PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U NOVOM SADU

KATARINA SURLA

NESTACIONARNE ITERATIVNE METODE PRI REŠAVANJU OPERATORSKIH JEDNAČINA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 1980.

S A D R Ž A J

U V O D N I   D E O

§1. Uvod

U ovom radu se posmatraju nestacionarni iterativni postupci sa linearnim operatorom u Banahovom parcijalno uredjenom prostoru $\mathbb{B}$.

Nagli razvitak računske tehnike doveo je do toga da iterativne metode postanu moćno sredstvo za rešavanje operatorskih jednačina.

(1) $$x = Ax$$

To je ujedno dovelo do sve intenzivnijeg proučavanja nestacionarnih iterativnih postupaka.

Običan, stacionaran, iterativni postupak

(2) $$x_{n+1} = Ax_n \quad x_o \in \mathbb{B} \quad (n=0,1,2,...)$$

pri realizaciji na računaru prelazi u nestacionaran

(3) $$z_{n+1} = Az_n + \rho_n = A_n z_n, \quad \rho_n \in \mathbb{B}, \quad z_o \in \mathbb{B}, \quad (n=0,1,2,...)$$

Problemi matematičke i tehničke prakse i teorije često dovode do postupaka oblika (3). Kada je operator A nedefinisan ili je njegovu tačnu vrednost nemoguće izračunati, zamenjuje se približnim operatorima A_n. Matematička formulacija problema iz fizike, tehnike, geodezije obično dovodi do zanemarivanja nekih parametara, odnosno do zamene polaznog operatora približnim, koji se može menjati od koraka do koraka |4| |11| |33| |40|. Ponekad se ovakvim postupcima želi postići veća ekonomičnost metoda (smanjenje obima računskih operacija u pojedinim koracima) |33||63| |65| ili ubrzati konvergencija |38|, |62|,|32| ,|33| .

Prilagodjavanje standardnih metoda numeričke matematike za rad na računaru, često dovodi do potrebe za menjanje operatora kojim se izvode iteracije. Primena "praktičnih" (onih koji ne koriste jake ili praktično neproverljive uslove) izlaznih kriterijuma za numeričku integraciju, aproksimaciju i diferenciranje, smanjenje dimenzija sistema, povećanje tačnosti sve se više veže za tačke u kojima se traži rešenje. U |5| |14| se koristi jedan takav kriterijum za ocenjivanje dimenzija sistema linearnih jednačina, tako da se postigne odredjena tačnost pri rešavanju integralnih jednačina. U §4 se isti kriterijum primenjuje od tačke do tačke i od iteracije do iteracije. Tako se rešenje u m fiksiranih tačaka traži nestacionarnim iterativnim postupkom i postiže ista tačnost kao u |5| rešavanjem sistema linearnih jednačina sa daleko većim dimenzijama Naprimer, pri rešavanju integralne jednačine date u primeru 2. za $d=1$ i $f(s)=1$, pokazalo se, da je za dobijanje rešenja prema kriterijumu |5| potrebno rešavati sistem 513x513, odnosno za $d=2$ 1025x1025. Odgovarajuća tačnost se postiže postupkom (4.9) u 20 fiksiranih tačaka na datom intervalu, s tim što se broj čvorova menja od 65 do 513, odnosno do 1025. I jedan i drugi postupak omogućavaju primenu izlaznog kriterijuma koje koristi većina standardnih programa za numeričku integraciju.

No, bilo kako da se dolazi do postupka (3), obično se na osnovu neke veze izmedju operatora A_n i A, odnosno jednačine (1) i jednačina

$$x = A_n x$$

dobija konvergencija postupka i egzistencija rešenja. U numeričkoj matematici se često sretamo sa problemima u kojima su ρ_n nepoznate veličine. U |22||11| ρ_n se posmatraju kao slučajne veličine i odredjuje verovatnoća sa kojom niz (3) konvergira.

Ovde će se detaljnije razmotriti slučaj kada su poznata neka ograničenja za ρ_n (ograničenje po normi, po modulu i sl.). Pod tim pretpostavkama nije uvek moguće utvrditi konvergenciju niza (3) ka rešenju jednačine (1). Tada se obično odredjuje okolina tačke x^*, x^* rešenje jednačine (1), kojoj pripadaju svi članovi niza (3) posle nekog dovoljno velikog n.

Rešenje x^* možemo približno odrediti, ukoliko nam je dovoljna ona tačnost koju odredjuje takva okolina .

Centralni deo ovog rada se odnosi na nestacionarne iterativne postupke sa monotonim operatorima. Izvedeni su uslovi koje treba da zadovoljavaju odredjeni elemenati niza (3) pa da se za operator A garantuje egzistencija invarijantnog intervala. Isti uslovi omogućavaju konstrukciju nešto šireg intervala. Takodje su dati uslovi pod kojima se tako konstruisani intervali smanjuju sa povećanjem indeksa onih iteracija koje učestvuju u konstrukciji.

Primena ovih rezultata je prikazana na odredjene metode oblika (3) vezane za neke klase operatorskih jednačina. Odredjivanje invarijantnog intervala uz neke dodatne uslove, omogućava primenu poznatih teorema o nepokretnoj tački |59| , |24| . Ovim se ujedno dobija i ocena greške bez nekih posebnih računanja. To je opet u tesnoj vezi sa takozvanim dvostranim iterativnim postupcima, koji se u poslednje vreme intenzivno proučavaju |31|, |33| ,|38|, |56|. Rešenje se ograničava sa obe strane te se dobija brža konvergencija i ocena greške na svakom iterativnom koraku. Osnovna teškoća pri formiranju takvih postupaka je odredjivanje tzv. početnih elemenata. U mnogim radovima se pokazuje da se granice pomenutih intervala mogu uzeti za početne elemente. Problematika o kojoj je reč vezana je za monotono - razložive |28| ili monotone operatore koji imaju široku primenu kako u matematici tako i u drugim naukama u kojima se matematika primenjuje (§5).

U ovom radu se ispituju mogućnosti pod kojima se na osnovu nestacionarnog niza (3) može tvrditi egzistencija invarijantnog intervala kao i uslovi koji omogućavaju konstrukciju takvog intervala. Tako su dobijena uopštenja nekih rezultata iz |2| ,|4| ,|28| .

Rad je podeljen u četiri dela i 10 parafrafa. Pojedini paragrafi imaju više tačaka.

Uvodni deo sadrži oznake, definicije i teoreme koje se koriste u radu a uzete su iz |1| , |2| , |4| , |46| , |26| .

Drugi deo je podeljen na dva paragrafa. U §3 je prikazan kratak pregled nestacionarnih iterativnih postupaka. U §4 je formiran jedan nestacionaran iterativni postupak za rešavanje Fredholmove integralne jednačine druge vrste. Izlazni kriterijum koji je korišćen za numeričku integraciju dat je u |51| i |52| , s tim što su potrebe ovog rada zahtevale izvesno uopštenje rezultata |51| i |52| koje je dato u teoremama 4.1 i 4.2. U |14| i |5| koristi se sličan kriterijum za odredjivanje dimenzija sistema linearnih jednačina, na koji se svodi rešavanje integralne jednačine. Nestacionaran postupak (4.9) je ekonomičniji i brži. Teoreme 4.3 , 4.4 i 4.5 daju konvergenciju postupka, egzistenciju rešenja i ocenu greške.

Treći deo odnosi se na nestacionarne iterativne postupke oblika (3) sa monotonim operatorom A . U §5 se posmatra pozitivan linearan operator. Tepreme 5.1 do 5.8 koriste ograničenja

$$C_k x \leq \rho_n \leq B_k x \qquad (n=k,\ k-1) \tag{4}$$

gde su C_k i B_k pozitivni linearni operatori a x odredjen elemenat iz B , k -fiksiran korak u nizu (3), i daju egzistenciju invarijantnog intervala za operator A. Opisana je konstrukcija takvog intervala na osnovu uslova datih u teoremama. Teorema 5.9 daje uslove pod kojima se može tvrditi da se intervali odredjeni u navedenim teoremama smanjuju sa porastom indeksa k. Time je formiran dvostrani nestacionaran iterativni postupak za rešavanje jednačine (1).

§6. se odnosi na monotone negativne operatore. Teoreme §6. daju egzistenciju invarijantnog intervala za ove operatore, užeg od onog kojeg garantuje alternativni niz iteracija sam po sebi. Tako se dobija ubrzanje postupka i preciznija ocena greške. Teorema 6.5 daje konvergenciju novoformiranog dvostranog iterativnog postupka.

U §7 se pretpostavlja poznavanje pozitivne sopstvene vrednosti i odgovarajućeg nenegativnog sopstvenog elementa za dati operator. Tada se na osnovu jednog iterativnog koraka u (3) dobija invarijantan interval za posmatrani operator. Pošto je to tesno vezano sa uslovom kontrakcije, teorema 7.3 pretpostavlja kontrakciju i daje ocenu greške za dvostrani iterativan postupak koji nastaje kad se granice invarijantnog intervala uzmu za početne elemente.

U četvrtom delu je prikazana primena rezultata trećeg dela na rešavanje odredjenih klasa operatorskih jednačina. Teoreme §8 i §9 koriste invarijantne intervale odredjene u drugom delu i uz neke dodatne uslove odredjuju egzistenciju rešenja, konvergenciju postupka (3) uz znatno ubrzanje i aposteriornu ocenu greške.

Ono što je tu posebno interesantno je način na koji se odredjuju operatori C_k i B_k iz (4) i način na koji se proveravaju ostali uslovi vezani za iterativni niz (3). Zbog toga je uglavnom prikazana primena teorema §5. Na sličan način se mogu formulisati teoreme za primenu rezultata §6 ili §7.

§10 sadrži primene i rezultate dobijene na mašini. Na primerima 1., 2., 3. i 4. prikazana je primena rezultata §4. Na primerima 1. i 2. je prikazana primena rezultata §5, a na primeru 4. primena rezultata §6. Na primeru 5. je prikazana primena teorema 5.1 i 7.1 , a na primeru 6. takodje primena teoreme 5.1.

Deo svih rezultata je objavljen u |63| , |64| i |65|.

Zahvaljujem se akademiku dr Bogoljubu Stankoviću i prof. dr Olgi Hadžić na svesrdnoj i stalnoj pomoći koju su mi prižili u toku izrade disertacije. Zahvaljujem se dr Dragoslavu Hercegu na korisnim diskusijama i pomoći koju mi je pružio pri sakupljanju literature za ovaj rad.

§2. Oznake, definicije i teoreme

U ovom paragrafu su date neke oznake, definicije i teoreme koje se koriste u radu.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ - skup prirodnih, realnih brojeva

B - Banahov parcijalno uredjen prostor

I - zatvoren interval $[a, b]$

$C^k(X)$ - skup k -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija u $X \subseteq \mathbb{R}$

δ - vektor čije su sve komponente jednake jedinici

$D=\{d_{ij}\}$ - matrica sa elementima d_{ij} , $d_{ij}=1$ $(i,j=1,2,\dots,n)$

x^i - i -ta komponenta vektora x

$\|x\|$ - norma od x

E - jedinični operator

Δ_n, Δ - mreža $a=x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$

Δn_k - mreža $a=x_{k1} < x_{k2} < \dots < x_{kn_k} = b$

$S\Delta(x), S\Delta_n(x)$ - splajn funkcija na mreži Δ, odnosno Δ_n.

$S\Delta_n(f,x)$ - splajn koji interpolira funkciju $f(x)$ na mreži Δ_n

$h_j = x_j - x_{j-1}$

$h_{kj} = x_{kj} - x_{kj-1}$

$$\|\Delta\| = \max_{2\le j\le n} h_j$$

$$\|\Delta_k\| = \max_{2\le j\le n} h_{kj}$$

$\rho(T)$ - spektralni radijus operatora T .

$$a(x) \sim b(x) - \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$$

Definicija 2.1

Za $x,\ y \in R$ kažemo da je $x \leq y$, ako je $x^i \leq y^i$ $(i=1,2,\ldots,n)$; $\|x\| = \max_i |x^i|$

Definicija 2.2

Za $x,\ y \in C(I)$ kažemo da je $x \leq y$, ako je $x(t) \leq y(t)$, $t \in I$;

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

Definicija 2.3 (|43|)

Normu linearnog (ograničenog) operatora $L : Y \to Z$ definišemo sa

$$\|L\| = \sup_{y \in Y} \frac{\|Ly\|_Z}{\|y\|_Y} .$$

Definicija 2.4 (|45|,|59|)

Operator $L : Y \to Z$ naziva se:

a) Pozitivan, ako $u \geq 0 \Rightarrow Lu \geq 0$ $(u \in Y)$
b) Negativan, ako je $-L$ pozitivan.
c) Monoton (monotono neopadajući) ako $u \leq v \Rightarrow Lu \leq Lv$ $(u,v \in Y)$
d) Monotono nerastući ako $u \leq v \Rightarrow Lu \geq Lv$ $(u,v \in Y)$
e) Inverzno monoton ako $Lu \leq Lv \Rightarrow u \leq v$ $(u,v \in Y)$.
d) Monotono razloživ ako se može napisati kao razlika dva monotona operatora.

Definicija 2.5

Funkcija $S\Delta_n(x)$ zove se splajn funkcija (splajn) stepena m na mreži Δ_n , ako je $S\Delta_n(x)$ definisano za svako $x \in R$, $S\Delta_n(x) \in C^{m-1}(R)$ i na svakom intervalu (x_{i-1},x_i) $((i=1,\ldots,n+1),\ x_0 = -\infty,\ x_{n+1} = +\infty)$, $S\Delta_n(x)$ se poklapa sa polinomom stepena ne većeg od m.

Definicija 2.6

Splajn stepena m sa osobinom

$$S\Delta_n^{(q)}(x_1+0) = S\Delta_n^{(q)}(x_1-0) \quad (q=0,1,2,\ldots,m-1)$$

zove se periodičan splajn sa periodom $x_n - x_o$.

Definicija 2.7
Splajn $S\Delta_n(x) = S\Delta_n(f,x)$ interpolira funkciju $f(x)$ na mreži Δ_n (interpolacioni splajn) ako je

$$S\Delta_n(x_j) = f(x_j) \qquad (j=1,\dots,n) .$$

U §4 će se koristiti splajn reda tri (kubni splajn), zadat na sledeći način [1] : za $s \in [s_{j-1}, s_j]$

$$S\Delta_n(f,s) = M_{j-1}\frac{(s_j-s)^3}{6h_j} + M_j\frac{s-s_{j-1}}{6h_j} + (f_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}) \cdot \frac{s_j-s}{h_j} + (f_j - M_j\frac{h_j^2}{6})\frac{s-s_{j-1}}{h_j} \tag{2.1}$$

, gde je

$$M_j = S''\Delta_n(f,s_j) \qquad (j=1,2,\dots,n) \tag{2.2}$$

Za odredjivanje koeficijenata M_j koristi se sistem linearnih jednačina ([1] str. 15)

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & \lambda_{n-2} & \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

gde je

$$\begin{cases} \lambda_j = \dfrac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}} , \quad \mu_j = 1-\lambda_j \quad (j=2,3,\dots,n-1) \\ d_j = 6[(y_{j+1}-y_j)/h_{j+1}-(y_j-y_{j-1})/h_j]/(h_j+h_{j+1}) \\ \qquad (j=2,3,\dots,n-1) \end{cases} \tag{2.4}$$

Preostale veličine su odredjene iz graničnih uslova

$$(2.5)\qquad \begin{cases} 2M_o + \lambda_o M_1 = d_o \\ \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases}$$

ili

$$(2.6)\qquad \begin{cases} 2M_o = 2f_1'' \\ 2M_n = 2f_n'' \end{cases}$$

Prema (|1| str. 36) važi:

$$(2.7)\qquad M_j = 6 \sum_{i=2}^{n-1} A_{ji}^{-1} \frac{[(f_{i+1}-f_i)/h_{i+1}]-[(f_i-f_{i-1})/h_i]}{h_i + h_{i+1}} +$$

$$+ A_{j1}^{-1} d_1 + A_{jn}^{-1} d_n \quad ,$$

gde su sa A_{ij}^{-1} označeni elementi matrice A^{-1} , A je matrica sistema (2.3)

Za $m_j = S'\Delta_n(f, s_j)$ važe jednakosti (|1| str. 46)

$$(2.8)\qquad \begin{cases} m_j = \dfrac{h_j}{6} M_{j-1} + \dfrac{h_j}{3} M_j + \dfrac{f_j - f_{j-1}}{h_j} & (1 < j \le n) \\ m_j = -\dfrac{h_{j+1}}{3} M_j - \dfrac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} + \dfrac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} & (1 \le j < n) \end{cases}$$

Za elemente matrice A^{-1} važe jednakosti (|1| str. 66)

$$(2.9)\qquad \begin{cases} A_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \dfrac{D(\lambda_o, \ldots, \lambda_{i-1})\lambda_i \; \lambda_{i+1} \ldots \lambda_{i-1} D(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n)}{D} \\ \text{za} \quad 0 \le i \le j \le M \\ A_{ij}^{-1} = (-1)^{i+1} \dfrac{D(\lambda_o, \ldots, \lambda_{i-1})(1-\lambda_{j+1}) \ldots (1-\lambda_i) D(\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n)}{D} \\ \text{za} \quad 0 \le j \le i \le n , \end{cases}$$

gde je D determinanta matrice A , a za $k > j$

$$D(\lambda_j,\dots,\lambda_k) = \begin{vmatrix} 2 & \lambda_j & & & & \\ 1-\lambda_{j+1} & 2 & \lambda_{j+1} & & & \\ & & \dots & & & \\ & & 1-\lambda_{k-1} & 2 & \lambda_{k-1} \\ & & & 1-\lambda_k & 2 \end{vmatrix}$$

Po definiciji je

$$D(\lambda_j,\lambda_j) = 2, \quad D(\lambda_j,\lambda_{j-1}) = 1, \quad D(\lambda_j,\lambda_{j-1},\lambda_{j-2}) = 0.$$

$$D = D(\lambda_o, \dots, \lambda_n)$$

Važe sledeće leme:

Lema 2.1 (|1| str. 67)

Za $\lambda_o < 4$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$ $(0 < i < n)$, $\mu_n < 4$ i $0 < p < n$ (p ceo broj) važi

$$2^{-p} \min\left[1, \frac{4}{4-\lambda_o}\right] \leq \frac{D(\lambda_p,\dots,\lambda_n)}{D(\lambda_o,\dots,\lambda_n)} \leq$$

$$\leq \begin{cases} \max\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\lambda_o}\right] 3^{-(p-1)/2} & , \text{ p neparno} \\ \max\left[1, \frac{3}{4-\lambda_o}\right] 3^{-p/2} & , \text{ p parno i} \end{cases}$$

$$2^{-(n-p)} \min\left[1, \frac{4}{4-\mu_n}\right] \leq \frac{D(\lambda_o,\dots,\lambda_p)}{D(\lambda_o,\dots,\lambda_n)} \leq$$

$$\leq \begin{cases} \max\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\mu_n}\right] 3^{-(n-p-1)/2} & , \text{ n-p neparno} \\ \max\left[1, \frac{3}{4-\mu_n}\right] 3^{-(n-p)/2} & , \text{ n-p parno ,} \end{cases}$$

gde je $\mu_n = 1 - \lambda_n$.

Lema 2.2 (|1| str. 67)

Za $\lambda_o < 4$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $(0 < i < n)$, $\mu_n < 4$ i cele brojeve p, q, $0 < p < q < n$.

$$2^{-(q-p-1)} \leq \frac{D(\lambda_0,\ldots,\lambda_p)D(\lambda_q,\ldots,\lambda_n)}{D(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)} \leq \begin{cases} 4\cdot 3^{-(q-p+1)/2}, & q-p \text{ nepar.} \\ 2\cdot 3^{-(q-p)/2}, & q-p \text{ parno} \end{cases}$$

Lema 2.3 (|1| str. 27)

Ako kubni splajn $S\Delta(x)$ u svim čvorovima proizvoljne mreže Δ iz $[a, b]$ zadovoljava nejednakosti

$|S\Delta(x_k)| \leq A$, $|S'\Delta(x_k)| \leq B$, $(k=1,2,\ldots,n)$ tada za

svako $x \in [a, b]$ važi

$$|S\Delta(x)| \leq A + \frac{\|\Delta\|}{4} B .$$

U narednim teoremama pretpostavljaju se uslovi

$$(2.10) \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \|\Delta_k\| = 0 \\ \sup\limits_{k} \dfrac{\|\Delta_k\|}{\min\limits_{j} h_{kj}} = \beta < \infty \end{cases}$$

Teorema 2.1 (|1| str. 33)

Neka je na $[a, b]$ zadana funkcija $f(x) \in C^3[a, b]$ i niz mreža $\{\Delta_k\}$ za koje važi (2.10). Tada za interpolacioni splajn $S\Delta_k(f,x)$ koji zadovoljava granične uslove (2.6) a takodje i za periodičan splajn, ako je $f(x)$ periodična funk - cija, važi:

$$f^{(p)}(x) - S\Delta_k^{(p)}(f,x) = o\,(\|\Delta_k\|^{3-p}) \quad (p=0,1,2,3)$$

ravnomerno po x na $[a, b]$.

Ako $f'''(x)$ zadovoljava uslov Lipschitza reda $(0 < \alpha \leq 1)$ na $[a, b]$, tada je

$$f^{(p)}(x) - S\Delta^{(p)}(x) = O\,(\|\Delta_k\|^{3+\alpha-p}) \quad (p=0,1,2,3)$$

ravnomerno po x na $[a, b]$.

Teorema 2.2 (|1| str. 72)

Neka je na $[a, b]$ zadata funkcija $f(x)$, $f \in C^3[a,b]$ i niz mreža $\{\Delta_k\}$ koji zadovoljava uslov (2.10). Neka splajn $S\Delta_k(x)$ interpolira funkciju $f(x)$ u čvorovima mreže Δ_k i zadovoljava granične uslove (2.5). Neka je $\inf_k(4-\lambda_{ko}) > 0$. $\inf_k(4-\mu_{k n_k}) > 0$ i neka su nizovi $\{\lambda_{ko}\}$ i $\{\mu_{k n_k}\}$ ograničeni u odnosu na k. Ako veličine

$$(2.11)\quad \begin{cases} \varepsilon_k' = \dfrac{(2+\lambda_{k1})d_{k2}-3d_{k1}}{h_{k2}+h_{k3}} - \left[(4-\lambda_{k1})\mu_{k2}+(2+\lambda_{k1})\lambda_{k2}\right] f'''(a) \\ \varepsilon_k'' = \dfrac{3d_{kn_k}-(2+\mu_{kn_k})d_{kn_{k-1}}}{h_{k_{n-1}}+h_{k_n}} - \left[(4-\mu_{kn_k})\lambda_{kn_{k-1}}+(2+\mu_{kn_k})\cdot \right. \\ \left. \cdot\ \mu_{kn_{k-1}}\right] f'''(b) \ , \end{cases}$$

teže nuli kod $k\to\infty$, tada za $x \in [a, b]$

$$|f^{(p)}(x) - S\Delta_k^{(p)}(x)| = o\,(\|\Delta_k\|^{3-p}) \quad (p=0,1,2,3)\ .$$

Ako $f'''(x)$ zadovoljava uslov Lipschitza reda $\alpha (0 < \alpha \le 1)$ a ε_k i ε_k' su veličine reda $O(\|\Delta_k\|^{\alpha})$, tada je na $[a,b]$

$$|f^{(p)}(x) - S\Delta_k^{(p)}(x)| = O(\|\Delta_k\|^{3+\alpha-p}) \quad (p=0,1,2,3\ ).$$

Sve veličine koje se pominju u ovoj teoremi odredjene su sa (2.4) i (2.5) dopisivanjem indeksa k.

Teorema 2.3 (|46|)

Za $f \in C(I)$ interpolacioni kubni splajn $S\Delta\,(f,x)$ formiran na ravnomernoj mreži Δ , zadovoljava nejednakost

$$|f(x) - S\Delta(f,x)| \le \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) w_2(f\ ;\ h)\ ,$$

gde je $w_2\,(f\ ;\ h)$ modul glatkosti funkcije f definisan sa

$$w_2(f;h) = \sup_{|t|\le h}\ \sup_x |f(x+t)-2f(x) + f(t-x)|\ ,$$

pri čemu $x-t$, x, $x+t$ pripadaju intervalu I. h je dužina koraka u mreži Δ .

Sledeće tri teoreme se odnose na izlazni kriterijum za Newton - Cotes -ove kvadraturne formule. U njima se koriste oznake

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

$S_m(f)$ - približna vrednost za $I(f)$ izračunata Newton-Cotes-ovom kvadraturnom formulom tačnom za polinome stepena $\leq d$, sa m podela intervala I.

Teorema 2.4 (|51| teorema 3.)

Neka je $f \in C^{2q+1}(I)$ sa $q \geq 2$. Pretpostavimo da je $I(f^{(2r)}) = 0$ $r = 2,3,\dots, q-1$, ali $I(f^{(2q)}) \neq 0$. Neka je za približno izračunavanje integrala $I(f)$ upotrebljena Simpsonova kvadraturna formula. Tada nejednakost

$$(2.12) \qquad |S_m(f) - S_{2m}(f)| \geq |S_{2m}(f) - I(f)|$$

važi asimptotski.

Teorema 2.5 (|52| teorema 4.1)

Pretpostavimo da je $f \in C^{d+2}(I)$ i $f^{(d)}(a) \neq f^{(d)}(b)$, Tada postoji $m_o \in N$ tako da nejednakost (2.12) važi za sve $m \geq m_o$.

Teorema 2.6 (|51| teorema 1.)

Neka je $f \in C^4(I)$ i $f^{(4)}$ ne menja znak na I. Neka je $I(f)$ približno odredjeno Simpsonovom kvadraturnom formulom. Tada (2.12) važi za svako m.

Navešćemo na kraju i neke teoreme koje se odnose na iterativne postupke sa monotonim operatorima. U njima se koriste ove oznake:

Za nenegativnu matricu T

$$(2.13) \quad \begin{cases} a) & v_{k+1} = Tv_k + t \\ b) & T\alpha = \rho\,\alpha \quad \text{sa} \quad 0 < \rho\ ,\ 0 < \alpha \\ c) & \delta_k = v_k - v_{k-1} \end{cases}$$

Za nepozitivnu matricu T

$$(2.14)\quad \begin{cases} \text{a)} & v_{k+1} = Tv_k + t \qquad (k=0,1,2,\ldots \text{ ili } k=1,2,\ldots) \\ \text{b)} & T\alpha = -\rho\,\alpha \qquad \text{sa} \quad 0 < \rho \;,\; 0 < \alpha \\ \text{c)} & \left.\begin{array}{l} \delta_{2k} = v_{2k} - v_{2k-1} \\ \delta_{2k+1} = v_{2k} - v_{2k+1} \end{array}\right\} \text{sa} \quad T\delta_k = -\delta_{k+1} \end{cases}$$

Teorema 2.7 (|2| teorema 1.1)

Neka je T nenegativna matrica i

$$(2.15)\quad \begin{cases} 1. & 0 < \delta_k \quad \text{i} \quad \rho < 1 \\ & \text{ili} \\ 2. & 0 < \delta_k < \delta_{k-1} \end{cases}$$

Tada za rešenje v^* sistema

$$(2.16)\qquad v = Tv + t$$

važi ocena

1. $v_k + r_k\,\alpha \le v^* \le v_k + R_k\,\alpha$, sa

$$r_k = \frac{\rho}{1-\rho}\, q_k \;,\quad \frac{\rho}{1-\rho}\, Q_k = R_k \;,\quad \text{gde je}$$

$$(2.17)\qquad q_k = \min_i \frac{\delta_k^i}{\alpha^i} \qquad Q_k = \max_i \frac{\delta_k^i}{\alpha^i}$$

2. $v_k + s_k\delta_k \le v^* \le v_k + S_k\delta_k$, sa

$$s_k = \frac{m_k}{1-m_k} \;,\quad S_k = \frac{M_k}{1-M_k} \;,\quad \text{gde je}$$

$$(2.18)\qquad m_k = \min_i \frac{\delta_k^i}{\delta_{k-1}^i} \;,\quad M_k = \max_i \frac{\delta_k^i}{\delta_{k-1}^i}$$

Teorema 2.8 (|2| teorema 1.2)

Neka je T nepozitivna matrica i važi (2.14). Tada za rešenje sistema (2.16) važi ocena:

1. $v_{2k} - R_{2k}\,\alpha \leq v^* \leq v_{2k} - r_{2k}\alpha$

$v_{2k+1} + r_{2k+1}\alpha \leq v^* \leq v_{2k+1} + R_{2k+1}\,\alpha$ sa

$$r_k = \rho\frac{q_k-\rho Q_k}{1-\rho^2} \quad , \quad R_k = \frac{Q_k-\rho q_k}{1-\rho^2} \quad , \text{ gde je}$$

q_k i Q_k odredjeno sa (2.17).

2. $v_{2k} - S_{2k}\,\delta_{2k} \leq v^* \leq v_{2k} - s_{2k}\,\delta_{2k}$

$v_{2k+1} + s_{2k+1}\,\delta_{2k+1} \leq v^* \leq v_{2k+1} + S_{2k+1}\,\delta_{2k+1}$ sa

$$s_k = m_k\,\frac{1-M_k}{1-m_kM_k} \quad , \quad S_k = M_k\,\frac{1-m_k}{1-m_kM_k} \quad , \text{ gde je}$$

m_k i M_k odredjeno sa (2.18).

Sledeće dve teoreme se odnose na jednačinu

(2.19) $Ax = Bx$

sa inverznomonotonim operatorom A, u $\mathbb{R}^n$.

$BI \subseteq R^n$, $I = [a, b]$ $(a \neq -\infty \,, b \neq +\infty)$

$H_i(x,y)$ $(i=1,2)$ su operatori definisani za $x,y \in F$, $F = [\phi,\psi]$ / $(\phi \neq -\infty, \psi \neq +\infty)$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$ i za $x \in D = I \cap F$ važi:

(2.20)
$$\begin{gathered} H_1(x,x) \leq Bx \leq H_2(x,x) \\ H_j(x_1,y_1) \leq H_j(x_2,y_2) \quad , \quad \text{za} \\ x_j,\, y_j \in F \;,\; x_1 \leq x_2 \;,\; y_1 \geq y_2 \end{gathered}$$

Teorema 2.9 (|59| teorema 1.)

Ako postoje dva elementa $u, v \in D$ sa

$$u \leq v$$

$$Au \leq H_1(u,v) \quad , \quad H_2(v,u) \leq Av$$

Tada jednačina (2.19) ima rešenje x^* , i

$$u \leq x^* \leq v$$

$$Au \leq H_1(u,v) \leq Bx^* \leq H_2(v,u) \leq Av \; .$$

$H_i(u,v)$ su odredjeni sa (2.20) .

Teorema 2.10 (|4| str. 346)

Ako postoje inverznomonotoni operatori G_1 i G_2 takvi da je

$$G_1x \leq Ax \leq G_2x \qquad \text{i}$$

ako postoje elementi u_o i v_o sa

(2.21) $\quad u_o \leq v_o \; , \; u_o \leq u_1 \; , \; v_o \geq v_1 \; ,$

gde su u_l i v_l odredjeni sa

(2.22) $\quad H_1(u_l, v_l) = G_2 u_{l+1} \; , \; G_2 v_{l+1} = H_2(v_l, u_l)$

$$(l=0,1,2, \ldots)$$

tada jednačina (2.19) ima rešenje x^*. Iteracije (2.22) mogu se neograničeno izvoditi i pri tome važi ocena

(2.23) $\quad u_o \leq u_1 \leq \ldots \leq u_l \leq u_{l+1} \leq x^* \leq \ldots \leq v_{l+1} \leq v_l \leq \ldots$

$\ldots \leq v_1 \leq v_o$

Teorema 2.11 (|28| str. 341)

Ako je u B za rešavanje jednačine

(2.24) $\quad (E - V)v = Tv + r$

primenjen iterativni postupak

(2.25) $\quad (E - V)\, v_{n+1} = Tv_n + r$

Pretpostavimo da $(E-V)^{-1}$ postoji i da su T i $(E-V)^{-1}$ monotoni linearni operatori i da je $0 < \delta_2 < \delta_1$. (δ_i odredjeno sa (2.13)) .

Neka su m i M takvi brojevi da važi:

$$m\delta_1 \leq \delta_2 \leq M\delta_1$$

$$0 < m \leq M < 1$$

Neka na kraju, operator $(E-V)^{-1}\ T$ preslikava interval

$$J = \left[v_2 + \frac{m}{1-m}\,\delta_2\ ,\quad v_2 + \frac{M}{1-M}\,\delta_2\right]$$

u kompaktan skup.

Tada na tom intervalu postoji bar jedno rešenje jednačine (2.24).

Teorema 2.12 (|28| str. 343)

Neka su ispunjene pretpostavke prethodne teoreme za jednačinu (2.24).
Neka je poznat jedan korak iteracionog postupka (2.25), pri čemu razlika δ_1 zadovoljava uslov

$$\delta_1 > 0 .$$

Pretpostavimo da je u zadatku o sopstvenim vrednostima

$$T\alpha = \rho(E-V)\alpha$$

za sopstvenu vrednost ρ , $0 < \rho < 1$, postoji sopstveni element α , $\alpha > 0$, i neka su q i Q nenegativni brojevi takvi da je

$$q\alpha \leq \delta_1 \leq Q\alpha$$

Neka operator $U = (E-V)^{-1}T$ preslikava interval

$$J = \left[v_1 + \frac{\rho q}{1-\rho}\,\alpha\ ,\quad v_1 + \frac{\rho Q}{1-\rho}\,\alpha\right] \quad \text{u kompaktan skup.}$$

Tada rešenje jednačine (2.24) postoji i pripada intervalu J.

D R U G I   D E O

NESTACIONIRANI ITERATIVNI POSTUPCI

Kao što je već navedeno , u ovom delu se posmatra rešavanje operatorske jednačine

$$x = Ax$$

nestacionarnim iterativnim postupkom

$$x_{n+1} = A_n x_n \quad .$$

U § 3 je dat kratak pregled takvih metoda kao i dosadašnja dostignuća u toj oblasti.

U § 4 je prikazan jedan nestacionaran projektivnoiterativni metod za numeričko rešavanje linearnih integralnih jednačina.

Rešenje se traži u n fiksiranih tačaka iterativnim postupkom. Pri tome se integral zamnjuje kvadraturnom formulom a kao izlazni kriterijum koristi se pravilo Rungea |9| ,|51|, |52|,|64|. Takav izlazni kriterijum zahteva promenu broja čvorova integracije od tačke do tačke i od iteracije do iteracije. Da bi izračunali vrednost funkcije u onim tačkama koje eventualno nismo dobili u prethodnoj iteraciji, koristimo splajn aproksimacije. Izlazni kriterijum o kome je reč, koristi se u mnogim standardnim programima za numeričku integraciju, pa dobijeni rezultati omogućavaju primenu takvih programa za rešavanje Fredholmove integralne jednačine. No, bez obzira na veliku primenu taj kriterijum je dugo ostao samo pravilo za "praktičnu" ocenu greške. Prvi pokušaji da se tu da preciznija ocena greške su radovi |51| i|52| , vezani za Newton - Cotes -ove kvadraturne formule. U ovom delu su prošireni rezultati iz |51| i |52| na interpolacione kvadraturne formule i dobijene su neke, za praktičan rad pogodnije, asimptotske ocene greške. Time je omogućeno prilagodjavanje rasporeda čvorova integracije ponašanju funkcije na intervalu integracije.

Primena navedenog kriterijuma u našem slučaju daje izvesne prednosti u odnosu na već poznate rezultate. U |14| i |5| se rešavanje Fredholmove integralne jednačine druge vrste svodi na rešavanje sistema linearnih jednačina. Da bi se približno odredila dimenzija sistema n , koja obezbedjuje unapred zadatu tačnost, koristi se "Aitken -ova ekstrapolacija" |44|, što odgovara kriterijumu II u §4 . Za to je potrebno imati rešenje sistema sa matricama tipa nxn , 2n x 2n, 4n x 4n, što zahteva velika računanja (inverzija matrica velikih dimenzija).

U |14| je predložen jedan iterativni postupak koji ima za cilj da iskoristi rešenja sistema dimenzija nxn za dobijanje rešenja sistema dimenzije 2n x 2n. Taj postupak je razradjen u |5| . No, tada se za rešavanje sistema 4n x 4n koriste rešenja sistema 2n x 2n dobijena iterativnim postupkom a zatim se ponovo primenjuje iterativni postupak.

Mi tražimo rešenje u n fiksiranih tačaka (prema potrebi) i pri tome se čvorovi integracije udvajaju sve dotle dok izlazni kriterijum ne bude zadovoljen. No, tada je za neku tačku u nekoj iteraciji potrebno više ili manje od n čvorova iteracije. Taj problem se rešava interpolacionim splajnom trećeg stepena. Ovim se omogućava traženje rešenja u manjem broju tačaka sa većim stepenom tačnosti. Za razliku od |5| ne rešavamo sistem linearnih jednačina i dobijamo precizniju ocenu greške.

Splajn aproksimacije se na sličan način primenjuju za rešavanje integralnih jednačina u |46|. No, tamo je splajn upotrebljen da se pojednostavi podintegralna funkcija i omogući tačno izračunavanje integrala a rešenje se traži u obliku neprekidne funkcije. U |1|, |7| , |53| kao i u mnogim drugim radovima traži se rešenje integralne jednačine u obliku splajna.

Pri tome se koriste mogućnosti izbora splajnova različitog stepena tačnosti i izbora čvorova za dobijanje što boljeg približnog rešenja za odredjene klase funkcija. Tada se obično problem svodi na rešavanje sistema jednačina dimenzije 2n x 2n (n - koeficijenata splajna i n vrednosti nepoznate funkcije).

Rešavanje integralnih jednačina algoritmom (4.9) je dosta jednostavno i svodi se na pozivanje dva standardna potprograma (za numeričku integraciju i interpolaciju splajnom).

Uslovi u pojedinim teoremama se odnose na izvode poznate funkcije jezgra i izvode splajna koji se vrlo jednostavno izračunavaju.

§3. Razvitak nestacionarnih iterativnih postupaka

U ovom paragrafu ćemo ukratko prikazati problematiku vezanu za nestacionarne iterativne postupke.

Pri rešavanju operatorske jednačine

(3.1) $$x = Ax$$

običnim iterativnim postupkom

(3.2) $$x_n = A\, x_{n-1}$$

često se nailazi na teškoće. Ponekad je operator A nedefinisan ili je nemoguće naći njegovu tačnu vrednost. Nekada je opet nalaženje te tačne vrednosti vrlo komplikovano. Zbog toga se pribegava zameni operatora A približnim operatorima A_n, što dovodi do nestacionarnog iterativnog postupka

(3.3) $$x_n = A_n\, x_{n-1}$$

U nekim slučajevima se postupkom (3.3) ubrzava konvergencija, poboljšava tačnost ili postiže veća ekonomičnost metode. Kad je operator A zadat u vidu beskonačnog reda, za stacionaran metod (3.2) je obično potrebno uzeti veliki broj članova dok se kod nestacionarnog metoda u pojedinim koracima može uzeti i manji broj članova a da se pri tome ne gubi na tačnosti (§4 ,|33|,|65|,|63|). Pri numeričkoj realizaciji postupka (3.2) neminovno dolazi do pojave greške zaokrugljivanja brojeva a to dovodi do metoda oblika (3.3). Matematička formulacija raznih problema u fizici i tehnici zahteva zanemarivanje izvesnih parametara koji imaju neznatan opšti uticaj, što opet dovodi do iterativnih postupaka oblika (3.3).

Postupci (3.3) su proučavani u |19|,|54|,|32|, za slučaj opšteg metričkog prostora u kojem je rastojanje elemenat nekog parcijalno uredjenog skupa. U |32| je dat niz teorema koje daju konvergenciju niza (3.3) kao i ocenu greške.

Pri tome se posmatraju operatori A_n koji u odredjenom smislu konvergiraju ka operatoru A. Posebno se posmatraju slučajevi kada je jednačina $x = T_n x$ za svako n, ekvivalentna sa jednačinom (3.1). Nešto opštiji iterativni postupci

$$x_n = A_n (x_n, x_{n-1}) \tag{3.4}$$

posmatrani su u |73|, |54|, |33|, |32|, odnosno još opštiji

$$x_n = A_n (x_o, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad \text{u } |45|$$

U |32| su posmatrani slučajevi kada je jednačina (3.1) ekvivalentna sa jednačinom (3.4) za svako n. Prikazane su takodje i neke mogućnosti odredjivanja oparatora A_n. Tu se kao specijalan slučaj metode (3.4) prikazuju neke poznate projektivnoiterativne metode, metod srednjih funkcionalnih korekcija, metod Newton - Kantorovića i sl.

U |56|, |57| nastacionaran iterativni postupak se koristi za formiranje dvostranih iterativnih postupaka u normiranim prostorima. Pri tome se pretpostavlja da norma ima neke specijalne osobine. U |34|, |53|, |36|, |37|, |38| se posmatraju nestacionarni iterativni postupci u Banahovim prostorima sa konusom. Tu se definiše konvergencija i monotonost operatora po monotonim nizovima elemenata. Koristeći tu definiciju i specijalne osobine konusa dobijaju se monotoni dvostrano iterativni postupci za rešavanje jednačine

$$B\,y = A\,y$$

Pretpostavlja se takodje i egzistencija operatora B^{-1}. U |33| su ti postupci razradjeni za rešavanje sistema linearnih i nelinearnih jednačina. Posmatraju se iteracije

$$y_{n+1} = B^{-1} A_n y$$

ili

$$y_{n+1} = B_n A_n y$$

gde operatori A_n i B_n konvergiraju u odredjenom smislu ka operatorima A i B^{-1} respektivno. Prednost ovakvih postupaka je velika u slučajevima kada se B^{-1} teško odredjuje ili ga je uopšte nemoguće odrediti. U |37| se posmatra jednačina

$$y = \lambda A\,y + f$$

sa linearnim operatorom A u Banahovom prostoru (λ parametar). Za rešavanje se koristi algoritam

$$y_{n+1} = X_{n+1} f ,$$

a operatori X_n se odredjuju pomoću operatora A_n koji konvergiraju ka operatoru A.

Za rešavanje slabo uslovljenih (nestabilnih) zadataka primenjuju se takozvani regulacioni algoritmi. Za postizanje stabilnosti uvodi se parametar regulacije koji se u opštem slučaju menja od koraka do koraka, a to dovodi do nestacionarnog iterativnog postupka |39|,|71|,|10|.

Iako opšti postupci oblika (3.3) i (3.4) obuhvataju široku klasu nestacionarnih postupaka, detaljnije proučavanje posebnih slučajeva je od velikog značaja.

Za numeričku matematiku su posebno interesantna nestacionarni iterativni postupci oblika

(3.5) $$x_{n+1} = A x_n + \rho_n$$

pri čemu su ρ_n nepoznate a ponekad i slučajne veličine i nastaju kao posledica raznih linearizacija, aproksimacija, zaokrugljivanja brojeva i sl. Postupci takvog oblika su ispitivani u |31|,|22|,|75|,|71|,|63|,|65|,|25| .

U |22|,|11|,|31| kao i u mnogim drugim radovima ρ_n se posmatraju kao slučajne veličine. Traže se uslovi koji obezbedjuju konvergenciju niza x_n ka rešenju jednačine (3.1) sa verovatnoćom 1. Takodje se utvrdjuju uslovi pod kojima niz ρ_n konvergira ka nekom slučajnom elementu .

S druge strane, u |31|,|63|,|65|,|67|,|25|,|75| se pretpostavlja poznavanje izvesnih ograničenja za ρ_n (interval kome pripada ρ_n, ograničenje po normi, po modulu). Pod tim pretpostavkama se utvrdjuje konvergencija niza (3.5) kao i ocena greške. No, u tim slučajevima je ponekad nemoguće utvrditi konvergenciju niza x_n ka rešanju jednačine (3.1). Tada se ide za tim da se odredi okolina tačke x^* (x^* rešenje jednačine (3.1)) kojoj pripadaju svi članovi niza (3.5) koji imaju indeks veći od nekog fiksiranog n_o. Tada postupkom (3.5) možemo naći približno rešenje jednačine (3.1) ukoliko nam je dovoljna tačnost , koju garantuje dijametar nadjene okoline.

U daljem toku ovog rada posmatraće se upravo takvi postupci.

§ 4. Rešavanje Fredholmove integralne jednačine nestacionarnim iterativnim postupkom sa primenom splajn aproksimacija

U ovom paragrafu ćemo prikazati nestacionaran postupak oblika (3.5) za rešavanje Fredholmove integralne jednačine druge vrste

$$(4.1) \qquad u(s) = \int_a^b K(s,t)u(t)dt + f(s) \; , \quad \text{gde je} \quad s,t \in I$$

$$f(s) \in C(I) \quad , \quad K(s,t) \in C(I \times I)$$

Veličine ρ_n se pojavljuju kao posledica primene kvadraturnih formula i splajn interpolacija.

Uvedimo sledeće operatore:

Restrikcioni operator $r_n : C \to \mathbb{R}^n$, definisan za $u \in C = C(I)$ sa

$$(4.2) \qquad r_n u = \{u(s_i)\}_{i=1}^n$$

operator analitičkog produženja

$$p_n : \mathbb{R}^n \to C \qquad , \text{ definisan za } \quad z \in \mathbb{R}^n \quad \text{sa}$$

$$(4.3) \qquad p_n z = S_\Delta(z,s)$$

i integralni operator $K : C \to C$ definisan za $u \in C$ sa

$$(4.4) \qquad K u = \int_a^b K(s,t)\, u(t)dt$$

Prema definiciji 2.3 je

$$(4.5) \qquad \|r_n\| = 1$$

$$(4.6) \qquad \|K\| = \max_{s \in I} \int_a^b |K(s,t)|dt$$

Pretpostavimo u daljem da se Ku ne može tačno izračunati, pa ćemo operator K aproksimirati nizom operatora $\{K_m\}$, koje dobijamo kada integral u (4.4) zamenimo nekom Newton- Cotes-ovom kvadraturnom formulom. Za $u \in C$ operatore K_m definišemo sa

(4.7) $$K_m u = \sum_{j=o}^{2^m+1} d_j(m)K(s,t_j)u(t_j),$$ gde je m takvo da je:

(4.8) $$||K_m u - K_{m-1}u|| \leq \varepsilon \quad , \text{ za } \varepsilon \geq 0 \text{ unapred zadato,}$$

$d_j(m)$ su težinski koeficijenti primenjene kvadraturne formule. Pošto je

$$\sum_{j=o}^{2^m+1} d_j(m) = b - a \quad , \quad \text{imamo da je}$$

$$||K_m|| \leq ||K||$$

Rešenje jednačine (4.1) tražimo u n -fiksiranih tačaka mreže Δ_n: $a=s_1 < s_2 < \dots < s_n = b$. Pri tome ćemo rešenje u svakoj tački tražiti nestacionarnim iterativnim postupkom odredjenom sa:

(4.9)
$$\begin{cases} r_n z_o = r_n f \quad , \quad z_o = f \\ r_n z_1 = r_n K_{m_1} z_o + r_n f \\ r_n z_k = r_n K_{m_k} p_n r_n z_{k-1} + r_n f \quad , \quad (k=2,3,\dots) \end{cases}$$

gde su r_n, p_n i K_{m_k} operatori odredjeni sa (4.2), (4.3) i (4.7) respektivno.

Pretpostavlja se da je $m_k \leq [\log_2(NMAX-1)]$, NMAX - prirodan broj unapred zadat.

Da bi pokazali konvergenciju postupka (4.9) i dali ocenu greške, formiraćemo pomoćne nizove iteracija:

(4.10) $$r_n u_k = r_n K u_{k-1} + r_n f, \quad u_o = f \quad (k=1,2,\dots)$$

(4.11) $$r_n \bar{z}_k = r_n K_{1_k} \bar{z}_{k-1} + r_n f, \quad \bar{z}_o = f \quad (k=1,2,\dots)$$

Niz $\overline{z}_k$ postoji, ali se ne može efektivno izračunati prema (4.11) ,jer za neko k može biti $n \le 2^{1k}+1$. Zato se uvodi operator p_n . Bez ograničenja opštosti možemo uzeti da je $m_k = 1_k$.

Da bi mogli formirati niz (4.9) treba odabrati granične uslove za splajn. Mi ćemo koristiti (2.5) ili (2.6).

Da bi pokazali konvergenciju postupka (4.9) i ocenili grešku, dokazaćemo neke teoreme vezane ua izlazni kriterijum numeričke integracije (4.8). U |51| i |52| se posmatraju Newton - Cotes -ove kvadraturne formule sa ravnomernim rasporedom čvorova i daju klase funkcija za koje kriterijum (4.8) uvek važi, kao i klase funkcija za koji on samo asimptotski važi. Teoreme 4.1 i 4.2 uopštavaju neke rezultate iz |51| i |52| .

Interpolacione kvadraturne formule za približno izračunavanje integrala

(4.14) $$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

imaju oblik

(4.15) $$I(f) \approx S_m(f) = \sum_{q=1}^{m} s_q(f) \text{ , gde je}$$

$$s_q(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{jq} f(x_{jq}) \approx \int_{a_{q-1}}^{a_q} f(x)dx$$

$$a_{q-1} = x_{1q} < x_{2q} < \ldots < x_{nq} = a_q \text{ , } a_q = \phi\left(\frac{q}{m}\right) \text{ ,}$$

$\phi(t)$ neprekidno diferencijabilna funkcija koja zadovoljava uslov $\phi(0) = a$, $\phi(1) = b$. Koeficijenti A_{jq} su odredjeni u |9|. Formula (4.15) je tačna za polinome stepena $p \le n$, ako je n neparno, odnosno za polinome stepena $p \le n-1$ za n parno.

Teorema 4.1

Neka je $f \in C^{l+1}(I)$ i neka je za izračunavanje integrala $I(f)$ primenjena kvadraturna formula (4.15) tačna za polinome stepena p, $p \le l - 1$.

Neka je u

$$w_l = \int_0^1 f^{(l)}(\Phi(t))(\Phi'(t))^{l+1}\,dt \neq 0$$

Tada

a) Za $\lambda^l > 2$ postoji m_o, takvo da za svako $m_1 \geq m_o$ i $m_2 \sim \lambda m_1$, važi nejednakost

$$|I(f)-S_{m_2}(f)| \leq |S_{m_1}(f) - S_{m_2}(f)|$$

b) Za $\lambda > 1$ postoji n_o, takvo da za svako $n_1 \geq n_o$, $n_2 \sim \lambda n_1$ u $n_3 \sim \lambda n_2$ važi nejednakost

$$|I(f)-S_{n_3}(f)| \leq \frac{(S_{n_3}(f)-S_{n_2}(f))^2}{|S_{n_2}(f)-S_{n_1}(f)|} \cdot \frac{\lambda^l}{\lambda^l-1}$$

Dokaz.

a) Prema |9| (§11, §13) je

(4.16) $I(f)-S_{m_1}(f) = \gamma_l w_l 2^{-l-1} m_1^{-l} + \rho_{m_1}$, gde je

$$\gamma_l \neq 0 \quad \text{i} \quad \rho_{m_1} = o(m_1^{-l}) .$$

Ako napišemo relaciju (4.16) sa m_2 umesto m_1 i oduzmemo od (4.16) dobijamo:

(4.17) $S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f) = P_l(m_1^{-l} - m_2^{-l}) + \rho_{m_1} - \rho_{m_2}$, gde je

$$P_l = \gamma_l w_l\, 2^{-l-1}$$

Prema odnosu izmedju m_1 i m_2 možemo pisati da je

$$m_2 = [\lambda + \varepsilon(m_1)]\, m_1 , \quad \text{gde je}$$

$$\lim_{m_1\to\infty} \varepsilon(m_1) = 0$$

$$\lim_{m_1\to\infty} m_2^l \rho_{m_1} = \lim_{m_1\to\infty} [\lambda+\varepsilon(m_1)]^l m_1^l \rho_{m_1} = 0 \text{ , jer je}$$

prema (4.16) $\lim\limits_{m_1\to\infty} m_1^l \rho_{m_1} = 0$. Pošto je $\rho_{m_1} = o(m_2^{-l})$ imamo

(4.18) $\rho_{m_1} - \rho_{m_2} = o(m_2^{-l})$. Dalje je

$$(4.19)\qquad \frac{I(f)-S_{m_2}(f)}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)} = \frac{P_1 m_2^{-1} + o(m_2^{-1})}{P_1(m_1^{-1}-m_2^{-1})+o(m_2^{-1})}$$

$$(4.20)\qquad \lim_{m_1\to\infty} \frac{P_1\, m_2^{-1}}{P_1(m_1^{-1}-m_2^{-1})+o(m_2^{-1})} = \frac{1}{\lambda^1-1}$$, $P_1\neq 0$ po pretpostavci.

$$(4.21)\qquad \lim_{m_1\to\infty} \frac{o(m_2^{-1})}{P_1(m_1^{-1}-m_2^{-1})+o(m_2^{-1})} = 0\ ,$$ $\lambda^1-1\neq 0$ po pretpostavci.

Prema (4.19), (4.20) i (4.21) je:

$$\lim_{m_1\to\infty} \frac{I(f)-S_{m_2}(f)}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)} = \frac{1}{\lambda^1-1} < 1$$

Time je pokazano tvrdjenje pod a).

b) Prema (4.17) i (4.18) je:

$$(4.22)\qquad \lim_{n_1\to\infty} \frac{S_{n_2}(f)-S_{n_1}(f)}{S_{n_3}(f)-S_{n_2}(f)} = \lim_{n_1\to\infty} \frac{P_1(n_2^{-1}n_2^{-1})+o(n_2^{-1})}{P_1(n_2^{-1}-n_3^{-1})+o(n_3^{-1})} =$$

$$= \lim_{n_1\to\infty} \frac{n_1^{-1}-\lambda^{-1}n_1^{-1}}{\lambda^{-1}n_1^{-1}-\lambda^{-2l}n_1^{-1}} = \lambda^1$$

Prema (4.21) i (4.22) je:

$$\lim_{n_1\to\infty} I(f) - S_{n_3}(f)\cdot\frac{S_{n_2}(f)-S_{n_1}(f)}{(S_{n_3}(f)-S_{n_2}(f))^2} = \frac{\lambda^1}{\lambda^1-1}$$

čime je dokazano tvrdjenje pod b).

Teorema 4.1 objedinjuje i uopštava teoreme 2.4 i 2.5. Naime, u slučaju ravnomernog rasporeda čvorova x_j na intervalu $[a_{q-1}, a_q)]$ formule (4.15) su Newton-Cotes- ove . Za $\phi(t)=a+(b-a)t$, uslov $K_1\neq 0$ svodi se na uslov $f^{l-1}(a)\neq f^{l-1}(b)$ teoreme 2.5 , te se za $m_2=2m_1$ tvrdjenje a) teoreme 4.1 svodi na teoremu 2.5. Teorema 4.1 daje nešto drugačiju i za praktičnu primenu pogodniju asimptotsku ocenu. Delenjem (4.16) sa $I(f)-S_{m_2}(f)$ za $m_2=2m_1$ i prelaskom na graničnu vrednost dobijamo asimptotsku ocenu teoreme 2.5.

Ako je u (4.15) $n=3$ imamo Simpsonovu kvadraturnu formulu pa za $m_2=2m_1$ dobijamo tvrdjenje teoreme 2.4 uz oslabljene pretpostavke na izvode podintegralne funkcije.

Na osnovu teoreme 4.1 možemo formulisati dva izlazna kriterijuma za kvadraturne formule (4.15).

Broj čvorova integracije m_i , menja se tako da je $m_k = \lambda m_{k-1}$ $(k=1,2, \ldots)$, (m_o -unapred zadat broj). Računanje se prekida kada je za neko k zadovoljen kriterijum I

I $\left\{ |S_{m_{k-1}}(f)-S_{m_k}(f)| \leq \varepsilon \right.$, $m_k=\lambda m_{k-1}$, $\lambda^l > 2$ ($\varepsilon > 0$ unapred zadato).

odnosno kriterijum II

$$\text{II} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & \dfrac{S_{m_{k-1}}(f)-S_{m_{k-2}}(f)}{S_{m_k}(f)-S_{m_{k-1}}(f)} \sim \lambda^l \\ \text{b)} & (S_{m_k}(f)-S_{m_{k-1}}(f))^2/|S_{m_{k-2}}(f)-S_{m_{k-1}}(f)| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

($\varepsilon > 0$, unapred zadato, $m_i = \lambda m_{i-1}$ $(i=k,k-1)$, $\lambda > 1$). O izboru najpogodnijeg parametra λ može se naći u |9| . Statistički se pokazuje da je $\lambda = e$ najbolje u pogledu obima računanja, ali je za praktičan rad pogodnije $\lambda = 2$ pa se najčešće koristi.

Teorema 4.2

Neka su zadovoljene pretpostavke teoreme 4.1

a) Neka je za prekid računanja po formulama (4.15) korišćen kriterijum I. Tada važi ocena:

$$(4.23)\qquad I(f)-S_{m_2}(f) = \frac{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)}{\lambda^1 - 1} + o(m_2^{-1})$$

b) Neka je za prekid računanja po formulama (4.15) korišćen kriterijum II. Tada važi ocena:

$$(4.24)\qquad I(f)-S_{m_3}(f) = \frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)} \cdot \frac{\lambda^1}{\lambda^1-1} + o(m_3^{-1})$$

Pošto se u prvom kriterijumu koriste samo dva uzastopna računanja a u drugom tri, uzeti su indeksi 1 i 2, odnosno 1,2 i 3.

Dokaz.

Prvi deo tvrdjenja je dokazan u |9| str. 168. Dokazaćemo drugi deo. Prema (4.17) je

$$(4.25)\qquad \begin{cases} P_1 = (s_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)+\rho\acute{m}_2)/(m_1^{-1}-m_2^{-1}) \\ P_1 = (S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)+\rho\,'m_3)/(m_2^{-1}-m_3^{-1}) \end{cases} \text{, gde je}$$

$$\rho\,'m_2 = \rho m_2 - \rho m_1 = o(m_2^{-1})$$
$$\rho\acute{m}_3 = \rho m_3 - \rho m_2 = o(m_3^{-1})$$

Izjednačavanjem izraza u (4.25) dobijamo

$$\frac{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)+\rho\acute{m}_2}{m_1^{-1} - m_2^{-1}} = \frac{S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)+\rho\,'m_3}{\lambda^{-1}(m_1^{-1}-m_2^{-1})}$$

Pošto je

$$S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f) = \lambda^1(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)) + o(m_2^{-1})$$

uzimajući u obzir (4.23) dobijamo

$$\frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)} = \frac{[If-S_{m_3}(f)+o(m_3^{-1})]\ (\lambda^1-1)}{\lambda^1+o(m_2^{-1}(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)^{-1})}\text{, odnosno}$$

$$(If-S_{m_3}(f))(\lambda^1-1) = \lambda^1\frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)} + o(m_2^{-1}\cdot\lambda^{-1}) +$$

$$+ \ (\lambda^1-1)\cdot o(m_3^{-1})$$

pa je

$$If-S_{m_3}(f) = \frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)}\cdot\frac{\lambda^1}{\lambda^1-1} + o(m_3^{-1}) \quad .$$

Ovim je dokazan drugi deo.

Kriterijum II ima izvesne prednosti u odnosu na kriterijum I |51| , iako su za njegovu primenu potrebne tri aproksimacije integrala. Uslov a) nam pri tom pokazuje kada je veličina $o(m_3^{-1})$ toliko mala da asimptotska formula daje dobru aproksimaciju, a uslov b) zahteva da asimptotska procena greške ne prelazi veličinu $\varepsilon\cdot\lambda^1(\lambda^1-1)^{-1}$.

Sada ćemo preći na dokaz konvergencije postupka (4.9) Pri tome ćemo granične uslove za splajn odrediti sledećim jednačinama:

$$(4.26)\quad \begin{cases} 2M_1-2M_2(h_2+h_3)/h_3 = 2M_3h_2/h_3 \\ 2M_n-2M_{n-1}(h_n+h_{n-1})/h_{n-1} = -2M_{n-2}h_n/h_{n-1} \end{cases}$$

One su dobijene iz zahteva neprekidnosti trećeg izvoda funkcije $S\Delta\ (z,s)$ u tačkama t_2 i t_{n-1} |49| , što odgovara opštim uslovima (2.5). Pretpostavićemo takodje da mreža splajna zadovoljava uslove

$$(4.27)\quad \lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0 \ , \ \frac{\|\Delta_n\|}{\min\limits_j h_j} \le \beta < \infty \ , \ \lim_{n\to\infty}\frac{h_i}{h_{i-1}} = 1 \qquad (i=3,n)$$

Pokazaćemo prvo da splajn $S\Delta_n(z,t)$ sa (4.27) i graničnim uslovima (4.26) zadovoljava uslove teoreme 2.2. Granični uslovi (4.26) imaju oblik (2.5) sa

$$(4.28)\quad \begin{cases} \lambda_1 = -2\,\dfrac{h_2+h_3}{h_3}\ , & d_1 = -2\,\dfrac{h_2}{h_3}\,M_3 \\ \lambda_n = -2\,\dfrac{h_n+h_{n-1}}{h_{n-1}}, & d_n = -2\,\dfrac{2h_n}{h_{n-1}}\cdot M_{n-2} \end{cases}$$

Radi jednostavnijeg izlaganja izostavljen je indeks k koji se javlja u teoremi 2.2. Pošto je $h_i > 0$, za svaku podelu k je

$$\inf_k (4-\lambda_{k_1}) > 0 \quad i \quad \inf (4-\mu_{k n_k}) > 0$$

Prema (4.26) je $S_\Delta''' (z,t) = \text{const.}$ za $t \in [t_1, t_3]$.
Prema tome $S_\Delta^{IV}(z,t)$ je neprekidno na $[t_1, t_3]$.

Za $f \in C^4(I)$, prema diferencnim formulama E.Planza |26| , važi:

$$f_3'' = \frac{2}{(h_2+h_3)\cdot h_2} \cdot f_1 - \frac{2}{h_2 h_3} f_2 + \frac{2}{h_3(h_2+h_3)} f_3 + o(\|\Delta\|)$$

Pošto $S\Delta(z,t)$ u $z(t)$ imaju iste ordinate i neprekidne četvrte izvode važi:

$$f_3'' = M_3 + O(\|\Delta\|)$$

Pokazaćemo sada da je

$\varepsilon_k' = O(\|\Delta\|)$ i $\varepsilon_k'' = O(\|\Delta\|)$, ε_k' i ε_k'' su odredjeni sa (2.11).
Prema (4.28) , (2.4) i (4.27) je

$$(4.29) \quad \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(2+\lambda_1)d_2 - 3d_1}{h_2+h_3} = 3z_3''' \\[2ex] \lim\limits_{k\to\infty} \left[(4-\lambda_1)\mu_2 + (2+\lambda_1)\lambda_2\right] f''' (a) = 3f'''(a) \end{cases}$$

Prema (2.11) i (4.29) sledi:

$$\varepsilon_k' \sim z'''(t_3) - z'''(a) = (t_3 - a)\cdot z^{IV}(\xi) = O(\|\Delta\|) ,$$

$$\xi \in [a, t_3]$$

Na isti način se pokazuje da je i $\varepsilon_k'' = O(\|\Delta\|)$.
Dakle, za funkciju $z \in C^4(I)$, koja se interpolira splajnom $S\,\Delta(z,t_i)$ sa graničnim uslovima (4.26) i uslovima na mrežu (4.27) važi teorema 2.2. Pošto je i četvrti izvod neprekidan z''' zadovoljava Lipschitz- ov uslov reda $\alpha = 1$ pa je prema

teoremi 2.2

$$(4.30)\quad |z^{(p)}(t) - S\Delta^{(p)}(z,t)| = O(\|\Delta\|^{4-p}) \quad (p=0,1,2,3)$$

Lema 4.1

Neka je $z \in C^4(I)$ i ε odredjeno sa $|z(t_j)| \leq \varepsilon$ Tada za interpolacioni kubni splajn sa graničnim uslovima (4.26) i mrežom koja zadovoljava (4.27) važi:

$$(4.31)\quad |S\Delta(z,t)| \leq \varepsilon(1+\frac{3}{2}\beta^4\|A^{-1}\| + \frac{1}{2}\beta) + O(\|\Delta\|^4)$$

gde je A^{-1} inverzna matrica matrice sistema (2.3)

Dokaz.

Prema (2.7) i (4.28) imamo

$$(4.32)\quad M_j = 6\sum_{i=2}^{n-1} A_{ji}^{-1} \frac{[(z_{i+1}-z_i)h_{i+1}]-[(z_i-z_{i-1})/h_i]}{h_i + h_{i+1}} -$$

$$- 2A_{j1}^{-1}\frac{h_2}{h_3}M_3 - 2A_{jn}^{-1}\frac{h_n}{h_{n-1}}M_{n-2}$$

Prema (4.30) je

$$(4.33)\quad M_i = z_i'' + O(\|\Delta\|^2) \quad (i=3,n-2)$$

Za $z \in C^4(I)$ važi prema |26|

$$(4.34)\quad z_3'' = az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4 \quad , \text{ gde je}$$

$$a = \frac{2h_4-h_3}{(h_2+h_3)h_2\cdot(h_2+h_4+h_3)} \quad , \quad b = \frac{2(h_4-h_3-h_2)}{h_3h_2(h_4+h_3)}$$

$$c = \frac{2(h_4-2h_3-h_2)}{h_4\, h_3(h_2+h_4)} \quad , \quad d = \frac{2(2h_3-h_2)}{h_4(h_4+h_3)(h_4+h_2+h_3)}$$

Prema (4.27) koeficijente u (4.34) možemo majorirati na sledeći način:

$$|a|\ \|\Delta\|^2 \leq \frac{1}{3}\beta^3 \quad , \quad |b|\ \|\Delta\|^2 \leq 2\beta^3$$
$$|c|\ \|\Delta\|^2 \leq 3\beta^3 \quad , \quad |d|\ \|\Delta\|^2 \leq \frac{2}{3}\beta^3$$

Zbog $|z_i| = |z(t_i)| \leq \varepsilon$ i (4.34) je

$$\|\Delta\|^2 |M_i| \leq 6\beta^3\varepsilon + O(\|\Delta\|^4) \qquad (i=3, n-2)$$

Kada se dobijene procene za $|M_i|$ i $|z_i|$ unesu u (4.32) dobija se

$$\|\Delta\|^2 |M_j| \leq 12\varepsilon\, \beta^4 \|A^{-1}\| + O(\|\Delta\|)$$

Prema (2.8) je

$$|S'\Delta(z,t_j)| = |m_j| \leq \left|\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{z_j - z_{j-1}}{h_j}\right| \leq$$

$$\leq 6\frac{\beta^4 \cdot \varepsilon \|A^{-1}\|}{\|\Delta\|} + \frac{2\varepsilon}{\min\limits_{1\leq i\leq n} h_i} + O(\|\Delta\|^3) \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

Primenom leme 2.3 dobijamo relaciju (4.31). $\|A^{-1}\|$ možemo proceniti primenom lema 2.1, 2.2 i 2.9. Iz tih lema se vidi da elementi matrice A^{-1} opadaju po geometrijskoj progresiji kada se udaljavaju od glavne dijagonale. No, pošto se pri formiranju splajna veličine M_j obavezno izračunavaju, prema (2.8) možemo izračunati m_j, a onda direktno primenom leme 2.3 dobijamo procenu za $S\Delta(z,t)$.

Teorema 4.3

Neka je za rešavanje jednačine (4.1) primenjen nestacionaran iterativni postupak (4.9) sa Simpsonovom kvadraturnom formulom. Neka je

a) $f(s) \in C^4(I)$, $K(s,t) \in C^4(I\times I)$

b) $\|K\| < 1$

c) Mreža splajna zadovoljava uslove (4.27) a granični uslovi su dati sa (4.26)

d) $\dfrac{\partial^4}{\partial t^4}\left[K(s_i,t)\, \bar{z}_p(t)\right]$, $(p=0,1,\ldots,k-1)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ ne menja znak na I .

Tada se rešenje jednačine (4.1) može približno odrediti preko niza (4.9) i pri tome važi ocena:

$$(4.35)\quad \|r_n u^* - r_n z_k\| \le \|f\| \frac{\|K\|^{k+1}}{1-\|K\|} + \varepsilon' \frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} + O(\|\Delta\|^4),$$

gde je

$$\varepsilon' = \varepsilon(1+\frac{3}{2}\beta^4\|A^{-1}\| + \frac{1}{2}\beta) ,$$

β je odredjeno sa (4.27) a A^{-1} je inverzna matrica matrice sistema (2.3)

Dokaz.

$$(4.36)\quad \|r_n u^* - r_n z_k\| \le \|r_n u^* - r_n u_k\| + \|r_n u_k - r_n \bar{z}_k\| + $$

$$+\|r_n \bar{z}_k - r_n z_k\|$$

$$(4.37)\quad \|r_n u^* - r_n u_k\| \le \|u^* - u_k\| \le \|f\| \frac{\|K\|^{k+1}}{1-\|K\|}$$

Indukcijom se može pokazati da je

$$(4.38)\quad \|r_u(u_k - \bar{z}_k)\| \le \sum_{j=o}^{k-1} \|K\|^j \|\sigma_{k-j-1}\| \quad \text{gde je}$$

$$\sigma_i = K\bar{z}_i - K m_i \bar{z}_i$$

$$\sigma_i(t) \in C^4(I) , \text{ jer je } \bar{z}_i \in C^4(I)$$

Prema izlaznom kriterijumu (4.8) i teoremi (2.6) je

$$\|r_n \sigma_i\| \le \varepsilon .$$

Ako funkciju $\sigma_i(t)$ aproksimiramo kubnim splajnom sa graničnim uslovima (4.26) i ako mreža splajna zadovoljava uslove (4.27), tada prema lemi 4.1 sledi da je

$$(4.38)\quad \|S\Delta(\sigma_i,t)\| \le \varepsilon' + O(\|\Delta\|^4)$$

Pokazali smo takodje da za ovakav splajn važi teorema 2.2, pa je

$$(4.39)\quad \sigma_i(t) - S\Delta(\sigma_i,t) = O(\|\Delta\|^4)$$

(4.38) i (4.39) daju

$\|\sigma_i(t)\| \le \varepsilon' + O(\|\Delta\|)^4$. Zamenom u (4.38)dobijamo

$$(4.40)\quad \|r_n(u_k - \bar{z}_k)\| \le \varepsilon' \frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} + O(\|\Delta\|^4)$$

Pošto je i $z_k(t) \in C^4(I)$, $z_k = \bar{z}_k$ za $k = 0,1$ prema teoremi 2.2 je :

$$\|r_n\bar{z}_2 - r_n z_2\| \leq \| r_n k_m(\bar{z}_1 - p_n r_n \bar{z}_1)\| \leq \|K\| \cdot O(\|\Delta\|^4).$$

Pretpostavimo da je

$$\| r_n\bar{z}_{k-1} - r_n z_{k-1}\| \leq \|\bar{z}_{k-1} - z_{k-1}\| = O(\|\Delta\|^4)$$

i pokažimo da je i

$$\|r_n\bar{z}_k - r_n z_k\| = O(\|\Delta\|^4) \ . \tag{4.41}$$

$$\| r_n\bar{z}_k - r_n z_k\| = \|r_n K_{m_k}(\bar{z}_{k-1} + z_{k-1} - z_{k-1} -$$

$$- p_n r_n z_{k-1})\| = O(\|\Delta\|^4) \ .$$ Dakle (4.41) važi za svako k . Zamenom (4.40), (4.41) i (4.37) u (4.36) dobijamo ocenu (4.35).

Postupak konvergira i $\|u^* - z_k\| \to 0$ kod $n \to \infty$, $k \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$.

Prema teoremi 3.12.1 |1| brzina konvergencije kubnog splajna ne može biti veća od $O(\|\Delta\|^4)$, pa za ε treba birati veličinu reda $O(\|\Delta\|^4)$.

Uslov d) teoreme 4.3 je dosta oštar. Corollocy 3.2 |52| može donekle pojednostaviti proveravanje tog uslova. U sledećoj teoremi uslov d) je izostavljen, ali tada izlazni kriterijum (4.8) važi asimptotski.

Teorema 4.4

Neka je za rešavanje jednačine (4.1) primenjen iterativni postupak (4.9) i neka je .

a) $f(s) \in C^5(I)$, $K(s,t) \in C^5(I \times I)$

b) $\|K\| < 1$

c) $S\Delta(z,s)$ zadovoljava granične uslove (4.26) a mreža Δ uslove (4.27)

d) $\frac{\partial^3}{\partial t^3}[K(s,t)S\Delta(z_p,t)]_{t=a} \neq \frac{\partial^3}{\partial t^3}[K(s,t)S\Delta(z_p,t)]_{t=b}$, $(p=1,2,\ldots, k-1)$

Tada se rešenje u^k jednačine (4.1) može približno odrediti preko niza (4.9), pri čemu važi ocena:

$$(4.42)\qquad \|r_n(u^*-z_k)\| \leq \|f\| \frac{\|K\|^{k+1}}{1-\|K\|} + \frac{\varepsilon'}{15}\,\frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} +$$

$$+\ O(\max(\|\Delta\|^4,\ 2^{-5m_k}))\ ,\ \text{gde je } \varepsilon' \text{ odredjeno sa (4.39).}$$

$\|u^*-z_k\| \to 0$, kod $k\to\infty$, $u\to\infty$, $m_k\to\infty$ i $\varepsilon\to 0$.

Dokaz.

Dokaz je sličan dokazu prethodne teoreme. Ovde se samo na osnovu teorema 4.1 i 4.2 relacija (4.40) zamenjuje sa

$$\|r_n u_k - r_n \bar{z}_k\| \leq \frac{\varepsilon'}{15}\,\frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} + O(\max(\|\Delta\|^4,\ 2^{-5m_k}))$$

jer je za Simpsonovu kvadraturnu formulu $l=4$ a veličina $o((2m)^{-l})$ u teoremi 4.2 su reda $(2m)^{-l-1}$ |9| .

Teorema 4.5

Neka je za rešavanje jednačine (4.1) primenjen iterativni postupak (4.9), s tim što se izlazni kriterijum (4.8) zamenjuje kriterijumom

a) $r_n(K_m u-K_{m-1}u)\ /\ r_n(K_{m+1}u-K_m u)$ se ponaša kao 2^4 .

b) $$\frac{(r_n(K_m u-K_{m+1}u))^2}{|r_n(K_{m+1}u-K_m u)|} \leq \varepsilon$$

Neka važe ostale pretpostavke teoreme 4.4. Tada važi ocena:

$$\|r_n(u^*-z_k)\| \leq \frac{\|f\|\ \|K\|^{k+1}}{1-\|K\|} + \frac{16\varepsilon'}{15}\,\frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} +$$

$$+\ O(\max(\|\Delta^4\|\ ,\ 2^{-5(m_{k+1})})),\quad \varepsilon' \text{ je odredjeno sa (4.39)}$$

Dokazuje se na osnovu teoreme 4.2.

Primedba 4.1

Teoreme 4.3, 4.4 i 4.5 važe za granične uslove (2.6) što se dobija primenom teoreme 2.1. Tada je(|1| str. 25(2.3.1))

$$\| A^{-1} \| \leq 1.$$

Primedba 4.2

Ako su jezgro i slobodan član periodične funkcije sa periodom b-a , treba koristiti periodičan splajn |1| . Tada je splajn odredjen bez graničnih uslova. Konvergencija postupka se dokazuje na osnovu teoreme 2.1. Važi takodje $\| A^{-1} \| \leq 1$ (|1| (2.32))

Primedba 4.3

Algoritam (4.9) se može uspešno primeniti na rešavanje konturnih problema primenom Grenn -ove funkcije. Tada, zbog prekida prvog izvoda Grenn- ove funkcije u tačkama s=t, treba interval integracije podeliti

$$\int_a^b K(s,t)u_{n-1}(t)dt + f(s) = \int_a^s K(s,t)u_{n-1}(t)dt + $$
$$+ \int_s^b K(s,t)u_{n-1}(t)dt + f(s) .$$

Tako se računanje u tačkama s_j svodi na

$$u_n(s_j) = \int_a^{s_j} K(s_j,t)u_{n-1}(t)dt + \int_{s_j}^b K(s_j,t)u_{n-1}(t) + f(s_j) \tag{4.42}$$

Ukoliko Grenn -ova funkcija , K(s,t), ima neprekidne četvrte izvode na intervalima [a,s] i [s,b] možemo na svakom od tih intervala izvršiti integraciju kao u (4.9). Pri tom se pojavljuje problem računanja vrednosti funkcije u tačkama s_2 i s_{n-1}. Tada je

$$u_n(s_2) = \int_a^{s_2} K(s_2,t)u_{n-1}(t)dt + \int_{s_2}^b K(s_2,t)u_{n-1}(t) + f(s_2) .$$

Na intervalu $[s_1,s_2]$, s_1=a, treba aproksimirati funkciju $u_{n-1}(t)$, tako da greška aproksimacije bude reda $O(\|\Delta\|^4)$. Pri tome pretpostavljamo da znamo vrednosti funkcije u tačkama s_1 i s_2 i vrednost drugog izvoda u tački s_1. Interval $[s_1,s_2]$ možemo porizvoljno smanjivati da bi postigli tačnost. To isto treba uraditi i na intervalu $[s_{n-1}, s_n]$, $s_n = b$.

(Napr. Podaci koje imamo jednoznačno odredjuju parabolu, sa greškom aproksimacije reda $O(h_2^3)$. Ako uzmemo da je $h_2 = \|\Delta\|^{\frac{4}{3}}$ uslov je zadovoljen.

Linearna interpolacija sa $h_2 = \|\Delta\|^2$, $h_2 = s_2 - s_1$, takodje postiže datu tačnost.)

Ocena greške data u prethodnim teoremama važi i u ovom slučaju, s tim što se ε zameni sa 2ε .

T R E Ć I   D E O

NESTACIONARNI ITERATIVNI POSTUPCI PRI REŠAVANJU OPERATORSKIH JEDNAČINA SA MONOTONIM OPERATOROM

Operatorske jednačine sa monotonim operatorima vezane su za mnoge probleme iz prakse. U |33| , |34| , |9| , |10| ,je prikazan niz konturnih problema koji se preko Grenn -ove funkcije svode na rešavanje integralnih jednačina sa pozitivnim jezgrom. To su problemi iz teorije potencijala, problemi Neumanna u Dirichleta, teorije elasticiteta, oscilovanja i slično. U tesnoj vezi sa tim je i široka primena sistema linearnih jednačina sa nenegativnom (nepozitivnom) matricom.

U matematici se često pri proučavanju raznih problema koriste tzv. majorante (minorante). Dati operator se majorira (minorira) sa nekim koji je jednostavniji za proučavanje, a onda se na osnovu rešenja jednačine sa takvim operatorom izvode zaključci o rešenju polazne jednačine, |11| , |13|, |14| . To obično dovodi do rešavanja jednačina sa pozitivnim operatorom. Zbog toga se u mnogim monografijama i radovima monotoni operatori posebno proučavaju. Iterativni postupci zauzimaju vidno mesto u rešavanju jednačina sa takvim operatorima. U matematičkoj praksi se na dva načina prilazi ovim problemima. Najčešće se zahteva poznavanje izvesnih osobina datog operatora i na osnovu toga se utvrdjuje konvergencija iterativnog postupka i egzistencija rešenja.

Drugi polaze od toga da se osobine operatora T reflektuju na odgovarajući iterativni niz, pa se uočavaju izvesne zakonitosti u tom nizu i na osnovu toga dobija egzistencija rešenja.

Drugi način je za praksu teže prihvatljiv, jer se iteracije već posle prvog koraka znatno komplikuju. No, ukoliko se iteracije mogu izvoditi na mašini, iterativni niz se može detaljnije proučavati. Zbog toga je u novije vreme porastao interes za ovaj pristup.

Jedan od bitnih uslova koji sadrže poznate teoreme o nepokretnoj tački (kontrakcija, Brouwer, Schauder, Tihonov i drugi |24|), je egzistencija skupa kojeg dati operator preslikava samog u sebe. Schröder se u |58| i |59| bavio efektivnom konstrukcijom takvog skupa. U |58| su date neke mogućnosti za konstrukciju intervala I , $I \subset \mathbb{R}^n$, kojeg posmatrani operator ostavlja invarijatnim . Primenom Brouwer-ove teoreme o nepokretnoj tački dobijena je egzistencija rešenja. U |59| su uopšteni ovi rezultati. U |58| je prikazana mogućnost odredjivanja invarijantnog intervala za dati operator korišćenjem nekog približnog rešenja. Albrecht u |2| koristi tu ideju i odredjuje interval oblika

$$[v_n + s\delta_n, \ v_n + S\delta_n] ,$$

v_n, δ_n su odredjeni sa (2.13) odnosno (2,14) za nenegativne i nepozitivne matrice. Polazeći od rezultata Frobeniusa (" Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen" Sitzungsber Prens. Akad. Wiss. Berlin 1912) da su posle dovoljno velikog broja iteracije greške $e_k = v_k - v^*$, (v^* tačno rešenje jednačine (2.16)) proporcionalne razlikama δ_k , odnosno sopstvenom elementu kome odgovara najveća sopstvena vrednost date matrice, on odredjuje parametre s i S tako da se navedeni interval preslika sam u sebe. Ovi rezultati su prikazani u teoremama 2.7 i 2.8 . Kollatz |28| primenjuje isti postupak za operatore definisane u Banahovom parcijalno uredjenom prostoru, (teoreme 2.11 i 2,12), a egzistenciju rešenja dobija primenom Schauder-ove teoreme.

Rezultati ovog dela se odnose na sličnu problematiku u vezi sa nestacionarnim iterativnim postupcima oblika (3.5).

Naime, šira primena rezultata Alberchta i Kolltza nije moguća bez upotrebe računske mašine. To dovodi do nestacionarnog iterativnog postupka za koji prikazana teorija ne važi. Pored toga, kao što je opisano u §3, pri numeričkom rešavanju operatorskih jednačina često smo u situaciji da operator zamenimo približnim, da uvedemo neke aproksimacije, interpolacije,|46| |65| . Tako se dešava da linearan i monoton operator zamenimo sa nekim koji nije linearan i čija se monotonija ne može utvrditi. Prirodno je očekivati da novo formirani iterativni postupak zadržava neke osobine polaznog, odnosno da se u tom nestacioniranom nizu reflektuju osobine polaznog operatora. Da bi se očuvala monotonija, odnosno da bi se mogla koristiti u dokazima pretpostavlja se da se veličine ρ_n mogu majorirati, odnosno minorirati sa elementima nastalim dejstvom nekog monotonog operatora na odredjeni elemenat prostora (iteraciju). Pod pretpostavkom da takvi operatori postoje, dobijeni su rezultati u §5, §6 i §7.

U §5 je posmatrana jednačina (5.1) sa pozitivnim linearnim operatorom T . Uvedeni su pomoćni linearni pozitivni operatori A_k i B_k koji omogućavaju formiranje iterativnih nizova koji sa obe strane ograničavaju nestacioniran niz.

Sve teoreme §5 koriste lemu 5.1. u čijem je dokazu korišćen dokaz teoreme 2.7 |2| . Teoreme 5.1, 5.3, 5.5 i 5.7 odnose se na slučaj kada operatori A_k i B_k nisu komutativni sa T. Teoreme 5.1 i 5.5 se odnose na monotono rastući niz iteracija a teoreme 5.3 i 5.7 na monotono opadajući niz iteracija. Teoreme 5.2, 5.4, 5.6 i 5.8 se odnose na slučaj kad su operatori A_k i B_k komutativni sa operatorom T. Sve teoreme daju egzistenciju invarijantnog intervala za dati operator T', $T'x = Tx + f$, postavljanjem uslova na nestacioniran niz oblika (5.2). Pored toga prikazan je način na koji se pomoću navedenih teorema može dobiti ocena greške, ukoliko se primenom neke teoreme o nepokretnoj tački utvrdi egzistencija rešenja. Teorema 5.9 daje uslove koji obezbedjuju konvergenciju postupka dobijenog u prethodnim teoremama §5. Ona ustvari, odredjuje uslove pod kojima je $I_{z_k} \subseteq I_{z_{k+1}}$, gde su I_{z_k} i $I_{z_{k+1}}$ intervali dobijeni nekom od navedenih teorema na k -tom odnosno (k+1)-om iterativnom koraku.

U §6. se posmatra jednačina (5.1) sa linearnim negativnim operatorom i odredjuje invarijantan interval za dati operator. Za dokaz leme 6.1 korišćen je dokaz teoreme 2.8 |2| . Teoreme 6.1 i 6.3 odnose se na nekomutativne operatore, a teoreme 6.2 i 6.4 na komutativne. Teorema 6.5 odredjuje uslove koji obezbedjuju relaciju $I_{z_k} \subseteq I_{z_{k+1}}$.

U §7 se pretpostavlja poznavanje jedne pozitivne sopstvene vrednosti i odgovarajućeg nenegativnog sopstvenog elementa. Teoreme 7.1 i 7.2 daju egzistenciju invarijantnog intervala za pozitivan operator T, a teorema 7.4 za negativan operator. Teorema 7.5 koristi kontrakciju i prikazuje ocenu greške za dvostrani nestacionaran postupak, čiji su početni elementi odredjeni nekom od teorema 7.1 i 7.2. Sve teoreme za odredjivanje invarijantnih intervala predstavljaju uopštenja odgovarajućih rezultata iz |2| i |28|. U slučaju kada se za operatore A_k i B_k mogu uzeti nula operatori, nestacionaran postupak prelazi u stacionaran, a navedene teoreme daju već poznate rezultate iz |2| odnosno |28| . Rezultati ovog dela omogućavaju da se bez eksplicitnog zahteva kontrakcije dobije egzistencija rešenja i konvergencija iterativnog postupka, što je značajno u slučajevima kada je teško proveriti uslov $\|T\| < 1$ ili $\rho(T) < 1$.

Primenom navedenih teorema postiže se znatno ubrzanje iterativnih postupaka što je ilustrovano na primerima u §10. Svako odredjivanje invarijantnog intervala je istovremeno odredjivanje aposteriorne ocene greške. Ocena se dobija bez nekih dodatnih računanja.

Mogućnosti za primenu ovih teorema opadaju sa porastom broja iteracija. Od toga koliko dobro možemo odrediti pomoćne operatore A_k i B_k zavisi indeks iteracije do kojeg je moguće postići zahteve o kojima je reč. To je opet povezano sa tolerancijom sa kojom je zadat operator T i sa kojom se izračunavaju iteracije. Prema tome, ovaj postupak možemo primeniti samo onda ako nam ne treba veća tačnost od one koju garantuje dužina intervala. Što se tiče ekonomičnosti postupka, on se može uporediti sa nekim drugim postupcima za ubrzanje stacionaranih iterativnih postupaka |62|, |33|,|31| i videti da je broj računskih operacija (kad se posmatraju sistemi linearnih jednačina) približno jednak. Ono što je ovde bitno istaći, je da sa malim brojem iterativnih koraka(tri, dva i početni) dobijamo značajne podatke o rešenju.

§5 ODREDJIVANJE INVARIJANTNOG INTERVALA ZA POZITIVNE LINEARNE OPERATORE

U ovom paragrafu se posmatra jednačina

(5.1) $$x = Tx + f$$

u Banahovom parcijalno uredjenom prostoru $\mathbf{B}$. Za rešavanje jednačine (5.1) koristi se nestacionaran iterativni postupak

(5.2) $$z_n = T_n z_{n-1} + f \quad , \quad z_o \in \mathbf{B}$$

gde je

(5.3) $$T_n x = Tx + \rho_n \quad , \quad \rho_n \in \mathbf{B}$$

Uporedo sa (5.2) posmatraće se i stacionaran niz

(5.4) $$x_n = Tx_{n-1} + f \quad , x_o \in \mathbf{B}$$

Radi jednostavnijeg izlaganja uvešćemo oznake za funkcije koje se češće pojavljuju u narednim teoremama, a zavise od linearnih pozitivnih operatora A_k i B_k koji će biti odredjeni u svakoj teoremi pojedinačno.

(5.5) $$Gz_k(s) = z_k + s\delta z_k$$

(5.6) $$Iz_k(s,t,p,q) = |Gz_k(s)+t_k, \ Gz_k(p) + q_k|$$

(5.7) $$\begin{cases} R_k(A,B) = T_{k-1}B_k z_{k-2} + B_k z_{k-1} + (B_k A_k + B_k^2 + A_k) \ z_{k-2} \\ R_k'(A) = T_{k-1}A_k z_{k-2} + A(z_{k-1} + z_{k-2}) \end{cases}$$

(5.8) $$\begin{cases} r_k(A,B) = 2B_k z_{k-1} + 2B_k A_k z_{k-2} + B_k^2 z_{k-2} - B_k f \\ r_k'(A) = 2A_k z_{k-1} + A_k^2 z_{k-2} - A_k f \end{cases}$$

$$
(5.9)\quad \begin{cases} F_k(A,B) = T_{k-1}B_k z_{k-2} + (A_k+B_k+B_kA_k)\ z_{k-1} - \\ \quad - (A_k+B_kA_k)(A_k+B_k)\ z_{k-2} + B_k^2\ z_{k-2} \\ F'_k(A,B) = T_{k-1}A_k z_{k-2} + (2A_k+A_k^2)\ z_{k-1} - (A_k+A_k^2)\ \cdot \\ \quad \cdot\ (A_k+B_k)\ z_{k-2} - A_k^2\ z_{k-2} \end{cases}
$$

$$
(5.10)\quad \begin{cases} f_k(A,B) = 2B_k(E+A_k)\ z_{k-1} - 2B_kA_k(A_k+B_k)z_{k-2}+B_k^2 z_{k-2} - B_k f \\ f'_k(A,B) = 2A_k(E+A_k)z_{k-1} - 2A_k^2(A_k+B_k)z_{k-2} - A_k^2 z_{k-2} - A_k f \end{cases}
$$

$$
(5.11)\quad \begin{cases} \phi_k(A,B) = -T_{k-1}A_k z_{k-2} + B_k z_{k-1} + (B_kA_k+B_k)u_k - B_kA_k z_{k-2} \\ \phi'_k(A,B) = -T_{k-1}B_k z_{k-2} + A_k z_{k-1} + (A_k^2+B_k)u_k + A_kB_k z_{k-2} \end{cases}
$$

gde je

$$
(5.12)\quad \begin{cases} u_k = z_{k-1} - (A_k+B_k) z_{k-2} & \text{za} \quad k = 2i \quad (i=1,2,\dots) \\ u_k = z_{k-2} & \text{za} \quad k = 2i+1 \quad (i=1,2,\dots) \end{cases}
$$

$$
(5.13)\quad \begin{cases} \phi_k(A,B) = (B_k-A_k) z_{k-1} + (B_kA_k+A_kB_k)u_k - B_kA_k z_{k-2} + A_k f \\ \phi_k(A,B) = (A_k-B_k) z_{k-1} + (A_k^2+B_k^2)u_k + A_kB_k z_{k-2} + B_k f \end{cases}
$$

gde je u_k odredjeno sa (5.12)

Lema 5.1.

Neka je data jednačina (5.1) u Banahovom parcijalno uredjenom prostoru $\mathbb{B}$ sa pozitivnim linearnim operatorom T. Neka za neko j u nizu (5.4) postoje $p_i, q_i \in \mathbb{B}$ $(i=j-1,j)$ tako da važi

(5.14) $\quad p_i \leq \delta x_i \leq q_i \qquad (i=j-1,j)$

(5.15) $\quad \begin{cases} \mu_j\,(q_{j-1} - p_j) \leq p_j \\ \eta_j\,(p_{j-1} - q_j) \geq q_j \end{cases}$, gde je

$(i=1,2,\ldots)$

(5.16) $\quad \delta x_i = x_i - x_{j-1}$

ukoliko je niz iteracija rastući, odnosno

(5.17) $\quad \delta x_i = x_{i-1} - x_i \qquad (i=1,2,\ldots)$

ukoliko je niz iteracija opadajući

μ_j i η_j su realnu brojevi za koje važi:

(5.18) $\quad 0 < \mu_j \leq \eta_j$

Tada, za δx_i odredjeno sa (5.16) operator T'

(5.19) $\quad T'_x = T_x + f$

preslikava interval $Ix_j\,(\mu,\,0,\,\eta,0\,)$ u samog sebe, a za δx_i odredjeno sa (5.19) operatot T' preslikava interval $Ix_j(-\eta,\,0,\,-\mu,\,0)$ u samog sebe.

Dokaz:

I. Neka je $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Prema (5.14) je

$$\delta x_{j-1} - \delta x_j \leq q_{j-1} - p_j$$

a prema (5.15) je

(5.20) $\quad \mu_j(\delta x_{j-1} - \delta x_j) \leq \delta x_j$

Pošto je T linearan i pozitivan operator iz (2.20) dobijamo

(5.21) $\quad T\mu_j(\delta x_{j-1} - \delta x_j) \leq T\delta x_j$

Kako je

(5.22) $\quad T\delta x_{j-1} = \delta x_j \quad$ i

(5.23) $\quad Tx_{j-1} = x_j - f$

zamenom (5.22) i (5.23) u (5.21) dobijamo

(5.24) $\quad T(x_j + \mu_j\,\delta x_j) + f \geq x_j + \mu_j\,\delta x_j$

Analogno se pokazuje da je

(5.25) $\quad T(x_j + \eta_j\,\delta x_j) + f \leq x_j + \eta_j\,\delta x_j$

Iz (5.24) i (5.25) sledi da operator T' preslikava interval $Ix_j(\mu,\ 0,\ \eta,\ 0)$ u samog sebe.

II. Neka je $\delta x_i = x_{i-1} - x_i$

Ovde se isto kao i u prethodnom slučaju dolazi do relacije (5.20). Dalje je

$$T(x_{j-1} - x_j) + \mu_j\,T\delta x_j \geq \mu_j\,\delta x_j$$

(5.26) $\quad T(x_j - \mu_j\,\delta x_j) + f \leq x_j - \mu_j\,\delta x_j$

Na sličan način se pokazuje da je

(5.27) $\quad T(x_j - \eta_j\,\delta x_j) + f \geq x_j - \eta_j\,\delta x_j$

Iz (5.26) i (5.27) sledi drugi deo tvrdjenja.

Posledica 5.1 Veličine p_i, q_i $(i=j,j-1)$ odredjene u lemi 5.1 su nenegativne.

Dokaz. Prema (5.14) i (5.15) je

(5.28) $\quad \mu_j(q_{j-1} - p_j) \leq p_j \leq q_j \leq \mu_j\,(p_{j-1} - q_j)$

(5.29) $\quad q_i = p_i + c_i \,, \quad c_i \geq 0 \quad (i=j-1,j)$

zamenom (5.29) u (5.28) dobijamo

$$\mu_j(q_{j-1}-p_j) \leq \eta_j(q_{j-1}-c_{j-1}-p_j-c_j)$$

$$(q_{j-1}-p_j)(\eta_j-\mu_j)-\eta_j(c_{j-1}+c_j) \geq 0$$

Zbog (5.18) i (5.29) je

$q_{j-1} - p_j \geq 0$, a zbog (5.28) i

$p_{j-1}-q_j \geq 0$. Dakle , važi poredak:

(5.30) $\quad 0 \leq p_j \leq q_j \leq p_{j-1} \leq q_{j-1}$

U teoremama koje slede prikazaćemo neke mogućnosti odredjivanja invarijantnog intervala Ix_j za dati operator T', korišćenjem niza (5.2). Veličine p_j i q_j ćemo odredjivati preko uslova postavljenih na niz z_n, odnosno veličine ρ_n.

Teorema 5.1 Neka je u Banahovom parcijalno uredjenom prostoru $\mathbf{B}$, definisan linearan i pozitivan operator T i neka za neko $k \geq 2$ u nizu (5.2) važi:

5.1 Postoje pozitivni linearni operatori A_k i B_k takvi da je:

5.1.1 $\quad (T-A_k)z_{k-2} \leq T_n z_{k-2} \leq (T+B_k)z_{k-2}, \quad (n=k-1,k)$

5.1.2 $\quad \delta z_{k-1} \geq (A_k+B_k)z_{k-2} \,, \quad \delta z_k = z_k - z_{k-1} \quad (k=1,2,\dots)$

5.1.3 Postoje realni brojevi s_k i S_k, takvi da je:

a) $0 < s_k \leq S_k$

b) $\delta z_k - s_k(\delta z_{k-1}-\delta z_k) \geq (1+2s_k)A_k z_{k-2} + (1+s_k)R_k^{`}(A,B)$

c) $S_k(\delta z_{k-1}-\delta z_k)-\delta z_k \geq (1+2S_k)B_k z_{k-2}+(1+S_k)R_k^{'}(A)$

$R_k^{`}$ i $R_k^{'}$ su odredjeni sa (5.7).

Tada operator T' preslikava interval

$Ix_2(\mu,0,\eta,0)$, $\mu_2 = s_k$, $\eta_2 = S_k$ u samog sebe. Pri tome je T' odredjeno sa (5.19), x_n sa (5.4) za $x_o=z_{k-2}$ i Ix_2 sa (5.6).

Dokaz. Pokazaćemo da veličine

$$(5.31)\qquad \begin{cases} p_1 = \delta z_{k-1} - B_k z_{k-2} \\ q_1 = \delta z_{k-1} + A_k z_{k-2} \\ p_2 = \delta z_k - R_k(A,B) - A_k z_{k-2} \\ q_2 = \delta z_k + R_k'(A) + B_k z_{k-2} \end{cases}$$

zadovoljavaju nejednakosti (5.14) za $j=2$ i δx_i odredjeno sa (5.17) za $x_o = z_{k-2}$

Formirajmo nizove

$$(5.32)\qquad \begin{cases} y_n = (T+B_k)y_{n-1} + f \;;\; y_o = z_{k-2} & (n=1,2,..) \\ l_n = (T-A_k)l_{n-1} + f \;;\; l_o=z_{k-2} & (n=1,2,..) \\ \overline{z}_n = T_{k+n-2}\overline{z}_{n-1} + f \;;\; \overline{z}_o=z_{k-2} & (n=1,2,..) \\ x_n = Tx_{n-1} + f \;;\; x_o=z_{k-2} & (n=1,2,..) \end{cases}$$

i pokažimo da je

$$(5.33)\qquad l_i \leq \overline{z}_i \leq y_i \qquad (i=0,1,2\ )$$

Za $i=0$ tvrdjenje sledi iz (5.32) jer svi nizovi imaju isti početni elemenat.

Za $i=1$ tvrdjenje sledi iz 5.1.1. Pokažimo to i za $i=2$. Iz 5.1.1 sledi $(A_k+B_k)\overline{z}_o \geq 0$ a iz 5.1.2

$$\delta\overline{z}_1 \geq 0 \qquad \text{i}$$

$$(5.34)\qquad (T-A_k)\,\overline{z}_o + f + \rho_{k-1} - B_k\overline{z}_o \geq \overline{z}_o$$

Pošto je $\rho_{k-1}-B_k\overline{z}_o \leq 0$ iz (5.34) sledi

$$(5.35)\qquad l_1 \geq \overline{z}_o$$

Zbog (5.32) i (5.33) za $i=1$, imamo

$$l_2 \le T\bar{z}_1 - A_k l_1 + f \le T\bar{z}_1 - A_k\bar{z}_o + f \le \bar{z}_2$$

$$\bar{z}_2 \le T\bar{z}_1 + B_k\bar{z}_o + f \le T\bar{z}_1 + B_k\bar{z}_1 + f \le (T+B_k)\, y_1 + f = y_2$$

Uvedimo oznake:

$$(5.36)\quad \begin{cases} a_i = y_i - \bar{z}_i & (i=1,2) \\ b_i = \bar{z}_i - l_i & (i=1,2) \\ k_i = y_i - x_i & (i=1,2) \\ e_i = x_i - l_i & (i=1,2) \end{cases}$$

prema (5.36) i (5.32) je

$$(5.37)\quad \begin{cases} k_2 = TB_k\bar{z}_o + B_kT\bar{z}_o + B_k^2\bar{z}_o + B_kf \\ e_2 = TA_k\bar{z}_o + A_kT\bar{z}_o - A_k^2\bar{z}_o + A_kf \end{cases}$$

Iz uslova 5.1.1 sledi:

$$(5.38)\quad \begin{cases} T\bar{z}_o \le \bar{z}_1 - f + A_k\bar{z}_o \\ T_{k-1}H\bar{z}_o = TH\bar{z}_o + y_{k-1} \le TH\bar{z}_o + A_k\bar{z}_o\,, \quad (H=A_k, B_k) \end{cases}$$

Zamenom (5.38) u (5.37) dobijamo

$$(5.39)\quad \begin{cases} k_2 \le R_k(A,B) \\ e_2 \le R_k'(A) \end{cases}$$

Prema (5.36) i (5.32) je

$$(5.40)\quad \begin{cases} e_1 = A_k\bar{z}_o \\ k_1 = B_k\bar{z}_o \end{cases}$$

a prema (5.33) je $a_i \ge 0$ i $b_i \ge 0$ $(i=1,2)$. Korišćenjem ovih relacija dobijamo vezu izmedju x_i i $\bar{z}_i$

$$(5.41)\quad \begin{cases} \bar{z}_1 - B_k\bar{z}_o \le x_1 \le \bar{z}_1 + A_k\bar{z}_o \\ \bar{z}_2 - R_k(A,B) \le x_2 \le z_2 + R_k'(A) \end{cases}$$

Na osnovu (5.41) i 5.1.2 formiramo ograničenja za razlike δx_i, pa dobijamo da veličine

$$(5.42)\qquad \begin{cases} p_1 = \delta\bar{z}_1 - B_k z_o \\ q_1 = \delta\bar{z}_1 + A_k\bar{z}_o \\ p_2 = \delta\bar{z}_2 - R_k(A,B) - A_k\bar{z}_o \\ q_2 = \delta\bar{z}_2 + R_k'(A) + B_k\bar{z}_o \end{cases}$$

zadovoljavaju nejednakosti (5.14), za $j=2$ i x_i definisano sa (5.32).

Iz 5.1.3 sledi da veličine (5.42) zadovoljavaju nejednakost (5.15) za $j=2$ i $\mu_2=s_k$, $\eta_2=S_k$, pa direktnom primenom leme 5.1 sledi tvrdjenje teoreme.

Posledica 5.2

Neka su zadovoljeni uslovi 5.1.1 sa $A_k z_{k-2} \geq 0$, $B_k z_{k-2} \geq 0$ i 5.1.2. Tada je $R_k'(A) \geq 0$ i $R_k(A,B) \geq 0$.

Dokaz.

Iz $A_k z_{k-2} + \rho_{k-1} \geq 0$ i $Hz_{k-1} \geq Hz_{k-2}$ $(H=A_k, B_k)$ $(\delta z_{k-1} \geq 0)$ sledi tvrdjenje.

U specijalnom slučaju kada su operatori A_k i B_k komutativni sa operatorom T može se izbeći eksplicitno pojavljivanje operatora T_{k-1} u uslovima 5.1.3 teoreme 5.1. Naime, operator T_{k-1} je definisan preko dejstva na elemenat z_{k-2}, tj. $T_{k-1}z_{k-2} = z_{k-1} - f = Tz_{k-2} + \rho_{k-1}$, a često smo u situaciji da nemožemo odrediti $T_{k-1}x$ za $x \neq z_{k-2}$. U Navedenom slučaju to se može izbeći promenom uslova 5.1.3. Novi uslovi se ne mogu dobiti iz 5.1.3 jer iz komutativnosti operatora T i H, ne sledi komutativnost operatora T_{k-1} i H.

Teorema 5.2.

Neka su zadovoljeni uslovi 5.1.1 i 5.1.2 teoreme 5.1 Neka je pri tome operator T komutativan sa operatorima A_k i B_k i neka veži 5.1.3 s tim što se R_k zameni sa r_k a

R_k' sa r_k', gde je r_k i r_k' odredjeno sa (5.8). Tada važi tvrdjenje teoreme 5.1

Dokaz.

Dokazuje se isto kao prethodna teorema sa jedinom razlikom što se, zbog komutativnosti, koristi samo prva od nejednakosti (5.38) za majoraciju e_2 i k_2. Tako se dobija

$$(5.43)\qquad \begin{cases} e_2 \leq r_k'(A) \\ k_2 \leq r_k(A,B) \end{cases}$$

Uslov 5.1.2 igra značajnu ulogu u formiranju odnosa

$$(5.44)\qquad l_o \leq l_1 \leq l_2 \;,$$

pošto se nemože ništa tvrditi o monotonosti operatora $T-A_k$. Za slučaj monotono opadajućeg niza iteracija, (5.44) nemožemo dobiti na isti način kao u teoremi 5.1. Teprema 5.3 to obezbedjuje uz nešto izmenjene uslove.

Teorema 5.3

Neka je u B definisan linearan i pozitivan operator T i neka za neko $k \geq 2$ u nizu (5.2) važi:

5.3. Postoje pozitivni linearni operatori A_k i B_k takvi da važi:

5.3.1. $(T-A_k)x \leq T_n x \leq (T+B_k)x \quad (x=z_{k-2}, z_{k-1}-(A_k+B_k)z_{k-2})$

$(n= k-1,\ k)$

5.3.2. Postoje realni brojevi s_k i S_k takvi de je:

a) $0 < s_k \leq S_k$

b) $s_k(\delta z_{k-1} - \delta z_k) - \delta z_k \leq -(2s_k+1)B_k W_k - (s_k+1)F_k'(A,B)$

c) $S_k(\delta z_{k-1} - \delta z_k) - \delta z_k \geq (2S_k+1)A_k W_k + (S_k+1)F_k(A,B)$

gde je

$$\delta z_k = z_{k-1} - z_k \qquad (k=1,2,\ldots)$$

$W_k = z_{k-1} - (A_k+B_k)z_{k-2}$, a F_k i F_k' je odredjeno sa (5.9).

Tada operator T' odredjen sa (5.19) preslikava interval $Ix_2(-\eta,0,-\mu,0)$, $\mu_2=s_k$, $\eta_2=S_k$ u samog sebe.

Pri tome je x_n odredjeno sa (5.4) za $x_o = z_{k-2}$, a Ix_2 sa (5.6).

Dokaz.

Formiraćemo nizove (5.32) kao u teoremi 5.1 i pokazati da važi (5.33).

Iz 5.3.1 sledi $(A_k+B_k)\bar{z}_o \geq 0$ odnosno $\bar{z}_1 \geq w_k$

Da nejednakosti (5.33) važe za i=0,1 sledi iz (5.32) i 5.3.1.

$$l_1 = T\bar{z}_o - A_k\bar{z}_o + f + \rho_{k-1} - \rho_{k-1} \geq \bar{z}_1 - (A_k+B_k)\bar{z}_o = W_k$$

$$l_2 \leq T\bar{z}_1 - A_kW_k + f \leq T\bar{z}_1 + \rho_k + f = \bar{z}_2 \leq T\bar{z}_1 + B_kW_k + f \leq$$
$$\leq (T+B_k)\bar{z}_1 + f \leq y_2$$

Prema (5.31) je

$$\text{(5.45)} \qquad \begin{cases} T\bar{z}_o \leq \bar{z}_1 - f + A_kW_k \\ TH\bar{z}_o \leq T_{k-1}\, H\bar{z}_o + A_kW_k \end{cases} \qquad (H=A_k,\ B_k)$$

Zamenom (5.45) u (5.37) dobijamo

$$\text{(5.46)} \qquad \begin{cases} e_2 \leq F_k'(A,B) \\ k_2 \leq F_k(A,B) \end{cases}$$

Iz (5.33) i (5.36) sledi da je $a_i \geq 0$ i $b_i \geq 0$ za i=1,2 . To nam omogućava da dobijemo sledeće nejednakosti:

$$\text{(5.47)} \qquad \begin{cases} \bar{z}_1 - B_kW_k \leq x_1 \leq \bar{z}_1 + A_kW_k \\ \bar{z}_2 - F_k(A,B) \leq x_2 \leq \bar{z}_2 + F_k'(A,B) \\ x_2 = y_2 - k_2 = \bar{z}_2 + a_2 - k_2 \geq \bar{z}_2 - F_k(A,B) \end{cases}$$

Prema (5.47) i definiciji δx_i u ovom slučaju , sledi da veličine

$$(5.48)\quad \begin{cases} p_1 = \delta\bar{z}_1 - A_k W_k \\ q_1 = \delta\bar{z}_1 + B_k W_k \\ p_2 = \delta\bar{z}_2 - F_k'(A,B) - B_k W_k \\ q_2 = \delta\bar{z}_2 + F_k(A,B) + A_k W_k \end{cases}$$

zadovoljavaju nejednakosti (5.14) za $j=2$. Iz uslova 5.1.3 i (5.14) sledi da veličine (5.48) zadovoljavaju nejednakosti (5.15) za $\mu_2 = s_k$, $\eta_2 = S_k$.

Primenom leme 5.1 dobijamo tvrdjenje teoreme.

Posledica 5.3

Neka je zadovoljen uslov 5.3.1 sa $A_k W_k \geq 0$ i $B_k W_k \geq 0$. Tada je $F_k(A,B) \geq 0$ i $F_k'(A,B) \geq 0$.

Dokaz.

Prema posledici 5.1 je $p_1 \geq 0$, tj.

$$\bar{z}_1 \geq A_k W_k \geq 0 \Rightarrow \bar{z}_o \geq \bar{z}_1 \geq W_k \Rightarrow B_k \bar{z}_o \geq 0$$

$A_k(\bar{z}_1 - A_k\bar{z}_o) \geq A_k w_k \geq 0$. Zamenom ovih nejednakosti u (5.9) dobijamo tvrdjenje.

Teorema 5.4

Ako su operatori A_k i B_k komutativni sa T tvrdjenje teoreme 5.3 važi, s tim što se F_k zameni sa f_k a F_k' sa f_k', gde su f_k i f_k' odredjeni sa (5.10) .

Dokaz.

Postupajući na isti način kao u prethodnoj teoremi ,s tim što se umesto (5.46) koriste majoracije.

$$(5.49)\quad \begin{cases} e_2 \leq f_k'(A,B) \\ k_2 \leq f_k(A,B) \end{cases}$$

dobijamo tvrdjenje, ((5.49) se dobija zamenom prve nejednakosti (5.45) u (5.37)).

Teorema 5.5

Neka je u $\mathbb{B}$ definisan linearan pozitivan operator T i neka za neko $k \geq 2$ u nizu (5.2) važi:

5.5. Postoje pozitivni linearni operatori A_k i B_k takvi da je

5.5.1. $(T+A_k)x \leq T_n x \leq (T-B_k)x$, $(n=k-1,\ k)$

$(x=z_{k-2},\ w_k)$, $w_k = z_{k-1} - (A_k+B_k)z_{k-2}$

5.5.2. Postoje realni brojevi s_k i S_k takvi da važi:

a) $0 < s_k \leq S_k$

b) $s_k(\delta z_{k-1} - \delta z_k) - \delta z_k \leq (s_k+1)F_k'(B,A) + (2s_k+1)A_k w_k$

c) $S_k(\delta z_{k-1} - \delta z_k) - \delta z_k \geq -(S_k+1)F_k(B,A) - (2S_k+1)B_k w_k$

gde je F_k i F_k' odredjeno sa (5.9),

$$\delta z_k = z_k - z_{k-1} \qquad (k=1,2,\dots)$$

Tada operator T' preslikava interval $Ix_2(\mu,0,\eta,0)$, $\mu_2 = s_k$, $\eta_2 = S_k$ u samog sebe. Pri tome je x_n odredjeno sa (5.4) za $x_0 = z_{k-2}$.

Dokaz.

Formirajmo nizove

$$(5.50)\quad \begin{cases} l_i = (T+A_k)l_{i-1} + f & (i=1,2,\dots),\ l_0 = z_{k-2} \\ y_i = (T-B_k)y_{i-1} + f & (i=1,2,\dots),\ y_0 = z_{k-2} \\ \bar{z}_i = T_{k+n-2}\bar{z}_{i-1} + f & (i=1,2,\dots),\ \bar{z}_0 = z_{k-2} \\ x_i = Tx_{i-1} + f & (i=1,2,\dots),\ x_0 = z_{k-2} \end{cases}$$

Pokazaćemo da je

$$(5.51)\qquad l_i \leq \bar{z}_i \leq y_i \qquad (i=0,1,2)$$

Prema 5.5.1 je $l_1 \leq \bar{z}_1 \leq y_1$ i $y_1 \leq w_k$

$$l_2 \leq (T+A_k)\bar{z}_1 + f \leq T\bar{z}_1 + A_k w_k + f \leq \bar{z}_2 \leq Ty_1 + \rho_k + f \leq$$

$$\leq Ty_1 - B_k w_k + f \leq y_2$$

Zadržaćemo oznake (5.36).

$$(5.52)\quad \begin{cases} k_2 = -TB_k\bar{z}_o - B_kT\bar{z}_o + B_k^2\,\bar{z}_o - B_kf \\ e_2 = -TA_k\bar{z}_o - A_kT\bar{z}_o - A_k^2\,\bar{z}_o - A_kf \end{cases}$$

Prema 5.5.1 je

$$(5.53)\quad \begin{cases} -T\bar{z}_o \le -\bar{z}_1 + f - B_kw_k \\ -TH\bar{z}_o \le -T_{k-1}H\bar{z}_o - B_kw_K \end{cases} \qquad (H = A_k,\ B_k)$$

Zamenom (5.53) u (5.52) dobijamo

$$(5.54)\quad \begin{cases} k_2 \le -F_k'(B,A) \\ e_2 \le -F_k(B,A) \end{cases}$$

Iz (5.51) sledi da je $a_i \ge 0$ i $b_i \ge 0$ $(i=1,2)$ pa se dobija

$$(5.55)\quad \begin{cases} \bar{z}_1 + B_kw_k \le x_1 \le \bar{z}_1 - A_kw_k \\ \bar{z}_2 + F_k'(B,A) \le x_2 \le \bar{z}_2 - F_k(B,A) \end{cases}$$

Iz (5.55) sledi da veličine

$$(5.56)\quad \begin{cases} p_1 = \delta\bar{z}_1 + B_kw_k \\ q_1 = \delta\bar{z}_1 - A_kw_k \\ p_2 = \delta z_2 + F_k'(B,A) + A_kw_k \\ q_2 = \delta\bar{z}_2 - F_k(B,A) - B_kw_k \end{cases}$$

zadovoljavaju nejednakost (5.14) za $j=2$.

Lako se proverava da veličine (5.56) zadovoljavaju i nejednakosti (5.15) za $s_k=\mu_2$, $S_k = \eta_2$ (uslov 5.5.2) Primenom leme 5.1 sledi tvrdjenje.

Posledica 5.4

Neka je zadovoljen uslov 5.5.1 pri čemu je $A_kw_k \le 0$ i $B_kw_k \le 0$. Tada je $F_k(B,A) \le 0$, $F_k'(B,A) \le 0$.

Dokaz.

Prema posledici 5.1 je $\delta\bar{z}_1 + A_kw_k \ge 0$ odnosno $\bar{z}_1 \ge \bar{z}_o \Rightarrow w_k \ge y_1 \ge \bar{z}_1 \ge \bar{z}_o \Rightarrow 0 \ge B_kw_k \ge B_k(\bar{z}_1 - B_k\bar{z}_o)$. Zamenom ovih nejednakosti u (5.9) dobijamo tvrdjenje.

Primedba 5.1

Pošto je

$$A_k\bar{z}_o \leq A_k w_k \leq \rho_{k-1} \leq -B_k w_k \leq -B_k \bar{z}_o ,$$

prilikom traženja ograničenja x_1, korišćeno je

$$A_k w_k \leq \rho_{k-1} \leq -B_k w_k .$$

Teorema 5.6

Neka su zadovoljeni uslovi teoreme 5.5 sa sledećim izmenama

a) Operator T je komutativan sa A_k i B_k

b) U 5.5.2 je F_k i F_k' zamenjeno sa f_k i f_k', gde su f_k i f_k' odredjeni sa (5.10).

Tada tvrdjenje teoreme 5.5 važi.

Dokaz.

Zbog komutativnosti u (5.52) zamenjujemo samo prvu od nejednakosti (5.53) i dobijamo:

$$(5.57) \quad \begin{cases} e_2 \leq -f_k(B,A) \\ k_2 \leq -f_k'(B,A) \end{cases}$$

Dokaz ove teoreme je isti kao dokaz teoreme 5.5, s tim što se uzima u obzir (5.57).

Teorema 5.7

Neka je u $\mathbb{B}$ definisan linearan i pozitivan operator T i neka za neko $k \geq 2$ u nizu (5.2) važi:

5.7. Postoje linearni pozitivni operatori A_k i B_k takvi da je

5.7.1. $(T+A_k)z_{k-2} \leq T_n z_{k-2} \leq (T-B_k)z_{k-2}$ $(n=k-1,\ k)$

5.1.2. $\delta z_{k-1} \geq -(A_k+B_k)\ z_{k-2}$

5.7.3. Postoje realni brojevi s_k i S_k takvi da je

a) $0 < s_k \leq S_k$

b) $s_k(\delta z_{k-1}-\delta z_k)-\delta z_k \leq (1+2s_k)B_k z_{k-2}+(1+s_k)R_k(B,A)$

c) $S_k(\delta z_{k-1}-\delta z_k)-\delta z_k \geq -(1+2S_k)A_k z_{k-2}-(1+S_k)R_k'(B\ \ )$

gde je R_k i R_k' odredjeno sa (5.7),

$$\delta z_k = z_{k-1} - z_k \qquad (k=1,2,\dots)$$

Tada operator T' preslikava interval $Ix_2(-\eta,0,-\mu,0)$, $\mu_2 = s_k$ $\eta_2 = S_k$ u samog sebe. Pri tome je Ix_2 odredjeno sa (5.6) a x_i sa (5.4) za $x_o = z_{k-2}$.

Dokaz.

Neka su x_i, y_i, l_i, $\bar{z}_i$ $(i=0,1,2)$ odredjeni sa (5.50) a e_i, k_i, a_i, b_i $(i=1,2)$ sa (5.36). Pokazaćemo da je $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ $(i=1,2)$, odnosno da je

$$l_i \leq \bar{z}_i \leq y_i \qquad (i=0,1,2) \tag{5.58}$$

Prema 5.7.1. je $-(A_k+B_k)\bar{z}_o \geq 0$, a prema 5.7.2 je $\bar{z}_o - \bar{z}_1 \geq 0$

$$\bar{z}_o \geq \bar{z}_1 - (A_k+B_k)\bar{z}_o \geq y_1 + \rho_{k-1} - A_k\bar{z}_o \geq y_1$$

$$l_2 \leq (T+A_k)\bar{z}_1 + f \leq T\bar{z}_1 + \rho_{k-1} + f = \bar{z}_2$$

$$z_2 \leq T\bar{z}_1 - B_k\bar{z}_o + f \leq Ty_1 - B_k\bar{z}_o + f \leq y_2$$

Sada je

$$\begin{cases} e_1 = -A_k\bar{z}_o \\ k_1 = -B_k\bar{z}_o \end{cases} \tag{5.59}$$

$$\begin{cases} e_2 = -TA_k\bar{z}_o - A_kT\bar{z}_o - A_k^2\bar{z}_o - A_kf \\ k_2 = -TB_k\bar{z}_o - B_kT\bar{z}_o + B_k^2\bar{z}_o - B_kf \end{cases} \tag{5.60}$$

Prema 5.7.1 je

$$\begin{cases} -T\bar{z}_o \leq -\bar{z}_1 + f - B_k\bar{z}_o \\ -TH\bar{z} \leq -T_{k-1}H\bar{z}_o - B_k\bar{z}_o \end{cases} \qquad (H = A_k,\ B_k) \tag{5.61}$$

Zamenom (5.61) u (5.60) dobijamo:

$$(5.62)\quad \begin{cases} k_2 \leq -R_k'(B) \\ e_2 \leq -R_k(B,A) \end{cases}$$

Prema (5.36) , (5.50), (5.59) i (5.62) dobijamo

$$(5.63)\quad \begin{cases} \bar{z}_1 + B_k\bar{z}_o \leq x_1 \leq \bar{z}_1 - A_k\bar{z}_o \\ \bar{z}_2 + R_k'(B) \leq x_2 \leq \bar{z}_2 - R_k(B,A) \end{cases}$$

Iz (5.63) i definicije δx_i zaključujemo da veličine

$$(5.64)\quad \begin{cases} p_1 = \delta\bar{z}_1 + A_k\bar{z}_o \\ q_1 = \delta\bar{z}_1 - B_k\bar{z}_o \\ p_2 = \delta\bar{z}_2 + B_k\bar{z}_o + R_k(B,A) \\ q_2 = \delta\bar{z}_2 - A_k\bar{z}_o - R_k'(B) \end{cases}$$

zadovoljavaju nejednakosti (5.14) za $j=2$. Iz uslova (5.7.3) sledi da su zadovoljene i nejednakosti (5.15) za $j=2$, $s_k=\mu_2$, $S_k=\eta_2$, pa se primenom leme 5.1. dobija tvrdjenje.

Posledica 5.5

Neka je zadovoljen uslov 5.7.1 teoreme 5.7 i neka je $A_k\bar{z}_o \leq 0$ i $B_k\bar{z}_o \leq 0$. Tada je $R_k'(B) \leq 0$, $R_k(B,A) \leq 0$.

Dokaz.

Iz nejednakosti

$$0 \geq B_k\,\bar{z}_o \geq B_k\,\bar{z}_1 \quad , B_k\,\bar{z}_o + c_{k-1} \leq 0 \quad \text{i (5.7) sledi}$$

tvrdjenje.

Teorema 5.8.

Neka su zadovoljene pretpostavke teoreme 5.7 sa sledećim izmenama:

a) Operator T je komutativan sa operatorima A_k i B_k

b) U uslovu 5.7.3 je R_k zamenjeno sa r_k a R_k' sa r_k', gde su r_k i r_k' odredjeni sa (5.8). Tada važi tvrdjenje teoreme 5.7.

Dokaz.

Zamenom prve nejednakosti (5.61) u (5.60), s obzirom na komutativnost dobijamo

$$(5.65)\quad \begin{cases} e_2 \leq -r_k(B,A) \\ k_2 \leq -r_k'(B) \end{cases}$$

Preostali deo dokaza je sličan dokazu teoreme 5.7.

U navedenim teoremama ovog dela je utvrdjena egzistencija intervala $Ix_2(u,0,v,0)$ koji ostaje invarijantan pri dejstvu operatora T'. u i v su različiti za različite teoreme i odredjeni su u svakoj teoremi pojedinačno. Interval Ix_2 nemožemo tačno odrediti jer ne poznajemo niz x_n. Preko niza z_k možemo odrediti interval $Iz_k\ (U,m,V,n)$ takav da je:

$$(5.66)\quad \begin{cases} Ix_2\ (u,0,v,0) \subseteq Iz_k(U,m,V,n) \\ U_k = u_2 \quad , \quad V_k = v_2 \end{cases}$$

Pokazaćemo sada kako se za svaku od navedenih teorema odredjuje interval Iz_k . Označimo sa

$$(5.67)\quad \begin{cases} p_k' = \delta z_{k-1} - p_1 \\ q_k' = q_1 - \delta z_{k-1} \end{cases}$$

gde su p_1, q_1 i δz_{k-1} odredjeni u svakoj teoremi pojedinačno.

$$(5.68)\quad \begin{cases} e_2 \leq e_{max} \\ k_2 \leq k_{max} \end{cases}$$

e_{max} i k_{max} su majorirajuće funkcije za k_2 i e_2 koje su takodje odredjene za svaku teoremu pojedinačno i izražene u funkciji od A_k i B_k. Da bi odredili interval $Iz_k(U,m,V,n)$ treba odrediti m_k i n_k.

Pokazaćemo da se za teoreme koje se odnose na rastući niz iteracija, m_k i n_k mogu odrediti sa:

$$(5.69)\quad \begin{cases} m_k = -k_{max}\ (1+U_k) - U_k\ q_k' \\ n_k = e_{max}\ (1+V_k) + V_k p_k' \end{cases}$$

Za svaku od navedenih teorema je

$$\bar{z}_1 - p_k' \leq x_1 \leq \bar{z}_1 + q_k'$$

$$\bar{z}_2 - k_{max} \leq x_2 \leq \delta\bar{z}_2 + e_{max} \quad \text{, odnosno}$$

$$\delta\bar{z}_2 - k_{max} - q_k' \leq \delta x_2 \leq \delta\bar{z}_2 + e_{max} + p_k'$$

pa za donju granicu intervala Ix_2 važi

$$x_2 + U_k x_2 \geq z_2 - k_{max} + U_k(\delta\bar{z}_2 - k_{max} - q_k') = \bar{z}_2 + U_k \delta z_2 + m_k$$

jer je $U_k \geq 0$ i $V_k \geq 0$ (lema 5.1).

Za gornju granicu imamo:

$$x_2 + V_k \delta x_2 \leq \bar{z}_2 + e_{mxa} + V_k(\delta\bar{z}_2 + e_{mxa} + p_k') = \bar{z}_2 + V_k \delta\bar{z}_2 + n_k,$$

dakle sledi (5.66).

Za teoreme koje se odnose na monotono opadajuće nizove iteracija je

$$\bar{z}_1 - q_k' \leq x_1 \leq \bar{z}_1 + p_k'$$

a

$$\delta\bar{z}_2 - q_k' - e_{max} \leq \delta x_2 \leq \delta\bar{z}_2 + p_k' + k_{max} \quad \text{, pa se}$$

na sličan način dobija da je

$$(5.70) \quad \begin{cases} n_k = e_{max} - V_k\ (e_{max} + q_k') \\ m_k = -k_{max} + U_k\ (k_{max} + p_k') \end{cases}$$

Ovde je prema lemi 5.1 $U_k \leq 0$ i $V_k \leq 0$. Prema tome (5.66) važi i za opadajući iterativni niz.

Teorema 5.9

5.9.1. Pretpostavimo da su za neko k odredjeni intervali Iz_k i Iz_{k+1} primenom neke od teorema 5.1, 5.3, 5.5 i 5.7.

5.9.2. Neka je pri tome $s_k \leq s_{k+1}$, $S_k \geq S_{k+1}$

5.9.3. $p_i' \geq 0$, $q_i' \geq 0$, $(i=k,k+1)$, p_i' i q_i' su odredjeni sa (5.67).

Tada je $Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$

Dokaz.

I za teoremu 5.1.

$$(5.71)\quad \begin{cases} p_k' = B_k z_{k-2} \geq 0 \quad ; \quad B_{k+1}\, z_{k-1} \geq 0 \\ q_k' = A_k z_{k-2} \geq 0 \quad ; \quad A_{k+1}\, z_{k-1} \geq 0 \end{cases}$$

Prema posledici 5.2 je

$$(5.72)\quad \begin{cases} R_k(A,B) = k_{max} \geq 0 \\ R_k'(A) = e_{max} \geq 0 \end{cases}$$

Za teoremu 5.1 m_k i n_k su odredjeni sa (5.69). Posmatrajmo razlike donjih granica intervala Iz_{k+1} i I_{zk}.
Prema posledici 5.1 je $p_2 \geq 0$ i $q_2 \geq 0$ (p_2 i q_2 ograničenja za δx_2) pa se zamenom s_{k+1} sa s_k i S_{k+1} sa S_k, s obzirom na uslov 5.9.2, dati interval proširuje ($Gz_{k+1}(s)+m_{k+1} =$

$= z_{k+1} - k_{max} + s_{k+1}\, p_2 \geq z_{k+1} - k_{max} + s_k\, p_2$).
Prema (5.5) i (5.6) je

$$Gz_{k+1}(s) + m_{k+1} - Gz_k(s) - m_k \geq \delta z_{k+1} + s_k(\delta z_{k+1} - \delta z_k) -$$

$$- (1+s_k)R_{k+1}(A,B) - s_k A_{k+1} z_{k-1} + (1+s_k)R_k(A,B) +$$

$$+ A_k z_{k-2} \geq 0 \text{ , jer je zbog 5.1.3. b)}$$

$$\delta z_{k+1} - s_k(\delta z_k - \delta z_{k+1}) - (1+s_k)R_{k+1}(A,B) - (1+2s_k)\,\cdot$$

$$\cdot\, A_{k+1}\, z_{k+1} \geq 0 \text{ , pa je}$$

$$\delta z_{k+1} + s_k(\delta z_{k+1} - \delta z_k) - (1+s_k)R_{k+1}(A,B) - s_k A_{k+1}\, z_{k+1} \geq$$

$$\geq (1+s_k)\, A_{k+1}\, z_{k+1} \geq 0 \text{ , i}$$

$$R_k(A,B) \geq 0 \quad \text{(prema (5.72))}$$

$$A_k z_{k-2} \geq 0 \quad \text{(prema (5.71))}$$

Pokazali smo da je razlika donjih granica intervala Iz_{k+1} i Iz_k pozitivna . Slično se preko uslova 5.3.1 c) pokazuje da je razlika gornjih granica negativna, a to znači da je $Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$.

II za teoremu 5.3.

Ovde je prema (5.67) , (5.48) i 5.9.3.

$$(5.73)\begin{cases} p_k' = A_k w_k \geq 0 \quad , \quad A_{k+1} w_{k+1} \geq 0 \\ q_k' = B_k w_k \geq 0 \quad , \quad B_{k+1} w_{k+1} \geq 0 \end{cases}$$

Prema posledici 5.3. je

$$(5.74)\quad \begin{cases} F_k'(A,B) = e_{max} \geq 0 \\ F_k(A,B) = k_{max} \geq 0 \end{cases}$$

n_k i m_k su odredjeni sa (5.70)

Razlika donjih granica intervala Iz_{k+1} i Iz_k je prema (5.5)

$$Gz_{k+1}(-S)-F_{k+1}(A,B)(1+S_{k+1})-S_{k+1}A_{k+1}w_{k+1} -$$
$$-[Gz_k(-S)-F_k(A,B)(1+S_k)-S_k w_k] \geq$$
$$\geq -\delta z_{k+1} - S_k(\delta z_{k+1}-\delta z_k)-F_{k+1}(A,B)(1+S_k)-S_k A_{k+1}w_{k+1} +$$
$$+ F_k(A,B)(1+S_k)+S_k A_k w_k \geq 0$$, jer je prema 5.3.3 c)

$$S_k(\delta z_k-\delta z_{k+1})-\delta z_{k+1}-(1+S_k)F_{k+1}(A,B)-S_k A_{k+1}w_{k+1} \geq$$
$$\geq (1+S_k)A_{k+1}w_{k+1} \geq 0$$ i

$$F_k(A,B) \geq 0 \qquad (5.74)$$
$$A_k w_k \geq 0 \qquad (5.73)$$

Analogno iz 5.3.3 b) , (5.73) i (5.74) sledi da je razlika gornjih granica negativna, pa je $Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$.

III za teoremu 5.5.

$$(5.75)\begin{cases} e_2 \leq -F_k(A,B) = e_{max} \geq 0 \\ k_2 \leq -F_k'(B,A) = k_{max} \geq 0 \end{cases}$$, jer je zbog 5.9.3 i (5.56)

$$(5.76)\quad \begin{cases} p_k' = -B_k w_k \geq 0 \;; & -B_{k+1} w_{k+1} \geq 0 \\ q_k' = -A_k w_k \geq 0 \;; & -A_{k+1} w_{k+1} \geq 0 \end{cases}$$

pa prema posledici (5.4) sledi (5.75).

m_k i n_k su odredjeni sa (5.69).

Razlika donjih granica posmatranih intervala je

$$Gz_{k+1}(s) + m_{k+1} - Gz_k(s) - m_k \geq \delta z_{k+1} + s_k(\delta z_{k+1} - \delta z_k) +$$

$$+ (1+s_k)F_{k+1}'(B,A) + s_k A_{k+1} w_{k+1} - (1+s_k)F_k'(B,A) -$$

$$- s_k A_k w_k \geq 0 \,, \quad \text{jer je zbog } 5.5.2 \text{ b)}$$

$$\delta z_{k+1} + s_k(\delta z_{k+1} - \delta z_k) + (1+s_k)F_k'(B,A) + s_k A_{k+1} w_{k+1} \geq -(1+s_k) \cdot$$

$$\cdot\; A_{k+1} w_{k+1} \geq 0$$

Iz 5.5. 2 c), (5.75) i (5.76) sledi da je razlika gornjih granica negativna.

IV za teoremu 5.7

Prema (5.67) i (5.64) je

$$(5.77)\quad \begin{cases} p_k' = -A_k \, \overline{z}_o \geq 0 \;; & -A_{k+1} \, \overline{z}_1 \geq 0 \\ q_k' = -B_k \, \overline{z}_o \geq 0 \;; & -B_{k+1} \, \overline{z}_1 \geq 0 \end{cases}$$

pa prema posledici (5.5) imamo

$$(5.78)\begin{cases} e_2 \leq -R_k(A,B) = e_{max} \geq 0 \\ k_2 \leq -R_k'(B) = k_{max} \geq 0 \end{cases}$$

m_k i n_k su odredjeni sa (5.70). Na sličan način kao i u prethodnim teoremama iz (5.77), (5.78) i uslova 5.7.3 sledi $Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$.

U slučaju kada su operatori A_k i B_k komutativni sa operatorom T , primenom teorema 5.2, 5.4, 5.6 i 5.8 možemo odrediti invarijantne intervale za operator T´ odredjen sa (5.19) uz nešto oslabljene uslove. No, tada nemožemo tvrditi da su majorirajuće funkcije za e_2 i k_2 pozitivne, pa zbog toga nemožemo dobiti da je $Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$. No, ukoliko se iz nekih uslova (npr. $f \geq 0$, niz iteracija rastući) može tvrditi da je za teoremu 5.2, $r_k' \geq 0$ i $r_k \geq 0$, odnosno za teoremu 5.4 da je $f_k \geq 0$ i $f_k' \geq 0$, tada možemo primeniti teoremu 5.9 i tvrditi da je $Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$. Za teoremu 5.6 to možemo dobiti ako je $f_k' \leq 0$, $f_k \leq 0$ a za teoremu 5.8 ako je $r_k' \leq 0$ i $r_k \leq 0$. Pošto se r_k, r_k' , f_k i f_k' računaju direktno u toku iterativnog postupka, navedeni uslovi se mogu proveravati.

Uslov 5.9.2 je prirodan i proističe iz osobina odgovarajućeg stacionarnog niza. Naime, ako je za s_k i S_k

$$s_k(\delta x_{k-1}-\delta x_k) \leq \delta x_k \leq S_k(\delta x_{k-1} - \delta x_k)$$

onda je zbog monotonosti i linearnosti operatora T i $T\delta x_{k-1} = \delta x_k$

$$s_k(\delta x_k-\delta x_{k+1}) \leq \delta x_{k+1} \leq S_k(\delta x_k-\delta x_{k+1}) \tag{5.79}$$

Kod nas se ovo ne može primeniti jer se niz x_n formira u zavisnosti od niza z_k. Uzima se naime, da je $x_o = z_{k-2}$. Pri pomeranju indeksa od k na k+1 formiramo novi niz x_n sa početnim elementom z_{k-1}. Zbog toga odnos $T\delta x_{k-1} = \delta x_k$ ne važi. Uslov 5.9.2 zahteva da tako izazvana pomeranja ne poremete nejednakost (5.79). Uslov 5.9.3 ne pretstavlja veliko ograničenje. On ustvari zahteva da ograničenje za ρ_n sa donje strane bude negativno a sa gornje pozitivno. To se postiže izborom operatora A_k i B_k . Primenom navedenih teorema dobijamo sledeće:

1. Konstrukcijom invarijantnog intervala za operator T' omogućena je primena nekih teorema o nepokretnoj tački. Mi ćemo u daljem koristiti Bruwerovu i Schauderovu teoremu. Tako se dobija egzistencija rešenja jednačine 5.1 bez eksplicitnog zahteva kontrakcije.

2. Svaki interval Iz_k daje apostoriornu ocenu greške. Ova ocena se menja od koraka do koraka i poboljšava sve dotle dok smo u mogućnosti da tvrdimo da je $Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$. Ako sa u_{Ok} označimo donju granicu intervala Iz_k sa v_{Ok} gornju granicu, važi ocena

$$-\frac{1}{2}(v_{ok}-u_{ok}) \leq x^* - \frac{1}{2}(v_{ok}+u_{ok}) \leq \frac{1}{2}(v_{ok}-u_{ok})$$

U slučaju da B poseduje normalan konus K važi ocena po normi

$$\|x^* - \frac{1}{2}(v_{ok}+u_{ok})\| \leq \frac{N(K)}{2}\| v_{ok}-u_{ok}\|$$, gde je

$N(K)$ konstanta koja zavisi od konusa k.

3. Formiranje intervala Iz_k predstavlja ubrzanje iterativnog postupka. Naime, ako je u pitanju rastući niz iteracija i ako je $u_{ok} \geq z_k$, postupak se ubrzava kada se za izračunavanje sledeće iteracije umesto z_k uzme elemenat u_{ok}. To će biti u slučaju kada je

$$s_k \, p_2 \geq k_{max}$$

gde su p_2 i k_{max} odredjeni u svakoj teoremi prema (5.68)

Za monotono opadajući niz se uzima gornja granica intervala kao početni elemenat za sledeći interativni korak, ako je

$$s_k \, p_2 \geq e_{max}$$

4. Svako odredjivanje novog intervala predstavlja ubrzanje u odnosu na prethodni, ako je

$$Iz_{k+1} \subseteq Iz_k$$. Tada je

$$u_{ok} \leq u_{ok+1} \leq \dots \leq v_{ok+1} \leq v_{ok} ,$$

što predstavlja jedan dvostrani iterativni postupak za približno odredjivanje rešenja jednačine 5.1.

§6. Odredjivanje invarijantnog intervala za negativan linearan operator

U ovom paragrafu se posmatra jednačina

(6.1) $\quad x = T x + f \qquad f \in B \quad$ sa

linearnim i nenegativnim operatorom T.

U |2| je za rešavanje jednačine (6.1) u R^n korišćen iterativni postupak

(6.2) $\quad x_n = Tx_{n-1} + f \quad (n=1,2,3,\ldots \text{ ili } n=2,3,\ldots)$

(n počinje od 1 ili od 2 tako da se obezbedi da se iteracije sa parnim indeksom približavaju rešenju sa gornje strane).

Pri tome su postavljeni uslovi na niz (4.2) iz kojih sledi egzistencija invarijantnog intervala za operator T'

$$T'_x = T x + f \quad ,$$

Time je postignuto ubrzanje iterativnog postupka (teorema 2.6) Ovde se za rešavanje jednačine (6.1) koristi nestacionaran iterativni postupak

(6.3) $\quad z_n = T_n z_{n-1} + f \quad (n=1,2,3,\ldots \text{ ili } n=2,3,\ldots)$

$\qquad T_n x = Tx + \rho_n \quad , \quad \rho_n \in B \ , \ (z_o, z_1 \in B)$

U teoremama koje slede postavljaju se uslovi na tri uzastopna člana niza (6.2) iz kojih sledi egzistencija invarijantnog intervala za operator T'. Pri tome se kao i u §5 koriste pomoćni operatori A_k i B_k. Lema 6.1 obuhvata rezultate |2| i koristi ideju dokaza koji je tamo dat. Što se tiče niza z_n ne može se tvrditi da on konvergira ka x^*, ali se može za svako k fiksirano navednim uslovima, odrediti okolina tačke x^* kojoj pripada z_k. Takodje se može odrediti tačka iz te okoline koja predstavlja bolju aproksimaciju za x^* od z_k. Dijametar okoline zavisi od operatora A_k i B_k , i možemo ga učiniti toliko malim , koliko smo u mogućnosti da dobro odredimo operatore A_k i B_k . Od toga naravno zavisi i celishodnost navedenog postupka.

Lema 6.1

Neka je data jednačina (6.1) u $\mathcal{B}$. Neka je T negativan linearan operator i neka za neko j u nizu (6.2) postoji $p_i, q_i \in \mathcal{B}$, $(i=j-1, j)$ tako da važi

$$p_i \leq x_i \leq q_i \qquad (i=j-1,\ j) \quad \text{i} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} p_j \geq s_j q_{j-1} + S_j q_j \\ q_j \leq S_j p_{j-1} + p_j s_j \end{cases} \tag{6.5}$$

gde je

$$\begin{cases} \delta x_{2i} = x_{2i} - x_{2i-1} & (i=1,2,\ldots) \\ \delta x_{2i+1} = x_{2i} - x_{2i+1} & (i=1,2,\ldots) \end{cases} \tag{6.6}$$

a s_j i S_j su realni brojevi i

$$0 < s_j \leqslant S_j \tag{6.7}$$

Tada za $j=2k$ operator T' preslikava interval $Ix_j(-S,0,-s,0)$ u samog sebe, a za $j=2k+1$ operator T' preslikava interval $Ix_j(s,0,S,0)$ u samog sebe.

Dokaz.

Neka je $j=2k$. Iz (6.4) i (6.5) sledi

$$s_j\,\delta x_{j-1} + S_j\,\delta x_j \leq \delta x_j \leq S_j\,\delta x_{j-1} + s_j\,\delta x_j \ , \tag{6.8}$$

pa je

$$T\,\delta x_j \leq s_j\,T\,\delta x_{j-1} + S\,T\,\delta x_j \ , \quad \delta x_j = -T\,\delta x_{j-1}$$

$$-T\,x_j + Tx_{j-1} + f \geq s_j\,\delta x_j - S_j\,T\,\delta x_j + f$$

$$x_j - s_j\,\delta x_j \geq T(x_j - S_j\,\delta x_j) + f$$

Pokazali smo da je

$$v_o \geq T\,u_o + f = v_1$$

gde je

$$u_o = x_j - S_j \delta x_j$$
$$v_o = x_j - s_j \delta x_j$$

Iz (6.8) sledi da je i

$$u_o \leq Tv_o + f = u_1$$

Zbog (6.7) je $u_o \leq v_o$, pa imamo

$$u_o \leq u_1 \leq v_1 \leq v_o$$

za proizvoljno $s \in |u_o, v_o|$ važi

$$u_1 = Tv_o + f \leq Ts + f \leq Tu_o + f = v_1$$

Dakle, operator T' ostavlja invarijantnim interval $Ix_j(-S,0,-s,0)$

Slično se dokazuje i tvrdjenje za $j=2k+1$, uzimanjem u obzir (6.6) i (6.8).

Posledica 6.1

Veličine p_i i q_i $(i=1,2)$ odredjene u lemi 5.1 su nenegativne.

Teorema 6.1

Neka je u $\mathbb{B}$ definisan linearan negativan operator T. Neka za neko $k \geq 2$ u nizu (6.3) važi:

6.1.1 $\quad (T-A_k)u_k \leq T_n u_k \leq (T+B_k)u_k \qquad (n = k,\ k-1)$

$$u_k = (z_{k-2},\ z_{k-1} - (A_k+B_k)z_{k-2})$$

6.1.2 Postoje $g_k, G_k \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$0 < g_k \leq G_k$$

i

a $\quad$ za $k = 2i$

$$(1-G_k)\delta z_k - g_k\, \delta z_{k-1} \geq (A_k+g_kB_k+G_kB_k)w_k + \varepsilon_k(A,B) + G_k\varepsilon'_k(A,B)$$

$$G_k\delta z_{k-1} - (1-g_k)\delta z_k \geq (B_k+g_kA_k+G_kA_k)w_k + \varepsilon'_k(A,B) + g_k\varepsilon_k(A,B) \quad ,$$

$$w_k = z_{k-1} - (A_k+B_k)z_{k-2}$$

b) za $k = 2i+1$

$$(1-G_k)\delta z_k - g_k\delta z_{k-1} \geq (B_k+g_kA_k+G_kA_k)z_{k-2} + \phi_k'(A,B) + G_k\phi_k(A,B)$$

$$G_k\delta z_{k-1} - (1-g_k)\delta z_k \geq (A_k+g_kB_k+G_kB_k)z_{k-2} + \phi_k(A,B) +$$

$$+ g_k\phi_k'(A,B)$$, gde su ϕ_k i ϕ_k' odredjeni sa (5.11)

a δz_k sa (6.6).

Tada u slučaju $k=2i$, operator T' preslikava interval $Ix_2\ (-S,0,-s,0)$ u samog sebe a u slučaju $k=2i+1$ operator T' preslikava interval $Ix_2\ (s,0,S,0)$ u samog sebe. Pri tome je $s_2 = g_k$, $S_2 = G_k$, x_n odredjeno sa (6.2) za $x_o = z_{k-2}$.

Dokaz.

Odredićemo veličine p_i, q_i $(i=1,2,)$ koje zadovoljavaju (6.4) za x_i formirano na navedeni način. Uvedimo oznake

$$(6.9)\quad \begin{cases} \bar{z}_n = T_{k+n-2}\bar{z}_{n-1} + f \quad , \quad \bar{z}_o = z_{k-2} & (n=1,2) \\ l_n = (T+(-1)^n(A_k)^{2n}(B_k)^{n-1})l_{n-1} + f \quad , \quad l_o = z_{k-2} & (n=1,2,) \\ y_n = (T+(-1)^n(A_k)^{n-1}(B_k)^{2n})\,y_{n-1} + f \quad , \quad y_o = z_{k-2} & (n=1,2,) \\ x_n = Tx_{n-1} + f \quad , & x_o = z_{k-2}\ (n=1,2,) \end{cases}$$

$$((A_k)^o = (B_k)^o = E)$$

Prema 6.1.1 je

$$(6.10)\qquad l_1 \leq \bar{z}_1 \leq y_1$$

Pokažimo da je

$$(6.11)\qquad l_2 \geq \bar{z}_2 \geq y_2$$

$$l_1 = T\bar{z}_o + f + \rho_{k-1} - \rho_{k-1} - A_k\bar{z}_o \geq w_k \qquad \text{(zbog 6.1.1)}$$

$w_k \leq \bar{z}_1$ jer je $(A_k+B_k)\bar{z}_o \geq 0$

$$l_2 \geq Tl_1 + B_kw_k + f \geq Tl_1 + \rho_{k-1} + f \geq T\bar{z}_1 + \rho_{k-1} + f = \bar{z}_2$$

$$z_2 \geq T\bar{z}_1 - A_k w_k + f \geq T\bar{z}_1 - A_k\bar{z}_1 + f \geq (T-A_k)\, y_1 + f = y_2$$

Uvedimo oznake

$$(6.12)\quad \begin{cases} x_n = y_n + (-1)^n\, k_n & (n=1,2) \\ z_n = l_n + (-1)^{n-1}\, e_n & (n=1,2) \\ y_n = \bar{z}_n + (-1)^{n-1}\, a_n & (n=1,2) \\ l_n = \bar{z}_n + (-1)^n\, b_n & (n=1,2) \end{cases}$$

Zamenom druge dve jednakosti (6.12) u prve dve dobijamo

$$(6.13)\quad \begin{cases} x_n = \bar{z}_n + (-1)^{n-1}\, a_n + (-1)^n\, k_n & (n=1,2) \\ x_n = \bar{z}_n + (-1)^n\, b_n + (-1)^{n-1}\, e_n & (n=1,2) \end{cases}$$

$a_i \geq 0$ i $b_i \geq 0$ zbog (6.11) i (6.10)

$$(6.14)\quad \begin{cases} e_2 = B_k T\bar{z}_o - TA_k\, \bar{z}_o - B_k A_k\, \bar{z}_o + B_k\, f \\ k_2 = A_k T\, \bar{z}_o - TB_k \bar{z}_o + A_k B_k\, \bar{z}_o + A_k\, f \end{cases}$$

Iz (6.1.1 sledi

$$(6.15)\quad \begin{cases} T\, \bar{z}_o \leq \bar{z}_1 - f + A_k w_k \\ -TH\, \bar{z}_o \leq -T_{k-1}\, H\bar{z}_o + B_k\, u_k & (H=A_k,\ B_k) \end{cases}$$

Zamenom (6.15) u (6.14) dobijamo da je

$$(6.16)\quad \begin{cases} e_2 \leq \phi_k(A,B) \\ k_2 \leq \phi'_k(A,B) \end{cases}$$

Iz (6.13) i (6.12) dobijamo

$$(6.17)\quad \begin{cases} \bar{z}_1 - B_k u_k \leq x_1 \leq \bar{z}_1 + A_k u_k \\ \bar{z}_2 - \phi_k(A,B) \leq x_2 \leq \bar{z}_2 + \phi'_k(A,B) \end{cases}$$

Za k=2i uzimamo da je $u_k = z_{k-1} - (A_k + B_k) z_{k-2}$

Iz (6.17) i (6.6) sledi da p_i i q_i $(i=1,2)$ odredjeni sa

$$(6.18)\quad \begin{cases} p_1 = \delta z_{k-1} - A_k u_k \\ p_2 = \delta z_k - A_k u_k - \phi_k(A,B) \\ q_2 = \delta z_k + B_k u_k + \phi_k'(A,B) \\ q_1 = \delta z_{k-1} + B_k u_k \end{cases}$$

zadovoljavaju nejednakosti (6.4) za $j=2$ i x_j odredjeno sa (6.9).

Pokažimo da veličine (6.18) zadovoljavaju nejednakost (6.6) za $S_2 = G_k$, $s_2 = g_k$. Iz 6.1.2 a) za $u_k = w_k$ dobijamo:

$$\delta z_k - A_k u_k - \phi_k(A,B) \geq g_k(\delta z_{k-1} + B_k u_k) + G_k(\delta z_k + B_k u_k) + \phi_k'(A,B)$$

iz 6.1.2 b) sledi

$$\delta z_k + B_k u_k + \phi_k'(A,B) \leq G_k(\delta z_{k-1} - A_k u_k) + g_k(\delta z_k - A_k u_k - \phi_k(A,B)).$$

Primenom leme 6.1. sledi tvrdjenje. Za $k=2i+1$ uzimamo $u_k = z_{k-2}$ pa uzimajući u obzir (6.17), (6.6) i 6.1.2 dobijamo da veličine

$$(6.19)\quad \begin{cases} p_1 = \delta z_{k-1} - B_k u_k \\ q_1 = \delta z_{k-1} + A_k u_k \\ p_2 = \delta z_k - B_k u_k - \phi_k'(A,B) \\ q_2 = \delta z_k + A_k u_k + \phi_k(A,B) \end{cases}$$

zadovoljavaju (6.4) i (6.5) za $j=2$, i $S_2 = G_k$, $s_2 = g_k$. Prema lemi 6.1 sledi tvrdjenje:

Posledica 6.2

Neka važi uslov 6.1.1. teoreme 6.1 sa $A_k u_k \geq 0$ i $B_k u_k \geq 0$, gde je za $k=2i$

$$u_k = z_{k-1} - (A_k + B_k) z_{k-2} \quad \text{a za } k=2i+1 \quad u_k = z_{k-2}$$

Tada je $\phi_k(A,B) \geq 0$ i $\phi_k'(A,B) \geq 0$.

Dokaz.

Posledica 6.1 daje $p_1 \geq 0$ odnosno

$\delta z_{k-1} \geq A_k u_k \geq 0$. Za k=2i je

$\bar{z}_o \geq \bar{z}_1 \Rightarrow \bar{z}_o \geq \bar{z}_1-(A_k+B_k)\bar{z}_o$ jer je $(A_k+B_k)\bar{z}_o \geq 0$

prema 6.1.1. Zbog monotonosti operatora A_k i B_k iz (5.11) sledi tvrdjenje. Za k=2i+1, $p_1 \geq 0$ daje

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_o \geq B_k \bar{z}_o \geq 0 \quad i \quad B_k\bar{z}_1 \geq 0 \ .$$

Iz 6.1.1 sledi $-\rho_{k-1} + A_k \bar{z}_1 \geq 0$ pa se prema (5.11) dobija tvrdjenje.

Kada su operatori A_k i B_k komutativni sa operatorom T može se donekle oslabiti uslov 6.1.2 teoreme 6.1.

Teorema 6.2

Neka su operatori A_k i B_k komutativni sa T. Teorema 6.1. važi ako se ϕ_k zameni sa ϕ_k a ϕ_k' sa ϕ_k', pri čemu su ϕ_k i ϕ_k' odredjeni sa (5.13) .

Dokaz.

Dokazuje se isto kao prethodna teorema s tim što se koriste majoracije

$$(6.20) \qquad \begin{cases} e_2 \leq \phi_k(A,B) \\ k_2 \leq \phi_k'(A,B) \end{cases}$$

Sada je naime,

$$(6.21) \qquad \begin{cases} e_2 = (B_k-A_k)\, T\, \bar{z}_o - B_kA_k\, \bar{z}_o + B_k\, f \\ k_2 = (A_k-B_k) T\, \bar{z}_o + A_kB_k\, \bar{z}_o + A_k\, f \end{cases}$$

Prema 6.1.1 je

$$(6.22) \qquad \bar{z}_1 - f - B_ku_k \leq T\,\bar{z}_o \leq \bar{z}_1 - f + A_ku_k$$

Zamenom (6.22) u (6.21) dobijamo (6.20) .

Teorema 6.3

Neka je u $\mathbb{B}$ definisan linearan i negativan operator T. Neka za neko $k \geq 2$ u nizu (6.4) važi:

6.3.1 $\quad (T+A_k)u_k \leq T_n u_k \leq (T-B_k)u_k, \quad (n=k,k-1)$

$$(u_k = z_{k-2},\ z_{k-1} - (A_k+B_k)z_{k-2})$$

6.3.2 Postoje realni brojevi g_k i G_k takvi da je

$$0 < g_k \leq G_k \quad \text{i}$$

a) za $k = 2i$

$$(1-G_k)\delta z_k - g_k \delta z_{k-1} \geq -(A_k+G_kB_k+g_kB_k)(z_{k-1}-(A_k+B_k)z_{k-2}) +$$

$$+ \phi_k'(B,A) - G_k\phi_k(B,A)$$

$$G_k\delta z_{k-1} - (1-g_k)\delta z_k \geq -(B_k+g_kA_k+G_kA_k)(z_{k-1}-(A_k+B_k)z_{k-2}) -$$

$$- \phi_k(B,A) - g_k\phi_k'(B,A)$$

b) za $k = 2i+1$

$$(1-G_k)\delta z_k - g_k\delta z_{k-1} \geq -(A_k+g_kB_k+G_kB_k)u_k - \phi_k'(B,A) - G_k\phi_k(B,A)$$

$$(1-g_k)\delta z_k - G_k\delta z_{k-1} \leq (B_k+G_kA_k+g_kA_k)u_k + g_k\phi_k'(B,A) + \phi_k(B,A),$$

gde su ϕ_k i ϕ_k' odredjeni sa (5.11)

Tada za $k=2i$ operator T' ostavlja invarijantan interval $Ix_2(-S,0,-s,0)$, $s_2=g_k$, $S_2=G_k$, a za $k=2i+1$ interval $Ix_2(s,0,S,0)$, $s_2=g_k$, $S_2=G_k$.

Dokaz.

Neka su $\bar{z}_n$ i $\bar{x}_n$ odredjeni sa (6.9) i

$$l_n = (T+(-1)^{n-1}(A_k)^{2-n}(B_k)^{n-1})l_{n-1}+f, \quad l_0=z_{k-2} \qquad (n=1,2)$$

$$y_n = (T+(-1)^n(A_k)^{n-1}(B_k)^{2-n})y_{n-1}+f, \quad y_0=z_{k-2} \qquad (n=1,2)$$

Tada je prema 6.3.1

$$l_1 \leq \bar{z}_1 \leq y_1$$

$$y_1 - \bar{z}_1 = -B_k\,\bar{z}_o - \rho_{k-1} \leq -(A_k+B_k)\,\bar{z}_o$$

$$l_2 \geq (T-B_k)\bar{z}_1 + f \geq T\,\bar{z}_1 + \rho_k + f = z_2 \quad , \text{ jer je}$$

$$-B_k\,\bar{z}_1 \geq -B_k[\,\bar{z}_1 - (A_k+B_k)\,\bar{z}_o] \geq \rho_k$$

$$\bar{z}_2 \geq T_k y_1 + f \geq Ty_1 + A_k[\,\bar{z}_1 - (A_k+B_k)\,\bar{z}_o] + f \geq y_2$$

Važi dakle,

$$l_2 \geq \bar{z}_2 \geq y_2$$

Slično kao i u prethodnoj teoremi pokazuje se da je

$$(6.23)\quad \begin{cases} \bar{z}_1 + B_k u_k \leq x_1 \leq \bar{z}_1 - A_k u_k \\ \bar{z}_2 + \phi_k'(B,A) \leq x_2 \leq \bar{z}_2 - \phi_k(B,A) \end{cases}$$

Pa za $k=2i$ uzimamo $u_k = z_{k-1} - (A_k+B_k)z_{k-2}$

$$(6.24)\quad \begin{cases} p_1 = \delta\bar{z}_1 + A_k u_k \\ q_1 = \delta\bar{z}_1 - B_k u_k \\ p_2 = \delta\bar{z}_2 - \phi_k(B,A) - B_k u_k \\ q_2 = \delta\bar{z}_2 + \phi_k'(B,A) + A_k u_k \end{cases}$$

Veličine (6.24) zadovoljavaju nejednakosti (6.4) za $j=2$, a takodje i nejednakosti (6.5) za $s_2=g_k$, $S_2=G_k$, što sledi iz 6.3.2.

U slučaju $k=2i+1$ uzimamo za $u_k=z_{k-2}$ pa prema (6.23) i (6.6) zaključujemo da su nejednakosti (6.4) i (6.5) zadovoljene ako se uzme da je

$$(6.25)\quad \begin{cases} p_1 = \delta\bar{z}_1 + B_k\,\bar{z}_o \\ q_1 = \delta\bar{z}_1 - A_k\,\bar{z}_o \\ p_2 = \delta\bar{z}_2 + B_k\,z_{k-2} + \phi_k(B,A) \\ q_2 = \delta\bar{z}_2 - A_k\,z_{k-2} - \phi_k'(B,A) \end{cases}$$

Primenom leme 6.1 sledi tvrdjenje.

Teorema 6.4

Neka su operatori A_k i B_k komutativni sa T. Teorema 6.3 važi ako se ϕ_k zameni sa Φ_k a ϕ_k' sa Φ_k', gde su Φ_k i Φ_k odredjeni sa (5.13).

Dokaz.

Dokazuje se kao teorema 6.3 s tim što je

$$\begin{cases} e_2 \leq - \Phi_k'(B,A) \\ k_2 \leq - \Phi_k(B,A) \end{cases}$$

Posledica 6.3

Neka je zadovoljen uslov 6.3.1 teoreme 6.3 sa $A_k u_k \leq 0$, $B_k u_k \leq 0$. Tada je $\phi_k(B,A) \leq 0$ i $\phi_k(B,A) \leq 0$.

U navedenim teoremama su odredjeni invarijantni intervali za operator T'. Granice intervala su izražene u funkciji od x_n, a x_n neznamo. Koristeći veze izmedju nizova z_n i x_n odredićemo širi interval koji u sebi sadrži taj nadjeni interval. Neka je primenom neke od teorema iz § 6. odredjen interval $Ix_2(u,0,v,0)$. Pokazaćemo da je

$$Ix_2(u,0,v,0) \subseteq Iz_k\,(U,m,V,n) \tag{6.26}$$

, gde je

za k=2i

$$\begin{cases} m_k = - e_{max} + U_k(k_{max} + q'_k) \\ n_k = k_{max} - V_k(e_{max} + p_k') \end{cases} \tag{6.27}$$

za $k = 2i + 1$

$$\begin{cases} m_k = -e_{max} + U_k(-k_{max} - p_k') \\ n_k = k_{max} + V_k(e_{max} + q_k') \end{cases} \tag{6.28}$$

gde je $U_k = u_2$, $V_k = v_2$, k_{max} i e_{max} su odredjeni sa (5.68), a p_k i p_k' sa (5.67). Za sve četiri teoreme važi:

$$\bar{z}_1 - q_k' \leq x_1 \leq \bar{z}_1 + p_k'$$
$$\bar{z}_2 - e_{max} \leq x_2 \leq \bar{z}_2 + k_{max}$$

za k=2i je $U_k < 0$ i $V_k < 0$ (lema 6.1), pa je

$$x_2+U_k\delta x_2 \geq z_k-e_{max}+U_k(\delta z_k+k_{max}+q_k') = Gz_k(U) + m_k$$

$$x_2+V_k\delta x_2 \leq z_k+k_{max}+V_k(\delta z_k-e_{max}-p_k') = Gz_k(V) + n_k$$

Gz_k je odredjeno sa (5.5) a n_k i m_k sa (6.27). Time je pokazano da u ovom slučaju važi (6.26).

za j=2k+1

$$\bar{z}_1-p_k' \leq x_1 \leq \bar{z}_1+q_k'$$

$$\bar{z}_2-e_{max} \leq x_2 \leq \bar{z}_2+k_{max}$$

Sada je $U_k \geq 0$ i $V_k \geq 0$, pa je

$$x_2+V_k\delta x_2 \leq Gz_k(V)+n_k$$

$x_2+U_k\delta x_2 \geq Gz_k(U)+m_k$, gde je m_k i n_k odredjeno sa (6.28).

Teorema 6.5

6.5.1 Pretpostavimo da su primenom teorema 5.1 ili 5.3 odredjeni intervali Iz_k i Iz_{k+1}

6.5.2. Neka je pri tome

$$g_k \leq g_{k+1}, \quad G_k \geq G_{k+1}$$

6.5.3. $p_i' \geq 0$, $q_i' \geq 0$, (i=k,k+1), gde sa p_i' i q_i' odredjeni sa (5.67). Tada je

$$Iz_{k+1} \subseteq Iz_k \quad (6.29)$$

Dokaz.

Pokazaćemo samo tvrdjenje za teoremu 6.1 jer se na sličan način pokazuje i za teoremu 6.3. Prema (6.18) i (6.19) je za k=2i

$$\begin{cases} p_k' = \delta z_{k-1} - p_1 = A_k u_k \geq 0, & p_{k+1}' = B_{k+1}\, z_{k-1} \\ q_k' = q_1 - \delta z_{k-1} = B_k u_k \geq 0, & q_{k+1}' = A_{k+1}\, z_{k-1} \end{cases} \quad (6.30)$$

Pošto to važi i za k+1, imamo da je $A_{k+1}u_{k+1} \geq 0$, $B_{k+1}u_{k+1} \geq 0$.

Prema posledici (6.2) je

$$(6.31) \qquad \begin{cases} \phi_k(A,B) = k_{max} \geq 0 \\ \phi_k'(A,B) = e_{max} \geq 0 \end{cases}$$

Da je razlika donjih granica intervala Iz_{k+1} i Iz_k pozitivna sledi iz (6.31), (6.30), 6.5.2 i 6.1.2 b)

$$z_{k+1}+g_{k+1}\delta z_{k+1}+m_{k+1}-z_k G_k \delta z_k - m_k \geq -\delta z_{k+1}(1-g_{k+1}) +$$

$$+ G_{k+1}\delta z_k + m_{k+1}-m_k = -\delta z_{k+1}(1-g_{k+1}) + G_{k+1}\ \delta z_k -$$

$$- \phi_{k+1}(A,B)-g_k(\phi_{k+1}'(A,B)+B_{k+1}\ z_{k+1}) + \phi_k(A,B) +$$

$$+ G_k(\ \phi_k'(A,B)+B_k u_k) \geq G_{k+1}\delta z_k - \delta z_{k+1}(1-g_{k+1}) -$$

$$- \phi_{k+1}(A,B)-g_{k+1}(\phi_{k+1}'(A,B)+B_{k+1}z_{k+1})+\phi_k(A,B) +$$

$$+ G_k(\phi_k'+B_k u_k) \geq 0$$, jer je prema 6.1.2. b) za k+1=2i+1

$$G_{k+1}\delta z_k-(1-g_{k+1})\delta z_{k+1}-g_{k+1}(B_{k+1}z_{k+1}+\phi_{k+1}'(A,B))-\phi_{k+1}(A,B) \geq$$

$$\geq A_{k+1}z_{k+1} + G_{k+1}B_{k+1}z_{k+1} \geq 0$$

Za gornje granice je prema (6.30),(6.31), 6.5.2 i 6.1.2 b)

$$z_k-g_k\delta z_k+n_k-z_{k+1}-G_{k+1}\delta z_{k+1}-n_{k+1} \geq (1-G_{k+1})\delta z_{k+1} -$$

$$- g_{k+1}\delta z_k-G_{k+1}\phi_{k+1}(A,B)-G_{k+1}A_{k+1}z_{k-1}- \phi_{k+1}'(A,B) +$$

$$+ \phi_k'(A,B)+g_k(\ \phi_k(A,B)+A_k u_k) \geq 0 .$$ Time smo dobili relaciju (6.29) .

Analogno se pokazuje tvrdjenje za k=2i+1 prema 6.1.2. a).

Teorema 6.5 se ne može primeniti na intervale odredjene teoremama 6.2 i 6.4, jer iz datih uslova ne sledi da su majoracije za e_2 i k_2 pozitivne. Ako se to može tvrditi, onda uslovi 6.5.2 i 6.5.3 daju (6.29)

Primedba 6.1 Kada je $A_k=B_k=0$ tvrdjenje 6.1 i 6.3 se svodi na tvrdjenje teoreme 2.7 za $E = F^n$.

§7. Ubrzanje nestacionarnih iterativnih postupaka u slučaju kad je poznata jedna sopstvena vrednost i odgovarajući sopstveni elemenat

U |2| je prikazana jedna mogućnost ubrzanja stacionarnih iterativnih postupaka i ocene greške u $\mathbb{R}^n$ u slučaju kada je poznata jedna pozitivna sopstvena vrednost i odgovarajući nenegativan sopstveni elemenat datog operatora. Egzistencija takve sopstvene vrednosti i sopstvenog elementa za nerazložive nenegativne matrice sledi iz teoreme Perrona - Frobeniusa |2|,|29|. Uopštenja te teoreme za pozitivne linearne operatore možemo naći u |31| i |30|. U |30| je taj problem razmatran detaljno i dati su primeri operatora sa navedenim osobinama. Pošto je za takve operatore greška $\varepsilon_n = x_n - x^*$ (x_n odredjeno sa (5.2)) za dovoljno veliko n proporcionalna razlikama

$$\delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

a takodje i sopstvenom vektoru α kome odgovara najveća pozitivna sopstvena vrednost ρ, Albrecht |2| traži invarijantan interval za operator T' u obliku:

$$(7.1) \qquad Ix_n = [x_n + d_n\,\alpha, x_n + D_n\,\alpha] \quad , \text{ gde su}$$

d_n, D_n konstante koje treba odrediti. Teoreme 2.7 i 2.8 sadrže ove rezultate. Teorema 2.12 uopštava odgovarajuće tvrdjenje teoreme 2.7 na linearne pozitivne operatore.

Da bi formulisali odgovarajuće teoreme za nestacionaran iterativni niz uvodimo kao i u §5 i §6 pomoćne operatore. Tako dobijamo uopštenja teorema 2.7 i 2.8, odnosno 2.12.

U teoremama ovog paragrafa se pretpostavlja da je poznata sopstvena vrednost ρ i odgovarajući sopstveni elemenat α, operatora T

$$(7.2) \qquad T\alpha = \rho\,\alpha \quad ,$$

pri čemu je $0 < \rho < 1$ a $\alpha \geq 0$.

Teorema 7.1

Neka je u $\mathbb{B}$ definisan linearan i pozitivan operator T. Neka u nizu (6.3) za neko $k \geq 1$ postoje pozitivni linearni operatori A_k i B_k takvi da je

7.1.1 $(T \mp A_k) z_{k-1} \leq T_k z_{k-1} \leq (T \pm B_k) z_{k-1}$

7.1.2 $\delta z_k > \pm A_k z_{k-1}$

7.1.3 q_k i Q_k su nenegativni realni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost

$$q_k \alpha \pm A_k z_{k-1} \leq \delta z_k \leq Q_k \alpha \mp B_k z_{k-1}$$

Tada operator T' ostavlja invarijantnim interval

(7.3) $I_k(q,Q) = [x_1 + \frac{\rho}{1-\rho} q_k \alpha \quad , \quad x_1 + \frac{\rho}{1-\rho} Q_k \alpha]$, gde je

$x_1 = Tx_o + f$, $x_o = z_{k-1}$. a ρ i α zadovoljavaju (7.2)

Dokaz.

(7.4) $z_k \mp A_k z_{k-1} \leq x_1 = z_k - \rho_k \leq z_k \pm B_k z_{k-1}$

$$\delta z_k \mp A_k z_{k-1} \leq \delta x_1 = x_1 - x_o \leq \delta z_k \pm B_k z_{k-1}$$

Prema 7.1.3.

$$q_k \alpha \leq \delta z_k \mp A_k z_{k-1} \leq \delta x_1 \leq \delta z_k \pm B_k z_{k-1} \leq Q_k \alpha$$

a prema 7.1.2 je $\delta x_1 > 0$, pa primenom teoreme 2.12 sledi tvrdjenje.

Teorema 7.2

Neka su zadovoljene pretpostavke prethodne teoreme s tim što u uslovima 7.1.2 i 7.1.3 operatori A_k i B_k zamene mesta, a δz_k se definiše sa

$$\delta z_k = z_{k-1} - z_k$$

Tada operator T' ostavlja invarijantnim interval $I_k(-Q,-q)$ odredjen sa (7.3).

Dokaz.

Dokazuje se na sličan način kao prethodna teorema. U |2| se pokazuje da teorema 2.8 važi i za monotono opadajući niz iteracija, s tim što se interval zameni sa $I_k(-Q,-q)$.

Zahtev o egzistenciji ρ sa $0 < \rho < 1$, svodi se za neke klase operatora na kontrakciju, |31| ,|30|. Teoreme 7.1 i 7.2 u tom slučaju daju početne elemente za konstrukciju dvostranog iterativnog postupka. Zbog toga ćemo detaljnije razmotriti slučaj $\|T\| < 1$. U daljem ćemo izostaviti indeks k kod operatora A_k i B_k. Pretpostavićemo da je k fiksirano teoremom 7.1 ili 7.2. Posmatraćemo nizove:

$$
(7.5)\quad \begin{cases}
v_{z,n} = T_n v_{z,n-1} + f & (n=1,2,\dots)\ ,\ T_n x = T_x + \rho_n \\
u_{z,n} = T_n' u_{z,n-1} + f & (n=1,2,\dots)\ ,\ T_{nx}' = T_x + \rho_n' \\
v_{x,n} = T v_{x,n-1} + f & (n=1,1,\dots) \\
u_{x,n} = T u_{x,n-1} + f & (n=1,2,\dots) \\
v_{s,n} = (T-A) v_{s,n-1} + f & (n=1,2,\dots) \\
u_{s,n} = (T-A) u_{s,n-1} + f & (n=1,2,\dots) \\
v_{y,n} = (T+B) v_{s,n-1} + f & (n=1,2,\dots)
\end{cases}
$$

$$
u_{y,n} = (T+B) u_{s,n-1} + f \quad (n=1,2,\dots)\ ,\quad \text{gde je}
$$

$$
(7.6)\quad \begin{cases}
v_{z,o} = z_k + Az_{k-1} + \frac{\rho}{1-\rho} Q_k\ \alpha & ,\ v_{x,o} = v_{s,o} = v_{y,o} = v_{z,o} \\
u_{z,o} = z_k - Bz_k + \frac{\rho}{1-\rho} q_k\ \alpha & ,\ u_{x,o} = u_{s,o} = u_{y,o} = u_{z,o}
\end{cases}
$$

Ako je T pozitivan linearan operator komutativan sa A, B, indukcijom se može pokazati |67| ($\varepsilon_1 E$ se zameni sa A, a $\varepsilon_2 E$ sa B), da je

$$
(7.7)\quad \begin{cases}
a_{y,j} - a_{x,j} = \sum\limits_{n=1}^{j} B^n \sum\limits_{i=o}^{j-n} \binom{n-1+i}{i} T^i a_{x,j-n-i}\ , & (a=u,v) \\
b_{x,j} - b_{s,j} = \sum\limits_{n=1}^{j} (-A)^n \sum\limits_{i=o}^{j-n} \binom{n-1+i}{i} T^i b_{x,j-n-i}\ , & (b=u,v)
\end{cases}
$$

Dalje je

$$
(7.8)\quad T^i v_{x,p} = \sum_{k=i}^{p+i} \delta v_{x,k} + T^{i-1} (v_{x,o} - f)\ ,\quad \text{gde je}
$$

$$\delta v_{x,k} = v_{x,k} - v_{x,k-1}$$

Zamenom (7.8) i (7.7) i prelaskom na normu, pod uslovom da je $\|A\| + \|T\| < 1$, dobijamo kao u |67|

$$(7.9)\quad \|v_{y,j}-v_{x,j}\| \leq \frac{J}{L(1-L)}(\|\delta v_{x,1}\| + \|v_{z,o}-f\|)\ .$$

$$\cdot\left[\frac{1-(L+J)^j}{1-L-J} - J\frac{1-J^j}{1-J}\right] + \frac{L^2(L+J)^{j-1}}{1-L} + \frac{L^{j-1}}{1-L}\|\delta v_{x,1}\| +$$

$$+ J\sum_{n=1}^{j} J^{n-1}\|v_{j-n,x}\|\ ,\quad \text{gde je}$$

$$\|T\| \leq L\ ,\quad \|B\| \leq J\ ,\quad J + L < 1$$

Pošto je $v_{x,p} \leq v_{z,o}$ a $\delta v_{x,1} \leq \delta v_{z,1} + A_k z_{k-1}$ desnu stranu nejednakosti (7.9) možemo izračunati . Nejednakost (7.9) važi kada se v zameni sa u . Procene za $\|v_{x,j}-v_{s,j}\|$ i $\|u_{x,j}-u_{s,j}\|$ dobijaju se takodje po navedenom postupku, s tim što se pretpostavi da je $\|A\| = S$, $S+L < 1$. Tada za ocenu prve veličine treba u (7.9) zameniti J sa S , a za drugu pored toga i v sa u .

<u>*Teorema 7.3*</u>

Neka je $\mathbb{B}$ parcijalno uredjen normalnim konusom $\mathbb{K}$ i neka je primenom teoreme 7.1 odredjen interval (7.3). Ako formiramo nizove $v_{z,n}$ i $u_{z,n}$ prema (7.5) i ako je

$$(T-A)x \leq T_n x \leq (T+B)x\quad ,\ x \geq v_{o,z}\ ,$$

$$(T-A)x \leq T_n' x \leq (T+B)x\quad ,\ x \geq u_{o,z}\ ,$$

pri čemu je $L+J < 1$ i $L+S < 1$, tada nizovi $v_{z,n}$, $u_{z,n}$ aproksimiraju dvostrani iterativni postupak $v_{x,n}$ i $u_{x,n}$ za rešavanje jednačine (6.1). Za $f \geq 0$ važi ocena

$$(7.10)\quad \left\|x^* - \frac{v_{z,j}+u_{z,j}}{2}\right\| \leq \frac{N(K)}{2} L^j \frac{\rho}{1-\rho}(Q_k-q_k)\ \|\alpha\| +$$

$$\frac{N(K)}{2}(\|M_v\| + \|M_u\|\quad ,\ \text{gde je}$$

$$M_v = \max \left[(v_{y,j} - v_{x,j}) \ , \ (v_{x,j} - v_{s,j}) \right] \qquad \text{a}$$

$$M_u = \max \left[(u_{y,j} - u_{x,j}) \ , \ (u_{x,j} - u_{s,j}) \right]$$

$N(K)$ je konstanta koja zavisi od konusa.

Dokaz.

Kao u |63| se pokazuje da je

$$u_{s,j} \le u_{x,j} \le u_{y,j} \quad , \quad u_{s,j} \le u_{z,j} \le u_{y,j}$$

$$v_{s,j} \le v_{x,j} \le v_{y,j} \quad , \quad v_{s,j} \le v_{z,j} \le v_{y,j}$$

pa je

(7.11) $\| x^* - (v_{z,j} + u_{z,j})/2 \| \le \| x^* - (v_{x,j} + u_{x,j})/2 \| +$

$+ 2^{-1} \| v_{x,j} + u_{x,j} - v_{z,j} - u_{z,j} \| \le 2^{-1} N(K) L^j \| v_{x,o} - u_{x,o} \| +$

$+ 2^{-1} \| v_{x,j} - v_{z,j} \| + 2^{-1} \| u_{x,j} - u_{z,j} \|$. Iz (7.11) i

$$-M_v \le v_{x,j} - v_{z,j} \le M_v$$

$$-M_u \le u_{x,j} - u_{z,j} \le M_u$$

, zbog normalnosti konusa dobijamo (7.10).

Kada je operator T u (6.1) linearan i negativan i za $0 < \rho < 1$ postoji nenegativan sopstveni elemenat α , tj.

(7.12) $$T \alpha = - \rho \alpha$$

Možemo dobiti ubrzanje postupka 6.3 prema teoremi 7.4.

Teorema 7.4

Neka pored navedenih pretpostavki vezanih za (7.12) za neko $k \ge 1$ u nizu (6.3) postoje linearni pozitivni operatori A_k i B_k tako da je

7.4.1 $(T \mp A_k) z_{k-1} \le T_k z_{k-1} \le (T \pm B) z_{k-1}$

7.4.2 a) za $k=2i$

$$\delta z_k \ge B \, z_{k-1} \quad , \quad \delta z_k \text{ je odredjeno sa (6.6)}$$

$$q_k a \pm B_k z_{k-1} \le \delta z_k \le Q_k a \mp A_k z_{k-1}$$

b) za $k=2i+1$

$$\delta z_k > \pm A_k z_{k-1}$$

$$q_k \alpha \pm A_k z_{k-1} \leq \delta z_k \leq Q_k \alpha \mp B_k z_{k-1}$$

gde su q_k i Q_k realni nenegativni brojevi.

Tada operator T' ostavlja invarijantnim interval

$$[x_1 + d_k \alpha \, , \; x_1 + D_k \alpha] \, , \quad x_1 = Tz_{k-1} + f$$

Pri tome je

za $k=2i$, $\quad d_k = -\rho \dfrac{Q_k - \rho q_k}{1-\rho^2} \quad , \quad D_k = -\rho \dfrac{q_k - \rho Q_k}{1-\rho^2}$

za $k=2i+1$. $\quad d_k = \rho \dfrac{q_k - \rho Q_k}{1-\rho^2} \quad , \quad D_k = \rho \dfrac{Q_k - \rho q_k}{1-\rho^2}$

Dokaz.

Dokaz je sličan dokazu teoreme 7.1. Proveravaju se uslovi teoreme 2.8, jer prema |2| ona važi i za linearne negativne operatore.

Primedba 7.1

U specijalnom slučaju kada je $A_k = B_k = 0$ umesto T posmatramo operator $(E-V)^{-1}T$ a f se zameni sa $(E-V)^{-1}f$, teorema 7.1 se svodi na teoremu 2.12. Teorema 7.4 se za $A_k=B_k=0$ svodi na odgovarajući deo tvrdjenja teoreme 2.8 .

Primedba 7.2

Ako je $A_k = B_k = \varepsilon E$, ε realan pozitivan broj, operator $T\pm\varepsilon E$ ima sopstvenu vrednost $\rho \pm \varepsilon$ a odgovarajući sopstveni elemenat je α . Ako je $0 < \rho \pm \varepsilon < 1$, tada se uz neznatno izmenjene pretpostavke teorema 7.1, 7.2 i 7.4 može dobiti egzistencija rešenja i ocena greške za jednačinu

$$x = (T \pm \varepsilon E)x + f \qquad (|67|).$$

ČETVRTI DEO

PRIMENE REZULTATA TREĆEG DELA NA REŠAVANJE ODREDJENIH KLASA OPERATORSKIH JEDNAČINA

U ovom delu je prikazana primena teorema iz trećeg dela na približno rešavanje sistema linearnih i integralnih jednačina.

U §8 je prikazana primena na rešavanje sistema linearnih jednačina sa matricom čiji su koeficijenti dati sa izvesnom greškom. Do takvih sistema se dolazi u slučajevima kad su koeficijenti matrice periodični decimalni ili iracionalni brojevi, pri numeričkom rešavanju operatorskih jednačina kada su prisutne greške primenjene metode i greške zaokrugljivanja, kada su koeficijenti matrice odredjeni merenjem (geodezija, tehnika, fizika) , zbog dozvoljene tolerancije mera u tehnici i sl. Primere takvih sistema možemo naći u |29|,|32|,|45|,|13|, |70|,|58|,|4| . Posmatra se i greška zaokrugljivanja brojeva (iteracije) u slučaju kad su koeficijenti matrice odredjeni tačno ili približno. Ti problemi su razmatrani u |75|,|12|, |71|,|58|,|59|,|4|. Dobijeni rezultat (teoreme 8.1 i 8.2) su bliski rezultatima dobijenim u |58|, |4|. Tvrdjenja u |4| obuhvataju širu klasu matrica od onih datih u teoremama 8.1, 8.2 . No, za monotone matrice teorema 8.1 daje konstrukciju početnih elemenata, (u |4| se pretpostavlja egzistencija) za dvostrani iterativni postupak . Iteracije se izvode samo sa jednim operatorom za razliku od |4| gde se koriste dve različite matrice. U slučaju nepozitivne matrice dvostrani postupak se formira sam po sebi (alternativne iteracije) ali primena rezultata §6. omogućava ubrzanje takvog postupka u precizniju ocenu greške.

U §9 se posmatraju linearne integralne jednačine sa nenegativnim i nepozitivnim jezgrom. O njihovoj primeni smo govorili u trećem delu ovog rada. Na nestacionaran iterativni postupak opisan u §4 prikazana je primena teorema §5. Prikazana je i primena na numeričko rešavanje integralnih jednačina metodom mehaničkih kvadratura |21|,|77|,|31|,|29|,|67|,|18|. U ovom paragrafu se posmatra i jedan stacionaran iterativan postupak dat u |46| za rešavanje sistema integralnih jednačina. Teorema 9.2 prikazuje primenu teoreme 5.2 na rešavanje ovog sistema. Sistem je nelinearan zbog primene splajn aproksimacija, ali se ta odstupanja od linearnosti prikazuju kao veličine ρ_n u 5.2. Teorema 9.2 omogućava da se bez zahteva kontrakcije dobije egzistencija rešenja i konvergencija postupka. No i kada imamo kontrakciju, možemo na osnovu malog broja iteracija dobiti značajne informacije o rešenju.

U §10 su dati primeri i rezultati dobijeni na mašini.

§8. Neke mogućnosti aposteriorne ocene greške i ubrzanja iterativnih postupaka pri rešavanju sistema linearnih jednačina

8.1. Schöder u |59| posmatra jednačinu

$$Gx = r \tag{8.1}$$

u $\mathbb{R}^n$. Pod pretpostavkom da se G može napisati kao $G=A-B$, gde je A regularna matrica , prikazano je nekoliko načina za odredjivanje invarijantnog intervala oparatora T', $T'x=Tx+f$, $T=A^{-1}B$, $f=A^{-1}r$. U |59| su dobijeni odgovarajući rezultati za parcijalno uredjene linearne prostore. Za $\mathbb{R}^n$ važi teorema 2.9. Albercht |4| posmatra jednačinu

$$Ax = B'x \text{ , } B'x = Bx + r \tag{8.2}$$

A je inverzno monoton operator, i odredjuje interval u kome se nalazi rešenje jednačine 8.2. Ove rezultate sadrži teorema 2.10. Primenom teoreme 2.10 na sistem

$$x = Tx + f \text{ ,} \tag{8.3}$$

u slučaju kada su matrica T i vektor f dati sa nekom greškom tj.

$$L \le T \le N \quad , \; s \le f \le t$$

(L, N realne matrice), dobijen je jedan dvostrani iterativni postupak za približno rešavanje jednačine (8.3). Uzeto je naime, da je:

$$\begin{cases} H_1\ (\xi,\eta) = L^+\xi + L^-\eta + s \\ H_2\ (\xi,\eta) = N^+\xi + N^-\eta + t \end{cases} \text{ , } G_1 = G_2 = E \tag{8.4}$$

$\Phi = [o,b]$, $b < \infty$. Ovo dovodi do ograničenja $u_o \ge 0$. odakle sledi da je $x^* \ge 0$. Ovakvi sistemi linearnih jednačina posmatraju se u |33|. Tamo se navodi konstrukcija elemenata u_o, v_o koji zadovoljavaju uslove (2.21). Navodi se takodje i literaturau kojoj je uslov $u_o \ge 0$ izostavljen uz neke izmene algoritma datog u |4|. U |4| se pokazuje da iteracije (2.23) zadržavaju monotoniju ako se sve iteracije koje se približavaju rešenju sa donje strane, zaokrugljuju sa donje strane, a iteracije koje se približavaju rešenju sa gornje strane zaokrugljuju sa gornje strane. Ovde ćemo posmatrati jednačinu (8.3) sa $T \geq 0$. Pretpostavićemo da su elementi matrice T, t_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ dati sa greškom r_{ij} pri čemu je

$$(8.5) \qquad |r_{ij}| \leq \varepsilon \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

Uporedo sa jednačinom (8.3) posmatramo jednačinu

$$(8.6) \qquad z = T^* z + f \quad , \quad \text{gde je}$$

$$t^*_{ij} = t_{ij} + r_{ij} \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

Možemo pretpostaviti da su svi $t^*_{ij} \geq 0$. Za sada ćemo pretpostaviti da se iteracije

$$(8.7) \qquad z_{k+1} = T^* z_k + f \quad , \quad z_o \in \mathbb{R}^n \quad (k=0,1,2,\dots)$$

izvode bez zaokrugljivanja. Primenom teorema §5 na niz (8.7) možemo približno odrediti rešenje sistema (8.3) i dati aposteriornu ocenu. Ilustrovaćemo to na primeru teoreme 5.1.

Primetimo prvo da sve teoreme date u drugom delu važe za $T_k = T_{k-1} = T^*$, T^* linearan i monoton operator.

Teorema 8.1

Neka je dat sistem linearnih jednačina (8.3) sa $T \geq 0$ i $f \geq 0$. Neka za neko $k \geq 2$ u nizu (8.7), $z_o = f$, važi

8.1.1 $\quad \delta z^i_{k-1} \geq 2\varepsilon \sum_{p=1}^{n} z^p_{k-2}$, $\delta z^i_k = z^i_k - z^i_{k-1}$ $(i=1,2,\dots,n)$

8.1.2. $\quad 0 < m_k \leq M_k < 1$, gde je

$$(8.8) \qquad m_k = \min_i \cdot \frac{\delta z^i_k - \alpha^i_k}{\delta z^i_{k-1} + \beta^i_k} \quad , \quad M_k = \max_i \frac{\delta z^i_k + \gamma^i_k}{\delta z^i_{k-1} - \beta^i_k}$$

$$\alpha^i_k = \varepsilon \sum_{p=1}^{n} [z^p_{k-1} + (2n\varepsilon + 2 + \sum_{j=1}^{n} t^*_{ij})\, z^p_{k-2}]$$

$$\beta^i_k = \varepsilon \sum_{p=1}^{n} z^p_{k-2} \; , \qquad \gamma^i_k = \alpha^i_k - 2n\varepsilon \sum_{p=1}^{n} z^p_{k-2} \; ,$$

gde je ε odredjeno sa (8.5). Tada sistem (8.3) ima rešenje x^*

na intervalu

(8.9) $\quad Iz_k\ (s,\ t,\ S,\ q)$, gde je $s_k = m_k/(1-m_k)$

$S_k = M_k/(1-M_k)$ a $t_k = -(1+s_k)\,\alpha_k + \beta_k$,

$q_k = (1+S_k)\,\gamma_k - \beta_k$

<u>*Dokaz.*</u>

Uzimamo da je $A_k = B_k = \varepsilon D$, gde je D matrica sa $d_{ij}=1$ $(i,j=1,2,\dots,n)$. Nejednakosti

$$(T-\varepsilon D)x \le T_x^* \le (T+\varepsilon D)x \quad , \text{ važe za } x \ge f \ .$$

Zbog $t_{ij}^* \ge 0$ je $z_i \ge f$ $(i=0,1,2,\dots)$, pa je zadovoljen uslov 5.1.1 teoreme 5.1 . Uslov 5.1.2 se svodi na 8.1.1 jer je

$$D\, z_{k-2} = \sum_{p=1}^{n} z_{k-2}^{p}\,\delta$$

Treba još pokazati da su zadovoljene nejednakosti date u uslovu 5.1.3 , za s_k i S_k odredjeno sa (8.9)

5.1.3 a) važi zbog monotonosti funkcije $x(1-x)^{-1}$. Prema (8.8) je

$$0 < s_k = \min_i \frac{\delta z_k^i - \alpha_k^i}{\delta z_{k-1}^i + \beta_k^i - \delta z_k^i + \alpha_k^i} \qquad \text{pa je}$$

(8.10) $$s_k(\delta_{k-1}^i + \delta z_k^i + \beta_k^i + \alpha_k^i) \le \delta z_k^i - \alpha_k^i$$

Lako se proverava da se uslov 5.1.3 b) svodi na (8.10) za $A_k = B_k = \varepsilon D$.

$$(R_k(\varepsilon D,\varepsilon D))^i = \varepsilon \sum_{i=-1}^{n} z_{k-2}^i \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^* + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} z_{k-1}^i$$

$$+\ 2\varepsilon^2 n \sum_{i=1}^{n} z_{k-2}^i + \sum_{i=1}^{n} z_{k-2}^i\ ) \ . \quad \text{Takodje iz}$$

$$S_k \ge \frac{\delta z_k^i + \gamma_k^i}{\delta z_{k-1}^i - \beta_k^i - \delta z_k^i - \alpha_k^i} \qquad \text{sledi } 5.1.3\ \text{c)} \ .$$

Prema teoremi 5.1 operator T' preslikava interval $Ix_2(\mu,0,\eta,0)$ u samog sebe. Pri tome je $\mu_2=s_k$, $\eta_2=S_k$, $x_n=Tx_{n-1}+f$, $x_o=z_{k-2}$
Na osnovu Brouwer -ove teoreme o nepokretnoj tački sledi egzistencija rešenja na intervalu Ix_2 .

$$z_k^i - \alpha_k^i + \beta_k^i \leq x_2^i \leq z_k^i + \gamma_k^i - \beta_k^i$$

$$\delta z_k^i - \alpha_k^i \leq \delta x_2^i \leq \delta z_k^i + \gamma_k^i$$

imamo

$Ix_2(\mu,0,\eta,0) \subseteq Iz_k(s,t,S,q)$, odakle sledi tvrdjenje.

Posledica 8.1

Ako su zadovoljeni uslovi teoreme 8.1 jednačina (8.6) ima rešenje z^* na intervalu $Iz_k(s,0,S.0)$.

Dokaz.

Iz uslova 8.1.1 i 8.1.2 sledi da se teorema 5.1 može primeniti na jednačinu (8.6) kad se uzme $A_k=B_k=0$ (stacionaran postupak).

Posledica 8.1 omogućava da pored ocene greške koja sledi iz teoreme 8.1 ,dobijemo ocenu

$$\|x^*-Z_k\| \leq \|x^*-z^*\| + \frac{1}{2}(S_k-s_k)\|\delta z_k\| , \quad \text{gde je}$$

$$Z_k = z_k + \frac{1}{2}(S_k+s_k)\,\delta z_k .$$

$\|x^*-z^*\|$ se može oceniti po teoremi Urabea |28| ukoliko T i T^* zadovoljavaju uslov Lipschitza sa istom konstantom.

Teorema 8.2

Neka su T i T^* odredjeni kao u teoremi 8.1.
Neka za neko k u (8.7) važi:

8.2.1. $\delta z_{k-1} \geq 0$

8.2.2. $m_k \delta z_{k-1} \leq \delta z_k \leq M_k \delta z_{k-1}$, $0 < m_k \leq M_k < 1$

8.2.3. Neka za neko l u nizovima

$$\begin{cases} v_l = T^* v_{l-1} + f , & v_o = z_k + M_k \delta z_k/(1-M_k) \\ u_l = T^* u_{l-1} + f , & u_o = z_k + m_k \delta z_k/(1-m_k) . \end{cases}$$

važi

$$(8.12)\qquad \begin{cases} v^{l-1} - v^{l} \geq \varepsilon D\, v^{l-1} \\ -u^{l-1} + u^{l} \geq \varepsilon D'\, u^{l-1} \end{cases} \quad \text{, gde je}$$

$$D' = \{d_{ij}'\}_{i,j=1}^{n} \quad , \quad d_{ij}' = \begin{cases} d_{ij} & \text{za } t_{ij}^{*} \geq \varepsilon \\ 0 & \text{za } t_{ij}^{*} < \varepsilon \end{cases}$$

Tada jednačina (8.3) ima rešenje x* i važi:

$$(8.13)\qquad u_l - \varepsilon D' u_{l-1} \leq x^{*} \leq v_l + \varepsilon D\, v_{l-1}$$

Dokaz.

Označimo sa

$$(8.14)\qquad \begin{cases} V_1 = (T^{*} + \varepsilon D)V_o + f & , V_o = v_{l-1} \\ U_1 = (T^{*} - \varepsilon D)U_o + f & , U_o = u_{l-1} \end{cases}$$

Tada je

$$V_o - V_1 = v_{l-1} - v_l - \varepsilon D v_{l-1} \geq 0$$

$$U_1 - U_o = U_{l-1} - \varepsilon D' u_{l-1} \geq 0$$

Pošto je

$$T^{*} - \varepsilon D' \leq T \leq T^{*} + \varepsilon D$$

$0 \leq U_o \leq V_o$, $U_o \leq U_1$, $V_1 \leq V_o$ primenom teoreme (2.10) za $G_1 = G_2 = E$ i

$$H_1(\xi,\eta) = (T^{*} - \varepsilon D')\xi + f$$

$$H_2(\xi,\eta) = (T^{*} + \varepsilon D)\,\xi + f$$

, sledi da postoji x* i da je $U_1 \leq x^{*} \leq V_1$. Prema (8.14) sledi tvrdjenje.

Teorema (8.2) daje konstrukciju početnih elemenata za dvostrani iterativni postupak, za razliku od teoreme 2.10 gde se pretpostavlja egzistencija takvih elemenata. Iteracije (8.11) se izračunavaju samo sa jednom matricom dok se prema teoremi 2.10 koriste dve različite matrice. Ovim je postupak pojednostavljen a monotonija ostaje očuvana dokle god važi (8.12). Ograničenja (8.12) su prirodna i proističu iz tolerancije sa kojom je zadat operator T. No, ova teorema se odnosi samo na nenegativne matrice T.

Analogne rezultate za nepozitivne matrice možemo dobiti primenom teorema §6. Razlike se ogledaju u odredjivanju konstanti g_k i G_k koje figurišu u uslovima tih teorema. Rešavajući sistem nejednačina (6.5) dobijamo:

$$(8.15) \qquad s_2 \le \frac{p_1 p_2 - q_2^2}{q_1 p_1 - p_2 q_2}, \quad S_2 \ge \frac{q_1 q_2 - p_2^2}{q_1 p_1 - p_2 q_2}, \text{ jer}$$

je prema posledici (6.1) $q_1 \ge p_1 > q_2 \ge p_2$

Nejednakosti (8.15) treba da važe po svim koordinatama vektora p_i, q_i $(i=1,2)$. Zato u teoremama §6 uzimamo

$$(8.16) \qquad g_k = \min_i \frac{p_1^i p_2^i - (q_2^i)^2}{q_1^i p_1^i - p_2^i q_2^i}, \quad G_k = \max_i \frac{q_1^i q_2^i - (p_2^i)^2}{q_1^i p_1^i - p_2^i q_2^i}$$

p_1^i, q_1^i su odredjeni u svakoj teoremi pojedinačno u zavisnosti od A_k i B_k. Ukoliko je $p_1 > q_2$ odredjujemo g_k i G_k prema (8.16). Ako je $g_k > 0$, konstante (8.16) zadovoljavaju nejednakosti date u uslovima odgovarajućih teorema

8.2. Pri rešavanju sistema (8.3) na računaru iterativni niz

$$(8.17) \qquad x_l = Tx_{l-1} + f, \quad x_o \in R^n \quad (l=1,2,\dots)$$

prelazi u niz

$$(8.18) \qquad z_l = T_l z_{l-1} + f, \quad x_o = z_o, \quad \text{gde je}$$

$$T_l x = Tx + \rho_l, \quad \rho_l \in R^n \quad (\rho_l^i \text{ -greške zaokrugljivanja})$$

Ako se zna da je $|\rho_l^i| \le \sigma$ $(i=1,2,\dots,n;\ l=k-1,k)$ na niz (8.18) možemo primeniti teoremu 6.2. Uzećemo da je $A_k = B_k = \varepsilon E$, gde je ε odredjeno iz uslova

$$(8.19) \qquad (T-\varepsilon E) z_{k-2} \le T_l x \le (T+\varepsilon E) z_{k-2} \quad (l=k-1,k)$$

Ako $z_{k-2} > 0$, ε se može odrediti iz uslova

$$(8.20) \qquad \varepsilon \ge \sigma / (\min_i z_{k-2}^i)$$

Ako je $z_o = f > 0$, ε se može unapred odrediti sa

$$(8.21) \qquad \varepsilon \ge \sigma / (\min_i f^i),$$

ako pretpostavimo da "ometanja" u nizu (8.18) nisu takva da poremete monotoniju koju bi u tom slučaju imao niz (8.17).

Pošto je operator εE komutativan sa T, ostali uslovi teoreme 5.2 svode se na

$$(8.22)\qquad \delta z^i_{k-1} > 2\,\varepsilon z^i_{k-2} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$(8.23)\qquad 0 < m_k \le M_k < 1 \quad , \text{ gde je}$$

$$m_k = \min_i \left[(\delta z^i_k - 2\,\varepsilon z^i_{k-1} - (3\varepsilon^2+\varepsilon) z^i_{k-2} + \varepsilon f^i)(\delta z^i_{k-1} + \varepsilon z^i_{k-2})^{-1}\right]$$

$$M_k = \max_i \left[(\delta z^i_k + 2\varepsilon z^i_{k-1} + (\varepsilon^2+\varepsilon) z^i_{k-2} - \varepsilon f^i)(\delta z^i_{k-1} - \varepsilon z^i_{k-2})^{-1}\right]$$

Da iz (8.23) i (8.24) sledi 5.1.2 i (5.13)dokazuje se kao kod teoreme 8.1. Prema Brouwer -ovoj teoremi sledi

$$x^* \in Iz_k(s,t,S,q), \quad \text{gde je}$$

$$s_k = m_k/(1-m_k) \quad , \quad S_k = M_k/(1-M_k),$$

$$t^i_k = -(1+s_k)(2\varepsilon z^i_{k-1} + \varepsilon^2 z^i_{k-2} - \varepsilon f^i) - s_k \varepsilon\, z^i_{k-2}$$

$$q^i_k = (1+S_k)(2\,\varepsilon z^i_{k-1} + 3\varepsilon^2\, z^i_{k-2} - \varepsilon f^i) + S_k \varepsilon\, z^i_{k-2}$$

Primedba 8.2

Preko niza (8.18) možemo kontrolisati greške sa kojima je f zadato, |4|. Ako uzmemo umesto f, f+r, $r \in \mathbb{R}^n$, tada operator T_1 možemo odrediti sa:

$$(8.24)\qquad T_1 x = Tx + \bar\rho_1 \quad , \text{ gde je}$$

$$\bar\rho_1 = \rho_1 + r$$

8.3. U 8.1 je pretpostavljeno da se iteracije izvode tačno. Ako to nije slučaj, matrice A_k i B_k u teoremi 5.1 možemo odrediti na sledeći način:

$$(8.25)\qquad A_k = B_k = \varepsilon E + \varepsilon_1 D \quad , \text{ gde je}$$

$$|r_{ij}| \le \varepsilon_1 \, , \quad (i,j=1,2,\dots,n) \, , \text{ a}$$

$$\varepsilon \ge \varepsilon_2 \,(\min_i z^i_{k-2})^{-1} \quad , \; |\bar\rho^i_1| \le \varepsilon_2 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

r_{ij} je odredjeno sa (8.6) a $\bar\rho_1$ sa (8.24) .

Teorema 8.2 važi i u ovom slučaju , s tim što se umesto matrice εD, uzme $\varepsilon E + \varepsilon_1 D$ a umesto $\varepsilon D'$ matrica $\overline{D}$,

$$\overline{d}_{ii} = \begin{cases} \varepsilon+\varepsilon_1 & \text{za} \quad t^*_{ii} \geq \varepsilon+\varepsilon_1 \\ 0 & \text{za} \quad t^*_{ii} < \varepsilon+\varepsilon_1 \end{cases}$$

$$\overline{d}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{za} \quad t^*_{ij} \geq \varepsilon_1 \quad , \quad i \neq j \\ 0 & \text{za} \quad t^*_{ij} < \varepsilon_1 \quad , \quad i \neq j \end{cases}$$

Na sličan način se primenjuju i ostale teoreme iz §5 , odnosno §6.

Dobijeni rezultati su prikazani na primerima 5. i 6. u §10.

§ 9. Numeričko rešavanje Fredholmove integralne jednačine druge vrste primenom rezultata §5

9.1 Rešavanje Fredholmove integralne jednačine druge vrste (4.1) metodom mehaničkih kvadratura |40| ,|18|,|43|,|31| |21|,|67| sastoji se u sledećem:

Integralni operator K (4.4) zamenjuje se sa operatorom K^n definisanim za $u \in C(I)$ sa

$$K_u^n = \sum_{j=o}^{n} d_j \, K(s,t_j)u(t_j) \quad ,$$

koji se dobija kada se integral u (4.4) zameni nekom kvadraturnom formulom. Pri tome se ostatak kvadraturne formule izražava sa

$\sigma^n[K(s,\cdot)u] = K_u - K_u^n$, gde oznaka $K(s,\cdot)$ ima za cilj da istakne zavisnost kvadrature od parametra s.

Uvodjenjem restrikcionog operatora r_n odredjenog sa (4.2) jednačina (4.1) prelazi u sistem linearnih jednačina

$$(9.1) \qquad r_n u = r_n K_u^n + r_n[\sigma^n K(s,\cdot)u] + r^n f \; , \quad s_j = t_j \; (j=1,2,..n)$$

koji je nemoguće rešiti zbog prisustva nepoznatih veličina $\sigma^n[K(s,\cdot)u]$. Pod pretpostavkom da se one mogu zanemariti, rešavamo sistem

$$(9.2) \qquad r_n z = r_n K^n z + r_n f$$

čije rešenje $r_n z^*$ pretstavlja aproksimaciju za $r_n u^*$

Ako pretpostavimo da je $K(s,t) \geq 0$ a

$$(9.3) \qquad \sigma^n[K(s_j,\cdot)u] \leq \varepsilon \quad \text{za } j=1,2,\dots,n$$

(|9|,|21|,|41| , |42|,|61| možemo na sistem (9.2) primeniti teoreme §5. tako što uzmemo da je $A_k = B_k = \varepsilon E$. Uslove koji se odnose na razlike δz_n proveravamo u toku samog procesa računanja. Ukoliko je $f \geq 0$ možemo primeniti teoremu 5.2. Ako se koeficijenti matrice $K(t_i, t_j)$ računaju sa greškom možemo primeniti teoreme 8.1 odnosno 8.2 . Tako dobijamo egzistenciju za $r_n u^*$ i ocenu greške za svaku iteraciju pojedinačno.

9.2. Neka je za rešavanje jednačine (4.1) primenjen nestacionaran iterativni postupak

(9.4) $$z_k = K_{m_k} z_{k-1} + f\ , \quad z_o = f \quad (k=1,2,\dots)$$

pri čemu je K_{m_k} odredjeno sa (4.8) i

(9.5) $$\| K_m u - K_{m-1} u \| \le \sigma$$

Ako je $K(s,t) \ge 0$ ili $K(s,t) \le 0$ na niz (9.4) možemo primeniti teoreme trećeg dela. Tada uzimamo da je $B = C(I)$. Operator K definisan sa (4.4) je kompletno neprekidan |76|, |28|a u prostoru sa normalnim konusom svaki zatvoren interval je ograničen po normi (|31|,|30|) pa se za egzistenciju rešenja može primeniti Schauder -ova teorema .

Teorema 9.1

Neka je za rešavanje jednačine (4.1) primenjen postupak (9.4) sa Newton - Cotes -ovom kvadraturnom formulom tačnom za polinome stepena p, $p \le b$.

Neka je

9.1.1 $K(s,t) \ge 0$, $K(s,t) \in C^{l+1}(I \times I)$

9.1.2 $f(s) > o$, $f(s) \in C^{l+1}(I)$

9.1.3 $\dfrac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}} \left[K(s,t) z_p(t)\right]$, $(p=k-1,\ k)$ ne menja znak na I.

Neka za neko k u nizu (9.4) važi:

9.1.4. $\delta z_{k-1} > 2 \varepsilon z_{k-2}$,

(9.6) $$\varepsilon \ge \sigma \left(\min_t z_{k-2}(t)\right)^{-1}$$

9.1.5 $0 < m \le M < 1$, gde je

$$m = \min_t m(t,\varepsilon) \quad , \quad M = \max_t M(t,\varepsilon)$$

(9.7) $$\begin{cases} m(t,\varepsilon) = (\delta z_k(t) - F(t))(z_{k-1}(t) + \varepsilon z_{k-2}(t))^{-1} \\ M(t,\varepsilon) = (\delta z_k(t) + F(t) - 2\varepsilon^2 z_{k-2}(t)) \cdot (\delta z_{k-1}(t) - \varepsilon z_{k-2}(t))^{-1} \\ F(t) = 2\varepsilon z_{k-1}(t) + (3\varepsilon^2 + \varepsilon) z_{k-2}(t) - \varepsilon f(t) \end{cases}$$

Tada jednačina (4.1) ima rešenje $u^*(s)$ na intervalu

(9.8) $\quad Iz_k\ (s,t,S,q)$ gde je

$$s_k = m_k/(1-m_k) \quad , \quad S_k = M_k/(1-M_k)$$

$$t_k = -(1+s_k)(2\varepsilon z_{k-1}(t)+\varepsilon^2 z_{k-2}(t)-\varepsilon f(t))-s_k\varepsilon z_{k-2}(t)$$

$$q_k = (1+S_k)(2\varepsilon z_{k-1}(t)+3\varepsilon^2 z_{k-2}(t)-\varepsilon f(t)+S_k\varepsilon z_{k-2}(t)$$

Dokaz.

Zbog $f > 0$ sledi $z_{k-2} > 0$ $(k \geq 2)$

Prema teoremi 2.6 je

$$\|Kz_{i-1}-K_{m_i}z_{i-1}\| \leq \|\sigma^{m_i}[K(s,\cdot)z_{i-1}]\| \leq \sigma \qquad (i=k-1,k)$$

pa ε odredjeno sa (9.6) zadovoljava nejednakosti

$$-\varepsilon\, x(t) \leq \sigma^{m_i}[K(s,\cdot)z_{i-1}] \leq \varepsilon\, x(t)$$

Primenom teoreme 5.2 za $A_k=B_k=\varepsilon E$, sledi egzistencija invarijantnog intervala Ix_2. Zbog kompaktnosti slike, primenom Schauder -ove teoreme o nepokretnoj tački sledi egzistencija rešenja $u^*(s) \in Ix_2$.
Kako je $Ix_2 \subseteq Iz_k$ sledi tvrdjenje.

Za razliku od teoreme 4.3 teorema 9.1 daje približno rešenje jednačine (4.1) u vidu neprekidne funkcije $z_k(s)$. Zbog toga nije potrebno interpolacija. Teorema 9.1 ne sadrži uslov za kontrakciju. No, mogućnosti za njenu primenu su ograničene, jer se ne može koristiri za rad na računaru.

Primedba 9.1

U |41|,|42| su dati uslovi na osnovu kojih se može oceniti znak ostatka kvadraturne formule. U takvim slučajevima bi mogli uzeti da je jedan od operatora A_k ili B_k nula operator.

Primedba 9.2

Uslov 9.1.3 omogućava primenu teoreme 2.6 . Ako se σ može oceniti na neki drugi način, taj uslov se može izostaviti.

Pošto se ostaci većine kvadraturnih formula mogu izraziti preko izvoda podintervalne funkcije i broja čvorova |18| , te ocene ovde možemo koristiti ako pretpostavimo da jezgro i slobodan član imaju odgovarajući broj izvoda za obe promenljive. Ako, ilustracije radi, primenimo Simpsonovu kvadraturnu formulu i ako znamo da $K(s,t)$ i $f(s)$ imaju po četiri neprekidna izvoda na I, tada možemo pokazati da svako $z_k(t)$ ima po četiri neprekidna izvoda |21|. Ostatke $\sigma^{m_k}[K(s,\cdot)z]$ i $\sigma^{m_{k-1}}[K(s,\cdot)z]$ možemo oceniti na sledeći način:

$$|\sigma^{m_k}[K(s,.)z]| \le \frac{(b-a)^5}{180m_k^4} M_k \quad , \quad M_k = \max_{s,t} \left| \frac{\partial^4}{\partial t^4} K(s,t)z_k(t) \right|$$

$$(9.9) \qquad \frac{d^l}{ds^l} z_{k+1}(s) = \sum_{i=o}^{2m_{k+1}+1} d_i \frac{\partial^l}{\partial s^l} K(s,t_i)z_k(t_i) + \frac{d^l}{ds^l} f(s)$$

$$(9.10) \qquad \frac{\partial^4}{\partial t^4}[K(s,t)z_k(t)] = \sum_{l=o}^{4} C_4^l \frac{\partial^l K(s,t)}{\partial t^{4-l}} \cdot \frac{d^{4-l}}{dt^{4-l}} z_k(t)$$

Iz (9.9) možemo oceniti $\frac{d^l}{ds^l} z_k(s)$, a zatim iz (9.10) dobiti ocenu za M_k.

Označimo sa $N_k = \max(M_k, M_{k-1})$ a sa $n_k = \min(m_k, m_{k-1})$.

Tada je

$$|\sigma^{m_i}[K(s,.)z]| \le \frac{(b-a)^5}{180n_k^4} \cdot N_k = \sigma \quad (i=k-1,k)$$

n_k se može unapred odrediti ako je dato neko n_{min} a uslov (9.5) se proverava samo za $m \ge n_{min}$. σ se može približno odredtit pomoću Runge -ovog principa koristeći teoreme 4.1 i 4.2.

9.3. Posmatraćemo rešavanje jednačine (4.1) nestacionarnim iterativnim postupkom (4.9) s Simpsonovom kvadraturnom formulom. Da bi mogli primeniti teoreme § 5 , treba iterativni niz (4.9) prikazati u obliku (5.2). Prema (5.2) je:

$$T_i x = Tx + \rho_i \qquad (i=k,\ k-1)$$

$$\rho_i = T_i z_{i-1} - Tz_{i-1} \qquad (i=k-1,\ k)$$

Ovde ulogu operatora T ima linearni integralni operator K odredjen sa (4.4)

$$\rho_k = K_{m_k} p_n r_n z_{k-1} - K z_{k-1} = K p_n r_n z_{k-1} - K z_{k-1} =$$

$$= K p_n r_n z_{k-1} - K z_{k-1} + K_{m_k} p_n r_n z_{k-1} - K p_n r_n z_{k-1}$$

Ako pretpostavimo da je

$$K(s,t) \in C^5(I\times I) \quad , \; f(s) \in C^5 \, (I)$$

i da je za neko $k \geq 2$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}[K(s,t)S\Delta(z_p,t)]_{t=a} \neq \frac{\partial^3}{\partial t^3}[K(s,t)S\Delta(z_p,t)]_{t=b}$$

$(p=k-2,k-1)$

tada se kao u teoremi 4.4 može pokazati da je

(9.11) $\quad K(p_n r_n z_{k-1} - z_{k-1}) = O(\|\Delta\|^4) \qquad (z_k \in C^5(I))$

(9.12) $\quad |K_{m_k} p_n r_n z_{k-1} - K p_n r_n z_{k-1}| \leq \frac{\varepsilon}{15} + O(2^{-5m_k})$

Isto se dobija i za ρ_{k-1}, pa je

(9.13) $\quad |\rho_i| \leq \frac{\rho}{15} + O(\max(\|\Delta\|^4, 2^{-5m_k}) \qquad (i=k-1, k)$

Ocena (9.13) je asimptotska pa da bi mogli primeniti teoremu §5 za ubrzanje iterativnog postupka (4.9) potrebne su neke informacije o konstanti koja figuriše u (9.13). Konstanta u (9.11) je odredjena u |1| a u (9.12) u |9| . No, za praktičan rad treba odrediti tako $\|\Delta\|$ i m_k, da se veličina $O(\max(\|\Delta\|^4, 2^{-5m_k})$ može zanemariti, odnosno da je zanemarljivo mala u odnosu na grešku zaokrugljivanja brojeva. Dakle, ako možemo odrediti ε_1, tako da je

$$|\rho_i| \leq \frac{\sigma}{15} + \varepsilon_1 \quad , \text{ gde je } \; \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\|\Delta\|, m_k, 1)$$

a 1 red tačnosti sa kojom se izvode računanja, tada se može uzeti $A_k = B_k = \varepsilon E$, pri čemu se ε odredjuje iz uslova:

$$-\varepsilon x \leq \rho_i \leq \varepsilon x \quad ,$$

a x je odredjeno u svakoj teoremi pojedinačno. Naprimer, za primenu teoremu 5.2 možemo uzeti da je:

(9.14) $$\varepsilon \geq \left(\frac{\sigma}{15} + \varepsilon_1\right)\left(\min_t z_{k-2}(t)\right)^{-1}$$

Veličine S_k i s_k odredjujemo kao u teoremi 9.1. Pošto veličine $m(t,\varepsilon)$ i $M(t,\varepsilon)$ odredjene sa (9.6) , znamo samo u n -fiksnih tačaka, možemo primeniti splajn interpolacije. Izvod splajna je jednostavno odrediti na mašini, minimum, maksimum takodje (polinomi drugog stepena). Greška kojom se aproksimiraju izvodi funkcija $M(t,\varepsilon)$ i $m(t,\varepsilon)$ su reda $O(\|\Delta\|^3)$ prema teoremi 2.1 odnosno 2.2 .

Ako za odredjivanje M, m i ε koristimo splajn aproksimacije unosimo grešku reda $O(\|\Delta\|^3)$. Sa tom greškom odredjujemo granice intervala (9.8).

Numerički rezultati su prikazani na primerima 1., 2. i 3.

Primedba 9.3

Umesto izlaznog kriterijuma (4.8) i (9.5) možemo koristiti kriterijum dat u teoremi 4.5 i dobiti slične ocene.

9.4. U |46| se rešenje sistema linearnih integralnih jednačina

$$y^i(s)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(s,t)y^j(t)dt+f^i(s)\qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{9.15}$$

gde su $f^i(s) \in C(I)$ i imaju period $b-a$, a

$K_{ij}(x,t) \in C(I\times I)$ imaju period $b-a$ pa obe promenljive, traži u obliku neprekidne funkcije sa periodom b-a. Pri tome se koriste periodični kubni splajnovi na ravnomernoj mreži da bi se pojednostavilo izračunavanje integrala.

Formira se naime, iterativni postupak

$$\begin{cases} y_1^i(s)=y_0^i(s)+\lambda\sum\limits_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(s,t)S\Delta(y_0^i,t)\,dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^i(s)=y_0^i(s)+\lambda\sum\limits_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(s,t)S\Delta(y_{j,n-1},t)dt \end{cases} \tag{9.16}$$

za $i=1,2,\dots,n$. $y_0^i = f^i$

i pokazuje konvergencija pri uslovu

$$|\lambda|\,K_o\|S\|\,n\,(b-a) < 1 \quad \text{gde je} \tag{9.17}$$

$$\max_{s,t}|K_{ij}(s,t)| \le K_o \qquad (i,j=1,2,\dots,n)\ ,$$

$S : f(x) - S_\Delta(f,x)$ i

$$\|S\| = \sup\{\|Sf\| : \|f\| = 1 \ , \ f \in C(I)\}$$

U slučaju kada su integralni operatori K_{ij} linearni, možemo na (9.16) primeniti neke teoreme §5 i §6 i time dobiti ocenu greške i ubrzanje iterativnog postupka. Primetimo da su operatori $K_{ij}S$ definisani sa

$$K_{ij}S\,x(t) = \int_a^b K_{ij}\,S\Delta(x,t)dt$$

nelinearni a iterativni postupak (9.16) stacionaran. Zahvaljujući definiciji operatora T_k i T_{k-1} u pomenutim paragrafima, omogućeno je da se upravo onaj "deo" u kome se dejstvo operatora K_{ij} razlikuje od dejstva operatora $K_{ij}S$ na fiksiranim elementima z_{k-2} i z_{k-1} (teorema 5.1) izrazi kao ρ_{k-1} i ρ_k. Da bi dokazali narednu teoremu zapisaćemo sistem (9.15) u matričnom obliku:

$$(9.18)\quad \begin{vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots K_{2n} \\ \vdots & & \\ K_{n1} & \cdots\cdots & K_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{vmatrix}$$

gde su K_{ij} operatori definisani sa (9.19)

$$(9.19)\qquad K_{ij}(x) = \int_a^b K_{ij}(s,t)\,x(t)dt \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

ili kraće

$$Y = \lambda\,\tilde{K}\,Y + F$$

gde su Y, F vektori funkcije a $\tilde{K}$ matrica čiji su elementi operatora definisani sa (9.19). Označićemo sa $\mathbf{B}$ skup navedenih vektor funkcija i definisati uredjenje i normu. Za $X, Y \in \mathbf{B}$ kazaćemo da je $X > Y$ ako je $x^i(t) \geq y^i(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$.

$$\|X\| = \max_i\{\max_t |x^i(t)|\}$$

Iterativni postupak (9.16) možemo zapisati u obliku

$$(9.20)\qquad Y_k = F + \lambda\,\tilde{K}S\Delta(Y_{k-1},t) \qquad \text{gde je}$$

$$S\Delta(Y_{k-1},t) = \{S\Delta(y^i_{k-1},t)\}_{i=1}^n$$

ili

$$(9.21)\qquad Y_k = F + \lambda\,K(Y_{k-1} + R_{k-1}) \quad , \text{ gde je}$$

R_{k-1} greška interpolacije, $R_{k-1} = S\Delta(Y_{k-1},t)-Y_{k-1}$.

Prema teoremi (2.3) je

$$(9.22) \quad -\left(1+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\Omega_2(Y_{k-1},h) \le R_{k-1} \le \left(1+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\Omega_2(Y_{k-1},h)$$

gde je

$$\Omega_2(Y_{k-1},h) = \{ w_2(y^i_{k-1},h)\}_{i=1}^{n} \quad , \; w_2 \text{ odredjeno u}$$

teoremi 2.3.

Označimo sa $\overline{K}_{ij} = \max\limits_{s,t} \int_a^b K_{ij}(s,t)dt$ a sa $\overline{K}$ matricu $n \times n$ čiji su elementi $\overline{K}_{ij}$. Uporedo sa nizom (9.20) posmatrajmo niz

$$(9.23) \qquad X_k = F + \lambda \tilde{K} X_{k-1}$$

dobijen iz (9.20) kada se izostavi interpolacija

$$(9.24) \qquad \overline{y}^i_{k-2} = \min_t y^i_{k-2}(t)$$

Sada je očigledno

$$(9.25) \qquad -C\overline{K}\,\Omega_2(Y_j,h) \le \lambda \tilde{K} R_j \le C\,\overline{K}\,\Omega_2(Y_j,h) \qquad (j=k-2,k-1)$$

gde je $C = \lambda \cdot \left(1+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

Da bi primenili teoremu 5.2 definisaćemo operatore T_k i T_{k-1} sa

$$(9.26) \qquad \begin{cases} T_k Y = \lambda\tilde{K}Y + \rho_k \quad , \; \rho_k = \lambda\tilde{K}\,R_{k-1} \quad \text{(vidi (9.21))} \\ T_{k-1}Y = \lambda\tilde{K}Y + \rho_{k-1} \quad , \quad \rho_{k-1} = \lambda\,\tilde{K}\,R_{k-2} \end{cases} \quad , \text{ a}$$

operatore A_k i B_k sa

$$(9.27) \qquad A_k = B_k = C\,\psi = H \;, \quad \text{gde je } \psi \quad \text{matrica}$$

dimenzije $n \times n$, čiji su elementi

$$\psi_{ij} = \overline{K}_{ij} \cdot \max\left[w_2(y^i_{k-1},h) \;, \; w_2(y^j_{k-2},h)\right] (\overline{y}^i_{k-2})^{-1}$$

$\overline{y}^i_{k-2}$ je odredjeno sa (9.24) .

Primetimo da su operatori $\tilde{K}$ i ψ komutativni. Sada možemo dokazati teoremu 9.2.

Teorema 9.2

Neka je za rešavanje sistema (9.18) primenjen postupak (9.20) i neka važe navedene pretpostavke o neprekidnosti i periodičnosti finkcija $K_{ij}(s,t)$ i $f^i(s)$ i neka je

$$K_{ij}(s,t) \geq 0 \quad , \quad i \quad f^i(s) > 0 \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

Neka za neko k u (9.20) važi

a) $Y_{k-1} \geq H\, Y_{k-2}$, $\delta Y_{k-1} = Y_{k-1} - Y_{k-2}$

b) $0 < m < M < 1$, gde je

$$m = \min_i m_i \quad , \quad M = \max_i M_i$$

$$m_i = \min_t m^i(t,H) \quad , \quad M_i = \max_t M^i(t,H)$$

$$m(t,H) = \{m(t,H)^i\}_{i=1}^n \quad , \quad M(t,H) = \{M(t,H)^i\}_{i=1}^n$$

gde su $m(t,H)$, $M(t,H)$ odredjeni sa (9.7) s tim što se z_p zameni sa Y_p (p= k-2, k-1, k)

Tada sistem (9.18) ima rešenje i pri tome važi ocena greške data u teoremi 5.2 s tim što se z_p zameni sa Y_p a $A_k=B_k=H$ gde je H odredjeno sa (9.27)

Dokaz.

Dokaz se izvodi direktnim proveravanjem uslova teoreme 5.2 za operatore $A_k=B_k=H$ i niz Y_i. Prema (9.23),(9.25),(9.26) kao i uslovima teoreme 9.2 sledi da se na niz (9.20) može primeniti teorema 5.2.

Primena teoreme (9.2) je opravdana u slučaju kada se uslov kontrakcije (9.17) ne može proveriti. U slučaju i kad je taj uslov zadovoljen (proverljiv) teorema (9.2) može posle malog broja iteracija dati značajne informacije o rešenju a ujedno i ubrzanje postupka sve dotle dok donja granica dobijenog intervala ostaje veća od Y_k , što zavisi od gomilanja greške interpolacije od iteracije do iteracije.

§ 10. Primeri i numerički rezultati

U ovom paragrafu su prikazani numerički rezultati dobijeni primenom nekih teorema iz §4., §5., §6., §7 i §9. Tačke 10.1 i 10.3 se odnose na numeričko rešavanje integralnih jednačina a tačka 10.2 na rešavanje sistema linearnih jednačina.

10.1. Za rešavanje integralnih jednačina (4.1) nestacionarnim iterativnim postupkom (4.9) primenjena je Simpsonova kvadraturna formula i interpolacioni kubni splajn sa graničnim uslovima (2.6) ili (4.26). Računanje je završeno kada je za neko p u nizu (4.9)

$$(10.1)\quad \| r_n z_p - r_n z_{p-1} \| \le \delta \quad , \quad \delta > 0 \text{ unapred zadato,}$$

ili kada kriterijum (4.8) nije zadovoljen do formiranja NMAX čvorova integracije.

Primer 1. |5|

$$K(s,t) = \frac{2\, e^{5(s+t)}}{e^{10} - 1} \quad , \quad f(s) = 1+s - \frac{2e^{5s}}{5e^{5}+1} \quad , 0 \le s,\ t \le 1$$

Tačno rešenjeje $u^*(s) = 1+s+ \dfrac{4e^{5}+1}{10(e^{10}-1)} \cdot e^{5s}$

Rezultati su prikazani u tabeli 1. za splajn sa graničnim uslovima (2.6) i

$$(10.2)\quad \begin{cases} \mathrm{I} & \delta = 10^{-5} \quad , \quad \varepsilon = 10^{-4} \\ \mathrm{II} & \delta = 10^{-6} \quad , \quad \varepsilon = 10^{-5} \\ \mathrm{III} & \delta = 10^{-7} \quad , \quad \varepsilon = 10^{-6} \end{cases}$$

Iteracija sa većim indeksom je ona posle koje je računanje završeno po kritarijumu (10.1).

U tabeli 3. su prikazani rezultati dobijeni sa graničnim uslovima (4.26) za slučaj I. Rešenje je računato u 15 tačaka. Zbog graničnih uslova su tačke na krajevima intervala gušće rasporedjene. Iz tabela 1. i 3. se vidi da je postignut isti red tačnosti i u jednom i u drugom primeru.

Primer 2.

(10.3) $$K(s,t) = \frac{d}{\pi} \cdot \frac{1}{d^2+(s-t)^2} \qquad -1 \le s,t \le 1$$

$$f(s) = \frac{s+4}{\pi}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{s-1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s+1}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\ln\frac{4+(s-1)^2}{4+(s+1)^2}$$

Za $d=2$ jednačina ima tačno rešenje

$$u^*(s) = s + 4$$

Prema oznakama (10.2) rezultati su prikazani u tabeli 4.

Primer 3. |18| |14| |44|

Ako je u (10.3) $d < 0$ i $f(s)=1$ dobija se Love-ova integralna jednačina. Ona ima jedinstveno parno rešenje koje predstavlja elektrostatičko polje izmedju dva jednaka kružna kooksioalna diska |18| . Rastojanje diskova je jednako proizvodu konstante $-d$ i njihovog radiusa. Za $d=-1$ u |14| su dobijeni sledeći rezultati:

(10.4)

s_i	$\tilde{u}(s_i)$
0	0.6574172
0.25	0.6638282
0.5	0.6831709
0.75	0.7148688
1	0.7577358

sa greškom $|u^*(s_i) - \tilde{u}(s_i)| \le 0.0024$.

$\tilde{u}(s_i)$ su približne vrednosti rešenja $u^*(s_i)$. Zbog $u^*(t) = u^*(-t)$, jezgro Love-ove jednačine je zamenjeno sa

$$K(s,t) = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+(s-t)^2} + \frac{1}{1+(s+t)^2}\right]$$

a interval integracije sa $[0,1]$.

Rezultati dobijeni postupkom (4.9) prikazani su u tabeli 5. (granični uslov (4.26)).

Primer 4. |1| |78|

Rešavanjem konturnog problema

$$u'' - \alpha^2 u = 0 \quad , \; y(o) = y(1) = 1,$$

dolazi se do integralne jednačine (4.1) sa

$$K(s,t) = \begin{cases} \alpha^2 (s-t)t & , \; 0 \le t \le s \\ \alpha^2 s(t-1) & , \; s \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{i } f(s)=1 \; .$$

Za $\alpha = 0.2$ tačno rešenje je

$$u^*(s) = \text{ch}\,[0.2(s-0.2)]\,/\text{ch}\; 0.1$$

Rešenja za ovaj primer su prikazana u tabeli 2. i to bez podele intervala integracije i sa podelom, kako je to opisano u primedbi 4.3.

10.2. U ovom delu su prikazani numerički rezultati dobijeni primenom teorema 8.1 i 8.2 na rešavanje sistema linearnih jednačina.

Primer 5. |2|

Pri rešavanju graničnog zadatka

$$\text{(10.5)} \quad \begin{cases} -\Delta v = 1 & \text{za } |x| \, , |y| < 1 \\ v = 0 & \text{na } |x| = 1 \, , \; |y| \le 1 \quad \text{i } |x| \le 1 \, , \; |y| = 1 \end{cases}$$

peimenom Hermitovih diferencnih formula (mehrstelenverfahren) sa korakom $h=0.5$ dobija se sistem

$$\text{(10.6)} \quad \begin{cases} v_1 = & 0.40v_2 + 0.05v_3 + 0.075 \\ v_2 = 0.40v_1 + 0.10v_2 + 0.20v_3 + 0.075 \\ v_3 = 0.20v_1 + 0.80v_2 & + 0.075 \end{cases}$$

gde je

$$v_1 \approx v(0.5,\; 0.5) \; , \; v_2 \approx v(0,\; 0.5) \; , \quad v_3 \approx v(0,0)$$

U |2| je sistem (10.6) rešen stacionarnim iterativnim postupkom sa primenom teoreme 2.5. Po tri iteracije su izvodjene tačno (bez greške zaokrugljivanja) a onda je posle primene teoreme 2.5 izvršeno zaokrugljivanje.

Posle devete iteracije dobijeni su sledeći rezultati:

(10.7) $$\begin{cases} v_1 \in [.181580\ ,\ .181595] \\ v_2 \in [.229580\ ,\ .229601] \\ v_3 \in [.294978\ ,\ .295008] \end{cases}$$

Sistem (10.5) je rešavan iterativnim postupkom (5.2) gde su sa ρ_n označene greške zaokrugljivanja. Za primenu teoreme 5.1 pomoćni operatori A_k i B_k su odredjeni sa (8.25). U tabeli 11. je ε odredjivano unapred jer je niz iteracija $z_k \geq f = \bar{z}_o$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Za rešavanje sistema (10.6) iterativnim postupkom (5.2) sa izlaznim kriterijumom

(10.8) $\max\limits_i |z_k^i - z_{k-1}^i| \leq 10^{-6}$, potrebno je 29 iteracija

U tabeli 11. A su date neke od iteracija i odgovarajući intervali dobijeni primenom teoreme 5.1. Sa s_k i S_k su označene odgovarajuće konstante iz teoreme 5.1. Kada je donja granica nadjenog intervala uzeta za početnu iteraciju u sledećem koraku, postupak je završen po kriterijumu (10.8) u 20-oj iteraciji, tabela 11.B . Pri tome su korišćene oznake

(10.9)
- DG_k - donja granica intervala odredjenog posle k -te iteracije
- GG_k - gornja granica intervala odredjenog posle k -te iteracije
- AS_k - aritmetička sredina intervala odredjena posle k -te iteracije

U tabeli 12. A su data uporedjivanja aritmetičkih sredina i nekih iteracija u nizu (5.2) za različite vrednosti ε_2 . Naprimer, za $\varepsilon_2 = 5\cdot 10^{-7}$ aritmetička sredina intervala posle treće iteracije postiže bolju tačnost (ili istog reda) nego iteracija sa indeksom 14. U tabeli 12.B su prikazana ubrzanja iterativnog postupka uzimanjem donje granice za sledeći iterativni korak.

U tabeli 13. se posmatraju slučajevi $\varepsilon_1 \neq 0$. Za $\varepsilon_1 = 5\cdot 10^{-5}$ je uzeto DG_2 za računanje z_3. Računanje je prema kriterijumu (1.8) završeno posle 23 iteracije. U slučaju $\varepsilon_1 = 0.005$ dobijen je dosta širok interval. No, u svakom slučaju donja granica predstavlja poboljšanje u odnosu na drugu iteraciju. Pri ovome treba imati u vidu da se na tom intervalu garantuje egzistencija rešenja sistema čiji koeficijenti odstupaju za ε_1 od koeficijenata sistema (10.6). Matrica sistema (10.6) ima sopstvenu vrednost

$$\rho = \frac{4\sqrt{2}+1}{10}$$

i odgovarajući sopstveni vektor α sa komponentama $\alpha_1=\frac{1}{2}$ $\alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\alpha_3 = 1$.

Rezultati dobijeni primenom teoreme 7.1 za $A_k=B_k=\varepsilon E$

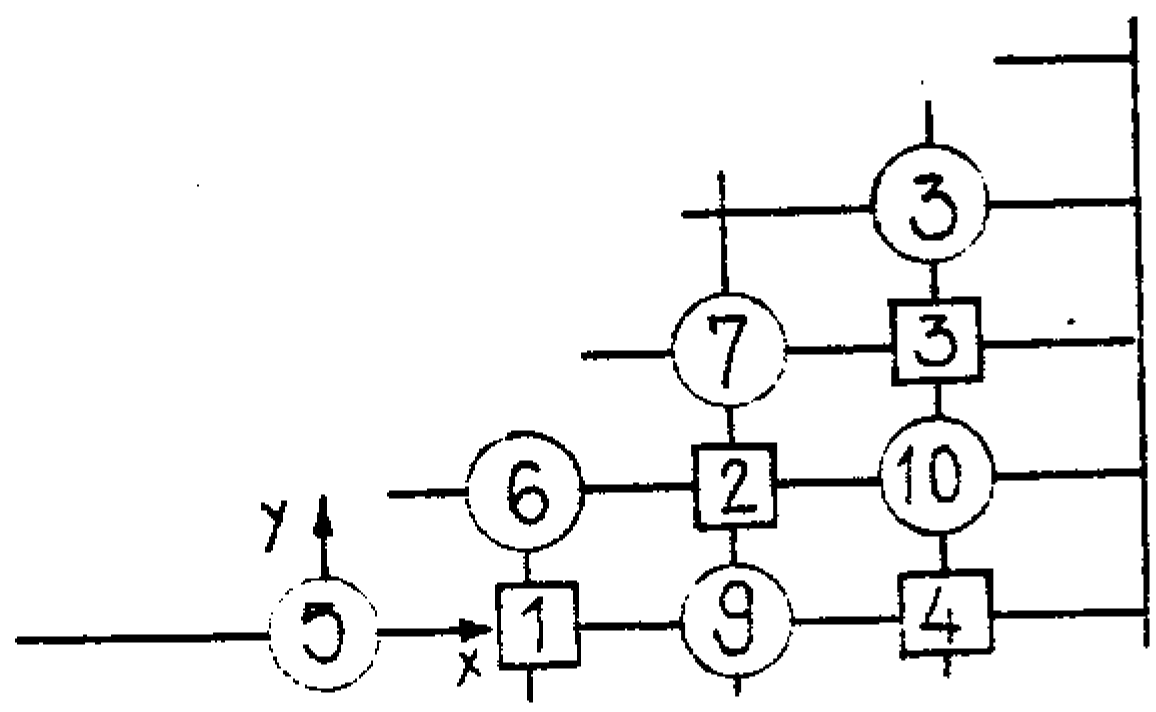
$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\min_i z_{k-2}}, \qquad |\rho_k| \le \varepsilon_2$$ prikazani su u tabelama 14. i 15. U tabeli 15. se nalaze samo one vrednosti z_k , koje nisu date u tabeli 14. Kada je iterativni postupak ubrzan pomoću donjih granica intervala, računanje je u slučaju $\varepsilon=5\cdot10^{-7}$ završeno sa trinaestom iteracijom (tabela 14.B), a kada je za ubrzanje uzimana aritmetička sredina, računanje je završeno sa iteracijom 15 posle dve takve popravke (tabela 14.C).

Primer 6. |3|

Rešavanjem konturnog problema (10.5) običnim diferencnim postupkom dolazi se do sistema linearnih jednačina

$$\text{(10.10)} \quad \begin{cases} u_{j,k} - \frac{1}{4}(u_{j+1,k}+u_{j,k+1}+u_{j-1,k}+u_{j,k-1}) = \frac{1}{4}h^2 \\ j,k = 0,\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n-1) \;;\; h=\frac{1}{n}) \\ u_{j,k} \approx u(jh, kh) \end{cases}$$

Rešenja sistema za n=4 sa oznakama na slici 1.



Slika 1.

su:

$u_1 = 0.275506$	$u_6 = 0.260915$
$u_2 = 0.215074$	$u_7 = 0.178653$
$u_3 = 0.110983$	$u_8 = 0.071117$
$u_4 = 0.138097$	$u_9 = 0.226563$
$u_5 = 0.291131$	$u_{10} = 0.131664$

Ako se sistem (10.10) rešava na računaru iterativnim postupkom (5.2) , može se primeniti teorema 5.1, jer je odgovarajuća matrica nenegativna. Iterativni postupak u ovom slučaju konvergira vrlo sporo i završava se po kriterijumu (10.8) u 129 -oj iteraciji.

U tabeli 16. su date neke vrednosti za z_k i odgovarajući intervali. Radi lakšeg uporedjivanja rezultata date su još neke vrednosti za z_k u tabeli 13.B. Iz tabela se vidi da donja granica intervala sa indeksom 4 odgovara 10 -oj iteraciji, a donja granica intervala odredjenog posle osme iteracije je bolja od 23 -e iteracije. AS_{14} odgovara 70 -oj iteraciji, a AS_{37} odgovara 100 -oj iteraciji.

10.3. U §9 je bilo reči o primeni teorema §5. na nestacionaran iterativni postupak 4.9. Ovde su prikazani numerički rezultati dobijeni na primerima 1. i 2.

Primena teorema §6. je moguća pod istim uslovima, s tim što se konstante g_k i G_k odredjuju prema (8.16), kada se izostavi indeks i, a minimum i maksimum se odredjuje po promenljivoj t. Pošto rešenje tražimo u n fiksiranih tačaka, veličine p_i, q_i (i=1,2) možemo odrediti u tih n tačaka.

Primenom splajn interpolacije odredićemo ekstremne vrednosti funkcija (7.16) i proglasiti ih za g_k odnosno G_k.

U tabelama su upotrebljivane sledeće oznake:

$DG_k(s_i)$ - donja granica intervala odredjenog posle k -te iteracije

$GG_k(s_i)$ - gornja granica intervala odredjena posle k -te iteracije

$AS_k(s_i)$ - aritmetička sredina intervala odredjena posle k -te iteracije.

Primena teoreme 5.1 prikazana je na primerima 1. i 2. a primena teoreme 6.1 na primeru 3.

Primer 1.

ε_k je odredjeno sa (9.16) za različite vrednosti ε i ε_1 . Ekstremne vrednosti funkcija su odredjivane pomoću kubnog splajna.

Za tačke s_i date u tabeli 1., dobijeni rezultati su prikazani u tabeli 6. Uporedjujući tabele 1. i 6. zaključujemo da nam aritmetička sredina intervala odredjenog posle druge iteracije daje tačnost istog reda kao osma iteracija u slučaju I, odnosno dvanaesta u slučaju III.

U slučaju II rezultat je nešto slabiji zbog većeg ε_1 ali donja granica i aritmetička sredina intervala daju daleko bolju tačnost od druge iteracije. Analogni rezultati za $\varepsilon_1=10^{-5}$ prikazani su u tabeli 7. Kada je za sledeći iterativni korak umesto $z_2(s_i)$ uzeto $DG_2(s_i)$ računanje je po istom kriterijumu završeno posle sedme iteracije (tabela 7.A), a kada je $z_2(s_i)$ zamenjeno sa $AS_2(s_i)$ računanje je završeno posle pete iteracije (tabela 7.B), čime je dobijeno znatno ubrzanje iterativnog postupka.

Primer 2.

U tabeli 8. su prikazani intervali dobijeni primenom teoreme 5.1 za različite vrednosti, ε_1. Uzeti su intervali odredjeni posle četvrte iteracije, tako da se dobijeni rezultati mogu uporediti sa tabelom 4. (slučaj II).

Prime 3.

Pošto je jezgro Love -ove jednačine negativno, iterativni niz je alternativan, pa se primenjuje teorema 6.1. U tabeli 9. su prikazani intervali dobijeni posle druge, odnosno treće iteracije koje su date u tabeli 5. za slučaj II. U tabeli 10. su date granice intervala u slučaju II za $\varepsilon_1=10^{-5}$. Kada je za sledeću iteraciju uzeta aritmetička sredina nadjenog intervala računanje je završeno posle jedanaeste iteracije (tabela 10.B1).

Kada je program napravljen tako da se donja granica uzima za početnu u sledećem iterativnom koraku ako je interval odredjen posle neparne iteracije, a gornja granica ako je interval odredjen posle parne iteracije, računanje je posle dve ovakve popravke završeno u devetoj iteraciji (tabela 10.A1).

TABELA 1.

			I		II		III	
i	s_i	$u^*(s_i)$	$z_2(s_i)$	$z_8(s_i)$	$z_2(s_i)$	$z_{10}(s_i)$	$z_2(s_i)$	$z_{12}(s_i)$
1	0,0000000	1.0026999	1.0024853	1.0027003	1.0024853	1.0027003	1.0024848	1.0027003
2	.0500000	1.0534668	1.0531912	1.0534678	1.0531912	1.0534678	1.0531912	1.0534678
3	.1000000	1.1044512	1.1040978	1.1044526	1.1040974	1.1044521	1.1040974	1.1044521
4	.1500000	1.1557155	1.1552610	1.1557169	1.1552606	1.1557164	1.1552606	1.1557164
5	.2000000	1.2073388	1.2067556	1.2073407	1.2067552	1.2073402	1.2067552	1.2073402
6	.2500000	1.2594233	1.2586746	1.2594256	1.2586737	1.2594252	1.2586737	1.2594252
7	,3000000	1.3120999	1.3111382	1.3121033	1.3111372	1.3121023	1.3111372	1.3121023
8	.3500000	1.3655367	1.3643017	1.3655405	1.3643007	1.3655396	1.3643003	1.3655396
9	.4000000	1.4199495	1.4183640	1.4199548	1.4183626	1.4199538	1.4183621	1.4199533
10	.4499999	1,4756155	1.4735799	1.4756207	1.4735780	1.4756207	1.4735775	1.4756207
11	.5000000	1.5328908	1.5302744	1.5328975	1.5302744	1.5328975	1.5302739	1.5328970
12	.5500000	1.5922327	1.5888734	1.5922418	1.5888734	1.5922418	1.5888729	1.5922413
13	.5999999	1.6542277	1.6499138	1.6542387	1.6499138	1.6542387	1.6499133	1.6542382
14	.6499999	1.7196298	1.7140908	1.7196445	1.7140913	1.7196445	1.7140903	1.7196436
15	.7000000	1.7894068	1.7822943	1.7894249	1.7822948	1.7894254	1.7822938	1.7894244
16	.7500000	1.8648005	1.8556676	1.8648238	1.8556671	1.8648243	1.8556671	1.8648229
17	.8000000	1.9474063	1.9356799	1.9474368	1.9356790	1.9474373	1.9356790	1.9474354
18	.8499999	2.0392733	2.0242167	2.0393124	2.0242147	2.0393105	2.0242147	2.0393105
19	.8999999	2.1430321	2.1236982	2.1430817	2.1236963	2.1430798	2.1236963	2.1430798
20	.9500000	2.2620592	2.2372341	2.2621241	2.2372322	2.2621212	2.2372322	2.2621212
21	1.0000000	2.4006920	2.3688154	2.4007750	2.3688135	2.4007711	2.23688135	2.4007702

TABELA 2.

i	s_i	$u^*(s_i)$	I sa pode. interva. $z_3(s_i)$	II bez pod. interval. $z_3(s_i)$
1	0.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
2	.0500000	.9990530	.9990532	.9990528
3	.1000000	.9982066	.9982066	.9982071
4	.1500000	.9974592	.9974597	.9974601
5	.2000000	.9968121	.9968123	.9968119
6	.2500000	.9962645	.9962647	.9962647
7	.3000000	.9958167	.9958169	.9958165
8	.3500000	.9954684	.9954686	.9954691
9	.4000000	.9952197	.9952197	.9952202
10	.4499999	.9950702	.9950705	.9950700
11	.5000000	.9950206	.9950206	.9950206
12	.5500000	.9950702	.9950705	.9950700
13	.5999999	.9952197	.9952197	.9952202
14	.6499999	.9954684	.9954686	.9954691
15	.7000000	.9958167	.9958169	.9958165
16	.7500000	.9962645	.9962647	.9962647
17	.8000000	.9968121	.9968123	.9968119
18	.8499999	.9974592	.9974597	.9974601
19	.8999999	.9982066	.9982066	.9982071
20	.9500000	.9990530	.9990532	.9990528
21	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000

TABELA 3.

i	s_i	$u^*(s_i)$	I $z_2(s_i)$	$z_8(s_i)$
1	0.0000000	1.0026999	1.0024853	1.0027008
2	.0100000	1.0128384	1.0126128	1.0128388
3	.0200000	1.0229840	1.0227466	1.0229845
4	.1000000	1.1044512	1.1040978	1.1044526
5	.2000000	1.2073388	1.2067561	1.2073412
6	.3000000	1.3120999	1.311391	1.3121037
7	.4000000	1.4199495	1.4183650	1.4199557
8	.5000000	1.5328908	1.5302715	1.5328918
9	.5999999	1.6542277	1.6499090	1.6542296
10	.7000000	1.7894068	1.7822871	1.7894101
11	.8000000	1.9474063	1.9356680	1.9474120
12	.9000001	2.1430321	2.1236792	2.1430416
13	.9800000	2.3425608	2.3136902	2.3425684
14	.9900000	2.3711510	2.3407974	2.3711557
15	1.0000000	2.4006920	2.3687830	2.4006987

TABELA 4.

i	s_i	I: $z_4\ (s_i)$	I: $z_{10}(s_i)$	II: $z_4\ (s_i)$	II: $z_{15}(s_i)$	III: $z_5(s_i)$	III: $z_{16}(s_i)$
1	-1.0000000	2.9939785	3.0001183	2.9938612	3.0000029	2.9982824	3.0000019
2	-.9000001	3.0936699	3.1000004	3.0936689	3.1000032	3.0982285	3.1000023
3	-.8000000	3.1934891	3.1999998	3.1934881	3.2000017	3.1981773	3.2000017
4	-.7000000	3.2933245	3.3000011	3.2933226	3.3000021	3.2981319	3.3000021
5	-.6000001	3.3931751	3.4000006	3.3931742	3.4000025	3.3980904	3.4000025
6	-.5000000	3.4930468	3.5000029	3.4930458	3.5000038	3.4980555	3.5000038
7	-.4000001	3.5929365	3.6000013	3.5929356	3.6000032	3.5980234	3.6000032
8	-.3000000	3.6928501	3.7000017	3.6928492	3.7000036	3.6980000	3.7000036
9	-.2000000	3.7927856	3.8000002	3.7926847	3.8000021	3.7979813	3.8000021
10	-.1000001	3.8927488	3.9000006	3.8927469	3.9000025	3.8979702	3.9000025
11	0.0000000	3.9927368	4.0000019	3.9927359	4.0000038	3.9979687	4.0000038
12	.0999999	4.0927505	4.1000023	4.0927486	4.1000042	4.0979729	4.1000042
13	.1999998	4.1927872	4.2000008	4.1927853	4.2000027	4.1979809	4.2000027
14	.2999997	4.2928486	4.2999992	4.2928486	4.3000031	4.2979984	4.3000031
15	.4000001	4.3929367	4.4000015	4.3929367	4.4000034	4.3980236	4.4000034
16	.5000000	4.4930458	4.5000019	4.4930458	4.5000038	4.4980545	4.5000038
17	.5999999	4.5931816	4.6000061	4.5931759	4.6000042	4.5980911	4.6000042
18	.6999998	4.6933289	4.7000046	4.6933250	4.7000046	4.6981335	4.7000046
19	.7999997	4.7934914	4.8000011	4.7934895	4.8000031	4.7981796	4.8000050
20	.9000001	4.8936672	4.8999977	4.8936691	4.9000034	4.8982296	4.9000034
21	1.0000000	4.9938602	5.0000000	4.9938602	5.0000019	1.9982815	5.0000019

$(s_i) = s_i + 4$

TABELA 5. I II , $\delta = 10^{-6}$ $\varepsilon = 10^{-6}$

s_i	$z_3(s_i)$	$z_{15}(s_i)$	$z_2(s_i)$	$z_3(s_i)$	$z_{18}(s_i)$	$z_2(s_i)$	$z_3(s_i)$	$z_{18}(s_i)$	$z_2(s_i)$
0.0000000	.6249883	.6574082	.7288864	.6249890	.6574104	.7288849	.6249905	.6574152	.7288942
.0500000	.6252739	.6576641	.7290769	.6252747	.6576662	.7290754	.6252759	.6576712	.7290846
.1000000	.6261315	.6584325	.7296493	.6261320	.6584349	.7296479	.6261334	.6584396	.7296572
.1500000	.6275613	.6597142	.7306054	.6275620	.6597166	.7306042	.6275630	.6597214	.7306135
.2000000	.6295648	.6615114	.7319479	.6295655	.6615236	.7319465	.6295619	.6615124	.7329460
.2500000	.6321404	.6638241	.7336798	.6321411	.6638279	.7336788	.6321452	.6638327	.7336783
.3000000	.6352973	.6666586	.7358062	.6352980	.6666608	.7358048	.6352997	.6666656	.7358136
.3500000	.6390271	.6700118	.7383294	.6390278	.6700139	.7383280	.6390290	.6700184	.7383366
.4000000	.6433306	.6738844	.7412531	.6433313	.6738865	.7412517	.6433325	.6738911	.7412601
.4499999	.6482038	.6782744	.7445788	.6482043	.6782765	.7445774	.6482058	.6782811	.7445855
.5000000	.6536391	.6831765	.7483060	.6536431	.6831827	.7483046	.6536412	.6831830	.7483125
.5500000	.6596253	.6885817	.7524312	.6596296	.6885879	.7524297	.6596274	.6885879	.7524374
.5999999	.6661458	.6944764	.7569473	.6661501	.6944826	.7569458	.6661482	.6944828	.7569532
.6499999	.6731787	.7008421	.7618430	.6731827	.7008481	.7618415	.6731806	.7008483	.7618484
.7000000	.6806953	.7076540	.7670918	.6806993	.7076597	.7671001	.6806974	.7076600	.7671065
.7500000	.6886604	.7148807	.7727015	.6886642	.7148862	.7726998	.6886625	.7148860	.7727060
.8000000	.6970155	.7224727	.7786145	.6970160	.7224901	.7786131	.6970336	.7224898	.7786188
.8499999	.7057605	.7304225	.7848082	.7057638	.7304242	.7848067	.7057621	.7304270	.7848120
.8999999	.7147923	.7386439	.7912440	.7147927	.7386456	.7912426	.7147932	.7386446	.7912469
.9500000	.7240665	.7470946	.7978792	.7240670	.7470963	.7978809	.7240670	.7470984	.7978818
1.0000000	.7335200	.7557166	.8046679	.7335219	.7557197	.8046689	.7335200	.7557199	.8046696

TABELA 7.

	II $\varepsilon_1=10^{-5}$			A	B
i	$DG_2(s_i)$	$GG_2(s_i)$	$AS_2(s_i)$	$z_7(s_i)$	$z_5(s_i)$
1	1.0026779	1.0027246	1.0027013	1.0027003	1.0027003
2	1.0534420	1.0534945	1.0534682	1.0534678	1.0534678
3	1.1044230	1.1044831	1.1044531	1.1044521	1.1044521
4	1.1556830	1.1557508	1.1557169	1.1557164	1.1557164
5	1.2073021	1.2073803	1.2073412	1.2073402	1.2073420
6	1.2593803	1.2594719	1.2594261	1.2594252	1.2594252
7	1.3120489	1.3121576	1.3121033	1.3121023	1.3121023
8	1.3654766	1.3656058	1.3655415	1.3655396	1.3655396
9	1.4198780	1.4200330	1.4199557	1.4199538	1.4199538
10	1.4755292	1.4767171	1.4756231	1.4756207	1.4756207
11	1.5327854	1.5330148	1.5329003	1.5328975	1.5328975
12	1.5921040	1.5923858	1.5922451	1.5922418	1.5922418
13	1.6540680	1.6544175	1.6542430	1.6543387	1.6542387
14	1.7194314	1.7198672	1.7196493	1.7196445	1.7196445
15	1.7891583	1.7897043	1.7894316	1.7894254	1.7894254
16	1.8644867	1.8651738	1.8640305	1.8648243	1.864243
17	1.9470105	1.9478788	1.9474449	1.9474368	1.9474373
18	2.0387716	2.0398722	2.0393219	2.0393105	2.0393114
19	2.1423960	2.1437931	2.1430950	2.1430798	2.1430798
20	2.2612505	2.2630291	2.2621403	2.2621202	2.2621212
21	2.3006620	2.4019289	2.4007959	2.4007702	2.4007711

TABELA 8.

i	II $\varepsilon_1=0.0001$ $DG_4(s_i)$	$GG_4(s_i)$	$AS_4(s_i)$	II $\varepsilon_1=0.00001$ $DG_4(s_i)$	$GG_4(s_i)$	$AS_4(s_i)$	II $\varepsilon_1=0.000001$ $DG_4(s_i)$	$GG_4(s_i)$	$AS_4(s_i)$
1	2.9987259	3.0013800	3.0000534	2.9998636	3.0001335	2.9999990	2.9999819	3.0000191	3.0000010
2	3.0986834	3.1014242	3.1000538	3.0998583	3.1001377	3.0999985	3.0999804	3.1000204	3.1000004
3	3.1986446	3.2014675	3.2000561	3.1998539	3.2001419	3.1999979	3.1999798	3.2000208	3.2000008
4	3.2968059	3.2015089	3.3000574	3.2998505	3.3001451	3.2999792	3.2000212	3.3000212	3.3000002
5	3.3985720	3.4015484	3.4000607	3.3998470	3.4001503	3.3999987	3.3999796	3.4000235	3.4000015
6	3.4985390	3.5015860	3.5000629	3.4998446	3.5001554	3.5000000	3.4999800	3.5000248	3.5000029
7	3.5985069	3.6016197	3.6000633	3.5998411	3.6001577	3.5999994	3.5999794	3.6000242	3.6000023
8	3.6984787	3.7016506	3.7000647	3.6998377	3.7001610	3.6999998	3.6999798	3.7000246	3.7000027
9	3.7984514	3.8016758	3.8000641	3.7998333	3.8001614	3.7999973	3.7999763	3.8000231	3.8000002
10	3.8984299	3.9017000	3.9000654	3.8998308	3.9001637	3.8999977	3.8999767	3.9000235	3.9000006
11	3.8984121	4.0017223	4.0000668	3.9998312	4.0001698	4.0000000	3.9999790	4.0000267	4.0000038
12	4.0983963	4.1017418	4.1000690	4.0998287	4.1001701	4.1000004	4.0999775	4.1000217	4.1000023
13	4.1983814	4.2017555	4.2000694	4.1998272	4.2001686	4.1999989	4.1999760	4.2000256	4.2000008
14	4.2983742	4.3017654	4.3000698	4.2998257	4.3001709	4.2999992	4.2999763	4.3000259	4.3000011
15	4.3983669	4.4017754	4.4000721	4.3998260	4.4001732	4.3999996	4.3999786	4.4000282	4.4000034
16	4.4983635	4.5017796	4.5000725	4.4998264	4.5001755	4.5000019	4.4999790	4.5000267	4.5000038
17	4.5983639	4.6017799	4.6000729	4.5998287	4.6001759	4.6000023	4.5999794	4.6000271	4.6000042
18	4.6983643	4.7017803	4.7000732	4.6998272	4.7001762	4.7000027	4.6999798	4.7000275	4.7000046
19	4.7983665	4.8017769	4.8000717	4.7998257	4.8001747	4.8000011	4.7999783	4.8000259	4.8000031
20	4.8983727	4.9017696	4.9000721	4.8998260	4.9001713	4.8999996	4.8999786	4.9000263	4.9000034
21	4.9983768	5.0017605	5.0000687	4.9998245	5.0001698	4.9999981	4.9999752	5.0000248	5.0000000
m_4			0.2582664			0.2776824			0.2796406
M_4			0.3019296			0.2821375			0.2803636
$\max(GG(s_i)-DG(s_i))/2$			0.0016918			0.0001726			0.0000248

TABELA 9.

		II	$\varepsilon_1 = 10^{-4}$			
i	$DG_2(s_i)$	$GG_2(s_i)$	$AS_2(s_i)$	$DG_3(s_i)$	$GG_3(s_i)$	$AS_3(s_i)$
1	.6566548	.6587830	.6577189	.6569388	.6578150	.6573770
2	.6569104	.6590374	.6579740	.6571951	.6580708	.6576331
3	.6576786	.6598005	.6587396	.6579645	.6588385	.6584015
4	.6589601	.6610739	.6600170	.6592481	.6601195	.6596839
5	.6607566	.6628587	.6618078	.6610472	.6619153	.6614814
6	.6630678	.6651559	.6641119	.6633620	.6642258	.6637940
7	.6659029	.6679728	.6669378	.6662002	.6670587	.6666296
8	.6692557	.6713049	.6702805	.6695573	.6704090	.6699831
9	.6731286	.6751542	.6741414	.6734343	.6742787	.6738565
10	.6775193	.6795185	.6785190	.6778290	.6786654	.6782472
11	.6824231	.6843927	.6834080	.6827388	.6835661	.6831524
12	.6878309	.6897686	.6887999	.6881499	.6889672	.6885586
13	.6937294	.6956322	.6946809	.6940510	.6948576	.6944544
14	.7001002	.7019658	.7010331	.7004232	.7012186	.7008209
15	.7069178	.7087445	.7078311	.7072418	.7080252	.7076335
16	.7141521	.7159381	.7150452	.7144756	.7152464	.7148612
17	.7217648	.7235084	.7226367	.7220736	.7228317	.7224526
18	.7297127	.7314122	.7305642	.7300320	.7307768	.7304044
19	.7379453	.7395997	.7387726	.7382593	.7389903	.7386248
20	.7464106	.7480192	.7472150	.7467191	.7474360	.7470777
21	.7550457	.7566085	.7558272	.7553496	.7560527	.7557013
	g_k		0.306917			0.3089443
	G_k		0.3149267			0.3145148
	$\max(GG_k(s_i)-DG_k(s_i))/2$		0.0010140			0.0004381

TABELA 10.

i	II $\varepsilon_1 = 10^{-5}$			A_1	B_1
i	$DG(s_i)_2$	$GG_2(s_i)$	$AS_2(s_i)$	$z_9(s_i)$	$z_{11}(s_i)$
	.6569724	.6583667	.6576695	.6574099	.6574101
	.6572282	.6586211	.6579247	.6576660	.6576662
	.6579957	.6593850	.6586905	.6584344	.6584344
	.6592765	.6606596	.6599681	.6597161	.6597161
	.6610718	.6624463	.6617591	.6615133	.6615133
	.6633818	.6647453	.6640637	.6638274	.6638274
	.6662149	.6675651	.6668901	.6666605	.6666605
	.6695659	.6709003	.6702332	.6700134	.6700137
	.6734366	.6747532	.6740949	.6738861	.6738863
	.6778247	.6791213	.6784730	.6782761	.6782761
	.6827257	.6840000	.6833630	.6831822	.6831825
	.6881306	.6893806	.6887558	.6885877	.6885877
	.6940258	.6952496	.6946378	.6944823	.6944823
	.7003927	.7015891	.7009909	.7008479	.7008476
	.7071070	.7083738	.7077904	.7076595	.7076595
	.714437	.7155731	.7150052	.7148860	.7148860
	.7220461	.7231498	.7225981	.7224898	.7224898
	.7299893	.7310603	.7305248	.7304239	.7304239
	.7382178	.7392547	.7387364	.7386453	.7386453
	.7466786	.7476811	.7471800	.7470958	.7470961
	.7553096	.7562773	.7557936	.7557194	.7557197
	g_k		0.3061634		
	G_k		0.3141170		
	$\max_i(GG(s_i)-DG(s_i))/2$		0.0006971		

TABELA 11.

A						B			
		$\delta = 10^{-6}$		$\varepsilon_1 = 0$	$\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-8}$				
k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k	s_k S_k	k	z_k	DG_k	GG_k
2	0.1335000	.1780488	.2015647	.1898068	1.7999699	2	0.1335000	.1780488	.2015647
	0.1612500	.2219986	.2540655	.2380320			0.1612500	.2219986	.2560655
	0.1987500	.2864982	.3328168	.3096576	2.7500713		0.1987500	.2864982	.3328168
4	0.1602451	.1807070	.1830153	.1818612	1.8933737	8	.1811912	.1814187	.1831245
	0.1993422	.2278702	.2310883	.2294793			.2290111	.2292658	.2311792
	0.2523078	.2932177	.2978325	.2955251	2.1068502		.2942001	.2946556	.2980652
6	0.1721244	.1813885	.1818717	.1816301	1.9419301	14	.1815690	.1815778	.1817124
	0.2161950	.2292072	.2298856	.2295464			.2295672	.2295762	.2297276
	0.2760652	.2945951	.2955610	.2950780	2.0428877		.2949569	.2949741	.2952435
8	0.1773918	.1815404	.1816496	.1815950	1.9659482	20	.1815852		
	0.2236572	.2295040	.2296576	.2295809			.2295912		
	0.2866025	.2948992	.2951170	.2950082	2.0169052		.2949891		
10	0.1797269	.1815742	.1816025	.1815884	1.9772050				
	0.2269623	.2295699	.2296098	.2295899					
	0.2912731	.2949667	.2950230	.2949948	2.0058075				
12	0.1807621	.1815817	.1815925	.1815871	1.9811191				
	0.2284270	.2295845	.2295994	.2295920					
	0.2933429	.2949816	.2950026	.2949921	2.0030661				
31	0.1815852								
	0.2295913								
	0.2949891								

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\min_i f^i} = 0.0000007$$

TABELA 12.

A						B					
		$\delta = 10^{-6}$		$\varepsilon_1=0$				$\varepsilon_2 = 5\cdot10^{-7}$			
k	k_1	z_k	DG_{k_1}	GG_{k_1}	AS_{k_1}	k	k_1	z_k	DG_{k_1}	GG_{k_1}	AS_{k_1}
14	3	.180762	.1782491	.1836668	.1809580	2	2	.133500	.1780389	.2015862	.1898125
		.228427	.2258996	.2337252	.2298124			.161250	.2219855	.2550940	.2380398
		.293343	.2084599	.2993178	.2938889			.198750	.2864802	.3328567	.3096684
23	9	.181565	.1814473	.1816934	.1815704	8	8	.181190	.1814142	.1832349	.1823246
		.229562	.2294447	.2297937	.2296192			.229010	.2292605	.2312990	.2302797
		.294948	.2947136	.2952040	.2949588			.294198	.2946470	.2982835	.2964653
31	15	.181585	.1815717	.1815994	.1815856	21		.181585			
		.229591	.2295722	.2296107	.2295915			.229590			
		.294989	.2949628	.2950164	.2949896			.294989			
					$\varepsilon_2 = 5\cdot 10^{-5}$						
13	3	.181038	.1770819	.1850623	.1810721	2	2	.133500	.1769592	.2039827	.1904710
		.228816	.2242745	.2356679	.2299712			.161250	.2205713	.2572750	.2389231
		.293894	.2862526	.3019557	.2941042			.198750	.2845407	.3373005	.3109206
20	5	.181554	.1798024	.1833848	.1815937	24		.181586			
		.229547	.2273185	.2323421	.2298303			.229591			
		.294927	.2915229	.2984735	.2949982			.294989			

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\min\limits_i z^i_{k-2}}$$

TABELA 13.

		A		
		$\varepsilon_1 = 5\cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_2 = 5\cdot 10^{-7}$	
k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k
3	0.149438	.1778038	.1841356	.1809697
	0.184275	.2252990	.2343527	.2298259
	0.230700	.2876645	.3001442	.2939044
5	0.167352	.1803344	.1826681	.1815013
	0.209494	.2280909	.2313070	.2296990
	0.266523	.2926201	.2970086	.2948145
7	0.175281	.1807201	.1824058	.1815630
	0.220682	.2284687	.2307383	.2296035
	0.282381	.2933993	.2964635	.2949314
2	0.133500	.1777923	.2021426	.1899675
	0.161250	.2216728	.2548194	.2382461
	0.198750	.2860609	.3338591	.3099600
23	0.181585			
	0.229591			
	0.294989			
		$\varepsilon_1 = 5\cdot 10^{-3}$		
2	0.133500	.1575602	.3227952	.2401777
	0.161250	.1959800	.4120390	.3040096
	0.198750	.2515591	.5510321	.4012957

	B				
		$\varepsilon_1 = 0$		$\varepsilon_2 = 5\cdot 10^{-7}$	
k	z_k	k	z_k	k	z_k
10	.150366	23	.230711	60	.273112
	.126329		.183398		.213381
	.074074		.097863		.110282
	.086050		.119542		.137106
	.155809		.242640		.288540
	.145261		.219525		.258704
	.110602		.154407		.177358
	.051104		.064015		.070737
	.130600		.192274		.224731
	.083544		.113108		.130748
70	.274421	100	.275405	129	.275495
	.214307		.215002		.215066
	.110666		.110954		.110980
	.137648		.138056		.138093
	.289957		.291022		.291119
	.259913		.260822		.260905
	.178067		.178599		.178648
	.070945		.071101		.071115
	.225733		.226486		.226554
	.131249		.131625		.131660

TABELA 14.

	A					B			
				$\epsilon = 5 \cdot 10^{-7}$					
k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k	q_k, Q_k	k	z_k	DG_k	GG_k
1	.108750	.1759514	.1834208	.1796861	.0477990	2	.178235	.1810183	.1827838
	.127500	.2225372	.2331002	.2278187			.224515	.2284511	.2309479
	.150000	.2844032	.2993411	.2918721	.0750005		.288220	.2937866	.2973174
4	.160245	.1814585	.1817662	.1816124	.0213078	6	.181544	.1815575	.1816260
	.199342	.2293431	.2297780	.2295696			.229517	.2295363	.2296331
	.252308	.2947348	.2953497	.2950423	.0216159		.294905	.2949332	.2950699
7	.175281	.1815673	.1816005	.1815839	.0063142	9	.181580	.1815810	.1815905
	.220682	.2295718	.2296188	.2295953			.229585	.2295859	.2295992
	.282381	.2949528	.2950190	.2949859	.0063467		.294981	.2949803	.2949990
10	.179717	.1815836	.1815895	.1815866	.0018650	12	.181585	.1815847	.1815882
	.225643	.2295875	.2295957	.2295916			.119590	.2295895	.2295944
	.282381	.2949855	.2949971	.2949914	.0018700		.294988	.2949876	.2949945
13	.181038	.1815845	.1815878	.1815861	.0005496				
	.228816	.2295895	.2295941	.2295918					
	.292894	.2949874	.2949936	.2949905	.0005519				
16	.181424	.1815848	.1815878	.1815862	.0001615			C	
	.229363	.2295898	.2295939	.2295917					
	.294667	.2949879	.2949936	.2949907	.0001635	1	.108750	.1759514	.1834208
29	.181585						.127500	.2225372	.2331002
	.229591						.150000	.2844032	.2993411
	.294989					2	.180721	.1810182	.1827835
							.228031	.2284508	.2309474
							.293192	.2937864	.2973169
						15	.181587		
							.229593		
							.294993		

TABELA 15.

	ε = 0.00005						ε = 0.0005			
k	DG_k	GG_k	AS_k	$q_k\ Q_k$	k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k	$q_k\ Q_k$
1	.1758032	.1835196	.1796615	.0674000	1		.1609969	.1947092	.1778530	.057500
	.2223484	.2332195	.2277840				.2034593	.2469937	.2252265	
	.2841566	.2994891	.2918229	.0750700			.2594937	.3169185	.2882061	.0813173
4	.1813231	.1819143	.1816187	.0212215	3	.149438	.1662164	.1961283	.1811724	.0218751
	.2291604	.2299784	.2295694			.184275	.2090356	.2492740	.2291548	
	.2944864	.2956234	.2950549	.0217149		.230700	.2668139	.3215952	.2941697	.0418751
7	.1814191	.1817376	.1815784	.0062152	5	.167352	.1665486	.1964605	.1815046	.0042148
	.2293702	.2298048	.2295878			.209494	.2092081	.2498078	.2295080	
	.2946762	.2952735	.2949749	.0064346		.266523	.2670429	.3226119	.2948275	.0242148
10	.1814385	.1817376	.1815881	.0017690						
	.2293898	.2297976	.2295937							
	.2947142	.2952743	.2949942	.0019690						

TABELA 16.

	$\varepsilon_1 = 0$				$\varepsilon_2=5\cdot10^{-7}$				
k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k	k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k
4	.077418	.1513772	1.0292430	.5903101	14	.184194	.2664250	.2824714	.2744483
	.071533	.1323745	.8519619	.4921682		.150460	.2088673	.2202787	.2145730
	.049561	.0799780	.4398111	.2598946		.084192	.1085356	.1133059	.1109208
	.053223	.0909423	.5371110	.3140267		.100236	.1345119	.1412160	.1378640
	.077821	.1545439	1.0611863	.6078651		.192329	.2814825	.2988744	.2901784
	.076416	.1482106	.9972992	.5727549		.176546	.2528523	.2677467	.2602996
	.067017	.1187301	.7303984	.4245642		.129181	.1741725	.1829720	.1785723
	.037354	.0556024	.2715222	.1635623		.056612	.0698724	.0724772	.0711748
	.072266	.1355410	.8839054	.5097232		.156649	.2199833	.2323527	.2261680
	.052734	.0892369	.5210168	.3051269		.096682	.1284937	.1347186	.1316062
	s_k			4.9824284					10.9850906
	S_k			30.7538946					13.1113982
8	.129196	.2303028	.3160554	.2731792	37	.260720	.2732921	.2781944	.2757432
	.111015	.1851860	.2481104	.2166482		.204619	.2135031	.2169798	.2152415
	.067528	.0998248	.1272437	.1135343		.106653	.1103283	.1117791	.1119537
	.076996	.1210892	.1585071	.1397982		.131973	.1371745	.1392166	.1381956
	.133049	.2414962	.3334686	.2874824		.275125	.2886894	.2939746	.2913320
	.125526	.2202102	.3005202	.2603652		.247253	.2588285	.2633466	.2610875
	.098698	.1571727	.2067930	.1818982		.170651	.1774262	.1800864	.1787563
	.047508	.0655214	.0808226	.0731721		.068773	.0707533	.0715409	.0711471
	.114139	.1938118	.2614013	.2276065		.215245	.2248320	.2285803	.2267061
	.075127	.1164674	.1515526	.1340100		.126005	.1307948	.1326780	.1317365
	s_k			8.6076669					10.4744825
	S_k			15.8677016					14.7517772

L I T E R A T U R A

|1| Alberg D.Ž.,Nilbson É. Uloš D.Ž., Teorija splajnov i ee priloženija., Moskva (1972).

|2| Albrecht,J.,Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge. Numer. Math. 4. 196-208 (1962).

|3| Albrecht,J., Fehlerabschätzungen bie Relaxtionsverfahren zur numerichen Auflösung linearer Gliechungssysteme. Numer. Math. 3. 188-201 (1961).

|4| Albercht,J., Iterationsfolgen und ihre verwendung zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Numer. Math. 3. 345 - 358 (1961).

|5| Atkinson,K., An Automatic program for Linear Fredholm Integral Equations of the Second Kind. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 2, No.2 154-171 (june 1976).

|6| Atkinson, K., The numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. SIAM . J.Numer. Anal. Vol.4. N_o 3. (1967).

|7| Antes,H., Splinefunctionen bei der Lösung von Integralglichungen. Num. Math. 19. N_o 2. 116-126 (1972).

|8| Arthur,D.W., The solution of Fredholn Integral Equations Using Spline Functions. J.Inst.Math.Aplics. 11, 121 - 129 (1973)

|9| Bahvalov,N.S., Čislenye metodu , Moskva (1975.

|10| Bakušinskij A.B., Odin obščij priem postroenija regul jarizujuščih algoritmov dlja linejnogo nekorektnogo uravnenija u gil'bertovom prostranstve. Ž.vyč . matem. i matem. fiz. 7.No3. (1967).

|11| Bech,A. Geesy D.P., Warren p., Recent developments in the theory of strong laws of large numbers for vector valued random variables. Teorija verojat i ee primen. 20. 126-133 (1975).

|12| Beeck, H., Bemarkungen zu komponenten Weisen Alschätzungen bei linearen Gleichungenssystemen mit fehreihalten Leten. Z. angew Math. und Mech.5.No5.265-276 (1977)

|13| Blum,E.K., Numerical analysis and computation theory und practice. Add.Wes.Pub.Comp. (1972)

|14| Brakhage,H. Über die numeriche Behandlung von Integral - gleichungen nach der Quadraturformelmethode. Numer. Math. 2, 183-196 (1960)

|15| Brunner,H. and Evans,D.M. Picewise Polynomial Collocation for Volterra-type Integral Equations of the Second Kund. I,Inst.Maths,.Aplies.20. 415-423(1977)

|16| Cox M.G., Survey of Numerical Methods for Data and Function Aproximation. The state of the Art in Numerical Analysis. Academic Press (1977)

|17| Cox M.G., An Algorithm for Spline Interpolation. I.Inst. Maths Applics, 15. 95-108 (1975)

|18| Delves L.M.,Wolsh J., Numerical solution of integral equations. Oxfond (1974)

|19| J.Ehrman.H. , Iterations verfahren mit verärderlichen Operatoren, Arch.Ration Mech und Analysis 4. 1. 45-64 (1959).

|20| Esser, R.,Numeriche Behandlung einer Volterraschen Integralgleichungen - Computing 19. 269-284 (1978)

|21| Gavurin, M.K., Lekcii po metodom vuruslenij., Moskva (1971)

|22| Gordienko,E.I. Ošibki v'ičislenija o shodimosti iteracion'ih procesov rešenija operatornyh uravnenija Vest.. Mosk. Un-ta. ser. vyčiski matem. i kibern. No 2. 35-41 (1978)

|23| Grebennikov,A.I. Ob odnom metode postroenija interpolirajuščih kubečeskih i bikubičeskih splajnov ravnomernijuh setkah. Vestn,mosk. Un-ta. vyčislit. matem. i kibern. No 4. (1978).

|24| Hadžić, O. Osnovi teorije nepokretne tačke. Novi Sad (1978)

|25| Herceg D. Koprivica K. Pejović P., Jedan prilaz numeričkom rešavanju Fredholmove integralne jednačine druge vrste pomoću računara.Mat. Ves. 12 (27) 257-263 (1975)

|26| Herceg D. Diferencni postupci sa neekvidistantnim mrežama. Doktorska disertacija , Novi Sad (1979).

|27| Hilderbrand,F.B., Introduction to Numerical Analysis. Mc. Graw Hill (1974)

|28| Kollatc,L. Funkcional'yj analiz i vyčismitel'naja matematika. Moskva (1969)

|29| Kollatc L. Čislennye metoču rešenija diferencial'nyh uravnenij . Moskva (1953)

|30| Krasnosel'skij M.A., Položitel'nye rešenija operatornyh uravnenij. Moskva (1962).

|31| Krasnosel'skij M.A., Vajniko G.M. i dr. Približenoe rešenie operatornyh uravnenij . Moskva (1969).

|32| Kurpel' N.S., Proekcionno iterativniye metody rešenija operatornyh uravnenij . Kiev, (1968)

|33| Kurpel' N.S. Kurčenko T.S. Dvustoronnie metody rešenija sistem uravnenij . Kiev (1975).

|34| Kravčuk T.S. K voprosu o rešenii operatornyh uravnenij v prostoranstvah s normalnim konusom. Trudy seminara po diff. i integ. uravnenijam. In-ta matematiki AN USSR. Kiev 245-252 (1969)

|35| Kravčuk T.S., O nekatoryh nestacionarnyh varijantah metoda Zejdelja dlja rešenija nelinejnyh operatornyh uravnenij. Metody približennogo rešenija differencial'nyh i integral'nyh uravnenij. In-ta matematika AN USSR. Kiev 97-105 (1973)

|36| Kurčenko T.S., Vakulenko L.B., O monotonyh posledovatel'nostjah approksimacij abratnogo linejnogo operatora., Metod integ. mnogobraz. v nelinej. diff. uravn. In-ta matem. AN USSR. 136-143 Kiev (1974)

|37| Kurčenko T.S. Svetal'skaja L.V. Rešenie linejnyh operatornyh uravnenij metodom nestacionarnoj approksimacii obratnogo operatora. UMŽ 25.4. (5-35- 540) 1975.

|38| Kurčenko T.S. Ksendz N.A.,Postroenie dvustotonnih približeni k rešeniju nelineyh operatornyh uravnenij pri pomošči obščego nestacionarnogo metoda UMŽ 4. 25. 545-550 (1973).

|39| Malnjuk L.B., O metode posledovatel´nyh priblîženij dlja linejnyh uravnenij pervogo roda v gil´bertovom prostranstve. Vestn. Mosk. Un-ta ser. Vyčisl. Matem. i kibern. No 2 (1978).

|40| Mihlin S.G., Priloženija integral´nyh uravnenij k nekatorym problemam mehaniki i matematičeskoj fiziki i tehniki. Moskva (1947).

|41| Misovskih I.P., Lekcii po metodam vyčeslenij. Moskav (1962)

|42| Nikol´kij S.M., Kvadraturnye formuly , Moskva (1974).

|43| Noble B., Eror analysis of Colocation Methods for Solving Fregholm Integral Equations, Topics in Numer. Anal. Academic Press. New York (1972)

|44| Noble, B., The numerical Solution of Integral Equations. The State of the Art in Numerical Analysis, Academic Press (1977)

|45| Ortega J.M. und Reinboldt.W.C., Iterative solution of nonlinear equations in severel variables. Academic Press (1970).

|46| Poljakov,V.R. Splajn-funkcii pri rešenii sistem linejnyh integral´nyh uravnenij. Metody količ. i kačas. isled. diff. i integr. uravn. Kiev (1975)

|47| Poljakov, V.R., Šlepakov L.N., Splajn aproksimacija v nekatoryh nelinejnyh zadačah. Nelinej, kraev. zadači matem. fiziki, Kiev (1973).

|48| Prenter,P,M., Collection Method for the Numerical Solution of Integral Equations SIAM,J. Numerc. Anal. Vol. 10 No 4 (1973).

|49| Ralph, H.P., Introductory computer methods and numerical analysis. Collier, Macmilan stud. editions. New York (1966).

|50| Ralston A. Herbert. S.W., Mathematical methods for digital computers, New York 1960.

|51| Rowland,J.H., Varol Y.L., Exit criteria for Simpsons compound rule. Math. of comp. Vol. 26 No 119 (jyly 1972)

|52| Rowland J.H., Miel G.J., Exit criteria for Newton-Cotes quadrature rules. Siam J. Numer. Anal. Vol. 14 No 6 (decem. 1977).

|53| Sastry S.S., Numerical solution of nonsingular Fredholm integral equations of the second kind., Indian J.Pure. and Appl. Math. 6 No 7. 773-783 (1975)

|54| Schmidt J.W., Konvergenzuntersuchungen und Fechlerabschätzungen für ein verallgemeinertes Iterationsverfahren Arch. Ration. Mech, and Anal. 6. 4. 261 - 276 (1960).

|55| Schmidt J.W., Zur Fehlerabsehätzung näherungsweiser Lösungen von Gleichungen in halbgeordenten Räumen Arch. Math. 12.2.130. (1963).

|56| Schneider, M.,Eeinschliesen der Lösung einer Gleichung durch ein Iterationsverfahren bei Iteration mit einen Näherugsoperator Wiss.Z.Techm. Hochschule Karl Marx Stadt. 10.5. 557-560 (1968)

|57| Schneider M., Bemarkung zur Erzwingung von Einschliesung sansagen bei einem Iterationsverfahren, Wiss. Z.Techn. Hochschule Karl Marx Stadt 10.5. 561 - 568 (1968)

|58| Schöder J., Fehlerabschätcung bei linearen Gleichungssystemen mit dem Brouwerschen Fix punktsdtz.Arch. Rat. Mech. Anal. 3. 28-44 (1959).

|59| Schröder J., Anvendung von Fix punktsätzen bei der numerischen Behandlung nicht linearere Gleichungen in halbgeordneten Räuman Arch. Rational Mech. Anal. 4. 177 - 192 (1959).

|60| Spence A., Error Rounds and Estimates for Eigenvalues of Integral Equations. Numer, Math. 29. 133-147 (1978)

|61| Stanković, B., Osnovi funkcionalne analize , Naučna knjiga Beograd, (1968).

|62| Stecenko V.Ja. , Ob odnom metode uskorenija shodimosti iteracionn'h processov. DAN: SSSR. 178 No 5. (1968).

|63| Surla K. Herceg D., Some possibilities in solving operator equations using non stationary iterative method. Math. vesn. 1(14) 129-136 (1977).

|64| Surla K., O izlaznim kriterijumima za interpolacione kvadraturne formule. Zbornik rad. PMF-a Univ. u Novom Sadu 8. 113-119 (1978).

|65| Surla K., Numeričko rešavanje Fredholmove integralne jednačine primenom splajn aproksimacija. Zbornik radova PMF-a Univ. u Novom Sadu 8.120-124 (1968)

|67| Surla K., Približno rešavanje integralnih jednačina. Magistarski rad. Novi Sad (1976).

|68| Šlepakov L.N. O novom proskciono-iterativnom metode rešenija nelinejnyh integralnyh uravnenih. Asimptotst. metody v nelin. meh. Kiev (1974)

|69| Thomas K.S., On the Approximate Solution of Operator Equations. Numer. Math. 23. 231-239 (1975).

|70| Varga R., Matrix iterative analysisi Prent. Hall (1962).

|71| Wahba G., Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy. SIAM.J. Numer. Anal. Vol. 14. No 4 (sept. 1977).

|72| Wang J.Y., On the Numerical Computation of Eigenvalues and Eigenfunctions of Compact Integral Operators Using Spline Functions. J.Inst. Maths. Applics. 18. 177 - 188 (1976).

|73| Warga J., On a class of iterative procedures for solving normal systems of ordinery differential equations. Jowen. Math, and Phys. 31. 4. 223-243 (1963).

|74| Webe M. , Round off analysis and sperse data. Numer. Math. 29. No 1. 37 - 43 (1974).

|75| Wildenauer P., Auswirkungen von Rungungen und Näherungen bei einer Klasse iterativer Verfahren.Z.Angew. Math. Mech. 59. 355 - 360 (1979).

|76| Woznikovski H., Round off analysis of iterations for large linear Systems. Numer. Math. 30, 301-314 (1978).

|77| Zabrejko P.P., Košelev A.I., Krasnoees´skij M.A., Mihlin S.G., Integral´nye uravnenija . Moskva (1968).