UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mr. Danica Nikolić-Despotović

NEPREKIDNOST RACIONALNIH OPERATORSKIH FUNKCIJA I NJIHOVIH GRANICA

— doktorska disertacija —

NOVI SAD
1971.

U V O D

Integralne jednačine, teorija aproksimacija, varijacioni račun su one oblasti klasične matematike u kojima se razvija ideja da se fundamentalne operacije analize, izvod i integral, shvate kao operacije izmedju izvesnih skupova funkcija. Stoga se otada i funkcija posmatra kao elemenat nekog skupa odredjene algebarske i topološke strukture. Znanje o izvodu funkcije koje je davao običan diferencijalni račun nije uvek dovoljno za rešavanje praktičnih problema. Tako na primer, osnovni fizički zakoni izraženi su ponekad varijacionim principima u kojima figurišu one fizičke veličine koje se eksperimentalno mogu odrediti. Te fizičke veličine priznavala je kako klasična tako i kvantna fizika.

Uopštene funkcije, a posebno operatori J.Mikusińskog, nastali su kao težnja savremene matematike da pridje koncentraciji rezultata razvrstavajući probleme po njihovoj unutrašnjoj strukturi, a ne spoljnjem obliku analitičkog izraza. Sem toga, prodor matematike u raznovrsne grane nauke (posebno fiziku) zahtevao je i neminovne promene u osnovnim koncepcijama klasične analize. Tako nastaju i posebne teorije UOPŠTENIH FUNKCIJA koje predstavljaju prirodna rešenja i rešenja matematičkih modela i u onim slučajevima kada u smislu klasične matematike takva rešenja ne postoje.

Operatorski račun uvodi se na dva načina: direktno (Heaviside, Mikusinski, Schwartz, Ditkin, Berg) i preko integralnih transformacija (Bromwich, Carson, Doetsch). Oliver Heaviside (1850-1925) računa sa operatorom diferenciranja $p = \frac{d}{dt}$ kao sa običnim brojem ne vodeći mnogo računa o matematičkoj zasnovanosti svoga metoda rada, što ga često dovodi i do pogrešnih rezultata. Korektnu osnovu operatorskom računu, preko kompleksnih integralnih transformacija daje prvi Bromwich, a zatim znatno jednostavnije preko tzv. Carsonovih transformacija radi Carson. Doetsch, primenom Laplace-ovih transformacija, daje novo tumačenje operatorskom računu sa interesantnom i raznovrsnom primenom. Istina, ova primena bila je ograničena samo na one funkcije koje imaju Laplace-ovu transformaciju.

Operatorskom računu prilazi direktno više matematičara izgradjujući rigoroznu matematičku teoriju. Jan Mikusinski to ostvaruje algebarskom metodom polazeći od skupa $\mathcal{E}$ kompleksnih neprekidnih funkcija ne negativne realne promenljive. Schwartz (1950-1951) izgradjuje svoju poznatu teoriju distribucija. 1957.godine Ditkin uspostavlja vezu izmedju polja operatora Mikusinskog i jednog skupa konstruisanog pomoću Laplace-ovih transformacija. Weston 1959.godine daje teoriju perfektnih operatora definisanih nad skupom funkcija sa klasičnom Laplace-ovom transformacijom, a Stanković daje njihov opšti oblik nad skupom lokalno integrabilnih funkcija kao i vezu sa podprostorom C_s polja operatora Mikusinskog. L.Berg polazeći od skupa analitičkih funkcija konstruiše jedno polje izomorfno polju operatora Mikusinskog, a poznata je i jedna takva konstrukcija Rjabceva.

Osnova ove doktorske teze su operatori Mikusinskog. Poznati poljski matematičar Jan Mikusinski dao je 1949. godine jedan veoma jak analitički aparat savremene matematike poznat pod imenom operatorski račun Mikusinskog. Značaj operatora Mikusinskog ogleda se u njegovoj krajnjoj opštosti, a razvijanje teorije operatora je od interesa kako za matematičku teoriju tako i za primenu jer se mnogi matematički modeli rešavaju baš u okviru ove teorije.

Kako polje operatora Mikusinskog sadrži i operatore: diferenciranja, integraljenja, translacije, to i diferencijalne jednačine sa operatorima Mikusinskog obuhvataju odredjene klase diferencijalnih, parcijalnih, integralnih, diferencnih jednačina kao njihove kombinacije. Zbog posebne topološke strukture rešenja ne moraju da budu i rešenja u klasičnom smislu.

Poznato je da svaka distribucija Schwartz-a čiji je nosač ograničen sa leve strane je i operator Mikusinskog, ali da svaki operator nije i distribucija. S toga polje operatora Mikusinskog možemo posmatrati ne samo kao ekstenziju pojma funkcije no i distribucije sa nosačem ograničenim sa leve strane. Uporedjivanjem operatora Mikusinskog i distribucija Schwartza konstatovaćemo da operatori imaju znatno bogatiju algebarsku strukturu, ali nažalost siromašniju topološku strukturu.

Naslov ove doktorske teze je NEPREKIDNOST RACIONALNIH OPERATORSKIH FUNKCIJA I NJIHOVIH GRANICA - redova čiji su opšti članovi racionalne operatorske funkcije. Ulogu koja ima neprekidnost u matematici mislim da ne treba naglašavati. Ona se javlja i kod rešavanja raznih problema vezanih za operatore, odakle je nastala ova problematika. Sem toga, jedna klasa racionalnih operatorskih funkcija koju razmatra ova teza, je rešenje operatorske ne linearne diferencijalne jednačine, te je ispitivanje uslova pod kojima su operatorske funkcije ove klase neprekidne u graničnim tačkama od značaja. Teza ima četiri glave numerisane arapskim ciframa.

U 1. glavi, radi potpunosti i preglednosti izloženi su osnovni pojmovi i rezultati vezani za teoriju operatora Mikusinskog.

U drugoj glavi izloženi su u glavnom moji rezultati dobiveni pri proučavanju neprekidnosti jedne klase racionalnih operatorskih funkcija. Teoremama 2.1.-1, 2.2-1, 2.4-1. dati su potrebni i dovoljni uslovi za neprekidnost odredjenih klasa operatorskih funkcija u graničnim tačkama.

Treća glava odnosi se na konvergenciju redova čiji su opšti članovi racionalne funkcije po operatoru diferenciranja s. U njoj sam iznela svoje rezultate koji se odnose na ovu problematiku.

U četvrtoj glavi sam dala primenu dveju linearnih, neprekidnih operatorskih transformacija U_m i T^{-z} kod ispitivanja konvergencije jednog specijalnog reda takozvanu UT granicu u polju operatora.

Zahvaljujem se svom profesoru dr Bogoljubu Stankoviću na predloženoj doktorskoj temi i pomoći pri njenoj izradi.

1 GLAVA

1.1 POLJE OPERATORA I NJEGOVA TOPOLOGIJA

Polazimo od skupa $\mathcal{E}$ kompleksnih funkcija realne promenljive t definisanih i neprekidnih za $t \geq 0$ čije elemente beležimo sa $f=\{f(t)\}$. U $\mathcal{E}$ definišemo algebarsku strukturu definišući dve unutrašnje operacije: sabiranje (+) na uobičajen način i množenje (*) preko konačne konvolucije. Na osnovu teoreme TITCHMARSHA [49] skup $\mathcal{E}$ sa ovako definisanim sabiranjem i množenjem je integralni domen. Ako definišemo spoljašnju operaciju preko polja kompleksnih brojeva (množenje skalarom) na uobičajen način, skup $\mathcal{E}$ je obogaćen i strukturom komutativne algebre bez delioca nule, te pretstavlja celu algebru. S toga se integralni domen $(\mathcal{E},+,*)$ može proširiti u polje K, POLJE OPERATORA MIKUSINSKOG. Polje K sadrži podintegralni domen izomorfan sa $\mathcal{E}$, čiji su elementi:

$$f=\{f(t)\} = \frac{\{a(t)\}\{f(t)\}}{\{a(t)\}} \qquad a(t)\neq 0,\ a(t)\in \mathcal{E}$$

te se u tom smislu može smatrati da je $\mathcal{E}$ zagnjureno u K. Elemente polja K zovemo OPERATORIMA, a oni su oblika:

$$\frac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}} = \frac{f}{g} \qquad (f,g\in \mathcal{E} \ ,\ g \neq 0)$$

gde razlomačka crta označava operaciju inverznu konvoluciji u K. Polje operatora nije algebarski zatvoreno (RYLL-NARDZEWSKI [34])

Pomenimo i neke važnije operatore:

i. OPERATOR INTEGRALJENJA $\ell=\{1\}$ i njemu inverzan element u polju operatora K, OPERATOR DIFERENCIRANJA $s=\frac{1}{\ell}$, 1 je jedinični operator.

ii. Operator

$$\ell^{z} = \left\{ \frac{t^{z-1}}{\Gamma(z)} \right\}, \quad z \text{ je kompleksan broj , Re } z > 0.$$

iii. Operator

$$\frac{1}{(s-p)^n} = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{pt} \right\}$$

iv. OPERATOR TRANSLACIJE. Ako sa $q_1(x,t)$ obeležimo funkciju:

$$q_1(x,t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < x \\ t-x & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

operatorom translacije zovemo operator $s^2\{q_1(x,t)\}$ i obeležavamo ga sa e^{-sx}, $e^{-sx} = s^2\{q_1(x,t)\}$. Lako je pokazati da za svako $f \in \mathcal{C}$

$$e^{-sx} f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < x \\ f(t-x), & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Konvergencija na skupu neprekidnih funkcija $\mathcal{C}$ definisana je:

Ako $f_n \in \mathcal{C}$ reći ćemo da $f_n \to f$ $(\mathcal{C})$ kad $n \to \infty$, ako f_n uniformno konvergira ka f na svakom kompaktnom podintervalu $[0,T]$ $(T > 0)$ intervala $[0,\infty)$.

U polju operatora Mikusinski je najpre definisao sekvencijalnu konvergenciju, koristeći se konvergencijom iz $\mathcal{C}$, koju nazivamo konvergencijom tipa I, na sledeći način:

DEFINICIJA 1.1-1 Neka $x_n \in K$ $n=1,2,3\ldots$ Reći ćemo da:

$$x_n \to x\,(K) \quad \text{kad } n \to \infty$$

tada i samo tada ako postoji $f \neq 0$, $f \in \mathcal{E}$, tako da $f\, x_n \in \mathcal{E}$ za $n = 1,2,..$ a $f\, x_n \to f\; x\; (\mathcal{E})$ kad $n \to \infty$.

Lako je pokazati da je ovako definisana granica jedinstvena. Mikusinski je uveo još jedan tip operatorske konvergencije, tzv. konvergenciju tipa II, na sledeći način: Niz operatora x_n konvergira operatoru x kad $n \to \infty$' po tipu konvergencije II u oznaci

$$x_n \xrightarrow{II} x \quad (K) \quad , \quad n \to \infty$$

tada i samo tada ako postoji $f_n \in \mathcal{E}(n=1,2,..) f_n \to f\; (\mathcal{E})$, $f \neq 0$, kad $n \to \infty$ i $f_n x_n \in \mathcal{E}$ za $n=1,2,..$, a $f_n x_n \to f\; x\; (\mathcal{E})$ kad $n \to \infty$

Ovako definisana konvergencija nije saglasna sa algebarskom strukturom polja K [50] , što znatno otežava rad sa granicom, a polje K nije topološki prostor u smislu KURATOWSKOG. Naime, URBANIK je pokazao da sekvencijalna adherencija $\bar{S}$, podskupa S, iz K, nije operator Kuratovskog niti za konvergenciju tipa I, niti za konvergenciju tipa II tj. $\bar{S} \neq \bar{\bar{S}}$

Ako sa $\bar{X}^{(n)}$ označimo n-tu iteraciju sekvencijalne adherencije , BUDIMČEVIĆ i STANKOVIĆ su pokazali [7] da za sve $m \in N$ postoji $X \subset K$ takav da

$$\bar{X}^{(m-1)} \neq \bar{X}^{(m)}$$

a i podskup $Y \subset K$ za koji važi

$$\bar{Y}^{\omega_0} \neq \bar{Y}^{(k)} \quad \text{za svako} \quad k \in N.$$

Važno je istaći i to da je Ditkin [8] uspostavio vezu izmedju operatora i niza klasa evivalencija Laplasovih integrala. To je omogućilo nov način prilaženja problemima operatorskog računa i korišćenje dobro razradjene teorije Laplasovih integrala.

1.2 PROSTOR OPERATORSKIH FUNKCIJA M

Reći ćemo da je $f(x)$ operatorska funkcija, ako njen skup vrednosti $\mathcal{R}(f)$ pripada polju operatora K. Ako funkcija preslikava podskup X skupa kompleksnih brojeva C u integralni domen $\mathcal{C}$ nazivamo je parametarskom funkcijom i obeležavamo sa $f(x)=\{f(x,t)\}$ Algebarska struktura skupa operatorskih funkcija definisana je preko algebarske strukture polja operatora K, a skup operatorskih funkcija sa ovako definisanom algebarskom strukturom obeležava se sa M. Kako je skup X snabdeven topologijom induciranom iz skupa kompleksnih brojeva C, a u polju operatora je definisana konvergencija to se odgovarajuće definicije i rezultati koji važe u ovim prostorima prenose i na prostor M operatorskih funkcija. Ako je $I = [a,b] \subset (-\infty,\infty)$ tada ćemo sa $C(I)\mathcal{C}$ obeležiti vektorski prostor operatorskih funkcija $f(x)$, $x \in I$ takvih da su $f(x) = \{f(x,t)\}$ neprekidne funkcije na skupu $I \times [0,\infty)$.

Ako je S oblast u kompleksnoj ravni sa $C(S)\mathcal{C}$ obeležimo vektorski prostor operatorskih funkcija $f(z)=\{f(z,t)\}$ koje su neprekidne na skupu $S \times [0,\infty)$.

Postoji i korespondentni prostori operatorskih funkcija $C(I)M$, odnosno $C(S)M$,

DEFINICIJA 1.2-1 <u>Operatorska funkcija $f(x)$ ($f(z)$) neprekidna je na $I \subset (-\infty,+\infty)$ (oblasti S) u oznaci:</u>

$$f(x) \in C(I)M$$

$$(f(z) \in C(S)M)$$

<u>tada i samo tada ako postoji $q \neq 0$, $q \in \mathcal{C}$ sa osobinom da</u>

$$q\ f(x) \in C(I)\mathcal{C}$$
$$(q\ f(z) \in C(S)\mathcal{C}\ )$$

DEFINICIJA 1.2-2 <u>Niz $f_n(x)$, $f_n(x) \in C(I)M$ reći ćemo da konvergira ka operatorskoj funkciji $f(x)$ kad $n \to \infty$, ako postoji $q \in \mathcal{C}$</u>

<u>$q \neq 0$, tako da $q\, f_n(x) \in C(I)\mathfrak{C}$ za svako $n \in N$ i</u>
<u>$q\, f_n(x) \to q\, f(x)$ ($\mathfrak{C}$) kad $n \to \infty$.</u>

Da bi operatorska funkcija bila neprekidna dovoljno je:

TEOREMA 1.2-1 <u>Ako je funkcija dve promenljive $f(x,t)$ neprekidna u običnom smislu nad oblašću $[a,b] \times [0,\infty)$ tad je njoj parametarska funkcija neprekidna operatorska funkcija nad intervalom $[a,b]$</u>.

Od posebnog značaja u teoriji linearnih diferencijalnih operatorskih jednačina su operatorske funkcije oblika:

$$f(x) = \frac{a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{n-1} + \ldots + a_0(x)}{b_m(x)s^m + b_{m-1}(x)s^{m-1} + \ldots + b_0(x)} \qquad m,n \in N \tag{1.2-1}$$

Ispitujući uslove pod kojima je ova klasa operatorskih funkcija neprekidna Fenyes-i [11] je dokazao:

TEOREMA 1.2-2 <u>Neka su $a_i(x)$, $b_j(x)$ $(i=0,1,\ldots,n \quad j=0,1,\ldots m)$ realne, numeričke neprekidne funkcije nad intervalom $[\alpha,\beta]=I$. Ako je $b_m(x) \neq 0$ dok $x \in I$, tad operatorska funkcija(1,2-1) $f(x) \in C(I)M$.</u>

DEFINICIJA 1.2-3 <u>Operatorska funkcija $f(x)$ reći ćemo da ima neprekidan prvi izvod na $I=[a,b] \subset (-\infty,\infty)$ ako: Postoji $q \in \mathfrak{C}$, $q \neq 0$, sa osobinom da $q\, f(x) = \{F(x,t)\} \in C(I)\mathfrak{C}$ i $\frac{\partial}{\partial x} F(x,t)$ postoji i neprekidna je funkcija na skupu $I \times [0,\infty)$. Tada je:</u>

$$f'(x) = q^{-1} \{\tfrac{\partial}{\partial x} F(x,t)\}$$

a $f(x) \in C_1(I)M$

Analogno, moguće je uvesti pojam n-tog neprekidnog izvoda odnosno skupa $C_n(I)M$ kao i analitičke operatorske funkcije. Ako postoji $q \in \mathfrak{C}$, $q \neq 0$, tako da $q\, f(z) \in C(S)\mathfrak{C}$ i za svako $t \geqslant 0$ $q\, f(z) = \{F(z,t)\}$ je analitička funkcija,

$a\{\frac{\partial}{\partial z}F(z,t)\}\in C(S)\mathcal{C}$ reći ćemo da je f(z) analitička operatorska funkcija $f(z)\in A(S)M$.

TEOREMA 1.2-3 1. Ako operatorska funkcija $f(x)\in C_1(I)M$ tad je

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o)\ ,\ x\to x_o$$

2. $f(x)=c\in K$ za svako $x\in I$ tada i samo tada ako $f(x)\in C_1(I)M$ i ako je $f'(x)=0$ dok $x\in I$.

3. Ako operatorska funkcija f(x) ima neprekidan n-ti izvod nad I odnosno $f(x)\in C_n(I)M$ i ako je $m\in N$ takav da je $m<n$, tad m-ti izvod $f^{(m)}(x)\in C_{n-m}(I)M$.

4. Ako su f(x) i g(x) operatorske funkcije koje imaju neprekidan n-ti izvod nad intervalom I, $f(x), g(x)\in C_n(I)M$, tad i $[f(x)+g(x)]\in C_n(I)M$ i $[f(x)g(x)]\in C_n(I)M$ i važi:

$$[f(x)+g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)g(x)+\binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)g'(x)+\ldots+f(x)g^{(n)}(x)$$

5. Ako $g(x)\in C_1(I)M$ i $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\in C_1(I)M$ tada i $f(x)\in C_1(I)M$ i važi:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

6. Ako operatorska funkcija $f(x)\in C_1(I)M$, a $\Psi(x)$ je numerička funkcija čije vrednosti pripadaju intervalu I, a ima neprekidan izvod nad intervalom J, tad operatorska funkcija $f[\Psi(x)]\in C_1(J)M$ i važi:

$$\{f[\Psi(x)]\}'=f'[\Psi(x)]\,\psi'(x)$$

DEFINICIJA 1.2-4. Operatorska funkcija f(x) je integrabilna nad intervalom $[a,b]$ ako postoji $q\in\mathcal{C}$, $q\neq 0$, tako da je:

$q\,f(x)=\{F(x,t)\}$ pri čemu je

$$|F(x,t)| \leq G(x)H(t)$$

$G(x)$ je integrabilna funkcija na $[a,b]$, a $H(t)$ je integrabilna svakom konačnom intervalu $[0,T]$, $T > 0$.

Integral operatorske funkcije je operator:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{q}\{\int_a^b F(x,t)dx\}$$

Ovako definisan integral je jednoznačno odredjen i ima sve osobine običnog Rimanovog integrala o kojima se u okviru strukture operatora može govoriti.

Pomenimo i jednu od važnijih operatorskih funkcija-eksponencijalnu operatorsku funkciju.

DEFINICIJA 1.2-5. Pretpostavimo da je $a < 0 < b$ i $f(x) \in C_1[a,b]$ M $f(0)=1$, $w \in K$ i $\frac{d}{dx}$ $f(x)=w\, f(x)$ za sve $x \in (a,b)$.

Tada je operator w logaritam na $[a,b]$ a operatorska funkcija $f(x)$ je eksponencijalna operatorska funkcija tj. $f(x)=e^{xw}$ na $[a,b]$.

Poznato je [10] da operator w, koji je logaritam na $a \leq x \leq b$ je logaritam i na svakom konačnom intervalu $[a_1,b_1]$ gde je $a_1 < b$, $a < b_1$ a postoji i jedinstvena ekstenzija eksponencijalne operatorske funkcije $f(x)$ sa intervala $[a,b]$ na interval $(-\infty, +\infty)$.

TEOREMA 1.2-4. Logaritmi w čine vektorski prostor definisan nad poljem realnih brojeva.

Svaka funkcija koja pripada skupu $\mathcal{C}$ je logaritam.

Odnose izmedju Laplasovih transformacija i jednog podprostora polja operatora K takozvane perfektni operatori koga čine operatori oblika $s^n f$, gde je $f \in \mathcal{C}$, $f(t)=O(e^{kt})$ kad $t \to \infty$ (n,k su pozitivni brojevi) su proučavali Weston, Stanković, Skendžić, Šulc.

1.3 REDOVI OPERATORSKIH FUNKCIJA

DEFINICIJA 1.3-1 Red operatorskih funkcija:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \tag{1.3-1}$$

čiji su članovi operatorske funkcije $u_k(x)$ definisane u nekoj tački $x=x_o$, konvergira obično (apsolutno) u tački $x=x_o$, ako postoji $q \in \mathcal{C}$, $q \neq 0$, tako da je $qu_k(x_o)=g_k \in \mathcal{C}$ za $k=o,1,2,\ldots$ a red numeričkih funkcija:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(t)| \right)$$

uniformno konvergira po t u svakom konačnom zatvorenom intervalu $[0,T]$, $T>0$.

DEFINICIJA 1.3-2 Red operatorskih funkcija (1.3-1) konvergira u svakoj tački x skupa $X \subset C$ obično (apsolutno) ako su svi članovi reda, operatorske funkcije $u_k(x)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ definisani na skupu X i red (1.3-1) u svakoj tački $x=x_o \in X$ konvergira, u smislu definicije 1.3-1, obično (apsolutno).

DEFINICIJA 1.3-3 Red operatorskih funkcija (1.3-1) konvergira na skupu $X \subset C$ obično (apsolutno) ako su:
svi članovi reda (1.3-1) operatorske funkcije $u_k(x)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ definisane dok $x \in X$ i postoji $q \in \mathcal{C}$, $q \neq 0$, tako da za svako $x \in X$ i $k=0,1,2,\ldots$ je:

$$q\, u_k(x) = \{v_k(x,t)\}$$

i red numeričkih funkcija:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x,t)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |v_k(x,t)|\right)$$

konvergira za svako $x \in X$ uniformno po t u svakom konačnom zatvorenom intervalu $[0,T]$, $T>0$.

DEFINICIJA 1.3-4 Red operatorskih funkcija (1.3-1) konvergira uniformno na skupu $X \subset C$, ako su svi njegovi članovi, operatorske funkcije $u_k(x)$, definisani na skupu $X \subset C$ i postoji $q \in \mathfrak{C}$, $q \neq 0$, tako da je $q\, u_k(x) = \{v_k(x,t)\}$ za $x \in X$ i svako $k=0,1,2,\ldots$, a red numeričkih funkcija:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x,t)$$

konvergira uniformno po dve promenljive x i t, na skupu $X \times [0,T]$ za svako $T>0$.

U polju operatora niz $\left(1+\frac{sx}{n}\right)^{-n}$ konvergira za sve $x>0$ ka operatorskoj funkciji e^{-xs}.

Naprotiv, formalni red operatora oblika:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} s^k \qquad \sqrt{(-1)^k}$$

divergira za sve $x \neq 0$ i ne može pretstavljati operatorsku funkciju e^{-xs} [27].

U oblasti konvergencije redova operatora, kao i redova operatorskih funkcija poznati su radovi J.MIKUSINSKOG, RYLL-NARDZEWSKOG i B.STANKOVIĆA [43]. Navešću tri teoreme B.STANKOVIĆA.

Teorema 1.3-1 je znatno šira i preciznija od teoreme Ryll-Nardzewskog [27] i obuhvata je, a glasi:

TEOREMA 1.3-1 Ako postoji $\delta>\alpha$ tako da je:

$$\limsup_{n} n^{\delta n} |\gamma_n| < \infty$$

red

(1.3-2) $$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i z^i s^{i\alpha} \qquad \alpha>0$$

konvergira na skupu C - kompleksnih brojeva. Ako naprotiv, postoji $\eta>0$ i $n_0 \in N$ da je:

$$|\gamma_n|\Gamma(n\alpha) \geq \eta^n \ , n \geq n_0$$

dati red (1.3-2) divergira za sve $z\neq 0$ (z je kompleksan broj). Uslovi pod kojima konvergira red operatorskih funkcija oblika:

(1.3-3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n(\lambda)$$

pri čemu su α_n kompleksni brojevi, a operatorska funkcija $a(\lambda)=\dfrac{\{w(\lambda,t)\}}{\{u(t)\}}$ definisana je dok $\lambda \in [\lambda',\lambda'']$, dati su sledećim teoremama:

TEOREMA 1.3-2 Pretpostavimo da:

1. Funkcije $u(t)$ i $w(\lambda,t)$ dok $\lambda\in[\lambda',\lambda'']$ imaju Laplasove integrale $U(z)$ i $W(\lambda,z)$ apsolutno konvergentne u poluravni $Rez \geq X_0$

2. $\left|\dfrac{W(\lambda,z)}{U(z)}\right| < M(\lambda)|z|^{\alpha}$, $\lambda \in [\lambda',\lambda'']$, $Rez \geq X_0$ $\alpha\in R$

3. $\lim\limits_{n} \sup n^{\delta n}|\alpha_n| < \infty$ $\delta>\alpha$

Tada red operatorskih funkcija (1.3-3) konvergira za sve $\lambda\in[\lambda',\lambda'']$

TEOREMA 1.3-3 Pretpostavimo da:

1. $u^{(k)}(o) = 0$ $i=0,1,\ldots,(k-1)$

2. $u^{(k)}(t) = t^{-\gamma} v(t)$ $o \leq \gamma \leq 1$, $v(t)$ ima neprekidan izvod i $v(o) \neq 0$

3. $\ell^{\beta-k+\gamma}\{w(\lambda,t)\}$ ima neprekidan izvod po t za sve $\lambda\in[\lambda',\lambda'']$

$\ell^{\beta-k+\gamma}\{w(\lambda,t)\}\big|_{t=0}=0$

4. $\lim_{n} \sup n^{\delta n}|\alpha_n|<\infty \quad \delta>\beta-1$

Tada red operatorskih funkcija (1.3-3) konvergira za sve $\lambda\in[\lambda',\lambda'']$

1.4 ODREDJENI STIELTRJESOV INTEGRAL OPERATORSKE FUNKCIJE

Neka su f (x) i g(x) operatorske funkcije definisane nad konačnim zatvorenim intervalom $I=[\alpha,\beta]$. Jedna od podela (P_i) intervala I neka je:

$$\alpha=x_0^{(i)}<x_1^{(i)}< \ldots < x_n^{(i)} = \beta \quad (i=1,2,\ldots)$$

Obeležimo sa $m(P_n)$ najveći od podrazmaka te podele $m(P_n) = \max\,(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})$ i=1,2,...,n, a sa:

$$a_n=S(f,g,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})\left[g(x_i^{(n)})- g(x_{i-1}^{(n)})\right]$$

DEFINICIJA 1.4-1 Ako postoji granica a niza operatora a_n

$$\lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty} S(f,g,P_n)=a$$

nezavisno od uočene podele (P_n) za svaki izbor tačaka $x_{i-1}^{(n)}<\xi_i^{(n)}< x_i^{(n)}$, samo kada $\lim_{n} m(P_n)=0$, kažemo da je a Stieltjesov integral operatorske funkcije f(x) u odnosu na operatorsku funkciju g(x) u intervalu I i obeležavamo ga sa:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dg(x)$$

Uopštenje jedne klasične teoreme Gesztelyi [16] je izrazio sledećom teoremom:

TEOREMA 1.4-1 Neka je $f(x)$ neprekidna operatorska funkcija nad konačnim zatvorenim intervalom $I=[\alpha,\beta]$ tj. $f(x)=p\{f_1(x,t)\}$ $p\in K, p\neq o$, a $\Psi(x)$ numerička funkcija ograničene varijacije nad istim intervalom I. Tad je:

i. Operatorska funkcija $f(x)$ Stieltjes integrabilna u odnosu na $\Psi(x)$ u intervalu I i važi:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)d\Psi(x) = p\{\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x,t)d\Psi(x)\} \tag{1.4-1}$$

gde za utvrdjeno $t\geq o$ funkcija $F(t)$

$$F(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x,t)\, d\Psi(x)$$

predstavlja odredjeni Stiltjesov integral.

ii. Funkcija $F(t)$ je neprekidna dok $o\leq t<\infty$

iii. Stieltjesov integral (1.4-1) ne zavisi od operatora $p\in K$ tj. jednoznačno je odredjen.

TEOREMA 1.4-2

i. Ako postoje integrali $\int_a^b f_1(x)dg(x)$ i $\int_a^b f_2(x)dg(x)$ tada postoji i integral

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\, dg(x)$$

i važi:

$$\int_a^b f_1(x)dg(x)+\int_a^b f_2(x)dg(x)=\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\, dg(x)$$

ii. Ako je operatorska funkcija $f(x)$ Stieltjes integrabilna u intervalu $[a,b]$ u odnosu na operatorske funkcije $g_1(x)$ i $g_2(x)$, tada je ona Stieltjes integrabilna nad istim intervalom i u odnosu na operatorsku funkciju: $[g_1(x)+g_2(x)]$ i važi:

$$\int_a^b f(x)d\,[g_1(x)+g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

iii. Ako je operatorska funkcija f(x) Stieltjes integrabilna u odnosu na operatorsku funkciju g(x), nad konačnim, zatvorenim intervalom[a,b], tada je takodje i operatorska funkcija g(x) Stiltjes integrabilna nad istim intervalom u odnosu na operatorsku funkciju f(x) i važi:

$$\int_a^b g(x)df(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a) - \int_a^b f(x)dg(x)$$

iv. Ako je operatorska funkcija f(x) neprekidna u konačnom, zatvorenom intervalu [a,b] a $\Psi(x)$ numerička funkcija ograničene varijacije u istom intervalu i $c\in[a,b]$ tada postoje Stieltjesovi integrali:

$$\int_a^b f(x)d\,\Psi(x)\ ,\quad \int_a^c f(x)d\,\Psi(x)\ ,\quad \int_c^b f(x)d\Psi(x) \quad \text{i važi:}$$

$$\int_a^b f(x)d\Psi(x)= \int_a^c f(x)d\,\Psi(x) + \int_c^b f(x)d\,\Psi(x)$$

DEFINICIJA 1.4-2 Za operatorsku funkciju g(x) reći ćemo da je ograničene varijacije u konačnom, zatvorenom intervalu [a,b] ako je svaka neprekidna operatorska funkcija f(x) nad istim intervalom [a,b] Stieltjes integrabilna u tom intervalu u odnosu na operatorsku funkciju g(x).

TEOREMA 1.4-3 Neka su nad datim konačnim, zatvorenim intervalom $I=[a,b]$ $\Psi(x)$ numerička funkcija ograničene varijacije, a g(x) neprekidna operatorska funkcija. Tada je operatorska funkcija G(x)

$$G(x) = \int_a^x g(u)d\Psi(u) \qquad x\in[a,b]$$

funkcija ograničene varijacije nad intervalom I i za svaku neprekidnu operatorsku funkciju f(x) na intervalom I važi:

$$\int_a^b f(x)dG(x)= \int_a^b f(x)g(x)d\Psi(x)$$

E. Gesztelyi [15] je definisao odredjeni Stieltjesov integral još na jedan način, preko običnog Stieltjesovog integrala za numeričke funkcije. Pri tome mu je odredjen Stieltjesov integral neprekidne operatorske funkcije f(x) nad konačnim zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$ u odnosu na numeričku funkciju $\Psi(x)$ ograničene varijacije nad istim inteervalom, po definiciji, operator definisan relacijom (1.4-1).

Kako se u operatorskom računu ne može govoriti o apsolutnoj vrednosti jednog operatora, kao ni o normi operatora, to se zbog toga i pojam operatorske funkcije ograničene varijacije nad konačnim, zatvorenim intervalom, mora uvesti na nov način.

DEFINICIJA 1.4-3 Neka su sve operatorske funkcije $g_k(x)(k=1,2,.n)$ neprekidne nad konačnim zatvorenim intervalom $[a,b]$ a sve $\Psi_k(x)(k=1,...n)$ numeričke funkcije ograničene varijacije nad istim intervalom $[a,b]$. Operatorska funkcija h(x), po definiciji, je ograničene varijacije u intervalu $[a,b]$ ako se može dok $x \in [a,b]$ napisati u obliku:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a}^{x} g_k(u)\,d\Psi_k(u) + h(a)$$

TEOREMA 1.4-4 Ako je g(x) stepenasta operatorska funkcija, definisana relacijom:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & a \le x < x_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i & x_{k-1} \le x < x_k \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i & x_n \le x < b \end{cases}$$

gde su a_i $(i=0,1,..,n)$ operatori, $a_i \in K$, tada je stepenasta operatorska funkcija $g(x)$ i operatorska funkcija ograničene varijacije nad istim intervalom $[a,b]$ i za svaku neprekidnu operatorsku funkciju $f(x)$ nad istim intervalom važi relacija:

$$(1.4-2) \qquad \int_a^b f(x)d\,g(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k)$$

DEFINICIJA 1.4-4 Ako je za svako $b > a$ definisan Stieltjesov integral

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

i ako postoji (u polju operatora) granična vrednost

$\int_a^b f(x)dg(x)$ kada $b \to \infty$, tada tu graničnu vrednost nazivamo nesvojstvenim Stieltjesovim integralom i pišemo:

$$\int_a^{\infty} f(x)dg(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dg(x)$$

$$-v = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log F(x)}{x}$$

(str.186)

TEOREMA B Ako postoji poluravan u kojoj je funkcija $F(z)=\mathcal{L}\{f\}$ ograničena i ako ova funkcija ima red ograničenosti $v>o$, tad je $f(t)$ u intervalu $o\leq t\leq v$ nula funkcija (str.482).

Pre formulacije teoreme i njenog dokaza, razmotrimo dva posebna primera.

PRIMER 1. Neka je operatorska funkcija $R_1(x)$ definisana analitičkim izrazom:

$$R_1(x)= \frac{1}{x\,s-1}\begin{Bmatrix} 1/x \exp(1/x\ t): & x\neq 0 \\ -1 & x=0 \end{Bmatrix}$$

Niz $\{x_n\}$ $x_n=1/n$ kad $n\to\infty$ teži nuli, a niz operatora $\{n\,e^{nt}\}$ konvergira (konvergencija tipa I) u polju operatora K.
Da niz operatora $\{n\,e^{nt}\}$ ne konvergira u polju operatora K dokazao je Ryll-Narzewski, koristeći teoremu o momentu [27]. S toga i operatorska funkcija $R_1(x)$ nije neprekidna u tački $x=o$.

PRIMER 2. Neka je operatorska funkcija $R_2(x)$ definisana analitičkim izrazom:

$$R_2(x) = \frac{1}{x^2\,s+1} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x^2}\ t) & : x\neq 0 \\ 1 & : x=0 \end{Bmatrix}$$

$$= s^2\begin{Bmatrix} -x^2+t+x^2\, e^{-\frac{1}{x^2}t} & : x\neq o \\ t & : x=o \end{Bmatrix}$$

Kako je numerička funkcija:

$$f(x,t) = \begin{Bmatrix} -x^2+t+x^2\exp(-\frac{1}{x^2}\ t) & , x\neq 0 \\ t & , x=0 \end{Bmatrix}$$

neprekidna u $x=0$, $0\leq t<\infty$ $f(x,t)$ $\in C[0]\,\mathcal{E}$ na osnovu definicije neprekidnosti 1.2-1 , operatorska funkcija $R_2(x)$ neprekidna je u tački $x=0$.

TEOREMA 2.1-1 Pretpostavimo da:

i. $a(x)$ i $b(x)$ su realne, numeričke neprekidne funkcije nad intervalom $[x_1, x_2]$

ii. $x_0 \in [x_1, x_2]$ i x_0 je izolovana nula funkcije $a(x)$; $b(x_0) \neq 0$

Potreban i dovoljan uslov da operatorska funkcija

(2.1-1) $$\frac{1}{a(x)s+b(x)}$$

bude neprekidna u tački $x=x_0$ je da postoji okolina V_0 tačke x_0 u kojoj je $\frac{b(x)}{a(x)}>0$ dok $x\in V_0 \setminus x_0$

DOKAZ: Uslov je dovoljan: Datu operatorsku funkciju možemo napisati u obliku:

$$\frac{1}{a(x)s+b(x)} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a(x)} \exp\left(-\frac{b(x)}{a(x)}t\right) & , \; x\neq x_0 \\ \frac{1}{b(x)} & , \; x=x_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= s^2 \begin{Bmatrix} \frac{a(x)}{b^2(x)} \exp\left(-\frac{b(x)}{a(x)}t\right) - \frac{a(x)}{b^2(x)} + \frac{t}{b(x)} & , \; x\neq x_0 \\ \frac{t}{b(x)} & , \; x=x_0 \end{Bmatrix}$$

$$= \quad s^2 \{f(x,t)\}$$

Ako postoji okolina V_0 tačke x_0, takva da za $x\in V_0 \setminus x_0$ je $\frac{b(x)}{a(x)}>0$ tad će numerička funkcija $f(x,t)$ realnih promenljivih x i t biti neprekidna u $\{x_0\} \times \mathcal{E}[0,\infty)$ odnosno na osnovu definicije 1.2-1.

operatorska funkcija (2.1-1) je neprekidna u tački $x=x_o$

Uslov je potreban:

Pretpostavimo da ne postoji okolina tačke x_o u kojoj je $\frac{b(x)}{a(x)} > 0$. Tada postoji zatvorena okolina V_o tačke x_o, u kojoj $b(x)$ ne menja znak i ne anulira se u $x=x_o$, $b(x_o)\neq 0$.

Za svaku drugu okolinu $V\subset V_o$, postoji bar jedna tačka $x_k\in V$ za koju $\frac{b(x_k)}{a(x_k)} < 0$.

Uzmimo one elemente V iz baze okolina tačke x_o koji leže u

V_o. Dobićemo familiju x_k koja konvergira ka x_o. Kako kad

$x_k\to x_o$

$$\left|\frac{b(x_k)}{a(x_k)}\right| \text{ nije ograničeno, to } \frac{b(x_k)}{a(x_k)}\to -\infty \text{ kad } x_k\to x_o.$$

Pretpostavimo, suprotno tvrdjenju teoreme da je operatorska

funkcija (2.1-1) neprekidna u $x=x_o$. Tada bi postojala neprekidna funkcija $g\in \mathcal{C}$, $g\neq 0$, za koju bi $\frac{1}{a(x)s+b(x)}\, g\in \mathcal{C}$ pret-

stavljala neprekidnu numeričku funkciju dveju promenljivih x i t neprekidnu u oblasti $[x_1,x_2]\times \mathcal{C}\,[0,\infty)$. Naime, za svako $T\in R^+$ postojao bi utvrdjen broj M takav da je:

$$\left|\int_0^T \exp\left(-\frac{b(x)}{a(x)}\,(T-u)\right)\, g(u)du\right| < M$$

$$\left|\int_0^T \exp(-z(x)u)g(u)du\right| < M\,\exp(z(x)T)$$

Gde je $z=z(x)=\frac{b(x)}{a(x)}$

Odredimo red ograničenja funkcije g postupno:

$$\log\left|\int_0^T \exp(-zu)g(u)du\right| < \log M - zT$$

$$\frac{1}{z}\left\{\log\left|\int_0^T \exp(-zu)g(u)du\right|\right\} \leq \frac{1}{z}\log M - T$$

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{\log\left|\int_0^T \exp(-zu)g(u)du\right|}{z} \leq -T$$

Na osnovu TEOREME B, sledilo bi da je $g(t) = 0$; dok $0 \leq t \leq T$ za svako $T \in R^+$, što bi bilo u protivrečnosti sa pretpostavkom da je $g \neq 0$. Stoga pretpostavka, da je i u ovom slučaju operatorska funkcija (2.1-1) neprekidna u $x = x_0$ nije tačna. Time je pokazano da je uslov teoreme potreban.

Očigledno da ako bi se operatorska funkcija (2.1-1) napisala u obliku:

$$\frac{1}{a(x)s + b(x)} = \frac{1}{a(x)} \quad W(x)$$

onda je interesantno ispitati sledeće: Ako funkcije $a(x)$ i $b(x)$ zadovoljavaju uslove i i ii. teoreme 2.1-1, a $b(x_o)=o$, kada će operatorska funkcija $W(x) \in C(I)M$. Odgovor na ovo pitanje dat je sledećom teoremom.

TEOREMA 2.1-2 Neka su: 1. $a(x)$ i $b(x)$ realne, numeričke, neprekidne funkcije nad intervalom $[\alpha,\beta] = I$.

2. $x_o \in I$ i $a(x_o) = b(x_o) = o$.

Tada će operatorska funkcija:

$$W(x) = \frac{1}{s + \frac{b(x)}{a(x)}}$$

biti neprekidna u tački $x=x_o$ tj. $W(x) \in C(I)M$, ako je ispunjen jedan od uslova A ili B koji glase:

A. Postoji $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{b(x)}{a(x)} = c$

B. Ne postoji $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{b(x)}{a(X)}$

ali funkcija $a(x)$ ima u $x=x_o$ nulu k-tog reda, a funkcija $b(x)$ ima u $x=x_o$ nulu p-tog reda, pri čemu je $k>p$ i postoji okolina U_o tačke x_o u kojoj je $\dfrac{b(x)}{a(x)}>o$, dok $x\in U_o\setminus x_o$.

Dokaz ove teoreme je jednostavan jer, po pretpostavci

$$a(x)=c(x)(x-x_o)^k \qquad c(x_o)\neq o\ , \qquad b(x)=(x-x_o)^p d(x) \quad d(x_o)\neq 0$$

a dok $x\in U_o\setminus\{x_o\}$, po pretpostavci B, $\dfrac{d(x)}{(x-x_o)^{k-p}c(x)} > o$

S toga, ako obeležimo sa $k-p=r\in N$

$$w(x)=\{e^{-\frac{b(x)}{a(x)}t}\}=\{e^{\frac{d(x)}{(x-x_o)^r c(x)}t}\}$$

$$=s\left\{\frac{(x-x_o)^r c(x)}{d(x)}\left(1-e^{-\frac{d(x)t}{(x-x_o)^r c(x)}}\right)\right\}$$

$$=s\{v(x,t)\}\quad :\quad v(x,t)\in C(I)\ .$$

Pomenimo, na kraju ove tačke, još i to da ako bi se u polju operatora definisala topologija pomoću konvergencije tipa II, odgovarajuća definicija neprekidnosti operatorske funkcije tad bi glasila:

Operatorska funkcija f(x) neprekidna je nad intervalom $I=[\alpha,\beta]\subset(-\infty,+\infty)$ ako postoji $q(x,t)\in C(I)\mathcal{C}$, $q(x,t)\neq 0$, tako da je:

$$\{q(x,t)\}f(x)=\{f_1(x,t)\} \text{ gde } f_1(x,t)\in C(I)\mathcal{C}.$$

U tom slučaju, operatorska funkcija:

$$(2.1\text{-b}) \qquad R(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i(x)s^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i(x)s^i}$$

gde su: $m>n$, $m,n\in N$

$a_i(x)$ i $b_j(x)$ - numeričke realne neprekidne funkcije nad I

$i=0,1,\dots n$; $j=0,1,\dots,m$ bi bila neprekidna u tački $x=x_o\in I$ u kojoj je $b_m(x)=o$, a x_o je izolovana nula funkcije $b_m(x)$, ako je jedna numerička funkcija $b_j(x_o)\neq 0$.

Naime, tad bi postojala reprezentacija operatorske funkcije (2.1-b) sledećeg oblika:

zbog $m>n$

$$\frac{\ell^{m+1}(a_n(x)s^n+a_{n-1}(x)s^{n-1}+..+a_o(x))}{\ell^{m+1}(b_m(x)s^m+b_{m-1}(x)s^{m-1}+..+b_o(x))} =$$

$$= \frac{\{a_n(x)\frac{t^{m-n}}{(m-n)!}+a_{n-1}(x)\frac{t^{m-n+1}}{(m-n+1)!}+ \dots +a_o(x)\frac{t^m}{m!}\}}{\{b_m(x)+b_{m-1}(x)t+\dots \qquad +b_o(x)\frac{t^m}{m!}\}} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[x\to x_o]{} \frac{\{a_n(x_o)\frac{t^{m-n}}{(m-n)!}+a_{n-1}(x_o)\frac{t^{m-n+1}}{(m-n+1)!}+\dots+a_o(x_o)\frac{t^m}{m!}\}}{\{b_{m-1}(x_o)t+b_{m-2}(x_o)\frac{t^2}{2!}+\dots \qquad +b_o(x_o)\frac{t^m}{m!}\}} =$$

$$= \frac{a_n(x_o)\ell^{m-n+1} + a_{n-1}(x_o)\ell^{m+1}}{b_{m-1}(x_o)\ell^2 + \ldots b_o(x_o)\ell^{m+1}} = R(x_o)$$

Naprimer: operatorska funkcija $\frac{1}{sx-1}$ bila bi neprekidna u tački $x=0$ iako po teoremi 2.1-1 ova funkcija nije neprekidna.

Naime,

$$\frac{1}{sx-1} = \frac{\ell}{x\ell - \ell} = \frac{\{t\}}{\{x-t\}} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\{t\}}{\{-t\}}$$

Pri ispitivanju neprekidnosti operatorske funkcije:

$$f(z) = \frac{1}{a(z)s+b(z)}$$

gde su:

$a(z)$ i $b(z)$ neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive z nad kompaktnim skupom kompleksne ravni ($b(z)$ može biti konstanta npr. $b(z)=1$, što ne bi umanjilo teoremu) najpre ću se ograničiti na operatorsku funkciju $f(z)$ oblika:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_o)s+1} \tag{2.1-2}$$

i pokazati da važi

TEOREMA 2.1-2 <u>Neka je $D_{\varepsilon,\varrho}$ kompaktan skup, kompleksne ravni definisan na sledeći način:</u>

$$D_{\varepsilon,\rho}=\{z:\ 0\leq\varepsilon<|z-z_0|\leq\rho\}$$

Tada se, operatorska funkcija f(z) oblika (2.1-2) može na skupu $C\setminus\{z_0\}$ razviti u stepeni red oblika

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ell^{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{2.1-3}$$

$$f(z)\in C(D_{\varepsilon,\rho})M.$$

DOKAZ:

Kako je $z\neq z_0$ dok $z\in D_{\varepsilon,\rho}$ to je:

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)\left(1+\frac{\ell}{z-z_0}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ell^{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{2.1-3}$$

Treba pokazati da red (2.1-3) konvergira tj. da postoji $q\in\mathcal{C}$, $q\neq0$, sa osobinom da:

$$q\,f(z)=\{F(z,t)\}=q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ell^{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}}$$

pretstavlja uniformno konvergentan red funkcija na svakom kompaktnom skupu oblika $D_{\varepsilon,\rho}\times[0,T]$, $T>0$, na osnovu čega bi i $f(z)\in C(D_{\varepsilon,\rho})M$.

Neka je $q=\ell^2=\{t\}$, tada je:

$$\ell^2 f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ell^{n+3}}{(z-z_0)^{n+1}}= \tag{2.1-4}$$

$$=\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+2}}{(n+2)!(z-z_o)^{n+1}} \}$$

očigledno je, da su članovi reda (2.1-4) $f_n(z,t)=(-1)^n \frac{t^{n+2}}{(n+2)!(z-z_o)^{n+1}}$

neprekidne funkcije promenljivih z i t

dok $z\in C\ \{z_o\}$ i $t\in[0,T]$, $T>0$ a imaju osobinu da:

(2.1-5)

$$\left| f_n(z,t) \right| \leq \left| \frac{(-1)^n t^{n+2}}{(n+2)!(z-z_o)^{n+1}} \right|$$

$$\leq \frac{T^{n+2}}{(n+2)!|z-z_o|^{n+1}} \leq \frac{T^{n+2}}{(n+2)!\varepsilon^{n+1}}$$

Medjutim, za M>0 je:

$$(n+2)!=\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{n+2}\, dt > \int_M^{M+1} e^{-(M+1)} M^{n+2}\, dt= M^{n+2} e^{-(M+1)}$$

Odaberimo M>0, tako da je $M=2T/\varepsilon$ tj. $T/M\varepsilon = 1/2$. Tada dok $z\in D_{\varepsilon,\rho}$ $t\in[0,T]$, $T>0$ moguća majoracija :

$$\left| f_n(z,t) \right| < \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{n+1} \frac{1}{M^{n+1}} \frac{Te^{M+1}}{M} < \left(\frac{T}{\varepsilon M}\right)^{n+1} K = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} K$$

gde je $K=\frac{T}{M} e^{M+1}$

Kako numerički red $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergira, to prema ...

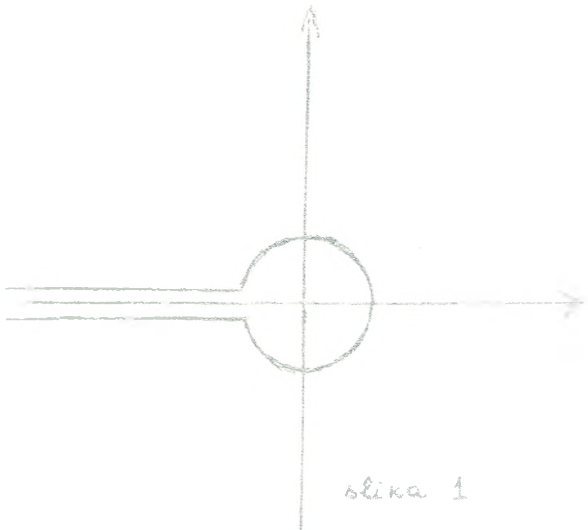
kriterijumu, red $\sum_{0}^{\infty} f_n(z,t)$ uniformno konvergira nad komp skupom $\{(z,t):\ z\epsilon D_{\varepsilon,\rho}\ \ t\in[0,T]\}$, te je funkcija f(z,t), definisana ovim redom neprekidna, odnosno $f(z)\epsilon C(D_{\varepsilon,\rho})$M.

2.2. WRIGHT-OVA FUNKCIJA $\phi\ (\beta,\sigma,z)$

Wright-ova funkcija definisana je na sledeći način:

$$\phi\ (\beta,-\sigma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)\ \Gamma(\beta-\sigma n)}\qquad o<\sigma<1$$

Uveo ju je Wright [55] koji je dao i njenu integralnu reprezentaciju, ali njene osobine detaljno je proučio i vrlo često koristio je u svojim radovima STANKOVIĆ [48] .



slika 1

Neka je u kompleksnoj u ravni data kontura C prikazana slikom 1. Kontura C polazi od $-\infty$ duž realne ose, u onom delu kompleksne u ravni u kome je $-3\Pi/2+\varepsilon/2<\arg u<-1/2(\Pi+\varepsilon)$, obilazi koordinantni početak u pozitivnom smeru i vraća se u $-\infty$ u onom delu ravni u kome je $1/2(\Pi+\varepsilon)<\arg u<1/2(3\Pi-\varepsilon)$.

Integralna reprezentacija Wright-ove funkcije ima oblik

(2.2-1)
$$\phi\ (\beta,-\sigma;z)=\frac{1}{2\Pi i}\int_C u^{-\beta}\exp(u+zu^{\sigma})\,du$$

u^{σ} je glavna grana funkcije.

Osobine Wright-ove funkcije:

$$(2.2\text{-}2)\quad \frac{1}{\sigma}\,\phi\,(o,-\sigma;\,-x^{-\sigma}) = x^{-\sigma}\ \phi\,(1-\sigma,\,-\sigma;-x^{-\sigma})$$

Za $z = -x^{-\sigma}$, gde je x realan pozitivan broj

$$(2.2\text{-}3)\quad F_{\beta}(x)=x^{\beta-1}\phi(\beta,-\sigma;-x^{-\sigma}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_o-i\infty}^{x_o+i\infty} s^{-\beta}\ \exp(xs-s^{\sigma})\,ds,\ x_o>o$$

Specijalno za $\beta=0$

$$F(x)=x^{-1}\phi(o,-\sigma\ ;-x^{-\sigma}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(ts-s^{\sigma})\,ds \qquad o\leq t<\infty$$

$$(2.2\text{-}4)\quad \int_{0}^{\infty} e^{-zx}\ \phi(1,-\sigma;-tx^{-\sigma})\,dx=z^{-1}\exp(-tz^{\sigma})$$

$$(2.2\text{-}5)\quad \ell^{\sigma}\{\ \phi(o,-\ \sigma;tx^{-\sigma})\ \frac{1}{\sigma t}\} =\{\phi(1,-\sigma;-tx^{-\sigma})\ \}$$

$$(2.2\text{-}6)\quad \phi\ (o,-\sigma;-x^{-\sigma}) > o \qquad\qquad o<x<\infty$$

$$(2.2\text{-}7)\quad \left|\phi(o,-\ \sigma;-tx^{-\sigma})\,x^{\sigma}/t\right| \leq A(\sigma);\ x\ t^{-\sigma\cdot 4} \geq 0$$

$$(2.2\text{-}8)\quad \frac{d}{du}\ \phi(1,-\sigma;-ut^{-\sigma})= \frac{1}{u\sigma}\phi(o,-\sigma\ ;-ut^{-\sigma})$$

$$(2.2\text{-}9)\quad \phi(o,-\nu;-tx^{-\sigma})\sim\sqrt{a}\,x^{\frac{-\nu}{2(1-\nu)}}\ t^{\frac{1}{2(1-\nu)}}\ \exp(-ax^{-\frac{\nu}{1-\nu}}\ t^{\frac{1}{1-\nu}}),\ t\to\infty$$

gde je $a= (1-\nu)^{\frac{\nu}{1-\nu}}$

SKENDŽIĆ [38] je pokazala da za $\alpha>0$ i $t,\ u\geq 0$ i svaki kompleksan broj z različit od nule, važi sledeća integralna reprezentacija Wright-ove funkcije:

$$(2.2\text{-}10)\qquad \phi\left(\frac{\alpha}{n}+2,\alpha;-\frac{t^{\alpha}}{n}\frac{u}{z}\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} w^{-\left(\frac{\alpha}{n}+2\right)}\exp\left(w-\frac{t^{\alpha}u}{nz}w^{-\alpha}\right)dw$$

$x_0>0,\quad n\in N$

Na kraju, u radu Despotović, Stanković, [41] dokazano je:

LEMA 2.2-1 Za $x>0$ i $a\in R$ je:

$$(2.2\text{-}11)\qquad \frac{s^{\nu-1}}{s^{\nu}+a}=\left\{\int_0^{\infty}\phi(0,-\nu;-tx^{-\nu})e^{-at}\frac{dt}{\nu t}\right\}\quad 0<\nu<1$$

Dokaz:

$$\frac{s^{\nu-1}}{s^{\nu}+a}=\frac{\ell}{1+a\ell^{\nu}}$$

$$a\ell^{\nu}\left\{\int_0^{\infty}\phi(0,-\nu;-t\,x^{-\nu})\,e^{-at}\,\frac{dt}{\nu t}\right\}=$$

$$=\left\{a\int_0^{x}\frac{(x-v)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}dv\int_0^{\infty}\phi(0,-\nu;-u\,v^{-\nu})e^{-au}\,\frac{du}{\nu u}\right\}$$

Prema (2.2-7) i (2.2-9) moguće razmeniti red integracije te je:

$$\left\{a\int_0^{\infty}e^{-au}\,\frac{du}{\nu u}\int_0^{x}\frac{(x-v)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\phi(0,-\nu;-u\,v^{-\nu})dv\right\}=$$

a na osnovu (2.2-5)

$$=\{a \int_0^\infty e^{-au}\, \phi(1,-\nu;-u\, x^{-\nu})\, du\}$$

Prema (2.2-8), primenom parcijalne integracije je:

$$a \int_0^\infty e^{-au} \phi(1,-\nu;-u\, x^{-\nu})\, du = -e^{-au} \phi(1,-\nu;-ux^{-\nu}) \Big|_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty \phi\,(o,-\nu;-u\, x^{-\nu})\, e^{-au}\, \frac{du}{\nu u}$$

Odnosno:

$$(2.2\text{-}12) \qquad a\ell^{\nu} \int_0^\infty \phi(o,-\nu;-tx^{-\nu})\, e^{at}\, \frac{dt}{\nu t} = \ell - \int_0^\infty \phi(o,-\nu;-tx^{-\nu})\, e^{at} \frac{dt}{\nu t}$$

što je trebalo pokazati.

Primenom leme [38] sada je lako pokazati da:

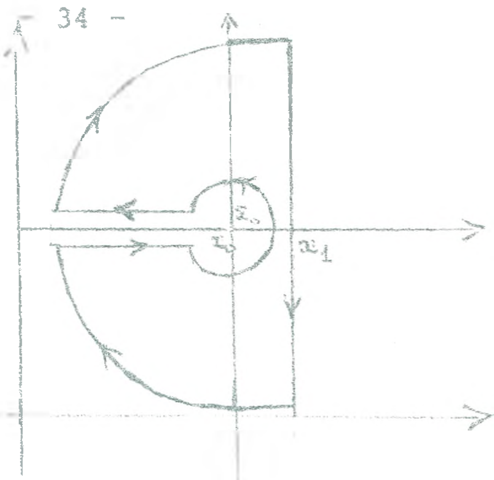
Numerička funkcija (2.1-4)

$$\ell^2 \frac{1}{(z-z_o)s+1} = \{F(z,t)\}$$ koja pripada $C(D_{\varepsilon,\rho})^{\check{C}}$ ima za svako $t \geq 0$ i $z \neq z_o$, $Re(z-z_o) > 0$ (tj. $|arg(z-z_o)| < \frac{\pi}{2}$) integralnu reprezentaciju:

$$(2.2\text{-}12) \qquad F(z,t) = \frac{t^2}{2i\pi} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{w^{-3} e^{w}}{(z-z_o)+tw^{-1}}\, dw$$

gde je $x_1 > x_o > o$

$\mathrm{Re}\, z_o = x_o$



Sl.2

TEOREMA 2.2-1 OPeratorska funkcija $f(z)$ definisana relacijom (2.1-2) može se neprekidno produžiti iz oblasti $\mathrm{Re}(z-z_o)>o$ i $z\neq z_o$ u oblast $\mathrm{Re}(z-z_o)>0$.

Analogno ovoj teoremi važi i

TEOREMA 2.2-2 Ako je:

i. $a(z)$ numerička funkcija kompleksne promenljive z, definisana i neprekidna nad skupom S_{zo} kome pripada i tačka z_o

ii. $a(z) = o \Longleftrightarrow z=z_o$
Tada, ako postoji okolina V_o tačke z_o takva da dok $z\in V_o\setminus\{z_o\}$ je $\mathrm{Re}\,\{a(z)\}>0$, operatorska funkcija

(2.2-12) $$\frac{1}{a(z)s+1}$$

neprekidna je na skupu S_{z_o} odnosno $\frac{1}{a(z)s+1} \in C(S_{z_o})M.$

Dokazi teorema 2.2-1 i 2.2-2 neposredno slede iz integralne reprezentacije Wrightove funkcije (2.2-1o) i osobine (2.2-12).

2.3 NEPREKIDNOST OPERATORSKE FUNKCIJE OBLIKA:

$$\frac{1}{a(x)s^{\nu}+b(x)} \qquad 0<\nu<1$$

Teorema koja je na izvestan način analogna teoremi 2.1-1 glasi:

TEOREMA 2.3-1 <u>Neka su ispunjeni uslovi teoreme 2.1-1. Potreban i dovoljan uslov da operatorska funkcija:</u>

$$\frac{1}{a(x)s^{\nu}+b(x)} \qquad 0<\nu<1 \tag{2.3-1}$$

<u>bude neprekidna u tački $x=x_o$ je da postoji okolina V_o tačke x_o, takva da je $b(x)/a(x)>0$ dok $x\varepsilon V_o\backslash\{x_o\}$.</u>

DOKAZ:

Uslov je dovoljan: na osnovu relacije (2.2-11) je:

$$\frac{s^{\nu-1}}{a(x)s^{\nu}+b(x)}=\frac{1}{a(x)}\frac{s^{\nu-1}}{(s^{\nu}+\frac{b(x)}{a(x)})}$$

$$=\frac{1}{a(x)}\left\{\int_o^{\infty}\phi(o,-\nu;-t\nu^{-\nu})\,e^{-\frac{b(x)}{a(x)}t}\,\frac{dt}{\nu t}\right\}$$

$$=\frac{1}{a(x)}\{\Psi(v)\}$$

Te je:

$$\frac{1}{a(x)s^{\nu}+b(x)}=s\begin{cases}\dfrac{\ell^{\nu}}{a(x)}\Psi(v) & , x\neq x_o\\[2ex] \dfrac{\ell}{b(x)} & , x=x_o\end{cases}$$

Na osnovu (2.2-12) je:

(2.3-2) $\frac{\ell}{a(x)}\{\Psi(v)\}=\frac{\ell}{b(x)}-\frac{1}{b(x)}\{\Psi(v)\}$

Ako postoji okolina V_o tačke x_o, takva da je $\frac{b(x)}{a(x)}>0$ dok $x\in V_o\setminus\{x_o\}$ funkcija (2.3-2) je neprekidna za $v>0$ i $x\in V_o\setminus\{x_o\}$.

Kad $x\to x_o$ $\frac{b(x)}{a(x)}\to\infty$ i ona teži $\frac{\ell}{b(x_o)}$ tj. operatorska funkcija (2.3-1) pripada $C(x_o)M$.

Uslov je potreban:

Pretpostavimo da ne postoji okolina tačke x_o u kojoj je $b(x)/a(x)>0$. Neka je $b(x_o)\neq 0$, a postoji zatvorena okolina $\bar{V}$, tačke x_o u kojoj je $b(x_o)$ različito o nule i $b(x)$ ne menja znak. Za svaku okolinu V_m, $V_m\subset\bar{V}$ postoji bar jedna tačka $x_m\in V_m$ za koju je: $\frac{b(x_m)}{a(x_m)}<0$

Kako $\left|\frac{b(x)}{a(x)}\right|$ nije ograničeno kad $x\to x_o$, to $b(x_m)\to\infty$ kad $x\to x_o$

Minorirajmo funkciju $\Psi(v)$ i dobijamo:

$$\Psi(v)>\int_c^d \phi(o,-v;-tv^{-v})e^{-\frac{b(x)}{a(x)}t}\frac{dt}{vt}=e^{-\frac{b(x)}{a(x)}c}\int_c^d \phi(o,-v;-tv^{-v})\frac{dt}{vt}$$

Kada bi (2.3-1) bila i u ovom slučaju neprekidna u $x=x_o$, postojala bi $g\in\mathcal{C}$, $g\neq 0$, tako da za svako fiksirano v je:

$$\left|\{g(v)\}\{\Psi(v)\}\right|<M$$

Obeležimo sa $\{\varphi(v)\}=\{g(v)\}\{\Psi(v)\}$

tad je: $$|\varphi(v)|\geq g(n)\,e^{-\frac{b(x)}{a(x)}c}\int_0^v du\int_c^d \phi(c,-v;-tu^{-v})\frac{dt}{vt}$$

$\frac{b(x)}{a(x)} \to -\infty$ kad $x \to x_o$, s toga ne može biti $\varphi(v)$ ograničena funkcija te operatorska funkcija (2.3-1) nije neprekidna u $x=x_o$.

2.4 NEPREKIDNOST KLASE OPERATORSKIH FUNKCIJA:

$$R^n(x) = \frac{1}{(a(x)s+b(x))}$$

Ispitivanje [6] neprekidnosti u tački $x=x_o$ operatorskih funkcija definisanih relacijom:

$$(2.4\text{-}0) \qquad (R(x))^n = \frac{1}{(a(x)s+b(x))}$$

proširuje delom rezultate dobivene u 2.1-1: oni slede iz ovde dokazanih u slučaju da je $n=1$.

Uslovi pod kojima su operatorske funkcije:

$$(2.4\text{-}1) \qquad R(x) = \frac{1}{(a(x)s+b(x))^{n^{-1}}} \qquad n \in N$$

koje su jedno rešenje (2.4-o) neprekidne u tački $x=x_o$, iskazani su teoremom 2.4-1 analognom teoremi 2.1-1.

Kako je klasa operatorskih funkcija (2.4-1) jedno rešenje algebarske operatorske jednačine (2.4-o) normalno je postaviti pitanje da li su i sva ostala rešenja algebarske operatorske jednačine (2.4-o) neprekidna u istoj tački $x=x_o$ pod istim uslovima kao i (2.4-1) ? Odgovor na ovo pitanje je potvrdan . Naime, ako klasu operatorskih funkcija (2.4-1) obeležimo sa $R_o(x)= R_o$ a racionalnu operatorsku funkciju $\frac{1}{a(x)s+b(x)}$ obeležimo sa $A(x)$, odnosno: $A(x)= \frac{1}{a(x)s+b(x)}$

$A(x) = A\varepsilon M$ tad algebarsku operatorsku jednačinu (2.4-o) možemo kraće napisati u obliku:

$$R^n(x)-A(x)=0 \quad \text{odnosno} \quad R^n-A=0$$

Kako je jedno njeno rešenje (2.4-1) R_o sva ostala rešenja su $\varepsilon_1 R_o, \varepsilon_2 R_o, \ldots, \varepsilon_n R_o$, gde su $\varepsilon_k (k=1,\ldots,n)$ rešenja algebarske operatorske jednačine: $y^n=1$. Naime, na osnovu osnovne teoreme algebre (algebarska jednačina n-tog stepena ima najviše n rešenja) je:

$$\prod_{k=1}^{n} (R-\varepsilon_k R_o)\ ) = R^n-A$$

Ako je i R_1 rešenje algebarske operatorske jednačine (2.4-0) tad je:

$$\prod_{k=1}^{n} (R_1-\varepsilon_k R_o) = 0$$

što povlači da bar jedan od faktora je nula tj. $R_1=\varepsilon_k R_o$.

Medjutim, $\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\Pi i}{n}}$ $(k=1,\ldots,n)$ ne utiče na neprekidnost ostalih rešenja algebarske operatorske jednačine (2.4-o) te su i sva ostala rešenja neprekidna pod istim uslovima kao i (2.4-1).

Navodim najpre teoremu Mikusińskog o ograničenom momentu [3] koju ću koristiti u dokazu teoremu:

TEOREMA C: Ako niz pozitivnih brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ zadovoljava uslove:

i $\sum_{o}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$ i $b_{n+1}-b_n > \varepsilon > 0$ za $n=1,2,\ldots$

ii. $g(t)$ je funkcija integrabilna u intervalu $[0,T]$ i takva da je:

$$\left|\int_0^T e^{b_n t}\, g(t)dt\right| < M$$

Tad je $g(t)=o$ skoro svuda u $[0,T]$

TEOREMA 2.4-1 Pretpostavimo da:

1. $a(x)$ i $b(x)$ su numeričke, relane, neprekidne funkcije nad intervalom $[x_1,x_2] = I$
2. $x_o \in I$ i x_o je izolovana nula funkcije $a(x)$ tj. $a(x_o)=o$
3. $b(x_o) \neq 0$

Potreban i dovoljan uslov da operatorska funkcija (2.4-1) bude neprekidna u tački $x=x_o$ je da postoji okolina Vo tačke u kojoj je $\frac{b(x)}{a(x)} > 0$ dok $x \in V_o \setminus \{x_o\}$.

DOKAZ:

Uslov je dovoljan:

za svako $p \in N$ je:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(a(x))^{\frac{1}{n}}\,\Gamma(\frac{1}{n})}\, e^{-\frac{b(x)}{a(x)}t} & x \neq x_o \\[2ex] \dfrac{1}{(b(x))^{\frac{1}{n}}} & x \neq x_o \end{cases}$$

$$= s^{p+1} \begin{cases} \dfrac{1}{(a(x))^{\frac{1}{n}}\,\Gamma(\frac{1}{n})\,p!} \displaystyle\int_0^t e^{\frac{b(x)}{a(x)}u}\, u^{\frac{1}{n}-1} (t-u)^p du, & x \neq x_o \\[2ex] \ell^{p+1} (b(x))^{n^{-1}} & ,x=x_o \end{cases}$$

Pretpostavimo da postoji okolina V_o tačke x_o u kojoj je $\frac{b(x)}{a(x)} = c(x) > o$ dok $x \in V_o \setminus \{x_o\}$, tada smenom $c(x)u = y^n$ izračunajmo numeričku funkciju:

$$P(x,t) = \frac{1}{(a(x))^{\frac{1}{n}} p!\Gamma(\frac{1}{n})} \int_o^t \exp(-c(x)u)\, u^{\frac{1}{n}-1} (t-u)^p \, du =$$

$$= \frac{n}{(b(x))^{\frac{1}{n}} p!\Gamma(\frac{1}{n})} \int_o^{\sqrt[n]{c(x)t}} \left(t - y^n c^{-1}(x)\right)^p \exp(-y^n)\, dy$$

$$= \frac{t^p}{(b(x))^{\frac{1}{n}} p!\Gamma(\frac{1}{n}+1)} \int_o^{\sqrt[n]{c(x)t}} \left[\exp(-y^n) \sum_{k=o}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \left(\frac{y^n}{c(x)t}\right)^k\right] dy$$

Označimo sa:

$$I_n(x,t) = \int_o^{\sqrt[n]{c(x)t}} \exp(-y^n)\, dy$$

$$I_n^k(x,t) = \int_o^{\sqrt[n]{c(x)t}} y^{nk} \exp(-y^n)\, dy$$

Primenom parcijalne integracije dobijamo:

$$I_n^k(x,t) = n^{-k} I_n(x,t) \prod_{i=1}^{k-1} (ni+1) - \frac{1}{n} e^{-c(x)t} (c(x)t)^{1/n} \left\{ (c(x)t)^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (c(x)t)^{i-1} \prod_{i}^{k-1} (i+1/n) \right\}$$

za $k=1,2,\ldots,p$

S toga se P(x,t) može napisati u obliku:

$$(2.4\text{-}2)\qquad P(x,t)=\frac{1}{(b(x))^{\frac{1}{n}}\,p!\,\Gamma(1+\frac{1}{n})}\Big[(t^{p}-Q(x,t))I_n(x,t)+T(x,t)\Big]$$

gde smo obeležili sa:

$$(2.4\text{-}3)\qquad Q(x,t)=\frac{1}{nc(x)}\Big[pt^{p-1}-\frac{n+1}{nc(x)}\binom{p}{2}t^{p-2}+\frac{(2n+1)(n+1)}{(nc(x))^{2}}\binom{p}{3}t^{p-3}-\dots+$$

$$\dots+\frac{(-1)^{p-1}}{(nc(x))^{p-1}}\prod_{i=1}^{p-1}(ni+1)\Big]$$

$$(2.4\text{-}4)\qquad T(x,t)=\frac{t^{\frac{1}{n}}e^{-c(x)t}}{n(c(x))^{\frac{n-1}{n}}}\Big\{t^{p-1}+t^{p-2}(nc(x))^{-1}\sum_{k=1}^{p-1}(nk+1)\binom{p}{k+1}(-1)^{k}+$$

$$+\ t^{p-3}(nc(x))^{-2}\sum_{k=2}^{p-1}(-1)^{k}(nk+1)(nk-n+1)\binom{p}{k+1}+$$

$$+\ \dots\ +$$

$$+\ \frac{(-1)^{p+1}}{(nc(x))^{n-1}}\prod_{i=1}^{p-1}(ni+1)\Big\}$$

Operatorska funkcija (2.4-1) ima prema tome oblik:

$$R(x)=s^{p+1}\begin{cases}\Big[b^{1/n}(x)\,p!\,\Gamma(1+\frac{1}{n})\Big]^{-1}\Big[(t^{p}-Q(x,t))I_n(x,t)+T(x,t)\Big], & x\neq x_0\\[2ex] \dfrac{t^{p}}{p!\,b^{1/n}(x)} & x=x_0\end{cases}$$

$Q(x,t)$ i $T(x,t)$ su definisane relacijama (2.4-3) odnosno (2.4-4)

Kada $x \to x_o$, nezavisno od t, tada $c(x) \to \infty$ a

$Q(x,t) \to Q(x_o,t)$ za $0 \leq t < \infty$

$T(x,t) \to T(x_o,t)$ za $0 \leq t < \infty$

$$\text{a } I_n(x,t) = \int_0^{\sqrt{c(x)}\,t} \exp(-y^n)\,dy = \Gamma(1+\tfrac{1}{n}) + O\left(e^{-\frac{1}{\pi}\sqrt{c(x)}\,t}\right)$$

kad $c(x) \to \infty$

$$\text{S toga } I_n(x,t) \to \int_0^{\infty} \exp(-y^n)\,dy = \Gamma(1+\tfrac{1}{n})$$

Numerička funkcija:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p!\,(b(x))^{1/n}\,\Gamma(1+\frac{1}{n})} \left[(t^p - Q(x,t))\,I_n(x,t) + T(x,t)\right] & x = x_o \\[2ex] \dfrac{t^p}{p!\,b(x)^{1/n}} & x = x_o \end{cases}$$

je neprekidna, odnosno pripada $C(I)\mathscr{E}$, te i operatorska funkcija (2.4-1) je neprekidna u $x=x_o$

Uslov je potreban:

Pretpostavimo sada da ne postoji okolina tačke x_o u kojoj je $\frac{b(x)}{a(x)} > 0$: tada će postojati zatvorena okolina $\overline{V}(x_o)$ tačke x_o u kojoj $b(x)$ ne menja znak i dostiže maksimum i minimum. Karakteristika neprekidne funkcije $\delta(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}$ je da za svaku okolinu $V_n(x_o)$ tačke x_o postoji tačka $x_n \in V_n(x_o)$ takva da je $\delta(x_n) > 0$.

Neka okoline $V_n(x_o)$ čine monotonu bazu: niz $\{x_n\}$ konvergira ka x_o i počev od jednog n_o, $V_n(x_o) \subset \overline{V}(x_o)$ za sve $n>n_o$. Zbog pretpostavke o $b(x)$ nad $V(x_o)$, da ima minimum nad $V(x_o)$ različit od nule, a znajući da je $a(x_o)=0$, sledi da $\delta(x_n)\to\infty$ kad $n\to\infty$ Kako je $\delta(x)$ neprekidna numerička funkcija, to postoji podskup iz $\overline{V}(x_o)$ koji se preslikava na polupravu $x>\delta(x_{n_o})$.

Isto tako, postoji podskup u svakom $V_n(x_o)$ koji se preslikava na polupravu $x>\delta(x_n)$. Neka je $\delta(x_{n_o})$ takvo da je:

$$m \leqslant \delta(x_o) < m+1$$

Formiramo niz x_i' na sledeći način:

$$\delta(x_i')=m+i; \quad k=\max n \text{ za koje } x_i' \in V_n(x_o) \text{ i}$$

$$x_i' \in V_k(x_o)$$

Kako je $\delta(x)$ neprekidna funkcija, ona će uzimati i sve vrednosti izmedju $\delta(x_{i+1})$ i $\delta(x_1)$ kad $x_i'<x<x_{i+1}'$, a niz $\delta_i=\delta(x_i)$ zadovoljava uslove teoreme C.

Ako bi i u ovom slučaju operatorska funkcija bila takodje neprekidna, postojala bi $f\in\mathcal{C}$, $f\neq o$, sa osobinom da je $f\,R(x)$ numerička funkcija dveju promenljivih x i t, neprekidna za $x=x_o$ i svako $t\geqslant 0$.

Naime, tada bi i za svako fiksno $T\in R^+$, postojao utvrdjen broj M takav da:

$$\left| \int_0^T e^{\delta_i u}\, u^{\frac{1}{n}-1} f(T-u)\,du \right| < M$$

Funkcija $g(u) = u^{\frac{1}{n}-1} f(T-u)$ integrabilna je u intervalu $[0,T]$

i uslovi teoreme C su zadovoljeni, te na osnovu iste teoreme sledi da $g(u)=0$, skoro svuda dok $u\in[0,T]$: odnosno $f(u)=0$ skoro svuda dok $u\in[0,T]$. To je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $f\neq 0$, stoga pretpostavka od koje smo pošli nije tačna odnosno operatorska funkcija (2.4-1) $R(x)$ nije neprekidna u tački $x=x_o$.

2.5. NEPREKIDNOST PRVOG IZVODA KLASE OPERATORSKIH FUNKCIJA

$$\frac{1}{(a(x)s+b(x))^{\frac{1}{n}}}$$

TEOREMA 2.5-1 Neka numeričke, realne funkcije $a(x)$ i $b(x)$ imaju prvi izvod u intervalu $I\subset(-\infty,+\infty)$ i zadovoljavaju uslove teoreme 2.4-1. Potreban i dovoljan uslov da operatorska funkcija (2.4-1) ima neprekidan izvod u tački $x=x_o$ je da postoji okolina V_o tačke x_o u kojoj $\frac{b(x)}{a(x)}>0$, dok $x\in V_o\setminus\{x_o\}$

DOKAZ:

Uslov je dovoljan: Ako postoji okolina V_o $\{x_o\}$ u kojoj je $\frac{b(x)}{a(x)}$ [illegible]

dok $x\in V_o\setminus\{x_o\}$, operatorska funkcija (2.4-1) je tad [illegible] vu

Teoreme 2.4-1 neprekidna u tački $x=x_o$ i ima obli[illegible]

$$R'(x)=s^{p+1}\begin{cases} P(x,t) & [illegible] \\ \dfrac{t^p}{p!(b(x))^{1/n}} & \end{cases}$$

[illegible]merička funkcija:

$$\left\{\begin{array}{ll} P(x,t)\ , & x\neq x_o \\ \dfrac{t^p}{p!\,(b(x))^{1/n}}\ , & x=x_o \end{array}\right\}$$

neprekidna je nad skupom $\{x_o\}\times[0,\infty)$

$$R'(x)=s^{p+1}\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x}\ , & x\neq x_o \\ \dfrac{-t^p\, b(x)}{n\, p!\,(b(x))^{1+1/n}}\ , & x=x_o \end{array}\right\}$$

Treba pokazati da je:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x}\ , & x\neq x_o \\ \dfrac{-t^p(b\ (x)}{n\, p!\,(b(x)^{1+1/n}}\ , & x\neq x_o \end{array}\right\}\in C(x_o)$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{p!\,\Gamma(1+1/n)}\Big\{-b'(x)\,(nb^{1+\frac{1}{n}}(x)\ )^{-1}(t^p-Q(x,t))\,I_n(x,t)-$$

$$-b'(x)\ T(x,t)\,[nb^{1+\frac{1}{n}}(x)]^{-1}+$$

$$+b(x)^{-\frac{1}{n}}\Big[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}-I_n(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\Big]+$$

$$+c'(x)\,n^{-1}c(x)^{\frac{1}{n}-1}(tb^{-1}(x))^{\frac{1}{n}}(t^p-Q(x,t))\Big\}$$

gde su:

$c(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, a funkcije $Q(x,t)$ i $T(x,t)$ su definisane relacijama (2.4-3) odnosno (2.4-4)

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{p!\Gamma(1+1/n)} \left\{ \frac{-t^p\, b'(x)\, I_n(x,t)}{n(b(x))^{1+1/n}} - \frac{b'(x)\,T(x,t)}{n(b(x))^{1+1/n}} + \right.$$

$$+ \frac{I_n(x,t)}{n(b(x))^{1/n}} \left[\left(\frac{b'(x)}{n\, b(x)} + \frac{c'(x)}{c^2(x)} \right) p t^{p-1} - \right.$$

$$- \frac{n+1}{n\, c^2(x)} \binom{p}{2} t^{p-2} \left(\frac{b'(x)}{nb(x)} + \frac{2c'(x)}{c(x)} \right) +$$

$$\left. \left. + \ldots + (-1)^p \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(ni+1)}{n^{p-1} c^p(x)} \left(\frac{b'(x)}{nb(x)} + \frac{p\, c'(x)}{c(x)} \right) \right] + \frac{c(x)\, t^{\frac{1}{n}} e^{-c(x)t}\, S(x,t)}{n c^{2-1/n}(x)} \right\}$$

gde je:

$$S(x,t) = \frac{t^{p-1}}{n} \left[1-n-p-\sum_{k=2}^{p} (-1)^{k+1} (nk-n+1) \binom{p}{k} \right] +$$

$$\frac{t^{p-2}}{n\, c(x)} \left[2(n+1)\binom{p}{2} + \sum_{k=3}^{p} (-1)^{k+1} (2-k)(nk-n+1)\binom{p}{k} \right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^p (n\, c(x))^{1-p} \left(\frac{2}{n} - p\right) \prod_{i=1}^{p-1} (ni+1)$$

Kada $x \to x_o$ nezavisno od t, tad za svako $p-1 \geq 1$, odnosno $p \geq 2$ je:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \xrightarrow[x \to x_o]{} \frac{-t^p b'(x_o)\, \Gamma(1+1/n)}{n\, p!\, b^{1+1/n}(x_o)\Gamma(1+1/n)} - \frac{\Gamma(1+1/n)\, a(x_o)\, p\, t^{p-1}}{p!\, b^{1/n}(x_o)\Gamma(1+1/n)}$$

Odnosno $R(x) \to -s^{p+1} \zeta^{p+1} \left[\frac{b'(x_o)}{n(b(x_o))^{1+1/n}} - s \left(\frac{a(x_o)}{b(x_o)^{\frac{1}{n}+1}} \right) \right] =$

$$= \frac{-b'(x_o)}{n(b(x_o))^{1+\frac{1}{n}}} = R'(x_o)$$

Uslov je potreban:

Ako ne postoji okolina V_o tačke x_o u kojoj je $\frac{b(x)}{a(x)} > 0$ dok $x \in V_o \setminus \{x_o\}$, tad prema teoremi 2.4-1, operatorska funkcija (2.4-1) nije neprekidna u tački $x=x_o$, te ne može imati neprekidan prvi izvod u tački $x=x_o$ tj $R(x) \notin C_1(x_o)M$.
Time je dokazano da je uslov teoreme potreban.
Analogna teorema teoremi 2.5-1 glasi:

TEOREMA 2.5-2 Neka realne, numeričke funkcije $a(x)$ i $b(x)$ imaju k-ti izvod u svakoj tački x intervala I, a zadovoljavaju uslove teoreme 2.4-1. Potreban i dovoljan uslov da operatorska funkcija 2.4-1) $R(x)$ ima neprekidan k-ti izvod u tački $x=x_o$ dat je teoremom 2.5-1.

U dokazu ove teoreme treba za p uzeti onaj prirodan broj za koji je $p-1 \geq k$, $p \geq k+1$).

3. GLAVA

3.1 KONVERGENCIJA REDOVA ČIJI SU OPŠTI ČLANOVI RACIONALNE FUNKCIJE PO OPERATORU s

Konvergencija redova čiji su opšti članovi racionalne funkcije po operatoru s, na prvi pogled izgleda jednostavna. Upoznaćemo je s toga u nekoliko posebnih slučajeva.

TEOREMA 3.1-1 Pretpostavimo da:

i. $\{\beta_n\}$ je niz pozitivnih realnih brojeva, koji ima osobinu:

$$0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n < \ldots \qquad \beta_n \to \infty, n \to \infty$$

$$(3.1\text{-}1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^k} = \infty \qquad k \in R^+$$

$$(3.1\text{-}2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^{k+1}} \quad \text{konvergira}$$

ii. $a_n(x)$ je niz numeričkih, realnih, neprekidnih, funkcija nad intervalom $I = [a,b] \subset (-\infty,\infty)$, $a_n(x) > 0$, $x \in I$ $a_n(x) = O(\beta_n)$

Tada red operatorskih funkcija

$$(3.1\text{-}3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^k \, (a_n(x)s + \beta_n)} = f(x)$$

konvergira nad intervalom I i definiše neprekidnu operatorsku funkciju nad I.

3. GLAVA

3.1 KONVERGENCIJA REDOVA ČIJI SU OPŠTI ČLANOVI RACIONALNE FUNKCIJE PO OPERATORU s

Konvergencija redova čiji su opšti članovi racionalne funkcije po operatoru s, na prvi pogled izgleda jednostavna. Upoznaćemo je s toga u nekoliko posebnih slučajeva.

TEOREMA 3.1-1 <u>Pretpostavimo da:</u>

i. $\{\beta_n\}$ <u>je niz pozitivnih realnih brojeva, koji ima osobinu:</u>

$$0\leq\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_n<\ldots \qquad \beta_n\to\infty,\ n\to\infty$$

$$(3.1\text{-}1)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^{k}}=\infty \qquad k\in R^{+}$$

$$(3.1\text{-}2)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^{k+1}} \quad \text{konvergira}$$

ii. <u>$a_n(x)$ je niz numeričkih, realnih, neprekidnih, funkcija nad intervalom $I=[a,b]\subset(-\infty,\infty)$, $a_n(x)>0$, $x\in I$</u>

<u>$a_n(x)=O(\beta_n)$</u>

<u>Tada red operatorskih funkcija</u>

$$(3.1\text{-}3)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^{k}\,(a_n(x)s+\beta_n)}=f(x)$$

<u>konvergira nad intervalom I i definiše neprekidnu operatorsku funkciju nad I.</u>

DOKAZ:

Ako dati red pomnožimo operatorom integraljenja ℓ dobijamo

$$(3.1\text{-}4)\quad \ell \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^k (a_n(x)s+\beta_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \ell \left\{ \frac{1}{\beta_n^k a_n(x)} e^{-\frac{\beta_n}{a_n(x)} t} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^{k+1}} \left(1-e^{-\frac{\beta_n}{a_n(x)} t}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,t) \right\}$$

Kako $f_n(x,t) \in C(I)$ $\mathcal{E}$ i

$$\left| f_n(x,t) \right| < \frac{1}{\beta_n^{k+1}}$$

a po pretpostavci i. red (3.1-2) konvergira, to prema Weierstrassovom kriterijumu red (3.1-4) uniformno konvergira nad oblašću $D=\{(x,t) : x \in I, 0 \le t \le T\}$ i definiše neprekidnu funkciju $F(x,t)$, $F(x,t) \in C(I)$ $\mathcal{E}$, odnosno, redom (3.1-3) definisana je neprekidna operatorska funkcija $f(x)$ nad I $f(x) \in C(I)$ M.

Posledice teoreme 3.1-1

Posledica 3.1-1.1 Ako numerički niz $\{\beta_n\}$ ispunjava uslov

teoreme 3.1-1 , red operatora

$$(3.1\text{-}5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^k (s+\beta_n)} \qquad k \in R^+$$

konvergira.

Posledica 3.1-1.2. Ako je uslov i. teoreme 3.1-1 i unjen za k=1, tad red operatora

$$(3.1\text{-}6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s + \beta_n}$$

ne konvergira u polju operatora K.

DOKAZ: 3.1-1.2. Opšti član reda (3.1-6.) možemo napisati u obliku:

$$\frac{1}{s+\beta_n} = \frac{1}{\beta_n} - \frac{s}{\beta_n(s+\beta_n)}$$

Tvrdjenje sada sledi iz pretpostavke i. teoreme 3.1-1 za k=1 i posledice 3.1-1.1. (k=1)

Analogno, ako su ispunjeni uslovi i. za k=1 i ii. Tada red operatorskih funkcija

$$(3.1\text{-}7) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(x)s+\beta_n}$$

ne konvergira dok $x \in I$.

TEOREMA 3.1-2 Pretpostavimo da:

i. Numerički niz $\{a_n\}$ ima osobinu $a_n = O(n^k)$ kad $n \to \infty$, $k \in Z^+$

ii. b(x) je realna, numerička, neprekidna i pozitivna funkcija, $b(x) > 0$, dok $x \in I = [\alpha, \beta] \subset (-\infty + \infty)$. Tada red operatorskih funkcija oblika:

$$(3.1\text{-}7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \; n!}{(b(x)s+1)(b(x)s+2)\dots(b(x)s+n)} = f(x)$$

konvergira nad intervalom I i definiše neprekidnu operatorsku funkciju nad intervalom I, $f(x)\in C(I)M$.

DOKAZ:

Ako red (3.1-7) pomnožimo operatorom integraljenja $\ell=\frac{1}{s}$

dobićemo red neprekidnih funkcija dve promenljive x i t

$$(3.1\text{-}8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{s(b(x)s+1)\ldots(b(x)s+n)}$$

$x\in I$, $t\geq 0$, za koji ćemo, odmah, pokazati da uniformno konvergira dok $x\in I$ i $t\in[0,T]$ te prema tome definiše neprekidnu funkciju i.

Opšti član ovog reda razložićemo na (n+1) sabiraka oblika:

$$\frac{1}{s(b(x)s+1)(b(x)s+2)\ldots(b(x)s+n)} = \frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{b(x)s+1}+\cdots+\frac{A_n}{(b(x)s+n)}$$

Koeficijenti A_i odredjeni su sa:

$$A_0=\frac{1}{n!}, \quad A_1=-\frac{b(x)}{(n-1)!}, \quad A_2=\frac{b(x)}{2(n-2)!} \quad \ldots, \quad A_i=(-1)^i\frac{b(x)}{i!(n-i)!}$$

$i=1,2,\ldots,n$

Opšti član reda (3.1-8) ima oblik:

$$\frac{a_n n!}{s(b(x)\ s+1)(b(x)s+2)\ \ldots\ (b(x)s+n)} =$$

$$= a_n\left[\frac{1}{s}-\binom{n}{1}\frac{1}{s+\frac{1}{b(x)}}+\binom{n}{2}\frac{1}{s+\frac{2}{b(x)}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{s+\frac{n}{b(x)}}\right]$$

$$= a_n\{1-\binom{n}{1}e^{-\frac{t}{b(x)}}+\binom{n}{2}e^{-\frac{2t}{b(x)}}-\ldots+(-1)^n e^{-\frac{nt}{b(x)}}\}$$

$a_n\{1-e^{-\frac{t}{b(x)}})^n\}\in C(I)\mathcal{C}$, a prema pretpostavci

i. $|a_n|<K\,n^k \quad n\to\infty\ ,\ k\in Z^+$

ii. $0<1-e^{-\frac{t}{b(x)}}<1\ ,\quad x\in I\quad t\in[0,T],\quad T>0$

Poznato je medjutim da kad $n\to\infty$

$$\frac{n^k}{\Gamma(k+1)}\sim\binom{n+k}{n}$$

Te imamo, $x\in I,\quad t\in[0,T]$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,(1-e^{-\frac{t}{b(x)}})^n<K\sum_{n=0}^{\infty}n^k\left(1-e^{-\frac{t}{b(x)}}\right)^n<$$

$$<M\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}\left(1-e^{-\frac{t}{b(x)}}\right)^n=$$

$$=M\frac{1}{\left(1-1+e^{-\frac{t}{b(x)}}\right)^{k+1}}=Me^{\frac{k+1}{b(x)}t}$$

S toga red (3.1-8)uniformno konvergira dok $x\in I$, $t\in[0,T]$ i njim je definisana neprekidna funkcija $F(x,t)\in C(I)\mathcal{C}$, a odgovarajuću operatorska funkcija (3.1-7) $f(x)$ je neprekidna dok $x\in I$, $f(x)\in C(I)M$.

Posledica teoreme 3.1-2 Pretpostavimo da je ispunjen uslov i. Teoreme 3.1-2 i da je $b_n(x)$ niz numeričkih, neprekidnih funkcija nad intervalom $I=[\alpha,\beta]\subset(-\infty,+\infty)$, $b_n(x)>b(x)>0$ dok $x\in I$. Tada red operatorskih funkcija:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{(b_1(x)s+1)(b_2(x)s+2)\ldots(b_n(x)s+n)} = g(x) \tag{3.1-9}$$

konvergira nad intervalom I, a njime je definisana neprekidna operatorska funkcija nad I, $g(x)\in C(I)M$.

3.2 PROBLEM KONVERGENCIJE REDOVA OBLIKA:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{s+\beta_n}$$

Ovde ćemo se pozabaviti pitanjem konvergencije reda operatora oblika:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{s+\beta_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{e^{-\beta_n t}\} \tag{3.2-1}$$

gde su:

$\{a_n\}$ operatori, $a_n\in K$,

β_n je numerički niz koji ima osobinu:

$0\leq\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_n<\ldots$

$\beta_n\to\infty$ kad $n\to\infty$

DEFINICIJA 3.2-1 Stepenasta funkcija $A(x)$ niza operatora a_n,

$$A(x) = \sum_{\beta_n \leq x} a_n \quad , \qquad A(x) = \begin{cases} 0 & x = \beta_0 \\ \sum_{n=1}^{k} a_n & \beta_k \leq x < \beta_{k+1} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Na osnovu Teoreme 1.4-4 i relacije (1.4-2) lako je pokazati da važi:

TEOREMA 3.2-1 Pretpostavimo da je:

i. f(x) neprekidna operatorska funkcija dok $x \in [0,\infty)$

ii. U polju operatora K, postoji granica $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(u)dA(u)$ i jednaka je:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(u)dA(u) = \int_0^{\infty} f(u)dA(u)$$

Tada konvergira u polju operatora K i red operatora $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(\beta_k)a_k$ i važi:

$$(3.2\text{-}2) \qquad \int_0^{\infty} f(u)dA(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; f(\beta_k)$$

DOKAZ:

Obeležimo sa:

$$q_k(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leq u \leq \beta_{k-1} \\ 1 & \beta_k < u < \infty \end{cases} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Tada se stepenasta funkcija A(u) niza operatora a_n može napisati u obliku:

$$A(u) = a_0 q_0(u) + a_1 q_1(u) + \ldots + a_n q_n(u) + \ldots$$

$$= a_0 \int_0^u dq_0(u) + \int_0^u a_1 dq_1(u) + \ldots + \int_0^u a_n dq_n(u) + \ldots$$

$$= \sum_{\beta_n \leq u} \int^{u} a_n dq_n(u) \qquad u \in [o,x]$$

Kako je A(u) funkcija ograničene varijacije dok $u \in (o,x)$, po teoremi 1.4-4 , a funkcija f(u) je neprekidna operatorska funkcija nad svakim intervalom $[o,x] \subset [0,\infty)$ to će uvek postojati $\int_0^x f(u)d\,A(u)$ i on je jednak:

$$\int_0^x f(u)dA(u) = \sum_{\beta_n \leq x} \int_0^x f(u)a_n\, dq_n(u) \tag{3.2-3}$$

$$= \sum_{\beta_n \leq x} a_n \{ \int_0^x f(u)dq_n(u) \}$$

Na osnovu pretpostavke teoreme i. operatorska funkcija f(u) se može napisati u obliku:

$$f(u) = p\{f_1(u,t)\} \qquad p \in K, \quad \{f_1(u,t)\} \in C\,[0,x]\,\mathcal{C}$$

Zato je:

$$\sum_{\beta_n \leq x} a_n \{ \int_0^x f(u)dq_n(u) \} = \sum_{\beta_n \leq x} a_n\, p\, \{ \int_0^x f_1(u,t)dq_n(u) \}$$

$$= \sum_{\beta_n \leq x} a_n\, p\, \{f_1(\beta_n,t)\}$$

$$= \sum_{\beta_n \leq x} a_n\, f(\beta_n) \tag{3.2-4}$$

Na osnovu pretpostavke ii. teoreme, relacije (3.2-3) i (3.2-4) sledi konvergencija reda operatora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, f(\beta_n)$ i važi:

$$\int_0^{\infty} f(u)d\,A(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(\beta_n)$$

POSLEDICE TEOREME 3.2-1

Posledica 3.2-1.1

Kako je $f(x) = \frac{1}{s+x} = \{e^{-xt}\}$ neprekidna operatorska funkcija, odnosno $f(x)=\{f(x,t)\}\in C[0,\infty)$, to ako za svako $t\geq 0$ postoji:

$$\lim_{x\to\infty} \left\{ \int_0^x e^{-ut}\, dA(u) \right\}$$

tad konvergira i red operatora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \{e^{-\beta_n t}\}$ i važi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{s+\beta_n} = \lim_{x\to\infty} \left\{ \int_0^x e^{-ut}\, dA(u) \right\}$$

Posledica 3.2-1.2

Red operatora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s+\beta_n} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta_n t} \right\}$$

gde je $0\leq\beta_0<\beta_1< \ldots <\beta_n < \ldots \beta_n \to\infty$ kad $n\to\infty$ ne konvergira u polju operatora K . Zato što u polju operatora ne postoji za $\forall t\geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^n e^{-ut}\, du \right\}$$

4. GLAVA

4.1 U T GRANICA U POLJU OPERATORA

U ovoj glavi ispitana je konvergencija specijalnih redova operatora, primenom linearnih, neprekidnih operatorskih transformacija U_m i T^{-z}. Ove transformacije uveo je Mikusinski ali ih je detaljnije ispitao Gesztelyi [14] [17] [18] .

Poznato je, da red operatora

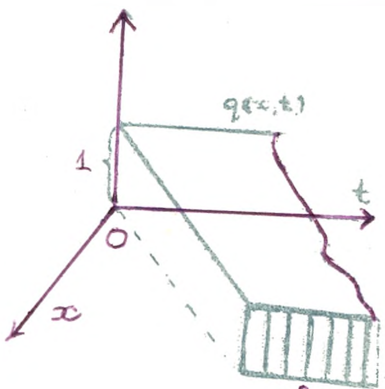
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n s} \tag{4.1-o}$$

gde su:

$\{b_n\}$ niz pozitivnih realnih brojeva, koji monotono teži beskonačnosti $b_n \to \infty$, $n \to \infty$.

a_n proizvoljni kompleksni brojevi, $\underline{s}$ operator diferenciranja - uvek konvergira u polju operatora K. Red (4.1-o) nazovimo, analogno terminu u klasičnoj analizi, DIRICHLET-ovim redom. Naime,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n sq(b_n) = s \sum_{n=0}^{\infty} a_n\{q(b_n,t)\}$$



sl 3

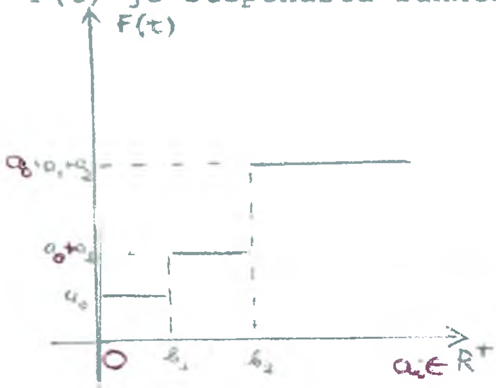
$$= s \sum_{n=0}^{\infty}\{a_n \; q(b_n,t)\}$$

$$= s\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \; q(b_n,t)\}$$

$$= s\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\}$$

$$= s\{F(t)\} \tag{4.1-1}$$

$F(t)$ je stepenasta funkcija koja se sa n menja samo za $t>b_n$



sl. 4

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -\infty<t<b_0 \\ a_0, & b_0\leq t<b_1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k, & b_n\leq t<b_{n+1} \end{cases}$$

Obeležimo sa D skup svih onih operatora iz K, koji su definisani Dirichlet-ovim redovima oblika (4.1-o).

Linearne, multiplikativne, neprekidne operatorske transformacije definisane su sa:

a. $T^p(f) = \{e^{pt} f(t)\}$ za $f \in \mathcal{C}$, p je kompleksan broj

$$T^p x = T^p \frac{f}{g} = \frac{T^p f}{T^p g} \quad : \quad x = \frac{f}{g} \in K, \; f,g \in \mathcal{C}, \; (g\neq 0)$$

Ako ovako definisanu operatorsku transformaciju T^p primenimo na operator diferenciranja $\underline{s}$ dobijamo:

$$(4.1\text{-}2) \quad T^p s = T^p \frac{l^2}{l^3} = \frac{\{e^{pt}\, t\}}{\{e^{pt}\, \frac{t^2}{2}\}} = \frac{\frac{1}{(s+p)^2}}{\frac{1}{(s+p)^3}} = (s+p)$$

b. $U_k(f) = \{k\, f(kt)\}$ za $f \in \mathcal{C}$, k je pozitivan realan broj

$$U_k x = U_k \frac{f}{g} = \frac{U_k f}{U_k g} \quad : \quad x = \frac{f}{g} \in K, \; f,g \in \mathcal{C}, \; (g\neq 0)$$

Ako U_k primenimo na operator diferenciranja s imamo:

$$(4.1\text{-}3)\quad U_k\, s = U_k \frac{\ell^2}{\ell^3} = \frac{\{k^2 t\}}{\{k\, \frac{k^2 t^2}{2}\}} = \frac{k^2\{t\}}{k^3\{\frac{t^2}{2}\}} = \frac{\{t\}}{k\{\frac{t^2}{2}\}} = \frac{\ell^2}{k\ell^3} = \frac{s}{k}$$

GESZTELYI je dokazao da je:

TEOREMA A

Za svaku neprekidnu, linearnu i multiplikativnu operatorsku transformaciju $F \neq 0$, operator $F(s)$ je logaritam. Operatorska funkcija $f(x)=F(e^{-x\, s})$ je rešenje početnog problema:

$$f'(x)+F(s)f(x) = 0$$

$$f(0) = 1$$

S toga je $f(e^{-x\, s}) = e^{-x\, F(s)}$

TEOREMA B

Postoji li, u polju operatora K, granica

$$\lim_{k\to\infty} U_k\, x = a$$

za proizvoljan operator $x \in K$, tad je a kompleksan broj. Operatorske transformacije T^p i $\mathcal{U}_k$ su neprekidne, linearne i multiplikativne [17]

Dokazaćemo najpre dve Leme.

LEMA 4.1- Za proizvoljan kompleksan broj z, operatorska transformacija T^{-z} preslikava $\mathcal{D}$ u $\mathcal{D}$. Naime, T^{-z} je u odnosu na algebarsku strukturu skupa $\mathcal{D}$, koja je indukovana iz polja operatora K, endomorfizam.

DOKAZ:

Na proizvoljan kompleksan broj z, zbog neprekidnosti, linearnosti i multiplikativnosti operatorske transformacije T^{-z} sledi:

$$T^{-z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\,b_n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} T^{-z}\,(a_n e^{-sb_n}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, T^{-z}(e^{-sb_n}) =$$

(na osnovu teoreme A) $$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-b_n T^{-z} s} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-b_n (s+z)} =$$

$$= \left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{-sb_n}\right\} \in \mathcal{D};\; c_n = a_n e^{-zb_n} \in C$$

LEMA 4.1-2. <u>Za proizvoljan utvrdjen broj $k \in R^+$, operatorska transformacija U_k je endomorfizam skupa $\mathcal{D}$.</u>

DOKAZ:

Je analogan kao u Lemi 4.1-1 i sledi iz neprekidnosti, linearnosti i multiplikativnosti operatorske transformacije U_k [17]

$$U_k\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} U_k(a_n e^{-sb_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_k(e^{-sb_n}) =$$

(prema teoremi A) $$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n U_k s} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-\frac{b_n}{k} s}\right) \in \mathcal{D}$$

Neka je z proizvoljan kompleksan broj, $\mathrm{Re}\{z\} > x_o$, a $k \in R^+$, tad zbog linearnosti, neprekidnosti i multiplikativnosti transformacije U_k (T^{-z}), a na osnovu LEMA 4.1-1. i 4.1-2 sledi:

$$U_k\left\{T^{-z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n s}\right]\right\} = U_k\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n(s+z)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} U_k(a_n e^{-b_n(s+z)}) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(\frac{s}{k}+z)b_n}\right) \in \mathcal{D}$$

DEFINICIJA 4.1-1

Kada u polju operatora K, postoji granica:

$$\lim_{k\to\infty} U_k T^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(\frac{s}{k}+z)b_n}$$

tu granicu nazvaćemo UT granicom datog Dirichletovog reda (4.1-o) za dato z.

Na osnovu (4.1-1.) je:

$$U_k\left\{T^{-z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\beta_n}\right]\right\} = U_k\{T^{-z}[\mathcal{L}\{F(t)\}]\}$$

$$= U_k\left[T^{-z} s T^{-z}\{F\}(t)\right] = \text{(prema 4.1-2)}$$

$$= U_k\left[(s+z)T^{-z}\{F\}\right] =$$

$$= U_k(s+z)U_k T^{-z}\{F\} = \text{(prema 4.1-3)}$$

$$=\left(\frac{s}{k}+z\right) U_k T^{-z}\{F\} \tag{4.1-4}$$

Na osnovu definicije 4.1-1. relacije (4.1-4) teoreme b, sledi: Kad u polju operatora K, postoji granična vrednost U T, Dirihletovog reda (4.1-0) ona je jednaka:

$$\lim_{k\to\infty} U_k T^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} = z \lim_{k\to\infty} U_k T^{-z}\{F\} = a(z)$$

TEOREMA 4.1-1 Ako Dirihletov red oblika:

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n z} \tag{4.1-5}$$

$$0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots \quad < b_n < \qquad b_n \to \infty, n \to \infty$$

konvergira za Re $z > \sigma \geq 0$, tada za svako takvo z u polju operatora K, postoji U T granica:

$$\lim_{k\to\infty} U_k \left\{T^{-z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right]\right\}$$

i važi:

$$\lim_{k\to\infty} U_k T^{-z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right] = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{s}{k}+z\right)b_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n z}$$

$$= \left\{ z \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t)\,dt \right\}$$

DOKAZ:

Ako Dirihletov red (4.1-5) za Re $z>\sigma\geq 0$, konvergira, on se tada može, kao što je poznato [9] prikazati u obliku:

$$\frac{\Psi(z)}{z} = \int_0^\infty e^{-zt} F(t)dt \qquad \text{za Re } z>\sigma\geq 0$$

σ je apscisa konvergencije Dirihletovog reda.

Odnosno:

$$\frac{\psi(z)}{z} = \mathfrak{L}\{F(t)\} \qquad \text{za Re } z>\sigma\geq 0 \quad \text{gde je}$$

$F(t) = \sum_{\beta_n\leq t} a_n$; $F(t)$ je stepenasta funkcija koja se sa n menja samo za $t\geq b_n$.

Kako postoji $\mathfrak{L}\{F(t)\}$ za Re $z>\sigma\geq 0$, to će na osnovu teoreme Gesztelyi-a [17] postojati, u polju operatora K, za Re $z>0$ i

$$\lim_{k\to\infty} U_k\left[T^{-z}\{F\}\right] \quad \text{i on je jednak sa } \mathfrak{L}\{F(t)\}$$

tj.

$$\lim_{k\to\infty} U_k \; T^{-z}\{F(t)\} = \mathfrak{L}\{F(t)\} \qquad \text{za Re}\{z\}>\sigma\geq 0$$

Naime, za Re$\{z\}>0$ je:

$$U_k(T^{-z}\{F\}) = \{k\, e^{-ktz} F(kt)\}$$

Tada je $\frac{1}{s^2}\left[U_k(T^{-z}\{F\})\right] = \ell^2\{ke^{-ktz}F(kt)\}$

$$=\ell\{\int_0^t k\, e^{-zuk}F(ku)du\}$$

$$=\ell\{\int_0^{kt} e^{-zx}\, F(x)dx\}$$

$$=\{\int_0^t\int_0^{k\tau} e^{-zx}\, F(x)dxd\tau\}$$

Kako postoji $\mathcal{L}\{F\}$ za Re $z>\sigma\geq 0$ to je:

i. $\int_x^\infty e^{-zx}F(x)dx$ neprekidna funkcija po x dok $x\in[0,\infty)$

ii. $\left|\int_x^\infty e^{-zx}\, F(x)dx\right| < M$ dok $x\in[0,\infty)$

iii.

$\lim_{x\to\infty}\int_x^\infty e^{-zx}\, F(x)dx = 0$ tj. za $x>N_1$, uvek je moguće

$$\left|\int_x^\infty e^{-zx}\, F(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2T};\ T\in R^+$$

Sada je lako pokazati da niz neprekidnih funkcija $\frac{1}{s^2}\, U_k(T^{-z}\{F\})$ uniformno konvergira u intervalu $t\in[0,T]$ funkciji $\{t\int_0^\infty e^{-zx}F(x)dx\}$ za Re $\{z\}>\sigma\geq 0$. Naime,

$$\left|t\int_0^\infty e^{-zx}\, F(x)dx - \int_0^t\int_0^{k\tau} e^{-zx}\, F(x)dx\, d\tau\right| = \left|\int_0^t\int_{k\tau}^\infty e^{-zx}F(x)dx\, d\tau\right|$$

$$\left|\int_0^t\int_{k\tau}^{\infty} e^{-zx}F(x)\,dx\,d\tau\right| < \int_0^t\left|\int_{k\tau}^{\infty} e^{-zx}F(x)\,dx\,d\tau\right|$$

a za $k>N$ i $t\in\left[0,\frac{\varepsilon}{2M}\right]\cup\left[\frac{\varepsilon}{2M},T\right]$ zbog osobina ii. i iii.

$$\int_0^t\left|\int_{k\tau}^{\infty} e^{-zx}F(x)\,dx\right|d\tau < \int_0^{\frac{\varepsilon}{2M}}\left|\int_{k\tau}^{\infty} e^{-zx}F(x)\,dx\right|d\tau + \int_{\frac{\varepsilon}{2M}}^{t}\left|\int_{k\tau}^{\infty} e^{-zx}F(x)\,dx\right|d\tau \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\varepsilon}{2M}} M\,d\tau + \int_{\frac{\varepsilon}{2M}}^{t}\frac{\varepsilon}{2T}\,d\tau = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2T}\left(t-\frac{\varepsilon}{2M}\right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Odnosno, za $\operatorname{Re}\{z\}>\sigma\geq 0$, niz $\frac{1}{s^2}\left[U_k(T^{-z}\{F\})\right]$ uniformno konvergira u intervalu $[0,\infty)$ funkciji $\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{F\}$

Znači za $\operatorname{Re}\{z\}>\sigma\geq 0$, postoji granica

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(\frac{s}{k}+z\right)\ U_k T^{-z}\{F\}\right] \quad \text{i važi:}$$

$$\lim_{k\to\infty} U_k\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-zb_n}$$

$$= \left\{ z\int_0^{\infty} e^{-zt}F(t)\,dt\right\}$$

PRIMER 1. Neka je $\{\beta_n\}$ pozitivan, monotono rastući niz brojeva, $\beta_n\to\infty$, $n\to\infty$, koji zadovoljava sledeće uslove

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n}=\infty \qquad \beta_{n+1}-\beta_n>\sigma\geq 0$$

Tada red:

$$\Psi(z) = 1+\alpha_1 e^{-\beta_1 z}+\alpha_2 e^{-\beta_2 z} + \dots + \dots$$

sa koeficijentima

$$\alpha_n = -\frac{1}{e}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k-\beta_n}\exp\left(-\frac{\beta_n}{\beta_k}\right)$$

konvergira apsolutno za sve kompleksne vrednosti z i uniformno za Re $\{z\}\geq x_0$. Na osnovu teoreme 4.1-1 dati red konvergira i u polju operatora K, odnosno za sve kompleksne vrednosti z postoji U T granica:

$$\lim_{k\to\infty} U_k\left[T^{-z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-s\beta_n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-z\beta_n}$$

Dati red dobijamo koristeći niz$\{\Psi_k\}$ HIRSCHMAN-WIDDER-ovih [27] funkcija oblika:

$$\{\Psi k(t)\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{\beta_1}{s+\beta_1}\cdots\frac{\beta_k}{s+\beta_k} =$$

$$= \{1+\alpha_{k_1} e^{-\beta_1 t} + \dots + \alpha_{kk} e^{-\beta_k t}\}$$

$\Psi_k(t)$ dok $0\leq t<\infty$ raste i to od $0\leq\Psi_k(t)\leq 1$

Red (3.1-7) na str.50 dobiven je analogno, specijalan je slučaj ovog ako je $\beta_n=n$.

Teorema 4.1-1. omogućuje da se rezultati klasične analize koji se odnose na konvergentne Dirihletove redove, mogu direktno preneti u operatorski račun Mikusinskog. MOgu se vršiti i dalja opštavanja.

Naime, za $k \in Z^+$ je:

$$q(\beta_n)=sq_1(\beta_n)=s\{q_1(\beta_n,t)\}=s\begin{cases}0 & 0<t<\beta_n\\ t-\beta_n & \beta_n\leq t<\infty\end{cases}$$

$$q(\beta_n) = s\, q(\beta_n) = s\{q_1(\beta_n,t)\}$$

$$= s^2 q_2(\beta_n) = s^2\{q_2(\beta_n,t)\} = s^2\begin{cases}0 & 0<t<\beta_n\\ \dfrac{(t-\beta_n)^2}{2!} & \beta_n\leq t<\infty\end{cases}$$

$$= s^k q_k(\beta_n) = s^k\{q_k(\beta_n,t)\} = s^k\begin{cases}0 & 0<t<\beta_n\\ \dfrac{(t-\beta_n)^k}{k!} & \beta_n\leq t<\infty\end{cases}$$

Ovo možemo generalizirati i ako k nije ceo pozitivan broj, naime za $k \in R^+$, neka je:

$$q(\beta_n)=s^k\begin{cases}0 & 0<t<\beta_n\\ \dfrac{(t-\beta_n)^k}{\Gamma(k+1)} & \beta_n\leq t<\infty\end{cases}$$

Tada je: $k \in R^+$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} = s\{F(t)\} = s\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q(b_n)\right\}$$

$$=s^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n q_k(b_n)$$

$$=\frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(t-b_n)^k a_n\right\}$$

$$=\frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\left\{\sum_{b_n\leq t}(t-b_n)^k a_n\right\}$$

$$=\frac{s^{k+1}}{\Gamma\ (k+1)}\qquad\{F^k(t)\}$$

Tako je:

$$\{F^k(t)\}=\{\sum_{b_n\leq t}(t-b_n)^k a_n\}$$

konvergentan red u polju operatora K i važi:

$$\left\{F^k(t)\right\}=\left\{\frac{\Gamma(k+1)}{s^k}\right\}\left\{F(t)\right\}=\Gamma(k+1)\left\{\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\right\}\left\{F(t)\right\}=k\left\{t^{k-1}\right\}\left\{F(t)\right\}$$

S toga je:

$$\left\{F^k(t)\right\}=k\left\{\int_0^t(t-u)^{k-1}F(u)\,du\right\}\quad k\in R^+$$

Kada, Dirihletov red (4.1÷5) za Re z $>$ O konvergira, tada postoji U T granica za sve $z\in C$ za koje je Re z $>$ O i važi za $k\in R^+$, Re$z>0$

$$\lim_{k\to\infty}U_k\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-sb_n}\right)\right]=\lim_{k\to\infty}U_k\left[T^{-z}\left(\frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\{F^k(t)\}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+1)} \lim_{k\to\infty} \left[\left(\frac{s}{k} + z\right)^{k+1} U_k\left(T^{-z}\left\{F^k(t)\right\}\right)\right]$$

$$= \left\{ \frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty e^{-zt} F^k(t)dt \right\}$$

Koristeći pojam RISOVE sumabilnosti u tački z=o, iz klasične analize rezultate sada možemo preneti u operatorski račun. Moguće je očigledno otići i dalje, naime lako je pokazati da važi sledeća lema.

LEMA 4.1-1 Ako je $\{a_n\}$ niz kompleksnih brojeva, takav da je Re $a_n > a$ za n= 1,2,..., a $\{b_n\}$ niz pozitivnih realnih brojeva takvih da $b_n \to \infty$, kad $n \to \infty$. Tada red operatora oblika:

(4.1-6) $$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \; q_{a_n}(b_n) \qquad f_n(t) \in \mathcal{E}$$

konvergira u polju operatora K. Funkcija $q_{a_n}(b_n)$ definisana je:

$$q_{a_n}(b_n) = \{q_{a_n}(b_n,t)\}$$

$$= \begin{cases} 0 & 0<t<b_n \\ \dfrac{(t-b_n)^{a_n-1}}{\Gamma(a_n)} & b_n \leq t<\infty \end{cases}$$

Dokaz ove leme proizilazi iz činjenice da ako red (4.1-6) pomnožimo sa ℓ^{β} , pri čemu je Re(a+β)> 1 , dobijamo red neprekidnih funkcija promenljive t, koji uniformno konvergira nad svakim, konačnim, zatvorenim intervalom $[0,T]$ jer je:

$$\ell^{\beta} q_{a_n}(b_n) = \ell^{\beta} \ell^{a_n - 1} q(b_n) = \ell^{\beta + a_n - 1} q(b_n) = q_{\beta + a_n}(b_n)$$

Odnosno, ako red (4.1-6) pomnožimo sa ℓ^{β} dobijamo:

$$\sum^{\infty} f_n(t) q_{a_n}(b_n) = \sum^{\infty} f_n(t)\, q_{\beta + a_n}(b_n)$$

/4.1-7/
$$= \left\{ \sum_{b_n \leq t} \ell^{\beta} f_n(t-b_n) \right\}$$

red neprekidnih funkcija osobine da za $b_n > t$ $f_n(t-b_n)=0$ tj. u svakom konačnom intervalu $0 \leq t \leq T$, počev od $n > n_o$ takvog da je $b_{n_o} > T$, članovi reda se poklapaju te red uniformno konvergira dok $0 \leq t \leq T$.

Očigledno da ako je $f_n(t) = c_n$, c_n je proizvoljan niz kompleksnih brojeva, tada i red:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad q_{a_n}(b_n)$$

konvergira u polju operatora, ako a_n i b_n ispunjavaju uslove, leme 4.1-1.

Primenimo li sada, za sve kompleksne vrednosti z za koje je $\mathrm{Re}\{z\} > x_o$, neprekidnu, linearnu i multiplikativnu operatorsku transformaciju T^{-z}, na operator definisan konvergentnim redom (4.1-6) dobijamo red operatorskih funkcija oblika:

$$T^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) q_{a_n}(b_n) = T^{-z} \left[s^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \ell^{\beta + a_n} s q(b_n) \right]$$

$$= (s+z)^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} T^{-z} \{ f_n(t) \} \; T^{-z} \left\{ \frac{1}{s^{a_n + \beta}} \right\} T^{-z} e^{-s b_n}$$

/4.1-8/
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-zt} f_n(t) \right\} \frac{1}{(s+z)^{a_n}} e^{-(s+z) b_n}$$

Ovim je otvoreno pitanje konvergencije reda (4.1-8), odnosno reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{(s+z)^{a_n}} e^{-(s+z)b_n} \tag{4.1-9}$$

gde je C_n niz kompleksnih brojeva.

Rešavanje ovog problema kao i pitanje neprekidnosti operatorskih funkcija definisanim ovim redovima bilo bi od interesa za dalje ispitivanje dobivenih operatorskih funkcija.

L I T E R A T U R A:

1. T.K.BOEHME: Operational calculus and the finite part of divergent integrals, Trans. of the American Math. Soc. V. 1o6 (1963).

2. T.K.BOEHME: On sequences of continuous functions and convolution, Studia Math. XXV (1965), 333-335.

3. T.K.BOEHME: On Mikusiński operators, Studia Math.XXXIII

4. A.R.BEDNAREK: J.Mikusinski: Convergence and topology, Univ. of Florida March (1969), 1-13.

5. L.BERG: Zur Operatorenrechnung für Funktionen einer diskreten Veranderlichen, Studia Math. T.XX (1961).

6. L.BERG: Einführung in die Operatorenrechnung, Berlin,(1962).

7. M.BUDIMČEVIĆ, B.STANKOVIĆ: The closure in the space of Mikusinski's operations, Publ Math.Inst.T.11(25),1971, 115-118.

. V.A.Ditkin, A.P.Prudnikov: Операционное исчисление, Москва, 1966.

. G.DOETSCH: Handbuch der Laplace-Transformation I,II, Basel, 195o-1956.

A.ERDELYI: Operational Calculus and Generalized Functions, New York, 1962.

FENYES: Die Anwendung der Mikusinskischen Operatorenrechnung zür Lösung spezieller linearer partieller Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, Publ.Math.Inst.Hung.Acad. Sci., IX (1964), 35-49.

FISCHER: Limesräume, Math.Annalen 137 (1959) 269-3o3.

C.FOIAS: Approximation des opérateurs de J.Mikusiński par des fonctions continues, Studia Math. XXI (1961), 73-74.

14. E.GESZTELYI: Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten, Publ.Math. Debrecen 10 /1963/, 215-243.

15. E.GESZTELYI: Uber das Stieltjes-Integral von Operatorfunktionen, I, Publ.Math. Debrecen 12 /1965/.

16. E.GESZTELYI: Uber das Stieltjes-Integral von Operatorfunktionen, II, Publ.Math. Debrecen 13 /1966/ 313-324.

17. E.GESZTELYI: Uber lineare Operatortransformationen, Publ. Math. Debrecen 14 /1967/ 169-206.

18. E.GESZTELYI: The application of the operational calculus in the theory of numbers, Coll. Math. Soc.J.Bolyai 2 Debrecen /1968/.

19. E.GESZTELYI: Limit and infinite integral of a Mikusinski operator, Studia Math.XXXIX /1971/ 119-136.

20. J.KARAMATA: Teorija i praksa Stieltjesovog integrala, Beograd,/1949/.

21. D.C.KENT: Convergence functions and their related topologies, Fundamenta Math. 54 /1964/, 125-133.

22. J.MIKUSIŃSKI: Sur les Fondemedts du calcul operatoire, Studia Math. X /1950/ 41-70.

23. J.MIKUSIŃSKI: Sur les fonctions exponentielles du calcul operatoire, Studia Math.XII /1951/, 208-224.

24. J.MIKUSIŃSKI: Sur la croissance de la fonction operationnelle exp/-s^λ /, Bull.Ac.Pol.Sci. IV,7 /1956/, 423-425.

25. J.MIKUSIŃSKI: Remarks on the algebraic derivative in the operational calculus, Studio Math.XIX /1960/, 187-192.

26. J.MIKUSINSKI: Sur la derivee algebrique: Fundamenta Math. 40 /1953/ 99-105.

27. J.MIKUSINSKI: Operational Calculus, Pergamen Press /1959/

28. J.MIKUSINSKI: Sur la convolution par exp/t²/, Bull.Ac.Pol. Vol.VII. N° 11 /1959/, 669-671.

29. J.MIKUSINSKI: CR Nardzewski: Sur le produit de composition Studia Math.XII /1951/ 52-57.

30. J.MIKUSINSKI: Remarks on the moment problem and a theorem of Picone, Coll.Math.2 /1951/ 138-141.

31. J.MIKUSINSKI: Operatorenrechnung und ihre Beziehung zur modernen Mathematik, Zeitschzift für Ang.Mat. und Mech. B.39 H.9/11 /1959/, 343-346.

32. J.MIKUSINSKI: An Approximation Theorem and its applications in Operational Caleulus, Studia Math. XXVII /1966/ 141-145.

33. J.MIKUSINSKI: Nardzewski R, A. theorem on böunded moments, Studia Math. XIII /1953/

34. R.NARDEWSKI: Sur la corps des operateurs de Mikusinski, Studia Math. XIV /1954/, 247-248.

35. D.O.NORRIS: Atopology for Mikusinski operators, Studia Math. XXIV /1964/ 245-255.

36. NIKOLIĆ-DESPOTOVIĆ: The continuity of, one class, of operational functions, Publ. de l Inst. Math. T.10 /24/ 1970.

37. И.РЯБЦЕВ: О структуре операторов Микусинского в одном псевдонормированом пространстве, Известия высших уч. Зав. 1(2) 1[illegible]3 - 1[illegible]1

38. M.SKENDŽIĆ: Analitička rešenja diferencijalnih jednačina operatora Mikusinskog - dok.disertacija /N.Sad 1971/.

39. M.SKENDŽIĆ: The non linear Cauchy problem of operator differential equations, Publ.Math.Inst.T 10/24//1970/.

40. L.SCHWARTZ-DUNFORD: Linear operators I, New York /1958/

41. B.STANKOVIĆ, D.DESPOTOVIĆ: Continuite d' une fonction operatoire, Publ.de l'inst.Math. T 7 /21/ 1967.

42. R.STRUBLE: A genuine topology for the field of Mikusinski' s operators, Canad.Math.Bull.Vol1. N°2 /1968/, 297-299.

43. B.STANKOVIĆ: La convergence des series d' operatours, Publ.Inst.Math. Beograd T.4 /18/ /1964/ 141-145.

44. B.STANKOVIĆ: L'existence et l'unicate de la solution de l' equation differentielle dans le corpsdes operateurs de J.Mikusinski, Poseban otisak iz Glas CCLX Srpske Akademije nauka i umetnosti N° 26 /1965/ 29-37.

45. B.STANKOVIĆ: Expace C_s, le sous espace des Operateurs de J.Mikusinski, Bull.T.XXXV de l'Acad.Serbe des Sci et des Arts' /1966/, 51-61.

46. B.STANKOVIC: L'existence et l' unicite' de la solution de l' equation differentielle dans le corps des operateurs de J.Mikusinski, Publ. Acad.Serbe des Sci. et des Arts, N° 5 /1966/ 21-27.

47. B.STANKOVIĆ:Les conditions peur la compacite dans un espace du type Bo, Mat.Vesnik, Beograd.

48. B.STANKOVIĆ: On the function of E.M.Wright, Publ. de l' Inst. Math. T. 10 /24/ 197o.

49. E.TITCHMARCH: The zeros of certain integral functions, Proc.of the London Math.Soc.25 /1926/ 283-3o2.

5o. K.URBANIK: Sur la structure non topologique du corps des operateurs, Studia Math. XIV /1954/ 243-246.

51. E.F.WAGNER: On the convergence structure of Mikusinski operators, Studia Math.XXVII /1966/, 39-48.

52. D.V.WIDDER: The Laplace Transform, Princeton University Press, London 1946.

53. L.WLODARSKI: Une remarque sur une class de fonctions exponentielles du calcul operationnel, Studia Math.XIII /1953/ 188-189.

54. J.WOOD: A Generalization of the Operational Calculus Mikusinski, Proc.Amer.Math.Soc. 19 /1968/.

55. E.WRIGHT: The generalized Bessel function of order greater than one, Quart.J.Math. Osford Series.V, 11 /194o/, 36-48.

S A D R Ž A J