UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO — MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

ALGEBARSKE STRUKTURE OSLABLJENIH MREŽA I PRIMENE

doktorska disertacija

Kandidat: Vera Lazarević

Mentor: Andreja Tepavčević

Novi Sad, 2001.

Porodicama

JOKOVIĆ I LAZAREVIĆ

SADRŽAJ

UVOD

Predmet stalnih algebarskih izučavanja su skupovi na kojima su definisane neke operacije i relacije. Neprazan skup sa operacijama ili relacijama na njemu zove se algebarska struktura. Kao jedan od najjednostavnijih primera takve strukture je parcijalno uređeni skup ili poset. Poset, sa svojstvom da svaki dvoelementni podskup ima najmanje gornje i najveće donje ograničenje je mreža. Još 40-tih godina dvadesetog veka, norveški matematičar O. Ore ([O. Ore]) primetio je da se mnoge matematičke teorije mogu interpretirati upotrebom teoretsko-mrežnih pojmova, pri čemu te interpretacije značajno pojednostavljuju razmatranu teoriju. Širok spektar primene teorije mreža u matematici i srodnim naukama, demonstriran je u knjizi G. Birkofa ([G. Birkhoff]) Teorija mreža (Lattice Theory), izdanja 1940., 1948. i 1967. godine. Poslednjih decenija dvadesetog veka, teorija mreža je duboko srasla sa jednom opštom teorijom algebarskih struktura, konkretno sa onim njenim delom koji se zove univerzalna algebra i čiju osnovu čine varijeteti i kvazivarijeteti.

Tako je, sredinom dvadesetog veka, teorija mreža stasala u posebnu matematičku disciplinu, čiji dalji razvoj ide paralelno u više pravaca među kojima su istraživanje svojstava jačih struktura od mreže (distributivne, modularne, polumodularne, geometrijske, algebarske, Bulove mreže, ...) i strukture slabije od mreže(G. Birkof (1948), N. Kimura ([N. Kimura 1950]), W. Felčer ([W. Felscher 1957]), G. Zas ([G. Százs 1963]), E. Frid ([E. Fried 1970]), G. Grecer ([G. Grätzer 1973]), D. Švajgert ([D. Schweigert 1982]), i drugi).

U ovoj doktorskoj disertaciji razmotrene su još neke klase oslabljenih mreža, pre svega bipolumreža (algebarske strukture sa dve binarne operacije koje su u odnosu na obe operacije polumreže), Birkofovih sistema (bipolumreža u kojima važi oslabljeni zakon apsorpcije), nekih klasa latisoida (mreža sa oslabljenim asocijativnim zakonom), skoro-mreža (sa oslabljenim asocijativnim i komutativnim zakonom) i strukture sa oslabljenim samo komutativnim zakonom.

Dobijeni rezultati, na prirodan način, se vezuju za strukturu slabih kongruencija neke algebre i nalaze primenu u univerzalnoj algebri. Slabe kongruencije su uvedene 1988. u radovima B. Šešelje i G. Vojvodića, i danas se intezivno izučavaju (I. Hajda ([I.Chajda]), B. Šešelja, A. Tepavčević, i dr.).

* * *

Tema ove doktorske disertacije obrađena je kroz četiri poglavlja. Prva dva poglavlja su poznati rezultati iz navedenih oblasti. U zagradi, iza naslova podpoglavlja, navedeni su redni brojevi bibliografskih jedinica iz spiska literature koje su korišćene u tom podpoglavlju. Iza svakog tvrđenja nalazi se oznaka bibliografske jedinice iz koje su preuzeta. Neka od tih tvrđenja, koja su bitnije vezana za temu ovog rada, data su sa dokazom.

Imena autora navode se u originalu (prvo slovo imena i prezime) samo kod prvog pojavljivanja u radu, gde je napisana i transkripcija imena koja se nadalje koristi.

U prvom poglavlju navedene su osnovne definicije i tvrđenja iz teorije mreža i nekih vidova oslabljenih mreža. U prvom, drugom i trećem delu ovog poglavlja daju se osnovni pojmovi iz teorije mreža. U četvrtom delu ovog poglavlja, navođenjem nekoliko tvrđenja, data su svojstva operatora zatvaranja na nekom skupu, koja su korišćena u narednim poglavljima. Peti deo predstavlja kraći osvrt na specijalne elemente mreže, dok u šestom delu posebno su potencirana svojstva distributivnih i kodistributivnih elemenata mreže. Tvrđenja iz ovog dela daju osnovu za definisanje operacije $*$ u trećem poglavlju. Kako glavni rezultati ove doktorske disertacije proizilaze iz definicije operacije $*$, to su u ovom delu dati i dokazi nekih od navedenih tvrđenja. U sedmom i osmom delu dat je kraći prikaz nekih rezultata iz teorije oslabljenih mreža. Razmotrena je veza između poseta i mreže sa oslabljenim asocijativnim i komutativnim zakonom. Ovi rezultati su bitnije uticali na koncepciju izrade ove doktorske disertacije, zbog čega su navedeni i dokazi nekih tvrđenja iz ovog dela. Bipolumreže i Birkofovi sistemi su oblasti većeg interesovanja autora ove disertacije poslednjih godina. Zato su u osmom delu ovog poglavlja navedeni neki rezultati iz teorije bipolumreža, a u narednim poglavljima konstruisane su algebre sa dve binarne operacije, tako što se pošlo od mreže i jedna mrežna operacija je zamenjena operacijom $*$. Sa kraćim osvrtom, ukazano je i na rezultate u pravcu uopštenja zakona apsorpcije u bipolumreži i definisanja Birkofovih sistema. Slabljenjem samo asocijativnog zakona u mreži, došlo se do slabo asocijativnih mreža i u ovom delu navedeni su neki rezultati iz teorije tako oslabljenih mreža. U devetom delu prvog poglavlja navedene su definicije i tvrđenja u vezi sa specijalnim elementima bipolumreže, kao prikaz jednog od načina kako se mogu definisati specijalni elementi jedne uopštene mreže.

U drugom poglavlju, date su primene većine navedenih rezultata iz prvog poglavlja u univerzalnoj algebri. Primene su u vezi sa mrežama kongruencija, podalgebri i slabih kongruencija neke algebre. U prvom delu su osnovne definicije iz ove oblasti. U drugom delu navedena su neka algebarska svojstva (CEP, CIP, wCIP, $*$CIP, UCEP), koja se mogu karakterisati i preko novouvedene operacije $*$. U trećem i četvrtom delu drugog poglavlja navode se brojni rezultati koji osobine algebri karakterišu preko mreže slabih kongruencija. Neke od tih osobina biće u četvrtom poglavlju okarakterisane i preko operacije $*$. U petom delu razmatraju se grafičke kompozicije, uvedene od više autora na različite načine. Ono što im je zajedničko, je geometrijski pristup u rešavanju nekih algebarskih problema. Ovi radovi, kao i jedan razgovor mentora ove doktorske disertacije sa M. Ploščicom ([M. Ploščica]), dali su početni impuls za definisanje operacije $*$, ali ispitivanja njenih svojstava nisu nas odvela u prvobitno očekivanom smeru.

Rezultati trećeg poglavlja su originalni rezultati autora dobijeni u saradnji sa mentorom A. Tepavčević. U prvom delu trećeg poglavlja, polazeći od algebarske mreže sa fiksiranim kodistributivnim elementom, pod određenim uslovima, definisana je operacija $\overline{*}$. Na analogan način, u koalgebarskoj mreži sa fiksiranim distributivnim elementom, ako postoje uslovi, definiše se operacija $\underline{*}$. Ispitivanje njihovih svojstava i rezultati do kojih se došlo, pokazali su da se preko ovih operacija mogu definisati nova uređenja na mreži. Činjenica, da ove operacije nisu bile asocijativne, usmerila je dalja istraživanja ka neasocijativnim uopštenjima mreža, odnosno latisoidima. U drugom delu trećeg poglavlja posmatrana je algebra sa dve binarne operacije: jedna je mrežni infimum, a druga je operacija $\overline{*}$, kao i algebra sa operacijama $\underline{*}$ i mrežni supremum. Pokazano je, da na ovako definisanim algebrama, važi relacija oslabljenog zakona apsorpcije koja karakteriše Birkofove sisteme. Na takvim algebrama, sa dve binarne operacije, definisani su specijalni elementi tih algebri, na način koji je analogan uvođenju specijalnih elemenata bipolumreže u prethodnom poglavlju. U trećem delu ovog poglavlja istraživane su mogućnosti povratka iz te algebre u asocijativnu algebru. Pokušaj da se odrede uslovi pod kojima će novouvedeno uređenje biti mrežno, rešen je pozitivno za konačne i još neke slučajeve.

Svojstva mreže slabih kongruencija neke algebre idu u prilog opravdanosti uvođenja operacija $\overline{*}$ i $\underline{*}$. Ove operacije se prirodno vezuju za mrežu slabih kongruencija neke algebre i predstavljaju specijalne grafičke kompozicije. Stoga rezultati navedeni u četvrtom poglavlju su neposredne posledice rezultata iz trećeg poglavlja. Drugi deo četvrtog poglavlja su tvrđenja koja neka algebarska svojstva (CEP, Hamiltonovo svojstvo, i dr.) karakterišu preko grafičkih kompozicija $\overline{*}$ i $\underline{*}$. Primer 4.2 ilustruje prevođenje mrežnog do parcijalnog uređenja, dok Primer 4.3 je slučaj kada se očuvava mrežno uređenje, ali različito od prvobitnog mrežnog uređenja. U trećem delu četvrtog poglavlja daju se uslovi za očuvanje mrežnog uređenja, pri navedenim transformacijama, na mreži slabih kongruencija neke algebre. Primer 4.4 je nešto složeniji primer na kome se ilustruju svi dobijeni rezultati.

Jedan deo navedenih rezultata je objavljen u koautorstvu sa mentorom ove doktorske disertacije.

Na kraju je navedena literatura sa 83 bibliografske jedinice.

* * *

Želim, na kraju, da spomenem i sve one koji su dali svoj doprinos u nastajanju ove doktorske disertacije.

Višegodišnja saradnja sa Branimirom Šešeljom bitno je uticala na moj izbor ove teme, a njegove sugestije, posle detaljno pročitanog rada, sa zadovoljstvom sam prihvatila i one su značajno poboljšale ovu doktorsku disertaciju.

Svaki moj susret sa Janezom Ušanom bio je za mene novi impuls za dalji rad. Njegovi rezultati u teoriji bipolumreža pobudili su moje interesovanje za istraživanja u ovoj oblasti, koje je i dalje aktuelno. Sugestije koje mi je dao, posle pregledane doktorske disertacije, od značaja su i za moj dalji rad.

Mališa Žižović je pregledao rad, dao više korisnih komentara, pomogao u ispravljanju nekih nekorektnosti i ukazao na neke moguće pravce daljeg istraživanja.

Mladen Janjić mi je značajno pomogao pri završnoj tehničkoj obradi ovog rada.

Želim, na kraju, da izrazim zadovoljstvo što sam imala priliku da sarađujem sa mentorom Andrejom Tepavčević, koja me usmerila u navedenu problematiku, redovno snabdevala potrebnim materijalom, postavljala otvorene probleme (od kojih su neki ovde rešeni), više puta u maksimalno kratkom roku detaljno pregledala rad i nizom korisnih sugestija bitno doprinela njegovom konačnom izgledu.

Koristim i ovu priliku da im se svima zahvalim.

Vera Lazarević

Poglavlje I

MREŽE I OSLABLJENJA MREŽA

1. UVOD

Prvi rezultati iz teorije mreža vezani su za period od 1933-37. i radove G. Birkofa ([G. Birkhoff]), fon Nojmana ([von Neumann]), O. Orea ([O. Ore]), M. H. Stona ([M. H. Stone]) i L. Kantoroviča ([L. Kantorovitch]), koji su uopštenjem Bulove algebre dobili strukturu mreže, a ona se ubrzo pokazala kao jedna fundamentalana struktura moderne algebre. Teorija mreža je osnova za univerzalnu algebru koja se bavi univerzalnim svojstvima algebarskih struktura. Ova grana matematike, poslednjih decenija, vrlo intezivno se razvija.

Uopštenjem nekih mrežnih zakona, dobijaju se algebarske strukture slabije od mreže: skoro-mreže, polumreže, bipolumreže i dr., sve do parcijalno uređenog skupa ili poseta, kao jedne od najjednostavnijih algebarskih struktura. Imajući u vidu sveobuhvatnost ovih struktura, značaj njihovih istraživanja je neosporan, a primena dobijenih rezultata u univerzalnoj algebri sasvim prirodna.

U ovom poglavlju će se navesti definicije i neka osnovna tvrđenja iz teorije mreža, skoro mreža, bipolumreža i Birkofovih sistema i dokazi onih tvrđenja koja su značajna u navedenim oblastima, pa su kao takva korišćena u narednim poglavljima ili su pak dala impuls i uticala na smer istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji. U tom smislu od značaja su radovi: O. Orea (1935), G. Birkofa (1948), W. Felčera ([W. Felscher 1957]), G. Zasa ([G. Száazs 1963]), R. Padmanabana ([R. Padmanabhan 1971]), G. Grecera ([G. Grätzer 1978]), D. Švajgerta ([D. Schweigert 1982]), J. Galuške ([J. Gałuszka 1984]), J. Ušana i A. Tepavčević (1989), B. Šešelje i A. Tepavčević (1998) i dr..

* * *

2. OSNOVNE DEFINICIJE [2-3, 25, 65]

Teoretsko-uređajna, a samim tim i topološka, svojstva algebarskih struktura izražavaju se preko **relacije poretka** $\leq$ (refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija).

Relacija koja je refleksivna i tranzitivna je relacija **kvazi poretka** ili **pred poretka.**

Relacija koja je refleksivna i antisimetrična je relacija **pseudo poretka**. Ako je A neprazan skup i $\leq$ refleksivna i antisimetrična binarna relacija na A, onda je $(A, \leq)$ **pseudo uređeni skup.**

Neprazan skup P, na kome je definisana relacija poretka je **parcijalno uređeni skup** ili **poset** $(P, \leq)$.

Poset $(P, \leq)$ je **totalno (linearno) uređeni skup**, ili kraće **lanac**, ako za sve x i y iz P važi:

$$x \leq y \quad \text{ili} \quad y \leq x.$$

Ako za $x, y \in P$ važi da je $x \leq y$ i $x \neq y$, onda to zapisujemo sa $x < y$ i čitamo „x manje od y ". Koristi se oznaka $x \geq y$ za $y \leq x$ i $x > y$ za $y < x$, i $x > y$ se čita „x veće od y ".

Za elemente a i b poseta $(P, \leq)$[1] kaže se da a **pokriva** b (a **direktan naslednik** b, ili ,b **direktan prethodnik** a), i pišemo $a \succ b$, ako je $a > b$ i ne postoji x iz P takav da je $a > x > b$.

Maksimalan element poseta je onaj od kog nema većeg, a **minimalan** onaj od koga nema manjeg u tom posetu. **Najveći elemenat** je onaj koji je veći od svih (u oznaci 1), a **najmanji** (u oznaci 0) je manji od svih elemenata poseta. Poset ne mora imati 0 i 1, kao ni minimalne i maksimalne elemente. Svaki konačan neprazan podskup Q poseta P uvek ima i maksimalne i minimalne elemente.

Ako je P poset i Q neprazan podskup od P onda je $p \in P$ **gornje ograničenje skupa** Q, ako za svako $q \in Q$, $q \leq p$. Ako postoji najmanji elemenat parcijalno uređenog skupa svih gornjih ograničenja podskupa Q (ako postoje gornja ograničenja), onda se taj elemenat zove **supremum** za Q (u oznaci $\sup Q$).

Dualno se definiše **donje ograničenje** i **infimum** za Q (u oznaci $\inf Q$).

Neka su P i Q dva poseta. Funkcija $f : P \longrightarrow Q$ je **izotona** ako za svako $x, y \in P$

$$\text{iz} \quad x \leq y \quad \text{sledi} \quad f(x) \leq f(y).$$

Poseti P i Q su **izomorfni** ako postoji izotona bijekcija $f : P \longrightarrow Q$ za koju važi: za sve $x, y \in P$

$$\text{iz} \quad f(x) \leq f(y) \quad \text{sledi} \quad x \leq y.$$

Za posete P i Q funkcija $f : P \longrightarrow Q$ je **antiizotona (antitona)** ako za sve $x, y \in P$ iz $x \leq y$ sledi $f(x) \geq f(y)$, a f je **dualni izomorfizam** ako je f antiizotona bijekcija za koju za sve $x, y \in P$ iz $f(x) \leq f(y)$ sledi $x \geq y$.

Konačni poseti mogu se predstaviti **Hase-dijagramom,** usmerenim grafom, čiji čvorovi su elementi skupa, a spojnice su grane koje povezuju elemente u relaciji. Preciznije, Hase-dijagram ilustruje relaciju pokrivanja iz koje se zatim izvodi poredak.

---

[1] Nadalje parcijalno uredjeni skup $(P, \leq)$ označavaće se sa P.

Izomorfni poseti imaju istovetne Hase-dijagrame.

Ideal J poseta P je njegov podskup sa sledećom osobinom:

$$\text{ako je } x \in J \quad \text{i} \quad y \leq x, \text{ onda je } \ y \in J.$$

Skup svih $y \in P$ takvih da je $y \leq x$, za neki fiksirani elemenat x, je **glavni ideal** poseta P (u oznaci $\downarrow x$).

Analogno se definiše **filter** i **glavni filter** poseta P (u oznaci $\uparrow x$).

*

Mreža je parcijalno uređeni skup $(L, \leq)$ u kome za svaka dva elementa $x, y \in L$ postoje infimum (u oznaci $x \wedge y$) i supremum (tj. $x \vee y$).

Mreža je **kompletna** ako za svaki podskup $X \subseteq L$ u L postoje infimum i supremum.

Ako postoji najveći elemenat, po definiciji, infimum praznog skupa ($\emptyset$) je najveći elemenat mreže, a supremum praznog skupa je najmanji elemenat mreže.

Mreža se definiše i kao algebra $(L, \wedge, \vee)$[2] sa dve binarne operacije koje za sve $x, y, z \in L$ zadovoljavaju sledeće jednakosti:

$$\begin{array}{lll}
L1 & x \wedge y = y \wedge x, & \\
 & x \vee y = y \vee x; & \text{(komutativnost)} \\
L2 & (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), & \\
 & (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); & \text{(asocijativnost)} \\
L3 & x \wedge (x \vee y) = x, & \\
 & x \vee (x \wedge y) = x; & \text{(apsorptivnost).}
\end{array}$$

Idempotentost ($x \wedge x = x$; $x \vee x = x$) se izvodi iz $L1$ i $L3$.

Ako se na L, kao algebri, definiše poredak sa:

$$x \leq y \quad \text{akko} \quad x \wedge y = x \quad (\text{ili } x \vee y = y),$$

onda je $(L, \leq)$ poset u kome za svaka dva elementa postoje infimum-$\wedge$ i supremum-$\vee$. Obratno, u svakoj mreži $(L, \leq)$ operacije infimuma i supremuma zadovoljavaju $L1$-$L3$, pa su definicije mreže kao poseta i kao algebre sa dve binarne operacije, ekvivalentne.

---

[2] Nadalje, mreža $(L, \wedge, \vee)$ označavaće se sa L.

Podmreža X mreže L je neprazan podskup $X \subseteq L$ takav da za $x, y \in X$ važi da i $x \wedge y \in X$ i $x \vee y \in X$.

Kompletna podmreža X mreže L je neprazan podskup $X \subseteq L$, takav da za svaki neprazan podskup $A \subseteq X$ važi da i $\bigwedge A \in X$ i $\bigvee A \in X$.

Mreža L je **distributivna** ako u njoj važe distributivni zakoni:

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{i} \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Kako se iz jednog od tih zakona izvodi drugi, mreža je distributivna ako u njoj važi jedan od distributivnih zakona.

Za mreže $(L, \wedge, \vee)$ i $(M, \wedge, \vee)$ preslikavanje $f : L \longrightarrow M$ sa osobinom: za sve $x, y \in L$

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y) \quad \text{je } \wedge -\textbf{homomorfizam}, \text{ a ako je} \\ f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y) \quad \text{onda je } f \ \vee -\textbf{homomorfizam}. \end{aligned}$$

Preslikavanje f je **homomorfizam**, ako je istovremeno i $\wedge$-homomorfizam i $\vee$-homomorfizam.

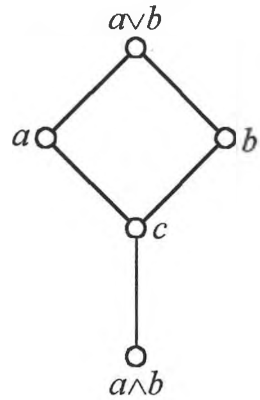
**

Sistem aksioma je **nezavisan** ako se ni jedna od aksioma iz tog sistema ne može izvesti iz preostalih aksioma sistema.

Navedeni sistem aksioma, $L1 - L3$, je nezavisan sistem aksioma za mreže. Ovu činjenicu pokazuju sledeći primeri, u kojima su pronađeni pogodni skupovi i definisane operacije na njima tako da važi pet od šest jednakosti $L1 - L3$.

Primer 1.1([2]) Neka je Z^+ skup pozitivnih celih brojeva. Definišimo na ovom skupu operacije $\wedge$ i $\vee$ na sledeći način: $x \wedge y = x$ i $x \vee y = \max(x, y)$. Tada svi identiteti $L1 - L3$ važe, izuzev $x \wedge y = y \wedge x$.

Primer 1.2([2]) Posmatrajmo dijagram na Slici 1.1. Neka su supremum i infimum definisani na uobičajen način, izuzev što je $a \wedge b \neq b \wedge a$ najmanji elemenat a ne c. Za ovaj algebarski sistem važe sve jednakosti $L1 - L3$, izuzev $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, koja ne važi za trojku a, b, c.



Slika 1.1

Primer 1.3([2]) Neka je Z^+ skup pozitivnih celih brojeva. Ako je $x \wedge y = 1$ i $x \vee y = \max(x, y)$, onda svi mrežni zakoni $L1 - L3$ važe, izuzev apsorptivnog zakona $x \wedge (x \vee y) = x$.

* * *

Izostavljanjem jedne ili više od ovih šest aksioma, dobijaju se interesantna uopštenja pojma mreže. Jedna od najčešće istraživanih klasa mrežnih uopštenja, je klasa polumreža.

Poset, u kome supremum (infimum) postoji za svaki dvoelementni podskup je **gornja (donja) polumreža**. Gornja (donja) **polumreža** A **je kompletna**, ako za svaki podskup $X \subseteq A$ u A postoji supremum (infimum) od X.

Polumreža se može posmatrati i kao algebra $(A, \circ)$ sa jednom binarnom operacijom koja je idempotentna, komutativna i asocijativna.

Dakle,polumreže predstavljaju posebnu klasu polugrupa i sa tog aspekta su dosta izučavane.

Ako se na polumreži $(A, \circ)$ definiše poredak sa:

$$x \leq_\wedge y \quad \text{akko} \quad x \circ y = x,$$

onda je $(A, \leq_\wedge)$ donja polumreža.

Analogno, sa $x \leq_\vee y$ akko $x \circ y = y$ poset $(A, \leq_\vee)$ je gornja polumreža. Poseti $(A, \leq_\wedge)$ i $(A, \leq_\vee)$, koji odgovaraju istoj algebri $(A, \circ)$ su dualno izomorfni. Može se pokazati da je kompletna $\wedge$-polumreža ($\vee$-polumreža), koja sadrži najveći (najmanji) elemenat, mreža.

Svaki $\wedge$-homomorfizam $\wedge$-polumreža je izotono preslikavanje, kao i $\vee$-homomorfizam $\vee$-polumreža.

Svaka izotona bijekcija, čija je inverzna slika izotona, je **mrežni izomorfizam.**

Nekomutativne polumreže nazivaju se **trake**. Dakle, trake su idempotentni i asocijativni grupoidi (ili idempotentne polugrupe).

Algebarska struktura $(L, \wedge, \vee)$, takva da su $(L, \wedge)$ i $(L, \vee)$ trake i za koju važe zakoni apsorpcije $(L3)$, naziva se **dualna traka** ili **kosa mreža.**

Neasocijativna mrežna uopštenja (sa oslabljenim jednim ili oba asocijativna zakona) javljaju se u literaturi pod nazivom–**latisoidi** ([2]). Primer jednog latisoida dat je na Slici 1.1.

$* * **$

Relacija ekvivalencije θ na skupu X je binarna relacija na X koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Skup svih relacija ekvivalencije na X označavamo sa EX. Poset $(EX, \subseteq)$ je kompletna mreža, gde je $\subseteq$ skupovna inkluzija.

Particija π skupa X je familija nepraznih, po parovima disjunktnih podskupova od X, takvih da je $X = \bigcup \pi$. Skup svih particija skupa X, u oznaci ΠX, je kompletna mreža izomorfna sa EX.

Elemenat a kompletne mreže L je **kompaktan** ako iz $a \leq \bigvee\limits_{i \in I} x_i$ sledi da je $a \leq \bigvee\limits_{j \in J} x_j$, za neki konačan podskup $J \subseteq I$.

Kompletna mreža je **algebarska** ako se svaki njen elemenat može prikazati kao supremum kompaktnih elemenata (tj. ako je kompaktno generisana).

Kokompaktan elemenat je dualan pojam od kompaktnog elementa. Mreža je kokompaktno generisana ako je svaki njen elemenat infimum kokompaktnih elemenata.

Kompletna mreža je **koalgebarska** ako je kokompaktno generisana.

Relacija ekvivalencije ρ na mreži L je **kongruencija** na L, ako za $x_i, y_i \in L$, $i = 1, 2$, iz $x_1 \rho y_1$ i $x_2 \rho y_2$ sledi ($x_1 \wedge x_2)\rho(y_1 \wedge y_2)$ i $(x_1 \vee x_2)\rho(y_1 \vee y_2)$ (svojstvo kompatibilnosti).

Trivijalne kongurencije na mreži L su dijagonalna relacija $\Delta_L = \{(x, x) : x \in L\}$ i puna relacija $\nabla_L = L^2$. Kada ne postoji mogućnost konfuzije, pisaćemo jednostavno Δ i ∇:

$$x \Delta y \quad \text{ako i samo ako} \quad x = y;$$

$$x \nabla y \quad \text{za sve } x, y \in L.$$

Mreža L je **prosta** ako nema drugih kongruencija osim trivijalnih.

Skup svih kongruencija mreže L označavamo sa $ConL$.

$(ConL, \subseteq)$ je algebarska mreža i kompletna podmreža od $(EL, \subseteq)$ (mreže ekvivalencija na L).

Mreža L je prosta ako je $ConL = \{\Delta, \nabla\}$.

Dvoelementni lanac i mreža particija ΠX nekog skupa X su primeri prostih mreža.

3. NEZAVISNI SISTEMI AKSIOMA ZA MREŽE [18, 51]

Mreža $(L, \wedge, \vee)$ kao algebra sa dve binarne operacije, može biti definisana preko različitih nezavisnih sistema aksioma. Posmatrajmo sledeće jednakosti:

(1) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
(2) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,
(3) $x \wedge y = y \wedge x$,
(4) $x \vee y = y \vee x$,
(5) $x \wedge (x \vee y) = x$,
(6) $x \vee (x \wedge y) = x$,
(7) $x \wedge x = x$,
(8) $x \vee x = x$,
(9) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$,
(10) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$,
(11) $x \wedge (y \wedge z) = (y \wedge x) \wedge (z \wedge x)$,
(12) $x \vee (y \vee z) = (y \vee x) \vee (z \vee x)$
i stav
(13) $x \wedge y = y$ ako i samo ako $y \vee x = x$.

Sistemi aksioma:

$$
\begin{aligned}
S_I &= \{(1)-(6)\}, \\
S_{II} &= \{(1)-(4),(7),(13)\}, \\
S_{III} &= \{(3)-(6),(9),(10)\} \text{ i} \\
S_{IV} &= \{(5),(6),(11),(12)\}
\end{aligned}
$$

su **nezavisni sistemi aksioma za mreže.**

Problemom nezavisnosti sistema aksioma S_I bavio je se R. Krojsot ([R. Croisot 1953]). On daje primere mreža sa konačnim brojem elemenata koji pokazuju nezavisnost ovog sistema aksioma, ali za nezavisnost (1) ili (2) u S_I on koristi algebre sa pet elemenata, dok za druge aksiome iz S_I on koristi dvoelementne algebre.

Nezavisnost sistema aksioma S_{III} dokazao je W. Felčer (1957) na primerima dvoelementnih algebri. 1963 Zas daje primere mreža sa malim brojem elemenata, koji pokazuju nezavisnost svakog od ovih sistema aksioma.

4. OPERATOR ZATVARANJA I ZATVORENI ELEMENTI MREŽE [2-3, 48]

Neka je $\mathcal{P}A$ partitivni skup od skupa A.

Operator zatvaranja na skupu A je funkcija $f : \mathcal{P}A \longrightarrow \mathcal{P}A$, gde se $f(X)$ obeležava sa $\overline{X}$, takva da važi:

$C1.$	$X \subseteq \overline{X}$	(ekstenzivnost)
$C2.$	$\overline{\overline{X}} = \overline{X}$	(idempotentnost)
$C3.$	Ako je $X \subseteq Y$, onda je $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$	(izotonost).

Podskup $X \subseteq A$ je zatvoren ako i samo ako je $\overline{X} = X$.

Navedena definicija operatora zatvaranja je opštija od topološkog operatora zatvaranja, jer se ovde ne zahteva da unija zatvorenih podskupova bude zatvorena.

Operator zatvaranja na mreži L je funkcija $f : L \longrightarrow L$, gde se $f(x)$ obeležava sa $\overline{x}$, takva da važi:

$C1'$. $x \leq \overline{x}$
$C2'$. $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$
$C3'$. $x \leq y \Longrightarrow \overline{x} \leq \overline{y}$.

Elementi $x \in L$ za koje važi $\overline{x} = x$ nazivaju se zatvoreni elementi mreže.

Lema 1.1([2]) Neka je L mreža i $x \longmapsto \overline{x}$ operator zatvaranja na njoj. Tada za sve $x, y \in L$ važi:

$$i) \quad x \wedge y \leq \overline{x \wedge y} \leq \overline{x} \wedge \overline{y};$$
$$ii) \quad x \vee y \leq \overline{x} \vee \overline{y} \leq \overline{x \vee y}. \blacksquare$$

Tvrđenje 1.2([2]) Ako je $x \longmapsto \overline{x}$ operator zatvaranja na kompletnoj mreži L, onda je podskup njenih zatvorenih elemenata zatvoren u odnosu na infimum. ■

Skup svih zatvorenih elemenata, međutim, ne mora biti zatvoren u odnosu na supremum. Zato skup zatvorenih elemenata mreže L ne obrazuje njenu podmrežu. Ali taj skup jeste mreža u odnosu na poredak u L, jer je zatvaranje supremuma zatvorenih elemenata njihovo najmanje gornje ograničenje.

Tvrđenje 1.3([2]) Skup zatvorenih elemenata mreže L je kompletna mreža. ■

Tako, na primer, mreže podalgebri i kongruencija neke algebre su kompletne mreže, ali nisu podmreže odgovarajućih mreža podskupova u odnosu na odgovarajući operator zatvaranja, odnosno svih relacija. Mreža kongruencija neke algebre je podmreža mreže ekvivalencija te algebre.

Tvrđenje 1.4([2]) Svaka kompletna mreža je izomorfna sa mrežom zatvorenih podskupova nekog skupa A u odnosu na neki operator zatvaranja. ■

Operator zatvaranja f na skupu A je **algebarski operator zatvaranja** ako za svako $X \subseteq A$ važi:

$C4.$ $\overline{X} = \bigcup\{\overline{Y} : Y \subseteq X \quad \text{i} \quad Y \text{ je konačan skup}\}.$

Očigledno da iz $C4.$ sledi $C3.$.

Tvrđenje 1.5([2]) Ako je na skupu A definisan algebarski operator zatvaranja, onda je skup zatvorenih elemenata algebarska mreža, a njeni kompaktni elementi su zatvoreni skupovi $\overline{X}$, gde je X konačan podskup u A. ∎

Tvrđenje 1.6([2]) Svaka algebarska mreža je izomorfna sa mrežom zatvorenih podskupova nekog skupa A u odnosu na neki algebarski operator zatvaranja. ∎

5. SPECIJALNI ELEMENTI MREŽE [25, 44, 66, 67]

Sa ciljem da se ispitaju neka mrežna svojstva u lokalnim okvirima, tridesetih godina dvadesetog veka počelo se sa uvođenjem i istraživanjem svojstava specijalnih elemenata mreže. Prvi takav elemenat bio je neutralni elemenat u modularnoj mreži ([O. Ore 1935]). G. Birkof je 1940. proširio taj pojam razmatrajući neutralni elemenat na proizvoljnoj mreži. Rezultati do kojih se došlo u ovoj oblasti, pokazali su da specijalni elementi igraju veliku ulogu u reprezentaciji mreža i primenama u algebri, naročito u mrežama kongruencija, podalgebri i slabih kongruencija neke algebre. Njihova primena u univerzalnoj algebri dolazi do izražaja od pre dve decenije (N. Rejli ([N. Reilly]) 1984). Najviše rezultata, iz oblasti specijalnih elemenata mreže, dali su : O. Ore, G. Birkof, G. Grecer i E. T. Šmit ([E. T. Schmidt]). Pored navedenih, rezultate u ovoj oblasti dali su i J. Hašimoto ([J. Hashimoto]), S. Kinugava ([S. Kinugawa]), M. F. Janovič ([M. F. Janowitz]), B. Šešelja, S. Milić, G. Vojvodić, A. Tepavčević i drugi.

U ovom delu će se navesti defenicije i neka tvrđenja koja će se primenjivati u narednim poglavljima.

* * *

Elemenat a mreže L je **distributivan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

Elemenat a mreže L je **kodistibutivan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y).$$

Za elemenat a iz L kaže se da je **skrativ (kancelativan)** ako za sve $x, y \in L$

$$\text{iz} \quad a \wedge x = a \wedge y \quad \text{i} \quad a \vee x = a \vee y \quad \text{sledi} \quad x = y.$$

Elemenat a je **neutralan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$(a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a) = (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a).$$

Navešćemo neka poznata tvrđenja koja karakterišu navedene elemente.

Lema 1.7(Ore, 1935) Neka je L proizvoljna mreža i $a \in L$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) elemenat a je distributivan;
(ii) preslikavanje $n_a : x \longmapsto a \vee x$ je homomorfizam mreže L na filter $\uparrow a$;
(iii) binarna relacija θ_a definisana na mreži L sa:

$$x\theta_a y \quad \text{akko} \quad a \vee x = a \vee y.$$

je relacija kongruencije (kažemo: kongruencija θ_a je indukovana homomorfizmom n_a). ■

Lema 1.7$'$([25]) Neka je L proizvoljna mreža i $a \in L$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) elemenat a je kodistributivan;
(ii) preslikavanje $m_a : x \longmapsto a \wedge x$ je homomorfizam mreže L na ideal $\downarrow a$;
(iii) binarna relacija ϕ_a definisana na mreži L sa:

$$x\phi_a y \quad \text{akko} \quad a \wedge x = a \wedge y$$

je relacija kongruencije (tj. kongruencija ϕ_a je indukovana homomorfizmom m_a). ■

Lema 1.8([25]) Neka je L proizvoljna mreža i $a \in L$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) elemenat a je neutralan;
(ii) elemenat a je distributivan, kodistributivan i skrativ;
(iii) preslikavanje m_a i n_a su homomorfizmi i preslikavanje $x \longmapsto (x \wedge a, x \vee a)$ je potapanje iz L u $\downarrow a \times \uparrow a$;
(iv) postoji potapanje φ mreže L u direktan proizvod $A \times B$, gde mreža A ima najveći elemenat (1), mreža B najmanji elemenat (0) i $\varphi(a) = (1, 0)$;
(v) za sve $x, y \in L$ podmreža generisana elementima x, y i a je distibutivna. ■

Ako je a distributivan elemenat i klase kongruencije θ_a indukovane homomorfizmom n_a imaju najmanje elemente, onda označimo sa $\underline{x}$ najmanji elemenat klase kongruencije θ_a (ukoliko postoji) kojoj $x \in L$ pripada, tj. $n_a(x) = n_a(\underline{x})$.

Analogno, u slučaju kada je a kodistributivan elemenat, označimo sa $\overline{x}$ najveći elemenat (ukoliko postoji) klase kongruencije ϕ_a kojoj $x \in L$ pripada.

U nsatavku će se pokazati (videti) da u algebarskoj mreži najveći elemenat klasa kongruencije ϕ_a uvek postoje. Uglavnom će se posmatrati algebarske mreže, pa sa M_a označimo skup svih $\overline{x}$, za $x \in L$.

Elemenat a je **izuzetan** ([N. Rejli 1984]) ako je neutralan i klase kongruencije indukovane sa m_a imaju najveće elemente koji čine podmrežu M_a od L.

Elemenat a je **standardan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y).$$

Elemenat koji zadovoljava dualan zakon je **kostandardan**.
Elemenat a je **modularan** ako za sve $x, y \in L$

$$a \leq y \quad \text{povlači} \quad a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge y.$$

Elemenat a je **komodularan** ako za sve $x, y \in L$

$$x \leq y \quad \text{povlači} \quad x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

Elemenat a je **beskonačno distributivan** ako je za svaku familiju elemenata $\{x_i | i \in I\} \subseteq L$

$$a \vee (\bigwedge_{i\in I} x_i) = \bigwedge_{i\in I} (a \vee x_i).$$

Analogno se definiše i **beskonačno kodistributivan** element mreže.

Centar kompletne mreže $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sa nulom i jedinicom je podskup $C \subseteq L$ neutralnih elemenata koji imaju komplemente.

6. NEKA SVOJSTVA DISTRIBUTIVNIH I KODISTRIBUTIVNIH ELEMENATA [3, 44, 53, 66, 68]

Sledeća tvrđenja karakterišu elemente navedene u naslovu i koriste se u dokazima nekih svojstava mreža slabih kongruencija u Poglavljima 2 i 4, kao i u dokazima nekih tvrđenja iz Poglavlja 3.

Tvrđenje 1.9([66]) Ako je a distributivan elemenat mreže L, tada a je komodularan ako i samo ako je standardan. ■

Tvrđenje 1.10([66]) Neka je L kompletna mreža. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) a je beskonačno distributivan;

(ii) preslikavanje $n_a : x \longmapsto x \vee a$ je kompletni homomorfizam iz L na filter $\uparrow a$;

(iii) relacija ν_a definisana sa :

$$x \nu_a y \quad \text{akko} \quad a \vee x = a \vee y$$

je kompletna kongruencija na L.

(Kompletni homomorfizmi su homomorfizmi koji su saglasni sa proizvoljnim supremumima i infimumima, a slično važi i za kompletne kongruencije). ■

Tvrđenje 1.11[53] Elemenat a kompletne mreže L je beskonačno distributivan ako i samo ako za svako $b \in \uparrow a$ familija$\{x \in L \mid a \vee x \geq b\}$ ima najmanji elemenat. ■

Tvrđenje 1.12([44]) Ako a pripada centru mreže L, onda svaka klasa kongruencije indukovane sa $m_a(n_a)$ ima najveći (najmanji) elemenat. ■

Tvrđenje 1.13([53]) Sledeća tvrđenja su ekvivalentna za elemenat a iz L:

(i) a je kancelativan i $\downarrow a \cong \uparrow a$ u odnosu na $x \longmapsto \overline{x} \vee a$;

(ii) a je izuzetan, beskonačno distributivan elemenat mreže L i skup svih najmanjih elemenata $\{\underline{x} | x \in L\}$ je jednak skupu svih najvećih elemenata $\{\overline{x} | x \in L\} = M_a$. ■

U tvrđenjima koja slede, data su neka svojstva elemenata algebarske mreže, koja se koriste u dokazima originalnih tvrđenja poglavlja koja slede. Pojam neprekidne mreže i neprekidnih elemenata mreže u tim tvrđenjima korišćen je u smislu sledećih definicija.

Kompletna mreža L je **neprekidna sa gornje strane** ako za svaki elemenat $a \in L$ i za svaki lanac $C \subseteq L$ važi:

$$a \wedge (\bigvee_{x \in C} x) = \bigvee_{x \in C} (a \wedge x).$$

Kompletna mreža L je **neprekidna sa donje strane** ako je njoj dualna mreža neprekidna sa gornje strane.

Kompletna mreža L je **neprekidna** ako je neprekidna i sa gornje i sa donje strane.

Tvrđenje 1.14([3]) Svaka algebarska mreža je neprekidna sa gornje strane.

Dokaz. Neka je L algebarska mreža, $a \in L$ i $\{x_i \mid i \in I\}$ je jedan lanac u L. Dokažimo da tada važi:

$$(\bigvee_{i \in I} x_i) \wedge a = \bigvee_{i \in I} (x_i \wedge a)\,.$$

Nejednakost $\bigvee_{i\in I}(x_j \wedge a) \leq (\bigvee_{i\in I} x_i) \wedge a$ uvek važi , bez obzira da li je mreža algebarska ili ne.

Neka je $(\bigvee_{i\in I} x_i) \wedge a = k \in L$. Svaki elemenat u algebarskoj mreži je jednak supremumu kompaktnih elemenata, pa je i elemenat k iz L jednak nekom supremumu, tj. $\bigvee_{j\in J} k_j = k$. Dakle,

$$(\bigvee_{i\in I} x_i) \wedge a = \bigvee_{j\in J} k_j.$$

Neka je k_j proizvoljan kompaktan elemenat iz te familije. Očigledno je:

$$k_j \leq \bigvee_{j\in J} k_j = (\bigvee_{i\in I} x_i) \wedge a.$$

Zato je $k_j \leq a$ i $k_j \leq \bigvee_{i\in I} x_i$. Iz kompaktnosti elementa k_j, sledi $k_j \leq \bigvee_{k\in K\subseteq I} x_k$, gde je K konačan skup.

Kako je $\{x_k \mid k \in K\}$ konačan lanac, sledi da je $\bigvee_{k\in K} x_k = x_l$, gde je x_l elemenat iz tog lanca. Dakle, $k_j \leq x_l$ i $k_j \leq a$, pa je:

$$k_j \leq x_l \wedge a \leq \bigvee_{i\in I}(x_i \wedge a).$$

Ovo važi za svako $j \in J$, pa je i $k = \bigvee_{j\in J} k_j \leq \bigvee_{i\in I}(x_i \wedge a)$, što je i trebalo dokazati. ■

Tvrđenje 1.15([3]) Svaka kokompaktno generisana mreža je neprekidna sa donje strane. ■

Elemenat a kompletne mreže L je **i-neprekidan** ($\wedge-$neprekidan) ako je

$$a \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I}(a \wedge x_i)$$

za svaki lanac $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq L$([68]).

Elemenat a je **ili-neprekidan** ($\vee-$neprekidan) ako zadovoljava dualno svojstvo.

Elemenat a je **neprekidan** ako je $\wedge-$neprekidan i $\vee-$neprekidan.

Tvrđenje 1.16([68]) U algebarskoj mreži svaki elemenat je $\wedge$-neprekidan. ∎

Lema 1.17([68]) Neka je a $\wedge-$neprekidan elemenat mreže L i za $S \subseteq L$ neka je $\mathcal{S}$ familija svih konačnih podskupova od S. Tada je:

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee_{F \in \mathcal{S}} (a \wedge \bigvee F). \blacksquare$$

Tvrđenje 1.18([68]) Elemenat a kompletne mreže L je $\wedge$-neprekidan i kodistributivan ako i samo ako je beskonačno kodistributivan elemenat.

Dokaz. Neka je a $\wedge-$neprekidan i kodistributivan elemenat mreže L i neka je $\{x_i \mid i \in I\}$ proizvoljna familija elemenata iz L. Na osnovu Leme 1.17,

$$a \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{F \in \mathcal{S}} (a \wedge \bigvee F),$$

gde je $\mathcal{S}$ familija svih konačnih podskupova od $\{x_i \mid i \in I\}$. Kako je a kodistributivan elemenat, to je za sve $F \in \mathcal{S}$,

$$a \wedge \bigvee F = \bigvee_{x_j \in F} (a \wedge x_j).$$

Sada je:

$$\bigvee_{F \in \mathcal{S}} (a \wedge \bigvee F) = \bigvee_{F \in \mathcal{S}} \bigvee_{x_j \in F} (a \wedge x_j) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i),$$

što znači da je elemenat a i beskonačno kodistributivan.

Dokaz u obrnutom smeru je očigledan. ∎

Tvrđenje 1.19([68]) Elemenat a kompletne mreže L je beskonačno kodistributivan ako i samo ako je kodistributivan i za svako $b \in \downarrow a$, familija $\{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ ima najveći elemenat.

Dokaz. Neka je a beskonačno kodistributivan elemenat kompletne mreže L i $b \in \downarrow a$. Ako je $\{x_i \mid i \in I\}$ familija $\{x \in L \mid a \wedge x = b\}$, onda je

$$a \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i) = b,$$

pa i $\bigvee_{i \in I} x_i$ pripada familiji kao njen najveći elemenat.

Obrnuto, neka je a kodistributivan elemenat kompletne mreže L i za svako $b \in\downarrow a$, familija $\{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ ima najveći elemenat. Ako je $\{x_j \mid j \in J\}$ jedna takva familija, onda je

$$\bigvee_{j\in J} (a \wedge x_j) = b.$$

Kako $b \in\downarrow a$ i a je kodistributivan elemenat, to je:

$$\bigvee_{j\in J} (a \wedge (x_j \vee b)) = \bigvee_{j\in J} ((a \wedge x_j) \vee b) = b.$$

Zato je $a \wedge (x_j \vee b) \leq b$, a sa druge strane $a \wedge (x_j \vee b) \geq a \wedge b = b$, pa je $a \wedge (x_j \vee b) = b$, za sve $j \in J$. To znači da $x_j \vee b$ pripada familiji, pa je najveći elemenat familije $x_m \geq x_j \vee b$, za sve $j \in J$. Sada je $x_m \geq x_j$, pa je $x_m \geq \bigvee_{j\in J} x_j$ i važi:

$$\bigvee_{j\in J} (a \wedge x_j) = b = a \wedge x_m \geq a \wedge \left(\bigvee_{j\in J} x_j\right).$$

Obrnuta jednakost uvek važi, pa je dokaz završen. ■

Iz predhodno navedenih tvrđenja sledi da u algebarskoj mreži, za kodistributivan elemenat a, klase kongruencije generisane homomorfizmima m_a imaju najveće elemente.

Tvrđenje 1.20([68]) Ako je a kodistributivan elemenat algebarske mreže, onda za svako $b \in\downarrow a$, familija $\{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ ima najveći elemenat. ■

Primetimo da su navedene familije upravo blokovi kongruencije indukovane homomorfizmom m_a.

7. SKORO MREŽE [47]

Jedna od algebarskih struktura, sličnih mrežnim strukturama, je algebarska struktura sa dve binarne operacije, $\bar{\wedge}$ i $\veebar$, koju je D. Švajgert u [47] nazvao **skoro mreža**. Za razliku od mreže, kod skoro mreže važe samo oslabljene forme asocijativnog i komutativnog zakona, a i korespondencija između poseta i skoro mreže nije jednoznačna, zbog nedostatka komutativnosti.

Algebra $(V, \bar{\wedge}, \veebar)$ je skoro mreža ako važe sledeće jednakosti:

1) $x \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} z) = (x \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} z)$	1') $(x \veebar y) \veebar z = (x \veebar y) \veebar (y \veebar z)$
2) $x \bar{\wedge} (x \bar{\wedge} y) = x \bar{\wedge} y$	2') $(x \veebar y) \veebar y = x \veebar y$
3) $x \bar{\wedge} x = x$	3') $x \veebar x = x$
4) $x \bar{\wedge} y = x \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} x)$	4') $x \veebar y = (y \veebar x) \veebar y$
5) $x \bar{\wedge} (x \veebar y) = x$	5') $x \veebar (x \bar{\wedge} y) = x$
6) $(y \veebar x) \bar{\wedge} x = x$	6') $(y \bar{\wedge} x) \veebar x = x.$

Tvrđenje 1.21([47]) U svakoj skoro mreži $(V, \bar{\wedge}, \veebar)$ važe sledeće jednakosti

6b) $x \bar{\wedge} (y \veebar x) = x$ i 6'b) $(x \bar{\wedge} y) \veebar x = x.$

Dokaz. Na osnovu 4), 6) i 3) važi:

$$x \bar{\wedge} (y \veebar x) = x \bar{\wedge} ((y \veebar x) \bar{\wedge} x) = x \bar{\wedge} x = x.$$

Drugi deo dokazuje se analogno. ∎

Tvrđenje 1.22([47]) Svakoj skoro mreži $(V, \bar{\wedge}, \veebar)$ odgovara poset $(V; \leq)$, na kome je relacija poretka definisana sa:

$$x \leq y \quad \text{akko} \quad y \bar{\wedge} x = x.$$

Dokaz. Refleksivnost je očigledna iz 3). Ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $y \bar{\wedge} x = x$ i $x \bar{\wedge} y = y$, pa iz 5'), Tvrđenja 1.21 i 5) sledi:

$$y = y \veebar (y \bar{\wedge} x) = y \veebar x \quad \text{pa je} \quad x = x \bar{\wedge} (y \veebar x) = x \bar{\wedge} y = y,$$

tj. relacija je antisimetrična.

Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $y \bar{\wedge} x = x$ i $y = z \bar{\wedge} y$, pa na osnovu 1) važi:

$$z \bar{\wedge} x = z \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} x) = (z \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} x) = y \bar{\wedge} x = x,$$

čime je dokazana i tranzitivnost relacije $\leq$. ■

Primetimo da se iz 5′) i 5) može zaključiti:

$$y \,\overline{\wedge}\, x = x \quad \text{akko} \quad y \,\underline{\vee}\, x = y.$$

Tvrđenje 1.23([47]) Ako je $x \,\overline{\wedge}\, y \leq y$, onda je $x \,\overline{\wedge}\, y$ infimum od x i y i važi:

$$x \,\overline{\wedge}\, y = y \,\overline{\wedge}\, x.$$

Dokaz. Iz definicije poretka sledi $y \,\overline{\wedge}\, (x \,\overline{\wedge}\, y) = x \,\overline{\wedge}\, y$, a iz 4) sledi da je $y \overline{\wedge} (x \overline{\wedge} y) = y \overline{\wedge} x$, pa je $x \overline{\wedge} y = y \overline{\wedge} x$. Kako je, iz 2), $x \overline{\wedge} (x \overline{\wedge} y) = x \overline{\wedge} y$, to je $x \,\overline{\wedge}\, y \leq x$, što znači da je $x \,\overline{\wedge}\, y$ donje ograničenje za y i x. Ako je r neko drugo donje ograničenje, onda je $x \,\overline{\wedge}\, r = r = y \,\overline{\wedge}\, r$. Sada je $r = x \,\overline{\wedge}\, (y \,\overline{\wedge}\, r) = (x \,\overline{\wedge}\, y) \,\overline{\wedge}\, (y \,\overline{\wedge}\, r) = (x \,\overline{\wedge}\, y) \,\overline{\wedge}\, r$, pa je $r \leq x \,\overline{\wedge}\, y$. ■

Analogno tvrđenje važi i za supremum od x i y.

Tvrđenje 1.24([47]) Svakom posetu $(V; \leq)$ odgovara skoro mreža $(V; \overline{\wedge}, \underline{\vee})$ za koju relacija poretka definisana u Tvrđenju 1.22, odgovara tom istom posetu.

Dokaz. Ako definišemo

$$x \,\overline{\wedge}\, y = \begin{cases} y \text{ ako } y \leq x \\ x \text{ inače} \end{cases}$$

i

$$x \,\underline{\vee}\, y = \begin{cases} x \text{ ako } x \geqslant y \\ y \text{ inače} \end{cases},$$

onda aksiome mogu biti verifikovane neposrednom proverom. Dokažimo ovde samo aksiomu 1) $x \,\overline{\wedge}\, (y \,\overline{\wedge}\, z) = (x \,\overline{\wedge}\, y) \,\overline{\wedge}\, (y \,\overline{\wedge}\, z)$. Posmatrajmo moguće slučajeve.

1.i) Ako je $y \overline{\wedge}\, z = z$ i $x \overline{\wedge} z = z$, onda je $z = (x \overline{\wedge} y) \overline{\wedge} (y \overline{\wedge} z) = y \overline{\wedge} z = z$.
1.ii) Ako je $y \overline{\wedge}\, z = z$ i $x \overline{\wedge} z = x$, onda je $x = (x \overline{\wedge} y) \overline{\wedge} (y \overline{\wedge} z) = x \overline{\wedge} z = x$.
1.iii) Ako je $y \overline{\wedge}\, z = y$ i $x \overline{\wedge} y = y$, onda je $y = (x \overline{\wedge} y) \overline{\wedge} (y \overline{\wedge} z) = y \overline{\wedge} y = y$.
1.iv) Ako je $y \overline{\wedge}\, z = y$ i $x \overline{\wedge} y = x$, onda je $x = (x \overline{\wedge} y) \overline{\wedge} (y \overline{\wedge} z) = x \overline{\wedge} y = x$. ■

Tvrđenje 1.25([47]) Na skoro mreži važi **oslabljena asocijativnost** u obliku:

$$1b)\ (x \mathbin{\overline{\wedge}} y) \mathbin{\overline{\wedge}} z = (x \mathbin{\overline{\wedge}} y) \mathbin{\overline{\wedge}} (z \mathbin{\overline{\wedge}} x)$$
$$1'b)\ x \mathbin{\underline{\vee}} (y \mathbin{\underline{\vee}} z) = (z \mathbin{\underline{\vee}} x) \mathbin{\underline{\vee}} (y \mathbin{\underline{\vee}} z).$$

Dokaz. Na osnovu 4),1) i 4) važi:

$$(x\overline{\wedge}y)\overline{\wedge}z = (x\overline{\wedge}y)\overline{\wedge}[z\overline{\wedge}(x\overline{\wedge}y)] = (x\overline{\wedge}y)\overline{\wedge}[(z\overline{\wedge}x)\overline{\wedge}(x\overline{\wedge}y)] = (x\overline{\wedge}y)\overline{\wedge}(z\overline{\wedge}x).$$

Analogno se dokazuje da važi jednakost $1'b$). ■

Tvrđenje 1.26([47]) Skoro mreža $(V; \overline{\wedge}, \underline{\vee})$ je mreža ako i samo ako komutativni zakoni važe.

Dokaz. Treba samo dokazati asocijativnost. Iz 1), komutativnosti, $1b$) i komutativnosti, sledi:

$$x \mathbin{\overline{\wedge}} (y \mathbin{\overline{\wedge}} z) = (x \mathbin{\overline{\wedge}} y) \mathbin{\overline{\wedge}} (y \mathbin{\overline{\wedge}} z) = (y \mathbin{\overline{\wedge}} x) \mathbin{\overline{\wedge}} (z \mathbin{\overline{\wedge}} y) = (y \mathbin{\overline{\wedge}} x) \mathbin{\overline{\wedge}} z = (x \mathbin{\overline{\wedge}} y) \mathbin{\overline{\wedge}} z.$$

Analogno se dokazuje da važi asocijativnost druge operacije. ■

Neka je L_2 dvoelementna mreža, a L_2^* skoro mreža $(\{0,1\}; \overline{\wedge}, \underline{\vee})$ definisana sa:

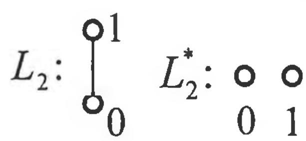
$\overline{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	1	1

i

$\underline{\vee}$	0	1
0	0	1
1	0	1

.

Hase-dijagrami odgovarajućih uređenih skupova dati su na Slici 1.2.



Slika 1.2

Tvrđenje 1.27([46]) Svaka skoro mreža sa više od jednog elementa ima bar jednu od algebri L_2 i L_2^* kao podalgebre.

Dokaz. Ako $(V; \bar{\wedge}, \veebar)$ ima dva uporediva elementa a i b, tako da je $a < b$, onda ovi elementi generišu L_2, jer je $b \bar{\wedge} a = a$ i $a \bar{\wedge} b = a \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} a) = a$. Slično se pokazuje da je $b \veebar a = a \veebar b = b$, pa je ova algebra mreža.

Ako se $(V; \bar{\wedge}, \veebar)$ sastoji samo od neuporedivih elemenata, onda je $a \bar{\wedge} b \leq a$, pa je $a \bar{\wedge} b = a$. Analogno, $b \bar{\wedge} a = b$. Dalje, $b \leq a \veebar b$, pa je $b = a \veebar b$, dok je $b \veebar a = a$, pa ova algebra nije komutativna. ■

Skoro mreža je distributivna ako sledeći zakoni važe:

6a) $x \bar{\wedge} (y \veebar z) = (x \bar{\wedge} y) \veebar (x \bar{\wedge} z)$ 6a') $x \veebar (y \bar{\wedge} z) = (x \veebar y) \bar{\wedge} (x \veebar z)$
6b) $(x \veebar y) \bar{\wedge} z = (x \bar{\wedge} z) \veebar (y \bar{\wedge} z)$ 6b') $(x \bar{\wedge} y) \veebar z = (x \veebar z) \bar{\wedge} (y \veebar z)$.

Tvrđenje 1.28([46]) Asocijativna i distibutivna skoro mreža V je prosta ako i samo ako je V izomorfna sa L_2 ili L_2^*. ■

8. BIPOLUMREŽE, BIRKOFOVI SISTEMI I DRUGA UOPŠTENJA MREŽA [1-2, 10, 12-15, 17, 19-23, 26-32, 34-35, 37-42, 45-46, 49, 74-79]

Sa ciljem da uopšti pojam mreže Jerži Plonka ([Jerzy Płonka [42]]) je 1967. godine uveo pojam **kvazi mreže** kao algebre $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge)$ sa dve binarne operacije, koje su obe idempotentne, komutativne i asocijativne. Ako važe i oba distributivna zakona, takva algebarska struktura nazvana je distributivna kvazi mreža, jer distributivna mreža zadovoljava i zakon apsorpcije.

R. Padmanban ([41]) je 1971. kvazi mrežu nazvao **bipolumreža**, a bipolumrežu koja ispunjava uslove:

$$x \wedge y = x \Longrightarrow (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = x \wedge z$$
$$x \wedge y = x \Longrightarrow (x \vee z) \wedge (y \vee z) = x \vee z,$$

nazvao je kvazi mreža.

Bipolumrežu $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge)$ na kojoj važi indentitet:

$$x \vee (y \wedge x) = (x \vee y) \wedge x,$$

nazvao je **Birkofovim sistemom**, jer je G. Birkof ([2]) sugerisao ovu jednakost kao mogućnost uopštenja zakona apsorpcije u mreži.

J. Najminen (J. Nieminen [37]) razmatra kvazi mreže u vezi sa rasplinutim skupovima. V. R. Čandran (V. R. Chandran [10]) se bavi pitanjem aksiomatizacije kvazi-mreža.

Gh. Farkaš (Gh. Fărcas [17]) definiše kosu mrežu preko binarnih relacija. H. Kroger (H. Kröger [27 – 28]) razmatra kosu mrežu kao algebru od dve takve polumreže, čije su operacije povezane zakonom apsorpcije ili nekim njegovim vidovima.

K. Sejč (K. Seitz [49]) uvodi, na familiji podskupova nekog skupa, dve binarne operacije, koje pod određenim uslovima postaju mrežne operacije i određuje uslove za modularnost i distributivnost te mreže.

J. Ušan, B. Šešelja i G. Vojvodić ([76]) izučavaju, njima uvedene, uopštene kvazi poretke i uopštene parcijalne poretke (specijalne $n+1-$arne relacije).

Esencijalni $n-$arni polinom algebre $\mathcal{A}$ je $n-$arni polinom koji zavisi od svake njegove promenljive. Fundamentalni polinomi u bipolumreži su esencijalni binarni polinomi.

J. Dudek (J. Dudek [13 – 14]) je pokazao da je bipolumreža mreža ako i samo ako u njenim polinomima $(x \vee y) \wedge y$ i $(x \wedge y) \vee y$ nisu obe promenljive esencijalne. Zajedno sa A. Romanovskom ([A. Romanowska]) pokazao je, da se bipolumreže sa četiri esencijalna binarna polinoma mogu razvrstati na pet različitih klasa.

A. Romanovska 1980. dalje proučava pojam distributivnosti u bipolumreži. Bipolumrežu koja zadovoljava jednakost

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

nazvala je **$\wedge$-distributivna bipolumreža**, a onu sa zakonom

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

nazvala je **$\vee$-distributivna bipolumreža**.

Svakoj bipolumreži $(A, \vee, \wedge)$ mogu se pridružiti dva parcijalna uređenja:

$$x \leq_{\vee} y \quad \text{ako i samo ako} \quad x \vee y = y$$

i

$$x \leq_{\wedge} y \quad \text{ako i samo ako} \quad x \wedge y = x.$$

A. Romanovska i J. D. H. Smit ([J. D. H. Smith]) 1981. definisali su pojam **bipolumreže** $(A, \vee, \wedge, 0)$ **sa nulom**, gde je 0 elemenat sa svojstvom:

$$0 \leq_{\wedge} x \quad \text{i} \quad 0 \leq_{\vee} x \quad , \text{za svako } x \text{ iz } A.$$

0 se naziva najmanji elemenat u bipolumreži, a elemenat 1 sa dualnim svojstvom, ako postoji, je najveći elemenat.

Pojam **filtra,** na distributivnoj bipolumreži, uveo je R. Balbes ([R. Balbes]) 1970.

Filter F na $(A, \vee, \wedge)$ je neprazan podskup od A koji zadovoljava sledeće uslove:

$$\text{ako je } x \leq_{\wedge} y, \text{ onda } x \in F \text{ povlači } y \in F$$

i

$$\text{ako } x, y \in F, \text{ onda } x \wedge y \in F.$$

Ideal se definiše dualno na polumreži $(A, \vee)$, u odnosu na poredak $\leq_{\vee}$.

Svakom $x \in A$, odgovaraju dva glavna filtra i dva glavna ideala u $(A, \vee, \wedge)$:

$$\uparrow_{\wedge} x = \{y | \, x \leq_{\wedge} y\}, \qquad \uparrow_{\vee} x = \{y | \, x \leq_{\vee} y\},$$
$$\downarrow_{\wedge} x = \{y | \, y \leq_{\wedge} x\} \quad \text{i} \quad \downarrow_{\vee} x = \{y | \, y \leq_{\vee} x\}.$$

Filter i ideal generisani elementom x ne čine u opštem slučaju podbipolumrežu, jer na $\uparrow_{\vee} x$ i $\downarrow_{\wedge} x$ ne važi zatvorenost za operacije (nemaju ni iste elemente).

J. Galuška ([23]) 1984. proučava uopštenje apsortivnog zakona u bipolumreži i određuje uslove za distributivnu bipolumrežu da bude mreža. Uvodeći neke vidove oslabljenja zakona apsorpcije u bipolumreži, on daje različite klase uopštenja mreža, gradeći pri tom rastući lanac varijeteta tako uopštenih mreža.

J. Galuška u [23] za polinom f definiše dualni polinom $\widehat{f}$ na sledeći način:

$$\widehat{x} = x, \quad \widehat{y} = y, \quad \widehat{x \vee y} = \widehat{x} \wedge \widehat{y}, \quad \widehat{x \wedge y} = \widehat{x} \vee \widehat{y},$$

i tako dalje induktivno.

Dalje se definiše niz binarnih polinoma:

$$f_0(x,y) = x \vee y, \qquad f_{n+1}(x,y) = f_n(x,y)(n)y,$$

gde je (n), za n-parno $\wedge$, a za n-neparno $\vee$, kao i dualni niz polinoma.Znači,

$$f_1(x,y) = (x \vee y) \wedge y\ , \qquad f_2(x,y) = ((x \vee y) \wedge y) \vee y, \text{ itd.}$$

Na prirodan način on uopštava apsorptivni zakon:

$$\begin{array}{ll} (a_n) & f_n(x,y) = y \\ \widehat{(a_n)} & \widehat{f}_n(x,y) = y. \end{array}$$

Koristeći ove identitete, formira se niz varijeteta na sledeći način.

Varijetet $\mathcal{L}_n$ je definisan identitetima (a_n) i $\widehat{(a_n)}$, i on je podvarijetet varijeteta svih bipolumreža. Algebre iz varijeteta $\mathcal{L}_n$ nazvane su $n-$tim uopštenjem mreže. Pokazano je da je niz varijeteta $\mathcal{L}_n$ strogo rastući:

$$\mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{L}_n \subsetneq \mathcal{L}_{n+1} \subsetneq \ldots .$$

Dalje se posmatraju identiteti:

$$(b_n) \quad f_n(x,y) = \widehat{f}_n(x,y).$$

$\mathcal{B}_n$ je varijetet definisan identitetima (b_n) i on je takođe podvarijetet varijeteta svih bipolumreža. Algebre iz varijeteta $\mathcal{B}_n$ nazvane su $n-$tim uopštenjem Birkofovih sistema.

U [23] je pokazano da je niz varijeteta $\mathcal{B}_n$ strogo rastući, tj.

$$\mathcal{B}_0 \subsetneq \mathcal{B}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{B}_n \subsetneq \mathcal{B}_{n+1} \subsetneq \ldots$$

i dat je potreban i dovoljan uslov da $n-$to uopštenje Birkofovog sistema bude $n-$to uopštenje mreže.

J. Ušan u [77] i [78] izučava bipolumrežu $(Q, \vee, \wedge)$ koja zadovoljava zakon

$$x \wedge (y \vee z \vee x) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge x),$$

opisuje neke konstrukcije takvih algebri jednoelementnim produženjima mreža i poka-zuje da je svaka takva bipolumreža Birkofov sistem ([77]).

J. Ušan i A. Tepavčević su 1989.([79]) dali potreban i dovoljan uslov da bipolumreža bude Birkofov sistem i naveli sve Birkofove sisteme sa manje od pet elemenata.

Većina pojmova vezanih za mrežu, imaju svoja analogna uopštenja u bipolumreži.

Ph. H. Anderson (Ph. H. Anderson [1]) u poset sa 0 i 1 uvodi 7 uopštenja pojma infimuma, odnosno supremuma, i izučava svojstva na taj način dobijenih 49 algebri sa dve binarne operacije.

K. Leutola ([K. Leutola]) i J. Najminen ([34]) razmatraju poset P u kome za svaki dvoelementni podskup, među njihovim gornjim (donjim) ograničenjima, postoje minimalna (maksimalna) ograničenja. Pomoću funkcije izbora χ za svaki par se izabere jedno minimalno gornje i jedno maksimalno donje ograničenje. Posle izbora χ, elementi $a \wedge b$ i $a \vee b$ su fiksirani. Dobijenu algebru $(P, \vee, \wedge)$ nazivaju χ-mrežom, ispituju njene identitete i vezu sa polaznim posetom P.

U [38] J. Najminen definiše za χ-mrežu pojam ideala, kongruencije, svojstva modularnosti i distributivnosti i dokazuje da je mreža kongruencija χ-mreže uvek distributivna.

Slabo asocijativne mreže uveo je E. Frid ([E. Fried 1970]) kao uopštenje mreže. Mnoga mrežno-teoretska razmatranja mogu se preneti u teoriju slabo asocijativnih mreža, kao što je pokazano u radovima [19 – 22].

E. Frid definiše slabo asocijativne mreže tako što polazi od pseudo-uređenog skupa $(A, \leq)$. Pseudo poredak $\leq$ on u [19] naziva **parcijalnim turnirom.**

Slabo asocijativna mreža je pseudo uređeni skup $(A, \leq)$ u kome za svaki par $a, b \in A$ postoji najmanje gornje i najveće donje ograničenje skupa $\{a, b\}$ u $(A, \leq)$. Ako se na ovoj slabo asocijativnoj mreži $(A, \leq)$ definišu operacije: $a \wedge b =$ najveće donje ograničenje od $\{a, b\}$ i $a \vee b =$ najmanje gornje ograničenje od $\{a, b\}$, onda je $(A, \wedge, \vee)$ algebra sa dve binarne operacije, koje su obe idempotentne, komutativne, zadovoljavaju apsorptivne jednakosti ($a \wedge (b \vee a) = a$ i $a \vee (b \wedge a) = a$) i specijalne jednakosti koje predstavljaju slabu asocijativnost, tj. za sve $a, b, c \in A$,važi:

$$((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \vee c = c \quad \text{ i } \quad ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \wedge c = c.$$

Obrnuto, ako je $(A, \wedge, \vee)$ slabo asocijativna mreža kao algebra, onda postoji pseudo poredak $\leq$ takav da je $(A, \leq)$ slabo asocijativna mreža i

$a \wedge b$ je najveće donje ograničenje od $\{a, b\}$, a $a \vee b$ je najmanje gornje ograničenje od $\{a, b\}$ u A. Tranzitivnost pseudo poretka $\leq$ je ekvivalentna sa asocijativnošću slabo asocijativne mreže $(A, \wedge, \vee)$.

B. A. Dejvi ([B. A. Davey]) i M. J. MakKarti ([M. J. McCarthy]) su u [12] postavili topološku teoriju za predstavljanje varijeteta slabo asocijativnih mreža, generisanog troelementnim skupom $\{0, 1, 2\}$ sa relacijom $0 < 1, 1 < 2, 2 < 0$, na kome, po definiciji, važi:

$$x \wedge y = x \Longleftrightarrow x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y.$$

Opisane su konačne algebre i mreže kongruencija algebri tog varijeteta.

9. SPECIJALNI ELEMENTI BIPOLUMREŽE [66, 67]

Neki od specijalnih elemenata bipolumreže imaju svoje analoge u mrežama, ali nemaju analogna svojstva.

A. Tepavčević u [67] daje svojstva specijalnih elemenata raznih klasa bipolumreža i reprezentaciju bipolumreže preko direktnih proizvoda nekih filtera (ideala) generisanih tim specijalnim elementima.

Neka je $(A, \vee, \wedge)$ bipolumreža.

Elemenat $a \in A$ je **distributivan** ako i samo ako za svako za svako $x, y \in A$ važi:

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

Kodistributivan elemenat definiše se dualno.

Elemenat $a \in A$ je **skrativ** ako za njega važi:

iz $\quad a \vee x = a \vee y \quad$ i $\quad a \wedge x = a \wedge y \quad$ sledi $x = y, \quad$ za sve $x, y \in A$.

Ako je $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ bipolumreža sa 0 i 1, tada $x' \in \mathcal{A}$ je **komplement** elementa $x \in \mathcal{A}$ ako je:

$$x \vee x' = 1 \quad \text{i} \quad x \wedge x' = 0.$$

Tvrđenje 1.29([67]) Ako je a kodistributivan element bipolumreže $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge)$ onda $\uparrow_\wedge a$ i $\downarrow_\wedge a$ su podbipolumreže od $\mathcal{A}$. ■

Važi i dualno tvrđenje.

Tvrđenje 1.29′([67]) Ako je a distributivan element bipolumreže $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge)$ onda $\uparrow_\vee a$ i $\downarrow_\vee a$ su podbipolumreže od $\mathcal{A}$. ■

Tvrđenje 1.30([67]) Ako je $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge)$ je bipolumreža i $a \in A$, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) a je kodistributivan elemenat od $\mathcal{A}$;

(ii) ideal $\downarrow_\wedge a$ je podbipolumreža od $\mathcal{A}$ i preslikavanje $f : A \longrightarrow \downarrow_\wedge a$ definisano sa $f(x) = a \wedge x$ je bipolumrežni homomorfizam. ■

Specijalni elementi bipolumreža, koji nemaju svoje analogne elemente u mrežama, su apsorptivni elementi. Bipolumreža u kojoj su svi elementi apsorptivni je mreža.

U radu [67] uvode se sledeći apsorptivni elementi u bipolumreži $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge)$:

a je $\vee-$**apsorptivan** ako je $a \vee (x \wedge a) = a$ za svako $x \in A$;
a je $\wedge-$**apsorptivan** ako je $a \wedge (x \vee a) = a$ za svako $x \in A$;
a je $\vee-$**koapsortivan** ako je $x \vee (a \wedge x) = x$ za svako $x \in A$;
a je $\wedge-$**koapsortivan** ako je $x \wedge (a \vee x) = x$ za svako $x \in A$.
Elemenat je **apsorptivan** ako je $\vee$ i $\wedge-$apsorptivan.
Elemenat je **koapsorptivan** ako je $\vee$ i $\wedge-$koapsorptivan.

Tvrđenje 1.31([67]) Ako je $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ bipolumreža sa nulom i jedinicom, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) a je distributivan, kodistributivan, skrativ, apsorptivan i ima komplement;

(ii) $\uparrow_\vee a$ i $\downarrow_\wedge a$ su podbipolumreže od bipolumreže $\mathcal{A}$ i preslikavanje $g : A \longrightarrow \uparrow_\vee a \times \uparrow_\wedge a$ definisano sa $g(x) = (a \vee x, a \wedge x)$ je izomorfizam. ■

Tvrđenje 1.32([67]) Ako je $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ bipolumreža sa nulom i jedinicom, tada postoji, do na izomorfizam, jedan-jedan korespondencija, između svih dekompozicija $\mathcal{A}$ na direktan proizvod dve bipolumreže i svih elemenata $\mathcal{A}$ koji su distributivni, kodistribtivni, skrativi, apsorptivni i imaju komplement. ■

Tvrđenje 1.33([67]) Ako je a distributivan, kodistributivan i skrativ elemenat bipolumreže $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge)$, onda proizvoljan bipolumrežni identitet je zadovoljan na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je zadovoljen $\uparrow_\vee a$ i $\downarrow_\wedge a$. ■

Postoje mrežna tvrđenja, koja se odnose na specijalne elemente mreže koja važe, takva da analogna tvrđenja u odnosu na bipolumreže, ne moraju da važe. Na primer, ako je elemenat mreže neutralan ili standardan, onda je skrativ, što nije slučaj kod bipolumreža.

Kako je bipolumreža čiji su svi elementi apsorptivni mreža i svi ideali i filteri mreže su njene podmreže, prethodna tri tvrđenja imaju svoje neposredne posledice u teoriji mreža. Te posledice su ustvari teoreme G. Grecera ([12]) i teorema B. Šešelje i A. Tepavčević ([54]).

Poglavlje II

MREŽE SLABIH KONGRUENCIJA

1. OSNOVNE DEFINICIJE I TVRĐENJA [7-9, 52-53, 55-58, 63-64, 68-69, 81-82]

Mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ neke algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ je mreža svih simetričnih, tranzitivnih i kompatibilnih relacija na $\mathcal{A}$. Ova kompatibilnost se odnosi i na nularne operacije. Drugim rečima, mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ algebre $\mathcal{A}$ je mreža svih simetričnih i tranzitivnih podalgebri od A^2 tj. mreža svih kongruencija na svim podalgebrama od $\mathcal{A}$., uključujući i praznu podalgebru (odnosno poduniverzum)[3]. Od posebnog značaja je položaj dijagonalne relacije $\Delta = \{(x, x) | x \in A\}$ u mreži slabih kongruencija. Kako je Δ kodistributivan elemenat u $Cw\mathcal{A}$, algebarska mreža kongruencija $Con\mathcal{A}$ algebre $\mathcal{A}$ je podmreža (filter $\uparrow \Delta$) od $Cw\mathcal{A}$, a mreža poduniverzuma $Sub\mathcal{A}$ algebre $\mathcal{A}$ je izomorfna sa idealom $\downarrow \Delta$ (u odnosu na preslikavanje $\mathcal{B} \longmapsto \{(x, x) \mid x \in \mathcal{B}\}, \mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$). Radi jednostavnosti, mi identifikujemo podalgebre (poduniverzume) sa odgovarajućom dijagonalnom relacijom (pisaćemo $\mathcal{B}$ umesto Δ_{B^2}, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$), pa je $Sub\mathcal{A}$ podmreža od $Cw\mathcal{A}$.

Kompatibilne relacije neke algebre su povezane sa nekim od sledećih relacionih svojstva: **refleksivnost** (r), **simetrija** (s), **tranzitivnost** (t) i **antisimetrija** (as). Kompatibilna $(r)(t)$ relacija se naziva **kompatibilni kvazi poredak**, a $(r)(as)(t)$ **kompatibilni poredak**. Neke od njih imaju i posebne nazive. Kompatibilne $(r)(s)$ relacije su **tolerancije**, kompatibilne $(r)(s)(t)$ relacije su **kongruencije** (kompatibilne ekvivalencije), a kompatibilne $(s)(t)$ relacije su **slabe kongruencije** (kompatibilne slabe ekvivalencije).

Značaj izučavanja svojstva mreže slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ leži u činjenici da izučavanjem $Cw\mathcal{A}$, moguće je izučavati $Con\mathcal{A}$ i $Sub\mathcal{A}$ uniformnim metodama.

Pojam slabe kongruencije prvi je definisao Tran Duk Mai ([Tran Duc Mai]) 1974. godine ([70 – 73]), pod nazivom kongruencije u algebri. Naziv slabe kongruencije uveden je u radu G. Vojvodić i B. Šešelja ([76]) 1988. godine, gde su razrađena svojstva $Con\mathcal{A}$ i $Sub\mathcal{A}$ preko $Cw\mathcal{A}$.

Kako je familija $Cw\mathcal{A}$ zatvorena u odnosu na preseke i sadrži najveći elemenat (A^2 je takođe slaba kongruencija) sledi da je $(Cw\mathcal{A}, \subseteq)$ kompletna mreža.

Tvrđenje 2.1([81]) $(Cw\mathcal{A}, \subseteq)$ je algebarska mreža. ■

[3] Prazan skup je poduniverzum od $\mathcal{A}$, ako i samo ako posmatrana algebra nema konstanti.

Neposredna posledica ovog tvrđenja i činjenice da je Δ kodistributivan elemenat je sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.2([68]) Δ je beskonačno kodistributivan elemenat mreže $Cw\mathcal{A}$.

Dokaz. Neka je $\{\rho_i \mid i \in I\}$ proizvoljna familija slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$. Pokažimo da na mreži $Cw\mathcal{A}$ važi jednakost:

$$\Delta \wedge (\bigvee_{i\in I} \rho_i) = \bigvee_{i\in I} (\Delta \wedge \rho_i).$$

Neka $\rho_i \in Con\mathcal{B}_i$ i $\mathcal{B}_i \in Sub\mathcal{A}$, za svako $i \in I$. Sada je $\bigvee_{i\in I} \rho_i$ kongruencija na podalgebri $\bigvee_{i\in I} \mathcal{B}_i$, pa je $\Delta \wedge (\bigvee_{i\in I} \rho_i) = \left\{(x,x) \mid x \in (\bigvee_{i\in I} \mathcal{B}_i)\right\}$.
Dalje je $\Delta \wedge \rho_i = \{(x,x) \mid x \in \mathcal{B}_i\}$, pa je $\bigvee_{i\in I} (\Delta \wedge \rho_i) = \bigvee_{i\in I} \{(x,x) \mid x \in \mathcal{B}_i\}$.
Time je navedena jednakost je dokazana. ■

Neka je ρ proizvoljna slaba kongruencija mreže $Cw\mathcal{A}$. Iz Leme 1.7$'$, iz Poglavlja 1, sledi da je preslikavanje $m_\Delta : \rho \longmapsto \Delta \wedge \rho$ homomorfizam iz $Cw\mathcal{A}$ u $\downarrow \Delta$, koji definiše relaciju kongruencije na $Cw\mathcal{A}$. Posledica prethodna dva tvrđenja je činjenica da klase te kongruencije uvek imaju najveće elemente (Tvrđenje 1.19). Ti najveći elementi su kvadrati podalgebri B^2, posmatrani kao kongruencije na B. Za algebru $\mathcal{A} = (A, F)$ označimo sa M_Δ poset kvadrata podalgebri u $Cw\mathcal{A}$.

$$M_\Delta = (\{B^2 \mid B \in Sub\mathcal{A}\}, \subseteq).$$

Ovaj poset je mreža, ali ne uvek i podmreža od $Cw\mathcal{A}$.

Tvrđenje 2.3([64]) Za algebru $\mathcal{A}$, M_Δ je podmreža od $Cw\mathcal{A}$ ako i samo ako svaka slaba kongruencija na $\mathcal{A}$ sadrži najviše jednu klasu koja je podalgebra od $\mathcal{A}$. ■

Znači, za svaku algebru $\mathcal{A}$ u varijetetu $\mathcal{V}$, M_Δ je podmreža od $Cw\mathcal{A}$ ako i samo ako dve različite podalgebre ne mogu biti klase iste kongruencije. Takav varijetet zvaćemo M_Δ**−varijetet.**

Tvrđenje 2.4([64]) *a*) Ako algebra $\mathcal{A}$ ima minimalnu podalgebru, onda je M_Δ podmreža od $Cw\mathcal{A}$.

b) Ako varijetet $\mathcal{V}$ sadrži nularne operacije, onda je $\mathcal{V}$ M_Δ−varijetet. ■

2. NEKA SVOJSTVA ALGEBRI (CEP, CIP, wCIP, $*$CIP, UCEP) [52-53, 63-64, 66, 69]

U sledećem delu biće navedene definicije nekih osnovnih svojstava algebri, koja će se karakterisati metodama mreže slabih kongruencija. Najveći broj tih svojstava je povezan sa svojstvima specijalnih elemenata mreže, koji su navedeni i razmatrani u prethodnom poglavlju.

Algebra $\mathcal{A}$ ima **svojstvo proširenja kongruencija** (**Congruence Extension Property – CEP**) ako je svaka kongruencija na podalgebri od $\mathcal{A}$ restrikcija kongruencije na $\mathcal{A}$.

Algebra $\mathcal{A}$ ima CEP ako i samo ako je dijagonalna relacija Δ kancelativan elemenat u mreži $Cw\mathcal{A}$.

Tvrđenje 2.5([66]) Algebra $\mathcal{A}$ ima CEP ako i samo ako za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$, u $Cw\mathcal{A}$ važi:

$$B^2 \wedge (\rho \vee \Delta) = \rho.$$

Dokaz. Neka algebra $\mathcal{A}$ ima CEP i neka je $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$, restrikcija od $\theta \in Con\mathcal{A}$. Kako je $\theta \geq \rho$ i $\theta \geq \Delta$, to je $\theta \geq \rho \vee \Delta$. Očigledno, ρ je restrikcija i od $\rho \vee \Delta \in Con\mathcal{A}$, pa važi: $\rho = B^2 \wedge \theta \geq B^2 \wedge (\rho \vee \Delta) \geq \rho$.

Obrnuto, ako je $B^2 \wedge (\rho \vee \Delta) = \rho$, onda je $\rho \in Con\mathcal{B}$ restrikcija kongruencije $\rho \vee \Delta$, pa algebra ima CEP. ■

Algebra $\mathcal{A}$ ima **svojstvo preseka kongruencija (Congruence Intersection Property – CIP)** ako za sve $\rho, \theta \in Cw\mathcal{A}$ važi da je:

$$(\rho \cap \theta)_A = \rho_A \cap \theta_A,$$

gde je ρ_A najmanja kongruencija na $\mathcal{A}$ koja sadrži ρ, tj.

$$\rho_A = \cap \{\theta \mid \theta \in Con\mathcal{A}, \rho \leq \theta\}.$$

U mreži $Cw\mathcal{A}$ je $\rho_A = \rho \vee \Delta$, pa algebra $\mathcal{A}$ ima CIP ako i samo ako je Δ distributivan elemenat u $Cw\mathcal{A}$, tj. za $\rho, \theta \in Cw\mathcal{A}$

$$\Delta \vee (\rho \wedge \theta) = (\Delta \vee \rho) \wedge (\Delta \vee \theta).$$

Algebra $\mathcal{A}$ ima **beskonačno svojstvo preseka kongruencija ($*$CIP)** ako za svaku familiju $\{\rho_i \mid i \in I\} \subseteq Cw\mathcal{A}$ važi:

$$\Delta \vee (\bigwedge_{i \in I} \rho_i) = \bigwedge_{i \in I} (\Delta \vee \rho_i).$$

Algebra $\mathcal{A}$ ima **slabo svojstvo preseka kongruencija (weak Congruence Intersection Property−wCIP)** ako za svako $\rho \in Cw\mathcal{A}$ i za svako $\theta \in Con\mathcal{A}$ važi da je u mreži $Cw\mathcal{A}$

$$(\rho \wedge \theta) \vee \Delta = (\rho \vee \Delta) \wedge \theta.$$

Algebra $\mathcal{A}$ ima **jako svojstvo proširenja kongruencija (strong CEP)** ako za svaku $\rho \in Cw\mathcal{A}$, $\rho \cup \Delta \in Con\mathcal{A}$.

Očigledno, ako algebra ima jako svojstvo proširenja kongruencija, onda ona ima i svojstvo proširenja kongruencija. Obratno ne mora da važi, jer Hamiltonove grupe imaju CEP, a nemaju jaki CEP. Međutim, jaki CEP povlači CIP i $*$CIP.

Algebra $\mathcal{A}$ ima **jedinstveno svojstvo proširenja kongruencija (Unique Congruence Extension Property−UCEP)** ako za svaku kongruenciju ρ na podalgebri od $\mathcal{A}$ postoji jedinstvena kongruencija na $\mathcal{A}$ koja je njeno proširenje. U terminima slabih kongruencija, UCEP može biti formulisan na sledeći način.

Tvrđenje 2.6([64]) Algebra $\mathcal{A}$ ima UCEP ako i samo ako za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$ i za svako $\theta \in Con\mathcal{A}$, važi:

$$B^2 \wedge \theta = \rho \quad \text{ako i samo ako} \quad \theta = \rho \vee \Delta. \ \blacksquare$$

Tvrđenje 2.7([64]) Ako algebra $\mathcal{A}$ ima UCEP, onda je M_Δ podmreža od $Cw\mathcal{A}$. $\blacksquare$

Tvrđenje 2.8([64]) Ako algebra $\mathcal{A}$ ima minimalnu nepraznu podalgebru $\mathcal{A}_m$, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(1) $\mathcal{A}$ zadovoljava UCEP;
(2) $\mathcal{A}$ ima CEP, CIP i za svako $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$, $B^2 \vee \Delta = A^2$;
(3) $Cw\mathcal{A} \cong Sub\mathcal{A} \times Con\mathcal{A}$, u odnosu na preslikavanje $\rho \longmapsto (\rho \wedge \Delta, \rho \vee \Delta)$, tj. Δ pripada centru mreže $Cw\mathcal{A}$. $\blacksquare$

3. NEKE OSOBINE ALGEBRI PREKO $Cw\mathcal{A}$ [52, 53, 58, 63]

Neka svojstva mreže $Cw\mathcal{A}$ dobijaju se neposredno kao posledice mrežnih tvrđenja iz prvog poglavlja. Međutim, postoje i takva tvrđenja koja bitno zavise od svojstava algebre i njenih kongruencija, pa se ne mogu izvesti iz svojstava proizvoljne mreže. Sledeće tvrđenje je direktna posledica Tvrđenja 1.11.

Tvrđenje 2.9([53]) Algebra $\mathcal{A}$ ima $*$CIP ako i samo ako za svako $\theta \in Con\mathcal{A}$, familija $\{\rho \in Cw\mathcal{A} \mid \rho_A \geq \theta\}$ ima najmanji elemenat. ■

Tvrđenje 2.10([53]) Algebra $\mathcal{A}$ ima $*$CIP ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) za svako $\theta \in Con\mathcal{A}$, familija $\{\rho \in Cw\mathcal{A} | \rho_A = \theta\}$ ima najmanji elemenat;

(ii) $\mathcal{A}$ ima wCIP. ■

* * *

U sledećem delu navode se svojstva mreža slabih kongruencija nekih posebnih klasa i varijeteta algebri, kao što su grupe, unarne algebre, Hamiltonove algebre, Abelov varijetet, CIP-varijetet i dr..

Algebra je **unarna** ako ima samo unarne operacije.

$\cup$-**algebra** je algebra čija je mreža podalgebri zatvorena u odnosu na skupovnu uniju.

Algebra $\mathcal{A}$ je **Abelova algebra** ako zadovoljava **term-uslov (TC):** za svaki term $t(x, \overline{y})$ u jeziku algebre $\mathcal{A}$ i za sve $a, b, \overline{c}$ i $\overline{d}$ iz A,

$$\text{iz} \quad t(a, \overline{c}) = t(a, \overline{d}) \quad \text{sledi} \quad t(b, \overline{c}) = t(b, \overline{d}).$$

Risova algebra je algebra $\mathcal{A}$ za koju je za svako $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$, $B^2 \cup \Delta$ kongruencija na $\mathcal{A}$.

Algebra $\mathcal{A}$ je **Hamiltonova algebra** ako je svaka podalgebra od $\mathcal{A}$ klasa neke kongruencije na $\mathcal{A}$.

Svaka unarna algebra je Risova i Hamiltonova algebra.

Algebra $\mathcal{A}$ je **regularna** ako je svaka kongruencija jednoznačno određena svakom svojom klasom.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra i $\mathcal{A}_m$ njena najmanja podalgebra. Algebra $\mathcal{A}$ je $\mathcal{A}_m$-**regularna** ako je svaka kongruencija jednoznačno određena klasom koja sadrži $\mathcal{A}_m$.

Algebra je **c−regularna** (gde je c konstanta (nularna operacija) algebre $\mathcal{A}$) ako je svaka kongruencija jednoznačno određena klasom koja sadrži c.

Varijetet $\mathcal{V}$ ima **CIP** (ili $\mathcal{V}$ je **CIP varijetet)** ako svaka algebra iz $\mathcal{V}$ ima ovo svojstvo.

Varijetet $\mathcal{V}$ je **Risov (Hamiltonov, Abelov) varijetet** ako svaka algebra iz $\mathcal{V}$ ima navedeno svojstvo.

Varijetet $\mathcal{V}$ je **kongruencijski modularan (CM) varijetet** ako je mreža kongruencija za svako $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ modularna mreža.

SM varijetet je varijetet algebri koje imaju modularnu mrežu podalgebri.

Tvrđenja koja slede karakterišu Hamiltonove algebre, kao i one Hamiltonove algebre koje su $\mathcal{A}_m$-regularne, preko svojstva njihovih mreža slabih kongruencija ([53]).

Tvrđenje 2.11([53]) Algebra $\mathcal{A}$ je Hamiltonova ako i samo ako za sve $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$, $B < C$ povlači

$$B^2 \vee \Delta \neq C^2 \vee \Delta$$

u mreži $Cw\mathcal{A}$. ■

Tvrđenje 2.12([53]) Neka algebra $\mathcal{A}$ ima najmanju nepraznu podalgebru $\mathcal{A}_m$. Algebra $\mathcal{A}$ je Hamiltonova ako i samo ako za sve $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$,

$$\text{iz} \quad B \neq C \quad \text{sledi da je} \quad B^2 \vee \Delta \neq C^2 \vee \Delta. \ ■$$

Tvrđenje 2.13([53]) Ako je $\mathcal{A}$ Hamiltonova algebra koja ima CIP i najmanju nepraznu podalgebru $\mathcal{A}_m$, onda je preslikavanje definisano sa $B \longmapsto B^2 \vee \Delta$ potapanje iz $Sub\mathcal{A}$ u $Con\mathcal{A}$ (u mreži $Cw\mathcal{A}$). ■

Sledeća tvrđenja karakterišu $\mathcal{A}_m$-regularne algebre sa jednočlanom nepraznom podalgebrom.

Tvrđenje 2.14([53]) Algebra $\mathcal{A}$ sa jednočlanom najmanjom podalgebrom $\mathcal{A}_m$ je $\mathcal{A}_m$-regularna ako i samo ako je svaka kongruencija $\theta \in Con\mathcal{A}$ jednaka $B^2 \vee \Delta$, za neko $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$. ■

Tvrđenje 2.15([53]) Ako je $\mathcal{A}$ algebra sa jednočlanom najmanjom podalgebrom $\mathcal{A}_m$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $\mathcal{A}$ je Hamiltonova i $\mathcal{A}_m$-regularna;

(ii) preslikavanje $B \longmapsto B^2 \vee \Delta$ je izomorfizam iz $Sub\mathcal{A}$ u $Con\mathcal{A}$ (u $Cw\mathcal{A}$). ■

Iz Tvrđenja 2.15 i 1.13 izvodi se sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.16([53]) Neka je $\mathcal{A}$ algebra sa jednočlanom najmanjom podalgebrom $\mathcal{A}_m$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $\mathcal{A}$ je Hamiltonova algebra i svaka podalgebra u $\mathcal{A}$ je $\mathcal{A}_m$-regularna;

(ii) preslikavanje $C \longmapsto C^2 \vee \Delta_B$ je izomorfizam iz $Sub\mathcal{B}$ u $Con\mathcal{B}$ za sve $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$;

(iii) Algebra $\mathcal{A}$ ima $*$CIP, CEP i skup minimalnih slabih kongruencija u klasama indukovanim preslikavanjem $\rho \longmapsto \rho \vee \Delta$ je skup svih kvadrata $B^2, \mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$. ■

Naredna tvrđenja karakterišu neka svojstva grupa preko njihovih mreža slabih kongruencija.

Neka je $\overline{\mathcal{H}}$ najmanja normalna podgrupa grupe $\mathcal{G}$ koja sadrži $\mathcal{H}$. Očigledno važi da je $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \vee \Delta$, gde je Δ dijagonalna relacija mreže $Cw\mathcal{A}$. Zato grupa $\mathcal{G}$ zadovoljava CIP, ako i samo ako je za svaki par $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ njenih podgrupa $\overline{\mathcal{H} \cap \mathcal{K}} = \overline{\mathcal{H}} \cap \overline{\mathcal{K}}$.

Grupa je Hamiltonova ako i samo ako zadovoljava CEP i CIP, ili, ako i samo ako je njena mreža slabih kongruencija modularna ([52 – 53]).

Konačna grupa ima CIP ako i samo ako je Hamiltonova.

U radu [40] je dokazano da postoje beskonačne grupe koje imaju CIP a nisu Hamiltonove.

Značenje $*$CIP-a za grupe dato je u narednim tvrđenjima.

Tvrđenje 2.17([53]) Grupa $\mathcal{G}$ ima $*$CIP ako i samo ako za svaku familiju podgrupa $\{\mathcal{H}_i \mid i \in I\}$ od $\mathcal{G}$, $\overline{\bigcap_{i\in I} \mathcal{H}_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{\mathcal{H}_i}$, gde je $\overline{\mathcal{H}_i}$ normalno zatvaranje podgrupe $\mathcal{H} \in \mathcal{G}$. ■

Tvrđenje 2.18([53]) Grupa $\mathcal{G}$ je Hamiltonova ako i samo ako zadovoljava $*$CIP. ■

Karakterisanje preko CIP-a Abelovih i kongruencijski modularnih varijeteta dato je u sledećim tvrđenjima.

Tvrđenje 2.19([63]) Ako algebra $\mathcal{A}^2$ zadovoljava CIP, onda je $\mathcal{A}$ Abelova algebra. ■

Posledica 2.20([63]) Svaki CIP varijetet je Abelov. ■

Kako svaka Abelova grupa zadovoljava CIP, to važi i sledeća posledica.

Posledica 2.21([63]) Varijetet grupa je CIP varijetet ako i samo ako je varijetet Abelovih grupa. ■

Tvrđenje koje bi predstavljalo obrat Posledice 2.20 važi za kongruencijsko modularne (CM) varijetete.

Tvrđenje 2.22([63]) U CM varijetetu $\mathcal{V}$ u kome svaka algebra ima nepraznu minimalnu podalgebru, sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) $\mathcal{V}$ je CIP varijetet;

(2) $\mathcal{V}$ je Abelov varijetet. ■

Očigledno je da CIP povlači wCIP. Razlika između ova dva svojstva je u tome što u slučaju CIP-a $\rho \cap \theta$ može biti prazan skup, što nije moguće u slučaju wCIP-a, jer je θ kongruencija na algebri $\mathcal{A}$. Zato, u prethodnom tvrđenju,ako CIP varijetet zamenimo sa wCIP varijetetom, onda nije potreban uslov o egzistenciji minimalne podalgebre.

Tvrđenje 2. 23([63]) CM varijetet je Abelov ako i samo ako ima wCIP. ■

Sledeće tvrđenje je još jedno uopštenje svojstava Abelovih grupa.

Tvrđenje 2.24([63]) Ako je varijetet $\mathcal{V}$ CM i SM varijetet, onda je to CIP varijetet. ■

4. $Cw\mathcal{A}$, EwA I SVOJSTVA ALGEBRI [58, 66, 81]

Slaba ekvivalencija ρ na nepraznom skupu A je simetrična i tranzitivna relacija na A. Mreža slabih ekvivalencija je mreža particija u skupu A, EwA. Mreža $Con\mathcal{A}$ je podmreža EA. Međutim mreža $Cw\mathcal{A}$ nije u opštem slučaju podmreža EwA.

Tvrđenja koja slede, sva iz [58], karakterišu odnos ovih dveju mreža u zavisnosti od svojstva algebre $\mathcal{A}$.

Imajući u vidu Lemu 1.8 dokazuje se da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.25([58]) Dijagonalna relacija Δ je neutralan elemenat u mreži EwA i preslikavanje $\rho \longmapsto (\rho \cap \Delta, \rho \cup \Delta)$ je potapanje iz EwA u $\mathcal{P}A \times EA$. ■

Tvrđenje 2.26([58]) U mreži EwA, Δ je beskonačno distributivan element. ■

Kao posledica navedenih, dokazuje se sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.27([58]) Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra čija je mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ podmreža mreže slabih ekvivalencija EwA. Tada $\mathcal{A}$ ima jaki CEP, CEP, CIP i $*$CIP. ■

Za neke posebne klase algebri, važe sledeća tvrđenja.

Tvrđenja 2.28([58]) Ako je $Cw\mathcal{A}$ podmreža od EwA, onda je $\mathcal{A}$ $\cup$-algebra. ■

Očigledno je da jaki CEP povlači CEP. U slučaju Risove algebre, važi i obrnuto, pa Risova algebra koja ima CEP ima i jaki CEP.

Sledeća dva tvrđenja daju potrebne i dovoljne uslove za algebru $\mathcal{A}$ da njena mreža slabih kongruencija bude podmreža mreže slabih ekvivalencija na skupu A.

Tvrđenje 2.29([58]) Za algebru $\mathcal{A}$ važi da je njena mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ podmreža mreže slabih ekvivalencija EwA ako i samo ako je $\mathcal{A}$ Risova $\cup$-algebra koja ima CEP. ■

Tvrđenje 2.30([58]) $Cw\mathcal{A}$ je podmreža EwA ako i samo ako je $\mathcal{A}$ $\cup$-algebra koja ima jaki CEP. ■

Algebre u Risovom varijetetu zadovoljavaju jaki CEP i njihove podalgebre su zatvorene u odnosu na skupovnu uniju. Zajedno sa prethodno navedenim rezultatima, ta činjenica ima za posledicu sledeća tvrđenja.

Tvrđenje 2.31([58]) Za varijetet $\mathcal{V}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) $\mathcal{V}$ je Risov varijetet;

(2) za svako $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$, $Cw\mathcal{A}$ je podmreža od EwA. ■

Za varijetet algebri koje nemaju drugih operacija osim projekcija kaže se da je ekvivalentan **varijetetu skupova**. Sada je sledeće tvrđenje očigledno.

Posledica 2.32([58]) Za varijetet $\mathcal{V}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) za svako $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$, $Cw\mathcal{A} = EwA$;

(2) $\mathcal{V}$ je ekvivalentan varijetetu skupova. ■

Svojstva CEP i CIP imaju značajnu ulogu u prenošenju proizvoljnih mrežnih zakona sa $Sub\mathcal{A}$ i $Con\mathcal{A}$ na $Cw\mathcal{A}$.

Tvrđenje 2.33([81]) Neka je $\mathcal{A}$ algebra koja ima CEP i CIP. Proizvoljni mrežni identitet važi na $Cw\mathcal{A}$ ako i samo ako važi na $Sub\mathcal{A}$ i $Con\mathcal{A}$. ■

Tvrđenje 2.34([66]) Ako algebra $\mathcal{A}$ ima CEP i $*$CIP, onda i svaka podalgebra $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ ima CEP i $*$CIP. ■

5. GRAFIČKE KOMPOZICIJE [25, 43, 69, 82-83]

Pojam grafičke kompozicije ekvivalencija uveli su, nezavisno jedan od drugog, B. Jonson ([B.Jonsson 1972]) i H. Verner ([H.Werner 1976]) sa ciljem da odrede koji podskup od EA je mreža kongruencija neke algebre definisane na A.

Svaka algebra $\mathcal{A}$ je povezana sa mrežom njenih podalgebri ($Sub\mathcal{A}$), mrežom njenih kongruencija ($Con\mathcal{A}$) i grupom njenih automorfizama ($Aut\mathcal{A}$). Kao prirodno pitanje nameće se karakterizacija mreža $Sub\mathcal{A}$, $Con\mathcal{A}$ i grupe $Aut\mathcal{A}$, za sve algebre $\mathcal{A}$ sa osnovnim skupom A, preko skupa svih podskupova od A, skupa svih particija na A i skupa svih permutacija na A, respektivno.

Za mrežu podalgebri, ovaj problem, rešili su G. Birkof i O. Frink ([O.Frink 1948]). Za automorfizme grupa karakterizacije su dali G. Birkof (1948) i B. Jonson (1968). Za mrežu kongruencija dato je više različitih rezultata. U jednom svom radu iz 1963. godine G. Grecer i E. T. Šmit su karakterisali mrežu kongruencija neke algebre kao algebarsku mrežu.

Dakle, svaka mreža kongruencija neke algebre je algebarska, a takođe i za svaku algebarsku mrežu L postoji algebra čija je mreža kongruencija izomorfna sa L.

Teorema Grecera-Šmita 2.35([25]). Za svaku algebarsku mrežu L, postoji algebra $\mathcal{A}$, takva da je mreža kongruencija $Con\mathcal{A} \cong L$. ■

Značajni rezultati, u vezi sa navedenom problematikom, su i sledeće dve teoreme.

Teorema 2.36 (Lampe). Za proizvoljne dve algebarske mreže L_1 i L_2 postoji algebra $\mathcal{A}$, takva da je $Sub\mathcal{A} \cong L_1$ i $Con\mathcal{A} \cong L_2$. ■

Teorema 2.37 (Lampe). Za proizvoljne dve algebarske mreže L_1 i L_2 i proizvoljnu grupu $\mathcal{G}$ postoji algebra $\mathcal{A}$, takva da je $Sub\mathcal{A} \cong L_1$, $Con\mathcal{A} \cong L_2$ i $Aut\mathcal{A} \cong \mathcal{G}$. ■

Za mrežu kongruencija mreže važi sledeći rezultat.

Tvrđenje 2.38([25]) Za svaku mrežu L mreža $ConL$ je distributivna. ■

Tvrđenje, obrnuto Tvrđenju 2.38, predstavlja jednu od davnih hipoteza u teoriji mreža. Jedan od prvih dokaza ove hipoteze, za konačne slučajeve, dao je R. P. Dilvort ([R.P. Dilworth]). Objedinjujući svoje rezultate, G. Grecer i E. T. Šmit su dali dokaz sledećeg tvrđenja.

Tvrđenje 2.39([25]) Neka je $K-$konačna distributivna mreža. Tada postoji konačna mreža L, takva da je $K \cong ConL$. ■

G.Vojvodić i B.Šešelja su u [82] pokazali da za svaku algebarsku mrežu postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je njena mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ izomorfna sa tom mrežom. Preciznije, ako mreži L odgovara algebra $\mathcal{B} = (A, F)$ tako da je $Con\mathcal{B} \cong L$, koja postoji na osnovu Grecer-Šmitove teoreme, tražena algebra $\mathcal{A}$ se konstruiše tako što se u F dodaju svi elementi iz A kao nularne operacije.

Još uvek je otvoren problem, reprezentacije mreže pomoću slabih kongruencija (kao i slabo refleksivnih[4] kompatibilnih relacija i slabih tolerancija[5]), sa fiksiranim elementom u mreži koji bi reprezentovao dijagonalnu relaciju.

Rešavajući navedeni problem za slabe kongruencije, G. Vojvodić i B. Šešelja su u [80] uveli pojam $\Delta-$odgovarajućeg elementa.

Neka je L algebarska mreža. Elemenat a je $\Delta-$**odgovarajući** ako zadovoljava sledeće uslove:

(1) a je kodistributivan elemenat u L;

(2) Za sve $x, y \in L$, ako je $x \wedge y \neq 0$, onda je $\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$;

(3) Za sve $x, y \in L$, ako je $x \neq 0$ i $\overline{x} < y$, onda je $\overline{(y \wedge a)} \neq y \wedge a$;

(4) Ako je $x \neq 0$ i $x = \bigwedge (y \mid y \in L \setminus \{0\})$, onda je $x \neq \overline{x}$, za svako $x \in L$;

(5) Ako $x \in \downarrow a$ i $x \prec a$, onda

$$\bigvee (y \in \uparrow a \mid y \vee \overline{x} < 1) \neq 1.$$

Ako je $f-$mrežni izomorfizam iz $Cw\mathcal{A}$ u mrežu L, oni su pokazali da je $f(\Delta)$ $\Delta-$odgovarajući elemenat.

A. Tepavčević u [69] daje rešenje navedenog otvorenog problema za klasu mreža kod kojih je dijagonalna relacija slika elemenata iz centra mreže. Kako

---

[4]Relacija ρ algebre $\mathcal{A}$ je **slabo refleksivna** ako za svako $x, y \in \mathcal{A}$

$$\rho(x,y) \Longrightarrow \rho(x,x) \wedge \rho(y,y).$$

[5]**Slaba tolerancija** je relacija koja je slabo refleksivna, simetrična i kompatibilna.

dijagonalna relacija pripada centru mreže, to dobijena algebra čija mreža slabih kongruencija je izomorfna sa tom mrežom zadovoljava CEP i CIP. Međutim, ona zadovoljava i UCEP, takođe.

Tvrđenje 2.40([69]) Neka je L algebarska mreža i $a \in L$ elemenat iz centra mreže, takav da $\uparrow a$ ima tačno jedan koatom. Tada postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ izomorfna sa L u odnosu na preslikavanje f, i $f(\Delta) = a$. ■

Analogan rezultat dobijen je i za reprezentaciju mreže preko slabih tolerancija i slabo refleksivnih kompatibilnih relacija.

Dajući geometrijski ton svojim razmatranjima H. Verner ([83]) uvodi preslikavanja koja naziva grafičkim kompozicijama i pokazuje da je komplentna podmreža L mreže EX mreža kongruencija neke algebre definisane na X ako i samo ako je L zatvorena u odnosu na sve grafičke kompozicije. Mreža kongruencija na skupu X se razmatra preko podalgebri algebre EX, sa definisanim beskonačnim supremumima i svim grafičkim kompozicijama kao operacijama.

Pojam grafičke kompozicije H. Verner uvodi polazeći od sledeće teoreme.

Teorema 2.41 (Mal'cev) Neka je (A, F) algebra i U skup svih njenih unarnih algebarskih funkcija. Tada algebre (A, F) i (A, U) imaju iste relacije kongruencije. ■

Posledica 2.42([83]) Ako je L mreža kongruencija neke algebre, onda je to i mreža kongruencija neke unarne algebre. ■

Za definisanje grafičke kompozicije H. Verner koristi sledeće pojmove i oznake.

Neka je $\mathcal{R}X$ skup svih binarnih relacija na skupu X. **Funkcija** (unarna) $f : X \longrightarrow X$ **očuvava** $R \in \mathcal{R}X$ ili je **saglasna sa** R ako i samo ako za svako $(x, y) \in R$ važi $(fx, fy) \in R$. Neka je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}X$ i $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ skup svih funkcija $f : X \longrightarrow X$ koje očuvavaju svako $R \in \mathcal{M}$. Vezu između skupa $\mathcal{M}$

i skupa unarnih funkcija na skupu X, uspostavlja jedan operator zatvaranja $[\ ]$ na $\mathcal{R}X$. Sa $[\mathcal{M}]$ je označen skup svih relacija na X koje su saglasne sa $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Kako mrežu kongruencija unarne algebre (A, F) čine samo one relacije ekvivalencije na A koje su saglasne sa F, to mrežu kongruencija na skupu X, $ConX = Con(X, F)$, čine oni podskupovi od EX koji su zatvoreni u odnosu na ovaj operator $[\ ]$.

Na taj način H. Verner ([83]) pojednostavljuje razmatranja na mreži kongruencija, posmatrajući $[\ ]$−zatvorene podskupove od $\mathcal{R}X$ i određujući za skup F skup unarnih funkcija $\mathcal{U}(F)$ na X, koje očuvavaju svako $R \in \mathcal{R}X$. Svakako, R je saglasno sa F ako i samo ako je R podalgebra od $(X, F) \times (X, F)$. Ova algebra je unarna i skup $\mathcal{U}(F)$ je zatvoren u odnosu na proizvoljne preseke i unije. Ako su relacije R i S saglasne sa F, onda su i relacije
$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ i $R \circ S = \{(y, x) \mid \exists z\ (x, z) \in R \ \wedge\ (z, y) \in S\}$ saglasne sa F, pa je $\mathcal{U}(F)$ zatvoren u odnosu na operacije $\circ$ i $^{-1}$. Za $R \in \mathcal{U}(F)$ relacija ekvivalencije EqR, generisana sa R, je saglasna sa F i $\mathcal{U}(F)$ je zatvoren u odnosu na operacije relacije ekvivalencije.

Po uvođenju navedenih pojmova, H. Verner pokazuje da je $ConX = Con(X, F) = \mathcal{U}(F) \cap EX$ kompletna (ovde algebarska) podmreža od mreže EX. Međutim, ovi uslovi nisu dovoljni za karakterisanje skupa $\mathcal{U}(F)$.

Najveći broj operacija na $\mathcal{U}(F)$ može se dovesti u vezu sa grafom i svaki graf se može povezati sa operacijama na $\mathcal{U}(F)$. Suština je u tome što se sve operacije na $\mathcal{U}(F)$ mogu obraditi kao operacije na EX, koje H. Verner naziva grafičkim kompozicijama.

Neka je G direktan graf sa dva različita čvora 0 i 1. Neka ψ definiše granu iz G određenu elementima iz $\mathcal{U}(F)$ (tj. ψ je preslikavanje iz grana grafa G u skup $\mathcal{U}(F)$). Neka φ obeležava čvorove grafa G elementima iz X. **Preslikavanje φ je kompatibilno sa ψ** ako $(\varphi x, \varphi y) \in \psi(e)$ za svaku granu e koja spaja x i y.

Za fiksirano $G, 0, 1, \psi$ definiše se relacija S na X sa: $(a, b) \in S$ ako i samo ako postoji φ kompatibilno sa ψ takvo da je $\varphi(0) = a$ i $\varphi(1) = b$. Ova relacija i relacija ekvivalencije EqS treba da budu saglasne sa F. Tada će, u slučaju kada je $f \in F$ i $f \circ \varphi$ kompatibilno sa F, φ biti kompatibilno sa ψ, jer f očuvava sve relacije koje označavaju grane grafa.

Relacije, kojima se predstavljaju grane grafa, su refleksivne ili simetrične. Kako se razmatranja vrše na relacijama ekvivalencije, mogu se zanemariti sve petlje u grafu ili direktnom grafu.

Neka je G takav graf sa dva različita čvora 0 i 1. Na skupu EX definiše se operacija $P_{G,0,1}$ čija arnost je broj grana u G na osnovu definisane, za svako označavanje ψ grana elementima iz EX, relacije S: $P_{G,0,1}(\psi) := EqS$.

Arnost ovih operacija može se smanjiti uvođenjem obojenog grafa i zahtevom da su dve grane iste boje ako imaju isto obeležavanje.

Očigledno je, da je sada mreža kongruencija podskup $L \subseteq EX$ zatvoren u odnosu na sve ove grafičke kompozicije $P_{G,0,1}$.

Obojeni graf (poddirektan, bez petlji) je uređena trojka (V, I, C) skupova V, I i C čiji elementi se zovu čvorovi, grane i boje, zajedno sa preslikavanjima
$\nu : I \longrightarrow \mathcal{N}_2(V) = \{P \mid P \subseteq V, |P| = 2\}$ i $c : I \longrightarrow C$ koje je „na".

Neka je $G = (V, I, C)$ obojeni graf i $0, 1 \in V$ dva različita čvora. Za svako preslikavanje $\varphi : C \longrightarrow EX$ definišu se relacije:

$$S_{G,0,1}(\varphi) := \{(f0, f1) \mid f : V \rightarrow X \text{ i za } \forall e \in I, \nu(e) = (x, y) = (fx, fy) \in \varphi c(e)\}$$

i

$$P_{G,0,1}(\varphi) := EqS_{G,0,1}(\varphi).$$

Ovo definisano preslikavanje $P_{G,0,1} : EX^C \longrightarrow EX$ je **grafička kompozicija** (u smislu Vernera).

Kompletan graf na skupu X, u oznaci X^*, ima čvorove X i tačno jednu granu između dva različita čvora i sve grane imaju različite boje, tj. $X^* = (X, \mathcal{N}_2(X), \mathcal{N}_2(X))$.

U skladu sa prethodno navedenim oznakama, H. Verner dokazuje sledeću teoremu.

Teorema 2.43([83]) Za kompletnu podmrežu L mreže EX , sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) L je mreža kongruencija odgovarajuće algebre (X, F);

(2) L je zatvorena u odnosu na sve grafičke kompozicije;

(3) L je zatvorena u odnosu na grafičke kompozicije $P_{X^*,0,1}$ za neko $0, 1 \in X, 0 \neq 1$. ■

Uopštavajući ove rezultate, M. Ploščica u [43] pokazuje da je slična karakterizacija moguća i za slabe kongruencije, tj. on daje odgovor na pitanje: kada je podfamilija mreže slabih ekvivalencija, EwA, na A, skup svih slabih kongruencija neke algebre $\mathcal{A}$ definisane na A kao osnovnom skupu. Za rešenje ovog problema, on pored pojma grafičke kompozicije, koristi i pojam poddirektne unije.

Familija $\mathcal{F} \subseteq EwX$ **je poddirektna** ako za svako $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ postoji $\gamma \in \mathcal{F}$ takvo da je $\alpha \cup \beta \subseteq \gamma$.

Očigledno je, da ako je $\mathcal{F}$ jedna takva poddirektna familija, onda je unija $\bigcup \mathcal{F}$ slaba ekvivalencija. Čak šta više, ako su sve relacije iz $\mathcal{F}$ kompatibilne sa nekom algebarskom strukturom na X, onda je $\bigcup \mathcal{F}$ takođe kompatibilna relacija, a samim tim i slaba kongruencija.

Lema 2.44([43]) Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra. Tada je $Cw\mathcal{A}$ podskup od EwA zatvoren u odnosu na sve grafičke kompozicije. ■

Lema 2.45([43]) Za algebru $\mathcal{A}$, skup $Cw\mathcal{A}$ je zatvoren u odnosu na unije poddirektnih familija $\mathcal{F} \subseteq Cw\mathcal{A}$. ■

Lema 2.46([43]) Neka je J skup svih operacija na A koje očuvavaju svaku relaciju $\alpha \in \mathcal{F}$. Neka je $\mathcal{A}$ algebra sa A kao osnovnim skupom i sa J kao skupom svih operacija. Tada je $\mathcal{F} = Cw\mathcal{A}$. ■

Iz Lema 2.44, 2.45 i 2.46, M. Ploščica izvodi kao svoj glavni rezultat sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.47 **([43])** Familija $\mathcal{F} \subseteq EwA$ je skup svih slabih kongruencija neke algebre ako i samo ako je $\mathcal{F}$ zatvorena u odnosu na sve grafičke kompozicije i poddirektne unije. ■

Sledeći ove rezultate, u ovoj doktorskoj disertaciji, definisana je operacija $*$ (odnosno operacije $\overline{*}$ i $\underline{*}$) na mreži L preko jednog operatora zatvaranja na mreži L (pojavljuje se u 5. potpoglavlju I. poglavlja, ali se tu ne karakteriše kao operator zatvaranja). Pokazalo se, da tako definisana operacija $*$ na mreži $Cw\mathcal{A}$ predstavlja svojevrsnu grafičku kompoziciju, koja svojim originalnim geometrijskim tonovima pristupa rešavanju prethodno navedenih algebarskih problema. Na taj način, neka poznata tvrđenja dobijaju svoj novi oblik, sagledana iz drugog ugla, a data su i neka druga tvrđenja. Pretpostavlja se, da ova operacija $*$ može dati doprinos u rešavanju aktuelnih, trenutno otvorenih, algebarskih problema.

$* * *$

Poglavlje III

MREŽNE OPERACIJE I LATISOIDI

1. UVOD

Polazna algebarska struktura za naša razmatranja u ovom poglavlju je mreža L, sa binarnim operacijama $\wedge$, $\vee$ i uobičajenim mrežnim poretkom $\leq$. Mrežna tvrđenja koja slede, koristiće se u Poglavlju 4 za dokaz tvrđenja koja karakterišu svojstva mreže slabih kongruencija. U mreži slabih kongruencija dijagonalna relacija Δ ima posebnu ulogu. Mnoga svojstva algebri su u vezi sa položajem dijagonale u mreži slabih kongruencija. Kako je Δ uvek kodistributivan elemenat u toj mreži, to će i naša razmatranja u ovom delu biti vezana za algebarsku mrežu L sa fiksiranim kodistributivnim elementom a. Uporedo će se razmatrati i dualna tvrđenja, koja su vezana za distributivni elemenat a algebarske mreže L.

2. NOVE OPERACIJE NA MREŽI

Neka je $(L, \wedge, \vee)$ algebarska mreža sa fiksiranim kodistributivnim elementom a. Preslikavanje m_a (Lema 1.7′) definisano sa $m_a : x \longmapsto x \wedge a$ je kompletni homomorfizam iz L na ideal $\downarrow a$. Klase kongruencije ϕ_a indukovane ovim homomorfizmom imaju najveće elemente (Tvrđenje 1.20). Označimo sa $\overline{x}$ najveći elemenat klase kongruencije ϕ_a kojoj x pripada, tj. $x \wedge a = \overline{x} \wedge a$ ili kraće $m_a(x) = m_a(\overline{x})$.

Na mreži L, za fiksiran kodistributivni elemenat a, definišemo binarnu operaciju $\overline{*}_a$ na sledeći način:

$$x \overline{*}_a y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}), \text{ za sve } x, y \in L. \quad (1)$$

Analogno, ako je $a \in L$ distributivni elemenat koalgebarske mreže L, kompletni homomorfizam $n_a : L \longrightarrow \uparrow a$ definisan sa $n_a(x) = x \vee a$ indukuje kongruenciju θ_a (Lema 1.7). Ako klase kongruencije θ_a imaju najmanje elemente[6], označimo sa $\underline{x}$ najmanji elemenat klase koja sadrži x. Binarnu operaciju $\underline{*}_a$ definišemo na sledeći način:

$$x \underline{*}_a y = (\underline{x} \vee y) \wedge (x \vee \underline{y}), \text{ za sve } x, y \in L. \quad (2)$$

[6] Ovi elementi ne moraju da postoje u algebarskoj mreži. Oni postoje u koalgebarskoj mreži.

Očigledno, binarne operacije $\overline{*}_a$ i $\underline{*}_a$ su uzajamno dualne (definisane su preko uzajamno dualnih mrežnih operacija). Na dalje, zbog jednostavnosti zapisivanja, umesto $\overline{*}_a$ i $\underline{*}_a$ pisaćemo kraće samo $\overline{*}$ i $\underline{*}$.

Lema 3.1 Neka je a kodistributivan elemenat algebarske mreže L. Preslikavanje $f : L \longrightarrow L$ definisano sa $f(x) = \overline{x}$ je operator zatvaranja na L.

Dokaz. (i) $x \leq \overline{x}$, za $x \in L$.

(ii) Za $\overline{x} \in L$, na osnovu (i), sledi da je $\overline{x} \leq \overline{\overline{x}}$. Kako je $\overline{x}$ najveći elemenat klase kojoj x pripada i $m_a(x) = m_a(\overline{x})$ tj. $m_a(\overline{x}) = m_a(\overline{\overline{x}})$, to su x, $\overline{x}$ i $\overline{\overline{x}}$ u istoj klasi kongruencije, pa je $\overline{\overline{x}} \leq \overline{x}$. Sada je $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$.

(iii) Iz $x \leq y$ sledi da je $x \wedge y = x$, pa je $\overline{x} = \overline{x \wedge y} \leq \overline{y}$. ■

Preslikavanje $g(x) = \underline{x}$ nije operator zatvaranja na L, ali važi sledeće:

Lema 3.2 Ako je a distributivni elemenat koalgebarske mreže L, onda preslikavanje $g : L \longrightarrow L$ definisano sa $g(x) = \underline{x}$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) $x \geq \underline{x}$;

(ii) $\underline{\underline{x}} = \underline{x}$;

(iii) $x \geq y \Longrightarrow \underline{x} \geq \underline{y}$, za sve $x, y \in L$.

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu prethodne leme, jer su navedeni uslovi za preslikavanje g dualni uslovima koji karakterišu operator zatvaranja f. ■

Iz navedenih lema proizilazi sledeća činjenica.

Posledica 3.3 (i) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

(ii) $\underline{x \vee y} = \underline{x} \vee \underline{y}$.

Dokaz. (i) Kako je $x \wedge y \leq x$ i $x \wedge y \leq y$, to je $\overline{x \wedge y} \leq \overline{x} \wedge \overline{y}$. Dalje, iz $x \wedge a = \overline{x} \wedge a$ i $y \wedge a = \overline{y} \wedge \overline{a}$ sledi da je $(x \wedge y) \wedge a = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge a$, pa su $x \wedge y$ i $\overline{x} \wedge \overline{y}$ u istoj klasi kongruencije ϕ_a indukovane homomorfizmom m_a. To znači da je $\overline{x} \wedge \overline{y} \leq \overline{x \wedge y}$.

(ii) Dokazuje se analogno. ■

Lema 3.4 (i) $\overline{x} \wedge (x \mathbin{\overline{*}} y) = x \mathbin{\overline{*}} y$;

(ii) $\underline{x} \vee (x \mathbin{\underline{*}} y) = x \mathbin{\underline{*}} y$.

Dokaz (i) Treba pokazati da je $x \mathbin{\overline{*}} y \leq \overline{x}$.

$$x \mathbin{\overline{*}} y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \leq \overline{x} \vee x = \overline{x}.$$

(ii) Analogno. ■

Lema 3.5 (i) $\overline{x \mathbin{\overline{*}} y} = \overline{x \wedge y}$.

(ii) $\underline{x \mathbin{\underline{*}} y} = \underline{x \vee y}$.

Dokaz. Iz Lema 3.1, 3.2, definicija operacija $\overline{*}$, $\underline{*}$ i Posledice 3.3 sledi:

(i) $\overline{x \wedge y} \leq \overline{(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})} = \overline{x \mathbin{\overline{*}} y} \leq \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} =$
$\overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} = \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y}$.

(ii) Analogno. ■

Teorema 3.6 Ako je $(L, \wedge, \vee)$ algebarska mreža sa fiksiranim kodistributivnim elementom a, onda je $(L, \overline{*})$ komutativni, idempotentni grupoid na kome važi identitet:

$$x \mathbin{\overline{*}} (x \mathbin{\overline{*}} y) = x \mathbin{\overline{*}} y.$$

Dokaz. Iz definicije operacije $\overline{*}$ i Lema 3.4, 3.5, sledi:

$$x \mathbin{\overline{*}} (x \mathbin{\overline{*}} y) = (\overline{x} \wedge (x \mathbin{\overline{*}} y)) \vee (x \wedge (\overline{x \mathbin{\overline{*}} y})) = (x \mathbin{\overline{*}} y) \vee (x \wedge (\overline{x \wedge y})) =$$
$$(x \mathbin{\overline{*}} y) \vee (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y}) = x \mathbin{\overline{*}} y. \ ■$$

Teorema 3.6′ Ako je $(L, \wedge, \vee)$ koalgebarska mreža sa fiksiranim distributivnim elementom a, onda je $(L, \underline{*})$ komutativni, idempotentni grupoid na kome važi identitet:

$$(x \mathbin{\underline{*}} y) \mathbin{\underline{*}} x = x \mathbin{\underline{*}} y.$$

Dokaz. Analogan dokazu prethodne teoreme. ■

Ovako definisane operacije $\overline{*}$ i $\underline{*}$ nisu asocijativne. Međutim, preko ovih operacija mogu se definisati parcijalna uređenja na skupu L. Nove poretke, $\leq_{\overline{*}}$ i $\leq_{\underline{*}}$, na L definišimo na sledeći način: za sve $x, y \in L$,

$$x \leq_{\overline{*}} y \quad \text{ako i samo ako} \quad x \overline{*} y = y, \tag{3}$$

i

$$x \leq_{\underline{*}} y \quad \text{ako i samo ako} \quad x \underline{*} y = x. \tag{4}$$

Usvajamo još i sledeće oznake:
$x \geq_{\overline{*}} y$ ako i samo ako $y \leq_{\overline{*}} x$, i $x \geq_{\underline{*}} y$ ako i samo ako $y \leq_{\underline{*}} x$.

Tvrđenje 3.7 Prethodno definisane relacije, $\leq_{\overline{*}}$ i $\leq_{\underline{*}}$, su relacije poretka na L.

Dokaz. Dokažimo refleksivnost, antisimetriju i tranzitivnost relacije $\leq_{\overline{*}}$. Refleksivnost ove relacije sledi iz idempotentnosti, a antisimetrija iz komutativnosti operacije $\overline{*}$, tj. $x \leq_{\overline{*}} x$, jer je $x \overline{*} x = (\overline{x} \wedge x) \vee (x \wedge \overline{x}) = x$. Dalje, ako je $x \leq_{\overline{*}} y$ i $y \leq_{\overline{*}} x$, odnosno $x \overline{*} y = y$ i $y \overline{*} x = x$, onda je $y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) = y \overline{*} x = x$. Dokažimo tranzitivnost.

Neka je $x \leq_{\overline{*}} y$ i $y \leq_{\overline{*}} z$. Iz $x \overline{*} y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = y$, sledi da je:

$$x \wedge \overline{y} \leq y. \tag{5}$$

Analogno,

$$y \wedge \overline{z} \leq z. \tag{6}$$

Iz $y = x \overline{*} y \leq \overline{x} \wedge \overline{y}$, Leme 3.1 i Posledice 3.3 sledi da je: $\overline{y} \leq \overline{x} \wedge \overline{y} \leq \overline{y}$, pa je $\overline{y} \leq \overline{x}$. Slično se pokazuje da je $\overline{z} \leq \overline{y}$. Zato je:

$$\overline{z} \leq \overline{y} \leq \overline{x}. \tag{7}$$

Iz (5), (6) i (7) sledi:

$$\begin{aligned} x \wedge \overline{z} &\leq x \wedge \overline{y} \leq y, \text{ odnosno,} \\ x \wedge \overline{z} &\leq y \wedge \overline{z} \leq z. \end{aligned}$$

Sada je:

$$z = z \wedge \overline{z} \leq z \wedge \overline{x} \leq (z \wedge \overline{x}) \vee (\overline{z} \wedge x) = x \overline{*} z \leq z,$$

tj. $x \leq_{\overline{*}} z$.

Dokaz da je relacija $\leq_{\underline{*}}$ relacija poretka je analogan prethodnom. ■

Na taj način je pokazano da su $(L, \leq_{\overline{*}})$ i $(L, \leq_{\underline{*}})$ poseti. To nisu uvek mreže. Međutim, ti poseti imaju mnoga interesantna svojstva, koja će biti navedena u sledećim tvrđenjima.

Lema 3.8 (i) $x \wedge y \leq x \overline{*} y \leq x \vee y$;

(ii) $x \wedge y \leq x \underline{*} y \leq x \vee y$.

Dokaz (i) $x \wedge y \leq (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = x \overline{*} y \leq y \vee x = x \vee y$.

(ii) $x \wedge y \leq (x \vee \underline{y}) \wedge (\underline{x} \vee y) = x \underline{*} y \leq x \vee y$. ■

U tvrđenjima koja slede koristićemo sledeće pojmove i oznake.

$\downarrow a$ i $\uparrow a$ su, redom, glavni ideal i glavni filter polazne algebarske mreže $(L, \wedge, \vee)$, i $\downarrow_{\overline{*}} a = \{x \in L \mid x \leq_{\overline{*}} a\}$ i $\uparrow_{\overline{*}} a = \{x \in L \mid a \leq_{\overline{*}} x\}$ glavni ideal i glavni filter poseta $(L, \leq_{\overline{*}})$ generisani elementom a. Analogno se definišu skupovi $\downarrow_{\underline{*}} a$ i $\uparrow_{\underline{*}} a$ poseta $(L, \leq_{\underline{*}})$.

$[b, c] = \{x \in L \mid b \leq x \leq c\}$ je interval mreže L, a $[b, c]_{\overline{*}} = \{x \in L \mid b \leq_{\overline{*}} x \leq_{\overline{*}} c\}$ i $[b, c]_{\underline{*}} = \{x \in L \mid b \leq_{\underline{*}} x \leq_{\underline{*}} c\}$ su intervali poseta $(L, \leq_{\overline{*}})$ i $(L, \leq_{\underline{*}})$.

Tvrđenje 3.9 Neka je $(L, \wedge, \vee)$ algebarska mreža sa fiksiranim kodistributivnim elementom a i $\leq_{\overline{*}}$ relacija poretka definisana sa (3). Tada je:

(i) $a \leq_{\overline{*}} x$, za svaki $x \in L$.

(ii) Ako $b \in \downarrow a$, i $x, y \in [b, \overline{b}]$, onda $x \overline{*} y = x \vee y$.

(iii) $x \leq y$ ako i samo ako $x \leq_{\overline{*}} y$, za sve $x, y \in [b, \overline{b}]$.

(iv) $([b, \overline{b}]_{\overline{*}}, \leq_{\overline{*}})$ je mreža, izomorfna sa intervalom u L koji je ograničen istim elementima.

(v) $\overline{x \overline{*} y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

(vi) $\overline{x} \leq_{\overline{*}} \overline{y}$ ako i samo ako $\overline{y} \leq \overline{x}$.

(vii) $x \leq_{\bar{*}} y \Longrightarrow \overline{y} \leq \overline{x}$.

$(viii)$ $x \leq_{\bar{*}} y \Longrightarrow \overline{x} \leq_{\bar{*}} \overline{y}$.

(ix) $\overline{a \bar{*} x} = \overline{x}$.

(x) $\overline{a} \leq_{\bar{*}} x$ ako i samo ako $x = \overline{x}$.

(xi) L je unija svih intervala $[b, \overline{b}]_{\bar{*}}$, gde je $b \leq a$.

(xii) Glavni filter $\uparrow_{\bar{*}} \overline{a}$ je antiizomorfan sa idealom $\downarrow a$ u odnosu na odgovarajuće poretke.

$(xiii)$ $x \leq_{\bar{*}} \overline{0}$, za svaki $x \in L$, gde je 0 najmanji elemenat mreže L.

Dokaz (i) $a \bar{*} x = (\overline{a} \wedge x) \vee (a \wedge \overline{x}) = (\overline{a} \wedge x) \vee (a \wedge x) = \overline{a} \wedge x = x$ (Lema 1.7').

(ii) Ako $b \in \downarrow a$, i $x, y \in [b, \overline{b}]$, onda je $x \bar{*} y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = (\overline{b} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{b}) = y \vee x$.

$(iii - iv)$ Neka je $b \leq x \leq y \leq \overline{b}$. Tada je $x \bar{*} y = y$, na osnovu (ii), pa je $x \leq_{\bar{*}} y$. Obratno, ako je $x \leq_{\bar{*}} y$, onda je $(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = y \vee x = y$, pa je $x \leq y$. To znači da $x \in [b, \overline{b}]$ ako i samo ako $x \in [b, \overline{b}]_{\bar{*}}$, pa su ta dva intervala, kao poseti, izomorfni.

(v) $\overline{x \bar{*} y} = (\overline{\overline{x}} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{\overline{y}}) = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

(vi) $\overline{x} \leq_{\bar{*}} \overline{y}$ ako i samo ako $\overline{y} = \overline{x \bar{*} y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, na osnovu (3) i (v), ako i samo ako $\overline{y} \leq \overline{x}$.

(vii) Iz $x \leq_{\bar{*}} y$ sledi $x \bar{*} y = y$, tj. $(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = y$. Sada je:
$\overline{y} = \overline{(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})} \leq \overline{x} \wedge \overline{y} \leq \overline{y}$, pa je $\overline{y} \leq \overline{x}$.

$(viii)$ Ovo je posledica (vi) i (vii).

(ix) $\overline{a \bar{*} x} = (\overline{\overline{a}} \wedge x) \vee (\overline{a} \wedge \overline{x}) = \overline{a} \wedge \overline{x} = \overline{x}$.

(x) $\overline{a} \leq_{\bar{*}} x$ ako i samo ako $\overline{a \bar{*} x} = x$ ako i samo ako $\overline{x} = x$ (iz (ix)).

(xi) Ovo je posledica (iv) i činjenice da je L unija intervala $[b, \overline{b}]$, za $b \leq a$.

(xii) Ovaj deo tvrđenja se odnosi na antiizomorfizam uređenih skupova: $(\downarrow a, \leq)$ i $(\uparrow_{\overline{*}} \overline{a}, \leq_{\overline{*}})$. Traženo preslikavanje $F : \downarrow a \longrightarrow \uparrow_{\overline{*}} \overline{a}$, definisano je sa $F(x) = \overline{x}$. Na osnovu (x) i (xi), F je „*na*" preslikavanje. Dokažimo izotonost preslikavanja F. Ako je $x \leq y$, onda je $\overline{x} \leq \overline{y}$ (Lema 3.1), pa je $\overline{y} \leq_{\overline{*}} \overline{x}$, na osnovu (vi). Obrnuto, za $\overline{x} \leq_{\overline{*}} \overline{y}$ sledi $\overline{y} \leq \overline{x}$, a zatim $y = \overline{y} \wedge a \leq \overline{x} \wedge a = x$. Time je injektivnost F dokazana.

$(xiii)$ Sledi iz $(xiii)$ i (ii). ■

Važi i dualno tvrđenje.

Tvrđenje 3.9' Neka je $(L, \wedge, \vee)$ koalgebarska mreža sa fiksiranim distributivnim elementom a i $\leq_{\underline{*}}$ relacija poretka definisana sa (4). Tada je:

(i) $a \geq_{\overline{*}} x$, za svaki $x \in L$.

(ii) Ako $b \in \uparrow a$, i $x, y \in [\underline{b}, b]$, onda $x \underline{*} y = x \wedge y$.

(iii) $x \leq y$ ako i samo ako $x \leq_{\underline{*}} y$, za sve $x, y \in [\underline{b}, b]$.

(iv) $([\underline{b}, b]_{\underline{*}}, \leq_{\underline{*}})$ je mreža, izomorfna sa intervalom u L koji je ograničen istim elementima.

(v) $\underline{x * y} = \underline{x} \vee \underline{y}$.

(vi) $\underline{x} \leq_{\underline{*}} \underline{y}$ ako i samo ako $\underline{y} \leq \underline{x}$.

(vii) $x \leq_{\underline{*}} y \Longrightarrow \underline{y} \leq \underline{x}$.

$(viii)$ $x \leq_{\underline{*}} y \Longrightarrow \underline{x} \leq_{\underline{*}} \underline{y}$.

(ix) $\underline{a * x} = \underline{x}$.

(x) $x \leq_{\underline{*}} \underline{a}$ ako i samo ako $x = \underline{x}$.

(xi) L je unija svih intervala $[\underline{b}, b]_{\underline{*}}$, gde je $b \geq a$.

(xii) Glavni ideal $\downarrow_{\underline{*}} \underline{a}$ je antiizomorfan sa filtrom $\uparrow a$.

$(xiii)$ $\underline{1} \leq_{\underline{*}} x$, za svako $x \in L$, gde je 1 jedinični elemenat mreže L. ■

Iz navedenih osobina zaključujemo da je $(L, \leq_{\overline{*}})$ ograničen poset. Njegov najmanji elemenat je kodistributivan elemenat a, a najveći elemenat je $\overline{0}$, gde je 0 najmanji elemenat mreže $(L, \leq)$. Dualno tome, najveći elemenat poseta $(L, \leq_{\underline{*}})$ je početni kodistributivni elemenat a, a najmanji elemenat je $\underline{1}$(1 je jedinični elemenat mreže L).

Iz navedenih Tvrđenja 3. 9(xii) i Tvrđenja 3. 9$'(xii)$ sledi i sledeća činjenica.

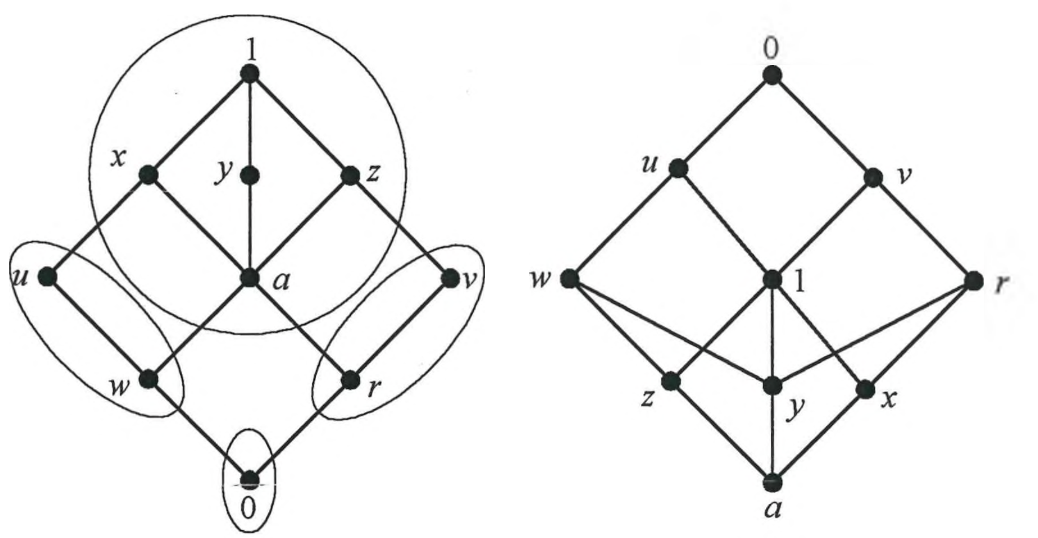
Posledica 3.10 (i) Glavni filter $\uparrow_{\overline{*}} \overline{a}$ je mreža.

(ii) Glavni ideal $\downarrow_{\underline{*}} \underline{a}$ je mreža. ∎

Navedeni rezultati ilustrovani su na primeru koji sledi.

Primer 3.1

Na Slici 3.1, pod a), dat je Hase dijagram jedne algebarske mreže $(L, \leq)$[7]. Izaberimo na njoj jedan kodistributivan elemenat, a. Sada homomorfizam m_a indukuje kongruenciju ϕ_a. Zaokruženi elementi mreže su klase te kongruencije i one imaju najveće elemente. Zato, na skupu L, možemo definisati operaciju $\overline{*}$ i poredak $\leq_{\overline{*}}$. Hase dijagram parcijalno uređenog skupa $(L, \leq_{\overline{*}})$ dat je na Slici 3.1, pod b).



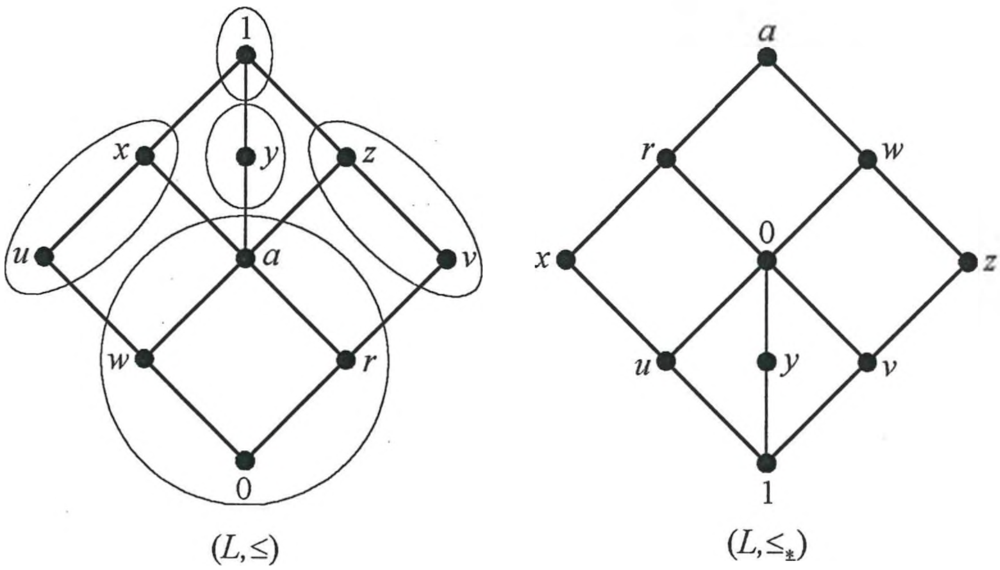
$(L,\leq)$ $(L,\leq_{\underline{*}})$

a) *b)*

Slika 3.1

[7]Mreža $(L, \leq)$ je izomorfna sa mrežom slabih kongruencija algebre $\mathcal{A} = (\{a, b, c\}, f, a)$, gde je f unarna operacija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, a konstanta a nularna operacija algebre $\mathcal{A}$.

Kako je navedena mreža $(L, \leq)$ i koalgebarska, a uočeni elemenat $a \in L$ i distributivan elemenat ove mreže, to homomorfizam n_a indukuje kongruenciju θ_a. Klase ove kongruencije su zaokruženi elementi mreže na Slici 3.2, pod a). One imaju najmanje elemente (Tvrđenje 1.12), pa možemo definisati operaciju $\underline{*}$ i poredak $\leq_{\underline{*}}$na skupu L. Poset $(L, \leq_{\underline{*}})$ dat je na Slici 3.2, pod b).



a) *b)*

Slika 3.2

3. LATISOIDI I BIRKOFOVI SISTEMI

Osnovni skup L mreže $(L, \wedge, \vee)$ možemo posmatrati i u odnosu na neke druge operacije.Operacije $\overline{*}$ i $\underline{*}$, uvedene u prethodnom potpoglavlju $((1),(2))$, nisu asocijativne. Zato algebre $(L, \wedge, \overline{*})$ i $(L, \underline{*}, \vee)$ predstavljaju strukture slabije od strukture mreže ($\wedge$ i $\vee$ su uobičajene mrežne operacije). Međutim, na ovim algebrama, važi jedna oslabljena forma apsorptivnog zakona koja karakteriše Birkofove sisteme.

Strukturama slabijim od mreže (razni vidovi slabljenja komutativnog i asocijativnog zakona, kao i uopštenjima supremuma i infimuma na mreži) bavili su se, pedesetih godina dvadesetog veka, Zas, Kimura, Felčer, Birkof, a nešto kasnije Frid, Grecer, Švajgert, Anderson, Leutola, Najminen, Dejvi, MakKarti, Konstantinidu, Mitaz, i drugi. Mreže sa raznim oslabljenjima asocijativnih zakona pojavljuju se u literaturi pod nazivom–**latisoidi** **([1],[2])**. Pregled nekih rezultata iz ovih oblasti dat je u Poglavlju 1.

Algebarske strukture kojima ćemo se mi baviti, u ovom delu doktorske disertacije, predstavljaju jednu klasu latisoida. Navedene operacije se prirodno vezuju za mrežu slabih kongruencija neke algebre $\mathcal{A}$, a latisoidi slabih kongruencija $(Cw\mathcal{A}, \cap, \overline{*})$ i $(Cw\mathcal{A}, \underline{*}, \vee)$ pokazuju interesantna svojstva.

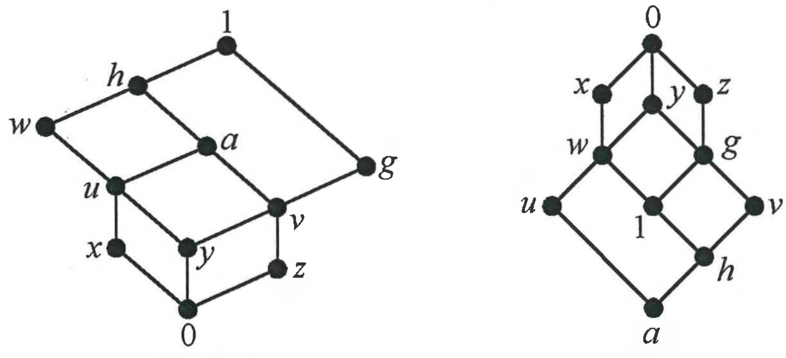
Kako operacijama $\overline{*}$ i $\underline{*}$ odgovara samo parcijalno uređenje, dok su $\wedge$ i $\vee$ (kao mrežne operacije) mrežno uređene, to svakom od ovih latisoida odgovaraju po dva Hase-dijagrama.

Latisoid $(L, \wedge, \overline{*})$ predstavljamo Hase-dijagramima poseta: $(L, \leq_{\wedge}) = (L, \leq)$ i $(L, \leq_{\overline{*}})$, pri čemu prvi ima mrežno uređenje mreže L, dok drugi ima parcijalno uređenje definisano sa (3).

Slično, latisoidu $(L, \underline{*}, \vee)$ pridružujemo posete $(L, \leq_{\underline{*}})$ i $(L, \leq_{\vee}) = (L, \leq)$, pri čemu prvi ima parcijalno uređenje definisano sa (4).

Primer 3.2
Primer koji sledi je primer algebarske mreže L u kojoj je a kodistributivan, ali ne i distributivan elemenat te mreže. Zato na ovoj mreži, u odnosu

na taj elemenat, možemo definisati samo operaciju $\overline{*}$ i poredak $\leq_{\overline{*}}$. Hase dijagram latisoida $(L, \wedge, \overline{*})$ ili $(L, \leq)$ i $(L, \leq_{\overline{*}})$, dat je na Slici 3.3.



$(L,\leq)$ $(L,\leq_{\overline{*}})$

Slika 3.3

∗ ∗ ∗

U algebri $(L, \wedge, \overline{*})$, operacija $\overline{*}$ je uvedena umesto mrežnog supremuma kod mreže $(L, \wedge, \vee)$. Analogno definicijama specijalnih elemenata mreže $(L, \wedge, \vee)$ datih u Poglavlju 1.4, možemo definisati i specijalne elemente svake algebre sa dve binarne operacije. U skladu sa takvim pristupom, definišimo specijalne elemente algebarske strukture $(L, \wedge, \overline{*})$, tako što ćemo u identitetima koje zadovoljavaju ti specijalni elementi u mreži, mrežnu operaciju $\vee$ zameniti sa operacijom $\overline{*}$. Tako dolazimo do sledećih definicija.

Elemenat b algebre $(L, \wedge, \overline{*})$ je **distributivan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$b\overline{*}(x \wedge y) = (b\overline{*}x) \wedge (b\overline{*}y).$$

Elemenat b algebre $(L, \wedge, \overline{*})$ je **kodistributivan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$b \wedge (x\overline{*}y) = (b \wedge x)\overline{*}(b \wedge y).$$

Za elemenat b algebre $(L, \wedge, \overline{*})$ kaže se da je **skrativ (kancelativan)** ako za sve $x, y \in L$

$$\text{iz } b \wedge x = b \wedge y \text{ i } b\overline{*}x = b\overline{*}y \quad \text{sledi} \quad x = y.$$

Elemenat b algebre $(L, \wedge, \overline{*})$ je **neutralan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$(b \wedge x)\overline{*}(x \wedge y)\overline{*}(y \wedge b) = (b\overline{*}x) \wedge (x\overline{*}y) \wedge (y\overline{*}b).$$

Elemenat b algebre $(L, \wedge, \overline{*})$ je **standardan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$x \wedge (b\overline{*}y) = (x \wedge b)\overline{*}(x \wedge y).$$

Elemenat koji zadovoljava dualan zakon je **kostandardan** elemenat algebre $(L, \wedge, \overline{*})$.

Na analogan način možemo definisati i neke druge specijalne elemente ove algebre.
Slično, specijalni elementi algebre $(L, \underline{*}, \vee)$ definišemo tako što zahtevamo da zadovoljavaju odgovarajuće mrežne jednakosti, u kojima je mrežna operacija $\wedge$ zamenjena sa operacijom $\underline{*}$.

Polazeći od mreže L sa fiksiranim kodistributivnim elementom a, konstruisali smo latisoid $(L, \wedge, \overline{*})$. U ovom latisoidu elemenat a zadržava svojstvo kodistributivnosti (u prethodno navedenom smislu), ali dobija i neka druga svojstva koja nije morao posedovati u mreži $(L, \wedge, \vee)$. Svakako, analogan zaključak će uslediti i za distributivni elemenat $a \in L$ u vezi sa odgovarajućim latisoidom $(L, \underline{*}, \vee)$. Tvrđenja koja slede opravdavaju navedeno zapažanje.

Lema 3.11 (i) $(a \wedge x)\overline{*}(x \wedge y) = x \wedge y$;

(ii) $(a\underline{*}x) \vee (x\underline{*}y) = x \vee y$.

Dokaz. (i) $(a \wedge x)\overline{*}(x \wedge y) = (\overline{a} \wedge \overline{x} \wedge x \wedge y) \vee (a \wedge x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \wedge y) \vee (a \wedge x \wedge \overline{y}) = (x \wedge y) \vee (a \wedge x \wedge y) = x \wedge y$.

(ii) $(a\underline{*}x) \vee (x\underline{*}y) = x \vee y$ (Tvrđenje 3.9(i)). ■

Tvrđenje 3.12 Neka je a kodistributivan elemenat algebarske mreže $(L, \wedge, \vee)$ i neka je $(L, \wedge, \overline{*})$ njemu odgovarajući latisoid na prethodno opisani način. U latisoidu $(L, \wedge, \overline{*})$ elemenat a je:

a) distributivan;

b) kodistributivan;

c) skrativ;

d) standardan;

e) neutralan.

Dokaz. *a*) Treba pokazati da važi jednakost: $a\overline{*}(x \wedge y) = (a\overline{*}x) \wedge (a\overline{*}y)$. Kako je $a\overline{*}x = x$ (Tvrđenje 3.9(i)), to je jednakost trivijalno zadovoljena.

b) Iz kodistributivnosti $a \in L$, Leme 1.7′ i Posledice 3.3, sledi: $a \wedge (x\overline{*}y) = a \wedge ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = (a \wedge \overline{x} \wedge y) \vee (a \wedge x \wedge \overline{y}) = (\overline{a}\wedge\overline{x}\wedge a\wedge y)\vee(a\wedge x\wedge\overline{a}\wedge\overline{y}) = ((\overline{a \wedge x})\wedge(a\wedge y))\vee((a\wedge x)\wedge(\overline{a \wedge y})) = (a \wedge x)\overline{*}(a \wedge y)$.

c) Neka je $a \wedge x = a \wedge y$. Sada iz $a\overline{*}x = a\overline{*}y$ sledi $(\overline{a} \wedge x) \vee (a \wedge \overline{x}) = (\overline{a}\wedge y)\vee(a\wedge\overline{y})$. Dalje, na osnovu Leme 1.7′, $\overline{a}\wedge x = x$, pa prethodna jednakost ima za posledicu relaciju $x \vee (a \wedge x) = y \vee (a \wedge y)$, tj. $x = y$.

d) Iz Tvrđenja 3.9(i), Leme 3.1 i Posledice 3.3 sledi: $x \wedge (a\overline{*}y) = x \wedge y = (x \wedge y) \vee (a \wedge x \wedge y) = (\overline{x} \wedge \overline{a} \wedge x \wedge y) \vee (x \wedge a \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = ((\overline{x \wedge a}) \wedge (x \wedge y)) \vee ((x \wedge a) \wedge (\overline{x \wedge y})) = (x \wedge a)\overline{*}(x \wedge y)$.

e) $(a\overline{*}x) \wedge (x\overline{*}y) \wedge (y\overline{*}a) = x \wedge (x\overline{*}y) \wedge y = (x\overline{*}y) \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$ (Lema 3.8).
$(a \wedge x)\overline{*}(x \wedge y)\overline{*}(y \wedge a) = (x \wedge y)\overline{*}(y \wedge a) = x \wedge y$ (Lema 3.11). ■

Slično se dokazuje i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.12′ Neka je a distributivan elemenat koalgebarske mreže $(L, \wedge, \vee)$ i neka je $(L, \underline{*}, \vee)$ njemu odgovarajući latisoid. U latisoidu $(L, \underline{*}, \vee)$ elemenat a je:

a) distributivan;

b) kodistributivan;

c) skrativ;

d) standardan;

e) neutralan. ■

Na ovako konstruisanim algebrama $(L, \wedge, \bar{*})$ i $(L, \underline{*}, \vee)$, sa dve binarne operacije, ne važi zakon apsorpcije. Umesto njega, ovde važi svojstvo analogno onom koje karakteriše Birkofove sisteme.

Teorema 3.13 $x\bar{*}(y \wedge x) = (x\bar{*}y) \wedge x$, za sve $x, y \in (L, \wedge, \bar{*})$.

Dokaz. $x\bar{*}(y \wedge x) = (\overline{x} \wedge (y \wedge x)) \vee (x \wedge (\overline{y \wedge x})) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{x}) = x \wedge \overline{y}$ (Posledica 3.3). Dalje, $(x\bar{*}y) \wedge x = ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})) \wedge x \geq x \wedge \overline{y}$ i

$((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})) \wedge x \leq (\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge x = x \wedge \overline{y}$, pa je tvrđenje dokazano. ■

Analogano tvrđenje važi i za latisoid $(L, \underline{*}, \vee)$.

Teorema 3.13' $x \vee (y\underline{*}x) = (x \vee y)\underline{*}x$, za sve $x, y \in (L, \underline{*}, \vee)$. ■

4. LATISOIDI I BIPOLUMREŽE

Prethodno definisanu klasu latisoida karakterisala su dva uređenja, od kojih je samo jedno bilo mrežno. U narednom delu razmatrani su uslovi pod kojima su oba uređenja mrežna. Na taj način definišemo uslove da latisoid bude bipolumreža kojoj će odgovarati dva različita mrežna uređenja.

Razmatranja ćemo vršiti na posetu $(L, \leq_{\bar{*}})$ latisoida $(L, \wedge, \bar{*})$.

Teorema 3.14 Ako u $(L, \leq_{\bar{*}})$ za neke $x, y \in L$ postoji supremum, onda je to $x\bar{*}y$.

Dokaz. Prvo pokažimo da supremum elemenata $x, y \in L$ (u odnosu na poredak $\leq_{\bar{*}}$) uvek pripada istoj klasi kongruencije ϕ_a, indukovane homomorfizmom m_a, kao i $x\bar{*}y$. Neka je $p \in L$ supremum elemenata $x, y \in L$ u odnosu na uređenje $\leq_{\bar{*}}$. Dakle, važi sledeće:

$$x \leq_{\bar{*}} p \text{ i } y \leq_{\bar{*}} p\,, \tag{8}$$

jer je p gornje ograničenje i

$$p \leq_{\bar{*}} x\bar{*}y, \tag{9}$$

jer je p manje od svakog drugog gornjeg ograničenja (Tvrđenje 3.6). Sada je $\overline{p} \leq \overline{x}$, $\overline{p} \leq \overline{y}$ i $\overline{x\bar{*}y} \leq \overline{p}$(Tvrđenje 3.9($vii$)), pa je $\overline{x\bar{*}y} \leq \overline{p} \leq \overline{x} \wedge \overline{y}$. Kako je $\overline{x\bar{*}y} = \overline{x \wedge y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ (Lema 3.5 i Posledica 3.3), to je

$$\overline{p} = \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y} = \overline{x\bar{*}y}\,. \tag{10}$$

To znači da p, $x \wedge y$ i $x\bar{*}y$ se nalaze u istoj klasi kongruencije ϕ_a. Kako se unutar tih klasa očuvava mrežno uređenje (Tvrđenje 3.9 (iv)), to iz (9) sledi:

$$p \leq x\bar{*}y. \tag{11}$$

Dalje, iz (8), je $x\bar{*}p = (\overline{x} \wedge p) \vee (x \wedge \overline{p}) = p$, pa je $x \wedge \overline{p} \leq p$. Analogno važi $y \wedge \overline{p} \leq p$. Sada, iz (11) i (10) sledi:

$$p \leq x\bar{*}y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (\overline{p} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{p}) \leq p.$$

Dakle, $x\bar{*}y$ je supremum za $x, y \in L$ u odnosu na poredak $\leq_{\bar{*}}$, ukoliko supremum postoji u ovom posetu. ■

Teorema 3.15 Jedino minimalno gornje ograničenje za elemente $x, y \in L$ u $(L, \leq_{\bar{*}})$, koje pripada klasi $C_{\overline{x \wedge y}}$ kongruencije ϕ_a je $x\bar{*}y$.

Dokaz. $x\bar{*}y$ jeste gornje ograničenje za $x, y \in (L, \leq_{\bar{*}})$ (Tvrđenje 3.6). $x\bar{*}y$ pripada klasi kongruencije ϕ_a sa najvećim elementom $\overline{x \wedge y}$ (10). Neka je p gornje ograničenje: $x \leq_{\bar{*}} p$, $y \leq_{\bar{*}} p$ i p pripada klasi $C_{\overline{x \wedge y}}$ kongruencije ϕ_a . Dokažimo da je $x\bar{*}y \leq p$. Kao i u prethodnom dokazu, važi:

$$\begin{aligned} x\bar{*}p &= (\overline{x} \wedge p) \vee (x \wedge \overline{p}) = p, \text{ pa je } x \wedge \overline{p} \leq p \text{ i analogno } y \wedge \overline{p} \leq p; \\ x\bar{*}y &= (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = \\ &= (\overline{p} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{p}) \leq p. \end{aligned}$$

Dakle, $x\bar{*}y$ je najmanje od svih gornjih ograničenja koja pripadaju klasi $C_{\overline{x \wedge y}}$ kongruencije ϕ_a. ■

Neka je L/ϕ_a skup svih klasa kongruencije ϕ_a, indukovane homomorfizmom m_a,tj.

$$L/\phi_a = \{C_{\overline{x}} \mid \overline{x} \in M_a\}\,.$$

Prethodne dve teoreme pokazuju da za svako $x, y \in (L, \leq_{\overline{*}})$ postoji minimalno gornje ograničenje u $C_{\overline{x \wedge y}}$. Međutim, x i y mogu imati i neko drugo minimalno gornje ograničenje z u klasi $C_{\overline{z}} \in L/\phi_a$, gde je $\overline{x \wedge y} \leq_{\overline{*}} \overline{z}$. Elemenat z može biti neuporediv sa $x\overline{*}y$.

Lema 3.16 Neka je $(L, \leq_{\overline{*}})$ poset sa parcijalnim uređenjem $\leq_{\overline{*}}$ definisanim sa (3) i $x, y \in L$ za koje je $\overline{x} \neq \overline{y}$. Tada je $x \leq_{\overline{*}} x \wedge \overline{y}$ i $x \wedge \overline{y} \in C_{\overline{x \wedge y}}$.

Dokaz. $x\overline{*}(x \wedge \overline{y}) = (\overline{x} \wedge (x \wedge \overline{y})) \vee (x \wedge (\overline{x \wedge \overline{y}})) = (x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = x \wedge \overline{y}$. Dalje, iz Posledice 3.3 i Leme 3.1 sledi da je $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y}$, pa je lema dokazana. ■

Lema 3.17 Iz $x \leq_{\overline{*}} z$ i $y \leq_{\overline{*}} z$, sledi $\overline{x \wedge y} \leq_{\overline{*}} \overline{z}$.

Dokaz. Iz $x \leq_{\overline{*}} z$ i $y \leq_{\overline{*}} z$, sledi $\overline{z} \leq \overline{x}$ i $\overline{z} \leq \overline{y}$ (Tvrđenje 3.9 (*vii*)). Sada je $\overline{z} \leq \overline{x} \wedge \overline{y} \leq \overline{x \wedge y}$, pa je $\overline{x \wedge y} \leq_{\overline{*}} \overline{z}$ (Tvrđenje 3.9 (*vi*)). ■

Lema 3.18 Iz $x \leq_{\overline{*}} z$ i $y \leq_{\overline{*}} z$, sledi $x \wedge \overline{y} \leq_{\overline{*}} \overline{z}$ i $\overline{x} \wedge y \leq_{\overline{*}} \overline{z}$.

Dokaz. Iz $(\overline{x} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z}) = z$ i $(\overline{y} \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z}) = z$, sledi:

$$(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \leq (\overline{x} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z}) = z \tag{12}$$

Iz $x \leq_{\overline{*}} z$ i $y \leq_{\overline{*}} z$, sledi $\overline{x \wedge y} \leq_{\overline{*}} \overline{z}$ (Lema 3.17), pa je $\overline{z} \leq \overline{x \wedge y}$ (Tvrdjenje 3.9(*vi*)). Sada je $\overline{z} \leq \overline{x \wedge y} \leq \overline{x} \wedge \overline{y}$, odakle je $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z = z$ i

$$z \leq (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}). \tag{13}$$

Iz (12) i (13) sledi $(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) = z$, odnosno

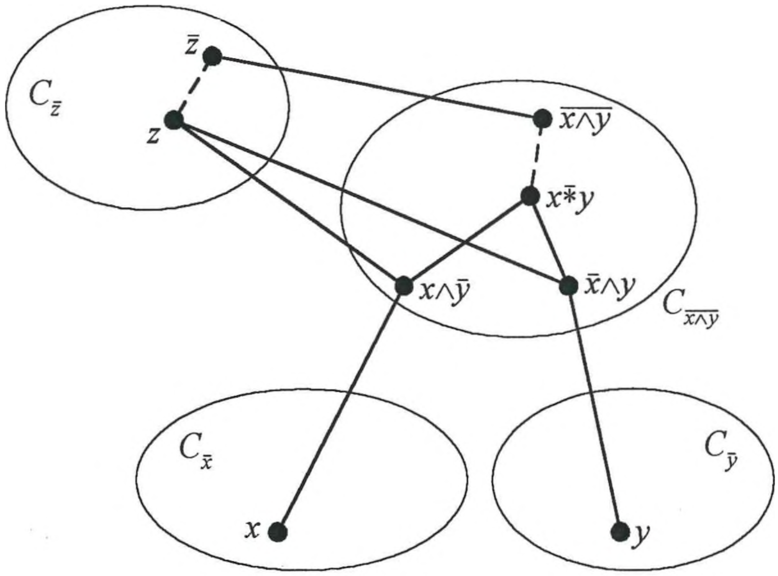
$$(\overline{x \wedge \overline{y}} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) = z,$$

pa je

$$x \wedge \overline{y} \leq_{\overline{*}} z.$$

Slično se dokazuje da je i $\overline{x} \wedge y \leq_{\overline{*}} z$. ■

Lema 3.18 je ilustrovana Slikom 3.4.



Slika 3.4

Prikazano uređenje ilustruje Lemu 3.18 u slučaju kada su klase $C_{\overline{x}}$ i $C_{\overline{y}}$ neuporedive, ali lema važi i u slučaju kada su one uporedive. U tvrđenjima koja slede određujemo uslove za jedinstvenost minimalnog gornjeg ograničenja za elemente x i y konačnog poseta $(L, \leq_{\bar{*}})$.

Lema 3.19 Neka je $(L, \leq_{\bar{*}})$ poset sa parcijalnim uređenjem $\leq_{\bar{*}}$ definisanim sa (3) i $x \in L$. Ako je:

$$Q_x^{\overline{y}} = \{y \mid y \in C_{\overline{y}},\ \overline{y} \neq \overline{x},\ y \leq_{\bar{*}} x \text{ i } x \leq y\}\,,\ C_{\overline{y}} \in L/\phi_a, \qquad (14)$$

onda neprazan skup $Q_x^{\overline{y}}$ ima bar jedan maksimalan elemenat u odnosu na poredak $\leq_{\bar{*}}$.

Dokaz. Ako je $Q_x^{\overline{y}}$ konačan podskup algebarske mreže $C_{\overline{y}}$, onda tvrđenje važi. Uzmimo beskonačan lanac elemenata iz $Q_x^{\overline{y}}$:

$$\{y \mid y \in C_{\overline{y}},\ \overline{y} \neq \overline{x},\ y \leq_{\bar{*}} x \text{ i } x \leq y\}\,.$$

Označimo sa:

$$y^{(s)} = \bigvee_{i \in I} y_i.$$

Ovaj supremum postoji u $C_{\overline{y}}$, tj. $y^{(s)} \in C_{\overline{y}}$, jer je $(\bigvee_{i \in I} y_i) \wedge \overline{a} = \bigvee_{i \in I} (y_i \wedge \overline{a})$ (a je beskonačno kodistributivan elemenat mreže $(L, \leq)$). Pokažimo da $y^{(s)} \in Q_x^{\overline{y}}$. Zaista, iz definicije skupa $Q_x^{\overline{y}}$ sledi da je:

$$x \leq y^{(s)} = \bigvee_{i \in I} y_i. \qquad (15)$$

Dalje, iz $y_i \leq_{\bar{*}} x$ sledi da je $(\overline{y}_i \wedge x) \vee (y_i \wedge \overline{x}) = x$, pa je $y_i \wedge \overline{x} \leq x$. Sada je $\bigvee_{i\in I} (y_i \wedge \overline{x}) \leq x$ pa, na osnovu Tvrđenja 1.14, važi:

$$(\bigvee_{i\in I} y_i) \wedge \overline{x} = \bigvee_{i\in I} (y_i \wedge \overline{x}) \leq x.$$

Iz (15) i poslednje relacije, sledi:

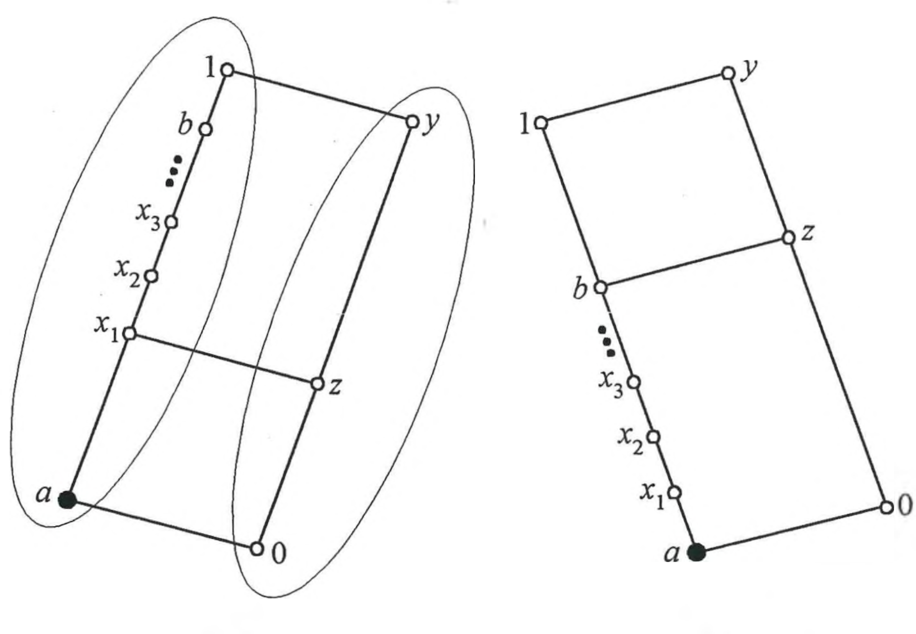
$$y^{(s)} \bar{*} x = (\overline{\bigvee_{i\in I} y_i} \wedge x) \vee ((\bigvee_{i\in I} y_i) \wedge \overline{x}) = (\overline{y^{(s)}} \wedge x) \vee ((\bigvee_{i\in I} y_i) \wedge \overline{x}) = x \vee ((\bigvee_{i\in I} y_i) \wedge \overline{x}) = x. \tag{16}$$

Iz (15) i (16) sledi da $y^{(s)} \in Q_x^{\overline{y}}$. ■

Naredni primer ilustruje tvrđenje ove leme.

Primer 3.3

Na Slici 3.5, pod a), data je mreža L sa kodistributivnim elementom a. Klasa $C_1 \in L/\phi_a$ sadrži beskonačan lanac $X = \{x_i \mid i \in I\}$. Poset $(L, \leq_{\bar{*}})$ dat je na istoj slici pod b). Za elemenat $z \in L$, skup Q_z^1 je beskonačan lanac $X \cup \{b\} = \{x_1, x_2, ..., b\}$. Maksimalan elemenat ovoga lanca $b \in Q_z^1$.



$(L,\leq)$ $(L,\leq_{\bar{*}})$

a) b)

Slika 3.5

Teorema 3.20 Konačni poset $(L, \leq_{\overline{*}})$ je mreža ako i samo ako za svako $x \in L$, svaki neprazan skup $Q_x^{\overline{y}}$ (definisan u Lemi 3.19) ima najveći elemenat.

Dokaz. $(\Longrightarrow)$. Neka su $x, y \in L$ $(\overline{x} \neq \overline{y})$ i skup $Q_x^{\overline{y}} \neq \emptyset$ nema najveći elemenat. Onda, na osnovu Leme 3.19, on mora imati bar dva maksimalna elementa u odnosu na poredak $\leq_{\overline{*}}$: $y^{(1)}, y^{(2)} \in C_{\overline{y}} \cap Q_x^{\overline{y}}$. Kako je $C_{\overline{y}}$ algebarska mreža, to je:

$$y^{(1)}\overline{*}y^{(2)} = y^{(1)} \vee y^{(2)} = y^{(3)}, \text{ gde } y^{(3)} \in C_{\overline{y}} \backslash Q_x^{\overline{y}}. \tag{17}$$

Dalje, iz (14) i Leme 3.1 sledi:

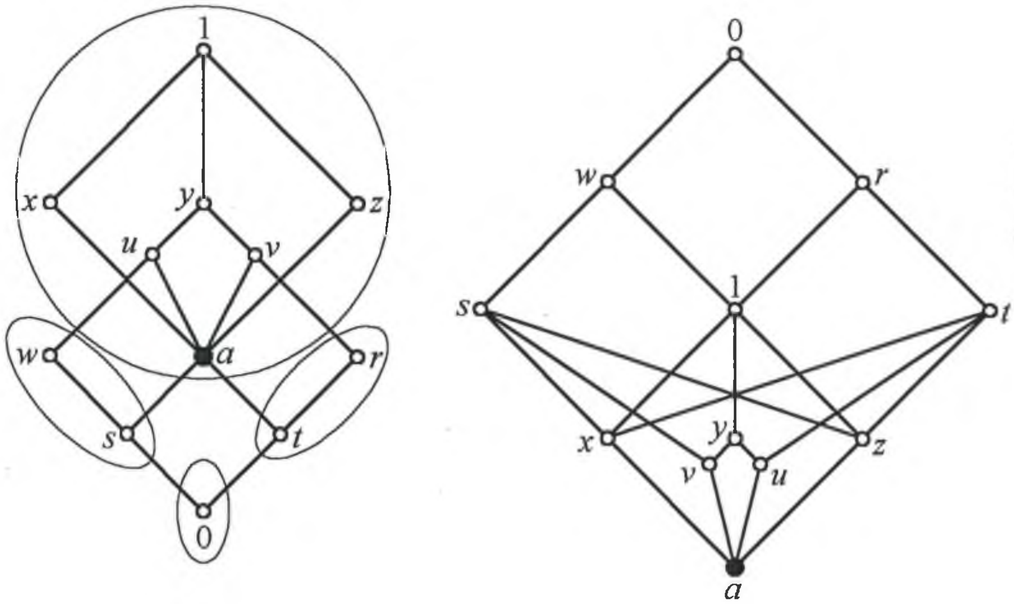
$$y^{(1)}\overline{*}x = x,\ y^{(2)}\overline{*}x = x \text{ i } \overline{x} \leq \overline{y}, \text{ odnosno, } \overline{y} <_{\overline{*}} \overline{x}. \tag{18}$$

Očigledno je $x \neq y^{(3)}$, jer je $C_{\overline{x}} \neq C_{\overline{y}}$. Pokažimo još da su ovi elementi neuporedivi. Ako je $x <_{\overline{*}} y^{(3)}$, onda je $\overline{y} < \overline{x}$ (Tvrđenje 3.9(vii)), odnosno $\overline{x} <_{\overline{*}} \overline{y}$ (Tvrđenje 3.9(vi)), suprotno (18). Neka je $y^{(3)} <_{\overline{*}} x$. Kako je $x \leq y^{(1)}$ i $x \leq y^{(2)}$, to je $x \leq y^{(1)} \vee y^{(2)} = y^{(3)}$, pa $y^{(3)} \in Q_x$, suprotno pretpostavci. Dakle, $y^{(1)}, y^{(2)} \in C_{\overline{y}} \cap Q_x^{\overline{y}}$ imaju dva minimalna gornja ograničenja u $(L, \leq_{\overline{*}})$, pa ovaj poset nije mreža.

$(\Longleftarrow)$. Neka je $(L, \leq_{\overline{*}})$ poset u kome za sve x, y skup $Q_x^{\overline{y}}$ ima najveći elemenat. Pretpostavimo da taj poset nije mreža, da za y_1, y_2 postoje dva minimalna gornja ograničenja. Prema Lemi 3.18, ako postoje takvi elementi, postoje i takvi elementi koji pripadaju istoj klasi $C_{\overline{y}}$. $y_1\overline{*}y_2$ je jedno minimalno gornje ograničenje i neka je $x \in C_{\overline{x}}$ drugo. Iz Leme 3.17 sledi $\overline{y} <_{\overline{*}} \overline{x}$. Prema uslovu teorme skup $Q_x^{\overline{y}}$ ima najveći elemenat $y^{(s)}$, za koji važi $y^{(s)} <_{\overline{*}} x$. Kako je $y_1 \leq_{\overline{*}} y^{(s)}$ i $y_2 \leq_{\overline{*}} y^{(s)}$, sledi da x ne može biti minimalno gornje ograničenje za y_1 i y_2. Dakle, $y_1\overline{*}y_2$ je jedinstveno minimalno gornje ograničenje i $(L, \leq_{\overline{*}})$ je mreža. ∎

Primer 3.4

Fiksirajmo na mreži L kodistributivan elemenat a. Zaokruženi elementi su klase kongruencije koju definiše taj elemenat. Hase dijagram mreže $(L, \leq)$ i poseta $(L, \leq_{\overline{*}})$ dat je na Slici 3.6.



$(L,\leq)$ $(L,\leq_{\bar{*}})$

a) *b*)

Slika 3.6

Elementi x, u i z pripadaju istoj klasi $C_{\bar{x}}$, pa je $x\bar{*}y = x \vee y = 1$, $x\bar{*}z = x \vee z = 1$ i $u\bar{*}z = u \vee z = 1$ (Tvrđenje 3.9(ii)). Ali elementi x, u i z imaju i elemenat $s \in C_{\bar{s}}$ za minimalno gornje ograničenje u posetu $(L, \leq_{\bar{*}})$, jer skup $Q_{\bar{s}}^{\bar{x}} = \{x, u, z, a\}$ nema najveći elemenat u poretku $\leq_{\bar{*}}$.

Poset $(L, \leq_{\bar{*}})$ koji zadovoljava uslove Teoreme 3.20 je kompletna mreža. Najmanji elemenat te mreža je polazni kodistributivni elemenat a, a najveći elemenat je $\overline{0}$ (0 je najmanji elemenat polazne mreže L). Faktor mreže, polazne mreže L (L/ϕ_a) i poseta L, su antiizomorfne. Latisoid $(L, \wedge, \leq_{\bar{*}})$ u tom slučaju je bipolumreža dve mreže sa različitim uređenjem.

* * * * *

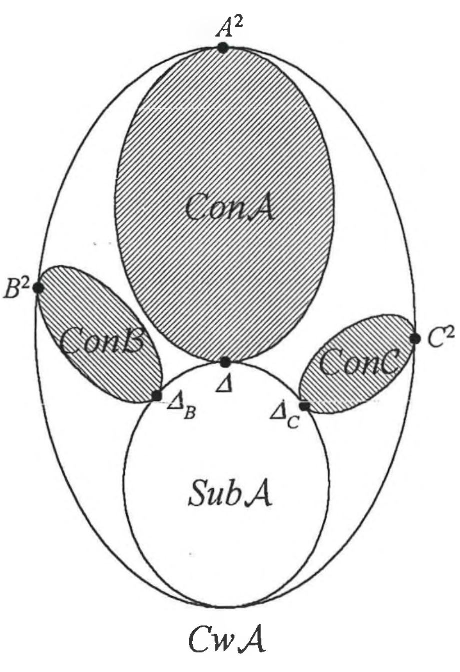
Poglavlje IV

PRIMENE U UNIVERZALNOJ ALGEBRI

1. NOVA RELACIJA PORETKA NA MREŽI PRIMENJENA NA MREŽU SLABIH KONGRUENCIJA

U prethodnom poglavlju definisali smo operacije $\overline{*}$ i $\underline{*}$ preko mrežnih operacija. Pokazano je da se preko ovih operacija mogu definisati parcijalna uređenja, što je imalo za posledicu uvođenje novih poredaka, $\leq_{\overline{*}}$ i $\leq_{\underline{*}}$, na polaznoj mreži $(L, \leq)$. U ovom poglavlju dajemo primenu svih navedenih rezultata na algebarsku mrežu slabih kongruencija $(Cw\mathcal{A}, \subseteq)$ ili $(Cw\mathcal{A}, \wedge, \vee)$, neke algebre $\mathcal{A} = (A, F)$. Mi posmatramo dijagonalnu relaciju Δ (kao fiksiran elemenat a u prethodnom poglavlju), koja je uvek kodistributivan elemenat u mreži $Cw\mathcal{A}$. Klase kongruencije ϕ_Δ, indukovane homomorfizmom $m_\Delta : \rho \longmapsto \rho \wedge \Delta$ $(\rho \in Cw\mathcal{A})$, uvek imaju najveće elemente (kvadrate podalgebri), pa se operacija $\overline{*}_\Delta$ (nadalje $\overline{*}$) može definisati. Ako je dijagonala Δ, u nekoj mreži $Cw\mathcal{A}$, distributivan elemenat, onda (uz dodatne uslove) možemo definisati i operaciju $\underline{*}_\Delta$ (nadalje $\underline{*}$) i razmatrati njena svojstva u tom slučaju. Ovako uvedene operacije na mreži $Cw\mathcal{A}$ predstavljaju specijalne grafičke kompozicije.

Na Slici 4.1dat je šematski prikaz mreže slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ algebre $\mathcal{A}$.



Slika 4.1

Šrafirani delovi su različite klase kongruencije ϕ_Δ, indukovane homomorfizmom m_Δ. Kako su slabe kongruencije algebre $\mathcal{A}$ kongruencije na svim podalgebrama algebre $\mathcal{A}$, uključujući i prazan skup u slučaju kada algebra $\mathcal{A}$ nema konstanti, šrafirani delovi su kongruencije nekih podalgebri algebre $\mathcal{A}$. Za podalgebre $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$ algebre $\mathcal{A}$, A^2, B^2, C^2 su kvadrati tih podalgebri, a $A = \Delta$, zatim B (Δ_{B^2} ili kraće Δ_B) i C su dijagonalne relacije u mrežama $Con\mathcal{A}$ (mreža kongruencija algebre $\mathcal{A}$), $Con\mathcal{B}, Con\mathcal{C}$, redom.

Neka su ρ, θ dve slabe kongruencije i $\rho \in Con\mathcal{B}, \theta \in Con\mathcal{C}$, gde su $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$. Tada,

$$\rho \bar{*} \theta = (B^2 \wedge \theta) \vee (\rho \wedge C^2) \qquad \text{i} \qquad \emptyset \bar{*} \theta = \emptyset. \tag{1}$$

Ovako definisana operacija $\bar{*}$ je jedna grafička kompozicija, kojoj odgovara novo uređenje na $Cw\mathcal{A}$(uvedeno u prethodnom poglavlju relacijom (3)). $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ je poset slabih kongruencija, gde je relacija $\leq_{\bar{*}}$ definisana preko operacije $\bar{*}$ sa:

$$\rho \leq_{\bar{*}} \theta \quad \text{ako i samo ako} \quad \rho \bar{*} \theta = \theta. \tag{2}$$

Ako je Δ distributivan elemenat u mreži $(Cw\mathcal{A}, \wedge, \vee)$, odnosno, ako važi svojstvo preseka kongruencija i klase kongruencije θ_Δ indukovane homomorfizmom $n_\Delta : \rho \longmapsto \rho \vee \Delta$ imaju najmanje elemente (to ne moraju biti kvadrati podalgebri (Tvrđenje 2.15)), onda možemo definisati i operaciju $\underline{*}$. Za $\rho \in Con\mathcal{B}, \theta \in Con\mathcal{C}$, gde su $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$,

$$\rho \underline{*} \theta = (\underline{\rho} \vee \theta) \wedge (\rho \vee \underline{\theta}) \qquad \text{i} \qquad \emptyset \underline{*} \theta = \underline{\theta}. \tag{3}$$

Ovoj grafičkoj kompoziciji, na $Cw\mathcal{A}$, odgovara poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\underline{*}})$, gde je uređenje $\leq_{\underline{*}}$ definisano sa:

$$\rho \leq_{\underline{*}} \theta \quad \text{ako i samo ako} \quad \rho \underline{*} \theta = \rho. \tag{4}$$

Direktne posledice Tvrđenja 3.9 i 3.9$'$ su sledeće:

Posledica 4.1 Neka je $Cw\mathcal{A}$ mreža slabih kongruencija i $\leq_{\bar{*}}$ poredak definisan relacijom (2). Tada je:

(i) $\Delta \leq_{\bar{*}} \rho$, za svako $\rho \in Cw\mathcal{A}$.

(ii) Ako $\rho, \theta \in [\Delta_B, B^2]$, onda $\rho \bar{*} \theta = \rho \vee \theta$, za $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$.

(iii) $\rho \subseteq \theta$ ako i samo ako $\rho \leq_{\bar{*}} \theta$, za $\rho, \theta \in [\Delta_B, B^2]$.

(iv) Interval $[\Delta_B, B^2]_{\bar{*}}$ je mreža $Con\mathcal{B}$, za $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$.

(v) $B^2 \bar{*} C^2 = B^2 \wedge C^2$.

(vi) $B^2 \leq_{\bar{*}} C^2$ ako i samo ako $C^2 \subseteq B^2$.

(vii) $\rho \leq_{\bar{*}} \theta \Longrightarrow C^2 \subseteq B^2$, za $\rho \in Con\mathcal{B}, \theta \in Con\mathcal{C}$ i $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$.

$(viii)$ $\rho \leq_{\bar{*}} \theta \Longrightarrow B^2 \leq_{\bar{*}} C^2$, za $\rho \in Con\mathcal{B}, \theta \in Con\mathcal{C}$ i $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$.

(ix) Ako $\rho \in Con\mathcal{B}$, tada je $A^2 \bar{*} \rho = B^2$.

(x) $A^2 \leq_{\bar{*}} \rho$ ako i samo ako $\rho = B^2$, za $\rho \in Con\mathcal{B}$.

(xi) $Cw\mathcal{A}$ je unija svih intervala $[\Delta_B, B^2]_{\bar{*}}$, za sve $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$.

(xii) Glavni filter $\uparrow_{\bar{*}} A^2$ je antiizomorfan sa $Sub\mathcal{A}$.

$(xiii)$ $\rho \leq_{\bar{*}} A_m^2$, za svako $\rho \in Cw\mathcal{A}$, ako algebra $\mathcal{A}$ ima najmanju podalgebru $\mathcal{A}_m$. U protivnom, $\rho \leq_{\bar{*}} \emptyset$, gde se prazan skup najmanji elemenat u mreži $Cw\mathcal{A}$. ■

Posledica 4.1′ Neka je $\mathcal{A}$ algebra koja ima $*$CIP i $Cw\mathcal{A}$ njena mreža slabih kongruencija. Ako je $\leq_{\underline{*}}$ poredak definisan relacijom (4), onda je:

(i) $\Delta \geq_{\underline{*}} \rho$, za svako $\rho \in Cw\mathcal{A}$.

(ii) Ako $\tau \in \uparrow \Delta$, i $\rho, \theta \in [\underline{\tau}, \tau]$, onda $\rho \underline{*} \theta = \rho \wedge \theta$.

(iii) $\rho \subseteq \theta$ ako i samo ako $\rho \leq_{\underline{*}} \theta$, ako $\rho, \theta \in [\underline{\tau}, \tau]$.

(iv) $([\underline{\tau}, \tau]_{\underline{*}}, \leq_{\underline{*}})$ je mreža, izomorfna sa intervalom u $Cw\mathcal{A}$ koji je ograničen istim elementima.

(v) $\underline{\rho} \underline{*} \underline{\theta} = \underline{\rho} \vee \underline{\theta}$.

(vi) $\underline{\rho} \leq_{\underline{*}} \underline{\theta}$ ako i samo ako $\underline{\theta} \subseteq \underline{\rho}$.

(vii) $\rho \leq_{\underline{*}} \theta \Longrightarrow \underline{\theta} \subseteq \underline{\rho}$.

$(viii)$ $\rho \leq_{\underline{*}} \theta \Longrightarrow \underline{\rho} \leq_{\underline{*}} \underline{\theta}$.

(ix) $\underline{\Delta} * \rho = \underline{\rho}$.

(x) $\rho \leq_{\underline{*}} \underline{\Delta}$ ako i samo ako $\rho = \underline{\rho}$.

(xi) $Cw\mathcal{A}$. je unija svih intervala $[\underline{\tau}, \tau]_{\underline{*}}$, gde je $\tau \in Cw\mathcal{A}$

(xii) Glavni ideal $\downarrow_{\underline{*}} \Delta$ je antiizomorfan sa $Con\mathcal{A}$.

$(xiii)$ $A^2 \leq_{\underline{*}} \rho$, za svako $\rho \in Cw\mathcal{A}$. ■

Primetimo da su poseti $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\overline{*}})$ i $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\underline{*}})$ ograničeni poseti. Ako algebra $\mathcal{A}$ ima nularne operacije (konstante), onda skup A_m tih nularnih operacija je njen najmanji poduniverzum, a $A_m^2 \in Cw\mathcal{A}$ najveći elemenat poseta $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\overline{*}})$. Ukoliko posmatrana algebra $\mathcal{A}$ nema konstanti, onda je prazan skup njen najmanji poduniverzum koji je najveći elemenat poseta slabih kongruencija u poretku $\leq_{\overline{*}}$. Dijagonala Δ je uvek najmanji elemenat poseta $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\overline{*}})$.

Poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\underline{*}})$ je ograničen najmanjim elementom A^2 i najvećim elementom Δ.

Iz prethodnih posledica proizilazi i sledeći rezultat.

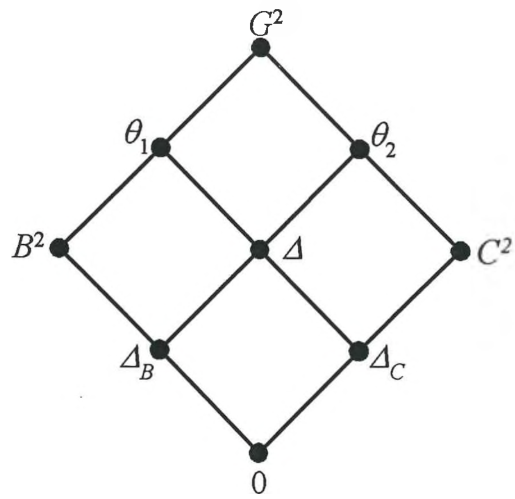
Posledica 4.2 (i) Glavni filter $\uparrow_{\overline{*}} A^2$ je mreža.

(ii) Glavni ideal $\downarrow_{\underline{*}} \Delta$ je mreža. ■

Neka od navedenih svojstava operacija $\overline{*}$ i $\underline{*}$ u prethodnim tvrđenjima ilustruje sledeći primer.

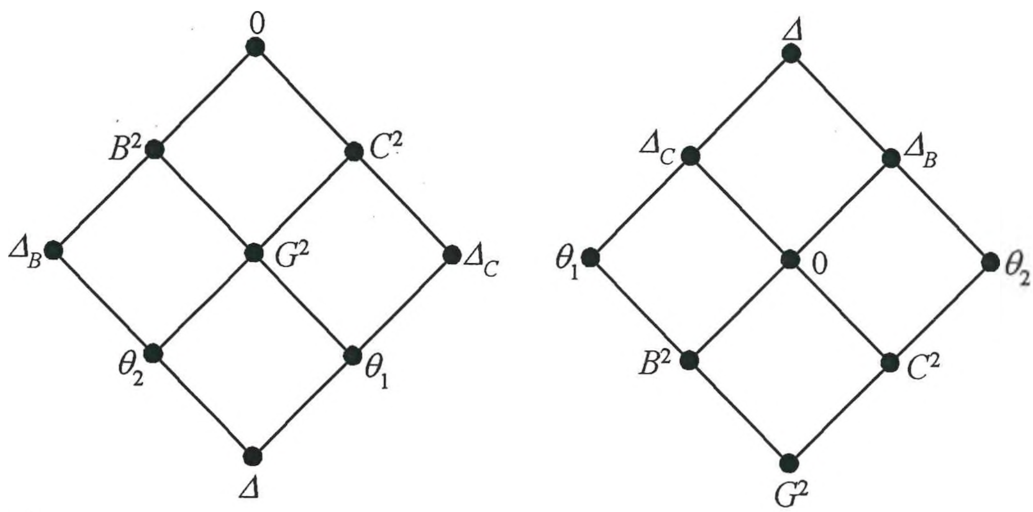
Primer 4.1

Neka je $\mathcal{G} = (\{e, a, b, c, d, f\}, \circ)$ ciklična grupa reda 6, tj. $b = a^2, c = a^3, d = a^4, f = a^5$ i $e = a^6$. Podgrupe ove grupe su: $B = \{e, b, d\}, C = \{e, c\}$ i $O = \{e\}$. Kongruencije su (zapisivanje po klasama): $\theta_1 = (ebd)(acf)$, $\theta_2 = (ec)(ad)(bf)$, Δ i G^2. U mreži $(Cw\mathcal{G}, \subseteq)$ dijagonala Δ je i distributivan elemenat (Slika 4.2). Kako je mreža i konačna, možemo definisati obe razmatrane operacije. Hase dijagrami poseta $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\overline{*}})$ i $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\underline{*}})$ dati su na Slici 4.3 a) i Slici 4.3 b).



$(Cw\mathcal{G}, \subseteq)$

Slika 4.2



$(Cw\mathcal{G}, \leq_*)$

a)

$(Cw\mathcal{G}, \leq_*)$

b)

Slika 4.3

2. SVOJSTVA ALGEBRI KARAKTERISANA PREKO OPERACIJE $\bar{*}$

Navedena svojstva novouvedenih poredaka na $Cw\mathcal{A}$ daju mogućnost da se preko njih karakterišu neka svojstva algebri (CIP, CEP, Hamiltonovo svojstvo, i dr.).U drugom poglavlju izloženi su neki rezultati u vezi sa tim svojstvima. U ovom poglavlju daju se dokazi više tvrđenja u kojima se neka od tih svojstava karakterišu preko algebre $(Cw\mathcal{A}, \bar{*})$ i poseta $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$.

Pod uslovom da algebra $\mathcal{A}$ ima $*$CIP, slična tvrđenja se mogu formulisati i preko algebre $(Cw\mathcal{A}, \underline{*})$, odnosno poseta $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\underline{*}})$.

Lema 4.3 Neka je $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{A}, \rho \in Con\mathcal{B}$ i $\theta \in Cw\mathcal{A}$. Ako je $\theta \leq_{\bar{*}} \rho$, onda je $\theta \in Con\mathcal{C}$ za $B \subseteq C$ i važi:

$$\theta \wedge B^2 \subseteq \rho.$$

Dokaz. Neka je $\theta \in Con\mathcal{C}$, gde je $\mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$. Sada važi: $\theta \leq_{\bar{*}} \rho$ ako i samo ako $(C^2 \wedge \rho) \vee (\theta \wedge B^2) = \rho$. Kako je leva strana jednakosti slaba kongruencija iz $Con(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$, a $\rho \in Con\mathcal{B}$, to znači da je $B \cap C = B$, tj. $B \subseteq C$. Dalje, iz $(C^2 \wedge \rho) \vee (\theta \wedge B^2) = \rho$ sledi $\rho \vee (\theta \wedge B^2) = \rho$, odnosno $\theta \wedge B^2 \subseteq \rho$. ■

Posledica 4.4 Ako je $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{A}, \rho \in Con\mathcal{B}$ i $\theta \in Con\mathcal{A}$, onda

$$\theta \leq_{\bar{*}} \rho \quad \text{ako i samo ako} \quad \theta \wedge B^2 \subseteq \rho.$$

Dokaz. Ako je $\theta \leq_{\bar{*}} \rho$, onda je $\theta \wedge B^2 \subseteq \rho$ (Lema 4.2).

Neka je $\theta \in Con\mathcal{A}$, $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$ i $\theta \wedge B^2 \subseteq \rho$. Sada je $\theta \bar{*} \rho = (A^2 \wedge \rho) \vee (\theta \wedge B^2) = \rho \vee (\theta \wedge B^2) = \rho$. ■

Posledica 4.5 $\theta \in Cw\mathcal{A}$ je ekstenzija od $\rho \in Con\mathcal{B}$ ako i samo ako je $\rho \subseteq \theta$ i $\theta \leq_{\bar{*}} \rho$.

Dokaz. Ako je θ ekstenzija od $\rho \in Con\mathcal{B}$, onda je $\theta \cap B^2 = \rho$, pa je $\rho \subseteq \theta$. Kako je $\theta \wedge B^2 = \theta \cap B^2 = \rho$, na osnovu Posledice 4.4, sledi da je $\theta \leq_{\bar{*}} \rho$.

Obrnuto, neka je $\theta \in Con\mathcal{C}$, $\rho \in Con\mathcal{B}$, gde su$\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$ takve da i važi: $\rho \subseteq \theta$ i $\theta \leq_{\bar{*}} \rho$. Sada je, na osnovu Leme 4.3, $\rho \subseteq \theta \wedge B^2 \subseteq \rho$, tj. $\theta \cap B^2 = \rho$, pa je θ ekstenzija od ρ. ■

Tvrđenje 4.6 Algebra $\mathcal{A}$ ima CEP ako i samo ako za svako $\rho \in Cw\mathcal{A}$,

$$(\rho \overline{*} A^2) \wedge (\rho \vee \Delta) = \rho.$$

Dokaz. Algebra $\mathcal{A}$ ima CEP ako i samo ako za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$ $(\rho \overline{*} A^2) \wedge (\rho \vee \Delta) = B^2 \wedge (\rho \vee \Delta) = \rho$ (Posledica 4.1(ix) i Tvrđenje 2.5). ■

Teorema 4.7 Algebra $\mathcal{A}$ ima CEP ako i samo ako za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$, postoji $\theta \in Con\mathcal{A}$, $\theta \leq_{\overline{*}} \rho$, takvo da za $\tau \in Con\mathcal{B}$ i $\tau \in [\theta, \rho]_{\overline{*}}$ važi $\rho = \tau$.

Dokaz. Pretpostavimo da algebra $\mathcal{A}$ ima CEP. Tada, za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, postoji ekstenzija $\theta \in Con\mathcal{A}$, takva da je $B^2 \wedge \theta = \rho$. Na osnovu Posledice 4.4, $\theta \leq_{\overline{*}} \rho$. Neka je $\tau \in Con\mathcal{B}$, takva da je $\theta \leq_{\overline{*}} \tau \leq_{\overline{*}} \rho$. Sada je $\tau \subseteq \rho$ (Posledica 4.1(iii)), pa je $\theta \wedge B^2 \subseteq \tau$ i $\rho \leq_{\overline{*}} \tau$ (Posledica 4.4). Zato je, $\rho = \tau$.

Sa druge strane, pretpostavimo da za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, postoji $\theta \in Con\mathcal{A}$, koje zadovoljava uslove teoreme. Kako je $\theta \leq_{\overline{*}} \rho$, na osnovu Posledice 4.4, to je $\theta \wedge B^2 \subseteq \rho$. $\theta \wedge B^2 \in Con\mathcal{B}$ i $\theta \wedge B^2 \leq_{\overline{*}} \rho$ (Posledica 4.1(iii)). Sa druge strane, iz $\theta \wedge B^2 \leq \theta$ sledi $\theta \leq_{\overline{*}} \theta \wedge B^2$. Dakle, $\theta \wedge B^2 \in [\theta, \rho]_{\overline{*}}$, pa je $\rho = \theta \wedge B^2$. Znači θ je ekstenzija za ρ i CEP je zadovoljen. ■

Sledeća tvrđenja karakterišu Hamiltonovo svojstvo algebri upotrebom operacije $\overline{*}$.

Lema 4.8 Ako je $\mathcal{A}$ algebra, $\mathcal{B}$ njena podalgebra i θ kongruencija na $\mathcal{A}$, tada

$$B^2 \subseteq \theta \quad \text{ako i samo ako} \quad \theta \overline{*} \Delta_B = B^2.$$

Dokaz. $\theta \overline{*} \Delta_B = B^2$ ako i samo ako $(A^2 \wedge \Delta_B) \vee (\theta \wedge B^2) = B^2$ ako i samo ako $\theta \wedge B^2 = B^2$ ako i samo ako $B^2 \subseteq \theta$. ■

Teorema 4.9 Algebra $\mathcal{A}$ je Hamiltonova ako i samo ako za svako $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$, $B \subset C$,

$$(B^2 \vee \Delta) \overline{*} \Delta_C \neq C^2.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je algebra $\mathcal{A}$ Hamiltonova, tj. da svaka podalgebra je blok neke kongruencije. Tada, svaka podalgebra je blok u najmanjoj kongruenciji koja sadrži B^2(koja je $B^2 \vee \Delta$). Kako je $B \subset C$ i B^2 je blok u $B^2 \vee \Delta$, to je

$(B^2 \vee \Delta) \overline{*} \Delta_C = ((\overline{B^2 \vee \Delta}) \wedge \Delta_C) \vee ((B^2 \vee \Delta) \wedge C^2) = (A^2 \wedge \Delta_C) \vee ((B^2 \vee \Delta) \wedge C^2) = (B^2 \vee \Delta) \wedge C^2 \neq C^2$.

Obrnuto, pretpostavimo da algebra $\mathcal{A}$ nije Hamiltonova. Tada, postoji podalgebra $\mathcal{B}$, takva da B^2 nije blok u $B^2 \vee \Delta$. Sada postoji podalgebra $\mathcal{C}$, takva da je $B \subset C$ i C^2 je blok u $B^2 \vee \Delta$. Na osnovu Leme 4.8,

$$(B^2 \vee \Delta) \overline{*} \Delta_C = C^2,$$

što je kontradikcija sa uslovom teoreme. ■

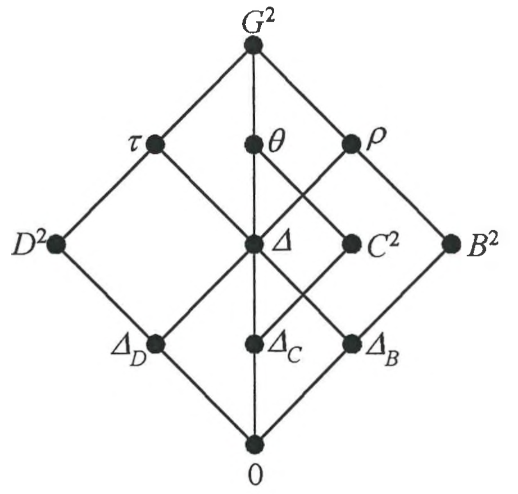
Sledeća dva primera daju ilustraciju prethodnih rezultata.

Primer 4.2

Ovo je primer Klajnove četvoro-elementne grupe $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$, gde je $G = \{e, a, b, c\}$, a binarna operacija $\cdot$ data je tabelom:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Podgrupe ove grupe su:$O = \{e\}, B = \{e, a\}, C = \{e, b\}, D = \{e, c\}$ i G. Kongruencije na $\mathcal{G}$, (zapisane po klasama), su: $\rho = (ea)(bc), \theta = (eb)(ac), \tau = (ec)(ab), \Delta$ i G^2. Mreža slabih kongruencija $(Cw\mathcal{G}, \subseteq)$ data je na Slici 4.4.



$(Cw\mathcal{G}, \subseteq)$

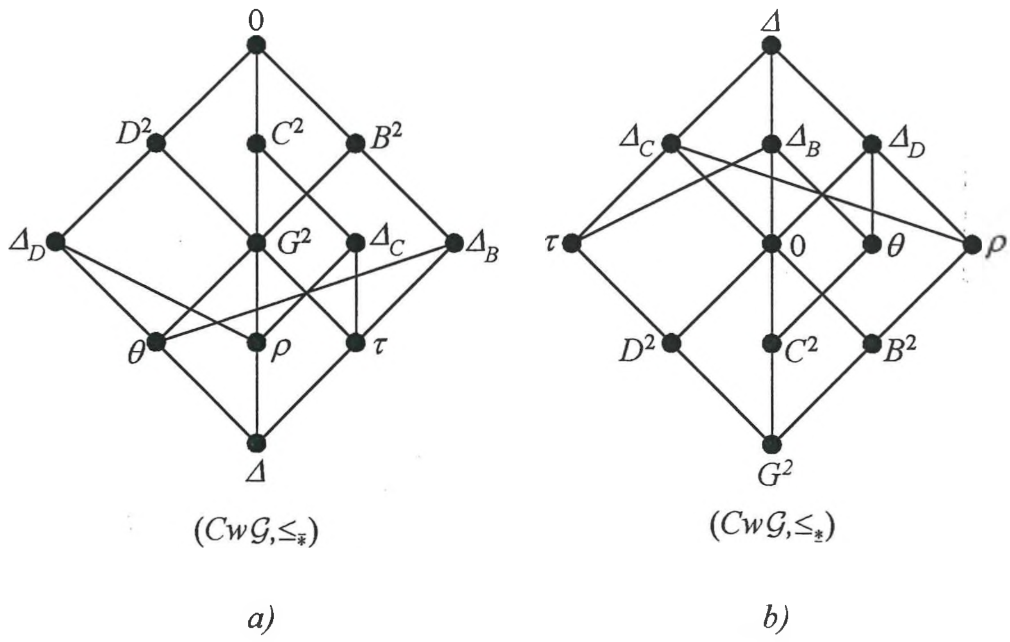
Slika 4.4

Parcijalno uređeni skupovi $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\bar{*}})$ i $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\underline{*}})$ dati su na Slici 4.5 $a)$ i Slici 4.5 $b)$. Očigledno je da ovi poseti nisu mreže.

Najmanji elemenat poseta $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\bar{*}})$ je dijagonalna relacija Δ, a njegov najveći elemenat je minimalna podgrupa Klajnove grupe, konstanta e, tj. $O = \{e\}$. Glavni filter $\uparrow_{\bar{*}} G^2$ je antiizomorfan sa mrežom $Sub\mathcal{A}$, koja je na mreži $(Cw\mathcal{G}, \subseteq)$ repezentovana idealom $\downarrow \Delta$, pa je on mreža (Slika 4.4).

Poset $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\underline{*}})$ je ograničen punom relacijom G^2, kao najmanjim elementom, i dijagonalom Δ kao najvećim elementom. Glavni ideal $\downarrow_{\underline{*}} 0$ poseta $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\underline{*}})$ je mreža, jer je antiizomorfan sa mrežom kongruencija $Con\mathcal{G}$ Klajnove grupe ($Con\mathcal{G} \equiv \uparrow \Delta$ u mreži $Cw\mathcal{A}$, (Slika 4.4)).

Dalje, nije teško primetiti da poset $(Cw\mathcal{G}, \leq_{\bar{*}})$ zadovoljava uslove Teorema 4.7 i 4.9, pa je $\mathcal{G}$ Hamiltonova algebra koja ima CEP.



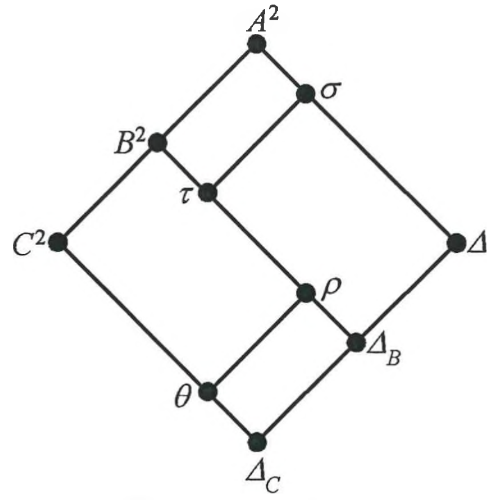
Slika 4.5

Primer 4.3

Algebra $\mathcal{A} = (A, \cdot, a, b, c)$ ima skup $A = \{a, b, c, d, e\}$ kao osnovni skup, a, b, c su nularnie operacije, a $\cdot$ binarna operacija zadata tabelom:

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	b	a	c	d	d
b	a	a	c	d	e
c	c	c	b	c	c
d	d	d	c	a	a
e	d	e	c	a	d

Poduniverzumi ove algebre su: $C = \{a, b, c\}$ i $B = \{a, b, c, d\}$. Netrivijalna kongruencija na $\mathcal{C}$ je $\theta = \{\{a, b\}, \{c\}\}$, na $\mathcal{B}$ su $\rho = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$ i $\tau = \{\{a, b, d\}, \{c\}\}$ i na $\mathcal{A}$ je $\sigma = \{\{a, b, d, e\}, \{c\}\}$. Mreža slabih kongruencija $(Cw\mathcal{A}, \subseteq)$ data je na Slici 4.6.



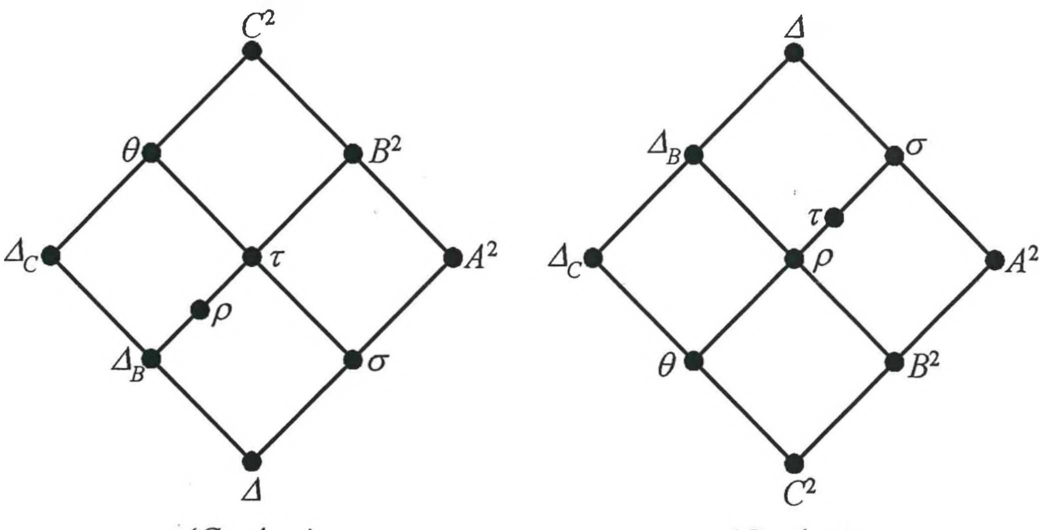
$(Cw\mathcal{A},\subseteq)$

Slika 4.6

Poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ dat je na Slici 4.7 *a*), a poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\underline{*}})$ na Slici 4.7 *b*). Uslovi Teorme 4.6 nisu zadovoljeni za relaciju ρ, pa algebra nema CEP (Slika 4.7 *a*)).

Kako je $(C^2 \vee \Delta)\bar{*}\Delta_B = B^2$, ova algebra nije Hamiltonova, na osnovu Teoreme 4.9.

U ovom slučaju poseti $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ i $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\underline{*}})$ jesu mreže.



$(Cw\mathcal{A},\leq_{\bar{*}})$ $(Cw\mathcal{A},\leq_{\underline{*}})$

a) *b)*

Slika 4.7

3. NOVA RELACIJA PORETKA NA $Cw\mathcal{A}$ I MREŽE

Algebarska struktura $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ je samo parcijalno uređen skup, tj. u opštem slučaju nije mreža (Primer 4.2). Ako su ρ i θ dve slabe kongruencije algebre $\mathcal{A}$, onda one mogu imati više minimalnih gornjih ograničenja u $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$. Tvrđenja koja slede javljaju se kao direktne posledice odgovarajućih tvrđenja iz Poglavlja 3.3 i obezbeđuju egzistenciju najmanjeg gornjeg ograničenja za svaka dva elementa iz $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$, što je dovoljno da ovaj poset bude mreža u konačnom slučaju.

Tvrđenje 4.10 Ako u $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ za neke elemente $\rho, \theta \in Cw\mathcal{A}$ postoji supremum, onda je to $\rho\bar{*}\theta$.

Dokaz. Sledi iz Teoreme 3.14. ∎

Tvrđenje 4.11 Jedino minimalno gornje ograničenje za $\rho \in Con\mathcal{B}$ i $\theta \in Con\mathcal{C}$ u $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$, koje pripada $Con(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$, je $\rho\bar{*}\theta$, gde je $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$.

Dokaz. Posledica Teoreme 3.15. ∎

Neka su ρ i θ dve slabe kongruencije. Uslovi pod kojima za ρ i θ postoji supremum u $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$, dati su u sledećim tvrđenjima.

Lema 4.12 Neka je $Cw\mathcal{A}$ mreža slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$. Za svako $\alpha \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$ definišemo skup Q^c_α na sledeći način:

$$Q^c_\alpha = \{\beta \mid \beta \in Con\mathcal{C},\ \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A},\ B \subset C \quad \text{i} \quad \beta \cap B^2 = \alpha\}.$$

Neprazan skup Q^c_α ima bar jedan maksimalan elemenat.

Dokaz. Iz definicije skupa Q^c_α sledi da je $\alpha \subset \beta$, odnosno $\alpha < \beta$ u mreži $Cw\mathcal{A}$. Dalje,

$$\alpha\bar{*}\beta = (B^2 \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge C^2) = \alpha,$$

pa je $\beta \leq_{\bar{*}} \alpha$. Sada je Lema tačna, na osnovu Leme 3.19. ∎

Tvrđenje 4.13 Poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ je mreža ako i samo ako za svako $\alpha \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$ i $C \in Sub\mathcal{A}$, $B \subset C$, svaki neprazan skup Q_α^c (definisan u Lemi 4.12) ima najveći elemenat.

Dokaz. Posledica Teoreme 3.20. ∎

Iz prethodno navedenih tvrđenja i rezultata koji su dati u prethodnom potpoglavlju slede ovi rezultati.

Posledica 4.14 Algebra $\mathcal{A}$ ima CEP ako i samo ako za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$, skup $\Omega_\rho = \{\theta \in Con\mathcal{A} \mid \rho \leq \theta \leq_{\bar{*}} \rho\}$ je neprazan. ∎

Posledica 4.15 Poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ je mreža ako i samo ako svaka podalgebra $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ ima CEP i za svako $\rho \in Con\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in Sub\mathcal{B}$ skup $\Omega_\rho = \{\alpha \in Con\mathcal{B} \mid \rho \leq \alpha \leq_{\bar{*}} \rho\}$ ima najveći elemenat. ∎

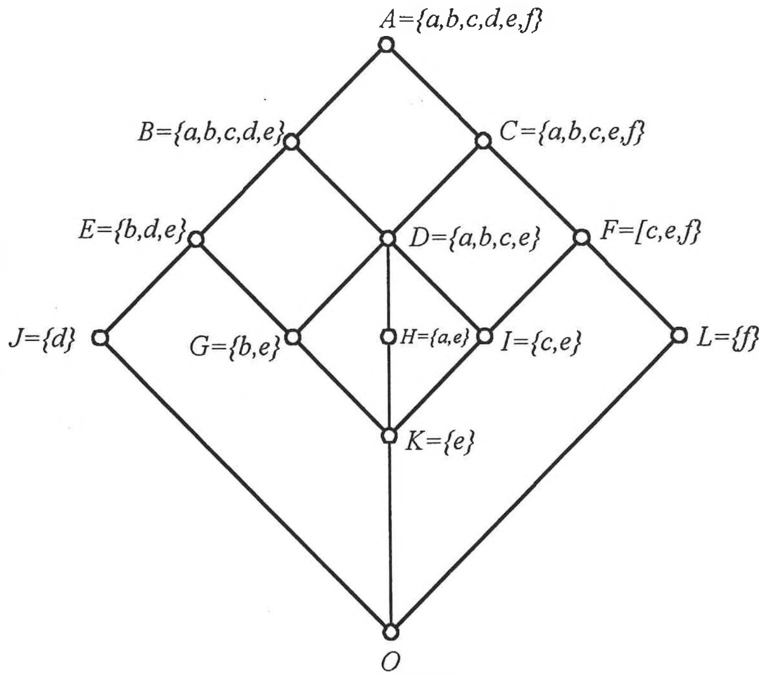
Sledeći primer ilustruje rezultate ovog poglavlja. Za $\rho \in Con\mathcal{B}$ i $\theta \in Con\mathcal{C}$, pored minimalnog gornjeg ograničenja $\rho \bar{*} \theta \in Con(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$, postoji i minimalno gornje ograničenje na podalgebri $\mathcal{G}$ algebre $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Zato je, u opštem slučaju, $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ poset, tj. nije mreža.

Primer 4.4

Neka je $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ grupoid na univerzumu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, gde je binarna operacija $\cdot$ zadata sledećom tabelom:

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	e	c	b	c	a	c
b	c	e	a	b	b	e
c	b	a	e	c	c	c
d	c	b	c	d	b	e
e	a	b	c	b	e	c
f	c	e	c	e	c	f

Poduniverzumi ove algebre su: $B = \{a,b,c,d,e\}$, $C = \{a,b,c,e,f\}$, $D = \{a,b,c,e\}$, $E = \{b,d,e\}$, $F = \{c,e,f\}$, $G = \{b,e\}$, $H = \{a,e\}$, $I = \{c,e\}$, $J = \{d\}$, $K = \{e\}$, $L = \{f\}$ i $O = \emptyset$. Mreža poduniverzuma $Sub\mathcal{A}$ algebre $\mathcal{A}$, data je na Slici 4.8.

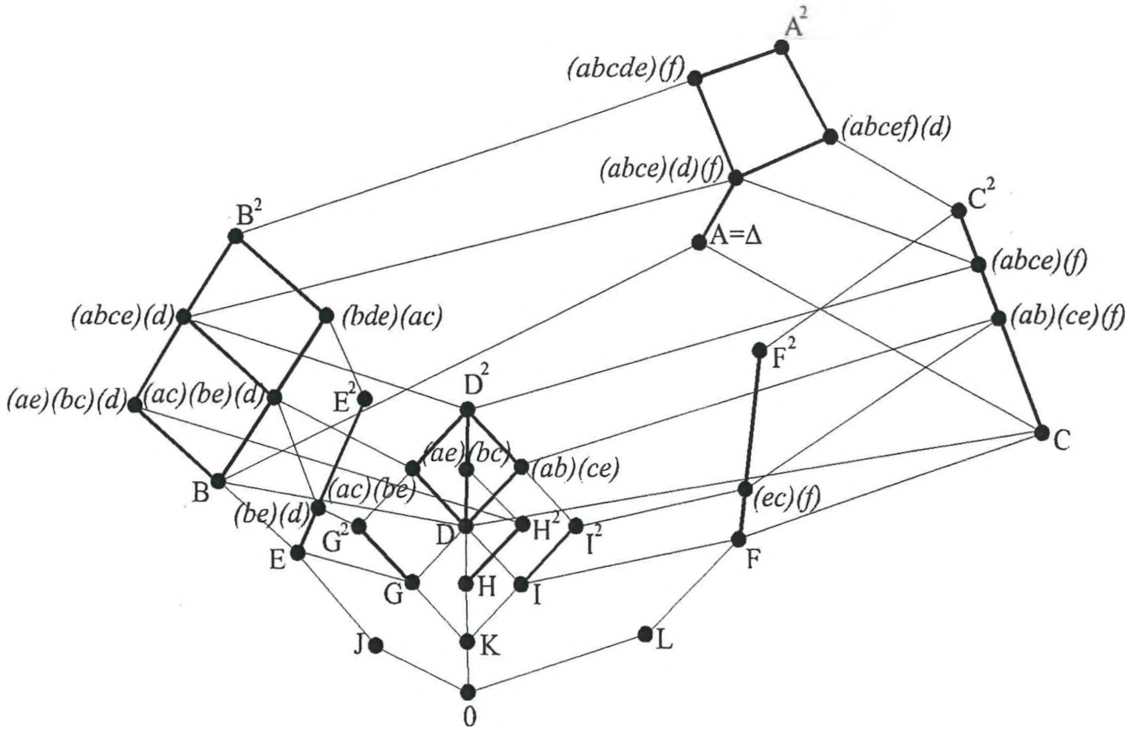


$(Sub\mathcal{A},\subseteq)$

Slika 4.8

Kongruencije algebre $\mathcal{A}$ su (zapisivanje po klasama): Δ, $(abce)(d)(f)$, $(abcde)(f)$, $(abcef)(d)$ i A^2.

Netrivijalne kongruencije: na podalgebri $\mathcal{B}$ su: $(ac)(be)(d)$, $(ae)(bc)(d)$, $(ac)(bde)$ i $(abce)(d)$; na podalgebri $\mathcal{C}$ su: $(ab)(ce)(f)$ i $(abce)(f)$; na podalgebri $\mathcal{D}$ su: $(ab)(ce)$, $(ac)(be)$ i $(ae)(bc)$; na $\mathcal{E}$ je $(be)(d)$ i na $\mathcal{F}$ netrivijalna je $(ec)(f)$. Mreža slabih kongruencija $(Cw\mathcal{A},\subseteq)$, algebre $\mathcal{A}$, data je na Slici 4.9. Podebljani delovi mreže su kongruencije na podalgebrama. To je istovremeno i mreža $(Cw\mathcal{A}/\phi_\Delta,\subseteq)$ elemenata $Con\mathcal{B}, \mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$.



$(Cw\mathcal{A}, \subseteq)$

Slika 4.9

Poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\overline{*}})$ dat je na Slici 4.10. Elementi skupa $Cw\mathcal{A}/\phi_\Delta$, na ovom posetu, su uređeni antiizomorfno mreži $(Cw\mathcal{A}/\phi_\Delta, \subseteq)$. Poset $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\overline{*}})$ ne ispunjava uslove Tvrđenja 4.13, pa nije mreža.

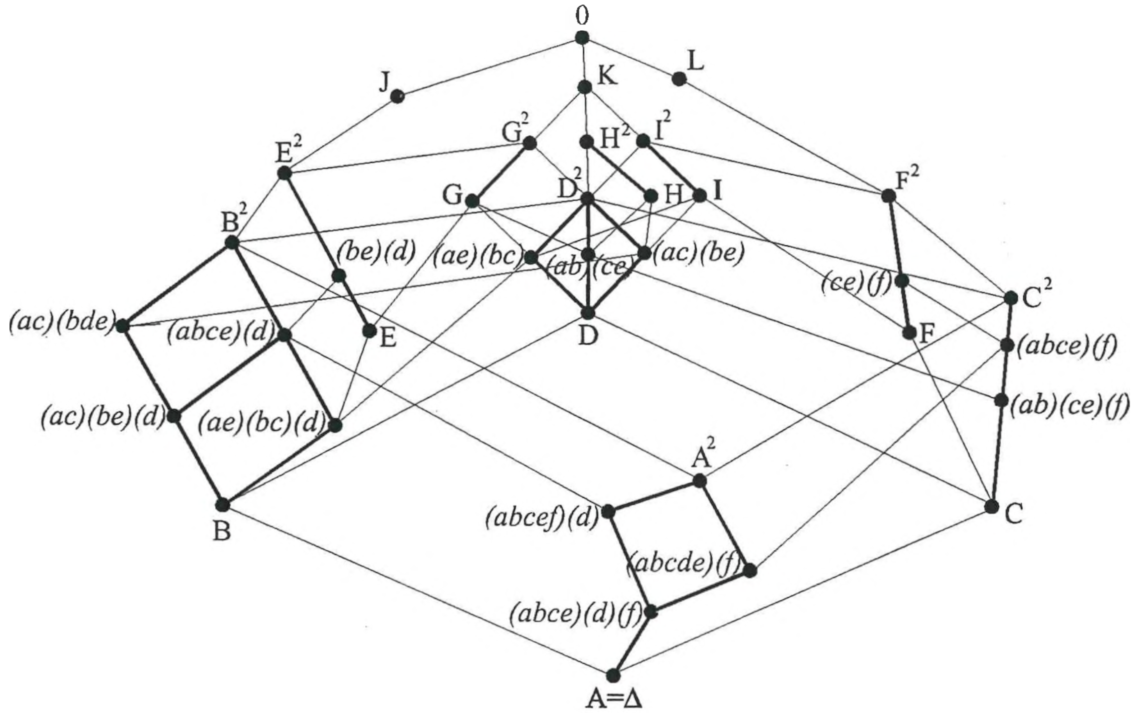
Tako, naprimer, elemenat $D^2 \in Con(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ je jedinstveno minimalno gornje ograničenje za slabe kongruencije $(ae)(bc)(d) \in Con\mathcal{B}$ i $(ab)(ce)(f) \in Con\mathcal{C}$ koje pripada $Con(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$, jer je

$$[(ae)(bc)(d)]\overline{*}[(ab)(ce)(f)] = D^2$$

(Tvrđenje 4.11). Međutim, na posetu $(Cw\mathcal{A}, \leq_{\overline{*}})$, ove dve slabe kongruencije imaju još jedno minimalno gornje ograničenje $G \in Con\mathcal{G}$, gde je $\mathcal{G}$ podalgebra od $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, jer skup $Q_G^D = \{D, [(ae)(bc)], [(ab)(ce)]\}$ nema najveći elemenat.

Algebra $\mathcal{A}$ nema CEP, jer uslovi Teoreme 4.7 ne zadovoljavaju relacije: $(ae)(bc)(d)$, $(ac)(bde)$, $(ac)(be)(d)$ i $(ab)(ce)(f)$.

Kako je $(E^2 \vee \Delta)\overline{*}B = B^2$, algebra $\mathcal{A}$ nije Hamiltonova, na osnovu Teoreme 4.9.



$(Cw\mathcal{A}, \leq_{\overline{*}})$

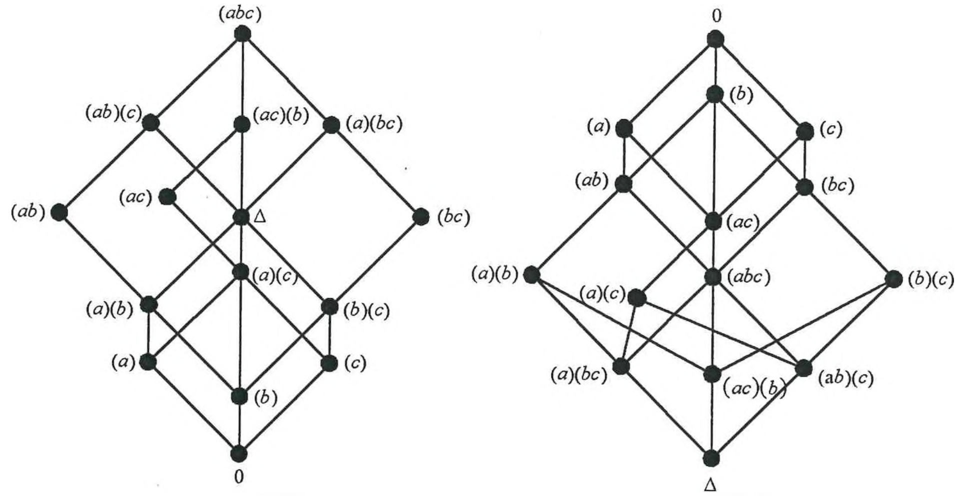
Slika 4.10

Analogna razmatranja mogu se izvršiti i za poredak $\leq_{\underline{*}}$na $Cw\mathcal{A}$, pod uslovom da je Δ distributivan elemenat mreže $(Cw\mathcal{A}, \subseteq)$ i da klase kongruencije ϕ_Δ imaju najmanje elemente. U tom slučaju elementi mreže $(Cw\mathcal{A}/\phi_\Delta, \subseteq)$ su takođe mreže, ali to nisu kongruencije na istoj podalgebri.

* * *

Primer 4.5

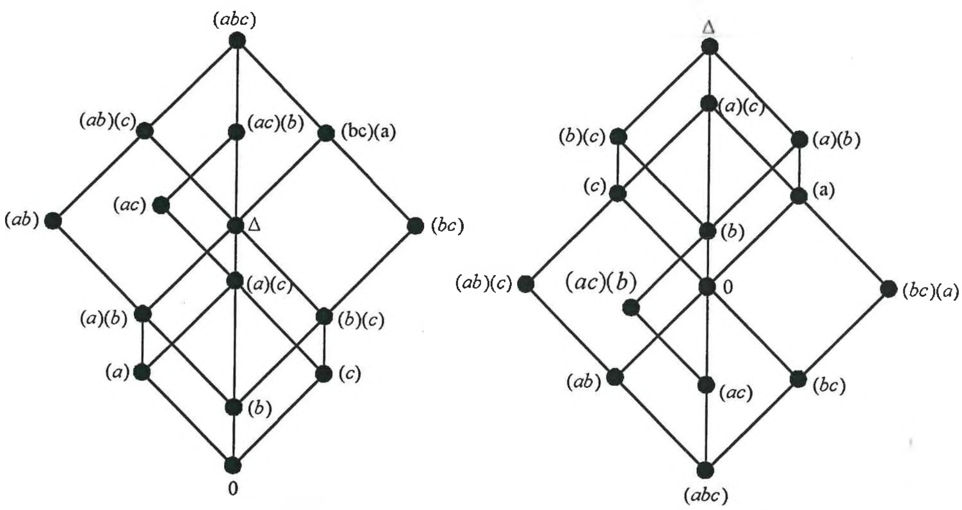
Neka je $\mathcal{A} = (\{a, b, c\}, f)$ unarna algebra na univerzumu $A = \{a, b, c\}$, gde je f trivijalni automorfizam skupa A. Sada se mreža $(Cw\mathcal{A}, \leq)$ poklapa sa mrežom slabih ekvivalencija na skupu A. Kako je u toj mreži dijagonalna relacija Δ kodistributivan i distributivan elemenat mreže $(Ew\mathcal{A}, \leq)$, to poset slabih ekvivalencija troelementnog skupa A možemo konstruisati u odnosu na poredak $\leq_{\overline{*}}$ i u odnosu na poredak $\leq_{\underline{*}}$ (Slika 4.11 i Slika 4.12).



$(Ew\mathcal{A},\subseteq)$ $(Ew\mathcal{A},\leq_{\bar{*}})$

a) *b)*

Slika 4.11



$(Ew\mathcal{A},\subseteq)$ $(Ew\mathcal{A},\leq_{*})$

a) *b)*

Slika 4.12

Poset $(Ew\mathcal{A}, \leq_{\bar{*}})$ nije mreža, dok poset $(Ew\mathcal{A}, \leq_{*})$ je i mreža.

* * * * *

Poglavlje V

LITERATURA I INDEKS

LITERATURA

[1] Ph. H. Anderson, Latticoids defined with generalized suprema and infima, Algebra Univers. 1983, 16, No. 3, 304-311.

[2] G. Birkhoff, Lattice theory, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1967.

[3] S. Burris, H. P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981.

[4] I. Chajda, Ideals of weakly associative lattices and pseudo-ordered sets, Arch. Math. 4, Scripta Fac. Sci. Nat. Ujep Brunensis XIII (1977), 181-186.

[5] I. Chajda, Characterizing tolerance trivial finite algebras, Arch. Math. (Brno), Tomus 30 (1994) 165-169.

[6] I. Chajda, Indexed annihilators in lattices, Arch. Math. (Brno), Tomus 31 (1995) 259-262.

[7] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, On weak congruence modular varieties, Filomat, Niš (1995) 633-638.

[8] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, Weak congruences in algebras having restricted similarity types, Discussiones Mathematicae Algebra and Stochastic Methods 18 (1998) 27-38.

[9] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, Lattices of compatible realations satisfying a set of formulas, Algebra Univers. 40 (1998) 51-58.

[10] V. R. Chandran, A note on Padmanabhan's paper: "Regular identities in lattices".Pure Appl. Math. Sci., 1979, 10, No. 1-2, 13-15.

[11] W. H. Cornish, A. S. A. Noor, Standard elements in a near lattice. "Bull. Austral. Math. Soc.", 1982, 26, No. 2, 185-213.

[12] B. A. Davey, M. J. McCarthy, A Representation theory for the variety generated by the triangle. "Acta Math. Acad. Sci. Hungar.", 1981, 38, No. 1-4, 241-255.

[13] J. Dudek, On bisemilattices. I. "Colloq. math.", 1982, 47, No. 1, 1-5.

[14] J. Dudek, On bisemilattices. II. "Demonstr. math.", 1982, 15, No. 2, 465-475.

[15] J. Dudek, A. Romanowska, Bisemilattices with four essentially binary polynomials. "Contrib. to lattice theory /Szeged, 1980/, 337-360. Colloq. Soc. János Bolyai, 33", North-Holland, Amsterdam-New York, 1983, 337-360.

[16] W. Dudek, Y. Jun, Normalizations of fuzzy BCC-ideals in BCC-algebras, Mathematica Moravica, Vol. 3 (1999) 17-24.

[17] Gh. Fărcas, Asupra unei clase speciale de reticule oblice. Stud. si cerc. mat., 1977, 29, No. 6, 597-601.

[18] W. Felscher, Ein unsymmetrisehes Assorziativ-Gestz in der Verbandstheorie, Arch. Math. 8 (1957) 171-174.

[19] E. Fried, Weakly associative lattices with join and meet of several elements, Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. 16 (1973), 93-98.

[20] E. Fried, G. Grätzer, A nonassociative extension of the class of distributive lattices, Pacific J. Math. 49 (1973), 59-78.

[21] E. Fried, Weakly associative lattices with the congruence extension property, Algebra Univers. 4 (1974), 151-162.

[22] E. Fried, Subdirectly irreducible weakly associative lattices with the congruence extension property, Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. 17 (1974), 59-68.

[23] J. Gałuszka, Generalized absorption laws in bisemilattices, Algebra Univers. 19 (1984) 304-318.

[24] S. S. Gončarov, Sčetnie Bulevi algebri, «Nauka» Novosibirsk, 1988.

[25] G. Grätzer, General Lattice Theory, Akademie-Verlag Berlin, 1978, Moskva «Mir» 1982 (prevod na ruski).

[26] M. Konstantinidou, J. Mittas, An introduction to the theory of hyperlattices. "Math. balkan.", 1977, No. 7, 187-193.

[27] H.Kröger, Ein Assoziativitäts kriterium vom Foulis-Holland-Type. J. reine und angew. Math., 1978, 298, 196-198.

[28] H.Kröger, Absorptions axiome in verllgemeinerten Verbänden. Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagenfurt. Conf., 1978, Klagenfurt, 1979, 163-176.

[29] V. Lazarević, Bipolumrežno-vrednosni rasplinuti skupovi, Magistarski rad, Novi Sad, 1997.

[30] V. Lazarević, B. Šešelja, A. Tepavčević, Bisemilattice-valued fuzzy sets, Novi Sad J. Math. Vol. 28, No. 3 (1998) 105-114.

[31] V. Lazarević, A. Tepavčević, Theorem of synthesis for bisemilattice-valued fuzzy sets, Mathematica Moravica, Vol. 2 (1998) 75-83.

[32] V. Lazarević, B. Šešelja, Constucting maximal block-codes by bisemilattice-valued fuzzy sets, Novi Sad J. Math. Vol. 29, No. 2 1988, 79-90.

[33] V. Lazarević, A. Tepavčević, Weak congruences and graphical composition, General Algebra 13 (primljeno za štampu).

[34] K. Leutöla, J. Nieminen, Posets and generalized suprema and infima, Algebra Univers. 1983, 16, No. 3, 344-354.

[35] R. McKenzie, A. Romanowska, Varietis of $\cdot-$distributive bisemilattices. Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagenfurt Conf., 1978, Klagenfurt , 1979, 213-218.

[36] S. Milić, A. Tepavčević, Special elements generalizing modularity in a lattice, Rev. of Res. Fac. of Sci. Univ. of Novi Sad 25, 2 (1995) 131-140.

[37] J. Nieminen, On the algebraic structure of fuzzy sets of type 2. Kybernetika, 1977, 13, No. 4, 261-273.

[38] J. Nieminen, On distributive and modular $\chi-$lattices. "Yokohama Math. J.", 1983, 31, No. 1-2, 13-20.

[39] J. Nieminen, On $\chi_{mub}-$lattices and convex substructures of lattices and semilattices. "Acta math.hung.", 1984, 44, No. 3-4, 229-236.

[40] N. V. Obraztsov, Simple torsion-free groups in which the intersection of any two non-trivial subgroups is non-trivial, J. Algebra 199 (1998) No. 1, 337-343.

[41] R. Padmanabhan, Regular identities in lattices, Trans. Amer. Math. Soc. 158 (1971) 179-188.

[42] J. Płonka, On distributive quasi-lattices, Fund. Math. 60 (1967) 191-200.

[43] M. Ploščica, Graphical compositions and weak congruences, Publ. Inst. Math. Beograd 56 (70) 1974, 34-40.

[44] N. Reilly, Representations of lattices via neutral elements, Algebra Univers. 19 (1984) 341-354.

[45] A. Romanowska, On bisemilattices with one distributive law, Algebra Univers., 1980, 10, No. 1, 36-47.

[46] A. Romanowska, Free bisemilattices with one distributive law, Demonstr. math., 1980, 13, No. 2, 565-572.

[47] D. Schweigert, Near lattices, Math. Slovaca 32 (1982) No.3, 313-317.

[48] L.A.Skornjakov, Elementi teorii struktur, Moskva «Nauka» 1982.

[49] K. Seitz, Notes on algebraic systems. Dep. Math. K. Marx Univ. Econ. Budapest /Publ./, 1978, No. 6, 36 pp.

[50] G. Szász, Introduction to lattice theory, 3 th ed. Academic Press and Akademiai Kiado, 1963.

[51] G. Szász, On independent systems of axioms for lattices, Publ. Math. Debrecen 10 (1963) 108-115.

[52] B. Šešelja, G. Vojvodić, On the complementedness of the lattice of weak congruences, Studia Scientarium Mathematicarum Hungarica 24 (1989) 289-293.

[53] B. Šešelja, A. Tepavčević, Infinitely distributive elements in the lattice of weak congruences, General Algebra 1988, Elsevier Science Publishers B.V.(North Holland), 1990, 241-253.

[54] B. Šešelja, A. Tepavčević, Special elements of the lattice and lattice identities, Rev. of Res. Fac. of Sci. Univ. Novi Sad, 20, 2 (1990) 21-29.

[55] B. Šešelja, A. Tepavčević, Filters in a weak-congruence lattice, Rev. of Res. Fac. of Sci. Univ. of Novi Sad 23,1 (1993) 235-243.

[56] B. Šešelja, A. Tepavčević, Partially ordered and relational valued algebras and congruences , Rev. of Res. Fac. of Sci. Univ. of Novi Sad 23 (1993) 273-289.

[57] B. Šešelja, A. Tepavčević, On a generalization of fuzzy algebras and congruences, Fuzzy Sets and Systems 65 (1994) 85-94.

[58] B. Šešelja, A. Tepavčević, On a characterization of rees varieties, Tatra Mountains Math. Publ. 5 (1995) 61-69.

[59] B. Šešelja, Lattice of partially ordered fuzzy subalgebras, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 265-269.

[60] B. Šešelja, A. Tepavčević, Fuzzy groups and collections of subgroups, Fuzzy Sets and Systems 85 (1996) 85-91.

[61] B. Šešelja, A. Tepavčević, On the collection of lattices determined by the same poset of meet-irreducibles, Novi Sad J. Math. Vol. 26, No. 2, 1996, 11-19.

[62] B. Šešelja, A. Tepavčević, On generalization of finite posets by meet-irreducibles, Discrete Mathematics 186 (1998) 269-275.

[63] B. Šešelja, A. Tepavčević , A note on CIP varieties , Algebra Univers. (primljeno za štampu).

[64] B. Šešelja, A note on UCEP, Proc. of the International Conference General Algebra and Ordered Sets, Olomouc, 1994, 131-137.

[65] A. Tepavčević , Mrežno vrednosne algebarske strukture i kodovi, Magistarski rad, Novi Sad, 1990.

[66] A. Tepavčević , Specijalni elementi mreže i primene, Doktorska disertacija, Novi Sad, 1993.

[67] A. Tepavčević , On special elements of bisemilattices, Novi Sad J. Math. Vol. 27, No. 1, 1997, 83-92.

[68] A. Tepavčević , Diagonal relation as a continuous element in a weak congruence lattice, Proc. of the International Conference General Algebra and Ordered Sets, Olomouc, 1994, 156-163.

[69] A. Tepavčević , On representation of lattices by weak congruences and weak tolerances, Algebra and Model Theory, Novosibirsk, 1997, 173-181.

[70] Tran Duc Mai, Partitions and congruences in algebras, I. Basic properties, Arch. Math. 2, Skripta Fac. Sci. Nat. Ujep Brunensis, X: 111-122, 1974.

[71] Tran Duc Mai, Partitions and congruences in algebras, II. Modular and distributive equalities, complements properties, Arch. Math. 3, Skripta Fac. Sci. Nat. Ujep Brunensis, X: 159-172, 1974.

[72] Tran Duc Mai, Partitions and congruences in algebras, III. Commutativity of congruences, Arch. Math. 3, Skripta Fac. Sci. Nat. Ujep Brunensis, X: 173-188, 1974.

[73] Tran Duc Mai, Partitions and congruences in algebras, IV. Associable systems properties, Arch. Math. 4, Skripta Fac. Sci. Nat. Ujep Brunensis, X: 231-254, 1974.

[74] Usporiadané množiny a zväzy, Vedecký redaktor Tibor Katrinák, Univerzita Komenského, 1985.(ruski).

[75] Usporiadané množiny a zväzy II, Vedecký redaktor Eva Gedeonová, Univerzita Komenského, 1988.(ruski).

[76] J. Ušan, B. Šešelja, G. Vojvodić, Generalized ordering and partitions. Mat. vesn., 1979, 3, No. 2, 241-247.

[77] J. Ušan, Ob odnom obobšenii rešetok, Rev. of Res. Fac. of Sci. Univ. of Novi Sad 17, 2 (1988) 57-63.

[78] J. Ušan, O nekotorih postroenijah počti-rešetok, Proc. of the Conf. "Algebra and Logic", Sarajevo 1987, 161-167.

[79] J. Ušan, A. Tepavčević, On a class of bisemilattices, Rev. of Res. Fac. of Sci. Univ. of Novi Sad 19, 2, 93-104 (1989).

[80] J. Ušan, Congruences of $n-$group and of associated Hosszú$-$Gluskin algebras, Novi Sad J. Math. Vol. 28, No. 2, 1998, 91-108.

[81] G. Vojvodić, B. Šešelja, On the lattice of weak congruence relations, Algebra Univers. 25 (1988) 121-130.

[82] G. Vojvodić, B. Šešelja, The diagonal relation in the lattice of weak congruences and reprensentation of lattices, Rev. of Res. Fac. of Sci. Univ. of Novi Sad 19, (1989) 167-178.

[83] H. Werner, Which partition lattices are congruence lattices? Coll. Math. Soc. J. Bólyai 14 (Lattice Theory), North-Holand, 1976, 433-453.

– – – – – – – – – – –

Index

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije:
TD
Tip zapisa:
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Vera Lazarević
AU
Mentor: Dr Andreja Tepavčević

MN
Naslov rada: Algebarske strukture oslabljenih mreža i primene
NR

Jezik publikacije: Srpski
JP
Jezik izvoda: Srpski
JI
Zemlja publikovanja: Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Srbija
JGP
Godina: 2001.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: 32000 Čačak, Nemanjina 84/13
MA
Fizički opis rada: IV, 103, 83, 3, 20, -, - .
(broj poglavlja / strana/ lit citata/ tabela/ slika/ grafika/ priloga/)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Univerzalna algebra
ND
Predmetna odrednica/ Ključne reči: algebra, operacija, poredak, poset, specijalni elementi mreže (algebre), slabe kongruencije, CIP, CEP, wCIP, $*$CIP, UCEP, latisoid, grafička kompozicija
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Instituta za matematiku
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod:

Algebarske strukture oslabljenih mreža i primene

Ako je L algebarska mreža i a kodistributivan elemenat u L, onda sve klase kongruencije ϕ_a indukovane homomorfizmom $m_a : x \longmapsto a \wedge x$ imaju najveće elemente. Najveći elemenat klase kojoj $x \in L$ pripada je označen sa $\overline{x}$. Ako je $\overline{*}_a$ binarna operacija definisana sa $x \,\overline{*}_a y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$, onda je istraživana struktura $(L, \overline{*}_a)$, i odgovarajući poset $(L, \leq_{\overline{*}})$.

Kao primer takve strukture posmatrana je algebra slabih kongruencija $(Cw\mathcal{A}, \overline{*}_a)$, gde je $\overline{*}_a$ specijalna grafička kompozicija. Dobijeni rezultati daju prirodne posledice u strukturi slabih kongruencija. Data je primena ovih rezultata u univerzalnoj algebri. Njihovom primenom karakterizuje se CEP i Hamiltonovo svojstvo.

Dat je potreban i dovoljan uslov da poset $(L, \leq_{\overline{*}})$ bude mreža i ovi rezultati su primenjeni na mrežu slabih kongruencija.

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
(Naučni stepen/ ime i prezime/ zvanje/ fakultet)
KO
Predsednik: Dr Janez Ušan, redovni profesor
Institut za matematiku
Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Andreja Tepavčević, vanredni profesor
Institut za matematiku
Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Branimir Šešelja, redovni profesor
Institut za matematiku
Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Mališa Žižović, redovni profesor
Tehnički fakultet u Čačku
Univerzitet u Kragujevcu

UNIVERZITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type:
DT
Type of record:
TR
Contents code:
CC
Author: Vera Lazarević
AU
Mentor: Dr Andreja Tepavčević

MN
Title: Algebraic structures of weakened lattices and applications
TI

Language of text: In serbian
LT
Language of abstract: In serbian
LA
Country of publication: Yugoslavia
CP
Locality of publication: Serbia
LP
Publication year: 2001.
PY
Publisher:
PU
Publ. place: 32000 Čačak, Nemanjina 84/13
PP
Physical description: IV, 103, 83, 20, 3, -.
(chapters / pages/ literature/ pictures/ graphs/ additional lists)
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Universal algebra
SD
Subject/ Key words: algebra, operation, ordering, poset, special elements of the lattice (algebraic), weak congruence, CIP, CEP, wCIP, $*$CIP, UCEP, latticoid, graphical composition
SKW
UC:
Holding data:
ND
Note:
N

Abstract:

Algebraic structures of weakened lattices and applications

If L is an algebraic lattice and a codistributive element in L, then all the classes of the congruences ϕ_a determined by the homomorphism $m_a : x \longmapsto a \wedge x$ have top elements. The top element of the class which to belongs an $x \in L$ is denoted by $\overline{x}$. If $\overline{*}_a$ is a binary operation defined by $x \,\overline{*}_a y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$, then we investigate the structure $(L, \overline{*}_a)$, and the corresponding poset $(L, \leq_{\overline{*}})$.

As an example of such a structure we observe an algebra of weak congruences $(Cw\mathcal{A}, \overline{*}_a)$, where $\overline{*}_a$ is a special graphical composition. We obtain natural consequences of the mentioned results to the structure weak congruences. An application in universal algebra is presented, for example, we characterized CEP and Hamiltonian property.

Necessary and sufficient conditions for a poset $(L, \leq_{\overline{*}})$ to be a lattice are given, and the results are applied in the case of weak congruence lattices.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB
Defended:
DF
Thesis defend board:
(Degree/name/ surname/ title/ faculty)
DB
Chairman: Dr Janez Ušan, Professor
Institute of Matematics
University of Novi Sad

Member: Dr Andreja Tepavčević, Associate Professor
Institute of Matematics
University of Novi Sad

Member: Dr Branimir Šešelja, Professor
Institute of Matematics
University of Novi Sad

Member: Dr Mališa Žižović, Professor
Faculty of Tehnical in Čačak
University of Kragujevac