UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Đorđe Herceg

Konvergencija simultanih postupaka za nalaženje nula polinoma

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 1999.

Predgovor

Tema doktorske disertacije - konvergencija simultanih postupaka za nalaženje nula polinoma - pripada oblasti numeričke matematike. Određivanje nula algebarskih polinoma je veoma aktuelno, kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog stanovišta. Algebarski polinomi se javljaju pri rešavanju velikog broja problema ne samo teorijske i primenjene matematike, već takođe i mnogih grana inženjerskih i računarskih nauka, fizike, astronomije, finansija, itd. Zbog toga je ovom problemu oduvek pridavana velika pažnja, o čemu svedoči ogroman broj radova tokom više vekova, kao i brojne knjige i monografije. Konstruisan je veliki broj numeričkih algoritama za rešavanje algebarskih jednačina, a nagli razvoj ove discipline usledio je šezdesetih godina sa pojavom i razvojem elektronskih računara. Posebno su postali interesantni postupci za simultano nalaženje svih nula polinoma. Zbog svega toga izbor ove oblasti primenjene matematike za temu disertacije je ne samo prirodan već istovremeno predstavlja i izazovan istraživački projekat.

Pri realizaciji svakog numeričkog algoritma za rešavanje jednačina jedan od ključnih problema je nalaženje početnih aproksimacija koje obezbeđuju sigurnu i brzu konvergenciju primenjenog iterativnog postupka. Ovaj problem je veoma težak čak i u slučaju jednostavnih funkcija kakve su algebarski polinomi. Klasični rezultati koji se mogu naći u literaturi koriste početne uslove koji zavise od nepoznatih parametara, što nije od praktičnog značaja. To je bio dodatni motiv za rad na ovom problemu. Zbog napred navedenog nerešenog problema tema disertacije, usmerena ka nalaženju takvih početnih uslova koji garantuju konvergenciju brzo konvergentnih algoritama i koji su računski proverljivi, veoma je aktuelna sa aspekta primene.

Kao rezultat trogodišnjih istraživanja dobijeni su originalni metodi za jednostavnu konstrukciju početnih uslova za sigurnu i brzu konvergenciju najčešće primenjivanih iterativnih postupaka za istovremeno nalaženje svih nula polinoma. Neki od rezultata publikovani su u poznatim internacionalnim časopisima za numeričku matematiku i računarske nauke (*Comput. Math. Appls.*, *BIT*, *Numer. Algorithms*, *Internat. J. Computer Math.*, *Nonlinear Analysis*, *J. Comput. Appl. Math.*, *Japan J. Indust. Appl. Math.*) ili saopšteni na domaćim i internacionalnim konferencijama i štampani u odgovarajućim zbornicima. Dalja istraživanja prikazana u disertaciji dovela su do poboljšanja početnih uslova datih u pomenutim radovima. Štaviše, za većinu simultanih postupaka dobijeni su optimalni početni uslovi sa stanovišta primenjenih metoda prikazanih u 3. i 4. poglavlju disertacije.

• • •

Zahvaljujem se svima koji su doprineli izradi ove disertacije.

Posebno se zahvaljujem dr Miodragu Petkoviću, redovnom profesoru Elektronskog fakulteta Univerziteta u Nišu, koji me je uputio u oblast kojoj pripada ova doktorska disertacija, a svojim savetima i predlozima neprekidno i nesebično pomagao u toku magistarskih studija, pri izradi magistarske teze i doktorske disertacije. Većina mojih naučnih radova je nastala u bliskoj saradnji i koautorstvu sa njim.

Takođe se zahvaljujem dr Snežani Ilić, vanrednom profesoru Filozofskog fakulteta Univerziteta u Nišu, dr Ljiljani Petković, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu i dr Slobodanu Tričkoviću, docentu Građevinskog fakulteta Univerziteta u Nišu na saradnji prilikom izrade naših zajedničkih radova.

Zahvaljujem se dr Katarini Surla, redovnom profesoru Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, na korisnim savetima i sugestijama koji su mi pomogli pri izradi ove disertacije. Takođe se zahvaljujem dr Nataši Krejić, docentu Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu i dr Zorici Uzelac, vanrednom profesoru Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, na interesovanju za moj rad i pomoći koju su mi pružile.

Sadržaj

„Problem određivanja nula datog polinoma sa kompleksnim koeficijentima je pravi nelinearan problem. U isto vreme problem je jednostavan. On je toliko jednostavan da, u stvari, postoji nada da ćemo jednog dana biti u stanju da ga u potpunosti rešimo."

Peter Henrici (1968)

1 Uvodni deo

1.1 Uvod

Problem rešavanja nelinearnih jednačina i sistema nelinearnih jednačina jedan je od prvih nelinearnih problema sa kojim se matematičari sreću u svom istraživanju i primeni. Ovo je jedan od najvažnijih problema u teoriji i praksi, ne samo primenjene matematike, već takođe i mnogih grana inženjerskih nauka, fizike, kompjuterskih nauka, astronomije, finansija, itd. Mada je veliki značaj ove oblasti istraživanja doveo do razvoja velikog broja numeričkih postupaka tokom poslednje tri decenije, savršen algoritam za rešavanje jednačina još nije dobijen, čak ni za relativno proste klase jednačina kao što su polinomne jednačine. Svaki postupak ima svoje prednosti i mane, tako da je posmatrani problem aktuelan i u današnje vreme.

Pri rešavanju jednačina oblika $f(z) = 0$ jedan od najvažnijih problema je formulisanje početnih uslova koji dovode do sigurne konvergencije primenjenog iterativnog numeričkog postupka. Takav izbor treba, takođe, da obezbedi i brzu konvergenciju. U literaturi se najčešće koriste uslovi za konvergenciju koji zavise od nepoznatih parametara, na primer, od „izvesnih koeficijenata“ ili čak od korena jednačina koji se zapravo traže. Česta je upotreba termina „dovoljno dobre početne aproksimacije“ ili „lokalna konvergencija u dovoljno bliskoj okolini (traženog) korena“ i slično, bez dovoljne kvantitativne karakterizacije ovih termina. Ovakvi rezultati su uglavnom od teorijskog značaja. Zbog toga je glavni motiv i cilj ove disertacije nalaženje početnih uslova koji ispunjavaju gornje zahteve (garantovanu i brzu konvergenciju), ali zavise samo od dostupnih podataka, na primer od karakteristika date funkcije f i početnih aproksimacija. Drugim rečima, domen konvergencije treba da koristi samo informacije o funkciji f i početnoj aproksimaciji $z^{(0)}$. Ova činjenica predstavljala je glavnu motivaciju za moj rad na problemu definisanja praktično primenljivih uslova za konvergenciju jedne klase iterativnih postupaka.

Problem izbora početnih aproksimacija koje obezbeđuju sigurnu i brzu konvergenciju je u opštem slučaju dosta težak i ne može se rešiti na zadovoljavajući način čak i u slučaju jednostavnih funkcija, kao što su algebarski polinomi. U disertaciji je problem početnih uslova izučavan u slučaju algebarskih polinoma i iterativnih postupaka za istovremeno nalaženje svih prostih nula ovih polinoma. Razvijeno je nekoliko originalnih postupaka za ispitivanje konvergencije iterativnih postupaka zasnovanih na dva principa: principu korekcija i principu konvergentnih nizova.

U ovoj disertaciji posmatra se izračunavanje svih nula moničnog polinoma

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

stepena $n \geq 3$ sa kompleksnim koeficijentima $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \ldots, n-1$. Početni uslovi za konvergenciju iterativnih postupaka za istovremeno nalaženje svih prostih nula polinoma P, izloženi u disertaciji, zavise samo od koeficijenata tog polinoma, njegovog stepena n i početnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$. S obzirom da je konvergencija iterativnih postupaka za nalaženje nula date funkcije strogo povezana sa distribucijom njenih nula, mera razdvojenosti nula je uzeta kao argument koji se pojavljuje u početnim uslovima. Umesto nepoznatih nula, za ovu meru uzeto je minimalno rastojanje između početnih aproksimacija

$$d^{(0)} = \min_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ j \neq i}} |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}|.$$

Bliskost početnih aproksimacija traženim nulama je, takođe, važan parametar koji utiče na konvergenciju primenjenog postupka. Mera ove bliskosti može se zgodno izraziti pomoću veličine oblika

$$u(z) = \left|\frac{P(z)}{F(z)}\right|,$$

gde je $F(z) \neq 0$ za svako z koje pripada okolini nule ζ polinoma P. Opsežna istraživanja izložena u radovima [61], [64], [65], [68], [69], [70], [71], [75] kao i u radovima kineskih matematičara [98] i [100], pokazala su da su početni uslovi oblika

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}, \tag{1.1}$$

gde je

$$w^{(0)} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{\left|P(z_i^{(0)})\right|}{\prod_{j\neq i}\left|z_i^{(0)} - z_k^{(0)}\right|},$$

veoma efikasni kod najčešće korišćenih iterativnih postupaka za istovremenu aproksimaciju nula polinoma. Veličina c_n zavisi samo od stepena polinoma n i naziva se *n-faktorom*. Glavna pažnja pri konstrukciji početnih uslova oblika (1.1) posvećena je nalaženju što je moguće većeg n-faktora c_n.

Veći deo disertacije sastoji se od originalnih rezultata. Oni predstavljaju poboljšanja rezultata koje sam dobio u svojim trogodišnjim istraživanjima i koji su publikovani u poznatim inostranim časopisima za primenjenu matematiku i računarske nauke *Intern. J. Comput. Math.* [65], *J. Comput. Appl. Math.* [68], *BIT* [70], *Numerical Algorithms* [71], *Comput. Math. Appl.* [75], domaćim časopisima *Novi Sad Journal of Mathematics* [31], [32], *Scientific Review* [64] i saopšteni na međunarodnim i domaćim naučnim konferencijama.

Ovaj rad se sastoji od sledećih poglavlja:

1. Uvodni deo;
2. Simultani postupci za nalaženje nula polinoma;
3. Sigurna konvergencija: princip korekcija;
4. Sigurna konvergencija: princip konvergentnih nizova;
5. Literatura.

Prvo poglavlje je preglednog karaktera i ne sadrži nove rezultate. U odeljku 1.2 uvedene su neke oznake koje su često korišćene u disertaciji, kao i neke definicije, leme i teoreme. Važnost problema izbora početnih aproksimacija koje obezbeđuju sigurnu konvergenciju primenjenog algoritma za rešavanje nelinearne jednačine $f(z) = 0$, kao i kratak istorijat ovog problema, dati su u odeljku 1.3. Teorija tačkaste ocene koja daje uslove za sigurnu konvergenciju iterativnog postupka datira iz 1981. godine kada je Smale [89] uveo pojam *aproksimativne nule* kao početnu tačku koja obezbeđuje konvergenciju Newtonovog postupka (videti definiciju 1.9).

U istom odeljku dat je kratak pregled poznatih rezultata koji se odnose na aproksimativne nule i konvergenciju Newtonovog postupka, Chen [11], Smale [89], [90], kao i postupaka višeg reda uključujući postupak Euler-Chebysheva i Halleyev postupak trećeg reda, razmatranih u [12].

Problem lokalizacije nula polinoma, koji je veoma značajan pri rešavanju polinomnih jednačina, razmatran je u odeljku 1.4. Naveden je sledeći važan rezultat dokazan u monografiji [69] autora M. Petkovića, Đ. Hercega i S. Ilić koji koristi Weierstrassovu korekciju

$$W_i = \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)}.$$

Teorema 1.1 *Neka je za fiksno* $n \geq 3$

$$c_n = \frac{1}{An + B}, \quad A \geq 2, \quad B \geq (2 - A)n$$

i neka važi

$$w \leq c_n d.$$

Tada su diskovi

$$D_1 = \left\{ z_1; \frac{An + B}{(A-1)n + B}|W_1| \right\}, \ldots, D_n = \left\{ z_n; \frac{An + B}{(A-1)n + B}|W_n| \right\}$$

međusobno disjunktni i svaki od njih sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P.

Ovaj rezultat ima jednu od ključnih uloga pri konstrukciji jednog originalnog pristupa za ispitivanje konvergencije simultanih postupaka, izloženog u četvrtom poglavlju i primenjenog na neke postupke za istovremeno nalaženje nula polinoma. U okviru odeljka 1.4 dat je kratak pregled funkcija iz programskog paketa *Mathematica* koje mogu da se koriste za lokalizaciju i izolovanje nula polinoma.

U nekim slučajevima korišćenje kompleksne kružne intervalne aritmetike predstavlja vrlo efikasan postupak za nalaženje granica nekih veličina u kompleksnoj ravni koje se javljaju u iterativnim formulama. Zbog toga je u odeljku 1.5 dat kratak pregled osnovnih osobina i operacija kružne kompleksne aritmetike.

U drugom poglavlju data je kratka istorija razvoja iterativnih postupaka za nalaženje nula polinoma, sa posebnim osvrtom na postupke za istovremeno nalaženje prostih nula polinoma. U odeljku 2.2 kratko je opisan način dobijanja simultanih postupaka zasnovanih na relaciji nepokretne tačke i navedeno je nekoliko najčešće korišćenih postupaka: Weierstrassov, Ehrlich-Aberthov, Ehrlich-Abethov sa Newtonovom korekcijom, Börsch-Supanov, Börsch-Supanov sa Weierstrassovom korekcijom, Tanabeov, zatim postupak kvadratnog korena, Wang-Zhengov postupak i familija simultanih postupaka Hansen-Patrickovog tipa.

Originalni rezultati su prikazani u trećem i četvrtom poglavlju. Kao što je već rečeno, brojna istraživanja su pokazala da su početni uslovi za konvergenciju simultanih postupaka u oblika (1.1) dosta pogodni. Glavna tema istraživanja u ovoj disertaciji je usmerena ka nalaženju što je moguće većeg faktora c_n jer se time eliminiše potreba za izborom vrlo bliskih početnih aproksimacijama. Rezultati dobijeni u disertaciji popravljaju n-faktor c_n za sve razmatrane postupke u odnosu na faktor c_n koji je dobijen u nedavno publikovanim radovima [31], [32], [61], [65], [68], [70], [71], [75], [98], [99], [100], [101], [102], i monografiji [69]. Štaviše, kod većine postupaka dobijene su optimalne vrednsoti c_n (u smislu da se ne mogu povećati) sa stanovišta izloženih pristupa: principa korekcije (treće poglavlje) i principa konvergentnih nizova (četvrto poglavlje).

U trećem poglavlju najpre je opisan princip korekcije već izložen u radu [70] M. Petkovića, Đ. Hercega i S. Ilić. Posmatrani su iterativni postupci za istovremeno nalaženje svih nula polinoma u obliku

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - C_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}), \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

gde je $I_n = \{1, \ldots, n\}$ indeksni skup, $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$ aproksimacije prostih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ respektivno, dobijene u m-toj iteraciji, i

$$C_i^{(m)} = C_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)})$$

iterativna korekcija. Istraživanja su ograničena na korekcije oblika

$$C_i(z) = \frac{P(z)}{F(z)}, \tag{1.3}$$

gde je $F(z) \neq 0$ za svako z iz okoline nule ζ_i. Ova klasa je prilično široka i uključuje najčešće korišćene postupke za istovremeno nalaženje nula polinoma. Princip korekcije je zasnovan na sledećoj važnoj teoremi o konvergenciji iterativnih simultanih postupaka.

Teorema 1.2 *Neka je C_i iterativna korekcija oblika (1.3) pri čemu je $F(z) \neq 0$ za $z = \zeta_i$ i $z = z_i^{(m)}, i \in I_n$, $m = 0, 1, \ldots$, i neka je $g(t)$ realna funkcija definisana na intervalu $(0, 1)$ pomoću*

$$g(t) = \begin{cases} 1 + 2t, & 0 < t \leq \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{1-t}, & \dfrac{1}{2} < t < 1. \end{cases}$$

Ako za neko $\gamma \in (0, 1)$ iz početnog uslova (1.1) sledi

$$(i) \quad \left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \gamma \left|C_i^{(m)}\right|, \qquad i \in I_n, \ m = 0, 1, \ldots,$$

$$(ii) \quad \left|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right| > g(\gamma)\left(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|\right), \quad i \neq j, i, j \in I_n,$$

tada je iterativni postupak (1.2) konvergentan.

Ova teorema je poboljšanje teoreme iz rada [70] u kojoj je funkcija

$$g(t) = \frac{1+t-t^2}{1-t},$$

što je veće za fiksno t u poređenju sa izrazom za g datim u teoremi 1.2.

Teorema 1.2 primenjena je za nalaženje početnog uslova za sigurnu konvergenciju Weierstrassovog postupka (odeljak 3.2), Börsch-Supanovog postupka (odeljak 3.3), Tanabeovog postupka (odeljak 3.4) i familije simultanih postupaka Hansen-Patrickovog tipa (odeljak 3.5). U ovom poslednjem slučaju primenjen je originalan postupak za ocenu modula nekih kompleksnih veličina korišćenjem kompleksne kružne aritmertike. Za svaki od navedenih postupaka diskutovana je optimalna vrednost n-faktora c_n. Dobijene vrednosti za c_n su veće u odnosu na one date u okviru teorema za konvergenciju četiri pomenuta postupka analizirana u [60], [69], [71], [100], [109], što drugim rečima znači da su oslabljeni uslovi za konvergenciju ovih postupaka.

Pristup korekcije koristi početne uslove oblika (1.1) i sastoji se iz sledeća četiri koraka:

1. Sa pogodno izabranom konstantom c_n određuju se konstante β_n, λ_n i δ_n tako da važi

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}, \tag{1.4}$$

$$\beta_n < 1, \quad g(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n}, \tag{1.5}$$

$$\delta_n \leq 1 - 2\lambda_n. \tag{1.6}$$

2. Pod uslovom (1.4) indukcijom se dokazuje da važi

$$w^{(m+1)} \leq c_n d^{(m+1)}, \quad m = 0, 1, \dots \tag{1.7}$$

i

$$\left|W_i^{(m+1)}\right| \leq \delta_n \left|W_i^{(m)}\right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots. \tag{1.8}$$

3. Dokazuje se da važi prvi uslov teoreme 1.2

$$\left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \beta_n \left|C_i^{(m)}\right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots \tag{1.9}$$

i nejednakosti

$$\frac{c_n}{\lambda_n}\left|C_i^{(0)}\right| \le \left|W_i^{(0)}\right|, \quad i \in I_n. \tag{1.10}$$

4. Na osnovu prva tri koraka pokazuje se da su diskovi

$$S_i = \left\{z_i^{(0)}; g(\beta_n)\left|C_i^{(0)}\right|\right\}, \quad i \in I_n,$$

međusobno disjunktni, što dokazuje da važi i drugi uslov teoreme 1.2. Sada, sa $\gamma = \beta_n$, konvergencija iterativnog postupka (1.2) sledi kao direktna posledica teoreme 1.2.

Važno je napomenuti da je osnovna ideja da se za svaki pojedinačni postupak izborom konstante c_n ostale konstante δ_n, γ_n i λ_n određuju kao funkcije od c_n, tako da važe uslovi (1.4) i (1.5) i da se na osnovu njih dobije (1.7), (1.8), (1.9) i (1.10). Na taj način, ako su početne aproksimacije $z_i^{(0)}$, $i \in I_n$, izabrane tako da važi (1.1), dakle, uslov postavljen u jednoj tački, iterativni postupak (1.2) konvergira.

U četvrtom poglavlju dat je originalan prilaz za ispitivanje konvergencije simultanih postupaka zasnovan na principu konvergentnih nizova $\{u_1^{(m)}\}, \ldots, \{u_n^{(m)}\}$, gde je

$$u_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad i \in I_n. \tag{1.11}$$

Ovaj pristup takođe koristi početne uslove oblika (1.1) i sastoji se iz sledeća tri koraka (odeljak 4.1):

1. Pod uslovom (1.1) teorema 1.1 daje inkluzivne diskove

$$Z_i^{(0)} = \left\{z_i^{(0)}; \frac{1}{1-nc_n}|W_i^{(0)}|\right\}, \quad i \in I_n.$$

Ako se n-faktor c_n izabere tako da su ovi diskovi međusobno disjunktni, tada svaki od njih sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P. Odavde sledi da je

$$|u_i^{(0)}| = |z_i^{(0)} - \zeta_i| \le \frac{1}{1-nc_n}|W_i^{(0)}|.$$

Ova nejednakost ima važnu ulogu u analizi konvergencije nizova $\left\{z_i^{(m)}\right\}$ koji se dobijaju pomoću posmatranog simultanog postupka.

2. U sledećem koraku izvode se nejednakosti

$$d \le \alpha(n)\hat{d}, \quad \text{i} \quad |\widehat{W}_i| \le \beta(n)|W_i|, \quad i \in I_n,$$

koje uključuju minimalno rastojanje i Weierstrassovu korekciju u dve uzastopne iteracije. Simbol „ˆ" označava veličine dobijene u narednoj iteraciji. n-faktor c_n koji se javlja u uslovu (1.1) treba da bude tako izabran da daje takve vrednost $\alpha(n)$ i $\beta(n)$ koje obezbeđuju implikaciju

$$w \le c_n d \quad \Rightarrow \quad \hat{w} \le c_n \hat{d}.$$

Primetimo da će gornja implikacija važiti ako je $\alpha(n)\beta(n) < 1$.

3. U poslednjem koraku izvode se nejednakosti oblika

$$|u_i^{(m)}| \le \gamma(n, d^{(m)})|u_i^{(m)}|^p \left(\sum_{j \ne i} |u_j^{(m)}|^q \right)^r, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots$$

i dokazuje da svi nizovi $\left\{|u_i^{(m)}|\right\}$ teže nuli pod uslovom (1.1), što znači da $z_i^{(m)} \to \zeta_i$ za svako $i \in I_n$. Red konvergencije nizova (1.11) je $p + qr$.

Princip konvergentnih nizova primenjen je za konstrukciju početnih uslova oblika (1.1) koji garantuju konvergenciju Ehrlich-Aberthovog postupka (4.3), Ehrlich-Aberthovog postupka sa Newtonovom korekcijom (4.22), Börsch-Supanovog postupka sa Weierstrassovom korekcijom (4.44) i Wang-Zhengovog postupka (4.63). Novi n-faktori su poboljšani (imaju veću vrednost) u odnosu na one koji su za pomenute postupke dobijeni u nedavno publikovanim radovima [64], [68], [70], [72].

Na kraju, kao peti deo, navedena je literatura koja je direktno korišćena ili citirana u radu.

1.2 Neke oznake, definicije i teoreme

Koristićemo sledeće oznake:

- $\mathbb{N}$ – skup prirodnih brojeva,
- $\mathbb{C}$ – skup kompleksnih brojeva,
- $\mathbb{C}^n$ – vektorski prostor uređenih n-torki kompleksnih brojeva,
- $\mathbb{K}(\mathbb{C})$ – skup diskova u kompleksnoj ravni,
- $\operatorname{mid} Z$ – centar diska $Z \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$,
- $\operatorname{rad} Z$ – radijus diska $Z \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$,
- $\{c; r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r\}$ – disk sa centrom c i radijusom r,
- $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top$ – vektor kolona sa komponentama x_i,
- $x^\top$ – transponovani vektor vektora x,
- $\{x_k\}, \{x^{(k)}\}$ – niz brojeva, odnosno vektora,
- $P^{(k)}(z_i)$, – k-ti izvod polinoma $P(z)$ u tački z_i,
- $f^{(k)}(z_i)$, – k-ti izvod funkcije $f(z)$ u tački z_i,
- $\displaystyle\prod_{j \neq i} s_j = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} s_j$,
- $\displaystyle\sum_{j \neq i} s_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} s_j$,
- $I_n = \{1, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$,
- za prirodan broj $n \geq 3$, sa $P(z)$ označavamo monični polinom stepena n sa kompleksnim koeficijentima $a_i, i = 0, \ldots, n-1$, i prostim nulama $\zeta_j, j \in I_n$, tj.

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

i

$$\zeta_i \neq \zeta_j, \quad i \neq j, \quad i, j \in I_n,$$

- Weierstrassove korekcije

$$W_i(z) = \frac{P(z)}{\prod\limits_{j \neq i} (z - z_j)}, \quad i \in I_n, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$W_i = W_i(z_i), \quad z_i \in \mathbb{C}, \quad i \in I_n,$$

$$W_i^{(m)} = \frac{P\left(z_i^{(m)}\right)}{\prod\limits_{j \neq i} \left(z_i^{(m)} - z_j^{(m)}\right)}, \quad z_i \in \mathbb{C}, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

- maksimalna vrednost Weierstrassovih korekcija u m-toj iteraciji

$$w^{(m)} = \max_{1 \le i \le n} \left|W_i^{(m)}\right|, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

- minimalno rastojanje aproksimacija $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$

$$d^{(m)} = \min_{\substack{1 \le i, j \le n \\ i \neq j}} \left|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}\right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

- Newtonove korekcije $N(z_j) = \dfrac{P(z_j)}{P'(z_j)}, \quad j \in I_n,$

- $S_{k,i} = \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{1}{(z_i - z_j)^k}, \quad k = 1, 2, \quad i \in I_n,$

- $\Sigma_{k,i} = \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{1}{(z_i - \zeta_j)^k}, \quad k = 1, 2, \quad i \in I_n,$

- $\Sigma_{N,i} = \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{N_j}{(z_i - z_j + N_j)(z_i - z_j)}, \quad i \in I_n,$

- $\Sigma_{W,i} = \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)}, \quad i \in I_n,$

- $u_i = z_i - \zeta_i, \quad i \in I_n,$

- kada se veličina Φ izračunava jednom pomoću $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$, a drugi put pomoću $z_1^{(m+1)}, \ldots, z_n^{(m+1)}$, a nije važno da se naglasi konkretna vrednost za m, pisaćemo kratko Φ, odnosno $\widehat{\Phi}$. Tako ćemo umesto $W_i^{(m)}$ i $W_i^{(m+1)}$ pisati W_i i $\widehat{W}_i$; umesto $w^{(m)}$ i $w^{(m+1)}$ kratko w i $\widehat{w}$; umesto $d^{(m)}$ i $d^{(m+1)}$ samo d i $\hat{d}$ itd.

Lema 1.3 *Ako su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ proste nule polinoma P onda je*

$$\frac{1}{N(z)} = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{z - \zeta_j} + \frac{1}{z - \zeta_i}.$$

Lema 1.4 *Za međusobno različite vrednosti $z_1, \ldots, z_n$ važi*

$$P(z) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{z - z_i} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n} (z - z_i).$$

Lema 1.5 ([8]) *Ako su $z_1, \ldots, z_n$ međusobno različite vrednosti, onda je*

$$\frac{P'(z_i)}{P(z_i)} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} + \frac{\displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1}{W_i}.$$

Lema 1.6 *Za Weierstrassove korekcije važi*

$$W_i = u_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j} \right).$$

Lema 1.7 ([69]) *Za međusobno različite vrednosti $z_1, \ldots, z_n$ važi*

$$(i) \quad \frac{P(z_i)}{2P'(z_i)} (S_{1,i}^2 + S_{2,i}) = \frac{u_i (S_{1,i}^2 + S_{2,i})}{2(1 + u_i \Sigma_{1,i})},$$

$$(ii) \quad \frac{P''(z_i)}{2P'(z_i)} = \frac{2\Sigma_{1,i} + u_i \Sigma_{1,i}^2 - u_i \Sigma_{2,i}}{2(1 + u_i \Sigma_{1,i})},$$

$$(iii) \quad \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \frac{P''(z_i)}{2P'(z_i)} = \frac{2 + 2u_i \Sigma_{1,i} + u_i^2 \Sigma_{1,i}^2 + u_i^2 \Sigma_{2,i}}{2u_i (1 + u_i \Sigma_{1,i})}.$$

Lema 1.8 *Za međusobno različite vrednosti $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ i za međusobno različite vrednosti $z_1, \ldots, z_n$ neka je*

$$d = \min_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} |z_i - z_j|, \quad i \in I_n,$$

i

$$|\hat{z}_i - z_i| \le \lambda_n d, \quad i \in I_n. \tag{1.12}$$

Tada je

$$|\hat{z}_i - z_j| \ge (1 - \lambda_n)\, d, \quad i \in I_n,$$

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \ge (1 - 2\lambda_n)\, d, \quad i \in I_n$$

i

$$\left| \prod_{j \ne i} \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| \le \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right)^{n-1}.$$

Dokaz. Očigledno važi

$$|\hat{z}_i - z_j| \ge |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| \ge d - \lambda_n d \ge (1 - \lambda_n)\, d,$$

i

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \ge |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| \ge d - \lambda_n d - \lambda_n d \ge (1 - 2\lambda_n)\, d.$$

Iz

$$\prod_{j \ne i} \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} = \prod_{j \ne i} \left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right)$$

i

$$\left| \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| \le \frac{\lambda_n d}{(1 - 2\lambda_n)\, d} \le \frac{\lambda_n}{(1 - 2\lambda_n)}$$

direktno sledi

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j \ne i} \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| &= \prod_{j \ne i} \left| 1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| \le \prod_{j \ne i} \left(1 + \left| \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| \right) \\ &\le \prod_{j \ne i} \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right) \le \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right)^{n-1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3 Aproksimativne nule i konvergencija iterativnih postupaka

Jedan od najznačajnijih problema u rešavanju jednačine $f(z) = 0$ je određivanje takvih početnih uslova koji obezbeđuju sigurnu konvergenciju posmatranog numeričkog postupka. Tradicionalni prilaz ovom problemu zasniva se na asimptotskoj analizi konvergencije, koja često sadrži nepoznate parametre (konstante ili čak i tražene korene jednačine). Ovi rezultati su često samo od teoretskog značaja i daju samo kvalitativni opis osobina konvergencije. Zbog toga je potrebno obezbediti praktično primenjive uslove koji garantuju sigurnu i brzu konvergenciju. Ovi uslovi bi trebalo da zavise samo od dostupnih podataka, na primer, od poznatih karakteristika date funkcije f i početne aproksimacije.

Problem izbora početnih aproksimacija koji obezbeđuje sigurnu konvergenciju posmatranog postupka je veoma težak i ne može biti rešen na zadovoljavajući način u opštem slučaju, čak ni u slučaju jednostavnih funkcija kao što su algebarski polinomi. Teorija tačkaste ocene daje uslove i oblast konvergencije za rešavanje jednačine $f(z) = 0$ koristeći samo informacije o funkciji f i početne aproksimacije. Ova teorija se pojavila 1981. godine, kada je Smale [89] uveo pojam *aproksimativne nule* kao početne tačke koja obezbeđuje konvergenciju Newtonovog postupka. Posle toga su Kim, u svojoj disertaciji [39] i Smale, u radu [90], nezavisno jedno od drugog uveli pojam α–testa za Newtonov postupak.

Nadalje ćemo posmatrati samo slučaj jedne jednačine sa jednom nepoznatom, sa napomenom da ovi rezultati važe i za sisteme nelinearnih jednačina, pri čemu treba modul zameniti normom.

Newtonov postupak i njegove modifikacije se već dugo koriste za rešavanje jednačina i sistema jednačina. Ovaj postupak za rešavanje jednačine $f(z) = 0$ glasi

$$z_{m+1} = z_m - \frac{f(z_m)}{f'(z_m)}, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{1.13}$$

i startuje sa početnom vrednošću z_0. Ako je ova početna vrednost dobro izabrana, niz $\{z_m\}$ konvergira veoma brzo.

U opštem slučaju se ne zna mnogo o oblasti konvergencije i teško je odrediti uslove koji garantuju konvergenciju. Kada se radi o jednačini sa jednom nepoznatom, konvergenciju Newtonovog postupka proučavao je još Fourier [19]. Kasnije je Kantorovich [36] dao dokaz konvergencije Newtonovog postupka u Banachovim prostorima. Ovaj fundamentalni rezultat od teorijskog i praktičnog značaja pokrenuo je niz radova: Gregg i Tapia [25], Kantorovich i Akilov [37], Ostrowski [54], Rall [82], Traub i Wozniakowski [94]. Kantorovichev pristup dominira u literaturi iz ove oblasti i koristi pretpostavke koje treba da važe u svakoj tački domena konvergencije. Sa druge strane, Smale [89], [90] posmatra uslove samo u jednoj tački.

Prve računski proverljive rezultate koji se odnose na oblast konvergencije dobili su Shub i Smale [87], [88] i Smale [89]. Kasnije, Smale [90] predlaže drugu strategiju zasnovanu na podacima u tački da bi dokazao konvergenciju Newtonovog postupka u Banachovom prostoru.

Početna vrednost za koju posmatrani postupak brzo konvergira ka rešenju date jednačine naziva se *aproksimativna nula.* Ovaj pojam uveden je sledećom definicijom, videti [90].

Definicija 1.9 *Tačka $z_0 \in \mathbb{C}$ je aproksimativna nula funkcije f za postupak reda konvergencije k*

$$z_{m+1} = \phi_k(z_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

ako postoji pozitivan broj $q < 1$ takav da važi

$$\left|\frac{f(z_m)}{f'(z_m)}\right| \le q^{k^m - 1} \left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right|, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Neka je

$$\gamma_f(z) = \sup_{k>1} \left|\frac{f^{(k)}(z)}{k! f'(z)}\right|^{1/(k-1)}.$$

Funkcija

$$\alpha(z, f) = \left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right| \gamma_f(z)$$

ima važnu ulogu u formiranju testa za aproksimativne nule. U cilju utvrđivanja konvergencije Newtonovog postupka, Smaleova teorija [90] koristi informaciju o funkciji f u tački z_0 umesto uslova na celoj oblasti kao kod Kantorovicha [36]. Smaleov fundamentalni rezultat dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 1.10 *Ako je za z_0 ispunjen uslov*

$$\alpha(z_0, f) < \alpha_0 \cong 0.130707, \tag{1.14}$$

onda je Newtonov postupak (1.13) *dobro definisan i važi*

$$|z_{m+1} - z_m| \le q^{2^m - 1} |z_1 - z_0|, \quad m = 0, 1, \dots,$$

gde je

$$q = \frac{\alpha(z_0, f)}{\psi(\alpha(z_0, f))^2}, \quad \psi(r) = 2r^2 - 4r + 1.$$

Ocena iz teoreme 1.10 ukazuje na kvadratnu konvergenciju Newtonovog postupka. Naime, iz (1.13) sledi

$$|z_{m+1} - z_m| \le q^{2^m - 1} |z_1 - z_0|, \quad m = 0, 1, \dots,$$

što obezbeđuje sigurnu konvergenciju Newtonovog postupka sa početnom aproksimacijom z_0.

Kim [39] je u svom α-testu našla $\alpha_0 = 1/54$. Kasnije je poboljšala konstantu na $\alpha_0 = 1/48$, ali samo za jednu jednačinu sa jednom nepoznatom. Wang i Han [98] su dobili

$$\alpha_0 = 3 - 2\sqrt{2} \cong 0.171573 > 0.130707,$$

što je poboljšanje Smaleovog rezultata. Wang i Zhao [100] su dalje poboljšali ove rezultate pod slabijim pretpostavkama. Nova poboljšanja Smaleovih rezultata data su u [97].

Chen [11] je posmatrao konvergenciju uopštene klase kvadratno konvergentnih postupaka. U specijalnom slučaju dobio je sledeći rezultat za Newtonov postupak.

Teorema 1.11 *Ako za z_0 važi*

$$(\gamma_f(z_0)+1)\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right| < 0.1423,$$

onda je z_0 aproksimativna nula funkcije f za Newtonov postupak.

Smaleove rezultate [90] uopštio je Curry [12] za postupke višeg reda. On je takođe posmatrao i familiju postupaka Eulerovog tipa.

Dva postupka trećeg reda koji su od praktičnog značaja su postupak Euler–Chebysheva

$$z_{m+1} = z_m - \frac{f(z_m)}{f'(z_m)}\left(1 + \frac{f(z_m)f''(z_m)}{2\,(f'(z_m))^2}\right), \quad m = 0,1,\ldots \tag{1.15}$$

i postupak Halleya

$$z_{m+1} = z_m - \frac{f(z_m)}{f'(z_m)}\frac{1}{1 - \dfrac{f'(z_m)f''(z_m)}{2(f'(z_m))^2}}, \quad m = 0,1,\ldots. \tag{1.16}$$

Curry [12] je dokazao sledeće teoreme koje se odnose na aproksimativne nule i konvergenciju ova dva postupka.

Teorema 1.12 *Ako je $\alpha_0 < 0.11565$ i ako za z_0 važi $\alpha(z_0,f) < \alpha_0$, tada postupak Euler–Chebysheva* (1.15) *konvergira i važi*

$$\left|\frac{f(z_m)}{f'(z_m)}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{3^m-1}\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right|, \quad m = 0,1,\ldots.$$

Teorema 1.13 *Ako je $\alpha_0 < 0.11283$ i ako za z_0 važi $\alpha(z_0,f) < \alpha_0$, tada je z_0 aproksimativna nula Halleyevog postupka* (1.16) *i važi*

$$\left|\frac{f(z_m)}{f'(z_m)}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{3^m-1}\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right|, \quad m = 0,1,\ldots.$$

Posle Smaleovog pionirskog rada, pojavio se veliki broj rezultata iz ove oblasti od kojih navodimo [11], [12], [39], [40], [60], [61], [65], [70], [72], [98], [100], [109]. Većina ovih radova odnosi se na simultano određivanje nula polinoma.

U slučaju polinoma

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

koji je glavna tema našeg razmatranja, početni uslovi bi trebalo da budu funkcije koeficijenata polinoma, tj. vektora

$$a = [a_0, \dots, a_{n-1}]^\top,$$

njegovog stepena n i početnih aproksimacija, tj. vektora

$$z^{(0)} = \left[z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}\right]^\top.$$

Široka klasa ovih uslova može da se opiše nejednačinom

$$\phi(z^{(0)}, a, n) \le 0. \tag{1.17}$$

Poznato je da je konvergencija bilo kog postupka za nalaženje nula date funkcije strogo povezana sa rasporedom njenih nula. Ako su nule dobro razdvojene, većina postupaka pokazuje dobre konvergentne karakteristike. Nasuprot tome, ako su nule bliske, tj. ako se pojavljuju grozdovi nula, većina algoritama ili ne konvergira, ili zahteva veoma dugotrajno računanje. Na osnovu ovoga može se zaključiti da mera razdvojenosti nula treba da bude uzeta kao argument funkcije ϕ date u (1.17). Pošto su tačne nule $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ nepoznate, preostaje da se radi sa minimalnim rastojanjem između početnih aproksimacija

$$d^{(0)} = \min_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} \left| z_i^{(0)} - z_j^{(0)} \right|.$$

Bliskost početnih aproksimacija takođe ima uticaja na konvergenciju posmatranog postupka. Mera te bliskosti može se adekvatno izraziti preko funkcije

$$u(z) = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right|,$$

gde je $Q(z) \ne 0$ za z iz okoline nule ζ. Na primer, u slučaju da su nule posmatranog polinoma proste, svaki od sledeća tri izbora daje dobre rezultate:

$$Q(z) = P'(z), \quad Q(z) = \prod_{z \neq z_j} (z - z_j);$$

$$|Q(z)| = |P'(z)|^{-1} \sup_{k>1} \left| \frac{P^{(k)}(z)}{k!P'(z)} \right|^{1/(k-1)}.$$

Koristeći minimalno rastojanje između početnih aproksimacija i veličinu $u(z)$, umesto uslova (1.17) može se uzeti uslov

$$\varphi\left(u^{(0)}, d^{(0)}, n\right) \leq 0, \tag{1.18}$$

pri čemu $u^{(0)}$ zavisi od P, Q u početnoj tački $z^{(0)}$.

Na osnovu rezultata prikazanih u radovima [31], [32], [60], [61], [64], [65], [68], [72], [75], [99] i [100] sledi da se pogodni početni uslovi, koji obezbeđuju sigurnu konvergenciju iterativnih postupaka za simultano određivanje nula polinoma, mogu iskazati pomoću minimalnog rastojanja između početnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ i maksimalne vrednosti Weierstrassovih korekcija $w^{(0)} = \max \left| W_i^{(0)} \right|$ u tim tačkama u obliku

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}. \tag{1.19}$$

Napominjemo da je (1.19) specijalan slučaj uslova (1.18). Veličina c_n, koja zavisi samo od stepena n polinoma, naziva se n-faktor. Poslednjih nekoliko godina posvećuje se posebna pažnja povećanju n-faktora c_n, jer se na ovaj način oslabljuje uslov (1.19). Naime, malo c_n zahteva da vrednosti (po modulu) Weierstrassovih korekcija W_i budu male, što dalje znači da početne aproksimacije treba da budu dovoljno bliske.

1.4 Lokalizacija nula polinoma

Problem lokalizacije nula polinoma, ponekad tretiran kao „geometrija nula“, često je razmatran u literaturi (videti monografije [27] i [43] i literaturu citiranu u njima). Međutim, još uvek ne postoji algoritam visoke računarske efikasnosti, koji bi izolovao nule u dovoljno malim disjunktnim diskovima i odredio njihove višestrukosti. O tome svedoče i brojni radovi i doktorske disertacije na ovu temu objavljeni nedavno. Ovde je posebno važno napomenuti da se gotovo sva istražvanja obavljaju uz primenu računara, kako bi se brzo i tačno analizirali predloženi algoritmi.

Problem određivanja broja nula analitičke funkcije i njihovih višestrukosti može se rešavati i pomoću Cauchyjeve teoreme, kao što je urađeno u [27] i [47]. Naravno, ovi rezultati se tada mogu lako primeniti i na određivanje broja nula polinoma u posmatranoj oblasti.

Neka je D prosta povezana oblast u $\mathbb{C}$ i neka je $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na D, a Γ pozitivno orijentisana Jordanova kriva u D, koja ne prolazi ni kroz jednu nulu funkcije f. Označimo sa N broj nula funkcije f koje pripadaju unutrašnjosti krive Γ, brojeći pri tome svaku nulu onoliko puta kolika je njena višestrukost. Tada je na osnovu Cauchyjeve teoreme

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Ova formula dozvoljava izračunavanje broja N pomoću numeričke integracije. Dobre i loše strane ovakvog računanja broja N analizirane se u doktorskoj disertaciji Kravanje [41].

Integralna reprezentacija broja N je povezana sa principom argumenata (videti [27]), tj. broj N se može odrediti kao

$$N = \frac{1}{2\pi} \left[\arg f(z)\right]_{z\in\Gamma} .$$

U stvari, N je broj „obilazaka“ krive $f(\Gamma)$ oko koordinatnog početka i jednak je broju nula funkcije f. Ako se kriva Γ međusobno različitim tačkama $c_1, \ldots, c_m$ podeli na m segmenata, sa $c_{m+1} = c_1$, onda je

$$N = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \arg\left(\frac{f(c_{k+1})}{f(c_k)}\right),$$

ako je

$$\left|\left[\arg f(z)\right]_{z\in[c_k, c_{k+1}]}\right| \leq \pi, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.20}$$

Drugim rečima, ako važi (1.20), onda se broj nula N može izračunati jednostavnim računanjem vrednosti funkcije f u tačkama $c_1, \ldots, c_m$. Ovaj pristup je osnova Henricijevog algoritma razvijenog u [27]. Nažalost, uslov (1.20) nije lak za proveravanje za proizvoljnu analitičku finkciju f. Ako je izbor tačaka $c_1, \ldots, c_m$ neadekvatan, može se dobiti i pogrešno N. U tom smislu Henricijev algoritam nije pouzdan, a isto važi i za numeričku integraciju. U stvari, konačan broj vrednosti funkcije f ili njenih izvoda nije uvek dovoljan da se odrede sve nule funkcije f, čak i u slučaju kada je f polinom. Ovo je dokazao Ying u svojoj doktorskoj disertaciji [108]. Zbog toga je Kravanja razvio algoritam, baziran na teoriji formalnih ortogonalnih polinoma, kojim se računaju i aproksimacije nula i njihova višestrukost. Ovaj algoritam ne zahteva početne aproksimacije nula i daje tačne rezultate. Kravanja pri tome koristi rezultate Petkovića, [60], Petkovića, Carstensena i Trajkovića, [61], Petkovića i Hercega, [62] i Petkovića i Marjanovića, [74].

Prisustvo greške pri numeričkoj integraciji integrala

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

iskoristili su u [47] Muto, Suzuki i Suzuki za formiranje novog algoritma za izračunavanje broja N. Njihov algoritam se zasniva na analizi greške numeričke integracije i po pristupu je potpuno nov. Takođe je globalno konvergentan.

Sa razvojem programskih paketa za rešavanje jednačina pojavilo se i više programa koji uspešno rešavaju problem lokalizacije nula. U programskom paketu *Mathematica* 3.0 dat je paket `RootIsolation`, koji se zasniva na radu Akritasa [2]. Ovde je interesantno napomenuti da je to u stvari implementacija Vincentove „zaboravljene“ teoreme iz 1836. godine [95].

U [28] i [29] dat je postupak za lokalizaciju nula polinoma pomoću testa isključenja predloženog u [59], za koji je u programskom paketu *Mathematica* 3.0 napisan odgovarajući program.

Programski paket *Mathematica* 3.0 sadrži više funkcija i pakete koji se odnose na rad sa polinomima i mogu se koristiti za određivanje broja nula polinoma u zadatoj oblasti. Navodimo ih sa kratkim opisom.

Solve i NSolve

Funkcija

$$\texttt{Solve[p[x] == 0, x]}$$

rešava jednačinu $p(x) = 0$, pri čemu je u našem slučaju $p(x)$ polinom. Ovo je opšta funkcija koja se može koristiti i za rešavanje sistema jednačina uz eliminaciju promenljivih i slično. Međutim, zbog svoje opštosti ona ne daje precizne rezultate kada je stepen polinoma veliki (oko 20 i više). Tada se mogu javiti prilično neugodne greške, na koje `Solve` čak i ne upozorava. Funkcija `NSolve` bi trebalo da nalazi numeričko rešenje, međutim i za nju se pokazalo da nije pouzdana za polinome većeg stepena.

Algebra‘RootIsolation

Paket `RootIsolation` sadrži funkcije

- `CountRoots[p[x], {x, z1, z2}]`,
- `ComplexRootIntervals[p[x]]` i
- `RealRootIntervals[p[x]]`.

`CountRoots` broji nule polinoma $p(x) = 0$ u otvorenom kompleksnom intervalu, to jest pravougaoniku određenom dijagonalom (z_1, z_2), čije su stranice paralelne sa koordinatnim osama. `ComplexRootIntervals` i `RealRootIntervals` nalaze intervale koji sadrže nule polinoma $f(x)$. Međutim, iako su rešenja dobijena ovim paketom tačnija od onih dobijenih funkcijom `Solve`, polinom mora imati racionalne koeficijente. To znači da polinomi čiji koeficijenti nisu predstavljeni u vidu količnika celih brojeva ne mogu da se analiziraju. Doduše, problem realnih (tj. mašinskih) brojeva se može rešiti time što će se oni predstavljati u obliku razlomaka, ali to svakako nameće dosta dodatnog posla korisniku paketa.

FindRoot

Funkcija

$$\texttt{FindRoot[A == B, \{x, x0\}]}$$

ili

$$\texttt{FindRoot[A == B, \{x, x0, x1\}]}$$

traži numeričko rešenje jednačine $A = B$ po promenljivoj x i sa početnom aproksimacijom x_0, odnosno početnim aproksimacijama x_0 i x_1. Ona se može iskoristiti za nalaženje jedne nule polinoma sa visokom preciznošću. Koriste se Newtonov postupak ili neke modifikacije postupka sečice, u zavisnosti od toga da li je zadata jedna ili dve početne aproksimacije. Međutim, ovde se postavlja pitanje lokalizacije nula, kao i problem nagomilavanja greške ako se `FindRoot` koristi u kombinaciji sa deflacijom. Obično je `FindRoot` pogodan za interaktivni rad, kada se grafički lokalizuju nule. Ukoliko početne vrednosti nisu dobro odabrane, moguće je da postupak i divergira. To se može sprečiti korišćenjem funkcije oblika

$$\texttt{FindRoot[lhs == rhs, \{x, x0, xmin, xmax\}]},$$

gde se iterativni postupak prekida ukoliko aproksimacija izađe iz zadatog intervala $(xmin, xmax)$.

Izbor početnih oblasti koje sadrže nule polinoma usko je povezan sa uslovima za konvergenciju iterativnih postupaka. U ovom delu posmatraćemo početnu oblast koja zavisi samo od aproksimacija $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ prostih nula $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ posmatranog polinoma P i njegovih koeficijenata.

Neka je

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1.21}$$

monični polinom sa prostim nulama $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Pretpostavimo da su $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ dobre aproksimacije nula polinoma P. U radu [6] dokazana je sledeća teorema.

Teorema 1.14 *Ako su diskovi*

$$\{z_i^{(0)}; n|W_i^{(0)}|\}, \quad i \in I_n,$$

međusobno disjunktni, tada svaki od njih sadrži tačno jednu nulu polinoma P.

Znatno poboljšanje ovog rezultata dato je u sledeće dve teoreme dokazane u monografiji [69] autora M. Petkovića, Đ. Hercega i S. Ilić.

Teorema 1.15 *Neka je za fiksno* $n \geq 3$

$$c_n = \frac{1}{An+B}, \quad A \geq 2, \quad B \geq (2-A)n$$

i neka važi

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}. \tag{1.22}$$

Tada su diskovi

$$D_i := \left\{ z_i^{(0)} - W_i^{(0)}; \frac{n}{(A-1)n+B}|W_i^{(0)}| \right\}, \quad i \in I_n,$$

međusobno disjunktni i svaki od njih sadrži tačno jednu nulu polinoma P.

Teorema 1.16 *Pod pretpostavkama teoreme* 1.15 *svaki od diskova*

$$D_i^* := \left\{ z_i^{(0)}; \frac{An+B}{(A-1)n+B}|W_i^{(0)}| \right\}, \quad i \in I_n,$$

sadrži tačno jednu nulu polinoma P.

Iako svaki disk D_i^* ima veći poluprečnik od odgovarajućeg diska D_i iz teoreme 1.15, računanje sa diskom D_i^* je jednostavnije. Ova pogodnost će biti iskorišćena kasnije za ocenu razlike $z_i^{(0)} - \zeta_i$.

Iz teorema 1.15 i 1.16 vidimo da malo c_n ima za posledicu inkluzivne diskove malog poluprečnika, ali u tom slučaju uslov (1.22) zahteva da $w^{(0)}$, odnosno, veličine $\left|W_i^{(0)}\right|$, budu veoma male. Sada se postavlja pitanje da li je bolje povećati n-faktor c_n i oslabiti uslov (1.22), ili smanjiti

c_n i time dobiti manje inkluzivne diskove. Da bismo dali odgovor na ovo pitanje najpre napomenimo da su mali diskovi potrebni uglavnom da bi se pojednostavila teorijska analiza. U praksi iterativni postupci konvergiraju i kada se pođe od većih diskova kao domena konvergencije. Na kraju treba napomenuti da malo c_n može da bude uzrok teškoćama u realizaciji nejednakosti (1.22) jer malo $w^{(0)}$ zahteva veoma dobre početne aproksimacije nula. Dakle, izbor što je moguće većeg n-faktora c_n ima nesporne prednosti. Prema tome, može se zaključiti da je osnovni cilj odrediti što je moguće veći n-faktor c_n, čime se oslabljuju zahtevi koji se odnose na bliskost aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ i obezbeđuje sigurna konvergencija iterativnih postupaka odgovarajućim nulama.

1.5 Kompleksna kružna intervalna aritmetika

U poglavljima 3 i 4 koristimo kompleksnu kružnu intervalnu aritmetiku da bismo dobili neke ocene i granice. U ovom odeljku dajemo kratak pregled osnovnih osobina i operacija kružne kompleksne intervalne aritmetike. Za više detalja pogledati monografiju [3] Alefelda i Herzbergera.

Disk Z sa centrom $c = \operatorname{mid} Z$ i poluprečnikom $r = \operatorname{rad} Z$ označava se sa

$$Z = \{c; r\} = \{z : |z - c| \leq r\}.$$

Skup svih kompleksnih kružnih intervala (diskova) označava se sa $\mathbb{K}(\mathbb{C})$.

Ako je $0 \notin Z$ (to jest $|c| > r$), onda se inverzni disk diska Z dobija bilinearnom transformacijom

$$Z^{-1} = \left\{ \frac{\bar{c}}{|c|^2 - r^2}; \frac{r}{|c|^2 - r^2} \right\} = \left\{ \frac{1}{z} : z \in Z \right\}, \tag{1.23}$$

što znači da je inverzija diska tačna operacija. Isto važi i za sabiranje i oduzimanje diskova.

Ako je $Z_k = \{c_k; r_k\}$, $k = 1, 2$, onda je

$$Z_1 \pm Z_2 := \{c_1 \pm c_2; r_1 + r_2\} = \{z_1 \pm z_2 : z \in Z_1, z_2 \in Z_2\}.$$

U opštem slučaju važi

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k ; \sum_{k=1}^{n} r_k \right\}.$$

Proizvod $Z_1 Z_2$ je definisan kao u [23]:

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= \{c_1 c_2 ; |c_1| r_2 + |c_2| r_1 + r_1 r_2\} \\ &\supseteq \{z_1 z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Iz (1.24) se vidi da je u opštem slučaju proizvod diskova $Z_1 Z_2$ uvećani disk koji okružuje tačnu oblast.

Na osnovu prethodnog je

$$Z_1 : Z_2 = Z_1 Z_2^{-1} \quad (0 \notin Z_2).$$

Iz definicije (1.24) izvodi se formula

$$\prod_{k=1}^{n} \{c_k ; r_k\} = \left\{ \prod_{k=1}^{n} c_k ; \prod_{k=1}^{n} (|c_k| + r_k) - \prod_{k=1}^{n} |c_k| \right\}.$$

Za dva diska $Z_1 = \{c_1 ; r_1\}$ i $Z_2 = \{c_2 ; r_2\}$ važi

$$\begin{aligned} Z_1 &\subseteq Z_2 &\Leftrightarrow \quad & |c_1 - c_2| < r_2 - r_1, \\ Z_1 \cap Z_2 &= \emptyset &\Leftrightarrow \quad & |c_1 - c_2| > r_1 + r_2. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Apsolutna vrednost diska $Z = \{c ; r\}$ je definisana sa

$$|Z| := |\operatorname{mid} Z| + \operatorname{rad} Z = |c| + r.$$

Važna osobina intervalnog računa je *inkluzivna izotonost* koja čini osnovu za veliki broj primena intervalne aritmetike. Ova osobina važi za četiri osnovne računske operacije u kružnoj kompleksnoj intervalnoj aritmetici (videti [3]). Naime, ako A_k, $B_k \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$, $k = 1, 2$, i

$$A_k \subseteq B_k, \quad k = 1, 2,$$

tada

$$A_1 * A_2 \subseteq B_1 * B_2$$

važi za svaku operaciju $* \in \{+, -, \cdot, :\}$.

Neka je f kompleksna funkcija definisana na disku $Z \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$. Skup $\{f(z) : z \in Z\}$ nije disk u opštem slučaju. Da bi se i dalje radilo sa diskovima, uvodi se kružno proširenje F funkcije f, koje se definiše na podskupu $D \subseteq \mathbb{K}(\mathbb{C})$ tako da za sve $Z \in D$ važi:

$$F(Z) \supseteq \{f(z) : z \in Z\} \quad \text{(inkluzija)},$$

$$F(z) = f(z) \quad \text{(restrikcija)}.$$

Za kompleksno intervalno proširenje F se kaže da je inkluzivno izotono ako za svako $Z_1, Z_1 \in D$ važi implikacija

$$Z_1 \subseteq Z_1 \Rightarrow F(Z_1) \subseteq F(Z_2)$$

i

$$z \in Z \Rightarrow f(z) = F(z) \in F(Z).$$

Važi sledeća jednostavna, ali važna osobina:

$$|f(z)| \leq |\mathrm{mid}\, F(Z)| + \mathrm{rad}\, F(Z), \quad z \in Z. \tag{1.26}$$

Kvadratni koren diska $\{c; r\}$ u centriranoj formi, gde je $c = |c|e^{i\theta}$ i $|c| > r$, definisan je kao unija dva diska (videti [21]):

$$\sqrt{\{c; r\}} := \left\{\sqrt{|c|}e^{i\theta/2}; R\right\} \bigcup \left\{-\sqrt{|c|}e^{i\theta/2}; R\right\}, \tag{1.27}$$

gde je $R = \sqrt{|c|} - \sqrt{|c| - r}$.

2 Simultani postupci za nalaženje nula polinoma

2.1 Iterativni postupci

Problem nalaženja nula polinoma je izuzetno interesantan i veoma aktuelan. Kroz dugu istoriju matematike srećuse razni postupci za izračunavanje nula polinoma. Ako se ovde ubroji i rešavanje kvadratne jednačine, onda se može reći da se matematičari ovim problemom bave već oko 3500 godina. Stotinama godina ulagani su napori da se polinomne jednačine reše algebarskim postupcima, tj. da se rešenja izraze pomoću koeficijenata i konačnog broja algebarskih operacija sabiranja, množenja, deljenja i korenovanja, ili kako se to jednostavnije kaže, pomoću radikala. U mnogim specijalnim slučajevima dobijen je odgovor na postavljeno pitanje. Tako su dobijene formule za rešavanje kubne jednačine, poznate kao Cardanove formule, i formule za rešavanje polinomnih jednačina četvrtog stepena. Dalja istraživanja u ovom pravcu dovela su do značajnih rezultata Abela i Galoisa. Prvo je Abel 1828. godine dokazao da se opšta jednačina petog stepena ne može rešiti pomoću radikala, a dve godine kasnije Galois je dokazao da se opšta algebarska jednačina stepena većeg od četiri ne može rešiti pomoću radikala (rezultati su objavljeni tek 1846. godine, četrnaest godina posle njegove smrti).

Rezultati Galoisa i činjenica da su formule za rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena prilično komplikovane i praktično neprimenjive, ubrzali su numerički pristup rešavanju algebarskih jednačina. Kao najpogodniji pokazali su se postupci iterativne prirode.

Jedan od prvih iterativnih postupaka za rešavanje jednačina dao je Newton 1666. godine (formula (1.13)). Prvu sistematsku analizu Newtonovog postupka uradio je njegov savremenik Raphson 1690. godine. Zbog toga mnogi Newtonov postupak nazivaju i Newton–Raphsonov postupak. Značaj Newtonovog postupka je veoma veliki zbog njegove efikasnosti ali i jednostavnosti, tako da ovaj postupak ima veoma široku primenu u mnogim matematičkim disciplinama. Newtonov postupak ima red konvergencije dva, što je prvi dokazao J. Fourier [19].

Mnogi slavni matematičari bavili su se numeričkim rešavanjem jednačina i dali značajne doprinose u ovoj oblasti. Razvoj elektronskih računara uslovio je pojavu mnogih novih postupaka za rešavanje jednačina i omogućio brojne modifikacije već postojećih. Postoje brojne knjige i monografije koje se bave iterativnim postupcima kako za jednačine tako i za sisteme nelinearnih jednačina. Ovde navodimo samo najpoznatije, koje se mogu smatrati nezaobilaznim pri istraživanjima u ovoj oblasti: [52], [53], [86] i [93].

Raniji postupci za određivanje nula polinoma zasnivali su se na principu deflacije. Neka je određena jedna nula ζ polinoma $P(z)$ stepena n. Ostale nule tog polinoma su nule polinoma stepena $n-1$

$$P_{n-1}(z) = \frac{P(z)}{x-\zeta}.$$

Posle izračunavanja koeficijenata polinoma $P_{n-1}(z)$ može se izračunati ponovo jedna njegova nula, tj. druga nula polinoma $P(z)$, a zatim se formira novi polinom reda $n-2$ na već opisan način, itd. Kako se u praksi svi ovakvi postupci sprovode pomoću računara, do izražaja dolazi uticaj grešaka zaokrugljivanja u toku računanja kao i činjenica da umesto tačne vrednosti nule polinoma poznajemo samo njenu aproksimaciju. Naime, navedene greške, ma kako bile male, mogu imati za posledicu veoma velike greške pri izračunavanju koeficijenata sledećeg polinoma u postupku deflacije, te zbog toga već sledeće nule ne mogu biti dobro aproksimirane. Drugim rečima, postupak sukcesivne deflacije može biti numerički nestabilan.

U poslednjih tridesetak godina glavni pravci proučavanja i rada u oblasti iterativnih postupaka za rešavanje jednačina vezani su za intervalnu matematiku i implementaciju iterativnih postupaka na paralelnim računarima. Osnovni cilj pri tom je da se postigne kontrola greške pri svim izračunavanjima i da se dobiju oblasti koje sadrže tražene nule, tj. da se obezbedi inkluzija traženih nula, a sve to sa što manje utrošenog vremena. Više o intervalnoj matematici i intervalnim postupcima za rešavanje jednačina može se naći u monografijama [3], [48] i [58].

2.2 Relacija nepokretne tačke i simultani postupci

Teškoće koje se javljaju u postupku deflacije u mnogim situacijama mogu se prevazići simultanim izračunavanjem aproksimacija nula. Razvijeni su mnogi algoritmi zasnovani na ovom pristupu: postupak traženja i isključivanja, (Henrici [27]), postupci zasnovani na relacijama nepokretne tačke, (na primer, Börsch-Supan [4], [5], Ehrlich [15], Gargantini [21], [22], Henrici [27], Wang i Zheng [101]), globalno konvergentni algoritmi koji se primenjuju interaktivno, (Farmer i Loizou [18]), postupak tridijagonalnih matrica, (Brugnano i Trigiante, [7]) modifikacije postupaka za nalaženje jedne nule pogodne funkcije, (Kanno, Kjurkchiev i Yamamoto [35], Petković, Ilić i Tričković [73], Petković, Tričković i Herceg [79], Sakurai i Petković, [83]), postupak racionalnih aproksimacija, (Carstensen i Sakurai [10], Sakurai, Torii i Sugiura [84], [85]), kao i mnogi drugi; videti na primer, Farmer i Loizou [16], [17], Jenkins i Traub [34], Pasquini i Trigiante [56], [57], Wilf [105]. U nedavno publikovanom radu [55] Pan daje pregled postupaka za nalaženje nula polinoma i veliki broj referenci.

U ovom i sledećim poglavljima bavimo se uglavnom simultanim postupcima zasnovanim na relaciji nepokretne tačke. Ovaj prilaz daje algoritme koji veoma brzo konvergiraju u kompleksnoj aritmetici i intervalnoj kompleksnoj aritmetici.

Da bismo pojednostavili pisanje, kad god se posmatra iterativni postupak oblika

$$z_i^{(m+1)} = \Phi\left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right), \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

a nije važno da se naglasi konkretna vrednost za m, pisaćemo

$$\hat{z}_i = \Phi(z_1, \ldots, z_n), \quad i \in I_n.$$

Pri tom podrazumevamo da su z_i i $\hat{z}_i$ uzastopni članovi iterativnog niza $\left\{z_i^{(m)}\right\}$ i da z_i prethodi članu $\hat{z}_i$.

Neka su $z_1, \ldots, z_n$ aproksimacije nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ datog polinoma P stepena n. Razmatramo dve vrste relacije nepokretne tačke

$$\zeta_i = F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, \zeta_i, z_{i+1}, \ldots, z_n), \quad i \in I_n, \tag{2.1}$$

$$\zeta_i = F_2(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, z, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n), \quad i \in I_n. \tag{2.2}$$

Zamenom tačnih nula njihovim aproksimacijama i stavljajući $z = z_i$ u (2.1) i (2.2), dobijaju se opšti oblici iterativnih postupaka

$$\hat{z}_i = F_1(z_1, \ldots, z_n), \quad i \in I_n, \tag{2.3}$$

$$\hat{z}_i = F_2(z_1, \ldots, z_n), \quad i \in I_n, \tag{2.4}$$

u običnoj kompleksnoj aritmetici, gde je $\hat{z}_i$ nova aproksimacija nule ζ_i.

U nastavku ćemo prikazati nekoliko relacija nepokretne tačke koje su bile osnova za konstrukciju najčešće korišćenih iterativnih postupaka za simultano određivanje nula polinoma u kompleksnoj aritmetici. Detaljno izvođenje ovih relacija nepokretne tačke može se, između ostalog, naći u monografiji [59] autora M. Petkovića.

2.2.1 Weierstrassov postupak

Polazeći od faktorizacije polinoma P

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j) = (z - \zeta_i) \prod_{j \neq i} (z - \zeta_j),$$

dobijamo relaciju nepokretne tačke Weierstrassovog tipa:

$$\zeta_i = z - \frac{P(z)}{\prod_{j \neq i} (z - \zeta_j)}, \quad i \in I_n. \tag{2.5}$$

Na osnovu (2.2) i (2.4) iz (2.5) dobijamo Weierstrassov postupak

$$\hat{z}_i = z_i - W(z_i), \quad W(z) = \frac{P(z)}{\prod\limits_{j \neq i}(z - z_j)}, \quad i \in I_n. \tag{2.6}$$

Ovaj postupak se vrlo često koristi za simultano nalaženje nula polinoma zbog svojih dobrih osobina. Njegov red konvergencije je 2. Iterativni postupak (2.6) je otkrivan nekoliko puta i izvođen na različite načine, videti Börsch-Supan [4], Dochev [13], Durand, [14], Kerner [38], Prešić [81]. Međutim, malo je poznato da je iterativnu formulu (2.6) mnogo ranije, 1891. godine, koristio Weierstrass [103] u svom konstruktivnom dokazu osnovne teoreme algebre. Dochev [13] i Durand [14] su prvi praktično primenili iterativni postupak (2.6) za simultano izračunavanje aproksimacija nula polinoma.

Kerner [38] je 1966. godine dokazao da je iterativni postupak (2.6) ustvari Newtonov postupak

$$\hat{z} = z - F'(z)^{-1} F(z),$$

primenjen na sistem nelinearnih jednačina $F(z) = 0$, pri čemu je preslikavanje $F = (f_1, \ldots, f_n)$ definisano sa

$$f_k(z_1, \ldots, z_n) = (-1)^k \sigma_k(z_1, \ldots, z_n) - a_{n-k}. \tag{2.7}$$

Ovde σ_k označava k–ti elementarni simetrični polinom

$$\sigma_k = \sum_{1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k},$$

a a_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, su koeficijenti polinoma P. Budući da je Newtonov postupak kvadratno konvergentan, sledi direktno da je i iterativni postupak (2.6) kvadratno konvergentan. Dokaz o kvadratnoj konvergenciji može se naći u [13].

Kako se mnogo autora bavilo iterativnim postupkom (2.6), ovaj postupak je poznat pod razliitim imenima. Često se naziva Weierstrassov, Durand-Kernerov ili postupak Weierstass-Docheva. Mi ćemo ga u daljem radu zvati Weierstrassov postupak.

Mnogi autori su kroz mnogobrojne numeričke eksperimente došli do zaključka da postupak (2.6) konvergira za skoro sve početne međusobno različite aproksimacije $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$. Globalna konvergencija je dokazana za $n = 2$, (videti [24], Ilić, Petković i Herceg [33]) i za kubni polinom $P(z) = z^3$, ali u opštem slučaju za $n \geq 3$ dokaz još nije dat.

Napomenimo još da postupak (2.6) konvergira i u slučaju kada nule polinoma P nisu nužno različite, što je predmet razmatranja u radovima Carstensen [8], Fraigniaud [20], Kanno, Kjurkchiev i Yamamoto [35], Miyakoda [45], [46], Pasquini i Trigiante [56], Yamamoto, Furakane i Nogura [106], Yamamoto, Kanno i Atanassova [107].

2.2.2 Ehrlich-Aberthov postupak

Polazeći od identiteta

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} = \sum_{j \neq i}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} + \frac{1}{z - \zeta_i} \tag{2.8}$$

dobija se relacija nepokretne tačke Newtonovog tipa:

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{z - \zeta_j}}, \quad i \in I_n. \tag{2.9}$$

Smenjujući ζ_i aproksimacijom z_i i korišćenjem (2.2) i (2.4), iz (2.9) se dobija iterativni postupak reda konvergencije 3

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{2.10}$$

Postupak (2.10) obično se naziva Ehrlich-Aberthov postupak, iako ga je prvi predložio Maehly [42] 1954. godine. On ga je koristio za poboljšanje Newtonovog postupka, a Börsch–Supan [4] za određivanje aposteriorne ocene greške za nule polinoma. Ehrlich [15] je dokazao kubnu konvergenciju ovog postupka, dok je Aberth [1] dao značajan doprinos njegovoj praktičnoj realizaciji.

2.2.3 Ehrlich–Aberthov postupak sa Newtonovim korekcijama

Kao što smo videli, zamena $\zeta_j = z_j$ u relaciji nepokretne tačke (2.9) daje Ehrlich–Aberthov postupak trećeg reda. Neka je

$$N(z_j) = \frac{P(z_j)}{P'(z_j)}$$

Newtonova korekcija. Poboljšanje konvergencije iterativnog postupka (2.10) može se ostvariti korišćenjem aproksimacije $z_j - N(z_j)$ umesto ζ_j u (2.9), kao što je predložio Nourein u [51]. Na taj način dobijamo Ehrlich–Aberthov postupak sa Newtonovim korekcijama

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{1}{N(z_i)} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j + N(z_j)}}, \quad i \in I_n. \tag{2.11}$$

Iterativni postupak (2.11) ima red konvergencije 4. Očigledno je da se povećanje reda konvergencije postupka (2.11) u odnosu na (2.10) ostvaruje sa neznatnim povećanjem broja numeričkih operacija jer se u sumi koriste već izračunate vrednosti $N(z_1), \ldots, N(z_n)$. Odatle zaključujemo da iterativni postupak (2.11) ima vrlo visoku računarsku efikasnost (videti [59]).

2.2.4 Börsch-Supanov postupak

Neka su $z_1, \ldots, z_n$ međusobno različiti kompleksni brojevi i neka važi

$$\zeta_i \notin \{z_1, \ldots, z_n\}, \quad i \in I_n.$$

Polinom P se može izraziti preko svog Lagrangeovog interpolacionog polinoma

$$P(z) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W(z_j)}{z - z_j} + 1 \right) \prod_{j=1}^{n} (z - z_j). \tag{2.12}$$

Za $z = \zeta_i$, rešavanjem dobijene jednačine po $\zeta_i - z_i$ dobija se relacija nepokretne tačke Börsch-Supanovog tipa:

$$\zeta_i = z_i - \frac{W(z_i)}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W(z_j)}{\zeta_i - z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{2.13}$$

Na osnovu (2.1) i (2.3) iz (2.13) dobijamo iterativni postupak

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W(z_i)}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W(z_j)}{z_i - z_j}}, \quad i \in I_n, \tag{2.14}$$

reda konvergencije 3. Ovaj postupak predložio je Börsch–Supan [5] a kasnije su ga proučavali Nourein [49] i Werner [104].

2.2.5 Börsch–Supanov postupak sa Weierstrassovim korekcijama

Postupak Börsch-Supana (2.14) se može ubrzati na isti način kao i Ehrlich-Aberthov postupak (2.10), što je pokazano u radu [50]. Koristi se Weierstrassova korekcija $W_i(z_i)$ i zamena ζ_i sa $z_i - W_i(z_i)$ u relaciji nepokretne tačke (2.13). Na taj način dobija se Börsch–Supanov postupak sa Weierstrassovim korekcijama

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i(z_i)}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j(z_j)}{z_i - W_i(z_i) - z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{2.15}$$

Red konvergencije postupka (2.15) je 4, isto kao i kod postupka (2.11). Ovo ubrzanje postiže se uz samo malo dodatnog računanja, budući da se pod sumom koriste već izračunate Weierstrassove korekcije. To znači da je računska efikasnost postupka (2.15) veća nego kod postupka (2.14). Interesantno je pomenuti (videti [9]) da je (2.15) zapravo postupak sečice za Weierstrassovu funkciju

$$W_i(z) = \frac{P(z)}{\prod_{j \neq i} (z - z_j)}.$$

2.2.6 Tanabeov postupak

Ovaj postupak se može posmatrati i kao modifikacija Börsch–Supanovog postupka. Naime, pod pretpostavkom da je veličina

$$e_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_i(z_j)}{z_i - z_j}$$

po modulu dovoljno mala, koristeći razvoj

$$\frac{1}{1-e_i} = 1 + e_i + O\left(e_i^2\right)$$

iz (2.14) se dobija

$$\hat{z}_i = z_i - W_i(z_i)\left(1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_i(z_j)}{z_i - z_j}\right), \quad i \in I_n. \tag{2.16}$$

Ovaj postupak se naziva Tanabeov postupak, po Tanabeu [92], iako je bio poznat i ranije, videti [44] i [80].

U nedavno publikovanom radu [35], Kanno, Kjurkchiev i Yamamoto su pokazali da se Tanabeov postupak može dobiti primenom Chebyshevljevog postupka na sistem (2.7).

2.2.7 Postupak kvadratnog korena

Diferenciranjem se iz (2.8) dobija

$$-\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)' = \frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(z-\zeta_j\right)^2}, \tag{2.17}$$

odakle se izdvajanjem člana $(z-\zeta_i)^2$ dobija relacija nepokretne tačke kvadratno–korenskog tipa

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{\left(z-\zeta_j\right)^2}}}, \quad i \in I_n. \tag{2.18}$$

Kao i ranije, korišćenjem (2.2) i (2.4) iz (2.18) se dobija postupak kvadratnog korena

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \sum_{j\neq i} \dfrac{1}{(z_i - z_j)^2}}}, \quad i \in I_n, \quad (2.19)$$

koji ima red konvergencije 4. Ovaj postupak se može smatrati modifikacijom postupka Ostrowskog (videti [53]) trećeg reda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2}}}, \quad i \in I_n. \quad (2.20)$$

Dodatni član u obliku sume u (2.19) obezbeđuje simultano određivanje svih nula polinoma i, u isto vreme, povećava red konvergencije sa 3 na 4.

Zanimljivo je da je relacija nepokretne tačke (2.18) prvi put primenjena u [21] za konstrukciju simultanog intervalnog postupka korenskog tipa. Postupak kvadratnog korena (2.19) i njegove modifikacije su detaljno razrađeni u [76].

2.2.8 Wang-Zhengov postupak

Zamenom suma iz (2.8) i (2.17) u relaciji

$$\frac{P''(z)}{P(z)} \doteq \left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)^2 + \left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)'$$

dobija se Wang-Zhengova relacija nepokretne tačke (Halleyevog tipa):

$$\zeta_i = z - \frac{1}{f(z) - \dfrac{P(z)}{2P'(z)}\left[\left(\sum_{j\neq i}\dfrac{1}{z-\zeta_j}\right)^2 + \sum_{j\neq i}\dfrac{1}{(z-\zeta_j)^2}\right]}, \quad i \in I_n, \quad (2.21)$$

gde je $f(z) = \dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{P''(z)}{2P'(z)}$. Zapravo, relacija (2.21) je specijalan slučaj opšte relacije nepokretne tačke koju su Wang i Zheng izveli u radu [101]. Na isti način kao i ranije iz (2.21) se dobija postupak sa redom konvergencije 4:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left[\left(\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i - z_j}\right)^2 + \displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{1}{(z_i - z_j)^2}\right]}, \quad i \in I_n. \tag{2.22}$$

Neki modifikovani postupci koji ubrzavaju postupak (2.22) su razmatrani u [77].

Wang-Zhengov postupak se može posmatrati i kao postupak Halleyevog tipa, pošto se funkcija $f(z)$ javlja u Halleyevoj formuli

$$\hat{z} = z - \frac{1}{f(z)}.$$

2.2.9 Familija simultanih postupaka Hansen–Patrickovog tipa

Neka je f funkcija od z i neka je α fiksni parametar. Hansen i Patrick su u [26] izveli jednoparametarsku familiju iterativnih funkcija za nalaženje prostih nula funkcije f u obliku

$$\hat{z} = z - \frac{(\alpha+1)f(z)}{\alpha f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - (\alpha+1)f(z)f''(z)}}. \tag{2.23}$$

Ovde je z tekuća aproksimacija a $\hat{z}$ je nova aproksimacija tražene nule. Ova familija obuhvata razne postupke sa kubnom konvergencijom za konačno α i, za granični slučaj kada $\alpha \to \infty$, kvadratno konvergentni Newtonov postupak.

U nastavku ćemo zbog jednostavnijeg zapisivanja koristiti skraćenicu

$$G_{k,i} = \sum_{j\neq i} W_j (z_i - z_j)^{-k}, \quad k = 1, 2.$$

Primenom Hansen–Patrickove formule (2.23) na funkciju koja ima iste nule kao i polinom P, Petković, Ilić i Tričković su u [73] izveli sledeću familiju jednoparametarskih iterativnih postupaka za simultano nalaženje svih prostih nula polinoma P:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)\,W_i}{\alpha\,(1+G_{1,i}) \pm \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 2\,(\alpha+1)\,W_i G_{2,i}}}, \quad i \in I_n. \tag{2.24}$$

U tom radu je dokazano da je red konvergencije iterativnih postupaka iz familije (2.24) jednak 4 za svaki fiksan i konačan parametar α. Ova familija postupaka ostvaruje:

1) simultano nalaženje svih nula polinoma,

2) povećanje reda konvergencije sa 3 na 4.

Prikazujemo neke specijalne slučajeve iterativne formule (2.24):

- $\alpha = 0$, postupak tipa Ostrowskog

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{\sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 2W_i G_{2,i}}};$$

- $\alpha = 1$, postupak Eulerovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1+G_{1,i} \pm \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 4W_i G_{2,i}}};$$

- $\alpha = \dfrac{1}{n-1}$, postupak Laguerreovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nW_i}{1+G_{1,i} \pm \sqrt{((n-1)\,(1+G_{1,i}))^2 + 2n\,(n-1)\,W_i G_{2,i}}};$$

- $\alpha = -1$, postupak Halleyevog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i\,(1+G_{1,i})}{(1+G_{1,i})^2 + W_i G_{2,i}}; \tag{2.25}$$

- $\alpha \to \infty$, postupak Newtonovog tipa, tj. Börsch–Supanov postupak (uporediti sa (2.14))

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + G_{1,i}} = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}}. \tag{2.26}$$

U iterativnoj formuli (2.24) se ispred kvadratnog korena nalazi znak $\pm$. Ako su aproksimacije dovoljno blizu nulama polinoma P, jednostavna analiza slična onoj predstavljenoj u [79] pokazuje da treba uzeti znak $+$. Zbog toga (2.24) zapisujemo u obliku

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha + 1)\, W_i}{(1 + G_{1,i})\left(\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha + 1)t_i}\right)}, \quad i \in I_n \tag{2.27}$$

gde je

$$t_i = \frac{W_i G_{2,i}}{(1 + G_{1,i})^2}.$$

Kako je

$$\lim_{\alpha \to -1} \frac{\alpha + 1}{\left(\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha + 1)t_i}\right)} = \frac{1}{1 + t_i},$$

iz (2.27) dobijamo za $\alpha = -1$ simultani postupak Halleyevog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{(1 + G_{1,i})\,(1 + t_i)}, \quad i \in I_n. \tag{2.28}$$

Neka je

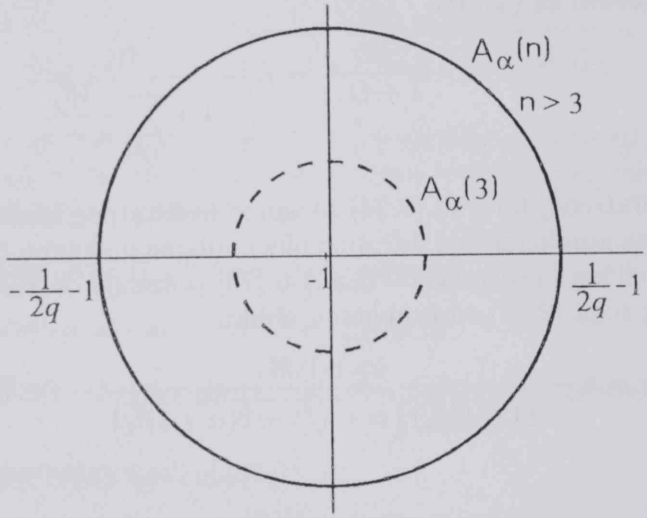
$$q = \frac{(n-1)\, c_n^2}{(1 - (n-1)\, c_n)^2}, \quad \lambda = \sqrt{1 - 2|\alpha + 1| q},$$

gde je q parametar koji zavisi od n i bira se tako da λ bude realan nenegativan broj.

Da bi parametar λ bio realan, α mora da pripada α–disku

$$A_n(\alpha) := \left\{-1; \frac{1}{2q}\right\} \supseteq \left\{-1; \frac{(1 - 2c_3)^2}{4c_3^2}\right\}, \quad n \geq 3.$$

α–disk $A_n(\alpha)$ je najmanji za $n = 3$, $A_3(\alpha) = \left\{ -1; \dfrac{(1-2c_3)^2}{4c_3^2} \right\}$.



Slika 2.1 Oblast $A_\alpha(n)$ parametra α

Analiza konvergencije data u [73] pokazuje da se za velike vrednosti parametra α dobijaju postupci čiji je red konvergencije samo 3. Numerički primeri pokazuju da izbor relativno velike vrednosti za α smanjuje efikasnost postupaka iz familije (2.27). Iz tog razloga gore navedeno ograničenje za α ne treba smatrati nepovoljnim (videti odeljak 3.5). U nastavku ćemo uvek smatrati da α iz (2.27) leži u disku $A_n(\alpha)$.

3 Sigurna konvergencija: princip korekcija

3.1 Konvergencija simultanih postupaka

U ovom i sledećem poglavlju posmatramo simultane postupke za određivanje aproksimacija prostih nula polinoma P sa stanovišta konvergencije i dovo;knih uslova za konvergenciju. Većina simultanih iterativnih postupaka može se zapisati u obliku

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - C\left(z^{(m)}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{3.1}$$

gde je

$$z^{(m)} = \left[z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right]^{\mathrm{T}}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

a preslikavanje $C(z)$ je za $z = [z_1, \ldots, z_n]^{\mathrm{T}}$ definisano sa

$$C(z) = (C_1(z), \ldots, C_n(z)), \quad C_i(z) = C_i(z_1, \ldots, z_n), \quad i \in I_n.$$

Očigledno (3.1) se može zapisati i na sledeći način

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - C_i\left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right), \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{3.2}$$

Polazeći od međusobno različitih aproksimacija $z_i^{(0)}$, $i \in I_n$, na ovaj način se formira n nizova aproksimacija $\left\{z_i^{(m)}\right\}$, $i \in I_n$, koji pod određenim uslovima konvergiraju traženim nulama, tj. važi

$$\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)} = \zeta_i, \quad i \in I_n.$$

U daljem izlaganju koristićemo skraćeno obeležavanje

$$C_i^{(m)} = C_i\left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right), \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

pri čemu ćemo izraz $C_i^{(m)}$ zvati iterativnom korekcijom.

U ovoj glavi posmatraju se iterativni postupci pod sledećim osnovnim pretpostavkama za korekcije C_i :

1. $C_i(z_1, \ldots, z_n) = \dfrac{P(z_i)}{F_i(z_1, \ldots, z_n)}, \quad i \in I_n,$
2. $F_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \neq 0, \quad i \in I_n,$
3. $F_i(z_1, \ldots, z_n), \quad i \in I_n$, je neprekidno u $\mathbb{C}^n$.

Ako se dokaže da postoje granične vrednosti

$$\zeta_i = \lim_{m\to\infty} z_i^{(m)}, \quad i \in I_n,$$

i da su međusobno različite, onda su $\zeta_i, i \in I_n$, proste nule polinoma P. Zaista, iz (3.2) za svako $i \in I_n$ imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m\to\infty}\left(z_i^{(m)} - z_i^{(m+1)}\right) = \lim_{m\to\infty} C_i\left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{P\left(z_i^{(m)}\right)}{F_i\left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right)} = \frac{P(\zeta_i)}{F_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}, \quad i \in I_n, \end{aligned}$$

odakle sledi $P(\zeta_i) = 0$, tj. ζ_i je nula polinoma P.

U analizi koja sledi značajnu ulogu ima funkcija g definisana u sledećoj lemi.

Lema 3.1 *Neka je*

$$s_m(t) = \sum_{i=0}^{m} t^i + t^m, \quad t \in (0,1), \; m = 1,2,\ldots .$$

Tada je $s_m(t) \le g(t)$, *gde je*

$$g(t) = \begin{cases} 1 + 2t, & 0 < t \le \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{1}{1-t}, & \dfrac{1}{2} < t < 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dokaz ove leme je veoma jednostavan, te ga izostavljamo.

Teorema 3.2 *Neka su zadovoljene osnovne pretpostavke* $1-3$ *i neka su date međusobno različite početne aproksimacije* $z_1^{(0)},\ldots,z_n^{(0)}$. *Ako za neko* $\gamma \in (0,1)$ *za iterativni postupak* (3.2) *važi*

$$(i) \quad \left|C_i^{(m+1)}\right| \le \gamma \left|C_i^{(m)}\right|, \qquad m = 0,1,\ldots,$$

$$(ii) \quad \left|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right| > g(\gamma)\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right), \quad i \ne j, \quad i,j \in I_n,$$

onda je taj iterativni postupak konvergentan.

Dokaz. Posmatrajmo diskove

$$D_i^{(m)} = \left\{z_i^{(m+1)}; \left|C_i^{(m)}\right|\right\}, \quad i \in I_n, \quad m = 0,1,\ldots,$$

pri čemu je $z_i^{(m+1)}$ određeno iterativnom formulom (3.2). Tada je

$$\begin{aligned} D_i^{(m)} &= \left\{z_i^{(m)} - C_i^{(m)}; \left|C_i^{(m)}\right|\right\} \\ &= \left\{z_i^{(m-1)} - C_i^{(m-1)} - C_i^{(m)}; \left|C_i^{(m)}\right|\right\} \\ &\;\;\vdots \\ &= \left\{z_i^{(0)} - C_i^{(0)} - C_i^{(1)} - \cdots - C_i^{(m)}; \left|C_i^{(m)}\right|\right\} \subset \left\{z_i^{(0)}; r_i^{(m)}\right\}, \end{aligned}$$

gde je

$$r_i^{(m)} = \left|C_i^{(0)}\right| + \cdots + \left|C_i^{(m-1)}\right| + 2\left|C_i^{(m)}\right|.$$

Na osnovu (i) sledi $\left|C_i^{(k)}\right| \le \gamma^k \left|C_i^{(0)}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots$, te je na osnovu leme 3.1

$$r_i^{(m)} \le \left|C_i^{(0)}\right| (1 + \gamma + \cdots + \gamma^m + \gamma^m) \le g(\gamma) \left|C_i^{(0)}\right|,$$

gde je $g(\gamma)$ definisano sa (3.3). Znači, za svako $i \in I_n$ važi

$$D_i^{(m)} \subset S_i := \left\{z_i^{(0)}; g(\gamma)\left|C_i^{(0)}\right|\right\},$$

tj. disk S_i sadrži sve diskove $D_i^{(m)}, m = 0, 1, \ldots$, sa centrima $z_i^{(m)}$.

Diskovi $S_i, i \in I_n$, su međusobno disjunktni, što sledi direktno iz (ii) i (1.25), jer je za svako $i \ne j$, $i, j \in I_n$,

$$\begin{aligned} |\operatorname{mid} S_i - \operatorname{mid} S_j| &= \left|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right| \\ &> g(\gamma)\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right) = \operatorname{rad} S_i + \operatorname{rad} S_j. \end{aligned}$$

To znači da polazeći od međusobno različitih $z_i^{(0)}$ dobijamo međusobno različite aproksimacije $z_i^{(m)}$ u m–toj iteraciji.

Iz (3.2) sledi direktno

$$\left|z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}\right| = \left|C_i^{(m)}\right| \le \gamma\left|C_i^{(m-1)}\right| \le \cdots \le \gamma^m \left|C_i^{(0)}\right|$$

i

$$\left|z_i^{(m+k)} - z_i^{(m)}\right| \le \frac{\gamma^m}{1-\gamma}\left|C_i^{(0)}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Kako je $\gamma < 1$, svaki od nizova $\left\{z_i^{(m)}\right\}$ je Košijev, dakle konvergentan. Diskovi S_i su međusobno disjunktni, pa su i granične vrednosti $\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)}, i \in I_n$, međusobno različite i svaka pripada odgovarajućem disku. Odavde, na osnovu pretpostavki 1–3 sledi da svaki niz $\left\{z_i^{(m)}\right\}$, $i \in I_n$, konvergira jednoj i samo jednoj nuli polinoma P. ∎

U nastavku ćemo primeniti teoremu 3.2 na neke konkretne postupke za simultano nalaženje svih nula polinoma. Pri tome ćemo smatrati da je iterativni postupak dobro definisan ako pod razmatranim početnim uslovom važi $F_i(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$. Posmatraćemo konvergenciju Weierstrassovog postupka (odeljak 3.2), Börsch-Supanovog postupka (odeljak 3.3), Tanabeovog postupka (odeljak 3.4) i familije simultanih postupaka Hansen-Patrickovog tipa (odeljak 3.5). U ovom poslednjem slučaja primenjen je originalan postupak za ocenu modula nekih kompleksnih veličina korišćenjem kompleksne kružne aritmertike. Za svaki od navedenih postupaka diskutovana je optimalna vrednost n-faktora c_n. Dobijene vrednosti za c_n su veće u odnosu na one date u okviru teorema za konvergenciju četiri pomenuta postupka analizirana u [60], [69], [71], [100], [109], što drugim rečima znači da su oslabljeni uslovi za konvergenciju ovih postupaka.

Pristup korekcije koristi početne uslove oblika

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)} \tag{3.4}$$

i sastoji se iz sledeća četiri koraka:

1. Sa pogodno izabranom konstantom c_n, za koju važi (3.4), određuju se konstante β_n, λ_n i δ_n tako da važi

$$\beta_n < 1, \qquad g(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n}, \tag{3.5}$$

$$\delta_n \leq 1 - 2\lambda_n. \tag{3.6}$$

2. Dokazuje se da važi

$$w^{(m+1)} \leq c_n d^{(m+1)}, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{3.7}$$

i

$$\left|W_i^{(m+1)}\right| \leq \delta_n \left|W_i^{(m)}\right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{3.8}$$

3. Dokazuje se da važi prvi uslov teoreme 3.2

$$\left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \beta_n \left|C_i^{(m)}\right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{3.9}$$

i

$$\frac{c_n}{\lambda_n}\left|C_i^{(0)}\right| \leq \left|W_i^{(0)}\right|, \quad i \in I_n. \tag{3.10}$$

4. Iz (3.10) dobijamo

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|C_i^{(0)}\right| \leq \frac{\left|W_i^{(0)}\right|}{c_n} \leq \frac{w^{(0)}}{c_n} \leq d^{(0)}.$$

Na osnovu toga i (3.5) vidimo da za svako $i \neq j, i, j \in I_n$, važi

$$\begin{aligned}\left|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right| \geq d^{(0)} \geq \frac{w^{(0)}}{c_n} &\geq \frac{1}{2\lambda_n}\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right) \\ &> g(\beta_n)\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right).\end{aligned}$$

Ova nejednakost pokazuje da su diskovi

$$S_i = \left\{z_i^{(0)}; g(\beta_n)\left|C_i^{(0)}\right|\right\}, \quad i \in I_n,$$

međusobno disjunktni. Time je dokazan i uslov (*ii*) teoreme 3.2. Sada, sa $\gamma = \beta_n$, konvergencija iterativnog postupka (3.2) sledi kao direktna posledica teoreme 3.2.

Kao što se vidi, za svaki konkretan postupak, Weierstrassov, Börsch-Supanov, Tanabeov i familiju simultanih postupaka Hansen-Patrickovog tipa, potrebno je dokazati da iz uslova (3.4) slede relacije (3.7)–(3.10) sa konstantama β_n, δ_n i λ_n za koje važe uslovi (3.5) i (3.6). Tada, imajući u vidu da je ispunjenost drugog uslova teoreme 3.2 posledica već ispunjenih uslova (prva tri koraka), sledi konvergencija postupka (3.2).

3.2 Weierstrassov postupak

Weierstrassov postupak je specijalan slučaj postupka (3.2) pri čemu je

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{j \neq i} (z_i - z_j), \quad i \in I_n.$$

Sa oznakom

$$W_i^{(m)} = \frac{P\left(z_i^{(m)}\right)}{\prod\limits_{j \neq i} \left(z_i^{(m)} - z_j^{(m)}\right)},$$

Weierstrassov postupak glasi

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - W_i^{(m)}, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{3.11}$$

Radi jednostavnosti, kada to ne dovodi do zabune, pisaćemo umesto $z_i^{(m+1)}$ kratko $\hat{z}_i$ i analogno za veličine koje se pojavljuju u $m+1$-voj iteraciji.

U odeljku 1.3 uveli smo sledeće veličine

$$d^{(0)} = \min_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \left| z_i^{(0)} - z_j^{(0)} \right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

i

$$w^{(0)} = \max_{1 \leq i \leq n} \left| W_i^{(0)} \right|, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Polazeći od ovih veličina i uslova

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}, \tag{3.12}$$

gde je c_n pogodno izabrana vrednost, moguće je dokazati konvergenciju Weierstrassovog postupka. Pri tom se dokaz svodi na primenu teoreme 3.2, a c_n se bira tako da je za svako $n \geq 3$ vrednost c_n što veća i da iz uslova (3.12) slede uslovi teoreme 3.2. Očigledno, pošto je $d^{(0)} > 0$ i $w^{(0)} \geq 0$, mora biti $c_n > 0$.

Teorema 3.3 *Neka za fiksno $n \geq 3$ važi*

$$c_n \in (0, 0.25), \tag{3.13}$$

$$\delta_n = \frac{(n-1)\,c_n}{1-c_n}\left(1 + \frac{c_n}{1-2c_n}\right)^{n-1} < 1 - 2c_n. \tag{3.14}$$

Ako su $z_1, \ldots, z_n$, međusobno različite vrednosti za koje važi (3.12), *onda je Weierstrassov postupak konvergentan.*

Dokaz. Tvrđenje ove teoreme sledi na osnovu teoreme 3.2, i dokazuje se po koracima navedenim u odeljku 3.1. U daljem radu, zbog jednostavnosti, izostavićemo indeks iteracije.

Neka je

$$\lambda_n = c_n.$$

Iz (3.11) sledi

$$|\hat{z}_i - z_i| = |W_i| \leq w \leq \lambda_n d, \tag{3.15}$$

a iz leme 1.8

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq (1 - \lambda_n)\, d \tag{3.16}$$

i

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq (1 - 2\lambda_n)\, d. \tag{3.17}$$

Kako je na osnovu Lagrangeove interpolacione formule (lema 1.4)

$$P(z) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{z - z_j} + 1\right) \prod_{j=1}^{n} (z - z_j), \tag{3.18}$$

iz (3.11) se dobija

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -1,$$

a zatim

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 = \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}.$$

Sada iz (3.18), za $z = \hat{z}_i$, sledi

$$P(\hat{z}_i) = (\hat{z}_i - z_i)\left(\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\right)\prod_{j\neq i}(\hat{z}_i - z_j).$$

Posle deljenja sa $\prod\limits_{j\neq i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)$ dobija se

$$\widehat{W}_i = \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)} = (\hat{z}_i - z_i)\left(\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\right)\prod_{j\neq i}\frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}. \tag{3.19}$$

Koristeći relacije (3.15), (3.16), (3.17) i lemu 1.8, dobijamo

$$\begin{aligned}\left|\widehat{W}_i\right| &\leq |\hat{z}_i - z_i|\sum_{j\neq i}\frac{|W_j|}{|\hat{z}_i - z_j|}\left|\prod_{j\neq i}\frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right| \\ &\leq |W_i|\,\frac{(n-1)\lambda_n}{1-\lambda_n}\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1} \\ &\leq \delta_n\,|W_i|,\end{aligned}$$

gde je

$$\delta_n = \frac{(n-1)\lambda_n}{1-\lambda_n}\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1}.$$

Iz (3.17) sledi

$$\hat{d} \geq (1 - 2\lambda_n)\,d,$$

pa je, zbog (3.14),

$$\left|\widehat{W}_i\right| \leq \delta_n\,|W_i| \leq \delta_n c_n d \leq \frac{\delta_n c_n \hat{d}}{1 - 2\lambda_n} \leq c_n \hat{d}.$$

Iz (3.17) sledi takođe da pod uslovom (3.12) važi

$$\left|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}\right| > 0 \quad i \neq j,\, i, j \in I_n.$$

To znači da je

$$\prod_{i \neq j} \left(z_i^{(m)} - z_j^{(m)} \right) \neq 0$$

u svakoj iteraciji, te je Weierstrassov postupak (3.11) dobro definisan.

Kako je $C_i = W_i$ imamo

$$\left| C_i^{(0)} \right| = \left| W_i^{(0)} \right|$$

i

$$\left| \widehat{C_i} \right| \leq \beta_n \left| C_i \right|$$

sa $\beta_n = \delta_n$.

Znači, dokazali smo da iz uslova teoreme slede uslovi (3.6)–(3.10) i da bismo mogli da primenimo teoremu 3.2 dovoljno je još dokazati da važi uslov (3.5).

Zbog $\beta_n = \delta_n$ iz uslova (3.14) sledi $\beta_n < 1$. Ako je $\beta_n \geq \frac{1}{2}$, onda uslov

$$g(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n} \tag{3.20}$$

postaje

$$\frac{1}{1 - \beta_n} < \frac{1}{2\lambda_n},$$

što je ekvivalentno sa uslovom (3.14). Ako je $\beta_n < \frac{1}{2}$, onda je uslov (3.20) ekvivalentan sa uslovom

$$1 + 2\beta_n < \frac{1}{2\lambda_n}.$$

Ovaj uslov će biti zadovoljen ako je

$$\beta_n < \frac{1 - 2\lambda_n}{4\lambda_n}.$$

Prema uslovu (3.13) imamo $\lambda_n \in (0, 0.25)$, a na osnovu toga

$$\beta_n < \frac{1}{2} < \frac{1-2\lambda_n}{4\lambda_n},$$

tj. važi i uslov (3.5).

Ovim smo dokazali da su ispunjeni svi uslovi teoreme 3.2, pa konvergencija Weierstrassovog postupka sledi na osnovu te teoreme. ∎

Pri formulisanju početnih uslova za konvergenciju simultanih postupaka posebno je važan izbor konstante c_n, koja se javlja u nejednakosti (3.12). Očigledno, početni uslovi su bolji, tj. lakše ih je ostvariti u praksi, ukoliko je konstanta c_n veća, jer se tada ne moraju birati vrlo bliske početne aproksimacije. Sledeća teorema daje „skoro" optimalne vrednosti za c_n. Pojam „skoro optimalna" konstanta za Weierstrassov postupak, kao i za ostale postupke, ima značenje koje je povezano sa graničnim procesom i preciznošću korišćene računarske aritmetike. Naime, optimalna vrednost bi se dobila kao rezultat graničnog procesa kada $n \to \infty$. Međutim, s obzirom da radimo sa aritmetikom konačne preciznosti, c_n se bira tako da bude nešto manje od optimalne vrednosti. Pri tom su traženi uslovi (u obliku nejednakosti) ispunjeni sa velikom tačnošću (na primer sa 5 ili 6 tačnih decimalnih mesta, videti komentar posle leme 3.4). Ovo smanjenje n-faktora c_n je zanemarljivo sa praktičnog stanovišta.

Lema 3.4 *Niz*

$$c_n = \frac{1}{\dfrac{7\,053}{4\,000}n + \dfrac{347\,577}{400\,000}}$$

zadovoljava uslove (3.13), (3.14).

Dokaz. Neka je

$$A = \frac{7\,053}{4\,000}, \quad B = \frac{347\,577}{400\,000}.$$

Tada je

$$c_n = \frac{1}{An + B}.$$

Očigledno je $c_n \in (0, 0.25)$ i

$$c_n \le c_3 = \frac{400\,000}{24\,63\,477} < 0.16238.$$

Time je dokazano (3.13). Neka je

$$\phi_n := \frac{\delta_n}{1 - 2c_n} = \frac{(n-1)}{1 - c_n} \frac{c_n}{1 - 2c_n} \left(1 + \frac{c_n}{1 - 2c_n}\right)^{n-1}. \tag{3.21}$$

Da bismo dokazali (3.14), potrebno je dokazati da je $\phi_n < 1$, $n \ge 3$.

Lako se dobija da je

$$\phi_n = \frac{1}{1 - c_n} \frac{(n-1)\,c_n}{1 - 2c_n} \left(\left(1 + \frac{c_n}{1 - 2c_n}\right)^{\frac{1 - 2c_n}{c_n}} \right)^{\frac{(n-1)\,c_n}{1 - 2c_n}}.$$

Iz

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - c_n} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)\,c_n}{1 - 2c_n} = \frac{1}{A}$$

i

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{c_n}{1 - 2c_n}\right)^{\frac{1 - 2c_n}{c_n}} = e,$$

dobijamo

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n = \alpha e^{\alpha} < 0.99998,$$

gde je

$$\alpha = \frac{1}{A} = \frac{4\,000}{7\,053}.$$

Niz ϕ_n, definisan sa (3.21), je strogo rastući za $n \ge 3$, pa je $\phi_n < 0.99998$ za $n \ge 3$. ■

Konstanta A je određena kao recipročna vrednost približnog rešenja jednačine $xe^x = 1$, za koje važi

$$xe^x < 1,$$

a c_n se može zapisati kao

$$c_n = \frac{1}{1.76325n + 0.8689425}.$$

Iz dokaza prethodne teoreme vidi se da konstanta A u izrazu za c_n ne može biti manja od recipročne vrednosti jedinstvenog pozitivnog rešenja jednačine $xe^x = 1$. Uzimanje približnog rešenja ove jednačine umesto tačnog rešenja (koje se ne može predstaviti u aritmetici konačne preciznosti) upravo dovodi do pojma „skoro optimalne" vrednosti, o čemu je već bilo reči.

Na osnovu teoreme 3.2 i prethodne teoreme, sledi teorema koja daje početne uslove koji garantuju sigurnu konvergenciju Weierstrassovog postupka.

Teorema 3.5 *Weierstrassov postupak je konvergentan pod uslovom*

$$w^{(0)} \le \frac{1}{\dfrac{7\,053}{4\,000}n + \dfrac{347\,577}{400\,000}} d^{(0)}.$$

Neki autori kao uslov za konvergenciju Weierstrassovog postupka posmatraju nejednakost

$$\sum_{j=1}^{n} \left| W_j^{(0)} \right| < \Omega_n d^{(0)}$$

umesto uslova (3.12). Očigledno, možemo uzeti

$$\Omega_n < n\, c_n,$$

jer (3.12) ima za posledicu

$$\left| W_j^{(0)} \right| \le c_n d^{(0)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Da bi se sa više slobode birale početne aproksimacije $z_i^{(0)}$ poželjno je da za svako fiksno n konstante c_n i Ω_n budu što je moguće veće.

Wang i Zhao [100], [109] dobili su

$$\Omega_n = \frac{n}{n-1}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \in (0.1716, 0.2574)\,, \qquad n \geq 3.$$

Isti autori su u [100] popravili gornji rezultat dobivši interval

$$\Omega_n \in (0.2044, 0.3241)\,, \qquad n \geq 3.$$

U radu [60] Petković je dobio opštu konstantu

$$\Omega_n = \frac{1}{3},$$

čime je poboljšao rezultate iz [100] i [109]. U [69] dobijen je još bolji interval za Ω_n,

$$\Omega_n \in (0.4286, 0.5)\,, \qquad n \geq 3,$$

a zatim, u radu [71] i konstanta

$$\Omega_n = \frac{1}{2}.$$

U našem slučaju je

$$\Omega_n \in \left(3c_3, \lim_{n\to\infty} nc_n\right) = \left(\frac{400\,000}{821\,159}, \frac{1}{A}\right) = \left(\frac{400\,000}{821\,159}, \frac{4\,000}{7\,053}\right),$$

odnosno

$$\Omega_n \in (0.48712, 0.56713)\,, \qquad n \geq 3, \tag{3.22}$$

što je bolje od svih prethodnih rezultata.

Za konvergenciju Weierstrassovog postupka dovoljno je odrediti n-faktor c_n za svako $n \geq 3$ tako da važe uslovi (3.13) i (3.14). Ako se c_n ne traži u obliku

$$c_n = \frac{1}{An + B},$$

mogu se za c_n dobiti i bolje vrednosti od navedenih. Naime, ako se c_n^* odredi kao aproksimacija rešenja jednačine

$$\delta_n = 1 - 2\lambda_n$$

za koju važi

$$\frac{(n-1)\,c_n}{1-c_n}\left(1+\frac{c_n}{1-2c_n}\right)^{n-1}<1-2c_n,$$

tj. (3.14), dobiće se najbolji n-faktor za ovakav način dokazivanja konvergencije Weierstrassovog postupka. U sledećoj tabeli prikazane su za $n=3,\ldots,10$ vrednosti za c_n^* i $\dfrac{1}{An+B}$.

n	c_n^*	$\dfrac{1}{An+B}$
3	0.171350	0.162372
4	0.130970	0.126231
5	0.106153	0.103250
6	0.089300	0.087348
7	0.077089	0.075690
8	0.067828	0.066778
9	0.060560	0.059743
10	0.054702	0.054049

Kako je za $n \geq 10$

$$\left|c_n^*-\frac{1}{An+B}\right|=\left|c_n^*-\frac{1}{\dfrac{7\,053}{4\,000}n+\dfrac{347\,577}{400\,000}}\right|\leq 6.53\cdot 10^{-4},$$

može se uzeti

$$c_n=\begin{cases} c_n^*, & 3\leq n\leq 10,\\[2mm] \dfrac{1}{An+B}, & n>10.\end{cases}$$

U ovom slučaju je

$$\Omega_n\in(0.51405,0.56713)\,,\quad n\geq 3,$$

što je bolje od (3.22).

3.3 Börsch-Supanov postupak

U odeljku 2.2.4 prikazan je Börsch-Supanov postupak (2.14), koji ne koristi izvode i ima kubnu konvergenciju. Ovaj postupak definisan je formulom

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{W_i^{(m)}}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^{(m)}}{z_i^{(m)} - z_j^{(m)}}}, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{3.23}$$

i ima oblik (3.2) sa korekcijom

$$C_i(z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_i)}{F_i(z_1, \ldots, z_n)}, \quad i \in I_n,$$

i

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right) \prod_{j \neq i} (z_i - z_j), \quad i \in I_n.$$

Interesantno je napomenuti da je ovaj postupak ekvivalentan sa Ehrlich-Aberthovim postupkom (2.10), što sledi na osnovu identiteta datog u lemi 1.5. U praksi, iterativni postupci (2.10) i (2.14) pokazuju različita svojstva.

Pre nego što dokažemo teoremu o konvergenciji ovog postupka, dokazaćemo dva pomoćna rezultata.

Lema 3.6 *Neka za $n \geq 3$ i međusobno različite vrednosti $z_1, \ldots, z_n$ važi*

$$c_n \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right) \tag{3.24}$$

i

$$w \leq c_n d. \tag{3.25}$$

Onda je

$$(i) \quad \frac{c_n}{\lambda_n} \leq \left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right| \leq 2 - \frac{c_n}{\lambda_n};$$

$$(ii) \quad |\hat{z}_i - z_i| \leq \frac{\lambda_n}{c_n}|W_i| \leq \lambda_n d;$$

$$(iii) \quad |\hat{z}_i - z_j| \geq (1 - \lambda_n)\, d;$$

$$(iv) \quad |\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq (1 - 2\lambda_n)\, d;$$

$$(v) \quad \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right| \leq \frac{c_n\,(n-1)\,\lambda_n}{1 - \lambda_n};$$

$$(vi) \quad \prod_{j \neq i} \left|\frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right| \leq \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right)^{n-1},$$

gde je

$$\lambda_n = \frac{c_n}{1 - (n-1)\, c_n}.$$

Dokaz. Lako se vidi da je

$$0 < 1 - 2\lambda_n < 1,$$

to jest $\lambda_n \in (0, 0.5)$. Iz (3.25) sledi

$$\left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right| \geq 1 - \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \geq 1 - \frac{(n-1)w}{d} \geq \frac{c_n}{\lambda_n}$$

i

$$\left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right| \leq 1 + \frac{(n-1)w}{d} \leq 1 + (n-1)\, c_n = 2 - \frac{c_n}{\lambda_n},$$

što dokazuje (i). Pomoću (i) i (3.23) dobijamo (ii):

$$|\hat{z}_i - z_i| = \frac{|W_i|}{\left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right|} \leq \frac{|W_i|}{1 - (n-1)\, c_n} \leq \lambda_n d.$$

Tvrđenja (iii), (iv) i (vi) slede direktno na osnovu leme 1.8.

Iz (3.23) sledi

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}$$

tako da je

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right| = \left|\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right| = \left|\sum_{j \neq i} \frac{W_j (z_i - \hat{z}_i)}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)}\right|.$$

Odatle je, koristeći (3.25), (ii) i (iii),

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right| &\leq |\hat{z}_i - z_i| \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|\hat{z}_i - z_j||z_i - z_j|} \\ &\leq \frac{(n-1)\, c_n \lambda_n d^2}{(1 - \lambda_n)\, d^2} = \frac{(n-1)\, \lambda_n c_n}{1 - \lambda_n}, \end{aligned}$$

što znači da je i (v) tačno. Time je lema u potpunosti dokazana. ■

Na osnovu rezultata prethodne leme, dokazuje se sledeća lema.

Lema 3.7 *Za fiksno $n \geq 3$ i međusobno različite vrednosti $z_1, \ldots, z_n$ neka važi*

$$w \leq c_n d,$$

$$c_n \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right), \tag{3.26}$$

i

$$\delta_n := \frac{(n-1)\, \lambda_n^2}{1 - \lambda_n} \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right)^{n-1} \leq 1 - 2\lambda_n. \tag{3.27}$$

Tada je

(*i*) $\left|\widehat{W_i}\right| \le \delta_n |W_i|$;

(*ii*) $\widehat{w} \le c_n \hat{d}$.

Dokaz. Sa $z = \hat{z}_i$, gde je $\hat{z}_i$ nova aproksimacija dobijena prema (3.23), na osnovu leme 1.4 sledi

$$P(\hat{z}_i) = (\hat{z}_i - z_i)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right)\prod_{j\neq i}(\hat{z}_i - z_j).$$

Posle deljenja sa $\prod_{j\neq i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)$, dobijamo

$$\widehat{W_i} = (\hat{z}_i - z_i)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right)\prod_{j\neq i}\frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\left|\widehat{W_i}\right| &= |\hat{z}_i - z_i|\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right|\prod_{j\neq i}\left|\frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right| \\ &\le |W_i|\frac{(n-1)\,\lambda_n^2}{1-\lambda_n}\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

dobijamo

$$\left|\widehat{W_i}\right| \le \delta_n |W_i|,$$

što znači da je (*i*) tačno. Na osnovu (*iv*) iz prethodne leme sledi

$$\hat{d} \ge d\,(1 - 2\lambda_n)\,,$$

što sa tvrđenjem (*i*) iste leme daje tvrđenje (*ii*), tj.

$$\left|\widehat{W_i}\right| \le \delta_n |W_i| \le \frac{\delta_n}{1-2\lambda_n} c_n \hat{d} \le c_n \hat{d}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.8 *Neka za fiksno $n \geq 3$ pored uslova iz leme 3.7 važi*

$$\beta_n := \left(\frac{2\lambda_n}{c_n} - 1\right)\delta_n < 1 \tag{3.28}$$

i

$$g(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n}. \tag{3.29}$$

Ako su $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ međusobno različite aproksimacije za koje važi

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}, \tag{3.30}$$

onda je Börsch-Supanov postupak (3.23) konvergentan.

Dokaz. Tvrđenje ove teoreme sledi na osnovu teoreme 3.2, pri čemu je

$$C_i^{(m)} = \frac{W_i^{(m)}}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j^{(m)}}{z_i^{(m)} - z_j^{(m)}}}, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Prema tome, dovoljno je dokazati da su ispunjeni uslovi (i) i (ii) teoreme 3.2. Sa obzirom da (3.30) važi, primenjujemo lemu 3.7 i indukcijom dokazujemo da za $m = 1, 2, \ldots$ važi

$$w^{(m+1)} \leq \delta_n w^{(m)} \leq \frac{\delta_n}{1 - 2\lambda_n} c_n d^{(m+1)} \leq c_n d^{(m+1)}.$$

Takođe se dokazuje da važi

$$\left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \beta_n \left|C_i^{(m)}\right|. \tag{3.31}$$

Polazeći od tvrđenja (i) leme 3.6, indukcijom se dokazuje da pod uslovom (3.30) važi

$$F_i\left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right) = \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^{(m)}}{z_i^{(m)} - z_j^{(m)}}\right) \prod_{j \neq i} \left(z_i^{(m)} - z_j^{(m)}\right) \neq 0$$

za svako $i \in I_n$ i $m = 0, 1, \ldots$. Prema tome Börcsh-Supanov postupak (3.23) je dobro definisan u svakoj iteraciji.

Koristeći tvrđenje (i) leme 3.7 nalazimo

$$|C_i| = \frac{|W_i|}{\left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right|} \leq |W_i| \frac{\lambda_n}{c_n}, \tag{3.32}$$

tako da za sledeći iterativni korak dobijamo

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{C_i}\right| &\leq \left|\widehat{W_i}\right| \frac{\lambda_n}{c_n} \leq \frac{\delta_n |W_i|}{1 - nc_n + c_n} \\
&= \frac{\lambda_n \delta_n}{c_n} \frac{|W_i|}{\left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right|} \left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right| \\
&= \frac{\lambda_n \delta_n}{c_n} |C_i| \left|1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right| \\
&\leq \frac{\lambda_n \delta_n}{c_n} \left(2 - \frac{c_n}{\lambda_n}\right) |C_i| \\
&= \delta_n \left(\frac{2\lambda_n}{c_n} - 1\right) = \beta_n |C_i| .
\end{aligned}$$

Kako je, prema pretpostavci, $\beta_n < 1$, to je ispunjen uslov (i) teoreme 3.2 sa $\gamma = \beta_n$, tj. važi

$$\left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \beta_n \left|C_i^{(m)}\right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Ostaje da se dokaže da su diskovi

$$S_i = \left\{z_i^{(0)}; g\left(\beta_n\right) \left|C_i^{(0)}\right|\right\}, \quad i \in I_n,$$

međusobno disjunktni. Iz (3.32) sledi

$$\frac{c_n}{\lambda_n} \left|C_i^{(0)}\right| \leq |W_i| ,$$

a zbog (3.30) dobijamo

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|C_i^{(0)}\right| \leq \frac{|W_i|}{c_n} \leq \frac{w^{(0)}}{c_n} \leq d^{(0)}.$$

Na osnovu toga i (3.29) vidimo da za svako $i \neq j$, $i, j \in I_n$, važi

$$\begin{aligned}\left|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right| &\geq d^{(0)} \geq \frac{w^{(0)}}{c_n} \geq \frac{1}{2\lambda_n}\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right) \\ &> g(\beta_n)\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right).\end{aligned}$$

Ova nejednakost pokazuje da su diskovi

$$S_i = \left\{z_i^{(0)}; g(\beta_n)\left|C_i^{(0)}\right|\right\}, \quad i \in I_n,$$

međusobno disjunktni. Time je dokazan i uslov (*ii*) teoreme 3.2, pa konvergencija Börsch-Supanovog postupka (3.23) sledi na osnovu te teoreme. ■

Izbor n-faktora c_n iz uslova (3.30) razmatra se u sledećoj lemi.

Lema 3.9 *Niz* $\{c_n\}$ *definisan pomoću*

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+4.3}, & n = 3,4, \\[2ex] \dfrac{1}{\frac{309}{200}n + 4.82}, & n \geq 5 \end{cases} \tag{3.33}$$

zadovoljava uslove teoreme 3.8.

Dokaz. Direktnom proverom zaključujemo da je $c_n \in \left(0, \dfrac{1}{n+1}\right)$, to jest uslov (3.26) važi. Za niz β_n važi

$$\beta_n \leq \beta_{33} = 0.912999\ldots, \quad n \geq 3, \tag{3.34}$$

te je $\beta_n < 1, n \geq 3$, tj. zadovoljen je uslov (3.28). Kako je

$$\delta_n \leq \delta_4 = 0.291233\ldots, \quad n \geq 4,$$

i

$$1 - 2\lambda_n \geq \frac{1 - 4c_3}{1 - 2c_3} \geq 0.622642\ldots, \quad n \geq 3,$$

vidimo da je i uslov (3.27) zadovoljen. Na sličan način dokazujemo da važi i (3.29). Prvo, važi

$$g(\beta_n) \leq g(\beta_{33}) = 11.494\ldots, \quad n \geq 3 \tag{3.35}$$

i

$$\frac{1}{2\lambda_n} \geq \frac{1 - 31c_{32}}{2c_{32}} = 11.63\ldots, \quad n \geq 32. \tag{3.36}$$

Za $3 \leq n \leq 31$ direktno se može proveriti da je uslov (3.29) zadovoljen. Na osnovu ove činjenice, kao i na osnovu (3.35) i (3.36), zaključujemo da je

$$g(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n}, \quad n = 3, 4, \ldots. \quad \blacksquare$$

Na osnovu leme 3.9 i teoreme 3.8 može se formulisati sledeća teorema.

Teorema 3.10 *Börsch-Supanov postupak* (3.23) *je konvergentan pod uslovom*

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)},$$

gde je c_n *dato sa* (3.33).

3.4 Tanabeov postupak

Kao što smo videli u odeljku 2.2.6, Tanabeov postupak je dat iterativnom formulom

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - W_i^{(m)} \left(1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j^{(m)}}{z_i^{(m)} - z_j^{(m)}}\right), \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{3.37}$$

i ima red konvergencije 3. Ovaj postupak je takođe oblika (3.2) sa korekcijom

$$C_i(z_1,\ldots,z_n)=\frac{P(z_i)}{F_i(z_1,\ldots,z_n)},\quad i\in I_n,$$

i

$$F_i(z_1,\ldots,z_n)=\frac{\displaystyle\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)}{1-\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{z_i-z_j}},\quad i\in I_n.$$

Ako su $z_1,\ldots,z_n$ međusobno različite vrednosti tada je $F_i(z_1,\ldots,z_n)\neq 0$. Primetimo da preslikavanja C_i i F_i zadovoljavaju osnovne pretpostavke $1-3$ date u odeljku 3.1.

Tanabeov postupak je veoma sličan postupku Börsch-Supana, koji je takođe kubno konvergentan. Čak se može i izvesti iz njega, kao što je pokazano u 2.2.6. Numerički eksperimenti pokazuju da se Börsch-Supanov postupak ponaša nešto bolje u pogledu konvergencije. Jedan od razloga za to je i činjenica da je Börsch-Supanov postupak izveden iz relacije nepokretne tačke, dok je Tanabeov postupak nastao njegovom modifikacijom. Zbog toga, kao što ćemo videti u ovom odeljku, Tanabeov postupak zahteva i nešto strože početne uslove u odnosu na Börsch-Supanov postupak.

Kao i kod prethodnih postupaka, pre nego što dokažemo teoremu o konvergenciji, dokazaćemo dva pomoćna rezultata. Veličine δ_n i λ_n definisane u sledećoj lemi koristićemo i u ostalim lemama i teoremama.

Lema 3.11 *Za fiksno $n\geq 3$ i međusobno različite vrednosti $z_1,\ldots,z_n$ neka važi*

$$c_n\in\left(0,\frac{1}{n-1}\right) \tag{3.38}$$

i

$$w\leq c_n d. \tag{3.39}$$

Onda je

$$(i) \quad 2 - \frac{\lambda_n}{c_n} \leq \left| 1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \right| \leq \frac{\lambda_n}{c_n};$$

$$(ii) \quad |\hat{z}_i - z_i| \leq \frac{\lambda_n}{c_n} |W_i| \leq \lambda_n d;$$

$$(iii) \quad |\hat{z}_i - z_j| \geq (1 - \lambda_n)\, d;$$

$$(iv) \quad |\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq (1 - 2\lambda_n)\, d;$$

$$(v) \quad \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \right| \leq \frac{\delta_n c_n}{\lambda_n};$$

$$(vi) \quad \prod_{j \neq i} \left| \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| \leq \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n} \right)^{n-1},$$

gde je

$$\lambda_n = (1 + (n-1)\, c_n)\, c_n,$$

i

$$\delta_n = \frac{(n-1)\, \lambda_n \,(\lambda_n c_n + \lambda_n - c_n)}{(1 - \lambda_n)\,(2c_n - \lambda_n)}.$$

Dokaz. Na osnovu (3.39) sledi

$$\left| 1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \right| \geq 1 - \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \geq 1 - \frac{(n-1)w}{d} \geq 2 - \frac{\lambda_n}{c_n}$$

i

$$\left| 1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \right| \leq 1 + \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \leq 1 + \frac{(n-1)w}{d} \leq \frac{\lambda_n}{c_n},$$

što dokazuje (i). Pomoću ove nejednakosti i (3.37) dobijamo (ii):

$$|\hat{z}_i - z_i| = |W_i| \left| 1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \right| \leq |W_i| \frac{\lambda_n}{c_n} \leq \lambda_n d.$$

Tvrđenja (iii), (iv) i (vi) slede direktno na osnovu leme 1.8.

Neka je

$$\sigma_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}.$$

Tada, na osnovu dokazanog i pretpostavke (3.38) sledi

$$(n-1)\, c_n < 1,$$

$$|\sigma_i| \leq (n-1)\, \frac{w}{d} \leq \frac{\lambda_n}{c_n} - 1,$$

$$\frac{|\sigma_i|}{1 - |\sigma_i|} \leq \frac{(n-1)\, c_n}{1 - (n-1)\, c_n} = \frac{\lambda_n - c_n}{2c_n - \lambda_n}$$

i

$$\frac{1}{|1 - \sigma_i|} \leq \frac{1}{1 - |\sigma_i|} \leq \frac{c_n}{2c_n - \lambda_n}.$$

Iz (3.37) nalazimo

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -\frac{1}{1 - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}}.$$

Neka je

$$T = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \right|.$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
T &= \left| \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \right| \\
&= \left| 1 - \frac{1}{1 - \sigma_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} \right| \\
&= \frac{1}{|1 - \sigma_i|} \left| \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} - \sigma_i \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} \right| \\
&\leq \frac{1}{1 - \sigma_i} \left| \sum_{j \neq i} \frac{W_j (z_i - \hat{z}_i)}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)} + \frac{|\sigma_i|}{1 - |\sigma_i|} \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} \right| \\
&\leq \frac{|z_i - \hat{z}_i|}{1 - \sigma_i} \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|\hat{z}_i - z_j|\,|z_i - z_j|} + \frac{|\sigma_i|}{1 - |\sigma_i|} \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|\hat{z}_i - z_j|} \\
&\leq \frac{\lambda_n}{2c_n - \lambda_n} c_n d \frac{(n-1)\, w}{(1 - \lambda_n)\, d^2} + \frac{\lambda_n - c_n}{2c_n - \lambda_n} \frac{(n-1)\, w}{(1 - \lambda_n)\, d} \\
&\leq \frac{\lambda_n c_n^2}{2c_n - \lambda_n} \frac{(n-1)}{(1 - \lambda_n)} + \frac{\lambda_n - c_n}{2c_n - \lambda_n} \frac{(n-1)\, c_n}{(1 - \lambda_n)} \\
&= \frac{(n-1)\, c_n\, (\lambda_n c_n + \lambda_n - c_n)}{(1 - \lambda_n)\,(2c_n - \lambda_n)} = \frac{\delta_n c_n}{\lambda_n}.
\end{aligned}
$$

Time je dokazano da je i tvrđenje (v) tačno. ■

Na osnovu rezultata prethodne leme, dokazuje se sledeća lema.

Lema 3.12 *Za fiksno $n \geq 3$ i međusobno različite vrednosti $z_1, \ldots, z_n$ neka važe uslovi* (3.38), (3.39) *i*

$$\delta_n \leq 1 - 2\lambda_n. \tag{3.40}$$

Tada je

(*i*) $\left|\widehat{W}_i\right| \leq \delta_n |W_i|$;

(*ii*) $\widehat{w} \leq c_n \hat{d}$.

Dokaz. Za $z = \hat{z}_i$, gde je $\hat{z}_i$ nova aproksimacija dobijena pomoću (3.37), iz leme 1.4, koja daje reprezentaciju polinoma P preko Lagrangeovog interpolacionog polinoma, sledi

$$P(\hat{z}_i) = (\hat{z}_i - z_i)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right) \prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - z_j).$$

Posle deljenja sa $\prod\limits_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)$ dobijamo

$$\widehat{W}_i = \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod\limits_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)} = (\hat{z}_i - z_i)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right) \prod_{j \neq i} \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{W}_i\right| &= |\hat{z}_i - z_i| \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right| \prod_{j \neq i} \left|\frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right| \\
&\leq |W_i| \frac{\lambda_n}{c_n} \frac{\delta_n c_n}{\lambda_n} \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

dobijamo

$$\left|\widehat{W}_i\right| \leq \delta_n |W_i|. \tag{3.41}$$

Na osnovu tvrđenja (*iv*) iz prethodne leme sledi

$$\hat{d} \geq (1 - 2\lambda_n)\, d,$$

što sa tvrđenjem (*i*) iste leme daje konačno

$$\left|\widehat{W_i}\right| \leq \delta_n |W_i| \leq \frac{\delta_n}{1 - 2\lambda_n} c_n \hat{d} \leq c_n \hat{d}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.13 *Neka za fiksno $n \geq 3$ važe uslovi iz prethodne dve leme i neka je, pored toga,*

$$\beta_n := \frac{\delta_n \lambda_n}{2c_n - \lambda_n} < 1 \tag{3.42}$$

i

$$g(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n}. \tag{3.43}$$

Ako su $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ međusobno različite aproksimacije za koje važi

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}, \tag{3.44}$$

onda je Tanabeov postupak (3.37) *konvergentan.*

Dokaz. Tvrđenje ove teoreme sledi na osnovu teoreme 3.2 pri čemu je

$$C_i^{(m)} = W_i^{(m)} \left(1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j^{(m)}}{z_i^{(m)} - z_j^{(m)}}\right), \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Prema tome, dovoljno je dokazati da su ispunjeni uslovi (*i*) i (*ii*) teoreme 3.2. Na osnovu leme 3.11, koja važi sa obzirom na uslove (3.38) i (3.39), indukcijom se dokazuje da za $m = 1, 2, \ldots$ važi

$$w^{(m+1)} \leq \beta_n w^{(m)} \leq \frac{\beta_n}{1 - 2c_n} c_n d^{(m+1)} \leq c_n d^{(m+1)}.$$

Indukcijom se takođe dokazuje nejednakost

$$\left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \beta_n \left|C_i^{(m)}\right|. \tag{3.45}$$

Dalje, s obzirom na tvrđenje (*iv*) leme 3.11, pod uslovom (3.44) važi

$$F_i(z_1^{(m)},\dots,z_n^{(m)})=\frac{\prod\limits_{j\neq i}(z_i^{(m)}-z_j^{(m)})}{1-\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{W_j^{(m)}}{z_i^{(m)}-z_j^{(m)}}}\neq 0,$$

za svako $i\in I_n$ i $m=0,1,\dots$, što znači da je Tanabeov postupak (3.37) definisan u svakoj iteraciji.

Na osnovu (*ii*) leme 3.11 imamo, izostavljajući indeks iteracije,

$$|C_i|=|\hat z_i-z_i|=\left|W_i\left(1-\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{z_i-z_j}\right)\right|\le |W_i|\,\frac{\lambda_n}{c_n},\tag{3.46}$$

odakle je

$$\begin{aligned}\left|\widehat{C_i}\right| &\le \left|\widehat{W_i}\right|\frac{\lambda_n}{c_n}\le \delta_n|W_i|\,\frac{\lambda_n}{c_n}=\frac{\delta_n\lambda_n}{c_n}\,\frac{\left|W_i\left(1-\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{W_j}{z_i-z_j}\right)\right|}{\left|1-\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{W_j}{z_i-z_j}\right|}\\ &\le \frac{\delta_n\lambda_n}{c_n}\,\frac{c_n}{2c_n-\lambda_n}\,|C_i|=\beta_n\,|C_i|\,.\end{aligned}$$

Kako je, na osnovu pretpostavke, $\beta_n<1$, to je ispunjen uslov (*i*) teoreme 3.2 sa $\gamma=\beta_n$, tj. važi

$$\left|C_i^{(m+1)}\right|\le\beta_n\left|C_i^{(m)}\right|,\quad i\in I_n,\quad m=0,1,\dots.$$

Ostaje da se dokaže da su diskovi

$$S_i=\left\{z_i^{(0)};g(\beta_n)\left|C_i^{(0)}\right|\right\},\quad i\in I_n,$$

međusobno disjunktni. Iz (3.46) dobijamo

$$\frac{c_n}{\lambda_n}\left|C_i^{(0)}\right|\le|W_i|,$$

a zbog (3.44) sledi

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|C_i^{(0)}\right| \leq \frac{|W_i|}{c_n} \leq \frac{w^{(0)}}{c_n} \leq d^{(0)}.$$

Na osnovu toga i nejednakosti (3.43) vidimo da je za svako $i \neq j,\ i,j \in I_n$,

$$\begin{aligned}\left|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right| &\geq d^{(0)} \geq \frac{w^{(0)}}{c_n} \geq \frac{1}{2\lambda_n}\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right) \\ &> g(\beta_n)\left(\left|C_i^{(0)}\right| + \left|C_j^{(0)}\right|\right).\end{aligned}$$

Ova nejednakost pokazuje da su diskovi

$$S_i = \left\{z_i^{(0)}; g(\beta_n)\left|C_i^{(0)}\right|\right\}, \quad i \in I_n,$$

međusobno disjunktni. Time je dokazan i uslov (*ii*) teoreme 3.2, pa konvergencija Tanabeovog postupka sledi na osnovu te teoreme. ■

Teorema 3.14 *Neka je za fiksno* $n \geq 3$

$$c_n = \frac{1}{2.7481n}.$$

Ako su $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ *međusobno različite aproksimacije za koje važi*

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)},$$

onda je Tanabeov postupak (3.37) *konvergentan.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme sledi na osnovu teoreme 3.13. Dokazaćemo da su ispunjeni uslovi te teoreme, tj. da važe uslovi (3.38), (3.40), (3.42) i (3.43). Neka je $A = 2.7481$. Tada je

$$c_n = \frac{1}{An}.$$

Očigledno je $c_n \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$, tj. važi (3.38). Niz δ_n je monotono rastući i za $n \geq 3$ važi

$$0.27 < \delta_3 \leq \delta_n < \lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{A+1}{A^2(A-1)} e^{\alpha} < 0.4664,$$

gde je

$$\alpha = \frac{A+1}{A^2}.$$

Kako je za $n \geq 3$

$$0.64 < 1 - 2\left(1 + (n-1)\,c_3\right)c_3 \leq 1 - 2\lambda_n,$$

sledi da je uslov (3.40) ispunjen. Niz β_n iz uslova (3.42) je monotono rastući i važi

$$0.4469 < \beta_3 \leq \beta_n < \lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{(A+1)^2}{A^2\,(A-1)^2}e^{\alpha}.$$

Kako je A određeno kao približno rešenje jednačine

$$\frac{(A+1)^2}{A^2\,(A-1)^2}e^{\alpha} = 1 \tag{3.47}$$

za koje važi

$$\frac{(A+1)^2}{A^2\,(A-1)^2}e^{\alpha} < 0.999922 < 1,$$

vidimo da je i uslov (3.42) ispunjen. Poslednja vrlo stroga nejednakost (razlika je na petoj decimali) govori da je reč o „skoro optimalnoj“ konstani A.

Niz

$$g\left(\beta_n\right) - \frac{1}{2\lambda_n}$$

je strogo opadajući za $n \geq 3$ i kako je

$$g\left(\beta_3\right) - \frac{1}{2c_3} = -1.509\ldots < 0,$$

relacija (3.43) sledi direktno. Sada na osnovu teoreme 3.13 sledi konvergencija Tanabeovog postupka. ■

Iz dokaza prethodne teoreme vidi se da konstanta A u izrazu za c_n ne može biti manja od jedinstvenog pozitivnog rešenja jednačine (3.47).

3.5 Familija simultanih postupaka

U ovom odeljku primenićemo teoremu 3.2 i početni uslov oblika $w \le c_n d$ da bi utvrdili pod kojim uslovima konvergira jednoparametarska familija (2.24), izvedena iz Hansen-Patrickove familije (odeljak 2.2.9). Kao i ranije koristićemo oznake:

$$G_{1,i} = \sum_{j \ne i} \frac{W_j}{z_i - z_j}, \quad G_{2,i} = \sum_{j \ne i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2}, \quad t_i = \frac{W_i G_{2,i}}{(1 + G_{1,i})^2}.$$

Imajući u vidu da u našoj analizi konvergencije radimo sa aproksimacijama koje su veoma blizu nulama polinoma, saglasno diskusiji u odeljku 2.2.9 uzimamo znak + u (2.23). Na taj način dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha + 1) W_i}{(1 + G_{1,i})\left(\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha + 1) t_i}\right)}, \quad i \in I_n. \tag{3.48}$$

Ako je $\alpha = -1$, tada iz (3.48) dobijamo postupak Halleyevog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{(1 + G_{1,i})(1 + t_i)}, \tag{3.49}$$

koji je takođe prikazan u odeljku 2.2.9. U daljem radu koristićemo oznake

$$q = \frac{(n-1)\, c_n^2}{(1 - (n-1)\, c_n)^2}, \quad \lambda = \sqrt{1 - 2|\alpha + 1| q}.$$

Da bi parametar λ bio realan, uzimamo α iz α-*diska* definisanog sa

$$A_n(\alpha) := \left\{-1; \frac{1}{2q}\right\} \supseteq \left\{-1, \frac{2c_3^2}{(1 - 2c_3)^2}\right\}$$

sa centrom u tački $z = -1$ (videti odeljak 2.2.9 i sliku 2.1).

Pre glavnog rezultata dokazaćemo sledeće dve leme.

Lema 3.15 *Za fiksno $n \ge 3$ neka su $z_1, \ldots, z_n$ međusobno različite aproksimacije nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P i neka su $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ nove aproksi-*

macije dobijene pomoću familije (3.48). *Ako važi*

$$w \le c_n d, \quad c_n \in \left(0, \frac{2}{5\,(n-1)}\right), \tag{3.50}$$

tada za $i, j \in I_n$ *dobijamo*

(i) $\displaystyle \frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n} \le |1 + G_{1,i}| \le 2 - \frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n};$

(ii) $\displaystyle |G_{2,i}| \le \frac{(n-1)w}{d^2};$

(iii) $|t_i| \le q;$

(iv) $\displaystyle \sqrt{1 + 2(\alpha+1)t_i} \in \left\{1; \frac{2|\alpha+1|q}{1+\lambda}\right\};$

(v) $\displaystyle \frac{\alpha+1}{(1+G_{1,i})\left(\alpha + \sqrt{1+2(\alpha+1)t_i}\right)} \in \frac{1}{1+G_{1,i}}\left\{1; \frac{2q}{1+\lambda-2q}\right\};$

(vi) $\displaystyle |\hat{z}_i - z_i| \le \frac{\lambda_n}{c_n}|W_i| \le \lambda_n d,$

gde je

$$\lambda_n = \frac{c_n}{(1-2q)\,(1-(n-1)\,c_n)}.$$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da je $q \in (0, 2/9)$. Kako je q rastuća funkcija po c_n i važi (3.50), dobija se

$$q < \frac{4}{9\,(n-1)} \le \frac{2}{9}, \quad n \ge 3.$$

Polazeći od (3.50) i definicije minimalnog rastojanja d, nalazimo

$$\sum_{j \ne i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \le \frac{(n-1)w}{d}.$$

Odatle izvodimo sledeće procene

$$
\begin{aligned}
|1+G_{1,i}| &\geq 1-\sum_{j\neq i}\frac{|W_j|}{|z_i-z_j|}\geq 1-\frac{(n-1)w}{d}\geq 1-(n-1)\,c_n,\\
|1+G_{1,i}| &\leq 1+\sum_{j\neq i}\frac{|W_j|}{|z_i-z_j|}\leq 1+\frac{(n-1)w}{d}\leq 1+(n-1)\,c_n,\\
|G_{2,i}| &\leq \sum_{j\neq i}\frac{|W_j|}{|z_i-z_j|^2}\leq\frac{(n-1)w}{d^2}.
\end{aligned}
$$

Ovim su tvrđenja (i) i (ii) dokazana, jer je

$$
\begin{aligned}
1-(n-1)\,c_n &= \frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n}, \qquad (3.51)\\
1+(n-1)\,c_n &= 2-\frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n}.
\end{aligned}
$$

Na osnovu toga i (3.50) dokazujemo (iii):

$$
|t_i|=\left|\frac{W_iG_{2,i}}{(1+G_{1,i})^2}\right|\leq\frac{(n-1)w^2}{\left(1-(n-1)\,c_n\right)^2d^2}\leq\frac{(n-1)c_n^2}{\left(1-(n-1)\,c_n\right)^2}=q.
$$

Odavde zaključujemo da t_i pripada disku $T=\{0;q\}$. Na osnovu (1.27) za kvadratni koren diska, uzimajući skup glavnih vrednosti sa centrom u $\sqrt{|c|}e^{i\theta/2}$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+2(\alpha+1)t_i} &\in \sqrt{1+2|\alpha+1|T}=\sqrt{\{1;2|\alpha+1|q\}}\\
&= \{1;1-\lambda\}=\left\{1;\frac{2|\alpha+1|q}{1+\lambda}\right\},
\end{aligned}
$$

što dokazuje (iv).

Neka je $\alpha\neq -1$, što znači da radimo sa kvadratnim korenom u (3.48). Na osnovu (iv), primenjujući centriranu inverziju diska (1.23), dobijamo

$$
\frac{\alpha+1}{(1+G_{1,i})\left(\alpha+\sqrt{1+2(\alpha+1)t_i}\right)}\in\frac{\alpha+1}{(1+G_{1,i})\left(\alpha+\left\{1;\dfrac{2|\alpha+1|q}{1+\lambda}\right\}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+G_{1,i})\left\{1; \dfrac{2q}{1+\lambda}\right\}} \\
&\subset \frac{1}{1+G_{1,i}}\left\{1; \frac{2q}{1+\lambda-2q}\right\}.
\end{aligned}
$$

Na ovaj način je dokazano (v). Koristeći poslednju inkluziju, iz (3.48) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_i - z_i &= -C_i = -\frac{(\alpha+1)W_i}{(1+G_{1,i})\left(\alpha+\sqrt{1+2(\alpha+1)t_i}\right)} \\
&\in -\frac{W_i}{1+G_{1,i}}\left\{1; \frac{2q}{1+\lambda-2q}\right\},
\end{aligned}
$$

gde je C_i iterativna korekcija iz (3.48). Na osnovu (1.26), iz poslednjeg izraza sledi

$$
\begin{aligned}
|\hat{z}_i - z_i| &= |C_i| \le \left|\frac{W_i}{1+G_{1,i}}\right|\left(1+\frac{2q}{1+\lambda-2q}\right) \\
&= \left|\frac{W_i}{1+G_{1,i}}\right|\left(1-\frac{2q}{1+\lambda}\right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Koristeći nejednakosti

$$
|1+G_{1,i}| \ge 1-(n-1)\,c_n, \qquad \frac{2q}{1+\lambda} < 2q
$$

i (3.50), iz (3.52) i (3.51) sledi

$$
\begin{aligned}
|\hat{z}_i - z_i| &= |C_i| \le \frac{1}{1-(n-1)\,c_n}\,|W_i|\,(1-2q)^{-1} \\
&\le \frac{c_n}{(1-(n-1)\,c_n)\,(1-2q)}d = \lambda_n d.
\end{aligned}
$$

Na taj način je dokazano i (vi).

U slučaju $\alpha = -1$ nejednakosti (i) – (iii) leme 3.15 su takođe tačne.

Iz (3.49) sledi

$$\begin{aligned}|\hat{z}_i - z_i| &\leq \left|\frac{W_i}{1+G_{1,i}}\right| \frac{1}{1-|t_i|} \leq \frac{1}{(1-(n-1)c_n)(1-q)}|W_i| \\ &\leq \frac{\lambda_n(1-2q)}{c_n}\frac{c_n d}{1-q} = \frac{1-2q}{1-q}\lambda_n d < \lambda_n d,\end{aligned}$$

što se podudara sa tvrđenjem (vi) leme 3.15 za $\alpha \neq -1$. ■

Lema 3.16 *Za fiksno $n \geq 3$ i međusobno različite vrednosti $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ neka važe uslovi*

$$w^{(0)} \leq c_n d, \quad c_n \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right), \tag{3.53}$$

$$\delta_n := \left(\frac{(n-1)\lambda_n^2}{1-\lambda_n} + \frac{8\lambda_n q}{3c_n}\right)\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1} \leq 1 - 2\lambda_n. \tag{3.54}$$

Tada je

(i) $|\widehat{W}_i| \leq \delta_n |W_i|$;

(ii) $\widehat{w} \leq c_n \hat{d}$.

Dokaz. Na osnovu leme 1.4 dobijamo

$$P(\hat{z}_i) = \left(\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j\neq i}\frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\right)\prod_{j=1}^{n}(\hat{z}_i - z_j).$$

Posle deljenja sa $\prod_{j\neq i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)$ nalazimo

$$\widehat{W}_i = \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod_{j\neq i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)} = (\hat{z}_i - z_i)Y_i \prod_{j\neq i}\left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right), \tag{3.55}$$

gde je

$$Y_i = \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}.$$

Neka je prvo $\alpha \neq -1$. Na osnovu (i) i (iv) leme 3.15, iz (3.48) dobijamo koristeći kružnu kompleksnu aritmetiku

$$\begin{aligned}
\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} &= -\frac{(1+G_{1,i})\left(\alpha + \sqrt{1+2(\alpha+1)t_i}\right)}{\alpha+1} \\
&\in -\frac{(1+G_{1,i})(\alpha+1)\left\{1; \dfrac{2q}{1+\lambda}\right\}}{\alpha+1} \\
&= \left\{-1 - G_{1,i}; |1+G_{1,i}|\frac{2q}{1+\lambda}\right\},
\end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} \subset \left\{-1 - G_{1,i}; \frac{8q}{3}\right\}. \tag{3.56}$$

Imajući to u vidu, dobijamo

$$\begin{aligned}
Y_i &\in \left\{-1 - G_{1,i}; \frac{8q}{3}\right\} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} \\
&= \left\{-1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}; \frac{8q}{3}\right\} \\
&= \left\{-(\hat{z}_i - z_i) \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\hat{z}_i - z_j)}; \frac{8q}{3}\right\}.
\end{aligned}$$

Odavde, koristeći (1.26), nalazimo

$$|Y_i| \leq |\hat{z}_i - z_i| \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j||\hat{z}_i - z_j|} + \frac{8q}{3}. \tag{3.57}$$

Na osnovu (vi) lema 3.15 i 1.8 ocenjujemo

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq (1-\lambda_n)\, d,$$

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq (1-2\lambda_n)\, d.$$

Iz poslednje nejednakosti direktno sledi

$$\hat{d} \geq (1-2\lambda_n)\, d. \tag{3.58}$$

Koristeći ocene za $|\hat{z}_i - z_j|$ i $|\hat{z}_i - \hat{z}_j|$ i nejednakosti (3.50) i (vi), iz (3.57) dobijamo

$$|Y_i| \leq Y_0 \tag{3.59}$$

gde je

$$Y_0 = \frac{(n-1)\,\lambda_n c_n}{1-\lambda_n} + \frac{8}{3}q \geq \lambda_n d \frac{(n-1)\, w}{(1-\lambda_n)\, d^2} + \frac{8}{3}q \tag{3.60}$$

a iz leme 1.8

$$\left|\prod_{j\neq i}\left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right)\right| \leq \left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1}. \tag{3.61}$$

Pomoću (vi) leme 3.15, (3.59) i (3.60), iz (3.55) sledi

$$\begin{aligned} |\widehat{W}_i| &\leq |\hat{z}_i - z_i| Y_0 \left|\prod_{j\neq i}\left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right)\right| \\ &\leq \frac{\lambda_n}{c_n}|W_i| \left(\frac{(n-1)\,\lambda_n c_n}{1-\lambda_n} + \frac{8}{3}q\right)\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

odnosno

$$|\widehat{W}_i| \leq \delta_n |W_i|. \tag{3.62}$$

Koristeći nejednakosti (3.50) i (3.58) dokazujemo (ii):

$$\widehat{w} \leq \delta_n w \leq \delta_n c_n d \leq \frac{\delta_n c_n}{1-2\lambda_n}\hat{d} \leq c_n d,$$

jer je

$$\frac{\delta_n}{1-2\lambda_n} \leq 1.$$

Sada ćemo posmatrati slučaj $\alpha = -1$. Iz (3.49) sledi

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -1 - G_{1,i} - t_i(1+G_{1,i}) = -1 - \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} - \frac{W_i G_{2,i}}{1+G_{1,i}}.$$

Neka je

$$U_i = \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}.$$

Na osnovu prethodnog dobijamo

$$U_i = -(\hat{z}_i - z_i) \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\hat{z}_i - z_j)} - \frac{W_i G_{2,i}}{1+G_{1,i}}.$$

Na osnovu (3.50), (3.57), (3.59) i nejednakosti

$$\begin{aligned}
\left|\frac{W_i G_{2,i}}{1+G_{1,i}}\right| &\leq \frac{(n-1)w^2}{(1-(n-1)\,c_n)\,d^2} \leq \frac{(n-1)c_n^2}{1-(n-1)\,c_n} \\
&= \frac{\lambda_n\,(1-2\lambda_n)}{c_n}\left(1 - \frac{c_n}{\lambda_n\,(1-2q)}\right) c_n \\
&= \lambda_n\,(1-2q) - c_n,
\end{aligned}$$

a imajući u vidu tvrđenja (i) i (ii) leme 3.15, dobijamo

$$\begin{aligned}
|U_i| &\leq \lambda_n d \frac{(n-1)\,w}{(1-\lambda_n)\,d^2} + \lambda_n\,(1-2q) - c_n \\
&\leq \frac{(n-1)\,\lambda_n c_n}{1-\lambda_n} + \lambda_n\,(1-2q) - c_n.
\end{aligned}$$

Poslednja nejednakost, zajedno sa (3.60), daje (3.62), jer je

$$\frac{(n-1)\,\lambda_n c_n}{1-\lambda_n} + \lambda_n\,(1-2q) - c_n \leq Y_0. \tag{3.63}$$

Nejednakost (3.63) se lako dokazuje polazeći od

$$\frac{8}{3}q \geq \lambda_n (1-2q) - c_n.$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{8}{3}\frac{(n-1)\,c_n^2}{(1-(n-1)\,c_n)^2} \geq \frac{c_n}{1-(n-1)\,c_n} - c_n = \frac{(n-1)\,c_n^2}{1-(n-1)\,c_n},$$

odnosno

$$8 \geq 3\,(1-(n-1)\,c_n) \geq 3.$$

Na taj način je, kao i u slučaju $\alpha \neq -1$, dokazano da su tačna tvrđenja (i) i (ii) leme 3.16. ■

Sada smo u mogućnosti da dokažemo glavni rezultat koji se odnosi na konvergenciju familije iterativnih postupaka (3.48).

Teorema 3.17 *Neka za fiksno $n \geq 3$ i $\alpha \in A_n(\alpha)$ a pored uslova leme* 3.16 *važi*

$$\beta_n = \delta_n \left(\frac{2\lambda_n}{c_n} - \frac{1}{1-2q} + \frac{8\lambda_n q}{3c_n}\right) < 1 \tag{3.64}$$

i

$$g\,(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n}. \tag{3.65}$$

Tada je jednoparametarska familija (3.48) *konvergentna.*

Dokaz. Kao u lemi 3.16, tvrđenje (ii), imamo

$$w \leq c_n d \quad \Rightarrow \quad \widehat{w} \leq c_n \hat{d}.$$

Analogno, indukcijom se dokazuje da (3.53) ima za posledicu

$$w^{(m)} \leq c_n d^{(m)}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Zbog toga, iz uslova (3.53) sledi da su sva tvrđenja lema 3.15 i 3.16 tačna za svako $m = 1, 2, \ldots$. Posebno, važi

$$|W_i^{(m+1)}| \leq \delta_n |W_i^{(m)}|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{3.66}$$

i

$$|C_i^{(m)}| = |z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}| \leq \frac{\lambda_n}{c_n}|W_i^{(m)}|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots . \tag{3.67}$$

Iz (3.48) dobijamo za $C_i^{(m)}$

$$C_i^{(m)} = \frac{(\alpha+1)W_i^{(m)}}{\left(1 + G_{1,i}^{(m)}\right)\left(\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha+1)t_i^{(m)}}\right)}, \tag{3.68}$$

gde je

$$G_{k,i}^{(m)} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j^{(m)}}{\left(z_i^{(m)} - z_j^{(m)}\right)^k}, \quad k = 1, 2,$$

$$t_i^{(m)} = \frac{W_i^{(m)} G_{2,i}^{(m)}}{\left(1 + G_{1,i}^{(m)}\right)^2}.$$

Sada ćemo dokazati da važi

$$\left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \beta_n \left|C_i^{(m)}\right|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Izostavljajući indeks iteracije, iz (3.68) pomoću (3.66) i (3.67) dobijamo

$$\left|\widehat{C_i}\right| \leq \frac{\lambda_n}{c_n}\left|\widehat{W_i}\right| \leq \frac{\lambda_n}{c_n}\delta_n |W_i| \leq \frac{\lambda_n}{c_n}\delta_n |C_i|\,|y_i|, \tag{3.69}$$

gde je

$$y_i = \frac{(1 + G_{1,i})\left(\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha+1)t_i}\right)}{\alpha + 1}. \tag{3.70}$$

Zbog (3.56) je

$$y_i \in \left\{1 + G_{1,i}; \frac{8q}{3}\right\},$$

odakle nalazimo gornju granicu za $|y_i|$:

$$|y_i| \leq |1 + G_{1,i}| + \frac{8q}{3} \leq 2 - \frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n} + \frac{8}{3}q.$$

Koristeći ovu ocenu iz (3.69) sledi

$$\left|\widehat{C_i}\right| \leq \frac{\lambda_n}{c_n}\delta_n\left(2-\frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n}+\frac{8}{3}q\right)|C_i| = \beta_n|C_i|.$$

U slučaju $\alpha=-1$ iz (3.70) dobijamo, kada $\alpha \to -1$,

$$y_i = (1+G_{1,i})(1+t_i).$$

Na osnovu (i) i (iii) iz leme 3.15, sledi

$$|y_i| \leq |1+G_{1,i}|\,(1+|t_i|) \leq \left(2-\frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n}\right)(1+q)\,.$$

Ako dokažemo da je

$$\left(2-\frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n}\right)(1+q) \leq 2-\frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n}+\frac{8}{3}q \tag{3.71}$$

opet ćemo imati

$$\left|\widehat{C_i}\right| \leq \beta_n\,|C_i|\,.$$

Iz (3.71) sledi da je potrebno dokazati da važi

$$2-\frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n} \leq \frac{8}{3}$$

tj.

$$-\frac{c_n}{(1-2q)\,\lambda_n} \leq \frac{2}{3},$$

što je očigledno tačno. Prema tome, u oba slučaja i za $\alpha \neq -1$ i za $\alpha=-1$, dokazali smo

$$\left|C_i^{(m+1)}\right| \leq \beta_n\left|C_i^{(m)}\right|, \quad i\in I_n, \quad m=0,1,\ldots\,.$$

Ostaje još da se dokaže disjunkcija diskova

$$S_1=\left\{z_1^{(0)};g\left(\beta_n\right)|C_1^{(0)}|\right\},\ldots,\left\{z_n^{(0)};g\left(\beta_n\right)|C_n^{(0)}|\right\}.$$

Na osnovu leme 3.15, tvrđenje (vi), imamo

$$|C_i^{(0)}| \leq \frac{\lambda_n}{c_n}$$

i na osnovu (3.65)

$$\begin{aligned} d^{(0)} &\geq \frac{w^{(0)}}{c_n} \geq \frac{\delta_n}{c_n}|C_i| \geq \frac{1}{2c_n}\left(|W_i^{(0)}| + |W_j^{(0)}|\right) \\ &\geq \frac{1}{2\lambda_n}\left(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|\right) > g(\beta_n)\left(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|\right). \end{aligned}$$

Odatle je

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \geq d^{(0)} > g(\beta_n)\left(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|\right) = \operatorname{rad} S_i + \operatorname{rad} S_j,$$

što znači da su diskovi $S_1, \ldots, S_n$ disjunktni.

Na kraju, dokazaćemo da je familija iterativnih postupaka dobro definisana u svakoj iteraciji. Izostavljajući indeks iteracije iz (3.48) vidimo da je

$$C_i = \frac{P(z_i)}{F_i(z_1, \ldots, z_n)},$$

gde je

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{j \neq i}(z_i - z_j)\left(\frac{1 + G_{1,i}}{1 + \alpha}\right)\left(\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha + 1)t_i}\right).$$

Neka je $\alpha \neq -1$. Iz (3.56), tvrđenja (i) iz leme 3.15 i (3.51) i ocena korišćenih u dokazu ove teoreme, ocenjujemo

$$\begin{aligned} \left|\frac{(\alpha + 1)W_i}{\hat{z}_i - z_i}\right| &\geq \left|(1 + G_{1,i})\left(\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha + 1)t_i}\right)\right| \\ &\geq |\alpha + 1|\left(|1 + G_{1,i}| - \frac{8q}{3}\right) \\ &\geq |\alpha + 1|\left(1 - (n-1)c_n - \frac{8q}{3}\right) \\ &\geq |\alpha + 1|\left(\frac{3}{5} - \frac{8}{3}\frac{2}{9}\right) = |\alpha + 1|\frac{1}{135} > 0. \end{aligned}$$

Kako je još $\prod_{j \neq i}(z_i - z_j) \neq 0$, nalazimo da je $F_i(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$. Na sličan način izvodimo dokaz i u slučaju $\alpha = -1$. Naime, tada je

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{j \neq i} (z_i - z_j)(1 + G_{1,i})(1 + t_i)$$

i

$$\begin{aligned} \left| \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} \right| &\geq |(1 + G_{1,i})(1 + t_i)| \geq (1 - (n-1)c_n)(1-q) \\ &\geq \frac{3}{5}\frac{7}{9} = \frac{21}{45} > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.18 *Neka je za fiksno* $n \geq 3$

$$c_n = \frac{1}{2.7n + 0.65}.$$

Ako su $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ *međusobno različite aproksimacije za koje važi*

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)},$$

onda je familija simultanih postupaka (3.48) *konvergentna.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme sledi na osnovu teoreme 3.17. Dokazaćemo da su ispunjeni uslovi te teoreme, tj. uslovi (3.53), (3.54), (3.64) i (3.65). Očigledno je

$$c_n \in \left(0, \frac{2}{5(n-1)}\right),$$

tj. važi (3.53). Niz δ_n je monotono opadajući za $n \geq 4$ i važi

$$0.353 > \delta_3, \quad 0.3615 > \delta_4 \geq \delta_n, \quad n \geq 4.$$

Kako je za $n \geq 3$

$$0.675 < 1 - 2\lambda_n,$$

sledi da je uslov (3.54) ispunjen. Niz β_n iz uslova (3.64) je monotono opadajući za $n \geq 4$ i važi

$$1 > \beta_3 = 0.67483\ldots, \qquad 0.735 > \beta_4 \geq \beta_n \quad n \geq 4,$$

što znači da je uslov (3.64) ispunjen.

Niz

$$g(\beta_n) - \frac{1}{2\lambda_n}$$

je strogo opadajući za $n \geq 3$ i kako je

$$g(\beta_3) - \frac{1}{2\lambda_3} = -0.0033\ldots < 0,$$

relacija (3.65) sledi direktno. Sada na osnovu teoreme 3.17 sledi konvergencija familije simultanih postupaka. ∎

4 Sigurna konvergencija: princip konvergentnih nizova

4.1 Opšti postupak

Neka su $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$ aproksimacije prostih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P, određene nekim simultanim postupkom za nalaženje nula u m-tom iterativnom koraku. U ovom poglavlju proučavamo početne uslove za sigurnu konvergenciju simultanih postupaka koristeći analizu konvergencije nizova $\left\{u_i^{(m)}\right\}$, gde je

$$u_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad i \in I_n.$$

I ovde ćemo, kao i u prethodnom poglavlju, koristiti početni uslov oblika

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}, \tag{4.1}$$

gde je $w^{(m)}$ maksimalna, po modulu, Weierstrassova korekcija, a $d^{(m)}$ je minimalno rastojanje između aproksimacija u m-toj iteraciji. U ovoj analizi ćemo se usredsrediti na izbor n-faktora c_n koji obezbeđuje sigurnu konvergenciju posmatranih simultanih postupaka. Rezultati dati u ovom poglavlju predstavljaju poboljšanje rezultata prikazanih u radovima [65], [68], [70] i [72].

Naša analiza konvergencije iterativnih postupaka u ovom poglavlju sastoji se od sledećih glavnih koraka:

1. Izbor vrednosti n-faktora
$$c_n = \frac{1}{An+B}$$
tako da diskovi
$$Z_i^{(0)} = \left\{z_i^{(0)}; \rho\left|W_i^{(0)}\right|\right\}, \quad i \in I_n,$$
gde je
$$\rho = \frac{1}{1-nc_n} = \frac{An+B}{(A-1)\,n+B},$$
budu disjunktni. Prema teoremi 1.16 dovoljan uslov za to je da je $A \geq 2$ i $B \geq (2-A)\,n$. Ako se vrednost c_n izabere tako da su ti diskovi uzajamno disjunktni, tada svaki od njih sadrži tačno jednu nulu polinoma P. Odatle se dobija
$$\left|u_i^{(0)}\right| = \left|z_i^{(0)} - \zeta_i\right| \leq \rho\left|W_i^{(0)}\right|.$$
Ova nejednakost je značajna u daljoj analizi konvergencije nizova $\left\{z_i^{(m)}\right\}$ koji se dobijaju iz posmatranog simultanog postupka.

2. U ovom koraku se dokazuju nejednakosti
$$d \leq \alpha_n \hat{d}, \quad \text{i} \quad \left|\widehat{W}_i\right| \leq \beta_n\,|W_i|,$$
u kojima se koriste minimalna rastojanja i Weierstrassove korekcije iz dva uzastopna iterativna koraka. Pri tome n-faktor c_n koji se pojavljuje u (4.1) treba birati tako da važi implikacija
$$w \leq c_n d \quad \Rightarrow \quad \widehat{w} \leq c_n \hat{d}.$$
Ova činjenica je od suštinskog značaja za dokazivanje teorema o konvergenciji pomoću indukcije. Primetimo da gornja implikacija važi ako je $\alpha_n\beta_n < 1$.

3. Za $i \in I_n$ dokazujemo nejednakosti
$$|\hat{u}_i| \leq \frac{\gamma}{d^{p+qr-1}}\,|u_i|^p \left(\sum_{j\neq i} |u_j|^q\right)^r, \quad i \in I_n, \tag{4.2}$$
gde su p, q i r prirodni brojevi a γ pozitivna konstanta.

4. Sa novom promenljivom t_i uvedenom pomoću

$$t_i = \frac{|u_i|}{d}\left(\frac{(n-1)^r\gamma}{1-2\lambda_n}\right)^{1/(p+qr-1)}, \quad i \in I_n,$$

gde γ i λ_n zavise od postupka koji se posmatra i važi

$$|\hat{z}_i - z_i| \leq \lambda_n d,$$

polazeći od nejednakosti iz koraka 3, dokazuje se da važi

$$\hat{t}_i \leq \frac{t_i^p}{(n-1)^r}\left(\sum_{j\neq i} t_j^q\right)^r.$$

5. U finalnom koraku dokazuje se da je

$$\lim_{m\to\infty} t_i^{(m)} = 0, \quad i \in I_n,$$

što znači da svi nizovi $\left\{\left|u_i^{(m)}\right|\right\}$, $i \in I_n$, teže ka nuli, tj. da je

$$\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)} = \zeta_i, \quad i \in I_n.$$

Na osnovu (4.2) sledi da je red konvergencije nizova $\left\{t_i^{(m)}\right\}$ i $\left\{u_i^{(m)}\right\}$ jednak $p+qr$.

U analizi konvergencije iterativnih postupaka uobičajeno je da se pretpostavi da su greške

$$u_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i$$

različite od nule za konačno m. Međutim, ako je $u_i^{(m_0)} = 0$ za neke indekse $i_1, \ldots, i_k \in I_n$ i $m_0 \geq 0$, usvaja se da su $z_{i_1}^{(m_0)}, \ldots, z_{i_n}^{(m_0)}$ aproksimacije nula $\zeta_{i_1}, \ldots \zeta_{i_n}$ i iterativni postupak se ne primenjuje za indekse $i_1, \ldots i_k$. Ako nizovi $\left\{u_i^{(m)}\right\}$, $i \in I_n \backslash \{i_1, \ldots i_k\}$ imaju red konvergencije jednak R, tada će, očigledno, nizovi $\left\{u_{i_1}^{(m)}\right\}, \ldots, \left\{u_{i_n}^{(m)}\right\}$ konvergirati sa redom bar R. Ova primedba se odnosi na sve iterativne postupke koji se razmatraju u ovom poglavlju.

4.2 Ehrlich–Aberthov postupak

Jedan od najefikasnijih numeričkih postupaka za simultano izračunavanje nula polinoma je Ehrlich–Aberthov postupak,

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{N_i^{(m)}} - \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{1}{z_i^{(m)} - z_j^{(m)}}}, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

ili, bez indeksa iteracije i sa Newtonovom korekcijom izraženom pomoću polinoma i njegovog izvoda,

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{1}{z_i - z_j}}, \quad i \in I_n \tag{4.3}$$

(formula (2.10) u odeljku 2.2.2).

Pre dokaza konvergencije ovog postupka daćemo nekoliko pomoćnih rezultata. Dokaz prve leme sledi neposredno iz teoreme 1.16.

Lema 4.1 *Neka je za fiksno* $n \geq 3$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n + 1.5}, & n = 3, \\[2ex] \dfrac{1}{2n + 1.25}, & n = 4, \\[2ex] \dfrac{1}{2n + 1}, & n = 5, 6, 7, \\[2ex] \dfrac{1}{2n}, & n > 7 \end{cases}$$

i neka važi

$$w \leq c_n d. \tag{4.4}$$

Tada svaki disk

$$\left\{ z_i; \frac{1}{1 - nc_n} |W_i| \right\}, \quad i \in I_n$$

sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P.

Lema 4.2 *Neka su $z_1, \ldots, z_n$ međusobno različite aproksimacije nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P stepena n i neka su $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ nove aproksimacije dobijene Ehrlich–Aberthovim postupkom (4.3). Tada važi*

$$\widehat{W}_i = -(\hat{z}_i - z_i)^2 \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)} \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right). \tag{4.5}$$

Dokaz. Iz (4.3) dobija se

$$\frac{1}{\hat{z}_i - z_i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} - \frac{P'(z_i)}{P(z_i)},$$

tako da, koristeći lemu 1.5, dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} &= W_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} - \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} \right) \\ &= -W_i \left[\frac{1}{W_i} \left(\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1 \right) \right] \\ &= -\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} - 1. \end{aligned}$$

U skladu sa tim imamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 &= \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \\ &= -\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \\ &= -(\hat{z}_i - z_i) \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)}. \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir lemu 1.4 za $t = \hat{z}_i$, nalazimo

$$\begin{aligned} P(\hat{z}_i) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1\right) \prod_{j=1}^{n} (\hat{z}_i - z_j) \\ &= -(\hat{z}_i - z_i)^2 \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)} \prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - z_j). \end{aligned}$$

Odavde, deljenjem sa $\prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)$, dobijamo formulu (4.5). ∎

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{1 - nc_n}, \\ \gamma &= \frac{1}{1 - \rho c_n - (n-1)(\rho c_n)^2}, \\ \lambda_n &= \rho c_n (1 - \rho c_n) \gamma, \\ \beta_n &= \lambda_n^2 \frac{n-1}{1 - \lambda_n} \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Lema 4.3 *Za fiksno $n \geq 3$ neka su $z_1, \ldots, z_n$ aproksimacije dobijene postupkom* (4.3) *i neka je*

$$u_i = z_i - \zeta_i, \quad \hat{u}_i = \hat{z}_i - \zeta_i, \quad i \in I_n.$$

Ako važi nejednakost (4.4) *sa c_n iz leme* 4.1, *onda je*

(*i*) $d \leq \dfrac{1}{1 - 2\lambda_n} \hat{d}$;

(*ii*) $\widehat{w} \leq \beta_n w$;

(*iii*) $\widehat{w} \leq c_n \hat{d}$;

(*iv*) $|\hat{u}_i| \leq \dfrac{\gamma}{d^2} |u_i|^2 \sum_{j \neq i} |u_j|^2$.

Dokaz. Na osnovu početnog uslova (4.4) i leme 4.1 imamo

$$|u_i| = |z_i - \zeta_i| \leq \rho |W_i| \leq \rho w \leq \rho c_n d. \tag{4.6}$$

Prema definiciji minimalnog rastojanja d nalazimo da je

$$|z_j - \zeta_i| \geq |z_j - z_i| - |z_i - \zeta_i| \geq d - \rho c_n d = (1 - \rho c_n)\, d. \tag{4.7}$$

Koristeći identitet

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j},$$

iz (4.3) dobijamo

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= \hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \cfrac{1}{\cfrac{1}{u_i} + \sum\limits_{j \neq i} \cfrac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum\limits_{j \neq i} \cfrac{1}{z_i - z_j}} \\ &= u_i - \frac{u_i}{1 - u_i S_i} = -\frac{u_i^2 S_i}{1 - u_i S_i}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

gde je

$$S_i = \sum_{j \neq i} \frac{u_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j)}.$$

Dalje, na osnovu (4.6) i (4.7) dobijamo

$$\begin{aligned} |u_i S_i| &\leq |u_i| \sum_{j \neq i} \frac{|u_j|}{|z_i - \zeta_j|\, |z_i - z_j|} \\ &\leq \frac{\rho c_n d\, (n-1)\, \rho c_n d}{(1 - \rho c_n)\, d^2} = \frac{(\rho c_n)^2 (n-1)}{1 - \rho c_n}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sada, prema (4.6), (4.7) i (4.9), nalazimo iz (4.3)

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i - z_i| &= \left|\frac{u_i}{1-u_iS_i}\right| \le \frac{|u_i|}{1-|u_iS_i|} \\ &\le \rho|W_i|\frac{1}{1-\dfrac{(\rho c_n)^2(n-1)}{1-\rho c_n}} \\ &= \rho c_n(1-\rho c_n)\gamma d = \lambda_n d \end{aligned} \tag{4.10}$$

i

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i - z_i| &\le \rho|W_i|\frac{1}{1-\dfrac{(\rho c_n)^2(n-1)}{1-\rho c_n}} \\ &= \rho(1-\rho c_n)\gamma|W_i| = \lambda_n d. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Prema ovome i imajući u vidu da je $|z_i - z_j| \ge d$, dobijamo

$$|\hat{z}_i - z_j| \ge |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| \ge d - \lambda_n d = (1-\lambda_n)\,d, \tag{4.12}$$

i

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i - \hat{z}_j| &\ge |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| \\ &\ge d - 2\lambda_n d = (1-2\lambda_n)\,d. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Iz (4.13) sledi

$$\hat{d} \ge (1-2\lambda_n)\,d, \tag{4.14}$$

odnosno

$$\frac{d}{\hat{d}} \le \frac{1}{1-2\lambda_n}, \tag{4.15}$$

što dokazuje tvrđenje (i) leme.

Koristeći početnu nejednakost $\dfrac{w}{d} \leq c_n$ i ograničenja (4.10), (4.11), (4.12) i (4.13), ocenjujemo veličine koje figurišu u (4.5),

$$\begin{aligned} \left|\widehat{W}_i\right| &\leq |\hat{z}_i - z_i|^2 \sum_{j\neq i} \frac{|W_j|}{|\hat{z}_i - z_j||z_i - z_j|} \prod_{j\neq i}\left(1 + \frac{|\hat{z}_j - z_j|}{|\hat{z}_i - \hat{z}_j|}\right) \\ &\leq \lambda_n^2 d^2 \frac{(n-1)}{(1-\lambda_n)\, d^2}\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1} |W_i| = \beta_n |W_i|\,. \end{aligned}$$

Odatle dobijamo

$$\widehat{w} \leq \beta_n w, \tag{4.16}$$

a iz (4.4), (4.14) i (4.16) dobija se

$$\widehat{w} \leq \beta_n w \leq \beta_n c_n d \leq \frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} c_n \hat{d}.$$

Da bi važilo

$$\widehat{w} \leq c_n \hat{d},$$

potrebno je da bude

$$\frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} \leq 1.$$

Neposredno se proverava da je $\dfrac{\beta_n}{1-2\lambda_n}$ manje od vrednosti datih u tabeli

n	3	4	5	6	7
β_n	0.401	0.504	0.544	0.461	0.398

i da je

$$\frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} \leq \frac{\beta_8}{1-2\lambda_n} < 0.598, \quad n \geq 8.$$

Na taj način su dokazana tvrđenja (*ii*) i (*iii*) leme.

Koristeći već određene granice i (4.8) dobijamo

$$|\hat{u}_i| \leq \frac{|u_i|^2 |S_i|}{1 - |u_i S_i|} \leq \frac{|u_i|^2}{1 - \dfrac{(\rho c_n)^2 (n-1)}{1-\rho c_n}} \sum_{j\neq i} \frac{|u_j|}{|z_i - \zeta_j||z_i - z_j|},$$

$$|\hat{u}_i| \leq \frac{1-\rho c_n}{1-\rho c_n-(n-1)(\rho c_n)^2}|u_i|^2 \sum_{j\neq i} \frac{|u_j|}{(1-\rho c_n)\, d^2},$$

odnosno

$$|\hat{u}_i| \leq \frac{\gamma}{d^2}|u_i|^2 \sum_{j\neq i} |u_j|, \tag{4.17}$$

a time je tvrđenje (iv) leme dokazano. ∎

Teorema 4.4 *Ako su $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ međusobno različite aproksimacije za koje važi*

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)} \tag{4.18}$$

sa c_n iz leme 4.1, *onda je Ehrlich–Aberthov postupak* (4.3) *kubno konvergentan.*

Dokaz. Analiza konvergencije se zasniva na oceni greške $u_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i$. Dokaz se izvodi indukcijom, koristeći slično razmatranje kao pri dokazu leme 4.3. Sve procene date u lemi 4.3 su važeće za indeks $m = 1$ zato što se početni uslov (4.18) slaže sa (4.4). Zapravo, ovo je deo dokaza za $m = 1$. Štaviše, nejednakost (*iii*) se opet svodi na uslov oblika (4.4) i odatle opet pretpostavke (*i*) – (*iv*) iz leme 4.3 važe za sledeći indeks i tako dalje. Sve procene i ograničenja za indeks m se izvode na suštinski isti način kao za $m = 0$. Zapravo, implikacija

$$w^{(m)} \leq c_n d^{(m)} \quad \Rightarrow \quad w^{(m+1)} \leq c_n d^{(m+1)}$$

ima ključnu ulogu u analizi konvergencije Ehrlich–Aberthovog postupka zato što uključuje početni uslov (4.18) pod kojim važe sve nejednakosti iz leme 4.3 za sve $m = 0, 1, \ldots$. Na osnovu (4.15) i (4.17) imamo

$$\frac{d^{(m)}}{d^{(m+1)}} \leq \frac{1}{1-2\lambda_n} \tag{4.19}$$

i

$$|u_i^{(m+1)}| \leq \frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^2}|u_i^{(m)}|^2 \sum_{j\neq i} |u_j^{(m)}|, \quad i \in I_n, \tag{4.20}$$

za svaki iteracioni indeks $m = 0, 1, \ldots$ ako (4.18) važi.

Neka je

$$t_i^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} \sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} |u_i^{(m)}|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Iz (4.20) sledi

$$\begin{aligned} t_i^{(m+1)} &= \frac{1}{d^{(m+1)}} \sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} |u_i^{(m+1)}| \\ &\le \frac{1}{d^{(m+1)}} \sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^2} |u_i^{(m)}|^2 \sum_{j \ne i} |u_j^{(m)}|. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^{(m)2}} |u_i^{(m)}|^2 &= \left(\frac{1}{d^{(m)}} \sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} |u_i^{(m)}| \right)^2 \frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma} \\ &= \left(t_i^{(m)}\right)^2 \frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \sum_{j \ne i} |u_j^{(m)}| &= d^{(m)} \sum_{j \ne i} \left(\frac{1}{d^{(m)}} \sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} |u_i^{(m)}| \right) \\ &= d^{(m)} \sum_{j \ne i} t_j^{(m)}, \end{aligned}$$

dobijamo

$$t_i^{(m+1)} \le \frac{(1-2\lambda_n)\, d^{(m)}}{(n-1)\, d^{(m+1)}} \left(t_i^{(m)}\right)^2 \sum_{j \ne i} t_j^{(m)}.$$

Odavde je, koristeći (4.19),

$$t_i^{(m+1)} \le \frac{1}{n-1} \left(t_i^{(m)}\right)^2 \sum_{j \ne i} t_j^{(m)}, \quad i \in I_n. \tag{4.21}$$

Iz (4.6) dobijamo

$$\begin{aligned} t_i^{(0)} &= \frac{1}{d^{(0)}}\sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(0)}| \le \frac{1}{d^{(0)}}\rho c_n d^{(0)}\sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \\ &\le \rho c_n\sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \end{aligned}$$

za svako $i = 1, \ldots, n$. Neka je

$$h_n = \max_{1\le i\le n} t_i^{(0)} \le \rho c_n\sqrt{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}.$$

Neposredno se proverava da h_n nije veće od vrednosti datih u tabeli

n	3	4	5	6	7
h_n	0.545	0.527	0.500	0.448	0.409

i da je

$$h_n \le h_8 < 0.448, \quad n \ge 8.$$

U skladu sa tim iz (4.21) zaključujemo da nizovi $\left\{t_i^{(m)}\right\}$ (i, zajedno sa njim, $\left\{|u_i^{(m)}|\right\}$) teže ka nuli za svako $i = 1, \ldots, n$. Odatle sledi da je Ehrlich–Aberthov postupak konvergentan.

Kako je

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \min_{i\ne j} |\zeta_i - \zeta_j|,$$

sa $u^{(m)} = \max\limits_{1\le i\le n} |u_i^{(m)}|$ iz (4.20) sledi

$$|u_i^{(m+1)}| \le u^{(m+1)} \le \frac{(n-1)\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^2}|u^{(m)}|^3,$$

što dokazuje drugi deo teoreme. ■

4.3 Ehrlich-Aberthov postupak sa Newtonovim korekcijama

Kao što je već pomenuto u odeljku 2.2, konvergencija Ehrlich-Aberthovog postupka može se ubrzati pomoću Newtonovih korekcija. Na taj način se dobija novi postupak

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{1}{N(z_i)} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j + N(z_j)}}, \quad i \in I_n, \tag{4.22}$$

koji predstavlja poboljšanje Ehrlich-Aberthovog postupka. Njegova visoka računska efikasnost je posledica povećanog reda konvergencije (sa 3 na 4) uz zanemarljivi broj dodatnih računskih operacija, budući da se već izračunate veličine $N(z_i)$ koriste u sumi u (4.22).

Lema 4.5 *Neka je za fiksno* $n \geq 3$

$$c_n = \frac{1}{2.2n + 2},$$

i neka važi

$$w \leq c_n d. \tag{4.23}$$

Tada svaki disk

$$\left\{ z_i; \frac{1}{1 - nc_n} |W_i| \right\}, \quad i \in I_n$$

sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P.

Lema 4.6 *Za Ehrlich-Aberthov postupak sa Newtonovim korekcijama (4.22) važi*

$$\widehat{W}_i = -(\hat{z}_i - z_i)\left(W_i \Sigma_{N,i} + (\hat{z}_i - z_i)\Sigma_{W,i}\right) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right), \tag{4.24}$$

gde je

$$\Sigma_{N,i} = \sum_{j \neq i} \frac{N_j}{(z_i - z_j + N_j)(z_i - z_j)}, \quad \Sigma_{W,i} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)}.$$

Dokaz. Iz (4.22) dobija se

$$\frac{1}{\hat{z}_i - z_i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j + N_j} - \frac{P'(z_i)}{P(z_i)},$$

odakle je, koristeći lemu 1.5,

$$\begin{aligned}
\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} &= W_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j + N_j} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} - \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} \right) \\
&= -W_i \left[\Sigma_{N,i} + \frac{1}{W_i} \left(\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1 \right) \right] \\
&= -W_i \Sigma_{N,i} - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} - 1.
\end{aligned}$$

Prema tome, imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 &= \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \\
&= -W_i \Sigma_{N,i} - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j},
\end{aligned}$$

odakle je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 = -W_i \Sigma_{N,i} - (\hat{z}_i - z_i) \Sigma_{W,i}.$$

Zamenjujući poslednji izraz u Lagrangeov interpolacioni polinom (videti lemu 1.4) za $t = t_i$ nalazimo

$$\begin{aligned}
P(\hat{z}_i) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \right) \prod_{j=1}^{n} (\hat{z}_i - z_j) \\
&= -(\hat{z}_i - z_i) \left(W_i \Sigma_{N,i} + (\hat{z}_i - z_i) \Sigma_{W,i} \right) \prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - z_j).
\end{aligned}$$

Nakon deljenja sa $\prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)$ i sređivanja, dobija se (4.24). ∎

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{1-nc_n},\\
\gamma &= \frac{n-1}{(1-\rho c_n)\left((1-\rho c_n)^2-(n-1)\rho c_n\right)},\\
\lambda_n &= \frac{\rho c_n}{1-(\rho c_n)^3(n-1)\gamma},\\
\beta_n &= \lambda_n\left(\lambda_n\frac{n-1}{1-\lambda_n}+c_n(1-\rho c_n)^2\gamma\rho\right)\left(1+\frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Lema 4.7 *Za fiksno $n \geq 3$ neka su $z_1, \ldots, z_n$ aproksimacije dobijene postupkom (4.22) i neka je*

$$u_i = z_i - \zeta_i, \quad \hat{u}_i = \hat{z}_i - \zeta_i, \quad i \in I_n.$$

Ako važi nejednakost (4.23) sa c_n iz leme 4.5 onda je

(i) $d \leq \dfrac{1}{1-2\lambda_n}\hat{d}$;

(ii) $\widehat{w} \leq \beta_n w$;

(iii) $\widehat{w} \leq c_n \hat{d}$;

(iv) $|\hat{u}_i| \leq \dfrac{\gamma}{d^3}|u_i|^2\sum_{j\neq i}|u_j|^2$.

Dokaz. Prema početnom uslovu (4.23) i lemi 4.1 imamo

$$|u_i| = |z_i-\zeta_i| \leq \rho|W_i| \leq \rho w \leq \rho c_n d. \tag{4.25}$$

Na osnovu toga i definicije minimalnog rastojanja d dobijamo

$$|z_j-\zeta_i| \geq |z_j-z_i| - |z_i-\zeta_i| \geq d - \rho c_n d = (1-\rho c_n)\, d. \tag{4.26}$$

Koristeći identitet

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} \tag{4.27}$$

i nejednakosti (4.25) i (4.26), dobijamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{P'(z_i)}{P(z_i)}\right| &\geq \frac{1}{|z_i - \zeta_i|} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{|z_i - \zeta_j|} \geq \frac{1}{\rho c_n d} - \frac{n-1}{(1 - \rho c_n)\, d} \\ &= \frac{\delta}{\rho c_n (1 - \rho c_n)\, d}, \end{aligned}$$

gde je

$$\delta = 1 - \rho c_n - (n-1)\, \rho c_n.$$

Odatle je

$$|N_i| = \left|\frac{P(z_i)}{P'(z_i)}\right| \geq \frac{\rho c_n (1 - \rho c_n)\, d}{\delta}, \tag{4.28}$$

tako da je

$$\begin{aligned} |z_i - z_j + N_j| &\geq |z_i - z_j| - |N_j| \\ &\geq d - \frac{\rho c_n (1 - \rho c_n)\, d}{\delta} \\ &= \frac{(n-1)}{\gamma (1 - \rho c_n)\, \delta} d. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Polazeći od iterativne formule (4.22) i koristeći identitet (4.27) nalazimo

$$\hat{u}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i} + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j + N_j}},$$

ili posle sređivanja

$$\hat{u}_i = u_i - \frac{u_i}{1 + u_i \sum_{j \neq i} \frac{N_j - u_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j + N_j)}}. \tag{4.30}$$

Neka je

$$S_i = \sum_{j \neq i} \frac{N_j - u_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j + N_j)}, \quad h_j = \sum_{k \neq j} \frac{1}{z_j - \zeta_k}.$$

Tada se (4.30) može zapisati u obliku

$$\hat{u}_i = u_i - \frac{u_i}{1 + u_i S_i} = \frac{u_i^2 S_i}{1 + u_i S_i}. \tag{4.31}$$

Takođe dobijamo

$$N_j = \frac{u_j}{1 + u_j h_j}, \quad N_j - u_j = -\frac{u_j^2 h_j}{1 + u_j h_j},$$

tako da je

$$S_i = -\sum_{j \neq i} \frac{\dfrac{u_j^2 h_j}{1 + u_j h_j}}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j + N_j)}.$$

Budući da je zbog (4.26)

$$|h_j| = \left| \sum_{k \neq j} \frac{1}{z_j - \zeta_k} \right| \leq \frac{n-1}{(1 - \rho c_n)\, d},$$

na osnovu ove nejednakosti i (4.25) dobijamo procenu

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_j}{1 + u_j h_j} \right| &\leq \frac{|h_j|}{1 - |u_j||h_j|} \\ &\leq \frac{\dfrac{n-1}{(1 - \rho c_n)\, d}}{1 - \rho c_n d \dfrac{n-1}{(1 - \rho c_n)\, d}} = \frac{n-1}{\delta d}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Koristeći (4.32) i prethodna ograničenja (4.25), (4.26) i (4.29), dobijamo

$$
\begin{aligned}
|u_i S_i| &\leq |u_i| \sum_{j\neq i} \frac{|u_j|^2 \left| \dfrac{h_j}{1+u_j h_j} \right|}{|z_i-\zeta_j||z_i-z_j+N_j|} \\
&\leq \frac{(n-1)\dfrac{n-1}{\delta d}(\rho c_n d)^3}{(1-\rho c_n)\, d \dfrac{(n-1)}{\gamma(1-\rho c_n)\delta} d} \\
&= \gamma(n-1)(\rho c_n)^3 .
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

Na sličan način nalazimo

$$
\begin{aligned}
\frac{|S_i|}{1-|u_i S_i|} &\leq \sum_{j\neq i} \frac{|u_j|^2 \left| \dfrac{h_j}{1+u_j h_j} \right|}{|z_i-\zeta_j||z_i-z_j+N_j|} \\
&\leq \frac{\dfrac{n-1}{\delta d}}{(1-\rho c_n)\, d \dfrac{(n-1)}{\gamma(1-\rho c_n)\delta} d} \sum_{j\neq i} |u_j|^2 \\
&\leq \frac{\gamma}{d^3} \sum_{j\neq i} |u_j|^2 .
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

Pomoću (4.25) i (4.33), iz (4.22) se dobija

$$
\begin{aligned}
|\hat{z}_i - z_i| &= \left| \frac{u_i}{1+u_i S_i} \right| \leq \frac{|u_i|}{1-|u_i S_i|} \\
&\leq \frac{\rho |W_i|}{1-\gamma(n-1)(\rho c_n)^3} = \frac{\lambda_n}{c_n} |W_i|
\end{aligned}
$$

i

$$
|\hat{z}_i - z_i| \leq \frac{\lambda_n}{c_n} |W_i| \leq \lambda_n d. \tag{4.35}
$$

Odatle, imajući u vidu da je $|z_i - z_j| \geq d$, procenjujemo

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| \geq d - \lambda_n d = (1 - \lambda_n)\, d. \tag{4.36}$$

Na sličan način dobijamo

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i - \hat{z}_j| &\geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| \\ &\geq d - 2\lambda_n = (1 - 2\lambda_n)\, d, \end{aligned} \tag{4.37}$$

što znači da je

$$\hat{d} \geq (1 - 2\lambda_n)\, d, \tag{4.38}$$

odnosno

$$d \leq \frac{1}{1 - 2\lambda_n} \hat{d}.$$

Ovim smo dokazali tvrđenje (i) leme.

Koristeći polaznu nejednakost (4.23) i ograničenja (4.28), (4.29), (4.35), (4.36) i (4.37), ocenjujemo veličine iz (4.24):

$$\begin{aligned} |W_i||\Sigma_{N,i}| &\leq w \frac{(n-1)\dfrac{\rho c_n (1 - \rho c_n)\, d}{\delta}}{\dfrac{(n-1)}{\gamma (1 - \rho c_n)\, \delta} d^2} \leq \frac{w}{d} \rho c_n (1 - \rho c_n)^2 \gamma \\ &\leq \rho c_n^2 (1 - \rho c_n)^2 \gamma, \end{aligned}$$

$$|\hat{z}_i - z_i||\Sigma_{W,i}| \leq \lambda_n d\, (n-1)\, c_n d \frac{1}{(1 - \lambda_n)\, d^2} \leq \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n} (n-1)\, c_n,$$

$$\left| \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right) \right| \leq \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{|\hat{z}_j - z_j|}{|\hat{z}_i - \hat{z}_j|} \right) \leq \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n} \right)^{n-1}.$$

Koristeći poslednje granice, iz (4.24) ocenjujemo

$$|\widehat{W}_i| \le |\hat{z}_i - z_i| \left(|W_i||\Sigma_{N,i}| + |\hat{z}_i - z_i||\Sigma_{W,i}|\right) \left|\prod_{j\neq i}\left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\right)\right|.$$

Dalje je

$$|\widehat{W}_i| \le \frac{\lambda_n |W_i|}{c_n}\left(\rho c_n^2 (1-\rho c_n)^2 \gamma + \frac{\lambda_n (n-1) c_n}{1-\lambda_n}\right)\left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1}$$

$$|\widehat{W}_i| \le \lambda_n \left(\lambda_n \frac{n-1}{1-\lambda_n} + c_n (1-\rho c_n)^2 \gamma\rho\right)|W_i| \le \beta_n |W_i|,$$

to jest,

$$\widehat{w} \le \beta_n w. \tag{4.39}$$

Prema tome tvrđenje (*ii*) leme je tačno.

Polazeći od (4.39), pomoću (4.34) i (4.38) dobijamo

$$\widehat{w} \le \beta_n w \le \beta_n c_n d \le \frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} c_n \hat{d},$$

odakle je

$$\widehat{w} \le c_n \hat{d}$$

ako je

$$\frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} \le 1.$$

Neposredno se proverava da je

$$\frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} \le \frac{\beta_6}{1-2\lambda_n} < 0.992, \quad n \ge 3.$$

Ovo dokazuje tvrđenje (*iii*) leme.

Koristeći već izvedena ograničenja, iz (4.31) nalazimo

$$|\hat{u}_i| \le \frac{|u_i|^2 |S_i|}{1 - |u_i S_i|} \le \frac{\gamma}{d^3} |u_i|^2 \sum_{j\neq i} |u_j|^2,$$

što dokazuje tvrđenje (*iv*) leme. ■

Teorema 4.8 *Ako su* $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ *međusobno različite aproksimacije za koje važi*

$$w^{(0)} \le c_n d^{(0)} \tag{4.40}$$

sa c_n *iz leme* 4.5, *onda je Ehrlich–Aberthov postupak sa Newtonovim korekcijama* (4.22) *konvergentan sa redom konvergencije četiri.*

Dokaz. Kao i pri dokazu teoreme 4.4, analiza konvergencije se zasniva na proceni greške $u_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i$. Dokaz se izvodi indukcijom, na isti način kao i dokaz leme 4.7. S obzirom da se uslovi (4.40) i (4.23) podudaraju, sve procene date u lemi 4.7 važe i za indeks $m = 1$, što predstavlja prvi deo induktivnog dokaza. Na isti način kao u lemi 4.7 dokazuje se da tvrđenja $(i)-(iv)$ važe za svako $m = 0, 1, \ldots$. Implikacija

$$w^{(m)} \le c_n d^{(m)} \quad \Rightarrow \quad w^{(m+1)} \le c_n d^{(m+1)}$$

uključuje početni uslov (4.40) koji garantuje validnost svih nejednakosti datih u lemi 4.7 za sve $m = 0, 1, \ldots$. Posebno imamo

$$\frac{d^{(m)}}{d^{(m+1)}} \le \frac{1}{1 - 2\lambda_n} \tag{4.41}$$

i

$$|u_i^{(m+1)}| \le \frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3} |u_i^{(m)}|^2 \sum_{j \ne i} |u_j^{(m)}|^2, \quad i \in I_n \tag{4.42}$$

za svako $m = 0, 1, \ldots$ ako (4.40) važi.

Neka je

$$t_i^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\gamma}{1 - 2\lambda_n}}\, |u_i^{(m)}|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Iz (4.42) sledi

$$\begin{aligned} t_i^{(m+1)} &= \frac{1}{d^{(m+1)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\gamma}{1 - 2\lambda_n}}\, |u_i^{(m+1)}| \\ &\le \frac{1}{d^{(m+1)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\gamma}{1 - 2\lambda_n}}\, \frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3} |u_i^{(m)}|^2 \sum_{j \ne i} |u_j^{(m)}|^2. \end{aligned}$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
|u_i^{(m)}|^2 &= \left(d^{(m)}\right)^2 \left(\frac{1}{d^{(m)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}\, |u_i^{(m)}|\right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma}}\right)^2 \\
&= \left(d^{(m)}\right)^2 \left(t_i^{(m)}\right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma}}\right)^2
\end{aligned}
$$

i

$$
\sum_{j\neq i} |u_j^{(m)}|^2 = \left(d^{(m)}\right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma}}\right)^2 \sum_{j\neq i} \left(t_i^{(m)}\right)^2,
$$

dobijamo

$$
\sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \sum_{j\neq i} |u_j^{(m)}|^2 = \left(d^{(m)}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma}} \sum_{j\neq i} \left(t_j^{(m)}\right)^2
$$

i

$$
t_i^{(m+1)} \leq \frac{(1-2\lambda_n)\, d^{(m)}}{(n-1)\, d^{(m+1)}} \left(t_i^{(m)}\right)^2 \sum_{j\neq i} \left(t_j^{(m)}\right)^2 .
$$

Odavde je, zbog (4.41),

$$
t_i^{(m+1)} \leq \frac{1}{n-1} \left(t_i^{(m)}\right)^2 \sum_{j\neq i} \left(t_j^{(m)}\right)^2, \quad i \in I_n. \tag{4.43}
$$

Iz (4.25) dobijamo za svako $i = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
t_i^{(0)} &= \frac{1}{d^{(0)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} |u_i^{(0)}| \leq \frac{1}{d^{(0)}} \rho c_n d^{(0)} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \\
&\leq \rho c_n \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}.
\end{aligned}
$$

Kao i ranije, neka je

$$h_n = \max_{1 \le i \le n} t_i^{(0)} \le \rho c_n \sqrt[3]{\frac{(n-1)\gamma}{1-2\lambda_n}}.$$

Neposredno se proverava da važi

$$h_n \le h_3 < 0.524, \quad n \ge 3.$$

Na osnovu ovog iz (4.42) zaključujemo da nizovi $\left\{t_i^{(m)}\right\}$ (i, zajedno sa njima, $\left\{|u_i^{(m)}|\right\}$) teže ka nuli za svako $i = 1, \ldots, n$, što znači da $z_i^{(m)} \to \zeta_i$. Prema tome, Ehrlich–Aberthov postupak sa Newtonovim korekcijama (4.22) je konvergentan.

Kako je

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \min_{i\ne j} |\zeta_i - \zeta_j|,$$

stavljajući $u^{(m)} = \max_{1\le i\le n} |u_i^{(m)}|$ iz (4.43) dobijamo

$$|u_i^{(m+1)}| \le u^{(m+1)} \le \frac{(n-1)\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3} |u^{(m)}|^4,$$

što dokazuje drugi deo teoreme. ■

4.4 Börsch-Supanov postupak sa Weierstrassovim korekcijama

Börsch–Supanov postupak je kubno konvergentan, ali se može ubrzati na isti način kao i Ehrlich–Aberthov postupak pri čemu se ovde koriste Weierstrassove korekcije. Kao što je u odeljku 2.2.5 navedeno, ovaj postupak je dat iterativnom formulom

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i(z_i)}{1 + \sum_{j\ne i} \dfrac{W_j(z_j)}{z_i - W_i(z_i) - z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{4.44}$$

Red konvergencije Börsch–Supanovog postupka sa Weierstrassovim korekcijama je četiri. U analizi konvergencije ovog postupka koristi se sledeća lema.

Lema 4.9 *Neka je*

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1}, & 3 \le n < 14, \\[2ex] \dfrac{1}{2n}, & n \ge 14 \end{cases}$$

i neka važi

$$w \le c_n d. \tag{4.45}$$

Tada svaki disk

$$\left\{ z_i; \frac{1}{1-nc_n} |W_i| \right\}, \quad i \in I_n$$

sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P. ■

Lema 4.10 *Neka su $z_1, \dots, z_n$ međusobno različite aproksimacije nula $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ polinoma P stepena n i neka su $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n$ nove aproksimacije dobijene Börsch–Supanovim postupkom sa Weierstrassovim korekcijama. Tada važi*

$$\begin{aligned} \widehat{W_i} &= \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod_{j \ne i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)} \\ &= (\hat{z}_i - z_i)(z_i - W_i - \hat{z}_i) \sum_{j \ne i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - W_i - z_j)} \Pi_i \end{aligned}$$

gde je

$$\Pi_i = \prod_{j \ne i} \left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right).$$

Dokaz. Pod uslovom (4.45) iz leme 4.9 imamo

$$|u_i| = |z_i - \zeta_i| \le \rho |W_i| \le \rho w \le \rho c_n d. \tag{4.46}$$

Na osnovu ovoga i definicije minimalnog rastojanja d dobijamo

$$|z_j - \zeta_i| \geq |z_j - z_i| - |z_i - \zeta_i| \geq d - \rho c_n d = (1 - \rho c_n)\, d. \tag{4.47}$$

Na osnovu leme 1.6 imamo

$$W_i = u_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}\right). \tag{4.48}$$

Sada polazimo od (4.44) i koristeći (4.48) nalazimo

$$\begin{aligned}
\hat{u}_i &= \hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \frac{(z_i - \zeta_i)\left(1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}\right)}{1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}} \\
&= u_i \frac{\displaystyle\sum_{j \neq i} W_j \left(\frac{1}{z_i - W_i - z_j} - \frac{1}{\zeta_i - z_j}\right)}{1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}} \\
&= u_i \frac{\displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j (\zeta_i - z_i + W_i)}{(z_i - W_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}}{1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}}.
\end{aligned}$$

Koristeći ponovo (4.48) dobijamo

$$\zeta_i - z_i + W_i = -u_i + u_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}\right) = u_i \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j},$$

tako da je

$$\hat{u}_i = u_i^2 \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j} \frac{\displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - W_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}}{1 + \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}}. \tag{4.49}$$

Na osnovu (4.47) dobijamo

$$\begin{aligned} |W_j| &= |z_j - \zeta_j| \prod_{k\neq j} \left| \frac{z_j - \zeta_k}{z_j - z_k} \right| \le |u_j| \prod_{k\neq j} \left(1 + \frac{|z_k - \zeta_k|}{|z_j - z_k|} \right) \\ &\le |u_j| \left(1 + \frac{\rho c_n d}{d} \right)^{n-1} = |u_j| (1 + \rho c_n)^{n-1}. \end{aligned}$$

Pored toga, imamo

$$\begin{aligned} |z_i - W_i - z_j| &\ge |z_j - z_i| - |W_i| \ge d - w \\ &\ge d - c_n d = (1 - c_n) d \end{aligned} \tag{4.50}$$

i

$$\left| 1 + \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j} \right| \ge 1 - \frac{(n-1) w}{(1 - c_n) d} = \frac{1 - n c_n}{1 - c_n}. \tag{4.51}$$

Koristeći (2.12) za $t = \hat{z}_i$ dobijamo

$$P(\hat{z}_i) = \left(\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \right) \prod_{j=1}^{n} (\hat{z}_i - z_j). \tag{4.52}$$

Iz iterativnog postupka (4.44) sledi

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -1 - \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}$$

tako da (4.52) postaje

$$
\begin{aligned}
P(\hat{z}_i) &= \left(\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} - \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}\right) \prod_{j=1}^{n} (\hat{z}_i - z_j) \\
&= (\hat{z}_i - z_i)(z_i - W_i - \hat{z}_i) \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - W_i - z_j)} \prod_{j\neq i} (\hat{z}_i - z_j),
\end{aligned}
$$

odakle se, posle deljenja sa $\prod_{j\neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)$, dobija tvrđenje leme. ■

Neka je

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{1 - nc_n}, \\
\gamma &= \frac{\rho\,(1 + \rho c_n)^{2n-2}}{(1 - \rho c_n)^2}, \\
\lambda_n &= \rho\,(1 - c_n)\, c_n, \\
\beta_n &= \frac{\lambda_n \rho c_n^2\,(n-1)^2}{(1 - \lambda_n)\,(1 - c_n)} \left(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\right)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Lema 4.11 *Neka su $z_1, \ldots, z_n$ aproksimacije dobijene Börsch–Supanovim postupkom sa Weierstrassovim korekcijama i neka je*

$$
u_i = z_i - \zeta_i, \quad \hat{u}_i = \hat{z}_i - \zeta_i, \quad i \in I_n.
$$

Ako je $n \geq 3$ i važi nejednakost (4.45) *sa c_n iz leme* 4.9, *tada važi*

$$(i) \quad d \leq \frac{1}{1-2\lambda_n}\hat{d};$$

$$(ii) \quad \widehat{w} \leq \beta_n w;$$

$$(iii) \quad \widehat{w} \leq c_n \hat{d};$$

$$(iv) \quad |\hat{u}_i| \leq \frac{\gamma}{d^3}|u_i|^2\left(\sum_{j\neq i}|u_j|\right)^2.$$

Dokaz. S obzirom na (4.50) i (4.45), iz (4.44) dobijamo

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i - z_i| &= \frac{|W_i|}{\left|1+\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{W_j}{z_i - W_i - z_j}\right|} \leq \rho\,(1-c_n)\,|W_i| \\ &\leq \rho\,(1-c_n)\,c_n d = \lambda_n d. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Na osnovu toga je

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| > d - \lambda_n d = (1-\lambda_n)\,d, \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i - \hat{z}_j| &\geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| \\ &> d - 2\lambda_n d = (1-2\lambda_n)\,d. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Iz poslednje nejednakosti zaključujemo da je

$$\hat{d} \geq (1-2\lambda_n)\,d, \tag{4.56}$$

i odatle

$$d \leq \frac{1}{1-2\lambda_n}\hat{d},$$

što dokazuje tvrđenje (i) leme.

Dalje, budući da je

$$\begin{aligned} z_i - \hat{z}_i - W_i &= \frac{W_i}{1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}} - W_i \\ &= -\frac{W_i \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}}{1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j}}, \end{aligned}$$

iz (4.50) i (4.51) dobijamo

$$\begin{aligned} |z_i - \hat{z}_i - W_i| &\le \frac{(n-1)\, c_n d \dfrac{1}{(1-c_n)\, d}}{\dfrac{1 - nc_n}{1 - c_n}} |W_i| \\ &\le \rho\,(n-1)\, c_n\, |W_i|\,. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Koristeći ocene (4.53), (4.54), (4.55) i (4.57), za $\widehat{W}_i$ iz leme 4.10 nalazimo

$$\begin{aligned} |\widehat{W}_i| &\le \lambda_n d\rho\,(n-1)\, c_n\, |W_i| \frac{(n-1)\, c_n d}{(1-\lambda_n)\, d\,(1-c_n)\, d} \left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1} \\ &\le \frac{\lambda_n \rho c_n^2\,(n-1)^2}{(1-\lambda_n)\,(1-c_n)} \left(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1} |W_i|\,, \end{aligned}$$

tj.

$$|\widehat{W}_i| \le \beta_n\, |W_i| \tag{4.58}$$

i tvrđenje (*ii*) leme je dokazano.

Ako pokažemo da je

$$\frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} \le 1,$$

onda iz (4.56) i (4.58) sledi

$$\widehat{w} \leq \beta_n w \leq \beta_n c_n d \leq \frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} c_n \hat{d} \leq c_n \hat{d}.$$

Neposredno se proverava da je

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} &< 0.151, \quad 3 \leq n \leq 14, \\ \frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} &< 0.105, \quad n \geq 14. \end{aligned}$$

Dakle, važi implikacija

$$w \leq c_n d \quad \Rightarrow \quad \widehat{w} \leq c_n \hat{d},$$

što dokazuje tvrđenje (*iii*) leme.

Polazeći od (4.49) i koristeći navedene procene, dobijamo

$$\begin{aligned} |\hat{u}_i| &\leq |u_i|^2 \left(\sum_{j\neq i} |u_j|\right)^2 \frac{(1+\rho c_n)^{2n-2}}{(1-\rho c_n)\, d} \frac{\dfrac{1}{(1-\rho c_n)\, d\, (1-c_n)\, d}}{\dfrac{1-nc_n}{1-c_n}} \\ &\leq \frac{\rho}{(1-\rho c_n)^2 d^3} (1+\rho c_n)^{2n-2} |u_i|^2 \left(\sum_{j\neq i} |u_j|\right)^2, \end{aligned}$$

to jest,

$$|\hat{u}_i| \leq \frac{\gamma}{d^3} |u_i|^2 \left(\sum_{j\neq i} |u_j|\right)^2.$$

Dakle, tvrđenje (*iv*) leme je dokazano. ■

Teorema 4.12 *Ako su $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ međusobno različite aproksimacije za koje važi*

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)} \tag{4.59}$$

sa c_n iz leme 4.9, onda je Börsch-Supanov postupak sa Weierstrassovim korekcijama (4.44) konvergentan sa redom konvergencije četiri.

Dokaz. Analiza konvergencije se zasniva na oceni greške $u_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i$ i slična je odgovarajućoj analizi za iterativne postupke (4.3) i (4.22). Polazeći od početnog uslova (4.59) pokazuje se da važi

$$\frac{d^{(m)}}{d^{(m+1)}} \le \frac{1}{1-2\lambda_n} \tag{4.60}$$

i

$$|u_i^{(m+1)}| \le \frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3}|u_i^{(m)}|^2\left(\sum_{j\neq i}|u_j^{(m)}|\right)^2, \quad i\in I_n \tag{4.61}$$

za svaki iteracioni indeks $m = 0, 1, \dots$.

Neka je

$$t_i^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(m)}|, \quad i\in I_n, \quad m=0,1,\dots .$$

Iz (4.61) i tvrđenja (*iv*) leme 4.11 sledi

$$\begin{aligned}
t_i^{(m+1)} &= \frac{1}{d^{(m+1)}}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(m+1)}| \\
&\le \frac{1}{d^{(m+1)}}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}\frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3}|u_i^{(m)}|^2\left(\sum_{j\neq i}|u_j^{(m)}|\right)^2 .
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
|u_i^{(m)}|^2 &= \left(d^{(m)}\right)^2\left(\frac{1}{d^{(m)}}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(m)}|\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)^2\gamma}}\right)^2 \\
&= \left(d^{(m)}\right)^2\left(t_i^{(m)}\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)^2\gamma}}\right)^2
\end{aligned}$$

i

$$\left(\sum_{j\neq i}|u_j^{(m)}|\right)^2 = \left(\sum_{j\neq i} d^{(m)} t_i^{(m)}\left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)^2\gamma}}\right)\right)^2$$
$$= \left(d^{(m)}\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)^2\gamma}}\right)^2\left(\sum_{j\neq i}|t_i^{(m)}|\right)^2,$$

dobijamo

$$\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2}{1-2\lambda_n}\gamma}\left(\sum_{j\neq i}|u_j^{(m)}|\right)^2 = \left(d^{(m)}\right)^2\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)^2\gamma}}\left(\sum_{j\neq i}t_j^{(m)}\right)^2.$$

Na osnovu prethodnog je

$$t_i^{(m+1)} \leq \frac{(1-2\lambda_n)\, d^{(m)}}{(n-1)^2\, d^{(m+1)}}\left(t_i^{(m)}\right)^2\left(\sum_{j\neq i}t_j^{(m)}\right)^2,$$

odakle, zbog (4.60), imamo

$$t_i^{(m+1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}\left(t_i^{(m)}\right)^2\left(\sum_{j\neq i}t_j^{(m)}\right)^2, \quad i\in I_n. \tag{4.62}$$

Na osnovu (4.59) i (4.56) dobijamo

$$t_i^{(0)} = \frac{1}{d^{(0)}}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(0)}| \leq \frac{1}{d^{(0)}}\rho c_n d^{(0)}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}$$
$$\leq \rho c_n\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}$$

za svako $i = 1,\ldots,n$. Neka je

$$h_n = \max_{1\leq i\leq n} t_i^{(0)} \leq \rho c_n\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2\gamma}{1-2\lambda_n}}.$$

Neposredno se proverava da je

$$
\begin{aligned}
h_n &< 0.988, \quad 3 \le n < 14, \\
h_n &< 0.999, \quad n \ge 14.
\end{aligned}
$$

Na osnovu ovog iz (4.62) sledi da nizovi $\left\{t_i^{(m)}\right\}$ (i, zajedno sa njima, $\left\{|u_i^{(m)}|\right\}$) teže ka nuli za svako $i = 1, \ldots, n$. Prema tome, Börsch–Supanov postupak sa Weierstrassovim korekcijama (4.44) je konvergentan.

Kako je

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \min_{i\neq j} |\zeta_i - \zeta_j|,$$

sa $u^{(m)} = \max_{1\le i\le n} |u_i^{(m)}|$ iz (*iv*), lema 4.11, sledi

$$|u_i^{(m+1)}| \le u^{(m+1)} \le \frac{(n-1)^2\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3} |u^{(m)}|^4,$$

što dokazuje drugi deo teoreme. ■

4.5 Wang-Zhengov postupak

U ovom odeljku razmatraćemo Wang–Zhengov postupak, opisan u odeljku 2.2.8. Ovaj postupak je definisan formulom

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left(S_{1,i}^2 + S_{2,i}\right)}, \quad i \in I_n, \tag{4.63}$$

gde je

$$f(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{2P'(z)}$$

i

$$S_{k,i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_j)^k}, \quad k = 1, 2, \quad i \in I_n. \tag{4.64}$$

Red konvergencije Wang-Zhengovog postupka je četiri.

Lema 4.13 *Neka je za fiksno* $n \geq 3$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3.14n + 2.945}, & 3 \leq n < 75, \\[2ex] \dfrac{1}{3.1n}, & n \geq 75 \end{cases}$$

i neka važi

$$w \leq c_n d. \tag{4.65}$$

Tada svaki disk

$$\left\{ z_i; \frac{1}{1 - nc_n} |W_i| \right\}, \quad i \in I_n$$

sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P.

Lema 4.14 *Neka su* $z_1, \ldots, z_n$ *međusobno različite aproksimacije nula* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ *polinoma* P *stepena* n *i neka su* $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ *nove aproksimacije dobijene Wang–Zhengovim postupkom* (4.63). *Tada važi*

$$\widehat{W_i} = \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)} = (\hat{z}_i - z_i)(W_i C_i - D_i) \prod_{j \neq i} \left(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right), \tag{4.66}$$

gde je

$$C_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} + \frac{P(z_i)}{2P'(z_i)} \left(S_{1,i}^2 + S_{2,i} \right) + \frac{P''(z_i)}{2P'(z_i)} - \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - S_{1,i} \tag{4.67}$$

i

$$D_i = (\hat{z}_i - z_i) \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)}. \tag{4.68}$$

Dokaz. Iz (4.63) se dobija

$$\frac{1}{\hat{z}_i - z_i} = \frac{P''(z_i)}{2P'(z_i)} - \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} + \frac{P(z_i)}{2P'(z_i)}(S_{1,i}^2 + S_{2,i}).$$

Odatle, na osnovu leme 1.5, dobijamo

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + W_i C_i.$$

Na osnovu ovog nalazimo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 &= \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \\ &= W_i C_i + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}, \end{aligned}$$

to jest

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 = W_i C_i - D_i. \tag{4.69}$$

Koristeći ovu relaciju i lemu 1.4 dobijamo

$$P(\hat{z}_i) = (\hat{z}_i - z_i)[W_i C_i - D_i] \prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - z_j).$$

Posle deljenja sa $\prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)$ i sređivanja, dobija (4.66). ∎

Uvedimo sledeće oznake

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{1 - nc_n}, \\ G &= \frac{2(1 - n\rho c_n)}{1 - \rho c_n} - \frac{(2 - \rho c_n)\rho^3 c_n^3 (n-1) n}{(1 - \rho c_n)^2}, \\ \gamma &= \frac{n(2 - \rho c_n)}{G(1 - \rho c_n)^2}, \end{aligned}$$

$$\lambda_n = \frac{2\left(1-\rho c_n+(n-1)\rho c_n\right)\rho c_n}{G\left(1-\rho c_n\right)},$$

$$\beta_n = \left(\frac{\lambda_n\left(2-n\left(\rho c_n\right)^2\right)\rho c_n\left(n-1\right)}{2\left(1-\rho c_n\right)\left(1-n\rho c_n\right)}+\frac{\lambda_n^2\left(n-1\right)}{1-\lambda_n}\right)\left(1+\frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1}$$

Lema 4.15 *Neka su $z_1,\ldots,z_n$ međusobno različite aproksimacije nula $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ polinoma P stepena n, neka su $\hat{z}_1,\ldots,\hat{z}_n$ nove aproksimacije dobijene Wang–Zhengovim postupkom* (4.63) *i neka je*

$$u_i = z_i-\zeta_i,\quad \hat{u}_i=\hat{z}_i-\zeta_i,\quad i\in I_n.$$

Ako je $n\geq 3$ i važi nejednakost (4.65) *sa c_n iz leme* 4.13, *onda važi*

(*i*) $d\leq \dfrac{1}{1-2\lambda_n}\hat{d};$

(*ii*) $\widehat{w}\leq \beta_n w;$

(*iii*) $\widehat{w}\leq c_n\hat{d};$

(*iv*) $|\hat{u}_i|\leq \dfrac{\gamma}{d^3}|u_i|^3\displaystyle\sum_{j\neq i}|u_j|.$

Dokaz. Neka je $\Sigma_{k,i}$ definisano sa (4.64). Ako pođemo od formule (4.63) i koristimo identitet iz leme 1.7, dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i-\frac{-2u_i(1+u_i\Sigma_{1,i})}{G_i}, \tag{4.70}$$

gde je

$$G_i = 2+2u_i\Sigma_{1,i}+u_i^2\left(\Sigma_{1,i}^2-S_{1,i}^2\right)+u_i^2\left(\Sigma_{2,i}-S_{2,i}\right). \tag{4.71}$$

Na osnovu leme 4.13 važi

$$|u_i| = |z_i-\zeta_i|\leq \rho\,|W_i|<\rho c_n d. \tag{4.72}$$

Koristeći (4.65) i (4.72) dobijamo

$$\begin{aligned} |z_i - \zeta_j| &\geq |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| \\ &\geq d - \rho c_n d = (1 - \rho c_n)\, d, \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$|\Sigma_{1,i}| \leq \sum_{j \neq i} \frac{1}{|z_i - \zeta_j|} \leq \frac{n-1}{(1-\rho c_n)\, d}, \tag{4.74}$$

$$|S_{1,i}| \leq \sum_{j \neq i} \frac{1}{|z_i - z_j|} \leq \frac{n-1}{d}. \tag{4.75}$$

Osim toga, imamo

$$|\Sigma_{1,i} - S_{1,i}| = \left| - \sum_{j \neq i} \frac{u_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j)} \right| \leq \sum_{j \neq i} \frac{|u_j|}{|z_i - \zeta_j|\, |z_i - z_j|},$$

odakle pomoću (4.73) dobijamo

$$|\Sigma_{1,i} - S_{1,i}| \leq \frac{(n-1)\, \rho c_n d}{(1-\rho c_n)\, d^2} = \frac{(n-1)\, \rho c_n}{(1-\rho c_n)\, d}. \tag{4.76}$$

Na sličan način ocenjujemo i

$$\begin{aligned} |\Sigma_{2,i} - S_{2,i}| &= \left| - \sum_{j \neq i} \frac{u_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j)} \left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} + \frac{1}{z_i - z_j} \right) \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i} \frac{|u_j|}{|z_i - \zeta_j|\, |z_i - z_j|} \left(\frac{1}{|z_i - \zeta_j|} + \frac{1}{|z_i - z_j|} \right), \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} |\Sigma_{2,i} - S_{2,i}| &\leq \frac{(n-1)\, \rho c_n d}{(1-\rho c_n)\, d^2} \left(\frac{1}{(1-\rho c_n)\, d} + \frac{1}{d} \right) \\ &= \frac{(n-1)\, \rho c_n\, (2 - \rho c_n)}{(1-\rho c_n)^2\, d^2}. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Koristeći (4.72) i (4.74) – (4.77), iz (4.71) sledi

$$\begin{aligned}
|G_i| &\geq 2 - 2|u_i||\Sigma_{1,i}| - |u_i|^2 |\Sigma_{1,i} - S_{1,i}| \left(|\Sigma_{1,i}| + |S_{1,i}|\right) \\
&\quad - |u_i|^2 |\Sigma_{2,i} - S_{2,i}| \\
&\geq 2 - \frac{2(n-1)\rho c_n d}{(1-\rho c_n) d} - \frac{(\rho c_n d)^2 (n-1)\rho c_n}{(1-\rho c_n) d} \left(\frac{(n-1)(2-\rho c_n)}{(1-\rho c_n) d} \right) \\
&\quad - \frac{(n-1)\rho c_n (2-\rho c_n)(\rho c_n d)^2}{(1-\rho c_n)^2 d^2},
\end{aligned}$$

ili, posle sređivanja,

$$|G_i| \geq \frac{2(1-n\rho c_n)}{1-\rho c_n} - \frac{(n-1)(2-\rho c_n)(\rho c_n)^3 n}{(1-\rho c_n)^2} = G. \tag{4.78}$$

Na osnovu ocena (4.72), (4.74) i (4.78) iz (4.70) nalazimo

$$\begin{aligned}
|\hat{z}_i - z_i| &\leq \frac{2\rho}{G} \left(1 + \rho c_n d \frac{n-1}{(1-\rho c_n) d} \right) |W_i| \\
&\leq \frac{2\rho}{G} \frac{1 - \rho c_n + (n-1)\rho c_n}{1-\rho c_n} |W_i| \\
&= \frac{\lambda_n}{c_n} |W_i| \leq \lambda_n d.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Dalje je, prema lemi 1.8,

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq (1-\lambda_n) d, \tag{4.80}$$

i

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq (1-2\lambda_n) d. \tag{4.81}$$

Iz poslednje nejednakosti i definicije za $d^{(m)}$ sledi

$$\hat{d} \geq (1-2\lambda_n) d, \tag{4.82}$$

čime je tvrđenje (i) leme dokazano.

Sada ocenjujemo izraze koji se pojavljuju u izrazu za $\widehat{W}_i$, lema 4.14. Prvo, pomoću (4.65), (4.79) i (4.80), iz (4.68) dobijamo

$$\begin{aligned} |D_i| &\leq |\hat{z}_i - z_i| \sum_{j \neq i} \frac{|W_j|}{|\hat{z}_i - z_j|\,|z_i - z_j|} \leq \frac{\lambda_n d\,(n-1)\,c_n d}{(1-\lambda_n)\,d^2} \\ &= \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(n-1)\,c_n. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Da bismo našli gornje ograničenje za $|C_i|$, koristimo (4.67) i identitete iz lema 1.7 i 1.3 i dobijamo

$$C_i = -\frac{2 + 2u_i\Sigma_{1,i} + u_i^2\Sigma_{1,i}^2 + u_i^2\Sigma_{2,i}}{2u_i\,(1+u_i\Sigma_{1,i})} + \frac{1}{u_i} + \Sigma_{1,i} - S_{1,i} + \frac{u_i\left(S_{1,i}^2 + S_{2,i}\right)}{2\,(1+u_i\Sigma_{1,i})},$$

što se svodi na

$$C_i = \frac{u_i\,((S_{1,i} - \Sigma_{1,i})(S_{1,i} + \Sigma_{1,i}) + S_{2,i} - \Sigma_{2,i})}{2(1+u_i\Sigma_{1,i})} + \Sigma_{1,i} - S_{1,i}. \tag{4.84}$$

Kao i ranije, koristimo ocene (4.72) i (4.74) – (4.76) i iz (4.84) dobijamo

$$\begin{aligned} |C_i| &\leq \frac{|u_i|\,(|\Sigma_{1,i} - S_{1,i}|(|S_{1,i}| + |\Sigma_{1,i}|) + |S_{2,i} - \Sigma_{2,i}|)}{2(1 - |u_i||\Sigma_{1,i}|)} + |\Sigma_{1,i} - S_{1,i}| \\ &\leq \frac{\rho c_n d}{2\left(1 - \rho c_n d \dfrac{n-1}{(1-\rho c_n)\,d}\right)} \frac{(n-1)\,\rho c_n}{(1-\rho c_n)\,d}\left(\frac{n-1}{(1-\rho c_n)\,d} + \frac{n-1}{d}\right) \\ &\quad + \frac{\rho c_n d}{2\left(1 - \rho c_n d \dfrac{n-1}{(1-\rho c_n)\,d}\right)} \frac{(n-1)\,\rho c_n\,(2-\rho c_n)}{(1-\rho c_n)^2\,d^2} + \frac{(n-1)\,\rho c_n}{(1-\rho c_n)\,d} \\ &= \frac{\rho c_n\,(1-\rho c_n)}{2\,(1-\rho c_n - (n-1)\,\rho c_n)} \frac{(n-1)\,\rho c_n}{(1-\rho c_n)\,d} \frac{(n-1)\,(2-\rho c_n)}{1-\rho c_n} \\ &\quad + \frac{\rho c_n\,(1-\rho c_n)}{2\,(1-\rho c_n - (n-1)\,\rho c_n)} \frac{(n-1)\,\rho c_n\,(2-\rho c_n)}{(1-\rho c_n)^2\,d} + \frac{(n-1)\,\rho c_n}{(1-\rho c_n)\,d}. \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}|C_i| &\leq \frac{\rho c_n (n-1)}{(1-\rho c_n) d}\left(1+\frac{n\rho c_n (2-\rho c_n)}{2(1-\rho c_n-(n-1)\rho c_n)}\right)\\ &= \frac{\rho c_n (n-1)}{(1-\rho c_n) d}\left(\frac{2-n(\rho c_n)^2}{2(1-n\rho c_n)}\right).\end{aligned}$$

Pomoću toga dobijamo

$$\begin{aligned}|W_i||C_i| &\leq \frac{\rho c_n^2 (n-1)}{1-\rho c_n}\left(\frac{2-n(\rho c_n)^2}{2(1-n\rho c_n)}\right)\\ &= \frac{1}{\lambda_n}\frac{2-n(\rho c_n)^2}{G(1-\rho c_n)^2}(n-1)\rho^2 c_n^3.\end{aligned} \tag{4.85}$$

Koristeći (4.80) i (4.81) nalazimo

$$\left|\prod_{j\neq i}\left(1+\frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i-\hat{z}_j}\right)\right| \leq \left(1+\frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1}. \tag{4.86}$$

Polazeći od izraza za $\widehat{W}_i$ (lema 4.14) i koristeći ocene (4.79), (4.83), (4.85) i (4.86), dobijamo

$$\begin{aligned}|\widehat{W}_i| &\leq |\hat{z}_i - z_i|\,(|W_i||C_i|+|D_i|)\left|\prod_{j\neq i}\left(1+\frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i-\hat{z}_j}\right)\right|\\ &\leq \frac{\lambda_n}{c_n}|W_i|\,(|W_i||C_i|+|D_i|)\left(1+\frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

i

$$|W_i||C_i|+|D_i| \leq \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{2-n(\rho c_n)^2}{G(1-\rho c_n)^2}\right)(n-1)\rho^2 c_n^3 + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(n-1)c_n$$

tako da je

$$|\widehat{W}_i| \leq \beta_n |W_i|,$$

što dokazuje tvrđenje (*ii*) leme.

Polazeći od poslednje nejednakosti nalazimo

$$\widehat{w} \le \beta_n w \le \beta_n c_n d \le \frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} c_n \hat{d},$$

odakle se dobija $\widehat{w} \le c_n \hat{d}$, pod uslovom da je

$$\frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} \le 1.$$

Neposredno se proverava da je

$$\frac{\beta_n}{1-2\lambda_n} < 0.9992, \quad n \ge 3.$$

Dakle, dokazali smo i tvrđenje (*iii*).

Iz (4.70) dobijamo

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= \hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \frac{2u_i(1+u_i\Sigma_{1,i})}{G_i} \\ &= \frac{u_i^3[\Sigma_{1,i}^2 - S_{1,i}^2 + \Sigma_{2,i} - S_{2,i}]}{G_i}, \end{aligned}$$

odakle je

$$|\hat{u}_i| \le \frac{|u_i|^3}{G}\left(|\Sigma_{1,i} - S_{1,i}|\,|\Sigma_{1,i} + S_{1,i}| + |\Sigma_{2,i} - S_{2,i}|\right).$$

Prema prethodnim ocenama imamo

$$\begin{aligned} |\hat{u}_i| &\le \frac{|u_i|^3}{G}\left(\frac{(n-1)(2-\rho c_n)}{(1-\rho c_n)^2 d^3} + \frac{2-\rho c_n}{(1-\rho c_n)^2 d^3}\right)\sum_{j\ne i}|u_j| \\ &\le \frac{\gamma}{d^3}|u_i|^3 \sum_{j\ne i}|u_j|, \end{aligned}$$

to jest

$$|\hat{u}_i| \le \frac{\gamma}{d^3}|u_i|^3 \sum_{j\ne i}|u_j|. \tag{4.87}$$

Ovim je dokazano tvrđenje (*iv*). ∎

Teorema 4.16 *Ako su $z_1^{(0)},\ldots,z_n^{(0)}$ međusobno različite aproksimacije za koje važi*

$$w^{(0)} \le c_n d^{(0)} \tag{4.88}$$

sa c_n iz leme 4.14, onda je Wang-Zhengov postupak (4.63) konvergentan sa redom konvergencije četiri.

Dokaz. Analizu konvergencije vršimo na isti način kao i za prethodna tri postupka. Dokaz teoreme 4.16 izvodi se indukcijom, uz pomoć lema 4.14 i 4.15. Na ovaj način pokazuje se da pod uslovom (4.88) važi

$$\frac{d^{(m)}}{d^{(m+1)}} \le \frac{1}{1-2\lambda_n} \tag{4.89}$$

i

$$|u_i^{(m+1)}| \le \frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3}|u_i^{(m)}|^3 \sum_{j\ne i} |u_j^{(m)}|, \quad i \in I_n \tag{4.90}$$

za svaki iteracioni indeks $m = 0, 1, \ldots$.

Neka je

$$t_i^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(m)}|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Iz (4.90) sledi

$$\begin{aligned} t_i^{(m+1)} &= \frac{1}{d^{(m+1)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(m+1)}| \\ &\le \frac{1}{d^{(m+1)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \frac{\gamma}{\left(d^{(m)}\right)^3}|u_i^{(m)}|^3 \sum_{j\ne i}|u_j^{(m)}|. \end{aligned}$$

Kako je

$$|u_i^{(m)}|^3 = \left(d^{(m)}\right)^3 \left(\frac{1}{d^{(m)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}|u_i^{(m)}|\right)^3 \left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma}}\right)^3,$$

tj.

$$|u_i^{(m)}|^3 = \left(d^{(m)}\right)^3 \left(t_i^{(m)}\right)^3 \frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma},$$

i

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \sum_{j\neq i} |u_j^{(m)}| &= \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \sum_{j\neq i} d^{(m)} t_i^{(m)} \left(\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma}}\right) \\
&= \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} d^{(m)} \sqrt[3]{\frac{1-2\lambda_n}{(n-1)\,\gamma}} \sum_{j\neq i} |t_i^{(m)}| \\
&= d^{(m)} \sum_{j\neq i} t_j^{(m)},
\end{aligned}$$

dobijamo

$$t_i^{(m+1)} \leq \frac{(1-2\lambda_n)\, d^{(m)}}{(n-1)\, d^{(m+1)}} \left(t_i^{(m)}\right)^3 \sum_{j\neq i} t_j^{(m)}.$$

Odavde, na osnovu (4.89), nalazimo

$$t_i^{(m+1)} \leq \frac{1}{n-1} \left(t_i^{(m)}\right)^3 \sum_{j\neq i} t_j^{(m)}, \quad i \in I_n. \tag{4.91}$$

Na osnovu (4.65) dobijamo

$$\begin{aligned}
t_i^{(0)} &= \frac{1}{d^{(0)}} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} |u_i^{(0)}| \leq \frac{1}{d^{(0)}} \rho c_n d^{(0)} \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}} \\
&\leq \rho c_n \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}
\end{aligned}$$

za svako $i = 1, \ldots, n$. Neka je

$$h_n = \max_{1\leq i\leq n} t_i^{(0)} \leq \rho c_n \sqrt[3]{\frac{(n-1)\,\gamma}{1-2\lambda_n}}.$$

Neposredno se proverava da je

$$h_n \leq h_3 < 0.8785, \quad n \geq 3.$$

Na osnovu ovog iz (4.91) zaključujemo da nizovi $\left\{t_i^{(m)}\right\}$ (i, zajedno sa njima, $\left\{|u_i^{(m)}|\right\}$) teže ka nuli za svako $i = 1, \ldots, n$. Otuda sledi da je Wang–Zhengov postupak (4.63) konvergentan.

Kako je

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \min_{i\neq j} |\zeta_i - \zeta_j|,$$

sa $u^{(m)} = \max_{1\leq i\leq n} |u_i^{(m)}|$, iz (4.87) sledi

$$|u_i^{(m+1)}| \leq u^{(m+1)} \leq (n-1)\frac{\gamma}{{d^{(m)}}^3}|u^{(m)}|^4,$$

što dokazuje drugi deo teoreme. ■

Literatura

[1] O. Aberth, *Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously*. Math. Comp. 27 (1973), 339–344.

[2] A. Akritas, *An implementation of Vincent's theorem*. Numer. Math. 36 (1980), 53–62.

[3] G. Alefeld, J. Herzberger, Introduction to Interval Computation. Academic Press, New York 1983.

[4] W. Börsch-Supan, *A posteriori error bounds for the zeros of polynomials*. Numer. Math. 5 (1963), 380–398.

[5] W. Börsch-Supan, *Residuenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange-Interpolation*. Numer. Math. 14 (1970), 287–296.

[6] D. Braess, K. Hadeler, *Simultaneous inclusion of the zeros of a polynomial*. Numer. Math. 21 (1973), 161–165.

[7] L. Brugnano, D. Trigiante, *Polynomial roots: The ultimate answer?* Linear Algebra Appl. 225 (1995), 207–219.

[8] C. Carstensen, *On quadratic-like convergence of the means for two methods for simultaneous root finding of polynomials*, BIT 33 (1993), 64–73.

[9] C. Carstensen, M.S. Petković, *On iteration methods without derivatives for the simultaneous determination of polynomial zeros*. J. Comput. Appl. Math. 45 (1993), 251-266.

[10] C. Carstensen, T. Sakurai, *Simultaneous factorization of a polynomial by rational approximation*. J. Comput. Appl. Math. 61 (1995), 165–178.

[11] P. Chen, *Approximate zeros of quadratically convergent algorithms*. Math. Comp. 63 (1994), 247–270.

[12] J.H. Curry, *On zero finding methods of higher order from data at one point*. J. Complexity 5 (1989), 219–237.

[13] K. Dočev, *Vidoimenen metod na Njuton za ednovremeno priblizitelno presmjatane na vsički koreni na dadeno algebrično uravnenie*. Fiz.-Mat.Spis. Blgar. Akad.Nauk 5 (1962), 136–139.

[14] E. Durand, Solution numériques des équations algébraiques. Tom. I: Équations du Type $F(x) = 0$; Racines d'un Polynôme. Masson, Paris 1960.

[15] L.W. Ehrlich, *A modified Newton method for polynomials*. Comm. ACM 10 (1967), 107–108.

[16] M.R. Farmer, G. Loizou, *A class of iteration functions for improving, simultaneously, approximations to the zeros of a polynomial.* BIT 15 (1975), 250–258.

[17] M.R. Farmer, G. Loizou, *An algorithm for total, or parallel, factorization of a polynomial.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 82 (1977), 427–437.

[18] M.R. Farmer, G. Loizou, *Locating multiple zeros interactively.* Comput. Math. Appls. 11 (1985), 595–603.

[19] J.B.J. Fourier, *Oeuvres de Fourier.* Vol. II Gauthier–Villars, Paris 1890, pp. 249–250.

[20] P. Fraigniaud, *The Durand-Kerner polynomial root finding method in case of multiple roots.* BIT 31 (1991), 112–123.

[21] I. Gargantini, *Parallel Laguerre iterations: complex case.* Numer. Math. 26 (1976), 317–323.

[22] I. Gargantini, *Further applications of circular arithmetic: Schröder-like algorithms with error bounds for finding zeros of polynomials.* SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), 497–510.

[23] I. Gargantini, P. Henrici, *Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros.* Numer. Math. 18 (1972), 305–320.

[24] M.W. Green, A.J. Korsak, M.C. Pease, *Simultaneous iteration toward all roots of a complex polynomial.* SIAM Rev. 18 (1976), 501–502.

[25] W. Gregg, R. Tapia, *Optimal error bounds for the Newton-Kantorowich theorem.* SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974), 10–13.

[26] E. Hansen, M. Patrick, *A family of root finding methods.* Numer. Math. 27 (1977), 257–269.

[27] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, Vol. I. John Wiley & Sons, New York 1974.

[28] Đ. Herceg, *Računarska implementacija i interpretacija iterativnih metoda za rešavanje jednačina.* Magistarska teza, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997.

[29] Đ. Herceg, *An algorithm for localization of polynomial zeros.* Proceedings of VIII International Conference on Logic and Computer Science Lira '97, (eds. R. Tošić, Z. Budimac), Institute of Mathematics, Novi Sad 1997, 67–75.

[30] Đ. Herceg, M.S. Petković, S. Tričković, *On the fourth order methods of Weierstrass' type.* Nonlinear Analys, Theory, Methods & Applications, 30,1 (1997), 83–88.

[31] S. Ilić, Đ. Herceg, *Point estimation of Tanabe's method.* Novi Sad Journal of Mathematics 28,3 (1998), 51–60.

[32] S. Ilić, Đ. Herceg, M.S. Petković, *On the convergence of Halley-like method.* Novi Sad Journal of Mathematics 28,3 (1998), 61–70.

[33] S. Ilić, M.S. Petković, Đ. Herceg, *A note on Babylonian square-root algorithm and related variants.* Novi Sad Journal of Mathematics 26,1 (1996), 155–162.

[34] M.A. Jenkins, J.F. Traub, *A three stage variable shift iteration for polynomial zeros and its relation to generalized Rayleigh iteration.* Numer. Math. 14 (1970), 252–263.

[35] S. Kanno, N. Kjurkchiev, T. Yamamoto, *On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros.* Japan J. Indust. Appl. Math. 2 (1996), 267–288.

[36] L.V. Kantorovich, *Functionaln'ii analiz i prikladnaja matematika.* Uspekhi Mat. Nauk. III 6,28 (1948), 89–185.

[37] L.V. Kantorovich, G. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces. MacMillan, New York 1964.

[38] I.O. Kerner, *Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen.* Numer. Math. 8 (1966), 290–294.

[39] M. Kim, Ph. D. Thesis. City University of New York, New York 1985.

[40] M. Kim, S. Sutherland, *Polynomial root-finding algorithms and branched cover.* SIAM J. Comput. 25 (1994), 415–436.

[41] P. Kravanja, *On computing zeros of analytic functions and related problems in structured numerical linear algebra.* Ph. D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven 1999.

[42] V.H. Maehly, *Zur iteration Auflösung algebraischer Gleichnungen.* Z. Angew. Math. Phys. 5 (1954), 260–263.

[43] M. Marden, Geometry of Polynomials. Mathematical surveys, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island 1966.

[44] G.V. Milovanović, *A method to accelerate iterative processes in Banach space.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 461–497 (1974), 67–71.

[45] T. Miyakoda, *Iterative methods for multiple zeros of a polynomial by clustering.* J. Comput. Appl. Math. 28 (1989), 315–326.

[46] T. Miyakoda, *Balanced convergence of iterative methods for multiple zeros of a complex polynomial.* J. Comput. Appl. Math. 39 (1992), 201–212.

[47] H. Muto, T. Suzuki, T. Suzuki, *A root finding method using errors of the numerical integral.* (u pripremi).

[48] A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[49] A.W.M. Nourein, *An iteration formula for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial.* J. Comput. Appl. Math. 4 (1975), 251–254.

[50] A.W.M. Nourein, *Root determination by use of Padé approximants.* BIT 16 (1976), 291–297.

[51] A.W.M. Nourein, *An improvement of two iteration methods for simultaneous determination of the zeros of a polynomial.* Internat. J. Comput. Math. 6 (1977), 241–252.

[52] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, New York 1970.

[53] A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York 1966.

[54] A.M. Ostrowski, Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces. Academic Press, New York 1973.

[55] V.Y. Pan, *Solving a polynomial equation: some history and recent progress.* SIAM Rev. 39 (1997), 187–220.

[56] L. Pasquini, D. Trigiante, *A globally covergent method for simultaneously finding polynomial roots,* Math. Comp. 44 (1985), 135–149.

[57] L. Pasquini, D. Trigiante, *Numerical methods for simultaneously approaching roots of polynomials.* Proc. on Trends in the Theory and Practice of Non-linear Analysis (ed. V. Lakshmikantham), North-Holand, Amsterdam 1985, 363–370.

[58] M.S. Petković, Uvod u intervalnu matematiku. Naučna knjiga, Beograd 1988.

[59] M.S. Petković, Iterative Methods for the Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[60] M.S. Petković, *On initial conditions for convergence of simultaneous root-finding methods.* Computing 57 (1996), 163–177.

[61] M.S. Petković, C. Carstensen, M. Trajković, *Weierstrass' formula and zero-finding methods.* Numer. Math. 69 (1995), 353–372.

[62] M.S. Petković, D. Herceg, *Higher-order iterative methods for approximating zeros of analytic functions.* J. Comput. Appl. Math. 39 (1992), 243–258.

[63] M.S. Petković, Đ. Herceg, *Simultaneous methods with corrections on MIMD parallel computers.* Proceedings of the VII Conference on Logic and Computer Science Lira '95, (eds. Đ. Paunić, R. Tošić), Institute of Mathematics, Novi Sad 1995, 129–136.

[64] M.S. Petković, Đ. Herceg, *Point estimation and safe convergence of root-finding simultaneous methods.* Scientific Review 21–22 (1996), 117–130.

[65] M.S. Petković, Đ. Herceg, *Börsch-Supan-like methods:Point estimation and parallel implementation.* Intern. J. Comput. Math. 64 (1997), 327–341.

[66] M.S. Petković, Đ. Herceg, *Localization of polynomial zeros.* XI Conference on Applied Mathematics, (eds. D. Herceg, K. Surla), Institute of Mathematics, Novi Sad 1997, 319–330.

[67] M.S. Petković, Đ. Herceg, *Interval methods with corrections for the simultaneous determination of polynomial zeros.* Nonlinear Analys, Theory, Methods & Applications, 30,1 (1997), 73–82.

[68] M.S. Petković, Đ. Herceg, *On the convergence of Wang–Zheng's method.* J. Comput. Appl. Math., 91 (1998), 123–135.

[69] M.S. Petković, Đ. Herceg, S. Ilić, Point Estimation Theory and its Applications. Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.

[70] M.S. Petković, Đ. Herceg, S. Ilić, *Point estimation and some applications to iterative methods.* BIT 38 (1998), 112–126.

[71] M.S. Petković, Đ. Herceg, S. Ilić, *Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros.* Numerical Algorithms 17 (1998), 313–331.

[72] M.S. Petković, S. Ilić, *Point estimation and the convergence of the Ehrlich–Aberth method.* Publications de l' Institut Mathématique 62 (1997), 141–149.

[73] M.S. Petković, S. Ilić, S. Tričković, *A family of simultaneous zero-finding methods.* Comput. Math. Appl. 34 (1997), 49–59.

[74] M.S. Petković, Z.M. Marjanović, *A class of simultaneous methods for the zeros of analytic functions.* Comput. Math. Appls. 10 (1991), 79–87.

[75] M.S. Petković, Lj. Petković, Đ. Herceg, *Point estimation of a family of simultaneous zero–finding methods.* Comput. Math. Appl.. 36 (1998), 1–12.

[76] M.S. Petković, L.V. Stefanović, *On some improvements of square root iteration for polynomial complex zeros.* J. Comput. Math. Appl. 15 (1986), 13–25.

[77] M.S. Petković, L.V. Stefanović, *On some parallel higher-order methods of Halley's type for finding multiple polynomial zeros.* Proc. of Intern. Conf. on Numerical Methods and Approximations Theory, (ed. G.V. Milovanović), Faculty of Electronic Engineering, Niš 1988, 329–337.

[78] M.S. Petković, S. Tričković, Đ. Herceg, *Higher order Euler-like methods.* Novi Sad Journal of Mathematics 28,3 (1998), 129–136.

[79] M.S. Petković, S. Tričković, Đ. Herceg, *On Euler-like method for simultaneous approximation of polynomial zeros.* Japan J. Indust. Appl. Math. 15,2 (1998), 295–315.

[80] M. Prešić, Jedan iterativni postupak za određivanje k korena polinoma. Doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd 1971.

[81] S.B. Prešić, *Un procédé itératif pour la factorisation des polynômes.* C.R.Acad. Sci. Paris Sér. A 262 (1966), 862–863.

[82] L. Rall, *A note on the convergence of Newton's method.* SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974), 34–36.

[83] T. Sakurai, M.S. Petković, *On some simultaneous methods based on Weierstrass-Dochev correction.* J. Comput. Appl. Math. 72 (1996), 215–221.

[84] T. Sakurai, T. Torii, H. Sugiura, *An iterative method for algebraic equation by Padé approximation.* Computing 46 (1991), 131–141.

[85] T. Sakurai, T. Torii, H. Sugiura, *A high-order iterative formula for simultaneous determination of zeros of a polynomial.* J. Comput. Appl. Math. 38 (1991), 387–397.

[86] B. Sendov, A. Andreev, N. Kjurkchiev, Numerical Solution of Polynomial Equations (Handbook of Numerical Analysis, Vol. III*)*. Elsevier Science, New York 1994.

[87] M. Shub, S. Smale, *Computational complexity: on the geometry of polynomials and a theory of costs, I.* Ann. Sci École Norm. Sup. 18 (1985), 107–142.

[88] M. Shub, S. Smale, *Computational complexity: on the geometry of polynomials and a theory of costs, II.* SIAM J. Comput. 15 (1986), 145–161.

[89] S. Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory.* Bull. Am. Math. Soc. 4 (1981), 1–35.

[90] S. Smale, *Netwon's method estimates from data at one point.* In: The Merging Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics (eds. R.E. Ewing, K.I. Gross, C.F. Martin), Springer–Verlag, New York 1986, pp. 185–196.

[91] T. Sunaga, *Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis.* RAAG Memoris 2 (1958), 29–46.

[92] K. Tanabe, *Behavior of the sequences around multiple zeros generated by some simultaneous methods for solving algebraic equations (in Japanese).* Tech. Rep. Inf. Process. Numer. Anal. 4–2 (1983), 1–6.

[93] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations. Chelsea, New York 1982.

[94] J.F. Traub, H. Wozniakowski, *Convergence and complexity of Newton iteration for operator equations.* J. Assoc. Comp. Mach. 29 (1979), 250–258.

[95] A.J.H. Vincent, *Sur la résolution des équations numériques.* J. Math. Pures Appl. 1 (1836), 341–372.

[96] H.S. Wall, *A modification of Newton's method.* Amer. Math. Montly 2 (1948), 90–94.

[97] X. Wang, *Convergence of Newton's method and inverse function theorem in Banach space.* Math. Comp. 68, 225 (1999), 169–186.

[98] X. Wang, D. Han, *On dominating sequence method in the point estimate and Smale's theorem.* Scientia Sinica Ser. A (1989), 905–913.

[99] D. Wang, F. Zhao, *On the determination of the safe initial approximation for the Durand-Kerner algorithm.* J. Comput. Appl. Math. 38 (1991), 447-456.

[100] D. Wang, F. Zhao, *The theory of Smale's point estimation and its application.* J. Comput. Appl. Math. 60 (1995), 253–269.

[101] X. Wang, S. Zheng, *A family of parallel and interval iterations for finding all roots of a polynomial simultaneously with rapid convergence (I).* J. Comput. Math. 1 (1984), 70–76.

[102] X. Wang, S. Zheng, *A family of parallel and interval iterations for finding all roots of a polynomial simultaneously with rapid convergence (II) (in Chinese).* J. Comput. Math. 4 (1985), 433–444.

[103] K. Weierstrass, *Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Produkt aus linearen Funktionen derselben Veränderlichen.* Ges. Werke 3 (1903), 251–269, Johnson, New York 1967.

[104] W. Werner, *On the simultaneous determination of polynomial roots.* In: Iterative Solution of Nonlinear Systems of Equations. Lecture Notes in Mathematics 953, Springer–Verlag, Berlin 1982, 188–202.

[105] H.S. Wilf, *A global bisection algorithm for computing the zeros of polynomials in the complex plane.* J. Assoc. Comput. Mach. 25 (1978), 415–420.

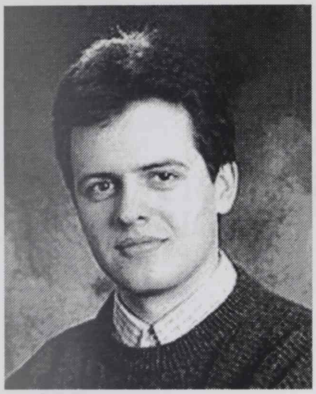
[106] T. Yamamoto, U. Furkane, K. Nogura, *The Durand-Kerner and the Aberth methods for solving algebraic equations (in Japanese).* Juo-ho Syori (Information Processing), 18 (1977), 566–571.

[107] T. Yamamoto, S. Kanno, L. Atanassova, *Validated computation of polynomial zeros by the Durand–Kerner method.* In: Topics in Validated Computations (ed. J. Herzberger), Elsevier Science, B.V. Amsterdam 1994.

[108] X. Ying, *A reliable root solver for automatic computation with application to stress analysis of a composite plane wedge.* Ph. D. Thesis, Washington University in St. Louis, 1986.

[109] F. Zhao, D. Wang, *The theory of Smale's point estimation and the convergence of Durand–Kerner program (in Chinese).* Math. Numer. Sinica 15 (1993), 196–206.

KRATKA BIOGRAFIJA



Rođen sam 6. marta 1973. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Ivo Lola Ribar" i srednju prirodno-matematičku školu "Jovan Jovanović-Zmaj" završio sam u Novom Sadu sa odličnim uspehom. U osnovnoj školi sam bio učenik generacije.

Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer informatika, upisao sam se 1991. godine, sve predviđene ispite položio sa prosečnom ocenom 9.28 a 30. juna 1995. godine odbranio diplomski rad sa ocenom 10.

Magistrirao sam 26. septembra 1997. godine. Za magistarsku tezu i naučne radove proizašle iz nje dobio sam Pupinovu nagradu Matice srpske za nauku 1998. godine.

Učestvovao sam sa saopštenjem na devet domaćih i tri međunarodna naučna skupa.

Autor sam ili koautor 20 naučnih radova, dva priručnika za studente matematike i hemije Prirodno-matematičkog fakulteta, jedne monografije na engleskom jeziku i jednog priručnika za srednje škole.

U Novom Sadu, 25. 4. 1999. Đorđe Herceg

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Đorđe Herceg
AU
Mentor: Prof. dr Miodrag Petković
MN
Naslov rada: Konvergencija simultanih postupaka za nalaženje nula polinoma
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s / e
JI
Zemlja publikovanja: SR Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 1999.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Institut za matematiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (5, 60, 21, 5, 5, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Numerička matematika

ND

Ključne reči: Iterativni postupci, simultano nalaženje nula polinoma, konvergencija, lokalizacija nula. polinoma,

PO

UDK:

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Disertacija se bavi iterativnim postupcima za simultano određivanje nula polinoma. Glavna pažnja je posvećena problemu izbora početnih aproksimacija koje omogućavaju sigurnu konvergenciju razmatranih postupaka. Koristeći originalne metode zasnovane na teoremama o lokalizaciji nula polinoma i konvergenciji nizova, konstruisani su računski proverljivi početni uslovi koji garantuju konvergenciju najčešće korišćenih simultanih postupaka.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 23. decembra 1998.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	dr Katarina Surla, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Miodrag Petković, redovni profesor Elektronskog fakulteta u Nišu
Član:	dr Zorica Uzelac, vanredni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu
Član:	dr Nataša Krejić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Ph. D. thesis

CC

Author: Đorđe Herceg

AU

Mentor: Prof. Dr. Miodrag Petković

MN

Title: Convergence of simultaneous methods for determination of polynomial zeros

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Yugoslavia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 1999

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Institute of Mathematics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (5, 60, 21, 5, 5, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words: Iterative methods, simultaneous determination of polynomial zeros, convergence, localization of polynomial zeros.

SKW

UC:

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Dissertation deals with iterative methods for simultaneous determination of polynomial zeros. The main attention is devoted to the problem of the choice of initial approximations which provide a safe convergence of the considered methods. Using original methods based on suitable localization theorems for polynomial zeros and the convergence of sequences, computationally verifiable initial conditions that guarantee convergence of the most frequently used simultaneous methods are constructed.

Accepted by the Scientific Board on: December 23, 1998.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President:	Dr. Katarina Surla, Full Professor,
	Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Dr. Miodrag Petković, Full Professor
	Faculty of Electronic Engineering, University of Niš
Member:	Dr. Zorica Uzelac, Associate Professor
	Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Nataša Krejić, Assistant Professor
	Faculty of Science, University of Novi Sad