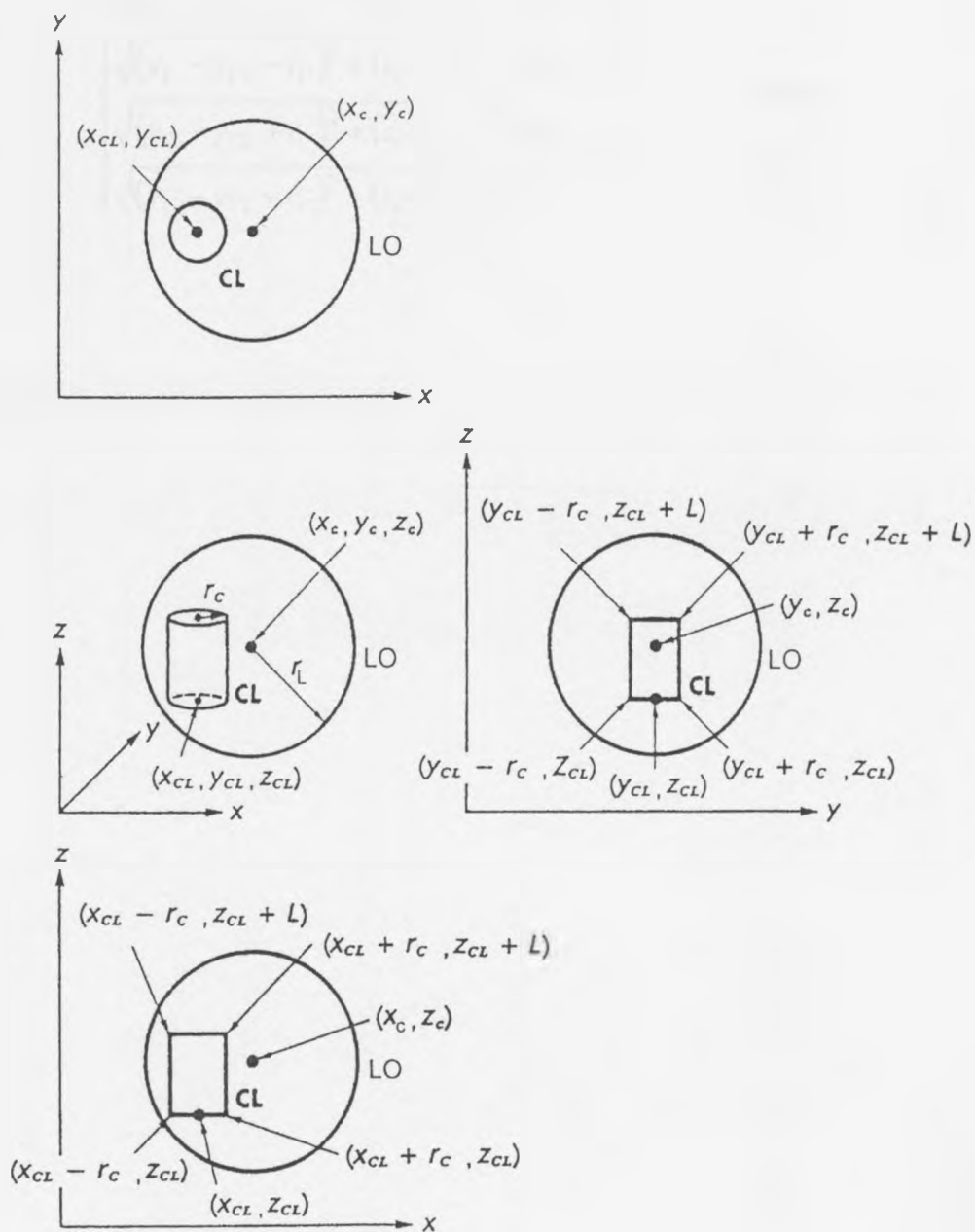
$$z_C - z_{CL} \geq r_L \tag{8.43.1}$$

$$z_{CL} + L - z_C \geq r_L \tag{8.43.2}$$

$$\sqrt{(x_C - x_{CL})^2 + (y_C - y_{CL})^2} \geq r_C - r_L \quad (8.43.3)$$

CL unutar LO ako su zadovoljena dva od tri uslova (Sl. 8.9)

$$\sqrt{(x_C - x_{CL})^2 + (y_C - y_{CL})^2} \leq r_L - r_C \quad (8.44.1)$$



Sl. 8.9 Cilindar unutar lopte

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(x_C - x_{CL} + r_C)^2 + (z_C - z_{CL} - L)^2} &\leq r_L \\ \sqrt{(x_C - x_{CL} - r_C)^2 + (z_C - z_{CL} - L)^2} &\leq r_L \\ \sqrt{(x_C - x_{CL} + r_C)^2 + (z_C - z_{CL})^2} &\leq r_L \\ \sqrt{(x_C - x_{CL} - r_C)^2 + (z_C - z_{CL})^2} &\leq r_L \end{aligned} \right\} \quad (8.44.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(y_C - y_{CL} + r_C)^2 + (z_C - z_{CL} - L)^2} &\leq r_L \\ \sqrt{(y_C - y_{CL} - r_C)^2 + (z_C - z_{CL} - L)^2} &\leq r_L \\ \sqrt{(y_C - y_{CL} + r_C)^2 + (z_C - z_{CL})^2} &\leq r_L \\ \sqrt{(y_C - y_{CL} - r_C)^2 + (z_C - z_{CL})^2} &\leq r_L \end{aligned} \right\} \quad (8.44.3)$$

9

**RAVNE KRIVE U
KOMPJUTERSKOJ
GRAFICI**

9.1 KUBNI SPLAJN (CUBIC SPLINE)

U mnogim industrijskim granama, poput brodogradnje, automobilske ili avioindustrije, tokom projektovanja se izrađuju i crteži u prirodnoj veličini objekta ili sa manjim umanjenjem, koji se crtaju na drvenom podu koji je lociran u potkrovlju (loft). Kvalifikovani majstor za ovaj posao zove se loftsmen (crtač u potkrovlju), a sam postupak je lofting.

Matematički splajn određuje se na osnovu njegove fizičke interpretacije koja se zove loftsmen's splajn. Splajn je dugačak tanak štamp napravljen od drveta ili plastike koji se koristi da bi se formirala kriva između zadatih tačaka ([RA90], [HL93]). Splajn koji je oblikovan pod sopstvenom težinom štampa naziva se patka (duck).

Posmatrajmo elastičnu gredu na koju deluje moment savijanja $M(x)$. Za nju važi Ojlerova (Euler) jednačina

$$M(x) = \frac{EI}{R(x)} \quad (9.1)$$

gde je E Jangov (Young) modul elastičnosti koji je u funkciji vrste materijala elastične grede, I je moment inercije grede, a $R(x)$ je poluprečnik krivine savijene grede. Za male deformacije (kada je $y' \ll 1$) poluprečnik krivine se aproksimira sa

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''}{\sqrt[3]{(1+(y')^2)^3}} \approx y'' \quad (9.2)$$

Kombinujući poslednje dve jednačine dobija se

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} \quad (9.3)$$

Usvajajući za moment savijanja $M(x) = Ax + B$ poslednja jednačina postaje

$$y'' = \frac{Ax + B}{EI} \quad (9.4)$$

Dvostrukom integracijom se dolazi do jednačine

$$y = A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1 \quad (9.5)$$

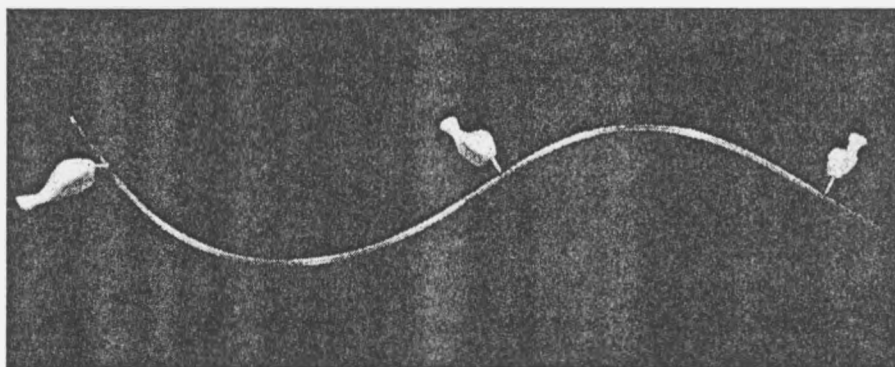
$$A_1 = \frac{A}{6EI}$$

$$B_1 = \frac{B}{2EI} \quad (9.6)$$

$$C_1 = \text{Const}_1$$

$$D_1 = \text{Const}_2$$

Za fizički splajn (Sl. 9.1), jednačina koja opisuje ugib grede je kubni polinom, stoga se i naziva kubni splajn. Jednačina jednoparametarskog kubnog splajna sada je



Sl. 9.1 Fizički splajn

$$P(t) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \quad (9.7)$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

Gde su t_1, t_2 vrednosti parametra t na početku i kraju segmenta, a $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$ je vektor kojim se prikazuje svaka tačka splajn segmenta. Poslednja jednačina može se prikazati preko svojih koordinatnih komponenta

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_x} t^{i-1}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_y} t^{i-1} \quad (9.8)$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_z} t^{i-1}$$

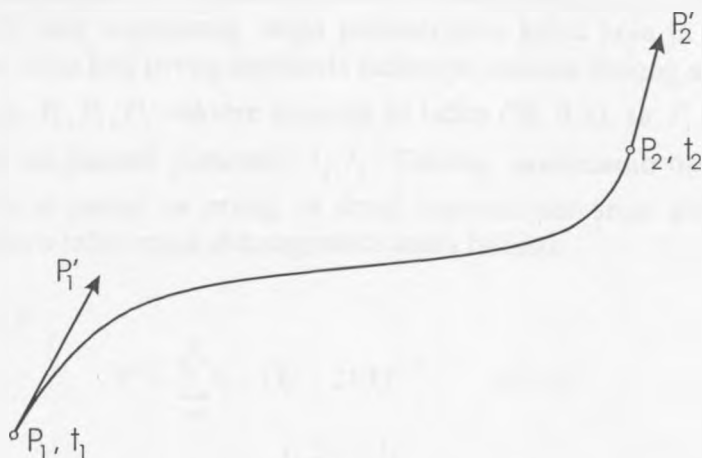
$$t_1 \leq t \leq t_2$$

Koeficijenti B_i se određuju iz četiri granična uslova za segment splajna. Razvijmo jednačinu za $P(t)$

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

Označimo sa P_1, P_2 vektore pozicija tačaka na početku i kraju segmenta, a sa P'_1, P'_2 vektore tangenata u krajnjim tačkama (Sl. 9.2).



Sl. 9.2 Jedan segment kubnog splajna

$$P'(t) = [x'(t) \quad y'(t) \quad z'(t)] = \sum_{i=1}^4 B_i (i-1)t^{i-2} \quad (9.9)$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

ili

$$P'(t) = B_2 + 2B_3t + 3B_4t^2 \quad (9.10)$$

Usvajajući da je $t_1 = 0$, čime se ne gubi na kvalitetu jednačina, granični uslovi postaju

$$\begin{aligned} P_1 &= P(0) = B_1 \\ P_2 &= P(t_2) = B_1 + B_2t_2 + B_3t_2^2 + B_4t_2^3 \\ P_1' &= P'(0) = B_2 \\ P_2' &= P'(t_2) = B_2 + 2B_3t_2 + 3B_4t_2^2 \end{aligned} \quad (9.11)$$

Rešavajući drugu i četvrtu jednačinu (9.11) po B_3 i B_4 dobija se

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \\ B_4 &= \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Sada je jednačina kubnog splajna

$$P(t) = P_1 + P_1't + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] t^3 \quad (9.13)$$

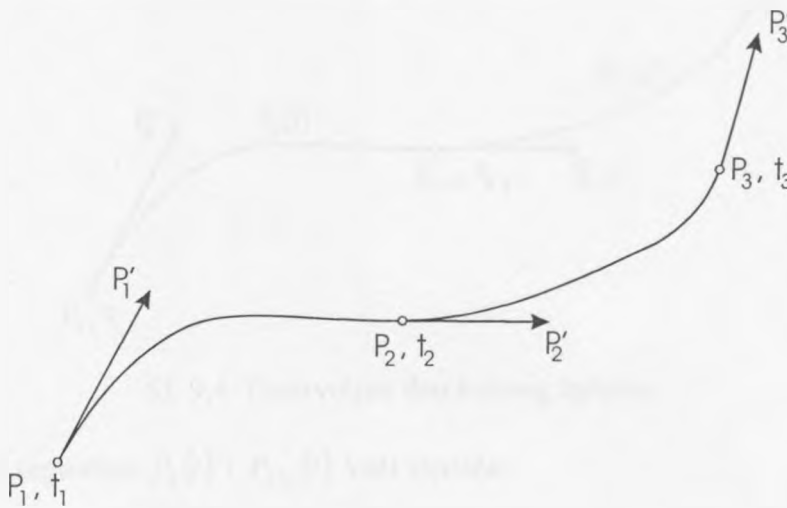
Ova jednačina se odnosi na jedan segment kubnog splajna. Da bi smo prikazali celu krivu treba povećati broj segmenata, stoga posmatrajmo krivu koja je definisana sa dva segmenta, kod koje se na kraj prvog segmenta nastavlja početak drugog segmenta.

Označimo sa P_1, P_2, P_3 vektore pozicija tri tačke (Sl. 9.3), sa P'_1, P'_2, P'_3 tangente u tim tačkama i neka su poznati parametri t_2, t_3 . Takođe, usvojicemo osobinu, da je kriva glatka, odnosno, da se prelaz sa prvog na drugi segment ostvaruje glatko. Znači, drugi izvod kubnog splajna u tački spoja dva segmenta mora biti isti.

Drugi izvod je

$$P'' = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2)B_i t^{i-3} \quad (9.14)$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$



Sl. 9.3 Dva spojena kubna splajna

Za prvi segment splajna parametar t je u intervalu $0 \leq t \leq t_2$, a na kraju intervala kada je $t = t_2$ drugi izvod ima vrednost

$$P'' = 2B_3 + 6B_4 t_2 \quad (9.15)$$

Parametar t za drugi segment uzima vrednost $0 \leq t \leq t_3$, dok je vrednost drugog izvoda na početku intervala za $t=0$

$$P'' = 2B_3 \quad (9.16)$$

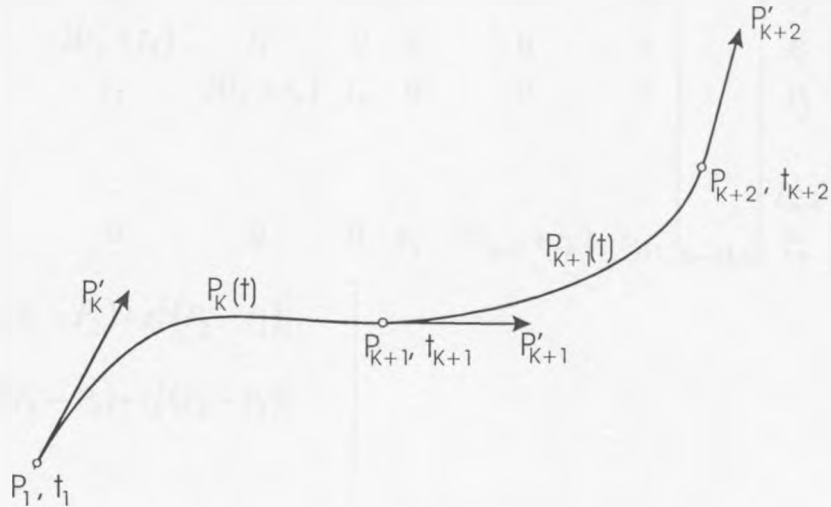
Izjednačavanjem drugih izvoda koji su prikazani gore i uvrštavanjem ranije dobijenih vrednosti za veličine B_3, B_4 formira se jednačina

$$2 \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2} \right] + 6t_2 \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P'_1}{t_2^2} + \frac{P'_2}{t_2^2} \right] = 2 \left[\frac{3(P_3 - P_2)}{t_3^2} - \frac{2P'_2}{t_3} - \frac{P'_3}{t_3} \right] \quad (9.17)$$

Sređivanjem jednačine (9.17) dobija se izraz koji se može rešiti po P_2' , odnosno može se odrediti nepoznati tangentni vektor u tački spajanja dva segmenta.

$$t_3 P_1' + 2(t_2 + t_3) P_2' + t_2 P_3' = \frac{3}{t_2 t_3} [t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)] \quad (9.18)$$

Svi rezultati mogu se generalizovati na splajn koji je izdvojen sa n tačaka (Sl. 9.4) na $(n-1)$ splajn segmenata.



Sl. 9.4 Proizvoljan deo kubnog splajna

Za dva susedna segmenta $P_k(t)$ i $P_{k+1}(t)$ važi sledeće:

- za segment $P_k(t)$

$$P_k(t) = P_k + P_k' t + \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P_k'}{t_{k+1}} - \frac{P_{k+1}'}{t_{k+1}} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P_k'}{t_{k+1}^2} + \frac{P_{k+1}'}{t_{k+1}^2} \right] t^3 \quad (9.19)$$

$$0 \leq t \leq t_{k+1}$$

- za segment $P_{k+1}(t)$

$$P_{k+1}(t) = P_{k+1} + P_{k+1}' t + \left[\frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_{k+2}^2} - \frac{2P_{k+1}'}{t_{k+2}} - \frac{P_{k+2}'}{t_{k+2}} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_{k+2}^3} + \frac{P_{k+1}'}{t_{k+2}^2} + \frac{P_{k+2}'}{t_{k+2}^2} \right] t^3 \quad (9.20)$$

$$0 \leq t \leq t_{k+2}$$

Drugi izvod u zajedničkoj tački oba intervala jednak je

$$P_k''(t_{k+1}) = P_{k+1}''(0) \quad (9.21)$$

Ili

$$t_{k+2}P'_k + 2(t_{k+1} + t_{k+2})P'_{k+1} + t_{k+1}P'_{k+1} = \frac{3}{t_{k+1}t_{k+2}} \left[t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k) \right] \quad (9.22)$$

U matičnom obliku rezultat za sve segmente zajedno je

$$\begin{bmatrix} t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4 + t_5) & t_4 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_n & 2(t_{n-1} + t_n) & t_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-2) \times n} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \vdots \\ P'_{n-1} \\ P'_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)\} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{t_3^2(P_4 - P_3) + t_4^2(P_3 - P_2)\} \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2})\} \end{bmatrix}_{(n-2) \times 1} \quad (9.23)$$

ili

$$[M^*][P'] = [R^*] \quad (9.24)$$

Matrica $[M^*]$ nije kvadratna i ne može se naći inverzna da bi se dobilo rešenje za $[P']$. Stoga se prethodna jednačina modifikuje u sledeći oblik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_n & 2(t_{n-1} + t_n) & t_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \vdots \\ P'_{n-1} \\ P'_n \end{bmatrix}_{n \times 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} P'_1 \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)\} \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2})\} \\ P'_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (9.25)$$

ili

$$[M][P'] = [R] \quad (9.26)$$

Sada je

$$[P'] = [M]^{-1}[R] \quad (9.27)$$

Opšte jednačine za koeficijente su

$$\begin{aligned} B_{1k} &= P_k \\ B_{2k} &= P'_k \\ B_{3k} &= \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}} \\ B_{4k} &= \frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2} \end{aligned} \quad (9.28)$$

ili u matričnom obliku

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}} & \frac{2}{t_{k+1}^2} & -\frac{1}{t_{k+1}} \\ \frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

Tačke na splajn segmentu su definisane izrazom

$$\begin{aligned}
 P_k(t) &= \sum_{i=1}^4 B_{ik} t^{i-1} \\
 0 \leq t &\leq t_{k+1} \\
 1 \leq k &\leq n-1
 \end{aligned} \tag{9.30}$$

odnosno

$$P_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} \tag{9.31}$$

Zamenom vrednosti za koeficijente u poslednju jednačinu dobija se

$$\begin{aligned}
 P_k(\tau) &= \begin{bmatrix} F_1(\tau) & F_2(\tau) & F_3(\tau) & F_4(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \\
 0 \leq \tau &\leq 1 \\
 1 \leq k &\leq n-1
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

gde su

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{t}{t_{k+1}} \\
 F_{1k}(\tau) &= 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1 \\
 F_{2k}(\tau) &= -2\tau^3 + 3\tau^2 \\
 F_{3k}(\tau) &= \tau(\tau^2 - 2\tau + 1)t_{k+1} \\
 F_{4k}(\tau) &= \tau(\tau^2 - \tau)t_{k+1}
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

spojene (blending) funkcije.

9.2 NORMALIZOVANI KUBNI SPLAJN

Neka je parametar t normalizovan za sve splajn segmente, odnosno neka važi $0 \leq t \leq 1$. Spojene funkcije su oblika

$$\begin{aligned}
 F_1(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\
 F_2(t) &= -2t^3 + 3t^2 \\
 F_3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\
 F_4(t) &= t^3 - t^2
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

U matičnom obliku

$$[F] = [T][N] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.35}$$

Kubni splajn je opisan jednačinom

$$P(t) = [F][G] = [T][N][G] \tag{9.36}$$

Matrice $[T]$ i $[N]$ su konstantne za ceo splajn, dok se matrica $[G]$ menja za svaki segment. Jednačina za određivanje tangentskih vektora na granicama segmenata sada postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\{(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1)\} \\ 3\{(P_4 - P_3) + (P_3 - P_2)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 3\{(P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2})\} \end{bmatrix} \tag{9.37}$$

9.3 BEZIJEOVE KRIVE (BEZIER CURVES)

Do sada je analiziran kubni splajn, a to je kriva koja prolazi kroz zadate tačke. Ovakva kriva naziva se i nameštena kriva (fitting curve) i korisna je kod projektovanja avionskih krila, i delova raznih mašina. Drugi tip krive se koristi kada rešenje problema treba da zavisi od estetskih i funkcionalnih uslova, a ovakav problem se u kompjuterskoj grafici zove *ab initio* dizajn. Takve krive se koriste kod konstrukcije školjke automobila, avionskog i brodskog trupa, nameštaja i staklenih predmeta.

Bezijeova kriva (Sl. 9.5) se definiše poligonom i ima sledeća svojstva ([Mor89], [RA90], [HL93]):

1. Bazisna funkcija je realna;
2. Polinom, koji određuje segment krive, je stepena koji je za jedan manji od broja tačaka poligona;
3. Kriva prati oblik zadanog poligona;
4. Prva i poslednja tačka krive su koincidentne sa prvom i poslednjom tačkom poligona;
5. Tangentni vektori na krajevima krive se poklapaju respektivno sa prvom i poslednjom ivicom poligona;
6. Kriva se nalazi unutar konveksnog poligona, koji je konstruisan nad zadatim poligonom;
7. Kriva ne osciluje oko prave linije ako oko iste linije ne osciluju ivice poligona;
8. Kriva je invarijanta afine transformacije.



Sl. 9.5 Bezijeova kriva i poligon koji je definiše

Bezijeova kriva se zadaje parametarskom jednačinom

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) \quad (9.38)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Gde je Bezijeov (Bezier) ili Bernštajnov (Bernstein) bazis (spojena- blending funkcija)

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (9.39)$$

Maksimalna vrednost spojene funkcije se dobija za $t = i/n$ i iznosi

$$J_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) = \binom{n}{i} \frac{i^i (n-i)^{n-i}}{n^n} \quad (9.40)$$

Za prvu tačku na krivoj je $t=0$, a za $i = 0 \wedge i \neq 0$ spojena funkcija je

$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$t = 0 \wedge i = 0$$

$$J_{n,0}(0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} 0^0 (1-0)^{n-0} = 1$$

$$0! = 1, 0^0 = 1;$$

$$t = 0 \wedge i \neq 0$$

$$J_{n,i}(0) = \frac{n!}{i!(n-i)!} 0^i (1-0)^{n-i} = 0$$

$$0^i = 0$$

Sada je

$$P(0) = B_0 J_{n,0}(0) = B_0$$

Za poslednju tačku na krivoj je $t=1$, a za $i = n \wedge i \neq n$ spojena funkcija je

$$t = 1 \wedge i = n$$

$$J_{n,n}(1) = \frac{n!}{n!(n-n)!} 1^n (1-1)^{n-n} = 1$$

$$t = 1 \wedge i \neq n$$

$$J_{n,i}(1) = \frac{n!}{i!(n-i)!} 1^i (1-1)^{n-i} = 0$$

Za krajnju tačku Bezijeove krive važi

$$P(1) = B_n J_{n,n}(1) = B_n$$

Time je dokazano da se početna i krajnja tačka krive poklapaju sa početnom i krajnjom tačkom poligona. Može se dokazati da važi

$$\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) = 1$$

Prikazano pomoću matrica kriva je

$$P(t) = [T][N][G] = [F][G] \quad [G] = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} J_{n,0} & J_{n,1} & \dots & J_{n,n} \end{bmatrix}$$

Za četiri tačke poligona je $n=3$, a kriva

$$P(t) = [F][G] = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

$$P(t) = [T][N][G] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

Za $n+1$ tačku poligona ($n=n$) kriva je data izrazom [CR82]

$$P(t) = [T][N][G] \quad (9.44)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} t^n & t^{n-1} & \dots & t & 1 \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} \binom{n}{n} (-1)^n & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} (-1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{n} \binom{n-n}{n-n} (-1)^{n-n} \\ \binom{n}{0} \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-2} (-1)^{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \binom{n}{0} \binom{n}{1} (-1)^1 & \binom{n}{1} \binom{n-1}{0} (-1)^0 & \dots & 0 \\ \binom{n}{0} \binom{n}{0} (-1)^0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

Članovi matrice N se određuju preko formule

$$(N_{i+1,j+1})_{i,j=0}^n = \left\{ \begin{array}{ll} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-i-j} (-1)^{n-i-j} & 0 \leq i+j \leq n \\ 0 & \text{za ostale} \end{array} \right\} \quad (9.48)$$

$$[N] = [C][D] \quad (9.49)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \binom{n}{n} (-1)^n & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} (-1)^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n}{n} \binom{n-n}{n-n} (-1)^{n-n} \\ \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-2} (-1)^{n-2} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{1} (-1)^1 & \binom{n}{1} \binom{n-1}{0} (-1)^0 & \dots & \dots & 0 \\ \binom{n}{0} (-1)^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \binom{n}{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \end{bmatrix} \quad (9.51)$$

Prvi izvod je

$$P'(t) = \sum_{i=0}^n B_i J'_{n,i}(t) \quad (9.52)$$

Drugi izvod

$$P''(t) = \sum_{i=0}^n B_i J''_{n,i}(t) \quad (9.53)$$

Izvodi bazisne funkcije su

$$J'_{n,i}(t) = \binom{n}{i} \left\{ i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) t^i (1-t)^{n-i-1} \right\} \quad (9.54)$$

$$J''_{n,i}(t) = \frac{i-n}{t(1-t)} J'_{n,i}(t)$$

$$J_{n,i}''(t) = \left\{ \frac{(i-nt)^2 - nt^2 - i(1-2t)}{t^2(1-t)^2} \right\} J_{n,i}(t) \quad (9.55)$$

Izračunavanje vrednosti izvoda preko prikazanih jednačina dovodilo je do izvesnih teškoća, stoga su određeni alternativni izrazi kojima se sračunavaju r -ti izvodi za $t=0$ i $t=1$:

$$P^r(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} B_i \quad (9.56)$$

$$P^r(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} B_{n-i} \quad (9.57)$$

Iz ovih jednačina dobijaju se vrednosti izvoda na krajevima krive, tako da je za prvi izvod

$$\begin{aligned} P'(0) &= n(B_1 - B_0) \\ P'(1) &= n(B_n - B_{n-1}) \end{aligned} \quad (9.58)$$

čime je pokazano da se tangente u krajnjim tačkama poklapaju sa ivicama poligona. Drugi izvodi na krajevima krive su

$$\begin{aligned} P''(0) &= n(n-1)(B_0 - 2B_1 + B_2) \\ P''(1) &= n(n-1)(B_n - 2B_{n-1} + B_{n-2}) \end{aligned} \quad (9.59)$$

9.3.1 Spajanje Bezijeovih krivih

Posmatraju se dve Bezijeove krive. Prva je stepena n opisana jednačinom $P(t)$ i zadata poligonom čija su temena B_i , a druga je stepena m , jednačine $Q(s)$ i pridruženim poligonom sa temenima C_i . Ukoliko je potrebno ostvariti gladak prelaz sa jedne na drugu krivu, tada prvi izvodi, u tački spoja krivih, moraju za obe krive biti jednaki (Sl. 9.6). Ako se na prvu krivu nastavlja druga tada je prethodni uslov predstavljen sa

$$P'(1) = Q'(0) \quad (9.60)$$

$$\begin{aligned} P'(1) &= n(B_n - B_{n-1}) \\ Q'(0) &= m(C_1 - C_0) \end{aligned} \quad (9.61)$$

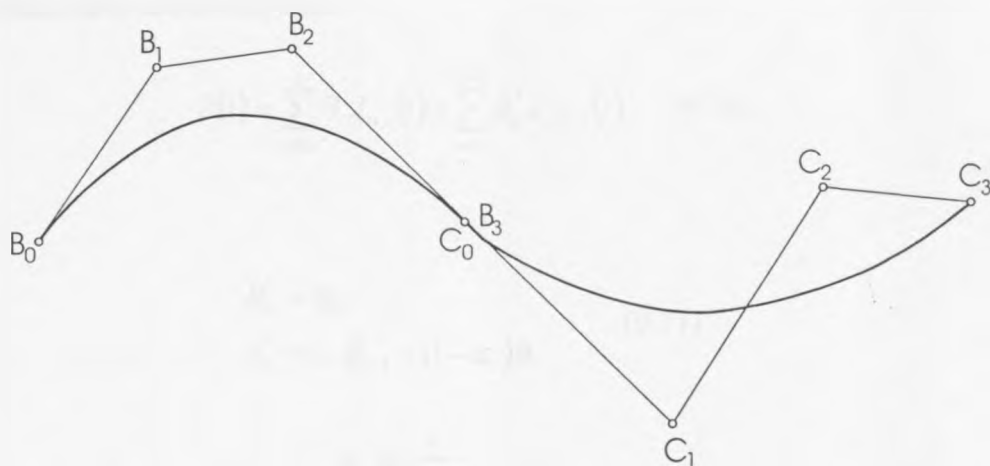
Pošto je kriva neprekidna, važi

$$B_n = C_0 \quad (9.62)$$

Posle sređivanja se dobija

$$C_1 - C_0 = \frac{n}{m}(B_n - B_{n-1}) \quad (9.63)$$

$$C_1 = \frac{n}{m}(B_n - B_{n-1}) + B_n \quad (9.64)$$



Sl. 9.6 Spojena Bezijeova kriva

Znači, pravac tangente u spoju dve krive, se poklapa sa tri okolna temena poligona, prvo je pretposljednje teme prvog poligona, zatim zajedničko teme oba poligona i na kraju drugo teme drugog poligona.

Kada su obe krive istog stepena tada je

$$\begin{aligned} C_1 - C_0 &= B_n - B_{n-1} \\ B_n &= C_0 \end{aligned} \quad (9.65)$$

$$\begin{aligned} C_1 - C_0 &= C_0 - B_{n-1} \\ C_1 - B_n &= B_n - B_{n-1} \end{aligned} \quad (9.66)$$

$$C_1 + B_{n-1} = 2C_0 = 2B_n \quad (9.67)$$

Tačka C_0 nalazi se na sredini između tačaka B_{n-1} i C_1 . Drugi izvod u tački spoja je

$$n(n-1)(B_{n-2} - 2B_{n-1} + B_n) = m(m-1)(C_0 - 2C_1 + C_2) \quad (9.68)$$

odnosno

$$C_2 = \frac{n(n-1)}{m(m-1)} B_{n-2} - 2 \left\{ \frac{n(n-1)}{m(m-1)} + \frac{n}{m} \right\} B_{n-1} + \left\{ 1 + 2 \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m(m-1)} \right\} B_n \quad (9.69)$$

9.3.2 Crtanje krive sa dodatim temenim tačkama poligona

Kriva sa $n+1$ tačaka poligona može se poboljšati dodavanjem tačaka poligonu, i ako je dodata jedna tačka važi izraz

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^* J_{n+1,i}(t) \quad (9.70)$$

gde su

$$\begin{aligned} B_0^* &= B_0 \\ B_i^* &= \alpha_i B_{i-1} + (1 - \alpha_i) B_i \end{aligned} \quad (9.71)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{i}{n+1} \\ i &= 1, \dots, n \\ B_{n+1}^* &= B_n \end{aligned} \quad (9.72)$$

Za n koje teži beskonačnosti, poligon konvergira prema krivoj. Posmatrajmo sada slučaj zamene Bezijeove krive dvema krivama od kojih svaka zamenjuje po polovinu prvobitne krive. Neka je data kubna Bezijeova kriva

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^3 B_0 + 3t(1-t)^2 B_1 + 3t^2(1-t) B_2 + t^3 B_3 \\ 0 &\leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (9.73)$$

Neka prvu polovinu ove krive zamenimo sa sledećom

$$\begin{aligned} Q(u); 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{koeficijenti krive su } C_i; \quad i = 0, \dots, 3$$

a drugu polovinu sa krivom

$$\begin{aligned} R(v); 0 \leq v \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad \text{koeficijenti krive su } D_i; \quad i = 0, \dots, 3$$

Prvi izvod funkcije je

$$P'(t) = -3(1-t)^2 B_0 + 3\{(1-t)^2 - 2t(1-t)\} B_1 + 3\{2t(1-t) - t^2\} B_2 + 3t^2 B_3 \quad (9.74)$$

Dalje se dobijaju jednačine

Za $u = 0 \wedge t = 0$ prvi i drugi izvod funkcija dovodi do

$$\begin{aligned} C_0 &= B_0 \\ 3(C_1 - C_0) &= \frac{3}{2}(B_1 - B_0) \end{aligned} \quad (9.75)$$

Za $u = 1 \wedge t = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{8}(B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0) \\ 3(C_3 - C_2) &= \frac{3}{8}(B_3 + B_2 - B_1 - B_0) \end{aligned} \quad (9.76)$$

Sređivanjem jednačina se dobija

$$\begin{aligned} C_0 &= B_0 \\ C_1 &= \frac{1}{2}(B_1 + B_0) \\ C_2 &= \frac{1}{4}(B_2 + 2B_1 + B_0) \\ C_3 &= \frac{1}{8}(B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0) \end{aligned} \quad (9.77)$$

Analogno, za drugu polovinu krive se dobija

$$\begin{aligned} D_3 &= B_3 \\ D_2 &= \frac{1}{2}(B_3 + B_2) \\ D_1 &= \frac{1}{4}(B_3 + 2B_2 + B_1) \\ D_0 &= \frac{1}{8}(B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0) \end{aligned} \quad (9.78)$$

Odnosno

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{B_j}{2^i} \\ D_i &= \sum_{j=i}^n \binom{n-i}{n-j} \frac{B_j}{2^{n-i}} \\ i &= 0, \dots, n \end{aligned} \quad (9.79)$$

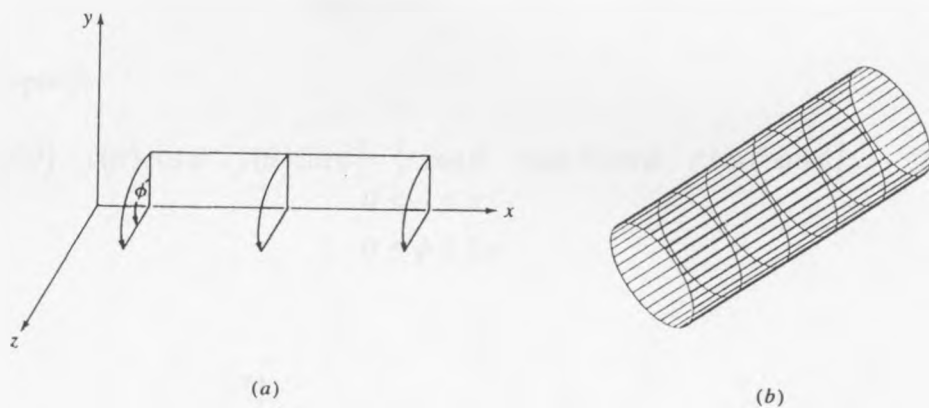
10

**POVRŠI U
KOMPJUTERSKOJ
GRAFICI**

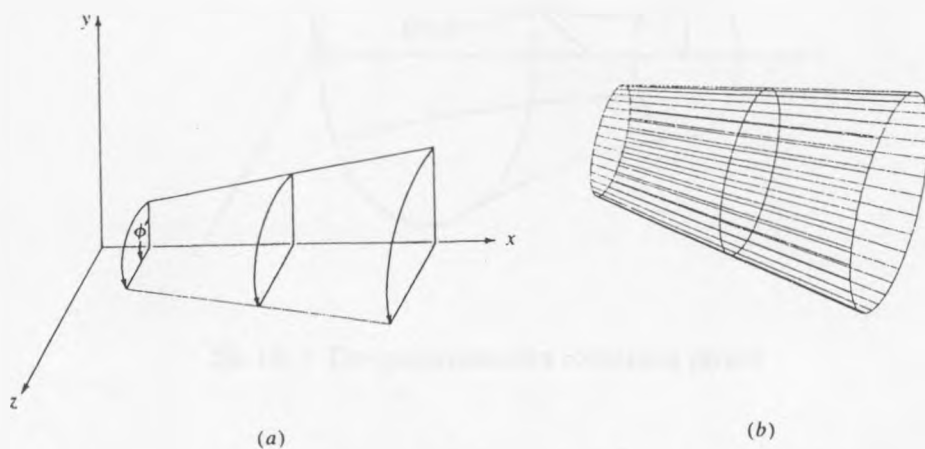
10.1 ROTACIONE POVRŠI (SURFACES OF REVOLUTION)

Najjednostavniji metod za dobijanje površi je rotacija dvodimenzionalnog entiteta (meridijana), prave ili ravne krive, oko koplanarne ose. Može se usvojiti da je u koordinatnom sistemu $Oxyz$ osa rotacije x osa, a da se objekat koji se rotira nalazi u Oxy ravni.

Elementarni objekat za rotaciju je tačka, koja ukoliko ne leži na osi rotacije, rotacijom za 360° opisuje krug, a rotacijom za manji ugao iscrtava kružni luk. Zatim se posmatra prava koja nije koincidentna sa osom rotacije. Ako je prava paralelna sa osom x , njenom rotacijom za pun krug dobija se rotacioni cilindar (Sl. 10.1), čiji je poluprečnik jednak normalnom odstojanju prave od ose x . Ukoliko prava seče osu rezultat njene rotacije je rotacioni konus (Sl. 10.2). Visine cilindra i konusa zavise od dužine duži koja se rotira, jer se prava koja je beskonačno dugačka ne može predstaviti na grafičkom ekranu. Visina cilindra jednaka je dužini duži koja se rotira, a visina konusa jednaka je ortogonalnoj projekciji duži-meridijana na osu rotacije. Ako je meridijan duž koja mimoilazi osu x pod pravim uglom, tada se rotacijom za 360° dobija kružni prsten. Kada duž dodiruje ili seče osu, uz iste ostale uslove kao u prethodnom slučaju, rezultat je ravan disk. Kada se duž-meridijan mimoilazi sa osom pod uglom različitim od 90° , njegovom rotacijom dobija se jednograni rotacioni hiperboloid.



Sl. 10.1 Rotacioni cilindar: (a) Šema; (b) Rezultat



Sl. 10.2 Rotacioni konus: (a) Šema; (b) Rezultat

Parametarska jednačina tačke na rotacionoj površi dobija se polazeći od parametarske jednačine meridijana. Jednačina meridijana je funkcija jednog parametra t [RA90]:

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] \quad (10.1)$$

$$0 \leq t \leq t_{\max}$$

Rotacijom oko ose položaj tačke postaje funkcija još jednog parametra - ugla rotacije ϕ (Slike 10.3 i 10.4). U slučaju kada je meridijan u ravni Oxy , a osa rotacije je x osa, jednačina površi je:

$$Q(t, \phi) = [x(t) \quad y(t)\cos\phi \quad y(t)\sin\phi] \quad (10.2)$$

$$0 \leq t \leq t_{\max}; \quad 0 < \phi \leq 2\pi$$

Lopta se dobija rotacijom (polu)kruga iz ravni Oxy oko dijametralne x ose, pri čemu su parametarske jednačine kruga

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta \quad (10.3)$$

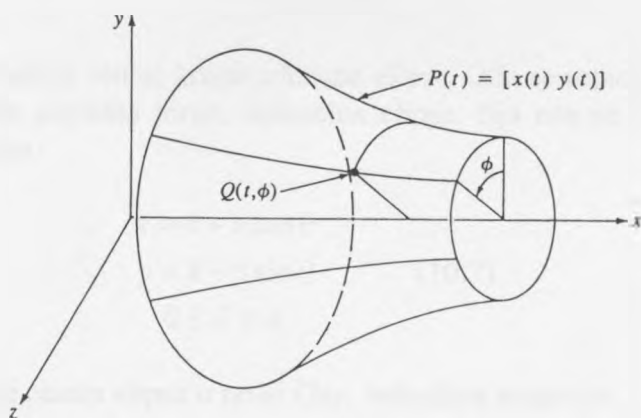
$$0 \leq \theta \leq \pi$$

a jednačina lopte je

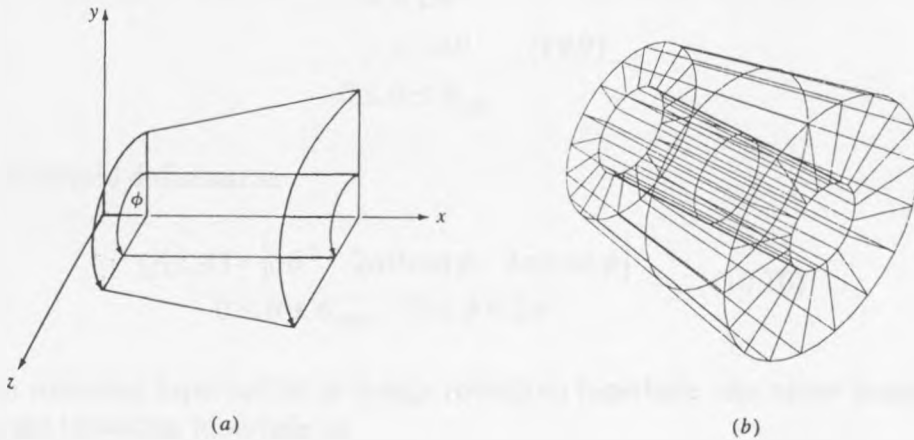
$$Q(\theta, \phi) = [x(\theta) \quad y(\theta)\cos\phi \quad y(\theta)\sin\phi] = [r \cos\theta \quad r \sin\theta \cos\phi \quad r \sin\theta \sin\phi] \quad (10.4)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$



Sl. 10.3 Dvoparametarska rotaciona površ



Sl. 10.4 Rotaciona površ dobijena rotacijom zatvorenog poligona: (a) Šema; (b) Rezultat

Rotacioni elipsoidi se dobijaju rotacijom (polu)elipse oko njenih osa. Parametarska jednačina poluelipse je

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta \\y &= b \sin \theta \\0 &\leq \theta \leq \pi\end{aligned} \quad (10.5)$$

pri čemu su a i b dužine poluosa elipse. Pošto poluosa a elipse stoji u pravcu x ose, tada se rotacijom ovakve poluelipse oko x ose za $a < b$ dobija spljošteni elipsoid, a za $a > b$ rezultat rotacije je izduženi elipsoid. Parametarska jednačina elipsoida je

$$\begin{aligned}Q(\theta, \phi) &= [a \cos \theta \quad b \sin \theta \cos \phi \quad b \sin \theta \sin \phi] \\0 &\leq \theta \leq \pi \\0 &\leq \phi \leq 2\pi\end{aligned} \quad (10.6)$$

Kada osa rotacije ne sadrži centar kruga odnosno elipse, tada se rotacijom ovih meridijana dobija kružni odnosno eliptički torus. Jednačina elipse, čija osa se ne poklapa sa osom rotacije, data je izrazom

$$\begin{aligned}x &= h + a \cos \theta \\y &= k + b \sin \theta \\0 &\leq \theta \leq \pi\end{aligned} \quad (10.7)$$

gde su (h, k) koordinate centra elipse u ravni Oxy . Jednačina torusa je:

$$Q(\theta, \phi) = [h + a \cos \theta \quad (k + b \sin \theta) \cos \phi \quad (k + b \sin \theta) \sin \phi] \quad (10.8)$$

Paraboloid se dobija rotacijom parabole oko njene ose

$$\begin{aligned}x &= a\theta^2 \\y &= 2a\theta \\0 \leq \theta &\leq \theta_{\max}\end{aligned} \quad (10.9)$$

Sada je paraboloid definisan sa

$$\begin{aligned}Q(\theta, \phi) &= \left[a\theta^2 \quad 2a\theta \cos \phi \quad 2a\theta \sin \phi \right] \\0 \leq \theta &\leq \theta_{\max}; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi\end{aligned} \quad (10.10)$$

Jednograni rotacioni hiperboloid se dobija rotacijom hiperbole oko njene imaginarne ose. Parametarske jednačine hiperbole su

$$\begin{aligned}x &= a \sec \theta \\y &= b \tan \theta \\0 \leq \theta &\leq \theta_{\max}\end{aligned} \quad (10.11)$$

Jednačina jednogranog rotacionog hiperboloida je

$$\begin{aligned}Q(\theta, \phi) &= \left[a \sec \theta \quad b \tan \theta \cos \phi \quad b \tan \theta \sin \phi \right] \\0 \leq \theta &\leq \theta_{\max} \\0 \leq \phi &\leq 2\pi\end{aligned} \quad (10.12)$$

10.1.1 Rotacione površi dobijene rotacijom kubnog splajna

Matrični oblik normalizovanog kubnog splajna je (Poglavlje 9)

$$P(t) = [T][N][G] \quad (10.13)$$

Opšta matrična jednačina rotacione površi

$$Q(t, \phi) = P(t)[S] = [T][N][G][S] \quad (10.14)$$

Matrica $[S]$ definiše rotaciju oko ose rotacije za ugao ϕ . Za rotaciju oko x ose (Poglavlje 7)

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

Opštiji slučaj se dobija rotacijom ravne krive oko ose rotacije kada se kriva i osa nalaze u nekom lokalnom koordinatnom sistemu koji je u proizvoljnom položaju u odnosu na globalni koordinatni sistem (Sl. 10.5). Osa rotacije je zadata sa dve tačke a_0 i a_1 , odnosno vektorom \vec{a} koji je usmeren od tačke a_0 prema a_1 .

Rotaciona površ se dobija kroz sledeći skup poteza:

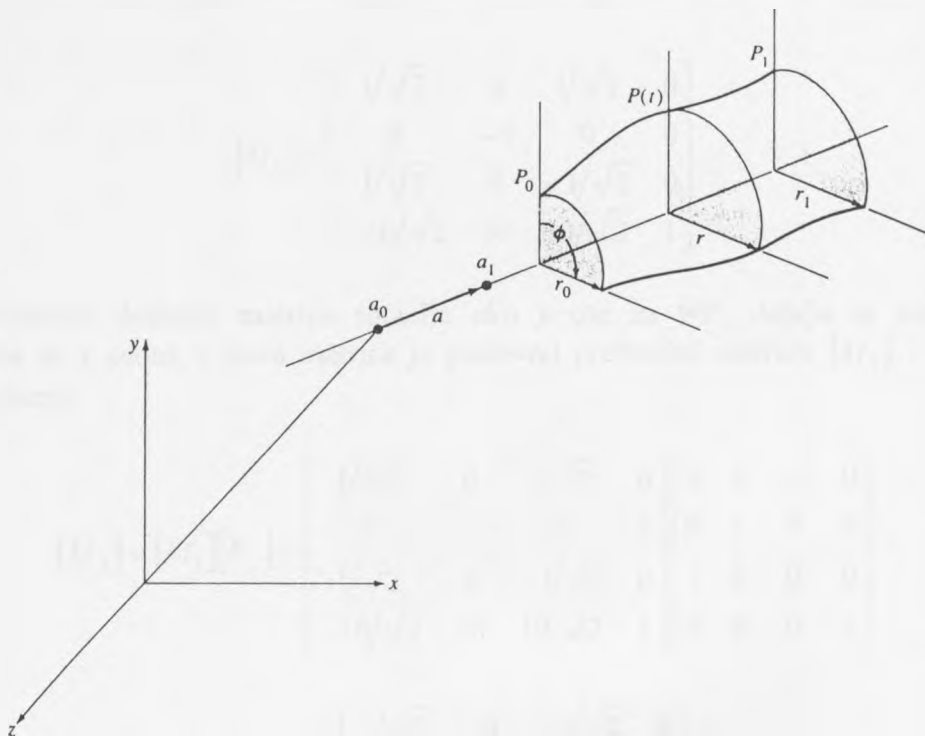
1. Translira se tačka a_0 u koordinatni početak globalnog koordinatnog sistema;
2. Izvrše se dve rotacije dok se \vec{a} ne poklopi sa z osom;
3. Rotira se \vec{a} , oko y ose za 90° , da bi postao koincidentan sa x osom;
4. Translira se po x osi centar rotacione površi, na korektno rastojanje od koordinatnog početka;
5. Izvrši se skup inverznih rotacija;
6. Inverzna translacija.

U matričnom obliku

$$Q(t, \phi) = [\bar{Q}][Tr][\bar{R}_y]^{-1}[R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[Tr]^{-1} \quad (10.16)$$

Analizirajmo prethodnu jednačinu na primeru. Treba odrediti tačku na rotacionoj površi za vrednost parametara $t = \pi/2, \phi = \pi/6$. Površ obrazuje elipsa rotacijom oko ose koja sadrži centar elipse (Sl. 10.6), a elipsa i osa rotacije su u istoj ravni. Velika i mala poluosa elipse su dužine $a=5, b=1$ i elipsa je nagnuta u odnosu na osu rotacije za ugao $i = \pi/4$. Osa

rotacije je određena dvema tačkama $a_0[0 \ 10 \ 10]$ i $a_1[10 \ 10 \ 0]$, a centar elipse je u tački a_1 .



Sl. 10.5 Rotaciona površ sa osom rotacije u proizvoljnom položaju

U ovom slučaju osa rotacije je mimoilazna sa y osom koordinatnog sistema, paralelna je sa ravni Oxz , a sa osama x i z zaklapa ugao od 45° . Stoga su kosinusi uglova

$$[c_x \ c_y \ c_z] = [1/\sqrt{2} \ 0 \ -1/\sqrt{2}]$$

U ovom primeru je $\sin \alpha = \frac{c_x}{d}$

Pomoćna veličina d je

$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kombinovana matrica translacije i dve rotacije, koja dovodi do poklapanja ose rotacije sa z osom je

$$[M_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_1] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ako poslednjem dodamo matricu rotacije oko y ose za 90° , dobija se osa rotacije poklopljena sa x osom, a nova matrica je proizvod prethodne matrice $[M_1]$ i poslednje matrice rotacije

$$[M_2] = [M_1][R_y] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Centar elipse je u tački a_1 , a kada se transformiše pomoću matrice $[M_2]$, imaće nov položaj koji je na x osi, sa koordinatama

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parametarske jednačine elipse su

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \cos i - b \sin t \sin i \\ y &= a \cos t \sin i + b \sin t \cos i \\ 0 &\leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

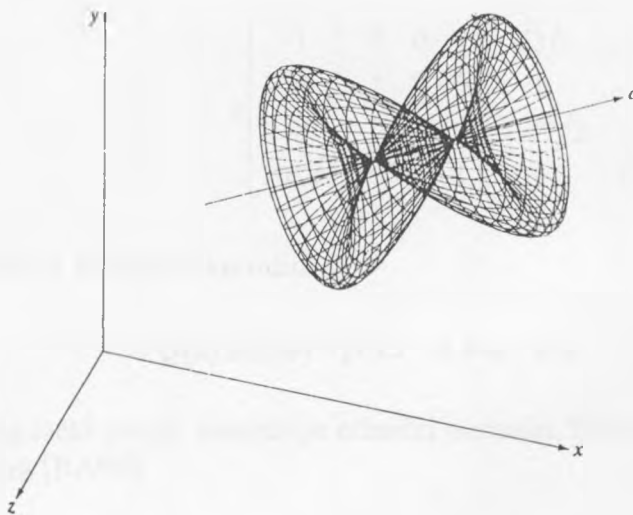
ili

$$[\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos i & \sin i & 0 & 0 \\ -\sin i & \cos i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotaciona površ se dobija rotacijom krive oko x ose

$$[Q] = [T][N][G][S] =$$

$$= [\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos i & \sin i & 0 & 0 \\ -\sin i & \cos i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Sl. 10.6 Površ dobijena rotacijom ellipse

Za $a=5$, $b=1$, $i = \pi/4$

$$[Q] = [\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 5\sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzna matrica $[M_2]^{-1}$ je

$$[M_2]^{-1} = [\bar{R}_y]^{-1} [R_y]^{-1} [R_x]^{-1} [Tr]^{-1}$$

$$[M_2]^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Na kraju, rotaciona površ se vraća u prvobitni položaj

$$[Q] = [T][N][G][S][Tr_x][M_2]^{-1}$$

$$Q(t, \phi) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Za $t = \pi/2, \phi = \pi/6$ tačka ima koordinate

$$Q(\pi/2, \pi/6) = [9.25 \quad 9.388 \quad 0.25 \quad 1]$$

U svakoj tački površi moguće je odrediti normalu. Prvo se odredi prvi izvod površi po oba parametra [RA90]

$$\begin{aligned} Q_t(t, \phi) &= [T][N][G][S] \\ Q_\phi(t, \phi) &= [T][N][G][S'] \end{aligned} \quad (10.17)$$

Normala je

$$n = Q_t \times Q_\phi \quad (10.18)$$

10.2 PROSTIRUĆE POVRŠI (SWEEP SURFACES)

Trodimenzionalna površ se može dobiti kombinovanim kretanjem ravnog objekta, poput duži, poligona ili ravne krive. Ove površi se dosta koriste u kompjuterskoj grafici, a najjednostavniji objekat na kojem se može izvršiti analiza matematičkog aparata je tačka.

Neka je sa $P[x \ y \ z \ 1]$ predstavljena tačka, sa $[T(s)]$ kombinovana transformacija, a sa $Q(s)$ vektor koji opisuje dobijenu krivu (jer se kretanjem tačke dobija u opštem slučaju prostorna kriva). Važiće [RA90]

$$Q(s) = P[x \ y \ z \ 1][T(s)] \quad (10.19)$$

$$s_1 \leq s \leq s_2$$

Ako želimo da dobijemo duž dužine n koja je paralelna sa z osom, tada je

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ns & 1 \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

$$0 \leq s \leq 1$$

Ukoliko je rezultat krug u ravni $z=const$, tada

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} \left(\frac{r}{x}\right) \cos\{2\pi(s + s_i)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r}{y}\right) \sin\{2\pi(s + s_i)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

$$0 \leq s \leq 1$$

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Kombinovanjem prethodna dva slučaja dobija se cilindrična zavojnica u pravcu z ose

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} \left(\frac{r}{x}\right) \cos\{2\pi(s + s_i)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r}{y}\right) \sin\{2\pi(s + s_i)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ns & 1 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

$$0 \leq s \leq 1$$

Ovom metodom najjednostavnija površ dobija se transformacijom duži. Parametarska jednačina duži $P_1P_2[P_1(x_1, y_1, z_1); P_2(x_2, y_2, z_2)]$ je

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t \quad (10.23)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

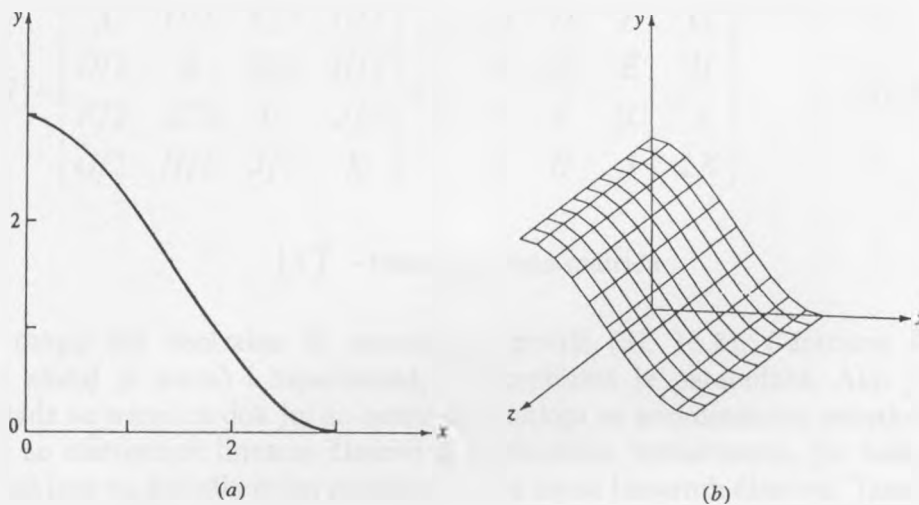
Površ je opisana jednačinom

$$Q(t, s) = P(t)[T(s)] \quad (10.24)$$

$$s_1 \leq s \leq s_2$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Na slici 10.7 je prikazana ravna kriva i prostiruća površ dobijena pomoću te krive.



Sl. 10.7 Kubni splajn formira prostiruću površ: (a) Kriva; (b) Površ

10.3 KVADRIKE (QUADRIC SURFACES)

Kvadrike se algebarski mogu predstaviti jednačinom

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0 \quad (10.25)$$

$A, B, C, D, E, F, G, H, J$ i K su konstante. Kada se jednačina prikaže korišćenjem matrica dobija se

$$[X][S][X]^T = 0 \quad (10.26)$$

gde su

$$[X] = [x \ y \ z \ 1] \quad (10.27)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} A & D/2 & F/2 & G/2 \\ D/2 & B & E/2 & H/2 \\ F/2 & E/2 & C & J/2 \\ G/2 & H/2 & J/2 & K \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A & D & F & G \\ D & 2B & E & H \\ F & E & 2C & J \\ G & H & J & 2K \end{bmatrix} \quad (10.28)$$

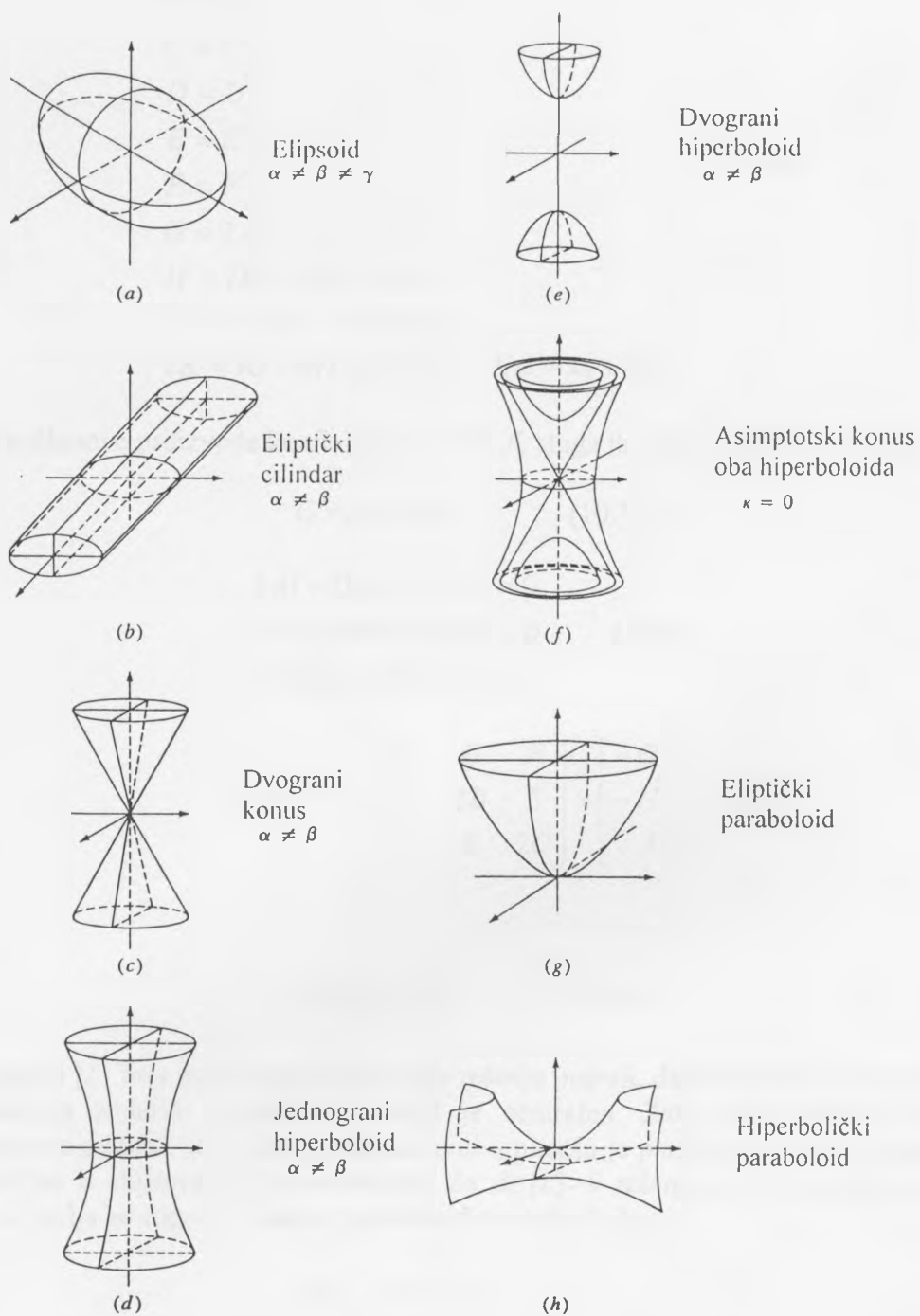
$[X]^T$ - transponovana matrica

Kvadrike mogu biti centralne ili necentralne površi (Sl. 10.8). Centralne su elipsoid (specijalni slučaj je lopta) i hiperboloid, a necentralna je paraboloid. Ako je kvadrika centralna tada se translira dok joj se centar ne poklopi sa koordinatnim početkom. Ovo se radi da bi se eliminisali linearni članovi u prethodnim jednačinama, jer kada se centar kvadrike poklapa sa koordinatnim početkom, tada nema linearnih članova. Translacijom se dolazi do sledeće forme

$$[X][Tr][S][Tr]^T[X]^T = [X][S'][X]^T = 0 \quad (10.29)$$

$$[Tr] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

$$[S'] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A' & D' & F' & G' \\ D' & 2B' & E' & H' \\ F' & E' & 2C' & J' \\ G' & H' & J' & 2K' \end{bmatrix} \quad (10.31)$$



Sl. 10.8 Kvadrike

$$\begin{aligned}
A &= A' \\
B &= B' \\
C &= C' \\
D &= D' \\
E &= E' \\
F &= F' \\
G' &= 2Al + Dm + Fn + G \\
H' &= Dl + 2Bm + En + H \\
J' &= Fl + Em + 2Cn + J \\
2K' &= lG' + mH' + nJ' + (Gl + Hm + Jn + 2K)
\end{aligned} \tag{10.32}$$

Linearne članove proizvode koeficijenti G' , H' , J' , stoga ih treba izjednačiti sa nulom

$$G' = H' = J' = 0 \tag{10.33}$$

$$\begin{aligned}
2Al + Dm + Fn + G &= 0 \\
Dl + 2Bm + En + H &= 0 \\
Fl + Em + 2Cn + J &= 0
\end{aligned} \tag{10.34}$$

$$\begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2A & D & F \\ D & 2B & E \\ F & E & 2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G \\ -H \\ -J \end{bmatrix} \tag{10.35}$$

ili

$$[M][L] = [G] \tag{10.36}$$

Ako matrica $[L]$ ima inverznu matricu, tada rešenje postoji, dakle površ se može translirati u skladu sa zadatim uslovima i površ je centralna. Zato treba proveriti vrednost determinante matrice $[L]$ i ako je jednaka nuli u pitanju je paraboloid, a ako je različita od nule radi se o elipsoidu ili hiperboloidu. Za $\det[L] > 0$ rešenje je hiperboloid, a kada je $\det[L] < 0$ javlja se elipsoid. Dakle, paraboloid se javlja kada je

$$\det[L] = \begin{vmatrix} 2A & D & F \\ D & 2B & E \\ F & E & 2C \end{vmatrix} = 0 \tag{10.37}$$

odnosno

$$A(E^2 - BC) + B(F^2 - AC) + C(D^2 - AB) - (ABC + DEF) = 0 \tag{10.38}$$

Za centralne kvadrike dobija se sledeća forma

$$[X] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa \end{bmatrix} [X]^T = 0 \quad (10.39)$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \chi z^2 = \kappa \quad (10.40)$$

U zavisnosti od vrednosti konstanti $\alpha, \beta, \chi, \kappa$ dobijaju se sledeći slučajevi:

- $\alpha \neq \beta \neq \chi > 0$
 $\kappa > 0$ Elipsoid
- $\alpha = \beta \neq \chi > 0$
 $\kappa > 0$ Rotacioni elipsoid
- $\alpha = \beta = \chi > 0$
 $\kappa > 0$ Lopta
- $\chi = 0$
 $\alpha = \beta > 0$
 $\kappa > 0$ Rotacioni cilindar
- $\chi = 0$
 $\alpha \neq \beta > 0$
 $\kappa > 0$ Eliptički cilindar

Jednačina cilindra je

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa \quad (10.41)$$

- $\chi = 0$
 $\alpha = \beta > 0 \vee \alpha \neq \beta > 0$
 $\kappa = 0$

Imaginarni cilindar, jer zbir kvadrata ne može biti jednak nuli.

- Jedna konstanta je negativna i
 $\chi < 0$
 $\alpha, \beta > 0$ Dvostruki konus
 $\kappa = 0$

Jednačina konusa je

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \chi z^2 \quad (10.42)$$

Kada je $\alpha = \beta$ dobija se rotacioni konus, a za $\alpha \neq \beta$ eliptički konus. Kada je $\alpha, \beta, \chi \neq 0$
 $\kappa = 0$
 rezultat je imaginarni konus.

- $\alpha, \beta, \chi > 0$
 $\kappa < 0$ Imaginarni elipsoid

- Kada je jedna konstanta negativna, a dve su pozitivne, dobija se jednograni hiperboloid, a ako su ove dve pozitivne i međusobno jednake, rezultat je jednograni rotacioni hiperboloid. Kada su dve konstante negativne, a treća je pozitivna, dobija se dvograni rotacioni hiperboloid.

Za paraboloid matrična jednačina je

$$[X] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & 0 \end{bmatrix} [X]^T = 0 \quad (10.43)$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \chi z = 0 \quad (10.44)$$

Ako je $\alpha, \beta > 0$ dobija se eliptički paraboloid, za $\alpha = \beta > 0$ rotacioni paraboloid. Kada je $\alpha \vee \beta > 0$ javlja se hiperbolički paraboloid (sedlasta površ), a u slučaju $\alpha \vee \beta = 0$ parabolički cilindar.

10.3.1 Parametarske jednačine

Elipsoid (Ellipsoid)

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \sin \phi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y &= b \sin \theta \sin \phi & 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ z &= c \cos \phi \end{aligned} \quad (10.45)$$

Jednograni rotacioni hiperboloid (Hyperboloid of one sheet)

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \cosh \phi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y &= b \sin \theta \sinh \phi & -\pi \leq \phi \leq \pi \\ z &= c \sinh \phi \end{aligned} \quad (10.46)$$

Dvograni rotacioni hiperboloid (Hyperboloid of two sheets)

$$\begin{aligned}
 x &= \pm a \cosh \phi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
 y &= b \sin \theta \sinh \phi & -\pi \leq \phi \leq \pi \\
 z &= c \cos \theta \sinh \phi &
 \end{aligned}
 \tag{10.47}$$

Eliptički paraboloid (Elliptic paraboloid)

$$\begin{aligned}
 x &= a\phi \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
 y &= b\phi \sin \theta & 0 \leq \phi \leq \phi_{\max} \\
 z &= \phi^2 &
 \end{aligned}
 \tag{10.48}$$

Hiperbolički paraboloid (Hiperbolic paraboloid)

$$\begin{aligned}
 x &= a\phi \cosh \theta & -\pi \leq \theta \leq \pi \\
 y &= b\phi \sinh \theta & \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max} \\
 z &= \phi^2 &
 \end{aligned}
 \tag{10.49}$$

Eliptički konus (Elliptic cone)

$$\begin{aligned}
 x &= a\phi \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
 y &= b\phi \sin \theta & \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max} \\
 z &= c\phi &
 \end{aligned}
 \tag{10.50}$$

Eliptički cilindar (Elliptic cylinder)

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
 y &= b \sin \theta & \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max} \\
 z &= \phi &
 \end{aligned}
 \tag{10.51}$$

Parabolički cilindar (Parabolic cylinder)

$$\begin{aligned}
 x &= a\theta^2 & 0 \leq \theta \leq \theta_{\max} \\
 y &= 2a\theta & \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max} \\
 z &= \phi &
 \end{aligned}
 \tag{10.52}$$

Kvadrrike se mogu opisati i geometrijski. Za ovu prezentaciju potrebno je izdvojiti tačku, dva normalna jedinična vektora i tri skalara. Tačka, koja je centar ili teme površi, fiksira položaj površi. Vektori i njihovi proizvodi određuju ose ili orijentaciju površi. Skalari određuju dimenzije odnosno veličinu površi. U tabeli 2 su prikazani relevantni primeri.

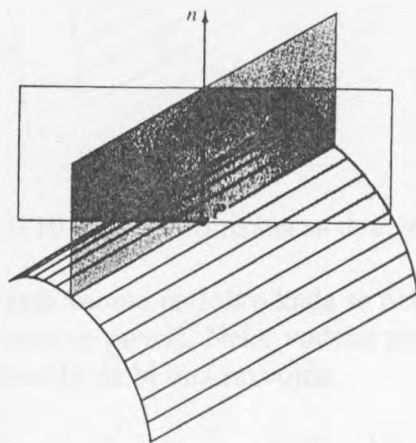
10.3.2 Geometrijska prezentacija kvadraka

Površ	Skalar	Tačka	Vektori
Ravan	Nema	Bilo koja u ravni	Jedinična normala
Lopta	Poluprečnik	Centar	Nema
Rotacioni konus	Ugao pri vrhu	Centar (ili Vrh)	Jedinični vektor paralelan osi
Rotacioni cilindar	Poluprečnik	Bilo koja na osi	Jedinični vektor paralelan osi
Eliptički cilindar	Dužine osa elipse (2) (dva podatka)	Bilo koja na osi	Jedinični vektor paralelan osi
Parabolički cilindar	Odstojanje fokusa	Teme	Jedinični vektor paralelan osi
Eliptički konus	Dužine osa elipse (2)	Centar	Jedinični vektor paralelan osi
Elipsoid	Dužine osa (3)	Centar	Dva jedinična vektora paralelna sa dve od tri ose
Eliptički paraboloid	Dužine osa elipse (2)	Teme	Jedinični vektor paralelan osi
Hiperbolički paraboloid	Fokusi parabole i hiperbole (3)	Teme	Jedinični vektor paralelan osi
Jednograni hiperboloid	Dužine osa elipse (2)	Centar	Jedinični vektor paralelan osi
Dvograni hiperboloid	Dužine osa elipse (2)	Centar	Jedinični vektor paralelan osi
	Tačka preseka osa simetrija (1)		

Tabela 2 Geometrijska prezentacija kvadraka

10.4 VOĐENE I RAZVOJNE POVRŠI (RULED AND DEVELOPABLE SURFACES)

Vođene površi se koriste pri proizvodnji aviona i brodova. Avionska krila su cilindrično vođene površi. Vođena površ se definiše na sledeći način: u bilo kojoj tački površi odredi se normala, a zatim se usvoji ravan koja sadrži ovu normalu i rotira se oko nje (Sl. 10.9). Time je dobijen pramen ravni kojim je pramenjača normala površi u posmatranoj tački. Svaka od ravni iz pramena seče površ, u opštem slučaju, po nekoj prostornoj krivoj. Ukoliko se, najmanje za jedan položaj ravni, kao presek ravni i površi dobija prava koja leži na površi, tada se radi o vođenoj površi za dati pravac. Ako ima dve takve ravni površ je dvostruko vođena, za tri ravni je trostruko vođena i tako dalje.



Sl. 10.9 Određivanje vođene površi

Kod vođene površi zadaju se dve vodilje $P(u,0)$ i $P(u,1)$ koje se spajaju pravim linijama (Sl. 10.10) pri čemu je zadovoljeno

$$Q(u, w) = P(u,0)(1-w) + P(u,1)w \quad (10.53)$$

ili

$$[Q] = [x(u, w) \quad y(u, w) \quad z(u, w)] = [1-w \quad w] \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} \quad (10.54)$$

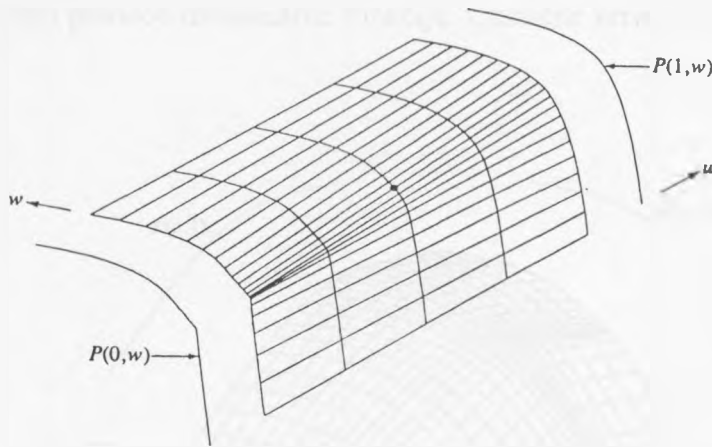
Granice površi se poklapaju sa zadatim krivim jer je

$$\begin{aligned} Q(u,0) &= P(u,0) \\ Q(u,1) &= P(u,1) \end{aligned} \quad (10.55)$$

Alternativne jednačine po drugom parametru su

$$Q(u, w) = P(0, w)(1-u) + P(1, w)u \quad (10.56)$$

$$[Q] = [x(u, w) \quad y(u, w) \quad z(u, w)] = [1-u \quad u] \begin{bmatrix} P(0, w) \\ P(1, w) \end{bmatrix} \quad (10.57)$$



Sl. 10.10 Površ definisana sa dve vodilje

U tehničkim disciplinama veoma je dobro kada se neka površ može razviti u ravan. Ovakve površi se nazivaju razvojne površi. Neke vodene površi se mogu razviti i postoje uslovi koje površ treba da zadovolji da bi bila razvojna.

U svakoj tački površi, u pramenu ravni koji sadrži normalu, površ ima različite krivine κ . Ojler (Euler) je odredio uslove za određivanje minimalne i maksimalne krivine κ_{\min} i κ_{\max} , koje se nazivaju glavne krivine. Dve kombinacije glavnih krivina su posebno interesantne, a to su srednja i Gausova (Gauss) krivina

$$H = \frac{\kappa_{\min} + \kappa_{\max}}{2} \quad (10.58)$$

$$K = \kappa_{\min} \kappa_{\max}$$

Za razvojnu površ Gausova krivina je jednaka nuli ($K=0$). Dill je za dvoparametarsku površ odredio H i K u sledećoj formi [Dil81]

$$H = \frac{A|Q_w|^2 - 2BQ_u Q_w + C|Q_u|^2}{2|Q_u \times Q_w|^3}$$

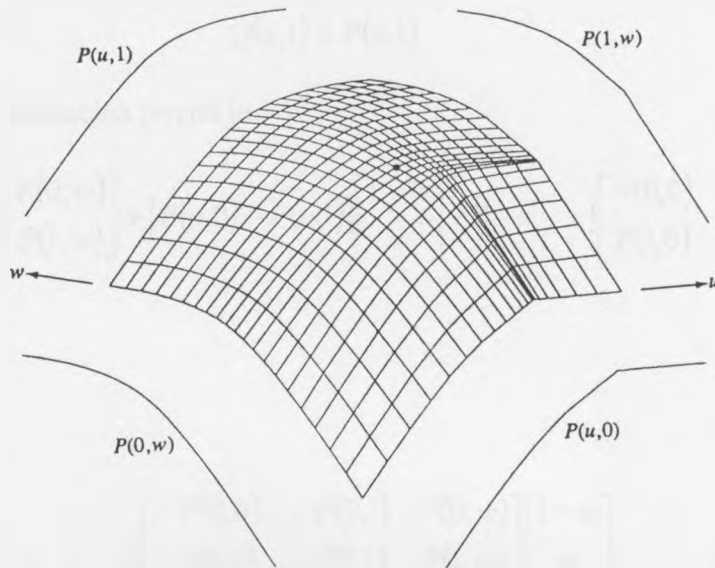
$$K = \frac{AC - B^2}{|Q_u \times Q_w|^4} \quad (10.59)$$

$$(A \quad B \quad C) = [Q_u \times Q_w] [Q_{uu} \quad Q_{uv} \quad Q_{vw}]$$

gde je sa indeksom označen parcijalni izvod po parametru, npr. $Q_u = \frac{\partial Q}{\partial u}$.

10.5 KUNOVE LINEARNE POVRŠI (LINEAR COONS SURFACES)

Neka su zadate četiri granične krive $P(u,0)$, $P(u,1)$, $P(0,w)$, $P(1,w)$ i neka se tačke na površi određuju pomoću dvolinearne funkcije. Granične krive uokviruju datu površ (Sl. 10.11).



Sl. 10.11 Linearna površ

Pozivajući se na analogiju sa vođenom površi, koja je linearna po jednom parametru, dvolinearna površ se može predstaviti sa

$$Q(u, w) = P(u,0)(1-w) + P(u,1)w + P(0,w)(1-u) + P(1,w)u \quad (10.60)$$

U temenima površi će biti

$$Q(0,0) = 2P(0,0) \quad (10.61)$$

a na granicama površi

$$Q(0, w) = P(0,0)(1-w) + P(0,1)w + P(0, w) \quad (10.62)$$

$$Q(u, 0) = P(u,0) + P(0,0)(1-u) + P(1,0)u \quad (10.63)$$

U ovom slučaju kraj površi se ne poklapa sa njenom granicom (sa zadatim vodiljama) što se može izbjeći korišćenjem poboljšane jednačine površi

$$Q(u, w) = P(u,0)(1-w) + P(u,1)w + P(0,w)(1-u) + P(1,w)u - P(0,0)(1-u)(1-w) - P(0,1)(1-u)w - P(1,0)u(1-w) - P(1,1)uw \quad (10.64)$$

Za ovakvu funkciju će važiti

$$Q(0,0) = P(0,0)$$

$$Q(0,w) = P(0,w)$$

$$Q(1,w) = P(1,w)$$

$$Q(u,0) = P(u,0)$$

$$Q(u,1) = P(u,1)$$

U matričnom obliku jednačina površi je

$$Q(u,w) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,w) \\ P(1,w) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P(u,0) & P(u,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix} \quad (10.65)$$

Odnosno

$$Q(u,w) = \begin{bmatrix} 1-u & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(0,0) & -P(0,1) & P(0,w) \\ -P(1,0) & -P(1,1) & P(1,w) \\ P(u,0) & P(u,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.66)$$

10.6 KUNOVE DVOSTRUKO KUBNE POVRŠI (COONS BICUBIC SURFACE)

Kod ovih površi se za granične krive koristi normalizovani kubni splajn, koji je oblika

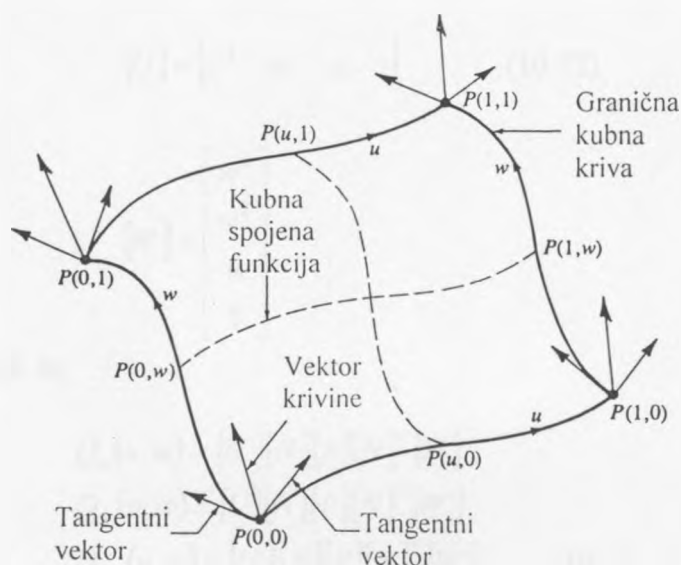
$$P(t) = B_1 + B_2t + B_3t^2 + B_4t^3 \quad (10.67)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Granične krive $P(u,0)$, $P(u,1)$, $P(0,w)$, $P(1,w)$ se prikazuju i u matričnom obliku

$$P(t) = [T][N][G] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_1' \\ P_2' \end{bmatrix} \quad (10.68)$$

gde parametar t uzima vrednost u ili w . Kubna spojena funkcija se usvaja za definisanje tačaka na površi između graničnih funkcija. Ovde se ističu dve funkcije (Sl. 10.12), jedna se koristi za definisanje granice površi (normalizovani kubni splajn), a druga za tačke na površi unutar granice (spojena funkcija).



Slika 10.12 Geometrija dela dvostruko kubne površi

Spojena funkcija je

$$F(t) = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad F_3(t) \quad F_4(t)] = [T][N] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.69)$$

gde su

$$\begin{aligned} F_1(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ F_2(t) &= -2t^3 + 3t^2 \\ F_3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ F_4(t) &= t^3 - t^2 \end{aligned} \quad (10.70)$$

Površ je definisana funkcijom

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) & F_4(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_w(0,0) & P_w(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_w(1,0) & P_w(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uw}(0,0) & P_{uw}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uw}(1,0) & P_{uw}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{bmatrix} \quad (10.71)$$

$$0 \leq u \leq 1$$

$$0 \leq w \leq 1$$

$$Q(u, w) = [U][N][P][N]^T [W]$$

$$[U] = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \quad (10.72)$$

$$[W] = \begin{bmatrix} w^3 \\ w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parametarski izvodi su

$$\begin{aligned} Q_u(u, w) &= [U'] [N] [P] [N]^T [W] \\ Q_w(u, w) &= [U] [N] [P] [N]^T [W'] \\ Q_{uw}(u, w) &= [U'] [N] [P] [N]^T [W'] \\ Q_{uu}(u, w) &= [U''] [N] [P] [N]^T [W] \\ Q_{ww}(u, w) &= [U] [N] [P] [N]^T [W''] \end{aligned} \quad (10.73)$$

gde su

$$\begin{aligned} [U'] &= \begin{bmatrix} 3u^2 & 2u & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ [U''] &= \begin{bmatrix} 6u & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.74)$$

$$\begin{aligned} [W'] &= \begin{bmatrix} 3w^2 \\ 2w \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [W''] &= \begin{bmatrix} 6w \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.75)$$

Normala površi je

$$n = Q_u \times Q_v \quad (10.76)$$

10.7 PRIKAZIVANJE POVRŠI POMOĆU ZAKRPA (PIECEWISE SURFACE REPRESENTATION)

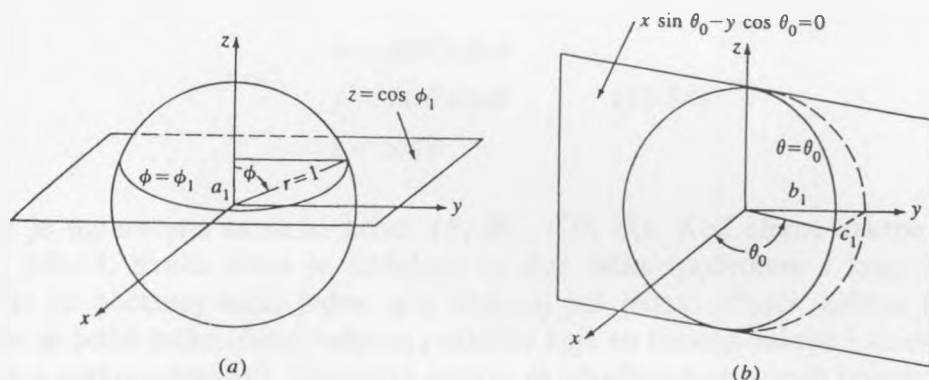
Postoji mnogo površi za koje ne postoji analitički zapis. Tipični primeri su školjka automobila, aviona, skulpture, flaše, cipele i tako dalje. Takve površi se prikazuju preko skupa povezanih površi koje se nazivaju zakrpe. Jednačina cele površi ne postoji, ali su poznate osobine delova površi, odnosno zakrpe se formiraju sa određenim svojstvima.

Posmatrajmo primer kada se za zakrpu usvaja loptin isečak. Lopta je poluprečnika $r=1$, a centar lopte je u koordinatnom početku. Jednačina lopte je

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (10.77)$$

Presekom lopte horizontalnim ravnima dobijaju se paralele, odnosno krugovi koji su međusobno paralelni. Ako sa ϕ označimo ugao između z ose i pravca poluprečnika lopte za neku paralelu (Sl. 10.13) tada je z koordinata paralele data izrazom

$$z = \cos \phi \quad (10.78)$$



Sl. 10.13 Ravan presek lopte: (a) Presek po paraleli; (b) Presek po meridijanu

dok je jednačina paralele na visini z

$$x^2 + y^2 = 1 - \cos^2 \phi = \sin^2 \phi \quad (10.79)$$

Presek lopte sa ravnima koje sadrže vertikalnu osu z kao rezultat daje meridijane lopte. Neka je ravan pod uglom θ u odnosu na x osu. Jednačina ravni je

$$\begin{aligned} x \sin \theta - y \cos \theta &= 0 \\ c_1 x - b_1 y &= 0 \\ c_1 &= \sin \theta \\ b_1 &= \cos \theta \end{aligned} \quad (10.80)$$

Iz ove jednačine se dobija

$$x = \frac{b_1}{c_1} y \quad (10.81)$$

Zamenom poslednjeg izraza u jednačinu lopte formira se oblik

$$y^2 \left[\left(\frac{b_1}{c_1} \right)^2 + 1 \right] + z^2 = 1 \quad (10.82)$$

što predstavlja jednačinu kruga. Sferna zakrpa se formira odsecanjem dela lopte sa četiri ravni. Dve su horizontalne (seku loptu po dve paralele), a dve vertikalne (seku loptu po dva meridijana). Vektor, koji reprezentuje površ je

$$\begin{aligned} Q(\theta, \phi) &= [\cos \theta \sin \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \phi] \\ \theta_1 &\leq \theta \leq \theta_2 \\ \phi_1 &\leq \phi \leq \phi_2 \end{aligned} \quad (10.83)$$

jer su parametarske jednačine lopte

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \sin \phi \\ y &= \sin \theta \sin \phi \\ z &= \cos \phi \end{aligned} \quad (10.84)$$

Zakrpa je ograničena sa četiri krive AB , BC , CD , DA . Kod sferne zakrpe ove krive su kružni lukovi. Svaka kriva je određena sa dve tačke (početnom i krajnjom) i sa dve tangente (u početnoj tački jedna, a u krajnjoj još jedna). Znači, zakrpa (Sl. 10.14) je opisana sa četiri tačke (četiri vektora pozicije) koje su temena zakrpe i sa osam tangenata (po dve u svakom temenu). Tangentni vektori se određuju preko prvih izvoda:

$$\begin{aligned} Q_\theta(\theta, \phi) &= \frac{\partial Q(\theta, \phi)}{\partial \theta} = [-\sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta \sin \phi \quad 0] \\ Q_\phi(\theta, \phi) &= \frac{\partial Q(\theta, \phi)}{\partial \phi} = [\cos \theta \cos \phi \quad \sin \theta \cos \phi \quad -\sin \phi] \end{aligned} \quad (10.85)$$

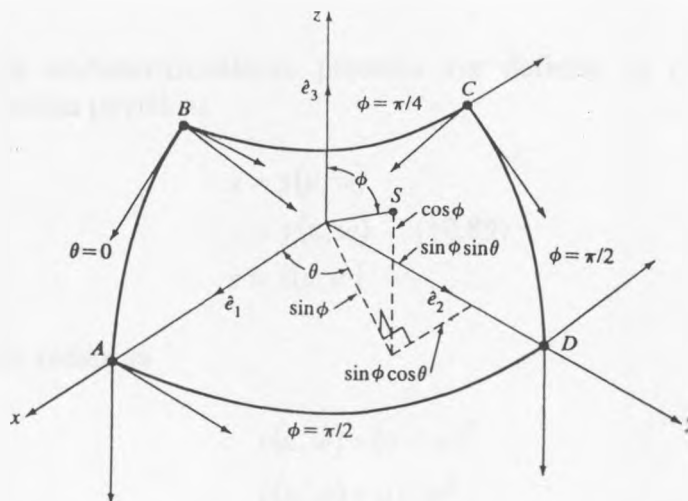
Oblik površi u blizini svakog temena se kontroliše pomoću drugog izvoda

$$Q_{\theta\phi}(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 Q(\theta, \phi)}{\partial \theta \partial \phi} = [-\sin \theta \cos \phi \quad \cos \theta \cos \phi \quad 0] \quad (10.86)$$

Sada je zakrpa određena sa ukupno 16 podataka:

1. 4 vektora položaja za 4 temena;
2. 8 tangentskih vektora, po dva za svako teme;

3. 4 vektora krivine (twist vectors), u svakom temenu po jedan.



Sl. 10.14 Sferna zakrpa

U svakoj tački zakrpe moguće je odrediti vektor normale

$$n = Q_\theta \times Q_\phi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \sin^2\phi & \sin\theta \sin^2\phi & -\sin\phi \cos\phi \end{bmatrix} \quad (10.87)$$

Ako se zakrpa sastoji od izoparametarskih linija, odnosno ako je određena preko krivih sa konstantnim parametrima, tada su dva sistema krivih koje određuju površ, međusobno u svakoj tački pod pravim uglom. Za slučaj lopte ovo se lako dokazuje određivanjem skalarnog proizvoda prvih izvoda.

$$Q_\theta Q_\phi = \begin{bmatrix} -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \cos\phi \\ -\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \sin\phi \cos\theta \cos\phi + \cos\theta \sin\phi \sin\theta \cos\phi \end{bmatrix} = 0 \quad (10.88)$$

10.8 KARTOGRAFSKE PARAMETARSKE POVRŠI (MAPPING PARAMETRIC SURFACES)

Površ se u trodimenzionalnom prostoru xyz definiše sa dva parametra u , w . Parametarske jednačine površi su

$$\begin{aligned}x &= x(u, w) \\y &= y(u, w) \\z &= z(u, w)\end{aligned} \quad (10.89)$$

Na primer, površ je zadata sa

$$\begin{aligned}x(u, w) &= (u - w)^2 \\y(u, w) &= u - w^2 \\z(u, w) &= uw \\0 &\leq u \leq 1 \\0 &\leq w \leq 1\end{aligned}$$

Određimo granične krive površi

$$\begin{aligned}u = 0; \quad x &= w^2 \\y &= -w^2 \\z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u = 1; \quad x &= (1 - w)^2 \\y &= 1 - w^2 \\z &= w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w = 0; \quad x &= u^2 \\y &= u \\z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w = 1; \quad x &= (u - 1)^2 \\y &= u - 1 \\z &= u\end{aligned}$$

Odnosno

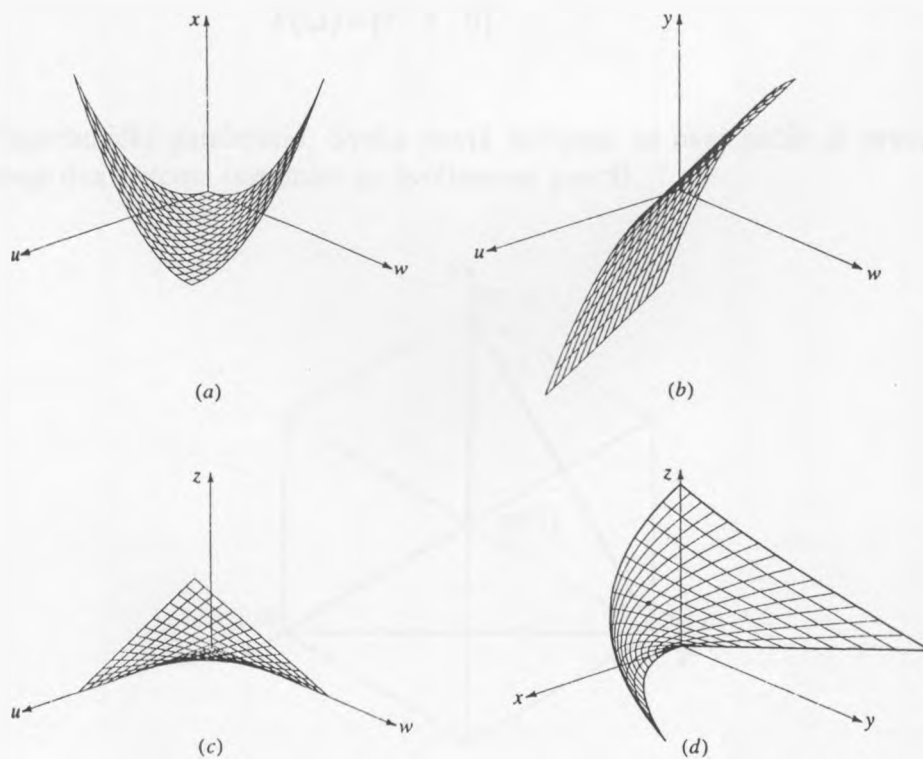
$$u = 0; \quad x = -y \\ z = 0$$

$$u = 1; \quad x = (1 - z)^2 \\ y = 1 - z^2$$

$$w = 0; \quad x = y^2 \\ z = 0$$

$$w = 1; \quad x = y^2 \\ z = 1 + y$$

Na slici 10.15 je prikazana promena komponentata x , y , z u zavisnosti od parametara u , w , kao i sama površ.



Sl. 10.15 Trodimenzionalna kartografska površ: (a) x komponenta; (b) y komponenta; (c) z komponenta; (d) cela površ;

10.9 DVOLINEARNE POVRŠI (BILINEAR SURFACES)

Jedna od najjednostavnijih površi je dvolinearna površ. Pri formiranju ove površi polazi se od kocke čije su ivice jedinične dužine (Sl. 10.16), a na kocki se izdvajaju četiri temena $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,1)$, $P(1,0)$. Svaka tačka na površi je određena preko izraza

$$Q(u, w) = P(0,0)(1-u)(1-w) + P(0,1)(1-u)w + P(1,0)u(1-w) + P(1,1)uw \quad (10.90)$$

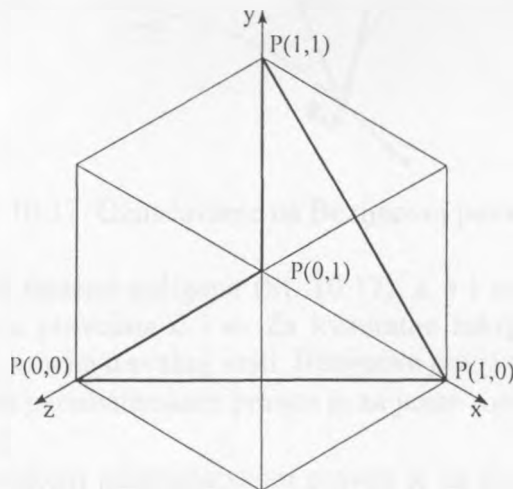
U matričnom obliku

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix} \quad (10.91)$$

Ako za temena usvojimo koordinate kao na slici 10.16

$$\begin{aligned} P(0,0) &= [0 \ 0 \ 1] \\ P(0,1) &= [1 \ 1 \ 1] \\ P(1,0) &= [1 \ 0 \ 0] \\ P(1,1) &= [0 \ 1 \ 0] \end{aligned} \quad (10.92)$$

dobija se hiperbolički paraboloid. Svaka površ dobijena na ovaj način je pravoizvodna, tačnije postoje dva sistema izvodnica za dvolinearne površi.



Slika 10.16 Poligon za definisanje dvolinearne površi

10.10 BEZIJEOVE POVRŠI

Bezijeova površ je zadata sa

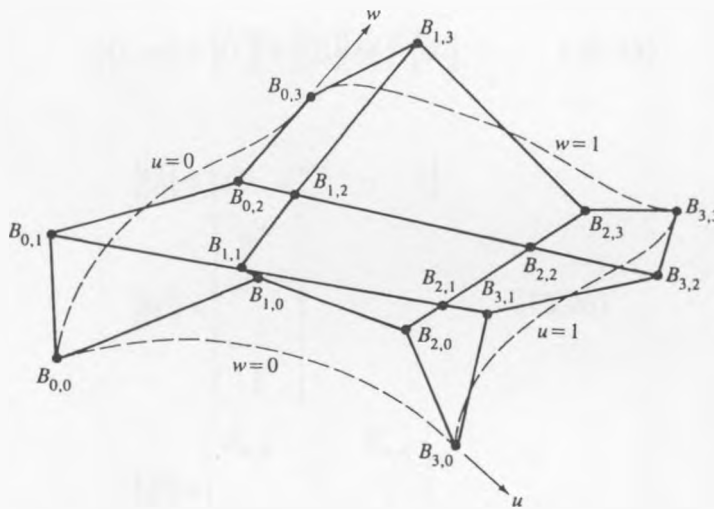
$$Q(u, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(w) \quad (10.93)$$

gde su

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (10.94)$$

$$K_{m,j}(w) = \binom{m}{j} w^j (1-w)^{m-j}$$

Bernštajnove (Bernstein) bazisne funkcije u u i w parametarskim pravcima.



Sl. 10.17 Označavanje na Bezijeovoj površi

Sa $B_{i,j}$ su označena temena poligona (Sl. 10.17), a n i m su respektivno za jedan manji od brojeva temena u pravcima u i w . Za kvadratne zakrpe na površi poligonalna mreža mora imati isti broj temena u svakoj vrsti. Bezijeova površ ima sledeće osobine:

- ◆ Stepenn površi u svakom parametarskom pravcu je za jedan manji od broja temena poligona u tom pravcu;
- ◆ Kontinuitet površi u svakom parametarskom pravcu je za dva manji od broja temena poligona u tom pravcu (kontinuitet je funkcija drugog izvoda površi);
- ◆ Površ generalno prati oblik definisane poligonalne mreže;
- ◆ Zajedničke tačke površi i poligonalne mreže su samo krajnje tačke poligonalne mreže;
- ◆ Površ se nalazi unutar konveksnog omotača koji je formiran nad poligonalnom mrežom;
- ◆ Površ je invarijanta affine transformacije.

Svaka granična kriva Beziijeove površi je Beziijeova kriva. Za poligonalnu mrežu 4×4 tangenti vektori u zakrpa kontrolišu intenzitetom i smerom položaj susednih temena duž ivice mreže. Recimo (Sl. 10.17), tangenti vektori u tački A u pravcima u i w kontrolišu temena $B_{1,0}$ i $B_{0,1}$, a parovi temena $B_{2,0}$, $B_{3,1}$, zatim $B_{2,3}$, $B_{3,2}$ i $B_{1,3}$, $B_{0,2}$ su kontrolisani tangentskim vektorima u pravcima u i w u temenima B , C i D , respektivno. Na četiri unutrašnje tačke $B_{1,1}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$ i $B_{1,2}$ utiču intenzitetima i pravcima vektori krivine površi (twist) u temenima A , B , C i D , respektivno.

Na slici 10.18 je prikazana Beziijeova površ sa poligonalnom mrežom 4×4 koja je centrirana u odnosu na koordinatni početak sa krajevima površi na ± 15 u x i z pravcima, a y koordinate u krajnjim temenima su 5. Osnova mreže i rezultujuća površ su prikazani na 10.18a, gde je $B_{0,0}$ teme koje se nalazi na levoj granici crteža, a $B_{3,3}$ se nalazi na desnoj strani. Na slici 10.18b je prikazan uticaj dvostrukog povećanja intenziteta tangentskih vektora u temenu $B_{0,0}$, a na slici 10.18c je prikazana promena smera tangentskih vektora u $B_{0,3}$ u oba parametarska smera pomeranjem temena $B_{1,3}$ i $B_{0,2}$. Slika 10.18d pokazuje efekat dupliranja intenziteta vektora krivine u temenu $B_{0,0}$ bez promene njegovog pravca. Ovde je teme $B_{1,1}$ jedino pomereno i parametarske linije u blizini $B_{0,0}$ imaju veću zakrivljenost.

U matričnom obliku Beziijeova površ je definisana jednačinom

$$Q(u, w) = [U][N][B][M]^T [W] \quad (10.95)$$

Gde je

$$[U] = \begin{bmatrix} u^n & u^{n-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

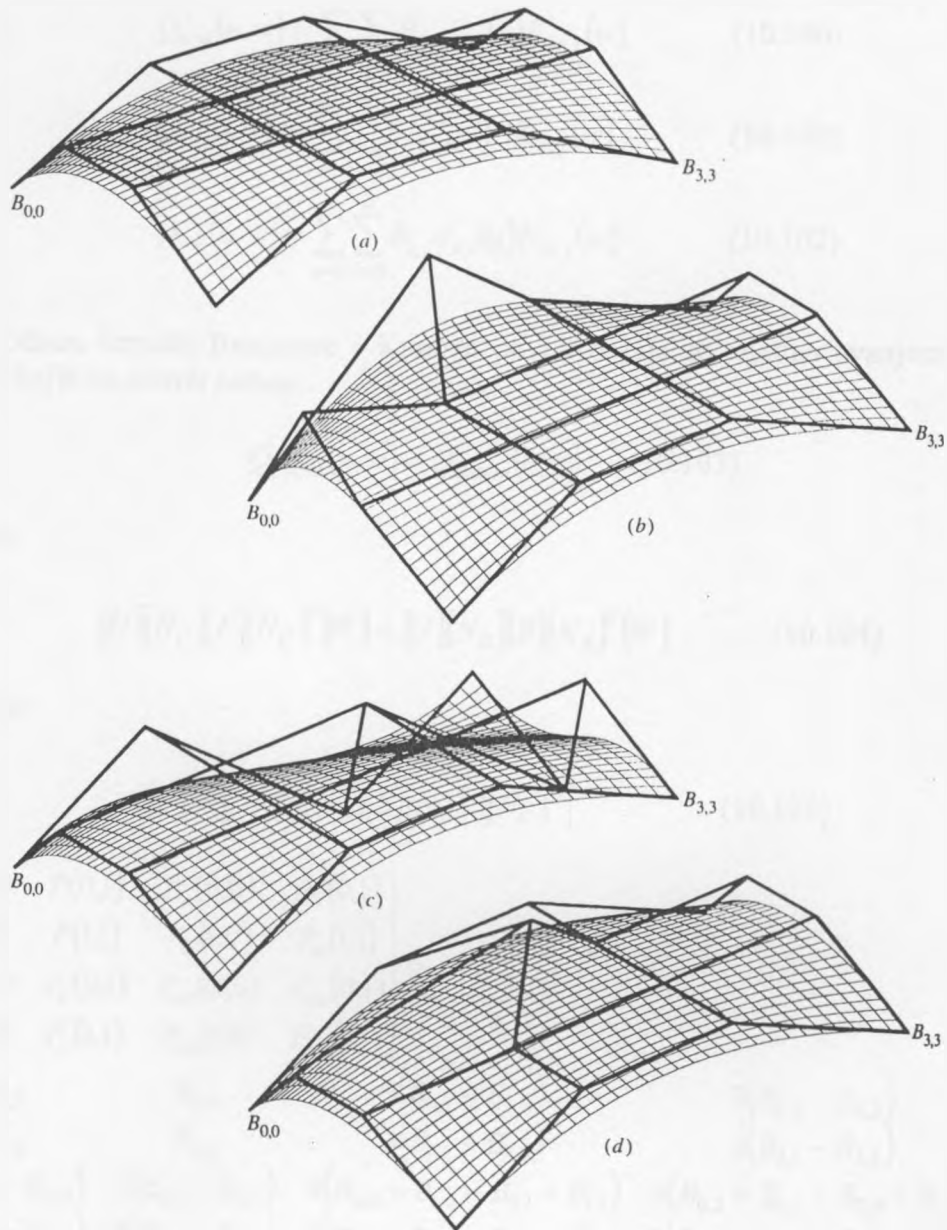
$$[W] = \begin{bmatrix} w^m \\ w^{m-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.96)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{0,0} & \dots & B_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,0} & \dots & B_{n,m} \end{bmatrix}$$

U slučaju kada je mreža 4×4 površ je opisana jednačinom

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} \quad (10.97)$$

$$\times \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^3 \\ w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$



Slika 10.18 Dvostruko kubna Bezijeova površ: (a) Baza površi; (b) efekat promene oba tangenta vektora u tački $B_{0,0}$; (c) efekat promene vektora tangente u $B_{3,3}$; (d) Promena vektora u $B_{0,0}$.

Prvi i drugi parametarski izvodi Bezijeove površi su

$$Q_u(u, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J'_{n,i}(u) K_{m,j}(w) \quad (10.98)$$

$$Q_w(u, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K'_{m,j}(w) \quad (10.99)$$

$$Q_{u,w}(u,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J'_{n,i}(u) K'_{m,j}(w) \quad (10.100)$$

$$Q_{uu}(u,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J''_{n,i}(u) K_{m,j}(w) \quad (10.101)$$

$$Q_{ww}(u,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K''_{m,j}(w) \quad (10.102)$$

Odnos između Bezijeove i Kunove površi dobija se izjednačavanjem jednačina pomoću kojih su površi zadate

$$Q_{Coons}(u,w) = Q_{Bezier}(u,w) \quad (10.103)$$

Odnosno

$$[U][N_C][P][N_C]^T[W] = [U][N_B][B][N_B]^T[W] \quad (10.104)$$

Odavde je

$$[P] = [N_C]^{-1}[N_B][B][N_B]^T[[N_C]^T]^{-1} \quad (10.105)$$

$$\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_w(0,0) & P_w(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_w(1,0) & P_w(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{inv}(0,0) & P_{inv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{inv}(1,0) & P_{inv}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,3} & 3(B_{0,1} - B_{0,0}) & 3(B_{0,3} - B_{0,2}) \\ B_{3,0} & B_{3,3} & 3(B_{3,1} - B_{3,0}) & 3(B_{3,3} - B_{3,2}) \\ 3(B_{1,0} - B_{0,0}) & 3(B_{1,3} - B_{0,3}) & 9(B_{0,0} - B_{1,0} - B_{0,1} + B_{1,1}) & 9(B_{0,2} - B_{1,2} - B_{0,3} + B_{1,3}) \\ 3(B_{3,0} - B_{2,0}) & 3(B_{3,3} - B_{2,3}) & 9(B_{2,0} - B_{3,0} - B_{2,1} + B_{3,1}) & 9(B_{2,2} - B_{3,2} - B_{2,3} + B_{3,3}) \end{bmatrix} \quad (10.106)$$

Iz pod-matrice 2×2 matrice (10.106) se vidi da tačke Kunove površi utiču na vektore krivine Bezijeove površi u njenim krajnjim tačkama. Može se pisati

$$\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_w(0,0) & P_w(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_w(1,0) & P_w(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{inv}(0,0) & P_{inv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{inv}(1,0) & P_{inv}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(0,0) & Q(0,1) & Q_w(0,0) & Q_w(0,1) \\ Q(1,0) & Q(1,1) & Q_w(1,0) & Q_w(1,1) \\ Q_u(0,0) & Q_u(0,1) & Q_{inv}(0,0) & Q_{inv}(0,1) \\ Q_u(1,0) & Q_u(1,1) & Q_{inv}(1,0) & Q_{inv}(1,1) \end{bmatrix} \quad (10.107)$$

Zavisnost Bezijeove površi od Kunove površi predstavljen je jednačinom

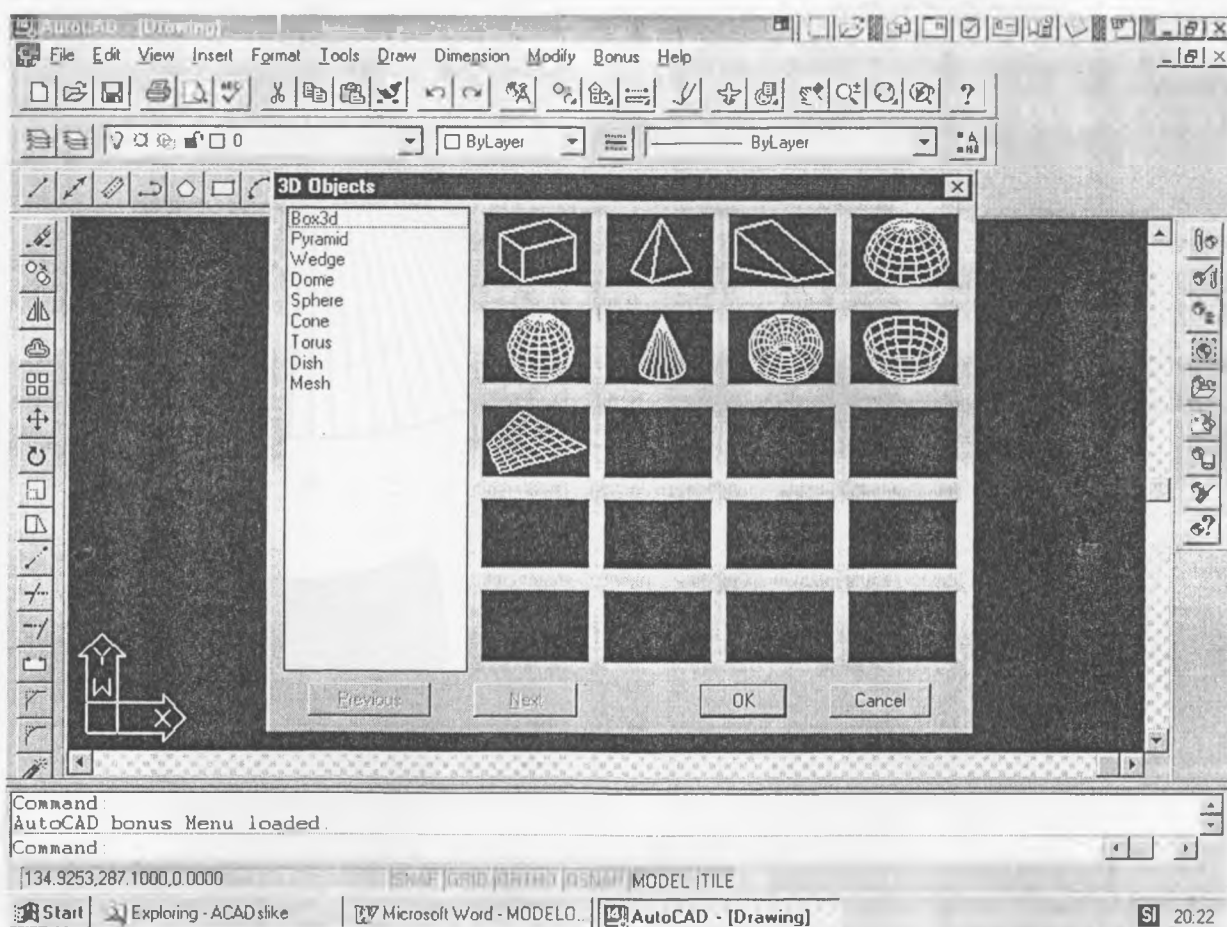
$$\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3P(0,0) & 3P(0,0) + P_u(0,0) \\ 3P(0,0) + P_u(0,0) & \frac{1}{3}\{P_{uv}(0,0) + 9P(0,0) - 3(P_u(0,0) - P_v(0,0))\} \\ 3P(1,0) - P_u(1,0) & \frac{1}{3}\{P_{uv}(1,0) + 9P(1,0) - 3(P_u(1,0) - P_v(1,0))\} \\ 3P(1,0) & 3P(1,0) + P_u(1,0) \\ 3P(0,1) - P_v(0,1) & 3P(0,1) \\ \frac{1}{3}\{P_{uv}(0,1) + 9P(0,1) - 3(P_u(0,1) - P_v(0,1))\} & 3P(0,1) + P_u(0,1) \\ \frac{1}{3}\{P_{uv}(1,1) + 9P(1,1) - 3(P_u(1,1) - P_v(1,1))\} & 3P(1,1) - P_u(1,1) \\ 3P(1,1) - P_v(1,1) & 3P(1,1) \end{bmatrix}$$

(10.108)

11 PREGLED AKTUELNOG SOFTVERA

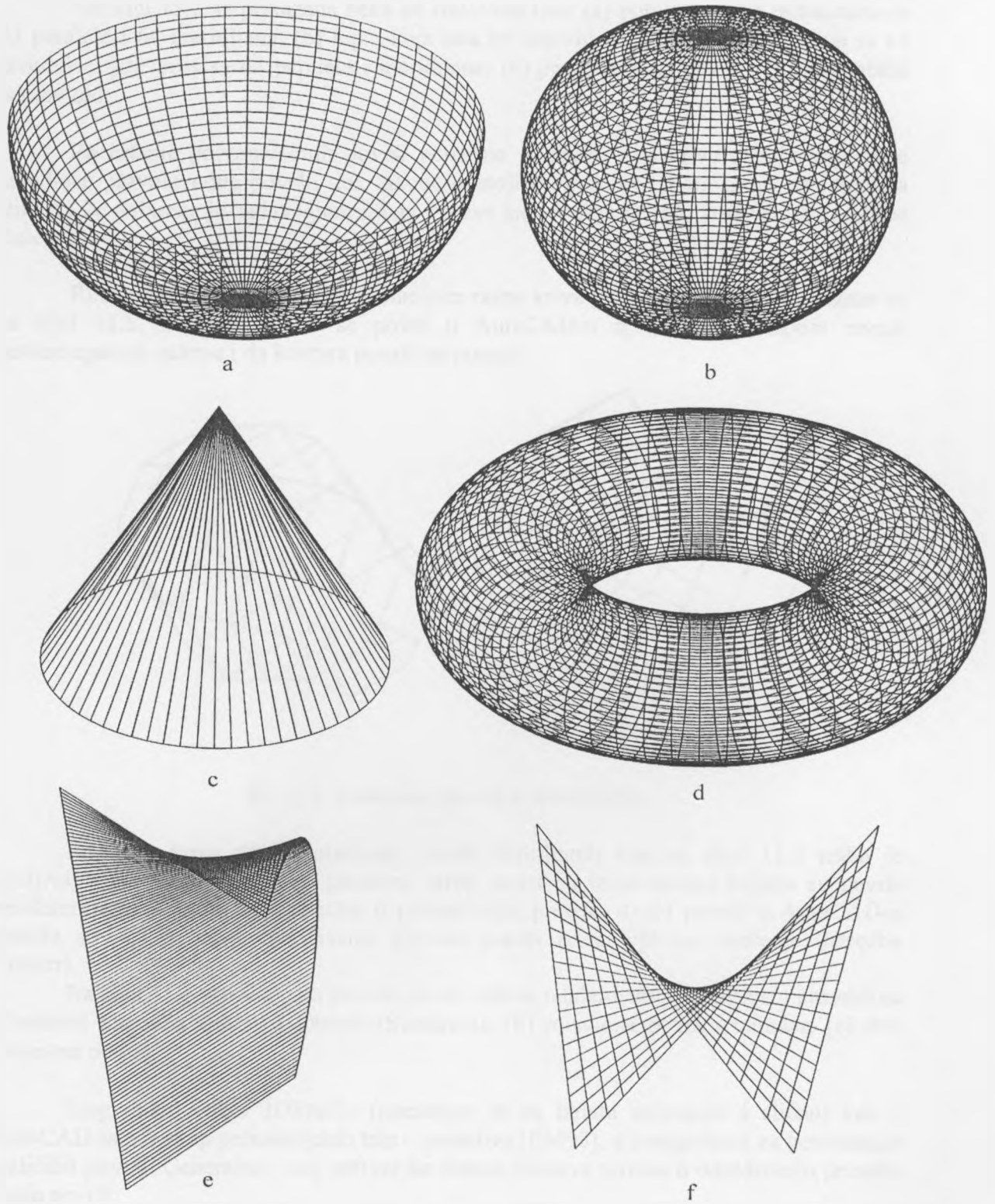
Jedan od najpoznatijih softvera za izradu 2D crteža dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata jeste AutoCAD. Modelovanje površi u AutoCAD-u moguće je izvesti na tri načina [Laz97]. Prvi je izborom površi koja je na spisku primitiva u okviru softvera. Drugi način je izvlačenjem (ekstrudovanjem – naredba je Extrude) zatvorene konture duž zadate putanje ili z ose konstrukcione ravni, a treći je rotiranjem zatvorene konture za zadati ugao. Površ je prikazana ivicama ili izvodnicama i predstavlja kruto i homogeno telo. Nad konstruisanim površima (solidima) moguće je primeniti Bulove operacije sabiranja (Union) i oduzimanja (Substract) zapremine, odnosno određivanja zajedničke zapremine (Intersection).

Do površi-primitiva dolazi se preko padajućeg menija: Draw>Surfaces>3D Surfaces, čime je dobijen prozor prikazan na slici 11.1.



Sl. 11.1 Ekran AutoCAD-a i icon meni 3D Objects

U okviru icon menija 3D Objects na raspolaganju su sledeće trodimenzionalne površi: Kocka ili kvadar (Box3d), piramida (Pyramid), klin (Wedge), lopta (Sphere), konus (Cone), torus (Torus), gornja (Dome) i donja (Dish) polulopta i prostorna mreža (Mesh).

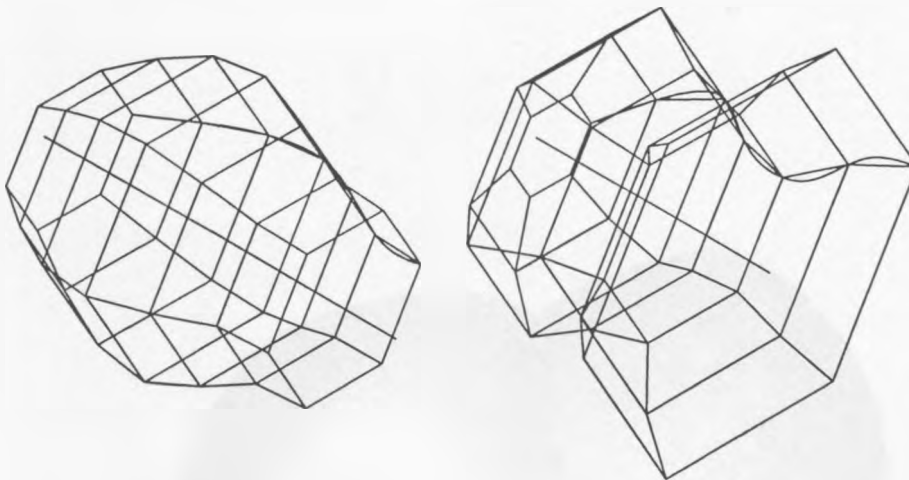


Sl. 11.2 Neka osnovna tela u AutoCAD-u

Na slici 11.2 su prikazana neka od osnovnih tela: (a) polulopta koja je nacrtana sa 32 paralele i 64 meridijana; (b) lopta koja ima 64 meridijana i paralela; (c) konus sa 64 izvodnice; (d) torus sa 64 paralele i meridijana; (e) pravoizvodna površ; (f) hiperbolički paraboloid.

Za crtanje pravoizvodnih površi potrebno je zadati dve krive-vodilje koje nose izvodnice pravoizvodne površi, dok takođe postoji mogućnost izbora broja izvodnica, a slika 11.2e dobijena je zadavanjem kruga i prave kao vodilja površi, korišćenjem naredbe Rulesurf.

Rotacione površi su dobijene rotacijom ravne krive (splajna) oko ose i prikazane su na slici 11.3. Uočljivo je da se površ u AutoCAD-u aproksimira skupom ravnih četvorougona i da kontura površi ne postoji.



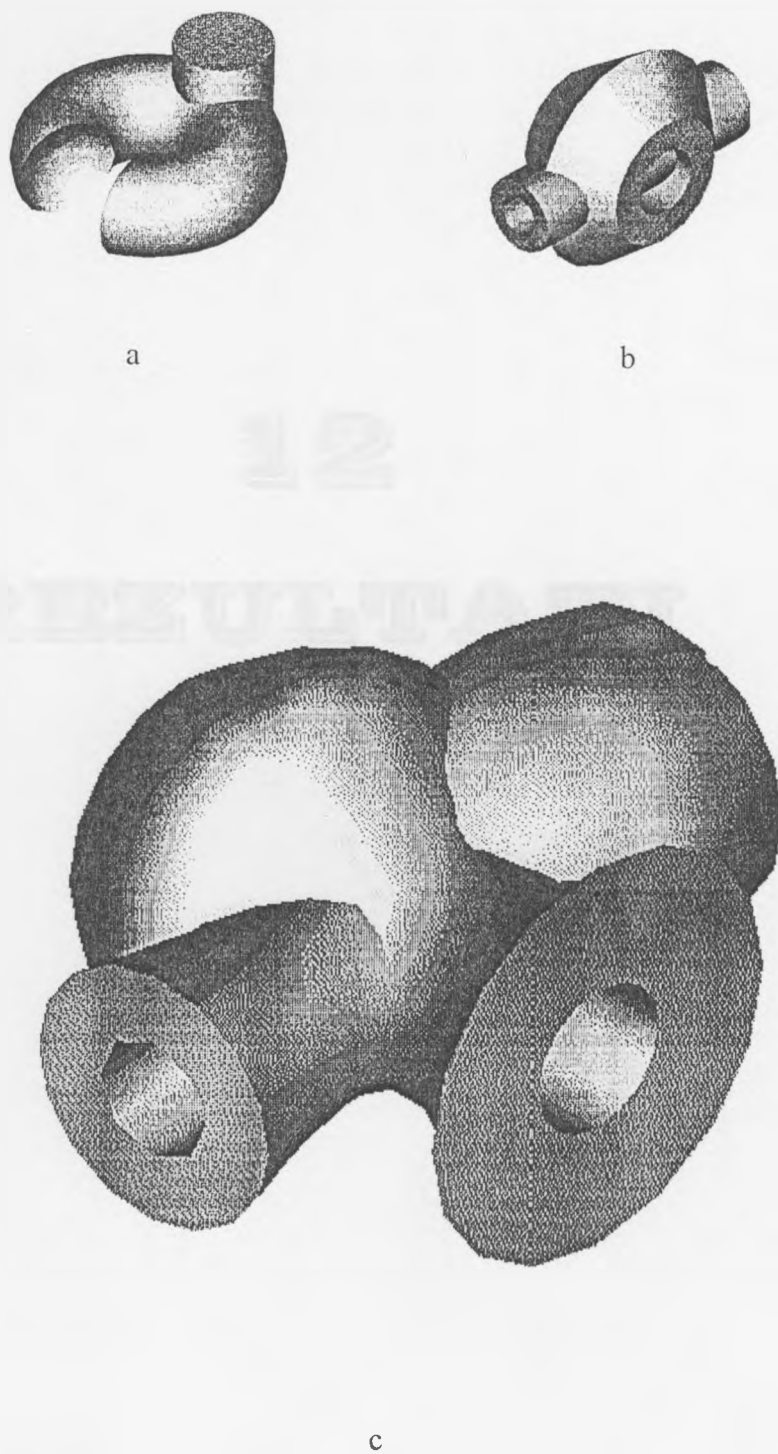
Sl. 11.3 Rotacione površi u AutoCAD-u

Presečna kriva dveju rotacionih površi formiranih kao na slici 11.3 teško je uočljiva, a preciznost u crtanju presečne krive zavisi od broja zakrpa kojima su površi aproksimirane. Znatno bolji rezultat u prikazivanju preseka dveju površi u AutoCAD-u postiže se ako se posle određivanja preseka površi izvrši njihovo senčenje (naredba Render).

Na slici 11.4 prikazani su preseki površi nakon renderovanja: (a) torus u preseku sa cilindrom (naredba Union) i loptom (Substract); (b) rotaciona površ i cilindar; (c) dve rotacione površi.

Programski paket 3DStudio (namenjen je za izradu animacija i slično) kao i AutoCAD sadrži skup geometrijskih tela – primitiva [EM98], a i mogućnost za generisanja različitih površi. Generalno, ovaj softver ne donosi nikakve novine u određivanju preseka dveju površi.

Paketi Mathematica [KH94], Derive [Hec95] i slični, koji su namenjeni matematičarima, imaju znatno redukovane mogućnosti po pitanjima određivanja a pre svega prikazivanja preseka dveju površi, mada za analitički opisanu površ imaju sasvim zadovoljavajući prikaz površi. Ovakve razlike u kvalitetu pojedinih softvera za prikazivanje površi i njihovih međusobnih preseka sasvim su prirodne i proizilaze iz različitih primarnih potreba pojedinih struka.



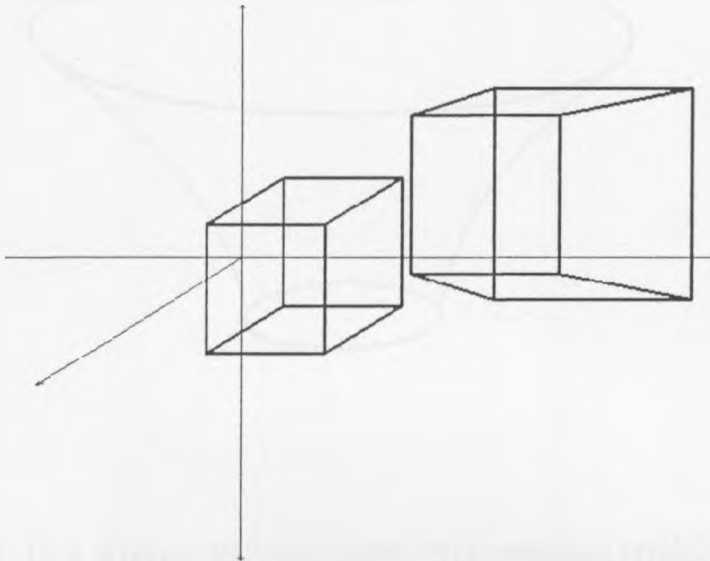
Slika 11.4 Preseci solida u AutoCAD-u

12

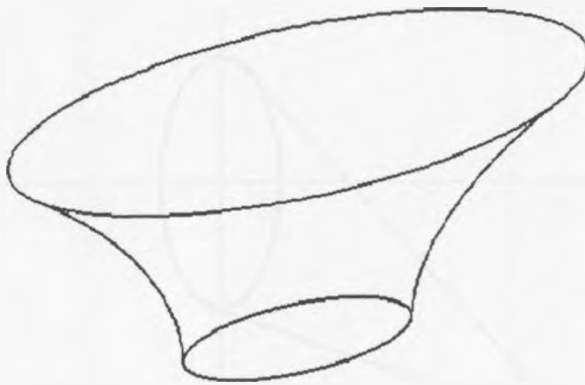
REZULTATI

12 REZULTATI

Na slici 12.1 prikazana je kocka čija temena imaju koordinate $(100;100;0)$, $(100;200;0)$, $(200;200;0)$, $(200;100;0)$, $(100;100;100)$, $(100;200;100)$, $(200;200;100)$, $(200;100;100)$, skraćenje je $\lambda=0,75$ i ugao $\varphi=30^\circ$ za paralelno projiciranje (Poglavlje 3), a centar projiciranja za centralno projiciranje je tačka $S(-30;500;50)$.



Sl. 12.1 Kocka pri paralelnom projiciranju (levo) i centralnom projiciranju (desno)



Sl. 12.2 Kontura rotacione površi pri paralelnom projiciranju

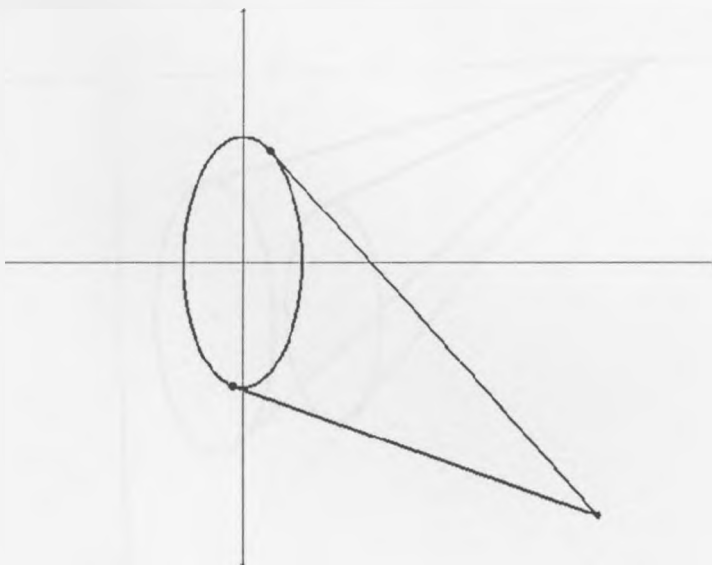
Na sledećoj slici prikazana je kontura rotacione površi pomoću 400 tačaka (Poglavlje 4) za paralelne projicirajuće zrake ($\lambda=0,75$; $\varphi=30^\circ$), ako je površ dobijena rotacijom oko z ose meridijana čije su parametarske jednačine

$$\begin{aligned}x(t) &= 80 + 40t \\z(t) &= 10(10\sqrt{t} - 10) \\t &\in [0,01;3,14]\end{aligned}$$

Na slici 12.3 prikazana je ista površ u perspektivi, gde je $S(50;200;500)$.



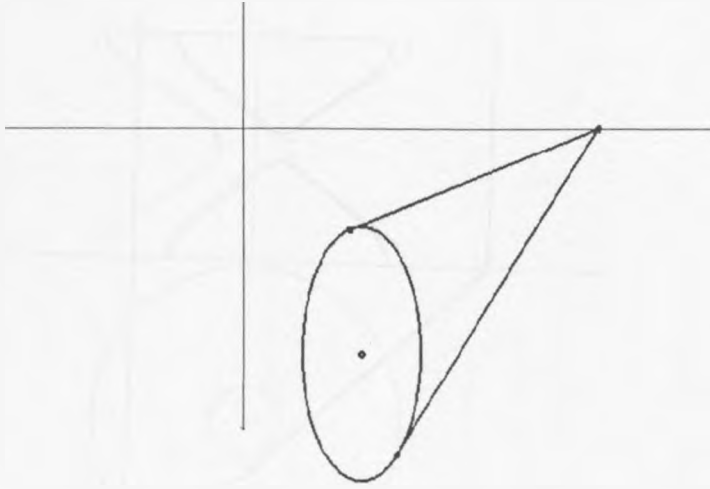
Sl. 12.3 Kontura rotacione površi pri centralnom projiciranju



Sl. 12.4 Tangente elipse čiji je centar u koordinatnom početku

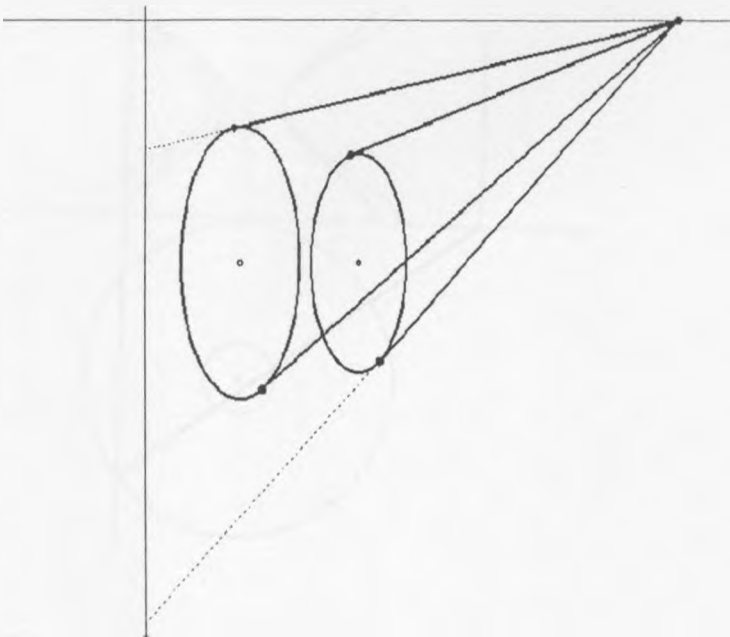
Korišćenjem jednačina (5.26), ..., (5.28) i jednačine (5.31) određene su tangente elipse (Poglavlje 5.1.4) koje su prikazane na slici 12.4, a na slici 12.5 su prikazane tangente elipse

čiji centar se ne poklapa sa koordinatnim početkom globalnog koordinatnog sistema, koje su dobijene pomoću jednačina (5.32), ..., (5.35).



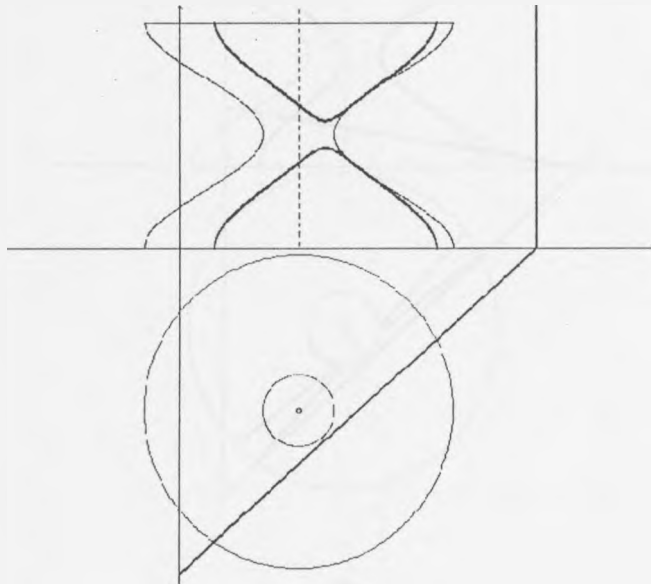
Sl. 12.5 Tangente elipse u globalnom koordinatnom sistemu

Pomoću jednačina (5.32), ..., (5.39) pronađene su četiri tangente dveju elipsi (Sl. 12.6), od kojih su izdvojene dve, sa najmanjim i najvećim odsečkom na y (vertikalnoj) osi, a te dve su u produžetku, od dirališta do y ose, prikazane isprekidanim linijama.

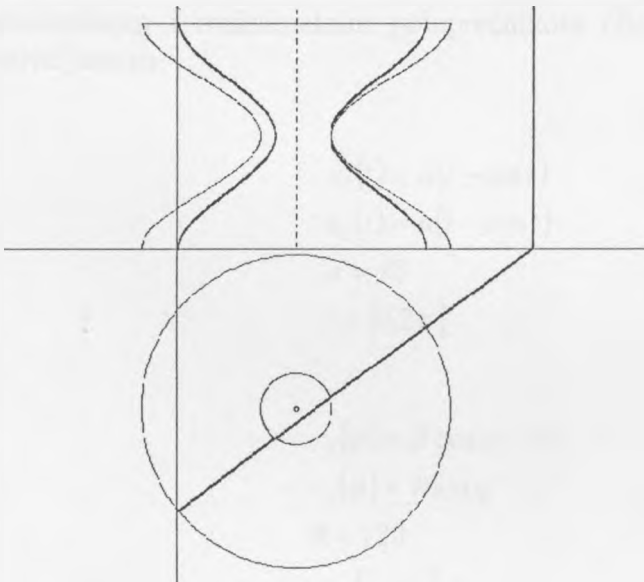


Sl. 12.6 Tangente dveju elipsi i tangente sa minimalnim i maksimalnim odsečkom na y osi

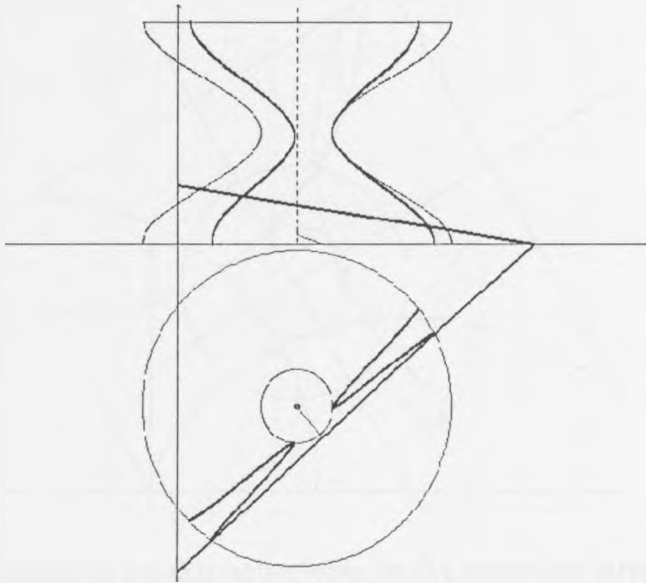
Na slikama 12.7 i 12.8 prikazani su ravni preseki rotacione površi (Poglavlje 5.2), kada je ravan u specijalnom položaju, a na slici 12.9 je prikazan ravan presek rotacione površi sa ravni koja je u opštem položaju (polazni meridijan je zadat sa 620 tačaka).



Sl. 12.7 Ravan presek rotacione površi sa ravni koja je u specijalnom položaju



Sl. 12.8 Ravan presek rotacione površi sa ravni koja je u specijalnom položaju i koja seče grleni (strikcioni) krug površi



Sl. 12.9 Ravan presek rotacione površi sa ravni koja je u opštem položaju

Na sledećoj slici su prikazane dve rotacione površi čije se ose seku, koje su zadate osama i meridianima u ravni Oxz . Nakon određivanja simetričnih meridijana (Poglavlje 6.2.1), pronađene su četiri presečne tačke konturnih meridijana (Poglavlje 6.2.2.1), a zatim i dve lopte, sa minimalnom i maksimalnim poluprečnikom (Poglavlje 6.2.2). Parametarske jednačine meridijana su

$$x_1(t) = a(t - \sin t)$$

$$z_1(t) = a(1 - \cos t)$$

$$a = 35$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

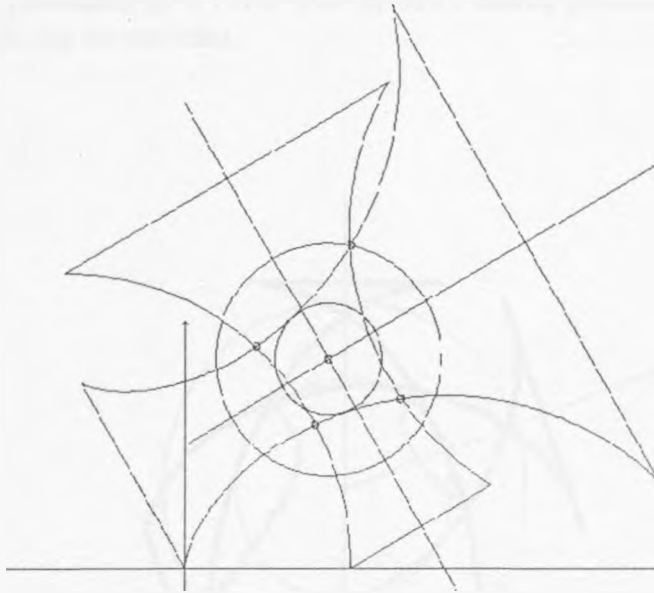
$$x_2(\varphi) = R \cos \varphi - 50$$

$$z_2(\varphi) = R \sin \varphi$$

$$R = 120$$

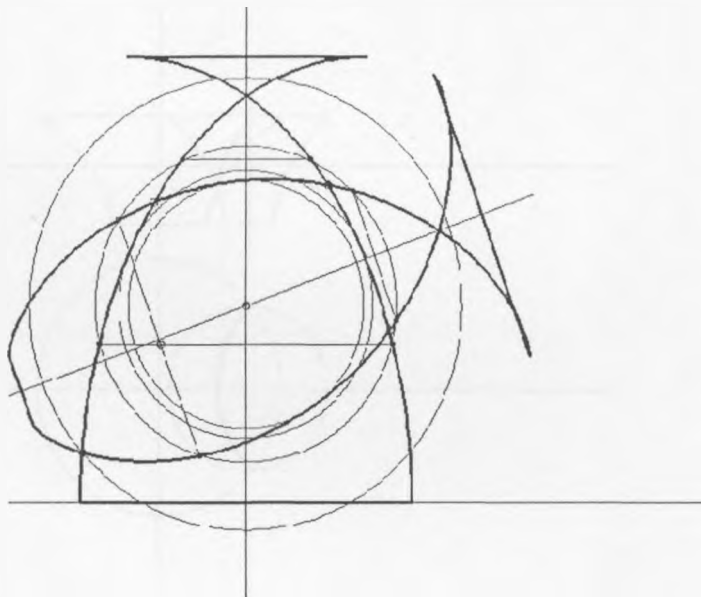
$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Meridijan prve površi je zadat pomoću 360 tačaka, a druge sa 90 tačaka.



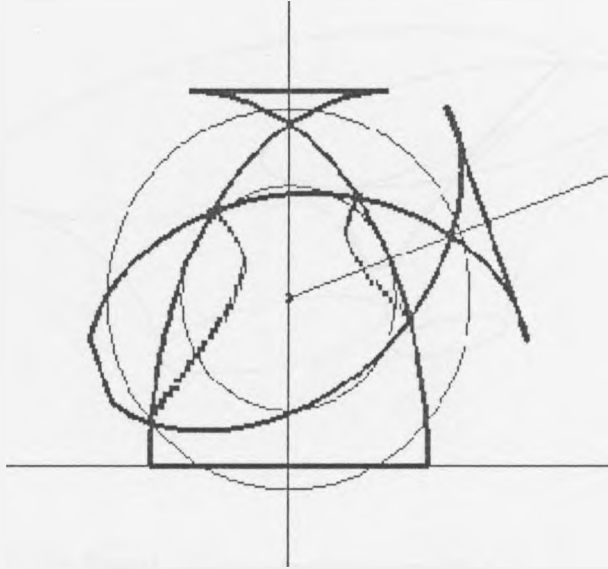
Sl. 12.10 Minimalna i maksimalna lopta za dve rotacione površi čije se ose seku

Na slici 12.11 prikazana je procedura za određivanje presečnih tačaka dveju rotacionih površi čije se ose seku (Poglavlje 6.2). Za proizvoljnu loptu čiji je prečnik veći od minimalnog, a manji od maksimalnog, određeni su parovi paralela koji su dobijeni u preseku pomoćne lopte sa rotacionim površima. U preseku ovih paralela dobijaju se tačke prostorne presečne krive dveju površi, a na slici su za posmatranu pomoćnu loptu dobijene dve tačke prostorne presečne krive.

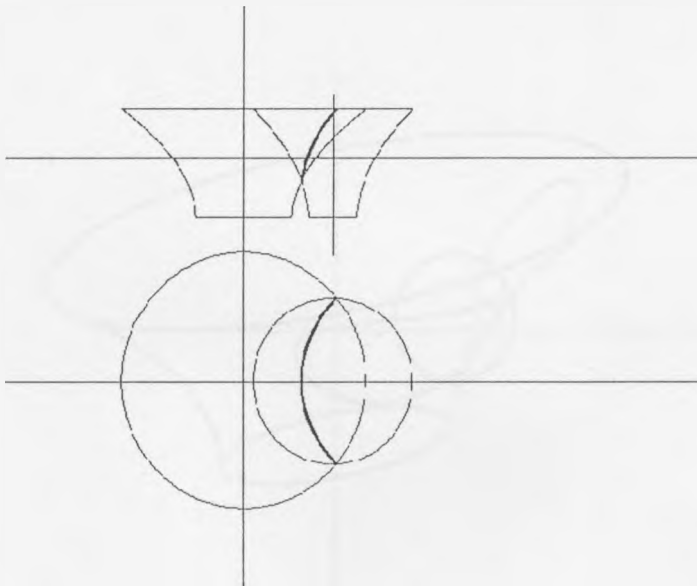


Sl. 12.11 Presek dveju rotacionih površi čije se ose seku sa loptom proizvoljnog prečnika, presečne paralele dveju površi sa pomoćnom loptom i presečne tačke prostorne presečne krive dveju površi

Na slici 12.12 prikazana je u ravni Oxz sa 6040 tačaka prostorna presečna kriva dveju rotacionih površi čije se ose seku.

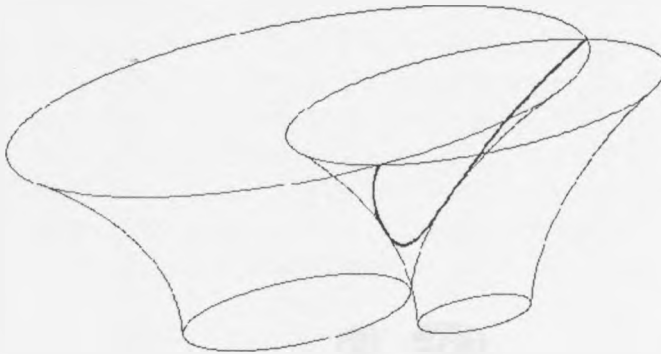


Sl. 12.12 Presečna kriva dveju rotacionih površi čije se ose seku



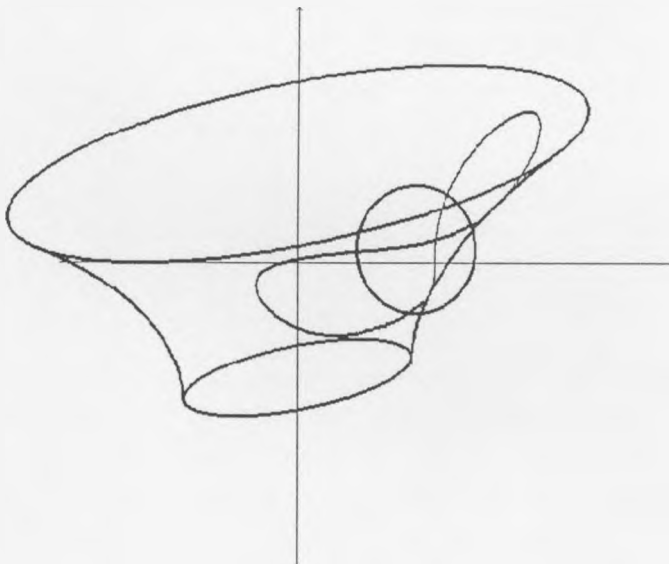
Sl. 12.13 Dve ortogonalne projekcije prostorne presečne krive dveju rotacionih površi čije su ose paralelne

Na slici 12.13 prikazan je u paru projekcija presek dveju rotacionih površi čije su ose paralelne (kriva je prikazana pomoću 348 tačaka), a na slici 12.14 je rešenje istog zadatka prikazano u 3D za paralelne projicirajuće zrake.



Sl. 12.14 Presek dveju rotacionih površi čije su ose paralelne za paralelne projicirajuće zrake

Na poslednjoj slici je prikazana prostorna presečna kriva dveju rotacionih površi čije se ose mimoilaze (horizontalni cilindar je prikazan sa bazisnim krugom u frontalnoj ravni), pomoću 486 tačaka krive.



Sl. 12.15 Presek dveju rotacionih površi čije se ose mimoilaze

13

ZAKLJUČAK

13 ZAKLJUČAK

U radu je formiran matematički model za određivanje dvodimenzionalne slike trodimenzionalnog objekta u slučajevima paralelnog i centralnog projiciranja. Korišćenjem deskriptivno geometrijskog pristupa uz korišćenje pomoćnih lopti određene su konture rotacionih površi za oba slučaja projiciranja. Nakon formiranja konture, rotaciona površ dobija realniji izgled koji ne zavisi više od broja paralela ili meridijana pomoću kojih je površ prikazana, niti se mora vršiti senčenje (renderovanje) da bi površ dobila prirodan izgled, ali nije ni isključena mogućnost senčenja površi. Tokom određivanja prostorne presečne krive dveju rotacionih površi izdvojena su tri slučaja (ose rotacionih površi se seku, paralelne su i mimoilaze se) za koje su formirani matematički modeli. U slučaju kada se ose rotacionih površi seku jednostavnije je koristiti pomoćne lopte radi određivanja presečne krive dveju površi, dok u slučaju kada su ose paralelne prednost imaju pomoćne ravni koje su upravne na ose rotacionih površi. U trećem slučaju ravnopravni su postupci bazirani na korišćenju pomoćnih lopti i pomoćnih ravni. Za sve slučajeve dominantna karakteristika je da je prostorni problem određivanja preseka dveju rotacionih površi sveden na ravanski problem određivanja preseka dveju ravnih krivih. Kada se ose rotacionih površi seku i kada su paralelne te ravne krive su paralele rotacionih površi. Nešto je komplikovaniji slučaj kada se ose rotacionih površi mimoilaze jer se tada dobijaju složenije ravne krive čiji presek treba odrediti. Međutim, kada se uzme u obzir da je problem određivanja preseka dveju ravnih krivih u kompjuterskoj grafici rešavan na više načina i da svakako postoje rešenja koja imaju veću ili manju tačnost, činjenica da je formiran matematički model koji prostorni problem određivanja presečne krive dveju rotacionih površi svodi na ravanski problem određivanja presečnih tačaka dveju ravnih krivih, predstavlja suštinski doprinos ovog rada polju kompjuterske grafike. Za razliku od preovlađujućih postupaka za određivanje preseka dveju rotacionih površi u kompjuterskoj grafici, kod kojih se površi aproksimiraju zakrpama i samim tim se u startu javlja određena greška, kvalitet rešenja koje je bazirano na deskriptivno geometrijskim pristupima je u posmatranju preseka dveju polaznih površi, a jedina aproksimacija koja se javlja je u određivanju presečnih tačaka dveju ravnih krivih. Može se istaći da je standardni problem redosleda spajanja tačaka prostorne krive izbegnut, jer je ovim postupkom presečna kriva dveju rotacionih površi opisana skupom trodimenzionalnih tačaka.

Dakle, može se istaći da su primenom deskriptivno geometrijskih pristupa formirane elegantne matematičke procedure za rešavanje problema, koje dovode do direktnijih i tačnijih rešenja od postojećih postupaka.

Ranije su definisani uslovi za određivanje vidljivosti rotacionih površi [Štu94], a u daljem radu trebalo bi odrediti i vidljivost prostorne presečne krive. Senčenje pojedinačne rotacione površi uz korišćenje pomoćnih lopti već je analizirano [Štu94], a kada se posmatra presek dve rotacione površi može se postaviti problem određivanja međusobnog zaklanjanja tih površi, odnosno određivanja bačene senke jedne na drugu rotacionu površ. Kod senčenja bi interesantan problem bio slučaj određivanja rastavnice osvetljenja kada centar projiciranja i centar osvetljenja nisu koincidentni, kao i problem bojenja osvetljenih delova površi. Takođe, moglo bi se izvršiti usavršavanje izloženog softvera dodavanjem procedure pomoću koje bi se detektovalo postojanje preseka dveju rotacionih površi.

14

LITERATURA

14 LITERATURA

- [All91] Allgower, E.L., Simplicial Pivoting for Mesh Generation of implicitly Defined Surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 8, No. 4, pp. 305-325, 1991.
- [Ana84] Anagnosti, P., *Nacrtna geometrija, Naučna knjiga*, Beograd, 1984.
- [Bal81] Ballard, D.H., Strip trees: a hierarchical representation for curves, *Communications of the ACM* 24, pp. 310-321, 1981.
- [BA87] Brunet, P., Ayala, D., Extended Octtree representation of Free Form Surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 8, No. 1-2, pp. 141-154, 1987.
- [BA90] Berger, B., Altenbach, J., Graphical Representation of Models and Results in the Finite Element system Cosar, *Computers and Graphics*, Volume 14, No. 3/4, pp. 395-404, 1990.
- [BFJP87] Barnhill, R. E., Farin, G., Jordan, M., Piper, B. R., Surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design* 4, pp. 3-16, 1987.
- [BK90] Barnhill, R.E., Kersey, S.N., A Marching Method for Parametric Surface / Surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 1-4, pp. 257-280, 1990.
- [Boe90] Boehm, W., On Cyclides in Geometric Modelling, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 1-4, pp. 243-256, 1990.
- [CB89] Casale, M.S., Bobrow, J.E., A Set Operation algorithm for Sculptured Solids Modeled With Trimmed Patches, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 6, No. 3, pp. 235-247, 1989.
- [CG92] Chionh, E.W., Goldman, R.N., Using multivariate resultants to find the implicit equation of a rational surface, *The Visual Computer* 8, pp. 171-181, 1992.
- [Cla90] Claussen, U., On Reducing the Phong Shading Method, *Computers and Graphics*, Volume 14, No. 1, pp. 73-81, 1990.
- [CO98] Cvetičanin, D., Obradović, R., A CAGD Method for Elliptic Cross Sections of Circular Parabolic Quadrics, *Novi Sad Journal of Mathematics*, pp.55-63, 1998.
- [CR82] Cohen, E., Riesenfeld, R.F., General Matrix Representations for Bezier and B-spline Curves, *Computers in Industry*, Volume 3, pp. 8-15, 1982.
- [Dil81] Dill, John C., An Application of Color Graphics to the Display of Surface Curvature, *Computer Graphics*, Volume 15, pp. 153-161, 1981.

- [deF93] de Figueirero, L.H., Surface Intersection Using Affine Arithmetic, *Computer Systems Group, Department of Computer Science, University of Waterloo, Ontario, Canada*, 8 pages, 1993.
- [Dov90] Dovniković, L., Tehničko crtanje - uvođenje u mašinske konstrukcije, *Univerzitet u Novom Sadu*, Novi Sad, 1990.
- [Dov94] Dovniković, L., Nacrtna geometrija, *Univerzitet u Novom Sadu*, Novi Sad, 1994.
- [EM98] Elliott, S., Miller, P., Pod lupom...3D Studio MAX, *CET Computer Equipment and Trade*, Beograd 1998.
- [Far87] Farouki, R.T., Direct surface section evaluation. In Farin, G.: Geometric Modeling, *Algorithms and New Trends, SIAM*, pp. 319-334, 1987.
- [Far 89] Farouki, R.T., Hierarchical Segmentations of Algebraic Curves and Some Applications. In Lyche, T., L.L., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, Academic Press*, pp. 207-214, 1989.
- [FDFHP95] Foley, J.D., van Dam, A., Feiner, S.K., Hughes, J.F., Phillips, R.L., Introduction to Computer Graphics, *Addison-Wesley Publishing Company*, United States of America, 1995.
- [GH87] Gregory, J.A., Hahn, J.M., Geometric Continuity and Convex Combination Patches, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 8, No. 1-2, pp. 79-89, 1987.
- [GK92] Glaicher, M., Kass, M., An interval refinement technique for surface intersection, *Proceedings of technique for surface intersection*, pp. 242-249, 1992.
- [GN89] Gujar, U.G., Nagendra, I.V., Construction of 3D Solid Objects From Orthographic Views, *Computers and Graphics*, Volume 13, No. 4, pp. 505-521, 1989.
- [GO90] Gudukbay, U., Ozguc, B., Free-Form Solid Modeling Using Deformations, *Computers and Graphics*, Volume 14, No. 3/4, pp. 491-500, 1990.
- [GW89] Garrity, T., Warren, J., On computing the intersection of a pair of algebraic surfaces, *Computer Aided Geometric Design* 6, pp. 137-153, 1989.
- [Har77] Hartshorne, R., Algebraic Geometry, *Springer Verlag*, New York, 1977.
- [Hec95] Heck, A., Grand Tour of Derive, *CAN Expertise Center*, 1995.
- [Her89] Herron, G., Polynomial bases for quadratic and cubic polynomials which yield control points with small convex hulls, *Computer Aided Geometric Design* 6, pp. 1-9, 1989.

- [HL93] Hoschek, J., Lasser, D., Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, *A K Peters*, Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [HM90] Hollig, K., Mogerle, H., G-Splines, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 1-4, pp. 197-208, 1990.
- [Hof90] Hoffmann, C.M., A Dimensionality Paradigm for Surface interrogations, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 6, pp. 517-532, 1990.
- [JMW90] Joensson, D., Muglitz, J., Vogel, M., Computer Graphics for design Process in Mechanical Engineering, *Computers and Graphics*, Volume 13, No. 4, pp. 413-417, 1990.
- [JPW91] Jensen, T.W., Petersen, C.S., Watkins, M.A., Practical Curves and Surfaces for a Geometric Modeler, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 8, No. 5, pp. 357-369, 1991.
- [Kat82] Katainen, A., Monadic set Operations, *Computer Aided Design*, Volume 4, No. 6, pp. 351-354, 1982.
- [KH94] Krejić, N., Herceg, Đ., Matematika i Mathematica, *Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Institut za matematiku*, Novi Sad, 1994.
- [Kri97] Krishnan, S., Efficient and accurate Boundary Evaluation Algorithms for Boolean Combinations of Sculptured Solids, *PhD dissertation*, University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, 1997.
- [Krs95] Krsmanović, C., Automatizacija projektovanja u industrijskom inženjerstvu, *Fakultet tehničkih nauka*, Novi Sad, 1995.
- [KGMM97] Krishnan, S., Gopi, M., Manocha, D., Mine, M., Interactive Boundary Computation of Boolean Combinations of Sculptured Solids, *Proceedings of Eurographics'97*, 12 pages, 1997.
(www.cs.unc.edu/~geom/intersect.html)
- [KKM97a] Keyser, J., Krishnan, S., Manocha, D., Efficient and Accurate B-rep Generation of Low Degree Sculptured Solids using Exact Arithmetic, *Proceedings of ACM Solid Modeling '97*, pp. 42-55, 1997.
- [KKM97b] Keyser, J., Krishnan, S., Manocha, D., Efficient B-rep Generation of Low Degree Sculptured Solids using Exact Arithmetic, *Proceedings of ACM Solid Modeling '97*, 35 pages, 1997.
- [KKMN95] Kumar, S., Krishnan, S., Manocha, D., Narkhede, A., High Speed and High Fidelity Visualization of Complex CGS Models, *BCS International Conference on Visualization and Modeling*, Leeds, UK, 23 pages, 1995

- [KM83] Koparkar, P.A., Mudur, S.P., A new class of algorithms for the processing of parametric curves, *Computer Aided Design* 15, pp. 41-45, 1983.
- [KM95] Krishnan, S., Manocha, D., Numeric-Symbolic Algorithms for Evaluating One-Dimensional Algebraic Sets, *Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 69-67, 1995.
- [KM96a] Krishnan, S., Manocha, D., BOOLE: A System to Compute Boolean Combinations of Sculptured Solids, *Proceedings of CSG'96*, 24 pages, 1996.
- [KM96b] Krishnan, S., Manocha, D., Algebraic Loop Detection and Evaluation Algorithms for Curve and Surface Interrogations, *Proceedings of Graphics Interface '96*, pp. 87-94, 1996.
- [KM97] Krishnan, S., Manocha, D., An Efficient Surface Intersection Algorithm based on Lower Dimensional Formulation, *ACM Transactions on Computer Graphics*, 16 (1), pp. 74-106, 1997.
- [KNM95] Krishnan, S., Narkhede, A., Manocha, D., Representation and Computation of Boolean Combinations of Sculptured Models, *Proceedings of the Eleventh Annual Symposium on Computational Geometry*, 2 pages, 1995.
- [KPW92] Kriezis, G. A., Patrikalakis, N. M., Wolter, F-E., Topological and differential equation methods for surface intersections, *Computer Aided Design*, Volume 24 number 1 january, pp. 41-55, 1992.
- [Laz97] Lazić, S., Auto Cad R14, *Institut za nuklearne nauke "Vinča"*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1997.
- [LHH90] Li, J., Hoschek, J., Hartmann, E., G^{n-1} Functional Splines for Interpolation and Approximation of Curves, surfaces and Solids, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 1-4, pp. 209-220, 1990.
- [LMCG96] Lin, M.C., Manocha, D., Cohen, J., Gottschalk, S., Collision Detection: Algorithms and Applications, *U. S. Army Research Office and university of North Carolina*, Chapel Hill, Nc, USA, 12 pages, <http://www.cs.unc.edu/~geom/collide.html>, 1996.
- [LMZ90] Landgraf, G., Modler, K.H., Ziegenhorn, M., System to Represent Double-Curved Surfaces, *Computers and Graphics*, Volume 14, No. 3/4, pp. 435-443, 1989.
- [LR90] Ludwig, M., Richter, C., The 3D Geometry Modelling System (GEMO), *Computers and Graphics*, Volume 14, No. 3/4, pp. 389-394, 1990.
- [Mal97] Malgras, E., Marching Methods in Surface-Surface Intersection, *Curves and Surfaces with Application in CAGD*, Vanderbilt university Press, Nashville, TN, pp. 279-286, 1997.

- [MB90] Marsh, D., Barley, S.A., A Survey of Surface / Surface Intersection Techniques in Computer Aided Design, *University of Birmingham, Geometric Modelling Group, Department of Mechanical Engineering*, 46 pages, report No. GMG/90/01, 1990.
- [MC91] Manocha, D., Canny, J., A New Approach for Surface Intersection, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, Volume 1, No. 4, pp. 491-516, 1991.
- [MD94] Manocha, D., Demmel, J., Algorithms for Intersecting Parametric and Algebraic Curves I: Simple Intersections, *ACM Transactions on Graphics*, Volume 13, No. 1, pp. 73-100, 1994.
- [MD95] Manocha, D., Demmel, J., Algorithms for Intersecting Parametric and Algebraic Curves II: Multiple Intersections, *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Graphical Models and Image Processing*, volume 57, No. 2, pp. 81-100, 1995.
- [MK97] Manocha, D., Krishnan, S., Algebraic Pruning: A Fast Technique for Curve and Surface Intersection, *Computer-Aided Geometric Design*, volume 20, pp. 1-23, 1997.
- [MM91] Markot, R. P., Magedson, R. L., Procedural method for evaluating the intersection curves of two parametric surfaces, *Computer-Aided Design*, Volume 23 number 6 july/august, pp. 395-404, 1991.
- [Mor89] Mortenson, M.E., *Computer Graphics: An Introduction to the Mathematics and Geometry*, Heinemann Newnes, Oxford, 1989.
- [NCA90] Nunes Ferreira, F., Cardoso Costa, A., Augusto Sousa, A., 3D Graphics Developments and Research at Inesc.Norte, *Computers and Graphics*, Volume 14, No. 1, pp. 47-53, 1990.
- [NR87] Neilson, G.M., Ramaraj, R., Interpolation Over a Sphere Based Upon a Minimum Norm Network, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 4, No. 1-2, pp. 41-57, 1987.
- [Obr 97] Obradović R., Primena deskriptivno geometrijskih metoda u geometrijskom dizajnu pomoću računara: određivanje preseka paraboličkih kvadratika - konusa i cilindara, *Magistarska teza*, Univerzitet u novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1997.
- [Obr98] Obradović, R., Intersection Between two Surfaces of Revolution, rad je bio prihvaćen za prezentaciju i objavljivanje u *Proceedings of the 8th ASEE International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry*, Austin, Texas, USA, 1998.
- [Obr99] Obradović, R., Surface-Surface intersection: Auxiliary spheres, *Novi Sad Journal of Mathematics*, Volume 29, No. 3, pp. 221-230, 1999.

- [OJ97] Obradović, R., Jandrić, Z., Kompjutersko generisanje hiperboličkog paraboloida, *Monge (1997)*, (u štampi), 1997.
- [OŠ95a] Obradović, R., Štulić, R., Kružne paraboličke kvadrike u CAGD: Polarna i afina svojstva i njihova primena na rešenje konture za kose projicirajuće zrake, *XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtanu geometriju*, Beograd, Zbornik radova, str. 61-63, 1995.
- [OŠ95b] Obradović, R., Štulić, R., Matematički model određivanja pomoćnih ravni pomoću računara, *XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtanu geometriju*, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 64-66.
- [PG86] Pratt, M.J., Geisow, A.D., Surface/surface intersection problems. In Gregory, J.A., *The Mathematics of Surfaces*, Clarendon Press, pp. 117-142, 1986.
- [Pie87] Piegl, L., On the Use of Infinite Control Points in CAGD, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 8, No. 1-2, pp. 155-166, 1987.
- [PK87] Petrie, G., Kennie, T.J.M., Terrain modelling in surveying and civil engineering, *Computer Aided Design 19*, pp. 171-187, 1987.
- [PML95] Ponamgi, M.K., Manocha, D., Lin, M.C., Incremental algorithms for Collision Detection Between Solid Models, *University of North Carolina*, Department of Computer Science, 25 pages, 1995.
- [Pra90] Pratt, M.J., Cyclides in Computer Aided Geometric Design, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 1-4, pp. 221-242, 1990.
- [RA90] Rogers, D.F., Adams, J.A., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, Second Edition, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1990.
- [Roc89] Roche, M., Defining a Faceted Generalized Cylinder by Projections of Cross Sections, *Computers and Graphics*, Volume 13, No. 3, pp. 349-354, 1989.
- [SAG85] Sederberg, Th.W., Anderson, D.C., Goldman, R.N., Implicitization, inversion and intersection of planar rational cubic curves, *Computer Vision, Graphics and Image Processing 31*, pp. 89-102, 1985.
- [Sal85] Salmon, G., *Lessons Introducing to the Modern Higher Algebra*, Reprinted by Chelsea, New York, 1985.
- [San89] Sanchez-Reyes, J., Laser Printers for Rendering Surfaces, *Computer and Graphics*, Volume 13, No. 1, pp. 49-54, 1989.
- [Sed84] Sederberg, Th.W., Planar piecewise algebraic curves, *Computer Aided Geometric Design 1*, pp. 241-255, 1984.

- [Sed87] Sederberg, Th.W., Algebraic geometry for surface and solid modeling. In Farin, G., Geometric Modeling, *Algorithms and New Trends, SIAM*, pp. 28-42, 1987.
- [SHLW89] Sinclair, B., Hannam, A.G., Lowe, A.A., Wood, W.W., Complex Contour Organization for Surface Reconstruction, *Computers and Graphics*, Volume 13, No. 3, pp. 311-319, 1989.
- [Ska88] Skala, A., Nacrtna geometrija za studente građevinskog odseka, *Univerzitet u Novom Sadu*, Novi Sad, 1988.
- [SN91] Sederberg, T.W., Nishita, T., Geometric Hermite Approximation of Surface Patch Intersection Curves, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 8, No. 2, pp. 97-114, 1991.
- [Štu94] Štulić, R., Nacrtno geometrijske metode u kompjuterskoj grafici: konture i izofote rotacionih površi, *Magistarska teza*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1994.
- [TTW90] Theoharis, T.A., Travis, A.R.L., Wiseman, N.E., 3D Display: Synthetic Image Generation and Visual Effect Simulation, *Computer Graphics Forum*, Volume 9, No. 4, pp. 337-348, 1990.
- [vanE89] van Emmerik, M.J.G.M., Creation and Modification of Parametrized Solid models by Graphical Interaction, *Computer and Graphics*, Volume 13, No. 1, pp. 71-76, 1989.
- [vanE90] van Emmerik, M.J.G.M., A Direct Technique for Specifying 3D Object Transformations With a 2D Input Device, *Computer Graphics Forum*, Volume 9, No. 4, pp. 355-361, 1990.
- [Walk50] Walker, R.J., Algebraic Curves, *Princeton University Press*, 1950.
- [Wal90] Walter, R., Visibility of Surfaces Via Differential Geometry, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 7, No. 1-4, pp. 353-373, 1990.
- [Wu89] Wu, S.T., A New Combinatorial Model for Boundary Representations, *Computers and Graphics*, Volume 13, No. 4, pp. 477-486, 1989.

15

**PRILOG
LISTING
PROGRAMA**

15 PRILOG - LISTING PROGRAMA

Program PROJICIRANJE; {PARALELNO PROJICIRANJE I CENTRALNO PROJICIRANJE}

```

Uses Crt,Graph;
Var
i,raz,du,j,Rraz:integer;
GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,f1,f2,R:real;
Lan,px,pz,xS,yS,zS:real;
fi,Xb,Yb:array [0..360] of real;
x3D,y3D,z3D,x2D,z2D:array [1..200] of real;

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}
Begin
GraphDriver:=Detect;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');
ErrorCode:=GraphResult;
    If ErrorCode<>grOK then
    begin
    writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
    writeln('program aborted...');
    Halt(1);
    end;
End;

Procedure OGama;
Begin
ax:=200;ay:=220;
Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);
yk:=ay+200*sin(Gamar);
End;

Procedure ks;
Begin
OGama;
fx:=ax-2-195*cos(Gamar);
fy:=ay*195*sin(Gamar);
MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax-2),Round(ay+238));MoveTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax+2),Round(ay+238));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));
End;

Procedure Krug;
Begin
MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));
    for i:=0 to 360 do
    begin
    fi[i]:=(i*3.145927)/180;
    Xb[i]:=R*sin(fi[i]);
    Yb[i]:=R*cos(fi[i]);
    end;
MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay+f2+yb[0]));
for i:=1 to 360 do

```

```
LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay+f2+yb[i]));
End;
```

Procedure UnosKoordinata;

```
Begin
{Zadata je kocka}
x3D[1]:=100;y3D[1]:=100;z3D[1]:=0;
x3D[2]:=100;y3D[2]:=200;z3D[2]:=0;
x3D[3]:=200;y3D[3]:=200;z3D[3]:=0;
x3D[4]:=200;y3D[4]:=100;z3D[4]:=0;
x3D[5]:=100;y3D[5]:=100;z3D[5]:=100;
x3D[6]:=100;y3D[6]:=200;z3D[6]:=100;
x3D[7]:=200;y3D[7]:=200;z3D[7]:=100;
x3D[8]:=200;y3D[8]:=100;z3D[8]:=100;
End;
```

Procedure VektorProjiciranja;

```
Begin
{Skraćenje}
Lan:=0.75;
{Komponente vektora projiciranja}
px:=Lan*cos(Gamar);
pz:=Lan*sin(Gamar);
End;
```

Procedure ParalelnoProjiciranje;

```
Begin
for i:=1 to 8 do
  Begin
x2D[i]:=x3D[i]-px*y3D[i];
z2D[i]:=z3D[i]-pz*y3D[i];
  End;
End;
```

Procedure CrtanjeRezultata;

```
Begin
{Donji bazis kocke}
MoveTo(Round(ax+x2D[1]),Round(ay-z2D[1]));
for i:=2 to 4 do
  Begin
LineTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
  End;
LineTo(Round(ax+x2D[1]),Round(ay-z2D[1]));
{Gornji bazis kocke}
MoveTo(Round(ax+x2D[5]),Round(ay-z2D[5]));
for i:=6 to 8 do
  Begin
LineTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
  End;
LineTo(Round(ax+x2D[5]),Round(ay-z2D[5]));
{Vertikalne ivice kocke}
for i:=1 to 4 do
  Begin
MoveTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
LineTo(Round(ax+x2D[i+4]),Round(ay-z2D[i+4]));
  End;
End;
```

Procedure CentralnaProjekcija;

```
Begin
xS:=-30;
yS:=500;
zS:=50;
for i:=1 to 8 do
Begin
x2D[i]:=x3D[i]-(y3D[i]*(xS-x3D[i])/(yS-y3D[i]));
z2D[i]:=z3D[i]-(y3D[i]*(zS-z3D[i])/(yS-y3D[i]));
End;
End;
```

BEGIN {GLAVNI PROGRAM}

```
f1:=100;f2:=-100;R:=5;
Gama:=30;
OGama;
VektorProjiciranja;
UnosKoordinata;
ParalelnoProjiciranje;
ClrScr;
Init;
ks;
CrtanjeRezultata;
SetLineStyle(0,$C3,1);
readln;
CentralnaProjekcija;
CrtanjeRezultata;
readln;
CloseGraph;
END.
```

**Program KONTURA; {KONTURA ROTACIONE POVRŠI ZA
PARALELNE PROJICIRAJUĆE ZRAKE}**

```
Uses Crt,Graph;
Var
i,raz,du,j,Rraz:integer;
GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,f1,f2,R:real;
a,px,py,pz,t,Lan:real;
fi,Xb,Yb:array [0..360] of real;
x,y,z,xP,yP,zP:array [1..200] of real;
b,c,d,xK1,yK1,zK1,xK2,yK2,zK2,zL,nx,nz:array [1..200] of real;
x2D,z2D,x3D,y3D,z3D:array [1..200] of real;
```

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

```
Begin
GraphDriver:=Detect;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');
ErrorCode:=GraphResult;
    If ErrorCode<>grOK then
        begin
            writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
            writeln('program aborted...');
            Halt(1);
        end;
End;
```

Procedure OGama;

```
Begin
ax:=320;ay:=220;
Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);
yk:=ay+200*sin(Gamar);
End;
```

Procedure ks;

```
Begin
OGama;
fx:=ax-2-195*cos(Gamar);
fy:=ay*195*sin(Gamar);
MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax-2),Round(ay+238));MoveTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax+2),Round(ay+238));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));
End;
```

Procedure Krug;

```
Begin
MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));
    for i:=0 to 360 do
        begin
            fi[i]:=(i*3.145927)/180;
            Xb[i]:=R*sin(fi[i]);
            Yb[i]:=R*cos(fi[i]);
        end;
MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay+f2+yb[0]));
```

```

for i:=1 to 360 do
LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay+f2+yb[i]));
End;

```

Procedure Kriva;

```

Label 1,2,3;
Begin
t:=0.01;i:=1;
3:x[i]:=80+40*t;
z[i]:=10*(-10+10*sqrt(t));
xP[i]:=40;
zP[i]:=10*5/sqrt(t);
If i=200 then goto 1
else goto 2;
2:i:=i+1;
t:=t+0.0157;
goto 3;
1:End;

```

Procedure Normala;

```

Begin
nx[i]:=-zP[i];
nz[i]:=xP[i];
End;

```

Procedure CentarPL;{Centar pomoćne lopte}

```

Begin
zL[i]:=z[i]-(x[i]*nz[i])/nx[i];
End;

```

Procedure VektorProjiciranja;

```

Begin
{Skraćenje}
Lan:=0.75;
{Komponente vektora projiciranja}
px:=Lan*cos(Gamar);
py:=1;
pz:=Lan*sin(Gamar);
End;

```

Procedure KonturaPP;

```

Begin
a:=1+sqr(px/py);
d[i]:=(zL[i]-z[i])*pz;
b[i]:=d[i]*px/(sqr(py));
c[i]:=sqr(d[i]/py)-sqr(x[i]);
xK1[i]:=(b[i]+sqr(sqr(b[i])-a*c[i]))/a;
yK1[i]:=(d[i]-xK1[i]*px)/py;
zK1[i]:=z[i];
xK2[i]:=(b[i]-sqr(sqr(b[i])-a*c[i]))/a;
yK2[i]:=(d[i]-xK2[i]*px)/py;
zK2[i]:=z[i];
End;

```

Procedure ParalelnoProjiciranje;

```

Begin
for i:=1 to 200 do
Begin
x2D[i]:=x3D[i]-px*y3D[i];

```



```

z2D[i]:=z3D[i]-pz*y3D[i];
  End;
End;

```

Procedure CrtanjeRezultata;

```

Begin
SetLineStyle(0,$C3,3);
MoveTo(Round(ax+x2D[1]),Round(ay-z2D[1]));
for i:=2 to 200 do
Begin
LineTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
End;
End;

```

Procedure Stampa;

```

Begin
for i:=1 to 200 do
Begin
writeln('xK1['',i,']=',xK1[i]);
writeln('yK1['',i,']=',yK1[i]);
writeln('zK1['',i,']=',zK1[i]);
End;
End;

```

BEGIN {GLAVNI PROGRAM}

```

f1:=100;f2:=-100;R:=5;
Gama:=30;
OGama;
Kriva;
VektorProjiciranja;
for i:=1 to 200 do
  Begin
    Normala;
    CentarPL;
    KonturaPP;
  End;
ClrScr;
Init;
ks;
for i:=1 to 200 do
  Begin
    x3D[i]:=xK1[i];
    y3D[i]:=yK1[i];
    z3D[i]:=zK1[i];
  End;
  ParalelnoProjiciranje;
  CrtanjeRezultata;
  readln;
for i:=1 to 200 do
  Begin
    x3D[i]:=xK2[i];
    y3D[i]:=yK2[i];
    z3D[i]:=zK2[i];
  End;
  ParalelnoProjiciranje;
  CrtanjeRezultata;
readln;
CloseGraph;Stampa;readln;
END.

```

**Program KONTURA_PERSPEKTIVA; {KONTURA ROTACIONE POVRŠI ZA
CENTRALNO PROJICIRANJE}**

```
Uses Crt,Graph;
Var
i,raz,du,j,Rraz,jmax:integer;
GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,f1,f2,R:real;
a,px,py,t,Lan,xS,yS,zS:real;
fi,Xb,Yb:array [0..360] of real;
x,y,z,xP,yP,zP,pz,zSZ:array [1..200] of real;
b,c,d,xK1,yK1,zK1,xK2,yK2,zK2,zL,nx,nz:array [1..200] of real;
RL,Lamda,xQ,yQ,zQ:array [0..200] of real;
x2D,z2D,x3D,y3D,z3D,Diskr:array [0..360] of real;
Xdb,Ydb,Zdb,Xgb,Ygb,Zgb:array [0..360] of real;
```

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

```
Begin
GraphDriver:=Detect;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');
ErrorCode:=GraphResult;
  If ErrorCode<>grOK then
  begin
  writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
  writeln('program aborted...');
  Halt(1);
  end;
End;
```

Procedure OGama;

```
Begin
ax:=320;ay:=220;
Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);
yk:=ay+200*sin(Gamar);
End;
```

Procedure ks;{Koordinatni sistem}

```
Begin
OGama;
fx:=ax-2-195*cos(Gamar);
fy:=ay*195*sin(Gamar);
MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax-2),Round(ay+238));MoveTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax+2),Round(ay+238));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));
End;
```

Procedure Krug;{Crtanje kruga-koristi se za prikazivanje tačaka}

```
Begin
MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));
  for i:=0 to 360 do
  begin
  fi[i]:=(i*3.145927)/180;
  Xb[i]:=R*sin(fi[i]);
  Yb[i]:=R*cos(fi[i]);
  end;
End;
```

```

end;
MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay+f2+yb[0]));
for i:=1 to 360 do
LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay+f2+yb[i]));
End;

```

Procedure Kriva;{Meridijan rotacione površi}

```

Label 1,2,3;
Begin
t:=0.01;i:=1;           {t je interval parametra za crtanje tačaka}
3:
x[i]:=80+40*t;         {Parametarska jednačina krive po x koordinati}
z[i]:=10*(-10+10*sqrt(t)); {Parametarska jednačina krive po z koordinati}
xP[i]:=40;             {Prvi izvod od x po promenljivoj t}
zP[i]:=10*5/sqrt(t);  {Prvi izvod od z po promenljivoj t}
If i=200 then goto 1
else goto 2;
2:i:=i+1;
t:=t+0.0157;
goto 3;
1:End;

```

Procedure Normala;{Normala meridijana u tački meridijana}

```

Begin
nx[i]:=-zP[i];        {Komponenta normale na krivu u x pravcu}
nz[i]:=xP[i];         {Komponenta normale na krivu u z pravcu}
End;

```

Procedure CentarPL;{Centar pomoćne lopte}

```

Begin
zL[i]:=z[i]-(x[i]*nz[i])/nx[i];   {z koordinata centra pomoćne lopte}
{rastojanje tačke Q}
zSZ[i]:=sqrt(sqr(xS)+sqr(yS)+sqr(zS-zL[i])); {Vidi sliku 4.5}
End;

```

Procedure VektorProjiciranja;{Vektor projiciranja u centralnoj projekciji}

```

Begin
px:=xS;                {Komponente vektora projiciranja}
py:=yS;                {Jednačine 4.30}
pz[i]:=zS-zL[i];
End;

```

Procedure TackaQ;

```

Begin
RL[i]:=x[i]*sqrt(1+sqr(nz[i]/nx[i])); {Jednačina 4.9}
Lamda[i]:=sqrt(RL[i]/zSZ[i]);        {Jednačina 4.29}
xQ[i]:=Lamda[i]*px;                  {Jednačina 4.31}
yQ[i]:=Lamda[i]*py;                  {Jednačina 4.31}
zQ[i]:=zL[i]+Lamda[i]*pz[i];        {Jednačina 4.31}
End;

```

Procedure KonturaPerspektiva;{Određivanje konture rotacione površi}

```

Label 1,2;
Begin
a:=1+sqr(px/py);           {Jednačina 4.37}
d[i]:=px*xQ[i]+py*yQ[i]+(zQ[i]-z[i])*pz[i]; {Jednačina 4.37}
b[i]:=d[i]*px/(sqr(py));   {Jednačina 4.37}
c[i]:=sqrt(d[i]/py)-sqr(x[i]); {Jednačina 4.37}
Diskr[i]:=sqrt(b[i])-a*c[i]; {Ispitivanje vrednosti diskriminante jednačina}

```

```

If Diskr[i]<0 Then goto 1                {4.38 i 4.39}
Else Goto 2;
2:xK1[j]:=(b[i]+sqrt(sqrt(b[i])-a*c[i]))/a;   {Prva tačka na posmatranoj lopti}
  yK1[j]:=(d[i]-xK1[i]*px)/py;             {prema jednačinama 4.38}
  zK1[j]:=z[i];
  xK2[j]:=(b[i]-sqrt(sqrt(b[i])-a*c[i]))/a;   {Druga tačka na posmatranoj lopti}
  yK2[j]:=(d[i]-xK2[i]*px)/py;             {prema jednačinama 4.39}
  zK2[j]:=z[i];
j:=j+1;
1:End;

```

Procedure CentralnaProjekcija;{Projeciranje tačaka na likoravan Oxz}

```

Begin
for i:=1 to jmax do
  Begin
x2D[i]:=x3D[i]-(y3D[i]*(xS-x3D[i])/(yS-y3D[i]));   {Jednačina 3.4}
z2D[i]:=z3D[i]-(y3D[i]*(zS-z3D[i])/(yS-y3D[i]));   {Jednačina 3.5}
  End;
End;

```

Procedure CrtanjeRezultata;{Crtanje rezultata dobijenih u proceduri}

```

Begin                                {CentralnaProjekcija}
SetLineStyle(0,$C3,3);
MoveTo(Round(ax+x2D[1]),Round(ay-z2D[1]));
for i:=2 to jmax do
  Begin
LineTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
  End;
End;

```

Procedure Bazis;{Koordinate tačaka bazisa rotacione površi}

```

Begin
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
Xdb[i]:=x[1]*sin(fi[i]);
Ydb[i]:=x[1]*cos(fi[i]);
Zdb[i]:=z[1];
Xgb[i]:=x[200]*sin(fi[i]);
Ygb[i]:=x[200]*cos(fi[i]);
Zgb[i]:=z[200];
end;
End;

```

Procedure CentralnoProjeciranjeBazisa;{Projeciranje bazisa na likoravan Oxz}

```

Begin
for i:=0 to 360 do
  Begin
x2D[i]:=x3D[i]-(y3D[i]*(xS-x3D[i])/(yS-y3D[i]));   {Jednačina 3.4}
z2D[i]:=z3D[i]-(y3D[i]*(zS-z3D[i])/(yS-y3D[i]));   {Jednačina 3.5}
  End;
End;

```

Procedure CrtanjeBazisa;{Crtanje tačaka bazisa}

```

Begin
MoveTo(Round(ax+x2D[0]),Round(ay-z2D[0]));
for i:=1 to 360 do
  Begin
LineTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
  End;

```

```
End;
End;
```

Procedure Stampa;

```
Begin
for i:=1 to jmax do
Begin
writeln('xK1['',i,']=',xK1[i]);
writeln('yK1['',i,']=',yK1[i]);
writeln('zK1['',i,']=',zK1[i]);
End;
End;
```

BEGIN{GLAVNI PROGRAM}

```
xS:=20; {Koordinate centra projiciranja}
yS:=350;
zS:=10;
Gama:=30;
OGama;
Kriva;
j:=1; {U proceduri Kontura perspektiva}
for i:=1 to 200 do
Begin
Normala;
CentarPL;
VektorProjiciranja;
TackaQ;
KonturaPerspektiva;
End;
jmax:=j-1;
ClrScr; {Brisanje ekrana}
Init; {Crtanje}
{ks;}
for j:=1 to jmax do {Prvi meridijan}
Begin {Preimenovanje koordinata tačaka meridijana}
x3D[j]:=xK1[j];
y3D[j]:=yK1[j];
z3D[j]:=zK1[j];
End;
CentralnaProjekcija;
CrtanjeRezultata;
for j:=1 to jmax do {Drugi meridijan}
Begin
x3D[j]:=xK2[j];
y3D[j]:=yK2[j];
z3D[j]:=zK2[j];
End;
CentralnaProjekcija;
CrtanjeRezultata;
Bazis;
for i:=0 to 360 do
Begin
x3D[i]:=Xdb[i];
y3D[i]:=Ydb[i];
z3D[i]:=zdb[i];
End;
CentralnoProjiciranjeBazisa;
CrtanjeBazisa;
for i:=0 to 360 do
```

```
Begin
x3D[i]:=Xgb[i];
y3D[i]:=Ygb[i];
z3D[i]:=zgb[i];
End;
CentralnoProjiciranjeBazisa;
CrtanjeBazisa;
readln;
CloseGraph;
stampa;
writeln('jmax=',jmax:3);
readln;
END.
```

**Program TANGENTE_ELIPSE; {TANGENTE NA ELIPSU AKO JE CENTAR ELIPSE}
{U KOORDINATNOM POČETKU}**

```

Uses Crt,Graph;
Var
i,raz,du,j,Rraz:integer;
GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
aE,bE,xP,yP,Dm,m1,m2,n1,n2,xT1,yT1,xT2,yT2:real;
ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,fl,f2,R:real;
xE,yE:array [0..360] of real;
fi,Xb,Yb:array [0..360] of real;

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}
Begin
GraphDriver:=Detect;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');
ErrorCode:=GraphResult;
    If ErrorCode<>grOK then
    begin
    writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
    writeln('program aborted...');
    Halt(1);
    end;
End;

Procedure OGama;
Begin
ax:=220;ay:=220;
Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);
yk:=ay+200*sin(Gamar);
End;

Procedure ks;
Begin
OGama;
fx:=ax-2-195*cos(Gamar);
fy:=ay*195*sin(Gamar);
MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax-2),Round(ay+238));MoveTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax+2),Round(ay+238));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));
End;

Procedure Krug;
Begin
MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));
    for i:=0 to 360 do
    begin
    fi[i]:=i*3.145927/180;
    Xb[i]:=R*sin(fi[i]);
    Yb[i]:=R*cos(fi[i]);
    end;
MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay+f2+yb[0]));
for i:=1 to 360 do
LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay+f2+yb[i]));
End;

```

```

Procedure Elipsa;
Begin
aE:=50;
bE:=100;
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
xE[i]:=aE*cos(fi[i]);
yE[i]:=bE*sin(fi[i]);
end;
End;

Procedure CrtanjeEllipse;
Begin
MoveTo(Round(ax+xE[0]),Round(ay-yE[0]));
for i:=1 to 360 do
Begin
LineTo(Round(ax+xE[i]),Round(ay-yE[i]));
End;
End;

Procedure Diralista;
Begin
xP:=300;
yP:=200;
R:=2;f1:=xP;f2:=yP;
Krug;
Dm:=sqr(aE)*sqr(yP)+sqr(bE)*sqr(xP)-sqr(aE)*sqr(bE);
m1:=(-xP*yP+sqrt(Dm))/(sqr(aE)-sqr(xP));
m2:=(-xP*yP-sqrt(Dm))/(sqr(aE)+sqr(xP));
n1:=yP-m1*xP;
n2:=yP-m2*xP;
xT1:=(-m1*n1*sqr(aE))/(sqr(bE)+sqr(m1)*sqr(aE));
yT1:=m1*xT1+n1;
xT2:=(-m2*n2*sqr(aE))/(sqr(bE)+sqr(m2)*sqr(aE));
yT2:=m2*xT2+n2;
f1:=xT1;f2:=yT1;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT1),Round(ay+yT1));
f1:=xT2;f2:=yT2;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT2),Round(ay+yT2));
End;

```

```

BEGIN {GLAVNI PROGRAM}

```

```

Elipsa;
ClrScr;
Init;
ks;
CrtanjeEllipse;
Diralista;
readln;
CloseGraph;
END.

```


Program TANGENTE_ELIPSE_LokalniKoordSistem;
{TANGENTE NA ELIPSU AKO CENTAR ELIPSE NIJE U KOORDINATNOM POČETKU}

Uses Crt,Graph;

Var

i,raz,du,j,Rraz:integer;
 GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
 aE,bE,xP,yP,Dm,m1,m2,n1,n2,xT1,yT1,xT2,yT2:real;
 ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,fl,f2,R:real;
 xG,yG,uP,vP,uT1,vT1,uT2,vT2:real;
 xE,yE:array [0..360] of real;
 fi,Xb,Yb:array [0..360] of real;

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

Begin

GraphDriver:=Detect;

InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');

ErrorCode:=GraphResult;

 If ErrorCode<>grOK then

 begin

 writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));

 writeln('program aborted...');

 Halt(1);

 end;

End;

Procedure OGama;

Begin

ax:=220;ay:=100;

Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);

yk:=ay+200*sin(Gamar);

End;

Procedure ks;

Begin

OGama;

fx:=ax-2-195*cos(Gamar);

fy:=ay*195*sin(Gamar);

MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));

LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));

LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));

MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax),Round(ay+240));

LineTo(Round(ax-2),Round(ay+238));MoveTo(Round(ax),Round(ay+240));

LineTo(Round(ax+2),Round(ay+238));

MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));

MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));

End;

Procedure Krug;

Begin

MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));

 for i:=0 to 360 do

 begin

 fi[i]:=(i*3.145927)/180;

 Xb[i]:=R*sin(fi[i]);

 Yb[i]:=R*cos(fi[i]);

 end;

MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay+f2+yb[0]));

for i:=1 to 360 do

```
LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay+f2+yb[i]));
End;
```

Procedure Elipsa;

```
Begin
xG:=100;
yG:=180;
R:=2;f1:=xG;f2:=yG;Krug;
aE:=50;
bE:=100;
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
xE[i]:=aE*cos(fi[i]);
yE[i]:=bE*sin(fi[i]);
end;
End;
```

Procedure CrtanjeElipse;

```
Begin
MoveTo(Round(ax+xG+xE[0]),Round(ay+yG-yE[0]));
for i:=1 to 360 do
Begin
LineTo(Round(ax+xG+xE[i]),Round(ay+yG-yE[i]));
End;
End;
```

Procedure Diralista;

```
Begin
xP:=300;
yP:=0;
R:=2;f1:=xP;f2:=yP;
Krug;
{Smena}
uP:=xP-xG;
vP:=-yG;
Dm:=sqr(aE)*sqr(vP)+sqr(bE)*sqr(uP)-sqr(aE)*sqr(bE);
m1:=(-uP*vP+sqr(Dm))/(sqr(aE)-sqr(uP));
m2:=(-uP*vP-sqr(Dm))/(sqr(aE)-sqr(uP));
n1:=vP-m1*uP;
n2:=vP-m2*uP;
uT1:=(-m1*n1*sqr(aE))/(sqr(bE)+sqr(m1)*sqr(aE));
vT1:=m1*uT1+n1;
uT2:=(-m2*n2*sqr(aE))/(sqr(bE)+sqr(m2)*sqr(aE));
vT2:=m2*uT2+n2;
{Globalni koordinatni sistem}
xT1:=xG+uT1;
yT1:=yG+vT1;
xT2:=xG+uT2;
yT2:=yG+vT2;
f1:=xT1;f2:=yT1;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT1),Round(ay+yT1));
f1:=xT2;f2:=yT2;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT2),Round(ay+yT2));
End;
```

```
BEGIN {GLAVNI PROGRAM}  
ClrScr;  
Init;  
ks;  
Elipsa;  
CrtanjeEllipse;  
Diralista;  
readln;  
CloseGraph;  
END.
```

**Program TANGENTE_Para_ELIPSI;{TANGENTE NA PAR ELIPSI I TANGENTE SA
MINIMALNIM I MAKSIMALNIM ODSEČCIMA NA VERTIKALNOJ Y OSI}**

Uses Crt,Graph;

Var

i,raz,du,j,Rraz:integer;

GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;

aE,bE,xP,yP,Dm,m1,m2,n1,n2,xT1,yT1,xT2,yT2:real;

ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,f1,f2,R:real;

x1G,y1G,u1P,v1P,u1T1,v1T1,u1T2,v1T2:real;

x2G,y2G,aE2,bE2,u2P,v2P,Dm2,m3,m4,n3,n4,u2T3,v2T3,u2T4,v2T4,

xT3,yT3,xT4,yT4,rmin,rmax:real;

p,rp:array [1..4] of real;

xE,yE,xE2,yE2:array [0..360] of real;

fi,Xb,Yb:array [0..360] of real;

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

Begin

GraphDriver:=Detect;

InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');

ErrorCode:=GraphResult;

 If ErrorCode<>grOK then

 begin

 writeln('Graphics Error!',GraphErrorMsg(ErrorCode));

 writeln('program aborted...');

 Halt(1);

 end;

End;

Procedure OGama;

Begin

ax:=120;ay:=10;

Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);

yk:=ay+200*sin(Gamar);

End;

Procedure ks;

Begin

OGama;

fx:=ax-2-195*cos(Gamar);

fy:=ay*195*sin(Gamar);

MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+500),Round(ay));

LineTo(Round(ax+498),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+500),Round(ay));

LineTo(Round(ax+498),Round(ay+2));

MoveTo(Round(ax),Round(ay-20));LineTo(Round(ax),Round(ay+460));

LineTo(Round(ax-2),Round(ay+458));MoveTo(Round(ax),Round(ay+460));

LineTo(Round(ax+2),Round(ay+458));

End;

Procedure Krug;

Begin

MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));

 for i:=0 to 360 do

 begin

 fi[i]:=(i*3.145927)/180;

 Xb[i]:=R*sin(fi[i]);

 Yb[i]:=R*cos(fi[i]);

 end;

MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay+f2+yb[0]));

for i:=1 to 360 do

```

LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay+f2+yb[i]));
End;

```

Procedure Elipsa;

```

Begin
x1G:=80;
y1G:=180;
R:=2;f1:=x1G;f2:=y1G;Krug;
aE:=50;
bE:=100;
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
xE[i]:=aE*cos(fi[i]);
yE[i]:=bE*sin(fi[i]);
end;
x2G:=180;
y2G:=180;
R:=2;f1:=x2G;f2:=y2G;Krug;
aE2:=40;
bE2:=80;
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
xE2[i]:=aE2*cos(fi[i]);
yE2[i]:=bE2*sin(fi[i]);
end;
End;

```

Procedure CrtanjeEllipse;

```

Begin
MoveTo(Round(ax+x1G+xE[0]),Round(ay+y1G-yE[0]));
for i:=1 to 360 do
Begin
LineTo(Round(ax+x1G+xE[i]),Round(ay+y1G-yE[i]));
End;
MoveTo(Round(ax+x2G+xE2[0]),Round(ay+y2G-yE2[0]));
for i:=1 to 360 do
Begin
LineTo(Round(ax+x2G+xE2[i]),Round(ay+y2G-yE2[i]));
End;
End;

```

Procedure Diralista;

```

Begin
xP:=450;
yP:=0;
R:=2;f1:=xP;f2:=yP;
Krug;
{Smena}
u1P:=xP-x1G;
v1P:=-y1G;
Dm:=sqr(aE)*sqr(v1P)+sqr(bE)*sqr(u1P)-sqr(aE)*sqr(bE);
m1:=(-u1P*v1P+sqrt(Dm))/(sqr(aE)-sqr(u1P));
m2:=(-u1P*v1P-sqrt(Dm))/(sqr(aE)-sqr(u1P));
n1:=v1P-m1*u1P;
n2:=v1P-m2*u1P;
u1T1:=(-m1*n1*sqr(aE))/(sqr(bE)+sqr(m1)*sqr(aE));
v1T1:=m1*u1T1+n1;

```

```

u1T2:=(-m2*n2*sqr(aE))/(sqr(bE)+sqr(m2)*sqr(aE));
v1T2:=m2*u1T2+n2;
{Globalni koordinatni sistem}
xT1:=x1G+u1T1;
yT1:=y1G+v1T1;
xT2:=x1G+u1T2;
yT2:=y1G+v1T2;
f1:=xT1;f2:=yT1;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT1),Round(ay+yT1));
f1:=xT2;f2:=yT2;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT2),Round(ay+yT2));
{Smena}
u2P:=xP-x2G;
v2P:=-y2G;
Dm2:=sqr(aE2)*sqr(v2P)+sqr(bE2)*sqr(u2P)-sqr(aE2)*sqr(bE2);
m3:=(-u2P*v2P+sqr(Dm2))/(sqr(aE2)-sqr(u2P));
m4:=(-u2P*v2P-sqr(Dm2))/(sqr(aE2)-sqr(u2P));
n3:=v2P-m3*u2P;
n4:=v2P-m4*u2P;
u2T3:=(-m3*n3*sqr(aE2))/(sqr(bE2)+sqr(m3)*sqr(aE2));
v2T3:=m3*u2T3+n3;
u2T4:=(-m4*n4*sqr(aE2))/(sqr(bE2)+sqr(m4)*sqr(aE2));
v2T4:=m4*u2T4+n4;
{Globalni koordinatni sistem}
xT3:=x2G+u2T3;
yT3:=y2G+v2T3;
xT4:=x2G+u2T4;
yT4:=y2G+v2T4;
f1:=xT3;f2:=yT3;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT3),Round(ay+yT3));
f1:=xT4;f2:=yT4;Krug;
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax+xT4),Round(ay+yT4));
End;

```

Procedure IntervalTangenata;

```

Begin
p[1]:=yT1/(xT1-xP);
rp[1]:=-p[1]*xP;
p[2]:=yT2/(xT2-xP);
rp[2]:=-p[2]*xP;
p[3]:=yT3/(xT3-xP);
rp[3]:=-p[3]*xP;
p[4]:=yT4/(xT4-xP);
rp[4]:=-p[4]*xP;
{Minimalni odsečak na y osi}
  rmin:=rp[1];
  For i:=2 to 4 do
    Begin
      If rp[i] < rmin then rmin:=rp[i]
    else;
    End;
{Maksimalni osdečak na y osi}
  rmax:=rp[1];
  For i:=2 to 4 do
    Begin

```

```
    If rp[i] > rmax then rmax:=rp[i]
    else;
    End;
{Povlačenje pravca}
SetLineStyle(1,0,1);
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax),Round(ay+rmin));
MoveTo(Round(ax+xP),Round(ay+yP));
LineTo(Round(ax),Round(ay+rmax));
End;
```

Procedure Stampa;

```
Begin
WriteLN('rmin=',rmin:5:2);
WriteLN('rmax=',rmax:5:2);
for i:=1 to 4 do
WriteLN('rp[' ,i,']=',rp[i]:5:2);
End;
```

```
    BEGIN {GLAVNI PROGRAM}
    ClrScr;
    Init;
    ks;
    Elipsa;
    CrtanjeElipse;
    Diralista;
    IntervalTangenata;
    readln;
    CloseGraph;
    Stampa;ReadLn;
    END.
```

Program RavPres;{RAVAN PRESEK OBRITNE POVRSI}

Uses Crt,Graph;

Var

i,raz:integer;

GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;

ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,x1,y1,alfaX,alfaY,a,b,

A1,B1,Rk,f,g,g1,Xmax,Xmin:real;

C,rA,xA,zA,xA1,D,xP1,xP2,yP1,yP2,xb,yb,fi,xApo,Xc,Yc:array [0..620] of real;

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

Begin

GraphDriver:=Detect;

InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');

ErrorCode:=GraphResult;

If ErrorCode<>grOK then

begin

writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));

writeln('program aborted...');

Halt(1);

end;

End;

Procedure OGama;{UGAO U RADIJANIMA}

Begin

ax:=145;ay:=200;

Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);

yk:=ay+200*sin(Gamar);

End;

Procedure ks;{CRTANJE KOORDINATNOG SISTEMA}

Begin

OGama;

fx:=ax-2-195*cos(Gamar);fy:=ay*195*sin(Gamar);

MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));

LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));

LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));

LineTo(Round(ax),Round(ay+350));MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));

LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));

LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));

Readln;

End;

Procedure krug;

Begin

for i:=0 to 360 do

begin

fi[i]:=(i*3.145927)/180;

Xb[i]:=Xmax*sin(fi[i]);

Yb[i]:=Xmax*cos(fi[i]);

end;

Moveto(Round(ax+x1+xb[0]),Round(ay+y1+yb[0]));

for i:=1 to 360 do

Lineto(Round(ax+x1+xb[i]),Round(ay+y1+yb[i]));

End;

Procedure SlucajA;

Begin

x1:=100;y1:=135;alfaX:=300;alfaY:=270;

b:=alfaY;a:=-alfaY/alfaX;


```

A1:=1+sqr(a);B1:=2*(a*(b-y1)-x1);
zA[0]:=0;f:=180;
xA[0]:=f+50;xA1[0]:=2*x1-xA[0];
    for i:=1 to 620 do
        begin
            zA[i]:=zA[i-1]+0.01;
            xA[i]:=50*cos(zA[i])+f;
            xA1[i]:=2*x1-xA[i];
        end;
{Prečnik bazisa}
Xmax:=xA[0];
    for i:=1 to 620 do
        begin
            if xA[i]>Xmax then Xmax:=xA[i]
            else
                end;
Xmax:=Xmax-x1;
Xmin:=xA[0];
    for i:=1 to 620 do
        begin
            if xA[i]<Xmin then Xmin:=xA[i]
            else
                end;
Xmin:=Xmin-x1;
End;

Procedure prestacke;
Label 1,2,3,4,5,6;
Begin
    for i:=0 to 620 do
        begin
            rA[i]:=xA[i]-x1;
            C[i]:=sqr(x1)+sqr(b-y1)-sqr(rA[i]);
            D[i]:=sqr(B1)-4*A1*C[i];
                if D[i]<0 then goto 1
                else goto 2;
2:xP1[i]:=(-B1+sqr(D[i]))/(2*A1);
xP2[i]:=(-B1-sqr(D[i]))/(2*A1);
yP1[i]:=a*xP1[i]+b;
yP2[i]:=a*xP2[i]+b;
1:End;
{Štampanje}
SetLineStyle(0,$C3,3);
Moveto(Round(ax+xP1[0]),Round(ay-g*zA[0]));
Lineto(Round(ax+xP1[0]),Round(ay-g*zA[0]));
for i:=1 to 620 do
Begin
    if D[i]<0 then goto 3
    else goto 4;
4:Moveto(Round(ax+xP1[i]),Round(ay-g*zA[i]));
Lineto(Round(ax+xP1[i]),Round(ay-g*zA[i]));
3:end;
Moveto(Round(ax+xP2[0]),Round(ay-g*zA[0]));
Lineto(Round(ax+xP2[0]),Round(ay-g*zA[0]));
for i:=1 to 620 do
Begin
    if D[i]<0 then goto 5
    else goto 6;
6:Moveto(Round(ax+xP2[i]),Round(ay-g*zA[i]));

```

```

Lineto(Round(ax+xP2[i]),Round(ay-g*zA[i]));
5:end;
readln;
End;

```

Procedure SlikaA;

```

Begin
Rk:=2;
{Centar kruga}
Moveto(Round(ax+x1),Round(ay+y1));
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
Xc[i]:=Rk*sin(fi[i]);
Yc[i]:=Rk*cos(fi[i]);
end;
Moveto(Round(ax+x1+Xc[0]),Round(ay+y1+Yc[0]));
for i:=1 to 360 do
Lineto(Round(ax+x1+Xc[i]),Round(ay+y1+Yc[i]));
{Prvi trag ravni}
SetLineStyle(0,$C3,3);
Moveto(Round(ax+alfaX),Round(ay));
Lineto(Round(ax),Round(ay+alfaY));
{Drugi trag ravni}
Moveto(Round(ax+alfaX),Round(ay));
Lineto(Round(ax+alfaX),Round(ay-200));
{Osa rotacione površi u frontalnici}
SetLineStyle(2,$C3,1);
Moveto(Round(ax+x1),Round(ay));
Lineto(Round(ax+x1),Round(ay-200));
{Kontura}
g:=30;g1:=1;
SetLineStyle(0,$C3,1);
Moveto(Round(ax+g1*xA[0]),Round(ay-g*zA[0]));
for i:=1 to 620 do
Lineto(Round(ax+g1*xA[i]),Round(ay-g*zA[i]));
Moveto(Round(ax+g1*xA1[0]),Round(ay-g*zA[0]));
for i:=1 to 620 do
Lineto(Round(ax+g1*xA1[i]),Round(ay-g*zA[i]));
Moveto(Round(ax+g1*xA1[620]),Round(ay-g*zA[620]));
Lineto(Round(ax+g1*xA[620]),Round(ay-g*zA[620]));
{Krug}
Krug;readln;
{Minimalni krug}
Xmax:=Xmin;Krug;
Readln;
End;

```

BEGIN {GLAVNI PROGRAM}

```

Gama:=30;
ClrScr;
Init;
ks;
SlucajA;
SlikaA;
Prestacke;
CloseGraph;
END.

```

```

Program RPOS;{RAVAN PRESEK OBRTNE POVRSI-opšti slucaj}
Uses Crt,Graph;
Var
i,raz:integer;
GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,x1,y1,alfaX,alfaY,alfaZ,a,b,
A1,B1,Rk,f,g,gl,Xmax,Xmin,b1h,xH,pAlfa2,rAlfa2,zS,mg1p,ng1p,xQ,yQ,
mg1s,ng1s:real;
C,rA,xA,zA,xA1,D,xP1,xP2,yP1,yP2,{xApo,Xc,Yc,}
xB1,yB1,s,f1:array [0..620] of real;
xb,yb,fi:array [0..360] of real;

```

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

```

Begin
GraphDriver:=Detect;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');
ErrorCode:=GraphResult;
  If ErrorCode<>grOK then
  begin
  writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
  writeln('program aborted...');
  Halt(1);
  end;
End;

```

Procedure OGama;{UGAO U RADIJANIMA}

```

Begin
ax:=145;ay:=200;
Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);
yk:=ay+200*sin(Gamar);
End;

```

Procedure ks;{CRTANJE KOORDINATNOG SISTEMA}

```

Begin
OGama;
fx:=ax-2-195*cos(Gamar);fy:=ay*195*sin(Gamar);
MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));
LineTo(Round(ax),Round(ay+350));MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));
LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));
LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));
Readln;
End;

```

Procedure krug;

```

Begin
  for i:=0 to 360 do
  begin
  fi[i]:=(i*3.145927)/180;
  Xb[i]:=Xmax*sin(fi[i]);
  Yb[i]:=Xmax*cos(fi[i]);
  end;
Moveto(Round(ax+x1+xb[0]),Round(ay+y1+yb[0]));
for i:=1 to 360 do
Lineto(Round(ax+x1+xb[i]),Round(ay+y1+yb[i]));
End;

```

Procedure SlucajB;

```

Begin
x1:=100;y1:=135;           {Centar bazisnog kruga u ravni Oxy}
alfaX:=300;alfaY:=270;alfaZ:=250;   {Osni tragovi ravni}
{probne vrednosti su alfaX:=300;alfaY:=270;alfaZ:=50;}
b:=alfaY;                   {Odsečak prvog traga ravni na y osi}
a:=-alfaY/alfaX;           {Koefficient pravca prvog traga ravni}
A1:=1+sqr(a);              {Vrednost za e iz jednačine 5.44}
B1:=2*(a*(b-y1)-x1);       {Vrednost za f iz jednačine 5.44}
b1h:=y1-a*x1;             {Vrednost b1 iz jednačine 5.48}
xH:=-b1h/a;                {Jednačina 5.49}
{Drugi trag ravni alfa}
pAlfa2:=-alfaZ/alfax;      {Jednačina 5.51}
rAlfa2:=alfaZ;             {Jednačina 5.51}
zS:=pAlfa2*xH+rAlfa2;     {Jednačina 5.52}
{Prva nagibnica u tački S u prvoj projekciji}
mg1p:=-1/a;                {Jednačina 5.54}
ng1p:=y1-mg1p*x1;         {Jednačina 5.54}
{Tačka Q prema jednačini 5.55}
xQ:=(ng1p-b)/(a-mg1p);
yQ:=a*xQ+b;
{Prva nagibnica u tački S u drugoj projekciji}
mg1s:=zS/(x1-xQ);
ng1s:=-mg1s*xQ;
{Crtanje nagibnice}
{Prva projekcija nagibnice}
Moveto(Round(ax+x1),Round(ay+y1));
Lineto(Round(ax+xQ),Round(ay+yQ));
{Druga projekcija nagibnice}
Moveto(Round(ax+xQ),Round(ay));
Lineto(Round(ax+x1),Round(ay-zS));
{Definisanje meridijana}
zA[0]:=0;f:=180;
xA[0]:=f+50;xA1[0]:=2*x1-xA[0];
      for i:=1 to 620 do
      begin
      zA[i]:=zA[i-1]+0.01;
      xA[i]:=50*cos(zA[i])+f;
      xA1[i]:=2*x1-xA[i];
      end;
{Prečnik bazisa}
{Maksimalni}
Xmax:=xA[0];
      for i:=1 to 620 do
      begin
      if xA[i]>Xmax then Xmax:=xA[i]
      else
      end;
Xmax:=Xmax-x1;
{Minimalni}
Xmin:=xA[0];
      for i:=1 to 620 do
      begin
      if xA[i]<Xmin then Xmin:=xA[i]
      else
      end;
Xmin:=Xmin-x1;
End;

```

Procedure prestacke;

```

Label 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10;
Begin
  for i:=0 to 620 do
    begin
      rA[i]:=xA[i]-x1;           {Poluprečnik kruga na visini i}
      xB1[i]:=(zA[i]-ng1s)/mg1s; {Jednačina 5.58}
      yB1[i]:=mg1p*xB1[i]+ng1p; {Jednačina 5.59}
      s[i]:=yB1[i]-a*xB1[i];    {Jednačina 5.61}
      f1[i]:=2*(a*(s[i]-y1)-x1); {Jednačina 5.63}
      C[i]:=sqrt(x1)+sqrt(s[i]-y1)-sqrt(rA[i]); {Vrednost promenljive g1 iz jed. 5.63}
      D[i]:=sqrt(f1[i])-4*A1*C[i]; {Diskriminanta iz jednačine 5.64}
      {Ispitivanje vrednosti diskriminante}
      if D[i]<0 then goto 1
      else goto 2;
    2:{Koordinate presečnih tacaka}
      xP1[i]:=(-f1[i]+sqrt(D[i]))/(2*A1);
      xP2[i]:=(-f1[i]-sqrt(D[i]))/(2*A1);
      yP1[i]:=a*xP1[i]+s[i];
      yP2[i]:=a*xP2[i]+s[i];
    1:End;
    {Štampanje}
    {Druga projekcija presečne krive}
    SetLineStyle(0,$C3,3);      {Podešavanje tipa linije}
    Moveto(Round(ax+xP1[0]),Round(ay-g*zA[0]));
    Lineto(Round(ax+xP1[0]),Round(ay-g*zA[0]));
    for i:=1 to 620 do
      Begin
        if D[i]<0 then goto 3
        else goto 4;
      4: Moveto(Round(ax+xP1[i]),Round(ay-g*zA[i]));
        Lineto(Round(ax+xP1[i]),Round(ay-g*zA[i]));
      3:end;
      Moveto(Round(ax+xP2[0]),Round(ay-g*zA[0]));
      Lineto(Round(ax+xP2[0]),Round(ay-g*zA[0]));
      for i:=1 to 620 do
        Begin
          if D[i]<0 then goto 5
          else goto 6;
        6: Moveto(Round(ax+xP2[i]),Round(ay-g*zA[i]));
          Lineto(Round(ax+xP2[i]),Round(ay-g*zA[i]));
        5:end;
        {Prva projekcija presečne krive}
        Moveto(Round(ax+xP1[0]),Round(ay+yP1[0]));
        Lineto(Round(ax+xP1[0]),Round(ay+yP1[0]));
        for i:=1 to 620 do
          Begin
            if D[i]<0 then goto 7
            else goto 8;
          8: Moveto(Round(ax+xP1[i]),Round(ay+yP1[i]));
            Lineto(Round(ax+xP1[i]),Round(ay+yP1[i]));
          7:end;
          Moveto(Round(ax+xP2[0]),Round(ay+yP2[0]));
          Lineto(Round(ax+xP2[0]),Round(ay+yP2[0]));
          for i:=1 to 620 do
            Begin
              if D[i]<0 then goto 9
              else goto 10;
            10: Moveto(Round(ax+xP2[i]),Round(ay+yP2[i]));
              Lineto(Round(ax+xP2[i]),Round(ay+yP2[i]));
            End;
          End;
        End;
      End;
    End;
  End;

```

```

9:end;
readln;
End;

Procedure SlikaB;
Begin
Rk:=2;
{Centar kruga}
Moveto(Round(ax+x1),Round(ay+y1));
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
Xb[i]:=Rk*sin(fi[i]);
Yb[i]:=Rk*cos(fi[i]);
end;
Moveto(Round(ax+x1+Xb[0]),Round(ay+y1+Yb[0]));
for i:=1 to 360 do
Lineto(Round(ax+x1+Xb[i]),Round(ay+y1+Yb[i]));
{Prvi trag ravni}
SetLineStyle(0,$C3,3);
Moveto(Round(ax+alfaX),Round(ay));
Lineto(Round(ax),Round(ay+alfaY));
{Drugi trag ravni}
Moveto(Round(ax+alfaX),Round(ay));
Lineto(Round(ax),Round(ay-alfaZ));
{Osa rotacione površi u frontalnici}
SetLineStyle(2,$C3,1);
Moveto(Round(ax+x1),Round(ay));
Lineto(Round(ax+x1),Round(ay-200));
{Kontura}
g:=30;g1:=1;
SetLineStyle(0,$C3,1);
Moveto(Round(ax+g1*xA[0]),Round(ay-g*zA[0]));
for i:=1 to 620 do
Lineto(Round(ax+g1*xA[i]),Round(ay-g*zA[i]));
Moveto(Round(ax+g1*xA1[0]),Round(ay-g*zA[0]));
for i:=1 to 620 do
Lineto(Round(ax+g1*xA1[i]),Round(ay-g*zA[i]));
Moveto(Round(ax+g1*xA1[620]),Round(ay-g*zA[620]));
Lineto(Round(ax+g1*xA[620]),Round(ay-g*zA[620]));
{Krug}
Krug;readln;
{Minimalni krug}
Xmax:=Xmin;Krug;
Readln;
End;

```

```

BEGIN {GLAVNI PROGRAM}

```

```

Gama:=30;
ClrScr;
Init;
ks;
SlucajB;
SlikaB;
Prestacke;
CloseGraph;
END.

```

Program PLOS; {PRESEČNA KRIVA DVEJU ROTACIONIH POVRSI CIJE SE OSE SEKU}

```

Uses Crt,Graph;
Label 1,2,3;
Var
i,raz,j,t,s,t2,s2,t3,s3,t4,s4,iMin1,iMin2,k,Kmax,ig,lpre,g,gmax,
s3min,w:integer;
GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
fi:array [0..360] of real;
ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,XP1,ZP1,Rx,Rz,XP2,ZP2,XP3,ZP3,XP4,ZP4,n1,teta1,tetaS1,Xk1,Zk1,a,R,n2
,teta2,tetaS2,Xk2,Zk2,DelMin,m1,m2,XL,ZL,Rmax,Polupr,k1,xC1,zC1,k2,xC2,ZC2,KsiS1,Ksi1,KsiS2,Ksi2
,vL1,vL2,Raz1Min,Raz2Min,RL1,RL2,Rmin:real;
x1,z1,X1sim,Z1sim,xb,zb,Del1,Del2,DelSre,p1,q1,u1,v1,
DeltaX1,DeltaZ1,Nu1,Nv1,DS1,Raz1,R1,Razlika,R2:array [0..360] of real;
x2,z2,X2sim,Z2sim,p2,q2,u2,v2,DeltaX2,DeltaZ2,Nu2,Nv2,DS2,Raz2:array [0..90] of real;
XPr,ZPr,Rad,XP,ZP,XPsim,ZPsim:array [1..4] of real;
Ipreseka:array [1..2] of integer;
Rpl,Eps,X,Diskr,Z,RazMin,a3,a4,b3,b4,Q,ZA1,ZA2,ZA3,ZA4,ZA5,ZA6,ZA7,ZA8,XA1,XA2,XA3,XA4,X
A5,XA6,XA7,XA8,YA1,YA2,YA3,YA4,YA5,YA6,YA7,YA8:real;
br,br1,br2,br3,br4:integer;

```

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

```

Begin
GraphDriver:=Detect;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');
ErrorCode:=GraphResult;
    If ErrorCode<>grOK then
        begin
            writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
            writeln('program aborted...');
            Halt(1);
        end;
End;

```

Procedure OGama; {UGAO U RADIJANIMA}

```

Begin
ax:=250;ay:=400;
Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);
yk:=ay+200*sin(Gamar);
End;

```

Procedure ks; {CRTANJE KOORDINATNOG SISTEMA}

```

Begin
OGama;
fx:=ax-2-195*cos(Gamar);fy:=ay*195*sin(Gamar);
MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));MoveTo(Round(ax),Round(ay-400));
LineTo(Round(ax),Round(ay+250));LineTo(Round(ax-2),Round(ay+248));
MoveTo(Round(ax),Round(ay+250));LineTo(Round(ax+2),Round(ay+248));
Readln;
End;

```

Procedure krug;

```

Begin
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
xb[i]:=Polupr*sin(fi[i]);
zb[i]:=Polupr*cos(fi[i]);

```

```

end;
SetLineStyle(0,1,1);
Moveto(Round(ax+Q*(Rx+xb[0])),Round(ay+Q*(-Rz+zb[0]]));
for i:=1 to 360 do
Lineto(Round(ax+Q*(Rx+xb[i])),Round(ay+Q*(-Rz+zb[i]]));
End;

Procedure SimCikloida;
Begin
tetaS1:=20; {Ugao izmedju ose rotacione površi i x ose}
n1:=80; {Odsečak ose rotacione površi na z osi}
teta1:=(tetaS1*3.145927)/180; {ugao u radijanima}
Xk1:=200; {X koordinata pomoćne tačke za crtanje ose rotacione površi}
Zk1:=n1+(Xk1*sin(teta1))/cos(teta1); {Z koordinata pomoćne tačke}
a:=35; {Koeficijent}
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
X1[i]:=a*(fi[i]-sin(fi[i]))-100; {Jednačina cikloide}
Z1[i]:=a*(1-cos(fi[i]))+60; {Jednačina cikloide}
{Simetrični meridijan - Jednačina 6.9}
X1sim[i]:=2*x1[i]*sqr(cos(teta1))+2*(z1[i]-n1)*sin(teta1)*cos(teta1)-x1[i];
Z1sim[i]:=2*(n1-z1[i])*sqr(cos(teta1))+2*x1[i]*sin(teta1)*cos(teta1)+z1[i];
end;
SetLineStyle(0,1,3); {Izbor tipa linije}
{Crtanje cikloide - polazni meridijan}
Moveto(Round(ax+Q*X1[0]),Round(ay-Q*Z1[0]));
for i:=1 to 360 do
Lineto(Round(ax+Q*X1[i]),Round(ay-Q*Z1[i]));
{Crtanje cikloide - simetrični meridijan}
Moveto(Round(ax+Q*X1sim[0]),Round(ay-Q*Z1sim[0]));
for i:=1 to 360 do
Lineto(Round(ax+Q*X1sim[i]),Round(ay-Q*Z1sim[i]));
{Osa rotacione površi}
SetLineStyle(0,1,1);
Moveto(Round(ax),Round(ay-Q*n1));
Lineto(Round(ax+Q*Xk1),Round(ay-Q*Zk1));
{Drugi meridijan}
R:=120; {Poluprečnik}
tetaS2:=90; {Ugao između ose druge RP i z ose}
teta2:=(tetaS2*3.145927)/180; {Ugao u radijanima}
for i:=0 to 90 do {Sračunavanje koordinata tačaka meridijana}
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
X2[i]:=-50+R*(cos(fi[i])); {Polazni meridijan}
Z2[i]:=1.5*R*(sin(fi[i])); {Polazni meridijan}
X2sim[i]:=-X2[i]; {Simetrični meridijan}
Z2sim[i]:=Z2[i]; {Simetrični meridijan}
end;
SetLineStyle(0,1,3); {Izbor tipa linije}
{Crtanje polaznog meridijana druge površi}
Moveto(Round(ax+Q*X2[0]),Round(ay-Q*Z2[0]));
for i:=1 to 90 do
Lineto(Round(ax+Q*X2[i]),Round(ay-Q*Z2[i]));
{Crtanje simetričnog meridijana druge površi}
Moveto(Round(ax+Q*X2sim[0]),Round(ay-Q*Z2sim[0]));
for i:=1 to 90 do
Lineto(Round(ax+Q*X2sim[i]),Round(ay-Q*Z2sim[i]));
End;

```



```

Procedure CetiriTacke1;
label 1,2;
Begin
DelMin:=0.5;           {Delta minimalno-procedura za određivanje presečne tačke, str. 64}
  For i:=0 to 360 do
    Begin
      For j:=0 to 90 do
        Begin
          Del1[i]:=abs(X1[i]-X2[j]);
          Del2[i]:=abs(Z1[i]-Z2[j]);
          DelSre[i]:=(Del1[i]+Del2[i])/2;
          If DelSre[i]>DelMin then goto 1
          else goto 2;
        2:DelMin:=DelSre[i];
          t:=i;
          s:=j;
          XP1:=X1[t];
          ZP1:=Z1[t];
        1:End;
      End;
    Rx:=XP1;
    Rz:=ZP1;
  End;

```

```

Procedure CetiriTacke2;
label 1,2;
Begin
DelMin:=0.5;
  For i:=0 to 360 do
    Begin
      For j:=0 to 90 do
        Begin
          Del1[i]:=abs(X1[i]-X2sim[j]);
          Del2[i]:=abs(Z1[i]-Z2sim[j]);
          DelSre[i]:=(Del1[i]+Del2[i])/2;
          If DelSre[i]>DelMin then goto 1
          else goto 2;
        2:DelMin:=DelSre[i];
          t2:=i;
          s2:=j;
          XP2:=X1[t2];
          ZP2:=Z1[t2];
        1:End;
      End;
    Rx:=XP2;
    Rz:=ZP2;
  End;

```

```

Procedure CetiriTacke3;
label 1,2;
Begin
DelMin:=0.5;
  For i:=0 to 360 do
    Begin
      For j:=0 to 90 do
        Begin
          Del1[i]:=abs(X1sim[i]-X2[j]);
          Del2[j]:=abs(Z1sim[i]-Z2[j]);
          DelSre[i]:=(Del1[i]+Del2[i])/2;

```

```

        If DelSre[i]>DelMin then goto 1
        else goto 2;
2:DelMin:=DelSre[i];
  t3:=i;
  s3:=j;
  XP3:=X1 sim[t3];
  ZP3:=Z1 sim[t3];
  S3min:=s3;
1:End;
End;
Rx:=XP3;
Rz:=ZP3;
End;

```

Procedure CctiriTacke4;

```

label 1,2;
Begin
DelMin:=1; {Ponckad je potrebno korigovati vrednost- povecati ili smanjiti}
  For i:=0 to 360 do
    Begin
      For j:=0 to 90 do
        Begin
          Del1[i]:=abs(X1 sim[i]-X2 sim[j]);
          Del2[i]:=abs(Z1 sim[i]-Z2 sim[j]);
          DelSre[i]:=(Del1[i]+Del2[i])/2;
          If DelSre[i]>DelMin then goto 1
          else goto 2;
        2:DelMin:=DelSre[i];
          t4:=i;
          s4:=j;
          XP4:=X1 sim[t4];
          ZP4:=Z1 sim[t4];
        1:End;
      End;
    Rx:=XP4;
    Rz:=ZP4;
  End;

```

Procedure CenPomLop; {CENTAR POMOĆNIH LOPTI}

```

Begin
m1:=sin(teta1)/cos(teta1);           {Koficijent pravca ose prve rotacione površi}
m2:=sin(teta2)/cos(teta2);           {Koficijent pravca ose druge rotacione površi}
XL:=0;                                {X koordinata centra OL svih pomoćnih lopti}
ZL:=n1;                                {Z koordinata centra OL svih pomoćnih lopti}
Rx:=XL;
Rz:=ZL;
End;

```

Procedure MaxLop; {MAKSIMALNA LOPTA}

```

Begin
XPr[1]:=XP1;                           {Koordinate četiri tačke se pridružuju nizu i=1,...,4 }
ZPr[1]:=ZP1;                             {da bi smo mogli izdvojiti tačku koja je najviše udaljena}
XPr[2]:=XP2;                             {od tačke OL - na taj način dolazi se do lopte mak. poluprečnika}
ZPr[2]:=ZP2;
XPr[3]:=XP3;
ZPr[3]:=ZP3;
XPr[4]:=XP4;
ZPr[4]:=ZP4;
For i:=1 to 4 do                          {Sračunavanje vrednosti četiri poluprečnika}

```

```

Rad[i]:=sqrt(sqr(XL-XPr[i])+sqr(ZL-ZPr[i]));
Rmax:=Rad[1];           {Usvajamo da je na početku petlje najveći poluprečnik prvi u nizu}
For i:=2 to 4 do       {Zatim poredimo vrednosti i izvlačimo najveći}
Begin
If Rad[i]>Rmax then Rmax:=Rad[i]
else
End;
Rx:=XL;
Rz:=ZL;
Polupr:=Rmax;
End;

```

Procedure LokCen;{CENTRI LOKALNIH KOORDINATNIH SISTEMA}

```

Begin
{Centar lokalnog koordinatnog sistema za prvu rotacionu površ}
k1:=Z1[0]+(X1[0]/m1);           {Jednačina 6.22}
xC1:=(k1-n1)*m1/(sqr(m1)+1);   {Jednačina 6.23}
zC1:=m1*xC1+n1;               {Jednačina 6.23}
{Crtačka provera}
Moveto(Round(ax+Q*xC1),Round(ay-Q*zC1));
Lineto(Round(ax+Q*X1[0]),Round(ay-Q*Z1[0]));
{Centar lokalnog koordinatnog sistema za drugu rotacionu površ}
xC2:=0;zC2:=0;
End;

```

Procedure ParJed;{PARAMETARSKJE JEDNAČINE KRIVIH U LOKALNIM KOORDINATNIM SISTEMIMA}

```

Begin
KsiS1:=TetaS1-90;           {Ugao iz jednačine 6.24 za prvu površ}
Ksi1:=(KsiS1*3.145927)/180;  {Ugao u radijanima}
KsiS2:=TetaS2-90;           {Ugao iz jednačine 6.24 za drugu površ}
Ksi2:=(KsiS2*3.145927)/180;  {Ugao u radijanima}
  For i:=0 to 360 do
    Begin{Parametarske jednačine za meridijan prve površi}
      p1[i]:=X1[i]-xC1;       {Jednačina 6.25}
      q1[i]:=Z1[i]-zC1;       {Jednačina 6.25}
      u1[i]:=p1[i]*cos(Ksi1)+q1[i]*sin(Ksi1); {Jednačina 6.26}
      v1[i]:=-p1[i]*sin(Ksi1)+q1[i]*cos(Ksi1); {Jednačina 6.26}
    End;
    For j:=0 to 90 do
      Begin{Parametarske jednačine za meridijan druge površi}
        p2[j]:=X2[j]-xC2; {Jednačina 6.25}
        q2[j]:=Z2[j]-zC2; {Jednačina 6.25}
        u2[j]:=p2[j]*cos(Ksi2)+q2[j]*sin(Ksi2); {Jednačina 6.26}
        v2[j]:=-p2[j]*sin(Ksi2)+q2[j]*cos(Ksi2); {Jednačina 6.26}
      End;
    End;
End;

```

Procedure MinLop;{MINIMALNE LOPTE}

```

Label 1,2,3,4;
Begin
vL1:=sqrt(sqr(XL-XC1)+sqr(ZL-ZC1)); {Centar lopte u LKS - jednačina 6.27}
vL2:=sqrt(sqr(XL-XC2)+sqr(ZL-ZC2)); {Centar lopte u LKS - jednačina 6.27}
{Određivanje dodirne lopte za prvu površ}
  For i:=0 to 360 do
    Begin
      DeltaX1[i]:=a*(1-cos(fi[i])); {Prvi izvod promenljive X1}
      DeltaZ1[i]:=a*sin(fi[i]);    {Prvi izvod promenljive Z1}
      Nu1[i]:=sin(Ksi1)*DeltaX1[i]-cos(Ksi1)*DeltaZ1[i]; {Jednačina 6.28}
    End;
  End;

```

```

Nv1[i]:=DeltaX1[i]*cos(Ksi1)+DeltaZ1[i]*sin(Ksi1); {Jednačina 6.28}
DS1[i]:=v1[i]-((u1[i]*Nv1[i])/Nu1[i]);           {Jednačina 6.28}
Raz1[i]:=abs(vL1-DS1[i]);                         {Jednačina 6.28}
End;
{Petlja za određivanje minimalne lopte za prvu površ}
Raz1Min:=Raz1[0];
iMin1:=0;
For i:=1 to 360 do
Begin
If Raz1[i]<Raz1Min then goto 1
Else goto 2;
1:Raz1min:=Raz1[i];
iMin1:=i;
2:End;
RL1:=sqrt(sqrt(u1[iMin1])+sqrt(vL1-v1[iMin1]));
Polupr:=RL1;
{Krug;}
{Određivanje dodirne lopte za drugu površ}
For j:=0 to 90 do
Begin
DeltaX2[j]:=-R*sin(fi[j]);
DeltaZ2[j]:=1.5*R*cos(fi[j]);
Nu2[j]:=sin(Ksi2)*DeltaX2[j]-cos(Ksi2)*DeltaZ2[j];
Nv2[j]:=DeltaX2[j]*cos(Ksi2)+DeltaZ2[j]*sin(Ksi2);
DS2[j]:=v2[j]-((u2[j]*Nv2[j])/Nu2[j]);
Raz2[j]:=abs(vL2-DS2[j]);
End;
{Petlja za određivanje minimalne lopte za drugu površ}
Raz2Min:=Raz2[0];
iMin2:=0;
For j:=1 to 90 do
Begin
If Raz2[j]<Raz2Min then goto 3
Else goto 4;
3:Raz2min:=Raz2[j];
iMin2:=j;
4:End;
RL2:=sqrt(sqrt(u2[iMin2])+sqrt(vL2-v2[iMin2]));
Polupr:=RL2;
{Krug;}
End;

```

Procedure Bazisi; {Crtanje bazisnih krugova-paralela dveju površi}

```

Begin
SetLineStyle(0,1,3);
Moveto(Round(ax+Q*X1[0]),Round(ay-Q*Z1[0]));
Lineto(Round(ax+Q*X1sim[0]),Round(ay-Q*Z1sim[0]));
Moveto(Round(ax+Q*X1[360]),Round(ay-Q*Z1[360]));
Lineto(Round(ax+Q*X1sim[360]),Round(ay-Q*Z1sim[360]));
Moveto(Round(ax+Q*X2[0]),Round(ay-Q*Z2[0]));
Lineto(Round(ax+Q*X2sim[0]),Round(ay-Q*Z2sim[0]));
Moveto(Round(ax+Q*X2[90]),Round(ay-Q*Z2[90]));
Lineto(Round(ax+Q*X2sim[90]),Round(ay-Q*Z2sim[90]));
End;

```

Procedure MinLopta; {Određivanje lopte minimalnog prečnika iz pramena pomoćnih lopti }

```

Begin
If RL1>RL2 then Rmin:=RL1           {Određuje se prema jednačini 6.30}
else Rmin:=RL2;

```

```

Polupr:=Rmin;
SetLineStyle(0,1,1);
Krug;
End;

Procedure Presek1;{Po z osi}
Label 1,2,3,4,5,11,12,13,14,15;
Begin
k:=1;
i:=1;
RazMin:=abs(Z-Z2[1]);
3:Diskr:=sqr(Rpl)-sqr(X2[i]);
If Diskr<0 then goto 2
else goto 5;
5:Z:=ZL+sqrt(sqr(Rpl)-sqr(X2[i]));
If abs(Z-Z2[i])<RazMin then goto 1
else goto 2;
2:i:=i+1;
    If i>90 then goto 4
    else goto 3;
1:RazMin:=abs(Z-Z2[i]);
    Ipre:=i;
    goto 2;
4:XP[k]:=X2[Ipre];
    ZP[k]:=Z2[Ipre];
    {Druga tačka}
k:=2;
i:=1;
RazMin:=abs(Z-Z2[1]);
13:Diskr:=sqr(Rpl)-sqr(X2[i]);
If Diskr<0 then goto 12
else goto 15;
15:Z:=ZL-sqrt(sqr(Rpl)-sqr(X2[i])); {razlika je u ovoj jednačini}
If abs(Z-Z2[i])<RazMin then goto 11
else goto 12;
12:i:=i+1;
    If i>90 then goto 14
    else goto 13;
11:RazMin:=abs(Z-Z2[i]);
    XP[k]:=X2[i];
    ZP[k]:=Z2[i];
    kMax:=k;
    goto 12;
14:kMax:=2;
    For k:=1 to Kmax do
    Begin
    XPsim[k]:=-XP[k];
    ZPsim[k]:=ZP[k];
End;
    For k:=1 to Kmax do
    Begin
MoveTo(Round(ax+Q*XP[k]),Round(ay-Q*ZP[k]));
LineTo(Round(ax+Q*XPsim[k]),Round(ay-Q*ZPsim[k]));
End;
End;

Procedure Presek2;
Label 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10;
Begin

```

```

k:=1; i:=1; j:=1;
  R2[i]:=sqrt(sqrt(X2[i])+sqrt(Z2[i]-ZL));
  Razlika[i]:=R2[i]-Rpl;
  RazMin:=Razlika[1];
  i:=2;
3: R2[i]:=sqrt(sqrt(X2[i])+sqrt(Z2[i]-ZL));
  Razlika[i]:=R2[i]-Rpl;
  {If (Razlika[i]<=Razlika[i-1]) and (R2[i]>=Rpl) then goto 1
  else goto 2;}
  If (Razlika[i]<RazMin) then goto 1
  else goto 2;
2: goto 4;
1: t:=i; Razmin:=Razlika[i];
  If R2[i]>=Rpl then goto 4
  else goto 5;
4:i:=i+1;goto 3;
5:XP[k]:=X2[t];
  ZP[k]:=Z2[t];
  {Druga tačka}
  k:=k+1;
  j:=j+1;
  i:=90;
  R2[i]:=sqrt(sqrt(X2[i])+sqrt(Z2[i]-ZL));
  Razlika[i]:=R2[i]-Rpl;
  i:=89;
8: R2[i]:=sqrt(sqrt(X2[i])+sqrt(Z2[i]-ZL));
  Razlika[i]:=R2[i]-Rpl;
  If (Razlika[i]<=Razlika[i+1]) and (R2[i]>=Rpl) then goto 6
  else goto 7;
7: If R2[i]>Rpl then goto 9
  else goto 10;
6: t:=i; If R2[i]>Rpl then goto 9
  else goto 10;
9:i:=i-1;goto 8;
10:XP[k]:=X2[t];
  ZP[k]:=Z2[t];
  {Crtanje}
  kMax:=k;
  For k:=1 to Kmax do
  Begin
  XPsim[k]:=-XP[k];
  ZPsim[k]:=ZP[k];
  End;
  {Crtanje paralela za površ sa vertikalnom osom }
  SetLineStyle(0,1,1);{Izabrana je tanka linija}
  For k:=1 to 2 do
  Begin
  MoveTo(Round(ax+Q*XP[k]),Round(ay-Q*ZP[k]));
  LineTo(Round(ax+Q*XPsim[k]),Round(ay-Q*ZPsim[k]));
  End;
  End;

```

Procedure PresekR;

Label 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10;

Begin

k:=3; i:=1; j:=1;

R1[i]:=sqrt(sqrt(X1[i])+sqrt(Z1[i]-ZL));

Razlika[i]:=R1[i]-Rpl;

i:=2;

```

3: R1[i]:=sqrt(sqr(X1[i])+sqr(Z1[i]-ZL));
   Razlika[i]:=R1[i]-Rpl;
   If (Razlika[i]<=Razlika[i-1]) and (R1[i]>=Rpl) then goto 1
   else goto 2;
2: If R1[i]>Rpl then goto 4
   else goto 5;
1: t:=i;   If R1[i]>Rpl then goto 4
   else goto 5;
4:i:=i+1;goto 3;
5:XP[k]:=X1[t];
   ZP[k]:=Z1[t];
   {Druga tačka}
   k:=k+1;
   j:=j+1;
   i:=360;
   R1[i]:=sqrt(sqr(X1[i])+sqr(Z1[i]-ZL));
   Razlika[i]:=R1[i]-Rpl;
   i:=359;
8: R1[i]:=sqrt(sqr(X1[i])+sqr(Z1[i]-ZL));
   Razlika[i]:=R1[i]-Rpl;
   If (Razlika[i]<=Razlika[i+1]) and (R1[i]>=Rpl) then goto 6
   else goto 7;
7: If R1[i]>Rpl then goto 9
   else goto 10;
6: t:=i;   If R1[i]>Rpl then goto 9
   else goto 10;
9:i:=i-1;goto 8;
10:XP[k]:=X1[t];
   ZP[k]:=Z1[t];
   {Crtanje}
   kMax:=k;
   For k:=3 to Kmax do
   Begin
XPsim[k]:=2*XP[k]*sqr(cos(teta1))+2*(ZP[k]-n1)*sin(teta1)*cos(teta1)-XP[k];
ZPsim[k]:=2*(n1-ZP[k])*sqr(cos(teta1))+2*XP[k]*sin(teta1)*cos(teta1)+ZP[k];
End;
   {Crtanje paralela za drugu površ}
   For k:=3 to Kmax do
   Begin
Moveto(Round(ax+Q*XP[k]),Round(ay-Q*ZP[k]));
Lineto(Round(ax+Q*XPsim[k]),Round(ay-Q*ZPsim[k]));
End;
End;

```

Procedure PresecneT;

Label 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16;

Begin

```

m1:=sin(teta1)/cos(teta1);           {Koeffcijent pravca ose prve rotacione površi}
a3:=-1/m1;                           {Koeffcijent pravca paralele - jednačina 6.34}
a4:=-1/m1;                           {Koeffcijent pravca paralele - jednačina 6.34}
b3:=ZP[3]-a3*XP[3];                 {Odsečak na Z osi paralele - jednačina 6.34}
b4:=ZP[4]-a4*XP[4];                 {Odsečaka na Z osi paralele - jednačina 6.34}
ZA1:=ZP[1];                          {Z koordinata prve presečne tačke - jednačina 6.35}
ZA2:=ZA1;                             {Z koordinata druge presečne tačke - jednačina 6.35}
XA1:=(ZA1-b3)/a3;                    {X koordinata prve presečne tačke - jednačina 6.35}
XA2:=XA1;                             {X koordinata druge presečne tačke - jednačina 6.35}
Diskr:=sqr(XP[1])-sqr(XA1);          {Diskriminanta iz jednačine 6.36}
If Diskr<0 then goto 10
else goto 2;

```

```

2:YA1:=sqrt(sqrt(XP[1])-sqrt(XA1));{Y koordinata prve presečne tačke - 6.36}
YA2:=-YA1; {Y koordinata druge presečne tačke - jednačina 6.36}
1: If (XA1>=XPsim[1]) and (XA1<=XP[1]) then goto 9
else goto 10;
9: SetLineStyle(0,1,3); {crtanje prve tačke}
Moveto(Round(ax+Q*XA1),Round(ay-Q*ZA1));
Lineto(Round(ax+Q*XA1),Round(ay-Q*ZA1));
10:{ne crta se tačka}
ZA3:=ZP[1]; {Z koordinata treće presečne tačke - jednačina 6.38}
ZA4:=ZA3; {Z koordinata četvrte presečne tačke - jednačina 6.38}
XA3:=(zA3-b4)/a4; {X koordinata treće presečne tačke - jednačina 6.38}
XA4:=XA3; {Z koordinata četvrte presečne tačke - jednačina 6.38}
Diskr:=sqrt(XP[1])-sqrt(XA3); {Diskriminanta iz jednačine 6.38}
If Diskr<0 then goto 12
else goto 4;
4:YA3:=sqrt(sqrt(XP[1])-sqrt(XA3));{Y koordinata treće presečne tačke - 6.38}
YA4:=-YA3; {Y koordinata četvrte presečne tačke - 6.38}
3: If (XA3>=XPsim[1]) and (XA3<=XP[1]) then goto 11
else goto 12;
11: SetLineStyle(0,1,3);{crtanje treće tačke}
Moveto(Round(ax+Q*XA3),Round(ay-Q*ZA3));
Lineto(Round(ax+Q*XA3),Round(ay-Q*ZA3));
12:ZA5:=ZP[2]; {Z koordinata pete presečne tačke - jednačina 6.39}
ZA6:=ZA5; {Z koordinata šeste presečne tačke - jednačina 6.39}
XA5:=(zA5-b3)/a3; {X koordinata pete presečne tačke - jednačina 6.39}
XA6:=XA5; {X koordinata šeste presečne tačke - jednačina 6.39}
Diskr:=sqrt(XP[2])-sqrt(XA5); {Diskriminanta iz jednačine 6.39}
If Diskr<0 then goto 14
else goto 6;
6:YA5:=sqrt(sqrt(XP[2])-sqrt(XA5));{Y koordinata pete presečne tačke - 6.39}
YA6:=-YA5; {Y koordinata šeste presečne tačke - 6.39}
5:If (XA5>=XPsim[2]) and (XA5<=XP[2]) then goto 13
else goto 14;
13: SetLineStyle(0,1,3);{crtanje pete tačke}
Moveto(Round(ax+Q*XA5),Round(ay-Q*ZA5));
Lineto(Round(ax+Q*XA5),Round(ay-Q*ZA5));
14:ZA7:=ZP[2]; {Z koordinata sedme presečne tačke - jednačina 6.40}
ZA8:=ZA7; {Z koordinata osme presečne tačke - jednačina 6.40}
XA7:=(zA7-b4)/a4; {X koordinata sedme presečne tačke - jednačina 6.40}
XA8:=XA7; {X koordinata osme presečne tačke - jednačina 6.40}
Diskr:=sqrt(XP[2])-sqrt(XA7); {Diskriminanta iz jednačine 6.40}
If Diskr<0 then goto 16
else goto 8;
8:YA7:=sqrt(sqrt(XP[2])-sqrt(XA7));{Y koordinata sedme presečne tačke - 6.40}
YA8:=-YA7; {Y koordinata osme presečne tačke - 6.40}
7:If (XA7>=XPsim[2]) and (XA7<=XP[2]) then goto 15
else goto 16;
15: SetLineStyle(0,1,3);{crtanje sedme tačke}
Moveto(Round(ax+Q*XA7),Round(ay-Q*ZA7));
Lineto(Round(ax+Q*XA7),Round(ay-Q*ZA7));
16:End;

BEGIN {GLAVNI PROGRAM}
br1:=0;br2:=0;br3:=0;br4:=0;
Polupr:=2;
Q:=1; {Faktor razmere}
ClrScr; {Brisanje ekrana}
Init; {Inicijalizacija grafike}
ks;

```



```
SimCikloida;
CetiriTacke1;
Krug;
CetiriTacke2;
Krug;
CetiriTacke3;
Krug;
CetiriTacke4;
Krug;
CenPomLop;
Krug;
MaxLop;
Krug;
LokCen;
ParJed;
MinLop;
MinLopta;
Bazisi;
Rpl:=Rmin+0.001;
3:br1:=br1+1;
br2:=br2+1;
br3:=br3+1;
br4:=br4+1;
Presek2;
PresekR;
PresecneT;
    If Rpl>=Rmax then goto 1
    else goto 2;
2:Rpl:=Rpl+0.05;
  GoTo 3;
{najmanje je 0.01 -ne deli vise}
1: SetLineStyle(0,1,1);      {provera - crtanje dve susedne paralele}
  Moveto(Round(ax+Q*X2[30]),Round(ay-Q*Z2[30]));
  Lineto(Round(ax+Q*X2sim[30]),Round(ay-Q*Z2sim[30]));
  Moveto(Round(ax+Q*X2[31]),Round(ay-Q*Z2[31]));
  Lineto(Round(ax+Q*X2sim[31]),Round(ay-Q*Z2sim[31]));
Readln;
CloseGraph;
END.
```

**Program PLPO; {PRESEČNA KRIVA DVEJU ROTACIONIH POVRSI
CIJE SU OSE PARALELNE}**

Uses Crt,Graph;

Var

i,raz,du,j,Rraz,jmax:integer;

GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;

ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,f1,f2,R:real;

a,px,py,pz,t,Lan:real;

fi:array [0..360] of real;

x1,y1,z1,xP1,yP1,zP1,x1sim,z1sim,

x2,y2,z2,xP2,yP2,zP2,x2sim,z2sim,

R1,R2,Rastojanje,xPr,yPr1,yPr2,zPr:array [1..200] of real;

b,c,d,xK1,yK1,zK1,xK2,yK2,zK2,zL,nx,nz:array [1..200] of real;

x2D,z2D,x3D,y3D,z3D:array [0..360] of real;

Xdb,Ydb,Zdb:array [0..360] of real;

xO2,Q,xR,zR:real;

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

Begin

GraphDriver:=Detect;

InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');

ErrorCode:=GraphResult;

 If ErrorCode<>grOK then

 begin

 writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));

 writeln('program aborted...');

 Halt(1);

 end;

End;

Procedure OGama;

Begin

Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);

yk:=ay+200*sin(Gamar);

End;

Procedure ks;{KOORDINATNI SISTEM}

Begin

OGama;

fx:=ax-2-195*cos(Gamar);fy:=ay*195*sin(Gamar);

MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));

LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));

LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));

MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax),Round(ay+340));

{LineTo(Round(ax-2),Round(ay+238));MoveTo(Round(ax),Round(ay+240));

LineTo(Round(ax+2),Round(ay+238));}

MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));

MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));

MoveTo(Round(ax-200),Round(ay+Q*350));LineTo(Round(ax+400),Round(ay+Q*350));

End;

Procedure Krug;

Begin

MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));

 for i:=0 to 360 do

 begin

 fi[i]:=(i*3.145927)/180;

 Xdb[i]:=R*sin(fi[i]);

 Ydb[i]:=R*cos(fi[i]);

```

end;
MoveTo(Round(ax+Q*(f1+Xdb[0])),Round(ay+Q*(f2+Ydb[0]]));
for i:=1 to 360 do
LineTo(Round(ax+Q*(f1+Xdb[i])),Round(ay+Q*(f2+Ydb[i]]));
End;

```

Procedure Kriva;

```

Label 1,2,3;
Begin
t:=0.01;i:=1;
3:x1[i]:=80+40*t;           {Parametarska jednačina po x koordinati}
z1[i]:=10*(-10+10*sqrt(t)); {Parametarska jednačina po z koordinati}
x1sim[i]:=-x1[i];          {x koordinata simetrične tačke meridijana}
z1sim[i]:=z1[i];           {z koordinata simetrične tačke meridijana}
xP1[i]:=40;                 {Prvi izvod po x koordinati}
zP1[i]:=10*5/sqrt(t);      {Prvi izvod po z koordinati}
If i=200 then goto 1
else goto 2;
2:i:=i+1;
t:=t+0.0157;
goto 3;
1:End;

```

Procedure Normala;

```

Begin
nx[i]:=-zP1[i];           {Jednačina 4.8}
nz[i]:=xP1[i];           {Jednačina 4.8}
End;

```

Procedure CentarPL;{Centar pomoćne lopte}

```

Begin
zL[i]:=z1[i]-(x1[i]*nz[i])/nx[i];
End;

```

Procedure VektorProjiciranja;

```

Begin
{Skraćenje}
Lan:=0.75;
{Komponente vektora projiciranja}
px:=Lan*cos(Gamar);      {Jednačina 3.2}
py:=1;                    {Jednačina 3.2}
pz:=Lan*sin(Gamar);      {Jednačina 3.2}
End;

```

Procedure KonturaPP;

```

Begin
a:=1+sqrt(px/py);        {Jednačina 4.14}
d[i]:=(zL[i]-z1[i])*pz;  {Jednačina 4.16}
b[i]:=d[i]*px/(sqrt(py)); {Jednačina 4.15}
c[i]:=sqrt(d[i]/py)-sqrt(x1[i]); {Jednačina 4.17}
xK1[i]:=(b[i]+sqrt(sqrt(b[i])-a*c[i]))/a; {Jednačina 4.18}
yK1[i]:=(d[i]-xK1[i]*px)/py; {Jednačina 4.18}
zK1[i]:=z1[i];           {Jednačina 4.18}
xK2[i]:=(b[i]-sqrt(sqrt(b[i])-a*c[i]))/a; {Jednačina 4.19}
yK2[i]:=(d[i]-xK2[i]*px)/py; {Jednačina 4.19}
zK2[i]:=z1[i];           {Jednačina 4.19}
End;

```

Procedure ParalelnoProjiciranje;

```

Begin
for i:=1 to 200 do
  Begin
x2D[i]:=x3D[i]-px*y3D[i];           {Jednačina 3.3}
z2D[i]:=z3D[i]-pz*y3D[i];         {Jednačina 3.3}
  End;
End;

```

Procedure CrtanjeRezultata;

```

Begin
SetLineStyle(0,$C3,1);
MoveTo(Round(ax+Q*x2D[1]),Round(ay-Q*z2D[1]));
for i:=2 to 200 do
  Begin
LineTo(Round(ax+Q*x2D[i]),Round(ay-Q*z2D[i]));
  End;
End;

```

Procedure BazisUniverzalan;

```

Begin
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
Xdb[i]:=xR*sin(fi[i]);
Ydb[i]:=xR*cos(fi[i]);
Zdb[i]:=zR;
end;
End;

```

Procedure ParalelnoProjiciranjeBazisa;

```

Begin
for i:=0 to 360 do
  Begin
x2D[i]:=x3D[i]-px*y3D[i];           {Jednačina 3.3}
z2D[i]:=z3D[i]-pz*y3D[i];         {Jednačina 3.3}
  End;
End;

```

Procedure CrtanjeBazisa;

```

Begin
SetLineStyle(0,$C3,1);
MoveTo(Round(ax+Q*x2D[0]),Round(ay-Q*z2D[0]));
for i:=1 to 360 do
  Begin
LineTo(Round(ax+Q*x2D[i]),Round(ay-Q*z2D[i]));
  End;
End;

```

Procedure Stampa;{Provera rezultata}

```

Begin
for i:=1 to 200 do
  Begin
writeln('xK1['',i,']=',xK1[i]);
writeln('yK1['',i,']=',yK1[i]);
writeln('zK1['',i,']=',zK1[i]);
writeln('zL['',i,']=',zL[i]);
  readln;
  End;
End;

```

Procedure DrugiMeridijan;

```

Label 1,2,3;
Begin
xO2:=150;
t:=0.01;i:=1;
3:x2[i]:=190+30*t;           {Parametarska jednačina po x koordinati}
z2[i]:=10*(-10+10*sqrt(t));  {Parametarska jednačina po z koordinati}
x2sim[i]:=2*xO2-x2[i];       {x koordinata simetrične tačke meridijana}
z2sim[i]:=z2[i];            {z koordinata simetrične tačke meridijana}
xP2[i]:=40;                  {Prvi izvod po x koordinati}
zP2[i]:=10*5/sqrt(t);        {Prvi izvod po z koordinati}
If i=200 then goto 1
else goto 2;
2:i:=i+1;
t:=t+0.0157;
goto 3;
1:End;

```

Procedure Bazis2Univerzalan;

```

Begin
for i:=0 to 360 do
begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
Xdb[i]:=(xR-xO2)*sin(fi[i]);
Ydb[i]:=(xR-xO2)*cos(fi[i]);
Zdb[i]:=zR;
end;
End;

```

Procedure CrtanjeBazisa2;

```

Begin
SetLineStyle(0,$C3,1);
MoveTo(Round(ax+Q*(xO2+x2D[0])),Round(ay-Q*z2D[0]));
for i:=1 to 360 do
Begin
LineTo(Round(ax+Q*(xO2+x2D[i])),Round(ay-Q*z2D[i]));
End;
End;

```

Procedure OdredjivanjePreseka;

```

Label 1,2,3;
Begin
  j:=1;
  for i:=1 to 200 do
  begin
    R1[i]:=x1[i];           {Jednačina 6.43}
    R2[i]:=x2[i]-xO2;       {Jednačina 6.43}
    Rastojanje[i]:=R1[i]+R2[i]; {Iz jednačine 6.44}
    If Rastojanje[i] >= xO2 then goto 1
    else goto 2;
  1:xPr[j]:=(sqrt(R1[i])-sqrt(R2[i])+sqrt(xO2))/(2*xO2); {Jednačina 6.45}
  yPr1[j]:=sqrt(sqrt(R1[i])-sqrt(xPr[j]));           {Jednačina 6.45}
  yPr2[j]:=-sqrt(sqrt(R1[i])-sqrt(xPr[j]));          {Jednačina 6.45}
  zPr[j]:=z1[i];
  j:=j+1;
  2:end;
  jmax:=j;
End;

```

Procedure CrtanjeDrugeProjekcije;

```

Begin
SetLineStyle(0,$C3,1);
{PRVA POVRŠ}
{Desni meridijan}
MoveTo(Round(ax+Q*x1[1]),Round(ay-Q*z1[1]));
for i:=1 to 200 do
LineTo(Round(ax+Q*x1[i]),Round(ay-Q*z1[i]));
{Levi meridijan}
MoveTo(Round(ax+Q*x1sim[1]),Round(ay-Q*z1sim[1]));
for i:=1 to 200 do
LineTo(Round(ax+Q*x1sim[i]),Round(ay-Q*z1sim[i]));
{Gornji bazis}
MoveTo(Round(ax+Q*x1[200]),Round(ay-Q*z1[200]));
LineTo(Round(ax+Q*x1sim[200]),Round(ay-Q*z1sim[200]));
{Donji bazis}
MoveTo(Round(ax+Q*x1[1]),Round(ay-Q*z1[1]));
LineTo(Round(ax+Q*x1sim[1]),Round(ay-Q*z1sim[1]));
{DRUGA POVRŠ}
{Desni meridijan}
MoveTo(Round(ax+Q*x2[1]),Round(ay-Q*z2[1]));
for i:=1 to 200 do
LineTo(Round(ax+Q*x2[i]),Round(ay-Q*z2[i]));
{Levi meridijan}
MoveTo(Round(ax+Q*x2sim[1]),Round(ay-Q*z2sim[1]));
for i:=1 to 200 do
LineTo(Round(ax+Q*x2sim[i]),Round(ay-Q*z2sim[i]));
{Gornji bazis}
MoveTo(Round(ax+Q*x2[200]),Round(ay-Q*z2[200]));
LineTo(Round(ax+Q*x2sim[200]),Round(ay-Q*z2sim[200]));
{Donji bazis}
MoveTo(Round(ax+Q*x2[1]),Round(ay-Q*z2[1]));
LineTo(Round(ax+Q*x2sim[1]),Round(ay-Q*z2sim[1]));
{Osa druge površi}
MoveTo(Round(ax+Q*xO2),Round(ay+Q*150));
LineTo(Round(ax+Q*xO2),Round(ay-Q*100));
End;

```

Procedure CrtanjePreseka;

```

Begin
SetLineStyle(0,$C3,3);
{Presečna kriva u ravni Oxz}
MoveTo(Round(ax+Q*xPr[1]),Round(ay-Q*zPr[1]));
for j:=2 to (jmax-1) do
LineTo(Round(ax+Q*xPr[j]),Round(ay-Q*zPr[j]));
{Presečna kriva u ravni Oxy}
MoveTo(Round(ax+Q*xPr[1]),Round(ay+Q*(350+yPr1[1])));
for j:=2 to (jmax-1) do
LineTo(Round(ax+Q*xPr[j]),Round(ay+Q*(350+yPr1[j])));
MoveTo(Round(ax+Q*xPr[1]),Round(ay+Q*(350+yPr2[1])));
for j:=2 to (jmax-1) do
LineTo(Round(ax+Q*xPr[j]),Round(ay+Q*(350+yPr2[j])));
MoveTo(Round(ax+Q*xPr[1]),Round(ay+Q*(350+yPr1[1])));
LineTo(Round(ax+Q*xPr[1]),Round(ay+Q*(350+yPr2[1])));
{Bazisi u ravni Oxy}
SetLineStyle(0,$C3,1);
f1:=0;f2:=350;
R:=x1[200];
krug;

```

```
f1:=xO2;f2:=350;
R:=x2[200]-xO2;
krug;
End;
```

Procedure ParalelnoProjciranjePreseka;

```
Begin
for j:=0 to jmax do
  Begin
x2D[j]:=x3D[j]-px*y3D[j];           {Jednačina 3.3}
z2D[j]:=z3D[j]-pz*y3D[j];         {Jednačina 3.3}
  End;
End;
```

Procedure CrtanjeKP;{Crtanje kose projekcije}

```
Begin
SetLineStyle(0,$C3,3);
MoveTo(Round(ax+Q*x2D[1]),Round(ay-Q*z2D[1]));
for j:=2 to (jmax-1) do
LineTo(Round(ax+Q*x2D[j]),Round(ay-Q*z2D[j]));
End;
```

```
BEGIN{GLAVNI PROGRAM}
ax:=250;ay:=120;
f1:=100;f2:=-100;R:=5;
Gama:=30;
OGama;
Q:=0.5;           {faktor razmere crteža}
Kriva;
DrugiMeridijan;
OdredjivanjePreseka;
ClrScr;           {Brisanje ekrana}
{Crtanje}
Init;
ks;
CrtanjeDrugeProjekcije;
CrtanjePreseka;
readln;
CloseGraph;
{KOSA PROJEKCIJA}
{Prva površ}
ax:=300;ay:=250;   {Koordinatni početak}
Q:=1;              {Razmera crteža}
Gama:=30;OGama;
{Proračun}
Kriva;
VektorProjciranja;
For i:=1 to 200 do
  Begin
  Normala;
  CentarPL;
  KonturaPP;
  End;
ClrScr;           {Brisanje ekrana}
{Crtanje}
Init;
{Prva kontura prve površi}
For i:=1 to 200 do
  Begin
```

```

    x3D[i]:=xK1[i];
    y3D[i]:=yK1[i];
    z3D[i]:=zK1[i];
End;
ParalelnoProjeciranje;
CrtanjeRezultata;
{Druga kontura prve površi}
For i:=1 to 200 do
    Begin
        x3D[i]:=xK2[i];
        y3D[i]:=yK2[i];
        z3D[i]:=zK2[i];
    End;
ParalelnoProjeciranje;
CrtanjeRezultata;
{Crtanje bazisa}
{Bazis;}
xR:=x1[1];
zR:=z1[1];
BazisUniverzalan;
for i:=0 to 360 do
    Begin
        x3D[i]:=Xdb[i];
        y3D[i]:=Ydb[i];
        z3D[i]:=zdb[i];
    End;
ParalelnoProjeciranjeBazisa;
CrtanjeBazisa;
xR:=x1[200];
zR:=z1[200];
BazisUniverzalan;
for i:=0 to 360 do
    Begin
        x3D[i]:=Xdb[i];
        y3D[i]:=Ydb[i];
        z3D[i]:=Zdb[i];
    End;
ParalelnoProjeciranjeBazisa;
CrtanjeBazisa;
Readln;
{Druga površ}
{Crtanje bazisa}
xR:=x2[1];
zR:=z2[1];
Bazis2Univerzalan;
for i:=0 to 360 do
    Begin
        x3D[i]:=Xdb[i];
        y3D[i]:=Ydb[i];
        z3D[i]:=zdb[i];
    End;
ParalelnoProjeciranjeBazisa;
CrtanjeBazisa2;
xR:=x2[200];
zR:=z2[200];
Bazis2Univerzalan;
for i:=0 to 360 do
    Begin
        x3D[i]:=Xdb[i];

```



```

y3D[i]:=Ydb[i];
z3D[i]:=zdb[i];
End;
ParalelnoProjiciranjeBazisa;
CrtanjeBazisa2;
{Crtanje preseka!}
for j:=1 to jmax do
Begin
x3D[j]:=Xpr[j];
y3D[j]:=Ypr1[j];
z3D[j]:=Zpr[j];
End;
ParalelnoProjiciranjePreseka;
CrtanjeKP;
readln;
for j:=1 to jmax do
Begin
x3D[j]:=Xpr[j];
y3D[j]:=Ypr2[j];
z3D[j]:=Zpr[j];
End;
ParalelnoProjiciranjePreseka;
CrtanjeKP;
{Kontura druge površi}
for i:=0 to 200 do
Begin
x1[i]:=X2[i]-xO2; {Transliranje}
y1[i]:=Y2[i];
z1[i]:=z2[i];
xP1[i]:=xP2[i];
zP1[i]:=zP2[i];
End;
For i:=1 to 200 do
Begin
Normala;
CentarPL;
KonturaPP;
End;
{Prva kontura druge površi}
For i:=1 to 200 do
Begin
x3D[i]:=xK1[i]+xO2; {Inverzna translacija}
y3D[i]:=yK1[i];
z3D[i]:=zK1[i];
End;
ParalelnoProjiciranje;
CrtanjeRezultata;
{Druga kontura druge površi}
For i:=1 to 200 do
Begin
x3D[i]:=xK2[i]+xO2; {Inverzna translacija}
y3D[i]:=yK2[i];
z3D[i]:=zK2[i];
End;
ParalelnoProjiciranje;
CrtanjeRezultata;
Readln;
CloseGraph; {Stampa;readln;} writeln('jmax=' jmax:3);readln;
END.

```

**Program PRIMIMO; {PRESEČNA KRIVA DVEJU ROTACIONIH POVRSI
CIJE SE OSE MIMOILAZE}**

```
Uses Crt,Graph;
Var
i,raz,du,j,Rraz,g:integer;
GraphDriver, GraphMode, ErrorCode:integer;
ax,ay,Gama,Gamar,xk,yk,fx,fy,f1,f2,R,a,px,py,pz,t,Lan:real;
fi,Xb,Yb,Zb:array [0..360] of real;
x,y,z,xP,yP,zP,b,c,d,xK1,yK1,zK1,xK2,yK2,zK2,zL,nx,nz:array [1..200] of real;
x2D,z2D,x3D,y3D,z3D,Xdb,Ydb,Zdb,Xgb,Ygb,Zgb:array [0..360] of real;
br,br1,br2:integer;
xC,zC,Rc,Zmin,x2Dpr,z2Dpr,x3Dpr,y3Dpr,z3Dpr:real;
dZ,Zpr,Xc1,Xc2,Xrp,Dis1,Dis2:array [0..180] of real;
```

Procedure INIT; {INICIJALIZACIJA GRAFIKE}

```
Begin
GraphDriver:=Detect;
InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'C:\Drivers');
ErrorCode:=GraphResult;
  If ErrorCode<>grOK then
  begin
  writeln('Graphics Error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
  writeln('program aborted...');
  Halt(1);
  end;
End;
```

Procedure OGama;

```
Begin
ax:=320;ay:=220;
Gamar:=(Gama*3.145927)/180;xk:=ax-200*cos(Gamar);
yk:=ay+200*sin(Gamar);
End;
```

Procedure ks;

```
Begin
OGama;
fx:=ax-2-195*cos(Gamar);
fy:=ay*195*sin(Gamar);
MoveTo(Round(ax-200),Round(ay));LineTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay-2));MoveTo(Round(ax+400),Round(ay));
LineTo(Round(ax+398),Round(ay+2));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax-2),Round(ay+238));MoveTo(Round(ax),Round(ay+240));
LineTo(Round(ax+2),Round(ay+238));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax-2),Round(ay-198));
MoveTo(Round(ax),Round(ay-200));LineTo(Round(ax+2),Round(ay-198));
End;
```

Procedure Krug;

```
Begin
MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));
  for i:=0 to 360 do
  begin
  fi[i]:=(i*3.145927)/180;
  Xb[i]:=R*sin(fi[i]);
  Yb[i]:=R*cos(fi[i]);
  end;
```

```

MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay+f2+yb[0]));
for i:=1 to 360 do
LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay+f2+yb[i]));
End;

```

Procedure Kriva;

```

Label 1,2,3;
Begin
t:=0.01;i:=1;
3:
x[i]:=80+40*t;           {Parametarska jednačina krive po x promenljivoj}
z[i]:=10*(-10+10*sqrt(t)); {Parametarska jednačina krive po z promenljivoj}
xP[i]:=40;               {Prvi izvod po x promenljivoj}
zP[i]:=10*5/sqrt(t);    {Prvi izvod po z promenljivoj}
If i=200 then goto 1
else goto 2;
2:i:=i+1;
t:=t+0.0157;
goto 3;
1:End;

```

Procedure Normala;

```

Begin
nx[i]:=-zP[i];          {Jednačina 4.8}
nz[i]:=xP[i];          {Jednačina 4.8}
End;

```

Procedure CentarPL; {Centar pomoćne lopte}

```

Begin
zL[i]:=z[i]-(x[i]*nz[i])/nx[i];
End;

```

Procedure VektorProjiciranja;

```

Begin
{Skraćenje}
Lan:=0.75;
{Komponente vektora projiciranja}
px:=Lan*cos(Gamar);
py:=1;
pz:=Lan*sin(Gamar);
End;

```

Procedure KonturaPP;

```

Begin
a:=1+sqrt(px/py);      {Jednačina 4.14}
d[i]:=(zL[i]-z[i])*pz; {Jednačina 4.16}
b[i]:=d[i]*px/(sqrt(py)); {Jednačina 4.15}
c[i]:=sqrt(d[i]/py)-sqrt(x[i]); {Jednačina 4.17}
xK1[i]:=(b[i]+sqrt(sqrt(b[i])-a*c[i]))/a; {Jednačina 4.18}
yK1[i]:=(d[i]-xK1[i]*px)/py; {Jednačina 4.18}
zK1[i]:=z[i];          {Jednačina 4.18}
xK2[i]:=(b[i]-sqrt(sqrt(b[i])-a*c[i]))/a; {Jednačina 4.19}
yK2[i]:=(d[i]-xK2[i]*px)/py; {Jednačina 4.19}
zK2[i]:=z[i];          {Jednačina 4.19}
End;

```

Procedure ParalelnoProjiciranje;

```

Begin

```

```

for i:=1 to 200 do
  Begin
x2D[i]:=x3D[i]-px*y3D[i];           {Jednačina 3.3}
z2D[i]:=z3D[i]-pz*y3D[i];         {Jednačina 3.3}
  End;
End;

```

Procedure CrtanjeRezultata;

```

Begin
SetLineStyle(0,$C3,3);
MoveTo(Round(ax+x2D[1]),Round(ay-z2D[1]));
for i:=2 to 200 do
  Begin
LineTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
  End;
End;

```

Procedure Bazis;

```

Begin
for i:=0 to 360 do
  begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
Xdb[i]:=x[1]*sin(fi[i]);
Ydb[i]:=x[1]*cos(fi[i]);
Zdb[i]:=z[1];
Xgb[i]:=x[200]*sin(fi[i]);
Ygb[i]:=x[200]*cos(fi[i]);
Zgb[i]:=z[200];
  end;
End;

```

Procedure ParalelnoProjiciranjeBazisa;

```

Begin
for i:=0 to 360 do
  Begin
x2D[i]:=x3D[i]-px*y3D[i];           {Jednačina 3.3}
z2D[i]:=z3D[i]-pz*y3D[i];         {Jednačina 3.3}
  End;
End;

```

Procedure CrtanjeBazisa;

```

Begin
MoveTo(Round(ax+x2D[0]),Round(ay-z2D[0]));
for i:=1 to 360 do
  Begin
LineTo(Round(ax+x2D[i]),Round(ay-z2D[i]));
  End;
End;

```

Procedure Stampa; {Procedura služi za proveru rezultata}

```

Begin
for i:=1 to 200 do
  Begin
writeln('xK1['',i,']=',xK1[i]);
writeln('yK1['',i,']=',yK1[i]);
writeln('zK1['',i,']=',zK1[i]);}
writeln('z['',i,']=',z[i]);
  End;
End;

```

Procedure Cilindar;

```

Begin
xC:=100;
zC:=10;
Rc:=50;
f1:=xC;
f2:=zC;
R:=Rc;
MoveTo(Round(ax+f1),Round(ay+f2));
      for i:=0 to 360 do
      begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
Xb[i]:=R*sin(fi[i]);
Zb[i]:=R*cos(fi[i]);
      end;
MoveTo(Round(ax+f1+xb[0]),Round(ay-f2+Zb[0]));
for i:=1 to 360 do
LineTo(Round(ax+f1+xb[i]),Round(ay-f2+Zb[i]));
End;

```

Procedure PPP;{Paralelno prijiciranje preseka}

```

Begin
x2Dpr:=x3Dpr-px*y3Dpr;           {Jednačina 3.3}
z2Dpr:=z3Dpr-pz*y3Dpr;         {Jednačina 3.3}
SetLineStyle(0,$C3,3);
MoveTo(Round(ax+x2Dpr),Round(ay-z2Dpr));
LineTo(Round(ax+x2Dpr),Round(ay-z2Dpr));
End;

```

Procedure Presek;

```

Label 1,2,3,4;
Begin
{Zmin:=zC-Rc;}
for i:=0 to g do
Begin
fi[i]:=(i*3.145927)/180;
dZ[i]:=Rc*(1-cos(fi[i]));
Zpr[i]:=Zmin+dZ[i];
Xc1[i]:=Xc+Rc*sin(fi[i]);
Xc2[i]:=Xc-Rc*sin(fi[i]);
Xrp[i]:=80+40*sqr((Zpr[i]+100)/100);
Dis1[i]:=sqr(Xrp[i])-sqr(Xc1[i]);
Dis2[i]:=sqr(Xrp[i])-sqr(Xc2[i]);
End;
br1:=0;br2:=0;
for i:=0 to g do
Begin
If Dis1[i]>=0 then goto 1
Else goto 2;
1:x3Dpr:=Xc1[i];
y3Dpr:=sqrt(Dis1[i]);
z3Dpr:=Zpr[i];
PPP;
x3Dpr:=Xc1[i];
y3Dpr:=-sqrt(Dis1[i]);
z3Dpr:=Zpr[i];
PPP;
br1:=br1+1;
2:

```

```

If Dis2[i]>=0 then goto 3
Else goto 4;
3:x3Dpr:=Xc2[i];
  y3Dpr:=sqrt(Dis2[i]);
  z3Dpr:=Zpr[i];
  PPP;
  x3Dpr:=Xc2[i];
  y3Dpr:=-sqrt(Dis2[i]);
  z3Dpr:=Zpr[i];
  PPP;
  br2:=br2+1;
4:End;
br:=2*(br1+br2);
End;

```

```

BEGIN {GLAVNI PROGRAM}
f1:=100;f2:=-100;R:=5;
Gama:=30;
OGama;
Kriva;
VektorProjiciranja;
  for i:=1 to 200 do
  Begin
  Normala;
  CentarPL;
  KonturaPP;
  End;
  ClrScr;
{Crtanje}
Init;
ks;
  for i:=1 to 200 do
  Begin {Preimenovanje promenljivih}
  x3D[i]:=xK1[i];
  y3D[i]:=yK1[i];
  z3D[i]:=zK1[i];
  End;
  ParalelnoProjiciranje;
  CrtanjeRezultata;
  Readln;
  for i:=1 to 200 do
  Begin
  x3D[i]:=xK2[i];
  y3D[i]:=yK2[i];
  z3D[i]:=zK2[i];
  End;
  ParalelnoProjiciranje;
  CrtanjeRezultata;
  Bazis;
  for i:=0 to 360 do
  Begin
  x3D[i]:=Xdb[i];
  y3D[i]:=Ydb[i];
  z3D[i]:=zdb[i];
  End;
  ParalelnoProjiciranjeBazisa;
  CrtanjeBazisa;
  for i:=0 to 360 do
  Begin

```

```
x3D[i]:=Xgb[i];
y3D[i]:=Ygb[i];
z3D[i]:=zgb[i];
End;
ParalelnoProjiciranjeBazisa;
CrtanjeBazisa;
Cilindar;
Zmin:=zC-Rc;
g:=180;
Presek;
Readln;
CloseGraph;
writeln('br',br:4); readln;
{Stampa;readln;}
END.
```

16

BIOGRAFIJA

16 BIOGRAFIJA

Rođen sam 17.8.1965. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu i srednju prirodno matematičku školu *Jovan Jovanović Zmaj* završio sam u Novom Sadu. Tokom celog školovanja bio sam odličan učenik. Maturirao sam iz matematičke analize na temi *Određivanje površina i zapremina pomoću integrala*. Školsku 1984/85. godinu proveo sam na odsluženju vojnog roka.

Diplomirao sam 2.7.1993. godine na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, na mašinskom odseku, smer Mehanika i Mašinske konstrukcije, sa srednjom ocenom 8.25 (osam dvadeset pet) i ocenom 10 (deset) iz diplomskog rada, čiji je naziv *Opterećenost kardanskih vratila kod transportnih vozila*. Time sam stekao stručni naziv *diplomirani mašinski inženjer smera Mehanika i Mašinske konstrukcije*.

Na magistarske studije sam se upisao školske 1994/95. godine na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, koje sam završio 17.1.1997. sa magistarskom tezom pod nazivom *Primena deskriptivno-geometrijskih metoda u geometrijskom dizajnu pomoću računara: određivanje preseka paraboličkih kvadrata – konusa i cilindara*. Time sam stekao akademski naziv magistra nauka, disciplina *Diskretna matematika i programiranje*.

Stručni ispit propisan za diplomiranog mašinskog inženjera položio sam 9.3.1999.

Od 2.9.1993. godine zaposlen sam na određeno vreme, kao saradnik, na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, na Institutu za mehaniku i teoriju mašina, a Katedri za teoriju mašina i mehanizama. U zvanje asistenta pripravnika izabran sam 14.3.1994. godine, za užu naučnu oblast *Konstruktivna geometrija*, a za predmet *Nacrtna geometrija*. U zvanje asistenta Univerziteta sam izabran 29.12.1997. godine, za užu naučnu oblast *Konstruktivna geometrija* i predmete *Nacrtna geometrija* i *Elementi Konstrukcija*. Trenutno radim na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu na Institutu za matematiku i fiziku u tehnici, a katedri za Nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku.

Proteklih sedam školskih godina držao sam vežbe na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, na mašinskom, građevinskom, saobraćajnom i arhitektonskom odseku, kao i u odeljenju u Kikindi mašinskog odseka Fakulteta tehničkih nauka iz Novog Sada. Na mašinskom odseku sam tokom 1993/94., 1994/95., 1995/96., i 1996/97. školske godine vežbao dva predmeta: *Nacrtna geometrija* (12-16 časova nedeljno u prvom semestru) i *Elementi konstrukcija I* (12-16 časova nedeljno u drugom semestru). Školske 1997/98. godine na mašinskom odseku sam držao vežbe iz *Konstruktivne geometrije* u prvom (4 časa nedeljno) i drugom (2 časa nedeljno) semestru, a 1999/2000. iz predmeta *Inženjerske komunikacije i mašinski elementi* u drugom semestru (dva časa nedeljno). Na građevinskom odseku sam tokom školskih 1997/98., 1998/99., 1999/2000. godina radio na predmetu *Nacrtna geometrija*, 6 časova nedeljno u prvom semestru i 2-4 časa nedeljno u drugom semestru. Tokom školske 1996/97. godine, na saobraćajnom odseku u prvom semestru, držao sam vežbe iz *Nacrtna geometrije sa tehničkim crtanjem* (4 časa nedeljno). Školske 1997/98. godine, na arhitektonskom odseku u trećem semestru, vežbao sam na predmetu *Nacrtna geometrija i perspektiva* (4 časa nedeljno), a iz istog predmeta sam u prva dva semestra držao vežbe školske 1998/99. i 1999/2000. godine. Pod mentorstvom

Profesora dr Lazara Dovnikovića, u prvom semestru školske 1996/97. godine na saobraćajnom odseku, držao sam predavanja iz predmeta *Nacrtna geometrija sa tehničkim crtanjem* (2 časa nedeljno). U odeljenju u Kikindi mašinskog odseka Fakulteta tehničkih nauka, školske 1993/94. godine, držao sam u prvom semestru vežbe iz *Nacrtna geometrije* (2 časa nedeljno), a školske 1994/95. iz *Elementa konstrukcija I* (2 časa nedeljno) u drugom semestru. Zatim sam 1995/96. i 1996/97. školske godine vežbao u Kikindi tokom drugog semestra iz predmeta *Elementi konstrukcija I* (2 časa nedeljno), a pod mentorstvom Prof. dr Lazara Dovnikovića sam istovremeno držac i predavanja (1 čas nedeljno). Školske 1997/98., u drugom semestru u Kikindi sam držao predavanja (pod mentorstvom Prof. dr Lazara Dovnikovića) i vežbe iz *Konstruktivne geometrije* (nedeljno 1 čas predavanja i 2 časa vežbi).

Pod mojim mentorstvom, Dragan Cvetičanin, student prve godine mašinskog odseka Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu je školske 1994/95. dobio specijalnu nagradu Univerziteta u Novom Sadu za rad pod nazivom *Određivanje eliptičkih preseka kružnih paraboličkih kvadraka u kosoj projekciji primenom računara*.

Na poziv Prof. dr Dragana Ackete, školske 1996/97. godine održao sam predavanje pod nazivom *Primena deskriptivno geometrijskih metoda u geometrijskom dizajnu pomoću računara: određivanje preseka paraboličkih kvadraka-konusa i cilindara*, na Institutu za matematiku Prirodno-Matematičkog fakulteta, na seminaru GAMG (Geometrijski Algoritmi, Matroidi i Grupe).

Član sam jugoslovenskog udruženja za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku.

Do sada sam objavio osamnaest naučnih radova, a nekoliko ih je u pripremi za publikovanje, iz oblasti kompjuterske grafike i nacrtna geometrije.

Govorim, čitam i pišem engleski i ruski jezik. Oženjen sam i otac sam osmogodišnjoj ćerki i četvorogodišnjem sinu.

17

SPIŠAK RADOVA

17 SPISAK RADOVA

Publikacije u međunarodnim časopisima (R₅₂):

1. **Obradović R., Štulić R.:** *An Analysis of Dynamic Effects upon Load of the Cardan Shaft*, Contemporary agricultural engineering 21, 1995, 1, pp. 23-30.
2. **Štulić R., Obradović R.:** *Ideal Shape of a Non-stressed Piston Ring*, Agricultural engineering Vol. 1 (1995), No. 3-4, pp. 78-83.
3. **Obradović R., Štulić R.:** *Solution of Mathematical Model for Oscillation of Vehicle*, Agricultural engineering Vol. 2 (1996), No. 3-4, pp. 64-70.
4. **Cvetičanin D., Obradović R.:** *A CAGD Method for Elliptic Cross Sections of Circular Parabolic Quadrics*, Novi Sad Journal of mathematics, Vol. 28, No. 1, 1998, pp. 55-63.
5. **Obradović R., Štulić R.:** *Simulation of Change of Angle between Axes of Cardan Shaft and Angular Velocity of Precession of the Intershaft*, Agricultural engineering, Vol. 4 (1998), No. 1-2, pp. 9-15.
6. **Obradović R.:** *Surface – Surface Intersection: Auxiliary Spheres*, Novi Sad Journal of mathematics, Vol. 29, No.3, 1999, pp. 221-230.

Publikacije u domaćim časopisima (R₇₁):

7. **Obradović R., Jandrić Z.:** *Kompjutersko generisanje hiperboličkog paraboloida*, MonGEometrija (1997), (u štampi).
8. **Malešević B., Obradović R.:** *Metoda odstojanja kao pomoćna metoda centralnog projiciranja*, MonGEometrija (1997), (u štampi).

Saopštenja na međunarodnim naučnim skupovima (R₅₄):

9. **Obradović R.:** *Intersection Between two Surfaces of Revolution*, rad je bio prihvaćen za prezentaciju i objavljivanje u Proceedings of the 8th ASEE International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, Austin, Texas, USA, 1998.

Saopštenja na domaćim naučnim skupovima:

a) štampana u celini (R₇₃):

10. **Štulić R., Mihajlović Levi V., Obradović R.:** *Izofote rotacionih površi pri paralelnom projiciranju u CAD-u*, I jugoslovenski seminar o primeni CAD tehnologija, Novi Sad 1994, Zbornik radova, str. 162-167.
11. **Obradović R., Štulić R.:** *Kružne paraboličke kvadrike u CAGD: Polarna i afina svojstva i njihova primena na rešenje konture za kose projicirajuće zrake*, XVIII

- jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 61-63.
12. **Obradović R., Štulić R.:** *Matematički model određivanja pomoćnih ravni pomoću računara*, XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 64-66.
 13. **Obradović R., Štulić R.:** *Ravne krive - objektno orijentisano programiranje i Turbo Vision*, XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 67-68.
 14. **Štulić R., Obradović R.:** *Kontura bačene senke u CAD-u: Nacrtno geometrijski pristup*, XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 58-60.
 15. **Dovniković L., Obradović R.:** *Približne konstrukcije logaritamske spirale*, XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 93-94.
 16. **Dovniković L., Obradović R.:** *Euklidska i neeuklidske geometrije kao tri tipa inverzije*, XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 88-90.
 17. **Dovniković L., Obradović R.:** *Dekartovi ovali kao obvojnice sistema krugova*, XVIII jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju, Beograd 1995, Zbornik radova, str. 91-92.
- b) štampana u izvodu (R_{84}):**
18. **Obradović R., Dovniković L., Štulić R.:** *Projiciranje cilindrične zavojnice u druge ravne transcendentne krive pomoću računara*, Filomat '94, Niš 1994, Apstrakt, str. 10-11.
 19. **Štulić R., Dovniković L., Obradović R.:** *Algoritam za generisanje ravnih krivih primenom prostorno restituisanog MacLaurin-ovog preslikavanja*, Filomat '94, Niš 1994, Apstrakt, str. 15-16.
- Odbranjena magistarska teza (R_{62}):**
20. **Obradović R.:** *Primena deskriptivno geometrijskih metoda u geometrijskom dizajnu pomoću računara: određivanje preseka paraboličkih kvadratika - konusa i cilindara*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1997.

18

**KLJUČNA
DOKUMENTACIJSKA
INFORMACIJA**

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD Monografska dokumentacija

Tip zapisa:

TZ Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:

VR Doktorska disertacija

Autor:

AU Mr Ratko OBRADOVIĆ

Mentor:

MN Vanredni profesor Dr Nevena PUŠIĆ

Naslov rada:

NR **DESKRIPTIVNO-GEOMETRIJSKE METODE U KOMPJUTERSKOJ
GRAFICI: MEĐUSOBNI PRESECI ROTACIONIH POVRŠI
KORIŠĆENJEM POMOĆNIH LOPTI I POMOĆNIH RAVNI**

Jezik publikacije:

JP srpski (latinica)

Jezik izvoda:

JI srpski/engleski

Zemlja publikovanja:

ZP SR Jugoslavija

Uže geografsko područje:

UGP Vojvodina

Godina:

GO 2000.

Izdavač:

IZ Autorski reprint

Mesto i adresa:

MA 21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (broj poglavlja/ strana/ lit. citata/ tabela/ slika/ grafika/ priloga)
FO (18/251/31/2/94/0/1)

Naučna oblast:

NO Matematika

Naučna disciplina:

ND Kompjuterska geometrija i grafika

Predmetna odrednica/Ključne reči:

PO Deskriptivna geometrija, presek rotacionih površi, pomoćne lopte, pomoćne ravni, kompjuterska grafika.

UDK:

Čuva se:

ČU biblioteka Prirodno-matematičkog fakulteta

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

U disertaciji je razmatrana problematika određivanja intersekcije dveju rotacionih površi. Ovo je izvedeno u petnaest poglavlja.

U prvom poglavlju (Uvod) istaknuta je potreba da se presek dveju rotacionih površi određuje korišćenjem metoda koji u osnovi imaju deskriptivno geometrijski pristup. Takođe je dat pregled celog rada i kroz dijagrame je sistematizovana strategija za postavku i rešavanje problema.

U drugom poglavlju (Određivanje preseka površi u kompjuterskoj grafici) izvršena je analiza postojećih metoda za određivanje međusobnog preseka dveju površi i uočeni su izvesni nedostaci ovih postupaka.

U trećem poglavlju (Projeciranje) određena je dvodimenzionalna slika trodimenzionalnog objekta u slučajevima paralelnog i centralnog projiciranja.

U četvrtom poglavlju (Kontura rotacione površi) određene su trodimenzionalne koordinate tačaka na konturi rotacione površi za oba slučaja projiciranja.

U petom poglavlju (Pomoćne ravni) prikazani su matematički modeli za određivanje trodimenzionalnih koordinata tačaka prostorne presečne krive dveju rotacionih površi za tri slučaja međusobnog odnosa osa dveju rotacionih površi: ose su paralelne, seku se ili se mimoilaze. Za rešavanje problema korišćene su pomoćne ravni.

U šestom poglavlju (Pomoćne lopte) korišćene su pomoćne lopte i za tri slučaja u odnosima između osa dveju rotacionih površi su

formirani matematički modeli za određivanje prostorne presečne krive dveju površi.

U sedmom poglavlju (*Transformacije*) izdvojene su ključne dvodimenzionalne i trodimenzionalne transformacije.

U osmom poglavlju (*Osnovna tela i njihovi odnosi*) analizirana su osnovna geometrijska tela poput kocke, paralelopipeda, cilindra i lopte. Prikazani su načini za zadavanje ovih tela kao i procedure za definisanje međusobnog odnosa dva tela.

U devetom poglavlju (*Ravne krive u kompjuterskoj grafici*) analizirane su najfrekventnije ravne krive u kompjuterskoj grafici koje se kao polazni objekti često koriste za generisanje površi.

U desetom poglavlju (*Površni u kompjuterskoj grafici*) prikazani su različiti postuci za dobijanje površi u kompjuterskoj grafici.

U jedanaestom poglavlju (*Pregled aktuelnog softvera*) prikazane su mogućnosti softvera za dobijanje površi i određivanje njihovog uzajamnog preseka.

U dvanaestom poglavlju (*Rezultati*) prikazane su slike-rezultati koje reprezentuju dobre osobine formiranih matematičkih modela.

U trinaestom poglavlju (*Zaključak*) analizirani su dobijeni rezultati i mogućnost daljeg istraživanja na istom ili sličnim problemima.

U četrnaestom poglavlju (*Literatura*) navedene su knjige i naučni radovi koji su citirani i korišćeni tokom izrade disertacije.

U petnaestom poglavlju (*Prilog-listing programa*) prikazan je listing Pascal programa.

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:

DP 24.03.1999.

Datum odbrane:

DO 2000.

Članovi komisije: (Naučni stepen/ ime i prezime/ zvanje/ fakultet)

KO

Predsednik:

ACKETA Dr Dragan, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član:

DOVNIKOVIĆ Dr Lazar, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, NoviSad

Član:

GRUJIĆ Dr Nenad, redovni profesor, Arhitektonski fakultet, Beograd

Mentor:

PUŠIĆ Dr Nevena, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT Monographic publication

Type of record:

TR Textual material, printed

Contents code:

CC PhD thesis

Author:

AU Ratko OBRADOVIĆ, MSc

Mentor:

MN Professor Nevena PUŠIĆ, PhD

Title:

TI DESCRIPTIVE-GEOMETRICAL METHODS IN COMPUTER GRAPHICS: INTERSECTION BETWEEN TWO SURFACES OF REVOLUTION BY USE OF COMMON SPHERES AND COMMON PLANES

Language of text:

LT Serbian

Language of abstract:

LA Serbian/English

Country of publication:

CP Yugoslavia

Locality of publication:

LP Vojvodina

Publication year:

PY 2000.

Publisher:

PU Author's reprint

*Publ. place:***PP** 21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*Physical description: (chapters/ pages/ literature/ tables/ pictures/ graphs/additional lists)***PD** (18/251/31/2/94/0/1)*Scientific field:***SF** Mathematics*Scientific discipline:***SD** Computational geometry and computer graphics*Subject/Key words:***SKW** Descriptive geometry, intersection of surfaces of revolution, common spheres, common planes, computer graphics.**UC:***Holding data:***HD** library of Faculty of Natural Sciences & Mathematics*Note:***N***Abstract:***AB**

In the dissertation the problem of intersection between two surfaces of revolution has been considered. The subject has been presented in fifteen sections.

In the first section (Introduction) the need for determination of intersecting curve between two surfaces of revolution by use of methods based on descriptive geometrical access has been underlined. The dissertation review has been given and the strategy for formulation and determination of problems by use of diagrams has been systematised.

In the second section (Intersections of surfaces in computer graphic) former approaches for surface-surface intersection have been analysed and several shortages have been noted.

In the third section (Projection) the two-dimensional picture of three-dimensional object in cases of parallel and central projections has been determined.

In the fourth section (Contour lines of surface of revolution) the three-dimensional point's coordinates on contour lines of surface of revolution for both projection cases have been solved.

In the fifth section (Common planes) the mathematical models for determination three-dimensional point's coordinates of space intersecting curve between two surfaces of revolution have been presented. Three different cases have been considered: axes of surfaces of revolution are parallel, axes are intersecting or pass each other. For determination of problem common planes have been used.

In the sixth section (Common spheres) common spheres have been used. The mathematical models for determination intersecting space curve for three different cases in relations between axes of surfaces of revolution have been formed.

In the seventh section (Transformations) the basic two-dimensional and three-dimensional transformations have been presented.

In the eighth section (Basic solids and their relations) the basic solids: cube, block, cylinder and sphere have been analysed. The assign solids ways and procedures for determination of relation between two solids have been analysed.

In the ninth section (Plane curves in computer graphic) the most frequent plane curves in computer graphic which often used for determination of surfaces like starting objects have been analysed.

In the tenth section (Surfaces in computer graphics) the different procedures for determination of surfaces in computer graphics have been presented.

In the eleventh section (Pascal program review) the actual softwares possibilities for determination of surfaces and their intersections have been presented.

In the twelfth section (Results) the pictures-results which represented good features of formed mathematical models have been presented.

In the thirteenth section (Conclusion) the obtained results have been analysed as well as the possibilities of further investigations for both same and similar problems.

In the fourteenth section (References) books and scientific papers, which have been either quoted or used in this dissertation, have been given.

In the fifteenth section (Additional list-Program listing) the used Pascal program has been presented.

Accepted by the Scientific Board on:

ASB 24.03.1999.

Defended:

DE 2000.

Thesis defends board: (Degree/ name/ surname/ title/ faculty)

DB

President:

Full Professor ACKETA Dragan, PhD, Faculty of Natural Sciences & Mathematics, Novi Sad

Member:

Full Professor DOVNIKOVIĆ Lazar, PhD, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad

Member:

Full Professor GRUJIĆ Nenad, PhD, Faculty of Architecture, Belgrade

Mentor:

Professor PUŠIĆ Nevena, PhD, Faculty of Natural Sciences & Mathematics, Novi Sad