

Природно-математички факултет
Радна заједница заједничких послова
НОВИ САД

Примљено: 22 маја 1995.			
Орг. јед.	Број	Ириавг	Вредност
0603	78/9		

NEKI OPTIMIZACIONI PROBLEMI NA DIGITALNIM KONVEKSNIM POLIGONIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

mentor: Dragan M. Acketa

autor: Snežana Matić - Kekić

Novi Sad, maj 1995. godine

2	2008	2008	2008
---	------	------	------

Sadržaj

8	1. Uvod
6	1.1 Motivacija i aktuelnost postavljениh zadatka
6	1.1.1. Naljčak
9	2. Digitalna konveksna poligona sa minimalnim dijagramom
9	2.1. Uvod i pregled rezultata
12	2.1.1. Glavni rezultat
13	2.1.2. Neka napomena
13	2.1.3. Uvodna definicije
1	2.1.4. O izvođenju graničnog granice
16	2.2. Lemmatizacija
17	2.2.1. Neki bliski samoprotokali rezultati
17	2.3. (N)optimalna rešenja
18	2.3.1. Bazisna δ -torke: definicija
19	2.3.2. Dokazi
20	2.4. Konstrukcija optimalnih rešenja
20	2.4.1. Lokalne definicije
28	2.4.2. Konstrukcija poligona sa minimalnim dijagramom
31	2.5. Bazisna δ -torke
34	2.5.1. Vajsnost Bazisnih δ -torke
37	2.5.2. Neopkinivne vrednosti iz intervala $(v-1, v(t))$
38	2.6. Linearni algoritam za optimalna rešenja
41	2.6.1. Generisanje Bazisnih δ -torke
43	2.7. Zaključak i lista referencija
43	2.7.1. Zaključak
45	2.7.2. Lista referencija
46	2.7.3. Literatura
48	2.7.4. Literatura
51	2.7.5. Literatura
53	2.8. Literatura
53	2.8.1. Literatura
53	2.8.2. Literatura
54	2.8.3. Literatura
55	2.8.4. Literatura

Sadržaj

1. Uvod	5
1.1 Motivacija i aktuelnost postavljenih zadataka	6
1.1.1. Zaključak	6
2. O digitalnim konveksnim poligonima sa minimalnim dijametrom	9
2.1 Uvod i pregled rezultata	9
2.1.1. Glavni rezultat	12
2.1.2. Neka uopštenja	13
2.1.3. Uvodne definicije	13
2.1.4. O izvodjenu gridi donje granice	14
2.2 Asimptotika	16
2.2.1. Neki bliski asimptotski rezultati	17
2.3 (Ne)gridi optimalna rešenja	17
2.3.1. Bazična b -toraka: definicija 1	18
2.3.2. Dokazi	19
2.4 Konstrukcija optimalnih rešenja	26
2.4.1. Lokalne definicije	26
2.4.2. Konstrukcija poligona sa minimalnim dijametrom	28
2.5 Bazične b -torke	31
2.5.1. Valjanost Bazičnih b -toraki	34
2.5.2. Nepokrivene vrednosti iz intervala $(v(t-1), v(t))$	35
2.6 Linearan algoritam za optimalna rešenja	38
2.6.1. Generisanje Bazičnih b -toraki	41
3. Digitalni luk sa maksimalnim brojem stranica	43
3.1 Uvod i definicije	43
3.2 Familija optimalnih rešenja	45
3.3 Asimptotska ocena za $n(a, b)$	46
3.4 Algoritam i heurističke funkcije	48
3.5 Zaključak	51
4. O digitalnim konveksnim poligonima sa minimalnom površinom	53
4.1 Gridi optimalno rešenje	53
4.2 Uvod	53
4.3 Algoritam	54
4.3.1. Izračunavanje $\Delta(S(k), m)$	55

4.3.2. Složenost	56
4.3.3. Kontraprimeri	56
5. O minimalnom uvećanju površine	59
5.1 Uvod i definicije	59
5.2 Algoritam	60
5.2.1. Izračunavanje $\Delta(S(n), \frac{q}{p})$	62
5.2.2. Određjivanje niza $\frac{q_m}{p_m}$	64
5.2.3. Složenost	66
5.3 Opšti slučaj	68

Glave ove doktorske disertacije su naslovljene:

1. O digitalnim konveksnim poligonima sa minimalnim dijagonalom

2. O digitalnim konveksnim poligonima sa maksimalnim dijagonalom

3. O digitalnim konveksnim poligonima sa minimalnom površinom

4. Minimalnom uvećanju površine

5. Neki optimizacioni problemi sa digitalnim konveksnim poligonima

Prva disertacija je iz prošle dviju oblasti: digitalne geometrije i optimizacije. Digitalna geometrija je veoma značajna oblast diskretne matematike, koja ima široko primene. Neki problemi optimizacije se također vrlo često sreću u praksi.

Prvi problem, koji se može rešavati, pored primene u drugim oblastima matematike, može se rešiti i u praksi, a u kompjuterskoj grafici.

Drugi problem i zadaci, koji će redom biti objavljeni istraživanjem u okviru druge, treće i četrte glave su:

1. Digitalni konveksni poligon sa maksimalnim dijagonalom. $M(n)$ (u) je maksimalna dužina dijagonale u ikvadratnom mrežnom konveksnom poligonu dimenzije $n \times n$ i njemu ekvivalentnom. U ovom slučaju se za ikvadratni poligon $w \times w$ nalaze digitalni konveksni poligon $M(w)$ i maksimalna dužina dijagonale $M(w)$.

2. Digitalni konveksni poligon sa minimalnim dijagonalom. $m(n)$ (u) je minimalna dužina dijagonale u ikvadratnom mrežnom konveksnom poligonu dimenzije $n \times n$ i njemu ekvivalentnom. U ovom slučaju se za ikvadratni poligon $w \times w$ nalaze digitalni konveksni poligon $m(w)$ i minimalna dužina dijagonale $m(w)$.

3. Digitalni konveksni poligon sa minimalnom površinom. $A(n)$ (u) je minimalna površina ikvadratnog mrežnog konveksnog poligona dimenzije $n \times n$ i njemu ekvivalentnog. U ovom slučaju se za ikvadratni poligon $w \times w$ nalaze digitalni konveksni poligon $A(w)$ i minimalna površina $A(w)$.

4. Minimalno uvećanje površine. $U(n)$ (u) je minimalno uvećanje površine ikvadratnog mrežnog konveksnog poligona dimenzije $n \times n$ i njemu ekvivalentnog. U ovom slučaju se za ikvadratni poligon $w \times w$ nalaze digitalni konveksni poligon $U(w)$ i minimalno uvećanje površine $U(w)$.

5. Neki optimizacioni problemi sa digitalnim konveksnim poligonima. U ovom slučaju se za ikvadratni poligon $w \times w$ nalaze digitalni konveksni poligon $S(w)$ i maksimalna dužina dijagonale $M(w)$.

Uvod

Četiri Glave ove doktorske disertacije sa naslovima:

- O digitalnim konveksnim poligonima sa minimalnim dijametrom
- Digitalni luk sa maksimalnim brojem stranica
- O digitalnim konveksnim poligonima sa minimalnom površinom
- O minimalnom uvećanju površine

su posvećene nekim optimizacionim problemima na digitalnim konveksnim poligonima.

Domen istraživanja je iz preseka dveju oblasti: digitalne geometrije i optimizacije. Digitalna geometrija je veoma značajna oblast diskretne matematike, koja ima široke primene. Razni problemi optimizacije se takodje vrlo često sreću u praksi.

Problemi koji se ovde rešavaju, pored primene u drugim oblastima matematike, mogu da imaju značajnu primenu u praksi, npr. u kompjuterskoj grafici.

Glavni problemi i zadaci, koji će redom biti obuhvaćeni istraživanjem u okviru druge, treće, četvrte i pete Glave su:

1. Nalaženje digitalnog konveksnog poligona sa maksimalnim brojem stranica $MV(m)$ koji može da se prostre u fiksnu kvadratnu mrežu dimenzije $m \times m$ i njemu ekvivalentan problem da se za fiksiran broj stranica n nadje digitalni konveksni poligon koji može da stane u što manju kvadratnu mrežu dimenzije $MD(n)$.
2. Uopštenje predhodnog problema na luk, tj. preciznije, za date prirodne brojeve a i b se razmatra problem odredjivanja digitalnog konveksnog luka, čije dužine kateta su a i b , a koji ima maksimalni moguć broj grana $n(a, b)$.
3. Konstrukcija digitalnog konveksnog poligona sa parnim brojem stranica i sa što je moguće manjom površinom.
4. Odredjivanje digitalnog konveksnog poligona sa $n + 2$ stranice koji se dobija dodavanjem dve paralelne stranice na neki proizvoljni digitalni konveksni poligon sa n stranica, koji se nalazi u mreži veličine $s \times s$, tako da razlika površina između polaznog i konstruisanog poligona bude minimalna moguća.

Istraživanja koriste poznate naučne metode, medju kojima su konstrukcija, analiza, sinteza, indukcija, dedukcija i klasifikacija.

Neke hipoteze istraživanja, na koje je uglavnom dat pozitivan odgovor, bi bile:

H_1 Postoji linearan algoritam za konstrukciju opšteg optimalnog (u smislu prvog problema) rešenja.

H_2 Opšta tačna formula za $MV(m)$ se najviše za 1 razlikuje od poznate donje granice.

H_3 Asimptotska ocena za $n(a,b)$ je $O(a^{1/3} \cdot b^{1/3})$.

H_4 Postoji kontraprimer da gridi optimalno rešenje nije optimalno (u smislu minimalne površine).

H_5 Postoji $O(n^4)$ algoritam za rešavanje četvrtog optimizacionog problema.

1.1 Motivacija i aktuelnost postavljenih zadataka

Svi navedeni problemi i zadaci su aktuelni jer je i sama oblast kojoj pripadaju mlada. Prvi problem je prvi put formulisan od strane Voss K. i Klette R. 1982 godine. Treći i četvrti problem su usko povezani sa problemom određivanja digitalnog konveksnog poligona sa proizvoljnim brojem stranica i minimalnom površinom u čemu je svoj pionirski poduhvat napravio R. J. Simpson krajem 80-tih godina.

Primena rešenja prvog razmatranog problema može biti u nalaženju odgovora na sledeća praktična pitanja:

- Koliko precizno može da se nacrti krug na kompjuterskom ekranu, sa kvadratnim pikselima, ako se krug predstavlja konveksnim poligonom, dok je mera preciznosti broj temena takvog konveksnog poligona?
- Koja je donja granica za veličinu koda koja je dovoljna da se reprezentuje bilo koji konveksni oblik na kvadratnoj mreži date veličine?

Slično, rešenje problema razmatranog u trećoj Glavi, se može direktno primeniti na određivanje digitalnog konveksnog poligona, koji u celobrojnoj mreži najbolje aproksimira elipsu sa zadatim osama.

1.1.1. Zaključak

Originalan doprinos u okviru doktorske disertacije, razdvojen po pomenutim problemima će biti u sledećim rezultatima:

- Kompletirano je rešenje prvog problema. Za neparne n za koje nije bila poznata tačna konstrukcija optimalnih poligona je data tražena konstrukcija, koja je pokrivena linearnim algoritmom, kao i odgovarajućom formulom za $MV(m)$. (druga Glava)
- Izvedena je asimptotska ocena za broj $n(a,b)$. Data je gusta familija optimalnih rešenja. Opisani su neki odgovarajući algoritmi za traženje optimalnih rešenja van date familije. (treća Glava)

- Dat je jedan $O(n^2)$ gridi algoritam, koji traži digitalni konveksni poligon sa $2n$ stranica i minimalnom površinom. Algoritam daje optimalna rešenja za sve vrednosti parametra n , za koje su takva rešenja poznata. Napravljen je kontraprimer: digitalni konveksni poligon sa manjom površinom nego gridi optimalno rešenje dobijeno za odgovarajuće n . (četvrta Glava)
- Neka je dat digitalni konveksni poligon P sa $2n$ paralelnih stranica (centralno simetričan) i neka s označava minimalnu dužinu stranice digitalnog kvadrata u koji P može da se upiše.

Dat je $O(ns)$ algoritam, koji određuje par paralelnih stranica čije ubacivanje u polazni poligon daje poligon sa minimalnim prirastom površine; drugim rečima, razlika površina polaznog poligona i dobijenog centralno simetričnog $(2n+2)$ -gona je minimalna moguća. Pokazano je da ovaj algoritam može da se uopšti uz očuvanje iste složenosti za određivanje minimalnog prirasta površine dodavanjem para paralelnih stranica nekom nesimetričnom digitalnom konveksnom poligonu sa proizvoljnim brojem stranica. (peta Glava)

Istraživanja u ovom radu pripadaju značajnoj oblasti diskretne matematike, koja ima kako teorijske, tako i praktične primene. Zato postoji interes za istraživanja u ovoj oblasti.

U ovom radu će biti prikazano 18 originalnih pomoćnih tvrdjenja i 15 Teorema, od toga će 13 Lema i 7 Teorema prvi put biti ovde objavljene. Sa ciljem da se olakša praćenje izlaganja, tekst je obogaćen sa 11 slika i 5 tabela.

U ovom radu razmatramo neke optimizacione probleme koji se mogu rešiti pomoću metoda gradnje. Prvo ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

Metoda gradnje se sastoji od sledećih koraka:

1. Izabiranje početne tačke x_0 u skupu S .
2. Izabiranje pravca d_k koji vodi ka boljoj tački.
3. Pronalazjenje tačke x_{k+1} na pravcu d_k .
4. Ponavljanje koraka 2 i 3 dok se ne dosegne zadovoljavajuća tačka.

U ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

U ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

U ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

Metoda gradnje

U ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

U ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

U ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

U ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije funkcije $f(x)$ na skupu S . Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je S konveksan skup. Tada je poznato da svaki lokalni minimum funkcije f na skupu S je i globalni minimum. Ovo je osnovni princip metoda gradnje.

2.

O digitalnim konveksnim poligonima sa minimalnim dijametrom

U ovoj glavi je dat pregled rezultata vezanih za problem nalaženja digitalnog konveksnog n -tougla koji može da se upiše u kvadrat na mreži sa minimalnom stranicom $MD(n)$.

Ovaj problem je kompletno rešen. Sada je poznato asimptotsko ponašanje i tačna vrednost $MD(n)$, kao i eksplicitna i efikasna konstrukcija optimalnog rešenja.

Izvedena je asimptotska ocena za funkciju $MD(n)$ sa tačnim koeficijentom vodećeg člana. Dat je tačan izraz za funkciju $MD(n)$. Pokazalo se da je vrednost $MD(n)$ najviše za 1 veća od prirodne donje granice. Za određivanje spomenute donje granice koristi se gridi pristup.

Za svaki prirodan broj n veći od 2 data je eksplicitna konstrukcija digitalnog konveksnog n -tougla koji dostiže $MD(n)$. Štaviše, ova konstrukcija je veoma efikasna zbog korišćenja Farejevog (Farey) niza: odgovarajući algoritam je asimptotski optimalan t.j. linearan u odnosu na broj stranica poligona n .

2.1 Uvod i pregled rezultata

Poslednjih par godina raste interes za optimizacione probleme na celobrojnoj mreži. Ovde će biti analiziran jedan od problema takvog tipa, vezan za konveksnost (koja je jedna od osnovnih osobina kompjuterske geometrije, [23]). Sledeća praktična pitanja mogu biti motivacija za razmatranje predloženog problema:

- Koliko precizno može da se nacrti krug na kompjuterskom ekranu pomoću kvadratnih piksela ako će se predstaviti kao konveksni poligon, i ako se za meru preciznosti uzima broj stranica takvog poligona?
- Koja je donja granica za veličinu koda, koji je dovoljan da reprezentuje konveksnu krivu na fiksnoj kvadratnoj mreži?

Neki drugi optimizacioni problemi vezani za konveksnost na celobrojnoj mreži su bili razmatrani u mnogim aktuelnim radovima (videti, na primer, [9], [10], [13], [24], [26],

[17]). Ima mnogo različitih izvora za motivaciju ovakvih problema, recimo neki od njih su celobrojno programiranje i kompjuterska grafika.

Digitalni konveksni poligon (skraćeno *d.k.p.*) je poligon čija su sva temena tačke celobrojne mreže i čiji su svi uglovi strogo manji od π radijana.

Na primer, rad [26] koristi uvakvu definiciju d.k.p. i daje metod za konstrukciju d.k. $2k$ -ugla sa minimalnom površinom. Ovaj problem će se detaljnije razmatrati u četvrtoj glavi.

Dijametar digitalnog konveksnog poligona je minimalna veličina stranice oko njega opisanog digitalnog kvadrata sa stranicama paralelnim koordinatnim osama.

U ovoj glavi će se razmatrati sledeći optimizacioni problem:

- Dat je prirodni broj n , odrediti digitalni konveksni n -ougao sa minimalnim dijametrom $MD(n)$.

Njemu ekvivalentan optimizacioni problem bi bio:

- Odrediti digitalni konveksni poligon sa zadatim dijametrom m i maksimalnim brojem stranica $MV(m)$.

Napomena. Ako se dozvoli da unutrašnji uglovi budu manji ili jednaki od π radijana (takva definicija digitalnog konveksnog poligona se koristi u [9] i [17]), tada bi analogni problem imao trivijalno rešenje: granični kvadrat na mreži veličine $m \times m$ dostiže $MV(m) = 4m$.

Ova dva problema su bila prvi put formulisana u radu [27] (videti takodje knjigu [28]). Dva rastuća niza prirodnih brojeva $d(j)$ i $v(j)$ ($j = 1, 2, \dots$) su takodje bila uvedena u tom radu (videti Tabelu 2 u sekciji 2.1.4), tako da brojevi $d(j)$ i $v(j)$ odgovaraju jedan drugom u gornja dva optimizaciona problema: drugim rečima $d(j) = MD(v(j))$ i $v(j) = MV(d(j))$. U istom radu su bili uvedeni i izrazi za funkcije $MV(m)$ i $MD(n)$ koji su dobijeni kao eksperimentalne približne formule. U sekciji 2.1.4 će biti opisana konstrukcija niza d.k. optimalnih poligona $P(j)$, $j = 1, 2, \dots$ sa $v(j)$ stranica i dijametrom $d(j)$, koji su jedinstveno optimalna rešenja za oba problema.

Primedba. Funkcije MD i MV nisu medjusobno inverzne u opštem slučaju (na primer, $(MD(7) = 3, MV(3) = 8)$ i $(MV(100) = 76, MD(76) = 99)$, videti Tabelu 1, niže), štaviše nijedna od njih nije 1-1.

Veza izmedju broja grana i dijametra optimalnih d.k. poligona kao i konstrukcija ovih poligona je potom proučavana u radovima [7], [6],[21],[20]. Algoritamski aspekti ovih konstrukcija su razmatrani u [2], [19], [1]:

Rad [5] je proširio i popravio rezultate iz [27] u sledećim aspektima: tačnosti formula, složenosti algoritma za konstrukciju optimalnog rešenja za $d(j) - v(j)$ slučaj, kao i u davanju dokaza optimalnosti razmatranog slučaja. Izvedeno je asimptotsko ponašanje funkcija $MD(n)$ i $MV(m)$, sa tačnim koeficijentom vodećeg člana:

$$MD(n) = \frac{2\pi}{12^{3/2}} n^{3/2} + O(n \log n)$$

$$MV(m) = \frac{12}{(4\pi^2)^{1/3}} m^{2/3} + O(m^{1/3} \log m) \quad (*)$$

U Tabeli 1 je dato prvih 130 vrednosti $MD(n)$. Oznaka * je pored onih vrednosti koje su za 1 veće od $gdg(n)$.

		$MD(3) = 1$	$MD(4) = 1$	$MD(5) = 2$
$MD(6) = 2$	$MD(7) = 3$	$MD(8) = 3$	$MD(9) = 4$	$MD(10) = 5$
$MD(11) = 6$	$MD(12) = 6$	$MD(13) = 7$	$MD(14) = 8$	$MD(15) = 9$
$MD(16) = 9$	$MD(17)* = 11$	$MD(18)* = 12$	$MD(19)* = 13$	$MD(20) = 13$
$MD(21)* = 15$	$MD(22)* = 16$	$MD(23)* = 17$	$MD(24) = 17$	$MD(25) = 19$
$MD(26) = 20$	$MD(27) = 21$	$MD(28) = 22$	$MD(29) = 24$	$MD(30) = 25$
$MD(31) = 26$	$MD(32) = 27$	$MD(33) = 29$	$MD(34) = 30$	$MD(35) = 31$
$MD(36) = 32$	$MD(37) = 34$	$MD(38) = 35$	$MD(39)* = 37$	$MD(40) = 37$
$MD(41) = 39$	$MD(42)* = 41$	$MD(43) = 42$	$MD(44) = 43$	$MD(45)* = 46$
$MD(46)* = 47$	$MD(47) = 48$	$MD(48) = 49$	$MD(49)* = 52$	$MD(50) = 53$
$MD(51) = 55$	$MD(52) = 56$	$MD(53) = 58$	$MD(54) = 60$	$MD(55) = 62$
$MD(56) = 63$	$MD(57) = 65$	$MD(58) = 67$	$MD(59) = 69$	$MD(60) = 70$
$MD(61) = 72$	$MD(62) = 74$	$MD(63) = 76$	$MD(64) = 77$	$MD(65) = 79$
$MD(66) = 81$	$MD(67) = 83$	$MD(68) = 84$	$MD(69) = 86$	$MD(70) = 88$
$MD(71) = 90$	$MD(72) = 91$	$MD(73)* = 94$	$MD(74)* = 96$	$MD(75)* = 98$
$MD(76) = 99$	$MD(77)* = 102$	$MD(78) = 103$	$MD(79)* = 106$	$MD(80) = 107$
$MD(81)* = 110$	$MD(82) = 111$	$MD(83)* = 114$	$MD(84) = 115$	$MD(85)* = 118$
$MD(86)* = 120$	$MD(87)* = 122$	$MD(88) = 123$	$MD(89) = 126$	$MD(90) = 128$
$MD(91) = 130$	$MD(92) = 132$	$MD(93) = 135$	$MD(94) = 137$	$MD(95) = 139$
$MD(96) = 141$	$MD(97) = 144$	$MD(98) = 146$	$MD(99) = 148$	$MD(100) = 150$
$MD(101) = 153$	$MD(102) = 155$	$MD(103) = 157$	$MD(104) = 159$	$MD(105) = 162$
$MD(106) = 164$	$MD(107) = 166$	$MD(108) = 168$	$MD(109) = 171$	$MD(110) = 173$
$MD(111)* = 176$	$MD(112) = 177$	$MD(113) = 180$	$MD(114)* = 183$	$MD(115) = 185$
$MD(116) = 187$	$MD(117) = 190$	$MD(118) = 192$	$MD(119) = 195$	$MD(120) = 197$
$MD(121) = 200$	$MD(122) = 202$	$MD(123) = 205$	$MD(124) = 207$	$MD(125) = 210$
$MD(126)* = 213$	$MD(127) = 215$	$MD(128) = 217$	$MD(129)* = 221$	$MD(130) = 223$

Tabela 1.

U nastavku će parametar t označavati prirodan broj koji zadovoljava da za dati broj stranica n d.k. poligona važi da je $v(t-1) \leq n < v(t)$.

Za izvođenje formule za $MD(n)$ se koristi prirodna donja granica za $MD(n)$ i eksplicitna konstrukcija d.k. n -touglova koji dostižu tu granicu. Ova granica (uvedena u [6]) je izražena preko funkcija $v(j)$ i $d(j)$, i nazvana je *gridi donja granica* (skraćeno: $gdg(n)$):

$$gdg(n) = d(t-1) + \left\lceil \frac{(n - v(t-1)) \cdot t}{4} \right\rceil.$$

Reč "gridi" u imenu granice je zbog činjenice da se za njeno nalaženje koristi gridi metod. U saglasnosti s tim, kroz ovaj rad će se koristiti izrazi "gridi pristup" i "gridi izbor". Funkcija težine koja se minimizira je ukupna dužina stranice u smislu "block distance" metrike.

Može se izvesti ([27], [5], videti takodje sekciju 2.1.4) da funkcije $v(t)$ i $d(t)$ mogu dalje biti izražene u terminima Ojlerove (Euler) funkcije ϕ ($\phi(i)$ označava broj celih brojeva između 1 i i koji su uzajamno prosti sa i ; na primer, $\phi(1) = 1, \phi(3) = \phi(4) = 2, \phi(5) = 4$) kao što sledi:

$$v(t) = 4 \cdot \sum_{i=1}^t \phi(i) \qquad d(t) = \sum_{i=1}^t i \cdot \phi(i)$$

Pokazalo se da je $gdg(n)$ veoma efikasna; fascinira da se ova granica veoma malo razlikuje od tačne formule za $MD(n)$. Preciznije, kao posledica glavne Teoreme 1, date niže, $gdg(n)$ se dostiže vrlo često (u najmanje $7/8$ od svih mogućih slučajeva), a takodje se $MD(n)$ razlikuje za samo 1 od $gdg(n)$ u svim preostalim slučajevima. Naime, dokazano je u [7], [6] i [21] da je dovoljno da se gridi donja granica za $MD(n)$ poveća za najviše 1 za sve one vrednosti n , za koje je nepoznata konstrukcija koja dokazuje da je $MD(n) = gdg(n)$.

Eksplicitni izraz za $MD(2s)$ kao i tačna konstrukcija optimalnih d.k. $2s$ -uglova je data u [6]. Konstrukcija za parno s je jednostavna generalizacija konstrukcije poligona iz niza $P(j)$; ova generalizacija strogo koristi gridi izbor stranica.

Skoro optimalni poligoni su konstruisani za opšte n u [7]; dijametri konstruisanih digitalnih konveksnih n -touglova nisu veći od $1 + MD(n)$. Naglasak u ovom radu je na jednostavnosti konstrukcije. U nekim slučajevima (na primer za n oblika $4s+2$) se tačna konstrukcija optimalnih d.k. poligona zamenjuje jednostavnijom konstrukcijom koja daje suboptimalne d.k. poligone sa dijametrom $1 + MD(n)$.

2.1.1. Glavni rezultat

Problem konstrukcije optimalnih d.k. n -touglova je konačno kompletno rešen u [20], gde je dat tačan izraz za $MD(n)$ i eksplicitna konstrukcija optimalnih d.k. n -touglova za svako n veće od 2. Glavni rezultat [20] glasi:

Teorema 1 . [20] *Neka broj stranica n digitalnog konveksnog poligona pripada intervalu $[v(t-1), v(t))$ za neki prirodan broj $t > 1$. Tada je minimalni dijametar $MD(n)$ jednak $gdg(n)$ za svaki prirodan broj $n \geq 4$, izuzev za sledeće slučajeve, gde je $MD(n) = 1 + gdg(n)$:*

Slučaj 1. n neparno i t je oblika $4k$, $k > 0$;

Slučaj 2. $n = v(t-1) + 2$, gde je t oblika $2k$, $k > 1$;

Slučaj 3. $n = v(t) - 2$, gde je t oblika $2k$, $k > 1$;

Slučaj 4. $n = v(t-1) + 1$, gde je t oblika $4k+3$, $k > 0$;

Slučaj 5. $n = v(t) - 1$, gde je t oblika $4k+1$, $k > 0$;

Slučaj 6. $n = 45$.

Primedba. Prvih 130 vrednosti funkcije $MD(n)$ je dato u Tabeli 1, gore.

Dokaz Teoreme 1 ima sledeća dva koraka:

Korak 1. Dokaz da dijametar $gdg(n)$ ne može biti dostignut u svim navedenim slučajevima (Slučaj 1 – Slučaj 6).

Korak 2. Eksplicitnu konstrukciju d.k. n -touglova sa dijametrima $gdg(n)$ odnosno $gdg(n) + 1$ u navedenim slučajevima.

U Poglavljima 2.3 i 2.4 će redom biti dati potrebni dokazi za prvi korak i tražena konstrukcija za drugi. Neki dokazi Koraka 1 su takodje dati u radovima [7] (Slučaj 1), [6]

(Slučajevi 2 i 3), dok se složeniji dokazi za Slučajeve 4, 5 i 6 prvi put objavljuju u ovom radu u Poglavlju 2.3.2 Konstrukcija potrebna za Korak 2 ([20]) je data u Poglavlju 2.4.

Konstrukcije optimalnih n -touglova za sve vrednosti n koje zadovoljavaju $n \bmod 4 \neq 0$ imaju u svojoj osnovi Bazične b -torke (videti Sekciju 2.3.1 i 2.4.1), koje dozvoljavaju malo odstupanje od gridi pristupa.

Algoritamski aspekti konstrukcije optimalnih d.k. n -touglova će biti prikazani u Poglavlju 2.6, a takodje se nalaze u radovima [5] (za n oblika $v(j)$), [2] (za n parno), [1] (suboptimalna konstrukcija za opšte n) i [19] (optimalna konstrukcija za n neparno). Pokazalo se da postoji asimptotski optimalan (linearan u odnosu na broj stranica) algoritam za konstrukciju optimalnih d.k. n -touglova. U algoritmu se koristi efikasna konstrukcija Farejevog (Farey) niza (što je suština efikasne konstrukcije luka optimalnog d.k. n -tougla), kao i efikasno ubacivanje stranica Bazične b -torke kada je to potrebno. Rad [19] sadrži algoritam za konstrukciju Bazičnih b -torki, što će biti razradjeno u sekciji 2.6.1.

2.1.2. Neka uopštenja

Dve prirodne generalizacije razmatranog problema mogu biti interesantne za razmatranje u budućnosti. Jedna bi mogla da bude odredjivanje maksimalnog broja stranica digitalnog konveksnog poligona upisanog u dati digitalni pravougaonik (ovo bi bilo uopštenje MV -varijante problema). Druga je vezana za odredjivanje koeficijenta vodećeg člana u asimptotskom izrazu za maksimalan broj temena (strana ili ivica) digitalnog konveksnog poliedra upisanog u kub date ivice m . Poznato je iz [9] da je ovaj broj ograničen odozgo sa $O(m^{3/2})$.

Druga vrsta uopštenja bi bila kad bi se dijametar posmatrao u opštijem smislu; recimo kad bi se definisao kao minimalna veličina stranice opisanog kvadrata, a da za kvadrat nema zahteva da su mu stranice paralelne koordinatnim osama i da su mu temena celobrojne tačke mreže. Ovakva generalizacija teško može da smanji dijametar; broj tačaka mreže unutar nekog zatvorenog kvadrata $d \times d$ može biti samo manji od $(d+1)^2$ ako bilo koji od dva gornja zahteva odbacimo. Manji broj tačaka unutar kvadrata samo smanjuje broj mogućnosti za izbor pogodnih temena i stranica.

Medjutim, predhona razmišljanja obaraju sledeća četiri mala kontraprimera u kojima je smanjen realni dijametar uz prihvatanje navedenog uopštenja. Za dati poligon P iz familije $P(t)$, neka SQ označava minimalni opisani (realni) kvadrat sa uglom od 45° između stranica SQ i koordinatnih osa. Pokazalo se da je veličina stranice SQ manja od $d(t)$ za $2 \leq t \leq 5$; ove veličine su redom 2.82, 8.49, 16.97, 36.77, dok su $d(2) = 3$, $d(3) = 9$, $d(4) = 17$, $d(5) = 37$ (videti Tabelu 2 u sekciji 2.1.4).

2.1.3. Uvodne definicije

Dijametar digitalnog konveksnog poligona P je jednak

$$\max \{ \max \{ |x_i - x_j|, |y_i - y_j| \} \}, \text{ gde je } ((x_i, y_i), (x_j, y_j)) \text{ par temena } P \}.$$

Dakle dijametar je definisan kao maksimalno rastojanje između temena poligona.

Neka y_{min} i x_{max} redom označavaju minimalnu y -koordinatu i maksimalnu x -koordinatu razmatranog d.k.p. P . JI-luk (*jugo-istočni luk*) d.k. poligona P je niz susednih stranica (V_i, V_{i+1}) , $1 \leq i \leq c-1$, gde tačke V_i označavaju temena (x_i, y_i) poligona P ; $x_1 < \dots < x_c = x_{max}$; $y_{min} = y_1 < \dots < y_c$. Specijalno, ako poligon P ima donju horizontalnu stranicu (V_0, V_1) ($V_0 = (x_0, y_1)$, $V_1 = (x_1, y_1)$, $x_0 < x_1$), tada se ta stranica uvek posmatra kao prva stranica JI-luka. Na analogan način se definišu i SI-, SZ- i JZ- lukovi d.k.p. (ako poligon P ima desnu vertikalnu stranicu tada se ona smatra prvom stranicom SI-luka, i tako dalje).

Neka je data stranica $e = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d.k.p., tada je *nagib* stranice e razlomak:

$$\frac{|x_1 - x_2|}{|y_1 - y_2|} \text{ ako } e \in \text{SI- ili JZ-luku}; \quad \frac{|y_1 - y_2|}{|x_1 - x_2|} \text{ ako } e \in \text{JI- ili SZ-luku},$$

dok je *bd-dužina* stranice e (skraćeno: $bdd(e)$ ili još kraće bdd) predstavlja sumu $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Bd-dužina je dužina stranice u smislu "block (Manhattan) distance" metrike. U nekim slučajevima ona je direktno pridružena nagibu.

Za dati d.k. poligon P , neka $MP(P)$ i $MK(P)$ redom označavaju minimalni opisani pravougaonik (kvadrat) sa stranicama paralelnim koordinatnim osama. Dijametar P je na ovaj način jednak veličini stranice $MK(P)$.

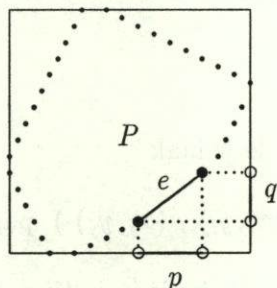
Projekcija stranice d.k. poligona P je ortogonalna projekcija te stranice na neku stranicu $MP(P)$, koja je susedna odgovarajućem luku. Tako projekcija stranice poligona P pripada onoj stranici opisanog pravougaonika koja nije "zaklonjena" sa P ; svaka "kosa" stranica P ima tačno dve projekcije (videti Sliku 1).

Ako odgovarajući lukovi neka dva d.k. poligona P_1 i P_2 nemaju istih stranica tada postoji *Minkovski (Minkowski) suma* P_1 i P_2 , koja jedinstveno određuje treći d.k.p. P_3 (za više detalja videti na primer, [15] ili [22]). Svaki luk P_3 sadrži sve stranice odgovarajućih lukova P_1 i P_2 , sortiranih tako da konveksnost ostaje očuvana. Dijametar P_3 je jednak zbiru dijametara P_1 i P_2 .

Ako je poligon P_3 Minkovski suma poligona P_1 i P_2 , tada je P_2 *Minkovski razlika* P_3 i P_1 .

2.1.4. O izvodjenu gridi donje granice

Gridi donja granica $gdg(n)$ za $MD(n)$ može da se izvede ako se primeti da je zbir svih bd-dužina stranica d.k. n -tougla P i jednak obimu opisanog pravougaonika $MP(P)$. Naime, zbog konveksnosti P , stranice $MP(P)$ su tačno prepoкривene projekcijama stranica P (Slika 1).



Slika 1.

Projekcije stranica P tačno prepoкрivaju obim pravougaonika $MP(P)$

Ova činjenica implicira da je $MD(n) \geq \frac{1}{4} Minsum(n)$, gde $Minsum(n)$ označava donju granicu za sumu bd-dužina stranica d.k. n -tougla. Ova granica može da se dobije korišćenjem neke vrste gridi pristupa. Kako je broj sabiraka fiksiran (jednak n), minimizacija zahteva da su sabirci što je moguće manji. Ovaj cilj može da se ostvari biranjem koliko god je moguće sabiraka jednakih 1, a zatim birajući maksimalan broj sabiraka jednakih 2 i tako dalje ... Svi ovi sabirci su oblika $(p+q)$, tako da su q/p ($q = 0, 1, \dots$, $p = 1, 2, \dots$) kandidati za nagib stranica P . Sledeća dva pravila ([6]) moraju biti zadovoljena za nagibe q/p :

- brojevi p i q su uzajamno prosti;
- svaki q/p može da se koristi najviše četiri puta (u svakom luku P jednom).

Primedba. U opštem slučaju, pošto je d.k. n -tougao konstruisan, nije bitno ako prvo pravilo nije zadovoljeno za neki nagib (najviše jedan nagib aq/ap , gde je $a \geq 1$ i q i p su uzajamno prosti, sme biti korišćen u jednom luku). Medjutim, kada se kolekcija od n stranica razbijena po lukovima, bira, tada prvo pravilo daje minimalne bd-dužine za dati nagib i garantuje da će se tri kolinearna temena izbeći (ovo je neophodno, ako se konstruiše d.k.p., i zahteva da on ima n stranica).

Niz $P(j)$, $j = 1, 2, \dots$ optimalnih d.k. $v(j)$ -uglova sa dijametrom $d(j)$, koji je spomenut u uvodu, može da se definiše na sledeći način: za dati prirodan broj j , svaki luk $P(j)$ sadrži sve nagibe q/p koji zadovoljavaju $p+q \leq j$, gde su q i p uzajamno prosti prirodni brojevi, sa dodatnom mogućnošću da je $q/p = 0/1$. Takav izbor stranica $P(j)$ je jedinstveno moguć za dostizanje $Minsum(v(j)) = 4 \cdot d(j)$ i on je primer stroge primene gridi pristupa. Bilo koji drugi izbor $v(j)$ stranica bi narušio gridi pristup i dao bi strogo veću sumu bd-dužina stranica. Ovo implicira da su d.k. poligoni u nizu $P(j)$ i optimalni i jedinstveni.

Izraz za $gdg(n)$, dat u uvodu Glave 2.1, sledi iz činjenice da je $Minsum(n) = 4 \cdot d(t-1) + (n - v(t-1)) \cdot t$.

U Tabeli 2 su date vrednosti za funkcije $d(t)$ i $v(t)$, dok parametar t prolazi intervalom $1 \leq t \leq 50$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v(t)	4	8	16	24	40	48	72	88	112	128
d(t)	1	3	9	17	37	49	91	123	177	217
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
v(t)	168	184	232	256	288	320	384	408	480	512
d(t)	327	375	531	615	735	863	1135	1243	1585	1745
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
v(t)	560	600	688	720	800	848	920	968	1080	1112
d(t)	1997	2217	2723	2915	3415	3727	4213	4549	5361	5601
t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
v(t)	1232	1296	1376	1440	1536	1584	1728	1800	1896	1960
d(t)	6531	7043	7703	8247	9087	9519	10851	11535	12471	13111
t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
v(t)	2120	2168	2336	2416	2512	2600	2784	2848	3016	3096
d(t)	14751	15255	17061	17941	19021	20033	22195	22963	25021	26021

Tabela 2.

Optimalno rešenje nije uvek jedinstveno, štaviše....

Konstrukcije optimalni n -touglova za $n \bmod 4 = 0$ strogo koriste gridi izbor nagiba. Za razliku od jedinstvenog optimalnog rešenja za n oblika $v(t)$, postoje mnoga optimalna rešenja za ostale n deljive sa 4:

Lema 1 Broj optimalnih digitalnih konveksnih n -touglova za n deljivo sa 4, $i \in (v(t-1), v(t))$ nije manji od

$$\sum_{\substack{2 \cdot i + j = (n - v(t-1))/4 \\ i, j \in N \cup \{0\}}} \frac{(\phi(t)/2)!}{i! \cdot j! \cdot ((\phi(t)/2) - i - j)!} \cdot 2^i \cdot 4^j .$$

Ovaj broj, je na primer, jednak $2 \cdot \phi(t)$ odnosno $2 \cdot \phi^2(t) - 3 \cdot \phi(t)$ za $n = v(t-1) + 4$ odnosno za $n = v(t-1) + 8$.

Dokaz. Sledeći gridi pristup, optimalno rešenje za $n \bmod 4 = 0$ može da se predstavi kao Minkovski suma poligona $P(t-1)$ i nekih $(n - v(t-1))/4$ četvorouglova sa dijametrima $p+q$, pri čemu svaki od njih ima nagibe iz nekog skupa $\{p/q, q/p\}$, gde su p i q uzajamno prosti prirodni brojevi i zadovoljavaju $p+q = t$. Postoje četiri mogućnosti za ovakve četvorouglove za svaki neuredjen par $\{p, q\}$: dva od njih su digitalni kvadrati sa osobinom da svaki luk ima po jednu stranicu sa nagibom q/p (odnosno p/q); druga dva su digitalni rombovi sa osobinom da po dva naspramna luka imaju po dve stranice sa nagibima q/p i p/q , dok su im preostala dva luka prazna. Neka $S(\{p, q\})$ označava skup ova četiri četvorougla.

Postoji $\phi(t)/2$ skupova $S(\{p, q\})$ za dato t . Kako sabirci sume Minkovskog ne smeju da imaju iste nagibe unutar odgovarajućih lukova, najviše dva četvorougla iz skupa $S(\{p, q\})$ mogu učestvovati u sumi Minkovskog; ako se koriste dva onda su oba ili kvadrati ili rombi. Neka j i i redom označavaju broj skupova $S(\{p, q\})$ koji daju jedan odnosno dva sabirka za sumu Minkovskog. Tako gornja formula sledi na osnovu proste kombinatorike. \square

Primer. Dva digitalna kvadrata iz skupa $S(\{p, q\})$ će u sekcijama koje slede biti označena sa $DK(p, q)$ i $DK(q, p)$.

2.2 Asimptotika

Formule date u uvodu Glave 2.1, za asimptotsko ponašanje funkcija $MV(m)$ i $MD(n)$ su izvedene u [5] korišćenjem monotonosti funkcija i eliminisanjem parametra t iz izraza

$$v(t) = \frac{12t^2}{\pi^2} + O(t \log t) \quad i \quad d(t) = \frac{2t^3}{\pi^2} + O(t^2 \log t).$$

Izvodjenje ovih izraza se dobija iz odgovarajućih formula za $v(t)$ i $d(t)$, datih takodje u uvodu ove glave, zapisanih preko Ojlerove funkcije. Pri izvodjenju se koriste i sledeće sume:

$$\sum_{i=1}^t \phi(i) = \frac{3t^2}{\pi^2} + O(t \log t) \quad ([16], \text{ Teor. 330}) \quad i \quad \sum_{i=1}^t i \cdot \phi(i) = \frac{2t^3}{\pi^2} + O(t^2 \log t) \quad ([11]).$$

Može se primetiti da mogućnost eliminisanja parametra t sledi iz postojanja familije $P(t)$ i činjenice da su funkcije $MV(m)$ i $MD(n)$ međusobno inverzne u tačkama niza $m = d(t)$ i $n = v(t)$ za $t = 1, 2, \dots$

Rad [27] sadrži eksperimentalno dobijene koeficijente, koji su redom jednaki 0.1507 i 3.53, za vodeće članove asimptotskog ponašanja funkcija $MV(m)$ i $MD(n)$. Medjutim, tačni koeficijenti ovih vodećih članova ([5]) su, sa tačnošću do na četvrtu decimalu jednaki 0.1511 odnosno 3.5242.

2.2.1. Neki bliski asimptotski rezultati

Neki asimptotski rezultati koji mogu da se povežu sa predhodnim, mogu da se nadju u radovima [18], [9] i [17]:

Klasičan Jarnikov rezultat ([18]) kaže da postoji zatvorena konveksna kriva C dužine m (u smislu euklidske metrike), tako da broj digitalnih tačaka na C nije manji od

$$\frac{3}{(2\pi)^{1/3}} m^{2/3} + O(m^{1/3}) \quad (**)$$

Bilo bi interesantno uporediti koeficijente vodećih članova formule (*) za $MV(m)$ iz uvoda ove Glave i formule (**). Oni su približno jednaki 3.52 odnosno 1.63. S druge strane, (euklidska) dužina obima optimalnog d.k.p. iz niza $P(t)$ pripada otvorenom intervalu $(2\sqrt{2}m, 4m)$, gde je $m = d(t)$; stranice ovog poligona pripadaju oblasti između stranica kvadrata M veličine $m \times m$ i stranica kvadrata čija su temena središnje tačke stranica M (isto važi za sve d.k.p. sa dijametrom m i četiri jednaka luka). Tako Jarnikov rezultat implicira da koeficijent vodećeg člana za $MV(m)$ pripada intervalu $((2\sqrt{2})^{2/3} \cdot 1.63, 4^{2/3} \cdot 1.63) \approx (3.25, 4.10)$, što je u saglasnosti sa (*).

Balog i Baranyi (Barany) su ocenili u [9] broj $N(m)$, digitalnih tačaka konveksnog omotača, skupa digitalnih tačaka koji pripada unutrašnjosti kruga prečnika m . Oni su dokazali da je $C_1 m^{2/3} \leq N(m) \leq C_2 m^{2/3}$ za dovoljno veliko m i za pogodne konstante $0 < C_1 \leq C_2$. Tako funkcije $N(m)$ i $MV(m)$ imaju isti red veličine ($\sim m^{2/3}$), mada definicija $N(m)$ sadrži jedno pojačanje i jedno oslabljenje u odnosu na $MV(m)$: sva temena moraju da pripadaju unutrašnjosti kruga, ali su trojke kolinearnih tačaka dozvoljene.

Formula (*) se koristi u [17] za izvodjenje donje granice za ukupan broj $D(m)$ digitalnih konveksnih poligona (poligoni sa dozvoljenim trojkama kolinearnih temena), koji mogu da se upišu u $m \times m$ -mrežu.

Ta donja granica je dobijena prebrajanjem podskupova skupa čvorova optimalnih d.k.p. sa $MV(m)$ čvorova. Gornja granica istog reda veličine je takodje izvedena; to ima za posledicu da je $C_1 m^{2/3} \leq \log_2 D(m) \leq C_2 m^{2/3}$ za $m \geq 2$ i za neke pozitivne konstante $C_1 < C_2$.

2.3 (Ne)gridi optimalna rešenja

Cilj ovog poglavlja je da se dokaže da je $MD(n)$ strogo veće od gridi donje granice $gdg(n)$ za sve one vrednosti n , za koje nije poznata konstrukcija digitalnih konveksnih

n -touglova za koju je $MD(n) = gdg(n)$. Preciznije, u ovom poglavlju će se dati svi nedostajući dokazi za Korak 1.

2.3.1. Bazična b -torka: definicija 1

Konstrukcija optimalnih d.k. n -touglova za $n \bmod 4 \neq 0$ je komplikovanija jer se lukovi ne mogu tretirati na simetričan način. Do nekog stepena konstrukcija može da se odvija simetrično, ubacivanjem po četiri stranice sa istim nagibom u četiri luka (u svaki luk po jedna stranica). Međutim, preostaje nekih b stranica ($(n - b)$ je deljivo sa 4) sa osobinom da se njihovi nagibi ne koriste u sva četiri luka. Upravo to su stranice koje čine takozvanu Bazičnu b -torku. U opštem slučaju ove stranice ne mogu da se spoje (svaka stranica ostaje u svom luku) tako da čine (zatvoreni) d.k. b -tougao.

Biće korišćene dve različite definicije Bazične b -torke. Prva se koristi za dokaze nemogućnosti dostizanja $gdg(n)$ u specijalnim Slučajevima 4, 5 i 6 Teoreme 1. Da bi se mogao koristiti dokaz kontradikcijom hipoteza o postizanju $gdg(n)$ je ugrađena u definiciju 1. Druga definicija (sekcija 2.4.1) se koristi za direktnu konstrukciju optimalnih d.k. n -touglova ([20]) za sve vrednosti n , koje nisu deljive sa 4. Ova definicija uključuje skup dovoljnih uslova za Bazičnu b -torku (bez zahteva da se postigne $gdg(n)$).

Definicija 1. Neka P označava d.k. n -tougao sa dijametrom jednakim $gdg(n)$. Bazična b -torka B , određena sa P , se sastoji od svih onih stranica P , čiji se nagibi pojavljuju u najviše tri luka P . Preostale stranice P mogu da se skupe u Inicijalni $(n - b)$ -ugao I , koji je dakle takodje određen sa P .

Primedba. Može da se uoči da je gridi pristup ugrađen u definicije B i I , s obzirom da polazni d.k. n -tougao P , postiže gridi donju granicu $gdg(n)$.

Kroz preostali deo ove sekcije,

– P će označavati d.k. n -tougao sa dijametrom jednakim $gdg(n)$.

Neke lokalne definicije

Neka $MK(B)$ označava minimalni (digitalni) kvadrat (sa stranicama paralelnim koordinatnim osama) opisan oko Bazičnog b -tougla B . Dijametar B (skraćeno $dijam(B)$) je dužina stranice $MK(B)$. Oznake $dijam(P)$ i $dijam(I)$ su analogne.

Projekcija stranice B je ortogonalna projekcija te stranice na stranicu $MK(B)$, koja je pridružena odgovarajućem luku.

Minimalna moguća dužina stranice $MK(B)$ je jednaka $ZD(B) = \lceil \frac{1}{4} \cdot \sum_{e \in B} bdd(e) \rceil$

($ZD(B)$ je skraćenica za *zahtevani dijametar*).

Svaka b -torka B koristi toleranciju *korišćena tolerancija* $KT(B)$, koja može da se izrazi u terminima odstupanja od $bdd = t$:

$$KT(B) = \sum_{\substack{e \in B \\ bdd(e) > t}} (bdd(e) - t) + \sum_{\substack{q/p \text{ in } B \\ p+q < t}} (4 - a(B, p, q)) \cdot (t - (p + q)),$$

gde je e neka stranica B , a q/p je nagib neke stranice B , dok je $a(B, p, q)$ iz skupa $\{1, 2, 3\}$ i označava broj lukova B , koji sadrže stranicu sa nagibom q/p .

Greška zaokruživanja $GZ(n)$ izraza za $gdg(n)$ je data preko formule

$$GZ(n) = 4 \cdot \left\lceil \frac{n \cdot t}{4} \right\rceil - n \cdot t.$$

Preostala tolerancija $PT(B)$ je dužina dela obima kvadrata $MK(B)$, koji nije pokriven sa projekcijama stranica B ; $PT(B)$ je s druge strane jednaka grešci zaokruživanja u izrazu za $ZD(B)$.

Kombinacija bd-dužina stranica Bazične b -torke B je suma koja se sastoji od dva tipa sabiraka. Sabirci oblika $u * w[t - i]$, $i = 0, 1, 2$, znače da B koristi u različitih nagiba sa $bdd = t - i$, i svaki od ovih nagiba se koristi tačno u w lukova. Sabirci oblika $u(t + i)$, $i = 0, 1, 2$, znače da B ima u stranica sa $bdd = t + i$. Ako je bilo koji od brojeva u ili w jednak 1, on se izostavlja.

Kada je poznata kombinacija koja odgovara B , vrednosti $ZD(B)$, $KT(B)$ i $PT(B)$ će biti skraćeno redom zapisane sa ZD , KT , PT . Slično će se i $GZ(n)$ često označavati sa GZ .

Može da se primeti da kombinacija jedinstveno određuje ZD i KT :

Primer. Neka je data kombinacija bd-dužina stranica Bazične 9-torke, $3[t - 1] + 3[t] + 2[t] + (t + 1)$ za $t = 6$ (kombinacija 1) Teoreme 4 niže), tada su ZD i KT :
 $ZD = \left\lceil \frac{3 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 7}{4} \right\rceil = 13$ i $KT = 1 + 1 = 2$; sabirak 1 odgovara odgovara redom sabircima $(t + 1)$ i $3[t - 1]$ kombinacije.

2.3.2. Dokazi

Razlozi za nejednakost $MD(n) > gdg(n)$ u Slučajevima 4, 5 i 6 Teoreme 1 će biti u nekoliko reči skicirani:

Slučajevi 4 i 5 se odnose na situacije kada se n razlikuje za samo 1 od neke vrednosti $v(s)$ – za neko $s \in N$, dok je GZ samo 1; ovakve činjenice ostavljaju "mali prostor" za smeštanje potrebne Bazične b -torke B . Slučaj 6 je jedini od šest izuzetih slučajeva u Teoremi 1 kod koga je $GZ = 2$. Medjutim, veoma je siromašan izbor nagiba koji odgovaraju intervalu $(v(5), v(6))$. Jedine mogućnosti za nagibe su $1/5$ i $5/1$, i obe su nepodesne za pravljenje približno jednakih suma projekcija stranica B na stranice $MK(B)$.

Predpostavka da postoji Bazična b -toraka B , koja odgovara d.k. n -touglu sa dijametrom $gdg(n)$ – dovodi do kontradikcije u svakom od Slučajeva 4, 5, 6. Preciznije, biće dat dokaz kontradikcijom za svaku moguću kombinaciju bd-dužina stranica B . Ovih mogućnosti ima 3, 4, odnosno 12 u razmatranim slučajevima.

Prvo će biti dokazane dve leme, koje će se koristiti u dokazima koji slede:

Lema 2. Ako Bazična b -toraka B odgovara digitalnom konveksnom n -tougalu P , onda su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. $(n - b) \bmod 4 = 0$;
2. $dijam(B) = ZD(B)$;
3. $KT(B) \leq GZ(n)$.

Dokaz. Uslov 1 sledi iz definicije Bazične b -torke. U nastavku ce biti dat zajednički dokaz za tvrdjenja 2 i 3:

Neka s_i^i , $i = 1, 2, 3, 4$ označava broj nagiba sa bd-dužinom $t - i$, koji se koriste u B i neka je s_1 suma s_i^i 'ova.

Ako su uslovi 2 i 3 zadovoljeni, onda je

$$\begin{aligned}
 \text{dijam}(B) &\stackrel{2.}{=} \lceil \frac{1}{4} \cdot \sum_{e \in B} \text{bdd}(e) \rceil = \lceil \frac{1}{4} (b \cdot t + \sum_{\substack{e \in B \\ \text{bdd}(e) \neq t}} (\text{bdd}(e) - t)) \rceil = \\
 &= \lceil \frac{1}{4} (b \cdot t + \sum_{\substack{q/p \text{ in } B \\ p+q < t}} 4 \cdot (p+q-t) + \sum_{\substack{q/p \text{ in } B \\ p+q < t}} (a(B,p,q) - 4) \cdot (p+q-t) + \\
 &\quad + \sum_{\substack{e \in B \\ \text{bdd}(e) > t}} (\text{bdd}(e) - t)) \rceil = \lceil \frac{1}{4} (b \cdot t - 4 \cdot \sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot i + KT(B)) \rceil = \\
 &= - \sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot i + \lceil \frac{b \cdot t + KT(B)}{4} \rceil \stackrel{3.}{=} - \sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot i + \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil.
 \end{aligned}$$

Ako nisu zadovoljeni uslovi 2 i 3, onda predhodno izvodjenje implicira da je $\text{dijam}(B) > - \sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot i + \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil$. Dalje se uočava

$$\text{dijam}(I) = d(t-1) - \sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot (t-i) + \frac{n-b-v(t-1)}{4} \cdot t + s_1 \cdot t.$$

S obzirom da se d.k. n -tougao P može predstaviti kao zbir Minkovskog ([15]) B i I . To implicira da ako bilo koji od dva uslova 2 ili 3 nije zadovoljen:

$$\begin{aligned}
 \text{dijam}(P) &= \text{dijam}(I) + \text{dijam}(B) > \\
 &> d(t-1) + \frac{n-b-v(t-1)}{4} \cdot t + \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil = d(t-1) + \lceil \frac{(n-v(t-1)) \cdot t}{4} \rceil = \text{gdg}(n),
 \end{aligned}$$

što je kontradikcija sa zahtevanim dijametrom $\text{dijam}(P) = \text{gdg}(n)$. \square

Lema koja sledi zajedno sa nejednakošću $KT(B) \leq GZ(n)$, daje strogu restrikciju kombinacija bd-dužina stranica B . Lema sadrži neke gornje granice, koje će se koristiti za dokazivanje kompletnosti listi kombinacija u kasnijim teoremama. Na ovaj način je moguće napraviti iscrpno pretraživanje skupa mogućih kombinacija bd-dužina.

Neka je data Bazična b -torka B , i neka e_1, e_2, e_3 redom označavaju broj stranica e koje se koriste u B , i zadovoljavaju da je $\text{bdd}(e) < t$, $\text{bdd}(e) = t$ odnosno $\text{bdd}(e) > t$. Slično neka s_1, s_2, s_3 redom označavaju broj nagiba q/p koji se koriste u B , i zadovoljavaju da je $p+q < t$, $p+q = t$ odnosno $p+q > t$.

Lema 3. Neka je za neko $t > 1$ $n = v(t-1) + g < v(t)$. Ako Bazična b -torka B odgovara d.k. n -touglu P , tada su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. $e_2 + e_3 \leq GZ + g$;
2. $b \leq 4 \cdot GZ + g$;
3. $s_1 + s_2 \leq \phi(t) - \frac{g-b}{4}$;
4. $b \leq 4 \cdot GZ + 3 \cdot (4 \cdot \phi(t) - g)$;
5. $b \leq 3 \cdot (\phi(t) + GZ)$.

Dokaz. Ako su izabrane stranice poligona P strogo u skladu sa sa gridi principom, onda P ima svih $v(t-1)$ stranica sa $bdd < t$ i g stranica sa $bdd = t$.

Moguća odstupanja od strogog gridi pristupa dozvoljava greška zaokruživanja $GZ(n)$. Koristeći nejednakost $KT(B) \leq GZ(n)$, dobija se da su moguće dve ekstremne situacije za odstupanje:

- a) Nekih GZ stranica sa $bdd < t$ nedostaju u P ; treba uočiti da je GZ maksimalan moguć broj takvih nedostajućih stranica i da se on ostvaruje kada kombinacija bdd -dužina koja je pridružena B sadrži sabirak $GZ * 3[t-1]$.
- b) Poligon P ima GZ stranica sa $bdd > t$; GZ je maksimalan broj takvih stranica i on se postiže kada kombinacija koja je pridružena B sadrži sabirak $GZ(t+1)$.

Dokaz 1. Neka x označava broj stranica sa $bdd < t$, koje se ne koriste u P . Dokazaće se nejednakost $e_2 + e_3 \leq x + g$. Kako tvrdjenje a) implicira da je $x \leq GZ$, zahtevana nejednakost sledi iz poslednja dva.

Pretpostavimo suprotno, da je $e_2 + e_3 > x + g$. Broj stranica poligona P ne može biti manji od $(v(t-1) - x) + (e_2 + e_3)$; prva zagrada odgovara broju stranica poligona P sa $bdd < t$, dok druga odgovara broju stranica B sa $bdd \geq t$. Naša pretpostavka daje $v(t-1) - x + e_2 + e_3 > v(t-1) + g = n$, tako je broj stranica P veći od n , što je kontradiktorno.

Dokaz 2. Tvrdjenje a) implicira da je $e_1 \leq 3 \cdot GZ$. Uz korišćenje uslova 1. se dobije da je $b = e_1 + e_2 + e_3 \leq e_1 + GZ + g \leq 4 \cdot GZ + g$.

Dokaz 3. Pretpostavimo suprotno, da je $s_1 + s_2 > \phi(t) - \frac{g-b}{4}$. Broj stranica poligona P ne može biti veći od $(v(t-1) - 4 \cdot s_1) + 4 \cdot (\phi(t) - s_2) + b$. Naime, prva dva sabirka su maksimalni moguć broj stranica sa $bdd < t$, odnosno sa $bdd = t$, koji se ne koriste u B i koji mogu da se koriste u P . Naša pretpostavka daje $4 \cdot (\phi(t) - s_2) < 4 \cdot s_1 + g - b$. Ovo implicira da je $v(t-1) - 4 \cdot s_1 + 4 \cdot (\phi(t) - s_2) + b < v(t-1) + g = n$, i tako je broj stranica poligona P manji od n , što je kontradiktorno.

Dokaz 4. Kako B ima najviše tri stranice sa istim nagibom, tvrdjenje b) implicira da je $b \leq 3 \cdot (s_1 + s_2) + e_3 \leq 3 \cdot (s_1 + s_2) + GZ$. Dokaz se kompletira zamenom $s_1 + s_2$ u skladu sa uslovom 3.

Drugi dokaz tvrdjenja 4 može da se izvede zamenom $s_1 + s_2$ u skladu sa nejednakošću $s_1 + s_2 \leq 4 \cdot \phi(t) - g + GZ$. Leva strana je minimalni broj stranica sa $bdd \leq t$, koje mogu biti izostavljene u P . Strogi gridi pristup zahteva da tačno $4 \cdot \phi(t) - g$ ovakvih stranica bude izostavljeno. Kako najviše GZ stranica sa $bdd > t$ sme da se koristi u P , ukupan broj stranica sa $bdd \leq t$, koje smeju da se izostave iz P , ne može biti veći od $4 \cdot \phi(t) - g + GZ$.

Dokaz 5. Ova gruba nejednakost može da se izvede ako se primeti da je $e_2 \leq 3 \cdot \phi(t)$ (B ima najviše tri stranice sa istim nagibom). S druge strane, maksimalni moguć broj stranica B sa $bdd \neq t$ je $3 \cdot GZ$; ovaj broj se dobija kada se stranice biraju po tvrdjenju a), t.j. kada je $e_1 = 3 \cdot GZ$ i $e_3 = 0$. Tako je $b \leq 3 \cdot (\phi(t) + GZ)$. \square

U cilju da se pojednostave dokazi teorema koje slede, uvešće se dodatne pomoćne oznake i skraćenice:

t -stranice su one čiji je $bdd = t$. pd je projekcijska dužina, dok d - pd označava projekciju dužine d (prva se oznaka odnosi na broj, dok se druga odnosi na duž).

Dužina l će označavati "deo (koji se sastoji od jedne ili više duži) (ukupne) dužine l obima $MK(B)$ ".

Potkovica na t je trojka t -stranica Bazične b -torke B sa istim nagibom. Ove stranice pripadaju trima različitim lukovima B ; jedan je *srednji* i dva su *periferna*. Dve stranice $MK(B)$, koje su pridružene srednjem luku su nazvane *unutrašnje*, dok su druge dve nazvane *spoljašnje*. Zbir pd -ova stranica potkovica na t na unutrašnjim stranicama $MK(B)$ – je jednak t . Štaviše, kažemo da potkovica *ostavlja* na svakoj unutrašnjoj stranici dužinu od $ZD - t$, nepokrivenu projekcijama stranica potkovice.

Sledeće tri teoreme redom impliciraju da je $MD(n)$ veći od $gdg(n)$ u Slučajevima 4, 5 i 6 Teoreme 1.

Teorema 2 . Ako je $n = v(4k + 2) + 1$ za neko $k > 0$, onda ne postoji Bazična b -torka B , koja odgovara digitalnom konveksnom n -toughlu sa dijametrom $gdg(n)$.

Dokaz. Kako je $t = 4k + 3$, sledi da je

$$GZ = 4 \cdot \left\lceil \frac{(v(4k + 2) + 1) \cdot (4k + 3)}{4} \right\rceil - (v(4k + 2) + 1) \cdot (4k + 3) = 4 \cdot \left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil - 3 = 1.$$

Sledeća lista je lista svih mogućih kombinacija za bd -dužine u ovom slučaju:

	kombinacija	PT	ZD
a)	t	1	$k + 1$
b)	$t + 1$	0	$k + 1$
c)	$3[t - 1] + 2t$	0	$5k + 3$

Dokaz kompletnosti liste kombinacija:

Uslov 2 Leme 3 daje da je $b \leq 5$. Ako je $b = 1$, onda $KT \leq 1$ daje da su a) i b) jedine mogućnosti. Ako je $b = 5$, onda $e_2 + e_3 \leq 2$ (uslov 1 Leme 3) implicira da je $e_1 \geq 3$. Tako $KT \leq 1$ ostavlja c) kao jedinu mogućnost za 5-torku.

Kontradikcije za sve predložene kombinacije:

a), b): Minimalni moguć dijametar za samo jednu u -stranicu je $\lceil \frac{u}{2} \rceil$, što je veće od $ZD = \lceil \frac{u}{4} \rceil$ za $u > 2$.

c): Potkovica na $t - 1 = 4k + 2$ ostavlja dužinu $k + 1$ na svakoj od unutrašnjih stranica. $PT = 0$ implicira da se nagibi $(k + 1)/(3k + 2)$ i $(3k + 2)/(k + 1)$ moraju koristiti na perifernim lukovima. Ovo implicira da je nagib korišten u potkovica $(2k + 1)/(2k + 1)$, što je kontradiktorno kad god je $k > 0$. Vrednost $k = 0$ daje Bazičnu 5-torku, koja može da se koristi za postizanje $gdg(9)$. □

Teorema 3 . Ako je $n = v(4k + 1) - 1$ za neko $k > 0$, onda ne postoji Bazična b -torka B , koja odgovara digitalnom konveksnom n -toughlu sa dijametrom jednakim $gdg(n)$.

Dokaz. Kako je $t = 4k + 1$, sledi da je

$$GZ = 4 \cdot \left\lceil \frac{(v(4k + 1) - 1) \cdot (4k + 1)}{4} \right\rceil - (v(4k + 1) - 1) \cdot (4k + 1) = 4 \cdot \left\lceil \frac{-1}{4} \right\rceil + 1 = 1.$$

Lista mogućih kombinacija je:

	kombinacije	PT	ZD
a)	$3[t - 1]$	0	$3k$
b)	$3[t]$	1	$3k + 1$
c)	$2[t] + (t + 1)$	0	$3k + 1$
d)	$2 * 3[t] + (t + 1)$	0	$7k + 2$

Dokaz kompletности:

Uslov 4 Leme 3 daje da je $b \leq 7$, dok uslov 3 daje da je $s_1 + s_2 \leq 1$ za $b = 3$ i $s_1 + s_2 \leq 2$ za $b = 7$. Tako $KT \leq 1$ implicira da su a), b) i c) jedine mogućnosti za $b = 3$. Kako se najviše tri stranice sa istim nagibom smeju koristiti u B , imamo da je $e_1 + e_2 \leq 6$ i $e_3 \geq 1$ za $b = 7$. $KT \leq 1$ implicira da je $e_3 = 1$ i $e_1 = 0$. \square

Kontradikcije:

a), b): Zbir pd'sova stranica potkovice na unutrašnjoj stranici $MK(B)$ je za $k > 0$ veći od ZD .

c): Ako dve t -stranice pripadaju susednim lukovima, tada imamo za $k > 0$ istu kontradikciju kao kod a) i b). Ako ove dve stranice pripadaju naspramnim lukovima one su paralelene. To se ne slaže sa zahtevom da je B trougao (posledica toga je da je $PT = 0$).

Kada je $k = 0$ to daje Bazičnu 3-jku (t.j. trougao), koji postiže $gdg(3)$.

d): Dve potkovice na t moraju se pružati suprotno jedna drugoj: inače bi postojala zajednička unutrašnja stranica $MK(B)$. Zbir pd'esova ovih t -stranica na toj zajedničkoj stranici bi bio $2t$, što je za $k > 0$ veće od ZD . To sledi da je zbir pd'sova t -stranica na dve unutrašnje stranice svake od potkovic – jednak $3t$ ($2t$ odgovara stranicama jedne potkovice i t stranicama druge). Neka S_1 i S_2 predstavljaju ukupan zbir pd'esova stranica B na unutrašnjim stranicama ove dve potkovice. Kako je $PT = 0$, i S_1 i S_2 moraju biti jednaki $2 \cdot ZD$.

Neka je q/p nagib jedine $(t+1)$ -stranice e . Ako e pripada srednjem luku neke od potkovic, tada jedna od suma S_1 i S_2 postaje jednaka $4t+1$, dok druga ostaje $3t$, što je kontradiktorno. Ako, međutim, e pripada zajedničkom perifernom luku potkovic, tada sume postaju redom jednake $3t+p$ odnosno $3t+q$, što implicira da je $p=q$, što je kontradiktorno za $p > 1$ (t.j., za $k > 0$). \square

Teorema 4 . Ako je $n = 45$, onda ne postoji Bazična b -torka B , koja odgovara digitalnom konveksnom 45-touglu sa dijametrom jednakim $gdg(45) = 45$.

Dokaz. Kako je $v(5) = 40$ i $v(6) = 48$, $t = 6$.

Tako je $GZ = 4 \cdot \left\lceil \frac{45 \cdot 6}{4} \right\rceil - 45 \cdot 6 = 4 \cdot 68 - 270 = 2$.

Lista kombinacija je:

	kombinacije	PT	ZD
a)	$3[t] + 2[t]$	2	8
b)	$4t + (t + 1)$	1	8
c)	$4t + (t + 2)$	0	8
d)	$3t + 2(t + 1)$	0	8
e)	$3[t - 1] + 2[t]$	1	7
f)	$3[t - 1] + t + (t + 1)$	0	7

	kombinacije	PT	ZD
g)	$2[t - 1] + 3[t]$	0	7
h)	$3[t - 2] + 2[t]$	0	6
i)	$2 * 3[t - 1] + 3[t]$	0	12
j)	$3[t - 1] + 2 * 3[t]$	1	13
k)	$3[t - 2] + 2 * 3[t]$	0	12
l)	$3[t - 1] + 3[t] + 2[t] + (t + 1)$	0	13

Primedba. Akom bi se broj različitih nagiba t -stranica nabrajao posebno, onda bi se svaka od kombinacija **b)**, **c)** i **d)** razbila na dve kombinacije.

Dokaz kompletnosti:

Kombinacije za $b = 1$ su izostavljene; one propadaju iz istih razloga kao i kombinacije **a)** i **b)** u Teoremi 2. Uslov 5 Leme 3 daje da je $b \leq 12$, tako da $b \in \{5, 9\}$. Ako je $b = 5$, kako je $\phi(6) = 2$, uslov 3 Leme 3 daje $s_1 + s_2 \leq 2$. Kompletnost podliste kombinacija za 5-torke (kombinacije **a)**–**h)**) sledi iz ove činjenice kao i iz činjenice da je $KT \leq 2$.

Ako je $b = 9$, onda uslov 3 Leme 3 daje $s_1 + s_2 \leq 3$. Štaviše, to daje da je $s_1 + s_2 = 3$, inače bi $e_1 + e_2 \leq 6$ impliciralo $e_3 \geq 3$, što je kontradiktorno sa $KT \leq 2$. Dalje, iz $s_2 \leq \phi(6) = 2$ (ovo takodje može biti dokazano iz $e_2 + e_3 \leq 7$ (uslov 1 Leme 3)), imamo $s_1 > 0$. Tako se sada jedina mogućnost za devetorku dobija kada se uzme u obzir granična vrednost za KT .

Kontradikcije:

a): Potkovića ostavlja nepokrivenu dužinu 2 na njenim unutrašnjim stranicama. Kako je $PT = 2$, najmanje dužina 2 od ukupne nepokrivenosti dužine 4 mora da se pokrije sa pd 1 koja odgovara drugom nagibu (koji se ne koristi u potkovići). U cilju prevazilaženja ovog problema, ili će se taj nagib koristiti u srednjem luku ili na oba periferijska luka potkoviće. Obe mogućnosti ostavljaju na nekoj od unutrašnjih stranica potkoviće dodatnu projekcijsku dužinu 5. Ovo čini da je $diam(B) \geq 11 > ZD$, što je nemoguće.

b), c): Sem jedne stranice sa $bdd > 6$, sve ostale pd-e su ili 5 ili 1. To ima za posledicu da su jedine pd-e na neke dve (susedne) stranice $MK(B)$ 5 ili 1. Jedina dozvoljena particija ovih pd-a na tim stranicama je $8 = 5 + 1 + 1 + 1$. Kako ove 6-stranice mogu imati najviše dve pd-e 1 na stranici $MK(B)$, ostaje dužina ne manja od 2 nepokrivena na tim stranicama, što je kontradiktorno sa $PT < 2$.

d): Dve 7-stranice moraju pripadati suprotnim lukovima jer bi inače postojala (analogno kao kod **b)** i **c))** stranica $MK(B)$ kod koje bi bila nepokrivena dužina 1, što je kontradiktorno sa $PT = 0$. Prvo ćemo pokazati da postoji takva stranica s kvadrata $MK(B)$, kod koje je jedina projekcija 6-stranica na nju jednaka 5-pd.

Ako to ne bi bio slučaj, onda bi svaka od 5-pd-a 6-stranica pripadala istoj stranici $MK(B)$ zajedno sa jednom pd 1 od 6-stranica. To bi imalo za posledicu da postoji stranica $MK(B)$ kompletno pokrivena sa projekcijama dve 7-stranice ($ZD > 6$ implicira da neka pd jedne 7-stranice ne može kompletno pokriti stranicu $MK(B)$). To je nemoguće, s obzirom da 7-stranice pripadaju suprotnim lukovima.

7-stranica susedna stranici s treba da napravi 3-pd na s te ima nagib $3/4$ ili $4/3$. To znači da 4-pd postoji na nekoj stranici $MK(B)$ susednoj s . Preostala dužina 4 na toj stranici ne može kompletno da se pokrije sa projekcijama 6-stranica (najviše sa može pokriti dužina 1+1).

e): Potkovića na 5 ostavlja dužinu 2 na svakoj od njenih unutrašnjih stranica. S druge strane, kao i kod završnog dela dokaza za kombinaciju **a)**, postoji 6-stranica koja ima 5-pd na unutrašnjoj stranici, što je kontradiktorno.

f): Potkovića na 5 opet ostavlja dužinu 2 na svakoj od njenih unutrašnjih stranica; tako se 6-stranica i 7-stranica ne mogu koristiti u srednjem luku. 7-stranica može da ima 2-pd na unutrašnjoj stranici, ali 6-stranica ne može, što je kontradiktorno sa $PT = 0$.

g): Potkovića na 6 ostavlja dužinu 1 na svakoj od njenih unutrašnjih stranica. Jedina mogućnost da se kompletno pokriju ove stranice projekcijama je da se koriste oba nagiba

1/4 i 4/1, međutim samo jedan od njih je dozvoljen.

h): Potkovica na 4 ostavlja dužinu 2 na svakoj od njenih unutrašnjih stranica. Srednji luk potkovice ne može imati 6–stranicu. Kako 6–stranica ne može imati 2–pd, imamo kontradikciju sa $PT = 0$.

i): Potkovica na 6 ostavlja dužinu 6 na svakoj od njenih unutrašnjih stranica. Postoji spoljašnja stranica $MK(B)$, tako da je jedina projekcija 6–stranica na tu stranicu 1–pd. Maksimalna moguća suma pd-a 5–stranica na toj stranici je 10 (maksimum se postiže kada je ta stranica unutrašnja stranica za obe potkovice na 5). Tako ipak ostaje dužina 1 nepokrivena sa projekcijama, to je kontradiktorno sa $PT = 0$.

j), k): Potkovica na 5 (odnosno 4) ostavlja dužinu 8 na svakoj od njenih unutrašnjih stranica. Ove dužine treba da se pokriju sa projekcijama 6–stranica. Jedine moguće pd-e su 5 i 1, i najviše dve pd-e 1 smeju da se koriste za pokrivanje jedne stranice $MK(B)$. Sledi da dužina na unutrašnjim stranicama koja ostaje nepokrivena projekcijama, nije manja od $2 = 1+1$, što je kontradiktorno sa $PT < 2$.

l): Potkovica na 5 ostavlja opet dužinu 8 na svakoj od njenih unutrašnjih stranica. 7–stranica mora pripadati srednjem luku, inače je kontradikcija sa $PT = 0$, slično kao kod kombinacija j) i k). 7–stranica ima ili 4–pd, ili 5–pd, ili 6–pd. Preostale dužine koje bi u tim slučajevima trebale da se pokriju sa projekcijama 6–stranica su redom 4, 3 i 2. Kako su jedine mogućnosti za pd-e 5 i 1, i najviše dve pd 1 smeju da se koriste za pokrivanje jedne stranice $MK(B)$, jedina mogućnost koja preostaje ima sledeći izgled: 7–stranica sa nagibom 1/6 ili 6/1 pripada srednjem luku, i dužine 2 i 7 na unutrašnjim stranicama treba da se pokriju projekcijama 6–stranica. Sledi da je potrebno četiri pd-e 1 i jedna 5–pd za pokrivanje obe unutrašnje stranice. To ima za posledicu da se oba nagiba 1/5 i 5/1 koriste u srednjem luku, što implicira da najmanje dve 5–pd-e 6–stranica moraju pasti na unutrašnju stranicu, što je kontradiktorno. \square

Konačno, može da se izvede završno tvrdjenje uz korišćenje definicije Bazične b -torke i Teorema 2-4:

Teorema 5 . (Slučajevi 4-6) Ne postoji digitalni konveksni n -tougao sa dijametrom $gdg(n)$ za $n = 45$ i za n oblika $v(4k+2)+1$ ili $v(4k+1)-1$, za proizvoljno $k > 0$.

Predhodna teorema zajedno sa sledeće dve pokriva sve Slučajeve Teoreme 1. Preciznije, ove tri teoreme određuju sve n za koje je $MD(n) > gdg(n)$.

Teorema 6 . (Slučaj 1, [7]) Ako je n neparno i t je deljivo sa 4 onda je $MD(n) > gdg(n)$.

Teorema 7 . (Slučajevi 2 i 3, [6]) Ne postoji digitalni konveksni n -tougao sa dijametrom $gdg(n)$ za n oblika $v(2k-1)+2$ ili $v(2k)-2$, za proizvoljno $k > 1$.

Dokaz Teoreme 5 (za Slučajeve 4-6) je složeniji od dokaza teorema 6 i 7. Jedan od razloga koji otežavaju dokaz teoreme 5 je činjenica da je $GZ(n) > 0$; to čini broj situacija koje treba da se razmatraju daleko većim.

2.4 Konstrukcija optimalnih rešenja

U ovom poglavlju će biti dat završni korak u dokazu da je tvrdjene prikazano Teoremom 1 istinito. Preciznije ovde će biti data tačna konstrukcija optimalnih digitalnih konveksnih poligona. Većina (7/8 svih mogućih situacija) optimalnih digitalnih konveksnih n -touglova ima dijametar jednak donjoj granici za dijametar $gdg(n)$, dok svi ostali optimalni digitalni n -touglovi (oni su razvrstani po slučajevima od Slučaja 1 do Slučaja 6 u glavnoj Teoremi 1) imaju dijametar $gdg(n) + 1$. Optimalnost digitalnih konveksnih poligona za koje je u ovom poglavlju konstruisan dijametar $gdg(n) + 1$ sledi iz tvrdjenja Teorema 5, 6 i 7, predhodnog poglavlja, u kome je pokazano da ne postoje digitalni konveksni poligoni, za date n -ove, koji bi imali dijametar $gdg(n)$.

2.4.1. Lokalne definicije

$DK(p, q)$ označava digitalni kvadrat, sa stranicama paralelnim koordinatnim osama, sa osobinom da u svakom luku ima tačno jednu stranicu sa nagibom q/p , gde su p i q uzajamno prosti prirodni brojevi.

$MK(P)$ označava minimalni digitalni kvadrata, sa stranicama paralelnim koordinatnim osama, u koji se digitalni konveksni poligon P može upisati. *Projekcija* neke stranice d.k.p. P je ortogonalna projekcija stranice na stranicu $MK(P)$, koja nije "zaklonjena" sa P (tako svaka "kosa" stranica ima tačno dve projekcije). Rećićemo da stranica P koristi deo obima $MK(P)$ pokrivenog njenom (njenim) projekcijom (projekcijama).

Kroz ostali deo ovog poglavlja podrazumevaće se da broj stranica n , digitalnog konveksnog poligona, koji treba da konstruisemo tako da ima minimalan dijametar, pripada intervalu

$(v(t-1), v(t))$ za neki prirodni broj $t > 1$.

Stranice digitalnog konveksnog poligona P se mogu podeliti u dve klase, u zavisnosti od toga da li su njihovi nagibi prisutni u svakom od četiri luka ili ne. One stranice poligona P , čiji su nagibi prisutni u najviše tri luka, grade takozvanu *Bazičnu b-torku B*. Ponavljanja nagiba unutar B su dozvoljena, ali naravno ne unutar istog luka.

Preostale stranice poligona P grade takozvani *Inicijalni (n-b)-tougao I*. Postoji prirodna bijekcija, koja očuvava lukove između svih stranica I i svih onih stranica poligona P , kod kojih se njihovi nagibi koriste u sva četiri luka.

Da bi se moglo preći na konstrukciju optimalnih digitalnih konveksnih poligona, pojam Bazične b -torke se mora mnogo strožije definisati. Stoga uvodimo sledeću definiciju:

Definicija 2. [20] *Bazična b-torka B*, koja se koristi za konstrukciju optimalnog digitalnog konveksnog n -tougla, je kolekcija b stranica, particioniranih u odnosu na lukove, koja zadovoljava sledećih pet uslova:

Uslov 1. Svaki nagib može da se koristi u najviše tri različita luka B ;

(ovaj uslov služi minimiziranju broja stranica u B i očuvanju konveksnosti)

Uslov 2. $(n - b) \bmod 4 = 0$; (očigledno potreban uslov)

Uslov 3. $GZ(n) < KT(B) \leq GZ(n) + 4$, u Slučajevima 1,2,3
 $0 \leq KT(B) \leq GZ(n)$, inače

Oznake $GZ(n)$ i $KT(B)$ imaju sledeće značenje:

$$GZ(n) = 4 \cdot \left\lceil \frac{n \cdot t}{4} \right\rceil - n \cdot t.$$

$$KT(B) = \sum_{\substack{e \in B \\ bdd(e) > t}} (bdd(e) - t) + \sum_{\substack{q/p \text{ in } B \\ p+q < t}} (4 - a(B, p, q)) \cdot (t - (p + q)),$$

gde je e stranica B , q/p je nagib koji se koristi u B , dok je $a(B, p, q)$ iz skupa $\{1, 2, 3\}$ i označava broj lukova B , koji sadrže stranicu sa nagibom q/p .

Uslov 4. Dužina stranice minimalnog digitalnog kvadrata $MK(B)$, sa stranicama paralelnim koordinatnim osama, tj. dužina dijametra B , (skraćeno, $dijam(B)$), u koga B može da se upiše je jednaka $\left\lceil \frac{1}{4} \cdot \sum_{e \in B} bdd(e) \right\rceil$;

Uslov 5. Broj $\phi(t) - s_2$, nagiba sa $bdd = t$, koji se ne koriste u B , nije manji od $z + (n - b - v(t - 1))/4$, gde je $z = \begin{cases} s_1 - 1 & , \text{ u Slučajevima 5 i 6} \\ s_1 & , \text{ inače} \end{cases}$,

gde s_1 (odnosno s_2) označava broj različitih nagiba sa $bdd < t$ (odnosno $bdd = t$), koji se koriste u B (svaki nagib sa $bdd < t$ korišten u B mora da se zameni nagibom sa $bdd = t$).

Inicijalni $(n - b)$ -tougao I pridružen Bazičnoj b -torki B je Minkovski suma $\frac{n - b}{4}$ različitih digitalnih kvadrata oblika $DK(p, q)$, koji zadovoljavaju:

- $p + q \leq t + 1$ za svaki od kvadrata $DK(p, q)$;
- nijedan od nagiba q/p se ne koristi u B ;
- ako se neki nagib q/p koristi u I , onda sa svi nagibi q'/p' koji se ne koriste u B i zadovoljavaju da je $q' + p' < q + p$ - koriste u I (gridi izbor nagiba I).

Kao posledica gridi pristupa, dobija se prednost stranica sa manjom bd-dužinom u I . S druge strane, kada se biraju stranice za B , optimalno je da se izaberu stranice sa $bdd = t$. Naime, svaka stranica u B sa $bdd > t$ zauzima svojom projekcijom veći deo obima $MK(P)$ nego što je minimalno moguće - što je u neskladu sa gridi pristupom. Takodje, prisutnost stranice sa $bdd < t$ u B znači da se najmanje jedna od preostale tri stranice sa istim nagibom ne može koristiti ni u B , ni u I - novi nesklad sa gridi pristupom.

Primedbe. Bazične b -torke dozvoljavaju neka odstupanja od gridi izbora stranica. Gornje funkcije $GZ(n)$ i $KT(B)$ se odnose na meru tih odstupanja:

Funkcija $GZ(n)$ je mera dozvoljenog odstupanja pod pretpostavkom da se $gdg(n)$ postiže; izvor ove tolerancije je greška zaokruživanja u formuli za $gdg(n)$.

Funkcija $KT(B)$ (korišćena tolerancija) je jednaka razlici sume bd-dužina stranica P i minimalne sume bd-dužina n stranica $Minsum(n)$. S druge strane, u terminima odstupanja od $bdd = t$, $KT(B)$ je mera odstupanja koja odgovara Bazičnoj b -torki B . Naime, kada biramo nagibe B , optimalno je da se biraju oni nagibi kod kojih je $bdd = t$:

Svaka stranica e b -torke B sa $bdd(e) = t + i$, $i = 1, 2, \dots$ daje odsupanje veličine i od gridi izbora stranica. Nijena od n stranica izabranih po gridi principu ne bi trebala da ima bd-dužinu veću od t , pa tako korišćenje stranice e uvećava minimalnu sumu bd-dužina za i .

S druge strane, gridi izbor n stranica pretpostavlja da su izabrane sve stranice sa $bdd < t$. Predpostavimo da se nekih $a(B, p, q)$ stranica sa nagibom q/p koji zadovoljava da je $p + q < t$ koristi u B . To znači da se nekih $4 - a(B, p, q)$ stranica sa istim nagibom ne može birati. Nedostatak ovih stranica može da se nadoknadi sa istim brojem stranica sa nagibom kod koga je $bdd = t$. Ovakva zamena stranica uvećava minimalnu sumu bd-dužina za $(4 - a(B, p, q)) \cdot (t - (p + q))$.

2.4.2. Konstrukcija poligona sa minimalnim dijametrom

Optimalno rešenje za $n \bmod 4 = 0$ i $n \in (v(t-1), v(t)]$ daje veoma loše približno rešenje za druge prirodne brojeve. Preciznije, greška koja se pravi je veličine $O(t)$ u odnosu na moguć optimalan (minimalan) dijametar. Još preciznije, ova greška je jednaka

$$MD(n) - MD(n-i) = \lfloor \frac{i \cdot t}{4} \rfloor - j,$$

gde je i iz skupa $\{1, 2, 3\}$, gde je $j = 0$ za $MD(n-i) = gdg(n-i)$ a inače je $j = 1$. Suboptimalni digitalni konveksni $(n-i)$ -tougao sa ovom greškom može da se dobije od optimalnog digitalnog konveksnog n -tougla (za n deljivo sa 4) zamenu nekih $(i+1)$ susednih stranica sa jednom odgovarajućom novom stranicom.

Optimalno rešenje za $n \equiv 0 \pmod{4}$ predstavlja konstrukciju optimalnog d.k. n -tougla P kao sumu Minkovskog od $n/4$ $DK(p, q)$ 'ta sa što je moguće manjim zbirom $p+q$ (gridi pristup). Preciznije, P sadrži svih $v(t-1)/4$ digitalnih kvadrata $DK(p, q)$ sa $1 \leq p+q < t$ i proizvoljnih $(n - v(t-1))/4$ $DK(p, q)$ sa $p+q = t$. Problem nastaje kada je $n \not\equiv 0 \pmod{4}$. U ovom slučaju, optimalni d.k. n -tougao P sadrži do nekog stepena, Minkovski sumu nekih s $DK(p, q)$, gde je $4s < n$. Ova suma je nazvana Inicijalnim poligonom (označen je sa I).

Preostalih $b = n - 4s$ stranica ne moraju da grade (zatvoren) b -tougao, i zbog toga se koristi termin "b-torka" (označene su sa B). Primetimo da B može da se koristi kao jedan sabirak sume Minkovskog (drugi bi bio I), i da je $MK(B)$ dobro definisan. Da bi P bio optimalan potrebno je da se stranice B smeste po lukovima na optimalan način, tako da redom četiri sume p_1, p_2, p_3, p_4 njihovih projekcija na severnu, zapadnu, južnu i istočnu stranicu $MK(B)$ - budu približno jednake.

Neka k_i , za $i = 1, 2, 3, 4$ označavaju redom dužine nepokrivenog dela (sa projekcijama stranica B) severne, zapadne, južne i istočne stranice $MK(B)$; to jest,

$$k_i = \max_{1 \leq j \leq 4} p_j - p_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Ako je dijametar poligona P jednak $gdg(n)$, tada gornje reči "približno jednake" odgovaraju zahtevu da suma k_i 'ova nije veća od greške zaokruživanja $GZ(n)$ u izrazu za donju granicu $gdg(n)$, za dijametar poligona P , to jest da nije veća od razlike između obima $MK(P)$ i $Minsum(n)$:

$$\sum_{i=1}^4 k_i \leq GZ(n) = 4 \cdot \left\lceil \frac{n \cdot t}{4} \right\rceil - n \cdot t = \text{obim } MK(P) - Minsum(n) .$$

Sada se može preći na opštu konstrukciju optimalnog digitalnog konveksnog n -tougla za $n \neq 0 \pmod{4}$ izraženu na formalniji način.

Optimalan d.k. n -tougao P se konstruiše iz Bazične b -torke B i pridruženog Inicijalnog $4s$ -tougla I ($b + 4s = n$) primenom sledeća dva koraka:

1. Konstrukcija Minkovski sume T od B i I ;
2. Zamena onih stranica T koje imaju nagib $0/1$ (jedinične "ravne" stranice) u i -tom luku ($i = 1, 2, 3, 4$ redom za SZ-, JZ-, JI- i SI-luk) sa redom stranicama čiji su nagibi $0/(k_i + 1)$.

Primedbe.

Linearan algoritam iz Poglavlja 6 je korišten za ovu konstrukciju.

Kada se ova konstrukcija primenjuje na specijalne slučajeve Teoreme 1, dijametar jednak $1 + gdg(n)$ se dobija na osnovu tri različita razloga. Izvor odstupanja od $gdg(n)$ (od "gridi dijametara") su familije Bazičnih b -torki u Slučajevima 1, 2, 3 ($KT(B) > GZ(n)$, videti Uslov 3) i Inicijalni poligoni u Slučajevima 5 i 6 (oni sadrže sabirke oblika $DK(p, q)$ sa $p + q = t + 1$, videti Uslov 5). Kada se konstrukcija primenjuje na specijalan Slučaj 4, Inicijalni poligoni ne sadrže (s obzirom da je b preveliko) sve sabirke oblika $DK(p, q)$ koji zadovoljavaju da je $p + q = t - 1$ i da se nagib q/p ne koristi u odgovarajućim elementima familije Bazičnih b -torki. Izuzev ovog slučaja Inicijalni poligon uvek sadrži sve nagibe sa $bdd < t$, koji zadovoljavaju uslov b). Familija Bazičnih 5-torki se koristi za Slučaj 4 (označena je sa $B_7(k)$, niže) za konstrukciju optimalnih d.k. $(v(t - 1) + 1)$ -touglova.

Valjanost gornje konstrukcije potvrđuje sledeći rezultat [20]:

Teorema 8 . *Dijametar digitalnog konveksnog n -tougla P , generisanog predloženom konstrukcijom je $MD(n)$. Drugim rečima, konstrukcija za datu Bazičnu b -torku B i Inicijalni $(n - b)$ -tougao I daje optimalni digitalni konveksni n -ougao P .*

Dokaz.

Neka s_i^i , $i = 1, 2, 3, 4$ (Uslov 3 ne dozvoljava $i > 4$) označava broj nagiba sa bd -dužinom jednakom $t - i$, koji se koriste u B . Prvo će se odrediti dijametar od I i B .

Na osnovu Uslova 5, $dijam(I) =$

$$= d(t-1) + \begin{cases} -(t-1), & \text{Slučaj 4} \\ -\sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot (t-i) + \frac{n-b-v(t-1)}{4} \cdot t + (x-1) \cdot t + (t+1), & \text{Sluč. 5, 6} \\ -\sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot (t-i) + \frac{n-b-v(t-1)}{4} \cdot t + x \cdot t, & \text{inače} \end{cases}$$

Na osnovu Uslova 4 i 3,

$$\begin{aligned} dijam(B) &= \lceil \frac{1}{4} \cdot \sum_{e \in B} bdd(e) \rceil = \lceil \frac{1}{4} (b \cdot t + \sum_{\substack{e \in B \\ bdd(e) \neq t}} (bdd(e) - t)) \rceil = \\ &= \lceil \frac{1}{4} (b \cdot t + \sum_{\substack{q/p \text{ in } B \\ p+q < t}} 4 \cdot (p+q-t) + \sum_{\substack{q/p \text{ in } B \\ p+q < t}} (a(B,p,q) - 4) \cdot (p+q-t) + \\ &\quad + \sum_{\substack{e \in B \\ bdd(e) > t}} (bdd(e) - t)) \rceil = \lceil \frac{1}{4} (b \cdot t - 4 \cdot \sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot i + KT(B)) \rceil = \\ &= -\sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot i + \lceil \frac{b \cdot t + KT(B)}{4} \rceil = -\sum_{i=1}^4 s_1^i \cdot i + \begin{cases} \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil + 1, & \text{Slučajevi 1,2,3} \\ \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil, & \text{inače} \end{cases} \end{aligned}$$

Sada je moguće odrediti dijametar P (treba primetiti da je $b = 5$ zamenjeno sa $n - v(t-1) + 4$ u Slučaju 4):

$$\begin{aligned} dijam(P) &= dijam(I) + dijam(B) = \\ &= d(t-1) + \begin{cases} \frac{n-b-v(t-1)}{4} \cdot t + \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil + 1, & \text{Slučajevi 1,2,3} \\ -t + 1 + \lceil \frac{(n-v(t-1)+4) \cdot t}{4} \rceil, & \text{Slučaj 4} \\ \frac{n-b-v(t-1)}{4} \cdot t + 1 + \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil, & \text{Slučajevi 5,6} \\ \frac{n-b-v(t-1)}{4} \cdot t + \lceil \frac{b \cdot t}{4} \rceil, & \text{inače} \end{cases} = \\ &= d(t-1) + \begin{cases} \lceil \frac{(n-v(t-1)) \cdot t}{4} \rceil + 1, & \text{Slučajevi 1,2,3,4,5,6} \\ \lceil \frac{(n-v(t-1)) \cdot t}{4} \rceil, & \text{inače} \end{cases} \end{aligned}$$

Ovo kompletira dokaz. \square

2.5 Bazične b-torke

Generisanje Bazičnih b -torki je razbijeno u odnosu na $(n \bmod 4)$ i $(t \bmod 4)$, gde je t određeno sa n . Motivacija za ovakvo razbijanje je sledeća: optimalni d.k. n -touglovi za $n = 0 \pmod{4}$ se konstruišu bez Bazičnih b -torki (pogledati početak sekcije 2.4.2), dok specijani Slučaj 1 iz Teoreme 1 nastaje kada je $t = 0 \pmod{4}$ (i $n = 1 \pmod{2}$).

U stvari, biće korišteno 17 familija Bazičnih b -torki, koje su označene sa $B_j(k)$, $1 \leq j \leq 17$; parametar k je linearno zavisano od t .

Svi prirodni brojevi $n \geq 3$, koji nisu deljivi sa 4, izuzev malih vrednosti $n = 3, 7, 9, 13, 15$ (male rupe u smislu definisanom niže u sekciji 2.5.2), su razdeljeni u 19 podskupova, koji će određivati 19 mogućih situacija.

Predloženih 17 familija je bilo dovoljno da pokrije konstrukcije potrebne u svih 19 situacija.

Familije Bazičnih b -torki su prikazane na Slici 2, dok su neki važni parametri vezani za njih dati u Tabeli 3.

Lista od 19 situacija u kojima se familije Bazičnih b -torki koriste – je data u Tabeli 3.

Slede objašnjenja nekih pojmova i oznaka korištenih u Tabeli 3:

Familija Bazičnih b -torki koja odgovara nekoj od 19 situacija – se koristi za konstrukciju za one n koji pripadaju takozvanom *pridruženom skupu* koji može da se zapiše $\{v(t-1) + l, v(t-1) + l + 4, \dots, v(t) - r\}$; ovaj skup će u Tabeli 3 biti kraće označen sa $+l \dots -r$ (specijalno, ako je kardinalnost pridruženog skupa ≤ 2 , tada će njegovi elementi biti nabrojani bez tačkica).

Za datu Bazičnu b -toraka B , korišćena tolerancija $KT(B)$ je određena sa *kombinacijom bd-dužina* korištenih u B . Kombinacija bd-dužina je predstavljena odgovarajućom sumom. Sabirci oblika $u * w[t - i]$, $i = 0, 1, \dots$ znače da B koristi u različitih nagiba sa $bdd = t - i$, tako da sa svaki pojedini od ovih nagiba koristi tačno u lukova. Ako je bilo koji od prirodnih brojeva u ili w jednak 1, onda se oni izostavljaju. Sabirci oblika $u(t + i)$, $i = 1, \dots$ znače da B koristi u stranica sa $bdd = t + i$.

Sadržaj Tabele 3 po kolonama je redom: odgovarajuća oznaka $B_j(k)$ za familiju Bazičnih b -torki, koja će se koristiti; domen parametra k ; broj b ; kombinacija bd-dužina; korišćena tolerancija; greška zaokruživanja; linearna funkcija koja izražava t preko parametra k ; dijametar (takodje izražen preko k); pridruženi skup (vrednosti n); najmanja moguća vrednost (n_{min}) od n .

fam.Bazičnih	b	kombinacije	KT	GZ	t	$dij.$	prid.skup	n_{min}
$B_1(k), k \geq 1$	5	$2[t-1] + 2[t] + (t+1)$	3	0	$4k$	$5k$	$+1...-3$	17
$B_2(k), k \geq 1$	5	$2 * 2[t] + (t+1)$	1	3	$4k+1$	$5k+1$	$+5...-3$	29
$B_3(k), k \geq 1$	9	$3[t-1] + 2[t-1] + 4 * [t]$	3	3	$4k+1$	$9k+1$	$+1$	25
$B_4(k), k \geq 0$	5	$3[t-1] + [t] + (t+1)$	2	2	$8k+2$	$10k+2$	$+1...-3$	5
$B_5(k), k \geq 1$	9	$2 * 3[t] + [t] + 2(t+1)$	2	2	$8k+6$	$18k+14$	$+9...-3$	241
$B_6(k), k \geq 0$	9	$2 * 3[t-1] + 3 * [t]$	2	2	$8k+6$	$18k+12$	$+1,+5$	41
$B_7(k), k \geq 1$	5	$2 * 2[t] + (t+1)$	1	1	$4k+3$	$5k+4$	$+1...-3$	49
$B_8(k), k \geq 1$	2	$2[t]$	0	2	$2k+1$	$k+1$	$+2...-2$	10
$B_8(k), k \geq 1$	2	$2[t+1]$	2	0	$2k$	$k+1$	$+2,-2$	6
$B_9(k), k \geq 2$	6	$3 * 2[t]$	0	0	$4k$	$6k$	$+6...-6$	78
$B_{10}(k), k \geq 2$	6	$3 * 2[t]$	0	0	$4k+2$	$6k+3$	$+6...-6$	118
$B_{11}(k), k \geq 1$	3	$3(t+1)$	3	0	$4k$	$3k+1$	$+3...-1$	19
$B_{11}(k), k \geq 1$	3	$3 * [t]$	0	1	$4k+1$	$3k+1$	$+3...-9$	27
$B_{12}(k), k \geq 1$	7	$3 * 2[t] + (t+1)$	1	1	$4k+1$	$7k+2$	$-5,-1$	35
$B_{13}(k), k \geq 1$	11	$3 * 3[t] + 2(t+1)$	2	2	$8k+2$	$22k+6$	$+11...-1$	123
$B_{14}(k), k \geq 1$	7	$3[t-1] + 3 * [t] + (t+1)$	2	2	$8k+2$	$14k+3$	$+3,+7$	115
$B_{15}(k), k \geq 0$	3	$[t] + 2(t+1)$	2	2	$8k+6$	$6k+5$	$+3...-1$	43
$B_{16}(k), k \geq 0$	3	$3 * [t]$	0	3	$4k+3$	$3k+2$	$+3...-9$	11
$B_{17}(k), k \geq 1$	7	$2 * 2[t] + 3(t+1)$	3	3	$4k+3$	$7k+6$	$-5,-1$	56

Tabela 3.

Sledeće familije Bazičnih b -torki se koriste za konstrukciju dijametara $gdg(n) + 1$ u specijalnim slučajevima: Slučaj 1 – $B_1(k)$ i $B_{11}(k)$; Slučajevi 2 i 3 – $B_8(k)$, Slučaj 4 – $B_7(k)$, Slučaj 5 – $B_{12}(k)$, Slučaj 6 – $B_6(k)$. Izuzev familija $B_1(k)$ i $B_{11}(k)$, može da se primeti da se sve ostale familije ovih Bazičnih b -torki takodje koriste i za postizanje $gdg(n)$ za neke druge vrednosti n . Na primer, $B_8(k)$ se koristi za konstrukciju $gdg(n)$ za one n kod kojih je t neparno, kao i specijalno za $t = 2$ ($n = 6$).

Prve vrednosti n za koje je optimalan dijametar $MD(n) = gdg(n) + 1$ su redom: 17, 18, 19, 21, 22, 23, 39, 42, 45, 46, 49, 74, 86, 111, 114, 129,...

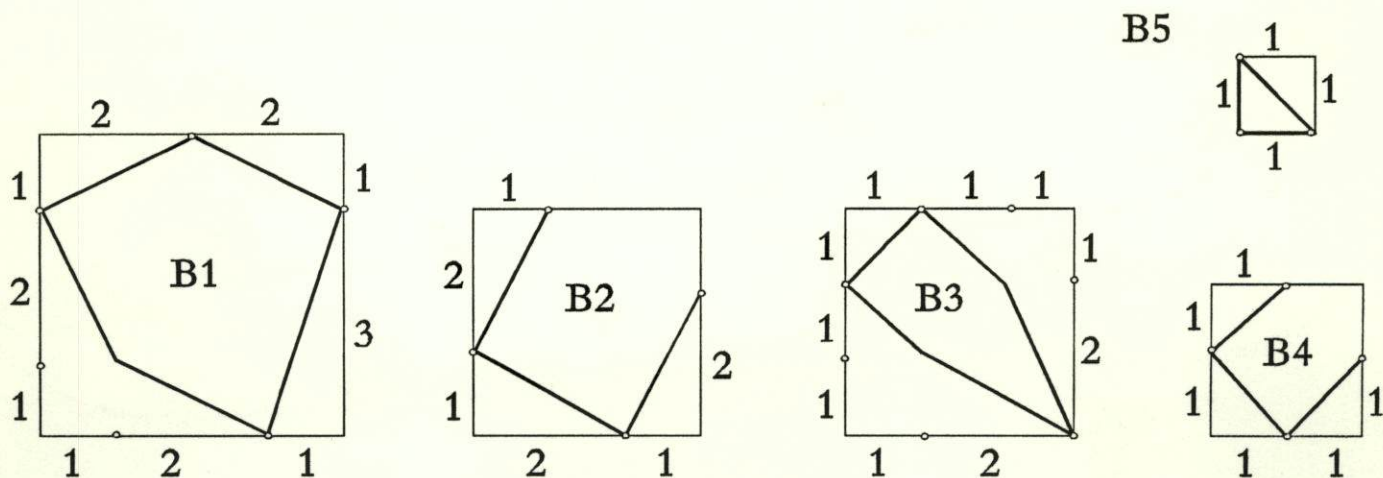
Pokazalo se da se Bazične b -torke $B_6(0)$ i $B_{16}(0)$ mogu koristiti redom za konstrukcije za $n = 41$ i $n = 11$, mada ove vrednosti n ne pripadaju opštem pridruženom skupu za $B_6(k)$ odnosno za $B_{16}(k)$. Naime, dogodilo se da neki inače različiti nagibi, prisutni u različitim lukovima $B_6(k)$ odnosno $B_{16}(k)$ – poklope za $k = 0$; ovo je omogućilo da je Uslov 5 bio zadovoljen za veći pridruženi skup.

Iz rezultata prikazanih u [6] sledi da se optimalni d.k. $(v(4k) - 6)$ -touglovi konstruišu na specijalan način: kao Minkovski razlika $P(4k)$ i $B_9(k)$. Ovakav izuzetak nije esencijalan; on može da se eliminiše zamenom $B_9(k)$ sa familijom Bazičnih 10-torki, sa istim nagibima ali u komplementarnim lukovima.

Optimalne konstrukcije za $n = 3, 7, 9, 13, 15$

Male vrednosti $n = 3, 7, 9, 13, 15$ su jedine vrednosti n , koje za $n \geq 3$ i $n \neq 0 \pmod{4}$, nisu pokrivena Tabelom 3. Medjutim, može se pokazati, uz korišćenje pet "ad-hoc" konstruisanih Bazičnih b -torki, da je za sve ove nepokrivene vrednosti n optimalan dijametar $gdg(n)$. Specijalni, optimalan d.k. trougao i optimalni d.k. devetougao se dobijaju (kao izuzeci) u analizi dokaza o nemogućnosti postizanja $gdg(n)$ za redom Slučajeve 5 i 4 (Poglavlje 2.3, dokaz Teoreme 3 odnosno 2).

Na Slici 3 su redom date dodatne Bazične b -torke B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , koje se koriste za konstrukciju optimalnog digitalnog konveksnog 13-, 15-, 9-, 7- i 3-ugla. Ove male vrednosti n (3, 7, 9, 13, 15) će biti spomenute u sekciji 2.5.2, kao male rupe (vrednosti n koje nisu pokrivena familijama Bazičnih b -torki datih na Slici 2). Male rupe za $n = 9$ i $n = 13$ nastaju za familiju $B_7(k)$; $B_7(0)$ ima dva puta nagib 2/1 u JI-luku. Slično, male rupe za $n = 3$, $n = 7$ i $n = 15$ nastaju (za $k = 0$) kod redom Bazičnih familija $B_{12}(k)$, $B_{14}(k)$ i $B_{17}(k)$.



Slika 3.

2.5.1. Valjanost Bazičnih b -torki

U ovoj sekciji će biti pokazano da su uslovi za Bazične b -torke zadovoljeni u svih 19 situacija u kojima se b -torke koriste i koje su nabrojane u Tabeli 3.

Uslov 1 može da se proveriti na Slici 2, Uslov 2 se proverava upoređivanjem vrednosti b sa pridruženim skupom u istoj vrsti Tabele 3, uzimajući u obzir da su sve vrednosti $v(t)$ deljive sa 4. Uslov 3 se proverava upoređivanjem odgovarajućih vrednosti u kolonama za $KT(B)$ i $GZ(n)$. Uslov 4 se proverava računanjem dijametra (izraženog preko parametra k) iz kombinacije u istoj vrsti Tabele 3. Na primer, $dijam(B_{14}(k)) = \lceil \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot (t-1) + 3 \cdot t + (t+1)) \rceil = \lceil \frac{7t-2}{4} \rceil = \lceil \frac{56k+12}{4} \rceil = 14k+3$.

Optimal conditions for the synthesis of...

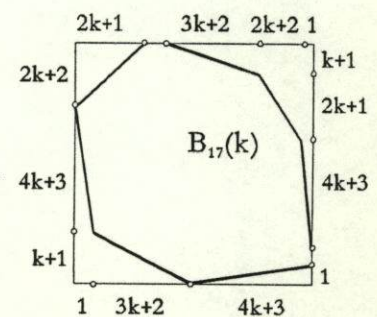
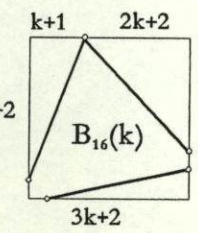
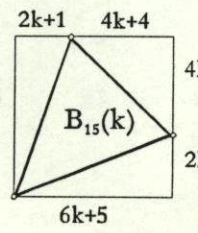
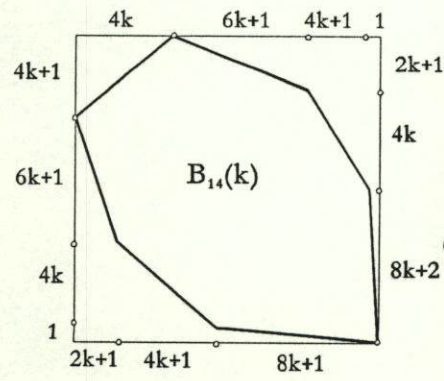
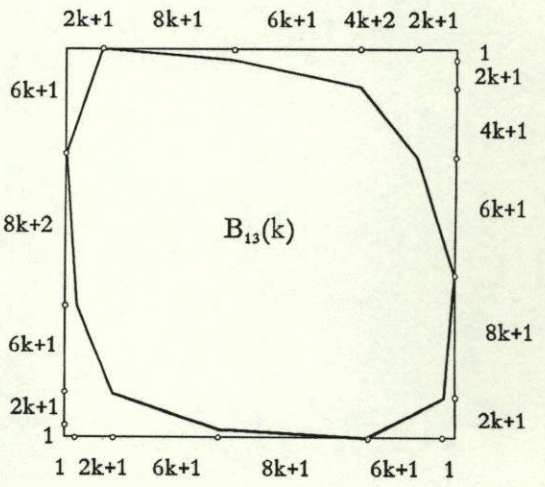
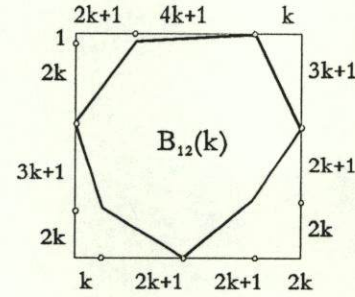
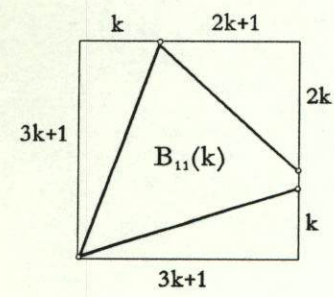
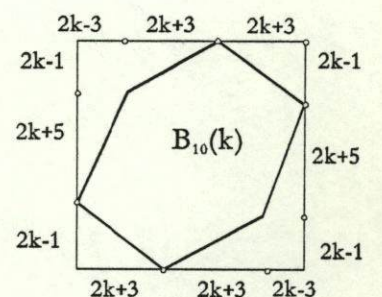
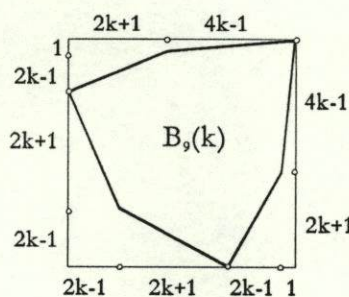
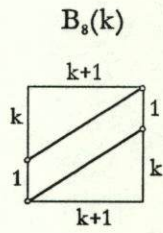
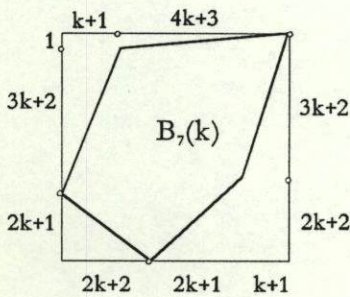
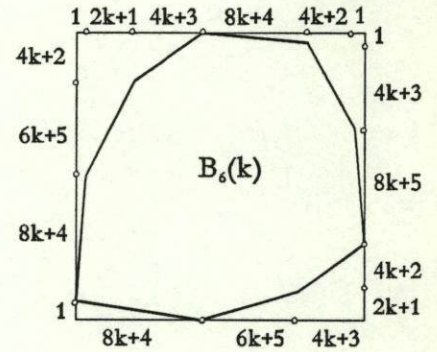
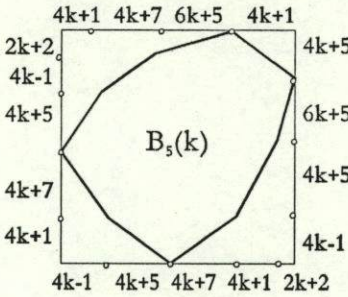
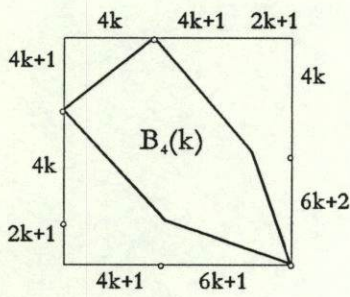
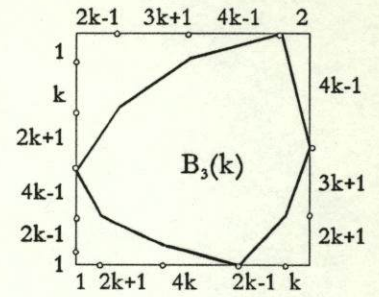
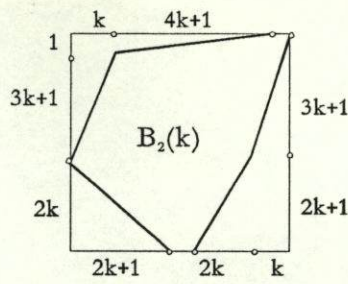
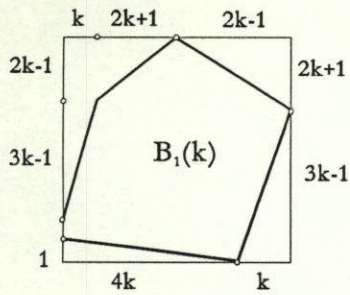
The reaction of... was studied under various conditions... The results are summarized in Table I...

It was found that the yield of... increases with... The optimal conditions for the synthesis of... are... (see Table I)...

2.5.1. Synthesis of... from...

The synthesis of... from... was carried out... The reaction was monitored by... The results are shown in Table II...

$$\text{Reaction equation or formula}$$



Dovoljno je Uslov 5 proveriti za maksimalne vrednosti n iz pridruženog skupa. U tu svrhu, se vrednosti za z i y mogu odrediti iz odgovarajućih kombinacija Tabele 3.

Ako su maksimalne vrednosti n oblika $v(t) - r$, tada provera Uslova 5 može da se redukuje (s obzirom da je $\phi(t)$ jednako $\frac{v(t) - v(t-1)}{4}$) na proveru nejednakosti $z + s_2 \leq \frac{r+b}{4}$. Na primer, Bazična 5-torka $B_1(k)$ (koja se koristi za Slučaj 1 Teoreme 1) koristi $z = s_1 = 1$ nagiba sa $bdd < t$ i $s_2 = 1$ nagiba sa $bdd = t$. Kako je $r = 3$, dovoljno je samo proveriti da je $1 + 1 \leq \frac{3+5}{4}$.

Ako je maksimalna vrednost n u odgovarajućem pridruženom skupu oblika $v(t-1)+l$, tada se provera Uslova 5 svodi na proveru nejednačine $z + s_2 \leq \phi(t) + \frac{b-l}{4}$. Sledi iz Tabele 3 (situacije za $B_3(k)$, $B_6(k)$ i $B_{14}(k)$) da je ova nejednačina ekvivalentna, sem za Slučaj 6, sa zahtevom da je $\phi(t) \geq 4$, $t \geq 5$, $t \neq 6$. Poslednja nejednačina je tačna za $t = 5$ i može da se pokaže da je takodje tačna za svako $t \geq 7$. U Slučaju 6, umesto predhodne nejednačine imamo sladeći zahtev $\phi(t) = \phi(6) \geq 2$, koji je zadovoljen. Naime, redukcija desne strane za 1 sledi iz $z = s_1 - 1$, dok dodatna redukcija za 1 sledi iz činjenice da se $s_2 = 3$ za opšti $B_6(k)$ smanjuje na $s_2 = 2$ za $k = 0$ (videti takodje diskusiju u sledećoj sekciji za $n = 41$).

2.5.2. Nepokrivene vrednosti iz intervala $(v(t-1), v(t))$

Kada se predlaže familija Bazičnih b -torki, cilj je da svaki njen član predstavlja *opšte* rešenje, koje pokriva sve one vrednosti n iz intervala $(v(t-1), v(t))$, koje su iste po modulu 4. Ista Bazična b -torka može višestruko da se primeni ako se varira broj stranica (deljivih sa 4) pridruženog Inicijalnog poligona.

Opšta rešenja ovakvog tipa zavise od t . Svi nagibi Bazičnih b -torki su razlomci opšte forme sa uzajamno prostim brojiocem i imeniocem. Generisanje familija Bazičnih b -torki je podeljeno u odnosu na $t \bmod l$, gde je $l \in \{2, 4, 8\}$ ($l = 4$ je bilo korišćeno u više situacija), i novi parametar k koji je linearan u odnosu na t je takodje uveden ($t = l \cdot k + (t \bmod l)$). Jedna motivacija za ovakvu podelu sledi iz Teoreme 6.

Na ovaj način, familija $B_i(k)$ za $i = 1, \dots, 17$ Bazičnih b -torki obično treba da pokrije konstrukcije optimalnih d.k. n -touglova za *sve* vrednosti n koje zadovoljavaju $(n-b) \bmod 4 = 0$ i $n \in (v(t-1), v(t))$, i sve t sa istom vrednošću $t \bmod l$. Kažemo da ovakva familija ostavlja neke *rupe* ako ona ne može da se koristi za konstrukciju optimalnih d.k. n -touglova za sve planirane vrednosti n .

Postoje tri vrste rupa: *leve*, *desne* i *male*. Leve (odnosno desne) rupe su najmanje (odnosno najveće) planirane vrednosti n , unutar svakog od planiranih intervala $(v(t-1), v(t))$, za koje odgovarajuća familija $B_i(k)$ nije primenljiva. Male rupe su neke planirane vrednosti n unutar planiranog intervala za najmanje t , za koje odgovarajuće Bazične b -torke iz familije $B_i(k)$ nisu dobro definisane.

Leve rupe nastaju u situacijama kada je broj b suviše velik. Na primer, ako Bazična b -torka koja je član familije Bazičnih b -torki, za datu vrednost parametra t , ne sadrži stranice sa $bdd < t$, tada leva rupa nastaje kad god je $b > b \bmod 4$. S druge strane, ako ona koristi neke od tih stranice, onda tada b treba da se poveća u cilju postizanja $n = v(t-1) + (b \bmod 4)$. Specijalno, ovo uvećanje je u Slučaju 4 Teoreme 1 (za 4) veće od zahtevanog minimuma. Preciznije:

Lema 4 *Familija Bazičnih b -torki ne ostavlja leve rupe ako i samo ako njeni članovi zadovoljavaju jednakost $b = 4 \cdot s_1 + (n \bmod 4) + c$, gde je $c = 4$ u posebnom Slučajju 4 Teoreme 1 a inače je $c = 0$.*

Desne rupe nastaju u situacijama kada je broj b suviše mali u odnosu na maksimalan moguć broj stranica Inicijalnog poligona. Drugim rečima, broj nagiba sa $bdd \leq t$ koji se koriste u Bazičnoj b -torki je suviše velik u odnosu na njen broj stranica (b). Preciznije:

Lema 5 *Familija Bazičnih b -torki ne ostavlja desne rupe ako i samo ako njeni članovi zadovoljavaju jednakost $b = 4 \cdot (s_1 + s_2) + (n \bmod 4) - c$, gde je $c = 8$ u Slučajjevima 5 i 6 Teoreme 1 a inače je $c = 4$.*

Dokaz. $4 \cdot (s_1 + s_2)$ stranica sa $bdd \leq t$ ne mogu da se koriste u Inicijalnom poligonu, tako ovaj poligon može da ima najviše $v(t) - 4 \cdot (s_1 + s_2)$ stranica sa $bdd \leq t$. Tako digitalni konveksni n -tougao, koji konstruišemo, ima maksimalno $v(t) - 4 \cdot (s_1 + s_2) + b = v(t) - 4 + (n \bmod 4)$ stranica. Specijalno, Inicijani poligon u posebnim Slučajjevima 5 i 6 Teoreme 1 sadrži četiri dodatne stranice sa istim nagibom na $bdd = t + 1$. \square

Posledica Lema 4 i 5: Oni članovi familije $B_i(k)$, Bazičnih b -torki, koji ne ostavljaju ni leve ni desne rupe, zadovoljavaju da im je $s_2 = 1$.

Broj stranica sa $bdd = t$ u Bazičnoj b -torki nije ograničen odozgo (slično tvrdjenje nije tačno za ostale stranice, videti Uslov 3.). Medjutim, postoji gornja granica za broj stranica za Bazične b -torke unutar familije koje ne ostavljaju leve ili desne rupe:

Lema 6 *Maksimalna vrednost za broj stranica b za neku familiju Bazičnih b -torki, koje ne ostavljaju leve, odnosno desne rupe, su redom 17, 19, 25 i 19 za redom vrednosti n oblika $v(t - 1) + 1$, $v(t - 1) + 3$, $v(t) - 3$ i $v(t) - 1$.*

Dokaz. Svaka Bazična b -torka B zadovoljava nejednakost $KT(B) \leq 4$ (posledica Uslova 3). Ovo implicira da je $s_1 \leq 4$ i $e_3 \leq 4$. U cilju maksimizovanja broja stranica B unutar familije koja ne ostavlja levu (desnu) rupu, brojevi s_1 (odnosno $s_1 + s_2$) treba da se maksimizuju (u skladu sa Lemama 4 i 5).

Ako je $s_1 = 4$, tada moraju da se koriste četiri trojke stranica sa različitim nagibima na $bdd = t - 1$. Po Lemi 4, broj b je jednak $4 \cdot 4 + (n \bmod 4)$, što kompletira dokaz za leve rupe.

Kada se razmatraju desne rupe, koristi se sledeća nejednakost $b \leq 3 \cdot (s_1 + s_2) + e_3$. S druge strane, maksimalan broj stranica Inicijalnog poligona je $v(t) - 4 \cdot (s_1 + s_2)$. To ima za posledicu da je maksimalna vrednost n jednaka $v(t) - (s_1 + s_2) + e_3$. Ako nema desnih rupa, onda ova vrednost treba da bude $v(t) - 3$, odnosno $v(t) - 1$. Ovo impliciraju redom jednakosti $s_1 + s_2 = e_3 + 3$ i $s_1 + s_2 = e_3 + 1$. Zato se maksimalna vrednost za $s_1 + s_2$ postiže za $e_3 = 4$. \square

POSLEDICA: S obzirom da familije Bazičnih b -torki koje ostavljaju i leve i desne rupe nisu interesantne, čini se perspektivnim iscrpno traženje pogodnih familija.

Familija Bazičnih b -torki koja ne ostavlja rupe je dovoljna da pokrije konstrukcije optimalnih d.k. n -touglova za sve planirane vrednosti n . Problem rupa se prevazilazi na sledeći način: Ako familija Bazičnih b -torki ostavlja jedino leve (desne) rupe, tada nalazimo drugu (pomoćnu) familiju za isti skup planiranih vrednosti n , koja ostavlja samo desne (leve) rupe. Pokazalo se da takav par komplementarnih familija Bazičnih b -torki

može da zameni, u svim situacijama kada rupe postoje, odgovarajuću familiju koja ne ostavlja rupe.

Naime, nijedna od korištenih 17 familija $B_i(k)$ (Sl. 3), u ni jednoj od 19 situacija (Tabela 3), ne ostavlja više od dve (leve ili desne) rupe. Jedina mogućnost da neka od planiranih vrednosti n ostane nepokrivena bi bila da svaka od odgovarajuće dve komplementarne familije ostavlja po dve rupe i da imamo tačno $x \leq 3$ planiranih vrednosti n unutar planiranog intervala $(v(t-1), v(t))$. Primetimo da je $x = \phi(t)$. Ako je $\phi(t) = 3$, onda bi ostala nepokrivena srednja od tri planirane vrednosti. Srećom, takva mogućnost ne postoji, s obzirom da bi to bilo u kontradikciji sa činjenicom da je $\phi(t)$ parno za $t > 2$. Konačno, sve planirane vrednosti n unutar intervala $(v(t-1), v(t))$ za $\phi(t) \leq 2$ su potpuno pokrivene (detalje pogledati u Poglavlju 2.4).

Primedba. Neka je dat par komplementarnih familija: Bazične b_l -torke, koje ostavljaju desne rupe i Bazične b_d -torke, koje ostavljaju leve rupe, tada uopšteno govoreći, može da se dogodi (mada se to nije dogodilo u datom rešenju) da u sledećem podintervalu nisu pokrivene planirane vrednosti:

$$[v(t-1) + (b_l \bmod 4) + 4, v(t-1) + (b_l \bmod 4) + 8, \dots, v(t-1) + b_l - 8, v(t-1) + b_l - 4].$$

Naime, može da se desi da neko optimalno rešenje za $n = v(t-1) + (b_l \bmod 4)$ ne može da se uveća dodavanjem nekog $DK(p, q)$ sa $p + q = t$, jer ne postoje "slobodni" digitalni kvadrati (sa nagibom koji nije korišćen u odgovarajućoj Bazičnoj b_d -torci). S druge strane, nepobitno je tačno da sve planirane vrednosti u sledećem podintervalu mogu da se pokriju umanjivanjem Inicijalnog poligona koji odgovara $n = v(t) - 4 + (b_l \bmod 4)$:

$$[v(t-1) + b_l, v(t-1) + b_l + 4, \dots, v(t) - 12 + (b_l \bmod 4), v(t) - 8 + (b_l \bmod 4)].$$

Postoje dva razloga za lošu definisanost nekih članova familija $B_i(k)$ za $k \in \{0, 1\}$, koji ostavljaju male rupe: ili se zbog male vrednosti parametra k dobije negativan nagib ili nastanu dve stranice sa istim nagibom unutar istog luka. Upravo zbog malih rupa su se pojavile pet vrednosti n , koje nisu mogle da se pokriju sa familijama $B_i(k)$.

Premedba. Svaka Bazična b -torca (i posledično svaka familija Bazičnih b -torci), koja koristi s različitih nagiba, ima njenu dualnu $(4s - b)$ -torcu — koja se definiše tako da koristi iste nagibe, ali u komplementarnim lukovima. Tako je Minkovski suma dve uzajamno dualne torke jednaka Minkovski sumi s $DK(p, q)$ 'a koji odgovaraju korišćenim nagibima q/p . Medjutim, dualna torca Bazičnoj b -torci u većini slučajeva nije Bazična. Glavni razlog proizilazi iz činjenice da dualizacija veoma uvećava korišćenu toleranciju kadgod je u polaznoj torci prisutan nagib sa b_d -dužinom različitom od t . Recimo, ako imamo više od jednog takvog nagiba, onda dualizacija nikad ne daje Bazičnu torcu.

Kako dualizacija ne očuvava osobinu Bazičnosti, ne može se translirati problem levih rupa na desne, niti obrnuto. Štaviše, ovakve translacije nisu medjusobno kompatibilne zbog nesimetričnosti ova dva problema prikazane u predhodnoj primedbi.

Primetimo, preciznije

Uslov $\phi(t) \leq 2$ može biti nekompatibilan sa uobičajenom situacijom koju imamo kod familija Bazičnih b -torci. Pokazalo se da su zapravo sve odgovarajuće planirane vrednosti n pokrivene sa predloženih 17 familija i pet pojedinih Bazičnih b -torci, koje su prikazane na Slici 2 odnosno 3. Preciznije, postoji 22 planirane vrednosti n (za $n \bmod 4 \neq$

0) unutar intervala $(v(t-1), v(t))$ za $\phi(t) \leq 2$ ($t \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$). Ove vrednosti se tretiraju na tri različita načina. Vrednosti 5, 6, 10, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 42, 43, 46 i 47 su pokrivena odgovarajućim familijama Bazičnih b -torki, koje ili ne ostavljaju rupe ili su specijalno napravljene (familija $B_8(k)$ za t parno). Sledećih par planiranih n (3,7,9,13,15) odgovaraju malim rupama i pokriveni su sa pojedinačnim Bazičnim b -torkama. Konačno planirane vrednosti 11, 41 i 45 su pokrivena na sledeći način:

Pokazalo se da vrednost $n = 11$ može da se pokrije sa $B_{16}(0)$ i da se vrednosti $n = 41$ i $n = 45$ mogu pokriti sa $B_6(0)$, mada ove vrednosti n ne pripadaju pridruženom skupu odgovarajuće familije $B_{16}(k)$ odnosno $B_6(k)$.

Naime, familija $B_6(k)$ je bila planirana za pokrivanje n -ova oblika $v(t-1) + 1$ i $v(t-1) + 5$ za t oblika $8k + 6$. Primetimo da ova familija ostavlja desne rupe za $v(t) - 7$ i $v(t) - 3$. Ako je $k = 0$, tada činjenica da je $\phi(6) = 2$ implicira da prve dve (jedine) planirane vrednosti (41 i 45) unutar intervala $(v(5), v(6))$ postaju desne rupe. Takodje jedine planirane vrednosti 11 i 15 unutar intervala $(v(2), v(3))$ su postale desne rupe ostavljene familijom $B_{16}(0)$.

Medjutim, desilo se da se dva različita nagiba ($(3k+2)/(k+1)$ i $(2k+2)/(2k+1)$, odnosno $(2k+1)/(6k+5)$ i $1/(8k+5)$), koji se koriste u različitim lukovima redom familija $B_{16}(k)$ i $B_6(k)$ - poklope za $k = 0$ (ovo menja prateću kombinaciju bd-dužina). Ova činjenica obezbeđuje dodatni digitalni kvadrat $DK(p, q)$ za Inicijani poligon i eliminiše levu od dve desne rupe (za $n = 11$ i 41 redom). Konstrukcija za drugu desnu rupu $n = 45$ je omogućena obezbeđivanjem dodatnog $DK(p, q)$ za $p + q = 7$; ovaj slučaj je izdvojen u Lemi 5, koja karakteriše desne rupe.

Neke od familija Bazičnih b -torki u Tabeli 3 su korištene kao "glavne" familije u odgovarajućim komplementarnim parovima (za prevazilaženje levih i desnih rupa), dok su druge korištene kao pomoćne familije u ovakvim parovima. Preciznije, familije $B_2(k)$, $B_5(k)$, $B_9(k)$, $B_{10}(k)$, $B_{11}(k)$, $B_{13}(k)$ i $B_{16}(k)$ su igrale ulogu "glavnih" (redom su ostavljale leve, leve, leve i desne, leve i desne, desne, leve, desne rupe), dok su $B_3(k)$, $B_6(k)$, $B_8(k)$, $B_8(k)$, $B_{12}(k)$, $B_{14}(k)$ i $B_{17}(k)$ redom korištene kao njihove pomoćne familije.

Primetimo da se svaka od familija $B_8(k)$ i $B_{11}(k)$ koristi za pokrivanje dve različite situacije. Nijedna od njih ne ostavlja rupe (pokriva sve planirane vrednosti n) u jednoj od situacija. U drugoj situaciji u kojoj se koristi familija $B_8(k)$, ona igra ulogu dvostruko pomoćne familije, za pokrivanje redom levih odnosno desnih rupa koje ostavljaju familije $B_9(k)$ odnosno $B_{10}(k)$.

Postoje uzajamno dualne familije ($B_7(k)$ i $B_{17}(k)$) Bazičnih b -torki, koje su učestvovala u konstrukciji optimalnih digitalnih konveksnih $ntouglova$.

2.6 Linearan algoritam za optimalna rešenja

Efikasna konstrukcija digitalnih konveksnih poligona ima u osnovi efikasnu konstrukciju Farejevog (Farey) niza:

Farejev niz reda j , (skraćeno $F(j)$, [16]), je strogo rastući niz, koji sadrži sve razlomke b/a , gde su prirodni brojevi a i b uzajamno prosti i $1 \leq b < a \leq j$. Na primer, $F(5)$ je

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$

Efikasna konstrukcija $F(j)$ sledi iz sledećeg postupka:

Neka je dat član b/a niza $F(j)$, sledeći član b'/a' može da se konstruiše ako se koristi rekurentna veza: ([16, p. 25]):

$$b' = x_0 + r \cdot b \quad \text{i} \quad a' = y_0 + r \cdot a, \quad \text{gde je}$$

(x_0, y_0) celobrojno rešenje jednačine: $a \cdot x - b \cdot y = 1$ i $r = [(j - y_0) / a]$.

Kao što je predloženo u [4], jedno rešenje (x_0, y_0) može da bude (b^-, a^-) , što predstavlja predhodni član članu b/a u nizu $F(j)$. Ovo ima za posledicu, da se konstrukcija svakog člana niza $F(j)$ iz predhodna dva člana može realizovati za konstantno vreme.

Primedba. Analogan zaključak važi i za *uopšteni Farejev niz*, koji je uveden u [4] i koji je korišćen za efikasnu konstrukciju digitalnog *zvezdastog* poligona [8].

Objašnjenje kako da se iskoristi $F(j)$ za dobijanje efikasne konstrukcije optimalnih d.k. poligona iz niza $P(j)$ je dato u nastavku:

Dat je prirodan broj j , sortirani nagibi nekog luka $P(j)$ čine strogo rastući niz $S(j)$ sa svim razlomcima q/p , gde su q i p uzajamno prosti prirodni brojevi koji zadovoljavaju da je $p + q \leq j$. Farejev niz $F(j)$ može da se preslika na niz $S(j)$ bijekcijom [5]:

$$\frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a-b} = \frac{q}{p}.$$

Na primer, članovi $F(5)$ se redom preslikavaju na članove niza $S(5)$:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1},$$

koji su sortirani nagibi luka $P(5)$ (sa izuzetkom nagiba $0/1$, koji odgovara "ravnoj" stranici luka).

Može da se uoči da su prirodni brojevi b i a ($b < a$) uzajamno prosti ako i samo ako su uzajamno prosti prirodni brojevi q i p , kao i da predloženo preslikavanje *očuvava sortiranost*.

Kako se niz $S(j)$ može direktno konstruisati iz niza $F(j)$, postojanje efikasne konstrukcije za $F(j)$ implicira postojanje takvih konstrukcija i za $S(j)$ i za odgovarajući poligon iz niza $P(j)$. Naime, *nema sortiranja* nagiba unutar luka ovog poligona. Konstrukcija temena se odvija za konstantno vreme. Ako imamo tekuće teme (x_i, y_i) i tekući član q/p niza $S(j)$, koji predstavlja nagib nove stranice koju treba ubaciti u luk, sledeće teme (x_{i+1}, y_{i+1}) se dobija u skladu sa relacijom $x_{i+1} = x_i + x_{dif}$ i $y_{i+1} = y_i + y_{dif}$, pri čemu su priraštaji (x_{dif}, y_{dif}) jednaki redom $(+p, +q)$, $(-q, +p)$, $(-p, -q)$, $(+q, -p)$ u JI-luku, SI-luku, SZ-luku odnosno u JZ-luku.

Ova razmatranja su prvi korak u dokazu sledećeg jakog rezultata, koji sledi iz Teoreme 1 i algoritama opisanim u [1] i [2]:

Teorema 9 *Postoji linearan algoritam složenosti $V(n) = V(t^2)$, za konstrukciju digitalnog konveksnog n -tougla sa minimalnim dijametrom, gde je $v(t-1) \leq n < v(t)$.*

Drugim rečima, nije samo tačno da je poznato tačno rešenje razmatranog optimizacionog problema (za proizvoljan broj stranica), već i da se zna asimptotski optimalan algoritam za konstrukciju takvog rešenja, tj.

optimalan d.k. n -tougao može da se konstruiše na optimalan način.

Egzistencija efikasnog algoritma za konstrukciju optimalnog digitalnog konveksnog n -tougla, za proizvoljno n , sledi iz postojanja takvog algoritma za n oblika $v(j)$ i iz konačnog broja korišćenih familija Bazičnih b -torki, kao i iz činjenice da je broj stranica b uvek odozgo ograničen sa konstantom (maksimalna korišćena vrednost b je 11, videti Tabelu 3).

Asimptotska ocena broja članova Farejevog niza, $F(t)$ ([16], Teoreme 330. i 331.) je $\frac{3t^2}{\pi^2} + O(t \log t)$. Dok je asimptotska ocena za broj stranica poligona $P(t)$, za dato t (kao i za broj elementarnih koraka za njegovu konstrukciju) – četiri puta veća ([5]).

Primedba. Da bi se dobila ideja o brzini algoritma treba da se zna da efikasan algoritam koji prolazeći po Farejevom nizu izračunava vrednosti $d(1000) = 202.870.719$ i $v(1000) = 1.216.768$ za par minuta na PC-AT 286.

Sledi skica algoritma za konstrukciju optimalnog d.k. n -tougla Q :

Parametar t se prvo odredjuje iz n sa $O(t \sqrt{t})$ algoritmom. Optimalni d.k. n -touglovi za $v(t-1) < n < v(t)$ se konstruišu malom modifikacijom $P(t)$ -slučaja. Pokazano je interpolacijom ([5]) da broj stranica optimalnog d.k. n -tougla Q ima isto asimptotsko ponašanje kao i broj stranica poligona $P(t)$.

Pokazalo se da ista asimptotska ocena važi i za broj elementarnih koraka (računarska složenost) algoritma za konstrukciju Q . Naime, konstrukcija svakog temena Q se odvija u konstantnom vremenu. Ovakav zaključak sledi iz prirode potrebnih dodatnih računanja i modifikacija ([1], [2]), koje se vrše u opštem slučaju:

Ako je $n \bmod 4 \neq 0$, tada se potrebna Bazična b -torka B prepoznaje u konstantnom vremenu uz korišćenje n , t i Tabele 3 date u predhodnom poglavlju. Ako je $n \bmod 4 = 0$, tada se b -torka B smatra praznom.

Slično kao i kod odgovarajućeg poligona $P(t)$ (za dato t), svaki od četiri luka Q se generiše uz jedno prolaženje nizom $S(t)$. Ovog puta se niz nagiba u rastućem redosledu, SA unutar nekog luka A poligona Q blago razlikuje od $S(t)$: neki članovi niza nagiba $S(t)$ su izbačeni, dok su par novih nagiba kojih nema u $S(t)$ ubačeni.

Neka A' označava luk B koji odgovara luku A poligona Q i neka S' označava strogo rastući niz onih nagiba A' , koji ne pripadaju nizu $S(t)$ (ili ekvivalentno, onih koji zadovoljavaju da im je $bdd > t$). Niz SA se dobija merđžiranjem podesnog dela $S(t)$ i celog niza S' , gde je podesnost članova q/p niza $S(t)$ znači da smeju da se koriste u A ako zadovoljavaju sledeći skup uslova:

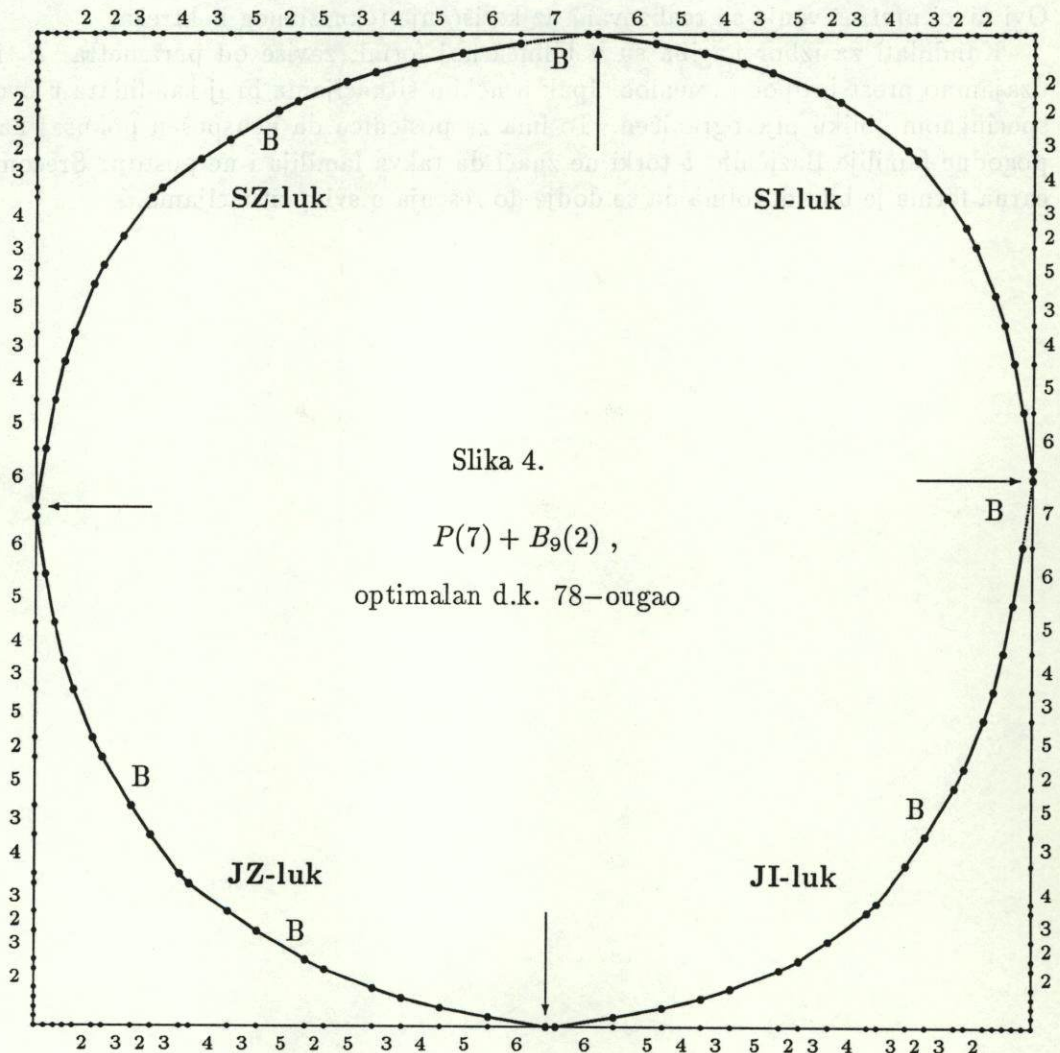
1. Svaki nagib, koji se koristi u A' , se takodje koristi i u A .
2. Svaki nagib, koji se koristi u B i koji se ne koristi u A' , se ne koristi ni u A .
3. Samo prvih $(n - v(t-1) - b)/4$ nagiba q/p iz $S(t)$, koji se ne koriste u B i koji zadovoljavaju da je $p + q = t$, se koriste u A .

Uslovi 1, 2, 3 slede iz definicije Inicijalnog poligona i Bazične b -torke. Uslov 3 se proverava uz pomoć brojača koji se inicijalizuje sa 0 u svakom luku.

Poenta je u tome što za dati član SA , izračunavanje sledećeg može da se ostvari u konstantnom vremenu.

Optimalan d.k. 78-ougao P , konstruisan uz primenu skiciranog algoritma dat je na Slici 4.

One stranice P , čiji nagibi pripadaju Bazičnoj 6-torki $B_9(2)$, koja zajedno sa nizom $S(8)$ čini osnovne gradivne elemente za konstrukciju optimalnog 78-ougla, su označene slovom B. One dužine orogonalnih projekcija stranica poligona P , na kvadratu $MP(P)$ (videti takodje Sliku 1), koje su veće od 1, su ispisane. Zajednička temena susjednih lukova su označena sa strelicama. Kod konstruisanog optimalnog 78-ougla je broj $(n - v(t - 1) - b)/4$ bio jednak 0 ($n = 78$, $v(7) = 72$ i $b = 6$), pa je on bio jednak direktnoj sumi Minkovskog poligona $P(7)$ i 6-torke $B_9(2)$, što znači da se u ovoj situaciji Inicijalni poligon poklapa sa $P(7)$.



2.6.1. Generisanje Bazičnih b -torki

Algoritam koji traži pogodne familije Bazičnih b -torki je bio opisan u [19]; i pored toga, većina od 17 korišćenih familija je pronadjena bez pomoći kompjutera.

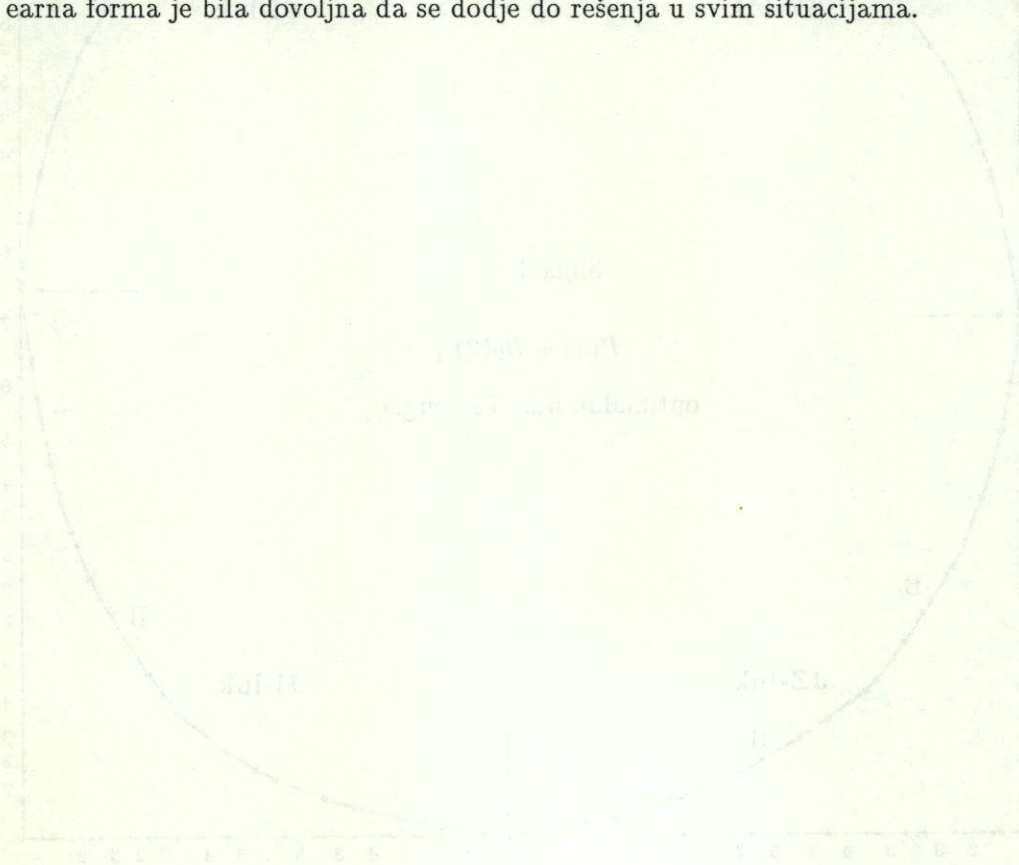
Traženje dve familije $B_i(k)$ koje bi potpuno pokrile dve situacije kada je n neparno i $t = 4k + 2$ nije bilo uspešno, pa je tako pretraživanje nastavljeno u zavisnosti od parnosti

parametra k .

Svaki pokušaj konstrukcije familije Bazičnih b -torki počinje odredjivanjem kako će se njenih b stranica (čiji su nagibi i lukovi odredjeni) rasporediti u odnosu na bd-dužine (sve bd-dužine su u zavisnosti od t). Štaviše, kada se razmatraju stranice sa bd-dužinom $bdd < t$ (takodje stranice sa $bdd = t$, kada se traži familija koja ne ostavlja desne rupe), onda se takodje stranice particioniraju u odnosu na njihov nagib.

Pošto se kombinacija bd-dužina odredi (primeri kombinacija mogu da se nadju u Tabeli 3), postoje tri (hijerarhijski ugnježdjena) nivoa pretraživanja koja redom odgovaraju: bd-dužinama, nagibima za datu bd-dužinu i lukovima koji sadrže stranice sa datim nagibima. Ovi nivoi pretraživanja su realizovani uz korišćenje rekurzivnog bektreka.

Kandidati za izbor nagiba su u bilinearnoj formi, zavise od parametra k i imaju uzajamno prost brojioc i imenioc. Ipak u nekim situacijama broj kandidata u ovom vrlo specifičnom obliku nije ograničen. To ima za posledicu da neuspešan pokušaj nalaženja pogodne familije Bazičnih b -torki ne znači da takva familija i ne postoji. Srećom, bilinearna forma je bila dovoljna da se dodje do rešenja u svim situacijama.



3.

Digitalni luk sa maksimalnim brojem stranica

U ovoj Glavi će se razmatrati problem određivanja digitalnog konveksnog luka sa maksimalnim brojem stranica. Preciznije, za date prirodne brojeve a i b , razmatra se sledeći optimizacioni problem: Odrediti digitalni konveksni luk sa dužinama kateta a i b , koji ima maksimalan moguć broj stranica $n(a, b)$. Nadjena je gusta familija optimalnih rešenja razmatranog problema. Izvedena je asimptotska ocena za broj $n(a, b)$. Opisan je odgovarajući algoritam, u kome se koriste neke heurističke funkcije.

Rešenje predloženog problema može direktno da se primeni na konstrukciju digitalnog konveksnog poligona koji optimalno aproksimira elipsu sa zadatim osama u celobrojnoj mreži.

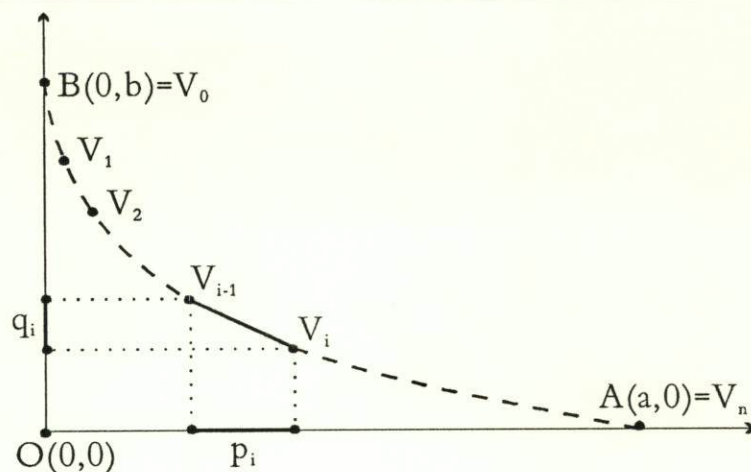
3.1 Uvod i definicije

Sledi preciziranje problema optimizacije na celobrojnoj mreži, koji će biti ovde razmatran:

Neka su dati prirodni brojevi a i b ($a \leq b$). Razmatra se trougao ABO u xOy koordinatnoj ravni sa koordinatama temena $A(a, 0)$, $B(0, b)$ i $O(0, 0)$.

Problem. Treba odrediti niz tačaka (Slika 5.) sa celobrojnim koordinatama $B \equiv V_0(x_0, y_0), V_1(x_1, y_1), \dots, V_n(x_n, y_n) \equiv A$, koji zadovoljava sledeće uslove:

- Broj n je što je moguće veći.
- $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$; $b = y_0 > y_1 > \dots > y_n = 0$.
- Tačke V_1, V_2, \dots, V_{n-1} pripadaju unutrašnjosti trougla ABO .
- Svi unutrašnji uglovi poligona $V_0V_1\dots V_n$ su manji od π radijana.



Slika 5.

Niz susednih stranica (V_{i-1}, V_i) , $1 \leq i \leq n$, definiše *digitalni konveksni luk*. Stranice OA i OB su nazvane *katetama luka*.

Razmatrani problem bi takodje mogao da se formuliše:

- Odrediti digitalni konveksni luk sa datim dužinama kateta a i b , i maksimalnim brojem stranica $n(a, b)$.

Tako niz tačaka $V_i(x_i, y_i)$, $0 \leq i \leq n$, zamenjuje hipotenuzu trougla ABO sa digitalnim konveksnim lukom, koji je smešten u unutrašnjosti razmatranog trougla.

Može se primetiti da degenerisani slučaj razmatranog problema nastaje kada je $b \geq 1 + 2 + \dots + a$. Tada je $n(a, b) = a$. Jedno optimalno rešenje u ovom degenerisanom slučaju ima a stranica sa nagibima oblika $q/1$ za različite (zbog zahtevane konveksnosti) vrednosti $q = 1, 2, 3, \dots, a$.

Nagib je razlomak oblika

$$\frac{q_i}{p_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \text{za } 1 \leq i \leq n$$

Projekcija neke stranice digitalnog konveksnog luka je ortogonalna projekcija te stranice na neku od kateta luka. Dužine projekcija stranice sa nagibom q_i/p_i na redom katete koje pripadaju y - odnosno x -osi su q_i odnosno p_i (videti Sliku 5).

Digitalni konveksni poligon je poligon, čija su sva temena celobrojne tačke u celobrojnoj mreži i čiji su svi unutrašnji uglovi manji od π radijana.

Uopšteni Farejev niz $F(m, n)$ ([4]) je rastući niz *svih* razlomaka q/p koji zadovoljavaju da su prirodni brojevi q i p uzajamno prosti, za $q \leq m$ i $p \leq n$. Svaki naredni član ovog niza može da se odredi u konstantnom vremenu iz predhodna dva člana.

3.2 Familija optimalnih rešenja

Cilj ovog poglavlja je da se definiše familija nizova koju čine parovi pogodno izabranih dužina kateta, za koje može tačno da se konstruišu optimalni digitalni konveksni lukovi. Ova familija će poslužiti kao osnova za izvodjenje asimptotske ocene za $n(a, b)$ (Sekcija 3.1.3). Takodje će ova familija poslužiti kao putokaz za određivanje pogodnih heurističkih funkcija, koje će biti ugrađene u algoritam predložen u Sekciji 3.1.4 za traženje optimalnog rešenja za proizvoljne dužine kateta a i b .

Pomoćna tvrdjenja i oznake

Parametar familija će biti označen sa k , dok će nizovi unutar svake familije biti indeksirani sa parametrom t .

Neka je $O(a, b)$ skup nagiba *izabranih* u (tj. prisutnih) u nekom *optimalnom* rešenju razmatranog problema za zadate katete a i b . Prvo će biti dokazana sledeća osobina ovog optimalnog skupa nagiba:

Lema 7 *Ako neki nagib q/p pripada skupu $O(a, b)$, tada su prirodni brojevi q i p uzajamno prosti.*

Dokaz. U razmatranom problemu se konveksnost podrazumeva u strogom smislu (četvrti uslov). To znači da nisu dozvoljena tri susedna kolinearna temena unutar luka.

Nema smisla koristiti nagib oblika $(k \cdot q_i)/(k \cdot p_i)$ u $O(a, b)$, za neki ceo broj $k > 1$, jer se takav nagib ne može koristiti u $O(a, b)$ zajedno sa nagibom q_i/p_i zbog zahtevane konveksnosti. Medjutim, s druge strane očigledno je da da stranica sa drugim nagibom "zahteva manje prostora" i omogućuje ubacivanje više drugih stranica u luk. \square

Primedba. Paktično je dozvoliti malo odstupanje od ovog pravila kada se bira nagib za poslednju stranicu u luku, sa ciljem da se poslednje teme luka poklopi sa krajnjom tačkom katete.

Lema 8 *Nagibi unutar skupa $O(a, b)$ zadovoljavaju sledeći uslov (tkz. uslov stepeništa):*

Ako $q/p \in O(a, b)$ tada za svaki par uzajamno prostih prirodnih brojeva q' i p' koji su takvi da je $q' \leq q$, $p' \leq p$ takodje važi da je nagib $q'/p' \in O(a, b)$.

Dokaz. Nagibi q'/p' gornjeg oblika su takodje u skladu sa Lemom 7 i (slično rezonovanje kao ono primenjeno u Lemi 7) "zahtevaju manje prostora", i dozvoljavaju ubacivanje više drugih stranica u luk nego stranica sa nagibom q/p . Stoga se ne sme desiti da je nagib q/p izabran a da nije izabran nagib q'/p' . \square

Skup nagiba koji zadovoljava uslov stepeništa će biti nazvan *stepeništem*.

Neka su dati prirodan broj t i pozitivan realan broj k , i neka $S(t, k)$ označava specijalno stepenište koga čine svi oni nagibi q/p koji zadovoljavaju:

1. q i p su uzajamno prosti prirodni brojevi;
2. $q + p \cdot k \leq t$.

Dalje, neka $card(t, k)$ označava ukupan broj stranica sa nagibima q/p iz $S(t, k)$ (kardinalnost skupa $S(t, k)$), dok će *ukupne dužine* njihovih projekcija (q , odn. p) na redom y - odnosno x -osu biti označene sa $B(t, k)$ odnosno sa $A(t, k)$.

Sledeća teorema će pokazati da skup $S(t, k)$ predstavlja optimalno rešenje razmatranog problema za dužine kateta $b = B(t, k)$ i $a = A(t, k)$:

Teorema 10 Za date pozitivne parametre t i k , je zadovoljeno da je

$$n(A(t, k), B(t, k)) = card(t, k).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka optimalno stepenište $O(A(t, k), B(t, k))$ ima više stranica nego što je $card(t, k)$. Označimo sa $D_1 = O(A(t, k), B(t, k)) \setminus S(t, k)$ i $D_2 = S(t, k) \setminus O(A(t, k), B(t, k))$. Tada je po pretpostavci $|D_1| > |D_2|$. Uočimo da svaki nagib $q/p \in D_1$ zadovoljava $q + k \cdot p > t$ i da svaki nagib $q/p \in D_2$ zadovoljava $q + k \cdot p \leq t$. To ima za posledicu:

$$(*) \quad \sum_{q/p \in D_1} q + k \cdot \sum_{q/p \in D_1} p > |D_1| \cdot t > |D_2| \cdot t \geq \sum_{q/p \in D_2} q + k \cdot \sum_{q/p \in D_2} p.$$

S druge strane, mora biti ispunjeno:

(**) $\sum_{q/p \in D_1} q \leq \sum_{q/p \in D_2} q$ i $\sum_{q/p \in D_1} p \leq \sum_{q/p \in D_2} p$. Naime, pošto se stranice sa nagibima iz D_2 uklone, sume brojioca i imenioca nagiba iz D_1 ne smeju premašiti slobodni prostor na katetama. Tako se dobijaju kontradiktorne nejednakosti (*) i (**).

□

U sledećoj tabeli su date neke optimalne vrednosti $n(A(t, k), B(t, k)) = card(t, k)$ za dužine kateta $A(t, k)$ i $B(t, k)$ za neke vrednosti parametara k i t ($k = 2, 3$, dok t uzima vrednosti prvih 10 prostih brojeva počev od 5):

t	$A(t, 2)$	$B(t, 2)$	$card(t, 2)$	$A(t, 3)$	$B(t, 3)$	$card(t, 3)$
5	5	7	4	2	3	2
7	12	20	8	6	11	5
11	42	78	20	20	48	13
13	69	126	28	31	79	18
17	144	278	47	66	180	31
29	202	387	59	93	249	39
23	343	674	85	153	442	56
29	674	1331	134	303	878	89
31	826	1612	153	366	1059	101
37	1361	2702	215	610	1790	143

Tabela 4. Neke male vrednosti trojke funkcija $A(t, k), B(t, k), card(t, k)$

3.3 Asimptotska ocena za $n(a, b)$

U ovom poglavlju će biti data tačna asimptotska formula za broj stranica $n(a, b)$ unutar luka sa katetama dužine a i b . Ova formula se dobija uz pomoć razmatranog optimalnog stepeništa $S(t, k)$. Pokazano je da je ova formula u skladu sa asimptotskom formulom za maksimalan broj stranica digitalnog konveksnog poligona sa datim dijametrom [5].

Sledeća lema potvrđuje monotonost (po t) nizova $A(t, k)$, $B(t, k)$ i $card(t, k)$, za fiksno $k > 0$:

Lema 9 Ako prirodni brojevi t_1 i t_2 zadovoljavaju da je $t_1 < t_2$, onda je $A(t_1, k) < A(t_2, k)$, $B(t_1, k) < B(t_2, k)$ i $n(t_1, k) < n(t_2, k)$.

Dokaz. Sledi iz činjenice da je skup $S(t_1, k)$ pravi podskup skupa $S(t_2, k)$. Recimo, nagib $q/p = (t_1 - [k])/1$ uvek pripada $S(t_2, k)$ a ne pripada $S(t_1, k)$. \square

Može se potvrditi da je za fiksni prirodan broj k :

$$A(t, k) = t \cdot \sum_{p=1}^{\lfloor (t-1)/k \rfloor} \phi(p) - k \cdot \sum_{p=1}^{\lfloor (t-1)/k \rfloor} p \cdot \phi(p)$$

$$B(t, k) = \frac{1}{k} \cdot \left(t \cdot \sum_{q=1}^{t-k} \phi(q) - \sum_{q=1}^{t-k} q \cdot \phi(q) \right)$$

$$\text{card}(t, k) = \sum_{p=1}^{\lfloor (t-1)/k \rfloor} \left(\frac{t}{p} - k \right) \cdot \phi(p)$$

Uzimajući u obzir da je:

$$\sum_{s=1}^t \phi(s) \approx \frac{3t^2}{\pi^2} \quad ([16], \text{Teorema 330}), \quad \text{kao i da je}$$

$$\sum_{s=1}^t s \cdot \phi(s) \approx \frac{2t^3}{\pi^2} \quad \text{i} \quad \sum_{s=1}^t \frac{\phi(s)}{s} \approx \frac{6t}{\pi^2} \quad ([11])$$

i aproksimirajući izraze $t-1$ i $t-k$ sa t (primetiti da $t \rightarrow \infty$, dok je k fiksno), dobija se:

$$A(t, k) \approx \frac{t^3}{k^2 \pi^2}, \quad B(t, k) \approx \frac{t^3}{k \pi^2}, \quad \text{card}(t, k) \approx \frac{3t^2}{k \pi^2}.$$

Zamenom $k = B(t, k)/A(t, k)$ i $t = ((\pi^2 B^2(t, k) / A(t, k))^{1/3})$ u izraz za $\text{card}(t, k)$, sledi da je

$$\text{card}(t, k) \approx \frac{3}{\pi^{2/3}} \cdot B^{1/3}(t, k) \cdot A^{1/3}(t, k).$$

Polazeći od proizvoljnih dužina kateta b i a ($b \geq a$), može se uzeti da je $k = b/a$ i zatim se mogu odrediti prirodni brojevi (često su susedni) t_1 i t_2 tako da je

$t_1 < t_2$ i $A(t_1, k) \leq a \leq A(t_2, k)$ i $B(t_1, k) \leq b \leq B(t_2, k)$. Predhodna razmatranja vode ka sledećem rezultatu:

Teorema 11 Maksimalan broj stranica $n(a, b)$ digitalnog konveksnog luka sa zadatim dužinama kateta a i b ima sledeće asimptotsko ponašanje:

$$n(a, b) \approx \frac{3}{\pi^{2/3}} \cdot b^{1/3} \cdot a^{1/3}.$$

Pokazano je [5] da maksimalan broj stranica, $MV(m)$, digitalnog konveksnog poligona koji može da se upiše u kvadratnu mrežu veličine $m \times m$ ima sledeće asimptotsko ponašanje:

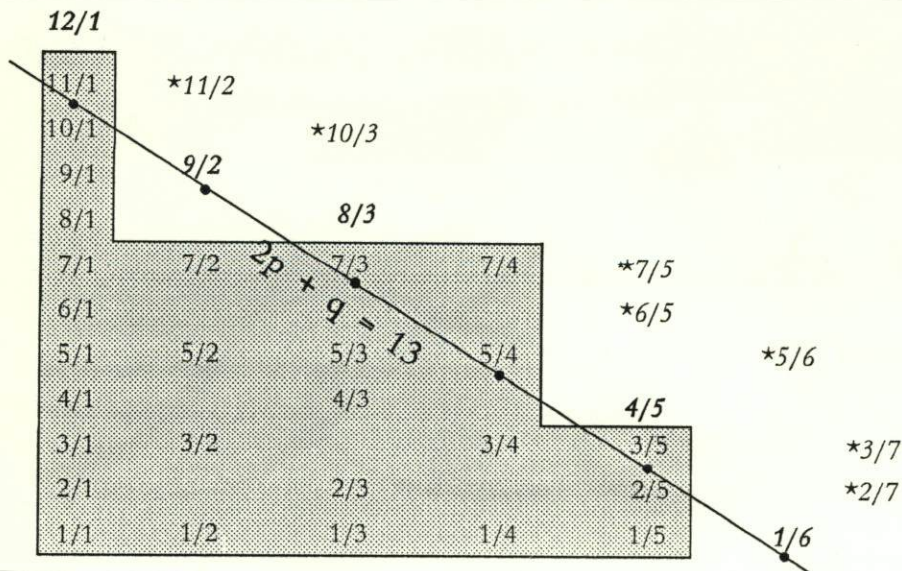
$$MV(m) \approx \frac{12}{(4\pi^2)^{1/3}} \cdot m^{2/3}.$$

Izvodjenje asimptotske ocene za $MV(m)$ se zasniva na korišćenju monotone simetrične (sa četiri jednaka luka) familije optimalnih poligona. Ova familija igra analognu ulogu kao gornji niz familija $S(t, k)$. Formula za $MV(m)$ je u skladu sa Teoremom 11; ona može da se potvrdi izvodjenjem iz asimptotske formule za $n(a, b)$ zamenom $a = b = m/2$ i množenjem sa 4 (optimalan luk za $a = b$ se multiplicira u četiri luka optimalnog digitalnog poligona).

3.4 Algoritam i heurističke funkcije

Svako stepenište S (videti Sliku 6) karakterišu dva pridružena skupa nagiba:

1. $Front(S)$ = podskup od S koji sadrži sve najdesnije nagibe iz S (po jedan za svaku vrstu)
2. $Cand(S) = \{cand(1), \dots, cand(nc)\}$ = skup svih onih nagiba izvan S , koji imaju osobinu da dodavanje bilo kog od njih u S ne bi narušilo uslov stepeništa



Slika 6.

Na primer, ako S označava stepenište koje odgovara osenčenoj oblasti na Slici 6, tada je:

$$Front(S) = \{11/1, 10/1, 9/1, 8/1, 7/4, 6/1, 5/4, 4/3, 3/5, 2/5, 1/5\} \text{ i}$$

$$Cand(S) = \{12/1, 9/2, 8/3, 4/5, 1/6\} \quad (\text{masnije cifre na Sl. 6}).$$

Skup $Front(S)$ može da se koristi za predstavljanje skupa nagiba iz S .

Neka je $Front(S) = \{\frac{j}{x_{max}(j)} \mid j = y_{max}, \dots, 1\}$. Tada prirodan broj y_{max} i niz x_{max} predstavljaju S kao što sledi:

Nagib q/p sa uzajamno prostim q i p pripada S ako i samo ako $q \leq y_{max}$ i $p \leq x_{max}(q)$.

Neka je dato stepenište S (ekvivalentno, skup $Front(S)$), tada se skup $Cand(S)$ može direktno konstruisati na sledeći način:

– $Cand(S)$ se inicijalizuje kao $\{(y_{max} + 1)/1, 1/(x_{max}(1) + 1)\}$; ova dva nagiba su obavezni prvi i poslednji kandidat u $Cand(S)$.

– Odrede se dva pomoćna niza

$$p'(j), \text{ za } j = 2, \dots, y_{max} \text{ i } q'(i), \text{ za } i = 2, \dots, x_{max}(1)$$

tako da je $p'(j)$ (odn. $q'(i)$) najmanji prirodan broj uzajamno prost sa j (odn. i) takav da nagib $j/p'(j)$ (odn. nagib $q'(i)/i$) ne pripada S .

– Biraju se središnji elementi u $Cand(S)$ iz skupa $\{j/p'(j) \mid j = 2, \dots, y_{max}\}$. Nagib iz predloženog skupa se ubacuje u $Cand(S)$ ako i samo ako svi nagibi q/p koji zadovoljavaju $q \leq j$ i $p \leq p'(j)$ već pripadaju S (uslov stepeništa). U cilju provere ovog uslova dovoljno je proveriti da li su ispunjena sledeća tri elementarnija zahteva:

$$\text{a) } p'(j) < x_{max}(1) \quad \text{b) } q'(p'(j)) = j$$

c) $p'(jj) > p'(j)$ za svako $j_S < jj < j$, gde j_S označava najveći broj, za koji je nagib $j_S/p'(j)$ već u S .

Na primeru stepeništa S na Slici 6 je:

$$y_{max} = 11$$

$$x_{max} = (1, 1, 1, 1, 4, 1, 4, 3, 5, 5, 5) \text{ za } j = 11, 10, \dots, 2, 1$$

$$p' = (7, 7, 5, 6, 5, 5, 3, 2, 3, 2) \text{ za } j = 2, 3, \dots, 10, 11$$

$$q' = (9, 8, 9, 4) \text{ za } i = 2, 3, 4, 5.$$

Zvezdice na Sl. 6 su pridružene onim nagibima oblika $j/p'(j)$, koji nisu primljeni u $Cand(S)$, zbog toga što ne zadovoljavaju a) $(3/7$ i $2/7)$ ili b) $(5/6, 6/5, 7/5, 10/3$ i $11/2)$. Ako bi nagib $8/3$ bio dodat S u sledećem koraku, tada nagib $10/3$ ne bi bio prihvaćen u novi skup kandidata $Cand(S \cup \{8/3\})$, s obzirom da ne zadovoljava uslov c).

Optimalno stepenište $O(a, b)$ može da se traži uz korišćenje gridi procedure, koja iterativno uvećava skup izbranih nagiba, počevši od inicijalnog skupa nagiba $\{1/1\}$. Esencijalno je da se uslov stepeništa očuvava u toku rada ove procedure, to jest, da se do gridi optimalnog stepeništa dolazi preko iterativnog rastućeg (u smislu inkluzije) niza izgenerisanih stepeništa.

Ako imamo aktuelno stepenište S , iterativno sledeće stepenište S^* se dobija dodavanjem jednog nagiba q^*/p^* u S . Ovaj dodati nagib se bira medju elementima iz skupa $Cand(S)$ tako da postiže optimalnu vrednost heurističke funkcije H nad $Cand(S)$. "Gridoidnost" algoritma se objašnjava činjenicom da se samo jedan korak odjednom razmatra u svakom trenutku.

Skupovi $Front(S)$ i $Cand(S)$ se ažuriraju u svakoj iteraciji. Izabrani nagib q^*/p^* se ubacuje u $Front(S)$ i izbacuje iz skupa $Cand(S)$. Ako je $p^* = 1$, onda se kardinalnost

$Cand(S)$ obavezno povećava za 1 u sledećem koraku iteracije, inače kardinalnost skupa $Cand(S)$ može da se ne promeni ili da se umanjuje za 1.

Preciznije, broj nagiba koji će se dodati u $Cand(S)$ posle izbacivanja nagiba q^*/p^* , može da varira između 0 i 2. Svaki od nagiba $q'(p^*)/p^*$ (gornji) i $q^*/p'(q^*)$ (desni) se dodaje u $Cand(S^*)$, ako je ispunjeno da njihovo dodavanje u S^* ne narušava uslov stepeništa. Ovaj uslov se lako proverava sa pitanjem da li je $q'(p^*)$ (odn. $p'(q^*)$) manje od q -vrednosti (odn. p -vrednosti) prvog levog (odn. prvog desnog) suseda od q^*/p^* u $Cand(S)$. To ima za posledicu da ako je q^*/p^* prvi (odn. poslednji) element u $Cand(S)$, onda se gornji (odn. desni) nagib obavezno dodaje $Cand(S^*)$.

Primerdba. Sa ciljem da se lako i brzo nadju susedi korisno je u toku iteracija čuvati skup nagiba $Cand(S)$ *sortiran* u odnosu na opadajuće nagibe; povezana lista bi bila pogodna struktura za implementaciju.

Ako bi nagib za ubacivanje q^*/p^* iz $Cand(S)$ sa Sl. 6 redom bio jednak 12/1, 9/2, 8/3, 4/5, 1/6, tada bi nagibi koji bi se dodali $Cand(S^*)$ bili redom jednaki 13/1 (gornji), 11/2 (gornji), nijedan, 6/5 (gornji) i 1/7 (desni).

Iterativno dodavanje nagiba se zaustavlja u trenutku kada bi dodavanje novog izabranog nagiba q^*/p^* u S bilo onemogućeno zbog nedovoljnog preostalog slobodnog prostora na katetama. Preciznije, do zaustavljanja iteracija dolazi kada je:

$$\sum_{q/p \in S^*} q > b \quad \text{ili} \quad \sum_{q/p \in S^*} p > a.$$

Navodimo tri predloga za heurističku funkciju H :

$$H_1(S) = \max_{q/p \in Cand(S)} \min \left(b - q - \sum_{q'/p' \in S} q', a - p - \sum_{q'/p' \in S} p' \right)$$

Funkcija H_1 maksimizuje manju od dve dužine na katetama, nepokrivenu projekcijama stranica sa nagibima iz S . Ova heuristička funkcija ne pravi optimalna stepeništa u opštem slučaju, sledi odgovarajući kontraprimer:

Osenčeno stepenište S na Sl. 6 se dobija primenom funkcije H_1 za $b = 126$ i $a = 69$. Ovo stepenište nije optimalno. Ima 27 nagiba, ali je $n(a, b) = 28$ ($a = A(13, 2)$, $b = B(13, 2)$, $card(13, 2) = 28$, videti Tabelu 4). Stepenište S ostavlja nepokrivenu dužinu 4 na a -kateti i dužinu 3 na b -kateti. Međutim, moguće je izbaciti nagib 7/4 iz S i dodati dva nova nagiba 9/2 i 1/6, čime se dobija optimalno stepenište $S(13, 2)$.

$$H_2(S) = \min_{q/p \in Cand(S)} \left(q + \frac{b}{a} \cdot p \right)$$

Heuristička funkcija H_2 je dizajnirana tako da se projekcije na dve katete štede u skladu sa inverznim odnosom dužina kateta. Njenom primenom se generiše niz stepeništa, meju kojima se mogu naći optimalna stepeništa oblika $S(t, b/a)$ za prirodne brojeve t .

$$H_3(S) = \min_{q/p \in Cand(S)} \left(q + \frac{b - \sum_{q'/p' \in S} q'}{a - \sum_{q'/p' \in S} p'} \cdot p \right)$$

Funkcija H_3 je kombinacija H_1 i H_2 . Projekcije na katete se štede u skladu sa obrnutim odnosom dužina kateta, nepokrivenih projekcijama stranica sa nagibima koji su već prihvaćeni u S .

Pretpostavimo da je napravljeno optimalno stepenište $O(a, b)$. Sa ciljem da se izgenerišu temena pridruženog optimalnog digitalnog luka, niz nagiba u $O(a, b)$ bi trebao da bude *sortiran*. Linearan (po dužini niza) algoritam može da se dobije kada se prolaženjem po generalizovanom Farejevom nizu $F(y_{max}, x_{max}(1))$ eliminišu oni njegovi članovi koji ne pripadaju $O(a, b)$; broj eliminisanih članova je manji od broja onih koji ostaju.

Druga mogućnost za korišćenje generalisanog Farejevog niza bi mogla da proistekne iz alternativnog algoritma za direktno generisanje *sortiranih* nagiba optimalnog digitalnog luka. Medjutim, ovaj pristup zahteva pravilo za izbacivanje elemenata niza koji ne pripadaju $O(a, b)$.

3.5 Zaključak

Maksimizacija broja stranica digitalnog konveksnog luka (sa datim dužinama kateta) je korak od kvadratnog slučaja ka pravougaonom slučaju, kada se razmatra maksimizacija broja stranica digitalnog konveksnog poligona upisanog u digitalni četvorougao. Kvadratni slučaj, čija formulacija može da se nadje u [28], je kompletno rešen (druga Glava ovog rada je posvećena tome). Na primer, tačno opšte rešenje je dato u [20], dok su asimptotski i algoritamski aspekti bili razmatrani u [5] odnosno u [1].

U sledeće dve tačke postoji sličnost izmedju rešenja u asimptotskom smislu kvadratnog slučaja ([5]) i gornjeg iznetog rešenja razmatranog problema:

1. Koristi se princip štednje projekcijskih dužina stranica. Naime, konveksnost luka ima za posledicu da projekcije njegovih stranica na nalegle katete ne mogu preklapati jedna drugu. Tako je suma projekcijskih dužina ograničena odozgo sa dužinama kateta. Heuristička funkcija

$H_4(S) = \min_{q/p \in C \text{ and } (S)} (p + q)$ vodi ka optimalnom (gridi) rešenju kvadratnog slučaja. Medjutim, kada dužine kateta nisu jednake, tada štednja mora da bude u skladu sa različitošću njihovih dužina.

2. U oba slučaja se koriste pomoćne optimalne familije monotonih rešenja. Tačna optimalna rešenja, u opštem slučaju, mogu da se dobiju ubacivanjem nagiba koji su izmedju neka dva odgovarajuća optimalna rešenja, iz razmatranih familija, uz korišćenje nekih složenijih metoda.

Rešenje problema maksimiziranja broja stranica digitalnog konveksnog luka sa datim katetama različite dužine može direktno da se primeni na simetričnu varijantu pravougaonog slučaja, to jest, za odredjivanje *simetričnog* (sa četiri jednaka luka) digitalnog konveksnog poligona, sa maksimalnim mogućim brojem temena, koji aproksimira elipsu sa datim osama u celobrojnoj mreži. On se dobija kopiranjem gornjeg rešenja za luk u svaki od četiri luka pravougaonika: JI-luk, SI-luk, SZ-luk i JZ-luk.

Medjutim, nije sigurno da je to optimalno rešenje za pravougaoni slučaj, to jest, da sledeći opštiji problem, mora biti simetričan (sa tretiranjem sva četiri luka na isti način):

- Date su stranice veličine a i b pravougaonika R , odrediti digitalni konveksni poligon sa maksimalnim brojem stranica, koji može da se upiše u R .

Neke motivacije za razmatranje simetrične pravougaone varijante upravo navedenog problema mogu da se nadju recimo u sledeća dva praktična pitanja:

- Koliko precizno može elipsa da se nacрта na kompjuterskom ekranu, sa kvadratnim pikselima, ako se elipsa predstavlja simetričnim konveksnim polinomom, i ako je mera preciznosti broj temena takvog poligona?
- Koja je donja granica za veličinu koda, koja je dovoljna da se predstavi bilo koji konveksni oblik u pravougaonoj mreži datih dimenzija?

Predlaže se sledeći gridi algoritam koji traži digitalne konveksne poligone sa parnim brojem stranica i minimalnom površinom.

Ulaz. Prirodan broj n .

Izlaz. Monotono rastući niz nagiba $S(n)$ stranica SSZ-polu-luka simetričnog "sočivastog" $2n$ -tougla $P(2n)$, koji se dobija od polaznog niza nagiba $\{0/1, 1/1\}$ iterativnim dodavanjem nagiba u svakom koraku, tako da svako pojedino dodavanje nagiba proizvodi kod odgovarajućeg pridruženog poligona minimalan prirast G-površine.

Označimo minimalnu G-površinu, d.k. $2n$ -tougla, dobijenog primenom ovog gridi algoritma sa $gg(2n)$.

Koraci algoritma imaju sledeći prikaz:

Inicijalizacija niza $S(2) = \{0/1, 1/1\}$.

Konstruisanje za $2 \leq k \leq n-1$ niza nagiba $S(k+1)$ iz niza nagiba

$S(k) = \left\{ \frac{0}{1} = \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k} = \frac{1}{1} \right\}$. Nagibi oba niza su sortirani u rastućem redosledu. Ova

konstrukcija se ostvaruje ubacivanjem pogodno izabranog nagiba b/a , koji je određen sa:

Neka $\Delta(S(k), m)$ (za $1 \leq m \leq k-1$) označava povećanje G-površine odgovarajućeg d.k. $2k$ -tougla $P(2k)$, koje nastaje kao posledica ubacivanja nagiba $\frac{b_m + b_{m+1}}{a_m + a_{m+1}}$ u niz $S(k)$.

Ovakav izbor nagiba za stranice za ubacivanje je u skladu sa uslovom koji je potreban da bi se imalo optimalno rešenje. Naime, sledi iz Teoreme 9 iz [26] da svaki optimalni poligon, predstavljen nizom nagiba Opt , opšteg problema minimizacije površine ima sledeću lokalnu osobinu: nagib $\frac{b_m + b_{m+1}}{a_m + a_{m+1}}$ ne može biti prisutan u Opt ako nisu oba nagiba $\frac{b_m}{a_m}$ i $\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$ već prisutna u Opt (poslednja dva nagiba su takodje dobijena polazeći od niza nagiba $S(2)$ iterativnim ubacivanjem nagiba koji zadovoljavaju istu lokalnu osobinu).

Tada je $\frac{b}{a} = \frac{b_{m^*} + b_{m^*+1}}{a_{m^*} + a_{m^*+1}}$, gde je

$$\Delta(S(k), m^*) = \min_{1 \leq m \leq k-1} \Delta(S(k), m).$$

4.3.1. Izračunavanje $\Delta(S(k), m)$

Lema 10 Ako se stranica sa nagibom $\frac{b_{m+1} + b_m}{a_{m+1} + a_m}$ ubacuje izmedju dve susedne stranice

(koje pripadaju SSZ- i JJI-polu-luku) $P(2k)$ sa nagibima $\frac{b_m}{a_m}$ i $\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$, tada je prirast G-površine (napravljen ovim ubacivanjem) jednak

$$\Delta(S(k), m) = Xq + Yp - 1, \quad \text{gde su}$$

$$X = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m+1}^k a_i, \quad Y = \sum_{i=m+1}^k b_i - \sum_{i=1}^m b_i, \quad q = b_m + b_{m+1}, \quad p = a_m + a_{m+1}.$$

Dokaz. Pogledati dokaz Leme 11 (Sekcija 5.2.1) u sledećoj glavi na strani 62. Dokaz ove leme je gotovo identičan, pa se neće ponavljati. Jedina razlika je što ovde imamo razvijene samo polulukove, pa su zato ovde potrebne oznake nešto drugačije:

$$A1m = \sum_{i=1}^m a_i, \quad Amk = \sum_{i=m+1}^k a_i, \quad Bmk = \sum_{i=m+1}^k b_i \quad \text{and} \quad B1m = \sum_{i=1}^m b_i.$$

□

4.3.2. Složenost

Motivacija za uvođenje gore predloženog gridi algoritma leži u činjenici da je konstrukcija predložena u [26] takva da bi davala eksponencijalan algoritam.

Teorema 13 *Gridi algoritam predložen u ovoj glavi ima $O(n^2)$ koraka.*

Dokaz. Svaki niz nagiba $S(k+1)$, za $2 \leq k \leq n-1$, se generiše iz niza $S(k)$ u $O(k)$ koraka. Po Lemi 10, prirast G-površine, koji se dobija kao posledica ubacivanja na svakoj od $k-1$ pozicija, može biti određen u konstantnom vremenu, kad se znaju vrednosti X i Y . Naime, vrednosti parametara X i Y mogu da se ažuriraju u konstantnom vremenu za svako ubacivanje, na svakom nivou k (njihove početne vrednosti su 0 i -1). Ažuriranje $X := X + 2a_{m+1}$; $Y := Y - 2b_{m+1}$ se koristi posle m -tog ubacivanja na k -tom nivou ($1 \leq m \leq k-2$). Prelazak sa k -tog na $(k+1)$ -vi nivo se realizuje (posle $(k-1)$ -vog ubacivanja na k -tom nivou, za $2 \leq k \leq n-2$) tako što se izvrši sledeće ažuriranje: $X := -X + 2a_1 - 2a_k - a$; $Y := Y - 2b_1 + 2b_k + b$. Aktuelne vrednosti m^* i $\Delta(S(k), m^*)$ se čuvaju u memoriji. □

4.3.3. Kontraprimeri

Tvrđenje 1 *Gridi algoritam za konstrukciju digitalnih konveksnih $2n$ -touglova sa minimalnom površinom, koji se bazira na iterativnom ubacivanju onih parova naspramnih stranica, koje daju minimalni prirast površine u svakom pojedinom koraku – ne daje uvek optimalno rešenje.*

Dokaz. Kontraprimeri su nastali kada je puštena verzija predloženog gridi algoritma za minimalno uvećanje površine d.k. $2n$ -tougla sa "tolerancijom". Smisao tolerancije je da se u koracima iteracije propuštaju i neki *suboptimalni* (njihov prirast površine nije bio minimalni moguć, već je bio veći za najviše neku predviđenu vrednost tolerancije) d.k. $2k$ -uglovi i dalje iterativno uvećavaju. To znači da razlika između G-površine propuštenog suboptimalnog d.k. $2k$ -ugla i vrednosti $gg(2k)$ nije bila veća od vrednosti konstante tolerancije. Tabela 5 sadrži vrednosti $g(2n)$ za $2 \leq n \leq 11$ iz [26], koje se poklapaju sa vrednostima za gridi minimalnu površinu $gg(2n)$ koja je dobijena predloženim gridi algoritmom. Za svako n iz intervala $[12, 30]$ je data vrednost za $gg(2n)$. Za svako $n \in I = \{16, 17, 23, 24, 28, 29, 30\}$ je takodje data G-površina (označena sa $gtg(2n)$) d.k. $2n$ -tougla dobijenog primenom verzije algoritma sa tolerancijom, pri čemu je vrednost

konstante tolerancije data u zgradama:

n	$g(2n)$	$=$	$gg(2n)$	n	$gg(2n)$	$gtg(2n)$	n	$gg(2n)$	$gtg(2n)$
2	0			12	199		22	1391	
3	1			13	262		23	1602	1598(3)
4	4			14	332		24	1820	1815(3)
5	10			15	416		25	2060	
6	19			16	512	508(2)	26	2332	
7	34			17	616	614(3)	27	2621	
8	52			18	730		28	2938	2922(4)
9	79			19	870		29	3288	3244(3)
10	112			20	1018		30	3643	3579(3)
11	154			21	1200				

Tabela 5.

Kako je $gg(2n) > gtg(2n)$ za sve n iz skupa I , sledi da su svi njima odgovarajući poligoni kontraprimeri koji dokazuju tvrdjenje leme. \square

Iteration	Objective	Constraint	Step	Gradient	Norm	Time	Exit
1	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
2	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
3	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
4	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
5	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
6	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
7	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
8	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
9	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
10	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
11	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
12	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
13	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
14	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
15	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
16	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
17	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
18	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
19	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
20	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
21	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
22	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
23	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
24	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
25	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
26	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
27	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
28	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
29	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
30	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
31	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
32	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
33	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
34	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
35	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
36	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
37	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
38	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
39	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
40	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
41	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
42	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
43	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
44	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
45	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
46	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
47	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
48	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
49	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
50	0.999999	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0

Il risultato della ottimizzazione è mostrato nella tabella sottostante. Il valore minimo della funzione obiettivo è stato raggiunto in 50 iterazioni con un errore di tolleranza pari a 1e-06.

5.

O minimalnom uvećanju površine

Neka je dat digitalni konveksni $2n$ -ougao P sa paralelnim stranicama (centralno simetričan). Neka s označava minimalnu veličinu stranice digitalnog kvadrata u koji poligon P može da se upiše. U ovoj glavi je prikazan jedan algoritam složenosti $O(ns)$, koji određuje par paralelnih stranica, čije ubacivanje dovodi do minimalnog prirasta površine; drugim rečima, razlika između površine dobijenog centralno simetričnog digitalnog konveksnog $(2n+2)$ -ugla i površine poligona P je minimalna. Pokazano je da ovaj algoritam može da se uopšti, uz očuvanje iste složenosti, na opštiji algoritam za ubacivanje para paralelnih kongruentnih stranica, sa ciljem minimalnog uvećanja površine ne simetričnog digitalnog konveksnog poligona sa proizvoljnim brojem stranica.

5.1 Uvod i definicije

Digitalni konveksni poligon (kraće: *d.k. poligon* ili *d.k.p.*) je poligon čija sva temena pripadaju celobrojnoj mreži i čiji su svi uglovi strogo manji od π radijana. Neka je *dijametar* d.k.p. minimalna velicina stranice digitalnog kvadrata u koji taj d.k.p. može da se upiše.

Razmatra se sledeći problem optimizacije:

Datom digitalnom konveksnom n -touglu, treba dodati dve kongruentne paralelne stranice tako da se konstruiše digitalni konveksni $(n+2)$ -ugao, i da je razlika između njihovih površina minimalna.

Jednostavniji podproblem će prvo biti rešen u Poglavlju 5.2, dok Poglavlje 5.3 sadrži uopštenje rešenja iz Poglavlja 5.2.

Podproblem glasi: Za dati centralno-simetričan (sa paralelnim stranicama) digitalni konveksni poligon sa $2n$ stranica ($n > 1$), konstruisati centralno-simetrični digitalni konveksni $(2n+2)$ -ugao dodavanjem dve (kongruentne paralelne) stranice u polazni poligon, tako da se napravi minimalni mogući prirast površine.

Biće data $O(ns)$ konstrukcija koja rešava i podproblem i opšti problem, gde s označava dijametar polaznog d.k. poligona. Preciznije, $O(s)$ elementarnih koraka, će biti potrošeno za nalaženje lokalnog optimalnog umetanja, za fiksiranu poziciju. Broj mogućih pozicija (za umetanje) koje se razmatraju je $O(n)$. Konačno, ažuriranja potrebna za prelazak sa neke pozicije na sledeću mogu da se obave u konstantnom vremenu.

Motivacija za razmatranje centralno-simetričnih poligona sa parnim brojem trana može da se nadje u Teoremi 2 u [26], koja kaže da se traženje d.k.p. sa parnim brojem stranica i minimalnom površinom može suziti na centralno-simetrične poligone sa minimalnom površinom, bez gubitka na opštosti.

Polazeći od jediničnog kvadrata, iterativna primena minimalnog uvećanja površine koja je slična ovde prikazanom pod problemu, i koja je prikazana u predhodnoj Glavi, može da se primeni na gridi traženje digitalnog konveksnog $2n$ -tougla sa minimalnom površinom. Neki trikovi su omogućili da složenost ove pretrage bude samo $O(n^2)$ [3], umesto $O(n^2s)$. Ova gridi pretraga daje optimalna rešenja za sve one vrednosti n , za koje su takva rešenja poznata [26] (tj. za $n \leq 11$).

Dva optimizaciona problema, čiji su domen takodje digitalni konveksni poligoni, su bila razmatrana u drugoj i tećoj Glavi. Prvi od njih traži digitalni konveksni poligon sa minimalnim dijametrom, dok je drugi njegovo delimično uopštenje na luk, odnosno preciznije, generiše se luk sa maksimalnim brojem stranica.

Neka $g(v)$ i $a(v)$ redom označavaju broj *unutrašnjih* tačaka (G -površina) i površinu u euklidskom smislu (A -površina) d.k. v -tougla. Ove dve funkcije su povezane relacijom $a(v) = g(v) + v/2 - 1$ za $v \geq 3$, koja sledi iz poznate Pikove (Pick) teoreme [14].

Neka y_{min} i x_{max} redom označavaju minimalnu y -koordinatu i maksimalnu x -koordinatu razmatranog d.k.p. P . JI -luk (*jugo-istočni luk*) d.k. poligona P je niz susednih stranica (V_i, V_{i+1}) , $1 \leq i \leq c - 1$, gde tačke V_i označavaju temena (x_i, y_i) poligona P ; $x_1 < \dots < x_c = x_{max}$; $y_{min} = y_1 < \dots < y_c$. Specijalno, ako poligon P ima *donju horizontalnu* stranicu (V_0, V_1) ($V_0 = (x_0, y_1)$, $V_1 = (x_1, y_1)$, $x_0 < x_1$), tada se ta stranica uvek posmatra kao prva stranica JI -luka. Na analogan način se definišu i SI -, SZ - i JZ - lukovi d.k.p. (ako poligon P ima desnu vertikalnu stranicu tada se ona smatra prvom stranicom SI -luka, i tako dalje).

Neka je data stranica $e = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d.k.p., tada je *nagib* stranice e razlomak:

$$\frac{|x_1 - x_2|}{|y_1 - y_2|} \text{ ako } e \in SI \text{ ili } JZ\text{-luku}; \quad \frac{|y_1 - y_2|}{|x_1 - x_2|} \text{ ako } e \in JI \text{ ili } SZ\text{-luku}.$$

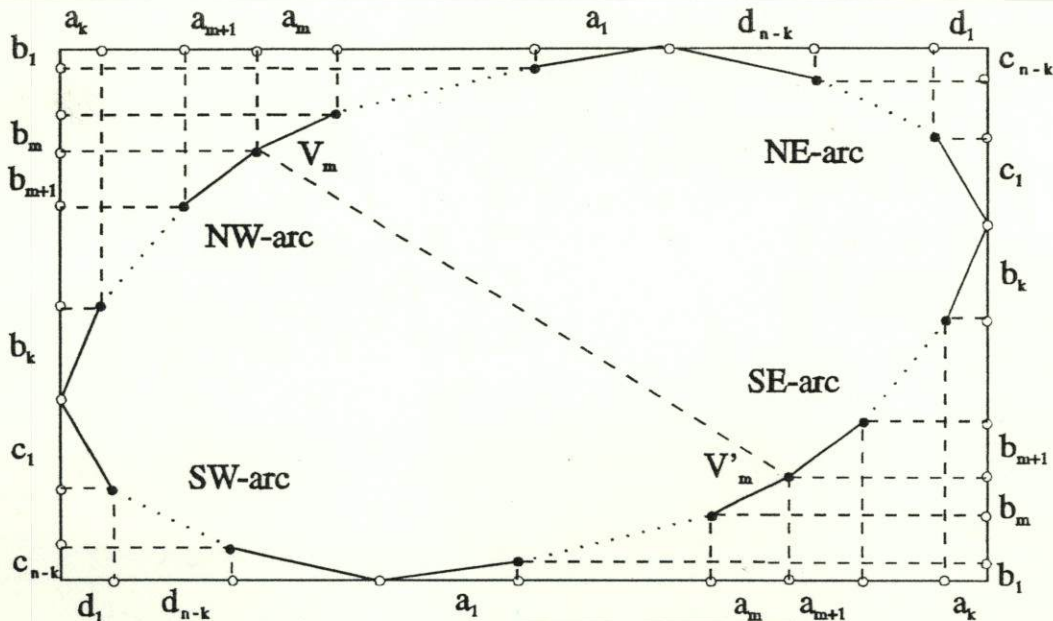
Najmanji ceo broj koji je veći od x se označava sa $\lceil x \rceil$, dok se najveći ceo broj koji je manji od x označava sa $\lfloor x \rfloor$. Najveći zajednički delitelj celih brojeva X i Y će biti označen sa $nzd(X, Y)$.

5.2 Algoritam

Neka je dat centralno-simetričan d.k. $2n$ -tougao (Sl. 8) sa dijametrom s :

- sa k sortiranih nagiba $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \dots < \frac{b_k}{a_k}$ u SZ -luku, tako da su prirodni brojevi b_i i a_i uzajamno prosti za $1 \leq i \leq k$;
- i sa $n - k$ sortiranih nagiba $\frac{d_1}{c_1} < \frac{d_2}{c_2} < \dots < \frac{d_{n-k}}{c_{n-k}}$ u JZ -luku, tako da su prirodni

brojevi d_i i c_i uzajamno prosti za $1 \leq i \leq n - k$.



Slika 8. Centralno-simetričan digitalni konveksni $2n$ -tougao.

Predlaže se sledeći algoritam:

Ulaz. Niz $S(n)$ koji predstavlja inicijalni $2n$ -tougao i sastoji se od nagiba koji odgovaraju stranicama u SZ- ili u JZ-luku (oba niza nagiba su sortirani u rastućem redosledu):

$$S(n) = \left\{ \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k}; \frac{d_1}{c_1}, \frac{d_2}{c_2}, \dots, \frac{d_{n-k}}{c_{n-k}} \right\}.$$

Izlaz. Pozicija m^* za optimalno ubacivanje stranice, kao i odgovarajući nagib stranica za ubacivanje q_{m^*}/p_{m^*} .

Centralno simetrični digitalni konveksni $(2n + 2)$ -ugao sa minimalnim uvećanjem površine u odnosu na polazni centralno simetrični d.k. $2n$ -tougao se konstruiše dodavanjem stranice sa nagibom q_{m^*}/p_{m^*} na poziciju između m^* -te i $(m^* + 1)$ -ve stranice u SZ-luku za $0 \leq m^* \leq k$ ili na poziciju između $(m^* - k - 1)$ -ve i $(m^* - k)$ -te stranice u JZ-luku za $k + 1 \leq m^* \leq n + 1$, kao i na odgovarajuću poziciju u JI-luku, odnosno u SI-luku.

Algoritam ima sledeći izgled:

Inicijalizuju se promenljive X i Y (njihov geometrijski smisao će biti ilustrovan na Sl. 9, Sekcija 5.2.1) sa:

$$X = - \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^{n-k} d_i \quad \text{i} \quad Y = \sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=1}^{n-k} c_i.$$

Nagib q_{m^*}/p_{m^*} , se određuje kao što sledi:

Neka $\Delta(S(n), \frac{q}{p})$ označava prirast G-površine d.k. $2n$ -tougla predstavljenog nizom nagiba $S(n)$, nakon što se dve stranice sa nagibom $\frac{q}{p}$ ubace kao naspramne stranice unutar dva naspramna luka, tako da konveksnost (i posledično centralna simetričnost) bude očuvana. Potreban uslov da ovo ubacivanje bude sa minimalnim prirastom površine je da su prirodni brojevi q i p uzajamno prosti, tako da će se u ostatku ovog poglavlja pretpostavljati da je ovaj uslov zadovoljen.

Neka je niz $\frac{q_m}{p_m}$ (za $0 \leq m \leq n+1$) definisan sa zahtevom:

$$\Delta(S(n), \frac{q_m}{p_m}) = \begin{cases} \min \left(\frac{b_m}{a_m} < \frac{q}{p} < \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \right) \Delta(S(n), \frac{q}{p}), & 0 \leq m \leq k \\ \min \left(\frac{d_{m-(k+1)}}{c_{m-(k+1)}} < \frac{q}{p} < \frac{d_{m-k}}{c_{m-k}} \right) \Delta(S(n), \frac{q}{p}), & k+1 \leq m \leq n+1 \end{cases}$$

gde su $b_0/a_0 = 0$, $b_{k+1}/a_{k+1} = 5s$, $d_0/c_0 = 0$ i $d_{n-k+1}/c_{n-k+1} = 5s$.

Drugim rečima, $\frac{q_m}{p_m}$ ($0 \leq m \leq n+1$) je optimalno rešenje za lokalno ubacivanje. On predstavlja nagib stranice, čije bi ubacivanje na poziciju između m -te i $(m+1)$ -ve stranice dovelo do centralno simetričnog digitalnog konveksnog $(2n+2)$ -ugla sa minimalnim prirastom površine u odnosu na polazni centralno simetrični d.k. $2n$ -tougao, kada se ubacivanje restrikuje na fiksiranu poziciju.

Tada $\frac{q_{m^*}}{p_{m^*}}$ je nagib koji zadovoljava:

$$\Delta(S(n), \frac{q_{m^*}}{p_{m^*}}) = \min_{0 \leq m \leq n+1} \Delta(S(n), \frac{q_m}{p_m}).$$

Primedbe. Nagibi b_0/a_0 , b_{k+1}/a_{k+1} , d_0/c_0 i d_{n-k+1}/c_{n-k+1} nisu prisutni u polaznom d.k. $2n$ -touglu. Oni su uvedeni sa ciljem da sa ujednače uslovi vezani za ubacivanje stranica: isti uslov pokriva ubacivanje stranice pre prve stranice, posle poslednje stranice i između njih. Izbor konstante $5s$ je u skladu sa Lemom 15.

5.2.1. Izračunavanje $\Delta(S(n), \frac{q}{p})$

Sledeća lema kaže da $\Delta(S(n), \frac{q}{p})$ može da se izračuna u konstantnom vremenu. Dokaz će biti dat za ubacivanja u SZ-luk i u JI-luk, sasvim analogan dokaz bi prošao za ubacivanja u JZ-luk i u SI-luk:

Lema 11 *Ako se ubacuju paralelne stranice sa nagibom q/p , sa uzajamno prostim imeniocem i brojiocem q i p , između neke dve susedne stranice u SZ-luku i između njihove dve naspramne stranice u JI-luku, centralnog simetričnog digitalnog konveksnog*

2n-ugla, sa nagibima b_m/a_m i b_{m+1}/a_{m+1} , ($\frac{b_m}{a_m} < \frac{q}{p} < \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$), tada je prirast G-površine napravljen ovim ubacivanjem jednak:

$$\Delta(S(n), \frac{q}{p}) = Xq + Yp - 1,$$

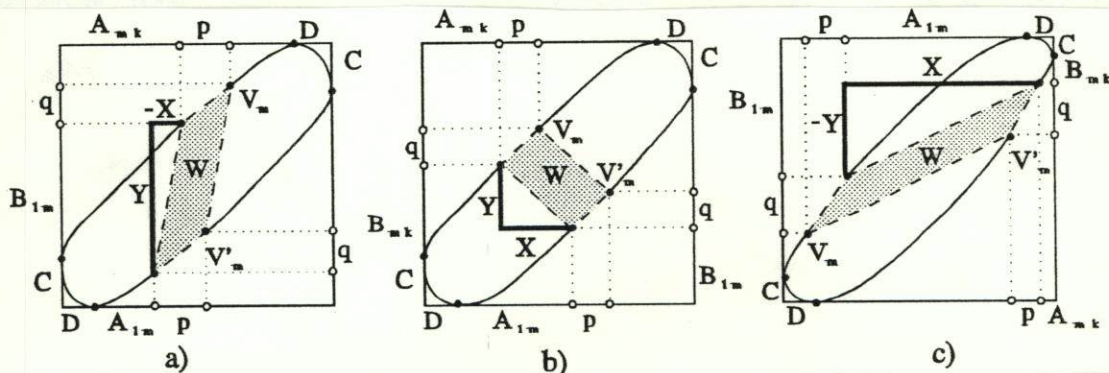
$$\text{gde je } X = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m+1}^k a_i + \sum_{i=1}^{n-k} d_i \quad \text{ i } \quad Y = \sum_{i=m+1}^k b_i - \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{i=1}^{n-k} c_i.$$

Dokaz. Neka su V_m i V'_m zajednička temena (videti Sl. 8) stranica sa nagibima b_m/a_m i b_{m+1}/a_{m+1} , u SZ- odnosno u JI-luku. Razlikovaće se tri situacije, u zavisnosti od pozicije tačke V'_m pošto se vektor $\overrightarrow{V_m V'_m}$ translira tako da se tačka V_m poklopi sa $(0,0)$; slučajevi a), b) i c) na Slikama 9.-11. odgovaraju redom situacijama kada translirana tačka V'_m pripada JZ-, JI- ili SI-kvadrantu. Ove tri situacije mogu takodje da se okarakterišu sa parovima nejednačina ($X \leq 0$ i $Y > 0$), ($X > 0$ i $Y > 0$), ($X > 0$ i $Y \leq 0$) (Sl. 9).

Slika 9 objašnjava geometrijski smisao izraza za X i Y u svakoj od tri situacije; skraćenice

$$A_{1m} = \sum_{i=1}^m a_i, \quad A_{mk} = \sum_{i=m+1}^k a_i, \quad B_{1m} = \sum_{i=1}^m b_i, \quad B_{mk} = \sum_{i=m+1}^k b_i,$$

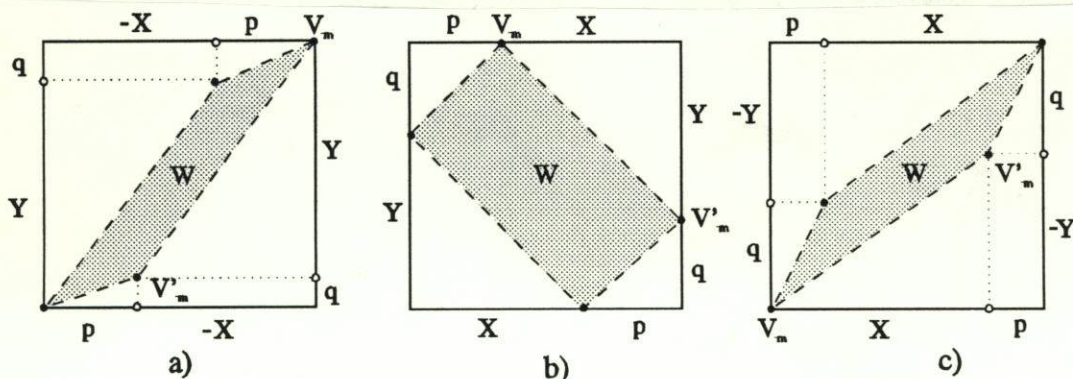
$$C = \sum_{i=1}^{n-k} c_i, \quad D = \sum_{i=1}^{n-k} d_i \quad \text{ se koriste na njoj .}$$



Slika 9. Geometrijski smisao X i Y .

Dodatna G-površina $\Delta(S(n), \frac{q}{p})$, posle ubacivanja stranice sa nagibom $\frac{q}{p}$, je jednaka G-površini paralelograma W upisanog u pravougaonik sa stranicama čije su dužine $p + |X|$ i $q + |Y|$ u skladu sa Slikama 9 i 10, uvećanoj za broj celobrojnih tačaka mreže koje pripadaju unutrašnjosti onih stranica W koje su paralelne sa $V_m V'_m$ (primetimo da

preostale dve stranice W nemaju unutrašnjih celobrojnih tacaka s obzirom da su brojevi q i p uzajamno prosti).



Slika 10. Prirast A-površine je osenčeni paralelogram.

Slika 10b) daje da je A-površina W jednaka $(X+p)(Y+q) - XY - pq = Xq + Yp$. Slično, je A-površina W na Slici 10c) jednaka $(X+p)(-Y+q) - X(-Y) - 2(-Y)p - pq = Xq + Yp$, i isti rezultat se dobija za Sliku 10a).

Može se uočiti da je broj celobrojnih tacaka v na stranicama paralelograma W jednak $4 + 2 \cdot (\text{nzd}(X, Y) - 1)$. Pikova teorema implicira da je G-površina W jednaka (A-površini W) $-\frac{v}{2} + 1$. Tako je G-površina W jednaka $Xq + Yp - \text{nzd}(X, Y)$ u svakoj od tri situacije.

Kako je broj dodatnih unutrašnjih tacaka mreže koje nastaju nakon ubacivanja i koje pripadaju onim stranicama paralelograma W koje su paralelne sa $V_m V'_m$ jednak $\text{nzd}(X, Y) - 1$, sledi da je ukupni prirast G-površine nakon ubacivanja $\Delta(S(n), \frac{q}{p})$ jednak $Xq + Yp - 1$. \square

5.2.2. Odredjivanje niza $\frac{q_m}{p_m}$

Problem odredjivanja članova niza $\frac{q_m}{p_m}$ uvedenog u uvodu Poglavlja 5.2 može da se redukuje na problem linearnog celobrojnog programiranja. Ovaj problem će biti razmatran jedino za ubacivanje u SZ-luk (i u JI-luk). Ova grana problema će biti označena sa *LIP*, druga grana je sasvim analogna:

$$\min(p \cdot Y + q \cdot X), \quad \text{pod ograničenjima:}$$

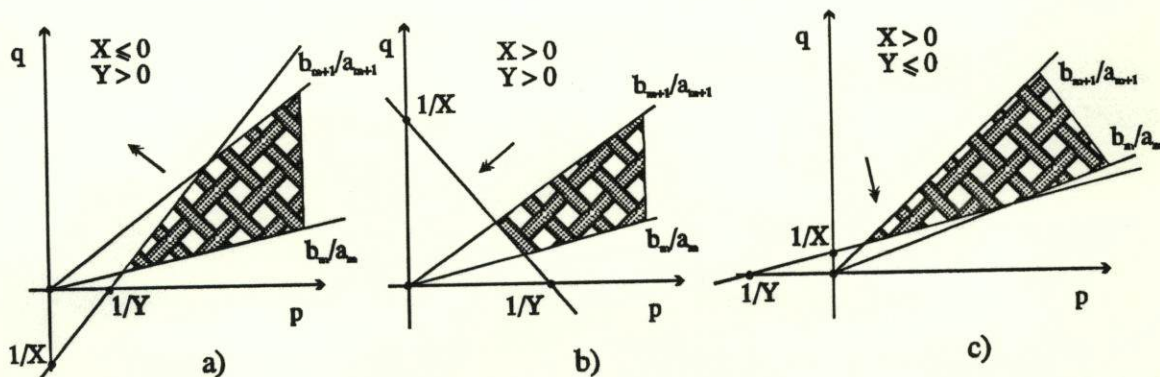
$$\text{I. } \frac{b_m}{a_m} < \frac{q}{p} < \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \quad \text{II. } p \cdot Y + q \cdot X \geq 1 \quad (\text{LIP})$$

III. p i q su uzajamno prosti prirodni brojevi,

gde su X i Y date celobrojne konstante.

Ograničenje II sledi iz činjenice da je minimalni prirast G-površine 0.

Tri situacije označene sa a), b), c) su prikazane na Slikama 11a) - 11c), u zavisnosti od predznaka konstanti X i Y :



Slika 11. Dopustivi skup LIP .

Lema 12 Sledeće nejednakosti su redom zadovoljene za situacije a) i c): $\frac{Y}{-X} > \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$
i $\frac{-Y}{X} < \frac{b_m}{a_m}$.

Dokaz. Biće dat dokaz za situaciju a), dokaz za situaciju c) je sasvim analogan.

Kako je $\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} < \frac{b_i}{a_i} \implies b_{m+1} \cdot a_i < a_{m+1} \cdot b_i$, za $m+2 \leq i \leq k$ i

$\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} > \frac{b_i}{a_i} \implies b_{m+1} \cdot a_i > a_{m+1} \cdot b_i$, za $1 \leq i \leq m$, sledi

$$b_{m+1} \cdot a_{m+2} + \dots + b_{m+1} \cdot a_n - b_{m+1} \cdot a_1 - \dots - b_{m+1} \cdot a_m <$$

$$a_{m+1} \cdot b_{m+2} + \dots + a_{m+1} \cdot b_k - a_{m+1} \cdot b_1 - \dots - a_{m+1} \cdot b_m.$$

Tako je

$$\begin{aligned} \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} &< \frac{(b_{m+1} + \dots + b_k) - (b_1 + \dots + b_m)}{(a_{m+1} + \dots + a_k) - (a_1 + \dots + a_m)} < \\ &< \frac{(b_{m+1} + \dots + b_k) - (b_1 + \dots + b_m) + (c_1 + \dots + c_{n-k})}{(a_{m+1} + \dots + a_k) - (a_1 + \dots + a_m) - (d_1 + \dots + d_{n-k})} = \frac{Y}{-X}. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 13 Problem LIP uvek ima optimalno rešenje.

Dokaz. Ograničenje I kaže da je dopustivi skup podskup unutrašnjosti ugla određenog sa polupravama

$q = \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot p, p > 0$ i $q = \frac{b_m}{a_m} \cdot p, p > 0$. Prava $L_1: p \cdot Y + q \cdot X = 1$ seče obe strane ugla; to sledi iz $X > 0, Y > 0$ u situaciji b) i iz Leme 12 u situacijama a) i c). Ograničenje II implicira da se ceo dopustivi skup prostire van trougla, koji je isečen iz ugla pravom L_1 . Ne praznost dopustivog skupa sledi iz činjenice da beskonačno mnogo tačaka (p, q) koje zadovoljavaju ograničenje III leži unutar ugla, ali samo konačan deo njih je unutar trougla.

Kako je pravac optimizacije normalan na pravu L_1 , optimalno rešenje(a) može da se nadje na pravoj $L_t: p \cdot Y + q \cdot X = t$ za neki prirodan broj t . Preciznije, treba da se nadje najmanja vrednost parametra t tako da je presek prave L_t i dopustivog skupa LIP neprazan. \square

5.2.3. Složenost

Sledeće dve leme će biti korišćene za dokaz složenosti predloženog algoritma:

Lema 14 Razlika dva susedna nagiba digitalnog konveksnog poligona sa dijametrom s je veća od $\frac{1}{2s}$.

Dokaz. Minimalni nagib stranice razmatranog digitalnog konveksnog poligona je $1/s$, dok je apsolutna vrednost tangensa ugla određenog sa neka tri temena razmatranog poligona ograničena odozdo sa $1/(2s - 1)$.

Posmatrajmo dva susedna nagiba $\frac{b_m}{a_m}$ i $\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$ razmatranog d.k.p. (gde je $\frac{b_m}{a_m} < \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$). Uvode se sledeća tri ugla:

$$\gamma_m = \arctg\left(\frac{b_m}{a_m}\right), \quad \gamma_{m+1} = \arctg\left(\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}\right) \quad \text{i} \quad \delta_m = \gamma_{m+1} - \gamma_m.$$

$$\begin{aligned} \text{Tada je} \quad \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} - \frac{b_m}{a_m} &= \operatorname{tg}(\gamma_{m+1}) - \operatorname{tg}(\gamma_m) = \\ &= \operatorname{tg}(\delta_m) \cdot (1 + \operatorname{tg}(\gamma_{m+1}) \cdot \operatorname{tg}(\gamma_m)) \geq \frac{1}{2s-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) > \frac{1}{2s}. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 15 Ako je nagib $\frac{q_m}{p_m}$ neko optimalno rešenje LIP, tada je

$$q_m \leq 4s + 1 \quad \text{i} \quad p_m \leq 4s + 1.$$

Dokaz. Ograničenje I LIP implicira da svaka dopustiva tačka (q, p) zadovoljava

$$q \in \left(\frac{b_m}{a_m} \cdot p, \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot p \right)$$

Dovoljan uslov da ovaj interval sadrži celobrojnu tačku je da je njegova širina takva da pripada otvorenom intervalu $(1, 2)$. Kako celobrojna tačka može da bude prisutna i unutar užeg intervala sledi da

$$p_m \leq \left\lceil \frac{2}{\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} - \frac{b_m}{a_m}} \right\rceil \leq \frac{2}{\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} - \frac{b_m}{a_m}} + 1 \stackrel{\text{(Lema 14)}}{<} 4s + 1.$$

$$\text{Slično važi da je} \quad q_m \leq \frac{2}{\frac{a_m}{b_m} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}} + 1 < 4s + 1. \quad \square$$

Složenost predloženog algoritma je data u sledećoj teoremi:

Teorema 14 Složenost predloženog algoritma, za nalaženje dveju kongruentnih paralelnih stranica, koje mogu da se ubace u centralno simetričan digitalni konveksni $2n$ -ougao sa dijametrom s , na takav način da je dobijeni digitalni konveksni $(2n + 2)$ -ugao takav da je razlika između njegove površine i površine polaznog poligona minimalna – je jednaka $O(ns)$.

Dokaz. Neka je dat ulazni niz nagiba $S(n)$, i prave se pokušaji ubacivanja stranice na svaku od $n + 2$ pozicije koje su određene sa trenutnih n stranica. Ove pozicije se prelaze samo jednom. Posle $O(n)$ inicijalizacije vrednosti parametara X i Y se ažuriraju u konstantnom vremenu za svaki pokušaj ubacivanja, (njihove početne vrednosti su definisane u Sekciji 5.2.1.):

Ažuriranja $X := X + 2 \cdot a_{m+1}$; $Y := Y - 2 \cdot b_{m+1}$ se koriste posle svakog m -tog pokušaja ubacivanja ($0 \leq m \leq k - 1$).

Prelazak iz SZ-luk u JZ-luk se događa posle k -tog pokušaja ubacivanja uz sledeća ažuriranja: $X := Y$; $Y := -X$; da se primetiti da je $X = A + D$; $Y = -B + C$ pre prelaska i da je $X = B - C$; $Y = A + D$ posle prelaska, gde su redom A i B sledeće sume:

$$A = \sum_{i=1}^k a_i \quad \text{i} \quad B = \sum_{i=1}^k b_i.$$

Posle m -tog pokušaja ubacivanja ($k + 1 \leq m \leq n$) se koriste sledeća ažuriranja $X := X + 2 \cdot c_{m-k}$; $Y := Y - 2 \cdot d_{m-k}$.

Aktuelne vrednosti m^* , q_{m^*} , p_{m^*} i $\Delta(S(n), \frac{q_{m^*}}{p_{m^*}})$ (videti uvodni deo Poglavlja 5.2) se čuvaju u memoriji.

Sledi iz Leme 15 da se nagib $\frac{q_m}{p_m}$, koji treba ubaciti na poziciju m , $0 \leq m \leq n + 1$, može odrediti sa najviše $O(s)$ elementarnih koraka. Vrednost p_m je jednaka najmanjem prirodnom broju i , za koga je sledeći $O(1)$ test zadovoljen:

ako nijedan od brojeva $\frac{b_m}{a_m} \cdot i$ i $\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot i$ nije celobrojan

onda je $\lceil \frac{b_m}{a_m} \cdot i \rceil \leq \lfloor \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot i \rfloor$ **inače** je $\lceil \frac{b_m}{a_m} \cdot i \rceil < \lfloor \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot i \rfloor$.

Lema 15 garantuje da je najviše $O(s)$ takvih testova potrebno.

Vrednost q_m se zatim određuje kao $\lceil \frac{b_m}{a_m} \cdot p_m \rceil$ u situaciji b) i c), dok je

$q_m = \lfloor \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot p_m \rfloor$ u situaciji a).

Kako se razmatra $O(n)$ mogućnosti za ubacivanje stranice, i kako je predloženi način za određivanje nagiba $\frac{q_m}{p_m}$ (stranice koja se ubacuje) složenosti $O(s)$, sledi da je ukupna složenost predloženog algoritma $O(ns)$. \square

Primedba. Iterativna primena (sa više od jednog koraka iteracije) predloženog algoritma ne mora da kao rezultat da d.k. $(2n + 2i)$ -tougao ($i \geq 2$) sa minimalnim prirastom površine u odnosu na polazni d.k. $2n$ -tougao. Na primer, neki kontraprimeri su napravljeni sa $O(n^2)$ algoritmom [3] za određivanje digitalnog konveksnog $2n$ -tougla sa minimalnom površinom, koji pokazuju da postoji ne gridi rešenje sa manjom površinom nego gridi optimalno rešenje. Medjutim, treba da se primeti da algoritam koji je dat u [26] za rešavanje istog problema, ima eksponencijalnu složenost, tako da je u praksi primenljiv za samo veoma male vrednosti parametra n .

Sledeće dosetke smanjuju složenost algoritma prikazanog u [3] na samo $O(n^2)$, u poredjenju sa $O(n^2s)$, što bi sledelo iz iterativne primene algoritma predloženog ovde:

Kada se traži digitalni konveksni $2n$ -tougao sa minimalnom površinom, sledi iz rezultata u [26] da se $\frac{q_m}{p_m}$ može odrediti u konstantnom vremenu kao $\frac{q_m}{p_m} = \frac{b_m + b_{m+1}}{a_m + a_{m+1}}$.

5.3 Opšti slučaj

Neka je opšti d.k. n -tougao reprezentovan nizom nagiba

$$S(n) = \left\{ \frac{b_1}{a_1}, \dots, \frac{b_k}{a_k}; \frac{d_1}{c_1}, \dots, \frac{d_l}{c_l}; \frac{f_1}{e_1}, \dots, \frac{f_{k'}}{e_{k'}}; \frac{h_1}{g_1}, \dots, \frac{h_{l'}}{g_{l'}} \right\}, \text{ gde je}$$

$k + l + k' + l' = n$. U nizu $S(n)$ su podnizovi sortiranih nagiba odvojeni znakom ";", i pripadaju redom SZ-, JZ-, JI- i SI-luku i izlistani su u rastućem redosledu.

Kada su nagib i pozicije dveju stranica za ubacivanje fiksirani, sledeća lema koja je analogna Lemi 11 potvrđuje da je potrebno konstantno vreme za izračunavanje prirasta G -površine kod uopštenog problema:

Lema 16 *Ako se dve paralelne stranice sa nagibom q/p , gde su q i p uzajamno prosti prirodni brojevi, redom ubacuju izmedju stranica u SZ-luku sa nagibima b_m/a_m i b_{m+1}/a_{m+1} , i izmedju stranica u JI-luku sa nagibima $f_{m'}/e_{m'}$ i $f_{m'+1}/e_{m'+1}$,*

($\max\{\frac{b_m}{a_m}, \frac{f_{m'}}{e_{m'}}\} < \frac{q}{p} < \min\{\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}, \frac{f_{m'+1}}{e_{m'+1}}\}$), tada je prirast G -površine nastao ovim umetanjem jednak $Xq + Yp - 1$, gde su

$$X = \sum_{i=1}^l d_i + \sum_{i=1}^{m'} e_i - \sum_{i=m+1}^k a_i \quad Y = \sum_{i=1}^l c_i - \sum_{i=1}^{m'} f_i + \sum_{i=m+1}^k b_i.$$

Dokaz ove leme je analogan dokazu Leme 11 Početne vrednosti za nove promenljive X i Y se dobijaju iz gornjih izraza stavljanjem da je $(m, m') = (0, 0)$.

Primedbe. Jednakosti $X = X'$ i $Y = Y'$ su zadovoljene, kada su promenljive X' i Y' definisane sa

$$X' = \sum_{i=1}^{l'} h_i + \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m'+1}^{k'} e_i \quad Y' = \sum_{i=1}^{l'} g_i - \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{i=m'+1}^{k'} f_i$$

Sume koje se dobiju na obe strane ovih jednakosti, nakon što se sabirci sa negativnim predznakom prebace, su jednake dužinama naspramnih stranica minimalnog pravougao-nika opisanog oko polaznog d.k.p.

Radi ujednačavanja uslova uvodi se šest dodatnih nagiba, slično kao kod centralnosimetričnog podproblema: $b_0/a_0 = d_0/c_0 = f_0/e_0 = h_0/g_0 = 0$ i $b_{k+1}/a_{k+1} = d_{l+1}/c_{l+1} = f_{k'+1}/e_{k'+1} = h_{l'+1}/g_{l'+1} = 5s$.

Lako je pokazati da tvrdjenje Leme 12 ne menja valjanost nakon što su konstante X i Y zamenjene njihovim odgovarajućim uopštenjima (uvedenim u Lemi 16). Slično, lako je zaključiti da uopštenje ne utiče na tačnost tvrdjenja Lema 13, 14 i 15; Lema 14 je po samoj svojoj formulaciji već tačna za opšti d.k.p.

Sledeća teorema tvrdi da uopštenje razmatranog problema ne povećava njegovu složenost:

Teorema 15 Složenost nalaženja dveju paralelnih podudarnih stranica, čije bi dodavanje u digitalni konveksni n -ougao, sa dijametrom s , generisalo takav digitalni konveksni $(n+2)$ -ougao, da je razlika između njegove površine i površine polaznog poligona minimalna – je jednaka $O(ns)$.

Lokalni problem optimizacije (nalaženje nagiba koji daju minimalni prirast G -površine nakon ubacivanja njima odgovarajućih stranica na fiksirane pozicije, koje su određene parom indeksa pozicija (m, m') unutar neka dva naspramna luka) je sada rešen sa problemom celobrojnog linearnog programiranja koji ima kompletno analogno rešenje, rešenju problema LIP razmatranom u Sekciji 5.2.2; jedina razlika između ova dva problema sa odnosi na činjenicu da se nova definicija konstanti X i Y sada koristi i da se prvo ograničenje problema LIP sada zamenjuje sa:

$$\max\left\{\frac{b_m}{a_m}, \frac{f_{m'}}{e_{m'}}\right\} < \frac{q}{p} < \min\left\{\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}, \frac{f_{m'+1}}{e_{m'+1}}\right\}.$$

Slično kao kod poslednjeg dela dokaza Teoreme 14, može da se dokaže da je složenost uopštene verzije problema LIP $O(s)$.

Završni korak potreban za dokazivanje Teoreme 15 bi trebalo da pokaže da je broj pozicija za ubacivanje ponovo reda $O(n)$:

Lema 17 Broj pozicija za ubacivanje parova paralelnih jednakih stranica u naspramne lukove je ograničen odozgo sa $n + 2$.

Dokaz. U skladu sa oznakama uvedenim na početku ove sekcije, dovoljno je pokazati da je broj pozicija, u naspramnim lukovima (SZ- i JI-luku) opšteg d.k.p., za ubacivanje paralelnih podudarnih stranica ograničen odozgo sa $k + k' + 1$.

Nalaženje sledeće pozicije u sortiranim nizovima nagiba, unutar oba luka može da se realizuje u konstantnom vremenu na sledeći način:

ako su nagibi na $(m + 1)$ -voj poziciji u SZ-luku i na $(m' + 1)$ -voj poziciji u JI-luku jednaki

onda povećati m i m' za 1

inače ako je $(m + 1)$ -vi nagib u SZ-luku manji od $(m' + 1)$ -vog nagiba u JI-luku

onda povećati m za 1 **inače** povećati m' za 1.

Posle inicijalizacije $m = m' = 0$, parovi pozicija za ubacivanje (m, m') , koji se određuju navedenom procedurom obavezno zadovoljavaju uopšteno ograničenje I, odgovarajućeg uopštenog problema celobrojnog linearnog programiranja.

Gornja granica za broj pozicija, datih u lemi se postiže kada ne postoje stranice u naspramnim lukovima koje imaju iste nagibe. \square

$\sum_{i=1}^n x_i = 1$ (1)

$x_i \geq 0$ (2)

$x_i \leq 1$ (3)

U ovom problemu imamo tri ograničenja. Prvo je jednačina (1) koja kaže da je suma svih x_i jednaka 1. Drugo je nejednakost (2) koja kaže da je svako x_i nenegativno. Treće je nejednakost (3) koja kaže da je svako x_i manje ili jednako 1.

Ova ograničenja su linearna, pa se ovaj problem može rešiti linearnom optimizacijom.

U ovom slučaju, optimalno rešenje je $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Ovo rešenje zadovoljava sva ograničenja i daje maksimalnu vrednost funkcije cilja.

Literatura

- [1] Acketa, D., Matić-Kekić, S., Žunić, J., *An algorithm for a simple construction of suboptimal digital convex polygons*, Yugoslav Jour. of Oper. Research 2, Number 1 (1992), pp. 73-81.
- [2] Acketa, D., Matić-Kekić, S., Žunić, J., *A linear algorithm for construction of optimal digital convex $2k$ -gons*, accepted for Yugoslav Jour. of Oper. Research 4 (1993)
- [3] Acketa, D., Matić-Kekić, S., *A greedy optimal solution for digital convex polygons with minimal area*, Procc. of IX conference on applied mathematics, Budva 1994.
- [4] Acketa, D.M., Žunić, J.D., *On the number of linear partitions of the (m, n) -grid*, Info. Proc. Lett., 38(1991), pp. 163-168.
- [5] Acketa, D., Žunić, J., *On the maximal number of edges of digital convex polygons included into an $m \times m$ - grid*, accepted for Journal of Combin. Theory - Series A.
- [6] Acketa, D., Žunić, J., *The minimal size of a square which includes a digital convex $2k$ -gon*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol.48 (1993), pp. 465-474.
- [7] Acketa, D., Žunić, J., *A simple construction of a digital convex n -gon with almost minimal diameter*, Inform. Sciences, Vol. 77 (3/4), March 1994, pp. 275-291.
- [8] Acketa, D., Žunić, J., *On the maximal number of edges of a digital star-shaped polygon with given diameter*, Bolyai Society Mathematical Studies, 2, Visegrad (Hungary), 1991, pp. 7-24.
- [9] Balog, A., Barany, I., *On the convex hull of the integer points in a disc*, Proc. of Seventh Annual ACM Symposium on Computational Geometry (1991), pp. 162-165.
- [10] Barany, I., Howe, R., Lovasz, L., *On integer points in polyhedra, a lower bound*, to appear in Combinatorica 12(2) (1992), pp. 135-141.
- [11] Berenstein, C.A., Lavine, D., *On the number of digital line segments*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., Vol. 10, No. 6, (1988), pp. 880-887.
- [12] Colbourn, C.J., Simpson, R.J., *Convex lattice polygons of minimum arrea*, Bull. Austral. Math. Soc. 45 (1992), pp. 237-240.
- [13] Cook, W., Hartman, M., Kannon, R., McDiarmid, C., *On integer points in polyhedra*, Combinatorica 12(1) (1992), pp. 27-37.

- [14] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1980.
- [15] Guardina, C.R., Dougherty, E.R., *Morphological Methods in Image i Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [16] Hardy, G.H., Wright, E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, New York, Oxford Univ. Press, 1968.
- [17] Ivić, A., Koplowitz, J., Žunić, J., *On the number of digital convex polygons inscribed into the (m, m) - grid*, Proc. of SPIE - Vision Geometry II, Boston (1993).
- [18] Jarnik, I.V., *Über die gitterpunkte auf konvexen kurven*, Math. Zeitschrift 24 (1925), pp. 500-518
- [19] Matić-Kekić, S. Acketa, D., *On the construction of digital convex $(2s + 1)$ -gons with minimal diameter*, Proc. of XX Symposium on Oper. Research, Belgrade (1993), pp. 187-190.
- [20] Matić-Kekić, S., Acketa, D. M., Žunić, J. D., *An exact construction of digital convex polygons with minimal diameter*, accepted for Discrete Mathematics (special volume honouring Paul Erdős)
- [21] Matić-Kekić, S., Acketa, D., *Non-greedy optimal digital convex polygons*, submitted.
- [22] Mount, D.M., Silverman, R., *Combinatorial and computational aspects of Minkowski decompositions*, Contemporary Mathematics, Vol. 119, 1991., pp. 107-124.
- [23] Preparata, F., Shamos, M., *Computational Geometry, an Introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [24] Rabinowitz, A.S., *On the number of lattice points inside a convex lattice n -gon*, Congr.Numer. 73 (1990), pp. 99-124.
- [25] Rabinowitz, S.A., *$O(n^3)$ bounds for the arrea of a convex lattice n -gon*, preprint.
- [26] Simpson, R.J., *Convex lattice polygons of minimum area*, Bull. Austral. Math. Soc. 42 (1990), pp. 353-367.
- [27] Voss, K., Klette, R., *On the maximal number of edges of a convex digital polygon included into a square*, Pocitace a umela inteligencija, Vol.1., Bo.6, (1982), pp. 549-558.
- [28] Voss, K., *Discrete Images, Objects i Functions in Z^n* , Springer, Algorithms i Combinatorics 11, 1992.