



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ



Лазар Г. Раденковић

НАСТАВА УВОДНОГ КУРСА МЕХАНИКЕ
У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ И НА ФАКУЛТЕТУ –
ИСКУСТВА И НАЧИНИ ЗА ЊЕНО УНАПРЕЂЕЊЕ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Текст ове докторске дисертације ставља се на увид јавности,
у складу са чланом 30., став 8. Закона о високом образовању
("Сл. гласник РС", бр. 76/2005, 100/2007 – аутентично тумачење, 97/2008, 44/2010, 93/2012,
89/2013 и 99/2014)

НАПОМЕНА О АУТОРСКИМ ПРАВИМА:

Овај текст сматра се рукописом и само се саопштава јавности (члан 7. Закона о ауторским и
сродним правима, "Сл. гласник РС", бр. 104/2009, 99/2011 и 119/2012).

**Ниједан део ове докторске дисертације не сме се користити ни у какве сврхе,
осим за упознавање са њеним садржајем пре одбране дисертације.**

Ниш, 2020.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF PHYSICS



Lazar G. Radenković

TEACHING INTRODUCTORY MECHANICS
COURSE FOR HIGH-SCHOOL AND
UNIVERSITY STUDENTS –
EXPERIENCE AND IMPROVEMENT SUGGESTIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2020.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Проф. др Љубиша Нешић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет
Наслов:	Настава уводног курса механике у средњој школи и на факултету – искуства и начини за њено унапређење
Резиме:	<p>Настава механике, као дела физике, има своје специфичне тешкоће. Ученици кроз сопствено искуство стичу уверења која су често у супротности са законима механике. Због ученичких тешкоћа у савладавању градива, недовољног броја физичара и улоге физике у модерном друштву, настава физике је значајна и актуелна тема.</p> <p>У дисертацији:</p> <ol style="list-style-type: none">1. Приказано је како се у настави механике могу употребити примери из биомеханике да би се ученицима и студентима показала конкретна примена физичких закона. Мерења су вршена употребом акцелерометра, видео анализе и различитих модела људског тела.2. Представљен је педагошки експеримент о улози демонстрација у настави физике. Упоредијено је више приступа у обради исте наставне јединице и приказани резултати на концептуалном тесту уз одговарајућу статистичку анализу (ANOVA и ANCOVA).3. Скренута је пажња на изазове са којима се ученици сусрећу приликом проучавања трења, направљен је обједињени списак важних концепата, и започет рад на развоју концептуалног теста.4. Указано је на честу ученичку заблуду приликом цртања нормалне силе, предложено је објашњење и демонстрациони оглед.5. Приказана је правилна употреба дијаграма сила и систематичан приступ за њихово цртање.
Научна област:	Физичке науке
Научна дисциплина:	Методика наставе физике
Кључне речи:	Методика наставе физике, механика, биомеханика, powerlifting, демонстрације, педагошки експеримент, трење, концептуални тест, нормална сила, дијаграм сила
УДК:	371.2/.3::531/534:377.3(043.3) 371.2/.3::531/534:378.6(043.3)
CERIF класификација:	P 002 Физика S 270 Педагогија и дидактика B 115 Биомеханика, кибернетика S 272 Образовање предавача

Тип лиценце
Креативне за-
једнице:

CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Prof. dr Ljubiša Nešić, Full Professor, University of Niš, Faculty Sciences and Mathematics
Title:	Teaching introductory mechanics course for high-school and university students – experience and improvement suggestions
Abstract:	<p>Teaching mechanics, in the context of physics education, has its own particular challenges. The students' preconceptions, based on their own experience, are often in conflict with the laws of physics. Considering students' difficulties with physics, insufficient number of physicists and the role of physics in modern society, physics education is important and current topic.</p> <p>The thesis examines:</p> <ol style="list-style-type: none">1. Using powerlifting examples as a practical application for physics laws. To perform the measurements, accelerometers, video analysis and various body models were used.2. The results of a pedagogical experiment about using demonstrations in physics class. The same topic lesson was covered using different approaches and the students' conceptual knowledge is compared using statistical analysis (ANOVA and ANCOVA).3. The challenges students face when studying friction. Also, the development of conceptual test about friction was initiated by creating a list of important concepts about friction.4. A common students' misconception about positioning ground-reaction force. The thesis suggests a proper explanation with a laboratory demonstration.5. A systematic approach to drawing free-body diagrams.
Scientific Field:	Physics
Scientific Discipline:	Physics Education Research
Key Words:	Physics education, mechanics, biomechanics, powerlifting, demonstrations, pedagogical experiment, friction, conceptual test, ground reaction force, free-body diagram
UDC:	371.2/.3::531/534:377.3(043.3) 371.2/.3::531/534:378.6(043.3)
CERIF Classification:	P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics S270 Pedagogy and didactics B115 Biomechanics, cybernetics S272 Teacher education

Creative
Commons
License Type:

CC BY-NC-ND



**ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ**

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	монографска
Тип записа, ТЗ:	текстуални / графички
Врста рада, ВР:	докторска дисертација
Аутор, АУ:	Лазар Раденковић
Ментор, МН:	Љубиша Нешић
Наслов рада, НР:	Настава уводног курса механике у средњој школи и на факултету – искуства и начини за њено унапређење
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	енглески
Земља публикавања, ЗП:	Србија
Уже географско подручје, УГП:	Србија
Година, ГО:	2020.
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, ФО: <small>(поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)</small>	8 поглавља, 138 страна, 125 цитата, 6 табела, 70 слика, 2 прилога
Научна област, НО:	физичке науке
Научна дисциплина, НД:	методика наставе физике
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Методика наставе физике, механика, биомеханика, powerlifting, демонстрације, педагошки експеримент, трење, концептуални тест, нормална сила, дијаграм сила
УДК	371.2/.3::531/534:377.3(043.3) 371.2/.3::531/534:378.6(043.3)
Чува се, ЧУ:	библиотека
Важна напомена, ВН:	/

Извод, ИЗ:	<p>Настава механике, као дела физике, има своје специфичне тешкоће. Ученици кроз сопствено искуство стичу уверења која су често у супротности са законима механике. Због ученичких тешкоћа у савладавању градива, недовољног броја физичара и улоге физике у модерном друштву, настава физике је значајна и актуелна тема.</p> <p>У дисертацији:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Приказано је како се у настави механике могу употребити примери из биомеханике да би се ученицима и студенти-ма показала конкретна примена физичких закона. Мерења су вршена употребом акцелерометра, видео анализе и раз-личитих модела људског тела. 2. Представљен је педагошки експеримента о улози демонстрација у настави физике. Упоредно је више приступа у обради исте наставне јединице и приказани резултати на концептуалном тесту уз одговарајућу статистичку анализу (ANOVA и ANCOVA). 3. Скренута је пажња на изазове са којима се ученици сусрећу приликом проучавања трења, направљен је обједиње-ни списак важних концепата, и започет рад на развоју концептуалног теста. 4. Указано је на честу ученичку заблуду приликом цртања нормалне силе, предложено је објашњење и демонстраци-они оглед. 5. Приказана је правилна употреба дијаграма сила и систематичан приступ за њихово цртање.
Датум прихватања теме, ДП:	29.09.2020.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник:
	Члан:
	Члан:
	Члан:
	Члан, ментор:



**ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ**

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	monograph
Type of record, TR :	textual / graphic
Contents code, CC :	doctoral dissertation
Author, AU :	Lazar Radenković
Mentor, MN :	Ljubiša Nešić
Title, TI :	Teaching introductory mechanics course for high-school and university students – experience and improvement suggestions
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Serbia
Publication year, PY :	2020
Publisher, PB :	author's reprint
Publication place, PP :	Niš, Višegradska 33.
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	8 chapters, 138 pages, 125 references, 6 tables, 70 figures, 2 appendixes
Scientific field, SF :	physics
Scientific discipline, SD :	physics education research
Subject/Key words, S/KW :	physics education research, mechanics, biomechanics, powerlifting, demonstrations, pedagogical experiment, friction, conceptual test, ground-reaction force, free-body diagram
UC	371.2/.3::531/534:377.3(043.3) 371.2/.3::531/534:378.6(043.3)
Holding data, HD :	library
Note, N :	/

Abstract, AB :	<p>Teaching mechanics, in the context of physics education, has its own particular challenges. The students' preconceptions, based on their own experience, are often in conflict with the laws of physics. Considering students' difficulties with physics, insufficient number of physicists and the role of physics in modern society, physics education is important and current topic.</p> <p>The thesis examines:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Using powerlifting examples as a practical application for physics laws. To perform the measurements, accelerometers, video analysis and various body models were used. 2. The results of a pedagogical experiment about using demonstrations in physics class. The same topic lesson was covered using different approaches and the students' conceptual knowledge is compared using statistical analysis (ANOVA and ANCOVA). 3. The challenges students face when studying friction. Also, the development of conceptual test about friction was initiated by creating a list of important concepts about friction. 4. A common students' misconception about positioning ground-reaction force. The thesis suggests a proper explanation with a laboratory demonstration. 5. A systematic approach to drawing free-body diagrams.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	29.09.2020.
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	President:
	Member:
	Member:
	Member:
	Member, Mentor:

Садржај

Библиографија	3
1 Увод	5
1.1 Научни допринос дисертације	6
1.2 Допринос других колега	7
1.3 Напомене	8
2 Физика дизања тегова	11
2.1 Избор плоча	14
2.1.1 Теоријско разматрање	14
2.1.2 Експериментална потврда	19
2.2 Модел стандардног човека у биомеханици	24
2.3 Извршени рад	25
2.3.1 Закон одржања енергије	25
2.3.2 Прорачун рада у конвенционалном и сумо стилу	27
2.3.3 Мерење извршеног рада	31
2.4 Оптерећење кичме	32
2.5 Моменти силе код чучња	36
2.6 Профил силе	38
2.6.1 Теоријски увод	39
2.6.2 Поступак мерења	41
2.6.3 Резултати	42
2.6.4 Дискусија	52
3 Улога демонстрација	57
3.1 Поступак истраживања	57
3.2 Валидност	61
3.3 Резултати и дискусија	62
3.4 Закључак	67

4	Трење	69
4.1	Историјски развој трибологије	69
4.2	Битни концепти о трењу	72
4.3	Основни концепти	72
4.4	Статичко трење	76
4.5	Трење клизања	78
4.6	Трење приликом котрљања	80
	4.6.1 Котрљање без деформација	81
	4.6.2 Котрљање са деформацијама	87
4.7	Остали концепти	88
5	Нормална сила	91
5.1	Квадар на стрмој равни	92
5.2	Решење проблема	93
	5.2.1 “Стандардни” приступ	93
	5.2.2 Употреба јединствене контактне силе	94
5.3	Узрок заблуде	95
5.4	Поставка експеримента	98
5.5	Тело на три ослоња	100
6	Дијаграми сила	103
6.1	Алгоритам, честица	103
6.2	Алгоритам, круто тело	104
6.3	Објашњење и примена алгоритама	105
6.4	Алгоритам, трење	109
7	Закључак и правци даљег истраживања	111
8	Додаци	113
8.1	Текст о трењу	113
8.2	Тест о трењу	120
	Литература	125
	Биографија	137

Библиографија

(M23)

- [1] Radenkovic, L., Milosevic, M., Nestic, Lj. (2020). Physics of powerlifting: Bar force profile during deadlift using video analysis and accelerometers. *European Journal of Physics*. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/abb4f0>
- [2] Radenković, L., Nešić, Lj. (2018). The physics of powerlifting. *European Journal of Physics*, 39(3), 034002.

(M33)

- [3] Radenković, L., Nešić, Lj. (2018). Ground reaction force in rigid body dynamics. *Conference Proceedings CSPM 2018* (str. 89–93). International Conference of the Society of Physicists of Macedonia, Ohrid, Macedonia: Society of Physicists of Macedonia.

(M51)

- [4] Radenković, L., Radović, M., Nešić, Lj. (2018). Comparing textual, visual and practical methods for teaching physics. *Facta universitatis—Series: Physics, Chemistry and Technology*, 16(3), 267–283.

(M61)

- [5] Нешић, Љ., Раденковић, Л. (2018). Контактне силе у динамици крутог тела. *Зборник радова 6. Међународне конференције о настави физике у средњим школама* (стр. 165–171). Положај физике у средњим школама у региону, Алексинац.
- [6] Нешић, Љ., Раденковић, Л. (2017). Образовни конструктивизам и настава физике. *Настава физике* 5.

(M62)

[7] Radenković, L., Milošević, M., Nešić, Lj. (2019). How plate choice affects powerlifting performance. *Prehrana, zdravlje in gibanje*.

(M63)

[8] Раденковић, Л., Нешић, Љ., Репник, Р. (2019). Развој концептуалног теста о трењу. *Зборник радова 7. Међународне конференције о настави физике у средњим школама* (стр. 306–314). Положај физике у средњим школама у региону, Алексинац.

[9] Раденковић, Л., Нешић, Љ. (2018). Физика дизања тегова. *Зборник радова 6. Међународне конференције о настави физике у средњим школама* (стр. 209–213). Положај физике у средњим школама у региону, Алексинац.

[10] Раденковић, Л., Нешић, Љ. (2017). Алгоритам за решавање задатка – корак по корак до тачног решења. *Зборник радова са 5. Међународне конференције о настави физике у средњим школама* (стр. 169–172). Положај физике у средњим школама у региону, Алексинац.

[11] Нешић, Љ., Раденковић, Л., Јонић, М. (2016). Трење – од сложене науке до часа физике. *Настава физике 3* (стр. 203–2012). Републички семинар о настави физике, Златибор.

[12] Нешић, Љ., Раденковић, Л. (2016). Часопис Настава физике и његов значај за методику наставе физике. *Настава физике 3* (стр. 193–201). Републички семинар о настави физике, Златибор.

[13] Раденковић, Л., Нешић, Љ. (2015). Ученичка предубеђења у области класичне релативности. *Зборник радова са 3. Међународној симпозијума о настави физике у средњим школама*. Положај физике у средњим школама у региону, Алексинац.

[14] Раденковић, Л., Нешић, Љ. (2015). Развој концептуалног теста за област Галилејеве релативности – пробно тестирање. *Настава физике: Зборник радова са републичкој семинара о настави физике* (стр. 98–107). Златибор.

Остале публикације

[15] Нешић, Љ., Раденковић, Л. (2015). ФИЗИКА 1: Приручник за наставнике физике за први разред гимназије. *Klett*, Београд.

[16] Нешић, Љ., Раденковић, Л. (2015). ФИЗИКА 3: Приручник за наставнике физике за трећи разред гимназије. *Klett*, Београд.

[17] Рад у оквиру Celec, R. (editor), Health in the Interactive Relationship Between Nutrition and Exercise. *Verlag Dr. Kovač.*, Hamburg (2020).

Глава 1

Увод

“Бавиш се физиком? Ја то никада не бих могао”. Уврежено мишљење је да је физика “тешка” наука. Она то заиста и јесте. Физички концепти наизглед не одговарају нашем свакодневном искуству, и потребни су сложени модели да би се адекватно описала физичка реалност. Проучавање физике подразумева овладавање захтевним математичким апаратом, као и експерименталним техникама. У новије време, потребно је и знање програмирања. Као фундаментална наука, физика је присутна свуда, али је, истовремено, ученицима, студентима и општој популацији често далека, тешка и неразумљива.

Због улоге физике у модерном друштву и тешкоћа које ученици имају у њеном разумевању, *настава физике* има изузетан значај. Она треба да тежак и непопуларан предмет представи на интересантан, разумљив и сврсисходан начин. Треба да буде тачна, сликовита, практична, и да има у виду ученичке тешкоће, заблуде и претконцепције.

Настава механике, као дела физике, има своје специфичне тешкоће. С обзиром на то да се односи на свакодневне појаве, ученици кроз сопствено искуство стичу уверења која су често у супротности са законима физике. Иако се механика бави проучавањем макроскопских појава¹, узроци тих појава леже у комплексности микросвета. Мноштво појединачних интеракција микрочестица апроксимира се једноставнијим макроскопским законима. Због тога ти закони имају ограничен домен примене, тј. важе у идеализованим околностима. У свакодневном искуству ученика, насупротив контролисаним лабораторијским условима, на посматрану појаву утиче пуно различитих фактора, које ученици

¹Њутнова механика применљива је на макроскопска тела која се крећу нерелативистичким брзинама, тј. за тела чије су димензије $d \gg d_0$, где је $d_0 \simeq 1 \times 10^{-12}$ m радијус прве Борове орбите, и чије су брзине $v \ll c$, где је $c \simeq 3 \times 10^8$ m · s⁻¹ брзина светлости у вакууму [18].

не разматрају уопште, или их разматрају некритички. Управо ови концепти, у које ученици чврсто верују, представљају препреку усвајању тачних физичких концепата. Адекватна настава физике мора имати у виду ученичке потешкоће, које су готово универзалне, и активно радити на њиховом отклањању.

Због свега наведеног, као и због недовољног броја физичара, настава физике је врло актуелан проблем. Ова дисертација замишљена је као приказ остварених резултата њеног аутора, али и као приручник класичне механике.

Посебан осврт дат је на следеће теме:

- Физика дизања тегова (Глава 2),
- Улога демонстрација у настави физике (Глава 3),
- Трење (Глава 4),
- Нормална сила (Глава 5),
- Дијаграми сила (Глава 6).

У свакој од њих крију се многе ученичке заблуде, привидни парадокси и теме за дискусију. Приказани материјал погодан је за уводне курсеве механике на студијама физике и сродних факултета, при чему је релевантан и за ученике средњих школа, са коригованим математичким апаратом.

1.1 Научни допринос дисертације

Употреба примера из биомеханике у настави физике (Глава 2) представља најзначајнију новину и основни научни допринос дисертације. Ове идеје представљене су у радовима [1, 2, 9] од којих је [2] уврштен у *Highlights of 2018*, као један од двадесет најзанимљивијих радова објављених у *European Journal of Physics* у тој години, што представља велико и ретко признање у свету.

Пре наших публикација, у литератури која се бави наставом физике готово да није било примера који спајају физику и тренинг снаге: један научни рад [19], и једноставни примери у стандардним уџбеницима опште физике [20, 21]. У оквиру дисертације приказана је адаптација метода и примера из биомеханике за потребе наставе физике.

Након тога, представљени су резултати педагошког истраживања спроведеног са ученицима првог разреда гимназије “Бора Станковић” у

Нишу (Глава 3). Иако ограниченог домета, ово истраживања потврђује раније публикована запажања да присуство лабораторијских вежби, у овом случају једноставних демонстрационих огледа које су изводили сами ученици, не мора увек да гарантује бољи успех на тесту. Ови резултати публиковани су у [4].

У оквиру педагошког истраживања, тестиран је утицај огледа на усвајање градива о трењу. Више детаља о трењу дато је у Глави 4. Адекватно разумевање силе трења, нарочито приликом котрљања, један је од највећих изазова за ученике и студенте. Научни допринос представља систематизација познатих резултата и формирање списка ученичких заблуда о трењу, на основу литературе и ауторовог искуства у настави. Списак заблуда је први корак у изради концептуалног теста о трењу. У будућности је планиран завршетак и валидација овог теста. Досадашњи резултати публиковани су у [8, 11].

Једна од честих заблуда о нормалној сили у динамици крутог тела описана је у Глави 5. Приликом цртања дијаграма сила, нормална сила се обично црта у тежишту тела². Међутим, тако оријентисана сила \vec{N} не задовољава увек основне једначине равнотеже. Овај “парадокс” је познат од раније, а допринос се састоји у креирању једноставног огледа који потврђује дато објашњење. Резултати су публиковани у [3, 5].

На крају, у Глави 6, представљен је алгоритам за решавање задатака. Слични алгоритми се могу наћи у стандардним уџбеницима, и у ауоровој пракси су се показали као корисни и популарни. Алгоритам је публикован у [10].

1.2 Допринос других колега

За остварене резултате значајан је директан допринос следећих колега.

Многобројне дискусије са проф. др Љубишом Нешићем, ментором, у дугогодишњој сарадњи, допринеле су развоју и обликовању представљених идеја. Поред сарадње у вези са докторатом и публикавањем радова, сарађивали смо и у оквиру предмета Механика и Наставна средства физике, био сам укључен у организацију конференција, публикавање приручника и реализацију пројеката.

Др Милан Милошевић учествовао је у реализацији експеримента и обради резултата мерења представљених у одељку 2.6, што ми је било

²Постоје извесне разлике између појмова *тежиште* и *центар масе*. У оквиру примера датих у овој дисертацији, подразумева се да је гравитационо поље хомогено, па се ове две тачке подударaju.

од велике помоћи.

Проф. др Миодраг Радовић дао је идеју за педагошко истраживање, представљено у Глави 3, у оквиру испита Лабораторијски експеримент у настави физике на докторским студијама физике. Др Миодраг Ђорђевић је помогао око статистичке обраде резултата код истог истраживања.

Проф. др Ненад Милојевић је интересантним питањем, представљеним у одељку 2.1 покренуо идеју за обраду теме физика и дизање тегова. Такође је имао мноштво корисних сугестија у току припреме радова и помогао у реализацији експеримената. Данило Делибашаић је, такође, својим сугестијама помогао у реализацији истраживања и припреми ових радова. Поред тога што су физичари, обојица су искусни дизајнери тегова, па су њихове сугестије биле интердисциплинарне.

Захваљујем се свима на помоћи.

1.3 Напомене

Представљене теме потекле су из ауторовог искуства у настави. На Природно-математичком факултету у Нишу, током протеклих пет година, реализовао је вежбе из предмета Механика, Теоријска механика, Физика у школи, Наставна средства физике и Физика за студенте географије. На основу тога, стекао је увид у то које тешкоће имају студенти који почињу са изучавањем физике (Механика), који су на средини студија (Теоријска механика), који завршавају факултет (Физика у школи, Наставна средства физике) и који не студирају физику (Физика за студенте географије). Поред тога, аутор је три године држао натаву физике у два одељења гимназије “Бора Станковић” у Нишу, у специјалном информатичком и билингвалном одељењу.

Теме које су обрађене у дисертацији примерене су студентима прве године основних академских студија, у оквиру уводног курса Механике. Већи део материјала се успешно може прилагодити ученицима средње школе, у редовној настави, или у додатном раду. У том смислу, не прави се разлика између појма студент и ученик, и све што је у тексту наведено за студенте важи и за ученике. Једини изузетак од тога је Глава 3, где је представљено истраживање у коме су учествовали ученици гимназије.

У дисертацији није прављена разлика између силе Земљине теже и гравитационе силе Земље. Иако разлика постоји, и сила Земљине теже у себи укључује гравитациону интеракцију и ефекте ротације Земље (центрифугална и Кориолисина сила), за проучавање појаве, ови ефекти

су занемарљиви.

Такође, у дисертацији постоји делимично преклапање текста о трењу. Разлог за то је што је у додатку дисертације 8.1 дат неизмењен текст који је употребљен са ученицима приликом истраживања представљеног у Глави 3.

Све слике су оригинално дело аутора, или су настале модификацијом слика које не подлежу ауторским правима³. Код слика које су претходно публиковане, то је јасно назначено, и наведена је првобитна публикација.

³енг. *royalty-free files*.

Глава 2

Физика дизања тегова

Просечан студент мисли да је спорт лак и забаван, а физика тешка и сувопарна. Просечан физичар – обрнуто. Дизање тегова, као спортска, физичка и естетска активност, веома је популарно међу младима. Насупрот томе, у литератури о настави физике мало је примера који се баве биомехаником, а нарочито дизањем тегова. Употребом примера из свакодневних активности студената, физика се може учинити релевантнијом, а студенти мотивисанији да се њоме баве. Осим радова аутора ове дисертације, не постоји ниједан рад који се бави физичким аспектима дизања тегова. Може се наћи само један базичан рад о тренингу снаге генерално [19], или једноставни примери попут држања тег у руци у стандардним уџбеницима опште физике [20, 21].

Највећи допринос дисертације је адаптација биомеханичких истраживања и развој примера који могу бити употребљени у образовне сврхе на часовима физике.

Тренинг снаге укључује неколико спортских дисциплина: Олимпијско дизање тегова,⁴ *powerlifting*,⁵ такмичење за најјачег човека⁶ итд. Основни фокус овог рада биће *powerlifting*. Укратко, *powerlifting* [22] подразумева извођење следећих вежби⁷ (слика 2.1):

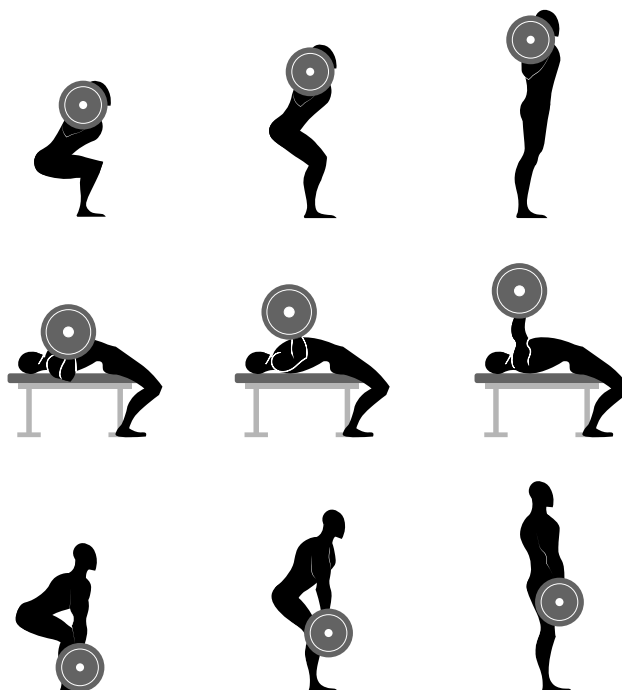
- Чучањ – дизач изводи чучањ са тегом који је на леђима, у висини рамена;
- Бенч прес – дизач лежи на клупи, спушта тег до груди, и подиже га у почетни положај;

⁴енг. *Olympic weightlifting*.

⁵Не постоји адекватан превод.

⁶енг. *Strongmen competition*.

⁷енг. *squat, bench press, deadlift*.



Слика 2.1: Подизање тегова у вежбама: чучањ, бенч прес и мртво дизање. Слика прелиминарно објављена у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

- Мртво дизање – дизач подиже тег са пода до нивоа кукова.

Остварени рекорди на званичним *powerlifting* такмичењима су задивљујући. У мушкој конкуренцији [23], ти рекорди су: чучањ – 505 kg; бенч прес – 410 kg; мртво дизање – 397,5 kg.

Узимајући у обзир наведене бројке, може постојати бојазан да овакав спорт није безбедан, нарочито за адолесценте. Безбедност неког спорта процењује се на основу броја повреда на 1000 сати тренинга, при чему је повреда догађај који онемогућава даље тренирање или такмичење [24]. Према овом критеријуму, *powerlifting* је безбедан колико и плес [24], са ниском стопом повреда од $(1 - 4)/1000$ h. Поређења ради, фудбал има стопу повреда од 17,1/1000 h, што га чини више него 4 пута опаснијим. Радови [25, 26] такође потврђују безбедност *powerlifting*-а.

Већина повреда која се јавља у *powerlifting*-у код младих потиче од неправилног извођења вежби [27]. Сажет приказ правилног извођења вежби дат је у [28–30], док [31–33] дају детаљан приказ.

Поред тога што је безбедан, *powerlifting* је и користан за здравље опште популације, као и адолесцената [27]. Ово је нарочито битно за адолесценте који нису довољно физички активни. *Powerlifting* побољ-

шава стање код неких пацијената са болом у леђима [34, 35] и повећава густину костију [36].

Узимајући у обзир популарност тренинга снаге, ниску стопу повреда и позитиван утицај на здравље, примери из *powerlifting*-а могу освежити стандардни час физике. Они могу помоћи студентима да увиде значај физике у свакодневним активностима, и подстакнути их да пажљивије размотре форму са којом изводе вежбе.

Поред већ поменутих предности употребе примера из *powerlifting*-а у настави физике, предности су и то што:

- Пуно студената је заинтересовано за физичко вежбање и дизање тегова.
- Студенти имају прилику да “персонализују” тему и проучавају сопствено извођење вежбе, или да врше прорачуне према сопственим димензијама тела.
- Приказани примери могу се спровести у било којој учионици или лабораторији. Тегови (или било који други тежак предмет) су лако доступни, као и остала потребна опрема. Софтвер који је коришћен је бесплатан.
- Друге вежбе или свакодневне активности могу се анализирати на сличан начин.
- Модели су довољно једноставни да их студенти могу успешно разумети и употребити.
- Израчунавања дају добре резултате. У случају теоријских предвиђања, показано је добро слагање са експерименталним резултатима из литературе. У случају извођења експеримената, резултати из различитих извора били су сагласни.
- Тема је интердисциплинарна. Студенти уче о физици, анатомији, здрављу, употреби лабораторијске опреме и вршењу мерења, итд.

Како је тема интердисциплинарна, и свака област има свој “жаргон”, добро је повезати основне појмове из физике са појмовима из биомеханике [37, 38]. *Кинематика*⁸ има исто значење у обе науке, док се у биомеханици користи појам *кнетика*⁹ уместо динамике. *Акцелерометри*¹⁰ су уређаји за мерење убрзања.

⁸енг. *kinematics*.

⁹енг. *kinetics*.

¹⁰енг. *accelerometers, inertial measurment units*.

Такође, под појмом *шеџ* подразумеваће се целокупни терет који се подиже, а који се састоји од шипке, на које су наређане плоче одређене масе (слика 2.2).

У даљем тексту је:

- Показано како распоред масе тега утиче на извођење вежбе, са експерименталном потврдом (Одељак 2.1),
- Дефинисан модел стандардног човека (Одељак 2.2),
- Израчунат извршен рад приликом подизања тега у вежби мртво дизање (Одељак 2.3)
- Израчунато оптерећење лумбалног дела кичме приликом извођења вежбе мртво дизање (Одељак 2.4),
- Израчунати су моменти сила који се јављају у куковима и коленима приликом извођења чучња (Одељак 2.5),
- Одређена временска зависност сила којом дизач делује на шипку приликом мртвог дизања (профил силе). Упоредна су два експериментална приступа: видео анализа и акцелерометри (Одељак 2.6).

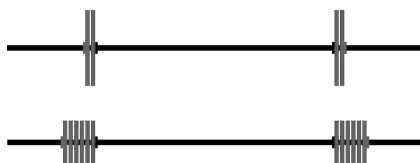
2.1 Утицај избора плоча на извођење вежбе

2.1.1 Теоријско разматрање

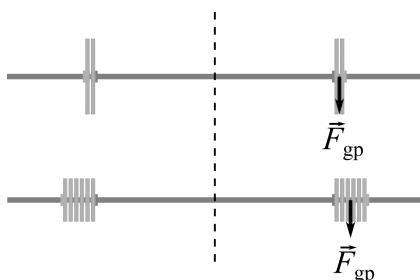
Претпоставимо да је млади студент физике почео да се бави *powerlifting*-ом, и да након неколико месеци тренинга може да подигне тег масе 85 kg. У овом тренутку, није важно коју *powerlifting* вежбу разматрамо, јер је дискусија применљива на сваку (под условом да се код мртвог дизања тег увек подиже са исте иницијалне висине).

С обзиром на то да је маса шипке са учвршћивачима 25 kg [22], на шипку треба додати плоче укупне масе 60 kg. Да ли је једнако тешко подићи тег ако се на шипку ставе 4 плоче од 15 kg, или 12 плоча од 5 kg (слика 2.2)? Ако има разлике, шта је теже подићи и зашто?

Ради лакшег изражавања, прву конфигурацију означимо са 4-15 (четири плоче од 15 kg), а другу са 12-5 (дванаест плоча од 5 kg). Иако је маса тега иста у обе конфигурације, она је другачије распоређена. Због тога перцепција тежине тега није иста у оба случаја, а што је маса



Слика 2.2: Шта је лакше подићи? Слика претходно објављена у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

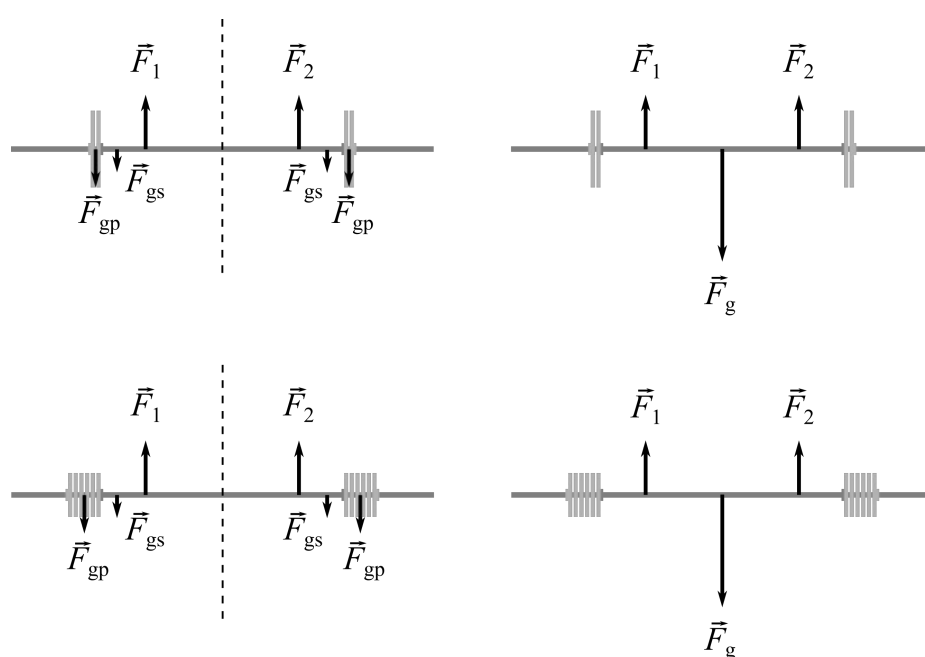


Слика 2.3: Нападна тачка вектора силе Земљине теже на врху плоча \vec{F}_{gp} различита је у свакој од конфигурација.

ближа максималној коју дизач може да подигне, то је разлика уочљивија. Нападна тачка силе Земљине теже у 12-5 конфигурацији умерена је бочно у односу на 4-15 конфигурацију. То значи да ће крак силе у тој конфигурацији бити већи, па самим тим, и момент силе (слика 2.3). Студенти најчешће разматрају једну страну тега (само леву, или само десну) независно од друге, па им је због тога ово решење примамљиво. Дијаграм сила за овакав приступ приказан је левој страни слике 2.4. Силе које потичу од руку дизача означене су са \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , док \vec{F}_g , \vec{F}_{gp} и \vec{F}_{gs} означавају силу Земљине теже која делује на цео тег, једну групу плоча и једну половину шипке, редом.

На десној страни исте слике налази се дијаграм сила ако тег разматрамо као целину, тј. као једно круто тело. Пошто је у обе конфигурације тег симетричан, нападна тачка силе Земљине теже је у центру тега, па ће дијаграми сила за обе конфигурације бити идентични. То је први наговештај да разлика у нападној тачки силе Земљине теже можда није адекватно објашњење.

Да бисмо се у то експлицитно уверили, потребно је написати једначине кретања. При томе ћемо претпоставити да се тег креће транслаторно, тј. да се све време помера паралелно свом почетном положају. Ако посматрамо тег као целину, на њега делују силе које потичу од руку дизача \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , и сила Земљине теже $\vec{F}_g = m\vec{g}$. Ако претпостави-



Слика 2.4: Дијаграм сила за шее̄ у обе конфигурације (4-15 торе и 12-5 доле) када се засебно разматрају лева и десна половина шее̄а (лево) и шее̄ као целина (десно). Слика прелиходно објављена у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

мо да су вектори \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{a} усмерени вертикално, онда Други Њутнов закон пројектован на ову вертикалну y -осу гласи:

$$F_1 + F_2 - mg = ma, \quad (2.1)$$

где су F_1 , F_2 и a интензитети одговарајућих вектора, m је маса тега. Како тег не ротира, укупан момент силе једнак је нули, $\vec{M} = 0$. Ако разматрамо моменте у односу на осу која је ортогонална на раван цртежа и пролази кроз центар тега, онда је:

$$F_2 \frac{l}{2} - F_1 \frac{l}{2} = 0, \quad (2.2)$$

где је l растојање између руку дизача. Шипке имају симетрично постављена места за хват, са шаром за боље приањање, па можемо сматрати да су шаке постављене симетрично, свака на растојању $\frac{l}{2}$ од центра шипке.

Решавањем претходних једначина, добија се:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2}m(g + a). \quad (2.3)$$

Студенти могу бити сумњичави да ће разматрање леве и десне страна тега одвојено довести до истог резултата као и разматрање тега као целине. Због тога може бити потребно исписати аналогне једначине за тај приступ, на основу слике 2.4.

Из једначине (2.3), видимо да су руке једнако оптерећене у току дизања тега, али и даље немамо објашњење за наведену разлику у конфигурацијама. Ипак, овај резултат може бити први наговештај решења.

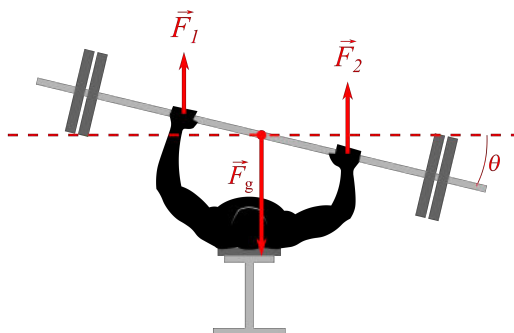
Људи нису савршено симетрични и једна рука, обично десна, је доминантна, тј. јача од друге. Због тога силе којом руке делују на шипку приликом подизања терета често неће бити исте. У случају подизања максималног терета, овај ефекат је израженији јер тада обе руке делују максималном силом. Професионални дизачи често и користе несиметричан хват, тако да се шака доминантне руке иде “испод шипке”, а шака недоминантне руке “изнад шипке”. Као последица тога, кретање тега неће бити савршена translација, већ низ малих translација и ротација.

Размотримо истовремену translацију и ротацију тега, како је приказано на слици 2.5.

Једначине које описују translацију и ротацију су, редом:

$$F_1 + F_2 - mg = ma, \quad (2.4)$$

$$F_2 \frac{l}{2} \cos \theta - F_1 \frac{l}{2} \cos \theta = I\alpha. \quad (2.5)$$



Слика 2.5: Дијаграм сила за ротирани тег. Угао θ је наглашен због преладности. Слика претходно публикована у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

Угао за који је тег ротиран, момент инерције теча и интензитет његовог угаоног убрзања означени су са θ , I и α . Претпоставили смо, као и раније, да оса ротације пролази кроз центар теча. Тег може ротирати око осе која пролази кроз центар, као што смо претпоставили, али може ротирати и око неке друге осе. У том случају, решења једначина ће имати нешто другачији облик, али ће њихова суштина и тумачење бити исто. Због тога је довољно размотрити само ротацију око центра теча, јер ће ротације око осталих оса дати аналогна решења.

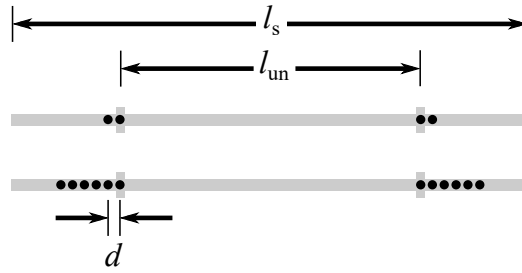
Решавањем претходне две једначине, добијамо:

$$F_1 = \frac{1}{2} \left[m(g + a) - \frac{I\alpha}{l \cos \theta} \right], \quad (2.6)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left[m(g + a) + \frac{I\alpha}{l \cos \theta} \right]. \quad (2.7)$$

Како је момент инерције I већи у 12-5 него у 4-15 конфигурацији, потребна је већа сила F_2 да би се тег кретао на исти начин (тј. са истим убрзањима a и α). Зато ће бити теже подићи тег у 12-5 конфигурацији. С друге стране, ако је F_2 максимална вредност силе коју дизач може да развије, онда a и α морају бити мањи у 12-5 конфигурацији у поређењу са 4-15 конфигурацијом, јер је I веће. Самим тим ће и време подизања теча бити дуже, што је напорније за мишиће, нарочито у случају великих маса. Закључујемо, дакле, да је теже подићи тег у 12-5 конфигурацији јер је потребно (а) развити већу силу за подизање теча, или (б) више времена да се тег подигне.

Интересантно је прорачунати разлику у моменту инерције у конфигурацијама 4-15 и 12-5 на основу званичних димензија тегова [22, 39]. Укупна дужина шипке је $l_s = 2,2$ м, док је дужина између унутрашњих



Слика 2.6: Рачунање момената инерције. Свака тачка представља једну плочу. Маса једне плоче је $m_p = 15 \text{ kg}$ (горе) и $m_p = 5 \text{ kg}$ (доле). Маса учвршћивача m_u додана је маси последње плоче, иако је маса крајњих плоча $m_p + m_u$. Слика прејиходно публикована у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

граничника $l_{un} = 1,334 \text{ m}$ (ово је такође минимално растојање на коме се могу наћи две плоче са супротних страна шипке). Маса шипке је $m_s = 20 \text{ kg}$. Узимајући у обзир дужину шипке, плоче можемо сматрати материјалним тачкама на растојању $d = 22 \text{ mm}$, што је приближна ширина плоча од 5 kg и 15 kg (слика 2.6). Да бисмо избегли увођење додатних ознака, масу плоча ћемо означити са m_p , а конкретна вредност од 5 kg и 15 kg зависиће од контекста конфигурације.

За 4-15 конфигурацију имамо:

$$\begin{aligned} I^{(4-15)} &= I_{\text{шипке}} + I_{\text{плоча}} \\ &= \frac{1}{12} m_s l_s^2 + 2m_p (l_{un}/2)^2 + 2(m_p + m_u) (l_{un}/2 + d)^2 \\ &\approx 33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

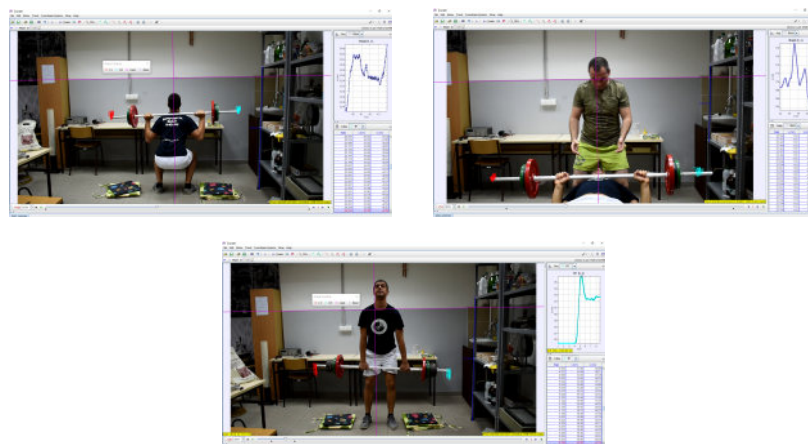
а за 12-5 конфигурацију имамо:

$$\begin{aligned} I^{(12-5)} &= I_{\text{шипке}} + I_{\text{плоча}} \\ &= \frac{1}{12} m_s l_s^2 + \sum_{n=0}^{n=4} 2m_p (l_{un}/2 + nd)^2 + 2(m_p + m_u) (l_{un}/2 + 5d)^2 \\ &\approx 41 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Разлика у моменту инерције између конфигурација је $\Delta I = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, што је повећање за чак 24% .

2.1.2 Експериментална потврда

Приказано објашњење се ослања на претпоставку да се тег “лелуја” приликом подизања. Најједноставнија демонстрација може се урадити



Слика 2.7: Извођење вежби у лабораторији Департамента за физику Природно-математичког факултета у Нишу и њихова анализа у Tracker-у.

помоћу лењира или оловке. Ако студент држи лењир у близини груди, а затим исправља руке, може се запазити лелујање. Приликом дизања тега, када су руке под оптерећењем, и на већем растојању, ефекат је израженији.

За ригорознију потврду, урађено је истраживање у лабораторији Департамента за физику Природно-математичког факултета у Нишу (слика 2.7). За поређење кретања леве и десне стране тега употребљена је видео анализа у програму *Tracker* [40]. Графици су нацртани користећи програм *SciDAVis* [41]. Оба програма су бесплатна, што их чини погодним за употребу у образовању.

Процедура мерења обухватала је следеће кораке:

1. На свакој страни тега означена је тачка за праћење. Боја тачке треба да буде у контрасту са позадином да би грешка приликом праћења у софтверу била мања.
2. Направљен је видео снимак извођења вежбе дигиталном камером *Nikon D3100* са одговарајућим стативом. Стабилно постављен мобилни телефон може бити адекватна замена за камеру. Камера мора бити хоризонтална, а тег све време у кадру. Потребно је да у кадру буде и неки објекат познате висине.
3. Након пребацивања видео записа на рачунар, видео је учитан у *Tracker*. У самом програму је потребно поставити референтни систем тако да једна од оса буде хоризонтална (у нашем случају,

то је x -оса, док је y -оса вертикална). Вертикална оса референтног система поравната је са хоризонталном линијом на зиду (слика 2.7).

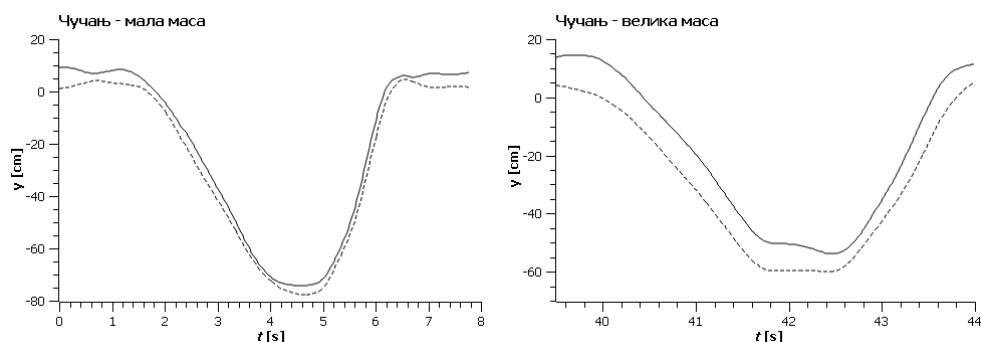
4. Затим је у програму одабрана референтна дужина у односу на коју ће се добити коректне вредности координата. У нашем случају, то је вертикално растојање између две полице на металној сталажи у десном делу кадра (слика 2.7).
5. Након одабира тачака за праћење, *Tracker* аутоматски даје положај, брзину и убрзање сваке од тачака. *Tracker* такође даје графички приказ ових величина, али за детаљнију обраду графика, потребно је експортирати податке из *Tracker*-а, и на основу њих нацртати графике у *SciDAVis*-у.

Више информација о употреби *Tracker*-а и *SciDAVis* може се наћи на њиховим званичним сајтовима [40, 41].

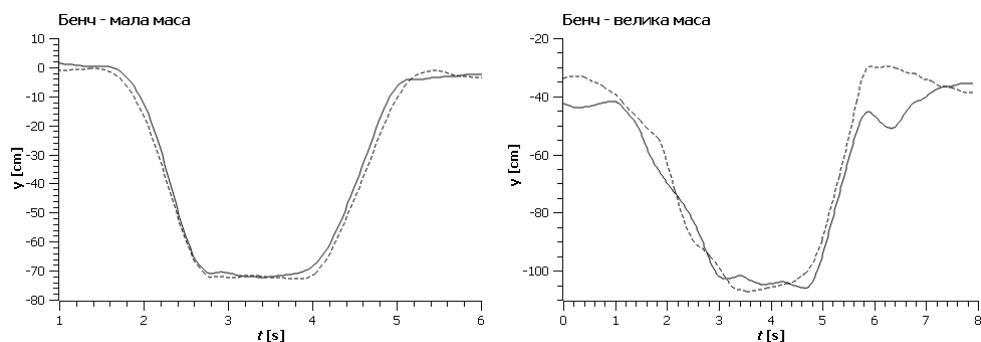
Да бисмо мерили ефекат лелујања, упоређене су вредности y -компонената тачака на крајевима шипке. Сlike 2.8, 2.9 и 2.10 приказују координате тачке на левој (пуна линија) и десној страни шипке (испрекидана линија) у зависности од времена. Видимо да су графици у већој мери паралелни, чак и за велике масе. Једини изузетак од овога је бенч, приказан на слици 2.12, који за велике масе приказује велико лелујање. Разлог за то је што аутор нема много искуства у извођењу ове вежбе, па моторика за овај покрет није тако добро развијена као за остале вежбе.

Апсолутна вредност y -компоненти леве и десне стране тега није од значаја, већ само њихова разлика Δy . Ако нема лелујања тега и подизање је савршено симетрично, онда је разлика Δy константна. Што тег више лелуја, то ће и вредност Δy више да варира. Због тога су графици који приказују Δy , приказани на сликама 2.11, 2.12 и 2.13, много погоднији за утврђивање да ли је и у којој мери дошло до лелујања. На основу ових графика јасно се види да је ред величине померања за малу и велику масу за (а) чучањ 3 cm и 6 cm, (б) бенч 8 cm и 20 cm, (в) мртво дизање 6 cm и 14 cm.

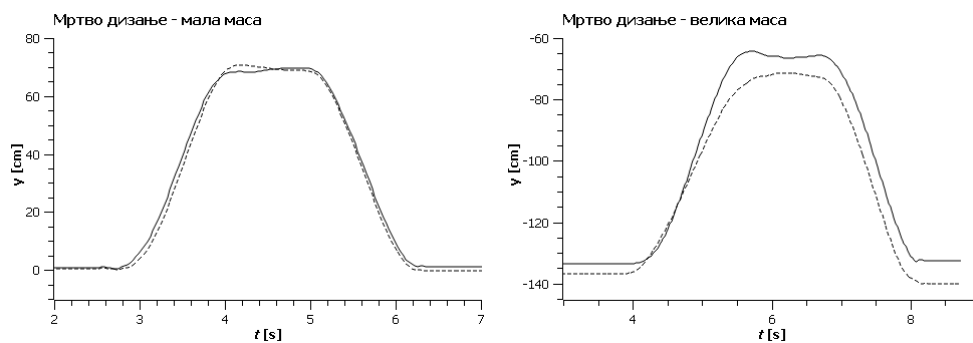
Узимајући у обзир дужину шипке од 170 cm, максимална померања за веће тежине за чучањ, бенч и мртво дизање приближно одговарају угловима од 2° , 7° и 5° . На овај начин је потврђен ефекат лелујања приликом подизања терета, што даје потпору приказаном теоријском објашњењу.



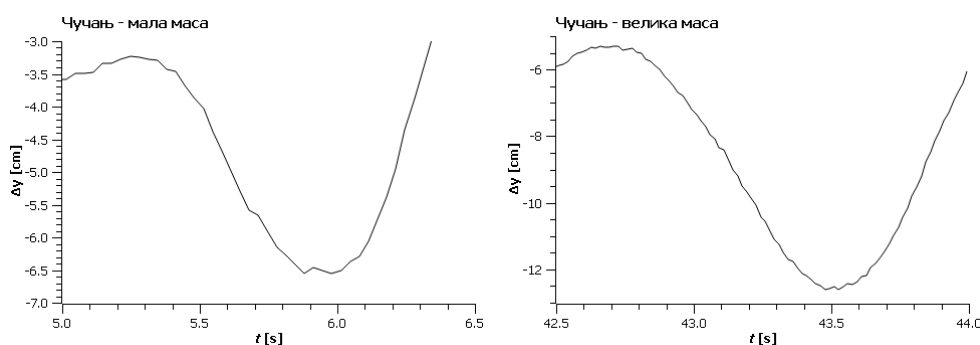
Слика 2.8: Вертикална позиција тачака на крајевима шийке приликом извођења чучња са малом масом (лево) и великом масом (десно).



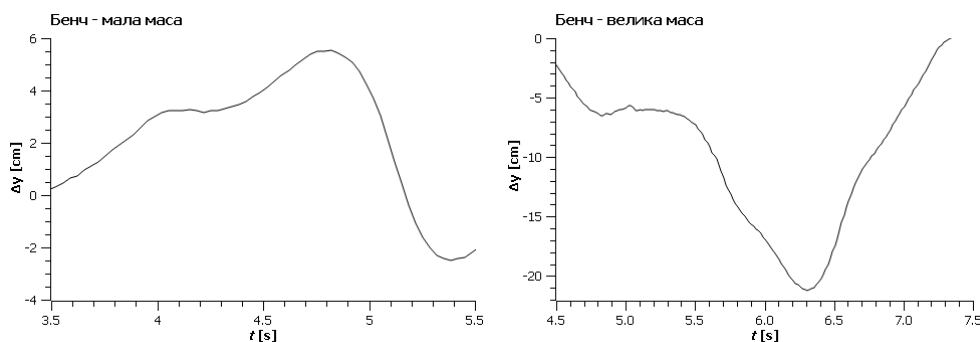
Слика 2.9: Вертикална позиција тачака на крајевима шийке приликом извођења бенча са малом масом (лево) и великом масом (десно). Слика са леве стране прелиходно публикована у [17].



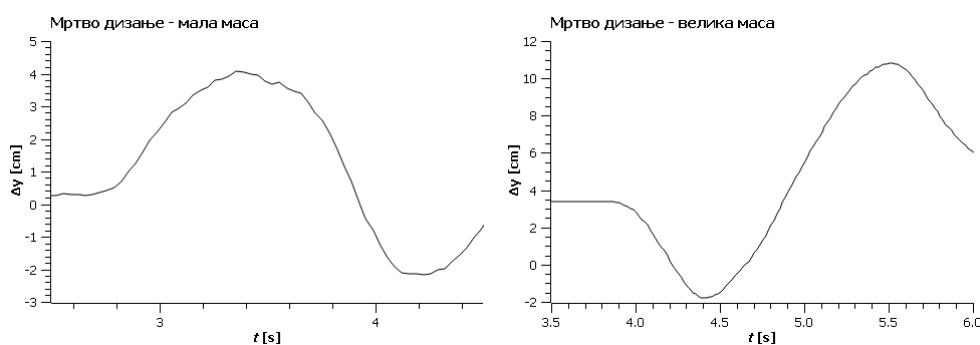
Слика 2.10: Вертикална позиција тачака на крајевима шийке приликом извођења чучња са малом масом (лево) и великом масом (десно).



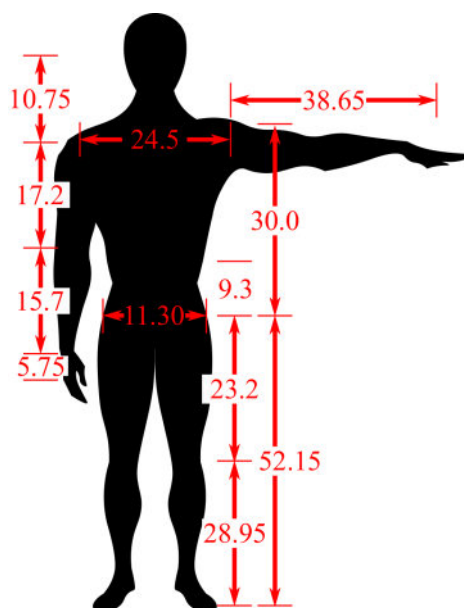
Слика 2.11: Разлика у положају леве и десне шачке приликом извођења чучња са малом масом (лево) и великом масом (десно). Слика прелиходно публикована у [17].



Слика 2.12: Разлика у положају леве и десне шачке приликом извођења бенча са малом масом (лево) и великом масом (десно). Слика са десне стране прелиходно публикована у [17].



Слика 2.13: Разлика у положају леве и десне шачке приликом извођења мртвог дизања са малом масом (лево) и великом масом (десно). Слика са десне стране прелиходно публикована у [17].



Слика 2.14: “Стандардни човек”. Дужине свих сегмената даје су као проценаи висине субјекта (%H). Слика претходно публикована у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

2.2 Модел стандардног човека у биомеханици

За потребе прорачуна у одељцима 2.3, 2.4 и 2.5, на слици 2.14 приказан је модел “стандардног човека”. Модел је сачињен на основу података о просечним димензијама људског тела (дужина удова, торзоа, њихова маса, положај центра масе и слично) из [42]. Претпоставка приликом примене овог модела је да су сегменти тела савршено крути и спојени идеалним зглобовима (без трења)¹¹. Број сегмената у моделу може варирати, зависно од проучаваног покрета. На слици 2.14, дужина 10,75 %H даје висину центра масе главе и врата у односу на рамена. Слично, дужина сегмента шаке од 5,75 %H дата је од зглоба до центра масе шаке. Димензија 9,3 %H означава висину пелвиса (карлице).

Покрет који изводи “стандардни човек” може се третирати на више начина [38, 43, 44]:

- (Квази)статички модел. Подизање тега се посматра као низ статичких позиција. Убрзање тега и сегмената једнако је нули. Неки аутори [45] не праве разлику између статичког и квази-статичког

¹¹енг. *rigid-links model*.

модела и сматрају да су код оба модела и брзина и убрзање у сваком тренутку једнаки нули. У докторату је усвојен овај став.

Други аутори [46] подразумевају да су код статичког модела и брзина и убрзање једнаки нули, а код квази-статичког само убрзање.

- *Квази-динамички модел.* Убрзање сегмената тела се занемарује, а убрзање тега се узима у обзир.
- *Динамички модел.* Сва убрзања – убрзање тега и убрзања сегмената, узимају се у разматрање.

По узору на [47–49], овде је употребљен статички модел. За велике тежине, подизање може трајати преко 4 секунде, а разлика између динамичког и статичког модела иде од 10% па све до 1% за чучањ [47].

Због поређења теоријских резултата са експерименталним подацима у литератури, у модел су убачене конкретне вредности висине и масе дизача, као и вредности масе тега. Те вредности одговарају просечним вредностима субјеката у конкретном експерименталном раду из биомеханике са којима су поређени резултати.

2.3 Извршени рад над тегом приликом мртвог дизања

2.3.1 Теоријски увод и заблуде студената о закону одржања енергије

Рад је, по дефиницији:

$$A_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.10)$$

где је \vec{F} тренутна сила којом дизач делује на тег, а $d\vec{r}$ његов померај у бесконачно малом временском интервалу. Да би се рад израчунао по дефиницији, потребно је у сваком тренутку (тј. у сваком положају) знати вредности силе \vec{F} , којом дизач делује на тег¹².

¹²Више детаља о сили \vec{F} којом дизач делује на тег дато је у одељку 2.6 на страни 38.

С друге стране, рад силе Земљине теже је лако израчунати јер је њен вектор константан и по интензитету и по оријентацији:

$$A_{\text{szt}} = \int m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg\Delta h, \quad (2.11)$$

где је Δh разлика у висини теча у почетном и крајњем положају, m његова маса, а g интензитет убрзања Земљине теже. Гравитациона сила је конзервативна, па рад зависи само од почетног (тег је на поду, дизач се припрема да га подигне) и крајњег положаја (дизач је усправљен са тегом у рукама).

На основу закона одржања енергије, може се наћи рад који дизач изврши над тегом:

$$E_1 + A_{\text{nc}} + A_{\text{sp}} = E_2. \quad (2.12)$$

Енергије система пре и после разматраног процеса означене су са E_1 и E_2 . Члан A_{nc} описује рад неконзервативних унутрашњих сила. Ако се механичка енергија система¹³ смањује, као код трења, овај члан је онда негативан, и то је чешћи случај. Ако се механичка енергија система повећава, као код пуцања петарде, онда је овај члан позитиван [21]. Члан A_{sp} описује рад спољашњих сила. Ако оне додају енергију систему, члан A_{sp} ће бити позитиван, и обрнуто. Закон одржања енергије у “развијеном” облику гласи:

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} + A_{\text{nc}} + A_{\text{sp}} = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}. \quad (2.13)$$

Први корак у примени претходне једначине је одабир система. Како је циљ израчунати рад који дизач врши над тегом, најзгодније је да се систем састоји само од теча. Тада ће силе којом дизач делује на тег и гравитациона силе представљати спољашње силе. Ако би систем укључивао и дизача, онда би приликом писања закона одржања енергије морали да узмемо у обзир и промену висине центра масе самог дизача.

Студенти обично размишљају на следећи начин. Енергија система (тега) у почетном положају, када тег мирује на земљи је $E_1 = E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} = mgh_1$. Слично томе, у крајњем положају, када је тег подигнут и такође мирује, енергија је $E_2 = mgh_2$. Како нема неконзервативних сила, $A_{\text{nc}} = 0$, а рад спољашњих сила је $A_{\text{sp}} = A_{\text{szt}} + A_{\text{F}}$. Рад силе силе Земљине теже, према једначини (2.11), износи $A_{\text{szt}} = -mg\Delta h$. Зато ће студенти закон одржања енергије (2.13) најчешће записати у следећем облику:

$$mgh_1 + A_{\text{szt}} + A_{\text{F}} = mgh_2, \quad (2.14)$$

¹³Збир кинетичке и потенцијалне енергије система.

што сређивањем постаје:

$$A_F = 2mg\Delta h. \quad (2.15)$$

Објашњење за овакав резултат обично гласи да се од уложеног $2mg\Delta h$, “једно $mg\Delta h$ ” троши на савладавање негативног рада гравитационе силе, а “друго $mg\Delta h$ ” на промену потенцијале енергије тега. Једначина (2.15), међутим, није тачна јер је рад гравитационе силе урачунаји два пута. Потенцијална енергија придружена је промени распореда тела у систему. У случају тега, он је систем од једног тела које је, по претпоставци, круто. Зато нема прерасподеле тела унутар система, а самим тим ни промене потенцијалне енергије. У односу на овакав систем, гравитациона сила је спољашња, и нема смисла писати изразе за гравитациону потенцијалну енергију, иако то студенти раде “по навици”. Дакле, $E_1 = 0$ и $E_2 = 0$, а $A_{sp} = A_{szt} + A_F$, па се решавањем једначине (2.13) добија:

$$A_F = mg\Delta h. \quad (2.16)$$

Насупрот томе, ако је систем тег и планета Земља, онда постоји потенцијална енергија која је придружена распореду тела у систему па је $E_1 = mgh_1$ и $E_2 = mgh_2$, и тада је $A_{sp} = A_F$ јер је гравитациона сила унутрашња. Решавање оваквог скупа једначина, подразумевајући да је кинетичка енергија Земље пре и после подизања тега истоветна, довешће до истог решења као у једначини (2.16).

Избор система представља само једну од тешкоћа студената при разматрању концепта енергије [50, 51]. Пуно интересантних дискусија о појму енергије, у домену механике и на граници са термодинамиком, може се наћи у [50–58].

2.3.2 Прорачун рада у конвенционалном и сумо стилу

Иако има различитих варијанти мртвог дизања које се користе у тренингу [59, 60], на такмичењима су доминантни конвенционални и сумо стил. У конвенционалном стилу, стопала су на растојању које је приближно ширини рамена (слика 2.15), а руке су са спољне стране ногу. У сумо стилу, стопала су раширена, приближно на две ширине рамена, а руке пролазе уз унутрашњу страну бутина (слика 2.16) [59]. Овај став приликом подизања подсећа на сумо-рваче, па отуд и име.

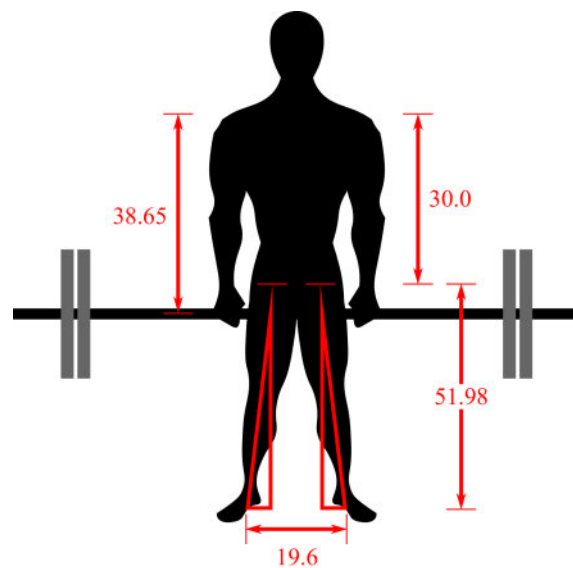
На основу [48], у наставку су наведене особине дизача за кога вршимо прорачун, као и уведене претпоставке:

- Висина дизача је $H = 171$ cm, његова маса је $m_d = 74,2$ kg, а маса тега је $m = 218,1$ kg.
- Размак између стопала код конвенционалног стила је $19,6\%H$, код сумо стила $46,06\%H$ (извођење је дато у наставку).
- Претпоставили смо да у оба стила дизач има хват који је у ширини рамена. То значи да се руке пружају вертикално наниже према шипки. Ова претпоставка је мало одступање у односу на реалне вредности.
- Почетна висина тежишта тега једнака је полупречнику највеће плоче, тј. $h_0 = 22,5$ cm (плоча од 25 kg, на основу [39]).
- Рачунат је рад који дизач изврши над тегом, а није узет у обзир рад који је потребан да се подигне и центар масе дизача. У референтном раду [48] дата су оба податка, па је поређење са експерименталним вредностима могуће.

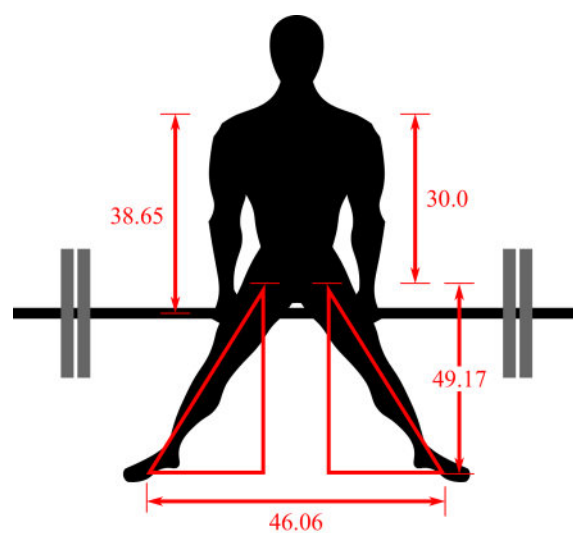
Рад гравитационе силе зависи само од почетног и крајњег положаја тега. Почетна висина је позната и треба наћи само још крајњу висину тега. Зато је потребно је прерачунати на којој висини су шаке стандардног човека, прво код конвенционалног, а потом и код сумо стила. У односу на потпуно усправан став, разлика у висини потиче од нижег положаја кукова јер су ноге раширене. Код усправног става (без тега), подразумевамо да су стопала у ширини кукова (слика 2.14).

Растојање између стопала код конвенционог става [48] је 80% ширине рамена, тј. $19,6\%H$. Како је ширина кукова $11,3\%H$ (слика 2.14), разлика између ширине стопала и кукова јесте $8,3\%H$. Краћа катета троуглова на слици 2.15 је половина те разлике, тј. $4,15\%H$. Хипотенуза троугла је дужина ногу, тј. $52,15\%H$, па се на основу Питагорине теореме добија висина кукова од $51,98\%H$. Ово је врло мала разлика у висини у односу на особу која стоји потпуно усправно, што је и очекивано.

Да бисмо добили положај шака, односно висину на којој се налази тег, висини кукова је потребно додати дужину трупа, да би се добила висина рамена, а затим од те висине одузети дужину руку (слика 2.16). У коначном, за крајњу висину тега добија се $43,33\%H$. На основу тога,



Слика 2.15: Конвенционално мртво дизање. Све дужине даће су као проценаи висине дизача (%H).



Слика 2.16: Мртво дизање у сумо стилу. Све дужине даће су као проценаи висине дизача (%H).

померај тега и извршени рад код конвенционалног мртвог дизања су:

$$\begin{aligned}\Delta h &= h - h_0 \\ &= 43,33 \%H - h_0 \\ &= 51,59 \text{ cm},\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}A_c &= mg\Delta h \\ &= 1103,80 \text{ J}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Користећи аналогну процедуру, узимајући у обзир да је растојање стопала 188 % од ширине рамена [48], за извршени рад у сумо мртвом дизању (слика 2.16), добијамо:

$$h_{\text{kukova}} = 47,17 \%H,\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}h &= h_{\text{kukova}} + l_{\text{trupa}} - l_{\text{ruku}} \\ &= 49,17 \%H + 30,0 \%H - 38,65 \%H \\ &= 40,52 \%H,\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h - h_0 \\ &= 40,52 \%H - h_0 \\ &= 46,79 \text{ cm},\end{aligned}\tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}A_s &= mg\Delta h \\ &= 1001,10 \text{ J}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Величине h_{kukova} , l_{trupa} и l_{ruku} означавају висину кукова, дужину трупа и дужину руку, редом.

Поређење добијених теоријских резултата са експерименталним вредностима дато је у табели 2.1. Резултати за конвенционални стил мртвог дизања у одличном су слагању са експериментом, док резултати за сумо стил нису. Неслагање резултата за сумо стил мртвог дизања је једини податак у приказаним прорачунима који се не слаже са експерименталним подацима. Утврђивање разлога за неслагање биће предмет будућих анализа.

Иако је просечни дизач тегова извршио 10,26 % више рада у конвенционом у односу на сумо дизање, то не значи да је сумо стил “лакши”. Различита позиција тела приликом подизања активира друге мишиће,

Табела 2.1: Поређење извршеног рада приликом мртвог дизања за конвенционални и сумо стил, теоријске и експерименталне вредности [48].

	теор. вредн.	експ. вредн.	
		сред. вредн.	распон
Извршени рад, конв. стил (J)	1103,80	1003	735-1271
Извршени рад, сумо стил (J)	1001,10	739	600-878

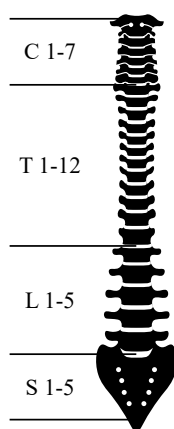
под другачијим угловима. Од индивидуалне анатомије, снаге појединачних мишића, флексибилности и сл. зависиће и перцепција тежине вежбе. Зато се могу наћи препоруке [61] који стил ће за конкретног дизача бити погодан, на основу релативне дужине сегмената.

2.3.3 Мерење извршеног рада

Поред приказаног теоријског прорачуна помоћу модела стандардног човека, извршени рад се може утврдити експериментом у учионици или лабораторији. Најједноставнији експеримент подразумева да се почетна и крајња висина измере метарском траком. Ово је могуће једино ако је маса довољно мала, да је дизач може стабилно и дуго држати у руци у току мерења. У супротном, овакав приступ није безбедан.

Видео анализа је погодна за мерење извршеног рада приликом дизања већих маса. Тада нема ометања дизача јер нема никаквог контакта са њим, па је ова метода самим тим и безбеднија. Употреба видео анализе уз помоћ *Tracker*-а већ је приказана у одељку 2.1.2 на страни 20, па ћемо овде навести само резултате.

Измерена разлика висина у почетном и крајњем положају је $\Delta h = 65,4$ cm. Тег је подигнут конвенционалним стилем. Теоријска вредност, на основу модела стандардног човека за висину дизача (аутор) $H = 186$ cm, износи $\Delta h_{\text{теор}} = 58,1$ cm. Ипак, за право поређење неопходно је уједначити полупречнике плоча, јер се они разликују у теоријској и експерименталној анализи. У експерименту, почетна висина центра тега у односу на подлогу била је 15 cm (заштита за под дебљине 2,5 cm и плоча полупречника 12,5 cm). Када се унесе ова корекција, теоријско предвиђање даје вредност $\Delta h_{\text{теор}}^* = 65,6$ cm, што се врло добро поклапа са експерименталним резултатом од $\Delta h = 65,4$ cm.



Слика 2.17: Скица анатомије кичме и њених пршљенова: вратни (енг. cervical (C)), леђни (енг. thoracic (T)), слабински (енг. lumbar (L)), крстачни (енг. sacral (S)). Пршљенови су кошћана структура карактеристичног облика, а међупршљенски диск хрчавичасто ткиво које апсорбује пошресе. Слика прелиминарно објављена у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

2.4 Оптерећење лумбалног дела кичме приликом подизања терета

Мртво дизање као вежба, и подизање терета са земље као свакодневна активност, у суштини представљају исте покрете. Зато је проучавање мртвог дизања важно за спортисте, физичке раднике, али и за просечног човека.

Сила компресије¹⁴ између L4/L5 пршљенова (слика 2.17) је основни критеријум за процену оптерећења кичме приликом подизања терета [62]. Разлог за то је што се 90% озбиљних повреда кичме дешава у доњем делу леђа. Управо то је био мотив за рачунање компресионе силе у конвенционалном¹⁵ мртвом дизању, на основу модела стандардног човека. У остатку текста ћемо под силом која делује на доњи део кичме подразумевати компресиону силу (укупна сила укључује и силу смицања, коју овде занемарујемо).

На основу [47], у наставку су наведене особине дизача за кога вршимо прорачун, као и уведене претпоставке:

- Висина дизача је $H = 171$ cm, његова маса је $m_d = 86,3$ kg, а маса

¹⁴У инжењерским удбеницима среће се појам *сила притиска*.

¹⁵Видети слике 2.15 и 2.16 на странама 29 и 29 за поређење конвенционалног и сумо сила мртвог дизања.

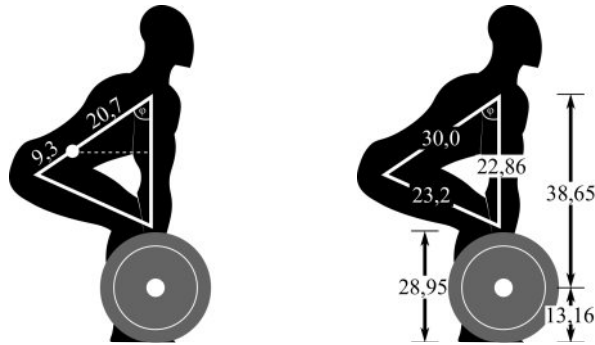
тега је $m = 256,7 \text{ kg}$.

- Потколеница је вертикална, а руке су праве и такође вертикалне. Испод колена, руке и потколенице се преклапају (слика 2.18).
- Подизање је потпуно симетрично и може се разматрати у једној равни, у односу на коју се дизач посматра са стране (тзв. сагитална раван). Оваква дводимензионална анализа је оправдана када се рачунају моменти сила на кичму, нарочито приликом конвенционалног мртвог дизања [48].
- Занемарен је утицај унутрашњег притиска абдомена на кичму. Он потиче од плућа и осталих унутрашњих органа. Више информација о рачунању унутрашњег притиска абдомена може се наћи у [63].

Иако је кичма врло сложена, за потребе овог модела, може се представити као двосегментни систем. Један сегмент је пелвис, а остатак трупа, укључујући главу и врат, представља други сегмент. Подела на сегменте извршена је између пршљенова L3 и L4 (слика 2.17), у складу са [42], који је коришћен за димензије и масу сегмената. Добијени теоријски резултати поређени су са радом [47], у коме је подела на сегменте извршена између пршљенова L4 и L5. То значи да је сила прорачуната за пршљенове L3/L4, а поређена са силом за пршљенове L4/L5. Узимајући у обзир број пршљенова и дужину кичме, ова апроксимација не утиче значајно на резултат. Поред тога, прерачун дужине и масе сегмената без адекватних експерименталних података био би непрецизан јер је људско тело нехомогено.

Према употребљеном двосегментном моделу, сваки од сегмената кичме је крут, али се кичма може савијати на њиховом споју (слика 2.18, лево). Да би кичма била у неутралном положају приликом подизања терета, мишићи морају да спрече све спољашње моменте силе који теже да заротирају кичму око тог зглоба. Дакле, да бисмо израчунали силу која делује на кичму (која потиче од мишића који су за њу причвршћени), потребно је прво израчунати моменте спољашњих сила.

Тег је у почетном тренутку на поду, што значи да је шипка на фиксној висини од $22,5 \text{ cm} = 13,6 \%H$. То значи да руке дизача, такође, морају бити на тој висини у почетном тренутку (слика 2.18, десно). Ако додамо дужину руку овој вредности, добијамо висину на којој се налазе рамена: $13,16 \%H + 38,65 \%H = 51,81 \%H$. Користећи познату дужину потколенице са стопалом, растојање од колена до рамена је



Слика 2.18: Дужине семенања кичме (лево) и осталих семенања (десно) у најнижем положају мртвог дизања. На левој слици тачком је означена позиција $L3/L4$, а непрекидана линија је крак силе Земљине тежес за шеј и руке. Све дужине даће су као проценаи висине дизача ($\%H$). Слика претходно публикована у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

$51,81\%H - 28,95\%H = 22,86\%H$ (слика 2.18, десно). Решавањем троугла¹⁶ који формирају колена, кук и раме, у коме су све три стране познате, добијамо вредност угла $\varphi = 49,85^\circ$ између руку и трупа.

Када је угао φ познат, могу се израчунати моменти сила за тег и сегменте тела. Тег и обе руке имају исти крак силе (означен непрекиданом линијом на слици 2.18, десно) који износи $20,7\%H \sin \varphi$. Маса једне руке је $5,77\%m_d$, а маса тега је $m = 256,7 \text{ kg}$. Положај центра масе трупа¹⁷ приказан је на слици 2.19. Након мало сређивања, добијамо:

$$M_{\text{teg}} = 20,7\%mgH \sin \varphi, \quad (2.23)$$

$$M_{\text{рука}} = 1,200\%m_dgH \sin \varphi, \quad (2.24)$$

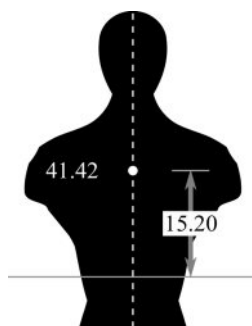
$$M_{\text{CM}} = 6,133\%m_dgH \sin \varphi, \quad (2.25)$$

$$M_{\text{spoljno}} = M_{\text{teg}} + M_{\text{CM}} + 2M_{\text{рука}} \approx 776 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (2.26)$$

Коначно, за добијање силе која сабија кичму, употребили смо еквивалентни мишић дефинисан у [47]. Сложена мускулатура кичме, која одржава кичму у неутралном положају, замењена је једним еквивалентним мишићем. Вектор силе овог мишића усмерен је према пелвису, под углом од 5° у односу на кичму, са ефективним краком силе од

¹⁶Да би се смањило одвлачење пажње студентима математичким дигресијама, могућа је употреба неког од многобројних *online* калкулатора за троуглове. Када се унесе минимални број параметара троугла, програм решава троугао, тј. приказује дужину свих страница и вредности углова троугла.

¹⁷Студенти могу самостално, за вежбу, да израчунају ову вредност, користећи податке из [42].



Слика 2.19: Глава, врат и трупни кош укомбиновани су у један сејменџи (изнад линије). Пелвис је засебан сејменџи (испод линије). Линија пролази кроз L3/L4 диск. Маса комбинованој сејменџи дајџа је са леве стране, као проценат дизачеве укупне телесне масе (% m_d). Распојање између торње ивице пелвиса и центра масе комбинованој сејменџи је са десне стране, као проценат укупне висине дизача (% H). Слика претходно публикована у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

Табела 2.2: Оптеређење кичме приликом мртвој дизања – поређење теоријских са експерименталним вредностима [47].

	теор. вредн.	експ. вредн.	
		сред. вредн.	распон
момент силе на L4/L5			
пршљеновима (N · m)	777	714	565,6-862,4
сила притиска (N)	12 900	12 641	10 201-15 081

$d_{\text{ekv}} = 6$ cm. Дакле, неопходна сила еквивалентног мишића је:

$$F = M_{\text{spoljno}}/d_{\text{ekv}}. \quad (2.27)$$

Сила која сабија кичму (компресиона сила) је:

$$F_{\text{komp}} = F \cos(5^\circ) \simeq 12\,900 \text{ N}. \quad (2.28)$$

Поређење теоријских вредности добијених на овај начин са експерименталним вредностима датим у [47] показују одлично слагање и за момент силе и за силу (табела 2.2).

Студенти ће обично запазити да је добијена вредност компресивних сила веома велика (и пропустити да приметите да исто важи и за момент силе). Процењена критична вредност [36] за компресивну силу (тј. максимална сила која неће изазвати оштећење кичме) је преко 36 000 N, што је заиста изванредно.

2.5 Рачунање момената сила које делују на кук и колено приликом чучња

Код чучња, дводимензиона (2D) анализа, попут оне у претходном одељку, може се применити само ако је раскорачни став довољно узак, тако да су стопала у ширини рамена [49]. Приликом спуштања у чучањ са широким ставом долази до ширења ногу и померања колена у страну, у много већој мери него код чучња са уским ставом. Тада, посматрано са стране, долази до привидног скраћивања удова. Што је став шири, то ће више приближна 2D анализа одступати од тачне 3D анализе. Комплетна 3D анализа била би превише сложена у контексту употребе у учионици, јер се различити сегменти тела крећу у различитим равнима.

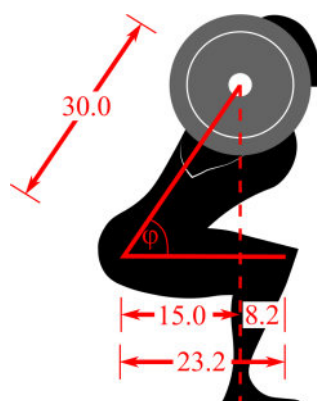
На основу [22, 49], у наставку су наведене особине дизача за кога вршимо прорачун, као и уведене претпоставке:

- Висина дизача је $H = 176,7$ cm, његова маса је $m_d = 82,4$ kg, а маса тега је $m = 208,3$ kg.
- У најнижем положају, бутине су паралелне са подлогом. Ово је минимална дубина до које се дизач мора спустити у такмичењу, да би чучањ био регуларан.
- Торзо је под углом од $\varphi = 60^\circ$ у односу на хоризонталну линију (слика 2.20).
- Позиција центра масе тега подударна је са раменом дизача.

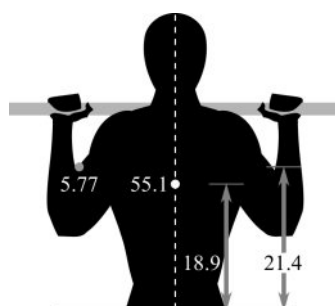
На основу слике 2.20 и једноставних тригонометријских израчунавања, добија се да је крак силе тега у односу на кук $d_{\text{кук}} = 30\%H \cos(60^\circ) = 15\%H = 26,5$ cm. Одузимањем $d_{\text{кук}}$ од дужине бутине, крак силе тега у односу на колено је $d_{\text{кол}} = 23,2\%H - 15\%H = 8,2\%H = 14,49$ cm.

Поред масе тега, и маса самог дизача доприноси укупном моменту силе. Момент силе у односу на кук зависи од масе горњег дела тела – торзо, глава, врат и обе руке. Комбинацијом података о овим сегментима, добија се положај центра масе горњег дела тела $s_{\text{CM}} = 19,33\%H$, и $m_{\text{CM}} = 66,64\%m_1$ (слика 2.21). Кракови сила, у односу на кук и колено су $d_{\text{кук}}^{\text{CM}} = 9,665\%H = 17,078$ cm и $d_{\text{кол}}^{\text{CM}} = 15,535\%H = 23,916$ cm. Подразумевано је да је центар масе савијене руке на половини подлактице, тј. на $8,6\%H$ од рамена, посматрано вертикално.

Коначно, за рачунање момента силе око колена, потребно је урачунати и бутину. Њен центар масе је на $56,7\%$ њене дужине посматрано од колена, тако да је $d_{\text{кол}}^{\text{but}} = 56,7\%(23,2\%H) = 23,24$ cm.



Слика 2.20: Најнижи положај у чучњу. Бутине су паралелне са подлогом. Угао шрућа је $\varphi = 60^\circ$. Дужине су даће као проценаи укујне висине дизача %H. Слика преиходно публикована у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.



Слика 2.21: Позиција центра масе целои шрућа (укључујући главу и врати), и позиција центра масе савијене руке. Маса ових семенаиа приказана је на левој страни слике, као проценаи укујне масе дизача (%m_d). Расиојање од дна пелвиса до центра масе ових семенаиа даио је на десној страни слике, као проценаи укујне висине дизача (%H). Слика преиходно публикована у [2] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

Табела 2.3: Моментни силе који се јављају у куковима и коленима – поређење теоријских са експерименталним вредностима [49].

	теор. вредн.	експ. вредн.	
		сред. вредн.	распон
момент силе у куковима (N · m)	634	514	355-673
момент силе у коленима (N · m)	445	573	394-752

Дакле, добијамо:

$$M_{\text{kuk}} = mgd_{\text{kuk}} + m_{\text{CM}}gd_{\text{kuk}}^{\text{CM}} \approx 634 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad (2.29)$$

и

$$M_{\text{kol}} = mgd_{\text{kol}} + m_{\text{CM}}gd_{\text{kol}}^{\text{CM}} + m_{\text{but}}gd_{\text{kol}}^{\text{but}} \approx 445 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (2.30)$$

Ови резултати показују добро слагање са експерименталним вредностима и налазе се унутар експерименталне грешке (табела 2.3). Да би се стекао утисак о томе колико су ове вредности велике, треба имати у виду да мотор *Ferrari F8 spider*-а производи момент силе од *максимално* 770 N · m [64].

2.6 Рачунање силе која делује на шипку приликом мртвог дизања

Зависност силе од времена $F = F(t)$ у биомеханици се најчешће назива профил силе¹⁸. Аналогно се дефинишу и профили брзине и убрзања. У овом одељку, биће представљен поступак за добијање профила силе којом дизач делује на шипку приликом мртвог дизања.

Постоји више разлога за проучавање профила силе управо код мртвог дизања:

- У литератури из биомеханике *није* *публикован* *профил* *силе* *којом* *дизач* *делује* *на* *шипку*, према нашим сазнањима. Може се наћи профил реакције подлоге¹⁹ [65, 66], што је слично – али не и еквивалентно. За чучањ се такође може наћи само профил реакције подлоге, док је за бенч, профил силе којом дизач делује на шипку одређен пре више деценија [67, 68]. Радови за бенч били су узор овом истраживању у домену видео анализе.

¹⁸енг. *force profile*.

¹⁹енг. *ground reaction force profile*.

- *Безбедности и њпрактичности*. И чучањ и бенч захтевају присуство других људи због безбедности. Њихова улога је да, у случају да дизач не може да подигне тег, спрече да тег падне на дизача. Код мртвог дизања, ако је потребно, тег се једноставно може испустити, без опасности по дизача. Слично томе, и чучањ и бенч захтевају додатну опрему – сталак за чучањ и бенч клупу. За мртво дизање није потребна додатна опрема, осим оне за заштиту пода²⁰. И чучањ и бенч започињу спуштањем тега, што је њпрактично јер ми анализирамо подизање тега. Код мртвог дизања, тег у почетку мирује на поду, а затим се подиже.
- *Релевантности*. Мртво дизање је једна од најпопуларнијих вежби у теретани, и код мушкараца и код жена, код професионалаца (спортиста, војника, полицајаца) и код аматера. Поред тога, подизање терета у свакодневном животу с једне стране, и мртво дизање као вежба с друге стране, у суштини представљају исти покрет. Зато је оно релевантно и за особе које се не баве дизањем тегова. На крају, мртво дизање је једна од ауторових омиљених вежби, па је он био лично заинтересован за тему.

2.6.1 Теоријски увод

Сила којом дизач делује на шипку може се одредити на основу масе и убрзања тега, према Другом Њутновом закону (ово је тзв. инверзна употреба Њутнових закона²¹). Маса тегова је позната, док је убрзање добијено експериментално, на два начина, уз помоћ видео анализе и акцелерометра.

Мртво дизање је вертикалан покрет (слика 2.1 на страни 12), тако је претпостављено да су вектори свих сила оријентисани дуж вертикалне осе. То значи да се силе које потичу од руку дизача $\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}_{y(L)}$ и $\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_{y(L)}$ вертикалне, као и сила Земљине теже (слика 2.22). Други Њутнов закон за тег гласи:

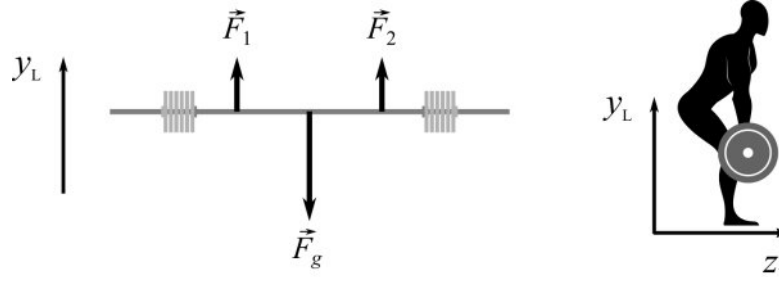
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}, \quad (2.31)$$

где су m , \vec{a} и $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_{y(L)}$ маса и убрзање тега, и сила Земљине теже која делује на њега. Укупна сила којом дизач делује на тег/шипку²² је

²⁰За ово се могу искористити наређане старе свеске, чврст сунђер, гума и слично.

²¹енг. *inverse dynamics*.

²²Пошто је тег моделован крутим телом, израз “сила којом дизач делује на тег” еквивалентан је изразу “сила којом дизач делује на шипку”.



Слика 2.22: Силе које делују на штећ приликом мртвог дизања: \vec{F}_1 и \vec{F}_2 су силе којима дизаач делује на штећ, $\vec{F}_g = m\vec{g}$ је сила Земљине тежине која делује на штећ. Оријентација лабораторијског (L у индексу) система референце је приказана на десној страни слике. Слика прелиходно објављена у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Пројекцијом (2.31) на вертикалну y_L осу лабораторијског референтног система, добија се:

$$F - mg = ma_{y(L)} \quad (2.32)$$

тј.

$$F = m(g + a_{y(L)}). \quad (2.33)$$

Ако се тег помера напред-назад у односу на дизача, неопходно је написати једначине и за вертикалну y_L -осу и за хоризонталну z_L -осу (одабир ознака за осе биће јаснији у одељку 2.6.3). Тада једначина (2.32) за вертикалну осу постаје $F_y - mg = ma_{y(L)}$, док за z_L -осу важи $F_z = ma_{z(L)}$, где су F_y и F_z компоненте укупне силе којом дизаач делује на тег. Интензитет силе F у дводимензионалној (2D анализи) је:

$$F = m\sqrt{(g + a_{y(L)})^2 + (a_{z(L)})^2} \quad (2.34)$$

где је:

$$a = \sqrt{a_{x(L)}^2 + a_{y(L)}^2 + a_{z(L)}^2} \quad (2.35)$$

интензитет укупног убрзања у лабораторијском систему референце. Ако је $a_{z(L)} \simeq 0$, тада једначина (2.34) постаје (2.33).

Дакле, да бисмо на основу једначина (2.33) или (2.34) одредили силу којом дизаач делује на штећу, неопходно је прво одредити убрзање тега. Како ће бити показано, ово убрзање се мења са временом, па ће се тако мењати и интензитет силе F .



Слика 2.23: Плава тачка на стирани шипке је употребљена за праћење у Tracker-у. Vernier акцелерометар (везан за шипку) и Lenovo K6 паметни телефон (црни) били су примарни акцелерометри. Samsung Galaxy Core (бели) и Sony Ericsson Xperia Mini Pro (плави, окачен да висци) употребљени су за поређење. Укупна маса свих мерних уређаја је занемарљива у односу на масу шета. Слика претходно публикована у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

2.6.2 Поступак мерења

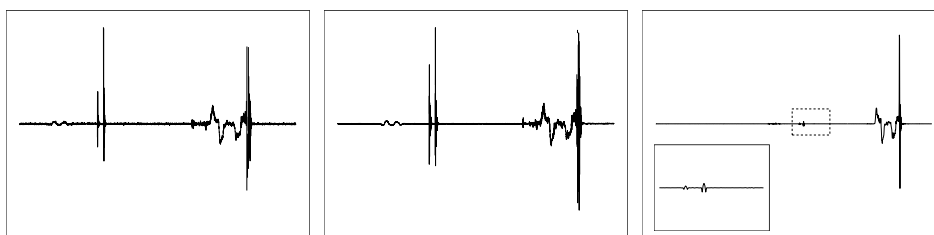
Убрзање се може одредити експериментално помоћу видео анализе или акцелерометара. У биомеханици се користе оба приступа, при чему је видео анализа стандард.

За видео анализу су употребљени апарати *Nikon D3100* (резулација 1920×1080 , 30 fps, auto shutter time) и *Nikon D5600* (резулација 1920×1080 , 24 fps, shutter time $1/200$ s) и бесплатан софтвер *Tracker* [40]. На страни шипке означена је тачка за праћење у *Tracker*-у. (слика 2.23). Приликом извођења вежбе претпостављено је да се шипка не криви.

Различити уређаји су употребљени као акцелерометри (слика 2.23). Основни су били *Vernier Go Direct Force and Acceleration Sensor*²³ [69] уз одговарајући софтвер *Graphical Analysis 4* [70] и *Lenovo K6* паметни телефон, користећи његове сензоре за мерење убрзања и угаоне брзине (акцелерометар са жirosкопом) и бесплатну апликацију *Phyphox* [71, 72]. *Vernier* акцелерометар био је чврсто везан за шипку док је паметан телефон био учвршћен уз помоћ држача телефона за бицикл.

За рачунање, обраду резултата и цртање графика написана је скрипта у програмском језику *R* и *Python*.

²³Који у себи садржи и жirosкопски сензор за мерење угаоне брзине.



Слика 2.24: Графици “сирових” података убрзања за цео понављај вежбе. Ударци у шипку изазвали су два карактеристична пика на графицима за акцелерометар (лево) и паметни телефон (средина) и подрхтавање у графику за видео анализу (десно). Пикови на крају графика одговарају тренутку када се ударци додирну, а на самом почетку графика се могу видети подрхтавања која одговарају подешавању тегова пре подизања. Слика претходно објављена у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

Синхронизација

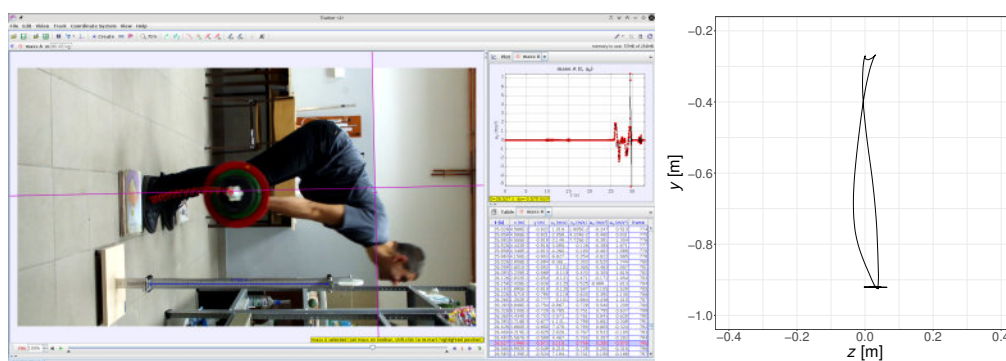
С обзиром на то да је исто извођење вежбе праћено са више уређаја и да су употребљене различите методе, било је неопходно извршити синхронизацију мерења. Пре сваког подизања тег, шипка је ударена два пута на свом крају малом плочом од 2,5 kg. Сваки ударац изазвао је карактеристичан пик (шипак) на графику убрзања добијеног из акцелерометара (слика 2.24). Први пик је употребљен за синхронизацију графика, а други је био контролни.

Интересантно је да је график добијен видео анализом могао бити синхронизован на исти начин. Удари у шипку узроковали су вибрације шипке, и померање маркера на њеном крају. Као последица тога, график убрзања добијен на основу видео анализе садржао је информације о ударцима (слика 2.24). Синхронизација се може извршити и на основу информације о визуелном контакту плоче од 2,5 kg и шипке, са видео снимка.

2.6.3 Резултати

Видео анализа

Употреба видео анализе изискује више времена да би се добили резултати него употреба акцелерометра, и то је њена основна мана. Основна предност је та што се може поставити лабораторијски референтни систем, што омогућује несметано поређење једнодимензионе (1D) и дводимензионе (2D) анализе (слика 2.25).



Слика 2.25: Аутор изводи пробна мерења у физичкој лабораторији ПМФ-а у Нишу (лево). Хоризонтална оса референцијне система поравната је са хоризонталном линијом на зиду. Лењир Ајвудове машине је употребљен за референцијну дужину. Типична путања тега је приближно вертикална линија (десно). Слика прелиминарно објављена у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

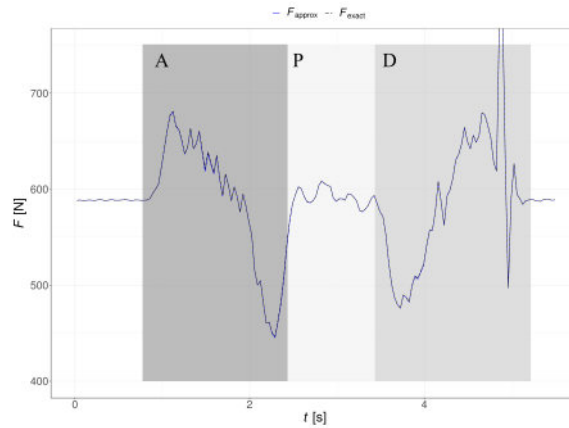
Слика 2.26 показује поређење вредности интензитета силе F на основу апроксимативне једначине (2.33) и тачне једначине (2.34). Две линије се савршено поклапају и стопљене су у једну, што показује да је допринос $a_{z(L)}$ у овом случају занемарљив. Осенчене области означене словима А, Р и D одговарају подизању тега, паузи на врху, и спуштању тега, редом²⁴. Сви понављаји вежбе имали су сличан профил силе, са јасно израженим етапама. Позитивна вредност убрзања јавља се и код спуштања тега јер је спуштање било контролисано (да се под лабораторије не би оштетио). Пик на крају графика одговара тренутку када тег удари о подлогу и нема физичко значење јер потиче од силе реакција подлоге, а не од силе \vec{F} .

Акцелерометри

Највећа предност употребе акцелерометра у поређењу са видео анализом је да се резултати могу добити веома брзо, што може бити важно у учионици или лабораторији. Код акцелерометара проблем представља то што се они померају заједно са тегом. То утиче на њихова читавања и једначине за обраду резултата постају комплексније.

У току припреме експеримента, примећено је да приликом подизања тега долази до његове ненамерне ротације око осе која је дуж шипке (слика 2.27). Ово утиче на читавање акцелерометра, иако нема реалне промене транслаторног убрзања шипке у лабораторијском

²⁴енг. *ascending, pause, descending*.

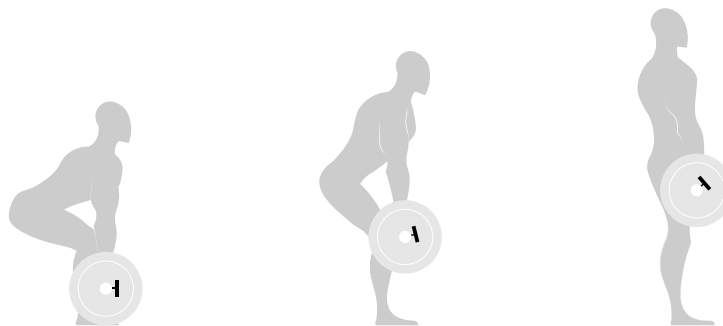


Слика 2.26: Одређивање интензитета силе F на основу видео анализе и једначина (2.33) и (2.34). Типичан профил силе има следеће етапе: A – погизање тег, P – пауза на врху, D – спуштање тег. Слика прелиминарно објављена у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

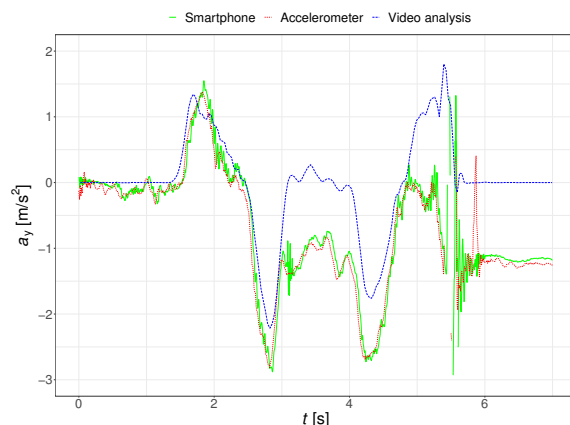
референтном систему (слика 2.28).

Слика 2.29 приказује референтни систем акцелерометра (постављен у складу са [73, 74]) у односу на лабораторијски референтни систем, када је акцелерометар под углом θ у односу на вертикалу. Треба запамтити да координатни почетак акцелерометра убрзава и да његове осе мењају оријентацију.

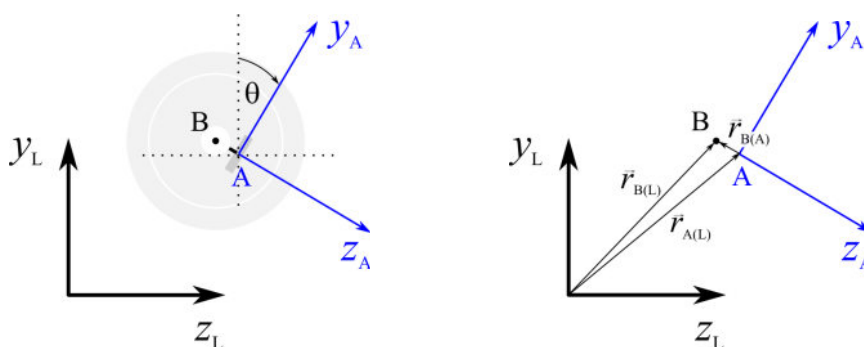
За одређивање убрзања шипке (B) у лабораторијском систему референце (L), на основу убрзања у референтном систему акцелерометра (A), може се искористити веза између убрзања у два референтна система



Слика 2.27: Ненамерна оријентација шипке у току погизања тег утиче на читавање акцелерометра. Слика прелиминарно објављена у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.



Слика 2.28: “Погрешна” очистивања убрзања настала због ротације шийке – пример великог одступања. График показује поређење вертикалних компоненти убрзања мерених акцелерометром (црвена тачкаста линија), наметног телефона (зелена пуна линија) и видео анализе (плава испрекидана линија). Резултат добијен видео анализом је “тачан”. Слика прелиходно публикована у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.



Слика 2.29: Убрзање шийке B у односу на лабораторијски (L) и референтни систем везан за акцелерометар (A). Тачка B означава центар шийке, а тачка A позицију сензора у уређају. Осе x_L и x_A су ортогоналне на цртеж, усмерене од посматрача. Слика прелиходно публикована у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

[18, 75]:

$$\begin{aligned} \vec{a} \equiv \vec{a}_{B(L)} = \vec{a}_{A(L)} + \frac{d\vec{\omega}_{A(L)}}{dt} \times \vec{r}_{B(A)} + 2\vec{\omega}_{A(L)} \times \vec{v}_{B(A)} \\ + \vec{\omega}_{A(L)} \times (\vec{\omega}_{A(L)} \times \vec{r}_{B(A)}) + \vec{a}_{B(A)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

где је $\vec{a}_{B(L)}$ убрзање шипке B у односу на лабораторијски систем (L), $\vec{a}_{A(L)}$ убрзање акцелерометра A у односу на лабораторијски систем (L), и тако даље.

Акцелерометри мере сопствено убрзање на основу сила које делују на пробну масу унутар сензора. Унутрашњост сензора се може замислити као систем у коме је мало тело закачено опругицама дуж три осе. Очитавања акцелометра дуж ових оса одговарају силама еластичних деформација које се јављају у опругицама, по јединици масе. Силе које сабијају или истежу опругице унутар сензора су инерцијалне силе, и сила гравитације. Због тога ће акцелерометар који мирује очитати “убрзање” од $-9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, иако је његово реално убрзање једнако нули. Више информација о томе како акцелерометри раде може се наћи у [74, 76, 77].

Phyphox апликација има опцију да елиминисе g аутоматски, док *Vernier* акцелерометар нема ту опцију. Ради лакшег извођења, овде ће бити подразумевано да је g елиминисано, а затим ће бити унета корекција за оне акцелерометре који немају опцију да сами елиминису g .

Практично говорећи, очитавања акцелерометра a_{x_A} , a_{y_A} и a_{z_A} одговарају разлагању убрзања акцелерометра (у односу на лабораторијски референтни систем) на осе његовом референтног система. Другим речима:

$$\vec{a}_{A(L)} = a_{y_A} \vec{e}_{y(A)} + a_{z_A} \vec{e}_{z(A)}, \quad (2.37)$$

где су a_{y_A} и a_{z_A} *очишћавана акцелерометра* и не треба их помешати са компонентама убрзања из референтног система везаног за акцелерометар. За a_{x_A} је претпостављено да је једнако нули, у складу са геометријом разматраног проблема.

Слично, очитавања жироскопа одговарају разлагању вектора угаоне брзине акцелерометра (у односу на лабораторијски референтни систем) на осе сопственог система референце, тако да је:

$$\vec{\omega}_{A(L)} = \omega_{x_A} \vec{e}_{x(A)}, \quad (2.38)$$

где је ω_{x_A} *очишћаване жироскопа*, и за ω_{y_A} и ω_{z_A} је претпостављено да су једнаки нули.

Може се уочити да је:

$$\frac{d\vec{\omega}_{A(L)}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\omega_{x_A} \vec{e}_{x(A)} \right) = \frac{d\omega_{x_A}}{dt} \vec{e}_{x(A)} = \alpha_{x_A} \vec{e}_{x(A)}, \quad (2.39)$$

$$\vec{r}_{B(A)} = -R\vec{e}_{z(A)}, \quad (2.40)$$

$$\vec{v}_{B(A)} = 0, \quad (2.41)$$

$$\vec{a}_{B(A)} = 0, \quad (2.42)$$

где је претпостављено је да $\vec{e}_{x(A)}$ не мења своју оријентацију јер се ротација дешава око x_A и x_L оса, које су паралелне. Вредност α_{x_A} може се добити нумерички из читавања жироскопа (ω_{x_A}). Растојање између центра шипке и акцелерометра је $R = 7$ cm.

Користећи (2.37)–(2.42), једначина (2.36) постаје:

$$\vec{a}_{B(L)} = (a_{y_A} + R\alpha_{x_A}) \vec{e}_{y(A)} + (a_{z_A} + R\omega_{x_A}^2) \vec{e}_{z(A)}. \quad (2.43)$$

Пошто је ротација око x -осе описана матрицом ротације облика [78]:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

то значи да за сваки вектор \vec{V} важи:

$$\vec{V}_{(A)} = R_x(\theta) \vec{V}_{(L)}. \quad (2.45)$$

Примењујући претходну једначину на јединичне векторе, добија се:

$$\vec{e}_{x(A)} = \vec{e}_{x(L)} \quad (2.46)$$

$$\vec{e}_{y(A)} = \cos \theta \vec{e}_{y(L)} + \sin \theta \vec{e}_{z(L)}, \quad (2.47)$$

$$\vec{e}_{z(A)} = -\sin \theta \vec{e}_{y(L)} + \cos \theta \vec{e}_{z(L)}. \quad (2.48)$$

Заменом (2.47) и (2.48) у једначину (2.43), добија се:

$$a_{y(L)} = (a_{y_A} + R\alpha_{x_A}) \cos \theta - (a_{z_A} + R\omega_{x_A}^2) \sin \theta, \quad (2.49)$$

$$a_{z(L)} = (a_{y_A} + R\alpha_{x_A}) \sin \theta + (a_{z_A} + R\omega_{x_A}^2) \cos \theta. \quad (2.50)$$

Коначно, ако акцелерометар нема опцију да елиминисе g , његова читавања садрже “лажно” убрзање $g\vec{e}_{y(L)}$ које је потребно елиминисати:

$$a_{y(L)} = (a_{y_A} + R\alpha_{x_A}) \cos \theta - (a_{z_A} + R\omega_{x_A}^2) \sin \theta - g, \quad (2.51)$$

$$a_{z(L)} = (a_{y_A} + R\alpha_{x_A}) \sin \theta + (a_{z_A} + R\omega_{x_A}^2) \cos \theta. \quad (2.52)$$

Треба запазити да a_{y_A} , a_{z_A} , ω_{x_A} , α_{x_A} и θ могу имати позитивне и негативне вредности. Како је ротација шипке (слика 2.27) углавном у негативном смеру (на слици 2.29 x -оса увире у папир, тако да је ротација у смеру казаљке на сату, тј. у негативном физичком смеру), то значи да ће и величине које описују ротацију углавном бити негативне. Такође, не треба подразумевати да је $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; вредност g је најбоље одредити усредњавањем укупног убрзања пре подизања тега, када је акцелерометар непомичан.

Тренутни нагиб акцелерометра је:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega_{x_A} dt. \quad (2.53)$$

где је θ_0 почетни нагиб. Користећи опцију “Нагиб” у *Phyphox*-у или читавањем података *Vernier* акцелерометра уживо, акцелерометар се може позиционирати вертикално, тако да је $\theta_0 = 0$. Поузданији начин је да се θ_0 одреди из “сирових” података акцелерометра (са укљученим g), на основу формуле:

$$\theta_0 = \arctan \left(-\frac{a_{z_A}}{a_{y_A}} \right) \quad (2.54)$$

и података пре подизања тега. Угао θ_0 такође може имати позитивне и негативне вредности, зависно од иницијалне позиције акцелерометра.

На основу једначина (2.49)–(2.52), можемо разликовати ефекте оријентације акцелерометра, описане углом θ , и ефекте ротације, описане са ω_{x_A} и α_{x_A} . Чланови са θ описују нежељене промене у читавању узроковане нагнутошћу акцелерометра у односу на вертикалу. Чланови са ω_{x_A} и α_{x_A} описују нежељене промене у читавању које настају због тога што се телефон креће по кружници полупречника R , поред тога што се креће транслаторно, са шипком.

Чланови $R\alpha_{x_A}$ и $R\omega_{x_A}^2$ су мали у поређењу са убрзањима a_{y_A} и a_{z_A} , па су и ефекти ротације такође мали. Слика 2.30 приказује поређење једначина (2.51) и (2.52) са истим једначинама када су ефекти ротације занемарени ($\alpha_{x_A} = 0$, $\omega_{x_A} = 0$).

Сви графици са резултатима са акцелерометара филтрирани су помоћу *moving* функције (*moving average filter*) [79] да би се елиминисао шум и добили прегледнији графици. Више информација о разлозима за употребу филтера у биомеханици може се наћи у [80].

Због тога што су ефекти ротације мали, 1D анализа уз помоћ паметног телефона и опције “убрзање без g ” у *Phyphox*-у може се искористити

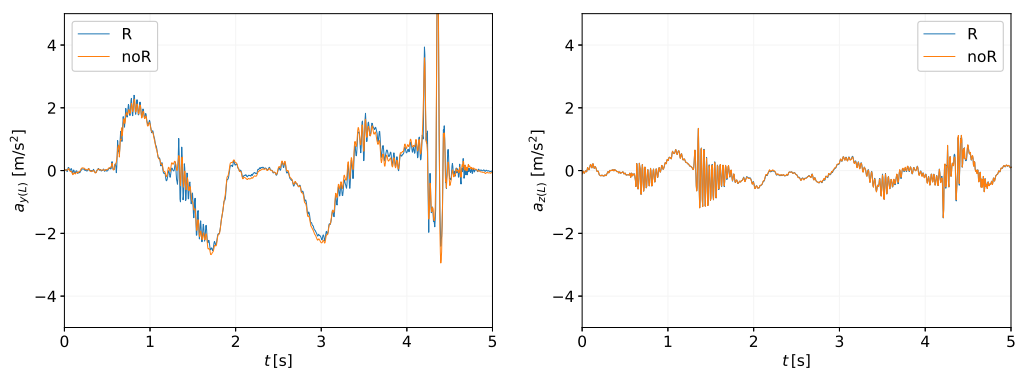
за брзу демонстрацију. Употреба 1D анализе значајно поједностављује и убрзава поступак у односу на приказану 2D анализу, јер није потребно писати скрипте које рачунају претходне кораке. У том случају, паметни телефон се може поставити под било којим углом θ_0 , а читавања интензитета укупног убрзања одговараће убрзању у лабораторијском референтном систему. Ово се може видети из једначина (2.49) и (2.50) тако што се занемаре чланови²⁵ са α_{x_A} и ω_{x_A} и рачунањем укупног убрзања као $a = \sqrt{a_{y(L)}^2 + a_{z(L)}^2}$. С обзиром на то да је овако израчуна-то укупно убрзање увек позитивно (интензитет убрзања), потребно је извршити корекцију да би се добиле позитивне и негативне вредности компоненте $a_{y(L)}$ у једначини (2.33), тј. $a_{y(L)}$ у (2.33) треба заменити са $\pm a$. Ово се може учинити у ходу, користећи знак доминантне компоненте убрзања. Употреба само $a_{y(L)}$ дало би погрешне резултате (слика 2.28), због ефеката оријентације. Поређење 1D и 2D анализе на основу једначина (2.33) и (2.34) приказано је на слици 2.31. Насупрот видео анализи, где се не могу уочити разлике између 1D и 2D анализе, (слика 2.26, страна 44), код акцелерометара се могу видети мале разлике због додатних апроксимација.

Подударање резултата из различитих извора

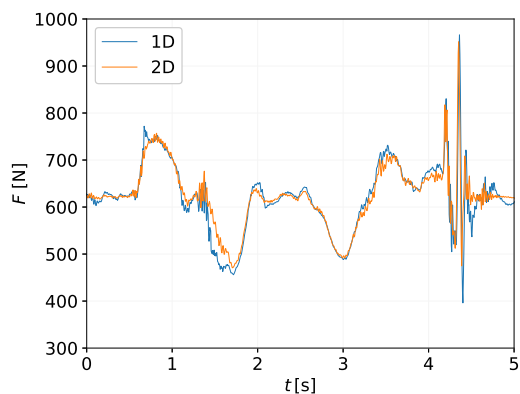
С обзиром на то да једначине (2.49)-(2.52) дају убрзање у лабораторијском систему референце, ови резултати би требало да се поклапају са оним добијеним из видео анализе. Слика 2.32 показује да је слагање врло добро. То је важно јер потврђује тачност целог експеримента и извођења приказаног у одељку 2.6.3.

Такође, не постоји значајна разлика између *Vernier* акцелерометра и *Lenovo* паметног телефона, као ни између различитих телефона међу собом. На пример, 1D поређење *Vernier* акцелерометра, *Lenovo* паметног телефона и видео анализе дато је на слици 2.33, лево, а поређење различитих модела телефона на десној страни исте слике. Чак је и начин постављања телефона на шипку (крута веза, или окачен о канап – слика 2.23 на страни 41) имао мање утицаја него што је очекивано, нарочито у етапама подизања и спуштања тега. Сви телефони су били у могућности да покрену најновију верзију *Phyphox* апликације. Старији модели телефона немају жироскопски сензор, тако да је њихова употреба ограничена на 1D анализу.

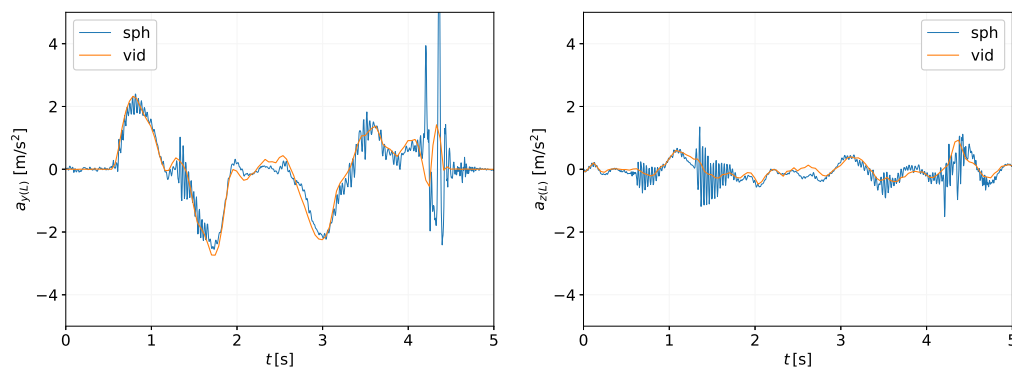
²⁵За које је већ показано да су довољно мали.



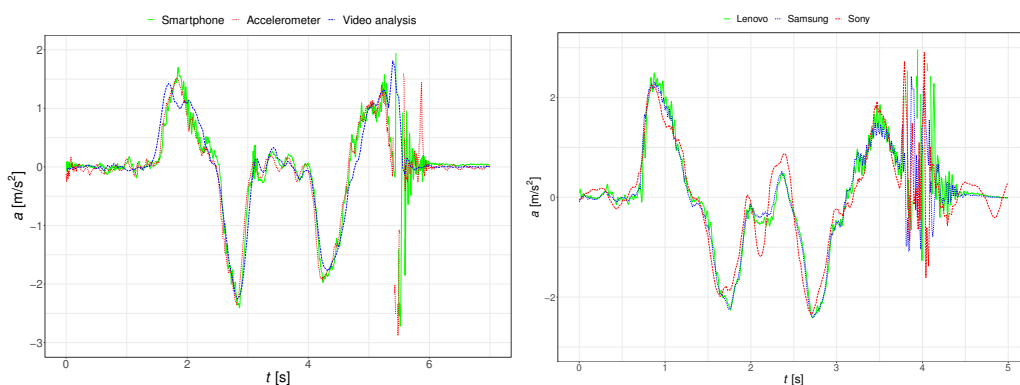
Слика 2.30: Поређење убрзања $a_{y(L)}$ и $a_{z(L)}$ на основу очитивања акцелерометра са ефектима ротације (R) и када су ефекти ротације занемарени (noR). Слика прелиходно публикована у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.



Слика 2.31: Одређивање интензитета силе F користећи једнодимензиону и дводимензиону анализу са акцелерометрима. Слика прелиходно публикована у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.



Слика 2.32: Поређење $a_{y(L)}$ и $a_{z(L)}$ компоненти на основу очивљавања џамејног телефона (*sph*) видео анализе (*vid*). Слика прелиходно публикована у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.



Слика 2.33: Поређење 1D резултата акцелерометра, џамејног телефона и видео анализе (лево) и три различита џамејна телефона са различитим оријентацијама и начинима повезивања на шипку (десно). Црвена искрежидана линија представља телефон који је висео. Слика прелиходно публикована у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

2.6.4 Дискусија

У овом одељку дато је неколико предлога за употребу представљених примера. Како је подизање тега етапа од интереса, сви наредни графици приказиваће само тај део вежбе.

Час се може започети следећим питањима:

- Да ли ће интензитет силе F бити константан приликом подизања тега, или не? Ако неће бити константан, како ће се сила мењати?
- Можете ли да процените најмању и највећу вредност интензитета силе F за конкретан тег?
- Како бисмо могли да измеримо колика сила делује на тег?

На основу разговора са студентима, могу се запазити два типична одговора. Они који немају искуство у дизању тегова обично ће рећи да је сила константна, посматрајући проблем са чисто физичарског становишта. С обзиром на то да треба превазићи силу Земљине теже mg , довољно је применити силу истог интензитета а супротног смера да би се тег кретао константном брзином. Они студенти који имају искуства у теретани обично ће поистоветити осећај напора приликом подизања са силом коју примењују на тег. Због тога ће они рећи да је сила максимална на самом почетку подизања терета и постепено (линеарно) опада. При томе, студенти сматрају да сила F ни у ком тренутку не може да се спусти испод вредности mg , а максималну вредност не могу да процене.

Профил силе (слика 2.34) показује да претпоставке студената не одговарају измереним вредностима силе – сила није ни константна, ни увек већа од mg . Студенти ће бити нарочито изненађени другом тврдњом. Ако је интензитет примењене силе F мањи од mg , како то да тег не падне?

Приликом мртвог дизања, тег мирује и у почетном и у крајњем тренутку подизања (слика 2.1 на страни 12). То значи да је брзина тега у почетном тренутку једнака нули, затим расте, а потом поново опада на нулу када је тег у највишем положају. Дакле, тег убрзава и успорава. Тег неће пасти на земљу и када је $F < mg$ јер већ има неку почетну брзину. Управо тада тег успорава. Док год је вредност (вертикалне компоненте) брзине позитивна, тег ће се кретати навише. Слично се дешава и у фази спуштања тега, где је присутна позитивна вредност убрзања јер тег није бачен, већ контролисано спуштен.

Да би се студентима додатно приближио овај резултат, тренутна брзина и убрзање дати су на истом графику на слици 2.35. Битно је

запазити да брзина и даље расте чак и када убрзање почне да опада. Пикови за брзину и убрзање се *не* поклапају, како студенти често мисле. Тек када убрзање постане негативно, брзина почиње да опада.

Вредност максималне силе може се проценити на основу графика датог на слици 2.34. Јасно је, на основу једначина (2.33) и (2.34) (страница 40), да ће вредност максималне силе зависити како од масе тега, тако и од постигнутог убрзања тега, па ће бити различита за сваки понављај. У конкретном случају приказаном на слици 2.34, за тег од 60 kg, максимална сила износи 680 N, што је приближно 115 % mg .

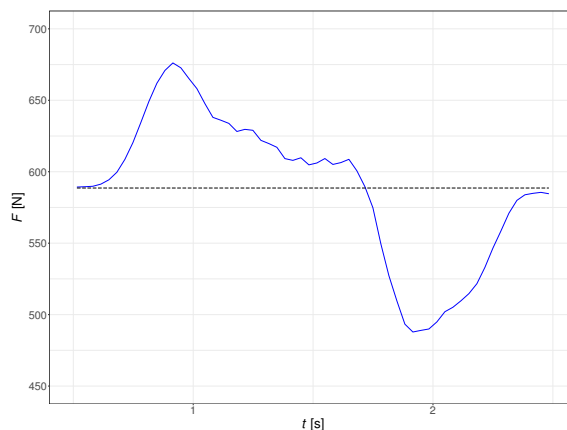
Поред тога, извођење приказано у одељку 2.6.3 може се употребити за обогаћивање часова теоријске механике или математичке физике. Веза између убрзања у неинерцијалном и инерцијалном систему референце, иако важна, студентима је често напорна и апстрактна. Извођење ове везе у контексту спортских активности, насупрот само формалном математичком извођењу, може дати сврху и смисао сложеној математичкој процедури, приближити је студентима и учинити занимљивијом.

Шта би могла бити практична употреба профила силе, осим поменутих образовних примена? Једна од могућности је праћење замора у току тренинга. Ако постоји значајна разлика у профилу силе пре и у току тренинга, то значи да се дизач заморио. Замор може условити неправилно извођење вежбе и повређивање. Зато је важно прекинути тренинг на време, а профил силе може помоћи у процени када то учинити.

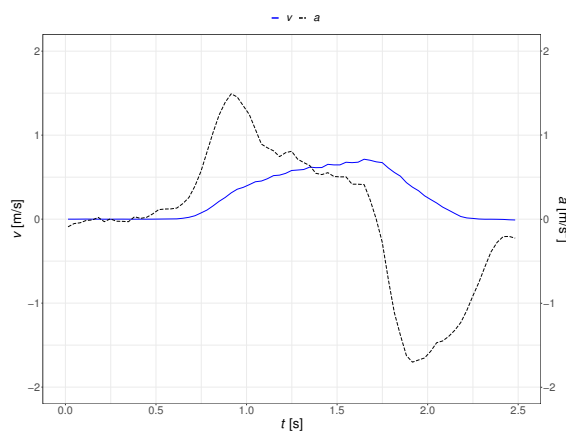
Друга примена би могла бити процена максималне масе коју дизач може да подигне, без подизања те масе. Ово је важно јер често тестирање максимума није пожељно (за професионалце, не више од 1-2 пута годишње). Ипак, познавање максимума је важно да би се направио адекватан план вежбања. Овакав начин процене може се применити ако дизач има другачији профил силе када диже максималну (100 %) и не-максималну ($\simeq 80\%$) масу, што је примећено за бенч [68].

Претпоставимо да дизач има типични профил за масе до 80 kg (тј. до 80 % свог максимума), а другачији за масе 90–100 kg (при чему је 100 kg његов максимум). Након завршеног тренажног циклуса, ако је његов профил силе за масе до 90 kg типичан, то значи да је он напредовао и да је 90 kg сада приближно 80 % његовог новог максимума. Дакле, груба процена његовог новог максимума била би 112 kg. Он овај податак може искористити за планирање новог тренажног циклуса.

Неки од начина како се представљени примери могу укључити у наставу физике су:



Слика 2.34: Профил силе за подизање тега у једнодимензионој видео анализи. Испрекидана линија одговара вредности $F_g = mg$. Слика прелиходно објављена у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.



Слика 2.35: Вредности убрзања (црна испрекидана линија) и брзине (плава црна линија) у зависности од времена за подизање тега, на основу резултата видео анализе. Слика прелиходно објављена у [1] ©European Physical Society. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved.

- Брза и једноставна демонстрација у току часа, на основу 1D анализе и једначине (2.33) (страница 40). Оваква демонстрација је погодна за уводни курс механике, јер не захтева превише времена и најједноставнија је за разумевање јер је у питању 1D анализа.
- Дубља дискусија и употреба 2D видео анализе и једначине (2.34) (страница 40). Употреба 2D видео анализе може бити примерена у оквиру предмета посвећеним наставним средствима физике.
- Студентски пројекат у коме се пореде резултати 1D и 2D анализе, или акцелерометра и видео анализе, како је овде представљено. Овакве активности могу бити примерене за семинарске или мастер радове студената, или додатне активности.

На основу нашег искуства, присуство тегова у лабораторији било је довољно да заинтересује студенте. Често су имали додатна питања и идеје недељама након демонстрације.

Глава 3

Улога демонстрација у настави физике – резултати педагошког истраживања

Експериментални рад ученика и демонстрациони огледи наставника сматрају се саставним делом наставе физике. Ипак, у школама у Србији и окружењу, практичан аспект наставе често је изостављен. У педагошком истраживању које ће бити представљено, употребљено је градиво о трењу јер ученици често имају проблема са разумевањем овог градива. Више детаља дато је у Глави 4, на страни 69.

У истраживању су упоређена три приступа настави: текстуални, визуелни и практични. Иста лекција о трењу реализована је са три групе ученика. Прва група имала је текстуалну верзију лекције, без икаквих цртежа, дијаграма, шема и слично. Ученици у овој групи слушали су вербално излагање, или читали текст (без слика). Друга група ученика имала је уобичајен час, где је наставник своја вербална објашњења допуњивао цртежима и дијаграмима на табли. Трећа група је имала “комплетан пакет” – вербална објашњења, цртеже и дијаграме на табли и могућност да сами изврше једноставне експерименте.

Поређењем резултата ове три групе ученика може се добити увид у којој мери овакво “обогаћивање” наставе утиче на знање ученика. За потребе истраживања, припремљен је концептуални тест о трењу.

3.1 Поступак истраживања

Истраживање је спроведено у гимназији “Бора Станковић” у Нишу, и обухватало је 50 ученика из два одељења првог разреда природно-

математичког смера. Аутор је у периоду од три године радио као наставник физике у овој гимназији, и био је и наставник ученицима који су учествовали у истраживању. Прво одељење било је специјализовано информатичко одељење са 20 ученика. Друго одељење било је енглеско-српско билингвално одељење²⁶ са 30 ученика.

Ученици су подељени у три групе:

1. Текст група – 20 ученика информатичког одељење (цело одељење); просечна оцена 4,08;
2. Дијаграм група – 15 ученика билингвалног одељења (половина одељења); просечна оцена 3,63;
3. Експеримент група – 15 ученика билингвалног одељења (друга половина одељења); просечна оцена 3,65.

Ученици билингвалног одељења поређани су према својој просечној оцени, а затим су непарни и парни чланови низа додељени групама 2 и 3, редом. На овај начин је обезбеђена уједначена просечна оцена група. Просечна оцена израчуната је на основу свих оцена ученика из те групе (4 од 5 планираних оцена по ученику у току школске године). Прва група је имала извесну предност у просечној оцени, док су друга и трећа група готово изједначене.

У додатку на крају дисертације, одељак 8.1 на страни 113, приказан је материјал употребљен на часу, сачињен на основу [20, 21, 81, 82]. У првој групи употребљен је *само* текст (без слика и једначина). У другој групи, наставник је употребљавао дијаграме и једначине. Ученици трећа групе су, поред тога, могли да самостално ураде једноставне експерименте. Детаљан приказ тока часа са сваком од група наведен је у наставку.

Текст група

Да би се оправдало одступање од уобичајеног начина рада, ученицима је речено да је циљ часа увежбавање прављења белешки и анализа текста. Група је подељена у 4 петочлана тима.

Час је текао на следећи начин:

²⁶Иако делује као “језичко” одељење, сва настава у билингвалном одељењу одвијала се по плану и програму *природно-математичког* смера. Ипак, избор оваквог одељења упућује да су ученици склони језицима, а не нужно физици и другим природно-математичким наукама.

- Наставник чита текст дат у одељку 8.1 (верзију текста без слика и једначина). Сваки ученик треба да запише од 5 до 10 најбитнијих идеја из текста који слуша (15 min).
- Ученици упоређују своје белешке унутар тимова (5 min).
- Сваки тим добија по један примерак текста да допуни своје белешке (20 min).
- Наставник врши резиме презентованог материјала и наглашава најбитније закључке из текста (5 min).

У току целог часа, наставник је прилазио ученицима, дискутовао са њима и одговарао на њихова питања. Експерименти који су рађени у експеримент групи, у текст групи били су предмет дискусије, као мисаони експерименти.

Дијаграм група

Час је текао у складу са текстом датим у одељку 8.1. Ученици су подељени у 3 петочлана тима. У току часа, наставник је постављао питања и стварао проблемске ситуације, а ученици су се консултовали унутар тимова и давали одговоре. Слично текст групи, у дијаграм групи дискутовани су исти експерименти, али сада уз скице на табли. На пример, наставник би упитао “Како би ово могли експериментално да покажемо?”, а ученици би се консултовали унутар група и давали предлоге. Наставник би онда коментарисао ове предлоге, цртао скице експеримената на табли, и објашњавао појаве. На самом крају часа свака група добила је одштампани примерак материјала за поређење са својим белешкама.

Експеримент група

Ученици су сада, поред објашњења, једначина и дијаграма имали прилику да сами изврше експерименте уз помоћ приручне опреме која се састојала од кликера, стрмих равни, дрвених блокова и сл. Ученици су опрему добијали сукцесивно.

Наставник је постављао питања, ученици су се затим консултовали унутар тима, испробавали огледе и давали своје мишљење. Наставник је коментарисао и давао смернице за правилно извођење огледа ако је за то било потребе.

Реализовани су следећи квалитативни огледи:

1. **Оглед са дрвеним квадром и стрмом равни.** Дрвени квадар поставља се на стрму раван, а затим се стрма раван подиже до критичног угла. Под критичним углом подразумева се максимални угао при коме квадар и даље мирује на стрмој равни. Тада сила статичког трења има максималну вредност и по интензитету је једнака паралелној компоненти силе Земљине теже јер квадар мирује. Међутим, ако се квадар мало “ћушне”, он почиње да се креће и спушта се све до дна стрме равни. Овако се показује да максимална сила трења мировања већа од силе трења клизања, тј. да је $\mu_s > \mu_k$. Типични експерименти у којима се динамометар повлачи руком показали су се као непрецизни и непредвидиви, па је зато употребљена стрма раван и критични угао.
2. **Оглед са кликером и песком.** Кликер се пушта низ стрму раван са жлебом (увек са исте висине), а затим прелази на хоризонталну подлогу. У првом случају, хоризонтална подлога је узак послужавник напуњен песком. У другом случају, хоризонтална подлога је дрвени сто. Ученици уочавају да кликер прелази много мањи пут када се котрља по песку, и да у песку остаје путања кликера. Ово је основ за дискусију о улози деформација приликом котрљања.
3. **Оглед са дрвеним колицима и ваљцима.** Користећи стрму раван на начин описан у првом огледу, ученици проверавају када је најлакше покренути колица: (а) када су постављена наопако, тако да клизају, (б) када се котрљају на примитивним точковима, (в) када су постављена наопако, и котрљају се на ваљцима. Ученици се уверавају да је у случају под (а) то најтеже, а у случају под (в) најлакше.
4. **Оглед са тањирима и лоптицама.** Помоћу овог огледа ученицима се демонстрира принцип рада кугличних лежајева. Два пластична тањира су првобитно убачена један у други, без лоптица. Доњи тањир се држи чврсто, а горњи ротира. Затим се између тањира убацују лоптице за стони тенис и понавља поступак. Када су између тањира лоптице, ротација се дешава знатно лакше. Слично, када се између осовине примитивног точка и самог точка убаце куглице, ротација точка је ефикаснија. Ово је основна идеја иза изума кугличних лежајева.

За тестирање концептуалног разумевања појава о трењу, развијен је тест за потребе овог истраживања, приказан у одељку 8.2 на стра-

ни 120. Ученици су имали на располагању 45 min за решавање теста. Тестирање је извршено 9 дана након обраде градива.

3.2 Валидност педагошког експеримента

Валидност истраживања показује у којој мери су донесени закључци оправдани и општи. Разликујемо унутрашњу и спољашњу валидност педагошког експеримента [83].

Унутрашња (интерна) валидност односи се на основаност претпостављених узрочно-последичних веза зависне и независне променљиве. На пример, ако желимо да меримо утицај присуства огледа на концептуално знање ученика, онда морамо елиминисати утицај других променљивих, попут претходног знања физике, старости учесника истраживања, условима у којима се врши истраживање и слично. Ако ови фактори нису контролисани (тј. ако нису исти у свим групама), тада нисмо сигурни у којој мери је уочена разлика између група зависи од проучаване променљиве, а колико од других фактора.

Спољашња (екстерна) валидност односи се на то колико су резултати општи, тј. да ли се изведени закључци могу применити на друге субјекте (репрезентативност узорка, генерализација у односу на популацију), и у другим околностима (генерализација у односу на околности). Пожељна је што већа општост закључака, а екстерна валидност даје процену у којој мери се закључци могу генерализовати, а тај суд се не може донети на основу једног истраживања.

У току дизајна истраживања узете су у обзир следеће променљиве:

1. *Претходно знање физике.* Ова променљива контролисана је формирањем група са приближном просечном оценом. Прва група била је фаворизирана, са нешто вишом просечном оценом, и она је због тога намерно проглашена текст групом.
2. *Утицај наставника.* Исти наставник реализовао је све активности у току истраживања, као и наставу у току целе школске године, тако да је стил рада био уједначен²⁷.
3. *Групини облик рада.* Како су била доступна три комплета за извођење експеримената, експеримент група је морала бити подељена у три петочлана тима. Да би исти облик рада био заступљен

²⁷Утицај наставника из основних школа је практично немогуће контролисати као променљиву, али се то може подвести под претходно знање физике.

и у остале две групе, ученици тих група такође су подељени у петочлане тимове.

4. *Активност ученика у току обраде градива.* С обзиром на то да је постојала могућност да се ученици текст групе “искључе” због врло непримамљивог начина обраде садржаја, они су добијали различите задатке да би остали активни. Ти задаци укључују одабир 5-10 најбитнијих закључака из текста, поређење белешки унутар тима, самостална допуна белешки на основу текста и сл. На тај начин је обезбеђено да ученици читавог часа активно анализирају материјал.
5. *Прикривање експеримента.* Приликом реализације педагошког експеримента, важно је да учесници не знају да су део експеримента. У супротном, то би могло да утиче на веродостојност резултата²⁸. Због тога је ово истраживање спроведено у оквиру редовних часова физике. Подела у групе и обрада нетипичних тема били су чести у току школске године, тако да се часови у оквиру педагошког експеримента нису ни по томе истицали. Такође, ученици једне групе нису имали увид шта је рађено са осталим групама. То је остварено тако што је прва групе била засебно одељење, док се са другом и трећом групом (које су из истог одељења) радило на одвојеним часовима.

Након завршеног педагошког експеримента, сви ученици су добили шансу да испробају огледе, што је важно са образовне и етичке стране.

3.3 Резултати и дискусија

Атмосфера на часу обраде градива

У текст групи, неактивност ученика је била очигледна, нарочито у току читања текста. Ученици су почетку покушали да прате текст, а онда постепено одустајали. Они који су били активни, често су сами цртали дијаграме у свесци, углавном погрешне. Ови дијаграми нису исправљени чак ни када су ученици добили примерак текста да допуне своје белешке. У току часа, ученици су постављали питања, и наставник је на њих детаљно одговарао и дискутовао са ученицима. Било је више него довољно времена да се цео материјал детаљно проучи.

²⁸Ако се присуство експеримента не може прикрити, онда треба прикрити његову сврху.

Са ученицима друге групе час је био активан и интересантан. Занимљива питања од стране наставника, сарадња унутар група, надметање између група – све је то позитивно утицало на мотивацију ученика за рад. Насупрот једнаким напорима наставника, интересовање ученика у првој групи било је значајно мање него у другој групи. Дакле, убацивање дијаграма помогло је да час “оживи”. Било је довољно времена да се пређе целокупно градиво и одговори на сва ученичка питања.

У трећој групи ученици су показали пуно ентузијазма и били врло заинтересовани за опрему коју су добили. Испробавали су, дискутовали, вршили мерења, и у коначном, извели све планиране експерименте. Повремено је деловало да је опрема (и њена непланирана употреба) одвлачила пажњу ученика од наставникових објашњења. Када су добили кликере, лоптице, дрвена колица, стрме равни, посуде с песком и осталу опрему, ученици су реаговали како би сваки петнаестогодишњак реаговао – почели су да се играју! Такође, повремена ненамерна бука настала обарањем кликера, лоптица и остале опреме одвлачила је пажњу и наставнику. Уопштено, било је потребно више напора да се руководи часом.

Било је једва довољно времена да се обради све што је планирано, и морало је да се ради помало ужурбано. Додавање опреме ученицима и постављање чак и овако једноставних огледа захтевало је изненађујуће много времена. Због тога је постојање адекватног кабинета за физику (који у овој гимназији не постоји) кључно за ефикасан експериментални рад.

Насупрот поменутих проблемима, час је био успешан, и ученици и наставник су уживали. Пуно ученика је то отворено изразило и рекло да би што чешће желели да имају овакве часове. Ова запажања у складу су са резултатима публикованим у [84].

Резултати тестирања

Тест се састојао од 16 питања, а тачан одговор вредео је 1 поен²⁹. Једини изузетак од овог правила било је питање 13, где је ученик добијао 0,5 поена ако је правилно оријентисао силу, али са погрешном нападном тачком (у тежишту, уместо на контакту кугле и подлоге). Резултати концептуалног тестирања израчунати су на основу резултата 46 од 50 ученика. Четири ученика су била одсутна. Њихово одсуство утицало је на просечну оцену група. Коригована вредност просечних оцена дата је у табели 3.1. Једносмерна анализа варијансе (ANOVA)

²⁹За нетачан одговор добијало се 0 поена, тј. није било негативних поена.

Табела 3.1: Просечна оцена ученика сваке групе и просечан резултат остварен на концептуалном тесту, изражен у броју поена ($\max = 16$) и процентишно.

	Текст група	Дијаграм група	Експеримент група
Просечна оцена	4,04	3,63	3,77
Резултат (бр.п.)	10,17	9,80	10,00
Резултат (%)	63,56	61,25	62,50

показала је да нема статистички значајне разлике у просечној оцени група $F(2, 43) = 0, 886$ и $p = 0, 42$.

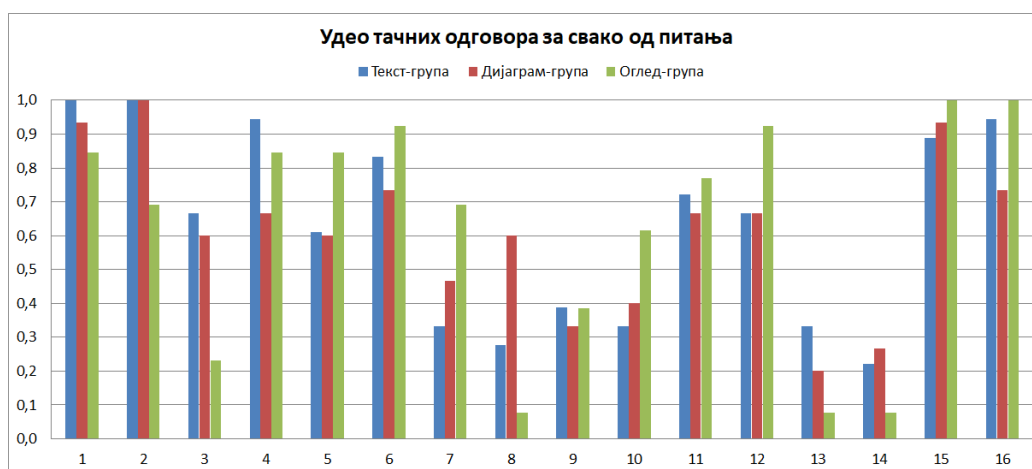
У табели 3.1 се такође могу видети резултати концептуалног тестирања све три групе. Већ на први поглед, види се велика уједначеност резултата група. Једносмерна ANOVA потврђује ову тврдњу $F(2, 43) = 0, 140$ и $p = 0, 87$. Текст група је, изненађујуће, имала најбољи резултат, упркос сувопарном и досадном начину рада. Сличност резултата дијаграм и експеримент групе је очекивана. У литератури је већ примећено да експериментални рад не мора нужно да утиче на успех [85–88], као ни употреба информационо-комуникационих технологија (ИКТ) [89]. Такође, примећено је и да су резултати концептуалних тестова готово независни од стила наставе [90].

Резултати појединачних питања по групама дати су слици 3.1. Максималан број поена који се може остварити на тесту је 16, док је највећи остварени резултат 14 поена, и то у све три групе. Минимални број бодова такође је исти у све три групе, и износи 7 поена.

Поред већ поменутих статистичких анализа, извршена је и једносмерна анализа коваријансе (ANCOVA), уз контролу просечне оцене група. Првобитно је употребом Колмогоров-Смирнов теста утврђено да се дистрибуција за просечну оцену, и за резултате на тесту, не разликују значајно од нормалне дистрибуције. Једносмерна ANCOVA показала је да нема статистички значајне разлике $F(2, 42) = 0, 028$ и $p = 0, 97$ између резултата група када се изврши контрола њихове просечне оцене.

Можемо закључити да су све три групе имале уједначену просечну оцену, и да су оствариле уједначене резултате на концептуалном тестирању. У том смислу, употреба једноставних огледа није донела жељени наставни учинак.

Једно од слабости истраживање јесте недостатак интервјуа са ученицима након тестирања. Тада би са већом сигурношћу могли да се утврде разлози за остварене резултате. Ипак, на основу ауторових запажања у току реализације експеримента, у наставку је дата анализа



Слика 3.1: Удео тачних одговора за свако од 16 питања концептуалног шеста. Следићи, с лева на десно, одговарају тексти, дијаграм и експерименталној групи.

питања, груписаних према резултату. Сам тест дат је у одељку 8.2 на страни 120.

Питања са сличним резултатом

Питања 1, 6, 9, 11, 15 имала су сличан резултат у све три групе.

Питање 1 бави се основним типовима трења. Било је довољно знати два одговора, јер се преостало добија системом елиминације. Све групе оствариле су висок резултат, са свега неколико ученика који су направили грешку.

Питање 6 је требало да провери ученичко разумевање утицаја деформација на трење. Ученици су имали висок резултат на овом питању јер је исти пример употребљен приликом часа обраде градива.

Питања 9 и 11 су слична у смислу да је одговор на оба питања једноставан, и стаје у једну реченицу. Питање 9 је захтевније и захтева добро познавање статичког трења.

Питање 15 је сасвим базично и на њега се може дати одговор и без формалног знања физике, па су све групе имале сличан резултат. Формализована верзија овог питања је питање 5, које има знатно нижи резултат. Овде је експеримент група имала најбољи резултат вероватно зато што је ово питање у вези са експериментом са дрвеним квадром и стрмом равни (одељак 3.1 на страни 59).

Питања са различитим резултатом

Питања 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14 имала су различит резултат међу групама.

Експеримент група имала је мањи резултат на питању 2, које је једноставно и на које су *сви* ученици осталих група дали тачан одговор. Ово је необично, нарочито узимајући у обзир резултат на питању 5 и претходно поменути оглед са дрвеним квадром и стрмом равни.

Питање 3 веома је слично питању 14, и могу се сматрати текстуалном и визуелном формом истог питања. Бољи резултат остварен је на питању 3 јер је питање 14 лоше сročено. Формулација питања упућује да постоји сила трења, иако је тачан одговор да не делује сила трења.

На питању 8, дијаграм група имала је најбољи резултат и оно проверава да ли ученици схватају да се израз облика $f = \mu N$ примењује само ако има клизања (у случају котрљања, то би било котрљање са проклизавањем).

Питање 10 проучава ефекте нормалне силе на силу трења. Питање 12 бави се трењем приликом котрљања и детаљно је обрађено у току часа обраде. Верујемо да је експеримент група имала најбољи резултат јер су извршили оглед са дрвеним колицима и ваљцима, који је уско повезан са овим питањем.

Неадекватна питања

Питања која треба побољшати су 7, 14, 15 и 16.

Питања 7 и 16 треба елиминисати из теста. Знање које је потребно да би се тачно одговорило на питање 7 садржано је у материјалу, али није довољно наглашено, и свакако није било фокус часа обраде. Одговор на ово питање захтева записивање једначина кретања, за транслацију и ротацију, и уочавање да момент инерције није исти за куглу и ваљак. Питање 16 је тривијално. Интересантно је да друга група остварила лош резултат на овом питању. Претпостављамо да нису добро разумели питање.

Питање 14 треба преформулисати, како је већ поменуто. Питање 15, иако је добро схваћено, би такође могло бити побољшано. Треба да нагласити да терет *клизи* константном брзином преко *храпаве* подлоге.

Остатак питања

Питање 4 проверавало је да ли ученици разумеју да се код статичког трења једначина не може записати “унапред”, тј. без анализе једначина

кретања. Интересантно је запазити да су текст и експеримент група остварили висок резултат на питању 4, и низак резултат на питању 8.

Питање 13 се показало као тешко за све групе. Текст група је имала највиши резултат.

3.4 Закључак

Иако ограниченог обима, ово истраживање је показало да присуство експеримената у настави не мора нужно да повећа концептуално разумевање градива. То не значи да експерименте не треба користити, већ да треба пажљиво приступити њиховој реализацији да би они имали жељени наставни učinak. Дobar резултат текст групе је изненадио, а ученици дијаграм и експеримент групе су очекивано били мотивисанији да учествују.

Неки од разлога за уједначеност резултата могу бити:

1. Употребљени концептуални тест није довољно дискриминативан.
2. Примењени концептуални тест фаворизује текст и дијаграм групу. Равноправније тестирање укључивало би и практично тестирање ученичких вештина. Интересантно је то да су поједини ученици, из свих група, користили своје оловке и остали прибор за приручне експерименте док су радили тест.
3. Обрада градива и тестирање били су раздвојени временским периодом од 9 дана, због техничких ограничења приликом извођења експеримента. Овај период је можда био предуг, и узроковао заборавање градива и, самим тим, уједначење резултата.
4. Трајање истраживања било је кратко и обухватало само једну лекцију.

Има више начина да се истраживање побољша и уопшти: (а) употреба већег узорка, (б) укључивање других области физике, (в) употреба валидираних концептуалних тестова, (г) провера како самостално извођење огледа утиче на *мотивацију* ученика да се баве физиком.

Ово истраживање уједно представља увод у свеобухватне истраживање за креирање и валидацију концептуалног теста о трењу, за које је планирано тестирање ученика из целог региона (Србија, Хрватска, Словенија, Македонија).

Глава 4

Трење

Опис трења подразумева много више од једначине $f = \mu N$. Идеализовани примери са којима се ученици и студенти сусрећу у настави не поклапају се увек са оним што они опажају у реалности, и то је узрок многих заблуда. Адекватно разумевање трења кључно је за прелазак са аристотеловске на њутновску физику. Многе ученичке заблуде о трењу поменуте су у литератури, али не постоји обједињени списак, нити одговарајући концептуални тест о трењу. Иако је могуће наћи поједине тестове о трењу [91–96], ни један од њих није објављен у часописима са SCI листе (на основу претраге на [97, 98]).

У овој глави, дат је кратак историјски развој науке о трењу, а затим исцрпан опис концепата, заблуда и примера. Овај списак концепата представља увод у формирање концептуалног теста о трењу.

4.1 Историјски развој трибологије

Трибологија представља грану физике која проучава трење под различитим условима. Назив трибологија потиче од грчке речи *tribos*, која значи трљање. Ова кованица употребљена је тек у 20. веку, али проучавање трења датира знатно раније [99].

Још у древној Асирији постоје записи који приказују употребу примитивних шарки у вратима, око 5000 године пре нове ере. Слично томе, у Египту, 2400 год. пре н.е. коришћене су технике за смањење непожељног трења приликом градње пирамида. У гробницама је пронађена слика која приказује радника који сипа течност³⁰ док група робова “санкама” вуче велику статуу.

³⁰Није познато да ли је у питању вода, уље, млеко или нека друга течност.

Прво систематско проучавање трења и формулисање емпиријских закона обавио је Леонардо да Винчи³¹, иако су његови записи остали неоткривени све до двадесетог века [100]. У 17. веку, Амонтон³² је у својим (независним) емпиријским истраживањима дошао до правила која се поклапају са Да Винчијевим запажањима, док је Кулон³³ објединио и употпунио ове законе. Запажања ових научника, позната као Да Винчи-Амонтон-Кулонове законе, гласе:

1. Сила трења пропорционална је нормалној сили која делује на тело.
2. Сила трења независна је од привидне додирне површине тела.
3. Сила трења независна је од релативне брзине клизања додирних површина.

Кулон је сам нагласио да трење не зависи од брзине у ограниченом домену, као и да коефицијенти статичког и динамичког трења имају различите вредности. Кулон је такође предложио да се у неким ситуацијама сила трења опише уз помоћ два члана, као $f = \mu N + kS$. Први члан описује зависност од нормалне силе, а други прилепљивање површина (адхезиони члан). У претходној формули, S представља макроскопску (привидну) додирну површину два тела, а k је коефицијент пропорционалности. У случају да је присутан адхезиони члан, трење се може јавити и када је нормална сила једнака нули, или чак када је негативна (код неких врста гума, пластелина и слично, или код високо углачаних металних површина, где долази до појаве “хладног” вара).

У новије време, проучавање трења спушта се на микроскопски ниво, где адхезиони члан постаје доминантан. Због тога испољавање трења на микроскопском нивоу не одговара макроскопским законима. Филип Боуден³⁴ и Давид Табор³⁵ показали су да постоји линеарна веза између

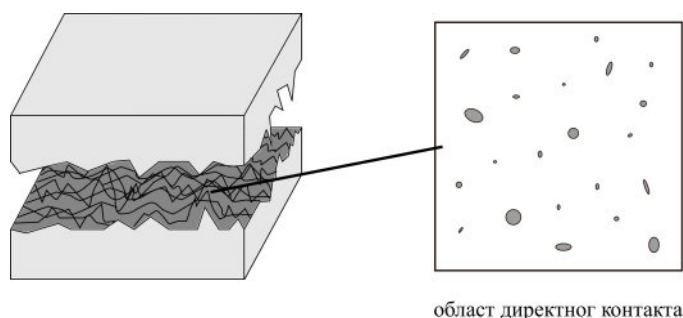
³¹Leonardo di ser Piero da Vinci (1452-1519), италијански сликар, вајар, проналазач и инжењер.

³²Guillaume Amontons (1663-1705), француски физичар, један од пионира трибологије. Изумео је уређаје за мерење притиска и влажности ваздуха, и уочио везу између температуре и притиска, дајући прве идеје које су касније водиле до увођења појма апсолутне нуле.

³³Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), француски физичар, најпознатији по свом раду у области електростатике.

³⁴Frank Philip Bowden (1903-1968), аустралијски физичар, вођа групе за истраживање трења у оквиру Кевендиш лабораторије. Резултате својих фундаменталних истраживања са применама објавио је заједно са Давидом Табором, који је био члан његове групе.

³⁵David Tabor (1913-2005), британски физичар, аутор кованице *трибологија* и један



Слика 4.1: Приказ привидне и стварне додирне површине. Слика прелиходно објављена у [11].

стварне додирне површине тела и силе трења и нормалне силе, тј. $f = \text{const} \cdot S_s$ и $N = \text{const} \cdot S_s$, где је S_s стварна површина контакта. Стварна (микроскопска) додирна површина мања је од привидне (макроскопске) додирне површине и представља укупну површину додира највећих неравнина (слика 4.1). Ово је елементарни приказ, и сам Табор је указао да је овај однос сложенији.

Предмет истраживања трибологије додатно се проширује употребом уља и мазива за смањење штетног трења. При томе су потребе индустрије (нпр. железнице) утицале на развој трибологије, али је и адекватан развој трибологије био неопходан предуслов за развој индустрије (нпр. аутомобилске индустрије).

Иако су Да Винчи-Амонтон-Кулонови закони трења основа за изучавање трења, како у средњим школама, тако и у већини основних курсева на факултету, ова упрошћена слика не даје довољно наговештаја у сву комплексност и значај ове теме. Ови закони, такође, могу бити у сукобу са неким свакодневним искуством ученика. Због тога је важно предочити ограничен домен важења феноменолошких закона, историјски развој проучавања трења, и актуелни статус науке. У настави се често употребљавају (само) примери који потврђују неки закон (парадигматична настава), што може бити штетно за развој критичког и креативног мишљења. Зато је корисно скренути пажњу студентима да постоје актуелни изазови, као и примери који нису у складу са приказаним законом.

У остатку текста, трење ће се разматрати на нивоу феноменолошких Да Винчи-Амонтон-Кулонових закона, али тако да се не дође у сукоб са модерним ставовима о трењу.

од пионира модерне науке о трењу.

4.2 Битни концепти о трењу

Листа битних концепата (табела 4.1) даје списак конкретних ставова које студенти треба да савладају и дефинисана је на основу ауторовог искуства у настави, релевантних књига [20, 21, 101], радова [93, 102–105] и консултација са колегама³⁶. Гумачења дата у референцама не осликавају увек ауторове ставове.

Сваки од поменутих концепата је објашњен, поменуте су најчешће заблуде ученика и студената, карактеристични примери и предлози за превазилажење заблуда. Због лакшег сналажења (табела 4.1), концепти су груписани и нумерисани: (О) основни концепти, (С) статичко трење, (К) трење клизања, и (Р) трење приликом ротације.

4.3 Основни концепти

Сви концепти наведени као основни односе се на појаву трења уопштено.

(О1) Постоје 3 основне врсте трења: статичко трење, трење клизања и трење котрљања. Који тип трења ће се испољити зависи од тога како се додирне површине крећу, и да ли се при томе деформишу, или не. Ученици често не разматрају додир две површине, већ само кретање тела од интереса. Затим сили трења придружују “префикс” уоченог кретања. Другим речима, ученици сматрају да, ако тело: (а) мирује, јавиће се сила статичког трења; (б) креће се транс-латорно, јавиће се сила трења клизања; (в) котрља се, јавиће се сила трења котрљања.

Детаљнија разрада дата је у оквиру концепата (С1), (К1) и (Р1).

(О2) Трење се супротставља међусобном кретању две површине. Веома честа и упорна заблуда је да се сила трења супротставља кретању тела, тј. да је увек усмерена супротно од брзине тела (или у неким примерима – супротно спољашњој сили, или убрзању). Ова заблуда поспешена је недовољно прецизним дефиницијама, на пример, код блока који клизи по подлози [20]. У том случају, проклизавање тела и проклизавање додирних површина се подудара, па је сила трења

³⁶То укључује колеге са Департамана за физику ПМФ-а у Нишу, али и колеге из целе Србије и региона у оквиру VII Међународне конференције о настави физике у средњим школама (Алексинац, 2019), где је рад презентован.

Табела 4.1: Преглед најбитнијих концепата о трењу и најчешћих ученичких заблуда.

Битни концепти	Најчешће заблуде
Основни концепти	
O1 Постоје 3 основне врсте трења: статичко трење, трење клизања и трење котрљања.	Постоји једна врста трења, а различити називи само описују како се тело креће.
O2 Трење се супротставља међусобном кретању две површине.	Трење се супротставља кретању тела. Смер силе трења супротан је брзини тела (или убрзању, или спољашњој сили).
O3 Правац силе трења паралелан је додирној површини.	Правац силе трења је увек хоризонталан.
O4 Сила N је сила која делује нормално на површину контакта.	Сила $N = mg$ или $N = mg \cos \theta$.
O5 Сила трења делује на обе површине у контакту.	Сила трења делује само на тела које се креће.
O6 Коефицијент трења је позитивна величина, $\mu \geq 0$.	Коефицијент трења је у распону од нула до један, $\mu \in [0,1]$.
Статичко трење	
C1 Сила статичког трења јавља се када додирне површине међусобно мирују, и постоји активна сила која има тенденцију да их покрене.	Сила статичког трења јавља се када тело мирује. Сила статичког трења не може се јавити ако се тело креће.
C2 Интензитет силе статичког трења може имати вредност у распону од нуле до максималне вредности дате изразом $\mu_s N$. Конкретна вредност интензитета не може се знати док се не реше једначине за транслацију и ротацију тела.	Ако тело мирује, сила трења једнака је нули. Ако тело мирује, сила трења има вредност $\mu_s N$.
C3 Смер силе статичког трења не може се знати док се не реше једначине за транслацију и ротацију тела.	Сила статичког трења увек је усмерена супротно од активне силе.
Трење клизања	
K1 Сила трења клизања јавља се када су две површине у међусобном кретању.	Сила трења клизања јавља се када се тело креће транслаторно.
K2 Интензитет силе трења клизања дат је изразом $f = \mu_k N$.	Интензитет силе трења (независно од типа трења) дат је изразом $f = \mu_k N$. Интензитет силе трења клизања дат је изразом $f = \mu_k mg$.
K3 Смер силе трења клизања супротан је релативном кретању две површине.	Смер силе трења клизања супротан је кретању тела.
K4 Максимална вредност силе статичког трења већа је од вредности силе трења клизања.	Ученици добро разумеју овај концепт.
Трење и котрљање	
P1 Ако се круто тело котрља <i>без</i> проклизавања по крутој подлози, јавља се статичка сила трења.	Сила трења приликом котрљања увек је усмерена супротно од брзине.
P2 Ако се круто тело котрља <i>са</i> проклизавањем по крутој подлози, јавља се сила трења клизања.	Котрљање се увек одвија без проклизавања. Кад год се тело котрља важе релације $v = R\omega$ и $a = R\alpha$.
P3 Сила трења котрљања јавља се <i>само</i> ако су тело и/или подлога пластично деформабилни.	Када год се тело котрља, јавља се сила трења котрљања.

у овом случају усмерена супротно брзини тела. Ипак, пречестом употребом оваквих примера, студенти добијају утисак да је трење увек усмерено супротно од брзине тела. Да ствар буде гора, поједини учбеници [106, 107] експлицитно помињу да је сила трења по дефиницији усмерена супротно од брзине, што је потпуно погрешно. Ако би такво тумачење било тачно, смер силе трења би зависио од избора референтног система [108], јер и брзина тела зависи од тог избора.

Слично, у образовним стандардима за крај основног образовања [109] помиње се следеће: “У ситуацијама када тело клиза по подлози ученик зна да на њега делује сила трења. *Зна да се она супротставља кретању* и да ће у случају када у правцу кретања нема других сила које делују на тело које се клиза, сила трења зауставити тело” [курзив додат].

Коректно тумачење је да се сила трења супротставља релативном кретању две површине у додиру, било да се оне крећу (трење клизања), или да мирују (статичко трење). Релативна брзина две површине не зависи од избора референтног система, па самим тим ни смер силе трења, како и очекујемо.

(О3) Правац силе трења паралелан је додирној површини. Иако ученици лако схватају да је сила трења увек усмерена паралелно подлози, с обзиром да се обично разматрају примери када је тело на хоризонталној подлози, или на стрмој равни, ученици могу превидети да сила трења може деловати и у правцу који није хоризонталан.

На пример, студенти мисле да је сила која спречава падање чаше она сила којом рука стиска чашу. Међутим, ова сила делује ортогонално на зидове чаше, па не може уравнотежити силу Земљине теже. Овде је нормална сила у ствари хоризонтална, док силе трења делује вертикално. Овај пример може се искористити за увођење силе трења, да би се предупредила заблуда да је сила трења увек хоризонтална.

(О4) Сила N је она сила која делује нормално на површину контакта. Студенти, с друге стране, мисле да увек важи да је $N = mg$ или $N = mg \cos \theta$, због пречесте употребе примера у којима интензитет нормалне силе има ове вредности. Претходно поменути пример са држањем чаше може се употребити за отклањање ове заблуде.

Још један интересантан пример подразумева нормалну силу која не само да није хоризонтална, већ није ни механичког порекла [104]. Ако ставимо ексер у чашу и са спољашње стране прислонимо магнет, он се

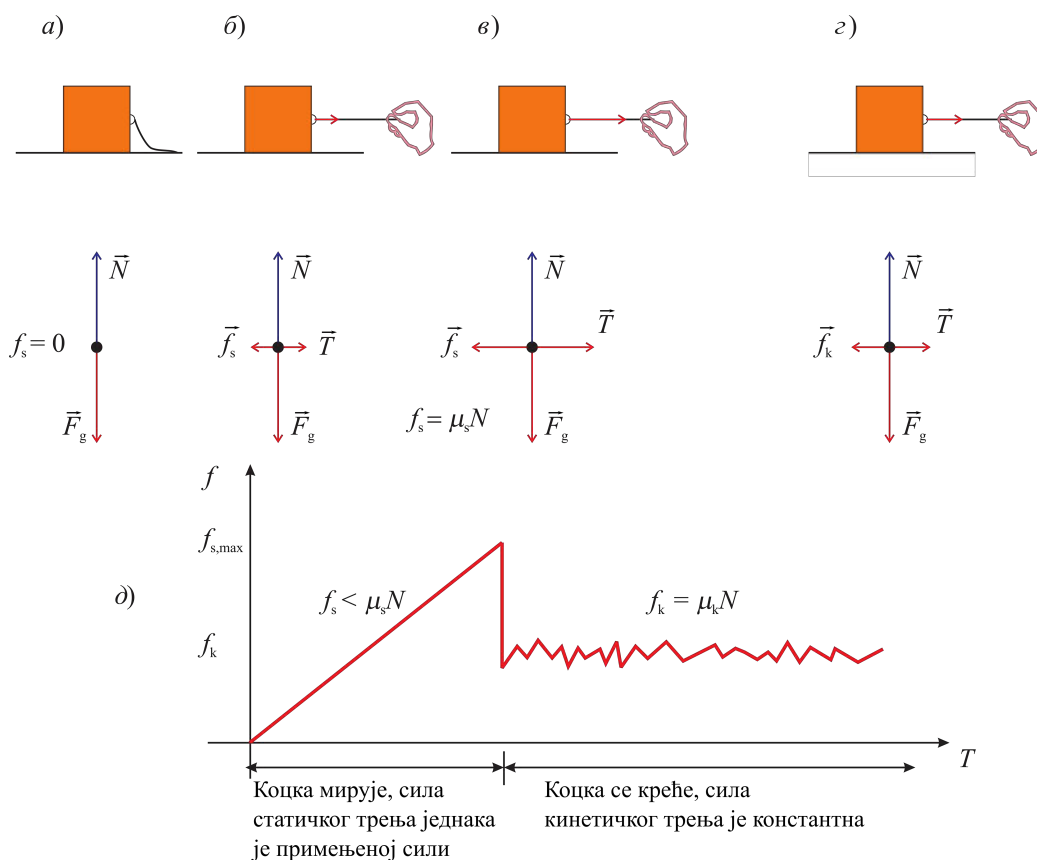
међусобно привлаче и стоје приљубљени уз чашу са супротних страна стакла. Овде је нормална сила магнетног порекла, а оно што спречава да ексер и магнет падну јесте сила трења између њих и чаше. Ово је такође добра демонстрација да су силе акције и реакције једнаке по интензитету.

(О5) Сила трења делује на обе површине у контакту. Приликом решавања задатака, ретко или никада се не приказује деловање силе трења на подлогу. Због тога ученици сматрају да она делује само на тело у покрету, а не и на подлогу. Ова заблуда ствара проблем у концептуалном и практичном смислу. У концептуалном смислу, сила трења бива изузета од Закона акције и реакције. У практичном смислу, ако се једно тело налази на другом телу, студенти греше у решавању задатка.

(О6) Коефицијент трења је позитивна величина, $\mu \geq 0$. У задацима се за коефицијент трења обично дају вредности у распону између нуле и јединице. То може навести ученике да помисле да се вредност коефицијента трења може налазити само у овом опсегу. Међутим, не постоји горња граница за коефицијент трења; доња граница је нула.

Ситуација када је $\mu > 1$ може се демонстрирати уз помоћ две свеске. Листови свезака се међусобно испреплету, као када се меша шпил карата. Затим се свеске повлаче тако да се раздвоје, што је готово немогуће ако су довољно испреплетане. Оглед је пуно интересантнији ако студенти покушавају раздвајање. Укупна нормална сила је реда величине тежине бележница, а сила потребна за раздвајање је знатно већа, па је јасно да је коефицијент трења већи од јединице.

Поједини аутори уводе и негативну вредност коефицијента трења [110–112], на основу испитивања на нано-скали. Овде се ради о негативној вредности *ефективној* коефицијента трења, јер се код неких супстанци сила трења повећава са опадањем нормалне силе. Међутим, у таквим околностима је формула $f = \mu N$ неприменљива, јер је адхезиони члан доминантан и доводи до опажених ефеката. Зато увођење негативног коефицијента трења делује непотребно, а на нивоу уводног курса физике то свакако није оправдано. Међутим, опажене појаве се могу поменути, у контексту актуелних становишта о трењу.

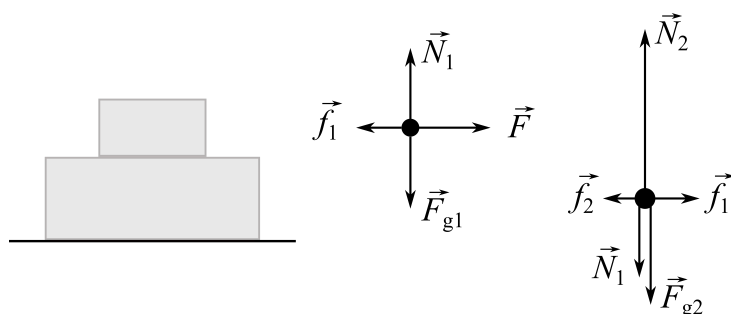


Слика 4.2: (а) Нема активне силе, па нема ни појаве трења; (б) Нема релативног кретања површи, па је $f \leq \mu_s N$; (в) Интензивније примењене силе достижу $\mu_s N$ и тело почиње да клизи; (г) При релативном кретању тела у односу на подлогу, сила трења клизања једнака је $\mu_k N$; (д) График зависности силе трења од интензивније примењене силе.

4.4 Статичко трење

Интензитет силе статичког трења описује се законом $f_s \leq \mu_s N$, где је N интензитет нормалне сила, а μ_s коефицијент силе статичког трења (слика 4.2).

(C1) Сила статичког трења јавља се када додирне површине међусобно мирују, и постоји активна сила која има тенденцију да их покрене. Као што је поменуто у концепту (O1), студенти поистовећују стање кретања тела са одговарајућем силом трења. Зато могу сматрати да ће сила статичког трења *увек* деловати на непокретно тело, чак и када нема активних сила. И слично томе, могу сматрати



Слика 4.3: Дијаграм сила за прво и друго тело. Због прељедности слике, поједини вектори имају исту ознаку иако имају супротан смер или нападну тачку.

да на тело које се креће *не може* деловати сила статичког трења.

У првом случају, тело не би било у равнотежи, јер би сила трења била једина хоризонтална сила. Да би се јавила сила трења, потребно је да постоји сила која има тенденцију да изазове међусобно кретање две површине у додиру. Ако такве силе нема, као код блока који мирује на непокретној подлози, нема ни силе трења.

У другом случају, треба разликовати кретање тела, односно његовог центра масе, од релативног кретања две површине. Један од примера у коме се тело креће, а јавља се сила статичког трења јесте ходање. Други пример су два блока, један на другом, док на горњи делује нека сила \vec{F} (слика 4.3). Ако се оба блока крећу као целина, односно нема проклизавања између њих, сила статичког трења је покретачка сила за доњи блок. Ако не би било трења, горњи блок би једноставно склизнуо преко доњег, који би остао у стању мировања. На питање шта изазива кретање доњег тела, студенти често дају одговор “зато што су спојени”, превиђајући да је сила трења, а не пуки додир, оно што изазива кретање. Ако се силом \vec{F} делује на доњи блок, ситуација је аналогна.

(C2) Интензитет силе статичког трења може имати вредност у распону од нуле до максималне вредности дате изразом $\mu_s N$. Конкретна вредност интензитета не може се знати док се не реше једначине за translацију и ротацију тела. Студенти тешко прихватају да за силу статичког трења не постоји “унапред дата” формула, налик на $f = \mu_k N$ за силу трења клизања. Они често у формули за силу статичког трења ($f_s \leq \mu_s N$) занемарују знак неједнакости, и пишу израз $f = \mu N$. Или, алтернативно, сматрају да је интензитет силе трења једнака нули, као у примеру са слике 4.2, или са слике 4.3,

када се блокови крећу заједно, као целина.

Иако постоје примери сила у механици са особином да њихов интензитет није одређен конкретном формулом (попут нормалне сила N , силе затезања T), вероватно је “појмовна близина” силе трења клизања узрок заблуда да за статичку силу трења важе исти или слични обрасци.

(С3) Смер силе статичког трења не може се знати док се не реше једначине за транслацију и ротацију тела. Слично претходном концепту, ни смер силе статичког трења не може се унапред знати. Он ће бити такав да спречи релативно кретање две површине, али конкретан смер може се добити једино решавањем једначина за транслацију и ротацију. Ученици често мисле да ће сила статичког трења бити усмерена супротно од активне силе, јер најчешће и јесте тако. Али, постоје примери котрљања у којима важи обрнуто (на ово питање ћемо се вратити касније, када разматрамо трење приликом котрљања).

Два карактеристична задатка која се могу употребити за ојачавање поменутих концепата о статичком трењу су: први задатак са Окружног такмичења за ученике првог разреда средњих школа, одржаног 2011. године [113], и први задатак са Осме међународне олимпијаде из физике [114].

4.5 Трење клизања

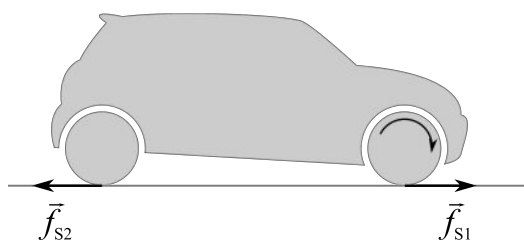
Вратимо се примеру приказаном на слици 4.2, страна 76. Повећавањем вредности активне силе, у једном тренутку, квадар ће почети да клизи по столу. Због међусобног кретања две површине, јавља се трење клизања. Сила трења клизања има приближно константну вредност, нешто мању од максималне вредности силе статичког трења.

У уском домену појава које се разматрају у оквиру уводног курса механике, сила трења клизања може се сматрати независном од брзине³⁷ и може се представити законом $f_k = \mu_k N$, где је N нормална реакција подлоге, а μ_k коефицијент трења клизања.

Трење клизања је вероватно најбоље схваћени концепт, али то не значи да је без ученичких заблуда.

(К1) Сила трења клизања јавља се када су две површине у међусобном кретању. Овај концепт је у вези са оним објашњеним

³⁷Као што је раније речено (одељак 4.1, страна 69), студентима треба нагласити да је ово апроксимација и да сила трења на сложен начин зависи од брзине.



Слика 4.4: Погонска сила статичког трења \vec{f}_{s1} уравнотежена је силом статичког трења \vec{f}_{s2} на непогонским точковима.

у (O1), јер ученици мисле да се трење клизања јавља кад год се тело креће транслаторно, тј. када се помера његов центар масе. Контра-пример могла би бити ситуација приказана на слици 4.3 на страни 77, у случају да је коефицијент трења између доњег тела и подлоге велики. Тада ће доње тело стојати у месту,³⁸ а горње клизити преко њега. Тада се на горњој површини доњег тела јавља сила трења клизања, иако оно стоји.

Сликовити пример могло би бити трчање јунака из цртаног филма на леду. Цртани лик остаје у месту, иако се између њега и подлоге јавља клизање. Са овим примером треба бити обазрив јер није коректан, иако је ученицима познат. Ако цртани лик трчи (и ако претпоставимо да има две ноге), онда је само једна нога у додиру са подлогом. То значи да би онда цртани лик морао да се креће напред под утицајем силе трења клизања, ма колико то било споро, јер не постоји друга хоризонтална сила која би се уравнотежила са “погонском” силом трења.

Код аутомобила, с друге стране, не-погонски точкови (слика 4.4) могу условити статичку силу трења \vec{f}_{s2} која би се супротставила погонској сили трења \vec{f}_{s1} , па је заиста могуће да аутомобил “шлајфује” и савршено стоји у месту. Више детаља о трењу приликом ротације дато је касније у тексту. Све ово су интересантне тема за дискусију на часу.

(K2) Интензитет силе трења клизања дат је изразом $f = \mu_k N$. Једна од ученичких заблуда је употреба формуле $f = \mu N$ за све облике трења. Такође, веома честа заблуда је да је $f = \mu_k mg$, што је у вези са концептом (O4) и тиме што се сила трења често проучава на хоризонталној (или стрмој) равни. Зато студенти могу погрешно закључити да је сила трења суштински повезана са гравитационом силом. Превазилажење ове заблуде може бити оглед са чашом, ексером и магнетом, описан код концепта (O4).

³⁸И између њега и подлоге деловаће статичка сила трења.

(К3) Смер силе трења клизања супротан је релативном кретању две површине. Овај концепт је у вези са оним објашњеним у (О2), када ученици мисле да је смер силе трења супротан макроскопском кретању тела, уместо кретању две површине. Поново, пример у коме је сила трења усмерена исто као брзина тела могао би бити онај приказан на слици 4.3 на страни 77. Ако се горње тело повлачи довољно великом силом да се јави проклизавање, и ако је коефицијент трења између доњег тела и подлоге довољно мали да се и то тело креће, оно ће се кретати управо под деловањем силе трења клизања на његовој горњој површини. Тада ће сила трења, као покретачка сила, имати исти смер као и брзина тог тела. Ако трење између два тела није довољно да би се извела ова на горњу површину доњег тела може се залепити брусни папир.

Други пример могао би бити блок који клизи по непокретној подлози и прелази на покретну траку. Ако је брзина траке већа од брзине блока (у односу на непокретну подлогу), онда ће се јавити сила трења клизања која ће убрзавати тело, и самим тим, бити у истом смеру као и брзина тела.

(К4) Максимална вредност силе статичког трења већа је од вредности силе трења клизања. Ученици добро савладавају овај концепт. Он се може демонстрирати уз помоћ огледа са дрвеним квадром и стрмом равни, како је описано на страни 59.

4.6 Трење приликом котрљања

Јасно је да је трење приликом котрљања мање него приликом клизања. Има неколико начина да се на сликовит начин то и демонстрира. На пример, ако укрстимо напола савијене прсте обе руке, биће веома тешко да шаке померимо транслаторно јер прсти запињу једни о друге. Међутим, ако шаке ротирају тако да прсти једне руке упадају у простор између прстију друге руке, отпор је врло мали. Слично је и са неравнинама на површини тела и подлоге када тело по њој клизи, или се котрља. Погодни демонстрациони огледи су огледи са квадром и ваљцима, и тањиром и лоптицама, описани на страни 59.

Трење приликом котрљања је сложен процес, па је један од највећих изазова за правилно разумевање. Додатни извор забуне представља то што се углавном разматра идеализована ситуација у којој је деформација тела и подлоге занемарљива, а да то није експлицитно наглашено. Такође, употреба аутомобила или колица за примере у којима се ова

тела заправо третирају као материјалне тачке само доприноси конфузији.

Како је поменуто у концепту (O1) ученици често распоређују силе трења “по кретањима”, па у случају котрљања подразумевају да се јавља сила трења котрљања. То не мора нужно бити случај. Прво је потребно уочити какво кретање разматрамо – идеализовани случај када нема деформација (или су оне занемарљиве, или савршено симетричне), или се подлога и/или тело деформишу (при чему деформације морају бити асиметричне). У првом случају, јавља се сила статичког трења или трења клизања. Трење котрљања јавља се само у другом случају. Због тога је наслов овог одељка *Трење приликом котрљања*, а не *Трење клизања*.

Да ствар буде сложенија, има примера који у себи укључују више појава. Приликом проклизавања гума на асфалту, јавља се и трење клизања, али и трење котрљања, јер се гума деформише приликом котрљања³⁹. У случају да је ауто заглављен, и нема трансляторног кретања тела, студенти могу рећи да се онда јавља статичко трење. И биће делимично у праву – сила статичког трења јавља се између непогонских точкова и подлоге (слика 4.4). Зато се проблему мора приступити пажљиво и постепено.

За почетак ћемо разматрати котрљање без деформација, а затим и са деформацијама, на феноменолошком нивоу.

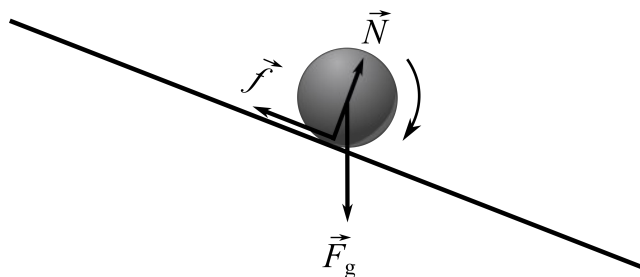
4.6.1 Котрљање без деформација

Ова дискусија одговарала би реалном примеру котрљању кликера по столу (хоризонталном или нагнутом). Концепти који се односе на примере без деформација су:

(P1) Ако се тело котрља без проклизавања по крутој подлози, јавља се статичка сила трења. Овај концепт је повезан са наредним концептом.

(P2) Ако се круто тело котрља са проклизавањем по крутој подлози, јавља се сила трења клизања. Котрљање кугле или ваљка низ стрму раван је врло чест уводни пример. Малим модификацијама овог примера могу се открити многе заблуде. На пример, у поставци задатка готово увек је дат услов да се кугла котрља без

³⁹ Деформише се и асфалт, али у знатно мањој мери, па се то може занемарити.



Слика 4.5: Котрљање кугле низ стрму раван. Слика прелиходно публикована у [11].

клизања. Због тога ученици често мисле да кугла која се полази из мировања и котрља се низ стрму раван никада не проклизава, већ да се проклизавање дешава у неким необичнијим ситуацијама. Зато би прва модификација задатка била да се у њега укључи дискусија о томе да ли кугла проклизава низ стрму раван. Друга заблуда која може остати скривена јесте да се сила трења супротставља брзини. Ово се може разоткрити ако се посматра и кретање кугле уз стрму раван – тада је сила статичког трења усмерена као и брзина кугле. Више детаља дато је у наставку.

Котрљање низ стрму раван

Ако би ефекти трења били занемарљиви ($\mu_{s,k} = 0$), кугла би клизила низ стрму раван без ротације јер не постоји ниједна сила чији би момент изазвао ротацију. Ако је коефицијент трења мали, јавиће се “прелазни режим” котрљања са проклизавањем. Тада је сила трења присутна, изазива ротацију, али није довољно јака да довољно заокреће куглу и обезбеди међусобно мировање контактних површина. Коначно, ако је коефицијент трења μ довољно велик, сила трења ће обезбедити да површина кугле и подлоге међусобно мирују, односно јавиће се котрљање без проклизавања.

Нас занима под којим условима се јавља котрљање са и без проклизавања, и којим убрзањем ће се кугла кретати у оба случаја. За почетак, посматраћемо ситуацију када се кугла котрља без проклизавања. Сила трења је једина сила чији правац не пролази кроз тежиште, и која има не-нулти момент, па она изазива ротацију кугле (слика 4.5). Због тога сила статичког трења мора бити усмерена као на слици.

За транслаторно кретање кугле важе следеће једначине (за осу па-

ралелну стрмој равни, и осу нормалну на стрму раван):

$$F_{g,p} - f_s = ma, \quad (4.1)$$

$$N - F_{g,n} = 0, \quad (4.2)$$

односно,

$$mg \sin \theta - f_s = ma, \quad (4.3)$$

$$N - mg \cos \theta = 0, \quad (4.4)$$

где је θ нагибни угао стрме равни, а $F_g = mg$, f_s и N су интензитети одговарајућих вектора. За ротационо кретање кугле важи:

$$M = I\alpha, \quad (4.5)$$

$$f_s R = \frac{2}{5} m R^2 \alpha, \quad (4.6)$$

где је M – интензитет укупног момента силе који делује на куглу, I – момент инерције кугле (рачунат у односу на осу која пролази кроз њен центар) a – убрзање центра масе кугле, α – угаоно убрзање кугле, а R њен полупречник.

С обзиром да разматрамо случај када кугла не проклизава, тада важи да је убрзање најниже тачке кугле А једнако нули, тј. $\vec{a}_A = 0$, што се своди на услов $a = R\alpha$. Сређивањем ових једначина, добија се вредност убрзања кугле низ стрму раван:

$$a = (5/7)g \sin \theta. \quad (4.7)$$

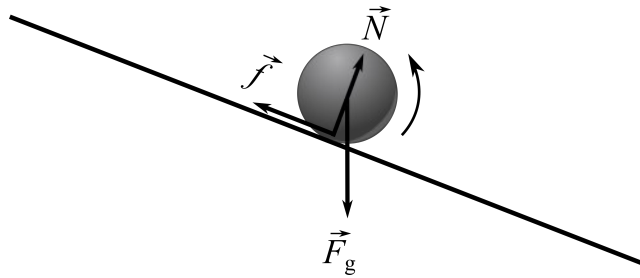
Треба нагласити да би у овом случају било *погрешно* писати да је $f = \mu N$. Како нема проклизавања, по услову задатка, то најнижа тачка кугле, којом она додирује подлогу, мирује у односу на подлогу. Због тога се јавља статичко трење, а поменута једначина важи само за трење клизања.

Заменом вредности убрзања (4.7) у једначину (4.6), уз услов да је $a = R\alpha$, за силу трења добија се израз:

$$f_s = (2/7)mg \sin \theta. \quad (4.8)$$

Како је сила статичког трења дата изразом $f_s \leq \mu_s N$, и $N = mg \cos \theta$, тада је $f_s \leq \mu_s mg \cos \theta$. Комбинацијом претходних једначина, добија се услов котрљања без проклизавања:

$$\mu_s \geq (2/7) \tan \theta. \quad (4.9)$$



Слика 4.6: Котрљање куле уз стрму равну.

Видимо да ће режим котрљања зависити од коефицијента статичког трења, нагиба стрме равни, и тела које се котрља (преко разломка, који зависи од момента инерције тела).

До истог услова мора се доћи и када се разматра котрљање са проклизавањем (“услови зашпицавања”). Како је поменуто, сила трења обезбеђује ротацију. Због тога је она и у случају проклизавања усмерена уз стрму равну, као и код котрљања без проклизавања, па важи исти сет једначина за translацију и ротацију (4.3), (4.4) и (4.6) само што ће у њима фигурирати f_k уместо f_s . Додатни услов је да је $f_k = \mu_k N$, јер се сада дешава проклизавање, али зато *не важи* израз $a = R\alpha$. Решавањем ових једначина, добија се вредност убрзања:

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (4.10)$$

што се разликује од вредности убрзања када нема проклизавања.

Ако бисмо желели да добијемо услов за котрљање без проклизавања, потребно изједначити a са производом $R\alpha$. Из једначине (4.5), односно (4.6) следи да је $R\alpha = (5/2)\mu g \cos \theta$. Комбиновање те једначине са (4.10) добија се да је $\mu = (2/7) \tan \theta$, што се поклапа са претходним резултатом.

Котрљање уз стрму равну

Размотримо сада случај котрљања кугле уз стрму равну, без проклизавања. Студенти тада оријентишу силу трења супротно од смера брзине, односно низ стрму равну. Међутим, коректан дијаграм сила изгледаће идентично као када се кугла спушта низ стрму равну (слика 4.6). Приликом кретања уз стрму равну кугла успорава и транслаторно и ротационо, а једина сила чији момент може обезбедити успорење ротације је сила статичког трења.

Због тога што дијаграм сила, изгледа исто, једначине за translацију и ротацију (4.3), (4.4) и (4.6) имаће исти облик као и раније. Једино

се разликују почетни услови кретања, тј. трансляторна и ротациона брзина у почетном тренутку, и положај кугле.

Гранични услови за угао

Корисно је размотрити и шта се дешава у граничним случајевима, тј. када је $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$.

У првом случају, имамо котрљање по хоризонталној равни⁴⁰. Како је услов за котрљање без клизања (4.9) увек задовољен, то значи да се кугла котрља без проклизавања. Из (4.8) следи да је $f = 0$, а из једначине кретања (4.3) да је $a = 0$. Ово није једина ситуација у којој се тело котрља, а сила трења је једнака нули⁴¹ [82, 102].

Ученике обично збуњује идеја да се кугла котрља, а да нема силе трења. Они из искуства знају да ће се, на пример, кошаркашка лопта која се откотрљала, након неког времена зауставити⁴². Због тога они силу трења уцртавају у супротном смеру од смера кретања кугле⁴³, као на слици 4.7. Ово објашњава успорење транслације кугле, али ће овако оријентисана сила трења својим моментом изазивати угаоно убрзање. Тада би кугла требало да успорава своје трансляторно кретање и да при томе ротира све брже и брже, што нема физичког смисла. Насупрот томе, неки студенти ће рећи да приликом ротације, доњи део кугле има тенденцију да се креће у супротном смеру од смера кретања центра масе кугле, а како нема проклизавања, сила трења делује у смеру кретања кугле и спречава проклизавање. Ипак, то доводи до сличних тешкоћа као и малопре јер би онда сила трења успоравала ротацију, али убрзавала транслацију.

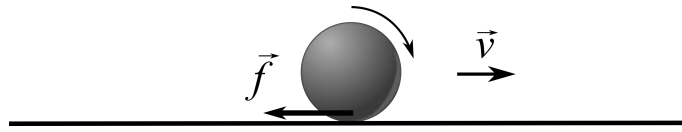
Ако се кугла котрља без проклизавања, то значи да је тачка контакта између кугле и подлоге непомична, и тада се јавља сила статичког трења. Она нема унапред задат закон деловања и њен интензитет, правац и смер зависе од конкретне ситуације која се разматра. У овој

⁴⁰Како кугла полази из мировања када је на врху стрме равни, тривијални случај када се кугла налази на хоризонталној подлози је да на њој мирује. Тај случај је са физичке стране незанимљив, па можемо посматрати шта се дешава ако кугла са стрме равни пређе на хоризонталну подлогу. После кратког времена у коме се може јавити проклизавање, кугла прелази на режим котрљања без проклизавања. Више детаља о котрљању са проклизавањем дато је у одељку 4.6.1

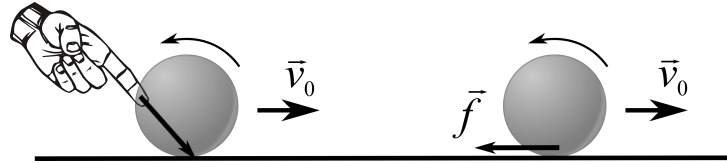
⁴¹Пошто је у питању статичка сила трења, зависно од нападне тачке активне силе која делује на тело, и од њеног интензитета, сила трења може бити усмерена супротно од брзине тела, у смеру брзине тела, или бити једнака нули, иако се тело креће.

⁴²Одговор на ово питање дат је у одељку 4.6.2 где је размотрено котрљање са деформацијама.

⁴³Ово је опет у вези са концептом (O2), и заблудом да се трење увек супротставља кретању.



Слика 4.7: Котрљање куле по хоризонталној подлози и проблем оријентације силе трења. Слика прелиходно публикована у [11].



Слика 4.8: Деловање на кулу и изазивање кретања (лево) и котрљање куле са проклизавањем (десно). Слика прелиходно публикована у [11].

ситуацији, кугла се креће по инерцији и ротира по инерцији, па је сила трења једнака нули⁴⁴.

У другом граничном случају, када је $\theta = \pi/2$, на основу једначине $f = \mu N = \mu mg \cos \theta$, добија се $f = 0$ и на основу (4.10) добија се $a = g$, односно кугла слободно пада, како је и очекивано.

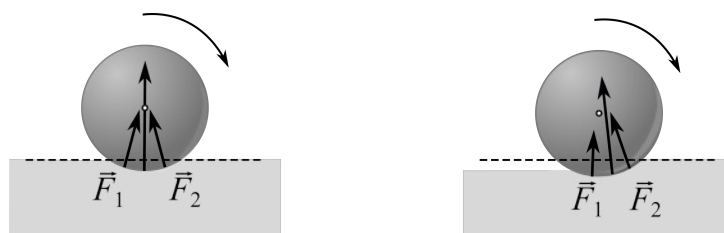
Котрљање са проклизавањем на хоризонталној подлози

Један од примера у коме тело ротира и проклизава је фелш ударац билијарске кугле, као на слици 4.8 (прст показује како треба деловати на куглу). Овакав ударац изазива ротацију у “контра-смеру”, односно супротно него када се кугла котрља без проклизавања. Зависно од почетних услова, након престанка проклизавања, кугла се може котрљати у истом смеру, зауставити или се котрљати назад. Ова појава се лако може и демонстрирати на часу, уз помоћ било које круте кугле, дрвеног ваљка и слично⁴⁵. Слична ситуација добија се ако се кошаркашка лопта заврти у “контра фелш” приликом бацања⁴⁶ или приликом сервиса лоптице за тенис или стони тенис итд. При паду на подлогу, доћи ће до проклизавања, и лопта неће одскочити под истим углом под којим је упала.

⁴⁴Описано котрљање по хоризонталној подлози одговара кретању куглице по хоризонталном делу Галилејевог жлеба, који се иначе користи за демонстрацију кретања константном брзином.

⁴⁵Билијарски штап није неопходан. Довољно је прислонити прсте на куглу, а онда на деловати на њу како је приказано на слици 4.8.

⁴⁶Ако занемаримо деформације лопте и нееластичност судара.



Слика 4.9: Еластична и нееластична деформација подлоге приликом котрљања.

Још један интересантан пример који вреди размотрити јесте 3. задатак са Републичког такмичења из физике за први разред средње школе из 2006. године [115].

4.6.2 Котрљање са деформацијама

(РЗ) Сила трења котрљања јавља се само ако су тело и/или подлога пластично деформабилни. Коначно, остало је да размотримо шта се дешава приликом котрљања са деформацијама подлоге или тела. Можемо разликовати симетричне и асиметричне деформације.

Силе \vec{F}_1 и \vec{F}_2 представљају укупну интеракцију кугле са делићима подлоге лево и десно од њеног центра масе (слика 8.3). У случају савршено еластичних, симетричних деформација, силе \vec{F}_1 и \vec{F}_2 су истог интензитета и усмерене симетрично у односу на вертикалну линију која пролази кроз тежиште кугле (слика 8.3, лево). Зато правац резултујуће силе $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ пролази кроз тежиште кугле и осу ротације, па је момент силе једнак је нули. Векторски збир сила \vec{F}_1 и \vec{F}_2 заправо даје нормалну силу N , и ова ситуација одговара оној када се круто тело котрља по крутој подлози.

У случају асиметричних деформација подлоге (слика 8.3, десно), подлога иза кугле биће сабијена. Ово је случај када се, на пример, крута кугла котрља по песку⁴⁷. Тада ће резултујућа сила $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ бити усмерена тако да њен правац *не* пролази кроз тежиште и њен момент ће успоравати ротацију, а њен хоризонтални компонентни вектор ће успоравати транслацију кугле. Што је деформација већа, то је трење котрљања веће.

У случају да је кугла деформабилна а подлога крута, разматрање је аналогно. Зато ће се, на пример, испумпана лопта много раније зау-

⁴⁷ Видети *Олед са кликером и џеском* на страни 59.

ставити него добро напумпана лопта која се креће под истим условима. Ако су и кугла и подлога деформабилни, ефекат је израженији.

4.7 Остали концепти

Зависност од брзине. Као што је поменуто у одељку 4.1 на страни 69, и сам Кулон је нагласио да сила трења не зависи од брзине релативног кретања површина само у одређеним околностима. Због тога би било погрешно инсистирати да сила трења не зависи од брзине, иако се на основу формула за трење то може закључити. Напротив, ученицима треба нагласити да је зависност трења од релативне брзине две површине сложена и да се у прецизним прорачунима ова зависност мора узети у обзир.

Зависност од површине. Такође, у одељку 4.1 поменуто је да сила трења не зависи од *привидне* површине контакта два тела, али зависи од *стварне* површине контакта [104]. У том смислу, веровање ученика да сила трења зависи од додирне површине не мора бити заблуда. Оно може послужити као основа за продубљивање знања, уз помоћ следећих демонстрационих огледа.

Мерењем силе трења када се квадар постави на његове различите странице, може се показати да сила трења не зависи од привидне површине контакта (под условом да су све странице квадрата једнако углачане).

Разлика између стварне и привидне додирне површине може се демонстрирати на два начина. Први је уз помоћ печата, или неког другог тела са неравном површином (попут новчића). Ако поставимо чист печат на папир, чини се да је додирна површина између печата и папира једнака површини круга који чини доњу страну печата. Међутим, ако печат или новчић прво утиснемо у јастуче са мастилом, а онда га ставимо на папир, добијени отисак показаће да је додирна површина једнака угравираној шари на печату и да је мања од површине целог круга. У другом огледу треба протрљати индиго-папир и бели папир. Отисак индиго папира на белом папиру није равномерно умрљан већ се јављају плаве и беле шаре, што указује на постојање ситних неравнина и на то да је стварна додирна површина мања од привидне. Папири су били у додиру само у тачкама где се бели папир обојио у плаво.

Ако је разматрана супстанца лепљива, и адхезиони члан постаје доминантан, онда зависност од додирне површине постаје сложенија. Интересантан пример који ово илуструје су пнеуматици за болиде

Формуле 1. Они немају шару као стандардне аутомобилске гума, већ су “глатки”. Разлог за то је што присуство шара смањује додирну површину, а што је већа додирна површина, то је већа и сила трења и приањање гума. На тај начин ће и снага мотора бити ефикасније искоришћена за убрзавање јер је смањено проклизавање. Ако је тако, поставља се питање зашто гуме на путничким аутомобилима имају шару, ако се тако смањује трење и употребљивост гума. На болидима Формуле 1 глатки су само пнеуматици за *суво* време. У случају да је стаза мокра, на болиде се монтирају гуме са шаром. Слој воде који се јавља између гуме и подлоге значајно мења особине контакта, па је потребно елиминисати тај слој воде за безбедну употребу пнеуматика. Како је на путничким аутомобилима непрактично често мењати пнеуматике, они се праве тако да задовоље шири спектар временских услова.

Формула за силу трења котрљања. Коначно, у случају котрљања са деформацијама, могуће је увести силу трења користећи формулу која је аналогна оној код клизања [116–118]. Ипак, узимајући у обзир тешкоће студената у разумевању базичнијих типове трења, котрљање са деформацијама у оквиру уводног курса механике довољно је познати на феноменолошком нивоу. Ово знање се може продубити у оквиру виших курсева.

Глава 5

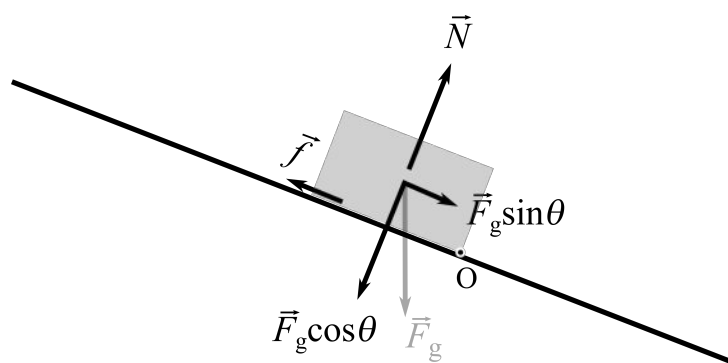
Нормална сила

Дијаграм сила, приказан на слици 5.1, приказује тело које мирује на стрмој равни. Овакав дијаграм сила, или њему слични⁴⁸, могу се наћи готово свуда, од блогова посвећених физици до стандардних универзитетских уџбеника.

Како квадар мирује, за њега морају бити задовољене једначине равнотеже. Решавање ових једначина за приказани дијаграм сила, пак, даје парадоксалан резултат јер оне упућују на то да би квадар требало да се претури.

У наставку текста представљена је дискусија заснована на [119], и њено проширење демонстрационим експериментом (одељак 5.4). Експеримент је реализован у лабораторијама Департмана за физику Природно-математичког факултета у Нишу, брз је, прецизан и једноставан

⁴⁸На пример, када тело клизи низ стрму раван константном брзином, или са неким убрзањем.



Слика 5.1: Типични дијаграм сила за непокретно тело на стрмој равни. Слика претходно публикована у [3].

за извођење, и не захтева скупу опрему.

5.1 Квадар на стрмој равни

Покажимо експлицитно да је дијаграм 5.1 нетачан за круто тело. Како је квадар у равнотежи, резултујућа сила и резултујући момент морају бити једнаки нули, тј.

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad (5.1)$$

$$\sum \vec{M}_i = 0. \quad (5.2)$$

Пројектујући једначину (5.1) на паралелну и нормалну осу, добијамо:

$$mg \sin \theta - f = 0, \quad (5.3)$$

$$-mg \cos \theta + N = 0. \quad (5.4)$$

На основу једначине (5.2), укупан момент у односу на осу⁴⁹ која је нормална на раван цртежа и пролази кроз тачку О износи:

$$M^{(O)} = mg \cos \theta \frac{l}{2} - mg \sin \theta \frac{h}{2} - N \frac{l}{2}, \quad (5.5)$$

где су h и l висина и дужина квадра, а угао θ је нагиб стрме равни. Момент силе трења \vec{f} једнак је нули јер њен правац пролази кроз тачку О, па је крак силе једнак нули.

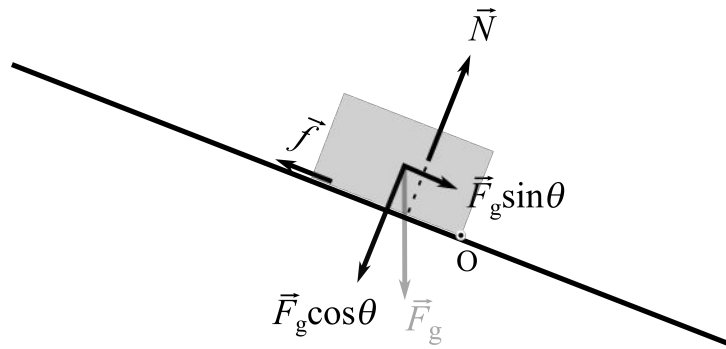
Заменом једначине (5.4) у (5.5), добијамо:

$$M^{(O)} = -mg \sin \theta \frac{h}{2} \quad (5.6)$$

што очито није једнако нули. Предзнак “–” упућује да би квадар ротирао у негативном физичком смеру, односно у смеру казаљке на сату.

То значи да би резултујући момент претурио квадар, а наша почетна претпоставка, која одговара реалној ситуацији, јесте да квадар мирује. Дакле, нешто није у реду са дијаграмом сила – или нека сила није учртана, или је нека од учртаних сила лоше распоређена. Тело интерагује са Земљом (сила \vec{F}_g), и са подлогом (силе \vec{N} и \vec{f}), и нема других интеракција. Зато можемо одбацити могућност да је нека

⁴⁹Избор осе у односу на које разматрамо моменте сила у случају равнотеже је произвољан јер тело мирује у односу на *све* осе.



Слика 5.2: Употреба разложених сила да би се нашао најтачња тачка нормалне силе N . Нормална сила измерена је дуж линије силе због боље паралелности слике. Слика прелиходно објављена у [3].

сила изостављена. Гравитациона сила је адекватно оријентисана, са нападном тачком у тежишту тела за хомогено тело, што следи из саме дефиниције тежишта. Сила трења мора бити паралелна са подлогом; ако претпоставимо да није, додатни нормални компонентни вектор силе трења могао би се придружити постојећој нормалној сили \vec{N} . И тако, системом елиминације, долазимо до потенцијалног решења проблема – оријентација силе \vec{N} .

5.2 Решење проблема

5.2.1 “Стандардни” приступ

Нападна тачка нормалне силе може се добити као решење једначина равнотеже (5.1) и (5.2). Као и пре, разматрамо квадар дужине l и висине h , на стрмој равни нагиба θ . На слици 5.2 гравитациона сила је такође разложена на компонентне векторе, што је уобичајено приликом решавања оваквих проблема.

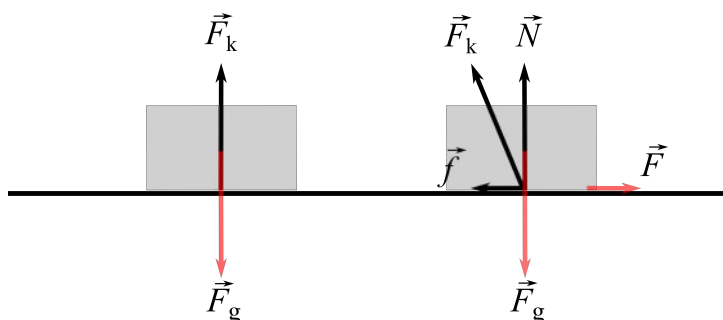
Једначине (5.3) и (5.4) и даље важе, а момент силе у односу на осу која пролази кроз O је

$$M^{(O)} = mg \cos \theta \frac{l}{2} - mg \sin \theta \frac{h}{2} - Nx = 0, \quad (5.7)$$

где је x растојање од O до линије силе \vec{N} , које је за сада непознато.

Узимајући у обзир једначину (5.4), након кратког рачуна, из једначине (5.7) добија се:

$$x = \frac{l}{2} - \frac{h}{2} \tan \theta. \quad (5.8)$$



Слика 5.3: У ситуацији на левој страни, контактна сила \vec{F}_k усмерена је вертикално навише, и одговара нормалној сили \vec{N} . У примеру са десне стране, нормална сила \vec{N} и сила трења \vec{f} су компонентни вектори контактне силе.

Уз мало геометрије, једначина (5.8) показује да је нападна тачка нормалне силе управо на пресеку линије дуж које делује сила Земљине теже и стрме равни.

5.2.2 Употреба јединствене контактне силе

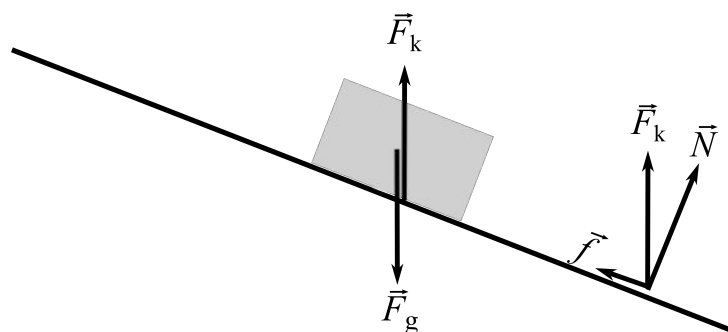
Контакт два тела обично се моделује уз помоћ две одвојене силе: нормалне силе \vec{N} и силе трења \vec{f} [20, 21, 106, 107], како је приказано у претходном одељку. Алтернативни приступ је да се разматра јединствена контактна сила \vec{F}_k (слика 5.3), при чему су \vec{N} и \vec{f} њени компонентни вектори. Овај приступ може се наћи у [101, 119].

Употреба две силе је математички захтевнија, али је такав приступ студентима познат. Употреба једне силе је елегантно и математички једноставно решење, и доводи до бољег концептуалног разумевања [120]. Долазак до истог резултата на два начина може помоћи студентима у комплетнијем сагледавању проблема.

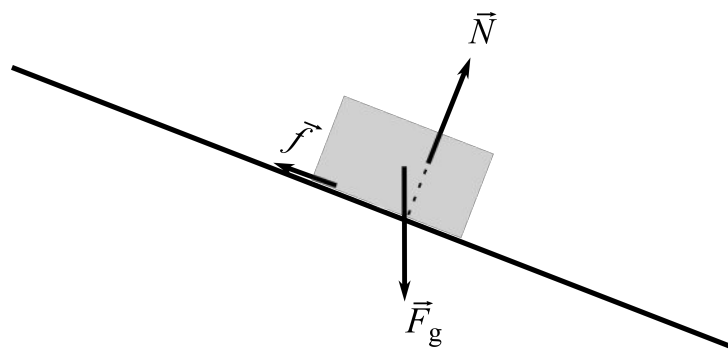
У оваквом приступу, на квадар делују само све силе – једна која потиче од гравитационог привлачења Земље, и једна која потиче од директног контакта квадрa и подлоге (слика 5.4). Сила Земљине теже усмерена је вертикално наниже, што значи да контактна сила мора имати исти интензитет и правац и бити супротног смера, да би квадар мировао. Једначине равнотеже за translацију и ротацију су очигледно задовољене.

Ако контактну силу сада разложимо на нормалну силу \vec{N} и силу трења \vec{f} (слика 5.4), ове две силе морају имати исту нападну тачку као и оригинална контактна сила.

Закључујемо, дакле, да се линије сила \vec{F}_g , \vec{f} и \vec{N} морају сећи у једној тачки. Та тачка је она у којој сила Земљине теже \vec{F}_g пресеца подлогу



Слика 5.4: Две силе које делују на квадар су контактна сила \vec{F}_k и сила Земљине тежине \vec{F}_g . Ове две силе делују дуж истој правца, али су на слици нацртане дуж два блиска правца, због паралелности. На десној страни слике приказана је разложена контактна сила. Слика прелиходно публикована у [3].



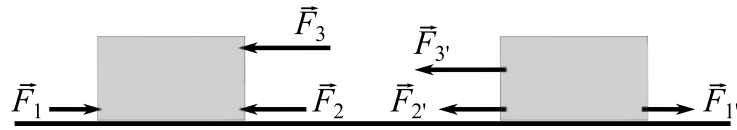
Слика 5.5: Линије сила Земљине тежине, силе трења и нормалне силе. Сила трења и нормална сила померене су дуж својих линија силе због паралелности слике. Слика прелиходно публикована у [3].

(слика 5.5). Треба запазити да \vec{N} не пролази кроз тежиште квадра (на супрот дијаграму на слици 5.1)

Што је угао стрме равни већи, то ће линија нормалне силе N пролазити ближе тачки O , што се види из једначине (5.8). Квадар ће се преврнути када се тачка пресека прође кроз тачку O . Наравно, може се десити да квадар пре тога проклиза, што зависи од коефицијента трења између квадра и подлоге.

5.3 Узрок заблуде

Дијаграм 5.1 нема увек значење које му студенти придају. Приликом цртања дијаграма сила, тело може бити моделовано на три начина [121],



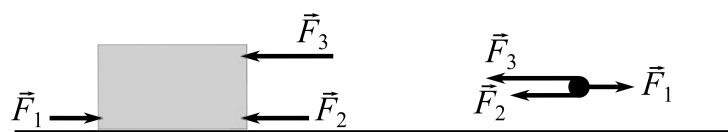
Слика 5.6: Да ли ће ова два дијаграма сила бити еквивалентни зависи од тога како је моделовано разматрано тело.

и то као:

- *честица.* Све димензије тела се занемарују, и оно се третира као материјална тачка у физичком смислу. Сви вектори који делују на тело имају нападну тачку у центру масе тела. Ефекти ротације су искључени из разматрања, и свако уздужно или паралелно померање вектора даје еквивалентан вектор.
- *круто тело.* Димензије тела се узимају у обзир, али се оно третира као потпуно круто, што значи да се подразумева да нема промене међусобног положаја тачака тела. Тада су ефекти ротације узети у обзир, али не и ефекти деформација тела. Вектори се могу померати дуж својих линија сила, и нападна тачка може бити било где дуж те линије.
- *деформабилно тело.* Сви вектори су “везани” и не постоји померање које би дало еквивалентан вектор.

Да бисмо илустровали претходну поделу, размотримо слику 5.6, која садржи два дијаграма силе. Вертикалне силе уклоњене због прегледности дијаграма. Да ли су ова два дијаграма еквивалентна, или не? (а) Ако је тело материјална тачка дијаграми су еквивалентни јер су вектори \vec{F}_1 и $\vec{F}_{1'}$, \vec{F}_2 и $\vec{F}_{2'}$, \vec{F}_3 и $\vec{F}_{3'}$ међусобно паралелни. (б) Ако је тело круто, вектори \vec{F}_1 и $\vec{F}_{1'}$ као и \vec{F}_2 и $\vec{F}_{2'}$ су међусобно еквивалентни јер су дуж исте линије, за разлику од вектора \vec{F}_3 и $\vec{F}_{3'}$. Једначине за translацију за ова дијаграма биће једнаке, али не и једначине за ротацију. (в) Коначно, ако је тело деформабилно, ниједан пар сила неће бити еквивалентан. На левом дијаграму тело ће бити сабијено, а на десном развучено. Једначине за translацију и ротацију зависиће од деформабилних особина тела.

У уџбеницима опште физике на универзитетском нивоу [20, 21, 101, 106, 107, 122, 123], доминантно се употребљавају модели честице и крутог тела. Забуна може настати ако се подразумева модел честице, а црта дијаграм који даје утисак да се ради о моделу крутог тела. Иако је у тексту углавном наглашено који модел се користи, на сликама се



Слика 5.7: Дијаграм сила за модел крутог тела (лево), и за модел честице (десно). Употреба различитих дијаграма јасније упућује на то како се моделује размањено тело.

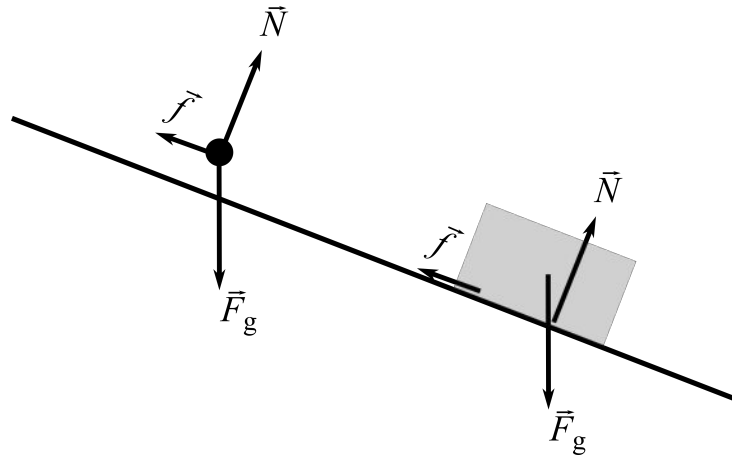
може видети како нормална сила пролази кроз тежиште [20, 21, 122]. Због присуства оваквих слика и чињенице да се *ни један* од консултованих уџбеника не враћа овом проблему у области статике, студенти често остају уверени да правац нормалне силе увек пролази кроз тежиште тела⁵⁰.

Најкоректније је да се у случају крутог тела силе цртају на самом телу, а у случају честице на дијаграму поред скице проблема (слике 5.7, 5.8, 6.1). Овакав приступ може се наћи у уџбеницима [101, 107].

Неки аутори [124] за превазилажење овог проблема предлажу увођење посебних ознака за силе које нису “тачкасте”. У том смислу, гравитациона сила се сматра тачкастом, јер делује у тежишту, док су нормалне силе и сила трења “распоређене” по површини контакта. Ова идеја не делује оправдано јер је гравитациона сила такође “распоређена” по целом телу. Гравитациона сила заправо представља интеракцију Земље и сваког делића тела, а ми ове интеракције замењујемо једном “тачкастом” силом која делује у тежишту. Ако је тежиште ван тела, као код празне стаклене чаше, постаје очигледно да је “тачкаста природа” гравитационе силе само математичка конструкција. У том смислу, не постоји суштинска разлика између “тачкастих записа” вектора нормалне силе и силе трења у односу на гравитациону силу. Увођење додатних ознака, дакле, не би допринело суштинском разумевању природе сила, а отежало би читање дијаграма.

Закључујемо, дакле, да је дијаграм на слици 5.1 тачан *само* ако се квадар посматра као материјална тачка, а *не* као круто тело. Да би се избегла забуна најбоље је употребити различите дијаграме за различите моделе, као на слици 5.8. Упутства за лакше цртање дијаграма сила дати су у Глави 6, на страни 103.

⁵⁰Као, на пример, аутор ове дисертације.



Слика 5.8: Леви дијаграм сила доноси се на модел честице, док се десни односи на модел крутог тела. Ове дијаграме треба користити конзистентно, да би се избегла забуна око позиционирања сила.

5.4 Поставка експеримента

Приказана теоријска разматрања могу се поткрепити једноставним експериментом. Дрвени квадар постављен је на две дигиталне ваге, које се налазе на стрмој равни (слика 5.9). На доњи део квадра залепљене су танке чачкалице, да би контакт са вагицама био приближно тачкасти.

На основу слике 5.11, решавањем једначина равнотеже, добија се:

$$N_1 = \frac{mg}{2} \left(\cos \theta - \frac{h}{l} \sin \theta \right), \quad (5.9)$$

$$N_2 = \frac{mg}{2} \left(\cos \theta + \frac{h}{l} \sin \theta \right), \quad (5.10)$$

где су h и l висина и дужина квадра, а θ угао стрме равни, као и раније.

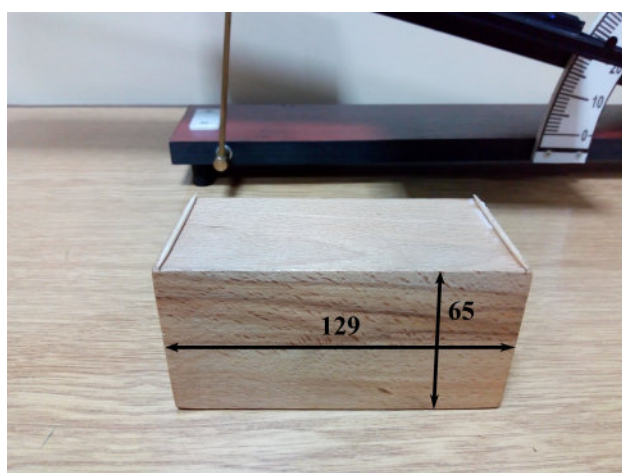
Запажамо следеће:

- интензитети сила N_1 и N_2 се разликују (осим у тривијалном случају када је $\theta = 0$),
- како је $N_1 \geq 0$, то значи да је $\tan \theta_{\max} = \frac{l}{h}$, што је услов превртања.

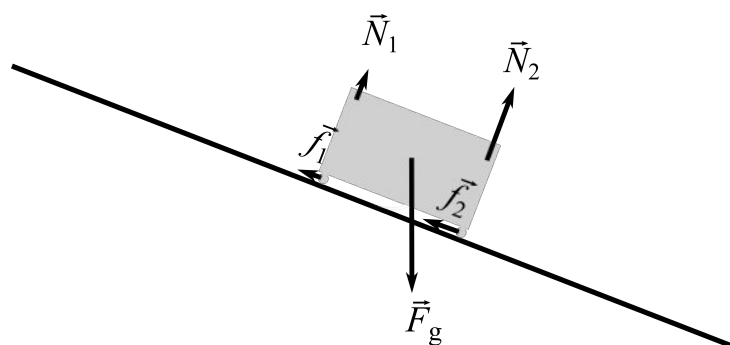
Ако би нормална сила \vec{N} деловала дуж правца која пролази кроз тежиште, онда би интензитети сила N_1 и N_2 морали бити једнаки. Ако је наша претпоставка тачна, и сила \vec{N} заиста не пролази кроз тежиште, читавања вагица морала би да поткрепе тај резултат.



Слика 5.9: Поставка експеримента. Слика претходно публикована у [3].



Слика 5.10: Квадар који је коришћен у експерименту. Димензије су даће у милиметрима (mm). Слика претходно публикована у [3].



Слика 5.11: Дијаграм сила за експеримент. Слика претходно публикована у [3].

Табела 5.1: Резултати експеримента.

Угао θ	Теор. вредн.		Експ. вредн.	
	N_1 [N]	N_2 [N]	N_1 [N]	N_2 [N]
0	1,86	1,86	1,85	1,86
5	1,77	1,93	1,77	1,93
10	1,67	1,99	1,66	1,98
15	1,55	2,04	1,56	2,02
20	1,42	2,06	1,42	2,04

Убацивањем димензија тела (слика 5.10) у једначине (5.9) и (5.10), можемо израчунати конкретне вредности интензитета сила N_1 и N_2 , а затим то упоредити са читавањима са вагица. Дужина квадра је $l = 129 \text{ mm}$, висина⁵¹ $h = 65 \text{ mm}$, док је његова ширина небитна. Маса квадра је $378,6 \text{ g}$. Резултати показују одлично слагање, нарочито за тако једноставан експеримент (табела 5.1). Мерење је поновљено више пута, али је одступање од наведених вредности било занемарљиво, па зато у табелу није унешена грешка мерења.

Уместо потврде решења за проблем равнотеже, овај експеримент се може применити “инверзно”, да би се одредила нападна тачка нормалне силе \vec{N} . На основу читавања вагица и добијених вредности интензитета сила N_1 и N_2 , решавањем система паралелних сила на основу општег векторског рачуна, студенти могу наћи нападну тачку силе \vec{N} и то упоредити са једначином (5.8).

5.5 Тело на три ослоња

Приликом дизајнирања експеримента и проучавања проблема, једна од идеја била је постепено повећање броја контаката квадра и подлоге. На основу облика сила за 2, 3, 4, 5, итд. контаката, очекивали смо да добијемо зависност која ће у лимесу када $n \rightarrow \infty$ осликати положај “тачкасте силе” \vec{N} , односно резултујуће силе какву иначе цртамо.

Међутим, већ код три ослоња, сусрећемо се са ограничењима нашег модела. Пошто имамо две једначине за равнотежу ($\sum \vec{F} = 0$, $\sum \vec{M} = 0$), а више од две непознате величине (\vec{N}_1 , \vec{N}_2 и \vec{N}_3), немогуће је једнозначно решити систем. Како се онда практично израчунавају вредности

⁵¹Висина квадра без чачкалица је 64 mm , а са чачкалицама 66 mm . Зато је висина квадра апроксимирана са 65 mm .

које ти ослонци треба да издрже, на пример, у грађевинарству? Додатне једначине за решавање система добијају се из једначина за деформације тела, обично уз помоћ нумеричких модела и адекватног софтвера.

Глава 6

Дијаграми сила

На часовима вежби Механике од студената се може чути реченица “Ах, увек заборавим неку силу!”. Студенти су често несистематични приликом поставке проблема – цртају силе, разлажу на компоненте векторе једну силу пре него што су нацртали наредну, пишу једначине пре него што су се уверили да су нацртали све силе и сл.

Неки пут се на лицима студената може видети нелагодност пред постављеним задатком. Поједини задаци “паралишу” студенте својом сложености и они одустају од решавања још пре него што су и почели јер не знају “са које стране” да приђу задатку.

Зато је аутор саставио *Алгоритам за решавање задатака*, као својеврсну мапу за студенте⁵², а испоставило се да поједини уџбеници [101, 107] садрже слична упутства за цртање дијаграма сила.

У наставку је представљен алгоритам у две верзије – за модел честице и за модел крутог тела⁵³. Модел крутог тела је општији и у себи укључује и модел честице, али је овде дат засебно јер тако представљен и студентима, кроз постепено усложњавање како одмиче обрада градива.

6.1 Алгоритам за модел честице

1. Објашњење ситуације – Како се тела крећу?
 - Нацртати скицу проблема.
 - Означити претпостављена убрзања свих тела.
2. Нацртати онолико честица колико има тела незанемарљиве масе.

⁵²И за себе.

⁵³Више детаља о овим моделима дато је у одељку 5.3 на страни 95.

3. Нацртати дијаграме сила за свако од тела/честица.
 - (а) Гравитација \vec{F}_g – на свако масивно тело.
 - (б) Да ли је разматрано тело у контакту са нечим?
 - Додир са другим телом.
 - Нормална сила \vec{N} .
 - Сила трења – статичког или клизања?
 - Канап – сила затезања \vec{T} .
 - Опруга – сила еластичних деформација \vec{F}_e .
4. Уочити сила истог интензитета које делују на различита тела (ЗА-ИР⁵⁴).
5. Написати Други Њутнов закон за свако тело и пројектовати једначине на одговарајуће осе.

6.2 Алгоритам за модел крутог тела

1. Објашњење ситуације – Како се тела крећу?
 - Нацртати скицу проблема.
 - Означити претпостављена трансляторна убрзања свих тела (убрзање ЦМ⁵⁵).
 - Означити претпостављени смер ротације тела и осу ротације.
2. Нацртати онолико истих слика колико има тела незанемарљиве масе. На свакој од слика шрафирати разматрано тело.
3. Нацртати дијаграме сила за свако од тела.
 - (а) Гравитација \vec{F}_g – на свако масивно тело.
 - (б) Да ли је разматрано тело у контакту са нечим?
 - Додир са другим телом.
 - Нормална сила \vec{N} .
 - Сила трења – статичког или клизања?
 - Канап – сила затезања \vec{T} .
 - Опруга – сила еластичних деформација \vec{F}_e .

⁵⁴Закон акције и реакције.

⁵⁵Центра масе.

4. Уочити сила истог интензитета које делују на различита тела (ЗА-ИР).
5. Написати Други Њутнов закон за свако тело и пројектовати једначине на одговарајуће осе.
6. Написати основни закон динамике ротације за свако тело које ротира.

6.3 Објашњење и примена алгоритама

Приликом израде задатака, студенти имају алгоритам на папиру испред себе. Наставник поставља иста кључна питања приликом готово сваке употребе алгорита, све док студенти не усвоје концепте.

Примену алгоритама илустроваћемо са два примера. У првом се користи модел честице, што је типично у динамици translације, а у другом модел крутог тела, што је уобичајено за задатке из динамике ротације и статике.

За први пример употребљен је задатак са Округлог такмичења из физике за ученике првог разреда средње школе, које је одржано 2012. године [125]. Овај задатак примерен је и за студенте уводног курса механике.

У систему приказаном на слици блок масе $2m$ налази се на дасци масе $3m$. Блок је повезан са другим блоком масе m неистегљивом безмасеном нити која је пребачена преко идеалног котура занемарљиве масе. Ако се систем пусти да почне да се креће из стања мировања, блок проклизава по дасци, а даска се креће по површини стола. Коефицијент трења између блока и даске је $\mu_1 = 0,35$ а између даске и површине стола $\mu_2 = 0,1$. Одредити убрзање блокова и односу на подлогу.

У првом кораку алгорита је потребно нацртати слику проблема, а затим је студентима постављено следеће питање “Овако изгледа систем у почетном тренутку. Замислимо да је пред нама симулација. Када бисмо сада притиснули дугме ‘Play’ и покренули симулацију, како би се кретала приказана тела?”. Затим се на слици означавају убрзања тела.

У другом кораку студенти цртају по једну честицу за свако тело занемарљиве масе. Врло је важно да се силе које делују на различита

тела *не* цртају на истој слици, јер студенти онда тешко разазнају која сила делује на које тело, могу да потру силе акције и реакције, или да направе сличне грешке. Такође, слике су прегледније, што је битно код сложенијих проблема. Зато се црта по једна честица за свако тело и на њој се означавају *само* оне силе које делују на то тело.

У случају да се разматра кретање крутог тела, уместо честица треба нацртати тело са димензијама, да би се направила дистинкција у односу на модел честице. У том случају се мора водити рачуна и о нападној тачки силе.

У трећем кораку студенти цртају дијаграм сила за свако тело од значаја. Поред формалне дефиниције, која каже да је сила мера интеракције два тела, важно је студентима приближити овај појам употребом свакодневног говора. Пример дискусије текао би на следећи начин:

“Сила описује како једно тело делује на друго. Наведите ми пример како бих ја могао да делујем на овај сто.”

“Можете да гурнете сто.”

“Тако је. Могу да гурнем сто, повучем сто, подигнем сто. У сваком од тих случаја, моје деловање на сто описао бих векторима силе који су усмерени овако, овако и овако [наставник показује смер деловања вектора].

Да ли бих некако могао да делујем на сто, а да га не додирнем?”

“Не, то је немогуће. [или други одговор:] Може, гравитационом силом.”

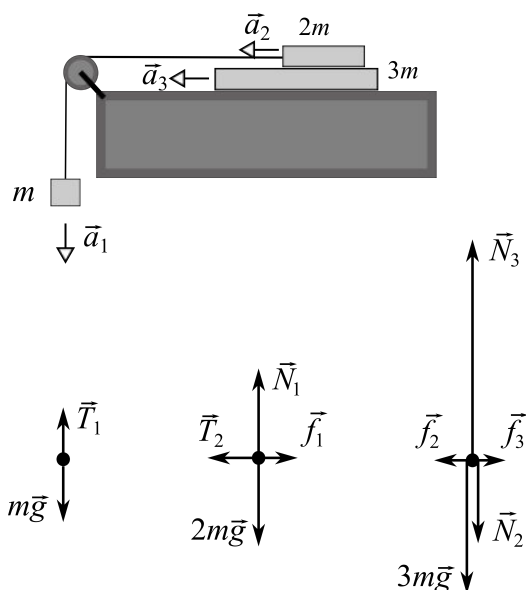
“Тако је, једини начин да делујем на сто је путем гравитационе силе, али та сила је занемарљиво мала између мене и стола. Постоји ли неки случај када гравитациона сила није занемарљиво мала?”

“Ако је између Земље и неког тела.”

Кроз овакву дискусију, заједно са студентима долазимо до закључка да је за све силе осим гравитационе потребан директан контакт⁵⁶. Због тога је гравитациона сила одвојена у алгоритму (3.а), као једина бесконтактна сила, док остале силе моделују различите врсте контакта (алгоритам, 3.б).

Пример дискусије изгледао би овако:

⁵⁶Начин преношења интеракције један је од фундаменталних питања физике. Овде о контактним и бесконтактним силама говоримо у домену механике. На микроскопском нивоу, и нормална силе или силе трења могу се сматрати бесконтактним јер је у њиховој основи мноштво електромагнетних интеракција између између честица које их чине.



Слика 6.1: Кинематички дијаграм (горе) и дијаграми сила за свако тело незанемарљиве масе.

“Да ли је ово тело у контакту са нечим?”

“Није.”

“Дакле, овај канап не додирује тело?”

“Аха, додирује.”

“То значи да тај контакт морамо описати неком силом.

Којом силом канап делује на ово тело?”

“Силом затезања.”

“Да ли канап гура или повлачи тело?”

“Канап може само да повлачи тело.”

“Тако је. Зато вектор силе затезања треба усмерити овако. . .”

Више детаља о нормалној сили дато је у Глави 5 на страни 91, а о сили трењу у Глави 4 на страни 69.

Примењујући прва три корака алгоритма за модел честице, долази се до дијаграма приказаних на слици 6.1.

Приликом цртања дијаграма сила за различита тела, све силе су означене различитим индексима, нпр. \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 . . . У четвртом кораку алгоритма, студенти уочавају парове сила које су једнаког интензитета, по Трећем Њутновом закону. Након неког времена, овај корак се може спојити са претходним, и силе једнаког интензитета могу се одмах означити истим индексом.

У конкретном случају, то су парови $T_1 = T_2$, $N_1 = N_2$ и $f_1 = f_2$. Силе затезања су једнаке јер нит и котур имају занемарљиву масу; у супротном, та једначина не би важила.

Коначно, у завршним корацима треба записати једначине. Студенти бирају две ортогоналне осе и разлажу све векторске величине на ове две осе (укључујући и убрзања са прве слике). Затим пишу Други Њутнов закон за сваку од оса.

Примењујући пети корак, узимајући у обзир и кинематички дијаграм, добијамо за прво, друго и треће тело, редом:

$$mg - T_1 = ma_1, \quad (6.1)$$

$$T_2 - f_1 = 2ma_2, \quad (6.2)$$

$$N_1 - 2mg = 0, \quad (6.3)$$

$$f_2 - f_3 = 3ma_3, \quad (6.4)$$

$$N_3 - N_2 - 3mg = 0. \quad (6.5)$$

Комбиновањем претходних једначина, уз једначине за силе трења клизања облика $f = \mu N$ и услов да је $a_1 = a_2$ због неистегљивости нити, добијамо решив систем једначина.

Овим кораком је завршена примена алгоритма за модел честице. Да бисмо илустровали и алгоритам за модел крутог тела, претпоставићемо да у претходном задатку и котур има масу m , и да су тела $2m$ и $3m$ незанемарљивих димензија.

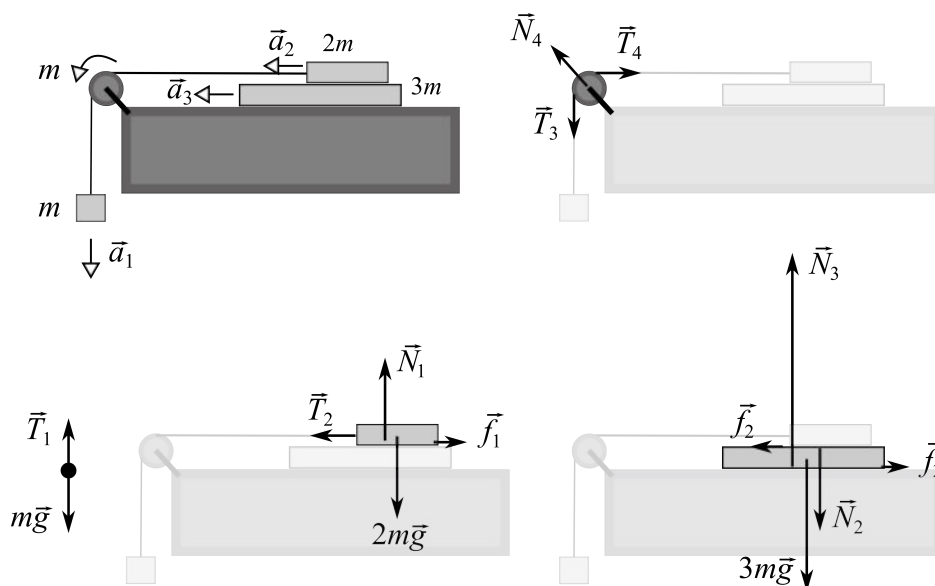
Применом прва три корака алгоритма, долазимо до дијаграма као на слици 6.2. У четвртном кораку, добијамо да је $T_1 = T_3$, $T_2 = T_4$, $N_1 = N_2$ и $f_1 = f_2$. Запажамо да силе затезања T_1 и T_2 нису једнаке као када котур нема масу, али зато парови сила T_1 и T_3 , и T_2 и T_4 јесу јер нит има занемарљиву масу.

Како се котур не креће транслаторно⁵⁷, пети корак даће исти сет једначина (6.1)-(6.5). Потребно је још написати Основни закон динамике ротације⁵⁸ $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ за свако тело незанемарљивих димензија. Како нас не занима⁵⁹ одсуство ротације тела $2m$ и $3m$, довољно је записати једначину ротације котура која гласи. Момент силе који делује на

⁵⁷Једначина за транслаторно кретање котура је од интереса једино ако нас занима вредност силе N_4 .

⁵⁸Тзв. "Други Њутнов закон за ротацију".

⁵⁹Ове једначине би биле од интереса ако бисмо, на пример, желели да израчунамо тачну позицију нападне тачке нормалне силе.



Слика 6.2: Кинематички дијаграм (горе лево) и дијаграми сила за свако тело занемарљиве масе. Сила N_4 означава реакцију ослоња кошура. Силе N_1 , N_2 и N_3 уцртане су произвољно, јер њихову најважни шачку не можемо да знамо док не решимо једначине (одсуства) ротације за сва дела. Слика прелиходно публикована у [10].

котур је:

$$M = M_{T_3} - M_{T_4} \quad (6.6)$$

$$= T_3 R - T_4 R \quad (6.7)$$

Ако сматрамо да је низ неистегљива, и да нема проклизавања нити преко котура, онда за кинематичке величине важи $a_1 = a_2 = R\alpha$. Узимајући у обзир да је за котур $I = \frac{1}{2}mR^2$, уз једначине за трење клизања, добијамо решив систем једначина.

6.4 Алгоритам за силу трења

Узимајући у обзир популарност алгоритма за цртање дијаграма сила, кроз рад са студентима спонтано је настао и алгоритам за утврђивање облика трења, који је приказан у наставку. Више детаља о трењу дато је у Глави 4 на страни 69.

Како се крећу две површине у додиру?

1. Мирују – Сила статичког трења, не постоји унапред дата формула.

2. Клизају – Сила трења клизања, $f = \mu N$
3. Јавља се котрљање.
 - (а) Нема деформација.
 - и. Котрљање без проклизавања – Сила статичког трења.
 - ии. Котрљање са проклизавањем – Сила трења клизања.
 - (б) Има деформација – Сила трења котрљања.

Глава 7

Закључак и правци даљег истраживања

У оквиру дисертације, у Глави 2, приказано је како се примери из биомеханике могу употребити у настави физике. Представљен је модел стандардног човека, и показано је: (а) како избор плоча за тегове утиче на извођење вежбе, са експерименталном потврдом разматраног ефекта. (б) како се може проценити извршени рад и оптерећење на кичму приликом подизања терета, оптерећење кукова и колена приликом чучња. Поређење са експерименталним резултатима доступним у литератури показује одлично слагање. (в) како се може одредити зависност силе од времена приликом подизања терета, користећи акцелерометре, паметне телефоне, или видео анализу. Сва три метода дају готово подударне резултате.

У будућности је планирано истраживање у коме ће бити израчуната оптерећења зглобова употребом динамичког модела. Убрзање сегмента биће одређено учвршћивањем мобилних телефона и употребом података из њихових сензора. Овај финансијски приступачан и мобилан начин мерења биће упоређен са сложеном тродимензионалном видео анализом која се користи у биомеханици, и која захтева скупу опрему, софтвер и мора се урадити у лабораторији. Основни изазов представља добијање адекватних података из паметних телефона јер они све време мењају своју оријентацију приликом покрета. Зато је неопходно прерачунати убрзања из локалног референтног система паметног телефона у лабораторијски референтни систем. Пред самог убрзања, то захтева податке о тренутном положају и оријентацији телефона, из више различитих сензора истовремено. План истраживања је:

- развој теоријског модела;

- развој нумеричког модела и писање одговарајуће скрипте;
- валидација модела на основу референтног примера, где ће се резултати са телефона поредити са неким независно добијеним резултатом;
- употреба модела на подизање терета;
- поређење са сложеним оптичким системима са више камера, који су у употреби у биомеханичким видео анализама.

Затим је, у Глави 3, показано да присуство огледа на часу обраде градива о трењу не утиче значајно на резултате концептуалног тестирања. Даљи правци истраживања укључују понављање овог истраживања на већем узорку ученика, са другим темама, или у дужем трајању.

У Глави 4, која се бави трењем дата је листа концепата о трењу које би ученици требало да савладају, као и њихове најчешће заблуде. Ова листа концепата и заблуда сачињена је на основу прегледа литературе, и на основу искуства у раду са ученицима и студентима. Планиран је наставак развоја концептуалног теста о трењу, који је започео формирањем ових концепата, а затим и његово тестирање на великом узорку, са студентима окружења (Србија, Словенија, Хрватска, Македонија. . .).

У Глави 5 описана је честа ученичка заблуда око оријентације нормалне силе и представљен је једноставан оглед који може помоћи у отклањању те заблуде. Даља истраживања укључују разматрање тела на више од два ослонца и употреба деформабилних модела.

У Глави 6 приказан је алгоритам који помаже у поступку решавања задатака из механике. Даља истраживања могла би да дају поређење резултата две групе студената, једне која ради са алгоритмом, и друге која ради без њега.

И коначно, механика укључује неке од области којима у овој дисертацији није поклоњена никаква пажња, попут осцилација, таласа и елемената специјалне теорије релативности. Даља истраживања могли би ићи у смеру расветљавања ученичких заблуда у овим областима механике.

Глава 8

Додаци

8.1 Трење и котрљање – од точка до теорије и назад⁶⁰

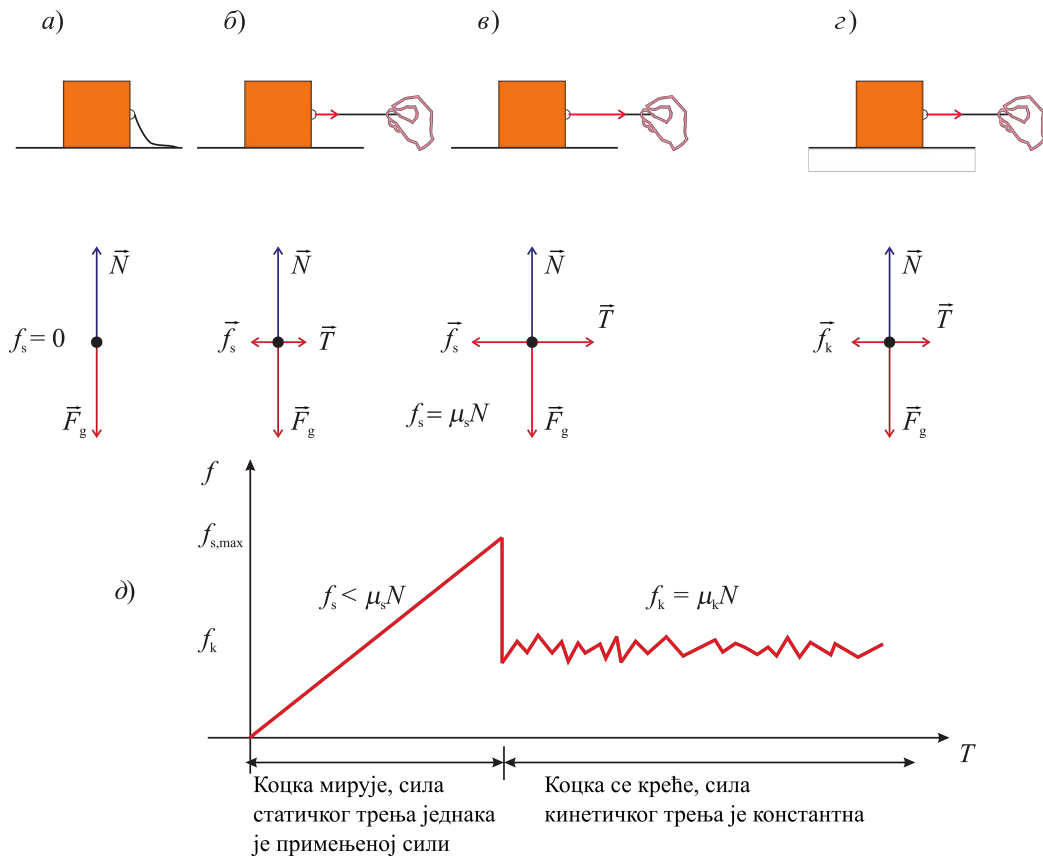
Приликом изучавања трења, најчешће разликујемо три основна облика трења – статичко трење, трење клизања и трење котрљања. Сваки од ових облика трења описују се сродним, али донекле различитим законима. Прочухемо сваки од ових облика трења.

Статичко трење

Ако на тело које мирује применимо веома малу хоризонталну силу, оно ће и даље мировати. На пример, ако веома слабо повучемо столицу или дрвени квадар који лежи на столу, они ће остати непокретни. То значи да је вредност активне силе (сила којом вучемо предмет) једнака сили трења – у овом случају, статичког трења. Ако повећавамо вредност ове силе (слика 8.1), тело ће и даље мировати, што значи да ће сила статичког трења расти заједно са примењеном активном силом. Ако смањимо интензитет деловања активне силе, или променимо њен смер, сила статичка трења мењаће се у складу са тим, тако да тачке контакта столице са подлогом остану међусобно непомичне. Ако је вредност активне силе једнака нули, и вредност силе трења биће једнака нули.

Статичка сила трења описује се законом $f_s \leq \mu_s N$, где је N нормална реакција подлоге, а μ_s коефицијент максималне силе статичког

⁶⁰Представљени текст о трењу дат је неизмењеном облику, какав је употребљен и приликом проучавања градива о трењу. За више информација видети Главу 3 на страни 57.



Слика 8.1: а) Нема активне силе, па нема ни појаве трења; б) Нема релативног кретања додирних површи, па је $f_s \leq \mu_s N$; в) Интензитет примењене силе достиже $\mu_s N$ и тело почиње да клизи; г) При релативном кретању тела у односу на подлогу, сила трења клизања једнака је $\mu_k N$; д) График зависности силе трења од интензитета примењене силе.

трења, непосредно пре проклизавања.

Трење клизања

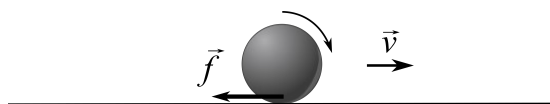
Ако повећавамо вредност активне силе, у једном тренутку, квадар ће почети да клизи по столу (слика 8.1). Непосредно пре покретања квадра, сила статичког трења достигла је максималну вредност. Када је тело у покрету, нема силе статичког трења, већ се јавља трење клизања и оно има приближно константну вредност, која је мања од максималне вредности силе статичког трења.

У уском домену појава које најчешће проучавамо у оквиру механике, сила трења клизања може се сматрати независном од брзине и

величине додирне површине и може се представити законом $f_k = \mu_k N$, где је N нормална реакција подлоге, а μ_k коефицијент трења клизања.

Трење приликом котрљања

Размотримо куглу која се котрља без проклизавања по подлози (слика 8.2). Из искуства знамо да ће се кугла након неког времена зауставити, што наводи на закључак да сила трења делује у супротном смеру од смера кретања кугле. Ово објашњење коректно је у смислу транслације јер кугла успорава. Међутим, ако посматрамо ротацију кугле око сопствене осе, онда ће овако оријентисана сила трења својим моментом изазивати угаоно убрзање! Тада би кугла требало да успорава своје транслаторно кретање и да при томе ротира све брже и брже, што је теоријски немогуће, а ни у пракси се тако не дешава.

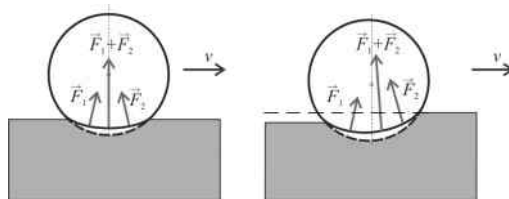


Слика 8.2: Котрљање кугле по хоризонталној подлози.

Насупрот томе, можемо рећи да приликом кретања кугле, доњи део кугле има тенденцију да се креће у супротном смеру од смера кретања центра масе кугле, а како нема проклизавања, сила трења делује у смеру кретања кугле и спречава проклизавање. Ипак, то нас доводи до сличних тешкоћа као и малопре јер би онда сила трења успоравала ротацију, али убрзавала транслацију, што је немогуће.

Објашњење овог парадокса лежи у кључној улози деформација кугле и/или подлоге приликом котрљања. При томе, деформације морају бити асиметричне, односно, различите са предње и задње стране кугле која се котрља [126].

Да бисмо то показали, размотримо прво симетричне деформације (слика 8.3, лево). Укупну интеракцију делића кугле са подлогом лево од центра масе можемо представити силом \vec{F}_1 , а десно силом \vec{F}_2 . У случају савршено еластичних, симетричних деформација, силе \vec{F}_1 и \vec{F}_2 симетричне су у односу на вертикалну линију која пролази кроз тежиште, и имају исти интензитет, тако да правац резултујуће силе $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ пролази кроз тежиште кугле, који је уједно и оса ротације кугле. Тада је момент силе једнак нули јер је крак резултујуће силе једнак нули. С обзиром на то да се ротација кугле мора успоравати, онда мора постојати и момент који ће то узроковати, па потпуно симетричне деформације не пружају адекватно објашњење.



Слика 8.3: Еластична и нееластична деформација шела при котрљању.

С друге стране, ако се кугла котрља по песку, песак иза ње биће сабијен, тако да се у овом случају јављају асиметричне деформације (слика 8.3, десно). Тада ће резултујућа сила $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ бити усмерена тако да њен правац не пролази кроз тежиште и њен момент ће успоравати ротацију, а њена хоризонтална компонента успораваће translацију. Ово објашњење је адекватно јер је у складу са реалним понашањем кугле.

Управо због тога је знатно теже гурати куглу по деформабилној подлози, нпр. песку или земљи, него по мање деформабилној подлози, као што је дрвени сто.

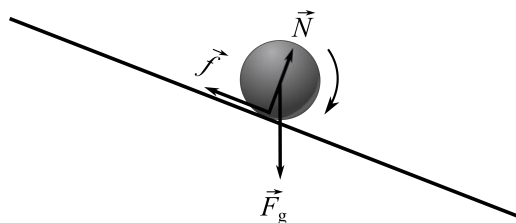
Дакле, кугла успорава и зауставља се зато што се њена енергија постепено троши због деформација.

Ипак, и даље остаје нерешено питање ротације кугле без деформација, нпр. котрљање кликера по дрвеном столу. У овом случају, деформације кликера и подлоге могу се сматрати занемарљивим.

Размотримо, зато, кретање кугле у два случаја (а) низ стрму раван; (б) по хоризонталној подлози, након спуста низ стрму раван. Све време подразумевамо да се кугла котрља без проклизавања и да нема деформација кугле и подлоге. Ако кугла не проклизава, то значи да је тачка контакта између кугле и подлоге непомицна, и да је сила трења која делује у тачки контакта заправо сила статичког трења. Важно је подсетити да сила статичког трења нема унапред задат закон деловања и да њен интензитет, правац и смер зависе од конкретне ситуације која се разматра, тј. од примењене активне силе.

Стрма раван. Ако би ефекти трења били занемарљиви, кугла би клизила низ стрму раван без ротације. Како се кугла котрља, мора постојати сила трења чији момент силе изазива ротацију. Када се кугла котрља низ стрму раван, сила трења делује у супротном смеру од смера кретања, паралелно са подлогом (слика 8.4).

За транслаторно кретање кугле важе следеће једначине (за осу па-



Слика 8.4: Кошрљање куле по сирмој равни.

ралелну стрмој равни, и осу нормалну на стрму раван):

$$(mg)_p - f = ma, \quad (8.1)$$

$$(mg)_n = N, \quad (8.2)$$

док за ротационо кретање кугле важи:

$$M = I\alpha, \quad (8.3)$$

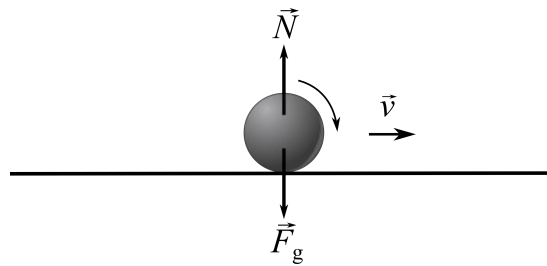
$$fR = \frac{2}{5}mR^2\alpha, \quad (8.4)$$

где је a – убрзање центра масе кугле, α – угаоно убрзање кугле. С обзиром на то да кугла не проклизава, важи да је $a = R\alpha$. Сређивањем ових једначина, може се добити вредност убрзања кугле низ стрму раван. Треба нагласити да би у овом случају било *пошрешно* писати да је $f = \mu N$, јер је у питању сила статичког трења, а не сила трења клизања.

Хоризонтална подлога. Размотримо сада шта се дешава када кугла пређе на хоризонталну подлогу. Ако бисмо хоризонталну подлогу третирали као посебан случај стрме равни (када је угао $\theta = 0$), сила трења била би усмерена паралелно подлози, у смеру супротном смеру кретања кугле, као на слици 8.2. Али тада се долази до проблема који је описан на почетку овог одељка, у коме сила трења парадоксално успорава транслацију, а убрзава ротацију. Како онда описати кретање по хоризонталној подлози и да ли се онда може тврдити да је приказани опис кретања низ стрму раван био исправан?

Одговор лежи у томе што сила статичког трења нема унапред задат интензитет, правац и смер деловања, већ он зависи од конкретних активних сила која делују на тело, и то од њиховог правца, смера, интензитета и нападне тачке. Сетимо се примера у коме столица мирује док ми на њу примењујемо хоризонталну силу, и на који начин сила статичког трења зависи од примењене активне силе.

У случају кретања кугле низ стрму раван, сила трења се јавља као последица паралелне компоненте силе Земљине теже, која је овде



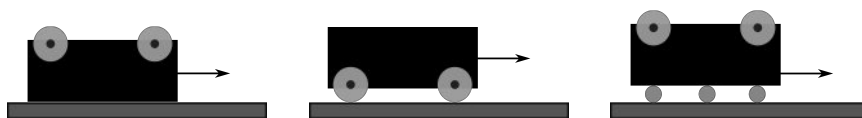
Слика 8.5: Котрљање кугле по хоризонталној подлози и силе које тада на њу делују.

активна сила. У случају кретања кугле по хоризонталној подлози не постоји активна сила која делује паралелно са подлогом, па се не јавља ни статичка сила трења. Дакле, Изненађујућ закључак је да сила трења *не* делује на куглу приликом котрљања равномерном брзином по хоризонталној подлози (слика 8.5). Дакле, тежиште кугле наставља да се креће равномерно праволинијски, по инерцији, јер ниједна сила не мења то стање кретања. Такође, кугла наставља да ротира константном угаоном брзином, јер ни један момент силе не мења то стање ротације.

У реалним условима, кугла се после неког времена зауставља због нечистоћа између ње и подлоге, деформација на микро-нивоу, отпора ваздуха и сличних ефеката.

Точак као технолошка револуција. С обзиром на то да приликом котрљања по хоризонталној подлози у идеалним условима нема силе трења, то значи да ће и у реалним условима бити много ефикасније неки терет померати уз помоћ котрљања, него га просто клизати преко подлоге. Примитивни точак користи описане особине силе трења да олакша померање терета. Примитивни точак састоји се из осовине, на пример металне или дрвене, на који су навучени точкови. При томе сила трења клизања није замењена силом трења котрљања, како се у неким уџбеницима наводи, јер се и даље јавља клизање између осовине точка и самог точка. Ипак, ово је ефикасније јер се клизање дешава дуж много мањег пута него без употребе точкова. Ако бисмо подметнули ваљке између терета и подлоге, онда бисмо силу трења клизања у потпуности заменили силом трења котрљања, и тада би било најлакше померити тело, али овакво решење је често непрактично.

Ова појава се може демонстрирати уз помоћ малих дрвених колица на које су причвршћени примитивни точкови (слика 8.6). У првом случају, колица се повлаче динамометром док леже наопако, на својој равной страни. Тада се она просто клизају по подлози, и динамометар показује највећу вредност. У другом случају, колица се повлаче док су



Слика 8.6: Повлачење колица на различите начине.



Слика 8.7: Шематски приказ тачка са кугличним лежајем.

на точковима. Сада динамометар показује мању вредност. И у трећем случају, колица се поново okreћу наопако, али се између њих и подлоге постављају ваљци. Динамометар сада показује најмању вредност.

Да би се разрешио проблем појаве клизања код примитивног тачка, између осовине и самог тачка, употребљени су куглични лежајеви. Између осовине и тачка уметнуте су куглице које ротирају унутар лежаја када се тачак окреће. Колико је ово велика уштеда може се показати следећим огледом. Ако два пластична тањира поставимо један у други, доњи држимо непокретним, а горњи покушамо да заротирамо, видимо да је за потребно уложити значајну силу. Ако између тањира убацимо неколико лоптица за стони тенис и покушамо поново, видимо да је сада окретање знатно лакше. Управо на овом принципу раде куглични лежајеви (слика 8.7).

8.2 Тест о трењу

У наставку следи концептуални тест о трењу. Представљен је у потпуно истој форми какав је и био пред ученицима.

Приликом употребе концептуалних тестова препорука је да се они никада тако не називају пред ученицима, већ да буду названи једноставно *Тести*. Ово је урађено да би се спречило да ученици претражују тестове по интернету, што би утицало на резултате.

9. Сила трења између два чврста тела може да буде једнака нули и онда када је додирна површина између та два тела храпава.

ТАЧНО

НЕТАЧНО

10. Да ли је сила трења клизања за исто тело које се налази на истој подлози већа када је та подлога хоризонтална, или је у виду стрме равни?

а) Када је хоризонтална.

б) Када је као стрма раван.

11. Открићем и коришћењем примитивног точка у потпуности је елиминисано трење клизања и замењено трењем котрљања.

ТАЧНО

НЕТАЧНО

12. Старо-римски роб добио је задатак да веома тежак терет пребаци са једног места на друго, дуж римског друма.

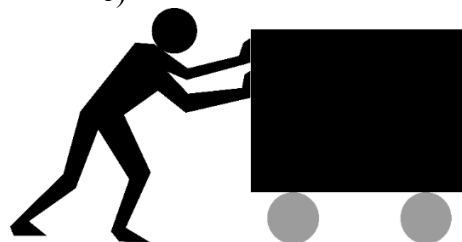
У првом случају терет је постављен на колица са примитивним точковима, у другом случају испод терета су постављени ваљци, а у трећем случају су испод терета постављене санке.

Поређати ове начине пребацивања терета од *најефикаснијег* ка *најмање ефикасном*.

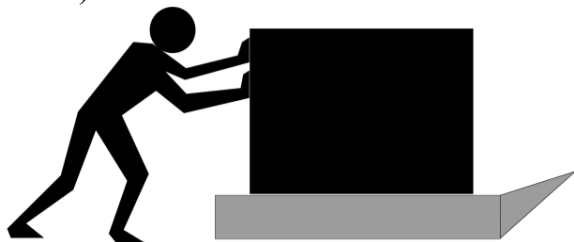
а)



б)

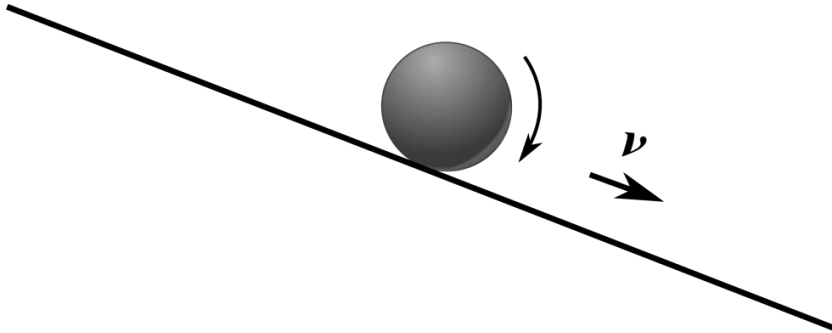


в)

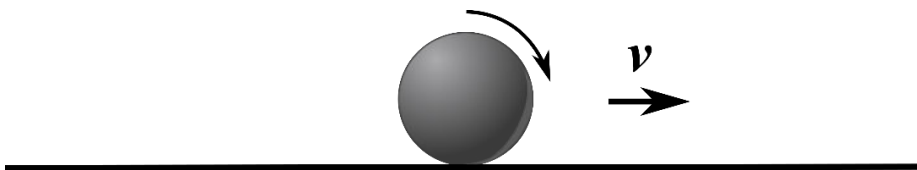


Одговор: _____ ; _____ ; _____

13. Нацртати како делује сила трења на тело у ситуацијама приказаним на сликама. У оба случаја, кугла се котрљања без клизања, и деформације кугле и подлоге су занемарљиви.



14. Нацртати како делује сила трења на тело у ситуацијама приказаним на сликама. У оба случаја, кугла се котрљања без клизања, и деформације кугле и подлоге су занемарљиви.



15. Да ли је лакше покренути терет из мировања, или га вући константном брзином?
а) Лакше је терет покренути из мировања.
б) Лакше је вући терет константном брзином.
16. Ако гурамо велики дрвени сандук пун песка преко наведених подлога, у ком случају ће трење клизања бити најмање?
а) лед;
б) песак;
в) шмиргла;
г) асфалт;
д) њива.

Литература

- [1] Lazar Radenkovic, Milan Milosevic, and Ljubisa Nesic. Physics of powerlifting: Bar force profile during deadlift using video analysis and accelerometers. *European Journal of Physics*, September 2020.
- [2] Lazar Radenković and Ljubiša Nešić. The physics of powerlifting. *European Journal of Physics*, 39(3):034002, May 2018.
- [3] Lazar Radenković and Ljubiša Nešić. Ground reaction force in rigid body dynamics. In *Conference Proceedings CSPM 2018*, pages 89–93, Ohrid, Macedonia, 27-30 septembra 2018. Society of Physicists of Macedonia.
- [4] Lazar Radenković, Miodrag Radović, and Ljubisa Nešić. Comparing textual, visual and practical methods for teaching physics. *Facta universitatis - series: Physics, Chemistry and Technology*, 16(3):267–283, 2018.
- [5] Ljubiša Nešić and Lazar Radenković. Kontaktne sile u dinamici krutog tela. In *Zbornik Radova 6. Međunarodne Konferencije o Nastavi Fizike u Srednjim Školama*, pages 165–171, Aleksinac, 2018.
- [6] Ljubiša Nešić and Lazar Radenković. Obrazovni konstruktivizam i nastava fizike. In *Nastava Fizike 5*, 2017.
- [7] Lazar Radenković, Milan Milošević, and Ljubiša Nešić. How plate choice affects powerlifting performance. In *Prehrana, Zdravlje in Gibanje*, Rakičan, Slovenia, 2019.
- [8] Lazar Radenković, Ljubiša Nešić, and Robert Repnik. Razvoj konceptualnog testa o trenju. In *Zbornik Radova 7. Međunarodne Konferencije o Nastavi Fizike u Srednjim Školama*, pages 306–314, Aleksinac, 2019.

- [9] Lazar Radenković and Ljubiša Nešić. Fizika dizanja tegova. In *Zbornik Radova 6. Međunarodne Konferencije o Nastavi Fizike u Srednjim Školama*, pages 209–213, Aleksinac, 2018.
- [10] Lazar Radenković and Ljubiša Nešić. Algoritam za rešavanje zadataka – korak po korak do tačnog rešenja. In *Zbornik Radova Sa 5. Međunarodne Konferencije o Nastavi Fizike u Srednjim Školama*, pages 169–172, Aleksinac, 3.
- [11] Ljubiša Nešić, Lazar Radenković, and Miloš Jonić. Trenje – od složene nauke do Časa fizike. In *Nastava Fizike 3*, pages 203–2012, Zlatibor, 2016.
- [12] Ljubiša Nešić and Lazar Radenković. Časopis Nastava fizike i njegov značaj za metodiku nastave fizike. In *Nastava Fizike 3*, pages 193–201, Zlatibor, 2016.
- [13] Lazar Radenković and Ljubiša Nešić. Učenička predubeđenja u oblasti klasične relativnosti. In *Zbornik Radova Sa 3. Međunarodne Konferencije o Nastavi Fizike u Srednjim Školama*, Aleksinac, February 2015.
- [14] Lazar Radenković and Ljubiša Nešić. Razvoj konceptualnog testa za oblast Galilejeve relativnosti – probno testiranje. In *Nastava Fizike: Zbornik Radova Sa Republičkog Seminara o Nastavi Fizike*, pages 98–107, Zlatibor, 14.
- [15] Ljubiša Nešić and Lazar Radenković. *FIZIKA 1: Priručnik Za Nastavnike Fizike Za Prvi Razred Gimnazije*. Klett, Beograd, 2015.
- [16] Ljubiša Nešić and Lazar Radenković. *FIZIKA 3: Priručnik Za Nastavnike Fizike Za Treći Razred Gimnazije*. Klett, Beograd, 2015.
- [17] Robert Celec. *Health in the Interactive Relationship Between Nutrition and Exercise*. Verlag Dr. Kovač, Hamburg, 2020.
- [18] Božidar Milić. *Kurs Klasične Teorijske Fizike I Deo: Njutnova Mehanika*. Studentski trg, Beograd, second edition, 1997.
- [19] Chadwick Young, Kaisa Young, Gavin Buxton, and Armand Buzzelli. Field Day at the Rec: Working Out with Physics. *The Physics Teacher*, 55(3):155–158, March 2017.
- [20] Jearl Walker, Robert Resnick, and David Halliday. *Fundamentals of Physics*. Wiley, Hoboken, NJ, 10th edition edition, 2014.

- [21] Hugh D. Young, Roger A. Freedman, A. Lewis Ford, and Francis Weston Sears. *Sears and Zemansky's University Physics: With Modern Physics*. Pearson, Boston, 14th edition edition, 2016.
- [22] International Powerlifting Federation. Technical Rules Book. <http://www.powerlifting-ipf.com/rulescodesinfo/technical-rules.html>, 2017.
- [23] International Powerlifting Federation. Records. <http://www.powerlifting-ipf.com/championships/records.html>, 2017.
- [24] J Siewe, J Rudat, M Röllinghoff, U J Schlegel, P Eysel, and J W -P Michael. Injuries and Overuse Syndromes in Powerlifting. *International Journal of Sports Medicine*, 32(09):703–711, 2011.
- [25] Ulrika Aasa, Ivar Svartholm, Fredrik Andersson, and Lars Berglund. Injuries among weightlifters and powerlifters: A systematic review. *British Journal of Sports Medicine*, 51(4):211–219, 2017.
- [26] Justin Keogh, Patria A. Hume, and Simon Pearson. Retrospective injury epidemiology of one hundred one competitive Oceania power lifters: The effects of age, body mass, competitive standard, and gender. *The Journal of Strength and Conditioning Research*, 20(3):672–81, 2006.
- [27] A D Faigenbaum and G D Myer. Resistance training among young athletes: Safety, efficacy and injury prevention effects. *British Journal of Sports Medicine*, 44(1):56–63, 2010.
- [28] John F Graham. Back Squat. *Strength and Conditioning Journal*, 23(5):28, 2001.
- [29] John F Graham. Bench Press Barbell. *Strength and Conditioning Journal*, 25(3):50–51, 2003.
- [30] John F Graham. Exercise: Deadlift. *Strength and Conditioning Journal*, 22(5):18, 2000.
- [31] Greg Nuckols. How to Deadlift: The Definitive Guide. <https://www.strongerbyscience.com/how-to-deadlift/>, 2017.
- [32] Greg Nuckols. How to Bench: The Definitive Guide. <https://www.strongerbyscience.com/how-to-bench/>, 2017.

- [33] Greg Nuckols. How to Squat: The Definitive Guide. <https://www.strongerbyscience.com/how-to-squat/>, 2017.
- [34] Lars Berglund, Björn Aasa, Jonas Hellqvist, Peter Michaelson, and Ulrika Aasa. Which Patients With Low Back Pain Benefit From Deadlift Training? *The Journal of Strength and Conditioning Research*, 29(7):1803, 2015.
- [35] David Holmberg, Henrik Crantz, and Peter Michaelson. Treating persistent low back pain with deadlift training – A single subject experimental design with a 15-month follow-up. *Advances in Physiotherapy*, 14(2):61–70, 2012.
- [36] RD Dickerman, R Pertusi, and GH Smith. The upper range of lumbar spine bone mineral density? An examination of the current world record holder in the squat lift. *International journal of sports medicine*, 21(7):469–470, 2000.
- [37] Joseph Hamill, Kathleen Knutzen, and Timothy R. Derrick. *Biomechanical Basis of Human Movement*. Wolters Kluwer Health, Philadelphia, 4th edition edition, 2015.
- [38] D. Gordon E. Robertson, Graham E. Caldwell, Joseph Hamill, Gary Kamen, and Saunders N. Whittlesey. *Research Methods in Biomechanics*. Human Kinetics, Champaign, Illinois, second edition edition, 2014.
- [39] Eleiko. IPF Powerlifting Competition Discs. <http://www.eleiko.se/en/product.aspx?articleCode=3000231&cn=1>, 2017.
- [40] Open Source Physics. Tracker. <https://physlets.org/tracker/>, 2019.
- [41] Russell Standish. SciDAVis. <http://scidavis.sourceforge.net/>, 2019.
- [42] Stanley Plagenhoef, Gaynor F Evans, and Thomas Abdelnour. Anatomical data for analyzing human motion. *Research quarterly for exercise and sport*, 54(2):169–178, 1983.
- [43] Don B. Chaffin. A computerized biomechanical model—Development of and use in studying gross body actions. *Journal of Biomechanics*, 2(4):429–441, October 1969.

- [44] Stuart M. McGill and Robert W. Norman. Dynamically and statically determined low back moments during lifting. *Journal of Biomechanics*, 18(12):881–885, January 1985.
- [45] Jeffrey Lander, Leslie Simonton, and Joel Giacobbe. The effectiveness of weight-belts during the squat exercise. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 22(1):117–126, 1990.
- [46] Thomas M. McLaughlin, Thomas J. Lardner, and Charles J. Dillman. Kinetics of the Parallel Squat. *Research Quarterly. American Alliance for Health, Physical Education and Recreation*, 49(2):175–189, May 1978.
- [47] J Cholewicki, SM McGill, and RW Norman. Lumbar spine loads during the lifting of extremely heavy weights. *Lumbar spine loads during the lifting of extremely heavy weights.*, 1991.
- [48] R. F. Escamilla, A. C. Francisco, G. S. Fleisig, S. W. Barrentine, C. M. Welch, A. V. Kayes, K. P. Speer, and J. R. Andrews. A three-dimensional biomechanical analysis of sumo and conventional style deadlifts. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 32(7):1265–1275, July 2000.
- [49] RF Escamilla, GS Fleisig, and TM Lowry. A three-dimensional biomechanical analysis of the squat during varying stance widths. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 33(6):984–98, 2001.
- [50] Beth A. Lindsey, Paula R. L. Heron, and Peter S. Shaffer. Student understanding of energy: Difficulties related to systems. *American Journal of Physics*, 80(2):154–163, February 2012.
- [51] Lane Seeley, Stamatis Vokos, and Eugenia Etkina. Examining physics teacher understanding of systems and the role it plays in supporting student energy reasoning. *American Journal of Physics*, 87(7):510–519, July 2019.
- [52] John W. Jewett. Energy and the Confused Student I: Work. *The Physics Teacher*, 46(1):38–43, January 2008.
- [53] John W. Jewett. Energy and the Confused Student II: Systems. *The Physics Teacher*, 46(2):81–86, February 2008.
- [54] John W. Jewett. Energy and the Confused Student III: Language. *The Physics Teacher*, 46(3):149–153, March 2008.

- [55] John W. Jewett. Energy and the Confused Student IV: A Global Approach to Energy. *The Physics Teacher*, 46(4):210–217, April 2008.
- [56] John W. Jewett. Energy and the Confused Student V: The Energy/Momentum Approach to Problems Involving Rotating and Deformable Systems. *The Physics Teacher*, 46(5):269–274, May 2008.
- [57] Eugene Hecht. Understanding energy as a subtle concept: A model for teaching and learning energy. *American Journal of Physics*, 87(7):495–503, July 2019.
- [58] Ruth Chabay, Bruce Sherwood, and Aaron Titus. A unified, contemporary approach to teaching energy in introductory physics. *American Journal of Physics*, 87(7):504–509, July 2019.
- [59] TJ Piper and MA Waller. Variations of the Deadlift. *Variations of the Deadlift.*, 2001.
- [60] S Bird and B Barrington-Higgs. Exploring the deadlift. *Strength & Conditioning Journal*, 32(2), 2010.
- [61] M Hales. Improving the deadlift: Understanding biomechanical constraints and physiological adaptations to resistance exercise. *Improving the deadlift: Understanding biomechanical constraints and physiological adaptations to resistance exercise*, 2010.
- [62] Kyung Park and Don Chaffin. A Biomechanical Evaluation of Two Methods of Manual Load Lifting. *A I I E Transactions*, 6(2), 1974.
- [63] Don Chaffin and William Baker. A Biomechanical Model for Analysis of Symmetric Sagittal Plane Lifting. *A I I E Transactions*, 2(1), 1970.
- [64] Ferrari. F8 Spider. <https://www.ferrari.com/en-EN/auto/car-range>, 2020.
- [65] Paul W. Winwood, John B. Cronin, Scott R. Brown, and Justin W. L. Keogh. A Biomechanical Analysis of the Farmers Walk, and Comparison with the Deadlift and Unloaded Walk. *International Journal of Sports Science & Coaching*, 9(5):1127–1143, October 2014.

- [66] Paul A Swinton, Ray Lloyd, Justin W Keogh, Ioannis Agouris, and Arthur D Stewart. A biomechanical comparison of the traditional squat, powerlifting squat, and box squat. *A biomechanical comparison of the traditional squat, powerlifting squat, and box squat.*, 26(7):1805–1816, 2012.
- [67] Thomas M. McLaughlin and Nels H. Madsen. Bench Press: Bench press techniques of elite heavyweight powerlifters. *Strength & Conditioning Journal*, 6(4), 1984.
- [68] Gregory J. Wilson, Bruce C. Elliott, and Graham K. Kerr. Bar Path and Force Profile Characteristics for Maximal and Submaximal Loads in the Bench Press. *International Journal of Sport Biomechanics*, 5(4):390–402, November 1989.
- [69] Vernier. Go Direct® Force and Acceleration Sensor. <https://www.vernier.com/products/sensors/force-sensors/gdx-for/>, 2019.
- [70] Vernier. Graphical Analysis™ 4. <https://www.vernier.com/products/software/graphical-analysis/>, 2019.
- [71] RWTH Aachen University. Phyphox. <https://phyphox.org/>, 2020.
- [72] S Staacks, S Hütz, H Heinke, and C Stampfer. Advanced tools for smartphone-based experiments: Phyphox. *Physics Education*, 53(4):045009, July 2018.
- [73] Phyphox. Phyphox coordinate system. <https://phyphox.org/sensors/>, 2020.
- [74] Vernier. Go Direct® Force and Acceleration Sensor User Manual. <https://www.vernier.com/manuals/gdx-for/>, 2020.
- [75] Gregory Douglas. *Classical Mechanics: An Undergraduate Text*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2006.
- [76] Colleen Lanz Countryman. Familiarizing Students with the Basics of a Smartphone’s Internal Sensors. *The Physics Teacher*, 52(9):557–559, December 2014.
- [77] Mats Braskén and Ray Pörn. Studying rotational dynamics with a smartphone—accelerometer versus gyroscope. *Physics Education*, 52(4):045024, July 2017.

- [78] George B. Arfken and Hans-Jurgen Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, Boston, 6th ed edition, 2005.
- [79] RDocumentation.
<https://www.rdocumentation.org/packages/pracma/versions/1.9.9/topics/movavg>, 2020.
- [80] David A. Winter. *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. Wiley, Hoboken, N.J, 4th ed edition, 2009.
- [81] Anna Hajdusianek. Simple Friction Experiments. In *Simple Friction Experiments*, volume 17, 2012.
- [82] A Pinto and M Fiolhais. Rolling cylinder on a horizontal plane. *Rolling cylinder on a horizontal plane*, 2001.
- [83] Jack R. Fraenkel and Norman E. Wallen. *How to Design and Evaluate Research in Education*. McGraw-Hill, New York, NY, 7th ed edition, 2009.
- [84] Mirko Marušić and Josip Sliško. Effects of two different types of physics learning on the results of CLASS test. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 8(1), February 2012.
- [85] N. G. Holmes, Jack Olsen, James L. Thomas, and Carl E. Wieman. Value added or misattributed? A multi-institution study on the educational benefit of labs for reinforcing physics content. *Physical Review Physics Education Research*, 13(1), May 2017.
- [86] Wolff-Michael Roth, Campbell J. McRobbie, Keith B. Lucas, and Sylvie Boutonn. Why may students fail to learn from demonstrations? A social practice perspective on learning in physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 34(5):509–533, May 1997.
- [87] W. S. Toothacker. A critical look at introductory laboratory instruction. *American Journal of Physics*, 51(6):516–520, June 1983.
- [88] Carl Wieman and N. G. Holmes. Measuring the impact of an instructional laboratory on the learning of introductory physics. *American Journal of Physics*, 83(11):972–978, November 2015.
- [89] OECD. *Students, Computers and Learning: Making the Connection*. PISA. OECD, September 2015.

- [90] IA Halloun and D Hestenes. The initial knowledge state of college physics students. *The initial knowledge state of college physics students*, 1985.
- [91] Vera Prokić. *Sila Trenja – Od Fundamentalnih Procesu Do Makroskopskih Zakona*. Magistarski rad, of Niš, 2014.
- [92] S Prasitpong, R Chitaree, and S Rakkapao. Studying the frictional force directions via bristles. *Physics Education*, 45(6):602–610, November 2010.
- [93] Chia Teck Chee. Common Misconceptions in Frictional Force among University Physics Students. *Teaching and Learning*, 16(2):107–116, 1996.
- [94] Singha Prasitpong. *The Frictional Force Learning Module Based on Hands-on and Interactive Lecture Demonstration Approaches*. PhD, Mahidol University, Thailand, 2012.
- [95] Puspita Septim Wulandari, C Cari, and Nonoh Siti Aminah. Student's Conception about Friction Force Direction in Physics Education Sebelas Maret University. *Journal of Physics: Theories and Applications*, 1(2):97, October 2017.
- [96] O Oktay and D Kaltakci. How pre-service physics teachers interpret static and kinetic friction: A laboratory experiment. In *How Pre-Service Physics Teachers Interpret Static and Kinetic Friction: A Laboratory Experiment*, Reims, France, 2010.
- [97] Clarivate Analytics. Web of Science. webofknowledge.com.
- [98] Google. Google Scholar. <https://scholar.google.com/>.
- [99] Georg Hähner and Nicholas Spencer. Rubbing and Scrubbing. *Physics Today*, 51(9), 1998.
- [100] U Besson. Historical scientific models and theories as resources for learning and teaching: The case of friction. *Historical scientific models and theories as resources for learning and teaching: the case of friction*, 2013.
- [101] Eric Mazur. *The Principles & Practice of Physics*. Pearson, Boston, 2015.

- [102] Paulo Simeão Carvalho and Adriano Sampaio e Sousa. Rotation in secondary school: Teaching the effects of frictional force. *Physics Education*, 40(3):257–265, March 2005.
- [103] A Salazar, A Sanchez-Lavega, and M A Arriandiaga. Is the frictional force always opposed to the motion? *Physics Education*, 25(2):82–85, March 1990.
- [104] Besson, Ugo, Lidia Borghi, Anna De Ambrosis, and Paolo Mascheretti. How to teach friction: Experiments and models. *How to teach friction: Experiments and models*, 75(12):1106–1113, 2007.
- [105] Anna De Ambrosis, Massimiliano Malgieri, Paolo Mascheretti, and Pasquale Onorato. Investigating the role of sliding friction in rolling motion: A teaching sequence based on experiments and simulations. *Investigating the role of sliding friction in rolling motion: a teaching sequence based on experiments and simulations*, 36(3):35020, 2015.
- [106] Raymond A. Serway, Jerry S. Faughn, and Chris Vuille. *College Physics*. Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, CA, 8th ed edition, 2009.
- [107] Randall Dewey Knight. *Physics for Scientists and Engineers: A Strategic Approach with Modern Physics*. Pearson, Boston, fourth edition edition, 2017.
- [108] D Grech and Z Mazur. The amazing cases of motion with friction. *The amazing cases of motion with friction*, 2001.
- [109] Ivan Aničin, Srđan Verbić, Marija Krneta, Vladimir Marić, Božidar Nikolić, Slaviša Stanković, and Radmila Tošović. *Obrazovni Standardi Za Kraj Obaveznog Obrazovanja Za Nastavni Predmet FIZIKA*. Ministarstvo prosvete Republike Srbije, Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja, Beograd, 2010.
- [110] Zhao Deng, Alex Smolyanitsky, Qunyang Li, Xi-Qiao Feng, and Rachel J. Cannara. Adhesion-dependent negative friction coefficient on chemically modified graphite at the nanoscale. *Nature Materials*, 11(12):1032–1037, December 2012.
- [111] Bingtong Liu, Jin Wang, Shuji Zhao, Cangyu Qu, Yuan Liu, Liran Ma, Zhihong Zhang, Kaihui Liu, Quanshui Zheng, and Ming Ma. Negative friction coefficient in microscale graphite/mica layered heterojunctions. *Science Advances*, 6(16):eaaz6787, April 2020.

- [112] Esben Thormann. Negative friction coefficients. *Nature Materials*, 12(6):468–468, June 2013.
- [113] ipb. Okružno takmičenje iz fizike za učenike srednjih Škola Školske 2010/2011 godine, I razred.
http://takmicenja.ipb.ac.rs/zadaci/2011_1_okruzno.pdf, 2011.
- [114] Boris Grbić, Marko Đorđević, Mirjana Popović-Božić, and Marko Stošić. *Međunarodne Olimpijade Iz Fizike 1967-1996, Zbirka Zadataka Sa Rešenjima*. Zavod za udžbanike i nastavna sredstva, Društvo fizičara Srbije, 2000.
- [115] ipb. Republičko takmičenje iz fizike za učenike srednjih Škola Školske 2005/2006 godine, I razred.
http://takmicenja.ipb.ac.rs/zadaci/2006_1_republicko.pdf, 2006.
- [116] L Vozdecký, J Bartoš, and J Musilová. Rolling friction—models and experiment. An undergraduate student project. *Rolling friction—models and experiment. An undergraduate student project*, 35(5):55004, 2014.
- [117] Rod Cross. Coulomb’s law for rolling friction. *Coulomb’s law for rolling friction*, 84(3):221–230, 2016.
- [118] Rod Cross. Simple measurements of rolling friction and deformation when $\mu r < 0.001$. *Simple measurements of rolling friction and deformation when $\mu r < 0.001$* , 36(6):65018, 2015.
- [119] Willard Sperry. Placing the forces on free-body diagrams. *Placing the forces on free-body diagrams*, 32(6):353–353, 1994.
- [120] Ivica Aviani, Nataša Erceg, and Vanes Mešić. Drawing and using free body diagrams: Why it may be better not to decompose forces. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 11(2):020137, December 2015.
- [121] A Puri. The Art of Free-Body Diagrams. *The Art of Free-Body Diagrams.*, 1996.
- [122] Larry D. Kirkpatrick and Gregory E. Francis. *Physics: A Conceptual World View*. Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, CA, 7th ed edition, 2010.

- [123] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2008.
- [124] Brian Lane. Why can't physicist draw FBDs. *The Physics Teacher*, 31(4):216–217, April 1993.
- [125] ipb. Okružno takmičenje iz fizike za učenike srednjih Škola Školske 2011/2012 godine, I razred.
http://takmicenja.ipb.ac.rs/zadaci/2012_1_okruzno.pdf, 2012.
- [126] A. N. Matveev. *Mechanics and Theory of Relativity*. Mir Publishers, Moscow, rev. from the 1986 russian ed edition, 1989.

Биографија

Лазар Г. Раденковић рођен је 1989. године у Нишу. Основну школу и гимназију (Одељење за ученике са посебним способностима за физику) завршио је са максималном просечном оценом, са преко 30 награда на званичним такмичењима из математике и физике.

Основне и мастер студије физике завршио је на Природно-математичком факултету у Нишу са просечном оценом 9,69 на основним (180 ЕСПБ) и 9,96 на мастер студијама (модул Општа физика, остварено 133 ЕСПБ). Мастер рад *Концептуални шесћови у настави механике* урађен је 2014. године под менторством професора Љубише Нешића, и одбрањен са оценом 10.

На докторским студијама физике остварио је просечну оцену 9,91.

Такође поседује сертификат енглеског језика, ниво Б2.

Од 2015. године, запошљен је на Природно-математичком факултету у Нишу као асистент за групу методичких предмета. Поред тога, у периоду 2015-2018. био је ангажован у гимназији Бора Станковић у Нишу, као наставник физике у одељењу за обдарене ученике у рачунарској гимназији и билингвалном одељењу.

Од 2018. год. ангажован је на пројекту Министарства просвете науке и технолошког развоја под називом *Геометрија и топологија многострукости, класична механика и инстепабилни динамички системи* (ОИ74020).

Учествовао је на више интернационалних конференција у Србији, Словенији и Македонији, као предавач и реализатор радионица. Такође је учествовао у организацији конференција, писању и реализацији мањих пројеката, раду комисија за такмичењима из физике за ученике средњих школа, био је секретар Департмана за физику у школској 2015/16. години, 2015-2017. год. обављао је функцију секретара часописа *Настава физике*, и члан је Друштва физичара Ниш од 2015. године

Публиковао је два рада категорије М23, од којих је један уврштен у листу 20 најинтересантнијих радова у 2018. години за часопис *Еуроџеан Јоурнал оф Пхисицс*. Поред тога, публиковао је један рад у

категорији М33 и мноштво радова у категоријама М60, и коаутор је два приручника за наставнике средњих школа.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Настава уводног курса механике у средњој школи и на факултету – искуства и начини за њено унапређење

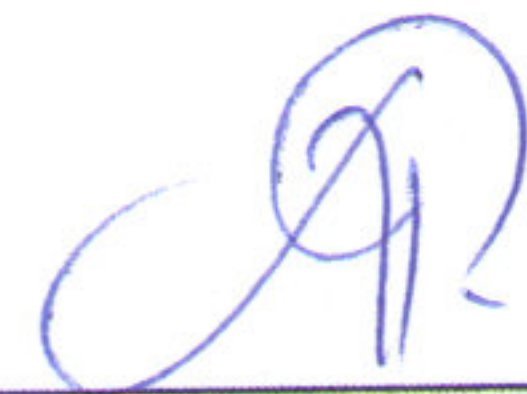
Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
- 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, 5.10.2020.

Потпис аутора дисертације:



Лазар Г. Раденковић

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Настава уводног курса механике у средњој школи и на факултету – искуства и начини за њено унапређење

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 5.10.2020.

Потпис аутора дисертације:



Лазар Г. Раденковић

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације:

**Настава уводног курса механике у средњој школи и на факултету –
искуства и начини за њено унапређење**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 5.10.2020.

Потпис аутора дисертације:



Лазар Г. Раденковић