УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
МЕТОДИКА НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

ВИЗУАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНИХ САДРЖАЈА ИЗ ВИШЕСТРУКИХ ИНТЕГРАЛА – КОГНИТИВНИ КОНФЛИКТИ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментор: Проф. др Ђурђица Такачи   Кандидат: Александар Миленковић

Нови Сад, 2021. године

Предговор

У овој докторској дисертацији елаборирано је вишегодишње истраживање које се односи на примену дигиталних технологија у настави математатике у високом образовању. У истраживањима су коришћене различите технологије, у смислу степена интеракције студената са дигиталним садржајима, типовима дигиталних садржаја и пружања могућности за мобилним учењем, односно учењем на даљину, све са циљем унапређења квалитета знања и постигнућа студената у области вишеструких интеграла. Велики број истраживања бави се применом, односно имплементацијом савремених технологија у наставни процес уопште, па и у наставу математике, док су истраживања која се конкретно баве унапређивањем наставе из области вишеструких интеграла слабо заступљена у литератури. У складу са тиме, дошао сам на идеју да осмислим нове методске приступе и истражим могућности њихове примене са циљем да се на тај начин студентима олакша усвајање потребних знања и умења.

У докторској дисертацији описане су наставне методе које се заснивају на примени интерактивних наставних материјала у одређивању области по којој се врши интеграција и одређивању граница променљивих приликом израчунавања двоструких и троструких интеграла. Коришћењем адекватних динамичких софтвера, односно софтверских пакета, израђени су наставни материјали који се могу користити у настави математике на универзитетском нивоу. Спроведена су појединачна истраживања са циљем да се испита и утврди степен утицаја примене нових приступа у визуализацији наставних садржаја који се односе на вишеструке интеграле. Детаљно су статистички анализирани резултати сваког од поменутих истраживања. На основу добијених резултата изведени су закључци и дата закључна разматрања, као и смернице за имплементацију датих методских приступа у настави и евентуална будућа истраживања о визуализацији наставних садржаја.

Огромну захвалност дугујем мојој менторки проф. др Ђурђици Такачи која ми је пружила заиста драгоцену помоћ, савете и подршку, имала пуно стрпљења и разумевања за мене током спровођења истраживања, израде научних радова и израде ове дисертације. Њено знање, савети, сугестије и стручна помоћ дали су дисертацији коначни облик. Захваљујем се и свим колегама са Института за математику и информатику Природно – математичког факултета у Крагујевцу, посебно професорима проф. др Браниславу Поповићу, доц. др Слађани Димитријевић и проф. др Марији Станић који су заслужни за то што сам наставио своје стручно усавршавање, као и на свим пријатељским саветима током докторских студија. Желим да се захвалим својој породици, супрузи Јовани, ћерки Лени и сину Луки, који су и моји највећи покретачи, родитељима Мирјани и Зорану, брату Стефану и његовој породици који су увек показивали стрпљење и веру у мој рад.

Садржај

1. Увод

Задатак наставе генерално, самим тиме и наставе математике се не огледа у томе да ученици, односно студенти, запамте велики број правила, појмова и формула без разумевања и тако их репродукују, већ да одговарајуће, њима примерене, наставне садржаје усвајају са разумевањем, повезујући их са већ усвојеним наставним садржајима и тиме формирају основу за усвајање нових појмова, правила и процедура. Образовни системи широм света су, увидевши промене и потребе савременог друштва, чињеницу да велики број тренутно најтраженијих занимања није уопште постојао до пре само пар деценија, направили одређени заокрет у својим наставним плановима и програмима у смислу да је циљ образовати и припремати своје млађе нараштаје да знање које су стекли, изучавајући различите науке, повезују и на тај начин се припремају да својим знањем и компетенцијама одговоре на потенцијалне изазове будућности. Реформе у образовању су се односиле на промене у наставним плановима и наставним програмима, али и развијању међупредметних компетенција ученика кроз одређене промене у наставним методама и коришћењем различитих наставних средстава у настави. Да би реформе у образовању довеле до побољшања знања, умења и способности ученика/студената, неопходно је пре свега време, али и методичко оснаживање и осавремењивање наставника, без обзира на то са којим узрастом ученика раде, односно упознавање наставника са применом и предностима, али и недостацима примене дигиталних технологија и различитих теорија учења, како би у складу са условима у којим раде, наставни процес учинили што ефикаснијим.

Разлози за промене, и начин на који ће се реформе спроводити би требало да буду научно утемељене и експериментално потврђене. Приступ за који је вероватно највећи број дидактичара и истраживача веровао да у великој мери има потенцијал да допринесе побољшању квалитета знања, умења и постигнућа ученика јесте конструктивистичка теорија учења (Bodner, 1986; Von Glasersfeld, 1995; Eby, Herrel & Jordan, 2005; Bada & Olusegun 2015). Конструктивистичко учење представља мисаоне процесе од стране ученика који подразумевају активно конструисање знања и разумевања повезаности одговарајућих концепата код ученика, путем рефлексије и апстракције.

С друге стране, многи истраживачи у образовању су препознали да технолошки развој, односно доступност великог броја софтверских пакета који се могу користити у предметној настави, конкретно настави математике, може имати позитиван утицај на ставове ученика према математици и још важније - довести до унапређења наставе математике, као и на побољшање знања, разумевања и постигнућа ученика/студената (Huk, 2006; Cochrane 2010; Wiwatanapataphee, Noinang, Wu & Nuntadilok, 2010; Marshall et al. 2012; Cheung & Slavin 2013; Fabian, Topping & Barron, 2018). У бројним радовима из области методике наставе математике говори се о позитивном утицају примене рачунара за визуализацију математичких концепата и појмова (Fischbein, 1987; Arcavi, 2003; Macnab, Phillips & Norris, 2012;), посебно из математичке анализе (Zimmermann, 1991; Habre, 1999; Sevimli & Delice, 2011). Бројна истраживања се баве унапређивањем визуализације наставних садржаја коришћењем рачунара и одговарајућих софтверских пакета и значају рада у компјутерском окружењу (Wiwatanapataphee, Noinang, Wu & Nuntadilok, 2010; Zakaria & Salleh, 2015). У студијама које се односе на утицај примене софтверских пакета приликом подучавања и учења садржаја из математичке анализе акценат је стављен на: адекватну примену софтверских пакета у наставном процесу; утицај софтвера на ставове, интересовања и мотивацију студената за рад; развијање теоријског знања студената и могућности примене тог знања.

Када је реч о математичкој анализи (калкулусу), реформатори образовања су веровали да би студентима требало да се пружи могућност да истражују дате математичке концепте када су они представљени на различите начине (различитим репрезентацијама), симболички, нумерички и графички (Ganter, 2001; Ross, 1996; Smith, 1994). Такав концепт учења и подучавања подразумева интеракцију студената са наставним материјалом, константну интеракцију кроз постављање и давање одговора на постављена питања, окружење које подразумева активно учење неопходно за учење и подучавање математичке анализе, а не само пасивно праћење излагања од стране наставника. Овакав вид учења се у основи базира на конструктивистичком учењу, учењу у коме појединац сам креира, односно конструише своје знање.

Студије које су се бавиле ефектима промена у методама и теорији учења су се разликовале у самим методама рада, али оно што је заједничко за највећи број радова је коришћење вишеструких репрезентација математичких појмова и примена дигиталне технологије у раду са студентима. Пошто је познавање математичке анализе претпоставка за успех у многим научним областима природних и техничко-технолошких наука, није довољно да студенти само меморишу формуле јер је потребно разумети концепте и идеје математичке анализе, а не само процедуре. Неопходно је дакле да „студенти доживе концепте из калкулуса у интеракцији симболичких, нумеричких и графичких форми“ (Smith, 1994). У значајном броју студија су илустроване наставне методе у којима су се за представљање датих појмова користила два или три облика репрезентација (симболичке, нумеричке и графичке) одговарајућих појмова. У датим студијама се подразумевала интеграција технологије, у највећој мери у облику примене одређених софтвера како би се обезбедиле вишеструке репрезентације појмова и те студије су показале да је одговарајући облик рада ефикасан у настави математичке анализе на универзитетском нивоу (Borba, 1993; Borba & Confrey, 1996; Herman, 2007).

У истраживањима која се баве разумевањем поступка интеграције, од стране студената, изражени су закључци да визуализација и цртање графика у 3D и успостављање везе између графичке и алгебарске репрезентације у простору представљају најтежи део у решавању вишеструких интеграла (Delice & Ergene, 2015). Такође, у радовима који се тичу значаја адекватне визуализације у математичкој анализи могу се наћи закључци да развијање способности за визуализацију код студената позитивно утиче на учинак студената приликом решавања одређених и вишеструких интеграла (Sevimli & Delice, 2011; Huang, 2015; Milenković, Takači & Božić, 2020). Бројна истраживања у овој области односе се на могућности развоја и модернизације софтвера у циљу постизања квалитетније визуелне репрезентације појмова (Božić, 2015).

Вишеструки интеграли, односно садржаји који се односе на вишеструке интеграле - појам вишеструког интеграла, израчунавање вишеструких интеграла и њихова примена представљају обавезан садржај на свим факултетима који школују будуће математичаре, а присутни су и у плановима и програмима математике на техничким и другим факултетима. Вишеструки интеграли имају примену у одређивању површине дела равни, одређивању запремине тела у простору, затим за одређивање масе тела са датом функцијом густине, за момент инерције итд. Такође, уз помоћ одговарајућих интегралних формула, одређени криволинијски и површински интеграли се своде на вишеструке интеграле.

Вишеструки интеграли представљају уопштење одређеног интеграла који студенти усвајају током средњошколског образовања и уводних курсева из математике на факултетима, па је њихово познавање предуслов за успешно праћење наставе из области вишеструких интеграла. За разумевање самог појма двоструког, односно троструког интеграла, неопходно је и познавање функција више промењливих, њихових графика, као и граничне вредности функције више промењливих. Такође, за решавање конкретних проблема и задатака студенти морају имати одговарајуће знање из аналитичке геометрије, конкретно да познају површи. Све у свему, потребно је доста предзнања као предуслов за адекватно праћење садржаја о вишеструким интегралима и наравно разумевање појма вишеструког интеграла, познавање особина, начина израчунавања, као и транслације координатног система и трансформације координатног система увођењем смена, где су смене помоћу поларних, односно цилиндричних и сферних координата од посебног значаја.

Искуства универзитетских наставника, говоре о томе да студенти неретко имају потешкоћа са разумевањем појма вишеструког интеграла, са израчунавањем двоструких и троструких интеграла, те да често уопште и не покушавају да одреде вредност вишеструких интеграла приликом полагања испита на стручним факултетима, а и када уложе напор, у великом броју случајева покажу неразумевање за дате појмове и несналажење приликом рачунских поступака. Када говоримо о проблемима са којима се студенти срећу приликом израчунавања неодређених и одређених интеграла, они се односе на одређивање примитивне функције, па се проблеми најчешће јављају услед незнања и мањка искуства студената које се односе на методе које се примењују за одређивање примитивне функције (метода смене, метода парцијалне интеграције, метода декомпозиције). Када је реч о вишеструким интегралима, најчешћа су два узорка услед којих долази до неуспеха студената. Један од њих се односи поново на одређивање примитивне функције, док се други односи на одређивање граница вишеструког интеграла. Када границе нису експлицитно дате, већ када је област интеграције одређена графицима функција и једначинама правих (када говоримо о двоструким интегралима), односно графицима функција више промењливих и површима (када је реч о троструким интегралима) студенти готово по правилу, имају проблем. Да би одредили границе приликом израчунавања вишеструких интеграла, студенти морају разумети односе геометријских скупова тачака датих алгебарском репрезентацијом. Поред тога, они морају разумети и како промене одређених параметара функције више променљивих утичу на геометријске особине графика функције, односно како промене параметара утичу на график површи.

1.1. Циљеви докторске дисертације

Применом рачунара, тачније софтверских пакета и апликација за мобилне телефоне за визуализацију функција више променљивих, односно графика површи, манипулацијом графика са параметрима, студенти могу посматрати промене графика насталих услед промена параметара. Такође, студенти имају и могућност да дате графичке репрезентације ротирају и транслирају, како би што боље разумели односе датих скупова тачака и њихових пресека, све са циљем тачног одређивања области интеграције и граница вишеструких интеграла. Манипулацијом интерактивних материјала направљених коришћењем одговарајућих софтверских пакета који илуструју прелазак на поларне координате (неопходних за решавање великог броја задатака из области двоструког интеграла), односно на цилиндричне и сферне координате (неопходних за решавање одговарајућих задатака из области троструког интеграла) студентима се указује прилика да заиста науче и разумеју како треба применити трансформације координатног система. Тиме се студентима пружа могућност да касније лакше препознају када треба увести одговарајућу смену и прецизније поставе границе за нове променљиве, након увођења одговарајуће смене. Применом софтверских пакета може се креирати и материјал који би илустровао двоструки интеграл, односно представио одређивање датог интеграла као одређивање запремине дела простора ограниченог функцијом две променљиве, одговарајућим цилиндром и делом равни, поделом на одговарајуће правоугле паралелепипеде. На тај начин би студенти могли, коришћењем датог интерактивног материјала, увидети да се прецизност у одређивању запремине повећава повећавањем броја поменутих призми, па би и теоријски разумели концепт двоструког интеграла са задатом подинтегралном функцијом, уз коришћење одговарајуће аналогије са концептом одређеног интеграла. Дакле, уз пажљиву и планирану примену софтверских пакета, студентима би се пружила прилика да утврде, продубе и систематизују знања која су раније усвојили, а која су неопходна за успешно рачунање вишеструких интеграла и повежу их са новим садржајима који се односе на вишеструке интеграле.

На основу изнетог, проистекла је идеја да се осмисли нови методски приступ у увођењу појма вишеструког интеграла, дакле у обради, а нарочито у увежбавању наставних садржаја везаних за вишеструке интеграле, који би омогућио да се у корелацији користе алгебарска и визуелна (као и вербална) репрезентација функција једне променљиве, кривих и правих, те функција више променљивих и површи. То би било постигнуто имплементацијом динамичког софтвера у процес обраде и увежбавања поменутих наставних садржаја. Такође, идеја је да нови методски приступ буде заснован на разним облицима учења, како учењу у групи, тако и у индивидуалном раду студената, са већом или мањом улогом наставника у наставном процесу.

Главни циљ ове докторске дисертације се огледа у осмишљавању методског приступа који је заснован на примени динамичких софтвера за визуализацију функција једне променљиве, функција више променљивих, кривих и површи за одређивање области интеграције вишеструких интеграла и граница датих променљивих, са циљем успешног решавања вишеструких интеграла и њихових примена од стране студената, односно са циљем подизања квалитета знања студената и разумевања одређених сегмената наставних садржаја из области интеграције функција више променљивих, као и тестирање ефеката новог методског приступа.

Поред главног циља дисертације, докторска теза се, у циљу пружања доприноса савременој методици наставе математике, бави и:

- Унапређивањем теоријских принципа учења у компјутерском окружењу и могућностима за његову примену у наставној пракси;
- Унапређивањем теоријских принципа примене вишеструких репрезентација функција, кривих и површи, затим теоријских принципа визуализације математичких појмова у равни и простору и визуализације наставних садржаја из математичке анализе у динамичком окружењу;
- Имплементацијом новог методског приступа у компјутерском окружењу у наставни процес;
- Израдом едукативних материјала који ће омогућити студентима изучавање вишеструких интеграла, тачније разумевање особина функција једне променљиве, функција више променљивих, кривих и површи као и њихових међусобних односа и заједничких скупова тачака, са циљем прецизног одређивања области по којој се врши интеграција, а затим и одређивања граница променљивих (наставни материјали израђени помоћу динамичких софтверских пакета – *Wolfram Mathematica* и *GeoGebra*);
- Осмишљавањем и прилагођавањем задатака који треба да омогуће квалитетну процену знања, умења и постигнућа студената у поменутој математичкој области.

Очекује се да ће реализација истраживачких радњи и активности значајно утицати код студената на:

- Стицање и продубљивање математичког знања неопходног за наставак даљег школовања и праћење савременог технолошког развоја;

- Развијање визуелног мишљења, способности разумевања просторних односа, интерпретације графичких приказа и способности графичког представљања одговарајућих математичких објеката;
- Развијање способности преласка са симболичке и вербалне репрезентације скупова тачака на визуелну и обратно;
- Развијање способности сагледавања проблема са различитих аспеката, примене стеченог знања на нове ситуације и способности критичког мишљења;
- Развијање способности логичког и критичког мишљења, закључивања и математичке аргументације;
- Развијање позитивног става према математици као науци са великим могућностима за примену у другим наукама и реалном окружењу.

Имајући у виду и услове у реализацији наставног процеса (у тренутку када ова дисертација добија свој коначни облик), изазване пандемијом корона вируса, преласком на наставу на даљину, очекује се и да ће осмишљени методски приступи описани у докторској дисертацији моћи да се имплементирају у наставни процес на универзитетском нивоу.

1.2. Организација рада

У другом поглављу дисертације дат је теоријски оквир докторске дисертације, односно преглед научних радова и студија које се односе на вишеструке репрезентације појмова (нарочито математичких појмова), затим на конструктивизам и педагошке импликације ове теорије учења. Такође, уведен је појам визуализације, анализом научних радова дидактике (методике) математике, као и педагогије и психологије, који су се бавили значајем визуализације математичких концепата уопште, затим разумевања просторних односа, мисаоног сналажења у простору и визуализације простора, специјално геометријских објеката представљених у простору, њихових међусобних односа и пресека. Потом је направљен упоредни преглед радова о значају визуализације функција (функција једне променљиве и функција више променљивих), визуализације кривих и површи, као и радова који се баве питањем визуализације у компјутерском, динамичком окружењу, односно на примену одређених софтверских пакета, а односе се на визуализацију наставних садржаја везаних за поменуте математичке концепте и улогу динамичке геометрије у обради ових садржаја (са нагласком на примену за одређивање одређених и нарочито вишеструких интеграла). Направљен је и преглед радова који се односе на учење, у литератури познато код именом мобилно учење и ефекте овог вида учења, нарочито у математици. На тај начин су представљене теоријске основе спроведених истраживања и дисертације.

У трећем поглављу изложен је нови методски приступ у обради наставних садржаја из двоструких интеграла применом динамичког софтвера за визуализацију датих наставних садржаја. Том приликом дигитални наставни садржаји који су пратили конкретне задатке су креирани у софтверском пакету *Wolfram Mathematica*, док су дигитални садржаји креирани са циљем да поспеше и теоријско знање студената креирани у софтверском пакету *GeoGebra*. Дате аплете студенти су могли да транслирају, ротирају, односно мењају перспективу из које посматрају одговарајуће геометријске објекте и њихове узајамне положаје у равни или простору, притом повезујући графичке репрезентације са алгебарским. Студентима је пружена и могућност манипулисања динамичким радним материјалима којима су представљене функције (криве и површи) са параметрима како би увидели на који начин промена вредности параметра у алгебарској репрезентацији математичког објекта утиче на промене геометријских особина датог објекта, тј. његове графичке репрезентације. Дати методски приступ је експериментално примењен у наставној пракси, а након тога су тестирањем студената мерени ефекти таквог експерименталног рада са студентима. Статистичка анализа резултата тестирања студената је такође изложена.

У четвртом поглављу описан је нешто другачији методски приступ који је имао сличан циљ као и претходни, а то је позитиван утицај на теоријско и процедурално знање студената о вишеструким интегралима, кроз визуализацију одговарајућих геометријских објеката у мултирепрезентативном окружењу. За разлику од истраживања описаног у трећем поглављу, где су промене у методи рада са студентима вршене у обради наставних садржаја из области двоструких интеграла, у овом истраживању промене су уведене у процес наставе двоструких, али и троструких интеграла. Још једна разлика у поређењу са претходним истраживањем огледала се у томе што су сви динамички материјали креирани у *GeoGebra*-и. Такође, студентима је пружена могућност да дате дигиталне садржаје користе на својим мобилним уређајима са интернет конекцијом, независно од времена и места на коме се налазе. Статистичка анализа резултата тестирања студената је такође дата, као и резултати анкете студената путем које су они износили своје виђење, ставове и мишљење о описаном методском приступу.

У петом поглављу описано је, треће у низу, истраживање о утицају визуализације наставних садржаја из области вишеструких (двоструких и троструких) интеграла. Нови методски приступ осмишљен је тако да студенти у већој мери активно уче, односно да се настава у већој мери ослања на конструктивистичку теорију учења, тако што су студенти све дигиталне садржаје креирали самостално (или радом у пару или мањим групама). Студенти су не само креирали мултирепрезентативна окружења користећи мобилне апликације *Graphing Calculator* и *3D Calculator* за конкретне задатке приликом њиховог решавања, како би успешно одредили области по којим се врши интеграција и како би одредили границе променљивих, већ су креирали и динамичке материјале са циљем да поспеше своје теоријско знање о увођењу смене помоћу поларних, затим цилиндричних и сферних координата, као и пресликавањима координатних система које тада настају. Статистичка обрада података добијених тестирањем студената, као и главни налази истраживања такође су изложени.

Закључна разматрања проистекла из наведених истраживања у настави математике, прецизније настави вишеструких интеграла, наведена су у шестом поглављу дисертације. Научни допринос истраживања, као и смернице за даља истраживања су такође изложене.

Сва истраживања описана у дисертацији спроведена су на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, у оквиру предмета Математика 3, а њима су обухваћени студенти друге године основних академских студија студијских програма: машинско инжењерство, аутомобилско инжењерство и војноиндустријско инжењерство. Наставни план и програм, као и наставни садржаји који се односе на вишеструке интеграле заједнички је за сва три студијска програма. Током реализације свих истраживања, студенти су били распоређени у две групе, експерименталну и контролну, при чему се (пред)знања студената пре спровођења нових методских приступа, у ниједном случају, нису статистички значајно разликовала. У првом истраживању студенти су, приликом методичке обраде наставних садржаја која се односе на вишеструке интеграле радили уз помоћ рачунара, док су у преостала два истраживања користили своје мобилне уређаје. По завршетку наставе, студенти обе (контролне и експерименталне) групе су тестирани тако што су решавали адекватне, исте задатке при чему ни у једном случају нису могли користити дигиталне технологије. Одговарајуће статистичке методе су примењене у обради и анализи података добијених у експерименталном делу истраживања. За обраду података коришћен је стастистички пакет SPSS.

1.3. Софтверски пакети коришћени у истраживањима

Wolfram Mathematica представља моћан рачунарски алгебарски систем (CAS) који је нашао своју примену у научним истраживањима у области математике, рачунарства и техничких наука, али и у настави. Графичке репрезентације математичких појмова су интегрисане у овај интерактивни, динамички софтвер, па *Wolfram Mathematica* омогућава визуализацију математичких појмова и идеја и омогућава прављење анимација. Израда интерактивних, визуелних модела у *Wolfram Mathematica*–и омогућава студентима да истражују сложене математичке концепте и овај софтвер има потенцијал у приближавању датих идеја студентима, омогућава боље разумевање концепата од стране студената, тестирање идеја и брзо стицање дубљег и бољег разумевања наставних садржаја који су студенти уз помоћ овог софтвера усвајали. Студенти могу, применом овог динамичког софтвера истраживати концепте и особине функција, матрица, различитих графика, табела, итд. Када је реч о могућностима *Wolfram Mathematica*-е за визуализацију, овај динамички софтвер допушта да графички прикази буду више или мање прозирни, затим омогућава креирање интерактивних материјала у равни и простору, параметарски задатих кривих и површи итд. На основу свега наведеног за истраживање спроведено у академским 2016/2017 и 2017/2018, за визуализацију наставних садржаја из области вишеструких интеграла, које би подразумевало креирање дигиталних материјала од стране наставника, на којим би биле приказане функције једне промењливе, праве у равни, као и површи, равни, функције више промењљивих у простору (при чему одређени број геометријских објеката би морао бити параметарски дефинисан у одређеним границама), затим са више геометријских објеката приказаних у истом координатном систему, изабран је динамички софтвер *Wolfram Mathematica*. Дакле, како студенти нису креирали материјале већ су добили готове материјале, а они су их само анализирали путем *CDF Player*-а, динамички софтвер *Wolfram Mathematica*-а представљао је адекватан избор.

С друге стране, софтверски пакет *GeoGebra* је бесплатан софтвер, широко распрострањен као образовни софтвер, у различитим нивоима образовања – од разредне наставе до високог образовања. *GeoGebra*, је дакле доступан софтвер са окружењем у коме се корисник може лако снаћи, који подржава креирање динамичких материјала, затим омогућава вишеструке репрезентације математичких појмова. Као и већина других динамичких софтвера пружа могућност чувања материјала у више различитих формата, затим уметање слика, док је компатибилан и за рад са *LaTeX*-ом. Један од аспеката зашто се овај динамички софтвер користи и у разредној настави је његова вишејезичност, односно могућност избора језика (између осталог и српског језика) менија, односно језика у којим су дате наредбе и називи математичких појмова. Наставни материјали се, уз одговарајуће математичко знање, једноставно креирају у *GeoGebra*-и, што овај софтвер чини погодним избором за оне методске приступе у којима је ученик у центру наставног процеса. Притом, материјали, креирани у *GeoGebra*-и се једноставно могу сачувати на одговарајућој интернет платформи, односно веб локацији, а карактерише га и активна међународна заједница корисника, који дозвољавају употребу својих дигиталних материјала. Пошто је методски приступ у другом истраживању осмишљен тако да студенти користе мобилне уређаје, тачније одговарајућу интернет платформу, за визуализацију одговарајућих наставних садржаја како на часовима вежби, тако и приликом утврђивања наставних садржаја (коришћењем материјала сачуваних на платформи *GeoGebraTube*), што би у највећој мери подразумевало самосталан рад студената, овај динамички софтвер се наметнуо као идеалан избор. Када је реч о трећем истраживању, имајући у виду да је на часовима вежби препуштено студентима (уз сугестије и дозирану помоћ наставника) да самостално креирају одговарајуће дигиталне, наставне материјале, предност *GeoGebra*-иних апликација *Graphing Calculator* и *3D Calculator* су добиле предност у односу на рецимо *Wolfram Alpha* (који се може користити на мобилном телефону) и друге апликације из групе *Wolfram* које нити су бесплатне, нити студенти имају искуства са применом датих апликација, што би представљало велики хендикеп јер за креирање захтевнијих материјала, није довољно познавати само особине математичких појмова већ и познавање одговарајуће програмске синтаксе.

Дакле, на избор одговарајућег софтверског пакета за конкретно истраживање, највише је утицао сам методски приступ наставе у описаним истраживањима.

Табела 1. Табеларни приказ софтвера, платформи и апликација коришћених за визуализацију наставних садржаја из вишеструких интеграла у истраживањима описаним у дисертацији

Истраживање	Прво истраживање, спроведено академских 2016/2017 и 2017/2018	Друго истраживање, спроведено академске 2018/2019	Треће истраживање, спроведено академске 2019/2020
Коришћени софтвери, апликације, платформе	*Wolfram Mathematica* и *GeoGebra*	*GeoGebra* и *GeoGebraTube*	*Graphing Calculator* и *3D Calculator*
Обрађивани наставни садржаји	Двоструки интеграли	Двоструки и троструки интеграли	Двоструки и троструки интеграли

2. Теоријска основа

У истраживањима на којима се заснива докторска дисертација коришћена је примена рачунара за визуализацију наставних садржаја који се односе на вишеструке интеграле. Значај вишеструких репрезентација математичких појмова, концепата и процеса, затим визуализације уопштено, визуализације у математици, визуализације појмова математичке анализе као и значај примене одговарајућих софтверских пакета за визуализацију функција једне променљиве и кривих у равни, а посебно за визуализацију функција више променљивих и кривих другог реда су изложени у теоријској основи докторске дисертације.

2.1. Вишеструке репрезентације

Без сумње, одговарајуће ознаке за појмове на које се односе, не само да су од великог значаја за математику и наставу математике, већ и за психологију, епистемологију и друге науке. Разноликост дисциплина, односно наука у којима се изучавају репрезентације одређених појмова и концепата довеле су до разних приступа и начина дефинисања репрезентација. Сложеност појма и употребе репрезентација се може закључити из цитата (Goldin & Janvier, 1998) из кога појам „репрезентација“ и израз „систем репрезентација“, повезани са наставом и учењем математике, имају следеће интерпретације:

- спољашња, структуирана физичка ситуација или структуиран скуп ситуација у физичком окружењу који може бити описан математичким језиком или изражен као математичка идеја;
- лингвистичко остварење или језички систем у коме је постављен проблем и дискутује се о математици са нагласком на синтаксичке карактеристике структуре;
- формалан математички систем који може представљати одређену ситуацију коришћењем симбола или система симбола, често поштујући одређене аксиоме или прецизне дефиниције, укључујући математичке концепте који могу служити за представљање сложенијих математичких концепата;
- унутрашњи, индивидуални когнитивни склоп или сложени систем, развијен понашањем и искуством који описује одређене аспекте процеса математичког мишљења и решавања проблема.

Репрезентација се може посматрати као „процес моделирања конкретних објеката из реалног, физичког света у апстрактне идеје“ (Hwang & Hu, 2013). Суштина репрезентације се огледа у преласку са конкретног на апстрактно мишљење (Hauser, 2009). Циљ репрезентације представља разумевање појмова и процеса, као и њихових особина и међусобних односа. Математику карактерише њена апстрактност, па су репрезентације изузетно важне јер пружају могућност да се одређене математичке идеје изразе, што даље омогућава размишљање о датим појмовима, комуникацију, преношење знања и слично. Многи аутори тврде да је кроз репрезентације математичких идеја омогућен приступ самим тим идејама (Goldin & Shteingold 2001; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). У процесу учења математике, репрезентације су изузетно значајне јер помажу студентима у разумевању математичких садржаја, повезивању тих садржаја и продубљивању знања. Поред репрезентације самих математичких појмова, важна је и репрезентација особина тих појмова, процеса, као и разних проблема (Goldin & Janvier, 1998).

Font, Godino & Amore (2007) разликују три врсте математичких објеката, на основу нивоа апстрактности објеката који се репрезентују. То су: основни објекти, односно објекти од којих се сачињен математички свет (као што су тачка, број, права, раван итд.) представљени знацима и системима знакова; објекти који повезују основне објекте (релације, операције, алгоритми); објекти који описују повезане објекте из претходне две групе, у сложенијим ситуацијама (математички проблеми).

Постоји више подела репрезентација, односно система репрезентација. Најчешћа подела је на спољашње (екстерне) репрезентације, које се налазе у непосредном окружењу студента, и то су репрезентације које он опажа, и унутрашње (интерне) репрезентације, које се често називају менталним репрезентацијама и под тим појмом се подразумевају репрезентације које студент креира у свом уму (Hwang et al.,1998; Goldin & Shteingold, 2001; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Имајући у виду да унутрашња репрезентација представља виђење неког објекта од стране појединца, различити студенти могу имати сличне, али и у великој мери различите унутрашње репрезентације, односно другачије виђење и другачији доживљај истог концепта. Различита су мишљења око тога која се репрезентација прво формира, (унутрашња или спољашња), али углавном се аутори слажу, када је реч о условљавању постојања једне репрезентације у зависности од постојања друге репрезентације, да спољашња репрезентација не може постојати без постојања унутрашње репрезентације. Тачније, спољашња репрезентација представља инструмент уз помоћ кога особа исказује (и преноси другима) своју унутрашњу репрезентацију одређеног појма, док се са друге стране, перцепцијом спољашње репрезентације стиче унутрашња репрезентација датог појма код појединца (Font et al, 2007). Интеракција и повезаност између унутрашње и спољашње репрезентације одређеног појма је од изузетне важности за успешну наставу и за ефикасно учење. Традиционалном наставом, односно кроз фронтални облик рада, студент на основу спољашње репрезентације појма од стране наставника, формира своју унутрашњу репрезентацију тог истог појма. Из тог разлога је спољашња репрезентација којом наставник саопштава дати математички концепт јако битна. Goldin & Shteingold (2001) сматрају да ограничења која ученици наизглед имају, када је реч о успешности у усвајању и примени усвојених садржаја из математике, настају услед неадекватних и непрецизних унутрашњих репрезентација ученика.

Очигледно да је избор спољашње репрезентације појма који ученици треба да усвоје јако битан у смислу што веће успешности ученика. Из тог разлога је пожељно, некада и неопходно особине истог објекта сагледати на различите начине и уз помоћ вишеструких репрезентација уочити одређене карактеристике истог појма или процеса. Под вишеструким репрезентацијама подразумевамо различите начине описивања и симболизације одређеног појма, као и упућивања на тај појам. Имајући у виду да вишеструке репрезентације представљају окружење за апстраховање, усвајање и разумевање појмова у математици од стране студената, велики број истраживача се бави вишеструким репрезентацијама (Borba & Confrey, 1996; Hwang & Hu, 2013; Ozgun-Koca, 1998; Božić, Takači & Stankov, 2019). Вишеструке репрезентације су јасно и по природи повезане, а често је та повезаност двосмерна. На пример, алгебарска једначина се може представити графички, док се графику одређене функције, криве или површи додељује одговарајућа једначина (Goldin & Shteingold, 2001) што је од изузетне важности за одређивање вишеструких интеграла. Goldin & Shteingold (2001) класификују репрезентације у две велике групе – статичке и динамичке. У статичке репрезентације спадају класичне репрезентације, уобичајене у математици, попут формула, табела и слика, док су динамичке репрезентације новијег датума, настале под утицајем развоја рачунара и одговарајућих софтверских пакета.

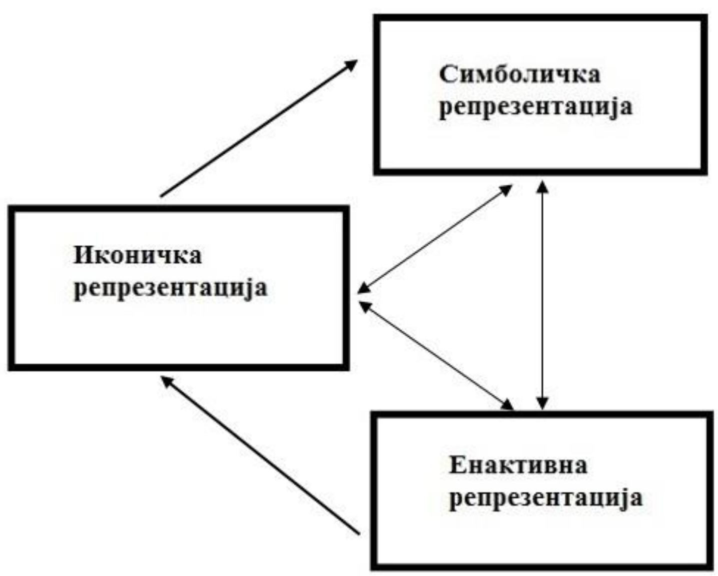
Тема великог броја научних истраживања и научних радова бави се питањем вишеструких репрезентација истог математичког објекта, односно појма (Font et al., 2007). Ови аутори (Font et al., 2007), разликују три основне врсте спољашњих репрезентација у математици: графичку, симболичку и табеларну репрезентацију. За ове ауторе, четврта репрезентација је геометријска репрезентација, која се међутим некада може подвести под графичку репрезентацију, али са нагласком да то не може увек бити случај. Nakahara (2008) сматра да постоји пет врста спољашњих математичких репрезентација:

- Симболичка репрезентација која је заснована на јасним правилима и симболима у којој доминирају јасне и недвосмислене математичке формуле;
- Вербална (лингвистичка) репрезентација која се може сматрати такође конвенцијалном, а заснива се на вербалном опису неког појма и његових особина;
- Илустративна репрезентација у којој доминирају слике и графици, обухвата графичку и геометријску репрезентацију, представља интуитивно и визуелно моћан облик репрезентације;
- Манипулативна репрезентација под којом се подразумевају динамичке репрезентације, које се у извесном смислу сматрају конкретним репрезентацијама, настале уз помоћ одговарајућег динамичког софтвера;
- Реалистичка репрезентација заснована на конкретним објектима, сматра се изузетно динамичком и реалном (природном).

Још једну од општеприхваћених подела спољашњих репрезентација дао је Bruner, теоретичар образовне психологије. Он, у свом раду истиче да се усвајање математичких појмова и концепата одвија у интеракцији ученика и средине и да ток тог процеса зависи од претходног знања и искуства ученика, као и његових способности. Bruner (1966) даје теоријски оквир у коме су изложена три облика интеракције ученика са окружењем, односно три нивоа репрезентација. То су:

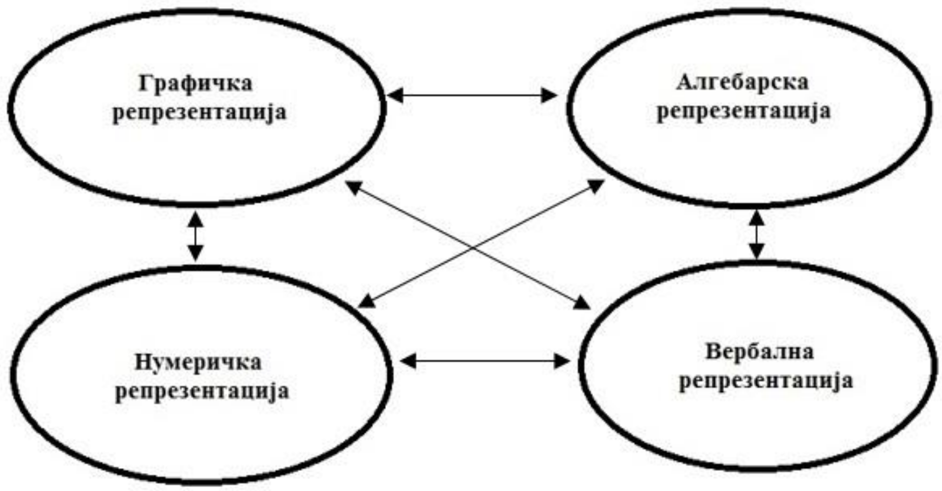
- Енактивна репрезентација (акциона, конкретна) која се састоји од низа конкретних радњи (акција), са манипулативним наставним средствима уз помоћ којих ученици формирају свест о неком појму и особинама тог појма;
- Иконичка репрезентација подразумева визуелни приказ (график, шему, слику геометријске фигуре) математичких објеката, њихових особина, као и међусобних веза, независно од физичког поступања са предметима;
- Симболичка репрезентација под којом се подразумева низ логички повезаних симбола, речи и бројева.

По Bruner-у, наставник треба поштовати дати редослед приликом коришћења, односно увођења репрезентација датог појма. Приликом упознавања ученика са новим појмом, нај-ефектније је користити енактивну репрезентацију, јер на тај начин ученик постаје свестан и упознат са најбитнијим особинама датог појма. Када ученик постане свестан основних својстава појма, може се прећи на визуелни приказ помоћу иконичке репрезентације и на тај начин проширити и продубити знање ученика о датом математичком концепту. Симболичком репрезентацијом појам би требало означавати тек када ученик постане у одговарајућој мери упознат са карактеристикама посматраног појма. Bruner наглашава и да је неопходно три поменуте репрезентације повезивати и користити као умрежену целину, затим комбиновати их како би се сви појмови могли представити на што примеренији начин у складу са околностима.



Слика 1. Брунерова класификација спољашњих репрезентација

Као што и Bruner разликује три основна облика спољашњих репрезентација, тако и Hughes-Hallett (1991) даје своју верзију „правила тројке", односно правило троструких репрезентација у настави математичке анализе. Овај теоријски оквир говори у прилог томе да се током наставе и учења математичке анализе користе три аспекта: графички, алгебарски и нумерички, као и да дати приступи буду уравнотежени. Како је језик, односно употреба речи, значајна за комуникацију - за опис особина појма, као и за опис математичког проблема и поступка решавања тог проблема, „правило тројке" проширено је, увођењем вербалне репрезентације, на „правило четворке" (Tall, 2003).



Слика 2. Класификација репрезентација „правилом четворке"

Највећа разлика у Bruner-овом и моделу четвороструких репрезентација јесу енактивне репрезентације, односно њихово одсуство у „правилу четворке". Такође, алгебарске, нумеричке и вербалне репрезентације су различити облици симболичких репрезентација, док графичке репрезентације одговарају иконичким репрезентацијама у Bruner-овој таксономији (Tall, 2003).

Развојем образовних и динамичких софтвера пружена је могућност наставницима и истраживачима математичког образовања да математичке појмове приказују различитим репрезентацијама уз коришћење рачунара. Још важније, пружена је могућност повезивања различитих (вишеструких) репрезентација истог математичког концепта. Постоје софтверски пакети који омогућавају две, а неки и три различите репрезентације истог математичког објекта (махом графичку и алгебарску репрезентацију). Даље, развојем динамичких софтвера, указала се могућност да се приликом промене објекта исказаног једном репрезентацијом уоче промене објекта исказаног другим репрезентацијама.

Деценијама уназад, настава математичке анализе се у великој мери сводила на памћење формула и процедура, алгебарских манипулација и решавања увежбаних врста проблема. Математичка анализа је јако битна за различите научне дисциплине и из тог разлога, горепоменути приступ није увек учинковит због значајности концептуалног разумевања и трансфера усвојеног знања, у односу на чисту меморизацију процедура. Још је 1989. Национални савет наставника математике Сједињених Америчких Држава дао препоруку наставницима да се треба тежити „поспешивању концептуалног разумевања, вишеструким репрезентацијама и њиховом повезивању, математичком моделирању и решавању проблема“. Kaput (1987) тврди да је сваки облик репрезентације приступом вишеструких репрезентација (нумерички, графички, симболички) битан јер нуди јединствену перспективу истраживаног математичког концепта. Направљен је велики помак у протеклом периоду у образовним системима многих земаља, како би се обезбедило концептуално разумевање и визуализација, што кроз наставни план, програм и наставне садржаје, што кроз наставне облике и наставне методе. Развој графичких калкулатора, а посебно развој динамичких математичких софтвера (*GeoGebra, Wolfram Mathematica, MatLab, Maple, Cabri, Geometer's Sketchpad* итд.) играли су значајну улогу у имплементирању реформисаног курикулума. Многи истраживачи (Habre & Abboud, 2006; Kaput, 1992) су показали да је, применом технологије, студентима омогућен лакши и ефективнији приступ вишеструким репрезентацијама математичких концепата. Прецизније, способности превлачења (транслације и ротације) и анимације динамичких софтвера пружају студентима окружење погодно за експериментисање, откривање, уочавање шаблона и образаца, генерализацију као и за визуализацију математичких објеката у облику каквом то није било могуће направити без примене одговарајућих софтверских пакета, односно само уз папир и оловку (Herceg & Herceg, 2010). Ozgun-Koca (2008) каже да: “Повезаност репрезентација у рачунарском окружењу представља моћан алат који обезбеђује студентима визуелно окружење, како би развијали и тестирали своје математичке претпоставке.” Ermete et al. (2010) наглашавају неопходност динамичког повезивања вишеструких репрезентација математичких објеката, у сврху унапређивања способности студената, да повезују дате садржаје. Треба нагласити да нити сви динамички софтвери омогућавају формирање вишеструких репрезентација, нити сви софтверски пакети који имају способност приказивања вишеструких репрезентација спадају у ред динамичких софтвера.

Научна истраживања указују да вишеструке репрезентације одређеног концепта (уз примену технологије или без њене примене) помажу студентима да конструишу одговарајуће концепте на различите начине. Истраживачи који су испитивали значај вишеструких репрезентација без примене технологије истичу значај тог приступа приликом излагања одговарајућег градива, односно кроз давање инструкција студентима (Clement, 2004) док су други, уз примену рачунара истраживали ефекте вишеструких репрезентација у процесу учења (Hegedus & Kaput, 2004, Herman, 2007). Goldenberg (1988) је изјавио да

„вишеструке репрезентације и њихова повезаност смањују нејасноће које су присутне када је математички концепт представљен само (тачно) једном репрезентацијом, што практично значи да вишеструке репрезентације поспешују разумевање. Kaput (1986) тврди да кроз експлицитно, визуелно успостављање повезаности између различитих репрезентација и увиђања студената да променом особина објекта, представљеним једним видом репрезентације, настају промене и код других репрезентација тог истог концепта, а да изграђивање когнитивних веза између различитих репрезентација постаје јаче. Goldenberg (1995) наводи још неке предности вишеструких репрезентација применом рачунара:

- студенти успостављају интензивнији „дијалог са самим собом“;
- повећање когнитивних конфликата и ефекта изненађење које даље воде до интензивнијег и дубљег размишљања;
- потврђивање сопствених вишеструких репрезентација код студената;
- пружање непосредности и прецизности, повезивањем две или више различитих репрезентација уз помоћ рачунара;
- помоћ студентима пружањем могућности да вишеструким репрезентацијама представе неки појам, односно концепт и повезивање тих вишеструких репрезентација.

Способност представљања истог математичког концепта коришћењем више репрезентација и успостављања експлицитних веза између тих репрезентација динамичким својствима софтвера су разматране у смислу истраживања њихове ефикасности (Kaput, 1986). Анализе случаја, поред упоредних анализа такође дају охрабрујуће резултате примене вишеструких репрезентација уз помоћ одговарајућих софтвера (Borba, 1993; Borba & Confrey, 1996; Lin, 1993).

Применом рачунара и математичких софтвера повећава се могућност коришћења и анализирања више репрезентација које су повезане (Yerushalmy & Shternberg, 2001). За савремене образовне софтвере скоро да не постоје ограничења и визуелном приказивању математичких концепата и реалних објеката и њихове адаптације сазнајним могућностима студената. На ту тему Lester & Wiliam (2000) су рекли да „док објекти из реалног окружења доласком на екран постају апстрактни, тако апстрактни математички објекти, приказивањем на екрану постају конкретни.“

Van der Meij & de Jong (2006) наводе и неке мане вишеструких репрезентација и њихове повезаности: динамичко повезивање може ставити студенте у пасивни положај и створити когнитивно преоптерећење код студената, обезбеђивањем превише информација.

На основу упоредног прегледа литературе можемо закључити да повезаност вишеструких репрезентација применом рачунара, потенцијално представља моћан алат који пружа визуелно окружење уз помоћ кога студенти могу да развију и тестирају своје математичко знање и претпоставке.

2.2. Конструктивизам

Из конструктивистичке перспективе, наука не представља потрагу за истином, већ процес који нам помаже да стекнемо неку свест о свету који нас окружује. Активно укључивање студената у процес учења је циљ огромног броја реформи у образовању, а конструктивизам представља један од приступа који може водити ка остваривању тог циља.

Вероватно највеће ограничење у образовању представља чињеница да наставник не може просто речено „да пресипа своје знање“ у главе својих ученика (студената), већ је неопходно да они самостално „изграде своје знање“, односно неопходно је да ученици открију нове информације, односно нове садржаје, да их трансформишу, да их прилагоде већ усвојеним идејама, појмовима и поступцима, као и да евентуално усвоје измене у већ постојећем знању. Из конструктивистичког угла гледања, ученик представља активног чиниоца у процесу наставе и учења. Идеју конструктивизма можемо пронаћи у радовима Bruner-а (1966) и Vygotsky-ог (1962). Von Glasersfeld (1995) каже да учење не одговара концепту учења стимулација - реакција већ да представља мисаони процес који захтева развој концептуалних структура код ученика, путем рефлексије и апстракције. Конструктивизам се сматра приступом подучавања и учења заснованог на идеји да је учење резултат „менталне конструкције“ код онога ко учи. Ученици приликом учења се константно труде да конструишу своје менталне моделе реалног света, на основу њихове перцепције стварности. Како доживе ново искуство, ученици константно унапређују своје менталне моделе у складу са новом информацијом и самим тиме стварају своју интерпретацију реалности. Конструисање знања је процес у коме се знање континуирано гради, допуњује и тестира. На тај начин, ученици неће просто репродуковати информације добијене од наставника, већ ће тражити законитости и повезаност садржаја, чак и када не располажу свим потребним подацима (Bodner, 1986). Конструктивисти сматрају да на учење утиче контекст у коме се наставни садржаји предају ученицима, као и ставови и уверења студената. Driscoll (2000) каже да конструктивистичка теорија указује да знање може постојати само у људској свести и да се то знање не мора обавезно подударати са реалношћу.

Bada & Olusegun (2015) истичу позитивне стране конструктивизма: „Ученици више уче и у већој мери уживају у процесу учења када су активно укључени у процес учења у односу на ученике који пасивно слушају наставника; Образовање има боље ефекте када је концентрисано на мишљење и разумевање, у односу на чисту меморизацију чињеница и правила; Омогућује трансфер учења; Конструктивизам пружа студентима „власништво“ над оним што су научили, пошто је учење тада засновано на питањима и истраживању студената (ученици чак више учествују у вредновању њиховог знања); Студенти дуже памте усвојене наставне садржаје и лакше и ефикасније могу применити дате појмове и поступке у свакодневним проблемима и задацима; Стимулише ученике и подстиче их да истражују и да изражавају своју знатижељу; Промовише социјалне вештине и комуникацију и сарадњу код ученика стварањем окружења у учионици које подразумева сарадњу и размену идеја; Студенти уче како да артикулишу своје идеје и да међусобно сарађују приликом израде задатака“. Конструктивисти своје инструкције заснивају на кинеској пословици: „Кажи ми и заборавићу; покажи ми и можда запамтим; укључи ме и разумећу“.

Конструктивистички модел знања има значајне импликације за учење и подучавање. Елементарне чињенице попут назива дана у седмици или симбола хемијских елемента, па чак и таблице множења када говоримо о математици, ученици уче уз директне инструкције наставника. Чак би се могло дискутовати о томе да ли је ово можда и једини начин на који се поменуте ствари могу научити. Међутим, када је реч о математичком знању, оно се не може тако директно пренети са наставника на ученика. Конструктивистички модел наставе по Bodner-у (1986) захтева пажљиву промену у перспективи онога ко „предаје“ у особу која ученицима олакшава учење. Lorsbach & Tobin (1992) тврде да „се ученици труде да увиде смисао онога што уче покушавајући да те садржаје и појмове уклопе са својим искуством“.

Наставник математике, користећи традиционални приступ настави математике анализира претходно обрађене наставне садржаје, анализира израду домаћег задатка и потом указује ученицима како се решавају задаци лакшег и средњег нивоа, након чега ученици, седећи на својим местима спроводе поступке са којим их је наставник претходно упознао (Stonewater, 2005). Овакав приступ јасно ставља фокус на наставника као преносиоца знања (предавањем наставних садржаја) и репрезентује бихевиористичку теорију учења (Hackman, 2004). Са друге стране конструктивистички приступ учењу је окренут више ученику и истиче значај активног конструисања знања и разумевања повезаности математичких концепата код ученика, уз помоћ наставника. Дакле, наставник не излаже све појмове, правила и процедуре, већ је његов задатак да позитивно утиче на поверење ученика да открију, разматрају и да критички мисле о томе што уче, уз надзор и вођење ученика током процеса учења (Eby, Herrel & Jordan, 2005). Обавезе наставника се огледају у пажљивом слушању идеја које ученици излажу током учења, навођењу ученика да доносе исправне закључке, затим да уводи ситуације и да ствара контексте помоћу којих ученици могу конструисати адекватно знање. Ученици креирају своје виђење, односно разумевање математичких концепата, тако да главна одговорност наставника није предавање и објашњавање или покушај остваривања трансфера знања са наставника на ученика, већ стварање ситуација у којим ученици унапређују своје менталне структуре. Наставници, дакле омогућују ученицима искуства на основу којих они могу да преиспитају и надграде своје претходно знање. Они морају константно убеђивати студенте током учења да су на правом путу, да својим размишљањем могу да испуне зацртани циљ, као и да се грешке, које праве током учења могу исправити. Brooks & Brooks (1993) у свом раду дају смернице наставницима како би свој рад приближили конструктивистичком приступу рада: „Охрабрити и прихватити самосталност и иницијативу у раду ученика; Користити сирове, несређене податке заједно са манипулативима, интерактивним и физичким моделима; Користити терминологију попут „класификуј“, „анализирај“, „предвиди“, „креирај“;

Дозволити ученицима да више обликују динамику часа, мењати стратегије приликом давања инструкција; Испитати у којој мери су ученици разумели концепте пре него што се захтева да са свима поделе свој доживаљај и разумевање тих концепата; Охрабрити ученике да учествују у дијалогу и међусобно и са наставником; Охрабрити истраживање ученика постављањем смишљених питања отвореног типа и охрабривање ученика да постављају таква питања једни другима; Тражити разрађивање и детаљније образложење почетних одговора ученика; Упознати ученике са ситуацијом да у свом раду могу доћи до контрадикције са почетном хипотезом и тада охрабрити дискусију код ученика; Пустити ученике да промисле о постављеним питањима, омогућити им време за то; Дозволити ученицима време да конструишу везе између појмова и концепата; Неговати природну (унутрашњу) радозналост код ученика кроз честу примену цикличног модела учења (циклични модел учења се састоји из откривања, увођења концепата или појмова и њихове примене)“.

Hayes (1989) повезује конструктивистички приступ са спољашњим и унутрашњим репрезентацијама математичких појмова. Он указује да се оваквим приступом учења истиче добра репрезентација проблема, односно неопходно је да се „разуме проблем, да особа која решава проблем замисли (креира у својој свести) објекте и релације које одговарају објектима и релацијама у спољашњој репрезентацији проблема. Поменути објекти креирани у свести појединца представљају унутрашњу репрезентацију проблема. Различити људи могу креирати различите унутрашње репрезентације истог проблема. Особе која решавају одређени задатак или проблем често најпре доделе спољашњу репрезентацију дел(ов)а проблема, тако што скицирају слике и дијаграме или записивањем симбола или једначина које одговарају деловима својих унутрашњих репрезентација. Таква спољашња репрезентација умногоме помаже у решавању датих проблема и задатака” (Hayes, 1989).

Интеграција технологије у настави није једноставна и она представља процес који се састоји из савладавања одговарајуће технологије од стране наставника, примене те технологије у наставном процесу тако да је учење од стране студената боље (Gorder, 2008). Ефикаснија примена технологије у настави се односи на случајеве у којима се учење постиже уз помоћ примене технологије и резултујуће окружење се огледа у подршци ученицима, а не да технологија сама по себи буде циљ и предмет учења (Jonassen, 2000). У конструктивистичком окружењу, током учења технологија игра значајну улогу у свакодневним активностима, али не представља предмет наставе. Дакле, примена савремене технологије пружа наставнику могућност да организује квалитетну наставу у конструктивистичком окружењу тако да се технологија користи као наставно средство, тј. да њена употреба не постане циљ учења (Taber, 2017), односно да се технологија у настави треба користитити када је њена употреба потребна и када доприноси квалитету наставе и да у случајевима када наставник процени да њена употреба не би унапредила квалитет наставе, није је неопходно користити. Jonassen, Peck &Wilson (1999) тврде да када се технологија користи у конструктивистичком смислу, помоћу ње студенти могу да: манипулишу садржајима и подацима; да истражују везе; да активно процесуирају добијене информације; конструишу знање у својим главама тако да га могу поделити са другима; да се осврну на наставни процес. Jonassen (2000) каже да су софтверски алати и њихово окружење „развијени да функционишу као интелектуални партнери онога ко учи како би подстакли и олакшали критичко мишљење и напредно учење“.

Према (Judson, 2006) постоји повезаност између наставника који гаје конструктивистички приступ и њихове примене технологије у настави. Наиме, по њему, наставници који имају конструктивистички приступ настави чешће примењују ИКТ у настави и постоји позитивна корелација између ставова наставника о постављању ученика у центар наставног процеса и учесталости примене технологије у настави. Rakes, Fields & Cox (2006) тврде да „комбинација конструктивистичке теорије учења и примена технологије доводи до најбоље примене софтверских алата у циљу олакшавања реализације наставе“.

2.3. Визуализација

Визуализовати значи конструисати, креирати или успостављати везе између екстерних (спољашњих) математичких објеката или њихових репрезентација (дијаграма, табела, слика) и менталних, односно унутрашњих слика и развијања аналитичког мишљења за унапређивање разумевања датих математичких коцепата. Интеракција са менталном сликом може бити успостављена путем манипулатива, различитих модела, слика, садржаја креираних уз помоћ рачунара попут графичких приказа, анимација и различитих симулација (Sheikh, 2015). Arcavi (2003) је рекао да „визуализација представља способност, процес и производ креативног приступа и интерпретације коришћењем слика и дијаграма, у нашој свести, на папиру или коришћењем технологије, са циљем да се о њој мисли и да се надовезује на претходно непознате идеје и да унапређује разумевање.“ Из ове дефиниције се може наслутити значај визуализације у настави математике и за учење и усвајање садржаја из математике. Можемо закључити да: визуелне репрезентације, како спољашње тако и унутрашње имају значајну улогу у излагању математичких идеја и развијање способности студената и њихових вештина у математичкој комуникацији; да визуализација даје смисао математичким појмовима, идејама и концептима и везама између њих чиме се унапређује њихово концептуално разумевање; визуализација представља потенцијалан алат за решавање математичких проблема и њихово истраживање (Sheikh, 2015).

Интеракција и повезаност између когнитивне слике и физичког или виртуелног математичког објекта или његове репрезентације (унутрашње или спољашње) представља визуализацију. Дата повезаност може ићи у два смера. Чин визуализације може представљати ментална конструкција објеката који су производ објеката доживљених из спољашњости или може представљати конструкцију на неком спољашњем медију уз помоћ креде, рачунара или објеката које појединац може препознати и повезати их са објектима и процесима изграђеним у својој свести. Визуализација не представља само визију или визуалну перцепцију, штавише математичка визуализација је процес креирања и формирања слика (менталних, или уз помоћ оловке и папира, односно уз помоћ савремених технологија попут употребе одговарајућих софтвера) и ефикасног коришћења тих слика за разумевање, решавање проблема и откривање (Sheikh, 2015). Одређени аутори за визуализацију кажу „визуализација је техника која пружа могућност да апстрактни математички концепти буду представљени на конкретан начин и да кроз конкретне репрезентације студенти могу боље разумети дате апстрактне концепте“ (Macnab, Phillips & Norris, 2012). Tall (1991) је изјавио да одбијање (одустајање од) визуализације значи одустајање од корена многих од есенцијалних математичких идеја и да у раној фази развоја теорије функција, граничних вредности, непрекидности, извода и сл. визуализација представља основни извор идеја. Поређења између улоге визуелног приступа у односу на аналитичку методу у настави представљају предмет и основу многих научних радова. Gutierrez (2012) тврди да визуелна репрезентација, без обзира да ли се ради о приказу уз помоћ слика и без обзира да ли су те слике замишљене од стране појединца или су нацртане на папиру или направљене употребом неког софтверског пакета, могу унапредити концептуално разумевање и имати значајну улогу у откривању математичких садржаја. По њему, визуализација представља основну компоненту за моделирање, математичко резоновање и решавање проблема. Визуелне репрезентације могу упутити на другачије приступе када је реч о неким од основних резултата представљених симболичком репрезентацијом.

Поређењем алгебарског и визуелног приступа решавања проблема, долазимо до закључка да визуелни приступ има одређене предности:

- Визуализација одређених концепата омогућује смањење сложености када је присутан јако велики број информација (Arcavi, 2003), па се одређени проблем може брже и једноставније решити;
- Визуализација доприноси решавању когнитивних конфликата између интуитивних решења која могу бити неисправна и исправних (симболичких) решења (Arcavi, 2003);
- Визуелни приступ решавању проблема може упутити студенте у срж датог проблема које се могу занемарити алгебарским приступом проблему (Arcavi, 2003).
- Конкретност визуалних репрезентација ствара ефекат непосредности приликом доказивања (Fischbein, 1987).

2.4. Визуализација појмова у 3D

Како би студенти са успехом решавали вишеструке интеграле, они морају имати одређену просторну способност, односно просторну оријентацију. Просторна способност се односи на когнитивне компетенције и способности кључне за решавање проблема који се односе на манипулацију и процесуирање визуелно – просторних информација (Hannafin, Truxaw, Vermillion & Liu, 2008; Lajorie, 2008). Студије су показале да је присутна јака и позитивна корелација између просторних односа и постигнућа ученика у областима као што су математика, машинско цртање и природне науке (Sorby, 2001; Huk, 2006). Неки аутори, са друге стране, дефинишу просторну способност као скуп концепата. McGee (1979) наводи четири концепта просторне способности:

1. Замишљање ротације објекта и пројекције 3D објекта на Oxy раван;
2. Склапање мреже растављеног и поново расклапање састављеног објекта нпр. преклапање кружног исечка у равни и прављење конуса у простору;
3. Замишљање кретања попут транслације, ротације и увећања (хомотетије) 3D објеката;
4. Трансформисање и манипулација просторним шаблонима и другачије представљање нпр. трансформација објекта представљеног у Декартовом координатном систему у систему са сферним или цилиндричним координатама.

Montiel, Vidakovic & Kabael (2008) наглашавају да се према геометријској репрезентацији математичких објеката и концепата треба посебно пажљиво односити. Неке студије (Piburn, Reynolds, McAuliffe, Leedy, Birk & Johnson, 2005) су показале да вежбање може да поспеши просторну оријентацију. Учесници тих курсева који су користили одређене софтвере и слике направљене употребом рачунара су поспешили своје просторне способности.

Просторна способност може бити дефинисана и као могућност за генерисање, задржавање и трансформације добро структуираних визуелних представа. То није издвојена способност, штавише постоји више просторних способности, при чему свака наглашава различите аспекте процеса генерисања слике, чувања, поновног позивања те слике и њене трансформације. Lohman & Ippel (1993) просторне способности сматрају кључним конструкцијама свих модела људске способности. По Barnea (2000) просторне способности подразумевају и репрезентацију, ротацију и окретање објеката у простору када су приказани у равни. Ово је изузетно значајно виђење за математичаре и за све оне који се баве наставом математике, посебно аналитичком геометријом у простору, стереометријом, као и функцијама више променљивих. Barnea (2000) разликује организоване вештине визуализације у зависности од њихове сложености:

- „просторна визуализација“ представља детаљно разумевање тродимензионалних објеката када су оне представљене одговарајућим дводимензионалним репрезентацијама;
- „просторна оријентација“ односно способност замишљања датог објекта из другачије перспективе;

- „просторни односи“ представљају способност визуализације ефеката изометријских трансформација у простору, односно ротације, симетрије и инверзије или другим речима, ментално манипулисање датим објектом.

2.5. Визуализација појмова у математици

Ако погледамо уназад, визуализација у математици је присутна од давнина, слике су коришћене у геометрији код старих Грка, слике су користили и кинески и индијски математичари и сам визуелни приказ задатка или проблема је имао значајну улогу у развоју математике. За Питагорејце је слика била саставни део математике. Рене Декарт, као један од најзначајнијих и најпознатијих математичара је користио графичке репрезентације и сложене слике са циљем да објасни физичке појмове и појаве којима се такође бавио. У свом раду је наглашавао значај употребе различитих графичких приказа попут слика и скица за разумевање одређеног проблема. У 17. веку када се развијала математичка анализа, визуелно представљање појмова и процеса (промена) је било итекако присутно, уз стално повезивање са проблемима из геометрије и физике (Larkin, 1983).

Истраживања која се тичу визуализације у математици су полако почела да се спроводе осамдесетих година прошлог века, где су истраживане потешкоће и предности визуелног математичког размишљања. У то време је владало мишљење да визуелно размишљање може да се посматра кроз способност развијања капацитета за прелазак са једног на други начин размишљања о одређеном проблему и да тадашњи образовни систем заслужује критике због недовољног коришћења визуализације и развијања вештина за визуелно размишљање. Sommer (1978) је изјавио да су школе директно одговорне за деградацију визуелног размишљања, да многи наставници не само да су незаинтересовани да визуализацију имплементирају у наставни процес већ и да не желе да то учине тамо где је то природно и могуће. Он наводи и да наставници који предају старијим ученицима, визуализацију математичких садржаја сматрају детињастом и примитивним приступом, као и да се предмети попут машинског цртања, уметности и осталих предмета у којима просторно сналажење има битну улогу, сматрају другоразредним и да они не захтевају озбиљне интелектуалне напоре. Током деведесетих година, технологија и примена рачунара су све више постајале присутне у настави и учењу у школској математици. Препознат је значај визуелних репрезентација математичких садржаја у математици, као и дијаграма, табела, графика поред већ присутних алгебарских репрезентација. У скорије време, развојем технологије, рачунари, преносни (лаптоп) рачунари, интернет, таблет уређаји и мобилни телефони су значајно утицали на стил учења и радне навике студената. Опсег истраживања, током 2000-их година је проширен и на семиолошке (наука о знацима, односно симболима, тачније системима знакова) аспекте визуализације и фокус истраживања је на дидактици, односно методици наставе математике како би се побољшала примена и моћ визуализације. Визуализација је активно истраживана (Arcavi & Nachmias 1989; Gutierrez, 1996; Murray, 200; Littler, 2002).

Утицај визуализације је проучаван на подучавање и учење различитих математичких објеката, појмова, процеса, па и различитих области математике. Arcavi & Nachmias (1989) су истраживали примену графика линеарне функције за визуализацију појма коефицијента правца у образовању одраслих. Mariottii & Pesci (1994) су истраживали сазнање о визуализацији које настаје када се спонтано размишља уз присуство слика и способност замишљања „могућег и немогућег“. Gutierrez (1996) је истраживала утицај визуализације у стереометрији. Lawrie, Pegg и Guitierrez (2000) су се бавили резоновањем и разумевањем визуализације док су Murray (2001) и Littler (2002) истраживали везу између визуализације и знања и постигнућа учења и њихових стилова и начина учења. Други научни радови су се тицали повезаности између визуализације и примене софтверских пакета (Kwon, Kim & Kim, 2001), решавања проблема (Lampen & Murray, 2001; Stylianou, Leikin & Silver, 1999) и теоријских оквира истраживања и развијања наставних програма (Gutierrez, 1996; Owens, 1999). Ferguson (1993) је закључио да се образовање инжењера ослања на аналитичке методе, да се занемарује визуелни приступ и да се јако мало пажње на техничким факултетима поклања визуелним доживљајима студената. Dreyfus (1991) сугерише да је неопходно доделити озбиљније место визуализацији у процесу наставе и учења и да је неопходна интеграција визуелних способности са алгебарским и језичким способностима. Ван Хилова (Van Hiele) теорија је јако позната, када је реч о истраживањима која се односе на то како деца и млади људи уче геометрију. Van Hiele (1986, 1999) разликује пет нивоа геометријског мишљења и назива их:

- визуализација;
- анализа;
- апстракција;
- формална дедукција;
- доказ.

Van Hiele сматра да студенти, приликом учења иду „корак по корак“, да тако успостављена хијерархија помаже студентима да остваре боље разумевање и самим тиме и боље резултате. Сама чињеница да Van Hiele за почетни корак узима визуаизацију доста говори о значају визуализације и њеном схватању као основног корака који претходи анализи, доказу итд. Nixon је 2002. спровела експеримент у настави како би испитала утицај визуализације на разумевање појмова и односа међу њима, који се односе на низове и бројне редове и закључила је да је примена одређених стратегија довела до позитивног утицаја на успех студената, сличним приступом који је имао и Van Hiele, на садржаје који не припадају области геометрије.

Kosslyn (1983) је истакао пет битних аспеката визуализације:

- **генерисање слика** које представља способност да се формирају визуелне представе - захтева активирање визуелних информација и њихово коришћење за стварање шаблона у краткотрајним меморијским структурама;
- **задржавање слике**, које представља способност да се слика задржи након неког времена, што је неопходно јер краткотрајне меморијске структуре задржавају информацију јако кратко и слике бивају задржане само уз непрекидни напор;
- **провера слике** је способност интерпретације шаблона, као што је приказивање објекта или делова објекта;
- **анализа (скенирање) слике** представља систематски прелазак на опажање скицираног обрасца, што уједно представља и критичку улогу у овој способности;
- **трансформација слике** представља способност за ротацију датог шаблона или за неку другу промену.

Као највеће потешкоће које имају ученици анализирајући њихове способности кроз овакав приступ, Kosslyn (1983) наводи генерисање слика које одговарају одређеном објекту, као и њихову анализу и ротацију.

Presmeg (1985) на основу резултата свог истраживања разликује визуелне представе које су имали ученици током експеримента. Врсте тих визуелних представа су:

- **конкретне слике** – када је у мислима ученика слика јасна, и када дати графички приказ ученици могу једноставно применити приликом решавања проблема одговарајућег за дату слику;
- **слика шаблона** – јасне релације између објеката, представљене уз помоћ схеме;
- **слике формула** – тачније фотографско памћење формуле у алгебарском облику, записане на табли, свесци, уџбенику итд;
- **кинестетичка слика** - када неко уз помоћ прстију, руке или неког другог средства описује неки математички објекат, попут криве или површи (параболу, хиперболу и сл.);
- **динамичке слике** – подразумевају кретање, померање слике, ротацију, транслацију.

У својим резултатима Presmeg (1985) је навела и које врсте слика су биле више, односно мање присутне код ученика у средњошколском образовању, обрадом различитих примера и задатака. Оно што је очекивано је и емпиријски потврђено – највећи број ученика је замишљао конкретне слике, затим слике формула, односно фотографско памћење одговарајуће формуле, потом су следиле слике шаблона и на крају, међу различитим врстама визуелних приказа, најмање су биле присутне кинестетичке и динамичке слике. Штавише, динамичке слике су стварале и проблеме ученицима у апстракцији и генерализацији информација којих су постали свесни на основу одговарајућих представа које су конструисали у својој свести. Један од њених закључака је и да углавном ученици који показују посебан таленат и способности за математику нису визуелни типови и да увежбавање поступака и примене формула доводи до навикавања ученика на такав рад, што их удаљава од визуелних представа датих појмова и промена. Такође, (Presmeg, 1997) указује и на значај повезивања конкретних слика са процесом аналитичког мишљења.

Gutierrez (1996) је истраживао утицај софтвера који имају могућност да геометријски представе појмове у развоју визуализације и просторних способности студената. Закључио је да се на основу литературе не може успоставити договор о терминологији и он дефинише визуализацију као „врсту резоновања, односно резоновања на основу употребе визуелних и просторних елемената, физичких или менталних, насталих са циљем да се реши одређени проблем или да се докаже одређено својство“. У свом раду, он наизглед помирује различите ставове и теоријске оквире који описују визуализацију и истиче да сви ти теоријски оквири, иако на изглед различити, имају донекле заједничку основу. Наводи следеће елементе:

- **менталне слике** које представљају било какав вид когнитивне репрезентације математичког појма или својства доживљеног уз помоћ било којих средстава визуелних или просторних елемената. Менталне слике подразумевају и кинестетичке слике које су настале, које су трансформисане или до којих је дошло услед комуникације уз помоћ физичких кретњи, као и динамичке слике – слике за које је карактеристично то да се могу у мислима померати;
- **екстерне репрезентације** које представљају било какав вид графичке репрезентације концепата или својстава укључујући цртеже, слике, дијаграме итд., а које помажу у креирању или трансформацији менталних слика и визуелног резоновања;
- **процес визуализације** под којим се подразумева ментална слика или физичка активност која подразумева менталну слику.

Gutiérrez истиче и два централна процеса у визуализацији, а то су визуелна интерпретација информације (коришћена у креирању менталне слике) и интерпретација менталне слике (коришћена за генерисање жељене информације).

Специфичне менталне слике, неопходне за решавање проблема, разликују се у зависности од карактеристика проблема који се решава. Gutierrez (1996) наводи основне способности:

- „Figure-ground“ перцепција која подразумева способност да се раздвоји објекат, односно фигура из комплексне позадине;
- перцептуална константност која подразумева способност уочавања да су одређене карактеристике објекта независне од величине објекта, текстуре, боје или позиције;
- ментална ротација, односно способност за стварање динамичких, менталних слика и способност за визуализацију конфигурације у покрету;
- перцепција просторних положаја која представља способност повезивања представа фигура (менталних слика, графика) са самим фигурама;

- перцепција просторних односа, односно способност да се више фигура класификују као фигуре које припадају истој класи, врсти фигура;
- визуелно разликовање (дискриминација) тј. способност да се пореди више фигура и да се уоче њихове сличности и разлике.

Визуализација има значајну улогу у свим областима математике, не само у оним областима у којима се то подразумева, као што је геометрија. Зато је визуализација и истраживана у различитим областима математике. Истраживањем теоријског оквира визуализације, узимајући у обзир резултате различитих аутора, приметно је да се међу кључним карактеристикама визуализације јављају наравно визуелни прикази, тачније њихово креирање, задржавање, преиспитивање, трансформације тих слика, затим коришћење слика у нашој свести при чему те слике могу бити конкретне слике, слике шаблона, слике формула, кинестетичке или динамичке слике. Такође су битне и перцепције, конкретно раздвајање слике од позадине, ментална ротација, перцепције просторних положаја и просторних односа, разликовање фигура и препознавање њихових сличности. Многа од ових својстава су потребна приликом решавања вишеструких интеграла.

2.6. Визуализација појмова и математичка анализа

Значај визуализације и визуелног размишљања за подучавање наставних садржаја из математичке анализе и учење садржаја из математичке анализе је у претходном периоду препозната и визуализацији је дат већи простор у модерним уџбеницима и наставним садржајима из математичке анализе.

Многе студије које се односе на визуализацију у 3D и повезивање са постигнућима студената приликом решавања проблема из геометрије су направљене, али је број научних радова који говоре о утицају присутности и степена визуализације у математичкој анализи значајно мањи. Zimmermann (1991) је о значају визуализације у математичкој анализи рекао: „значај визуелног начина размишљања је толико фундаменталан за разумевање математичке анализе да је јако тешко замислити успешан курс из математичке анализе у којима нису, на одговарајући начин, наглашени графички прикази појмова и концепата са којима се студенти упознају“. Sevimli & Delice (2011) су се бавили проблемима студената који се односе на визуализацију и желели су да утврде које врсте графичких приказа користе студенти приликом решавања одређених интеграла. Дошли су до закључка да „кандидати са високим нивоом просторних способности у великом броју случаја користе графичку репрезентацију приликом решавања задатака заједно са алгебарском репрезентацијом и да повезивање два различита начина репрезентације доводи до успеха студената приликом решавања задатака“ као и да су студенти који имају бољу просторну оријенатацију и који боље тумаче просторне односе били успешнији приликом решавања одређених интеграла.

Huang (2015) је приликом истраживања дошао до закључка да развијање просторних способности (које може утицати на успостављање везе између графичке репрезентације и других репрезентација математичких појмова) повећава учинковитост студената у решавању одређених интеграла. Delice & Ergene (2015) су пратили поступке цртања одговарајућих функција више променљивих и површи студената на универзитетском нивоу приликом решавања вишеструких интеграла (конкретно примене вишеструких интеграла за израчунавање запремине) и у свом раду истакли да студенти који су вешти приликом решавања алгебарских једначина и неједначина и извођењу алгебарских трансформација, али и који имају просторне способности, имају завидан успех у решавању вишеструких интеграла. Karakus & Aydin (2017) су покушавали да установе да ли просторне способности утичу на оцене студената из математичке анализе и том приликом установили да је просторна оријентација значајан предиктор за добре резултате студената из курса математичке анализе. Hughes-Hallett (1991) је закључио да је битан баланс у визуелном, нумеричком и аналитичком приступу и притом истакао да „је баланс неопходан зато што уочавање повезаности различитих приступа поспешује разумевање".

Иако већина студената уме да нацрта график функције, они их врло често третирају као нешто додатно, спољашње, за функцију представљену алгебарском репрезентацијом (Vinner, 1989). Такође, иако делује природно сагледавати различите аспекте опште математике, нарочито функција, кроз графичку репрезентацију, студенти ипак немају ту навику и ту представу о функцијама. Разлог томе је што су научени и што су стекли навику да обрађују информације и решавају задатке аналитички, не визуелно. Историјски, „визуелни концепт" функције насупрам „аналитичке карактеризације" је био предмет дебате јако дуго и очигледно је да је визуелни приступ изгубио ту битку (Kleiner, 1989). По Davis & Hersh (1986), у 20. веку је владало мишљење да иако се нешто визуелно и интуитивно разуме, не сматра се математиком док се не аритметизује. Овај став се преносио на учионицу и то је став већине некадашњих студената, а сада вероватно и професора математике – математика је аналитичке природе. Clements (1984) тврди да иако надарени ученици, са посебним способностима за математику могу размишљати коришћењем визуелних представа, они немају ту тенденцију. Ово све иде у прилог Хилбертовом ставу да математика треба да буде строго формалистичка, иако формализам произилази из интуитивно – визуелне основе. За велики број студената са лошијим постигнућима из математике, можда се овде крије основа тог неуспеха. Наиме, они имају способност да „виде" математику, односно да разумеју концепте, појмове и својства математичких објеката представљених визуелним путем, али не умеју да је формализују. Треба их научити како да аналитички опишу своје представе усвојене визуализацијом датих садржаја (Vinner, 1989). Још давно су Tall (1978) и Mundy (1984) у својим истраживањима показали да су студенти склони томе да игноришу њима непријатне садржаје – чак 90% студената на првој години студија, приликом решавања одређеног интеграла $\int_{-2}^{2}|x|dx$ једноставно је испустило (занемарило) знак апсолутне вредности у подинтегралној функцији. Dreyfus & Eisenberg (1987) су студентима задали да нацртају график подинтегралне функције и да потом реше одређени интеграл $\int_{-4}^{4}|x^2 + |x| \ + 6|dx$. Том приликом су закључили да студенти не узимају у обзир особине подинтегралне функције, односно да потпуно занемарују графички приказ подинтегралне функције из којих се иначе могу прочитати особине (попут парности) функције које олакшавају поступак интеграције.

Често су предмет истраживања и наставници математике, односно њихове навике и приступ приликом подучавања одређених садржаја, а не само ученици, односно студенти. Sevimli & Delice (2011) су истраживали присутност визуелног, нумеричког и аналитичког приступа, односно репрезентације, приликом решавања одређених интеграла. Готово три пута већи број наставника је користио алгебарске репрезентације приликом решавања одређених задатака и проблема у односу на графичке репрезентације, док је нумеричка репрезентација најмање коришћена. Dreyfus & Eisenberg (1986) су пред наставнике математике изнели следећи задатак: $\int_{-3}^{3} \sin x \cdot (\cos x + 3x^2 - x \sin x)\,\mathrm{d}x$, а потом разговарали са њима о томе како би наставници решили дати задатак. Сви наставници су почели говорити о томе како се морају искористити особина интеграла да је интеграл збира једнак збиру интеграла, потом о парцијалној интеграцији итд., а да нису приметили да је подинтегрална функција непарна, па како су границе симетричне у односу на нулу то је вредност одређеног интеграла једнака нули. Ови наставници нису подинтегралну функцију узели у разматрање, јер им је промакла парност подинтегралне функције која решење чини тривијалним. Резултати истраживања Dreyfus & Eisenberg (1986) у коме су испитаници били наставници се подударао са резултатима истраживања спроводених са студентима. Поред овог задатка и други проблеми у коме се визуелне и аналитичке методе могу равноправно користити су изложени наставницима, и примећена је њихова тенденција да проблеме разматрају и решавају аналитички. Dreyfus & Eisenberg (1986) су закључили да је визуелни начин мишљења стран наставницима и постављају питање како онда можемо очекивати да њихови ученици и студенти развијају своје визуелне вештине.

Martínez-Planell & Trigueros су истраживали разумевање појма и особина функције две променљиве од стране студената и препознавање проблема са којима се ученици сусрећу приликом преласка проучавања функције једне променљиве на проучавање функција две променљиве (Martínez-Planell & Trigueros, 2009). Коришћењем APOS теорије, они су повезали потешкоће студената са специфичном координацијом коју је неопходно успоставити са функцијом једне променљиве и R^3 – схемом. У раду који се тицао геометријских аспеката функције две променљиве, исти аутори (Trigueros & MartínezPlanell, 2010) су закључили да ученици имају проблем са одређивањем пресека равни које су паралелне некој од координатних равни у простору са површима које су представљене неком другом репрезентацијом. Одатле проистичу и проблеми студената приликом одређивања пресека и пројекција тих пресека. Исти аутори су 2011. године креирали приступ који се састојао из четири корака, којим би студенти требало да овладају одређивањем тражених пресека које је неопходно за разумевање функција две променљиве.

Четири корака су се односила на: фундаменталне равни (равни паралелне координатним равнима) и површи; цилиндре; графике функција; графике контура (conture maps). На основу још једне квалитативне анализе, исти аутори наводе да је анализа графика функција више променљивих заједно са другим репрезентацијама фундаментална у креирању јаких веза између компонената схеме која се односи на појам функције две променљиве (Trigueros & Martínez-Planell, 2010).

Meadows је 2008. године спровела квалитативно истраживање са циљем добијања описних показатеља о визуелном и аналитичком разумевању површи попут сфера, цилиндара, призми и пирамида од стране студената, у контексту анализе функција више променљивих. Конкретно, фокус њеног истраживања је била примена формула за одређивање графика функције две променљиве. Квалитет разумевања од стране ученика са склоностима ка визуализацији је био знатно већи. Schlatter (1999) је користио *MatLab* како би помогао студентима у визуализацији објеката и површи са којима су се сретали приликом обраде садржаја функција више променљивих и пост-тестом је добио позитивне резултате о примени рачунара у дате сврхе. Исти аутор је 2002. године, како би на часовима поспешио дискусију и како би ученици били више укључени у рад, користио тестове вишеструког избора, са задацима који су подстицали студенте на размишљање и са питањима која су се односила на визуализацију. У датом раду је изнео резултате који говоре о већој активности студената и њиховом укључивању у рад у већој мери, као и поспешивању визуалних приказа код студената.

Истраживања су показала да на начин на који студенти доживљавају одређене појмове и на начин како их посматрају, утичу њихове навике које су стекли током дотадашњег математичког образовања. Habre је 1999. године на часовима математичке анализе, користио и визуелне и аналитичке методе приликом решавања задатака уз помоћ рачунара и приметио да, чак и када предавач више потенцира визуелни приступ, студенти и даље преферирају аналитички приступ решавању задатака. Његов закључак је био да је то вероватно последица њиховог дотадашњег образовања из математике, за које су студенти рекли да је било у највећој мери „алгебарско“. Аутор је у свом истраживању пружио студентима могућност да уз помоћ рачунара истражују особине површи, једначина са параметрима, површи представљених сферним координатама, векторска поља и диференцијалне једначине. У склопу истраживања је истакао да постоји празнина у разумевању начина учења датих визуелних концепата од стране студената и нагласио да је потребно више пажње посветити истраживањима која би се односила на учење функција више променљивих од стране студената. Stylianou је 2002. креирала студију која се бавила једном од најчешће предложених стратегија за решавање проблема из математике: цртањем дијаграма. Од професионалних математичара је тражено да решавају задатке и проблеме и проучавана је њихова стратегија цртања дијаграма приликом њихових покушаја да пронађу решење за проблеме и задатке који су им постављени. Будући да се посебна пажња обраћала на процесе закључивања математичара, док су они развијали своје идеје и доказе, анализиран је начин на које су искусни математичари користили дијаграме и како су им они помогли да доврше одређене доказе и задатке. Ауторка закључује да математичари граде визуелну репрезентацију проблема у корацима који су јасно раздвојени, током којих покушавају да анализирају визуелни приказ проблема. Сваки пут када би математичар нацртао нови дијаграм или модификовао дијаграм који је већ претходно нацртао, неколико тренутака би апстраховао додатне информације до којих може доћи на основу графика и разматрао импликације тих података, као и то да ли оне воде ка решавању одређеног проблема. До сличних закључака је дошао и Davis (1984) који ове кораке у решавању задатака назива „визуелно ограничен низ“ коме у највећој мери одговара опис „погледај, размисли, пиши, погледај, размисли, пиши...“.

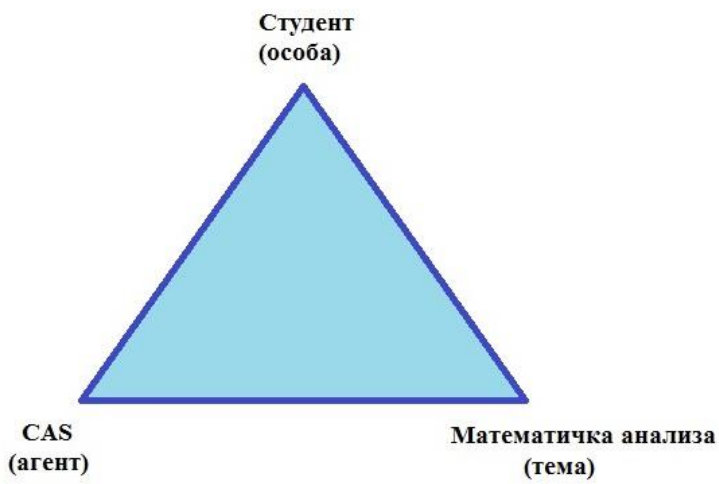
Када је реч о репрезентацији концепата из области диференцијалних једначина, такође је установљено да студенти не користе графичке репрезентације концепта извода функције да истраже повезаност променљиве, функције и извода у самој диференцијалној једначини (Camacho-Machin, Perdomo Diaz & Santos-Trigo, 2012). Како би испитали да ли је одређена функција решење диференцијалне једначине, студенти су склони да одмах замене функцију и њене изводе у једначину како би се уверили да ли је испуњена одговарајућа једнакост или да одмах, директно решавају диференцијалну једначину. Такође, студенти су склони и тражењу алгоритма за решавање одређених класа диференцијалних једначина.

Резултати научних радова који се односе на факторе за просторну визуализацију попут пројекција, ротација, као и пресека површи говоре о позитивним резултатима студената и њихових ставова према математици. У више студија (Sorby, 2001; Cohen & Hegarty, 2012) се говори о јакој, позитивној корелацији између фактора просторних способности и постигнућа у математици као и о томе да се просторне способности могу поправити вежбањем истих.

2.7. Примена софтверских пакета за визуализацију

CAS (Computer algebra system) се сматра алатом за визуализацију у коме се користе различите репрезентације и уз помоћ кога се могу успоставити везе између различитих репрезентација математичких појмова (Mallet, 2007). У студијама које се односе на примену CAS-а у подучавању и учењу математичке анализе, фокус је углавном на некој од следеће три ствари: како користити софтверске пакете на часовима (Wiwatanapataphee, Noinang, Wu & Nuntadilok, 2010); утицај CAS-а на ставове, интересовања и мотивацију студената; развој оперативног и концептуалног знања од стране студената (Meagher, 2005). Tall (2008) је изјавио да „од свих грана математике, математичка анализа има највише простора за примену технологије“. Резултати неколико студија сугеришу да динамичка визуализација, насупрот статичној визуализацији даје више могућности и да значајније доприноси успеху одређених група студената, нпр. студентима техничких наука (Huk, 2006). Степен интеракције приликом визуализације игра битну улогу, такође. Већи степен интеракције у визуализацији побољшава разумевање и води ка дубљем и бољем разумевању. Интерактивни материјали се нашироко користе за учење садржаја из природних наука и области техничких наука (Patwardhan & Murthy, 2015).

Истраживачи образовања су посебан значај доделили интеграцији технологије у настави математичке анализе у односу на друге наставне методе и облике (Marshall et al. 2012). Rotman (1995) је припремио теоријски оквир како би проучавао и процењивао математичко резоновање ученика. На основу његовог теоријског оквира тема, агент и особа чине три кључна елемента у интеграцији технологије у школско окружење. Учинак процеса подучавања и учења се мери повезаношћу ове три компоненте. Овај концепт је Meagher прилагодио настави садржаја математичке анализе и у његовом теоријском оквиру три компоненте представљају математичка анализа, CAS и студент. Ова повезаност је приказана на слици 3.



Слика 3. Дидактички троугао креиран од стране Meagher-а

У оваквом теоријском окружењу за учење, поткрепљеном применом рачунара, потребе и разлике особа (у овом случају студената) се морају обавезно размотрити. На очекивања студената сигурно утичу њихови професори и подучавање, односно примери које користе приликом подучавања и учења и сам начин излагања градива од стране професора. Када је реч о литератури која говори о интеракцији између наставника и примене технологије, на бази познавања дидактике наставе математике и циљева датих наставних курсева (предмета), и ту постоји више извора. По Kendal & Stacey (2001) примена рачунара и одговарајућих софтвера у настави од стране предавача коме недостаје познавање технологије коју користи у настави, неће довести до жељених резултата. По њима (Kendal & Stacey, 2001), јаз који настаје између наставника и технологије, односно њене примене, лежи у циљевима наставног предмета и ограничених интерактивних својстава софтверског пакета који се користи. Даље, дубоко укорењени ставови о примени технологије код наставника који предност дају традиционалној настави, односно модернијем приступу наставе, јасно утичу на то да ли ће је наставници користити и какав ће бити ефекат таквог рада. Hung (2001) говори управо о томе и наглашава да предавачи окренути традиционалној настави ће у пракси мање вероватно користити рачунаре или неки други вид технологије, док наставници који имају позитивно мишљење о имплементацији ИКТ-а у настави, често користе дате технологије на часу, некада и на уштрб часова предвиђених за увежбавање, продубљивање и обнављање градива. Реформа калкулуса представља реформистички приступ који акценат ставља на томе да би садржаји из математичке анализе требало да буду усвојени концептуално. Са друге стране, одређени број математичара сматра да примена технологије у настави штети природи саме математике и да превише упроштава математичке садржаје (Wilson, 1997). Њихов став је да уџбеници и наставни материјали који су прилагођени у складу са поменутом реформом наглашавају превише употребу технологије док је са друге стране занемарена математичка реалност. Quesada et al. (2008) у раду, који се односио на утицај графичких приказа на разумевање дефиниције граничне вредности, налази да настава са нагласком на визуелни приступ уз помоћ одговарајућих математичких графичких калкулатора (ручни рачунари који могу цртати графике, решавати једначине различитог типа, и обављати друге задатке) не само да поспешује визуелно резоновање већ и разумевање формалних дефиниција од стране студената. Дискусија, односно неслагање о положају примене технологије у настави одговарајућих садржаја је и даље актуелна.

Пошто CAS садржи интерфејс који може извршавати наредбе које се односе на садржаје, операције и промене попут извода, интеграла, матрица и детерминанти, они се могу донекле посматрати као машине за рачунање које представљају погодности за математичаре. Поред тога, CAS представља и моћан алат за визуализацију са менијем који обезбеђује различите пројекције попут креирања 2D или 3D графика. Настава подржана употребом CAS-а може значајно помоћи у повезивању симболичке са визуелном репрезентацијом математичких појмова и концепата тако да студенти могу да користе визуелно или аналитичко мишљење (резоновање) приликом решавања задатака и проблема (Sevimli, 2013). Резултати студије које су спровели Buteau, Marshall & Jarvis (2010), тачније систематски преглед литературе која се односи на сврху примене CAS-а говоре да се ови алати најчешће користе за извођење експеримената (63 %) и визуализацију (59 %) у вишем математичком образовању. Vincent et al. (2010) тврде да су платформе постављене на веб-у, попут *Wolfram Alpha* корисније од стандардних CAS софтвера због својих предности - да је обрада садржаја и могућих алата увек иновирана, што даје могућности за приказивање детаља. Ипак, сама присутност софтвера у одговарајућој образовној установи не значи да је настава подржана употребом технологије. Познавање могућности технологије и очекивање студената морају се узети у обзир. На пример, истраживање које су спровели Eichler & Erens (2014) је показало да су свега два наставника, од укупно 29, континуирано користили технологију на софистициран начин како би поспешили разумевање садржаја од стране студената док је највећи број предавача користио рачунаре и одговарајуће софтвере како би смањио напоре студената приликом израчунавања. И даље је нејасно у којој мери настава подржана CAS-ом може испунити очекивања студената и како се та очекивања разликују узимајући у обзир индивидуалне разлике студената. Неопходно је одредити очекивања студената и испитати да ли се могућности које пружа технологија и различити алати подударају са очекивањима студената. Радова на ову тему је јако мало, али пар истраживања показују да једна од разлика која може бити значајна у одређивању приоритета студената који слушају и усвајају садржаје из математичке анализе јесте „математички начин размишљања“ (Presmeg, 1985). Математичко мишљење не би смело да се посматра као математичка вештина; она представља склоност ка томе како се математичке вештине користе. Још је Poincare изјавио да студенти и математичари поседују две различите врсте умова који су „логички“ и „интуитивни“ и да се ове две врсте умова односе на две групе људи, једну која размишља у геометријском смислу и друга коју карактерише аналитичко мишљење, респективно. Presmeg (1985) је повезала математички начин мишљења са коришћењем визуализације приликом покушаја решавања математичких проблема и том приликом поделила студенте на визуелне типове и невизуелне типове. Визуелни типови су појединци који радије користе визуелне методе попут цртања графика приказујући просторне информације и односе приликом решавања математичких задатака и проблема, док су невизуелни типови оне особе који немају склоности ка коришћењу визуелних метода приликом израде задатака. Природа наставног градива, тј. садржаја из математичке анализе је таква да често захтева примену обе ове методе. У студијама о калкулусу, особе које користе невизуелне методе за одређивање решења се називају аналитичким особама (мислиоцима). Lean & Clements (1981) су показали у свом раду да је успех у решавању проблема релативно већи код аналитичких особа у односу на визуелне особе. Са друге стране, друга истраживања говоре о томе да су студенти склони ка томе да за комплексније задатке и проблеме користе визуелне стратегије, док је приликом решавања једноставнијих задатака присутнији аналитички приступ. Такође, познато је да студенти улажу више напора и времена приликом визуелних процеса у односу на аналитичке процесе (Presmeg, 2006). Студенти који размишљају другачије, тј. студенти којима више одговара визуелни, односно аналитички приступ, имају другачију корист од традиционалне наставе и наставе која је подржана CAS-ом. Тако на пример, Sevimli (2013) долази до закључка да визуелни типови студената више профитирају приликом наставе у којој је интегрисан CAS у односу на друге студенте, када је реч о преласку са једног облика репрезентације математичких појмова на други облик репрезентације.

У данашње време, софтверски пакети се често користе за визуализацију концепата математичке анализе (Takači, Marić, Stankov & Đenić, 2017; Milenković & Takači, 2018, Milenković & Takači, 2019; Milenković, Takači & Božić, 2020). Приликом реализације различитих истраживања препознато је да се „CAS користи махом како би се студентима визуелно представили математички концепти и да студенти истражују и експериментишу са математичким концептима“ (Marshall, Buteau, Jarvis & Lavicza, 2012). *Wolfram Mathematica* се најчешће користи за подршку приликом учења или као окружење за сложенија математичка израчунавања приликом истраживања. Ипак, постоји простор за већу употребу датог софтверског пакета за наставу математике. Интеграција рачунара у наставни процес курсева математичке анализе помаже у креирању окружења у коме се графичка, нумеричка и алгебарска репрезентација могу мешати и комбиновати (Salleh & Zakaria, 2013). Takači, Stankov & Milanović (2015) су у свом истраживању показали да студенти који уче уз помоћ *GeoGebra*-е проводе више времена приликом учења у анализирању повезаности између формула и графика који им одговарају и да применом *GeoGebra*-е студенти који немају неопходно знање (потребно за решавање задатака) могу да надоместе своје недостатке и да исправе своје грешке.

За највећи број студената, замишљање и цртање тражених графика у простору представља највећи проблем када се сусретну са решавањем задатака из области функција више промењљивих (Kashefi, Zaleha & Yudariah, 2011; Milenković, Takači & Božić, 2020). Примена технологије има позитиван утицај на постигнућа студената, а утицај примене рачунара је приметан у напредовању студената и њихових резултата (Eyyam & Yaratan 2014).

У истраживању TIMSS 2007, интернационална асоцијација за евалуацију наставних постигнућа наглашава да рачунари и интернет обезбеђују студентима нове могућности за истраживање математичких концепата на нивоу на коме то раније није било могуће. Ови алати могу поспешити ентузијазам и мотивисати студенте за учење и могу им омогућити да уче темпом који одговара њиховим личним потребама. Glickman (2000) је испитивао ставове према математици студената који су били изложени инструкцијама уз помоћ рачунара. Резултати указују да су ти студенти добили пуно на самопоуздању и да су показивали мањи степен анксиозности према математици, за разлику од студената који су дате појмове усвајали на традиционалан начин.

Како многе студије указују да примена рачунара за визуализацију наставних садржаја из математичке анализе значајно утиче на разумевање наставних садржаја од стране студената, интеграција рачунара у процесу подучавања и учења математичке анализе треба бити озбиљно размотрена (Zakaria & Salleh, 2015). Lavicza (2008) у свом истраживању, у коме се бавио анализом имплементације CAS-а у високом образовању, закључује да је „на кориснике CAS-а употреба одговарајућих софтверских пакета имала позитиван ефекат приликом реализације курсева“. Неки од тих ефеката су: стицање додатних способности од стране студената потребних за рад у 21. веку, пружање помоћи студентима приликом разумевања математичких концепата, допирање до студената са слабијим постигнућима, мотивација студената за учење других курсева из области математике, учење тешких математичких садржаја који су раније обрађивани у склопу математичких предмета, упознавање студената са својим способностима и утицај на избор њиховог радног позива. Он такође тврди да: „употреба технологије доводи до разумевања концепата од стране студената који би тешко могли бити савладани без употребе CAS-а и да употреба технологије има значајну улогу у учењу датих појмова и концепата“. Преглед литературе говори и да „корисницима софтверских пакета, могућност за визуализацију у оквиру CAS-а може бити од велике помоћи и представљати потпору приликом традиционалног учења базираног на предавању“ (Marshall et al. 2012).

Употребом технологије, наставницима и предавачима се пружа јединствена прилика да генеришу, креирају, затим манипулишу и презентују графичке приказе одређених математичких идеја како би својим ученицима представили проблем. Моћ технологије се огледа и у томе што она представља помоћ за превазилажење проблема приликом размишљања о конкретном задатку/проблему, учењу и решавању проблема и задатака и да олакша визуализацију тродимензионалних објеката. Pea (1987) истиче да се технологија може користити за извођење заморних израчунавања и за креирање динамичких, интерактивних приказа градива које студенти треба да усвоје. Док одређени истраживачи наглашавају потешкоће приликом преласка између 3D објеката и њихових 2D репрезентација, Gutiérrez (1996) тврди да се истраживањима треба испитати потенцијал рачунара и одговарајућих софтверских пакета за поспешивање визуелних способности студената. Он верује да обиље различитих репрезентација које је могуће успоставити применом рачунара пружа изузетне услове за подучавање студената и њихово учење визуелних приказа. Површи и криве у простору се лако могу ротирати коришћењем адекватних динамичких материјала. Пресеци различитих објеката у простору се такође могу уочити и боље разумети. Графици се могу нацртати у простору и ротирати, посматрати из различитих углова како би студенти боље усвојили њихове особине. Такође промена геометријских карактеристика одређених објеката се може уочити променом коефицијената, а то се може студентима приближити креирањем видео материјала или анимација уз помоћ клизача за које се претходно дефинишу границе и број корака (величина корака). Јако сложене, чак и функције које нису непрекидне се могу успешно анализирати коришћењем динамичког софтвера. Врло је једноставно, у тим материјалима, графике повећавати (зумирати) или смањивати, површи чинити видљивим или их чинити мање или више прозирним, сакрити делове графика, мењати перспективу из које се график или више графика, као и њихови узајамни положаји посматрају итд.

Cretchley, Harman, Ellerton & Fogarty (2000) су показали да употребом софтвера студенти могу једноставно да пореде и класификују објекте, да анализирају своје грешке и заблуде које су имали о сложенијим геометријским објектима и да употреба софтвера представља подршку студентима који су имали потешкоће приликом решавања задатака и проблема. Студије су показале да се употребом динамичког софтвера поспешују и ставови студената и њихово самопоуздање и вера у сопствене могућности када је реч о математици. Квалитативне студије које се тичу утицаја примене софтвера за обраду градива функција више промењљивих на универзитетском нивоу, дају професорима увид у начин размишљања студената проучавањем начина резоновања студената и њиховог доживљаја апстрактних појмова. Palais (1999) је дискутовао о визуализацији у математици и подржао примену рачунара и материјала за визуализацију креираних уз помоћ одговарајућих софтвера. Закључио је да су математичари установили да у примењеној математици интерактивни материјали, настали коришћењем динамичких софтвера, дозвољавају спровођење математичких експеримената са лакоћом, са којом то раније није било могуће извести. Када је реч о томе у којој мери се треба ослонити на рачунаре, тачније њихову примену, Hennessy, Fung & Scanlon (2001) тврде да ослањање у великој мери на рачунаре (софтвере) може изазвати одређене проблеме код студената. Програми и алгоритми се могу користити механички и да разумевање студената може бити јако површно, приликом ослањања у великој мери на рачунаре, чак и када је реч о једноставним математичким проблемима.

2.8. Мобилно учење или М-учење

Информационо – комуникационе технологије, а посебно мобилни телефони играју јако битну улогу у животима младих људи. Мобилни телефони су јако битни превасходно за комуникацију, али они играју и јако битну улогу у социјалном животу младих и уз помоћ ових уређаја се млади изражавају, постају препознатљиви у друштву. Готово свака млада особа, старија од 14 година, без обзира на социјално-економске услове поседује мобилни уређај. Модернији мобилни телефони су препознати као инструмент за учење од стране наставника различитих предмета и на различитим нивоима и захваљујући разним истраживачима, појам „мобилни уређај“ је еволуирао (Laouris, 2005; Pachler & Seipold, 2009; Cochrane, 2010).

Разноликост пројеката који се тичу мобилног учења и примене мобилних уређаја за учење довели су до потешкоћа приликом строгог дефинисања појма мобилног учења и дефинисања особина овог вида усвајања нових знања и умења. Vavoula (2005) наводи да су се у њеном истраживању испитаници изјашњавали да је њихово учење углавном „мобилно“, другим речима да је то вид учења који преовлађује у навикама испитаника. Готово половина (49%) наученог се за њене испитанике десила на местима која не подразумевају кућне услове, односно радно окружење. Терминологија која се односи на мобилно учење је развијана и обликована под утицајем различитих научних дисциплина из разлога што је мобилно учење предмет интердисциплинарних истраживања у којима углавном истраживачи из области различитих дисциплина сарађују. Апликације за мобилно учење су развијане и анализиране од стране информатичара, веб девелопера, математичара, педагога, психолога, социолога итд.

Различити префикси и различите речи су придодаване речи „учење“ и врло брзо су такве кованице и заживеле: е-учење, м-учење, диференцирано учење, целоживотно учење итд. Док се неке од њих односе на временски оквир, већина се односи на услове и окружење приликом учења. Из техно-центричке перспективе разумевања мобилног учења, мобилност оних који уче (ученика, студената) и сам субјекат који упражњава овај вид учења нису у старту били предмет интересовања. Касније је мобилно учење описано „из угла преносивости технолошких уређаја који се користе као медијатори у активностима које подразумевају учење“, а затим и оних који посматрају мобилно учење „из угла мобилности ученика док користе преносиве уређаје и који имају приступ бежичном интернету као подршку приликом учења“ (Mwanza-Simwami, 2009). Winters (2007) категорише перспективе посматрања м-учења, респективно:

1) Техно-центричка перспектива која преовлађује у академској, научној литератури;
2) М-учење у релацији са е-учењем где се мобилно учење сматра напредним обликом е-учења;
3) Мобилно учење у смислу поспешивања формалног облика образовања;
4) Мобилно учење из перспективе учења усмереног на ученика (онога ко учи).

Када је реч о техно-центричкој перспективи посматрања мобилног учења опис овог учења се заснивао на врсти технологије која се користи, врсти мобилног уређаја и његових карактеристика. „То је е-учење кроз мобилне уређаје способне за одређена израчунавања“, односно кроз било коју форму малог електричног уређаја, довољно малог по димензијама да може бити у поседу људи било где и било када (Liang et al., 2005). Овакав опис мобилног учења проистекао је од стране истраживача из области техничких и технолошких наука са нагласком на новине које уређај пружа и функционалност самог уређаја. Такође, алати и апликације које се користе и који су укључени у дефиниције мобилног учења односе се на коришћење гласовних порука, СМС и ММС порука, функције камере на мобилном уређају, геопозиционог система (ГПС-а), приступа интернету, коришћење игара и сл. Пошто мобилни уређаји нису направљени у сврху учења, било која концептуализација мобилног учења је ограничена на природу технологије и самог уређаја (Traxler, 2009). Техно-центричка перспектива је ограничавајућа и одређени број истраживача тврди да се дефиниција мобилног учења више мора окренути ка оном који учи. На пример, Laouris (2005) закључује да „социјално одговорна дефиниција мобилног учења мора истицати мобилност онога који учи, а не мобилност самог уређаја“.

Друга перспектива из које се може посматрати мобилно учење јесте њена повезаност са е-учењем. Други тренд у дефинисању м-учења карактерише прелазак из техно-центричког угла на перспективу онога који учи. Искуства и потребе ученика односно студената избијају у први план и разлике између мобилног учења и других видова учења постају предмет истраживања, а посебно проучавање разлика са е-учењем. Дакле, пошто се е-учење дефинише као учење подржано дигиталним електронским уређајима и медијима, по аналогији се мобилно учење може описати као е-учење које је подржано употребом мобилних уређаја и бежичне интернет конекције. У контексту са е-учењем, м-учење се сматра јако блиским е-учењу, може се посматрати као посебан случај (подслучај) е-учења са заједничким карактеристикама, затим једноставно као еволуиран облик е-учења или као пресек наведених описа. Када је реч о разликама између мобилног учења и е-учења и других облика учења, неки аутори наводе да се они не разликују по природи, већ по окружењу и различитим условима. Такође о повезаности е-учења и мобилног учења владају два различита става. Једно становиште заговарају аутори који тврде да ће е-учење полако, временом прећи у м-учење без посебних промена у садржају и структури извора за учење из разлога све веће доступности интернета на различитим местима, развојем и свеприсутности бежичног интернета. Друго мишљење је да се мобилно учење односи на потпуно другачији приступ који подразумева учење на основу потенцијала независности локације и ситуације приликом које се усвајају знања и вештине.

Трећа перспектива мобилног учења у сврху поспешивања формалног образовања се ретко налази у стручној литератури јер је учењу изван одговарајућих институција ближи појам „целоживотно учење“.

Одређени број истраживача је мишљења да дефиниција мобилног учења базирана на употреби технологије није довољна и није задовољавајућа уколико не говори о релевантности облика учења у сврху едукације, односно да ученик и његова (њена) мобилност морају бити предмет разматрања. Ограничења оваквог посматрања, овог облика учења су у великој мери отворена пошто се чак и књиге могу сматрати инструментима мобилног учења и у том контексту је мобилно учење старо вековима пошто су и књиге могле да се преносе са места на место и да се из њих учи у разним приликама. Pachler & Seipold (2009) виде мобилно учење „као процес упознавања и способности успешног оперисања кроз нове и стално промењиве контексте и просторе за учење уз употребу мобилних уређаја, и да се оно односи на разумевање и спознају како прилагођавати свакодневни живот и свакодневне обавезе простору за учење“.

Мобилно учење или м-учење подразумева усвајање знања или умења коришћењем мобилне технологије, без обзира на место и време у коме се одвија. Циљ мобилног учења не мора представљати замену за традиционално учење већ другачији облик учења и допуну традиционалној настави, коришћењем технологија. MoLeNET тврди да мобилно учење може уопштено бити дефинисано као „експлоатација одговарајућих уређаја, заједно са бежичним и мобилним телефонским мрежама, ради подстицања, подршке, унапређења и проширења домета наставе и учења“. Мобилно учење нема ограничења у смислу времена у коме се одвија, нити места на коме се упражњава, од учионица и радног окружења, у кућним условима, на јавним местима или у превозу. Под мобилним уређајима се подразумевају мобилни телефони, iPOD-и, лаптоп рачунари, чак и уређаји за играње видео игара, као и специјално дизајнирани уређаји за лабораторијску употребу и коришћење у инжењерским радионицама. М-учење подразумева коришћење интернета, било да је реч о мобилном интернету или wifi-у, повезивање са системима одређених институција за преузимање материјала, рад на одређеном материјалу и upload резултата рада студената или материјала који су креирани од стране студената.

Истраживање концепта мобилног учења добија све више на популарности у последње време, имајући у виду развој и повећање присутности овог облика учења. У складу са тим се повећава и интересовање за могућности које пружа овај вид учења и за анализом ефеката које може пружити мобилно учење. Зато је м-учење постало предмет интересовања све већег броја истраживача у настави. Неки аутори тврде да је разлика у коначним резултатима и постигнућима студената, који су користили мобилне уређаје током учења, значајна у њихову корист, насупрот постигнућима студената који нису користили мобилне уређаје. Ови резултати показују да употреба мобилних технологија даје позитивне резултате за студенте у погледу како доживљавају активности током мобилног учења и у погледу побољшања њихових резултата (Fabian, K., Topping, K. J. & Barron, I. G, 2018). Cheung & Slavin (2013) такође закључују да је адекватна употреба технологије позитивно утицала на постигнућа ученика у поређењу са постигнућима ученика који су одговарајуће садржаје усвајали традиционалном методом. У својим резултатима, наглашавају да резултати варирају у зависности од врсте уређаја (технологије) и начина на који је коришћена приликом учења.

Cochrane истиче потенцијалне погодности које обезбеђује примена мобилних уређа-ја током учења: олакшавање учења у различитим контекстима, олакшавање контекстуалног учења и пружање могућности за индивидуализацију како у самосталном раду, тако и у групном раду (Cochrane, 2010). Када је реч о евалуацији мобилног учења у математици, упоредна студија различитих истраживања, коју су спровели Crompton & Burke (2015) је показала да од 48 студија које су анализирали, у 36 њих су примећени позитивни ефекти оваквог учења. Дати резултати се у великој мери поклапају са резултатима других аутора (Fabian, Topping, Barron, 2016). Ови аутори су у свом истраживању, у 77% студија (од укупно 31) забележили напредак постигнућа студената који су учили уз помоћ мобилних уређаја. Мишљења, утисци и ставови студената о примени мобилних телефона и других мобилних уређаја приликом савладавања одговарајућег градива су углавном позитивни, што потврђује и истраживање Baya’a & Daher (2009). У датом раду се наводи да студенти дате активности сматрају „корисним и занимљивим“ и да они дату технологију доживљавају као „користан математички алат јер олакшава визуализацију одређених садржаја и подстиче заједничко (групно) учење“. У многим истраживањима која се тичу окружења у учењу, студенти сматрају мобилне уређаје корисним за визуализацију математичких концепата. Резултати истраживања (Fabian, Topping & Barron, 2018), говоре у прилог томе да су се путем активности приликом учења студенти боље подсетили теме о којој се говори приликом учења и да им је употреба мобилних уређаја представљала велику подршку и помоћ приликом визуализације математичких објеката које су изучавали, а та искуства се поклапају и са искуствима студената које су у свом раду изнели Baya’a & Daher

(2009). Ово су донекле очекиване реакције и очекивани коментари студената имајући у виду да су видео материјали, анимације и други манипулативи карактеристични за материјале који служе за учење и за визуализацију математичких концепата, како применом рачунара, тако и применом мобилних уређаја. Одређени број студената сматра да им је учење математике, уз помоћ мобилних уређаја помогло да схвате апстрактне математичке концепте, а то је резултирало и бољим и дуготрајнијим памћењем наставних садржаја (Fabian, Topping & Barron, 2018; Hwang, Lin, Ochirbat, Shih & Kumara, 2015). Утисци ових ученика добијају на снази услед поспешивања њихових постигнућа и знатно бољим резултатима експерименталне групе у односу на контролну групу студената. Студенти, односно ученици на универзитетском нивоу користе своје мобилне уређаје и за комуникацију у виду разговора, слања текстуалних порука и све више, слањем фотографија и видео материјала. У свом раду из 2011, године Hashemia, Azizinezhad, Najafia & Nesari наводе предности и позитивне стране м-учења: студенти могу комуницирати између себе, као и са наставником уместо да се крију иза великих монитора; много је једноставније сместити и повезати неколико мобилних уређаја у учионици него неколико стандардних (десктоп) рачунара; могуће је поделити задужења студентима; студентима је омогућено да сарађују; студенти и професор могу електронском поштом комуницирати, копирати и налепити текст, премештати уређај из руке у руку; мобилни уређаји се могу користити било где и било када; ови уређаји укључују у процес учења студенте (младе људе) који су можда изгубили интересовање за образовање. Поред свих позитивних страна, аутори такође наводе неке недостатке примене мобилних уређаја: мале димензије екрана на уређајима ограничавају количину и врсту информација која се може приказати; тешко је користити интерактивне материјале и графике са анимацијама, посебно код мобилних телефона.

Мобилно учење је процес који иде у два смера. С једне стране наставници морају креирати и развити одговарајуће материјале за учење као и да буду у прилици да активно и учестало комуницирају са својим студентима; са друге стране ту су студенти који користе дате материјале у сврху учења. У прегледу литературе (Alioon & Delialioglua, 2015) о мобилном учењу, аутори пружају увид у истраживачке активности на ову тему. Када говоримо о истраживањима из земаља у окружењу, само неколико (5 од 30) истраживања се односе на примену мобилних уређаја у високошколском образовању, а највећи број њих се односи на истраживања са јако малим узорцима студената. Када је реч о врсти технологија које су коришћене у раду, у највећој мери (73%) су коришћени мобилни телефони.

3. Опис тока експерименталног истраживања спроведеног у току академских 2016/2017. и 2017/2018. године

Прво истраживање спроведено на тему примене софтвера и мобилних апликација са циљем унапређивања квалитета знања студената у области вишеструких интеграла, у овом случају конкретно двоструких интеграла, спроведено је током академских 2016/2017. и 2017/2018. године на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. За визуализацију наставних садржаја што уједно представља и централно место у промени методологије рада са студентима приликом подучавања и учења двоструких интеграла, изабран је програмски пакет *Wolfram Mathematica.* Такође, потребно је поменути да је за потребе развијања теоријског знања код студената коришћен и програмски пакет *GeoGebra.*

3.1. Циљеви истраживања спроведеног 2016/2017. и 2017/2018. године

Након избора софтверског пакета који би био коришћен у датом истраживању, затим одабира репрезентативног узорка који би био овим истраживањем обухваћен, могуће је и прецизније постављање циља истраживања.

Утврђивање степена утицаја примене динамичких софтвера, односно програмских пакета на квалитет теоријског и процедуралног знања студената, са акцентом на визуализацију одговарајућих геометријских објеката и повезивања вишеструких репрезентација тих објеката, као и дубље разумевање наставних садржаја из области вишеструких интеграла, представљало је основни циљ истраживања.

Поред основног циља истраживања, датим истраживањем ће се постигнути и додатни циљеви:

- Имплементација примене рачунара, односно програмских пакета у наставни процес;
- Израда инструмента (теста знања) потребног за утврђивање постојања евентуалне разлике у постигнућима студената.

На основу искустава универзитетских наставника који предају функције више промењљивих студентима студијских програма техничких факултета, студенти неретко имају потешкоћа са разумевањем појма вишеструког интеграла, са израчунавањем двоструких и троструких интеграла. У великом броју случајева студенти, приликом полагања колоквијума и испита на стручним факултетима, уопште и не покушавају да одреде вредност вишеструких интеграла, а и када уложе напор, у великом броју случајева покажу неразумевање за дате појмове и несналажење приликом одређених рачунских поступака. На основу вишегодишњег искуства у раду са студентима разних профила (од инжењерских, преко студената прехрамбене технологије, па до рада са будућим математичарима и информатичарима), уочене су веће или мање потешкоће код већине студената приликом решавања двоструких интеграла. Када говоримо о одређеном интегралу, поједини студенти такође имају потешкоће приликом решавања одређених типова задатака, при чему се сви ти проблеми могу условно назвати истим именом – проблем при одређивању примитивне функције дате функције једне промењљиве. Међутим, када на наредним курсевима (вишим годинама студија) на ред дође савладавање одговарајућих наставних садржаја који се односе на вишеструке интеграле, поред одређивања примитивне функције (сада функције више промењљивих), јавља се још један „проблем“, а то је уочавање и одређивање области по којој се врши интеграција.

На основу одговарајућих студијских програма, студенти математике имају бољу теоријску основу за савладавање двоструких интеграла. Ти студенти имају, уопштено говорећи, значајно боље процедурално знање када је реч о одређивању примитивне функције, зато што су, у склопу одговарајућих курсева математичке анализе, имали знатно већи број часова, предавања и вежби, где су на великом броју примера, усвајали и утврђивали знања о интеграцији, примени особина одређеног, односно неодређеног интеграла, методи декомпозиције, методи смене, методи парцијалне интеграције итд. Такође, имали су и значајно бољу „припрему“ за савладавање, другог аспекта у решавању двоструког интеграла, а то је одређивање области по којој се врши интеграција и наравно одређивање граница интеграције за промењљиве дате функције више промењљивих. Студенти математике су се упознали са одговарајућим једначинама и графицима одређених површи, попут равни, параболоида, конуса, цилиндра, сфере, хиперболоида, кроз курс аналитичке геометрије у простору, коју студенти у највећем броју факултета слушају пре курса у коме се упознају са вишеструким интегралима. Такође, на часовима математичке анализе су се, углавном пре наставних садржаја који се односе на вишеструке интеграле, упознали и са разним трансформацијама равни, попут увођења поларних и уопштених поларних координата, али и са трансформацијама у простору, какве су пресликавање дела простора увођењем цилиндричних или сферних координата.

Време које је предвиђено за савладавање наставних садржаја из двоструких и троструких интеграла кроз курсеве математике разних студијских профила (у којима је студијским програмом предвиђено обрађивање наставних садржаја из вишеструких интеграла), не само да је значајно краће, већ је и сама припрема студената за усвајање теоријских и процедуралних знања студената о вишеструким интегралима, која се огледа у броју наставних часова предвиђених за упознавање ученика са основама аналитичке геометрије у простору и трансформацијама у равни и простору, неупоредиво краће. Све то доводи до тога да подучавање студената (инжењерства, грађевинарства, прехрамбене технологије итд.) о вишеструким интегралима, представља прави изазов за наставника. Стога је почетком академске 2016/2017. године осмишљен експериментални методски приступ настави двоструких интеграла, са циљем да се унапреди како теоријско, тако и визуелно и практично, односно процедурално знање студената, где је дати приступ подразумевао промену у начину подучавања одређивања области по којој се врши интеграција, односно одређивању граница промењљивих функције две промењљиве.

3.2. Уводно (прелиминарно) тестирање студената

Најпре је академске 2016/2017. године извршено тестирање студената друге године основних академских студија профила машинско инжењерство, војноиндустријско инжењерство и аутомобилско инжењерство о њиховом знању које се тиче решавања одређеног интеграла. Тест (прилог 1) који су студенти полагали је садржао четири задатка, а студенти су за његову израду имали 45 минута. Задацима које су студенти полагали на пре-тесту је извршена процена степена усвојености знања о решавању одређених интеграла, што уједно представља и предзнање за решавање вишеструких интеграла. Приликом решавања задатака студенти нису користили ништа што би им могло помоћу у изради тих задатака (таблица интеграла, рачунар, телефон). За први задатак је било потребно познавање таблице интеграла, конкретно чему је једнак интеграл степене функције, као и примена Њутн-Лајбницове формуле. Други задатак се односио на методу декомпозиције и наравно на примену Њутн -Лајбницове формуле. Другим задатком се такође могло проверити у којој мери студенти умеју да примене знање о вредностима интеграла парних, односно непарних функција у границама од $-a$ до a, за реалан број a. За решавање трећег задатка је било потребно применити методу смене, док је за решавање четвртог задатка било потребно познавање поступка парцијалне интеграције. Максималан број поена на поменутом тесту је био 20. Оно што је најинтересантније јесте да су апсолутно сви студенти задатке решавали аналитичким приступом, ниједан студент није нацртао график ниједне подинтегралне функције приликом решавања интеграла, па је самим тиме и примена особине интеграла парне, односно непарне функције, у границима симетричним у односу на координатни почетак изостала (студенти су све вредности рачунали применом Њутн-Лајбницове формуле). Наравно, то представља вероватно и последицу навика студената, који су под утицајем својих наставника, током свог математичког образовања много наклоњенији били аналитичком приступу у односу на визуелни. Статистички показатељи успешности студената на пре-тесту су дати у табели 2.

Након обављеног пре-теста, кренуло се са осмишљавањем експерименталног приступа подучавања и учења двоструких интеграла уз примену рачунара. Групи студената која је дати предмет слушала и полагала академске 2016/2017. године наставни садржаји су излагани традиционалним путем, односно кроз фронтални облик наставе и монолошком, дијалошком и илустративном наставном методом. Дакле, укратко настава се одвијала тако што би наставник ученицима издиктирао задатак, сачекао да студенти мало размисле о задатку, наставник би студентима постављао питања и потпитања и на тај начин дозирао помоћ студентима како би они, у што већој мери самостално, закључили како изгледа област по којој се врши интеграција, одредили границе и приступили израчунавању двоструког интеграла. У појединим ситуацијама, неко од студената би изашао пред таблу, скицирао одговарајућу слику уз надзор, сугестије и исправке од стране наставника, потом поставио границе решавајући одређене једначине и неједначине и израчунавао интеграл, али у највећем броју случајева би све то чинио наставник уз максималан напор да успостави дијалог са ученицима и да их укључи у наставни процес.

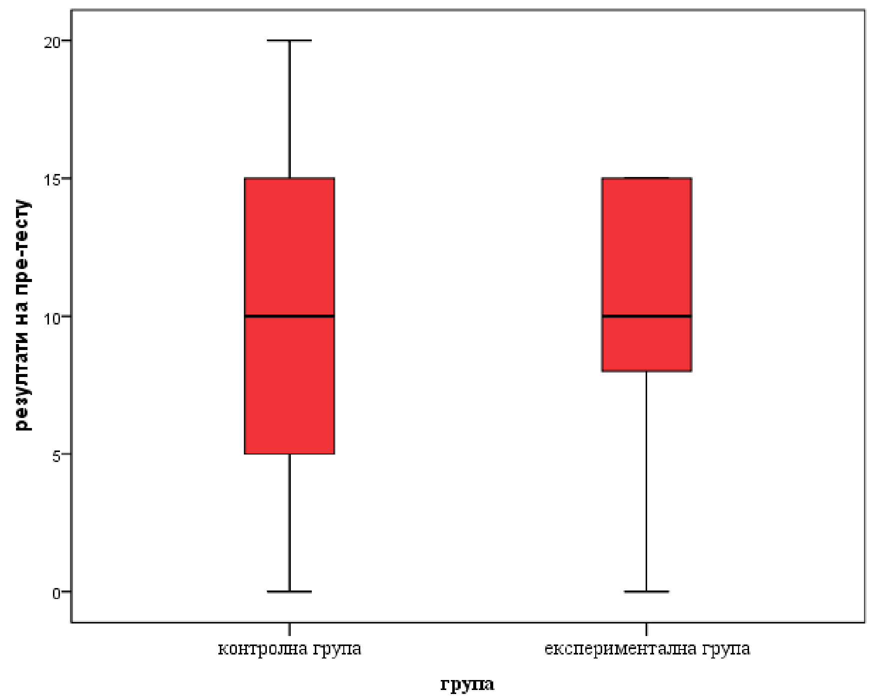
Наредне, академске 2017/2018. године је поново, уз одговарајуће планирање спроведено тестирање студената профила машинско инжењерство, војноиндустријско инжењерство и аутомобилско инжењерство, који су тада по први пут слушали дати курс Математика 3 у коме су се, између осталог касније упознали са вишеструким интегралима. Студентима, њих 52, је тестирано њихово знање и умење које се тиче решавања одређеног интеграла, и за пре-тест су добили готово исте задатке, уз одређене измене бројевних вредности, са циљем да се утврди ниво степена усвојености (пред)знања студената о методи декомпозиције, познавању таблице интеграла, особини интеграла парне, односно непарне подинтегралне функције (где су границе одређеног интеграла симетричне у односу на нулу), о методи смене, методи парцијалне интеграције, наравно и Њутн-Лајбницовој теореми. У табели 2 су дати и статистички показатељи успешности студената експериментално групе на пре-тесту.

Табела 2. Статистички показатељи резултата студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту

Група	Број студената	Медијана	Аритметичка средина	Стандардно одступање	Минимум	Максимум
Контролна	51	10	9.41	5.26	0	20
Експериментална	52	10	10.67	3.71	0	15

Расподела броја поена на уводном тесту, односно пре-тесту, код студената контролне и експерименталне групе, приказана је графиконима са слици 4.

Како је, на основу теста Колмогоров-Смирнов, утврђено да расподеле броја поена студената на пре-тесту, немају нормалну расподелу (сигнификатност је мања од 0.0005), анализирана је хипотеза да не постоји статистички значајна разлика у укупном броју поена на пре-тесту код студената који су слушали вишеструке интеграле у академској 2016/2017. и који ће слушати академске 2017/2018. године.



Слика 4. Расподела броја поена студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту

Одговарајућом статистичком анализом (Ман-Витнијевим тестом) је установљено (табела 3) да разлика у расподели броја поена које су студенти две групе остварили на уводном тестирању није статистички значајна ($p = 0.128$)

Табела 3. Ман-Витнијев тест о једнакости расподела укупног броја поена на пре-тесту

Група	Број студената	Средња вредност ранга	Сума рангова	Тест разлике		
				Ман Витнијев тест	Z	p (2-tailed)
Експериментална	52	47.65	2430	1104	−1.52	0.128
Контролна	51	56.27	2926			

Дакле, закључак је да не постоји статистички значајна разлика у (пред)знању студената две генерације (2016/2017 и 2017/2018), што наравно и има смисла имајући у виду да се њихово математичко образовање до тог тренутка није разликовало. Стога је било оправдано наставити са експерименталним методским приступом подучавања и учења студената вишеструким интегралима уз помоћ рачунара.

3.3. Опис рада са студентима експерименталне групе током првог експерименталног истраживања 2017/2018. године

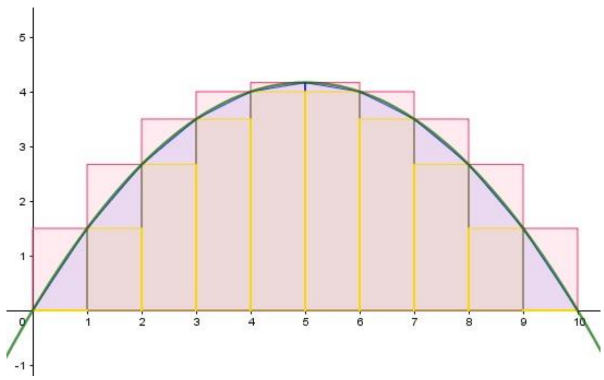
Динамички материјали, односно графици функција више променљивих, као и графици површи датих одговарајућим једначинама за рад са експерименталном групом су креирани у програмском пакету *Wolfram Mathematica* тако да прате задатке које су њихове старије колеге решавале током часова Математике 3, претходне академске године. Дакле, није било значајних измена у избору задатака, са студентима су решавани исти они задаци које су са њиховим старијим колегама на часовима обрађивани годинама уназад, али сада уз подршку графика припремљених коришћењем одговарајућег софтвера. Задаци су раније изабрани из одговарајуће математичке литературе (Stewart, 2008, Štrboja, 2016, Ikodinović, Stanić, Pavlović & Simić, 2011).

Имајући у виду релативно слабе резултате у просеку које су студенти освојили на пре-тесту, а који су илустровали недовољно висок ниво способности студената за препознавање начина, односно избора одговарајућег метода за решавање одређеног интеграла и спровођење поступка решавања одређеног интеграла, закључак је да примена рачунара за решавање вишеструких интеграла у потпуности, не би била најприкладнија. Да је то био случај, студенти експерименталне групе би били ускраћени за могућност да обнове, утврде и продубе своја знања о израчунавању интеграла јер је познато да се израчунавање сваког вишеструког интеграла своди на израчунавање одређеног интеграла. Такође, студенти који нису усвојили поступак решавања одређених интеграла, јер постојао је известан број студената који још увек није положио курс математике чији део наставних садржаја представља управо одређени интеграл, не би имали прилику да сада, надокнаде пропуштено. Даље, како вишеструки интеграли имају примену у стручним, инжењерским предметима, студенти би били ускраћени да дате проблеме решавају уколико немају могућност употребе рачунара. Наравно, ту је и питање полагања испита из Математике 3, које је не само предвиђено да буде без употребе рачунара, већ и не постоје техничке могућности да се испит на тај начин организује. Све је то додатно утемељило одлуку да се експериментални приступ рада осмисли тако да рачунски део израчунавања вишеструких интеграла буде спроведен на традиционалан начин, коришћењем креде и табле за обе групе, а да се промени приступ одређивања граница области и граница променљивих приликом решавања вишеструких интеграла. Двоструки интеграли су на часовима практичне наставе обрађивани током пет наставних часова (два и по термина) и са контролном и са експерименталном групом.

Наставник је студентима поделио одговарајуће динамичке материјале на којима су били представљени различити графици, у складу са поставкама и захтевима конкретних задатака из области двоструких интеграла. Материјали су били припремљени у динамичком софтверу *Wolfram Mathematica,* а студенти су дате наставне материјале анализирали користећи *CDF Player*, који је иначе бесплатан и врло доступан софтвер. Приликом рада са тим динамичким материјалима, графици функција једне променљиве, правих и кривих у равни, као и површи у простору и графици функција више променљивих дате су и алгебарском репрезентацијом и графичком репрезентацијом. На тај начин студенти су могли да, на адекватан начин, повезују различите репрезентације истих математичких појмова и концепата и да их на тај начин боље усвајају и разумеју.

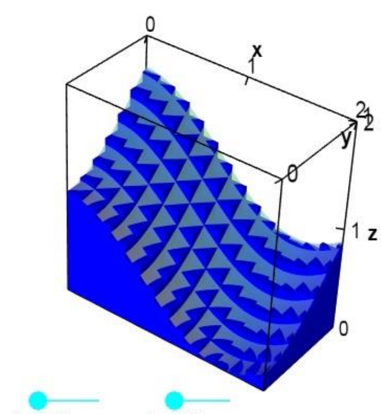
У великом броју објављених студија и научних радова, подучавање успостављањем одговарајуће аналогије између математичких концепата које студенти треба тек да усвоје и математичких концепата и идеја које су студенти већ усвојили током свог математичког образовања, сматра се примерима добре праксе и ефективног и ефикасног начина подучавања. Аналогија може имати вишеструку улогу приликом учења са разумевањем. Кроз такав вид излагања студентима се пре свега пружа могућност да реорганизују шеме које повезују научено и да дате наставне садржаје сагледају из другачије перспективе, као мање или више искуснији студенти, студенти са више знања у односу на време када су се са неком идејом по први пут сусрели. Дакле, студенти на овај начин реорганизују своје памћење и припремају своје интелектуалне капацитете да усвоје нове информације и на тај начин обезбеде позитиван трансфер учења. Аналогија пружа могућност визуализације апстрактних концепата и представља значајну улогу у мотивацији за учење са разумевањем. Примена аналогије, приликом излагања наставника, може потенцијално довести до бољих резултата у ангажовању студената приликом учења и њихове интеракције са наставном темом, односно наставним садржајима. Тако Lemke (1990) истиче да студенти у просеку три до четири пута пажљивије прате излагање наставних садржаја коришћењем њима познатих термина и нотације у односу на њима непознат научни говор. Излагање упостављањем аналогија повећава уверења студената о сопственим могућностима када је нов проблем који се поставља пред студенте аналоган проблему са којим су студенти раније били успешни у решавању. У идеалним околностима, аналогије помажу студентима да препознају грешке и заблуде које су имали приликом (више или мање) погрешно усвојених математичких садржаја.

Узевши све позитивне аспекте подучавања заснованог на аналогији, почетна идеја приликом излагања наставних садржаја о двоструким интегралима, била је да се успостави аналогија између одређеног и двоструког интеграла. У уводном делу часа, имајући у виду значај примене знања из геометрије и аналитичке геометрије, наставник је упоређивао појмове угао и диедар, успостављањем паралеле између ова два појма у смислу да је угаона линија одређена са двеју полуправих са заједничким теменом, док је одговарајући концепт у простору одређен са две полуравни са заједничком правом. Наглашено је да угао представља скуп тачака са исте стране угаоне линије, наравно у равни, док је диедар одређен скупом тачака са исте стране диедарске површи и то у простору. Дати пример је наведен како би се истакла разлика између ова два концепта у смислу „димензије“. Након што су студенти, на овај начин заинтригирани, настављено је са обнављањем концепта одређени интеграл и његовом геометријском репрезентацијом. Обновљена је примена одређеног интеграла за одређивање површине дела равни испод графика подинтегралне функције, односно за израчунавање површине криволинијског трапеза. У ту сврху, припремљен је дигитални садржај у софтверском пакету *GeoGebra*, који се односи на поделу датог криволинијског трапеза на различит број правоугаоника, односно правоуглих трапеза (слика 5).



Слика 5. Подела криволинијског трапеза на правоугаонике

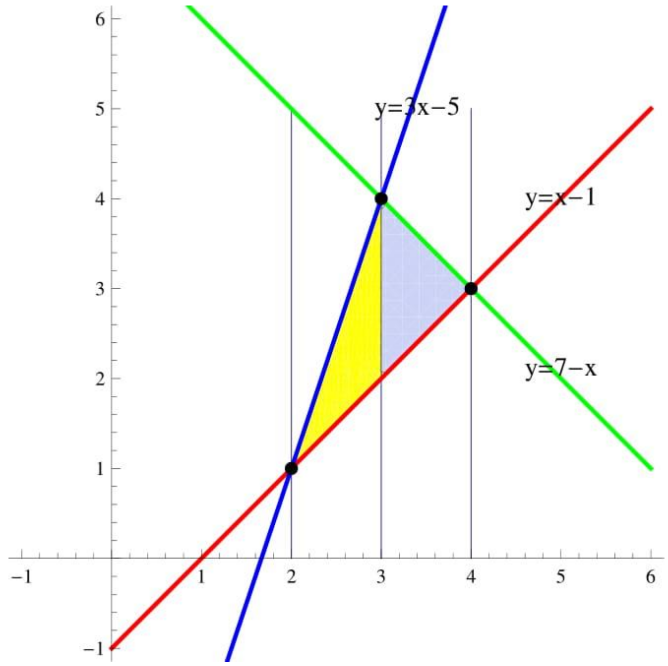
Потом су студенти упитани шта би представљало аналогију изложене идеје у простору. Након краће дискусије са студентима, наставник је истакао да би то било одређивање запремине дела простора, одређеног са Oxy равни, графиком функције две променљиве и уопштено говорећи цилиндром који део тог графика пројектује на поменуту раван. Такође аналогијом, наставник истиче да, уместо поделе дела равни на правоугаонике, сада простор делимо на правоугле паралелепипеде и том приликом даје студентима довољно времена да уоче дату аналогију. Да би студенти што боље разумели изложену идеју, наставник омогућава визуализацију датог поступка приказивањем дигиталног садржаја (слика 6).



Слика 6. Подела простора на правоугле паралелепипеде,тј. на одређен број четвоространих призми

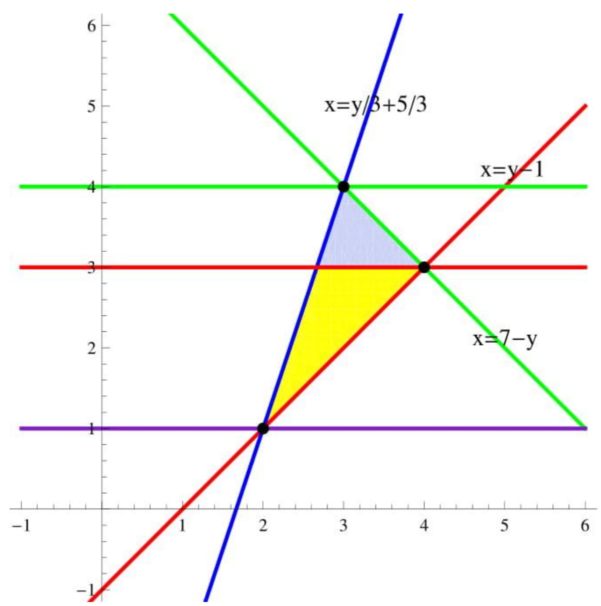
Након тога, закључује са студентима да што су странице правоугаоника мање дужине код одређеног интеграла, тј. што је број правоугаоника чије су одговарајуће странице једнаких дужина (које припадају x-оси) већи, вредност тако добијене површине у већој мери одговара правој вредности одређеног интеграла и да слично важи и за двоструки интеграл - што је број паралелепипеда чије су одговарајуће две ивице једнаких дужина (ивице паралелепипеда које припадају равни Oxy) већи, а дужине тих једнаких ивица мање, вредност тако добијене запремине у већој мери одговара правој вредности двоструког интеграла. Понавља са студентима да одређени интеграл представља граничну вредност подинтегралне функције када вредност независне променљиве x тежи нули, као и да, по аналогији двоструки интеграл представља граничну вредност подинтегралне функције када вредности променљивих x и y теже нули. Сви ови материјали и дискусија вођена са студентима су имали за циљ побољшавање теоријског знања и разумевања студената о двоструком интегралу, који представља доста апстрактан математички концепт.

Потом је наставник излагао поступак рачунања двоструког интеграла, са циљем да студенти усвоје одговарајуће поступке, односно процедурално знање. На конкретном примеру, са истим доменом интеграције, наставник истиче разлике у тумачењу, односно другачијем описивању истог дела равни, другачијим избором кривих (конкретно правих). Другим речима, припрема студенте за примену двоструког интеграла за одређивање површине дела равни, различитим избором променљиве која ће имати константне границе и променљиве која ће имати променљиве границе. Дакле, на конкретном примеру, у коме је област по којој се врши интеграција била одређена троуглом са наведеним теменима, наставник је најпре одредио експлицитне облике једначина правих. Потом је за променљиву која ће имати константне границе изабрао променљиву x, а за променљиву која ће имати променљиве границе, променљиву y. Након тога је истакао да се редослед интеграције спроводи тако што се врши интеграција по променљивој која има променљиве границе, а потом по променљивој чије су границе константне. Такође, на конкретном примеру истиче да је понекада потребно област интеграције разбити на више дисјунктних делова и да је укупна вредност датог интеграла једнака збиру интеграла по областима које су дисјунктне, а чија унија представља почетну област интеграције. Тиме је успоставио аналогију са одговарајућом особином одређеног интеграла.



Слика 7. Подела троугла на два мања троугла са циљем рачунања интеграла, при чему се интеграција спроводи најпре по промењљивој y, па потом по промењљивој x.

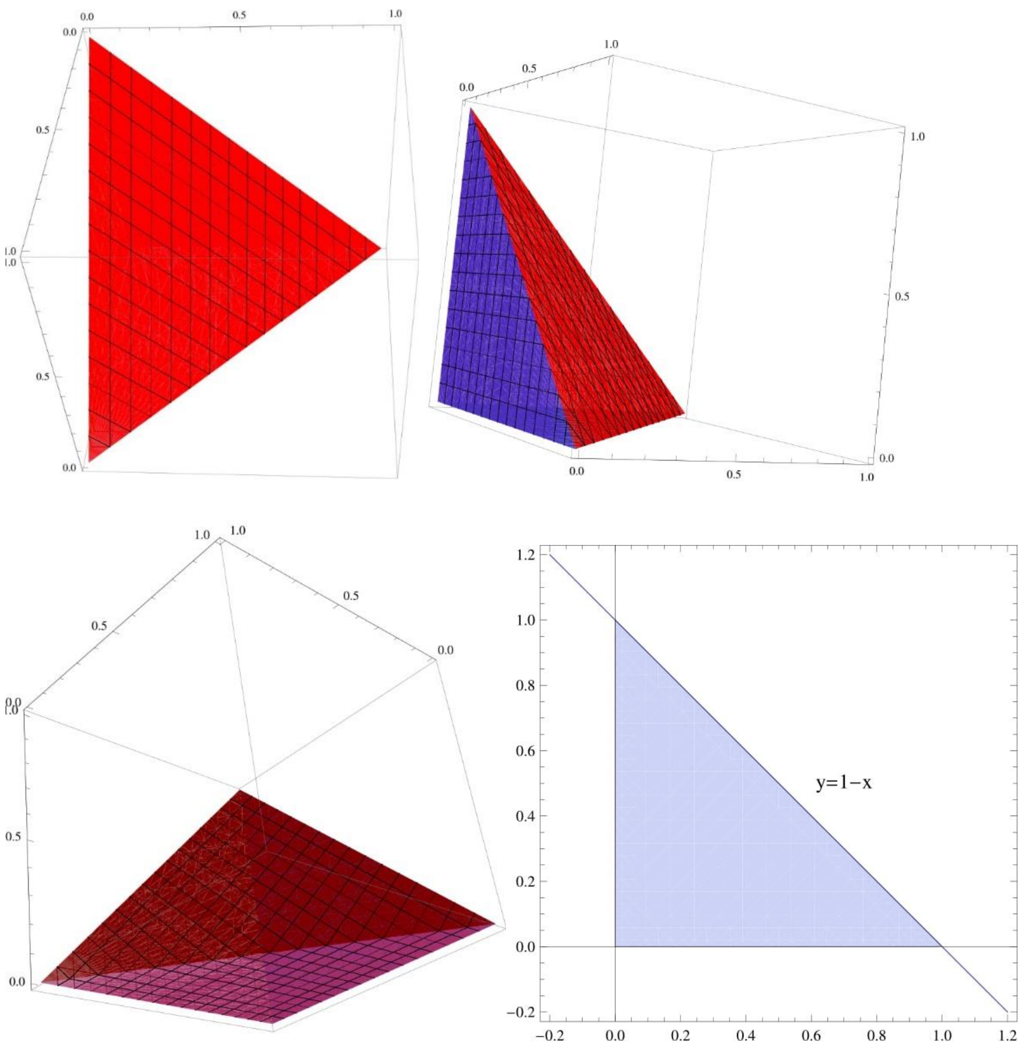
Затим исти задатак наставник решава тако што за промењљиву која ће имати константне границе бира промењљиву y и самим тиме за промењљиву која ће имати промењљиве границе, промењљиву x (слика 8). Истиче да је тада неопходно другачије дефинисати праве (у општем случају криве).



Слика 8. Подела троугла на два мања троугла са циљем рачунања интеграла, при чему се интеграција спроводи најпре по промењљивој x, па потом по промењљивој y.

Након што је наставник детаљно спровео поступак интеграције у оба случаја, посебно истиче да је резултат исти и да не зависи од редоследа интеграције, наравно уколико се поступци исправно спроведу. За све то време користи графике припремљене у *Wolfram Mathematica*-и.

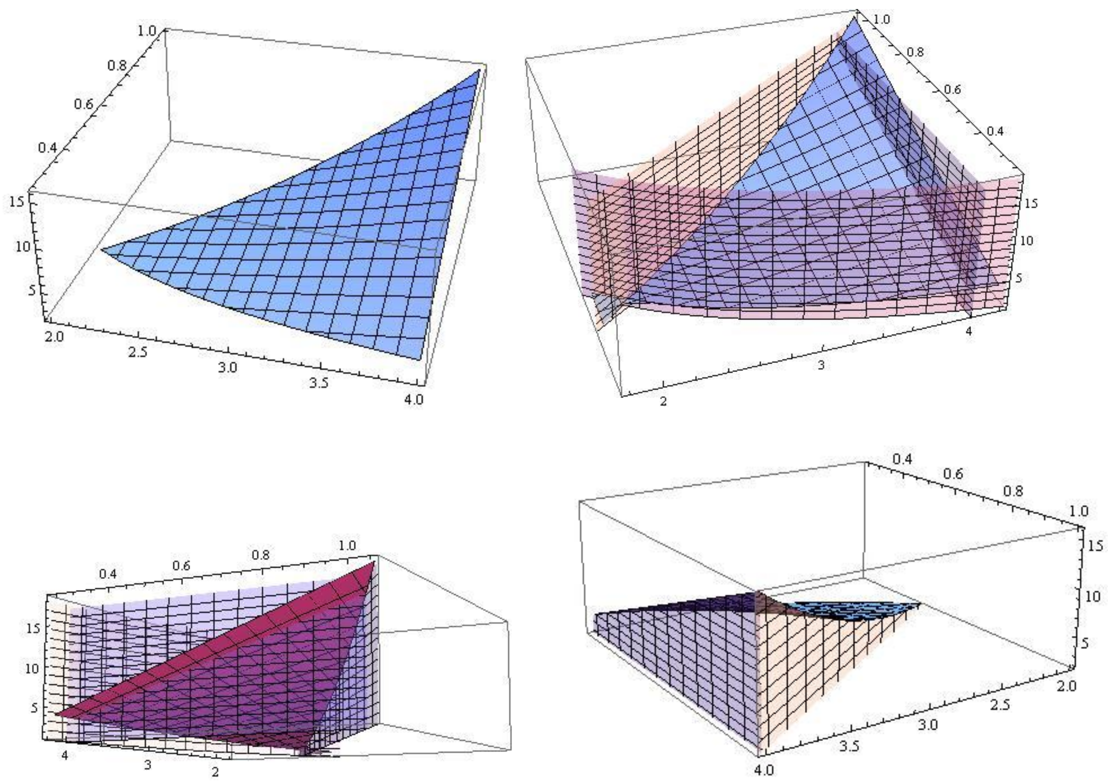
Након тога је пред студенте постављен задатак у коме је захтев био одређивање запремине области коју одређују равни $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x + y + z = 1$ (1. задатак, прилог 2). Студентима је дато упутство да отворе графике припремљене у *Wolfram Mathematica*-и и отворена је дискусија о томе како би се дати задатак решио, са посебним акцентом на дефинисање области одређене овим равнима.

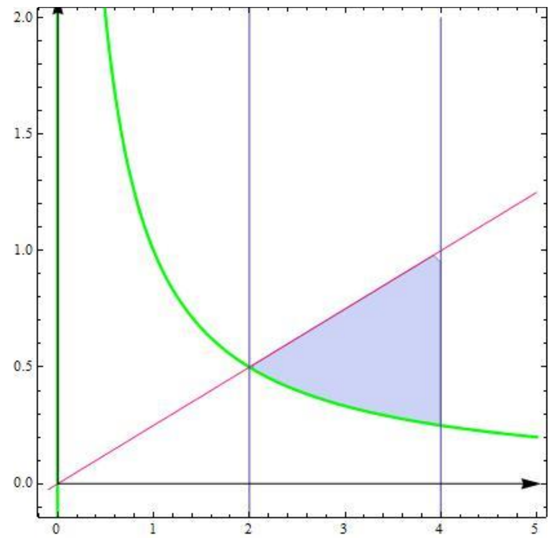


Слика 9. Графици припремљени за 1. задатак

С обзиром на то да је у сваком задатку из области двоструког интеграла јако битна пројекција тела чију запремину треба израчунати, на xOy раван, сваки материјал припремљен за студенте је садржао и графички приказ пројекције тела на раван, са циљем да студенти што боље визуализују дати проблем. У разговору са студентима, део који се тиче одређивања граница променљивих x и y био је занимљив и стварао је когнитивне конфликте код студената. Оно што је карактеристично за студенте и контролне и експерименталне групе јесте да су се у обе групе, по пар студената излетели и изјавили да су границе за променљиве x и y: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Међутим, студенти експерименталне групе су знатно брже схватили да то није случај управо због графичког приказа пројекције пирамиде чију запремину је потребно одредити. Студентима је јасно било да би границе, које су они испрва предложили ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$), одговарале фигури која представља квадрат, те су се након мало времена које су искористили за размишљање, исправили и прецизно дефинисали област пројекције, односно скуп тачака у равни унутар датог једнакокракоправоуглог троугла. Управо је разумевање које су студенти овом приликом показали касније утицало на решавање сличних задатака, а самим тиме и успех студената приликом вредновања степена усвојених садржаја.

Након решавања задатка применом двоструког интеграла, наставник је задатак решио и применом знања из стереометрије и тиме уверио студенте да резултат не зависи од начина решавања задатка (што је карактеристично за решавање математичких задатака генерално), са истицањем чињенице да у решавању највећег броја задатака, где је захтев одређивање запремине сложених тела, познавање стереометрије није довољно. Такав је био следећи задатак (2. задатак, прилог 2), у коме је захтев био одређивање запремине тела одређено површима $z = x^2 y, y = \frac{1}{x}, y = \frac{x}{4}$ и са равни $x = 4, z = 0$.

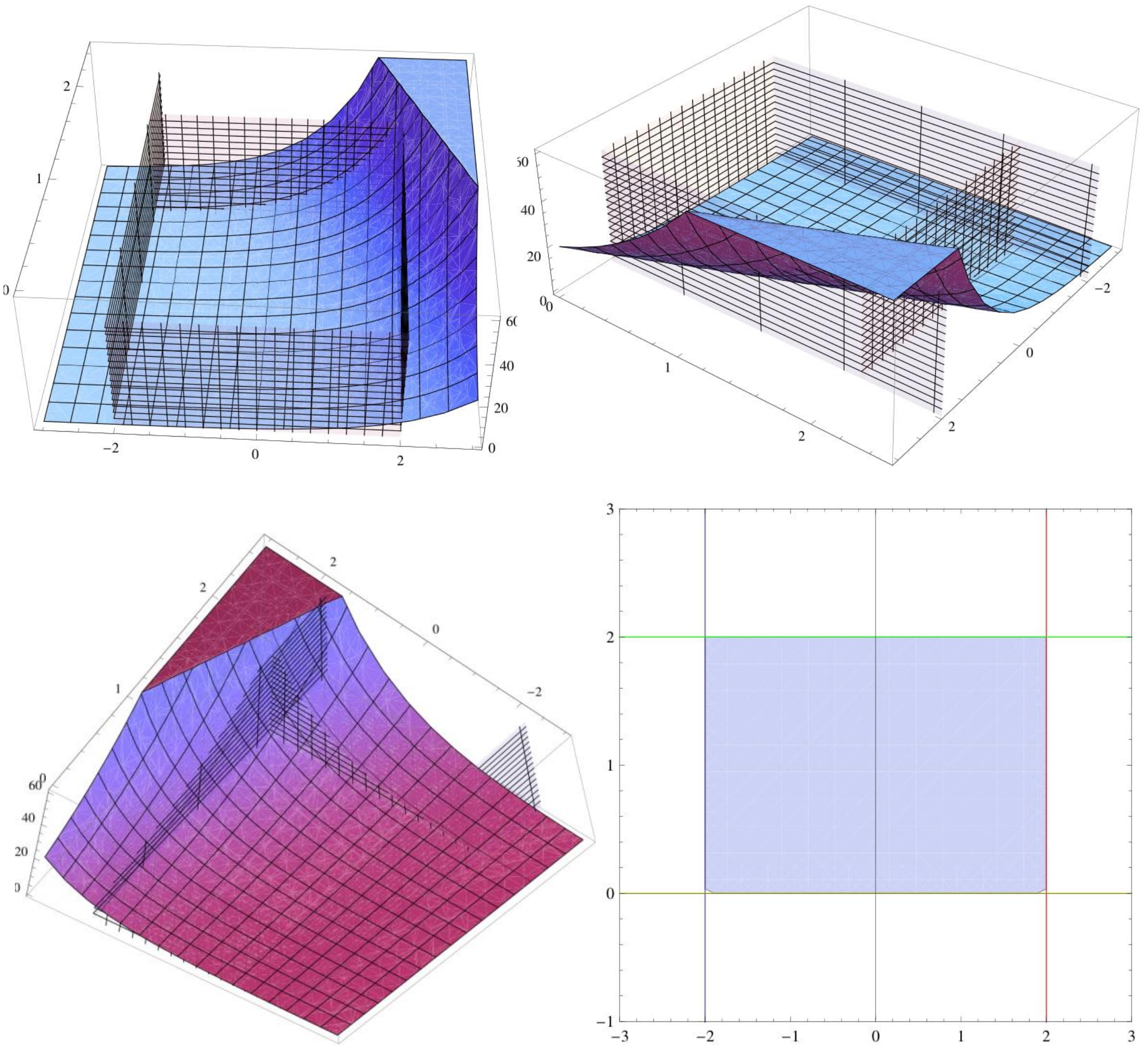




Слика 10. Графици припремљени за 2. задатак

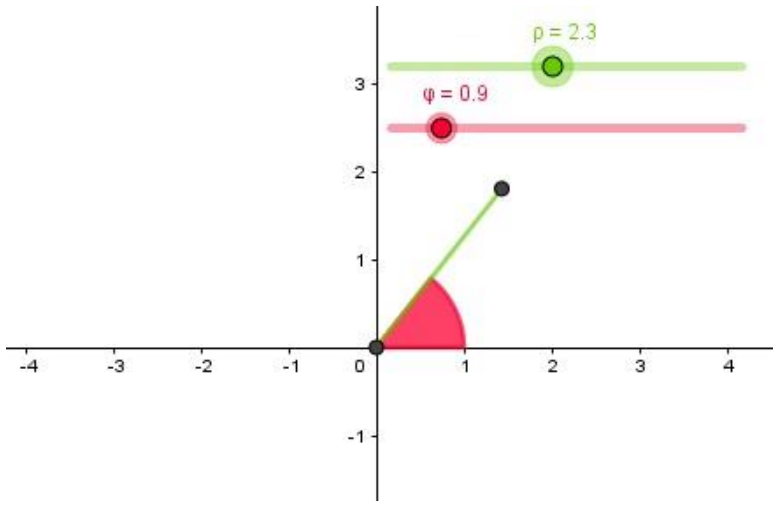
Студенти су поново добили упутство да отворе динамички материјал који прати дати задатак. Оно што је такође битно нагласити јесте да је у сваком задатку, у оквиру једног материјала, било припремљених пет до седам графика, односно графичких репрезентација области која је у поставци задатка дата у аналитичком облику. Број графика је варирао у зависности од сложености тела чију је запремину требало одредити, односно у зависности од области по којој се врши интеграција. Рад студената је, као и генерално приликом решавања осталих задатака текао тако што им је наставник дао нешто времена да анализирају дати задатак, захтев у задатку, да на основу теоријског знања одреде подинтегралну функцију две променљиве, а затим да анализирају графичке репрезентације наведених површи и равни и, највише на основу графичког приказа пројекције, одреде границе променљивих x и y.

Када је реч о трећем задатку, потребно је било одредити запремину тела одређеног графиком функције, односно површи $z = e^{x+y}$ и равнима $x = -2, x = -2, y = 0, y = 2$ (3. задатак, прилог 2). Овај задатак је послужио за утврђивање знања студената о двоструком интегралу и увежбавање поступка интеграције, са посебним нагласком на одређивање граница променљивих. Студенти су добили упутства о томе који динамички материјал да користе, који је, као што је већ речено, садржао више графичких приказа датог проблема. Студенти су, махом у пару, кроз дискусију којом није нарушавана дисциплина на часу решавали дати задатак чиме су развијали и неке међупредметне компетенције какве су сарадња, рад са подацима и садржајима, комуникација, решавање проблема, а које су карактеристичне за основношколско и средњешколско образовање. Након што су студенти решили задатак, они су позвани да упуте наставника и остале колеге у своје резултате. Један од студената који је исправно решио задатак је исписао решење задатка на табли, уз надзор од стране наставника, док су остали студенти пратили поступак израде задатка. Потом је вођена дискусија о грешкама које су студенти правили које су биле различите природе, од рачунских грешака, до значајнијих, суштинских грешака. Интересантно је да су студенти били врло расположени за дискусију и за указивање на своје грешке, што се у принципу не би могло назвати уобичајеном атмосфером, када су они у питању.



Слика 11. Графици припремљени за 3. задатак

На основу пређашњег искуства, а и на основу неких спроведених студија (Montiel et al., 2008) студенти често имају проблем приликом интерпретације области по којој се врши интеграција када се област интеграције трансформише преласком на поларне координате, односно увођењем смене $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. На основу разговора са колегама наставницима са Факултета инжењерских наука, наставник математике је био упознат да су студенти дату смену раније срели у склопу курса из Кинематике, али само на једном конкретном примеру, те да поларне координате нису биле предмет посебне дискусије, односно да у датом примеру акценат није био на смени помоћу поларних координата. Зато је и приликом увођења дате смене, односно приликом подучавања студената о датој смени, утицај визуализације јако битан јер је без те визуализације јако тешко постићи одређен ниво теоријског знања студената. Наставник је припремио динамички материјал коришћењем софтверског пакета *GeoGebra*.

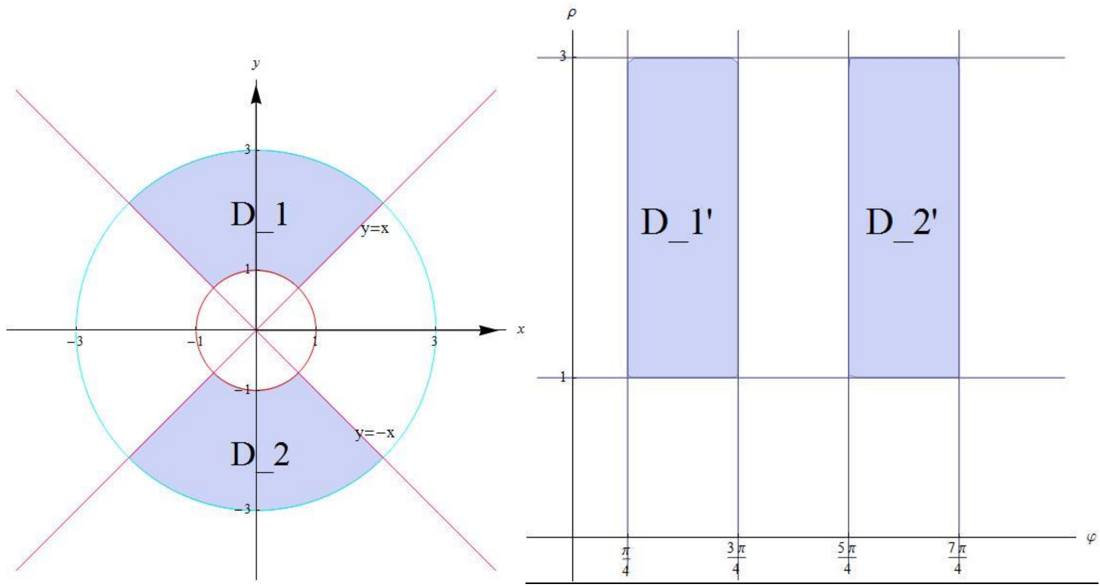


Слика 12. Визуализација смене увођењем поларних координата

Математички појмови који се јављају приликом увођења смене променљивих помоћу поларних координата јесу ρ и φ који имају јасно дефинисано значење, а то су полупречник, односно растојање тачке у простору од координатног почетка и угао, тачније угао који вектор положаја заклапа са позитивним делом x −осе. Имајући у виду да се овде захтева и познавање наставних садржаја из области тригонометрије, студенти су на овај начин, на часовима вежби имали прилику да утврде раније стечена знања и да боље разумеју одговарајућа пресликавања равни, а наставник им је указао да је дато пресликавање добро дефинисано, као и да је бијекција. Потом су студенти утврдили и уопштене поларне координате и покренута је дискусија на тему у којим конкретним задацима, односно случајевима увођење поларних координата представља погодност. Уз помоћ одговарајућих питања и потпитања наставника, навођењем студената од стране наставника, студенти су закључили да је смена променљивих увођењем поларних координата карактеристична када је подинтегрална функција облика $x^2 + y^2$ или када је пројекција датог тела на xOy раван круг, кружни прстен или део круга.

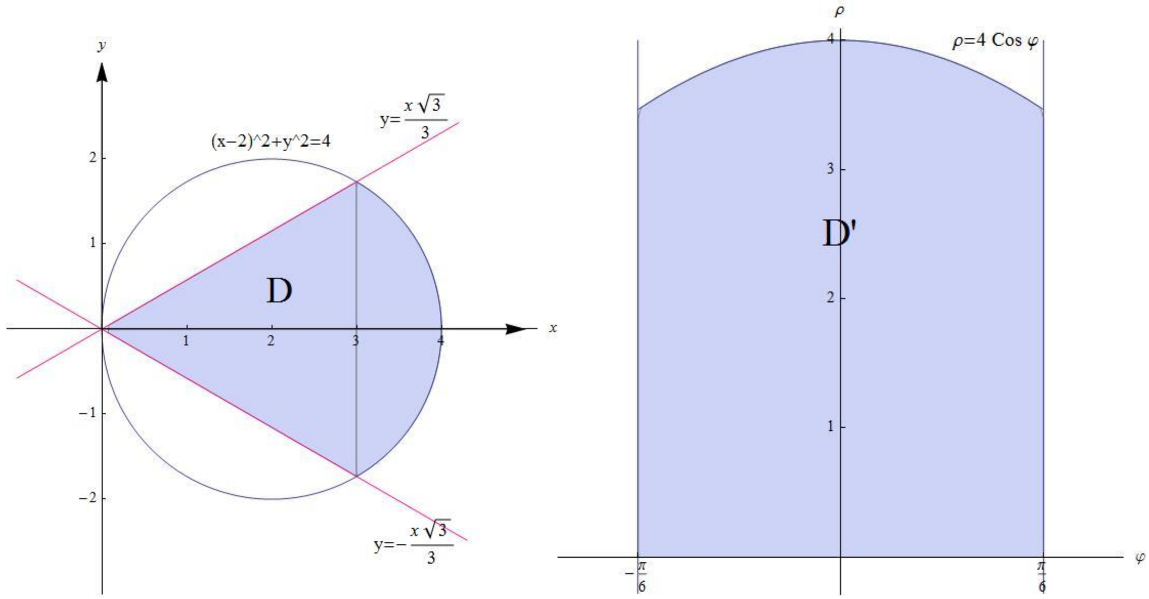
Најпре је наставник решио једноставан пример у коме је био захтев одређивање површине јединичног круга са центром у координатном почетку. Дати пример је решио на два начина: прво је без увођења поларних координата, методом смене (смена: $x = \sin t$), решио задатак, а потом уз помоћ смене променљивих помоћу поларних координата. Пример је одрађен са циљем да илуструје значај увођења смене променљивих помоћу поларних координата у оваквим случајевима, ради олакшавања поступка израчунавања. Наравно, студенти су се уверили да су оба резултата иста, а и да су се поклопила са решењем до ког су студенти једноставно могли доћи на основу познавања формуле за израчунавање површине круга.

Уследио је задатак (4. задатак, прилог 2) којим је илустрована примена двоструког интеграла за израчунавање површине дела равни одређеног деловима кружног прстена. Пример је јако добро послужио да упути студенте у значај прецизног одређивања опсега растојања тачака дате фигуре од координатног почетка и опсега угла који вектори положаја датих тачака образују са позитивним делом апсцисе након увођења смене помоћу поларних координата. Дати задатак су пратили и графички прикази датих области у равни xOy и $\rho O\varphi$.



Слика 13. Графици припремљени за 4. задатак

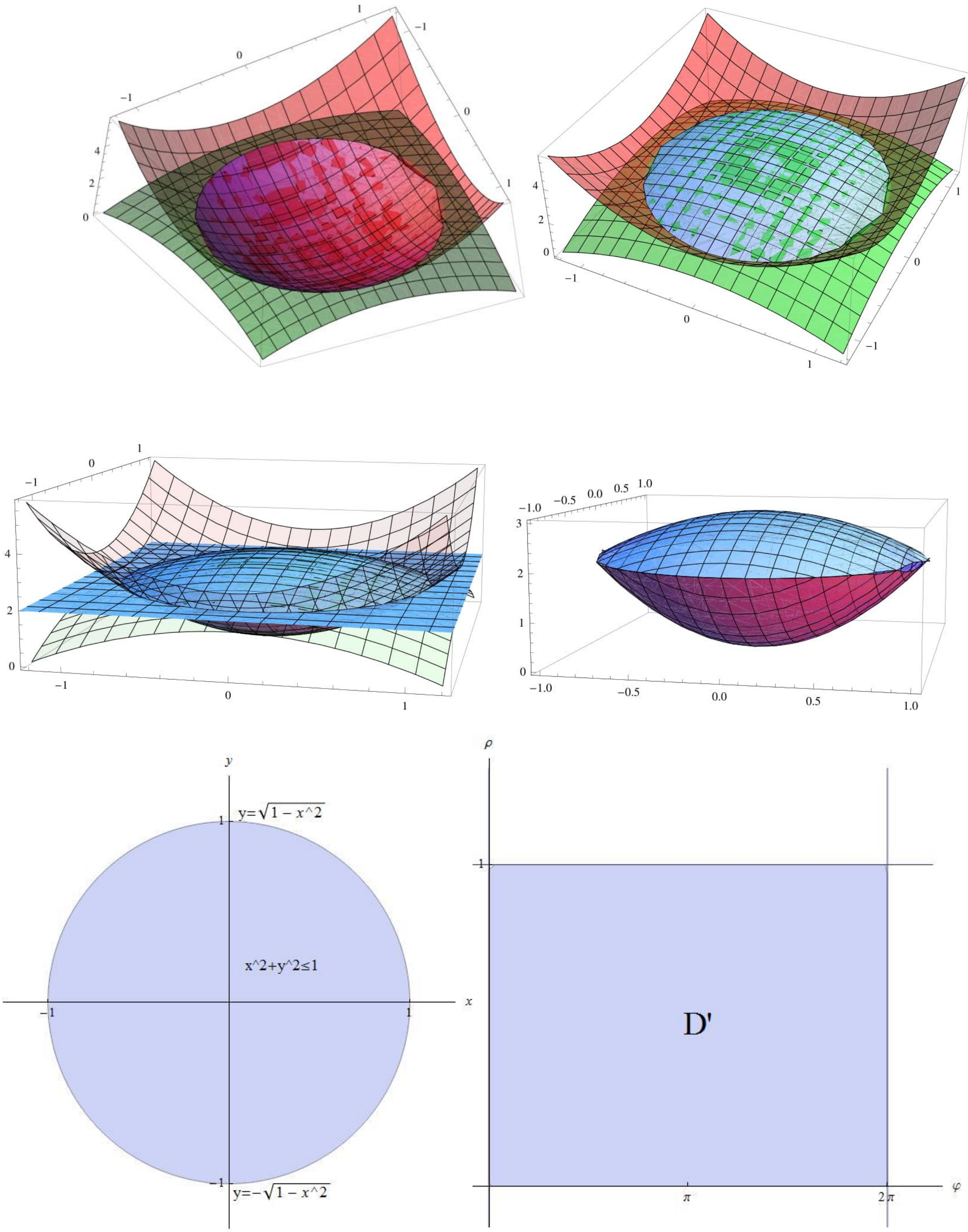
Уследила је обрада нешто сложенијег задатка (5. задатак, прилог 2), где је поново захтев био одређивање површине дела равни одређене двема правама које пролазе кроз координатни почетак и круга чији се центар не налази у координатном почетку.



Слика 14. Графици припремљени за 5. задатак

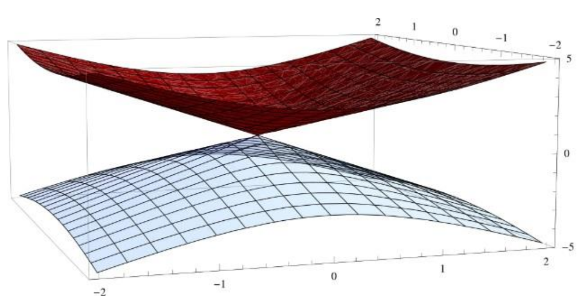
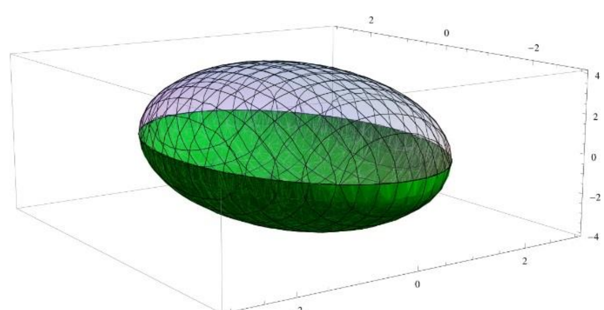
У наведеном задатку, након увођења поларних координата, границе за променљиву φ су као и у неким наредним примерима биле константе, док је горња граница променљиве ρ зависна од вредности угла φ, прецизније од косинуса тог угла. По увођењу поларних координата, одређени су коефицијенти праваца двеју правих, односно тангенси углова, затим и углови који одређују дати део равни, па је решена одговарајућа неједнакост, како би се установиле границе променљиве ρ. Након тога је покренуто питање редоследа интеграције, као и да ли је битан редослед интеграције, на основу тако дефинисане области. Највећи број студената је самоуверено закључио да је редослед интеграције одређен, након дефинисања области по којој се врши интеграција, на описан начин.

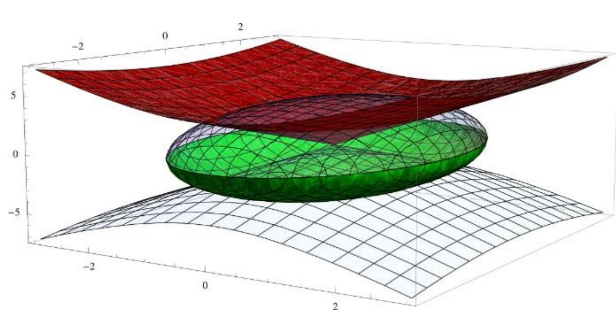
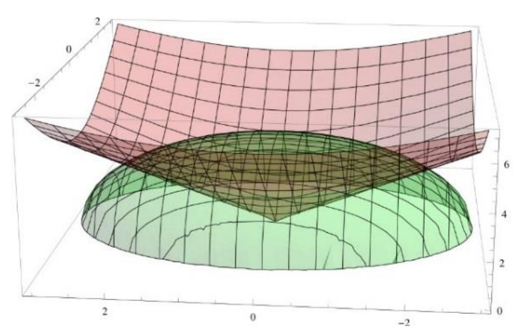
Потом је пред ученике постављен још један задатак (6. задатак, прилог 2) који је илустровао примену двоструког интеграла, али овога пута за одређивање запремине тела одређеног са два параболоида. Студенти су добили упутства да отворе припремљене дигиталне садржаје који су пратили задатак. У датом материјалу су се студенти упознали са графичким репрезентацијама двеју површи које се секу (два параболоида), затим са равни паралелној xOy равни, са графичком репрезентацијом цилиндра који дати пресек пројектује на xOy раван, са пројекцијом добијеног тела на поменуту раван, на пресликавање пројекције након увођења смене помоћу поларних координата. Студенти су дакле имали прилику да повезују вишеструке репрезентације поменутих објеката, тачније да повезују одређене геометријске објекте представљене алгебарском репрезентацијом са датим објектима представљеним графичком репрезентацијом, затим да уочавају њихове геометријске особине и да посматрају међусобне односе датих објеката у простору. Наставник је могао да уочи да је време које су студенти провели у анализирању датих материјала било приметно дуже у односу на време проведено у анализирању геометријских објеката представљених у равни (у претходним задацима) као и да су студенти том приликом значајно више међусобно комуницирали.

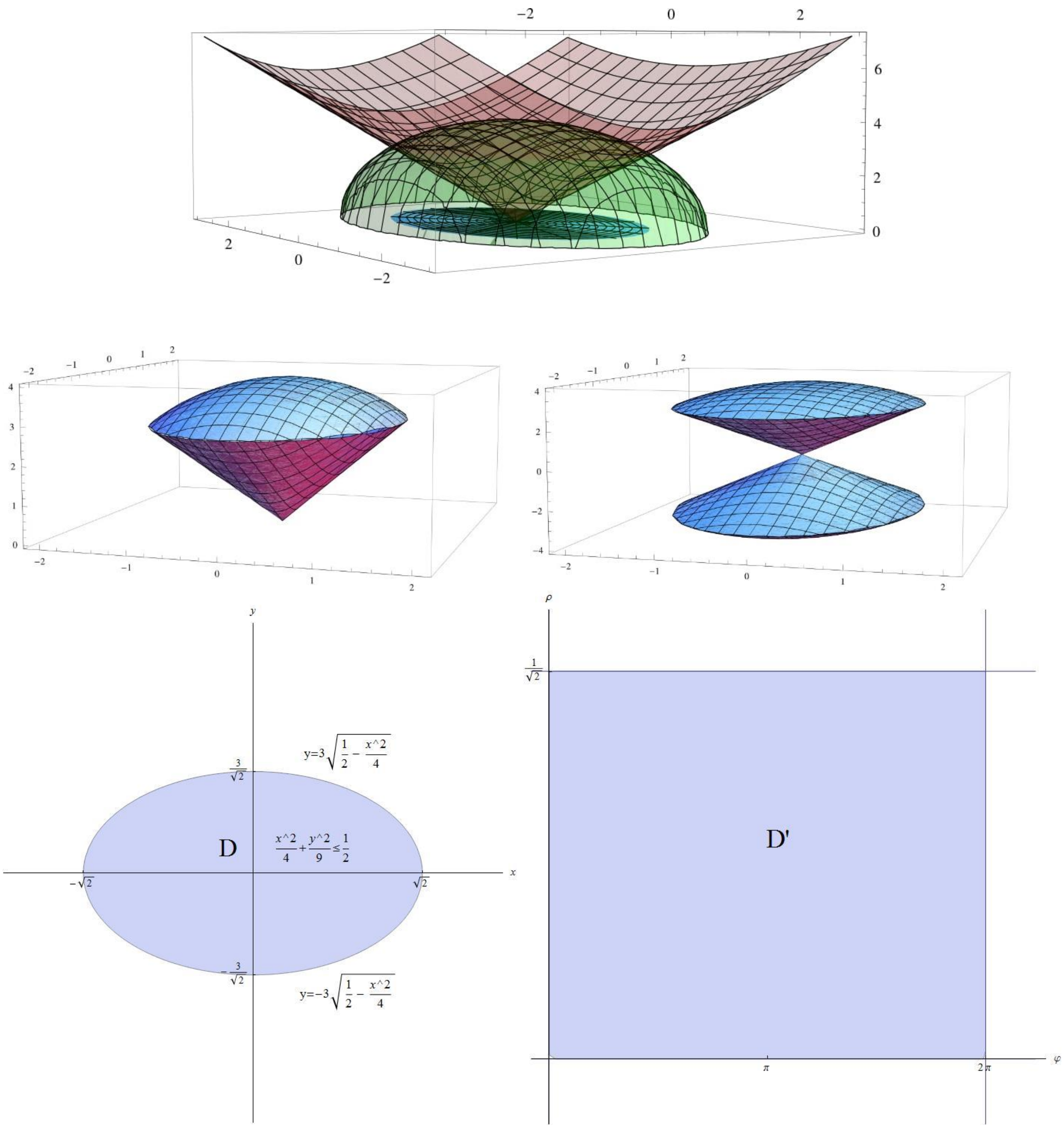


Слика 15. Графици припремљени за 6. задатак

По израчунавању двоструког интеграла, чиме је претходни задатак завршен, наставник је са студентима обновио уопштене поларне координате и прешао на наредни задатак. Захтев у том задатку био је израчунавање запремине тела одређеног елипсоидом и конусом (7. задатак, прилог 2). Студенти су добили прилику да анализирањем више графика, које је садржао припремљени материјал, визуализују дати проблем, да посматрају слике конуса и елипсоида посебно, затим да уоче како изгледа пресек две поменуте површи, да посматрају пројекцију добијеног тела на xOy раван, а потом се повела дискусија о могућностима да се олакша поступак израчунавања двоструког интеграла. Као и код осталих задатака, студенти су имали прилику да дате графичке приказе ротирају, мењају перспективу из које посматрају особине датих површи и њихових пресека како би што боље усвојили геометријске особине површи и њихових пресека. Студенти, који су раније показали смисао за математику и сналажење у простору су уочили да се тело састоји из два подударна тела те да је потребно одредити запремину једног од та два дела, а потом удвостручити тако добијени резултат. Кренуло се са анализирањем тела које се налази изнад xOy равни, која површ дато тело ограничава са горње, односно са доње стране како би се одредила подинтегрална функција. Поново су студенти повезивали графичку репрезентацију површи са алгебарском репрезентацијом и кренули са анализом пројекције тела на поменуту раван. Овога пута је наставник у већој мери помагао студентима у одређивању граница променљивих ρ и φ, пошто је било потребно анализирати смену променљивих помоћу уопштених поларних координата. Поступак израчунавања двоструког интеграла је текао уобичајено, на табли, како би студенти утврђивали и продубљивали своја знања о поступку интеграције (конкретно методом смене).

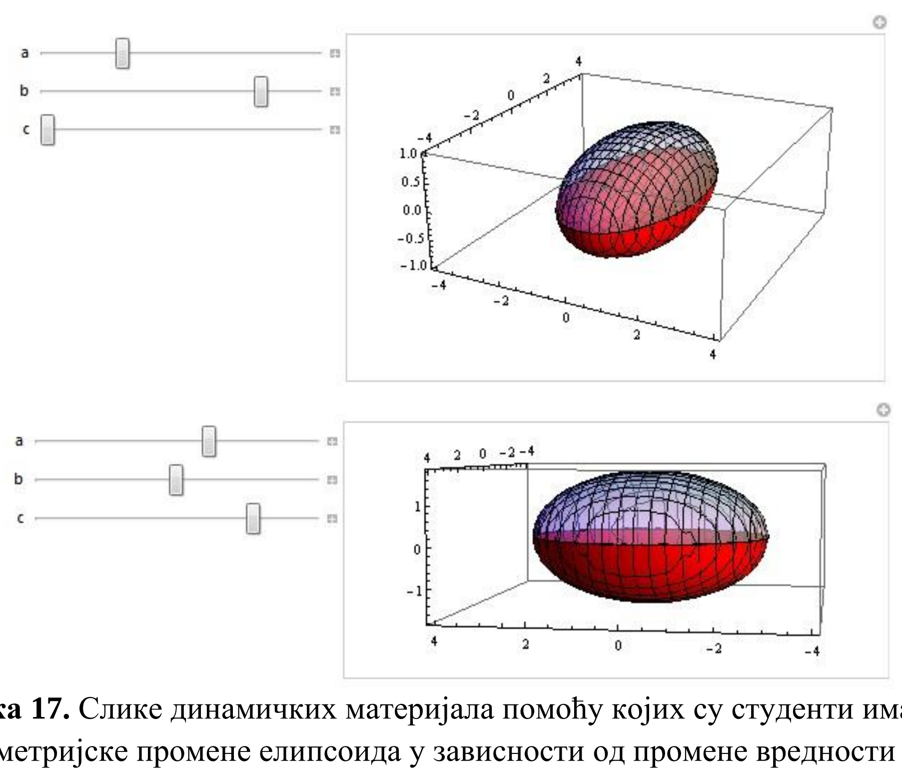



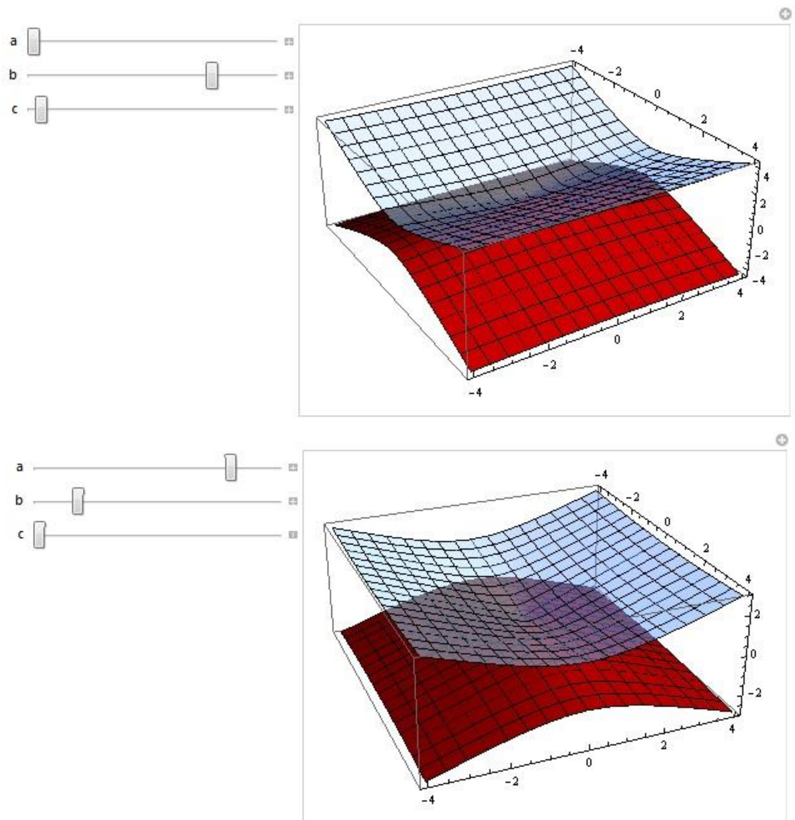


Слика 16. Графици припремљени за 7. задатак

Студенти су током свог математичког образовања имали прилике да решавају велики број задатака са параметрима. Ти задаци припадају различитим математичким областима и захтеви у тим задацима су различити. Највећи број тих задатака се односи на решавање разних једначина и неједначина у зависности од параметара. Исто тако, у одређеном броју задатака из области вишеструких интеграла, уместо конкретних бројевних вредности у подинтегралној функцији више промењивих или конкретних бројевних вредности у алгебарској репрезентацији геометријских објеката који одређују област по којој се врши интеграција, дате функције, криве и површи су дефинисане у зависности од реалних параметара. У случајевима када је функција представљена алгебарском репрезентацијом, променом вредности датих параметара, истовремено се мењају и аналитички израз дате функције, односно криве и површи, али и геометријске особине датих математичких објеката. Студенти са мањком знања, односно рутине у решавању оваквих проблема, често имају потешкоће у разликовању параметара од променљивих. Због тога се препоручује вишеструка репрезентација функција, кривих, правих, равни, површи, посебно графичка репрезентација због тога што она омогућава визуализацију промена особина датих математичких појмова насталих услед промене параметра, или више њих (Borba & Confrey, 1996). Из тог разлога, у великом броју задатака обрађених на часовима Математике 3, приликом подучавања вишеструких интеграла, већ поменуте подинтегралне функције и математички појмови који одређују област по којој се врши интеграција били су дефинисани у зависности од парамет(а)ра. Интерактивни материјали, које су студенти добили, са наменом да их користе приликом израде задатака, су били адекватно припремљени, тако да су студенти могли да уоче које вредности представљају параметре и да их мењају употребом клизача. Уједно, студенти су могли да се упознају, на који начин се мењају геометријске особине датих математичких појмова, односно на који се начин мења графичка репрезентација датих функција и површи, променом вредности параметара. Тако су се графици могли транслирати у равни, односно простору, ротирати, „скупљати“ или „ширити“, променом датих параметара. На тај начин, студенти су добили прилику да овладају датим површима, равнима итд. и њиховим пресецима, све са циљем прецизног одређивања домена интеграције и граница променљивих које фигуришу у подинтегралној функцији.

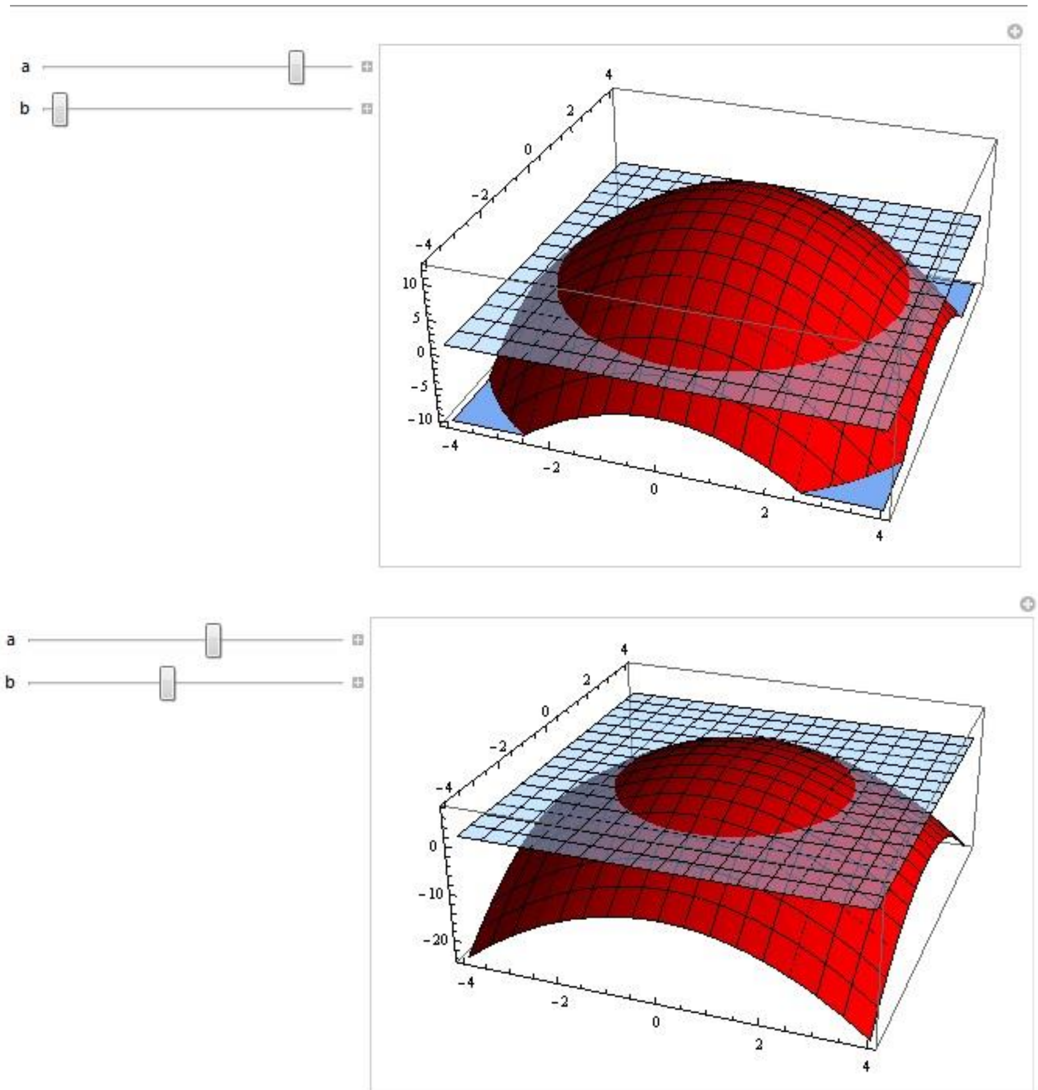


Слика 17. Слике динамичких материјала помоћу којих су студенти имали прилике да уоче геометријске промене елипсоида у зависности од промене вредности параметара



Слика 18. Слике динамичких материјала помоћу којих су студенти имали прилике да уоче геометријске промене конуса у зависности од промене вредности параметара

Након анализирања геометријских особина површи у зависности од промене вредности параметара, пред студенте је постављен још један задатак (8. задатак, прилог 2) у коме је захтев представљало одређивање запремине тела одређеног равни $z = b$ и параболоидом $z = a^2 - x^2 - y^2$, за $a > 0, b > 0$. Студенти су покренули одговарајуће динамичке материјале, проучавали промену запремине тела у зависности од промене параметара и, уз помоћ наставника, закључили који двоструки интеграл би одговарао решењу овог задатка. Такође, аналитички закључују да задатак има смисла за $a^2 > b$, односно да се површи секу под тим условом. Треба нагласити и да је предлог студената био да се уведе смена помоћу поларних координата.



Слика 19. Графици припремљени за 8. задатак

По завршетку наставе из области двоструког интеграла, студентима су прослеђени наставни материјали, заједно са решеним задацима који су обрађени на часовима вежби (прилог 2).

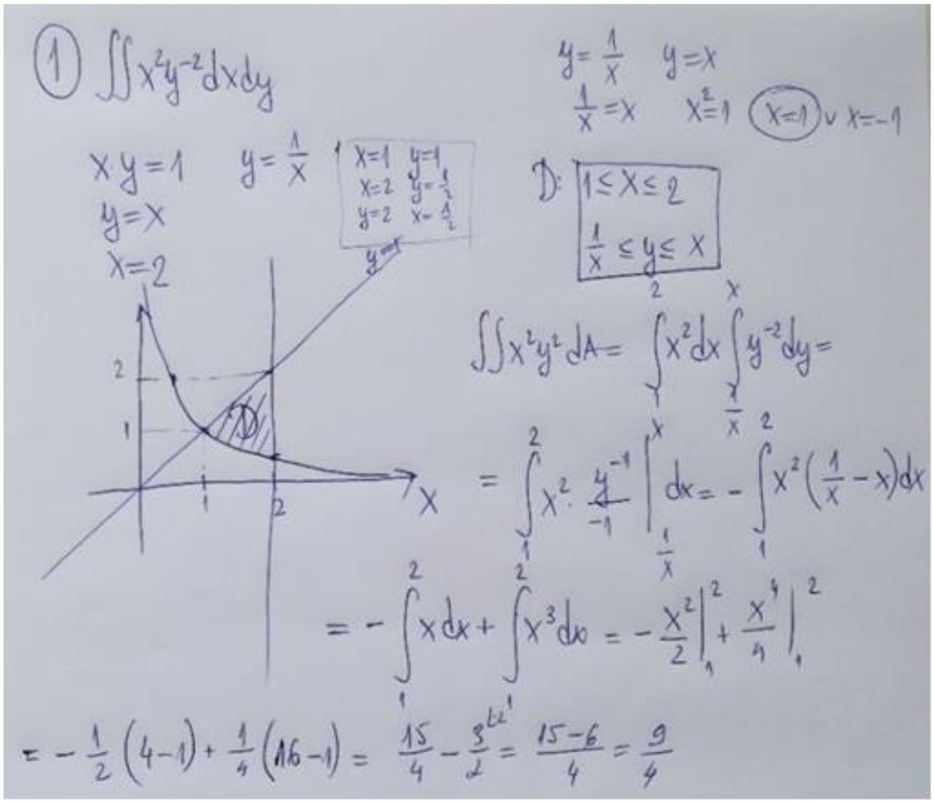
Током наставног процеса, студенти су похвално говорили о начину рада који је успостављен у експерименталној групи. Разлика у приступу радним обавезама на часовима и њиховом залагању је била евидентна, у корист студената експерименталне групе, односно студената који су двоструке интеграле усвајали уз примену рачунара за визуализацију одговарајућих наставних садржаја, конкретно за визуализацију области по којој се врши интеграција, како би коректно одредили границе променљивих за подинтегралну функцију више променљивих.

3.4. Тестирање студената

3.4.1. Анализа резултата теста по задацима

Тест којим је извршена провера степена усвојености знања студената (прилог 3) састојао се из три задатка. Студенти су дати тест полагали три седмице по завршетку обраде наставних садржаја који се односе на двоструки интеграл и тест је спроведен искључиво у циљу спровођена истраживања, дакле студенти нису имали ни користи, али ни последице на основу резултата које су остварили на датом тесту. Задаци из области двоструких интеграла су изабрани тако да пруже увид у степен разумевања домена интеграције, односно области по којој се врши интеграција, у способност студената да прецизно одреде границе промењљивих и да илуструју степен овладавања поступка израчунавања двоструких интеграла. Иако је број задатака на тесту био релативно мали, давао је прилично прецизну слику о нивоу усвојених знања и умења студената о двоструким интегралима. Решавањем датих задатака студенти су показали више или мање способности у одређивању области по којој се врши интеграција у равни (1. задатак) и у простору (2. и 3. задатак). Такође, тестирана је способност решавања двоструких интеграла када је потребно извршити одговарајућу визуализацију у Декартовом правоуглом координатном систему (1. задатак), али и могућност пресликавања равни, односно дела равни увођењем смене помоћу поларних координата (2. и 3.задатак). Примена двоструког интеграла за одређивање запремине тела у простору одређеног површима, равнима и графицима функција више промењљивих је такође представљала захтев у задацима са теста (2. и 3. задатак). Маскималан број поена на тесту је био 10. Први задатак је максимално вредео 3 поена, други задатак 4, а трећи задатак 3 поена. Потребно је нагласити да су задаци вредновани и оцењивани парцијално, односно да су се на одговарајући начин бодовали и непотпуно решени задаци и задаци у којима су студенти правили одређене грешке приликом њиховог решавања.

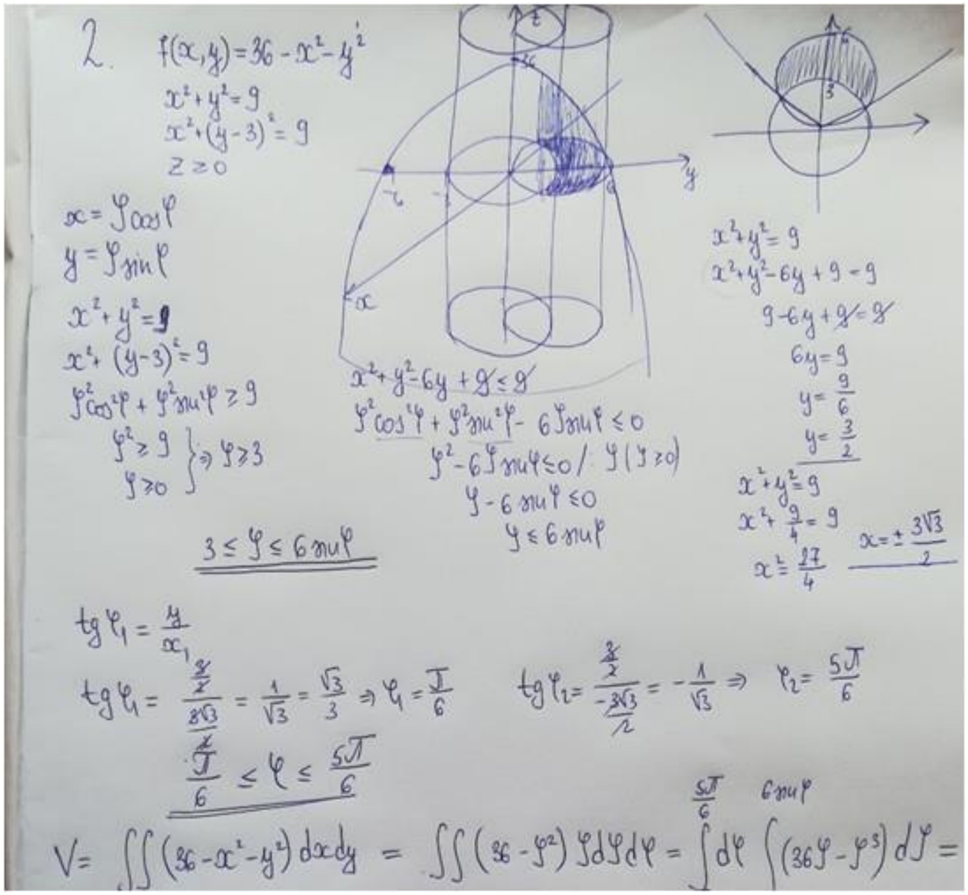
Решење првог задатка од стране студента из експерименталне групе шифрованог са Е5 је приказано на слици 20. Студент Е5 је успешно нацртао слику која одговара датом задатку, што је неопходан део решења датог задатка, у смислу коректног одређивања граница промењљивих. Поменути студент је исправно одредио границе промењљивих, а и сам поступак интеграције, односно поступак израчунавања двоструког интеграла је тачан и исправно спроведен.



Слика 20. Слика решења 1. задатка са теста

На основу пређашњег искуства у оцењивању радова студената, без скицирања одговарајуће слике, студенти врло лако направе грешку приликом одређивања области по којој се врши интеграција. Приметно је да су знатно више грешили студенти који су се мање ослањали на графичке репрезентације датих геометријских објеката, а којима је приступ приликом решавања задатка био изразито аналитички, тачније решавањем одговарајућих једначина како би се одредиле пресечне тачке и неједначина како би се одредио скуп тачака у равни које представљају област интеграције. Ти студенти су врло често записивали границе које одговарају слици правоугаоника у равни, што је уједно и најчешћа грешка коју су студенти контролне групе правили приликом решавања овог задатка.

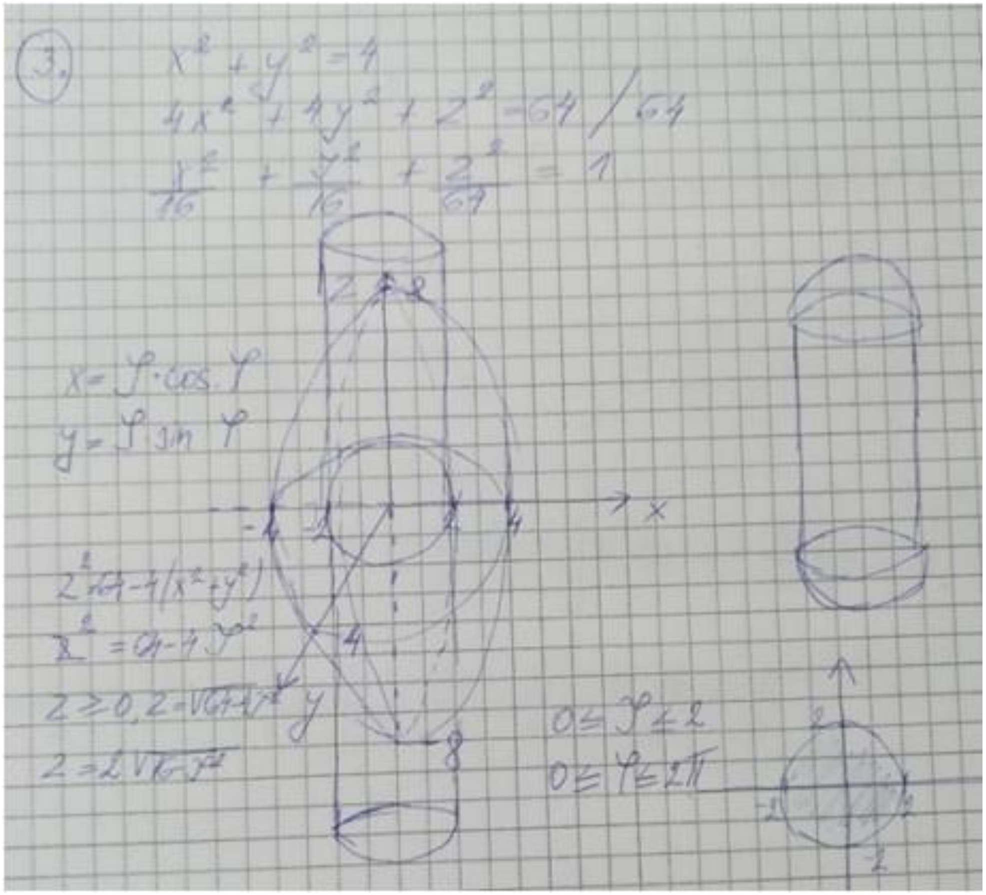
На слици 21. приказано је решење 2. задатка са теста, тачније део решења задатка од стране студента из експерименталне групе шифрованог под именом Е7.



Слика 21. Слика решења 2. задатка са теста

Дати студент је на основу познавања графичких репрезентација цилиндара и параболоида, препознао и коректно одредио тело одређено пресецима ових површи. Такође, поменути студент је препознао потребу, односно предност увођења смене помоћу поларних координата, значење концепата ρ и φ, успешно је одредио границе за модуо, односно за растојање скупа тачака у равни пројекције од координатног почетка и границе за меру угла које положаји тих тачака заклапају са позитивним делом x-осе. Такође, студент је тачно одредио и вредност тражене запремине.

На наредној слици (слика 22) изложено је решење 3. задатка од стране студента шифрованог под именом Е14. Овај студент је у свом раду показао разумевање и познавање графичких репрезентација површи, конкретно елипсоида и цилиндра, као и њиховог пресека. Са слике се може видети да студент, поред познавања геометријских особина датих површи и њиховог пресека, разуме и пројекцију добијеног тела на раван пројекције. Све то је наравно потребно за коректно постављање граница променљивих и потом израчунавање двоструког интеграла, након увођења смене помоћу поларних координата.

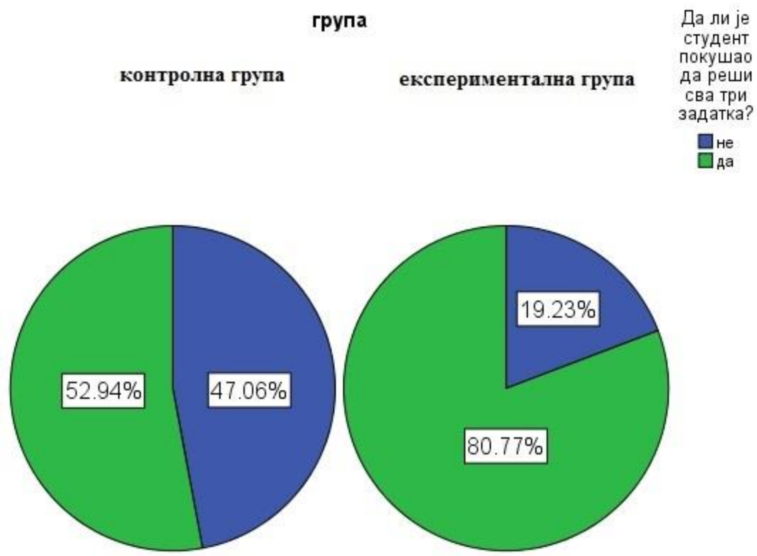


Слика 22. Слика решења 3. задатка са теста

3.4.2. Статистичка анализа резултата теста

Анализирањем резултата теста којим је проверен степен усвојености знања студената уочене су статистички значајне разлике у постигнућима студената експерименталне групе приликом решавања двоструких интеграла, у односу на резултате студената из контролне групе.

Најпре је посматран однос броја студената из експерименталне групе и броја студената из контролне групе који су покушали да реше сва три задатка на тесту којим је извршена провера знања студената (графикон на слици 23). За разлику од студената из контролне групе у којој је нешто преко половине студената (52.94%) покушало да реши сва три задатка, у експерименталној групи је 80.77% студената уложило више или мање напора и труда да реше потпуно или делимично сва три двострука интеграла (сва три задатка). Потребно је напоменути да је курикулум курса Математика 3 у склопу којег су студенти усвајали наставне садржаје из двоструких интеграла, доста обиман, па стога студенти врло често имају склоност да „фаворизују“ одређене наставне садржаје, односно да се приликом спремања и полагања испита одрекну спремања неких области из датог предмета, како би стекли предиспитне обавезе и могућност полагања завршног дела испита. Међутим, на основу датог графика односно односа броја студената који су покушали да реше сва три задатака и броја студената који нису, можемо закључити да је метод рада са студентима из експерименталне групе постигао један од задатака, а то је да утиче на студенте у смислу да им приближи дате наставне садржаје и охрабри их да уопште покушају да реше дате задатке.



Слика 23. Однос броја студената експерименталне и контролне групе који су покушали да реше сва три задатка на тесту

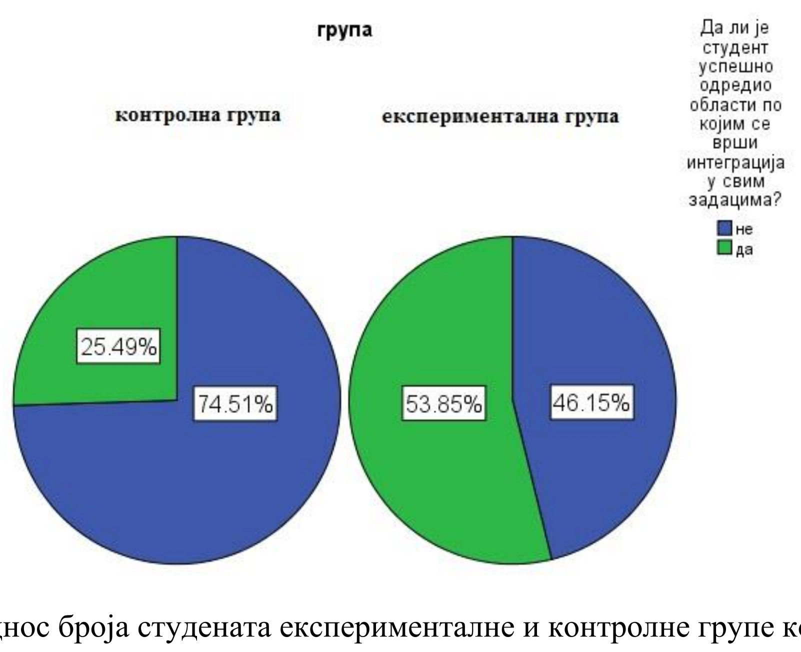
Ова хипотеза је потврђена одговарајућом статистичком анализом и изведен је закључак да је разлика у укупном броју студената експерименталне групе који су покушали да реше сва три задатка и укупном броју студената контолне групе који су покушали да реше сва три задатка статистички значајна ($\chi^2 = 7.80, df = 1, p = 0.005, n = 103$).

Даљом, статистичком анализом, на основу података представљених у табели 4 испитане су разлике у броју студената који су покушали да реше задатке са теста, за сваки задатак понаособ. Одговарајућим χ^2 - тестом независности, установљене су статистички значајне разлике у броју студената експерименталне и контролне групе који су покушали да реше други задатак на тесту ($p < 0.0005$), као и у броју студената који су покушали да реше трећи задатак ($p = 0.005$).

Табела 4. Анализа односа броја студената у изради задатака, у зависности од групе, по задацима

Да ли је студент покушао да реши одређени задатак?	Контролна група		Експериментална група		χ^2	p (2-tailed)
	Да	Не	Да	Не		
1. задатак	43	8	49	3	1.71	0.19
2. задатак	27	24	45	7	12.26	$< \mathbf{0.0005}$
3. задатак	35	16	48	4	7.78	$\mathbf{0.005}$

Жељени исход учења и подучавања двоструких интеграла, део задатка који је јако значајан, представља одређивање домена интеграције, односно дела равни по којој се врши интеграција и дела простора чију је запремину потребно израчунати. Из тог разлога су посматране разлике у успеху у одређивању области по којој се интеграција врши, студената две групе (графикон на слици 24). Број студената експерименталне групе студената који су успешно одредили област интеграције приликом решавања сва три задатка (53.85%) је био више него двоструко већи од броја студената контролне групе који су били успешни у решавању овог значајног дела задатка (25.49%), у сва три двострука интеграла. χ^2 тест независности је показао да је разлика у адекватној интерпретацији и решавању одговарајућих једначина и неједначина и визуализацији датих математичких објеката и њиховог односа, анализирањем графичких репрезентација датих површи статистички значајна, у корист експерименталне групе ($\chi^2 = 7.50, df = 1, p = 0.006, n = 103$).



Слика 24. Однос броја студената експерименталне и контролне групе који су прецизно одредили област интеграције у сва три задатка на тесту

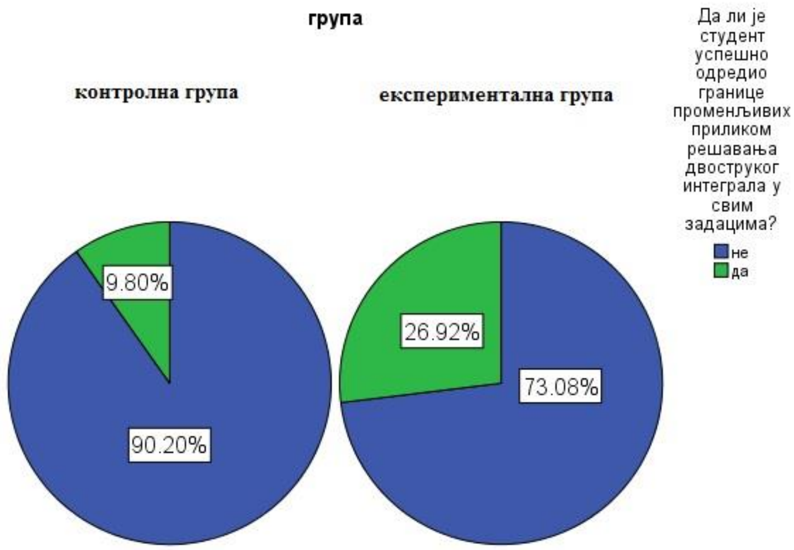
Када је реч о успешности студената у одређивању области интеграције у сва три задатка, посматрањем само групе студената који су покушали да реше сва три задатка, у контролној групи је дати успех остварило 48,1% студената, док је у експерименталној групи у томе било успешно 64,3% студената.

Анализирањем успеха студената у одређивању области интеграције, посебно за сваки задатак, даља статистичка анализа (табела 5) је потврдила статистички значајне разлике у броју студената експерименталне групе и контролне групе који су коректно одредили дате области у другом ($p = 0.012$) и трећем задатку са теста ($p = 0.014$).

Табела 5. Анализа односа успешности студената у одређивању области по којој се врши интеграција, у зависности од групе, по задацима

Да ли је студент успешно одредио област по којој се врши интеграција?	Контролна група		Експериментална група		χ^2	p (2-tailed)
	Да	Не	Да	Не		
1. задатак	32	19	35	17	0.08	0.78
2. задатак	15	36	29	23	6.27	$\mathbf{0.012}$
3. задатак	18	33	32	20	6.09	$\mathbf{0.014}$

Још један аспект који је јако значајан за презентовање утицаја коришћења софтверских програмских пакета и примене рачунара за визуализацију је одређивање граница промењљивих у двоструким интегралима. Након одређивања поменутих граница, поступак решавања задатака се своди само на рачунски поступак израчунавања одређених интеграла, што додатно истиче значај прецизног одређивања граница промењљивих. Разлике у постигнућима студената експерименталне и контролне групе приказане су графиконом на слици 25, где се може уочити разлика у односу броја студената који су прецизно поставили границе за дате промењљиве. На основу дате слике може се приметити значајна разлика у успеху студената, односно броју студената експерименталне групе (26.92%) и броју студената контролне групе (9.80%) који су били успешни приликом одређивања поменутих граница у свим задацима. Иако наведени проценти довољно говоре, додатно је статистички тестирана разлика у успешности студената и на основу χ^2 теста независности утврђена је статистички значајна разлика у одређивању граница промењљивих, у корист студената експерименталне групе ($\chi^2 = 4.00, df = 1, p = 0.045$, $n = 103$).



Слика 25. Однос броја студената експерименталне и контролне групе који су прецизно одредили границе промењљивих у сва три задатка на тесту

Када је реч о успешности студената у одређивању граница промењљивих у сва три задатка посматрањем само групе студената који су покушали да реше сва три задатка, у контролној групи је дати успех остварило 18,50 % студената, док је у експерименталној групи у томе било успешно 33,33% студената.

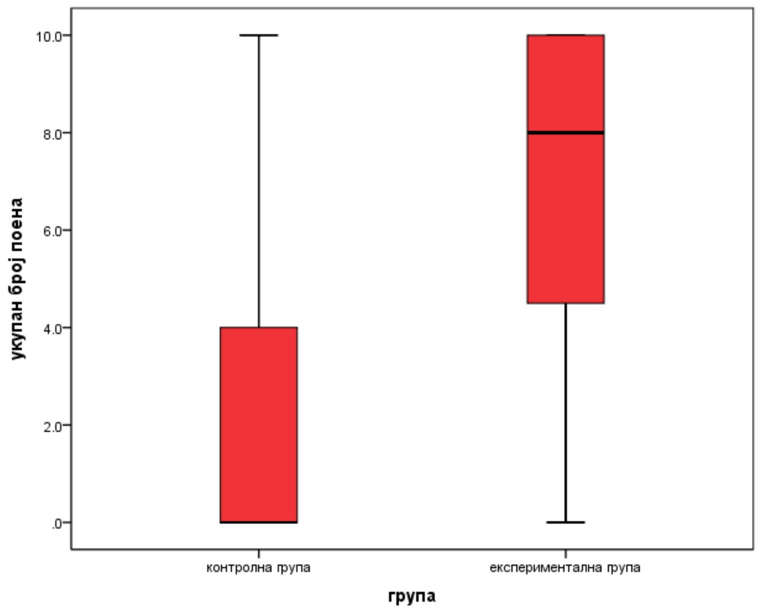
Анализирањем успеха студената у одређивању граница промењљивих, посматрано за сваки задатак понаособ, анализа је показала да је присутна статистички значајна разлика између броја студената експерименталне и контролне групе који су успешно одредили границе промењљивих подинтегралне функције у првом ($p = 0.037$), у другом ($p = 0.035$) као и у трећем задатку ($p = 0.012$).

Табела 6. Анализа односа успешности студената у одређивању граница приликом решавања двоструког интеграла, у зависности од групе, по задацима.

Да ли је студент успешно одредио границе промењљивих приликом решавања двоструког интеграла?	Контролна група		Експериментална група		χ ^ 2	*p* (2-tailed)
	Да	Не	Да	Не		
1. задатак	18	33	30	22	4.33	**0.037**
2. задатак	6	45	16	36	4.46	**0.035**
3. задатак	9	42	22	30	6.32	**0.012**

Морамо нагласити да последњи резултати представљају најзначајнији резултат јер илуструју утицај примене софтверског пакета *Wolfram Mathematica*, као и пакета *GeoGebra*, односно динамичких материјала припремљених коришћењем датих софтверских пакета са циљем да уз конкретнију визуализацију и разумевање датих садржаја, студенти што боље усвоје и постигну што боље разумевање наставних садржаја из двоструких интеграла.

На крају, анализиране су и разлике у укупном броју поена које су студенти освојили на датом тесту. Дескриптивна статистика резултата студената експерименталне и контролне групе дата је у табели 7 док је расподела укупног броја поена представљена графиконом на слици 26.



Слика 26. Расподела укупног броја поена на тесту, по групама

Табела 7. Статистички резултати укупног броја поена студената на тесту

Група	Број студената	Аритме-тичка средина	Медијана	Средња вредност ранга	Сума рангова	Резултати Ман-Витнијевог теста		
						Z	p(2-tailed)	r
Експериментална	52	6.65	8	66.01	3432.5	-4.95	< 0.0005	0.49
Контролна	51	2.57	0	37.72	1923.5			

На основу Колмогоров-Смирнов теста, променљива која представља укупан број поена, у обе групе студената, статистички значајно одступа од нормалне дистрибуције ($p < 0.0005$), па смо у складу са тим упоредили расподеле укупног броја поена студената остварених провером знања, коришћењем одговарајућег, непараметарског теста (Ман-Витнијев тест). На основу вредности представљених у табели 7, закључак је да је разлика у знању студената контролне и експерименталне групе, које су студенти показали израдом задатака на тесту, статистички значајна ($p < 0.0005$) у корист експерименталне групе.

4. Опис тока експерименталног истраживања спроведеног у току академске 2018/2019. године

Друго истраживање које је спроведено на тему примене софтверских пакета и мобилних апликација ради унапређивања квалитета знања студената у области вишеструких интеграла, спроведено је академске 2018/2019. године на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. Промена у методологији рада са студентима се огледала у примени мобилних уређаја од стране студената, односно одговарајућег софтверског пакета *GeoGebra* и платформе *GeoGebraTube.* За визуализацију наставних садржаја су коришћени дигитални садржаји креирани од стране наставника у софтверском пакету *GeoGebra* који су били постављени на *GeoGebraTube*-у.

4.1. Циљеви истраживања спроведеног 2018/2019. године

После избора софтверског пакета и интернет платформе коришћених у датом истраживању и одабира пригодног узорка који би био овим истраживањем обухваћен, прецизније су постављани и циљеви истраживања.

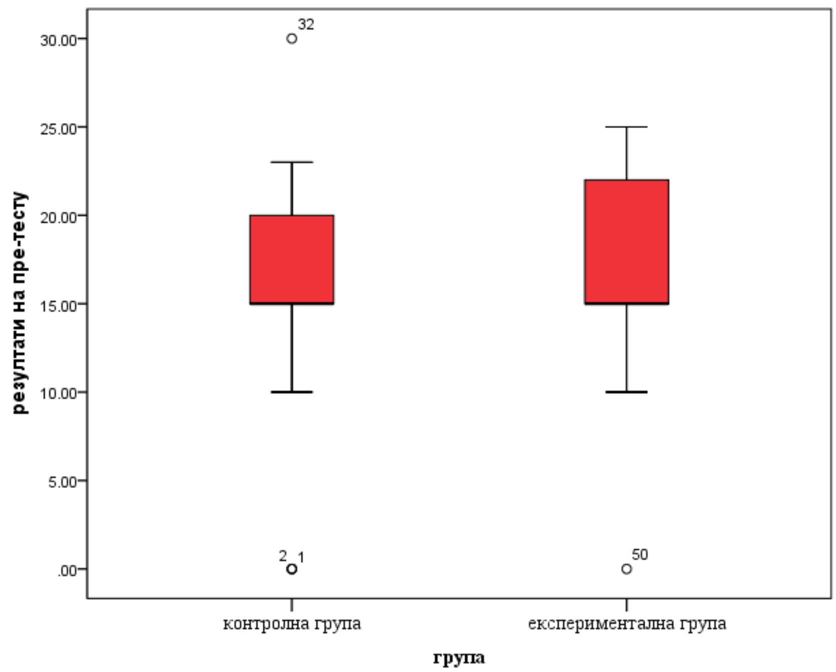
Главни циљ истраживања представљало је утврђивање потенцијалне разлике и степена те разлике у знању и разумевању наставних садржаја из области вишеструких интеграла од стране студената, услед утицаја примене динамичког софтвера, са акцентом на визуализацију математичких појмова и објеката у равни и простору.

Поред основног циља истраживања, датим истраживањем ће се постигнути и додатни циљеви:

- Имплементација примене мобилних уређаја у наставни процес;
- Израда наставних материјала и инструмената потребних за утврђивање постојања евентуалне разлике у постигнућима студената.

4.2. Уводно (прелиминарно) тестирање студената

Истраживањем у високошколском образовању које је спроведено током академске 2018/2019 године обухваћено је укупно 64 студената друге године Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу и то смерова машинско инжењерство, војноиндустријско инжењерство и аутомобилско инжењерство. Истраживање је спроведено у току курса Математика 3. Како се практични део наставе реализовао у две групе, студенти једне групе су представљали експерименталну групу, док су студенти друге групе чинили контролну групу. Потребно је нагласити да се математичко образовање студената у току њихове прве године студија није разликовало, као и да групе студената нису биле хомогене (у свакој групи су учествовали студенти различитих постигнућа из математике). По формирању експерименталне и контролне групе, обе групе студената су решавале пре–тест. Дати тест (прилог 4) који су студенти полагали је садржао три задатка, а студенти су за његову израду имали 30 минута. Приликом израде задатака студенти нису ништа користили што би им могло помоћу у изради (таблица интеграла, рачунаре, телефоне). Задаци за пре-тест су били изабрани тако да се на основу њихове израде може извршити вредновање знања студената о процедуралном и теоријском знању из области одређеног интеграла, што уједно представља и предзнање за решавање вишеструких интеграла. Максималан број поена на поменутом тесту је био 30. Расподела броја поена у експерименталној и контролној групи на пре-тесту приказана је графиконом на слици 27.



Слика 27. Расподела броја поена студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту

Ради испитивања разлике у успеху студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту, примењен је Студентов t-тест разлика аритметичких средина независних група. Резултати статистичке анализе дати су у следећој табели (табела 8).

Табела 8. Статистички показатељи резултата студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту.

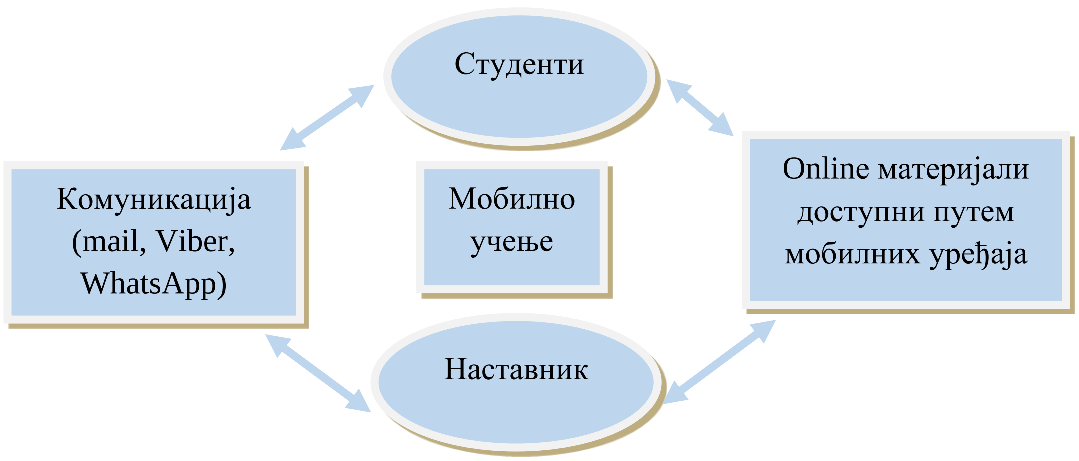
Група	Број студената	Аритме-тичка средина	Стандардно одступање	Студентов - t тест		
				df	t	p (2-tailed)
Експериментална	32	17.03	6.47	63	−0.94	0.35
Контролна	32	15.66	4.99			

Анализом резултата рада студената на пре-тесту установљено је да не постоји статистички значајна разлика у знању студената две групе ($p = 0.35$), на нивоу значајности 0.05. Закључак је да је аритметичка средина броја поена на пре-тесту студената експерименталне групе незнатно већа у односу на аритметичку средину броја поена на пре-тесту студената контролне групе (разлика просечних броја поена износила је $1{,}37$ у корист студената експерименталне групе).

4.3. Опис рада са студентима експерименталне групе током првог експерименталног истраживања 2018/2019. године

Обема групама студената је теоријски део наставе предаван од стране истог наставника, док је практични део организован у две, нехомогене групе, контролну и експерименталну, за које се раније показало да не постоји статистички значајна разлика у њиховом предзнању, неопходном за усвајање наставних садржаја из вишеструких интеграла. Подучавање и учење у контролној групи студената је организовано на традиционалан начин, фронталним обликом наставе, односно монолошком, дијалошком и илустративном наставном методом. Након што би наставник ученицима задао задатак, сачекао би да студенти мало размисле о захтевима задатка. Потом би наставник студентима постављао одговарајућа и пажљиво бирана питања и потпитања како би дозирао помоћ студентима са циљем да они што самосталније, одреде област по којој се врши интеграција, потом границе променљивих и како би приступили израчунавању двоструког или троструког интеграла. Повремено би неко од студената који показује већи ниво разумевања за дате наставне садржаје изашао пред таблу, скицирао одговарајућу слику, односно слике уз надзор и помоћ од стране наставника, његове сугестије, исправке и коментаре. Потом би студент поставио границе решавајући одговарајуће једначине и неједначине и израчунавао двоструки (троструки) интеграл. У највећем броју случајева би све то чинио наставник уз покушаје да успостави дијалог са ученицима и да их на тај начин укључи у наставни процес.

Студенти експерименталне групе су одговарајуће наставне садржаје усвајали уз примену мобилних уређаја - лаптопова и превасходно мобилних телефона. Што се тиче методологије рада са студентима експерименталне групе, слично као и у првом истраживању, спроведеном академских 2016/2017. и 2017/2018. године, разлика у начину рада се односила на визуализацију наставних садржаја, односно на визуализацију функција једне променљиве и кривих (правих) у равни, односно функција више променљивих и површи у простору. Наставник је најпре креирао у софтверском пакету *GeoGebra* дигиталне садржаје који одговарају конкретним задацима које су решавале обе групе студената. Дате материјале је потом поставио на платформу *GeoGebraTube* и подсетио студенте да на часовима практичне наставе понесу мобилне уређаје (мобилне телефоне и лаптоп уређаје). Студентима је затим проследио одговарајући линк са датим дигиталним садржајима и упућивао студенте када који од материјала треба покренути. На тим дигиталним садржајима су били приказани различити графици функција и кривих, односно површи, где су студенти имали могућност да се упознају са графичким репрезентацијама датих математичких објеката и њиховим геометријским особинама. Такође студенти су имали увид и у алгебарски приказ истих тих објеката и том приликом су студенти повезивали дате две репрезентације математичких појмова и концепата са циљем да их на тај начин боље усвоје и разумеју. Софтверски пакет *GeoGebra* се показао јако захвалним за дато истраживање због своје дуалности, у смислу могућности приказивања и повезивања вишеструких репрезентација математичких садржаја.



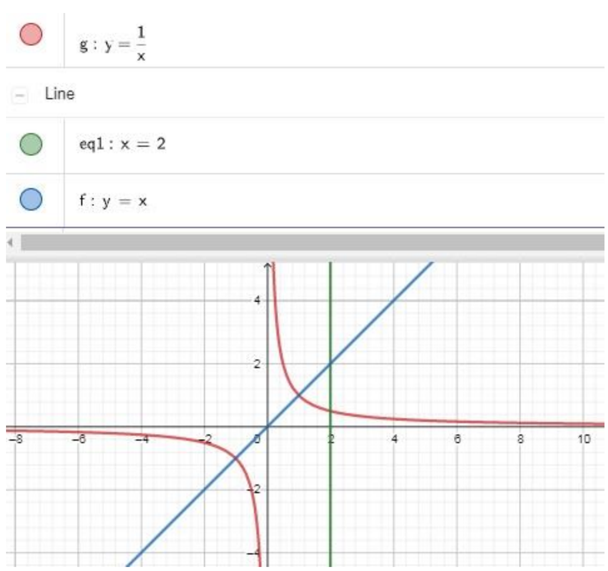
Слика 28. Схема мобилног учења коришћеног у истраживању

Промена у организацији учења и подучавања, односно у методологији рада са студентима била је на имплементацији мобилних уређаја, тачније одговарајуће платформе за визуализацију одговарајућих наставних садржаја. Такође, дато истраживање је имало и друге циљеве, а то је и развијање комуникације, сарадње и дигиталних компетенција студената као међупредметних компетенција студената. Студентима је у највећој мери препуштено да самостално бирају облик рада током часова практичне наставе. Наиме, студенти су могли самостално да анализирају дигиталне садржаје на које их је наставник упућивао, могли су да раде у пару, док су се неки студенти одлучили и за групни облик рада (у групама од три до четири студента). Наставник се старао да атмосфера буде радна, дисциплина на завидном нивоу, што заиста није био проблем у раду, поштујући индивидуалне разлике у навикама студената и њиховој жељи за сарадњу као и облик те сарадње.

Студенти експерименталне и контролне групе су на часовима вежби решавали идентичне задатке, и једни и други су рачунски део решавања задатака спроводили на идентичан начин, уз помоћ креде и табле (оловка и папир), док се разликовао начин визуализације наставних садржаја. Као што је поменуто, наставник је припремио дигиталне

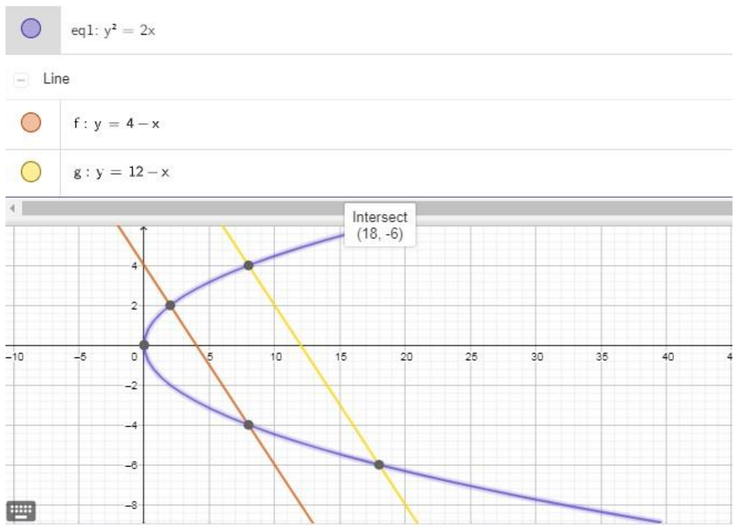
садржаје који одговарају изабраним задацима за рад са обе групе студената, поставио на свој профил на *GeogebraTube*-у, и потом на часовима вежби са експериментаном групом дао своје корисничко име и шифру студентима, и благовремено упућивао студенте да покрену одговарајуће материјале за дате задатке. Језик који је коришћен у дигиталним материјалима био је енглески језик, јер су студенти са математичким појмовима, који су били приказани и алгебарски и графички, већ довољно овладали, па је идеја била да на тај начин усаврше познавање назива тих геометријских објеката на страном језику. Нико од студената у експерименталној групи, на питање да ли имају проблем са тиме да се енглески језик користи у материјалима није одговорио да има било какав проблем са тиме.
Визуализација наставних садржаја са контролном групом је реализована на тај начин што је наставник сваком задатку придруживао одговарајућу слику (слике) на табли које су ученици прецртавали у својим свескама. Вишеструки интеграли су на часовима практичне наставе (часовима вежби) обрађивани на девет наставних часова (четири и по термина) и са контролном и са експерименталном групом. Могуће је да су студенти контролне групе приликом утврђивања наставних садржаја заједно са студентима који су припадали експерименталној групи користили дате материјале, (са тиме наставник није био упознат), али свакако студенти контролне групе нису имали приступ дигиталним садржајима на часовима вежби.

Први задатак који је обрађен на практичној настави са студентима, односио се израчунавање површине дела равни одређене правама $x = 2$ и $y = x$ и кривом $y = \frac{1}{x}$ (1. задатак, прилог 5). Студенти су отворили, након упутства наставника, одговарајући наставни материјал, а потом су могли дати материјал да отворе и у софтверском пакету *Geogebra*, да одреде одговарајуће пресеке правих и криве и да, уз помоћ наставника, исправно поставе границе промењљивих, након чега је одрађен и чисто рачунски део задатка.



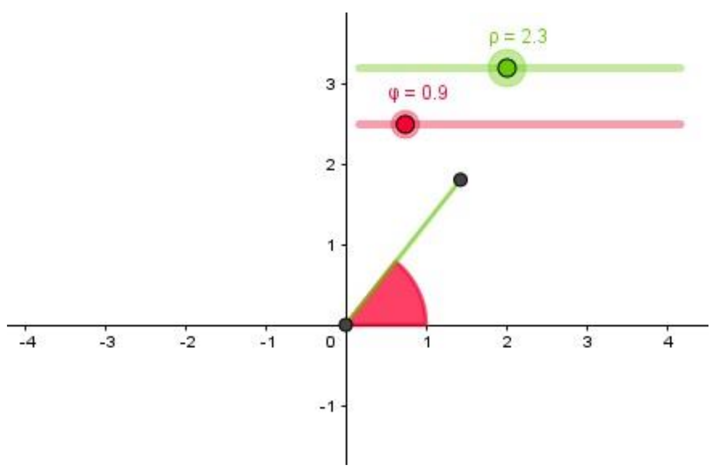
Слика 29. График припремљен за 1. задатак

За други задатак (2. задатак, прилог 5), изабран је пример у коме је област по којем се врши интеграција нешто сложенија, односно за коју је неопходно представљање у облику два међусобно дисјунктна скупа тачака, како би се применила одговарајућа особина двоструког интеграла. Студенти су могли уз помоћ својих мобилних уређаја, једноставном наредбом, да одреде тражене пресеке криве и правих, затим границе за променљиву x, након чега се повела дискусија како би се дате тачке одредиле и аналитичким путем, што је наравно неопходно за решавање задатка, традиционалним начином рада.



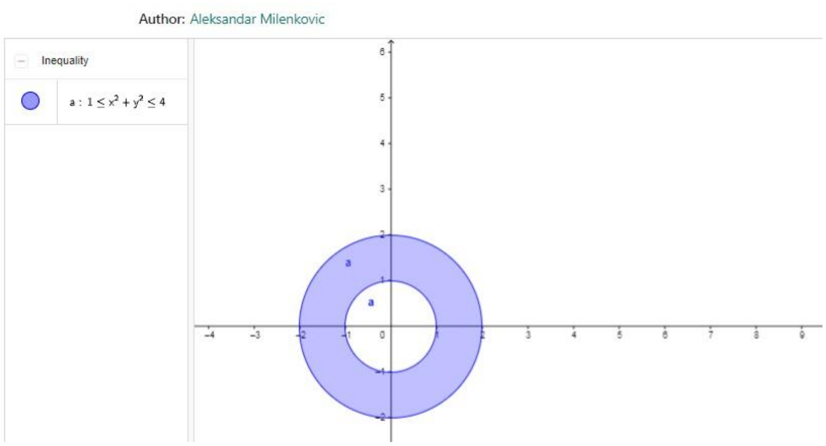
Слика 30. График припремљен за 2. задатак

Наставник је потом студентима применом дигиталног садржаја илустровао смену помоћу поларних координата и одговарајуће пресликавање равни, слично као и у раду са студентима експерименталне групе академске 2017/2018. године (видети поглавље 3.3.).



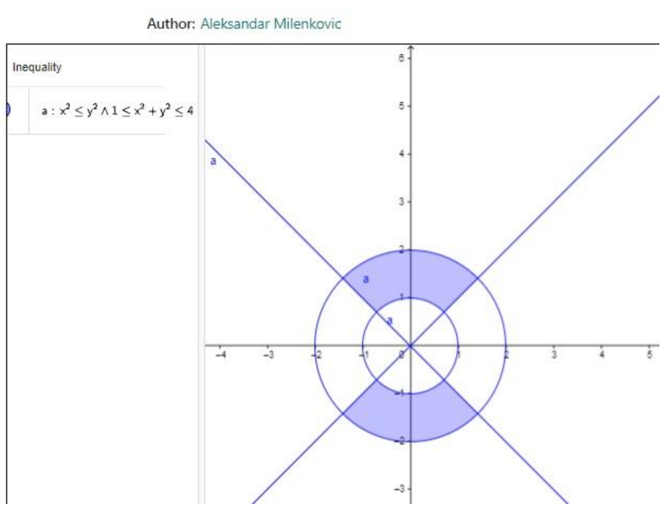
Слика 31. Визуализација смене увођењем поларних координата

За илустрацију значаја увођења смене помоћу поларних координата у циљу олакшавања поступка израчунавања двоструког интеграла изабран је задатак (3. задатак, прилог 5) чији је захтев био израчунавање двоструког интеграла дате подинтегралне функције, где је област интеграције дата са $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Студенти који су имали нешто озбиљније математичко образовање у средњој школи су знали која геометријска фигура је задата одговарајућом алгебарском репрезентацијом, али остали (не баш мали број студената) који нису знали о чему се ради, могли су, покретањем одговарајућег материјала, да повежу графичку са датом алгебарском репрезентацијом кружног прстена. Студентима је посебно истакнут лакши поступак самог рачунског дела задатка како би се указало на једно од наставних принципа, а то је принцип рационализације и економичности.



Слика 32. График припремљен за 3. задатак

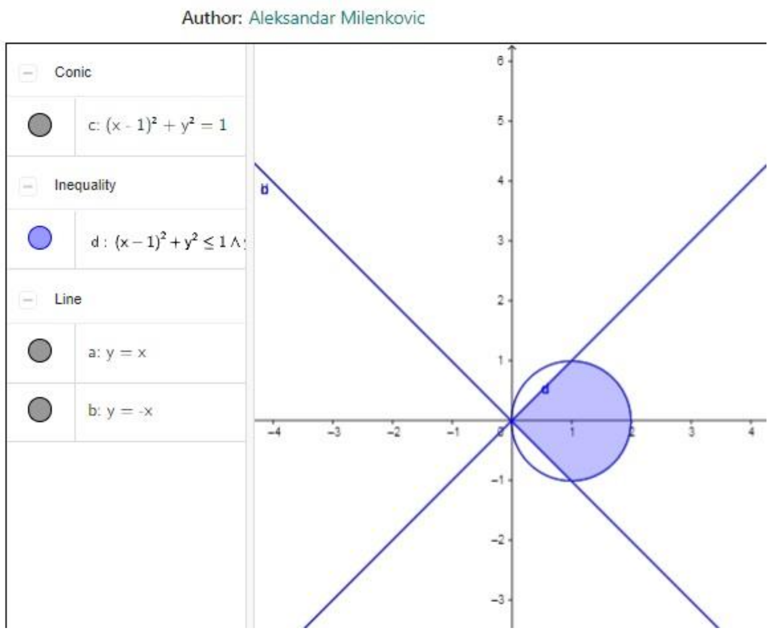
Како би се студентима указало да променљива φ након смене помоћу поларних координата, не узима нужно вредности од 0 до 2π, решен је задатак у коме је захтев био одређивање површине дела равни одређене неједнакостима $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ и $x^2 - y^2 \leq 0$ (4. задатак, прилог 5).



Слика 33. График припремљен за 4. задатак

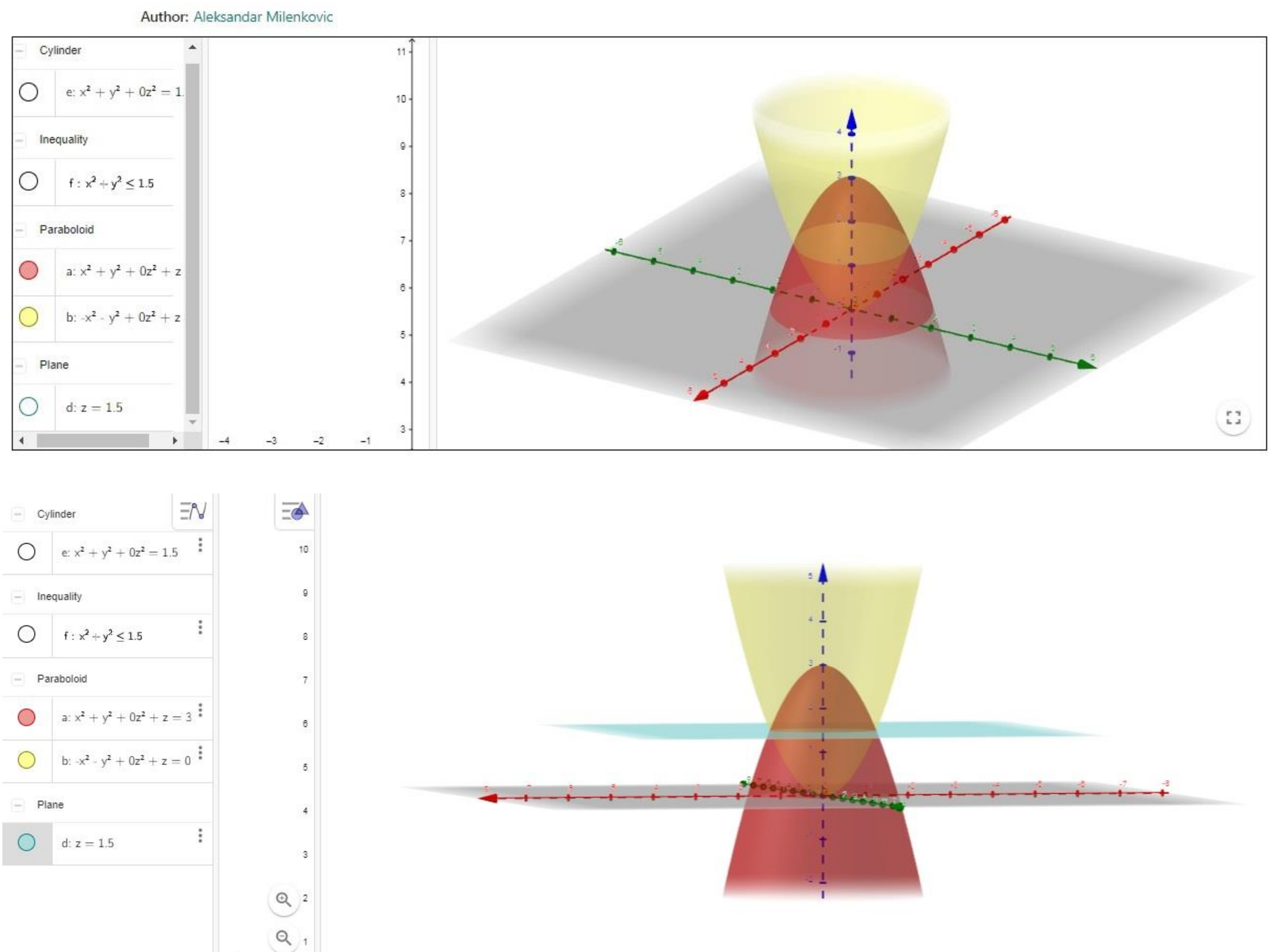
По одређивању граница променљивих, задатак је решен од стране студента који се добровољно јавио, а потом су се студенти уверили да је решење задатка коректно, применом формуле за израчунавање површине круга и његових делова.

Потом је пред студенте постављен нешто сложенији задатак (5. задатак, прилог 5), у коме је захтев био одређивање површине дела равни одређене кругом чији се центар налази на апсциси (не у координатном почетку) и двема правама које пролазе кроз координатни почетак. Овај задатак је, поред наравно битног дела задатка који се састоји из коректног одређивања области интеграције и граница променљивих након увођења смене помоћу поларних координата, имао још један битан аспект, а то је исправан редослед спровођења интеграције у смислу међусобне зависности две променљиве.



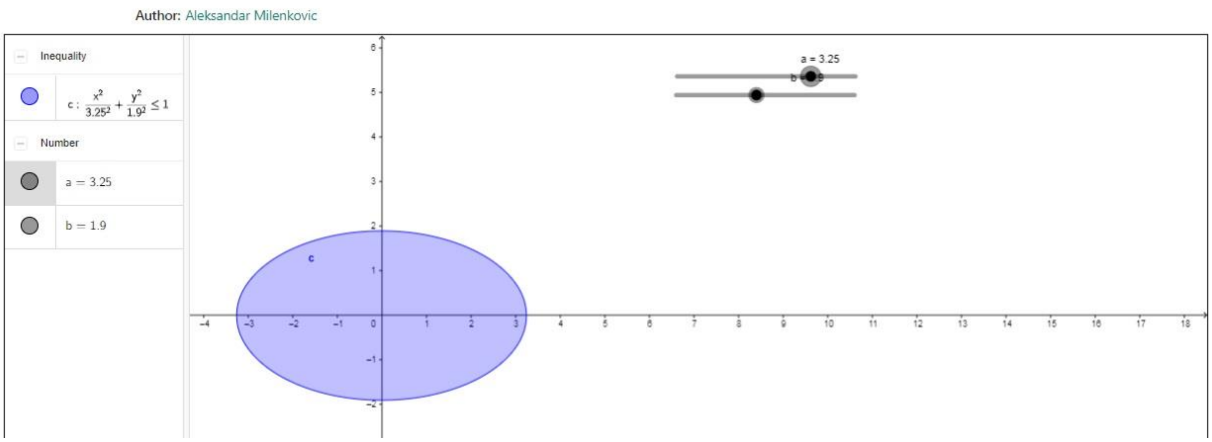
Слика 34. График припремљен за 5. задатак

После првих пет задатака у којима је било неопходно остварити одговарајуће визуелне представе математичких појмова у равни, од стране студената, кренуло се са израдом задатака у којима је примена мобилних уређаја имала знатнији утицај јер су у одговарајућим дигиталним садржајима били представљени одговарајући објекти у простору. Студенти су, као и при обради претходних задатака, покренули одговарајући садржај који је требало да им приближи тело чију је запремину требало израчунати, а које је било одређено пресеком два параболоида: $z = x^2 + y^2$, $z = 3 - x^2 - y^2$ (6. задатак, прилог 5). Студенти су, као што је и раније речено, могли дате материјале да покрену у софтверском пакету *Geogebra*, и да укључивањем/искључивањем видљивости одређених геометријских објеката боље разумеју на који се начин секу две површи, шта је пројекција датог тела на раван пројекције, након чега су, заједно са наставником и аналитички, решавањем одговарајућих једнакости, одредили дате пресеке и пројекције. Студенти су иначе сами предложили увођење смене помоћу поларних координата, што је имплицирало да су увидели практичну примену смене помоћу поларних координата, као и када и зашто је дату смену потребно увести.



Слика 35. График припремљен за 6. задатак

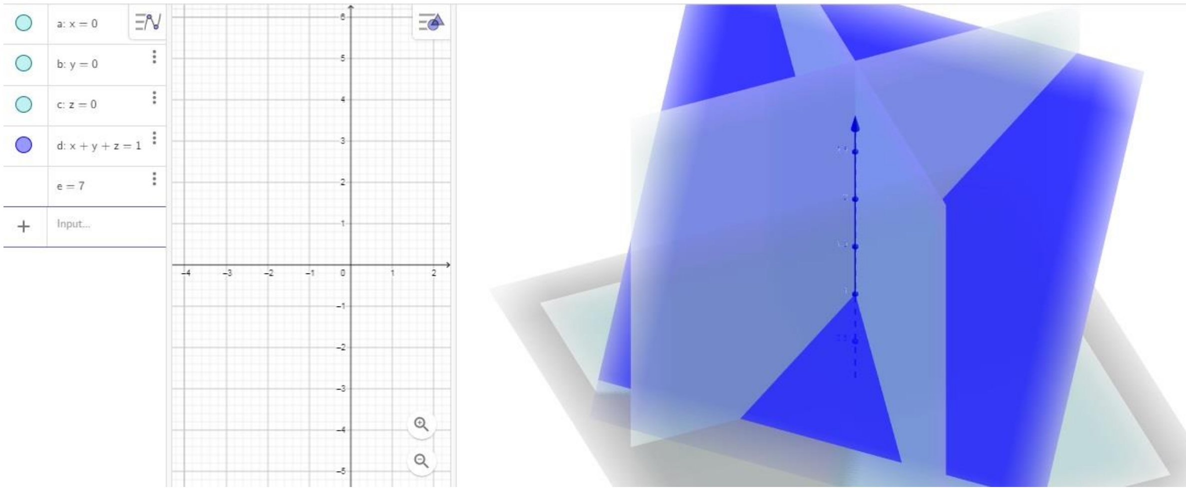
Са уопштеним поларним координатима, наставник је упознао студенте непосредно, решавањем 7. задатка (прилог 5). У датом задатку захтев је био израчунавање двоструког интеграла где је област по којој се вршила интеграцијом била ограничена елипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, док је и подинтегрална функција садржала израз облика $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.



Слика 36. График припремљен за 7. задатак

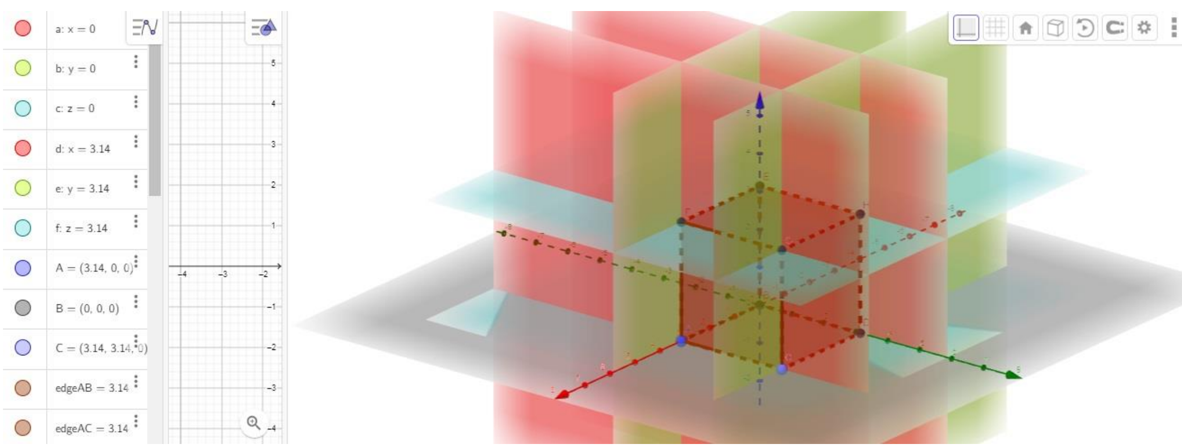
Студенти су имали прилику да приликом рада са дигиталним садржајем са параметрима, уоче како промена вредности параметара утиче истовремено на геометријске особине елипсе, али и на промену алгебарске репрезентације дате елипсе. Израчунавање датог двоструког интеграла је текло уобичајено, на табли, где су студенти утврђивали знања и поступке о интеграцији методом смене.

Након упознавања студената са дефиницијом троструког интеграла, поново уз помоћ аналогије са двоструким, односно одређеним интегралом, студенти су упознати са применом троструког интеграла за одређивање запремине тела у простору. Зато је пред студенте постављен задатак чији је захтев било одређивање запремине области коју одређују равни $x = 0, y = 0, z = 0$ и $x + y + z = 1$ (8. задатак, прилог 5). Студенти су дати дигитални садржај анализирали, што самостално, што у пару, а одређени број студената је формирао и групе од три до четири студента. Материјале су могли ротирати, односно посматрати из различите перспективе како би одредили границе најпре за променљиву z, затим како би уочили пројекцију тела (пирамиде) на xOy – раван, одредили границе за остале две променљиве и потом прецизирали редослед интеграције услед међусобне зависности три променљиве.



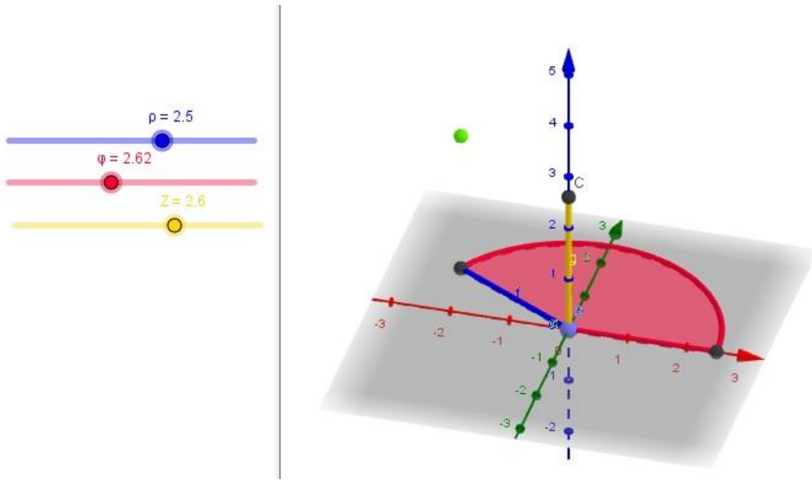
Слика 37. График припремљен за 8. задатак

Након израде 9. задатак (9. задатак, прилог 5), наставник је позвао студенте да још једном анализирају равни којима је дефинисана област интеграције у 8. и 9. задатку пошто је пракса у раду са студентима показала да студенти најчешће греше у томе да област, односно границе променљивих нетачно дефинишу и тако добију правоугаонике, односно призме, онда када то није случај.



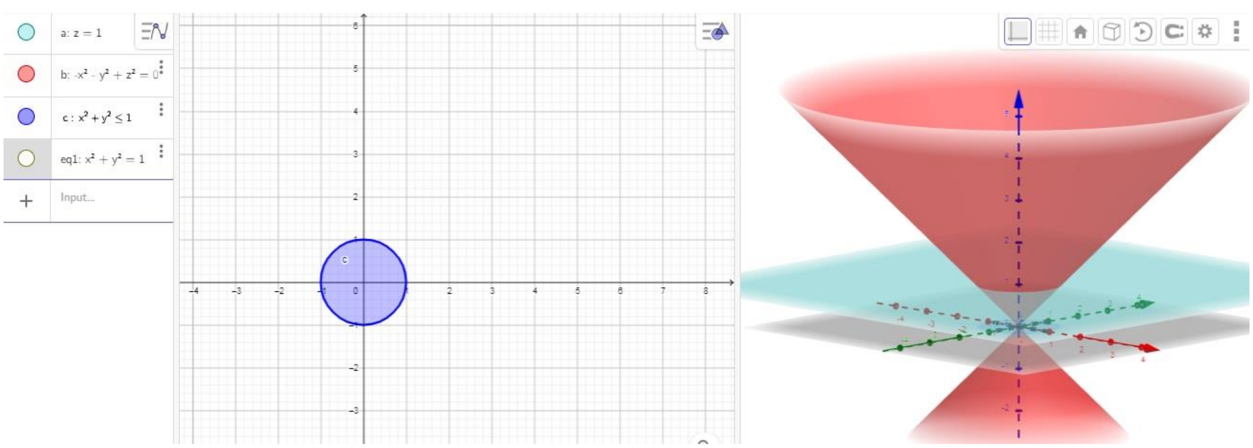
Слика 38. График припремљен за 9. задатак

Како би студенти што ефикасније и једноставније одредили област интеграције, самим тиме и што једноставније и прецизније одредили границе променљивих троструког интеграла, када је област интеграције одређена цилиндром или више њих, наставник им је илустровао смену помоћу цилиндричних координата. Том приликом, наставник је користио динамички материјал направљен у софтверском пакету *GeoGebra* како би што ефикасније илустровао пресликавање $O'\rho\varphi z$ координатног система у $Oxyz$, Декартов координатни систем (слика 39).



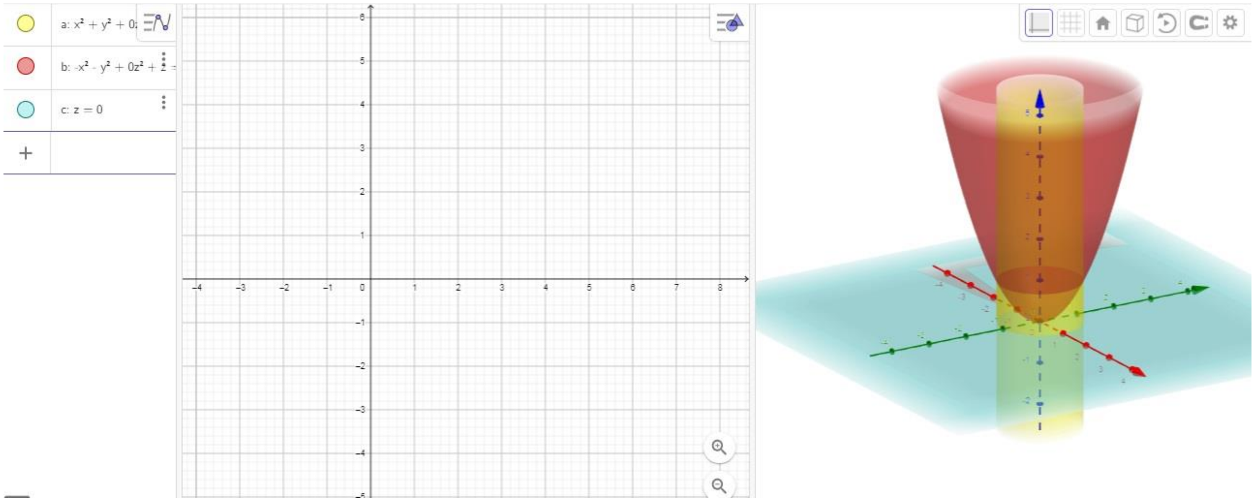
Слика 39. Визуализација смене увођењем цилиндричних координата

Пошто су студенти упознати, од стране наставника, да се троструки интеграли користе и за одређивање масе тела када је дата функција густине у зависности од промењљивих, наставник је са њима решавао 10. задатак. У склопу 10. задатка конкретизована је и поменута смена помоћу цилиндричних координата, у коме је захтев био одређивање масе тела одређеног конусом и равни (10. задатак, прилог 5), дате функције густине. Студенти су имали прилику да манипулацијом динамичког материјала прикажу и цилиндар који дато телу пројектује на јединични круг у $Oxyz$ раван и да самим тиме још једноставније одреде границе промењљивих, након увођења поменуте смене.



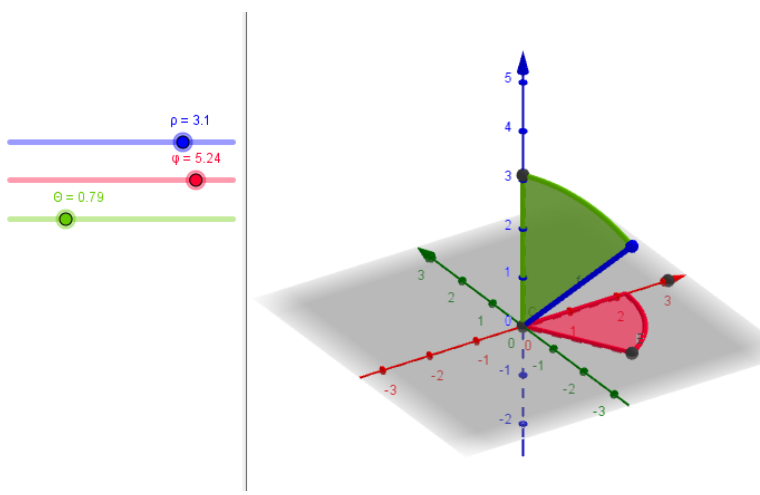
Слика 40. График припремљен за 10. задатак

Материјал припремљен за 11. задатак је студентима експерименталне групе послужио за визуализацију области по којој се врши интеграција троструког интеграла, дате подинтегралне функције (11. задатак, прилог 5). Приликом решавања овог задатка, наставник је препустио студентима да (самостално, радом у пару или групним радом) након преласка на цилиндричне координате, одреде границе промењљивих, а затим и у својим свескама реше одговарајући интеграл. За то време, наставник је обилазио студенте, помагао им дозирајући помоћ уз одговарајућа питања и потпитања.



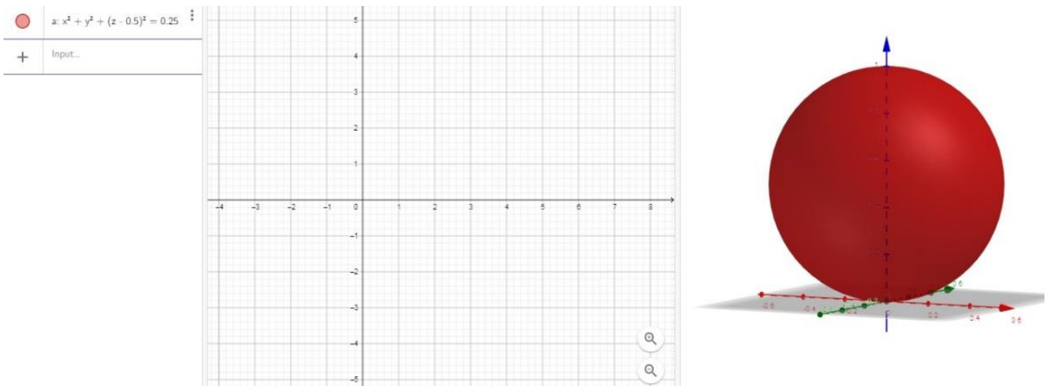
Слика 41. График припремљен за 11. задатак

Пред крај практичне наставе из вишеструких интеграла, наставник је илустровао још једну често коришћену смену – смену помоћу сферних кооордината којом се $O'\rho\varphi\theta$ координатни систем слика у Декартов $Oxyz$ координатни систем. Употреба ове смене јавља се у механици, као и у астрономији. Смена помоћу сферних координата неопходна је за решавање задатака у којима је област по којој се врши интеграција одређена сфером или њеним деловима. Зато је, аналогно илустрацијама смене помоћу поларних и цилиндричних координата, наставник илустровао смену помоћу сферних координата одговарајућим аплетом који је сам припремио, тако да су студенти могли визуализовати и у што бољој мери разумети значење концепата ρ, φ и θ (слика 42).



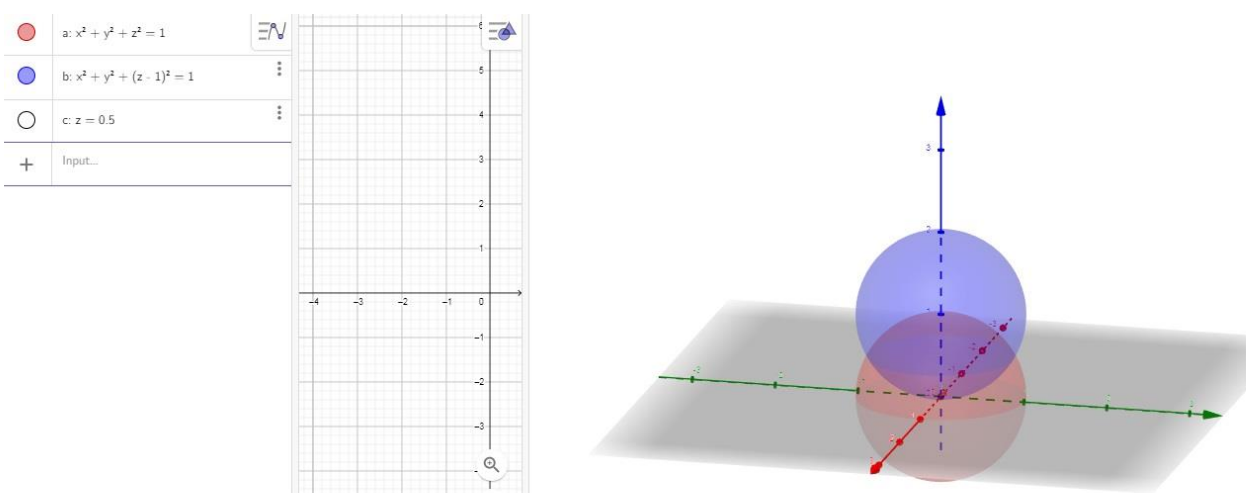
Слика 42. Визуализација смене увођењем сферних координата

Након упознавања студената са сменом помоћу сферних координата, значај увођења дате смене илустрован је обрадом два примера. Први пример (11. задатак, прилог 5) се односио на израчунавање троструког интеграла где је област по којој се вршила интеграција била ограничена сфером $x^2 + y^2 + z^2 = z$, при чему је и подинтегрална функција садржала израз облика $x^2 + y^2 + z^2$. Са студентима је вођена дискусија са циљем да се прецизно одреде границе промењљивих, а потом и редослед интеграције услед међусобне зависности промењљивих.



Слика 43. График припремљен за 12. задатак

На крају, са студентима је обрађен још један, нешто захтевнији, задатак, у коме је захтев био одређивање запремине тела ограниченог површима $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$. У задатку је искоришћена особина троструког интеграла да је вредност троструког интеграла по одређеној области једнака збиру вредности трострукиx интеграла по две дисјунктне области чија је унија једнака области интеграције. Студенти су поново могли да, укључивањем помоћне равни, одреде пресек две сфере и границе промењљивих двеју области интеграције. Наставник је рачунски део препустио студентима и том приликом их је обилазио и помагао им у раду.



Слика 44. График припремљен за 13. задатак

По завршетку практичног дела наставе, наставник је упутио студенте да дате дигиталне материјале могу користити приликом утврђивања двоструких и троструких интеграла, сугерисао студентима да могу учење организовати радом у групама, као и самосталним радом уз комуникацију са колегама путем апликација какве су *e-mail, Viber* и *WhatsApp.* Такође, проследио је студентима решене задатке који су обрађени на часовима вежби (прилог 5) и обратио се студентима са поруком да за евентуалне нејасноће и потешкоће приликом рада могу контактирати наставника путем mail-a.

4.4. Тестирање студената

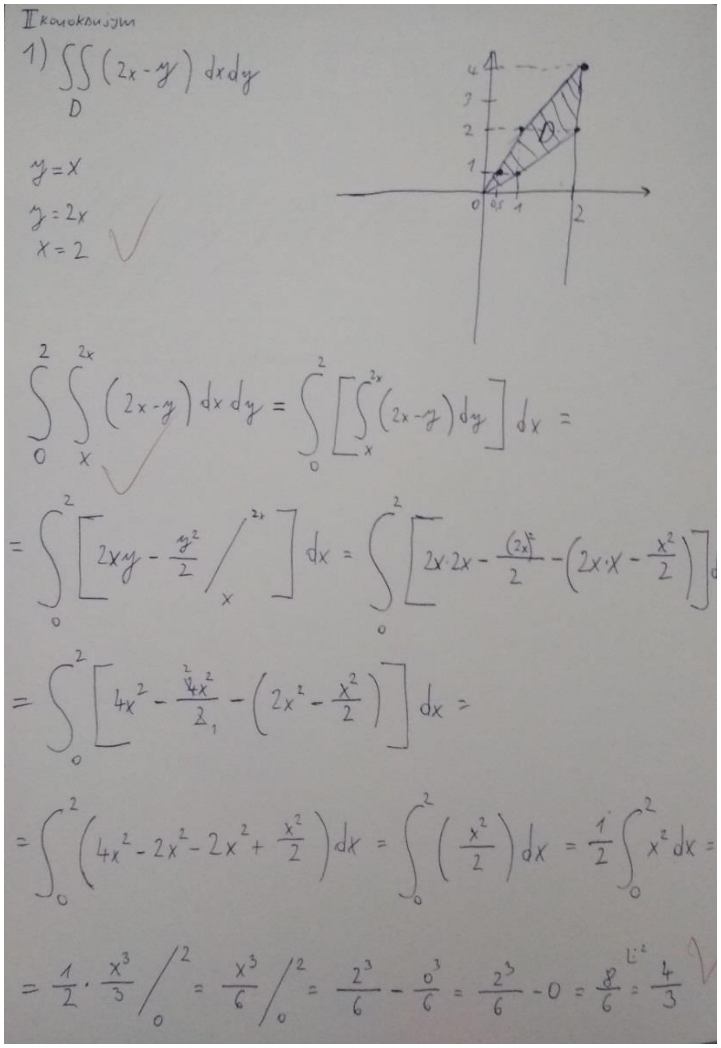
Прва провера утицаја мобилног учења на знање и постигнућа ученика спроведена је током регуларног другог колоквијума из Математике 3. Дати колоквијум је садржао четири задатка: задатак из вишеструких интеграла, задатак из криволинијских интеграла, задатак из површинских интеграла, као и задатак из теорије поља, а студенти су имали два сата времена за израду колоквијума. Колоквијум је одржан 4 седмице по завршетку наставе из вишеструких интеграла, а током израде колоквијума студенти нису могли да користе никакве апликације, никакве унапред припремљене материјале, таблицу интеграла, као ни калкулатор. Успех студената приликом решавања задатака на колоквијуму је утицао на предиспитне обавезе студената из предмета Математика 3.

Када је реч о вишеструком интегралу, захтев је гласио:

1. Одреди запремину тела одређену равнима $x = 2, y = x, y = 2x, z = 0, z = 2x - y.$

У датом задатку је требало уочити да је у питању примена двоструког интеграла за одређивање запремине тела у простору. Студенти су требали да уоче да последње две равни указују на подинтегралну функцију, док пројекцијом датог тела на xOy раван остале равни одређују праве које ограничавају пројекцију тела на дату раван. Задатак је вреднован на следећи начин: слика и постављене границе променљивих - 4 поена; спровођење рачунског поступка израчунавања интеграла - 6 поена.

Решење датог задатка од стране студента експерименталне групе шифрованог са Е15, приказано је на слици 45. Студент Е15 је, као што се на слици може видети, успешно нацртао слику која одговара датом задатку, конкретно, пројекцију тела на xOy раван, што је неопходан део решења датог задатка, ради коректног одређивања граница променљивих. Студент је исправно одредио границе променљивих x и y, док је поступак интеграције, односно поступак израчунавања двоструког интеграла, исправно и тачно спровео.



II колоквијум

1) $\iint\limits_D (2x-y)\,dx\,dy$

$y=x$

$y=2x$

$x=2$

$$\int_0^2\int_x^{2x}(2x-y)\,dx\,dy=\int_0^2\left[\int_x^{2x}(2x-y)\,dy\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left[2xy-\frac{y^2}{2}\Big/_x^{2x}\right]dx=\int_0^2\left[2x\cdot 2x-\frac{(2x)^2}{2}-\left(2x\cdot x-\frac{x^2}{2}\right)\right]dx$$

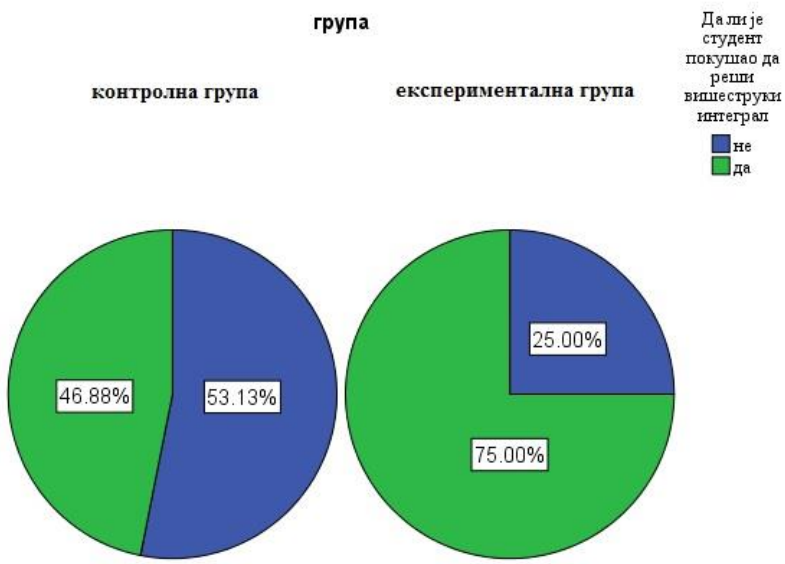
$$=\int_0^2\left[4x^2-\frac{4x^2}{2}-\left(2x^2-\frac{x^2}{2}\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left(4x^2-2x^2-2x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big/_0^2=\frac{x^3}{6}\Big/_0^2=\frac{2^3}{6}-\frac{0^3}{6}=\frac{2^3}{6}-0=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Слика 45. Слика решења 1. задатка са другог колоквијума

Слично као и у истраживању спроведеном 2016/2017. и 2017/2018. академске године, најпре је извршен увид у однос броја студената који су уопште покушали да реше дати задатак. Искуство говори да су студенти, који немају амбиције за високим оценама и за озбиљно бављење математичким садржајима у будућности, односно студенти у чијем је интересу да што пре положе дати испит (без обзира на потенцијал студената), склони томе да „бирају“ одговарајуће наставне садржаје које озбиљно уче и вежбају, док од неких од садржаја практично одустају. Као што је раније и поменуто, један од разлога за оваквом стратегијом студената приликом полагања датог испита лежи у обимности и апстрактности наставних садржаја из математике у оквиру датог испита (предмета), предвиђених студијским програмом.



Слика 46. Однос броја студената експерименталне и контролне групе који су покушали да реше задатак из вишеструких интеграла

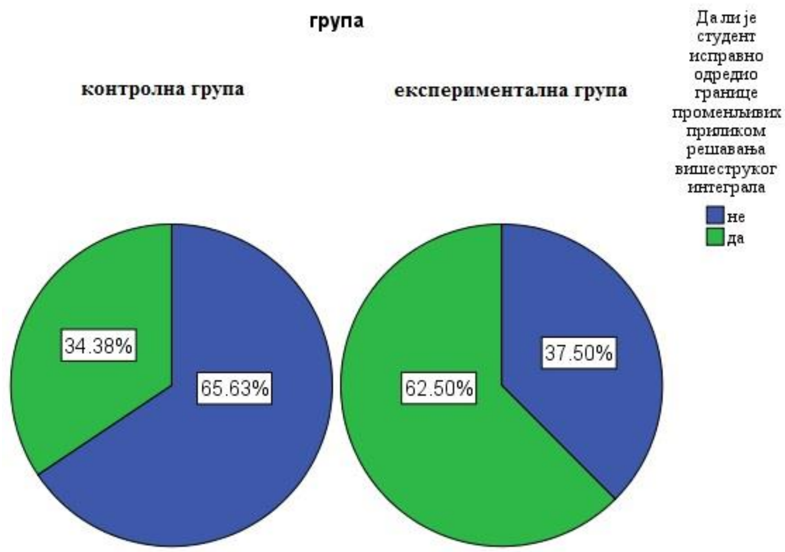
На основу графикона приказаног на слици 47, може се уочити присуство разлике у броју студената експерименталне и контролне групе који су уопште покушали да реше одговарајући задатак.

Са дате слике и из дате табеле се може уочити да, за разлику од контролне групе (у којој 53.1% студената уопште није покушало да реши дати задатак) у експерименталној групи студената чак 75% студената је уложило труд да одговори на дати захтев који се односио на вишеструки интеграл.

Адекватном статистичком анализом (χ^2 тест независности), тестирана је хипотеза да је описана разлика у броју студената две групе статистички значајна. На основу добијених статистичких резултата ($\chi^2 = 5.32, df = 1, p = 0.04, n = 64$), може се закључити да је разлика у броју студента који су покушали да реше вишеструки интеграл статистички значајна, на нивоу значајности 0.05.

Штавише, приметна је била и разлика у односу броја студената који су покушали да реше површински интеграл свођењем на двоструки интеграл, у зависности од групе студената, али тиме се нећемо детаљно бавити у овом раду (то је свакако тема за даље истраживање о утицају примене рачунара и мобилних уређаја за визуализацију наставних садржаја када је интеграција функција више променљивих у питању).

Када поредимо бројеве студената експерименталне и контролне групе који су прецизно одредили границе променљивих (графикон приказан на слици 47) приликом решавања вишеструког интеграла, за разлику од студената контролне групе, где је чак 65.6% студената било неуспешно у овом битном делу задатка, резултати експерименталне групе су значајно бољи у том смислу. Међу студентима експерименталне групе, 62.5% студената је било успешно у одређивању граница промењљивих, а за шта је неопходна била визуализација, конкретно одговарајућих равни и њихових пресека (визуализација у простору), затим визуализација пројекције датог тела на раван пројекције (визуализација равни), као и решавање одговарајућих (у овом случају) линеарних једначина и система тих једначина.



Слика 47. Однос броја студената експерименталне и контролне групе који су прецизно одредили границе промењљивих у првом задатку

Поново, на основу резултата студената, желели смо да испитамо да ли је разлика у постигнућима студената чије је учење и подучавање текло уз помоћ мобилних уређаја и студената који су одговарајуће наставне садржаје усвајали традиционалним приступом, статистички значајна, када је реч о одређивању граница промењљивих. Као што се на основу резултаата могло очекивати, χ^2 тестом независности је потврђена статистички значајна разлика у корист студената експерименталне групе ($\chi^2 = 4.00, df = 1, p = 0.045, n = 64$), односно у корист експерименталног приступа подучавања и учења.

Поред описаних резултата истраживања, који директно илуструју позитиван утицај промене начина учења и подучавања вишеструких интеграла мобилним учењем, анализирали смо и укупан број поена студената приликом решавања задатка из вишеструких интеграла (као што је већ речено задаци су оцењивани парцијално, односно бодовани су и делимично тачно урађени задаци).

Како обележје није имало нормалну дистрибуцију, коришћен је одговарајући, непараметарски Ман-Витнијев тест за поређење расподеле броја поена у две групе. На основу статистичке анализе (табела 9), разлика у расподели броја поена коју су студенти експерименталне и контролне групе освојили приликом решавања вишеструког интеграла није статистички значајна са нивоом значајности 0.05, али јесте са нивоом значајности 0,1 ($p = 0{,}1$).

Табела 9. Статистички резултати укупног броја поена студената приликом решавања вишеструког интеграла

Група	Број студената	Аритметичка средина	Медијана	Средња вредност ранга	Сума рангова	Резултати Ман-Витнијевог теста	
						Z	p(2-tailed)
Експериментална	32	5.41	8	36.08	1154.5	−1.64	0.1
Контролна	32	3.34	0	28.92	925.5		

Овај резултат се може објаснити и малим узорком, односно релативно малим бројем студената који су партиципирали у датом истраживању. Приметно је било и да студенти који су исправно одредили област интеграције и прецизно одредили границе промењљивих нису имали посебних потешкоћа приликом спровођења рачунског поступка у задатку, што још једном говори о значају прецизног одређивања и дефинисања области интеграције и значају примене мобилних уређаја за визуализацију датих наставних садржаја.

4.5. Мишљење и ставови студената о примени мобилних уређаја

Прегледом домаће литературе о е-учењу и м-учењу, јасно је да је мобилно учење на нашим просторима знатно мање истраживано и знатно мање су испитивани утицаји овог облика учења и подучавања. За разлику од неких страних истраживања (Croop, 2009; Al-Emran, Elsherif & Shaalan , 2016) нисмо били у прилици да у домаћој стручној литератури пронађемо мишљења и ставове студената, нарочито у високом образовању о примени мобилних уређаја у наставном процесу. Зато смо се одлучили за спровођење анкете након завршене практичне наставе из предмета Математика 3, академске 2018/2019 године. Студенти су добили анкету (прилог 6) коју су попуњавали, са циљем да добијемо повратну информацију о њиховим утисцима и ставовима о интеграцији мобилних уређаја у наставни процес. Студенти су се на скали Ликертовог типа одлучивали за оцену од 1 до 5 (1 - уопште се не слажем, 2 - углавном се не слажем, 3 - нисам сигуран/а, 4 - углавном се слажем, 5 – слажем се у потпуности) за сваки од наведених исказа који су се односила на: утиске са практичне наставе, о њиховом утиску о овој наставној методи уопште, као и о њиховој процени потенцијалног утицаја примене мобилних уређаја за учење и подучавање математичких наставних садржаја које су раније обрађивали традиционалним видом наставе.

У анкети су учествовали сви студенти експерименталне групе истраживања спроведеног 2018/2019. академске године. Највећа аритметичка средина (4.5), односно највећи степен слагања са тврдњама из прилога 6, присутан је код исказа да се студентима допало што су уз помоћ мобилног уређаја могли да посматрају графике на којима су представљене површи и њихови пресеци, односно графичке репрезентације математичких појмова на чијој је визуализацији био акценат током рада са студентима, уз помоћ мобилних уређаја. Јако висок степен слагања је и са исказима да би уз помоћ мобилног уређаја студенти лакше и брже усвојили и садржаје који се тичу: интеграције функција једне променљиве - одређени интеграл (4.22); садржаје из аналитичке геометрије (4.09); криволинијски и површински интеграл (3.94), што говори о томе да студенти у великој мери имају перцепцију о повезаности, па и аналогији одговарајућих наставних садржаја.

Табела 10. Корелација степена сагласности студената са исказима датим у анкети са бројем поена оствареним решавањем вишеструког интеграла

	Q1		Q2		Q3		Q4		Q5	
	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)
Укупан број поена	**0.56**	**0.001**	**0.92**	**<0.005**	0.28	0.123	**0.44**	**0.011**	**0.66**	**<0.005**
	Q6		Q7		Q8		Q9		Q10	
	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)
Укупан број поена	**0.90**	**<0.005**	0.18	0.32	**0.83**	**<0.005**	**0.71**	**<0.005**	**0.81**	**<0.005**
	Q11		Q12		Q13		Q14		Q15	
	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)	Коеф. Корелације	*p* (2-tailed)
Укупан број поена	**0.86**	**<0.005**	**0.91**	**<0.005**	**0.83**	**<0.005**	**0.73**	**<0.005**	0.08	0.673

Имајући у виду да су одговори студената рангирани, одговарајућим непараметраским тестом (Спирмановим тестом ранга) анализирана је корелација датих ставова и мишљења студената прикупљених анкетом Ликертовог типа са бројем поена које су студенти освојили решавањем вишеструког интеграла. Корелација између броја поена које су студенти остварили решавањем вишеструког интеграла је статистички значајна са готово свим ставовима студената о којима смо се информисали путем анкете (табела 10). Корелација је у свим наведеним случајевима позитивна, што говори у прилог томе да што су студенти у већој мери сагласни са тврђењима Q1, Q2, Q4, Q5, Q6, Q8, Q9, Q10, Q11, Q12, Q13 I Q14 (описаним у анкети у прилогу 6) то су њихови резултати, остварени решавањем вишеструког интеграла бољи.

5. Опис тока експерименталног истраживања спроведеног у току академске 2019/2020. године

Наредно (треће у низу) истраживање спроведено на тему примене одговарајућих софтверских пакета и мобилних апликација у циљу унапређивања квалитета знања студената у области двоструких и троструких интеграла, спроведено је током академске 2019/2020 године на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. За визуализацију наставних садржаја, на којој је и био акценат датог истраживања, изабран је програмски пакет *GeoGebra,* односно мобилне апликације *Graphing Calculator* и *3D Calculator*. Помак у односу на претходна два истраживања било је интензивније укључивање студената (у већој мери у односу на претходна истраживања) у не само тумачење одговарајућих дигиталних садржаја већ и у оспособљавању студената да креирају одговарајуће наставне материјале.

5.1. Циљеви истраживања спроведеног 2019/2020. године

После избора софтверског пакета и мобилних апликација за коришћење у датом истраживању и одабира пригодног узорка који би истраживањем био обухваћен, постављани су циљеви истраживања.

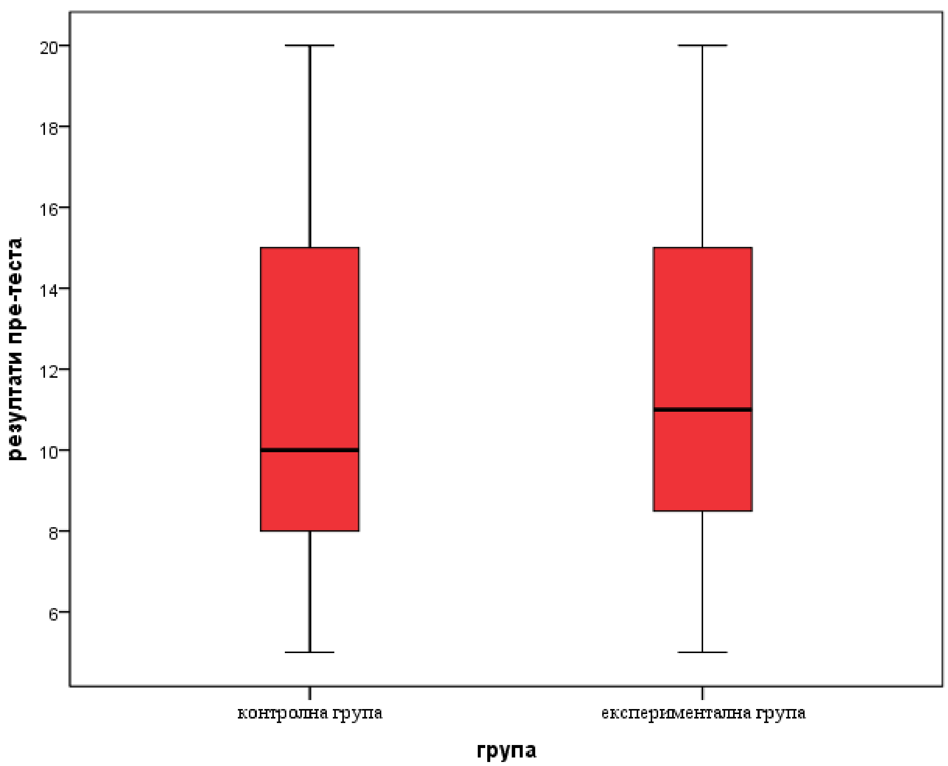
Главни циљ истраживања представљало је утврђивање потенцијалне разлике и степена те разлике у знању и разумевању наставних садржаја из области вишеструких интеграла од стране студената, али и у разумевању пресликавања координатних система у равни и простору, након увођења одговарајућих смена променљивих, услед примене динамичког софтвера, односно мобилних апликација.

Поред основног циља истраживања, датим истраживањем ће се постигнути и додатни циљеви:

- Имплементација примене мобилних уређаја (мобилних телефона и лаптоп рачунара) у наставни процес;
- Израда наставних материјала и инструмената потребних за утврђивање постојања евентуалне разлике у знању и постигнућима студената.

5.2. Уводно (прелиминарно) тестирање студената

Истраживањем које је спроведено током академске 2019/2020 године обухваћено је укупно 72 студента друге године основних академских студија Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, смерова машинско инжењерство, војноиндустријско инжењерство и аутомобилско инжењерство. Истраживање је спроведено у току зимског семестра 2019/2020 године, у склопу наставног предмета Математика 3. Слично, као и у истраживању спроведеном претходне академске године, студенти једне групе вежби представљали су експерименталну групу, док су студенти друге групе вежби чинили контролну групу. Математичко образовање студената у току њихове прве године основних академских студија се није разликовало по облику наставе, наставним методама, наставним садржајима и њиховим обимом, ни по броју наставних часова предавања и вежби. Групе студената нису биле хомогене (групе су чинили студенти различитих остварених постигнућа из Математике 1 и Математике 2). По формирању експерименталне и контролне групе, обе групе студената су решавале пре–тест. Тест (прилог 7) који су студенти полагали је садржао четири задатка, а студенти су за његову израду имали 30 минута. Студенти нису могли да користе никакву помоћ приликом израде задатака (таблица интеграла, рачунари, телефони). Задаци за пре-тест су били изабрани тако да се на основу њиховог решавања од стране студената може извршити вредновање знања студената о процедуралном и теоријском знању из области одређеног интеграла, самим тиме и вредновање неопходног предзнања за решавање вишеструких интеграла. Максималан број поена на поменутом тесту је био 20. Расподела броја поена у експерименталној и контролној групи на пре-тесту приказана је графиконом на слици 48.



Слика 48. Расподела броја поена студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту

Испитивања разлике у успеху студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту, извршено је Студентовим t-тестом разлика аритметичких средина независних група. Резултати статистичке анализе дати су у табели 11.

Табела 11. Статистички показатељи резултата студената контролне и експерименталне групе на пре-тесту.

Група	Број студената	Аритметичка средина	Стандардно одступање	Студентов - t тест		
				df	t	p (2-tailed)
Експериментална	35	11.09	3.89	70	-0.6	0.55
Контролна	37	10.51	4.16			

Анализом резултата рада студената на пре-тесту установљено је да не постоји статистички значајна разлика у знању студената две групе ($p = 0.55$), на нивоу значајности 0.05. Закључак је да је аритметичка средина броја поена на пре-тесту студената експерименталне групе незнатно већа у односу на аритметичку средину броја поена на пре-тесту студената контролне групе (разлика просечних броја поена износила је 0.58 у корист студената експерименталне групе).

5.3. Опис рада са студентима експерименталне групе током експерименталног истраживања спроведеног 2019/2020 године

Непосредно пре часова вежби из Математике 3 на којима су са ученицима обрађивани наставни садржаји који се односе на вишеструке интеграле, наставник је упутио студенте на софтверски пакет *GeoGebra*. Студентима је указано да се за различите оперативне системе, како за рачунаре, тако и за мобилне телефоне, могу бесплатно преузети и инсталирати апликације из датог пакета: *Graphing Calculator*, *3D Calculator*, *Geometry*, *Augmented Reality*, као и две класичне *GeoGebra* апликације, *GeoGebra Classic 5* и *GeoGebra Classic 6*. Студентима је речено да су апликације вредне пажње и истраживања њихових могућности у смислу примене датих апликација за различите наставне предмете и наставне садржаје. Затим је наставник посебно истакао две мобилне апликације међу поменутим: *Graphing Calculator* и *3D Calculator*. Наставник је указао студентима да се апликација *Graphing Calculator* може користити за цртање графика функција, за графичку методу решавања једначина и система једначина, као и за графичко представљање података, док се апликација *3D Calculator* може користити за цртање графика функција више променљивих (као што сам назив апликације каже, у простору), затим за скицирање графика површи и представљања геометријских објеката у простору и решавања проблема из стереометрије.

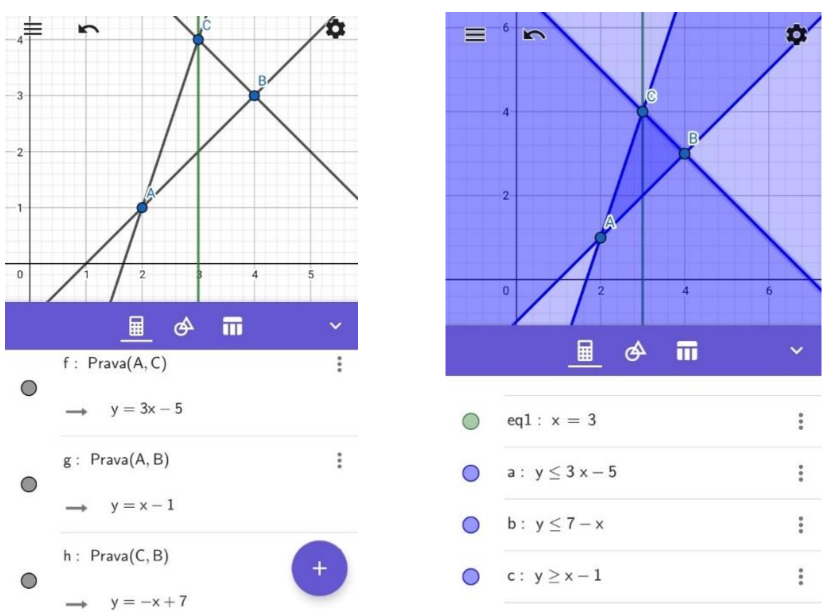
Имајући у виду да се студенти, током свог математичког образовања на универзитетском нивоу, нису превише бавили наставним садржајима из аналитичке геометрије у равни и простору, као и да је приступ учења и подучавања у претходна два курса математике био у знатно већој мери аналитички, а не визуелни, наставник је дате две апликације изабрао за визуализацију наставних садржаја неопходних за усвајање знања, правила и процедура из вишеструких интеграла. Студентима је речено да дате апликације инсталирају на мобилним уређајима (студенти су у складу са својим могућностима бирали да ли ће користити мобилне телефоне или лаптоп рачунаре) као и да дате уређаје требају уредно носити на часове вежби. Такође, наставник је саопштио студентима да ће самостално креирати наставне материјале који прате одговарајуће задатке, те да креирањем налога на *GeoGebra* интернет сајту дате материјале могу касније користити приликом учења и вежбања, као и да их накнадно могу додатно дорађивати и дотеривати. На почетку првог часа обраде наставне јединице вишеструки интеграли, наставник је утврдио да ли су сви студенти инсталирали дате апликације и прошао са њима кроз одређене детаље, односно кроз одређене техничке аспекте датих апликација. Када је реч о језику који је коришћен приликом примене апликација, студенти су сами могли бирати који ће језик користити.

Пре израде конкретних примера, наставник је упознао ученике са обликом и методом рада. Наиме, након што наставник зада ученицима одговарајући пример, односно задатак, студенти самостално, евентуално радом у пару (уколико је то из техничких разлога неопходно), користећи одговарајуће апликације, цртају графике функција једне промењиве, односно функције две промењиве, праве, криве и површи, у зависности од природе задатка, односно примера. Наравно, наставник је упознао студенте у дуалну природу датих апликација, тачније да се записивањем једначина (или неједнакости) математичких објеката у одговарајуће поље (алгебарском репрезентацијом) добијају графички прикази датих математичких објеката (графичка репрезентација). Процес решавања задатака је ишао тако што би наставник прочитао задатак, односно упутио студенте у захтев задатка, потом допустио студентима да применом одговарајуће апликације датом задатку доделе одговарајућу слику, односно да креирају одговарајући дигитални садржај, потом да прецртају слику у својим свескама, одреде границе промењивих пошто су дефинисали тражену област по којој се врши интеграција, након чега би приступили самом израчунавања двоструког, односно троструког интеграла. Цртање одговарајуће слике у свескама иако је можда на први утисак сувишно, сматрало се пожељним пошто студенти на тај начин увежбавају графичко представљање одговарајућих математичких објеката, а и приликом испита студенти нису имали прилику да користе мобилне уређаје.

Пошто су студенти на предавањима из Математике 3 упознати са појмом и концептом двоструког интеграла, на часовима вежби су решавали двоструке интеграле и њиховом применом одређивали површину дела равни, односно запремину дела простора оивиченог графицима функција две промењиве и површи.

Практична настава из области двоструких и троструких интеграла (на часовима вежби) реализована је током девет наставних часова (четири и по термина) и са контролном и са експерименталном групом.

Први задатак који је одрађен на часу, којим је наставник илустровао поступак рачунања двоструког интеграла, како би студенти усвојили одговарајуће поступке, односно процедурално знање, односио се на одређивање површине дела равни, тачније троугла одређеног са три тачке које представљају темена тог троугла (1. задатак, прилог 8). Студенти су покренули апликацију *Graphing Calculator* и уз усмену помоћ од стране наставника, у правоуглом координатном почетку (површини за цртање) представили темена троугла. Потом их је наставник упутио да наредбом „права кроз две тачке" конструишу праве којима припадају странице датог троугла, и поново на основу дуалности дате апликације наставник је упутио ученике да прочитају и запишу једначине (алгебарске репрезентације) датих правих. Наравно наставник је уједно и обновио са студентима поступак одређивања једначине праве кроз две тачке, на основу којих се одређују једначине правих AB, BC и CA. Потом је наставник покренуо дискусију са ученицима о томе како би описали скуп тачака које припадају унутрашњости датог троугла ABC и том приликом је отклањао заблуде студената око граница променљивих x и y. Когнитивни конфликти који се јављају код студената исказани су тако што они интуитивно наводе најмање и највеће вредности које две променљиве могу узети, без обзира што тако дефинисан скуп тачака одговара правоугаонику описаном око датог троугла.

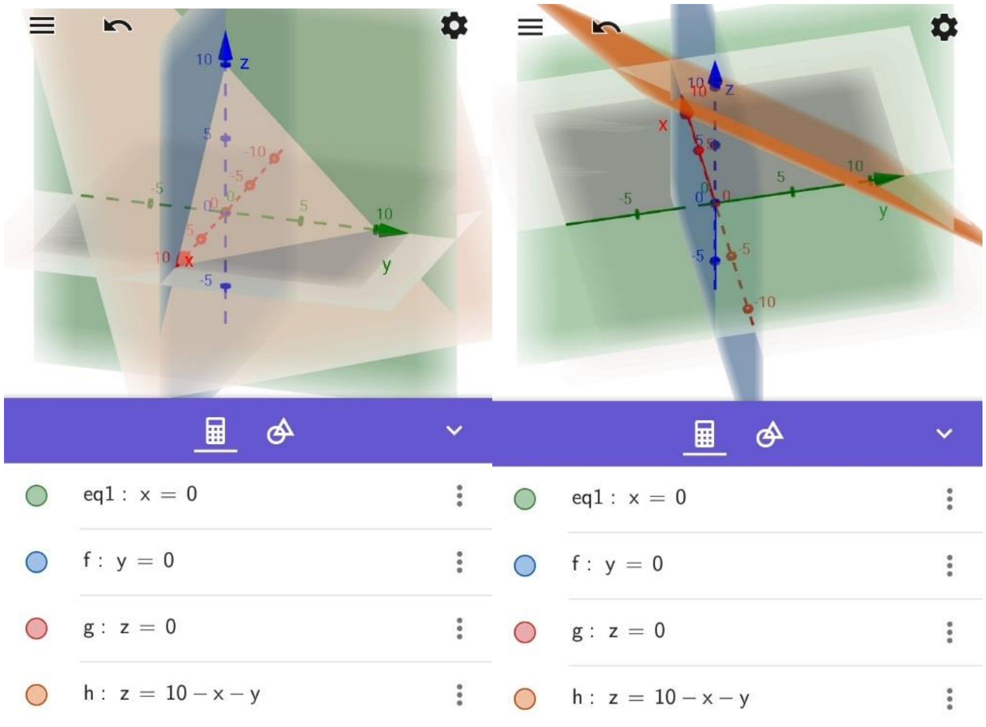


Слика 49. Графици који одговарају 1. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

Током вођења дискусије проведено је највише времена, након чега су студенти (неки од њих) исправно одредили границе за променљиву x која је имала константне границе, као и за промењливу y која је имала промењливе границе. Такође, на датом примеру, наставник је истакао да је некада неопходно област интеграције поделити на дисјунктне делове и илустровао особину двоструког интеграла да је укупна вредност интеграла једнака збиру интеграла по дисјунктним областима чија унија представља почетну област интеграције. Потом је упутио студенте да у поље за унос упишу неједнакости које се аутоматски геометријски интерпретирају у правоуглом координатном систему како би се студенти на тај начин уверили да су границе заиста коректно постављене. Затим је наставник упутио студенте да се исти задатак може решити тако што се за промењливу која има константне границе бира промењлива y, док се за промењливу која има промењливе границе бира промењлива x, уз истицање да је тада неопходно другачије дефинисати праве (изражавањем промењливе x преко промењливе y).

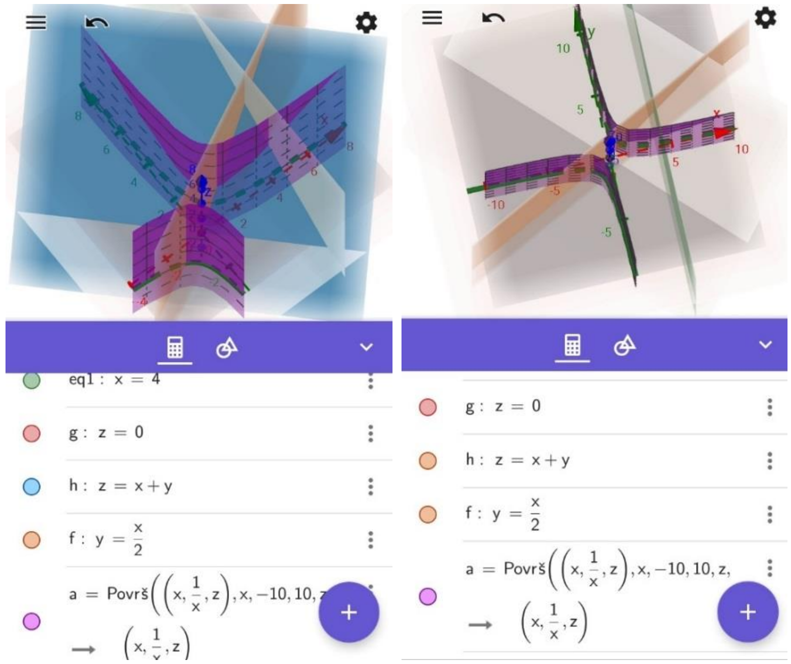
Након тога наставник је пред студенте поставио и други задатак, где је поново захтев био одређивање површине четвороугла (трапеза) одређеног са четири праве, односно графицима линеарних функција (2. задатак, 8. прилог). Овде је наставник пружио више времена студентима да анализирају задатак, да нацртају у *Graphing Calculator*-у одговарајуће графике линеарних функција, да уоче да је поново неопходно поделити четвороугао на два троугла, а потом израчунати површину четвороугла применом двоструког интеграла. Такође ученицима је речено да прецртају слику у својим свескама и да потом детаљно реше задатак, уз надзор и помоћ од стране наставника.

Трећи задатак се односио на примену двоструког интеграла за одређивање запремине тела одређеног равнима, конкретно тростране пирамиде. Како се примена двоструког интеграла „преселила“ из равни у простор, наставник упућује ученике да покрену апликацију *3D Calculator*. Потом студенти, уносом одговарајућих једначина равни, придружују задатку одговарајућу слику. Наставник их упознаје са могућностима које пружа дата апликација, а које омогућавају да се слика боље анализира и доживи, попут промене нивоа провидности одређене равни, у зависности од перспективе из које се слика посматра. Наставник подстиче студенте да технички дотерују одговарајуће слике, да ротирају дато тело, односно да мењају перспективу из које посматрају слику, да протумаче шта представља пројекција датог скупа тачака на рецимо xOy раван. Потом дискутује са студентима на који начин би се скуп тачака које припадају унутрашњости пирамиде аналитички представио, односно дискутује о границама промењливих. Пошто је студентима било потребно више времена да коректно одреде дате границе, наставник је подстакао студенте да коришћењем апликације *Graphing Calculator* представе праве које ограничавају пројекцију тела на xOy раван. Потом су студенти прецртали слику у својим свескама и, заједно са наставником, израчунали двоструки интеграл.



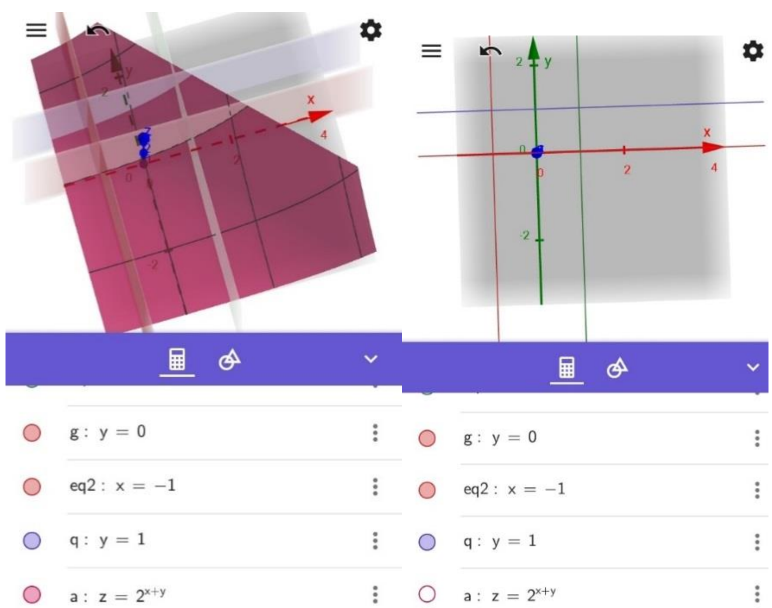
Слика 50. Графици који одговарају 3. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

Обрадом четвртог задатка (8. прилог) наставник је упознао студенте да се одређени геометријски објекти, као на пример цилиндар одређен једначином $y = \frac{1}{x}$, представљен експлицитно, на радној површини приказује као хипербола у xOy равни. Међутим када се дати цилиндар параметарски представи, у облику скупа уређених тројки, може се уочити скуп тачака у простору које припадају датом цилиндру (наравно у изабраном распону промењљивих). Рад студената је, као и генерално приликом решавања осталих задатака, текао тако што им је наставник пружио нешто времена да анализирају дате графике, потом да одреде подинтегралну функцију две промењљиве која одговара двоструком интегралу придруженом овом задатку, а затим да анализирају графичке репрезентације наведене површи и датих равни и да анализом графичког приказа пројекције на одговарајућу координатну раван, одреде границе промењљивих x и y, након чега преостаје да се израчуна дати интеграл, по већ усвојеној процедури.



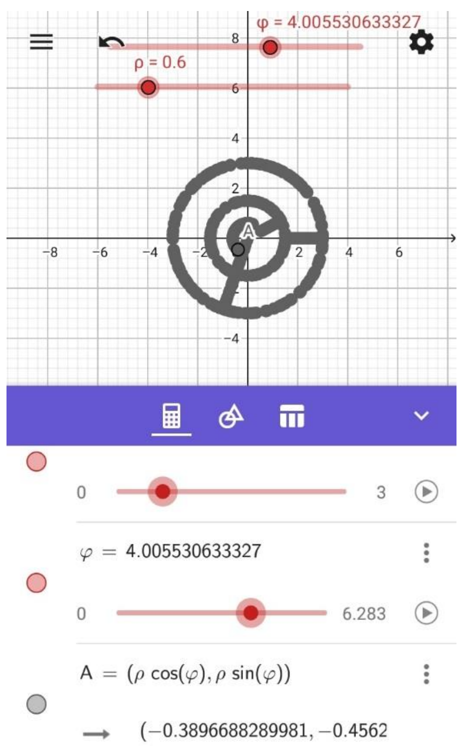
Слика 51. Графици који одговарају 4. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

Уследио је пети задатак који је имао сврху увежбавања датих правила и поступака. Студенти су сада већ нешто брже нацртали одговарајућу слику у *3D Calculator*-у и кренула је дискусија о подинтегралној функцији као и области по којој се врши интеграција. Овде је наставник искористио прилику да упути студенте да се, ради боље анализе и бољег разумевања задатка, график функције $z = 2^{x+y}$ може сакрити и да се тада, посматрањем слике из птичје перспективе лако може одредити пројекција тела на координатну раван $z = 0$.



Слика 52. Графици који одговарају 5. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

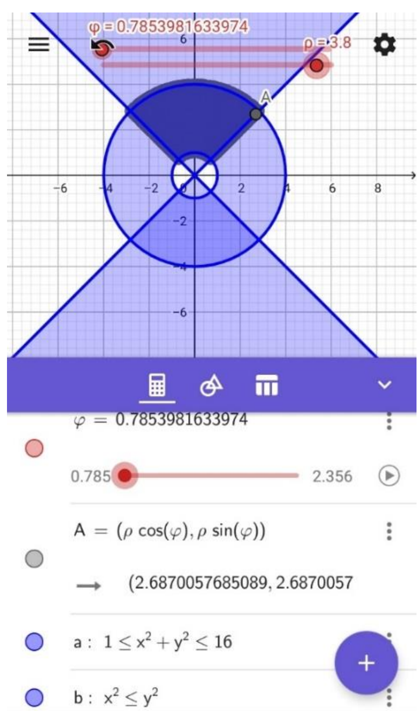
Следеће што су студенти требали да утврде јесте смена помоћу поларних координата. Као што је већ речено, како се појмови ρ (растојање тачке у равни од координатног почетка) и φ (угао који вектор положаја заклапа са позитивним делом x −осе) наслањају на наставне садржаје из области тригонометрије, из које студенти, по њиховим речима, имају доста пропуста у знању и разумевању датих садржаја, студентима је пружена могућност да се упознају са одговарајућим пресликавањем равни креирањем одговарајућих дигиталних садржаја, уз помоћ наставника. Наставник их је подсетио још једном да се тачке, односно скупови тачака могу представити параметарски. Зато их је, имајући у виду уобичајену нотацију, упутио да најпре креирају два клизача, променљиве ρ и φ такве да је $0 \leq \rho \leq 3$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и да потом дефинишу уређени пар тачака $(\rho \sin \varphi , \rho \cos \varphi)$. Потом је упутио студенте у још једну могућност коју пружа апликација *Graphing Calculator*, а то је укључивање трага који тачка оставља својим кретањем, конкретно променом вредности променљивих ρ и φ. Након што су студенти анализирали којој фигури одговара тако дефинисан скуп тачака, са већ поменутим распоном променљивих, кренула је дискусија на ту тему, па су студенти, који су наизменичном променом вредности растојања тачке од координатног почетка, односно вредности угла који вектор положаја тачке заклапа са позитивним делом апсцисе закључили да је на тај начин дефинисан круг са центром у координатном почетку полупречника 3. Иначе студенти су се упознали са поларним координатама на курсу Кинематика, који су слушали у истом семестру, али не превише детаљно.



Слика 53. График који одговара 6. задатку, креиран у *Graphing Calculator*-у

Затим је наставник истакао да је смена помоћу поларних координата пригодна када је област по којој се врши интеграција круг или део круга, као и када се у подинтегралној функцији јавља израз облика $x^2 + y^2$, односно када је пројекција тела чију запремину одређујемо, на xOy раван круг, кружни прстен или део круга. Наставник је искористио дати пример за илустрацију предности одређивања површине датог круга увођењем смене помоћу поларних координата.

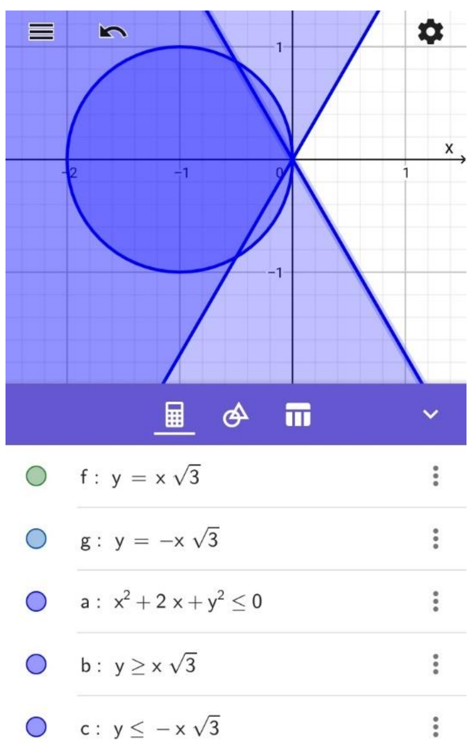
Уследио је задатак (7. задатак, 8. прилог) чији је захтев било одређивање површине дела равни која је одређена неједнакостима $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ и $x^2 - y^2 \leq 0$. Након што су уписали алгебарске репрезентације две неједнакости у поље за унос *Graphing Calculator*-а, студенти су могли да уоче и геометријску интерпретацију система две неједначине. Након анализирања датог графичког приказа, покренута је дискусија о границама промењљивих након увођења смене помоћу поларних координата. Студенти су одмах приметили да је било потребно дату област представити као унију две области и потом искористити правило за одређивање двоструког интеграла у том случају. Како би студенти у што већој мери овладали исправном „читању“ података са слике, наставник им је задао да најпре за део равни изнад x −осе, на основу њиховог мишљења о томе шта би требало изабрати за доње, односно горње границе промењљивих ρ и φ (по узору на претходни пример), уз употребу клизача, дефинишу скуп уређених парова $(\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$, да укључе траг који остаје приликом кретања тачке у равни и да испитају да ли су били у праву. Такође, наставник је пружио студентима прилику и да исправе своје грешке (границе промењљивих), уколико су погрешили, док не одреде границе прецизно.



Слика 54. График који одговара 7. задатку, креиран у *Graphing Calculator*-у

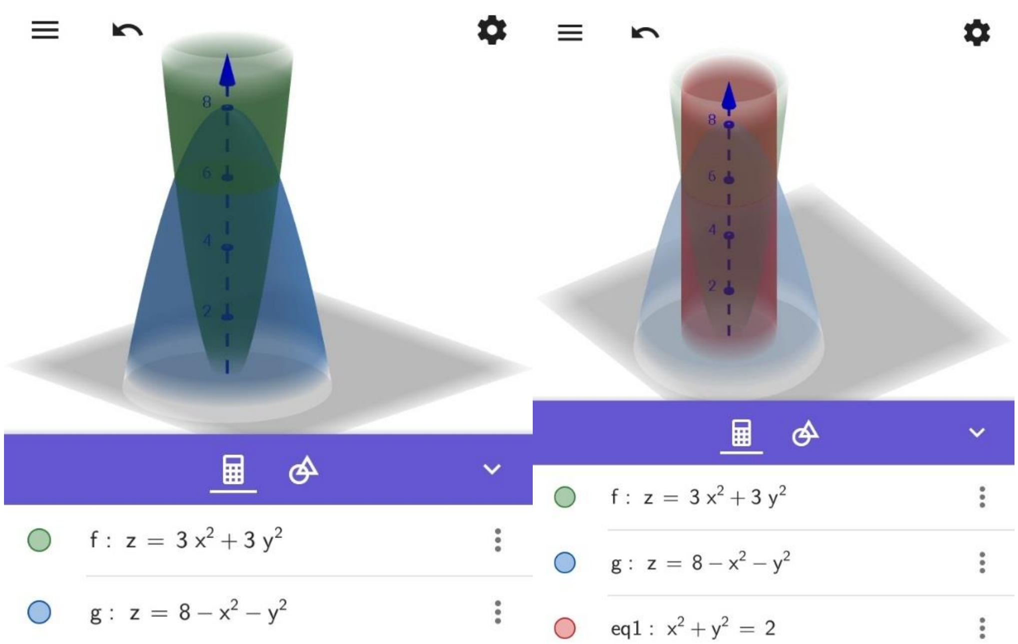
Након неког времена, више од половине студената је самостално исправно поставило границе, након чега су врло брзо дефинисали и део равни који се налази испод апсцисе. Одговарајућу слику су прецртали у својим свескама и потом, заједно са наставником, израчунали двоструки интеграл који представља решења датог задатка.

Студентима је постављен и нешто сложенији задатак (8. задатак, прилог 8), где је поново захтев био одређивање површине дела равни одређене двема правама и кругом таквим да му центар не припада координатном почетку. Како је у датом задатку након увођења поларних координата, граница за променљиву ρ зависна од вредности угла φ, (косинуса угла φ), по цртању одговарајуће слике, студенти су грешили приликом одређивања граница дате променљиве. Наставник је студентима нагласио да на основу коефицијената праваца двеју правих, уједно и тангенса два угла одређујемо вредности које узима променљива φ, док границе променљиве ρ нису константне, те је за одређивање горње границе променљиве ρ, неопходно решити одговарајућу неједнакост која се односи на унутрашњост круга. Након тога је наставник са студентима покренуо питање редоследа интеграције, тачније да ли је битан редослед интеграције, на основу начина на који је тражена област дефинисана. Највећи број студената је, након размишљања и накнадног прелиставања свеске ради обнављања поступка израчунавања двоструког интеграла, закључио да је редослед интеграције у овом случају јединствено одређен.



Слика 55. График који одговара 8. задатку, креиран у *Graphing Calculator*-у

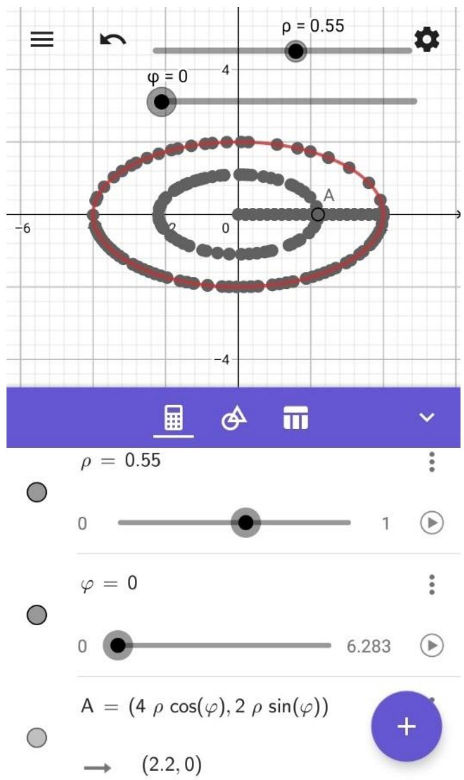
Пред студенте постављен је наредни задатак (9. задатак, прилог 8) који је поново илустровао примену двоструког интеграла за одређивање запремине тела, али овога пута одређеног са два параболоида, уз увођење смене помоћу поларних координата. Након самосталног креирања дигиталног садржаја, студенти су се упознали са графичким репрезентацијама двеју површи које се секу. Такође, како је у датом задатку јако битна пројекција тела добијеног у пресеку две површи на xOy раван, наставник је, након дискусије о једначини пресека двеју површи, упутио студенте и да нацртају цилиндар који дато тело пројектује на раван пројекције. На тај начин студенти су имали прилику да повезују вишеструке репрезентације површи, тачније да повезују одређене геометријске објекте представљене алгебарском репрезентацијом са датим објектима представљеним графичком репрезентацијом и да уочавају њихове међусобне односе у простору. Приметно је било, уосталом као и у претходним истраживањима, да је време које су студенти провели у анализирању овог дигиталног садржаја било нешто дуже у односу на време проведено у анализирању геометријских објеката представљених у равни. Потом су студенти, уз помоћ наставника одредили подинтегралну функцију двоструког интеграла, као и границе промењљивих након увођења смене помоћу поларних координата.



Слика 56. Графици који одговарају 9. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

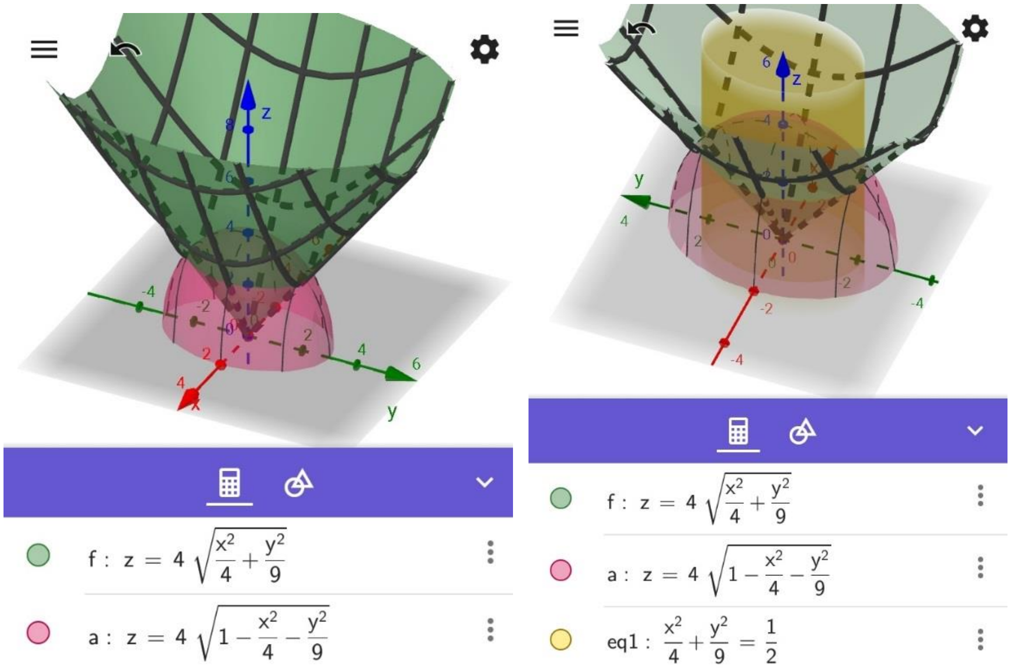
Наставник је потом обновио са студентима како гласи једначина елипсе и потом подсетио студенте да је у ситуацијама у којима је област по којој се врши интеграција одређена елипсом или њеним делом или када подинтегрална функција садржи једначину облика $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ пожељно увести смену помоћу уопштених поларних координата. Дату идеју наставник је илустровао примером $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, тако што је упутио ученике да у *Graphing*

Calculator-у нацртају дату елипсу, а потом да креирају геометријски скуп тачака облика $(4\,\rho\cos\varphi\,, 2\rho\sin\varphi)$, за $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (слика 58). Као и код илустрације поларних координата на часовима вежби, наставник је студенте упутио да укључе опцију остављања трага приликом кретања тачке и да се увере да се различитим избором променљивих ρ и φ из наведених интервала покрива унутрашњост дате елипсе.



Слика 57. Дигитални садржај за илустрацију смене помоћу уопштених поларних координата, креиран у *Graphing Calculator*-у

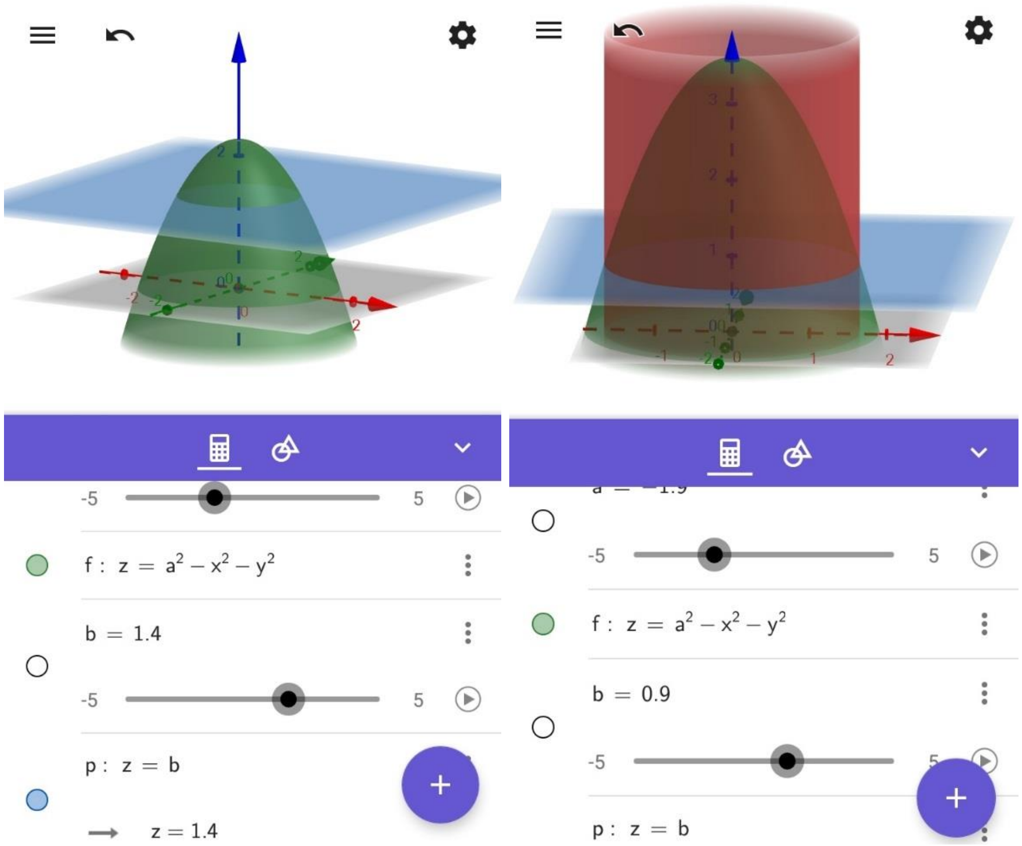
Увођење смене помоћу уопштених поларних координата наставник је илустровао на конкретном примеру (10. задатак, прилог 8) где је захтев представљало одређивање запремине тела ограниченог конусом и елипсоидом. Студентима је речено да креирају одговарајући наставни садржај у *3D Calculator*-у, па да потом дефинишу дату област дефинисањем скупа тачака које се налази унутар дате области. Уз то, наставник је упутио студенте и да дефинишу цилиндар који тело пројектује на xOy раван, како би се одредила и пројекција датог тела (слика 58). Наставник је потом поставио студентима захтев да одреде како би гласила смена помоћу уопштених поларних координата која би одговарала датом задатку. Студенти су том приликом дискутовали између себе и готово једногласно установили да дата смена гласи $x = 2\,\rho\cos\varphi\,, y = 3\rho\sin\varphi$. Потом су ученици самосталним радом, уз дозирану помоћ наставника завршили задатак рачунањем одговарајућег интеграла.



Слика 58. Графици који одговарају 10. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

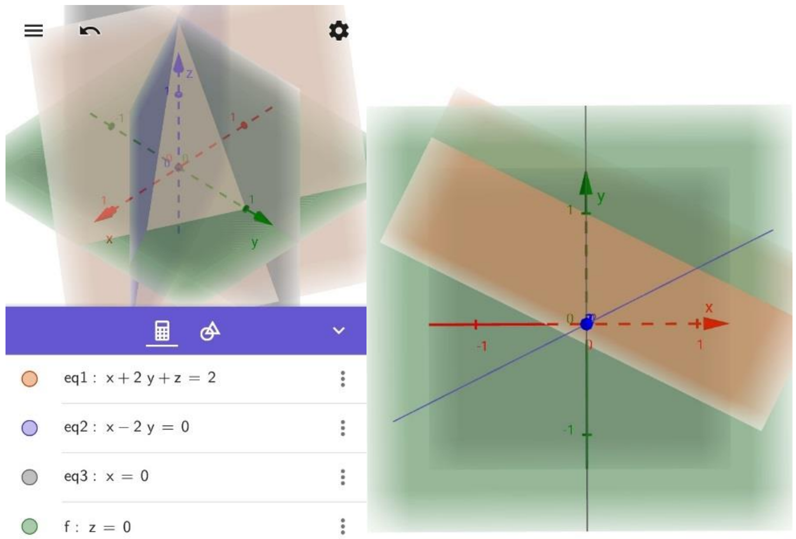
Како студенти раније нису имали превише прилика да проучавају геометријске особине функција више променљивих, односно површи, студентима је дат задатак у коме је подинтегрална функција и математички појмови којима је одређена област по којој се врши интеграција били дефинисани у зависности од параметара. Наиме, када је реч о функцијама више променљивих, студенти су се упознали са поступцима одређивања екстремних вредности функција више променљивих, али кроз аналитички приступ, без цртања графика функција више променљивих чије је екстремне вредности требало одредити у конкретним задацима.

Студенти су, по упознавању са захтевом задатка (11. задатак, 8. прилог) добили упутство да у *3D Calculator*-у креирају раван и параболоид у зависности од наведених параметара. Променом вредности параметара, студенти су имали прилику да се упознају, на који начин се мењају геометријске особине датих математичких појмова, односно на који начин се мења графичка репрезентација датих површи, услед алгебарске промене вредности параметара. На тај начин, студенти су, са циљем прецизног одређивања области по којој се врши интеграција и граница променљивих које се јављају у подинтегралној функцији, могли да овладају датим површима, равнима и њиховим пресецима. На основу одговарајућих графичких репрезентација површи и њиховог пресека студенти су, аналитичким приступом закључили да задатак има смисла за $a^2 > b$, односно да се површи секу под тим условом, док у супротном задатак нема смисла. Студентима је одмах било јасно да је потребно увести смену помоћу поларних координата.



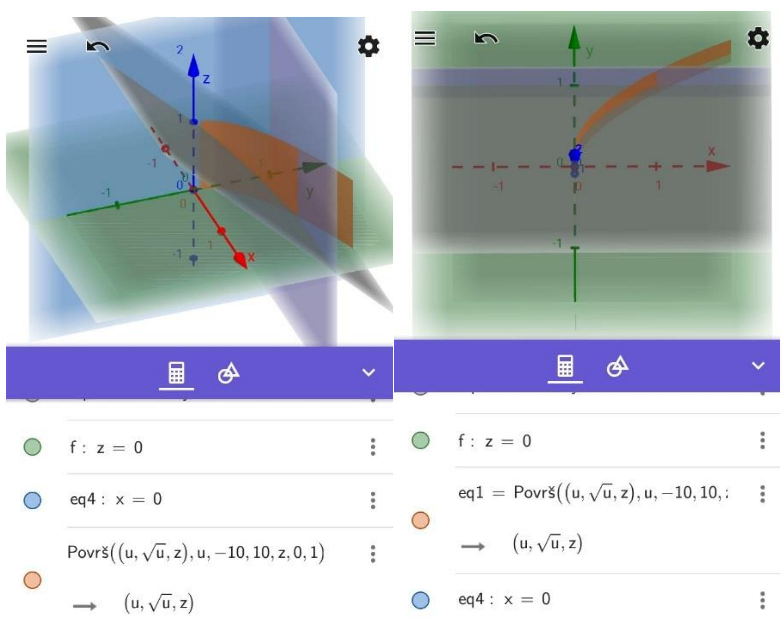
Слика 59. Графици који одговарају 11. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

Након подсећања студената на појам, односно дефиницију троструког интеграла, успостављањем аналогије са двоструким и одређеним интегралом, наставник је подсетио студенте на примену троструког интеграла за одређивање запремине тела у простору. Најпре је пред студенте постављен задатак чији је захтев било одређивање запремине области коју одређују равни $x + 2y + z = 2, x = 2y,\ x = 0,\ z = 0$ (12. задатак, прилог 8). Студенти су сада већ сами закључили да ће пропратни дигитални материјал креирати у *3D Calculator*-у, након чега су дигитални садржај, прецизније међусобни положај равни помно анализирали. Притом су равни и њихове пресеке посматрали из различите перспективе како би одредили границе. Вођени искуством, најпре су одређивали границе за променљиву z, потом дефинисали пројекцију тела на пројекцијску (xOy – раван) раван и одредили границе за променљиве x и y, уз навођење редоследа интеграције услед међусобне зависности три променљиве. Неки од студената су предлагали да пројекцију одреде анализирањем графичког приказа креираног у *Graphing Calculator*-у, док су неки студенти рекли да то није неопходно имајући у виду да се из птичје перспективе може уочити пројекција тела на xOy – раван, односно да се на тај начин могу одредити границе променљивих x и y. Потом су, као и иначе, прецртали слику у свескама и приступили израчунавању интеграла.



Слика 60. Графици који одговарају 12. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

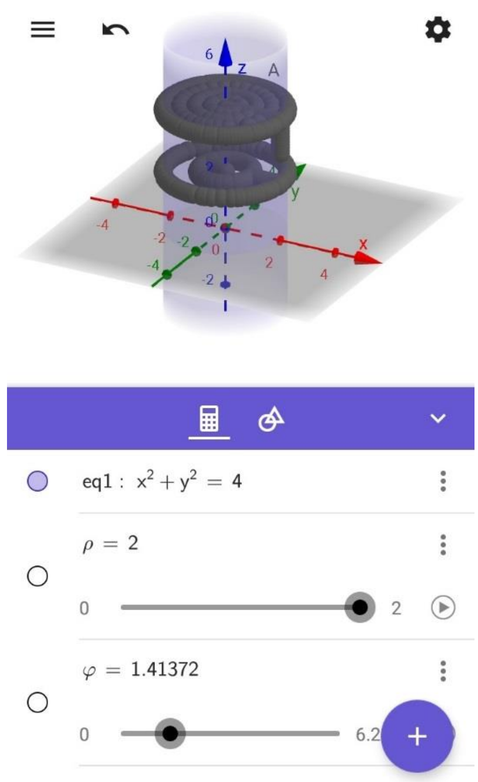
Ради утврђивања примене троструког интеграла за одређивање запремине, пред студенте је постављен задатак са захтевом који је представљао одређивање запремине тела ограниченог цилиндром $y = \sqrt{x}$ и равнима $z = 1 - y,\ y = 1,\ z = 0, x = 0$.



Слика 61. Графици који одговарају 13. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

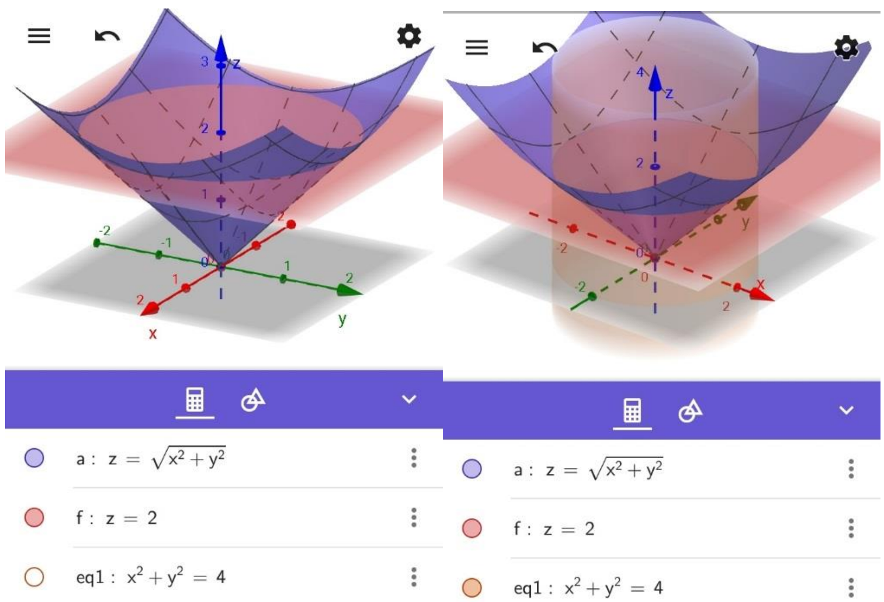
Наставник је препустио студентима да задатак решавају самостално, темпом који им одговара, помагао им најпре приликом израде дигиталног садржаја где је највише студентима требало помоћи у креирању цилиндра $y = \sqrt{x}$. Том приликом, наставник им је указао да тај скуп тачака дефинишу параметарски, као скуп уређених тројки и том приликом им указао да могу мењати границе променљиве z како би боље уочили тело које се налази у пресеку површи. Затим су студенти укључени у дискусију о одређивању граница променљивих, након чега су приступили израчунавању троструког интеграла.

Наставник је потом, и даље служећи се аналогијом, обновио са студентима како гласи једначина цилиндра чија је директриса кружница (евентуално елипса) и потом подсетио студенте да је у ситуацијама у којима је област по којој се врши интеграција одређена цилиндром или њеним делом (деловима) или када подинтегрална функција троструког интеграла садржи једначину облика $x^2 + y^2$, пожељно увести смену помоћу цилиндричних координата. Смену помоћу цилиндричних координата наставник је илустровао примером $x^2 + y^2 = 4$, тако што је упутио студенте да у *3D Calculator*-у нацртају дати цилиндар, а потом да креирају геометријски скуп тачака облика $(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, t)$, за $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ док је границе за променљиву t изабрао $-5 \le t \le 5$ (слика 63).



Слика 62. Дигитални садржај за илустрацију смене помоћу цилиндричних координата, креиран у *3D Calculator*-у

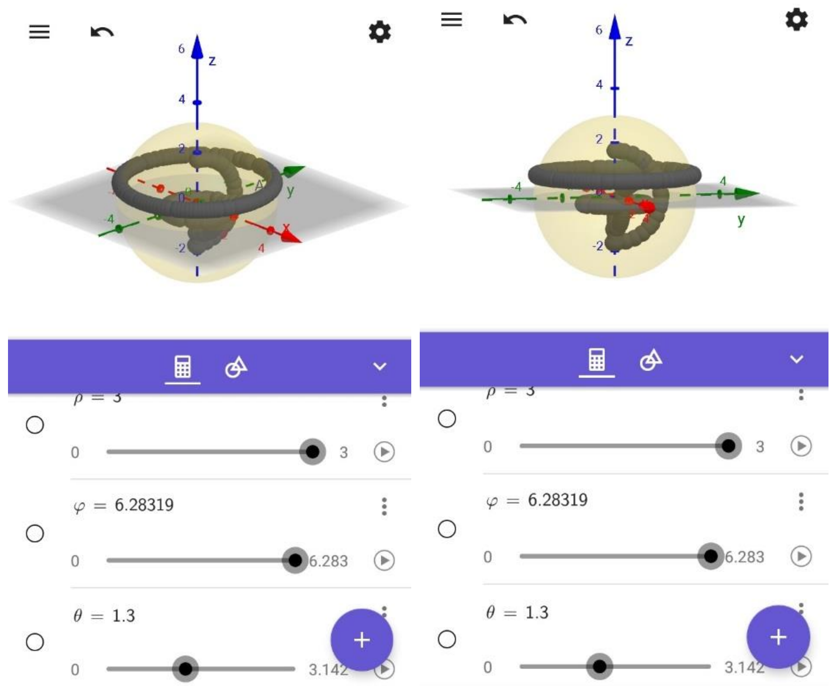
Наставник је посебно нагласио да су дате границе изабране само ради илустрације, иначе што се тиче граница за променљиву z, уопштено важи $-\infty < z < \infty$. Студенти су упућени да укључе опцију остављања трага приликом кретања тачке и да се увере да се различитим избором променљивих ρ, φ, t из наведених интервала покрива читава унутрашност цилиндра. Том приликом су мењане вредности једне по једне променљиве како би ученици разумели како промена једног параметра утиче на положај тачке у простору, односно како се координатни систем $O'\rho\varphi z$ слика у Декартов $Oxyz$ координатни систем, да би ученици што боље разумели смену помоћу цилиндричних координата. За конкретизацију ове смене, пред студенте је постављен задатак (14. задатак, прилог 8) у коме је захтев био израчунавање интеграла који је у изразу подинтегралне функције имао израз $x^2 + y^2$ и где је област по којој се врши интеграција одређена конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и равни $z = 2$. Студенти су задатак решили користећи дигиталне садржаје које су сами креирали у *3D Calculator*-у. Наставник их је подсетио да аналитички одреде пресек две површи, односно једначину цилиндра који садржи дати пресек, како би једноставније одредили границе, при чему је пар студената изјавило да су то већ урадили што говори о одређеном нивоу разумевања захтева, као и суштине дела задатка који се односи на одређивање граница променљивих по којима се врши интеграција, што уједно представља и један од циљева и исхода наставе и учења.



Слика 63. Графици који одговарају 14. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

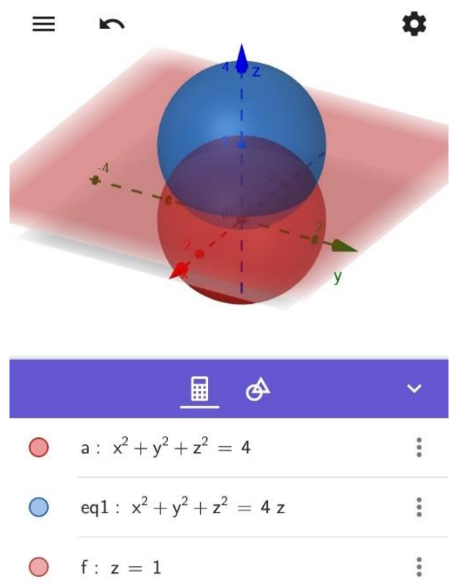
Још једна смена променљивих која се по плану програма Математике 3 обрађује јесте смена помоћу сферних координата. Наставник је систематично, у складу са дотадашњим излагањем: обновио са студентима облик једначине сфере; подсетио студенте да је у ситуацијама у којима је област по којој се врши интеграција одређена сфером или њеним делом (деловима), као и када подинтегрална функција троструког интеграла садржи израз облика $x^2 + y^2 + z^2$ пожељно увести смену помоћу сферних координата. За илустрацију смене помоћу сферних координата наставник је изабрао пример $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Упутио је студенте да у *3D Calculator*-у нацртају дату сферу и да креирају геометријски скуп тачака облика $(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$, за $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ (слика

64). Како би студенти што боље разумели смену помоћу сферних координата, вредности промењљивих су мењане, уз остављање трага тачке приликом њеног кретања у простору, тако да се изабере једна тројка вредности, а затим се мења вредност једне промењљиве док друге две промењљиве остају непромењене, са намером да ученици најпре визуализују дате промене и разумеју како промена једне промењљиве утиче на положај тачке у простору, односно како се координатни систем $O'\rho\varphi\theta$ слика у Декартов $Oxyz$ координатни систем.



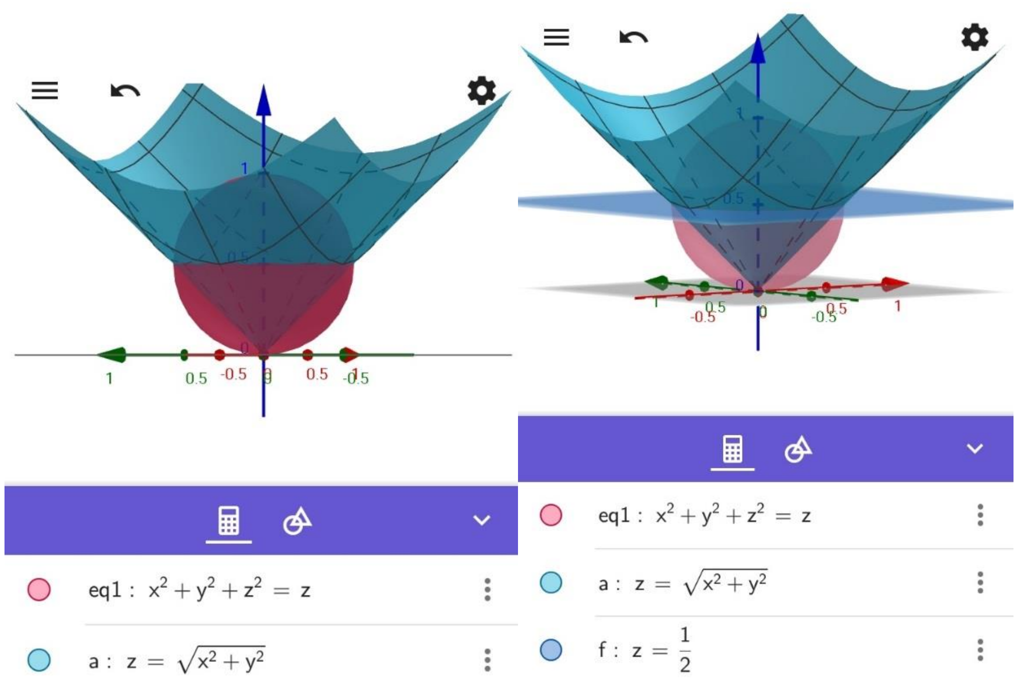
Слика 64. Дигитални садржај за илустрацију смене помоћу сферних координата, креиран у *3D Calculator*-у

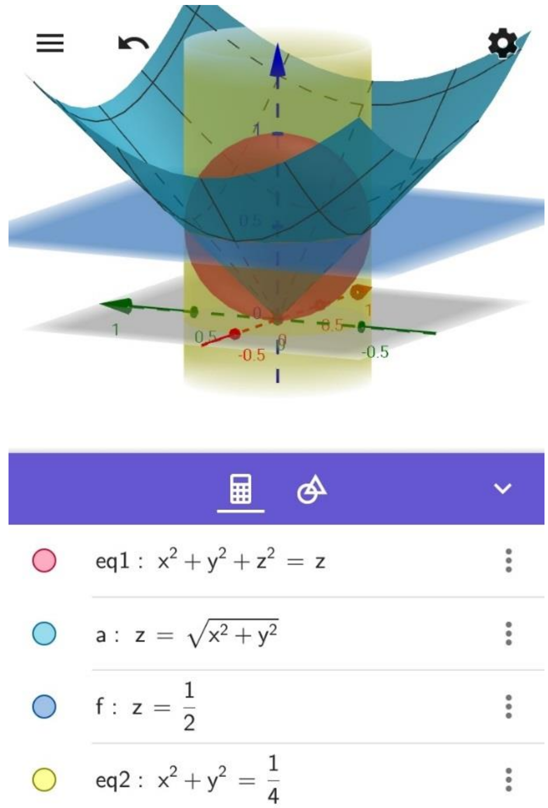
Након утврђивања смене помоћу сферних координата са студентима, значај увођења дате смене илустрован је обрадом два примера. Први од њих се односио на одређивање запремине тела ограниченог површима $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ (15. задатак, 8. прилог). У овом задатку студенти су најпре креирали у мобилној апликацији *3D Calculator* графике двеју површи како би се упознали са пресеком датих површи и како би визуелно одредили горњу, односно доњу границу промењљиве z. До овог тренутка студенти су овладали аналитичким одређивањем пресека (решавања једначина), а тиме и пројекције тела на пројекцијску раван и одређивања граница (решавање одговарајућих неједначина у конкретном задатку), након чега је преостало да слику прецртају у својим свескама и да познавањем поступка израчунавања интеграла спроведу рачунски поступак.



Слика 65. График који одговара 15. задатку, креиран у *3D Calculator*-у

За крај су студенти самостално решавали и 16. задатак (8. прилог) са циљем да утврде примену смене промењљивих помоћу сферних координата. Процес решавања задатка је текао уобичајено, студенти су показали да су у потпуности овладали мобилном апликацијом *3D Calculator* у смислу визуализације наставних садржаја који су неопходни ради утврђивања области по којој се врши интеграција и избора коректних граница промењљивих по којим се врши интеграција.





Слика 66. Графици који одговарају 16. задатку, креирани у *3D Calculator*-у

Генерално, студенти су били врло задовољни увођењем мобилних апликација за визуализацију наставних садржаја са циљем унапређивања наставног процеса, ефективности и ефикасности наставе и учења. Студенти експерименталне групе су у односу на студенте из контролне групе били више укључени у наставни процес, више су били отворени за исказивање својих идеја и претпоставки, приликом решавања конкретних задатака из области вишеструких интеграла, као и за дискусију приликом изношења различитих идеја од стране њихових колега. Мали број студената је искористио прилику да сачува дигиталне динамичке садржаје и користи их приликом учења, док је већи број студената након сваког решеног задатка сликао екран свог мобилног уређаја ради чувања материјала у облику слике. Наставник им је, имајући у виду формат у облику кога су студенти желели да чувају материјале које су самостално (уз усмену помоћ наставника) креирали, саветовао да исти материјал више пута сликају тако да се дате графичке репрезентације математичких објеката виде из више углова, односно из различитих перспектива, и да истовремено (уколико има више функција и површи) на сликама буду забележене све алгебарске репрезентације датих функција једне промењиве и кривих, односно функција више промењивих и површи.

5.4. Тестирање студената

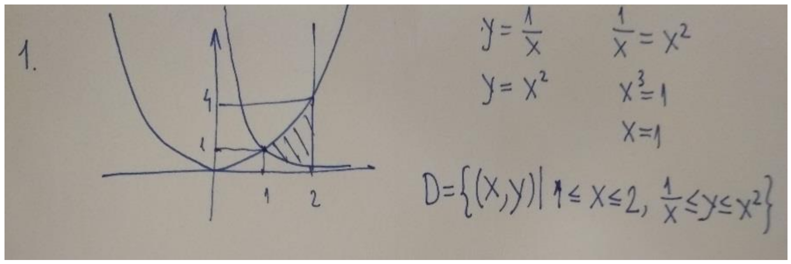
Петнаест дана по завршетку обраде наставних садржаја који се односе на вишеструки интеграл, обе групе студената (експериментална и контролна) су решавали задатке из теста (прилог 9) са циљем провере остварености исхода учења. Студенти су имали 150 минута на располагању за израду задатака из датог теста. Приликом израде задатака ни студенти контролне ни студенти експерименталне групе нису имали могућност коришћења мобилних уређаја ни рачунара. Тест је био идентичан за студенте обе групе и спроведен је у циљу истраживања, како би се испитао утицај визуализације наставних садржаја из области вишеструких интеграла и студенти су били упознати са тиме да неће имати ни погодности ни последице, на основу резултата који остваре на датом тесту. Задаци су осмишљени и конципирани тако да омогуће проверу усвојености наставних садржаја, односно градива које се односи на решавање двоструких и троструких интеграла, са акцентом на одређивање одговарајућих области по којој се врши интеграција, одређивању граница променљивих, као и разумевању промена начина дефинисања одговарајућих области у равни или простору, након увођења адекватне смене променљивих. Анализа резултата теста по задацима представљена је у Поглављу 5.4.1, док је статистичка анализа резултата теста дата у Поглављу 5.4.2.

5.4.1. Анализа резултата теста по задацима

У овом поглављу представљен је кратак опис захтева сваког од задатака који су студенти решавали израдом теста (прилог 9), са акцентом на утицај примене мобилних апликација *Graphing Calculator* и *3D Calculator* за визуализацију одговарајућих делова равни, односно простора. Анализиран је утицај коришћења и повезивања алгебарске и геометријске репрезентације одговарајућих правих, кривих, равни и површи, разумевање њихових односа и пресека од стране студената.

Захтеви у првих пет задатака се нису директно односили на израчунавање вишеструких интеграла, већ су служили за добијање повратне информације о нивоу степена знања студената о прецизном дефинисању области у равни, односно у простору, као и о поновном дефинисању одговарајућих области након увођења дате смене променљивих и пресликавања одговарајућег координатног система у правоугли координатни систем.

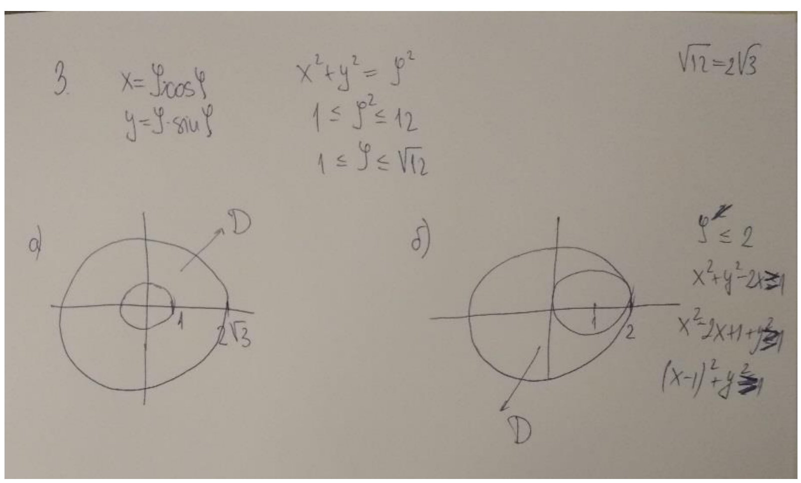
Захтев у првом задатку је представљао дефинисање скупа тачака у равни одређених, у конкретном случају, једном правом и са две криве у равни. Студентима је остављено простора да сами изаберу променљиву која ће имати константне границе, односно променљиву која ће имати променљиве границе, мада је у готово свим случајевима променљива x представљена са константим, а y као променљива са променљивим границама. То се може објаснити и искуством студената, али можда и самом облашћу јер би у супротном, област морала бити представљена у облику уније два дисјунктна скупа тачака. На слици 67 је приказано решење првог задатка од стране студента из експериименталне групе шифрованог са Е2. Студент је успешно нацртао слику, повезао одговарајуће алгебарске и графичке репрезентације, и успешно дефинисао тражену област.



Слика 67. Слика решења 1. задатка са теста

Други задатак се надовезивао на први задатак и подразумевао је промену у начину дефинисања одговарајућег скупа тачака у равни у односу на то која од две променљиве има константне, а која променљиве границе. Такође, неопходно је било поделити област на две дисјунктне области, што можда може објаснити нешто лошије резултате студената приликом израде овог задатка.

Трећи задатак се односио на увођење смене помоћу поларних координата и трансформације координатног система која настаје увођењем дате смене. На слици 68 је приказано решење трећег задатка од стране студента из експерименталне групе шифрованог са Е33.

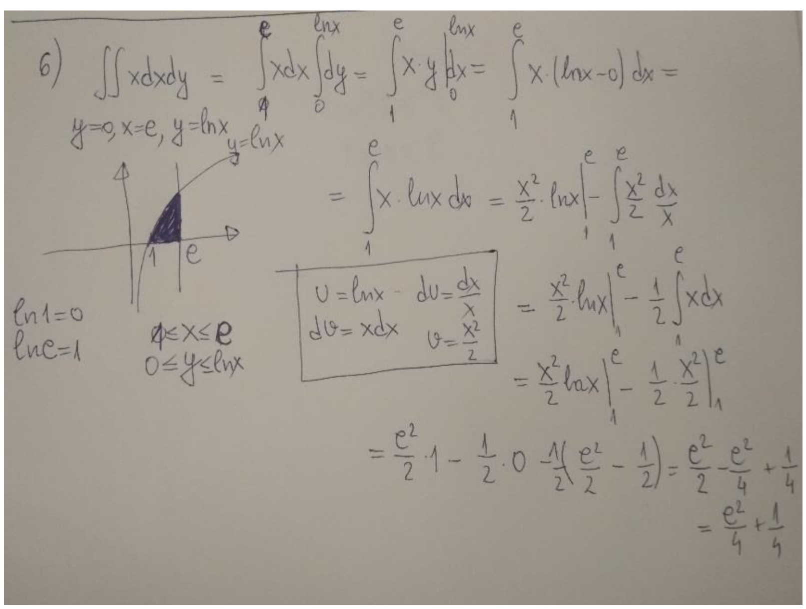


Слика 68. Слика решења 3. задатка са теста

Студент је успешно нацртао слику и одредио скуп тачака. Потом је, преласком на поларне координате једноставно одредио границе променљивих у 3. задатку под а) док је уз нешто више труда решио и задатак под б). Приметно је да су студенти са већим успехом одредили границе промењљивих када су границе за обе промењљиве константе, што је случај у првом делу задатка када је област одређена кружним прстеном, за разлику од задатка 3. под б) где доња граница промењљиве ρ зависи од косинуса угла φ.

Слично трећем задатку, захтев у четвртом задатку био је одређивање: а) тачке у простору; б) скупа тачака у простору, одређених пресеком равни, конуса и цилиндра, након увођења смене цилиндричних координата и пресликавања координатног система $O'\rho\varphi z$ у $Oxyz$, Декартов координатни систем. У петом задатку се од студената очекивало да, након увођења смене помоћу сферних координата, одреде скуп тачака у простору одређених пресеком две полусфере, по пресликавању координатног система $O'\rho\varphi\theta$ у Декартов координатни систем, $Oxyz$. Битно је нагласити да се сваки од првих пет задатака врло тешко може решити без геометријске интерпретације датих скупова тачака, па је коректно решавање задатака подразумевало повезивање геометријских и алгебарских репрезентација функција једне и две промењљиве, правих и кривих у равни, односно равни и површи у простору.

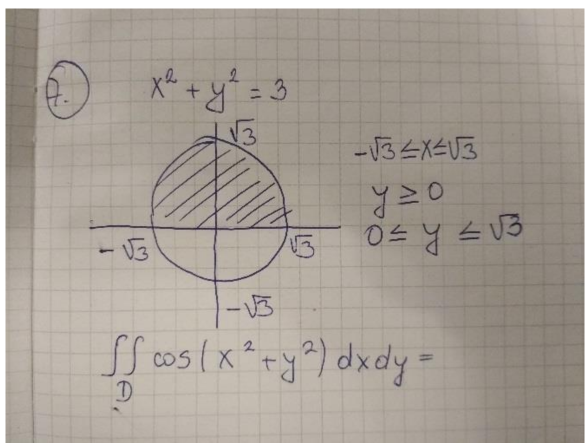
Други део теста су чинили задаци (од 6. до 10. задатка) у којима се од студената тражило да израчунају вишеструке интеграле, или да њиховом применом реше одређени проблем. Захтев у шестом задатку био је израчунавање двоструког интеграла где је област по којој се вршила интеграција била одређена двема правама и графиком логаритамске функције, па су студенти најпре (по узору на први задатак) морали прецизно да дефинишу дату област, а након тога, у зависности од начина дефинисања, да одговарајућим редоследом (у смислу промењљивих) спроведу поступак интеграције.



Слика 69. Слика решења 6. задатка са теста

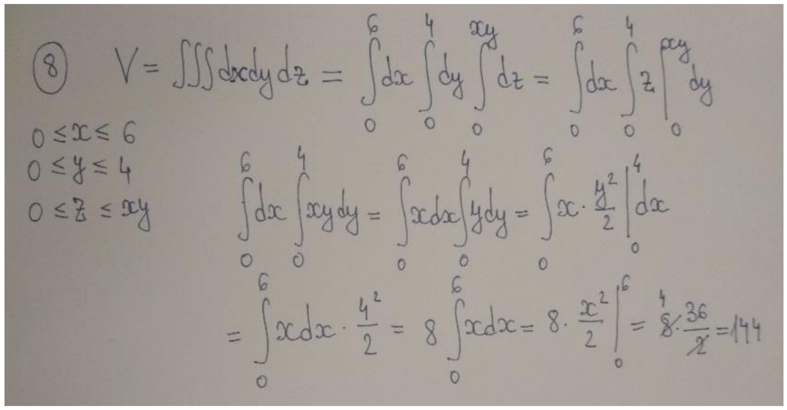
Студент из експерименталне групе евидентиран под шифром Е17 је коректно решио дати задатак (слика 69). Дати студент је пре свега коректно придружио слику датом задатку, односно придружио одговарајуће графичке репрезентације функцији и правама, затим је коректно поставио границе и одредио вредност интеграла.

У седмом задатку студенти су такође рачунали двоструки интеграл, али је најпре требало да анализом области по којој се врши интеграција, као и подинтегралне функције, увиде да је потребно да уведу смену промењљивих помоћу поларних координата. Потом је требало да одреде границе за промењљиву која представља растојање тачке од координатног почетка, односно за промењљиву која представља угао који вектор положаја тачке гради са позитивним делом x-осе. На слици 70 приказан је покушај студента контролне групе шифрованог са К4 да реши 7. задатак. Није познато да ли студент није усвојио смену промењљивих помоћу поларних координата или није препознао потребу да уведе дату смену (иако се то могло закључити и по области по којој се врши интеграција, као и по подинтегралној функцији), па се ипак може претпоставити да студент није овладао датом сменом. Студент је вероватно проценио да није у стању да спроведе поступак интеграције, те је одустао од даље израде датог задатка.



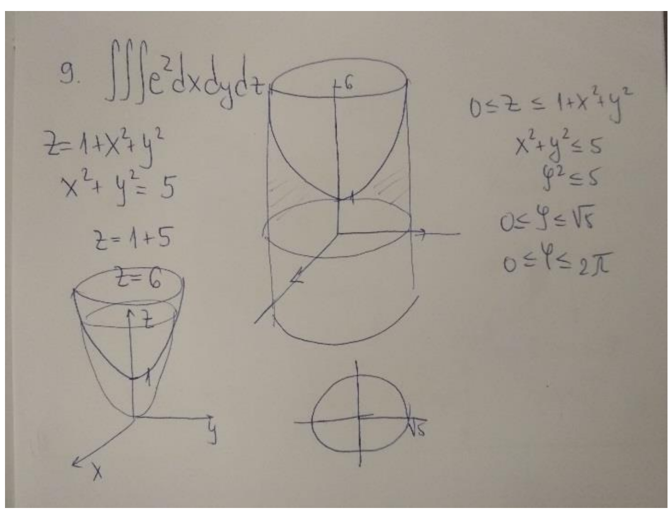
Слика 70. Слика израде 7. задатка са теста од стране једног студента из контролне групе

Познавање примене двоструког интеграла за одређивање запремине тела у простору, конкретно тела одређеног графиком функције две промењљиве и неколико равни, вредновано је анализом осмог задатка на тесту. Студенти су требали, на основу познавања положаја датих равни са којима су могли да се упознају на часовима вежби, да закључе да је тело са свих страна сем са „горње“ ограничено равнима, док је са „горње“ стране ограничено графиком функције две промењљиве $z = xy$. На слици 71 приказан је поступак којим је студент евидентиран са Е19 решио задатак.



Слика 71. Слика решења 8. задатка са теста

Захтев у деветом задатку био је израчунавање троструког интеграла, при чему је област у простору по којој се врши интеграција представљала део простора „испод“ параболоида и унутар цилиндра, те је решавање задатка захтевало увођење смене помоћу цилиндричних координата, а самим тиме и разумевање пресликавања одговарајућих координатних система како би се прецизно одредиле границе променљивих приликом интеграције. Студент из експерименталне групе евидентиран под шифром Е4 је коректно решио дати задатак (слика 72). На слици се може видети да студент разуме промене графичке репрезентације параболоида услед промене алгебарске репрезентације параболоида (у раду студента скицирана је најпре површ $z = x^2 + y^2$, а затим и површ $z = 1 + x^2 + y^2$). Дати студент је потом коректно поставио границе променљивих након увођења смене помоћу цилиндричних координата. Приликом рачунања самог интеграла направио је рачунску грешку, али је његов рад издвојен због илустрације утицаја примене мобилне апликације *3D Calculator* на разумевање међусобних пресека површи у простору.



Слика 72. Слика решења 9. задатка са теста

Коначно, десети, последњи задатак на тесту се такође односио на одређивање троструког интеграла, где је било потребно да студенти, на основу подинтегралне функције и области у простору по којој се интеграција врши (унутрашњост сфере), увиде да се задатак може решити увођењем смене помоћу сферних координата.

5.4.2. Статистичка анализа резултата теста

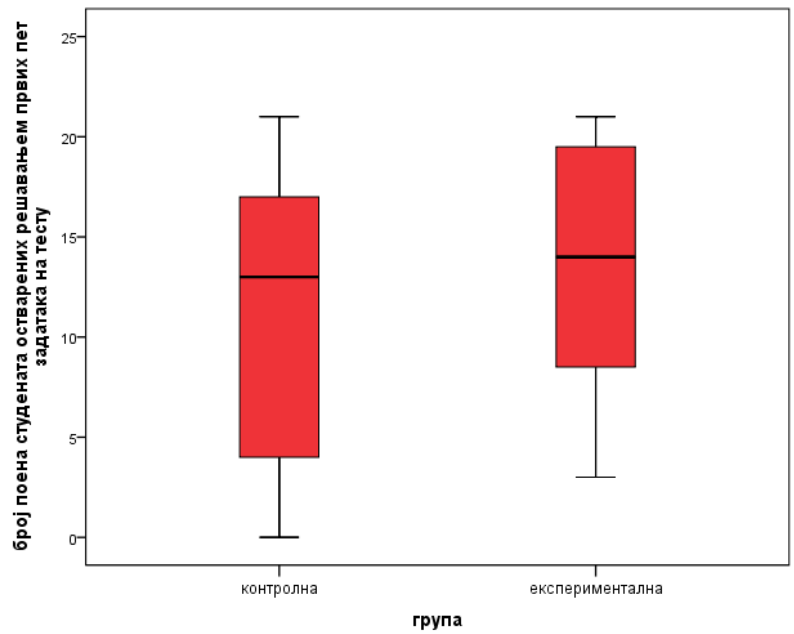
Маскималан број поена који су студенти могли освојити на тесту који је имао за циљ вредновање знања и умења студената је био 50. На првом, другом и петом задатку, студенти су могли освојити по највише три поена, на трећем, четвртом, шестом, седмом, осмом и деветом задатку могли су да освоје највише по шест поена (трећи под а) и под б) су вредновани са по три поена, као и четврти под а) и под б)), док је последњи задатак вреднован са пет поена. Негативних поена није било. Просечан број поена по задатку студената експерименталне, односно контролне групе дат је у табели 12.

Табела 12. Просечан број поена студената експерименталне и контролне групе по задатку

Група\Задатак	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Контролна група	1.59	1.65	3.46	2.73	1.59	3.62	2.68	2.65	2.38	2.81
Експериментална група	2.00	1.71	4.00	4.03	2.09	3.69	4.23	3.46	3.54	3.69

Како се подела задатака могла јасно направити на задатке који су се односили на израчунавање вишеструких интеграла (уз претходно одређивање области по којој се врши интеграција и граница промењљивих) и на задатке којима је вредновано одређивање скупа тачака у равни и простору, односно трансформације промењљивих, тј. на задатке који представљају део задатка из области вишеструких интеграла, тако се логички наметнула анализа успеха студената две групе приликом решавања првих пет задатака и других пет задатака на тесту.

На основу Колмогоров - Смирнов теста, промењљива која представља укупан број поена освојених приликом решавања првих пет задатака, у обе групе студената, статистички значајно одступа од нормалне дистрибуције ($p = 0.03$ у контролној групи, $p = 0.03$ у експерименталној групи) на нивоу значајности 0.05, па су у складу са тим упоређене расподеле датог броја поена, применом одговарајућег, непараметарског теста (Ман - Витнијев тест). Расподела броја поена остварених решавањем првих пет задатака на тесту студената експерименталне и контролне групе приказана је графиконом на слици 73.



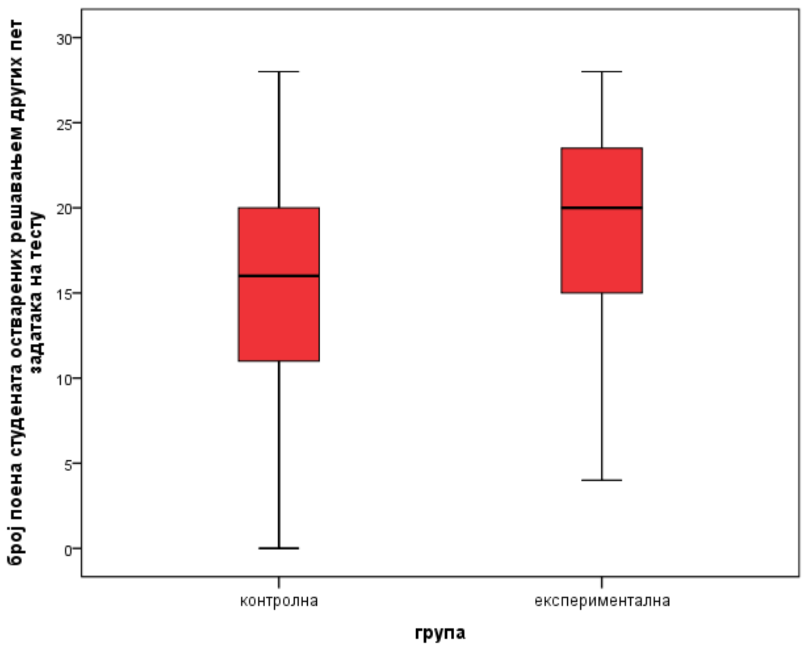
Слика 73. Расподела броја поена студената контролне и експерименталне групе остварених решавањем првих пет задатака на тесту

На основу вредности датих у табели 13, закључујемо да разлика у знању студената контролне и експерименталне групе које су студенти показали израдом првих пет задатака на тесту, није статистички значајна са нивоом значајности 0.05, али јесте са нивоом значајности $0{,}1$ $(p = 0.069)$.

Табела 13. Статистички резултати укупног броја поена студената остварених решавањем првих пет задатака на тесту

Група	Број студената	Аритме-тичка средина	Медијана	Средња вредност ранга	Сума рангова	Резултати Ман-Витнијевог теста	
						Z	*p* (2-tailed)
Експериментална	35	13.83	14	41.10	1438.5	-1.82	0.069
Контролна	37	11.19	13	32.15	1189.5		

Потом су испитиване и потенцијалне разлике у успеху студената у решавању вишеструких интеграла. Као што је већ речено, у неким задацима је било потребно увести смену помоћу поларних, цилиндричних и сферних координата. Резултати студената експерименталне и контролне групе су дати у табели 14, а расподела укупног броја поена остварених решавањем других пет задатака на тесту студената експерименталне и контролне групи приказана је графиконом на слици 74.



Слика 74. Расподела броја поена студената контролне и експерименталне групе остварених решавањем других пет задатака на тесту

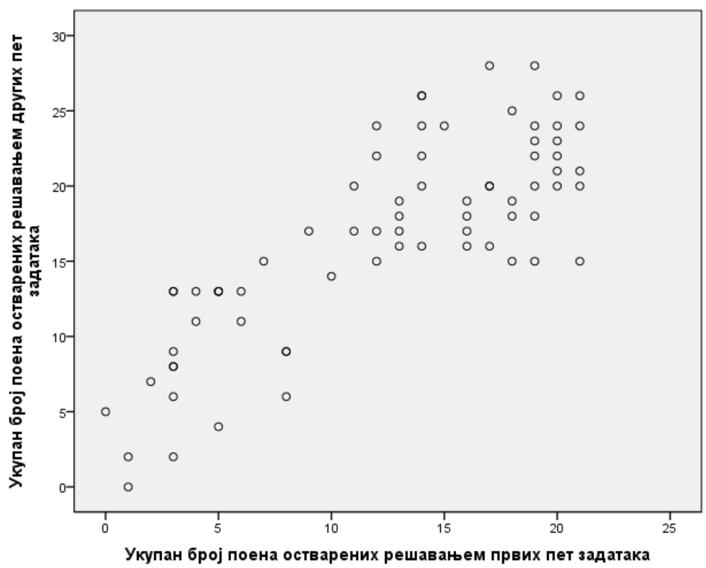
За разлику од првих пет задатака, променљива која представља укупан број поена који су студенти остварили приликом решавања задатака чији су захтеви били одређивање вишеструких интеграла имала је нормалну расподелу и у контролној ($p = 0.645$) и у експерименталној групи ($p = 0.112$). Стога смо потенцијалне разлике у успеху студената испитали применом Студентовог-t теста. На основу вредности добијених спровођењем одговарајуће анализе, закључујемо да је разлика у успеху студената контролне и експерименталне групе, у решавању двоструких и троструких интеграла статистички значајна ($p = 0.016$) на нивоу значајности 0.05, у корист студената експерименталне групе, уз умерен утицај ($\eta^2 = 0.08$) по Cohen – у.

Табела 14. Статистички резултати укупног броја поена студената остварених решавањем других пет задатака на тесту

Група	Број студената	Аритметичка средина	Медијана	Стандардно одступање	Студентов - t тест			
					df	t	p (2-tailed)	η^2
Експериментална	35	18.60	20	6.02	70	-2.48	0.016	0.08
Контролна	37	14.84	16	6.91				

На основу добијених резултата може се претпоставити да, у највећем броју случајева, студенти који су успешно, графички, а потом и аналитички одредили област интеграције, одредили границе променљивих, увели смене променљивих (уколико је то било потребно) и одредили границе нових променљивих, нису у значајној мери имали потешкоћа у спровођењу рачунског дела задатка. Дакле, студенти који нису овладали одређивањем области интеграције и постављањем граница променљивих, практично нису имали никакве шансе у даљем решавању задатака (од шестог до десетог), што још једном указује на значај првог дела решавања задатка, дела на који смо вршили утицај применом мобилних апликација *Graphing Calculator* и *3D Calculator.*

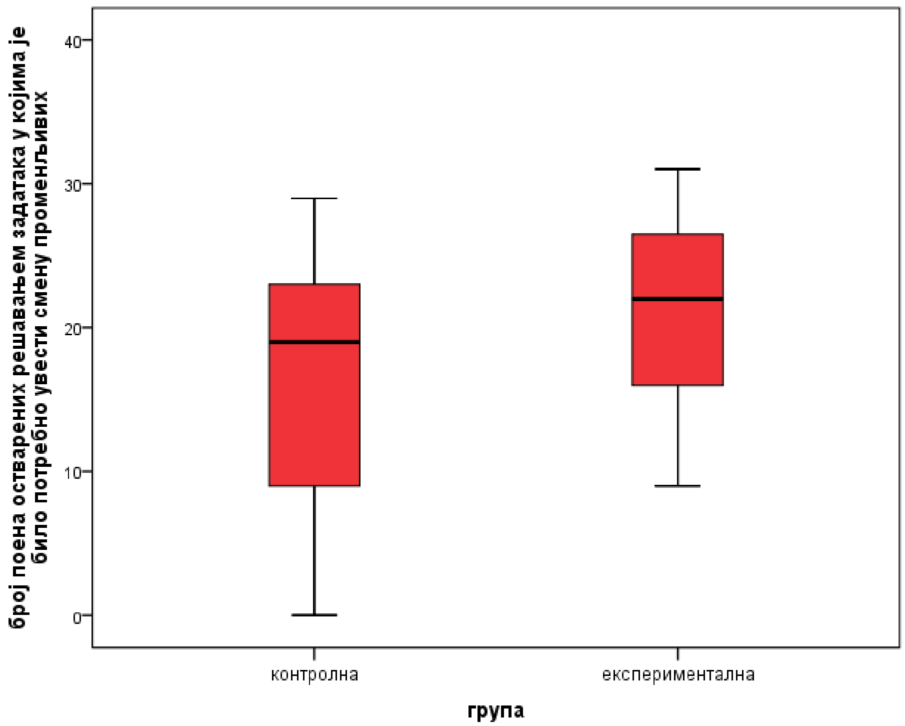
Како би се боље илустровала веза између резултата који су студенти остварили израдом првих пет задатака и других пет задатака испитана је линеарна корелација два обележја. Пирсонов коефицијент корелације обележја која представљају збир поена остварених на првих пет задатака и збир поена остварених на других пет задатака једнак је 0.81 што се сматра јаком и позитивном, статистички значајном корелацијом ($p < 0.0005$). Дакле студенти који су остварили боље резултате приликом решавања првих пет задатака показали су више знања и умења приликом решавања других пет задатака.



Слика 75. Веза између броја поена остварених решавањем првих пет задатака и броја поена остварених решавањем других пет задатака на тесту

Иако су статистички потврђене разлике у успеху студената у решавању задатака који су се тицали решавања вишеструких интеграла, посебно нас је интересовао утицај примене апликација *Graphing Calculator* и *3D Calculator* приликом увођења смене променљивих и пресликавања одговарајућег координатног система у правоугли координатни систем. Стога смо анализирали разлике у успеху студената у изради задатака у којима је било потребно увести смене променљивих помоћу поларних координата, цилиндричних координата и сферних координата (3, 4, 5, 7, 9. и 10. задатак), без обзира да ли су те смене биле неопходне за решавање вишеструких интеграла или смо желели да утврдимо степен усвојености ових знања и умења студената.

Расподела укупног броја поена остварених решавањем задатака у којима је било потребно увести смену променљивих на тесту, студената експерименталне и контролне групе приказана је графиконом на слици 76. Како су се аритметичке средине броја поена које су студенти остварили решавањем наведених задатака прилично разликовале (табела 15) испитали смо да ли су те разлике и статистички значајне.



Слика 76. Расподела броја поена студената контролне и експерименталне групе остварених решавањем задатака у којима је било потребно увести смену промељивих

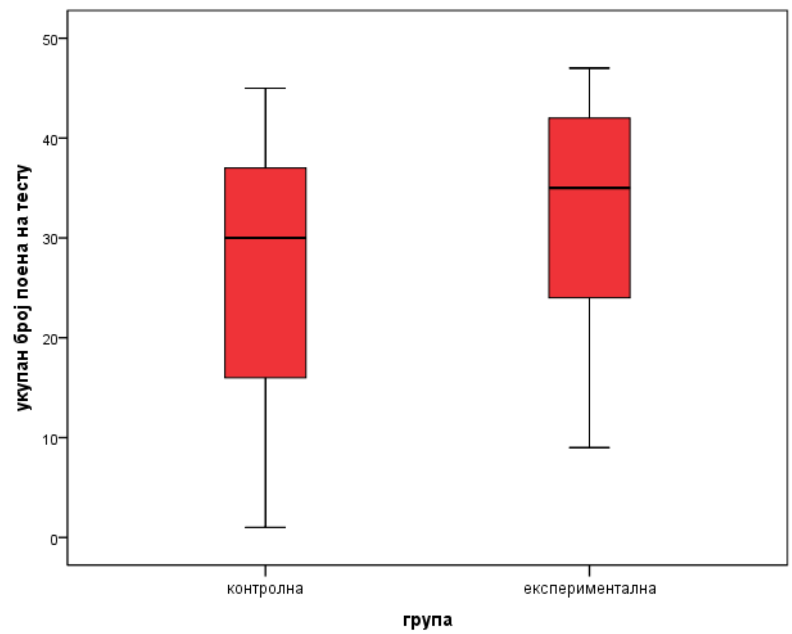
На основу Колмогоров - Смирнов теста, промељива која представља укупан број поена освојених приликом решавања задатака у којима је било потребно увести смене промељивих и тиме уочити одговарајућа пресликавања координатног система у равни, односно у простору, у обе групе студената, статистички значајно одступа од нормалне дистрибуције ($p = 0.012$ у контролној групи, $p = 0.038$ у експерименталној групи). Из тог разлога, упоредили смо расподеле броја поена остварених решавањем задатака из наведене групе, применом Ман – Витнијевог теста.

Табела 15. Статистички резултати укупног броја поена студената остварених на тесту решавањем задатака у којима је било потребно увести смену промељивих

Група	Број студената	Аритме-тичка средина	Медијана	Средња вредност ранга	Сума рангова	Резултати Ман- Витнијевог теста		
						Z	p (2-tailed)	r
Експериментална	35	21.57	22	43.47	1521.5	−2.75	0.006	0.32
Контролна	37	16.24	19	29.91	1106.5			

На основу добијених вредности (табела 15), изводимо закључак да је разлика у знању и разумевању студената контролне и експерименталне групе о препознавању ситуација када је потребно увести смене променљивих, правилног избора смене, тумачењу значења одговарајућих променљивих и манипулацији датим променљивим, које су студенти показали израдом датих задатака на тесту, статистички значајна ($p = 0.006$) на нивоу значајности 0.05, у корист експерименталне групе, уз средњу величину утицаја ($r = 0.32$) по Cohen – у.

На крају смо анализирали и разлике у укупним постигнућима студената који су вишеструке интеграле слушали на традиционалан начин, односно студената који су у процесу упознавања и увежбавања поступака решавања вишеструких интеграла, нарочито у одређивању области интеграције и граница променљивих користили мобилне апликације у циљу визуализације наставних садржаја. Расподела броја поена у експерименталној и контролној групи на тесту приказана је графиконом на слици 77.



Слика 77. Расподела укупног броја поена студената контролне и експерименталне групе остварених на тесту

На основу Колмогоров - Смирнов теста установили смо да променљива која представља укупан број поена освојених приликом решавања задатака са теста, статистички значајно одступа од нормалне дистрибуције у контролној групи, $p = 0.017$ ($p = 0.167$ у експерименталној групи). Како је нарушен предуслов за примену Студентовог теста упоредили смо расподеле укупног броја поена у контролној и експерименталној групи применом одговарајућег, непараметарског Ман - Витнијевог теста.

Табела 16. Статистички резултати укупног броја поена студената остварених решавањем задатака на тесту

Група	Број студената	Аритметичка средина	Медијана	Средња вредност ранга	Сума рангова	Резултати Ман- Витнијевог теста		
						Z	p (2-tailed)	r
Експериментална	35	32.49	34	42.20	1477	-2.25	0.025	0.26
Контролна	37	26.03	30	31.11	1151			

На основу вредности датих у табели 16, закључујемо да је разлика у знању студената контролне и експерименталне групе, које су студенти показали израдом задатака на тесту, статистички значајна ($p = 0.025$) на нивоу значајности 0.05, уз средњу величину утицаја ($r = 0.26$) по Cohen – у, у корист експерименталне групе.

6. Закључна разматрања

У претходних неколико деценија, у многим образовним системима, широм Европе и света, спровођене су реформе које су се односиле на промене у наставним програмима и развијању међупредметних компетенција ученика. У Републици Србији је на пример извршена јасна класификација међупредметних компетенција. Једна од тих међупредметних компетенција је дигитална компетенција и она подразумева оспособљавање ученика и студената да у образовне сврхе користе образовни софтвер, односно да ученик/студент буде оспособљен да користи информационо – комуникационе технологије (уређаје, софтверске производе, електронске комуникационе услуге) на критички и одговоран начин ради испуњавања постављених циљева и задатака у свакодневном животу, школовању и будућем послу. Наравно, дигиталне технологије не би требало да се примењују по сваку цену, већ их треба смислено и планирано користити, тако да њихова примена доприноси квалитету наставе. Под тим се може подразумевати интеграција дигиталних наставних садржаја са теоријама активног учења, попут конструктивизма. Када говоримо о настави математике, многи наставни садржаји, чак и читаве наставне области погодују примени одговарајућих софтвера како за спровођење различитих израчунавања, тако и за визуализацију наставних садржаја. Поред геометрије, која се природно намеће као математичка област погодна за имплементацију дигиталне технологије у наставни процес за визуализацију, математичка анализа се може сматрати интересантном за имплементацију ИКТ-а. Чувени David Tall је у једном од својих радова (Tall, 2008) изјавио да „од свих грана математике, математичка анализа има највише простора за примену технологије“. Велики број истраживања говоре у прилог реализацији наставе приликом обраде наставних садржаја из области реалних функција, граничне вредности функције, нарочито извода функције једне променљиве и одређеног интеграла. С друге стране, врло мали, у односу на функције једне променљиве слободно се може рећи - занемарљиво мали број научних истраживања говори о утицају примене дигиталне технологије за визуализацију наставних садржаја функција више променљивих. Таква је и ситуација са истраживањима која се односе на осмишљавање нових методских приступа са циљем да се тако студентима олакша усвајање потребних знања и умења из области вишеструких интеграла. Имајући у виду да се вишеструки интеграли директно наслањају на наставне садржаје из одређеног интеграла (да се чак врло лако може уочити аналогија у начину на који се дефинишу одређени интеграл и двоструки интеграл, као и о њиховој примени за израчунавање површине дела равни, односно запремине дела простора), на познавање функција једне и функција више променљивих, као и наставних садржаја из аналитичке геометрије у равни и простору и да се за успешно решавање вишеструких интеграла подразумева визуализација појмова у равни и простору, вишеструки интеграли су се као наставни садржаји који се обрађују на универзитетском нивоу наметнули као градиво које има потенцијал да се, обрадом уз помоћ рачунара (и/или мобилних уређаја) успешно реализује. Ранија истраживања су показала да адекватно вежбање може побољшати визуелне способности студената, као и да развој визуелних способности и визуелног мишљења може позитивно утицати на решавање одређених интеграла, затим да су студенти који разумеју просторне односе успешнији приликом одређивања запремине тела у простору применом вишеструких интеграла.

Истраживања представљена у докторској дисертацији баве се применом динамичких софтвера за визуализацију функција једне променљиве, функција више променљивих, кривих и површи, чиме се пружа могућност за повезивање вишеструких репрезентација тих појмова од стране студената, све у циљу успешног одређивања области интеграције вишеструких интеграла и граница датих променљивих (а тиме и успешног решавања вишеструких интеграла и њихових примена) и испитивањем утицаја дате примене динамичких софтвера на квалитет знања студената и разумевање одређених сегмената наставних садржаја из области интеграције функција више променљивих.

Циљ истраживања описаног у трећем поглављу био је да се испита да ли и у којој мери примена динамичког софтвера омогућава боља постигнућа студената у визуелном, практичном и теоријском знању. Током рада на часовима вежби, студенти (експерименталне групе) који су користили рачунаре у свом раду, имали су могућност да самостално померају и ротирају слике на којима су представљени одговарајући геометријски објекти и њихови пресеци, за конкретан задатак, како би мењали перспективу из које посматрају дате објекте. Тим студентима је такође пружена прилика да раде и са материјалима који су садржали функције једне или више променљивих са параметрима и да уочавају како промена вредности одређеног параметра утиче на геометријска својства приказаних објеката и како то даље утиче на њихове пресеке, све са циљем да успешно одреде област по којој се врши интеграција и границе променљивих пре спровођења поступка израчунавања двоструког интеграла. Неопходно је да студенти одреде поменуту област и коректно поставе границе променљивих јер то представља неопходан део решавања задатка. Чак и када студент поседује све могуће вештине у рачунању интеграла (зна када и како да примени особине интеграла, зна смене променљивих и када коју треба увести, познаје поступак парцијалне интеграције...) без коректног одређивања дела равни или простора који представља област по којој се врши интеграција, задатак се не може решити. Анализом радова студената током њиховог тестирања, најпре је уочен утицај примене софтвера на покушај студената да се уопште упусте у решавање двоструког интеграла. Резултати (слика 23) указују на разлике у односу броја студената две групе, односно показују да су студенти из оне групе студената која је имала прилику да манипулише одговарајућим графицима функција једне променљиве и функција више променљивих били више заинтересовани за решавање двоструких интеграла, за разлику од студената који нису имали ту могућност. Ово потврђује резултате неких истраживања (Wiwatanapataphee et al., 2010), који указују на то да методски приступ који подразумева ефикасну примену рачунара за обраду наставних садржаја из вишеструких интеграла и калкулуса повећава интересовање студената ка математици. Резултати представљени сликом 24 указују и да се односи броја студената експерименталне и контролне групе који су коректно одредили део равни, односно део простора ограничен графицима функција једне или више промењљивих, затим кривих другог реда и површи и студената који то нису успели да ураде, статистички значајно разликују у корист студената експерименталне групе. Као што је више пута поменуто, примена рачунара се применом новог методског приступа огледала у визуализацији датих области по којој се интеграција врши, а не у чистом израчунавању двоструких интеграла. Део истраживачког питања, истраживања описаног у трећем поглављу који се односио на коректно одређивање граница промењљивих функција једне промењљиве или функција више промењљивих је такође директно повезан са интерпретацијом геометријских објеката представљених у равни или простору од стране студената јер осликава степен разумевања односа у равни и просторних односа између правих, кривих, равни и површи који су, у експерименталном раду, графички репрезентовани коришћењем рачунара. Резултати (слика 25) илуструју да су студенти који су самостално манипулисали сликама, ротирали објекте, посматрали дате објекте из различитих перспектива и манипулисали припремљеним наставним материјалима у којима су биле представљене функције више промењљивих и површи (између осталих и са параметрима) показали боље разумевање просторних односа и постигли боље резултате. На основу свих добијених статистичких показатеља, потврђује се да су постигнућа ученика у одређивању вишеструких интеграла, конкретно на одређивање области по којој се врши интеграција и границе промењљивих боља када се визуализација приликом израде задатака спроводи употребом рачунара, односно одговарајућег динамичког софтвера.

Наредно истраживање спроведено је већ следеће академске године и оно је описано у четвртом поглављу. Имајући у виду резултате претходног истраживања које је показало да су постигнућа студената из области двоструких интеграла применом новог методског приступа значајно боља када се визуализација наставних садржаја изводи применом рачунара, тачније софтвера *Wolfram Mathematica*, спроведено је ново истраживање. У наредном истраживању се отишло корак даље у смислу да рад студената није морао да буде везан само за рад у учионици током часова математике, већ да им је пружена могућност да у било ком тренутку, независно од времена и места на коме се налазе, уче и анализирају дигиталне материјале, којима им је био пружен неограничен приступ. Мора се признати да је на тај начин донекле жртвована и једна предност из експерименталног рада које је описано у претходном истраживању, а то је била величина уређаја који се користио (иако је одређен број студената у другом истраживању користио преносиве рачунаре, мора се признати да је највећи број студената користио мобилне телефоне у свом раду), а која би могла утицати на адекватно тумачење објеката представљених у дигиталним материјалима. Још једна промена у раду је направљена због рационалности и економичности у раду, а то је била промена у избору софтверског пакета који је коришћен за визуализацију наставних садржаја. Имајући у виду да се анализом стручне литературе показало да, када је у питању заступљеност софтвера у мобилном учењу наставних садржаја из вишеструких интеграла (математичке анализе и математике генерално), примат држи софтверски пакет *GeoGebra*, одлучено је да се сви дигитални садржаји креирају у том софтверском пакету. Током рада студенти експерименталне групе су свој рад, ван учионице, могли организовати темпом који одговара њиховим постигнућима, способностима и предзнању, својим потребама, где када и са ким су желели да уче. Том приликом су могли преко друштвених мрежа да комуницирају са својим колегама и путема mail-а са својим асистентом. Пошто су студентима прослеђени и материјали са поставкама и детаљним решењима задатака, заједно са дигиталним садржајима који су постављени на платформу *GeoGebraTube*, студенти су након часова вежби могли у складу са својим навикама да организују своје учење. Током часова вежби, а и касније када су студенти утврђивали дате наставне садржаје, могли су да користе дуалну природу софтвера *GeoGebra* и тако да повезују две репрезентације математичких појмова и концепата, графичку и алгебарску, са циљем да их на тај начин боље усвоје и разумеју. Студенти експерименталне групе су и овом приликом могли да анализирају геометријске особине правих и кривих, као и функција једне променљиве у равни, затим равни, површи и функција више променљивих у простору, да баратају са садржајима у којима су представљени неки од ових математичких појмова са параметрима, да ротирају, транслирају, мењају угао из ког посматрају те објекте и њихове пресеке. Утицај овог методског приступа на резултате студената анализиран је аналогно на начин на који је то учињено током првог истраживања. Анализом рада студената током регуларног другог колоквијума на коме је, између осталог, вредновано знање и умење студената које се односи на вишеструке интеграле, посматран је утицај на покушај студената да реше задатак, на успешно одређивање области интеграције као и на успешно постављање граница променљивих пре чистог израчунавања интеграла. Поново, као и у претходном истраживању, одговарајућом статистичком анализом установљене су статистички значајне разлике у: односу броја студената који су покушали, односно броја студената који нису покушали да реше вишеструки интеграл двеју група (слика 46); односу броја студената експерименталне и контролне групе који су коректно одредили област по којој се врши интеграција, анализирањем пресека геометријских објеката како би успешно (анализом дате области интеграције, пројекције тела на раван и додељивања адекватног система неједначина датом проблему) одредили границе променљивих (слика 47). Дакле резултати истраживања нам указују и да други методски приступ доводи до позитивних исхода учења наставних садржаја који се односе на вишеструке интеграле, интеграцијом примене дигиталних садржаја у наставни процес. Наравно, имајући у виду да је више фактора било промењено у другом истраживању (у првом истраживању су обрађивани само двоструки, а у другом и двоструки и троструки интеграли; коришћени су различити динамички софтвери; студенти који су учествовали у другом истраживању су имали сталан приступ дигиталним материјалима када би имали интернет конекцију), у односу на прво истраживање, не можемо да изводимо додатне закључке, сем онога што је заједничко, а то је да пажљиво испланирана визуализација геометријских објеката и њихових пресека, применом пригодних софтвера, позитивно утиче на њихово уочавање, разумевање, затим описивање скупова тачака који припадају траженим областима (интеграције) и постављању тачних граница променљивих приликом дефинисања тих области. Како се, увидом у спроведена истраживања о мобилном учењу нису могла пронаћи истраживања о мишљењу и ставовима студената о овом облику рада када је настава математике на универзитетском нивоу, на овим просторима у питању, извршено је анкетирање студената (табела 10), како би се добила повратна информација студената, односно како би се извршио увид у мишљења студената. На основу резултата анкете испоставило се да се студентима у највећој мери допало што су уз помоћ мобилног уређаја могли да посматрају графике на којима су представљене површи и њихови пресеци, тј. графичке репрезентације математичких појмова на чијој је визуализацији био акценат током рада са студентима, затим утисак студената да би уз помоћ мобилног уређаја (одговарајућих мобилних апликација) студенти лакше и брже усвојили и садржаје који се тичу интеграције функција једне променљиве (одређени интеграл), наставне садржаје из аналитичке геометрије, криволинијски и површински интеграл, што указује на то да студенти у великој мери увиђају повезаност одговарајућих наставних садржаја.

По завршетку другог истраживања кренуло се у разматрање како би се настава која се односи на вишеструке интеграле могла унапредити у духу конструктивистичке теорије учења, имајући у виду позитивне резултате многих истраживања и студија која говоре у прилог организовања наставе у складу са том теоријом. Како се конструктивизам сматра приступом подучавања и учења заснованог на идеји да је учење резултат „менталне конструкције“ код онога ко учи, затим да се са конструктивистичким приступом учења повезује добра репрезентација појмова и проблема, тј. да је неопходно да се „разуме проблем, да особа која решава проблем замисли (креира у својој свести) објекте и релације које одговарају објектима и релацијама у спољашњој репрезентацији проблема“, као и да „комбинација конструктивистичке теорије учења и примена технологије доводи до најбоље примене софтверских алата у циљу олакшавања реализације наставе“, дошло се на идеју да се осмисли и у настави реализује нови методски приступ који би се базирао на конструктивизму, на примени вишеструких репрезентација математичких појмова и имплементацији технологије у наставни процес. Пошто су теоретичари конструктивизма наставницима дали упутства којих би они требало да се придржавају током часа и да током дијалога са студентима користе терминологију „анализирај“, „предвиди“, „креирај“, идеја је била да све дигиталне садржаје који ће се користити за визуализацију наставних садржаја, креирају студенти, наравно уз помоћ и сугестије наставника. Дакле, студенти експерименталне групе истраживања, описаног у петом поглављу, су сваком задатку уз помоћ *Graphing Calculator*-а и *3D Calculator*-а самостално креирали одговарајуће графике и тим путем могли да анализирају те графичке приказе у мултирепрезентативном окружењу. За задатке у којима је требало одредити тело које настаје у пресеку тродимензионалних геометријских објеката, студенти су правили два графика, један у *3D Calculator*-у како би анализирали дате функције више променљивих, површи и равни, а потом и други у *Graphing Calculator*-у, након што би одредили пројекцију тела на пројекциону раван, са циљем да прецизно одреде границе двеју променљивих, x и y. Студенти су током експерименталног рада креирали и дигиталне садржаје, односно аплете са циљем да увиде значење и својства променљивих након увођења смене помоћу поларних координата (у *Graphing Calculator*-у), односно након увођења смене помоћу цилиндричних и сферних координата (у *3D Calculator*-у). Јасно, студенти су током рада на вежбама могли сачувати у одговарајућем формату материјале (били су упућени да тако раде) или их пак сликати како би могли да их накнадно анализирају.

Након експерименталног рада вредновано је знање студената и анализиране су потенцијалне разлике у постигнућима студената експерименталне групе који су активно учили и студентима контролне групе које су наставне садржаје усвајали на традиционалан начин. Тест се састојао из два дела. Први део теста су чинили задаци чија је сврха била испитивање степена усвојености знања, умења и вештина студената у описивању скупова тачака у равни и простору избором различитих променљивих за зависну, односно за независну променљиву, као и описивање скупова тачака након увођења одговарајуће смене променљивих и одређивања граница нових променљивих. Други део теста се састојао из пет задатака којим је вредновано знање и умења студената приликом решавања вишеструких интеграла – одређивање области интеграције, коректно одређивање граница променљивих, тј. прецизно описивање поменуте области и сам поступак израчунавања вишеструких интеграла. На основу дате поделе, најпре су посебно анализиране потенцијалне разлике у постигнућима студената приликом решавања првих пет, а потом и других пет задатака. Иако се могло претпоставити да је разлика у успеху студената приликом решавања првих пет задатака статистички значајна (аритметичка средина броја поена експерименталне групе била је 13.83 поена, док је аритметичка средина броја поена контролне групе била 11.19, а студент је максимално могао освојити 21 поен) како расподела броја поена није имала нормалну расподелу, Ман-Витнијев тест није потврдио ту хипотезу са нивоом значајности 0.05 (али јесте са нивоом значајности 0.1, табела 13). Ови резултати можда имају за последицу мањи број поена које се укупно могло освојити, као и величину узорка. Зато су тестиране разлике у успеху студената у решавању вишеструких интеграла који су наставне садржаје усвајали на традиционалан начин и студената са којима је био примењен експериментални методски приступ. Испоставило се да су разлике у постигнућима студената биле статистички значајне у корист студената експерименталне групе (табела 14). Статистички значајне разлике у успеху студената у решавању вишеструких интеграла, а одсуство разлика у успеху када је реч о одређивању и дефинисању скупова тачака у равни и одређивању граница променљивих (са истим нивоом значајности 0.05) се може објаснити тиме да су вишеструки интеграли вредновани већим бројем поена (29 поена) па је дошао до изражаја значај у одређивању области по којој се врши интеграција вишеструким интегралом, као и значај исправног постављања граница променљивих, јер без коректне израде тог дела задатка, практично није могуће исправно решити вишеструки интеграл, чак и за студенте који изузетно добро познају поступак интеграције са већ одређеним границама. Тиме је само потврђен утицај примене визуализације наставних садржаја из области вишеструких интеграла у динамичком окружењу. Посебно је анализиран и успех студената који су самостално креирали интерактивне материјале у *Graphing Calculator*-у за визуализацију значења променљивих ρ и φ приликом увођења смене помоћу поларних координата, затим за визуализацију значења променљивих ρ, φ и z приликом увођења смене помоћу цилиндричних координата и променљивих ρ, φ и θ код увођења смене помоћу сферних координата. На основу резултата представљених у табели 15 можемо закључити да су студенти експерименталне групе у значајно већој мери разумели значење датих променљивих, затим боље уочили када је пожељно увести смену променљивих, као и која би то смена била и на крају исправно пресликавали одговарајуће координатне системе. На крају, анализирањем укупног броја поена које су студенти експерименталне групе и студенти контролне групе остварили на тесту (табела 16), може се закључити да утицај примене мобилних апликација *Graphing Calculator*-а *3D Calculator*-а за визуализацију значења променљивих које се уводе одговарајућом сменом променљивих, затим за визуализацију кривих, правих, функција једне променљиве, функција више променљивих, површи и њихових пресека којим су одређене области по којима се врши интеграција у равни и у простору, позитивно утиче на резултате и постигнућа студената приликом решавања различитих двоструких и троструких интеграла тако што позитивно утиче на разумевање односа геометријских објеката у равни и простору и прецизно дефинисање области по којој се врши интеграција вишеструким интегралом.

Може се закључити, на основу свих резултата, описаних у докторској дисертацији да је потврђена претпоставка да примена описаних методских приступа који се заснивају на интеграцији примене рачунара и мобилних уређаја за визуализацију наставних садржаја из вишеструких интеграла доприноси бољем квалитету теоријског, визуелног и процедуралног знања и умења студената која се односе на вишеструке интеграле. Примена динамичких софтвера *Wolfram Mathematica, GeoGebra, Graphing Calculator* и *3D Calculator* омогућава бољу визуализацију појмова (у равни и простору) и динамичко повезивање алгебарских и графичких репрезентација математичких објеката. Примена конструктивистичког облика учења у смислу пружања могућности студентима да самостално креирају дигиталне наставне материјале и активно усвајају предвиђене наставне садржаје такође доводи до бољег знања и разумевања тих садржаја од стране студената.

Теоријски значај ове дисертације огледа се у упоредној анализи студија, научних радова и резултата педагошких истраживања која се тичу репрезенатација математичких појмова, вишеструких репрезентација тих појмова, повезивању вишеструких репрезентација, затим конструктивистичке теорије учења, визуализацији појмова, визуализацији појмова у простору, визуализацији математичких појова и разних подела визуелних представа, примени софтерских пакета за визуализацију математичких појмова, нарочито појмова математичке анализе, теорији мобилног учења и њиховој систематизацији. Практични допринос ове дисертације огледа се у осмишљеним методским приступима који се заснивају на визуализацији наставних садржаја из вишеструких интеграла уз помоћ рачунара и мобилних уређаја. Практичним значајем дисертације се могу сматрати и креирани, прилагођени наставни материјали који се могу применити у настави математике (математичке анализе) на универзитетском нивоу различитих студијских програма: математике, информатике, разним профилима техничко-технолошких студија. Такође, одређени наставни материјали се могу користити и у реализацији наставе других наставних садржаја (аналитичке геометрије на пример) и послужити као подстицај универзитетским професорима и њиховим сарадницима за коришћење образовног софтвера у настави, које има потенцијал да унапреди наставни процес, нарочито у сврху визуализације одређених наставних садржаја. На крају, имајући у виду и услове у којима се одвија наставни процес, изазване пандемијом вируса корона, креирани наставни садржаји се могу користити и за оплемењивање наставе на даљину, посебно узевши у обзир да наставник приликом излагања наставних садржаја и решавања конкретних задатака из вишеструких интеграла, тренутно није у прилици да, коришћењем табле и креде, црта одговарајуће слике у учионици.

Могло би се очекивати да нови методски приступ који би подразумевао имплементацију динамичких софтвера за визуализацију наставних садржаја, повезивање репрезентација математичких појмова у мултирепрезентативном окружењу има потенцијал да допринесе бољем теоријском, визуелном и практичном знању студената из других области математичке анализе функција више променљивих попут непрекидности функција и диференцијабилности функција више променљивих, парцијалних извода, екстремних вредности функција више променљивих, а посебно криволинијском и површинском интегралу имајући у виду примену криволинијских и површинских интеграла и повезаност вишеструких интеграла са криволинијским и површинским интегралима (израчунавање површинских интеграла се може свести на израчунавање одговарајућих вишеструких интеграла, Гринова формула, гормула Гаус-Остроградски). Даље, визуализација кривих и правих у равни путем динамичких софтвера који омогућавају вишеструку репрезентацију поменутих објеката се може имплементирати у настави садржаја из аналитичке геометрије у средњешколском образовању, док се визуализација правих, равни и површи у простору уз могућност повезивања графичких и алгебарских репрезентација и могућности креирања динамичких репрезентација на тај начин може користити у настави садржаја из аналитичке геометрије у простору, на универзитетском нивоу. У складу са тиме, било би потребно осмислити и креирати наставне материјале, адекватне задатке и тестове за вредновање знања студената за методске приступе који би били засновани на имплементацији динамичког софтвера и мобилних уређаја у обради и утврђивању и продубљивању знања студената из горепоменутих области математичке анализе, као и аналитичке геометрије. Приликом планирања методских приступа било би пожељно анализирати стручну литературу, односно резултате истраживања спроведених на тему утицаја примене образовног софтвера на дате математичке наставне садржаје, предности и мане те примене, како би се нови дидактичко-методички приступ што боље осмислио, реализовао и како би се потом истражио потенцијал и резултати датих методских приступа. Таква истраживања би свакако унапредила наставу математике на универзитетском нивоу, имала потенцијал да побољшају постигнућа студената и унапреде знања и умења студената у области математике и техничко-технолошких наука.

Литература

Alioon, Y. & Delialioglua, O. (2015). A Frame for the Literature on M – learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 182, 127 – 135, 4th World Conference on Educational Technology Researches, WCETR, Computer Education and Instructional Technology, Metu, Ankara, Turkey 2014.

Al-Emran, M., Elsherif, H. M., & Shaalan K. (2016). Investigating attitudes towards the use of mobile learning in higher education. *Computers in Human Behavior,* 56, 93-102.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, 215–241.

Arcavi, A. & Nachmias R. (1989). Desperately Looking for the Focus. *Mathematics in School,* 19(2), 19-23.

Bada, S. O., & Olusegun, S. (2015). Constructivism learning theory: A paradigm for teaching and learning. *Journal of Research & Method in Education,* 5(6), 66–70.

Baya'a, N. & Daher, W. (2009). Learning mathematics in an authentic mobile environment: the Perceptions of Students. *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, 3 (Special Issue, IMCL 2009), 6-14.

Bodner, G. M. (1986). Constructivism: A Theory of Knowledge. *Journal of Chemical Education*, 63 (10), 873-878.

Borba, M.C. (1993). *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software*. Doctoral Dissertation, Cornell University, U.S.A. Published in 1994- Lisbon, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Borba, M., & Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, 31: 319-337.

Božić, R. (2015). *The impact of dynamic properties of the software packages Mathematica and GeoGebra to the examining and graphing of functions with parameters*. Non-Standard Forms of Teaching Mathematics and Physics IPA HU-SRB/1203/221/024.

Božić, R., Takači, Đ., & Stankov, G. (2019). Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters. *Interactive Learning Environments*, DOI:10.1080/10494820.2019.1602842.

Brooks, J. G., & Brooks, M. G. (1993). *In search of understanding: the case for constructivist classrooms*. Alexandria, VA: American Society for Curriculum Development.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction.* Cambridge, MA: Harvard University Press. An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course: Part I [1]Camacho-Machín Matías, Perdomo-Díaz Josefa, Santos-Trigo Manuel, *Teaching of Mathematics*, vol. 15, br. 1, str. 1-20, 2012.

Buteau C., Marshall N., & Jarvis D.H. (2010). Integrating computer algebra systems in post-secondary mathematics education: preliminary results of a literature review. *Int J Technol Math Educ*, 17(2), 57–68.

Cheung, A. C., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 9, 88-113.

Clement J. (2004). Imagistic processes in analogical reasoning: Conserving transformations and dual simulations. *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Clements, M. A., (1984), Terence Tao. *Educational Studies in Mathematics*, 15(21), 32–38.

Cochrane, T. D. (2010). Exploring mobile learning success factors, *Research in Learning Technology,* 133-148.

Cohen, C. A., & Hegarty, M. (2012). Inferring cross sections of 3d objects: A new spatial thinking test. *Learning and Individual Differences, 22*(6), 868–874.

Cretchley P., Harman C., Ellerton N., & Fogarty G. (2000). MATLAB in early undergraduate mathematics: an investigation into the effects of scientific software on learning. *Mathematics Education Research Journal,* 12(3), 219-233.

Crompton, H. & Burke, D. (2015). Research trends in the use of mobile learning in mathematics. *International Journal of Mobile and Blended Learning,* 7(4), 2015 pp. 1–15.

Croop, F. J. (2009). *Student perceptions related to mobile learning in higher education*. Unpublished Dissertation, Northcentral University, Prescott Valley, Arizona. Davis, P. J. & Hersh, R., (1986), Descartes' Dream. The World According to Mathematics Houghton Mifflin Co, Boston.

Delice, A., & Ergene, Ö. (2015). Investigation of drawings and rotation skills in integral volume problems solving process within communities of practices. *Journal of Theory and Practice,* 11(4), 1288-1309.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T., (1986). On the Aesthetics of Mathematical Thought, *For the Learning of Mathematics*, 6(1), 2–10.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T., (1987). On the deep structure of functions. *Proceedings of PME II*, Montreal, 190 – 196.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht.

Driscoll, M. (2000). *Psychology of Learning for Instruction.* Needham Heights, MA, Allyn & Bacon.

Eby, J. W., Herrell, A. L., & Jordan, M. L. (2005). Teaching K-12 Schools: *A Reflective Action Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 647–659.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. In: E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*, Vol. 1, pp. 45–68.

Ermete, M., Brackett, N., Powell, K., Krause, E., & Lapp, D. (2010). *The Role of Dynamic Representations in Students' Development of Algebraic Concepts*. Program Reports. Retrieved from https://www.cmich.edu/colleges/cst/math/Documents/LURE_2010_Program_Reports.pdf.

Eyyam, R., & Yaratan, H. S. (2014). Impact of Use of Technology in Mathematics Lessons on Student Achievement and Attitudes. *Social behavior and personality*, 42, 31-42.

Fabian, K., Topping, K. J. and Barron, I. G. (2016). Mobile technology and mathematics: Effects on students' attitudes, engagement, and achievement. *Journal of Computers in Education*, 3(1), 77–104.

Fabian, K., Topping, K. J., & Barron, I. G. (2018). Using mobile technologies for mathematics: Effects on student attitudes and achievement. *Educational Technology Research and Development, 66*(5), 1119–1139.

Ferguson, E. S. (1993). *Engineering and the mind's eye*. Cambridge, Mass: MIT Press.

Fischbein, E. (1987). *Mathematics education library.Intuition in science and mathematics: An educational approach.* D Reidel Publishing Co.

Font, J. D., Godino, J. D., & Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 3-9.

Ganter, S. L. (2001). *Changing calculus: A report on evaluation efforts and national impact from 1988 to 1998* (Vol. 56). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Glasersfeld, E. von (1995). A constructivist approach to teaching. In: Steffe L. P. & Gale J. (eds.) *Constructivism in education*. Erlbaum, Hillsdale: 3–15.

Glickman, C. L. (2000). The effects of computerized instruction in intermediate algebra. (Doctoral Dissertation, University of Nevada, Las Vegas, 2000). *Dissertation Abstract International*, *61*(05), 1773A.

Goldenberg, E.P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 135-173.

Goldenberg, E. P. (1995). Multiple representations: A vehicle for understanding understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, & M. S. Wiske (Eds.), *Software goes to school: Teaching for understanding with new technologies* (p. 155–171). Oxford University Press.

Goldin, G., & Janvier, C. (1998). Representation and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour, 17 (1),* 1-4, The onto-semiotic approach to mathematics education 209.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol 17(2), 137–165.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Gorder, M. L. (2008). A study of teacher perceptions of instructional technology integration in the classroom. *The Delta Pi Epsilon Journal*, 50, 63–76.

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, 3-19.

Gutierrez, R. (2012). Context matters: How should we conceptualize equity in mathematics education? In B. Herbel-Eisenmann, J. Choppin, D. Wagner, & D. Pimm (Eds.), *Equity in discourse for mathematics education: Theories, practices, and policies* (pp. 17-33). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Habre, S. (1999). Visualization enhanced by technology in the learning of multivariable calculus. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8, 115–130.

Habre, S. & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative concept in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical. Behavior*, 25, 57–72.

Hackman. D.G. (2004). Constructivism and Block Scheduling: Making the Connection, *Phi Delta Kappan*, 85(9), 697-702.

Hannafin, R. D., Truxaw, M. P., Vermillion, J. R., & Liu, Y. (2008). Effects of spatial ability and instructional program on geometry achievement, *The Journal of Educational Research*, vol. 101, 148-156.

Hashemia, M., Azizinezhad, M., Najafia, V. & Nesari, A. J. (2011). What is mobile learning? Challenges and capabilities. *Proceedia Social and Behavioral Sciences*, 30, 2477-2481.

Hauser J. (2009). Concrete-representational-abstract instructional approach. Improving Outcomes for all Students K-8.

Hayes, J. R. (1989). *The complete problem solver*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Hegedus, S. J. & Kaput, J. (2004). Improving algebraic thinking through a connected SimCalc MathWorlds classroom, *Journal of Research in Mathematics Education*, 68, 99-111.

Hennessy, S., Fung, P., & Scanlon, E. (2001). The Role of the Graphic Calculator in Mediating Graphing Activity. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 32, 267-290.

Herceg, Dj., Herceg, D. (2010). Numerical Integration with GeoGebra in High School, *The International Journal for Technology in Mathematics Education,* 205-210.

Herman, M. (2007). What Students Choose to Do and Have to Say About Use of Multiple Representations in College Algebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26*(1), 27-54.

Huang, C.H. (2015). Calculus Students' Visual Thinking of Definite Integral. *American Journal of Educational Research*, 3(4), 476-482.

Hughes - Hallett, D. (1991). Visualization and Calculus Reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes No. 19, 121–126.

Huk, T. (2006). Who benefits from learning with 3D models? The case of spatial ability. *Journal of Computer Assisted Learning*, vol. 22, 392- 404.

Hung, D. (2001). Design principles for web-based learning; implications for Vygotskian thought. *Educational Technology*, 41(3), 33-41.

Hwang, L. H., Lau, L. F., Smith, D. L., Mistrot, C. A., Hardwick, K. G., Hwang, E. S., Amon, A., & Murray, A. W. (1998). Budding yeast Cdc 20: A Target of the Spindle Checkpoint. *Science, 279*, 1041.

Hwang, W. Y., & Hu, S. S. (2013). Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving. *Computers and Education, Vol. 62*, 308-319.

Hwang, W.-Y., Lin, L.-K., Ochirbat, A., Shih, T. K., & Kumara, W. G. C. W. (2015). Ubiquitous Geometry: Measuring Authentic Surroundings to Support Geometry Learning of the Sixth-Grade Students. *Journal of Educational Computing Research*, 52(1), 26–49.

Ikodinović, N., Stanić, M., Pavlović, M. & Simić, S. (2011). *Matematika 3,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, Srbija.

Jonassen, D.H., Peck, K.L., & Wilson, B.G. (1999). *Learning with technology: A constructivist perspective*. Upper Saddle River, NJ: Merrill.

Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking*. New Jersey: Prentice Hall.

Judson, E. (2006). How Teachers Integrate Technology and Their Beliefs About Learning: Is There a Connection?. *Journal of Technology and Teacher Education, 14*(3), 581-597.

Kaput, J. (1986). Information technology and mathematics: Opening new representational windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5(2), 187-207.

Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook on research in mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Karakus, F., Aydin, B. (2017). The Effects of Computer Algebra System on Undergraduate Students' Spatial Visualization Skills in a Calculus Course. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 5(3), 54-69.

Kashefi, H., Zaleha, I., & Yudariah, M. Y. (2011). Promoting Creative Problem Solving in EngineeringMathematics through Blended Learning. *The 3rd International Congress On Engineering Education* (ICEED 2011/IEEE), 7-8 December 2011, Malaysia.

Kendal, M., & Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(2), 143–165.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kleiner, I., (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal* 20 (4), 282 – 300.

Kosslyn, S.M. (1983). *Ghosts in the mind's machine*. New York : Norton.

Kwon, O.N.; Kim, S.H.; Kim, Y. (2001). Enhancing spatial visualization through virtual reality on the web: Software design and impact analysis, *Proceedings of the 25th PME Conference 3*, 265-272.

Lajorie, S. P. (2008). Individual differences in spatial ability: Developing technologies to increase strategy awareness and skills. *Educational Psychologist*, 38, 115-125.

Lampen, E. & Murray, H. (2001). Children's intuitive knowledge of the shape and structure of three dimensional containers, *Proceedings of the 25th PME Conference 3*, 273-280.

Laouris, Y. (2005). How can mobile technologies serve close the digital gap and accelerate development? *Proceedings on 4th World Conference on Mobile Learning, mLearn* 2005, Oct 25 – 28, Cape Town, South Africa.

Larkin, J.H. (1983). The role of problem representation in physics, in *Mental Models*, D. Gentner and A. Stevens, Editors. 1983, Lawrence Erlbaum: Mahwah, New Jersey.

Lavicza, Z. (2008), Factors influencing the integration of Computer Algebra Systems into university-level mathematics education. *IJTME*.

Lawrie, C., Pegg, J., & Gutierrez, A. (2000). Coding the nature of thinking displayed responses on nets of solids. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 215-222). Hiroshima: Japan.

Lean, G., & Clements, M. A. (1981). Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 267-299.

Lemke, J. L. (1990). *Talking science: Language, learning, and values*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corp.

Lester, F.K. & Wiliam, D. (2000). The evidential basis for knowledge claims in mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 132–137.

Liang, L., Liu, T., Wang, H., Chang, B., Deng, Y., Yang, J., Chou, C., et al. (2005). A few design perspectives on one-on-onedigital classroom environment. *Journal of Computer Assisted Learning*, 21(3), 181-189.

Lin, P. (1993). *Learning translation and scaling in dynamic, linked, multiple representation environments* (Doctoral dissertation, University of Georgia, 1993). Dissertation Abstracts International, 54(06), Z2082.

Lohman, D. F., & Ippel, M. J. (1993). *Cognitive diagnosis: From statistically based assessment toward theory-based assessment.* In N. Frederiksen, R. J. Mislevy, & I. I. Bejar (Eds.), *Test theory for a new generation of tests* (p. 41–71). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lorsbach, A., & Tobin, K. 1992. Constructivism as a referent for Scince Teaching. *NARST Research Matters-to the Science Teacher*, 30.

Macnab, J.S., Phillips, L.M., & Norris, S.P. (2012). Visualizations and Visualization in Mathematics Education. In S.P. Norris (Ed.). *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education*, pp. 103–122. Rotterdam: Sense Publishers.

Mallet, D. G. (2007). Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system Maple. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(1), 16-32.

Mariotti, M. A. and Pesci. A. (1994) Visualization in Teaching - Learning Situations. *Proceedings of PME 18, 1, P 22*.

Marshall, N., Buteau, C., Jarvis, D. H., & Lavicza Z. (2012). Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study. *Computers & Education*, 58, 423–434.

Martínez-Planell, R. & Trigueros Gaisman, M. (2009). Students' ideas on functions of two variables: Domain, range, and representations. In Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 73-80). Atlanta, GA: Georgia State University.

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889–918.

Meadows, D.H. (2008). *Thinking in Systems: A Primer*. Chelsea Green, White River Junction.

Meagher, M. (2005). *The processes of learning in a computer algebra system (CAS) environment for college students learning calculus*, Doctoral dissertation, The Ohio State University.

Milenković, A., Takači, Đ. (2018). On the influence of software application for visualization in teaching double and triple integrals, *14SMAK: 14 th Serbian mathematical congress*, Kragujevac, Srbija, maj 16 – 19. 2018.

Milenković, A., Takači, Đ. (2019). The Effects of Integrating Mobile Technology for Determining the Boundaries of Multiple Integrals, *Conference of MIPRO 2019: 42nd International ICT Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics*, Opatija, Croatia, May 20-24, 2019, 851-856.

Milenković, A., Takači, Đ. & Božić, R. (2020). On the influence of software application for visualization in teaching double integrals, *Interactive Learning Environments.* doi.org/10.1080/10494820.2020.1719164

Montiel, M., Vidakovic, D. & Kabael, T. (2008). Relationship between students' understanding of functions in Cartesian and polar coordinate systems. *Investigations in Mathematics Learning*, 1(2), 52–70.

Mundy, J., (1984). Analysis of errors of first year calculus students', in Theory, *Research and Practice in Mathematics Education*, A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (Eds.), Proceedings of ICME 5, Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Centre, Nottingham, U.K., 170–172.

Mwanza-Simwami, D. (2009). Using Activity-Oriented Design Methods (AODM) to Investiagte Mobile Learning. In G. Vavoula, N. Pachler, & A. Kukulska-Hulme (Eds.), *Researching Mobile Learning* (pp. 97-122). Bern: Peter Lang Pub Inc.

Nakahara, T. (2008). Cultivating mathematical thinking through representation-utilizing the representational system. *APEC-TSUKUBA International Congress,* Japan.

Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning, *Proceedings of the 23th PME Conference* 1, 220-234.

Ozgun-Koca, S. A. (1998). Students' use of representations in mathematics education. Paper presented at the *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Raleigh, NC.

Ozgun-Koca, S. A. (2008) Ninth Grade Students Studying the Movement of Fish to Learn about Linear Relationships: The Use of Video-Based Analysis Software in Mathematics Classrooms. *The Mathematics Educator*, Vol. 18, No. 1, 15–25.

Pachler, N., & Seipold, J. (2009). Harnessing Mobile Devices to Connect Learning inFormal and Informal Settings: the Role of DigitalNarratives and Discontinuous Text Production forMeaningMaking. In D. Metcalf, A. Hamilton, & C. Graffeo (Eds.), *mlearn 2009 Conference Proceedings* (pp. 153-175). Presented at the 8th World Conference on Mobile and Contextual Learning, Orlando, Florida: University of Central Florida.

Palais, R. S. (1999). *The visualization of mathematics: Toward a mathematical exploratorium*. Notices of the AMS, 46(6), 647–658.

Patwardhan, M., & Murthy, S. (2015). When does higher degree of interaction lead to higher learning in visualizations? Exploring the role of ‘Interactivity Enriching Features. *Computers & Education*, 82, 292-305.

Pea. R. D. (1987). *Cognitive Technologies for Mathematics Education*. A. Schoenfeld. Cognitive science and mathematics education, Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp.89-122.

Piburn, M.D., Reynolds, J.S., MvAuliffe, C., Leedy, D.E., Birk, J.P, & Johnson, K.J. (2005). The role of visualization in in learning from computer-based images. *International Journal of Science Education*, 27(5), 513 – 527.

Presmeg N.C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: a classroom investigation*. Unpublished PhD dissertation, University of Cambridge.

Presmeg N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *Learn Math* 6(3):42–46

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299–312). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Presmeg N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: Gutierrez A, Boero P (eds) *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Sense, Rotterdam, pp 205–235.

Rakes, G. C., Fields, V. S. & Cox, K. E. (2006). The Influence of Teachers' Technology Use on Instructional Practices. *Journal of Research on Technology in Education*, *38*(4), 409-424.

Ross, S. C. (1996). Visions of calculus. In A. W. Roberts (Ed.), *Calculus: The dynamics of change* (Vol. 39, pp. 8-15). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Rotman, B. (1995). Thinking diagrams: Mathematics, writing, and virtual reality. In B. HerrnsteinSmith & A. Plotnitsky (Eds.), *Mathematics, Science and Postclassical Theory* (pp. 380–416).Durham: Duke University Press.

Salleh, T. S., & Zakaria, E. (2013). Enhancing students’ understanding in integral calculus through the integration of Maple in learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 102, 204-211.

Schlatter, M.D. (1999). Using Matlab in a Multivariable Calculus Course. San Francisco, CA: *the Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED460005)

Sevimli, E., & Delice, A. (2011). The influence of teacher candidates’ spatial visualization ability on the use of multiple representations in problem solving of definite integrals: A qualitative analysis. *Research in Mathematics Education*, 13(1), 53-58.

Sevimli, E. (2013). *The effect of computer algebra system supported teaching on students' processes of transition of representations in integral with the thinking type differences* (English abstract). Ph.D. thesis. Turkey: University of Marmara.

Sheikh, T.O. (2015). *The role of Visualization in the Teaching and Learning of Multivariate Calculus and Systems of Ordinary Differential Equations*, Doctoral dissertation, The University of Western Cape.

Smith, D. (1994). Trends in calculus reform. In A. E. Solow (Ed.), *Preparing for a new calculus* (Vol. 36, pp. 3-13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sommer, R (1978) *The Mind Eye*. New York, NY, Delacorte Press.

Sorby S.A. (2001) A course in spatial visualization and its impact on the retention of women engineering students. J *Women Minorities Sci Eng* 7(2):153–172.

Stewart, J. (2008). Calculus: Early transcedentals (sixth edition), Belmont. CA, USA: Thomson Brooks/Cole

Stylianou, D.A.; Leikin, R.; Silver, E.A. (1999). Exploring students' solution strategies in solving a spatial visualization problem involving nets, *Proceedings of the 23th PME* Conference 4, 241-248.

Stylianou, D. (2002). Interaction of visualization and analysis—The negotiation of a visual representation in problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 303–307.

Stonewater J. K. (2005). Inquiry Teaching and Learning: The Best Math Class Study. *School, science and mathematics*, 105(1):36-47.

Štrboja, M. (2016). *Funkcije više promenljivih sa vizualizacijom (Multivariable function with visualization)* Retrieved from https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/strboja_funkcije_vise_promenljivih_sa_vizualizacijom.pdf

Taber, K. S. (2017). The nature of student conceptions in science. In K. S. Taber & B. Akpan (Eds.), *Science Education: An International Course Companion* (pp. 119-131). Rotterdam: Sense Publishers.

Tall, D. O., (1978), Mathematical thinking and the brain, *Proceedings of PME 2*, Osnabrück, 333–344.

Tall, D.O. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (ed. S. Cunningham & W. S. Zimmermann, MAA Notes No. 19, (pp. 105–119). Washington DC: MAA.

Tall, D.O. (1993). *Students obstacle in calculus*, ICME-7, Quebec, Canada 13-28.

Tall, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. *First Coloquio de Historia e Tecnologia no Ensino de Matemática at Universidade do Estado do Rio De Janiero*, February 21-3, 2002.

Tall, D. O. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5–24.

Takači, Đ., Stankov, G., & Milanović, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, 82, 421-431.

Takači, Đ., Marić, M., Stankov, G., & Đenić, A. (2017). Efficiency of using VNS algorithm for forming heterogeneous groups for CSCL learning. *Computers & Education*, 109, 98-108.

The International Association for the Evaluation of Educational Achievement (2005). *The TIMSS 2007 Assessment Frameworks*.

Traxler, J. (2009). Current State of Mobile Learning. In M. Ally (Ed.), *Mobile Learning: Transforming the Delivery of Education and Training*, *Issues in Distance Education* (pp. 9-24). Edmonton: Athabasca University Press.

Trigueros,M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions, *Educational studies in Mathematics*, 73(3), 3-19.

Van der Meij, J., & de Jong, T. (2006). Supporting students' learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. *Learning and instruction*, *16*(3), 199-212.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of Mathematics education*. Orlando: Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310–316.

Vavoula, G., (2005*). A Study of Mobile Learning Practices*, Internal Report, Deliverable 4.4 for the MOBIlearn project (IST-2001-37440).

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual consideration in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 149–156.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language.* Cambridge MA: MIT Press.

Wilson B. (1997). *Constructivist learning environments* (pp. 17-24). New Jersey: Educational Technology Publications.

Winters, N. (2007). What is mobile learning? In M. Sharples (Ed.), *Big Issues in Mobile Learning. Report of a workshop by the Kaleidoscope Network of Excellence Mobile Learning Initiative* (pp. 7-11). Learning Sciences Research Institute, University of Nottingham.

Wiwatanapataphee, B., Noinang, S., Wu, Y. H., & Nuntadilok, B. (2010). An integrated Powerpoint-Maple based teaching-learning model for multivariate integral calculus. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(1), 5-31.

Yerushalmy, M. & Shternberg, B. (2001). A visual course to functions. In Cuoco, A.A. and Curcio, F. (Eds), *The Roles of Representations in School Mathematics* (pp. 125–147). NTCM Yearbook.

Zakaria, E., & Salleh, T. S. (2015). Using Technology in Learning Integral Calculus. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 6(5), 144-148.

Zimmermann, W. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, D.C. 127-138.

Прилози

Прилог 1. *Уводни тест (пре – тест) истраживања спроведеног 2017/2018 и 2017/2018. године*

УВОДНИ ТЕСТ

Време за израду теста је 45 минута.
Сваки задатак се бодује са по 5 поена.
Приликом израде задатака дозвољена је употреба папира и оловке (није дозвољено користити таблицу интеграла, калкулатор...).

Задаци	Вредновање	
	Парцијално	Укупно
1. Израчунати $$\int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x.$$	Познавање табличног интеграла – 2 поена Примена Њутн – Лајбницове формуле – 3 поена	5 поена
2. Израчунати $$\int_{-1}^1 (3x^2+4x+1) \, \mathrm{d}x.$$	Примена методе декомпозиције – 2 поена Познавање табличних интеграла – 1 поен Примена Њутн – Лајбницове формуле – 2 поена	5 поена
3. Израчунати $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \, \mathrm{d}x.$$	Примена методе смене – 2 поена Познавање табличног интеграла – 1 поен Примена Њутн – Лајбницове формуле – 2 поена	5 поена
4. Израчунати $$\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x.$$	Примена методе парцијалне интеграције – 2 поена Познавање табличних интеграла – 1 поен Примена Њутн – Лајбницове формуле – 2 поена	5 поена

Прилог 2. *Наставни материјал Вишеструки интеграли коришћен током истраживања 2016/2017. и 2017/2018. године*

ВИШЕСТРУКИ ИНТЕГРАЛИ

Мотивација за одређени интеграл је било израчунавање површине равних фигура. Конкретно, за одређивање површине криволинијског трапеза, који је ограничен Ox осом, правама $x = a$ и $x = b$ и кривом која представља график непрекидне и позитивне функције $f: [a, b] \to R$, $(a < b)$.

Одређени интеграл смо дефинисали на следећи начин. Најпре смо интервал $[a, b]$ поделили на мање интервале $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \dots, n$ и са Δx_i обележили дужину $x_i - x_{i-1}$ подинтервала $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \dots, n$. Коначан низ $\Pi = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ називамо подела интервала $[a, b]$. Број $d(\Pi) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ називамо параметар поделе П. Даље, из сваког подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ смо изабрали по једну произвољну тачку ξ_i, $i = 1,2, \dots, n$ и обележићемо са $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ низ датих тачака. Збир $\sigma(f; \Pi, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ назива се интегрална сума функције која одговара подели П са изабраним тачкама Ξ.

Дефиниција 1.1. Нека је $f: [a, b] \to R$ задата функција. Реалан број I је одређени интеграл функције f на $[a, b]$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за сваку поделу П интервала $[a, b]$ са изабраним тачкама Ξ за коју је $d(\Pi) < \delta$ важи $|I - \sigma(ф; \Pi, \Xi)| < \varepsilon$.
Одређени интеграл може се записати и на следећи начин:

$$I = \lim_{d(\Pi) \to 0} \sigma(f; \Pi, \Xi) = \lim_{d(\Pi) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Број I, ако постоји назива се одређени интеграл функције f на $[a, b]$ и означава се са $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.
Теорема 1.1. Ако је $f: [a, b] \to R$ непрекидна функција и $F'(x) = f(x)$, за свако $x \in (a, b)$, онда је $\int_a^b f(x) \mathrm{d}\, x = F(b) - F(a)$.
Двоструки и троструки интеграл можемо посматрати као уопштење одређеног интеграла, с тим што ћемо уместо интервала (као дела праве) за област интеграције посматрати делове равни и делове простора, и уместо функције једне, посматрати функције више променљивих дефинисаним на поменутим областима.

ДВОСТРУКИ ИНТЕГРАЛ

Као што је већ поменуто, мотивација за одређени интеграл је било одређивање површине равног лика у равни, а до двоструког интеграла нас доводи одређивање запремине тела у простору.

Нека је $f\colon D \to R$ непрекидна и позитивна функција на затвореној области D у равни. Тада се запремина тела које је ограничено површи $z = f(x, y)$, делом Oxy равни и цилиндром са генератрисама паралелним Oz оси, чија је директриса граница области D рачуна помоћу двоструког интеграла $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Нека је $D = [a,b] \times [c,d]$ правоугаоник у равни Oxy, тј. скуп свих тачака (x,y) таквих да је $a \leq x \leq b$ и $c \leq y \leq d$. Аналогно поступку код одређеног интеграла, нека $\Pi(x)$ означава поделу интервала $[a,b]$ тачкама $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, а $\Pi(y)$ поделу интервала $[c,d]$ тачкама $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$.

Правоугаоник D ћемо представити као унију дисјунктних правоугаоника $D_{ij} = [x_{i-1},\, x_i] \times \left[y_{j-1}, y_j\right], i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n$ и са Δx_i и обележили дужину $x_i - x_{i-1}$ једне странице $[x_{i-1},\, x_i]$, $i = 1,2,\dots,m$, односно са Δy_j обележили дужину $y_j - y_{j-1}$ друге странице правоугаоника $\left[y_{j-1}, y_j\right]$, $j = 1,2,\dots,n$. Такође са $d(\Pi_x) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i$ и $d\left(\Pi_y\right) = \max\limits_{1\leq j\leq m} \Delta y_j$ означавамо параметре поделе Π_x и Π_y.

У свакој подобласти бирамо произвољну тачку $M_{ij}\left(\xi_i, \eta_j\right)$. Запремина дела тела који се налази изнад D_{ij} правоугаоника је приближно једнака производу $f\left(\xi_i,\, \eta_j\right)\Delta\, x_i \Delta\, y_j$. запремини призме чија је основа правоугаоник $\Delta x_i \Delta y_j$, а висина $f\left(\xi_i, \eta_j\right)$. Тада је запремина тела приближно једнака суми$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta x_i\, \Delta y_j$ која се назива интегрална сума функције f над D.

Нека је $I = \lim\limits_{d(\Pi_x)\to 0, d\left(\Pi_y\right)\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta x_i\, \Delta y_j$ где су $d(\Pi_x)$и $d\left(\Pi_y\right)$параметри поделе интервала $[a,b]$ и $[c,d]$ редом. Број I, ако постоји назива се двоструки интеграл функције f над $D = [a,b] \times [c,d]$ и означава се са $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Из дефиниције двојног интеграла произилазе примене двојног интеграла:

• површина области D у равни Oxy једнака је $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

• запремина тела између површи $z = f(x,y)$ и $z = g(x,y)$ над D, где је $f(x,y) \geq g(x,y)$, за све $(x,y) \in D$, једнака је $\iint_D \left(f(x,y) - g(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Имајући у виду особине које важе за одређени интеграл и везу између одређеног и двоструког интеграла, навешћемо уопштене особине двојног интеграла.

Теорема 2.1. Нека је D затворена област у равни R^2 и f и g непрекидне функције над D.Тада важи:

- $\iint_D cf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, за све $c \in R$;
- $\iint_D \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;
- ако је $f(x,y) \le g(x,y)$, за све $(x,y) \in D$, тада је $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;
- ако је област интеграције D подељена на две подобласти D_1 и D_2 $(D = D_1 \cup D_2)$ које имају евентуално заједничке тачке само на граници, тада је
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Израчунавање двоструког интеграла

Што се израчунавања двоструког интеграла тиче, показаћемо да се његово израчунавање своди на израчунавање два одређена интеграла. Описаћемо поступак "пројектовања на Ox осу" уз напомену да се област интеграције аналогно може "пројектовати и на Oy осу". Под овим поступком подразумевамо одређивање интервала $[a,b]$ и одређивање две криве α и β које ограничавају област D са доње и горње стране респективно, тако да за сваку тачку (x,y) из области D важи да је $a \le x \le b$ и $\alpha(x) \le y \le \beta(x)$. Тада област D можемо представити на следећи начин $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$.

На основу дефиниције, долазимо до израчунавања двоструког интеграла $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{d(\Pi_x)\to 0, d(\Pi_y)\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\,\Delta y_j = \lim_{d(\Pi_x)\to 0} \sum_{i=1}^{m}\left(\lim_{d(\Pi_y)\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta y_j\right)\Delta x_i$, па је $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$.

Када је реч о редоследу рачунања, прво се рачуна интеграл $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, наравно по промењљивој y па се, приликом те интеграције x посматра као константа, а затим се рачуна интеграл $\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x$.

Када је u питању "пројектовању на y осу", тада област D представљамо у облику $D = \{(x,y) \mid \gamma(y) \le x \le \delta(y),\ c \le y \le d\}$, па је $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

У овом случају прво се рачуна интеграл $\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$, по промењљивој x па се, приликом те интеграције y посматра као константа, а затим се рачуна интеграл $\int_c^d I(y)\,\mathrm{d}y$.

На наредном примеру ћемо показати да вредност двојног интеграла не зависи од тога на коју осу вршимо "пројектовање".

Пример 1. Израчунати површину троугла у Oxy равни одређеног тачкама $\mathrm{A}(2,1), B(4,3)$ и $C(3,4)$.

Најпре ћемо одредити површину троугла "пројектовањем на Ox осу", односно узимањем константних граница за промењљиву x. Примећујемо да различите праве, односно графици двеју различитих функција ограничавају област троугла са горње стране, тако да ћемо област D поделити на две подобласти D_1 и D_2. Дакле $D = D_1 \cup D_2$, при чему је

$D_1 = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 3, x - 1 \leq y \leq 3x - 5\}$ и

$D_2 = \{(x, y) \mid 3 \leq x \leq 4, x - 1 \leq y \leq 7 - x\}$.

Како је површина области D у равни Oxy једнака $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ и $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, то је

$$P = \iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^3 \left(\int_{x-1}^{3x-5} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_3^4 \left(\int_{x-1}^{7-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_2^3 y|_{x-1}^{3x-5}\ \mathrm{d}x + \int_3^4 y|_{x-1}^{7-x}\ \mathrm{d}x = \int_2^3 (2x - 4)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 (8 - 2x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= (x^2 - 4x)|_2^3 + (8x - x^2)|_3^4 = (9 - 12) - (4 - 8) + (32 - 16) - (24 - 9)$$
$$= -3 + 4 + 16 - 15 = 2.$$

Доказаћемо сада да је резултат исти и када вршимо "пројектовање на Oy осу", тј. узимањем константних граница за промењљиву y. Уочавамо да различите праве, односно графици двеју различитих функција ограничавају област троугла са десне стране, тако да ћемо област D поново поделити на две подобласти $D_1{}'$ и $D_2{}'$, тако да је $D_1' = \{(x, y) \mid \frac{y}{3} + \frac{5}{3} \leq x \leq y + 1 , 1 \leq y \leq 3\}$ и $D_2' = \{(x, y) \mid \frac{y}{3} + \frac{5}{3} \leq x \leq 7 - y , 3 \leq y \leq 4$.

$$P = \iint_{D_1{}'} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2{}'} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^3 \left(\int_{\frac{y}{3}+\frac{5}{3}}^{y+1} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_3^4 \left(\int_{\frac{y}{3}+\frac{5}{3}}^{7-y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_1^3 x|_{\frac{y}{3}+\frac{5}{3}}^{y+1}\,\mathrm{d}y + \int_3^4 x|_{\frac{y}{3}+\frac{5}{3}}^{7-y}\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \left(\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}y + \int_3^4 \left(\frac{16}{3}y - \frac{4}{3}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\frac{y^2}{3} - \frac{2}{3}y\right)|_1^3 + \left(\frac{16}{3}y - \frac{2y^2}{3}\right)|_3^4 =$$

$$(3-2) - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{3}\right) - (16-6) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{32}{3} - 10 = 2.$$

Тиме смо показали да вредност двоструког интеграла не зависи од редоследа интеграције, те да у зависности од области D по којој вршимо интеграцију, можемо бирати, односно мењати редослед промењљивих по којим вршимо интеграцију, наравно водећи рачуна да се тада и границе одређених интеграла мењају.

1. Израчунати запремину области коју одређују равни $x = 0, y = 0, z = 0$ и $x + y + z = 1$.

Решење. Област је са горње стране одређена са равни $x + y + z = 1$, а са доње са $z = 0$, тако да ћемо запремину одредити двоструким интегралом $\iint_D (1 - x - y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Што се тиче области D она је у $0xy$ равни одређена правама $x = 0, y = 0$ и $x + y = 1$, односно графиком линеарне функције $y = 1 - x$. Дакле област D можемо дефинисати на следе\ћи начин:

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ па је

$$P = \iint_D (1 - x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)|_0^{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - x - x + x^2 - \frac{1-2x+x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Напомена: Примећујемо да је област чију смо запремину израчунали пирамида висине 1, чија је основа једнакокрако - правоугли троугао са катетама дужине 1. Тако је $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$. Уочавамо да смо добили исти резултат уз напомену да у већини случајева нећемо бити у могућности да применимо знање из стереометрије, већ ће нам бити потребно познавање вишеструких интеграла.

2. Израчунати запремину тела одређеног површима $z = x^2 y$, $y = \frac{x}{4}$, $y = \frac{1}{x}$ и равнима $x = 4$ и Oxy.

Решење. Потребно је, дакле израчунати $\iint_D x^2\, y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, при чему је D област у равни Oxy, одређена кривом $y = \frac{1}{x}$ и правама $x = 4$ и $y = \frac{x}{4}$. Област по којој вршимо интеграцију дефинисана је на следећи начин $D = \{(x,y) |\ 2 \le x \le 4, \frac{1}{x} \le y \le \frac{x}{4}\}$, па је запремина дате области

$$V = \iint_D x^2\, y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^4 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{x}{4}} x^2 y\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_2^4 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{\frac{x}{4}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 x^2 \left(\frac{x^2}{16} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{x^4}{16} - 1\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{x^4}{16}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_2^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{x^5}{80}\Big|_2^4 - \frac{1}{2}x\Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{160}(1024 - 32) - 1 = \frac{992 - 160}{160} = \frac{832}{160} = \frac{26}{5}.$$

3. Израчунати запремину тела одређеног графиком функције, односно површи $z = e^{x+y}$ и равнима $x = -2, x = 2, y = 0, y = 2$.

Решење. Примећујемо да се одређивање запремине датог тела своди на одређивање двоструког интеграла $\iint_D e^{x+y}\, dxdy$ где је $D = \{(x,y) | -2 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$. Такође, на основу особине подинтегралне функције $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, двоструки интеграл једнак је производу два одређена интеграла: $\iint_D e^{x+y}\, dxdy = \int_{-2}^2 \mathrm{e}^x dx \int_0^2 \mathrm{e}^y\, dy = \mathrm{e}^x|_{-2}^2 \cdot \mathrm{e}^y|_0^2 = \left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)(\mathrm{e}^2 - 1) = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2 - 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Смена променљивих помоћу поларних координата

Под поларним координатама се подразумева смена променљивих $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Помоћу ових променљивих раван $O'\rho\varphi$ се слика у Oxy раван. Тада је

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f\,(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi,$$

при чему је D област у $O'\rho\varphi$ равни која се трансформацијом $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ слика у област D у $0xy$ равни.

Смена помоћу поларних координата се уводи када подинтегрална функција садржи израз облика $x^2 + y^2$ или када је област по којој вршимо интеграцију ограничена кружницом $x^2 + y^2 = r^2$ или њеним деловима јер је $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$.

Уколико подинтегрална функција садржи израз облика $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $(a \neq 0, b \neq 0)$ или када је област по којој вршимо интеграцију ограничена елипсама облика $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$ или њеним деловима, уводимо уопштене поларне координате $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, па је

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f\,(a\rho\cos\varphi\,, b\rho\sin\varphi)ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi,$$

при чему је D' област у равни $O'\rho\varphi$ која се датом трансформацијом слика у област D у равни Oxy.

Пример 2. На елементарном примеру ћемо илустровати предност коришћења поларних координата у појединим случајевима. Израчунаћемо, применом двоструког интеграла, површину круга одређеног једначином $x^2+y^2=1$.

Најпре ћемо израчунати вредност помоћу двоструког интеграла, без преласка на поларне координате. Област по којој вршимо интеграцију можемо представити у облику $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

$P = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\,x$, па сменом $x = \sin t$, одакле је $\mathrm{d}x = \cos t$ и променом граница добијамо

$$P = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\,x = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}\,t = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\,t}{2}\mathrm{d}\,t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\,t dt$$

$$= t_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2\,t|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 0 = \pi.$$

Наравно, овај резултат смо и очекивали пошто је реч о кругу полупречника 1. С друге стране, ако бисмо рачунали помоћу поларних координата, у област D би се трансформисала област $D' = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, па како су промењљиве међусобно независне тада је

$P = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\mathrm{d}\,\rho = \varphi|_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}|_0^1 = 2\pi\cdot\frac{1}{2}$.

Примећујемо да смо преласком на поларне координате једноставније одредили тражену површину, а уштеда у времену и напору постаје израженија код сложенијих подинтегралних функција и области по којој вршимо интеграцију.

4. Израчунати површину дела Oxy равни одређену са $1 \leq x^2+y^2 \leq 9$ и $x^2-y^2 \leq 0$.

Решење. Област чију површину желимо да израчунамо је део кружног прстена $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, при чему важи да је $x^2-y^2 \leq 0$, односно $|x| \leq |y|$. Дакле област D је ограничена кружницама $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 9$ и правама $y = x$ и $y = -x$. Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi$, у област D се пресликава унија области

$D_1' = \{(\rho,\varphi) \mid 1 \le \rho \le 3, \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}\}$ и $D_2' = \{(\rho,\varphi) \mid 1 \le \rho \le 3, \frac{5\pi}{4} \le \varphi \le \frac{7\pi}{4}\}$. Тада је

$$P = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1'} \rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi + \iint_{D_2'} \rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_1^3 \rho\mathrm{d}\,\rho + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_1^3 \rho\mathrm{d}\,\rho$$

$$= \varphi|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\rho^2}{2}|_1^3 + \varphi|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cdot \frac{\rho^2}{2}|_1^3 = 2\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 4\pi.$$

5. Израчунати површину области D ограничене правама $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ и $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3}$ и кружницом $x^2 - 4x + y^2 = 0$ (посматрати област која садржи центар дате кружнице).

Решење. Дату кружницу можемо записати у облику $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$, односно $(x-2)^2 + y^2 = 4$ па је реч о кружници са центром у тачки $(2,0)$ и полупречника 2. Што се тиче праве $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, примећујемо да је коефицијент правца праве $k = \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}\ 30°$, док је коефицијент правца праве $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3}$ једнак $k = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}\,(-30°)$. Пошто посматрамо унутрашњост кружнице то је скуп тачака које задовољавају неједнакост $x^2 - 4x + y^2 \le 0$, па преласком на поларне координате биће $\rho^2 - 4\rho\cos\varphi \le 0$, што је еквивалентно са $\rho \le 4\cos\varphi$. Тако се у област D датом трансформацијом слика област

$$D' = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \rho \le 4\cos\varphi\,, -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}\}.$$

Дакле, $P = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{4\cos\varphi} \rho\mathrm{d}\,\rho = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\rho^2}{2}|_0^{4\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$

$$= \frac{16}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 16\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2\varphi)\mathrm{d}\,\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi + 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi = 8\varphi|_0^{\frac{\pi}{6}} + 4\sin 2\varphi|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

6. Израчунати запремину тела ограниченог површима $z = 2x^2 + 2y^2$ и $z = 3 - x^2 - y^2$.

Решење. Дате две површи се секу по кривој која представља решење система једначина $z = 2x^2 + 2y^2$ и $z = 3 - x^2 - y^2$, одакле је $2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$, па за пресек добијамо кружницу $x^2 + y^2 = 1$, за $z = 2$. Пројекција на $0xy$ раван, тела чију запремину тражимо представља круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Пошто је тело са горње стране одређено параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$, а са доње параболоидом $z = 2x^2 + 2y^2$, то ће запремина бити

$$V = \iint_D \left((3 - x^2 - y^2) - (2x^2 + 2y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (3 - 3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= 3\iint_D \left(1 - (x^2 + y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

па преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi$ у област D се слика у област $D' = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1{,}0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ па је

$$V = 3\iint_{D'} (1 - \rho^2)\rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi = 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\mathrm{d}\rho = 3\varphi|_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)|_0^1 = 6\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

7. Израчунати запремину тела ограниченог површима $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}$.

Решење. Примећујемо да су елипсоид и конус симетрични у односу на $0xy$ раван па су им и пресеци изнад и испод $0xy$ равни једнаких запремина. Стога је довољно израчунати запремину једног од та два дела и помножити га са 2. Сабирањем једначина $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}$, добијамо да је $2\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) + \frac{z^2}{16} = 1 + \frac{z^2}{16}$ односно да је пресек елипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{1}{2}$, за $\frac{z^2}{16} = \frac{1}{2}$, односно $z = \pm 2\sqrt{2}$. Пројекција на $0xy$ раван је$D = \left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq \frac{1}{2}\right\}$. Преласком на уопштене поларне координате $x = 2\rho\cos\varphi\,, y = 3\rho\sin\varphi$ област $D' = \{(\rho, \varphi) \mid\ 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ се слика у област D.

Запремина тела је једнака

$$V = 2\iint_D \left(4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} - 4\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}\right)$$

што преласком на уопштене поларне координате постаје

$$V = 2\iint_{D'} 4\left(\sqrt{1 - \rho^2} - \rho\right) \cdot 2 \cdot 3\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 48\iint_{D'} \left(\sqrt{1 - \rho^2} - \rho\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 48\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho = 48\cdot 2\pi\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right).$$

Коришћењем смене $1-\rho^2=t^2$ интеграл $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$ се своди на интеграл $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} t^2\,\mathrm{d}t$, па је

$$V = 96\pi\left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} t^2\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right) = 96\pi\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{96\pi}{3}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2} = 16\pi\left(2-\sqrt{2}\right).$$

8. Израчунати запремину тела одређеног са равни $z=b$ и параболоидом $z=a^2-x^2-y^2$, за $a>0, b>0$

Решење. Дате две површи се секу по равни $z=b$. Решавањем система две једначине добијамо $a^2-x^2-y^2=b$, односно $x^2+y^2=a^2-b$. Пројекција на $0xy$ раван, тела чију запремину тражимо представља круг $x^2+y^2\le a^2-b$. Пошто је тело са горње стране одређено параболоидом $z=a^2-x^2-y^2$, а са доње равни $z=b$, то ће запремина бити

$$V = \iint_D \left((a^2-x^2-y^2)-b\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left((a^2-b-(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

па преласком на поларне координате $x=\rho\cos\varphi\,, y=\rho\sin\varphi$ у област D се слика у област $D'=\{(\rho,\varphi)\mid 0\le\rho\le\sqrt{a^2-b}, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ па је

$$V = (a^2-b)\iint_{D'} \rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi - \iint_{D'} \rho^3\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi = (a^2-b)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{a^2-b}} \rho\mathrm{d}\rho - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{a^2-b}} \rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi(a^2-b)\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a^2-b}} - 2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{a^2-b}} = \pi(a^2-b)^2 - \frac{\pi}{2}(a^2-b)^2$$

$$= \frac{\pi}{2}(a^2-b)^2.$$

Прилог 3. *Задаци за тест који је коришћен за истраживања спроведена 2016/2017. и 2017/2018. године*

ТЕСТ

Време за израду теста је 60 минута.
Приликом израде задатака дозвољена је употреба папира и оловке (није дозвољено користити таблицу интеграла, калкулатор...).

<table>
<tr><td rowspan="2">Задаци</td><td colspan="2">Вредновање</td></tr>
<tr><td>Парцијално</td><td>Укупно</td></tr>
<tr><td>1. Израчунати $$\iint_D x^2\, y^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ ако је област D одређена правама $y = x$ и $x = 2$ и хиперболом $xy = 1$.</td><td>Слика и одређивање области по којој се врши интеграција – 0.5 поена
Одређивање граница промењљивих - 1 поен
Спровођење рачунског поступка израчунавања интеграла – 1.5 поена</td><td>3 поена</td></tr>
<tr><td>2. Израчунати запремину тела одређеног графицима површи $f(x, y) = 36 - x^2 - y^2$, изван цилиндра $x^2 + y^2 = 9$ и унутар цилиндра $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, за $z \geq 0$.</td><td>Слика и одређивање области по којој се врши интеграција - 1 поен
Увођење смене помоћу поларних координата и одређивање граница промењљивих - 1 поен
Спровођење рачунског поступка – 2 поена</td><td>4 поена</td></tr>
<tr><td>3. Израчунати запремину тела које се налази у пресеку цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и елипсоида $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.</td><td>Слика и одређивање области по којој се врши интеграција - 1 поен
Увођење смене помоћу поларних координата и одређивање граница промењљивих - 1 поен
Спровођење рачунског поступка – 1 поен</td><td>3 поена</td></tr>
</table>

Прилог 4. *Уводни тест (пре – тест) истраживања спреоведеног 2018/2019. године*

УВОДНИ ТЕСТ

Време за израду теста је 30 минута.
Сваки задатак се бодује са по 10 поена.
Приликом израде задатака дозвољена је употреба папира и оловке (није дозвољено користити таблицу интеграла, калкулатор...).

Задаци	Вредновање	
	Парцијално	Укупно
1. Израчунати $$\int_{-1}^{1}(2x^3-4x+4)\ \mathrm{d}x.$$	Примена методе декомпозиције – 4 поена Познавање табличних интеграла – 3 поена Примена Њутн – Лајбницове формуле – 3 поена	10 поена
2. Израчунати $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\,\mathrm{d}x.$$	Примена методе смене – 4 поена Познавање табличног интеграла – 2 поена Примена Њутн – Лајбницове формуле – 4 поена	10 поена
3. Израчунати $$\int_{0}^{1}\ln x\ \mathrm{d}x.$$	Примена методе парцијалне интеграције – 4 поена Познавање табличног интеграла – 2 поена Примена Њутн – Лајбницове формуле – 4 поена	10 поена

Прилог 5. *Наставни материјал Вишеструки интеграли коришћен током истраживања 2018/2019. године*

Задаци

1. Израчунати површину дела равни одређену кривом $y = \frac{1}{x}$ и правама $x = 2$ и $y = x$.

Решење. Потребно је, дакле израчунати $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, при чему је D област у равни $0xy$, одређена кривом $y = \frac{1}{x}$ и правама $x = 2$ и $y = x$. Како се права $y = x$ и крива $y = \frac{1}{x}$ секу у тачки $(1, 1)$, област по којој вршимо интеграцију дефинисана је на следећи начин: $D = \{(x, y)|\ 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$, па је површина једнака

$$P = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 y\,|_{\frac{1}{x}}^{x}\, \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x\ \mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}|_1^2 - \ln x\,|_1^2 = \frac{1}{2}(4-1) - \ln 2 + \ln 1 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

2. Израчунати површину дела равни одређену параболом $y^2 = 2x$ и правама $y = 12 - x$ и $y = 4 - x$.

Решење. Решавањем одговарајућих система једначина добијамо да се парабола $y^2 = 2x$ и права $y = 4 - x$ секу у тачкама $(2{,}2)$ и $(8, -4)$, односно да се парабола $y^2 = 2x$ и права $y = 12 - x$ секу у тачкама $(8{,}4)$ и $(18, -6)$. Стога је потребно област D поделити на две дисјунктне области D_1 и D_2 дефинисане на следећи начин:

$D_1 = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$;

$D_2 = \{(x, y) \mid 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}$.

Тада је

$$P = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_2^8 \left(\int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x + \int\limits_8^{18} \left(\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_2^8 y|_{4-x}^{\sqrt{2x}}\ \mathrm{d}x + \int_8^{18} y|_{-\sqrt{2x}}^{12-x}\ \mathrm{d}x = \int_2^8 \left(\sqrt{2x} - 4 + x\right)\ \mathrm{d}x + \int_8^{18} \left(12 - x + \sqrt{2x}\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= \left(\sqrt{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4x + \frac{x^2}{2}\right)|_2^8 + \left(12x - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)|_8^{18}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(16\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) - 4(8-2) + \frac{1}{2}(64-4) + 12(18-8) - \frac{1}{2}(324-64)$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(54\sqrt{2} - 16\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}52\sqrt{2} - 4 = \frac{208}{3} - 4 = \frac{196}{3}.$$

3. Израчунати $\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ где је област D одређена са $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Решење. Област по којој се врши интеграција представља кружни прстен $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, па је област D ограничена кружницама $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$.Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, у област D се пресликава област $D_1 = \{(\rho,\varphi) \mid 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Тада је

$$\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} \rho^2\cos^2\varphi\,\rho^2\sin^2\varphi\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \iint_{D_1} \rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \int_1^2 \rho^5\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\sin 2\varphi)^2 d\varphi \cdot \frac{\rho^6}{6}|_1^2$$

$$= \frac{2^6-1}{6}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{63}{24}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{63}{24}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 4\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{21}{16}\varphi|_0^{2\pi} - \frac{21}{64}\sin 4\varphi|_0^{2\pi} = \frac{42\pi}{16} = \frac{21\pi}{8}.$$

4. Израчунати површину дела Oxy равни одређену са $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ и $x^2 - y^2 \leq 0$.

Решење. Област чију површину желимо да израчунамо је део кружног прстена $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, при чему важи да је $x^2 - y^2 \leq 0$, односно $|x| \leq |y|$. Дакле област D је ограничена кружницама $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ и правама $y = x$ и $y = -x$. Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, у област D се пресликава унија области

$D_1' = \{(\rho,\varphi) \mid 1 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\}$ и $D_2' = \{(\rho,\varphi) \mid 1 \leq \rho \leq 2, \frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}\}$. Тада је

$$P=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1'}\rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi+\iint_{D_2'}\rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2\rho\mathrm{d}\,\rho+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2\rho\mathrm{d}\,\rho$$

$$=\varphi|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\rho^2}{2}|_1^2+\varphi|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\cdot\frac{\rho^2}{2}|_1^2=2\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

5. Израчунати површину области D ограничене правама $y=\frac{x\sqrt{3}}{3}$ и $y=-\frac{x\sqrt{3}}{3}$ и кружницом $x^2-4x+y^2=0$ (посматрати област која садржи центар дате кружнице).

Решење. Дату кружницу можемо записати у облику $x^2-4x+4+y^2=4$, односно $(x-2)^2+y^2=4$ па је кружница са центром у тачки $(2,0)$ и полупречника 2. Што се тиче праве $y=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, примећујемо да је коефицијент правца праве $k=\frac{\sqrt{3}}{3}=\mathrm{tg}\ 30°$, док је коефицијент правца праве $y=-\frac{x\sqrt{3}}{3}$ једнак $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}=\mathrm{tg}\,(-30°)$. Пошто посматрамо унутрашњост кружнице то је скуп тачака које задовоqавају неједнакост $x^2-4x+y^2\le 0$, па преласком на поларне координате биће $\rho^2-4\rho\cos\varphi\le 0$, што је еквивалентно са $\rho\le 4\cos\varphi$. Тако се у област D датом трансформацијом слика област

$$D'=\{(\rho,\varphi)\mid 0\le\rho\le 4\cos\varphi\,,-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}\}.$$

Дакле, $P=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho\mathrm{d}\,\rho=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\rho^2}{2}|_0^{4\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=$

$$=\frac{16}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=16\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\varphi)\mathrm{d}\,\varphi=$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi+8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi=8\varphi|_0^{\frac{\pi}{6}}+4\sin 2\varphi|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}.$$

6. Израчунати запремину тела ограниченог површима $z=x^2+y^2$ и $z=3-x^2-y^2$.

Решење. Дате две површи се секу по кривој која представља решење система једначина $z=x^2+y^2$ и $z=3-x^2-y^2$, одакле је $x^2+y^2=3-x^2-y^2$, па за пресек добијамо кружницу $x^2+y^2=\frac{3}{2}$, за $z=\frac{3}{2}$. Пројекција на $0xy$ раван, тела чију запремину тражимо представља круг $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$. Пошто је тело са горње стране одређено параболоидом $z=3-x^2-y^2$, а са доње параболоидом $z=x^2+y^2$, то ће запремина бити

$$V=\iint\limits_{D}\left((3-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(3-2x^2-2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$=\iint\limits_{D}\left(3-2(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

па преласком на поларне координате $x=\rho\cos\varphi\,,y=\rho\sin\varphi$ у област D се слика у област $D'=\{(\rho,\varphi)\mid 0\le\rho\le\sqrt{\frac{3}{2}},0\le\varphi\le 2\pi\}$ па је

$$V=\iint\limits_{D'}(3-2\rho^2)\rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}(3\rho-2\rho^3)\mathrm{d}\rho=\varphi|_0^{2\pi}\left(\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{2}\right)|_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$
$$=2\pi\left(\frac{9}{4}-\frac{\frac{9}{4}}{2}\right)=\frac{9\pi}{4}.$$

7. Израчунати интеграл $\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ где је област D ограничена елипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решење. Преласком на уопштене поларне координате $x=a\rho\cos\varphi\,,y=b\rho\sin\varphi$ у област D се слика у област $D'=\{(\rho,\varphi)\mid 0\le\rho\le 1{,}0\le\varphi\le 2\pi\}$ па је

$$\iint\limits_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\,\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$=ab\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho=2ab\pi\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho.$$

Увођењем смене $1-\rho^2=t^2$, добијамо

$$2ab\pi\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho=-2ab\pi\int\limits_1^0 t^2\mathrm{d}t=-2ab\pi\frac{t^3}{3}|_1^0=\frac{2ab\pi}{3}.$$

8. Израчунати запремину области коју одређују равни $x=0,y=0,z=0$ и $x+y+z=1$.

Решење. Област је са горње стране одређена са равни $x+y+z=1$, а са доње са $z=0$, тако да ћемо запремину одредити двоструким интегралом $\iint_D(1-x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Што се тиче области D она је у $0xy$ равни одређена правама $x=0, y=0$ и $x+y=1$, односно графиком линеарне функције $y=1-x$. Дакле област D можемо дефинисати на следећи начин:

$D=\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ па је

$$P=\iint_D (1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1 \left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(1-x-x+x^2-\frac{1-2x+x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

9. Израчунати интеграл $\iiint_V \sin(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ где је област V одређена равнима $x=0, y=0, z=0, x=\pi, y=\pi$ и $z=\pi$.

Решење. Област по којој се врши интеграција представља коцку ивице π која се налази у првом октанту. Тада је $V=\{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi,\ 0 \leq y \leq z\}$.

$$\iiint_V \sin(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^\pi \mathrm{d}y\int_0^\pi \sin(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^\pi (-\cos(x+y+z))\big|_0^\pi \mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^\pi (-\cos(x+y+\pi)+\cos(x+y))\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi (-\sin(x+y+\pi)+\sin(x+y))\big|_0^\pi \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi (-\sin(x+2\pi)+2\sin(x+\pi)-\sin x)\mathrm{d}x=-4\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x=4\cos x\big|_0^\pi$$

$$=4(-1-1)=-8.$$

10. Израчунати масу тела које се налази у пресеку конуса $z^2 = x^2 + y^2$ и равни $z = 1$ ако је густина тела дата функцијом $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решење. Примена троструких интеграла се огледа и у одређивању масе тела ако је позната функција густине тог тела. Тада је маса једнака $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Област по којој се врши интеграција се налази испод равни $z = 1$, а изнад горње гране конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Увођењем смене помоћу цилиндричних координата $x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi, z = z$, област по којој се врши интеграција слика се у област $V' = \{(\rho, \varphi, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \rho \leq z \leq 1\}$. Тада је

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{V'} \rho^2\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2\mathrm{d}\rho \int_\rho^1 \mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2\mathrm{d}\rho z|_\rho^1 = 2\pi \int_0^1 \rho^2(1 - \rho)\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3)\mathrm{d}\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right)|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

11. Израчунати запремину тела које се налази у пресеку цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, параболоида $z = x^2 + y^2$ и равни $z = 0$.

Решење. Дато тело представља скуп тачака које се налазе унутар цилиндра, изнад *Oxy* равни и испод параболоида $z = x^2 + y^2$. Очигледно је да се цилиндар и параболоид секу по равни $z = 1$ што се добија решавањем одговарајућег система једначина, па је пројекција траженог тела на *Oxy* раван круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Увођењем смене помоћу цилиндричних координата $x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi, z = z$, област по којој се врши интеграција слика се у област $V' = \{(\rho, \varphi, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \rho^2\}$. Тада је запремина траженог тела једнака

$$\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V'} \rho^2\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2\mathrm{d}\rho \int_0^{\rho^2} \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^1 \rho^2\mathrm{d}\rho z|_0^{\rho^2} = 2\pi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^4\mathrm{d}\rho = 2\pi\frac{\rho^5}{5}|_0^1 = 2\pi\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

12. Израчунати интеграл $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ако је област V ограничена са површи $x^2+y^2+z^2=z$.

Решење. Дата површ се елементарним трансформацијама може представити у обллику $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Увођењем смене помоћу сферних координата $x=\rho\cos\varphi\sin\theta\,,y=\rho\sin\varphi\sin\theta, z=\rho\cos\theta$, из $x^2+y^2+z^2\leq z$ добијамо да је $\rho\leq\cos\theta$, па се област по којој се врши интеграција слика у $V'=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\mid 0\leq\rho\leq\cos\theta\,,0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$. Тада је запремина траженог тела једнака

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{V'}\rho\,\rho^2\ \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Увођењем смене $\cos\theta=t$, добијамо

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\ =-\frac{\pi}{2}\int_1^0 t^4\mathrm{d}\rho\ =-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^5}{5}\Big|_1^0=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{10}.$$

13. Одредити запремину тела ограниченог површима $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=2z$.

Решење. Обе површи представљају сфере, прва је јединична са центром у координатном почетку, док се друга површ након елементарних трансформација може представити у обллику $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Увођењем смене помоћу сферних координата $x=\rho\cos\varphi\sin\theta\,,y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=\rho\cos\theta,$ једначина сферне површи $x^2+y^2+z^2=1$ постаје $\rho=1$, док површ $x^2+y^2+z^2=2z$ постаје $\rho=2\cos\theta$. Очигледно је да се пресек налази изнад *Oxy* раван и да тело додирује дату раван па је $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Пресек две сферне површи добијамо решавањем система $\rho=2\cos\theta$ и $\rho=1$ одакле је $\cos\theta=\frac{1}{2}$, па на основу услова $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ следи да је $\theta=\frac{\pi}{3}$. Закључујемо да се скуп тачака које се налазе у пресеку две сфере може представити као унија два дисјунктна скупа:

$V'_1=\{(\rho,\varphi,\theta)\mid 0\leq\rho\leq 1,0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\}$,

$V'_2=\{(\rho,\varphi,\theta)\mid 0\leq\rho\leq 2\cos\theta\,,0\leq\varphi\leq 2\pi,\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$.

$$\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V'_1} \rho^2 \ \sin\theta \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$+ \iiint_{V'_2} \rho^2 \ \sin\theta \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2 \mathrm{d}\rho$$

$$+ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 \mathrm{d}\theta + 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{3}$$

$$+ \frac{16\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{16\pi}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{0} t^3 \mathrm{d}\rho \ = \frac{\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{t^4}{4}\Big|_{\frac{1}{2}}^{0}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{1}{64} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}.$$

Прилог 6. *Анкета која је коришћена за стицање увида у ставове и мишљења студената о примени мобилних уређаја у циљу учења вишеструких интеграла, спроведена у склопу истраживања из 2018/2019. године*

АНКЕТА

Циљ истраживања је добијање повратне информације о примени мобилних уређаја у високошколском образовању. Молимо Вас да будете искрени и да пажљиво одговорите на свако питање. Молимо Вас да пажљиво прочитате сваку реченицу и да оцените степен слагања са следећим исказима, на основу свог мишљења и својих ставова, на скали од 1 до 5.

Пол (заокружити): Предмет слушам 1. пут:

М Ж а) да; б) не.

	уопште се не слажем	углавном се не слажем	нисам сигура н/а	углавно м се слажем	слажем се у потпу-ности
Q1. Допало ми се што сам уз помоћ мобилног уређаја могао/ла да посматрам графике на којима су представљене површи и њихови пресеци.	1	2	3	4	5
Q2. Допало ми се што сам имао/ла могућност да изаберем скупове тачака који ће бити приказани на графику (равни, површи, кругове, фигуре, пресеке), односно што сам имао/ла могућност да неке сакријем, а неке да прикажем.	1	2	3	4	5
Q3. Свидела ми се комуникација са колегама и асистентом на часу на коме смо користили мобилне уређаје.	1	2	3	4	5
Q4. Учење уз помоћ мобилног уређаја ми је било интересантно.	1	2	3	4	5
Q5. Сматрам да је примена мобилних уређаја на часу имала своје предности.	1	2	3	4	5
Q6. Сматрам да је независност од времена и места учења путем мобилних уређаја његова предност.	1	2	3	4	5
Q7. Сматрам да је примена мобилних уређаја на часу имала своја ограничења.	1	2	3	4	5
Q8. Сматрам да је примена мобилних уређаја на часу практична.					
Q9. Материјале које нам је асистент проследио и које смо могли да користимо и након часа уз помоћ мобилних уређаја сам користио/ла и касније при спремању испита.	1	2	3	4	5

Q10. Сматрам да бих уз помоћ мобилног уређаја лакше и брже усвојио/ла и садржаје који се тичу интеграције функција више променљивих (криволинијски и површински интеграл).	1	2	3	4	5
Q11. Сматрам да бих уз помоћ мобилног уређаја лакше и брже усвојио/ла и садржаје који се тичу интеграције функција једне променљиве (одређени интеграл).	1	2	3	4	5
Q12. Сматрам да бих уз помоћ мобилног уређаја лакше и брже усвојио/ла и садржаје који се тичу извода функције једне променљиве.	1	2	3	4	5
Q13. Сматрам да бих уз помоћ мобилног уређаја лакше и брже усвојио/ла и садржаје који се тичу аналитичке геометрије (права, раван, сфера и њихови међусобни односи).	1	2	3	4	5
Q14. Сматрам да бих уз помоћ мобилног уређаја лакше и брже усвојио/ла и садржаје који се тичу диференцијалне геометрије (векторске функције, тангента криве, праве и равни фундаменталног триедра криве).	1	2	3	4	5
Q15. Сматрам да бих уз помоћ мобилног уређаја лакше и брже усвојио/ла и неке садржаје из стручних предмета.	1	2	3	4	5

Прилог 7. *Уводни тест (пре – тест) истраживања спроведеног 2019/2020. године*

УВОДНИ ТЕСТ

Време за израду теста је 30 минута.
Сваки задатак се бодује са по 5 поена.
Приликом израде задатака дозвољена је употреба папира и оловке (није дозвољено користити таблицу интеграла, калкулатор...).

Задаци	Вредновање	
	Парцијално	Укупно
1. Израчунати $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \ \mathrm{d}x.$$	Познавање табличног интеграла – 2 поена Примена Њутн – Лајбницове формуле – 3 поена	5 поена
2. Израчунати $$\int_{-1}^{1} (4x^3 + 6x^2 + 3)\,\mathrm{d}x.$$	Примена методе декомпозиције – 2 поена Познавање табличних интеграла – 1 поен Примена Њутн – Лајбницове формуле – 2 поена	5 поена
3. Израчунати $$\int_{0}^{2} e^{2x} \ \mathrm{d}x.$$	Примена методе смене – 2 поена Познавање табличних интеграла – 1 поен Примена Њутн – Лајбницове формуле – 2 поена	5 поена
4. Израчунати $$\int_{0}^{1} \mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}x.$$	Примена методе парцијалне интеграције – 2 поена Познавање табличних интеграла – 1 поен Примена Њутн – Лајбницове формуле – 2 поена	5 поена

Прилог 8. *Наставни материјал Вишеструки интеграли коришћен током истраживања 2019/2020. године*

Задаци

1. Израчунати површину троугла у $0xy$ равни одређеног тачкама $A(2,1), B(4,3)$ и $C(3,4)$.

2. Применом двоструког интеграла одредити површину фигуре ограничене правама $y = x,\ y = 3x, y = 2 - x,\ y = 4 - x$.

3. Израчунати запремину области коју одређују равни $x = 0, y = 0, z = 0$ и $x + y + z = 10$.

4. Израчунати запремину тела одређеног површима $z = x + y,\ y = \frac{x}{2},\ y = \frac{1}{x}$ и равнима $x = 4$ и Oxy.

5. Израчунати запремину тела одређеног графиком функције, односно површи $z = 2^{x+y}$ и равнима $z = 0, x = -1, x = 1, y = 0, y = 1$.

6. Израчунати, применом двоструког интеграла, површину круга одређеног једначином $x^2 + y^2 = 9$.

7. Израчунати површину дела $0xy$ равни одређену са $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ и $x^2 - y^2 \leq 0$.

8. Израчунати површину области D ограничене правама $y = x\sqrt{3}$ и $y = -x\sqrt{3}$ и кружницом $x^2 + 2x + y^2 = 0$ (посматрати област која садржи центар дате кружнице).

9. Израчунати запремину тела ограниченог површима $z = 3x^2 + 3y^2,\ z = 8 - x^2 - y^2$.

10. Израчунати запремину тела ограниченог површима $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}$.

11. Применом троструког интеграла израчунати запремину тела одређеног параболоидом $z = a^2 - x^2 - y^2$ и равни $z = b$, за $a > 0, b > 0$.

12. Применом троструког интеграла одредити запремину тела ограниченог равнима $x + 2y + z = 2, x = 2y,\ x = 0,\ z = 0$.

13. Применом троструког интеграла одредити запремину тела ограниченог цилиндром $y = \sqrt{x}$ и равнима $z = 1 - y,\ y = 1,\ z = 0, x = 0$.

14. Израчунати

$$\iiint_V (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

ако је област V одређена једначинама $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = 2$.

15. Одредити запремину тела ограниченог површима $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

16. Одредити запремину тела изнад конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и унутар сфере $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Прилог 9. *Задаци за тест који је коришћен за истраживање спроведено 2019/2020. године*

ТЕСТ

Време за израду теста је 150 минута.
Приликом израде задатака дозвољена је употреба папира и оловке (није дозвољено користити таблицу интеграла, калкулатор...).

Задаци	Вредновање	
	Парцијално	Укупно
1. Дефинисати област D у равни xOy ако је дата област одређена правом $x = 2$, параболом $y = x^2$ и хиперболом $xy = 1$.	Слика - 1 поен Одређивање граница промењљивих - 2 поена	3 поена
2. Скуп тачака $D = \{(x, y)\mid 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x\}$ представити у облику $D' = \{(x, y)\mid \alpha(y) \le x \le \beta(y), c \le y \le d\}$, односно тако да променљива y буде независна, а x зависна променљива.	Слика - 1 поен Одређивање граница промењљивих на задати начин - 2 поена	3 поена

3. Увођењем смене помоћу поларних координата одредити скуп одговарајућих уређених парова (ρ, φ) који се сликају у област D у равни xOy: а) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 12\}$; б) $D = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.	а) Слика - 1 поен Одређивање граница промењљивих на задати начин - 2 поена б) Слика - 1 поен Одређивање граница промењљивих на задати начин - 2 поена	6 поена
4. Увођењем смене помоћу цилиндричних координата одредити: а) уређену тројку (ρ, φ, z) која одговара тачки $M(1, -1, 4)$; б) скуп уређених тројки (ρ, φ, z) који се слика у област V одређену конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, цилиндром $x^2 + y^2 = 16$ и равни $z = 0$.	а) Тачна смена промењљивих - 1 поен Одређивање вредности промењљивих помоћу цилиндричних координата- 2 поена б) Слика - 1 поен Одређивање граница промењљивих на задати начин – 2 поена	6 поена
5. Одредити скуп уређених тројки (ρ, φ, θ) који се слика у област V одређену једна-чинама $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ и $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, након увођења смене помоћу сферних координата.	Слика - 1 поен Одређивање граница промењљивих - 2 поена	3 поена
6. Израчунати $$\iint\limits_D x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ ако је област D одређена $x -$осом, правом $x = e$ и графиком функције $y = lnx$.	Слика - 1 поен Одређивање граница промењљивих - 2 поена Спровођење рачунског поступка израчунава-ња интеграла – 3 поена	6 поена
7. Израчунати $$\iint\limits_D \cos(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ ако област D представља део унутрашњости централне кружнице полупречника 3, за $y > 0$.	Слика - 1 поен Увођење смене помоћу поларних координата – 1 поен Одређивање граница промењљивих - 1 поена Спровођење рачунског поступка израчунава-ња интеграла – 3 поена	6 поена
8. Израчунати запремину тела одређеног графиком површи $f(x, y) = xy$ и равнима $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$.	Слика и одређивање граница промењљивих - 2 поена Спровођење рачунског поступка израчунава-ња интеграла – 4 поена	6 поена

9. Израчунати $$\iiint_V e^z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$ ако је област V одређена једначинама $z = 1 + x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 = 5$.	Слика - 1 поен Увођење смене помоћу цилиндричних координата – 1 поен Одређивање граница променљивих - 1 поена Спровођење рачунског поступка израчунава-ња интеграла – 3 поена	6 поена
10. Израчунати $$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$ ако област V представља унутрашњост сфере са центром у координатном почетку полупречника 5.	Слика и увођење смене помоћу сферних координата – 1 поена Одређивање граница променљивих - 1 поена Спровођење рачунског поступка израчунава-ња интеграла – 3 поена	5 поена

Биографија

Александар Миленковић рођен је 17.03.1988. године у Крушевцу. Основну школу "Јован Јовановић-Змај" завршио је као носилац дипломе Вук Караџић, а потом Медицинску школу у Крушевцу, смер фармацеутски техничар, завршио је са одличним успехом. По завршетку средње школе уписао је студије математике на Природно-математичком факултету у Крагујевцу. Основне академске студије је завршио 2010. године са просеком 8,35 и исте године уписао је мастер академске студије на истом факултету. Мастер академске студије, модул професор математике завршио је 2012. године са просечном оценом 9,69. Академске 2012/2013. године уписао је докторске академске студије Методике наставе математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду.

Од маја 2013. године до децембра 2013. године радио је као истраживач - приправник, а од децембра 2013. године у звању асистента за ужу научну област Методика, историја и филозофија математике у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу. Ангажован је био на извођењу вежби из групе математичких предмета, и то на Агрономском факултету у Чачку Универзитета у Крагујевцу у периоду од 2013. до 2015. године и на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу од 2015. године. Члан је редакције часописа *Тангента* за популаризацију математике, који издаје Друштво математичара Србије, а који је намењен ученицима средњих школа, од 2013. године. Од школске 2012/2013. године ангажован је у Математичкој Радионици Младих у раду са талентованим ученицима основних школа при Природно – математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. Рад са децом надареном за математику је обављао и као ментор ученицима основних и средњих школа у Регионалном центру за младе таленте у Крагујевцу, у периоду од 2012. до 2015. године. Реализатор је више семинара стручног усавршавања наставника основних и средњих школа. Коаутор је три приручника (за пети, шести и седми разред основне школе) за наставнике математике, као и писаних дневних припрема за часове прве и друге године гимназије. Испред Института за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу редовни је учесник свих активности (Ноћ истраживача, Ноћ музеја, фестивали и сајмови науке, истраживачки семинари у оквиру истраживачког центра Гоч...) на промоцији математике и студијских програма. Аутор је два пројекта (прве категорије) који су добили финансијску подршку за реализацију у научним клубовима у сарадњи са Центром за промоцију науке у 2020. години.

Научни радови објављени у научним часописима:

Aleksandar Milenković, Đurđica Takači & Radoslav Božić (2020) *On the influence of software application for visualization in teaching double integrals*, Interactive Learning Environments, DOI: 10.1080/10494820.2020.1719164

Слађана Б. Димитријевић, Далиборка Р. Поповић, **Александар З. Миленковић** (2018) *Учење математике ван школе кроз израду домаћих задатака и похађање приватних часова*, Педагошко друштво Србије, vol. LXVII, no. 1pp. 95 - 111. udc: 371.322.1:51, doi: 10.5937/nasvas1801095D, 2018

Саопштења на научним скупова штампана у целини:

Aleksandar Milenković, Đurđica Takači, *The Effects of Integrating Mobile Technology for Determining the Boundaries of Multiple Integrals*, Conference of MIPRO 2019: 42nd International ICT Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics, Opatija, Croatia (May 20-24, 2019), "MIPRO Proceedings", ISSN No. 1847-3946, on pages 851-856 (publisher: Croatian Society for Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics – MIPRO, Rijeka, Croatia, 2019).

Aleksandar Milenković and Sladjana Dimitrijević: *Advantages and disadvantages of heuristic teaching in relation to traditional teaching - the case of the parallelogram surface*, Scientific Conference "Research in Mathematics Education" Proceedings pp. 74 – 87, Mathematical Society of Serbia, Belgrade, Serbia May 10 – 11, 2019, ISBN 978-86-6447-017-9.

Aleksandar Milenković, Branislav Popović, Slađana Dimitrijević, Nenad Stojanović, *Binomial coefficients and their visualization*, Proceedings of the Training Conference History of Mathematics Education, Faculty of Education, University of Kragujevac, Jagodina, pp. 41 – 45, isbn: 978-86-7604-176-3, Jagodina, 26. – 30. 10. 2018.

Саопштења на научним скупова штампана у изводу:

Aleksandar Milenković, Đurđica Takači: *On the influence of software application for visualization in teaching double and triple integrals*, 14SMAK: 14 th Serbian mathematical congress, Kragujevac, Srbija, May 16 – 19. 2018, ISBN 978-86-6009-055-5

Aleksandar Milenković, Nenad Stojanović, Marija Stanić, Branislav Popović: *Analysis of students mathematical problem-solving success in relation to gender and age*, 14SMAK: 14 th Serbian mathematical congress, Kragujevac, Srbija, May 16 – 19. 2018, ISBN 978-86-6009-055-5

Marina Maksimović, Nevena Djurić, Ivana Živković, **Aleksandar Milenković**, Branislav Popović, Sladjana Dimitrijević: *Intuition about probability in elementary school children*, 14SMAK: 14 th Serbian mathematical congress, Kragujevac, Srbija, May 16 – 19. 2018, ISBN 978-86-6009-055-5

Aleksandar Milenković, *Mathematical modelling with Mathematica*, Non-standard forms of teaching mathematics and physics: experimental and modeling approach, Novi Sad, Srbija, 07. 02. 2015.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број: **РБР**	
Идентификациони број: **ИБР**	
Тип документације: **ТД**	Монографска публикација
Тип записа: **ТЗ**	Текстуални штампани документ
Врста рада: **ВР**	Докторска дисертација
Аутор: **АУ**	Александар Миленковић
Ментор: **МН**	др Ђурђица Такачи, редовни професор
Наслов рада: **НР**	Визуализација наставних садржаја из вишеструких интеграла – когнитивни конфликти
Језик публикације: **ЈП**	српски (ћирилица)
Језик извода: **ЈИ**	српски/енглески
Земља публиковања: **ЗП**	Република Србија
Уже географско подручје: **УГП**	Војводина
Година: **ГО**	2021.
Издавач: **ИЗ**	ауторски репринт
Место и адреса: **МА**	Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 3, Нови Сад

Физички опис рада: (бр. поглавља / страница / цитата / табела / слика / графикона / прилога)
ФО (6 / 180 / 155 / 16 / 77 / 14 / 9)

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Методика наставе математике
НД

Предметна одредница/ кључне речи: Визуализација, вишеструке репрезентације, динамички софтвер, образовни софтвер, вишеструки интеграли, домен интеграције
РО
UDK

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, ПМФ-а у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена: Нема
ВН

Извод:
ИЗ
У докторској дисертацији елаборирано је вишегодишње истраживање које се односи на примену дигиталних технологија у настави математатике у високом образовању. У истраживањима су коришћене различите технологије, у смислу степена интеракције студената са дигиталним садржајима, типовима дигиталних садржаја и пружања могућности за мобилним учењем, односно учењем на даљину, све са циљем унапређења квалитета знања и постигнућа студената у области вишеструких интеграла. Како се велики број истраживања бави применом, односно имплементацијом савремених технологија у наставни процес уопште, па и наставу математике, док су истраживања која се конкретно баве унапређивањем наставе из области вишеструких интеграла слабо заступљена у литератури, осмишљени су нови методски приступи и истраживане могућности њихове примене са циљем да се на тај начин студентима олакша усвајање потребних знања и умења. У докторској дисертацији описане су наставне методе које се заснивају на примени динамичких наставних материјала у одређивању области по којој се врши интеграција и одређивању граница промењливих приликом израчунавања двоструких и троструких интеграла. Коришћењем адекватних динамичких софтвера, односно софтверских пакета, израђени су наставни материјали који се могу користити у настави математике на универзитетском нивоу. Спроведена су појединачна истраживања са циљем да се испита и утврди степен утицаја примене нових приступа у визуализацији наставних садржаја који се односе на вишеструке интеграле. Детаљно су статистички анализирани резултати сваког од поменутих истраживања. На основу добијених резултата изведени су закључци и дата закључна разматрања, као и смернице за имплементацију датих методских приступа у настави и евентуална будућа истраживања о визуализацији наставних садржаја.

Датум прихватања теме од стране НН већа: **ДП**	12.12.2019.
Датум одбране: **ДО**	
Чланови комисије: **КО**	
Председник:	проф. др Зорана Лужанин, ред. проф., ПМФ, Нови Сад
члан:	проф. др Ђурђица Такачи, ред. проф., ПМФ, Нови Сад
члан:	проф. др Мирјана Штрбоја, ванр. проф., ПМФ, Нови Сад
члан:	проф. др Светлана Шпановић, ред. проф., Педагошки факултет у Сомбору
члан:	проф. др Рале Николић, ванр. проф., Универзитет Метрополитан, Београд

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic publication
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Content code: PhD thesis
CC

Author: Aleksandar Milenković
AU

Mentor/comentor: Đurđica Takači, PhD, full professor
MN

Title: Visualization of the multiple integrals - cognitive conflicts
TI

Language of text: Serbian (cyrilic)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2021.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 3, Novi Sad
PP

Physical description: (chapters / pages / references / tables / figures / graphics / appendices)
PD (6 / 180 / 155 / 16 / 77 / 14 / 9)

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Teaching methodology of mathematics
SD

Subject/ Key words: Visualizatiion, multiple representations, dynamic software, educational software, multiple integrals, domain of integration
SKW
UC

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Novi Sad
HD

Note: none
N

Abstract:
AB

In the doctoral thesis, research related to the application of digital technologies in the teaching of mathematics in higher education is elaborated. Different technologies had been used in the research. Degree of interaction of students with digital content was varied, various types of digital content and providing opportunities for mobile learning, ie distance learning, all with the aim of improving the quality of knowledge and student achievement in solving multiple integrals. Considering that a lot of researches dealt with the application and implementation of modern technologies in the teaching process in general, in teaching mathematics as well, while research dealing specifically with the improvement of teaching and learning multiple integrals is poorly presented in the literature, the new methodological approaches and possibilities of their application were explored in order to make it easier for students to acquire the necessary knowledge and skills. In the doctoral thesis teaching methods based on the application of dynamic teaching materials in determining the domain of integration and determining the boundaries of variables before calculating double and triple integrals are described. Using adequate dynamic software, and software packages, teaching materials have been developed in order to be used in teaching mathematics at the university level. Researches were conducted in order to examine and determine the degree of impact of the application of new methodological approaches in the visualization of teaching and learning multiple integrals. The results of each of the mentioned research were statistically analyzed. Based on the obtained results, final conclusions are provided which contain a discussion of the results of the conducted research, as well as guidelines for the implementation of the given methodological approaches in teaching and possible future research on the visualization of teaching contents.

Accepted by the Scientific Board: 12.12.2019.
ASB

Defended on:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Zorana Lužanin, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member:	Đurđica Takači, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member:	Mirjana Štrboja, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member:	Svetlana Španović, PhD, full professor, Faculty of Education in Sombor
Member:	Rale Nikolić, PhD, associate professor, Metropolitan University, Belgrade

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Визуализација наставних садржаја из вишеструких интеграла – когнитивни конфликти
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, ул. Сестре Јањића бр. 6, 34000 Крагујевац, Србија
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Докторске студије методике наставе математике
1. Опис података

1.1 Врста студије

Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају

Подаци прикупљени у оквиру истраживања која се односе на примену дигиталних технологија у настави математатике у високом образовању, конкретно на примену софтверских пакета и апликација за визуализацију наставних садржаја из вишеструких интеграла. Подаци се односе на постигнућа студената из математике, конкретно из области вишеструких интеграла.

1.2 Врсте података

а) квантитативни

б) квалитативни

1.3. Начин прикупљања података

а) анкете, упитници, тестови

б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи

в) генотипови: навести врсту ___________________________________

г) административни подаци: навести врсту _________________________

д) узорци ткива: навести врсту____________________________________

ђ) **снимци, фотографије: слике радова студената**

е) **текст: литература**

ж) мапа, навести врсту ____

з) остало: описати ____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

a) **Excel фајл, датотека .xlsx**

b) **SPSS фајл, датотека .spv**

c) **PDF фајл, датотека .pdf**

d) **Текст фајл, датотека .docx**

e) **JPG фајл, датотека .jpg, .jpeg**

f) **Остало, датотека .nb, .ggb**

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли **велики број варијабли**

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) **велики број мерења**

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) **не**

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је ________________________________

б) варијабле које се више пута мере односе се на __________________________________

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____________

Напомене: ____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

*а) **Да***

б) Не

Ако је одговор не, образложити ____

____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип **анализа постигнућа студената у зависности од методе рада приликом учења и подучавања наставних садржаја из области вишеструких интеграла**

б) корелационо истраживање, навести тип **корелациона анализа прикупљених података о постигнућима студената из вишеструких интеграла**

ц) анализа текста, навести тип **прикупљање података из литературе**

д) остало, навести шта ____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

____

____

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? **Да** Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? **Занемарљив**

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

____

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

Квалитет података је контролисан применом одговарајућих статистичких тестова и валидацијом добијених података.

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

Контрола уноса података у матрицу је изведена поређењем добијених података са подацима из литературе.

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у **Репозиторијум докторских дисертација Универзитета у Новом Саду.**

3.1.2. URL адреса **https://cris.uns.ac.rs/searchDissertations.jsf**

3.1.3. DOI ____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) ***Да***

б) *Да, али после ембарга који ће трајати до* ______________________________

в) *Не*

Ако је одговор не, навести разлог __________________________________

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

____

____

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? ____________________________

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

____

____

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

____

____

____

____

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? __________________________

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да **Не**

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да **Не**

Образложити

____

____

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (*https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html*) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да **Не**

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

____

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да **Не**

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

а) Подаци нису у отвореном приступу

б) Подаци су анонимизирани

ц) Остало, навести шта

____

____

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

*а) **<u>јавно доступни</u>***

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

____

____

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

____

____

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

<u>Ауторство – некомерцијално – дељење под истим условима</u>

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

<u>Александар Миленковић, aca.milenkovic.aca@gmail.com</u>

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

Александар Миленковић, aca.milenkovic.aca@gmail.com

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима

Александар Миленковић, aca.milenkovic.aca@gmail.com