Nahod Vuković

GENERALIZACIJA KOLEKTIVNOG I VIŠESTRUKOG KOEFICIJENTA KORELACIJE

- Doktorska disertacija -

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

1976.

Izuzetnu pomoć u radu i orijentaciji pružio mi je prof.dr B.Ivanović.

Radna zajednica Fakulteta organizacionih nauka u Beogradu neposredno mi je omogućila završavanje teze.

Nahod

S A D R Ž A J

Strana

UVOD 5

KOLEKTIVNI KOEFICIJENT KORELACIJE 7
1.1. Definicija kolektivnog koeficijenta korelacije 7
1.2. Osobine kolektivnog koeficijenta korelacije 12

GENERALIZACIJA KOLEKTIVNOG KOEFICIJENTA KORELACIJE 18
2.1. Merenje varijabiliteta aleatornih struktura 18
2.2. Linearna zavisnost izmedju statističkih struktura ... 21
2.3. Kolektivni koeficijent korelacije 26
2.4. Osobine kolektivnog koeficijenta korelacije 34

LINEARNA ZAVISNOST ALEATORNIH VEKTORA 38
3.1. Višedimenzionalni normalni raspored 38
3.2. Uslovni raspored i višestruki koeficijent korelacije. 42
3.3. Linearna zavisnost aleatornih promenljivih 51
3.4. Regresione površine i srednje kvadratne regresione površine 54

VEKTORSKI KOEFICIJENT KORELACIJE 66

4.1. Generalisana varijansa 66
4.2. Vektorski koeficijent korelacije 69
4.3. Regresione površine i vektorski koeficijent korelacije 79

Strana

4.4. Geometrijska interpretacija vektorskog koeficijenta korelacije 86

4.5. Ispitivanje zavisnosti dohotka u privrednim i vanprivrednim delatnostima 98

ZAKLJUČAK 1o6

LITERATURA 1o9

U V O D

Nema sumnje da je ispitivanje uzajamnih zavisnosti izmedju raznih pojava, kako u prirodnim tako i u društvenim naukama, jedan od primarnih zadataka. U tim ispitivanjima statističke metode imaju izuzetno važnu ulogu jer je veoma malo pojava čija uzajamna zavisnost može biti potpuno deterministički odredjena. Manje više, zavisnosti su delimično a najčešće su stohastičkog karaktera, pa je uključivanje teorije verovatnoće i statističkih metoda u ispitivanju ovih pojava neophodno.

Prvi korak u ispitivanjima zavisnosti je merenje te zavisnosti i to kako u slučajevima linearnih veza tako i onih veza koje se mogu odredjenim transformacijama linearizovati. U najprostijem slučaju jednu pojavu karakteriše jedna aleatorna promenljiva a drugu jedna druga aleatorna promenljiva. U tom slučaju, za meru uzajamne zavisnosti tih pojava uzimamo običan koeficijent korelacije koji predstavlja meru linearne zavisnósnosti izmedju tih pojava.

Medjutim, može se desiti da dok jednu pojavu karakteriše jedna aleatorna promenljiva, drugu pojavu karakterišu dve ili više aleatornih promenljivih. Tada linearnu zavisnost izmedju ovih pojava merimo višestrukim koeficijentom korelacije.

U mnogim istraživanjima odredjene pojave su bile karakterisane sa statističkim strukturama, tj. sa jednim skupom nenegativnih brojeva čiji zbir je jednak jedinici. B. Ivanović je razmatrao pojave takve vrste i definisao je tzv. kolektivni koeficijent korelacije kao meru linearne zavisnosti izmedju statističkih struktura.

Ovaj rad ima za cilj u prvom redu da proširi definiciju Ivanovićevog kolektivnog koeficijenta korelacije, a zatim da se dâ način merenja linearnih zavisnosti i za slučajeve kada je jedna pojava karakterisana sa više aleatornih promenljivih a druga takodje sa više aleatornih promenljivih. Definisan je tzv. vektorski koeficijent korelacije kao mera linearne zavisnosti izmedju aleatornih vektora.

Rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu data je definicija Ivanovićevog kolektivnog koeficijenta korelacije i njegove osnovne osobine.

Drugi deo predstavlja generalizaciju definicije kolektivnog koeficijenta korelacije i na slučajeve kad aleatorne strukture imaju različit broj klasa.

Treći deo je posvećen opštim razmatranjima linearne zavisnosti izmedju aleatornih vektora. Definisan je način odredjivanja najbolje linearne veze izmedju aleatornih vektora i dokazana osnovna svojstva tako dobijenih veza.

U četvrtom delu je definisan vektorski koeficijent korelacije, izložene su njegove osnovne osobine i pokazana je opravdanost definicije tog koeficijenta kao mere linearne zavisnosti izmedju aleatornih vektora. Ovako dobijene teorijske rezultate praktično smo primenili u problemu ispitivanja zavisnosti izmedju dohodaka u vanprivrednim i privrednim delatnostima SFRJ za 1974. godinu.

KOLEKTIVNI KOEFICIJENT KORELACIJE

Kolektivni koeficijent korelacije, kao meru linearne zavisnosti izmedju statističkih struktura, prvi je definisao B. Ivanović [19] i [20]. On je pokazao da taj koeficijent ima iste one osobine koje ima i običan koeficijent korelacije, tj. da je kvadrat tog koeficijenta uvek manji ili jednak jedinici, da ima vrednost nulu kad su statističke strukture medjusobno nezavisne i da ima vrednost jedan ako postoji linearna zavisnost izmedju tih statističkih struktura.

Najzad, J.Karamata i B.Ivanović su dokazali i obrnuto, tj. da postoji linearna veza izmedju posmatranih statističkih struktura ako je kvadrat njihovog kolektivnog koeficijenta korelacije jednak jedinici.

1.1. Definicija kolektivno koeficijenta korelacije

Posmatrajmo jednu prekidnu aleatornu promenljivu X koja na slučaj može uzimati vrednosti

$$X \varepsilon \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \right\} .$$

Predpostavimo da je zakon verovatnoće promenljive X u odnosu na skup π_1 sledeći uredjeni skup parova

(1.1) $$[< x_i ; p_i > \mid i \in \{ 1, \ldots, n \}] ,$$

pri čemu je

$$\forall i \, [i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow p_i = P(X=x_i)]$$

Predpostavimo dalje da je zakon verovatnoće promenljive X u odnosu na skup π_2 dat sa

(1.2.) $$[< x_i ; q_i > \mid i \in \{1, \ldots, n\}] ,$$

pri čemu je

$$\forall i \, [i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow q_i = P(X=x_i)] .$$

Ako izmedju zakona verovatnoća (1.1) i (1.2) postoji linearna veza onda se ona može izraziti preko jedne kvadratne matrice K reda n x n jednačinom

(1.3) $$p = q \cdot K,$$

pri čemu su p i q vektori vrsta, tj.

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

i

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Matrica $K = [k_{ij}]$ je matrica transformacije preko koje se struktura skupa π_2 transformiše u strukturu skupa π_1.

Matrična jednačina (1.3) predstavlja sistem jednačina oblika

$$(1.4) \quad \begin{aligned} p_1 &= \sum_i^n q_i\, k_{i1} \\ p_2 &= \sum_i^n q_i\, k_{i2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= \sum_i^n q_i\, k_{in}. \end{aligned}$$

Medjutim, svakoj promeni zakona verovatnoće (1.1) na skupu π_1 ne mora da odgovara jedan odredjeni zakon verovatnoće (1.2) na skupu π_2. Drugim rečima, izmedju ovih zakona verovatnoće može postojati samo delimična linearna veza pa se postavlja problem odredjivanja matrice transformacije K tako da ona na najbolji mogući način izražava linearnu vezu izmedju zakona verovatnoća (1.1) i (1.2).

Da bismo odredili nepoznatu matricu K pretpostavićemo da raspolažemo sa N parova zakona verovatnoća promenljive X na skupovima π_1 i π_2

$$(1.5) \quad [\,\langle\langle p_{i1}, \ldots, p_{in}\rangle ; \langle q_{i1}, \ldots, q_{in}\rangle\rangle \mid i \in \{1, \ldots, n\}].$$

Do najbolje moguće linearne veze izmedju statističkih struktura odredjenih na skupovima π_1 i π_2 sa izrazom (1.5) doćićemo ako matricu transformacije K odredimo tako da norma razlike izmedju strukture skupa π_1

$$\{\langle p_{i1}, \ldots, p_{in}\rangle \mid i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

i strukture tog skupa dobijene preko struktura skupa π_2

$$\{\langle \sum_j^n q_{ij}\, k_{j1}, \ldots, \sum_j^n q_{ij}\, k_{jn}\rangle \mid i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

učinimo najmanjom mogućom, tj. tako da minimiziramo izraz

(1.6)
$$\sum_{i}^{N}\left\{ \sum_{s}^{n}[p_{is} - \sum_{j}^{n} q_{ij}\, k_{js}]^2\right\} .$$

Označimo sa P matricu koja odgovara strukturi skupa π_1

(1.7)
$$P=P_{N;n} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{N1} \cdots p_{Nn} \end{bmatrix}$$

a sa Q matricu struktura na skupu π_2

(1.8)
$$Q=Q_{N;n} = \begin{bmatrix} q_{11} \cdots q_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{N1} \cdots q_{Nn} \end{bmatrix}$$

Izraz (1.6) dostićiće minimalnu vrednost ako za matricu K uzmemo matricu

(1.9)
$$K = (Q' \cdot Q)^{-1} \cdot Q'P .$$

Vidi [2o].

<u>Definicija 1.1.</u> Kolektivni koeficijent korelacije između statističkih struktura skupova π_1 i π_2 datih sa (1.7) i (1.8) je količnik

(1.1o)
$$R = \frac{|P' \cdot Q|}{\sqrt{|P'P|}\sqrt{|Q'\cdot Q|}}$$

pri čemu su $|P'Q|$, $|P'P|$ i $|Q'Q|$ determinante kvadratnih matrica $P'Q$, $P'P$, $Q'Q$ respektivno, tj.

(1.11) $$|P'.Q| = \begin{vmatrix} \sum_{i}^{N} p_{i1} q_{i1} & \sum_{i}^{N} p_{i1} q_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} p_{i1} q_{in} \\ \sum_{i}^{N} p_{i2} q_{i1} & \sum_{i}^{N} p_{i2} q_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} p_{i2} q_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i}^{N} p_{in} q_{i1} & \sum_{i}^{N} p_{in} q_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} p_{in} q_{in} \end{vmatrix}$$

(1.12) $$|P'.P| = \begin{vmatrix} \sum_{i}^{N} p_{i1} p_{i1} & \sum_{i}^{N} p_{i1} p_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} p_{i1} p_{in} \\ \sum_{i}^{N} p_{i2} p_{i1} & \sum_{i}^{N} p_{i2} p_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} p_{i2} p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i}^{N} p_{in} p_{i1} & \sum_{i}^{N} p_{in} p_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} p_{in} p_{in} \end{vmatrix}$$

(1.13) $$|Q'.Q| = \begin{vmatrix} \sum_{i}^{N} q_{i1} q_{i1} & \sum_{i}^{N} q_{i1} q_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} q_{i1} q_{in} \\ \sum_{i}^{N} q_{i2} q_{i1} & \sum_{i}^{N} q_{i2} q_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} q_{i2} q_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i}^{N} q_{in} q_{i1} & \sum_{i}^{N} q_{in} q_{i2} & \cdots & \sum_{i}^{N} q_{in} q_{in} \end{vmatrix}$$

Koristeći oznake (1.7) i (1.8), aproksimativnu linearnu vezu izmedju struktura možemo izraziti u matričnom obliku preko sledeće matrične jednačine

$$P = Q \cdot K, \tag{1.14}$$

pri čemu je K matrica data sa (1.9). Na osnovu osobine determinanto inverzne matrice, kvadrat kolektivnog koeficijenta korelacije može biti izražen sa

$$R^2 = \frac{|P'Q\ (Q'Q)^{-1}\ Q'P|}{|P'P|} . \tag{1.15}$$

Iz (1.9) dobijamo da je

$$\begin{aligned}(Q\ K)'\ (Q\ K) &= P'Q(Q'Q)^{-1}\ Q\ Q\ (Q'Q)^{-1}\ Q'P = \\ &= P'Q(Q'Q)^{-1}Q'P,\end{aligned} \tag{1.16}$$

tako da je kolektivni koeficijent korelacije definisan izrazom

$$R^2 = \frac{|K'Q'Q\ K|}{|P'P|} . \tag{1.17}$$

1.2. Osobine kolektivnog koeficijenta korelacije

Kolektivni koeficijent korelacije ima iste osobine kao i običan koeficijent korelacije.To su sledeće osobine:

Osobina 1.1. Kvadrat kolektivnog koeficijenta korelacije je uvek manji ili jednak jedinici, tj.

$$R^2 \leq 1.$$

D o k a z. Koristeći osobinu zbira determinanti, determinantu P'Q možemo izraziti na sledeći način

$$(1.18)\qquad |P'Q| = \sum_{i_1}^{N}\sum_{i_2}^{N}\cdots\sum_{i_n}^{N} \begin{vmatrix} p_{i_1 1}q_{i_1 1} & p_{i_2 1}\,q_{i_2 2} & \cdots & p_{i_n 1}\,q_{i_n n} \\ p_{i_1 2}q_{i_1 1} & p_{i_2 2}\,q_{i_2 2} & \cdots & p_{i_n 2}\,q_{i_n n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i_1 n}q_{i_1 1} & p_{i_2 n}\,q_{i_2 2} & \cdots & p_{i_n n}\,q_{i_n n} \end{vmatrix} .$$

Posmatrajmo sad matricu $P_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ čiji su vektori vrste ustvari vektori vrste matrice P (1.6) sa indeksima $i_1, \ldots, i_n$,

$$(1.19)\qquad P_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{bmatrix} p_{i_1 1} & p_{i_1 2} & \cdots & p_{i_1 n} \\ p_{i_2 1} & p_{i_2 2} & \cdots & p_{i_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i_n 1} & p_{i_n 2} & \cdots & p_{i_n n} \end{bmatrix}$$

Na sličan način izdvojićemo i matricu $Q_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ iz matricu Q

$$(1.2o)\qquad Q_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{bmatrix} q_{i_1 1} & q_{i_1 2} & \cdots & q_{i_1 n} \\ q_{i_2 1} & q_{i_2 2} & \cdots & q_{i_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{i_n 1} & q_{i_n 2} & \cdots & q_{i_n n} \end{bmatrix}$$

Množeći sa levo strane matricu (1.2o) transponovanom matricom (1.19) dobićemo matricu

$$(1.21)\qquad P'_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot Q_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{bmatrix} \sum\limits_k p_{k1}\,q_{k1} & \sum\limits_k p_{k1}\,q_{k2} & \cdots & \sum\limits_k p_{k1}\,q_{kn} \\ \sum\limits_k p_{k2}\,q_{k1} & \sum\limits_k p_{k2}\,q_{k2} & \cdots & \sum\limits_k p_{k2}\,q_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_k p_{kn}\,q_{k1} & \sum\limits_k p_{kn}\,q_{k2} & \cdots & \sum\limits_k p_{kn}\,q_{kn} \end{bmatrix}$$

pri čemu indeks k u zbirovima uzima redom vrednosti $i_1, \ldots, i_n$.

Determinanta matrice (1.21) može se na analogan način kao i determinanta (1.18) transformisati u sledeći zbir determinanata

$$|P^{i}_{i_1 \ldots i_n} \cdot Q_{i_1 \ldots i_n}| = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \ldots \sum_{j_n} \begin{vmatrix} p_{j_1 1} q_{j_1 1} & p_{j_2 1} q_{j_2 2} & \ldots & p_{j_n 1} q_{j_n n} \\ p_{j_1 2} q_{j_1 1} & p_{j_2 2} q_{j_2 2} & \ldots & p_{j_n 2} q_{j_n n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{j_1 n} q_{j_2 1} & p_{j_2 n} q_{j_1 2} & \ldots & p_{j_n n} q_{j_2 n} \end{vmatrix}$$

Indeksi $j_1, \ldots, j_n$ uzimaju vrednosti $i_1, \ldots, i_n$. Ako su dva ili više ovih indeksa medjusobno jednaki, onda odgovarajuća determinanta ima dve ili više jednakih kolona pa je jednaka nuli. U ovom zbiru ostaće $n!$ determinanti koje će odgovarati permutacijama indeksa $i_1, \ldots, i_n$, pa je zato

$$|P'_{i_1 \ldots i_n} \cdot Q_{i_1 \ldots i_n}| = n! \begin{vmatrix} p_{i_1 1} q_{i_1 1} & p_{i_2 1} q_{i_2 2} & \ldots & p_{i_n 1} q_{i_n n} \\ p_{i_1 2} q_{i_1 1} & p_{i_2 2} q_{i_2 2} & \ldots & p_{i_n 2} q_{i_n n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i_1 n} q_{i_1 1} & p_{i_2 n} q_{i_2 2} & \ldots & p_{i_n n} q_{i_n n} \end{vmatrix} .$$

Sa druge strane, zbog osobine proizvoda determinanti imamo

$$|P'_{i_1 \ldots i_n} Q_{i_1 \ldots i_n}| = |P_{i_1 \ldots i_n}| \cdot |Q_{i_1 \ldots i_n}| ,$$

pa je zato

$$\begin{vmatrix} p_{i_1 1} q_{i_1 1} & p_{i_2 1} q_{i_2 2} & \ldots & p_{i_n 1} q_{i_n n} \\ p_{i_1 2} q_{i_1 1} & p_{i_2 2} q_{i_2 2} & \ldots & p_{i_n 2} q_{i_n n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i_1 n} q_{i_1 1} & p_{i_2 n} q_{i_n 2} & \ldots & p_{i_n n} q_{i_n n} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} |P_{i_1 \ldots i_n}| \cdot |Q_{i_1 \ldots i_n}|$$

tako da se determinanta (1.18) može napisati u sledećem obliku

$$|P'Q| = \frac{1}{n!} \sum_{i_1}^{N} \cdots \sum_{i_n}^{N} |P_{i_1 \ldots i_n}| \cdot |Q_{i_1 \ldots i_n}|.$$

Svakom sistemu brojova $i_1, i_2, \ldots, i_n$ možemo pridružiti jedan indeks. Zato determinantu (1.18) možemo napisati i u obliku

$$(1.22) \qquad |P'Q| = \frac{1}{n!} \sum_{i} |P_i|\, |Q_i|.$$

Na potpuno analogan način možemo transformisati i determinante $|P'P|$ i $|Q'Q|$. Tako ćemo dobiti izraze

$$(1.23) \qquad |P'P| = \frac{1}{n!} \sum_{i} |P_i|^2,$$

$$(1.24) \qquad |Q'Q| = \frac{1}{n!} \sum_{i} |Q_i|^2.$$

Neposrednom primenom Schwartzove nejednačine dobija se

$$\left\{ \frac{1}{n!} \sum_{i} |P_i|\, |Q_i| \right\}^2 - \frac{1}{n!} \sum_{i} |P_i|^2 \cdot \frac{1}{n!} \sum_{i} |Q_i|^2 \leqslant 0,$$

odakle, posle smene vrednosti iz (1.22), (1.23) i (1.24) dobijamo nejednačinu

$$|P'Q|^2 - |P'P|\, |Q'Q| \leqslant 0,$$

odnosno

$$R^2 = \frac{|P'Q|^2}{|P'P|\, |Q'Q|} \leqslant 1.$$

Osobina 1.2. Ako su zakoni verovatnoće (1.1) i (1.2) medjusobno nezavisni onda su statističke strukture (1.7) i (1.8) medjusobno ortogonalne, pa je kolektivni koeficijent korelacije jednak nuli, tj. tada je

$$R = 0.$$

Osobina 1.3. Kvadrat kolektivnog koeficijenta korelacije je jednak jedinici ako i samo ako izmedju statističkih struktura postoji linearna veza, tj.

$$R^2 = 1 \iff P = Q.K \, . \tag{1.25}$$

D o k a z. Tačnost ove osobine dokazali su J.Karamata i B.Ivanović. Ovde nećemo dati kompletno izvodjenje jer se ono nalazi u [2o].

Ako izmedju statističkih struktura postoji linearna veza, onda je

$$p_{i1} = \sum_j^n q_{ij} \, k_{j1}$$

$$p_{i2} = \sum_j^n q_{ij} \, k_{j2}$$

....

$$p_{in} = \sum_j^n q_{ij} \, k_{jn}$$

za svako i = 1,2, ..., N, tako da je determinanta $|P_i|$ u izrazu (1.22) jednaka

$$|P_i| = |K| \cdot |Q_i|. \tag{1.26}$$

Kad (1.18) zamenimo u izraze (1.22) i (1.23) dobićemo

$$|P'Q| = \frac{1}{n!} \, |K| \, \sum_i |Q_i|^2 \, ,$$

$$|P'P| = \frac{1}{n!}|K|^2 \sum_i |Q_i|^2,$$

pa iz definicije 1.1. kolektivnog koeficijenta korelacije imamo

$$R^2 = \frac{\left\{\frac{1}{n!}\ |K| \sum_i |Q_i|^2\right\}^2}{\left\{\frac{1}{n!}|K|^2 \sum_i |Q_i|^2\right\}\left\{\frac{1}{n!} \sum_i |Q_i|^2\right\}},$$

što znači da je u slučaju linearne zavisnosti izmedju statističkih struktura kvadrat kolektivnog koeficijenta korelacije jednak jedinici.

U mnogim ekonomskim i drugim razmatranjima odredjenih pojava potrebno je razmatrati simultanu zavisnost izmedju dva rasporeda frekvencije u datom vremenskom intervalu. Tako na primer, treba posmatrati distribuciju umrlih po starosti u jednoj zemlji i distribuciju umrlih po starosti u drugoj zemlji i njihovu simultanu zavisnost.

Isto tako, poželjno je ispitivati distribuciju ličnih primanja u jednoj organizaciji ili jednoj privrednoj delatnosti i njenu zavisnost od distribucije ličnih primanja u drugoj organizaciji ili privrednoj delatnosti. Zato kolektivni koeficijent korelacije ima veoma široku primenu.

GENERALIZACIJA KOLEKTIVNOG KOEFICIJENTA KORELACIJE

U svojim radovima B.Ivanović je posmatrao linearnu zavisnost izmedju dve aleatorne strukture i definisao je kolektivni koeficijent korelacije za slučaj kad je broj klasa posmatranog obeležja na skupu π_1 jednak broju klasa tog obeležja na skupu π_2.

Zbog velikih mogućnosti primene kolektivnog koeficijenta korelacije u ekonomskim i drugim istraživanjima, potrebno je proširiti razmatranja B.Ivanovića i dati definiciju kolektivnog koeficijenta korelacije koja će omogućiti njegovo računanje i u drugim slučajevima. Zato je cilj ovog poglavlja da se dâ šira definicija kolektivnog koeficijenta korelacije koja će obuhvatiti i slučajeve kad dve aleatorne strukture nemaju jednak broj klasa.

2.1. Merenje varijabiliteta aleatornih struktura

Posmatraćemo statistički skup π_1 i na njegovim elementima meriti obeležje X. Ako X može uzimati vrednosti

$$X \in \{ x_1, x_2, \dots, x_m \} ,$$

struktura skupa π_1 u odnosu na obeležje X biće

$$(2.1) \qquad \left\{ < x_i,\ p_i > \mid i \in [1,\ 2,\ \ldots,\ m] \right\},$$

pri čemu je

$$(2.2) \qquad \bigwedge_i \left[i \in \left\{ 1,2,\ \ldots,\ m \right\} \Rightarrow p_i = P(X = x_i) \right].$$

Takodje ćemo posmatrati drugi statistički skup π_2 i na njegovim elementima meriti obeležje Y. Ako Y može uzimati vrednosti

$$Y \in \left\{ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n \right\},$$

onda je odgovarajuća struktura skupa π_2

$$(2.3) \qquad \left\{ < y_j,\ q_j > \mid j \in [1,\ 2,\ \ldots,\ n] \right\},$$

gde smo stavili da je

$$(2.4) \qquad \bigwedge_j \left[j \in \left\{ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \right\} \Rightarrow q_j = P(Y = y_j) \right].$$

Predpostavimo da raspolažemo sa N parova struktura skupova π_1 i π_2, tj.

$$(2.5) \qquad \left\{ <<p_{i1},p_{i2},\ldots,p_{im}> ; <q_{i1},q_{i2},\ldots,q_{in}>> \mid i \in \left\{1,\ldots,n\right\} \right\}.$$

Sa Φ i Ψ ćemo označiti matrice koje odgovaraju strukturama (2.5)

$$\Phi = \Phi_{N;m} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N1} & \cdots & p_{Nm} \end{bmatrix}$$

$$(2.7) \qquad \Psi = \Psi_{N;n} = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N1} & \cdots & q_{Nn} \end{bmatrix}$$

Matrice Φ i V pred... ju statističke strukture skupova π_1 i π_2. Elementi tih matr... su nenegativni brojevi takvi da je zbir svake vrste kod obe matrice jednak jedinici, tj.

$$\forall i \left[i \in \{1, \ldots, N\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \text{ i } \sum_{j=1}^{m} q_{ij} = 1 \right].$$

Definicija 2.1. Varijabilitet statističke strukture ... meri se determinantom

$$\sigma^2(\pi_1) = |\Phi' \cdot \Phi|, \tag{2.8}$$

odnosno u skalarnom obliku

$$\sigma^2(\pi_1) = \begin{vmatrix} \sum_i^N p_{i1}p_{i1} & \sum_i^N p_{i1}p_{i2} & \cdots & \sum_i^N p_{i1}p_{im} \\ \sum_i^N p_{i2}p_{i1} & \sum_i^N p_{i2}p_{i2} & \cdots & \sum_i^N p_{i2}p_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_i^N p_{im}p_{i1} & \sum_i^N p_{im}p_{i2} & \cdots & \sum_i^N p_{im}p_{im} \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Na sličan način i varijabilitet strukture skupa π_2 date matricom (2.7) meri se determinantom

$$\sigma^2(\pi_2) = |V' \cdot V|, \tag{2.1o}$$

ili u skalarnom obliku

$$(2.11) \qquad \sigma^2(\pi_2) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i}^{N} q_{i1}q_{i1} & \sum\limits_{i}^{N} q_{i1}q_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i}^{N} q_{i1}q_{in} \\ \sum\limits_{i}^{N} q_{i2}q_{i1} & \sum\limits_{i}^{N} q_{i2}q_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i}^{N} q_{i2}q_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i}^{N} q_{in}q_{i1} & \sum\limits_{i}^{N} q_{in}q_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i}^{N} q_{in}q_{in} \end{vmatrix}$$

Matrice $\Phi' \cdot \Phi$ i $\Psi' \cdot \Psi$ su tzv.Gramove matrice. Ako je

$$N \geq \max \left\{ m, n \right\}$$

onda su te matrice semidefinitne, pa su determinante (2.9) i (2.11) nenegativni brojevi. U svojoj doktorskoj disertaciji B.Ivanović je pokazao da su ove matrice pozitivno definitne kad je $N > m$, odnosno $N > n$ i kad je rang matrica Φ i Ψ jednak m i n.

2.2. Linearna zavisnost izmedju statističkih struktura

Ako postoji linearna veza izmedju statističkih struktura skupova π_1 i π_2 datih matricama Φ i Ψ, onda ta veza može biti izražena matričnom jednačinom

$$(2.12) \qquad \Phi = \Psi \cdot K$$

pri čemu je

$$(2.13) \qquad K = [k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix}$$

matrica transformacije strukture skupa π_2 u strukturu skupa π_1.

Elementi matrice K mogu nam biti nepoznati. Ali, ako postoji linearna veza (2.12) onda množeći tu jednačinu sa leve strane matricom Ψ' dobićemo jednačinu

$$\Psi' \Phi = \Psi' \Psi K.$$

Predpostavljajući da je $N > m$, matrica $\Psi' \Psi$ je pozitivno definitna pa postoji njena inverzna matrica. Posle množenja sa $(\Psi'\Psi)^{-1}$ dobićemo da je

$$K = (\Psi'\Psi)^{-1} \Psi'\Phi \ . \tag{2.14}$$

Medjutim, izmedju statističkih struktura može postojati samo delimična linearna zavisnost. U tom slučaju se postavlja problem odredjivanja matrice transformacije K tako da relacija (2.12) predstavlja najbolju moguću ocenu strukture skupa π_1 za datu strukturu skupa π_2. Taj problem ćemo rešiti tako što ćemo normu matrice

$$\Phi - \Psi \cdot K \tag{2.15}$$

svesti na najmanju moguću meru. Drugim rečima, odredićemo matricu K tako da izraz

$$F = \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{m} [p_{ij} - \sum_{s}^{n} q_{is} k_{sj}]^2 \tag{2.16}$$

dostigne mononalnu vrednost.

Parcijalni izvodi funkcije F po k_{sj} su

$$\frac{\partial F}{\partial k_{sj}} = (-2) \sum_{i}^{N} q_{is} \left[p_{ij} - \sum_{l}^{n} q_{il} k_{lj} \right].$$

pri čemu je

$$j \in \left\{1, 2, \ldots, m\right\},$$

$$s \in \left\{1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Izjednačavajući ovo izvodo sa nulom dobićemo m·n jednačina sa isto toliko nepoznatih k_{sj}. Za jednu fiksnu vrednost indeksa j dobićemo sistem od n jednačina.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i}^{N} p_{ij}q_{i1} - \sum_{i}^{N} q_{i1}q_{i1}\cdot k_{1j} + \dots + \sum_{i}^{N} q_{i1}q_{in}\cdot k_{nj} = 0 \\
(2.17)\qquad &\sum_{i}^{N} p_{ij}q_{i2} - \sum_{i}^{N} q_{i2}q_{i1}\cdot k_{1j} + \dots + \sum_{i}^{N} q_{i2}q_{in}\cdot k_{nj} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sum_{i}^{N} p_{ij}q_{in} - \sum_{i}^{N} q_{in}q_{i1}\cdot k_{1j} + \dots + \sum_{i}^{N} q_{in}q_{in}\cdot k_{nj} = 0
\end{aligned}
$$

U ovom sistemu jednačina nepoznate su $k_{1j}, \dots, k_{nj}$, a koeficijenti uz nepoznate su elementi matrice $V'V$. Slobodni članovi u ovim jednačinama su elementi j-te kolone matrice $V'\Phi$. Sistem jednačina (2.17) može se kraće napisati u matričnom obliku

$$(V'V)\,\vec{K}_j = [V'\Phi]_j$$

pri čemu je $\vec{K}_j$ j-ta kolona matrice K, a $[V'\Phi]_j$ j-ta kolona matrice $V'\Phi$. Ovakvih sistema jednačina ima m i svi ti sistemi mogu biti kraće napisani u matričnom obliku

$$(2.18)\qquad (V'V)\cdot K = V'\Phi.$$

Kad je $N > n$ i matrica V ranga n tad postoji inverzna matrica matrice $V'V$ pa je rešenje jednačina (2.18) matrica

$$(2.19)\qquad \hat{K} = (V'V)^{-1}\,V'\Phi.$$

Kad vrednost (2.19) zamenimo u jednačinu (2.12) dobićemo ocenu strukture skupa π_1 preko strukture skupa π_2

$$(2.20)\qquad \hat{\Phi} = V(V'V)^{-1}\,V'\Phi.$$

Radi kraćeg pisanja uvešćemo sledeće oznake. Sa P, Q i S označićemo sledeće matrice

$$(2.21)\quad P=P_{m;m}\doteq[P_{ij}]=\Phi'\cdot\Phi=\begin{bmatrix}\sum\limits_{r}^{N}p_{r1}p_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}p_{r1}p_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}p_{r1}p_{rm}\\ \sum\limits_{r}^{N}p_{r2}p_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}p_{r2}p_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}p_{r2}p_{rm}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{r}^{N}p_{rm}p_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}p_{rm}p_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}p_{rm}p_{rm}\end{bmatrix}$$

$$(2.22)\quad Q=Q_{n;n}=[Q_{ij}]=\Psi'\cdot\Psi=\begin{bmatrix}\sum\limits_{r}^{N}q_{r1}q_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}q_{r1}q_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}q_{r1}q_{rn}\\ \sum\limits_{r}^{N}q_{r2}q_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}q_{r2}q_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}q_{r2}q_{rn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{r}^{N}q_{rn}q_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}q_{rn}q_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}q_{rn}q_{rn}\end{bmatrix}$$

$$(2.23)\quad S=S_{n;m}=[S_{ij}]=\Psi'\cdot\Phi=\begin{bmatrix}\sum\limits_{r}^{N}q_{r1}p_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}q_{r1}p_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}q_{r1}p_{rm}\\ \sum\limits_{r}^{N}q_{r2}p_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}q_{r2}p_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}q_{r2}p_{rm}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{r}^{N}q_{rn}p_{r1} & \sum\limits_{r}^{N}q_{rn}p_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r}^{N}q_{rn}p_{rm}\end{bmatrix}$$

Sad se matrica transformacije može napisati kao

(2.24) $\hat{K} = Q^{-1} \cdot S,$

a ocenjena struktura skupa π_1 preko strukture skupa π_2

(2.25) $\hat{\phi} = V \cdot Q^{-1} \cdot S \;.$

Pokazaćemo da je zbir vrsta matrica (2.25) jednak jedinici, što znači da je to zaista jedna statistička struktura.

U matrici $V \cdot K$ i-ta vrsta je

$$\sum_{r}^{n} q_{ir}k_{r1}, \quad \sum_{r}^{n} q_{ir}k_{r2}, \ldots, \quad \sum_{r}^{n} q_{ir}k_{rm} \,,$$

pa posle sabiranja ovih vrednosti dobićemo da je zbir i-te vrste matrice $V \cdot K$ jednak

$$\sum_{s}^{m} \Big[\sum_{r}^{n} q_{ir}k_{rs} \Big] = \sum_{r}^{n} q_{ir} \Big[\sum_{s}^{m} k_{rs} \Big]$$

odakle se vidi da je dovoljno da zbir vrsta matrice K budo jednak jedinici pa da matrica (2.25) predstavlja jednu statističku strukturu.

Opšti član matrice (2.19) je oblika

(2.26) $$\sum_{r}^{n} Q^{ir} S_{rj} \;.$$

Zbir i-te vrste matrice S date sa (2.23) je

(2.27) $$\sum_{j}^{m} S_{ij} = \sum_{j}^{m} \Big[\sum_{r}^{N} q_{ri}p_{rj} \Big] = \sum_{r}^{N} q_{ri} \Big[\sum_{j}^{m} p_{rj} \Big] \,,$$

pa pošto je zbir svake vrste matrice Φ jednak jedinici, to je

(2.28) $$\sum_{j}^{m} S_{ij} = \sum_{r}^{N} q_{ri}$$

Sa druge strane, zbir i-te vrste matrice Q date sa (2.22) je

$$\sum_{j}^{n} Q_{ij} = \sum_{j}^{n} [\sum_{r}^{N} q_{ri} q_{rj}] = \sum_{r}^{N} q_{ri} [\sum_{j}^{n} q_{rj}] .$$

Kako je zbir svake vrste matrice V jednak jedinici, to je

(2.29) $$\sum_{j}^{n} Q_{ij} = \sum_{r}^{N} q_{ri} .$$

Iz (2.28) i (2.29) vidi se da je

(2.3o) $$\sum_{j}^{m} S_{ij} = \sum_{j}^{n} Q_{ij}$$

za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Zbir i-te vrste matrice $\hat{K}$ je jednak

(2.31) $$\sum_{j}^{m} [\sum_{r}^{n} Q^{ir} S_{rj}] = \sum_{r}^{n} Q^{ir} [\sum_{j}^{m} S_{rj}] .$$

Posle zamene (2.3o) u (2.31) dobićemo

(2.32) $$\sum_{j}^{m} [\sum_{r}^{n} Q^{ir} S_{rj}] = \sum_{r}^{n} [\sum_{j}^{m} Q^{ir} Q_{rj}] .$$

Kako je na osnovu poznatog pravila

(2.33) $$\sum_{r}^{n} Q^{ir} Q_{rj} = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq j \\ 1 & \text{za } i = j, \end{cases}$$

to iz (2.32) dobijamo da je zbir i-te vrste matrice $\hat{K}$

$$\sum_{j}^{m} \sum_{r}^{n} Q^{ir} S_{rj} = 1,$$

a to je i trebalo pokazati.

2.3. Kolektivni koeficijent korelacije

Posmatraćemo dva statistička skupa π_1 i π_2 i na njihovim elementima meriti obeležje X i Y. Neka su odgovarajuće statističke strukture date matricama Φ i Ψ, definisanim izrazima (2.6) i (2.7) respektivno. Kao što je rečeno, varijansa strukture skupa π_1 meri se determinantom

$$\sigma^2(\pi_1) = |\Phi' \cdot \Phi| .$$

Sa druge strane, želeli smo da utvrdimo najbolju linearnu vezu izmedju statističkih struktura skupova π_1 i π_2. Koristeći metod najmanjih kvadrata utvrdili smo da je najbolja linearna veza data matricom $\hat{K}$ (2.19), odnosno (2.24), koja daje ocenjene vrednosti statističke strukture skupa π_1 preko strukture skupa π_2. Ta je ocena data strukturom

$$\hat{\Phi} = \Psi (\Psi'\Psi)^{-1} \Psi'\Phi. \tag{2.35}$$

Ovako dobijena ocenjena struktura ima svoj varijabilitet koji ćemo meriti determinantom

$$\hat{\sigma}^2(\pi_1) = |\hat{\Phi}' \cdot \hat{\Phi}| . \tag{2.36}$$

Kad u (2.36) zamenimo vrednost iz (2.35) dobićemo da je varijansa ocenjene strukture

$$\hat{\sigma}^2(\pi_1) = |[\Psi(\Psi'\Psi)^{-1}\Psi'\Phi]' \, [\Psi(\Psi'\Psi)^{-1}\Psi'\Phi]| =$$

$$= |\Phi'\Psi (\Psi'\Psi)^{-1} \Psi' \cdot \Psi (\Psi'\Psi)^{-1}\Psi'\Phi| ,$$

odnosno

$$\hat{\sigma}^2(\pi_1) = |\Phi'\Psi (\Psi'\Psi)^{-1} \Psi'\Phi|. \tag{2.37}$$

Varijansa ocenjene strukture (2.37) može se kraće napisati u obliku

$$\hat{\sigma}^2(\pi_1) = |S'Q^{-1} S| , \tag{2.38}$$

pri čemu su P, Q i S matrice definisane izrazima (2.21), (2.22) i

(2.23) respektivno.

Poredjenjem varijanse strukture skupa π_1 i varijanse ocenjene strukture tog skupa preko statističke strukture skupa π_2, tj. poredjenjem izraza (2.34) i (2.37), dobićemo jedan koeficijent koji će predstavljati odnos "objašnjenog" varijabiliteta statističke strukture skupa π_1 datom strukturom skupa π_2 i ukupnog varijabiliteta statističke strukture skupa π_1.

[illegible] 2. Kvadrat kolektivnog koeficijenta ko-[illegible] je odnos varijanse ocenjene strukture skupa π_1 datom strukturom skupa π_2 i varijanse statističke strukture skupa π_1, tj.

$$R^2 = \frac{|\hat{\Phi}'\ \hat{\Phi}|}{|\Phi'\ \Phi|}$$

U slučaju linearne ocene kolektivni koeficijent korelacije je

$$R^2 = \frac{|\Phi'\Psi\ (\Psi'\Psi)^{-1}\Psi'\Phi|}{|\Phi'\Phi|} = \frac{|S'\ Q^{-1}S|}{|P|}. \tag{2.39}$$

Varijansu ocenjene strukture možemo napisati u skalarnom obliku

$$\hat{\sigma}^2(\pi_1) = \begin{bmatrix} \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i1} S_{j1} & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i1} S_{j2} \cdots & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i1} S_{jm} \\ \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i2} S_{j1} & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i2} S_{j2} \cdots & \sum\limits_i^m \sum\limits_i^n Q^{ij} S_{i2} S_{jm} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{im} S_{j1} & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{im} S_{j2} \cdots & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{im} S_{jm} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

pri čemu je Q^{ij} opšti član matrice Q^{-1}, pa kolektivni koeficijent korelacije izražen u skalarnom obliku je

$$(2.41) \qquad R^2 = \frac{\begin{vmatrix} \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i1} S_{j1} & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i1} S_{j2} & \cdots & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i1} S_{jm} \\ \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i2} S_{j1} & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i2} S_{j2} & \cdots & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{i2} S_{jm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{im} S_{j1} & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{im} S_{i2} & \cdots & \sum\limits_i^m \sum\limits_j^n Q^{ij} S_{im} S_{jm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{vmatrix}}$$

Pokazaćemo da se ovako definisani koeficijent korelacije svodi na kolektivni koeficijent korelacije dat definicijom 1.1. u slučaju kad je broj klasa statističkih struktura skupova π_1 i π_2 isti. Zaista, u tom slučaju je $m=n$, pa su matrice P, Q i S kvadratne matrice reda $n \cdot n$. Na osnovu proizvoda determinanti iz (2.38) dobićemo da je varijansa ocenjene strukture

$$\hat{\sigma}^2(\pi_1) = |S'| \cdot |Q^{-1}| \; |S| .$$

Kako je determinanta transponovane matrice jednaka determinanti matrice a determinanta inverzne matrice jednaka recipročnoj vrednosti determinante matrice, to će se varijansa ocenjene strukture svesti na

$$\hat{\sigma}^2(\pi_1) = \frac{|S|^2}{|Q|} .$$

Zamenjujući ovu vrednost u (2.39) dobićemo da je kolektivni koeficijent korelacije jednak izrazu

(2.42) $$R = \frac{|S|}{\sqrt{|P|}\ \sqrt{|Q|}}\ .$$

Kad P, Q i S zamenim njihovim vrednostima datim sa (2.21), (2.22) i (2.23) dobićemo

(2.43) $$R = \frac{|V'\ \Phi|}{\sqrt{|\Phi'\cdot\Phi|}\ \sqrt{|V'V|}}\ ,$$

a ovo je isti izraz kao i (1.1o) gde je P zamenjeno sa Φ a Q sa V.

Definiciju 1.1. kolektivnog koeficijenta korelacije, koju je dao B. Ivanović, možemo iskoristiti za odredjivanje kolektivnog koeficijenta korelacije i u slučaju kad je broj klasa u statističkim strukturama različit, tj. kad je n > m.

Naime, ako predpostavimo da izmedju statističkih struktura skupova π_1 i π_2 postoji delimična linearna veza, onda ćemo na osnovu nekog kriterijuma odrediti matricu transformacije K tako da ona na najbolji način izražava tu vezu. Matricu transformacije K, odredjenu na taj način i označenu sa $\tilde{K}$, iskoristićemo za ocenu strukture skupa π_1 preko strukture skupa π_2. Tako ćemo dobiti matricu ocenjene strukture

(2.44) $$\tilde{\Phi} = V\cdot\tilde{K}\ .$$

Statistička struktura Φ, data matricom (2.6), i ocenjena statistička struktura $\tilde{\Phi}$, data matricom (2.44), istog su reda i imaju N vrsta i m kolona. Kolektivni koeficijent korelacije izmedju ovih struktura odredićemo na osnovu definicije 1.1. s tim što je P zamenjeno sa Φ a Q sa $\tilde{\Phi}$. Tako ćemo dobiti da je

(2.45) $$\tilde{R} = \frac{|\Phi'\ \tilde{\Phi}|}{\sqrt{|\Phi'\Phi|}\ \sqrt{|\tilde{\Phi}'\tilde{\Phi}|}}\ ,$$

odnosno

(2.46) $$\tilde{R}^2 = \frac{|\Phi'\ V\tilde{K}\ |^2}{|\Phi'\Phi|\ |\tilde{K}'\ V'V\ \tilde{K}|}\ .$$

Determinante u (2.46) su reda m pa s obzirom na osobine proizvoda determinanti i recipročne vrednosti inverzne matrice dobićemo da je

$$\tilde{R}^2 = \frac{|(\Phi' V \tilde{K})^2 (\tilde{K}' V' V \tilde{K})^{-1}|}{|\Phi' \Phi|} . \tag{2.47}$$

Sa druge strane, kolektivni koeficijent korelacije definicijom 2.2 je

$$\tilde{R} = \frac{|\Phi' V \tilde{K}|}{|\Phi' \Phi|} . \tag{2.48}$$

Za matrice u brojitelju izraza (2.47) i (2.48) važi sledeća teorema:

<u>Teorema 2.1.</u> Matrica

$$(\Phi' V \tilde{K})^2 (\tilde{K}' V' V \tilde{K})^{-1}$$

jednaka je matrici

$$\tilde{K}' V' V \tilde{K},$$

ako i samo ako je

$$\tilde{K} = \hat{K} = (V' V)^{-1} V' \Phi . \tag{2.49}$$

D o k a z. Predpostavimo da su matrice u brojiteljima izraza (2.47) i (2.48) jednake, tj. predpostavimo da je

$$(\Phi' V \tilde{K})^2 (\tilde{K}' V' V \tilde{K})^{-1} = \tilde{K}' V' V \tilde{K} . \tag{2.50}$$

Kad jednačinu (2.50) pomnožimo sa desne strane matricom

$$\tilde{K}' V' V \tilde{K}$$

dobićemo jednačinu

$$(\Phi' V \tilde{K})^2 = (\tilde{K}' V' V \tilde{K})^2,$$

odnosno

$$\Phi' V \tilde{K} = \tilde{K}' V' V \tilde{K} . \tag{2.51}$$

Koristeći oznake date izrazima (2.21), (2.22) i (2.23), jednačinu (2.51) napisaćemo u kraćem obliku

$$S' \tilde{K} = \tilde{K}' Q \tilde{K} .$$

Ova matrična jednačina predstavlja n sistema od m jednačina. U i-tom sistemu jednačine imaju oblik

$$S_{1i}k_{11}+S_{2i}k_{21}+\dots+S_{ni}k_{n1}= \Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r1} \Big]k_{11}+\Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r2} \Big]k_{21}+\dots+\Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rm} \Big] k_{n1}$$

$$S_{1i}k_{12}+S_{2i}k_{22}+\dots+S_{ni}k_{n2}= \Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r1} \Big]k_{12}+\Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r2} \Big]k_{22}+\dots+\Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rm} \Big] k_{n2}$$

....

$$S_{1i}k_{1m}+S_{2i}k_{2m}+\dots+S_{ni}k_{nm}= \Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r1} \Big]k_{1m}+\Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r2} \Big]k_{2m}+\dots+\Big[\sum Q_{ri}k_{rm} \Big] k_{nm}$$

Ako u svakoj jednačini ovog sistema eliminišemo S_{1i}, tako što ćemo j-tu jednačinu, $\Big\{ j \in \{1, 2, \dots, m\} \Big\}$ pomnožiti sa k_{1j}, i što ćemo drugu, treću, ..., m-tu jednačinu pomnožiti sa k_{11} a zatim oduzeti od prve, dobićemo sistem od (m-1) jednačina

$$S_{2i}k^1_{22} + \dots + S_{ni}k^1_{n2}=\Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r2} \Big] k^1_{22} + \dots + \Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rm} \Big] k^1_{n2}$$

....

$$S_{2i}k^1_{2m} + \dots + S_{ni}k^1_{nm}=\Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r2} \Big] k^1_{2m} + \dots + \Big[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rm} \Big] k^1_{nm} .$$

pri čemu su uvedene sledeće oznake

$$k^1_{22} = k_{21}k_{12} - k_{22}k_{11}\,, \dots, k^1_{n2} = k_{n1}k_{12} - k_{n2}k_{11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k^1_{2m} = k_{21}k_{1m} - k_{2m}k_{11}\,, \dots, k^1_{nm} = k_{n1}k_{1m} - k_{nm}k_{11} \;.$$

Na sličan način sistem jednačina (2.25) možemo svesti na (m-2) jednačina eliminišući S_{2i}. Produžavajući ovaj postupak nakon (m-1) koraka doćićemo do jedne jednačine oblika

$$S_{mi}k^{m-1}_{mm} = \left[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rm}\right]k^{m-1}_{mm} + \dots + \left[\sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rn}\right]k^{m-1}_{nm}\,,$$

pri čemu je

$$k^{m-1}_{mm} = k^{m-2}_{m;m-1}\,k^{m-2}_{m-1;m} - k^{m-2}_{mm}\,k^{m-2}_{m-1;m-1}\,, \dots, k^{m-1}_{nm} = k^{m-2}_{n-1;m}\,k^{m-2}_{n;m-1} - k^{m-2}_{nm}\,k^{m-2}_{n-1;m-1}$$

Iz jednačine (2.35) vidi se da $S_{m+1;i}, \dots, S_{ni}$ mogu imati proizvoljne vrednosti. Zato možemo uzeti da je

$$S_{m+1;i} = \sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r;m+1}$$

(2.54) $$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{ni} = \sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rn}$$

Uvrštavanjem ovih vrednosti u jednačinu (2.53), a zatim u prethodne jednačine, itd. dobićemo sledeći sistem od n jednačina

$$S_{1i} = \sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r1}$$

$$S_{2i} = \sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{r2}$$

(2.55) $$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{ni} = \sum_{r}^{n} Q_{ri}k_{rn}$$

Kad ovaj postupak ponovimo za sve vrednosti indeksa i, dobićemo m sistema jednačina oblika (2.55). Tih m sistema od n jednačina možemo kraće napisati u matričnom obliku

(2.56) $$S = Q'\tilde{K} .$$

Pošto je Q simetrična matrica, to jednačinu (2.56) možemo pomnožiti sa Q^{-1} sa levo strane. Tako ćemo dobiti

$$\tilde{K} = Q^{-1} S,$$

odnosno

$$\tilde{K} = (Y' Y)^{-1} Y' \Phi.$$

Pokazaćemo sad i obrnuto. Predpostavićemo da je

$$\tilde{K} = (Y' Y)^{-1} Y'\Phi .$$

Kad ovu vrednost zamenimo u matricu

$$(\Phi' Y \tilde{K})^2 (\tilde{K}'Y' Y \tilde{K})^{-1}$$

dobićemo da je

(2.57) $$\begin{aligned}&[\Phi'Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi]^2[\Phi'Y(Y'Y)^{-1}Y'Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi]^{-1}\\ &=[\Phi'Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi]^2[\Phi'Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi]^{-1}= \Phi'Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi.\end{aligned}$$

Sa druge strane, kad vrednost matrice $\tilde{K}$ zamenimo u matricu

$$\tilde{K}' Y' Y \tilde{K}$$

dobićemo

(2.58) $$\begin{aligned}\tilde{K}' Y' Y\tilde{K} &= \Phi'Y(Y'Y)^{-1}Y'Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi =\\ &= \Phi'Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi.\end{aligned}$$

Iz (2.57) i (2.58) se vidi da je u ovom slučaju

$$(\Phi'Y \tilde{K})^2(\tilde{K}' Y' Y \tilde{K}) = \tilde{K}' Y' Y K,$$

a to je i trebalo pokazati.

Iz teoreme 2.1. sledi da je kolektivni koeficijent korelacije dobijen preko definicije 1.1. i ocenjene strukture isti kao i kolektivni koeficijent korelacije dobijen na osnovu definicije 2.2

i linearne ocene statističke strukt... ...agim režima, kad je

$$\tilde{K} = \hat{K} = (Y' Y)^{-1} Y' \Phi$$

tad je

$$\tilde{R}^2 = R^2.$$

2.4. Osobine kolektivnog koeficijenta korelacije

Osobina 2.1. Kvadrat kolektivnog koeficijenta korelacije je jednak ili manji od jedinice, tj.

$$R^2 \leqslant 1.$$

D o k a z. Koristeći osobinu determinanti inverznih matrica i proizvod determinanti, kolektivni koeficijent korelacije dat izrazom (2.39) možemo izraziti preko sledeće determinante

$$R^2 = |(\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' Y(Y'Y)^{-1}Y'\Phi| , \tag{2.59}$$

odnosno

$$R^2 = |P^{-1} S'Q^{-1}S| \tag{2.60}$$

Neka je λ karakteristični koren matrice

$$P^{-1}S'Q^{-1}S,$$

a X njegov odgovarajući karakteristični vektor. Tada je zadovoljena sledeća matrična jednačina

$$[P^{-1}S'Q^{-1}S - \lambda\ I]\ X = 0, \tag{2.61}$$

pri čemu je I jednačina matrica reda $m \times m$, a 0 vektor kolona čiji su elementi nule.

Posle množenja sa leve strane matricom P jednačina (2.61) postaje

$$[S'Q^{-1}S - \lambda\ P]\ X = 0. \tag{2.62}$$

Predpostavljajući da je $N > m$, matrica P je pozitivno definitna i simetrična matrica. Takodje je i matrica P^{-1} pozitivno definitna i simetrična matrica. U tom slučaju postoji nesingularna kvadratna matrica T takva da je

(2.63) $$T'T = P^{-1}$$

pa je

$$P = T^{-1}\, T'^{-1}.$$

Uvrštavajući ovu vrednost u jednačinu (2.62) dobićemo

(2.64) $$[S'Q^{-1}S - \lambda\, T^{-1}T'^{-1}]\, X = 0.$$

Pošto je X karakteristični vektor različit od 0, to iz (2.64) sledi [illegible]e odgovarajuća determinanta jednaka nuli, tj.

(2.65) $$|S'Q^{-1}S - \lambda\, T^{-1}T'^{-1}| = 0.$$

Množeći jednačinu (2.65) sa leve strane determinantom $|T|$, a sa desne strane determinantom $|T'|$ i koristeći osobinu proizvoda determinanti imamo

(2.66) $$|TS'Q^{-1}ST' - \lambda\, I| = 0$$

što znači da je λ karakteristični koren matrice

$$TS'Q^{-1}ST'.$$

Matrica Q^{-1} je simetrična i pozitivno definitna matrica, a $S'Q^{-1}S$ je simetrična i pozitivno semidefinitna. Kako je T nesingularna matrica, to je matrica

$$TS'Q^{-1}ST'$$

simetrična i pozitivno semidefinitna pa su njeni karakteristični koreni nenegativni. Zato je

(2.67) $$\lambda \geq 0.$$

Sa druge strane, u jednačini (2.62) možemo dodati i oduzeti matricu P, tako da dobijemo

$$[\Phi'\Psi\, Q^{-1}\Psi'\Phi - \Phi'\Phi + \Phi'\Phi - \lambda\, \Phi'\Phi]\, X = 0,$$

odnosno

$$[\Phi'(-\Psi Q^{-1}\Psi' + I)\Phi - (1-\lambda)\Phi'\Phi] X = 0,$$

gde smo umesto P i S stavili njihove vrednosti date sa (2.21) i (2.23).

Ako označimo sa M matricu

$$M = I - \Psi Q^{-1} \Psi'$$

a sa μ

$$\mu = 1 - \lambda$$

...va jednačina svedi na jednačinu

(2.68) $$[\Phi' M \Phi - \mu \Phi' \Phi] X = 0.$$

Jednačina (2.68) je istog oblika kao i jednačina (2.62), pa analognim zaključivanjem utvrdićemo da je μ karakteristični koren pozitivno semidefinitne matrice. Zato je

$$\mu \geqslant 0,$$

odnosno

(2.69) $$1 - \lambda \geqslant 0.$$

Iz (2.67) i (2.69) dobićemo da je

(2.7o) $$0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

što znači da je karakteristični koren matrice kojom je definisan kolektivni koeficijent korelacije, nenegativan broj manji ili jednak jedinici.

S obzirom da je determinanta jedne matrice jdnaka proizvodu njenih karakterističnih korena, onda iz (2.7o) sledi da je

$$R^2 \leqslant 1,$$

a to je i trebalo pokazati.

Osobina 2.2. Ako je svaka kolona matrice Φ kojom je definisana statistička struktura skupa π_1 ortogonalna na statističku strukturu skupa π_2 datu matricom Ψ, tada je kolektivni koeficijent korelacije izmedju ovih struktura jednak nuli.

D o k a z. Zaista, u slučaju ortogonalnosti imali bismo

$$S = 0,$$

gde je 0 matrica čiji su elementi nule. Zato je

$$P^{-1}S'Q^{-1}S = 0,$$

pa iz (2.6o) sledi osobina 2.2.

Osobina 2.3. Kolektivni koeficijent korelacije jednak je jedinici ako i samo ako izmedju statističkih struktura Φ i Ψ postoji linearna veza.

D o k a z. Kad medju statističkim strukturama postoji linearna veza

$$\Phi = \Psi \ K$$

onda je

$$\Phi = \Psi \ (\Psi'\Psi)^{-1} \ \Psi'\Phi$$

pa iz (2.59) sledi da je

$$(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi \ \Psi(\Psi'\Psi)^{-1} \ \Psi'\Phi = (\Phi' \ \Phi)^{-1} \ \Phi' \ \Phi,$$

odakle je $R^2 = 1$.

Obrnuto, ocenjena struktura skupa π_1 preko strukture skupa π_2 ima isti broj klasa kao i struktura skupa π_1. Koristeći osobinu 1.3 i dokaz koga su dali J.Karamata i B. Ivanović u [2o] možemo zaključiti da postoji linearna veza izmedju struktura Φ i $\hat{\Phi}$ kad je kolektivni koeficijent korelacije jednak jedinici. Odatle sledi osobina 2.3.

LINEARNA ZAVISNOST ALEATORNIH VEKTORA

U narednom delu rada razmatraćemo dva skupa aleatornih promenljivih veličina. Koristeći postupak koji je doveo do kolektivnog koeficijenta korelacije, definisaćemo vektorski koeficijent korelacije kao meru linearne zavisnosti izmedju dva skupa aleatornih promenljivih.

Vektorski koeficijent korelacije ima veliku primenu u raznim istraživanjima. Na primer, jedan skup promenljivih veličina mogu biti mere fizičkih karakteristika a drugi skup mogu biti mere psihičkih karakteristika, pa istraživač u ovom području mora da "meri" zavisnost izmedju ova dva skupa karakteristika. Isto tako, pri ispitivanju tehničkog progresa i ekonomske razvijenosti neke zemlje, treba ispitati zavisnost ekonomskih pokazatelja i pokazatelja tehničkog progresa.

3.1. Višedimenzionalni normalni raspored

Neka je X p-dimenzionalna aleatorna promenljiva

(3.1) $$X = \left\{ X_1, X_2, \ldots, X_p \right\},$$

neprekidnog tipa koja može uzeti bilo koju vrednost iz p-dimenzionalnog Euklidovog prostora R_p.

Definicija 3.1. Rećićemo da X ima p-dimenzionalni normalni raspored ako je njen zakon verovatnoće dat funkcijom

$$(3.2) \qquad f(x_1, \ldots, x_p) = C_p e^{-\frac{1}{2}(x-b)A(x-b)'},$$

gde je b vektor vrsta

$$\{b_1, \ldots, b_p\},$$

A je pozitivno definitna simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{bmatrix},$$

konstanta C_p pozitivan broj odredjen tako da integral funkcije (3.2) duž celog prostora R_p bude jednak jedinici, tj.

$$C_p \int_{R_p} e^{-\frac{1}{2}(x-b)A(x-b)'} dx = 1,$$

pri čemu je

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$$

$$dx = dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_p .$$

Označimo sa m vektor vrstu očekivanih vrednosti aleatorne promenljive X

$$(3.3) \qquad m = \{m_1, m_2, \ldots, m_p\},$$

gde je

$$\forall i\,[\,i \in \{1, 2, \ldots, p\} \Rightarrow m_i = E(X_i)\,],$$

a sa W disperzionu matricu ove aleatorne promenljive

$$(3.4) \qquad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{p1} & q_{p2} & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

gde je

$$\forall i,j\,[\,i,j \in \{1,2, \ldots, p\} \Rightarrow w_{ij} = E(X_i-m_i)(X_j-m_j)\,].$$

Navešćemo nekoliko poznatih teorema kojima su izražene osnovne osobine aleatorne promenljive sa normalnim rasporedom. Naravno, ovde se nećemo zadržavati na dokazivanju tih teorema jer se dokazi mogu naći u navedenoj literaturi.

Teorema 3.1. Ako je zakon verovatnoće aleatorne promenljive X dat funkcijom (3.2), tada je njena očekivana vrednost jednaka vektoru b, a disperziona matrica je jednaka inverznoj matrici matrice A, tj. tada je

$$m = b,$$
$$W = A^{-1}.$$

Obrnuto, za dati vektor m i pozitivno definitnu matricu W postoji višedimenzionalni zakon verovatnoće dat funkcijom

$$(3.5) \qquad f(x_1,\ldots,x_p)=(2\pi)^{-p/2}|W|^{-1/2}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)W^{-1}(x-m)'}$$

čija očekivana vrednost je jednaka m, a disperziona matrica je matrica W.

Zakon verovatnoće dat funkcijom (3.5) označavaćemo sa

$$(3.6) \qquad N_p(x/m;\, W).$$

Teorema 3.2. Neka al[illegible]a promenljiva X ima normalan raspored $N_p(x/m;W)$ i neka je C [illegible]ca reda $p \times q$, pri čemu je $q \leq p$, ranga q. Tada aleatorna pr[illegible]jiva

$$Y = XC$$

takodje ima normalan raspored

$$N_q(y/mC;C'WC).$$

[illegible] 3.3. Da bi prvih q kompononata aleatorno pro[illegible]e nezavisno od preostalih komponenata, potrebno je i [illegible]a odgovarajući elementi disperzione matrice W budu jednaki nuli, tj. da je

$$w_{ij} = 0$$

$$\forall i \quad i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

$$\forall j \quad j \in \{q+1, q+2, \ldots, p\}.$$

Teorema 3.4. Ako aleatorna promenljiva X ima normalan raspored onda bilo koji podskup njenih kompononata ima takodje normalan raspored.

Ako izdvojimo prvih q kompononata promenljive X, i označimo sa

$$X^{(1)} = \{ X_1, X_2, \ldots, X_q \},$$

onda $X^{(1)}$ ima normalan raspored

$$N_q(x^{(1)}/m^{(1)}; W_{11}),$$

pri čemu je

$$m^{(1)} = \{m_1, m_2, \ldots, m_q\}$$

$$W_{11}=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{q1} & w_{q2} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix}$$

3.2. Uslovni raspored i višestruki koeficijent korelacije

Neka je X p-dimenzionalna aleatorna promenljiva sa normalnim rasporedom $N_p(x/m;W)$. Označimo prvih q komponenata promenljive X sa $X^{(1)}$ a preostalih p-q sa $X^{(2)}$ tako da je

$$X = \left\{X^{(1)}, X^{(2)}\right\},$$

(3.7) $$X^{(1)} = \left\{X_1, X_2, \ldots, X_q\right\},$$

$$X^{(2)} = \left\{X_{q+1}, X_{q+2}, \ldots, X_p\right\}.$$

Na sličan način podelićemo i očekivanu vrednost m aleatorne promenljive X, tako da je

$$m = \left\{m^{(1)}, m^{(2)}\right\},$$

(3.8) $$m^{(1)} = \left\{m_1, m_2, \ldots, m_W\right\},$$

$$m^{(2)} = \left\{m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p\right\}.$$

Takodje ćemo podeliti disperzionu matricu na sledeće matrice

$$W = \left[\begin{array}{c|c} W_{11} & W_{12} \\ \hline W'_{12} & W_{22} \end{array}\right]$$

$$W_{11}=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{q1} & w_{q2} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix}$$

$$W_{22}=\begin{bmatrix} w_{q+1;q+1} & w_{q+2;q+2} & \cdots & w_{q+1;p} \\ w_{q+2;q+1} & w_{q+2;q+1} & \cdots & w_{q+2;p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{p;q+1} & w_{p;q+2} & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

$$W_{12}=\begin{bmatrix} w_{1;q+1} & w_{1;q+2} & \cdots & w_{1;p} \\ w_{2;q+1} & w_{2;q+2} & \cdots & w_{2;p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{q;q+1} & w_{q;q+2} & \cdots & w_{p;p} \end{bmatrix}$$

Razmatraćemo problem odredjivanja rasporeda aleatorne promenljive $X^{(1)}$ pod uslovom da aleatorna promenljiva $X^{(2)}$ ima fiksnu vrednost, tj. pod uslovom da je $X^{(2)} = x^{(2)}$. Ograničićemo se na p-dimenzionalnu promenljivu X sa normalnim rasporedom $N_p(x/m;W)$ i dokazati teoremu koja se odnosi na uslovni raspored promenljive $X^{(1)}$.

<u>Teorema 3.5.</u> Ako aleatorna promenljiva X ima normalan raspored $N_p(x/m;W)$, tada je uslovni raspored za aleatornu promenljivu $X^{(1)}$ pod uslovom da je $X^{(2)} = x^{(2)}$ takodje normalni raspored sa očekivanom vrednošću

(3.10) $$m^{(1)} + x^{(2)} - m^{(2)}\, W_{22}^{-1}\, W_{12}'$$

i disperzionom matricom

(3.11) $$W_{11} - W_{12}\, W_{22}^{-1}\, W_{12}' ,$$

gde su $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, W_{11}, W_{22} i W_{12} dati izrazima (3.8) i (3.9).

D o k a z. Označićemo sa $Y^{(1)}$ i $Y^{(2)}$ nove aleatorne promenljive dobijene jednačinama

$$
(3.12) \qquad \begin{aligned} Y^{(1)} &= X^{(1)} - X^{(2)} W_{22}^{-1} W_{12}', \\ Y^{(2)} &= X^{(2)} . \end{aligned}
$$

Označimo sa C nesingularnu kvadratnu matricu reda $p \times p$

$$
(3.13) \qquad C = \left[\begin{array}{c|c} I_{qq} & 0_{q;p-q} \\ \hline -W_{22}^{-1} W_{12}' & I_{p-q;p-q} \end{array} \right]
$$

Kad matricu C pomnožimo sa leve strane promenljivom X dobićemo

$$
X\, C = \left\{ X^{(1)}, X^{(2)} \right\} \left[\begin{array}{c|c} I_{qq} & P_{q;p-q} \\ \hline -W_{22}^{-1} W_{12}' & I_{p-q;p-q} \end{array} \right] = \left\{ Y^{(1)}, Y^{(2)} \right\}
$$

što znači da se promenljiva Y

$$
Y = \left\{ Y^{(1)}, Y^{(2)} \right\}
$$

dobija linearnom transformacijom

$$
(3.14) \qquad Y = X\, C
$$

Neposrednom primenom teoreme 3.2. zaključićemo da aleatorna promenljiva Y ima normalan raspored

$$
N_p(y/mC;\ C'WC).
$$

Očekivana vrednost promenljive Y je

$$
mC = \left\{ m^{(1)}, m^{(2)} \right\} . C ,
$$

odakle posle množenja dobijamo

$$(3.15)\qquad mC = \left\{m^{(1)} - m^{(2)}\, W_{22}^{-1}\, W_{12}',\ m^{(2)}\right\}.$$

Disperziona matrica aleatorne promenljive Y je

$$C'WC = \left[\begin{array}{c|c} I_{qq} & -W_{12}W_{22}^{-1} \\ \hline 0_{p-q;q} & I_{p-q;p-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{12}' & W_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & 0_{q;p-q} \\ \hline -W_{22}^{-1}\, W_{12}' & I_{p-q;p-q} \end{array}\right]$$

$$(3.16)\qquad C'WC = \left[\begin{array}{c|c} W_{11} - W_{12}\, W_{22}^{-1}\, W_{12}' & 0_{q;p:q} \\ \hline 0_{p-q;q} & W_{22} \end{array}\right]$$

Na osnovu teoreme 3.3 i iz (3.16) proizilazi da su $Y^{(1)}$ i $Y^{(2)}$ nezavisne aleatorne promenljive. Zato je njihov zakon - verovatnoće dat funkcijom

$$(3.17)\qquad f\left(y^{(1)},y^{(2)}\right) = C_q e^{-\frac{1}{2}\left\{y^{(1)}-m^{(1)}+m^{(2)}W_{22}^{-1}W_{12}'\right\}[W_{11}-W_{12}W_{22}W_{12}']^{-1}\cdot}$$

$$\cdot\left\{y^{(1)}-m^{(1)}+m^{(2)}W_{22}^{-1}\, W_{12}'\right\}' \cdot$$

$$\cdot\, C_{p-q} e^{-\frac{1}{2}\left\{y^{(2)}-m^{(2)}\right\} W_{22}^{-1}\left\{y^{(2)}-m^{(2)}\right\}}.$$

Pošto je Jakobijan transformacije (3.14) jednak jedinici jer je determinanta matrice C jednaka jedan, to se vraćanjem na promenljive $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$, zakon verovatnoće aleatorne promenljive X može napisati u obliku

$$(3.18)\qquad f\left(x^{(1)},x^{(2)}\right) = C_q \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^{(1)}-m^{(1)}-x^{(2)}-m^{(2)}W_{22}^{-1}W_{12}'\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,[W_{11}-W_{12}W_{22}^{-1}W_{12}']^{-1}\text{-}1[x^{(1)}-m^{(1)}-x^{(2)}-m^{(2)}W_{22}^{-1}W_{12}']\right\}\cdot$$

$$\cdot\, C_{p-q} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[x^{(2)}-m^{(2)}\right] W_{22}^{-1}\left[x^{2}-m^{(2)}\right]'\right\}.$$

Sa dru... ...rginalni zakon verovatnoće aleatorne promenljive $X^{(2)}$ dat ... ...ncijom

$$(3.19) \quad f\left(x^{(2)}\right) = C_{p-q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,[x^{(2)}-m^{(2)}]\, W_{22}^{-1}\, [x^{(2)}-m^{(2)}]'\right\}.$$

Pošto je uslovni zakon verovatnoće jednak količniku zajedničkog zakona verovatnoće i marginalnog zakona verovatnoće, to iz (3.18) i (3.19) dobijamo da je uslovni zakon verovatnoće za aleatornu promenljivu $X^{(1)}$, pod uslovom da je $X^{(2)} = x^{(2)}$ dat funkcijom

$$(3.2o) \quad f\left(x^{(1)}/x^{(2)}\right) = C_q \exp\left\{-\frac{1}{2}\,[x^{1}-m^{(1)}-\left(x^{(2)}-m^{(2)}W_{22}^{-1}W_{12}'\right)]\,.\right.$$

$$[W_{11} - W_{12}\, W_{22}^{-1}\, W_{12}']^{-1}$$

$$\left.[x^{(1)}-m^{(1)}-x^{(2)}-m^{(2)}W_{22}^{-1}\, W_{12}']'\right\}.$$

Iz (3.2o) se vidi da je uslovni zakon verovatnoće aleatorne promenljive $X^{(1)}$ normalni zakon verovatnoće sa očekivanom vrednošću (3.1o) i disperzionom matricom (3.11), a to je i trebalo dokazati.

Iz (3.1o) sledi da je očekivana vrednost aleatorne promenljive $X^{(1)}$ pod uslovom da je $X^{(2)} = x^{(2)}$ linearna funkcija datih vrednosti $x^{(2)}$, a disperziona matrica uopšte ne zavisi od vrednosti $x^{(2)}$.

<u>Teorema 3.6.</u> Neka aleatorna promenljiva X ima normalni raspored $N_p(x/m;\, W)$ i neka je izvršena podela promenljive X, očekivane vrednosti m i disperzione matrice W data izrazima (3.7), (3.8) i (3.9). Neka je X_i bilo koja komponenta aleatorne promenljive $X^{(1)}$ a $X^{(2)}$. a' bilo koja linearna kombinacija aleatorne promenljive $X^{(2)}$. Tada će razlika

$$X_i - X^{(2)}\cdot a'$$

imati minimalnu disperziju kad je

$$\alpha' = W_{22}^{-1} W'_{(i)} ,$$

pri čemu je $W'_{(i)}$ i-ta kolona matrice W_{12}, tj.

$$W_{(i)} = \left\{ w_{1;q+i}, w_{2;q+i}, \ldots, w_{q;q+i} \right\}$$

a α vektor vrsta

$$\alpha = \left[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \right] .$$

D o k a z. Očekivane vrednosti promenljivih $X_i - X^{(2)} W_{22}^{-1} W'_{(i)}$ i $X^{(2)}$ su $m_i - m^{(2)} W_{22}^{-1} W'_{(i)}$ i $m^{(2)}$, a njihova kovarijansa je

$$E \left[X_i - m_i - \left(X^{(2)} - m^{(2)}\right)\left(W_{22}^{-1} W'_{(i)}\right) \right]' \left[X^{(2)} - m^{(2)}\right].$$

Posle transponovanja izraza u prvoj zagradi i množenja sa izrazom u drugoj zagradi dobićemo da je kovarijansa promenljivih $X_i - X^{(2)} W_{22} W'_{(i)}$ i $X^{(2)}$ jednaka

$$E[X_i - m_i] \left[X^{(2)} - m^{(2)}\right] - W_{(i)} W_{22}^{-1} E\left[X^{(2)} - m^{(2)}\right]' \left[X^{(2)} - m^{(2)}\right],$$

odnosno

$$(3.21) \qquad W_{(i)} - W_{(i)} W_{22}^{-1} W_{22} = 0,$$

što znači da su to dve nezavisne aleatorne promenljive.

Posmatrajmo sad aleatornu promenljivu $X_i - X^{(2)} . \alpha'$. Njena očekivana vrednost je

$$m_i - m^{(2)} . \alpha' ,$$

a njena disperzija je

$$(3.22) \qquad E\left[X_i - m_i - \left(X^{(2)} - m^{(2)}\right) \alpha' \right]' \left[X_i - m_i - \left(X^{(2)} - m^{(2)}\right) \alpha' \right].$$

Kad u izrazu (3.22) dodamo i oduzmemo član

$$\left(X^{(2)} - m^{(2)}\right) W_{22}^{-1} W'_{(i)}$$

i izvršimo množenje dobićemo izraz

$$E[X_i-m_i]'[X_i-m_i] + \left\{ W_{(i)}W_{22}^{-1} - a \right\} E[X^{(2)}-m^{(2)}]'[X^{(2)}-m^{(2)}]\left\{W_{22}^{-1}W'_{(i)}-a\right\} +$$

$$+ W_{(i)}W_{22}^{-1} E[X^{(2)}-m^{(2)}]'[X^{(2)}-m^{(2)}]\, W_{22}^{-1}\, W'_{(i)} \,,$$

odnosno

$$[illegible]\, W_{(i)}W_{22}^{-1}\, W'_{(i)}+(W_{(i)}W_{22}^{-1}-a)W_{22}^{-1}(W_{22}^{-1}W_{(i)}-a)' \,.$$

[illegible] (3.23) je disperzija aleatorne promenljive $X_i-X^{(2)}.\,a'$.

Kako je W_{22} pozitivno de[illegible] matrica, izraz (3.23) će imati minimalnu vrednost kad je

$$a = W_{(i)}\, W_{22}^{-1} \,,$$

što dokazuje teoremu.

Teorema 3.7. Ako su ispunjene predpostavke teoreme 3.6. onda se maksimalna korelacija izmedju X_i i $X^{(2)}.\,a'$ dobija kad je

$$a = W_{(i)}W_{22}^{-1} \,.$$

D o k a z. Na osnovu teoreme 3.6. jasno je da je za bilo koju konstantu c i bilo koje a zadovoljena sledeća nejednačina

$$(3.24)\quad E[X_i-m_i - (X^{(2)}-m^{(2)})\, W_{22}^{-1}\, W'_{(i)}\,]^2 = E[X_i-m_i-c(X^{(2)}-m^{(2)})a'\,]^2.$$

Posle kvadriranja izraza u zagradama u (3.24) dobićemo sledeću nejednačinu

$$w_{ii}+E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}\, W'_{(i)}]^2-2E\,[(X_i-m_i)(X^{(2)}-m^{(2)})]\, W_{22}^{-1}\, W'_{(i)} \leqslant$$

$$\leqslant w_{ii}+c^2E\,[(X^{(2)}-m^{(2)}a'\,]^2 - 2cE\,[(X_i-m_i)(X^{(2)}-m^{(2)}]\, a'$$

odnosno

$$2\frac{E[X_i-m_i][X^{(2)}-m^{(2)}].W_{22}^{-1}\cdot W'_{(i)}}{\sqrt{W_{ii}}\sqrt{E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}]^2}}-\frac{E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}]^2}{\sqrt{W_{ii}}\sqrt{E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}]^2}}\geq$$

(3.25)

$$\geq 2c\frac{E[(X_i-m_i)(X^{(2)}-m^{(2)})\alpha']}{\sqrt{W_{ii}}\sqrt{E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}]^2}}-c^2\frac{E[(X^{(2)}-m^{(2)})\alpha']^2}{\sqrt{W_{ii}}\sqrt{E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}]^2}}$$

Pošto je nejednačina (3.25) zadovoljena za proizvoljnu vrednost konstante c, onda će ta nejednačina biti zadovoljena i za

$$c^2=\frac{E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}]}{E[(X^{(2)}-m^{(2)})\alpha']^2}.$$

Kad ovu vrednost zamenimo u (3.25) dobićemo nejednačinu

$$\text{(3.26)}\quad \frac{E[(X_i-m_i)(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}}{\sqrt{W_{ii}}\sqrt{E[(X^{(2)}-m^{(2)})W_{22}^{-1}W'_{(i)}]^2}}\geq\frac{E[(X_i-m_i)(X^{(2)}-m^{(2)})\alpha']}{\sqrt{W_{ii}}\sqrt{E[(X^{(2)}-m^{(2)})\alpha']^2}}$$

Izraz na levoj strani nejednačine (3.26) predstavlja koeficijent korelacije izmedju aleatornih promenljivih X_i i $X^{(2)}.W_{22}^{-1}W'_{(i)}$ a izraz na desnoj strani je koeficijent korelacije izmedju promenljivih X_i i $X^{(2)}.\alpha'$. Iz nejednačine (3.26) sledi da je koeficijent korelacije izmedju X_i i bilo koje linearne kombinacije $X^{(2)}.\alpha'$ najveći kad je

$$\alpha'=W_{22}^{-1}W'_{(i)}$$

a to je i trebalo pokazati.

<u>Definicija 3.2.</u> Maksimalna vrednost koeficijenta korelacije izmedju aleatorne promenljive X_i i aleatorne promenljive koja je linearna funkcija $X^{(2)}.\alpha'$, naziva se Višestruki koefici-

jent korelacije izmedju jedno onalne aleatorne promenljive X_i i (p-q)-dimenzionalne aleator enljive $X^{(2)}$.

Na osnovu teor .7, višestruki koeficijent korelacije je koeficijent korelacij edju aleatorne promenljive X_i i $X^{(2)} W_{22}^{-1} W'_{(i)}$, tj.

$$(3.27) \qquad R_{i(q+1, \ldots, p)} = \frac{E\,[(X_i - m_i)(X^{(2)} - m^{(2)}) W_{22}^{-1} W'_{(i)}\,]}{\sqrt{w_{ii}}\ \sqrt{E[(X^{(2)} - m^{(2)}) W_{22}^{-1} W'_{(i)}\,]^2}}$$

što se svodi na

$$(3.28) \qquad R_{i(q+1, \ldots, p)} = \frac{W_{(i)} W_{22}^{-1} W'_{(i)}}{\sqrt{w_{ii}}\ \sqrt{W_{(i)} W_{22}^{-1} W'_{(i)}}}$$

Prema tome, višestruki koeficijent korelacije je

$$(3.29) \qquad R_{i(q+1, \ldots, p)} = \frac{\sqrt{W_{(i)} W_{22}^{-1} W'_{(i)}}}{\sqrt{w_{ii}}},$$

gde je W_{22} disperziona matrica (p-q)-dimenzionalne aleatorne promenljive, w_{ii} disperzija jednodimenzionalne aleatorne promenljive X_i a $W_{(i)}$ vektor vrsta kovarijansi izmedju promenljive X_i i komponenti promenljive $X^{(2)}$.

Ako sa W^* označimo disperzionu matricu (p-q+1)-dimenzionalne aleatorne promenljive

$$\left\{ X_i, X^{(2)} \right\} = \left\{ X_i, X_{q+1}, \ldots, X_p \right\}$$

onda ćemo iz (3.29) dobiti

$$(3.30) \qquad R^2_{i(q+1, \ldots, p)} = 1 - \frac{|W^*|}{w_{ii}\ |W_{22}|}$$

Pošto je W_{22} pozitivno definitna matrica, iz izraza

(3.23) vidi se da je višestru[illegible] [illegible]ficijent korelacije nenegativan broj. Sa druge strane, kao ob[illegible] koeficijent korelacije, njegova vrednost je manja ili jednaka jedinici.

Pored toga, višestruki koeficijent korelacije je jednak jedinici ako i samo ako je aleatorna promenljiva X_1 linearna funkcija aleatornih promenljivih $X_{q+1}, \ldots, X_p$.

3.3. Linearna zavisnost aleatornih promenljivih

Posmatrajmo p-dimenz[illegible]nalnu aleatornu promenljivu

$$X = \{ X_1, X_2, \ldots, X_p \}$$

sa očekivanom vrednošću

$$m = \{ m_1, m_2, \ldots, m_p \}$$

i disperzionom matricom

$$W = [w_{ij}] .$$

Disperziona matrica je simetrična a na njenoj dijagonali nalaze se varijanse komponenata aleatorne promenljive X. Ostali matrični elementi su kovarijanse izmedju komponenata te promenljive.

Posmatraćemo najjednostavniji oblik zavisnosti izmedju komponenata aleatorne promenljive, tj. linearnu zavisnost i neke osobine disperzione matrice.

Definicija 3.3. Rećićemo da su komponente aleatorne promenljive X linearno zavisne ako postoje vrednosti $c_1, c_2, \ldots, c_p$ koje nisu sve jednake nuli i takve da aleatorna promenljiva

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_p X_p$$

ima disperziju jednaku nuli, odnosno takve da je

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_p X_p = \text{const.}$$

Teorema 3.8. Disperziona matrica W aleatorne promenljive X je uvek pozitivno semidefinitna simetrična matrica.

D o k a z. Neka su $c_1, c_2, \dots c_p$ proizvoljne konstante. Tada je očekivana vrednost aleatorne promenljive

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_p X_p$$

jednaka

$$E(Y) = c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_p m_p ,$$

a njena disperzija je

$$\sigma^2(Y) = E\,[\sum_i^p c_i\,(X_i - m_i)]^2 ,$$

odnosno

$$\sigma^2(Y) = \sum_i^p \sum_j^p w_{ij}\, c_i\, c_j .$$

Pošto je disperzija jednodimenzionalne aleatorne promenljive uvek nenegativan broj, to je

$$\sum_i^p \sum_j^p w_{ij}\, c_i c_j \geq 0,$$

tj. kvadratna forma odredjena disperzionom matricom W je nenegativna. Time je teorema dokazana.

Teorema 3.9. Da bi komponente aleatorne promenljive X bile linearno zavisne, potrebno je i dovoljno da je determinanta disperzione matrice W jednaka nuli, tj. potrebno je i dovoljno da je

(3.31) $$|W| = 0 .$$

D o k a z. Predpostavimo da je uslov (3.31) ispunjen. Tada su vektor kolone matrice W linearno zavisne, pa postoje konstante $c_1, c_2, \ldots, c_p$ takve da je

$$(3.32) \qquad \sum_{i}^{p} w_{ij}\, c_i = 0$$

za svako $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Množeći j-tu jednačinu sistema (3.32) sa c_j i sabiranjem tih jednačina dobićemo izraz

$$(3.33) \qquad \sum_{i}^{p} \sum_{j}^{p} w_{ij}\, c_i$$

Sa druge strane, aleatorna promenljiva

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_p X_p$$

ima disperziju jednaku

$$E\, [\sum_{i}^{p} (X_i - m_i) c_i]^2 = \sum_{i}^{p} \sum_{j}^{p} w_{ij}\, c_i\, c_j,$$

pa je, na osnovu (3.33)

$$E\, [\sum_{i}^{p} (X_i - m_i) c_i\,]^2 = 0,$$

što je moguće jedino kad je

$$\sum_{i}^{p} (X_i - m_i) c_i = \text{const.}$$

odakle sledi linearna zavisnost komponenti $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

Obrnuto, predpostavimo da su komponente $X_1, X_2, \ldots, X_p$ linearno zavisne. Tada je disperzija linearne kombinacije

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_p X_p$$

jednaka nuli, tj. tada je

(3.34) $$\sum_{i}^{p} \sum_{j}^{p} w_{ij}\, c_i\, c_j = 0.$$

Izraz (3.34) je funkcija konstanti $c_1, c_2, \ldots, c_p$ i ne može imati negativnu vrednost jer je to kvadratna forma matrice W koja je na osnovu teorema 3.8 pozitivno semidefinitna. Ovaj izraz će dostići svoju minimalnu vrednost kad njegovi parcijalni izvodi po c_i budu jednaki nuli, tj. kad je

$$\sum_{j}^{p} w_{ij}\, c_j = 0$$

$$\forall \quad j \in \{1, 2, \ldots ,$$

a to je sistem homogenih jednačina po $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Taj će sistem imati netrivijalno rešenje jedino onda kad je njegova determinanta jednaka nuli, tj. kad je

$$|W| = 0$$

a to je i trebalo dokazati.

Neposredno iz teoreme 3.8 i teoreme 3.9 sledi

<u>Teorema 3.10.</u> Da bi disperziona matrica W aleatorne promenljive X bila pozitivno definitna potrebno je i dovoljno da njene komponente nisu linearno zavisne.

3.4. Regresione površine i srednje kvadratne regresione površine

Posmatrajmo (m+n)-dimenzionalnu aleatornu promenljivu

$$Z = \{Y, X\},$$

pri čemu je

$$\left\{ Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \right\}$$

$$X = \left\{ X_1, X_2, \ldots, X_n \right\}$$

Označimo sa $f(z)$ zakon verovatnoće aleatorne promenljive Z, a sa $f_1(y)$ i $f_2(x)$ marginalne zakone verovatnoća promenljivih Y i X. Sa $f(y/x)$ označimo uslovni zakon verovatnoće promenljive Y pod uslovom da je $X = x$. Neka je očekivana vrednost promenljive Z označena sa m_z tako da je

$$m_z \doteq \left\{ m_x, m_y \right\},$$

(3.35)
$$m_x = \left\{ m_{x1}, m_{x2}, \ldots, m_{xn} \right\}$$

$$m_y = \left\{ m_{y1}, m_{y2}, \ldots, m_{ym} \right\},$$

a disperziona matrica

(3.36)
$$W = \left[\begin{array}{c|c} W_{yy} & W_{yx} \\ \hline W'_{yx} & W_{xx} \end{array} \right]$$

Pri tome je W_{xx} podmatrica reda $n \times n$ varijansi i kovarijansi aleatorne promenljive X, W_{yy} podmatrica reda $m \times m$ varijansi i kovarijansi aleatorne promenljive Y, a W_{yx} podmatrica reda $m \times n$ kovarijansi izmedju komponenata promenljive X i promenljive Y.

Za fiksiranu vrednost aleatorne promenljive $X = x$, aleatorna promenljiva Y je m-dimenzionalna promenljiva koja ima uslovni zakon verovatnoće $f(y/x)$. Uslovna aleatorna promenljiva $Y/X=x$ ima očekivanu vrednost

$$E[Y/X=x] = \left\{ E[Y_1/x], E[Y_2/x], \ldots, E[Y_m/x] \right\} =$$

$$= \left\{ \int_{R_m} y_1 f(y/x)\, dx, \int_{R_m} y_2 f(y/x)\, dy, \ldots, \int_{R_m} y_m f(y/x) \right\}.$$

Uslovna očekivana vrednost (3.37) predstavlja tačku u m-dimenzionalnom prostoru. Kad se vrednost promenljive $X = x$ promeni promeniće se i uslovna očekivana vrednost promenljive Y i ta promena je jednoznačnog karaktera tako da svakoj vrednosti x odgovara jedna tačka u prostoru R_m. Skup tačaka ovako dobijenih u prostoru R_m odredjuje jednu hiperpovršinu tog prostora definisanu vrednostima x iz prostora R_n. Ova hiperpovršina na izvestan način predstavlja vezu izmedju aleatorne promenljive Y i aleatorne promenljive X.

<u>Definicija 3.4.</u> Hiperpovršina dobijena preslikavanjem tačaka prostora X-ova u prostoru Y- uslovne očekivane vrednosti

$$y = E\,[Y/X = x] \tag{3.38}$$

naziva se regresiona površina aleatorne promenljive Y u odnosu na aleatornu promenljivu X.

Regresionu površinu (3.38) označićemo kraće sa

$$y = m(x)\,, \tag{3.39}$$

pri čemu je

$$\forall\, i \quad [i \in \{1, \dots, m\}]$$

$$y_i = m_i(x) = \int\limits_{R_m} y_i f(y/x)\, dy\,, \tag{3.40}$$

a

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

$$m(x) = \{m_1(x), m_2(x), \dots, m_m(x)\}\,.$$

Regresiona površina ima izvesna optimalna svojstva izražena sa sledećim teoremama.

<u>Teorema 3.11.</u> Uslovna aleatorna promenljiva $Y_i/X=x$ imaće najmanje srednje kvadratno odstupanje

$$E\left\{[Y_i - u_i(x)]/X = x\right\}^2$$

ako je

$$u_i(x) = m_i(x),$$

gde je $m_i(x)$ dato integralom (3.4o).

D o k a z. Za datu vrednost x aleatorna promenljiva $Y_i/X = x$ je jednodimenzionalna promenljiva, pa teorema 3.11 sledi neposredno iz osobine disperzije jednodimenzionalne aleatorne promenljive.

<u>Teorema 3.12.</u> Uslovna aleatorna promenljiva $Y/X=x$ imaće najmanje ukupno srednje kv[illegible] odstupanje

$$E\left\{[Y-u(x)]\,[Y-u(x)]'/X=x\right\} = \sum_{i}^{m} E\left\{[Y_i-u_i(x)]/X=x\right\}^2$$

ako je

$$u(x) = \left\{m_1(x),\ m_2(x),\ \ldots,\ m_m(x)\right\}.$$

D o k a z. Primenom teoreme 3.11 na svaku komponentu promenljive Y sledi teorema 3.12.

Posmatrajmo primer normalnog rasporeda. Neka aleatorna promenljiva Z ima normalni raspored

$$N_{m+n}(z/m_z;\ W)$$

gde su m_z i W dati izrazima (3.35) i (3.36).

U poglavlju 3.2. dokazana je teorema 3.5. kojom je odredjena uslovna očekivana vrednost aleatorne promenljive sa normalnim rasporedom. Neposrednom primenom te teoreme na promenljivu Z dobiće se jednačina regresione površine aleatorne promenljive Y u odnosu na promenljivu X

(3.41) $$y = m_y + (x-m_x)\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx},$$

odnosno

$$
(3.42) \qquad \begin{aligned}
y_1 &= m_{y1} + (x-m_x)\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx} \\
y_2 &= m_{y2} + (x-m_x)\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m &= m_{ym} + (x-m_x)\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx} \; .
\end{aligned}
$$

Jednačine (3.42) odredjuju jednu linearnu transformaciju prostora X-ova u prostoru Y-a, pri čemu je ma[illegible]ica transformacije matrica

$$
(3.43) \qquad W_{xx}^{-1}\, W'_{yx} \; .
$$

U $(m+n)$-dimenzionalnom prostoru jedn[illegible] (3.42) odredjena je jedna hiperravan, tako da imamo sledeću [illegible]u

Teorema 3.13. Ako aleatorna promenljiva Z ima normalni raspored, onda je regresiona površina promenljive Y u odnosu na promenljivu X hiperravan data jednačinom (3.41).

Medjutim, u opštem slučaju regresiona površina ne mora biti linearna transformacija. Ali da bi lakše mogli ispitivati probleme zavisnosti izmedju aleatornih promenljivih, možemo umesto bilo koje transformacije posmatrati samo klasu linearnih transformacija i u toj klasi izabrati "najbolju" regresionu površinu. Naravno, prethodno treba da utvrdimo kriterij za odredjivanje "najbolje" transformacije. Posmatraćemo tzv. rezidualna odstupanja i za kriterij uzeti minimizaciju ukupne disperzije tih rezidualnih odstupanja.

Naime, neka je linearna transformacija data matricom β reda $n \times m$

$$
(3.44) \qquad \beta = \begin{bmatrix}
\beta_{11}, & \beta_{12}, & \ldots, & \beta_{1m} \\
\beta_{21}, & \beta_{22}, & \ldots, & \beta_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{n1}, & \beta_{n2}, & \ldots, & \beta_{nm}
\end{bmatrix}
$$

i neka je

$$\hat{Y}_1 - m_{y1} = \sum_{i}^{n} (X_i - m_{xi})\, \beta_{i1}$$

$$\hat{Y}_2 - m_{y}2 = \sum_{i}^{n} (X_i - m_{xi})\, \beta_{i2}$$

....

$$\hat{Y}_m - m_{ym} = \sum_{i}^{n} (X_i - m_{xi})\, \beta_{im} \quad ,$$

odnosno

(3.45) $$\hat{Y} - m_y = (X - m_x)\beta \; ,$$

tada se razlika

$$Y - \hat{Y} = Y - m_y - (X - m_x)\beta$$

odnosno

$$Y_j - \hat{Y}_j = Y_j - m_{yj} - \sum_{i}^{n} (X_i - m_{xi})\, \beta_{ij}$$

$$\forall j \;\; [\, j \in \{1, \ldots, m\}\,]$$

naziva rezidualno odstupanje aleatorne promenljive Y u odnosu na X.

Naš je cilj da odredimo matricu β tako da ukupna disperzija rezidualnih odstupanja (3.45) dostigne minimum, tj. tako da izraz

$$E\left\{[Y-m_y-(X-m_x)\beta]\,[Y-m_y-(X-m_x)\beta]'\right\} =$$

(3.46)

$$= \sum_{j}^{m} E[Y_j - m_{yj} - \sum_{i}^{n} \beta_{ij}(X_i - m_{xi})]^2 ,$$

dostigne minimalnu vrednost.

<u>Definicija 3.5.</u> Regresiona površina $y-m_y=(x-m_x)\beta$, dobijena linearnom transformacijom β koja minimizira ukupnu disperziju rezidualnih odstupanja, naziva se srednja kvadratna regresiona hiperravan aleatorne promenljive Y u odnosu na promenljivu X.

Da bi odredili srednju kvadratnu regresionu hiperravan, potražimo parcijalne izvode izraza (3.46) po elementima matrice β. Za jednu vrednost indeksa j parcijalni izvod izraza (3.46) po β_{ij} se svodi na

$$(3.47)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta_{ij}} E[Y_j-m_{yj}-\sum_i^n \beta_{ij}(X_i-m_{xi})]^2.$$

Posle kvadriranja izraza u srednjoj zagradi, (3.47) postaje

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{ij}}[w_{jj}(y,y)-2\sum_i^n \beta_{ij}w_{ji}(y,x)+\sum_i^n\sum_k^n \beta_{ij}\,\beta_{kj}\,w_{ik}(x,x)]$$

gde je $w_{jj}(y,y)$ varijansa j-te komponente aleatorne promenljive Y, $w_{ij}(y,x)$ kovarijansa izmedju j-te i i-te komponente promenljivih Y i X, a $w_{ik}(x,x)$ kovarijansa izmedju i-te i k-te komponente promenljive X.

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda (3.47) sa nulom dobiće se sistem jednačina

$$(3.48)\qquad \begin{aligned} &\beta_{1j}w_{11}(x,x)+\beta_{2j}w_{21}(x,x)+\dots+\beta_{nj}w_{n1}(x,x)=w_{j1}(y,x)\\ &\beta_{1j}w_{21}(x,x)+\beta_{2j}w_{22}(x,x)+\dots+\beta_{nj}w_{n2}(x,x)=w_{j2}(y,x)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\beta_{1j}w_{n1}(x,x)+\beta_{2j}w_{n2}(x,x)+\dots+\beta_{nj}w_{nn}(x,x)=w_{jn}(y,x)\end{aligned}$$

Sistem (3.48) je matrična jednačina

$$(3.49)\qquad W_{xx}\beta_{(j)}=[W_{yx}^{(j)}]'$$

gde je $\beta_{(j)}$ j-ta kolona matrice β, a $W_{yx}^{(j)}$ j-ta vrsta matrice W_{yx}.

Za svaku vrednost indeksa j dobija se jedna matrična jednačina (3.49) tako da imamo ukupno m sistema jednačina od n jednačina, a matrica W_{xx} je matrica svakog od ovih sistema. Sistem matričnih jednačina (3.49) je matrična jednačina

$$(3.5o) \qquad W_{xx}\,\beta = W'_{yx}\,.$$

Predpostavljajući da komponente aleatorne promenljive X nisu linearno zavisne, matrica W_{xx} je nesingularna matrica, pa je rešenje jednačine (3.5o) matrica

$$\hat{\beta} = W_{xx}^{-1}\,W'_{yx}\,.$$

Tako da je srednja kvadratna regresiona hiperravan data jednačinom

$$(3.51) \qquad y - m_y = (x - m_x)\,W_{xx}^{-1}\,W'_{yx}$$

Poredjenjem (3.51) i (3.41) vidi se da je kod normalnog rasporeda srednja kvadratna regresiona hiperravan jednaka regresionoj površini.

Odredićemo minimalnu vrednost disperzije rezidualnih odstupanja. Iz (3.46) dobija se da je ta vrednost

$$\sum_{j}^{m}\Big\{w_{jj}-2\sum_{i}^{n}\beta_{ij}w_{ji}(y,x)+\sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n}\beta_{ij}\beta_{kj}w_{ik}(x,x)\Big\}$$

Iz (3.49) dobijamo

$$\beta_{(j)} = \Big\{\sum_{s}^{n}w^{1s}(x,x)\,w_{js}(y,x),\ \ldots,\ \sum_{s}^{n}w^{ns}(x,x)\,w_{js}(y,x)\Big\}$$

tako da je

$$\sum_{i}^{n}\beta_{ij}w_{ji}(y,x) = \sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n}w^{ik}(x,x)w_{jk}(y,x)\;w_{ji}(y,x)\;,$$

$$\sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n}\beta_{ij}\,\beta_{kj}\,w_{ik}(x,x) = \sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n}\sum_{s}^{n}\sum_{r}^{n} w^{ir}w^{ks}w_{ik}w_{jr}(y,x)w_{js}(y,x)$$

$$= \sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n} w^{ik}(x,x)\; w_{jk}(y,x)\; w_{ji}(y,x)$$

jer je

$$\sum_{r}^{n} w_{ik}w^{ir} = \begin{cases} 1 & \text{za } k=r \\ 0 & \text{za } k\neq r \end{cases}$$

pa je minimum disperzije rezidualnih odstupanja

$$(3.52) \qquad \sum_{j}^{m}\left[w_{jj}(y,y) - \sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n} w^{ik}(x,x)\; w_{jk}(y,x)\; w_{ji}(y,x)\right]$$

Sa druge strane, posmatrajmo količnik sledećih determinanti

$$(3.53) \qquad \frac{|W^{*}|}{|W_{xx}|}$$

Koristeći osobinu determinanti inverznih matrica, izraz (3.52) postaje

$$\begin{vmatrix} w_{jj}(y,y) & w_{j1}(y,x), & w_{j2}(y,x), & \dots, & w_{jn}(y,x) \\ w_{j1}(y,x) & w_{11}(x,x), & w_{12}(x,x), & \dots, & w_{1n}(x,x) \\ w_{j2}(y,x) & w_{21}(x,x), & w_{22}(x,x), & \dots, & w_{2n}(x,x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{jn}(y,x) & w_{n1}(x,x), & w_{n2}(x,x), & \dots, & w_{nn}(x,x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w^{11} & \dots & w^{1n} \\ 0 & w^{21} & \dots & w^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w^{n1} & \dots & w^{nn} \end{vmatrix}$$

Posle množenja, količnik (3.52) postaje

$$\begin{vmatrix} w_{jj}(y,y) & \sum\limits_{i}^{n} w_{ji}(y,x)\, w^{i1} & \sum\limits_{i}^{n} w_{j2}(y,x) w^{i2}, & \dots, & \sum\limits_{i}^{n} w_{ji}(y,x) w^{in} \\ w_{j1}(y,x) & \sum\limits_{i}^{n} w_{1i}(y,x)\, w^{i1} & \sum\limits_{i}^{n} w_{1i}(y,x) w^{i2}, & \dots, & \sum\limits_{i}^{n} w_{1i}(y,x) w^{in} \\ w_{j2}(y,x) & \sum\limits_{i}^{n} w_{2i}(x,x)\, w^{i1} & \sum\limits_{i}^{n} w_{i2}(x,x) w^{i2}, & \dots, & \sum\limits_{i}^{n} w_{i2}(x,x) w^{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ w_{jn}(y,x) & \sum\limits_{i}^{n} w_{ni}(x,x) w^{i1} & \sum\limits_{i}^{n} w_{ni}(x,x) w^{i2}, & \dots, & \sum\limits_{i}^{n} w_{ni}(x,x) w^{in} \end{vmatrix}$$

S obzirom da je

$$\sum_{i}^{n} w_{ri}(x,x) w^{is} = \begin{cases} 1 & \text{za } r = s \\ o & \text{za } r \neq s \end{cases}$$

to [illegible]lna vrednost disperzije rezidualnih odstupanja j-te kom- [illegible]i na determinantu

$$\begin{vmatrix} w_{jj}(y,y) & \sum\limits_{i}^{n} w_{ji}(y,x) & \sum\limits_{i} w_{ji}(y,x) w^{i2}, & \dots, & \sum\limits_{i}^{n} w_{ji}(y,x) w^{in} \\ & 1 & o & , \dots, & o \\ w_{j1}(y,x) & o & 1 & , \dots, & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{jn}(y,x) & o & o & , \dots, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= w_{jj}(y,x) - \sum_{i}^{n} \sum_{k}^{n} w_{ji}(y,x)\, w_{jk}(y,x)\, w^{ik} ,$$

pa poredjenjem sa (3.52) vidi se da je minimalna vrednost ukupnih disperzija rezidualnih odstupanja jednaka zbiru količnika determinanti

$$(3.54) \qquad \sum_{j}^{n} \frac{|W_{(j)}|}{|W_{xx}|}$$

pri čemu je $|W_{(j)}|$ determinanta

$$|W_j| = \begin{vmatrix} w_{jj}(y,y) & w_{j1}(y,x) & w_{j2}(y,x), & \dots, & w_{j2}(y,x) \\ w_{j1}(y,x) & w_{11}(x,x) & w_{12}(x,x), & \dots, & w_{1n}(x,x) \\ w_{j2}(y,x) & w_{21}(x,x) & w_{22}(x,x), & \dots, & w_{2n}(x,x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{jn}(y,x) & w_{n1}(x,x) & w_{n2}(x,x), & \dots, & w_{nn}(x,x) \end{vmatrix}$$

Ukupnu disperziju rezidualnih odstupanja možemo izraziti sa

$$(3.55) \qquad \sum_{j}^{n} \left| w_{jj}(y,y) - [W_{yx}^{(j)}]' \, W_{xx}^{-1} \, W_{yx}^{(j)} \right|$$

što nije teško proveriti.

VEKTORSKI KOEFICIJENT KORELACIJE

Generalisana varijansa

Poznato je da varijansa kao očekivana vrednost kvadrata odstupanja jednodimenzionalne aleatorne promenljive X od njene aritmetičke sredine, predstavlja jednu meru disperzije te aleatorne promenljive. Označimo je sa

$$w = E(X-m)^2,$$

gde je $m = E(X)$.

Definiciju varijanse jednodimenzionalne aleatorne promenljive uopštićemo i na aleatorne vektore.

Neka je X p-dimenzionalna aleatorna promenljiva, tj.

$$X = \left\{X_1, X_2, \ldots, X_p\right\}.$$

Za svaku komponentu aleatorne promenljive X možemo odrediti odgovarajuću varijansu na osnovu marginalnog zakona verovatnoće tako da ćemo dobiti p varijansi koje će predstavljati mere rasturanja pojedinih komponenti promenljive X. Pored toga, za svake dva komponente promenljive X možemo odrediti kovarijansu izmedju njih kao očekivanu vrednost proizvoda odstupanja komponenti od njihovih sredina, tj. kao

$$w_{ij} = E\,[(X_i-m_i)(X_j-m_j)]\,.$$

Na taj način svakoj p-dimenzionalnoj aleatornoj promenljivoj X odgovara jedna disperziona matrica reda p x p koja je simetrična zbog osobine komutativnosti kovarijansi, tj. zbog

$$w_{ij} = w_{ji} \qquad \forall\; i,\, j \in \left\{1,\, 2,\, \ldots,\, p\right\}.$$

Na dijagonali disperzione matrice nalaze se pokazatelji rasturanja pojedinih komponenti duž odgovarajućih osa, ali nezavisnih od rasturanja drugih komponenti.

Ostali elementi disperzione matrice su pokazatelji zajedničkih rasturanja parova komponenti promenljive X.

Prema tome, aleatornoj promenljivoj X pridružujemo jednu matricu reda p x p kao pokazatelj rasturanja X duž p-dimenzionog prostora.

Interesuje nas kako da p-dimenzionalnoj aleatornoj promenljivoj X asociramo jednu vrednost koja bi predstavljala meru disperzije te promenljive.

<u>Definicija 4.1.</u> Mera rasturanja aleatorne promenljive X je determinanta disperzione matrice

$$\text{(4.1)} \qquad \sigma_p^2(X) = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}$$

pri čemu je

$$\forall\; i,j\; [i,j \in \left\{1,\ldots,n\right\} \Rightarrow w_{ij} = E(X_i-m_i)(X_j-m_j)].$$

Determinanta (4.1) naziva se generalisana varijansa p-dimenzionalne aleatorne promenljive.

U 3.2. smo utvrdili neke osobine disperzione matrice iz kojih proističe da je generalisana varijansa nenegativan broj. Vrednost nulu ima onda i samo onda kad su komponente aleatorne promenljive X linearno zavisne, tj. kad se vrednosti aleatorne promenljive X nalaze u hiperravni p-dimenzionalnog prostora.

Poznato je da je determinanta pozitivno definitne simetrične matrice manja ili jednaka proizvodu njenih elemenata na dijaginali. Zato generalisana varijansa zadovoljava nejednačinu

$$0 \leqslant \sigma_p^2\,(X) \leqslant \prod_{i=1}^{p} \sigma_i^2 \,, \tag{4.2}$$

pri čemu je $\sigma_i^2 = w_{ii}$ disperzija i-te komponente aleatorne promenljive.

Teorema 4.1. Generalisana varijansa dostiže svoju maksimalnu vrednost

$$\prod_{i=1}^{p} \sigma_i^2 \tag{4.3}$$

tad[illegible] [illegible]mo tada kada su komponente aleatorne promenljive X medjusobno l[illegible]arno nezavisne, tj. ako je propozicija

$$[illegible]_{i,j}\,[\{i,j\}\ [illegible]\ \{1,\,2,\,\ldots,\,p\} \Rightarrow w_{ij} = 0] \tag{4.4}$$

istinita.

D[illegible] a z. Kad su ko[illegible]ponente aleatorne promenljive X nekorelirane, t[illegible] [illegible] je (4.4) zadovolj[illegible]no, disperziona matrica se svodi na dijagonal[illegible] [illegible]icu, tako da je generalisana varijansa jednaka maksimalnoj vre[illegible] [illegible]i (4.3).

Obrnu[illegible] [illegible]ti indukcijom. Ako je p=2, generalisana varijansa je

$$\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{vmatrix} = w_{11}\, w_{22} - w_{12}^{2} \ .$$

Predpostavljajući da je

$$\sigma_{2}^{2}(X) = \sigma_{1}^{2} \cdot \sigma_{2}^{2} \ ,$$

sledi $w_{12} = 0$, odnosno (4.4).

Predpostavimo da je teorema tačna za p=n. U tom slučaju je generalisana varijansa za p = n+1 data determinantom

$$\sigma_{n+1}^{2}(X) = \begin{vmatrix} w_{11} & 0 & \dots & 0 & w_{1;n+1} \\ 0 & w_{22} & \dots & 0 & w_{2;n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{nn} & w_{n;n+1} \\ w_{n+1;1} & w_{n+1;2} & & w_{n+1;n} & w_{n+1;n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} w_{ii} + \sum_{k=1}^{n+1} w_{n+1;k}^{2} \cdot \prod_{i \neq k}^{n} w_{ii} \ .$$

Ako je maksimalna vrednost generalisane varijanse jednaka (4.3), onda iz ovog izraza sledi da je

$$w_{n+1;k} = 0$$

$$\forall k \ [k \in \{1, 2, \dots, n\}]$$

čime je teorema 4.1. dokazana.

4.2. Vektorski koeficijent korelacije

Posmatraćemo dvodimenzionalnu aleatornu promenljivu

$$X = \{X_1, X_2\}$$

Disperziona matrica aleatorne promenljive X je

$$(4.5) \qquad W = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 \end{vmatrix}$$

Determinanta disperzione matrice ima maksimalnu vrednost kad su X_1 i X_2 medjusobno nezavisne promenljive i ta maksimalna vrednost je jednaka

$$\max |W| = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2$$

Minimalnu vrednost determinanta disperzione matrice ima onda i samo onda kad su X_1 i X_2 medjusobno linearno zavisne promenljive, tj. kad se moguće vrednosti aleatorne promenljive X nalaze na jednoj pravoj.

Pošto determinanta disperzione matrice zadovoljava nejednačine

$$0 \leqslant |W| \leqslant \max |W| ,$$

onda ćemo vrednost determinante disperzione matrice odrediti tako što ćemo njenu maksimalnu vrednost pomnožiti sa jednim faktorom. Označimo taj faktor sa $(1-r^2)$. Tako ćemo dobiti jednakost

$$(4.6) \qquad |W| = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2(1-r^2)$$

Koeficijent r definisan jednačinom (4.6) naziva se koeficijent korelacije, a r^2 je tzv. koeficijent determinacije.

Koeficijent determinacije ima maksimalnu vrednost jednaku jedinici onda i samo onda kad su promenljive X_1 i X_2 linearno zavisne, a minimalnu vrednost nulu ima onda kad su X_1 i X_2 medjusobno nezavisne promenljive.

A sad ćemo ova razmatranja uopštiti na slučaj kad komponente aleatorne promenljive X nisu jednodimenzionalne promenljive i na analogan način definisati koeficijent korelacije kao meru linearne zavisnosti izmedju aleatornih vektora.

Neka je Z (m+n) -dimenzionalna aleatorna promenljiva

$$Z = \{Y, X\},$$

pri čemu je

$$Y = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_m]$$

$$X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

sa odgovarajućim očekivanim vrednostima

$$m_z = \{m_y, m_x\}$$

$$m_y = \{m_{y1}, m_{y2}, \ldots, m_{ym}\}$$

$$m_x = \{m_{x1}, m_{x2}, \ldots, m_{xn}\}$$

i disperzionom matricom

$$(4.7) \qquad W = \left[\begin{array}{c|c} W_{yy} & W_{yx} \\ \hline W'_{yx} & W_{xx} \end{array}\right].$$

Matrica W_{yy} je disperziona matrica aleatorne promenljive Y, W_{xx} disperziona matrica aleatorne promenljive X, a W_{yx} matrica kovarijansi izmedju komponenata aleatorne promenljive Y i aleatorne promenljive X.

<u>Teorema 4.1.</u> Generalisana varijansa aleatorne promenljive Z je jednaka proizvodu determinanti

$$(4.8) \qquad |W| = |W_{yy} - W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}| \cdot |W_{xx}| .$$

D o k a z. Posmatrajmo kvadratnu matricu reda (m+n) × × (m+n)

$$(4.9) \qquad \left[\begin{array}{c|c} I_{mm} & -W_{yx}W_{xx}^{-1} \\ \hline 0_{nm} & I_{nn} \end{array}\right],$$

pri čemu su I_{mm} i I_{nn} jedinične matrice, a 0_{nm} matrica čiji su elementi nule. Koristeći osobine proizvoda matrica, nije teško proveriti da je

$$(4.10) \left[\begin{array}{c|c} I_{mm} & -W_{yx}W_{xx}^{-1} \\ \hline 0_{nm} & I_{nn} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} W_{yy} & W_{yx} \\ \hline W'_{yx} & W_{xx} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_{mm} & -W_{yx}W_{xx}^{-1} \\ \hline 0_{nm} & I_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} W_{yy}-W_{yx}W_{xx}^{-1}W'_{yx} & 0_{nm} \\ \hline 0_{nm} & W_{xx} \end{array}\right]$$

Iz jednačine (4.1o) dobija se sledeća jednačina

$$(4.11) \left|\begin{array}{c|c} I_{mm} & -W_{yx}W_{xx}^{-1} \\ \hline 0_{nm} & I_{nn} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c|c} W_{yy} & W_{yx} \\ \hline W'_{yx} & W_{xx} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c|c} I_{mm} & -W_{yx}W_{xx}^{-1} \\ \hline 0_{nm} & I_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} W_{yy}-W_{yx}W_{xx}^{-1}W'_{yx} & 0_{nm} \\ \hline 0_{nm} & W_{xx} \end{array}\right|$$

Kako je determinanta matrice (4.9) jednaka jedinici to se leva strana u (4.11) svodi na $|W|$. Na osnovu osobine determinanti

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right| = |A| \cdot |C|$$

koja važi za bilo koje dve kvadratne matrice A i C, desna strana jednačine (4.11) jednaka je

$$|W_{yy} - W_{yx}W'_{xx}W'_{yx}| \cdot |W_{xx}|$$

odakle sledi (4.8), odnosno teorema 4.1.

<u>Teorema 4.2.</u> Generalisana varijansa aleatorne promenljive Z manja je ili jednaka od proizvoda generalisanih disperzija promenljivih Y i X, tj.

$$(4.12) \qquad |W| \leq |W_{yy}| \cdot |W_{xx}| \,.$$

D o k a z. Koristeći (4.8), generalisanu varijansu možemo izraziti kao proizvod sledećih determinanti

$$(4.13) \qquad |W| = |I - W_{yy}^{-1} W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}| \cdot |W_{yy}| \cdot |W_{xx}|,$$

odakle se vidi da će nejednačina (4.12) biti zadovoljena jedino ako je determinanta matrice

$$(4.14) \qquad I - W_{yy}^{-1} W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}$$

pozitivna i ne veća od jedan, tj. jedino ako je

$$0 < |I - W_{yy}^{-1} W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}| \leq 1.$$

Neka je λ karakteristični koren matrice (4.14). Tada je determinanta

$$|I - W_{yy}^{-1} W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx} - \lambda I| = 0,$$

odnosno

$$|W_{yy}^{-1} W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx} - (1-\lambda) I| = 0.$$

To znači da je $(1-\lambda)$ karakteristični koren matrice

$$(4.15) \qquad W_{yy}^{-1} W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx} .$$

Koristeći postupak dokaza Osobine 2.2. u poglavlju 2.4. može se proveriti da je to karakteristični koren pozitivno definitne simetrične matrice, pa je

$$1 - \lambda \geq 0.$$

Sa druge strane, na analogan način se dokazuje da je λ karakteristični koren simetrične pozitivno definitne matrice, tako da je

$$0 \leq 1 - \lambda \leq 1.$$

Prema tome determinanta matrice (4.14), kao proizvod karakterističnjih korena zadovoljava nejednačine

$$0 \leq \left|I - W_{yy}^{-1} W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}\right| \leq 1,$$

a to dokazuje teoremu.

<u>Teorema 4.3.</u> Generalisana varijansa aleatorne promenljive Z ima maksimalnu vrednost ako su njene komponente Y i X medjusobno nezavisne.

D o k a z. Iz (4.13) se vidi da će jednačina

$$|W| = | \quad |\, |W_{xx}| \tag{4.16}$$

biti zadovoljena ako je determinanta matrice (4.14) jednaka jedinici. Ako su Y i X medjusobno nezavisne aleatorne promenljive, onda su kovarijanse izmedju njihovih kompenonata jednake nuli tako da je matrica W_{yx} matrica čiji su elementi nule. Zbog toga je matrica (4.14) ustvari jedinična matrica sa determinantom jednakom jedan, odakle sledi teorema.

Iz teorema 4.2. i 4.3. zaključuje se da je generalisana varijansa aleatorne promenljive Z proizvod generalisanih varijanti njenih komponenti Y i X i jednog faktora koji predstavlja zajednička rasturanja komponenti promenljive. Da bi dobili samu meru zajedničkih rasturanja komponenti Y i X treba generalisanu varijansu W podeliti sa proizvodom generalisanih varijansi njenih komponenti. Na taj način ćemo dobiti jedan pokazatelj zavisnosti aleatornih vektora Y i X.

<u>Definicija 4.2.</u> Koeficijent odredjen jednačinom

$$(1-R_g^2)\,|W_{yy}|\,|W_{xx}| = \left|\begin{array}{c|c} W_{yy} & W_{yx} \\ \hline W'_{yx} & W_{xx} \end{array}\right| \tag{4.17}$$

naziva se vektorski koeficijent korelacije izmedju m-dimenzionalne aleatorne promenljive Y i n-dimenzionalne promenljive X.

Vektorski koeficijent korelacije je jednak:

$$(4.18) \qquad R_g^2 = 1 - \begin{vmatrix} W_{yy} & W_{yx} \\ W'_{yx} & W_{xx} \end{vmatrix} \cdot |W_{yy}^{-1}| \cdot |W_{xx}^{-1}|$$

$$= 1 - \frac{|W_{yy} - W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}|}{|W_{yy}|}$$

što sledi iz izraza (4.8) i (4.17).

Kad je $m=1$, W_{yy} će biti disperzija jednodimenzionalne aleatorne promenljive, W_{yx} je vektor vrsta tako da je

$$|W_{yy} - W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}| = \sigma^2_{(y)} + W_{(1)} \cdot W_{xx}^{-1} \cdot W'_{(1)},$$

pri čemu je $\sigma^2_{(y)}$ disperzija promenljive Y, a $W_{(1)}$ vektor vrsta kovarijansi promenljive Y i komponenti promenljive X. Uvrštavanjem u (4.18) dobićemo

$$(4.19) \qquad R_g^2 = \frac{W_{(1)} \cdot W_{xx}^{-1} \cdot W'_{(1)}}{\sigma^2_{(y)}}$$

Poredjenjem (4.19) sa (3.29) vidi se da je u slučaju kad je $m = 1$, vektorski koeficijent korelacije jednak višestrukom koeficijentu korelacije.

Vektorski koeficijent korelacije ima iste osobine kao i običan koeficijent korelacije. Izrazićemo te osobine sledećom teoremom.

<u>Teorema 4.4.</u> Vektorski koeficijent korelacije zadovoljava nejednačine

$$0 \leqslant R_g^2 \leqslant 1$$

i ima vrednost jednaku jedinici ako i samo ako su aleatorne promenljive Y i X medjusobno linearno zavisno, a vrednost nulu ako su komponente promenljivih Y i X medjusobno nekorelirane. Pored toga, ako su aleatorne promenljive Y i X medjusobno nezavisne promenljive njihov vektorski koeficijent korelacije je jednak nuli.

D o k a z. Teorema 4.4. je neposredna posledica teorema 3,9, 4.2. i 4.3.

Vektorski koeficijent korelacije može se izraziti i preko korelacione matrice. Naime, označimo sa C_1 i C_2 matrice

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

pri čemu je

$$\forall i \; [i \in \{1, 2, \ldots, m\} \Rightarrow c_{ii} = 1/w_{ii}(y,y)] ,$$

$$\forall j \; [j \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow d_{jj} = 1/w_{jj}(x,x)] ,$$

a sa C matricu

$$C = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & 0_{mn} \\ \hline 0_{nm} & C_2 \end{array}\right] .$$

Korelacione matrice promenljivih Z, Y i X su

$$R = C\,W\,C$$

$$(4.20) \qquad R_1 = C_1\,W_{yy}\,C_1$$

$$R_2 = C_2\,W_{xx}\,C_2$$

tako da su determinante korelacionih matrica jednake

$$|R| = \prod_{i}^{n} c_{ii} \prod_{i}^{n} d_{ii} \, |W|$$

$$R_1 = \prod_{i}^{n} c_{ii} \cdot |W_{yy}|$$

$$R_2 = \prod_{i}^{n} d_{ii} \cdot |W_{xx}| \, ,$$

odakle se na osnovu (4.17) dobija sledeći izraz za vektorski koeficijent relacije

$$(4.21) \qquad R^2_{g} = 1 - \frac{|R|}{|R_1| \, |R_2|}$$

Ako zamenimo promenljive Y i X promenljivim U i V transformacijom

$$(4.22) \qquad \begin{aligned} &\forall i \left[i \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow U_i = Y_i a_i + b_i \right] \\ &\forall j \left[j \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow V_j = X_j c_j + b_j \right] , \end{aligned}$$

onda će elementi korelacione matrice R ostati nepromenjeni. Iz (4.21) sledi da je vektorski koeficijent korelacije invarijantan u odnosu na linearne transformacije (4.22).

Zbog ove osobine invarijantnosti vektorskog koeficijenta korelacije, bez gubitka opštosti, predpostavljaćemo da su očekivane vrednosti promenljivih Y i X jednake nuli.

<u>Teorema 4.5.</u> Vektorski koeficijent korelacije je invarijantan na transformacije oblika

$$(4.23) \qquad \begin{aligned} U &= Y K \\ V &= X H \end{aligned}$$

gde su K i H nesingularne kvadratne matrice reda $m \times m$ i $n \times n$.

D o k a z. Zaista, iz (4.23) dobija se disperziona matrica aleatorne promenljive (U, V)

$$\left[\begin{array}{c|c} K' W_{yy} K & K' W_{yx} H \\ \hline (K' W_{yx} H)' & H' W_{xx} H \end{array}\right]$$

pa na osnovu osobine (4.8), generalisana varijansa je jednaka proizvodu determinanti

$$(4.24) \qquad |K'W_{yy}K - K'W_{yx}H(H'W_{xx}H)^{-1}(K'W_{yx}H)'| \cdot |H'W_{xx}H| .$$

Koristeći osobinu proizvoda determinanti, izraz (4.24) postaje

$$(4.25) \qquad |K|\ |W_{yy} - W_{yx}W_{xx}^{-1}W'_{yx}|\ |K|\ |H'|\ |W_{xx}|\ |H| .$$

Generalisana disperzija promenljivih U i V je

$$(4.26) \qquad \begin{aligned} &|K'|\,|W_{yy}|\,|K| \\ &|H'|\,|W_{xx}|\,|H| \end{aligned}$$

Iz (4.25) i (4.26) dobija se vektorski koeficijent korelacije izmedju aleatornih promenljivih U i V

$$R_G^2(U,V) = 1 - \frac{|K|^2\ |W_{yy} - W_{yx}W_{xx}^{-1}W_{xy}|\,|H|^2|W_{xx}|}{|K|^2|W_{yy}|\,|H|^2|W_{xx}|} ,$$

pa posle skraćivanja sledi teorema.

4.3. Regresione površine i vektorski koeficijent korelacije

Posmatraćemo model normalnog rasporeda i regresionu površinu kod ovog modela. Predpostavićemo da aleatorna promenljiva Z ima normalni raspored

$$N_{m+n}\ (z/m_z;\ W)$$

i prvih m komponenti označiti sa Y a preostalih n sa X. U 3.4. smo videli da je regresiona površina aleatorne promenljive Y u odnosu na promenljivu X kod normalnog rasporeda hiperravan

$$y = m_y + (x - m_x)\ W_{xx}^{-1}\ W'_{yx} \tag{4.27}$$

Ova regresiona površina je ustvari očekivana vrednost uslovne aleatorne promenljive Y/X = x.

Koristeći teoremu 3.5. može se lako proveriti da je disperziona matrica uslovne aleatorne promenljive Y/X = x matrica

$$[W_{yy} - W_{yx}\ W_{xx}^{-1}\ W'_{yx}].$$

Ova disperziona matrica uopšte ne zavisi od vrednosti x. Generalisana varijansa ove uslovne aleatorne promenljive je determinanta

$$\sigma_m^2(Y/X = x) = |W_{yy} - W_{yx}\ W_{xx}^{-1}\ W'_{yx}|.$$

Koristeći izraz (4.8), generalisanu varijansu uslovne aleatorne promenljive Y/X = x izrazićemo kao količnik

$$\sigma_m^2(Y/X = x) = \frac{\left|\begin{array}{c|c} W_{yy} & W_{yx} \\ \hline W'_{yx} & W_{xx} \end{array}\right|}{|W_{xx}|},$$

odakle se vidi da je generalisana varijansa uslovne aleatorne pro- [illegible] jednaka količniku generalisane varijanse aleatorne promenljive Z i promenljive X.

Teorema 4.6. Generalisana varijansa aleatornih vektora Y i X je jednaka proizvodu generalisane varijanse vektora X i generalisane varijanse uslovne aleatorne promenljive $Y/X = x$, tj.

$$|W| = |W_{xx}| \, \sigma_n^2 (Y/X = x) \, . \tag{4.29}$$

Koristeći teoremu 4.6, vektorski koeficijent korelacije u ovom slučaju možemo izraziti jednačinom

$$1 - R_g^2 = \frac{\sigma_n^2 (Y/X = x)}{|W_{yy}|} \tag{4.30}$$

Generalisana varijansa uslovne aleatorne promenljive $Y/X = x$ biće jednaka generalisanoj varijansi promenljive Y onda i samo onda kad su aleatorne promenljive Y i X medjusobno nezavisne, pa iz (4.30) sledi

Teorema 4.7. Da bi kod aleatornih promenljivih Y i X sa normalnim rasporedom, vektorski koeficijent korelacije bio jednak nuli potrebno je i dovoljno da su Y i X medjusobno nezavisne aleatorne promenljive.

A sad ćemo posmatrati aleatornu promenljivu Z sa bilo kojim rasporedom i srednju kvadratnu regresionu površinu. Bez gubitka opštosti predpostavićemo da su očekivane vrednosti aleatornih promenljivih Y i X jednake nuli.

U 3.4. pokazali smo da je srednja kvadratna regresiona ravan odredjena linearnom transformacijom datom matricom

$$\hat{\beta} = W_{xx}^{-1} W'_{yx} \, . \tag{4.31}$$

Ako izvršimo linearnu transformaciju aleatorne promenljive X preko matrice (4.31) dobićemo aleatornu promenljivu

$$\hat{Y} = X W_{xx}^{-1} W'_{yx} \, . \tag{4.32}$$

Disperziona matrica aleatorne promenljive $\hat{Y}$ je matrica

$$W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx} \, . \tag{4.33}$$

Posmatrajmo aleatornu promenljivu

$Y - \hat{Y}$

koju ćemo zvati "rezidualne razlike". Disperziona matrica rezidualnih razlika je matrica očekivanih vrednosti proizvoda

(4.34) $$[E\,(Y - \hat{Y})' \,(Y - \hat{Y})] = [\,E(Y_i \cdot \hat{Y}_j)]$$

Kad u (4.34) zamenimo vrednosti iz izraza (4.31) i (4.32) dobiće se

$$[E(Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})] = [E(Y'Y)] - W_{yx} W_{xx}^{-1} [E(X'X)] W_{xx}^{-1} W'_{yx} =$$

$$= W_{yy} - W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx} \,.$$

Označićemo sa F disperzionu matricu rezidualnih odstupanja

(4.35) $$F = W_{yy} - W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}$$

Na osnovu (4.8), generalisanu varijansu rezidualnih odstupanja možemo izraziti preko generalisane varijanse aleatorne promenljive Z na sledeći način

(4.36) $$|F| = |W_{yy} - W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}| = \frac{\left|\begin{array}{c|c} W_{yy} & W_{yx} \\ \hline W'_{yx} & W_{xx} \end{array}\right|}{|W_{xx}|}$$

Zamenjujući vrednost (4.36) u izraz za vektorski koeficijent korelacije dobićemo

(4.37) $$R_g^2 = 1 - \frac{|F|}{|W_{yy}|}$$

tako da imamo sledeću teoremu:

<u>Teorema 4.7.</u> Vektorski koeficijent korelacije je odnos razlike generalisane varijanse promenljive Y i generalisane varijanse rezidualnih odstupanja prema varijansi promenljive Y.

U 3.4, pri odredjivanju elemenata matrice β kojom je definisana srednja kvadratna regresiona površina, minimizirali smo zbir varijansi rezidualnih odstupanja komponenti aleatorne promenljive $Y - \hat{Y}$. Drugim rečima, minimizirali smo trag disperzione matrice (4.34), tj. odredili smo matricu β tako da

$$\operatorname{tr}\,[E(Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})]$$

dostigne minimalnu vrednost. Dokazaćemo da za matricu $\hat{\beta}$ datu izrazom (4.31) važi opštiji zaključak.

<u>Teorema 4.8.</u> Ako je β matrica reda $n \times m$ kojom je izvršena transformacija

(4.38) $$\hat{Y} = X \cdot \beta,$$

tada će generalisana varijansa rezidualnih odstupanja imati minimalnu vrednost kad je

(4.39) $$\hat{\beta} = W_{xx}^{-1}\, W'_{yx} \quad .$$

D o k a z. Označimo sa A disperzionu matricu rezidualnih odstupanja

$$A = [a_{ij}] = [E(Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})] .$$

Iz (4.38) imamo

$$\hat{Y}_i = \sum_r^n \beta_{ri} X_r$$

tako da je

(4.40) $$a_{ij} = E(Y_i - \sum_r^n \beta_{ri} X_r)(Y_j - \sum_r^n \beta_{rj} X_r) .$$

Posle množenja, izraz (4.40) se svodi na izraz

(4.41) $$a_{ij} = w_{ij}(y,y) - \sum_r^n (\beta_{ri} w_{ir}(y,x) + \beta_{rj} w_{ir}(y,x)) + \sum_r^n \sum_s^n \beta_{ri} \cdot \beta_{sj} \cdot w_{rs}(x,x)$$

Da bi odredili minimalnu vrednost generalisane varijanse rezidualnih odstupanja, potražimo izvode determinante matrice A. Na osnovu osobine izvoda logaritma determinante po parametru od koga zavise elementi te determinante, dobija se

$$\frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{rs}} = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \frac{\partial \log|A|}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{\partial a_{ij}}{\partial \beta_{rs}}$$

odnosno

$$(4.42) \qquad \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{rs}} = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} a^{ij} \cdot \frac{\partial a_{ij}}{\partial \beta_{rs}} ,$$

gde je a^{ij} opšti član matrice A^{-1}.

U izrazu (4.41) članovi u kojima se može pojaviti β_{rs} su

$$(4.43) \qquad -\beta_{ri} w_{jr}(y,x) - \beta_{rj} w_{ir}(y,x) + \beta_{ri} \sum_{k}^{n} \beta_{kj} w_{rk}(x,x) + \beta_{rj} \sum_{k}^{n} \beta_{ki} w_{rk}(x,x) .$$

Kad su oba indeksa i i j različita od s, onda se u (4.43) uopšte ne pojavljuje β_{rs}, tako da je

$$(4.44) \qquad \forall i,j \left[i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \mid i \neq s;\ j \neq s \Rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial \beta_{rs}} = 0 \right] .$$

Kad je $i=s$, a j različito od s, onda su članovi izraza (4.43) u kojima se pojavljuje β_{rs}

$$- \beta_{rs} w_{jr}(y,x) + \beta_{rs} \sum_{k}^{n} \beta_{kj} w_{rk}(x,x) ,$$

tako da je

$$(4.45)\quad \forall\, i,j\left[i,j\in\left\{1,2,\dots,m\right\}\middle|\, i=s;\ j\neq s \Rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial \beta_{rs}} = -w_{jr}(y,x)+\sum_{k}^{n}\beta_{kj}w_{rk}(x,x)\right]$$

Na sličan način se može proveriti da je

$$(4.46)\quad \forall\, i,j\left[i,j\in\left\{1,2,\dots,m\right\}\middle|\, i\neq s;\ j=s \Rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial \beta_{rs}} = -w_{ir}(y,x)+\sum_{k}^{n}\beta_{ki}w_{rk}(x,x)\right]$$

Kad su oba indeksa jednaka s dobija se

$$(4.47)\quad \forall\, i,j\left[i,j\in\left\{1,2,\dots,m\right\}\middle|\, i=j=s \Rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial \beta_{rs}} = 2\Big[-w_{sr}(y,x)+\sum_{k}^{n}\beta_{ks}w_{rk}(x,x)\Big]\right]$$

Posle zamene izraza (4.44), (4.45) i (4.47) u izraz (4.42) dobiće se

$$\frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{rs}} = \sum_{j\neq s} a^{sj}\Big[-w_{jr}(y,x)+\sum_{k}\beta_{kj}w_{rk}(x,x)\Big] + \sum_{i\neq s} a^{is}\Big[-w_{is}(y,x)+\sum_{k}\beta_{ki}w_{rk}(x,x)\Big]$$

$$+\ 2\sum_{s}^{n} a^{ss}\Big(-w_{sr}(y,x)+\sum_{k}^{n}\beta_{ks}\,w_{rk}(x,x)\Big).$$

Pošto je A simetrična matrica, A^{-1} je takodje simetrična, tako da je

$$a^{is} = a^{si}$$

pa je

$$\frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{rs}} = \sum_{i}^{n} a^{si}\Big[-w_{ir}(y,x)+\sum_{k}^{n}\beta_{ki}w_{rk}(x,x)\Big] +$$

$$+\sum_{i}^{n} a^{is}\Big[-w_{ir}(y,x)+\sum_{k}^{n}\beta_{ki}w_{rk}(x,x)\Big],$$

odnosno

$$(4.48) \qquad \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{rs}} = 2 \sum_{i}^{m} a^{is} [-w_{ir}(y,x) + \sum_{k}^{n} \beta_{ki} w_{rk}(x,x)] .$$

Matrica izvoda determinante je matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{11}} & \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{12}} & \dots & \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{1m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{n1}} & \dots & \dots & \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta_{nm}} \end{bmatrix}$$

čiji opšti član je dat sa (4.48). Ova matrica izvoda je sledeća matrica

$$(4.49) \qquad \frac{\partial \log|A|}{\partial \beta} = (W'_{yx} - W_{xx}\beta)A^{-1}$$

Izjednačavajući elemente matrice (4.49) sa nulom dobiće se matrična jednačina

$$W'_{yx} - W_{xx}\, \beta = 0,$$

odakle sledi (4.39), što dokazuje teoremu.

Teorema 4.9. Minimalna vrednost generalisane varijanse residualnih odstupanja je jednaka determinanti

$$(4.5o) \qquad \min|A| = |W_{yy} - W_{yx} W_{xx}^{-1} W'_{yx}| .$$

D o k a z. Minimalnu vrednost generalisane varijanse rezidualnih odstupanja dobićemo kad u matrici

$$A = [E(Y - \hat{Y})'(Y-\hat{Y})]$$

stavimo da je

$$\hat{Y} = X\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx}\ .$$

Tako ćemo dobiti matricu očekivanih vrednosti

$$[E(Y-X\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx})'(Y-X\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx})],$$

odakle se posle množenja, dobija matrica

$$W_{yy} - W_{yx}\, W_{xx}^{-1}\, W'_{yx}$$

odnosno jednačina (4.5o), što dokazuje teoremu.

Teorema 4.1o. Kvadrat vektorskog koeficijenta korelacije je odnos razlike generalisane varijanse aleatorne promenljive Y i minimalne varijanse rezidualnih odstupanja prema generalisanoj varijansi te promenljive, tj.

$$R_G^2 = \frac{|W_{yy}| - \min|A|}{|W_{yy}|}\ .$$

D o k a z. Kad u izraz (4.18) kojim je definisan vektorski koeficijent korelacije, zamenimo minimalnu vrednost generalisane varijanse rezidualnih odstupanja (4.5o) dobićemo

$$R_G^2 = 1 - \frac{\min|A|}{|W_{yy}|}\ ,$$

odakle sledi teorema.

4.4. Geometrijska interpretacija vektorskog koeficijenta korelacije

Posmatraćemo prost slučajan uzorak veličine N. Ako na elementima tog uzorka merimo obeležja Y i X, pri čemu je Y n-dimenzionalna aleatorna promenljiva, a X m-dimenzionalna promenljiva, onda se moguće vrednosti uzorka mogu dati u vidu jedne matrice reda

$N \times (m+n)$

(4.51)
$$[Y, X] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & \cdots & Y_{m1} & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \\ Y_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{m2} & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{1N} & Y_{2N} & \cdots & Y_{mN} & X_{1N} & X_{2N} & \cdots & X_{nN} \end{bmatrix}$$

Sredinu uzorka (4.51) označićemo sa

(4.52)
$$\left\{ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \right\}$$

gde je

$$\forall i \; [\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \Rightarrow \bar{y}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_{ik} \,]$$

$$\forall j \; [\, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow \bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_{jk} \,]$$

Pomerimo koordinatni početak u težište uzorka (4.52) stavljajući

$$y_{ij} = Y_{ij} - \bar{y}_i, \; \forall \; i \in \{1, 2, \ldots, m\} \; ; \; j \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$x_{ij} = X_{ij} - \bar{x}_i, \; \forall \; i \in \{1, 2, \ldots, n\} \; ; \; j \in \{1, 2, \ldots, N\} ,$$

tako da uzorak postaje matrica

(4.53)
$$[y, x] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{m1} & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{m2} & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1N} & y_{2N} & \cdots & y_{mN} & x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{nN} \end{bmatrix}$$

Označimo sa S disperzionu matricu uzorka (4.53)

(4.54)
$$S = \left[\begin{array}{c|c} S_{yy} & S_{yx} \\ \hline S'_{yx} & S_{xx} \end{array} \right] ,$$

$$S_{yy} = \frac{1}{N}\left[S_{ij}(y,y)\right]$$

(4.55)
$$S_{yx} = \frac{1}{N}\left[S_{ij}(y,x)\right]$$

$$S_{xx} = \frac{1}{N}\left[S_{ij}(x,x)\right]$$

Pri tome je

$$\forall i,j\left[i,j \in \left\{1,2,\ldots,m\right\} \Rightarrow S_{ij}(y,y) = \sum_{k}^{N} y_{ik}y_{jk}\right]$$

(4.56)
$$\forall i,j\left[i \in \left\{1,2,\ldots,m\right\};\ j \in \left\{1,2,\ldots,n\right\} \Rightarrow S_{ij}(y,x) = \sum_{k}^{N} y_{ik}x_{jk}\right]$$

$$\forall i,j\left[i,j \in \left\{1,2,\ldots,n\right\} \Rightarrow S_{ij}(x,x) = \sum_{k}^{N} x_{ik}x_{jk}\right]$$

Generalisana varijansa uzorka za m-dimenzionalnu aleatornu promenljivu Y je determinanta $|S_{yy}|$, za n-dimenzionalnu promenljivu X je determinanta $|S_{xx}|$, a za (m+n)-dimenzionalnu aleatornu promenljivu [Y, X] je determinanta $|S|$.

Posmatrajmo N-dimenzionalni Euklidov prostor R_N. Svaka kolona matrice (4.53) predstavlja jednu tačku u tom prostoru, tj. jedan N-dimenzionalni vektor, tako da uzorku (4.53) odgovara m+n tačaka prostora R_N, odnosno m+n vektora.

Matrica y može biti predstavljena kao m vektora prostora R_N. Elementi disperzione matrice S_{yy} aleatorne promenljive Y su proporcionalni skalarnom proizvodu vektor kolona y_i i y_j matrice y (faktor proporcionalnosti je jednak 1/N).

Skalarni proizvod

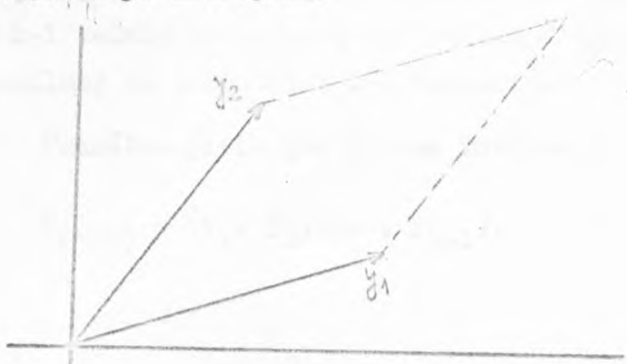
$$y_i' y_i = S_{ii}(y,y)$$

predstavlja kvadrat dužine vektora koji odgovara i-toj koloni matrice y, proizvod

$$y_i' \cdot y_j = S_{ij}(y,y)$$

je proizvod dužina vektora y_i i y_j i cosinusa ugla izmedju njih.

Posmatrajmo sad geometrijsku sliku baziranu na ovih m vektora (Slika 4.1). Kad je $m = 2$ imamo dva vektora y_1 i y_2 koji odredjuju jedan paralelogram.



Sl. 4.1.

Za $m = 3$, vektori y_1, y_2 i y_3 odredjivaće jedan paralelotop u prostoru R_N. U opštem slučaju, m kolona matrice y odredjuju jedan paralelotop prostor R_N koji je oivičen parovima (m-1)-dimenzionalnih hiperravni od kojih jedna prolazi kroz m-1 tačku i paralelna je sa m-tim vektorom, a druga prolazi kroz m-tu tačku a paralelna je hiperravni koja je odredjena sa m-1 vektorom. Za ovako odredjen paralelotop važi sledeća teorema:

Teorema 4.11. Neka je $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, pri čemu je y_i N-dimenzionalna vektor kolona. Kvadrat zapremine paralelotopa odredjenog sa y proporcionalan je determinanti $|S_{yy}|$, a faktor proporcionalnosti je N^m, tj.

$$V^2 = N^m |S_{yy}| .$$

D o k a z. Teoremu ćemo dokazati indukcijom. Kad je m=1, teorema je tačna jer se tad proizvod matrica

$$y'y = y_1' y_1$$

svodi na skalarni proizvod vektora y_1 sa samim sobom, tj. na dužinu vektora.

Predpostavimo da je tvrdjenje ispravno za $m = k-1$. Dokazaćemo da je tad teorema tačna i za $m=k$.

Primetimo prvo da je zapremina pravougaonog paralelotopa odredjenog sa k tačaka jednaka zapremini paralelotopa odredjenog sa k-1 tačaka pomnoženoj sa "visinom" (dužinom k-tog vektora ortogonalnog na preostalih k-1 vektora).

Označimo prvih k-1 kolona matrice y sa $Y_{(k-1)}$

$$Y_{(k-1)} = (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}),$$

tako da je

$$y = \{Y_{(k-1)}, y_k\}.$$

Linearna kombinacija

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{k-1} y_{k-1}$$

predstavlja vektor u paralelotopu odredjenom vektorima $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$. Brojeve $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ odredićemo tako da razlika

$$y_k - c_1 y_1 - c_2 y_2 - \dots - c_{k-1} y_{k-1}$$

bude ortogonalna na vektore

$$y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$$

tj. tako da je

(4.57) $$\forall j \left[j \in \{1, 2, \dots, k-1\} \Rightarrow y_j'(y_k - c_1 y_1 - c_2 y_2 - \dots - c_{k-1} y_{k-1}) = 0 \right].$$

Tada je

$$z = y_k - c_1 y_1 - c_2 y_2 - \dots - c_{k-1} y_{k-1}$$

visina paralelotopa odredjenog sa vektorima

$$y_1, y_2, \ldots, y_k .$$

Neka je C kvadratna matrica

$$(4.58) \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice C je jednaka jedinici. Tad je

$$y \cdot C = \left\{ Y_{(k-1)}, z \right\},$$

tako da je

$$|y'y| = |C'|\ |y'y|\ |C| = |(y\ C)' \cdot y\ C| =$$

$$= |(Y_{(k-1)}, z)'\ (Y_{(k-1)}, z)| =$$

$$\begin{vmatrix} Y'_{(k-1)}\ Y_{(k-1)} & Y'_{(k-1)} \cdot z \\ z' \cdot Y_{(k-1)} & z' \cdot z \end{vmatrix} .$$

Iz uslova (4.57) imamo da je

$$Y'_{(k-1)} \cdot z = 0 ,$$

tako da je

$$|y'y| = \begin{vmatrix} Y'_{(k-1)}\ Y_{(k-1)} & 0 \\ 0 & z'z \end{vmatrix}$$

pa na osnovu osobine determinanti gornjeg tipa imamo

$$|y'y| = |Y'_{(k-1)} \cdot Y_{(k-1)}| \cdot z'z$$

Kako smo predpostavili da teorema važi za $m = k-1$, to znači da je

$$|Y'_{(k-1)} \cdot Y_{(k-1)}|$$

kvadrat zapremine paralelotopa odredjenog sa k-1 tačaka, a $z'.z$ kvadrat "visine", pa je njihov proizvod kvadrat zapremine paralelotopa odredjenog sa vektorima $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Pošto je

$$S_{yy} = \frac{1}{N} y'.y$$

odnosno

$$|S_{yy}| = \left|\frac{1}{N} y'y\right|$$

onda je

$$|y'y| = N^k |S_{yy}| ,$$

a to je i trebalo dokazati.

A sad se vratimo na uzorak (4.55). Na osnovu teoreme 4.11. m + n tačaka prostora R_N obrazuje paralelotop sa kvadratom zapremine jednakim determinanti $|S|$. Pored toga, prvih m kolona obrazuje paralelotop sa kvadratom zapremine jednakim determinanti $|S_{yy}|$, a preostalih n kolona obrazuje paralelotop sa zapreminom odredjenom determinantom $|S_{xx}|$.

Po definiciji je vektorski koeficijent korelacije dat izrazom

$$R_g^2 = 1 - \frac{|S|}{|S_{yy}||S_{xx}|} . \tag{4.59}$$

Vrednost

$$1 - R_g^2$$

je odnos proizvoda kvadrata zapremine (m+n)-dimenzionalnog paralelotopa i proizvoda zapremina m-dimenzionalnog i n-dimenzionalnog paralelotopa prostora R_N.

Kad je matrica

$$S_{yx} = 0$$

tj. kad su vektori

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

ortogonalni tad je zapremina (m+n)-dimenzionalnog paralelotopa jednaka proizvodu zapremina m-dimenzionalnog i n-dimenzionalnog paralelotopa, odnosno

$$|S| = |S_{yy}|\,|S_{xx}|.$$

U tom slučaju je vektorski koeficijent korelacije jednak nuli. To je slučaj kad su promenljive Y i X medjusobno nezavisne.

Ako vektori

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

obrazuju paralelotop zapremine nula, tj. ako su ti vektori kolinearni, onda je vektorski koeficijent korelacije jednak jedinici.

Obrnuto, ako je

$$R_g^2 = 1$$

tada iz (4.59) sledi da je

$$|S| = 0,$$

što znači da ovi vektori obrazuju paralelotop zapremine nula, a to je jedino tad kad su to kolinearni vektori, tj. onda kad izmedju vektora postoji linearna zavisnost. Zato se vektorski koeficijent korelacije R_g^2 može uzeti kao mera linearne zavisnosti izmedju aleatornih vektora.

Interesantna je i interpretacija vektorskog koeficijenta korelacije u (m+n)-dimenzionalnom prostoru. Matricu (4.53) možemo posmatrati kao N tačaka prostora R_{m+n} (svakoj vrsti matrice odgovara jedna tačka). Matrica

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{m1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1N} & y_{2N} & \cdots & y_{mN} \end{bmatrix}$$

predstavlja N tačaka podprostora R_m. Determinanta

$$(4.6o)\qquad |y'y| = \begin{vmatrix} \sum_k^N y_{1k}y_{1k} & \sum_k^N y_{1k}y_{2k} & \cdots & \sum_k^N y_{1k}y_{mk} \\ \sum_k^N y_{2k}y_{1k} & \sum_k^N y_{2k}y_{2k} & \cdots & \sum_k^N y_{2k}y_{mk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_k^N y_{mk}y_{1k} & \sum_k^N y_{mk}y_{2k} & \cdots & \sum_k^N y_{mk}y_{mk} \end{vmatrix}$$

odredjuje generalisanu varijansu uzorka. Na osnovu pravila za zbir determinanti, (4.6o) može se transformisati u sledeći zbir determinanti

$$|y'y| = \sum_{\alpha_1}^N \begin{vmatrix} y_{1\alpha_1}\cdot y_{1\alpha_1} & \sum_k^N y_{1k}\,y_{2k} & \cdots & \sum_k^N y_{1k}y_{mk} \\ y_{2\alpha_1}\cdot y_{1\alpha_1} & \sum_k^N y_{2k}\,y_{2k} & \cdots & \sum_k^N y_{2k}y_{mk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m\alpha_1}\cdot y_{1\alpha_1} & \sum_k^N y_{mk}\,y_{2k} & \cdots & \sum_k^N y_{mk}y_{mk} \end{vmatrix}$$

Primenjujući ovo pravilo sukcesivno na sve kolone matrice (4.6[illegible]) dobija se

$$(4.61)\quad |y'.y| = \sum_{\alpha_1}^{N}\sum_{\alpha_2}^{N}\cdots\sum_{\alpha_m}^{N}\begin{vmatrix} y_{1\alpha_1}y_{1\alpha_1} & y_{1\alpha_2}y_{2\alpha_2} & \cdots & y_{1\alpha_m}y_{m\alpha_m} \\ y_{2\alpha_1}y_{1\alpha_1} & y_{2\alpha_2}y_{2\alpha_2} & \cdots & y_{2\alpha_m}y_{m\alpha_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m\alpha_1}y_{1\alpha_1} & y_{m\alpha_2}y_{2\alpha_2} & \cdots & y_{m\alpha_m}y_{m\alpha_m} \end{vmatrix}$$

Tačke

$$(4.62)\quad \begin{array}{l} \{y_{1\alpha_1},\ y_{2\alpha_2},\ \ldots,\ y_{m\alpha_1}\} \\ \{y_{1\alpha_2},\ y_{2\alpha_2},\ \ldots,\ y_{m\alpha_2}\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{y_{1\alpha_m},\ y_{2\alpha_m},\ \ldots,\ y_{m\alpha_m}\} \end{array}$$

obrazuju jedan paralelotop u prostoru R_m čija zapremina je determinanta

$$(4.63)\quad V^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = \begin{vmatrix} \sum\limits_k y_{1k}y_{1k} & \sum\limits_k y_{1k}y_{2k} & \cdots & \sum\limits_k y_{1k}y_{mk} \\ \sum\limits_k y_{2k}y_{1k} & \sum\limits_k y_{2k}y_{2k} & \cdots & \sum\limits_k y_{2k}y_{mk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_k y_{mk}y_{1k} & \sum\limits_k y_{mk}y_{2k} & \cdots & \sum\limits_k y_{mk}y_{mk} \end{vmatrix}$$

gde je

$$k = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m\ .$$

Primenjujući pravilo za zbirove determinanti na (4.63), zapreminu paralelotopa odredjenog tačkama (4.62) možemo izraziti preko zbirova

$$(4.64)\quad V^2_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \sum_{\beta_1} \sum_{\beta_2} \dots \sum_{\beta_m} \begin{vmatrix} y_{1\beta_1} y_{1\beta_1} & y_{1\beta_2} y_{2\beta_2} & \dots & y_{1\beta_m} y_{m\beta_m} \\ y_{2\beta_1} y_{1\beta_1} & y_{2\beta_2} y_{2\beta_2} & \dots & y_{2\beta_m} y_{m\beta_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m\beta_1} y_{1\beta_1} & y_{m\beta_2} y_{2\beta_2} & \dots & y_{m\beta_m} y_{m\beta_m} \end{vmatrix}$$

gde indeksi

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$$

uzimaju vrednosti

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m .$$

Ako su dva ili više indeksa β_j medjusobno jednaki, onda će se u zbirovima u izrazu (4.64) pojaviti determinanta sa dve ili više jednakih kolona čija vrednost je nula. Prema tome u (4.64) ostaju determinante koje odgovaraju indeksima

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m .$$

Takvih determinanti ima m!, pa je

$$V^2_{\alpha_1 \dots \alpha_2} = m! \begin{vmatrix} y_{1\alpha_1} y_{1\alpha_1} & y_{1\alpha_2} y_{2\alpha_2} & \dots & y_{1\alpha_m} y_{m\alpha_m} \\ y_{2\alpha_1} y_{1\alpha_1} & y_{2\alpha_2} y_{2\alpha_2} & \dots & y_{2\alpha_m} y_{m\alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m\alpha_1} y_{1\alpha_1} & y_{m\alpha_2} y_{2\alpha_2} & \dots & y_{m\alpha_m} y_{m\alpha_m} \end{vmatrix}$$

Zato je determinanta koja odredjuje generalisanu disperziju uzorka

$$|y'y| = \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_m} V^2_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \cdot \frac{1}{m!} ,$$

što znači da je to zbir kvadrata zapremina paralelotopa prostora R_m obrazovanih od m vektora izabranih iz N vektora

$$y_1, y_2, \ldots, y_N,$$

pri čemu je y_i i-ta vrsta matrice y. Time je dokazana sledeća teorema:

<u>Teorema 4.12.</u> Neka je $|S_{yy}|$ determinanta disperzione matrice uzorka

$$S_{yy} = [\frac{1}{N} y'y]$$

koja predstavlja generalisanu varijansu uzorka. Tada je $|S_{yy}|$ proporcionalno zbiru kvadrata paralelotopa prostora R_m obrazovanih od m vektora izabranih između N vektora

$$y_1, y_2, \ldots, y_N.$$

Faktor proporcionalnosti je N^{-1} 1/m.

A sad ćemo se vratiti na (m+n)-dimenzionalni prostor i posmatrati uzorak (4.55). Determinanta disperzione matrice S (4.56) predstavlja meru rasturanja tačaka uzorka duž prostora R_{m+n}. Na osnovu teorema 4.12 videli smo da je ta determinanta jednaka zbiru zapremina paralelotopa obrazovanih od m+n tačaka uzorka izabranih iz N tačaka tog uzorka.

Sa druge strane, determinanta disperzione matrice tog istog uzorka, ali samo po obeležju Y, $|S_{yy}|$ odredjuje meru rasturanja tačaka uzorka duž podprostora R_m, i jednaka je zbiru kvadrata zapremina paralelotopa obrazovanih od m tačaka izabranih između N tačaka uzorka.

Na sličan način i determinanta disperzione matrice $|S_{xx}|$ odredjuje meru rasturanja tačaka uzorka duž podprostora R_n.

Ako su posmatrana obeležja Y i X medjusobno nezavisna, onda se determinanta koja odgovara bilo kom izboru m+n tačaka svodi na proizvod determinanti od m tačaka podprostora R_m i n tačaka podprostora R_n, pa iz (4.59) sledi da je vektorski koeficijent korelacije jednak nuli.

4.5. Ispitivanje zavisnosti dohotka u privrednim i vanprivrednim delatnostima

Polazeći od činjenice da je dohodak deo ukupnog proizvoda društva koji radnici u udruženom radu stiču kao priznanje i rezultat svog i ukupnog društvenog rada u uslovima socijalističke robne proizvodnje, ispitaćemo zavisnost dohotka u privrednim i vanprivrednim delatnostima.

Dohodak ostvaren u materijalnoj proizvodnji je osnova i izraz slobodne razmene rada. Razvoj proizvodnih snaga bazira se na razvoju materijalne proizvodnje i to čini polaznu osnovu u procesu udruživanja rada i sredstava.

Radnici u osnovnim organizacijama u materijalnoj proizvodnji udružuju svoj rad sa radnicima u osnovnim organizacijama društvenih delatnosti (državni organi, socijalna delatnost, školstvo, nauka, kultura i sl.) na osnovama slobodne razmene rada. Radnici u osnovnim organizacijama društvenih delatnosti stiču svoj dohodak na osnovu doprinosa koji svojim radom daju u stvaranju nove vrednosti u materijalnoj proizvodnji, u povećanju proizvodnosti ukupnog društvenog rada i u doprinosu bržem razvoju društva u celini.

Ostvarenim dohotkom (u materijalnoj proizvodnji stvaranjem novih vrednosti, u društvenoj delatnosti slobodnom razmenom rada sa radnicima u osnovnim organizacijama u materijalnoj proizvodnji) radnici samostalno raspolažu i vrše izdvajanje sredstava za proširenje materijalne osnove rada i sredstava za rezerve. Ostatak ostvarenog dohodka služi kao osnov za zadovoljenje ličnih i zajedničkih potreba radnika.

U ovako stvorenom dohodku radnici u udruženom radu izdvajaju sredstva za lične dohodke, a raspodelu tih sredstava na pojedine radnike vrše na osnovu samoupravno utvrdjenih kriterija i merila.

Prema tome, dohodak ostvaren u materijalnoj proizvodnji je osnova za raspodelu ostvarenih rezultata a samim tim i osnova za ostvarivanje ličnih dohodaka. Radnici u materijalnoj proizvodnji ostvaruju dohodak i lične dohotke u zavisnosti od novostvorene vrednosti (dohodka), dok radnici u osnovnim organizacijama udruženog rada društvenih delatnosti ostvaruju svoj dohodak i lične dohotke u zavisnosti od doprinosa u ostvarivanju novostvorene vrednosti i doprinosa u [illegible] razvoju društva.

Ostvareni dohodak i veličina sredstava za lične dohotke, odnosno lični dohoci radnika u osnovnim organizacijama društvenih delatnosti nije nezavisan od ostvarene novostvorene vrednosti (dohodka) u materijalnoj proizvodnji, a [illegible] od ličnih dohodaka radnika u osnovnim organizacijama [illegible]ijalnoj proizvodnji. Naprotiv, ta zavisnost mora biti tak[illegible] izražava integrativnost i nedeljivost ukupnog udruženog rada.

Odnosi u ostvarivanju dohodka i ličnih dohodaka radnika u materijalnoj proizvodnji i radnika u društvenim delatnostima regulišu se samoupravnim sporazumevanjem a u skladu sa utvrdjenim društveno-ekonomskim osnovama i kriterijima. Narušavanje osnova i kriterija u odnosima ostvarenog dohodka i ličnih dohodaka (ka-da su nesrazmerno u veličini suviše velike) dovodi do devijacija koje predstavljaju ozbiljnu prepreku izražavanja integrativnosti i nedeljivosti ukupnog udruženog rada i sredstava.

Zbog toga je u konkretnim uslovima potrebno utvrditi vezu izmedju dohodaka i ličnih dohodaka radnika u materijalnoj proizvodnji i radnika u društvenim delatnostima.

Ukoliko bi bilo utvrdjeno da ne postoji veza izmedju dohodka i ličnih doho[illegible] radnika u materijalnoj proizvodnji i radnika u društvenim delatnostima, značilo bi da samoupravni sporazumi narušavaju utvrdjene društveno-ekonomske osnove i kriterije.

Kao primer za utvrdjivanje ovih veza uzećemo neto lična primanja radnika vanprivrednih i privrednih delatnosti. Posmatraćemo samo dve kategorije vanprivrednih delatnosti:

- Društvene delatnosti i državni organi;
- kulturna i socijalna delatnost.

Sa druge strane, posmatraćemo osam kategorija privrednih delatnosti:

- Industrija i rudarstvo;
- Poljoprivreda i ribarstvo;
- Šumarstvo;
- Gradjevinarstvo;
- Saobraćaj i veze;
- Trgovina i ugostiteljstvo;
- Zanatstvo;
- Stambena i komunalna delatnost.

Koristićemo podatke o visini prosečnih neto ličnih primanja po Opštinama SFRJ u 1974. godini. Kako u pojedinim Opštinama neke delatnosti nisu uopšte zastupljene, ovde su te Opštine izostavljene, tako da smo raspolagali sa podacima za 254 Opštine.

Na osnovu tih podataka, prvo ćemo odrediti prosečna neto lična primanja

$$m_{yi} = \frac{1}{254} \sum_{k}^{254} Y_{ik}$$

$$m_{xj} = \frac{1}{254} \sum_{k}^{254} X_{jk} ,$$

i odgovarajuće standardne devijacije

$$\sigma_{yi} = \sqrt{\sum_{k}^{254} (Y_{ik} - m_{yi})^2}$$

$$\sigma_{xj} = \sqrt{\sum_{k}^{254} (X_{jk} - m_{xj})^2}$$

Dobijena je sledeća tabela prosečnih ličnih primanja po delatnostima

Tabela 4.1.

Delatnosti (1)	Prosečna neto lična primanja (2)	Standardna devijacija (3)
Društvene delatnosti državni organi - Y_1	2017.7	312.14
Kulturna i socijalna delatnost - Y_2	244o.9	3o2.93
Industrija i rudarstvo - X_1	22oo.5	359.86
Poljoprivreda i ribarstvo - X_2	22o6.2	446.14
Šumarstvo - X_3	2339.9	517.81
Gradjevinarstvo - X_4	2o91.2	441.95
Saobraćaj i veze - X_5	2328.3	349.18
Trgovina i ugostiteljstvo - X_6	2124.7	276.16
Zanatstvo - X_7	1992.o	428.7o
Stambena i komunalna delatnost - X_8	2o75.4	412.31

Kao što se vidi iz tabele 4.1, prosečna neto lična primanja u vanprivrednim delatnostima su veća od prosečnih neto primanja u privrednim delatnostima. Medjutim, iz kolone 3 ove tabele se vidi da je varijabilitet ličnih primanja u privrednim delatnostima veći od varijabiliteta primanja u vanprivrednim delatnostima (s izuzetkom trgovine i ugostiteljstva) što se može objasniti manjim razlikama u školskoj spremi radnika vanprivrednih delatnosti u odnosu na razlike u školskoj spremi zaposlenih u privrednim delatnostima.

Naš sledeći zadatak je ispitivanje zavisnosti ličnih primanja izmedju pojedinih delatnosti. U tom cilju posmatraćemo korelacionu matricu

$$R = \left[\begin{array}{c|c} R_{yy} & R_{yx} \\ \hline R'_{yx} & R_{xx} \end{array}\right]$$

gde ćemo elemente korelacione matrice odrediti preko obrasca

$$r = \frac{\sqrt{\sum\limits_{i}^{254} (U_i - m_{ui})(V_i - m_{vi})}}{\sqrt{\sum\limits_{i}^{254} (U_i - m_{ui})^2} \sqrt{\sum\limits_{i}^{254} (V_i - m_{vi})^2}}$$

Na osnovu podataka dobijena je korelaciona matrica

$$R = \left[\begin{array}{cc|cccccccc}
1.000 & .756 & .594 & .5[illegible]3 & .366 & .552 & .635 & .670 & .602 & .575 \\
 & 1.000 & .565 & .604 & .459 & .613 & .632 & .703 & .603 & .609 \\
\hline
 & & 1.000 & .421 & .392 & .500 & .426 & .449 & .498 & .423 \\
 & & & 1.000 & .429 & .466 & .421 & .576 & .401 & .454 \\
 & & & & 1.000 & .328 & .289 & .397 & .253 & .316 \\
 & & & & & 1.000 & .580 & .535 & .499 & .593 \\
 & & & & & & 1.000 & .517 & .541 & .528 \\
 & & & & & & & 1.000 & .546 & .541 \\
 & & & & & & & & 1.000 & .547 \\
 & & & & & & & & & 1.000
\end{array}\right]$$

Promenljive Y_1 i Y_2 imaju visok koeficijent korelacije

$$r(y_1, y_2) = .756 ,$$

a promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_8$ su medjusobno slabo korelirane. Najveći koficijent korelacije kod ovih promenljivih je

$$r(x_4, x_8) = .595$$

a najmanji je

$$r(x_3, x_7) = .255$$

Pored toga, promenljive Y_1 i Y_2 imaju dosta visoke korelacije sa promenljivim $X_1, X_2, \ldots, X_8$. Zato bi sad trebalo ispitati zavisnost svake od promenljivih Y_1 i Y_2 od svih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_8$.

Na osnovu standardnih devijacija posmatranih promenljivih (kolona 3 tabele 4.1) i korelacione matrice R može se lako odrediti disperziona matrica promenljive

$$Z = \{ Y_1, Y_2, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \}$$

kao proizvod

$$W = [\sigma_{y1}, \sigma_{y2}, \sigma_{x1}, \ldots, \sigma_{x8}] . R \begin{bmatrix} \sigma_{y1} \\ \sigma y_2 \\ \sigma_{x1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{x8} \end{bmatrix}$$

A sad ćemo posmatrati promenljivu Y_1 i njenu zavisnost od promenljivih $X_1, \ldots, X_8$. Naravno, posmatraćemo linearnu vezu

$$Y_1 = b_{01} + b_{11}X_1 + b_{21}X_2 + b_{31}X_3 + b_{41}X_4 + b_{51}X_5 + b_{61}X_6 + b_{71}X_7 + b_{81}X_8$$

Regresione koeficijente dobićemo iz jednačine

$$b_{(1)} = W_{xx}^{-1} W'_{(1)} ,$$

gde je

$$b_{(1)} = \{b_{o1}, [illegible], b_{51}, \ldots, b_{81}\}$$

a $W'_{(1)}$ prva kolona matrice [illegible].

Sračunate vrednosti regresionih koeficijenata su

$b_{o1} = 549.62$ $\quad$ $b_{51} = o.27oo$
$b_{11} = o.1992$ $\quad$ $b_{61} = o.3o28$
$b_{21} = o.o717$ $\quad$ $b_{71} = o.o891$
$b_{31} = o.oo32$ $\quad$ $b_{81} = o.o741$.
$b_{41} = -o.o152$

Koeficijent deter[illegible]acije (kvadrat višestrukog koeficijenta korelacije) za pro[illegible]ljivu Y_1 ima vrednost

$$R_1^2 = o.65o.$$

Na sličan način posmatraćemo pr[illegible]ljivu Y_2 i njenu zavisnost od svih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_8$ [illegible]ćemo linearnu zavisnost.

$$Y_2 = b_{o2}+b_{12}X_1+b_{22}X_2+b_{32}X_3+b_{42}X_4+b_{52}X_5+b_{62}X_6+b_{72}X_7+b_{82}X_8$$

Na osnovu p[illegible]bijaju se sledeće vrednosti regresionih koeficijenata:

$b_{o2} = 414.76$ $\quad$ $b_{52} = o.1633$
$b_{12} = o.1111$ $\quad$ $b_{62} = o.266o$
$b_{22} = o.o[illegible]o$ $\quad$ $b_{72} = o.o797$
$b_{32} = o.o652$ $\quad$ $b_{82} = o.o772$.
$b_{42} = o.o529$

Koeficijent de[illegible]ije za promenljivu Y_2 jednak je

$$R_2^2 = o.[illegible].$$

Kao što se vidi, k[illegible]d posmatramo nezavisno promenljive

Y_1 i Y_2 i njihovu savisnost od promenljivih $X_1, \dots, X_8$ dobijamo dosta velike vrednosti višestrukih koeficijenata korelacije. Već sad možemo zaključiti da postoji velika zavisnost ličnih primanja u vanprivrednim delatnostima i ličnih primanja u privrednim delatnostima.

Sad ćemo posmatrati simultano promenljive Y_1 i Y_2 i njihovu zavisnost od promenljivih $X_1, X_2, \dots, X_8$ i odrediti vektorski koeficijent korelacije.

Determinanta korelacione matrice R ima vrednost

$$|R| = 0.004003 ,$$

a determinanta korelacione matrice koja odgovara promenljivima Y_1 i Y_2 ima vrednost

$$|R_{yy}| = 0.428464 .$$

Determinanta korelacione matrice koja odgovara promenljivima $X_1, X_2, \dots, X_8$ jednaka je

$$|R_{xx}| = 0.040034 .$$

Na osnovu izraza (4.21) kojim je definisan vektorski koeficijent korelacije preko determinanti korelacionih matrica, dobiće se vrednost

$$R^2_{\varepsilon} = 0.7690 .$$

Ovaj koeficijent predstavlja meru linearne zavisnosti ličnih dohodaka u vanprivrednim delatnostima i ličnih dohodaka u privrednim delatnostima.

Kao što se moglo i očekivati, dobili smo dosta veliku vrednost vektorskog koeficijenta korelacije. Time je potvrdjena predpostavka o uzajamnoj zavisnosti dohodka u vanprivrednim i privrednim delatnostima.

Z A K L J U Č A K

Posmatrajući aleatorne strukture na statističkim skupovima, B. Ivanović je ispitivao linearnu zavisnost izmedju statističkih struktura i definisao je kolektivni koeficijent korelacije kao meru linearne zavisnosti medju njima. Zajedno sa J. Komatom, Ivanović je dokazao da je kolektivni koeficijent korelacije jednak jedinici ako i samo ako su aleatorne strukture linearno zavisne.

B. Ivanović je pretpostavljao da statističke strukture imaju isti broj klasa i pokazao je da se metodom najmanjih kvadrata može odrediti delimična linearna zavisnost izmedju struktura. Na osnovu ocenjenih zavisnosti metodom najmanjih kvadrata definisan je i kolektivni koeficijent korelacije.

Prvi zadatak ovog rada bio je odredjen potrebom da se ispituje linearna zavisnost izmedju aleatornih struktura koje imaju različit broj klasa. Zato je trebalo rezultate B. Ivanovića proširiti i na ove slučajeve.

Koristeći metod najmanjih kvadrata, u drugom delu rada odredjen je postupak za ispitivanje delimične linearne veze izmedju statističkih struktura sa različitim brojem klasa. Na osnovu linearne ocene jedne statističke strukture preko druge strukturu, definisan je kolektivni koeficijent korelacije kao uopštenje Ivanovićevog koeficijenta korelacije. Pokazano je da tako definisan kolektivni koeficijent korelacije ima iste osobine kao i obični koeficijent korelacije. Naime, vrednost kolektivnog koeficijenta korelacije je uvek izmedju nule i jedinice. Ako su strukture medjusobno nezavisne onda je njegova vrednost jednaka nuli. Kolektivni koeficijent korelacije ima vrednost jedan ako i samo ako postoji linearna zavisnost izmedju statističkih struktura i zato predstavlja meru linearne zavisnosti izmedju statističkih struktura.

Sledeći zadatak je bio da se prethodni rezultati koji se odnose na statističke strukture uopšte na skupove obeležja. Naime, umesto jedne statističke strukture možemo posmatrati skup statističkih obeležja, a umesto druge strukture posmatraćemo drugi skup obeležja.

Postupak ispitivanja linearnih zavisnosti izmedju statističkih struktura uopšten je i na slučaj ispitivanja zavisnosti izmedju grupa statističkih obeležja. Zato je u trećem delu definisan aleatorni vektor, model višedimenzionalnog normalnog rasporeda i uslovi nezavisnosti aleatornih vektora. Pored toga definisane su regresione hiperpovršine i pokazano je da se u modelu višedimenzionalnog normalnog rasporeda regresiona površina svodi na hiperravan.

Da bi ispitivali zavisnost aleatornih vektora i kod drugih rasporeda, definisana je srednja kvadratna regresiona hiperravan. Pri odredjivanju srednje kvadratne regresione hiperravni korišćen je metod najmanjih kvadrata. Nepoznati koeficijenti su odredjivani tako što je minimiziran ukupan zbir očekivanih vrednosti kvadrata rezidualnih odstupanja. Pokazano je da srednja kvadratna regresiona hiperravan ima isti oblik kao i regresiona površina kod normalnog rasporeda.

Pri ispitivanju aleatorne promenljive odredjuju se izvesni parametri koji predstavljaju mere centralne tendencije, mere rasipanja, mere asimetrije i sl. Jedan od osnovnih parametara rasporeda je varijansa aleatorne promenljive. Kod aleatornog vektora trebalo je definisati generalisanu varijansu koja bi predstavljala meru rasturanja aleatornog vektora duž celog prostora.

Na osnovu definicije generalisane varijanse odredjena je srednja kvadratna regresiona hiperravan. Pokazano je da srednja kvadratna regresiona hiperravan minimizira generalisanu varijansu reziduelnih odstupanja aleatornih vektora.

U četvrtom delu rada definisan je tzv. vektorski koeficijent korelacije. Definicija je data analogno definiciji običnog koeficijenta korelacije. Pokazano je da se vektorski koeficijent korelacije svodi na izraz odredjen sa minimalnom vrednošću generalisane varijanse reziduelnih odstupanja. Kod normalnog rasporeda ovaj koeficijent se svodi na izraz odredjen regresionom hiperpovršinom.

Vektorski koeficijent korelacije ima iste osobine kao i obični koeficijent korelacije. Ako su vektori stohastički nezavisni, vektorski koeficijent korelacije je jednak nuli. Pored toga, vektorski koeficijent korelacije je jednak jedinici onda i samo onda kad izmedju aleatornih vektora postoji linearna zavisnost.

Jedno poglavlje ovog dela je posvećeno geometrijskoj interpretaciji vektorskog koeficijenta korelacije. Naime, posmatran je prost slučajan uzorak i pokazano je da je taj koeficijent definisan preko zapremina paralelotopa odredjenih aleatornim vektorima u prostoru uzorka.

Kao primer, posmatrani su lični dohodci vanprivrednih i privrednih delatnosti. Na bazi podataka za 254 Opštine SFRJ sračunat je vektorski koeficijent korelacije i dobijena je vrednost o,77, što pokazuje dosta visoku zavisnost ličnih dohodaka u vanprivrednim delatnostima i ličnih dohodaka u privrednim delatnostima, a to je i trebalo očekivati.

L I T E R A T U R A

1. Anderson,T.W. (1951), "Estimating linear restrictions on regression coefficient for multivariate normal distributions", Ann. Math. Stat., 22, 327-351.

2. -------- (1958), An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York.

3. Anderson, T.W. and Herman Rubin (1949), "Estimation of the parameters of a single equation in complete system of stochastic equations", Ann. Math. Stat., 2o,46-63.

4. Anderson,R.L. and Bancroft, T.A. (1952), Statistical Theory in Research, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York.

5. Andjelić, P.T. (197o), [illegible], Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd.

6. Bartlett, M.S. (1938), "Further aspects of the theory of multiple regression", Proc. Camb. Phil. Soc. 34, 33-4o.

7. -------- (1947), "Multivariate analysis", J.Roy. Stat. Soc., Supple., 9, 176-197.

8. Bennett, B.M.(1955), "On the cumulants of the logarithmic generalised variance ratio", Skand. Aktuarietidskr., 38, 87-9o.

9. Blackwell, D. and Girshick, M.A. (1954), Theory of Games and Statistical Decisions, John Wiley and Sons, Inc., New York.

1o. Bose, P.K. (1947), "Parametric relations in multivariate distributions", Sankhyā, 8, 167-171.

11. Carter, A.H. (1949), "The estimation and comparison of residual regressions where there are two or more related sets of observations", Biometrika, 36, 26-46.

12. Cramér, H. (1963), Mathematical Method of Statistics, Princeton University Press, Princeton.

13. Dwyer, P.S. (1949), "Pearsonian correlation coefficients associated with least squares theory", Ann. Math. Stat., 2o, 4o4-416.

14. Ezekiel, M. (195o), Methods of Correlation Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York.

15. Feller, W. (1951), An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I., John Wiley and Sons, Inc., New York.

16. Goldberger, S.A. (1964), Econometric Theory, John Wiley and Sons, Inc., New York.

17. Hotelling, H. (1936), "Relations between two sets of variates", Biometrika, 28, 321-377.

18. -------- (1953), "New light on the correlation coefficient and its transforms", J. Roy. Stat. Soc., B. 15, 193-225.

19. Ivanović, B. (1954), "Sur la discrimination des ensembles statistiques", Publ. de l'Inst. Statistique de l'Université de Paris, Vol. III, fascic. 4.

2o. Ivanović, B. i Karamata J. (1955), "Dokaz jednog stava o kolektivnom koeficijentu korelacije", Statistička revija br.4., Beograd.

21. Ivanović, B. (1959), Teorija korelacije sa primenama u ekonomskim istraživanjima, Nolit, Beograd.

22. Ivanović, B. (1963), Diskriminaciona analiza, Naučna knjiga, Beograd.

Kendall, M.G. (1943), The Advanced Theory of Statistics, I, Charles Grifin, London.

24. ------- (19), The Advanced Theory of Statistics, II, Charles Griffin and Co., London.

25. Kullback, S. (1952), "An application of information theory to multivariate analysis", Ann. Math. Stat., 23, 88-1o2.

26. ------- (1956), "An application of information theory to multivariate analysis II", Ann. Math. Stat., 27, 122-146.

27. Laha, R.G. (1954), "On some problems in canonical correlation", Sankhya, 14, 61-66.

28. Lawley, D.N. (1956), "Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices", Biometrika,43, 128-136.

29. Marriott, F.H.C.(1956), "Tests of significance in canonical analysis", Biometrika, 39, 58-64.

3o. Prochorov, J.V., Rozanov, J.A. (1973), Teorija verojatnostej, Nauka, Moskva.

31. Rao, C.R. (1944), "Generalized variance of populations", Proc. Indian Sci. Cong.

32. ------- (1952), Advanced Statistical Methods in Biometric Research, John Wiley and Sons, Inc., New York.

33. Sasuly, M. (193o), "Generalized multiple correlation analysis of economic statistical series", J.Amer. Stat. Assoc., 25, 146-125.

34. Steel, R.G.D. (1951), "Minimum generalized variance for a set of linear functions", Ann. Math.Stat. 22, 456-46o.

35. Stojaković, D.M. (1961), Elementi linearne algebre, Zavod za izdavanje udžbenika Narodne Republike Srbije, Beograd.

36. Theil, H. (1971), Principles of Econometrics, John Wiley and Sons, Inc., New York.

37. Tukey, J.W. (1949), "Dy[illegible]dic anova, an analysis of variance for vectors", [illegible] Biol. [illegible] 21, 65-11o.

38. Wilks, S. (1967), [illegible] Statistika, Nauka, Moskva.

39. Wald, A. and Brook[illegible]r, R.J. (1941), "On the distribution of wilks' statistic for testing the i[illegible]ependance of several groups of variates", Ann. Math, Stat. 12,137--152.

4o. Waugh, V. (1942), "Regr[illegible]tions between sets of variates", Econometrica, 1o, 29o-31o.

41. Wilks, S.S. (1935), "Test criteria for statistical hypo[illegible] involving se[illegible] variables", J.Amer. Stat.Assoc.,3[illegible] 309-33o.

42. Zellner, A. (1971), An [illegible]tion to Bayesian Inference i[illegible] [illegible], J[illegible] Wiley and Sons, Inc., New York.