UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

mr Aleksandar Nikolić

ŽIVOT I NAUČNO DELO JOVANA KARAMATE

Doktorska disertacija

NOVI SAD, 1997

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno–matematički fakultet
Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: doktorska disertacija
VR
Autor: mr Aleksandar Nikolić
AU
Mentor: Nema
MN

Naslov rada: Život i naučno delo Jovana Karamate
NR

Jezik publikacije : srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda : s/en
JI
Zemlja publikovanja : SR Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Srbija, Vojvodina
UGP
Godina:1997
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Fakultet tehničkih nauka, inst. za mat.
MA
Fizički opis rada: Naslovna strana + uvod + sadržaj + Šest poglavlja + sedam priloga + sažetak + literatura, viii + 120 + 91 + 2 strane;

Bibliografija (24 lit. cit.): str. 215-216; 24cm.
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Istorija matematike
ND
Predmetna odrednica / Ključne reči: Karamata Jovan, teoreme Tauberove prirode, pravilno promenljive funkcije, sporo promenljive funkcije
PO

UDK:
čuva se:
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: U disertaciji je opisan život i rad Jovana Karamate. Analizirani su njegovi najznačajniji rezultati iz teorije funkcija Tauberove prirode i teorije sporo promenljivih i regularno promenljivih funkcija, kao i manje poznati rezultati iz drugih oblasti matematike. Dat je i spisak svih objavljenih radova Jovana Karamate, kao i spisak svih citiranih radova u njima što je medjusobno umreženo.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 24. 04. 1997. godine. DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
(Naučni stepen / ime i prezime / zvanje / fakultet)
KO

Predsednik:
Član:
Član:
Član:
Član:

University of Novi Sad
Faculty of Natural Sciences & Mathematics
Key Words Documentation

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type : Monograph
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Contents code: PhD Thesis
CC
Author: Aleksandar Nikolić, MSci
AU
Mentor: None
MN

Title: Life and Work of Jovan Karamata
TI

Language of text: Serbian (latin)
LT

Language of abstract: Serbian
LA
Country of publication: SR Yugoslavia
CP
Locality of publication: Serbia, Vojvodina
LP
Publication year: 1997
PY
Publisher: Author reprint
PU
Publ.place: Novi Sad, Faculty of Technical Science, inst. of math.
PP
Physical description:Title page + Introduction + Contents + Six chapters + seven Appendixes + Abstract + References, viii + 120 + 91 + 2 pages;

References (24 lit. cit): pp. 215-216; 24 cm.
PD

Scientific filed: Mathematics
SF
Scientific discipline: History of mathematics
SD
Subject / key words: Karamata Jovan, Tauberian theorems, regular variation, slow variation
SKW

UC:
Holding Data:
HD

Note:
N

Abstract: In thesis is described the life and work of Jovan Karamata. His most significant results in theory of Tauberian functions and theory of regularly and slowly varying functions are analysed, as well as some less known results from other fields of mathematics.
AB

Accepted by the Scientific Board on : April 24, 1997, No. 0603-190/5 ASb
Defended:
DE

Thesis defended board:
(degree / name / surname / title / faculty)
DB

President:
Member:
Member:
Member:
Member:

Uvod

Mada je akademik dr Jovan Karamata možda i najznačajnija ličnost jugoslovenske matematike, u našoj široj javnosti njegovo ime nije bilo naročito poznato, a kako je u toku života prekinuo veze sa većinom naših, tada beogradskih matematičara, nije imao ugled matematičara velike naučne vrednosti čak ni kod jednog dela stručne javnosti. Možda je to i bio razlog da se o Karamati do danas, skoro trideset godina od njegove smrti, osim nekoliko pojedinačnih ali vrlo iskrenih i dirljivih tekstova onih naučnika koji su ostali u kontaktu sa njim ili mogli da objektivno procene njegovu stručnu vrednost, što se prvenstveno odnosi na akademika Miodraga Tomića, dr Slobodana Aljančića, dr Dragana Trifunovića, dr Dušana Adamovića, nisu pojavili obimniji radovi ili studije sa ciljem da se potpunije rasvetli njegov život, njegova ličnost i naučno delo. Ova doktorska disertacija je pokušaj da se ta nepravda bar malo ispravi, i da se Jovanu Karamati i njegovom naučnom delu da odgovarajuće mesto u istoriji jugoslovenske i srpske matematike.

Za razliku od domaćih, u inostranim matematičkim krugovima Jovan Karamata je bio veoma cenjen i poštovan kao jedan od naših najboljih matematičara i jedna od vodećih ličnosti u oblasti u kojoj je stvarao. Njegovo ime je citirano u velikom broju naučnih radova a

čitave strane svetski poznatih monografija i udžbenika su posvećene njegovim rezultatima.

Sadržaj disertacije nije, kao što je uobičajeno, podeljen na dve celine – intelektualnu biografiju i naučnu delatnost, već je ceo Karamatin život dat, koliko je to bilo moguće, hronološkim redom. Time se njegov životopis i analiza naučnog doprinosa stalno smenjuju i nadopunjuju.

U prvom delu su dati poreklo i porodični koreni Jovana Karamate i kratak pregled njegovog školovanja do početka studija na Beogradskom univerzitetu i pojavljivanja prvih radova, o čemu je pisano u drugom delu disertacije.

Prva naučna oblast matematike kojom se Karamata bavio, iz koje je doktorirao i objavio nekoliko manjih rasprava, bila je teorija funkcija. Već su neki od tih početnih rezultata, objavljenih u Pariskoj akademiji, naišli na pohvalu francuskih matematičara, i ušli u čuveni udžbenik iz funkcionalne analize *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* (1952), od F. Risa i Nađa.

Da bi postigao što vrednije rezultate u teoriji funkcija, Karamata je proučavao samu njenu osnovu - teoriju redova i pitanja konvergencije i zbirljivosti. U tim oblastima, iz kojih je napisao svoje najznačajnije radove, pronašao je mnoge stare, već poznate rezultate, ali je došao i do velikog broja novih rezultata koji su ga toliko zaokupirali da se više nikada nije vratio na teoriju funkcija radi koje je i počeo da uči teoriju redova. O tom najvažnijem i najplodnijem periodu njegovog rada govori treći deo disertacije.

Dva su osnovna problema i rezultati njihovih istraživanja koji su Karamatino ime učinila toliko poznatim u svetu matematike. To su istraživanja vezana za inverzni stav u teoriji redova koji daje prelaz od zbirljivosti ka konvergenciji uz dodatne uslove bez kojih to u opštem slučaju nije moguće. Prvi rezultat takve prirode je dao 1897. godine Al-

fred Tauber, pa se danas svi njemu slični problemi nazivaju Tauberove teoreme, odnosno teoreme Tauberove prirode. Drugi rezultat koji je Karamatino ime učinio još poznatijim, naročito tridesetak godina posle njegovog objavljivanja, je izgradnja teorije pravilno i sporo promenljivih funkcija.

Najopštiji stav Tauberove prirode su 1910. godine dokazali veliki engleski matematičari Hardi i Litlvud. Dokaz tog stava, i pored pokušaja uprošćavanja mnogih poznatih matematičara, iznosio je preko deset strana i bio veoma komplikovan. Karamata je, proučavajući taj dokaz Hardi-Litlvudovog stava, uočio da se on lako dokazuje za funkciju najprostijeg oblika - za stepen. Sa druge strane on je iskoristio poznati Vajerštrasov stav da se svaka neprekidna funkcija može aproksimirati pomoću linearne kombinacije stepena, i koristeći te dve jednostavne matematičke činjenice on 1930. godine Hardi-Litlvudov stav dokazuje u radu od samo dve strane. Taj Karamatin rad, koji je redakcija časopisa Mathematische Zeitschrift, povodom 60-o godišnjice izlaženja, uvrstila u svoj izbor od 50 najznačajnijih radova između više hiljada objavljenih, doneo je ne samo nov, iznenađujuće jednostavan i posebno elegantan dokaz poznate teoreme, već i novu metodu koja je omogućila mnoge dalje rezultate i primene, i koja je kao takva našla svoje mesto u poznatim monografijama Tičmarša, Knopa, Deča, Videra, Hardija, Favara.

Ako su mu radovi vezani za problematiku teorema Tauberove prirode odmah doneli slavu i ime u matematičkom svetu, radovi o pravilno promenljivim i sporo promenljivim funkcijama su tek kasnijim razvojem matematike dobili na pravoj vrednosti. Karamata je klasu pravilno promenljivih funkcija zamislio i uveo sa ograničenim ciljem da se uopšte tauberovski uslovi u nekim inverznim teoremama Tauberove prirode za Laplasovu transformaciju. On nije ni slutio da je našao opšti oblik i sve osobine jedne velike klase funkcija sa različitim primenama, što u poslednje vreme dokazuju i brojni radovi iz verovatnoće i statistike,

funkcionalne analize, analitičke teorije brojeva. Primene i uopštenja pravilno promenljivih funkcija izloženi su u nastavku ovog dela.

Posebno je naglašen i analiziran jedan manje poznati rezultat koji je, po našem mišljenju, veoma važan u Karamatinom naučnom radu. To je pojam povišljivosti kao jedan od najopštijih uslova konvergencije Abel zbirljivih redova.

Na kraju trećeg dela izloženi su neki jednako lepi i ne manje značajni Karamatini rezultati iz teorije redova ali i iz drugih oblasti matematike – teorije brojeva, istorije matematike, geometrije – koji, nezasluženo, nisu toliko poznati u matematičkoj javnosti.

Mada je Jovan Karamata iza sebe ostavio 122 naučna rada, 9 stručno-pedagoških radova i 10 udžbenika, on je, što je možda i vrednije, od svojih učenika stvorio veliki broj poznatih matematičara koji su njegove rezultate preneli u nove, savremene oblasti matematike. Četvrti deo je stoga posvećena Karamatinom pedagoškom radu, njegovim đacima i njegovom uticaju na jugoslovenske matematičare i razvoj srpske i jugoslovenske matematike.

Posebnu celinu čini i naučni rad u posleratnom periodu.

U okviru Priloga na kraju teksta dati su potpun spisak Karamatinih naučnih i stručni radova i udžbenika, literatura koju je Karamata koristio i koju je citirao u svojim radovima (ova dva priloga su umrežena), spisak kongresa na kojima je Karamata učestvovao, zadaci za samostalno rešavanje učenika srednjih škola koje je Karamata postavio u Vesniku Društva matematičara i fizičara Srbije, spisak saopštenja u Matematičkom institutu SANU u Beogradu, Karamatin tekst *Upoznavanje sebe kao osnov saznanja* koji je objavljen u prvom broju časopisa Jugoslovenskog antroposofskog društva "Upoznaj Sebe" kao i kratak letopis života i rada Jovana Karamate.

Posebnu zahvalnost dugujem dr Olgi Hadžić, redovnom članu SANU, koja mi je prilikom jednog sasvim slučajnog susreta ukazala na značaj matematičara Jovana Karamate, predložila temu ove disertacije i koja je, tokom njene izrade, svesrdno ukazivala na mesto i važnost teme u okviru naše istorije matematike i matematike uopšte.

Veliku zahvalnost dugujem i dr Vojislavu Mariću, dopisnom članu SANU, koji mi je tokom naših razgovora svojim znanjem, iskustvom i sećanjima na Jovana Karamatu, pružio neprocenjivu pomoć u analizi Karamatinog naučnog rada i pedagoške delatnosti. Njegova upornost i budnost nad izradom disertacije umnogome je uticala na njen završetak i krajnji sadržaj.

Zahvaljujem se dr Čedomiru Popovu, redovnom članu SANU, i dr Đuri Pauniću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu na interesovanju sa kojim su pratili moj rad i izradu disertacije, kao i korisnim primedbama i sugestijama koje su doprinele njenom završnom izgledu.

Na kraju, ali ne sa manje poštovanja, izražavam zahvalnost dr Draganu Trifunoviću, našem najznačajnijem istoričaru nauka, profesoru matematike Šumarskog fakulteta u Beogradu, sada u penziji, mom prvom učitelju iz istorije matematike koji me je uputio u njeno istrvzivanje, i koji mi je, konačno, na samom početku rada na proučavanju života Jovana Karamate, dao vrlo značajne smernice i uputstva bez kojih bi ova disertacija sigurno bila siromašnija.

Hvala Miri i Isidori na strpljenju.

Sadržaj

Poreklo i koreni

U traganju za porodičnim korenima Jovana Karamate utvrdili smo da potiče iz stare, ugledne i imućne grčko-cincarske porodice, koja se među prvim grčkim i cincarskim trgovcima iz sela Katranice (danas Pirg), iz okoline Mavrova, doselila u Zemun, u tadašnju Habsburšku monarhiju, i ubrzo pretopila u Srbe. Iz Katranice su se oko 1773. godine odselila tri brata Karamate od kojih je jedan otišao u Požun (danas Bratislava), drugi je otišao u Lajpcig a treći je ostao u Zemunu.[1] U zemunskim nedeljnim novinama *Mali glasnik za privredu, pouku i zabavu*, iz januara 1913. godine u šestom nastavku podlistka *Znameniti zemunski Srbi u XIX veku*, autor Vladimir Nikolić piše da je Dimitrije Karamata sa sobom doveo i brata Atanasija, što potvrđuju i zemunski sudski akti iz 1799. godine u kojima se spominje Anastas Matheo Karamata iz Makedonije.[2] Sadašnju starinsku, veliku i masivnu jednospratnu kuću nedaleko od Nikolajevske crkve u Zemunu kupili su oko 1773. godine, od imućne udovice Kupine Kuzmanove, Jovanovi pretci Dimitrije Karamata i njegova žena Marija Grujić, Srpkinja koja je, preobučena u muško odelo i sa jednim ženskim detetom, pobegla u Zemun iz Konstantinopolja.[3] Dimitrije Karamata je imao petoro dece i po

[1] D. J. Popović, [45], s.83.

[2] R.Jeremić, [45], s.416.

[3] D. J. Popović, [45], s.100, Glasnik Istorijskog društva u Novom Sadu IX, s.259-260. Ignaz Soppron u monografiji o Zemunu *Monografie von Semlin und Umgebung*,

jednom od njih, kao svom pradedi, Jovan Karamata je i dobio ime. Dimitrijev sin Jovan Karamata je imao troje dece, sinove Atanasija i Marka i ćerku Julijanu.[4]

Po dolasku u Zemun Dimitrije Karamata se počeo baviti izvozom svinja iz Srbije u Beč.[5] Koliko je bila razgranata trgovina sa Bečom svedoči podatak da su porodica Karamata i još dve zemunske porodice, posedovali svoje obore čak u Eperješu na ugarsko-austrijskoj granici, i da su bečkim vlastima podneli molbu za dozvolu da za svoje verske potrebe podignu u Eperješu pravoslavnu kapelu.[6] Postoji i podatak da je austrijski prestolonaslednik Franja, kasnije car Franja II, sa svojim stricem, austrijskim carem Josifom II, za vreme opsade Beograda u austrijsko-turskom ratu (1787-1791) odseo, na predlog komande, u kući Karamata, što jasno pokazuje nivo društvenog ugleda koji je u Zemunu uživala ta porodica.[7] Ponosni Karamata je u sobi u kojoj je Franja II boravio postavio na plafon crnog dvoglavog austrijskog orla, koji se tu i danas nalazi.[8]

Članovi porodice Karamata su se vrlo brzo prilagodili novoj sredini, odbacili grčko-cincarsko-tursku nošnju i običaje i prihvatili sve tekovine građanskog društva francusko-austrijske kulture na prelazu iz XVIII u XIX vek.[9] Tu konstataciju potvrđuju, između ostalog, portreti članova porodice Karamata sa kraja XVIII veka koji su obučeni u, za to vreme, klasična otmena građanska odela. Atanasije Karamata, Jovanov deda, koji je diplomirao na bečkoj Politehnici gde je studirao trgovačke i

---

Semlin 1890, na strani 81 netačno kaže da mu je žena bila Grkinja.

[4]V.Nikolić, navedeni tekst.

[5]I.Soppron, navedeno delo, s.291.

[6]Mitropolijsko-patrijaršijski arhiv u Sr.Karlovcima, 188 ex 1785.

[7]I.Soppron, navedeno delo, s.368.

[8]D. J. Popović, [45], s.162, Srpske narodne novine, 1839, s.140.

[9]Mita Kostić, *Marko Dobrić kao književnik.* Zbornik Matice Srpske za književnost i jezik, 1, 1953, s.170-173.

tehničke nauke, je po osnivanju Srpske Vojvodine jula 1848. godine bio njen ministar finansija.[10] Atanasije je imao četvoro dece - Kostu, Jovana, Stevana i Ozrena.

Iz generacije u generaciju porodica je povećavala svoje bogatstvo. No, možda na vrhuncu njenog materijalnog blagostanja, osamdesetih godina prošlog veka, svinjska kuga i filoksera su joj uništili skoro sav prirodni imetak. Porodica se ubrzo oporavila od tog teškog udarca i ponovo stekla zavidno bogatstvo, a Stevan Karamata, Jovanov otac, postaje direktor Srpske banke, tada najjače banke i vrlo važne finansijske kuće u Austro-Ugarskoj monarhiji, i seli se u Budimpeštu i Zagreb.

U takvom okruženju, građanskom i bogatom materijalno i duhovno, jer ne sme se zaboraviti da je Jovanov stric Kosta Karamata bio gimnazijski profesor matematike u Zemunu, cenjen i uvažavan ne samo kao nastavnik već i kao naučnik,[11] a stric Jovan direktor zemunske štedionice i član ugarskog sabora,[12] u Zagrebu se 1. februara 1902. godine rodio Jovan Karamata kao drugo dete od oca Stevana i majke Desanke, rođene Vukomanović. Kako su se ubrzo po njegovom rođenju preselili u Zemun, Jovan Karamata je uvek Zemun smatrao za svoj rodni grad. Osnovnu školu je počeo pohađati u Budimpešti 1909. godine, a nastavio i završio u Zemunu 1913. godine. Te iste godine je upisao zemunsku Gimnaziju, ali je pred početak Prvog svetskog rata, 1914. godine, kako je Zemun bio na nemirnom i opasnom graničnom području između Austro-Ugarske i Srbije, napustio Zemun i školovanje nastavio na Sušaku pored Rijeke. To mu je izgleda vrlo teško palo, što zbog napuštanja roditeljskog doma što zbog odlaska iz Zemuna koga

[10] V.Nikolić,navedeni tekst.

[11] Kosta Karamata je objavio rad *Prilog odnosima opisana kruga prema dodirnim krugovima kod trokuta*, u časopisu RAD JAZU, knj.128, Zagreb 1896.

[12] Najmlađi Atanasijev sin Ozren je kao artiljerijski kapetan umro 1912. godine. V.Nikolić, navedeni tekst.

je uvek veoma voleo, pa je bio blizu ponavljanja trećeg razreda gimnazije. Zbog toga, ali sigurno i zbog ratnih prilika, Jovanov otac ga sa ostalom braćom i sestrom vraća u Zemun i šalje u Švajcarsku, tačnije u Lozanu gde se 1915. godine upisuje na Kantonalnu gimnaziju (Gymnase scientifique) i na kojoj je maturirao 1920. godine. To je bila prirodno-naučna gimnazija u kojoj nije imao prilike da stekne afinitete prema književnosti, slikarstvu ili muzici. Ali zato se isticao marljivošću i znanjem ne samo iz matematike već i iz fizike. Tako je napisao i jedan mali rad o prelamanju svetlosti, kada je eksperimentalno i računski izračunao granični prelaz prelamanja svetlosti, što je doduše tada bilo poznato, ali on je do toga došao potpuno samostalno. U protestantskoj Švajcarskoj je stekao solidno srednjoškolsko matematičko znanje ali i preciznost, pedantnost, sistematičnost i marljivost, što se kasnije u njegovom radu i delima jasno očitovalo.

Godine 1920. vraća se u Beograd i upisuje studije tehnike na Tehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Postoji priča koju je profesor Jakov Hlitčijev više puta pričao u prisustvu Karamatinom i po kojoj ga je jednom prilikom u njegovom stanu potražio izvestan elegantan mladić koji je uporno zahtevao da ga profesor primi. Hlitčijev je pomislio da se radi o jednom studentu koji nije posećivao predavanja pa traži potpis. Jedan od onih, kako Hlitčijev reče, koji nikada neće završiti tehničke nauke.[13] Taj mladić je bio Jovan Karamata, a reči profesora Hlitčijeva su se pokazale istinite. Bogdan Gavrilović koji je prvi zapazio talenat za matematiku mladoga Karamate, preporučio ga je Mihailu Petroviću, i kada je 1922. godine položio pripremni ispit na Građevinskom odseku Tehničkog fakulteta,[14] Karamata se pre-

[13]M.Tomić [45], s.6.

[14]To je bio ispit koji se polagao posle odslušane druge godine studija u okviru kojeg se polagala nacrtna geometrija, matematika, fizika, mehanika i otpornost materijala. Tek po njegovom polaganju moglo se nastaviti studiranje i polaganje ispita iz uskostručnih predmeta.

bacio na studije matematike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu gde je slušao prvu grupu nauka (teorijska matematika, primenjena matematika i eksperimentalna fizika).

Studije i prvi radovi

Te 1922. godine, kada je upisao studije matematike, na Beogradskom univerzitetu su, po odlasku profesora dr Mladena Berića i Sime Markovića, ostali kao profesori matematike samo Bogdan Gavrilović na Tehničkom fakultetu i Mihailo Petrović na Filozofskom fakultetu. Oni su uz Petra Živkovića bili i jedini naši matematičari članovi Srpske Kraljevske Akademije nauka. Primenjenom matematikom se bavio ugledni akademik profesor Milutin Milanković. Početkom dvadesetih godina, 1920. odnosno 1922. godine, u Beograd i na Univerzitet, dolaze i dva ruska emigranta, tada već istaknuta matematičara, dr Anton Bilimović i dr Nikola Saltikov.

Mihailo Petrović, koji je pravilno procenio da bez mladih snaga nema pravog napretka u novim i savremenim oblastima matematike, prilazi osposobljavanju mlađih saradnika, i iz posleratne generacije matematičara za svog asistenta je izabrao Tadiju Ž. Pejovića, suplenta II muške gimnazije u Beogradu.[15] U okviru Petrovićevog Matematičkog seminara Univerziteta u Beogradu pored Gavrilovića, Milankovića, Bilimovića, Saltikova, Petra Zajančkovskog i Vjačeslava Žardeckog, aktivno je delovao Radivoj Kašanin, kao mlađi matematičar koji je studirao van Beograda i diplomirao 1921. godine u Parizu. Svi su oni studirajući po raznim univerzitetima širom Evrope doneli u Beograd

[15] D.Trifunović [45], s.291.

široko i raznovrsno ali i kvalitetno matematičko znanje iz mnogih oblasti matematike.

Uskoro se javljaju i prvi rezultati tako organizovanog nastavnog i naučnog rada na Univerzitetu i u Akademiji. Novi naraštaji mladih naučnika matematičara počinju da ispoljavaju svoj sopstveni interes za najsavremenije grane matematike i u tom prožimanju starih i novih shvatanja, puteva i metoda, naša matematika postiže velike uspehe. Tadašnju atmosferu među matematičarima u Beogradu možda je najlepše oslikao akademik Radivoj Kašanin u svojim sećanjima koje je saopštio 1974. godine Dragoslavu Andriću, autoru knjige *Razgovori sa savremenicima*, gde je taj tekst i objavljen. On kaže: "Pored visoke stručne spreme i originalnih naučnih radova, sva trojica (M.Petrović, B.Gavrilović i M.Milanković, prim.aut.) su se odlikovala nečim što najviše cenim, što smatram za ljudsku vrednost najvišeg ranga: ljubav prema mladim generacijama, razumevanje mladih ljudi, nesebičnost i iskrena pomoć mladim, talentovanim ljudima u njihovom napredovanju. Umeli su da se raduju i da uživaju kad se mladi ljudi uzdižu. Imao sam sreću da se razvijam i radim pored njih, velikih autoriteta nauke i morala. Da se ponosim njihovim prijateljstvom. Ne verujem da je igde postojao takav ambijent kakav su stvorili Gavrilović, Petrović i Milanković." Zaista divno i dirljivo! A među najmlađim matematičarima, još studentima, posebno su se isticali Miloš Radojčić i Jovan Karamata, mada potpuno različitih priroda, životnih i matematičkih stremljenja, dva velika prijatelja tokom celog njihovog života.

Karamata nije poklanjao mnogo pažnje formalnom školskom znanju, već je još kao student težio samostalnom istraživačkom radu. Prvi učitelj, primer i uzor u naučnom radu, čovek koga je celog života poštovao, bio je Mihailo Petrović. Od njega je primio veliku i iskrenu ljubav prema nauci, širinu pogleda, želju za čistim naučničkim radom, ideje oslobođene formalnih stega i pravce u kojima treba tražiti rezultate.

Tako će Karamata za oblast svog rada izabrati teoriju funkcija, jednu od oblasti u kojoj je Petrović dao lepe i značajne rezultate i koji su Petrovićevo ime već učinili poznatim. Sam Karamata je, po svedočenju akademika Miodraga Tomića, često govorio da je veliki uticaj na njega odigralo poznanstvo, a kasnije i prijateljstvo sa Radivojem Kašaninom. Svojim bogatim i širokim znanjem matematike koje je stekao na univerzitetima u Beču i Parizu, Kašanin je proširio matematičke vidike i kod mladog Karamate. Omogućio mu je, kako Karamata sam priznaje, da uvidi značaj novih oblasti matematike - teorije skupova, mere i integrala, a posebno značaj strogog dokaza koji je karakterističan za nemačku matematičku školu.[16]

No i pored neospornog uticaja Petrovića i Kašanina na razvoj Karamate kao matematičara i čoveka, za Karamatu važi da je bio samouk, da nije bio sledbenik ni jedne matematičke škole i, može se dodati, nikada nije imao iza sebe neko već provereno matematičko ime koje bi mu otvaralo put u društvo vrhunskih matematičara. To je uspeo potpuno samostalno zahvaljujući vrednosti svojih radova. A za uspeh na takvom putu, kao pratioci su neophodni knjige i radovi najvećih matematičara. Matematička literatura je treći, mislimo i najvažniji, Karamatin učitelj. Kao student je proučavao do najsitnijih detalja poznati rad H.Vejla *O ravnomernom rasporedu brojeva modula jedan*,[17] a inspiraciju i ideju za svoju tezu dobio je rešavajući probleme iz čuvene, i za razvoj klasične matematičke analize u Beogradu vrlo važne, zbirke zadataka i teorijskih problema Polje i Segea.[18] Zahvaljujući jednoj dru-

[16]M.Tomić [45], s.6.

[17]H.Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Annalen 77, 1916, s.313-352.

[18]G.Pólya, G.Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925. Karamatin primerak ove dvotomne knjige sa njegovim zabeleškama i komentarima i zlatotiskom "J.St.Karamata" na zadnjim koricama, nalazi se u Australiji, kod jednog od današnjih "naslednika" Karamatinog dela, profesora Eugena Senete.

goj knjizi, Landauovoj monografiji *Prikaz i obrazloženje nekih novih rezultata iz teorije funkcija*,[19] Karamata se susreo sa Tauberovim teoremama Hardi-Litlvuda (Godfrey Harold Hardy-John Edensor Littlewood), koje je odmah počeo i sam da proučava i što će mu ubrzo doneti veliko priznanje u svetskoj matematici.

Prva pojavljivanja tekstova Jovana Karamate u matematičkoj literaturi, odmah po diplomiranju 1925. godine, bili su referativni osvrti na radove njegovog profesora Mihaila Petrovića. Tako u Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik referiše radove *Produkti jednaki zbiru svojih činilaca*, *Diferencijalne jednačine prvog reda sa oscilatornim integralima* i *Transmutacije funkcija predstavljenih potencijalnim redovima*.[20]

Jula iste godine kada je diplomirao postavljen je za neukaznog (dnevničara) asistenta kod profesora M.Petrovića, a januara 1929. godine za ukaznog asistenta za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Prvo javno istupanje je imao u Srpskoj Kraljevskoj Akademiji 14. decembra 1925. godine, dakle u 23. godini, sa naučnim saopštenjem o svom prvom radu iz teorije redova *O izračunavanju granica vezanih za dvostruke nizove brojeva*, primljenog za objavljivanje u GLASU SKA na skupu Akademije Prirodnih nauka 1. februara 1926. godine.[21] O raspravi su pozitivno referisali Mihailo Petrović i Bogdan Gavrilović. Sadržaj tog rada je ušao i u njegovu doktorsku disertaciju *O jednoj vrsti granica sličnih određenim integralima* koja je primljena za doktorski

Taj primerak mu je za uspomenu poslao Karamatin đak Ranko Bojanić. (Lična prepiska sa E.Senetom.)

[19]Edmund Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 1. izdanje 1916, 2. izdanje 1929.

[20]B.51, s.91, B.51, s.332, B.52, s.297.

[21]GLAS SKA, knj.CXX, Beograd, 1926. s.75-101.

ispit na sednici Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu 9. marta 1926. godine prema referatu članova ispitnog odbora Mihaila Petrovića, Nikole Saltikova i Antona Bilimovića. Pred tom komisijom je 26. marta 1926. godine i položio doktorski ispit i promovisan za doktora filozofije.

Karamata je u tezi ponovio rezultate prethodnog rada u kome je dao uslove koji moraju zadovoljavati funkcija $f(x)$ i niz $\langle a_{\nu,n}\rangle$ pa da postoji granična vrednost $A(f)$ niza

$$A_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(a_{\nu,n}).$$

Zbog toga je uveo pojam funkcije rasporeda dvostrukog niza brojeva $a_{\nu,n}$ koju je označio sa $\nu(x)$ gde je

$$\nu(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{L}} \frac{r_n(x)}{n},$$

$r_n(x) = \sum\limits_{a_{\nu,n}\le x} 1$ za $a \le x \le b$, odnosno $r_n(x)$ označava broj $a_{\nu,n}$ ne većih od x za fiksirano n.

Kao rezultate je dobio potrebne i dovoljne uslove pod kojima će za jedan opšti niz oblika $a_{\nu,n}$ postojati funkcija rasporeda kao i na koji način se ta funkcija može izračunati. Takođe je ispitivao nizove oblika

$$\langle \frac{p_\nu}{n}\rangle,\ \nu = 1,2,\ldots,\pi(n),\ n = 1,2,\ldots$$

gde su p_ν uzastopni prosti brojevi a $\pi(n)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od n, za koje je funkcija rasporeda definisana izrazom

$$\nu(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{L}} \frac{r_n(x)}{\pi(n)} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{L}} \frac{\pi(nx)}{\pi(n)}, \quad x \subset [0,1],$$

jer je

$$r_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\frac{p_\nu}{n}\le x} 1 = \sum_{\nu=1}^{p_\nu\le nx} 1 = \pi(nx), \quad x \subset [0,1].$$

Znajući da je $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ dobio je $\nu(x) = x$ kao i obrazac

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{\pi(n)} \sum_{\nu=1}^{\pi(n)} f\left(\frac{p_\nu}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

čija je posledica izraz

$$\sum^{p \leq n} \log p \sim n$$

za veoma velike vrednosti n. Odatle se vidi da su brojevi niza $\langle \frac{p_\nu}{n} \rangle$ ravnomerno raspoređeni. Glavna primena rezultata iz Karamatine disertacije je određivanje oblasti konvergencije redova polinoma oblika

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x),$$

gde su $P_\nu(x)$ polinomi ν-tog stepena sa realnim korenima. Taj se problem uglavnom svodi na izračunavanje funkcije rasporeda korena posmatranih polinoma i Karamata ga je potpuno rešio za slučaj kada ta funkcija postoji i nije jednaka nuli za sve konačne vrednosti od x, kao i za izvesne slučajeve kada je ona jednaka nuli za sve konačne vrednosti od x. Napomenimo da je do istih rezultata, koji su štampani 1928. godine, u časopisu Mathematische Zeitschrift t.28, s. 177-199, u skoro isto vreme, došao i poznati matematičar Šenberg (I.Schönberg). Šteta je što Karamatina teza nije nikada u celosti prevedena i objavljena u inostranstvu. Nažalost to nije bio usamljen slučaj iz tog vremena!

Već smo pomenuli veliko prijateljstvo između Jovana Karamate i Miloša Radojčića. U njihovom odnosu i matematika je imala svoje mesto. U svojoj doktorskoj tezi Karamata je, kako sam kaže na osmoj strani, po M.Radojčiću dokazao sledeći važan stav:

Ako niz funkcija $\langle \nu(x) \rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergira ka funkciji $y = \nu(x)$ za sve x intervala $[a, b]$ izuzev najviše tačke jedne prebrojive množine $\mathbf{C}$, tada će niz inverznih funkcija $x_n = \mu_n(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergirati

inverznoj funkciji $x = \mu(y)$ funkcije $y = \nu(x)$, i to za sve tačke intervala $[0, 1]$ izuzev najviše jednu prebrojivu množinu $\mathbf{C}^*$.

Ali i Radojčić je u radu *Grundlegendes zum axiomatischen Aufbau der speziellen Relativitätstheorie*[22] pri dokazu Stava 48 (strana 104) došao do funkcionalne jednačine $u(t + 2nu(t)) = u(t)$, $n \in \mathcal{Z}$ što je moguće jedino ako je $u(t)$ konstanta i čije je rešenje, kako navodi Radojčić, predložio Karamata. Dokaz je izveden na sledeći način:

Oznakom $2u(t) = f(t)$ je opšte

$$f[t + nf(t)] = f(t) \qquad (n = 0, \pm 1, ...). \tag{0.1}$$

Pretpostavimo da je za jedan određeni par t_1, t_2, $t_1 < t_2$:

$$f(t_1) < f(t_2). \tag{0.2}$$

Pošto je $f(t)$ stalno, u (t_1, t_2) očigledno postoje dve vrednosti c, b tako da je

$$f(c) < f(t) < f(b) \quad \text{za} \quad c < t < b. \tag{0.3}$$

Pošto je $f(t) > 0$, postoji u (c, b) jedno a, samo ako je $b - a$ dovoljno malo, tako da je

$$f(a) > b - a \tag{0.4}$$

i

$$0 < f(b) - f(a) < f(a). \tag{0.5}$$

Zbog leve nejednakosti (5) postoji jedno m, tako da je

$$n[f(b) - f(a)] > f(b) - b + a \quad \text{za} \quad n \geq m,$$

odnosno

$$a + nf(a) < b + (n - 1)f(b) \quad \text{za} \quad n \geq m. \tag{0.6}$$

[22]Publications mathématiques de l'Université de Belgrade 2(1933), s.106-149 i 3(1934), s.65-152)

Pošto je po (4) $a+nf(a) > b+(n-1)f(b)$ za $n=1$, to je $m>1$, dakle postoji jedno najmanje m, tako da je

$$a+(m-1)f(a) \geq b+(m-2)f(b) \tag{0.7}$$

i

$$a+mf(a) < b+(m-1)f(b) \tag{0.8}$$

Iz (7) sledi

$$b+(m-1)f(b) \leq a+mf(a)+f(b)-f(a),$$

to jest po (5)

$$b+(m-1)f(b) < a+(m+1)f(a). \tag{0.9}$$

Iz (8), (9) i (6) (za $n=m+1$) sledi

$$a+mf(a) < b+(m-1)f(b) < b+mf(b) \tag{0.10}$$

Pošto je po (1) $f[b+(m-1)f(b)] = f(b)$, (10) protivreči uslovu da je $f(t) < f(b)$ za $a+mf(a) < t < b+mf(b)$ koji sledi iz (1) i (3). Znači da je (2) pogrešno. Analogno se sa negativnim m dokazuje da je $f(t_1) > f(t_2)$ takođe nemoguće. Znači da je $f(t)$, zajedno sa $u(t)$ konstanta.

Dokaz je izveden kristalno jasnim zaključivanjem i preciznim sledom izvođenja novih stavova iz prethodno izvedenih i već poznatih. Zaista jedna lepa, ne toliko poznata, ilustracija Karamatinog načina matematičkog razmišljanja i izvođenja dokaza.

Već su prvi Karamatini radovi bili referisani[23] i zapaženi po rezultatima koji su vrlo brzo našli potvrdu i primenu u, ne samo njegovim, kasnijim radovima, ali i po specifičnoj matematičkoj simbolici, prvenstveno

[23]Fortschritte der Mathematik (FdM), B.52, s.222.

po oznaci L za graničnu vrednost niza funkcija i oznaci $\overline{\nu}(x)$ za graničnu vrednost supremuma ili infimuma niza funkcija $\nu(x)$. U zaostavštini Milutina Milankovića postoji pismo Mihaila Petrovića upućeno profesoru Milankoviću 26. maja 1926. godine iz Pariza, u kome mu šalje primerak *Note de Karamata* iz koje se vidi da mu je ne samo izlaganje već "i ideja u tezi odista bila dobra." Zanimljiv je i jedan detalj sa odbrane teze kada je, po usmenom kazivanju akademika Miodraga Tomića, profesoru Antonu Bilimoviću zasmetala suma jedinica $\sum 1$ bez indeksa, na šta mu je mladi Karamata odgovorio da se samo jedinice i sabiraju.

Njegov sledeći rad *Sur certaines limites rattachées aux intégrales de Stieltjes*[24] prikazan na skupu Pariske Akademije nauka 29. marta 1926. godine, u kome je rezultate dobijene u prethodnim radovima povezao sa Stieltjesovim integralima, čuveni francuski matematičar Adamar (J. Hadamard) je, osvrćući se i na prethodno prikazani rad francuskog matematičara Levija (Paul Lévy), propratio sledećim rečima: "Oštroumne ideje gospodina Karamate delimično se poklapaju sa nekim od onih koje je izložio Pol Levi. S druge strane, tako različit način iz koga dva autora izvlače rešenje polazne tačke pokazuje plodnost nove vrste razmišljanja."[25]

Te 1926. godine aktivan je član i učesnik Matematičkog seminara i, kao i sledećih godina, redovno referiše u referativnim časopisima radove Mihaila Petrovića, objavljuje nove radove, a decembra 1927. godine odlazi, kao stipendista Rokfelerovog fonda, na usavršavanje u Pariz, gde ostaje do septembra 1928. godine. Za vreme boravka u Parizu učestvuje i na svom prvom kongresu, na 52. Kongresu francuskog

[24]Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences de Paris, 182, 1926, s.833-835.

[25]Les ingénieuse idées de M.Karamata se rencontrent partiellement avec certains de celles qu'émet d'autre part M. Paul Lévy. La manière si différente dont, d'autre part, les deux auteurs tirent parti du même point de départ montre la fécondité du nouvel ordre de considérations. (Primedba na kraju teksta pomenutog rada.)

udruženja za unapređenje nauka (AFAS), održanom u julu mesecu u La Roželu, sa radom *Une question de minimum relative aux ensembles et son rapport avec l'analyse.*[26]

[26]Spisak kongresa na kojima je učestvovao Jovan Karamata dat je u prilogu D.

Najznačajniji period naučnog rada

Povratkom u Beograd sa usavršavanja u Parizu, 1928. godine, počinje najznačajniji i najplodniji period naučnog rada Jovana Karamate. Svoje najčuvenije i najoriginalnije radove, koji su njegovo ime učinili poznatim u skoro svim matematičkim krugovima Evrope, napisao je u periodu od 1929-1933. godine, mada se snažna naučna i nastavna matematička aktivnost nastavila bez prekida do početka Drugog svetskog rata. Iako ga je u tom periodu najveće snage kreativnog nerva pored matematike interesovala i antroposofija, pa je za Jugoslovensko antroposofsko društvo osnovano 1927. godine preveo delo osnivača antroposofije Rudolfa Štajnera *Praktično vaspitanje mišljenja* (Beograd 1930) i napisao kratak originalni tekst *Upoznavanje sebe kao osnov saznanja* koji je objavljen 1931. godine u prvom broju časopisa za antroposofiju i umetnost Jugoslovenskog antroposofskog društva *Upoznaj sebe*,[27] matematika mu je postala ne samo ljubav i profesija, već i opsesija.

Da bi imao što više vremena za promišljanja o matematici i za pisanje radova, koji su odmah po objavljivanju bili zapaženi i visoko ocenjeni, i da u tome ne bi bio prekidan, organizovao je i držao svu

[27]Taj tekst donosimo u Prilogu G.

svoju nastavu na Univerzitetu u samo jednom danu, od osam ujutro do osam uveče.[28] U to vreme Karamata je gradio novu porodičnu kuću, i dane i noći provodio na gradilištu, gde je sa svojim učenikom i saradnikom Vojislavom Avakumovićem (1910-1990) razgovarao skoro samo o matematičkim problemima kojima se tada najintenzivnije bavio i na [c]emu je grozničavo radio sa jednom skoro nadljudskom energijom.[29] To su bili problemi iz teorije redova, tačnije teoreme Tauberove prirode.

Teoreme Tauberove prirode

Niels Henrik Abel je, baveći se problemima konvergencije i zbirljivosti redova,[30] iskoristio Poasonova (Simeon-Denis Poisson)[31] istraživanja zbirljivosti trgonometrijskih redova i 1826. godine formulisao teoremu po kojoj ako red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergira ka s, tj. ako je $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, gde je $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$, i ako stavimo

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

gde je taj red konvergentan za $0 < x < 1$, tada

$$f(x) \to s, \text{kada} x \to 1 - 0.$$

Drugim rečima iz konvergencije reda $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ka zbiru s sledi njegova Abelova zbirljivost ka tom istom zbiru s. Obrnuto ne mora da važi, jer

[28] M.Tomić, S.Aljančić [45], s.1-6.

[29] Po usmenom kazivanju akademika M.Tomića.

[30] N.H. Abel, *Recherches sur la Série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$, Journal für die reine und angewandte Mathematik 1, 1826, s.311-339; Werke I, s.219-250.

[31] Journal de l'Ecole Polytechnique, 11, 1820, s.417-489.

je na primer red $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergentan, a

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

što znači da je divergentan red $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ Abel zbirljiv i njegova suma je $\frac{1}{2}$.[32]

Abelova zbirljivost se definiše i na sledeći način:

Red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ je Abel zbirljiv i njegova suma je s, ako postoji granična vrednost

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu = s,$$

gde je $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$.

Danas postoji veliki broj različitih metoda zbirljivosti i za svaki postoji "granična teorema" koja određuje krajnju brzinu divergencije za koju je neki red zbirljiv tom metodom. Manje je očigledno da se nijednom metodom ne mogu sabrati divergentni redovi koji divergiraju suviše sporo. Navešćemo još Cesàrovu (E. Cesàro) metodu zbirljivosti koja je neophodna za razumevanje Karamatinog rada na teoremama Tauberove prirode.[33] Red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ je zbirljiv u smislu Cesàra i njegova

[32]Baveći se divergentnim redovima isti ovaj rezultat su dobili i Žan Bernuli (J. Bernoulli) (1696) stavljajući u jednakost $\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \ldots$, $l = m = n = 1$, Gvido Grandi (G. Grandi) (1703) stavljajući $x = 1$ u razvoj $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, slično kao i Ojler (L. Euler) koji je oko 1730. godine u razvoj $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ stavio $x = -1$.

[33]Bulletin des sciences mathématiques (2)14, 1890, s.114-120. O različitim metodama zbirljivosti redova Karamata je opširno pisao u radovima *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova, I i II deo*, GLAS SKA, Beograd, 143, knj. 70, 1931, s.1-24 i s.121-146; *Razvoj i znavaj teorije divergentnih redova u matematičkoj analizi*, Zbornik radova 1. Kongresa matematičara i fizičara Jugoslavije, Bled, 1940, s.99-119.

suma je s, ako postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} s_\nu}{n+1} = s$$

gde je $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$.[34] Ako red $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergira ka s on je zbirljiv u smislu Cesàra i njegova suma je s. Obrnuto ne mora da važi, a jednostavan primer za to je, kao i kod Abelove zbirljivosti, red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Hardi je međutim 1910. godine pokazao da iz Cesàrove zbirljivosti reda $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ uz dodatni uslov $\nu a_\nu = O(1)$, sledi i njegova konvergencija.[35]

Bitan momenat u razvoju teorije divergentnih redova[36] je vezan za austrijskog matematičara Alfreda Taubera koji je dokazao 1897. godine teoremu po kojoj uz dopunski uslov $\nu a_\nu = o(1)$ iz Abelove zbirljivosti sledi i konvergencija reda.[37] Litlvud je zamenio Tauberov uslov bitno opštijim i 1910. godine dokazao ovu teoremu:

[34]Ovakvu definiciju zbirljivosti je prvi dao Frobenius (Georg F. Frobenius) 1880. godine (*Über die Leibnizsche Reihe*, Journal für angewandte Mathematik 89, s.262-264), ali ju je Cesàro 1890. godine (*Sur la multiplication des séries*, Bulletin des sciences mathématiques (2) Vol.14, s.114-120) uopštio tako da se danas ova Frobeniusova definicija posmatra kao Cesàrova zbirljivost prvog reda. Frobenius je u pomenutom radu takođe pokazao da ako je jedan red zbirljiv u Cesàrovom smislu on je i Abel zbirljiv. Često se Cesàrova zbirljivost naziva i zbirljivost u smislu aritmetičkih sredina.

[35]G.H. Hardy, *Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series*, Proceedings of London Mathematical Society (2)8, 1910, s.301-320. Landau je 1910. godine u radu *Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer*, Prace matematyczno-fizyczne (Warszawa), 21, s.97-177, taj uslov zamenio sa $na_n \geq -K$.

[36]Nagli i sistematski razvoj teorije divergentnih redova počinje sa Borelom (Emile Borel) koji je, polazeći od Stieltjesovog (Thomas Jan Stieltjes) rada, 1899. godine dao svoju definiciju integralne zbirljivosti, koju je odmah primenio u teoriji diferencijalnih jednačina.

[37]*Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 8, 1897, s.273-277.

Ako je dati red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ Abel zbirljiv tj. ako je

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = s$$

i ako važi uslov

$$\nu a_\nu = O(1)$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = s$$

tj. dati red konvergira.[38]

Takve, inverzne teorme[39] koje u sebi sadrže uslov koji implicira određenu sporost moguće divergencije, Hardi i Litlvud su nazvali tauberovskim (Tauberian) i tako ovekovečili ime tog, inače dosta nepoznatog matematičara, koji, pošto se bavio geometrijom, druge radove iz matematičke analize nije ni pisao. Njegov rad je, međutim, poslužio kao povod za hiljade drugih radova, štaviše mnogih značajnih matematičara.

Dokaz Litlvudovog rezultata ostao je veoma komplikovan, i pored pokušaja uprošćavanja mnogih matematičara (Landau, Hardi, R.Šmid itd.), sve do 1930. godine kada se u časopisu Mathematische Zeitschrift pojavila Karamatina rasprava *Über die Hardy-Littlewoodsche Umkerhrung des Abelschen Stätigkeitssatzes*[40] od svega dve strane, koja je

[38]J.E. Littlewood, *The converse of Abel's theorem on power series*, Proceedings of the London Mathematical Society, (2)9, 1911, s.434-448. Hardi i Litlvud su Tauberov uslov zamenili uslovom $\nu a_\nu \leq O(1)$ (G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive*, Proceedings of London Mathematical Society (2)13, 1914, s.174-191); *Abels theorem and its convers*, Proceedings of the London Mathematical Society (2)4, 1918, s.205-235.

[39]Karamata je pod inverznim stavovima zbirljivosti podrazumevao i one stavove koji, ako imamo dva načina zbirljivosti V' i V" takve da $V' \subset V''$, određuju uslove pod kojima iz V"-zbirljivosti nekog niza sledi njegova V'-zbirljivost.

[40]Mathematische Zeitschrift 32, 1930, s.319-320.

izazvala ne malo iznenađenje u matematičkim krugovima i svom autoru odmah donela svetsku slavu. Zanimljivo svedočenje profesora Vojislava Marića o tome: "Prilikom posete Univerzitetu St. Andrews u Škotskoj, predstavljen sam uglednom matematičaru Kopsonu (E.T.Copson) iz čije su knjige mnogi iz moje generacije učili teoriju funkcija kompleksne promenljive. Već prilično star i ne mnogo zainteresovan za posetioce, umesto uobičajenih konvencionalnosti rekao je samo ovo: 'Do sada sam poznavao samo jednog jugoslovenskog matematičara – Jovana Karamatu. Kada sam tridesetih godina učio kod Hardija zatekao sam ga jednom prilikom kako nervozno hoda po kabinetu. Bez pozdrava mi je, vidno uzbuđen, rekao – Dobio sam pismo od jednog mladog čoveka iz Beograda koji tvrdi da je dokazao Hardi-Litlvudovu teoremu na svega dve strane. To je prosto nemoguće.'" Taj Karamatin rad, koji je redakcija časopisa Mathematische Zeitschrift, povodom 60-o godišnjice izlaženja, uvrstila u svoj izbor od 50 najznačajnijih radova između više hiljada objavljenih, doneo je ne samo nov, iznenađujuće jednostavan i posebno elegantan[41] dokaz poznate teoreme, već i novu metodu koja je omogućila mnoge dalje rezultate i primene, i koja je kao takva našla svoje mesto u poznatim monografijama Tičmarša, Knopa, Deča, Videra, Hardija, Favara.[42]

Da bi iskoristio pomenuti Hardijev stav po kome uz dodatni uslov

[41]"Previously known proofs of Littlewood's theorem were very complicated, in spite of the number of research devoted to it, till in 1930 J.Karamata found a **surprisingly simple** (naglasio autor) proof". (K.Knopp, *Theory and application of infinite series*, 1937, s.501); "We shall give an **extremely elegant** (naglasio autor) proof which has recently been obtained by Karamata. (E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 1939, s.226.)

[42]K.Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 1931; G.Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, 1937; E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 1939; D.V.Widder, *The Laplace Transformation*, 1946; G.H.Hardy, *Divergent Series*, 1949; J.Favard, *Course d'Analyse. Compléments et Exercices d'Analysis*, (3, XI), 1962-1963.

$\nu a_\nu = O(1)$ iz Cesàrove zbirljivosti reda $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ sledi i njegova konvergencija, Karamata je formulisao i dokazao sledeći, ključni stav:

Ako je red $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ Abel zbirljiv tj. ako je

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu = s$$

i ako je niz $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ jednostrano ograničen, tj.

$$s_\nu \geq -M, \quad M \geq 0$$

tada važi

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu f(x^\nu)x^\nu = s\int_0^1 f(t)dt$$

za svaku funkciju $f(t)$ koja je ograničena i Riman integrabilna u intervalu $(0,1)$.[43]

Nova i kasnije plodotvorna metoda koju je u dokazu ovog stava uveo Karamata, sastoji se iz dve jednostavne ideje. Prva je da taj stav očevidno važi za stepen tj. kada je $f(t) = x^\alpha, \alpha = 0,1,2...$, pa tako i za svaki polinom proizvoljnog stepena. Druga ideja je u direktnoj primeni poznate Vajerštrasove (K. Weierstrass) teoreme o uniformnoj aproksimaciji neprekidnih funkcija polinomima, na funkciju $f(t)$ gde je $0 \leq t \leq 1$.

Ako se u dokazani rezultat specijalno stavi $x = e^{-\frac{1}{n}}$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}(1-e^{-\frac{1}{n}})\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu f(e^{-\frac{\nu}{n}})e^{-\frac{\nu}{n}} = s\int_0^1 f(t)dt,$$

[43]Karamata je u dokazu, kako sam kaže, bez gubljenja na opštosti, pretpostavio da su članovi niza s_ν pozitivni jer se može uzeti $s_\nu + M \geq 0$ pa je $s_\nu + M$ posmatrani niz.

i ako se izbere takva funkcija $f(t)$ da je

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \leq t < e^{-1} \\ \frac{1}{t} & \text{za} \quad e^{-1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dobija se

$$\lim_{n\to\infty}(1 - e^{-\frac{1}{n}}) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu f(e^{-\frac{\nu}{n}}) e^{-\frac{\nu}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = s \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{t} dt = s,$$

što znači da je red $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ zbirljiv u smislu Cesàra.[44]

To međutim uz pomenuti Hardijev stav daje i konvergenciju reda, čime je Litlvudova teorema dokazana.[45]

---

[44]Hardi i Litlvud su stav o ekvivalentnosti Cesàrove i Abelove zbirljivosti za nizove sa pozitivnim članovima formulisali i dokazali 1913. i 1914. godine (G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Tauberian theorems concerning series of positive terms*, Messenger (2)42, 1913, s.191-192; *Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive*, Proc. Lond. Math. Soc. (2)13, 1914, s.174-191), ali je dokaz bio dugačak, nepročišćen, prilično težak i daleko od očiglednog (K.Knopp, *Theory and application of infinite series*, 1937, s.501; E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 1939, s.227; J.Karamata *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova*, s.14 i s.17.)

[45]H. Viland (Helmut Wielandt) je 1952. godine, koristeći Karamatinu metodu, u radu *Zur Umkehrung des Abelsche Stetigkeitssatzes* (Mathematische Zeitschrift, 56, sv.2, 1952, s.206-207), pokazao da se taj međukorak preko Cesàrove zbirljivosti može izostaviti. Vilandova osnovna ideja se sastojala u uvođenju novog prostora F za koji je $0 < x < 1$ i gde su definisane funkcije $f(x)$ (sa realnim vrednostima) za koje važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x^n) \quad \text{za} \quad 0 < x < 1 \quad \text{konvergira}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x^n) = F(x) \to 0 \quad \text{za} \quad x \to 1 - 0.$$

Ovim uslov Abelove zbirljivosti postaje da je x element tog novog prostora, a tvrđenje se može predstaviti u sledećem obliku:

U Litlvudovom originalnom izvođenju dokaza njegove teoreme, međukorak preko Cesàrove zbirljivosti, tj. dokaz da iz uslova teoreme sledi Cesàrova zbirljivost, zasnivao se na tehnici "ponovljenih izvoda" (repeted differentiation), odnosno na diferenciranju veliki broj puta, i, kako Hardi kaže, mada je manje jednostavan od Karamatinog, ideje korišćene u njemu su interesantne same po sebi.[46]

Postji veliki broj iskaza u kojima se iz Abelove zbirljivosti i različitih uslova Tauberove prirode izvode ili neki drugi Tauberovski uslovi ili Cesàrova zbirljivost, na osnovu kojih se dokazuje Litlvudova teorema. Slični iskazi postoje u integralnom i u asimptotskom obliku.[47] U već citiranoj literaturi se naglašava da se dokazi upravo tih iskaza najjednostavnije izvode primenom prikazane Karamatine metode. Jedan od tih stavova, kojem po Hardiju prirodno vodi Karamatina ideja, se u pomenutoj Favarovoj monografiji nalazi kao primer za vežbanje. To je sledeći stav:

Ako je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \simeq \frac{1}{1-x} \quad \text{kada } x \to 1-0 \text{ i } a_n \geq 0,$$

Funkcija

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{za } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

pripada novouvedenom prostoru F jer je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f^*(x^n) = \sum_{2x^n \geq 1} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n = s_N, \; N = \left[\frac{\log 2}{\log x}\right].$$

Iz formulacije i iz dokaza se može videti da je u potpunosti preuzeta Karamatina metoda posmatranjem specijalnog slučaja za funkciju $f^*(x)$ kao i primenom Vajerštrasove teoreme o aproksimaciji funkcije polinomima.

[46]Videti Hardi [45] s.161-162, s.170-172.

[47]Hardi [45] s.154-155

tada

$$s_n \simeq n.$$

Nik Bingam je Hardi-Litlvud-Karamata teoremu označio kao jednog od glavnih rezultata u analizi ovog veka.[48]

Mada je Viner (N. Wiener), veliki američki matematičar i tvorac kibernetike, dao 1932. godine[49] opštu teoriju inverznih teorema koja sadrži većinu gore pomenutih rezultata, Karamatina metoda nije izgubila svoj značaj i korišćena je u dokazima niza novih rezultata. Vinerova metoda je kao najjača i najopštija bila i najteža jer se zasnivala na dubokim teoremama iz teorije Furijeovih (C. Fourier) transformacija. Po pisanju M.Tomića[50] Karamata je naslutio neku vezu i značaj oblika jezgra jedne integralne transformacije, ali je bio daleko od cele teorije. Zato je detaljno proučio Vinerov rad, dao niz primena te teorije i jedan njen vrlo lep i koncizan pregled u odnosu na veliku raznolikost specijalnih metoda zbirljivosti, u brošuri *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité.*[51] U njoj nije dao opširne dokaze svih formulisanih teorema, već je to uradio u brojnim ranijim i kasnijim radovima na tu temu. Navešćemo neke od njih.

Glavni rezultat rada *Sur le rapport entre les convergences d'une suite de fonctions et de leurs moments avec application à l'inversion des procédés de sommabilité*[52] je sledeća lepa teorema koja se nadovezuje na važne teoreme Riza (M. Riesz) o linearnim finkcionelama i na Karamatin rad *Sommabilité et fonctionnelles linéaires*:[53]

[48]The Hardy-Littlewood-Karamata theorem is one of the mayor analytic results of this century. Pismo od 21. maja 1996. upućeno autoru.

[49]*Tauberian theorems*, Annals (2), 33(1932), s.1-100.

[50][45] s.11

[51]Actualités scientifiques et industrielles, Hermann et Cie, Paris, 1937, 47 strana.

[52]Studia Mathematica Lwow 3, 1931, s. 68-76.

[53]C.R. du 1. congrès des mathématiciens des pays slaves, 1929, Varsovie, 1930,

Ako niz funkcija $\alpha_n(x)$, $n = 1, 2, 3, ...$ definisan za $0 \leq x \leq 1$ zadovoljava uslove

$$\alpha_n(0) = 0, \quad \text{za svako} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{x<t\leq x\lambda} \{\alpha_n(t) - \alpha_n(x)\} > -\omega(\lambda) \to 0 \quad \text{kada} \quad 1 > \lambda \to 1,$$

za svako $0 < x < 1$, i

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} = \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\}, \quad \text{za svako} \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

sledi

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \alpha(x),$$

u svim tačkama neprekidnosti x funkcije $\alpha(x)$.

Karamata dalje dokazuje sličnu teoremu koja uopštava Rizovu teoremu o linearnim funkcionelama, u kojoj za $x < t \leq x + h$ odgovarajuća funkcija $\omega(h) \to 0$ kada $h \to 0$. To uopštenje nije samo formalne prirode , jer se za $k = 0$ kao posledica Karamatinih uslova, dobija da za svako $0 \leq x \leq 1$ $\alpha_n(x) = O(1)$ kada $n \to \infty$, čime taj uslov u teoremema Tauberove prirode postaje suvišan. Karamata takođe pokazuje da se uslov $\alpha_n(0) = 0$ može zameniti sa $\alpha_n(1) = 0$ pri čemu se uslova

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} = \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\}, \quad \text{za svako} \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

iz navedene teoreme može osloboditi za $k = 0$. Tako dobijena teorema sadrži, kao specijalan slučaj, važnu teoremu (Stav A):

Neka je funkcija $L(x)$ za $x \geq 0$ neprekidna, pozitivna i zadovoljava uslov

$$\frac{L(ux)}{L(x)} \to 1, \quad \text{kada} \quad x \to \infty \quad \text{za svako} \quad u > 0,$$

i neka je funkcija $A(x)$, $A(0) = 0$, ograničene varijacije na svakom konačnom intervalu takva da postoji integral

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \quad \text{za svako} \quad s > 0.$$

s.221-228.

Iz

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{kada} \quad s \to 0, \quad \sigma \geq 0,$$

i

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x\leq t\leq \lambda x} \frac{A(t)-A(x)}{x^\sigma L(x)} > -\omega(\lambda) \quad \text{kada} \quad 1 < \lambda \to 1,$$

sledi

$$A(x) \sim \frac{x^\sigma L(x)}{\Gamma(\sigma+1)} \quad \text{kada} \quad x \to \infty,$$

koju je Kramata dokazao u radu *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplasche und Stieltjessche Transformationen betreffen*[54] i koja, pak, kao specijalne slučajeve sadrži većinu teorema Tauberove prirode. Funkcija $L(x)$ se naziva sporo promenljiva, a Karamata je teoriju takvih funkcija razvio početkom 30-tih godina, o čemu će kasnije biti govora.

U predavanjima održanim u Hamburgu 24. i 27. juna 1936. godine koja su štampana u radu *Allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren*[55] Karamata diskutuje dva skupa uslova pod kojima postupak zbirljivosti dat sa

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x,t)s(t)dt, \quad x \to \infty,$$

gde jezgro $\psi(x,t)$ zadovoljava uslove

$$\psi(x,t) \geq 0; \quad \int_0^\infty \psi(x,t)dt = 1 \quad \text{za svako} \quad x \quad \text{i} \quad t,$$

ili

$$\int_0^m \psi(x,t)dt \to 0 \quad \text{za svako} \quad m > 0, \quad x \to \infty,$$

implicira konvergenciju $s(t)$. Ti uslovi su respektivno analogni "o" i "O" odnosno "sporo oscilovanje" uslovima klasične tauberovske teorije.

[54]Journal für die reine und angewandte Mathematik, 164, 1, 1931, s.33-38.

[55]Mathematische Seminar der Hansische Universität, Hamburger Abhendlung B.12, H.1, 1937, s.46-63.

Karamata pokazuje sledeće:

Neka je $\Lambda(t)$ monotono rastuća funkcija koja teži ka beskonačnosti takva da

$$\int_0^\infty \psi(x,t)\left|\log\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(y)}\right| dt = O(1) \quad \text{kada} \quad x, y \to \infty.$$

Neka je $T = T_\lambda(t) = V(\lambda\Lambda(t))$ gde je $V(t)$ inverzna funkcija za $\Lambda(t)$ i $\lambda > 1$. Tada iz konvergencije $\Psi(x)$ ka s kada $x \to \infty$ sledi konvergencija funkcije $s(t)$ ka s kada $t \to \infty$ ako

1)

$$s(t') - s(t) \to 0 \quad \text{kada} \quad t \to \infty \quad \text{za svako } t',\ t \le t' \le T_\lambda(t),$$

ili

2)

$$\lim_{t\to\infty} \sup \max_{t\le t'\le T} |s(t') - s(t)| = \omega(\lambda) \to 0, \quad \text{kada} \quad \lambda \to 1.$$

Obostrani uslov konvergencije 2) je uspostavljen pod dve pretpostavke za jezgro $\psi(x,y)$. Jedna od njih je generalizacija Šmidovog (R. Schmidt) "Gestrahlung" (zvezdastog, radialnog) svojstva, tj. uslova konvergencije oblika $\sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu = O(1)$, $n \le n' \le \lambda n$ O-inverzije klase "gestrahlte Mittelbildungen", a druga je ekvivalentna "ne-nestajanju" određene Furijeove transformacije Vinerove teorije tauberovskih teorema. Pri ovom uslovu Karamata na jedan nov način izvodi inverzne stavove opštih postupaka Ψ–zbirljivosti. Taj nov način se sastoji iz tri uzastopna koraka:

I. Kod prvog O-inverznog stava se iz uslova

$$\max_{t\le t'\le T} |s(t') - s(t)| = O(1), \quad t \to \infty; \quad \text{i} \quad \Psi(x) = O(1), \quad x \to \infty$$

izvodi $s(t) = O(1)$ kada $t \to \infty$.

II. Najvažniji i najteži korak u kojem se iz zaključka prvog koraka i Ψ–zbirljivosti funkcije $s(t)$ izvodi njena Λ–zbirljivost

$$\frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^\infty s(t)d\{\Lambda(t)\} \to s, \quad x \to \infty.$$

III. Uslov 2) i Λ–zbirljivost daju konvergenciju funkcije $s(t)$

$$s(t) \to s, \quad x \to \infty.$$

Ovo je zaista lep primer Karamatinog shvatanja da se neki problem ne mora uvek rešiti neposredno već posredno rastavljanjem na više uzastopnih koraka.

Navešćemo i jednu teoremu iz rada *Sur certains "Tauberian theorems" de MM Hardy et Littlewood*,[56] u čijem je dokazu Karamata na najlepši način spojio svoju čuvenu metodu sa teorijom pravilne promenljivosti. To je sledeća teorema:

Neka je $P_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} p_\nu$ monoton niz koji teži beskonačnosti i neka je $p(r) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu$ pravilno promenljivo, indeksa σ, kada $r \to \infty$; ako je $\sigma > 1$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu g\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{-\frac{\nu}{n}}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu e^{-\frac{\nu}{n}}} = \frac{1}{\Gamma(\sigma-1)}\int_0^\infty e^{-t} g(t) t^{\sigma-2} dt,$$

za svaku Riman integrabilnu funkciju $g(t)$; ako je $\sigma = 1$ ova granica je jednaka $g(0)$, a $g(t)$ treba da bude neprekidna u tački $t = 0$.

Baveći se tauberovskim teoremama u kompleksnoj ravni, Karamata je u radu *Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande*[57]

[56] Mathematica (Cluj), Vol. III, 1930, s.33-48.

[57] Mathematische Zeitschrift, 44, t.1, 1938, s.156-160.

formulisao i dokazao stav po kome ako stepeni red

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

konvergira u $|z| < 1$, i ako je funkcija $f(z)$ ograničena u K: $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, tada je za Borel zbirljivost (sa s) datog reda u tački $z = 1$ potrebno i dovoljno da Furijeov red funkcije f nad C konvergira u istoj tački $z = 1$ ka istoj vrednosti s. Karamata je pretpostavio i važno uopštenje ovog problema, zamenjujući oblast C sa konveksnom oblašću koja sa imaginarnom osom ima dodir reda $k - 1$, $(k > 1)$, što je precizno formulisao i dokazao Vojislav Avakumović.

Dokaz jednog stava iz rada *Ein Konvergensatz für trigonometriche Integrale*[58] Karamata je iskoristio u radu *Sur le théorème tauberien de N. Wiener*,[59] u trećoj etapi kratakog i do tada najdirektnijeg dokaza Vinerove tauberovske teoreme:

Neka je funkcija $K(t)$ Lebeg integrabilna i $s(t)$ integrabilna i ograničena u svakom konačnom intervalu, i takva da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)| dt < \infty$$

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} K(t) dt \neq 0 \quad \text{za svako} \quad x \in \mathcal{R}.$$

Iz

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-x) s(t) dt \to s \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt, \quad x \to \infty,$$

sledi

$$s(x) \to s, \quad x \to \infty,$$

pod različitim tauberovskim uslovima:

[58]Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, 178, 1937.

[59]Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe, Beograd, 3, 1950, s.201-206.

a)

$$\lim_{|x|=\infty} \sup \max_{|x|\leq|x'|\leq|x+h|} |s(x') - s(x)| \leq \omega(h) \to 0, \quad h \to 0,$$

sa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tK(t)|dt < \infty;$$

ili

b)

$$\lim_{x=\infty} \sup \max_{x\leq x'\leq x+h} |s(x') - s(x)| \leq \omega(h) \to 0, \quad h \to 0,$$

sa

$$s(x) = O(1), \quad x \to -\infty,$$

i

$$\int_{c}^{\infty} t|K(t)|dt < \infty \quad c > 0;$$

ili

c)

$$\lim_{|x|=\infty} \inf \min_{|x|\leq|x'|\leq|x+h|} \{s(x') - s(x)\} \geq -\omega(h) \to 0, \quad h \to 0,$$

sa

$$K(t) \geq 0 \quad \text{za svako} \quad t,$$

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|K(t)dt < \infty;$$

ili, konačno, kada

d)

$$\lim_{x=\infty} \inf \min_{x\leq x'\leq x+h} \{s(x') - s(x)\} \geq -\omega(h) \to 0, \quad h \to 0,$$

sa

$$s(x) = O(1), \quad x \to -\infty, \qquad K(t) \geq 0 \quad \text{za svako} \quad t,$$

i

$$\int_{c}^{\infty} tK(t)dt < \infty \quad c > 0.$$

Prva etapa dokaza se zasniva na rezultatima iz Karamatinih radova *Über einen Satz von Vijayaraghavan*,[60] *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité*,[61] a druga etapa dokaza na Pit-Vinerovoj centralnoj teoremi.[62]

U skoro svim kasnijim radovima na temu Tauberovih teorema, Karamata je u skladu sa Vinerovom teorijom proučavao inverzne teoreme u integralnom obliku i sa najopštijim uslovima konvergencije

$$\lim_{n=\infty} \sup \max_{n \leq n' \leq N} |s_{n'} - s_n| < w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1$$

i

$$\lim_{n=\infty} \sup \min_{n \leq n' \leq N} \{s_{n'} - s_n\} > -w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1$$

Pri tome je dao niz varijanti i ekvivalenata tih uslova, a dokazi su se često zasnivali na jednoj novoj teoriji na kojoj je krajem dvadesetih i početkom tridesetih godina Karamata intenzivno radio. To su bili osnovi teorije pravilno i sporo promenljivih funkcija. Ako su mu radovi vezani za problematiku teorema Tauberove prirode odmah doneli slavu i ime u matematičkom svetu, radovi o pravilno promenljivim i sporo promenljivim funkcijama su tek kasnijim razvojem matematike, prvenstveno teorije verovatnoće, dobili na pravoj vrednosti.

Teorija pravilno promenljivih funkcija

Godine 1930. pored već pomenutog rada o funkcijama Tauberove prirode, pojavila se, ovoga puta u malo poznatom rumunskom časopisu Mathematica (Cluj), rasprava *Sur une mode de croissance régulière*

[60] Mathematische Zeitschrift, 34, 1932, s. 737-740.

[61] Actualités scientifiques et industrielles, 450, Hermann et Cie. Paris, 1937.

[62] H.R.Pitt, *General tauberov theorems*, Proceedings of the London Mathematical Society (2)44, 1938, s.254, teorema 6.

des fonctions [63] u kojoj su date definicija i osnovne osobine pravilno, odnosno sporo promenljive funkcije. Cilj i ideja te rasprave su bili da se uopšte tauberovski uslovi u nekim inverznim teoremama Tauberove prirode za Laplasovu transformaciju. Za dalji razvoj teorije pravilno promenljivih funkcija, pored smog Karamate, veoma je značajna "Jugoslovenska škola" matematike, kako je nazivaju Seneta i Bingam, njegovih učenika i saradnika (Aljančić, Bajšanski, Bojanić, Tomić i drugi).[64] Svi ti rezultati ipak nisu bili zapaženi i vrednovani na odgovarajući način[65] sve dok se 1966. godine nije pojavila poznata Felerova (W. Feller) monografija *An intoduction to Probability Theory and its Applications* čiji je drugi tom sadržao elemente Karamatine teorije, ali uz ne uvek precizne pretpostavke i jasne uslove. Ubrzo se videlo da se te funkcije mogu uspešno primeniti u mnogim granama matematičke analize i u teoriji verovatnoće, gde god nije potrebna samo činjenica konvergencije već i druge dodatne informacije. Time je Karamatina teorija, van svih njegovih očekivanja, izrasla u ogromnu matematičku zgradu čiji je značaj i dalje u usponu i kojoj su posvećene, između ostalog i tri poznate monografije o pravilnoj promenljivosti funkcija,[66]

[63]Mathematica (Cluj), 4, 1930, s.38-53.

[64]Možda bi umesto "Jugoslovenska škola" prikladniji naziv bio **Karamatina škola matematike**, jer je ona prvenstveno bila vezana za njegovo ime, a ne za šire geografsko područije kao što je država.

[65]Upoređujući datu obimnu literaturu u danas najpoznatijim monografijama o toj problematici, lako se može videti da je zanemarljiv broj značajnijih citiranih radova nastao u periodu od Karamatinog uvođenja pojma pravilno i sporo promenljivih funkcija pa do njegovog ponovnog "aktiviranja" sredinom 60-tih godina. Osim samog Karamate i njegovih učenika pominju se praktično samo radovi čiji su autori Korevaar, van Aardenne-Ehrenfest, de Bruijn (1949), de Bruijn (1959) i Mtusezewska (1962, 1964, 1965).

[66]Eugene Seneta, *Regularly varying functions*. Lecture notes in Mathematics 508, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976; N.H.Bingham, C.M.Goldie, J.L.Teugels, *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 27, Cambridge Univ. Press, 1987; J.L.Geluk, L.de Haan, *Regular Variation*

a u novije vreme je proširena i na funkcije više promenljivih. U tim monografijama teorija pravilno promenljivih funkcija i njena primena je, u odnosu na originalnu Karamatinu teoriju i njen razvoj do početka šezdesetih godina, data u savremenom pročišćenom i znatno proširenom obliku. Zbog toga ćemo u ovom izlaganju prvenstveno naglasiti originalne Karamatine formulacije i rezultate, sa posebnim osvrtom na kasniji razvoj pojedinačnih delova Karamatine teorije.

Važno je obratiti pažnju na terminologiju koju je Karamata koristio u svojim radovima. U uvodnom radu, kao i u svim ostalim koji su bili pisani na francuskom i nemačkom jeziku, Karamata je za svoje funkcije upotrebljavao termin **croissance régulière** i **croissance lente**, odnosno **regulär wachende** i **langsam wachende**, što bi u doslovnom prevodu bilo **regularno** i **sporo rastuće** funkcije. U radu *Pravilno promenljive funkcije i Frullanijev integral*[67] prvi put je na srpskom jeziku upotrebljen izraz **pravilna promenljivost**, odnosno **comportement régulière** u rezimeu na francuskom jeziku. Autori su, kako su i sami u radu naglasili (s.241) smatrali da taj naziv više odgovara suštini funkcija na koje se odnosi. U sledećem periodu korišćena su oba termina,[68] ali pojavom nekoliko Karamatinih koautorskih radova na engleskom jeziku,[69] i posebno pojavom Felerove knjige, u kojima su te funkcije nazvane **regularly** i **slowly varying** (**pravilno** i **sporo promenljive**), a kako su ubedljivo najbrojniji postali matematički

extensions and Tauberian Theorems, CVVI, Tract 40, Amsterdam, 1987.

[67]S. Aljančić, J. Karamata, Zbornik radova matematičkog instituta SAN (50), 5, 1956, s.239-248.

[68]J. Karamata, Some theorems Concerning **Slowly Varying** functions (1962); W. Matuszewska, **Regularly increasing** functions in connection with the theory of $L^{*\phi}$-spaces (1962); D. Adamović, Sur quelques propriétés des fonctions à **croissance lente** de Karamata (1966), itd.

[69]On **slowly varying** functions and asymptotic relations (sa R. Bojanićem) (1963); **Regularly varying** functions and the principle of equicontinuity (sa B. Bajšanskim) (1964).

radovi na engleskom jeziku, taj termin se i zadržao.

Poreklo ideje o Karamatinim sporo promenljivim funkcijama, kako je i sam Karamata više puta spomenuo, treba tražiti kod nemačkih matematičara Šmida[70] i Šura (I. Schur).[71] Šmid je uveo pojmove sporo i vrlo sporo oscilirajućih nizova (što je preneto i na funkcije) sa ciljem da se uopšte do tada poznati tauberovski uslovi, i 'radialnih (zvezdastih) nizova' (gestrahlte Folgen) koji su u vezi sa pravilnom promenljivošću, a Šur je uveo posebne kompleksne nizove koje je nazvao 'srednji' nizovi (Mittelfolgen). S druge strane na Karamatu su značajno uticali i radovi Landaua *Sur les valeurs moyennes de certains fonctions arithmétiques*,[72] koji je za neopadajuću funkciju $L(x)$ posmatrao graničnu vrednost

$$\frac{L(2x)}{L(x)} \to 1 \quad \text{kada} \quad x \to \infty,$$

i Polje *Über eine neue Weise, bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen*[73] u kome je jedan niz nazvao regularno monotono rastući ako za njega važi $N(r) = \dfrac{r^\lambda}{L(r)}$ gde je $N(r)$ broj elemenata niza manjih ili jednak r, a $L(r)$ Landauova funkcija, i *Bemerkungen über unendliche Folgen und ganze Funktionen*,[74] u kome je određene monotone sporo promenljive funkcije nazvao 'sporo rastućim' i 'sporo opadajućim' (langsam wachsende, langsam abnhmende).[75]

---

[70]Vrlo važan rad *Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen*, Mathematische Zeitschrift 31, 1925, 89-152.

[71]*Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte*, Mathematiche Zeitschrift 31, 1929, s.391-407.

[72]Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1911, s.443-472.

[73]Göttingen Nachrichten, 1917, s.149-159.

[74]Mathematische Annalen 88, 1923, s.169-183.

[75]Seneta je u pomenutoj monografiji (s.46) primetio da je malo poznato da se neki elementi Karamatine teorije pojavljuju u radovima H. Petrinija (1916) i G.Fabera

U jednoj 'Noti' predstavljenoj u Društvu matematičara Francuske[76] Karamata se bavio takvim regularnim monotonim nizovima i pokazao da su svi pravilno monotoni nizovi (u gore navedenom smislu Polje) oni za koje postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nq_n} \sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu,$$

kao i obrnuto, svi nizovi koji taj uslov zadovoljavaju mogu se predstaviti u analognom obliku Polje i Landaua. Ako se uslov monotonosti izostavi i ostane samo gornji uslov, takva regularnost u širem smislu je ekvivalentna Šmidovim zvezdastim nizovima, sa izuzetkom sporo rastućih nizova. U radu *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* Karamata je ta istraživanja nastavio, ali sa analognim, integralnim izrazom oblika

$$\frac{1}{rq(r)} \int_0^r q(t)dt,$$

što će mu omogućiti da pokaže da su Šmidovi zvezdasti nizovi ekvivalentni sa u širem smislu regularnim nizovima samo za (Poljaovo) $\lambda > 0$. Važno je napomenuti da je u pomenutim radovima pre Karamate uslov monotonosti igrao bitnu ulogu jer je omogućavao razvoj teorije u jednostavnijem obliku.[77]

(1917) koji je definisao jednu funkciju koja je u suštini sporo promenljiva. Kako Karamata njihove radove nije citirao, može se pretpostaviti da mu oni nisu bili poznati.

[76]Karamata u svojim radovima dva puta spominje "une Note présentée à la Société Mathématique de France" (*Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood* s.36 i *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* s.39), ali nismo uspeli da proverimo i vidimo o kakvoj je to 'Noti' reč.

[77]I sam Karamata je zaključio da iz Landauovog uslova $\frac{L(2x)}{L(x)} \to 1$ $(x \to \infty)$ sledi za svako $t > 0$ $\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1$ $(x \to \infty)$, kada je $L(x)$ monotona funkcija. Konstatovao je takođe da se uslov monotonosti neke funkcije $q(x)$ može zameniti opštijim uslovom $\lim_{x\to\infty} \inf \frac{q(tx)-q(x)}{q(x)} \geq -\omega(t) \to 0$ kada $t \to 1$.

Da bi olakšao izlaganje Karamata je definisao **les fonctions à croissance régulière** – pravilno promenljive funkcije.

D1. Neka je $q(x)$ pozitivna funkcija definisana za svako $x \geq 0$, ograničena u svakom konačnom intervalu i takva da izraz

$$A_k(r) = \frac{1}{r^{k+1}q(r)} \int_0^r t^k q(t)dt, \quad \text{sa} \quad k > 0,$$

ima smisla za konačne vrednosti r; pod tom pretpostavkom kaže se da je $q(x)$ pravilno rastuća funkcija u širem smislu (bez uslova monotonosti (prim.aut.)) ako postoji pozitivan broj k takav da $A_k(r)$ teži ka određenoj granici, konačnoj i različitoj od nule, kada $r \to \infty$; drugim rečima kada

$$A_k(r) = \frac{1}{r^{k+1}q(r)} \int_0^r t^k q(t)dt \to \frac{1}{\sigma_k}, \quad \text{sa} \quad 0 < k < \infty,\ 0 < \sigma_k < \infty.$$

Broj $\sigma = \sigma_k - k$ se naziva indeks regularnosti funkcije $q(x)$ i on ne zavisi od broja k, već samo od funkcije $q(x)$. Ova definicija korespondira Šurovoj definiciji 'srednjeg' niza.

Odmah zatim je formulisao i dokazao teoremu da je funkcija $q(x)$ pravilno rastuća sa indeksom regularnosti σ ako i samo ako se može predstaviti u obliku

$$q(x) = x^{\sigma-1}L(x)$$

gde se za funkciju $L(x)$ kaže da je sporo rastuća i zadovoljava uslov

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(cr)}{L(r)} = 1 \quad \text{za svako} \quad c > 0.$$

U savremenoj teoriji pravilno promenljivih funkcija ova se teorema zajedno sa definicijom D1 naziva Karamatina teorema i ona pokazuje kako se sporo (pravilno) promenljive funkcije ponašaju kada su pomnožene sa stepenom pa integraljene.[78]

[78]Bingham et all, [45], s.28, 30. Pri tome se uzima savremena definicija pravilno promenljive funkcije koja se oslanja na drugu Karamatinu definiciju (D2) o čemu će kasnije biti govora.

Kako je u toj teoremi, da bi funkcija $q(x)$ bila pravilno rastuća, dovoljno pretpostaviti da granična vrednost izraza $\frac{q(rx)}{q(r)}$ postoji za svako $x > 0$ i veća je od nule, Karamata zaključuje da je

$$\lim_{r\to\infty} \frac{q(rx)}{q(r)} = x^{\sigma-1} \quad \text{za svako} \quad x > 0.$$

Ovaj zaključak se često zove **teorema o karakterizaciji.**[79]

Isti zaključak je izveo i Šmid ali pod restriktivnijim pretpostavkama (monotonost funkcije $q(r)$ i postojanje granične vrednosti izraza $\frac{q(rx_r)}{q(x)}$ za svaki niz $x_r \to x > 0$).

Direktno inspirisan Šmidovim i svojim rezultatima Karamata je u radu *Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux*[80] dao još jednu definiciju pravilno rastućih funkcija. Karamata na početku tog rada piše da su izvođenja teorema koje se nalaze u radu *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* bila dugačka i dosta zbrkana, i da mu je V. Šmid (Vilmos Schmidt) u jednom pismu od 5. oktobra 1931. ukazao da bi se to moglo uraditi znatno kraće.[81]

D2. Za funkciju $q(x)$ definisanu za svako $x \geq 0$ se kaže da je pravilno rastuća kada je $q(x) > 0$ za svako $x \geq 0$ i kada

$$\frac{q(tx)}{q(x)} \to h(t) \quad \text{za svako} \quad t > 0, \quad x \to \infty.$$

Definicija D1 po Karamati ima jednu posebnu prednost. Naime definicija D2 zahteva postojanje granične vrednosti za beskonačno mnogo

[79]Videti knjige Bingama s.16-21, i Senete s.9.

[80]Bulletin de la Societé mathématique de France, 41, 1933, s.55-62.

[81]La démonstration de ces théorèmes, qui se trouve dans ma Note citée, etant longue et assez confuse, M. Vilmos Schmidt a bien voulu me signaler (par une lettre datée du 5 octobre 1931) qu'on peut y parvenir par une voie bien plus courte. Pismo nismo videli.

vrednosti t (ili za dve vrednosti pod uslovom monotonosti funkcije $q(x)$), dok je za definiciju D1 dovoljno da važi relacija

$$\frac{1}{r^{k+1}q(r)}\int_0^r t^k q(t)dt = \int_0^1 t^k \frac{q(tr)}{q(r)}dt \to \frac{1}{\sigma_k}.$$

Drugim rečima postojanje granične vrednosti familije funkcija $\frac{q(tr)}{q(r)}$ za $r \to \infty$ u jednom trenutku $M(r)$, povlači postojanje granične vrednosti $\lim_{r\to\infty} \frac{q(tr)}{q(r)} = t^{\sigma-1}$, za svako $t > 0$, pretpostavljajući da je σ određeno sa $\lim_{r\to\infty} M(r)$.[82] U tom radu Karamata je pokazao i ekvivalentnost ove dve definicije.

Interesantno je zapaziti da kraći dokaz 'teoreme o karakterizaciji' ($\frac{q(tr)}{q(r)} \to t^{\sigma-1}$ kada $r \to \infty$), koji je polazio od definicije D2 i koji je Karamata izveo u prvom delu ovog rada, nije bio potpuno korektan. Dokaz se bazirao na implikaciji

$$c(x+1) - c(x) \to c \ (x \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{c(x)}{x} \to c \quad (x \to \infty)$$

koju je Karamata koristio bez ikakvog uslova. Ova implikacija za diskretne promenljive važi pri uslovu regularnosti Cesàrove zbirljivosti (granica u smislu Cesàra postoji i jednaka je granici u smislu Košija ako ona postoji) dok je de Han 1970. godine pokazao da je uslov za važenje ovakve neprekidne verzije ograničenost funkcije $c(x)$ na svakom ograničenom intervalu dovoljno daleko na desno.[83]

Dakle pojam Karamatinih funkcija vezan je za proučavanje graničnih

[82] Pomenuti rad s.8.

[83] Videti L. de Haan, *On regular Variation and its Applications to the weak Convergence of Sample Extrems*, Mathematical Center Tract, 32, Amsterdam, 1970, s.3; E.Seneta, *An interpretation of some aspects of Karamata's theory of regular variation*, Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle Série, 15(29), Belgrade, 1973, s.111-119.

vrednosti tipa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = g(t)$$

gde je funkcija $f(x)$ pozitivna i neprekidna za $x > 0$. Pokazuje se da ako ta granična vrednost postoji i različita je od nule za neki razmak $t \in [a, b]$ tada ona postoji za sve $t > 0$ i $g(t) = t^\rho$, gde je ρ realan broj. Danas se pravilna i spora promenljivost najčešće definišu na sledeći način:

Za pozitivnu, realnu i merljivu funkciju $r(x)$ definisanu na intervalu $[a, \infty)$, $a > 0$ se kaže da je **pravilno promenljiva** (u beskonačnosti) ako za sve $t > 0$ važi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{r(tx)}{r(x)} = t^\rho,$$

gde se broj ρ naziva indeks pravilnosti.

Ako je ρ iz prethodne definicije nula tada se za pozitivnu neprekidnu funkciju $L(x)$ definisanu na intervalu $[a, \infty)$, $a > 0$ kaže da je **sporo promenljiva** (u beskonačnosti) ako za svako $t > 0$ važi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

Iz te dve definicije se vidi da svaka pravilno promenljiva funkcija ima oblik $r(x) = x^\rho L(x)$. Ona je dakle uopštenje stepena (koji se javlja u broiocu Poljaovog izraza za $N(r)$), koji se zamenjuje sa funkcijom asimptotskog ponašanja stepena pomnoženog sa faktorom koji se menja sporije od stepena, i gde sporo promenljiva funkcija ima osnovnu ulogu. Budući lokalno svojstvo, pravilna promenljivost se definiše u odnosu na tačku. Ideja da se stepen x^ρ zameni sa nekom opštijom funkcijom je prirodna i nije bila potpuno nova jer je već bilo pokušaja u tom pravcu. Ali Karamata je bio onaj koji je rešio taj problem u najopštijem smislu, i jednostavno i elegantno ga formulisao i dokazao uvodeći sporo promenljive funkcije.

Navešćemo i neke primere sporo promenljivih funkcija: sve pozitivne funkcije koje teže ka pozitivnoj konstanti, funkcija $\prod_{\nu=1}^{n}(\ln_\nu x)^{\xi_\nu}$ gde je ξ_ν realan broj a $\ln_\nu x$ označava $\nu-tu$ iteraciju logaritma, funkcije $\log\log x$, $e^{\sqrt{\log x}}$, $x^{-1}\int_a^x \frac{dt}{\ln t}$. Navedene, kao i mnoge druge sporo promenljive funkcije, se veoma često javljaju u analitičkoj teoriji brojeva i to u glavnom članu ili u ostatku asimptotskih formula.[84]

Polazeći od navedene, Karamatine teoreme, odnosno od jednostavnih definicija (D1 i D2) Karamata je razvio čitavu teoriju pravilno i sporo promenljivih funkcija koja je obuhvatila većinu najvažnijih osobina. Ovde na prvom mestu navodimo dva rezultata koji su osnovni za teoriju i za različite primene. To su **teorema o uniformnoj konvergenciji** koja kaže da za svaku sporo promenljivu funkciju $L(x)$ količnik $\frac{L(tx)}{L(x)}$ teži u $t \in [a,b]$ uniformno ka 1, kada $x \to \infty$, za svaki fiksiran konačni interval $[a,b]$, odnosno za svaki kompaktan t-skup iz intervala $(0,\infty)$, i **teorema o reprezentaciji** koja kaže da je $L(x)$ sporo promenljiva funkcija, ako i samo ako može biti napisana u obliku

$$L(x) = c(x)e^{\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}$$

za neko $a > 0$, gde je $c(x)$ neprekidna funkcija koja za $x \to \infty$ teži ka pozitivnoj konstanti, a $\varepsilon(x) \to 0$. Ako je $c(x)$ konstanta tada se funkcija $L(x)$ naziva normalizovana. Ova dva rezultata su osnovno oruđe u dokazivanju različitih osobina sporo promenljivih funkcija.

Takođe za svako $\alpha > 0$ i za $x \to \infty$ važi

$$x^\alpha L(x) \to \infty \quad \text{i} \quad x^{-\alpha}L(x) \to 0.$$

To pokazuje da funkcija $L(x)$ sporije raste (opada) od bilo kog stepena od x, odnosno da sporo promenljiva funkcija popunjava praznine

[84]Videti monografiju akademika Aleksandra Ivića *Uvod u analitičku teoriju brojeva*. Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića Sremski Karlovci, Novi Sad 1995, s. 353-355.

između svaka dva stepena od x. Takođe je funkcija ideksa većeg od 0 pravilno rastuća, indeksa 0 sporo rastuća ili opadajuća a indeksa manjeg od 0 pravilno opadajuća. Zahvaljujući tome jasno je zašto suštini takvih funkcija u nazivu više odgovara termin promenljivost nego raščenje.

Napomenućemo da je u celoj svojoj teoriji Karamata kao uslov pretpostavljao neprekidnost funkcije, jedino je u teoremi o kanoničkom predstavljanju sporo promenljive funkcije predpostavio njenu lokalnu integrabilnost. U savremenoj teoriji je uslov neprekidnosti zamenjen sa uslovom merljivosti u Lebegovom smislu. Sa tim uslovom teoremu o uniformnoj konvergenciji za sporo promenljive funkcije dokazali su Korevar et al. 1949. godine,[85] za pravilno promenljive funkcije S. Berman 1973. godine,[86] a Karamatinu teoremu de Han 1970. godine.[87]

Kada je uveden pojam sporo promenljive funkcije, prirodno je definisati i jedan poseban tip pravilno promenljive funkcije – brzo promenljivu funkciju. Potpuno analogno definiciji pravilno promenljive funkcije, Karamata je u radu *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant*[88] dao sledeću definiciju brzo promenljive funkcije:

Neprekidna funkcija $R(y)$ je **brzo pravilno promenljiva** (à croissance régulière rapide) ako

$$\frac{R(y+v)}{R(y)} \to \text{ prema granici određenoj za svako } v,\ y \to \infty.$$

Da bi ovako definisanu funkciju izrazio preko pravilno promenljive fun-

[85] J. Korevaar, T. van Aardenne-Ehrenfest, N.G. de Bruijn, *A note on slowly oscillating functions*, Nieuw Archief voor Wiskunde, 23, 1949, s.77-86.

[86] *Excursions of stationary Gaussian processes above high moving berriers*, Annals of Probability, 1, 1973, s.365-387.

[87] *On regular Variation and its Applications to the weak Convergence of Sample Extrems*, Mathematical Center Tract, 32, Amsterdam, 1970.

[88] 2. Congrès des mathématiciens roumains, 1932, Turnu Severin. Mathematica (Cluj), vol. IX, 1932, s.164-178.

kcije $r(x)$ za koju važi $\int_0^1 \frac{r(tx)}{r(x)}dt \to \frac{1}{\alpha}$, $x \to \infty$, odnosno $\frac{r(tx)}{r(x)} \to t^{\alpha-1}$, $x \to \infty$, za svako $t > 0$, (α je indeks regularnosti) i dobio relacije analogne karakterizaciji i kanoničkom predstavljanju pravilno promenljive funkcije ($r(x) = x^\alpha L(x)$ ili $\frac{L(ux)}{L(x)} \to 1$, $x \to \infty$, za svako $u > 0$, $L(x) = c(x)e^{\int_0^x \varepsilon(t)\frac{dt}{t}}$, $c(x) \to c \neq 0$ i $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to \infty$), Karamata uzima

$$R(y) = r(e^y), \quad e^y = x \quad \text{i} \quad e^v = u,$$

i dobija

$$R(y) = r(e^y) = e^{\alpha y}L(e^y) = e^{\alpha y}\Lambda(y),$$

gde $\Lambda(y)$ zadovoljava relaciju

$$\frac{\Lambda(y+v)}{\Lambda(y)} \to 1, \quad y \to \infty, \quad \text{za svako } v,$$

kanonički oblik

$$\Lambda(y) = C(y)e^{\int_{-\infty}^y \varepsilon(t)dt}, \quad C(y) \to C \neq 0, \ \varepsilon(y) \to 0 \quad \text{kada} \quad y \to \infty.$$

i alternativnu definiciju

Funkcija $R(y)$ je brzo pravilno promenljiva kada

$$\int_0^{y(\infty)} e^{-t}\frac{R(y-t)}{R(y)}dt \to \frac{1}{\alpha}, \quad y \to \infty,$$

jer odatle sledi

$$\frac{R(y-t)}{R(y)} \to e^{-(\alpha-1)t}, \quad y \to \infty, \quad \text{za svako} \quad t.$$

U literaturi se ovakva Karamatina definicija brze promenljivosti zanemaruje i ovaj rezultat se ne citira, već se daje sledeća Bekešijeva (A.Békéssy) definicija iz 1957. godine:[89]

[89] *Eine Verallgemeinerung der Laplaceshen Mrthode*, Publ. Math. Hung. Acad. Sci. 2(1957), s.105-120; Videti u Bingham et al. [45] s.83-88, Seneta [45] s.43, Marić, Tomić [45] s.201.

Pozitivna neprekidna funkcija $g(x)$ definisana na intervalu $[a, \infty)$, $a > 0$ se naziva brzo promenljiva (u beskonačnosti) ako za svako $t > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(tx)}{g(x)} = 0 \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g(tx)}{g(x)} = \infty.$$

Napomenućemo da funkcije koje zadovoljavaju Karamatinu definiciju brze promenljivosti čine podklasu funkcija koje zadovoljavaju Bekešijevu definiciju.

Dok spora (pravilna) promenljivost najviše odgovara Abelovom postupku zbirljivosti, brže rašćenje (brža promenljivost) funkcije više odgovara Borelovom postupku zbirljivosti.[90] On se definiše na sledeći način: Red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sa nizom parcijalnih suma $\{s_n\}$ je Borel zbirljiv ako red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n$ konvergira za svako $x \in \mathcal{R}$ i ako postoji granična vrednost

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}.$$

I ovaj način zbirljivosti se može prikazati na, u Košijevom smislu, divergentnom redu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ koji je, kao što smo već videli, Abel zbirljiv. Za njega je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ ili 0 pa je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

odnosno

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tako je red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ Borel zbirljiv sa sumom $\frac{1}{2}$. Ali Borelov način zbirljivosti ima posebnu primenu kod onih divergentnih redova kod kojih su oscilacije niza parcijalnih suma toliko velike da ne postoji zbir u

[90] K.Knopp, *Theory and application of infinite series*, London, 1937, s.472; J.Karamata, *Razvoj i znavaj teorije divergentnih redova u matematičkoj analizi*, Zbornik radova 1. Kongresa matematičara i fizičara Jugoslavije, Bled, 1940, s.99-119.

Abelovom smislu, kao što je slučaj sa redom $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}2^{\nu}$. Da bi se takve velike oscilacije niza s_ν izravnale mora se koristiti pomoćni red koji brzo konvergira tj. čiji članovi brzo teže nuli. Zato se umesto, u Abelovom postupku, pravilno (sporo) promenljive funkcije $p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu$ kada $x \to 1$, posmatra funkcija $q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_\nu}{\nu!} x^\nu$ koja je brzo (pravilno) promenljiva kada $x \to \infty$.

Karamata je u ovom radu koji se nadovezuje na ispitivanja različitih postupka zbirljivosti formulisao, kako ga je sam nazvao, Stirlingov postupak zbirljivosti.

Neka je

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1) = \sum_{\nu=0}^{n} \left[{n \atop \nu}\right] x^\nu,$$

gde je $\left[{n \atop 0}\right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$. Ako

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+n-1)} \sum_{\nu=0}^{n} \left[{n \atop \nu}\right] s_\nu k^\nu \to s, \quad n \to \infty, \quad k > 0,$$

tada je niz s_n Stirling zbirljiv ka sumi s.[91]

Do ovakvog postupka zbirljivosti Karamata je došao logičnim i prirodnim razmišljanjem i rezonovanjem. Naime iz činjenice da iz Cesàrove zbirljivosti nizova sledi njihova Abelova zbirljivost, odnosno iz Ojlerove (E) zbirljivosti nizova sledi Borlova zbirljivost, za očekivati bi bilo, da kako iz Abelove zbirljivosti pozitvnih nizova sledi njihova Cesàrova zbirljivost, slično važi i za Ojlerov i Borelov postupak, što međutim nije slučaj. Inverzija Borelovog postupka zbirljivosti pozitivnih nizova ne dovodi do Ojlerove već do Stirlingove zbirljivosti. Tako je Karamata došao do relacije po kojoj je Stirlingova zbirljivost na neki način

[91] Ova zbirljivost je nazvana po J.Stirlingu čije je brojeve oblika $\left[{n \atop \nu}\right]$ N.Nielsen nazvao Stirlingovi koeficijenti prve vrste.

između Ojlerovog i Borelovog postupka zbirljivosti i formulisao sledeću teoremu:[92]

Važi

$$E(k) \subset S(k) \subset B$$

tj. svi redovi zbirljivi Ojlerovim postupkom su zbirljivi i Stirlingovim postupkom, svi redovi zbirljivi Stirlingovim postupkom su zbirljivi i Borelovim postupkom; obrnuto ne važi u opštem slučaju.

Ove rezultate su, između ostalih, proširili u svojim radovima Vladeta Vučković i Branislav Martić koji su tako formulisan postupak zbirljivosti nazvali Karamata-Stirlingov.[93]

Primena pravilne promenljivosti

Karamata je pravilnu promenljivost uveo prvenstveno u cilju rešavanja problema Tauberove prirode uz najopštiji jednostrani uslov

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x\le t\le x\lambda} \frac{A(t)-A(x)}{x^\sigma L(x)} > -\omega(\lambda) \to 0, \quad 1<\lambda\to 1.$$

Ranije smo prikazali jedan važan Karamatin rezultat (Stav A)[94] gde je važio ovaj uslov, ali i pretpostavka da je funkcija $A(x)$ ograničene varijacije. Ako se umesto ograničene varijacije pretpostavi monotonost funkcije $A(x)$, ovaj uslov se može zameniti uslovom $x^\sigma L(x) \to \infty$. Tako je, koristeći koncept pravilne promenljivosti funkcija i generalizaciju

[92] s.173

[93] V.Vučković, *The mutual inclusion of $K-S$ methods of summation.* Michigan Math.J. 6, 1959, s.291-297; B.Martić, *Veza između Riesz-ovog i Karamata-Stirlingovih postupaka zbirljivosti*, Bulletin de la Societé des mathematiciens et physiciens de Serbie, XII, 1960, s.51-56, *Novi prilozi teoriji Karamata-Stirlingovih postupaka sumabilnosti*, RAD ANUBIH, 33, OPMN 10, Sarajevo, 1969, s.39-50.

[94] Vidi stranu 20.

Abelovih i Tauberovih teorema u Laplas-Stieltjesovoj transformaciji, Karamata dobio još jedan čuveni rezultat koji je dat u radu *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze welche die Laplassche und Stieltjessche Transformationen betreffen.*[95] Formulisaćemo dve glavne teoreme iz tog rada. Prva od njih, koja se danas često naziva Hardi-Litlvud-Karamatina teorema i koju je Nik Bingam označio kao jednog od glavnih rezultata u analizi ovog veka,[96] je sledeća (Stav I-II):

Neka su $L(x)$ i $L(\frac{1}{x})$ sporo promenljive funkcije, i neka je $A(x)$ neopadajuća funkcija na intervalu $[a, \infty)$ takva da funkcija

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\}$$

konvergira za svako $s > 0$. Tada važe sledeća tvrđenja:

Ako $f(s) \sim s^{-\rho} L(\frac{1}{s})$ za $s \to +0$, $\rho \geq 0$ tada $A(x) \sim x^\rho \frac{L(x)}{\Gamma(\rho+1)}$ za $x \to \infty$.

Ako $f(s) \sim s^{-\rho} L(s)$ za $s \to \infty$ tada $A(x) \sim x^\rho \frac{L(\frac{1}{x})}{\Gamma(\rho+1)}$ za $x \to +0$.

Ova teorema proširuje Hardi-Litlvudov rezultat za Laplasovu transformaciju kada je $L(x) = 1$.

Takođe, ova teorema je direktna posledica sledeće teoreme:[97]

Ako je

$$\varphi(x) = x^\sigma L(x) \to \infty, \quad x \to \infty, \quad \sigma \geq 0,$$

$$\frac{L(xr)}{L(r)} \to 1, \quad r \to \infty \quad \text{za svako} \quad x > 0,$$

[95]Journal für die reine und angewandte Mathematik 164, 1931, s.27-39. Videti E.Seneta, *Regularly varying functions* gde na str. 59 kaže: "One of the most famous and very widely useful theorems in probabilistic (amongst other) context is the **famous theorem of Karamata** (naglasio autor) which we prove first."

[96]The Hardy-Littlewood-Karamata theorem is one of the mayor analytic results of this century. Pismo od 21. maja 1996. upućeno autoru.

[97]J.Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze*, Mathematische Zeitschrift 33 (2), 1931, s.294-299.

$A(x)$ neopadajuća funkcija i ako za $s > 0$ konvergira integral

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\}$$

i

$$\int_0^\infty e^{-st} |d\{A(t)\}| = O(\varphi\left(\tfrac{1}{s}\right)).$$

Tada iz

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\tfrac{1}{s}\right) \quad \text{za} \quad s \to 0$$

sledi

$$\int_0^\infty e^{-st} g(e^{-st}) d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\tfrac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t}) d(t^\sigma), \quad s \to 0$$

za svaku u intervalu $(0,1)$ neprekidnu funkciju $g(x)$.

Druga glavna teorema (Glavni stav II) je da ako su $L(x)$ i $L(\frac{1}{x})$ sporo promenljive funkcije i ako je $A(x)$ neopadajuća funkcija na intervalu $[a, \infty)$ takva da postoji integral

$$\int_0^\infty \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^\rho} \quad \text{za svako} \quad x > 0 \quad (\rho \geq 0).$$

Tada iz

$$\int_0^\infty \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^\rho} \sim x^{-\sigma} L(x) \quad \text{za} \quad x \to \infty \quad \text{ili} \quad x \to 0 \quad (0 \leq \sigma \leq \rho)$$

sledi

$$\int_0^\infty G\left(\frac{1}{x}\right) d\{A(t)\} \sim x^{\rho-\sigma} L(x) \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-t} g(t) t^{\sigma-1} dt$$

za $x \to \infty$ ili $x \to 0$, gde je

$$G(y) = \int_0^\infty e^{-y\zeta} e^{-\zeta} g(\zeta) \zeta^{\rho-1} d\zeta,$$

i $g(t)$ proizvoljna ograničena Riman integrabilna funkcija.

Važnost ovih teorema, što je ranije već napomenuto,[98] je u tome što je u njima sadržana, kao specijalni slučajevi, većina Tauberovih teorema.

Vojislav Avakumović je, 1947. godine, prvi uveo sporo promenljive i regularno promenljive funkcije u proučavanje asimptotskog ponašanja rešenja određenih nelinearnih diferencijalnih jednačina Tomas-Fermijevog tipa

$$y'' = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}, \quad y(0) = 1,\ y(\infty) = 0$$

ili opštije

$$y'' = f(x) y^{\lambda},\ \lambda > 1,\ y(0) = 1,\ y(\infty) = 0$$

i dokazao teoremu:[99]

Ako se za $x \to \infty$, $f(x) \sim \rho(x)$, gde je $\rho(x)$ Karamatina pravilno promenljiva funkcija indeksa promenljivosti ν, tada za (jedinstveno) rešenje problema

$$y'' = f(x) y^{\lambda}, \quad \lambda > 1,\ y(0) = 1,\ y(\infty) = 0$$

za $x \to \infty$ važi

$$y(x) \sim \left\{ \frac{(1+\lambda+\nu)(2+\nu)}{(1-\lambda)^2} \right\}^{1/(\lambda-1)} \cdot (x^2 \rho(x))^{1/(\lambda-1)}.$$

To je bio prvi rezultat koji se odnosio na diferencijalne jednačine i pravilnu promenljivost, ali budući da se nalazio na granici dve naučne oblasti – klasične analize i teorije diferencijalnih jednačina, ostao je nezapažen sve do polovine sedamdesetih godina, kada je počelo intenzivno korišćenje pravilno promenljivih funkcija u proučavanju asimptotike rešenja nekih klasa linearnih i nelinearnih diferencijalnih jedna-

[98] Vidi stranu 20.

[99] V.G.Avakumović, *Sur l'equation differentielle de Thomas-Fermi*, Publ.Inst.Math. Beograd, 1, 1947, s.101-113.

čina, a Bingam u drugom (prvom 'paperback') izdanju citirane monografije posebno upućuje na radove V.Marića i M.Tomića.[100]

Osamdesetih godina se E.Omey bavio primenom sporo promenljivih i regularno promenljivih funkcija na linearne diferencijalne jednačine,[101] a V.Marić i M.Tomić su dali 1984. godine dovoljne uslove da rešenja klasične diferencijalne jednačine drugog reda $y'' - f(x)y = 0$, $f(x) > 0$, za $x \in [a, \infty)$ budu pravilno, sporo ili brzo promenljive funkcije,[102] a 1990. godine potrebne i dovoljne uslove.[103]

Neočekivano i za samog Karamatu, sporo promenljive i pravilno promenljive funkcije su se pokazale od izuzetnog značaja u primeni na teoriju verovatnoće što je po prvi put došlo do potpunog izražaja u u pomenutoj knjizi V.Felera.

U teoriji verovatnoće pravilno promenljiva funkcija je našla pri-

---

[100] *Asymptotic properties of the equation* $y'' = f(x)Q(y(x))$, Mathematische Zeitschrift, 149, 1976, s.261-266; *Regular variation and asymptotic properties of solutions of non-linear differential equations*, Publications de l'Institut Mathématique, Belgrade, 21(35), 1977, s.119-129.

[101] *Regular variation and its applications to second order linear differential equations*, Bull. Soc. Math. Belg. 32, 1981, s.207-229.

[102] Neka $x^2 f(x) \to c$ kada $x \to \infty$, tada su sva (pozitivna) rešenja diferencijalne jednačine $y'' - f(x)y = 0$ pravilno promenljive funkcije indeksa $\rho = \frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$ za $c \in (0, \infty)$ ili sporo promenljive funkcije za $c = 0$ ili brzo promenljive funkcije za $c = \infty$. *A trichotomy of solutions of second order linear differential equations*, Zb.Rad.Prirod.-Mat.Fak. Ser. Mat. 14(2), s.1-11.

[103] Sva (pozitivna) opadajuća rešenja $y(x)$ diferencijalne jednačine $y'' - f(x)y = 0$, $f(x) > 0$, za $x \in [a, \infty)$ su: a) normalizovane pravilno promenljive funkcije indeksa $\rho = \frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$ ako i samo ako $x \int_x^\infty f(t) \to c$, $c \in (0\infty)$ za $x \to \infty$, b) normalizovane sporo promenljive funkcije ako i samo ako $x \int_x^\infty f(t) \to 0$ za $x \to \infty$, c) brzo promenljive funkcija ako i samo ako $x \int_x^{kx} f(t) \to \infty$ za svako $k > 1$ i $x \to \infty$, gde gornji integrali mogu konvergirati ili divergirati. *A classification of solutions of second order linear differential equations by means of regularly varying functions*, Publ.de l'Inst.Math. N.S. 48(62), s.199-207.

menu kao komparativna funkcija u asimptotskim relacijama. Tako se, na primer, koristi u dokazima raznih graničnih teorema u kojima se pretpostavlja da je verovatnoća

$$P\{X \geq x\} = 1 - F(x)$$

pravilno promenljiva funkcija (u beskonačnosti) ili da je Laplasova trnsformacija funkcije raspodele pravilno promenljiva funkcija (u nuli).[104] Primer za to su neki rezultati iz teorije obnavljanja.[105]

Pretpostavimo da se sijalica, uključena u trenutku $t = 0$, zamenjuje sa novom čim pregori. Neka konačna i pozitivna slučajna promenljiva X koja označava vek trajanja sijalice ima zakon (funkciju) raspodele $F(x) = P\{X \leq x\}$ sa sredinom $\mu \in (0, \infty]$ tj. $\frac{S_n}{n} \to \mu$ u verovatnoći, gde je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, a X_n nezavisne slučajne promenljive sa raspodelom F. S_k se nazivaju periodi obnavljanja. Neka je broj pregorelih sijalica zaključno sa vremenom t $N_t = \max\{k : S_k \leq t\}$, $N = (N_t \geq 0)$ proces obnavljanja a $N_t + 1$ broj upotrebljenih sijalica u toku vremena t. Funkcija obnavljanja $U(t)$ se definiše kao očekivanje od $N_t + 1$ tj.

$$U(t) = E(N_t + 1) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P(N_t = n).$$

Po teoremi obnavljanja za svako $h > 0$, $U(t+h) - U(t) \to \frac{h}{\mu}$ kada $t \to \infty$, a po elementarnoj teoremi obnavljanja $\frac{U(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ kada $t \to \infty$.

Sporo promenljive funkcije sada omogućuju da se kaže nešto više o ponašanju razlike $U(t) - \frac{t}{\mu}$. To ćemo ilustrovati na sledećim rezultatima: Neka je $1 < \alpha < 2$ i $\mu < \infty$. Tada

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \sim \frac{t^{2-\alpha}L(t)}{\mu^2(2-\alpha)(\alpha-1)}, \quad \text{kada} \quad t \to \infty$$

[104]Funkcija $R(x)$ je pravilno promenljiva u nuli ako je $R(1/x)$ takva u beskonačnosti.

[105]Bingham et al. [45] s.359, Bingham [45] s.172.

ako i samo ako

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad \text{kada} \quad x \to \infty.$$

Kada je μ beskonačno i $0 < \alpha < 1$ dolazi se do tzv. arkus-sinus zakona teorije obnavljanja i njenog proširenja u vidu fluktuirajućih problema kod bacanja novčića.

Neka je funkcija

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha (1-x)^{\alpha-1}} \cdot \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}$$

gustina čija je odgovarajuća funkcija raspodele nazvana (opšti) arkus-sinus zakon sa parametrom α.[106]

Da bi se dobilo tvrđenje analogno prethodnom ali za μ beskonačno i $0 < \alpha < 1$ može se prvo pokazati da važi[107]

$$1 - F(x) \sim \frac{L(x)}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha} \quad \text{kada} \quad x \to \infty$$

ako i samo ako

$$1 - \overline{F}(x) \sim s^\alpha L(\frac{1}{s}) \quad \text{kada} \quad s \to 0+,$$

gde je $\overline{F}(x)$ Laplas-Stieltjesova transformacija

$$\overline{F}(x) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x).$$

Po Hardi-Litlvud-Karamatinoj Tauberovoj teoremi (vidi gore strana 35) to je ekvivalentno sa

$$U(x) \sim \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)L(x)} \quad \text{kada} \quad x \to \infty$$

[106] Kada je $\alpha = \frac{1}{2}$ funkcija raspodele $F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$.

[107] Bingham et al. [45] s.361.

i tada je

$$\lim_{x\to\infty} U(x)(1-F(x)) = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}.$$

Dokazi ovih teorema se mogu naći u pomenutoj Felerovoj monografiji.

Pravilna promenljivost ima važnu ulogu i u teoremama u kojima se pretpostavlja slaba konvergencija niza funkcija raspodele, kao što su slabi zakon velikih brojeva i centralna granična teorema, što je tesno povezano sa teorijom privlačenja.

Neka su za $x \geq 0$

$$T(x) = P(X \leq -x) + P(X > x) = F(-x) + 1 - F(x)$$

suma repa, i

$$V(x) = \int_{-x}^{x} y^2 d\{F(y)\}$$

usečena varijansa.

Spora promenljivost usečene varianse $V(x)$ je potreban i dovoljan uslov za postojanje centrirajuće konstante a_n i normirajuće konstante b_n za koje $\frac{S_n-a_n}{b_n}$ konvergira u raspodeli ka Φ gde je Φ Gausova normalna raspodela, što je ekvivalentno sa $\frac{x^2T(x)}{V(x)} \to 0$ kada $x \to \infty$, odnosno kaže se da F pripada domenu privlačenja raspodele Φ. Ovaj značajan rezultat su 1935. godine dobili, nezavisno jedan od drugog, Hinčin, Feler i Levi, ali niko od njih nije koristio Karamatine radove i terminologiju regularno promenljivih funkcija, mada im je to već pet godina bilo dostupno.

Gornja teorema se može i uopštiti da raspodela F pripada domenu privlačenja neke raspodele G ($\frac{S_n-a_n}{b_n} \to G$, $n \to \infty$) koja se naziva stabilna,[108] ako i samo ako postoji sporo promenljiva funkcija $L(x)$

[108]Nedegenerisan zakon F se naziva stabilan ako, kad god X_1, X_2 imaju isti tip kao i F sa X_1 i X_2 nezavisno, tada $X_1 + X_2$ ima isti tip kao i F

tako da je

$$V(x) \sim x^{2-\alpha} L(x) \quad \text{kada} \quad x \to \infty,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{x^2 T(x)}{V(x)} \to \frac{2-\alpha}{\alpha}, \qquad x \to \infty$$

gde je $0 < \alpha \leq 2$. Za $\alpha = 2$ dobija se navedeni specijalni slučaj normalne raspodele Φ.

Kao primer primene sporo promenljivih funkcija navešćemo i dve teoreme koje se odnose na količnik maksimuma $M_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$ i zbira $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.[109]

$\frac{M_n}{S_n} \to 0$ u verovatnoći ako i samo ako je $\int\limits_0^\infty y dF(y)$ sporo promenljiva funkcija;

i

$\frac{M_n}{S_n} \to 1$ u verovatnoći ako i samo ako je $1 - F(x)$ sporo promenljiva funkcija.

Još jedan Karamatin rezultat, **iteraciona teorema**, kako ju je nazvao Seneta,[110] ima važnu ulogu u verovatnoći, tačnije u teoriji kritičnih granajućih stohastičkih procesa. Karamata je u radu *O geometrijskoj interpretaciji M.Milankovića konvergencije beskonačnih redova*[111] pokazao da se geometrijska interpretacija konvergencije beskonačnih redova svodi na rešavanje jednačine $x = f(x)$ metodom sukcesivne aproksimacije, tj. nizom uzastopnih približnih vrednosti x_n određenih

[109] Bingham et al. [45] s.419.

[110] E.Seneta [45].

[111] Zbornik radova Mat. Inst. SAN 1, 1951, s. 125-134

rekurentnom relacijom oblika

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kao i da brzina konvergencije posmatranih redova, tj. niza x_n, zavisi od reda dodira u tački preseka krive $y = f(x)$ sa pravom $y = x$. Ova problematika je danas našla svoje mesto u teoriji nepokretne tačke.

Tada je naveo i opšti stav koji, bez pretpostavke o monotonosti funkcije $f(x)$, daje brzinu konvergencije gornjeg niza približnih vrednosti kada je pomenuti red dodira $k > 1$. Taj stav je opštiji od stava koji su formulisali Polja i Sege u zadatku 174 (strana 31, dokaz na strani 188), u njihovoj, već pomenutoj, zbirci zadataka i teorijskih problema. U dokazu tog stava ovi autori se oslanjaju na postupak E.Jakobstala (Jacobsthal) naveden u zadatku 173 koji se odnosi na isti stav, ali sa specijalnom funkcijom $f(x) = \sin x$. Tom prilikom Polja i Sege, za razliku od Karamate, indirektno uvode pretpostavku monotonosti te funkcije.

U radu *O asimptotskom ponašanju nizova definisanih rekurentnim relacijama*[112] Karamata je, direktno inspirisan prethodnim istraživanjima i rezultatima, formulisao i dokazao sledeću teoremu koja uopštava gore pomenuti stav o brzini konvergencije:

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u blizini tačke $x = +0$ i neka se u blizini ove tačke funkcija $x - f(x)$ pravilno ponaša, tj. neka je

$$f(x) = x - a(x)x^k L(x),$$

gde

$$a(x) \to a \neq 0, \quad \text{i} \quad xL'(x) = o\{L(x)\} \quad \text{za} \quad x \to +0.$$

Ako je

$$a > 0 \quad \text{i} \quad k > 1,$$

[112]Zbornik radova SAN 35, Matematički institut SAN, knj.3, 1953, s.45-59.

i ako je x_0 dovoljno malo, tako da bude

$$f(x) > 0 \quad \text{za} \quad 0 < x \leq x_0,$$

i

$$\inf_{\xi \leq x \leq x_0} \{x - f(x)\} > 0 \quad \text{za svako} \quad 0 < \xi < x_0,$$

tada iz

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

sledi da je

$$x_n \sim a^* n^{-k^*} L^*(1/n), \quad n \to \infty,$$

gde je

$$k^* = 1/(k-1) \quad \text{i} \quad a^* = (k^*/a)^{k^*},$$

a $x^{k^*} L^*(x)$ inverzna funkcija funkcije $x^{k-1} L(x)$.

U funkciji $f(x)$ Karamata je, bez gubitka na opštosti, za komparativnu funkciju $L(x)$ pretpostavio da ima oblik

$$L(x) = e^{\int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} dt},$$

dakle bez moguće multiplikativne konstante. Tada je funkcija $x^r L(x)$ za $r > 0$ monotona u blizini tačke $x = +0$, pa za dovoljno malo x uvek postoji njena inverzna funkcija, koja tada ima oblik $x^{1/r} L^*(x)$, gde je L^* takođe sporo promenljiva u okolini tačke $x = +0$. Time je Karamata okarakterisao suštinu pojma konjugovanog para sporo promenljivih funkcija.

Ako se u ovoj teoremi izvrše smene

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{g(y)}$$

dobija se stav koji daje asimptotsko ponašanje niza y_n koji teži beskonačnosti sa n i koji je definisan rekurentnom relacijom oblika

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

i kazuje kako se ovo asimptotsko ponašanje može dobiti iz asimptotskog ponašanja funkcije $g(y)$ kad $y \to \infty$. To je sledeći stav:

Neka je funkcija $g(y)$ definisana za velike vrednosti od y i neka se funkcija $g(y) - y$ pravilno ponaša kad $y \to \infty$, tj. neka je

$$g(y) = y - A(y)y^r L(y),$$

gde

$$A(y) \to A \neq 0, \quad \text{i} \quad yL'(y) = o\{L(y)\} \quad \text{za} \quad y \to \infty.$$

Ako je

$$A > 0 \quad \text{i} \quad r < 1,$$

i ako je y_0 dovoljno veliko, tako da bude

$$\inf_{y_0 \leq y \leq \eta} \{g(y) - y\} > 0 \quad \text{za svako} \quad \eta > y_0,$$

tada iz

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

sledi da je

$$y_n \sim A^* n^{r^*} L^*(n), \quad n \to \infty,$$

gde je

$$r^* = 1/(r-1) \quad \text{i} \quad A^* = (A/r^*)^{r^*},$$

a $y^{r^*} L^*(y)$ inverzna funkcija funkcije $y^{r-1}L(y)$.

Stavovi ove vrste su, kako navodi Karamata, od naročitog interesa u mnogim problemima analize, i on, ilustracije radi, navodi i jedan primer.

Mada je Nagaev 1961. godine prvi iskoristio Karamatinu iterativnu teoremu za $L(x) \equiv 1$,[113] ona je ponovo našla primenu tek 1968.

[113] A.V.Nagaev, *A refinement of certain theorems in the theory of branching processes*, Trudy Taškent University 189, 1961, s.55-63.

i 1972. godine u radovima R.S. Sleka (Slack) koji je iterativnu teoremu iskoristio u dokazima nekih teorema vezanih za granajuće procese, dakle u okviru verovatnoće.[114] Seneta je te rezultate proširio, i u opštoj analizi, nezavisno od pojmova iz teorije verovatnoće, pokazao kako se pojam normiranih pravilno promenljivih nizova može iskoristiti u formulisanju potrebnih i dovoljnih uslova, u čijem dokazivanju se direktno koristi Karamatina iterativna teorema.[115] Vezu Karamatine funkcionalne iterativnosti sa funkcionalnim jednačinama pokazao je Seneta 1971. godine[116] kada je proučavajući invarijantne mere za proste granajuće procese konstatovao da invarijantne mere u opštem slučaju nisu jedinstvene, ali da se egzistencija i jedinstvenost (nezavisno od multiplikativne kostante) može dobiti pod pretpostavkom da su rešenja funkcionalne jednačine $\phi(f(x)) = g(x)\phi(x)$ pravilno promenljive funkcije.[117]

Uopštenja pravilno promenljivih funkcija

Danas postoji veliki broj varijanti i generalizacija Karamatinih funkcija. Navešćemo dve od njih. Za prvu, još iz 1935. godine, koju je dao V.Avakumović uvodeći klasu $R - O$ funkcija za proširenje nekih tauberovskih uslova konvergencije,[118] vezano je i Karamatino ime.

Karamata je, baveći se u nizu radova proširivanjem uslova konver-

[114]Videti i Bingham et al. [45], s.399.

[115]E.Seneta [45] s.48.

[116]*On invariant measures for simple branching processes*, Journal of Applied Probability, 8, 1971, s.43-51.

[117]Bingham et al. [45] s.462.

[118]V.G.Avakumović, *Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité*, C.R. Acad.Sci.Paris 200, 1935, s.1515-1517; *O jednom O-inverznom stavu*, RAD JAZU, Zagreb, 254 (79), 1936, s.107-117.

gencije oblika

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x\le x'\le x+\varepsilon} \{f(x') - f(x)\} > -\omega(\varepsilon) \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0$$

u stavovima Tauberove prirode, 1933. godine u radu *Einige weitere Konvergenzbedingungen der Inversionsätze der Limitierungsverfahren*,[119] u taj uslov uveo pogodnu funkciju $\rho(t)$ i time mu dao opšti oblik

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x\le x'\le x(1+\varepsilon)} \frac{\rho(t')f(t') - \rho(t)f(t)}{\rho(t)} \ge -\omega(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

gde $\rho(t)$ zadovoljava određene uslove koji se mogu zameniti jednostavnijim da $\rho(t)$ bude pravilno promenljiva u Karamatinom smislu. Avakumović je taj uslov zamenio sa

$$\frac{\rho(t')A(t') - \rho(t)A(t)}{\rho(t)} > -m(\lambda), \quad t < t' < \lambda t,$$

a za funkciju $\rho(t)$ pretpostavio da zadovoljava uslov (koji je Karamata nazvao $R-O$ uslov)

$$0 < m = m(\lambda) \le \frac{\rho(t')}{\rho(t)} \le M(\lambda) = M \text{ za sve } \quad 0 < t \le t' \le \lambda t,$$

i jedan od dodatnih uslova

$$\sum_{\nu=1}^{n} \rho(t\lambda^{-\nu}) = O(\rho(t)), \quad n = 1 + [\log t/\log\lambda], \quad t \to \infty,$$

ili

$$r(x) = \frac{\rho(x)}{x}\int_0^x \frac{dt}{\rho(t)} = O(1), \quad x \to \infty.$$

Tada iz

$$\int_0^\infty A(yu)e^{-u}du = O(1), \quad y \to \infty$$

sledi

$$A(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

[119] Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t.2, 1933, s.1-16.

Ovakav stav je nazvan O-inverzni stav odakle se onda izvodi o-inverzni stav.

Avakumović nije išao mnogo dalje od ove definicije. Ali Karamata je odmah osetio njenu suštinu i u istom broju časopisa RAD JAZU objavio raspravu *Primedba na prethodni rad V.G. Avakumovića, sa obradom jedne klase funkcija koje se javljaju kod inverznih stavova zbirljivosti*, u kojoj je, sa istaknutom ulogom i prioritetom Avakumovića, klasu tako definisanih funkcija nazvao $R-O$, dopunske uslove zamenio sa jedinstvenim uslovom

$$R(x) = \frac{1}{xr(x)} \int_0^x r(t)dt = O(1), \quad x \to \infty,$$

gde je

$$r(x) = \frac{\rho(x)}{x} \int_0^x \frac{dt}{\rho(t)}$$

i dokazao osnovne osobine klase.

Iz kanoničke reprezentacije funkcija $R-O$ klase

$$\rho(x) = e^{\eta(x)+\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}$$

gde se za $\eta(x)$ i $\varepsilon(x)$ zahteva samo da su ograničene na intervalu $[a,\infty)$, $a > 0$ se vidi u čemu je to uopštenje klase pravilno promenljivih funkcija, kod kojih $\eta(x) \to C$, $\varepsilon(x) \to 0$ kada $x \to \infty$.

Daljem razvoju teorije funkcija $R-O$ klase su, između ostalih (L.Geluk, de Han, E.Seneta), značajno doprineli matematičari Karamatine škole S. Aljančić, D.Aranđelović i R.Bojanić.

Drugu važnu generalizaciju iz koje se razvila teorija paralelna Karamatinoj i sa primenom prvenstveno na uopštene stohastičke procese, izneo je sedamdesetih godina de Han. On je pravilnu promenljivost posmatrao kao izvod u beskonačnosti i uveo klasu π funkcija koja uopštava klasu pravilno promenljivih funkcija i kojoj neka merljiva funkcija f pripada ako postoje funkcije $a(t) > 0$ i $b(t)$ takve da za svako $x > 0$ postoji

granična vrednost $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(tx)-b(t)}{a(t)}$. Sa tako uvedenim funkcijama dobijaju se rezultati vrlo slični Karamatinim. De Hanova teorija dala je novi podsticaj proučavanju Karamatinih funkcija i njihovoj daljoj primeni čemu je posvećen ogroman broj radova.

Povišljivost kao uslov konvergencije

Karamata se po prvi put dotakao inverznih teorema zbirljivosti u radu *Sur la moyenne arithmétique des coéfficient d'une série de Taylor.*[120] U njemu je proučavao odnos aritmetičke sredine koeficijenata a_ν funkcije $f(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ regularne u krugu $|z| = 1$, t.j.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\nu\theta i}, \qquad n \to \infty,$$

i granice

$$(1-r)f(re^{\theta i}), \qquad r \to 1,$$

pri čemu je prvo posmatrao specijalan slučaj za $\theta = 0$.

Takođe je formulisao lemu na osnovu koje sledi "poznata činjenica" da iz postojanja granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

sledi postojanje granice

$$\lim_{r\to 1}(1-r)f(r)$$

za bilo koje brojeve a_ν.

[120]Mathematica (Cluj) vol.1, 1929, s.99-106. (Primljeno 20.12.1928.)

Obrnuti stav, kako kaže Karamata, sledi iz jedne Šmidove generalizacije[121] teoreme Hardi-Litlvuda i može se napisati u sledećem obliku: Iz postojanja granice

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu = a$$

može se zaključiti postojanje granice

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\left|\sum_{n(1-\delta)}^{n(1+\delta)} a_\nu\right| = \varphi(\delta) \to 0 \qquad \text{sa } \delta.$$

Ubrzo zatim na skupovima Akademije prirodnih nauka 1. aprila i 19. aprila 1929. godine primljen je, po našem mišljenju, ključni rad za sagledavanje Karamatinog čuvenog dokaza Hardi-Litlvudove teoreme sa istorijske strane. To je bio rad *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova I i II deo*[122] kome je, što je vrlo važno, Karamata dao naziv *O jednom Landauovom stavu*, a koji su promenili M.Petrović i B.Gavrilović kao njegovi recenzenti. Važnost tog rada indirektno potvrđuje i podatak koji iznose Tomić i Aljančić u radu *Remembering Karamata.*[123] Oni kažu:"Kada se početkom 1929. godine pojavila Landauova monografija *Darstellung und Begründung einiger neuer Ergebnisse der Funktionentheorie* Karamata je odmah počeo proučavati Hardi-Litlvudove Tauberove teoreme. Sećao se da je Poenkare (H. Poincaré) skoro uvek svoja otkrića dobijao prvo za specijalne slučajeve. Karamata je odmah zapazio da je Hardi-Litlvudova teorema skoro očigledna za specijalni slučaj polinoma. To ga je podsetilo na Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji funkcije polinomima. U stvari njemu je sve izgledalo vrlo jednostavno. Dodao je brojna istorijska zapažanja i slične

[121] *Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen*, Mathematische Zeitschrift, B.22, 1925, s.150.

[122] GLAS SKA, Beograd, 143, knj. 70, 1931, s.1-24, 121-146.

[123] Tomić M., Aljančić S., [45], s.1-2

teoreme i zamolio svog profesora Mihaila Petrovića, koji je dobro znao Landaua za njegovo mišljenje. Landau je **odbacio sve** (naglasio autor) osim Hardi-Litlvudove teoreme i odmah poslao rezultat u časopis Mathematische Zeitschrift. U svom odgovoru Landau je izrazio žaljenje što je već dao u štampu svoju monografiju, jer bi poglavlje o inverznim teoremama izgledalo drukčije da to nije uradio."

Mišljenja smo da je Jovan Karamata dao Mihailu Petroviću prevedeni rad *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova* a da je to što je Landau odbacio, bilo i glavni cilj tog rada. Da bi smo potvrdili ovu tezu analiziraćemo pomenuti Karamatin rad.

Upoređujući različite uslove

(1) $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu \to 0, \quad n \to \infty$ (Tauber)

(2) $a_n = o(\frac{1}{n})$ (Tauber)

(3) $a_n = O(\frac{1}{n})$ (Litlvud)

(4) $na_n \geq -M \ (na_n \leq M), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ (Hardi-Litlvud)

pod kojima iz Abelove zbirljivosti reda sledi njegova konvergencija, Karamata je konstatovao da je uslov (2) sadržan u uslovima (1) i (4), uslov (3) u uslovu (4) a da uslovi (1) i (4) zadiru jedan u drugi bez da su jedan u drugom sadržani.

Cilj prvog dela ove rasprave je bilo izvođenje novog uslova koji bi sadržao sva četiri gore navedena uslova. U tu svrhu Karamata je definisao i uveo **novi** pojam – **povišljivost**–V, gde V označava proizvoljan način zbirljivosti:

Za jedan niz brojeva $\{a_\nu\}$ kazaćemo da je **povišljiv**–V **(sa desne ili sa leve strane)** ako postoji jedan niz brojeva $\{A_\nu\}$ koji je zbirljiv–V t.j.

$$V - \lim A_n = A$$

i takav da nejednačine

$$a_n \leq A_n \quad (\text{ili } a_n \geq A_n)$$

budu zadovoljene za sve $n = 1, 2, 3, \ldots$; što ćemo ukratko označiti izrazom

$$V - \{a_\nu\} \ll V - \{A_\nu\} \quad (\text{ili } V - \{a_\nu\} \gg V - \{A_\nu\}).$$

Na isti način kazaćemo da je niz $\{a_\nu\}$ **povišljiv–V sa obe strane** ako postoje dva niza $\{A'_\nu\}$ i $\{A''_\nu\}$ takva da bude

$$V - \lim A'_\nu = A', \quad V - \lim A''_\nu = A'',$$

i

$$A'_n \leq a_n \leq A''_n \quad \text{za sve} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Na kraju je definisao **apsolutnu povišljivost–V**, ako je niz formiran iz apsolutnih vrednosti elemenata datog niza povišljiv–V, što je označio sa

$$V - \{|a_\nu|\} \ll V - \{A_\nu\}.$$

Da bi pokazao primenu pojma povišljivosti, Karamata formuliše i dokazuje sledeći "opšti i skoro očevidan" stav $V'' - V'$:

Stav 2. Neka su V' i V'' dva načina zbirljivosti takva da $V' \subset V''$ i da su oni **identični za sve pozitivne nizove** (naglasio autor). Da bi jedan niz, koji je zbirljiv–V'' bio zbirljiv–V', potrebno je i dovoljno je, da on bude povišljiv–V' sa jedne ili sa obe strane. (A dovoljno je već da on bude apsolutno povišljiv–V').

U njemu je identičnost V' i V'' za sve pozitivne nizove bitan uslov koji će se koristiti kod specijalnih slučajeva zbirljivosti $C_2 - C_1$ i $A - C_1$ i kod teorema o konvergenciji nizova zbirljivih u smislu Cesàra i Abela ($C - K$ i $A - K$).[124]

[124]Oznaka C_n označava Cesàrovu zbirljivost n-tog reda a A Abelovu zbirljivost.

Identičnost zbirljivosti C_1 i C_2 za sve pozitivne nizove je dokazao Landau u radu *Über die Bedeutung einiger neueren Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer*,[125] i to je taj Landauov stav o kome je Karamata pisao, kako je i nazvao svoj rad. Kombinujući taj stav i navedeni stav 2, Karamata formuliše jedan inverzan stav $C_2 - C_1$ u obliku:

Stav 3. Ako je jedan niz zbirljiv–C_2, da bi on bio zbirljiv–C_1 potrebno je i dovoljno da on bude povišljiv–C_1.

Isti takav stav važi, nastavlja Karamata, ako umesto zbirljivosti C_2 stavimo zbirljivost A, i njegov dokaz bazira na identičnosti zbirljivosti A i C (C_1). Dokazujući tu identičnost, Karamata je umesto "prilično teškog" Hardi-Litlvudovog dokaza, po prvi put primenio svoju, već opisanu metodu.

Koristeći ove inverzne stavove, Karamata je formulisao i dokazao inverzne stavove $C - K$ i $A - K$ za niz $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$, odnosno red $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ koji daju novi uslov opštiji od uslova (1) – (4). To su sledeći stavovi:

Stav 6. Ako je red $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ zbirljiv–C, da bi on bio konveregentan, potrebno je i dovoljno je, da niz $\{na_n\}$ bude povišljiv–C.

Stav 7. Ako je red $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ zbirljiv–A, da bi on bio konveregentan, potrebno je i dovoljno je, da niz $\{na_n\}$ bude povišljiv–C, što se može napisati u obliku

$$C - \{\nu a_\nu\} \ll C - \{A_\nu\}$$

Sledeći strukturu ovog rada – redosled formulacija teorema, prateći tekst između njih – i posebno rezime na francuskom jeziku, može se zaključiti da je glavni cilj njegovog prvog dela formulacija jednog novog uslova – povišljivosti, koji sadrži često korišćene gore pomenute uslove

[125] Prace matematyczno-fizyczne (Warsaw) 21, 1910, s.97-177.

Taubera i Hardi-Litlvuda, i pod kojim iz Abelove zbirljivosti reda sledi njegova konvergencija. To je, uostalom, napisao i sam Karamata u rezimeu: ...U ovom radu, autor se posebno bavi inverznim teoremama $C-K$ i $A-K$ dajući jedan nov uslov koji obuhvata kao specijalne slučajeve neke poznate teoreme, teoreme $C-K$ Kroneker-Hardi-Landaua i analogne teoreme $A-K$ Tauber-Hardi-Litlvuda. U tu svrhu autor uvodi pojam **povišljivosti**–V niza ...[126] Sam dokaz identičnosti A i C zbirljivosti za pozitivne nizove, koji je ključan za dokaz Hardi-Litlvudove teoreme, u radu nije ničim posebno naglašen u odnosu na ostale rezultate čiji su dokazi vrlo jasni i precizno logički povezani. Ali je činjenica da se Karamatina metoda pri dokazu Hardi-Litlvudove teoreme po prvi put pojavila u prvom delu rada *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih redova* koji je napisan početkom 1929. godine, i da je već primenjena u toku te godine u radovima *Sommabilité et fonctionnelles linéaires* saopštenom na Prvom kongresu matematičara slovenskih zemalja u Varšavi i *Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood* saopštenom na Prvom kongresu rumunskih matematičara.

U drugom delu ove rasprave Karamata navodi još dva uslova, po njegovom mišljenju najpodesnija i koji najviše odgovaraju inverznim stavovima zbirljivosti. To su Landauovi uslovi[127]

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(1) \qquad \text{kad} \quad n \to \infty,$$

[126]...Dans cette note, l'auteur s'ocupe en particulier des théorèmes inverses $C-K$ et $A-K$ donnant une condition nouvellequi embrasse comme cas particulier certains théorèmes connus, à savoir les théorèmes $C-K$ de Kronecker-Hardy-Landau et les théorèmes analogues $A-K$ de Tauber-Hardy-Littlewood.Dans ce but l'auteur introduit la notion de **majorabilité**–V d'une suite..., *Théorèmes inverses de sommabilité I* (Résumé), s.21-22.

[127]E.Landau, *Über einen Satz des Herrn Littlewood*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 35, 1913, s.265-276.

i

$$\lim_{n=\infty} \sup \max_{n<\mu\leq n\lambda} |s_\mu - s_n| = w(\lambda) \to 0 \quad \text{kad} \quad 1 < \lambda \to 1,$$

i njegovo Šmidovo[128] uopštenje

$$\lim_{n=\infty} \sup\{s_\mu - s_n\} \leq 0, \quad \text{za sve } \mu \geq n \text{ za koje je } \mu \sim n.$$

Karamata konstatuje da je Šmidov uslov najopštiji i da u sebi sadrži sve do sada spomenute uslove. Nije mu međutim uspelo da potpuno ispita vezu tog uslova i njegovog uslova jednostrane povišljivosti–C niza $\{\nu a_\nu\}$, jer kako kaže "lako je pokazati da je Šmidov uslov ispunjen kad god je uslov jednostrane povišljivosti zadovoljen, međutim izgleda da je i obratno slučaj, tj. da su ta dva uslova identična, ali ovo pitanje ostaje otvoreno" (s.123). Zatim daje potreban uslov povišljivosti–C za koji konstatuje da je verovatno potreban i dovoljan (što u isto vreme znači i identičnost Šmidovog i Karamatinog uslova), ali da mu to nije pošlo za rukom da dokaže (s.126). Taj uslov je oblika:

$$\lim_{n=\infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{\nu=n+1}^{\mu} a_\nu \leq 0 \quad \text{za sve } \mu \text{ za koje je } n < \mu \sim n,$$

za povišljivost–C sa desne strane, ili

$$\lim_{n=\infty} \sup \frac{1}{n} \left| \sum_{\nu=n+1}^{\mu} a_\nu \right| = 0 \quad \text{za sve } \mu \text{ za koje je } n < \mu \sim n$$

za povišljivost–C sa obe strane.

Ovaj stav, nastavlja Karamata, omogućuje da se lako dokaže da je Šmidov uslov uvek zadovoljen kada je zadovoljen njegov uslov, a kako nije utvrdio da je i sadržan u njemu (s.127), lako i skoro usput, koristeći ekvivalenciju A i C zbirljivosti za sve pozitivne nizove,

[128] R.Schmidt, *Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen*, Mathematische Zeitschrift, B.22, 1925, s.89-152.

dokazuje stav $A - K$ sa Šmidovim uslovom, prostije nego sam Šmid ili Vidžajaragavan.[129] Odmah zatim dokazuje isti $A - K$ stav sa Landauovim uslovom $s_n = O(1)$ koji je uopštio na $s_n < O(1)$, i za koji, na osnovu jednog stava Vidžajaragavana, konstatuje da je nepotreban i da se može potpuno izbaciti (s.133). Na kraju i taj Vidžajaragavanov stav dokazuje na jedan novi način kao posledicu niza nekoliko, po Karamati, elementarnih stavova.

Dakle osnovni cilj drugog dela ove rasprave je bio da se pokaže ekvivalentnost najopštijeg Šmidovog uslova i Karamatinog uslova za konvergenciju Abel zbirljivog reda, što mu, kako je i sam na nekoliko mesta naglasio, nije uspelo. Ipak zbog dokaza niza važnih i teških teorema na drugačiji i jednostavniji način, i ovaj drugi deo rada *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova* se može okarakterisati kao veoma značajan.

Ne možemo biti sigurni da li je Landau u rukama držao oba dela ove rasprave, jer nismo bili u mogućnosti da dođemo do Arhiva Landau gde se sigurno nalazi pismo Mihaila Petrovića, kao i originalni tekst rada koji je poslao Landauu. Ali ako je primio samo prvi deo, može se razumeti da se, iznenađen i oduševljen kratkoćom i jasnoćom novog dokaza teoreme kojom se i on bavio, nije mogao ili nije hteo udubljivati u neki potpuno novi pojam povišljivosti koji je formulisao neki mladi matematičar (Kramata je tada imao samo 27 godina) iz Jugoslavije, i da je sve to odbacio. Ako je pak primio i drugi deo tog rada bilo bi zanimljivo znati šta je o njemu mislio i zašto je odbacio sve rezultate u njemu.

Naravno dokaz Hardi-Litlvudove teoreme koji je izdvojen i štampan u časopisu Mathematische Zeitschrift bio je divan primer jednostavnosti,

[129] T.Vijayaraghavan, *A Tauberian theorem*, Journal of the London Mathematical Society, 1, 1916, s.113-120

lepote i logičnosti matematičkog dokaza, ali zahvaljujući tome što je Karamata "samo" na osnovu njega stekao svetsko ime i slavu, i što su ga neki novi vetrovi počeli nositi od kongresa do kongresa, od časopisa do časopisa, on je zapostavio i skoro zaboravio na jedan od glavnih ciljeva rada *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova* – pokazati da je uslov povišljivosti–C niza $\{\nu a_\nu\}$ ekvivalentan Šmidovom uslovu, kao najopštijem uslovu konvergencije Abel zbirljivih redova. Možda je njegova razočaranost pred rat i naročito posle njega, jednim delom bila i posledica nekog unutrašnjeg nemira i nezadovoljstva koji su u njemu tinjali zbog, po našem, a možda i po njegovom mišljenju, nepotpunog uspeha u svojoj nameri i želji.

Karamata je posle uvođenja i definisanja povišljivosti kao uslova konvergencije redova zbirljivih u smislu Abela i Cesára, taj pojam pomenuo u kasnijim radovima samo nekoliko puta. Prvi put već na Prvom kongresu matematičara Rumunije održanom u Klužu od 9. do 12. maja 1929. godine, dakle samo mesec dana po pretstavljanju rada *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova* na skupu Akademije prirodnih nauka Srpske kraljevske akademije održanog 1. aprila 1929. godine. Njegovo izlaganje na kongresu je štampano u časopisu Mathematica (Cluj) pod nazivom *Sur certains "Tauberian theorems" de MM Hardy et Littlewood.*[130] Taj rad je prirodan nastavak proučavanja započetih u radu *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova*

[130]Vol. III, 1930, s.33-48. Taj rad je u redakciji časopisa primljen 30. januara 1930. godine, a samo tri dana pre, 27. januara je primljen i rad *Sur une mode de croissance régulière des fonctions* koji će biti objavljen iste godine u Vol. IV, s.38-53, i u kome je Karamata uveo i definisao pojmove sporo i pravilno rastućih funkcija. To nam potvrđuje da je Karamata dok je proučavao probleme inverznih stavova Tauberove prirode i u okviru njih izveo uslov povišljivosti, u isto vreme radio i na tim novim osobinama funkcija.

u kome je već pokazao da za Abel zbirljive redove važi

$$\lim_{r=1}(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} f(r^\nu)r^\nu = \int_0^1 f(x)dx$$

ili

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty} g\left(\frac{\nu}{n}\right)e^{-\frac{\nu}{n}} = \int_0^\infty e^{-x}g(x)dx$$

kada su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ Riman integrabilne.

Sada je definisao procese zbirljivosti $A(p)$ i $C(p)$ koji uopštavaju zbirljivost u smislu i Abela i Cesàra, na sledeći način:

$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu r^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} \to s, \quad \text{kada} \quad r \to 1$$

i

$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} s_\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{n} p_\nu} \to s, \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Na sličan način kao i u prethodnom radu koristeći svoju, Karamatinu matodu, ali i osobine regularno i sporo rastućih funkcija, dokazao je jednakosti analogne gore datim i iz njih izvukao zaključak o ekvivalentnosti $A(p)$ i $C(p)$ postupaka zbirljivosti za sve pozitivne nizove. Ponovo je, kao i u prethodnom radu, pokazao da se uslov pozitivnosti nizova može zameniti opštijim uslovom jednostrane povišljivosti–$C(p)$, a da ekvivalentnost $A(p)$ i $C(p)$ postupaka i dalje važi. To izvodi kao posledicu sledeće teoreme:

Neka je dat niz brojeva s_n koji je $A(p)$ zbirljiv sa uopštenom granicom s; on će biti zbirljiv svim postupcima oblika

$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu g(\frac{\nu}{n})e^{-\frac{\nu}{n}}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu g(\frac{\nu}{n})e^{-\frac{\nu}{n}}}$$

sa istom granicom s:

1. za sve funkcije $g(x)$ Riman integrabilne ili neprekidne u $x = 0$, (ukoliko je index regularnosti $\sigma \geq 1$) ako je niz s_n apsolutno povišljiv–$A(p)$ ili –$C(p)$.

2. za sve neprekidne funkcije $g(x)$ ako je niz s_n apsolutno (po modulu) ograničen –$A(p)$ ili –$C(p)$.

3. za sve funkcije $g(x)$ ograničene varijacije, ako je niz s_n jednostrano povišljiv–$C(p)$ ili ako zadovoljava uslov

$$\lim_{n=\infty} \sup \frac{\sum\limits_{\nu}^{q} s_\nu p_\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{n} p_\nu} = \omega(\varepsilon) \to 0 \quad \text{sa} \quad \varepsilon,$$

za sve p i q takve da je $n(1-\varepsilon) \leq p < q \leq n(1+\varepsilon)$ (ili još ako je zbirljiv–$C(p)$).

Analogno ovoj teoremi, Karamata je formulisao i teoremu za zbirljivost–$C(p)$:

Niz brojeva s_n koji je zbirljiv–$C(p)$ će biti zbirljiv sa istom uopštenom granicom, svim postupcima oblika

$$\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} s_\nu p_\nu f(\frac{\nu}{n})}{\sum\limits_{\nu=0}^{n} p_\nu f(\frac{\nu}{n})},$$

gde je $f(x)$ funkcija ograničene varijacije; ako je niz s_n još i ograničen–$C(p)$ po modulu, može se za $f(x)$ uzeti svaka neprekidna funkcija, i ako je niz apsolutno povišljiv–$C(p)$, može se za $f(x)$ uzeti svaka funkcija koja je Riman integrabilna ili neprekidna u tački $x = 0$, ukoliko je indeks regularnosti $\sigma \geq 1$.

Sledeći put je povišljivost spomenuo u radu *Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp*,[131] ali za razliku od rada *O inverznim stavovima*

[131] Mathematische Zeitschrift, 40, 1935, s.421-425.

zbirljivosti beskrajnih nizova u kome je pokazao da je uslov povišljivosti–C sadržan u Šmidovom uslovu konvergencije Abel zbirljivih nizova i kada mu se činilo da važi i obrnuto tj. da su ova dva uslova ekvivalentna, ovde je konstatovao da "izgleda da ova dva uslova konvergencije ipak nisu ekvivalentna; ako bi to bio slučaj imali bi kod uslova konvergencije O-tipa u povišljivosti–C analogon Kronekerovom uslovu (kao potrebnom i dovoljnom (primedba autora))".[132]

Ovaj problem je razrešio 1956. godine u radu *Sur la majorabilité C des suites de nombres réel*,[133] jedinom radu potpuno posvećenom pojmu povišljivosti, nastalom u saradnji sa P.Erdešom (Paul Erdős).

U tom radu je u dokazao različite potrebne i dovoljne uslove koji se tiču samih članova niza a_n koji osiguravaju povišljivost–C. Prethodno je u definiciji povišljivosti–C uveo jedan novi pojam – konstantu povišljivosti:

Niz a_i, $i = 1, 2, \ldots$, je **povišljiv–C** sa **konstantom povišljivosti** A, pretpostavimo konačnom, ako postoji niz A_i, $i = 1, 2, \ldots$, takav da je

$$a_i \leq A_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

i da

$$\sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i \to A, \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Te uslove je dao kroz sledeće tri teoreme:

Teorema 1. Da bi niz a_i bio povišljiv–C potrebno je i dovoljno da je

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i < o(n), \quad \text{za svako} \quad k = o(n) \tag{0.11}$$

[132]Pomenuti rad s.425.

[133]Publications de l'Inst. mathématique de l'Académie serbe, Beograd, 10, 1956, s.37-52.

i da za svako $\varepsilon > 0$ i $m \geq (1+\varepsilon)n$ imamo

$$A(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m,n\to 0} \sup \frac{1}{m-n} \sum_{i=n+1}^{m} a_i \leq A < \infty. \tag{0.12}$$

Za takvo $A(\varepsilon)$, budući nerastuće,

$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon=0} A(\varepsilon) \tag{0.13}$$

je najmanja konstanta povišljivosti.

Teorema 2. Da bi niz A_i bio povišljiv–C potrebno je i dovoljno da bude zadovoljen uslov (1) i da stavljajući

$$W(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n=\infty} \sup \max_{n<n'\leq(1+\varepsilon)n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{n'} a_i \right\}, \tag{0.14}$$

imamo

$$W(\varepsilon) = O(\varepsilon); \tag{0.15}$$

u tom slučaju imali bi još

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{W(\varepsilon)}{\varepsilon} = A^*. \tag{0.16}$$

Ove dve teoreme se u već pomenutoj knjizi Bingama, Goldija i Tojgela *Regular Variation* našle svoje mesto u okviru vežbanja i dodataka. Na strani 190 formulisan je sledeći problem:

Neka je (a_n) realan niz. Tada postoji (A_n), A sa

$$a_n \leq A_n, \qquad n^{-1} \sum_{1}^{n} A_k \to A$$

ako i samo ako $\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} W(\varepsilon)/\varepsilon < \infty$, gde je

$$W(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sup \max_{n<n'\leq(1+\varepsilon)n} n^{-1} \sum_{i=n+1}^{n'} a_i.$$

U tom slučaju najmanja vrednost za A je

$$A^* = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \omega(\varepsilon)/\varepsilon = \sup_{\varepsilon > 0} \omega(\varepsilon)/\varepsilon,$$

gde je

$$\omega(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \sup n^{-1} \sum_{i=n+1}^{[(1+\varepsilon)n]} a_i, \quad (\varepsilon > 0),$$

i A^* je dostiživo (Erdős & Karamata (1956)).

Ovaj problem je dat kao posledica jedne teoreme i u radu *Extensions of regular variation II: representations and indices* [134] gde je na strani 522 konstatovano da on proširuje Teoremu 2, i ispravlja u njoj dat izraz za A^*.

Teorema 3. Svaki niz a_i koji zadovoljava uslov (1) će biti povišljiv–C ako i samo ako postoji niz $m(n) > n$ takav da je

$$m(n) \sim n, \quad \text{kada} \quad n \to \infty,$$

i da je

$$\frac{1}{m-n} \sum_{i=n+1}^{m} a_i \leq M \quad \text{za svako } n. \tag{0.17}$$

U ove tri teoreme uslov (1) postaje suvišan ako se pretpostavi da je niz a_i ograničen sa donje strane tj. $a_n \geq -M$ za svako n, jer tada taj uslov sledi iz uslova (2), (5) sa (4) ili pak (7).[135]

U nastavku rada se konstatuje da povišljivost–C niza nu_n u teoremama Tauberove prirode predstavlja uslov konvergencije (i da se o tome može videti u radu *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih*

[134] N.H.Bingham, C.M.Goldie, Proceedings of London Mathematical Society (3), 44, 1982, s.497-534.

[135] *Sur la majorabilité des suites de nombres réel*, s.43.

nizova.[136]), kao i da je taj uslov sadržan u Šmidovom uslovu

$$\limsup_{n=\infty} \max_{n<n'\leq(1+\varepsilon)n} \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \omega(\varepsilon) \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Na kraju se zaključuje da je uslov povišljivosti niza nu_n restriktivniji, jer po Šmidovom uslovu dovoljno je da

$$\omega(\varepsilon) \to 0 \quad \text{sa } \varepsilon,$$

dok povišljivost–C niza nu_n zahteva da je

$$\omega(\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

To je posledica uslova (5) i nejednakosti

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu \leq \frac{n}{n+1} \max_{n<m\leq n'} \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{m} \nu u_\nu \right\},$$

koja se po uslovu (4) sa $nu_n = a_n$ svodi na

$$\omega(\varepsilon) \leq W(\varepsilon).$$

Time je priča o povišljivosti–C niza nu_n kao uslovu konvergencije Abel zbirljivog reda završena. Taj uslov ostaje opštiji od poznatih Tauberovih i Litlvudovog uslova, ali ne i najopštiji, kako se na početku svojih istraživanja tih problema Karamati činilo. Karamata je, pred rat pomalo nezadovoljan zbog tog "neuspeha", sada sigurno mogao spokojno da zatvori i to poglavlje svog naučnog rada.

U nastavku rada je pokazana uloga C-povišljivosti u nekim stavovima o graničnim vrednostima izraza oblika

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leq x} a_n f\left(\frac{n}{x}\right),$$

[136]Videti s.44.

kao i u dokazu teoreme o prostim brojevima, što je iskorišćeno u radu *O asimptotskim inverzijama unakrsnih proizvoda*[137] pri dokazima nekoliko stavova vezanih za problematiku prostih brojeva. Posebno je značajan Stav C, kako ga je obeležio Karamata, koji u sebi sadrži, u teoriji brojeva poznate asimtotske relacije

$$\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + o(x)$$

$$M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$$

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \lambda(n) = o(x), \quad x \to \infty,$$

gde su $\Lambda(n)$, $\mu(n)$ i $\lambda(n)$ takozvani von Mangoldtovi, Möbiusovi, odnosno Liouvillovi simboli, i koje su ekvivalentne osnovnoj teoremi o prostim brojevima. Dokaz te leme se oslanja na činjenicu da je niz $\Lambda(n)$ C-povišljiv sa konstantom povišljivosti 2.

Na kraju, ocenjujući ovaj, ne toliko poznat, Karamatin rezultat sa matematičke strane može se konstatovati da je uslov povišljivosti logički i idejno dobro i vrlo jednostavno postavljen, jer rad sa njim ne zahteva komplikovanu asimptotiku, što nije slučaj sa drugim pomenutim uslovima. Takođe treba naglasiti da iako problem ekvivalentnosti uslova povišljivosti i Šmidovog uslova nije razrešen kada je krajem dvadesetih i početkom tridesetih godina postavljen i kada je to bilo i najaktuelnije, radom *Sur la majorabilité des suites nombres réels*, nastalim 35 godina kasnije, to je potpuno odlučeno, što je uostalom i krajnji cilj matematike kao naučne discipline. Poseban značaj C-povišljivosti je u dokazima nekih teorema u analitičkoj teoriji brojeva.

[137]GLAS SAN 228 (13), Beograd, 1957, s.23-59.

Ostali rezultati

U tom najvažnijem periodu naučnog rada Karamata je dobio jednako lepe i ne manje značajne rezultate i iz nekih drugih oblasti matematičke analize i matematike uopšte.

Tako je jedna od značajnih primena Vinerove teorije je u teoriji prostih brojeva. Karamata nije propustio dâ da svoj doprinos i u toj problematici, kojoj su posvećeni radovi iz pedesetih godina. To su radovi *Sur un lemme de Mertens relatif aux nombres premiers*,[138] *Evaluation élémentaire des sommes typiques de Riesz de certaines fonctions arithmétiques*,[139] *O asimptotskim inverzijama unakrsnih proizvoda*[140] i *Sur les procédés de sommation intervenant dans la théorie des nombres*.[141] U njima je Karamata dao pregled različitih tauberovskih teorema koje imaju važnost u teoriji prostih brojeva. Počinje sa klasičnim radom Vinera, a zatim prikazuje dalji razvoj teorije prostih brojeva, analizirajući radove Erdeša, Vintenera (A.Wintener), Ingama (A.E. Ingham). Konačno diskutuje tauberovske procese Selberga (A.Selberg) i njihovu primenu u "elementarnom" dokazu (bez korišćenja kompleksne ili Furijeove analize) teoreme o prostim brojevima. Takođe je pokazao da je relacija

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 \sim \frac{x}{\log_e x}$$

direktna posledica Landauove relacije

$$\mu(x) = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log_e x + E + o(1), \quad x \to \infty.$$

[138] C.R. du 79e Congrès des Sociétés savants, Alger, 1954, s. 277-284.

[139] Publications de l'Inst.Math. de l'Acad. serbe Beograd, 7, 1954, s. 1-40.

[140] GLAS SANU Beograd, 228(13), 1957, s. 23-59.

[141] Colloque sur la théorie des suites tenu à Bruxelles 1957, et Paris et Louvain, 1958, s. 12-31.

I ovi Karamatini radovi se pominju u Bingamovoj monografiji o pravilnoj promenljivosti.[142]

U radovima *O uopštenjima Mercerovog stava*[143] i *Sur quelques inversions d'une proposition de Cauchy et leur généralisations*[144] Karamata se bavi stavovima zbirljivosti beskonačnih nizova koje je podelio u dve grupe, jednu koja sadrži uopštenja klasičnog Merserovog stava i drugu koja sadrži uopštenja Poljaovog stava.[145] Zatim je formulisao i dokazao dva opšta stava od kojih jedan sadrži većinu Poljaovih a drugi skoro sve Merserove stavove i koja su neposredna posledica Jensenovog stava.[146] To su sledeća dva stava:

Stav I. Neka je s_n niz proizvoljnih brojeva; tada će iz

$$s_n + q_n(s_n + s_{n-1}) \to s, \quad n \to \infty,$$

slediti

$$s_n \to s, \quad n \to \infty,$$

kad god je niz

$$w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_n), \quad \text{gde je} \quad d_n = \frac{1}{q_n},$$

kvazi monoton i kad $|w_n| \to \infty$ sa n.

Stav III. Neka je u_n niz proizvoljnih brojeva; tada će iz

$$\frac{u_n}{v_n} + d_n\{\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} - \frac{u_n}{v_n}\} \to s, \quad n \to \infty,$$

[142][?,].287-290.

[143]GLAS SKA, Beograd, 146(72), 1931, s. 87-120.

[144]Tôhoku Math. Journ. 36, 1932, s. 22-28.

[145]G.Pólya *Aufgabe*, Arch. d. Math. und Phys., (3)24, 1916, s. 282.

[146]J.L.Jensen, *Om en Satning of Cauchy*, Tidskrift for Mathematik, 5(2), 1884, s.81-84.

slediti

$$\frac{u_n}{v_n} \to s, \quad n \to \infty,$$

kad god je niz

$$w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1+d_n), \quad \text{gde je} \quad d_n = \frac{1}{q_n}\frac{v_n - v_{n-1}}{v_{n-1}},$$

kvazi monoton i kad $|w_n| \to \infty$ sa n.

Metod kojim je Karamata dokazao ove stavove koristeći klasu nizova koje je nazvao kvazi-monotonim, često je citiran i korišćen u novim dokazima. Takođe je iz Koši-Jensenove teoreme skoro direktno izveo, kao njenu posledicu, više elementarnih teorema Merserove i Poljaove prirode koje su dali Hardi, Izumi, Kopson i Ferar, Vidžajaragavan.[147]

U kratkom radu *Sur inégalité relative aux functions convexes*,[148] koristeći analognu Stieltjes-integralnu nejednakost, formulisao je i dokazao teoremu po kojoj su za važenje nejednakosti

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{n} f(X_\nu)$$

za sve funkcije $f(x)$ koje su konveksne nad intervalom (a, b), potrebni i dovoljni uslovi

$$\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{k} X_\nu$$

[147]Zanimljivo je spomeniti da je pri dokazivanju Vidžajaragavanovog stava o generalizaciji Merserovog stava po kome iz uslova $s_n + q_n\sigma_n \to 0$, $\lim_{n\to\infty} \inf q_n > -1$ i $q_n = O(1)$ sledi $s_n \to 0$, Karamata, ali i svi analisti toga vremena koji su se bavili istim problemima, propustio da primeti da je uslov $q_n = O(1)$ suvišan, odnosno da se stav može dokazati i bez tog uslova, što su 1984. godine pokazali V.Marić i M.Tomić u radu *On a method for inverse theorems for (C,1) and gap (C,1) summability*, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 7, 3, 1984, s.469-475.

[148]Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1, 1932, s. 145-148.

za svako $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, i

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$$

gde su brojevi x_ν i X_ν iz intervala (a, b) poređani po rastućem redosledu tj.

$$a \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n \leq b \quad a \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq b.$$

Ova teorema za

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$$

sadrži kao specijalan slučaj Jensenovu nejednakost za konveksne funkcije.[149] Mada je Karamata mislio da su Hardi i Litlvud pre njega, 1929. godine, dokazali ovu teoremu, što je i dopisao u svoj već objavljeni rad, ovaj rezultat je, kao značajan, citiran u dve poznate monografije o nejednakostima – G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya, *Inequalities*, 1934, s. 89, i E.F.Beckenbach, R.Bellman, *Inequalities*, 1961, s. 30-32 – kao dopuna Hardi-Litlvudovom dokazu, a ne kao ponovljen dokaz. Nejednakost je nazvana Karamatinim imenom i detaljno je dokazana.

Kalderon i Zigmund u poznatom radu o singularnim integralima[150] pominju rad *Ein Konvergensatz für trigonometriche Integrale*[151] kao značajan za početak kasnijeg razvoja vrlo komplikovane teorije trigonometrijskih i singularnih integrala, kao i njenog prirodnog nastavka, važne teorije singularnih integralnih operatora i pseudodiferencijalnih operatora, koja je otvorila novo polje istraživanja u savremenoj matematičkoj analizi. Karamata je u tom radu dokazao sledeći stav o

[149] J.Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta Mathematica 30, 1905, s. 175-193.

[150] A.P.Calderón, A.Zygmund, *On singular integral*, Amer. Journ. Math., 78, 1956, s. 289-309.

[151] Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, 178, 1937, s. 29-33.

konvergenciji trigonometrijskih integrala:

Neka je $c(u)$ ograničene varijacije u svakom konačnom intervalu i, bez uticaja na opštost, $c(u) = 0$ za malo $|u|$. Neka je

$$\lim_{u\to\infty} \sup \max_{u\le u'\le u+h} |c(\pm u') - c(\pm u)| \le \omega(h), \quad \text{za neko} \quad h > 0,$$

tako da je integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xui} \frac{d\{c(u)\}}{(ui)^2}$$

uniformno konvergentan za svako $x \in \mathcal{R}$, i

$$F(t) = \iint f(t)dt + At + B \quad \text{za} \quad |t - x| < 4\lambda,$$

tada je

$$\lim_{\omega\to\infty} \sup \left| \int_{-\omega}^{\omega} e^{xui} d\{c(u)\} - \frac{1}{\pi} \int_{-4\lambda}^{4\lambda} f(x+t)dt \right| \le 2(1+h|x|)\omega(x) \left[1 + \frac{3\log 2}{\pi\lambda h}\right]$$

Ovaj stav sadrži u sebi kao specijalan slučaj Rimanovu teoremu za trigonometrijske redove, proširenje te teoreme na opšte trigonometrijske redove, Stieltjesove integrale kao i na Rizovu teoremu konvergencije Laplas-Stieltjesovog integrala. Dokaz ovog stava Karamata je, kako je već rečeno, iskoristio u radu *Sur le théorème tauberien de N. Wiener* u trećoj etapi kratakog i do tada najdirektnijeg dokaza Tauberove teoreme N. Vinera.

Metod kojim je dokazao gornji stav Karamata je već koristio u radovima *Weiterführung der N. Wienerschen Methode*[152] i *Un théorème sur intégrales trigonométriques.*[153] U njima je Karamata dokazao teoreme koje su se odnosile na Laplasov integral $\int_0^\infty e^{-st} A(t)dt$, i koje daju zavisnost procene parcijalne sume od dužine intervala regularnosti. Te teoreme sadrže Fatuov stav da jedan stepeni red u okolini tačke 0 čiji

[152]Mathematische Zeitschrift, t.38, B.5, 1934, s.703-708.

[153]C.R. du 2. congrès des mathématiciens des pays slaves, 1934, Prague, 1935, s.147-149.

koeficijenti teže 0 i koji je regularan u svakoj tački kružnice $|z| = 1$ tamo i konvergira[154] i Rizov analogni stav za Dirihleove redove u kome je regularnost zamenio jednim slabijim uslovom.[155]

Lep i originalan rezultat je prikazan i u radu *Izražavanje dvo-periodičnih funkcija pomoću određenih integrala*[156] u kome autori, M. Petrović i J. Karamata, potvrđuju da je Poenkareova metoda izražavanja svih meromorfnih dvo-periodičnih funkcija u obliku određenih integrala[157]

$$\int_0^\infty \varphi(z,t)dt,$$

gde je $\varphi(z,t)$ racionalna funkcija integracione promenljive t i ograničenog broja eksponencialnih funkcija $e^{\alpha zt}$ i $e^{\beta t}$, "u osnovi dobra, ali da je veliki matematičar previdio jednu stvar i učinio nekoliko grešaka koje mu nađene obrasce čine netačnim." Polazeći od funkcije koju je predstavio dvostrukim redom, Poenkare nije u tom trenutku primetio da taj dvostruki red divergira, pa se ta omaška provlači kroz celu njegovu metodu. Kasnije je, kako napominju autori, Poenkare primetio tu grešku i kao polaznu funkciju navodi jedan drugi oblik dvostrukog reda, ali tako ispravljenu metodu dalje ne razvija.

Karamata i Petrović su po tom Poenkareovom primeru ispravili njegovu grešku i precizno definisali polaznu funkciju preko dvostrukog reda, čime Poenkareov postupak ostaje u važnosti i može se uspešno primeniti. Pri tome su dali nekoliko svojih zapažanja o mogućnosti pojednostavljenja tog postupka.

---

[154]P.Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math. 30, 1906, s.389.

[155]M.Riesz, *Über Summierbarkeit durch typische Mittel*, Acta Lit. Acad. Scient. Univ. Hung. Szeged 2, 1924, s.18-31.

[156]GLAS SKA Beograd, 165 (81) 1935, s.137-152.

[157]H.Poincaré, *Sur les invariants arithmétique*, C.R. du 10^{em} Congrès de l'AFAS, 1881, s.109-117.

Ali prava kreativnost i originalnost autora se vidi iz drugog dela rada, u kome su dali jedan nov način izražavanja dvoperiodičnih funkcija koji je u osnovi bio različit od svih do tada poznatih (Liuvij (Joseph Liouville), Vajerštras, Ermit (Charles Hermit), Penleve (Paul Painlevé)). On se sastoji u tome da se meromorfna dvo-periodična funkcija jedne promenljive $f(z)$ izrazi analitički u obliku količnika dva krivolinijska integrala

$$f(z) = \frac{\int \Phi(z,t)P_1(t-z)dt}{\int \Phi(z,t)P_2(t-z)dt},$$

u kome je

1) $\Phi(z,t)$ jedna meromorfna funkcija promenljivih z i t, koja zavisi od elementarnih perioda a i b posmatrane funkcije $f(z)$ i *ostaje ista za sve funkcije sa jednim istim parom perioda*;

2) $P_1(x)$ i $P_2(x)$ su polinomi po x sa stalnim koeficijentima, a *koji se menjaju od jedne funkcije $f(z)$ do druge*;

3) kontura integracije je jedna ma koja zatvorena linija C koja se sva nalazi u onom paralelogramu perioda T u kome se nalazi uočena tačka z; integracija se ima izvršiti u direktnom smislu.

Menjajući oblik kontura C dolazi se do mnogobrojnih analitičkih izraza za $f(z)$ u obliku količnika običnih, realnih određenih integrala.

Kako se meromorfna dvo-periodična funkcija uvek može izraziti kao količnik dve cele funkcije koje se za osnovne eliptične funkcije poklapaju sa Vajerštrasovim funkcijama $\wp(z)$, od čega su Petrović i Karamata i pošli u izvođenju svog načina pretstavljanja funkcije $f(z)$, taj rezultat se sigurno ne bi mogao dobiti bez, pored već dokazanog Petrovićevog dubokog poznavanja teorije eliptičnih funkcija, i sličnog Karamatinog znanja.

Priznanja i ostale aktivnosti

Ubrzo po objavljivanju nekoliko pomenutih radova vezanih za funkcije tauberove prirode, kao i priznanja od strane tada najvećih matematičara iz iste oblasti, 29. septembra 1930. godine izabran je za docenta za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Maja meseca 1937. godine izabran je za vanrednog profesora pri katedri teorijske matematike na istom fakultetu. Redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu je postao 1950. godine.

To je bio redovan put fakultetskog napredovanja skoro svakog univerzitetskog radnika, pa je prvo pravo priznanje njemu i njegovom naučnom radu, u tadašnjoj Jugoslaviji, bio izbor za dopisnog člana Jugoslovenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu, 31. maja 1933. godine. Referat o Karamati je 20. februara iste godine podneo akademik dr Vladimir Varićak (1865-1942).[158] U njemu je, pored kraće biografije i spiska od 37, do tada objavljenih radova, napisano: "Mada je još mlad dr. Kramata, ima on već vrlo lijep glas u matematičkom naučnom svijetu... Erst kürzlich, veli K.Knop na 520. strani 3 izdanja svoje knjige o beskonačnim redovima, ist von J.Karamata ein überraschend einfacher Beweis desselben gefunden worden... I. Titchmarsch prenio je u svoju teoriju funkcija taj Karamatin dokaz, za koji veli da je extremely elegant...I profesor matematike u Göttingenu E.Landau, koji zauzima odlično mjesto među matematičarima, neobično visoko cijeni te radove Karamatine. Naš kandidat danas je već poznata i ugledna ličnost u matematičkom svijetu.".

Zahvaljujući svom naučnom ugledu Jovan Karamata je decembra meseca 1935. godine bio predložen za prijem u Češko kraljevsko naučno

[158]LJETOPIS JAZU za 1932/33 godinu, sv. 46, Zagreb, 1934, s.77-82.

društvo, gde je 8. januara 1936. godine izabran za njegovog dopisnog člana. Kako kaže dr Dragan Trifunović, ovo je period velikog ugleda Beogradske – Karamatine matematičke škole! Pristupni rad pod naslovom *Un théorème relatif aux sommabilités de la forme* $\sigma \int_0^{1/\sigma} \psi(\sigma t)s(t)dt$[159] je prikazan 11. novembra 1936. godine. U njemu je Karamata pokazao da se za neke postupke zbirljivosti oblika

$$\Psi^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \psi(\frac{t}{x})s(t)dt,$$

koji sadrže, kao specijalne slučajeve, Cesàrove postupke zbirljivosti reda celobrojnog k

$$\frac{1}{x}\int_0^x (1-\frac{t}{x})^{k-1}s(t)dt,$$

može na elementaran način formulisati teorema inverzne prirode bez korišćenja Vinerovog uslova iz 1932. godine da za svako realno u važi

$$\int_0^\infty \psi(t)t^{ui}dt \neq 0.$$[160]

Kao veliko priznanje za rezultate njegovog celokupnog dotadašnjeg prvenstveno naučnog ali i pedagoškog rada, Jovan Karamata je, na glavnom godišnjem skupu Srpske kraljevske akademije, održanom 16. februara 1939. godine, izabran za dopisnog člana Srpske kraljevske akademije.[161] Na svečanom godišnjem skupu održanom 7. marta iste godine, Karamata je to i zvanično proglašeno.[162] Na 2. skupu Akademije prirodnih nauka Srpske kraljevske akademije, 22. maja 1939. godine, "primljeno je k znanju da je član dopisnik g-din dr Jovan Karamata poslao svoju biografiju i izjavio zahvalnost na izboru za dopisnog

[159] Věstnik Královské České Společnosti Nauk, II, 1936, Praha 1937, s.1-5.

[160] N.Wiener, *Tauberian theorems*, Annales of Mathematics (2), 33, 1932, s.38.

[161] Godišnjak SKA, XLVIII, Beograd, 1938, s.141.

[162] Isto s.190.

člana."[163] U Godišnjaku SKA za 1938. godinu[164] štampana je biografija i spisak radova Jovana Karamate, ali ne i referat pri izboru.

Tada je već bio član sledećih naučnih društava: Société mathématique suisse, Société mathématique de France, Association francaise pour l'avancement des Sciences i Deutsche Mathematiker Vereinigung, kao i stalni referent referativnih časopisa Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (Gisen) i Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Berlin, Pruska akademija nauka).[165]

Naravno, u tom periodu od desetak godina, od kraja dvadesetih godina do početka Drugog svetskog rata, Karamata je učestvovao na, za to vreme, velikom broju naučnih skupova i kongresa, na kojima je bio lepo primljen i kao predavač, i kao cenjen naučnik. Bio je, takođe, rado viđen gost i na mnogim univerzitetima širom Evrope. Do 1939. godine je, pored već pomenutog kongresa[166] u La Roželu, učestvovao na još 9 kongresa, na kojima je uvek prikazao neke od svojih rezultata.

Kao gostujući profesor održao je predavanja na Univerzitetima u Poljskoj (Lavov, Varšava, Poznanj) i Rumuniji (Černanc) početkom 1933. godine, u Nemačkoj (Hamburg i Getingen) u junu 1936. godine, Švajcarskoj (Lozana Ženeva) i Belgiji (Brisel - Institut des Hautes Etudes de Belgique) i opet u Nemačkoj (Štutgart, Getingen, Kil, Berlin, Hamburg, Gisen, Lajpcig, Jena) u toku 1937. godine. Na poziv nemačkog Ministra prosvete, u toku zimskog semestra školske 1937-38.

[163]Godišnjak SKA, XLIX, Beograd, 1939, s.35.

[164]s.221-234.

[165]Koliko smo uspeli da vidimo, Karamata je referisao u tim časopisima oko 60 radova, među kojima i radove najistaknutijih matematičara tog vremena. Često su te kratke zabeleške predstavljale prave male matematičke bisere, a neke se i navode u drugim radovima i monografijama. Tako je Biberbah (L. Bieberbach) u knjizi *Predavanja o Algebri (Vorlesungen über Algebra*, Leipzig, B.G.Teubner, 1928), naveo jednu takvu zabelešku.

[166]Videti stranu 9.

godine na Univerzitetu u Tibingenu držao je specijalni kurs iz teorije funkcija. Pozvan je bio da održi niz predavanja i na Sorboni u Parizu, više univerziteta u Indiji i da učestvuje u radu Italijanske akademije nauka Convegni Volta, ali ga je u tome sprečilo izbijanje Drugog svetskog rata.

U tom najplodnijem periodu bavljenja naučnim radom Karamata bi se, slobodnije procenjujući, mogao svrstati u onu grupu svetskih matematičara koja je dolazila odmah posle analista ranga Hardija i Vinera. U svakom slučaju njegov ugled u matematičkom svetu bio je vrlo visok i rastao je naročito posle pojave pomenute Felerove knjige *Uvod u verovatnoću*. Na žalost u svojoj zemlji, gde je i proveo svoje najplodnije dane, među najširim matematičkim krugovima, dugo nije uživao takav ugled.[167]

Karamata je u to vreme bio i u odboru za očuvanje Zadužbine Luke Ćelovića-Trebinjca, beogradskog trgovca, iz čijeg fonda se, između ostalog, jednim delom finansiralo i štampanje časopisa Publications Mathématique Univerziteta u Beogradu,[168] kao i u Odboru za zaštitu od vazdušnih napada grada Beograda.[169]

Takođe je bio i saradnik pri izradi našeg prvog *Sveznanja*.[170]

Godine 1931. pokrenuo je inicijativu za izdavanje časopisa Mate-

[167]Poslednjih godina se taj odnos prema Karamatinom delu kod nas menja, i među matematičarima sazreva svest o vrednosti njegovih rezultata.

[168]Izveštaj o stanju i radu Zadužbine Luke Ćelovića–Trebinjca u godini 1934, Beograd, izdaje Zadužbina. Izveštaj je potpisao Jovan Karamata.

[169]Izveštaj Jovana Radonića, sekretara SKA, o stanju i radu SKA u 1939. godine datom na svečanom godišnjem skupu od 6. marta 1939. godine. Godišnjak SKA XLIX, s.181.

[170]Petar M. Petrović, književnik, kritičar, publicista je bio direktor Narodnog Dela i urednik *Sveznanja – opšteg enciklopedijskog leksikona*, Narodno Delo, 1937, s.751. Jovan Karamata je bio redakcijski saradnik za matematiku i astronomiju, a odrednica sa njegovim imenom je na strani 999.

matički list za srednju školu, čiji je bio i vlasnik. Urednik časopisa je bio R.Kašanin, a u uređivačkom odboru su pored Karamate bili i V.Varićak, R.Župančić, J.Mihajlović, B.Živković, V.Mišković, M.Nedić i M.Lipovac. Do 1932. godine kada je list prestao da se štampa, izašlo je 10 brojeva. U tom časopisu Karamata je objavio i dva stručno-pedagoška rada *Praktične mogućnosti matematičkih rešenja* i *Elementarno iznalaženje maksimuma i minimuma.*[171]

Oko 1937. godine, kako piše M.Tomić,[172] žar i zanos iz mladih dana se polako stišavaju. On piše i radi. Nezadovoljan, videći da to nije neki napredak, on baca i ostavlja po strani nedovršene radove. Tada nailaze godine iskušenja, godine kada svaki naučni rad postaje nemoguć i besmislen. U to vreme, pred rat, već oženjen sa Emilijom Nikolajević (1906-1959), sa troje dece, dva sina i jednom ćerkom, porodica Karamata nije lako živela.

Drugi svetski rat, kao i period neposredno pre i posle njega, bio je, možda i najteži period njegovog života i naučnog rada. Skoro desetogodišnje izbivanje sa glavne matematičke scene, doprinelo je da izgubi sve veze i kontakte sa naučnicima ali i prijateljima širom Evrope. Što su više prolazile godine i što se više udaljavao od savremenih matematičkih tokova, to je i sam sve manje pokušavao da se bori i skoro je sasvim zapostavio naučni rad. O tome je i sam jednom prilikom 1945. godine izjavio: "Zaboravio sam ne samo ono šta sam ja radio, već i mnoge opšte poznate matematičke činjenice. Više ne znam šta se dalje dešavalo u oblasti koju sam nekada znao tako dobro."

Ali to nije značilo da se potpuno odvojio i iz lokalnog, beogradskog matematičkog života. Do samog izbijanja Aprilskog rata 1941. godine on je i dalje učestvovao u radu sednica Akademije prirodnih nauka na

[171]Matematički list, br.1-2, Beograd, 1931, s.17-25, i br.5-6, s.70-76. Spisak stručno-pedagoških radova je dat u Prilogu C.

[172]M.Tomić [45], s.11.

kojima je, od 1939. godine, zajedno sa M.Petrovićem, B.Gavrilovićem ili A.Bilimovićem, podneo 7 referata o radovima podnetim za štampanje u GLASU SKA.[173] Pored toga zajedno sa Petrovićem, Tadijom Pejovićem i Nikolom Saltikovim referiše 27. juna 1938. godine o Milošu Radojčiću pri njegovom izboru za docenta Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. U tom periodu je radio, zajedno sa Mihailom Petrovićem, i na sređivanju i sistematizaciji Petrovićevih matematičkih radova. U jesen 1940. godine je osmislio i prvi držao kurs iz teorije verovarnoće na Filozofskom fakultetu koji je trajao samo jedan semestar zbog izbijanja Aprilskog rata 1941. godine.

Krajem 1941. godine ponuđena mu je od strane nemačkog Ministarstva prosvete katedra na nekom Univerzitetu u Nemačkoj, što je Karamata odbio.

Za Mihaila Petrovića je vezan još jedan događaj čiji je inicijator bio Jovan Karamata i koji je imao srećan završetak. Petrović je, sticajem okolnosti, odmah po izbijanju Aprilskog rata 1941. godine zarobljen i odveden u Nirnberški logor. Početkom maja Karamata je posetio Đorđa Karađorđevića i tom prilikom ukazao na mogućnost Petrovićevog povratka iz zarobljeništva. Pri tome je mislio na Jelenu, Kraljicu Italije i tetku Đorđa Karađorđevića. Ova inicijativa je donela rezultata i Mihailo Petrović se u junu iste godine vratio u zemlju.[174]

Na žalost dve godine po povratku u Beograd Mihailo Petrović je preminuo, pa je na sednici Akademije prirodnih nauka od 6. jula 1943. godine, formiran odbor za pregled Petrovićevih rukopisa u koga su, pored Jovana Karamate, ušli A.Bilimović, V.Mišković, N.Saltikov, R.Kašanin

[173]To su radovi Božidara Popovića i Jordana Petrovića (18. decembra 1939. godine), Jovana Voučka (21. oktobra 1940. godine), M.Radojčića (16. decembra 1940. godine, dva rada), V.Avakumovića (31. marta i 15. juna 1941. godine).

[174]D.Trifunović [45], s.422.

i M.Radojčić.[175]

Rat je završio jedno poglavlje njegovog života, ali i naučnog i stvaralačkog rada i to ono najlepše i najznačajnije.

[175]Godišnjak SAN, LI, 1941-1944, s.157.

Pedagoški rad

Rad na univerzitetu

[176] Posle rata, porušen životnim olujama, umoran i izgubljen, daleko od nauke koju skoro deset godina nije pratio, Karamata traži nove oblike rada gde bi mogao da se zapali onim zanosom iz mladih dana u kome se sve zaboravlja. On počinje da radi sa svojim učenicima. I pre rata on je pokazao da ume na jedan poseban način da radi sa mlađima. To je bila neka vrsta zajedničkog rada. Oni koji su bili te sreće da uđu u krug njegovih učenika i da istraju u toj školi, sećaće se celog života tih dana.[177] Njima je kapao znoj sa lica, jer se sa radom počinjalo za stolom oko 2 po podne a ustajalo oko 10 uveče. Od njegovih oštrih kritika njima su suze navirale. Njegove prve reči su bile: da vidimo te

[176] Ovo poglavlje je napisano prvenstveno zahvaljujući sećanjima akademika Miodraga Tomića, jednog od prvih Karamatinih đaka, i nosioca prve doktorske titule dodeljene na Srpskoj akademiji nauka, 24. marta 1950. godine rađene pod rukovodstvom profesora Karamate. Većina tih sećanja je i objavljena u Tomićevim radovima o Jovanu Karamati.

[177] Jedno takvo sećanje je i priča V.Marića koga je, kada je na prvoj godini studija bio izbačen iz omladinskog pokreta i kada su mu pretili da će ga izbaciti i sa fakulteta, Karamata pozvao u svoj kabinet i rekao da je čuo da ima talenta i dara za matematiku i kada ga izbace sa fakulteta da dođe kod njega da će ga on učiti matematici. (Predavanje u okviru seminara iz matematičke analize održano 4.12.1995. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu.)

vaše gluposti. Ali ako bi primetio zrno istine, on se oduševljavao, on je klesao zajedno sa njima i radovao se svakom uspehu kao da je njegov.

Za one koji su ga bliže poznavali, za njegove prijatelje, drugove i učenike on je bio čovek koga su voleli zbog jedne srdačne drugarske atmosfere koju je donosio. Njegovi učenici sećaće se ne samo rada na nauci, već i časova veselja koje su sa njime provodili, zaboravljajući da je on profesor a oni đaci. U takvoj atmosferi oni su lakše dočekivali sutrašnji dan napora i rada i željno očekivali veče zaborava i odmora.

Karamatina nastavna karijera na Beogradskom univerzitetu počinje 1930. godine njegovim izborom za docenta Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, i traje, igrom sudbine, upravo do njegovog izbora za redovnog profesora Univerziteta u Beogradu, 1950. godine.

Početkom tridesetih godina njegove kolege na Filozofskom fakultetu i na tehnici već su znatno unapredili nastavu matematike učinivši je savremenijom. Oni su to radili postupno. Karamata je bio najradikalniji u uvođenju novih predmeta i načina njihovog izlaganja. Taj njegov pokušaj završio se nekom vrstom studentskog protesta 1933. godine. U ono vreme to se objašnjavalo njegovom nečuvenom strogošću na ispitima i kolokvijumima. Možda je u tome donekle i bilo istine, ali je i činjenica da je sigurno većina studenata teško prihvatala nove naučne discipline. Treba se setiti da je nešto slično doživeo i Mihailo Petrović na početku svoje nastavne karijere. Novi naučni pojmovi i nove teorije su teška stvar, a već naviknuto mišljenje se opire novim idejama. Karamata je hteo da stara shvatanja istisne iz glava studenata, a to je naišlo na otpor. U to vreme se nije mnogo raspravljalo o tome, da li je fakultet samo škola za obrazovanje nastavnika ili prvenstveno naučna ustanova. Karamata je smatrao da je cilj fakulteta samo nauka i svoja predavanja, pa čak i ona uvodna, tako je podešavao. Nije čudo da ga onda većina studenata nije razumela.

Profesor Karamata je imao običaj da drži sva svoja predavanja jednoga dana. Niz potpuno različitih kurseva: elementarna algebra, viša algebra, uvod u analizu, teorija nizova i redova i nacrtna geometrija – smenjivali su se jedan za drugim. Za vreme odmora njegov kabinet je bio pun studenata koji su donosili zadatke i tražili savete za svoje seminarske radove. Na predavanjima on je davao i probleme. Neki su bili tako teški da ih u prvi mah studenti nisu ni shvatili. On je ponavljao često čitava predavanja želeći da ukaže na značaj pojedinih pojmova i stavova. Bilo je studenata koji su danima pokušavali da reše neke probleme. Rezultati takvoga rada osetili su se kasnije. Neki su posvećivali sav rad tumačenju njegovih predavanja. Drugi, naprotiv, nisu više ni dolazili na njegova predavanja. Kako je sam držao veliki broj kurseva na prvoj godini, to broj onih koji su posle nekoliko njegovih predavanja pobegli sa matematike sigurno nije bio mali. On je neka svoja predavanja detaljno spremao i bilo je trenutaka kada se sa njegovih časova izlazilo ozarena lica. Prvi korak na seminarskim radovima bio je upoznavanje sa inostranom literaturom, bez koje se seminarski rad nije mogao ni zamisliti. Ako se ima u vidu oskudno znanje sa kojim se dolazilo iz gimnazije, od matematike do stranih jezika, može se zaključiti koliko je napora zahtevalo takvo studiranje. Onda se može i shvatiti gnev ponekog od mladih. Na kraju, Karamata je rušio iluzije mnogih koji su kao obdareni došli da studiraju matematiku. Umesto dara videli su da je naporan rad važniji od svega.

Profesor Jovan Karamata je svoje poslednje predavanje na Prirodnomatematičkom fakultetu održao 11. januara 1950. godine iz analize I i time završio zvaničnu nastavnu karijeru u Beogradu. Iz zemlje je otišao najjači matematičar kojeg je srpski narod imao u to doba, a možda i uopšte.[178]

[178] D.Trifunović [45], s.110.

Đaci koji su cenili i mogli da prate njegov način predavanja i rada, ali koji su imali i intelektualne mogućnosti da prihvate probleme koje je pred njih profesor Karamata postavljao, u mnogome su doprineli nastavku njegovog naučnog delovanja. A kakvi su to bili đaci, ali i kakav je Jovan Karamata bio čovek, možda najbolje govori jedna kratka izjava - On je mene pretekao - upućena Vojislavu Avakumoviću, jednom od njegovih učenika.[179]

Ne samo u našoj zemlji, već i u inostranstvu Karamata je od svojih učenika stvorio veliki broj matematičara. Mnogi od njih su upravo i doprineli današnjem uspehu i aktuelnosti njegovih radova tako što su u svoje radove iz novih oblasti matematike preneli i ugradili i njegove rezultate.

Sve ovo samo potvrđuje našu napred navedenu konstataciju da su mu svetsku slavu doneli njegovi originalni matematički rezultati, ali da za istoriju naše matematike jednaku važnost imaju poznata Karamatina škola matematike i njegovi đaci, kasnije i ugledni matematičari-saradnici.

Predavanja i stručno-pedagoški radovi

U pedagošku aktivnost u posleratnom periodu može se ubrojiti i nekoliko predavanja koje je održao na sastancima društava matematičara i fizičara Srbije i Hrvatske, stručno-pedagoški radovi objavljeni u Vesniku Društva matematičara i fizičara Srbije (*O aproksimaciji eksponencijalne funkcije nizom racionalnih funkcija* i *Neki specijalni slučajevi prvog stava o srednjim vrednostima*),[180] Biltenu Društva matematičara i

[179] V.Marić [45], s.16.

[180] Vesnik DMFS, I 1, Beograd, 1949, s.7-19 i I 3-4, s.83-103

fizičara Makedonije (*Neke primene kompleksnog broja u geometriji*),[181] i u zagrebačkom Glasniku matematičko-fizičko i astronomskom (*Mihailo Petrović, 24.6.1868–8.6.1943. (in memoriam)*),[182] kao i u njima postavljeni problemi i zadaci za samostalno rešavanje čitalaca tih časopisa.[183] U radu *Elementarno iznalaženje maksimuma i minimuma* Karamata kroz jedan elementaran način izračunavanja ekstrema u nekim prostijim problemima daje svoje metodičko-pedagoško uputstvo da se u određenim slučajevima zadatak može rešiti nekim datim pravilom, samo ne odmah neposredno, nego posredno. Treba, naime, zadatak rastaviti na dva zadatka ili više, tako da u svakom tom zadatku nepoznate budu potpuno određene i da se na osnovu tih pomoćnih zadataka postavljeni zadatak može rešiti.

U radu *Praktične mogućnosti matematičkih rešenja* Karamata kroz detaljno rešena dva primera:

1. Na pravoj liniji nalaze se dva izvora svetlosti, A i B, različite jačine. Naći na toj pravoj liniji onu tačku C koju podjednako osvetljavaju oba izvora svetlosti.

2. Dva poligona imaju ukupno 21 stranu; jedan ima dva puta toliko dijagonala koliko drugi; koliki je broj strana svakoga?

pokazuje kako se diskusija ima voditi i od kolike je važnosti takva diskusija pri rešavanju zadataka. Karamata kaže:"Jedan zadatak se može potpuno shvatiti tek kad je diskusija do kraja izvedena. Ona kazuje da li i ukoliko postavljeni zadatak ima smisla, tj. da li je i

[181]Bulletin de la Societé des mathématiciens et des physiciens de Macedonie, 1, Skopje, 1950, s.55-81.

[182]Glasnik Mat.Fiz.Astr. ser.II, t.3, sv.3, Zagreb, 1948, s.123-127.

[183]Svi zadaci koje je Karamata postavio u Vesniku Društva matematičara i fizičara Srbije su dati u Prilogu E.

ukoliko rezultat praktično moguć (kao što je to bio slučaj u drugom zadatku). Osim toga, kad se u izvesnim zadacima (kao što je to bio slučaj u prvom zadatku) dobivaju pored očekivanog rešenja još i druga, ona omogućuje da se uvidi kada i kako ti rezultati odgovaraju postavljenom pitanju."

Knjige i udžbenici

Karamata je smatrao da udžbenike treba pisati na kraju svoje naučne karijere. Mada je posle rata objavio još 50 naučnih radova, od kojih 17 kao koautor (M.Tomić, P.Erdeš, S.Aljančić, V.Marić, B.Bajšanski, Monika Vjmj (Monique Vuilleumier), R.Bojanić),[184] bio je duboko svestan da je ono što će ostati zabeleženo u istoriji i razvoju matamatike, već uradio. To je sigurno i bio jedan od razloga što se odmah posle rata i posvetio pisanju udžbenika. Ali i pre rata su štampana tri spisa nastala prvenstveno zahvaljujući Jovanu Karamati, ali i trudu i aktivnosti Udruženja studenata matematike Beogradskog univerziteta. To su *Rešenja diplomskih zadataka iz teorijske matematike, Dedekindovi preseci i teorija iracionalnih brojeva* i *Teorija nizova sa primerima i zadacima.*

Posle rata su izašla dva zvanična univerzitetska udžbenika. To su *Kompleksan broj* i *Teorija i primena Stiltjesova integrala*, koji, mada danas skoro zaboravljeni, imaju sve odlike njegova rada - od originalnosti do sadržajnosti. Pažnje vredan je podatak da od uvođenja novog pojma određenog integrala 1894. godine[185] koji je danas poznatog

[184]Od radova nastalih pre rata samo su tri nastala u saradnji, i to sa V.Avakumovićem, H.Vendelinom (Wendelin) i M.Petrovićem. Zajednički rad sa Petrovićem je jedini rad u kome se Petrović javlja kao koautor.

[185]T.J. Stieltjes, *Recherhes sur les fractions continues*, Ann. de la Fac. des Sci. de Toulouse, VIII, s.1-122 (68-75).

pod nazivom Stiltjesov integral, pa do pojave Karamatine monografije, dakle 1949. godine, i pored toga što je našao mnogobrojne primene u mnogim granama matematike, nisu nastali niti jedan udžbenik ili monografija sa tom tematikom, što potvrđuje i citirana literatura u Karamatinoj knjizi. Kada mu je nemački matematičar, profesor Kamke (Erich Kamke), predložio da monografiju o Stiltjesovom integralu izda na nemačkom, Karamata je tražio dozvolu Akademijskog saveta SAN da se ona prevede, ali kako je bio nezadovoljan sa njom, smatrao je da ju treba tako preraditi da bi to bila nova knjiga.[186] On više nije imao snage i volje za takav rad.

Glavni cilj ovog udžbenika, kako je Karamata konstatovao u predgovoru, bio je da istakne prednost Stiltjesovog integrala kao snažnog analitičkog sredstva, naročito u funkcionalnoj analizi i teorijskoj statistici, čijom se upotrebom na dobija samo na preglednosti, već se omogućuje sinteza poznatih i dobijanje novih, važnih rezultata. Kako se pojam Stiltjesovog integrala zasniva na monotonim funkcijama i funkcijama ograničene varijacija, Karamata je u prvom delu knjige izneo osobine tih funkcija. Zatim je izložio samu teoriju Stiltjesovog integrala proširenu u Rimanovom smislu i dao njegove primene, prvenstveno one koje ne zahtevaju potpuno poznavanje teorije realnih i kompleksnih funkcija. Ono što je najznačajnije u ovoj monografiji jesu stavovi o srednjim vrednostima i o pojmu nesvojstvenog Stiltjesovog integrala, što je u prethodnoj literaturi ostalo skoro neobrađeno.

Pored tih zvaničnih udžbenika Karamata je bio autor ili koautor još 7 knjiga. Godine 1947. su studenti Beogradskog univerziteta izdali *Algebru I*, *Algebru II* i *Kurs opšte matematike*, 1948. su izašli *Elementi matematičke analize*, 1949. godine je štampana *Algebra I* u dva dela, kao i priručnik *Pregled elementarne matematike*, nastao u saradnji sa

[186]Godišnjak SAN, LVII, Beograd, 1950, s.208.

Mirkom Stojakovićem (1915-1985) i Tatomirom Anđelićem (1903-1993) i prvenstveno namenjen da svršenim učenicima gimnazije olakša pripremanje ispita iz matematike na tehničkim školama[187] i 1950. godine *Teorija funkcija*. Konačno 1956. godine objavljena je knjiga *Predavanja iz analize*, napisana u saradnji sa Bogoljubom Stankovićem. To su bile i poslednje Karamatine knjige i sa njima se on oprostio sa našom redovnom nastavom.

Kako se u okviru Beogradskog univerziteta najviše učila i razvijala matematička analiza, tek su Karamatini udžbenici iz Algebre omogućili

[187]Dajemo prikaz te knjige koji je izašao u Vesniku Društva matematičara i fizičara, I, 3-4, s.145. u celini:

Ovaj priručnik izradio je jedan kolektiv Univerzitetskih nastavnika u cilju da se svršenim učenicima gimnazije olakša pripremanje za ispit iz matematike na tehničkim velikim školama.

Pregledom je obuhvaćeno, uglavnom, celokupno gradivo srednjoškolskog kursa matematike. Glavna pažnja obraćena je međutim na one partije gradiva, koje su po svome mestu u nauci, kao i po značaju za opšte matematičko obrazovanje učenika, od naročite važnosti. Metodska obrada pojedinih pitanja, kao i ista izlaganja, u svemu odgovara potrebama jednog potsetnika, čime se postiglo i to, da je u srazmerno uskom okviru data maksimalna količina materijala.

S obzirom na pravilan izbor gradiva i koncizno izlaganje, ova knjiga bez sumnje pretstavlja pomoć učeniku. Po njoj će za relativno kratko vreme moći da obnovi svoje znanje doneseno iz škole i, što je naročito važno, da se osposobi da gradivo srednjoškolskog kursa shvati kao celinu. Tome će još više doprineti originalan raspored materijala, naročito iz aritmetike i algebre. Pisci se, naime, ne drže u svemu reda izlaganja usvojenog u školskom kursu, gde je ovaj uslovljen postepenim razvojem učenika, nego su raspored izvršili prema prirodnoj unutrašnjoj vezi pojedinih matematičkih pojmova.

Ipak bi bilo potrebno da se u drugo izdanje unesu izvesne manje korekture i to naročito na onim mestima, gde je obuhvaćeno i gradivo koje ispada iz okvira srednjoškolskog programa, ili tamo gde je prema izvesnim pitanjima zauzeto takvo stanovište, koje u većoj meri odstupa od gledišta usvojenog u školskom kursu. Sem toga, potrebno je uneti više zadataka, čija tematika i nivo moraju odgovarati pravilu, koje se primenjuje na prijemnim ispitima.

studentima upoznavanje i sa tom oblašću matematike. U njima je na, i za današnje vreme, savremen način obrađeno rešavanje jednačina prvog, drugog, trećeg, četvrtog i viših stepena, kao i teorija polinoma. Dakle još uvek se algebra svodila na one pojmove koji su pod tim imenom smatrani do 19 veka. Savremeno poimanje algebre koja proučava one strukture koje ne zavise od graničnih procesa i koje počinje razvojem teorije grupa, još nije našlo svoje mesto u Karamatinim udžbenicima.

Posebno je interesantan Karamatin pristup teoriji kompleksnih brojeva. Naime, on je podvukao direktnu analogiju između kompleksnog broja i vektora koristeći uređeni par realnih brojeva koji je on nazvao kompleks. Iz takvog algebarskog pristupa, Karamata je uvođenjem apstraktnih pojmova brojnog prstena i brojnog tela prikazao algebarsku strukturu skupa prirodnih, celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva. Pri tome je naglasio da telo i prsten nisu vezani za strukturu njihovih elemenata već za operacije kojima se ti elementi pokoravaju (str.15). Izvođenje osobina kompleksnih brojeva i računskih operacija sa njima preko vektora, Karamati je omogućilo da mnoge probleme planimetrije i analitičke geometrije rešava kompleksnim brojevima. U okviru knjige Teorija funkcija, Karamata je dao i osnove teorije kompleksnih funkcija, ali bez integrala kompleksne funkcije.

U svakom slučaju može se kazati da su iz Karamatinih udžbenika učili i na njima stasali studenti prvih posleratnih generacija i to ne samo u Beogradu, već i u Novom Sadu, gde je Karamata držao predavanja na novoosnovanom Filozofskom fakultetu.

Aktivnost u Matematičkom institutu i odlazak u Ženevu

Posleratni period života i rada Jovana Karamate karakteriše i njegova izuzetna aktivnost u radu novoosnovanog Matematičkog instituta pri SAN.[188] U periodu od 1946. godine pa do 1951. godine, kada je otišao u Ženevu, imao je 29 saopštenja svojih naučnih radova. Kada zbog česte odsutnosti nije bio prisutan na sednicama Instituta, njegove radove su prikazivali njegovi najbliži saradnici. Od 1951. godine pa do 1961. godine, kada je Matematički institut izdvojen iz SANU, 15 puta su saopštavani njegovi naučni rezultati.[189]

U ovom periodu Jovan Karamata je doživeo i najveće zvanično priznanje za jednog naučnika. Na glavnom godišnjem skupu SAN, 18. marta 1948. godine, izabran je za redovnog člana Srpske akademije nauka. Donosimo ceo tekst Referata:[190]

Referat
o Jovanu Karamati
vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta i
dopisnog člana S.A.N. kao kandidatu za izbor za
pravog člana Odeljenja prirodno-matematičkih nauka S.A.N.

Iz priloženog curriculum'a vitae se vidi da je Jovan Karamata rođen 1902 godine, da je svršio gimnaziju u Lozani 1920 g. i univerzitet u

[188]Predlog za osnivanje Matematičkog instituta je dat 25. septembra 1945. godine, 18. oktobra iste godine je usvojen a 26. aprila 1946. godine je odobren Pravilnik Matematičkog instituta, čime je on definitivno i osnovan. (Svi podaci se nalaze u Godišnjacima SAN, knjiga LII i LIII za 1945. i 1946. godinu.)

[189]Videti [45]. Spisak svih Karamatinih saopštenja je dat u prilogu F.

[190]Rukom pisani Referat za izbor se nalazi u Arhivu SANU u okviru Dosijea 35 (J.Karamata).

Beogradu 1925 godine, i da je na istom univerzitetu doktorirao 1926 godine. Prvo je radio kao pitomac Rokfelerova fonda, a zatim, 1929 g., bio postavljen za ukaznog asistenta univerziteta u Beogradu, gde se i danas nalazi u svojstvu vanrednog profesora prirodno-matematičkog fakulteta.

J.Karamata je dopisni član:Jugoslovenske akademije znanosti i umetnosti (od 1933 g.), češkog naučnog društva (od 1935 g.) i naše Akademije (od 1933 g.). U više navrata držao je u inostranstvu naučna predavanja po pozivu tamošnjih univerziteta i naučnih ustanova (detaljnije o tome gledati u curric. vitae, prilog 1).

J.Karamata ima 82 štampana rada (gl. prilog 2), gde tretira probleme moderne analize, kojima su se bavili najveći analitičari današnjice (Borel, Hardi, S.Bernštajn, Landau, Bor, Adamar, braća Riz, Knop i dr.) i od kojih većina u svojim radovima navodi i ime Karamate. Pojedini Karamatini rezultati dobili su već konačan oblik i ušli u osnovna dela (gl. prilog 3).

Glavna Karamatina naučna zasluga odnosi se na proučavanje teorije redova – tog osnovnog, kapitalnog problema matematičke analize. Tu postoji direktni problem: dati su članovi reda, formirani po određenom zakonu, treba ispitati konvergentnost reda,– i inverzni problem kad se bavimo zakonima formiranja članova za red koji ima određeni zbir. U tom inverznom problemu J.Karamata je dao glavne, svuda primljene, osnovne rezultate.U vezi sa tim stoje t.zv. asimptotski procesi, za koje možemo Karamatu smatrati kao jednog od najvećih stručnjaka.

Ne mogu ulaziti u izlaganje sadržine drugih problema kojim se sa velikim uspehom bavio J.Karamata, jer oni nose veoma specijalan karakter (gl. prilog 3).

Pošto su zasluge J.Karamate u oblasti matematičke analize ogromne, opšte priznate u svima matematičkim krugovima i njegovo ime uzdiže

naučni kolektiv Jugoslavije pred licem celokupnog naučnog sveta, smatram da će Srpska Akademija nauka samo izvršiti svoju dužnost ako prihvati predlog da se Karamata izabere za pravog člana Odeljenja prir. mat. nauka.

Početkom maja 1949. godine otpočeli su u Matematičkom institutu, pod rukovodstvom Jovana Karamate, stručni sastanci na kojima su se držala predavanja vezana za metodiku nastave savremene matematike na Univerzitetu. Prvi ciklus predavanja je bio posvećen problemima konvergencije, brzine i pravilnosti rašćenja redova i funkcija.[191]

U tom periodu je biran u mnogobrojne uprave, odbore i komisije, što je prvenstveno vezano upravo za rad na Matematičkom institutu i SAN. Pokušaćemo da ih sve navedemo:

Veće i Naučni savet Matematičkog instituta (1946. godine), Odbor za publikacije (1946), Odbor za univerzitetsku nastavu (1946), Komisija za matematičku terminologiju (1946), Odbor za vezu sa inostranstvom (1946), Uprava Društva matematičara i fizičara Srbije (1948), Odbor astronomsko-numeričke sekcije (1949), Uprava Saveza Društava matematičara i fizičara FNRJ (1949), Komisija stručnjaka kao stručnog organa Saveta Matematičkog instituta (1949), Stručni odbor Komisije za organizaciju naučno-istraživačkog rada Akademijskog saveta FNRJ za matematiku (1950), Redakcioni odbor biltena Akademijskog saveta FNRJ (1951), Nacionalni komitet za teorijsku i primenjenu mehaniku (1951). Bio je i glavni urednik časopisa Matematički vesnik Društva matematičara i fizičara Srbije (1949), član Redakcionog odbora časopisa Publications de l'Institut Mathématique (1952), kao i upravnik Matematičkog instituta.[192]

[191]Izveštaj o radu Matematičkog instituta u prvom tromesečiju 1949. godine, razmotren 28. maja 1949. godine. Godišnjak SAN, LVI, 1949, s.150.

[192]Predložen je 12. februara 1949. godine na 2. skupu OPMN SAN, a 4. maja je

U periodu od 1945. godine do odlaska u Ženevu 1951. godine, Karamata je učestvovao na 5 kongresa, a u toku aprila 1950. godine je boravio na studijskom putovanju u Švajcarskoj gde je održao niz predavanja na univerzitetima u Ženevi, Cirihu i Lozani.

Karamatinim odlaskom iz Beograda i Jugoslavije u Švajcarsku, gde je za redovnog profesora Univerziteta u Ženevi izabran 1951. godine, počinje poslednji period njegovog života i rada. Glavni razlog njegovog odlaska su bile opšte okolnosti nesigurnosti, dostavljanja, progona i hapšenja, nastale u Jugoslaviji po završetku rata, a posebno prilike na Univerzitetu koje je D.Trifunović nazvao vreme karakteristika.[193] Karakteristike su bile pismene ocene političkog držanja i opredeljenja, morala i stručnosti, koje su sastavljali i pisali studenti i profesori komunisti o svojim "sumnjivim" kolegamma. Takve karakteristike, uglavnom bez potpisa ili sa inicijalima, su dostavljane u odgovarajući Komitet, odakle su, prekucane i potpisane, vraćane na Univerzitet i vrlo često u mnogome uticala na karijeru i sudbinu pojedinaca. U takvim okolnostima, pod stalnim prismotrom, proverama, prisluškivanjem i zapisivanjem svake iskazane ali i neiskazane reči, živeo je i radio dr Karamata Jovan, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu sa sledećom karakteristikom:[194]

Rođen je 1.II 1902. godine u Zagrebu. Srbin. Oženjen. Ima troje dece. UTri meseca posle diplomiranih studija položio je doktorat. Dobar stručnjak.

Bio je suvlasnik fabrike svile u Zemunu. Za vreme okupacije se bio povukao iz Beograda u Zemun i tamo radio na proizvodnji svile koja

---

na 9. sednici Institutske komisije SAN komitet za naučne ustanove, univerzitet i velike škole dao saglasnost da se Jovan Karamata postavi za upravnika Matematičkog instituta. Godišnjak SAN, LVI, 1949, s.145 i s.128.

[193]D/Trifunović [45], s.106-132.

[194]Arhiv SANU, Dosije 35 (J.Karamata); Arhiv Srbije, MPs, G-183, Dosijea.

je služila za nemačke padobrane. Posle oslobođenja fabrika je konfiskovana kao ratnom dobitniku. Bio je i uhapšen zbog privrednog pomaganja neprijatelja ali nije bio osuđen jer je dokazao da je materijalno pomagao NOP.

U bivšoj Jugoslaviji nije se aktivno bavio politikom. Za vreme okupacije je pomagao NOP, ali nakon odvajanja DM prestao je pomagati NOP, čak je i simpatisao organizaciju DM.

Posle oslobođenja pre(t)stavlja se prijateljem današnjice ali u suštini nije takav.[195]

Karamata je, kako piše D.Trifunović[196] dobro znao šta o njemu misli komunistička vlast i nove kolege matematičari koji su preko noći od studenata i asistenata postali profesori pa i akademici, i odlučio je da napusti zemlju.[197]

Karamata je za nastavak svoje univerzitetske i naučne karijere izabrao Ženevu, verovatno iz više razloga. Jedan od značajnih je što je u Švajcarskoj završio gimnazijsko školovanje, i savršeno znao francuski jezik. Kada se ukazalo upražnjeno mesto profesora na Univerzitetu, u Ženevu su ga pozvali njegovi kolege matematičari, pre svih, Ram (Georges De Rahm), Karamatin poznanik iz školskih dana, i Fer (Henri Fehr), jedan od osnivača časopisa L'Enseignement Mathématique, čiji će član redakcionog odbora i direktor postati i Karamata, i sa kojim se upoznao još preko Mihaila Petrovića. Na Univerzitetu u Ženevi je

[195]Karakteristika je datirana sa 6. mjem 1948. godine, a potpisao ju je načelnik personalnog odeljenja Nada Đekić.

[196]Isto s.110

[197]Profesoru Draganu Trifunoviću je Milovan Đilas u razgovoru krajem 1992. godine rekao da je on direktno naredio da se Karamati izda pasoš. "Kod mene je početkom 1949. godine bio jedan matematičar bledog lica i krupnih plavih očiju. Bio je iz Zemuna. Čuo sam da je svetom poznat naučnik, akademik. Koliko se sećam, javio sam da mu se izda pasoš." (D.Trifunović [45], s.110)

držao predavanja iz diferencijalnog i integralnog računa i mehanike, kao i kurseve iz analize čiji su se sadržaji menjali. Odlaskom u Ženevu, Karamata nije prekinuo i rad sa svojim učenicima. Do 1958. godine je redovno dolazio u Beograd i još intenzivnije radio sa mladim talentima. Sa njima je najčešće radio grupno na Matematičkom institutu SAN, ali ponekad i individualno, obično u hotelu Mažestik.[198] Jednom takvom prilikom Karamata je nagovestio vezu između postojanja Frulanijevog integrala i pravilne promenljivosti funkcija. I još pre njegovog sledećeg dolaska u Beograd ta veza je pronađena u obliku nove karakterizacije sporo promenljivih funkcija. Taj rezultat je objavljen u zajedničkom radu sa S. Aljančićem *Pravilno promenljive funkcije i Frulanijev integral.*[199] U tom radu je ukazano na tesnu vezu između Frulanijevog integrala oblika

$$\int_0^\infty \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt, \qquad a>0,\ b>0.$$

i klase pravilno promenljivih funkcija.[200] Iyengar je 1940. godine[201] pokazao da je zbirljivost–C potreban i dovoljan uslov za egzistenciju Frulanijevog integrala za svako pozitivno a i b, što se u suštini svodi na sledeći stav:

Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna u svakom konačnom intervalu (α,β), $\alpha>0$. Potreban i dovoljan uslov da postoji granična vrednost

$$J(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x=\infty}\int_x^{\lambda x}\frac{f(t)}{t}dt$$

[198] M.Tomić, S.Aljančić [45], s. 1-6.

[199] Zbornik radova Matematičkog Instituta SANU Beograd, 50, 1956, s. 239-248.

[200] Još je Koši (Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)) 1823. godine pokazao da integral tog oblika postoji kada je funkcija $f(x)$ integrabilna u svakom konačnom intervalu koji ne sadrži koordinatni početak i ako granične vrednosti $\lim_{x=+0} f(x)$ i $\lim_{x=\infty} f(x)$ postoje.

[201] K.S.K. Iyengar, *On Frullani Integrals*, Journal of Indian Mathematical Society, (2), 4, 1940, s.145-150.

za svako $\lambda > 0$ je da $f(x)$ bude zbirljiva–C kada $x \to \infty$. Ako sa L označimo njen C–zbir, tada je $J(\lambda) = L \log \lambda$.

Aljančić i Karamata su pokazali da ovaj Iyengarov stav samo specijalan slučaj osnovnih rezultata iz teorije pravilno promenljivih funkcija, jer se u njemu radi o pravilno promenljivim funkcijama specijalne strukture. Naime, ako se uzme da je

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \log p(x),$$

tada je i

$$\int_x^{\lambda x} \frac{f(t)}{t} dt = \log \frac{p(\lambda x)}{p(x)}$$

Poslednji integral, iz definicije i osobina pravilno promenljivih funkcija, konvergira za $\lambda > 0$ kada $x \to \infty$ ako i samo ako je funkcija $p(x)$, koja ovde ima specijalnu strukturu, pravilno promenljiva u tački $x = \infty$. Tako $J(\lambda)$ iz Iyengarovog stava postaje

$$J(\lambda) = \alpha \log \lambda,$$

gde je α indeks regularnosti pravilno promenljive funkcije $p(x)$ koji je jednak C–zbiru funkcije $f(x)$ kad $x \to \infty$.

U toku svojih dolazaka u Beograd držao je i mnogobrojne specijalne kurseve na Matematičkom institutu SAN: Račun torzora, Opšti postupci zbirljivosti Furijeovih redova, Sporo promenljive funkcije i primena.

Na poziv dr Branka Horvata, tadašnjeg direktora Ekonomskog instituta u Beogradu, zajedno sa Branislavom Ivanovićem i S.Aljančićem je početkom 60-tih godina organizovao i vodio kurseve iz integralnog računa i teorije mere, verovatnoće i opšte matematike, sa idejom da se ekonomske nauke što više matematizuju.

Takođe je bio i mentor pri izradi doktorskih disertacija Miodraga Tomića (*O trigonometrijskim zbirovima*, 1950. godine), Slobodana

Aljančića (*O asimptotskom razvijanju neapsolutno konvergentnih linearnih operacija*, 1953), Ranka Bojanića (*Asimptotska rešenja linearmih diferencijalnih jednačina*, 1953), kao i član komisije za ocenu teze Vladete Vučkovića (*O nekim stavovima Tauberove prirode sa proširenim uslovima konvergencije*, 1953), Bogoljuba Stankovića (*O jednoj klasi singularnih integralnih jednačina*, 1954), Šefkije Raljevića (*O izvesnim klasama polinoma i rasporedu njihovih nula*, 1954), Bogdana Bajšanskog (*Opšta klasa postupaka zbirljivosti Ojler-Borelovog tipa i njihova primena na analitičko produženje*, 1956). Zajedno sa Nikolom Saltikovim i Tadijom Pejovićem je 24. februara 1950. godine Savetu Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu podneo referat na osnovu koga je Miloš Radojčić izabran u zvanje vanrednog profesora za predmet Geometrija pri katedri Matematike istog fakulteta, a 29. septembra 1959. godine je u referatu napisanom sa Radivojem Kašaninom, Radojčića predložio za dopisnog člana SAN.

Odlaskom na Univerzitet u Ženevi, Karamata je intenzivirao i svoja putovanja na kongrese i naučne skupove. Održao je veliki broj predavanja u SAD, Francuskoj, Rumuniji, Mađarskoj, SSSR i svuda gde je odlazio bio je rado viđen gost, priman je sa poštovanjem koje je i zasluživao i uvek je imao zapažena izlaganja. Takođe je više puta boravio kao gostujući istraživač u Matematičkom istraživačkom centru u Medisonu (Mathematical Research Center in Madison, Wisconsin, USA) i to od decembra 1960. godine do avgusta 1961. godine i od jula do septembra 1962, 1963 i 1964. godine. Kao rezultati istraživanja dobijeni tokom tih boravaka štampana je serija radova koji su uglavnom nastali u saradnji sa Rankom Bojanićem i Bogdanom Bajšanskim, matematičarima koji su krajem pedesetih godina napustili Jugoslaviju i otišli u na Državni univerzitet u Ohaju (Columbus), i sa Monikom Vjmj njegovom vernom saradnicom iz Ženeve, koja se krajem šezdesetih godina pridružila Bojaniću i Bajšanskom na Univerzitetu u

Ohaju.[202]

[202]Radi se o sledećim radovima koji su štampani u okviru Technical Summary Report: *On the distribution of intersection of diagonals in regular polygones*, No.281, *A contribution to the asymptotic analysis in lattice-ordered groups*, No.329, *Some theorems concerning slowly varying functions*, No.369, *On slowly varying functions and asymptotic behavior*, No.432, *On a class of functions of regular asymptotic behavior*, No.436, *Regularly varying functions and the principle of equicontinuity*, No.517 i *On the degree of approximation of continuous functions by positive linear operators*, No.521.

Naučni rad u posleratnom periodu

Karakteristika naučnog rada u posleratnom periodu života i rada Jovana Karamate je, pre svega, veća raznovrsnost oblasti matematike kojima se bavio. Imao je i dalje radove iz klasične analize - teorije funkcija i redova, ali i iz teorije brojeva, matematičke verovatnoće, mehanike, geometrije i istorije matematike. Pored već ranije spomenutih radova i razultata, posebno je interesantan rad *O Cantorovim brojnim sistemima*[203] u kome je nadopunio i na osnovu toga preglednije dokazao Kantorove (G. Cantor) stavove o razvijanju realnih brojeva u redove oblika

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{q_1 q_2 \cdots q_n},$$

tako da su "decimale" d_n celi brojevi koji zadovoljavaju uslov

$$0 \leq d_n \leq q_n - 1, \quad \text{za svako} \quad n \in \mathcal{N}$$

i

$$d_n > 0, \quad \text{za beskonačno mnogo} \quad n \in \mathcal{N},$$

pri čemu niz prirodnih brojeva $\{q_n\}$ zadovoljava jedini uslov

$$q_n \geq 2, \quad \text{za svako} \quad n \in N.$$

[203]Zbornik radova SANU LXIX, Matematički institut knj. 8, 1960, s.1-8.

Ovaj stav je, Kako kaže Karamata, jednostavna posledica činjenice da je niz decimala $\{d_n\}$ dat izrazima

$$d_n = [q_1 q_2 ... q_n t]^\star - q_n [q_1 q_2 ... q_{n-1} t]^\star, \quad n \in \mathcal{N},$$

gde je

$$[x]^\star = \text{najveći ceo broj koji je} < x.$$

Da bi se to pokazalo dovoljno je staviti

$$t_n \stackrel{\text{def}}{=} q_1 q_2 ... q_{n-1} t - [q_1 q_2 ... q_{n-1} t]^\star, \; n = 2, 3, ..., \; t_1 = t.$$

Pored ovog stava Karamata je formulisao stav:

Neka je $C \subseteq \mathcal{Q}$, takav da $a/b \in C$ ako je $(a, b) = 1$ i ako

$$\exists k \in \mathcal{N} \text{ takvo da } b \text{ deli } q_1 q_2 ... q_{n-1}, \forall n \geq k.$$

Da bi zbir t reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{q_1 q_2 ... q_n}$ bio broj skupa C, tj. da bi $t \in C$, $0 < t \leq 1$, potrebno je i dovoljno da

$$\exists k \in \mathcal{N} \text{ takvo da je } d_n = q_n - 1, \; \forall n \geq k,$$

koji je nešto precizniji od u njemu sadržanog Kantorovog stava:

Ako niz prirodnih brojeva $\{q_n\}$ zadovoljava uslov $q_n \geq 2$, $\forall n \in \mathcal{N}$ i uslov

$$\forall k \in \mathcal{N}, \exists n_k \in \mathcal{N}, \text{takvo da } k \text{ deli } q_1 q_2 ... q_n, \; \forall n \geq n_k,$$

tada, da bi $t \in \mathcal{Q}$, potrebno je i dovoljno da

$$\exists n_0 \in \mathcal{N} \text{ takvo da je } \quad d_n = q_n - 1, \; \forall n \geq n_0,$$

jer iz uslova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{q_1 q_2 ... q_n}$ sledi $C = \mathcal{Q}$.

Na kraju je Karamata pokazao da postoji potpuna analogija između razvijanja racionalnih brojeva u redove oblika $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{q_1 q_2 ... q_n}$ i u periodične

decimalne razlomke, ako se pri tome pravilo koje važi za decimalne razlomke formuliše na sledeći način:

Svaki racionalni broj $t = \frac{a}{b}, 0 < a < b, (a, b) = 1$ ili $t = a = b = 1$ može se jednoznačno razviti u beskonačan periodičan decimalan razlomak oblika

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}, \quad d_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, \ \forall n \in \mathcal{N};$$

ako se sa l označi dužina periode a sa $k - 1$ broj cifara koje prethode periodu, tada su k i l najmanji prirodni brojevi takvi da

$$b \text{ deli } 10^{k-1}(10^l - 1);$$

najzad, $\exists t' \in \mathcal{Q}$ takvo da je

$$d_n 10^{l-1} + d_{n+1} 10^{l-2} + ... + d_{n+l-1} = t'(10^l - 1), \ \forall n \geq k.$$

Navešćemo i jedan rad u kome je istaknuta uloga kompleksnog broja i vektorskog proizvoda u planimetriji. To je rad *Neke primene kompleksnog broja u elementarnoj geometriji*[204] u kome Karamata konstatuje da u planimetriji ulogu vektora može preuzeti kompleksan broj pri čemu se u postavljanju i rešavanju pojedinih problema javlja proizvod $\overline{a}b$ gde je $\overline{a}$ konjugovani broj od a a a i b kompleksni brojevi kao slobodni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Pri računu sa kompleksnim brojevima stalno se javljaju realni deo A i imaginarni deo B proizvoda $\overline{a}b$ koje Karamata, koristeći geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva a i b, izražava sa $A = r_1 r_2 \cos\alpha$ i $B = r_1 r_2 \sin\alpha$, odakle se vidi da je A skalarni proizvod a B vektorski proizvod (smatran kao skalar) vektora $\vec{a}$ u $\vec{b}$. Da bi ukazao na geometrijski smisao tih izraza, Karamata ih obeležava sa

$$A = (a \perp b) \quad \text{odnosno} \quad B = (a \mid b),$$

[204]Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od N.R. Makedonija, kn. I, Skopje, 1950, s.55-81. O istome je Karamata pisao i u univerzitetskom udžbeniku *Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju.*

i naziva "ortogonalan proizvod" i "paralelan proizvod".

Pomoću ova dva simbola smatranih proizvodima, Karamata interpretira neke probleme planimetrije koji se odnose na paralelizam i ortogonalnost, i pokazuje kako se pojedine geometrijske operacije mogu neposredno algebarski izražavati i same računske operacije preglednije izvoditi. Da bi istakao ulogu ovih proizvoda, Karamata navodi niz obrazaca u kojima se oni javljaju i ukazuje na njihovu ulogu pri izvođenju i algebarskoj interpretaciji specijalnih slučajeva, kada se prava nedogleda nalazi u beskonačnosti, dva osnovna stava projektivne geometrije – Papos-Paskalovog i Dezargovog, kao i Hesenbergovog stava da se Dezargov stav može izvesti iz Papos-Paskalovog oslanjajući se jedino na aksiome veza (incidencije). Ilustrovaćemo primenu paralelnog proizvoda u dokazu Papos-Paskalovog stava kojeg je Karamata formulisao na sledeći način:

Ako se tačke A, B' i C nalaze na jednoj pravoj, a tačke A', B i C' na drugoj, i ako je

$$AB \parallel A'B' \quad \text{i} \quad BC \parallel B'C'$$

tada je i

$$AC' \parallel A'C.$$

Karamata je u dokazu ovako formulisanog stava, radi preglednosti, posmatrao dva četvorougla, taj stav sveo na sledeće tvrđenje:

Ako je

$$\vec{a} \parallel \vec{a}', \quad \vec{b} \parallel \vec{b}', \quad \vec{c} \parallel \vec{c}',$$

i

$$\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{b}' + \vec{c}', \quad \vec{b} + \vec{c} \parallel \vec{a}' + \vec{b}',$$

tada je

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \parallel \vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}',$$

tj. iz paralelnosti tri homologne strane i nehomolognih dijagonala sledi paralelnost četvrtih strana posmatranih četvorouglova.

Izražavajući ovaj stav preko paralelnog proizvoda i znajući da je

$$(a \mid b) = 0 \quad \text{ekvivalentno sa} \quad \vec{a} \parallel \vec{b},$$

Karamata konstatuje da je za dokaz ovog stava potrebno pokazati da ako je

$$(a \mid a') = 0, \quad (b \mid b') = 0, \quad (c \mid c') = 0$$

i

$$(a + b \mid b' + c') = 0, \quad (b + c \mid a' + b') = 0,$$

tada je

$$(a + b + c \mid a' + b' + c') = 0.$$

U dokazu je pošao od onoga što treba da dokaže tj. od $(a + b + c \mid a' + b' + c')$, i koristeći samo osobinu distributivnosti paralelnog proizvoda i pretpostavke, dobio

$$\begin{aligned}
(a + b + c \mid a' + b' + c') &= (a \mid a') + (a \mid b') + (a \mid c') + \\
&\quad (b \mid a') + (b \mid b') + (b \mid c') + \\
&\quad (c \mid a') + (c \mid b') + (c \mid c') = \\
&= ((a \mid b') + (a \mid c') + (b \mid b') + (b \mid c')) + \\
&\quad ((b \mid a') + (b \mid b') + (c \mid a') + (c \mid b')) = \\
&= (a + b' \mid b' + c') + (b + c \mid a' + b') = 0
\end{aligned}$$

odakle direktno sledi tvrđenje Papos-Paskalovog stava.[205]

Da bi dokazao opšti slučaj Papos-Paskalovog stava, Karamata uopštava paralelni proizvod i uvodi simbolički proizvod $\Phi = \Phi(AB, A'B')$, za koji važi određen analogon distributivnog zakona i adekvatni smisao

[205] A.Nikolić [45].

broja 0. Napomenućemo još da je Karamata u radu *Eine elementare Herleitung des Desarguesschen Satzes aus dem Satze von Pappos-Pascal*[206] dao planimetrijski dokaz Dezargovog stava uz trostruku primenu Papus-Paskalovog stava.

Iz ovih, manje poznatih radova se vidi, ne samo kolika je bila Karamatina originalnost pristupa različitoj problematici, već i široko matematičko obrazovanje i svestrani matematički interes. Proučavajući klasične i već istorijske rezultate najvećih svetskih matematičara, u njima je nalazio mogućnosti za neke dopune, proširenja ili makar samo za uprošćavanje i "ulepšavanje" njihovih dokaza. Geometrijski radovi, takođe, na najbolji način potvrđuju jasan Karamatin metodološki pristup matematičkim dokazima. Naime, polazeći od specijalnog slučaja teoreme koju dokazuje, Karamata uopštava one elemente koje koristi u dokazu, i na taj način dokazuje i opšti slučaj.

[206]Elemente der Mathematik, 5, 1950, s.9-10.

Poslednje godine života

U proleće 1966. godine, na inicijativu akademika Jovana Karamate, Radivoja Kašanina i Miodraga Tomića datoj početkom 1965. godine, u Beograd je došao Kazimir Kuratovski (Kazimir Kuratowski), redovni član i podpredsednik Poljske akademije nauka.[207] Poseti SANU, 13. aprila 1966. godine, prisustvovali su, pored Karamate, M. Tomić i S. Aljančić. To je bio i poslednji boravak Jovana Karamate u Beogradu.

Poslednjih godina svog života Karamata je putovao od Ženeve do Beograda, od Pariza do Čikaga. Išao je od nekadašnjih drugova, prijatelja i učenika do novih poznanstava. Najzad, kako sam priznaje, lutao je i po matematici.[208] Umoran i bolestan, Akademik Jovan Karamata je umro u Ženevi 14. avgusta 1967. godine, kada je trebao ponovo da krene na put u SAD, gde je planirao da održi niz predavanja na nekoliko univerziteta. Kremirani ostaci su preneti u Jugoslaviju i počivaju na Zemunskom groblju.

Na spisku preminulih članova Akademije na strani 35 Godišnjaka SANU u knjizi LXXIV za 1967. godinu stoji:

Jovan Karamata, matematičar (Zagreb 1. februar 1902 - Ženeva 14. avgust 1967). Profesor Univerziteta u Ženevi. Dopisni član Akademije

[207] Godišnjak SANU, LXXIII, 1966.

[208] M.Tomić [45], s.13.

od 7. marta 1939. godine, redovni član od 18. marta 1948. godne.

22. septembra 1967. godine na 5. skupu OPMN SAN minutom ćutanja je odana pošta preminulom akademiku, a 18. novembra 1967. godine je održana komemorativna sednica posvećena uspomeni na Jovana Karamatu. Prigodni govor je održao Miodrag Tomić, tadašnji sekretar Odeljenja prirodno-matematičkih nauka.

Krajem decembra je data u štampu Spomenica.

Jovanu Karamati, najjačem srpskom matematičaru, svetsku slavu su doneli njegovi originalni matematički rezultati, ali za istoriju naše matematike jednaku važnost imaju poznata Karamatina škola matematike i njegovi đaci, kasnije i ugledni matematičari-saradnici. Čini se da i danas, više od 30 godina od smrti Jovana Karamate i više od 40 godina od napuštanja zemlje i odlaska u Ženevu, njegovo delo i njegovi đaci daju specifičan pečat razvoju naše vrhunske matematike.

Na kraju dajemo jedno lepo i sažeto viđenje naučnog rada Jovana Karamate koje je u *U istoriji razvoja nauke u SANU*[209] izneo akademik Miodrag Tomić. On piše:

Naučni rezultati iz matematike uglavnom nemaju trajnu vrednost. Kasnije dolaze novi rezultati koji obuhvataju prethodne ili sam problem nije više od interesa. Neke oblasti matematike otišle su dalje u svom razvitku, jer se nauka brzo razvija, dok matematičar ne može više da raste. Stručnjaci čiji su radovi bili često citirani, koji su bili poznata imena u svojoj oblasti vremenom izlaze iz toka naučnih zbivanja. Ipak svi rezultati ne iščezavaju, jer tada nauke ne bi ni bilo. Ostaju neki kristali koji se ne rastvaraju, oko kojih se gradi dalje nauka i koji donose stvarni napredak u nauci. To su rezultati od trajne naučne vrednosti. Ideal svakog matematičara je da postigne bar jedan takav rezultat. To

[209] *Matematičke nauke, Sto godina SANU*, knj. 1, Beograd, 1989, s.27-28.

je pošlo za rukom Jovanu Karamati. Dva njegova rada iz tridesetih godina su danas poznatija nego u doba svog postanka. To je njegov dokaz Abelovog inverznog stava odnosno nov dokaz Hardi-Litlvudovog stava i njegova teorija sporo promenljivih funkcija. Klasična matematička analiza kod nas, koju je započeo još D. Nešić, na kojoj je delom radio i M. Petrović, dostiže svoj vrhunac sa Karamatom, i to u vreme kad je ona u matematičkom svetu bila na glasu. Karamata je bio đak M. Petrovića, ali je naučno radio sve suprotno od učitelja. Radio je skoro isključivo u jednoj oblasti. Francuski đak i po maturi i po studijama u inostranstvu, on je pripadao pre nemačkoj i engleskoj nego francuskoj školi. Iako je bio plodan pisac, mnogo je pazio na formu, stil naučnog iskaza i nije posmatrao probleme koje nije mogao da savlada. Štaviše, on nije ni tražio probleme, a nove ideje je posmatrao kao neostvarene želje. Ali ono što je uradio niko više nije morao ni mogao doterivati. Njegovo naučno otkriće - kako ga je nazvao R. Šmid - nov dokaz Hardi-Litlvudovog stava, ušao je u sve udžbenike i monografije iz teorije redova. Veliki američki matematičar, tvorac kibernetike N. Viner dao je opštu teoriju inverznih stavova koja sadrži i Hardi-Litlvudov stav, ali svi i dalje koriste Karamatin dokaz. Uopštenje toga stava sa tzv. ostatkom, koji su dali Frojd, Korevar i Viland, koriste Karamatinu ideju za dokaz. I zato nije čudo što je redakcija časopisa Mathematische Zeitschrift povodom 60 godina njegovog izlaženja, u svom izboru 50 najznačajnijih rezultata između nekoliko hiljada objavljenih priloga navela i taj rad. Možda još lepši primer njegovog naučnog uspeha predstavlja njegova teorija sporo promenljivih, odnosno pravilno promenljivih, funkcija. Reč teorija ne potiče od njega, nju su izmislili strani autori posle njegove smrti. Prvobitno zamišljena sa jedinim ciljem da uopšti Hardi-Litlvudov stav, bez nekih naročitih ambicija, objavljena prvi put u jednom beznačajnom rumunskom časopisu, ona je tek posle njegove smrti doživela potpuni uspeh. Ali ona je već u svojoj prvoj verziji bila potpuno izgrađena. Mnogo godina kasnije ušla je u mnoge grane anal-

ize. Ipak, njen pravi značaj se pokazao u računu verovatnoće. Poznati američki naučnik V. Feler posvetio je čitavu glavu, u svojoj obimnoj monografiji, sporo promenljivoj funkciji i od tada ona se stalno izvodi u brojnim problemima računa verovatnoće tzv. graničnim teoremama, Markovljevim i specijalnim procesima. Sigurno je Karamata i danas mnogo citiran, jer i svako ko u računu verovatnoće upotrebi izraz $L(t)$ za sporo promenljivu funkciju ne pozivajući se na njegovo ime u stvari citira Karamatu, jer sve osobine koje se koriste potiču iz njegovog rada. To sigurno nisu i jedini rezultati po kojima je on poznat. Veliki broj radova je objavio i u raznim brojevima Glasa Akademije nauka. Glas CXLIII (1931) sadrži prve nagoveštaje ovih značajnih rezultata. Kako je mnogo publikovao u inostranstvu, on je imao tu retku sreću da bude poznatiji tamo nego u svojoj zemlji, u kojoj se ipak razvio najznačajniji period njegovog stvaralačkog rada u vremenu od 1926. do 1938. godine.

Prilozi

Prilog A

Objavljeni naučni radovi Jovana Karamate

Skraćenice referativnih časopisa u kojima su referisani Karamatini radovi:

FdM – Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

Zbl – Zentralblatt fúr Mathematik und ihre Grenzgebiete

MR – Mathematical Reviews

RŽ – Referativni žurnal

Zapis [....] označava Karamatine samocitirane radove.

1. O izračunavanju granica vezanih za dvostruke nizove brojeva. Sur l'évaluation des limites se rattachant aux suites f doubles entrées. GLAS de l'Academie serbe des sciences, Beograd, 120 (55), 1926, s. 75-101. Na srpskom, rezime na francuskom.
   Prikazano na 5. skupu APN 14.decembra 1925. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović 1.februara 1926. na 7. skupu APN.
   15 citiranih radova: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.
   FdM. J.Karamata, B.52, s. 222.

2. O jednoj vrsti granica sličnih određenim integralima. Doktorska teza. Beograd 1926. s. 65. Uvod, 5 odeljaka i dve primene. Na srpskom.

Primljeno 9.marta 1926 prema referatu M.Petrovića, N. Saltikova i A. Bilimovića. Odbranjeno 26.marta 1926. godine.
22 citirana rada: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.
FdM. J.Karamata, B.52, s. 222.

3. Sur certaines limites rattachées aux integrales de Stieltjes. C.R. Acad. Sci.Paris, 182, 1926, s. 833-835. Na francuskom.
Prikazano 29.marta 1926.
FdM. H.Raff, B.52, s. 248.

4. Relationes entre les fonctions de répartition de deux suites dépendant l'une de l'autre. C.R.Acad.Sci.Paris, 183, 1926, s. 726-728. Na francuskom.
Prikazano 18. oktobra (3. novembra) 1926.
FdM. H.Raff, B.52, s. 248.

5. O donjoj granici modula nula analitičkih funkcija. Sur une limite inférieure du module des zéros des fonctions analytiques. GLAS SKA, Beograd, 127(58), 1927, s. 101-120. Na srpskom, rezime na francuskom.
Prikazano na 7. skupu APN 1.novembra 1926. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović 20.decembra 1926 na 8. skupu APN.
3 citirana rada: 24, 25, 26.
Fdm. J.Karamata, B.54, s. 339.

6. O jednom nizu racionalnih funkcija i njihovoj ulozi pri razvijanju analitičkih funkcija. Sur une suite de fonctions rationnelles et les développements suivant ces fonctions. (Karamata predložio naslov O funkcijama predstavljenim jednom klasom određenih integrala). GLAS SKA, Beograd, 128(59),1927, s. 47-79. Na srpskom, rezime na francuskom.

Prikazano na 9. skupu APN 21.februara 1927. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović 10.juna 1927. na 11. skupu APN. (Karamata prdložio naslov O funkcijama predstavljenim jednom klasom određenih integrala).
8 citiranih radova: 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34.
FdM. J.Karamata, B.54, s. 360.

7. O ekvivalentnim nizovima. Sur les suites équivalentes. RAD JAZU, Zagreb 1928, knj.234, sv.71, s. 223-245. Na srpskom. Rezime na francuskom u Izviješća o raspravama matematičko prirodoslovnog razreda JAZU sv.22, s. 27-34.
Primljeno 3.jula 1927.
3 citirana rada: [2,3,4].
FdM. G.Feigel, B.53, s. 245. W.Žardecki, B.57, s. 1395.

8. Une question de minimum relative aux ensembles et son rapport avec l'analyse. Comptes Rendus du 52e congrès de l'A.F.A.S., La Rochelle, 1928. 2 strane. Na francuskom.
FdM. H.Grunsky, B.57, s. 1416.

9. Sur la moyenne arithmétique des coefficients d'une série de Taylor. Mathematica (Cluj), 1, 1929, s. 99-106. Na francuskom.
Primljeno 20.dec.1928.
1 citiran rad: 35.
FdM. E.Rengel, B.55, s. 763-764.

10. Sommabilité et fonctionnelles linéaires. C.R. du 1e congrès des mathématiciens des pays slaves, 1929, Varsovie, 1930, s. 221-228. Na francuskom.
1 citiran rad: 53.
FdM. G.Feigl, B.56, s. 205-206.

11. Asymptotes des courbes planes définies comme enveloppes d'un système de droites. C.R. du 53e congrès de l'A.F.A.S., Le Havre 1929. 3 strane. Na francuskom.
FdM. B.57, s. 866, (navedeno).

12. Sur le principe de maximum des fonctions analytiques et son application au théorème de d'Alambert. C.R. du 54e congrès de l'A.F.A.S., Alger, 1930, s. 29-31. Na francuskom.
FdM. H.Wielandt, B.57, s. 1349.

13. Sur une mode de croissance régulière des fonctions. Mathematica (Cluj) vol.4, 1930, s. 38-53. Na francuskom.
5 citiranih radova: 7, 35, 54, 55, 56.
FdM. H.Raff, B.56, s. 907.

14. Sur certains "Taubrian theorems" de M.M. Hardy et Littlewood. C.R. du 1e congrès mathématiciens roumains, 1929, Cluj. Mathematica (Cluj) 3, 1930, s. 33-48. Na francuskom.
Primljeno 30.januara 1930.
3 citirana rada: 35, 44, 52.
FdM. H.Raff, B.56, s. 907-908.

15. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrung des Abelschen Stätigkeitssatzes. Mathematische Zeitschrift, 32, t.2, 1930, s. 319-320. Na nemačkom.
Primljeno 12.marta 1930.
1 citiran rad: 57.
FdM. G.Doetsch, B.56, s. 210.

16. Directions des tangentes en relation avec l'aire de surface. C.R. du 55e congrès de l'A.F.A.S., Nancy, 1931, s. 44-46. Na francuskom.
Izloženo 20.jula 1931. Datirano 10.juni 1931.
1 citiran rad: 58.

Zbl. W.Fenchel, B.6, s. 17
FdM. H.Pietsch, B.57, s. 862.

17. O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova, I deo. Théorèmes inverses de sommabilité I. GLAS SKA, Beograd, 143, knj.70, 1931, s. 1-24. Na srpskom, rezime na francuskom.
Prikazano na 8. skupu APN 21.jan. 1929. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović na 1. skupu APN 1.aprila 1929. (Karamatin naslov O jednom Landauovom stavu)
14 citiranih radova: 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48.
FdM. H.Wielandt, B.57, s. 1378.

18. O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova, II deo. Théorèmes inverses de sommabilité II. GLAS SKA Beograd, 143, knj.70, 1931, s. 121-146. Na srpskom, rezime na francuskom.
Prikazano na 1.skupu APN 1.apr.1929. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović 29.aprila 1929. Predložili da se primi za štampanje ali "da predhodno pisac rasprave postupi po napomenama u referatu". Primljeno je na 3. skupu APN 11.juna 1930.
7 citiranih radova: 35, 46, 47, 49, 50, 51, [17].
FdM. H.Wielandt, B.57. s. 1378.

19. O zbirljivosti i konvergenciji redova. Sommablité et convergence. GLAS SKA Beograd, 146 (72), 1931, s. 59-67. Na srpskom, rezime na francuskom.
Prikazano na 3. skupu APN 11.juna 1930. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović na 4. skupu APN. 20.oktobra 1930.
2 citirana rada: 59, [27].

20. O uopštenjima Mercerovog stava. Sur un théorème de Mercer et ses généralisations. GLAS SKA Beograd, 146 (72), 1931, s. 87-120. Na srpskom, rezime na francuskom.

Prikazano na 2.skupu APN 23.marta 1931. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović na 5.skupu APN 19.okt.1931 (Karamatin naslov Jedna relacija iz teorije brojeva u vezi sa linearnim funkcijama).
23 citirana rada (20, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, [17,18,27,29].

21. Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze. Matheatische Zeitschrift 33, t.2, 1931, s. 294-299. Na nemačkom.
Primljeno 25.juna 1930.
9 citiranih radova: 35, 44, 51, 55, 78, 79, 80, 81, [13].
Zbl. R.Schmidt, B.1, s. 18.
FdM. K.Knopp, B.57, s. 261-262.

22. Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 164, t.1, 1931, s. 27-39. Na nemačkom.
Primljeno 13.avgusta 1930.
10 citiranih radova: 35, 47, 56, 80, 81, 82, 83, [13,21].
Zbl. R.Schmidt, B.1, s. 273.
FdM. K.Müller, B.57, s. 262.

23. Sur le rapport entre les convergences d'une suite de fonctions et leurs moments avec application à l'inversion des procédés de sommabilité. Studia Mathematica Lwow,3,1931, s. 68-76. Na francuskom.
Primljeno 22.jan.1931. Opaska dodata 10.aprla 1931.
5 citiranih radova: 35, 46, 53, [10,22].
Zbl. E.Hille, B.3, s. 305.
FdM. W.Žardecki, B.57, s. 1378, K.Knopp, B.59, s. 969.

24. Application de quelques théorèmes d'inversion à la sommabilité exponentielle. C.R. Acad. Sci. Paris, 193, 1931, s. 1156-1158.

Na francuskom.
Predstavljeno 23.novembra (7.decembra) 1931.
4 citirana rada: 57, 84, 85, 86).
Zbl. E.Hille, B.3, s. 305
FdM. H.Raff, B.57,s. 263-264.

25. Un théorème général d'inversion des procédés de sommabilité. Verhandlungen des Internationales mathematischen Kongres, Zürich, 1932, II, s. 147-149. Na francuskom.
FdM. B.58, s. 234, (navedeno).

26. Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant. 2e congrès des mathématiciens roumains, 1932, Turnu Severin. Mathematica (Cluj), 9, 1935, s.164-178. Na francuskom.
Primljeno 21.maja 1932.
5 citiranih radova: 73, 87, [13,14,36].
Zbl. E.Hille, B.13, s. 399.
FdM. H.Raff, B.61, s. 1096.

27. Quelques théorèmes d'inversion relatifs aux intégrales et aux séries (1er partie) Bulletin de mathematiques et de physique pure et appliqée de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 3, 1932, no.1, fasc.7, s. 5-14. Na francuskom.
Datirano 1.maj 1930, primljeno 16.maja.
3 citirana rada: 35, 39, 57.
Zbl. R.Schmidt, B.5, s. 101.
FdM. K.Knopp, B.58. s. 239-240.

28. Über einen Satz von Vijayaraghavan. Mathematische Zeitschrift, 34, t.5, 1932, s. 737-740. Na nemačkom.
Datirano 25.februar 1931, primljeno 28.februara

3 citirana rada: 47, [22,23].
Zbl. E.Hille, B.3, s. 391.
FdM. K.Knopp, B.58, s. 229.

29. Sur quelques inversions d'une proposition de Cauchy et leurs généralisations. Tôhoku Math.Journal, 36, 1932, s. 22-28. Na francuskom.
Datirano 26.juli 1931.
9 citiranih radova: 35, 40, 62, 63, 68, 70, 75, 77, 88.
Zbl. R.Schmidt, B.5, s. 202.
FdM. K.Knopp, B.58, s. 213-214.

30. Remarks on a theorem of D.V. Widder. Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 18, 1932, s. 406-408. Na engleskom.
Saopšteno 30.marta 1932.
3 citirana rada: 89, 90, [24].
Zbl. J.Karamata, B.4, s. 345.
FdM. G.Doetsch, B.58, s. 1120.

31. Raport entre les limites d'oscillations des procédés de sommation d'Abel et de Cesàro. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1, 1932, s. 145-148. Na francuskom.
Datirano 25.mart 1923.(?)
1 cit.rad: [9].
Zbl. R.Schmidt, B.5, s. 202.
FdM. K.Knopp, B.58, s. 218.

32. Sur une inégalité relative aux fonctions convexes. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1, 1932, s. 145-148. Na francuskom.
Datirano 13.maj 1932.
1+1(naknadno) citiran rad: 91, 92.

Zbl. W.Fenchel, B.5, s. 201.
FdM. W.Rogosinski B.58, s. 211.

33. Jedan stav o koeficijentima Tajlorovih redova sa primenom. Un théorème sur les coefficients des séries de Taylor. GLAS SKA Beograd, 154 (77), 1933, s. 79-91. Na srpskom. Rezime na francuskom u Bulletin de l'Académie serbe Beograd A 1, t.1, 1933, s. 85-89.
Datirano 16.oktobar 1932.
Prikazano na 4. skupu APN 7.novembra 1932. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović na 5. kupu APN. 26.decembra 1932.
1+1(naknadno) citiran rad: 87, 93.
Zbl. Mandelbrojt, B.8, s. 349.
FdM. T.Kaluza, B.59, s. 1024.

34. O prvom stavu srednjih vrednosti određenih integrala. Complément au premier théorème de la moyenne. GLAS SKA Beograd, 154 (77), 1933, s. 119-144. Na srpskom. Rezime na francuskom u Bulletin l'Académie serbe Beograd A 1, t.1, 1933, s. 97-106.
Prikazano na 6. skupu APN 16.januara 1933. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović na 7. skupu APN 6.februara 1933.
1 cit.rad: [4].
Zbl. W.Fenchel, B.8, s. 345.
FdM. G.Aumann, B.59, s. 981.

35. Quelques théorèmes de nature tauberienne. Studia mathematica (Lwow), 4, 1933, s. 4-7. Na francuskom.
Primljeno 8.juna 1932.
1 citiran rad: [23].
Zbl. E.Hille, B.8, s. 305.
FdM. K.Knopp, B.59, s. 969-970.

36. Sur une mode de croissance régulière. Théorèmes Fondamentaux. Bulletin de la Société mathématique de France, t.61, 1933, s. 55-62. Na francuskom.
3 citirana rada: 35, 55, 83.
Zbl. Blac, B.8, s. 8.
FdM. G.Aumann, B.59, s. 994.

37. Über die O-Inversionssätze der Limitierungsverfahren. Mathematische Zeitschrift, t.37, B.4, 1933, s. 582-588. Na nemačkom.
Datirano 23.okt.1932. Primljeno 4.Nov. 1932.
3 citirana rada: 94, [15,30].
Zbl. E.Hille, B.7, s. 245.
FdM. K.Knopp, B.59, s. 235.

38. Sur les théorèmes de nature tauberienne. C.R. Acad.Sci.Paris, 197, 1933, s. 888-890. Na francuskom.
Prikazano 31. jula (23. oktobra) 1933.
5 citiranih radova: 94, 95, 96, 97, [23].
Zbl. H.Heilbronn, B.7, s. 405.
FdM. W.Rogosinski, B.59, s. 276-277.

39. Einige weitere Konvergenzbedingungen der Inversionssätze der Limitierungsverfahren. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t.2, 1933, s. 1-16. Na nemačkom.
Datirano 16.juli 1933.
12 citiranih radova: 35, 40, 46, 51, 78, 97, [22,24,25,29,30,37].
Zbl. E.Hille, B.8, s. 349.
FdM. H.Raff, B.59, s. 970.

40. Lösung der Aufgabe 94 (Jb.t.40,1931,s. 46). Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung,t.43,sv.1-4, 1933, s. 4-5. Na nemačkom.
Rešenje primljeno 6.maja 1932.

41. Un aperçu sur les inversions des procédés des sommabilité. C.R. du 2e congrès des mathématiciens des pays slaves, 1934, Prague, 1935, s. 49-61. Na francuskom.
Zbl. R.Schmidt, B.11, s. 65.
FdM. H.Raff, B.61, s. 216-217.

42. O jednoj novoj inverziji Cesarovog načina zbirljivosti. Eine weitere Umkehrung des Cesàrochen Limitierungsverfahrens. GLAS SKA Beograd, 163 (80), 1934, s. 59-70. Na srpskom. Rezime na nemačkom u Bulletin l'Académie serbe Beograd A 1, t.2, 1935, s. 67-72.
Datirano 22.august 1933.
Prikazano na 4. skupu APN. 16.oktobra 1933. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović na 5. skupu APN. 7.dec.1933.
6 citiranih radova: 35, 39, 40, [17,18,24].
Zbl. E.Hille, B.12, s. 295.
FdM. K.Knopp, B.61, s. 1098.

43. Weiterführung der N. Wienerschen Methode. Mathematische Zeitschrift, t.38, B.5, 1934, s. 703-708. Na nemačkom.
Datirano 8.juli 1933. Primljeno 29.jula 1933.
4 citirana rada: 96, 97, 98, 99.
Zbl. H.Heilbronn, B.9, s. 117.
FdM. K.Knopp, B.60, s. 182.

44. Zu Fragen über nichtvertauschbare Grenzprozesse (mit H. Wendelin). Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t.3, 1934, s. 39-41. Na nemačkom.
1 citiran rad: 100.
Zbl. Murnaghan, B.11, s. 406.

45. Über einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t.3, 1934, s.

153-160. Na nemačkom.
Datirano 5.decembar 1934.
5 citiranih radova: 35, 41, 79, [22,37].
Zbl. E.Hille, B.11, s. 398.
FdM. H.Raff, B.60, s. 957.

46. Un théorème sur les intégrales trigonométriques. C.R. du 2e congrès des mathématiciens des pays slaves, 1934, Prague, 1935, s. 147-149. Na francuskom.
Zbl. B.11, s. 60, (napomena).

47. O izvesnom rasporedu elemenata nizova kompleksnih brojeva. Über eine Verteilung der Elemente komplexer Doppelfolgen. RAD JAZU, Zagreb 1935, knj.251, sv.78, s. 39-55. Na srpskom. Rezime na nemačkom u Izviješća o raspravama matematičko prirodoslovnog razreda sv.28. 1934, s. 70-75.
Primljeno 30.juna 1934.
5 citiranih radova: [1,2,3,4,7].
Zbl. W.W.Rogosinski, B.12, s. 104.
FdM. M.Golomb, B.60, s. 959, H.Pietsch, B.61, s. 1090.

48. Nekoliko stavova Tauberove prirode u odnosu na asimptotsko ponašanje integrala i redova. Quelques théorèmes de nature tauberienne relatifs aux intégrales et aux séries. GLAS SKA Beograd, 165 (81), 1935, s. 173-229. Na srpskom. Rezime na francuskom u Bulletin l'Académie serbe Beograd A 1, t.2, 1935, s. 169-205.
Prikazano na 3. skupu APN 22.oktobra 1934. Referisali M.Petrović i B.Gavrilović na 4. skupu APN. 25.decembra 1934.
Datirano 31. avgust 1934.
14 citiranih radova: 35, 40, 44, 46, 51, 57, 102, 239, 240, [13,22,29,36,39].
Zbl. E.Hille, B.12, s. 350.
FdM. H.Raff, B.61, s. 1097-1098.

49. Izražavanje dvo-periodičnih funkcija pomoću određenih integrala (sa M.Petrovićem). Représentation des fonctions doublement périodiques au moyen des intégrales définies. Avec M.Petrovitch. GLAS SKA Beograd, 165, knj.81, 1935, s. 137-152. Na srpskom. Rezime na francuskom u Bulletin l'Académie serbe Beograd A 1, t.2, 1935, s. 239-243.
Saopštio M.Petrović na 5. skupu APN 6.februara 1935.
2 citirana rada: 102, 103.
Zbl, W.Maier, B.12, s. 18.
Fdm, M.Krafft, B.61, s. 1177.

50. Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp. Mathematische Zeitschrift, t.40, B.3, 1935, s. 421-425. Na nemačkom.
Primljeno 20.aprila 1935.
5 citiranih radova: 35, 104, [18,22,36].
Zbl. W.Rogosinski, B.12, s. 295.
FdM. H.Raff, B.61, s. 217.

51. Bemerkung zur Note "Über einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren". Publictions mathématiques de l'Université de Belgrad, t.4, 1935, s. 181-184. Na nemačkom.
Datirano 1.decembar 1935.
2 citirana rada: [45,51].
Zbl. E.Hille, B.14, s. 300.
FdM. H.Raff, B.61, s. 1098.

52. Primedba na prethodni rad g. V. Avakumovića, sa obradom jedne klase funkcija koje se javljaju kod inverznih funkcija. Bemerkung über die vorstehende Arbeit des Herrn Avakumovic, mit näherer Betrachtung einer Klasse von Funktionen welche bei den Inversionssätzen vorkommen. RAD JAZU, Zagreb, 1936, knj.254, sv.79, s. 187-200. Na srpskom. Rezime na nemačkom

u Izvješća rasprava matematičko prirodoslvonog razreda JAZU, Zagreb, 1936, sv.29-30, s. 117-123.
Primljeno 6.maja 1935.
Zbl. E.Hille, B.15 s. 250.
FdM. K.Knopp, B.62, s. 224.

53. Über einige reihentheoretische Sätze. Mathematische Zeitschrift, t.41, sv.1, 1936, s. 67-74. Na nemačkom.
Primljeno 20.septembra 1935.
3 citirana rada: 105, [10,50].
Zbl. E.Hille, B.13, s. 398.
FdM. K.Knopp, B.62, s. 207-208.

54. Über einige Taubersche Sätze deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. (mit V. Avakumovic). Mathematische Zeitschrift, t.41, sv.3, 1936, s. 345-356. Na nemačkom.
Primljeno 14.januara 1936.
5 citiranih radova: 101, 106, 107, 108, [36].
Zbl. O.Szász, B.14, s. 299.
FdM. K.Knopp, B.62, s. 227.

55. Über einen Satz von H.Heilbronn und E.Landau. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t.5, 1936, s. 28-38. Na nemačkom.
3 citirana rada: 96, 97, 109.
Zbl. E.Hille, B.17, s. 394.
FdM. H.D.Kloosterman, B.62, s. 1171-1172.

56. Compléments au théorème d'Abel et de son inverse. Revue mathématique de l'Union interbalkanique, t.1, sv.2, Athenes 1936, s. 161-165. Na francuskom.
5 citiranih radova: 85, 110, 111, [27,61].

Zbl. E.Hille, B.16, s. 209.
FdM. H.Raff, B.63, s. 173.

57. Quelques moyens particuliers pour établir des théorèmes inverses des procédés de sommabilité. Revista de Ciencias, Universidad Mayor de San Marcos, Lima, Facultad de Ciencias Biologicas, Fisicas y Matematicas, t.38, sv.418, 1936, s. 155-160. Na francuskom.
7 citiranih radova: 81, 94, 96, 97, 112, [23,46].
Zbl. O.Szász, B.16, s. 160.
FdM. H.Raff, B.62, s. 1173.

58. Un théorème relatif aux sommabilités de la forme $\sigma \int_0^{1/\sigma} \psi(\sigma t)s(t)dt$.
Věstnik Král. Česé spol. nauk., II, 1936, (1937). Na francuskom.
Prikazano 11. novembra 1936.
Zbl. E.Hille, B.17, s. 394.
FdM. H.Raff, B.63 s. 174.

59. O proširenim aritmetičkim sredinama. Einige Sätze über die Rieszschen Mittel. GLAS SKA Beograd, 175 (86), 1937, s. 291-326. Na srpskom. Rezime na nemačkom u Bulletin l'Académie serbe Beograd A 1, t.4, 1938, s. 121-137.
Prikazano na 4.skupu APN 19.oktobra 1936. Referisali M.Petrović i N.Saltikov na 5. skupu APN.21.decembra 1936.
19 citiranih radova: 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 39, 51, 78, 73, [62].
Zbl. F.Lösch, B.19, s. 341.
FdM. W.Žardecki, B.63, s. 929.

60. Über allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren. C.R. du Congrés international des mathématiciens, 1936, Oslo, II, 1937, s. 116-117.

Pod istim naslovom opširniji rad će biti štampan u Hamburger Abhandlungen 12, 1937, s. 46-61. Vidi [65,66].
FdM. B.63, s. 176 (navedeno).

61. Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité. Actualités scientifiques et industrielles, 450, Hermann et Cie, Paris, 1937, 47 p. Na francuskom.
112 citiranih radova: 31, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 49, 50, 51, 65, 73, 78, 80, 81, 85, 94, 104, 110, 112, 113, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 204, 205, 212, 218, 237, 276, 286-338, [15,17,18,22,23,25,30,35,36,37,39,41,45,48,50,51,53,59,62,63,65,66].
Zbl. Ingham, B.17, s. 348.
FdM. H.Raff, B.63, s. 169-170.

62. Beziehungen zwischen der Oszillationsgrenzen einer Funktion und ihrer arithmetischen Mittel. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(43), 1937, s. 20-25. Na nemačkom.
Zbl. E.Hille, B.16, s. 395.
FdM. H.Raff, B.63, s. 174.

63. Ein Konvergensatz für trigonometrische Integrale. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 178, 1937, s. 29-33. Na nemačkom.
Zbl. E.Hille, B.17, s. 358.
FdM. V.Gartn, B.63, s. 219-220.

64. Un théorème sur le procédé de sommabilité de Borel. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t.6-7, 1937-38, s. 204-208. Na francuskom.
2 citirana rada: 161, [67].
Zbl. E.Kogbetliantz, B.19, s. 340.
FdM. H.Raff, B.64, s. 175.

65. Allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, t.12, sv.1, 1937, s. 48-63. Na nemačkom.
Rad iz 2 dela izloženih 24. i 27.juna 1936.
27 citiranih radova: 16, 35, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 73, 79, 94, 104, 110, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, [50,53,61].
Zbl. J.D.Tamarkin, B.16, s. 250.
FdM. H.Raff, B.63, s. 171-172.

66. O jednom opštem O-inverznom stavu. Über allgemeine O-Umkehrsätze. RAD JAZU, Zagreb, 1938, 261 (81), s. 1-22. Na srpskom. Rezime na nemačkom u Izvješća JAZU, 32, 1939, s. 1-9.
Primljeno na sednici Matematičko prirodoslovnog društva JAZU 9.decembra 1936. Glavni stavovi rada su izloženi u 1937-3 bez dokaza.
13 citiranih radova: 94, 110, 124, 125, 126, 127, 128, [37,48,50,53,61].
Zbl. Meyer-Konig, B.27, s. 303.
FdM. K.Knopp, B.64, s. 1004-1005, B.65, s. 1195.

67. Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande. Mathematische Zeitschrift, 44, 1938, s. 156-160. Na nemačkom.
Zbl. E.Hille, B.19, s. 113.
FdM. H.Raff, B.64, s. 270.

68. Quelques théorèmes sur les intégrales de Laplace-Abel. Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences, 40, 1938, s. 107-108. Na francuskom.
Zbl. V.Avakumović, B.20, s. 112.
FdM. H.Raff, B.64, s. 183.

69. Sur la sommabilité forte et la sommabilité absolue. Mathematica (Cluj), 15, 1939, s. 119-124. Na francuskom.
Zbl. V.G.Avakumović, B.21, s. 21.
FdM. H.Raff, B.65, s. 230.

70. Einige Sätze über iterierte Mittelbildungen. Proceedings of the Benares Mathematical Society (New Series), 1, 1939, s. 15-24. Na nemačkom.
MR. R.P.Agnew, V.2, s. 278.
FdM. B.65, s. 1194 (navedeno).

71. Über einen Taubrschen Satz im Dreikörperproblem. American Journal of Mathematics, 61, 1939,s. 769-770. Na nemačkom.
MR. E.Hille, V.1, s. 11.
Zbl. F.Lösch, B.21, s. 221.
FdM. P.Reisch, B.65, s. 239.

72. Über die Indexverschiebung beim Borelschen Limitierungsverfahren. Mathematische Zeitschrift, 45, 1939, s. 635-641. Na nemačkom.
MR. R.P.Agnew, V.1,s. 219.
Zbl. F.Lösch, B.22, s. 17.
FdM. K.Knopp, B.65, s. 230.

73. A note on convergence factors. Proceedings of the London Mathematical Society, 21, 1946, s. 162-166. Na engleskom.
MR. R.P.Agnew, V.8, s. 456.

74. Sur l'application des théorèmes de nature tauberienne a l'étude des valeurs asymptotiques des équations différentielles. Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe, 1, Beograd, 1947, s. 93-96. Na francuskom.
1 citiran rad: [48].

Zbl. Meyer-Konig, B.33, s. 274.
MR. P.Hartman, V.10, s. 455.

75. Sur le sommabilité de S.Bernstein et quelques procédés de sommation qui s'y rattachent. Recueil mathematique, Nouvelle serie, Moscou, 21(63), 1947, s. 13-24. Na francuskom.
Zbl.G.G.Lorentz, B.29, s. 208.
MR. W.W.Rogosinski, V.9, s. 140.

76. Sur certains sommes trigonométriques en rapport aux approximations diophantiennes. C.R. du 63e Congrès de l'A.F.A.S., Biarritz, 1947. Na francuskom.

77. Sur certaines inegalites relatives aux quotients et a la diference de $\int fg$ et $\int f \int g$. Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe, 2, Beograd, 1948, s. 131-145. Na francuskom.
Prikazano 10.aprila 1947.
9 citiranih radova: 7, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, [34].
Zbl. J.Aczél, B.33, s. 172.
MR. J.Aczél, V.10, s. 435.

78. Considérations géométriques relatives aux polynomes et séries trigonométriques. (Avec M.Tomić). Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe, 2, Beograd, 1948, s. 157-175. Na francuskom.
Saopšteno 19.novembra 1947. Ovi rezultati su bili pedmet Karamatinih predavanja u Lozani u toku 1947. godine.
2 citirana rada: 257, 258.
Zbl. Gy.-Sz.Nagy, B.34, s. 334.
MR. M.Marden, V.10, s. 452.

79. O nekim inverzijama Cesarova načina zbirljivosti višeg reda. Quelques théorèmes inverses relatifs aux procédés de sommabilité de Cesàro

et Riesz. GLAS SANU Beograd, 191(96), 1948, s. 1-37. Na srpskom. Rezime na francuskom u Publications de l'Inst. math. de l'Acad. serbe, 3, Beograd, 1950, s. 53-71.
Datirano 1.novembar 1939.
Prikazano na 4.skupu APN. 20.novembra 1939.
6 citiranih radova 162, 163, 164, 263, 264, [42].
MR. R.P.Agnew, V.12, s. 494, V.11, s. 98.

80. Razvoj i značaj teorije divergentnih redova u matematičkoj analizi. Sur le développement de la théorie des séries divergentes. Zbornik radova 1. kongesa matematičara i fizičara Jugoslavije, Bled, 1949, s. 3-23. Na srpskom, rezime na francuskom. Prikaz u Vesnik DMFS I 3-4, 1949, s. 83-103.
MR. V.13, s. 456 (navedeno).

81. Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesàroschen Limitierungsverfahren. Mathematische Zeitschrift, 52, 1949, s. 305-306. Na nemačkom.
Zbl. F.Lösch, B.34, s. 35.
MR. R.P.Agnew, V.12, s. 604.

82. Dodatak radu J.Hlitčijeva: O uzdužnim ukrućenjima pritisnute ploče. GLAS SANU Beograd, 195, odeljenje tehničkih nauka, knj.1, 1949, s. 19-36. Na srpskom.

83. O jednoj vrsti pravilne neprekidnosti sa primenom na Furijeove redove. Sur une notion de continuité régulière avec application aux séries de Fourier. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, USA, 1950, I, s. 416.

84. Sur le théorème tauberien de N. Wiener. Publications de l'Institut mathématique de l'Academie serbe, 3, Beograd, 1950, s. 201-206. Na francuskom.

Datirano maj 1939.
5 citiranih radova: 265, [57,61,63,66].
MR. E.Hille, V.12, s. 604.

85. Eine elementare Herleitung des Desarguesschen Satzes aus dem Satze von Pappos-Pascal. Elemente der Mathematik, 5, 1950, s. 9-10. Na nemačkom.
Zbl. B.34, s. 250 (navedeno).

86. O jednoj nejednačini Kuzmin-Landaua koja se odnosi na trigonometrijske zbirove i njenoj primeni na Gausov zbir. (Sa M.Tomićem). Sur une inégalité de Kusmin-Landau relative aux sommes trigonométriques et son application à la somme de Gauss (avec M.Tomić). GLAS SANU Beograd, 198, n.s. 3, 1950, s. 163-174. Na srpskom. Rezime na francuskom u Publ.de l'Inst. de l'Acad. serbe Beograd, 3,1950, s. 207-218.
Prikazano na 10. skupu OPMN SAN 6.decembra 1949.
7 citiranih radova: 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139.
MR. R.P.Boas, V.12, s. 482,805.

87. Dopuna jednoj Hadwiger-ovoj teoremi. Complément à un théorème de Hadwiger. GLAS SANU Beograd, 198(3), 1950, s. 147-161. Na srpskom. Commentarii mathematici helvetici, 25, 1951, s. 64-70. Na francuskom.
Prikazano na 10. skupu OPMN SAN 6.decembra 1949.
9 citiranih radova: 35, 47, 144, 145, 146, 147, [30,66,S17].
MR. R.P.Agnew, V.12, s. 820,694.

88. O asimptotskoj vrednosti Legendreovih polinoma (sa M.Tomićem). Über die asymptotische Formel für die Legendresche Polynome (mit M.Tomić). Zbornik radova Mat.Inst. SAN, Bgd, 1(7), 1951, s. 64-72. Na srpskom, rezime na nemačkom.

5 citiranih radova: 175, 176, 177, 178, [78].
MR. A.Erdélyi, V.13, s. 233.

89. O teoremi o srednjoj vrednosti. Sur la formule des accroissements finis. Recueil des travaux (Zbornik radova) de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe, Beograd, 1(7), 1951, s. 119-124. Na srpskom, rezime na francuskom.
Datirano 1.februar 1950.
6 citiranih radova: 179, 180, 181, 182, 183, 184.
MR. E.F.Beckenbach, V.13, s. 329.

90. O geometrijskoj interpretaciji Milutina Milankovića konvergencije beskonačnih redova. Sur une interprétation géométrique de M.Milanković de la convergence des séries. Zbornik radova Mat. Inst. SANU, 1(7), Beograd, 1951, s. 125-134. Na srpskom, rezime na francuskom.
1 citiran rad: 7.
MR. A.Dvoretzky, V.13, s. 691.

91. Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynomes de Legendre. Publications de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe, Beograd, 4, 1952, s. 69-88. Na francuskom.
8 citiranih radova: 101, 223, 224, 225, 259, 260, 261, 262.
Zbl. L.Koschmieder, B.48, s. 44-45.
MR. A.Erdélyi, V.14, s. 372.

92. Ein Satz über die Abschnitte einer Potenzreihe. Mathematische Zeitschrift, 56, 1952, s. 219-222. Na nemačkom.
Zbl. W.Meyer-Konig, B.46, s. 63.
MR. H.R.Pitt, V.14, s. 265.

93. O nekim novim problemima iz oblasti vremenskih serija. Statistička revija, Beograd, 3-4, 1954, s. 466-476. Na srpskom, rezime

na francuskom. Sur les méthodes d'extrapolation des suites temporelles stationnaires. Rapport présenté au CCIR, Genève, 1952, s. 13. Na francuskom.

94. O zbirljivosti Furijeovih redova (sa M.Tomićem). Sur la sommation des séries de Fourier (avec M.Tomić). GLAS SANU Beograd, 206, n.s. 5, 1953, s. 89-126. Na srpskom, rezime na francuskom.
Prikazano na 11. skupu OPMN SAN 7.oktobra 1952.
14 citiranih radova: 115, 148, 149, 150,151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160.
MR. R.P.Boas, V.17, s. 478.

95. O asimptotskom ponašanju nizova definisanih rekurentnim relacijama. Über das asymptotische Verhalten der Folgen die durch Iteration definiert sind. Zbornik radova Mat.Inst. SAN Beograd, 35, 1953, s. 45-60. Na srpskom, rezime na nemačkom.
8 citiranih radova: 185, 186, 187, 188, [13,36,90,S17].
MR. I.M.Sheffer, v.15, s. 84.

96. Primedbe o sumaciji Furijeovih redova prema postupku Norlunda. Remarque relative à la sommation des séries de Fourier par le procédé de Norlund. Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, Vol. II. (rezime) s. 126-127. Publications Scientifique de l'Univ. d'Alger, série A: Sciences math. I, 1954, s. 6-13. Na francuskom.
Primljeno 15.aprila 1954.
10 citiranih radova: 151, 152, 153, 154, 156, 158, 160, 275, 220, [94].
Zbl. U.N.Singh, B.65, s. 55.
MR. A.P.Calderón, V.18, s. 31.
RŽ. I.V.Matveev, 1956, 3107, 1957, 2195.

97. Sur un lemme de Mertens relatif aux nombres premiers. C.R. du 79e Congrès des Sociétés savants, Alger, 1954, s. 277-284. Na francuskom.
7 citiranih radova: 218, 223, 224, 227, 259, 274, [98].
MR. S.Chowla, V.23, #A1615.

98. Evaluation élémentaire des sommes typiques de Riesz de certaines fonctions arithmétiques. Publications de l'Inst.Math. de l'Acad. serbe Beograd, 7, 1954, s. 1-40. Na francuskom.
Primljeno 29.septembra 1954.
8 citiranih radova: 101, 223, 224, 225, 259, 260, 261, 262.
Zbl. H.D.Kloosterman, B.57, s. 40.
MR. S.Chowla, V.16, s. 677.
RŽ. I.P.Kubiljus, 1956, 7074.

99. Sur la sommation des séries de Fourier des fonctions continues (avec M.Tomić). Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe, Beograd, t.8, 1955, s. 123-138. Na francuskom.
14 citiranih radova: 149, 150, 154, 155, 156, 159, 160, 249, 250, 251, 251, 253, [94,101].
Zbl. G.Suauchi, B.66, s. 315.
MR. R.P.Boas, V.17, s. 479.
RŽ. A.F.Timan, 1957, 2999.

100. Jedna osobina kolektivnog koeficijenta korelacije (sa Branislavom Ivanovićem). Démonstration d'une propriété du coefficient collectif de corrélation (avec B.Ivanović). Statistička revija, 5, Beograd, 1955, s. 309-313. Na srpskom. Rezime na francuskom.

101. Suite de fonctionelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier. Journal de Mathématiques purées et appliqées, 35, 1956, s. 87-95. Na francuskom.

12 citiranih radova: 115, 151, 152, 153, 155, 156, 160, 249, 252, 273, 285, [94].
Zbl. B.Sz.-Nagy, B.70, s. 113.
MR. R.P.Boas, V.17, s. 964.
RŽ. I.V.Matveev, 1957, 2194.

102. Sur la majorabilité C des suites de nombres réels (avec P.Erdős). Publ. de l'Ins. math. de l'Acad. serbe, Beograd, 10, 1956, s. 37-52. Na francuskom.
Primljeno 25.decembra 1955.
11 citiranih radova: 35, 41, 42, 224, 227, 254, 255, 256, [15,34,98].
Zbl. L.Mirsky, B.75, s. 47.
MR. R.P.Agnew, V.18, #478.
RŽ. V.M.Arhangeljskaja, 1957, 7602.

103. Pravilno promenljive funkcije i Frulanijev integral (sa S.Aljančićem). Fonctions à comportement régulier et l'intégral de Frullani (avec S. Aljančić) Zbornik radova Mat.Inst. SANU Beograd, 50, 1956, s. 239-248. Na srpskom, rezime na francuskom.
17 citiranih radova: 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, J.K 1930-2,1933-4.
Zbl. S.Kurepa, B.74, s. 74.
MR. R.P.Agnew, V.19, #639.
RŽ. L.Lj.Claf, 1962, 5B53.

104. Introduction à une théorie de la croissance des fonctions réelles. Mathematikai Lapok, Budapest, 7, 1956, s. 207-211. Na mađarskom. Bulletin mathématique de la Société des sciences mathématiques et physiques de Roumanie, 1(49), 1957, s. 295-302. Na francuskom.
Zbl. G.Glaeser,B.109, s. 285.
MR. A.Rosenthal, V.20, #5250.

RŽ. 1961, 10B9, Navedeno.

105. O asimptotskim inverzijama unakrsnih proizvoda. Sur les inversions asymptotiques de certains produits de convolution. GLAS SANU Beograd, 228(13), 1957, s. 23-59. Na srpskom. Rezime na francuskom u Bulletin de l'Académie serbe Beograd A 1, t.20, 1957, s. 11-32.
Prikazano na 6. skupu APN SANU 24.maja 1957.
15 citiranih radova: 54, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, [97,102].
Zbl. G.J.Rieger B.144, s. 283.
MR. S.Chowla, V.23, #1960,1961.
RŽ. L.Lj. Claf, 1962, 5B54.

106. Sur les facteurs de convergence uniforme des séries de Fourier. Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istambul, Série A, 22, 1957, s. 35-43. Na francuskom.
5 citiranih radova: 283, 284, 252, 160, [101].
Zbl. G.Sunouchi, B.84, s. 63.
MR. R.P.Boas, V.20, #7184.
RŽ. R.P.Boas, 1962, 5B92 (prevod iz MR).

107. Sur les procédés de sommation intervenant dans la théorie des nombres. Colloque sur la théorie des suites tenu à Bruxelles 1957, et Paris et Louvain, 1958, s. 12-31. Na francuskom.
22 citirana rada: 94, 97, 99, 218, 220, 223, 224, 227, 229, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, [55,61,98,102,105].
Zbl. S.Knapowski, B.102, s. 34.
MR. P.Erdős, V.20, #7184.
RŽ. F.I.Haršiladze, 1961, 11B266

108. Divergence de la série harmonique d'après Mengoli.(Pietro Mengoli 1625-1686). L'Enseignement Mathématique, 5(2), 1959, s.

86-88. Na francuskom.
Zbl. J.E.Hofmann, B.88, s. 243.
RŽ. .S.Capin, 1960, 12395.
MR. Z.Opial, V.23, #A2663.

109. O Cantorovim brojnim sistemima. Sur les systrmes numériques de Cantor. Zbornik radova Mat. Inst. SANU Beograd, t.8 (knj.69), 1960, s. 1-8. Na srpskom, rezime na francuskom.
Primljeno 17.juna 1960.
6 citiranih radova: 169, 170, 171, 172, 173, 174.
Zbl. M.S.Popadić, B.135, s. 90.
RŽ. P.L.Uljanov, 1961, 12B296.

110. Complément aux théorèmes de Schur et Toeplitz (avec B.Bajšanski). Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe, Beograd, t.14, 1960, s. 109-114. Na francuskom.
Primljeno 1.novembra 1959.
2 citirana rada: 110, 165.
Zbl. G.Goes, B.97, s. 45.
MR. V.F.Cowling, V.24, #A365.

111. On some solutions of the differential equation $y" = f(x)y$ (avec V.Marić). godišnjak Fil.fak. Novi Sad, (Annual review of the faculty of arts and natural science), 5, 1960, s. 415-424. Na engleskom, rezime na srpskom.
6 citiranih radova: 128, 129, 130, 131, 132, [74].
RŽ. G.Gleizer, 1963, 11A371.
Zbl. E.Berz, B134, s. 306.

112. Sur quelques problèmes posés par Ramanujan. Journal of the Indian Mathematical Society, 24, 1960, s. 343-365. Na francuskom.
RŽ. A.G.Školjnik, 1962, 9B5.
MR. R.D.James, V.24, #A3141.

113. On the distribution of intersections of diagonals in regular polygones. Mathematics Research Center, Technical Summary Report, No.281, Madison, 1961. Studies in Mathematical Analysis and Related Topics: Essays in Honor of George Polya, Stanford, 1962, s. 171-174. Na engleskom.
Zbl. N.Hofreiter, B.123 s. 391.
MR. J.J.Bruckhardt, V.26, #2949.

114. Prilog osnovama jedne opšte teorije raščenja. Contribution aux fondements d'une théorie générale de la croissance. GLAS SANU Beograd, 249(22), 1961, s. 245-262. Na srpskom. Rezime na francuskom u Bulletin de l'Académie serbe Beograd A 1, t.31, 1963, s. 29-30. Na francuskom.
Prikazano na 1. skupu OPMN SAN 5.januara 1962.
21 citiran rad: 101, 141, 230-248.
MR. J.Karamata, V.27, #2446. L.M.Graves, V.29, #6280.

115. A contribution to the asymptotic analysis in lattice-ordered groups (with R.Bojanić i M.Vuilleumier). Mathematic Research Center, Technical Summary Report, No.329, 1962. Na engleskom.

116. Some theorems concerning slowly varying functions. Mathematics Research Center, Technical Summary Report, No.369, Madison, 1962. Na engleskom.

117. On slowly varying functions and asymptotic behavior (with R.Bojanić). Mathematics Research Center, Technical Summary Report, No.432, Madison, 1963. Na engleskom.

118. On a class of functions of regular asymptotic behavior (with R.Bojanić). Mathematical Research Center, Technical Summary Report, No.436, Madison, 1963. Na engleskom.

119. Regularly varying functions and the principle of equicontinuity (with B. Bajšanski). Mathematics Research Center, Technical Summary Report, No.517, Madison, 1964. Publications Ramanujan Inst. No.1, 1968/69, p.235-246. A praitre in Memorial Volume in honour of K. Amanda Rau, 1969. Na engleskom.
MR. N.J.Rothman, V.42, #3222..

120. On the degree of approximation of continuous functions by positive linear operators (with M.Vuilleumier). Mathematics Research Center, Techncal Summary Report, No.521, Madison, 1964. Na engleskom.

121. Prilog osnovama jedne opšte teorije rašćenja II (sa B.Bajšanskim). Contribution à une théorie générale de la croissance II (avec B.Bajšanski). GLAS SANU Beograd, 260(26), 1965, s. 47-73. Na srpskom. Rezime na francuskom u Bulletin l'Académie serbe Beograd A 1, t.35, 1967, s. 43-47.
Prikazano na 3. skupu OPMN SANU 3.aprila 1964.
5 citiranih radova: 140, 141, 142, 143, [115].
MR. J.Karamata, V.33, #73, J.Mayer, V.34, #7414.
RŽ. A.Efimov, 1968, 12B95.

122. A convergence test for Fourier series (with R.Bojanić). The Indian Journal of Mathematics, 9, 1967, s. 43-47.
MR. F.R.Keogh, V.38, #4890.

123. O trigonometrijskim zbirovima sa primenom na Dirihleove redove (sa M.Tomićem). RAD JAZU, 1948. (nije predato u štampu). Karamata to spominje u radu 78 u okviru citirane literature.

Prilog B

Citirana literatura u radovima Jovana Karamate

1. H.Weyl, Gött. Nachr. 1914.
   Citiran u: 1, 2.

2. H.Weyl, Math. Ann. Band 77, 1916.
   Citiran u: 1, 2.

3. G.Polya, Gött. Nachr. 1918.
   Citiran u: 1, 2.

4. G.Polya, Math. Ann. Band 88, 1923.
   Citiran u: 1, 2.

5. G.Szegö, Math. Ann. Band 82, 1920.
   Citiran u: 1, 2.

6. J.Franel, Math. Ann. Band 52, 1899.
   Citiran u: 1, 2.

7. Polya-Szegö, Aufgaben und Lehrsatze aus der Aalysis, Berlin 1925.
   Citiran u: 1, 2, 13, 77, 90.

8. H.Lebesgue, Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives. Paris, Gauthier Villars, 1904.
   Citiran u: 1, 2.

9. G.Szegö, Math. es term. tud. ert. Band 36, 1918.
Citiran u: 1, 2.

10. C.Arzela, Rend. Acc. Linc. (4) 1, 1885.
Citiran u: 1, 2.

11. C.Arzela, Memorie Ist. Bologna, (5) 8, 1889/1900.
Citiran u: 1, 2.

12. M.Lerch, Acta Math. Band 27, 1903.
Citiran u: 1, 2.

13. E.Phragmen, Acta Math, Band 28, 1904.
Citiran u: 1, 2.

14. N.Nielsen, Elemente der Funkionentheorie, B.G.T. Leipzig, 1911.
Citiran u: 1.

15. Whitaker, Watson, Modern Analysis, Cambridge Univer Press, III izd. 1920.
Citiran u: 1, 2.

16. S.Banach, Sur les operation dans les ensenables abstraits, Fund. Math. T.III. 1922.
Citiran u: 2, 65.

17. G.Polya, Math. Zeit. Band 8, 1920.
Citiran u: 2.

18. Schoemlih, Compendium I, 1874.
Citiran u: 2.

19. P.Appell, Bull. de la Soc. de France, T. 48, 1920.
Citiran u: 2, 51.

20. J.L.Jensen, Tidsskrift for Mathematik, (5) 2, 1884.
Citiran u: 2.

21. Bendixon, Acta Math. Band 9, 1887.
Citiran u: 2.

22. W.Schnee, Berliner Juang. Diss. Götingen, 1908.
Citiran u: 2.

23. J.Pincherle, Palermo Rend. 7, 1914.
Citiran u: 2.

24. M.Petrović, Prilog teoriji brojnih redova, GLAS SKA 63.
Citiran u: 5.

25. M.Petrović, Teorema o maksimumu modula determinanata, RAD JAZU, 1913.
Citiran u: 5.

26. G.Szegö, Beitrage zur Theorie der Töplitzche Formen, Mat. Zeit. Band 6 und 9. 1918, 1921.
Citiran u: 5.

27. A.Pringsheim, Math. Ann. Band 58, 1904.
Citiran u: 6.

28. E.Lindeloef, Sur les fonctions entieres d'ordre entier, Ann. de l'ec. Norm. (3) 22, 1905.
Citiran u: 6.

29. E.Lindeloef, Calcul des residius, 1905.
Citiran u: 6.

30. S.Wiegert, Sur une certaine classe de serie de puissance, Ark. for Mat. Astr. och Fys. Nr. 7, 1917.
Citiran u: 6.

31. W.Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie I, Bd. 4, Auflage. Leipzig-Berlin, 1923.
Citiran u: 6, 61.

32. F.D.Carlson, Mat. Zeit. Band 11, 1921.
Citiran u: 6.

33. 33 F.D.Carlson, These, Uppsala, 1914.
Citiran u: 6.

34. G.Faber,Über die Forsetzbarkeit gewisser Taylorschen Reihen, Math. Ann. Band 57, 1903.
Citiran u: 6, 51.

35. 35 R.Schmidt, Über divergente Folgen und Lineare Mittelbildungen, Math. Zeit. Bd. 22, 1925.
Citiran u: 9, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 23, 27, 29, 36, 39, 42, 45, 48, 50, 51, 61, 65, 87, 102.

36. K.Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Diss. Berlin, 1907.
Citiran u: 17, 61.

37. W.Schnee, Die Identität der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte, Math. Ann. Bd. 67, 1909.
Citiran u: 17.

38. L.Kronecker, Quelques remarques sur la determination des valeurs moyennes, Paris Compt. Rend. 103, 1876.
Citiran u: 17, 61, 65.

39. G.H.Hardy, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 8, 1910.
Citiran u: 17, 27, 42, 59, 61.

40. E.Landau, Über die Bedeutung einiger neueren Grenzwertsätze der Herrn Hardy und Axer, Prace mat. fis. 21, 1910.
Citiran u: 17, 29, 39, 42, 48, 61, 65.

41. A.Tauber, Ein Satz aus der Theorie der undenlichen Reihen, Monatsh. Math. Phys. 8, 1897.
Citiran u: 17, 45, 65, 102.

42. J.E.Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 9, 1911.
Citiran u: 17, 61, 65, 102.

43. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Contributions to the arithmetic theory of series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 11, 1911.
Citiran u: 17, 61, 65.

44. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Tauberian theorems concerning powers series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 13, 1914.
Citiran u: 14, 17, 21, 48, 61, 65.

45. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Abels theorem and its convers, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 4, 1918.
Citiran u: 17.

46. E.Landau, Über einen satz des Herrn J.E. Lttlewood, Rend del Circolo Mathematico di Palermo, T. 35, 1913.
Citiran u: 17, 18, 23, 39, 48, 61, 65.

47. T.Vijayaraghavan, A Tauberian Theorem, Jour. Lond. Math. Soc. 1, 1926.
Citiran u: 17, 18, 22, 28, 61, 87.

48. G.H.Hardy, J.E.Litlewood, Tauberian Theorems concerning series of positive terms, Messenger of Math. (2) 42, 1913.
Citiran u: 17.

49. O.Szász, Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen, Journal Lond. Math. Soc. 3, 1928.
Citiran u: 18, 61.

50. L.Fejer, La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, Compt. Rend. Acad. Paris. 156, 1913.
Citiran u: 18, 61.

51. G.H.Hardy, J.E.Litlewood, Some theorems concerning Dirichlet's series, Messenger of Math. (2) 43, 1914.
Citiran u: 18, 21, 39, 48, 59, 61.

52. G.Dötsch, Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzbegriffes bei integrablen Funktionen. Math. Zeit. Bd. 11, 1921.
Citiran u: 14.

53. F.Riesz, Sur les operations fonctionnelles lineaires, Compt. Rend. Acad. Paris, 149, 1909.
Citiran u: 10, 23.

54. G.Polya, Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen, Gött. Nachr. Math. Phys. Klasse, 1917.
Citiran u: 13, 105.

55. E.Landau, Sur les valeurs moyennes de certains fonctions arithmétiques. Bull. Acad. Belgique, 1911.
Citiran u: 13, 21, 36.

56. O.Stolz, Grundzuege der Differential und Integralrechnung, Band 1, 1893.
Citiran u: 13, 22.

57. E.Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheory, 2.Aufl. 1929. (und die dort angefuhrte Literarur).
Citiran u: 15. 24, 27, 48.

58. M.Petrović, Directions des tangentes en relation avec la longueur de l'arc, C.R. du Congres a Nancy, 1931.
Citiran u: 16.

59. E.Borel, Leçons sur les séries à termes positifs, Paris, 1902.
Citiran u: 19.

60. M.J.Belinfante, Über einen Grenzwertsatz aus der Theorie der unendlichen Folgen, Math. Ann. 101, 1929.
Citiran u: 20.

61. E.T.Copson, W.I.Ferrar, Notes on the structure of sequences I, Journal Lond. Math. Soc. 4, 1929.
Citiran u: 20.

62. G.H.Hardy, Generalizations of a limited theorem of Mr.Mercer, Quart. Journ. Math. 43, 1912.
Citiran u: 20, 29.

63. S.Izumi, A theorem on limits and its application, Tôhoku Math. Journ. 33, 1931.
Citiran u: 20, 29.

64. K.Knopp, Bemerkung zur der vorstehenden Arbeit des Herrn I.Schur, Math. Ann. Band 74, 1913.
Citiran u: 20.

65. K.Knopp, Zur Theorie der C- und H-summierbarkeit, Math. Zeit. 19, 1923.
Citiran u: 20, 61.

66. T.Kojima, On relation between the limits of the sequences $x^n + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} a_l x^l$ and x^n, Tôhoku Math. Journ. 12, 1917.
Citiran u: 20.

67. T.Kojima, On generalized Töplitz's thorems on limit and their applications, Tôhoku Math. Journ. 12, 1917.
Citiran u: 20.

68. I.Mercer, On the limits of real variants, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 5, 1907.
Citiran u: 20, 29.

69. Y.Okada, A theorem on limits, Tôhoku Math. Journ. 15, 1919.
Citiran u: 20.

70. G.Polya, Aufgabe; Arch. d. Math. und Phys. (3) 24, 1916. Mit Lösung von S.Sidon, (3) 26, 1917.
Citiran u: 20, 29.

71. A.Pringsheim, Über die Aequivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesaroschen Grenzwerte und die Verallgemeinerung eines Beweisebenutzten grenzwertsatzes, Munch. Berichte, 1916.
Citiran u: 20.

72. W.Sierpinski, Sur la dependance entre l'existence de limities des suites $x^n + \frac{q}{n}\sum_{k=1}^{n} x^k$ et x^n, Tôhoku Math. Journal, 11, 1917.
Citiran u: 20.

73. O.Töplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Matematyczno-Fizyczne, 22, Warschawa, 1911.
Citiran u: 20, 26, 59, 61, 65.

74. M.Verbeck, Über spezielle rekurrente Folgen und ihre Bedeutung für die Theorie der linearen Mittelbildungen und Kettenbruche, Diss. Bonn, 1917.
Citiran u: 20.

75. T.Vijayaraghavan, A generalization of the theorem of Mercer, Journ. Lond. Math. Soc. 3, 1928.
Citiran u: 20, 29.

76. M.Watanabe, Proof of the theorems due to Messrs. Kojima and Okada, Tôhoku Math. Journ. 17, 1920.
Citiran u: 20.

77. I.Schur, Über die Aequivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Ann. 74, 1913.
Citiran u: 20, 29.

78. O.Szász, Verallgemeinerung und neuer Beweis einige Satze Tauberschen Art, Sitzungsberichte der Bayer. Akademie der Wissenschaften, 1929.
Citiran u: 21, 39, 59, 61.

79. E.Landau, Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes, Monatsh. für Math. und Phys. 18, 1907.
Citiran u: 21, 45, 65.

80. G.Dötsch, Ein Konvergenzkriterium für Integrale, Math. Ann. 82, 1920.
Citiran u: 21, 22, 61.

81. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Notes on the teory of series (XI): In Tauberian Theorems, Proc.Lond.Math.Soc. (2) 30, 1929.
Citiran u: 21, 22, 57, 61.

82. G.Dötsch, Satze von Taubereschen Charakter im Gebiet der Laplace und Stieltjes-Transformation, Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wissenschaften Phys.Math. Klasse, 1930.
Citiran u: 22.

83. I.Schur, Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Zeit. 31, 1929.
Citiran u: 22, 36.

84. G.H.Hardy, The quarterly Journ. of Math. 35, 1903.
Citiran u: 24.

85. O.Perron, Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, Math. Zeit. 6, 1920.
Citiran u: 24, 56, 61.

86. E.Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1928.
Citiran u: 24.

87. N.Nielsen, Handbuch der theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.
Citiran u: 26, 33.

88. E.T.Copson, W.L.Ferrar, Notes on the structure of sequences I, Jour. Lond. Math. Soc. 4, 1929.
Citiran u: 29.

89. Widder, On the changes of sign of the deriatives of a function defined by Laplace integral, Proc. Nat. Acad. Sci. 18, 1932.
Citiran u: 30.

90. M.Fekete, Compt. rend. 190, 1930.
Citiran u: 30.

91. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Polya, Some simple inequalities satisfied by convex functions, The Messenger of Math. vol.58, 1929.
Citiran u: 32.

92. J.Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les leurs moyennes, Acta Mathematica 30, 1905.
Citiran u: 32.

93. Th.Kalus, Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen. Math. Zeit. 28, 1928.
Citiran u: 33.

94. N.Wiener, Tauberian theorems, Annals of Math. II, 33, 1932.
Citiran u: 37, 38, 57, 61, 65, 66, 107.

95. M.Riesz, Acta Lit. Ac. Scient. Univ. Hung. 2, 1924.
Citiran u: 38.

96. H.Heilbronn, E.Landau, Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner, Math. Zeit. 37, 1933.
Citiran u: 38, 43, 55, 57.

97. E.Landau, Über Dirichletsche Reihen, Nachr. Ges. Wiss. Gött. I, 30, 1932.
Citiran u: 38, 39, 43, 55, 57, 107.

98. H.Heilbronn, E.Landau, Ein Satz über Potenzreihen, Math. Zeit. 37, 1933.
Citiran u: 43.

99. H.Heilbronn, E.Landau, Anwendungen der N.Wienerschen Methode, Math. Zeit. 37, 1933.
Citiran u: 43, 107.

100. H.Wendelin, Über nichtvertauschbare Grenzprozesse, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 43, Heft 1-4.
Citiran u: 44.

101. G.H.Hardy, Orders of infinity, Cambridge University Press, 1924.
Citiran u: 48, 54, 91, 98, 114.

102. H.Poincaré, Sur les invariants arithmétique, C.R. du 10-me Congres de l'Assoc. franc. pour l'avancement des Sciences, 1881.
Citiran u: 49.

103. P.Painlevé, Sur la representation des fonctions elliptiques, Bull.de la Soc. Math. de France, t. 27, 1899.
Citiran u: 49.

104. K.Knopp, Über eine Kroneckersche Konvergenzbedingung, Sitzungsber. der Berl. Math. Ges. 24, 1925.
Citiran u: 50, 61, 65.

105. A.Pringsheim, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Math. Ann. 37, 1890.
Citiran u: 53.

106. G.H.Hardy, S.Ramanujan, Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, Proc. Lond. Math. Soc. 16, 1916.
Citiran u: 54.

107. K.Knopp, I.Schur, Elementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie, Math. Zeit. 24, 1925.
Citiran u: 54.

108. K.Knopp, Asymptotische Formeln der additiven Zahlentheorie, Schriften der Köningsberger Gel. Gesellsch. 2 (Heft 3) 1925.
Citiran u: 54.

109. Fatou, Sur les lignes singuliéres des fonctions analytiques, Bull. Soc. Math. France, 41, 1913.
Citiran u: 55.

110. I.Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. für die reine und angewandte Mathematik, 151, 1921.
Citiran u: 56, 61, 65, 66, 110.

111. M.Petrović, Representation d'une classe des séries par une intégral, Mathematica (Cluj) 9, 1935.
Citiran u: 56.

112. O.Szász, Über einige Satze von Hardy und Littlewood, Nachrichten Ges. Wiss. Gött. Math. Phys. Klasse, 1930.
Citiran u: 57, 61.

113. V.Avakumović, Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de la sommabilité, C.R. Acad. Paris, 200, 1935.
Citiran u: 61, 65.

114. G.H.Hardy, Theorems relatings on the summability and convergence of slowly oscillating series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 8, 1910.
Citiran u: 65.

115. E.Helly, Über lineare Funktional operationen, Sitz. der Akad. Wiss. Wien, 121, 1912.
Citiran u: 65, 94, 101.

116. D.Hilbert, Über das Diricltsche Prinzip, Math. Ann. Band 59, 1904.
Citiran u: 65.

117. H.Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, II Edition, Paris, 1928. Prvo izdanje je pod rednim brojem 8.
Citiran u: 65.

118. P.Montel, Sur les suites infinies des fonctions, Ann. sc. de l'Ecole Normale Superieure (3), 1907.
Citiran u: 65.

119. M.Riesz, Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen, Acta Math. 40, 1916.
Citiran u: 61, 65.

120. O.Szász, Generalization of two theorems of Hardy and Littlewood on power series, Duke Math. Journ. 1, 1935.
Citiran u: 61, 65.

121. N.Wiener, A new method in Tauberian Theorems, Journ. Math. Phys. M.I.T. 7, 1928.
Citiran u: 61, 65.

122. N.Wiener, The Fourier Integral and certain of its applications, Cambridge University Press, 1933.
Citiran u: 61, 65.

123. K.Knopp, Über das Eulersche Summation sverfahren, II, Math. Zeit. 8, 1923.
Citiran u: 61.

124. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, The relations between Borel's and Cesaro's methodes of summation, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 11, 1913.
Citiran u: 61, 66.

125. G.H.Hardy, Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential mthod, Rend. Circ. Mat. Pal. 41, 1916.
Citiran u: 66.

126. G.Valiron, Remarques sur la summation des séries divergentes par les methodes de M.Borel, Rend. Circ. Mat. Pal. 42, 1917.
Citiran u: 61, 66.

127. R.Schmidt, Über das Borelsche Summierung sverfahren, Schriften Köningserger Gel. Gesell. 1, 1925.
Citiran u: 61, 66.

128. T.Vijayaraghavan, A theorem concerning the summability of series by Borel's method, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 27, 1928.
Citiran u: 61, 66, 111.

129. V.G.Avakumović, O diferencijalnim jednačinama Thomas-Fermijeva tipa. Egzistencija integrala, Glas SAN 191, 1948.
Citiran u: 111.

130. V.Marić, O asimptotskom ponašanju integrala jedne klase nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, Zbornik radova Mat. Inst. SAN, t. 4, 1955.
Citiran u: 111.

131. M.V.Mihailović, Sur l'integral de l'equation differentielle de Thomas-Fermi autour du point $x = 0$, $y = 1$, Publ. de l'Inst. Math. SAN, t. 3, 1950.
Citiran u: 111.

132. R.Bellman, Stability Theory of differential Equations, Mc.Graw Hill, New York, 1953.
Citiran u: 111.

133. J.G.Van dr Corput, Zahlentheoretische Abschatzungen, Math. Ann. Band 84, 1921.
Citiran u: 86.

134. J.F.Koksma, Diophantische Approximationen Ergebnisse der Mathematik, Springer, Berlin, 1936.
Citiran u: 86.

135. R.O.Kuzmin,
Citiran u: 86.

136. E.Landau, Über eine trigonometriche Summe, Nachr. Gesell. Wiss. Gött. Math. Phys. Klasse, 1928.
Citiran u: 86.

137. E.Landau, Über das Vorzeichen der Gausschen Summe, Nachr. Gesell. Wiss. Gött. Math. Phys. Klasse, 1928.
Citiran u: 86.

138. J.Popken, Über eine trigonometrische summe, Proc. Akad. Wet. Amsterdam, 35, 5, 1932.
Citiran u: 86.

139. J.Karamata, M.Tomić, O trigonometrijskim zbirovima sa primenom na Dirichletove redove. RAD JAZU, 1948 (u prpremi). Nije predato u štampu.
Citiran u: 86.

140. F.Hausdorff, Grundzuge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.
Citiran u: 121.

141. F.Hausdorff, Untrsuchungen über Ordnungtypen, Kap.V.:Über Pantachietypen, Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsichen Gesell. der Wiss. zu Leipzig, 59, 1907.
Citiran u: 114.

142. W.Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, Warszava, 1958.
Citiran u: 121.

143. E.J.McShane, Order Preserving Maps and Integration Processes, Annals of Math. studies, 31, Princeton, 1953.
Citiran u: 121.

144. H.Hadwiger, Über ein Distanztheorem bei der A-limitierung, Commentarii Math. Helv. 26, 1943/44.
Citiran u: 87.

145. H.Hadwiger, Die Retardierungsescheinung bei Potenzreihen und Ermittelung zweier Konstanten Tauberscher Art, Comm. Math. Helv. 20, 1947.
Citiran u: 87.

146. H.Hadwiger, Über eine Konstante Tauberscher Art, Revista Hispano-Ameri cana, (4) 7, 1947.
Citiran u: 87.

147. A.Wintner, A Tauberian theorem, Comm. Math. Helv. 20, 1947.
Citiran u: 87.

148. S.Banach, Operations Lineaires, Monografje Matematiczne, 1, Warszava, 1932.
Citiran u: 94.

149. L.Fejer, Einige Satze die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen, Monatshefte für Math. und Phys.

35, 2, 3, 1928.
Citiran u: 94, 99.

150. G.H.Hardy, W.W.Rogosinski, Fourier Series, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. 38, 1950.
Citiran u: 94, 99.

151. E.Hille, Summation of Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc. 38, 1932.
Citiran u: 94, 96, 101.

152. E.Hille, J.D.Tamarkin, On the Summability of Fourier Series (1st note-5th note), Proc. Nat. Acad. of Sci. 14, 1928; 15, 1929; 16, 1930; 17, 1931; 20, 1934.
Citiran u: 94, 96, 101.

153. E.Hille, J.D.Tamarkin, On the Summability of Fourier series I, II, III. I: Trans. Amer. Math. Soc. 34, 1932. II: Ann. of Math, (2) 34, 1933. III: Math. Ann. 108, 1933.
Citiran u: 94, 96, 101.

154. C.N.Moore, On the application of Borel's method to the summation of Fourier series, Proc. Nat. Acad. Sci. 11, 1925.
Citiran u: 94, 99.

155. Sz.B.Nagy, Méthodes de sommation des séries de Fourier, 1. Acta Szeged, 12, Pars B, 1950.
Citiran u: 94, 96, 99, 101.

156. S.M.Nikolsky, Sur les methodes lineaires de sommation des séries de Fourier, Izvestiya Akad. Nauk SSSR serie math. 12, 1948.
Citiran u: 94, 96, 99, 101.

157. F.Riesz, Untersuchungen über Systeme Intrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69, 1910.
Citiran u: 94.

158. M.Riesz, Sur la somation des séries de Fourier, Acta Szeged, 1, II, 1923.
Citiran u: 94, 96.

159. O.Szász, Introducion of the theory of divergent series, Cincinnati, 1946.
Citiran u: 94, 99.

160. A.Zygmund, Trigonometrical series, Monografje Matematiczne, 5, Warszawa, 1935.
Citiran u: 94, 96, 99, 101, 106.

161. V.Garten, Über den Einfluss endlich vieler Anderug auf das Borelsche Limitierungsverfahren, Mat. Zeit. 40, 1936.
Citiran u: 64.

162. J.M.Hyslop, On the approach of a series to its Cesaro Limit, Proc. of the Edinb. Math. Soc. 5 (2), 1938.
Citiran u: 79.

163. B.Popović, Sur un théorème relatf aux valeurs asymptotiques de l'intégrale de Laplace-Abel, Bull. de l'Acad. Serb. 7, 1941.
Citiran u: 79.

164. W.Meyer-König, Limitierungsumkehrsatze mit Luckenbedinungen, Dissertation. Tubingen, 1939, Math. Zeit. 45, 1939.
Citiran u: 79.

165. I.Heller, Contribution à la théorie des séries divergentes, These, Geneve, 1950.
Citiran u: 110.

166. Notice sur les travaux scientifiques du Michel Petrovich (1894-1921), Paris, Gauthier Villars, 1922.
Citiran u: S-10.

167. Liste des publications scientifiques de Michel Petrovich. Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade, 6-7, 1937-1938.
Citiran u: S-10.

168. M.Milanković, J.Mihailović, Mika Alas - Beleške o životu velikog matematičara Mihaila Petrovića, Beograd, 1946.
Citiran u: S-10.

169. T.Broden, Über Darstellung von reelen Funktionen mit... Math. Ann. 51, 1889.
Citiran u: 109.

170. G.Cantor, Über die einfachen Zahlensysteme, Gessamlete Abhandl. Berlin, 1932.
Citiran u: 109.

171. G.Faber, Über die Abzahlbarkit der rationalen Zahlen, Math. Ann. 60, 1905.
Citiran u: 109.

172. W.Sierpinski, Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries, C.R. Soc. Sciences de Varsovie, 1911.
Citiran u: 109.

173. M.Stephanos, Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables, Bull. Soc. Math. France 7, 1878-79.
Citiran u: 109.

174. E.Strauss, Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst funktionentheoretischer Anwendung, Acta Math. 11, 1887-

88.
Citiran u: 109.

175. G.Darboux, Journ. de math. (3) 4, 1878. Citiran u: 88.

176. E.T.Whitaker, G.N.Watson, A course of modern Analysis, Cambridge, 1946.
Citiran u: 88.

177. E.T.Copson, Theory of functions, Oxford, 1935.
Citiran u: 88.

178. E.Heine, Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, Berlin, 1878.
Citiran u: 88.

179. G.Kowalewski, Die klassichen Problem der Analysis des Unendlichen, Leipzig, 1910.
Citiran u: 89.

180. G.Kowalewski, Lehrbuch der Differential und Integralrechnung, Leipzig-Berlin, 1928.
Citiran u: 89.

181. R.Kašanin, Viša matematika I, Beograd, 1946.
Citiran u: 89.

182. Z.Marković, Uvod u višu analizu, Zagreb, 1947.
Citiran u: 89.

183. Wittig, Differentialrechnung, Berlin,1944.
Citiran u: 89.

184. H.Röthe, Hochere Mathematik, Wien, 1921
Citiran u: 89.

185. M.Barjaktarević, O kovergenciji niza x_n čiji su članovi definisani jednačinom $x_n + 1 = f(x_n)$, Soc. Sci. Natur. Croatica, period. Math. Phys. Astr. Ser. II, 6, 1951.
Citiran u: 95.

186. R.De Mises, Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 9, 1926.
Citiran u: 95.

187. A.M.Ostrowski, Sur la convergence et l'estimation des erreurs dans quelques procédés de resolution des equations numeriques.
Citiran u: 95.

188. B.Popović, Jedan stav o asimptotskim vrednostima Laplaceova integrala, GLAS SAN, 185 (92), 1940.
Citiran u: 95.

189. R.P.Agnew, Limits of Integrals, Duke Math. Journ. 9, 1942.
Citiran u: 103.

190. R.P.Agnew, Mean Values and Frullani Integrals, Proc. Amer. Math. Soc. 2, 1951.
Citiran u: 103.

191. R.P.Agnew, Frullani Integals and Variants of the Egorof Theorem, Publ. Inst. Math. Acad. Serb. 6,1954.
Citiran u: 103.

192. A.Cauchy, Jour. Ecole Polytech. Paris, 12, 1823.
Citiran u: 103.

193. A.Cauchy, Exercices de Mathématiques, 1827.
Citiran u: 103.

194. A.Cauchy, Exercices d'Analyse, 2, 1841.
Citiran u: 103.

195. H.Delange, sur deux questions posées par M.Karamata, Pub. Inst. Math. Acad. Serb. 7, 1954.
Citiran u: 103.

196. H.Delange, Sur un théorème de Karamata, Bull. Sci. Math. (2) 79, 1955.
Citiran u: 103.

197. G.Frullani, Sopre gli Integrali Definiti, Memoire della Societa Italiana delle Scienze, 20, 1928.
Citiran u: 103.

198. G.H.Hardy, A generalization of Frullani's Integral, Messenger (2) 34,
Citiran u: 103.

199. K.S.K.Iyengar, On Frullani Integrals, Journ. Indian Math.Soc. (2) 4, 1940.
Citiran u: 103.

200. J.Korevaar. T.Van Ardenne-Ehrenfest, N.C.de Brujin, A note on slowly convergent oscillating functions, Nieuw Archief voor Wiskunde, 23, 1949.
Citiran u: 103.

201. M.Lerch, Sur une extension de la formule de Frullani, Verhandl. Prager Akad. Math. Phys. Klasse, 12, 1891.
Citiran u: 103.

202. A.M.Ostrowski, On some generalizations of the Cauchy-Frullani Integral, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35, 1949.
Citiran u: 103.

203. C.Racine, On Frullani Integrals, Journ. Indian Math. Soc. (2) 1, 1947.
Citiran u: 103.

204. K.Ananda-Rau, A note on a theorem of Mr. Hardy's, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 17, 1919.
Citiran u: 61.

205. K.Ananda-Rau, An Example in the Theory of Summation of Series by Riesz's typical Means, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 30, 1930.
Citiran u: 61.

206. M.Fekete, C.E.Winn, On the conection between the limits of oscillation of a Sequence and its Cesary and Riesz means, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 35, 1933.
Citiran u: 59.

207. G.H.Hardy, On Certain Oscillating Series, The Quart. Journ. 38, 1907.
Citiran u: 59.

208. G.H.Hardy, An extension of a theorem on oscillating series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 8, 1910.
Citiran u: 59.

209. G.H.Hardy, The second theorem of consistency for summable series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 15, 1913.
Citiran u: 59.

210. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, A further note on the converse of Abel's theorem, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 25, 1926.
Citiran u: 59.

211. H.G.Hardy, M.Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge Tract. 1915.
Citiran u: 59.

212. N.Higaki, Some theorems on Riesz Method of summation, Tôhoku Math. Journ. 41, 1935.
Citiran u: 59, 61.

213. A.E.Ingham, Note on the converse of Abel's theorem, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 2, 1924.
Citiran u: 59.

214. J.Jensen, Sur une généralisation d'un théorème de Cauchy, C.R. Acad. Paris, 106 1888.
Citiran u: 59.

215. J.Jensen, Sur un théorème général de convergence. C.R. Acad. Paris, 106, 1888.
Citiran u: 59.

216. P.Levy, Sur les conditions d'application et sur la regularité des procédés de sommation des séries divergentes, Bull. Soc. Math. France, 56, 1928.
Citiran u: 59.

217. W.W.Rogosinski, Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen, Math. Zeit. 25, 1926.
Citiran u: 59.

218. P.Erdős, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35, 1949.
Citiran u: 59, 61, 97, 105, 107.

219. P.Erdős, On a Tauberian Theorem Connected With the New proof of the Prime Number Theorem, Journ. Ind. Math. Soc. 13, 1949.
Citiran u: 59, 105.

220. G.H.Hardy, Divergent Series, Oxford, 1949.
Citiran u: 96, 105, 107.

221. K.Iseki, T.Tatuzawa, On Selberg's Elementary proof of the Prime Number Theorem, Proc. Japan. Acad. 27, 1951.
Citiran u: 105.

222. E.Landau, Über einen Grenzwertsatz, Sitz. Ber. d. Kais. Akad. der Wiss. Wien, Math. Ast. Klasse, 67, Abt.IIa, 1908.
Citiran u: 105.

223. E.Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzg, 1909.
Citiran u: 91, 97, 98, 105, 107.

224. E.Landau, Über einige neuere Grenwertsatze, Rend.Circ.Mat. di Palermo, 36, 1912.
Citiran u: 91, 97, 98, 102, 105, 107.

225. T.Nagell, Introduction to Number Theory, Stockholm, 1951.
Citiran u: 91, 97, 98, 105.

226. A.G.Postnikov, J.P.Romanov, Vereinfachung des elementaren Beweises von A.Selberg für das Gesetz der Asymptotischen Verteilung der Primzahlen, Uspehi Mat. Nauk, 10, 4 (66), 1955.
Citiran u: 105.

227. A.Selberg, An Elementary Proof of the Prime Number Theorem, Ann. Math. 50, 1949.
Citiran u: 97, 102, 105, 107.

228. E.Trost, Primzahlen, Basel/Stuttgart, 1953.
Citiran u: 105, 107.

229. E.M.Wright, The Elementary Proof of the Prime Number Theorem, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, sect. A. 63, 1952.
Citiran u: 105.

230. E.H.Moore, L.S.Smith, A general theory of limits, Amer. J. Math. 44, 1922.
Citiran u: 114.

231. P.Du Bois-Reymond, Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, Annali di Matematica, 2, IV, 1870.
Citiran u: 114.

232. P.Du Bois-Reymond, Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs derivees, Crelle's Journal, 74, 1872.
Citiran u: 114.

233. P.Du Bois-Reymond, Über die Paradoxen des Infinitaercalculus, Math. Ann. 11, 1877.
Citiran u: 114.

234. P.Du Bois-Reymond, Die allgemeine Funktionentheorie I, Kap. 5, Tubingen, 1882.
Citiran u: 114.

235. P.Du Bois-Reymond, Über Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern, Crelle's Journal, 76, 1873.
Citiran u: 114.

236. J.Hadamard, Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indefiniment croisantes, Acta Math.

Bd. 18, 1894.
Citiran u: 114.

237. K.Knopp, Theorie und Praxis der unendlichen Reihen, III Aufl., Berlin, 1932.
Citiran u: 61, 114.

238. N.H.Abel, Oeuvres complètes, II ed. Leipzig 1881.
Citiran u: 114.

239. A.Pringsheim, Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern, Math. Ann. Band 35, 1890.
Citiran u: 114.

240. J.Bertrand, Regles sur la convergence des séries, Jour. de Math. pures et appliquees, (1) 7, 1842.
Citiran u: 114.

241. O.Bonnet, Note sur la convrgence et la divergence des séries, Jour. de Math. pur. et appli. (1) 8, 1843.
Citiran u: 114.

242. P.Levy, Fonction a croissance régulière et iteration d'ordre fractionnaire, Anali i Matematica 5, 1930.
Citiran u: 114.

243. G.Cantor, Sui numeri transfiniti, Rev. di Matematica, 5, 1895.
Citiran u: 114.

244. G.Birkoff, Lattice Theory, II ed. N.Y. 1948.
Citiran u: 114.

245. J.C.Fereira, Sur à notion d'ordre infinitesimal, Portugaliae Mathematica, 14, 1955.
Citiran u: 114.

246. M.Šteković, Contribution à la théorie de la croissance des fonctions réelles. These, Sarajevo, 1956.
Citiran u: 114.

247. M.Vuilleumier, Transformations lineaires dans l'ensemble des suites ordonnées, C.R. Acad. Sci. Paris, 252, 1961.
Citiran u: 114.

248. B.Bajšanski, Une généralisation d'un théorème de Schur, C.R. Acad.Sci. Paris, 253, 1961.
Citiran u: 114.

249. F.Riesz, Sz.B.Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Budapest, 1952.
Citiran u: 99, 101.

250. R.Salem, Une génèralisation du procédé de sommation de Poisson, C.R. Acad. Sci. Paris 205, 1937.
Citiran u: 99.

251. R.Salem, Essai sur les séries trigonometriques, Actualites scientifiques, 862, Hermann et Cie, Paris, 1940.
Citiran u: 99.

252. M.Tomić, Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues, Publ. Inst. Math. de l'Acad. Serb. 8, 1955.
Citiran u: 99, 101, 106.

253. W.H.Young, On the Fourier series of bounded functions, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 12, 1913.
Citiran u: 99.

254. G.Polya, Über die Konvergenz von Quadraturverfahren, Math. Zeit. 37, 1933.
Citiran u: 102.

255. A.G.Postnikov, Un théorème génèral du type abellien concernant les séries entières.
Citiran u: 102.

256. E.Trost, Primzahlen, Basel, 1953.
Citiran u: 102.

257. M.Tomić, Généralisation et demonstration geométrique de certains théorèmes de Fejer et Kakeya, Publ. Inst. Mat. 2, 1948.
Citiran u: 78.

258. L.Fejer, Trigonometrische Reihen und Potenzreihe mit mehrfachmonotoner Koeffizientenfolge, Transact. Amer. Soc. 39, 1936.
Citiran u: 78.

259. G.H.Hardy, E.M.Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford, 1938.
Citiran u: 91, 97, 98.

260. E.Landau, Über einen Satze von Herrn Phragmen, Acta Math. 30, 1905.
Citiran u: 91, 98.

261. H.N.Shapiro, On a theorem of A.Selberg and generalizations, Ann. Math. Band 51, 1950.
Citiran u: 91, 98.

262. E.C.Titchmarsh, The theory of the Riemann Zeta-function, Oxford, 1952.
Citiran u: 91, 98.

263. M.Riesz, Sur l'equivalence de certains méthodes de sommation, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 22, 1923.
Citiran u: 79.

264. M.Riesz, Une méthode de sommation equivalente à la méthode des moyennes arithmetiques, C.R. Paris, 1911.
Citiran u: 79.

265. H.R.Pitt, General Tauberian theorems, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 44, 1938.
Citiran u: 84.

266. K.Knopp, Über die maximalen Abstande und Verhaltnisse verschiedener Mittelwerte. Math. Zeit. 39, 1935.
Citiran u: 77.

267. P.Schweitzer, Eine Ungleichung über das arithmetische Mittel, Math. es Phys. Lapok 23, 1914.
Citiran u: 77.

268. J.Kurschak, Gestelle Aufgabe, Math. es Phys. Lapok, 23, 1914.
Citiran u: 77.

269. G.Gruss, Über das Maximum ds absoluten Betrages von..... Math. Zeit. 39, 1934.
Citiran u: 77.

270. E.Landau, Über einige Ungleichungen von Herrn G.Gruss, Math. Zeit. 39, 1934.
Citiran u: 77.

271. E.Landau, Über mehrfachmonotone Folgen, Prace Mat. Fiz. 44, 1936.
Citiran u: 77.

272. G.Kowalewski, Ein Mittelwertsatz für ein System von n Integralen, Zeitschrf. für Math. und Phys. 42, 1897. und 43, 1898.
Citiran u: 77.

273. A.F.Timan, Linear methods of approximation of periodic functions by trigonometric polynomials, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 84, 1952; Uspehi Matem. Nauk. (N.S.) 7, 3 (49), 1952.
Citiran u: 101.

274. H.N.Shapiro, On the number of primes less than or equal x, Proc. Amer. Math. Soc. t. 1, 1950.
Citiran u: 97.

275. A.Errera, Sur le théorème fondamental des nombres premiers, Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles, 1955.
Citiran u: 96, 107.

276. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, On a Tauberian theorem for Lambert's series and some fundamental theorems in the analytic theory of numbers, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 9, 1921.
Citiran u: 91, 107.

277. A.E.Ingham, Some Tauberian theorems connected with the prime number theorem, Journ. Lond. Math. Soc. 20, 1936.
Citiran u: 107.

278. J.Korevaar, Completeness theorems for sets of translates as cancellations theorems, Bull. Am. Math. Soc. 63, 1957.
Citiran u: 107.

279. P.Huhn, Eine Verbesserung des Restglides beim elementaren Beweis des Primzahlsatyes, Math. Scand. 3, 1955.
Citiran u: 107.

280. E.Landau, Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Rend. Circ. Mat. Plermo, 26, 1908.
Citiran u: 107.

281. A.Wintener, Eratosthenian averages, Baltimore, 1943.
Citiran u: 107.

282. A.Wintener, On arithmetical summation processes, Amer. Journ. Math. 79, 1957.
Citiran u: 107.

283. M.Katayama, Fourier Series VII: Uniform Convergence Factors of Fourier Series, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 13, 1957.
Citiran u: 106.

284. O.Szász, On uniform convergence of trigonometric series, Bull. Amer. Math. Soc. 50, 1944.
Citiran u: 106.

285. H.Nelson, Proof of a conjecture of Steinhaus, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 40, 1954.
Citiran u: 101.

286. R.Agnew, On Equivalence of Methods of Evolution of Sequences, Tôhoku Math. Journal. 35, 1932.
Citiran u: 61.

287. V.Amato, Un criterio di convergenza e sua applicazione alla summabilita secondo Riesz, Napoli Rendic, (3) 28, 1922.
Citiran u: 61.

288. K.Ananda-Rau, On Lambert's Series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 19, 1920.
Citiran u: 61.

289. K.Ananda-Rau, On the Relation between the Convergence of a Series and its Summability by Cesàro's Means, Journal Indian Math. Soc 15, 1924.
Citiran u: 61.

290. K.Ananda-Rau, On the Converse of Abels Theorem, Journ. Lond. Math. Soc. 3, 1928.
Citiran u: 61.

291. M.J.Belinfante, Die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes in der intuitionstischen Mathematik, Proc. Acad. Amsterdam, 34, 1931.
Citiran u: 61.

292. L.Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Enzyklopaedie der Math. Wiss. Band II, 3, Heft 4, Leipzig, 1921.
Citiran u: 61.

293. S.Bochner, Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren, Sitzungsberichte der Preuss. Akad. Wiss. Math.-Phys. Klasse, III, 1933.
Citiran u: 61.

294. K.K.Chen, On the Theory of divergent Series, Tôhoku Math. Journal, 29, 1928.
Citiran u: 61.

295. M.Cipolla, Sur criterio di convergenza di Hardy, Napoli Rendic (3) 26, 1920.
Citiran u: 61.

296. M.Cipolla, Criterii di convergenza reducibili a quello die Hardy-Landau, Napoli Rendic (3) 27, 1921.

Citiran u: 61.

297. M.Fekete, C.E.Winn, On the Connexion between the Limits of Oscillation of Sequence and its Cesàro and Riesz Means, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 35, 1933.
Citiran u: 61.

298. M.Fujiwara, Über summierbare Reihen und Integrale, Tôhoku Math. Journal, 15, 1919.
Citiran u: 61.

299. M.Fujiwara, Ein Satz über Borelsche Summation, Tôhoku Math. Journal, 17, 1920.
Citiran u: 61.

300. V.Ganapathi Iyer, Tauberian Theorems on generalized Lambert's Series, Journal Indian Math. Soc. (New Series), 1, 1934.
Citiran u: 61.

301. G.H.Hardy, An Extension of a Theorem on Oscillation Series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 12, 1913.
Citiran u: 61.

302. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Theorems concerning the Summability of Series by Borel's exponential Method, Rendic. Circ, Mat, Palermo, 41, 1916.
Citiran u: 61.

303. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Solutions of the Cesàro Summability Probleme for Power series and Fourier Series, Math. Zeit. 19, 1923.
Citiran u: 61.

304. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Notes on the Theory of Series (IV): On the strong Summability of Fourier Series, Proc. Lond. Math.

Soc. (2) 26, 1927.
Citiran u: 61.

305. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, A further Note on the Converse of Abel's theorem, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 25, 1926.
Citiran u: 61.

306. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, Some new convergence Criteria for Fourier Series, Ann. Scuola norm. super. Pisa, II, 1932.
Citiran u: 61.

307. J.M.Hyslop, On the Summability of Series by a Method of Valiron, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 4, 1936.
Citiran u: 61.

308. S.Izumi, On the Condition for the Convergency of the Series summable (C, r), Tôhoku Math. Journal, 33, 1930.
Citiran u: 61.

309. S.Izumi, A Generalisation of Tauber's Theorem, Proc. Acad. Japon. V, 1929.
Citiran u: 61.

310. A.Kienast, Extensions of Abel's Theorem and its Converses, Proc. Cambridge Philos. Soc. 19, 1918.
Citiran u: 61.

311. A.Kienast, Erweiterungen des Abelschen Satzes für Potenzreihen und ihre Umkrhrungen, Jahresschrift der Naturforsch. Gesellschaft Zürich, 67, 1922.
Citiran u: 61.

312. A.Kienast, Extensions to other Series of Abel's and Tauber's Theorems on Power Series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 25, 1926.
Citiran u: 61.

313. K.Knopp, Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung, Rendic. Circolo Mat. Palermo, 25, 1909.
Citiran u: 61.

314. Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen, Jahrsber. Deutsch. Math. Verein. 32, 1923.
Citiran u: 61.

315. T.Kubota, Einige Sätze den Grenzwert betreffend, Tôhoku Math. Journal, 15, 1919.
Citiran u: 61.

316. E.Landau, Über die Konvergenz einer Klasse von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes, Monatsheft für Math. und Phys. 43, 1907.
Citiran u: 61.

317. E.Landau, Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale, Sitzungsberichte Bayer. Akad. Wiss. Math. Phys. 1913.
Citiran u: 61.

318. G.Lorenz, Über lineares Summierungsverfahren, Rec. Math. Soc. Math. Moscou, 39, no. 3, 1932.
Citiran u: 61.

319. F.Lukasz, Bemerkung zu einem Konvergenzsatz des Herrn Landau, Arch. Math. Phys. (3) 23, 1915.
Citiran u: 61.

320. L.Neder, Über Taubersche Bedingungen, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 23, 1924.
Citiran u: 61.

321. M.Oberschkoff, Über einige Sätze für Summierung divergenter Reihen, Töhoku Math. Journal, 32, 1930.
Citiran u: 61.

322. A.Pringsheim, Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreis, Münchener Berichte, 30, 1900.
Citiran u: 61.

323. A.Pringsheim, Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen die durch iterierte Mittelbildungen reduziebel ist, Münchener Berichte, 50, 1920.
Citiran u: 61.

324. V.Ramaswami, Some Tauberian Theorems on Oscillation, Journal Lond. Math. Soc. 10, 1935.
Citiran u: 61.

325. V.Ramaswami, The generalised Abel-Tauber theorem, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 42, 1936.
Citiran u: 61.

326. G.Ricci, Sui teoremi Tauberiani, I, Anal. Math. pura appl. (IV) 13, 1935.
Citiran u: 61.

327. W.Schnee, Über Dirichletsche Reihen, Rendic. Circolo Mat. Palermo, 27, 1909.
Citiran u: 61.

328. G.Sunouchi, On a linear Transformationen of infinite Sequences. Proc. Phys, Math. Soc. Japan (III), 16, 1934.
Citiran u: 61.

329. O.Szász, Über Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze, Atti del Congresso Intern. Mat. Bologna 1928, 1929.
Citiran u: 61.

330. O.Szász, Über neue Untersuchungen im Zusammenhange mit dem Abelschen Potenzreihensatz, Mat. Fiz. Lapok, 36, 1929.
Citiran u: 61.

331. O.Szász, Über Sätze Tauberscher Art, Jahresberichte Deutsch. Math. Verein. 39, 1930.
Citiran u: 61.

332. O.Szász, Converse Theorems of Summability for Dirichlet's series, Trans. Amer. Math. Soc. 39, 1936.
Citiran u: 61.

333. S.Takenaka, Tauberian Theorems concerning Dirichlet's Series and allied Integrals, Japonese Journ. math. 2, 1925.
Citiran u: 61.

334. T.Vijayarghavan, Tauberian Theorem, Journal Lond. Math. Soc. 1, 1926.
Citiran u: 61.

335. T.Vijayarghavan, Converse Theorem on Summability, Journal Lond. Math. Soc. 2, 1927.
Citiran u: 61.

336. N.Wiener, Une méthode nouvelle pour démonstration de théorèmes de Tauber, C. R. Acad. Paris, 184, 1927.
Citiran u: 61.

337. N.Wiener, A Tauberian gap theorem of Hardy and Littlewood, Journal Chin. Math. Soc. 1, 1936.
Citiran u: 61.

338. A.Zygmund, On a Theorem of Ostrowsky, Journal Lond. Math. Soc. 6, 1931.
Citiran u: 61.

339. E.Landau, Die Ungleichungen für zweimal differetierbare Funktionen, Det. Kgl.Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-Fysiske Menddelelser. VI. 10. 1925 Citiran u: 48.

340. Einige Ungleichungen für zweimal differetierbare Funktionen, Proc. of the Lond. Math. Soc. (2), 13, 1913. Citiran u: 48.

Prilog C

Objavljene knjige i stručno-pedagoški radovi Jovana Karamate

1. Praktične mogućnosti matematičkih rešenja, Matematički list, br.1-2, Beograd, 1931, s. 17-25.

2. Elementarno iznalaženje maksimuma i minimuma, Matematički list, br.5-6, Beograd, 1931, s. 70-76.

3. Rešenja diplomskih zadataka iz teorijske matematike za školsku godinu 1930-1931 na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Sredio J.Karamata, Beograd, 1931, s. [4] + 26.

4. Dedekindovi preseci. Teorija iracionalnih brojeva. Po predavanjima Dr J.Karamate. Beograd, Udruženje studenata matematike 1934, s. 62.

5. Teorija nizova sa primerima i zadacima. Sredio E.Stipanić po predavanjima J.Karamate. Udruženje studenata matematike, Beograd, 1939,
s. [2] + 206 + [2].

6. O neograničeno rastućim nizovima, Matematički vesnik 5-6, Beograd, 1939, s.11-36.

7. Algebra I. Kompleksan broj, o konstrukcijama šestarom i lenjirom. Po predavanjima prof. Jovana Karamate sredio M.Tomoć. Stručno udruženje studenata Prirodno-matematičkog i Filozofskog fakulteta, Beograd, 1947, s.113.

8. Algebra II. Izdavačka sekcija Akcionog Odbora studenata Beogradskog univerziteta, Beograd, 1947, s.152.

9. Viša algebra. Po predavanjima dr Jovana Karamate sredili B.Ivanović i B.Vujošević, Beograd, bez godine, s,192.

10. Mihailo Petrović, 24.6.1868-8.6.1943. (in memoriam) Glasnik Mat.-Fiz.Astr. ser.II, T.3, sv.3, Zagreb, 1948, s. 123-127. Na srpskom. 3 citirana rada (167-169).

11. Kurs opšte matematike. Niža analiza. Po predavanjima Jovana Karamate. Stručno udruženje studenata Prirodno-matematičkog i Filozofskog fakulteta. Beograd, 1947, s.349.

12. Elementi matematičke analize. Naučna knjiga, Beograd, 1948, 1950,
s. IV + 297 + IV.

13. O aproksimaciji eksponencijalne funkcije nizom racionalnih funkcija. Sur l'approximation des fonctions exponentielles par des fonctions rationnelles. Vesnik Društva matematičara i fizičara Srbije, I-1, Beograd, 1949, s. 7-19. Na srpskom, rezime na francuskom i ruskom.
Zbl. N.Obrechkoff, B.31, s. 350.
MR. W.Feller, V.11, s. 104.

14. Algebra I, I i II deo. Naučna knjiga, Beograd, 1949, s.139+184.

15. Pregled elementarne matematike. I deo: Aritmetika i algebra. (II i III deo su autori T.Anđelić i M.Stojaković), Beograd, Naučna knjiga, 1949, str.63. Na srpskom.
Prikaz u Vesnik DMFS I 3-4, 1949, str.145.

16. Neki specijalni slučajevi prvog stava o srednjim vrednostima. Sur certains câs particuliers du premier théorème de la moyenne. Vesnik DMFS, I, 3-4, Beograd, 1949, s. 83-103. Na srpskom, rezime na francuskom.
    Zbl. J.Karamata, B.39, s. 289.
    MR. R.P.Boas, V.1, s. 716.

17. Teorija i praksa Stiltjes-ova integrala. Posebno izdanje SANU, knj.CLIV, Beograd, 1949, s. 328. Na srpskom.
    MR. W.Feller, V.11, s. 428.

18. Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju. Naučna knjiga, Beograd, 1950, s. 160. Na srpskom.

19. Pitanja i zadaci, Vesnik DMFS, I, Beograd, 1949. (Postavio 9 zadataka u prve tri sveske)

20. Neke primene kompleksnog broja u elementarnoj geometriji. Über die Anwendung der komplexen Zahlen in der Elementargeometrie. Bulletin de la Societé des mathématiciens et des physiciens de Macedonie, Skopje, 1, 1950, s. 55-81. Na srpskom, rezime na nemačkom.
    MR. H.A.Lauwerier, V.12, s. 523.

21. Teorija funkcija, Naučna knjiga, Beograd, 1950, s. 250 + VII

22. Predavanja iz analize na Filozofskom fakultetu u Novom Sadu, I deo: Realan broj i funkcija, II deo: Diferencijalne jednačine, (sa B. Stankovićem). Novi Sad, 1956, s. 109+66.

Prilog D

Spisak kongresa na kojima je učestvovao Jovan Karamata

1. 52. Kongres francuskog udruženja za unapređenje nauka (AFAS), u La Roselu, u julu 1928. godine (rad 8)
2. 1. nacionalni kongres rumunskih matematičara u Klužu, 9-12. maj 1929. godine (14),
3. 53. kongres AFAS u Le Havru, 25-31. juli 1929. godine (11),
4. 1. kongres slovenskih matematičara u Varšavi, 23-27. septembar 1929. godine (10),
5. 54. kongres AFAS u Alžiru 1930. godine (12),
6. 55. kongres AFAS u Nansiju 1931. godine (16),
7. 2. nacionalni kongres rumunskih matematičara u Turnu Severinu, 5-9. maj 1932. godine (26),
8. Internacionalni kongres matematičara u Cirihu, 1-12. septembar 1932. godine (25),[210]
9. 2. kongres slovenskih matematičara u Pragu, 23-28. septembar 1934. godine (41, 46),
10. Međunarodni kongres matematičara u Oslu 1936. godine (60).

[210]Boravio je kao delegat Jugoslavije pri Internacionalnoj komisiji za usavršavanje nastave matematike.

11. 63. Kongres AFAS u Bijaricu, 1947. godine (76),
12. Kongres međunarodne unije Akademija u Briselu, 1947. godine,
13. Kongres francuskih matematičara u Ženevi, 1948. godine (77),
14. 1. kongres matematičara i fizičara Jugoslavije na Bledu, od 8. do 12. novembra 1949. godine (81),
15. Internacionalni kongres matematičara u Kembridžu (SAD) od 30. avgusta do 6. septembra 1950. godine (84),
16. Kongres C.C.I.R. u Ženevi 1952. godine (94),
17. Međunarodni kongres matematičara u Amsterdamu od 2. do 9. septembra 1954. godine (97),
18. 79. kongres Sociétés Savantes u Alžiru 1954. godine (98),
19. Kongres sovijetskih matematičara u Moskvi 1956. godine,
20. Skup o teoriji redova održanom u Briselu od 18. do 20. decembra 1957. godine i u Parizu i Luvenu 1958. godine (108).

Prilog E

Zadaci Jovana Karamate za učenike srednje škole

Navešćemo primere zadataka za samostalno rešavanje učenika srednjih škola koje je Karamata postavio u Vesniku Društva matematičara i fizičara Srbije.

1. Naredne dve nejednačine daju jednu gornju granicu za funkciju $\log x$ za sve vrednosti $x > 0$:

$$\frac{lgx}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = A_2(x)$$

i

$$\frac{lgx}{x-1} \leq \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}} = A_3(x).$$

Desna strana $A_2(x)$ prve nejednačine ponaša se kao $1/\sqrt{x}$ kad $x \to 0$, a $xA_2(x)$ kao $\sqrt{x}$ kad $x \to \infty$, pri tome je

$$A_2(x) - \frac{lgx}{x-1} \sim \frac{1}{24}(x-1)^2, \text{ kad } x \to 1.$$

Desna strana $A_2(x)$ druge nejednačine se ponaša kao $1/\sqrt[3]{x}$ kad $x \to 0$, a $xA_3(x)$ kao $\sqrt[3]{x}$ kad $x \to \infty$, pri tome je

$$A_2(x) - \frac{lgx}{x-1} \sim \frac{1}{1620}(x-1)^4 \text{ kad } x \to 1.$$

Postavlja se pitanje kako bi izgledala najjednostavnija algebarska funkcija $A_k(x)$ takva da bude

$$\frac{lgx}{x-1} \leq A_k(x) \text{ za sve } x > 0,$$

a da se pri tome funkcija $A_k(x)$ ponaša kao $1/\sqrt[k]{x}$ kad $x \to 0$, $xA_k(x)$ ponaša kao $\sqrt[k]{x}$ kad $x \to \infty$ i da razlika

$$A_k(x) - \frac{lgx}{x-1}$$

teži nuli što brže, i to kao $a_k(x-1)^{2(k-1)}$ kad $x \to 1$?

2. Neka je

$$S_n(x) = \max_{1 \le \nu \le n} \left\{ \frac{\sin \nu \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right\}$$

za $0 \le x \le \pi$, gde max znači da treba za svako određeno x uvek uzeti najveći od brojeva

$$\frac{\sin \nu \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

za $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Pokaži najpre da je za $0 \le x \le \pi$,

$$S_n(x) \le 1/\sin \frac{x}{2}$$

i da

$$S_n(x) \to 1/\sin \frac{x}{2} \text{ kad } n \to \infty.$$

Zatim dokaži: Ako je

$$a_0 \ge a_1 \ldots a_{n-1} \ge a_n \ge 0,$$

tada je

$$|S_n| = |\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{\nu x}| \le a_0 S_{n+1}(x) \text{ za svako } 0 \le x \le \pi.$$

3. Neka je $u_n \ge 0$, i ako pored toga niz u_n monotono opada tj. ako je

$$u_n \ge u_{n+1} \text{ počev od nekog } n,$$

tada iz konvergencije reda $\sum u_n$ sledi ne samo da $u_n \to 0$, već i da

$$nu_n \to 0 \text{ kad } n \to \infty. \tag{0.18}$$

Pokaži da se monotonija niza u_n može zameniti opštijim uslovom i to da bude

$$u_n - u_{n+1} > -M/n^2 \text{ za } n = 1, 2, \ldots, \tag{0.19}$$

gde je M neki konačan i pozitivan broj.

Drugim rečima, dokaži da iz konvergencije reda $\sum u_n$ i uslova (2) sledi (1) i da se u uslovu (2) eksponent 2 ne može smanjiti, tj. da se uslov (2) ne može zameniti uslovom oblika

$$u_n - u_{n+1} > -M/n^{2-\varepsilon},$$

ma kako mali bio pozitivan broj ε.

4. Neka je r_n ostatak reda

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^2 (= \pi^2/6),$$

tada je

$$r_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} 1/\nu^2 \sim \frac{1}{n} \text{ kad } n \to \infty.$$

Stavimo

$$r_n = \frac{1}{n+\theta}$$

gde θ zavisi od n, tj. $\theta = \theta_n$.

Dokaži:

1. da je

$$\frac{1}{2} < \theta_n < 1 \text{ za svako } n \geq 0$$

i da $\theta_n \to \frac{1}{2}$ kad $n \to \infty$;

2. ako za θ uzmemo vrednost

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12n+6}$$

tada $\frac{1}{n+\theta}$ pretstavlja jednu sniženu približnu vrednost za r_n sa otstupanjem koje je manje od $\frac{1}{45n^3(n+1)^2}$.

Na primer za $n=4$ ovo otstupanje je manje od $1,2\cdot 10^{-5}$, a tada je $\theta_4 \approx 14/27$ i $r_4 \approx 27/122$. Prema tome ako uzmemo samo prva četiri člana datoga reda

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$$

i ovom zbiru dodamo korektivan član $27/122$ dobivamo jednu povišenu približnu vrednost za $\pi^2/6$ sa otstupanjem koje je manje od $1,2\cdot 10^{-5}$, ovu tačnost bismo mogli postići kod datog reda samo ako bismo sabrali oko 83.000 njegovih članova.

5. Za specijalan slučaj balističke diferencijalne jednačine

$$(y+\rho)y'+y^2-1=0 \tag{0.20}$$

u kome funkcija $\rho(x)$ ima oblik

$$\rho(x)=Ae^{nx}+B^{e^{-nx}}+R \tag{0.21}$$

d'Alembert je dao jedan uslov integrabiliteta oblika

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{n+1}=\frac{R^2}{(n+2)^2}.$$

Pokaži da je diferencialna jednačina (3) kad funkcija $\rho(x)$ ima oblik (4) integrabilna kadgod je zadovoljen uslov

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{k(n+k)}=\frac{R^2}{(n+2k)^2}$$

ma kakav bio ceo pozitivan ili negativan broj k; ovaj se uslov za $k=1$ svodi na d'Alembert-ov.

6. Izvršimo permutaciju niza prirodnih brojeva

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

tako da, počev od prvog iza svakog broja najpre stavimo njegov dvostruki, a zatim naredni preostali. Ovim dobivamo niz

$$1, 2,\ 3, 6,\ 4, 8,\ 5, 10,\ 7, 14,\ 9, 18,\ 11, 22, \ldots$$

oblika

$$k_1, 2k_1, k_2, 2k_2, k_3, 2k_3, \ldots, k_n, 2k_n, \ldots,$$

gde je

$$k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 4,\ k_4 = 5,\ l_5 = 7,\ k_6 = 9,$$
$$k_7 = 11,\ k_8 = 12,\ k_9 = 13,\ k_{10} = 15, \ldots$$

Neka je $K(x)$ broj članova niza k_n koji nisu veći od x i $[x]$ najveći ceo broj koji nije veći od x. Pokaži:

1. da je

$$K(x) = \left[\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4^n}\right] + \cdots,$$

za svako $x \geq 0$;

2. da je

$$K(x) = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{2^2}\right] - \left[\frac{x}{2^3}\right] + \cdots,$$

za svako $x \geq 0$;

3. ako ceo broj n napišemo u diadnom sistemu, tj. ako stavimo

$$n = d_1 2^0 + d_1 2^1 + \ldots d_r 2^r,$$

gde brojevi d_ν mogu biti samo 0 ili 1, pokaži da je tada

$$K(n) = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(d_0 - d_1 + d_2 - \ldots + (-1)^r d_r),$$

kao na primer,

$$\begin{aligned} K(29) &= K(1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^4) = \\ &= \frac{2}{3}29 + \frac{1}{3}(1 - 0 + 1 - 1 + 1) = 20; \end{aligned}$$

4. brojevi niza k_n sačinjavaju 2/3 brojeva prirodnoga niza, tj. njihova asimptotska gustina iznosi 2/3, ili

$$K(x) \sim \frac{2}{3}x,\ x \to \infty,$$

štaviše

$$K(x) = \frac{2}{3}x + O(lgx),\ x \to \infty;$$

5. sam niz brojeva K_n se za veliko n asimptotski ponaša kao $3n/2$, tj.

$$k_n \sim \frac{3}{2}n,\ n \to \infty.$$

7. Algebarskom jednačinom

$$y^3 - 3y = x,\ (x \text{ realno }), \tag{0.22}$$

jednoznačno je definisano y kao funkcija od x,

$$y = f(x) \text{ za } |x| > 2.$$

Pokaži da ova funkcija zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$f(x^2 - 2) = 1 + x/f(x).$$

Kako treba interpretisati ovu funkcionalnu jednačinu kad je $|x| \leq 2$?

Pokaži da se jednačina (5) za

$$x = \pm\sqrt{2 \pm 2\sqrt{\ldots \pm \sqrt{2}}} \tag{0.23}$$

ma koliko bilo ovih korena, može rešiti kvadratnim korenima.

Brojevi oblika (6), uzimajući u obzir sve moguće kombinacije znakova + i −, popunjavaju razmak $(-2, +2)$ svugde gusto. Dovedi u vezu sa trigonometriskim rešenjem jednačine trećeg stepena i uporedi sa zadacima 183-185 zbirke: Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, T. I. Absch. I, Kap. 4, str. 33.

8. Još je L. Fejér naslutio da je

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} > 0 \text{ za } 0 < x < \pi \text{ i } n = 1, 2, \ldots$$

U jednom časopisu dat je dokaz koji doslovce glasi:

Neka je $n > 1$ i neka je stav tačan za $(n-1)$. Iz

$$0 = 2 \sin \frac{x}{2} S_n'(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{v=1}^{n} \cos vx = \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}$$

sledi za $0 < x < \pi$

$$\sin nx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x \cos \tfrac{x}{2} - \cos(n+\tfrac{1}{2})x \sin \tfrac{x}{2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{ili} \\ \sin x & \end{array} \right\} \geq 0,$$

$$S_n(x) \geq S_{n-1}(x) > 0.$$

Prema tome, $S_n(x)$ nema za $0 < x < \pi$ ni jednog minimuma koji je ≤ 0, prema tome ni jednu vrednost koja je ≤ 0.

Da li je ovaj dokaz potpun? Kako on izgleda kada se u njemu detaljno izvrše svi prelazi?

9. Data je diferencijalna jednačina $y' = f(x, y, a)$ (1), "a" proizvoljan parametar. Ako f ima osobinu da eliminacijom parametra a iz jednačine (1) i jednačine koja se dobija diferenciranjem date jednačine po x, eliminiše i y', onda se data diferencijalna jednačina (1) može rešiti kvadriranjem.

10. Pet pešaka - koji raspolažu jednim biciklom, na kojemu se mogu voziti i dvojica - krene istodobno iz mesta A u 44 km udaljeno mesto B. Kako će se oni poslužiti tim biciklom, ako žele da stignu svi istodobno i u što kraćem vremenu u B, a zna se, da je brzina pešaka 5 km/sat, a brzina bicikla 20 km/sat? (Glasnik matematički-fizički i astronomski ser.II, t.3, sv.3, Zagreb, 1948, s.233.)

Prilog F

Spisak saopštenja Jovana Karamate u Matematičkom institutu i u Društvima matematičara i fizičara

1. Primedbe na saopštenje Vojislava Avakumovića Asimptotsko ponašanje integrala jedne klase nelinearnih diferencijalnih jednačina. 8.11.1946.
2. O asimptotskom ponašanju integrala jedne klase diferencijalnih jednačina drugog reda. 2.4.1947.
3. O balističkoj jednačini. 25.6.1947.
4. O izvesnim nejednačinama koje se odnose na količnik i razliku integrala tipa $\int f\varphi$ i $\int f \int \varphi$. 3.9.1947.
5. Geometrijska ispitivanja trigonometrijskih suma. 19.11.1947
6. O granicama realnih korena. 24.12.1947.
7. O aproksimaciji eksponencijalne funkcije racionalnim funkcijama. 14.1.1948.
8. O prvom stavu o srednjim vrednostima. 4.2.1948.
9. O Furijeovim redovima. 5.5.1948.
10. O približnim kvadraturama. 19.5.1948.
11. Rad Mihaila Petrovića u oblasti teorije funkcija. 10.6.1948, DMFS.
12. Zapremina piramide. 23.6.1948.

13. O jednom problemu Ramanudžana. 4.8.1948.

14. O verižnim razlomcima za tangens i tangens hiperbolikus. 6.10.1948.

15. Teorija i praksa Stieltjesovih integrala. 20.10.1948.

16. Jedna primedba o korenima. Primedba u vezi saopštenja Dragoljuba Markovića Uopštavanje jednog problema Landaua. 27.10.1948.

17. Trigonometrijski polinomi, 17.11.1948. Matematičko-fizička sekcija Hrvatskog prirodoslovnog društva, Zagreb.

18. O nulama polinoma. 19.1.1949.

19. O aproksimaciji eksponencijalne funkcije nizom racionalnih funkcija. 22.2.1949. DMFS.

20. Postupak za ubrzavanje konvergencije redova. 2.3.1949.

21. Upoređivanje reda beskonačno malih veličina (sa A.Bilimovićem) 2.3.1949.

22. Primedba na saopštenje M.Tomića O Ojlerovom postupku zbirljivosti. 4.5.1949.

23. O Bernštajnovoj zbirljivosti. 18.5.1949.

24. O jednom Fragmenovom stavu iz teorije Dirihleovih radova. 22.6.1949.

25. O jednom približnom obrascu. 20.7.1949.

26. Izveštaj o putu u Švajcarsku. 16.11.1949.

27. O teoremi o srednjoj vrednosti. 18.1.1950.

28. O Ležendrovim polinomima. 25.1.1950.

29. O Milankovićevom postupku geometrijske interpretacije konvergencije geometrijskih redova. 1.2.1950.
30. O približnim kvadraturama. 8.3.1950.
31. O jednom Avakumovićevom stavu. 26.7.1950.
32. O kriterijumima konvergencije Furijeovih radova koji se odnose na regularno rastuće funkcije. 18.10.1950.
33. Asimptotski raspored nula izvesnog niza polinoma. 2.4.1952.
34. Vinerova metoda predviđanja pojava. 18.4.1952. DMFS.
35. O Košijevom stavu. 26.12.1952.
36. Elementarne metode u teoriji brojeva (sa R.Bojanićem). 17.2.1954.
37. Elementarna procena k-tih tipičnih Rizovih suma. 29.11.1954.
38. Algebra torzora. 5.1.1955.
39. Brzina rašćenja funkcija kao relacija poretka. 16.3.1955.
40. O skupovima koji su totalno uređeni s obzirom na asimptotsku relaciju. 12.10.1955.
41. O C-majorabilnosti i nekim Tauberovim stavovima u teoriji brojeva. 21.12.1955.
42. Pravilno promenljive funkcije i Frulanijev integral (sa S.Aljančićem). 20.6.1956.
43. Problem poboljšanja konvergencije jedne klase beskonačnih redova (sa R.Bojanićem). 19.3.1958.
44. O jednoj klasi rešenja jednačine $y" = F(x)y(x)$ (sa V.Marićem). 3.10.1960.

45. Generalizacija Helerove teoreme (sa B.Bajšanskim). 7.12.1960.

Prilog G

Jovan Karamata:

Upoznavanje sebe kao osnov saznanja

U prvom broju časopisa Jugoslovenskog antroposofskog društva "Upoznaj sebe" iz 1931. godine na 18. strani objavljen je Karamatin tekst *Upoznavanje sebe kao osnov saznanja*. Karamata piše:

Većina današnjih ljudi teško uviđa važnost upoznavanja sebe za saznanja kako moralne tako naučne prirode. Da je upoznavanje sebe zaista osnov za objektivno, bespredrasudno prilaženje istini, što se lakše uviđa za moralnu a teže za naučnu istinu, uvidećemo u punoj meri tek kad budemo sami vršili potrebne napore po onim uputama po kojima se ta saznanja postižu.

Jedna takva uputa osniva se na činjenici da se u svakom pojedincu, prosečnom čoveku, ogledaju sve crte karaktera, cela skala, od najviših vrlina do najnižih poroka, samo je kod jednog jedno a kod drugog drugo slabije ili jače razvijeno. Kako bi, na primer, Šekspir mogao tako duboko opisati sav onaj bezbroj ljudskih tipova, od najsvetlijih do najmračnijih, da ih on nije sam odražavao. Kada posmatramo nekoga čoveka i odobravamo ili osuđujemo neko njegovo delo, tada ispitajmo ne samo spoljašnje okolnosti, već i one njegove crte karaktera koje su ga na to delo navele. Nastojmo zatim da u sebi pronađemo iste te crte karaktera (bile one na površini ili skrivene u najtamnijem kutiću naše duše) i da stvorimo slično duševno raspoloženje i u nama.

Vršimo li to savesno i sa dovoljno nepristrasnosti, pa makar se i nas lično ticalo tada među ostalim postizavamo dvoje: Sa jedne strane počinjemo shvatiti delo dotičnog čoveka drugačije nego što smo to

dosada umelli, (*upoznajemo njega, upoznavajući sebe*), opravdavajući ga ako je za opravdanje, pa makar se kosilo sa našim ličnim interesima. Sa druge strane *upoznajemo sebe, upoznavajući drugoga* te stičemo mogućnost da jačamo sopstvene vrline i iskorenjujemo sopstvene mane.

A pre svega, vršeći ovo sa dovoljno savesnosti i ustrajnosti, razvijamo postepeno, sa jedne strane sve širu toleranciju, a sa druge sve veću objektivnost, dva osnovna uslova *svakom stvarnom saznanju.*

Prilog H

Kratak letopis života Jovana Karamate

1902. U Zagrebu 1. februara rođen Jovan Karamata.

1909. Krenuo u osnovnu školu u Budimpešti.

1913. Završio osnovnu školu u Zemunu. Upisao se na Zemunsku gimnaziju.

1914. Nastavio školovanje u Gimnaziji u Sušaku.

1915. Odlazi u Lozanu gde se upisuje na prirodno-naučnu Kantonalnu Gimnaziju.

1920. Maturirao u Lozani. Upisuje studije tehnike na Tehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

1922. Polaže pripremni ispit na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Prelazi na studije matematike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

1925. Diplomirao. Postavljen za neukaznog asistenta kod Mihaila Petrovića. Drži prvo saopštenje u SKA. Objavljuje mu se prvi rad u časopisu GLAS SKA. Od tada je redovno pisao radove i objavio je 123 naučna rada, 8 udžbenika i monografija i 7 stručno-pedagoških radova.

1926. Promovisan za doktora filozofije.

1927. Odlazi na usavršavanje u Pariz kao stipendista Rokfelerovog fonda.

1928. Učestvuje na svom prvom kngresu. Ukupno je učestvovao na 21 kongresu, i veliki broj puta je gostovao kao predavač na Univerzitetima po celom svetu. Vraća se iz Pariza u Beograd.

1929. Postavljen za ukaznog asistenta za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Do 1933. godine traje najznačajniji period naučnog rada.

1930. Izabran za docenta za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

1931. Ženi se Emilijom Nikolajević (1906-1959), sa kojom ima troje dece - Vladimir (rođen 1934), Dimitrije (1935) i Katarina (1948). Vlasnik časopisa Matematički list za srednju školu.

1933. Izabran za dopisnog člana JAZU u Zagrebu.

1936. Izabran za dopisnog člana Češkog kraljevskog naučnog društva.

1937. Izabran za vanrednog profesora na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

1939. Izabran za dopisnog člana SKA.

1948. Postaje redovni član SAN.

1949. Upravnik Matematičkog instituta SAN.

1950. Izabran za redovnog profesora Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

1951. Izabran za redovnog profesora na Univerzitetu u Ženevi.

1967. Avgusta 14, u Ženevi je umro Jovan Karamata.

Sažetak

Stara, ugledna i imućna cincarska porodica Karamata vodi poreklo iz okoline Mavrova odakle se doselila u Zemun krajem 18. veka, ubrzo prilagodila novoj sredini i pretopila u Srbe. Jovan Karamata se rodio 1. februara 1902. godine u Zagrebu, u građanskom i, materijalno i duhovno, bogatom okruženju. Odmah po rođenju se preselio u Zemun koga je uvek smatrao za svoj rodni grad. Osnovnu školu je počeo pohađati u Budimpešti 1909. godine, a nastavio i završio u Zemunu 1913. godine. Te iste godine se upisao na Zemunsku gimnaziju, ali je pred početak Prvog svetskog rata, 1914. godine, napustio Zemun i školovanje nastavio na Sušaku pored Rijeke. Zbog ratnih prilika otac ga je poslao u Švajcarsku, gde se u Lozani 1915. godine upisao na prirodno-naučnu Kantonalnu gimnaziju (Gymnase scientifique) na kojoj je maturirao 1920. godine. Tu je stekao solidno srednjoškolsko matematičko znanje ali i preciznost, pedantnost, sistematičnost i marljivost, što se kasnije u njegovom radu i delima jasno očitovalo.

U Beograd se vratio 1920. godine i upisao studije tehnike na Tehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Pripremni ispit na Građevinskom odseku Tehničkog fakulteta je položio 1922. godine kada se prebacio na studije matematike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu gde je slušao prvu grupu nauka (teorijska matematika, primenjena matematika i eksperimentalna fizika). Diplomirao je 1925. godine i odmah postavljen za neukaznog asistenta kod profesora Mihaila Petrovića. Doktorski ispit je položio 1926. godine tezom *O jednoj vrsti granica sličnih određenim integralima*. Za ukaznog asistenta za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu je postavljen 1929. godine po povratku sa usavršavanja u Parizu, gde je kao stipendista Rokfelerovog fonda boravio od decembra 1927. godine do septembra 1928. godine. Za docenta za matematiku na Univerzitetu

u Beogradu je izabran 1930. godine, za vanrednog profesora 1937. godine a za redovnog profesora 1950. godine. Beograd je napustio 1951. godine kada je izabran za redovnog profesora Univerziteta u Ženevi, gde je umro 14. avgusta 1967. godine.

Jovan Karamata je objavio 123 naučna rada, 10 monografija i udžbenika i 8 stručno-pedagoških radova. Njegovi najznačajniji rezultati su iz oblasti klasične matematičke analize, tačnije iz teorije funkcija Tauberove prirode i teorije sporo promenljivih i regularno promenljivih funkcija. Ti rezultati, ali i mnogi drugi iz ostalih oblasti analize i matematike (Merserove teoreme, nejednakosti, trigonometrijski integrali itd.), nebrojeno puta su citirani u radovima i monografijama tog ali i sadašnjeg vremena. Kao visoko cenjeni naučnik i predavač učestvovao je na brojnim kongresima i gostovao na mnogim univerzitetima Evrope i Amerike. Zahvaljujući svom naučnom ugledu postao je dopisni član JAZU (1933), Češkog kraljevskog društva (1936) i SKA (1939) kao i redovan član SAN (1948). Bio je član Švajcarskog, Francuskog i Nemačkog matematičkog društva, Francuskog društva za razvoj nauka, kao i stalni saradnik u referativnim žurnalima i glavni urednik časopisa *L'Enseignement Mathématique*. Aktivno je u čestvovao u radu Univerziteta, SAN i Matematičkog instituta pri SAN, i u mnogome je doprineo velikom ugledu tadašnje beogradske matematike u svetu. Svetsku slavu su mu doneli njegovi originalni matematički rezultati, ali jednaku važnost imaju poznata Karamatina škola matematike i njegovi đaci, kasnije i ugledni matematičari-saradnici.

LITERATURA

[1] N.H.Bingham, J.L.Teugels, Tauberian theorems and regular variation, Nieuw Archief voor wiskunde (3), XXVII, 1972, s.153-186.

[2] N.H.Bingham, C.M.Goldie, J.L.Teugels, Regular Variation. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 27, Cambridge Univ. Press, 1987.

[3] N.H.Bingham, Regular variation in probability theory, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) 48(62), 1990, s.169-180.

[4] W.Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications I i II, Willey, New York, 1969-1971.

[5] J.L.Geluk, L.de Haan, Regular Variation extensions and Tauberian Theorems, CWI Tract 40, Amsterdam, 1987.

[6] G.H.Hardy, Divergent Series, 1949.

[7] Jeremić R., Poreklo stanovnika u Zemunu. Glasnik Istorijskog društva u Novom Sadu, 1937.

[8] Marić V., O delu Vojislava G. Avakumovića, Istorija matematičkih i mehaničkih nauka 6, Matematički institut, Beograd, 1992. s. 11-17.

[9] Marić V., Radašin Z., Regularly varying function in asymptotic analysis, Obzornik

[10] Marić V., Tomić M., A classification of solutions of second order linear differential equations by means of regularly varying functions, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) 48(62), 1990, s.199-207.

[11] Nikolić A., Karamatini proizvodi vektora, Zbornik radova 11 Jugoslovenske konferencije geometričara, Divčibare, 1996, Matematički vesnik

[12] Nikolić A., Život i rad Jovana Karamate, SANU, Odbor za proučavanje života i rada srpskih naučnika-akademika, (u štampi).

[13] Popović D., O Cincarima, Beograd, 1937.

[14] E.Seneta, Regularly varying functions. Lecture notes in Mathematics 508, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[15] E.Seneta, Karamata's iteration theorem and normed regularly varying sequences in a historical light, Publications de l'Institut Mathématique, 48 (62), 1990, s.45-51.

[16] E.C.Titchmarsh, The Theory of Functions, 1939.

[17] Tomić M., Spomenica posvećena preminulom akademiku Jovanu Karamati, SANU, posebna izdanja, knj.CDXXIII, spomenica knj.37, Beograd, 1968. s. 1-27.

[18] Tomić M., Jovan Karamata (1902-1967), L'Enseignement Mathématique, t.XV, Ženeva, 1969, s. 1-20.

[19] Tomić M., Matematičke nauke, Sto godina SANU, knj.1, Beograd, 1989. s. 13-34.

[20] Tomić M., Aljančić S., Remembering Karamata, Publications de l'Institut Mathématique, n.s. t.48 (62), Beograd, 1990. s. 1-6.

[21] Trifunović D., Letopis života i rada Mihaila Petrovića, SANU, OPMN, Beograd, 1969.

[22] Trifunović D., Tiha i usrdna molitva Miloša Radojčića, Narodna knjiga, Beograd, 1995.

[23] Saopštenja naučnih rezultata u Matematičkom Institutu 1946-1961, Beograd, 1990. Priredio Milan P.Čavčić.

[24] Godišnjaci SKA i SANU u Beogradu.