UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

mr Tanja Sekulić

EFEKTI PRIMENE MATEMATIČKOG MODELOVANJA NA OBRADU POJMA IZVODA FUNKCIJE U VISOKOM STRUKOVNOM OBRAZOVANJU

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2020.

PREDGOVOR

Doktorska disertacija *Efekti primene matematičkog modelovanja na obradu pojma izvoda funkcije u visokom strukovnom obrazovanju* je rezultat dugogodišnjeg rada sa studentima strukovnih studija i želje i težnje autora da studente upozna sa svetom matematike i pruži im priliku da realno okruženje sagledaju iz ugla matematike i njene primene.

Tokom rada na doktorskoj disertaciji pomogli su mi mnogi i ovom prilikom se svima najiskrenije zahvaljujem.

Najveću zahvalnost i poštovanje iskazujem prof. dr Đurđici Takači, mojoj dragoj mentorki, za ukazano poverenje, bezrezervnu podršku, razumevanje i pomoć koju mi je pružala tokom doktorskih studija, realizacije istraživanja i izrade naučnog rada i doktorske disertacije. Saveti, stručna pomoć i primedbe, a naročito dragoceno znanje koje mi je profesorka prenela uticali su na moj celokupan rad, a disertaciji utemeljili glavne postavke i dali joj konačni oblik.

Mojim prijateljima i kolegama se posebno zahvaljujem na saradnji i što su bili uz mene kada mi je bilo najpotrebnije.

Neizmernu zahvalnost uputila bih mojoj porodici za razumevanje, svu pomoć i podršku koju su mi bezuslovno pružali tokom rada na disertaciji.

Iznad svega, zahvaljujem se Anđeli i Nikoli, mojim neiscrpnim izvorima ljubavi, inspiracije i motivacije da istrajem i da se bavim onim što najviše volim – matematikom.

Novi Sad, 2020. Tanja Sekulić

SADRŽAJ

1. UVOD

1.1. UVOD

„Matematika je nauka koja se sastoji iz dva vrlo važna aspekta. Sa jedne strane, to je specijalna nauka sa posebnom kulturom mišljenja. Pri tome, ova nauka ima svoju unutrašnju estetiku i lepotu, koja nije dostupna svima, kao što je slučaj i sa muzikom, umetnošću, literarnim stvaralaštvom.... Sa druge strane, matematika poseduje tu izuzetnu funkcionalnost koja nam omogućava da uvedemo poredak i razumevanje u svaki deo našeg života, ali sa sobom nosi i opasnost od zloupotrebe. Cilj matematičkog obrazovanja bi trebao da bude da pomogne studentima da steknu koherentan pogled na matematiku. Proces obrazovanja bi trebao da bude orjentisan ka oba aspekta matematike i morao bi da usmerava studente da iskuse oba.“

Hans – Wolfgang Henn, 2007 (p.125)

Inženjerska profesija u svakom društvu koje teži ka svom razvoju i unapređenju ima vrlo važnu ulogu i iz tog razloga obrazovanje budućih profesionalaca iz svih oblasti inženjeringa treba da bude od prioritetnog značaja. Funkcionalno znanje, odnosno pripremanje studenata da svoja znanja koriste za rešavanje problema iz profesionalnog okruženja, predstavlja jednu važnu perspektivu inženjerskog, tj. strukovnog obrazovanja (Schuster, Richert & Jeschke, 2015).

Matematika je za inženjering od vitalnog značaja, jer predstavlja univerzalni jezik komunikacije (Blockley & Woodman, 2002). Svakodnevna inženjerska praksa zahteva aktivnu primenu različitih oblasti matematike i iz tog razloga posebnu pažnju treba posvetiti razvoju matematičkih znanja i veština kod studenata inženjerstva, kao i unapređenju strategija poučavanja matematike na nivou visokog obrazovanja (Carr, Bowe & Ní Fhloinn, 2013; Mustoe, 2003; Pinto & Tall, 2001; Pyle, 2001).

Kalkulus, a naročito oblast diferencijalnog računa ima vrlo širok spektar primene u mnogim naukama, kao i u različitim oblastima profesionalnog i naučnog delovanja savremenog čoveka, a posebno u inženjerstvu. Osnovni pojam diferencijalnog računa je izvod funkcije, i njegovo dobro poznavanje, a naročito razumevanje i sticanje veština za primenu njegovih osobina, jedan je od preduslova za dalje praćenje nastave matematike u visokom školstvu, a kasnije i drugih predmeta (Bingolbali, Monaghan & Roper, 2007).

Razumevanje izvoda funkcije je direktno povezano sa razvojem kompetencija za manipulaciju sa njegovim različitim reprezentacijama (Presmeg, 2006). Međutim, zbog apstraktne i dinamičke prirode izvoda funkcije, vrlo često nastaju teškoće tokom učenja i realizacije nastave (Musgrave, Hatfield & Thompson, 2015; Sahin, Aydogan & Erbas, 2015; Tall, 1993; Tall, 2010; Ubuz, 2007). Zbog toga je način na koji se izvod funkcije obrađuje u nastavi matematike od presudne važnosti jer je njegovo suštinsko razumevanje neophodno za kasniju pravilnu primenu u bilo kojoj nauci ili zanimanju. Potvrđeno je da metodski pristupi koji podrazumevaju primenu različitih reprezentacija doprinose boljim postignućima studenata u rešavanju realnih problema i primeni izvoda u profesionalnoj praksi (Dick & Edvards, 2008; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2009).

Promena paradigme u matematičkom obrazovanju, čiji je smisao prelazak sa teoretskog pristupa na funkcionalno znanje, neosporno ukazuje na neminovnost promene metodskih pristupa koji se koriste u nastavi. Novi metodski pristupi kojima bi se ostvarili ciljevi i ishodi savremenog obrazovanja trebali bi biti zasnovani na principima interdisciplinarnosti i uvođenju i rešavanju realnih problema u nastavu (Ellis & Berry, 2005; Hoffman, Johnson & Logg, 2004; Wu, 1996; Wu, 1997; Zeidmane & Cernajeva, 2011). Matematičko modelovanje zbog svojih osobina i pozitivnih rezultata ostvarenih njegovom primenom, predstavlja jednu od perspektivnih strategija koja se može primeniti u nastavi matematike (Blum, 1993; Blum *et al.,* 2007; English, 2004; Kaiser & Sriraman, 2006; Kaiser, Blomhøj & Sriraman, 2006, Maaß, 2010; Meyer, 2015; Pollak & Garfunkel, 2014).

Zbog svoje dinamičke prirode bazirane na povezivanju realnih problema i njihovom opisivanju pomoću matematičkih teorija, matematičko modelovanje se u nastavi matematike može iskoristiti i kao adekvatan metodski pristup za obradu pojmova diferencijalnog računa, a naročito izvoda funkcije (Goos, Stillman & Vale, 2007; Stillman *et al.*, 2007).

U većini literature iz oblasti nastave matematike, istaknuta je važnost ukazivanja na primenu matematičkih teorija i ilustrovanje pojmova primerima iz realnog života, a glavna pretpostavka ove disertacije je da bi predstavljanje i obrada gradiva na taj način, uz primenu matematičkog modelovanja, dalo bolje rezultate učenja i doprinelo efektnijoj realizaciji nastavnog procesa (Galbraith, Stillman & Brown, 2010).

Autori koji se bave osavremenjavanjem nastave matematike ističu i značaj aktivnog učenja, odnosno učenja metodskim pristupima koji kroz proces učenja dovode do međusobne interakcije studenata i profesora, i naglašavaju da takav pristup nastavi matematike vodi ka lakšem usvajanju i boljem razumevanju matematičkih pojmova (Gavalcova, 2008; Ivić, Pešikan i Antić, 2001).

U savremenoj didaktičkoj literaturi postoje autori koji se bave predlozima kako da se matematičko modelovanje integriše u nastavu matematike i prirodnih nauka, sa posebnim akcentom na prateće kognitivne procese koji se odvijaju u svakom stadijumu procesa matematičkog modelovanja (Ferri, 2006; Kaiser & Maaß, 2006; Stillman, Brown & Galbraith, 2010).

Može se primetiti da postoji potreba za istraživanjima koja bi dala detaljan osvrt na pitanje integrisanja matematičkog modelovanja u nastavu matematike, naročito na nivou visokog školstva i u oblasti diferencijalnog računa, jer se veliki broj autora iz oblasti matematičkog obrazovanja bavi primenom metode matematičkog modelovanja u nastavi matematike na nivou osnovnog i srednjeg obrazovanja. Međutim, broj autora koji se bavi osavremenjavanjem nastave matematike na nivou visokog školstva je izuzetno mali i ukazuje na neophodnost proširivanja saznanja vezanih za unapređenje nastave i metodskih pristupa koji bi se koristili u nastavi matematike u visokom školstvu.

Takođe, trebalo bi preciznije empirijski utvrditi vezu između primene matematičkog modelovanja i uopšte metodskih pristupa koji bi koristili matematičko modelovanje kao postupak za učenje matematike, i uticaja primene ovih metoda na kvalitet stečenih znanja učenika i studenata.

Upravo iz navedenih razloga, primena matematičkog modelovanja u nastavi uopšteno, a posebno u nastavi matematike u visokom obrazovanju, zahteva odgovore na neka vrlo važna pitanja i dileme vezane za sam proces učenja, a to su: da li obrada izvoda funkcije primenom matematičkog modelovanja pruža studentima dodatnu motivaciju, bolju moć vizuelizacije, razumevanja i shvatanja uzročno-posledičnih veza prilikom učenja? Da li ovakav vid nastave pomaže tradicionalnom učenju, u kojoj meri i na koji način? Kako osmisliti nastavu matematike i matematičke modele tako da rezultati nastavnog procesa budu što efektniji? Kako obučiti nastavnike za primenu matematičkog modelovanja u nastavi matematike?

Na osnovu svega navedenog proistekla je ideja za produbljivanjem didaktičke teorije vezane za učenje matematike savremenim metodskim pristupima, posebno matematičkog modelovanja uz primenu računara i odgovarajućeg softvera, njegovog povezivanja sa nastavnom praksom, kao i želja da se osmišljavanjem zanimljivih matematičkih modela i njihovom primenom doprinese modernijem i interesantnijem pristupu nastavi matematike u cilju unapređenja znanja studenata koja se odnose na izvod funkcije i njegove primene.

Predmet istraživanja realizovanog u okviru ove disertacije je ispitivanje efekata primene matematičkog modelovanja u visokoškolskoj nastavi matematike pri obradi nastavnih sadržaja iz oblasti izvoda funkcije, kao i razvoj i implementacija novih pristupa zasnovanih na modelovanju podržanom računarskim tehnologijama.

Konsultujući savremenu didaktičku literaturu, tj. prethodno sprovedena istraživanja i rezultate, može se ustanoviti da je aktuelno i važno postaviti sledeća značajna pitanja koja zahtevaju dublju analizu i donošenje zaključaka:

- Kako osmisliti matematičke modele vezane za izvod funkcije koji će ga najbolje ilustrovati i rezultovati njegovim pravilnim usvajanjem i razumevanjem?
- Kako integrisati odabrane procese matematičkog modelovanja i matematičke modele vezane za izvod funkcije u nastavu matematike?
- Kako oceniti uticaj primene matematičkog modelovanja u nastavi matematike na kvalitet stečenih znanja studenata?
- Kako proceniti potrebe i osmisliti obuke nastavnika za dalju primenu matematičkog modelovanja u nastavi matematike?

Doktorska disertacija će se baviti traženjem odgovora na ova pitanja, sa jasnim ciljem da se da značajan doprinos savremenoj metodici matematike.

1.2. CILJ I HIPOTEZA RADA

Istraživanje koje je sprovedeno u okviru ove doktorske disertacije je imalo nekoliko ciljeva, podeljenih na glavni cilj i ostale ciljeve koji su realizovani disertacijom.

Glavni cilj istraživanja:

> *Utvrđivanje stepena uticaja primene metode matematičkog modelovanja (kao i svih realizovanih kognitivnih aktivnosti u etapama njegovog procesa) u nastavi matematike u visokom školstvu na kvalitet stečenih znanja studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.*

Izradom doktorske disertacije biće postignuti i sledeći ciljevi:

- Unapređivanje teorijskih principa matematičkog modelovanja i mogućnosti za njegovu primenu u nastavnoj praksi.
- Implementacija matematičkog modelovanja u nastavni proces u visokom školstvu.
- Izrađivanje i osmišljavanje edukativnih materijala (u vidu matematičkih modela) koji će omogućiti studentima da izučavaju izvod funkcije i njegovu primenu koristeći matematičko modelovanje.
- Izrađivanje instrumenata (testova znanja o izvodu funkcije i njegovoj primeni usklađenih sa odgovarajućim nastavnim planom i programom), kojima se može izmeriti uticaj primene matematičkog modelovanja na kvalitet osnovnih znanja iz oblasti izvoda funkcije.
- Osmišljavanje i izrada edukativnih materijala, kao i elemenata obuke nastavnika za primenu metode matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi.

U skladu sa postavljenim glavnim i ostalim ciljevima istraživanja, kao i na osnovu rezultata dosadašnjih istraživanja, postavljena je i opšta hipoteza istraživanja:

Pretpostavlja se, da primena metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju i na matematičkom modelovanju kombinovanom sa računarskim tehnologijama, ima pozitivan uticaj na kvalitet stečenih znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene, kao i na stvaranje pozitivnog stava prema matematici i njenoj korisnosti.

Od disertacije se očekuje i uspešno osmišljavanje, formiranje i implementiranje inovativnog metodskog pristupa baziranog na principima matematičkog modelovanja u visokoškolsku nastavu matematike, a koji će biti iskorišćen za uvođenje i obradu pojma izvoda funkcije i njegove primene. Posebno, očekuje se i uspešno sprovođenje samog procesa matematičkog modelovanja, koji će biti u skladu sa metodičkim principima nastave matematike.

Takođe, očekuje se da će rezultati eksperimentalnog istraživanja potvrditi da primena matematičkog modelovanja u nastavi matematike u visokom školstvu ima značajan pozitivan uticaj na formiranje dobrog koncepta slike pojma izvoda funkcije i razvoja naprednog matematičkog mišljenja kod studenata, što će se ogledati u njihovoj znatno boljoj sposobnosti da gradivo primene u realnim situacijama.

Naročito se očekuje povoljan uticaj matematičkog modelovanja na pozitivan odgovor studenata na učenje matematike, na značajno lakše uspostavljanje interakcije nastavnik - studenti, bolje usvajanje apstraktnih pojmova i posebno na popularizaciju matematike kao nauke sa velikim mogućnostima za primenu u svakodnevnoj praksi.

Ova doktorska disertacija će dati značajan naučni doprinos i savremenoj metodici matematike kroz svoj teorijski doprinos, tj. analizu i kritički komparativni pregled savremenih radova koji se bave primenom matematičkog modelovanja i problematikom njegovog korišćenja u nastavi matematike.

U disertaciji će se takođe prikazati i ilustrovati kompletan proces matematičkog modelovanja - osmišljavanje modela, njihovo kreiranje i implementacija u nastavu visokoškolske matematike, a sve na temu izvoda funkcije i njegove primene.

Jedan od doprinosa disertacije će biti i osmišljavanje elemenata obuke nastavnika za primenu matematičkog modelovanja i realizaciju nastave matematike korišćenjem savremenih metodskih pristupa baziranih na modelovanju.

Pored navedenog, disertacija će dati i svoj veliki doprinos matematičkom obrazovanju strukovnih inženjera, kroz implementaciju matematičkog modelovanja u nastavni proces u cilju sticanja funkcionalnog znanja koje kasnije mogu da iskoriste ne samo u matematici, već i u drugim naukama, i što je najvažnije, u realnom okruženju i svom budućem zanimanju.

1.3. STRUKTURA RADA

Doktorska disertacija se sastoji od šest celina koje prate faze istraživanja koje je realizovano u okviru teze.

Druga glava rada sledi nakon uvodne glave i daje pregled teorijskih sadržaja vezanih za učenje, metodiku nastave matematike i matematičko modelovanje. Analizirana je teorija učenja i njeni aspekti vezani za metode, stilove i strategije učenja matematike, kao i za osobine mišljenja sa naročitim naglaskom na formiranje matematičkog mišljenja. Matematičko modelovanje je predstavljeno od svog nastanka do današnjeg stepena razvoja i posebno je razmatrana uloga i način primene modelovanja u nastavnoj praksi. Računarske tehnologije su takođe predstavljene u ovoj glavi disertacije, naročito je obrađen softver *GeoGebra* i mogućnosti njegove primene u obrazovne svrhe. S obzirom da je istraživanje opisano u disertaciji fokusirano ka diferencijalnom računu, preciznije ka izvodu funkcije, jedno poglavlje je posvećeno komparativnom pregledu pristupa obradi pojma izvoda funkcije u nastavi matematike. Diskutovani su i analizirani problemi koji se javljaju u visokoškolskoj nastavi matematike i dati su predlozi za otklanjanje tih problema.

Treća glava disertacije je posvećena primeni matematičkog modelovanja u visokoškolskoj nastavi matematike za obradu nastavnih sadržaja iz oblasti izvoda funkcije i njegovih primena. Ova glava disertacije je organizovana u pet poglavlja.

U uvodnom poglavlju su istaknuti osnovni principi na kojima je zasnovano matematičko modelovanje i komentarisani su dosadašnji rezultati njegove primene u nastavi matematike.

U drugom poglavlju je detaljno opisan rad sa studentima eksperimentalne grupe sa kojima je nastava realizovana primenom metodskog pristupa baziranom na matematičkom modelovanju. U ovom poglavlju je prikazan način na koji su primenom matematičkog modelovanja metodički razrađeni sadržaji koji se tiču pojma izvoda funkcije, od količnika priraštaja, grafičke i algebarske reprezentacije izvoda funkcije do njegove geometrijske interpretacije.

Sadržaj trećeg poglavlja je usmeren ka obradi primene izvoda funkcije matematičkim modelovanjem. Prikazan je i opisan nastavni rad sa studentima i data su metodička uputstva za obradu sadržaja koji se odnose na primenu izvoda na ispitivanje monotonosti funkcije i ekstremnih vrednosti.

Tok procesa modelovanja je analiziran u okviru četvrtog poglavlja, na osnovu čega su date su smernice za dalje unapređenje primene metodskih pristupa baziranih na modelovanju u nastavi matematike.

Metodološki koncept istraživanja je predstavljen u petom poglavlju. Predmet, cilj i hipoteze istraživanja su navedeni i opisani su uzorak, instrumenti i metode primenjene tokom istraživanja. U šestom poglavlju su analizirani i diskutovani rezultati istraživanja.

Četvrta glava disertacije opisuje eksperimentalno istraživanje o uticaju primene novog pristupa matematičkom modelovanju predloženom u ovom radu na obradu pojma izvoda funkcije i njegove primene. Ova glava rada je organizovana u šest poglavlja.

U prvom, uvodnom poglavlju, je izvršena komparacija teorijskih saznanja o primeni matematičkog modelovanja u nastavi i značaju vizuelizacije i primene računarskih tehnologija za proces modelovanja.

Drugo poglavlje opisuje originalni pristup matematičkom modelovanju realizovanom u računarskom okruženju koji je razvijen za potrebe istraživanja, kao i mogućnosti zasnivanja metodskih pristupa na tako inoviranom procesu modelovanja.

Treće poglavlje opisuje aktivnosti studenata tokom primene novog pristupa matematičkom modelovanju u *GeoGebra* okruženju (eksperimentalna grupa) na obradu pojma izvoda funkcije. U okviru istog poglavlja je prikazan rad sa studentima pri obradi sadržaja vezanih za definiciju izvoda funkcije, količnik priraštaja, višestruke reprezentacije izvoda funkcije i njegovu geometrijsku interpretaciju, i način na koji su oni metodički transformisani u skladu sa principima novog pristupa modelovanju u *GeoGebra* okruženju.

U četvrtom poglavlju je prikazana primena novog pristupa modelovanju u računarskom okruženju na obradu primene izvoda na ispitivanje monotonosti, ekstremnih vrednosti i konveksnosti i konkavnosti funkcije. Opisan je način predstavljanja situacija iz realnog sveta preko video i grafičkih materijala i njihov doprinos u razvijanju kompetencija studenata za prepoznavanje i rešavanje problema iz realnog sveta.

U petom poglavlju je navedena metodologija empirijskog dela istraživanja i prezentovani su ciljevi, hipoteze, uzorak, metode, tehnike i instrumenti istraživanja i prikupljanja podataka. U ovoj glavi opisana je konstrukcija instrumenata potrebnih za istraživanje. Diskutovani su i analizirani svi instrumenti korišćeni u istraživanju. Za svaki tip testa je data metodička argumentacija zadataka koje su sadržali.

Rezultati svakog testa znanja su obrađeni primenom statističkih metoda i analizirani i diskutovani u šestom poglavlju.

Peta glava disertacije je posvećena mestu i ulozi matematičkog modelovanja u nastavničkoj praksi. U okviru ove glave diskutovano je o značaju matematičkog modelovanja za savremenu nastavu matematike i navedene su osnovne smernice za ispunjenje ciljeva savremene nastave matematike primenom matematičkog modelovanja. Ovaj deo rada je naročito posvećen nastavnicima matematike na svim nivoima obrazovanja i zahtevima koje pred njih postavlja moderna nastava matematike. Integracija matematičkog modelovanja u kurikulume i nastavni proces je takođe razmatrana u okviru ove glave. Razrađeni su mehanizmi za razvoj kompetencija nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u nastavi matematike i date su neke osnovne smernice koje se tiču ocenjivanja i razvoja nastavnih materijala neophodnih za realizaciju procesa matematičkog modelovanja. Na osnovu analize savremenih trendova u obrazovanju nastavnika, predloženi su načini realizacije obuke nastavnika za unapređenje njihovih kompetencija za primenu matematičkog modelovanja. U ovoj glavi disertacije je predstavljeno istraživanje sprovedeno sa nastavnicima matematike na teritoriji grada Zrenjanina u okviru kojeg je ispitano stanje i predlozi nastavnika za unapređenje nastave matematike i unapređenje kompetencija nastavnika. Rezultati istraživanja sa nastavnicima su diskutovani i analizirani i na osnovu njih su date smernice za sprovođenje daljih obuka za unapređenje kompetencija nastavnika koje se tiču primene matematičkog modelovanja i savremenih računarskih tehnologija u nastavi.

U šestoj glavi disertacije su navedena zaključna razmatranja i date su smernice za dalja istraživanja o mogućnosti primene matematičkog modelovanja u nastavi matematike na svim nivoima obrazovanja. Pozitivni efekti primene matematičkog modelovanja u nastavi matematike su istaknuti u ovoj glavi, kao glavni naučni doprinos ove disertacije.

2. TEORIJSKE OSNOVE METODIKE NASTAVE MATEMATIKE I MATEMATIČKOG MODELOVANJA

2.1. UVOD

Metodika nastave matematike predstavlja kompleksnu oblast koja objedinjuje znanja i dostignuća iz psihologije, matematike, pedagogije i drugih oblasti koje su podjednako važne za razvoj i unapređivanje matematičkog obrazovanja. Ova glava disertacije daje pregled teorijskih osnova metodike matematike i matematičkog modelovanja koje je korišćeno u istraživanju opisanom u disertaciji.

Glava se sastoji od šest poglavlja. Drugo poglavlje je posvećeno učenju i nastavi matematike kao osnovnim pojmovima sa kojima se susrećemo u didaktici i metodici nastave matematike. Predstavljene su osobine, strategije i metode učenja, zatim matematičko mišljenje i njegove osobine.

Treće poglavlje se bavi osnovnim principima matematičkog modelovanja, sa naglaskom na njegovu primenu u nastavnoj praksi.

Četvrto poglavlje predstavlja računarske tehnologije, sa aspekta njihove primene u nastavi matematike, kao i softver *GeoGebra* koji je korišćen za potrebe istraživanja u ovoj disertaciji.

Peto poglavlje je posvećeno visokoškolskoj nastavi matematike, sa naglaskom na uočene probleme koji se javljaju u nastavi matematike u visokom strukovnom obrazovanju i predlozima za otklanjanje tih problema.

S obzirom da je istraživanje sprovedeno u okviru disertacije imalo za temu obradu pojma izvoda funkcije i njegovih osobina u visokoškolskoj nastavi matematike, u šestom poglavlju su komentarisani različiti pristupi obrade diferencijalnog računa, a posebno pojma izvoda funkcije i njegove primene.

2.2. UČENJE I NASTAVA MATEMATIKE

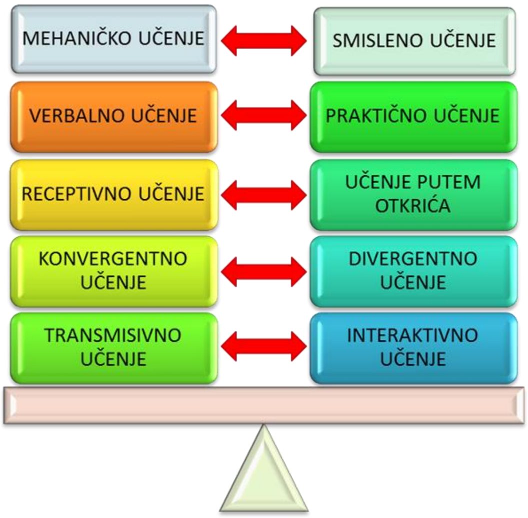
Pri obučavanju dece neophodno je težiti k tome da se kod njih postepeno sjedinjuje znanje sa umenjem. Izgleda da je od svih nauka jedino matematika sposobna da u potpunosti zadovolji ovaj zahtev.

Immanuel Kant

2.2.1. Metode, stilovi i strategije učenja

Proučavanjem učenja i svega što je sa njim u vezi se bavi jedna od najstarijih grana psihologije, *Psihologija u obrazovanju,* čiji je utemeljivač psiholog Thorndike (1903). Psihologija u obrazovanju proučava proces učenja i nastave, istražuje psihološke strane procesa vaspitanja i obrazovanja i takođe je primenjena nauka koja stalno doprinosi unapređenju procesa učenja i nastave i svega što iz tih procesa proizilazi.

Metode učenja predstavljaju načine i tehnike savlađivanja i usvajanja novih saznanja. One mogu biti raznolike u zavisnosti od aktivnosti i sadržaja koji se izučavaju. U daljem tekstu će biti prikazana jedna od klasifikacija metoda učenja (Ivić *i sar.*, 2001). Ovaj način klasifikacije razvrstava metode učenja u pet osnovnih kategorija koje su date svaka sa svoja dva suprotna pola (Slika 2.1).



Slika 2.1. *Klasifikacija metoda učenja*

- **Mehaničko učenje ↔ Smisleno učenje** Mehaničko učenje se odnosi na učenje sadržaja napamet, a smisleno učenje predstavlja metodu učenja sa razumevanjem. Kod mehaničkog učenja glavni problem predstavlja to što je ovakav način učenja neproduktivan i ne ide u prilog unapređivanju znanja i sposobnosti učenika/studenata i motivaciji za učenje (Looß, 2001). Ova metoda učenja je, na žalost, još uvek široko rasprostranjena u školskoj praksi na svim nivoima obrazovanja. Smisleno učenje predstavlja jedan bolji aspekat u odnosu na mehaničko učenje, ali je često kritikovano od strane mnogih autora (Ivić i sar., 2001). Učenicima se primenom ove metode učenja predstavljaju smisleni podaci i ukazuje se na veze između njih, ali i dalje ostaje neispitano koliko učenici zaista učestvuju u procesu učenja.
- **Verbalno učenje ↔ Praktično učenje** Verbalno učenje podrazumeva učenje sadržaja koji su iskazani verbalnim simbolima (usmeno, pismeno) nasuprot praktičnog učenja gde se sadržaji realizuju kroz neke praktične radnje (pisanje, crtanje, rad na računaru, itd.). Prvi tip učenja se odnosi na deklarativno znanje, učenje činjenica i podataka, dok drugi tip učenja podrazumeva ovladavanje veštinama rešavanja problema, prezentovanja i karakterističan je za metodske pristupe koji se zasnivaju na principima matematičkog modelovanja.
- **Receptivno učenje ↔ Učenje putem otkrića** Razlika između receptivnog i učenja putem otkrića je u tome što su kod receptivnog učenja sadržaji unapred dati i učenici/studenti treba samo da ih usvoje, a kod učenja putem otkrića učenici/studenti imaju zadatak da sadržaje samostalno otkriju. Ovakva metoda učenja je zastupljena kod metodskih pristupa zasnovanih na konstruktivizmu i problemskoj nastavi koja počinje situacijama gde je potrebno rešiti neki problem.
- **Konvergentno učenje ↔ Divergentno učenje** Konvergentno učenje je logičko učenje gde je moguće dati samo jedan ispravan odgovor. Koristi se u nastavi matematike kada problem ima samo jedno tačno rešenje i kada nastavnik želi da utvrdi moguće greške kod učenika/studenata. Divergentno učenje je stvaralačko učenje gde se podstiče postojanje

različitih rešenja problema i perspektiva rešavanja. Kod ove metode učenja svaki učenik/student može ponuditi svoju verziju rešenja i algoritma rešavanja problema.

- **Transmisivno učenje ↔ Interaktivno učenje** Transmisivno i interaktivno učenje se odnose na vrstu komunikacije koja je prisutna tokom nastave i učenja. Jednosmerna komunikacija gde nastavnik predaje a učenici/studenti slušaju, bez slobode da nešto kažu ili pitaju odgovara transmisivnom učenju. Nasuprot tome, grupni rad kao produkt ima interaktivno učenje i karakteriše ga aktivno učešće i nastavnika i učenika/studenata u nastavi.

Istraživanja metoda učenja u našem školstvu sprovedena sa nastavnicima ukazuju da postoji jednaka zastupljenost mehaničkog i smislenog učenja, da je verbalno učenje zastupljenije u odnosu na praktično i da je receptivno učenje dominantno u odnosu na učenje putem otkrića (Ivić *i sar.*, 2001). Takođe, prisutna je dominacija konvergentnog u odnosu na divergentno učenje i transmisivne nastave u odnosu na interaktivnu.

Stilovi učenja predstavljaju preferirane načine na koje učenik/student razmišlja, obrađuje i usvaja nove pojmove (Vulfolk, Hjuz i Volkap, 2014a; Willingham, Hughes, & Dobolyi, 2015). Postoje različiti modeli stilova učenja, od kojih su najpoznatije ustanovili Kolb (2015), Mumford (1995) i drugi.

Strong *et al.* (2004) su stilove učenja razmatrali sa aspekta matematike i ustanovili su da se na osnovu razlika u pristupu savlađivanja gradiva iz matematike mogu izdvojiti četiri stila (Slika 2.2.).

Slika 2.2. *Stilovi učenja matematike po Strong et al. (2004)*

Razumevanje navedenih stilova učenja matematike i koncipiranje nastave oko sva četiri stila može nastavnicima omogućiti da imaju bolji uvid u dobre strane ali i slabosti učenika i pomoći im da prilagode nastavni proces tako, da ishodi učenja budu najbolji mogući.

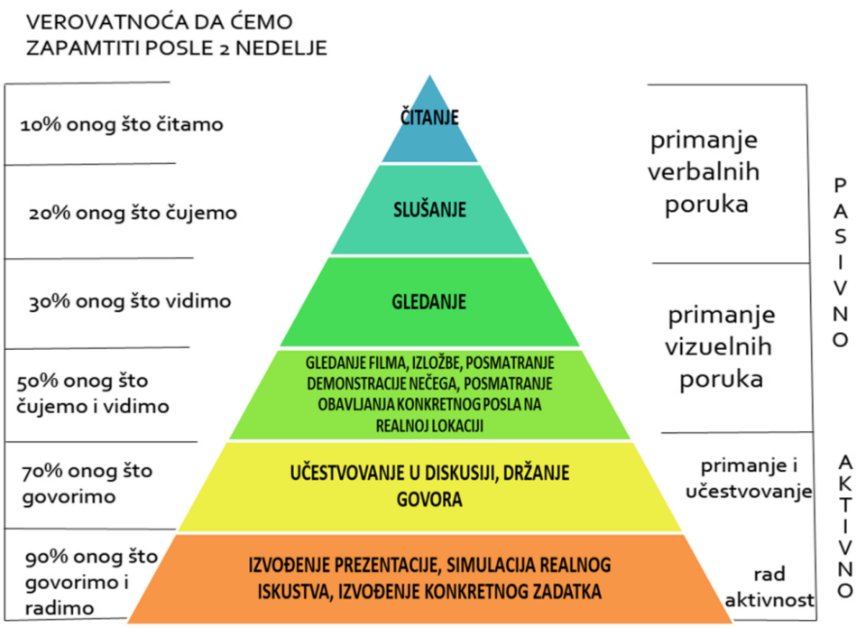
Strategije učenja predstavljaju planove za realizaciju i ostvarivanje ciljeva učenja (Vulfolk, Hjuz i Volkap, 2014b). Strategije učenja su vrlo raznolike i zavise od individualnih preferencija. Da bi učenje rezultovalo što boljim efektima, učenici/studenti bi trebalo da se upoznaju sa različitim strategijama kako bi mogli da izaberu onu koja najviše odgovara njihovom stilu učenja (Derry, 1989).

Istraživanja usmerena ka unapređenju strategija učenja matematike su globalno aktuelna i obuhvataju osmišljavanje novih strategija poučavanja i učenja matematike i njihovo prilagođavanje školskim sistemima iz različitih zemalja (OECD, 2010).

Uzimajući u obzir metode, stilove i strategije učenja, zadatak koji se stavlja pred savremene škole je da se omogući metodski raznovrsna nastava matematike koja će za cilj imati učenje sa razumevanjem koje podrazumeva organizovanost sadržaja za učenje, motivaciju učenika/studenata za učenje, transfer znanja (prethodno stečenih i novih), reorganizaciju znanja i poznavanje efikasnih tehnika učenja (Royer, 2009; Wu, 1996). Jedan od metodskih pristupa koji bi mogao da ispuni navedene zahteve je pristup zasnovan na principima matematičkog modelovanja koji će biti predstavljen u okviru ove disertacije.

2.2.2. Nivoi učenja

Analizirajući različite metode, stilove i strategije učenja, jasno je da svaka od njih izaziva drugačije efekte. Američki pedagog Dale (1969) je razvio teoriju poznatu pod nazivom *Piramida učenja (iskustva)* gde je piramidalnim prikazom predstavio različita iskustva prilikom učenja i usvajanja novih znanja. U piramidi su naznačeni redosledi strategija učenja uzimajući u obzir njihovu efikasnost, počevši od najmanje delotvornih na vrhu piramide, do najdelotvornijih u njenoj osnovi (Slika 2.3.).



Slika 2.3. *Piramida učenja po Dale (1969)*

Iz piramide učenja se može uočiti da je razdvojeno aktivno od pasivnog učenja i da je aktivnom učenju pripisan veći značaj što potvrđuje rezultate istraživanja o efikasnosti pojedinih metoda učenja (Bonwell & Eison, 1991; Prince, 2004). Učenje kroz iskustva, putem otkrivanja i interakcijom je na najvišem nivou značajnosti po Dale (1969).

Međutim, ovakva hijerarhija učenja ne poništava u potpunosti mogućnosti pasivnog učenja, nego samo naglašava da iskustva koja su bliska realnim situacijama imaju daleko veći uticaj na sposobnost učenja i pamćenja.

Integrisanje u nastavu metodskih pristupa koji podržavaju aktivno učenje i učenje kroz realna iskustva, kao što je na primer matematičko modelovanje koje poseduje sve navedene osobine, moglo bi da doprinese kvalitetnijem usvajanju nastavnih sadržaja na svim nivoima obrazovanja.

2.2.3. Strategije učenja i Bloom-ova taksonomija

Strategije učenja su najčešće su povezane sa potrebama i interesima učenika/studenata vezanim za poboljšanje ishoda učenja i zasnovane su na različitim metodama učenja. Ciljevi učenja stoje u direktnoj vezi sa metodskim pristupima koji će biti korišćeni u nastavi i sa nastavnim pomagalima koji će ispratiti izabrani metodski pristup.

Za izbor strategije učenja i odgovarajućih metodskih pristupa koji će biti korišćeni za postizanje ciljeva učenja, najčešće se koristi *Bloom-ova taksonomija* (Tabela 2.1). Bloom (1956) je pedesetih godina dvadesetog veka razvio taksonomiju ciljeva vaspitanja i obrazovanja. Taksonomija je razvijena u tri domena: kognitivnom, afektivnom i psihomotornom. Prvo je razvijen deo taksonomije koji se odnosi na kognitivni domen (Bloom, 1956) a odmah nakon njega je dalje razvijan i afektivni domen (Kraftwohl, Bloom & Masia, 1956). Bloom (1956) je najveći doprinos dao u razvoju kognitivnog domena, i delimično u afektivnom. U svakom od tri domena su hijerarhijski uređeni ciljevi i ishodi učenja, počev od najosnovnijih, pa sve do najviših nivoa.

Tabela 2.1. *Bloom-ova taksonomija i pripadajući metodski pristupi*

	KOGNITIVNI DOMEN (Bloom, 1956)	**AFEKTIVNI DOMEN** (Krathwohl, Bloom i Masia)	**PSIHOMOTORNI DOMEN** (Simpson)
Predavanja, čitanje, audio/video demonstracija, navođenje kroz pitanja i odgovore	Znanje	Primanje informacija	Refleksni pokreti
Diskusija, Sokratov metod, upitnici, igranje uloga, studija slučaja,...	Razumevanje Primena	Reagovanje na fenomene	Fundamentalni pokreti i mehanizmi
Praktična nastava, praktična nastava uz vođenje od strane nastavnika	Analiza	Vrednovanje	Kompleksni pokreti
Primena realnih primera u nastavi	Sinteza	Organizovanje informacija po prioritetima	Adaptacija
Samostalno učenje, učenje na greškama,...	Evaluacija	Karakterizacija informacija	Neverbalna komunikacija

Iz tabele se vidi da se niži nivoi (na vrhu tabele) mogu realizovati i kroz pasivno učenje a da je za više nivoe neophodno uključiti i principe aktivnog učenja što je u skladu sa nivoima učenja koje je ustanovio Dale (1969).

Bloom-ova taksonomija je do današnjeg vremena više puta revidirana da bi bila u skladu sa savremenom didaktikom. Najnoviji pravac u kojem se ova taksonomija razvija je njeno prilagođavanje učenju i nastavi uz digitalne tehnologije (Munzenmeier & Rubin, 2013).

2.2.4. Matematičko mišljenje

U prirodi matematičkih problema stoji mogućnost njihovog rešavanja uz pomoć različitih pristupa. Ovakva mogućnost proističe iz toga što su kod ljudi ustanovljeni različiti načini razmišljanja. Na temu matematičkog mišljenja na našim prostorima nije rađeno mnogo istraživanja, ali najnovija istraživanja u svetu upućuju na postojanje tri osnovna stila razmišljanja koji se tiču pristupa rešavanju matematičkih problema (Ferri, 2012):

- Vizuelni pristup
- Analitički pristup
- Konceptualni pristup

Empirijski je potvrđeno da *vizuelni pristup* podrazumeva matematičko mišljenje zasnovano na formiranju slika, dinamičkih prikaza i drugih slikovnih reprezentacija koje vode ka rešavanju zadatog problema. Vizuelni tipovi su skloni formiranju unutrašnjih imaginacija na bazi situacija koje su iskusili i oni razumevanje matematičkih sadržaja pronalaze u holističkoj reprezentaciji.

Analitički pristup uključuje ispitivanje strukture problema, traženje uzoraka ili pravila. Matematičko mišljenje zasnovano na ovom pristupu je simboličko i formalno. Karakteristike ove vrste mišljenja su razumevanje matematičkih sadržaja kroz formalne, verbalne i simboličke reprezentacije i rešavanje problema kroz niz povezanih koraka.

Konceptualni pristup podrazumeva razmišljanje kroz različite ideje i klasifikovanje sadržaja.

Takođe, uočeno je i da postoje integrisani stilovi matematičkog mišljenja i oni obično podrazumevaju mešanje dva pristupa.

Empirijskim studijama je takođe utvrđeno da postoje neki principi kod matematičkog mišljenja, a to su (Ferri, 2012):

- Matematičko mišljenje nije sposobnost rešavanja matematičkih problema, već preference nekog određenog stila razmišljanja.
- Matematičko mišljenje je odlika pojedinačne ličnosti jer su preference povezane sa pozitivnim sklonostima.
- Strategije rešavanja matematičkih problema nisu matematičko mišljenje jer se strategije nalaze na višem nivou svesti.
- Matematičko mišljenje je uslovljeno socijalizacijom, tačnije, roditelji i nastavnici mogu uticati na stil učenja matematike.

Stil matematičkog mišljenja predstavlja način kako određena osoba želi da razume i uči matematiku a ne koliko dobro ta osoba razume matematiku. Sternberg (1997) je ustanovio teoriju stilova mišljenja i on definiše stil kao način mišljenja koji ne predstavlja sposobnost, već preferirani način korišćenja sposobnosti koje ličnost poseduje. Tumačenje ove definicije je da se stilovi mišljenja mogu menjati i da njihova promena zavisi od vremena, okruženja i životnih zahteva.

Postoji više definicija stila matematičkog mišljenja, a jedna od njih koja je bazirana na Sternberg-ovoj teoriji stilova mišljenja je ovde prenesena u celosti:

> „*Stil matematičkog mišljenja je način na koji individua želi da prezentuje, da razume i da razmišlja o matematičkim činjenicama i vezama između njih uz pomoć unutrašnjih imaginacija i/ili spoljašnjih reprezentacija. Otuda, stil matematičkog mišljenja je baziran na dve komponente: 1) na unutrašnjim imaginacijama i/ili spoljnim reprezentacijama; 2) na holističkom, odnosno analitičkom načinu rada.*“ , (Ferri, 2012, p. Abcde+3).

2.2.5. Napredno matematičko mišljenje (NMM)

Osnovno matematičko mišljenje i napredno matematičko mišljenje nisu dva odvojena pojma. Zapravo, između ova dva pojma ne postoji oštra granica, mada se može naglasiti da je NMM fokusiranje ka apstrakciji definicija i dedukciji. Jedan od glavnih ciljeva istraživanja vezanih za ovaj pojam jeste utvrđivanje šta se zapravo dešava kod učenika/studenata sa kognitivne strane kada se oni bave naprednom matematikom i kako nastavnici mogu da doprinesu stvaranju NMM kod učenika/studenata.

Proces NMM uključuje dva aspekta koji su nerazdvojivi: matematički i psihološki. Matematičke i mentalne slike koje su sastavni deo procesa NMM uslovljavaju postojanje jedna drugoj i upravo ta matematičko-psihološka veza čini ovaj proces interesantnim i naročito značajnim za razumevanje učenja i mišljenja na nivou napredne matematike.

Pionir u metodici matematike i prvi naučnik koji je povezao matematiku, obrazovanje i psihologiju, Skemp (1962) je zastupao stav da se napredno matematičko mišljenje može formirati i kod učenika u ranijem stadijumu razvoja mišljenja (od 5. do 11. godine starosti) iako se do tada smatralo da se apstraktni koncepti mogu usvajati od stadijuma formalnih operacija, odnosno od 11. godine starosti, (Pjaže i Inhelder, 1996). Po Skemp (1962), vrlo važnu ulogu igra i način zadavanja instrukcija prilikom uvođenja nekog koncepta i naglašava dva principa usvajanja koncepata višeg reda:

- Koncepti koji su višeg reda u odnosu na one koji su već usvojeni ne mogu se usvojiti samo navođenjem novih definicija, već navođenjem većeg broja primera koji ilustruju taj koncept.
- Obzirom da su primeri u matematici uglavnom novi koncepti, prilikom navođenja primera mora se osigurati da su kod učenika već formirani koncepti iz tih primera.

Za napredno matematičko mišljenje su od naročite važnosti proces naprednog matematičkog mišljenja i matematička kreativnost.

Proces naprednog matematičkog mišljenja

Posmatrajući i analizirajući proces NMM može se zaključiti da se on može razdvojiti na dva podjednako važna procesa (Tall, 2002):

1. <u>Procesi uključeni u reprezentaciju</u>
    - *Proces reprezentovanja* – Uključuje primenu simbola i dodeljivanje značenja istim, i proces formiranja mentalnih slika nekog matematičkog pojma. Proces formiranja mentalnih slika zavisi od reprezentacije i u uskoj je vezi sa vizuelizacijom pojma.
    - *Promena reprezentacija i prevođenje* – Samo postojanje različitih reprezentacija nekog koncepta nije dovoljno za uspešno rešavanje matematičkih problema. Proces koji je neophodan kod NMM jeste upravo povezivanje različitih reprezentacija i njihovog značenja radi formiranja šire slike nekog koncepta, čime se omogućuje i rešavanje ne samo formalnih matematičkih problema, već i problema iz realnog sveta.
    - *Modelovanje* – Modelovanje se odnosi na pronalaženje matematičke reprezentacije nekog nematematičkog objekta. Na taj način je moguće uspostaviti vezu između fizičkog objekta i njegove mentalne reprezentacije preko modela.
2. <u>Procesi uključeni u apstrakciju</u>
    - *Generalizacija* – Dolaženje do opšte tvrdnje posmatranjem pojedinačnih slučajeva.
    - *Sinteza* – Heuristički procesi koji obuhvataju polaženje od jednostavnijih slučajeva i njihovo spajanje u jedan opšti.
    - *Apstrakcija* – Proces razmatranja osobina nekog objekta eliminisanjem njegovih osobina koje nisu relevantne. Za razliku od konkretnog, apstracija u matematici je misaoni proces i kao takva je na najvišem nivou hijerarhije učenja i razumevanja.

Ovo su samo neki od najvažnijih procesa koji su uključeni u NMM, međutim, postoje i drugi procesi koji utiču na NMM i koji su jednako važni kao i navedeni.

Matematička kreativnost

Kreativnost igra vitalnu ulogu u NMM. Matematička kreativnost je često opisivana kao nejasan fenomen zbog svoje neodređene prirode uslovljene individualnim osobinama i sklonostima (Sriraman, 2004b). Međutim, kreativnost je u matematici nezaobilazna i esencijalna, jer se samo uz njenu pomoć dolazi do novih matematičkih teorija i pomaka ka matematici budućnosti.

Jedan primer matematičke kreativnosti je formalizacija ideje proizašle od fizičkog konteksta koji leži u osnovi matematičkog problema. Otuda, matematička kreativnost se opisuje i kao „*... sposobnost kreiranja matematičkih objekata zajedno sa otkrivanjem njihovih međusobnih veza*.“ (Tall, 2002, p. 46).

Za razumevanje matematičkih koncepata kreativnost je neophodna, jer se pod razumevanjem u matematici ne smatra samo instrumentalno razumevanje (mogućnost sprovođenja procesa), već razumevanje relacija između objekata, ali na nivou osmišljavanja novih veza i njihovog značenja. Matematička kreativnost je stoga uslovljena individualnim pristupom koji se ne može sprovesti po zahtevu, već predstavlja jedan stvaralački proces kreiranja novih ideja i predstavljanja starih u novom svetlu (English, 1991; Maher & Martino, 1996; Polya, 1954; Sriraman, 2004a).

2.3. OPŠTI PRINCIPI MATEMATIČKOG MODELOVANJA

Proces matematičkog obrazovanja kod nas i u svetu trenutno trpi dosta promena. Promene se ogledaju upravo u uvođenju i primeni novih nastavnih metoda u nastavi matematike na svim nivoima, počev od osnovnoškolskog do univerzitetskog. Pri tome, od novih nastavnih metoda se očekuje da učenike i studente stimulišu da matematiku vide na drugi način, kroz praktičnu primenu i da je prepoznaju u svakodnevnom realnom životu.

Matematičko modelovanje ima istoriju kao i sama matematika, ali se to ne može reći i za istoriju primene matematičkog modelovanja u nastavi matematike. Trenutno se dosta radi na istraživanjima čija je tema vezana za primenu matematičkog modelovanja u nastavi, i sa aspekta postignuća učenika i sa aspekta obuke nastavnika za primenu ove nastavne metode (Blomhøj, 2008; Blum, 1993; Blum, 2011; Blum *et al*, 2007).

Potreba za matematičkim modelovanjem u nastavi matematike se najviše ogleda u tome što učenici i studenti izlaze iz škola i fakulteta sa relativnom visokim nivoom teoretskog znanja, ali nisu pri tome adekvatno pripremljeni za primenu tog istog znanja u praksi. Savremeni poslovni i ekonomski interesi poslodavaca zahtevaju da studenti budu pripremljeni i obučeni za rešavanje problema iz realne prakse, što znači da moraju u svakom trenutku biti spremni da se adaptiraju na novonastale situacije i zadatke koje one sa sobom nose. To znači da oni iz škola i fakulteta moraju izaći kao pametniji, pripremljeniji i bolje obučeni stručnjaci.

Ova disertacija je koncipirana tako da u njoj bude dat potpun osvrt na matematičko modelovanje, počev od njegove definicije i začetaka, preko njegovog razvoja, naročito kroz primenu u nastavi matematike, pa do konkretnih primera njegove primene u visokoškolskoj nastavi matematike.

2.3.1. Matematičko modelovanje

Tragajući za poreklom i značenjem reči *model*, u Leksikonu stranih reči i izraza (Vujaklija, 1980), mogu se naći sledeća tumačenja:

a) jedinica za meru, merilo...
b) obrazac, uzorak, mustra...
c) Um. osoba prema kojoj umetnik radi sliku ili kip...
d) Tehn. uzorak predmeta koji treba izvoditi, obično u smanjenom obliku...
e) kalup po kome se nešto izrađuje...
f) Fig. primer, uzor...

Reč model zapravo vodi poreklo od italijanske reči *modello*, koja je nastala od latinske reči *modulus*, deminutiva od *modus*, što označava *meru* ili *veličinu*. U naučnoj terminologiji reč model je poistovećena sa reprezentacijom nekog objekta, fenomena ili ideje. Iako se termin *model* koristi u svakodnevnom jeziku i ljudi razumeju njegovo značenje, ipak je veoma važno, posebno u naučnoj terminologiji, razlikovati pojmove *matematički model* i *matematičko modelovanje*, i jasno razumeti značenje svakog od ovih pojmova. Cilj ovog poglavlja je upravo u uspostavljanju jasne terminologije koja se tiče matematičkog modelovanja i svega što je sa njim u vezi.

Pojam matematičkog modelovanja

Matematički model predstavlja sliku realnog sveta opisanu matematičkim formalnim jezikom. Presudna stvar za svaki matematički model jeste da on mora da vodi ka nečemu, odnosno na osnovu njega se moraju izvući neki zaključci o realnosti koji se kasnije mogu testirati i eksperimentalno proveriti.

Postoje različite vrste matematičkih modela:

- *Normativni modeli*, od kojih su najpoznatiji modeli koji se odnose na prihode, metode izbora, itd.
- *Deskriptivni modeli*, koji se dalje dele na modele koji predviđaju (na primer vremenska prognoza), modele koji objašnjavaju (na primer model duge, zašto je vidimo) i modele koji opisuju (na primer ciklus razvoja nekog virusa).

Matematičko modelovanje je pojam o kome se još uvek vode vrlo žive debate. Ovaj pojam ima vrlo različita tumačenja, a zbog njegove primene i značaja u nastavi matematike, predlog je da se ta tumačenja objedine u jedno zajedničko, koje će biti polazna tačka za svakog istraživača.

Lingefjärd (2002, p. 117) iznosi svoje viđenje matematičkog modelovanja na sledeći način: *„Matematičko modelovanje se može definisati kao matematički proces koji uključuje posmatranje fenomena, uspostavljanje relacija, primenjivanje matematičke analize, izvođenje matematičkih rezultata i na kraju, reinterpretacije modela.“*.

Kaiser (2005, p. 1621). u svom izveštaju sa CERME4 konferencije navodi zaključak da: *„... ne postoji homogeno razumevanje pojma matematičkog modelovanja, gledano sa aspekta internacionalne diskusije vođene na temu matematičkog modelovanja i njegove primene...“* i zahtevaju preciznije pojašnjenje koncepta modelovanja gledano sa različitih aspekata, a u cilju njegove bolje primene.

Na kraju, uzimajući u obzir primenu matematičkog modelovanja u obrazovanju, Hamson (2003) upozorava da se mora precizirati šta zapravo označava termin matematičko modelovanje i šta se dešava u nastavi matematike kada se modelovanje primeni, da se ne bi ovaj termin pogrešno protumačio a samim tim i pogrešno primenio.

Principi matematičkog modelovanja u nastavi

Centralno mesto u matematičkom obrazovanju bi trebalo da zauzme stvaranje sposobnosti kod učenika i studenata da primene matematiku u različitim situacijama u realnom životu. Sa tim u vezi jesu i tri bazna cilja matematičkog obrazovanja na svakom nivou, koja je postavio nemački metodičar, Heinrich Winter u (Baumslag, 2000)*:*

(1) Uočavanje i razumevanje fenomena u realnom svetu koji nas okružujuje.

(2) Učenje i razumevanje matematičkih pojmova reprezentovanih rečima, simbolima, formulama, slikama, kao intelektualnih kreacija i deduktivno uređenog sveta.
(3) Razvijanje heurističkih veština rešavanja problema, putem analize činjenica koja ide ispred osnovnih matematičkih veština.

Matematičko modelovanje se vezuje za prvi cilj obrazovanja, za razumevanje fenomena iz realnog sveta i njihovo povezivanje sa matematikom. U svakom slučaju, primena matematičkog modelovanja u nastavi matematike je neizbežna, ukoliko se teži ispunjenju cilja – da se učenici/studenti obuče za prepoznavanje realnih situacija na koje je moguće konkretno primeniti različite matematičke teorije.

Blomhøj (2009) na osnovu svojih istraživanja iznosi tri glavna razloga za integraciju matematičkog modelovanja u nastavu matematike:

(1) Matematičko modelovanje premošćava jaz između iskustava iz realnog sveta i matematike koji postoji kod studenata. Pri tome, ono motiviše studente da uče matematiku, daje direktnu kognitivnu podršku pri stvaranju novih koncepcija i stvara matematičku kulturu u smislu opisivanja i razumevanja situacija iz realnog života.
(2) Razvojem visokotehnološkog društva, od presudne važnosti su kompetencije koje se odnose na postavljanje, analiziranje i kritikovanje matematičkih modela, kako sa individualnog aspekta u smislu obrazovanja, tako i sa socijalnog aspekta u smislu razvoja adekvatno obrazovane radne snage.
(3) Matematičko modelovanje na različitim nivoima kompleksnosti igra važnu ulogu u formiranju i funkcionisanju društva baziranog na visokotehnološkom razvoju. Imperativ za održavanje takvog društva predstavlja upravo razvoj eksperata i pojedinaca koji će biti sposobni da tumače i iskoriste rezultate modelovanja.

Trenutno, matematičko modelovanje još uvek nije dovoljno prisutno u matematičkom obrazovanju, ali se ulažu intenzivni napori kod prilagođavanja nastavnih planova i programa, u cilju primene ovog metodskog pristupa, ali takođe i kod obuke i školovanja nastavnika matematike za primenu matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi.

Analizirajući metode i strategije učenja, a posebno nivoe učenja, može se zaključiti da je matematičko modelovanje na samom vrhu. Ono spada u aktivan pristup učenju, nudi savladavanje sadržaja kroz realne primere i sticanje znanja kroz samostalno iskustvo što predstavlja najviši nivo dostignuća kod učenja i nastave. Ovakve osobine ovog pristupa samo potvrđuju da je prisustvo matematičkog modelovanja u nastavi i učenju matematike neophodno ako se za cilj matematičkog obrazovanja ima stvaranje pozitivnog stava prema matematici i njena primena na rešavanje problema iz realnog života.

2.3.2. Proces matematičkog modelovanja

Uspostavljanje relacija između realnog sveta i matematike predstavlja proces formiranja matematičkog modela. Proces modelovanja nije baš jednostavan i postoje različiti pristupi i shvatanja vezana za faze modelovanja. Pri tome, naročita pažnja treba biti posvećena cilju koji se želi postići, jer od toga zavisi sam pristup modelovanju, odabir ciklusa modelovanja i kompetencije koje se takvim postupkom modelovanja kasnije stiču.

Ciklus matematičkog modelovanja

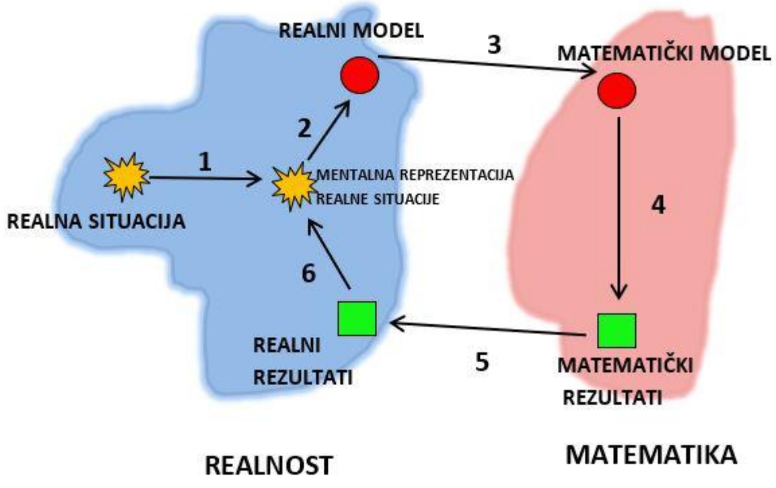
U zavisnosti od autora, postoji više različitih ciklusa matematičkog modelovanja. Prvi od njih, jeste ciklus modelovanja koji je predložio Pollak (1979) koji ilustruje čuvenu metaforu: „*Matematika i ostatak sveta*“, (Slika 2.4.).

Slika 2.4. *Ciklus modelovanja*

Ovo je najjednostavniji opis ciklusa matematičkog modelovanja, ali je uspešno poslužio kao temelj za uspostavljanje veze između matematike i realnog sveta, i postavio je osnove za budući razvoj i usavršavanje procesa modelovanja.

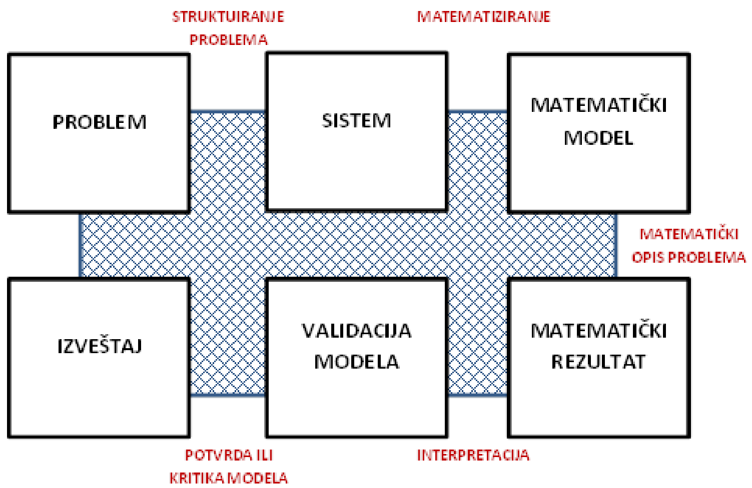
U literaturi se najčešće sreće ciklus matematičkog modelovanja koji se sastoji iz šest faza. Svaka od faza ilustruje kako proces modelovanja postupno povezuje realni svet sa formalnom matematikom. Slika 2.5. ilustruje ciklus modelovanja koji je ustanovljen od strane Blum & Ferri (2009). Faze ovog ciklusa modelovanja su sledeće: realna situacija, mentalna reprezentacija realne situacije, realni model, matematički model, matematički rezultat i realni rezultat. Takođe, ovaj model opisuje i prelaze između svake od faza:

1. Razumevanje problema
2. Pojednostavljivanje/struktuiranje problema
3. Matematiziranje
4. Matematički opis problema
5. Interpretacija
6. Validacija



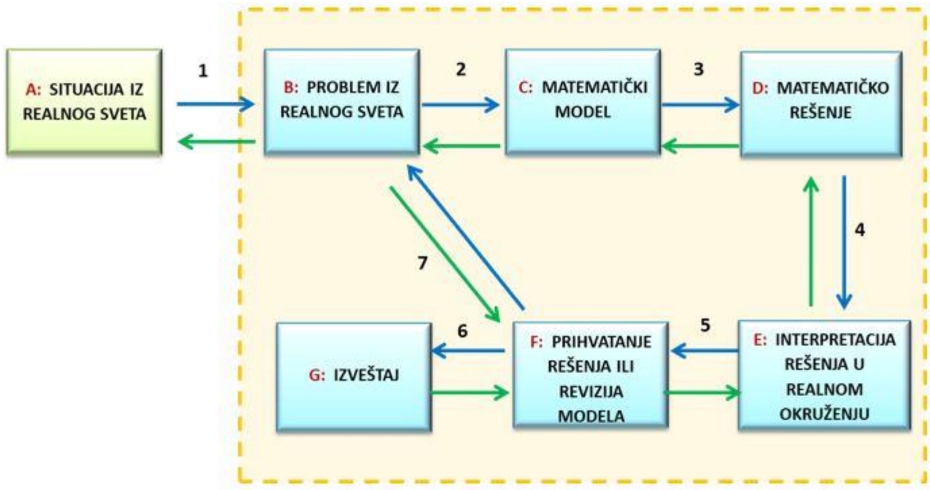
Slika 2.5. *Ciklus matematičkog modelovanja po Blum & Ferri (2009)*

Ciklus matematičkog modelovanja se može i modifikovati u cilju prilagođavanja konkretnoj primeni ili istraživanju. Važno je naglasiti da konceptualizacija procesa matematičkog modelovanja obezbeđuje šematizovan prikaz i pojednostavljenu sliku ciklusa modelovanja, ali je sa druge strane, oštro kritikovan zbog više razloga. Prvi razlog se odnosi na strogu podelu na dva domena, realni i matematički, jer se ovakva podela smatra veštačkom i nameće pitanja kada, zašto i kako je moguće napraviti takvu podelu. Drugo, empirijska istraživanja nameću zaključak da proces matematičkog modelovanja nije ciklički, i da se kod primene matematičkog modelovanja javlja niz situacija kada je neophodno „preskakati" iz jedne faze u neku drugu. Takođe, jedan smer prelaza (Slika 2.5.) jednostavno ne zadovoljava potrebe procesa modelovanja. U cilju prevazilaženja ovih problema postoji i predlog povezivanja faza modelovanja preko mreže, (Ärlebäck, 2009; Skov Hansen, Holm & Troels-Smith, 1999), koji dozvoljava prelaze u svim pravcima i smerovima (Slika 2.6.).



Slika 2.6. *Ciklus matematičkog modelovanja sa mrežnim prelazima*

Ciklus matematičkog modelovanja koji je uzet kao baza istraživanja koje će biti prezentovano u ovoj disertaciji prvi su prikazali Galbraith & Stillman (2006) a kasnije i usavršili Stillman *et al.* (2007). Ovaj ciklus je po svojim odlikama sličan sa prethodna dva, ali se u nekim detaljima i razlikuje. Od Blum & Ferri (2009) ciklusa su preuzete faze, a od Hansen *et al.* (1999) su preuzeti prelazi, koji su u ovom ciklusu dvosmerni. Slika 2.7. prikazuje ovaj ciklus matematičkog modelovanja.



Slika 2.7. *Stillman et al. (2007) ciklus matematičkog modelovanja*

Faze ciklusa modelovanja predložene u Stillman *et al.* (2007) su:

A. Situacija iz realnog sveta
B. Problem iz realnog sveta
C. Matematički model
D. Matematičko rešenje
E. Interpretacija rešenja u realnom okruženju
F. Prihvatanje rešenja ili revizija
G. Izveštaj

Prelazi u ovom ciklusu modelovanja se realizuju kroz sledeće aktivnosti:

1. Razumevanje, struktuiranje, pojednostavljenje, interpretiranje konteksta
2. Pretpostavljanje, formulisanje, matematiziranje
3. Matematički prikaz modela
4. Interpretacija matematičkih rezultata
5. Upoređivanje, kritikovanje, validacija
6. Komunikacija, verifikacija (ako je model zadovoljavajući)
7. Ponavljanje procesa modelovanja (ako model nije zadovoljavajući)

Da bi se process modelovanja mogao uspešno odvijati, neophodno je da se identifikuju specifične aktivnosti za koje bi učesnici modelovanja morali da imaju razvijene kompetencije. Pri tome se pod kompetencijom za matematičko modelovanje podrazumeva individualni kapacitet za donošenje relevantnih odluka, identifikaciju pitanja, promenljivih, relacija ili pretpostavki, kao i njihova translacija, interpretacija i validacija rešenja matematičkog problema u relaciji sa realnom situacijom koja se modeluje (Niss, Blum & Galbraith, 2007).

S obzirom da je ovaj proces matematičkog modelovanja namenjen aktivnoj primeni u nastavnoj praksi, posebna pažnja je posvećena upravo prelazima između faza i potencijalnim blokadama koje bi mogle da se jave u procesu modelovanja kod učenika/studenata. Ispitivanjem i analizom uzroka blokada procesa modelovanja, došlo se do zaključka da se uspešno modelovanje može realizovati ukoliko učenici/studenti poseduju kompetencije za sprovođenje pojedinačnih aktivnosti tokom prelaza (Stillman *et al.*, 2007; Stillman, 2012). Tabela 2.2. daje prikaz aktivnosti u okviru svakog prelaza pojedinačno:

Tabela 2.2. *Aktivnosti u okviru prelaza u procesu modelovanja po Stillman et al. (2007)*

1. SITUACIJA IZ REALNOG SVETA→PROBLEM IZ REALNOG SVETA
1.1 Pojašnjenje konteksta problema 1.2 Postavljanje jednostavnih pretpostavki 1.3 Identifikacija strategija rešavanja 1.4 Specifikacija ispravnih strategija rešavanja
2. PROBLEM IZ REALNOG SVETA→MATEMATIČKI MODEL
2.1 Identifikacija zavisnih i nezavisnih promenljivih koje će biti uključene u algebarski model 2.2 Definisanje nezavisne promenljive 2.3 Matematička reprezentacija elemenata modela da bi se mogle primeniti formule 2.4 Postavljanje relevantnih pretpostavki 2.5 Izbor tehnoloških/matematičkih alata za izračunavanja 2.6 Izbor tehnologije za automatsku primenu formula na više različitih slučajeva 2.7 Izbor tehnologije kojom bi se napravila grafička reprezentacija modela 2.8 Izbor tehnologije kojom bi se verifikovala algebarska jednačina
3. MATEMATIČKI MODEL→MATEMATIČKO REŠENJE
3.1 Primenjivanje odgovarajućih simboličkih formula 3.2Primenjivanje algebarskih postupaka za pojednostavljivanja formula u cilju iznalaženja sofisticiranijih rešenja 3.3 Primena tehnoloških/matematičkih alata za izračunavanja 3.4 Primena tehnologije za automatsku primenu formula na više različitih slučajeva 3.5 Primena tehnologije za stvaranje grafičke reprezentacije 3.6 Korektna primena sintaksnih pravila (matematičkih ili tehnoloških) 3.7 Verifikacija algebarskog modela primenom tehnologije 3.8 Nalaženje dodatnih rezultata u cilju bolje interpretacije rešenja
4. MATEMATIČKO REŠENJE→INTERPRETACIJA REŠENJA U REALNOM OKRUŽENJU
4.1 Povezivanje matematičkih rezultata sa njihovom odgovarajućom komponentom iz realnog sveta 4.2 Kontekstualizacija matematičkih finalnih i međurezultata sa situacijom iz realnog sveta 4.3 Integracija argumenata za potvrđivanje interpretacije 4.4 Smanjenje prethodnih ograničenja u cilju dobijanja rezultata koji bi podržali novu interpretaciju 4.5 Uviđanje prednosti uvođenja matematičke reprezentacije pre razmatranja interpretacije
5. INTERPRETACIJA REŠENJA U REALNOM OKRUŽENJU→PRIHVATANJE REŠENJA ILI REVIZIJA
5.1 Usklađivanje neočekivanih međurezultata sa realnom situacijom 5.2 Razmatranje implikacija matematičkih rezultata na realni svet 5.3 Usklađivanje matematičkih aspekata problema sa njegovim aspektima iz realnog sveta 5.4 Uočavanje da postoji granica u smanjenju ograničenja da bi se dobilo validno rešenje 5.5 Razmatranje globalnih primena matematičkog modela u realnom svetu

Ciklus modelovanja po Stillman *et al.* (2007), je široko prihvaćen za primenu u nastavi matematike, upravo zbog fleksibilnih tranzicija između faza modelovanja i širokih mogućnosti za diskusiju, iznošenje pretpostavki i donošenje zaključaka koje one omogućavaju, a što je zapravo i ključno u nastavi matematike, ako je cilj da se učenici/studenti aktivno uključe u nastavni proces.

Rasprava oko jedinstvenog ciklusa matematičkog modelovanja je i dalje otvorena, i širom sveta se aktivno sprovode istraživanja na ovu temu. Glavni cilj istraživača jeste da se usaglase načini za implementaciju matematičkog modelovanja u nastavnu praksu, tako da se rezultati njegove primene pozitivno odraze na stečene kompetencije i znanja učenika i studenata.

2.3.3. Perspektive matematičkog modelovanja

Homogeno razumevanje matematičkog modelovanja i njegovog porekla ni do danas nije postignuto u naučnim krugovima. Trenutno se vode žive diskusije o tome kako pristupiti modelovanju i sa tim u vezi, koje su njegove perspektive. Do sada je razvijeno više različitih perspektiva matematičkog modelovanja, a ovde će biti predstavljeno jedno od njih, usvojeno na CERME6 (*Congress of European Research in Mathematics Education*) radnoj grupi. Tendencije su bile da se perspektive modelovanja razdvoje, u zavisnosti od pristupa modelovanju: da li je pristup normativno-teoretski, ili pristup povezan sa različitim istraživanjima. Tabela 2.3. daje pregled perspektiva modelovanja u zavisnosti od pravca istraživanja za koje se koristi modelovanje.

Tabela 2.3. *Perspektive modelovanja u zavisnosti od različitih pravaca istraživanja*

NAZIV PRISTUPA	GLAVNI CILJEVI	VEZA SA RANIJIM PRISTUPIMA	AUTORI KOJI SE BAVE TIM PRISTUPOM
Kognitivni pristup	a) Analiza kognitivnih procesa koji se dešavaju tokom procesa modelovanja i njihovo razumevanje. b) Promocija procesa matematičkog mišljenja korišćenjem modela kao mentalnih slika, ili čak fizičkih slika, ili naglašavajući modelovanje kao mentalni proces kao što su apstrakcija ili generalizacija.	Kognitivna psihologija	Ferri, Jurdak, BouJaoude, Roorda, Vos, Goerdhart
Afektivni pristup	Promocija pozitivnih stavova prema matematici i nastavi matematike. Uticaj specijalnih aspekata kao što je autentičnost konteksta iz realnog sveta.	Povezani psihološki pristupi	Vorhoelter, Wake, Pampaka
Pragmatični pristup orjentisan ka nastavi	Evaluacija efekata nastave, ili mogućnost za realizaciju specijalnih primera u školi, analiza strategija nastave, mere intervencije od strane nastavnika.	Uopštena pedagoška istraživanja	
Teorijski pristup	Razvoj meta-analize modela i pristupa modelovanja.		Peled

U tabeli 2.4. su navedene različite perspektive modelovanja koje imaju normativno teoretski pristup.

Tabela 2.4. *Perspektive modelovanja u zavisnosti od normativno teoretskog pristupa modelovanju*

NAZIV PRISTUPA	GLAVNI CILJEVI	VEZA SA RANIJIM PRISTUPIMA	AUTORI KOJI SE BAVE TIM PRISTUPOM
Realističko ili primenjeno modelovanje	Pragmatičko-utilitaristički ciljevi; rešavanje problema iz realnog sveta; razumevanje realnog sveta; promocija kompetencija modelovanja	Anglo –Saksonski pragmatizam i primenjena matematika	Burkhardt; Schwarz; Kaiser; Romo Vasquez
Kontekstualno modelovanje	Ciljevi vezani za predmet i psihološki ciljevi, npr. rešavanje problema reči	Rešavanje problema i laboratorijski psihološki eksperimenti	
Pristup izazivanja modela	Psihološki ciljevi, npr. izazivanje modela putem rešavanja originalnog problema zadavanjem novog	Rešavanje problema	Mousoulides, Sriraman, Pittalis, Christou
Obrazovno modelovanje	Pedagoški i ciljevi vezani za predmet: a) Struktuiranje procesa učenja i njegovo promovisanje b) Uvođenje i razvoj koncepata c) Promocija motivacije i poboljšanja stava prema matematici d) Promocija kritičkog razumevanja procesa modelovanja i razvijenih modela	Didaktičke teorije i teorije učenja	Andresen, Berman, Verner, Aroshas, Blomhøj, Hoff, Kjeldsen, Canavarro, Maaß
Socio-kritičko i socio-kulturno modelovanje	Promocija kritičkog razumevanja procesa modelovanja i razvijenih modela, kao uopšteni cilj povezan sa prepoznavanjem kulturne zavisnosti primera modela za razvijenim pristupima modelovanju	Socio-kritički pristupi u političkoj sociologiji; etno matematika	Barbosa
Epistemološko ili teorijsko modelovanje	Promocija veza između aktivnosti tokom modelovanja i matematičkih aktivnosti, rekonceptualizacija matematike i reorganizacija matematičkih škola sa stanovišta modelovanja	Antropološka teorija didaktike	Barquero, Bosch, Gascón, Ruiz

Gore opisane perspektive modelovanja omogućavaju njegovo razumevanje gledano iz različitih aspekata. Ovakav opis daje uvid u poreklo različitih perspektiva i njihove veze sa filozofijom na kojoj su utemeljene. Jasno je da različiti pristupi koji promovišu primenu matematičkog modelovanja u nastavi matematike u školama ili na univerzitetima potiču od vrlo različitih teorijskih perspektiva, koje se kreću u rasponu od etno matematike do rešavanja problema. Sve njih karakterišu različiti stavovi o važnim aspektima primene modelovanja i njegovim ciljevima, i oni variraju od promovisanja boljeg razumevanja realnog sveta, do promovisanja učenja matematičkih teorija.

2.3.4. Kompetencije matematičkog modelovanja

„Matematička pismenost je sposobnost pojedinca da prepozna i razume ulogu koju matematika igra u savremenom svetu, da donosi odluke zasnovane na činjenicama i da koristi matematiku kako bi postao konstruktivna i istraživački orjentisana osoba koja je u stanju da procenjuje sebe i okolinu"

OECD (1999, p. 41)

Današnji zahtevi koji se stavljaju pred učenike i studente idu daleko ispred samog poznavanja teorije, iz gore navedene definicije da se zaključiti da je povezivanje realnog sveta sa formalnom naukom zapravo imperativ modernog čoveka koji želi da napreduje u društvu. Matematičko modelovanje je baš zbog toga što stvara vezu realni svet – matematika, široko prihvaćeno u nastavnoj praksi matematike u svetu.

Diskusija oko toga šta su zapravo kompetencije matematičkog modelovanja je još uvek aktuelna. Kaiser (2007) navodi da treba razlikovati kompetencije od sposobnosti modelovanja. Kompetencije modelovanja, po Kaiser predstavljaju ne samo sposobnost, već i spremnost za rešavanje problema, uzimajući u obzir matematičke aspekte iz realnog sveta, a primenom matematičkog modelovanja. Po Kaiser & Maaß (2006) u kompetencije matematičkog modelovanja se ubrajaju:

- Delimične kompetencije za sprovođenje pojedinačnih faza matematičkog modelovanja
- Meta-kognitivne kompetencije modelovanja
- Kompetencije struktuiranja problema iz realnog sveta
- Kompetencije za argumentovanu naučnu raspravu
- Kompetencije za ocenjivanje rešenja

Ove kompetencije je neophodno da poseduju nastavnici koji će u nastavu matematike integrisati proces matematičkog modelovanja i stoga treba buduće nastavnike za to i obučavati. U slučaju da budući nastavnici ne budu upoznati sa primerima matematičkih modela i procesa modelovanja, stvoriće se velika barijera za primenu ovih metoda kasnije u nastavi, što će značajno umanjiti njihov efekat.

Greer, Verschaffel & Mukhopadhyay (2007) predlažu da se kompetencije modelovanja diferenciraju na kompetencije za implicitno, eksplicitno i kritičko modelovanje, gde implicitne kompetencije modelovanja podrazumevaju aktivnosti u kojima su studenti angažovani, bez da su svesni da sprovode proces modelovanja. Eksplicitne kompetencije podrazumevaju svesnu prisutnost u procesu modelovanja, a kritičke kompetencije modelovanja obuhvataju kritičko mišljenje o ulogama, posledicama modelovanja i efekata koje ono ima na matematiku i ostale discipline. Ovo je jedan od filozofskih pogleda na kompetencije modelovanja.

Henning & Keune (2004) su takođe podelili kompetencije modelovanja u tri grupe, ali oni su ih grupisali po progresivnim nivoima. Prvi nivo, nazvan prepoznavanje i razumevanje modelovanja se odnosi na sposobnosti prepoznavanja i opisivanja procesa modelovanja, kao i određivanja faza matematičkog modelovanja. Drugi nivo, nazvan nezavisno modelovanje, odnosi se na kompetencije studenata vezane za sposobnost samostalnog rešavanja problema, i treći nivo, meta-refleksija modelovanja, podrazumeva kompetencije kritičkog mišljenja, analize i evaluacije procesa modelovanja.

Uopšteno gledano, svi autori među kompetencije modelovanja u manjoj ili većoj meri ubrajaju sposobnosti za prepoznavanje, sprovođenje, i na najvišem nivou kritikovanje i evaluaciju rešenja, odnosno matematičkog modela. Sve ove kompetencije u značajnoj meri ispunjavaju zahteve definicije navedene na početku odeljka, što upućuje na primenu matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi.

2.3.5. Pozitivni i negativni efekti primene matematičkog modelovanja u nastavi

Opšte je poznato da svaka teorija, svaki postupak ili događaj uslovljavaju pojavu kako pozitivnih, tako i negativnih efekata. Matematičko modelovanje tu nije izuzetak, stoga će biti izložene prednosti i nedostaci ove metode, posmatrano iz više aspekata: aspekata matematike, učenika i studenata, nastavnika, itd.

Prednosti matematičkog modelovanja

Postoje pet principijelnih argumenata za uvođenje matematičkog modelovanja u nastavu matematike koje su naveli Blum & Niss (1991):

1. Formativni argument se fokusira na razvijanje sposobnosti, kompetencija i stavova kod studenata poput kreativnog rešavanja problema, želje za istraživanjem, otvorenošću uma za novo i samopouzdanja.
2. Argument „kritičke kompetencije“ naglašava značaj postojanja svesnosti kod studenata o korisnosti i potencijalnim zloupotrebama matematike u društvu.
3. Argument korisnosti ukazuje na primenu matematike i u nematematičkim profesijama, kao i u privatnom životu.
4. Argument „slike matematike“ ima za cilj da studentima predstavi sliku matematike kao nauke koja čini integralni deo društva i kulture.
5. Argument „promocije učenja matematike“ obuhvata instrumentalne aspekte modelovanja tokom procesa sticanja matematičkih saznanja.

Ovi argumenti , kao i oni koji se pod njima podrazumevaju, se jednako smatraju i motivima za implementaciju matematičkog modelovanja u nastavu matematike (Blum, 1993). Upoređujući ove argumente sa generalnim zahtevima koji se stavljaju pred matematičko obrazovanje, lako se mogu izvući paralele.

Nedostaci matematičkog modelovanja

Argumenti koji se navode protiv matematičkog modelovanja se često spominju kao „barijere“ i „prepreke“, ali važi i stav da su te barijere i prepreke bazirane samo na iskustvu a nikako na rezultatima empirijskih istraživanja. Blum & Niss (1991) diskutuju prepreke za primenu matematičkog modelovanja u nastavi iz perspektiva instrukcija, učenika i nastavnika. Poasmatrajući sa aspekta instrukcija, glavna prepreka modelovanju jeste uvreženo mišljenje nastavnika da jednostavno nema ni vremena ni prostora u nastavi za primenu matematičkog modelovanja jer su kurikulumi već ionako pretrpani. Sa druge strane, mnogi nastavnici su ubeđeni da modelovanje i povezivanje matematike sa drugim predmetima ne spada u domen matematike. Sa gledišta učenika i studenata, nameće se prepreka u vidu većih zahteva koji bi se na času matematike stavljali pred učenike i studente, ukoliko bi se primenjivalo matematičko modelovanje u nastavi. Ne smeju se zanemariti ni stavovi nastavnika da je i sama matematika dovoljno apstraktna i komplikovana i da modelovanje nije potrebno jer bi je još više zakomplikovalo. Konačno, u obzir se mora uzeti i posebna obuka koja je potrebna nastavnicima da bi pravilno primenili proces matematičkog modelovanja u nastavi matematike, kao i to da nije svaki nastavnik jednako nadaren za primenu ove metode, jer modelovanje zahteva mnogo šire poznavanje procesa i disciplina daleko van okvira matematike.

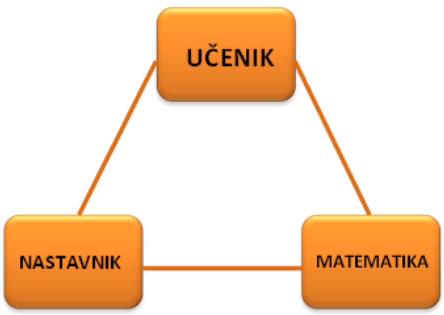
Sa ovim preprekama primene matematičkog modelovanja u nastavi matematike se mora postupati vrlo oprezno i sa velikom pažnjom ukoliko se teži ka progresu i povećanju postignuća kod učenika i studenata.

Teorija za učenje matematičkog modelovanja i za učenje putem istog je još uvek daleko od zadovoljavajućeg nivoa, i na tome će se intenzivno raditi u budućnosti. Takođe, još jedan od budućih pravaca razvoja matematičkog modelovanja odnosi se na razjašnjavanje i diferencijaciju različitih pristupa matematičkom modelovanju i njegovim perspektivama, o kojima je ranije bilo reči.

2.4. RAČUNARSKE TEHNOLOGIJE, *GeoGebra* SOFTVER I MATEMATIČKO MODELOVANJE

2.4.1. Računarske tehnologije u nastavi matematike

Do pojave računara, među metodičarima je vladao stav da se proces učenja i nastave matematike sastoji od tri aspekta (Tall, 1986a), koji su objedinjeni u *Didaktički trougao* (Slika 2.8.).



Slika 2.8. *Didaktički trougao*

U ovako organizovanom nastavnom procesu nije bilo mesta za dinamičke elemente, već su se matematički pojmovi uvodili statičkim slikama i definicijama.

Razvojem računarskih tehnologija, didaktički trougao je dobio novu dimenziju i postao *Didaktički tetraedar*, koji je kao dodatnu dimenziju sadržao računarske tehnologije (Slika 2.9.).

Slika 2.9. *Didaktički tetraedar*

Da bi se mogle primeniti u obrazovne svrhe, računarske tehnologije moraju podržavati odgovarajuće softvere koji imaju mogućnost reprezentacije matematičkih sadržaja, procesa i rezultata izračunavanja (Tall, 1986b).

Trenutno je evidentan veliki porast primene računarskih tehnologija u obrazovanju. Metodski pristupi koji podrazumevaju primenu računarskih tehnologija se primenjuju i koriste na svim nivoima obrazovanja, a potvrđen je i njihov pozitivan uticaj na razumevanje gradiva kod studenata (Mayer & Moreno, 2002).

Doprinos inovativnog pristupa vizuelnom učenju baziranom na primeni računarskih tehnologija su ispitivali mnogi autori (Karadag & McDougall, 2009a; Karadag & McDougall, 2009b). Prema primeni računarskih tehnologija u nastavi vlada stav: *"U tehnologiji pronalazimo priliku da kreiramo način interakcije između različitih reprezentacija i da ih prenesemo u učionice. Postupamo u skladu sa obrazovnim trendovima primene računarskih tehnologija: da podrže eksperimentalni pristup učenju."* (Salinas, Quintero & Gonzáles-Mendivil, 2014, p.1).

Računarske tehnologije mogu biti jedan od načina za reprezentovanje novih matematičkih koncepata kroz primere, što je u svojim principima Skemp (1962) naglasio kao neophodno. Tall (1986b) je dalje razradio mogućnosti primene računarskih tehnologija u nastavi matematike i prednosti prilikom uvođenja novih matermatičkih koncepata na ovaj način. Tabela 2.5. prikazuje neke od načina koje je predložio Tall (1986b), kako računarske tehnologije utiču na formiranje i testiranje realnih primera.

Tall (1986b) tvrdi, da ako je računar programiran da izvede matematičke procese koji su transparentni za korisnika, tada se programi mogu koristiti za formiranje kognitivne baze za kasnije testiranje formalnih teorija, za objašnjavanje i za kreiranje niza primera koji će biti korišćeni u učenju i usvajanju novih matematičkih koncepata.

Tabela 2.5. *Formiranje i testiranje realnih primera*

IZGRAĐIVANJE REALNOSTI	TESTIRANJE REALNOSTI
Način I Iz sopstvenih realnih iskustava ***Iskustvo***	**Način I** Protiv očekivanja iz stvarnosti ***Eksperiment***
Način II Iz realnih iskustava drugih ***Komunikacija***	**Način II** Poređenjem iskustava drugih ***Diskusija***
Način III Iznutra, formiranjem koncepata višeg reda, imaginacijom, intuicijom ***Kreativnost***	**Način III** Poređenjem sopstvenih iskustava i verovanja ***Unutrašnja doslednost***

2.4.2. Računarske tehnologije i matematičko modelovanje

Zbog kompleksnosti procesa matematičkog modelovanja vlada opšti stav da se ono treba realizovati uz primenu računarskih tehnologija (Heid, 2015; Komis, Ergazaki & Zogza, 2007; Valdés y Medina & Medina Valdés, 2015). Smatra se da se dobijaju najbolji rezultati kada se matematičko modelovanje kombinuje sa primenom računarskih tehnologija jer računari dodaju vizuelnu dimenziju (Lingefjärd & Holmquist, 2001).

Ipak, istraživanja su pokazala da studenti vrlo često podcenjuju značaj računara u procesu modelovanja (Waisel, Wallace & Willemain, 2008). Primena računara bi svakako doprinela razvijanju kompetencija za modelovanje kod studenata jer računari pružaju mogućnost povezivanja različitih reprezentacija (algebarske, grafičke, numeričke) i manipulaciju sa funkcijama u dinamičkom okruženju, što je identifikovano kao najznačajniji aspekt procesa modelovanja (Pead & Ralph, 2007).

Brown (2015) je u svojoj studiji izvestila o prednostima primene vizuelizacije i računarskih tehnologija u procesu modelovanja, njihovom doprinosu kreiranju boljih modela i razumevanju relacija između matematičkog modela i realnog sveta.

Doprinos računarskih tehnologija se ogleda i u mogućnosti za brzo generisanje velikog broja primera koje studenti mogu da istražuju i da ispituju relacije koje postoje između njih. Rad sa dinamičkim prikazima uz primenu interaktivnih alata je još efektivniji jer daje studentima priliku da manupulišu sa matematičkim objektima, što u velikoj meri olakšava i sam proces matematičkog modelovanja (Goos *et al.,* 2007; Greefrath, 2011).

2.4.3. *GeoGebra* softver u nastavi matematike i matematičkom modelovanju

U istraživanju koje je sprovedeno za potrebu ove disertacije je korišćen i softver *GeoGebra* kao podrška procesu matematičkog modelovanja. *GeoGebra* je dinamički matematički softver koji se može koristiti za implementaciju različitih matematičkih teorija. Kada se govori o njenoj primeni u obrazovne svrhe, glavna karakteristika *GeoGebra*-e je njena jednostavnost korišćenja i mali zahtevi koji se tiču obuke nastavnika i učenika/studenata za njenu primenu u nastavnoj praksi. Ipak, ovo je vrlo moćan softver, sa mogućnostima da ispuni zahteve svih korisnika, a naročito kada se koristi za potrebe matematičkog modelovanja. Dinamička priroda *GeoGebra*-e je jedan od glavnih razloga što je *GeoGebra* softver koji se najviše koristi u procesu matematičkog modelovanja, a to je zbog toga što se realni primeri mogu odlično prikazati kroz *GeoGebra* animacije i simulacije, a u isto vreme se može izgraditi matematička pozadina razmatranog problema (Arzarello, Ferrara & Robutti, 2012; Goos *et al.*, 2007). Zbog svojih vizuelnih i dinamičkih osobina, *GeoGebra* se vrlo često pominje u istraživanjima iz oblasti obrazovanja i nastave (Verhoef *et al.*, 2015).

GeoGebra se navodi i kao softver koji doprinosi unapređenju prirode podučavanja i učenja (Karadag & McDougall, 2009b). Koristeći principe rešavanja problema koje je ustanovio Polya, Karadag & McDougal (2009a, 2009b) predlažu formiranje dinamičkog okruženja realizovanog u *GeoGebra*-i za istraživanje, objašnjavanje i modelovanje matematičkih koncepata i relacija između njih. Tabela 2.6. prikazuje načine primene *GeoGebra*-e po pomenutim principima:

Tabela 2.6. *Načini primene GeoGebra-e na rešavanje problema po Karadag & McDougal(2009b)*

	OBJAŠNJAVANJE	**ISTRAŽIVANJE**	**MODELOVANJE**
RAZUMEVANJE	Opisivanje poznatih podataka i identifikovanje nepoznatih.	Obezbeđivanje radnih listova za studente. Omogućavanje studentima da istraže problem. Vođenje studenata ka identifikaciji nepoznatih.	Omogućavanje modelovanja teorema Identifikacija datih podataka. Opisivanje nepoznatih.
PLANIRANJE	Ustanovljavanje povezanosti promenljivih. Formiranje strategije.	Ispitivanje studenata o relacijama između promenljivih. Navođenje studenata ka kreiranju strategija rešavanja problema.	Razvijanje matematičkih objekata. Analiziranje relacija među objektima.
REALIZACIJA PLANA	Sakupljanje podataka za razvijanje rešenja manupulacijom matematičkim objektima. Postavljanje vodećih pitanja.	Navođenje studenata da interakcijom sa matematičkim objektima utvrde nove podatke. Navođenje studenata da identifikuju osobine prikupljenih podataka.	Manipulacija objektima radi ispitivanja ispravnosti strategije rešavanja. Kreiranje i testiranje pretpostavki.
OSVRT	Ponavljanje prethodno sprovedenih procedura. Postavljanje ŠTA – AKO pitanja.	Ohrabrivanje studenata da menjaju postavke problema. Kreiranje ŠTA – AKO pitanja od strane studenata.	Izmena promenljivih. Kreiranje verbalnih problema koji opisuju dati slučaj. Postavljanje novih problema.

Danas, *GeoGebra* predstavlja softver koji je konstantno prisutan na svim nivoima i u mnogim oblastima obrazovanja, naročito u nastavi matematike i prirodnih nauka (Kostic *et al.*, 2016; Takaci, Stankov & Milanovic, 2015). Pozitivni rezultati primene *GeoGebra*-e su potvrđeni i u nastavi i učenju kalkulusa (Hohenwarter *et al.*, 2008; Nobre, 2016; Verhoef *et al.*, 2015), što je jedan od glavnih razloga zbog kojih je ovaj softver odabran za realizaciju procesa modelovanja koji će biti predložen u disertaciji.

2.5. METODSKI PRISTUPI OBRADI POJMA IZVODA FUNKCIJE

2.5.1. Diferencijalni račun i izvod funkcije

Koncept izvoda se prvi put pojavio kada ga je Pierre Fermat implicitno koristio za pronalaženje ekstrema još tridesetih godina 17. veka. Nešto kasnije, sredinom 17. veka su ga, nezavisno jedan od drugoga, otkrili Isaac Newton i Gottfried Leibniz i tako utemeljili osnove diferencijalnog računa, odnosno kalkulusa. Dalji razvoj teorija vezanih za izvod su nastavili početkom 18. veka Brook Taylor, Colin Maclaurin i Leonhard Euler istražujući koncept izvoda višeg reda i njihovih suma. Joseph-Louis Lagrange je prvi okarakterisao izvod kao funkciju, na samom kraju 18. veka. Na kraju hronološke liste razvoja izvoda, Augustin-Louis Cauchy je početkom 19. veka definisao izvod kao odnos promene priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, kada priraštaj argumenta teži nuli. Definiciju izvoda koja je aktuelna i danas je ustanovio Karl Weierstrass u drugoj polovini 19. veka, skoro dva veka od pojavljivanja prvih ideja vezanih za ovaj koncept.

Analizirajući istorijski razvoj koncepta izvoda, može se zaključiti da on ima potpuno obrnut redosled u odnosu na način matematičkog izlaganja koje započinje definicijom, nastavlja sa istraživanjem rezultata i tek nakon toga predlaže primenu. Grabiner (1983) u svom radu predlaže da se redosled iz istorijskog razvoja izvoda funkcije usvoji i za redosled poučavanja izvoda, jer bi se na taj način prirodnije usvojio apstraktni koncept izvoda kroz primenu, primere i istraživanja koji bi doveli do njegove definicije.

2.5.2. Pristupi obradi pojma izvoda funkcije

Kalkulus, a naročito njegov deo koji se odnosi na izvod funkcije, je uvek predstavljao jednu od najizazovnijih oblasti matematike, kako za nastavu, tako i za ucenje, zbog svoje dinamičke prirode i kompleksnih koncepata (Lithner, 2011; Muzangwa & Chifamba, 2012; Tarmizi, 2010).

Metodski pristupi koji se koriste za uvođenje i obradu pojma izvoda funkcije su oduvek bili tema polemika zbog specifične prirode izvoda koja se ogleda u više različitih reprezentacija (algebarska, grafička, numerička) i interpretacija (dinamička, geometrijska). Postojanje višestrukih reprezentacija kod učenika/studenata dovode do poteškoća u učenju i razumevanju izvoda funkcije, a kasnije i do otežane primene na rešavanje problema iz realne prakse.

Pionir u istraživanju izučavanja izvoda je bio Orton (1983) koji je ustanovio da studenti lako savladaju veštine izračunavanja izvoda, ali ne razumeju vezu priraštaja i grafičke reprezentacije izvoda. Takođe, kao jedna od teškoća koja se javlja je povezivanje osobina grafika funkcije sa njenim izvodom (Nemirovsky & Rubin, 1992). Aspinwall, Shaw & Presmeg (1997) su pokazali da čak i kada studenti razumeju izvod kao nagib tangente (geometrijska interpretacija) skiciranje grafika izvodne funkcije na osnovu grafika originalne funkcije može za njih predstavljati veliki izazov. Po Sahin *et al. (*2015, p.179), *„Student koji razume koncept izvoda može da objasni kako se prosečan odnos priraštaja funkcije i priraštaja argumenta približava njihovom trenutnom odnosu, kao i kako se nagibi sečica približavaju nagibu tangente primenjujući koncept granične vrednosti.“.*

Iz navedenih razloga, može se zaključiti da je za razumevanje izvoda funkcije naročito važno da se naglasi njegov smisao, odnosno da se studentima da prilika da se upoznaju sa njegovim različitim reprezentacijama i načinima primene (Musgrave *et al.,* 2015; Sahin *et al.* 2015; Takaci *et al.,* 2015; Tall, 2010; Vincent *et al.,* 2015; Ubuz, 2007).

Neki autori su čak istraživali i uticaj afilijacije studenata na razvoj njihovih koncepcija o izvodu funkcije. Utvđeno je da studenti mašinskog inženjerstva razvijaju tendencije viđenja izvoda kroz odnos priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, dok se studenti matematike radije orjentišu ka geometrijskoj interpretaciji izvoda, odnosno nagibu tangente (Bingolbali *et al.*, 2007).

Jedan od pristupa uvođenju i obradi pojma izvoda funkcije je predložio David Tall krajem 20. veka (Tall, 1986a; Tall, 1986b; Tall, 1987) Njegov pristup je baziran na grafičkoj reprezentaciji realizovanoj uz pomoć računarskih tehnologija. Ovaj pristup Tall je nazvao “Grafički kalkulus” i njegova glavna karakteristika je prevazilaženje konceptualnih prepreka kod graničnih vrednosti primenom nove strategije učenja bazirane na vizualizaciji pojma “Lokalnog izravnanja” funkcije (u originalu “Local straightness” po Tall-u). Za realizaciju ovog metodskog pristupa, Tall koristi grafičke i dinamičke mogućnosti računara za uspostavljanje kognitivne baze pojmova izvoda i integrala u srednjoškolskom obrazovanju što kasnije može voditi ka formalizaciji ovih pojmova u analizi (Tall, 2002; Tall, Smith, & Piez, 2008; Tall, 2010).

Mnogi autori su potvrdili da primena računarskih tehnologija značajno može doprineti poboljšanju rezultata učenja i razumevanja diferencijalnog računa (Habre & Abboud, 2006; Hohenwarter *et al.*, 2008; Salinas *et al.,* 2014; Tall *et al.,* 2008; Verhoef *et al.*, 2015).

Uzimajući u obzir ranije pomenute pristupe jedan od postavljenih ciljeva ove doktorske disertacije je osmišljavanje novog pristupa obrade pojma izvoda funkcije u visokoškolskoj nastavi matematike primenom principa matematičkog modelovanja i matematičkog modelovanja kombinovanog sa računarskim tehnologijama, kao i ispitivanje njegovog uticaja na nivo stečenih znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

2.6. NASTAVA I UČENJE MATEMATIKE U VISOKOM STRUKOVNOM OBRAZOVANJU

Nastava matematike u visokom obrazovanju je zasnovana na istim metodskim pristupima koji se koriste na osnovnom i srednjoškolskom nivou. Međutim, u visokom školstvu se od studenata očekuje određen nivo predznanja, i s obzirom na njihov uzrast, postojanje naprednog matematičkog, odnosno formalnog načina razmišljanja po Piaget-u (Pjaže i Inhelder, 1996). Ovo se naravno odnosi na studente tehničko - tehnoloških visokih škola i fakulteta kojima je matematika jedan od osnovnih predmeta. Međutim, stvarna situacija se bitno razlikuje od očekivanih i pretpostavljenih vrednosti.

2.6.1. Problemi u nastavi matematike u visokom strukovnom obrazovanju

Problemi u nastavi matematike na visokoškolskom nivou su itekako prisutni i brojni. Najčešći uočeni problemi su:

- Vrlo nizak stepen zainteresovanosti studenata za samu nastavu Vrlo često se može primetiti da su studenti nezainteresovani za nastavu matematike a i za sam predmet uopšte. Na časovima vežbi i predavanja, obično izostaje interakcija na relaciji studenti - nastavnik. Studenti se retko samoinicijativno uključuju u proces nastave, ne postavljaju pitanja, ne žele sami da pokušaju da rešavaju zadatke. Čak i uz podsticaj profesora ili asistenata, takva reakcija izostaje. Ovo se sa jedne strane pravda neznanjem i nepoznavanjem date materije, a sa druge strane i strahom od moguće greške.
- Neusklađeno znanje srednjoškolske matematike - Jedan od osnovnih problema sa kojim se sreće u nastavi matematike u visokom školstvu je neusklađeno znanje srednjoškolske matematike. Problemi ove vrste nastaju praktično odmah, jer studenti poseduju različite nivoe znanja matematike, u zavisnosti od toga koliko su godina slušali matematiku u srednjoj školi. Ako se za primer uzme diferencijalni račun, koji je studentima praktično neophodan kroz dalje školovanje (naročito u tehničko-tehnološkom polju), dešava se da su studenti koji su imali matematiku četiri godine u srednjoj školi već radili diferencijalni račun, dok oni studenti koji su matematiku imali tri i manje godina u srednjoj školi diferencijalni račun nisu radili uopšte, jer se on po planu i programu predmeta Matematika u srednjim školama radi u četvrtom razredu.
- Odsustvo formalizma i logičke dedukcije - Odsustvo formalizma i logičke dedukcije se kod studenata može opravdati time što se većina pojmova "uči napamet" po potrebi za neki test ili ispit. To je kratkotrajno znanje, koje je primenljivo samo za tipizirane zadatke sa ispita. Ovo predstavlja jedan ozbiljan problem u nastavi i učenju matematike jer ovakvo učenje nije učenje sa razumevanjem, što neizbežno vodi ka nemogućnosti primene takvog znanja na širu paletu problema, i nesnalaženju u rešavanju svakodnevnih problema i zadataka sa kojima se studenti mogu jednoga dana sresti na radnom mestu.

- Nemogućnost povezivanja gradiva iz matematike sa ostalim predmetima na studijama i neshvatanje prave uloge matematike u realnom životu - Jedno od najčešće postavljanih pitanja na času matematike od strane studenata jeste pitanje: "*Zbog čega mi učimo ovo i gde ćemo to koristiti?*". U ovom pitanju su sadržani mnogi problemi studenata koji su vezani za predmet Matematika. Najpre, nemogućnost da studenti uvide povezanost neke oblasti koju izučavaju iz matematike sa drugim predmetima koje slušaju na studijama. Izvođenjem nastave na klasičan način, dakle definicija-teorema-dokaz-zadatak, studentima nije dovoljno da bi stvorili nekakvu sliku o tome šta zapravo neki pojam predstavlja i kako ga mogu iskoristiti.
- Organizacija ispita - Organizacija ispita predstavlja jedan vrlo bitan aspekt nastave. Poznata je istina da se studenti na neki način boje ispita, pogotovo iz matematike. Klasična organizacija ispita iz matematike je sledeća: studenti dobijaju određeni broj zadataka, obično po jedan iz svake oblasti koju su izučavali u okviru kursa koji su pohađali, i te zadatke zatim samostalno rešavaju. Međutim, tu nastaju problemi, jer studenti teško prihvataju formalizam u matematici, te im je stoga dosta komplikovano da se izraze, i da korak po korak reše zadatak. Ovaj problem bi se mogao prevazići sprovođenjem ispita tako što će studentima biti ponuđeni testovi u različitim formama (na primer test višestrukog izbora), čime bi se moglo postići jednostavnije sprovođenje i efikasnije pregledanje ispitnih zadataka.. Posebno bi bili interesantni ispiti iz matematike koji bi se polagali na računaru, gde bi unapred bili pripremljeni zadaci u različitim formama (testovi, slagalice, pitanja,...). Sa druge strane, zadaci u ovoj formi bi se studentima činili mnogo jednostavniji i interesantniji od klasičnih, iako zapravo traže mnogo veće angažovanje od studenata i primenu stečenog znanja.

Unapređenje nastavnog procesa neosporno zahteva uvođenje novih metoda u izvođenje nastave i novih tehnologija. Jedno od mogućih rešenja je primena metodskih pristupa baziranih na matematičkom modelovanju u realizaciji nastave matematike u visokom školstvu. Matematičko modelovanje bi moglo doprineti boljem razumevanju pojmova, jer bi studenti tokom formiranja samog modela radili sa tim pojmovima, odnosno mogli bi da vide njihovu pravu upotrebnu vrednost. Prisustvo računarskih tehnologija u nastavi matematike bi omogućilo studentima da vizualizuju pojmove koji se obrađuju, i samim tim da formiraju njihov bolji koncept slike.

Uvođenje pojedinih pojmova u nastavu matematike primenom matematičkog modelovanja bi moglo da rezultuje boljom interakcijom na relaciji nastavnik - studenti. Naime, samo kreiranje modela koji opisuje rešavanje nekog problema se izvodi korak po korak, pri čemu svaki korak zahteva određeno obrazloženje i od strane nastavnika, ali i od strane studenata. Na taj način se stiče navika interaktivnog rada, kontrolisanog i usmeravanog od strane nastavnika. Studenti se na taj način oslobađaju na času, stiču utisak napretka, dobijaju nove kreativne ideje i samim tim nastavu matematike koju su nekada smatrali monotonom i formalističkom, doživljavaju na nov, daleko interesantniji način.

Nastava bi primenom ovog pristupa bila dovoljno interesantna i za studente koji su oblast koja se predaje već slušali u srednjoj školi (mogli bi da ponove neke sadržaje i da ih povežu sa realnim primerima), a pri tome, nastava bi svojom težinom bila prilagođena i studentima koji nemaju nikakvo predznanje iz date oblasti, jer bi se na postupan i slikovit način uveli novi pojmovi.

Takođe, saradnjom nastavnika matematike sa nastavnicima drugih predmeta, mogli bi se napraviti dobri matematički modeli koji bi studente istovremeno učili i matematici i nekim drugim naukama i na taj način doprineli razvoju međupredmetnih kompetencija. Nastava bi tada bila mnogo kompaktnija, gledano sa aspekta celih studija uopšte, i studenti bi mogli da vide interakciju različitih nauka i teorija, što bi obogatilo njihovo sveukupno znanje.

Iznad svega, neophodno je uspostaviti dobru saradnju nastavnika srednjih i visokih škola, jer samo zajedničkim radom i saradnjom, uz ideje i predloge sa obe strane, može se unaprediti nastava matematike tako da svi, a posebno učenici i studenti imaju od toga koristi.

2.6.2. Metodski pristupi u nastavi matematike u visokom strukovnom obrazovanju

Uzimajući u obzir probleme identifikovane u visokoškolskoj nastavi matematike, jasno je da glavna odlika nastave matematike u visokom strukovnom obrazovanju treba da bude njena usmerenost ka studentu. Uloga nastavnika je da vodi i usmerava studenta kroz proces učenja, tako da efekti nastave i učenja budu maksimalni. Posebno kada se radi o visokom strukovnom obrazovanju, nezaobilazan je i aspekt primene stečenog znanja u praksi, odnosno realnom okruženju.

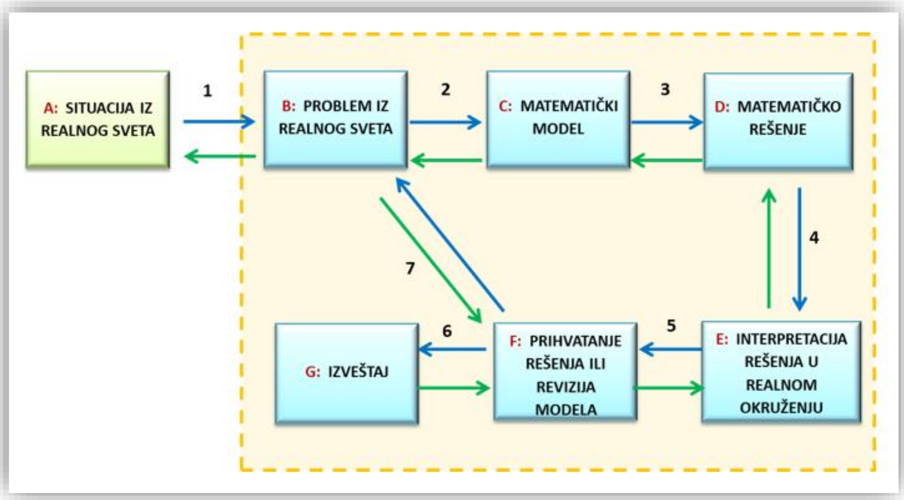
Da bi se postigli navedeni aspekti nastave, a pri tome i rešili neki od uočenih problema u nastavi matematike na visokoškolskom nivou, neophodno je primeniti adekvatne metodske pristupe i oblike nastave. Analizom metoda učenja i nastave i nivoa učenja koji se postižu primenom određenih principa, došlo se do još jednog doprinosa ove disertacije. Doprinos disertacije je sadržan u kombinaciji principa na kojima treba da bude zasnovana nastava matematike da bi se postigli maksimalni efekti nastave i učenja. Kombinacija predložena u ovoj disertaciji se sastoji od sledećih principa:

- ***Principi aktivne nastave*** – Kod nastave koja je orijentisana ka studentu je nezaobilazno primeniti principe aktivne nastave, koji uključuju aktivno učešće svih aktera u nastavnom procesu. Aktivna nastava i aktivno učenje se nalaze na samom vrhu kao jedna od strategija učenja, a takođe je i sastavni deo procesa matematičkog modelovanja zbog svoje prirode. Ovakav vid nastave mogao bi doprineti i većoj motivisanosti studenata za matematiku kao nauku i njenu primenu u realnom životu.
- ***Principi interaktivne nastave*** – Interaktivna nastava podrazumeva neprestanu saradnju nastavnika i studenta tokom nastavnog procesa, što je od izuzetne važnosti u visokom strukovnom obrazovanju, a posebno u procesu matematičkog modelovanja. Obzirom da se u visokom obrazovanju srećemo sa studentima različitog matematičkog predznanja, nastava usmerena ka studentu mora biti konstantno vođena i usmeravana od strane nastavnika, ali uz stalnu interakciju sa studentima. Takođe, iz istog razloga se i proces modelovanja mora realizovati uz adekvatnu pomoć nastavnika, kroz instrukcije i savete tokom nastave.

- ***Principi integrativne nastave*** – Srž strukovnog obrazovanja čini upravo integrisanje različitih znanja i veština i njihova primena na rešavanje širokog spektra problema. Realizovanje nastave primenom metodskih pristupa baziranih na principima integrativne nastave predstavlja jedan aspekt koji neizostavno mora biti uključen u visoko strukovno obrazovanje. Matematičko modelovanje nudi mogućnost realizovanja principa integrativne nastave baš zbog svoje prirode povezivanja realnih problema sa njihovom matematičkom reprezentacijom. Takođe, integrativna nastava bi omogućila studentima uvid u povezanost matematike sa drugim oblastima, što bi ublažilo probleme vezane za formalizam zbog boljeg formiranja koncepta slike i koncepta definicije kod studenata.
- ***Principi konstruktivističkog pristupa*** – Konstruktivizam, ili učenje otkrivanjem bi trebalo uvek da bude zastupljeno kao jedan od ciljeva nastave matematike u visokom obrazovanju, naročito strukovnom, jer je glavna kompetencija koju treba da poseduju studenti nakon završenih studija sposobnost da samostalno istraže, osmisle rešenja i reše probleme iz prakse.
- ***Principi problemski orjentisane nastave*** - Metodski pristupi koji podržavaju problemski orjentisanu nastavu bi trebali da budu sastavni deo nastavne prakse matematike u visokom školstvu. Posebno, samostalno rešavanje problema, uz usmeravanje nastavnika, bi kod studenata omogućilo širenje horizonata vezanih za primenu matematičkih koncepata i njihovu korisnost u realnom životu, kao i matematike kao nauke.
- ***Principi kolaborativne nastave*** – Iniciranje rada u grupi i saradnje studenata prilikom rešavanja matematičkih problema, doprinelo bi ne samo boljim rezultatima učenja, već i usvajanju kulture timskog rada, što je nezaobilazno u inženjerskoj praksi. Takođe, pri realizaciji procesa matematičkog modelovanja ovaj vid nastave je od naročitog značaja.

Ova doktorska disertacija nudi jedan novi pristup nastavi matematike u visokom strukovnom obrazovanju, nastao kombinovanjem dobrih strana navedenih principa nastave i učenja matematike. Glavna ideja rada je osmišljavanje metodskog pristupa, baziranog na principima matematičkog modelovanja potpomognutog računarskim tehnologijama, koji će omogućiti rešavanje problema koji se sreću u visokoškolskoj nastavi matematike i postizanje boljih efekata nastave i učenja matematike.

3. OBRADA IZVODA FUNKCIJE MATEMATIČKIM MODELOVANJEM



3.1. UVOD

U ovoj glavi disertacije opisan je jedan način realizacije nastave matematike primenom metodskog pristupa zasnovanog na principima matematičkog modelovanja. Matematičko modelovanje je primenjeno za obradu sadržaja koji se odnose na izvod funkcije i njegove primene na nivou visokog strukovnog obrazovanja.

Sadržaj visokoškolskih kurseva matematike (naročito na nivou strukovnih studija) ima jedan značajan deo posvećen diferencijalnom računu, odnosno izvodu funkcije. Pristupi koji se koriste u nastavi matematike na fakultetima i visokim strukovnim školama danas, bazirani su na apstraktnom i teorijskom razrađivanju nastavnih sadržaja iz ove oblasti iako bi, s obzirom na cilj strukovnog obrazovanja, metodski pristupi koji se koriste trebalo da budu usmereni ka razvijanju i unapređenju kompetencija studenata za prepoznavanje i rešavanje problema iz realne prakse. Tokom izučavanja izvoda funkcije mogu se pojaviti različiti problemi, kako prilikom realizacije nastave, tako i kod studenata u procesu učenja. Problemi se uglavnom odnose na teškoće sa manipulacijom i primenom različitih reprezentacija izvoda funkcije (Biza, Christou & Zachariades, 2008; Dick & Edvards, 2008; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2009; Presmeg, 2006; Ubuz, 2007).

Uzimajući u obzir prethodno navedeno, u ovoj glavi disertacije je akcenat stavljen najpre na način implementacije matematičkog modelovanja u nastavu matematike, a zatim i na ispitivanje efikasnosti i uticaja primene tako osmišljenog metodskog pristupa na učenje i savladavanje sadržaja iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

Istraživanje opisano u ovoj glavi disertacije je obuhvatilo četiri generacije studenata prve godine strukovnih studija iz tehničko-tehnološkog polja u periodu od 2009–2014. godine. Tokom ovog dela istraživanja proces matematičkog modelovanja je implementiran u nastavu matematike pri obradi izvoda funkcije jedne realne promenljive i njegove primene. Studenti su za potrebe istraživanja bili podeljeni u dve slično distribuirane grupe, kontrolnu i eksperimentalnu. Sa studentima eksperimentalne grupe nastava je realizovana primenom matematičkog modelovanja, dok se nastava sa studentima kontrolne grupe odvijala primenom tradicionalnih metodskih pristupa.

Ova glava se sastoji iz šest poglavlja. U drugom i trećem poglavlju je detaljno opisan eksperimentalni deo nastave. Prikazan je proces matematičkog modelovanja i način njegove implementacije u nastavni proces pri obradi definicije izvoda funkcije. Pre početka istraživanja, svaka generacija studenata je u okviru redovne nastave upoznata sa definicijom izvoda funkcije. Metodski pristup baziran na matematičkom modelovanju je nakon toga primenjen za uvežbavanje nagiba, količnika priraštaja, definicije izvoda u tački i geometrijske interpretacije izvoda. Aktivnosti nastavnika i studenata tokom eksperimentalnog rada su detaljno opisane i diferencirane su po fazama modelovanja i pripadajućim prelazima.

U trećem poglavlju je opisan rad sa studentima eksperimentalne grupe pri modelovanju situacija koje su se odnosile na primenu izvoda funkcije na ispitivanje monotonosti funkcije i ekstremnih vrednosti.

Analiza sprovedenog procesa modelovanja i predlozi za dalja istraživanja su obrađeni u četvrtom poglavlju.

Metodološki koncept istraživanja je predstavljen u petom poglavlju. Navedeni su predmet, cilj i hipoteze istraživanja i opisani su uzorak, instrumenti i metode primenjene tokom istraživanja.

U šestom poglavlju su analizirani i diskutovani rezultati empirijskog dela istraživanja.

3.2. OBRADA DEFINICIJE IZVODA FUNKCIJE PRIMENOM MATEMATIČKOG MODELOVANJA

U ovom poglavlju disertacije je detaljno opisan metodski pristup korišćen prilikom uvežbavanja definicije izvoda funkcije a koji je zasnovan na primeni matematičkog modelovanja.

Matematičko modelovanje je realizovano sa studentima eksperimentalne grupe po principima ciklusa modelovanja koji su predložili Stillman *et al.* (2007), (odeljak 2.3.2., Slika 2.7.). Nastava sa studentima kontrolne grupe se odvijala primenom tradicionalnih metodskih pristupa, bez matematičkog modelovanja.

S obzirom da su studenti koji su učestvovali u istraživanju u srednjoj školi matematiku slušali različit broj godina (od jedne do četiri) i da su iz srednje škole nosili nešto niži prag matematičkog znanja (što je utvrđeno anketiranjem studenata pre početka istraživanja), bilo je neophodno da se proces samog matematičkog modelovanja izvodi uz saradnju i usmeravanje nastavnika da bi se uskladila znanja studenata i da bi svi studenti bili aktivno uključeni u proces modelovanja kroz konstruktivne diskusije povezane sa problemima koji će biti modelovani.

U nastavnoj praksi je uobičajeno da se prilikom obrade izvoda funkcije studenti/učenici najpre upoznaju sa priraštajem funkcije i priraštajem argumenta, nakon čega se uvodi definicija izvoda funkcije i njegova geometrijska interpretacija. Realni problemi u okviru odabranih situacija iz realnog sveta su osmišljeni tako da kroz proces modelovanja studenti usvoje i razumeju definiciju izvoda funkcije i njegovu geometrijsku interpretaciju. Studentima su prezentovane zanimljive situacije, odabrane zbog toga jer sadrže elemente koji odgovaraju izvodu funkcije, a ideja je izvedena iz primera (http://mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Biocalculo/x/derivad/calc4_1.html).

Odabrane situacije nisu predstavljale prave situacije iz realnog sveta, ali su se lako mogle transformisati u takve (sa istim matematičkim modelima i matematičkim rešenjima) dodavanjem realnog konteksta. Glavni motiv za odabir takvih situacija je pokušaj autora disertacije da dodatno ohrabri studente i da ih motiviše za primenu matematičkog modelovanja i učenje izvoda tako što će im prezentovati interesantne primere koji će im biti dovoljno inspirativni da se aktivno uključe u proces modelovanja.

Osim ovih situacija su studenti primenom matematičkog modelovanja rešavali i probleme iz realne prakse vezane za rast populacije, brzinu, ubrzanje, itd. Na taj način, studenti su uvežbavali da u realnim situacijama uoče i prepoznaju probleme sa kojima će se susretati u inženjerskoj praksi, a koji se mogu rešiti primenom izvoda funkcije.

Tabela 3.1. *Situacija iz realnog sveta i realni problemi 1 i 2*

SITUACIJA IZ REALNOG SVETA 1 *Jednom prilikom su žirafa, zebra, gazela i divlja svinja napravile bedem oko svog staništa, jer su želele da ograde prostor na kojem su zajedno živele. Kada su životinje završile bedem, htele su da ispitaju koliko je bedem strm. Takođe, želele su da izmere koliko koraka je svakoj životinji potrebno da pređe put od baze do vrha bedema. I tako su krenule...* *Žirafa je od baze do vrha bedema stigla u jednom koraku. Vratila se do ostalih životinja i rekla da je nagib bedema 50%.* *Zebri je od baze do vrha bedema trebalo dva koraka, i izjavila je da je nagib prvog koraka 75%, a drugog 25%.* *Gazeli je trebalo četiri koraka od baze do vrha bedema, i još je zaključila da nagib njenog prvog koraka 87,5%, drugog 62,5%, trećeg 37,5% i četvrtog 12,5%.* *Divljoj svinji je trebalo osam koraka da pređe razdaljinu od baze do vrha bedema. Nagibi, redom za svaki korak koji je prešla su redom iznosili: 93,75%, 81,25%, 68,75%, 56,25%, 43,75%, 31,25%, 18,75%, 6,25%.* **REALNI PROBLEMI:** ***1. Odrediti koordinate pozicija koraka svake životinje na bedemu.*** ***2. Naći matematičku reprezentaciju putanje životinja na bedemu.***

Studentima je prvo prezentovana gore navedena priča (Tabela 3.1.). Priču je studentima ispričao predmetni nastavnik a njen tekst (Tabela 3.1.) je bio prikazan na video bimu, da bi svi studenti mogli u svakom trenutku da vide sve detalje.

Nakon što su studenti saslušali priču, pokušali su da je interpretiraju i da razumevanjem njenog konteksta postave probleme koji odgovaraju onima koji su navedeni nakon priče i čijim će rešavanjem doći do matematičkih modela i rešenja. Međutim, u tom trenutku, studenti još uvek nisu razumeli u kakvoj vezi stoje koraci životinja i nagib. Čulo se i da su nekoliko puta pitali jedni druge “Od čega da krenemo?”.

Da bi studenti lakše razumeli u čemu je problem, nastavnik je pokušao da inspiriše studente pitanjem da li možda u njihovom okruženju postoji nešto slično, što bi se moglo identifikovati sa problemom koji su imale afričke životinje. Svaka generacija studenata je bila vrlo kreativna u ovoj fazi istraživanja pronalazeći interesantne analogije za bedem koji su životinje izgradile.

Studenti jedne generacije su nakon kraćeg međusobnog dogovora pokazali svoju kreativnost time što su spojili nekoliko školskih klupa i na njih stavili svoje torbe i tako napravili reprezentaciju bedema. Kada su to uradili, posmatrali su napravljeni “bedem” i iznosili svoje komentare o tome šta se dešavalo kada su životinje koračale po njemu.

Druga generacija studenata je posmatrala stepenište koje vodi do njihove učionice (zgrada Visoke tehničke škole u Zrenjaninu ima dva sprata a učionica u kojoj studenti imaju nastavu iz matematike se tada nalazila na drugom spratu Škole). Da bi dalje podstakao diskusiju oko nagiba koraka, nastavnik je u toj generaciji odabrao dva studenta iz grupe, jednog koji je bio izrazito visok, i drugog koji je bio nizak. Diskusija koja je zatim usledila je u potpunosti prenesena u narednom tekstu.

Nastavnik: *Da li vam je bilo teško kada ste se peli uz stepenice do učionice gde ste sada?*
Studenti: *Pa, nije…*
Student 1 (visoki student): *Ja sam prešao stepenice u dva koraka!*
Nastavnik: *A ostali, kako je vama bilo?*
Student 2 (niski student): *Ja sam išao jednu po jednu stepenicu.*
Nastavnik: *Da li su vam stepenice izgledale strme?*
Student 1 (visoki student): *Nisu.*
Student 2 (niski student): *Onako…*
Student 1 (visoki student): *Znam, ja sam onda kao žirafa, jer sam u manje koraka prešao stepenice i ne vidim ih kao jako strme!*
Student 2 (niski student): *To je zato jer su tvoji koraci duži, pa ti je lakše i brže se popneš uz stepenice!*
Ostali studenti: *(smeju se, ali komentarišu ko bi mogao da bude koja životinja u skladu sa svojom visinom i dužinom koraka).*

U tom trenutku je bilo očigledno da su studenti mogli da "osete" prirodu postavljenog problema, jer su ga vizualizovali (napravili su imitaciju bedema od torbi ili posmatrali stepenice) i mogli su da na neki način manipulišu problemom, primenom bedema koji su sami napravili od torbi ili konverzacijom koja je bila vezana za penjanje po stepenicama.

Slušajući komentare studenata, bilo je uočljivo da su oni razumeli šta se tačno traži od njih, odnosno šta su realni problemi. U sledećim odeljcima biće data detaljna analiza opisa procesa modelovanja za svaki postavljeni realni problem pojedinačno.

3.2.1. Realni problem 1

U okviru realnog problema 1 studenti su trebali da odrede koordinate pozicija koraka svake životinje na bedemu (B. faza u ciklusu koji su predložili Stilman *et al.* (2007), Slika 2.7.)

Da bi studenti došli do matematičkog modela, nastavnik je tražio od njih da navedu koji podaci se u okviru realne situacije mogu koristiti za dobijanje matematičkog modela (prelaz 2, Slika 2.7.). Studenti su lako uvideli da su ti podaci poznati nagibi koraka životinja. Međutim, na pitanje nastavnika kako da ih iskoriste oni nisu imali odgovor. Očigledno je da studenti nisu mogli da povežu nagib iz realnog života, na primer nagib koraka, sa formulom za njegovo izračunavanje. U tom smislu je dalje proširena diskusija gde je nastavnik sugerisao studentima da analiziraju šta se dešava kada se životinja pomera po bedemu, tako što će iskoristiti bedem od torbi (ili stepenište u slučaju druge generacije). Simulirajući promenu položaja na bedemu od torbi (stepeništu), studenti su uz pomoć nastavnika uočili da se prilikom promene položaja istovremeno dešavaju i promene njegove horizontalne i vertikalne komponente i zajednički su se složili da ove komponente nazovu *Vertikalna promena* i *Horizontalna promena*.

Da bi se došlo do sledeće faze modelovanja, matematičkog rešenja (D. faza), studenti su trebali da realizuju aktivnosti u okviru prelaza od matematičkog modela ka matematičkom rešenju (prelaz 3). Pre nego što su nastavili modelovanje, studenti prve generacije su samoinicijativno predložili da se podele u četiri grupe, tako da svaka grupa predstavlja po jednu životinju i ima za zadatak da izračuna njene pozicije na bedemu. Tako su nastale grupe *Žirafa*, *Zebra*, *Gazela* i *Divlja svinja*. Nastavnik je ovakvu podelu na grupe inicirao i kod sledećih generacija studenata koje su učestvovale u istraživanju zbog pozitivnih iskustava u radu sa studentima i boljom koordinacijom procesa modelovanja.

Matematički model

Studenti su spontano došli do zaključka da matematički model (C. Faza) nagiba koraka životinje odgovara količniku vertikalne i horizontalne promene.

Studenti iz grupe *Žirafa* su imali najjednostavniji zadatak, jer je njihova životinja napravila samo jedan korak čiji je nagib bio 50%. Iz ranijih diskusija, studenti su već izveli zaključak da nagib koraka zavisi od veličina označenih sa vertikalna i horizontalna promena. Polazeći od poznatog nagiba koraka žirafe i predstavljajući ga kao $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, studenti su zaključili da vertikalna i horizontalna promena moraju stajati u odnosu $1:2$.

Uzimajući u obzir da realna situacija nije uključivala i mere bedema, studenti su, zajedničkim dogovorom i uz sugestiju nastavnika, usvojili za rastojanje baze bedema od njegovog centra $8\ m$ (pri tome se za bazu bedema smatra startna tačka iz koje su sve životinje kretale a za centar bedema projekcija njegovog vrha na ravan tla), odakle je sledilo da je horizontalna promena za žirafu jednaka 8. Studentima je nastavnik sugerisao da je najbolje za meru rastojanja uzeti broj osam jer divlja svinja pravi najviše koraka (osam) i na taj način se može raditi sa celim brojevima, što pojednostavljuje izračunavanja. Usvojene mere su koristile sve četiri grupe studenata pri računanju nagiba.

Studenti su se tada nakratko vratili unazad kroz proces modelovanja (vratili su se preko *Matematičkog modela* i *Realnog problema*, uzimajući u obzir da je najjednostavnije raditi sa celobrojnim vrednostima) do *Situacije iz realnog sveta* da bi odredili horizontalnu promenu za svaku životinju. Na osnovu broja koraka koje je svaka životinja napravila od baze do vrha bedema (uz pretpostavku da su za jednu životinju koraci jednake dužine, preciznije njihova horizontalna promena je jednaka) usvojilo se da su horizontalne promene jednake sa 4, 2, 1 za zebru, gazelu i divlju svinju, respektivno.

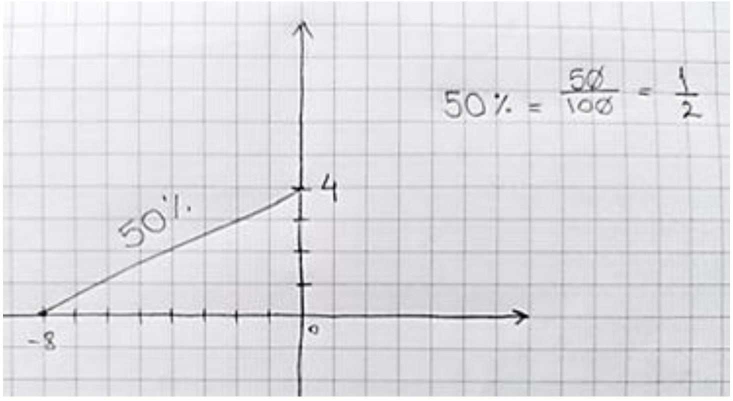
Studenti iz grupe *Žirafa* su nakon toga zaključili da zbog odnosa $1:2$ za vertikalnu i horizontalnu promenu koraka žirafe, vertikalna promena njenog koraka mora biti jednaka sa 4. Takođe, usvojeno je da početna pozicija svake životinje ima koordinate $S(-8,0)$.

U tom trenutku, studenti iz grupe *Žirafa* su znali da žirafina pozicija, nakon što je ona napravila korak i stigla na vrh bedema, ima koordinate $V(0,4)$.

Uzimajući u obzir matematički model za nagib koraka, studenti su predstavili nagib žirafinog koraka na sledeći način:

$$Nagib\ koraka\ (Žirafa) = \frac{4\ m}{8\ m} = \frac{1}{2} = 50\%$$

i time potvrdili da matematičko rešenje pozicije žirafe (početna pozicija $S(-8,0)$ i pozicija na vrhu bedema $V(0,4)$), (Slika 3.1.).



Slika 3.1. *Rad studenta grupe Žirafa*

Studenti iz grupe *Zebra* su najpre kroz diskusiju konstatovali da treba da dođu do dve pozicije, jer je zebra napravila dva koraka. Izračunavanja pozicija su sproveli za svaki korak posebno. Podaci koji su im bili dostupni za zebru su bili nagib prvog i drugog koraka (75% i 25%, respektivno) i horizontalna promena njenog koraka koja je bila jednaka sa 4.

Analogno kao i grupa *Žirafa*, studenti grupe *Zebra* su došli do sledećih rezultata:

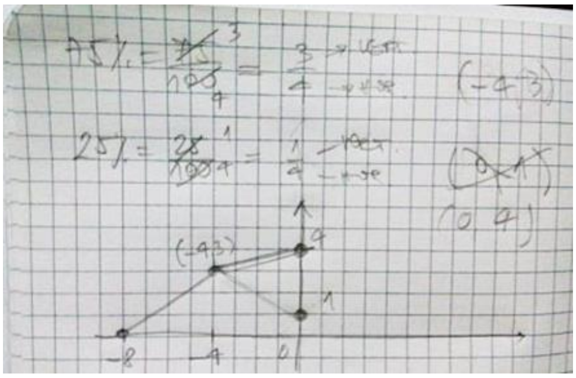
$$Nagib\ koraka\ (Zebra\ 1.korak\ ) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3\,m}{4\,m}.$$

Iz izraza do kojeg su studenti došli se vidi da su oni krenuli od nagiba koraka i sredili ga tako da se u imeniocu razlomka nalazi broj 4 jer on odgovara horizontalnoj promeni zebrinog koraka. Nakon toga su lako zaključili da prvom koraku odgovara vertikalna promena jednaka 3 i da su koordinate pozicije na kojoj se našla zebra nakon što je napravila prvi korak na bedemu $(-4,3)$.

Studenti su zatim isti postupak primenili i za drugi zebrin korak i došli do zaključka da je vertikalna promena tada jednaka 1, što se vidi iz sledećeg izraza:

$$Nagib\ koraka\ (Zebra\ 2.korak\ ) = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1\,m}{4\,m}.$$

Neki studenti iz grupe *Zebra* su nakon izračunavanja rekli da su koordinate pozicije nakon drugog zebrinog koraka jednake sa (0,1). Međutim, kada su pokušali da svoje rezultate predstave grafički, brzo su uvideli da su napravili grešku (Slika 3.2.). Nastavnik je tražio da obrazlože zašto smatraju da su pogrešili i studenti su komentarisali da je greška u tome što zebra mora doći do vrha bedema, a to je u tački $(0,4)$.



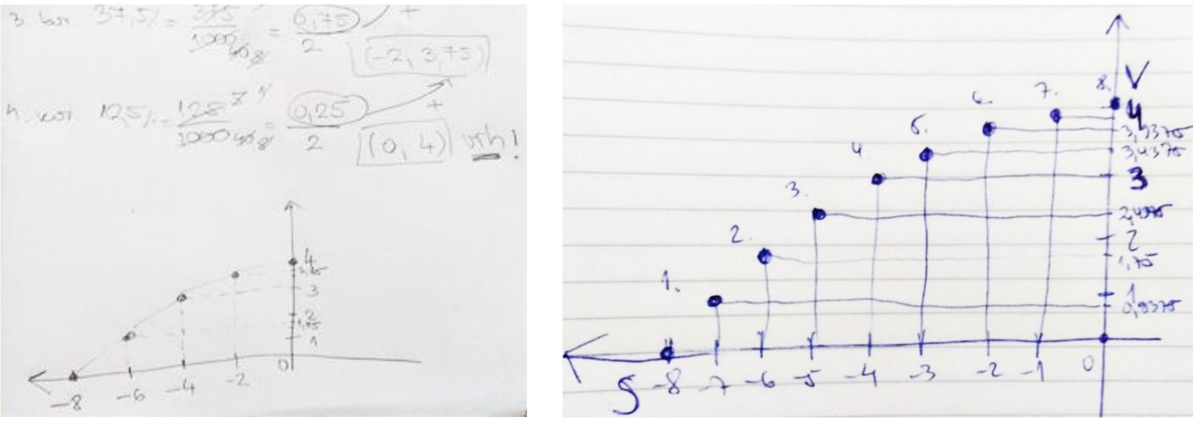
Slika 3.2. *Rad studenta grupe Zebra*

Analizirajući svoj rad zajedno sa nastavnikom, studenti su uočili da su rezultati za vertikalnu promenu do kojih su oni došli u skladu sa postavljenim matematičkim modelom. Takođe, došli su i do zaključka da zebra mora da stigne do iste pozicije na vrhu bedema kao i žirafa, odnosno, videli su da se y koordinata pozicije zebrinog drugog koraka dobija kao zbir vertikalnih promena njenog prvog i drugog koraka:

$$Vertikalna\ promena\ 1.koraka + \ Vertikalna\ promena\ 2.koraka = 3 + 1 = 4$$

Na taj način, studenti iz grupe *Zebra* su došli do matematičkog rešenja, odnosno do tačaka koje odgovaraju pozicijama zebrinog prvog $Z_1(-4, 3)$ i drugog $V(0, 4)$ koraka.

Analognim postupkom, studenti iz grupe *Gazela* i grupe *Divlja svinja* su izračunavali koordinate pozicija koraka njihovih životinja. Studentima iz ovih grupa je trebalo više vremena za izračunavanja zbog većeg broja koraka koje su njihove životinje pravile. Studentima je naročito bilo komplikovano da računaju y koordinate pozicija koraka kada je trebalo naći poziciju četvrtog, petog koraka, jer je trebalo da sumiraju vertikalne promene od svih prethodnih koraka i bilo je očigledno da im problem predstavlja to što su radili samo sa algebarskom reprezentacijom. U svakoj generaciji je manji broj studenata pokušavao da grafički predstavi rešenja, uz intervenciju i pomoć nastavnika (Slika 3.3. a) i 3.3. b)).



a) b)

Slika 3.3. *Rad studenta grupe Gazela i studenta grupe Divlja svinja*

Do matematičkog rešenja pozicija koraka životinje, studenti grupe *Gazela* su došli analognim postupkom, preko nagiba prvog, drugog, trećeg i četvrtog koraka gazele(Slika 3.3. a)). Studenti ove grupe su kao potvrdu ispravnosti rezultata do kojih su došli smatrali to što su se koordinate četvrtog koraka gazele poklapale sa tačkom $V(0,4)$ koja se kao vrh bedema pojavila i kod grupe *Žirafa* i grupe *Zebra*.

Na identičan način, studenti grupe *Divlja svinja* su došli do koordinata pozicija njenih koraka, ali im je trebalo mnogo više vremena nego ostalim grupama da dođu do rezultata (Slika 3.3. b)).

Matematičko rešenje

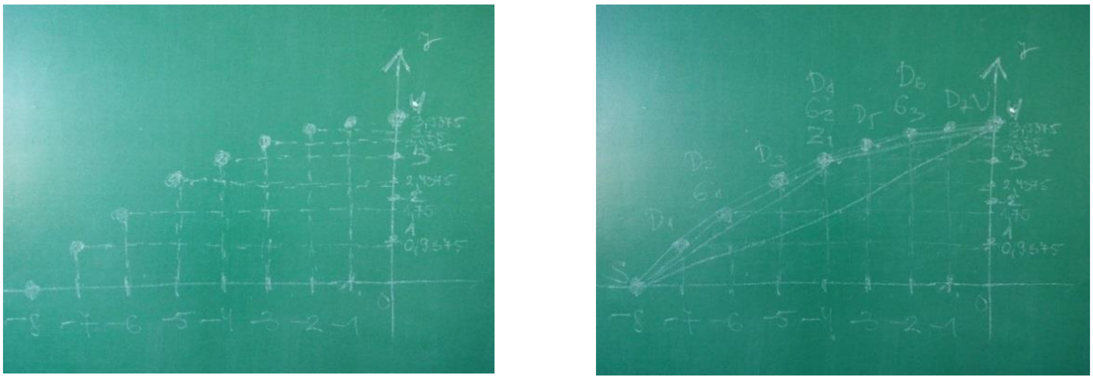
Da bi studenti došli do konačnog matematičkog rešenja (D. faza) prvog realnog problema, nastavnik im je predložio da zajedno objedine u jednoj tabeli rešenja do kojih je došla svaka grupa pojedinačno, što su oni i učinili (Tabela 3.2.).

Tabela 3.2. *Koordinate pozicija koraka životinja na bedemu*

<table>
<tr><th></th><th>Žirafa</th><th>Zebra</th><th>Gazela</th><th>Divlja svinja</th></tr>
<tr><td>1. Korak</td><td rowspan="8">$V(0;\ 4)$</td><td rowspan="4">$Z_1(-4;\ 3)$</td><td rowspan="2">$G_1(-6;\ 1,75)$</td><td>$D_1(-7;\ 0,9375)$</td></tr>
<tr><td>2. Korak</td><td>$D_2(-6;\ 1,75)$</td></tr>
<tr><td>3. Korak</td><td rowspan="2">$G_2(-4;\ 3)$</td><td>$D_3(-5;\ 2,4375)$</td></tr>
<tr><td>4. Korak</td><td>$D_4(-4;\ 3)$</td></tr>
<tr><td>5. Korak</td><td rowspan="4">$V(0;\ 4)$</td><td rowspan="2">$G_3(-2;\ 3,75)$</td><td>$D_5(-3;\ 3,4375)$</td></tr>
<tr><td>6. Korak</td><td>$D_6(-2;\ 3,75)$</td></tr>
<tr><td>7. Korak</td><td rowspan="2">$V(0;\ 4)$</td><td>$D_7(-1;\ 3,9375)$</td></tr>
<tr><td>8. Korak</td><td>$V(0;\ 4)$</td></tr>
</table>

Posmatrajući tabelu sa objedinjenim rezultatima (Tabela 3.2.) neki studenti su primetili da se određene pozicije koraka ponavljaju kod više životinja. To ih je navelo na razmišljanje o međusobnoj povezanosti rezultata i na pokušaje da objasne zbog čega se to dešava (prelaz 4). Nastavnik je predložio da se na jednoj slici označe sve pozicije koraka životinja i nacrtao je studentima tu sliku na tabli (Slika 3.4. a)).

Sa slike su studenti jasno videli da se neke pozicije poklapaju (tačka Z_1, na primer, predstavlja poziciju prvog koraka zebre, drugog koraka gazele G_2 i četvrtog koraka divlje svinje D_4, itd.) i komentarisali kako je poklapanje određenih pozicija "logično" i povezali su ih sa tim što se svaka sledeća manja horizontalna promena sadrži u prethodnim (8, 4, 2, 1 za žirafu, zebru, gazelu i divlju svinju, respektivno).



a) b)

Slika 3.4. *Pozicije koraka svih životinja*

Manja grupa studenata je posmatrala raspored pozicija koraka životinja i zaključila da kada bi svaku tačku povezali sa sledećom tada bi takva slika mogla da odgovara bedemu koji su životinje napravile (Slika 3.4. b)). Studenti su tada došli do zajedničkog dogovora da za konačno matematičko rešenje usvoje tačke koje odgovaraju pozicijama koraka svih životinja i označe ih od prvog do poslednjeg koraka, respektivno, sa: $S(-8{,}0)$, $A(-7;\ 0{,}9375)$, $B(-6;\ 1{,}75)$, $C(-5;\ 2{,}4375)$, $D(-4,3)$, $E(-3;\ 3{,}4375)$, $F(-2;\ 3{,}75)$, $G(-1;\ 3{,}9375)$ i $V(0,4)$.

Interpretacija rešenja

Kao interpretaciju rešenja (E. faza) studenti su usvojili sliku 3.4. a) i sliku 3.4. b), (pozicije koraka životinja na bedemu).

Koristeći interpretaciju rešenja (Slika 3.4. b)) i činjenicu da se određene pozicije životinja poklapaju, studenti su dobijeno matematičko rešenje prihvatili kao ispravno (prelaz 5).

Prihvatanje (izveštaj) ili odbijanje rešenja

Matematički model nagiba koraka prihvaćen kao ispravan, kao i matematičko rešenje za pozicije koraka životinja, čime je proces modelovanja završen.

3.2.2. Realni problem 2

Da bi rešili drugi postavljeni realni problem (naći matematičku reprezentaciju putanje životinja na bedemu) studenti su najpre razmotrili kretanje životinja po bedemu i rezultate dotadašnjeg procesa modelovanja (matematičko rešenje prvog realnog problema).

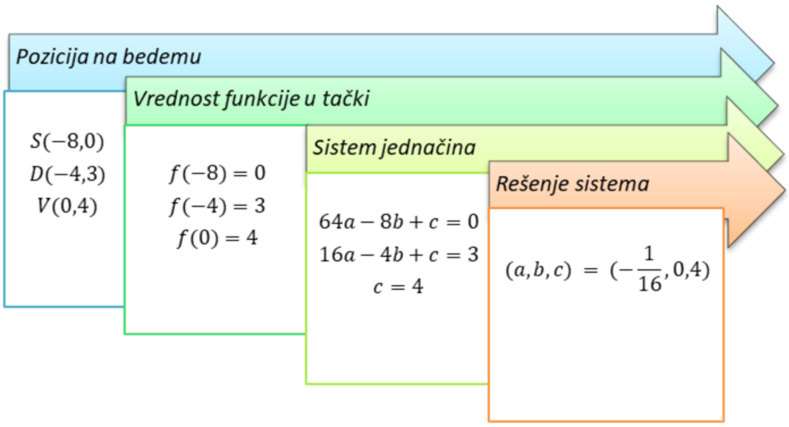
Studenti su znali da sve tačke koje odgovaraju pozicijama koraka životinja treba da pripadaju traženoj funkciji putanje (videli su još sa slike 3.4.), ali nisu imali ideju kako da dođu do algebarskog izraza funkcije. Ovo je predstavljalo ozbiljnu prepreku u procesu modelovanja jer do tada nisu rešavali zadatke te vrste.

Da bi se proces modelovanja nastavio dalje, nastavnik je studentima objasnio da postoje postupci kojima se može doći do krive, ukoliko su poznate tačke kroz koje ona prolazi. Nastavnik je studentima sugerisao da posmatraju bedem koji je nacrtan za potrebe rešavanja prvog realnog problema (Slika 3.4.) i da pokušaju da odrede koje vrste može biti funkcija koja bi odgovarala putanji životinja po bedemu. Posmatrajući tačke koje odgovaraju pozicijama životinja studenti su, uz pomoć i usmeravanja nastavnika tokom diskusije, zaključili da bi oblik bedema mogao da odgovara paraboli, odnosno kvadratnoj funkciji (prelaz 2).

Matematički model

Za matematički model (C. faza) drugog realnog problema studenti su usvojili kvadratnu funkciju (parabolu) kojoj pripadaju sve tačke koje odgovaraju pozicijama koraka svih životinja.

Analizirajući opšti oblik kvadratne funkcije ($f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$), studenti su lako zaključili da moraju da odrede koeficijente a, b i c da bi znali koja funkcija predstavlja putanju životinja po bedemu. Nastavnik im je sugerisao da u tu svrhu postave sistem jednačina, koristeći podatke koji su im dostupni, odnosno koordinate pozicija koraka životinja na bedemu. Studenti su nakon kraće diskusije zaključili da s obzirom da tačke koje odgovaraju pozicijama koraka pripadaju funkciji putanje životinja po bedemu, iz njih mogu da pročitaju vrednost funkcije u tački. Da bi pojednostavili izračunavanja izabrali su tri tačke $S(-8{,}0)$, $D(-4, 3)$ i $V(0, 4)$ zbog njihovih celobrojnih koordinata i zato što im je trebao sistem od tri jednačine zbog tri nepoznate. Postavili su sistem jednačina i rešili ga (Slika 3.5.), (prelaz 3).



Slika 3.5. *Postupak određivanja koeficijenata kvadratne funkcije*

Matematičko rešenje

Određivanjem koeficijenata kvadratne funkcije, studenti su došli do matematičkog rešenja funkcije putanje životinja po bedemu, posmatrano na intervalu $[-8{,}0]$:

$$f(x) = -\frac{x^2}{16} + 4, \qquad x \in [-8{,}0]. \tag{1}$$

Posmatrajući funkciju f predstavljenu sa (1) u okviru realne situacije, studenti su matematičko rešenje interpretirali kao dvodimenzionalnu reprezentaciju putanje kojom su prošle životinje po bedemu koji su napravile (prelaz 4).

Interpretacija i prihvatanje rešenja

Pojedinačnom proverom za svaku od tačaka pozicija koraka životinja na bedemu $S(-8,0)$, $A(-7;\ 0{,}9375)$, $B(-6;\ 1{,}75)$, $C(-5;\ 2{,}4375)$, $D(-4,3)$, $E(-3;\ 3{,}4375)$, $F(-2;\ 3{,}75)$, $G(-1;\ 3{,}9375)$ i $V(0,4)$ studenti su ustanovili da sve navedene tačke pripadaju funkciji putanje f i time potvrdili i prihvatili matematički model i matematičko rešenje (prelaz 5 i F. faza).

3.2.3. Realni problemi 3, 4 i 5

Rešavanjem realnih problema 1 i 2, studenti su uvežbavali količnik priraštaja. Da bi proširili svoja znanja vezana za definiciju izvoda funkcije, a naročito za njegovu algebarsku reprezentaciju i geometrijsku interpretaciju, osmišljena je još jedna situacija iz realnog sveta. Nova situacija iz realnog sveta je proširena tako da se nastavlja na prethodnu, da bi studenti mogli da iskoriste sve zaključke i rešenja do kojih su došli rešavajući realne probleme 1 i 2.

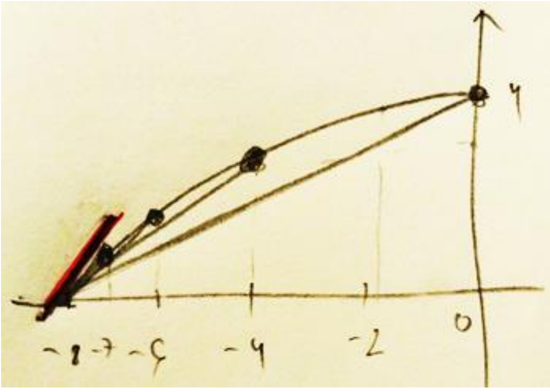
Tabela 3.3. *Situacija iz realnog sveta i realni problemi 3, 4 i 5*

SITUACIJA IZ REALNOG SVETA *Nakon izvesnog vremena, životinje su želele da ispitaju kako će videti nagib bedema ako se na njega istovremeno penju.* *U tu svrhu su pronašle skejtbord, i rešile da se sve zajedno njime popnu istovremeno na bedem.* *U startnoj tački bedema, životinje su primetile da svaka od njih vidi isti nagib skejtborda u odnosu na bedem. Ta situacija se ponovila i kada su bile na sredini i na vrhu bedema.* **REALNI PROBLEMI:** ***3. Odrediti nagib skejtborda u startnoj tački bedema.*** ***4. Odrediti nagib skejtborda na vrhu bedema.*** ***5. Odrediti nagib skejtborda na sredini bedema.***

Realni problem 3

U cilju rešavanja trećeg realnog problema (naći nagib skejtborda u startnoj tački bedema), nastavnik je sugerisao studentima da najpre analiziraju prvi korak svake od životinja i pokušaju da iz toga izvuku neke zaključke. Posmatrajući nagibe prvih koraka žirafe, zebre, gazele i divlje svinje (50%, 75%, 87,5% i 93,75%, respektivno) studenti su odmah primetili da se nagib prvog koraka povećava, kako se horizontalni napredak smanjuje. Ipak, studenti u tom trenutku i dalje nisu mogli da povežu ove zaključke sa nagibom skejtborda u startnoj tački bedema.

Nastavnik je zatim predložio studentima da svoje zaključke prikažu grafički. Studenti su skicirali prve korake životinja na bedemu i dodali na sliku i skejtbord na kojem su životinje stajale (Slika 3.6.).



Slika 3.6. *Prvi koraci životinja iz startne tačke bedema i skejtbord*

Analizirajući crtež sa slike 3.6. studenti su nakon izvesnog vremena i uz pomoć nastavnika došli do zaključka da skejtbord stoji u odnosu na bedem kao tangenta u odnosu na krivu koja predstavlja putanju životinja (funkcija f iz drugog realnog problema), (prelaz 2). Na taj način došli su do matematičkog modela nagiba skejtborda u startnoj tački bedema (faza C.) predstavljenim nagibom tangente t na funkciju putanje f u tački $S(-8, 0)$.

Da bi matematički reprezentovali nagib skejtborda u startnoj tački bedema (prelaz 3), studenti su pokušali da iskoriste matematički model za nagib koraka koji su imali od ranije. Količnik vertikalne i horizontalne promene, studenti su prema uputstvu koje je dao nastavnik izrazili pomoću funkcije f za prve korake životinja i dobili odgovarajuće količnike priraštaja funkcije i priraštaja argumenta h u tački $x = -8$:

$$Nagib\ koraka\ (1. korak) = m_h(-8) = \frac{f(-8+h) - f(-8)}{h}, \qquad h = 8, 4, 2, 1. \tag{2}$$

Posmatrajući i dalje diskutujući dobijene rezultate, studenti su pokušali da izraze granični slučaj kada skejtbord stoji u startnoj tački bedema. Nastavnik je studentima sugerisao da smanjenje horizontalne promene izraze preko desne granične vrednosti količnika priraštaja u tački $x = -8$:

$$m_t(-8) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(-8+h) - f(-8)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\left(-\frac{(-8+h)^2}{16} + 4\right) - \left(-\frac{(-8)^2}{16} + 4\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0_+} \frac{16 - h}{16} = 1. \tag{3}$$

U izrazu (3) studenti su prepoznali definiciju prvog izvoda funkcije f u tački $x = -8$ i nakon što su utvrdili da je nagib tangente t jednak 1, studenti su uočili da postoji veza između nagiba tangente u startnoj tački S na funkciju f i izvoda funkcije f u istoj tački.

Matematičko rešenje nagiba skejtborda m_t u startnoj tački bedema $S(-8, 0)$ je dato sledećim izrazom (faza D.):

$$m_t(-8) = 1.$$

Nastavnik je zatim od studenata tražio da nađu i prvi izvod funkcije $f(x) = -\frac{x^2}{16} + 4$ u startnoj tački $S(-8,0)$ i po tablici (prelaz 4). Studenti su lako došli do sledećeg izraza:

$$f'(x) = -\frac{x}{8}, \qquad f'(-8) = 1. \tag{4}$$

Zaključak do kojeg su studenti došli je da je prvi izvod funkcije f, u tački -8 jednak 1, odnosno da on odgovara nagibu tangente u datoj tački na grafik funkcije f (faza E.):

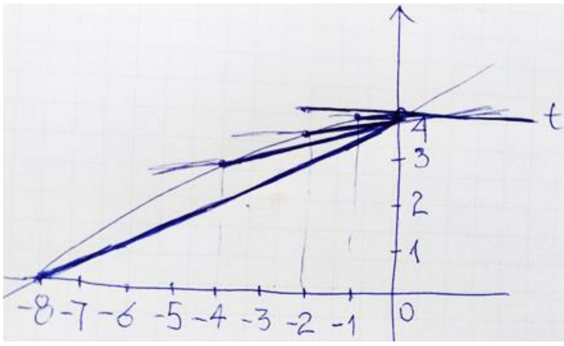
$$f'(-8) = m_t(-8) = 1.$$

Dobijene rezultate su već prethodno potvrdili tokom procesa izračunavanja, što je i bilo predviđeno da se uradi na taj način jer su studenti uvežbavali izvod funkcije i njegove osobine (prelaz 5 i faza F.).

Realni problem 4

Nakon što su studenti uspešno došli do matematičkog modela i rešenja trećeg realnog problema i nastavnik im ukazao na povezanost nagiba skejtborda u startnoj tački sa izvodom funkcije f u startnoj tački, prešli su na rešavanje četvrtog realnog problema (naći nagib skejtborda na vrhu bedema).

Studenti su već na samom početku procesa modelovanja komentarisali da je četvrti realni problem vrlo sličan trećem i zbog toga su rešavanje započeli na isti način, tako što su skicirali i ovaj slučaj, kada su životinje na skejtbordu na vrhu bedema (Slika 3.7.).



Slika 3.7. *Koraci životinja do tačke na vrhu bedema i nagib skejtborda u istoj tački*

Analizom skice, brzo su uvideli da se za vrh bedema posmatra poslednji korak svake životinje i utvrdili su da je to prvi korak žirafe, drugi zebre, četvrti gazele i osmi divlje svinje. Nagibi tih koraka su 50%, 25%, 12,5% i 6,25%, respektivno, i studenti su zaključili da se oni smanjuju kada se smanjuje horizontalni napredak koraka životinje.

Analogno trećem realnom problemu, studenti su za matematički model nagiba skejtborda na vrhu bedema usvojili nagib tangente t na funkciju putanje f u tački $V(0,4)$. Iz jednačine tangente t koju su odredili t: $y = 4$, studenti su utvrdili da je njen nagib jednak nuli.

Takođe, da bi došli do matematičkog rešenja (matematičke reprezentacije nagiba skejtborda kada je na vrhu bedema) studenti su sproveli isti postupak kao i kod trećeg realnog problema. Međutim, brzo su uvideli da se ovaj slučaj razlikuje od prethodnog, jer u ovom slučaju životinje „dolaze" u istu tačku (umesto da iz te tačke „kreću"). Studentima je ovde pomoć nastavnika bila neophodna da bi rešili problem. Nastavnik im je objasnio da se u ovom slučaju posmatra leva strana vrha bedema, odnosno tačke $V(0,4)$, i da se uzimaju negativne vrednosti za horizontalne promene jer se životinje približavaju vrhu sa leve strane (posmatrano od tačke $V(0,4)$, životinja ide „unazad" i zbog toga se vrednosti za horizontalne promene predstavljaju kao negativne). Studenti su, zajedno sa nastavnikom, došli do sledećeg zaključka:

$$Nagib\ poslednjeg\ koraka = m_h(0) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}, \quad h = -8, -4, -2, -1. \tag{5}$$

Odnosno u graničnom slučaju kada horizontalna promena teži nuli,

$$m_t(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\left(-\frac{(0+h)^2}{16}+4\right)-\left(-\frac{(0)^2}{16}+4\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{-h}{16} = 0. \tag{6}$$

Izvedeni zaključak su studenti povezali i sa prvim izvodom (4) i utvrdili da je dobijena granična vrednost za nagib skejtborda m_t jednaka vrednosti prvog izvoda u tački $V(0,4)$ na vrhu bedema, $f'(0) = m_t(0) = 0$.

Realni problem 5

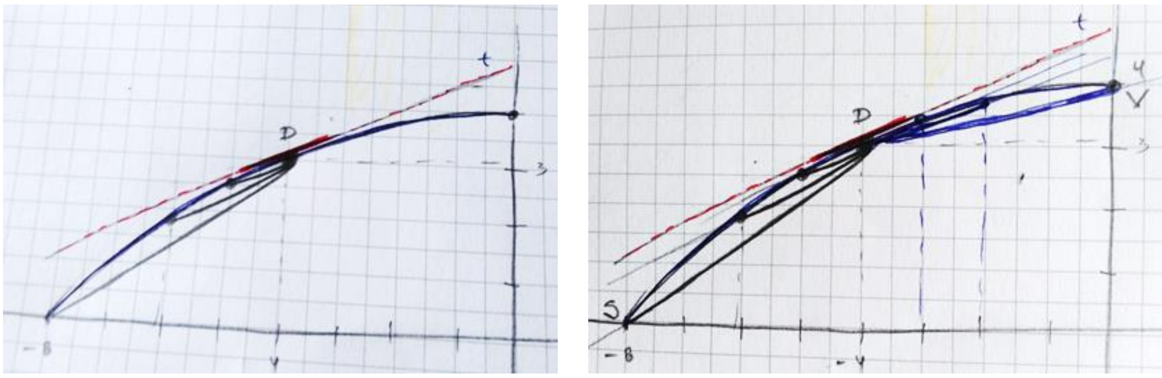
Da bi u potpunosti sagledali nagib bedema u tački (odnosno definiciju izvoda funkcije), nastavnik je studente uputio na rešavanje petog realnog problema (naći nagib skejtborda na sredini bedema).

Studenti su za matematički model nagiba skejtborda odmah usvojili nagib tangente na funkciju f u tački $D(-4,3)$ koja je na sredini bedema, na osnovu zaključaka iz prethodna dva problema koja su modelovali.

Nastavnik je tada studente pitao sa koje strane će posmatrati sečice, pošto su u prethodna dva slučaja posmatrali samo desnu ili samo levu stranu. Nakon kraćeg razmišljanja i diskusije, studenti su zaključili da se u ovom slučaju posmatraju sečice sa obe strane tačke D, budući da je ona na "sredini" bedema, a nije ni na početku (kao startna tačka S) a ni na vrhu (kao tačka V koja odgovara vrhu bedema). Nakon što su skicirali ovu situaciju, studentima je bilo u potpunosti jasno zbog čega bi u ovom slučaju trebalo da posmatraju i levu i desnu stranu tačke $D(-4,3)$ koja se nalazi na sredini bedema i korake kojima životinje u tu tačku „stižu" (leva strana) i korake kojima iz nje „kreću dalje" (desna strana).

Sa leve strane je to prvi korak zebre, drugi gazele i četvrti divlje svinje (njihovi nagibi su 75%, 62,5% i 56,25%, respektivno) a sa desne strane drugi korak zebre, treći gazele i peti divlje svinje (nagibi 25%, 37,5% i 43,75%, respektivno). Studenti su diskutovali vrednosti za nagibe koraka životinja levo i desno od tačke D, i komentarisali su da se nagibi sa leve strane smanjuju, a sa desne strane povećavaju (za svaku stranu smanjenjem horizontalne promene koraka).

Studenti su najpre posmatrali nagibe koraka levo od tačke D (0,75; 0,625 i 0,5625 za korake zebre, gazele i divlje svinje, respektivno). Zatim su našli nagib tangente t na funkciju putanje f u tački $D(-4,3)$, $t: y = \frac{1}{2}\mathrm{x} + 5$ čijom analizom su došli do zaključka da je u graničnom slučaju nagib skejtborda jednak $\frac{1}{2}$ (Slika 3.8. a)).



a) b)

Slika 3.8. *Sečice i tangenta iz tačke D na sredini bedema sa leve i desne strane*

Nagibi koraka životinja sa desne strane tačke D (Slika 3.8. b)) su bili 0,25; 0,375 i 0,4375 (za korake zebre, gazele i divlje svinje, respektivno) što je potvrdilo studentima njihovu pretpostavku da će nagib tangente biti jednak, bez obzira na stranu sa koje se posmatra.

Da bi rezultati do kojih su studenti došli u prethodnom procesu modelovanja mogli biti uobličeni u matematičko rešenje i kasnije interpretirani i potvrđeni kao validni, nastavnik je tražio od studenata da matematički reprezentuju svoje zaključke.

Studenti su krenuli od (2) koji su prilagodili za tačku $D(-4,3)$:

$$m_h(-4) = \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} \ , \tag{7}$$

koji su posmatrali za $h = -1, -2, -4, -8$ (leva strana), i za $h = 1, 2, 4, 8$ (desna strana).

Posmatrajući izraz (7) i u funkciji putanje f, studenti su dobili sledeći rezultat:

$$m_h(-4) = \frac{\left(-\frac{(-4+h)^2}{16} + 4\right) - \left(-\frac{(-4)^2}{16} + 4\right)}{h} = \frac{8-h}{16}. \tag{8}$$

Sada, posmatrajući samo levu graničnu vrednost izraza (8), studenti su došli do:

$$m_t(-4) = \lim_{h \to 0_-} \frac{8-h}{16} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, potvrđeno je da matematička reprezentacija nagiba tangente posmatrana sa leve strane tačke D odgovara nagibu do kojeg su studenti već došli.

Razmatrajući (8) i desnu graničnu vrednost, za $h = 1, 2, 4, 8$ dobijeni su isti rezultati kao za levu stranu:

$$m_t(4) = \lim_{h \to 0_+} \frac{8-h}{16} = \frac{1}{2}.$$

Zaključak studenata je bio da je nagib tangente (nagib skejtborda na kojem su stajale u tački D) isti, bez obzira sa koje strane se posmatra granična vrednost.

Matematička reprezentacija izvedenog zaključka:

$$m_t(-4) = \lim_{h \to 0} \frac{8-h}{16} = \frac{1}{2}$$

odakle su studenti nagib tangente odmah povezali i sa prvim izvodom funkcije f u tački D:

$$f'(x) = -\frac{2x}{16} = -\frac{x}{8}, \qquad f'(-4) = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Važno je naglasiti da je nastavnik morao često da interveniše tokom procesa modelovanja svih pet problema, a naročito da pomogne studentima da uoče vezu između nagiba skejtborda u posmatranoj tački bedema sa nagibom tangente t na funkciju putanje f u posmatranoj tački, odnosno sa izvodom funkcije f u toj tački.

Takođe, primećeno je i da su studenti dosta vremena trošili na određivanje algebarskog izraza funkcije putanje životinja po bedemu (realni problem 2) kao i na izračunavanja jednačina pravih (tangente t u 3, 4 i 5 realnom problemu) i da im je to značajno skretalo pažnju sa problema koji su modelovali.

3.3. OBRADA PRIMENE IZVODA FUNKCIJE MATEMATIČKIM MODELOVANJEM

Posmatrajući reakcije studenata eksperimentalne grupe na novi pristup nastavi i učenju koji je realizovan primenom matematičkog modelovanja, utvrđeno je da su one izrazito pozitivne. Prva generacija studenata je čak, nakon završenog procesa modelovanja primenjenog na rešavanje prethodno opisanih pet realnih problema, tražila od nastavnika da se još neka tema obradi na isti način, uz komentare da im je uz modelovanje učenje bilo olakšano jer su mogli da povežu matematiku sa realnim svetom.

Nastavnik je usvojio zahtev studenata i primena izvoda funkcije je takođe obrađivana matematičkim modelovanjem sa prvom i sa svakom sledećom generacijom studenata koja je učestvovala u istraživanju. Svi studenti su najpre upoznati sa izvodima višeg reda i primenom izvoda na ispitivanje monotonosti funkcije i ekstremnih vrednosti.

U nastavku istraživanja su učestvovali isti studenti koji su učestvovali i u prvom delu opisanom u poglavlju 3.2. Podela studenata na kontrolnu i eksperimentalnu grupu se takođe nije menjala u odnosu na onu koja je korišćena kod obrade definicije izvoda funkcije. Nastava sa eksperimentalnom grupom studenata je realizovana primenom matematičkog modelovanja, dok su kod kontrolne grupe za rešavanje istih problema primenjeni tradicionalni metodski pristupi.

3.3.1. Monotonost i ekstremne vrednosti – Realni problem 6

Kao i kod prethodnih problema koji su studenti modelovali i realni problem 6 je predstavljen na sličan način:

Tabela 3.4. *Situacija iz realnog sveta i realni problem 6*

SITUACIJA IZ REALNOG SVETA *Kada su životinje stigle do vrha bedema koji su napravile, poželele su i da siđu na drugu stranu. Životinje su se spuštale putanjom koja se nastavila na onu kojom su se penjale na bedem, odnosno kretale su se putanjom određenom funkcijom* $f(x) = -\frac{x^2}{16} + 4$ *za* $x \in [-8, 8]$. **REALNI PROBLEM:** **1. *Odrediti nagibe skejtborda kada su se životinje spuštale niz bedem i ispitati monotonost i ekstremne vrednosti funkcije putanje* f.**

Studenti su, odmah nakon što su saslušali opis situacije iz realnog sveta i realni problem, komentarisali da kada životinje silaze niz bedem, sve bi trebalo da bude „suprotno" u odnosu na situaciju kada su se životinje penjale na bedem.

Manja grupa studenata je najpre pokušala da izračuna nagib koraka žirafe kada silazi niz bedem i dobili su za rezultat 50% koristeći već poznate vrednosti za horizontalnu promenu ($8\ m$) i za vertikalnu promenu ($4\ m$) žirafinog koraka. Međutim, nastavnik je tada tražio od tih studenata da uporede dobijeno rešenje sa situacijom iz realnog sveta i da se prisete koju stranu bedema su posmatrali (levu ili desnu) kada su se životinje penjale na bedem. Studenti su brzo uvideli da su pogrešili, odnosno da nagib prvog koraka žirafe kada se penje na bedem ne može biti jednak nagibu njenog koraka kada silazi, bez obzira što se vrednosti za vertikalnu i horizontalnu promenu pri tome ne menjaju.

Studenti su tada (uz pomoć nastavnika) primenili zaključke iz prethodnog procesa modelovanja. Znali su da žirafa kada silazi, kreće sa vrha bedema (tačka $V(0, 4)$) i u jednom koraku (horizontalna promena je $8\ m$) stiže do podnožja bedema sa desne strane (tačka $(8, f(8)) = (8, 0)$). Zatim su primenili (2) i došli do sledećeg:

$$Nagib\ silaznog\ koraka\ (\check{Z}irafa\ ) = \frac{f(0+8)-f(0)}{(0+8)-0} = \frac{0-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Analognim postupkom, studenti su došli i do nagiba koraka ostalih životinja i utvrdili su da se nagibi odgovarajućih koraka razlikuju samo po znaku u odnosu na one kada su se životinje penjale na bedem. Nastavnik je zatim tražio da studenti ispitaju granične slučajeve kada horizontalna promena teži nuli za desnu baznu tačku bedema $(8, 0)$, tačku na bedemu $(4, 3)$ i tačku koja odgovara vrhu bedema $V(0, 4)$.

Studentima je u ovom slučaju znatno lakše bilo da uoče sa koje strane da posmatraju granični slučaj za tačku $(8, 0)$, (u ovom slučaju sa leve strane), i u skladu sa tim su došli do nagiba bedema u desnoj baznoj tački, kao i do izvoda u istoj tački:

$$\lim_{h\to 0_-}\frac{f(8+h)-f(8)}{h} = \lim_{h\to 0_-}\frac{-16-h}{16} = -1, \qquad f'(8) = -1. \tag{10}$$

Granični slučaj za tačku $(4, 3)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-8-h}{16} = -\frac{1}{2}, \qquad f'(4) = -\frac{1}{2}. \tag{11}$$

Međutim, u graničnom slučaju za tačku $V(0, 4)$ studenti su dobili isti rezultat kao i kod realnog problema 4, samo sada posmatrano kada h teži nuli sa obe strane:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{16} = 0, \qquad f'(0) = 0. \tag{12}$$

Posmatrajući granične slučajeve, studenti su lako povezali znak nagiba (izvoda) sa kretanjem životinja. Uočili su da je znak izvoda pozitivan uvek kada se životinje penju, dakle, idu na gore, a da kada idu na dole (silaze niz bedem) znak izvoda je negativan.

Nastavnik je tada pitao studente kako tumače vrednost nagiba (izvoda) u tački $V(0, 4)$ koja je jednaka nuli. Studenti su, nakon kraćeg posmatranja skice bedema, došli do zaključka da se u tački V menja način kretanja životinja (iz penjanja u silaženje), a jedan student je prokomentarisao da je $V(0, 4)$ vrh bedema a samim tim i najviša tačka na bedemu do koje životinje mogu da dođu.

Na ovaj način, studenti su došli do matematičkog modela koji je za monotonost funkcije odgovarao znaku njene izvodne funkcije, a u slučaju ekstremnih vrednosti, matematički model je odgovarao nulama izvodne funkcije.

Povezujući sve prethodne zaključke vezane za kretanje životinja uz i niz bedem, nagibe njihovih koraka, znak izvodne funkcije f' i njenoj nuli, studenti eksperimentalne grupe su došli do matematičkog rešenja situacije iz realnog sveta koju su modelovali.

Matematičko rešenje postavljenog realnog problema je predstavljeno tabelom 3.5.

Studenti su dobijeno rešenje interpretirali na sledeći način: kada se životinje kreću po bedemu (za $x \in [-8, 8]$), uz njega će se kretati od startne tačke $S(-8, 0)$ do tačke $V(0, 4)$ koja predstavlja vrh bedema, odnosno najvišu tačku na koju se mogu popeti. Životinje će silaziti niz bedem kada se kreću od vrha (odnosno od tačke V) do tačke $(8,0)$ koja se nalazi u podnožju bedema sa desne strane.

Tabela 3.5. *Matematičko rešenje realnog problema 6*

Interval	$[-8,0)$	$(0,8]$
Znak izvodne funkcije f'	+	-
Monotonost funkcije	↗	↘
Ekstremne vrednosti	$E(0,4)$ $\boldsymbol{max}$	

Upoređujući dobijene rezultate za nagibe koraka životinja i znake izvodne funkcije sa rezultatima do kojih su došli tokom procesa modelovanja svih šest realnih problema, studenti su matematičko rešenje usvojili kao validno.

Važno je napomenuti da su studenti E grupe i nakon završetka eksperimentalnog dela nastave često pokušavali da rešavaju postavljene zadatke iz drugih oblasti tako što su ih povezivali sa realnim primerima. Na primer, kada se obrađivala konveksnost i konkavnost funkcije, nekoliko studenata E grupe je opet iskoristilo situacije sa životinjama i uz međusobnu diskusiju (diskutovali su šta bi bio matematički model a šta matematičko rešenje) došli su do zajedničkih zaključaka. Takođe, prilikom uvežbavanja zadataka vezanih za primenu izvoda (rast populacije, brzina, ubrzanje, itd.) primećeno je da su studenti E grupe zadatke rešavali kroz diskusiju i da su pri tome pratili faze procesa modelovanja iako to od njih tada nije bilo eksplicitno zahtevano. Na osnovu toga, izveden je zaključak da su studenti metodski pristup baziran na matematičkom modelovanju rado prihvatili i nastavili da ga koriste i nakon sprovedenog istraživanja.

3.4. ANALIZA PROCESA MODELOVANJA

Realizovano istraživanje je pokazalo da je moguće integrisati matematičko modelovanje u nastavu matematike na visokoškolskom nivou. Analizirajući situacije koje su se javljale tokom procesa primene modelovanja u okviru predstavljenog istraživanja, došlo se do sledećih zaključaka:

- Studenti E grupe su tokom procesa modelovanja bili motivisani i zainteresovani za aktivno učešće u nastavnom procesu, što nije uvek bio slučaj kod studenata K grupe kod kojih je pri obradi izvoda funkcije primenjen tradicionalni pristup. U tom smislu, kod E grupe je primećena intenzivnija interakcija između studenata i nastavnika, koju su podsticale diskusije i aktivnosti tokom modelovanja.

- Uloga nastavnika je bila vrlo značajna, jer bez njegovih intervencija u vidu pomoći, sugestija i usmeravanja studenata, prepreke koje su nastajale u vidu blokada procesa modelovanja studenti ne bi mogli samostalno da prevaziđu.
- U E grupi, komunikacija između nastavnika i studenata, kao i između samih studenata je bila ograničena i spora (ali u manjoj meri nego kod studenata K grupe) jer je određivanje algebarskih i grafičkih reprezentacija pojmova koji su se obrađivali za studente bilo vremenski zahtevno (sve su radili ručno, uz eventualnu pomoć nastavnika).
- U nekim slučajevima (kao kod drugog realnog problema) studenti su tokom modelovanja nepotrebno skretali sa teme koja se obrađuje (bavili su se osobinama kvadratne funkcije da bi odredili njene koeficijente preko sistema jednačina) jer im drugačija vrsta pomoći kojom bi direktno mogli da dodju do traženih podataka, nije bila dostupna.

Uzimajući u obzir sve prethodno izvedene zaključke, osmišljene su smernice za dalje unapređenje predloženog metodskog pristupa, od kojih su se najvažnije odnosile na smanjenje intervencija od strane nastavnika i integraciju računarskih tehnologija u proces modelovanja.

3.5. METODOLOŠKI OKVIR ISTRAŽIVANJA

Ovo poglavlje disertacije opisuje metodološki okvir sprovedenog istraživanja o uticaju primene matematičkog modelovanja u visokoškolskoj nastavi matematike na postignuća studenata iz oblasti diferencijalnog računa.

Predstavljeni su ciljevi i očekivani rezultati istraživanja, opisan je način konstrukcije uzorka, tehnike i instrumenti prikupljanja podataka. Postavljene su hipoteze istraživanja i obrazložene su metode korišćene za analizu dobijenih rezultata. Etape empirijskog dela istraživanja su navedene u ovom poglavlju disertacije i detaljno je analiziran postupak realizacije istraživanja.

3.5.1. Predmet, ciljevi, zadaci i hipoteze istraživanja

Predmet istraživanja se ogleda u osmišljavanju načina za integraciju metodskog pristupa baziranog na matematičkom modelovanju u nastavu matematike u visokom strukovnom obrazovanju i proučavanju efekata primene takvog pristupa na učenje i znanje studenata u oblasti diferencijalnog računa.

Glavni cilj istraživanja je merenje i utvrđivanje stepena uticaja primene metodskog pristupa baziranog na principima matematičkog modelovanja na kvalitet znanja studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

Zadaci istraživanja koji proističu iz predmeta i postavljenog glavnog cilja istraživanja su:

- Osmisliti način za procenu nivoa matematičkog znanja, kao i znanja i veština uopšte, koje studenti nose iz srednje škole i na osnovu toga formirati dve ujednačene grupe studenata, eksperimentalnu i kontrolnu.
- Izraditi i osmisliti zadatke, odnosno situacije iz realnog sveta koje će omogućiti studentima da izučavaju izvod funkcije i njegove osobine primenom matematičkog modelovanja.
- Realizovati nastavni proces sa studentima eksperimentalne grupe primenom matematičkog modelovanja a sa studentima kontrolne grupe primenom tradicionalnih metodskih pristupa.
- Izraditi instrumente (testove znanja o izvodu funkcije, njegovim osobinama i primeni, usklađenih sa odgovarajućim nastavnim planom i programom), koji će se upotrebiti za merenje uticaja primene matematičkog modelovanja na kvalitet znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije.
- Utvrditi efekte primene metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju na kvalitet znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene i uporediti postignuća studenata eksperimentalne i kontrolne grupe.
- Izraditi instrumente za ispitivanje stava studenata prema matematici i ispitivanje mišljenja i predloga studenata za ostvarivanje optimalnih uslova za učenje i realizaciju nastave.
- Uporediti stavove studenata eksperimentalne grupe prema matematici i mišljenja i predloga za ostvarivanje optimalnih uslova za učenje i nastavu pre i nakon realizacije nastave primenom metodskog pristupa baziranog na matematičkom modelovanju.

Glavna hipoteza istraživanja je postavljena na osnovu cilja istraživanja i glasi:

H_I: Primenom metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju pri obradi izvoda funkcije i njegove primene postiže se statistički značajna razlika u boljim postignućima na testovima znanja studenata eksperimentalne grupe u odnosu na studente kontrolne grupe.

Postavljena hipoteza istraživanja je analizirana u različitim etapama istraživanja i testirana na testovima znanja različitog tipa. Takođe, testirane su i pomoćne hipoteze:

H_{P1}: Postoji statistički značajna razlika u boljim postignućima studenata eksperimentalne grupe u odnosu na studente kontrolne grupe na prvom testu znanja (kolokvijum).

H_{P2}: Postoji statistički značajna razlika u boljim postignućima studenata eksperimentalne grupe u odnosu na studente kontrolne grupe na drugom testu znanja (ispit).

3.5.2. Uzorak

Istraživanje je sprovedeno na namernom uzorku od četiri generacije studenata prve godine Visoke tehničke škole strukovnih studija u Zrenjaninu (u periodu od 2009-2014. god.) i jednoj generaciji studenata prve godine Visoke tehničke škole strukovnih studija u Požarevcu (školska 2013/2014. god.).

Učesnici istraživanja su bili studenti prve godine različitih studijskih programa: Mašinskog inženjerstva, Tehnološkog inženjerstva, Tekstilne konfekcije i dizajna, Inženjerskog menadžmenta koji su slušali predmet *Matematika* u okviru jednosemestralnog kursa (akreditacija iz 2007. god.), sa fondom (3+3) za predavanja i vežbe, ili u okviru jednosemestralnog kursa *Matematika 2*, (akreditacija iz 2012. god.) sa fondom (2+2), nakon odslušanog kursa iz *Matematike 1*. Kursevi iz *Matematike* i *Matematike 2* su obrađivali sadržaje iz diferencijalnog računa, preciznije obrađivan je pojam izvoda funkcije i njegove primene, u istom obimu na oba kursa.

U istraživanju je učestvovalo ukupno 555 studenata koji su za potrebe istraživanja podeljeni u dve grupe, kontrolnu (K grupu) i eksperimentalnu (E grupu). Izbor studenata za K i E grupu je izvršen na osnovu tri kriterijuma: ujednačavanja prosečne ocene iz matematike koju su studenti ostvarili u srednjoj školi, broja godina slušanja predmeta Matematika u srednjoj školi i vrste srednje škole koju su završili (trogodišnja stručna škola ili četvorogodišnja škola). Vrsta završene škole je uzeta u obzir prilikom formiranja grupa jer propisane propozicije postupka i uslova za upis na Visoku tehničku školu strukovnih studija u Zrenjaninu predviđaju i mogućnost upisa ove visoke strukovne škole nakon završetka i srednje stručne škole u trajanju od tri godine.

Podaci za svaki od kriterijuma su dobijeni anketiranjem studenata, i u tu svrhu je izrađen anketni listić (Slika 3.9.):

Ime i prezime: ______________________________

Prethodno završena srednja škola: ______________________________

Stepen stručne spreme: III IV

Koliko ste godina imali matematiku u srednjoj školi? 1 2 3 4

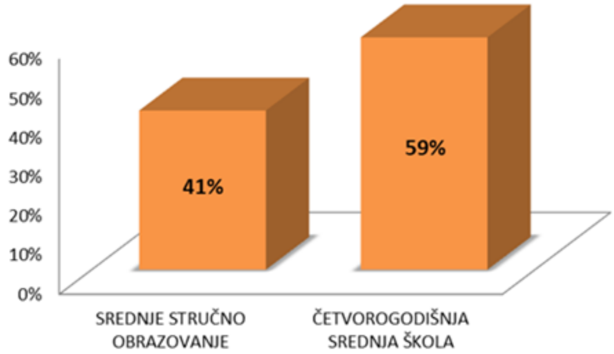
Koja je najviša ocena koju ste imali iz matematike u srednjoj školi? 2 3 4 5

Studijski program: ______________________________

Modul: ______________________________

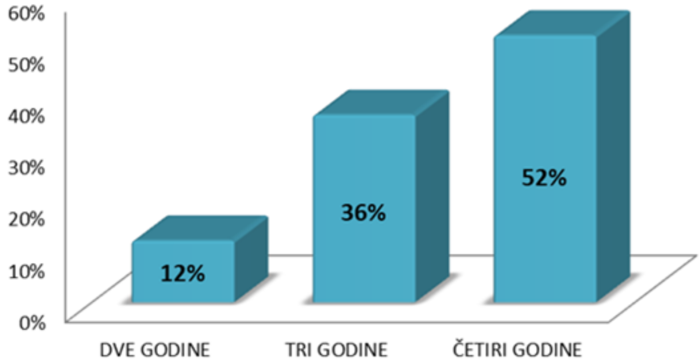
Slika 3.9. *Anketni listić*

Grafikon 3.1. prikazuje procentualni odnos studenata koji su učestvovali u istraživanju po tipu završene srednje škole.



Grafikon 3.1. *Procentualni odnos studenata po tipu završene srednje škole*

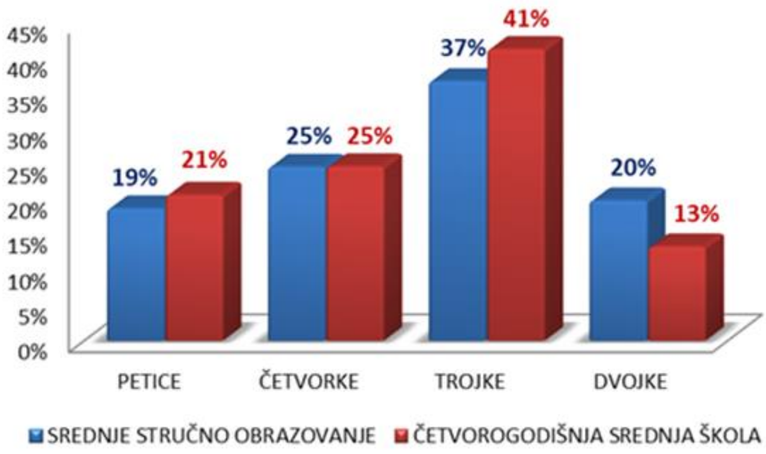
Analizirajući podatke dobijene iz ankete vezane za broj godina koliko su studenti slušali matematiku u srednjoj školi, dobijeni su podaci predstavljeni na grafikonu 3.2.



Grafikon 3.2. *Broj godina koliko su studenti slušali matematiku u srednjoj školi*

Sa grafikona 3.2. se može videti da je broj studenata koji su slušali matematiku četiri godine približno jednak broju studenata koji su matematiku slušali dve ili tri godine. Ovo zapažanje je od velikog značaja za istraživanje koje je bilo sprovedeno, jer se iz ovih podataka vidi da je polovina broja studenata koji su učestvovali u istraživanju izučavala izvod funkcije u srednjoj školi (četiri godine matematike) a polovina nije (dve i tri godine matematike) uzimajući u obzir da se po planu i programu matematike za srednje škole izvod funkcije izučava u četvrtom razredu.

Ocene koje su studenti postigli iz matematike u srednjoj školi su date uporedno za studente koji su završili trogodišnje srednje stručne škole i četvorogodišnje srednje škole (Grafikon 3.3.). Može se zaključiti da je učešće studenata po ocenama iz matematike podjednako za obe grupe. Ukupna prosečna ocena iz matematike za studente koji su završili trogodišnje srednje stručne škole je 3,42 a za studente koji su završili četvorogodišnje srednje škole 3,53.



Grafikon 3.3. *Uporedni histogram po ocenama studenata iz matematike u srednjoj školi*

Na osnovu podataka dobijenih anketiranjem, studenti su podeljeni u dve grupe, K grupu (278 studenata) i E grupu (277 studenata) tako da su obe grupe ujednačene po prosečnoj oceni iz matematike u srednjoj školi, broju godina slušanja matematike u srednjoj školi i po tipu srednje škole koju su završili. Taj proces je sproveden tako što su prvo svi studenti grupisani po tipu srednje škole koju su završili. Zatim je, unutar svake od grupa vršeno klasifikovanje studenata po broju godina koliko su slušali matematiku u srednjoj školi, i nakon toga po ocenama iz matematike. Podela na E i K grupu je vršena tako što su iz svake grupe studenata nastale gore pomenutom klasifikacijom birani parovi studenata od kojih je jedan smeštan u E a jedan u K grupu, čime je postignuta ravnomerna i ujednačena podela (Tabela 3.6.).

Tabela 3.6. *Podela studenata na E i K grupu*

	E grupa	**K grupa**
Školska 2009/2010.	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu **66 studenata**	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu **67 studenata**
Školska 2010/2011.	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu **70 studenata**	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu **70 studenata**
Školska 2012/2013.	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu **71 student**	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu **71 student**
Školska 2013/2014.	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu **70 studenata**	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Požarevcu **70 studenata**
Ukupno	**277 studenata**	**278 studenata**

Svi studenti su dobrovoljno učestvovali u istraživanju, a takođe je obezbeđena i saglasnost obe škole, Visoke tehničke škole strukovnih studija iz Zrenjanina i Visoke tehničke škole strukovnih studija iz Požarevca za realizaciju i učešće u istraživanju.

3.5.3. Metode, tehnike i instrumenti istraživanja

Tokom realizacije istraživanja primenjene su različite metode, u zavisnosti od etape i tipa istraživanja. Metoda komparativne analize je primenjena prilikom proučavanja postojeće relevantne literature iz oblasti matematike, posebno metodike nastave matematike, matematičkog modelovanja, zatim knjiga, naučnih i stručnih radova i internet resursa.

Pri utvrđivanju osnovnih teorijskih postavki, praktičnih rešenja predmeta istraživanja, kod prikupljanja podataka, obrade i interpretacije rezultata eksperimentalnog istraživanja korišćena je deskriptivna metoda.

Eksperimentalna metoda je primenjena za utvrđivanje veze između primene matematičkog modelovanja i postignuća studenata. Istraživanje je realizovano putem eksperimentalnog rada sa paralelnim grupama, jednom kontrolnom i jednom eksperimentalnom (Lekić, 2007; Mužić, 2004).

Podaci dobijeni u eksperimentalnom delu istraživanja su analizirani i obrađeni odgovarajućim statističkim metodama. U obradi podataka su korišćene mere deskriptivne statistike, odnosno parametri: veličina uzorka, aritmetička sredina, standardna devijacija, koeficijent varijacije i razlika aritmetičkih sredina. Normalnost raspodela podataka dobijenih iz uzorka je testirana Kolmogorov-Smirnov testom. Hipoteze su testirane primenom statističkih testova za podatke sa normalnom raspodelom (Studentov t-test) i podatke čija raspodela ne odgovara normalnoj (Mann-Whitney test). Razlika u postignućima studenata E grupe i K grupe, odnosno veličina efekta (engl. *effect size*) eksperimentalnog faktora je izmerena primenom Cohens' d koeficijenta (Cohen, 1988) po skali: mali efekat (do 0,20), srednji efekat (0,50) i veliki efekat (0,80).

Za obradu podataka od softverskih alata korišćen je Microsoft Excel 2010 i programski dodatak XLSTAT verzija 2014.5.03.

Podaci u eksperimentalnom delu istraživanja su prikupljeni tehnikom analize sadržaja (korišćena je za proučavanje sadržaja i plana i programa predmeta Matematika i Matematika 2 i odgovarajuće literature), tehnikom anketiranja (korišćena je za prikupljanje podataka o uspehu iz matematike i prethodno završenoj srednjoj školi studenata) i tehnikom testiranja (ispitivana su znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene).

Instrumente istraživanja su činili dva testa koji su bili deo redovnih provera znanja studenata u okviru predmeta Matematika/Matematika 2 i jedna anketa koja je ispitivala stavove studenata koju je osmislio autor disertacije.

Instrument I - Kolokvijum

Krajem semestra (jedan mesec nakon eksperimentalne nastave) u kojem su studenti slušali predmet Matematika/Matematika 2 se održavao redovan kolokvijum, kao prva provera znanja. Kolokvijum je po nameni bio dijagnostički test jer je imao za cilj da utvrdi stepen u kojem su studenti usvojili sadržaje vezane za prethodno obrađeno gradivo.

Kolokvijum je realizovan kao test višestrukog izbora. Za svaki zadatak su ponuđena četiri odgovora od kojih student bira jedan odgovor. Pri tome, odgovori su konstruisani tako da lako navedu studenta na pogrešan odgovor, ukoliko student nije u dovoljno dobroj meri savladao gradivo koje se proverava na testu. Takođe, studenti su zadatke dobili u vidu testa višestrukog izbora zbog utvrđivanja mogućnosti primene takvog načina provere znanja u nastavi matematike na Visokoj školi strukovnih studija.

Test se sastojao od ukupno trinaest zadataka, od kojih je šest zadataka bilo iz oblasti izvoda funkcije i njegovih primena. U zagradi pored rednog broja zadatka je naveden broj bodova koje nosi tačno rešenje. Zadaci su nosili jedan ili dva boda, u zavisnosti od složenosti. Ukupan broj bodova za zadatke na celom testu je bio 20, a za zadatke iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene je bio 9. Negativnih poena nije bilo.

Studenti su za izradu zadataka na kolokvijumu imali 90 *minuta*, odnosno dva školska časa. Svi studenti (E grupa i K grupa) su dobili identične zadatke. Deo prvog testa koji se odnosio na izvod funkcije i njegove primene je sadržao sledeće zadatke (Tabela 3.7.):

Tabela 3.7. *Zadaci sa kolokvijuma koji se odnose na izvod funkcije i njegovu primenu*

4. (2 boda)	Izvod funkcije $f(x) = cos^9 x$ je: a) $f'(x) = -9x^8 sinx^9$ b) $f'(x) = -9cos^8 x sinx$ c) $f'(x) = 8cosx^9$ d) $f'(x) = 8sin^9 x$
5. (1 bod)	Dvadeseti izvod funkcije $f(x) = x^3 - 32x^2 + e^x - 8$ je: a) $f^{XX}(x) = -32x$ b) $f^{XX}(x) = -8$ c) $f^{XX}(x) = e^x$ d) $f^{XX}(x) = 0$
6. (2 boda)	Jednačine tangente i normale funkcije $y = \frac{x}{x+3}$ u tački $M_0(2, \frac{2}{5})$ su: a) $t: y = \frac{3}{25}x + \frac{4}{25}$ $n: y = -\frac{25}{3}x + \frac{256}{15}$ b) $t: y = -\frac{25}{3}x + \frac{256}{15}$ $n: y = \frac{3}{15}x + \frac{4}{25}$ c) $t: y = -\frac{3}{25}x - \frac{4}{25}$ $n: y = \frac{25}{3}x - \frac{256}{15}$ d) $t: y = \frac{2}{5}$ $n: x = 2$
7. (1 bod)	Ako je prvi izvod funkcije $y' = 14x^{12}e^{5x-13}$, ta funkcija na svom domenu: a) uvek opada b) uvek raste c) konstantna je d) delom raste, a delom opada
8. (2 boda)	Funkcija $f(x) = \frac{e^x}{x+5}$ ima ekstremnu vrednost u tački: a) $M(0,0)$ b) $M(5, e^5)$ c) $M(-4, e^{-4})$ d) funkcija nema ekstemnih vrednosti
9. (1 bod)	Ako je drugi izvod funkcije $y'' = \frac{18e^x}{(6-x)^{16}}$, ta funkcija je na svom domenu: a) konveksna b) konstantna c) konkavna d) delom konveksna, a delom konkavna

Zadaci 4 i 5: Oba zadatka se odnose na testiranje znanja studenata koja se tiču tablice izvoda funkcije i od studenata se očekuje samo da mehanički primene tehnike i pravila za pronalaženje izvoda.

Zadatak 6: U ovom zadatku se direktno proverava sposobnost studenata da primene svoje znanje na konkretnu situaciju, a to je pronalaženje tangente i normale date funkcije. Tačno rešenje je dato pod a). Ostala ponuđena rešenja predstavljaju ili nepotpune izraze za tangentu i normalu, ili su izmešani izrazi za tangentu i normalu date funkcije sa malim varijacijama u predznacima. Zadatak nosi dva boda, zbog kompleksnosti njegovog rešavanja (studenti treba da nađu prvi izvod, vrednost prvog izvoda u tački M_0 i da sve uvrste u izraze za tangentu i normalu funkcije).

Zadatak 7: Tačan odgovor je dat pod b). Druga ponuđena rešenja predstavljaju ostale moguće ishode, što se tiče monotonosti funkcije. Takođe testira se i sposobnost za sagledavanje izraza u celini, jer je iz izraza za f' očigledno da je f'>0 na celom domenu funkcije, odakle i sledi zaključak koji vodi do tačnog odgovora. Dakle, očekuje se od studenata funkcionalno rezonovanje, a ne samo tehničke i mehaničke primene naučenog gradiva. Zadatak nosi jedan bod.

Zadatak 8: Ovaj zadatak je po svojoj koncepciji vrlo sličan Zadatku 6, samo se ovde ispituje znanje vezano za primenu izvoda funkcije na pronalaženje njenih ekstremnih vrednosti. Tačno rešenje je dato pod c) i nosi dva boda.

Zadatak 9: Testira se znanje studenata vezano za drugi izvod funkcije i njegovu primenu. Tačan odgovor je dat pod a), dok ostala navedena rešenja predstavljaju druge mogućnosti vezane za osobinu konveksnosti i konkavnosti funkcije koja se ispituje u zadatku. Zadatak nosi jedan bod.

Instrument II - Ispit

Finalni ispit iz predmeta Matematika/Matematika 2 je bio drugi instrument istraživanja. Ispit je obuhvatao celo gradivo iz Matematike/Matematike 2 i prvu priliku za polaganje ispita iz ovih predmeta studenti su imali u januarskom (Matematika), odnosno junskom ispitnom roku (Matematika 2), posle odslušane nastave (dva meseca nakon završetka eksperimentalnog dela nastave).

Obrađivani su rezultati koje su studenti ostvarili na ispitu u prvom ispitnom roku. Ispit se sastojao od ukupno osam zadataka, od toga izvod funkcije i njegove primene su neophodni za rešavanje dva zadatka. Kurikulumi predmeta Matematike i Matematike 2 su menjani tokom godina i prilagođavani su novim akreditacijama, ali su dva zadatka koja su analizirana u istraživanju ostajala sastavni deo ispita.

Ispit je test dijagnostičkog tipa, nosi ukupno 50 bodova, od čega zadaci koji se odnose na izvod funkcije nose 10 bodova. Za izradu zadataka je predviđeno 180 $minuta$. Svi studenti (E grupa i K grupa) su na ispitu rešavali identične zadatke. Zadaci koji su se odnosili na izvod funkcije i njegovu primenu su (Tabela 3.8.):

Tabela 3.8. *Zadaci sa ispita koji se odnose na izvod funkcije i njegovu primenu*

4.	Napisati jednačinu tangente i normale krive $f(x)=\frac{x+1-x^2}{1-x^2}$ u tački $M_0(2,f(2))$.
5.	Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $f(x)=\frac{x+1-x^2}{1-x^2}$.

3.5.4. Etape istraživanja

Eksperimentalno istraživanje je obuhvatilo četiri generacije studenata u periodu od 2009-2014. godine i realizovano je u okviru redovne nastave na predmetima Matematika/Matematika 2 a u skladu sa važećim nastavnim planom i programom oba navedena predmeta koji se slušaju na Visokoj tehničkoj školi strukovnih studija u Zrenjaninu i Visokoj tehničkoj školi strukovnih studija u Požarevcu.

Pre početka istraživanja sa studentima je sprovedena anketa na osnovu čijih rezultata su studenti podeljeni u dve jednako distribuirane grupe, E grupu i K grupu.

E grupa studenata je pre eksperimentalnog dela nastave realizovanog primenom matematičkog modelovanja popunjavala anketu o stavovima prema matematici i realizaciji nastave.

Nastava tokom koje je sproveden eksperimentalni program je trajala četiri radne nedelje. Za to vreme, sa studentima E grupe izvod funkcije i njegove primene su obrađivani primenom metodskog pristupa baziranog na matematičkom modelovanju, dok je nastava kod studenata K grupe na iste teme realizovana primenom tradicionalnog pristupa. Aktivnosti studenata E grupe tokom eksperimentalnog programa su detaljno opisane u poglavlju 3.2. (obrada izvoda funkcije) i poglavlju 3.3. (primena izvoda funkcije).

Razlike u znanju studenata E grupe i K grupe su ispitivane redovnim proverama znanja, kolokvijumu (održanom jedan mesec nakon završetka eksperimentalnog programa) i finalnom ispitu (održanom dva meseca nakon završetka eksperimentalnog programa). Istog dana, odmah nakon finalnog ispita, studenti E grupe su još jednom popunjavali anketu o stavovima prema matematici i realizaciji nastave.

Nakon preliminarnog obrađivanja rezultata istraživanja za svaku generaciju posebno, utvrđeno je da su kod svake generacije dobijeni približno slični rezultati i da nije bilo nekih većih odstupanja u odnosu na sve četiri generacije studenata. Rezultati istraživanja su zbog toga obrađivani i prikazani zbirno, za sve četiri generacije studenata koje su učestvovale u istraživanju.

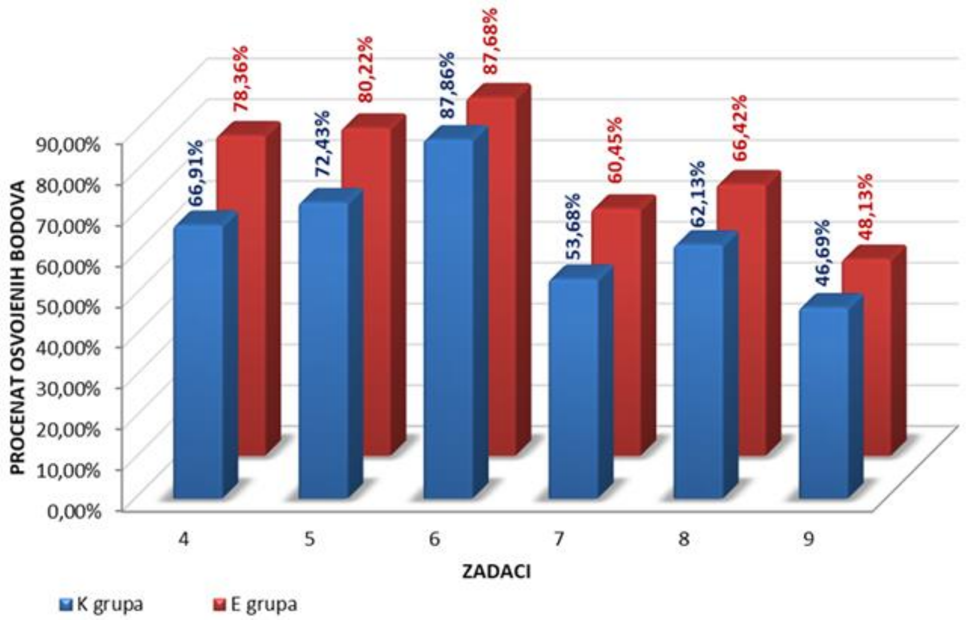
Rezultati provera znanja i ankete su iskorišćeni za procenu dejstva eksperimentalnog faktora, primene matematičkog modelovanja, na postignuća studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

3.6. ANALIZA I DISKUSIJA REZULTATA ISTRAŽIVANJA

3.6.1. Kolokvijum – analiza postignuća i diskusija rezultata

Kolokvijum je radilo ukupno radilo 540 studenata (268 studenata E grupe i 272 studenta K grupe). Obrađivani su rezultati dela kolokvijuma (od četvrtog do devetog zadatka) koji se odnosio na izvod funkcije i njegove primene. Zadaci iz obrađivanog dela kolokvijuma su bodovani na sledeći način: četvrti, šesti i osmi zadatak su nosili po dva boda, dok su peti, sedmi i deveti zadatak nosili po jedan bod (ukupno 9 bodova za svih šest zadataka).

Studenti E grupe su u proseku uradili tačno 72,64% zadataka sa kolokvijuma, a studenti K grupe 67,40%. U obe grupe je bilo studenata koji su ostvarili maksimalni broj bodova (44 studenta u E grupi i 20 studenata u K grupi). Nula bodova je u E grupi imalo 4 studenta, a u K grupi 5 studenata. Grafikon 3.4. daje uporedni prikaz postignuća po zadacima.



Grafikon 3.4. *Uporedni histogram po zadacima sa kolokvijuma*

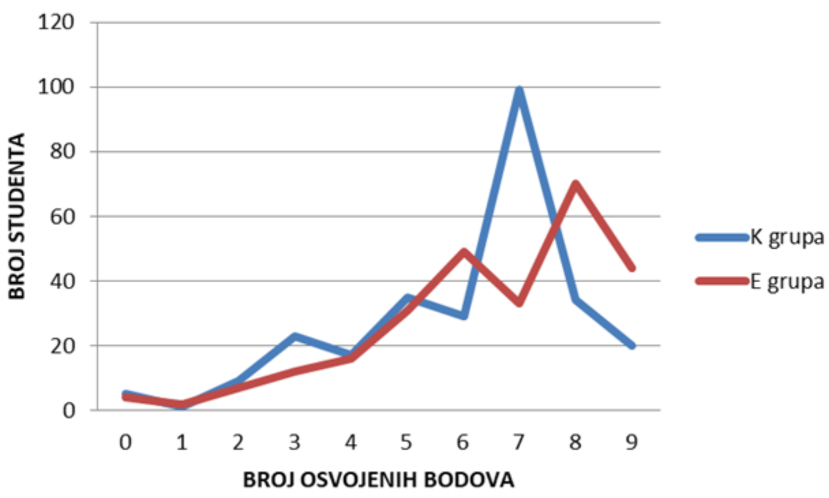
Sa grafikona 3.4. se jasno može uočiti da su studenti E grupe imali bolja postignuća od studenata K grupe na svakom zadatku sa kolokvijuma (osim kod šestog zadatka gde su obe grupe imale približno jednaka postignuća).

Šesti zadatak (određivanje tangente i normale na funkciju u datoj tački) su najbolje uradile obe grupe (87,68% i 87,86% za E grupu i K grupu, respektivno), što je bilo i očekivano, jer se zadatak rešava po standardnom protokolu.

Kod sedmog zadatka (ispitivanje monotonosti funkcije) postoji značajna razlika u postignućima u korist E grupe (60,45% za E grupu i 53,68% za K grupu). Ovakvi rezultati su bili i očekivani s obzirom da su studenti E grupe kroz primenu matematičkog modelovanja uvežbavali rešavanje problema ovog tipa i imali su prilike da ih povežu sa realnim situacijama.

Rezultati postignuća studenata kod osmog i devetog zadatka (određivanje ekstremne vrednosti funkcije i ispitivanje konveksnosti i konkavnosti funkcije, respektivno) su potvrdila prednost E grupe u odnosu na K grupu koja se tiče rešavanja problema primenom izvoda funkcije.

U K grupi je najveći broj studenata je ostvario sedam bodova, dok se u E grupi najveća frekvencija javila kod osam bodova (Grafikon 3.5.).



Grafikon 3.5. *Frekvencija bodova sa kolokvijuma*

Statistički pregled rezultata kolokvijuma je dat u tabeli 3.9. Studenti E grupe su u proseku ostvarili 6,54 boda (72,64%) a studenti K grupe 6,07 bodova (67,40%). Koeficijent varijacije (CV) je kod E grupe 31,62% a kod K grupe 32,80% što ukazuje na relativnu homogenost u znanju obe grupe na kolokvijumu.

Tabela 3.9. *Statistički rezultati kolokvijuma*

	N	*M*	*M(%)*	*SD*	*CV*	*M_E-M_K(%)*	*Mann-Whitney test*		*Cohens' d*
							U	*p*	
E	268	6,54	72,64%	2,07	31,62%	5,24%	42063,00	0,002	0,23
K	272	6,07	67,40%	1,99	32,80%				

Legenda: N-broj studenata; M-srednja vrednost broja bodova; M(%)-srednja vrednost broja bodova izražena u procentima; SD-standardna devijacija; CV-koeficijent varijacije; M_E-M_K(%) razlika srednjih vrednosti broja bodova E i K grupe izražena u procentima; U-vrednost statistike; p-nivo statističke značajnosti; Cohens' d-veličina efekta.

Za obe grupe je ispitana normalnost raspodele rezultata primenom Kolmogorov-Smirnov testa. Vrednost test statistike za E grupu je $D = 0{,}1858$ a nivo statističke značajnosti $p < 0{,}0001$, dok je za K grupu $D = 0{,}2431$ i $p < 0{,}0001$. Dobijene vrednosti test statistike ne odgovaraju normalnoj raspodeli rezultata E i K grupe, pa je za testiranje značajnosti razlike aritmetičkih sredina primenjen neparametrijski Mann-Whitney test.

Na osnovu vrednosti test statistike $U = 42063{,}00$ i nivoa statističke značajnosti $p = 0{,}002 < 0{,}01$ može se sa sigurnošću od 99% potvrditi da postoji statistički značajna razlika u postignućima E i K grupe na kolokvijumu.

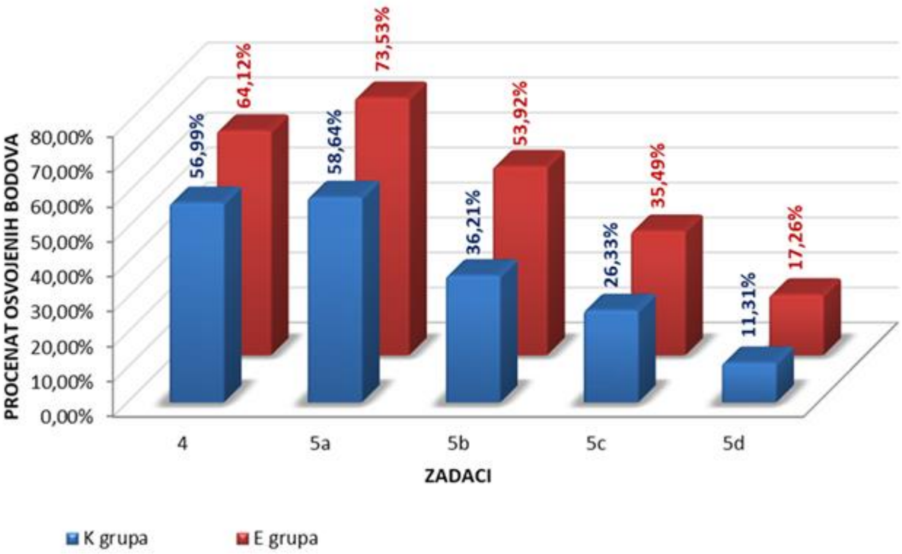
Veličina uticaja je mala ($d = 0{,}23$) ali daje E grupi praktičnu prednost u odnosu na K grupu potvrđivanjem postojanja pozitivnih efekata primenjenog metodskog pristupa baziranog na principima matematičkog modelovanja.

Analizom rezultata kolokvijuma potvrđena je prva pomoćna hipoteza istraživanja $\mathbf{H_{P1}}$, odnosno da postoji statistički značajna razlika u postignućima studenata na kolokvijumu u korist E grupe i metodskog pristupa baziranog na matematičkom modelovanju kao eksperimentalnog faktora.

3.6.2. Ispit

Ispit je radilo ukupno 498 studenata, od toga 255 studenata E grupe i 243 studenta K grupe. Na ispitu su analizirana postignuća studenata kod dva zadatka, četvrtom (tangenta i normala funkcije) i petom (ispitivanje toka funkcije) za čije rešavanje je bilo neophodno poznavanje izvoda funkcije i njegove primene. Četvrti zadatak je nosio dva boda a peti zadatak je raščlanjen na delove (5a(izvod funkcije), 5b(ispitivanje monotonosti funkcije), 5c(drugi izvod) i 5d(ispitivanje konveksnosti i konkavnosti funkcije)) od kojih je svaki deo nosio po dva boda. Studenti su ukupno na četvrtom i petom zadatku sa ispita mogli da ostvare 10 bodova.

Studenti E grupe su u proseku tačno rešili 48,86% zadataka a studenti K grupe 37,90% zadataka. Uporedni prikaz postignuća studenta po zadacima je dat na grafikonu 3.6.



Grafikon 3.6. *Uporedni histogram po zadacima sa ispita*

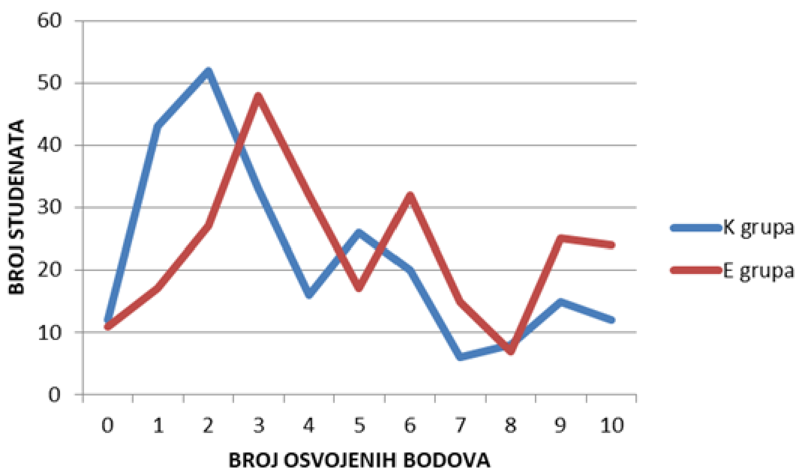
Kao i na kolokvijumu, studenti E grupe su bili značajno uspešniji od studenata K grupe i na ispitu, posmatrano za svaki zadatak pojedinačno (Grafikon 3.6.).

Iz grafikona 3.6. se može izvesti zaključak da su studenti obe grupe najbolje uradili zadatak 5a (73,53% tačnih rešenja kod studenata E grupe i 58,64% kod K grupe). Ovakvi rezultati su bili očekivani jer se od studenata traži da primene osnovne tehnike i pravila za pronalaženje izvoda.

Ono što je važno istaći je da je najveća razlika u postignućima studenata E i K grupe uočena kod 5b zadatka koji se odnosio na ispitivanje monotonosti funkcije (53,92% kod studenata E grupe i 36,21% kod K grupe). Prilikom analize pismenih radova studenata obe grupe, moglo se primetiti da su studenti K grupe zadatak rešavali koristeći isključivo algebarsku reprezentaciju dok su studenti E grupe uglavnom dobijeno rešenje i grafički interpretirali. Ovakav način rešavanja se kod studenata E grupe mogao uočiti i kod zadataka 5c i 5d što se može tumačiti kao jedna od posledica primene matematičkog modelovanja koja podrazumeva povezivanje problema koji se rešavaju sa realnim situacijama. Studenti E grupe su iz tih razloga imali potrebu da svako rešenje na neki način i „prikažu“ i u tu svrhu su koristili grafičku interpretaciju.

S tim u vezi, primećeno je da su studenti E grupe koji su u celosti ispitali tok funkcije (peti zadatak) bili uspešniji u skiciranju njenog grafika u odnosu na studente K grupe (9,41% studenata E grupe i 4,12% studenata K grupe).

Frekvencija bodova na ispitu je prikazana na grafikonu 3.7. U obe grupe je bilo studenata sa maksimalnim brojem bodova (24 studenta u E grupi i 10 u K grupi). Nula bodova je imalo 11 studenata u E grupi i 12 u K grupi. U K grupi je najveći broj studenata ostvario 2 boda a u E grupi 3 boda.



Grafikon 3.7. *Frekvencija bodova sa ispita*

U proseku, studenti E grupe su na posmatranim zadacima ostvarili 4,89 boda (48,86%) a studenti K grupe 3,79 boda (37,90%), (Tabela 3.10.).

Tabela 3.10. *Statistički rezultati ispita*

	N	*M*	*M(%)*		*CV*	*M_E-M_K(%)*	*Mann-Whitney test*		*Cohens' d*
							U	*p*	
E	255	4,89	48,86%	2,92	59,76%	10,96%	38338,00	0,000	0,38
K	243	3,79	37,90%	2,81	74,01%				

Legenda: N-broj studenata; M-srednja vrednost broja bodova; M(%)-srednja vrednost broja bodova izražena u procentima; SD-standardna devijacija; CV-koeficijent varijacije; M_E-M_K(%) razlika srednjih vrednosti broja bodova E i K grupe izražena u procentima; U-vrednost statistike; p-nivo statističke značajnosti; Cohens' d-veličina efekta.

Koeficijenti varijacije za obe grupe su povišeni (59,76% za E grupu i 74,01% za K grupu) što ukazuje na nehomogenost znanja studenata koja je naročito izražena kod K grupe.

Normalnost raspodele rezultata je ispitivana Kolmogorov-Smirnov testom. Dobijene vrednosti test statistike $D = 0{,}1487$ i $p < 0{,}0001$ za E grupu i $D = 0{,}1870$ i $p < 0{,}0001$ za K grupu su ukazale na nepostojanje normalne raspodele pa je za obradu rezultata ispita primenjen neparametrijski Mann-Whitney test.

Primenom Mann-Whitney testa (vrednost test statistike $U = 38338{,}00$ i nivo statističke značajnosti $p = 0{,}000 < 0{,}01$) dobijeni su rezultati na osnovu kojih se sa sigurnošću od 99% može potvrditi postojanje značajne statističke razlike između aritmetičkih sredina postignuća E i K grupe na ispitu.

Efekat uticaja je nešto veći nego na kolokvijumu ($d = 0{,}38$) ali i dalje spada u interval malih uticaja. U svakom slučaju, studenti E grupe su i na ispitu ostvarili statistički značajno bolja postignuća u odnosu na studente K grupe, čime je potvrđena druga pomoćna hipoteza istraživanja $\mathbf{H_{P2}}$ a samim tim i pozitivan uticaj eksperimentalnog faktora.

Rezultati sprovedenog istraživanja su potvrdili obe pomoćne hipoteze, a samim tim i glavnu hipotezu istraživanja koja se odnosi na implementaciju matematičkog modelovanja u visokoškolsku nastavu matematike. Na osnovu toga se izvodi zaključak da primena predloženog metodskog pristupa baziranog na matematičkom modelovanju dovodi do statistički značajno boljih postignuća studenata u odnosu na postignuća studenata kod kojih su za obradu izvoda funkcije i njegove primene korišćeni tradicionalni metodski pristupi.

3.6.3. Anketa

Sa studentima E grupe je sprovedena još i anketa koja je za cilj imala da utvrdi koliko predloženi metodski pristup baziran na matematičkom modelovanju može uticati na stavove studenata prema nastavi i učenju matematike.

Anketa je sa studentima sprovedena pre nego što je započeta eksperimentalna nastava. Nakon završetka eksperimentalne nastave, kada su studenti polagali finalni ispit, E grupa je ponovo popunjavala istu anketu i upoređivani su njihovi stavovi pre i posle.

Anketa je bila u formi upitnika koji se sastojao iz tri dela. Upitnik je koncipiran za potrebe opisanog istraživanja od strane autora disertacije. Prvi deo upitnika je sadržao osnovna pitanja vezana za profil studija, prethodno završenu srednju školu i pol. Drugi deo upitnika je osmišljen u cilju ispitivanja stava studenata prema matematici kao predmetu, načinu realizacije nastave i primeni novih tehnologija i metoda. Odgovori koje su studenti davali na postavljena pitanja iz upitnika su rangirani primenom trostepene Likert-ove skale (Slažem se-3, Delimično se slažem-2, Ne slažem se-1).

Drugi deo upitnika je sadržao sledeća pitanja prikazana u tabeli 3.11.

Treći deo upitnika je ispitivao subjektivno mišljenje studenata o matematici i metodskim pristupima koji se koriste u nastavi. Svi studenti koji su učestvovali u istraživanju su imali priliku da tekstualno izraze svoje viđenje važnosti matematike, iskažu svoj stav o tome šta matematiku čini „teškom“ i predlože eventualne načine za poboljšanje efekata nastave, učenja i razumevanja matematičkih pojmova.

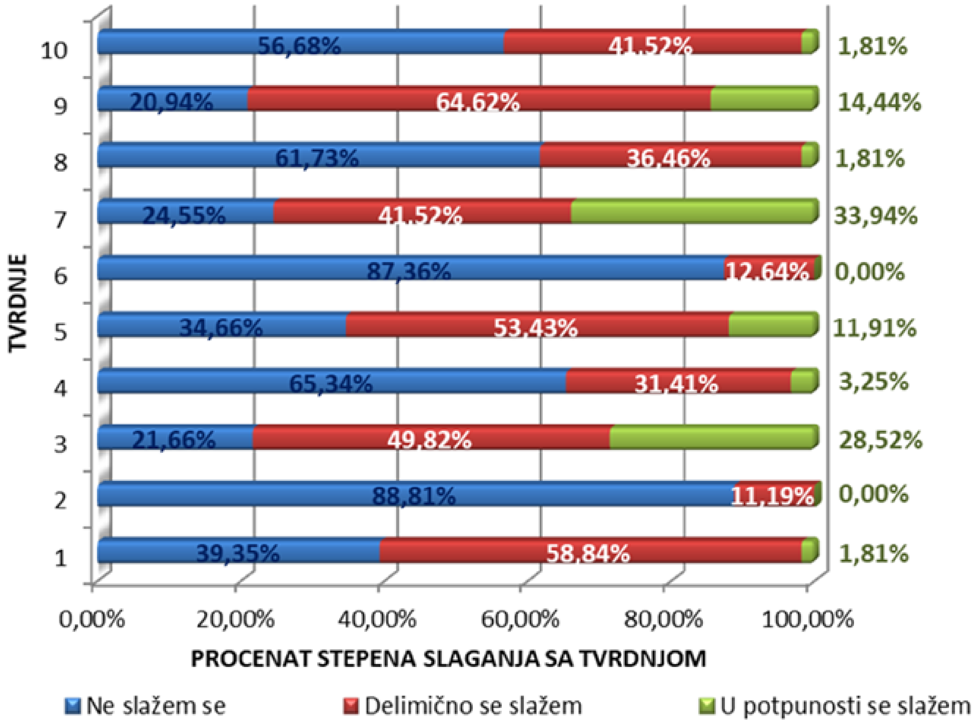
Tabela 3.11. *Pitanja iz drugog dela upitnika*

1.	Matematika je previše apstraktna.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
2.	Način na koji profesor/asistent prezentuje sadržaje koji se izučavaju ima uticaj na razumevanje matematike.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
3.	Nastava matematike nije ilustrovana sa dovoljnim brojem primera iz realne prakse.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
4.	Ukazivanje na realne primere bi imalo uticaja na razumevanje matematičkih pojmova.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
5.	Nastava matematike nije ilustrovana sa dovoljnim brojem vizuelnih primera.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
6.	Vizuelni primeri imaju pozitivan uticaj na razumevanje matematičkih pojmova.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
7.	Računarske tehnologije nisu u dovoljnoj meri zastupljene u nastavi matematike.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
8.	Vizuelni primeri (grafikoni, animacije, simulacije) bi doprineli razumevanju matematike.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
9.	Matematiku ću koristiti u profesionalnom životu.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE
10.	Aktivna nastava i kreativnost u sprovođenju nastave matematike bi doprineli Vašem interesu za matematiku i njene primene.	SLAŽEM SE	DELIMIČNO SE SLAŽEM	NE SLAŽEM SE

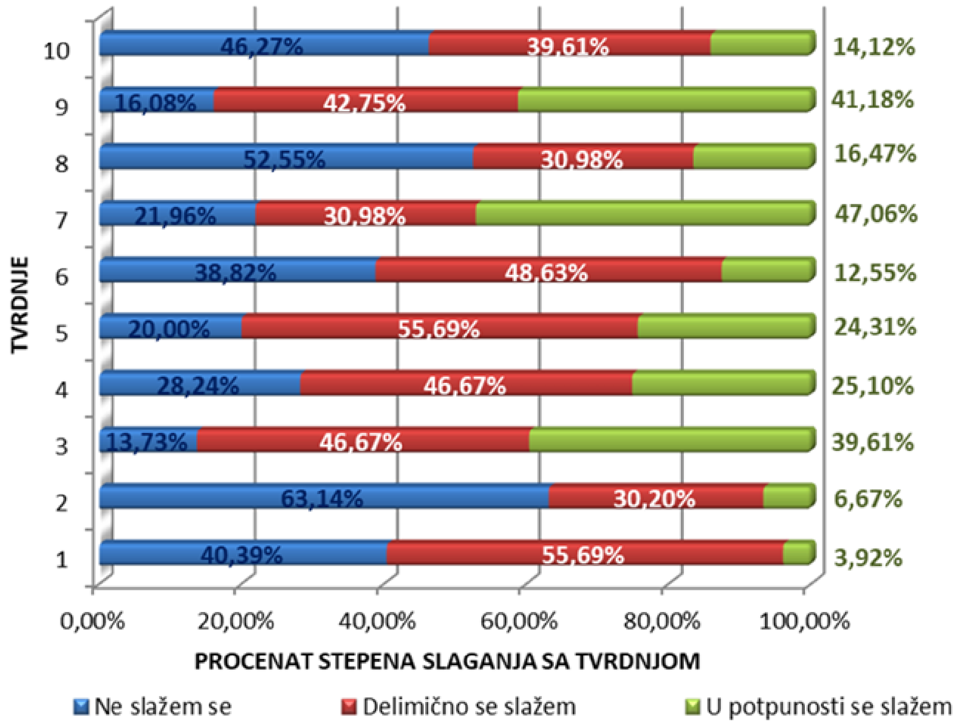
Anketa u formi upitnika o stavovima studenata prema matematici i realizaciji nastave je sprovedena sa istim studentima E grupe pre nego što je primenjen eksperimentalni deo programa (277 studenata) i nakon realizacije eksperimentalnog programa, odnosno u sklopu finalnog ispita (255 studenata).

Rezultati drugog dela upitnika koji se sastojao od 10 tvrđenja (stepen slaganja je rangiran po trostepenoj Likert-ovoj skali) su obrađeni i prikazani po Heiberger & Robbins (2014).

Procenat stepena slaganja studenata E grupe sa svakom tvrdnjom pojednačno pre primene eksperimentalnog programa je prikazan na grafikonu 3.8. i posle primene programa na grafikonu 3.9.



Grafikon 3.8. *Procenat slaganja sa tvrdnjama pre sprovođenja eksperimentalnog programa*



Grafikon 3.9. *Procenat slaganja sa tvrdnjama nakon sprovođenja eksperimentalnog programa*

Najveće promene u stavu studenata su uočene kod druge tvrdnje (način prezentovanja matematičkih sadržaja) gde je procenat potpunog i delimičnog slaganja sa 11,19% porastao na 36, 87% posle modelovanja, i šeste tvrdnje (uticaj vizuelnih primera, sa 12,64% na 61,18%). Nastale promene se mogu objasniti time što su studenti nakon iskustva sa primenom modelovanja u nastavi mogli da uvide koje prednosti mogu doneti razlike u načinima izlaganja i prisustvo vizuelnih primera.

Značajne promene u stavu su uočene i kod četvrte (ukazivanje na realne primere), osme (prisustvo grafikona, animacija i simulacija) i desete tvrdnje (primena tehnika aktivnog učenja), odnosno studenti su se u većoj meri slagali sa tim tvdnjama nakon što su imali iskustva sa primenom matematičkog modelovanja nego pre kada je nastava realizovana samo primenom tradicionalnih metodskih pristupa.

Treći deo upitnika je za predmet imao sakupljanje utisaka studenata o matematici i njihovih sugestija za unapređenje nastavnog procesa visokoškolske matematike. Poređeni su predlozi studenata pre i posle primene matematičkog modelovanja u nastavi, a neki od njih su izdvojeni i prikazani u tabeli 3.12. Metoda komparativne analize je primenjena za poređenje rezultata trećeg dela ankete.

Tabela 3.12. *Predlozi i sugestije studenata posle i pre modelovanja*

	Posle modelovanja	**Pre modelovanja**
ZNAČAJ MATEMATIKE	Koristi se u većini poslova.	Neću je koristiti u budućnosti.
	Primenjuje se svuda u praksi.	Preteško!
	Zato jer je matematika potrebna u daljem toku života i za bolji posao.	Kome u daljem životu treba neka od metoda ili računa?
TEŽINA MATEMATIKE	Zadaci su jako dugački i puno je brojeva i čudnih oznaka.	Teško je!
	Jer zahteva dobro predznanje, prisutnost i koncentraciju.	Komplikovano!
	Neke operacije i metode su nejasne i ne vidimo gde se koriste.	Ne ide mi!
PREDLOZI ZA UNAPREĐENJE NASTAVE MATEMATIKE	Više vizuelnih primera i praktičnih zadataka bi pomogli da se matematika bolje razume.	Ne bih ništa menjao.
	Ja bih voleo da koristimo računare za rešavanje zadataka.	Nemam ideju kako bi se unapredila nastava matematike!
	Uključiti u nastavu što više realnih i živih primera primene matematike u stvarnom životu.	Meni ništa nije jasno…
	Opremiti laboratorije gde studenti i profesori mogu da uče i pokažu svoju kreativnost!	Matematika je jako teška, ne razumem i ne vidim smisao.
	Ovakve metode nas ohrabruju da radimo i učimo i vežbamo matematiku:-)	Trenutno ništa!

Predlozi studenata pre modelovanja su pokazali da oni tada nisu imali viziju i ideje kako bi nastava matematike trebala da izgleda, niti šta bi moglo da im pomogne u učenju i doprinese njihovom razumevanju matematike. Dobijeni odgovori su bili kratki, šturi i neodređeni, što je potvrdilo da oni nemaju izgrađen nikakav stav prema korisnosti matematike i čak ni ne vide mogućnost za poboljšanje postojećeg stanja. Pored toga, izveden je zaključak da studenti ne veruju ni da postoji mogućnost realizacije nastave matematike na interesantniji način. Mora se naglasiti i da su studenti pre modelovanja u mnogo manjem procentu iznosili svoje predloge u trećem delu ankete (31% od ukupnog broja studenata je nešto predložilo ili konstatovalo), dok je čak 68% studenata iznelo svoje stavove i predloge za poboljšanje nastave matematike u istom delu ankete nakon modelovanja.

U trećem delu upitnika studenti su nakon modelovanja bili mnogo kreativniji u svojim predlozima za poboljšanje nastave matematike. Naročito su naglasili svoje potrebe za implementacijom realnih primera u nastavu matematike i za primenu vizuelnih alata.

Na osnovu predloga i sugestija studenata, može se zaključiti da primena realnih primera, animacija, simulacija i vizuelno - dinamičkih primera u nastavi matematike, može doprineti širenju horizonta percepcije matematičkih pojmova kod studenata, kao i uloge matematike u realnom/profesionalnom životu.

Rezultati celokupne ankete su potvrdili da je eksperimentalni faktor, primena matematičkog modelovanja u realizaciji nastave, doprineo izvesnoj promeni stavova studenata ka pozitivnijem shvatanju uloge matematike i stvaranju boljeg odnosa prema nastavi i učenju.

4. MATEMATIČKO MODELOVANJE U GEOGEBRA OKRUŽENJU

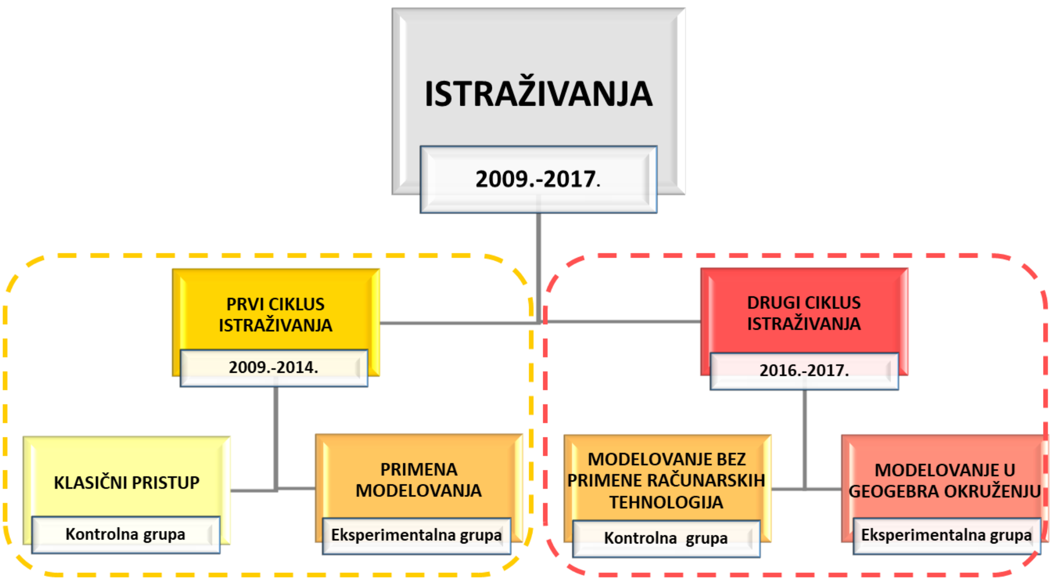
4.1. UVOD

U četvrtoj glavi disertacije predložen je nov pristup matematičkom modelovanju koje se realizuje u računarskom okruženju, detaljno je opisan proces njegove implementacije u nastavni proces tokom obrade izvoda funkcije i njegove primene i analizirani su efekti koje novi predloženi pristup ima na učenje i nastavu matematike.

Analizirajući novije trendove u matematičkom obrazovanju, može se primetiti da su savremene strategije učenja usmerene ka integraciji računarskih tehnologija u nastavu (Artique, 2013; Bray & Tangney, 2017; Hoyles, 2016; Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008; Star *et al*, 2014; Wu, 2011). Uzimajući u obzir prednosti primene računarskih tehnologija u nastavi i matematičkom modelovanju, kao i iskustva iz prvog ciklusa istraživanja, osmišljen je novi pristup modelovanju u računarskom okruženju i implementiran je u nastavni proces.

Drugi ciklus istraživanja je sproveden školske 2016–2017. godine. Za potrebe ovog dela istraživanja osmišljen je novi pristup matematičkom modelovanju realizovan u računarskom okruženju (originalni doprinos disertacije). Matematičko modelovanje je u ovom ciklusu istraživanja sprovedeno sa obe grupe studenata, s tom razlikom što su studenti kontrolne grupe modelovali bez pomoći računara, dok je sa studentima eksperimentalne grupe primenjen novi pristup modelovanju u *GeoGebra* okruženju.

Na ovaj način, drugi ciklus istraživanja je nadovezan na prvi ciklus, uzimajući pri tome u obzir dobre strane i pozitivna iskustva stečena tokom prvog istraživanja ali i uočene nedostatke. Posmatrano u celini, u periodu od 2009-2017. godine je sprovedeno istraživanje koje je obuhvatilo implementaciju matematičkog modelovanja u nastavu matematike na visokoškolskom nivou tokom prvog ciklusa i implementaciju unapređenog metodskog pristupa baziranog na modelovanju u *GeoGebra* okruženju tokom drugog ciklusa istraživanja (Slika 4.1.).



Slika 4.1. *Šema istraživanja*

Rezultati drugog ciklusa istraživanja su takođe potvrdili postojanje pozitivnih efekata primene matematičkog modelovanja u računarskom okruženju u nastavi matematike na učenje i znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

Glava se sastoji iz šest poglavlja.

U drugom poglavlju je detaljno opisan novi pristup modelovanju u računarskom okruženju koji je osmišljen za potrebe istraživanja.

Treće poglavlje opisuje aktivnosti studenata tokom obrade izvoda funkcije primenom predloženog metodskog pristupa zasnovanog na procesu modelovanja realizovanom u *GeoGebra* okruženju.

U četvrtom poglavlju su navedeni primeri korišćeni u nastavi za obradu sadržaja na temu primene izvoda funkcije na ispitivanje monotonosti, ektremnih vrednosti i konveksnosti i konkavnosti funkcije i dat je detaljan opis aktivnosti tokom modelovanja u *GeoGebra* okruženju.

U petom poglavlju je prikazan metodološki koncept istraživanja, opisani su predmet, cilj i hipoteze istraživanja i navedene su metode, tehnike i instrumenti korišćeni za prikupljanje i obradu podataka.

Analiza i diskusija rezultata istraživanja su prikazani u šestom poglavlju.

4.2. NOVI PRISTUP MODELOVANJU U RAČUNARSKOM OKRUŽENJU – ZVEZDASTI DIJAGRAM

Proces matematičkog modelovanja koji ova disertacija predlaže, originalan je doprinos autora. Novi pristup integriše računarske tehnologije u proces modelovanja i ilustrovan je *Zvezdastim dijagramom* (Slika 4.2.). Faze predloženog procesa modelovanja u potpunosti odgovaraju onima iz Stillman *et al.* (2007), (odeljak 2.3.2., Slika 2.7.) ciklusa, ali u ovom slučaju postoje dva tipa prelaza.

Prelazi su u zvezdastom djagramu označeni sa S i sa G (Slika 4.2.). Prelazi S-tipa se realizuju novim S aktivnostima u računarskom okruženju, označenim sa S1-S5. Kod prelaza G-tipa, pripadajuće aktivnosti su označene sa G1-G5 i one uglavnom odgovaraju aktivnostima koje se realizuju kod prelaza u Stillman *et al.* (2007) procesu modelovanja.

Slika 4.2. *Zvezdasti dijagram procesa matematičkog modelovanja u računarskom okruženju*

U novom procesu modelovanja realizuju se aktivnosti od *Situacije iz realnog sveta* do faza *Realni problem*, *Interpretacija rešenja* i *Prihvatanje (izveštaj) ili odbijanje rešenja* i nazad, što znači da se aktivnosti između svih pomenutih faza mogu realizovati. U zvezdastom dijagramu je to ilustrovano kao preklapanje navedenih faza modelovanja (Slika 4.2.). Tradicionalni proces modelovanja dozvoljava samo aktivnosti od faze *Situacija iz realnog sveta* do *Realnog problema* i nazad, Stillman *et al.* (2007), (odeljak 2.3.2., Slika 2.7.).

Aktivnosti u okviru prelaza u novom procesu modelovanja se mogu realizovati uz ili bez primene računarskih tehnologija. Aktivnosti karakteristične za prelaze S-tipa su zasnovane na primeni računara da bi na taj način mogle doprineti vizuelnom istraživanju i eksperimentisanju u dinamičkom okruženju, što može pozitivno uticati na motivaciju studenata za dalje učenje (Brom *et al.*, 2017; Chiu & Churchill, 2015).

Novi prelazi S-tipa su prikazani strelicama u centralnom delu zvezdastog dijagrama i oni povezuju sve faze modelovanja sa računarom. Ideja na kojoj su novi prelazi zasnovani je da se smanji mogućnost pojave blokada pri prelascima između faza tako što će se kao pomoć koristiti materijali u vidu računarskih animacija i simulacija.

Novi proces modelovanja (reprezentovan zvezdastim dijagramom) pruža i mogućnost za neciklične S-tipa prelaze između faza. Predloženi pristup modelovanju je zasnovan na ideji da se prevaziđu teškoće prouzrokovane strogim definisanjem redosleda faza modelovanja, naročito jer su neki autori kroz istraživanja potvrdili da u praksi postoje individualni pristupi fazama modelovanja (Blum & Ferri, 2009). S-tipa prelazi su mogući iz svake faze u svim pravcima, bez obaveznog poštovanja ustaljenog cikličnog redosleda. Sličan pristup prelaza između faza modelovanja, ali u vidu mreže, bez indikacije smera prelaza je predložen od strane nekih autora (Skov Hansen *et al.,* 1999). Računarske tehnologije kod novog pristupa modelovanju predloženog u ovoj disertaciji preuzimaju ulogu "mreže" i na taj način omogućavaju da se proces modelovanja maksimalno prilagodi učesnicima modelovanja. Na taj način, računarske tehnologije rade kao alternativna „raskrsnica" između faza matematičkog modelovanja nudeći pri tome mogućnost da proces modelovanja i njegova integracija u nastavni proces teku bez prepreka.

Osim toga, u novom procesu modelovanja se mogu koristiti i prelazi G-tipa. To znači da studenti mogu izabrati individualne rute modelovanja u zavisnosti od njihovog znanja, kompetencija i preferenci, tj.: *„Pojedinac započinje ovaj proces tokom određene faze, prema njegovim/njenim preferencijama, a zatim prolazi kroz različite faze nekoliko puta ili samo jednom, fokusirajući se na određenu fazu ili ignorišući druge."* (Ferri, 2006, p. 91).

Uzimajući u obzir mogućnosti za izbor različitih vrsta prelaza između faza, dinamika modelovanja kada se primenjuje novi pristup je zbog toga sasvim drugačija. U novom pristupu modelovanju je uobičajeno da se nekada prođe kroz ceo ciklus modelovanja, samo da bi se realizovao prelaz između dve faze. Prednost koje ova mogućnost nudi se ogleda u tome što studentima omogućuje višestruke prolaze kroz ceo ili parcijalan proces modelovanja, čime oni utvrđuju i proveravaju valjanost modela i rešenja dok aktivno koriste i unapređuju svoja znanja.

Analizirajući prelaze između faza u novom pristupu modelovanju može se uočiti da tokom jednog G prelaza realizuju dva S prelaza (Slika 4.2.). Razlog za to je što se računar koristi kao "posrednik" pri prelazima između faza, preciznije, jedan S prelaz ide od polazne faze do računara a drugi od računara do željene faze modelovanja. Na taj način dolazi i do preklapanja određenih G i S prelaza a samim tim i aktivnosti koje se realizuju u okviru njih. Detaljan opis svih prelaza (G-tipa i S-tipa) i njima pripadajućih aktivnosti su prikazane u tabeli 4.1.

Za računarske tehnologije kojima se realizuju prelazi S-tipa između faza u jezgru novog procesa modelovanja je izabran softver *GeoGebra*, najviše zbog svojih mogućnosti za istovremeni prikaz višestrukih reprezentacija i zbog toga što je novi pristup modelovanju zahtevao softver koji bi bio jednostavan za korišćenje i studentima i nastavnicima, a koji bi pri tome, mogao da odgovori zahtevima procesa modelovanja koji se odnose na njegovu dinamičku prirodu i istovremeno, potrebu za matematičkom reprezentacijom (odeljak 2.4.3.), (Mousolides, 2011).

Izborom *GeoGebra*-e kao računarske tehnologije postignuto je da animacije i simulacije imaju centralnu ulogu u novom procesu modelovanja i da na taj način obezbede prolaz ka svim fazama modelovanja.

Tabela 4.1. *Aktivnosti u okviru G i S prelaza u novom pristupu modelovanju*

G Prelazi	**S Prelazi**
Aktivnosti u okviru G1 • Identifikacija zavisnih i nezavisnih promenljivih koje će biti uključene u algebarski model. • Matematička reprezentacija elemenata modela da bi se mogle primeniti formule. • Izbor tehnoloških/matematičkih alata za izračunavanja i grafičku reprezentaciju modela. • Izbor tehnologije kojom bi se napravila grafička reprezentacija modela. • Pojašnjenje konteksta problema. • Postavljanje jednostavnih pretpostavki. • Identifikacija strategija rešavanja. • Specifikacija ispravnih strategija rešavanja.	**Aktivnosti u okviru S1** • Izrada vizuelno/dinamičkih prikaza *Realnog problema* radi identifikovanja promenljivih. • Opisivanje *Situacije iz realnog sveta* i istraživanje *Realnog problema* primenom vizuelno/dinamičkih prikaza.
Aktivnosti u okviru G2 • Primenjivanje odgovarajućih simboličkih formula. • Primenjivanje algebarskih postupaka za pojednostavljivanja formula u cilju iznalaženja sofisticiranijih rešenja. • Primena tehnoloških/matematičkih alata za izračunavanja. • Primena tehnologije za automatsku primenu formula na više različitih slučajeva. • Korektna primena sintaksnih pravila (matematičkih ili tehnoloških). • Verifikacija algebarskog modela primenom tehnologije. • Nalaženje dodatnih rezultata u cilju bolje interpretacije rešenja.	**Aktivnosti u okviru S2** • Izrada/korišćenje simulacija realnog problema koje će voditi do *Matematičkog modela*. • Posmatranje promena kod numeričkih vrednosti i promenljivih, identifikacija pravila i relacija između podataka primenom vizuelno/dinamičkih prikaza. • Uočavanje različitih mogućih strategija za rešavanje *Realnog problema* iz postojećih vizuelno/dinamičkih prikaza. • Izbor strategije za rešavanje *Realnog problema*. • Prilagođavanje vizuelno/dinamičkih prikaza uslovima *Realnog problema* i izvođenje konačnog *Matematičkog modela*.
Aktivnosti u okviru G3 • Povezivanje matematičkih rezultata sa njihovom odgovarajućom komponentom iz realnog sveta. • Kontekstualizacija matematičkih finalnih i međurezultata sa *Situacijom iz realnog sveta.* • Integracija argumenata za potvrđivanje interpretacije. • Smanjenje prethodnih ograničenja u cilju dobijanja rezultata koji bi podržali novu interpretaciju. • Uviđanje prednosti uvođenja matematičke reprezentacije pre razmatranja interpretacije.	**Aktivnosti u okviru S3** • Manipulacija sa *Matematičkim modelom* u vizuelno/dinamičkom okruženju. • Ispitivanje mogućnosti *Matematičkog modela* i njegovih različitih interpretacija. • Osmišljavanje algebarskog modela (*Matematičkog rešenja*) iz vizuelno/dinamičkih prikaza. • Primena vizuelno/dinamičkih prikaza za eksperimentisanje sa algebarskim i grafičko/dinamičkim rešenjem.
Aktivnosti u okviru G4 • Usklađivanje neočekivanih međurezultata sa *Situacijom iz realnog sveta.* • Razmatranje implikacija matematičkih rezultata na *Situaciju iz realnog sveta.* • Usklađivanje matematičkih aspekata problema sa njegovim aspektima iz realnog sveta. • Uočavanje da postoji granica u smanjenju ograničenja da bi se dobilo validno rešenje. • Razmatranje globalnih primena matematičkog modela u realnom svetu.	**Aktivnosti u okviru S4** • Primena vizuelno/dinamičke prikaza za uspostavljanje relacija između algebarskog i grafičko/dinamičkog rešenja. • Manipulacija sa vizuelno/dinamičkim prikazom rešenja i testiranje da li ono zadovoljava *Situaciju iz realnog sveta*.
Aktivnosti u okviru G5 • Povratak u *Realni problem.*	**Aktivnosti u okviru S5** • Integracija svih vizuelno/dinamičkih elemenata *Matematičkog rešenja* i provera njihove kompatibilnosti u cilju *Verifikacije matematičkog modela.* • Razmatranje daljih mogućih interpretacija *Matematičkog rešenja* manipulacijom sa njegovim vizuelno/dinamičkim prikazom. • Prilagođavanje rešenja novim *Situacijama iz realnog sveta* i postavljanje novih *Realnih problema* eksperimentisanjem sa parametrima iz vizuelno/dinamičkog prikaza.

4.3. OBRADA DEFINICIJE IZVODA FUNKCIJE PRIMENOM MATEMATIČKOG MODELOVANJA U *GEOGEBRA* OKRUŽENJU

Motivisani pozitivnim iskustvima nastalih primenom matematičkog modelovanja u nastavi matematike tokom prvog ciklusa istraživanja sprovedenog u periodu od 2009–2014. godine, sprovedeno je novo istraživanje sa još jednom generacijom studenata u toku školske 2016–2017. godine.

Detaljnom analizom prvog ciklusa istraživanja, naročito njegovih pozitivnih efekata, ali i potencijalnih problema koji su nastajali tokom procesa modelovanja, usavršen je novi pristup i primenjen na obradu iste teme matematičkim modelovanjem i rešavanjem istih realnih problema.

U novom istraživanju studenti eksperimentalne grupe su dobili značajno veću ulogu u modelovanju tako što su samostalno koristili laptop računare, tablete i pametne telefone sa instaliranom *GeoGebra* aplikacijom. *GeoGebra* materijali koje su studenti sami pravili su deljeni preko video bim projektora i diskutovani u okviru aktivnosti tokom procesa modelovanja.

Takođe, u drugom ciklusu istraživanja je proces matematičkog modelovanja implementiran i kod studenata kontrolne grupe, sa tom razlikom što je modelovanje kod studenata kontrolne grupe sprovedeno prateći aktivnosti iz standardnog ciklusa modelovanja (Stillman *et al.*, 2007) bez pomoći računara (kao i u prvom ciklusu istraživanja), odnosno, primenjivali su se prelazi G-tipa prikazani sa G1-G5 u zvezdastom dijagramu. Eksperimentalna grupa studenata je primenjivala novi pristup modelovanju prikazan zvezdastim dijagramom (Slika 4.2.), prelaze G-tipa i naročito aktivnosti u okviru prelaza S-tipa koje su realizovali primenom *GeoGebra* softvera.

Kao i u prvom ciklusu istraživanja, svi studenti su najpre u okviru redovne nastave upoznati sa definicijom izvoda funkcije i njegovim osobinama, nakon čega je primenjen novi pristup modelovanju za uvežbavanje zadataka iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

U ovom delu istraživanja situacija iz realnog sveta korišćena u prvom ciklusu je modifikovana i raščlanjena na pet situacija koje u potpunosti (po matematičkim modelima i po matematičkim rešenjima) odgovaraju onoj iz prvog ciklusa istraživanja. Pri modifikacijama su u obzir uzeta iskustva iz prethodno sprovedenog istraživanja, sa ciljem da se otklone uočeni nedostaci i mogućnosti za nastanak blokada u procesu modelovanja.

Svaka od situacija iz realnog sveta i njima pripadajući realni problemi su, kao i u prvom ciklusu istraživanja, osmišljeni tako, da se njihovim modelovanjem postupno uvedu svi koncepti neophodni za učenje i razumevanje izvoda funkcije, počev od odnosa priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, preko definicije izvoda do njegove algebarske reprezentacije, geometrijske interpretacije i primene.

Studenti su modelovali svaku situaciju pojedinačno, redosledom koji je odredio nastavnik.

4.3.1. Situacija iz realnog sveta I

Nastava je započela tako što je nastavnik studentima predstavio prvu situaciju iz realnog sveta. Nastavnik je ispričao Situaciju iz realnog sveta I i istovremeno prikazao na video bimu njen sadržaj (Tabela 4.2.).

Tabela 4.2. *Prikaz Situacije iz realnog sveta I*

Situacija iz realnog sveta I:
Jednom prilikom su žirafa, zebra, gazela i divlja svinja smislile da naprave zid oko njihovog staništa. Dogovorile su se da zid bude u obliku stepeništa da bi mogle da se popnu na njegov vrh i posmatraju okolinu. Dok su gradile stepenište, vodile su računa da i najmanja od njih može da se popne na stepenik. Kada su napravile stepenište, želele su da ga testiraju.
Žirafa je stigla do vrha u jednom koraku. Rekla je ostalima da je nagib njenog koraka bio 50%.
Zebra je od baze do vrha stepeništa stigla u dva koraka i rekla je da je nagib njenog prvog koraka bio 75% *a drugog* 25%.
Gazela je stigla do vrha u četiri koraka i zaključila je da je nagib njenog prvog koraka bio 87,5%, *drugog* 62,5%, *trećeg* 37,5% *i četvrtog* 12,5%.
Divljoj svinji je trebalo osam koraka. Nagibi za svaki korak koji je napravila su bili jednaki, respektivno,
93,75%; 81,25%; 68,75%; 56,25%; 43,75%; 31,25%; 18,75% *i* 6,25%.
Realni problem :
Odrediti pozicije (koordinate) svih koraka svake životinje na stepeništu.

Nakon što su studenti saslušali priču, pokušali su da je interpretiraju i da razumevanjem njenog konteksta postave problem koji odgovara onome koji je naveden nakon priče i čijim će rešavanjem doći do matematičkog modela i rešenja date situacije.

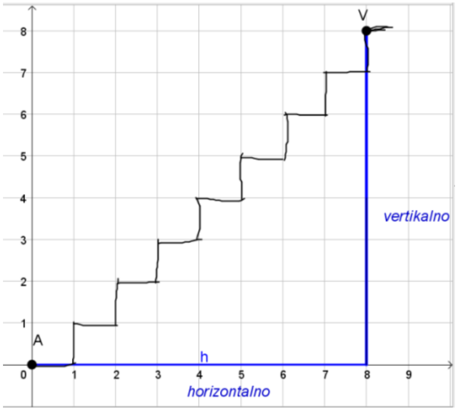
Matematički model

Diskusija koja je sledila nakon postavljanja realnog problema je bila vrlo slična onoj iz prvog ciklusa istraživanja opisanoj u poglavlju 3.2. i odeljku 3.2.1.

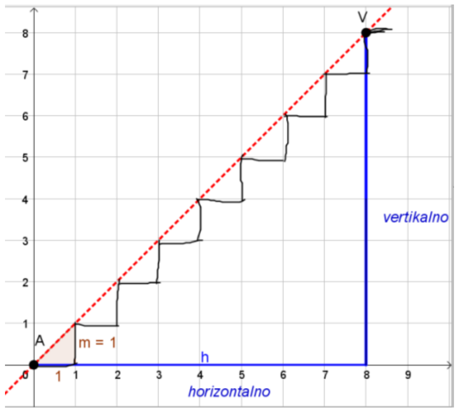
Do zaključka da nagib koraka životinje odgovara količniku vertikalne i horizontalne promene su na vrlo sličan način došli studenti obe grupe, kontrolne i eksperimentalne. Moglo bi se reći da su studenti spontano od realnog problema došli do matematičkog modela nagiba koraka u okviru Situacije iz realnog sveta, što je u zvezdastom dijagramu reprezentovano aktivnostima u okviru prelaza G1 (Slika 4.2.).

Studenti su najpre razmišljali o stepeništu koje su životinje napravile. Eksperimentalna grupa studenata je krenula od pretpostavke da ako je divlja svinja napravila osam koraka, onda stepenište treba da ima osam stepenika. Studenti eksperimentalne grupe su iskristili mogućnost novog pristupa pa su to i nacrtali, koristeći *GeoGebra* opciju *Pen*  za crtanje slobodnom rukom u okviru aktivnosti S1, (Slika 4.3. a)). Pokušali su čak i da primenom

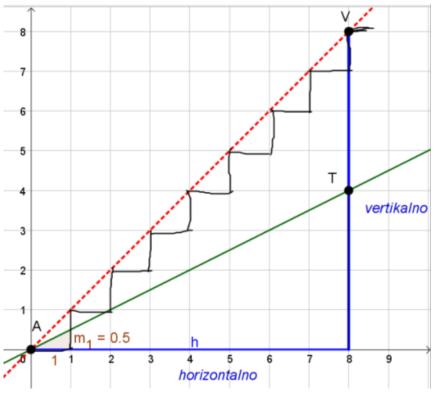
GeoGebra opcija izračunaju nagib takvog stepeništa i dobili rezultat da je nagib jednak 1, (Slika 4.3. b)) (aktivnost S2).



a)



b)



c)

Slika 4.3. *GeoGebra crtež stepeništa koje su izgradile životinje*

Međutim, kada su studenti takav model stepeništa interpretirali, shvatili su da dobijeni razultat ne odgovara nagibu žirafinog koraka koji bi trebao da bude 50% (aktivnost S3). Studenti su se tada vratili *GeoGebra*-i, (Slika 4.3. c)), (aktivnost S4) i zaključili da moraju nacrtati drugačije stepenice koje će odgovarati koracima svih životinja i njihovim nagibima. Zbog toga je bilo neophodno da se ponovo razmotri situacija iz realnog sveta (aktivnost S1).

Ovde je interesantno naglasiti da su studenti u okviru ovog prelaza (ka matematičkom modelu) iskoristili dinamiku novog pristupa koja omogućava da se primenom računarskih tehnologija može doći do bilo koje faze modelovanja. Oni su odmah preko modela iz *GeoGebra* materijala (Slika 4.3.), (aktivnost S2) proverili (aktivnost S3) i interpretirali dobijeno rešenje (aktivnost S4) za koje se tako ispostavilo da ne odgovara postavljenom problemu.

Studentima kontrolne grupe (kao i studentima eksperimentalne grupe iz prvog ciklusa istraživanja koji su modelovali) nije bila dostupna ovakva mogućnost provere, pa se samim tim i prelaz teže i sporije realizovao.

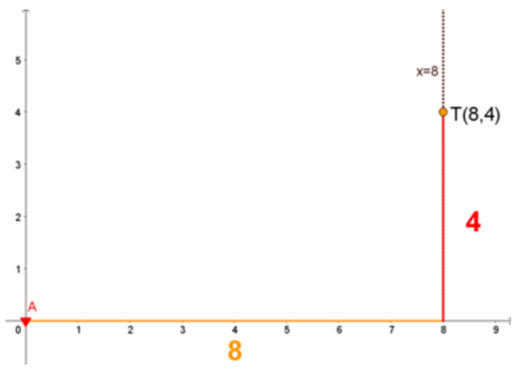
Prelaz ka matematičkom rešenju kod studenata eksperimentalne grupe je tada nastavljen razmatranjem nagiba žirafinog koraka. Trebalo je da studenti utvrde vertikalnu i horizontalnu promenu žirafinog koraka, međutim, na početku im nije bilo najjasnije kako da to urade (imali su jednu jednačinu, a dve nepoznate). Nastavnik je tada sugerisao da sami dodele vrednost horizontalne promene koraku svake životinje pojedinačno. Pitanje koje su studenti odmah postavili je bilo koje vrednosti dodeliti? Kako je divlja svinja napravila najviše koraka (osam), nastavnik je predložio da se za horizontalnu promenu žirafinog koraka usvoji da je jednaka 8 , da bi se, između ostalog, radilo sa celim brojevima (aktivnost G1).

Iz matematičkog modela za nagib koraka životinje, studenti su došli do sledeće jednakosti (aktivnost G2):

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}. \tag{1}$$

U daljem toku procesa modelovanja, studenti iz kontrolne grupe su došli do matematičkog rešenja za poziciju žirafinog koraka koja odgovara tački $T(8,4)$. Do nagiba koraka ostalih životinja, studenti iz kontrolne grupe su kao i studenti iz prvog ciklusa istraživanja došli ručno računajući i crtajući, što je od studenata zahtevalo dodatne napore i vremenski je bilo zahtevnije nego kod eksperimentalne grupe koja je koristila *GeoGebra*-u. Takođe, bilo je slučajeva gde studenti nisu dovoljno precizno nacrtali crteže pa su zbog toga izvodili i pogrešne zaključke, gubeći pri tome motivaciju za dalje modelovanje. Studenti kontrolne grupe su na taj način (primenom G aktivnosti) dobili koordinate pozicija koraka svih životinja.

Eksperimentalna grupa studenata iz drugog ciklusa istraživanja je u daljem toku modelovanja primenila *GeoGebra*-u (Slika 4.4.) da bi vizualizovala rezultate dobijene iz jednakosti (1). Napravili su *GeoGebra* materijal gde su označili startnu tačku sa $A(0,0)$ i horizontalnu promenu žirafinog koraka. Analizirajući dobijene rezultate, studenti su zaključili da vrh stepeništa mora biti na pravoj $x = 8$ ako se uzme da je horizontalna promena žirafinog koraka jednaka 8 .



Slika 4.4. *Horizontalna i vertikalna promena za žirafu*

Mora se naglasiti da su studenti iz eksperimentalne grupe do navedenog zaključka došli primenjujući zvezdastu reprezentaciju procesa modelovanja i odgovarajućih aktivnosti u okviru prelaza S3.

Daljom analizom *GeoGebra* ilustracije žirafinog koraka sa slike 4.4., studenti su zaključili da pozicija žirafe nakon njenog prvog koraka, ujedno i vrh stepeništa koje su životinje napravile, odgovara tački $T(8,4)$ koja predstavlja matematičko rešenje za žirafu (aktivnost S4).

Nakon toga, studenti eksperimentalne grupe su se ponovo vratili u situaciju iz realnog sveta i razmatrali zebru i njena dva koraka koje je ona napravila do vrha stepeništa. Pojavio se mali broj studenata koji su pokušali da iskoriste sledeću kalkulaciju za nagib zebrinog prvog koraka:

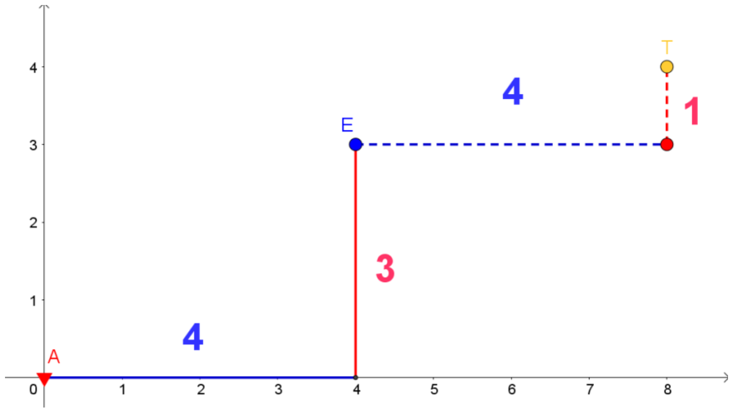
$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}. \qquad (2)$$

Zapravo, oni su krenuli od pretpostavke da je horizontalna promena za zebru takođe jednaka 8, ali su brzo uvideli da bi zebra u tom slučaju “prešla” preko vrha stepeništa u jednom koraku, što ne odgovara situaciji iz realnog sveta. Nakon kraće rasprave, studenti su se složili da horizontalna promena mora biti jednaka za svaku životinju pojedinačno. Zajedničkim dogovorom su usvojili da zebrina horizontalna promena bude jednaka 4 (analogno za gazelu 2 i za divlju svinju 1), i na taj način su došli do rezultata da je u tom slučaju vertikalna promena zebrinog prvog koraka jednaka 3 (aktivnost S3). Matematičko rešenje za poziciju zebrinog prvog koraka je tačka $E(4,3)$.

Vertikalna promena zebrinog drugog koraka je izračunata analogno, i studenti su došli do rezultata da je ona tada jednaka 1, za horizontalnu promenu jednaku 4. U tom trenutku, većina studenata je tvrdila da je pozicija zebre nakon njenog drugog koraka tačka sa koordinatama (8,1), ali tada su uvideli da su pogrešili (tačka $(8,1)$ nije odgovarala vrhu stepeništa). Istu ovu grešku su napravili i studenti u prvom ciklusu istraživanja koji su modelovali, ali kod njih je nastavnik morao da interveniše i da ih navede na ispravan zaključak. Eksperimentalna grupa studenata je iskoristila *GeoGebra*-u da predstavi kretanje zebre. Prvo su dodali tačku $E(4,3)$, koja je odgovarala poziciji zebre nakon prvog koraka, a zatim su je povezali vertikalnom i horizontalnom isprekidanom linijom (dužine 1 i 4, koje odgovaraju vertikalnoj i horizontalnoj promeni, respektivno), (Slika 4.5.). Studenti eksperimentalne grupe su vrlo lako zaključili da su koordinate pozicija zebrinog prvog i drugog koraka tačke $E(4,3)$ i $T(8,4)$, respektivno i da one odgovaraju prethodno dobijenim rešenjima (poziciji žirafe na vrhu stepeništa), (aktivnosti S3, S4).

Interesantno je naglasiti da je vizuelni (grafički) prikaz koji je nastao primenom *GeoGebra*-e, omogućio bolje razumevanje pozicije drugog koraka zebre. Takođe, kod studenata iz eksperimentalne grupe nedoumice nisu bile prisutne, što nije bio slučaj kod kontrolne grupe.

Analogno, primenom aktivnosti G1-S2-S1 studenti iz eksperimentalne grupe su uspeli da dođu do koordinata koraka ostalih životinja. Za gazelinu horizontalnu promenu su uzeli da je jednaka 2 (napravila je četiri koraka) a 1 za horizonalnu promenu divlje svinje.

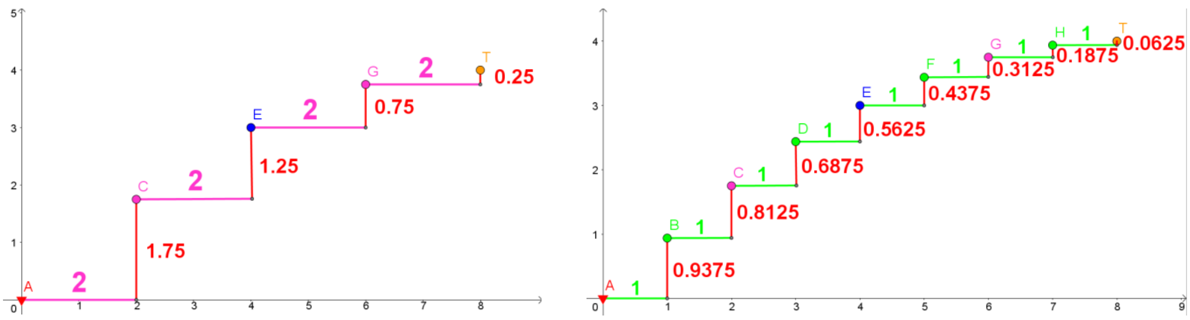


Slika 4.5. *Horizontalna i vertikalna promena zebrinog prvog i drugog koraka*

Prateći istu rutinu kao u slučaju zebra, studenti su došli do koordinata pozicija sva četiri koraka koja je gazela napravila, koristeći pri tome poznate nagibe njenih koraka i prethodno usvojenu horizontalnu promenu.

Za proveru validnosti matematičkog modela, studenti eksperimentalne grupe su opet koristili *GeoGebra*-u, (Slika 4.6. a)) u okviru aktivnosti S4 i S5. Matematičko rešenje za pozicije gazelinih koraka predstavljaju koordinate tačaka: $A(0,0)$, $C(2;\ 1{,}75)$, $E(4,3)$, $G(6;\ 3{,}75)$ i $T(8,4)$.

Na sličan način, studenti su došli i do koordinata pozicija koraka divlje svinje. Horizontalne i vertikalne promene koraka divlje svinje su prokazane na slici 4.6. b). Matematičko rešenje pozicija njenih koraka predstavljeno je koordinatama osam tačaka: $A(0,0)$, $B(1;\ 0{,}9375)$, $C(2; 1{,}75)$, $D(3;\ 2{,}4375)$, $E(4,3)$, $F(5;\ 3{,}4375)$, $G(6;\ 3{,}75)$, $H(7;\ 3{,}9375)$ i $T(8,4)$.

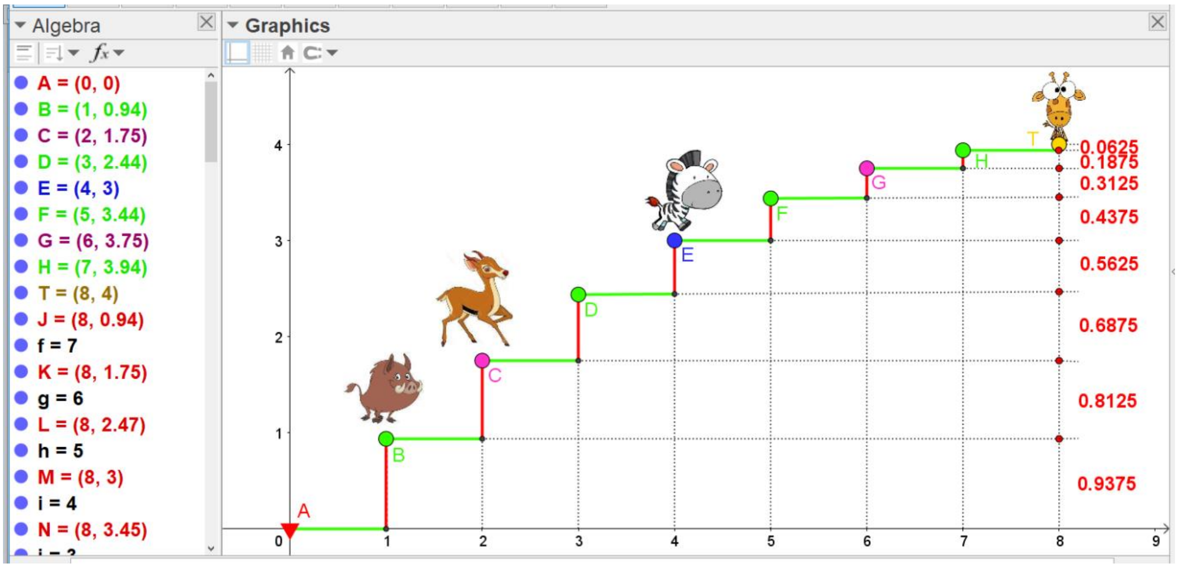


a) b)

Slika 4.6. *Horizontalne i vertikalne promene koraka gazele i divlje svinje*

U ovoj fazi procesa matematičkog modelovanja, nastavnik je studentima sugerisao da pokušaju da integrišu sve prethodno dobijene rezultate od svake životinje pojedinačno u jedno zajedničko rešenje koje bi predstavljalo matematičko rešenje Realnog problema I. Takođe, nastavnik je predložio da studenti kao ilustraciju rešenja u *GeoGebra*-u ubace slike životinja, sa namerom da dodatno motiviše studente i da im proces modelovanja učini interesantnijim (Slika 4.7.).

Ovaj deo procesa modelovanja je studentima kontrolne grupe bio naporan, jer su morali sami da crtaju i uklapaju sva rešenja, a u prvom ciklusu istraživanja je čak nastavnik morao sam da napravi crtež (Slika 3.4.), jer studenti tada nisu imali vizuelni prikaz svih dotadašnjih rešenja, za razliku od eksperimentalne grupe drugog ciklusa istraživanja koja je delila sva rešenja (*GeoGebra* materijale) da svi studenti vide.



Slika 4.7. *Pozicije koraka životinja na stepeništu*

Matematičko rešenje

Matematičko rešenje pozicija koraka svih životinja predstavljeno je koordinatama osam tačaka: $A(0,0)$, $B(1;\ 0{,}9375)$, $C(2;1{,}75)$, $D(3;\ 2{,}4375)$, $E(4,3)$, $F(5;\ 3{,}4375)$, $G(6;\ 3{,}75)$, $H(7;\ 3{,}9375)$ i $T(8,4)$.

Nakon što su studenti kompletirali i objedinili rezultate za sve životinje i prezentovali ih u *GeoGebra*-i uz pomoć nastavnika (Slika 4.7.), diskutovali su o stepeništu do kojeg su upravo došli. Nastavnik je prvo tražio od studenata da provere da li se rezultati od žirafe, zebre, gazele i divlje svinje (Slika 4.4., Slika 4.5. i Slika 4.6.) sadrže u zajedničkom rešenju (Slika 4.7.). Studenti su to sproveli tako što su pratili tačkaste linije, pozicije koraka svake životinje i vertikalne promene i njihove sume na slici 4.7. i zaključili su da zajedničko rešenje sadrži rešenje za svaku životinju pojedinačno.

Dalje, poređenjem horizontalnih i vertikalnih promena studenti su se uverili da se pozicije koraka žirafe, zebre i gazele poklapaju sa odgovarajućim pozicijama koraka divlje svinje, što je potvrdilo postojanje jednog jedinstvenog stepeništa za sve životinje koje ispunjavaju uslove iz Situacije iz realnog sveta I (pozicija drugog koraka divlje svinje odgovara poziciji prvog koraka gazele, pozicija četvrtog koraka divlje svinje, odgovara poziciji drugog koraka gazele i prvog koraka zebre, itd.).

Interpretacija rešenja

Dobijeno matematičko rešenje (koordinate tačaka A, B, C, D, E, F, G, H i T) su studenti interpretirali kao pozicije koraka životinja na stepeništu, odnosno kao deo jedinstvenog stepeništa kojeg su životinje napravile (Slika 4.7.).

Studenti su se složili da je matematički model Situacije iz realnog sveta I predstavljen u obliku stepeništa (Slika 4.7.) i njemu odgovarajuće matematičko rešenje predstavljaju pozicije koraka divlje svinje (u kojima su sadržane i pozicije koraka ostalih životinja), kao što su prethodno navedene.

Takođe, studenti su primenom *GeoGebra*-e došli do zaključka da ako svaka životinja startuje iz iste tačke $A(0,0)$ (pretpostavka) njena pozicija na vrhu stepeništa će odgovarati tački $T(8,4)$, (aktivnost S5).

Prihvatanje (izveštaj) ili odbijanje rešenja

Mora se napomenuti da su studenti iz kontrolne grupe takođe uspešno i tačno rešili postavljeni problem, ali su proveli značajno više vremena u okviru aktivnosti G4 dok su sve ručno računali i donosili zaključke, nego eksperimentalna grupa studenata koja je u tu svrhu koristila *GeoGebra*-u.

Studenti iz prvog ciklusa istraživanja su proveravali validnost matematičkog modela za nagib svakog koraka životinja ručnim izračunavanjem i upoređivali tako dobijeni nagib sa onim iz Situacije iz realnog sveta I (aktivnost G4).

Matematičko rešenje do kojeg su student došli je odgovaralo Situaciji iz realnog sveta I (vrednosti za horizontalnu i vertikalnu promenu su primenom matematičkog modela davale korektne vrednosti za nagib) te je stoga prihvaćeno kao validno.

4.3.2. Situacija iz realnog sveta II

Druga situacija iz realnog sveta i pripadajući realni problem koji su studenti rešavali je prikazana u tabeli 4.3.

Tabela 4.3. *Prikaz Situacije iz realnog sveta II*

Situacija iz realnog sveta II: *Nakon nekog vremena, životinje su odlučile da popune praznine između stepenika, odnosno pozicija njihovih koraka, da bi i manje životinje od njih mogle da se popnu do vrha. Kada su to sprovele, dobile su bedem.* ***Realni problem: Odrediti matematički model koji odgovara bedemu.***

Obe grupe studenata su za matematički model bedema usvojile funkciju koja prolazi kroz sve tačke koje odgovaraju pozicijama koraka životinja kao i u prvom ciklusu istraživanja (odeljak 3.2.2.). U daljem toku modelovanja, razlikovale su se jedino aktivnosti koje su studenti realizovali (G-tipa kod kontrolne grupe i S-tipa kod eksperimentalne grupe studenata).

Matematički model

Studenti kontrolne grupe su se nakon kraće diskusije složili da je bedem najbolje reprezentovati krivom (umesto stepenastom funkcijom koja je odgovarala stepeništu), (aktivnost G1).

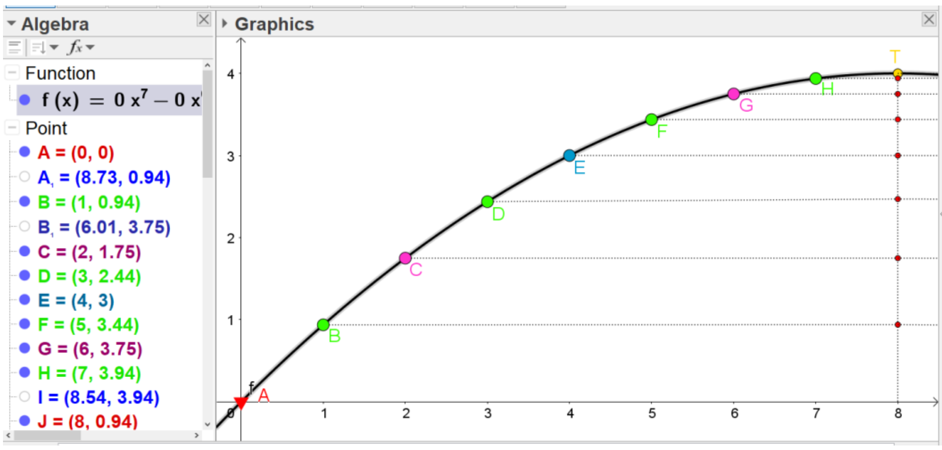
Studenti iz eksperimentalne grupe su se dogovorili da uvezu pozicije koraka životinja (matematičko rešenje *Realnog problema I*) u *GeoGebra*-u (aktivnost S1, S2) da iskoriste mogućnosti *GeoGebra*-e da bi dobili krivu koja prolazi kroz sve uvezene tačke.

Sa određivanjem izraza kojim je kriva zadata su studenti kontrolne grupe su imali problem, jer nisu znali na koji način da dodju do algebarskog izraza funkcije koja reprezentuje bedem.

Studenti eksperimentalne grupe su do matematičkog rešenja došli tako što su se složili da primene *GeoGebra* opciju *Polynomial* (aktivnost S3) čijom primenom su došli do matematičkog rešenja.

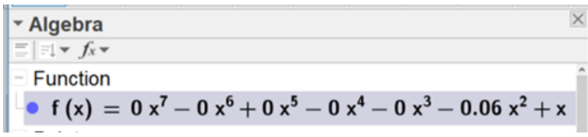
Matematičko rešenje

Primenom *GeoGebra* opcije *Polynomial* studenti eksperimentalne grupe su došli do grafičke (Slika 4.8.) i algebarske reprezentacije matematičkog rešenja.



Slika 4.8. *Funkcija koja odgovara bedemu koji su životinje sagradile*

Algebarsku reprezentaciju matematičkog rešenja studenti su pročitali iz *GeoGebra* sekcije *Algebra*, koja se nalazi na levoj strani prozora, a zatim iskoristili mogućnost da „prevuku" formulu u *Graphics* sekciju (desni prozor) i vide izraz kojim je zadata tražena funkcija (Slika 4.9.).



Slika 4.9. *GeoGebra prikaz algebarske reprezentacije funkcije koja odgovara bedemu*

Neki studenti su iskoristili *GeoGebra* opciju *Factor* iz *View-CAS* prozora i na taj način došli do algebarske reprezentacije matematičkog rešenja koje je predstavljeno sledećim izrazom:

$$f(x) = -\frac{x(x-16)}{16}, \tag{3}$$

na posmatranom domenu $[0, 8]$.

Prateći aktivnosti u okviru prelaza S4 (analiza i rad sa *GeoGebra* materijalom prikazanim na slici 4.8.) studenti eksperimentalne grupe su došli do sledeće faze procesa modelovanja.

Interpretacija rešenja

Dobijeno matematičko rešenje (3) su studenti interpretirali kao funkciju koja odgovara bedemu, uz komentare da sada mogu i da „vide" (došli su do grafičke reprezentacije) kako bedem koji su životinje napravile izgleda (Slika 4.8.).

Da bi i kontrolnoj grupi studenata pružio priliku da modeluju ovaj problem, nastavnik im je dao gotovu algebarsku reprezentaciju funkcije f i tražio je od njih da provere da li sve tačke koje odgovaraju pozicijama koraka svih životinja pripadaju grafiku fukcije f. S druge strane, eksperimentalna grupa studenata nije morala da sprovodi proveru jer *GeoGebra* opcija *Polynomial* inače podrazumeva da se tačke na koje se ta opcija primenjuje nalaze na grafiku funkcije (aktivnost S5).

Prihvatanje (izveštaj) ili odbijanje rešenja

Rešenje je potvrđeno u *GeoGebra*-i (Slika 4.8.).

Tokom modelovanja Situacije iz realnog sveta II u *GeoGebra* okruženju, primenom novog pristupa, studenti su bili skoncentrisani samo na temu koju su obrađivali, za razliku od studenata iz prvog ciklusa istraživanja koji su dosta vremena morali da posvete sadržajima koji nisu bili direktno vezani za problem (podsećali su se kvadratne funkcije i sproveli postupak za određivanje njenih koeficijenata). Takođe, studenti kontrolne grupe iz drugog ciklusa modelovanja su zavisili od pomoći nastavnika (nastavnik je studentima dao algebarski izraz funkcije koja odgovara bedemu). Uvođenje prelaza S-tipa u novom pristupu je doprinelo boljoj i kvalitetnijoj realizaciji procesa modelovanja jer su studenti mogli da se posvete samo problemu koji su modelovali i da budu samostalni tokom modelovanja, uz minimalne intervencije nastavnika.

4.3.3. Situacija iz realnog sveta III

Nadovezujući se na prve dve situacije iz realnog sveta, studentima je predstavljena i treća situacija i pripadajući realni problem (Tabela 4.4.).

Tabela 4.4. *Prikaz Situacije iz realnog sveta III*

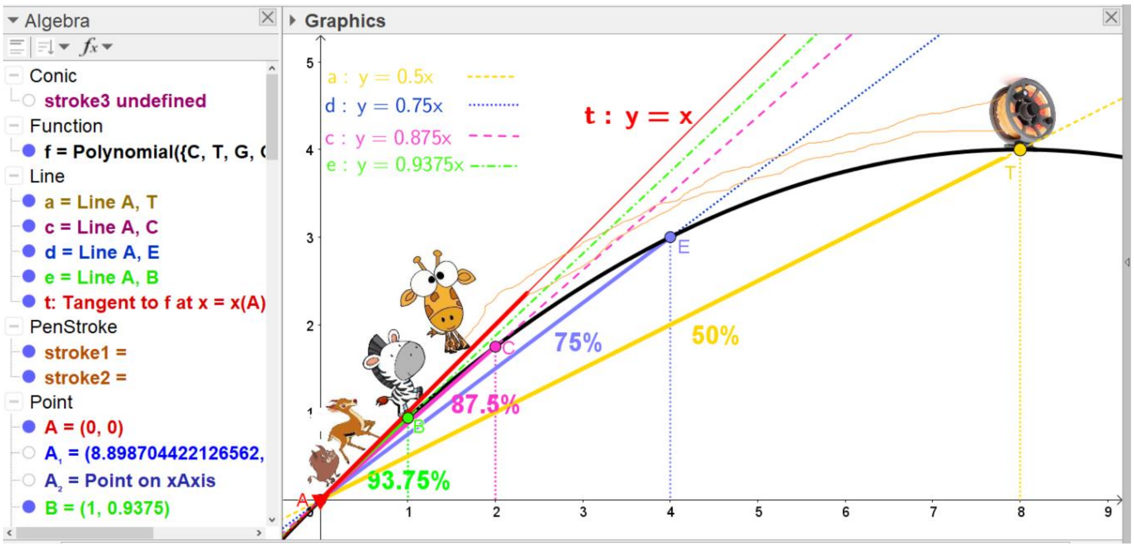
Situacija iz realnog sveta III: *Nakon nekog vremena, životinje su pronašle jednu dasku, stavile čekrk na vrh bedema, sve stale na dasku i počele da povlače konopac ne bi li se popele do vrha bedema. Pre nego što su započele penjanje, životinje su primetile da svaka od njih vidi jednak nagib daske u startnoj tački bedema.* ***Realni problem: Naći matematičku reprezentaciju nagiba daske u startnoj tački bedema.***

Studenti iz obe grupe su proces modelovanja započeli razmatranjem parabole, dvodimenzionalne reprezentacije bedema, do koje su došli tokom rešavanja drugog problema (Slika 4.8.). Najpre su nacrtali dasku u njegovoj baznoj tački $A(0, 0)$ i posmatrali je u odnosu na bedem.

Posmatranjem i analiziranjem položaja daske u odnosu na bedem studenti su lako uvideli da daska zapravo predstavlja tangentu na parabolu u startnoj tački A bedema.

Nastavnik je sugerisao studentima da za početak, nacrtaju linije (svaka je drugačije označena) koje prolaze kroz tačku A i tačke koje odgovaraju pozicijama prvih koraka svih životinja (aktivnost G1 za kontrolnu grupu studenata i S1, S2 za eksperimentalnu grupu). Obe grupe su to učinile, međutim studenti iz kontrolne grupe su imali teškoće i morali su da ulože dosta napora da bi shvatili da te linije zapravo predstavljaju sečice parabole i da njihovi nagibi odgovaraju nagibima prvih koraka životinja, jer su sami crtali kao i u prvom ciklusu istraživanja (Slika 3.6.).

Studenti iz eksperimentalne grupe nisu imali probleme te vrste jer su oni istovremeno koristili grafičku i algebarsku reprezentaciju sečica u *GeoGebra*-i, odakle su mogli da vide linije i simultano prate njihove nagibe (Slika 4.10., žirafina linija je kratko isprekidana, zebrina tačkasta, gazelina dugo isprekidana i povlaka-tačka za divlju svinju).



Slika 4.10. *Nagibi prvih koraka životinja i sečice iz startne tačke* $A(0,0)$

Zaključak obe grupe studenata je bio da se smanjenjem horizontalne promene sečice sve više približavaju tangenti na parabolu u tački A, ali je važno napomenuti da je studentima kontrolne grupe trebalo više vremena da dođu do tog zaključka. Studenti su usvojili da matematički model nagiba daske u startnoj tački bedema predstavlja nagib tangente t na parabolu f u tački $A(0,0)$.

U daljem procesu modelovanja studenti su trebali da nađu matematičko rešenje posmatranog problema (nagib daske u startnoj tački bedema). Nastavnik je sugerisao studentima da krenu od izraza za nagib sečica koje predstavljaju prve korake životinja i da ga dalje razviju do izraza za nagib tangente (nagiba daske).

Takođe su se složili da je nagib daske u startnoj tački $A(0,0)$ izjednačen sa nagibom tangente u istoj tački na parabolu koja odgovara bedemu (aktivnost G2 za kontrolnu grupu i S3 za eksperimentalnu grupu studenata).

Studenti su zatim, zajedno sa nastavnikom, pokušali da povežu nagib prave (tangente) sa nagibom daske. Analogno kao i u prvom ciklusu istraživanja, primenom algebarskih reprezentacija nagiba, jednačina sečica i tangente i funkcije f, studenti obe grupe su uspeli da matematički reprezentuju približavanje nagiba sečica nagibu tangente kao granični proces:

$$m_t(0) = \underset{h\to 0_+}{lim} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} -\frac{h-16}{16} = 1, \tag{4}$$

gde je $m_t(0)$ nagib tangente na posmatranu parabolu u tački $A(0,0)$, i $f'(0)$ je prvi izvod funkcije prestavljene parabolom u tački $A(0,0)$.

Studenti eksperimentalne grupe su koristili *GeoGebra*-u pri svojim izračunavanjima nagiba daske (Slika 4.10.), dok su studenti kontrolne grupe sve radili ručno, identično kao eksperimentalna grupa u prvom ciklusu istraživanja.

Matematičko rešenje za nagib daske m_t u startnoj tački bedema $A(0,0)$ je dato sledećim izrazom:

$$m_t(0) = 1$$

Primećeno je da su studenti iz eksperimentalne grupe došli do matematičkog rešenja nagiba daske u startnoj tački A isključivo primenom *GeoGebra*-e odakle su mogli da pročitaju algebarski izraz za tangentu na parabolu u tački $A(0,0)$, $y = x$ i zaključe da je na osnovu toga nagib jednak 1 (aktivnost S4).

Nastavnik je tada tražio od studenata da nađu prvi izvod funkcije f u startnoj tački $A(0,0)$. Studenti su došli do sledećeg rezultata:

$$f'(x) = -\frac{2x-16}{16} = \frac{8-x}{8}.$$

Zaključak do kojeg su studenti došli je da je prvi izvod funkcije f, u tački 0 jednak 1, odnosno da on odgovara nagibu tangente u datoj tački na grafik funkcije f:

$$f'(0) = m_t(0) = 1.$$

Dobijene rezultate su već prethodno potvrdili tokom procesa izračunavanja, što je i bilo predviđeno da se uradi na taj način jer su studenti uvežbavali izvod funkcije i njegove osobine.

Međutim, u kontrolnoj grupi je nastavnik morao da se umeša u proces modelovanja i pomogne studentima da dođu do nagiba tangente (na parabolu u tački $A(0,0)$, primenom relacije za njen nagib $m_t(0) = y'(0) = 1$ i jednačine $y = x$ kojom je zadata).

Trebalo bi naglasiti da studenti obe grupe, eksperimentalne i kontrolne, nisu imali poteškoća u povezivanju nagiba tangente u tački A na parabolu f sa izvodom funkcije f u istoj tački. U svakom slučaju, studenti obe grupe su bili vrlo zadovoljni sa ishodom modelovanja jer su prepoznali jedan od načina za primenu izvoda funkcije.

Nagib tangente t na funkciju f, odnosno, prvi izvod funkcije f u tački $A(0,0)$ su studenti interpretirali kao nagib daske u startnoj tački bedema. Analizom *GeoGebra* materijala (Slika 4.10.) je potvrđena ispravnost matematičkog modela, odnosno matematičkog rešenja.

Posmatrajući aktivnosti studenata eksperimentalne grupe tokom procesa modelovanja Situacije iz realnog sveta III, bilo je jasno uočljivo da su koristili samo prelaze S-tipa.

Upoređujući tok rešavanja ovog realnog problema u prvom i drugom ciklusu istraživanja, mora se napomenuti da je u drugom ciklusu istraživanja proces modelovanja kod eksperimentalne grupe studenata tekao mnogo brže i uz znatno manje intervencije nastavnika.

4.3.4. Situacija iz realnog sveta IV

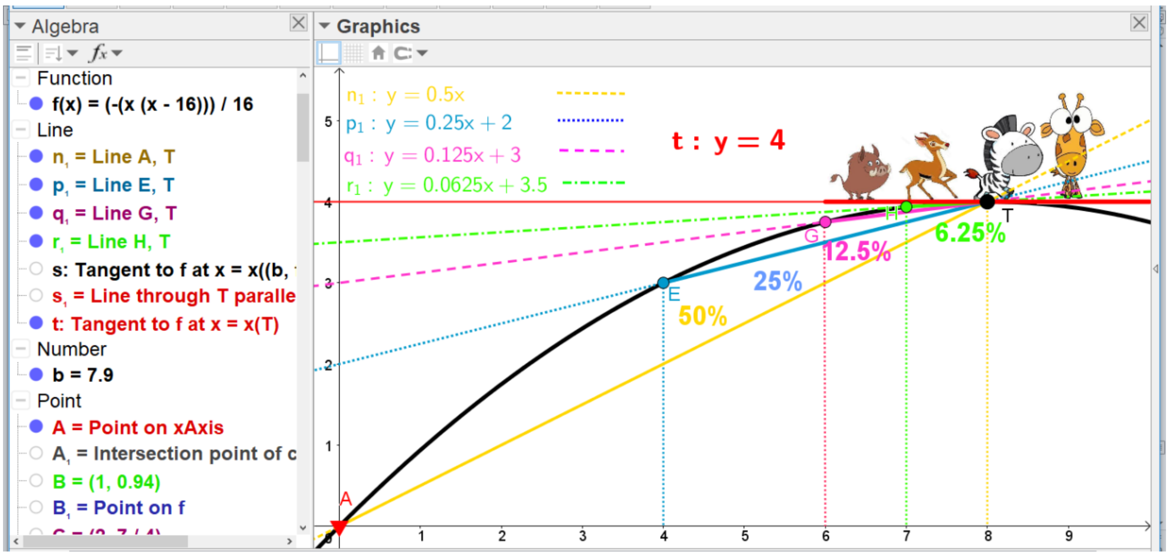
Situacija iz realnog sveta IV je prikazana u tabeli 4.5.:

Tabela 4.5. *Prikaz Situacije iz realnog sveta IV*

Situacija iz realnog sveta IV: *Kada su stigle do vrha bedema, životinje su primetile da svaka od njih opet vidi jednak nagib daske i na vrhu bedema.* ***Realni problem: Naći matematičku reprezentaciju nagiba daske na vrhu bedema.***

Nastavnik je najpre sugerisao studentima da pokušaju da modeluju nagib daske na vrhu bedema na isti način kao što su to uradili i za slučaj startne tačke. Obe grupe (eksperimentalna i kontrolna) su se složile da iskoriste poznate nagibe poslednjih koraka životinja, (50%, 25%; 12,5%; 6,25% za žirafu, zebru, gazelu i divlju svinju, respektivno), i sprovele su proces modelovanja kao u slučaju startne tačke.

Studenti iz eksperimentalne grupe su najpre u *GeoGebra*-i razmotrili tačku $T(8,4)$ i sečice koje prolaze kroz tačku T čiji nagibi odgovaraju nagibima poslednjih koraka svih životinja (Slika 4.11.), sečica koja odgovara poslednjem koraku žirafe je označena kratko isprekidanom linijom, zebre tačkastom, gazele dugo isprekidanom linijom i povlaka-tačka za divlju svinju), (aktivnost S1). Studenti su na osnovu situacije predstavljene u *GeoGebra*-i lako zaključili da nagibi sečica teže nuli, kada horizontalna promena takođe teži nuli. Takođe, studenti su primetili da se sečice približavaju tangenti $y = 4$, iz čije su jednačine zaključili da je njen nagib jednak 0, (sve u odnosu na parabolu f, datu izrazom (3) i zajedničku tačku $T(8,4)$), (aktivnost S2).



Slika 4.11. *Nagibi poslednjih koraka životinja i sečice koje im odgovaraju u tački* $T(8,4)$

Matematički model nagiba daske u tački koja odgovara vrhu bedema predstavlja nagib tangente t na parabolu f u tački $T(8,4)$.

Analogno slučaju nagiba daske u startnoj tački, studenti su matematički reprezentovali i nagib daske u tački koja odgovara vrhu bedema $T(8,4)$.

Prvo su krenuli od nagiba sečice $m_h(8)$ u tački $T(8,4)$ na parabolu f:

$$m_h(8) = \frac{f(8+h) - f(8)}{h}, \tag{5}$$

za horizontalne promene, $h = -8, -4, -2, -1$.

Studenti su bili zbunjeni zbog negativnih vrednosti za horizontalnu promenu, tako da se u tom trenutku modelovanja morao umešati nastavnik koji je objasnio da je to tako jer se sečice približavaju tangenti u zajedničkoj tački T na istu krivu sa leve strane u ovom slučaju (u prethodnom slučaju su se približavale sa desne strane startne tačke A i stoga su tada uzimane pozitivne vrednosti za horizontalne promene).

Kombinujući (5) sa (3) kojim je zadata funkcija f, studenti su došli do sledećeg:

$$m_h(8) = \frac{-\frac{(8+h)(8+h-16)}{16} + \frac{8(8-16)}{16}}{h} = \frac{-h}{16}, \tag{6}$$

za $h = -8, -4, -2, -1$.

Konačno, iz (6), studenti su došli do finalnog zaključka za nagib daske u tački $T(8,4)$ koja predstavlja vrh bedema:

$$m_t(8) = \lim_{h \to 0_-} \frac{-\frac{(8+h)(8+h-16)}{16} + \frac{8(8-16)}{16}}{h} = \lim_{h \to 0_-} -\frac{h}{16} = 0. \tag{7}$$

Važno je naglasiti da tokom rešavanja problema nagiba daske u startnoj tački i u tački koja odgovara vrhu bedema studenti eksperimentalne nisu imali poteškoće da prihvate da su izvodi u poslednja dva slučaja razmatrani samo sa jedne strane, desne ili leve. Studenti eksperimentalne grupe su lako vizualizovali obe situacije, jer su im pomoć pružali *GeoGebra* materijali (Slika 4.10. i Slika 4.11.).

Matematičko rešenje za nagib daske m_t u tački koja odgovara vrhu bedema $T(8,4)$ je dato sledećim izrazom:

$$m_t(8) = 0.$$

Kao i u slučaju Realnog problema III, studenti su na zahtev nastavnika pokušali da povežu nagib daske (nagib tangente) u tački koja odgovara vrhu bedema, $m_t(8)$, sa prvim izvodom $f'(8)$ u tački $T(8,4)$ u odnosu na parabolu koja odgovara grafiku posmatrane funkcije f. Studenti su došli do sledećih zaključaka:

$$m_t(8) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(8+h) - f(8)}{h} = f'(8).$$

$$f'(x) = -\frac{2x - 16}{16} = \frac{8 - x}{8}, \qquad f'(8) = 0.$$

Na ovaj način su i matematički potvrdili da je prvi izvod funkcije putanje f u tački 8 jednak 0, odnosno jednak nagibu tangente na grafik funkcije f u tački $T(8,4)$.

Nakon što su studenti došli do matematičkog rešenja posmatranog realnog problema, dobijeno rešenje (nagib daske u tački $T(8,4)$ odgovara prvom izvodu funkcije f za $x = 8$ i jednak je nuli, $f'(8) = 0$) je interpretirano (odgovara tangenti $y = 4$ čiji je nagib 0) i prihvaćeno kao validno (aktivnosti S4 i S5 za eksperimentalnu grupu i G3, G4 za kontrolnu grupu studenata) kao u prethodnom slučaju za startnu tačku.

Da je nagib daske u tački koja odgovara vrhu bedema jednak nuli su studenti interpretirali kao horizontalan položaj daske na vrhu bedema, a ispravnost matematičkog modela, odnosno matematičkog rešenja je potvrđeno uz pomoć *GeoGebra* materijala (Slika 4.11.)

Proces matematičkog modelovanja Situacije iz realnog sveta IV se odvijao na isti način kao i modelovanje Situacije iz realnog sveta III, s obzirom da su oba problema bila vrlo slična. Studenti eksperimentalne grupe su i u ovom slučaju koristili isključivo prelaze S-tipa i pomoć računarskih tehnologija.

4.3.5. Situacija iz realnog sveta V

Tabela 4.6. daje pregled Situacije iz realnog sveta V i petog realnog problema:

Tabela 4.6. *Prikaz Situacije iz realnog sveta V*

Situacija iz realnog sveta V: *Dok su se životinje penjale na bedem koristeći dasku, zebra je poželela da odredi nagib daske u tački koja predstavlja poziciju njenog prvog koraka.* ***Realni problem: Odrediti nagib daske i njegovu matematičku reprezentaciju u tački bedema koja odgovara poziciji zebrinog prvog koraka.***

S obzirom da su slične situacije već modelovali u okviru *Realnog problema III i IV*, studenti obe grupe, eksperimentalne i kontrolne, su odmah zaključili da nagib daske u tački $E(4,3)$ koja odgovara poziciji prvog koraka zebre, odgovara nagibu tangente u istoj tački bedema (na funkciju putanje f).

Takođe, studentima je bilo jasno i da se nagib tangente koji odgovara nagibu daske može odrediti kao granični slučaj nagiba sečica u tački $E(4,3)$. Nastavnik je tada studente pitao sa koje strane će posmatrati sečice, pošto su u prethodna dva slučaja posmatrali samo desnu ili samo levu stranu. Nakon kraćeg razmišljanja i diskusije, studenti su zaključili da se u ovom slučaju posmatraju sečice sa obe strane tačke E, budući da je ona na “sredini” bedema, a nije ni na početku (kao startna tačka A) a ni na vrhu (kao tačka T koja odgovara vrhu bedema).

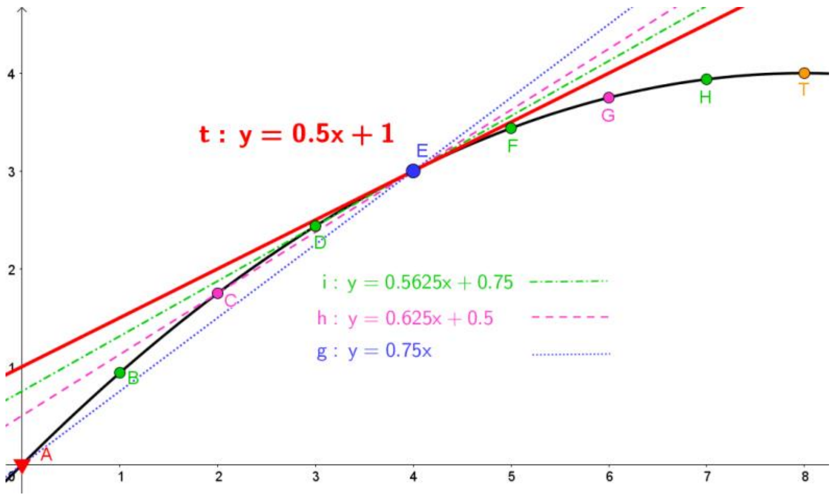
Da bi bolje sagledali ceo proces, studenti su se dogovorili da svaku stranu posmatraju odvojeno, da bi nakon toga objedinili zaključke do kojih su došli i postavili matematičko rešenje za realni problem.

Matematički model nagiba daske u tački $E(4,3)$ koja odgovara poziciji prvog koraka zebre, predstavlja nagib tangente t na parabolu f u tački $E(4,3)$.

Studenti iz eksperimentalne grupe su odmah iskoristili *GeoGebra*-u i jednostavno nacrtali sečice levo od tačke $E(4,3)$, odakle su mogli da pročitaju njihove nagibe (Slika 4.13.), (aktivnost S1).

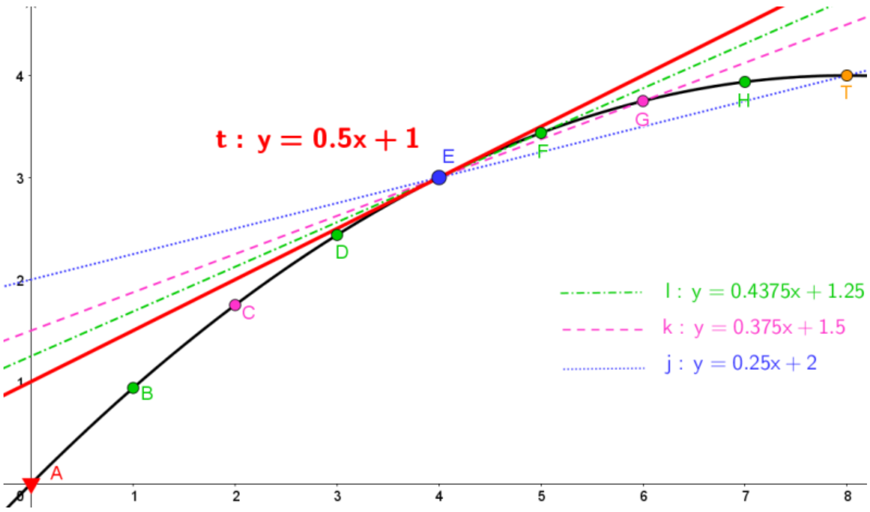
Nakon kraće analize dobijenog crteža, dodali su u tački E tangentu na bedem (funkciju f) i pročitali njen nagib koji je bio jednak 0,5 (aktivnosti S2,S3).

Da je nagib tangente u tački E jednak 0,5 studenti su se uverili posmatrajući nagibe sečica iz iste tačke koje se približavaju tangenti sa leve strane i koji su jednaki sa 0,75; 0,625 i 0,5625 (Slika 4.12.).



Slika 4.12. *Sečice sa leve strane tačke* $E(4,3)$

Isto su ponovili i za desnu stranu tačke E, nacrtali su sečice koje prolaze kroz tačku E i odgovaraju koracima životinja. Nagibi sečica za zebru, gazelu i divlju svinju posmatrano sa desne strane tačke E jednaki su sa 0,25; 0,375; 0,4375; respektivno (Slika 4.13.).



Slika 4.13. *Sečice sa desne strane tačke* $E(4,3)$

Dodavanjem tangente u tačku E na funkciju f, studenti su videli da je nagib tangente i u ovom slučaju jednak sa 0,5 što je potvrdilo njihovu pretpostavku da će nagib tangente, posmatrane sa leve i sa desne strane tačke E biti jednak.

Da bi rezultati do kojih su studenti došli u prethodnom procesu modelovanja mogli biti uobličeni u matematičko rešenje i kasnije interpretirani i potvrđeni kao validni, nastavnik je tražio od studenata da matematički reprezentuju svoje zaključke.

Studenti obe grupe su krenuli od (5) koji su prilagodili tački $E(4,3)$:

$$m_h(4) = \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \quad , \tag{8}$$

koji su posmatrali za $h = -1, -2, -4, -8$ (leva strana), i za $h = 1, 2, 4, 8$ (desna strana).

Posmatrajući izraz (8) i u funkciji putanje f, studenti su dobili sledeći rezultat:

$$m_h(4) = \frac{-\frac{(4+h)(4+h-16)}{16} - \frac{4(4-16)}{16}}{h} = -\frac{h-8}{16}, \tag{9}$$

Sada, posmatrajući samo levu graničnu vrednost izraza (9), studenti su došli do:

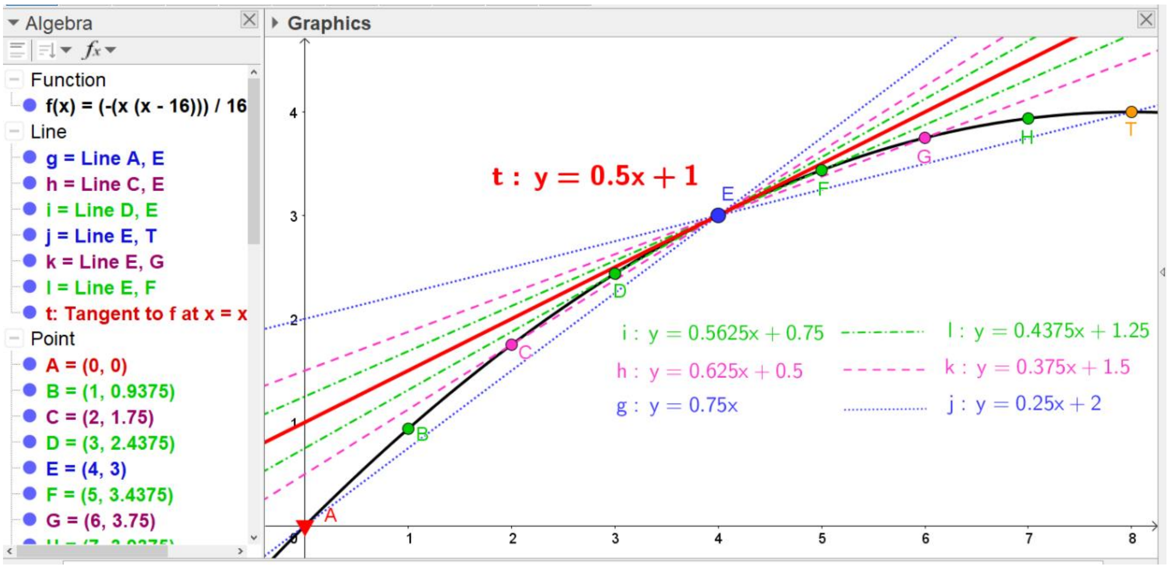
$$m_t(4) = \lim_{h \to 0_-} \frac{-\frac{(4+h)(4+h-16)}{16} - \frac{4(4-16)}{16}}{h} = \lim_{h \to 0_-} -\frac{h-8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, potvrđeno je da matematička reprezentacija nagiba tangente posmatrana sa leve strane tačke E odgovara nagibu do kojeg su studenti već došli.

Razmatrajući (9) i desnu graničnu vrednost, za $h = 1, 2, 4, 8$ dobijeni su isti rezultati kao za levu stranu:

$$m_t(4) = \lim_{h \to 0_+} \frac{-\frac{(4+h)(4+h-16)}{16} + \frac{4(4-16)}{16}}{h} = \lim_{h \to 0_+} -\frac{h-8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Zaključak studenata je bio da je nagib tangente (nagib daske u tački E) isti, bez obzira sa koje strane se posmatra granična vrednost. Svoj zaključak studenti eksperimentalne grupe su objedinili na jednom *GeoGebra* crtežu (Slika 4.14.), (aktivnosti S4, S5).



Slika 4.14. *Sečice sa leve i desne strane tačke* $E(4,3)$

Matematička reprezentacija izvedenog zaključka:

$$m_t(4) = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{(4+h)(4+h-16)}{16} + \frac{4(4-16)}{16}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{h-8}{16} = \frac{1}{2},$$

odakle su studenti nagib tangente odmah povezali i sa prvim izvodom funkcije f u tački E:

$$f'(x) = -\frac{2x-16}{16} = \frac{8-x}{8}, \qquad f'(4) = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Matematičko rešenje za nagib daske m_t u tački koja odgovara poziciji prvog zebrinog koraka $E(4,3)$ je dato sledećim izrazom:

$$m_t(4) = \frac{1}{2}.$$

S obzirom da su studenti već modelovali Situacije iz realnog sveta III i IV, u okviru kojih su izveli slične zaključke i interpretirali nagib daske kao vrednost izvoda funkcije f u posmatranim tačkama bedema, ovaj prelaz im nije predstavljao veliki problem. Do izraza (10) koji predstavlja interpretaciju izvoda funkcije kao nagiba daske u posmatranoj tački

$E(4,3)$, studenti su došli još u okviru aktivnosti realizovanih tokom prelaza od Matematičkog modela do Matematičkog rešenja.

Nagib tangente t na funkciju f, odnosno, prvi izvodu funkcije f u tački $E(4,3)$ odgovara nagibu daske gledano iz pozicije prvog zebrinog koraka.

Ispravnost matematičkog modela, odnosno matematičkog rešenja je potvrđena eksperimentisanjem sa *GeoGebra* materijalom (Slika 4.12., Slika 4.13. i Slika 4.14.)

Po završetku procesa modelovanja svih pet situacija iz realnog sveta i postavljenih realnih problema, nastavnik je iskoristio priliku da još jednom naglasi vezu između geometrijske interpretacije prvog izvoda funkcije i nagiba koraka životinja i ukaže na eventualne aspekte primene izvoda funkcije u realnoj praksi.

Obe grupe studenata, eksperimentalna i kontrolna, su uspešno sprovele modelovanje, s tom razlikom što su sam proces modelovanja sprovodili na različite načine.

Eksperimentalna grupa studenata je uglavnom koristila prelaze S-tipa, a kod Situacija iz realnog sveta III, IV i V isključivo prelaze S-tipa. Moglo se primetiti da je proces modelovanja tada bio znatno efikasniji i vremenski manje zahtevan. Eventualne blokade koje su nastajale tokom modelovanja su studenti lako prevazilazili uz primenu *GeoGebra* materijala koje su sami osmišljavali. Komunikacija je bila vrlo intenzivna, kako sa nastavnikom, tako i među studentima. Uloga nastavnika se prilikom modelovanja u *GeoGebra* okruženju svela na ulogu moderatora, koji je proces modelovanja samo usmeravao, bez nekih velikih intervencija.

Studenti kontrolne grupe su takođe došli do istih zaključaka, ali su tokom procesa modelovanja imali i poteškoće. Na primer, morali su ručno da računaju nagibe svake sečice pojedinačno (kod Realnih problema III, IV i V), što je značajno usporilo njihov proces modelovanja a sa druge strane i skretalo pažnju sa problema koji su modelovali. Komunikacija je bila slabijeg intenziteta nego kod eksperimentalne grupe studenata, a uloga nastavnika značajnija (na primer, studentima je kod Realnog problema II bila neophodna pomoć nastavnika jer nisu mogli da nastave proces modelovanja bez izraza kojim je bila zadata tražena funkcija). U tom smislu, moglo se zaključiti da su postojale sličnosti sa procesom modelovanja iz prvog ciklusa istraživanja, što je bilo i očekivano s obzirom da prelazi G-tipa koje su koristili studenti kontrolne grupe odgovaraju prelazima iz tradicionalnog procesa modelovanja.

4.4. OBRADA PRIMENE IZVODA FUNKCIJE MATEMATIČKIM MODELOVANJEM U *GEOGEBRA* OKRUŽENJU

U prethodnim odeljcima je prikazana relizacija nastavnog procesa primenom matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju (ilustrovanim zvezdastim dijagramom). Reakcije studenata na takvu koncepciju nastave su bile izuzetno pozitivne, a utisci nastavnika takođe, naročito oni koji su se odnosili na motivaciju studenata, kvalitet nastave i angažovanost studenata na času.

Nakon uvođenja definicije izvoda funkcije, njegovih različitih reprezentacija i interpretacija i uvežbavanja zadataka iz te oblasti, po nastavnom planu i programu je sledila obrada primene izvoda funkcije na ispitivanje funkcije (monotonost funkcije, ekstremne vrednosti i konveksnost i konkavnost). Nastava iz ove oblasti je takođe realizovana uz primenu matematičkog modelovanja i u istraživanju su učestvovali isti studenti koji su modelovali i situacije iz realnog sveta opisane u prethodnom poglavlju. Podela studenata na eksperimentalnu i kontrolnu grupu je ostala ista kao kod obrade izvoda funkcije i modelovanje se sprovodilo takođe na isti način (eksperimentalna grupa je modelovala u *GeoGebra* okruženju, dok je kontrolna grupa primenjivala klasično modelovanje bez primene računara).

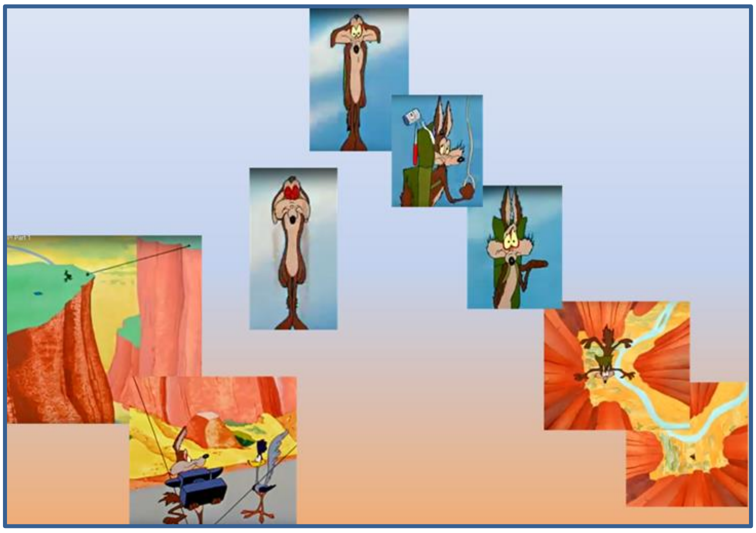
Novinu u drugom ciklusu istraživanja je predstavljao i način kako su zadavane Situacije iz realnog sveta koje su studenti modelovali u okviru obrade primene izvoda funkcije. Situacije su zadavane putem video materijala ili slika uvezenih u *GeoGebra*-u u cilju da se studentima još više približe problemi iz realnog sveta da bi kasnije mogli bolje da ih uoče i reše u realnom i profesionalnom okruženju.

4.4.1. Primena izvoda na ispitivanje monotonosti funkcije i ekstremnih vrednosti I

Za opis situacije iz realnog sveta koja je upotrebljena za modelovanje, iskorišćen je deo popularnog crtanog filma u kome se njegov glavni junak kreće gore-dole i tokom tog svog kretanja prolazi kroz pozicije koje odgovaraju njegovoj najvećoj/najmanjoj postignutoj visini.

Priča koja je iskorišćena za situaciju iz realnog sveta je bazirana na poznatom crtanom filmu (tačnije jednom njegovom delu od 1 min 40 s do 2 min 20 s) gde glavni junak Kojot Genije (vuk) pokušava da uhvati Pticu Trkačicu (Wile E. Coyote and The Road Runner–Beep Beep, 1952). Crtani film je nastavnik prikazao studentima sa *YouTube*–a (https://www.youtube.com/watch?v=132XmBjsOiE).

Vuk u crtanom filmu pokušava da pređe preko žice razapete između dva brda, držeći pri tome nakovanj u rukama. Zbog težine nakovnja, žica se isteže, spuštajući vuka do zemlje. U trenutku kada vuk dodirne tlo, on ispušta nakovanj i, obzirom da je na žici, biva lansiran u vazduh. Izvestan vremenski period on leti u vis kroz vazduh, usporava, dostiže maksimum i nakon toga počinje da pada dole. Na kraju, pošto ne uspeva da otvori padobran, vuk pada na tlo (Slika 4.15.).



Slika 4.15. *Prikaz kadrova crtanog filma*

Nakon što je studentima prikazan crtani film (Situacija iz realnog sveta), nastavnik ju je još jednom opisao i uputio studente obe grupe da posmatraju i analiziraju kretanje vuka.

Nastavnik je u okviru prelaza ka fazi Realni problem studentima obe grupe sugerisao da više puta pogledaju odlomak crtanog filma i da pokušaju da izdvoje neke specifične trenutke koji se tiču kretanja junaka. Studenti su to i učinili, i uz pomoć nastavnika, uočili su nekoliko, po njima važnih elemenata koji su se odnosili na kretanje junaka iz crtanog filma. Studenti su primetili da se vuk u kreće na gore/dole i izdvojili su, kao značajno, trenutke kada je vuk na vrhu brda, kada dotakne tlo i kada dostigne najveću visinu u vazduhu. Uzimajući u obzir zaključke studenata, nastavnik je postavio realni problem koji odgovara situaciji koja se modeluje.

Tabela 4.7. *Realni problem - monotonost i ekstremne vrednosti I*

***Realni problem**: Modelovati kretanje lika iz crtanog filma, odnosno matematički reprezentovati i opisati njegovo kretanje.*

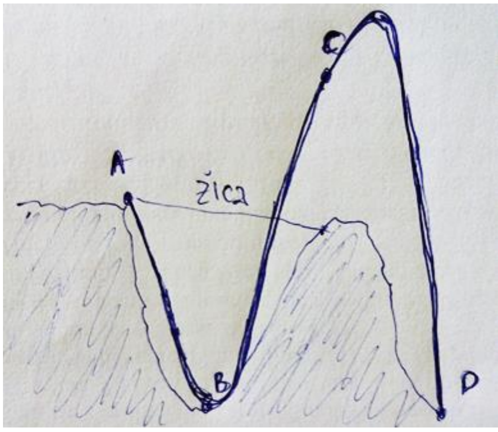
Prva reakcija studenata obe grupe, eksperimentalne i kontrolne, je bila da im nije najjasnije šta sve treba da urade jer realni problem nije „*precizno postavljen*“ (komentar studenata). Prisećajući se prethodnih problema koje su modelovali, ovaj su povezali sa Realnim problemom II, kada su trebali da nadju putanju životinja po bedemu. Na osnovu toga, zaključili su da treba najpre da nadju funkciju koja odgovara dvodimenzionalnoj reprezentaciji putanje vuka. Međutim, mnogi studenti su komentarisali da im crtani film ne pruža nikakve podatke koji bi mogli da im pomognu da dodju do tražene funkcije.

Nastavnik je tada, da bi pomogao studentima obe grupe, rekao da bi mogli da funkciju posmatraju na intervalu $[0, 10]$ i da pretpostave sledeće: da je vuk na početku svog kretanja bio na poziciji kojoj odgovaraju koordinate $(0, 8)$, nakon nekoliko trenutaka je bio na poziciji sa koordinatama $(2, 0)$, da bi zatim prošao kroz tačku $(5, 9)$. Svoje kretanje je završio kada je pao na tlo, u tačku $(10, 0)$.

Diskutujući podatke koje im je nastavnik dao, studenti obe grupe su brzo došli do istog zaključka: da funkciji koja odgovara putanji vuka pripadaju tačke $A(0,8)$, $B(2,0)$, $C(5,9)$ i $D(10,0)$.

Studenti eksperimentalne grupe su primenili istu strategiju kao i ranije, uvezli su u *GeoGebra*-u tačke A, B, C i D i opet primenili *GeoGebra* opciju *Polynomial* (aktivnosti S1 i S2). Na taj način su došli do matematičkog modela putanje vuka.

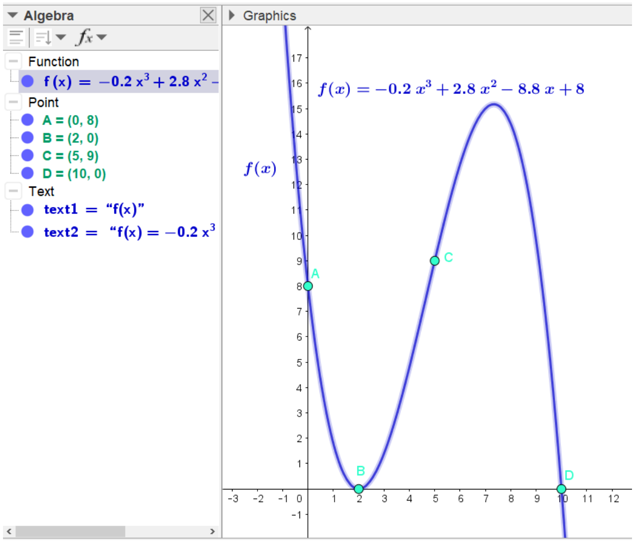
Studenti kontrolne grupe su imali velikih problema u rešavanju ovog zadatka. Najpre su pokušali da skiciraju putanju lika iz crtanog filma (Slika 4.16.), (aktivnost G1).



Slika 4.16. *Skica putanje lika iz crtanog filma studenata kontrolne grupe*

Nakon što su skicirali putanju, studenti kontrolne grupe su zaključili da bi vrlo teško došli do algebarskog izraza funkcije, jer oblik putanje ne odgovara nekoj od elementarnih funkcija (kao što je bio slučaj sa funkcijom putanje u Realnom problemu II koja je bila kvadratna funkcija). Iz tih razloga, nastavnik je studentima kontrolne grupe kasnije morao da napiše izraz koji odgovara traženoj funkciji da bi proces modelovanja mogao da se nastavi.

Rezultat primene *GeoGebra* opcije *Polynomial* (eksperimentalna grupa) je bila grafička i algebarska reprezentacija funkcije f (matematički model) koja prolazi kroz sve tačke koje odgovaraju unapred zadatim pozicijama lika iz crtanog filma (Slika 4.17.).

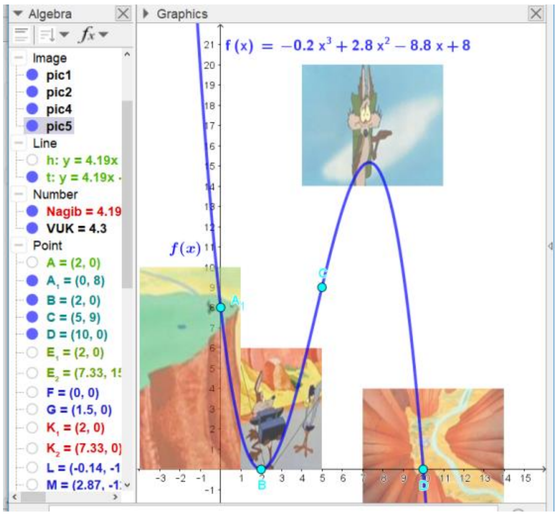


Slika 4.17. *Matematički model funkcije f studenata eksperimentalne grupe*

Algebarsku reprezentaciju funkcije f studenti eksperimentalne grupe su i ovaj put pročitali iz sekcije *Algebra* njihovog *GeoGebra* materijala, kao kod Realnog problema II (Slika 4.9), i ona je predstavljena:

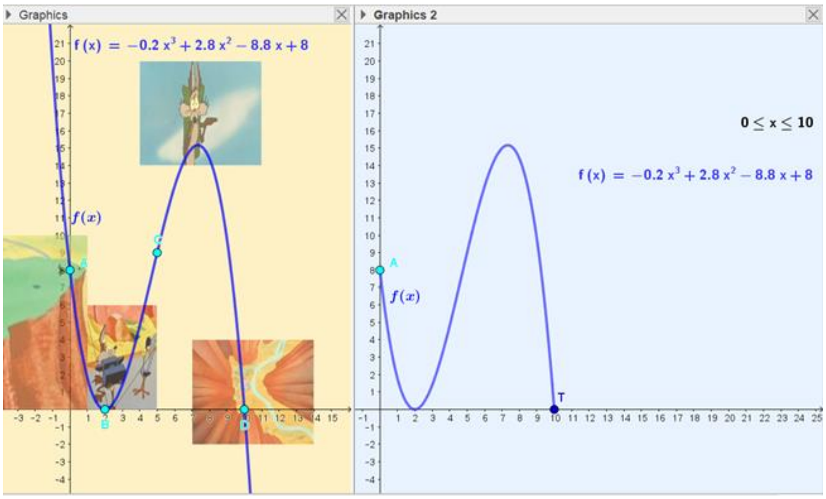
$$f(x) = -0{,}2x^3 + 2{,}8x^2 - 8{,}8x + 8. \tag{11}$$

U nastavku procesa modelovanja u okviru aktivnosti S3, studenti eksperimentalne grupe su u *GeoGebra* materijalu koji su do tada izradili dodali i slike pojedinih kadrova iz crtanog filma, da bi dodatno ilustrovali kretanje lika, odnosno Situaciju iz realnog sveta (Slika 4.18.). To su jednostavno uradili tako što su kadrove sa ekrana kopirali opcijom *PrtScr* i ubacili kao slike.



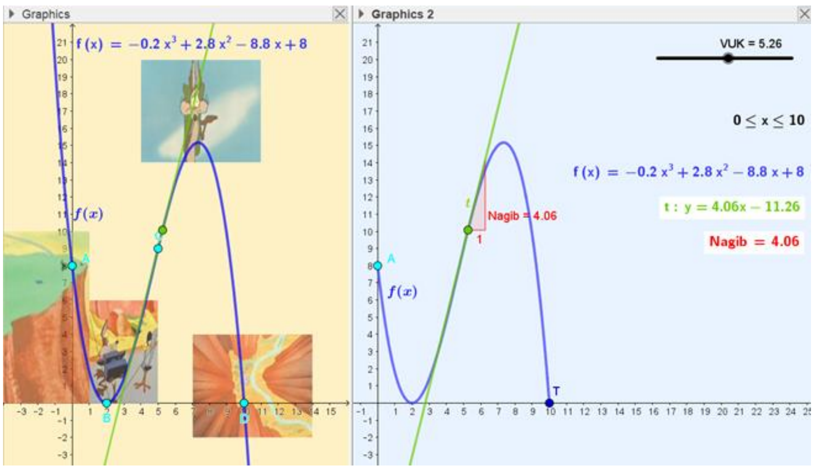
Slika 4.18. *Matematički model studenata eksperimentalne grupe sa kadrovima iz crtanog filma*

U cilju daljeg modelovanja i eksperimentisanja sa kretanjem vuka, studenti eksperimentalne grupe su nastavili sa razvojem *GeoGebra* materijala tako što su iskoristili mogućnost da dodaju još jedan prozor, aktivirajući opcije *View→Graphics 2.* U drugom prozoru su izdvojili funkciju f i ograničili njen prikaz na posmatrani interval $[0, 10]$ jer su želeli da posmatraju samo kretanje vuka od startne tačke $A(0, 8)$ do tačke $T(10, 0)$ kada su smatrali da je konačno pao na tlo i završio svoje kretanje (Slika 4.19.). Tačku $T(10, 0)$ studenti su dobili primenom *GeoGebra* opcije *Intersect* (presek fukcije f i ose Ox).



Slika 4.19. *GeoGebra reprezentacija funkcije f studenata eksperimentalne grupe*

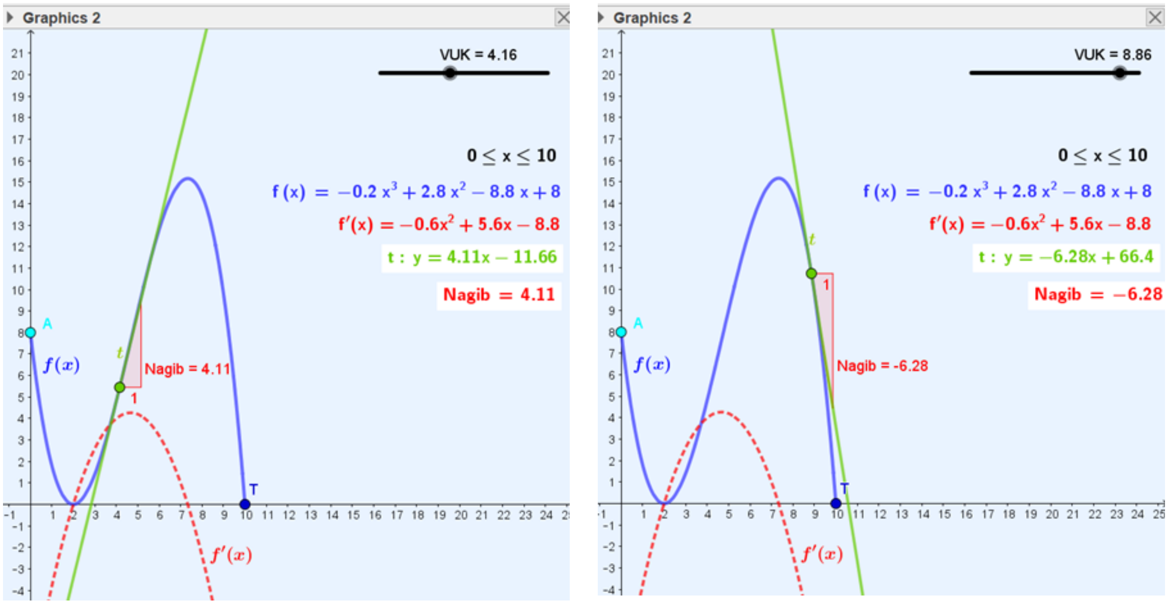
Nastavnik je tada usmerio studente ka zaključcima do kojih su došli tokom modelovanja prethodnih situacija iz realnog sveta koji se tiču nagiba. Studenti su brzo reagovali i zajednički su predložili da posmatraju šta se dešava sa nagibom kada se vuk kreće po funkciji f. U tu svrhu su na drugom grafiku dodali klizač (označen sa VUK), čija je namena bila da pomeraju tačku koja bi predstavljala vuka po funkciji f. Takođe, za klizač su vezali i tangentu t na funkciju f u tački koja predstavlja vuka i uključili opciju *Slope* za nagib tangente i sve prikazali u okviru prvog i drugog grafika (Slika 4.20.).



Slika 4.20. *Kretanje vuka po funkciji f, tangenta t i njen nagib u tačkama njegovih pozicija*

Pomerajući klizač, studenti su posmatrali kretanje junaka iz crtanog filma i komentarisali vrednosti nagiba (aktivnosti S3). Prvo što su studenti eksperimentalne grupe uočili je da nagib tangente na funkciju f nekada ima i negativne vrednosti. S obzirom da su tokom modelovanja prethodnih realnih problema vrednosti nagiba bile uvek pozitivne, studenti su dalje eksperimentisali sa *GeoGebra* materijalom, posmatrajući pri tome, kako se menjaju vrednosti nagiba na celom intervalu na kojem su posmatrali funkciju f. Vrlo brzo su uočili da je nagib tangente na funkciju f pozitivan kada se vuk kreće na gore, a kada se kreće na dole, nagib ima negativnu vrednost. Nastavnik je tada podsetio studente na vezu nagiba i izvoda funkcije koju su ustanovili tokom modelovanja prethodnih realnih problema i sugerisao im je da te zaključke iskoriste i za rešavanje tekućeg problema. Studenti su odmah reagovali tako što su *GeoGebra* opcijom *Derivative* nacrtali izvodnu funkciju od funkcije f i istovremeno posmatrali kako promena znaka nagiba utiče na izvodnu funkciju f' (Slika 4.21.).

Upoređivanjem znaka nagiba tangente t na funkciju f i znaka izvodne funkcije f', studenti eksperimentalne grupe su nakon kraćeg eksperimentisanja sa *GeoGebra* materijalom koji su napravili, zaključili da se pozitivan znak nagiba tangente t pojavljuje kada se vuk kreće na gore, odnosno kada je znak izvodne funkcije f' pozitivan (Slika 4.21. a)), i obratno (negativan nagib – vuk se kreće na dole – znak izvodne funkcije je negativan), (Slika 4.21. b)).



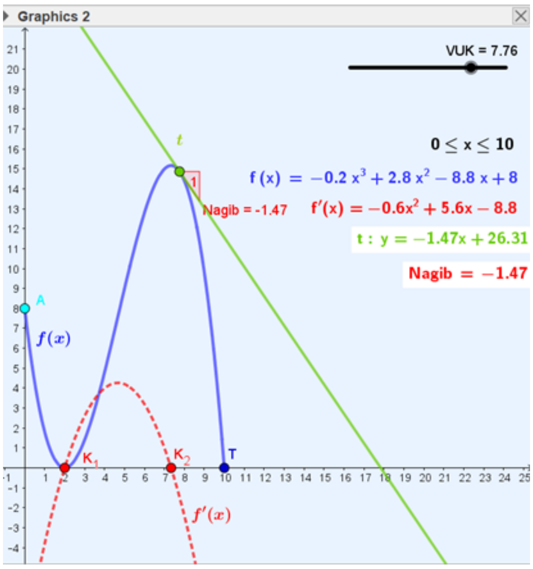
a) b)

Slika 4.21. *Izvodna funkcija f' i znak nagiba tangente t*

Nastavnik je u nastavku tražio od studenata da odrede intervale kada vuk se penje gore, a kada se spušta dole. Studenti su nakon kraće diskusije lako zaključili da će tražene intervale odrediti ako odrede znak izvodne funkcije, odnosno nule izvodne funkcije f'. Algebarski izraz izvodne funkcije f' studenti su pročitali iz *GeoGebra* opcije *Algebra*:

$$f'(x) = -0{,}6x^2 + 5{,}6x - 8{,}8. \quad (12)$$

Iako su izvodnu funkciju (12) i njene nule mogli lako da odrede i algebarskim putem, studenti eksperimentalne grupe su ponovo iskoristili *GeoGebra*-u i opciju *Intersect* koju su sada primenili na izvodnu funkciju f' i osu Ox (Slika 4.22.).

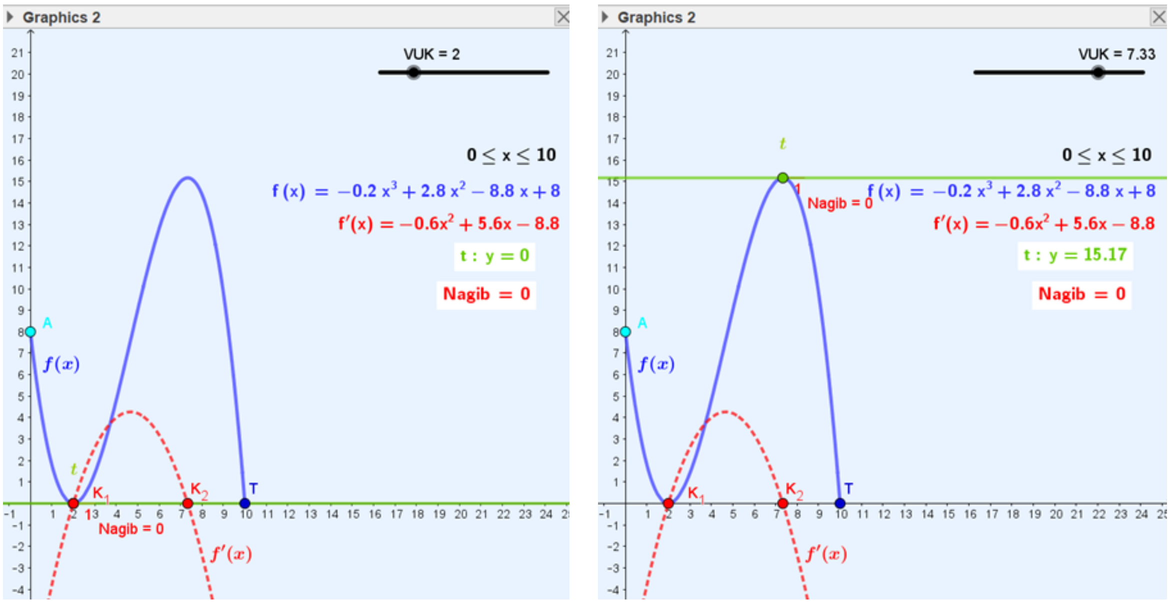


Slika 4.22. *Nule izvodne funkcije f' (presek izvodne funkcije f' i ose Ox)*

Iz *GeoGebra*-e su studenti pročitali koordinate presečnih tačaka izvodne funkcije f' i ose Ox: $K_1(2,0)$ i $K_2(\frac{22}{3},0)$. Posmatrajući tačke K_1 i K_2 i podintervale koje one određuju na intervalu $[0,10]$ i analizirajući pri tome znak izvodne funkcije, studenti su došli do dela matematičkog rešenja realnog problema, odnosno, mogli su da odrede intervale u kojima se vuk kreće na gore/dole.

Nastavnik je tada od studenata tražio da posmatraju (aktivnosti S2 i S3) šta se dešava sa izvodnom funkcijom u tačkama (i njihovoj okolini) K_1 i K_2 (nule prvog izvoda) i šta se dešava sa funkcijom putanje i nagibom njenih tangenti u tačkama (i njihovoj okolini) čije ordinate odgovaraju ordinatama tačaka K_1 i K_2 (tačke $\left(x_{K_1}, f\left(x_{K_1}\right)\right)$ i $\left(x_{K_2}, f\left(x_{K_2}\right)\right)$).

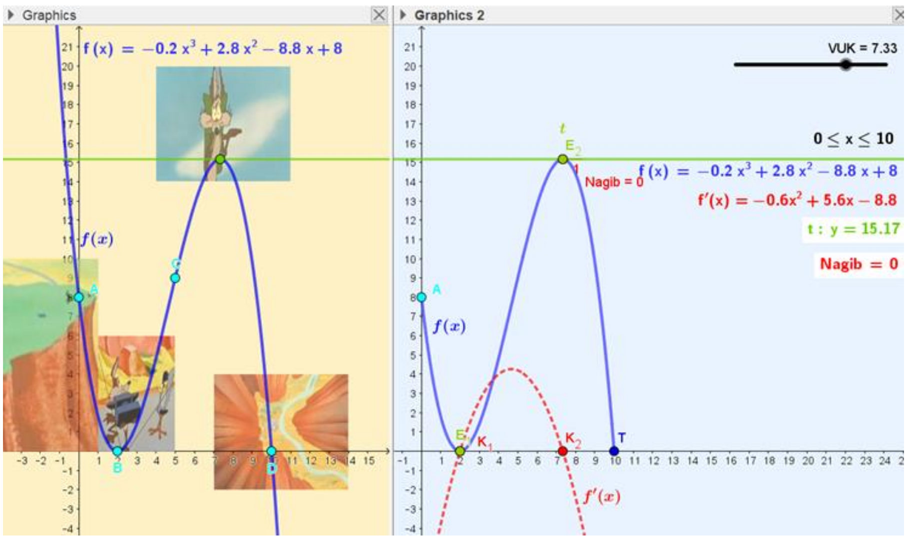
Eksperimentišući sa *GeoGebra* materijalom, studenti su posmatrajući tačku $K_1(2,0)$ već znali da je $f'\left(x_{K_1}\right) = m_{t_1}\left(x_{K_1}\right) = 0$, odnosno $f'(2) = m_{t_1}(2) = 0$ i to su iskoristili da odrede jednačinu tangente t_1 u tački $\left(x_{K_1}, f\left(x_{K_1}\right)\right)$=$\left(2, f(2)\right)$ na funkciju putanje f i dobili izraz $t_1 \colon y = 0$ (Slika 4.23. a)). Analognim postupkom, studenti su došli i do izraza za tangentu t_2 na funkciju putanje f u tački $\left(x_{K_2}, f\left(x_{K_2}\right)\right)$=$\left(\frac{22}{3}, f\left(\frac{22}{3}\right)\right)$ $t_2 \colon y = 15{,}17$ (Slika 4.23. b)).



a) b)

Slika 4.23. *Tangente t_1 i t_2 u tačkama* $(2, f(2))$, $\left(\frac{22}{3}, f\left(\frac{22}{3}\right)\right)$

Dalje, studenti su posmatrali funkciju f i nagib njenih tangenti u okolini tačaka $(2, f(2))$ i $\left(\frac{22}{3}, f\left(\frac{22}{3}\right)\right)$. Uočili su da nagib tangenti funkcije f, u okolinama posmatranih tačaka menja znak (odnosno, da do svake od posmatranih tačaka vuk ide na gore a nakon nje na dole, ili obratno). Zatim su navedene tačke uneli u *GeoGebra* materijal (Slika 4.24) i analizom grafičke reprezentacije funkcije f zaključili da ove tačke odgovaraju njenim ekstremnim vrednostima: minimumu (tačka E_1) i maksimumu (tačka E_2) na posmatranom intervalu $[0, 10]$.



Slika 4.24. *Ekstremne vrednosti funkcije f i nagib tangente u tački E_2*

Povezujući sve zaključke do kojih su došli tokom prethodnog procesa modelovanja vezano za kretanje vuka na gore/dole, znaku izvodne funkcije f' i njenim nulama, kao i tangentama na funkciju f u njenim tačkama, studenti eksperimentalne grupe su došli do matematičkog rešenja situacije iz realnog sveta koju su modelovali.

Važno je napomenuti da su studenti kontrolne grupe imali velikih problema tokom modelovanja ove situacije iz realnog sveta, pre svega jer je grafička reprezentacija funkcije bila složenija u odnosu na onu iz situacije sa životinjama i nagibom bedema. Algebarski izraz funkcije je morao da im napiše nastavnik, a funkciju su analizirali tako što su ispitali njen tok i skicirali grafik. Na kraju, studenti su ipak došli do matematičkog modela i matematičkog rešenja, ali je taj proces vremenski bio jako zahtevan, pomoć i sugestije nastavnika su bile neophodne, a nedostatak mogućnosti za vizuelizaciju i eksperimentisanje sa kretanjem vuka je bio više nego očigledan.

Matematičko rešenje postavljenog realnog problema je predstavljeno tabelom 4.8.

Prateći aktivnosti u okviru prelaza S4, studenti eksperimentalne grupe su najpre krenuli od matematičkog rešenja realnog problema (Tabela 4.8.) i poredili ga sa kretanjem vuka iz *GeoGebra* materijala (Slika 4.24.). Na taj način su došli do interpretacije rešenja.

Tabela 4.8. *Matematičko rešenje realnog problema*

Interval	$[0,2)$	$(2,\frac{22}{3})$	$(\frac{22}{3},10]$
Znak izvodne funkcije f'	-	+	-
Monotonost funkcije	↘	↗	↘
Ekstremne vrednosti	$\boldsymbol{E_1(2,0)}$ ***min***	$\boldsymbol{E_2(\frac{22}{3}, f(\frac{22}{3}))}$ ***max***	

Dobijeno matematičko rešenje (Tabela 4.8.) studenti eksperimentalne grupe su u skladu sa Situacijom iz realnog sveta, interpretirali na sledeći način: vuk će se kretati na dole (padaće) kada je na pozicijama sa vrednostima je x koordinata između 0 i 2 i između $\frac{22}{3}$ i 10. Na gore se kreće kada su vrednosti x koordinata njegovih pozicija između 2 i $\frac{22}{3}$.

Tokom svog kretanja vuk jednom dostigne najveću visinu, kada je na poziciji ($\frac{22}{3}$; 15,17) (kada dostigne maksimalnu visinu u vazduhu).

Vuk je najniže na poziciji $(2,0)$ (kada dotakne put nakon što se žica istegli pod njegovom težinom sa nakovnjem).

Za potvrdu matematičkog modela i matematičkog rešenja studenti su iskoristili *GeoGebra*-u i njene opcije (aktivnost S5). Opcija *Polynomial* je iskorišćena za potvrdu matematičkog modela (podrazumeva da se tačke na koje se ta opcija primenjuje pripadaju funkciji), opcija *Intersection* za nalaženje nula izvodne funkcije (ispitivanje monotonosti) i opcija *Extremum* koja je potvrdila da su tačke $E_1(2,0)$ i $E_2(\frac{22}{3}, f(\frac{22}{3}))$ ekstremi funkcije f.

Studenti kontrolne grupe su takođe potvrdili svoj matematički model i matematičko rešenje, ali su to uradili ručno, tokom čega su isključivo koristili algebarsku reprezentaciju.

Matematički model i matematičko rešenje prihvaćeni nakon što su prethodno potvrđeni u *GeoGebra*-i.

4.4.2. Primena izvoda na ispitivanje monotonosti funkcije i ekstremnih vrednosti II

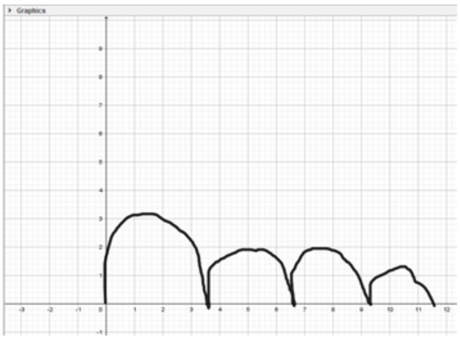
Interpretirajući rešenja do kojih su studenti došli, nastavnik je postavio pitanje studentima šta bi se desilo da se vuku desi nešto drugo, odnosno da se kreće na drugačiji način, kako bi to uticalo na matematičko rešenje?

Studentima je tada nastavnik prikazao još jednu situaciju iz realnog sveta, opet u obliku dela crtanog filma (deo od 1 min 55 s do 2 min 11 s) sa istim junakom (Wile E. Coyote and The Road Runner – *Rushing Roulette*, 1965). Crtani film su studenti pogledali na *YouTube*–u (https://www.youtube.com/watch?v=jo24NR7e4ew).

U drugom primeru crtanog filma kretanje lika je neznatno promenjeno. Umesto da se spušta po žici koja se isteže i leti kroz vazduh, vuk sada skače na oprugama (Slika 4.25.).

Slika 4.25. *Nova situacija iz realnog sveta*

Nastavnik je najpre pitao studente da li misle da se kretanje vuka u prikazanom crtanom filmu razlikuje od prethodnog koje su modelovali. Komentar jednog od studenata je bio da kretanje vuka sada podseća na „odskakanje lopte“, i primenom opcije *Pen* je u *GeoGebra*-i odmah i pokazao kako zamišlja kretanje vuka (Slika 4.26.).



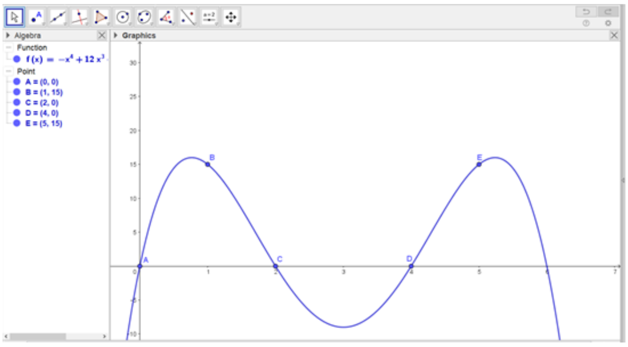
Slika 4.26. *GeoGebra reprezentacija kretanja vuka studenta eksperimentalne grupe*

Studenti su se složili sa prikazanim kretanjem vuka i komentarisali da je slično prethodnoj situaciji iz realnog sveta, jer se i ovde mogu izdvojiti delovi kada se vuk kreće na gore/dole i kada postiže najveću/najmanju visinu. Takođe, studenti su komentarisali da bi realni problem rešili na isti način kao i prethodni.

Tabela 4.9. *Realni problem – monotonost i ekstremne vrednosti II*

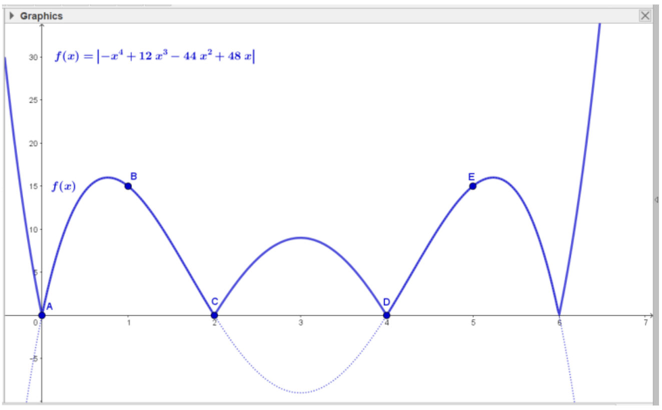
Realni problem*: *Modelovati kretanje lika iz crtanog filma, odnosno matematički reprezentovati i opisati njegovo kretanje.

Analogno kao i u slučaju prethodne situacije iz realnog sveta, nastavnik je studentima dao dodatne informacije o kretanju vuka iz kojih se (kao i u prethodnom slučaju) moglo izdvojiti pet tačaka: $A(0,0)$, $B(1,15)$, $C(2,0)$, $D(4,0)$ i $E(5,15)$ i interval $[0,6]$ na kome se posmatra kretanje vuka. Primenjujući *GeoGebra*-u, studenti su došli do sledeće funkcije (Slika 4.27.).



Slika 4.27. *Grafička reprezentacija funkcije kojoj pripadaju tačke* $A(0,0)$, $B(1,15)$, $C(2,0)$, $D(4,0)$ i $E(5,15)$

Međutim, studenti su odmah primetili da dobijena funkcija (iako joj pripadaju tačke A, B, C, D i E), ne odgovara ni po svom obliku, a ni po znaku funkciji koju su studenti zamislil. Ovo je zbunilo studente i nastavnik se u tom trenutku morao uključiti u diskusiju studenata i predložio im da grafički predstave u *GeoGebra*-i apsolutnu vrednost funkcije do koje su prethodno došli. Studenti su to i učinili i odmah uočili da nova funkcija zadovoljava sve postavljene uslove koji se tiču njenog oblika i tačaka koje joj pripadaju (Slika 4.28).

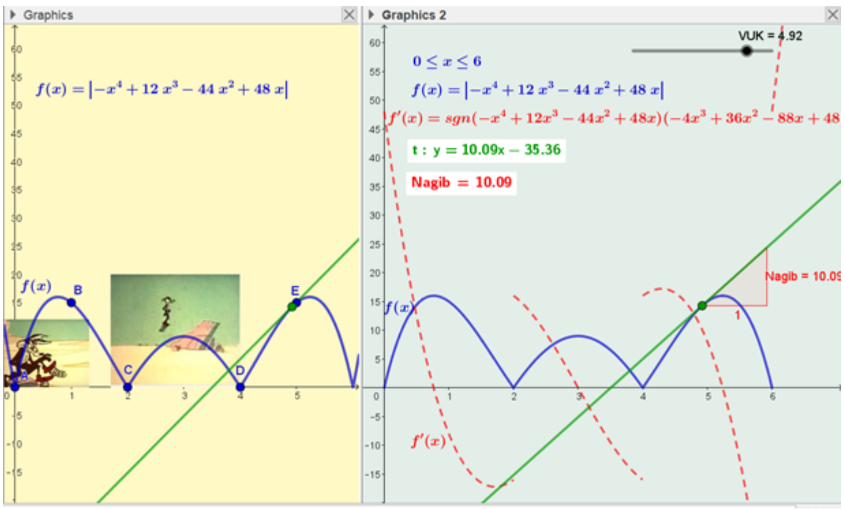


Slika 4.28. *Grafička reprezentacija funkcije f*

Matematički model funkcije f je dat u vidu grafičke reprezentacije funkcije f (Slika 4.28.) i njene algebarske reprezentacije:

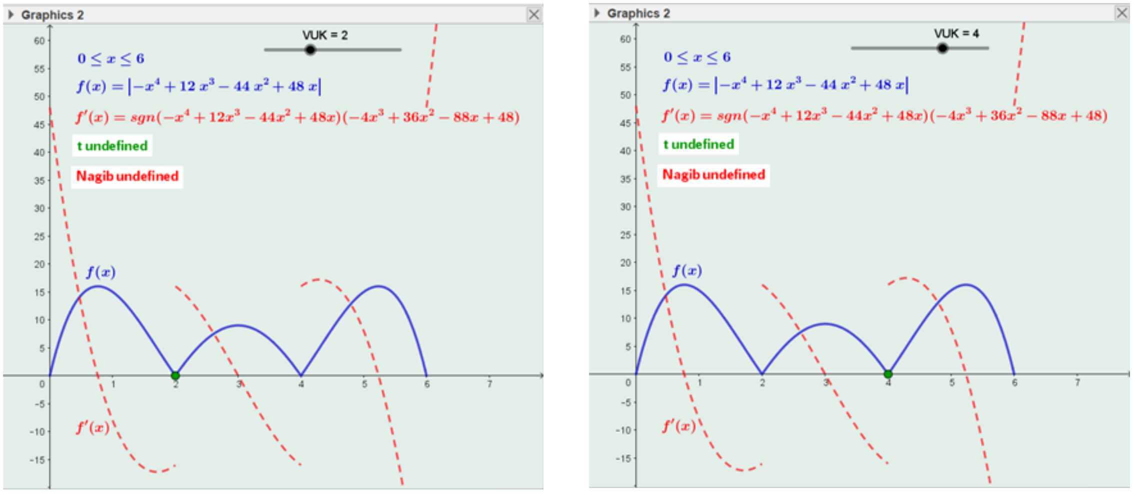
$$f(x) = |-x^4 + 12x^3 - 44x^2 + 48x| \tag{13}$$

U okviru prelaza ka matematičkom rešenju S3, studenti eksperimentalne grupe su sproveli iste aktivnosti kao pri rešavanju prethodnog realnog problema. Studenti su opet napravili *GeoGebra* materijal čiji su elementi bili: grafik funkcije f (ograničen na interval $[0, 6]$), klizač koji simulira kretanje vuka i pri tome služi za određivanje tangenti na funkciju f (i njihov nagib) u svakoj njenoj tački na posmatranom intervalu i izvodnu funkciju f' (Slika 4.29.).



Slika 4.29. *Funkcija f, izvodna funkcija f', tangenta i nagib u tačkama funkcije f*

Studenti su odmah uočili da se izvodna funkcija razlikuje, odnosno da je prekidna u tačkama $(2,0)$ i $(4,0)$. Pomerajući klizač do tih tačaka, došli su do rezultata da tangente i njihovi nagibi u tim tačkama nisu definisani (Slika 4.30. a) i b)).



a) b)

Slika 4.30. *Tangente na funkciju putanje f i njihovi nagibi u tačkama* $(2,0)$ *i* $(4,0)$

Studentima je to bilo neobično, jer su očekivali da funkcija f u tim tačkama ima minimume (na osnovu grafičke reprezentacije), odnosno da je vrednost izvodne funkcije u tim tačkama jednaka nuli.

Studenti su tada pokušali da sami dođu do izvoda funkcije f, i do nula izvodne funkcije f':

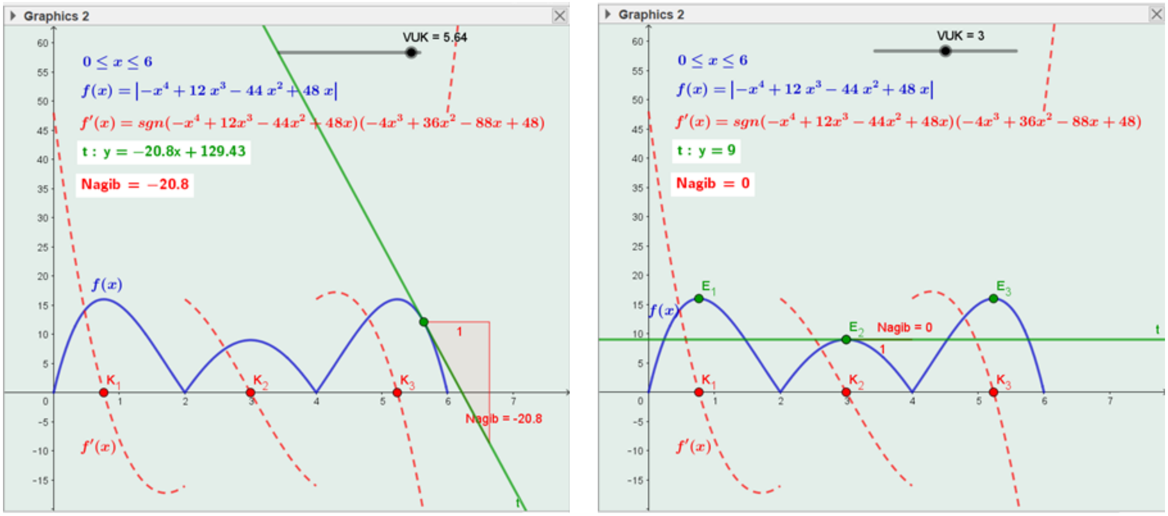
$$f'(x) = sgn(-x^4 + 12x^3 - 44x^2 + 48x)(-4x^3 + 36x^2 - 88x + 48) \tag{14}$$

odnosno:

$$f'(x) = \frac{(-x^4 + 12x^3 - 44x^2 + 48x)(-4x^3 + 36x^2 - 88x + 48)}{|-x^4 + 12x^3 - 44x^2 + 48x|}, \tag{15}$$

$$f'(x) = 0 \ \text{ za } \ K_1(3-\sqrt{5},0),\, K_2(3,0) \text{ i } \ K_3\big(3+\sqrt{5},0\big).$$

Kada su studenti analizirali izvod funkcije f predstavljen (15), uz pomoć nastavnika su razumeli zbog čega nagibi tangenti i same tangente nisu definisani u tačkama $(2,0)$ i $(4,0)$. Svoje zaključke su potvrdili i u *GeoGebra*-i (nule izvodne funkcije (Slika 4.31. a)) i ekstremne vrednosti (Slika 4.31. b)).



a) b)

Slika 4.31. *Nule izvodne funkcije f' i ekstremne vrednosti*

Iako su studenti došli do matematičkog rešenja, ostalo im je nerazjašnjeno šta se dešava sa funkcijom f, odnosno sa kretanjem vuka, u tačkama $(2,0)$ i $(4,0)$. U tu svrhu, nastavnik je tražio od studenata da nađu levu i desnu graničnu vrednost izvodne funkcije redom za $x = 2$ i $x = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2_-} f'(x) = -16 \\ \lim\limits_{x\to 2_+} f'(x) = 16 \end{array}\right\} \text{funkcija } f \text{ nije diferencijabilna u tački } x = 2 \tag{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4_-} f'(x) = -16 \\ \lim\limits_{x\to 4_+} f'(x) = 16 \end{array}\right\} \text{funkcija } f \text{ nije diferencijabilna u tački } x = 4 \tag{17}$$

Nastavnik je zaključke studenata iskoristio da objasni uslove za egzistenciju lokalnih ekstremnih vrednosti. Na osnovu objašnjenja, studenti su došli do konačnog matematičkog rešenja realnog problema (Tabela 4.10.).

Tabela 4.10. *Matematičko rešenje realnog problema*

Interval	$[0, 3-\sqrt{5})$	$(3-\sqrt{5}, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, 3+\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5}, 6]$
Znak izvodne funkcije f'	+	-	+	-	+	-
Monotonost funkcije	↗	↘	↗	↘	↗	↘
Ekstremne vrednosti	$E_1(3-\sqrt{5}, 16)$ ***max***	$E_4(2, 0)$ ***min***	$E_2(3, 9)$ ***max***	$E_5(4, 0)$ ***min***	$E_3(3+\sqrt{5}, 16)$ ***max***	

Važno je napomenuti da je za studente ova tema vrlo zahtevna kada se nastava realizuje na tradicionalni način, dok se uz primenu matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju nastavni proces realizuje uz manje poteškoća i uz aktivno učešće studenata.

Iz matematičkog rešenja (Tabela 4.10.), (aktivnost S4), studenti eksperimentalne grupe su zaključili da vuk tokom svakog svog skoka se kreće na gore dok ne postigne najveću visinu, a onda pada dole na tlo. U prvom skoku dostiže najveću visinu od 16 m, nakon čega je vuk na tlu, tj. a visini od 0 m. U drugom skoku najveća dostignuta visina je 9 m. A u trećem skoku je 16 m. Svoje kretanje (i treći skok) vuk završava kada je opet na tlu.

Studenti su, kao i u prethodnom slučaju (aktivnost S5), iskoristili opcije *GeoGebra*-e, da potvrde zaključke do kojih su došli i prihvate matematički model i matematičko rešenje.

4.4.3. Primena izvoda na ispitivanje konveksnosti i konkavnosti funkcije

U ovom odeljku će biti prikazan proces modelovanja koji se isključivo sprovodi primenom računara i koji bez novog pristupa ilustrovanim zvezdastim dijagramom (Slika 4.2.) ne bi mogao da se sprovede na tradicionalni način Stillman *et al.* (2007) ciklusom modelovanja.

Situacija iz realnog sveta koju su studenti modelovali je zadata u vidu *GeoGebra* materijala i modelovali su je samo studenti eksperimentalne grupe. Sve aktivnosti koje su studenti realizovali tokom ovog procesa modelovanja su bile isključivo S-tipa. Studenti kontrolne grupe, s obzirom da nisu mogli da koriste računare, su ponovo diskutovali prvu situaciju sa kretanjem vuka koju su modelovali iz odeljka 4.4.1., ali sada sa aspekta ispitivanja konveksnosti i konkavnosti.

Situacija iz realnog sveta

Situacija iz realnog sveta je zadata mapom jednog skijališta koja je uvezena u *GeoGebra*-u (Slika 4.32.).

Slika 4.32. *Situacija iz realnog sveta – mapa skijališta*

Nastavnik je studentima objasnio da su na mapi prikazane staze na skijalištu i ski liftovi koji vode do njih.

Takođe, nastavnik je objasnio studentima da je oblik ski staze od velike važnosti za skijaše, jer u zavisnosti da li na stazi ima udubljenja (ili ispupčenja) je i način na koji se voze skije. Posmatrajući mapu i na osnovu nastavnikove priče, studenti su pretpostavljali da će trebati da reše neki problem koji se tiče staza, odnosno putanja kojim se kreću skijaši.

Realni problem

Nastavnik je tada postavio realni problem:

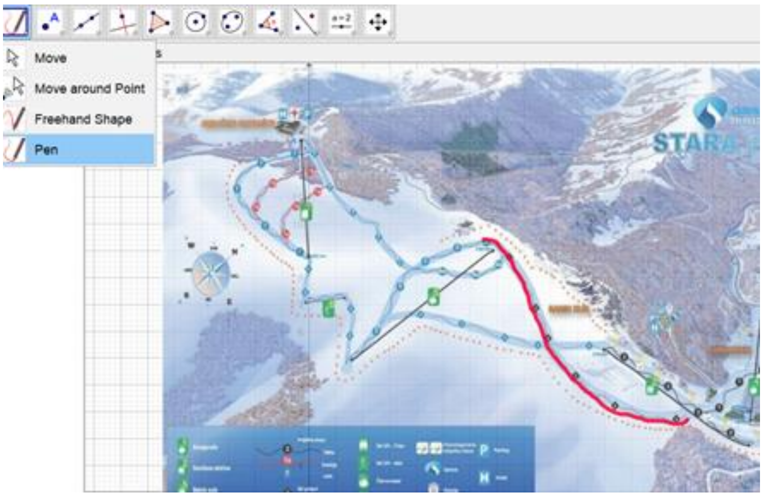
Tabela 4.11. *Realni problem - konveksnost i konkavnost funkcije*

Realni problem*: *Modelovati kretanje skijaša ako se on spušta stazom do koje je došao ski liftom broj 5, odnosno matematički reprezentovati i opisati njegovo kretanje.

Na osnovu iskustva iz modelovanja prethodnih situacija sa vukom, studenti su odmah pretpostavili da moraju naći funkciju koja odgovara putanji skijaša koji se spušta niz stazu 5 da bi kasnije na osnovu toga mogli matematički da opišu njegovo kretanje.

Nastavnik je tada pitao studente da li je moguće naći funkciju koja u potpunosti odgovara ski stazi. Većina studenata je smatrala da se teško može odrediti funkcija koja u potpunosti odgovara stazi, i konstatovali su da bi mogli da nađu najpribližniju funkciju koja u najvećoj meri odgovara stazi.

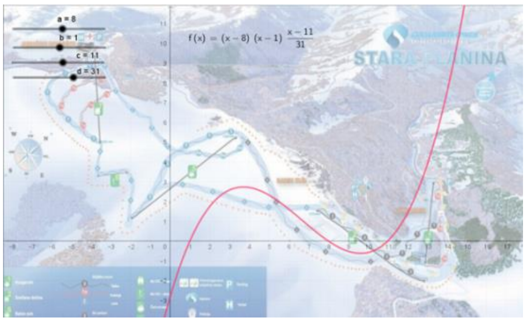
Studentima je u ovom slučaju bila poznata samo slika (mapa) i nikakvih dodatnih podataka nisu imali. Studentima je problem opet predstavljalo to što nisu bile date tačke koje pripadaju funkciji, jer nisu znali odakle da krenu i koju opciju *GeoGebra*-e da primene. Neki studenti su pokušalli da primene *GeoGebra* opciju *Pen* i da slobodnom rukom nacrtaju putanju (Slika 4.33.) ali su vrlo brzo uvideli da tako ne mogu doći do algebarske reprezentacije funkcije koja odgovara putanji koja im je bila neophodna za dalji proces modelovanja.



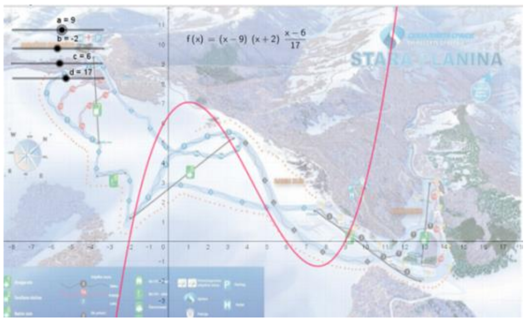
Slika 4.33. *Crtanje funkcije putanje GeoGebra opcijom Pen*

Nastavnik je tada, da bi malo usmerio studente, predložio da funkcija bude u obliku polinoma, najbolje trećeg stepena, da bi što jednostavnije studenti mogli da je odrede. Da bi došli do funkcije, nastavnik je studentima predložio da uvedu klizače koji bi predstavljali nule funkcije i čijim pomeranjem bi mogli da menjaju oblik funkcije dok ne dođu do one koja u najvećoj meri odgovara putanji skijaša.

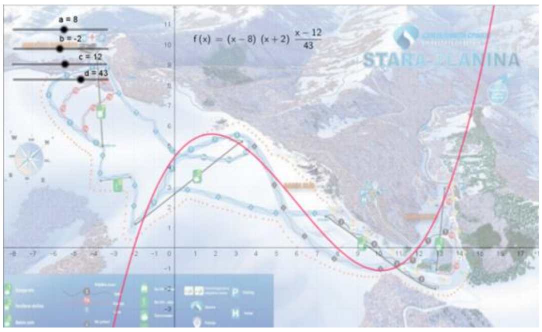
Studenti su uveli četiri klizača, tri (nazvana a, b i c) za podešavanje nula funkcije i jedan klizač (nazvan d) za podešavanje koeficijenata polinoma. Funkciju f su u *GeoGebra*-i definisali kao: $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)/d$. Promenon vrednosti sva četiri klizača, studenti su podešavali funkciju tako da njen grafik najviše odgovara putanji skijaša. Nakon kraćeg eksperimentisanja sa klizačima (Slika 4.34. a) i b)) studenti su došli do funkcije koja, po njihovom mišljenju, najpribližnije opisuje putanju skijaša (Slika 4.34. c)).



a)



b)

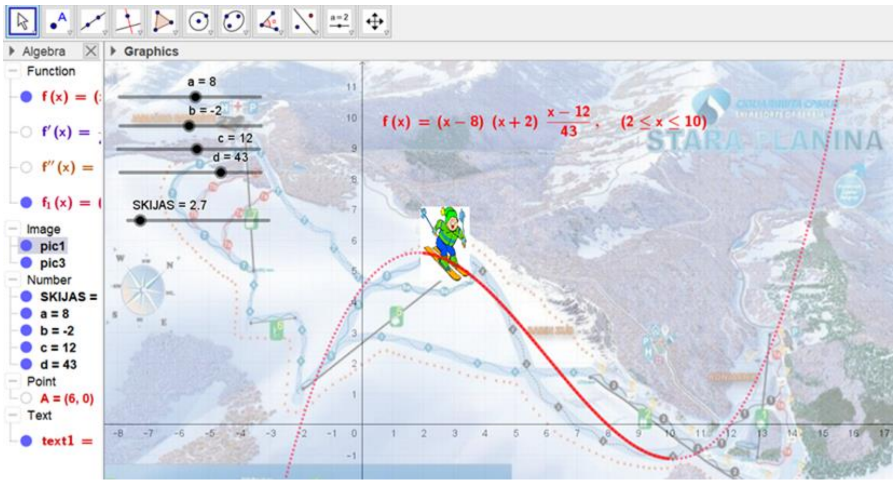


c)

Slika 4.34. *Podešavanje funkcije putanje skijaša*

Matematički model

Za matematički model putanje koja odgovara kretanju skijaša studenti su usvojili algebarsku i grafičku reprezentaciju funkcije f do kojih su došli primenom *GeoGebra*-e (Slika 4.35.) Funkciju f su ograničili na interval $[2, 10]$ da bi se uklopili u Situaciju iz realnog sveta gde skijaš kreće sa uzvišenja na koje ga dovodi žičara broj 5 i spušta se do podnožja.



Slika 4.35. *Algebarska i grafička reprezentacija funkcije koja odgovara putanji skijaša*

Algebarska reprezentacija funkcije koja odgovara putanji skijaša:

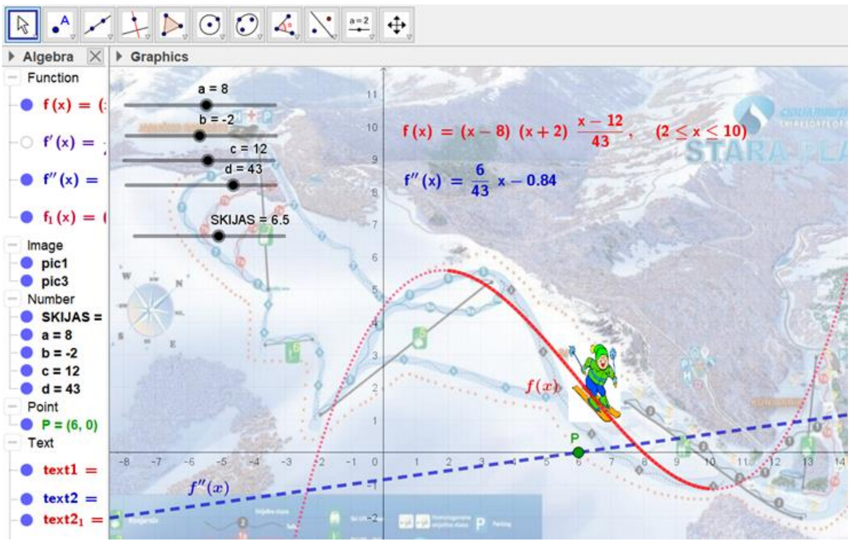
$$f(x) = \frac{(x+2)(x-8)(x-12)}{43}, \quad 2 \leq x \leq 10. \tag{18}$$

Nakon što su došli do Matematičkog modela, studenti su se vratili do Realnog problema i započeli diskusiju o tome kako da matematički opišu kretanje skijaša. Jedan student se setio napomene nastavnika sa početka procesa modelovanja u vezi oblika staze (udubljena, ispupčena) kojom skijaš skija. U nastavku diskusije, studenti su zajednički došli do zaključka da bi trebali da ispitaju konveksnost i konkavnost funkcije koja odgovara putanji skijaša.

U tu svrhu su opet iskoristili *GeoGebra*-u i u materijal sa slike 4.35. docrtali drugi izvod funkcije koja odgovara putanji skijaša f'' (Slika 4.36.). Iz *Algebra* prozora su pročitali drugi izvod funkcije f:

$$f'' = \frac{6}{43}x - 0{,}84.$$

S obzirom da su studenti već imali iskustva sa rešavanjem sličnih problema (opisanih u odeljku 4.4.1. i odeljku 4.4.2.) pomerali su figuru skijaša po njegovoj putanji (koristeći klizač SKIJAS) i istovremeno posmatrali šta se dešava sa drugim izvodom funkcije (Slika 4.36.).



Slika 4.36. *Funkcija f koja odgovara putanji skijaša i njen drugi izvod f''*

Studenti su svoja zapažanja uporedili i sa nulom drugog izvoda funkcije koja odgovara putanji skijaša, tački $P(6, 0)$ i posmatrali su i zavisnost oblika putanje od znaka drugog izvoda f''.

Objedinjujući sve svoje zaključke iz procesa modelovanja, studenti su došli do matematičkog rešenja postavljenog problema.

Matematičko rešenje

Matematičko rešenje realnog problema je prikazano u tabeli 4.12.

Tabela 4.12. *Matematičko rešenje realnog problema*

Interval	$[\mathbf{2},\mathbf{6})$	$(\mathbf{6},\mathbf{10}]$
Znak drugog izvoda f''	**+**	**-**
Konveksnost i konkavnost	$\cup$	$\cap$
Prevojna tačka	$P(6,f(6))$	

Matematičko rešenje su studenti interpretirali u skladu sa postavljenom Situacijom iz realnog sveta. Ako koordinate početne pozicije skijaša odgovaraju tački $(2,f(2))$, on će od te pozicije svoje kretanje trebati da prilagodi stazi koja je ispupčena (konkavna). Kada stiigne do pozicije čije su koordinate $(6,f(6))$, oblik staze po kojoj vozi skije se menja i ona postaje udubljena (konveksna) i takva ostaje do završetka spusta, odnosno dok skijaš ne stigne u podnožje (pozicija čije su koordinate $(10,f(10))$).

Važno je naglasiti da su studenti tokom modelovanja prethodno opisane Situacije iz realnog sveta koristili isključivo prelaze S-tipa i da bez računara ovakav problem ne bi mogao ni da se zadaje, niti da se rešava. Takođe, prikazana mogućnost zadavanja problema preko video/slikovnih opisa realnih situacija se može smatrati za još jednu od prednosti matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju.

4.5. METODOLOŠKI OKVIR ISTRAŽIVANJA

Metodološki okvir drugog ciklusa istraživanja iz 2016/2017. godine je opisan u ovom poglavlju i navedeni su svi relevantni metodološki elementi istraživanja.

4.5.1. Predmet, ciljevi, zadaci i hipoteze istraživanja

Predmet istraživanja je unapređenje metodskih pristupa baziranih na matematičkom modelovanju kroz pružanje mogućnosti za njihovu realizaciju i sprovođenje nastavnih aktivnosti u računarskom okruženju, kao i proučavanje efekata primene takvih pristupa na postignuća studenata u oblasti diferencijalnog računa.

Glavni cilj istraživanja je merenje i utvrđivanje stepena uticaja primene metodskog pristupa baziranog na principima matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju na kvalitet znanja studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

Zadaci istraživanja koji proističu iz predmeta i postavljenog glavnog cilja istraživanja su:

- Proceniti nivo matematičkog znanja koje studenti nose iz srednje škole i na osnovu toga formirati dve ujednačene grupe studenata, eksperimentalnu i kontrolnu.
- Demonsrirati rad sa *GeoGebra* softverom i sprovesti kratku obuku studenata za instalaciju i primenu *GeoGebra*-e.
- Izraditi i osmisliti zadatke, odnosno situacije iz realnog sveta koje će omogućiti studentima da izučavaju izvod funkcije i njegove osobine primenom matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju.
- Realizovati nastavni proces sa studentima eksperimentalne grupe primenom matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju a sa studentima kontrolne grupe primenom tradicionalnih metodskih pristupa.
- Izraditi instrumente (testove znanja o izvodu funkcije, njegovim osobinama i primeni usklađenih sa odgovarajućim nastavnim planom i programom), koji će se upotrebiti za merenje uticaja primene matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju na kvalitet znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije.
- Utvrditi efekte primene metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju u *GeoGebra* okruženju na kvalitet znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene i uporediti postignuća studenata eksperimentalne i kontrolne grupe.

Glavna hipoteza istraživanja je postavljena na osnovu cilja istraživanja i glasi:

H_I: Primenom metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju u *GeoGebra* okruženju pri obradi izvoda funkcije i njegove primene postiže se statistički značajna razlika u boljim postignućima na testovima znanja studenata eksperimentalne grupe u odnosu na studente kontrolne grupe.

Postavljena hipoteza istraživanja je analizirana u različitim etapama istraživanja i testirana na testovima znanja. Takođe, testirane su i pomoćne hipoteze:

H_{P1}: Postoji statistički značajna razlika u boljim postignućima studenata eksperimentalne grupe u odnosu na studente kontrolne grupe na testu znanja.

H_{P2}: Postoji statistički značajna razlika u boljim postignućima studenata eksperimentalne grupe u odnosu na studente kontrolne grupe na finalnom testu znanja (ispit).

4.5.2. Uzorak

Istraživanje je sprovedeno na namernom uzorku studenata prve godine Visoke tehničke škole strukovnih studija u Zrenjaninu školske 2016/2017. godine.

Učesnici istraživanja su bili studenti prve godine koji su slušali predmet *Matematika* u okviru jednosemestralnog kursa (akreditacija iz 2016. godine), sa fondom (3+3) za predavanja i vežbe. U okviru kursa iz *Matematike* se obrađuju sadržaji iz diferencijalnog računa, odnosno izvoda funkcije i njegove primene na ispitivanje osobina funkcije.

U drugom ciklusu istraživanja je ukupno učestvovalo 204 studenta koji su za potrebe istraživanja podeljeni u dve grupe, kontrolnu (K grupu) i eksperimentalnu (E grupu). Studenti su u grupe podeljeni na osnovu rezultata dela prijemnog ispita koji polažu pri upisu na Visoku tehničku školu strukovnih studija u Zrenjaninu, a koji se odnosi na ispitivanje nivoa opšteg matematičkog znanja koje nose iz srednje škole. U obe grupe je bilo po 102 studenta koji su izabrani na sledeći način: svaki student iz jedne grupe je imao svog para u drugoj, tako je razlika u njihovim postignućima bila najviše dva boda (Takaci $et\ al.$, 2015).

Normalnost raspodele rezultata dela prijemnog ispita (zadaci iz matematike) je ispitana Kolmogorov-Smirnov testom za E grupu (vrednost test statistike $D = 0{,}1171$ i nivoa statističke značajnosti $p = 0{,}1133 > 0{,}05$) i za K grupu ($D = 0{,}1289$ i $p = 0{,}0617 > 0{,}05$). S obzirom da su a obe grupe raspodele normalne, primenjen je parametrijski Studentov t-test za ispitivanje statističke značajnosti razlike u rezultatima E i K grupe (Tabela 4.13.).

Tabela 4.13. *Statistički rezultati dela prijemnog ispita*

	N	***M***	***M(%)***	***SD***	***CV***	$\boldsymbol{M_E}$**-**$\boldsymbol{M_K}$***(%)***	***Studentov t- test***	
							t	***p***
E	102	13,99	46,63%	7,31	52,25%	0,71%	0,212	0,833
K	102	13,78	45,92%	7,24	52,54%			

Legenda: N-broj studenata; M-srednja vrednost broja bodova; M(%)-srednja vrednost broja bodova izražena u procentima; SD-standardna devijacija; CV-koeficijent varijacije; M_E-M_K(%) razlika srednjih vrednosti broja bodova E i K grupe izražena u procentima; t-vrednost statistike; p-nivo statističke značajnosti

Vrednosti test statistike ($t = 0,212$) i nivoa statističke značajnosti ($p = 0{,}833 > 0{,}05$) su potvrdile da ne postoji statistički značajna razlika u rezultatima E i K grupe, odnosno grupe se mogu smatrati ujednačenim.

Svi studenti su dobrovoljno učestvovali u istraživanju, a takođe je obezbeđena i saglasnost Visoke tehničke škole strukovnih studija iz Zrenjanina za sprovođenje istraživanja.

4.5.3. Metode, tehnike i instrumenti istraživanja

U drugom ciklusu istraživanja su korišćene metoda komparativne analize, deskriptivna metoda, eksperimentalna i statistička metoda, kao i odgovarajuće tehnike istraživanja kao što je prethodno detaljno objašnjeno u odeljku 3.4.3. disertacije.

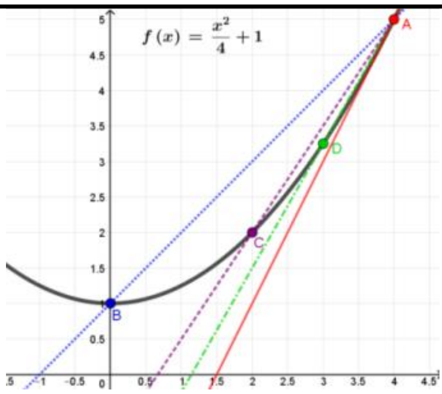
Instrumente istraživanja su činili dva testa koje je osmislio autor disertacije.

Prvi instrument je bio test dijagnostičkog tipa, čija je namena bila da ispita znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

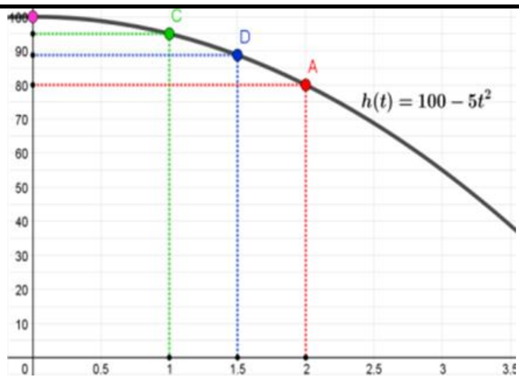
Test se sastojao od ukupno šest zadataka, tačno rešenje svakog zadatka se vrednovalo sa 5 bodova, ukupan broj bodova koje su studenti mogli da osvoje na testu je bio 30. Pored svakog dela zadatka je naveden broj bodova koje nosi tačno rešenje. Negativnih poena nije bilo.

Studenti su imali 90 minuta (dva školska časa) za izradu testa. Svi studenti (E grupa i K grupa) su rešavali isti test, dve nedelje nakon završetka eksperimentalnog dela nastave. Test je sadržao sledeće zadatke (Tabela 4.14.):

Tabela 4.14. *Test*



Slika 1.



Slika 2.

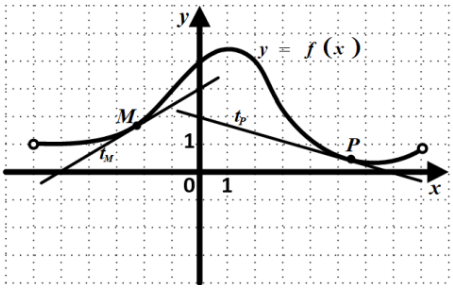
1. Data je funkcija $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ i njen grafik (Slika 1.).
   a) Odredi vrednost razlomaka:
   $$\frac{f(4)-f(0)}{4}, \frac{f(4)-f(2)}{2}, \frac{f(4)-f(3)}{1}, \frac{f(4)-f(3{,}5)}{0{,}5}.$$ (2 boda)
   b) Odredi nagibe sečica grafika funkcije f u tačkama:
   1. $A(4{,}5), B(0{,}1)$
   2. $A(4{,}5),\ C(2,2)$
   3. $A(4{,}5),\ D(3, 13/4)$ (3 boda)

2. Na slici 1. je data funkcija $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$:
   a) Odrediti prvi izvod funkcije $f'(4)$. (1 bod)
   b) Odrediti jednačinu tangente u tački $A(4{,}5)$. (2 boda)
   c) Objasniti vezu između nagiba sečica određenih u 1. b) i nagiba tangente u tački $A(4{,}5)$. (2 boda)

3. Lopta je bačena sa visine od 100 metara i njena visina je jednaka $h(t) = 100 - 5t^2$, t sekundi nakon što je bačena (Slika 2.).

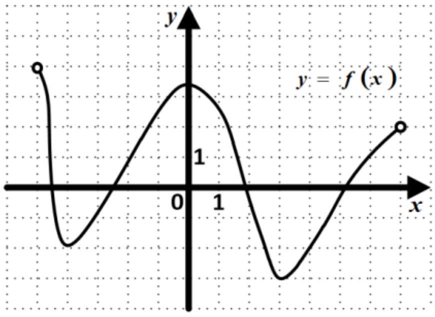
a) Odrediti prosečnu brzinu dve sekunde nakon što je lopta bačena. (1 bod)
b) Odrediti prosečnu brzinu između $t = 1$ i $t = 2$ sekunde. (1 bod)
c) Odrediti prosečnu brzinu između $t = 1{,}5$ i $t = 2$ sekunde. (1 bod)
d) Odrediti trenutnu brzinu lopte u trenutku $t = 2$ sekunde. (1 bod)
e) Objasniti vezu između prosečnih brzina (određenih u a), b), i c)) i trenutne brzine u $t = 2$. (1 bod)

4. Funkcija f je data na intervalu $(-6,8)$ (Slika 3.) i date su tangentne linije na funkciju f iz tačaka $M(x_1, f(x_1))$ i $P(x_2, f(x_2))$. Tada:
   Nagib tangente u tački M je __________ (1 bod)
   $f'(x_1) =$ ____________________________ (1 bod)
   $f'(x_2) =$ ____________________________ (2 boda)
   $-5f'(x_1) + 2f(0) - 7f'(x_2) =$ ______ (1 bod)



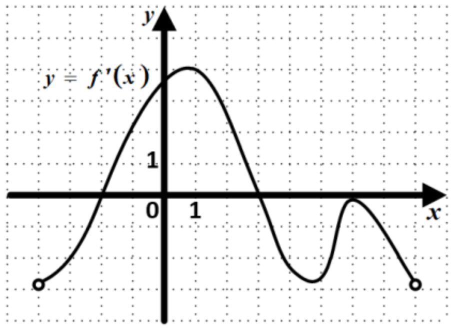
Slika 3.

5. Funkcija f je data na intervalu $(-5,7)$, (Slika 4.). Tada:
   $f' > 0$ for $x \in$ ________________________ (2 boda)
   $f' < 0$ for $x \in$ ________________________ (2 boda)
   $f' = 0$ for $x =$ ________________________ (1 bod)



Slika 4.

6. Prvi izvod $f'(x)$, funkcije f, je dat na intervalu $(-4,8)$, (Slika 5.). Tada:
   f raste za $x \in$ __________________________ (1 bod)
   f opada za $x \in$ _________________________ (2 boda)
   f ima lokalni maksimum za $x =$ ______ (1 bod)
   f ima lokalni minimum za $x =$ _______ (1 bod)



Slika 5.

Zadaci za test su koncipirani tako da se na osnovu njih može ispitati uticaj procesa modelovanja u *GeoGebra* okruženju (odnosno doprinos S aktivnosti) na znanja studenata i njihovo razumevanje nagiba, geometrijske interpretacije i primene izvoda. Naročita pažnja je bila usmerena ka ispitivanju uticaja grafičke i algebarske reprezentacije (kada su date istovremeno) funkcije i njenih sečica, tangenti i izvodne funkcije na postignuća studenata. Tokom rešavanja testa ni jednoj grupi studenata nije bilo dozvoljeno da koristi pomoć računara.

Prva dva zadatka su se odnosila na jednostavne primene izvoda koje se tiču određivanja količnika priraštaja, nagiba tangente i sečica i određivanja vrednosti prvog izvoda funkcije u tački.

U trećem zadatku je ispitivano znanje studenata vezano za primenu izvoda.

U poslednja tri zadatka su funkcije (ili izvodne funkcije) bile zadate samo grafički, bez algebarske reprezentacije. Ovi zadaci su zamišljeni tako, da se njima ispita doprinos primene modelovanja u *GeoGebra* okruženju, jer su studenti E grupe koristili tokom modelovanja obe reprezentacije (algebarsku i grafičku) istovremeno, dok su studenti K grupe uglavnom radili sa algebraskom reprezentacijom.

Drugi instrument je bio finalni ispit iz predmeta Matematika. Ovaj test je bio dijagnostičkog tipa, ispitivao je znanja studenata stečena iz predmeta Matematika. Studenti su ispit polagali prvi put u januarskom ispitnom roku nakon odslušane nastave (dva meseca posle završetka eksperimentalnog dela nastave).

Ispit se sastojao od šest zadataka, ali su obrađivani samo zadaci koji su se odnosili na izvod funkcije i njegove primene koji su se vrednovali sa 30 bodova. Za izradu zadataka je predviđeno 180 $minuta$. Svi studenti (E grupa i K grupa) su rešavali isti test. Zadaci koji su se odnosili na izvod funkcije i njegovu primenu su (Tabela 4.15.):

Tabela 4.15. *Zadaci sa ispita*

1. Neka je funkcija f zadata sa $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}, x \neq \pm 2$.
   a) Odrediti jednačine tangenti i normala na funkciju f u njenoj tački $A(1, f(1))$. (2 boda)
   b) Ispitati tok funkcije f (nule, asimptote, monotonost, ekstremne vrednosti, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost) i skicirati njen grafik. (8 bodova)

2. Odrediti matematičke modele i matematička rešenja sledećih situacija iz realnog sveta:
   a) Merdevine duge 13 metara su naslonjene na zid. Vrh merdevina klizi po zidu na dole brzinom od 2 m/s. Kojom brzinom (u m/s) se baza merdevina udaljava od zida u trenutku kada je vrh merdevina na visini od 5 m? (10 bodova)
   b) Balon se podiže u vazduh pravolinijski. Na udaljenosti od 500 m pravolinijski od mesta odakle je balon poleteo stoji posmatrač. Ugao pod kojim posmatrač vidi balon je $\frac{\pi}{4}$. Kada se balon podiže u vazduh, brzina promene ugla pod kojim posmatrač vidi balon je 0,2 rad/min. Kojom brzinom (u m/min) se balon podiže u vazduh? (10 bodova)

U prvom zadatku na finalnom testu je funkcija bila zadata algebarski a studenti su trebali da primene svoje znanje iz oblasti izvoda funkcije da bi došli do grafičke reprezentacije funkcije, Ovaj zadatak je uobičajen za proveru znanja na ispitu i uvek se sastoji iz dva dela od kojih se jedan deo odnosi na tangentu i normalu funkcije a drugi na ispitivanje toka funkcije.

Drugi zadatak je zadat verbalno, bez navođenja algebarske niti grafičke reprezentacije i studenti su trebali do rešenja da dodju na način na koji su prethodno uvežbali kroz proces modelovanja. Da bi rešili zadatak, studenti su trebali da krenu od grafičke reprezentacije realnog problema da bi iz nje došli do matematičkog rešenja, odnosno njegove algebarske reprezentacije.

4.5.4. Etape istraživanja

Eksperimentalno istraživanje je u drugom ciklusu realizovano sa jednom generacijom studenata tokom zimskog semestra školske 2016-2017. godine u okviru redovne nastave u skladu sa važećim Nastavnim planom i programom za predmet Matematika na Visokoj tehničkoj školi strukovnih studija u Zrenjaninu.

Studenti su najpre na osnovu rezultata dela prijemnog ispita koji se odnosio na testiranje osnovnih matematičkih znanja podeljeni u dve jednako distribuirane grupe, E grupu i K grupu.

Pre početka eksperimentalnog dela nastave, studentima E grupe je sprovedena je obuka i demonstriran je rad sa softverom *GeoGebra* i u trajanju od 4 časa (u okviru nastave na predmetu Računari kojeg studenti slušaju na prvoj godini studija).

Eksperimentalni program je trajao četiri radne nedelje, tokom kojih je sa studentima E grupe izvod funkcije i njegove primene obrađivan primenom metodskog pristupa baziranog na matematičkom modelovanju u *GeoGebra* okruženju, dok je nastava kod studenata K grupe na iste teme realizovana primenom matematičkog modelovanja bez računara (kao sa studentima E grupe iz prvog ciklusa istraživanja). Aktivnosti studenata E grupe tokom eksperimentalnog programa su detaljno opisane u poglavlju 4.3. (obrada izvoda funkcije) i poglavlju 4.4. (primena osobina izvoda funkcije).

Razlike u znanju studenata E grupe i K grupe su ispitivane testom (održanom dve nedelje nakon završetka eksperimentalnog programa) i finalnom ispitu (održanom u okviru ispitnog roka, dva meseca nakon završetka eksperimentalnog programa).

Rezultati provera znanja su iskorišćeni za procenu dejstva eksperimentalnog faktora, odnosno primene matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju na unapređenje znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene.

4.6. ANALIZA I DISKUSIJA REZULTATA ISTRAŽIVANJA

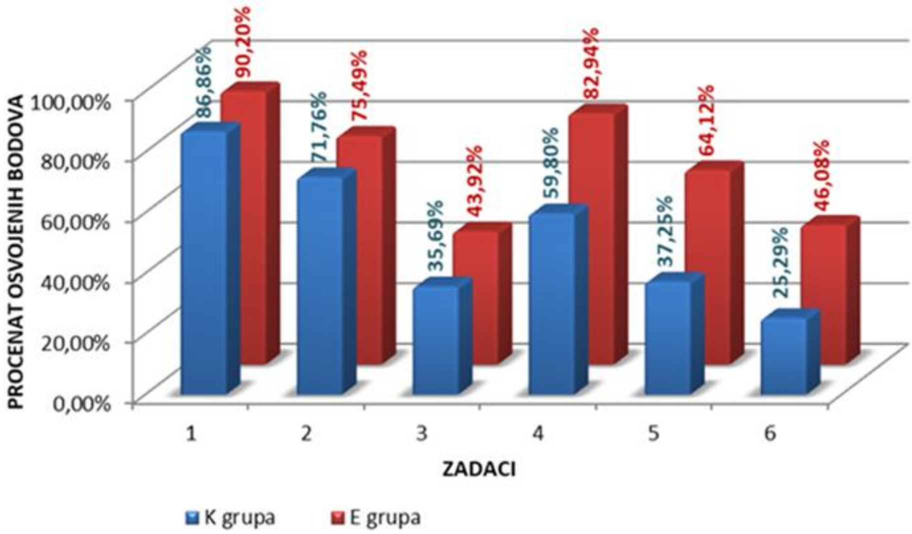
4.6.1. Analiza postignuća i diskusija rezultata ostvarenih na testu

Test je radilo ukupno 204 studenta (102 studenta E grupe i 102 studenta K grupe). Test se sastojao od šest zadataka koji su bodovani po ključu kao što je opisano u odeljku 4.5.3.

Studenti E grupe su u proseku tačno rešili 67,12% zadataka, a studenti K grupe 52,78%. Grafikon 4.1. daje uporedni prikaz postignuća studenata E i K grupe po zadacima.

Studenti obe grupe su najbolje uradili prvi zadatak na testu (90,20% za E grupu i 86,86% za K grupu). S obzirom da je u prvom zadatku trebalo izračunati količnike priraštaja koje su obe grupe detaljno obradile tokom modelovanja (sa i bez primene *GeoGebra*-e), ovakvi rezultati su bili očekivani.

Na drugom (određivanje izvoda i tangente) i četvrtom zadatku (određivanje izvoda) su postignuća obe grupe studenata bila takođe dobra (među tri najveća proseka tačno rešenih zadataka).



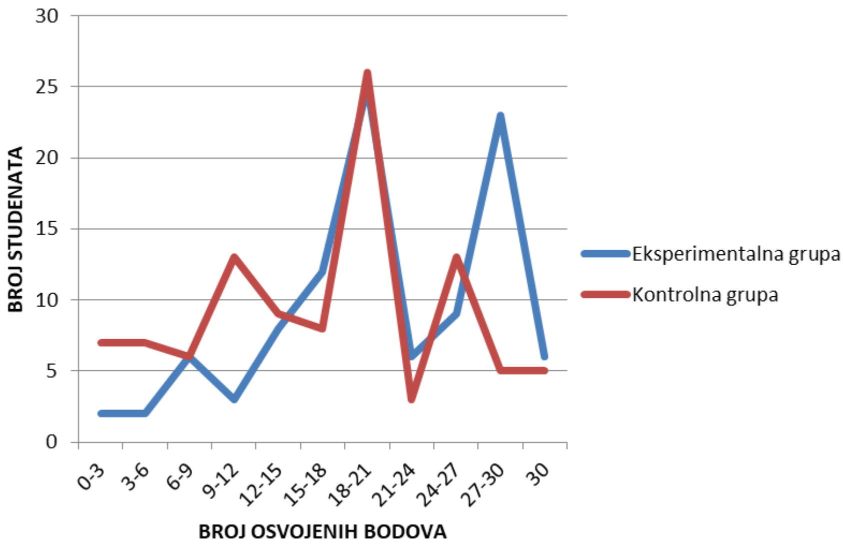
Grafikon 4.1. *Uporedni histogram po zadacima sa testa*

Analizom radova studenata je utvrđeno da su studenti E grupe pri rešavanju prva dva zadatka u jednakoj meri koristili i algebarsku i grafičku reprezentaciju, dok su studenti K grupe ove zadatke rešavali samo algebarskom reprezentacijom. Ovakvi rezultati upućuju na doprinos S aktivnosti za rešavanje zadataka primenom različitih strategija i bolja postignuća studenata E grupe.

Najlošija postignuća su bila kod trećeg zadatka na testu (43,92% za E grupu i 35,69% za K grupu). Treći zadatak je svim studentima bio problematičan, iako je bio zadat na dva načina (grafički i algebarski) i slični problemi su rešavani u okviru vežbi. S tim u vezi, i ranije je primećeno da studenti uglavnom imaju problema prilikom rešavanja zadataka i analize funkcija kada su promenljive označene drugačije a ne sa „x“ što je i u ovom zadatku bio slučaj. Ipak, studenti E grupe su ovaj zadatak rešili uspešnije nego K grupa u kojoj čak nije ni bilo studenata koji su koristili grafičku reprezentaciju. U E grupi je 27% studenata za rešavanje trećeg zadatka koristilo grafičku reprezentaciju date funkcije u procesu rešavanja jer su oni bili upoznati sa takvom reprezentacijom kroz primenu S aktivnosti tokom modelovanja.

Kao što je i bilo očekivano, studenti K grupe su na testu imali značajno više poteškoća u rešavanju zadataka nego E grupa. Analizom njihovih radova, primećeno je da su oni uvek pokušavali da funkciju izraze algebarski i na taj način da reše postavljeni problem kako su i navikli primenom G aktivnosti tokom modelvanja. U većini slučajeva, studenti K grupe nisu mogli da dodju do algebarske reprezentacije, i te zadatke su ostavljali nezavršene.

Frekvencija bodova za E i K grupu na testu je prikazana na grafikonu 4.2. Na x-osi je prezentovan broj bodova (od 0 do 30, i intervalima od po 3 boda) a na y-osi je označen broj studenata koji su ostvarili određeni broj bodova.



Grafikon 4.2. *Frekvencija bodova sa testa*

Sa grafikona 4.2. se može videti da je u E grupi (plava linija) manji broj studenata koji su ostvarili 14 i manje bodova nego u K grupi (crvena linija), dok se taj odnos menja u korist broja studenata E grupe koji su ostvarili preko 14 bodova. U obe grupe je bilo studenata koji su ostvarili maksimum od 30 bodova (6 studenata E grupe i 5 studenata K grupe). Takođe, u obe grupe je bilo studenata sa minimumalnih0 bodova (2 studenta E grupe i 5 studenata K grupe).

Interesantno je napomenuti da su radovi studenata E grupe bili u značajnoj meri sadržajniji što je navodilo na zaključak da su oni bili motivisaniji nego studenti K grupe. Motivacija se stoga može uzeti kao opravdanje za veliki broj studenata E grupe sa visokim postignućima (iznad 15 bodova), odnosno mali broj njih sa niskim postignućima (ispod 9 bodova), (Grafikon 4.2.).

Najpre je za obe grupe ispitana normalnost raspodele primenom Kolmogorov-Smirnov testa. Vrednosti test statistike za E grupu $D = 0{,}1131$ nivo statističke značajnosti $p = 0{,}1373 > 0{,}05$ i za K grupu ($D = 0{,}1161$ i $p = 0{,}1190 > 0{,}05$) su potvrdile da raspodele rezultata za obe grupe odgovaraju normalnoj raspodeli, pa je za testiranje značajnosti razlike aritmetičkih sredina primenjen parametrijski Studentov t-test.

Statistička analiza ostvarenih rezultata na testu je prikazana u tabeli 4.6. Studenti E grupe su na testu u proseku ostvarili 20,14 bodova (67,12%) a studenti K grupe 15,83 boda (52,78%), (Tabela 4.16.).

Koeficijent varijacije za E grupu je 36,41% , dok je za K grupu nešto povišen (50,75%) što znači da je znanje studenata E grupe relativno homogeno, dok kod je K grupe prisutna nehomogenost znanja u određenom stepenu.

Vrednost test statistike dobijena primenom Studentovog t-testa ($t = 3{,}996$) i nivo statističke značajnosti ($p = 0{,}000 < 0{,}01$) su potvrdili sa sigurnošću od 99% da postoji statistički značajna razlika u postignućima E i K grupe na testu.

Tabela 4.16. *Statistički rezultati testa*

	N	***M***	***M(%)***	***SD***	***CV***	***M_E-M_K(%)***	***Studentov t- test***		***Cohens' d***
							t	***p***	
E	102	20,14	67,12%	7,33	36,41%	14,34%	3,996	0,000	0,56
K	102	15,83	52,78%	8,03	50,75%				

Legenda: N-broj studenata; M-srednja vrednost broja bodova; M(%)-srednja vrednost broja bodova izražena u procentima; SD-standardna devijacija; CV-koeficijent varijacije; M_E-M_K(%) razlika srednjih vrednosti broja bodova E i K grupe izražena u procentima; t-vrednost statistike; p-nivo statističke značajnosti; Cohens' d-veličina efekta.

Veličina uticaja je u okvirima srednje ($d = 0{,}56$) što znači da upravo eksperimentalni faktor (modelovanje u *GeoGebra* okruženju) značajno doprinosi boljim postignućima na testu studeneta E grupe.

Na ovaj način je potvrđena prva pomoćna hipoteza drugog ciklusa istraživanja $\mathbf{H_{P1}}$: postoji statističi značajna razlika u postignućima studenata na testu u korist E grupe i metodskog pristupa baziranog na matematičkom modelovanju u *GeoGebra* okruženju.

4.6.2. Analiza postignuća i diskusija rezultata ostvarenih na finalnom testu (ispitu)

Finalni test (ispit) je radilo ukupno 204 studenta (102 studenta E grupe i isto toliko studenata K grupe). Na finalnom testu je bilo dva zadatka koja su se odnosila na izvod funkcije i njegove primene i svaki od tih zadataka se sastojao iz dva dela. Finalni ispit je nosio 30 bodova ukupno za tačno rešena oba zadatka, način bodovanja po delovima zadataka je opisan u odeljku 4.5.3.

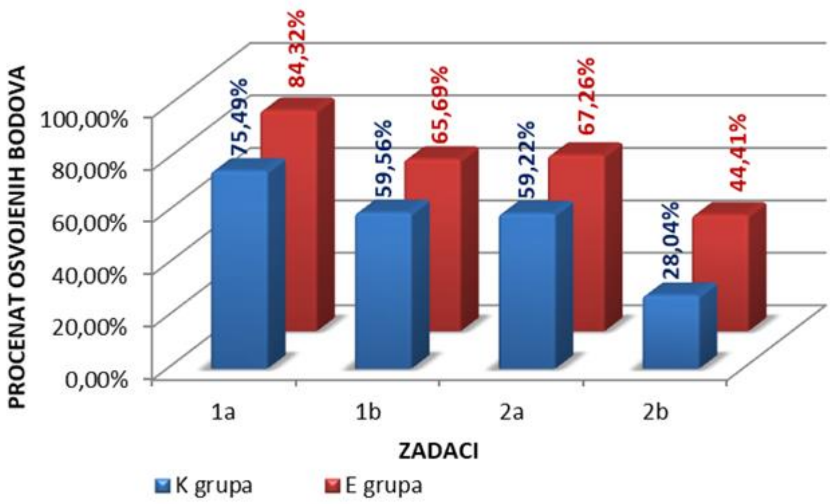
Studenti E grupe su u proseku tačno rešili 60,36% zadataka, a studenti K grupe 50,00% zadataka. U obe grupe je bilo studenata sa maksimalnih 30 bodova (3 studenta u E grupi i 1 student u K grupi), i sa nula bodova (1 student u E grupi i 2 studenta u K grupi).

Uporedni prikaz rezultata ostvarenih po svakom zadatku sa finalnog testa pojedinačno za E i K grupu je dat grafikonom 4.3.

U obe grupe, studenti su najbolja postignuća imali na 1a) zadatku gde je trebalo odrediti tangentu i normalu funkcije (84,32% tačnih rešenja u E grupi i 75,49% u K grupi). Na ovom zadatku studenti inače imaju najbolja postignuća i rešavaju ga algebarski.

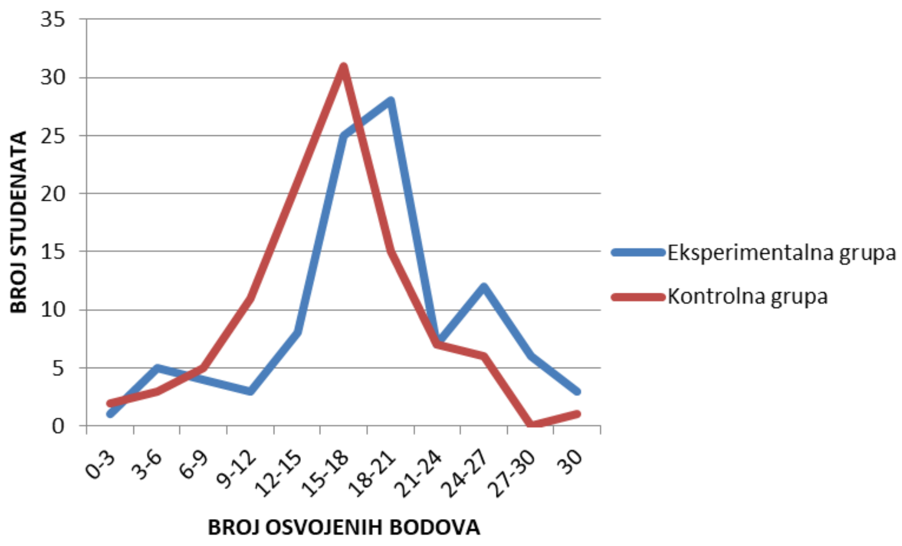
Što se tiče grafika funkcije, uspešnost rešavanja je bila manja kod obe grupe studenata (65,69% za E grupu i 59,56% za K grupu) što se opravdava time jer studenti imaju problema pri povezivanju algebarske i grafičke reprezentacije, a u ovom slučaju je primećeno da su i studenti E grupe imali izvesnih problema u rešavanju zadatka, uglavnom zbog toga što im nije bila dostupna mogućnost za korišćenje računara.

Najlošija postignuća su obe grupe imale kod 2b) zadatka (44,41% za E grupu i 28,04% za K grupu). Loši rezultati na drugom zadatku se mogu objasniti načinom zadavanja ovog zadatka (verbalno), odnosno većih napore koje njihovo rešavanje iziskuje od studenata jer moraju istovremeno da rade sa obe reprezentacije, algebarskom i grafičkom, što je za mnoge od njih izuzetno komplikovano.



Grafikon 4.3. *Uporedni histogram po zadacima sa finalnog testa (ispita)*

Sa grafikona 4.4. na kome je prikazana distribucija bodova sa finalnog testa se može videti da je najveća frekvencija u E grupi bila za približno 20 bodova, a u K grupi za približno 15 bodova.



Grafikon 4.4. *Frekvencija bodova sa finalnog testa (ispita)*

Takođe, sa grafikona 4.4. se može izvesti zaključak da je kod E grupe (plava linija) manji broj studenata imao ispod 18 bodova u odnosu na K grupu (crvena linija), dok se taj odnos menja za broj studenata koji su ostvarili više od 18 bodova u korist E grupe.

Studenti E grupe su na finalnom testu (ispitu) ostvarili prosečno 18,11 bodova (60,36%) a studenti K grupe 15,00 bodova (50,00%) (Tabela 4.17.). Koeficijenti varijacije za obe grupe (34,41% za E grupu i 35,62% za K grupu) ukazuju na relativnu homogenost znanja studenata.

Tabela 4.17. *Statistički rezultati finalnog testa (ispita)*

	N	*M*	*M(%)*	*SD*	*CV*	M_E-M_K(%)	*Studentov t- test*		*Cohens' d*
							t	*p*	
E	102	18,11	60,36%	6,23	34,41%	10,36%	3,824	0,000	0,54
K	102	15,00	50,00%	5,34	35,62%				

Legenda: N-broj studenata; M-srednja vrednost broja bodova; M(%)-srednja vrednost broja bodova izražena u procentima; SD-standardna devijacija; CV-koeficijent varijacije; M_E-M_K(%) razlika srednjih vrednosti broja bodova E i K grupe izražena u procentima; t-vrednost statistike; p-nivo statističke značajnosti; Cohens' d-veličina efekta.

Vrsta raspodele koja odgovara podacima prikupljenim sa finalnog testa je ispitana Kolmogorov-Smirnov testom. Dobijene vrednosti test statistika za E grupu $D = 0{,}1062$ i nivoa statističke značajnosti $p = 0{,}1886 > 0{,}05$ i za K grupu ($D = 0{,}0882$ i $p = 0{,}3890 > 0{,}05$) su potvrdile da se za rezultate koje su ostvarile obe grupe studenata ponaosob može usvojiti normalna raspodela.

Za testiranje značajnosti razlike aritmetičkih sredina rezultata sa finalnog testa studenata E i K grupe je primenjen parametrijski Studentov t-test. Vrednosti test statistike $t = 3{,}824$ i nivo statističke značajnosti $p = 0{,}000 < 0{,}01$ sa sigurnošću od 99% potvrđuju postojanje značajne statističke razlike između aritmetičkih sredina postignuća E i K grupe na finalnom testu (ispitu).

Efekat uticaja je srednji, kao i na testu ($d = 0{,}54$), što zajedno sa ostalim rezultatima statističke analize potvrđuje drugu pomoćnu hipotezu drugog ciklusa istraživanja $\mathbf{H_{P2}}$ a samim tim i pozitivan uticaj eksperimentalnog faktora.

4.6.3. Analiza procesa modelovanja u *GeoGebra* okruženju

Detaljnom analizom procesa matematičkog modelovanja kod studenata obe E i K grupe se došlo do zaključka da su aktivnosti S-tipa uticale na uspešniju realizaciju modelovanja, a naročito na lakše prelaze između faza. Na primer, studenti E grupe su problem iz Situacije iz realnog sveta I efikasnije rešili, jer kada su došli do matematičkog rešenja za koordinate pozicija životinja, istovremeno su već imali i interpretaciju i potvrdu validnosti rešenja u *GeoGebra*-i.

Studenti E grupe su sprovodili i aktivnosti G-tipa, ali u znatno manjoj meri, uglavnom tokom diskusija, mada su i tada one bile praćene aktivnostima S-tipa. Primećeno je da aktivnosti G-tipa mogu dovesti do blokada procesa modelovanja, kao u slučaju Situacije iz realnog sveta II, kada studenti K grupe nisu mogli da dođu do algebarske reprezentacije funkcije i trebala im je pomoć nastavnika da nastave sa modelovanjem. S druge strane, studenti E grupe su bez većih problema u okviru aktivnosti S-tipa primenili *GeoGebra*-u i uspešno nastavili proces modelovanja.

Prateći aktivnosti studenata E grupe, moglo se još zaključiti da, što su situacije i njima pripadajući realni problemi bili zahtevniji, studenti su tokom modelovanja primenjivali isključivo aktivnosti u okviru prelaza S-tipa. To se naročito ispoljilo kod modelovanja situacija iz realnog sveta koje se tiču kretanja vuka, jer je studentima pomoć *GeoGebra*-e bila neophodna da bi mogli da sprovedu proces modelovanja.

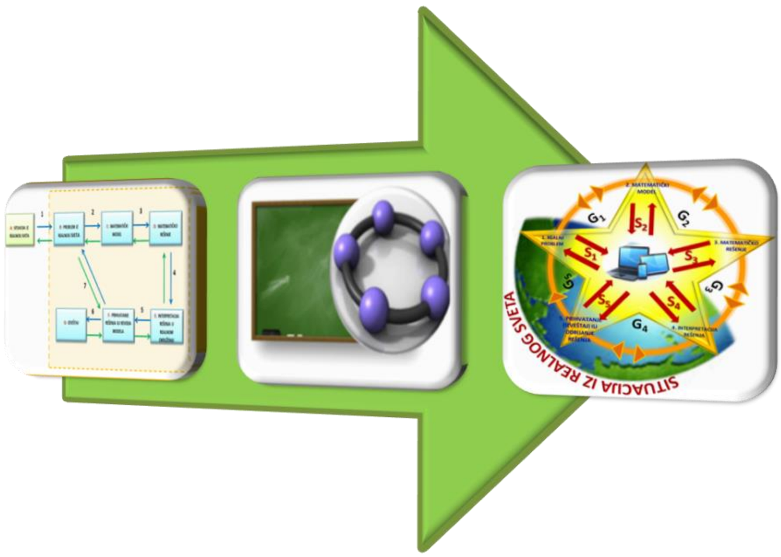
Studenti K grupe su imali velikih poteškoća kod modelovanja kretanja vuka jer im je bilo jako zahtevno (i matematički i vremenski) da sami dođu do grafičke i algebarske reprezentacije matematičkog modela i rešenja. Poteškoće su se naročito ispoljile kod rešavanja realnog problema kada vuk skače na oprugama, jer studenti nisu mogli da eksperimentišu sa različitim položajima vuka i nisu videli šta se dešava u tačkama gde funkcije nema izvod. Nastavnik je tada morao da preuzme vodeću ulogu da bi se proces modelovanja nastavio, a aktivnosti studenata su značajno smanjene.

Primećeno je takođe i da se proces modelovanja značajno razlikovao kod studenata E grupe u odnosu na onaj kod studenata K grupe. Studenti E grupe su tokom modelovanja dolazili do mnogo više ideja i predloga za rešavanje zadatih problema. Oni su koristili prednosti vizuelno/dinamičkih osobina *GeoGebra*-e za reprezentaciju svojih ideja i proveru njihove ispravnosti, dok je K grupa za isto uložila mnogo više vremena i napora.

Kvantitativnom analizom rezultata istraživanja su potvrđene obe pomoćne hipoteze, a samim tim i glavna hipotezu drugog ciklusa istraživanja: Primenom metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju u *GeoGebra* okruženju pri obradi izvoda funkcije i njegove primene postiže se statistički značajna razlika u boljim postignućima na testovima znanja studenata eksperimentalne grupe u odnosu na studente kontrolne grupe.

U drugom ciklusu istraživanja, jedina razlika u tretmanu obe grupe je bila u realizaciji matematičkog modelovanja u *GeoGebra* okruženju uz primenu predloženih S aktivnosti. Sve ostalo, uključujući probleme koji su se modelovali, zadatke na testu i finalnom testu (ispitu), izbora studenata u E i K grupu, je bilo isto za obe grupe, što vodi do zaključka da su S aktivnosti varijabla koja je uticala na bolja postignuća studenata E grupe kako tokom procesa modelovanja, tako i na testovima znanja.

5. MATEMATIČKO MODELOVANJE U NASTAVNIČKOJ PRAKSI



5.1. UVOD

U prethodnim glavama disertacije diskutovana je primena matematičkog modelovanja u visokoškolskoj nastavi matematike, detaljno su prikazani načini implementacije matematičkog modelovanja u nastavu matematike kroz konkretne primere i potvrđeni su pozitivni efekti prikazane metode na učenje matematike i stavove studenata o njenoj korisnosti.

Ipak, da bi se modelovanje pravilno integrisalo u nastavu matematike i da bi se nastavnici adekvatno pripremili za izvođenje nastave primenom metodskih pristupa baziranih na modelovanju, potrebno je razmotriti dalje pravce razvoja i ciljeve matematičkog obrazovanja, a naročito pravce obrazovanja nastavnika. Usmeravanje nastavnika i unapređenje njihovih kompetencija vezanih za matematičko modelovanje predstavljaju prvi korak ka integrisanju modelovanja u savremene tokove obrazovanja.

Rezultati istraživanja o unapređenju školskih sistema na svim nivoima obrazovanja su ulogu nastavnika označili kao vrlo važnu. Utvrđeno je da kvalitet nastavnika direktno utiče na postignuća učenika/studenata i zbog toga obrazovanje nastavnika treba da bude od prioritetnog značaja (Darling-Hammond, 2000; Sanders & Rivers, 1996).

U tom smislu, u ovog glavi disertacije je matematičko modelovanje obrađeno sa aspekta izgrađivanja pozitivnih stavova nastavnika prema modelovanju, kao i obuke nastavnika za njegovu primenu u obrazovnoj praksi. Analizirani su glavni elementi koji utiču na stvaranje pozitivnog stava nastavnika za primenu metodskih pristupa baziranih na modelovanju i dati su predlozi za realizovanje obuka nastavnika.

U drugom poglavlju se diskutuje o mestu matematičkog modelovanja u savremenoj nastavi matematike i navode se osnovne smernice za ispunjenje ciljeva moderne nastave matematike primenom matematičkog modelovanja.

Treće poglavlje je posvećeno nastavnicima matematike na svim nivoima obrazovanja i zahtevima koji se pred njih postavljaju. U ovom poglavlju su navedena neka osnovna uputstva za razvoj kompetencija nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi. Takođe, diskutovana je i uloga modelovanja u sprovođenju ocenjivanja.

U četvrtom poglavlju su predloženi načini realizacije obuke nastavnika za unapređenje njihovih kompetencija za primenu matematičkog modelovanja.

U petom poglavlju je predstavljen metodološki koncept istraživanja koje je sprovedeno sa nastavnicima matematike na teritoriji Grada Zrenjanina, koje je za temu imalo ispitivanje stanja i predloga za unapređenje nastave matematike i unapređenje kompetencija nastavnika.

U šestom poglavlju su analizirani i diskutovani rezultati istraživanja i date su smernice za sprovođenje daljih obuka za unapređenje kompetencija nastavnika koje se tiču primene matematičkog modelovanja i savremenih računarskih tehnologija u nastavi.

5.2. MESTO MATEMATIČKOG MODELOVANJA U SAVREMENOJ NASTAVI MATEMATIKE

Savremena nastava matematike ima sasvim nove prioritete, koji se ogledaju u drugačijem načinu sprovođenja nastave, od metodskih pristupa koji se koriste, preko sadržaja koji se obrađuju, pa do materijala i testova koji se primenjuju. Da bi se ovakav vid nastave mogao realizovati, pred nastavnike matematike se postavljaju novi izazovi i zahtevi koje oni moraju ispuniti da bi pratili savremene trendove u obrazovanju i pružili svojim učenicima/studentima najkvalitetnije matematičko obrazovanje.

Nacionalni savet nastavnika matematike SAD-a (*National Council of Teachers of Mathematics – NCTM*) je u cilju unapređenja nastave matematike, njenih ishoda i postignuća učenika/studenata usvojio neke smernice i strategije matematičkog obrazovanja 21. veka koje se mogu razmatrati i na svetskom nivou (Huetinck & Munshin, 2007).

Za postizanje ciljeva unapređenja postignuća učenika/studenata i njihovih matematičkih kompetencija, usvojen je predlog sledećih smernica :

- Naučiti i usmeriti učenike/studente ka rešavanju problema
- Omogućiti transfer znanja
- Razviti matematičko rezonovanje kod učenika/studenata
- Stvoriti stav kod učenika/studenata da cene matematiku
- Povećati samopouzdanje učenika/studenata koje se tiče njihovog matematičkog znanja i njegove primene.

Smernice i strategije matematičkog obrazovanja 21. veka su u skladu sa nastalim promenama vezanim za tri aspekta učenja i nastave matematike:

1. Ko treba da uči matematiku?

Zbog ranijeg karakterisanja matematike kao nauke koja je komplikovana i zahtevna, stvorilo se uverenje da je ona rezervisana za samo za određene grupe studenata koji poseduju naročite sposobnosti i visoko su inteligentni.
Podizanje svesti nastavnika, učenika/studenata, roditelja, o korisnosti matematike i njenoj velikoj ulozi u rešavanju problema iz realnog života, od onih najjednostavnijih, do idejnih rešenja velikih projekata je postavljeno za glavni cilj matematičkog obrazovanja.

Obukom nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi i sprovođenja nastave pomoću metodskih pristupa baziranih na modelovanju može uticati na unapređenje postignuća učenika/studenata koja su postavljena kao prioriteti matematičkog obrazovanja 21. veka.

2. Kako studenti treba da uče matematiku?

Učenje matematike pre promene paradigme matematičkog obrazovanja se svodilo na uvežbavanje zadataka određenog tipa, i njihovo "mehaničko" rešavanje bez šireg razmišljanja. Nastavnik je bio centar takvog nastavnog procesa i on se odvijao po njegovim strogim instrukcijama.

Savremeni proces učenja bi trebao da ima karakteristike timskog rada i dinamičke strukture. Učenici/studenti bi trebalo da istražuju različite ideje, rešavaju probleme i eksperimentišu sa različitim nastavnim materijalima. Nastavnik nije više centar nastavnog procesa, već ravnopravno sa učenicima/studentima učestvuje u njemu.

3. Koji matematički sadržaji treba da se obrađuju?

Poimanje matematike kao fundamentalne nauke, neophodne za rešavanje problema čija priroda ide od tehničke, preko tehnološke, ekonomske, pa do društveno – humanističke navode na zaključak da matematičke kurikulume treba osmisliti tako da njihov ishod bude funkcionalno znanje, koje će učenici/studenti moći da koriste kao efikasan alat za rešavanje realnih problema iz prakse.

Matematičko modelovanje zbog načela na kojima je zasnovano u potpunosti odgovara zahtevima modernog matematičkog obrazovanja i njegovim ishodima. Tendencije savremenog obrazovanja teže implementiranju matematičkog modelovanja u kurikulume na svim nivoima obrazovanja.

Napretkom tehnologija, naročito računarskih, nametnula se potreba za revidiranjem matematičkih kurikuluma i njihovom prilagođavanju konstantnom razvoju nauke i života u tehnološkoj eri. Pri konstrukciji kurikuluma koji bi po sadržajima i ishodima učenja odgovarao naprednom matematičkom obrazovanju, po Huetinck & Munshin (2007) trebalo bi u obzir uzeti i sledeće činjenice:

- Kurikulum bi trebao da bude prilagođen potrebama svih učenika/studenata, i svi oni bi trebalo da imaju koristi od istog.
- Sastavni deo kurikuluma obavezno bi trebalo da čine ishodi koji se tiču unapređenja kompetencija koje se odnose na matematičko rezonovanje i veštine naprednog matematičkog mišljenja.
- Postavljanje visokog prioriteta na problemski orjentisanu nastavu.
- Sticanje veština poput algebre, geometrije, statistike i verovatnoće mora biti predstavljeno kao esencijalno.
- Pronalaženje značenja i šema treba da bude iznad običnih računskih veština.
- Razmena matematičkih ideja i komunikacija mora biti neizostavni deo procesa učenja matematike.
- Učenicima/studentima se mora obezbediti mogućnost da istražuju i primene matematiku na rešavanje realnih problema iz njihovog svakodnevnog života.

English (2002, p.8) smatra da je za savremene matematičke kurikulume važno sledeće:

> *„Današnji matematički kurikulumi moraju proširiti svoje ciljeve kako bi uključili ključne koncepte i procese koji će maksimizovati mogućnosti učenika za uspeh u 21. veku. Ovo uključuje, između ostalog, statističko rezonovanje, verovatnoću, algebarsko razmišljanje, matematičko modelovanje, vizualizaciju, postavljanje i rešavanje problema, smisao za brojeve i za rad sa računarskim tehnologijama.“.*

Uloga i mesto matematičkog modelovanja u savremenim kurikulumima je vrlo značajna, s obzirom da se modelovanje smatra za veštinu 21. veka (English & Sriraman, 2010). S tim u vezi, u mnogim školskim sistemima je intenziviran rad na integraciji matematičkog modelovanja u kurikulume (Hernández *et al.*, 2016).

Matematičko modelovanje i metodski pristupi bazirani na njegovim principima su maloj meri zastupljeni u nastavnoj praksi na našim prostorima, iako postoje autori koji ukazuju na značaj modelovanja (Marković, 2011; Zlokapa, 2012). Savremeni svetski trendovi u obrazovanju podrazumevaju matematičko modelovanje za sastavni deo nastavnih planova i programa, a njegova svakodnevna primena u nastavi se podrazumeva u zemljama kao što su Australija, Nemačka, Švedska, i dr. (Ärlebäck, 2009; Hernández *et al.*, 2016; Sumarti, 2012). Uzimajući u obzir stanje u svetu i na našim prostorima, a koje se tiče primene matematičkog modelovanja u nastavi, jedan od glavnih motiva autora ove disertacije je bio da se istraže načini za implementaciju modelovanja u visokoškolsku nastavu matematike.

5.3. NASTAVNICI I PRIMENA MATEMATIČKOG MODELOVANJA

Istraživanja uspešnosti školskih sistema su uvek aktuelna, zbog težnje da se oni unaprede i da se poboljšaju njihovi ishodi.

Barber & Mourshed (2007) su sproveli istraživanje sa dvadesetpet školskih sistema širom sveta u koje su uključili i deset najuspešnijih. Ispitivali su koji faktori su zajednički za najbolje školske sisteme i na koji način oni dolaze do visokih postignuća. Istraživanjem je utvrđeno da najuspešniji školski sistemi imaju tri zajednička faktora:

1. Obrazuju najbolje ljude za nastavnike,
2. Osposobljavaju nastavnike da postanu efikasni instruktori,
3. Osiguravaju da sistem može da svakom učeniku/studentu obezbedi najbolje moguće instrukcije.

Praćenjem razvoja najboljih školskih sistema, primećeno je da navedena tri faktora u kratkom vremenskom periodu mogu dovesti do značajnog poboljšanja rezultata i ishoda, bez obzira na kulturni aspekt i lokaciju.

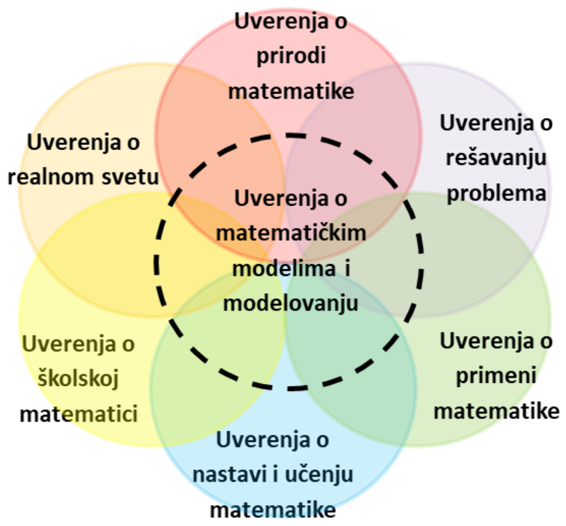
Analizirajući navedene faktore može se izvesti zaključak da uspešnost školskih sistema u najvećoj meri zavisi od nastavnika i njihovih kvaliteta, i da se obrazovanju nastavnika mora posvetiti značajna pažnja.

5.3.1. Izgrađivanje stavova nastavnika o matematičkom modelovanju

Pred savremenu nastavu matematike, kao i pred nastavu uopšte, se danas postavljaju visoki zahtevi. Pred nastavnike - još veći.

Da bi se matematičko modelovanje pravilno integrisalo najpre u kurikulume, a onda i u nastavu matematike, od presudne važnosti je da nastavnici imaju izgrađene adekvatne stavove o matematičkom modelovanju i da budu obučeni za njegovu primenu.

Ärlebäck (2009) u svom radu ističe da pri izgrađivanju stavova nastavnika o matematičkom modelovanju u nastavi, oni treba da su grupisani oko nekoliko koncepata. Da bi se izgradila pozitivna uverenja nastavnika o matematičkim modelima i modelovanju kao bazi za njegovu kasniju primenu u nastavnoj praksi, potrebno je razviti pozitivne stavove i uzeti u obzir i sledeća uverenja: o prirodi matematike, rešavanju problema, primeni matematike, nastavi i učenju matematike, školskoj matematici i realnom svetu. Ova uverenja se preklapaju, međusobno deluju i na taj način formiraju temelj budućeg razvoja kompetencija nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u nastavi (Slika 5.1.).



Slika 5.1. *Konceptualizacija strukture uverenja o matematičkim modelima i modelovanju*

Uverenja o prirodi matematike kod nastavnika treba da su razvijena u pravcu matematike kao nauke neophodne u svim aspektima života i koja se koristi za rešavanje najjednostavnijih svakodnevnih problema kao i onih kompleksnih. Nastavnici bi trebalo da budu sposobni da matematiku "vide" kroz realne situacije i da ta svoja viđenja prenesu i na učenike/studente.

Uverenja o rešavanju problema se odnose na realizaciju nastave orjentisane ka rešavanju problema. Pri tome, treba imati u vidu da se takva nastava ne odnosi na uvežbavanje tipskih zadataka, već na konstruktivno rešavanje problema kolaborativnim radom, kroz aktivno istraživanje, diskusije i razmene mišljenja i znanja. Za realizaciju ovakvog vida nastave matematike, nastavnici moraju imati izgrađen čvrst, pozitivan stav prema problemskoj orjentaciji, da bi ovakav pristup rezultirao uspehom.

Uverenja o primeni matematike i njenoj korisnosti u svakodnevnom životu su esencijalna za matematičko modelovanje. S obzirom da matematičko modelovanje povezuje realne situacije sa njihovom matematičkom reprezentacijom, bez širenja vidika nastavnika van matematičkog formalizma, primena principa modelovanja u nastavi bi mogla nastavnicima da predstavlja izuzetno veliku prepreku.

Uverenja o nastavi i učenju matematike se odnose na formiranje pozitivnog stava nastavnika prema matematici, osmišljavanju inovativnih pristupa nastavi matematike i vizije budućnosti učenja matematike.

Uverenja o školskoj matematici treba da budu usmerena ka organizaciji nastavnog procesa koji će biti interdisciplinarnog karaktera i konstruktivnoj nastavi koja će se realizovati primenom principa integrativnosti uz kolaborativan rad.

Uverenja o realnom svetu je potrebno izgraditi kod nastavnika koji će primenjivati matematičko modelovanje u nastavnoj praksi jer su ona neophodna za realizaciju ciljeva modernog matematičkog obrazovanja. Uočavanje mesta matematike u savremenom društvu i načina na koji ona prožima sve tokove života predstavljaju glavne pokretače za implementaciju matematičkog modelovanja u nastavu.

Zahtevi koji se stavljaju pred nastavnike u savremenom matematičkom obrazovanju se u velikoj meri odnose na poučavanje primenom matematičkog modelovanja i zbog toga je formiranje gore navedenih uverenja jedan je od osnovnh uslova za stvaranje dobre osnove kod nastavnika za primenu modelovanja u nastavnoj praksi (Bautista *et al.*, 2014; Blum & Leiss, 2007).

5.3.2. Matematičko modelovanje i ocenjivanje

Ocenjivanje radova studenata predstavlja jedan deo nastavnog procesa koji se konstantno unapređuje u cilju povećanja njegove objektivnosti, preciznosti i efikasnosti. U školskoj praksi postoje dve funkcije ocenjivanja. Jedna je formativna, koja ima za svrhu da usmeri nastavnika i učenike/studente da identifikuju slabe tačke u nastavi i učenju u cilju daljeg planiranja nastave. Sumativno ocenjivanje se koristi za procenu nivoa postignuća nastavnika i učenika/studenata. Iako formativno ocenjivanje ima izuzetno veliki značaj za nastavu, u praksi se u većoj meri koristi sumativno ocenjivanje kome su nastavnici naklonjeniji (Vulfolk, Hjuz i Volkap, 2015).

Realizacija nastave primenom metodskih pristupa baziranih na principima matematičkog modelovanja može pored pozitivnih uticaja na postignuća studenata doprineti i poboljšanju načina ocenjivanja. Pollak (2012, p. xi) navodi jedan primer koji jasno ukazuje na sve prednosti matematičkog modelovanja koje se tiču ocenjivanja:

> *„Pri pregledanju i ocenjivanju ispita iz analize, profesori na jednom koledžu nisu mogli da usaglase mišljenja o tome kako da ocene rešenje zadatka jednog studenta.*
> *Zadatak se odnosio na izračunavanje zapremine geometrijske figure upisane u kocku. Student je pravilno postavio zadatak i korektno izrazio zapreminu preko odgovarajućih integrala. Međutim, na samom kraju zadatka, student je napravio računsku grešku, i umesto da podeli dobijeni broj sa nekim stepenom od 10, on je broj pomnožio i dobio rešenje izraženo u milionima.*
> *Jedna grupa profesora koji su ocenjivali zadatak je zastupala stav da studentu treba zadatak oceniti sa samo jednim poenom manje jer se iz njegove postavke zadatka vidi da je razumeo problematiku i da je računska greška nastala slučajno.*
> *Druga grupa profesora je zadatak ocenila sa samo jednim poenom, argumentujući svoju odluku da student nije razumeo zadatak i da nije dobro rasuđivao čim je usvojio za zapreminu nerealno veliki broj.*
> *Pretpostavimo sada da je problem koji je student rešavao bio postavljen u kontekstu matematičkog modelovanja. Tada se rešenje problema ne bi razmatralo samo u matematičkom kontekstu već daleko šire. O kvalitetu i ispravnosti rešenja bi se sudilo i sa*

matematičkog gledišta, ali i sa gledišta konfrontacije tog rešenja sa realnom situacijom na kraju procesa modelovanja. Ako rešenje ne bi imalo smisla u uslovima originalne realne situacije, tada to rešenje ne bi bilo prihvatljivo.".

Skidmore (2003) navodi kako bi metode ocenjivanja trebalo da budu raznovrsne, i da učenici/studenti mogu pokazati mnogo više stečenih veština i kompetencija ako se ocenjivanje sprovodi kroz grupne vežbe, računarske simulacije i eksperimente u kojima učenici/studenti aktivno učestvuju. Takođe, na taj način bi se proveravalo i dublje razumevanje gradiva, a ne samo činjenično znanje. Proces matematičkog modelovanja integriše sve aspekte ocenjivanja u jednu celinu i na taj način omogućava nastavnicima kontinuirano i objektivno praćenje svih postignuća učenika/studenata.

5.4. OSNOVNI PRINCIPI OBUKE NASTAVNIKA ZA PRIMENU MATEMATIČKOG MODELOVANJA

5.4.1. Mesto matematičkog modelovanja u obrazovanju budućih nastavnika

Profesionalni razvoj i usavršavanje nastavnika matematike se najčešće svodi na proširivanje njihovih matematičkih znanja. Sa druge strane, obuka nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u nastavi je zasnovana na usmeravanju nastavnika da koriste postojeće činjenično znanje i da ga putem testiranja, izražavanja i analiziranja produbljuju kako bi ga primenili u nastavi u obliku novih i efikasnih metoda učenja. Na taj način se stavlja akcenat na pedagošku dimenziju matematičkog znanja nastavnika, ali i na psihološku, istorijsku, afektivnu i praktičnu (Doerr & Lesh, 2003).

Doerr & Lesh (2003) takođe navode opšte ciljeve do kojih primena modelovanja od strane nastavnika treba da dovede:

- Da nastavnici otkriju načine na koje razmišljaju,
- Da testiraju, revidiraju i preciziraju otkrivene načine razmišljanja za određene svrhe,
- Da dele i razmenjuju znanja sa kolegama,
- Da primene svoje načine razmišljanja u različitim kontekstima.

Vodeći principi po Doerr & Lesh (2003) u ostvarivanju navedenih ciljeva su: princip realnosti (usmeravanje nastavnika samo na nastavnu praksu i interpretaciju rada svojih učenika), princip više nivoa (nastavnici treba da se istovremeno posvete matematičkim sadržajima koje obrađuju, pedagoškim strategijama i psihološkim aspektima nastave i učenja), princip višestrukih konteksta (nastavnici u modelovanje treba da uključe različite kontekste i njihovu interpretaciju i analizu da bi se postigla generalizacija načina razmišljanja), princip deljenja (razmena iskustava iz nastave i procesa učenja, kao i nastavnih materijala između kolega nastavnika bi dovela do usavršavanja kako nastavnika, tako i relizacije nastave) i princip samoevaluacije (da bi nastavnici mogli da procene realizaciju svojih nastavnih planova, moraju najpre biti sposobni da realno procene svoje interpretacije).

Uzimajući u obzir navedene ciljeve i principe, može se zaključiti da je za profesionalni razvoj nastavnika važno obezbediti im pogodno okruženje i podršku da samostalno i u skladu sa svojim načinom razmišljanja interpretiraju procese nastave i učenja kako bi ih sagledali sa više aspekata. Takođe, neophodno je i odrediti odnos teorijskih matematičkih sadržaja i metodičkih sadržaja programa obrazovanja i usavršavanja nastavnika matematike kao i način njihove integracije da bi kao rezultat imali nastavnike spremne da odgovore izazovima savremene nastave matematike (Lingefjärd, 2002; Lingefjärd, 2007; Mgombelo & Buteau, 2009).

5.4.2. Elementi obuke nastavnika za primenu matematičkog modelovanja

Obuka nastavnika za matematičko modelovanje je vrlo kompleksan i zahtevan zadatak. Lingefjärd (2002) navodi da je za realizaciju takve obuke neophodno ispuniti dosta zahteva koji se tiču najpre matematičkog obrazovanja, zatim veština za rešavanje različitih vrsta problema kao i poznavanje procedura za učenje i ocenjivanje procesa modelovanja, a od edukatora koji poučavaju nastavnike matematičkom modelovanju se očekuje i odlično poznavanje primene modernih računarskih tehnologija.

Ferri & Blum (2009) su dali jedan predlog za koncipiranje obuke nastavnika za matematičko modelovanje. Nastavnici u okviru obuke koji predlažu Ferri & Blum (2009) moraju savladati sledeće kompetencije za modelovanje:

- *Teorijske kompetencije* – odnose se na poznavanje različitih ciklusa modelovanja, ciljeva i perspektiva modelovanja i tipova zadataka koji se modeluju,
- *Kompetencije koje se odnose na zadatke* – sticanje veština rešavanja, analiziranja i kreiranja zadataka za modelovanje,
- *Kompetencije za poučavanje* – sticanje sposobnosti za planiranje i sprovođenje nastave primenom modelovanja kao i sposobnosti za odgovarajuće intervencije kod učenika/studenata tokom procesa modelovanja,
- *Dijagnostičke kompetencije* – sposobnost za identifikaciju faza u procesu modelovanja kojeg sprovode učenici/studenti i za dijagnostifikovanje teškoća koje učenici/studenti mogu imati tokom procesa modelovanja.

Preporučuje se da obuke budućih nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi imaju sadržajnu ravnotežu između teorijskih i praktičnih elemenata. Takođe, glavni cilj obuke bi trebao da bude da polaznici nauče kako da poučavaju matematičko modelovanje, a ne samo kako da rešavaju zadatke primenom modelovanja (Ferri & Blum, 2009).

Na slici 5.2. je naveden okvir jedne obuke budućih nastavnika matematike po dimenzijama i njima pripadajućim sadržajima (Ferri, 2013).

Slika 5.2. *Elementi obuke nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u školskoj praksi (Ferri, 2013)*

Važno je naglasiti da postoji veoma izražena potreba za obukom nastavnika za primenu matematičkog modelovanja. Razlozi za to su višestruki i odnose se na usavršavanje teorijskih i praktičnih pristupa modelovanju kod nastavnika u cilju doprinosa pripremi nastavnika da budu ne samo kompetentni za matematičko modelovanje, već i da dalje razviju svoja matematička znanja i odnos prema matematici kao naučnoj disciplini (Lingefjärd, 2007).

5.4.3. Nastavni materijali za matematičko modelovanje

Pozitivni efekti primene računarskih tehnologija i pratećih dinamičkih nastavnih materijala na realizaciju procesa matematičkog modelovanja u nastavi su potvrđeni od strane više istraživača (Heid, 2015; Karadag & McDougall, 2009a; Karadag & McDougall, 2009b; Lingefjärd & Holmquist, 2001; Verhoef *et al.,* 2015).

Međutim, priprema nastavnih materijala za proces matematičkog modelovanja može biti veoma zahtevna, što nekada predstavlja ograničavajuću okolnost kada se govori o primeni matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi.

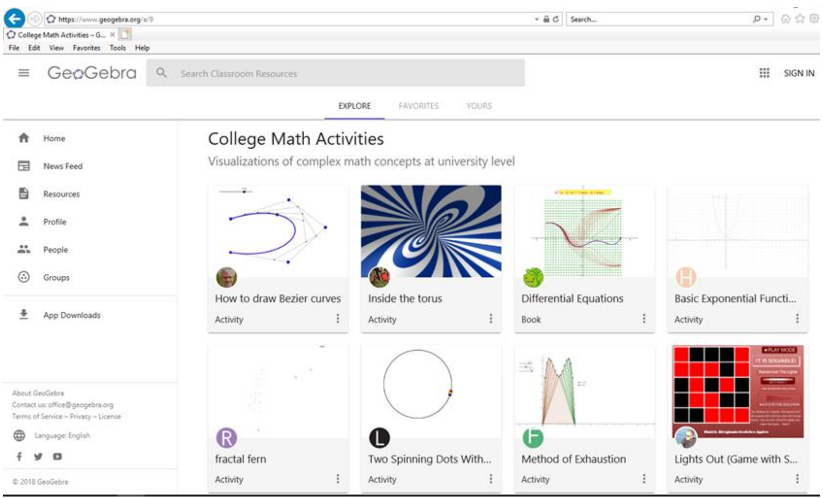
Razlozi zbog kojih je to tako su raznoliki, počev od toga da neki nastavnici nemaju tehničkih uslova i mogućnosti u svojim školama, do toga da postoje i nastavnici koji nisu u mogućnosti da razviju svoje kreativne potencijale i primene ih u procesu matematičkog modelovanja.

Novi pristup matematičkom modelovanju koji je predložen u ovoj disertaciji i ilustrovan zvezdastim dijagramom, zbog svoje strukture koja je bazirana na primeni računarskih tehnologija u procesu modelovanja omogućava primenu već gotovih materijala. Autori materijala ne moraju obavezno biti nastavnici koji matematičko modelovanje primenjuju u nastavi, već oni mogu koristiti i materijale od svojih kolega ili iz drugih izvora koji odgovaraju nastavnoj temi.

Upravo mogućnost razmene materijala u vidu animacija i simulacija je jedan od glavnih razloga zbog čega je *GeoGebra* izabrana za računarsku podršku u novom pristupu matematičkom modelovanju. Pored toga što je softver koji je jednostavan za korišćenje i slobodan i dostupan svima, *GeoGebra* ima i mogućnost slobodne razmene već gotovih *GeoGebra* materijala (https://www.geogebra.org/materials).

Nastavni materijali koji se nalaze na web sajtu *www.geogebra.org/materials* nisu obavezno iz oblasti matematike, već ima i animacija i simulacija različitih situacija koje reprezentuju pojmove iz fizike, hemije, geografije i drugih nauka. Primenom *GeoGebra* materijala iz različitih oblasti podstiče se intergrativni i interdisciplinarni pristup u kreiranju nastavnih materijala i osmišljavanju nastavnog procesa.

Web sajt *www.geogebra.org/materials* se jednostavno koristi tako što se pretraživanjem baze materijala može izabrati odgovarajuća animacija ili simulacija. Do svih *GeoGebra* materijala se jednostavno dolazi pretraživanjem baze materijala po temi ili autoru. Klikom na link ka željenom materijalu se jednostavno dolazi do njega (Slika 5.3.).



Slika 5.3. *Materijali za preuzimanje na web sajtu www.geogebra.org/materials*

Takođe, nastavnici koji su obučeni za rad sa *GeoGebra*-om i samostalno izrađuju nastavne materijale, mogu ih postaviti na web sajt *www.geogebra.org/materials* i učiniti ih dostupnim za korišćenje i drugim nastavnicima.

Primena *GeoGebra* materijala u nastavi olakšava nastavnicima uvođenje inovativnih metodskih pristupa u nastavu, kao što je matematičko modelovanje. Takođe, zbog raznolikosti materijala iz svih naučnih oblasti, primena *GeoGebra* materijala u nastavi doprinosi poboljšanju njenih karakteristika koje se tiču integrativnosti i interdisciplinarnosti, ali i konstruktivizma zbog dinamičke prirode *GeoGebra*-e.

Takođe, danas se u svetu sprovode mnogi projekti koji za cilj imaju obuku nastavnika za aktivnu primenu matematičkog modelovanja u nastavnoj praksi na svim nivoima obrazovanja. Glavni ciljevi takvih projekata su, osim obuke nastavnika, i osmišljavanje i izrada edukativnih i nastavnih materijala neophodnih za realizaciju procesa matematičkog modelovanja (www.model.u-szeged.hu/index.php?action=edoc&cmd=search&type_id=2&lang=en)

Na taj način, nastavnicima se stavlja na raspolaganje širok asortiman materijala koje mogu koristiti u nastavi. Dostupnost materijala za realizaciju matematičkog modelovanja je pozitivna iz više razloga. Najpre, korišćenjem već gotovih nastavnih materijala se drastično skraćuje vreme potrebno za pripremu za modelovanje u nastavi, što predstavlja jedan vrlo važan aspekt za nastavnike i samu nastavu. Sa druge strane, pozitivni efekti dostupnosti gotovih materijala se ogledaju i u tome što podstiču nastavnike za primenu matematičkog modelovanja, jer je na taj način obezbeđena dobra podrška procesu modelovanja u nastavi matematike.

5.5. METODOLOŠKI KONCEPT ISTRAŽIVANJA

5.5.1. Predmet, ciljevi i zadaci istraživanja

Predmet istraživanja je stav nastavnika prema inovacijama nastave, metodskim pristupima i primeni računarskih tehnologija za realizaciju nastavnog procesa.

Glavni cilj istraživanja je da se ispita stav nastavnika prema trenutnom stanju koje se tiče svih aspekata realizacije nastave matematike, prema primeni računarskih tehnologija i savremenih metodskih pristupa u nastavi i da se sagledaju potrebe i objedine predlozi za eventualna poboljšanja kako nastave, tako i kompetencija nastavnika.

Zadaci istraživanja koji su postavljeni na osnovu predmeta i glavnog cilja istraživanja su:

- Izraditi instrumente za ispitivanje stavova nastavnika u skladu sa glavnim ciljem istraživanja.
- Analizirati stavove, mišljenja i predloge nastavnika za ostvarivanje optimalnih uslova za realizaciju nastave i za dalje stručno usavršavanje nastavnika.
- Na osnovu rezultata istraživanja osmisliti aktivnosti za dalje stručno usavršavanje nastavnika matematike.

5.5.2. Uzorak

Uzorak su činili nastavnici matematike sa teritorije Grada Zrenjanina koji su dobrovoljno učestvovali u aktivnostima koje je sprovodio savetnik-spoljni saradnik za matematiku pri Školskoj Upravi Zrenjanin (autor disertacije). U istraživanju je učestvovalo ukupno 26 nastavnika matematike koji nastavu realizuju u osnovnim i srednjim stručnim školama i Zrenjaninskoj gimnaziji.

Prikupljanje podataka od nastavnika je realizovano u toku prvog i početkom drugog polugodišta školske 2017/2018. godine.

Od svih nastavnika koji su učestvovali u istraživanju je prethodno dobijena saglasnost za korišćenje podataka za potrebe ove doktorske disertacije.

5.5.3. Metode, tehnike i instrumenti istraživanja

U istraživanju realizovanom sa nastavnicima matematike su od metoda korišćene: metoda komparativne analize (kod proučavanja dostupne literature i internet izvora koji se odnose na obrazovanje nastavnika, naročito za primenu matematičkog modelovanja i računarskih tehnologija u nastavnoj praksi) i deskriptivna metoda (kod prikupljanja podataka i za interpretaciju rezultata istraživanja).

Za prikupljanje podataka o stavovima nastavnika je korišćena tehnika anketiranja.

Instrument istraživanja je činila anketa koju je osmislio autor disertacije za potrebe istraživanja. Anketa je napravljena po formi upitnika i sastojala se iz pet delova. Anketa je bila anonimna.

Prvi deo upitnika se odnosio na osnovna pitanja o stručnoj spremi nastavnika, broja godina koliko su angažovani na poziciji nastavnika matematike, vrsti škole u kojoj su zaposleni i polu. Drugi deo upitnika je sadržao opšta pitanja o stavu nastavnika prema postojećim obukama u okviru stručnog usavršavanja, o motivaciji za unapređenje kompetencija koje se tiču nastave i o stepenu saradnje sa kolegama (Tabela 5.1.).

Tabela 5.1. *Drugi deo upitnika*

2. OPŠTA PITANjA

	Potpuno se slažem	Uglavnom se slažem	Delimično se slažem	Uglavnom se	Uopšte se ne slažem
1. U okviru stručnog veća nastavnika matematike u Vašoj školi postoji aktivna saradnja.					
2. Vaše stručno veće sarađuje sa stručnim većima nastavnika matematike iz drugih škola.					
3. Stručno veće nastavnika matematike u Vašoj školi redovno organizuje razmenu iskustava nastavnika u okviru veća.					
4. Stručno veće nastavnika matematike u Vašoj školi redovno organizuje razmenu iskustava sa nastavnicima iz drugih ustanova.					
5. Dostupan Vam je dobar izbor obuka i seminara iz nastave matematike.					
6. Postoji potreba za novim obukama iz oblasti unapređenja nastave matematike.					
7. Stručne obuke Vam pomažu u radu.					
8. Znanja stečena na prethodnim obukama redovno primenjujete u nastavi.					
9.Zadovoljni ste stepenom saradnje sa prosvetnim savetnicima/spoljnim-saradnicima.					
10. Učestvujete u projektima unapređenja nastave (Noć istraživača, Maj mesec matematike, konkursi,...).					

U trećem delu upitnika nastavnici su odgovarali na pitanja o primeni računarskih tehnologija u nastavi matematike, tehničkim mogućnostima škole za realizaciju takve nastave i nivou poznavanja određenih softvera (Tabela 5.2.).

Tabela 5.2. *Treći deo upitnika*

3. PRIMENA RAČUNARSKIH TEHNOLOGIJA U NASTAVI MATEMATIKE	**Potpuno se slažem**	**Uglavnom se slažem**	**Delimično se slažem**	**Uglavnom se**	**Uopšte se ne slažem**
1. Aktivno primenjujete računarske tehnologije prilikom realizacije nastave matematike.					
2. Računarske tehnologije primenjujete u dovoljnoj meri u nastavi matematike.					
3. Vaša škola je adekvatno opremljena za realizaciju nastave primenom računarskih tehnologija.					
4. Zainteresovani ste za obuke o primeni računarskih tehnologija u nastavi matematike.					
5. Izrađujete digitalne nastavne materijale.					
6. Za pripremu nastave koristite internet, WEB alate i prilagođene obrazovne softvere.					
7. U radu ste koristili/koristite softver *GeoGebra*.					

Četvrti deo upitnika se odnosio na stavove prema interdisciplinarnoj nastavi i načinima njene realizacije (Tabela 5.3.).

Tabela 5.3. *Četvrti deo upitnika*

4. REALIZACIJA INTERDISCIPLINARNE NASTAVE	**Potpuno se slažem**	**Uglavnom se slažem**	**Delimično se slažem**	**Uglavnom se**	**Uopšte se ne slažem**
1. Učenicima ukazujete na primere primene matematike u drugim naučnim disciplinama.					
2. Pri izradi priprema sarađujete i konsultujete se sa kolegama iz stručnih veća za druge predmete.					
3. Realizovali ste časove zajedno sa nastavnicima drugih predmeta pri obradi zajedničkih tema.					
4. Znanja učenika bi bila kvalitetnija ukoliko bi se nastava realizovala primenom interdisciplinarnog pristupa.					
5. Postoje mogućnosti za realizaciju interdisciplinarne nastave u Vašoj školi (prostor, oprema i vremenski okvir).					
6. Primena računarskih tehnologija bi doprinela uspešnijoj realizaciji interdisciplinarnog pristupa nastavi.					

U drugom, trećem i četvrtom delu upitnika je za rangiranje odgovora primenjena petostepena Likert-ova skala (Potpuno se slažem-5, Uglavnom se slažem-4, Delimično se slažem-3, Uglavnom se ne slažem-2, Uopšte se ne slažem-1).

U petom delu upitnika nastavnicima je pružena prilika da iznesu svoje subjektivno mišljenje i potrebe vezane za unapređenje nastave matematike (Tabela 5.4.).

Tabela 5.4. *Peti deo upitnika*

5. PREDLOZI ZA UNAPREĐENjE NASTAVE MATEMATIKE
1. Koja vrsta aktivnosti/obuke Vam je potrebna da bi unapredili Vaš rad i Vaše kompetencije?
2. Kakva vrsta aktivnosti/obuke Vam je potrebna iz oblasti primene računarskih tehnologija u nastavi matematike? Za primenu kog softvera u nastavi matematike bi želeli da se obučite?
3. Da li bi Vam bila od koristi pomoć, i koje vrste, za pripremu učenika za polaganje završnog ispita/maturskog ispita iz matematike u osnovnoj/srednjoj školi?
4. Da li bi želeli da se realizuje aktivna saradnja svih nastavnika matematike osnovnih i srednjih škola na teritoriji Grada Zrenjanina?
5. Koji vid saradnje nastavnika matematike na teritoriji Grada Zrenjanina bi, po Vašem mišljenju, bio najefikasniji i najproduktivniji (ugledni časovi, razmena planova, organizovanje okruglih stolova,...)?
6. Na koji način bi savetnici-spoljni saradnici mogli da doprinesu unapređenju nastave matematike, Vaših kompetencija za nastavu i učenje i saradnji sa drugim kolegama?

5.6. ANALIZA I DISKUSIJA REZULTATA ANKETE

U okviru istraživanja o stavovima nastavnika je anketirano ukupno 26 nastavnika matematike sa terotorija Grada Zrenjanina (11 nastavnika matematike u osnovnoj školi, 8 iz srednjih škola i 7 iz Gimnazije).

Anketirani nastavnici su u proseku aktivno proveli 15 godina u nastavi.

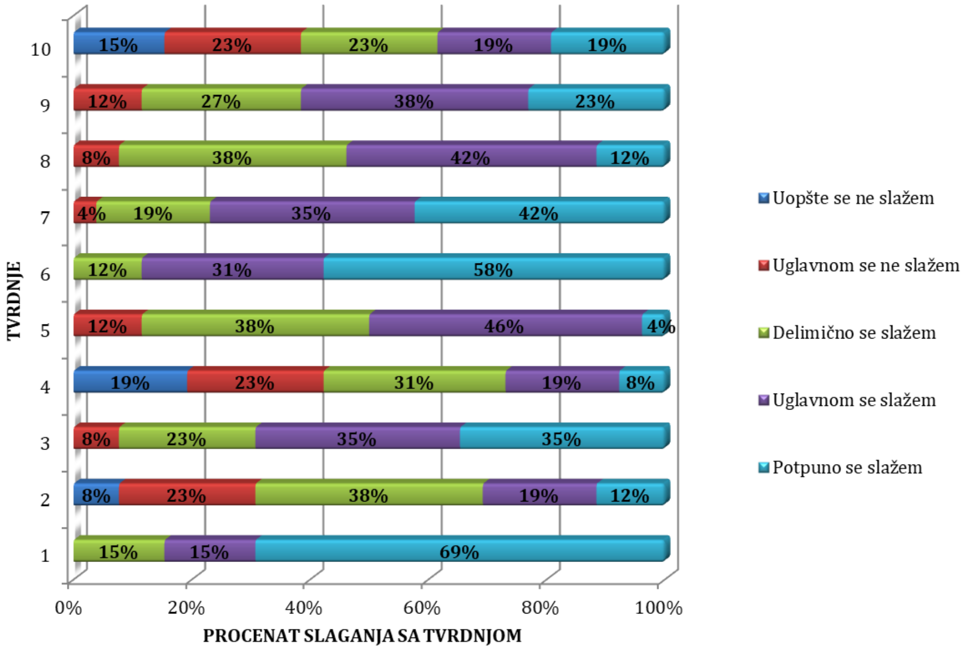
Rezultati drugog, trećeg i četvrtog dela upitnika (stepen slaganja je rangiran po petostepenoj Likert-ovoj skali) su obrađeni i prikazani po Heiberger & Robbins (2014).

Drugi deo upitnika se sastojao od 10 tvrđenja a procenat stepena slaganja anketiranih nastavnika sa svakom tvrdnjom pojedinično je prikazan na grafikonu 5.1.

Analizom rezultata prikazanih na grafikonu 5.1. može se izvesti zaključak da su najveći stepen slaganja (69%) nastavnici iskazali kod prve tvrdnje (postoji aktivna saradnja članova stručnog veća), kod šeste i sedme tvrdnje (58% i 42%, respektivno) koje se odnose na potrebu za stručnim obukama i njihovom doprinosu realizaciji nastave.

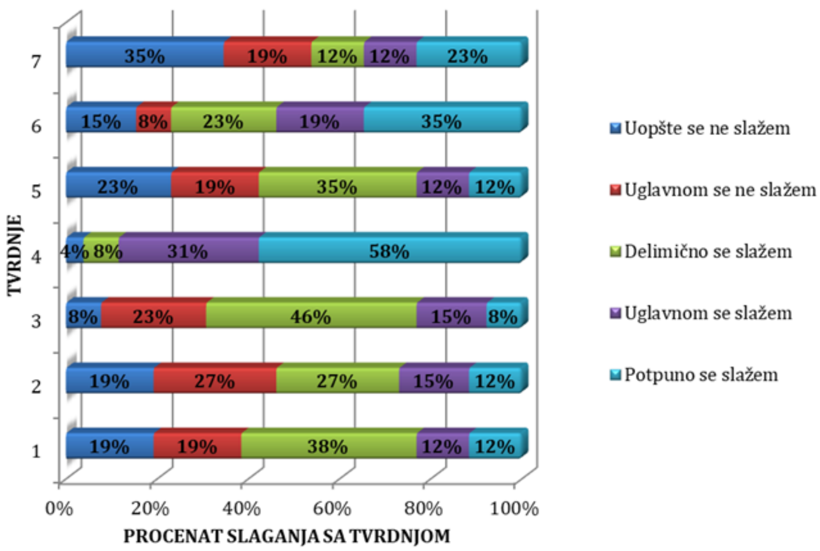
Nastavnici se uglavnom slažu sa petom, osmom i devetom tvrdnjom (46%, 42% i 38%, respektivno) iz čega se može zaključiti da su nastavnicima potrebna stručna usavršavanja, ali prilagođena i usaglašena sa potrebama nastave i nastavnika.

Najveći stepen neslaganja (uopšte i uglavnom) nastavnici su iskazali sa četvrtom, desetom i drugom tvrdnjom (42%, 38% i 31%, respektivno), što znači da ne postoji aktivna saradnja nastavnika matematike sa kolegama iz drugih škola, kao i da nastavnici smatraju da ne rade dovoljno na unapređenju nastave i ne učestvuju u projektima koji promovišu nauku i matematiku.



Grafikon 5.1. *Procenat slaganja sa tvrdnjamaizdrugog dela upitnika*

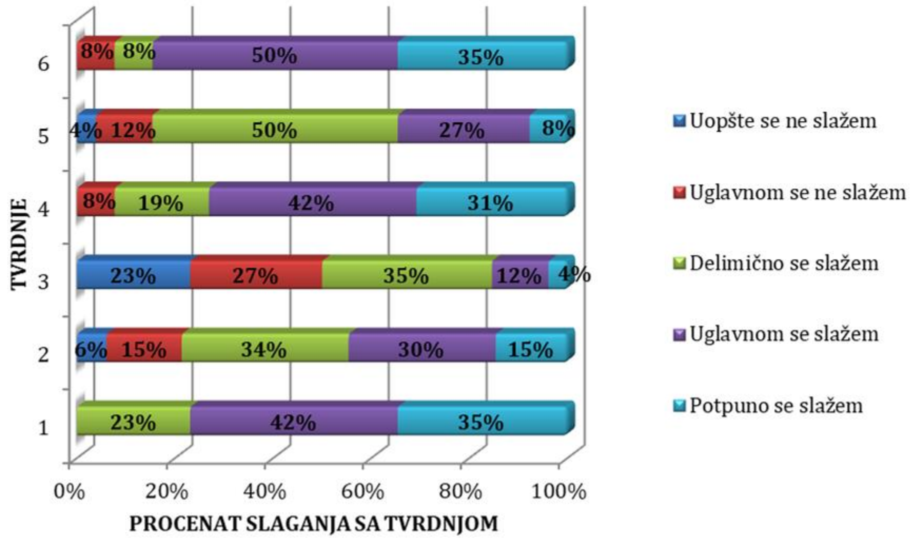
Treći deo upitnika se sastojao od sedam tvrđenja vezanih za primenu računarskih tehnologija u nastavi matematike. Procenat slaganja sa tvrdnjama iz trećeg dela upitnika je prikazan na grafikonu 5.2.



Grafikon 5.2. *Procenat slaganja sa tvrdnjama iz trećeg dela upitnika*

Analizirajući rezultate ovog dela upitnika, važno je napomenuti da su nastavnici opet najveći stepen slaganja izrazili sa tvrđenjem da su zainteresovani za obuke o primeni računarskih tehnologija u nastavi matematike (četvrto tvrđenje, 58%). Sa druge strane, nastavnici se u najvećoj meri ne slažu sa sedmim i drugim i petim tvrđenjem (da primenjuju računarske tehnologije u nastavi matematike i izrađuju digitalne nastavne materijale).

Rezultati analize četvrtog dela upitnika koji je ispitivao stav nastavnika prema interdisciplinarnoj nastavi (šest tvrđenja) su prikazani na grafikonu 5.3.



Grafikon 5.3. *Procenat slaganja sa tvrdnjama iz četvrtog dela upitnika*

Nastavnici se u najvećoj meri slažu sa šestim, prvim i četvrtim tvrđenjem (potpuno i uglavnom se slažu ukupno 85%, 77% i 73%, respektivno) što ukazuje na to da su nastavnici prepoznali značaj interdisciplinarnosti i povezivanja sadržaja iz različitih oblasti.

Najveći stepen neslaganja je sa trećim tvrđenjem (uopšte i uglavnom se ne slaže 50% nastavnika) što navodi na zaključak da bi trebalo intenzivirati saradnju nastavnika matematike sa nastavnicima drugih predmeta, u cilju bolje realizacije interdisciplinarne nastave i jačanja međupredmetnih kompetencija.

U petom delu upitnika nastavnici su imali priliku da navedu predloge za unapređenje nastave matematike i svojih kompetencija. Dve trećine anketiranih nastavnika (69%) je iznelo svoje predloge za unapređenje nastave matematike i iskazalo potrebe za stručnim usavršavanjem. Bez predloga je bilo 31% nastavnika.

Analizom predloga nastavnika, utvrđeno je da su svi nastavnici (100% nastavnika koji su nešto predložili u petom delu upitnika) iskazali potrebu za obukama, a od toga 67% nastavnika je predložilo obuke iz oblasti metodike nastave matematike, odnosno za primenu novih metodskih pristupa. Veliki procenat nastavnika (87% nastavnika koji su nešto predložili u petom delu upitnika) smatra da su im neophodne obuke za primenu računarskih tehnologija u nastavi, ali nisu navodili za koje softvere konkretno. Intenziviranje saradnje sa nastavnicima matematike iz drugih škola predlaže 61% nastavnika. Nastavnici takođe predlažu da se saradnja sa kolegama realizuje putem održavanja uglednih časova i okruglih stolova gde bi mogli da razmenjuju svoja iskustva iz nastave.

Na osnovu rezultata ankete, uzimajući u obzir mišljenja i predloge nastavnika matematike, osmišljen je program obuka za unapređenje njihovih kompetencija. Fokus obuka je bio na upoznavanju nastavnika sa novim metodskim pristupima koji se koriste u savremenoj nastavi matematike i načinima njihove primene. Posebna pažnja je posvećena pristupima koji jačaju međupredmetne kompetencije i koji su bazirani na primeni matematičkog modelovanja.

Nastavnici su obučavani i za primenu računarskih tehnologija u nastavi matematike. U okviru sprovedenih obuka su upoznati sa softverom *GeoGebra*, korišćenjem i izradom dinamičkih *GeoGebra* nastavnih materijala i načinima njihove implementacije u nastavu matematike.

U cilju podsticanja saradnje nastavnika matematike na teritoriji Grada Zrenjanina, osnažena je komunikacija između nastavnika i organizovani su okrugli stolovi radi razmene nastavnih materijala, literature i iskustava iz nastavnog procesa.

6. ZAKLJUČAK

Matematika – to je jezik kojim govore sve prirodne nauke. Ne postoji nijedna matematička oblast, ma kako ona apstraktna bila, koja se ne bi mogla primeniti na pojave realnog sveta.

Nikolai Lobachevsky(1793-1856)

Novi pravci razvoja savremenog društva su usmereni ka inovacijama u nauci i tehnici koje bi unapredile sve aspekte života ljudi. Put ka inovacijama u bilo kojoj oblasti neizostavno obuhvata povezivanje i saradnju stručnjaka različitih profila. Da bi se saradnja stručnjaka omogućila, neophodno je da oni komuniciraju jezikom koji svi oni razumeju a to je – matematika. Kao nauka, matematika je dugo nosila epitet nauke koja je rezervisana samo za "odabrane", odnosno za visoko inteligentne ljude koji jedini mogu da razumeju apstraktne teorije kojima matematika obiluje. Promena paradigme u obrazovanju, koja se ogleda u tome da je krajnji produkt obrazovnog procesa funkcionalno znanje, doprinela je razvoju drugačijeg stava prema matematici kao nauci primenljivoj u svim aspektima života (Ellis & Berry III, 2005). Na taj način, matematika je polako počela da zauzima mesto koje joj oduvek i pripada, mesto nauke koja je prisutna u svim aspektima ljudskog života i koja doprinosi razvoju svih naučnih disciplina.

Savremena didaktika i metodika nastave matematike teže ka razvoju novih metodskih pristupa koji bi omogućavali realizaciju procesa nastave i učenja koji bi rezultovali funkcionalnim znanjem. Moderni sistem obrazovanja teži ka pronalaženju načina za podučavanje učenika/studenata da uče i orjentišu svoja stečena znanja ka rešavanju praktičnih problema iz realne prakse (Gordon, 2004).

Matematičko modelovanje zbog svoje osobine da povezuje realne situacije sa njihovom matematičkom reprezentacijom ima veliku ulogu i od ogromnog je značaja za obrazovanje. Tendencije razvoja obrazovanja su usmerene ka integraciji matematičkog modelovanja u nastavni proces i ka osmišljavanju novih metodskih pristupa koji bi bili bazirani na ovom procesu. Problematikom implementacije matematičkog modelovanja u nastavu matematike su se bavili mnogi autori, i njihov zajednički stav je da modelovanje može da doprinese boljim rezultatima kognitivnih procesa, a posebno da utiče na razvoj naprednog matematičkog mišljenja kod učenika/studenata (Blum *et al.*, 2007; Hamson, 2003; Kaiser & Sriraman, 2006; Stillman *et al.*, 2007).

Visokoškolska nastava matematike takođe sve više teži ka poučavanju studenata da svoja stečena znanja aktivno primene na rešavanje problema iz realne prakse. Razvijanje sposobnosti za celoživotno učenje, stavljanje akcenta na konstruktivizam, integraciju znanja iz različitih oblasti i jačanje međupredmetnih kompetencija jesu neki od najvažnijih ishoda visokoškolske nastave matematike. Kod visokog strukovnog obrazovanja, ovi ishodi su još naglašeniji, s obzirom da je strukovno obrazovanje namenjeno školovanju stručnjaka koji će svoja znanja i stečene veštine koristiti za rešavanje realnih problema i aktivno ih primenjivati u svojoj radnoj praksi. Visokoškolsku nastavu matematike u strukovnom obrazovanju bi zbog toga trebalo orjentisati ka integraciji realnih primera u nastavu matematike i drugih predmeta i koncipirati je tako, da se studentima ukaže na načine kako mogu svoje znanje da učine funkcionalnim. U cilju što efektnije realizacije navedenih aspekata nastave i rešavanja nekih od uočenih problema u visokoškolskoj nastavi matematike, neophodno je primeniti adekvatne metodske pristupe i oblike nastave. Analiza nastave, metoda i nivoa učenja koje je neophodno dostići u nastavnom procesu je pokazala da je od ključne važnosti kombinacija principa na kojima nastava treba da bude zasnovana, kao i metodski pristupi koji se koriste.

Istraživanje koje je predstavljeno u ovoj disertaciji je zasnovano na principima interdisiplinarne, integrativne, konstruktivističke i aktivne nastave realizovane primenom matematičkog modelovanja. Ideja istraživanja je bila da se u visokoškolsku nastavu matematike na nivou strukovnih studija uvede novi metodski pristup koji bi bio utemeljen na matematičkom modelovanju i koji bi objedinjavao pomenute principe nastave.

Diferencijalni račun, odnosno izvod funkcije, je izabran za temu istraživanja zbog svoje velike primene u svim aspektima nauke i života, i za buduće strukovne inženjere je veoma važno da pravilno usvoje pojam izvoda funkcije i da ga razumeju, da bi znali da ga adekvatno primene na rešavanje problema iz profesionalne prakse. Tehničko – tehnološka oblast u visokom strukovnom obrazovanju podrazumeva obradu prirodnih procesa, manipulaciju sa njima, kao i usavršavanje tehnika i metoda za iskorišćavanje njihovih resursa, a izvod funkcije se u velikoj meri koristi za reprezentaciju prirodnih procesa i zbog toga je odabran za temu istraživanja koje će biti realizovano primenom matematičkog modelovanja.

Prva faza istraživanja je bila posvećena analizi i kritičko komparativnom pregledu literature iz oblasti didaktike, metodike nastave matematike, matematičkog modelovanja, njegovoj primeni u nastavnoj praksi i obradi pojmova diferencijalnog računa. Na osnovu izvedenih zaključaka osmišljen je način za implementaciju modelovanja u nastavni proces i kreirani su realni problemi prigodni za obradu pojma izvoda funkcije i njegove primene koji će biti modelovani u okviru nastave.

Prvi ciklus istraživanja je realizovan u periodu 2009-2014. godine. U istraživanje je bilo uključeno četiri generacije studenata prve godine strukovnih studija (ukupno 555 studenata) koji su za potrebe empirijskog dela istraživanja bili podeljen u dve grupe, eksperimentalnu i kontrolnu. Obe grupe su imale približno jednak broj studenata. Grupe su bile ujednačene po vrsti srednje škole koju su završili (četvorogodišnja škola ili trogodišnja srednja stručna škola), broju godina koliko su slušali matematiku u srednjoj školi i prosečnoj oceni iz matematike iz srednje škole. S obzirom da su studenti koji su učestvovali u istraživanju slušali različite kurseve iz matematike u srednjoj školi, obe grupe studenata (eksperimentalna i kontrolna) su pre početka eksperimentalnog programa upoznate sa izvodom funkcije i njegovim osobinama.

Metodski pristup zasnovan na matematičkom modelovanju je najpre osmišljen, sadržaji su metodički transformisani u skladu sa pravilima procesa matematičkog modelovanja a zatim je implementiran u nastavu matematike i primenjen za obradu teme Izvod funkcije i njegove primene sa studentima eksperimentalne grupe. Za proces modelovanja je odabran ciklus modelovanja po Stillman *et al.* (2007) koji se najčešće primenjuje u nastavi. Sa studentima kontrolne grupe je obrađivana ista nastavna tema po unapred utvrđenom planu i programu, ali su za njenu obradu korišćeni tradicionalni metodski pristupi.

Za ispitivanja postignuća studenata su od instrumenata korišćena dva testa koji su činili deo redovne provere znanja za predmete Matematika/Matematika 2 u okviru kojih je sprovedeno istraživanje. Prvi test (kolokvijum) je realizovan kao test višestrukog izbora jedan mesec nakon završetka eksperimentalnog programa i ispitivao je znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene. Test višestrukog izbora je odabran da bi se utvrdila i mogućnost primene ovakvih testova za ispitivanje znanja studenata u visokoškolskoj nastavi matematike. Poređenjem postignuća studenata na kolokvijumu statistički je potvrđeno, sa stepenom sigurnosti od 99% da je eksperimentalna grupa ostvarila značajno bolje rezultate u odnosu na kontrolnu grupu studenata. Takođe, primena testa višestrukog izbora je pozitivno ocenjena i od strane studenata i od strane nastavnika i od tada je ovakav tip testa uvršten u redovan način provere znanja studenata.

Drugi test je predstavljao finalni ispit koji studenti polažu nakon odslušanog kursa iz Matematike/Matematike 2, realizovan je dva meseca nakon završetka eksperimentalnog programa. S obzirom da je ispit obuhvatao celokupno gradivo predmeta Matematika/Matematika 2, obrađivani su samo delovi testa koji su se odnosili na izvod funkcije i njegove primene. Rezultati statističke analize su i u ovom slučaju pokazali i potvrdili postojanje značajne razlike u postignućima studenata eksperimentalne i kontrolne grupe, u korist eksperimentalne grupe. Eksperimentalno istraživanje je pokazalo i pozitivan uticaj realizacije nastave primenom metodskog pristupa baziranom na matematičkom modelovanju na učenje sadržaja iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene. Takođe, istraživanje je pružilo važne informacije koje su kasnije upotrebljene za dalja unapređenja nastave i metodskih pristupa zasnovanih na modelovanju radi ostvarivanja boljih rezultata koji se tiču znanja, učenja i izučavanja sadržaja iz oblasti izvoda funkcije.

Da bi zaokružili eksperimentalni deo istraživanja i obuhvatili sve aspekte postignuća i doprinosa primene matematičkog modelovanja, sa studentima eksperimentalne grupe je sprovedena i anketa. Cilj ankete je bio da se utvrdi da li realizacija nastave primenom novih metodskih pristupa utiče na stavove studenata prema matematici, primeni novih tehnologija, uvođenju inovacija u nastavu matematike, kao i prema korisnosti matematike i njenoj ulozi u rešavanju problema iz realne prakse. Anketu je osmislio i kreirao autor disertacije i realizovana je sa studentima eksperimentalne grupe. Studenti eksperimentalne grupe su anketu najpre popunjavali pre početka eksperimentalnog programa, a zatim su je popunjavali još jednom, nakon završetka programa. Upoređivanjem rezultata ankete, utvrđeno je da je kod studenata došlo do promene stavova, u smislu da su studenti nakon realizacije eksperimentalnog programa uvideli dobre strane inovativnih metodskih pristupa i prepoznali njihov doprinos nastavi i učenju. Anketa je takođe pokazala da su studenti, nakon što su imali prilike da uče primenom matematičkog modelovanja, proširili svoja shvatanja o matematici i njenoj korisnosti u realnom i profesionalnom životu.

Analizom rezultata prvog ciklusa istraživanja, a naročito uzimajući u obzir tok eksperimentalnog programa vezanog za implementaciju matematičkog modelovanja u nastavni proces i uočene prednosti, ali i nedostatke i teškoće tokom njegove realizacije, osmišljen je novi pristup matematičkom modelovanju. Pristup matematičkom modelovanju koji je predložen u ovom radu kao novinu uvodi računarske tehnologije u proces modelovanja i originalni je doprinos disertacije.

Računarske tehnologije su integrisane u novi pristup matematičkom modelovanju iz dva razloga. Jedan razlog je već potvrđen pozitivan uticaj grafičkih reprezentacija, animacija i simulacija koje je moguće realizovati uz pomoć računarskih tehnologija na izučavanje matematičkih sadržaja i uspešno realizovanje kognitivnih aktivnosti u toku procesa učenja (Artigue, 2013; Brom *et al.*, 2017; Hohenwarter *et al.*, 2008; Mayer & Moreno, 2002). Drugo, matematičko modelovanje pojačano računarskim tehnologijama je otvorilo nove mogućnosti za svoju primenu u nastavi matematike, jer proces modelovanja koji je inače zahtevan, uz računarske tehnologije je postao jednostavniji za primenu i odvijao se mnogo tečnije, bez prepreka koje se inače javljaju primenom njegove tradicionalne reprezentacije. Kombinovanjem računarskih tehnologija sa matematičkim modelovanjem je uspostavljen i didaktički tetraedar, odnosno izgrađena je povratna veza između svih učesnika nastavnog procesa: studenata, matematike, računarskih tehnologija i nastavnika.

Novi pristup matematičkom modelovanju koji je ilustrovan zvezdastim dijagramom, je korisnicima pružio i mogućnost izbora računarskih tehnologija koje će koristiti za realizaciju procesa modelovanja, u zavisnosti od prirode problema koji se modeluje. Za potrebe ovog istraživanja je izabran softver *GeoGebra* zbog svoje dinamičke prirode i mogućnosti reprezentacije različitih matematičkih koncepata i sadržaja. Sve animacije, simulacije i grafičke i algebarske reprezentacije izvoda funkcije i njegovih osobina koje su korišćene u procesu modelovanja realizovanom u okviru drugog ciklusa istraživanja napravljene su u *GeoGebra*-i.

Novi pristup matematičkom modelovanju ima originalnu osobinu koja se ogleda u mogućnosti prelaska iz jedne u drugu fazu ne prateći pri tome obavezno unapred utvrđeni ciklički redosled. Prelazi iz tradicionalnih pprocesa modelovanja su transformisani u nove prelaze S-tipa koji su uvedeni su radi jednostavnije realizacije modelovanja, prvenstveno kada se ono primenjuje u nastavne svrhe. Aktivnosti na kojima su zasnovani prelazi S-tipa pružaju mogućnost započinjanja modelovanja iz bilo koje faze, preskakanja određenih faza, povratka i napretka u bilo koju fazu modelovanja. Prelazi S-tipa su osmišljeni da bi se omogućila jednostavnija primena modelovanja u nastavi pri savladavanju matematičkih sadržaja i da se svim studentima, bez obzira na nivo njihovog matematičkog znanja, sklonosti i veština, pruži prilika da primene i aktivno koriste matematičko modelovanje.

Drugi ciklus eksperimentalnog istraživanja je realizovan školske 2016/2017. godine sa 204 studenta prve godine Visoke tehničke škole strukovnih studija u Zrenjaninu. Studenti su bili podeljeni u dve paralelne grupe, ujednačene na osnovu postignuća na delu prijemnog ispita koji je ispitivao znanja studenata iz matematike. Obe grupe studenata su najpre upoznate sa izvodom funkcije i njegovim primenama, a zatim je realizovan eksperimentalni program.

U drugom ciklusu istraživanja matematičko modelovanje je sprovedeno sa obe grupe studenata, eksperimentalnom i kontrolnom, i obe grupe studenata su modelovale iste situacije iz realnog sveta. Situacije i njima pripadajući realni problemi su odgovarali onima iz prvog ciklusa istraživanja, ali su izvršene manje modifikacije u cilju prevazilaženja nekih prethodno uočenih nedostataka.

Sa eksperimentalnom grupom studenata prvi izvod funkcije i njegove primene je obrađen primenom metodskog pristupa baziranog na novom principu matematičkog modelovanja u

GeoGebra okruženju koji je predložen u disertaciji. Kontrolna grupa studenata je takođe primenjivala matematičko modelovanje, ali je korišćen tradicionalni ciklus modelovanja kao u prvom ciklusu istraživanja bez primene računarskih tehnologija.

Jedna od novina u drugom ciklusu istraživanja se ogledala u zadavanju situacija iz realnog sveta putem video i grafičkih materijala, da bi se studenti, pored primene matematičkog modelovanja, poučili i sagledavanju situacija iz realnog sveta i uočavanju mogućih realnih problema koji iz njih proizilaze. Video i grafički zadate situacije iz realnog sveta su primenjene u procesu modelovanja korišćenom pri obradi primene izvoda na ispitivanje monotonosti, ekstremnih vrednosti i konveksnosti i konkavnosti funkcije.

Nivo uticaja primene novog pristupa modelovanju u *GeoGebra* okruženju na kvalitet stečenih znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene, kao i razlike u postignućima studenata koji su primenjivali novi pristup i onih koji su primenjivali tradicionalni pristup modelovanju je ispitan primenom dva testa koji su kreirani za tu svrhu.

Prvi test su studenti radili dve nedelje nakon završetka eksperimentalnog programa i on je ispitivao znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene. Svaki zadatak sa prvog testa je bio zadat i grafički da bi se izmerio uticaj novog pristupa na razumevanje grafičke i algebarske reprezentacije izvoda funkcije i njihove povezanosti. Statistički je potvrđeno, sa stepenom sigurnosti od 99% da je eksperimentalna grupa ostvarila značajno bolje rezultate na prvom testu u odnosu na kontrolnu grupu studenata. Veličina efekta je takođe izmerena, i njegova srednja vrednost po Cohen (1988) je potvrdila da je eksperimentalni faktor (novi pristup modelovanju u *GeoGebra* okruženju) doprineo boljim rezultatima eksperimentalne grupe studenata.

Finalni test (ispit) je bio drugi instrument koji je ispitivao postignuća studenata. Zadaci za finalni test su osmišljeni kao kombinacija tradicionalnih zadataka za ispit (ispitivanje toka funkcije) i novih realnih problema koji se rešavaju primenom matematičkog modelovanja. I na finalnom testu statistički je potvrđeno da su studenti eksperimentalne grupe ostvarili značajno bolje rezultate u odnosu na studente kontrolne grupe, uz srednju vrednost veličine efekta.

Na osnovu rezultata istraživanja realizovanih u oba ciklusa, potvrđena je opšta hipoteza postavljena u disertaciji: *primena metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju i na matematičkom modelovanju kombinovanom sa računarskim tehnologijama, ima pozitivan uticaj na kvalitet stečenih znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene, kao i na stvaranje pozitivnog stava prema matematici i njenoj korisnosti.*

Disertacija je teorijsko – eksperimentalnog karaktera i u skladu sa tim su i njeni ciljevi i dorinosi savremenoj didaktici i metodici nastave matematike.

Teorijski doprinos disertacije se ogleda u kritičkom komparativnom pregledu savremene literature i dostignuća iz oblasti metodike nastave matematike sa naročitim akcentom na primenu matematičkog modelovanja u nastavi matematike na svim nivoima obrazovanja. Napravljena je analiza trenutnog stanja u visokoškolskoj nastavi matematike i ispitane su tendencije njenog daljeg razvoja. Posmatrani su i poređeni pristupi uvođenju pojma izvoda funkcije u nastavu matematike koji su bili korišćeni u različitim epohama i na različitim nivoima obrazovanja i na osnovu tih saznanja su osmišljeni novi metodski pristupi bazirani na principima matematičkog modelovanja. Doprinos disertacije se ogleda i u predloženoj kombinaciji različitih principa na kojima se može zasnovati nastava matematike u cilju postizanja boljih rezultata učenja i efekata nastavnog procesa.

Naučni doprinos disertacije je u njenom eksperimentalnom delu koji se ogleda najpre u implementaciji metodskog pristupa zasnovanog na matematičkom modelovanju u visokoškolsku nastavu matematike, a zatim i osmišljavanju originalnog pristupa procesu matematičkog modelovanja u računarskom okruženju ilustrovanom zvezdastim dijagramom. Novi pristup sa jedne strane predstavlja inovaciju procesa modelovanja, a sa druge strane nudi mogućnost jednostavnije integracije modelovanja u nastavu matematike i njegovu efektniju realizaciju u procesu učenja.

Takođe, jedan od doprinosa disertacije je i implementacija računarskih tehnologija u proces matematičkog modelovanja, a samim tim i osavremenjavanje nastave matematike i učenje primenom vizuelno – dinamičkih sadržaja realizovanih uz pomoć računara i odgovarajućih softvera.

Praktični doprinos disertacije se ogleda u osmišljenim situacijama iz realnog sveta i kreiranim pratećim nastavnim materijalima koji su korišćeni u procesu modelovanja. Svi materijali koji su kreirani su primenljivi za obradu pojma izvoda funkcije i njegove primene, kako u nastavi matematike na visokoškolskom nivou, tako i u srednjim školama u skladu sa nastavnim planom i programom.

Disertacija je svoj doprinos dala i unapređenju kompetencija nastavnika za matematičko modelovanje i njegovu primenu u nastavnoj praksi. Na uzorku od 26 nastavnika matematike osnovnih i srednjih škola na teritoriji Grada Zrenjanina je sagledana trenutna situacija koja se tiče realizacije nastave i unapređenja kompetencija nastavnika. Nastavnicima je pružena prilika da ukažu na probleme sa kojima se susreću i daju konstruktivne predloge za unapređenje nastave, saradnje i ličnih kompetencija. Uloga nastavnika sa stanovišta realizacije nastave a naročito njenog usavršavanja i unapređivanja je istaknuta u ovoj disertaciji, i osmišljen je program obuka nastavnika za primenu savremenih metodskih pristupa i matematičkog modelovanja u nastavi. Od naročitog značaja je i doprinos koji se ogleda u predlozima za unapređivanje matematičkih kurikuluma koji bi za ishod imali formiranje kompetencija, umenja i veština za primenu matematike u svakodnevnom životu i rešavanje problema iz realne prakse.

Budućnost matematičkog modelovanja u nastavi matematike je izvesna. Funkcionalno znanje kao jedan od ishoda modernog obrazovanja nameće potrebu za primenom matematičkog modelovanja u svim sferama obrazovanja i njegovo dalje usavršavanje u cilju kreiranja na njemu baziranih što efikasnijih metodskih pristupa. U tu svrhu, potrebno je produbiti znanja i sprovesti dalja istraživanja o procesu matematičkog modelovanja i mogućnostima za njegove dalje modifikacije i prilagođavanje nastavnom procesu.

Rezultati prikazani u ovoj disertaciji su potvrdili pozitivan uticaj računarskih tehnologija na realizaciju procesa matematičkog modelovanja u nastavi matematike i postignuća studenata u učenju i razumevanju sadržaja koji su obrađeni primenom takvog pristupa, te bi stoga jedan od daljih pravaca razvoja trebalo usmeriti ka usavršavanju načina integracije računarskih tehnologija u proces modelovanja i nastavu matematike koja se na taj način realizuje.

Naročit značaj bi imala i istraživanja koja bi ispitivala stavove nastavnika o primeni matematičkog modelovanja u nastavi, posebno njihove lične aspiracije prema metodskim pristupima zasnovanim na modelovanju u smislu potrebne angažovanosti, zahteva koji se tiču kreativnosti nastavnika, spremnosti i motivisanosti za nastavni rad.

Istraživanja sprovedena i prikazana u okviru ove disertacije mogu predstavljati bazu za dalja ispitivanja načina za unapređenje nastave matematike, rezultata učenja i poučavanja primenom matematičkog modelovanja na svim nivoima obrazovanja. Rezultati prikazani u disertaciji mogli bi podstaći rad istraživača i nastavnika ka daljem usavršavanju metodskih pristupa baziranih na matematičkom modelovanju i primeni računarskih tehnologija u realizaciji nastave matematike i drugih nauka, unapređenju efikasnosti nastave, ishoda učenja, a naročito ka razvoju kompetencija učenika/studenata za prepoznavanje i rešavanje problema iz realne prakse.

LITERATURA

Ärlebäck, J., B. (2009). Mathematical modelling in upper secondary mathematics education in Sweden: A curricula and design study. PhD Thesis, Linköping University, Department of Mathematics, Linköping, Sweden.

Artigue, M. (2013). Teaching mathematics in the digital era: Challenges and perspectives. In Y. Baldin (Ed.), *Annais di VI HTEM* (pp. 1-20), Universidado Federal de Sao Paolo.

Arzarello, F., Ferrara, F., Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics Applications*, 31 (1), 20-30.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301–317.

Barber, M., & Mourshed, M. (2007). *How the world's best-performing schools come out on top*. London: McKinsey.

Baumslag, B. (2000). *Fundamentals of Teaching Mathematics at University Level*. Imperial College Press, London.

Bautista, A., Wilkerson-Jerde, M. H., Tobin, R. G., & Brizuela, B. M. (2014). Mathematics teachers' ideas about mathematical models: A diverse landscape. *PNA*, 9(1), 1-28.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(6), 763–777.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, 10(1), 53-70.

Blockley, D., & Woodman, N. (2002). Civil/structural engineers and maths: The changing relationship. The Structural Engineer, 80(7), 14-15.

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives on mathematical modelling in educational research – categorising the TSG21 papers. In M. Blomhøj, & S. Carreira, (Eds.), Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education in Monterrey,* Mexico, 2008, 1-18.

Bloom, B., S. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals, Handbook 1: Cognitive Domain.* New York:Longman.

Blum, W. (1993). Mathematical modeling in mathematics education and instruction. In T. Breiteig, I. Huntley, & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics context* (pp. 3-14), Chichester, UK:Hoorwood.

Blum, W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (pp. 15-31), Springer Dordrecht Heidelberg London New York.

Blum, W., & Ferri, R., B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Vol. 1, No. 1, 45-58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling* (pp. 222-231), Chichester, England: Horwood Publishing Limited.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in mathematics education, The 14th ICMI study*. The new ICMI Study Series, Vol. 10, New York, NY: Springer.

Blum, W., Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications and links to other subjects – State. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 36-38.

Bonwell, C. C., & Eison, J. A. (1991). *Active Learning: Creating Excitement in the Classroom, ASHEERIC Higher Education Report No. 1*. George Washington University, Washington, DC.

Bray, A., & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, Vol. 114, 255-273.

Brom, C., Děchtěrenko, F., Frollová, N., Stárková, T., Bromová, E., & D'Mello, S. K. (2017). Enjoyment or involment? Affective-motivational mediation during learning from a complex computerized simulation. *Computers & Education*, Vol. 114, 236-254.

Brown, J. P. (2015). Visualisation Tactics for Solving Real World Tasks. In G. Stillman, W. Blum, & M. Salett Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice:Cultural, Social and Cognitive Influences, Series: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 431-442), Springer International Publishing Switzerland.

Carr, M., Bowe, B., & NÍ Fhloinn, E. (2013). Core skills assessment to improve mathematical competency. *European Journal of Engineering Education*, 38(6), 608-619.

Chiu, T. K. F. & Churchill, D. (2015). Exploring the characteristics of an optimal design of digital materials for concept learning in mathematics: Multimedia learning and variation theory. *Computers & Education*, Vol. 82, 280-291.

Cohen, J. (1988). Statistical power analysis for the behavioural sciences (2nd Ed.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Dale, E. (1969). *Audio-Visual Methods in Teaching*. (3rd Edition), Holt, Rinehart & Winston, New York.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement: A review of state policy evidence. *Educational Policy Analysis Archives*, Vol 8(1), 1-44.

Derry, S. J. (1989). Putting learning strategies to work. *Educational Leadership*, 47(5), 4-10.

Dick, T. P., & Edwards, B. S. (2008). Multiple representations and local linearity. *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*, 2, 255-276.

Doerr, H. M., & Lesh, R. A. (2003). A Modeling Perspective on Teacher Development. In R. A. Lesh, & H. M. Doerr (Eds), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 125-139), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ellis, M. W., & Berry III, R. Q. (2005). The Paradigm Shift in Mathematics Education: Explanations and Implications of Reforming Conceptions of Teaching and Learning. *The Mathematics Educator*, Vol. 15, No. 1, 7–17.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 451–474.

English, L. D. (2004). Mathematical modeling in the primary school. In Mathematics education for the third millennium: towards 2010, *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 1* (pp. 207–214), Sydney, Australia: MERGA.

English, L., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 263-285). New York, NY: Springer.

English, L.D. (Ed.) (2002). *Handbook of international research in mathematics education: Directions for the 21st century*. Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM: The international journal on mathematics education*, Volume 38, Issue 2, 86-95.

Ferri, R. B. (2012). Mathematical thinking styles and their influence on teaching and learning mathematics. *12th International Congress on Mathematical Education Program Name XX-YY-zz* (pp. abcde-fghij), COEX, Seoul, Korea.

Ferri, R. B., & Blum, W. (2009). Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences From a Modelling Seminar. In: V. Durand-Guerrier, S.Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *CERME 6: Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2046-2055), Institut national de recherche pédagogique, Lyon, France.

Ferri, R.B. (2013). *Mathematical Modelling in School and in Teacher Education- Conceptions and Examples*. Santiago de Chile. Retrived from http://seminarios.conectaideas.com/ppt/Rita_Borromeo_Ferri_2.pdf

Galbraith, P. L., Stillman, G., & Brown, J. (2010). Turning Ideas into Modeling Problems. Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies, *ICTMA 13, Section 4,* (pp. 133-144), New York: Springer

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM: The international journal on mathematics education*, Volume 38, Issue 2, 143-162.

Gavalcova, T. (2008). On Strategies Contributing to Active Learning. *Teaching Mathematics and its Applications*, Volume 27, No.3, 116-122.

Goos, M., Stillman, G., & Vale, C. (2007). *Teaching Secondary School Mathematics - Research and Practice for the 21 st Century*. Allen&Unwin.

Gordon, S. P. (2004). Mathematics for the new millennium. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 11(2), 37–44.

Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics magazine*, Vol. 56, No. 4, 195-206.

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (pp. 301-305), Springer Dordrecht Heidelberg London New York.

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: mathematics and children's experience. In W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, & H. W. Henn (Eds), *Modelling and applications in mathematics education* (pp.89-98), New ICMI Studies Series No. 10, New York: Springer.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57-72.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2009). The role of reversibility in the learning of the calculus derivative and antiderivative graphs. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81-88). Atlanta, GA: Georgia State University.

Hamson, M. J. (2003). The place of mathematical modeling in mathematics education. In S. J. Lamon, W. A. Parker, & K. Houston (Eds), *Mathematical modeling: A way of life: ICTMA 11*, (pp. 216-226), Chichester: Horwood Publishing.

Heiberger, R. M., Robbins, N. B. (2014). Design of Diverging Stacked Bar Charts for Likert Scales and Other Applications. *Journal of Statistical Software*, Volume 57, Issue 5, 1-32.

Heid, M. K. (2015). Learning Important Mathematics From Contextualization and Networked Collaboration. [A Review of the book *The SimCalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics* by S. J. Hegedus & J. Roschelle, (Eds.)],. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 46, Issue 1, 125-129.

Henn, H. W. (2007). Modelling in school - chances and obstacles. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph 3, 125-138

Henning, H., & Keune, M. (2004). Levels of Modelling Competencies. In: H. W. Henn, & W. Blum (Eds.), *ICMI Study 14: Application and Modelling in Mathematical Education*, Study Conference February 13-17, Pre-Conference Volume, (pp. 115-120), Universität Dortmund.

Hernández, M. L., Levy, R., Felton-Koestler, M. D., & Zbiek, R. M. (2016). Mathematical Modeling in the High School Curriculum, Mathematics Teacher, Vol. 110, No. 5, 336-342.

Hoffman, J., Johnson, C., & Logg, A. (2004). *Dreams of Calculus: Perspectives on Mathematics Education*, Springer.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. *TSG 16: Research and development in the teaching and learning of calculus ICME 11*, Monterrey, Mexico.

Hoyles, C. (2016). Engaging with mathematics in the digital age. *In Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 15: Trabajos de la XIV CIAEM* (pp. 225-236), Costa Rica: Universidad di Costa Rica.

Huetinck, L., & Munshin, S. (2007). *Teaching Mathematics in the 21st Century: Methods and Activities for Grades 6-12*, 3rd Edition, Pearson.

Ivić, I., Pešikan, A., i Antić, S. (2001). *Aktivno učenje 2 – Priručnik za primenu aktivnog metoda učenja/nastave*. Institut za psihologiju, Beograd.

Kaiser, G. (2005). Introduction to the Working Group "Applications and Modelling". *Proceedings of CERME 4 Working group 13: Applications and modelling* (pp. 1613-1623), Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Kaiser, G. (2007). Modelling and Modelling Compentencies in School. In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 110-119), Chichester: Horwood.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2006). Modelling in Lower Mathematics Secondary Classroom - Problems and Opportunities. In W. Blum, P. Galbraith, H. V. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 99-108), New ICMI Study Series, Vol 10. Springer, Boston, MA.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical Modelling as Bridge between School and University. *ZDM: The international journal on mathematics education*, Vol. 38, Issue 2, 196-208.

Kaiser, G., & Sriraman. B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM: The international journal on mathematics education,* Volume 38, Issue 3, 302-310.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *ZDM: The international journal on mathematics education*, Volume 38, Issue 2, 82-85.

Karadag, Z., & McDougal, D. (2009a). Visual explorative approaches to learning mathematics. In: s. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1630-1636), Atlanta, GA: Georgia State University.

Karadag, Z., & McDougall, D. (2009b). Dynamic worksheets: visual learning with the guidance of Polya. *MSOR Connections*, 9(2), 13-16.

Kolb, D. A. (2015). *Experiential learning: experience as the source of learning and development (2nd ed.).* Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Komis, V., Ergazaki, M., & Zogza, V. (2007). Comparing computer-supported dynamic modeling and 'paper & pencil' concept mapping technique in students' collaborative activity. *Computers & Education*, Vol. 49, 991-1017.

Kostić, V., Stankov-Jovanović, V., Sekulić, T., i Takači, Đ. (2016). Visualization of problem solving related to the quantitative composition of solutions in the dynamic GeoGebra environment. *Chemistry Education Research and Practice*, Vol. 17, 120-138.

Kraftwohl, D. R., Bloom, B. S., & Masia, B. B. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals, Handbook 2: Affective Domain*, New York: David McKay.

Lekić, Đ. (1977). *Metodologija pedagoškog istraživanja i stvaralaštva*. Pedagoško-tehnički fakultet, Zrenjanin.

Lingefjärd, T. (2002). Mathematical modeling for preservice teachers: A problem from anesthesiology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 117–143.

Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education – necessity or unnecessarily. In: W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds): Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 333-339), New York: Springer.

Lingefjärd, T., & Holmquist, M. (2001). Mathematical modeling and technology in teacher education - Visions and reality. In: J. Matos, W. Blum, K. Houston, & S. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education ICTMA 9: Applications in Science and Technology* (pp. 205-216), Chichester, Horwood.

Lithner, J. (2011). University mathematics students' learning difficulties. *Education Inquiry*, 2(2), 289-303.

Looß, M. (2001). Types of learning? A pedagogic hypothesis put to the test. *Die Deutsche Schule*, 93, 2, 186-198.

Maaß, K. (2010). Modelling in class and the development of beliefs about the usefulness of mathematics. In: R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students Mathematical Modeling Competencies - ICTMA 13* (pp. 409-420), Springer US.

Maher, C. A., & Martino A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194–214.

Marković, Z. (2011). Matematičko modelovanje u matematičkom obrazovanju. *IMO*, Vol. III, Broj 4, 35-50.

Mayer, R. E., & Moreno, R. (2002). Aids to computer-based multimedia learning. *Learning and Instruction,* 12, 107-119.

Meyer, D. (2015). Missing the promise of mathematical modeling. *Mathematics Teacher*, Vol. 108, No. 8, 578-583.

Mgombelo, J., & Buteau, C. (2009). Mathematics teacher education research and practice: researching inside the MICA program. In: V. Durand-Guerrier, S.Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *CERME 6: Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for*

Research in Mathematics Education (pp. 1901-1910), Institut national de recherche pédagogique, Lyon, France.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representional perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 68, 99-111.

Mousolides , N. G. (2011). Geogebra as a Conceptual Tool for Modeling Real World Problems. In: L. Bu, & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning* (pp. 105-118), Model-Centered Learning, Modeling and Simulations for Learning and Instruction, Vol 6. SensePublishers.

Mumford, A. (1995). Putting learning styles to work: An integrated approach. *Journal of European Industrial Training*, 17(10), 3-10.

Munzenmaier, C., & Rubin, N. (2013). Bloom's Taxonomy: What's Old Is New Again. *Perspectives, Santa Rosa: Thw eLearning Guild*. Retrieved from http://www.elearningguild.com/research/archives/index.cfm?id=164&action=viewonly&utm_campaign=research-blm13&utm_medium=email&utm_source=elg-insider

Musgrave, S., Hatfield, N., & Thompson, P. W. (2015). Calculus students' meaning for difference. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 809-814), Pittsburgh, PA: RUME.

Mustoe, L. (2003). Foreword to maths for engineering and science, Maths for engineering and science, LTSN MathsTEAM, 2.

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia*, Vol. 5, No. 2, 1-10.

Mužić, V. (2004). Uvod u metodologiju istraživanja odgoja i obrazovanja. Zagreb: EDUCA. Munzenmaier, C., & Rubin, N. (2013). *Bloom's taxonomy: What's old is new again*. Perspectives, The eLearning Guild.

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative. *TERC working paper*, Cambridge MA, 2–92.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). How to replace the word problems. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3-32), New York, Springer.

Nobre, C. N., Meireles, M. R. G., Vieira Jr. N., de Resende, M. N., da Costa, L. E., & da Rocha R. C. (2016). The Use of Geogebra Software as a Calculus Teaching and Learning Tool. *Informatics in Education-An International Journal*, Vol. 15, No. 2, 253-267.

OECD (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills – A New Framework for Assessmen.,* OECD, Paris.

OECD (2010). *Mathematics Teaching and Learning Strategies in PISA*. PISA, OECD Publishing, Paris. Retrieved from: http://dx.doi.org/10.1787/9789264039520-en.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235–250.

Pead, D., & Ralph, B. (2007). Uses of technologies in learning mathematics through modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: 14th ICMI Study* (pp. 309–318), New York: Springer.

Pinto, M. M. F., & Tall, D. (2001). Following student's development in a traditional university classroom. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4* (pp. 57-64), Utrecht, The Netherlands.

Pjaže, Ž., i Inhelder, B. (1996). *Intelektualni razvoj deteta*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.

Pollak, H. O. (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. In: UNESCO (Ed.), *New Trends in Mathematics Teaching IV*, Paris, 232-248.

Pollak, H. O. (2012) What Is Mathematical Modeling? In H. Gould, R. D. Murray, & A. Sanfratello (Eds.). *Mathematical Modeling Handbook*. Teachers College, Columbia University.

Pollak, H. O., & Garfunkel, S. (2014). A View of Mathematical Modeling in Mathematics Education. In: B. Dickman, & A. Sanfratello (Eds.), *Proceedings of Conference of Mathematical modeling* (pp. 6-13), Teachers College Columbia University.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. Volume II, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205-235), Netherlands: Springer.

Prince, M. (2004). Does Active Learning Work? A Review of the Research. *Journal of Engineering Education*, 93(3), 223-231.

Pyle, I. (2001). Mathematics in schools. Engineering Science & Education Journal, 10(5), 170-171.

Royer, J. M. (2009). Theories of the transfer of learning. Educational Psychologist, Volume 14, Issue 1, 53-69.

Sahin, Z., Aydogan, A., & Erbas, A. K. (2015). Relational understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(1), 177-188.

Salinas, P., Quintero E., & Gonzáles – Mendivil, E. (2014). An environment to promote a visual learning of Calculus. In H. R. Arabnia, A. Bahrami, L. Deligiannidis, & G. Jandieri (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Frontiers in Education: Computer Science and Computer Engineering* (pp. 425–429), Las Vegas, Nevada: CSREA Press.

Sanders, W. L., & Rivers, J. C. (1996). *Cumulative and residual effects of teachers on future student academic achievement*. Knoxville: University of Tennessee Value-Added Research and Assessment Center.

Schuster, K., Richert, A. & Jeschke, S. (2015). New Perspectives for Engineering Education – About the Potential of Mixed Reality for Learning and Teaching Processes. Proceedings of 122nd Annual Conference & Exposition (Paper ID #13135), Seattle, Washington.

Skemp, R. R. (1962). *The psychology of learning and teaching mathematics*. UNESCO, Paris.

Skidmore, P. (2003). *Beyond Measure. Why educational assessment is failing the test*. London: Demos.

Skov Hansen, N., Holm, C., & Troels-Smith, K. (1999). Modelkompetencer. *NOMAD Nordic Studies in Mathematics Education*, 3-4(7), 7-33.

Sriraman, B. (2004a). Discovering a mathematical principle: The case of Matt. *Mathematics in School (UK)*, 3(2), 25−31.

Sriraman, B. (2004b). The Characteristics of Mathematical Creativity. *The Mathematics Educator*, Vol. 14, No. 1, 19–34.

Star, J. R., Che, J. A., Taylor, M. W., Durkin, K., Dede, C. J., & Chao, T. (2014). Evaluating technology-based strategies for enhancing motivation in mathematics. *International Journal of STEM Education*, 1(7), 1-19.

Sternberg, R. (1997). *Thinking Styles*. New York: Cambridge University Press.

Stillman, G. (2012). Applications and Modelling Research in Secondary Classrooms: What Have We Learnt? In: Sung Je Cho (Ed.), Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 791-805), 2015, COEX, Seoul, Korea, Springer International Publishing Switzerland 2015.

Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activity at year 9. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 385-398), New York: Springer.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007), A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice Volumes 1 and 2, Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Volume 1* (pp. 688-698), Australia.

Strong, R., Thomas, E., Perini, M., & Silver, H. (2004). Creating a differentiated mathematics classroom. *Educational Leadership*, 61(5), 73-78.

Sumarti, N. (Ed.) (2012). Mathematical Modeling Course in Mathematics curriculum: Some best practices of APEC economies, Asia Pacific Economic Cooperation Secretariat, Singapore.

Takači, Đ., Stankov, G., & Milanović, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, Vol. 82, 421-431.

Tall, D. (1986a). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. PhD Thesis in Mathematics Education, The University of Warwick, Faculty of Education.

Tall, D. (1986b). Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A Tribute to Richard Skemp. *Published in Papers in Honour of Richard Skemp* (pp. 21–36), Warwick.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. *Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E.* (pp. 60-75), Montreal.

Tall, D. (1993). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus ICME-7* (pp. 13– 28), Québec, Canada.

Tall, D. (2010). A sensible approach to the calculus. *Plenary address to the Fourth National and International Meeting on the Teaching of Calculus* (pp. 23–25), Puebla, Mexico. Retrived from: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010a-sensiblecalculus.pdf

Tall, D. (Ed.). (2002). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and Calculus. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 1. Research synthesis* (pp. 207-258), USA: NCTM, In formation Age Publishing.

Tarmizi, R. A. (2010). Visualizing student's difficulties in learning calculus. *Procedia Social and Behavioral Sciences,* 8, 377-383.

Thorndike, L. E. (1903). *Educational Psychology*. The Science Press, New York.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609-637.

Valdés y Medina, E. G., & Medina Valdés, L. (2015). Dynamic Models as change Enablers in Educational Mathematics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, Volume 176, 923-926.

Verhoef, N. C., Coenders, F., Pieters, J. M., Van Smaalen, D., & Tall, D. O. (2015). Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. *Professional Development in Education* , Vol. 41, Issue 1, 109-126.

Vincent, B., LaRue, R., Sealey, V., & Engelke, N. (2015). Calculus students' early concept images of tangent lines. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(5), 641-657.

Vujaklija, M. (1980). *Leksikon stranih reči i izraza*. Prosveta, Beograd.

Vulfolk, A., Hjuz, M., i Volkap, V. (2014a). *Psihologija u obrazovanju I*, Clio, Beograd.

Vulfolk, A., Hjuz, M., i Volkap, V. (2014b). *Psihologija u obrazovanju II*, Clio, Beograd.

Vulfolk, A., Hjuz, M., i Volkap, V. (2015). *Psihologija u obrazovanju III*, Clio, Beograd.

Waisel, L. B., Wallace, W. A., & Willemain, T. R. (2008). Visualization and model formulation: An analysis of the sketches of expert modelers. *Journal of the Operational Research Society*, 59(3), 353–361.

Wile E. Coyote and The Road Runner – Beep Beep (1952). Merrie Melodies Series, Warner Bros. Retrieved from: https: //www.youtube.com/watch?v=132XmBjsOiE

Wile E. Coyote and The Road Runner – Rushing Roulette (1965). Merrie Melodies Series, Warner Bros. Retrieved from: https://www.youtube.com/watch?v=jo24NR7e4ew

Willingham, D. T., Hughes, E. M., & Dobolyi, D. G. (2015). The scientific status of learning styles theories. *Teaching of Psychology*, 42 (3), 266–271.

Wu, H. H. (1996). The Mathematician and the Mathematics Education Reform. *Notices of the AMS*, 43, 12, 1531–1537.

Wu, H. H. (1997). The Mathematics Education Reform: Why you should be concerned and what you can do. *American Mathematical Monthly*, 104, 946-954.

Wu, H. H. (2011). The Mis-Education of mathematics teachers. *Notices of AMS*, Vol. 58, No. 3, 372-384.

Zeidmane, A., & Cernajeva, S. (2011). Interdisciplinary Approach in Engineering Education. *International Journal of Engineering Pedagogy*, Vol. 1, No. 1, 36-41.

Zlokapa, B. (2012). Matematičko modelovanje u obrazovanju - problemi i prednosti. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, XVIII (1), 33-42.

BIOGRAFIJA

Tanja Sekulić (rođ. Radović) rođena je 24. septembra 1973. godine u Zrenjaninu. Završila je Gimnaziju „Koča Kolarov“ u Zrenjaninu i diplomirala na Prirodno – matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, smer Diplomirani matematičar. Magistarsku tezu je odbranila 2005. godine na Tehničkom fakultetu „Mihajlo Pupin“ u Zrenjaninu, Univerziteta u Novom Sadu, naučna oblast Informatika.

Od oktobra 1999. godine je zaposlena na Visokoj tehničkoj školi strukovnih studija u Zrenjaninu, najpre u zvanju asistenta, a od 2007. godine u zvanju predavača za matematiku i grupu računarskih predmeta.

U periodu od 2012. do 2014. godine je obavljala dužnost pomoćnika direktora za nastavu Visoke tehničke škole strukovnih studija u Zrenjaninu.

Autor je više programa stručnog usavršavanja nastavnika, vaspitača i stručnih saradnika akreditovanih od strane Zavoda za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja. Učestvovala je u više različitih projekata, i autor je samostalnog projekta „*Matemationica*“ koji je posvećen popularisanju matematike kod nastavnika i učenika osnovnih i srednjih škola.

Autor je i koautor značajnog broja naučnih i stručnih radova i učesnik konferencija i simpozijuma iz oblasti metodike nastave matematike.

Po konkursu Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja je 2017. godine izabrana za savetnika-spoljnjeg saradnika za predmet Matematika pri Školskoj upravi Zrenjanin. U okviru aktivnosti savetnika-spoljnjeg saradnika sprovela je niz obuka nastavnika matematike za primenu računarskih tehnologija, matematičkog modelovanja i novih metodskih pristupa. Kao istraživač je učestvovala u nacionalnom testiranju učenika osnovnih i srednjih škola 2018. godine: Nacionalni ispit znanja – vrednovanje ishoda učenja. U toku 2018/2019. godine je okviru Programa obuka nastavnika za realizaciju nastave orjentisane ka ishodima učenja bila voditelj obuka za nastavnike matematike na teritoriji Srednjebanatskog i Severnobanatskog okruga. Spoljni je saradnik Zavoda za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja. Član je stručne komisije koja vrši ekspertizu rukopisa udžbenika i udžbeničkih kompleta za obavezne nastavne predmete i izborne programe u osnovnoj i srednjoj školi za predmet Matematika pri Nacionalniom prosvetnom savetu Republike Srbije.

Posvećena je radu sa studentima i učenicima, stalnom unapređenju nastave matematike i popularisanju matematike kao nauke.

Radovi, udžbenici i saopštenja

Radovi:

1. **Sekulić, T.,** Hotomski, P. (2006). Influence of norms on the results of query in fuzzy relational databases. *Proceedings of 5th International Symposium on Intelligent Manufacturing Systems „Agents and Virtual Worlds"* (Paper Id. 040), Sakarya, Turkey.
2. **Sekulić, T.,** Hotomski, P. (2007). Influence of norms on the results of query for information retrieval mechanisms based on thesaurus. *FACTA UNIVERSITATIS (NIŠ)-Series Mathematics and Informatics*, Vol. 22, No 2, 189-199.
3. **Sekulić, T.** (2011). Želite li da analizirate funkciju? *Proceedings of the International GeoGebra Conference for Southeast Europe* (pp. 139-149), Novi Sad, Serbia
4. **Sekulić, T.,** Mirkov, S. (2011). Menadžment u obrazovanju inženjera – put ka motivaciji i inovacijama u inženjerskoj profesiji. *Zbornik II Naučno stručnog skupa PREDUZETNIŠTVO, INŽENJERSTVO I MENADŽMENT – Šansa za progres* (str. 166-173), Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu, Zrenjanin, Srbija.
5. Erhan, I. M., Karapinar, E., & **Sekulic, T.** (2012). Fixed points (psi, phi) contractions on generalized metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications,* 2012:138.
6. **Sekulić, T.** (2012). Osavremenjavanje nastave kao izvor budućih inženjerskih inovacija. *Zbornik III Naučno stručnog skupa PREDUZETNIŠTVO, INŽENJERSTVO I MENADŽMENT – Šansa za progres* (Str. 383-392), Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu, Zrenjanin, Srbija.
7. **Sekulić, T.,** i Takači, Đ. (2013). Mathematical Modelling, Computers and GeoGebra in University and College Mathematics Education. *Proceedings of 36th International convention MIPRO 2013* (pp. 745-751), Opatija, Croatia.
8. Matotek, M., Mirkov, S., i **Sekulić, T.** (2013). Informatička pismenost studenata tehnike: Studija slučaja. *Međunarodni simpozijum TEHNOLOGIJA, INFORMATIKA I OBRAZOVANJE – Stanje i problem, ciljevi i mogućnosti, promjene i perspective*, Univerzitet u Banjoj Luci, Filozofski fakultet Banja Luka, Banja Luka, Republika Srpska.
9. Mirkov, S., **Sekulić, T.,** i Matotek, M. (2013). Neke karakteristike procesa socijalizacije za inženjersku profesiju u savremenom srpskom društvu. *Međunarodni simpozijum TEHNOLOGIJA, INFORMATIKA I OBRAZOVANJE – Stanje i problem, ciljevi i mogućnosti, promjene i perspective*, Univerzitet u Banjoj Luci, Filozofski fakultet Banja Luka, Banja Luka, Republika Srpska.
10. Mirkov, S., **Sekulić, T.,** & Molnar, R. (2013). Engineering Students Motives for Studies and their Plans for Future – A case Study. *Proceedings of the Second International Conference "Employment, Education and Entrepreneurship* (pp, 138-155), Belgrade, Serbia.

11. **Sekulić, T.,** Mirkov, S., & Matotek, M. (2014). College Students Attitude towards Engineering Profession, Innovation in Mathematics Education and Mathematical Modeling. *Journal of the Technical University of Gabrovo*, Vol. 47, 2014, 83 -87.

12. **Sekulić, T.** (2014). Uloga matematičkog modelovanja i aktivne nastave u savremenom obrazovanju inženjera. *Zbornik IV Naučno stručnog skupa PREDUZETNIŠTVO, INŽENJERSTVO I MENADŽMENT – Inovacijom u budućnost* (Str. 41-53), Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu, Zrenjanin, Srbija.

13. Markov, S., Mirkov, S., **Sekulić, T.,** i Novaković, M. (2014). Odnos studenata prema modi u kriznim uslovima. *Zbornik radova četvrtog naučno stručnog skupa sa međunarodnim učešćem: Tendencije razvoja i inovativni pristup u tekstilnoj industriji – Dizajn, Tehnologija, Menadžment DTM 2014* (Str. 226-232), Beograd.

14. **Sekulić, T.,** & Kostić, V. (2014). Mathematical Workshops, Learning and Popularization of Mathematics, *VisMath*, Issue:16_1, Mathematical Institute SASA, Belgrade.

15. Kostić, V., & **Sekulić, T.** (2014). Extreme Values of Function in GeoGebra Style. *VisMath,* Issue:16_1, Mathematical Institute SASA, Belgrade.

16. Takači, Đ., & **Sekulić, T.** (2014). From Real World to Derivative – How to Effectively Include Mathematical Modeling and GeoGebra in Mathematics Education. *Fifth Central and Eastern European Conference on Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education* (Poster section), Halle (Saale), Germany.

17. Kostić, V., **Sekulić, T.,** i Stanković-Đorđević, M. (2014). Formiranje početnih matematičkih pojmova: Od vizuelnog do simboličkog. *Zbornik radova drugog stručno-naučnog skupa sa međunarodnim učešćem: "Holistički pristup u predškolskoj pedagogiji: Teorija i praksa" - HOLIPRI 2014* (Str. 188-199), Visoka škola strukovnih studija za obrazovanje vaspitača Pirot, Pirot, Srbija.

18. Kostić, V.,i **Sekulić, T.** (2014). Učenje po Poljinim principima u GeoGebra okruženju. *Zbornik radova petog simpozijuma: "Matematika i primene"* (Str. 104-112), Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd, Srbija.

19. Kostić, V., i **Sekulić, T.** (2014). Matematičko modelovanje u univerzitetskoj nastavi matematike. *DIT*, Društvo inženjera Zrenjanin, Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu, Godina XX, Broj 21-22, 89-93.

20. Kostic, V., i **Sekulic, T.** (2015). Visualized problems in the teaching topic "derivative of a function". *Teaching material developed for project IPA HU-SRB/1203/221/024: Non-Standard Forms of Teaching Mathematics and Physics, Mathematics and Computer-Aided Modeling in Sciences*, Bolyai Institute Department of Medical Physics and Medical Informatics University of Szeged Hungary, Department of Mathematics and Informatics Facylty of Natural Sciences and Mathematics University of Novi Sad Serbia.

21. Kostić, V., Stankov Jovanović, V., i **Sekulić, T.** (2015). Modeliranje problema smeše u GeoGebra okruženju. *Zbornik radova šeste međunarodne konferencije gimnazija 3K KULTURA KOMUNIKACIJA KOMPJUTER* (Str. 205-215), Gimnazija „Isidora Sekulić" Novi Sad, Srbija.

22. Kostic, V., Stankov-Jovanovic, V., **Sekulic, T**., & Takaci, Dj. (2016). Visualization of problem solving related to the quantitative composition of solutions in the dynamic GeoGebra environment. *Chemistry Education Research and Practice*, Vol 17, 120-138.

23. **Sekulić, T.,** Mirkov, S., , i Matotek, M. (2016). Profesionalna ideologija inženjera u društvu postsocijalističke transformacije. *Zbornik VI Naučno stručnog skupa PREDUZETNIŠTVO, INŽENJERSTVO I MENADŽMENT – Inženjerstvo, obrazovanje I rizici* (Str. 80-86), Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu, Zrenjanin, Srbija.

24. Felbab, A., Radosav, D., Eremić, Ž., **Sekulić, T.**, i Tobolka, E. (2017). The Importance Of Dual Education And Its Representation On The Territory Of Middle Banat. *Proceedings of VIII International Conference on Information Technology and Development of Education – ITRO 2017* (pp. 80-85), University of Novi Sad, Technical faculty „Mihajlo Pupin" Zrenjanin, Republic of Serbia.

25. **Sekulic, T.,** Takaci, Dj., Strboja, M., & Kostic, V. (2020). Influence of Mathematical Modeling in GeoGebra Environment on Learning Derivative. *The International Journal for Technology in Mathematics Education (IJTME)*, Vol. 27, No 2. (Accepted for publication).

Udžbenici:

1. Ćebić, S., **Radović, T.,** Ćebić, S. (2001). *Matematika-Zbirka zadataka za polaganje klasifikacionog ispita sa elementima teorije, primerima i rešenjima*. Viša tehnička škola u Zrenjaninu, Zrenjanin.

2. Molnar, R., **Sekulić, T.** (2015). *Teorija odlučivanja-Zbirka zadataka sa izvodima iz teorije*. Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu, Edicija Zbirke 12, Zrenjanin.

3. Ćebić, S., **Sekulić, T.** (2019). *Matematika*. Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu, Zrenjanin.

Saopštenja:

1. **Sekulić, T.**, i Takači, Đ. (2009). Primena matematičkog modelovanja u univerzitetskoj nastavi matematike. *Međunarodna konferencija o nastavi i učenju matematike (MKNAMA)*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno–matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad.

2. **Sekulić, T.**, i Takači, Đ. (2010). Izvod funkcije kao matematički model. *Međunarodna konferencija o nastavi i učenju matematike (MKNAMA)*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno–matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad.

3. **Sekulić, T.**, i Takači, Đ. (2011). GeoGebra i matematičko modelovanje u nastavi matematike. *Međunarodna konferencija o GeoGebra-i za jugoistočnu Evropu*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno–matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad.

4. **Sekulić, T.** (2011). Obrada izvoda funkcije pomoću računara - matematičko modelovanje. *Intensive School - Mathematics and Computer-Aided Modeling in Sciences*, IPA Projekat „Nastava matematike i statistike u prirodnim naukama: Pristup preko modeliranja i pomoću računara" , HU-SRB/0901/221/088 TEAMATHMODSCI, Novi Sad, Srbija.
5. **Sekulić, T.** (2012). The role of active learning and mathematical modelling in modern mathematics education. *International conference Computer algebra and dynamics systems in mathematics education-CADGME 2012*, University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia.
6. **Sekulić, T.** (2014). Implementation of Mathematical Modeling on Introducing the Concept of the First Derivative. *Book of Abstracts of 13th Serbian Mathematical Congres* (pp. 113), Vrnjačka Banja, Serbia.
7. Kostić, V., & **Sekulić, T.** (2015). Mathematical Modeling and GeoGebra as Bridge between Natural Sciences and Mathematics. *VI International Conference of Teaching and Learning Mathematics*, University of Novi Sad, Faculty of Science, Department of mathematics and informatics, Novi Sad, Serbia.
8. Kostić, V., & **Sekulić, T.** (2015). Mathematical modelling in physics. *Novi Sad—Szeged Winter School on Non-Standard Forms of Teaching Mathematics and Physics: Experimental and Modeling Approach*, University of Novi Sad, Faculty of Science, Department of mathematics and informatics, Novi Sad, Serbia.
9. **Sekulić, T.,** Radosavljev Kirćanski, J., Vidanović, D., i Kostić, V. (2015). Aktivno-kreativno učenje. *Treći stručno-naučni skup sa međunarodnim učešćem: "Kontinuitet u procesu vaspitanja" HOLIPRI 2015*, Visoka škola strukovnih studija za obrazovanje vaspitača Pirot, Pirot, Srbija.
10. Takači, Đ., Kostić, V., i **Sekulić, T.** (2015). Matematičko modelovanje problema kretanja u dinamičkom vizuelnom okruženju. *Šesti simpozijum "Matematika i primene",* Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd, Srbija.
11. Kostić, V., i **Sekulić, T.** (2017). Digitalna matematička igraonica GeoGebra u vrtiću. *Četvrti stručno-naučni skup sa međunarodnim učešćem: "Vaspitanje i obrazovanje kroz igru, umetnost i stvaralaštvo" HOLIPRI 2017*, Visoka škola strukovnih studija za obrazovanje vaspitača Pirot, Pirot, Srbija.

Novi Sad, maj, 2020.

____

mr Tanja Sekulić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (dipl., mag., dokt.): VR	Doktorska disertacija
Ime i prezime autora: AU	Tanja Sekulić
Mentor (titula, ime, prezime, zvanje): MN	dr Đurđica Takači, redovni profesor
Naslov rada: NR	Efekti primene matematičkog modelovanja na obradu pojma izvoda funkcije u visokom strukovnom obrazovanju
Jezik publikacije: JP	Srpski (latinica)
Jezik izvoda: JI	srpski i engleski
Zemlja publikovanja: ZP	Republika Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2020.
Izdavač: IZ	autorski reprint
Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3
Fizički opis rada: FO	6/192/57/0/16/39/152/0 (broj poglavlja/stranica/ slika/ šema/ grafikona/ tabela/ referenci/ priloga)
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Metodika nastave matematike
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	Matematičko modelovanje, obrazovni softver *GeoGebra*, izvod funkcije i njegove primene, obrazovanje nastavnika
UDK	

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku,
ČU Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Važna napomena: Nema
VN

Izvod:
IZ

U doktorskoj disertaciji je prezentovano pedagoško istraživanje koje se odnosi na teorijsko i eksperimentalno ispitivanje efekata primene metodskih pristupa zasnovanih na matematičkom modelovanju u obradi izvoda funkcije i njegove primene u visokom strukovnom obrazovanju.
Na osnovu teorijskih principa na kojima je zasnovan proces matematičkog modelovanja, osmišljen je način za implementaciju modelovanja u nastavni proces i kreirani su modeli za realizaciju obrade sadržaja iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene. Predložen je i originalni pristup matematičkom modelovanju koji se realizuje u računarskom okruženju i istaknute su sve prednosti novog pristupa koje se tiču realizacije nastavnog procesa i rezultata učenja i poučavanja. Disertacija se bavi i savremenim trendovima u obrazovanju nastavnika i njegovom unapređenju. Poseban akcenat je stavljen na osmišljavanje elemenata obuke nastavnika za primenu matematičkog modelovanja u školskoj praksi.
Istraživanje o efektima primene matematičkog modelovanja je sprovedeno u dva ciklusa. Prvi ciklus istraživanja je realizovan u periodu od 2009-2014. godine sa četiri generacije studenata strukovnih studija. U eksperimentu je učestvovalo ukupno 555 studenata organizovanih u paralelne grupe. U prvom ciklusu istraživanja je praćen uticaj primene matematičkog modelovanja na postignuća studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene. Od instrumenata primenjenih za ispitivanje postignuća studenata su korišćeni testovi znanja (kolokvijum i ispit) i anketa koja je ispitivala stavove studenata o realizaciji nastave matematike i njenoj korisnosti.
Drugi ciklus istraživanja je sproveden školske 2016/2017. godine. Eksperiment je realizovan sa paralelnim grupama u kojima su učestvovala 204 studenta Visoke tehničke škole strukovnih studija. U drugom ciklusu istraživanja su ispitani efekti primene novog pristupa matematičkom modelovanju u računarskom okruženju na znanja studenata iz oblasti izvoda funkcije i njegovih primena (eksperimentalna grupa) i dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima koje su studenti ostvarili kada je nastava realizovana primenom tradicionalnog ciklusa modelovanja (kontrolna grupa).
Na osnovu rezultata oba pedagoška istraživanja, utvrđeno je da realizacija nastave matematike primenom matematičkog modelovanja, kao i matematičkog modelovanja u računarskom okruženju, na obradu pojma izvoda funkcije i njegovih primena ima značajan uticaj na kvalitet znanja studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju, razumevanju nastavnih sadržaja i njihovoj primeni na rešavanje problema iz ove oblasti.

Datum prihvatanja teme od strane Senata: 12. 11. 2015.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

predsednik:	dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
član:	dr Đurđica Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
član:	dr Mirjana Štrboja, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
član:	dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
član:	dr Svetlana Španović, redovni profesor, Pedagoški fakultet, Sombor

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	Doctoral dissertation
Author: AU	Tanja Sekulić
Mentor: MN	Đurđica Takači, PhD
Title: TI	Effects of application of mathematical modeling on the teaching of the derivative of function in the higher education of applied sciences
Language of text: LT	Serbian (Latin)
Language of abstract: LA	Serbian and English
Country of publication: CP	Republic of Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2020.
Publisher: PU	Author's reprint
Publication place: PP	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3
Physical description: PD	6/192/57/0/16/39/152/0 (chapters/ pages/ figures/ schemes/ graphics/ tables/ references/ appendix)
Scientific field SF	Mathematics
Scientific discipline SD	Mathematics Education
Subject, Key words SKW	Mathematical modeling, *GeoGebra* software, derivative of function and its application, teachers education
UC	
Holding data: HD	Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note:
N

Abstract:
AB

In the doctoral dissertation, pedagogical research is presented, which refers to the theoretical and experimental examination of the effects of the application of methodological approaches based on mathematical modeling in the field of the derivative of the function and its application in college education.
Based on the theoretical principles on which the process of mathematical modeling is based, a way has been devised for the implementation of modeling in the teaching process and models have been created for the teaching process in the field of function derivative and its applications. An original approach to mathematical modeling that is realized in a computer environment is also proposed, and all the advantages of the new approach concerning the realization of the teaching process and the results of learning and teaching are highlighted. The dissertation also deals with modern trends in teacher education and its improvement. Special emphasis is placed on designing elements of teacher training for the application of mathematical modeling in school practice. The research on the effects of the application of mathematical modeling was conducted in two cycles. The first cycle of research was realized in the period from 2009-2014 with four generations of students. A total of 555 students organized in parallel groups participated in the experiment. In the first cycle of research, the influence of the application of mathematical modeling on the achievements of students in the field of function derivative and its applications was examined. Among the instruments used to examine students achievements, knowledge tests (colloquium and final exam) and a survey that examined students' attitudes toward the teaching process and usefulness of mathematics were created and used.
The second cycle of research was conducted in the 2016/2017 school year. The experiment was realized with parallel groups in which participated 204 students of the Technical College of Applied Sciences. In the second cycle of the research, the effects of applying a new approach to mathematical modeling in the computer environment on students' knowledge of function derivative and its applications (experimental group) were examined and the obtained results were compared with the results achieved by students using traditional modeling cycle (the control group).
Based on the results obtained from both pedagogical researches, it was determined that the realization of teaching mathematics by applying mathematical modeling, as well as mathematical modeling in the computer environment, has a significant impact on the quality of students' knowledge and the realization of optimal learning outcomes, and their application on solving the problems from this area.

Accepted on Senate on: November 12th, 2015.
AS

Defended:
DE

Thesis Defend Board:

DB

president: Ljiljana Gajić, PhD full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
member: Đurđica Takači, PhD, full profesor, Faculty of Sciences, Novi Sad
member: Mirjana Štrboja, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
member: Petar Đapić, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
member: Svetlana Španović, PhD, full professor, Faculty of Education, Sombor