UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Mr Olga Bodroža Pantić

ODREDJIVANJE BROJEVA 1–FAKTORA I 2–FAKTORA NEKIH KLASA GRAFOVA

– DOKTORSKA DISERTACIJA –

NOVI SAD, 1993.

Svojim roditeljima

Biserki

i

Iliji

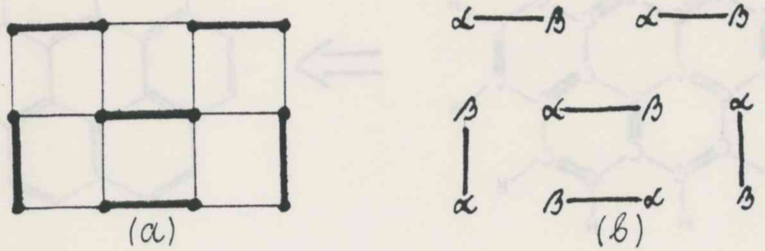
SADRŽAJ

Strana

Uvod

Odredjivanje broja r–faktora u nekim klasama grafova, zbog svog značaja u fizici i hemiji kao i drugim oblastima ljudske delatnosti, predstavlja jedan od aktuelnih problema u teoriji grafova.

Na primer, svaki 1–faktor Dekartove sume lanaca (DSL) $P_m \times P_n$ *(sl.1(a)) predstavlja poseban način interakcije najbližih suseda medju* α *i* β *spinova (sl.1(b)) smeštenih naizmenično u mreži metala anti-feromagnetika (problem dimera). Broj 1–faktora za ovaj tip grafa, kad se izvrši ekstrapolacija na mrežu beskonačne veličine, daje posebnu funkciju za magnetne i termodinamičke osobine kristala (Ising problem) a takodje i funkciju za kinetiku adsorpcije dvoatomnih molekula, recimo, molekula kiseonika na čistu površinu metala (sl. 1(b)) (videti [39,35,40,43]).*

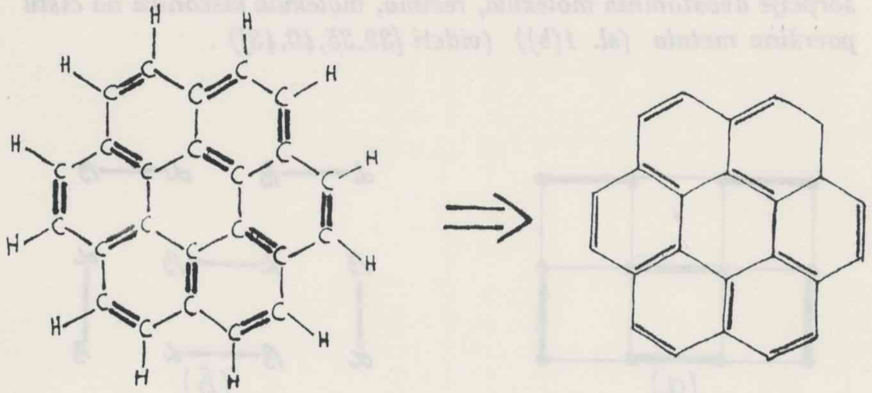


Sl. 1

U hemiji su pak, od bitnog značaja heksagonalni sistemi, popularno nazvani „saće " ili „heksagonalne životinje". Kostur molekula benzenoidnog ugljovodonika predstavlja heksagonalni sistem (sl.2) a svakoj Kekulé strukturi ovog ugljovodonika odgovara jednoznačno odredjen 1–faktor odgovarajućeg heksagonalnog sistema.

Ustanovljeno je da stabilnost i mnoga druga svojstva nekih iz ove grupe ugljovodonika stoje u vezi sa brojem Kekulé struktura, te otuda i proizilazi veliki interes u hemiji za prebrojavanje 1-faktora odredjenih heksagonalnih sistema. U prilog ovome stoji i sama pojava knjige koja je cela posvećena Kekulé strukturama benzenoidnih ugljovodonika [20].

Počevši sa algoritmima koje su predložili Gordon i Davison ([25]) pojavili su se mnogi radovi o problemu nalaženja Kekulé struktura benzenoidnog ugljovodonika. Doprinosom velikog broja poznatih hemičara i graf-teoretičara kao što su Balaban i Tomescu [1,2,3,4], Gutman [27,28,29,30], Herndon [36], Hosoya [29,39, 40,38], Sachs [47], Trinajstić [56], Farrell i Wahid [22], Fu-ji i Rong-si [24], Yamaguchi [38] i drugi, ovo polje istraživanja je poslednjih godina znatno ubrzano.



Sl. 2

U ovom radu koji se sastoji iz tri odeljka, istražuje se problem odredjivanja broja 1-faktora i 2-faktora nekih klasa grafova.

Prvi odeljak sadrži osnovne definicije i oznake.

Drugi odeljak je posvećen 1-faktorima heksagonalnih sistema heksagonalnog oblika, heksagonalnih lanaca kao i kvadratnih lanaca. Dokazuje se eksplicitna formula za broj Kekulé struktura benzenoidnog sistema heksagonalnog oblika korišćenjem John Sachs-ove teoreme.

Takodje, dobija se veći broj rekurentnih relacija i algebarskih izraza koji se odnose na broj 1–faktora heksagonalnog lanca i uspostavlja njihova veza sa Fibonačijevim brojevima.

Treći odeljak se odnosi na 2–faktore i u specijalnom slučaju povezane 2–faktore tj. Hamiltonove konture Dekartove sume lanaca i predstavlja nastavak istraživanja magistarskog rada **2-faktori Dekartove sume lanaca** *[11]. U cilju odredjivanja broja 2-faktora $F_m(n)$ i broja Hamiltonovih kontura $H_m(n)$ u grafu $P_m \times P_n$ koriste se matrice prelaza pridruženih grafova i digrafova. Korišćenjem odredjenih svojstava ovih digrafova, matrice susedstva, pomoću kojih dolazimo do rekurentnih relacija za brojeve $F_m(n)$ i $H_m(n)$, se mogu redukovati i na taj način postići bolji rezultati (rekurentne relacije manjeg reda). Na ovaj način omogućeno je dobijanje novih rekurentnih relacija za $F_m(n)$ i $H_m(n)$ (za veće vrednosti m). Odredjene su i generativne funkcije ovih nizova za neke fiksne vrednosti m.*

Prvi problem ([6]) na početku bavljenja teorijom grafova dao mi je akademik Dr Ivan Gutman, red. prof. PMF-a u Kragujevcu. Koristim ovu priliku da mu se najiskrenije zahvalim na ukazanom poverenju.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru Dr Ratku Tošiću, red. prof. PMF-a u N.Sadu koji me je uputio u ovu oblast teorije grafova i korisnim sugestijama mi pomogao na izradi ovog rada.

1 Osnovne definicije i oznake

Prost graf $G = (V, E)$ se sastoji od konačnog nepraznog skupa elemenata $V(G)$ koje nazivamo *čvorovima* i skupa $E(G)$ dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje nazivamo *granama*. Ako se dozvoli višestruko pojavljivanje iste grane ili pojava *petlji* tj. jednočlanih podskupova skupa $V(G)$ kao grana grafa tada govorimo o *opštem grafu*.

Put je naizmeničan niz čvorova i njima incidentnih grana. Ako su sve grane u putu različite tada se on naziva *lanac*. Lanac u kome su svi čvorovi različiti izuzev, možda, prvog i poslednjeg čvora (u tom slučaju kažemo da se radi o *zatvorenom lancu*) naziva se *prost lanac. Dužina lanca* je broj grana u njemu. Prost lanac sa n čvorova označavamo sa P_n. Prost, zatvoren lanac nazivamo *konturom*. *Hamiltonova kontura* je kontura koja sadrži sve čvorove grafa.

Dva čvora su *povezana* ako postoji put koji počinje u jednom a završava u drugom čvoru. Graf je *povezan* ako su svaka dva čvora povezana.

Nije teško pokazati da relacija povezanosti u skupu $V(G)$ predstavlja jednu relaciju ekvivalencije. Klase te relacije ekvivalencije nazivamo *komponentama.*

Artikulacioni čvor je takav čvor grafa čijim brisanjem se povećava broj komponenti.

Šuma je graf bez kontura. *Stablo* je povezana šuma.

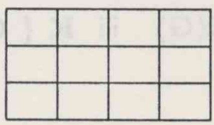
Graf nazivamo *ravnim* ako se može predstaviti u ravni tako da mu se nikoje dve grane ne seku (isključujući čvorove).

Unija grafova $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, u oznaci $G_1 \cup G_2$, je graf $G = (V, E)$ gde je $V = V_1 \cup V_2$ a $E = E_1 \cup E_2$.

Dekartova suma grafova $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G(V, E)$, u oznaci $G_1 \times G_2$, gde je
$V = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | \ v_1 \in V_1 \ \wedge \ v_2 \in V_2\}$
dok je

$$E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} | \ (\ \{x_1, x_2\} \in E_1 \ \wedge \ y_1 = y_2)$$
$$\vee \ (x_1 = x_2 \ \wedge \ \{y_1, y_2\} \in E_2 \ ) \ \}.$$

Tako je *Dekartova suma* prostih *lanaca* (**DSL**) P_4 i P_5 prikazana na sl.3.



Sl.3

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je *podgraf* grafa $G(V, E)$ ako je $V_1 \subseteq V$ a $E_1 \subseteq E$.

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je *pokrivajući podgraf* grafa $G(V, E)$ ako je $V_1 = V$ a $E_1 \subseteq E$.

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je *indukovani podgraf* grafa $G(V, E)$ (podgraf indukovan skupom čvorova V_1) gde je $V_1 \subseteq V$ a

$$E_1 = \{\{v_1, v_2\} \in E | \ v_1 \in V_1 \ \wedge \ v_2 \in V_1 \ \} \ .$$

Graf je *regularan* stepena regularnosti r ako su svi stepeni čvorova grafa jednaki r tj. ako je svaki čvor incidentan sa tačno r grana.

r–faktor grafa G je regularan pokrivajući podgraf grafa G stepena regularnosti r.

Nije teško zaključiti da 1–faktor [1] grafa predstavlja skup medjusobno nezavisnih grana koji pokriva sve čvorove grafa.

2–faktor grafa predstavlja uniju disjunktnih kontura, dok je Hamiltonova kontura, ustvari, povezan 2–faktor.

Heksagon je oblast u ravni ograničena pravilnim šestougaonikom čije su strane dužine 1.

Heksagonalni sistem (**HS**) je konačan, povezan, ravan graf bez artikulacionih čvorova u kome je svaka unutrašnja oblast heksagon. [2]

Uobičajeno je da se sa $K(G)$ ili $K\{G\}$ označava broj 1-faktora grafa G.

Prost digraf $D = (V, E)$ se sastoji od konačnog nepraznog skupa elemenata V(D) koje nazivamo *čvorovima* i skupa $E(D)$ uredjenih parova (u, v) čvorova iz $V(D)$ gde je $u \neq v$ koje nazivamo *granama* digrafa D.

Kažemo da iz čvora v_1 postoji grana u čvor v_2 akko $(v_1, v_2) \in E$ i to zapisujemo $v_1 \rightarrow v_2$.

Ako se u gornjoj definiciji dozvoli višestruko pojavljivanje istog uredjenog para kao i pojava *petlji* (u slučaju kad je $u = v$) tada govorimo o *opštem digrafu* .

[1] 1-faktor grafa se u teoriji često naziva savršeno sparivanje (videti [45]).

[2] Heksagonalni sistem se može definisati na više načina (videti [20,33]).

Orijentisan put dužine l u digrafu (prostom ili opštem) je naizmeničan niz čvorova i njima incidentnih grana

$$v_{i_1}, (v_{i_1}, v_{i_2}), v_{i_2}, (v_{i_2}, v_{i_3}), v_{i_3}, \ldots, v_{i_l}, (v_{i_l}, v_{i_{l+1}}), v_{i_{l+1}} ,$$

gde je $v_{i_k} \in V(G)$, $k \in \{1, 2, \ldots, l+1\}$.

Matrica susedstva opšteg grafa (digrafa) sa skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je kvadratna, celobrojna matrica $A = [a_{i,j}]$ reda n gde je $a_{i,j}$ jednako višestrukosti grane $\{v_i, v_j\}$ grafa (odn. grane (v_i, v_j) digrafa) u slučaju da ona postoji a jednako nuli u slučaju da ne postoji.

U daljem radu, pod grafom $P_m \times P_n$ podrazumevamo označeni graf koga geometrijski predstavljamo u obliku pravougaone mreže sa stranama dimenzije $(m-1)$ i $(n-1)$. Oblasti odredjene konturama grafa dužine 4 (kvadratiće te pravougaone mreže) , nazivamo *prozorima* . Za prozor kažemo da se nalazi u unutrašnjosti date Hamiltonove konture ako se nalazi u onoj oblasti odredjenoj tom konturom koja nije beskonačna.

Graf prozora DSL-a $P_m \times P_n$ u oznaci $W_{m,n}$ je graf čiji je skup čvorova skup prozora grafa $P_m \times P_n$ dok se susednost dva čvora definiše preko susednosti tih čvorova kao oblasti u grafu $P_m \times P_n$ (dva prozora su susedna ako odgovarajuće konture dužine 4 imaju zajedničku granu).

Prozore grafa $P_m \times P_n$ možemo označiti kao elemente matrice $[w_{i,j}]$ tipa $(m-1) \times (n-1)$ tako da važi da su dva prozora $w_{i,j}$ i $w_{p,k}$ susedna akko ($i = p \ \wedge \ |j-k| = 1$) $\vee$ ($j = k \ \wedge \ |p-i| = 1$) .

Broj Hamiltonovih kontura u grafu $P_m \times P_n$ označavamo sa $H_m(n)$.

Za dve reči nad istom azbukom kažemo da su *inverzne* ako se jedna od druge može dobiti čitanjem sdesna nalevo.

F_i - i- ti član *Fibonačijevog* niza se definiše na sledeći način:

$$F_{-2} = 1 \quad , \quad F_{-1} = 0 \quad ; \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \; , \quad \text{za} \quad k \geq 0 \; .$$

Funkcija $sg\ k \quad (k \in N \cup \{0\})$ se definiše na sledeći način:

$$sg\ k = \begin{cases} 1 & , \text{ ako je } \quad k > 0 \\ 0 & , \text{ ako je } \quad k = 0 \; . \end{cases}$$

Funkcija $\bar{sg}\ k \quad (k \in N \cup \{0\})$ se definiše na sledeći način:

$$\bar{sg}\ k = \begin{cases} 0 & , \text{ ako je } \quad k > 0 \\ 1 & , \text{ ako je } \quad k = 0 \; . \end{cases}$$

Osnova celobrojne reči $d_1 d_2 \ldots d_{m-1}$ je binarna reč $\bar{d}_1 \bar{d}_2 \ldots \bar{d}_{m-1}$ gde je:

$$\bar{d}_i = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad d_i = 1 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Osnova celobrojne matrice $[d_{i,j}]$ je binarna matrica $[\bar{d}_{i,j}]$ istog formata gde je:

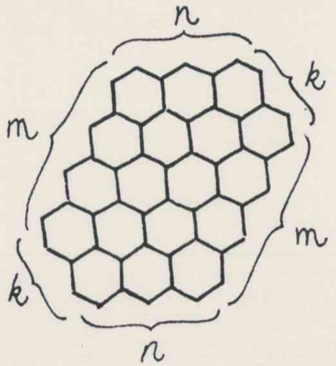
$$\bar{d}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad d_{i,j} = 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Ostale definicije koje se koriste u daljem tekstu se navode u onim poglavljima gde se koriste.

2 Prebrojavanje 1-faktora

2.1 Heksagonalni sistemi heksagonalnog oblika

Opšti heksagonalni sistem heksagonalnog oblika $O(k,m,n)$ ima sledeću strukturu:



$O(k,m,n)$

Sl. 4

Parametri k, m i n označavaju broj heksagona duž ivica heksagonalnog sistema $O(k,m,n)$. U gornjem primeru, $k=2$, $m=4$ i $n=3$.

Gordon i Davison [25] (iz 1951.) su izneli izvanrednu kombinatornu formulu,

$$K\{O(n,n,n)\} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2n+i}{n}}{\binom{n+i}{n}} , \tag{2.1}$$

koja daje broj 1-faktora (Kekulé struktura) za graf $O(n,n,n)$ (benzeni, koroni, cirkumkoroni, itd.) Prema njima pronalazač izraza (2.1) je bio M.R.Everett. U radu [25] je dato i uopštenje formule (2.1), koje važi za $O(m,m,n)$:

$$K\{O(m,m,n)\} = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\binom{m+n+i}{n}}{\binom{n+i}{n}} . \tag{2.2}$$

Ova formula se pripisuje M.Woodger-u. Ni Everett ni Woodger, izgleda, nisu obelodanili metod kojim su došli do formula (2.1) i (2.2).

Cyvin je u [16] (iz 1986.) došao do uopštenja formula Everett-a i Woodger-a:

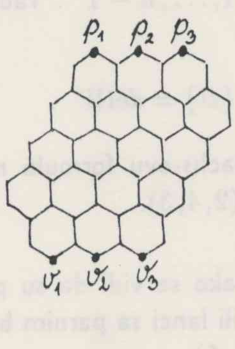
$$K\{O(k,m,n)\} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\binom{m+n+i}{n}}{\binom{n+i}{n}} , \qquad (2.3)$$

ali dokaz ponovo nije dat.

U inat brojnim publikacijama u kojima se formule (2.1) – (2.3) pominju ili primenjuju, nijedan izveštaj o strogo matematičkom izvodjenju tih formula se nije mogao naći ni u hemijskoj ni u matematičkoj literaturi sve do pojave rada [6].

Tehnika dokaza formule (2.3) je zasnovana na primeni modifikacije [31] John–Sachs-ove teoreme [41].

Da bi se formulisala John–Sachs-ova teorema, pogodno crtamo benzenoidni sistem (BS) B tako da su neke od njegovih grana vertikalne. Čvor grafa B se naziva *vrh* (*dolina*) ako svi njegovi susedi leže naniže (naviše). Potreban uslov za egzistenciju 1-faktora u B je da je broj vrhova jednak broju dolina [47]. Neka je n-taj broj i neka su vrhovi i doline označeni sa $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Kao primer može poslužiti graf $O(2,4,3)$ (slika 5).



Sl.5

Presečni graf G_{ij} za i-ti vrh i j-tu dolinu za B je podgraf grafa B pokriven svim čvorovima grafa B koji su dostupni iz p_i isključivim idenjem nadole, odn. dostupni iz v_j isključivim idenjem nagore [31].

Ovi grafovi su BS-ovi, prosti lanci sa parnim brojem čvorova ili nula grafovi (grafovi bez čvorova) [32].

Prema [41] ,

$$K\{B\} = | \, detW \, | \; , \tag{2.4}$$

gde je W kvadratna matrica reda n čiji je ij elemenat jednak broju $K\{G_{ij}\}$ [31]. (Ako je G_{ij} nula graf, tada se formalno stavlja $K\{G_{ij}\} = 0$. Ako je G_{ij} lanac sa parnim brojem čvorova, tada je $K\{G_{ij}\} = 1$.)

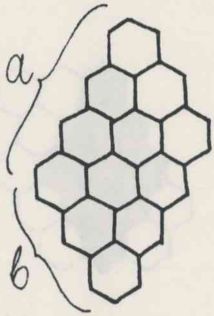
Primetimo da broj vrhova i dolina, a stoga i red matrice W , zavisi od načina na koji crtamo pojedine BS-ove. Sa druge strane, jednakost (2.4) je invarijanta na promenu orijentacije HS-a B. U slučaju HS-ova heksagonalnog oblika, njegove vrhove i doline možemo da označimo tako da vrh p_{i+1} (dolina v_{i+1}) leži desno od vrha p_i (doline v_i), za $i = 1, \ldots, n-1$. Tada se jednakost (2.4) dalje pojednostavljuje:

$$K\{B\} = detW \; . \tag{2.5}$$

Kao primer za John-Sachs-ovu formulu na sl.7 se daju devet presečnih grafova grafa $O(2,4,3)$.

Proučavanjem sl. 7 lako se vidi da su presečni grafovi grafa $O(k,m,n)$ ili nula grafovi ili lanci sa parnim brojem čvorova ili BS-ovi oblika paralelograma (sl. 6) .

Opšti oblik HS-a oblika paralelograma je:



$L(a, b)$
Sl.6

gde a i b predstavljaju broj heksagona na ivicama paralelograma.

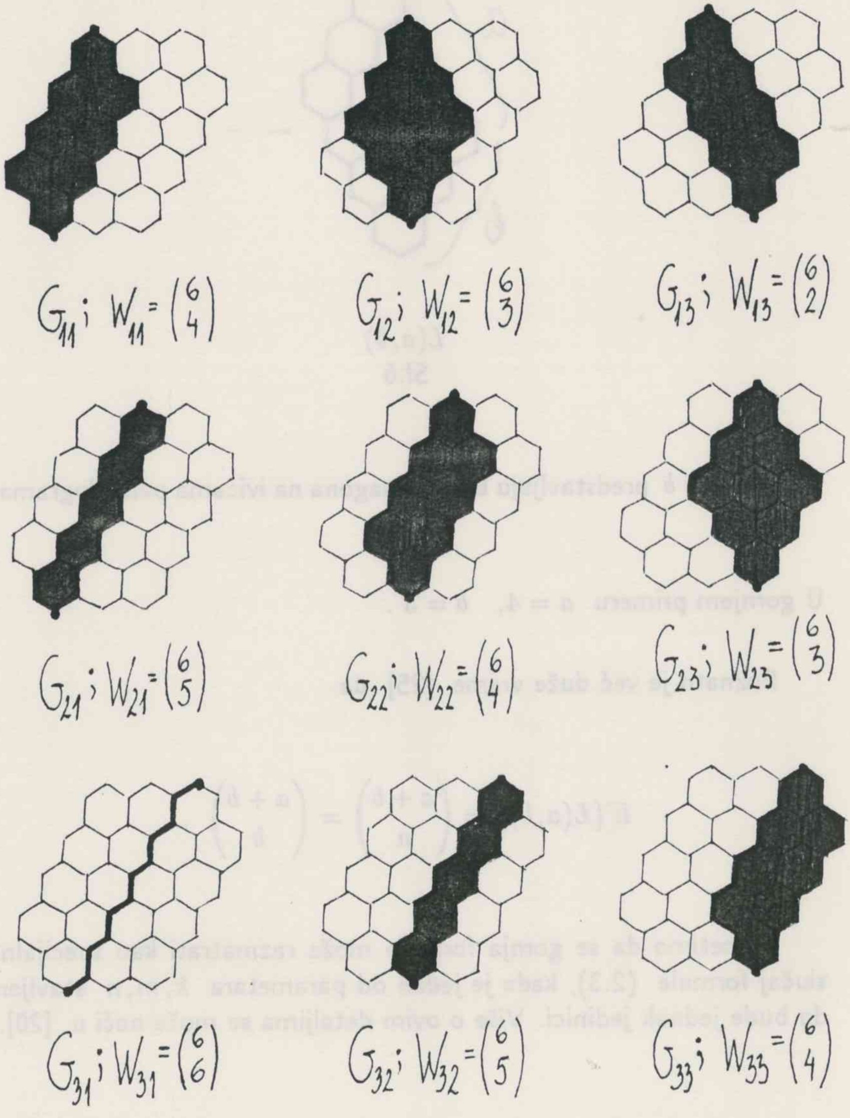
U gornjem primeru $a = 4, \quad b = 3$.

Poznato je već duže vreme [25] da

$$K\{L(a,b)\} = \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b} .$$

Primetimo da se gornja formula može razmatrati kao specijalni slučaj formule (2.3), kada je jedan od parametara k, m, n stavljen da bude jednak jedinici. Više o ovim detaljima se može naći u [20].

Sl.7 Presečni grafovi grafa O(2,4,3)
i njima odgovarajući elementi determinante W.



Slučaj kada je presečni graf lanac sa parnim brojem čvorova se može tretirati kao paralelogram $L(a,b)$, za $b=0$. Takodje, nula graf se može formalno opisati kao $L(a,b)$ za $a<0$ ili $b<0$. Primetimo da se nula graf može javiti medju presečnim grafovima za $O(k,m,n)$ samo ako je $n-k>1$. Sada nije teško da se vidi da za $i=1,2,\ldots,n$ i $j=1,2,\ldots,n$,

$$G_{ij}=L(m+i-j,k-i+j) \ ,$$

pa je

$$W_{ij}=\binom{m+k}{m+i-j} \ .$$

Primenom John-Sachs-ove formule (2.5), dolazimo do izraza:

$$K\{O(k,m,n)\}=F(k,m,n) \ , \tag{2.6}$$

gde je

$$F(k,m,n)=\begin{vmatrix} \binom{m+k}{m} & \binom{m+k}{m-1} & \binom{m+k}{m-2} & \cdots & \binom{m+k}{m-n+1} \\ \binom{m+k}{m+1} & \binom{m+k}{m} & \binom{m+k}{m-1} & \cdots & \binom{m+k}{m-n+2} \\ \binom{m+k}{m+2} & \binom{m+k}{m+1} & \binom{m+k}{m} & \cdots & \binom{m+k}{m-n+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m+k}{m+n-1} & \binom{m+k}{m+n-2} & \binom{m+k}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k}{m} \end{vmatrix} \ . \tag{2.7}$$

Da bi dokazali formulu (2.3), potrebno je pokazati da je njena desna strana jednaka $F(k,m,n)$. Dokaz izvodimo u dva koraka. Prvo ćemo utvrditi da za $F(k,m,n)$ važi kombinatorni identitet (2.8) (teorema 2.1). Najzad, pokazaćemo da je $F(k,m,n)$ invarijanta na permutaciju parametara k,m i n . Prvo nam je potreban jedan pomoćni rezultat:

Lema 2.1 *Donja determinanta* D_n *reda* n,

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{k+n-1}{n-1} & \binom{k+n-1}{n-2} & \binom{k+n-1}{n-3} & \cdots & \binom{k+n-1}{0} \\ \binom{k+n-2}{n-1} & \binom{k+n-2}{n-2} & \binom{k+n-2}{n-3} & \cdots & \binom{k+n-2}{0} \\ \binom{k+n-3}{n-1} & \binom{k+n-3}{n-2} & \binom{k+n-3}{n-3} & \cdots & \binom{k+n-3}{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{k}{n-1} & \binom{k}{n-2} & \binom{k}{n-3} & \cdots & \binom{k}{0} \end{vmatrix},$$

jednaka je jedinici za sve vrednosti $n \geq 1$.

Dokaz.

Posmatrajmo determinantu D_{n+1}

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{k+n}{n} & \binom{k+n}{n-1} & \binom{k+n}{n-2} & \cdots & \binom{k+n}{0} \\ \binom{k+n-1}{n} & \binom{k+n-1}{n-1} & \binom{k+n-1}{n-2} & \cdots & \binom{k+n-1}{0} \\ \binom{k+n-2}{n} & \binom{k+n-2}{n-1} & \binom{k+n-2}{n-2} & \cdots & \binom{k+n-2}{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{k}{n} & \binom{k}{n-1} & \binom{k}{n-2} & \cdots & \binom{k}{0} \end{vmatrix}.$$

Za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ redom, $(i+1)$-a vrsta determinante D_{n+1} se oduzima od i-te vrste; ova transformacija neće promeniti vrednost determinante D_{n+1} . Uzimajući u obzir identitet:

$$\binom{p}{q} - \binom{p-1}{q} = \binom{p-1}{q-1},$$

zaključujemo da je:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{k+n-1}{n-1} & \binom{k+n-1}{n-2} & \binom{k+n-1}{n-3} & \cdots & \binom{k+n-1}{0} & 0 \\ \binom{k+n-2}{n-1} & \binom{k+n-2}{n-2} & \binom{k+n-2}{n-3} & \cdots & \binom{k+n-2}{0} & 0 \\ \binom{k+n-3}{n-1} & \binom{k+n-3}{n-2} & \binom{k+n-3}{n-3} & \cdots & \binom{k+n-3}{0} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \binom{k}{n} & \binom{k}{n-1} & \binom{k}{n-2} & \cdots & \binom{k}{1} & \binom{k}{0} \end{vmatrix},$$

odakle se neposredno vidi da je $D_{n+1} = D_n$. Lema 2.1 sledi sada iz činjenice da je

$$D_1 = \binom{n}{0} = 1 .$$

□

Teorema 2.1 *$F(k,m,n)$ zadovoljava sledeću relaciju:*

$$F(k,m,n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{m+k+i}{m}}{\binom{m+i}{m}} . \tag{2.8}$$

Dokaz.

Transformišimo determinantu (2.7) dodajući $(i+1)$-u vrstu i-toj vrsti, za $i = 1,2,\ldots,n-1$ redom. Zbog identiteta

$$\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \binom{p+1}{q+1},$$

postižemo:

$$F(k,m,n) = \begin{vmatrix} \binom{m+k+1}{m+1} & \binom{m+k+1}{m} & \binom{m+k+1}{m-1} & \cdots & \binom{m+k+1}{m-n+2} \\ \binom{m+k+1}{m+2} & \binom{m+k+1}{m+1} & \binom{m+k+1}{m} & \cdots & \binom{m+k+1}{m-n+3} \\ \binom{m+k+1}{m+3} & \binom{m+k+1}{m+2} & \binom{m+k+1}{m+1} & \cdots & \binom{m+k+1}{m-n+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m+k+1}{m+n-1} & \binom{m+k+1}{m+n-2} & \binom{m+k+1}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k+1}{m} \\ \binom{m+k}{m+n-1} & \binom{m+k}{m+n-2} & \binom{m+k}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k}{m} \end{vmatrix} .$$

Sada, za $i = 1, 2, \ldots, n-2$ redom, dodajući $(i+1)$-u vrstu i-toj vrsti, dobijamo:

$$F(k,m,n) = \begin{vmatrix} \binom{m+k+2}{m+2} & \binom{m+k+2}{m+1} & \binom{m+k+2}{m} & \cdots & \binom{m+k+2}{m-n+3} \\ \binom{m+k+2}{m+3} & \binom{m+k+2}{m+2} & \binom{m+k+2}{m+1} & \cdots & \binom{m+k+2}{m-n+4} \\ \binom{m+k+2}{m+4} & \binom{m+k+2}{m+3} & \binom{m+k+2}{m+2} & \cdots & \binom{m+k+2}{m-n+5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m+k+2}{m+n-1} & \binom{m+k+2}{m+n-2} & \binom{m+k+2}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k+2}{m} \\ \binom{m+k+1}{m+n-1} & \binom{m+k+1}{m+n-2} & \binom{m+k+1}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k+1}{m} \\ \binom{m+k}{m+n-1} & \binom{m+k}{m+n-2} & \binom{m+k}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k}{m} \end{vmatrix} .$$

Nastavljajući ovaj postupak (u svakom koraku se smanjuje broj operacija za jedan) na kraju dobijamo:

$$F(k,m,n)=\begin{vmatrix} \binom{m+k+n-1}{m+n-1} & \binom{m+k+n-1}{m+n-2} & \binom{m+k+n-1}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k+n-1}{m} \\ \binom{m+k+n-2}{m+n-1} & \binom{m+k+n-2}{m+n-2} & \binom{m+k+n-2}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k+n-2}{m} \\ \binom{m+k+n-3}{m+n-1} & \binom{m+k+n-3}{m+n-2} & \binom{m+k+n-3}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k+n-3}{m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m+k+1}{m+n-1} & \binom{m+k+1}{m+n-2} & \binom{m+k+1}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k+1}{m} \\ \binom{m+k}{m+n-1} & \binom{m+k}{m+n-2} & \binom{m+k}{m+n-3} & \cdots & \binom{m+k}{m} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Uzimajući u obzir da je

$$\binom{p}{q}=\frac{p!}{q!(p-q)!}, \tag{2.10}$$

sada možemo lako transformisati desnu stranu jednakosti (2.9) u

$$\frac{(m+k+n-1)!(m+k+n-2)!\cdots(m+k)!}{(m+n-1)!(m+n-2)!\cdots m!}\begin{vmatrix} \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(k+n-1)!} \\ \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{k!} & \cdots & \frac{1}{(k+n-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{(k-n+1)!} & \frac{1}{(k-n+2)!} & \cdots & \frac{1}{k!} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\frac{(m+k+n-1)!}{(k+n-1)!}\frac{(m+k+n-2)!}{(k+n-2)!}\cdots\frac{(m+k)!}{k!}}{\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!}\frac{(m+n-2)!}{(n-2)!}\cdots\frac{m!}{0!}}\begin{vmatrix} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} & \frac{(k+n-1)!}{(k+1)!(n-2)!} & \cdots & \frac{(k+n-1)!}{(k+n-1)!0!} \\ \frac{(k+n-2)!}{(k-1)!(n-1)!} & \frac{(k+n-2)!}{k!(n-2)!} & \cdots & \frac{(k+n-2)!}{(k+n-2)!0!} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{k!}{(k-n+1)!(n-1)!} & \frac{k!}{(k-n+2)!(n-2)!} & \cdots & \frac{k!}{k!0!} \end{vmatrix}$$

Koristeći (2.10) ponovo, dobijamo:

$$F(k,m,n) = D_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{m+k+i}{m}}{\binom{m+i}{m}},$$

gde je D_n definisana u lemi 2.1. Prema lemi 2.1, $D_n = 1$, te je time identitet (2.8) dokazan.

$\square$

Teorema 2.2 $F(k,m,n) = F(k,n,m) = F(m,k,n) = F(m,n,k) =$

$$= F(n,k,m) = F(n,m,k).$$

Dokaz.

Intuitivno je jasno da tvrdjenje gore mora da važi zato što ne postoji ograničenje na veličinu strana k, m i n BS-a heksagonalnog oblika koji se posmatra.

Medjutim, formalno dokazivanje tereme 2.2 je mnogo komplikovanije. Kao što je već objašnjeno, ova teorema predstavlja drugi korak u dokazu jednakosti (2.3). Dovoljno je pokazati da dve od gornjih relacija važe, npr.

$$F(k,m,n) = F(n,m,k) \tag{2.11}$$

i

$$F(k,m,n) = F(m,k,n)\ . \tag{2.12}$$

Dokaz za (2.11).

Zbog jednakosti (2.8), (2.11) je ekvivalentno sa

$$\prod_{i=0}^{k-1}\binom{m+i}{m}\prod_{i=0}^{n-1}\binom{m+k+i}{m} = \prod_{i=0}^{n-1}\binom{m+i}{m}\prod_{i=0}^{k-1}\binom{m+n+i}{m}$$

što je očigledno zadovoljeno.

Dokaz za (2.12).

Transformišući desnu stranu jednakosti (2.8), dobijamo

$$F(k,m,n) = \binom{m+k}{m}^n \frac{\left(\frac{m+k+1}{k+1}\right)^{n-1}\left(\frac{m+k+2}{k+2}\right)^{n-2}\cdots\left(\frac{m+k+n-1}{k+n-1}\right)}{(m+1)^{n-1}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{n-2}\cdots\left(\frac{m+n-1}{n-1}\right)}$$

$$= \binom{m+k}{m}^n \frac{\left[(m+k+1)^{n-1}(m+k+2)^{n-2}\cdots(m+k+n-1)\right]\left[2^{n-2}3^{n-3}\cdots(n-1)^1\right]}{\left[(m+1)(k+1)\right]^{n-1}\left[(m+2)(k+2)\right]^{n-2}\cdots\left[(m+n-1)(k+n-1)\right]^1}\ .$$

Zbog $\binom{m+k}{m} = \binom{m+k}{k}$, prethodni izraz neće promeniti vrednost ako se parametri k i m zamene. Tako dolazimo do uslova (2.12). Time je teorema 2.2 dokazana.

$\square$

Formula (2.3) se sada dobija iz (2.6) i (2.8) uzastopnom primenom (2.11) i (2.12). Formule (2.2) i (2.1) su, očigledno, specijalni slučajevi jednakosti (2.3).

Ovim je dokaz Everett-Woodger-Cyvin-ove kombinatorne formule za broj Kekulé struktura HS-a heksagonalnog oblika kompletiran.

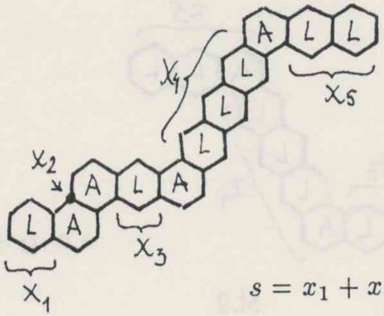
2.2 Heksagonalni lanci

Pod *poligonalnim* (nerazgranatim) *lancem* $P_{k,s}$ [23] podrazumevamo konačan graf dobijen povezivanjem s pravilnih poligona (k-tougaonika) na takav način da svaka dva susedna poligona imaju tačno jednu zajedničku granu (ivicu) i da je svaki poligon susedan sa tačno dva druga poligona, izuzev prvog i poslednjeg, za koje važi da su susedni sa tačno jednim poligonom.

Jasno je da u zavisnosti na koji način poligone spajamo, dobijamo različite poligonalne lance. Slika 7 prikazuje heksagonalni lanac $P_{6,11}$.

LA-niz heksagonalnog lanca $P_{6,s}$ je definisan u [26] kao reč dužine s nad azbukom $\{A, L\}$ za koju važi: i-to slovo je A (odgovarajući heksagon se naziva „kink") akko $1 < i < s$ i i-ti heksagon ima granu koja nema ni jedan zajednički čvor sa nekim od susednih heksagona, inače, i-to slovo je L.

Na primer, heksagonalni lanac na sl.7 se predstavlja rečju: $LAALALLLALL$, ili u sažetom obliku: LA^2LAL^3AL. Taj LA - niz se može uvek napisati u obliku $P_6 < x_1, \ldots, x_n >= L^{x_1}AL^{x_2}A\ldots AL^{x_n}$, gde se uzima $x_1 \geq 1$, $x_n \geq 1$, $x_i \geq 0$ za $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Jasno, $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n - 1$.



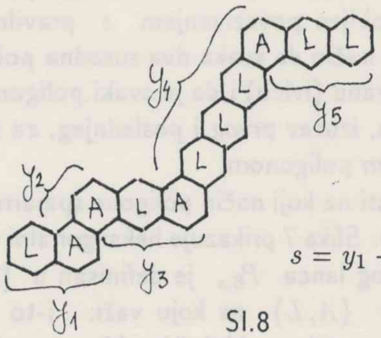
$P_6 < 1, 0, 1, 3, 2 >$

$s = x_1 + x_2 + \cdots + x_5 + 5 - 1$

Sl.7

U [52] se heksagonalni (benzenoidni) lanac, koji se sastoji od n linearno sastavljenih segmenata, koji sadrže redom $y_1, \ldots, y_n$

heksagona, označava sa $L(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, pri čemu se svaki kink razmatra tako da se nalazi u oba susedna segmenta (sl. 8). Primetimo da takvo označavanje implicira $y_i \geq 2$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Jasno, $s = y_1 + y_2 + \cdots + y_n - n + 1$.

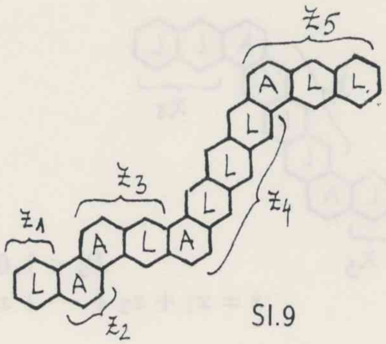


$L(2, 2, 3, 5, 3)$

$s = y_1 + y_2 + \cdots + y_5 - 5 + 1$

Sl.8

U [50] se sa $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ označava heksagonalni lanac za koji važi da njegovi linearno sastavljeni segmenti sadrže redom $z_1, z_2, \ldots, z_n$ heksagona ali se uzima da svaki od $(n-1)$ kinkova pripada tačno jednom segmentu. To znači da prvi segment ne sadrži ni jedan kink dok svi ostali segmenti imaju tačno jedan kink koji je prvi heksagon segmenta. Dobijena notacija implicira $z_i \geq 1$, za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ i $z_n \geq 2$ (sl. 9).Jasno, $s = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$.



$[1, 1, 2, 4, 3]$

$s = z_1 + z_2 + \cdots + z_5$

Sl.9

Ovako usvojene oznake impliciraju:

$$\left.\begin{array}{c} P_6 < x_1 >= L(x_1) = [x_1]; \\ P_6 < x_1, x_2 >= L(x_1+1, x_2+1) = [x_1, x_2] \\ \text{i} \\ P_6 < x_1, x_2, \ldots, x_n >= L(x_1+1, x_2+2, \ldots, x_{n-1}+2, x_n+1) \\ = [x_1, x_2+1, x_3+1, \ldots, x_{n-1}+1, x_n+1] \\ \text{za} \ \ n > 2. \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

Klasičan rad [25] sadrži opšti algoritam za prebrojavanje Kekulé struktura (K - brojeva) benzenoidnih lanaca i razgranatih katakondenzovanih benzenoida. Taj algoritam je modifikovan u [19]. Alternativno izvodjenje za slučaj nerazgranatih lanaca je opisano u [15]. U [49] je predložen poboljšani algoritam vremenske složenosti O (n) za prebrojavanje Kekulé struktura proizvoljnog benzenoidnog lanca sastavljenog od n linearno sasta-vljenih segmenata. Eksplicitne formule, u obliku Fibonačijevih brojeva, za broj Kekulé struktura cik-cak lanca su date u [14,18,57]. Studija o tri relacije izmedju Fibonačijevih brojeva i Kekulé struktura je predstavljena u [3] i [37]. Postupak za izvodjenje algebarskih formula za K -broj proizvoljnog katakondenzovanog benzenoida razradjen je u [2].

K- formula za prosti linearni lanac (poliacen) od x_1 heksagona tj. $P_6 < x_1 >$ je izvedena u [25,20]:

$$K(P_6 < x_1 >) = 1 + x_1 \, . \tag{2.14}$$

Ovde se dokazuju tri od do sada izvedene četiri eksplicitne formule za broj 1-faktora proizvoljnog heksagonalnog (nerazgranatog) lanca i to hronološkim redom, koristeći one oznake heksagonalnog lanca koje su korištene pri njihovom izvodjenju.

Naravno, Iako se može svaka od tih formula zapisati u druga dva ekvivalentna oblika za preostale načine označavanja heksagonalnog lanca koristeći (2.13). Medjutim, najjednostavnijim zapisom svake od dobijenih formula čini se da je baš onaj koji koristi onu oznaku ovog lanca koja je korišena prilikom dobijanja same formule.

2.2.1 Prva formula

Odredjivanje broja $K(L(y_1, \ldots, y_n))$ za $n \geq 2$ [52]

Označimo, radi jednostavnosti zapisa, taj broj sa $K_n(y_1, \ldots, y_n)$. Iz (2.14) sledi

$$K_1(y_1) = 1 + y_1 \ . \tag{2.15}$$

Definišimo

$$K_0 = 1. \tag{2.16}$$

To se može interpretirati kao broj Kekulé struktura za lanac „bez heksagona".

Teorema 2.3 *Ako je* $n \geq 2$, *tada za proizvoljno* $y_1 > 1$, $y_2 > 1, \ldots, y_n > 1$, *važi sledeća rekurentna relacija:*

$$K_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) =$$

$$= y_n K_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1} - 1) + K_{n-2}(y_1, \ldots, y_{n-2} - 1) \tag{2.17}$$

Dokaz.

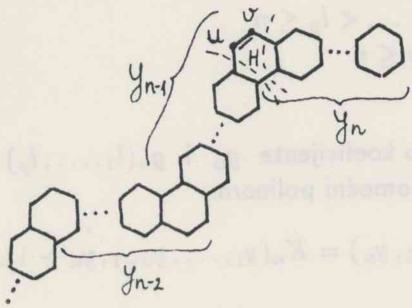
Označimo sa H poslednji kink za $L(y_1, \ldots, y_n)$. Primenimo sada osnovnu teoremu za mečing polinome [21].

Neka su u i v čvorovi koji pripadaju samo heksagonu (kinku) H (sl. 10). Razmatrajmo proizvoljan 1-faktor koji sadrži granu uv. Ostatak takvog 1-faktora će biti 1-faktor grafa koji se sastoji od dve komponente $L(y_n - 1)$ i $L(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} - 1)$. Broj takvih 1-faktora je

$$K_1(y_n - 1) \cdot K_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} - 1) \ ,$$

tj., prema (2.15),

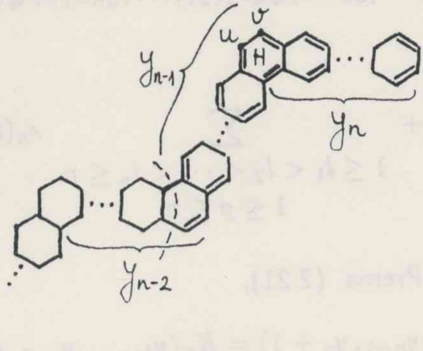
$$y_n K_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} - 1). \tag{2.18}$$



Sl.10

S druge strane, svaki 1-faktor koji ne sadrži granu uv mora da sadrži sve grane označene na sl.11. Ostatak takvog 1-faktora će biti 1-faktor grafa $L(y_1, y_2, \dots, y_{n-2} - 1)$. Broj takvih 1-faktora iznosi

$$K_{n-2}(y_1, y_2, \dots, y_{n-2} - 1). \tag{2.19}$$



Sl.11

Iz (2.18) i (2.19), dobijamo rekurentnu relaciju (2.17).

□

Očigledno, $K_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je polinom oblika

$$g_n + \sum_{\substack{1 \le l_1 < l_2 < \ldots < l_p \le n \\ 1 \le p \le n}} g_n(l_1, \ldots, l_p) y_{l_1} \ldots y_{l_p} \ . \quad (2.20)$$

Jasno, $g_0 = 0$.
Sada, odredjujemo koeficijente g_n i $g_n(l_1, \ldots, l_p)$.
Prvo, definišimo pomoćni polinom:

$$Q_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = K_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n - 1). \quad (2.21)$$

Npr., imamo:

$$Q_0 = 1, \ Q_1(y_1) = y_1, \ Q_2(y_1, y_2) = 1 - y_1 + y_1 y_2 \quad (2.22)$$

Iz (2.17) i (2.21) dobijamo rekurentnu relaciju:

$$Q_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + 1) = y_n Q_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}) + Q_{n-2}(y_1, \ldots, y_{n-2})$$

tj.

$$Q_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = (y_n - 1) Q_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}) + Q_{n-2}(y_1, \ldots, y_{n-2}) \ . \quad (2.23)$$

Neka je

$$Q_n(y_1, \ldots, y_n) = s_n + \sum_{\substack{1 \le l_1 < l_2 < \cdots < l_p \le n \\ 1 \le p \le n}} s_n(l_1, \ldots, l_p) y_{l_1} \cdots y_{l_p} \ . \quad (2.24)$$

Jasno, $s_0 = 1$. Prema (2.21),

$$Q_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + 1) = K_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n).$$

Stoga je

$$g_n(l_1, \ldots, l_p) = \begin{cases} s_n(l_1, \ldots, l_p) \ , & \text{ako } l_p = n \\ s_n(l_1, \ldots, l_p) + s_n(l_1, \ldots, l_p, n) \ , & \text{ako } l_p < n \end{cases} \quad (2.25)$$

i posebno

$$g_n = s_n + s_n(n) \text{ za } n \geq 1 \tag{2.26}$$

Lema 2.2

$$s_n = (-1)^n F_{n-2}$$

Dokaz.
Indukcijom po n.
Prema (2.22)

$$s_0 = 1 = (-1)^0 F_{-2} \ ,$$
$$s_1 = 0 = (-1)^1 \cdot F_{-1} \ .$$

Pretpostavimo da je $s_i = (-1)^i F_{i-2}$, za $i \leq k$.
Tada, prema (2.23) ,

$$s_k = -s_{k-1} + s_{k-2} \ ,$$

a prema induktivnoj hipotezi

$$s_k = -(-1)^{k-1} F_{k-3} + (-1)^{k-2} F_{k-4} = (-1)^k F_{k-2}.$$

$\square$

Lema 2.3

$$a) \ s_n(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_p) = (-1)^{n-l_p} \cdot F_{n-l_p} \cdot s_{l_p-1}(l_1, \ldots, l_{p-1}), \tag{2.27}$$

$$b) \ s_n(l_1) = (-1)^{n-l_1} \cdot F_{n-l_1} \cdot s_{l_1-1} \ . \tag{2.28}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdjenje pod (a), pošto je (b) specijalni slučaj od (a).

Dokaz će biti dat indukcijom po $n - l_k$.
Ako je $n - l_p = 0$ $tj.$ $(l_p = n)$, tada prema (2.23),

$$s_n(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_p) = s_{n-1}(l_1, \ldots, l_{p-1})$$

$$= (-1)^{n-n} \cdot F_{n-n} \cdot s_{n-1}(l_1, \ldots, l_{p-1}) \ . \qquad (2.29)$$

Ako je $n - l_p = 1$ (tj. $l_p = n - 1)$, tada koristeći (2.23) i (2.29) imamo:

$$s_n(l_1, \ldots, l_p) = -s_{n-1}(l_1, \ldots, l_p) = -s_{n-2}(l_1, \ldots, l_{p-1})$$

$$= (-1)^1 \cdot F_1 \cdot s_{n-2}(l_1, \ldots, l_{p-1}).$$

Pretpostavimo da (2.27) važi za $n - l_p < k$ $(l_p > n - k)$ i $n - 1 \geq k \geq 2$.

Tada, za $n - l_p = k$ $(l_p = n - k)$, prema (2.23) ,

$$s_n(l_1, \ldots, l_p) = -s_{n-1}(l_1, \ldots, l_p) + s_{n-2}(l_1, \ldots, l_p),$$

i prema induktivnoj hipotezi

$$s_n(l_1, \ldots, l_p) = -(-1)^{n-1-l_p} \cdot F_{n-1-l_p} \cdot s_{l_p-1}(l_1, \ldots, l_{p-1}) +$$

$$+(-1)^{n-2-l_p} \cdot F_{n-2-l_p} \cdot s_{l_p-1}(l_1, \ldots, l_{p-1})$$

$$= (-1)^{n-l_p} \cdot (F_{n-1-l_p} + F_{n-2-l_p}) \cdot s_{l_p-1}(l_1, \ldots, l_{p-1})$$

$$= (-1)^{n-l_p} \cdot F_{n-l_p} \cdot s_{l_p-1}(l_1, \ldots, l_{p-1}).$$

□

Lema 2.4

$$s_n(l_1, \ldots, l_p) = (-1)^{n-p} \cdot F_{n-l_p} \cdot F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots F_{l_2-l_1-1} \cdot F_{l_1-3},$$

za $p \geq 1$.

Dokaz.

Za $p = 1$, iz (2.28) i Leme 2.2 sledi:

$$s_n(l_1) = (-1)^{n-l_1} \cdot F_{n-l_1} \cdot s_{l_1-1} = (-1)^{n-l_1} \cdot F_{n-l_1} \cdot (-1)^{l_1-1} \cdot F_{l_1-3} =$$
$$= (-1)^{n-1} \cdot F_{n-l_1} \cdot F_{l_1-3}.$$

Za $1 < p \leq n$, prema Lemi 2.2 i Lemi 2.3 sledi:

$$s_n(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_p) = (-1)^{n-l_p} \cdot F_{n-l_p} \cdot s_{l_p-1}(l_1, \ldots, l_{p-1}),$$

i sada po indukciji,

$$s_n(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_p) = (-1)^{n-l_p} \cdot F_{n-l_p} \cdot (-1)^{l_p-1-l_{p-1}} \cdot F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots$$
$$\cdots (-1)^{l_2-1-l_1} \cdot F_{l_2-l_1-1} \cdot (-1)^{l_1-1} \cdot F_{l_1-3}$$
$$= (-1)^{n-p} \cdot F_{n-l_p} \cdot F_{l_p-l_{p-1}} \cdots F_{l_2-l_1-1} \cdot F_{l_1-3}.$$

□

Lema 2.5

a) $g_n = (-1)^n F_{n-4}$

b) $g_n(l_1, \ldots, l_p) = (-1)^{n-p} F_{n-l_p-sg(n-l_p)} \cdot F_{l_p} \cdots F_{l_2-l_1-1} \cdot F_{l_1-3}.$

Iz (2.26) Leme 2.2 i Leme 2.3, imamo

$$g_n = (-1)^n F_{n-2} + (-1)^{n-1} F_{n-3} = (-1)^n (F_{n-2} - F_{n-3}) = (-1)^n F_{n-4},$$

i time je (a) dokazano.

U cilju da dokažemo (b) primetimo da za $l_p = n$, prema (2.25),

$$g_n(l_1, \ldots, l_p) = s_n(l_1, \ldots, l_p) = (-1)^{n-p} F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots F_{l_2-l_1-1} F_{l_1-3}, \tag{2.30}$$

dok za $l_p < n$, prema (2.25),

$$g_n(l_1,\dots,l_p) = s_n(l_1,\dots,l_p) + s_n(l_1,\dots,l_p,n)$$
$$= (-1)^{n-p} \cdot F_{n-l_p} F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots F_{l_2-l_1-1} F_{l_1-3}$$
$$+(-1)^{n-p-1} F_{n-l_p-1} F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots F_{l_2-l_1-1} F_{l_1-3}$$
$$= (-1)^{n-p} (F_{n-l_p} - F_{n-l_p-1}) F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots F_{l_2-l_1-1} F_{l_1-3} \ ,$$

tj.,

$$g_n(l_1,\dots,l_p) = (-1)^{n-p} F_{n-l_p-2} F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots F_{l_2-l_1-1} F_{l_1-3} \ . \tag{2.31}$$

(2.30) i (2.31) se mogu zajedno pisati

$$g_n(l_1,\dots,l_p) = (-1)^{n-p} F_{n-l_p-2sg(n-l_p)} F_{l_p-l_{p-1}-1} \cdots F_{l_2-l_1-1} F_{l_1-3} \ . \tag{2.32}$$

□

Teorema 2.4

$$K_n(y_1,\cdots,y_n) = (-1)^n F_{n-4} + \sum_{\substack{1 \le l_1 < \ldots < l_p \le n \\ 1 \le p \le n}} g_n(l_1,\dots,l_p) y_{l_1} \cdots y_{l_p}$$

gde je $g_n(l_1,\dots,l_p)$ dato sa (2.32).

Dokaz.
Sledi iz leme 2.5.

□

Druga formula

Koristeći oznaku $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$ za proizvoljni heksagonalni lanac Tošić i Stojmenović [53] su dokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.5

$$K(P_6 < x_1, x_2, \ldots, x_n >) =$$

$$= F_{n+1} + \sum_{\substack{0 < i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} F_{n+1-i_k} \cdot F_{i_k - i_{k-1}} \cdots F_{i_2 - i_1} \cdot F_{i_1} \cdot x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

2.2.2 Treća formula

Odredjivanje broja $K([z_1, \ldots, z_n])$ *za* $n \geq 2$ *[50]*

Radi jednostavnosti zapisa, označimo taj broj sa $K_n[z_1, \ldots, z_n]$.

Dakle,

$$K_1[z] = 1 + z \ , \tag{2.33}$$

dok je

$$K_0 \stackrel{def}{=} 1 \ . \tag{2.34}$$

Teorema 2.6 *Za svaki pozitivan ceo broj* n *i proizvoljne pozitivne cele brojeve* $z_1, z_2, \ldots, z_n$,

$$K_n[z_1, z_2, \ldots, z_n] = 1 + \sum z_{l_1} \cdot z_{l_2} \cdots z_{l_k} \ ,$$

gde suma ide po svim podskupovima $\{l_1, l_2, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $1 \leq k \leq n$, *tako da važi:*

$$n - l_k \equiv 0 (mod\ 2)$$
$$i$$
$$l_{j+1} - l_j \equiv 1 (mod\ 2)$$

za $j = 1, 2, \ldots, k-1$ $(l_1 < l_2 < \ldots < l_k)$.

Dokaz. *Kako je*

$$[z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n] \ = \ L(z_1 + 1, \ldots, z_{n-1} + 1, z_n) \ ,$$

to se Teorema 2.3 može preformulisati na sledeći način:

Lema 2.6 *Ako je* $n \geq 2$, *tada za proizvoljno* $z_i > 0$, $1 \leq i \leq n-1$ *i* $z_i > 1$, *važi sledeća rekurentna relacija:*

$$K_n[z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n] = z_n \cdot K_{n-1}[z_1, \ldots, z_{n-1}] + K_{n-1}[z_1, \ldots, z_{n-2}] \ . \tag{2.35}$$

za $n \geq 2$.

Teorema se sada dokazuje matematičkom indukcijom po n . Prvo, tvrdjenje je tačno za $n = 1$; $n = 2$ tj. $K_1[z_1] = 1 + z_1$ i $K_2[z_1, z_2] = z_2 \cdot K_1[z_1] + K_0 = 1 + z_2 + z_1 z_2$.

Pretpostavimo sada da je tvrdjenje tačno za sve $i < n$, ($n \geq 3$). Tada, iz relacije (2.35) sledi da je tvrdjenje tačno i za n .

$\square$

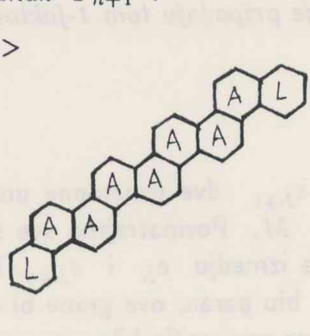
Dobijeni izraz za $K_n[z_1, \ldots, z_n]$ je polinom stepena n koji zavisi od promenljivih $z_1, \ldots, z_n$. Lako se vidi da je broj članova ovog polinoma F_{n+1} , gde je F_i i-ti član Fibonačijevog niza.

Naime, $K_1[z_1]$ ima $F_2 = 2$ članova a $K_2[z_1, z_2]$ ima $F_3 = 3$ člana. Pretpostavimo da je broj članova za $K_{i-2}[z_1, \ldots, z_{i-2}]$ i $K_{i-1}[z_1, \ldots, z_{i-1}]$ $(i \geq 3)$, F_{i-1} i F_i respektivno. Tada, prema (2.35), sledi po indukciji da je broj članova za $K_i[z_1, \ldots, z_i]$ jednak F_i .

Uzimajući u obzir da „cik-cak" benzenoidni lanci sa n heksagona (sl. 12) mogu biti razmatrani kao kompozicije segmenata dužine 1 , dobijamo kao direktnu posledicu gornjeg tvrdjenja sledeći dobro poznati rezultat.

Posledica 2.1 *Broj Kekulé struktura u cik-cak benzenoidnom lancu sa n heksagona je jednak F_{n+1} .*

$P_8 < 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 >$
$= L(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
$= [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]$



Sl. 12

2.2.3 Četvrta formula

Odredjivanje broja $K(P_6 < x_1, \ldots, x_n >)$ za $n \geq 2$ [9]

Označimo sa $h_1, h_2, \ldots, h_s$ heksagone u $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$ gde su h_i i h_{i+1} susedi za $i = 1, \ldots, s-1$. Označimo sa e_i zajedničku granu heksagona h_i i h_{i+1} . Za takvu granu kažemo da je *unutrašnja* grana heksagonalnog lanca.

Za granu heksagonalnog lanca koja nije unutrašnja kažemo da je *spoljašnja* grana. Podgraf grafa $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$ koji se sastoji od svih spoljašnjih grana nazivamo *granicom* tog grafa.

Dalje, za kolekciju $\{e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}\}$ unutrašnjih grana grafa $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$ kažemo da je *dopustiva* ako, za proizvoljne dve uzastopne grane e_{j_i} i $e_{j_{i+1}}$ ove kolekcije, postoji neparan broj kinkova izmedju njih.

Prazna kolekcija je po definiciji takodje *dopustiva* kolekcija za proizvoljni heksagonalni lanac.

Teorema 2.7 *Neka je M proizvoljan 1-faktor heksagonalnog lanca grafa $P_6 < x_1, \cdots, x_n >$. Skup svih unutrašnjih grana koji pripadaju 1-faktoru M je dopustiva kolekcija u $P_6 < x_1, \cdots, x_n >$. Obrnuto, proizvoljna dopustiva kolekcija grana u $P_6 < x_1, \cdots, x_n >$, izuzev nula kolekcije, jedinstveno odredjuje neki 1-faktor M, takav da grane ove kolekcije čine skup svih unutrašnjih grana koje pripadaju tom 1-faktoru.*

Dokaz.

Neka su e_{j_i} i $e_{j_{i+1}}$ dve uzastopne unutrašnje grane koje pripadaju 1-faktoru M. Posmatrajmo sve spoljašnje grane koje pripadaju heksagonima izmedju e_{j_i} i $e_{j_{i+1}}$. Kada bi broj kinkova izmedju e_{j_i} i $e_{j_{i+1}}$ bio paran, ove grane bi obrazovale dva lanca parnih dužina te bi na na ovaj način bilo nemoguće da obe grane, e_{j_i} i $e_{j_{i+1}}$ budu u 1-faktoru M. Kontradikcija.

Obrnuto, neka je $\{e_{j_i},\ldots,e_{j_k}\}$ jedna dopustiva kolekcija grana u $P_6 < x_1,\ldots,x_n >$. Grane ove kolekcije dele granicu heksagonalnog lanca $P_6 < x_1,\ldots,x_n >$ na $2k$ delova, pri čemu svaki sadrži neparan broj grana tj. paran broj čvorova. Svaki od ovih delova se može pokriti nezavisnim granama na jedinstven način te je na taj način jednoznačno odredjen jedan 1-faktor grafa $P_6 < x_1,\ldots,x_n >$.

$\square$

Posledica 2.2 *Postoji bijekcija izmedju skupa svih 1-faktora sa bar jednom unutrašnjom granom heksagonalnog lanca i skupa svih nepraznih dopustivih kolekcija grana takvog lanca.*

$\square$

Takodje definišimo X_j, $j = 1,2,\ldots,n$ na sledeći način:

$$X_j = \begin{cases} x_j \quad , & \text{za} \quad j \in \{1,n\} \\ x_j + 1 \quad , & \text{za} \quad 1 < j < n \ . \end{cases}$$

Jasno, X_j je jednako broju unutrašnjih grana koje pripadaju j-tom segmentu za $P_6 < x_1,\ldots,x_n >$. Za proizvoljnu dopustivu kolekciju C grana grafa $P_6 < x_1,\ldots,x_n >$, može se pridružiti jedinstveno odredjena reč $b_1 b_2 \ldots b_n \in \{0,1\}^n$, na sledeći način:

$$b_j = \begin{cases} 1 \quad , & \text{ako j-ti segment grafa } P_6 < x_1,\ldots,x_n > \\ & \text{sadrži unutrašnju granu koja pripada } C \\ & \text{(kao svoju unutrašnju granu),} \\ 0 \quad , & \text{inače .} \end{cases}$$

Kažemo da je takva reč $b_1 \ldots b_n \in S_n$ *pridružena* kolekciji C. Označimo sa S_n skup svih reči $b_1 b_2 \ldots b_n \in \{0,1\}^n$ definisanih gore, za sve dopustive kolekcije od $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$. Skup S_n se može okarakterisati kao skup svih reči iz $\{0,1\}^n$ takvih da je broj nula izmedju bilo koje dve uzastopne jedinice paran.

Sa S'_n označimo skup svih reči iz S različitih od $\underbrace{00\ldots0}_{n}$.

Lema 2.7 *Za proizvoljnu reč* $b_1 \ldots b_n \in S'_n$, *postoji*

$$\prod_{i=1}^{n} X_i^{b_i}$$

različitih dopustivih kolekcija od $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$ *takvih da je* $b_1 \ldots b_n$ *pridružena svakoj od njih.*

Dokaz.

Ovo sledi iz činjenice da unutrašnja grana i-tog segmenta je uključena u dopustivu kolekciju C akko $b_i = 1$ u pridruženoj reči $b_1 \ldots b_n$ a broj mogućnosti izbora unutrašnje grane i-tog segmenta iznosi X_i.

□

Teorema 2.8

$$K(P_6 < x_1, \ldots, x_n >) = 2 + \sum_{b_1 b_2 \ldots b_n \in S'_n} \prod_{i=1}^{n} X_i^{b_i}$$

Dokaz.

Sledi iz posledice 2.2 i leme 2.7 uzimajući da reč $\underbrace{00\ldots0}_{n}$, pridružena praznoj kolekciji unutrašnjih grana za $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$, odredjuje dva 1-faktora. Naime, skup svih spoljašnjih grana od $P_6 < x_1, \ldots, x_n >$ je unija ova dva 1-faktora.

□

Kardinalnost skupa S_n iznosi $F_{n+2}-1$ tj. važi sledeće tvrdjenje:

Posledica 2.3 *Broj svih reči iz* $\{0,1\}^n$ *takvih da je broj nula izmedju bilo koje dve uzastopne jedinice paran iznosi* $F_{n+2}-1$.

Dokaz.

Ako posmatramo cik-cak benzenoidni lanac sa $n+1$ heksagona (sl.12) dobijamo na osnovu posledice 2.1

$$K(P_6 < 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1 >) = F_{n+2} \, .$$

S druge strane, iz gornje teoreme sledi

$$K(P_6 < 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1 >) = 2 + \mid S'_n \mid = 1 + \mid S_n \mid \, ,$$

odakle dobijamo tvrdjenje.

$\square$

Primedba 1

Zbog sličnosti formula iz teoreme 2.8 i teoreme 2.6 postavlja se pitanje da li se jedna iz druge dobija direktno preko smene (sobzirom da su u njihovom dobijanju korišćene različite oznake).
Odgovor je odričan, mada se npr. teorema 2.6 može izvesti iz teoreme 2.8 kao što se vidi iz sledećeg.

Najpre, teoremu 2.6 možemo zapisati u sl. obliku:

$$K_n[z_1, z_2, \ldots, z_n] = 1 + \sum_{b_1 b_2 \ldots b_n \in T_n} \prod_{i=1}^{n} z_i^{b_i} \ , \qquad (2.36)$$

gde je sa T_n označen skup svih reči iz $\{0,1\}^n$ takvih da je:

1. broj nula izmedju bilo koje dve uzastopne jedinice paran;
2. da se iza poslednje jedinice u reči $b_1 b_2 \ldots b_n$ javlja paran broj nula.

Prema (2.13) važi:

$$[z_1, z_2, \ldots, z_n] = P_6 < z_1, z_2 - 1, \ldots, z_{n-1} - 1, z_n - 1 > \ .$$

Teorema 2.8 se sada gornjom smenom svodi na:

$$K_n[z_1, z_2, \ldots, z_n] = 2 + \sum_{b_1 b_2 \ldots b_n \in S'_n} \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{b_i} (z_n - 1)^{b_n} \ ,$$

što je dalje jednako

$$1 + \sum_{b_1 b_2 \ldots b_n \in S_n} \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{b_i} (z_n - 1)^{b_n}$$

$$= 1 + \sum_{b_1 \ldots b_{n-1} 0 \in S_n} \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{b_i} + \sum_{b_1 \ldots b_{n-1} 1 \in S_n} \prod_{i=1}^{n} z_i^{b_i} - \sum_{b_1 \ldots b_{n-1} 1 \in S_n} \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{b_i}$$

$$= 1 + \sum_{b_1 \ldots b_{n-1} b_n \in S_n} \prod_{i=1}^{n} z_i^{b_i} - \sum_{b_1 \ldots b_{n-1} \in T_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} z_i^{b_i} \ . \qquad (2.37)$$

Kako je $S_n = T_{n-1}\{0\} \cup T_n$ to se (2.37) svodi na (2.36).

$\square$

2.3 Kvadratni lanci

Sada razmatramo poligonalni lanac $P_{k,s}$ za slučaj $k = 4$. Konture C_4 predstavljamo kao pravilne četvorougaonike u ravni. Kvadratni lanac može da ima neki broj kvadratića takvih da svaki od njih ima zajednički čvor sa oba njegova suseda. Takav kvadratiće nazivamo *kinkovima* (kvadratnog lanca).

Sa $P_4[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ označavamo kvadratni lanac (tj. pridruženi lanac) sastavljen od n linearno sastavljenih segmenata koji se sastoje od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kvadratića redom. Svaki od $n-1$ kinkova za $P_n[x_1, \ldots, x_n]$ se razmatra da pripada tačno jednom segmentu. To znači da poslednji segment ne sadrži nijedan kink, dok svaki od preostalih $n-1$ segmenata ima tačno jedan kink koji je poslednji za taj segment. Tako je totalni broj kvadrata u $P_4[x_1, \ldots, x_n]$

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ .$$

Usvojena notacija nam omogućava da pretpostavimo da je $x_i \geq 1$ za $i = 2, 3, \ldots, n$, i $x_1 \geq 2$. Ponekad, medjutim, možemo razmatrati $P_4[x_1, \ldots, x_{n-1}, 0]$ kao lanac $P_4[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ a $P_4[x_1, \ldots, x_{n-1}, -1]$ kao $P_4[x_1, \ldots, x_{n-1} - 2]$.

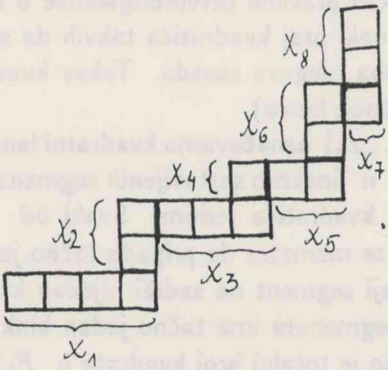
Stoga sledi:

$$K(P_4[x_1, \ldots, x_{n-1}, 0]) = K(P_4[x_1, \ldots, x_{n-1}]) \tag{2.38}$$

i

$$K(P_4[x_1, \ldots, x_{n-1}, -1]) = K(P_4[x_1, \ldots, x_{n-1} - 2]) \tag{2.39}$$

Na sl.13 je prikazan kvadratni lanac $P_4[4, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 2,]$ koji se može razmatrati i kao $P_4[3,1,2,2,1,3,2,3]$.



Sl.13

Dobro je poznato da je

$$K(P_4[x_1]) = F_{x_1+1} \ . \tag{2.40}$$

U [34] Gutman i Cyvin su istražili vezu izmedju kvadratnih i heksagonalnih lanaca i izveli K – broj za graf $Q_{p,q}$, koji predstavlja kvadratni lanac sastavljen od $p+q+1$ kvadratića, u našoj notaciji označen sa $P_4(p+1,q)$ ili $P_4(p,q+1)$. Oni su dokazali da je

$$K(Q_{p,q}) = F_{p+q+1} + F_p F_q \ .$$

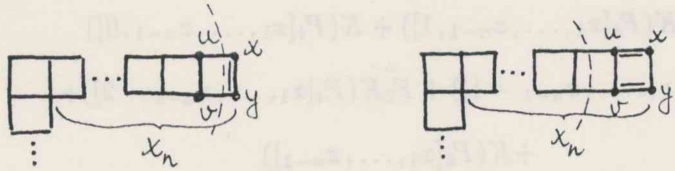
U [53] Tošić i Stojmenović su ispitali K – broj proizvoljnog kvadratnog lanca i dokazali da sve osobine koje se odnose na K – brojeve kvadratnih lanaca se mogu izvesti iz odgovarajućih rezultata za heksagonalne lance i obrnuto.

Sada se daje nova formula za broj 1-faktora proizvoljnog heksagonalnog lanca.

Lema 2.8 *Za* $n > 1$,

$$K(P_4[x_1,\ldots,x_n]) = K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}]) + K(P_4[x_1,\ldots,x_n - 2]) \tag{2.41}$$

Dokaz.



Sl.14

Označimo sa x i y čvorove stepena dva n - tog segmenta ($x_n \geq 2$) a njihova druga dva suseda redom sa u i v (sl.14). Lako se vidi da je broj 1-faktora koji sadrže granu xy jednak $K(P_4[x_1,\ldots,x_n - 1])$ dok je broj preostalih 1-faktora jednak $K(P_4[x_1,\ldots,x_n - 2])$.

Uzimajući u račun (2.38) i (2.39) vidimo da tvrdjenje važi i za $x_n = 1$.

$\square$

Lema 2.9 *Za* $n > 1$,

$K(P_4[x_1,\ldots,x_n]) =$

$$= F_{x_n} \cdot K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1} - 1]) + F_{x_n+1} \cdot K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1} - 2]) \tag{2.42}$$

Dokaz.

Indukcijom po x_n . Za $x_n = 1$, prema (2.41), (2.38) i (2.39) ,

$$K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},1]) = K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},0]) + K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},-1$$

$$= K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}]) + K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1} - 2])$$

$$= K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + 2\cdot K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2])$$

$$= F_1K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + F_2K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2]) \ .$$

Ako je $x_n = 2$ tada
$K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},2]) =$

$$= K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},1]) + K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},0])$$

$$= F_1K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + F_2K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2]) +$$

$$+K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}])$$

$$= (F_1+1)K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + (F_2+1)K(P_4[x_1,\ldots x_{n-1}-2])$$

$$= F_2K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + F_3K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2]) \ .$$

Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $x_n = k$ i $x_n = k-1$, tj. ,
$K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},k]) =$

$$= F_kK(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + F_{k+1}K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2]) \tag{2.43}$$

i
$K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},k-1]) =$

$$F_{k-1}K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + F_kK(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2]) \ . \tag{2.44}$$

Tada, prema (2.41), (2.43) i (2.44),
$K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},k+1]) =$

$$= K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},k]) + K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1},k-1])$$

$$= (F_k + F_{k-1})K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) +$$

$$+(F_{k+1} + F_k)K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2]) =$$

$$= F_{k+1}K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-1]) + F_{k+2}K(P_4[x_1,\ldots,x_{n-1}-2]) \ .$$

$\square$

Razmatrajmo sada skupove $S^{(n)}$ i $T^{(n)}$ $(n \geq 1)$, definisane induktivno, na sledeći način:

$$S^{(n)}, T^{(n)} \subseteq \{0,1,2\}^n \ ;$$
$$S^{(1)} = \{0\} \ , \ T^{(1)} = \{1\} \ ;$$

$$\left.\begin{array}{c} S^{(k)} = S^{(k-1)}\{1\} \cup T^{(k-1)}\{0\} \ , \\ T^{(k)} = S^{(k-1)}\{2\} \cup T^{(k-1)}\{1\} \\ k = 2,3,\ldots \ . \end{array}\right\} \qquad (2.45)$$

Lako se vidi da $T^{(n)}$ se može dobiti iz skupa $S^{(n)}$ zamenom u svakoj reči $a_1 a_2 \ldots a_n \in S^{(n)}$, poslednjeg slova a_n sa $(a_n + 1)$.

Razmatrajmo elemente skupa $S^{(n)}$ i $T^{(n)}$ kao reči dužine n nad azbukom $\{0,1,2\}$.

Teorema 2.9 *Za* $n \geq 2$, $x_1 \geq 2$ *i* $x_i \geq 1$ *za* $i = 2, \ldots, n$

$$K(P_4[x_1, \ldots, x_n]) =$$

$$= F_{x_n} \sum_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \in S^{(n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} F_{x_i - a_i} + F_{x_n + 1} \sum_{b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \in T^{(n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} F_{x_i - b_i} \ .$$

Dokaz.

Dokaz ide indukcijom po n . Za $n = 2$, prema lemi 2.9 i (2.40) sledi

$$K(P_4[x_1, x_2]) = F_{x_2} K(P_4[x_1 - 1]) + F_{x_2+1} K(P_4[x_1 - 2])$$
$$= F_{x_2} F_{x_1} + F_{x_2+1} F_{x_1 - 1} \ .$$

Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za kvadratni lanac $P_4[x_1, \ldots, x_n]$. Tada, koristeći lemu 2.9 i ind. hipotezu, imamo:

$$K(P_4[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]) =$$

$$= F_{x_{n+1}} K(P_4[x_1, \ldots, x_n - 1]) + F_{x_{n+1}+1} K(P_4[x_1, \ldots, x_n - 2])$$

$$= F_{x_{n+1}} \left(F_{x_n-1} \sum_{a_1a_2\cdots a_{n-1}\in S^{(n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} F_{x_i-a_i} + \right.$$

$$\left. + F_{x_n} \sum_{b_1b_2\cdots b_{n-1}\in T^{(n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} F_{x_i-b_i} \right) +$$

$$+ F_{x_{n+1}+1} \left(F_{x_n-2} \sum_{a_1a_2\cdots a_{n-1}\in S^{(n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} F_{x_i-a_i} + \right.$$

$$\left. + F_{x_n-1} \sum_{b_1b_2\cdots b_{n-1}\in T^{(n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} F_{x_i-b_i} \right) .$$

Uzimajući u račun (2.45) , poslednji izraz može biti zapisan u formi

$$F_{x_{n+1}} \sum_{a_1a_2\cdots a_n\in S^{(n)}} \prod_{i=1}^{n} F_{x_i-a_i} + F_{x_{n+1}+1} \sum_{b_1b_2\cdots b_n\in T^{(n)}} \prod_{i=1}^{n} F_{x_i-b_i} .$$

$\square$

3 Prebrojavanje 2-faktora

3.1 Karakterizacija 2–faktora i Hamiltonovih kontura kao povezanih 2-faktora grafa $P_m \times P_n$

Označimo sa $F_m(n)$ broj 2–faktora a sa $H_m(n)$ broj Hamiltonovih kontura u grafu $P_m \times P_n$. Nije teško dokazati sledeće tvrdjenje:

Graf $P_m \times P_n$ $(m, n > 1)$ *ima 2–faktor (Hamiltonovu konturu) tj.* $F_m(n) > 0$ ($H_m(n) > 0$) *akko je broj čvorova* $(m \cdot n)$ *u grafu paran .*

Nadalje razmatrajmo samo slučajeve kada je bar jedan od brojeva m i n paran.

Očigledno je da važi:

$$F_1(n) = H_1(n) = F_m(1) = H_m(1) = 0 \quad \text{za} \quad n \geq 1 \quad \text{i} \quad m \geq 1 \ ,$$

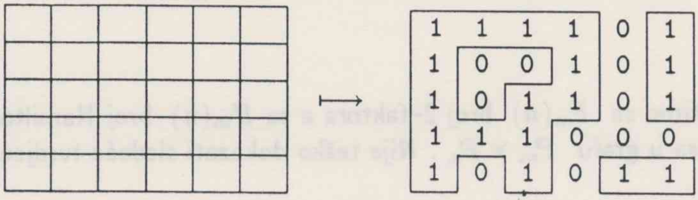
a lako se pokazuje da važi i sledeće:

$$F_2(n) = F_{n-2} \ ; \quad H_2(n) = 1 \ .$$

Kako važi da je $F_m(n) = F_n(m)$ i $H_m(n) = H_n(m)$ to nadalje možemo uzeti da je $3 \leq m \leq n$ ne umanjujući opštost.

3.1.1 2-faktori - uopšte

Posmatrajmo označeni graf $P_m \times P_n$ i proizvoljni 2-faktor tog grafa (vidi sl.15). Ukupan broj prozora tog grafa iznosi $(m-1) \cdot (n-1)$. Svakom prozoru grafa pridružujemo jedan elemenat iz skupa $\{0, 1\}$ na sledeći način: ako se prozor w nalazi u unutrašnjoj oblasti parnog broja kontura datog 2-faktora tada mu se pridružuje 0 (isto važi i za prozore koji se nalaze u spoljašnjoj oblasti svih kontura); inače prozoru se pridružuje 1.



Sl. 15

Na ovaj način smo datom 2-faktoru ovog označenog grafa pridružili jednoznačno odredjenu binarnu matricu $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ koja zadovoljava sledeće uslove:

- *Uslovi susednosti dve kolone:*
  $(\forall j)(1 \leq j \leq (n-2))$
  $$\neg(a_{1,j} = a_{1,j+1} = 0 \quad \vee \quad a_{m-1,j} = a_{m-1,j+1} = 0) \qquad (3.1)$$

  $(\forall i)(1 \leq i \leq m-2)(\forall j)(1 \leq j \leq (n-2))$
  $(a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1}) \notin$
  $$\{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,0)\} \qquad (3.2)$$

- *Uslovi prve i poslednje kolone:*

$$a_{1,1} = a_{m-1,1} = a_{1,n-1} = a_{m-1,n-1} = 1 \qquad (3.3)$$

$(\forall i)(1 \leq i \leq (m-2))$
$$\neg(a_{i,1} = a_{i+1,1} = 0 \quad \vee \quad a_{i,n-1} = a_{i+1,n-1} = 0) \qquad (3.4)$$

Obrnuto takodje važi, tj. svakoj binarnoj matrici dimenzije $(m-1)\times(n-1)$ koja zadovoljava uslove susednosti dve kolone i uslove prve i poslednje kolone može se na jednoznačan način pridružiti jedan 2-faktor grafa. Na ovaj način je uspostavljena bijekcija izmedju skupa svih 2-faktora označenog grafa $P_m \times P_n$ i skupa svih binarnih matrica tipa $(m-1)\times(n-1)$ koje zadovoljavaju gore navedene uslove. Problem prebrojavanja 2-faktora ovih grafova se dakle, sveo na problem prebrojavanja ovakvih matrica.

Za fiksno m formira se pomoćni opšti graf G_m sa skupom čvorova $V(G_m)=\{0,1,\ldots,2^{m-1}-1\}$ gde se susednost čvorova definiše na sledeći način: čvorovi p i q su susedni akko binarna reprezentacija broja p dužine $m-1$ i binarna reprezentacija broja q dužine $m-1$ zadovoljavaju prvi i drugi uslov susednosti dve kolone tj. ako za reč $p_1p_2\cdots p_{m-1}$, binarnu reprezentaciju broja p dužine $m-1$ i reč $q_1q_2\cdots q_{m-1}$, binarnu reprezentaciju broja q dužine $m-1$ važi:

$$(\forall j)(1\le j\le n-2)\neg(p_1=q_1=0 \;\vee\; p_{m-1}=q_{m-1}=0) \quad (3.5)$$

i

$$(\forall i)(1\le i\le m-2)(\forall j)(1\le j\le n-2)$$
$$(p_i,p_{i+1},q_i,q_{i+1})\notin\{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}\,. \quad (3.6)$$

Definicija 3.1 *Čvorove opšteg grafa G_m čije binarne reprezentacije dužine $(m-1)$ zadovoljavaju uslove prve i poslednje kolone tj. čvorove $p\in V(G_m)$ čije binarne reprezentacije dužine $(m-1)$ tj. reči $p_1p_2\cdots p_{m-1}$ zadovoljavaju uslove:*

$$p_1=p_{m-1}=1 \quad (3.7)$$

i

$$(\forall i)(1\le i\le m-1)\neg(p_i=p_{i+1}=0) \quad (3.8)$$

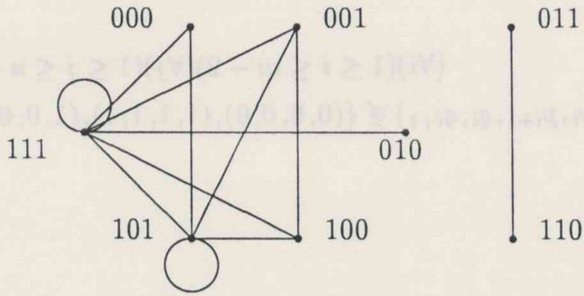
nazivamo **istaknutim** *čvorovima.*

Na ovaj način problem prebrojavanja svih binarnih matrica tipa $(m-1)\times(n-1)$ koje zadovoljavaju gornje uslove tj. problem prebrojavanja svih 2-faktora grafa $P_m \times P_n$ sveo se na problem prebrojavanja svih puteva dužine $(n-2)$ u opštem grafu G_m sa početnim i krajnjim čvorovima u skupu istaknutih čvorova ovog grafa.

U [48] stepenovanjem matrice susedstva grafa G_4 i G_5 dobijeni su članovi niza $F_4(n)$ i $F_5(n)$ za $n \leq 40$.

Medjutim, može se primetiti da za fiksno m postoje elementi iz skupa $\{0, 1, \ldots, 2^{m-1}-1\}$ čije binarne reprezentacije dužine $(m-1)$ se ne mogu pojaviti kao kolonematrice A tj. graf G_m može da bude nepovezan i da sadrži komponente bez istaknutih čvorova.

Npr., binarne reči 110 i 011 se ne mogu pojaviti kao kolone matrice A ni za jedan 2-faktor grafa $P_4 \times P_n$ (sl. 16)



Sl.16 Graf G_4

Skup istaknutih čvorova je $E = \{111, 101\}$

Stoga, ubuduće pod grafom G_m podrazumevamo samo uniju onih komponenata koje sadrže istaknute čvorove. Čvorovi grafa G_m su dakle, svi istaknuti i svi oni koji su „dostupni " iz nekog istaknutog čvora (povezani s ovim). Njihov broj, uporedjen sa vrednosti 2^{m-1} za $m \leq 7$ je dat u Tab.1.

3.1.2 Povezani 2-faktori

Posmatrajmo sada graf $P_m \times P_n$ koji ima Hamiltonovu konturu i njegov odgovarajući graf prozora $W_{m,n}$. Vrednosti $H_4(n)$ i $H_5(n)$ su proučene u [51,44].

Kao i u slučaju 2-faktora, za svaku Hamiltonovu konturu, grafu $W_{m,n}$ se pridružuje najpre binarna matrica $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ definisana na sledeći način [51] (sl. 17):

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, ako se } w_{i,j} \text{ nalazi u unutrašnjosti Hamiltonove konture,} \\ 0 & \text{, inače .} \end{cases}$$

Ova matrica zadovoljava pored uslova susednosti dve kolone i uslova prve i poslednje kolone ((3.1) - (3.4)) i

- *Uslov korena:*
  Podgraf grafa $W_{m,n}$ indukovan prozorima koji pripadaju spoljašnjosti Hamiltonove konture obrazuju šumu takvu da svaka komponenta (*spoljašnje stablo (SS)*) sadrži tačno jedan prozor $w_{i,j}$ (*koren spoljašnjeg stabla*) za koji važi:

$$(i \in \{1,(m-1)\} \wedge j \notin \{1,(n-1)\})$$

$$\vee \quad (j \in \{1,(n-1)\} \wedge i \notin \{1,(m-1)\}) \qquad (3.9)$$

(Ovi uslovi odgovaraju uslovima (BC),(IC), (CC) i (EC) iz [44].)

Obrnuto takodje važi: svaka binarna matrica $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ koja zadovoljava gore navedene uslove odredjuje tačno jednu Hamiltonovu konturu grafa $P_m \times P_n$.

Koristeći ove uslove neke nove vrednosti za $H_m(n)$ su dobijene u [7], ali ovaj algoritam je veoma spor zbog generisanja jedne po jedne matrice koje zadovoljavaju uslove $(3.1) - (3.4)$ i uslov korena.

U magistarskom radu [11] daje se nova karakterizacija Hamiltonovih kontura grafa $P_m \times P_n$. Uvodi se sledeća definicija:

Definicija 3.2 *Za dva prozora* $w_{i,l}$ *i* $w_{j,s}$ *koji zadovoljavaju:*

$$a_{i,l} = 0, \ a_{j,s} = 0 \ \ i \ l, s \leq k$$

kažemo da su **sigurno sa istog spoljašnjeg stabla na k-tom nivou** *(tj.* **u relaciji k-SSISS** *) akko pripadaju istoj komponenti u podgrafu grafa* $W_{m,n}$ *koji je indukovan skupom svih prozora* $w_{p,t}$ *koji zadovoljavaju:* $a_{p,t} = 0$ *i* $t \leq k$ *.*

Uvedena relacija predstavlja relaciju ekvivalencije u skupu svih prozora $w_{i,k}$ za koje važi $a_{i,k} = 0$ $(1 \leq i \leq m-1)$ i k -fiksno. Postoji najviše $\lceil \frac{m-1}{2} \rceil$ klasa ove relacije ekvivalencije. Dalje, za svaku Hamiltonovu konturu, pridruženoj matrici $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ (koja zadovoljava uslove susednosti kolona, uslove prve i poslednje kolone i uslov korena) se pridružuje matrica $B = [b_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$, $b_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, \lceil \frac{m-1}{2} \rceil\}$ na sledeći način (sl. 18):

(a) $b_{i,j} = 1$ akko $a_{i,j} = 1$ $(1 \leq i \leq (m-1))$ $(1 \leq j \leq (n-1))$;

(b) ako je prozor $w_{i,j}$ koren nekog spoljašnjeg stabla i ($i = 1$ ili $i = (m-1)$ ili $j = 1$) tada $b_{i,j} = 0$;

(c) ako prozor $w_{i,j}$ nije koren nekog spoljašnjeg stabla ali je u relaciji j-SSISS sa nekim korenom tada je $b_{i,j} = 0$;

(d) preostalim prozorima pridružujemo elemente iz skupa $C \stackrel{def}{=} \{2, 3, \ldots, \lceil \frac{m-1}{2} \rceil\}$ uzimajući u obzir redni broj preostalih klasa u fiksnoj j-toj koloni. (Do ovog momenta nekim klasama su pridruženi 0-elementi ((b) i (c)). Tako, prvoj od preostalih klasa fiksne kolone (gledano odozgo) se pridružuje broj 2, drugoj broj 3, ...

1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Sl. 17

1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	2	2	2	2	2	0	1	2	0	1	2
1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	1	1
1	2	2	3	3	2	2	2	1	2	3	0	1	3
1	2	1	3	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	3	1	3	3	3	2	2	3	0	1	4
1	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	3	3	2	2	2	0	0	1	0	1	5
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	4	4	4	4	4	3	3	4	0	1	6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Sl. 18

U [10,11] su date karakteristike ovako formiranih matrica

$B = [b_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$, koje ne samo da jednoznačno odredjuju ove matrice (koje dalje jednoznačno odredjuju Hamiltonove konture grafa $P_m \times P_n$) već omogućavaju da se ustanovi:

a) koje reči dužine $(m-1)$ nad azbukom $\{0,1,2,3,\ldots,\lceil\frac{m-1}{2}\rceil\}$ mogu da se pojave kao prve i poslednje kolone ovih matrica B;

b) za datu reč dužine $(m-1)$ nad ovom azbukom, koja može da se pojavi kao neka i-ta $(1 \le i \le (n-2))$ kolona neke matrice B, koje sve reči iste dužine, nad istom azbukom, mogu da se pojave kao sledeće, $(i+1)$-e kolone matrice B.

Gore spomenute osobine matrice B su sledeće:

1. Osnova matrice B, matrica $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ zadovoljava uslove susednosti kolona ((3.1) i (3.2)) i uslove prve i poslednje kolone ((3.3) i (3.4)).

2. Prva kolona je jednaka svojoj osnovi tj.
$$(\forall i)(1 \le i \le (m-1))(b_{i,1} = a_{i,1})$$

3. Poslednja, $(n-1)$-a kolona ne sadrži 0-elemente i ako je broj p, broj svih 1-elemenata te kolone, različit od broja $(m-1)$ tada je podreč $(n-1)$-e kolone koja se dobija uklanjanjem svih 1-elemenata jednaka reči $23\cdots(m-p)$.

4. Za svaku k-tu kolonu $(2 \le k \le (n-1))$ matrice B važi:

   (a)
$$b_{1,k} = a_{1,k} \quad ; \quad b_{m-1,k} = a_{m-1,k}$$

   (b) Ako je $b_{i,k} \ne 1$ $(\ 2 \le i \le (m-2)\ )$ tada je $b_{i-1,k} \in \{b_{i,k}, 1\}$ i $b_{i+1,k} \in \{b_{i,k}, 1\}$.
   (Dva prozora u istoj klasi moraju bit pridružena istom broju.)

(c) Ako je $b_{i,k-1} = 0$ ($2 \leq i \leq m-2$) tada je $b_{i,k} \in \{0,1\}$.
(Ako je prozor $w_{i,k-1}$ u relaciji (k-1)-SSISS (otuda ujedno i u relaciji k-SSISS) sa nekim korenom (tj. $b_{i,k-1} = 0$) i ako je on u relaciji k-SSISS sa $w_{i,k}$ (tj. $a_{i,k} = 0$) tada $w_{i,k}$ mora biti u relaciji k-SSISS sa pomenutim korenom.)

(d) Za svaki broj $b \in C$ koji se pojavljuje u $(k-1)$-oj koloni mora postojati prozor $w_{i,k-1}$ za koji važi $b_{i,k-1} = b$ i $b_{i,k} \neq 1$. (Ne postoji nijedno spoljašnje stablo bez korena.)

(e) Ako su p i l ($p \neq l$, $2 \leq p,l \leq (m-1)$) gde je $b_{p,k-1} = b_{l,k-1} \neq 1$ i $a_{p,k} = a_{l,k} = 0$ tada je $b_{p,k} = b_{l,k}$.
(Ako su $w_{p,k-1}$ i $w_{l,k-1}$ u relaciji $(k-1)$ -SSISS i $a_{p,k} = a_{l,k} = 0$ tada prozori $w_{p,k}$ i $w_{l,k}$ moraju biti u relaciji k-SSISS .)

(f) Ako je $b_{i,k-1} = b_{j,k-1} \in C$ i $b_{i,k} = b_{j,k} = b \neq 1$ ($i \neq j$, $2 \leq i,j \leq (m-2)$) tada ne postoji nijedan maksimalni niz uzastopnih pojavljivanja broja $b \in C \cup \{0\}$ u k-toj koloni koji sadrži i $w_{i,k}$ i $w_{j,k}$.
(U suprotnom, dobili bismo konturu u SS-u .)

(g) Za svaki maksimalni niz uzastopnih pojavljivanja broja 0 u k-toj koloni postoji tačno jedan niz $v_1, v_2, \ldots, v_p$ ($p \geq 1$) različitih maksimalnih nizova uzastopnih pojavljivanja broja 0 u toj koloni za koji važi:
   - ako je $p = 1$ tada je niz v_1 ili susedan sa tačno jednim 0-prozorom iz $(k-1)$-ve kolone ili sadrži tačno jedan od elemenata $w_{1,k}$ i $w_{m-1,k}$;
   - ako je $p > 1$ tada
     - za svako i ($1 \leq i \leq (p-1)$), postoji tačno jedno $w_{j_i,k-1}$ sa $b_{j_i,k-1} \in C$ za koje je $w_{j_i,k} \in v_i$

postoji tačno jedno $w_{s_{i+1},k-1}$ sa $b_{s_{i+1},k-1} \in C$ za koje je $w_{s_{i+1},k} \in v_{i+1}$ i $b_{j_i,k-1} = b_{s_{i+1},k-1}$;

– p-ti niz v_p je ili susedan sa tačno jednim 0-prozorom iz $(k-1)$-ve kolone ili sadrži tačno jedan od prozora $w_{1,k}$ i $w_{m-1,k}$.

(h) Ako su v i u dva različita maksimalna niza uzastopnih pojavljivanja broja $b \in C$ u k-toj koloni (tj. ako smo „sigurni" da su v i u sa istog SS-a poznavajući prvih k-kolona) tada postoji tačno jedan niz $v = v_1, v_2, \ldots, v_p = u$ od p različitih maksimalnih nizova uzastopnih pojavljivanja broja b u k-toj koloni za koje važi: za svako i ($1 \leq i \leq p-1$) postoji tačno jedno $w_{j_i,k-1}$ sa $b_{j_i,k-1} \in C$ za koje je $w_{j_i,k} \in v_i$ i postoji tačno jedno $w_{s_{i+1},k-1}$ sa $b_{s_{i+1},k-1} \in C$ za koje je $w_{s_{i+1},k} \in v_{i+1}$ i $b_{j_i,k-1} = b_{s_{i+1},k-1}$.

(i) Posmatrajmo prva pojavljivanja elemenata iz skupa C u k-toj koloni odozgo-nadole (od $w_{1,k}$ do $w_{m-1,k}$). Neka je $w_{p_1,k}, w_{p_2,k}, \ldots, w_{p_l,k}$ $(l < \lceil \frac{m-1}{2} \rceil)$.
Tada je $b_{p_i,k} = i+1$.
(Sledi iz definicije matrice B).

Za svaki ceo broj m $(m \geq 3)$ formira se pomoćni opšti digraf D_m sa skupom čvorova $V(D_m)$ koji se sastoji od svih reči nad azbukom $\{0,1\} \cup C$ $(C = \{2,3,\ldots,\lceil \frac{m-1}{2} \rceil\})$ koje mogu da se pojave kao kolone matrice B. Iz čvora v vodi orijentisana grana u čvor u $(v, u \in V(D_m))$ tj. $v \to u$ akko čvor v (kao reč $b_{1,k-1}b_{2,k-1}\ldots b_{m-1,k-1}$) može da se pojavi kao prethodna kolona čvora u (kao reči $b_{1,k}b_{2,k}\ldots b_{m-1,k}$).

Podskup $E \subseteq V(D_m)$ koji se sastoji od svih mogućih prvih kolona matrice B se naziva skup *istaknutih* čvorova. Podskup $F \subseteq V(D_m)$ koji se sastoji od svih mogućih poslednjih kolona matrice B se naziva skup *završnih* čvorova.

Na ovaj način se problem prebrojavanja svih Hamiltonovih kontura u grafu $P_m \times P_n$ sveo na problem prebrojavanja svih orijentisanih puteva dužine $(n-2)$ u opštem digrafu D_m koji polaze iz skupa istaknutih čvorova a završavaju se u skupu završnih čvorova.

Označimo sa $f_i(k)$ broj svih orijentisanih puteva dužine k sa početnim čvorom koji je pridružen i-toj vrsti (odn. i-toj koloni) matrice susedstva $D = [d_{i,j}]$ digrafa D_m $(m \geq 3)$ i sa završnim čvorom u F.

Vrednosti $H_m(n)$ se mogu dobiti iz sledećeg sistema rekurentnih relacija:

$$f_0(k) \stackrel{def}{=} H_m(k+2) = \sum_{i \in E} f_i(k) \tag{3.10}$$

$$f_i(k) = \sum_{j=1}^{|V(D_m)|} d_{i,j} f_j(k-1) \ , \quad i = 1, \ldots, |\, V(D_m) \,| \tag{3.11}$$

$$f_i(0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 \ , & \text{ako je čvor koji odgovara} \\ & i-\text{toj vrsti iz skupa } F \ ; \\ 0 \ , & \text{inače .} \end{cases} \tag{3.12}$$

U [8] daje se i jedan algoritam za rešavanje proizvoljnog sistema rekurentnih relacija kojim se može rešiti gornji sistem. Pokazalo se, u slučaju 2-faktora, da se za male vrednosti m $(m < 6)$ ovim algoritmom postižu dovoljno dobri rezultati [11], dok za veće vrednosti m bolji rezultati se mogu postići postupkom koji sledi.

Na primer, u [10] pomenuti algoritam je primenjen za odredjivanje rekurentne relacije za niz $H_6(n)$. Dobijena je rekurentna relacija 27. reda. Ovde se postiže bolji rezultat tj. rekurentna relacija 14. reda.

3.2 Odredjivanje broja orijentisanih puteva fiksne dužine u datom digrafu sa početkom i krajem u zadatim skupovima čvorova

Neka je dat opšti digraf (graf) $D = (V, E)$ sa skupom čvorova $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ čija je matrica susedstva $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ ($a_{i,j}$ predstavlja broj grana koje idu iz v_i u v_j).
Neka su data i dva podskupa skupa V:

E $(E \subseteq V)$ – skup **istaknutih** čvorova i
F $(F \subseteq V)$ – skup **završnih** čvorova.

Označimo sa $f_A^B(k)$ broj svih orijentisanih puteva dužine k koji polaze iz skupa A $(A \subseteq V)$ a završavaju se u skupu B $(B \subseteq V)$. Naš zadatak je da se odrede brojevi $f_E^F(k)$, $k \in N \cup \{0\}$ tj. generativna funkcija ovog niza:

$$\mathcal{F}_E^F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_E^F(k) \cdot x^k \ . \tag{3.13}$$

Radi kratkoće zapisa označimo dalje sa $f_i(k)$ vrednost $f_{\{v_i\}}^F(k)$. Lako se vidi da važi:

$$\begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(k) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} f_1(k-1) \\ f_2(k-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(k-1) \end{bmatrix}, \quad k \in N \ ; \tag{3.14}$$

gde se uzima da je

$$f_i(0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 \ , & v_i \in F \\ 0 \ , & v_i \notin F \end{cases} . \tag{3.15}$$

Iz (3.14) sledi, da za svako p, $1 \leq p \leq k$, važi:

$$\begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(k) \end{bmatrix} = A^p \cdot \begin{bmatrix} f_1(k-p) \\ f_2(k-p) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(k-p) \end{bmatrix}, \quad k \in N \ ; \qquad (3.16)$$

Iz teoreme *Hamilton–Cayley* [42] sledi da svaka matrica, pa i naša matrica $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$, zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu koja je reda najviše n.

Ako je $P(\lambda) = \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2\lambda^{n-2} - \cdots - b_{n-1}\lambda - b_n$ karakteristični polinom matrice $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ tada važi:

$$A^n - b_1A^{n-1} - b_2A^{n-2} - \cdots - b_{n-1}A - b_nI = 0 \qquad (3.17)$$

(I - jedinična matrica; 0 - nula matrica)

Ako (3.17) pomnožimo vektorom

$$[f_1(k-n), f_2(k-n), \cdots, f_n(k-n)]^T$$

i primenimo (3.16) za $p = n, n-1, \cdots, 1$ redom, dobijamo:

$$\begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(k) \end{bmatrix} - b_1 \begin{bmatrix} f_1(k-1) \\ f_2(k-1) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(k-1) \end{bmatrix} - b_2 \begin{bmatrix} f_1(k-2) \\ f_2(k-2) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(k-2) \end{bmatrix} - \cdots$$

$$\cdots - b_{n-1} \begin{bmatrix} f_1(k-n+1) \\ f_2(k-n+1) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(k-n+1) \end{bmatrix} - b_n \begin{bmatrix} f_1(k-n) \\ f_2(k-n) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(k-n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle sledi da za svako i , $1 \leq i \leq n$ važi:

$$f_i(k) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot f_i(k-j) \ , \quad k \geq n \ ;$$

što dalje zbog:

$$f_E^F(k) = \sum_{v_i \in E} f_i(k) \tag{3.18}$$

implicira:

$$f_E^F(k) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot f_E^F(k-j) \ , \quad k \geq n \tag{3.19}$$

Dakle, niz celih brojeva $f_E^F(k)$ $(k \in N \cup \{0\})$ je potpuno odredjen rekurentnom relacijom (3.19) i početnim vrednostima f_E^F za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ koji se mogu dobiti iz (3.14), (3.16) i (3.18).

Generativna funkcija ovog niza (3.13) uvek se može zapisati kao razlomljena funkcija:

$$\mathcal{F}_E^F(x) = \frac{\mathcal{U}(x)}{\mathcal{V}(x)}$$

gde su $\mathcal{U}(x)$ i $\mathcal{V}(x)$ polinomne funkcije reda najviše $(n-1)$ i n tj.:

$$\mathcal{V}(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - b_1 x - b_2 x^2 - \cdots - b_n x^n$$

dok je

$$\mathcal{U}(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_{n-1} x^{n-1} \ ;$$

gde se koeficijenti u_i $(0 \leq i \leq n-1)$ dobijaju na sledeći način:

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = f_E^F(0) \ ; \\ u_i = f_E^F(i) - \sum_{j=1}^{i} b_j \cdot f_E^F(i-j) \ , \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{array}\right\} . \tag{3.20}$$

Ovo poslednje sledi iz direktnog množenja generativne funkcije $\mathcal{F}_E^F(x)$ sa $\mathcal{V}(x)$ i primenom rekurentne relacije (3.19).

3.3 Odredjivanja generativnih funkcija nizova $F_m(n)$ i $H_m(n)$

Kako su brojevi $F_m(n)$ i $H_m(n)$ odredjeni brojem (orijentisanih) puteva fiksne dužine u pridruženom grafu G i digrafu D koji polaze i završavaju se u fiksnim podskupovima skupa čvorova, a kako iz (3.19) sledi da za ove uvek postoji rekurentna relacija koja ih odredjuje, to je time potvrdjena hipoteza data u [44] tj. dokazano sledeće tvrdjenje:

Teorema 3.1 *[10] Za svako m, $m \in N$ uvek postoje rekurentne relacije za $F_m(n)$ i $H_m(n)$ reda ne većeg od $\mid V(G_m) \mid$ i $\mid V(D_m) \mid$ redom.*

□

3.3.1 2-faktori – uopšte

U [11] su za $m = 3, 4$ i 5 date matrice susedstva pridruženih grafova G_m i za svaki, odgovarajući skup istaknutih čvorova. Algoritmom za rešavanje sistema rekurentnih relacija [8] rešeni su pridruženi sistemi rekurentnih relacija (3.10) – (3.12) i dobijeni sledeći rezultati:

Teorema 3.2 *$F_3(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$F_3(n) = 3 \cdot F_3(n-2)$$

sa početnim vrednostima: $F_3(1) = 0$ i $F_3(2) = 1$.

Teorema 3.3 $F_4(n)$ *zadovoljava sledeću rekurentnu relaciju:*

$$F_4(n) = 2\cdot F_4(n-1) + 7\cdot F_4(n-2) - 2\cdot F_4(n-3) - 3\cdot F_4(n-4) + F_4(n-5)$$

za $n \geq 6$, *sa početnim vrednostima:*
$F_4(1) = 0,\ F_4(2) = 2,\ F_4(3) = 3,\ F_4(4) = 18,\ F_4(5) = 54.$

Teorema 3.4 $F_5(n)$ *zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$F_5(n) = 24 \cdot F_5(n-2) - 57 \cdot F_5(n-4) + 26 \cdot F_5(n-6)$$

za $n \geq 7$, *sa početnim vrednostima:* $F_5(1) = 0,\ F_5(2) = 3,$
$F_5(3) = 0,\ F_5(4) = 54,\ F_5(5) = 0,\ F_5(6) = 1140.$

Algoritam za odredjivanje generativne funkcije niza $F_m(n)$

Može se zapaziti da broj čvorova pridruženog grafa G_m iznosi manje od 2^{m-1} ali i ti brojevi brzo rastu s povećanjem broja m (tab.1).
Medjutim, matrica susedstva grafa G_m se može redukovati na matricu skoro duplo manjeg formata čiji karakteristični polinom odredjuje takodje jednu rekurentnu relaciju za niz $F_m(n)$.
Ta redukovana matrica predstavlja matricu susedstva opšteg grafa G'_m koji se dobija sažimanjem svaka dva čvora koja su pridružena inverznim rečima. Ovo sledi iz sledećeg tvrdjenja koje se lako pokazuje:

Ako su dva čvora v_i *i* v_j *iz* $V(G_m)$ *kao reči iz* $\{0,1\}^{m-1}$ $(m \geq 3)$ *inverzne onda važi:*

$$f^E_{\{v_i\}}(k) = f^E_{\{v_j\}}(k)\ .$$

Na sl.19 i sl.20 date su matrice susedstva grafova G_6 i G_6' dok su na sl.21 i sl.22 date matrice susedstva grafova G_7 i G_7'. (Sa „* " su označeni istaknuti čvorovi.)

		1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0
		0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1
G_6		1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1
		0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1
		1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
1.	* 10101	1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
2.	* 10111	1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
3.	* 11011	0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1
4.	* 11101	1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0
5.	* 11111	1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0
6.	00000	1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
7.	00001	1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0
8.	00100	1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
9.	00101	1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
10.	00111	1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0
11.	10000	1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
12.	10001	1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0
13.	10100	1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
14.	11100	1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
15.	00010	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
16.	10010	0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
17.	01000	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
18.	01001	0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
19.	01010	0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
20.	01110	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Sl. 19 Matrica susedstva grafa G_6

m	3	4	5	6	7
2^{m-1}	4	8	16	32	64
$\mid V(G_m) \mid$	4	6	15	20	56
$\mid V(G'_m) \mid$	3	5	9	14	31

Tab. 1

Primetimo da za razliku od matrice susedstva grafa G_m ova ne mora biti i nije binarna matrica već celobrojna.

G'_6	1 2 3 ...
1.	1 2 0 1 1 2 1 2 2 1 0 0 0 0
2.	1 1 0 0 1 2 1 2 1 1 1 1 0 0
3.	0 0 0 0 1 2 0 0 0 1 2 2 1 1
4.	1 0 0 0 1 2 1 2 0 1 2 2 1 0
5.	1 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
6.	1 2 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0
7.	1 2 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
8.	1 2 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0
9.	1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0
10.	1 2 1 1 0 0 1 2 2 0 0 0 0 0
11.	0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
12.	0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
13.	0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
14.	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Sl. 20 Matrica susedstva grafa G'_6

Kako je vrednost $F_m(n)$ jednaka broju puteva dužine $(n-2)$ koji polaze i koji se završavaju u skupu istaknutih čvorova $E \subseteq V(G_m)$ tj. jednaka broju $f_E^E(n-2)$, to ovaj niz zadovoljava rekurentnu relaciju dobijenu iz karakterističnog polinoma matrice susedstva opšteg grafa

G'_m sigurno od člana $(p+2)$ (mada može i ranije), gde je p stepen tog karakterističnog polinoma (tj. pridružene rek. relacije).

Izloženim algoritmom dobijene su iste rekurentne relacije za slučajeve $m = 3, 4$ i 5 kao i u gornjim teoremama ali su postignute i rekurentne relacije za slučajeve $m = 6$ i $m = 7$:

Teorema 3.5 *$F_6(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju:*
$F_6(n) = 4F_6(n-1) + 54F_6(n-2) - 67F_6(n-3)$
$-479F_6(n-4) + 264F_6(n-5) + 1171F_6(n-6) - 517F_6(n-7)$
$-928F_6(n-8) + 397F_6(n-9) + 217F_6(n-10) - 73F_6(n-11)$
$-23F_6(n-12) + 4F_6(n-13) + F_6(n-14)$
za $n \geq 16$, sa početnim vrednostima:
$F_6(1) = 0$, $F_6(2) = 5$, $F_6(3) = 9$, $F_6(4) = 222$, $F_6(5) = 1140$,
$F_6(6) = 13903$, $F_6(7) = 99051$, $F_6(8) = 972080$, $F_6(9) = 7826275$,
$F_6(10) = 71053230$, $F_6(11) = 599141127$, $F_6(12) = 5285091303$,
$F_6(13) = 45349095730$, $F_6(14) = 395755191515$,
$F_6(15) = 3418116104881$.

Teorema 3.6 *$F_7(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju:*
$F_7(n) = 188F_7(n-2) - 8462F_7(n-4) + 160189\ F_7(n-6)$
$-1535495F_7(n-8) + 8158979F_7(n-10) - 25253651F_7(n-12)$
$+46589758F_7(n-14)\ -51364132F_7(n-16) + 33102019F_7(n-18)$
$-11793011F_7(n-20)\ +2068475F_7(n-22) - 131784F_7(n-24)$
za $n \geq 26$, sa početnim vrednostima:
$F_7(2k+1) = 0$, *za* $k = 0, ..., 12$
$F_7(2) = 8$, $F_7(4) = 779$, $F_7(6) = 99051$, $F_7(8) = 13049563$,
$F_7(10) = 1729423756$, $F_7(12) = 229435550806$, $F_7(14) = 30443972466433$,
$F_7(16) = 4039769151988768$, $F_7(18) = 536061241088972481$,
$F_7(20) = 71133264482944200277$, $F_7(22) = 9439112402375129121841$,
$F_7(24) = 1252534193959746441955912$.

	G_7	123...
1.	*101011	00000000111111111111111110000000000000000000000000000000
2.	*101101	0000000011011001101100110011111100000000000000000000000000
3.	*101111	000000001111110111111101110110110000000000000000000000000
4.	*110101	0000000011000001100000000011111111111111000000000000000000
5.	*110111	0000000011100001110000000001101101111011010000000000000000
6.	*111011	00000000111111111111111000000000001100000010000000000000000
7.	*111101	0000000011011001101100000011111111111110000000000000000000
8.	*111111	0000000011111101111111000001101101111000010000000000000000
9.	000000	111111110000000000000000000000000000000000000000000000
10.	000001	11111111000000000000000000000000000000000011100000000000000
11.	000010	10101101000000000000000000000000000000000000000000000
12.	001000	1110011100000000000000000000000000000000001000000000000
13.	001001	11100111000000000000000000000000000000000101100000000000
14.	001010	10100101000000000000000000000000000000000010000000000000
15.	001110	10000100000000000000000000000000000000000010000000000000
16.	100000	1111111100000000000000000000000000000000000001110000000000
17.	100001	111111110000000000000000000000000000000000111011110000000
18.	100010	1010110100000000000000000000000000000000000101000000000
19.	101000	111001110000000000000000000000000000000000111101000000000
20.	101001	1110011100000000000000000000000000000000010111111000000
21.	101010	101001010000000000000000000000000000000000110101000000
22.	101110	100001000000000000000000000000000000000000110001000000
23.	111000	1110000000000000000000000000000000000000111101100000
24.	111001	1110000000000000000000000000000000000000100111111100000
25.	111010	1010000000000000000000000000000000000000110101100000
26.	111110	1000000000000000000000000000000000000000110001100000
27.	000100	01111011000000000000000000000000000000000000000010000
28.	000101	011110110000000000000000000000000000000011100000011000
29.	000111	010100100000000000000000000000000000000011100000011100
30.	100100	011110110000000000000000000000000000000011000100000
		....

		....
31.	100101	01111011000000000000000000000000000000000111001110011000
32.	100111	01010010000000000000000000000000000000000111001010011100
33.	010000	00011110000000000000000000000000000000000000000000000000
34.	010001	00011110000000000000000000000000000000000001100000000000
35.	010100	00011011000000000000000000000000000000000000000000010000
36.	010101	00011011000000000000000000000000000000000001100000011000
37.	010111	00010010000000000000000000000000000000000001100000011100
38.	011100	00011000000000000000000000000000000000000000000000010000
39.	011101	00011000000000000000000000000000000000000001000000011000
40.	011111	00010000000000000000000000000000000000000001000000011100
41.	010010	00001101000000000000000000000000000000000000000000000000
42.	101100	00000000010010001001000100011011000000000000000000000000
43.	110100	00000000010000001000000000011011010110110000000000000000
44.	111100	00000000010010001001000000011011010110000000000000000000
45.	100011	00000000001111000111111110000000000000000000000000000010
46.	001011	00000000000000111111111100000000000000000000000000000000
47.	001101	00000000000000110110011000000111000000000000000000000000
48.	001111	00000000000000111111011110000110000000000000000000000000
49.	001100	00000000000000001001000100000011000000000000000000000000
50.	000011	00000000000000000111111110000000000000000000000000000010
51.	010011	00000000000000000000011110000000000000000000000000000010
52.	110001	00000000000000000000000000111111001111110000000000000001
53.	110000	00000000000000000000000000011011000110110000000000000001
54.	110010	00000000000000000000000000001001000010010000000000000001
55.	110110	00000000000000000000000000000000000000000000100001100000
56.	011011	00000000000000000000000000000000000000000000000000011100
	G_7	123...

Sl. 21 Matrica susedstva grafa G_7

G'_7	1 2 3 ...
1.	0000012111111111111111000000000
2.	0000012022001022002200000000000
3.	0000012122101122101110000000000
4.	0000012211111211110000100000000
5.	0000012222201222200000100000000
6.	2122100000000000000000000000000
7.	2122100000000000000000011100000
8.	1012100000000000000000000000000
9.	1121000000000000000000000010000
10.	1121000000000000000000010110000
11.	1011000000000000000000000010000
12.	1001000000000000000000000010000
13.	2122100000000000000000022201000
14.	1012100000000000000000001100000
15.	1121000000000000000000011110100
16.	1121000000000000000000021211100
17.	1011000000000000000000001110100
18.	1001000000000000000000001010100
19.	1110000000000000000000011110110
20.	1110000000000000000000021111110
21.	1010000000000000000000001110110
22.	1000000000000000000000001010110
23.	0002000000000000000000000000000
24.	0000001001001012001200000000000
25.	0000001000001111111111000000000
26.	0000001001001112101110000000000
27.	0000000011110011111111000000001
28.	0000000000001002000200000000000
29.	0000000000000011111111000000001
30.	0000000000000000001111000000001
31.	0000000000000000000000000010110

Sl. 22 Matrica susedstva grafa G'_7

Kako važi: $F_m(0) \stackrel{def}{=} 0$ i $F_m(1) = 0$, to se generativna funkcija niza $F_m(n)$ dobija na sledeći način:

$$\mathcal{F}_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_m(n)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_E^E(n-2)x^{n-2} = x^2 \cdot \mathcal{F}_E^E(x)$$

Paskalskim programom (videti dodatak) dobijene su generativne funkcije $\mathcal{F}_m(x)$ za slučajeve $m = 4, ..., 7$ ($[c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p]$ označava polinom $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_px^p$) :

$$\mathcal{F}_4(x) = x^2 \frac{[2,-1,-2,1]}{[1,-2,-7,2,3,-1]}$$

$$\mathcal{F}_5(x) = x^2 \frac{[3,0,-18,0,15]}{[1,0,-24,0,57,0,-26]}$$

$$\mathcal{F}_6(x) = x^2 \frac{[5,-11,-84,101,353,-256,-399,200,135,-45,-19,3,1]}{[1,-4,-54,67,479,-264,-1171,517,928,-397,-217,73,23,-4,-1]}$$

$$\mathcal{F}_7(x) = x^2 \frac{[8,0,-725,0,20295,0,-261639,0,1772203,0,-6715082,0,}{[1,0,-188,0,8462,0,-160189,0,1535495,0,-8158979,0,25253651,0,}$$

$$\frac{14790582,0,-19244327,0,14597627,0,-6125795,0,1266517,0,-97104]}{-46589758,0,51364132,0,-33102019,0,11793011,0,-2068475,0,131784]}.$$

3.3.2 Povezani 2-faktori

U [51,44] odredjene su, dosta komplikovano, rekurentne relacije za $H_4(n)$ i H_5 . U [11] je izložen algoritam dobijanja matrica susedstva opšteg digrafa D_m i koristeći algoritam za rešavanje sistema rekurentnih relacija [8] ove formule su ponovo izvedene:

Teorema 3.7 $H_3(n)$ *zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$H_3(n) = 2H_3(n-2)$$

za $n \geq 3$, *sa početnim vrednostima:* $H_3(1) = 0,\ \ H_3(2) = 1$.

Teorema 3.8 $H_4(n)$ *zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$H_4(n) = 2H_4(n-1) + 2H_4(n-2) - 2H_4(n-3) + H_4(n-4)$$

za $n \geq 4$, *sa početnim vrednostima:*
$H_4(0) = H_4(1) = 0,\ \ H_4(2) = 1$ *i* $H_4(3) = 2$.

Teorema 3.9 $H_5(n)$ *zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$H_5(n) = 11H_5(n-2) + 2H_5(n-6)$$

za $n \geq 6$, *sa početnim vrednostima:*
$H_5(0) = H_5(1) = H_5(3) = H_5(5) = 0,\ \ H_5(2) = 1$ *i* $H_5(4) = 14$.

U [10] je istim algoritmom dobijena rekurentna relacija za brojeve $H_6(n)$ 27. reda. Medjutim, algoritmom sličnim onom za 2-faktore, koji je ovde izložen, dobijaju se za $m = 3, 4$ i 5 isti rezultati, ali za slučaj $m = 6$ mnogo bolji nego u [10].

Na sl.23 data je matrica susedstva opšteg digrafa D_6. Sa „ * " su označeni istaknuti čvorovi (tj. njima pridružene reči), dok sa „ + " su označeni završni čvorovi. Jedini čvor (za proizvoljno m), koji je i istaknuti i završni je onaj kome je pridružena reči $\underbrace{11\cdots1}_{m-1}$.

Slično kao za 2-faktore, javlja se inverznosti nekih parova reči pridruženih čvorovima opšteg digrafa D_m, te se sažimanjem ovih čvorova dobija opšti digraf D_m'.

m	3	4	5	6	7
$\mid V(D_m) \mid$	3	6	19	32	113
$\mid V(D_m') \mid$	2	5	11	22	64
$\mid V(D_m'') \mid$	2	4	7	15	43

Tab. 2

Takodje primećeno je da se i u ovako redukovanoj matrici, matrici susedstva opšeg D_m' javljaju identički jednake vrste. Ovo omogućava da se i čvorovi digrafa D_m' pridruženi tim vrstama ponovo sažmu. Tako se dobija novi opšti digraf D_m''. Karakteristični polinom njegove matrice susedstva takodje odredjuje jednu (manjeg reda) rekurentnu relaciju za nizove $H_m(n)$.

Na sl.24 date su matrice susedstva za D_6' i D_6''.

		1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
		0 2 0 2 1 1 1 1 1 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 1 0 2 1 1 1 1 1 1 0 0 2 2
	H_6	1 1 1 1 0 2 1 1 1 0 1 1 0 2 1 0 0 1 1 1 0 2 0 0 1 0 2 2 1 1 1 1
		0 3 1 1 1 1 0 2 1 0 0 2 0 2 0 0 1 0 2 0 1 1 0 1 1 0 2 1 0 1 0 2
		1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1
1.	* 10101	1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2.	+ 12131	0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
3.	* 10111	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4.	+ 12111	0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
5.	* 11011	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
6.	+ 11211	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0
7.	* 11101	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0
8.	+ 11121	0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0
9.	* + 11111	0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0
10.	00001	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
11.	00100	1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
12.	00121	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
13.	10000	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
14.	12221	0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1
15.	12100	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0
16.	10001	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
17.	10010	0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
18.	10100	1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
19.	10121	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
20.	11100	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0
21.	00010	0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
22.	12210	0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
23.	01001	0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
24.	01010	0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
25.	01110	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
26.	01000	0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
27.	01221	0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
28.	01210	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
29.	00101	1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
30.	00111	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
31.	12101	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0
32.	12121	0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1

Sl. 23

Tako je dobijena sledeća teorema:

Teorema 3.10 $H_6(n)$ *zadovoljava rekurentnu relaciju:*
$H_6(n) = 5H_6(n-1) + 14H_6(n-2) - 63H_6(n-3) + 12H_6(n-4)$ $+90H_6(n-5) - 35H_6(n-6) - 66H_6(n-7) + 118H_(n-8) - 8H_6(n-9)$ $-82H_6(n-10) + 42H_6(n-11) + 28H_6(n-12) - 4H_6(n-13) +$ $2H_6(n-14)$
za $n \geq 16$, *sa početnim vrednostima:*
$H_6(1) = 0$, $H_6(2) = 1$, $H_6(3) = 4$, $H_6(4) = 37$, $H_6(5) = 154$ $H_6(6) = 1072$, $H_6(7) = 5320$, $H_6(8) = 32675$, $H_6(9) = 175294$, $H_6(10) = 1024028$ $H_6(11) = 5668692$, $H_6(12) = 32463802$, $H_6(13) =$ 181971848, $H_6(14) = 1033917350$, $H_6(15) = 5824476298$

D_6'	123...
1.	1020001000000000000000
2.	0100000212100000000000
3.	0001000000011111000000
4.	0100000212100000110000
5.	0000000000012000001100
6.	0000000200100000220010
7.	0100000212100000220010
8.	1020101000000000000000
9.	1020001000000000000000
10.	0001000000010111000000
11.	0002010000000202000001
12.	1020101000000000000000
13.	0010101000000000000000
14.	1020001000000000000000
15.	0001000000010111000000
16.	0001000000011111000000
17.	0010101000000000000000
18.	0001010000000001000000
19.	0000101000000000000000
20.	0000010000000000000000
21.	0000010000000000000000
22.	0002000000000202000001

$\longmapsto$

D_6''	123...
1.	102000100000000
2.	110000022100000
3.	101100011010000
4.	110000022111000
5.	000000010020110
6.	000000020122010
7.	110000022122010
8.	102010100000000
9.	101100011000000
10.	202201000000001
11.	001010100000000
12.	001101000000000
13.	000010100000000
14.	000001000000000
15.	202200000000001

Sl. 24

Istim paskalskim programom koji je korišćen za 2-faktore dobijaju se generativne funkcije

$$\mathcal{H}_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_m(n)x^n$$

za $m = 4, 5, 6$:

$$\mathcal{H}_4(x) = x^2 \frac{[1]}{[1, -2, -2, 2, -1]}$$

$$\mathcal{H}_5(x) = x^2 \frac{[1, 0, 3]}{[1, 0, -11, 0, 0, 0, -2]}$$

$$\mathcal{H}_6(x) = x^2 \frac{[1, -1, 3, -24, 24, -3, 0, 3, -15, 9, 4, -2, 1]}{[1, -5, -14, 63, -12, -90, 35, 66, -118, 8, 82, -42, -28, 4, -2]}.$$

Dodatak

ODREDJIVANJE KARAKTERISTIČNOG POLINOMA DATE MATRICE

Leverrier je 1840. izneo metod za računanje koeficijenata svojstvenog polinoma date matrice.
Sledeće relacije, na osnovu kojih je realizovan, ovde u celini dat paskalski program „Leverrier ", predstavlja modifikaciju ove metode[3], koju su nezavisno predložili D.K.Fadeev i J.S.Frame 1949 [42].

$$A_1 = A \qquad TrA_1 = \sigma_1 \qquad B_1 = A_1 - \sigma_1 I$$

$$A_2 = AB_1 \qquad \tfrac{1}{2}TrA_2 = \sigma_2 \qquad B_2 = A_2 - \sigma_2 I$$

$$A_3 = AB_2 \qquad \tfrac{1}{3}TrA_3 = \sigma_3 \qquad B_3 = A_3 - \sigma_3 I$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$A_{n-1} = AB_{n-2} \qquad \tfrac{1}{n-1}TrA_{n-1} = \sigma_{n-1} \qquad B_{n-1} = A_{n-1} - \sigma_{n-1} I$$

$$A_n = AB_{n-1} \qquad \tfrac{1}{n}TrA_n = \sigma_n \qquad B_n = A_n - \sigma_n I \; .$$

Pri tome je $B_n = 0$ (kontrola računanja).
Svojstveni polinom matrice A je:

$$\mathcal{P}_n(x) = det(xI - A) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} - \ldots \sigma_{n-1} x - \sigma_n \; .$$

[3]Ova metoda zahteva oko $(n-1)n^3$ množenja, pa je dosta efikasna za matrice umereno velikog reda.

```
Program Leverrier; (* P(A) *)
(* P(x)= x^{n} + v[1]x^{n-1}+ ... + v[n-1]x+ v[n] *)
(* Rezultat: vektor [ v[1], ... ,v[n] ] *)

const
  n=31; (* velicina matrice  *)

type
  matrica=array[1..n,1..n] of real;
  vektor=array[0..n] of real;
var
    out,inp,inp1:text;
    outstr,inpstr,inpstr1:string[10];
    k,i1,i2,j1,j2,i,j:integer;
    A,B,C:matrica;
    v,u,f:vektor;
(*-----------------------------------------------------*)
procedure puta(AA,BB:matrica; var CC:matrica);
var
  ii,jj,kk:integer;

begin
     for ii:=1 to n do
         for jj:=1 to n do
           begin
             CC[ii,jj]:=0;
             for kk:=1 to n do
             CC[ii,jj]:=CC[ii,jj] + AA[ii,kk]*BB[kk,jj]
           end
end;

(* ------------------------------------------------------*)
procedure razlika(ss:real; AA:matrica; var BB:matrica);
                                     (* BB = AA - ss * I *)
var
```

```
 ii,jj: integer;

begin
  for ii:=1 to n do
    for jj:=1 to n do
      if  ii=jj then
          BB[ii,jj]:=AA[ii,jj] - ss
      else
          BB[ii,jj]:=AA[ii,jj];
end;
(* ------------------------------------------------------*)
procedure  trag(AA:matrica; var ss:real);

var
  ii:integer;
  sss:real;
begin
  sss:=0;
  for ii:=1 to n do
    sss:=sss + AA[ii,ii];
  ss:=sss
end;
(* ------------------------------------------------------*)
(*         GLAVNI PROGRAM                               *)
(* ------------------------------------------------------*)
begin

write('izlazna datoteka :');
readln(outstr);
assign(out,outstr);
rewrite(out);
(*-- ucitavanje matrice ciji se min. polinom trazi ---*)
writeln( 'Ucitaj ulazni fajl:' );
writeln('matrica incidencije ');
readln(inpstr);
```

```
assign(inp,inpstr);
reset(inp);
for i:=1 to n do
    begin
         for j:=1 to n do read(inp,A[i,j]);
         readln(inp);
    end;

writeln(out,'Matrica A ciji se kar.polinom trazi je:');
for i:=1 to n do
    begin
         for j:=1 to n do  write(out, A[i,j]:3:0);
         writeln(out)
    end;
k:=1;
C:=A;
for k:=1 to n do
  begin
    trag(C,v[k]);
    v[k]:=v[k] / k;
    writeln(v[k]);
    razlika(v[k],C,B);
    v[k]:=(-1)*v[k];
    puta(A,B,C);
  end;
writeln(out, 'karakteristicni polinom:');
writeln(out,'P(x)= x^{n} + v[1]x^{n-1} +...+ v[n]  ');
write(out,'  [v[1], ... ,v[n] ] = [ ');
for i:=1 to n-1 do write(out,v[i]:4:0,',');
writeln(out, v[n]:4:0, ']');
writeln(out);
close(out)
end.
```

ODREDJIVANJE GENERATIVNIH FUNKCIJA POMOĆU KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE I POČETNIH VREDNOSTI

```
Program GENERATIVNA;
  (* Generativna funkcija F(x) = U(x) / V(x)                  *)
  (* inp - koeficijenti kar.jednacine                        *)
  (* inp1 - pocetne vrednosti do n, jedna vise - n-ta *)
  (*                              - radi provere kar.jed. *)
  (* brojevi se unose kao nizovi karaktera                   *)
const
  n=24; (* velicina kar. jednacine V tj. rek.relacije *)
       (* max. izlozilac *)
  max=80; (* velicina integera *)
type
  cifra= 0..9;
  broj=array[0..max] of cifra;
  niz=array[0..n] of broj;

  (* zbog velicine pocetnih vrednosti mora se    *)
  (* koristiti aritmetika visestruke preciznosti *)
  (* broj[0]-znak   ...  broj[max]-cifra jedinica *)
var
    out,inp,inp1:text;
    outstr,inpstr,inpstr1:string[10];
    k,kk,i,j:integer;
    v,u,h:niz;
    nula,rez : broj;
    znak:char;
(*------------------------------------------------------*)
procedure mnozi(broj1,broj2:broj; var broj3:broj);
var
  ii,jj,kk,ost,r:integer;
  red:broj;
```

```
begin
  broj3:=nula;
  for ii:=max downto 1 do
    begin
      ost:=0;
      for jj:=max downto 1 do
        begin
          r:=broj1[jj]*broj2[ii] + ost;
          red[jj]:=r mod 10;
          ost:=r div 10
        end;
      red[0]:=1;
      for kk:=1 to  ii  do
        red[kk]:=red[kk+max-ii];
      for kk:=ii+1 to max do red[kk]:=0;
      dodaj(red,broj3)
    end;
  if broj1[0]=broj2[0] then broj3[0]:=1
                       else broj3[0]:=0
end;
(*---------------------------------------------------------*)
procedure dodaj(broj1:broj; var broj2:broj);
var
  ii,jj,r,pozaj,ost :integer;

begin
  if broj1[0]=broj2[0] then
    begin
      ost:=0;
      for ii:=max downto 1 do
        begin
          r:=broj1[ii] + broj2[ii] + ost;
          broj2[ii]:=r mod 10;
          ost:=r div 10
        end
```

```
    end
  else
    begin
      ii:=1;
      while (broj1[ii]=broj2[ii]) and (ii<max) do
       ii:=ii+1;
      if broj1[ii]>broj2[ii] then
        begin
         broj2[0]:=broj1[0];
         pozaj:=0;
         for jj:=max downto 1 do
           begin
             if broj1[jj]<(broj2[jj] + pozaj) then
              begin
               broj2[jj]:=broj1[jj]+10-broj2[jj]-pozaj;
               pozaj:=1
              end
             else
               begin
                 broj2[jj]:=broj1[jj]-broj2[jj]-pozaj;
                 pozaj:=0
               end
           end
        end
      else  (* broj2 >= broj1 *)
        begin
         pozaj:=0;
         for jj:=max downto 1 do
           begin
             if broj2[jj]<(broj1[jj] + pozaj) then
              begin
               broj2[jj]:=broj2[jj]+10-broj1[jj]-pozaj;
               pozaj:=1
              end
             else
```

```
                begin
                  broj2[jj]:=broj2[jj]-broj1[jj]-pozaj;
                  pozaj:=0
                end
            end
         end
     end
end;
(* ----------------------------------------------------------*)
(*                    GLAVNI PROGRAM                          *)
(* ----------------------------------------------------------*)
begin
nula[0]:=1;
for i:=1 to max do nula[i]:=0;

write('izlazna datoteka:');
readln(outstr);
assign(out,outstr);
rewrite(out);
(*----------------------------------------------------------*)
(*  ucitavanje kar.pol. od slob.clana v[0]:=1 do v[n] *)
(*  cifra jedinica je v[i][max]                               *)
(*  znak je + ako je v[i][0]:=1 a - ako je 0                  *)
(* ----------------------------------------------------------*)
writeln( 'Ucitaj ulazni fajl:' );
writeln('-kar.jednacina- ');
(* ----------------------------------------------------------*)
readln(inpstr);
assign(inp,inpstr);
reset(inp);
for i:=0 to n do                  (* v[0]=1 uvek *)
    begin
         read(inp,znak);
         if znak='-' then begin v[i][0]:=0;   (* neg. *)
                                read(inp,znak);
```

```
                    end
                else v[i][0]:=1 (* pozitivan *);
        j:=1;
        v[i][j]:=ord(znak)-48;
        while not ( eoln(inp) or (znak=' ')) do
          begin
            j:=j+1;
             read(inp,znak);
             v[i][j]:=ord(znak) - 48;
           end;
          readln(inp);
          for k:=j downto 1 do v[i][k+max-j]:=v[i][k];
          for k:=1 to (max-j) do v[i][k]:=0;
          writeln;
           write('v[',i,'] =');
           for k:=0 to max do write(v[i][k]); writeln;

    end;
(*-----------------------------------------------------*)
  writeln( 'Ucitaj ulazni fajl:' );
  writeln('-pocetne vrednosti-');
(* ----------------------------------------------------*)
readln(inpstr1);
assign(inp1,inpstr1);
reset(inp1);
for i:=0 to n do
    begin
        read(inp1,znak);
        if znak='-' then begin h[i][0]:=0 ;  (* neg. *)
                                 read(inp1,znak);
                           end
                     else h[i][0]:=1 (* pozitivan *);
         j:=1;
         h[i][j]:=ord(znak) - 48;
         while not (eoln(inp1) or (znak=' ')) do
```

```
        begin
          j:=j+1;
          read(inp1,znak);
          h[i][j]:=ord(znak) - 48;
        end;
       for k:=j downto 1 do h[i][k+max-j]:=h[i][k];
       for k:=1 to (max-j) do h[i][k]:=0;
       write('f[',i,'] =');
       for k:=0 to max do write(h[i][k]); writeln;
     readln(inp1)
 end;
(* ------------------------------------------------------*)
writeln(out,'karakteristicna jednacina');
writeln(out,' v[0] x^{n} + ...+ v[n-1] x + v[n] ');
writeln(out, ' za n = ', n);

for i:=0 to n do
  begin
    write(out,'v[',i:2,']= ');
    if v[i][0]=0 then write(out,'-')
                 else write(out,' ');
    j:=1;
    while (j<>max) and (v[i][j]=0) do begin
                               write(out,' ');
                               j:=j+1
                             end;
    for k:=j to max do write(out,v[i][k]);
    writeln(out)
  end;
(* ------------------------------------------------------*)
writeln(out,'pocetni uslovi h[0] do h[n] su :');
for i:=0 to (n + 3) do
  begin
    write(out,'h[',i:2,']= ');
    if h[i][0]=0 then write(out,'-')
```

```
                    else write(out,' ');
      j:=1;
      while ( j<> max) and (h[i][j]=0 ) do begin
                                write(out,' ');
                                j:=j+1
                              end;
      for k:=j to max do write(out,h[i][k]);
      writeln(out)
    end;
  (* ---------------------------------------------------*)
   for k:=0 to n  do
     begin
      u[k]:=nula;
      for kk:=0 to k do
        begin
          mnozi(h[kk],v[k-kk],rez);
          dodaj(rez,u[k])
        end;
      writeln;
     end;
   (*  ------------------------------------------------*)
   writeln(out);
   writeln(out,'generativna funkcija:');
   writeln(out,' H(x) = U(x) / V(x) ');
   writeln(out,'U(x)=[u0,u1,...,un]=u0+u1x+...+un^{n}');
   writeln(out,'V(x)=[v0,v1,...,vn]=v0+v1x+...+vn^{n}');
   (*--------------------------------------------------*)
   writeln(out,'rezultat :');
   for i:=0 to n do
     begin
       write(out,'u[',i:2,']= ');
       if u[i][0]=0 then write(out,'-')
                    else write(out,' ');
       j:=1;
       while ( j<> max) and (u[i][j]=0 ) do begin
```

```
                      write(out,' ');
                      j:=j+1
                    end;
      for k:=j to max do write(out,u[i][k]);
      writeln(out)
    end;
  (* ------------------------------------------------*)
  writeln(out);
  writeln(out);
  close(out)
end.
```

Literatura

[1] A.T.Balaban, C.Artemi, I.Tomescu, Algebraic expressions for Kekulé structure counts of non-branched regularly cata-condensed benzenoid hydrocarbons, *Mathematical Chemistry* 22 (1987): 77-100.

[2] A.T.Balaban, I.Tomescu, Algebraic expressions for the number of Kekulé structures of isoarithmic cata-condensed benzenoid polycyclic hydrocarbons, *Mathematical Chemistry* 14 (1983): 155-182.

[3] A.T.Balaban, I.Tomescu, Chemical graphs, XL: Three relations between the Fibonacci sequence and the number of Kekulé structures for non-branched cata-condensed polycyclic aromatic hydrocarbons, *Croatica Chemica Acta* 57.3 (1984): 391-404.

[4] A.T.Balaban, I.Tomescu, Chemical graphs, XLI: Numbers of conjugated circuits and Kekulé structures for zig-zag catafusenes and (j,k)-hexes; Generalized Fibonacci numbers, *Mathematical Chemistry* 17 (1985): 91-120.

[5] J.L.Bergan, S.J.Cyvin and B.N.Cyvin, Number of Kekulé struktures of single-chain corona-condensed benzenoids (cycloarenes), *Chemical Physics Letters*, Vol.125, 3 (1986): 218-220.

[6] O.Bodroža, I.Gutman, S.J.Cyvin, R.Tošić, Number of Kekulé structures of hexagon-shaped benzenoids, *Jornal of Mathematical Chemistry* 2 (1988): 287-298.

[7] O.Bodroža, An algorithm for generation and enumeration of hamiltonian cycles in $P_m + P_n$, *Review of Research Faculty of Science – University of N.Sad* (u štampi).

[8] O.Bodroža, Enumeration of oriented walks in digraphs using system of recurrence relations, *Review of Research Faculty of Science – University of N.Sad* (u štampi).

[9] O.Bodroža, R.Tošić, A new formula for the number of perfect matchings of an arbitrary hexagonal chain, *Review of Research Faculty of Science – University of N.Sad* (u štampi).

[10] O.Bodroža, R.Tošić, On the number of hamiltonian cycles of $P_m \times P_n$, *Review of Research Faculty of Science – University of N.Sad* (u štampi).

[11] O.Bodroža, *2–faktori Dekartove sume lanaca*, magistarski rad, Novi Sad (1992).

[12] D.Cvetković, S.Simić, *Kombinatorika - klasična i moderna*, Naučna knjiga, Beograd 1990.

[13] D.Cvetković, M.Doob, H.Sachs, *Spectra of Graphs - Theori and application*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[14] D.Cvetković, I.Gutman, Kekulé structures and topology -II- Cata-condensed systems, *Croat. Chem. Acta* 46 (1974): 15-23.

[15] S.J.Cyvin, Number of Kekulé structures of single-chain aromatics, *Monatsh. Chem.* 114 (1983): 13-20.

[16] S.J.Cyvin, *Monatsh. Chem.* 117 (1986): 33.

[17] S.J.Cyvin, I.Gutman, On recognizing Kekuléan benzenoid molecules, *J.Mol.Struct. (Theochem)* 164 (1988): 183-188.

[18] S.J.Cyvin, Kekulé structures and the Fibonacci series, *Acta Chim. Hung.* 112 (1983): 281.

[19] S.J.Cyvin, I.Gutman, Topological properties of benzenoid systems - Part XXXVI - Algorithm for the number of Kekulé structures in some pericondensed benzenoids, *MATCH* 19 (1986): 229-242.

[20] S.J.Cyvin, I.Gutman, *Kekulé structures in benzenoid hidrocarbons*, Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[21] E.J.Farrell, An introduction to matching polynomials, *J.Comb. Theory* Ser.B 27 (1979): 75-86.

[22] E.J.Farrell, S.A.Wahid, Matchings in benzene chains, *Discrete Appl. Math.* 7 (1984): 31-40.

[23] E.J.Farrell, On the occurrences of Fibonacci sequences in the counting of matchings in linear polygonal chains, *Fibonacci Quarterly*, Aug. (1986): 238-246.

[24] Z.Fu-ji, C.Rong-si, A theorem concerning polyhex graphs, *Mathematical Chemistry* 19 (1986): 179-188.

[25] M.Gordon, W.H.T.Davison, Theory of resonance topology of fulli aromatic hidrocarbons, *J.Chem Phys.* 20 (1952): 428-435.

[26] I.Gutman, Topological properties of benzenoid systems - An identity for the sextet polynomial, *Theor. Chim. Acta* 45 (1977): 309.

[27] I.Gutman, Topological properties of benzenoid hydrocarbons, *Bull. Soc. Chim.Beograd* 47.9 (1982): 453-71.

[28] I.Gutman, Covering hexagonal systems with hexagons, *Proceedings of the Fourth Yugoslav Seminar on Graph Theory* , Novi Sad, (1983): 151-160.

[29] I.Gutman, H.Hosoya, On the calculation of the acyclic polynomial, *Theor. Chim. Acta* 48 (1978): 279-286.

[30] I.Gutman, A property of the number of perfect matchings of a graph, *Publications de l'intitut mathématique*, Nouvelle série tome 49 (63) (1991): 17-20.

[31] I.Gutman, S.J.Cyvin, A new method for the enumeration of Kekulé structures, *Chem. Phys. Lett.* 136 (1987): 137.

[32] I.Gutman, L.X.Su, S.J.Cyvin, *J.Serb. Chem. Soc.* 52 (1987): 263.

[33] I.Gutman, S.J.Cyvin, *Introduction to the theory of benzenoid hydrocarbons*, Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[34] I.Gutman, S.J.Cyvin, A result on 1-factors related to Fibonacci numbers, *Fibonacci Quarterly*, Feb. (1990): 81-84.

[35] F.Harary, *Graph theory and theoretical phisics*, Academic Press London and New York, 1967.

[36] W.C.Herndon, Resonance theory and the enumeration of Kekulé structures, *J.Chem.Educ.* 15 (1974): 10-15.

[37] H.Hosoya, Topological index and Fibonacci numbers with relation to chemistry, *Fibonacci Quarterly* 11 (1973): 255-269.

[38] H.Hosoya, T.Yamaguchi, Sextet polynomial: A new enumeration and proof technique for resonance theory applied to the aromatic hydrocarbons, *Tetrahedron Letters* (1975): 4659-4662.

[39] H.Hosoya, Matching and symmetry of graphs, *Comp. & Maths. with Appls.* Vol. 12B, Nos.1/2, (1986): 271-290.

[40] H.Hosoya and A.Motoyama, An effective algorithm for obtaining polynomials for dimer statistics. Application of operator technique on the topological index to two- and three- dimensional rectangular and torus lattices, *J.Math.Phys.* 26 (1985): 157-167.

[41] P.John and H.Sachs, Wegesysteme une linearfaktoren in hexagonalen und quadratischen systemen, *Graphen in Forschung und Unterricht*, Verlag Barbara Franzbecker, Bad Salzdetfurth, FRG, (1985): 85-101.

[42] S.Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga -Zagreb, (1967).

[43] D.Klarner, J.Pollack, Domino tilings of rectangles with fixed width, *Discrete Mathematics* 32 (1980): 45-52.

[44] Y.H.H.Kwong, Enumeration of hamiltonian cycles in $P_4 \times P_n$ and $P_5 \times P_n$, *Ars Combinatoria* (u štampi).

[45] L.Lovász, M.D.Plummer, *Matching theory*, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1986.

[46] B.R.Myers, Enumeration of tours in hamiltonian rectangular lattice graphs, *Mathematics Magazine* 54 (1981): 19-23.

[47] H.Sachs, Perfect matchings in hexagonal systems, *Combinatorica* 4 (1) (1984): 89-99.

[48] R.Tošić, Dj.Paunić, Algoritam za generisanje i prebrojavanje 2-faktora jedne klase grafova, XI Simpozijum iz informatike, Jahorina, (1987).

[49] R.Tošić, A fast algorithm for calculating the number of Kekulé structures of unbranched benzenoid chains, *MATH/CHEM/COMP* 1988, Proc. of an Int.Course and Con. on the Interfaces between Math.,Chem. and Comp. Sci., Dubrovnik, June 1988, 1989 Elsevier Publishers B.V., Amsterdam, 123-126.

[50] R.Tošić, O.Bodroža, On the number of Kekulé structures of unbranched benzenoid chains, *MATCH* 24 (1989): 311-316.

[51] R.Tošić, O.Bodroža, Y.H.Harris Kwong, H.Joseph Straight, On the number of hamiltonian cycles of $P_4 \times P_n$, *Indian J. pure appl. Math.*, 21 (5) (1990): 403-409.

[52] R.Tošić, O.Bodroža, An algebraic expression for the number of Kekulé structures of benzenoid chains, *Fibonacci Quarterly* , Feb. (1991): 7-12.

[53] R.Tošić, I.Stojmenović, Fibonacci numbers and the numbers of perfectmatchings of square, pentagonal and hexagonal chains, *Fibonacci Quarterly*, Nov. (1992): 315-321.

[54] R.Tošić, O.Bodroža, Enumeration of 2-factors of $P_5 \times P_n$, *Review of Research Faculty of Science – University of N.Sad* (u štampi).

[55] R.Tošić, O.Bodroža, Square chains and Fibonacci numbers, *Review of Research Faculty of Science – University of N.Sad* (u štampi).

[56] N.Trinajstić, *Chemical Graph Theory* , Vol. 2. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1983.

[57] T.F.Yen, Resonance topology of polynuclear aromatic hydrocarbons, *Theor.Chim.Acta* 20 (1971): 399.