PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U NOVOM SADU

Relja Vulanović

KONSTRUKCIJA MREŽA ZA DISKRETIZACIJU SINGULARNO PERTURBOVANIH KONTURNIH PROBLEMA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

Novi Sad, 1986.

PREDGOVOR

Ova Doktorska disertacija je posvećena numeričkom rešavanju singularno perturbovanih konturnih problema koji spadaju u klasu loše uslovljenih diferencijalnih jednačina. Problemi ovog tipa su mnogo puta privlačili pažnju naučnika u poslednjih 30 godina. Disertacija donosi pregled numeričkih metoda koji se zasnivaju na konstrukciji specijalnih mreža diskretizacije i uključuje nekoliko poznatih pristupa tom problemu. Medju njima su dati moji raniji rezultati i neki novi.

Ovom naučnom oblašću sam počeo da se bavim još kao student 1980-te godine. Želim da izrazim svoju zahvalnost dr Dragoslavu Hercegu koji je bio moj mentor od tada do izrade ove Disertacije. Njegovi saveti i interes za moj rad su uvek bili veliko ohrabrenje i nadahnuće.

Posebnu zahvalnost dugujem prof. dr Erichu Bohlu iz Univerziteta u Konstanzi, SR Nemačka, za njegove dragocene komentare i sugestije u vezi sa prvom verzijom Disertacije.

Dalje želim da se zahvalim akademiku prof. dr Bogoljubu Stankoviću i dr Katarini Surla na interesovanju i odobravanju kojima su pratili moj rad.

Na kraju da napomenem da je ova Disertacija napisana paralelno i na engleskom jeziku.

u Novom Sadu,
maja 1986.

Relja Vulanović

SADRŽAJ

III EKSPLICITNI METODI ZA KONSTRUKCIJU MREŽA

I UVODNI DEO

1. Uvod

1.1 O problemu

1.1.1 Posmatrajmo sledeće konturne probleme :

(1) $\varepsilon u'' + u' - \varepsilon u = -\sin x \ , \ u(0)=u(\pi)=0 \ ,$

(2) $\varepsilon u'' - u' - au^n = 0 \ , \ \varepsilon u'(0)=u(0)-1 \ , \ u'(1)=0 \ ,$

(3) $\varepsilon x u'' + (g(x) - u)u' = 0 \ , \ u(0)=0 \ , \ u(R)=k \ .$

U ovim primerima je $0<\varepsilon<<1$.

Problem (1) opisuje kretanje talasa izazvanih vetrom, v. Kalnáy de Rivas (1972) i White (1979).

Problem (2) nastaje pri proučavanju protočnih hemijskih reaktora, v. O'Malley (1969). Konstante a i n su pozitivne, a u(x) predstavlja koncentraciju reaktanta. Dalje je $\varepsilon=D/U$, gde je D konstanta difuzije reaktanta, a U brzina kretanja fluida; $a=K_n/U$, gde $K_n u^n$ predstavlja brzinu hemijske reakcije i $K_n>0$.

Problem (3) sa odgovarajućim pretpostavkama o g(x), R i k (v. Diekman et al. (1980)) ima sledeće fizičko značenje : u(x) predstavlja broj elektrona sadržanih u cilindru jedinične visine i poluprečnika $x^{1/2}$, u proučavanju pražnjenja u gasovima.

To su samo neki primeri konturnih problema sa malim parametrom ε koji stoji uz najviše izvode u diferencijalnoj jednačini. Mnogi drugi primeri dati su u Pearson (1986 a,b) i Miranker (1981), npr.

Analizirajući rešenje u_ε problema (1) vidimo da u okolini tačke $x=0$ postoji podinterval intervala $[0,\pi]$ čija širina je $O(\varepsilon)$ i u kome se u_ε naglo menja. Ovaj interval se naziva granični sloj. Takvo ponašanje rešenja je tipično za diferencijalne jednačine sa malim parametrom. Pored graničnih mogu se javiti i unutrašnji slojevi. Dalje, rešenje uopšte ne mora imati slojeve, dok ga njegov prvi izvod ima. To je baš slučaj u problemima (2) i (3). Pregled različitih tipova konturnih problema sa malim parametrom dat je u knjigama i radovima Trenogin (1970), Markuš (1975), O'Malley (1974).

1.1.2 Problemi ovakvog tipa mogu se napisati u opštoj, apstraktnoj formi

(1) $\quad T_\varepsilon u(x)= 0 \;,\; x\in I \;,\quad B_\varepsilon u(x)= 0 \;,\; x\in \partial I \;,$

gde su T_ε i B_ε diferencijalni i konturni operator, respektivno; I je interval u $\mathbb{R}$, a ∂I je njegova granica. U opštem slučaju i T_ε i B_ε zavise od malog parametra ε. Nepoznata funkcija $u(x)$ može biti i vektor-funkcija.

Stavljajući formalno u (1) $\varepsilon=0$, dobijamo tzv. redukovani problem :

(2) $\quad T_0u(x)= 0 \;,\; x\in I \;,\quad B_0u(x)= 0 \;,\; x\in \partial I \;,$

gde su operatori T_0 i B_0 najčešće nižeg reda nego T_ε, B_ε. Tada rešenje problema (2) ne mora zadovoljavati sve konturne uslove iz (1) i kod rešenja problema (1) mogu se javiti granični slojevi. Unutrašnji slojevi nastaju onda kada rešenje problema (1) postaje prekidno u graničnom slučaju $\varepsilon=0$, u otvorenom intervalu $I\setminus\partial I$.

Zbog svega ovoga kažemo da mali parametar ε singularno perturbuje (ometa) problem (1) i zbog toga se ovakvi problemi nazivaju singularno perturbovani (singularni perturbacioni) problemi (kraće : s.p. problemi). Parametar ε se naziva perturbacioni parametar.

1.1.3 Poznati su asimptotski metodi za rešavanje s.p. problema, v.npr. Višik i Ljusternik (1957), O'Malley (1974). Asimptotski metodi su važni za konstrukciju odgovarajućih numeričkih postupaka za rešavanje s.p. problema. Glavni delovi asimptotskih razvoja - funkcije graničnih (unutrašnjih) slojeva, koje opisuju ponašanje rešenja u slojevima, koriste se u konstrukciji tzv. fitovanih diferencnih šema, v. Doolan et al. (1980). U Tezi se ne govori o fitovanim šemama (iako se neke eksponencijalno fitovane šeme koriste u numeričkim eksperimentima), već o klasičnim diferencnim šemama na neekvidistantnim mrežama. Konstrukcija specijalnih mreža diskretizacije je drugi način za adekvatno numeričko rešavanje s.p. problema. Motivacija da se posmatra samo ovakav pristup leži u prirodnom zahtevu da se dobije više numeričkih rezultata u oblastima gde se rešenje više menja, tj. u slojevima. To se može postići samo korišćenjem neekvidistantnih mreža diskretizacije koje su zgusnute u slojevima. Prirodno je očekivati da su rezultati dobijeni na takvim mrežama valjani, pa nema potrebe za uvodjenje fitovanih šema. Pored toga, fitovane šeme su komplikovanije od klasičnih.

Za konstrukciju specijalnih mreža nije neophodno znati asimptotski razvoj rešenja s.p. problema. Dovoljno je imati ocene izvoda rešenja. To je posebno važno kod nelinearnih s.p. problema za koje je često u praksi teško naći asimptotske razvoje.

1.1.4 Pomenuli smo "adekvatne" numeričke postupke za rešavanje s.p. problema. Valja znati da standardni postupci (npr. klasične diferencne šeme na ekvidistantnim mrežama) za numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina često daju loše rezultate kada se primene na s.p. probleme. To je npr. slučaj sa klasičnom centralnom konačno-diferencnom šemom na ekvidistantnoj mreži, kada se primeni na probleme tipa 1.1.1 (1), v. Lorenz (1980), Hemker (1982). Razlog za to je uticaj perturbacionog parametra. Poznato je da greška diferencnih šema zavisi od izvoda rešenja kontinualnog problema. U slučaju s.p. problema ovi izvodi neograničeno rastu u slojevima kada $\varepsilon \to 0$. Da bi se prevazišla ova teškoća, tj. da bi se postigla *konzistencija uniformna po* ε, moramo koristiti ili fitovane šeme ili specijalne neekvidistantne mreže.

Pored toga je važno ispuniti još jedan uslov - *stabilnost uniformnu po* ε. Iz stabilnosti i konzistencije, uniformnih po ε, dobijamo *konvergenciju uniformnu po* ε. To znači da numeričko rešenje konvergira uniformno po ε ka neprekidnom rešenju u tačkama mreže, kada maksimalni korak mreže teži ka nuli.

Diferencne šeme koje se ovde koriste su stabilne uniformno po ε. Preostaje da se dobije konzistencija uniformna po ε korišćenjem specijalnih mreža diskretizacije. Važno je mreže konstruisati na taj način da se one automatski menjaju kada se ε menja.

1.1.5 S.p. problemi pripadaju klasi tzv. "stif" problema. To su takvi problemi koji su loše uslovljeni u numeričkom smislu (mala promena datih podataka izaziva veliku promenu rešenja), Miranker (1981). Loša uslovljenost s.p. problema se povećava kada $\varepsilon \to 0$. Kada rešavamo s.p. probleme imajmo na umu da ε može imati proizvoljno male pozitivne vrednosti. Numerički metodi koje primenjujemo moraju biti adekvatni za *sve* vrednosti ε.

Postoje mnogi metodi za numeričko rešavanje stif problema. Jedan od ciljeva Teze je da neke od njih uporedi sa specijalnim metodima za rešavanje s.p. problema.

U Tezi se koriste najjednostavnije diferencne šeme na neekvidistantnim mrežama, ali verujemo da se slične ako ne i iste specijalne mreže mogu koristiti i u splajn-kolokacionim metodama, u metodama konačnih elemenata itd.

1.2 Jedan ilustrativni primer

1.2.1 Akcenat Teze je na tzv. eksplicitnim metodima za konstrukciju mreža (v. 2.2), koje će se razmatrazi u Delu III. Sada ćemo posmatrati jedan primer kojim ćemo ilustrovati čitavu tehnologiju konstruisanja numeričkih metoda u Delu III. Ovaj prikaz bazira se na radu Vulanović (1983 b).

Problem koji nas interesuje je :

$$(1)\quad \begin{aligned} T_\varepsilon u &:= -\varepsilon u'' + c(x,u) = 0 \ , \ x\in I=[0,1] \ , \\ Bu &:= (u(0),u(1)) = (U_0,U_1) \ . \end{aligned}$$

Pretpostavljamo da

$$c(x,u) \in C^4(I\times\mathbb{R}) \ , \ c_u(x,u)>\gamma^2>0 \ , \ (x,u)\in I\times\mathbb{R} \ ,$$

$$U_0,U_1 \in \mathbb{R} \ , \ 0<\varepsilon<<1 \ .$$

Poznato je da postoji jedinstveno rešenje $u_\varepsilon \in C^6(I)$ za (1), v. Lorenz (1980 a). Posmatrajući jednostavne primere (npr. $c(x,u)=u$) možemo videti da rešenje u_ε ima dva granična sloja, kod tačaka $x=0$ i $x=1$, upor. Pearson (1968 a).

1.2.2 Posmatrajmo mrežu I_h datu sa

$$0=x_0 <x_1 <\dots \ x_{n-1}< x_n=1 \ , \ n\in\mathbb{N} \ , \ h=1/n \ ,$$

(više o mrežama v. u 2.1). Neka je $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1(1)n$.

Na mreži I_h formiramo diskretizaciju (v. 2.3) problema 1.2.1(1) :

$$w_0 = U_0 \ ,$$

(1) $$T_\varepsilon^h w_i := -\varepsilon D_h'' w_i + c(x_i, w_i) = 0 \ , \ i=1(1)n-1 \ ,$$

$$w_n = U_1 \ ,$$

gde je

$$D_h'' w_i = 2(h_{i+1}w_{i-1} - (h_i + h_{i+1})w_i + h_i w_{i+1})/(h_i h_{i+1}(h_i + h_{i+1})).$$

Sa $\{w_i\}$ označavamo mrežnu funkciju na I_h, koja je identifikovana sa vektorom $w_h := [w_0, w_1, \dots, w_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, upor 2.1.5. U isto vreme w_h će označavati i rešenje nelinearnog sistema (1). D_h'' je diskretna aproksimacija drugog izvoda. U slučaju ekvidistantne mreže ona se svodi na poznatu šemu :

$$D_h'' w_i = h^{-2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \ .$$

Sada ćemo dati neke osobine diskretizacije (1). Posmatrajmo prvo linearni slučaj :

$$c(x,u) = b(x)u - f(x) \ ,$$

gde $b, f \in C^4(I)$, $b(x) > \gamma^2 > 0$, $x \in I$. Tada se (1) svodi na linearni sistem :

$$A_h w_h = f_h \ ,$$

gde je $f_h = [U_0, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1}), U_1]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ a A_h je odgovarajuća tridijagonalna matrica. Lako je pokazati da je A_h L-matrica i inverzno monotona. Dakle, A_h je M-matrica. Dalje imamo :

(2) $$\|A_h^{-1}\| \le 1/\min(1, \gamma^2) \ .$$

Detaljnije v. u 4.2.3, 4.2.5. ($\|\cdot\|$ označava maksimum normu vektora i matrica.)

Neka je v_h druga mrežna funkcija na I_h. Iz (2) sledi

(3) $$\|w_h - v_h\| \le M \, \|A_h w_h - A_h v_h\| \ .$$

Sa M označavamo svaku pozitivnu konstantu, nezavisnu od h, ε.

Vratimo se ponovo nelinearnom slučaju. Imamo

$$T_\varepsilon^h w_i - T_\varepsilon^h v_i = -\varepsilon D_h''(w_i - v_i) + \int_0^1 c_u(x_i, v_i + s(w_i - v_i))ds \times$$
$$\times (w_i - v_i)$$

i analogno sa (3) važi

(4) $$\|w_h - v_h\| \leq M(|w_0 - v_0| + |w_n - v_n| + \|T_\varepsilon^h w_h - T_\varepsilon^h v_h\|) .$$

Ovo je nejednakost stabilnosti, upor. 2.3.2. Sada se može videti da rešenje w_h sistema (1) postoji i jedinstveno je, upor. Bohl et al. (1979).

1.2.3 Neka do kraja ovog Pododeljka w_h označava rešenje diskretnog problema 1.2.2(1) i neka je $u_{\varepsilon,h} := [u_\varepsilon(x_0), u_\varepsilon(x_1), \ldots, u_\varepsilon(x_n)]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Želimo da dokažemo $\|w_h - u_{\varepsilon,h}\| \leq Mh^2$ u dva osnovna koraka. Prvi korak je dokazivanje da je diskretizacija 1.2.2(1) stabilna uniformno po ε. Ovo je već učinjeno u 1.2.2(4). Drugi korak je da se dokaže konzistencija drugog reda uniformna po ε, tj.

(1) $$|r_h u_\varepsilon(x_i)| \leq Mh^2 , \quad i=1(1)n-1 ,$$

gde je

(2) $$r_h u_\varepsilon(x_i) := T_\varepsilon^h w_i - T_\varepsilon^h u_\varepsilon(x_i) .$$

Ova dva koraka će se kombinovati u konačnoj Teoremi ovog Pododeljka.

Sada ćemo se ograničiti samo na dokazivanje (1).

Iz (2) sledi

(3) $$r_h u_\varepsilon(x_i) = 0 - T_\varepsilon^h u_\varepsilon(x_i) = (T_\varepsilon u_\varepsilon)(x_i) - T_\varepsilon^h u_\varepsilon(x_i) = \varepsilon(D_h'' u_\varepsilon(x_i) - u_\varepsilon''(x_i))$$

i Taylorovim razvojem dobijamo :

(4) $$|r_h u_\varepsilon(x_i)| \leq M\varepsilon(|h_{i+1} - h_i||u_\varepsilon'''(x_i)| + \max(h_i^2, h_{i+1}^2) \times$$
$$\times \max_{x_{i-1} \leq s \leq x_{i+1}} |u_\varepsilon^{(4)}(s)|) , \quad i=1(1)n-1 .$$

Da bismo dokazali (1) očigledno je da su nam potrebne ocene izvoda rešenja u_ε. Sledeće leme su posvećene tom cilju.

LEMA 1. *Za rešenje* u_ε *problema* 1.2.1(1) *važi*

(5) $$|u_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq M\mu^{-i} , \quad i=0(1)4, \; x \in I , \; \mu = \sqrt{\varepsilon} .$$

DOKAZ. Zbog inverzne monotonije operatora (T_ε, B), (v. Lorenz (1980 a)), imamo (5) za i=0. Tada se (5) za i=2 dobija direktno iz 1.2.1(1). Da bismo dokazali (5) za i=1 koristimo Lemu 1 iz rada Bahvalov (1969), v. 5.3.2(4). Dalje nejednakosti se dobijaju diferenciranjem 1.2.1(1).

LEMA 2. *Za rešenje* u_ε *problema* 1.2.1(1) *važi*

(6) $$|u_\varepsilon^{(i)}(x)| \le M(1 + \mu^{-i}(\exp(-\gamma x/\mu) + \exp(-\gamma(1-x)/\mu)))$$

$$i=1(1)4\ ,\ x\in I\ ,\ \mu=\sqrt{\varepsilon}\ .$$

DOKAZ. Za $z\in C^2(I)$ neka je $L_\varepsilon z := -\varepsilon z'' + c_u(x,u_\varepsilon(x))z$. Tad

(7) $$L_\varepsilon(\pm u_\varepsilon') = \mp c_x(x,u_\varepsilon) \le M\gamma^2 \le$$

$$\le M(c_u(x,u_\varepsilon)+\mu^{-1}(c_u(x,u_\varepsilon)-\gamma^2)(\exp(-\gamma x/\mu)+\exp(-\gamma(1-x)/\mu)))=L_\varepsilon g_1$$

gde g_i, $i=1(1)4$, označava desnu stranu nejednakosti (6) sa nekim odgovarajućim M. Iz Leme 1 sledi $\pm u_\varepsilon'(s) \le$ $\le g_1(s)$, $s=0,\ 1$ i iz ove nejednakosti i (7) dobijamo (6) za Ovo je zbog inverzne monotonije operatora (L_ε,B),(B je kao u 1.2.1(1)). Sada imamo

$$L_\varepsilon(\pm u_\varepsilon'') = \mp(c_{xx}(x,u_\varepsilon)+2c_{xu}(x,u_\varepsilon)u_\varepsilon'+c_{uu}(x,u_\varepsilon)(u_\varepsilon')^2) \le$$
$$\le M(1+\mu^{-2}(\exp(-\gamma x/\mu)+\exp(-\gamma(1-x)/\mu)))$$

i analogno možemo dobiti $L_\varepsilon(\pm u_\varepsilon'') \le Mg_2$, itd.

Lema je dokazana.

Sada kada imamo ove ocene možemo se vratiti dokazu nejednakosti (1). Ne bi bilo problema da se to dokaže kada bi izvodi u (4) bili ograničeni uniformno po ε. Medjutim, iz (6) vidimo da ovi izvodi neograničeno rastu u blizini x=0 i x=1 kada $\varepsilon\to 0$. Ovu teškoću ćemo savladati koristeći specijalnu mrežu diskretizacije. Mreža će biti gusta u graničnim slojevima da bismo dobili da u okolini x=0 i x=1 važi (v. (4) $\max(h_i^2,h_{i+1}^2)\mu^{-2} \le Mh^2$. Neka je

(8) $$x_i = \lambda(t_i)\ ,\ t_i = ih\ ,\ i=0(1)n\ ,\ n=2n_0\ ,\ n_0\in\mathbb{N}\ ,$$

gde je

(9) $$\lambda(t) = \begin{cases} \psi(t) := A\mu t/(q-t) & ,\ t\in[0,\tau] \\ \pi(t) := \psi(\tau)+\psi'(\tau)(t-\tau) & ,\ t\in[\tau,1/2] \\ 1-\lambda(1-t) & ,\ t\in[1/2,1] \end{cases} .$$

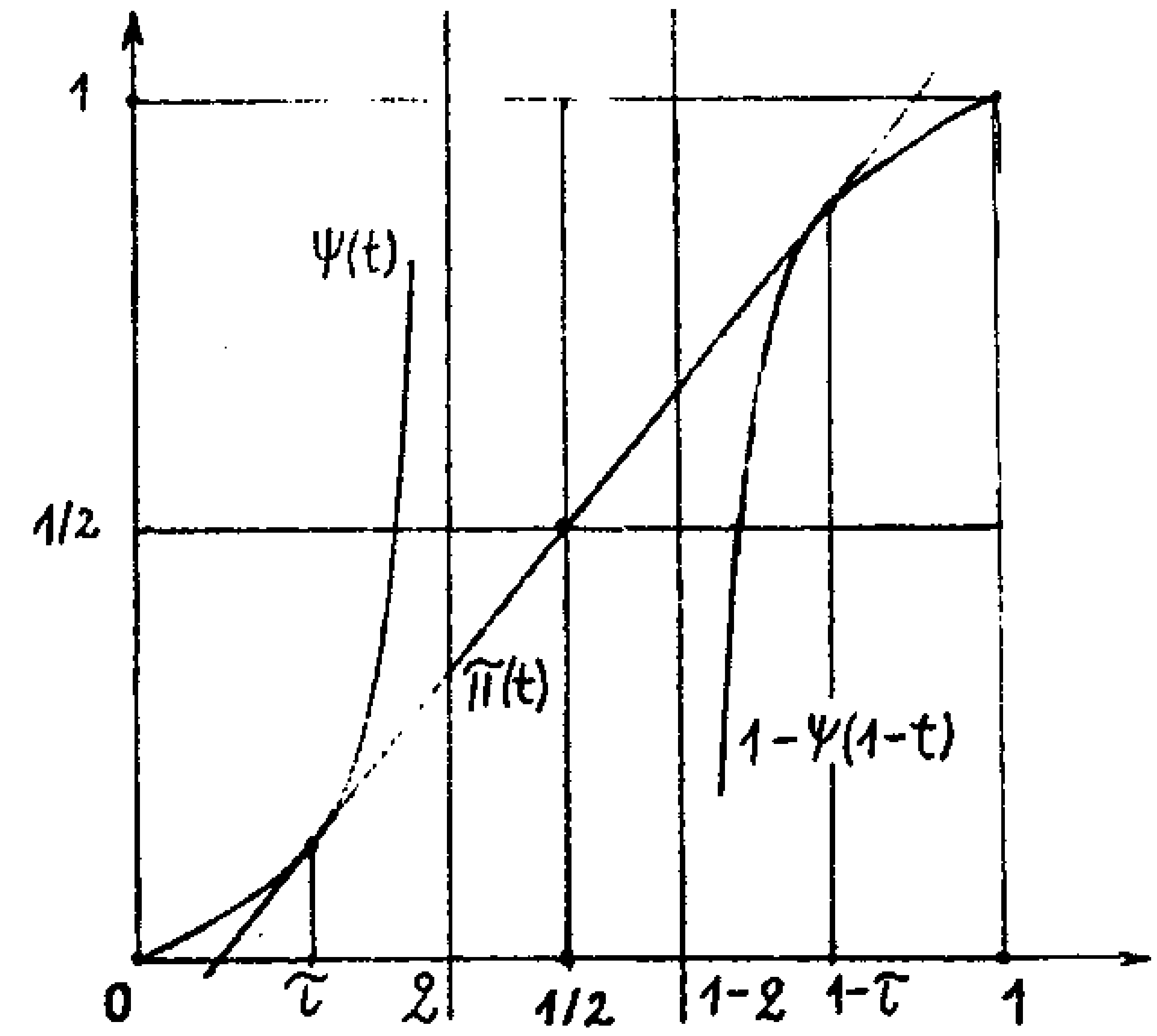
Važi $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, $q\in(0,1/2)$ i $A\in(0,q/\mu)$. q i A su fiksirani brojevi. $(\tau,\psi(\tau))$ je dodirna tačka tangente $\pi(t)$ na $\psi(t)$, tak da je $\pi(1/2)=1/2$. Kako je $\psi'(0)<1$, postoji jedinstveno τ $\in (0,q)$ koje je rešenje jednačine $\psi(\tau)+\psi'(\tau)(1/2-\tau)=1/2$, što se svodi na kvadratnu jednačinu. Tako imamo

$$\tau = (q-(Aq\mu(1-2q+2A\mu))^{1/2})/(1+2A\mu)\ .$$

Mreža dobijena pomoću (8),(9) je zgusnuta u graničnim slojevima jer je $\lambda(t) \le M\mu$ dok $q-t \ge \eta$ za neko $\eta>0$ nezavisno od

Za τ imamo $q-\mu\le M\mu^{1/2}$ i $\lambda(\tau)=\psi(\tau)\ge M\mu^{1/2}$.

Na Slici 1 ilustrujemo funkciju λ. Promenom parametara q i A možemo menjati gustinu mreže u slojevima. Mreža je gušća kada je q veće i kada je A manje.



Sl. 1

LEMA 3. *Neka je diskretizacija* 1.2.2(1) *problema* 1.2.1(1) *data na mreži* (8),(9) *sa* $n>q/3$. *Tada važi* (1).

DOKAZ. Posmatrajmo samo $i=1(1)n_0-1$, tj. $x_i \in (0,1/2)$, jer je za $i=n_0(1)n-1$ dokaz analogan. Tada iz (4) sledi (primetimo da sada važi

$$\mu^{-4}\exp(-\gamma(1-x_{i+1})/\mu) \le \mu^{-4}\exp(-\gamma/(2\mu)) \le M\ ):$$

$$(10)\qquad |r_h u_\varepsilon(x_i)| \le M\varepsilon((h_{i+1}-h_i)(1+\mu^{-3}\exp(-\gamma x_i/\mu) + h_{i+1}^2(1+\mu^{-4}\exp(-\gamma x_{i-1}/\mu)))\ .$$

Ove ocene će se koristiti u sledeća dva slučaja.

1° Neka je $t_{i-1} \ge \tau$. Tada imamo $h_{i+1}=h_i$ i zbog $\lambda(\tau) \ge M\mu^{1/2}$:

$$\mu^{-4}\exp(-\gamma x_{i-1}/\mu) \le \mu^{-4}\exp(-\gamma\lambda(\tau)/\mu) \le \mu^{-4}\exp(-M/\sqrt{\mu}) \le M.$$

Zbog toga i zbog

$$(11)\qquad h_{i+1} = \lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i) \le h\lambda'(t_{i+1}) \le Mh\ ,$$

iz (10) dobijamo $|r_h u_\varepsilon(x_i)| \le M\varepsilon(Mh)^2(1+M)$, pa sledi (1).

2° Neka je $t_{i-1}<\tau$ i $t_{i-1} \le q - 3h$. Tada je $t_{i+1}< q$ i

$$q - t_{i+1} \ge (q - t_{i-1})/3\ .$$

Zbog toga imamo, v. (11) :

$$(12)\qquad h_{i+1} \le Mh\mu/(q - t_{i-1})^2\ .$$

Dalje je :

(13) $h_{i+1}-h_i = x_{i+1}-2x_i+x_{i-1} \leq Mh^2\psi''(t_{i+1})$.

Ovo je očigledno kada $t_{i+1}\leq\tau$. Isto važi za $t_i \leq \tau < t_{i+1}$ zbog $\pi(t_{i+1}) \leq \psi(t_{i+1})$. Konačno, za $t_{i-1}<\tau<t_i$, imamo

$$h_{i+1}-h_i \leq \psi(t_{i+1})-2\psi(t_i)+\psi(t_{i-1})+2(\psi(t_i)-\pi(t_i)) \leq$$

$$\leq h^2\psi''(t_{i+1}) + 2h^2\psi''(t_i)$$

i (13) ponovo važi. Iz (13) sledi

(14) $h_{i+1}-h_i \leq Mh^2\mu/(q - t_{i-1})^3$.

S druge strane iz (14) imamo :

(15) $h_{i+1}-h_i \leq Mh^2/\sqrt{\mu}$,

jer je $q - t_{i-1} > q - \tau \geq M\sqrt{\mu}$.

Sada zbog (11),(12),(14),(15) i (8),(9) iz (10) dobijamo (1) i u ovom slučaju.

3^o Poslednji slučaj je

$$0< q - 3h < t_{i-1} < \tau ,$$

što je moguće samo ako

(16) $\sqrt{\mu} \leq Mh$ tj. $\varepsilon \leq Mh^4$.

Sada ćemo koristiti drugu ocenu za $r_h u_\varepsilon(x_i)$:

$$\varepsilon|r_h u_\varepsilon(x_i)| \leq 2\,\varepsilon \max_{x_{i-1}\leq s\leq x_{i+1}} |u_\varepsilon''(s)| \leq M\varepsilon(1+\varepsilon^{-1}\exp(-\gamma x_{i-1}/\mu)).$$

Odatle, zbog (16) i

$$\exp(-\gamma x_{i-1}/\mu) \leq \exp(-\gamma\lambda(q-3h)/\mu) \leq \exp(-Mn) ,$$

ponovo dobijamo (1) . Lema je dokazana.

Sada stavljajući $v_h=u_{\varepsilon,h}$ u 1.2.2(4) dobijamo

$$\|w_h-u_{\varepsilon,h}\| \leq M\,\|T_\varepsilon^h w_h - T_\varepsilon^h u_{\varepsilon,h}\|$$

i pošto smo u Lemi 3 dokazali (v. (1-3)):

$$|T_\varepsilon^h w_i - T_\varepsilon^h u_\varepsilon(x_i)| \leq Mh^2 , \quad i=1(1)n-1 ,$$

dolazimo do sledeće Teoreme :

TEOREMA. *Neka je* u_ε *rešenje problema* 1.2.1(1) *i neka je* w_h *rešenje diskretnog problema* 1.2.2(1) *na mreži* (8),(9) *sa* $n>3/q$. *Tada je*

$$\|w_h - u_{\varepsilon,h}\| \leq Mh^2 .$$

1.2.4 Sada ćemo dati neke numeričke rezultate iz rada Vulanović (1983 b). Posmatrajmo test primer, v. 4.4.4 :

$$-\varepsilon u'' + u = -\cos^2\pi x - 2\varepsilon\pi^2\cos 2\pi x , \quad u(0)=u(1)=0 .$$

U sledećoj Tabeli je sa *error* označeno $\|w_h - u_{\varepsilon,h}\|$. Greška je ista za sve vrednosti ε koje su posmatrane : $\varepsilon = 10^{-4k}$, $k=1(1)8$, za dato A, q i n. Sa n_1 označavamo broj koraka mreže h_i koji leže unutar $[0,\mu]$.

TABELA.

	A=1,q=0.4	A=0.5,q=0.48	
	n=20	n=20	n=40
error	1.72 E-2	3.31 E-2	7.24 E-3
n_1	4	6	12

1.3 Pregled sadržaja

1.3.1 Teza je podeljena na 3 dela i 7 poglavlja. Manji delovi teksta su odeljci i pododeljci i svaki od njih ima svoju numeraciju. Brojevi pododeljaka su naznačeni na početku svake strane. Numeracija formula, teorema, lema i definicija počinje od 1 unutar svakog pododeljka.

1.3.2 Prvi deo Teze je uvodni i sastoji se od 2 poglavlja. Poglavlje 1 daje uvod u posmatrane probleme, jedan ilustrativni primer (na kome je prikazana kompletna tehnologija numeričkog rešavanja s.p. problema pomoću neekvidistantnih mreža), pregled sadržaja i korišćenih oznaka i termina. U drugom poglavlju daju se osnovni pojmovi o numeričkom rešavanju (s.p.) konturnih problema (mreže, podela postupaka za konstrukciju mreža, stabilnost, konzistencija, konvergencija i sl.). Numerički postupci zasnovani na konstrukciji specijalnih mreža podeljeni su na implicitne i eksplicitne. Implicitni se dalje dele na simultane i alternativne. U eksplicitne spadaju npr. postupci Bahvalova (1969) i Aschera-Weissa (1983). Postupci Bahvalova dalje se dele na transformacione i netransformacione.

1.3.3 U drugom delu Teze posmatraju se implicitni postupci konstrukcije mreža (to su takvi postupci kod kojih se mreža dobija na kraju kao rezultat izračunavanja, zajedno sa numeričkim rešenjem s.p. problema). Ovaj deo se sastoji iz Poglavlja 3 i 4 U Poglavlju 3 opisani su simultani (White (1979)) i alternativni (Pearson (1968 a,b), Kreiss et al. (1981)) postupci. Veća pažnja posvećena je alternativnim postupcima kojima se bavimo i u Poglavlju 4 testirajući ih numerički. Pored toga, Poglavlje 4 postavlja osnovne diferencne šeme (ispituje se njihova inverzna monotonija i stabilnost uniformna po ε) koje će se koristiti i u trećem delu. Posebna pažnja posvećena je neekvidistantnom uopštenju šeme Guščina-Ščenikova (1974).

1.3.4 Treći deo razmatra eksplicitne postupke konstrukcije mreža. To su takvi postupci kod kojih se neekvidistantna mreža zadaje unapred, pa zahtevaju poznavanje ocena izvoda kontinualnih rešenja s.p. problema. Zbog toga se u Poglavlju 5 posmatraju različiti specijalni tipovi s.p. problema i daju tražene ocene izvoda rešenja. Akcenat Teze je na Poglavlju 6, gde se posmatraju mreže Bahvalovljevog tipa. Različite varijante ovih mreža su date i uporedjene. Dokazana je konvergencija uniformna po ε za s.p. problema iz Poglavlja 5. Uključeni su raniji autorovi rezultati i neki novi. Oni se odnose na s.p. probleme sa i bez povratne tačke i probleme sa stepenim slojem. Takodje je posmatran jedan sistem diferencijalnih jednačina drugog reda sa malim parametrom. Poglavlje se završšava numeričkim rezultatima. Na kraju, u Poglavlju 7 su na osnovu rada Vulanović et al. (1986) ispitane mogućnosti Richardsonove ekstrapolacije radi postizanja višeg reda tačnosti numeričkih rezultata.

1.4 Notacija i terminologija

1.4.1 Skupovi brojeva označeni su na uobičajen način : $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^{N,N} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$.

Uvek ćemo imati $I=[0,1] \subset \mathbb{R}$, $\partial I=\{0,1\}$. Sa I_h , $0,1 \in I_h$, označićemo diskretan podskup od I. ε označava pozitivan realan parametar , $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$; $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, $\mu_0=\sqrt{\varepsilon_0}$.

Svaku pozitivnu konstantu koja ne zavisi od mreže diskretizacije označićemo sa K. Svaku pozitivnu konstantu koja ne zavisi od mreže diskretizacije, niti od ε označićemo sa M. Posebno, neke od tih konstanti biće označene sa M_0, M_1, m, m_0, m_1 itd.

Pod oznakom $i=j(1)k$, $j,k\in\mathbb{N}$, podrazumevamo da $j\le k$ i $i\in\{j,j+1,\dots,k-1,k\}$.

Realni brojevi u tabelama numeričkih rezultata dati su u obliku a E-b što znači $a\cdot 10^{-b}$.

1.4.2 Za vektor $x\in\mathbb{R}^N$, $N\in\mathbb{N}$, sa x^T označavamo odgovarajući transponovani vektor; $(x,y):= x^Ty$, $y\in\mathbb{R}^N$. $E\in\mathbb{R}^{N,N}$ označava jediničnu matricu; A^{-1} je inverzna matrica za $A\in\mathbb{R}^{N,N}$.

Za $x=[x_1,x_2,\dots,x_N]^T\in\mathbb{R}^N$ pišemo

$x\ge 0$ $(x>0)$ akko $x_i\ge 0$ $(x_i>0)$, $i=1(1)N$.

Analogna notacija važi za matrice.

1.4.3 Neka je $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Tada $C_s^k(D)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{N}$, označava prostor funkcija $f : D \to \mathbb{R}^s$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_s(x)]$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in D$, sa osobinom da su svi parcijalni izvodi od $f_j(x)$, $j=1(1)s$, do reda k zaključno, neprekidni u D. Posebno uzimamo

$$C^k(D) := C_1^k(D) \ , \ C_s(D) := C_s^0(D) \ .$$

Za gornju funkciju f pišemo

$f \geq 0$ $(f > 0)$ akko $f_j(x) \geq 0$ $(f_j(x) > 0)$, $j=1(1)s, x \in D$.

Za $g \in C(I)$ restrikciju na I_h označavamo sa g_h.

1.4.4 Ako nije drukčije rečeno, $\|\cdot\|$ će označavati maksimum normu u jednom od prostora : $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^{N,N}$, $C_s^k(D)$. U zavisnosti od smisla biće jasno o kome se prostoru radi.

1.4.5 Skraćenica s.p. odnosi se na "singularno perturbovani", "singularni perturbacioni" itd. "Akko" stoji na mestu "ako i samo ako".

Transkripcija ruskih naziva dalje će biti data prema transkripciji časopisa Mathematical Reviews.

Druge oznake i skraćenice biće uvedene kasnije.

2. Uvodne postavke

2.1 Mreže diskretizacije

2.1.1 DEFINICIJA. *Konačan skup* $I_h = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $h = 1/n$, *tačaka sa osobinom*

$$0 = x_o < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$$

naziva se MREŽA *(na intervalu* $I = [0,1]$*), sa* TAČKAMA MREŽE x_i, $i = 0(1)n$.

KORACI MREŽE *definišu se kao* $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1(1)n$. *Ako je* $h_i = h_{i-1}$, $i = 2(1)n$, *mreža je* EKVIDISTANTNA (EK). *U suprotnom, mreža je* NEEKVIDISTANTNA (NEK).

Neka je $H = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$, $\underline{h} = \min\limits_{1 \le i \le n} h_i$.

U slučaju ek. mreže imamo $H = h = \underline{h}$. Dalje neka je

$$x_{i\pm1/2} = (x_i + x_{i\pm1}) / 2.$$

2.1.2 DEFINICIJA. *(Russell (1979)). Mreža* I_h *se naziva* KVAZIEKVIDISTANTNA (KEK) *ako postoji konstanta* K *(nezavisna od* I_h*, v. 1.3.1) takva da je* $H \le K\underline{h}$.

Mreža I_h *je* LOKALNO KEK. (LKEK) *ako važi* $h_i \le Kh_j$, *kada* $|i-j| \le 1$, $i,j = 1(1)n$.

2.1.3 DEFINICIJA. *(upor. Ascher et al. (1983)). Mreža* I_h *se naziva* SKORO EK. (SEK) *ako važi* $H \le \underline{h}(1 + K\underline{h})$.

Mreža I_h *je* LOKALNO SEK. (LSEK) *ako važi*

(1) $h_i \leq h_j(1+Kh_j)$, *kada* $|i-j| \leq 1$, $i,j = 1(1)n$.

2.1.4 LEMA. a) Svaka kek. mreža je lkek.

b) Svaka sek. mreža je lsek.

c) Svaka (l)sek. mreža je (l)kek.

d) Ek. mreža je sek.

2.1.5 DEFINICIJA. Funkcija $\omega : I_h \to \mathbb{R}$, *gde je* I_h *mreža naziva se* MREŽNA FUNKCIJA *i označava sa* $\{\omega_i\} := \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Mrežna funkcija se može identifikovati sa vektorom $\omega_h := [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ i ta notacija će se takodje koristiti.

2.1.6 DEFINICIJA. Neka je λ *neprekidna strogo monotono rastuća funkcija na* I *i* $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$.

Kažemo da λ GENERIŠE *mrežu* I_h *(na intervalu* I*) ako* $x_i = \lambda(ih)$, $i = 0(1)n$.

Funkcija λ *se naziva* FUNKCIJA ZA GENERISANJE MREŽE. *Za* I_h *kažemo da je* GENERISANA *funkcijom* λ.

2.1.7 LEMA. Svaka mreža generisana funkcijom $\lambda \in C^2(I)$ *takvom da* $\lambda'(t) > 0$, $t \in (0,1)$ *je a) lsek; b) kek.*

DOKAZ. a) Da bi se dobilo 2.1.3(1) dovoljno je pokazati $h_{i+1} - h_i \leq Kh_i^2$ kada $h_{i+1} > h_i$. (Dokaz je analogan za slučaj $h_{i+1} < h_i$.) Kako postoje tačke $\theta_i, \eta_i \in (0,1)$, takve da je

$$h_{i+1} - h_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = \lambda(t_{i+1}) - 2\lambda(t_i) + \lambda(t_{i-1}) = h^2\lambda''(\theta_i),$$
$$h_i = x_i - x_{i-1} = \lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}) = h\lambda'(\eta_i),$$

ovaj deo Leme je dokazan.

b) Dokaz je sličan.

2.2 Metodi za konstrukciju mreža

2.2.1 Fraza "metodi za konstrukciju mreža" koristi se kroz čitavu Tezu u širem značenju numeričke procedure (metoda konačnih razlika) za s.p. probleme, na nek. mrežama diskretizacije, čiju konstrukciju uključuje. Jasno je da su sama konstrukcija mreže i konačno-diferencna diskretizacija na toj mreži tesno povezane - specijalna mreža će dati konzistenciju uniformnu po ε, a s druge strane koristićemo takve šeme koje su stabilne uniformno po ε i na taj način dobiti konvergenciju uniformnu po ε, (v. 2.3).

Pogodno je podeliti metode za konstrukciju mreža za s.p. konturne probleme na dve kategorije : EKSPLICITNE i IMPLICITNE metode.

Kod eksplicitnih metoda mreža se daje unapred i ostaje nepromenjena dok se ne dobije numeričko rešenje s.p. konturnog problema. Očigledno da moramo poznavati ponašanje kontinualnog rešenja da bismo mogli unapred prilagoditi mrežu i dobiti konvergenciju uniformnu po malom perturbacionom parametru.

Implicitni metodi su oni kod kojih se kao krajnji rezultat dobija ne samo numeričko rešenje s.p. problema već i tačke mreže.

2.2.2 Implicitne metode možemo podeliti na dve grupe : na simultane i alternativne metode, upor. Russell (1979).

Simultani metodi su ti koji istovremeno izračunavaju mrežu i numeričko rešenje.

Alternativni metodi se mogu nazvati i dvo-ciklični. To su takvi implicitni metodi kod kojih se numeričko rešenje i mreža izračunavaju naizmenično, tj. prvi numerički ciklus je odredjivanje numeričkog rešenja na datoj mreži, a drugi je menjanje te mreže prema prethodno dobijenom numeričkom rešenju. Čitav postupak obično počinje na ek. mreži. Alternativni metodi moraju sadržati neki kriterijum za prekidanje ciklusa.

2.2.3 I eksplicitni i implicitni metodi mogu se podeliti na transformacione i netransformacione metode.

Kod transformacionih metoda se kontinualni s.p. problem transformiše uvodjenjem nove nezavisne promenljive. Tako transformisan problem rešava se numerički na ek. mreži. Dakle, problem konstrukcije mreže ovde je prenet na odredjivanje pogodne transformacije. Simultani implicitni metodi su metodi ovog tipa.

S druge strane, alternativni implicitni metodi pripadaju netransformacionim metodima. Kod netransformacionih metoda kontinualni s.p. problem ostaje u prvobitnoj formi, tj. njegova diskretizacija se pravi direktno na nekoj nek. mreži.

2.3 Diskretizacija singularno perturbovanih problema

2.3.1 U ovom Odeljku daćemo neke definicije koje se odnose na osnovne osobine diskretizacija s.p. problema.

Neka je s.p. problem zapisan u apstraktnoj formi

$$T_\varepsilon u = 0, \quad x \in I \; ; \quad B_\varepsilon u = 0, \quad x \in \partial I, \tag{1}$$

gde je $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ mali perturbacioni parametar, T_ε je neki diferencijalni operator reda k, $k\in\mathbb{N}$, a B_ε je operator konturnih (graničnih) vrednosti.

DEFINICIJA. *Kažemo da je operator* $(T_\varepsilon,B_\varepsilon)$ INVERZNO MONOTON *ako za svako* u $\in C^k(I)$ *važi*

$$T_\varepsilon u\geq 0,\ B_\varepsilon u\geq 0 \implies u\geq 0.$$

Operator $(T_\varepsilon,B_\varepsilon)$ *je* STABILAN *ako za sve* $u,v\in C^k(I)$ *važi sledeća* NEJEDNAKOST STABILNOSTI

$$\|u-v\|\leq \text{const}\ (\|T_\varepsilon u-T_\varepsilon v\|+\|B_\varepsilon u-B_\varepsilon v\|).$$

Ako je gornja konstanta nezavisna od ε, *kažemo da je* $(T_\varepsilon,B_\varepsilon)$ *stabilan* UNIFORMNO PO ε.

2.3.2 Neka je

(1) $$T_\varepsilon^h w_h=0,\quad B_\varepsilon^h w_h=0,$$

diskretizacija problema 2.3.1(1) na mreži I_h, gde je w_h mrežna funkcija.

Imamo sledeću definiciju koja je analogna kontinualnom slučaju :

DEFINICIJA 1. *Operator* $(T_\varepsilon^h,B_\varepsilon^h)$ *je* INVERZNO MONOTON *ako za svaku mrežnu funkciju* w_h *na* I_h *važi*

$$T_\varepsilon^h w_h\geq 0,\quad B_\varepsilon^h w_h\geq 0 \implies w_h\geq 0.$$

Operator $(T_\varepsilon^h,B_\varepsilon^h)$ *je* STABILAN *ako za sve mrežne funkcije* w_h, v_h *na* I_h *važi sledeća* NEJEDNAKOST STABILNOSTI

$$\|w_h-v_h\|\leq K(\|T_\varepsilon^h w_h-T_\varepsilon^h v_h\|+\|B_\varepsilon^h w_h-B_\varepsilon^h v_h\|)\ .$$

Ako je gornja konstanta nezavisna od ε, *kažemo da je* $(T_\varepsilon^h,B_\varepsilon^h)$ *stabilan* UNIFORMNO PO ε.

DEFINICIJA 2. GREŠKA KONZISTENCIJE $r_h(u)$ *data je sa*

$$r_h(u)=(T_\varepsilon^h u_h-(T_\varepsilon u)_h,B_\varepsilon^h u_h-(B_\varepsilon u)_h)$$

gde je $u \in C^k(I)$.

Neka je $u_\varepsilon \in C^k(I)$ *rešenje problema 2.3.1(1). Kažemo da je diskretni operator* $(T^h_\varepsilon, B^h_\varepsilon)$ KONZISTENTAN SA $(T_\varepsilon, B_\varepsilon)$ *ako postoji pozitivan broj* s *takav da je*

(2) $\|r_h(u_\varepsilon)\| \leq K H^s$.

Broj s *se naziva* RED KONZISTENCIJE *operatora* $(T^h_\varepsilon, B^h_\varepsilon)$.

Ako je konstanta u (2) nezavisna od ε, *kažemo da je* $(T^h_\varepsilon, B^h_\varepsilon)$ *konzistentan sa* $(T_\varepsilon, B_\varepsilon)$ UNIFORMNO PO ε, *a* s *je* RED UNIFORMNE KONZISTENCIJE.

Ako je $(T^h_\varepsilon, B^h_\varepsilon)$ konzistentan sa $(T_\varepsilon, B_\varepsilon)$ na kek. mreži, sledi da greška konzistencije r_h teži ka nuli kada $n \to \infty$. Od sada će I_h biti kek. mreža.

DEFINICIJA 3. *Neka je* $u_\varepsilon \in C^k(I)$ *rešenje problema 2.3.(1) i neka je* $w_h \in \mathbb{R}^{n+1}$ *rešenje problema 2.3.2(1) na mreži* I_h.

Kažemo da w_h KONVERGIRA *ka* $u_{\varepsilon,h}$ *ako postoji pozitivan broj* s *takav da važi*

(3) $\|w_h - u_{\varepsilon,h}\| \leq K H^s$.

Broj s *se naziva* RED KONVERGENCIJE *diskretnog operatora* $(T^h_\varepsilon, B^h_\varepsilon)$.

Ako je konstanta u (3) nezavisna od ε, *kažemo da* w_h *konvergira ka* $u_{\varepsilon,h}$ UNIFORMNO PO ε, *a* s *je* RED UNIFORMNE KONVERGENCIJE.

Sledeća Lema je očigledna :

LEMA. *Neka je diskretni operator* $(T^h_\varepsilon, B^h_\varepsilon)$ *stabilan (uniformno po* ε*) i sa redom (uniformne) konzistencije* s. *Tada je* s *red (uniformne) konvergencije za* $(T^h_\varepsilon, B^h_\varepsilon)$.

Princip :

(4) konzistencija uniformna po ε + stabilnost uniformna po ε => konvergencija uniformna po ε

koji je sadržan u prethodnoj Lemi, često se koristi da bi se dokazao krajnji cilj numeričkih metoda za rešavanje s.p. problema - konvergencija uniformna po ε.

II IMPLICITNI METODI ZA KONSTRUKCIJU MREŽA

3. Pregled metoda

3.1 Simultani metodi

3.1.1 U opisu simultanih metoda sledićemo rad Whitea (1979), u kome je posmatran problem

$$u' = f(x,u) \ , \quad x \in I = [0,1], \qquad (1)$$
$$b(u(0),\ u(1)) = 0 \ ,$$

Ovde su u, f i b s-dimenzionalne vektor funkcije, $s \in \mathbb{N}$.

Primetimo da u jednačini (1) mali parametar ε nije eksplicitno napisan, iako je Whiteov metod numerički testiran na problemima sa malim parametrom. Razlog za ovo se može jednostavno objasniti. Pri numeričkom rešavanju s.p. problema krajnji je cilj dokazati konvergenciju uniformnu po ε. To ne može biti uradjeno bez nekog prethodnog poznavanja ponašanja egzaktnog rešenja s.p. problema, npr. položaja graničnih i unutrašnjih slojeva, njihove širine i sl. S druge strane, simultani postupci za konstrukciju mreža su u osnovi stvoreni za probleme kod kojih su takve činjenice nepoznate, pa se tu i ne može dokazati konvergencija uniformna po ε. Ipak, mnogi test primeri iz White (1979) potvrdjuju da se ovaj metod može uspešno primeniti. Ali tome moramo dodati da su za relativno jednostavnije probleme, kod kojih poznajemo ponašanje egzaktnih rešenja, v. Poglavlje 5, simultani metodi suviše komplikovani i nema potrebe za njihovo korišćenje pošto se jednostavniji eksplicitni metodi mogu primeniti.

3.1.2 Simultani metodi su transformacioni. Transformacija je ugradjena u metod uvodjenjem nove nezavisne promenljive $t = \chi(x)$, gde je $\chi : I \to I$ izabrano na pogodan način.

Neka $y \in C^1(I)$ označava tačno rešenje problema 3.1.1(1). Pretpostavimo da je ono izolovano u smislu Kellera (1974).

DEFINICIJA. *Kažemo da je* $\chi(x)$ DOPUSTIV MONITOR (kontrolna funkcija) *problema 3.1.1(1) ako zadovoljava sledeće uslove:*

a) Postoji funkcija $m(x,u)$ *za koju su svi parcijalni izvodi neprekidni za* ,

$$(x,u) \in I \times \{u \in \mathbb{R}^s \mid \|y(x) - u\| < p,\ x \in I\}\ .$$

b) $d\chi/dx = m(x,y(x))/\theta > \delta > 0, \quad x \in I$ i

$$\chi(0) = 0\ , \quad \chi(1) = 1\ , \text{ te je } \theta = \int_0^1 m(x,y(x))dx.$$

Za $t = \chi(x)$ izabrano kao u Definiciji i dato m dolazimo do problema :

$$(1) \qquad \begin{aligned} du/dt &= \theta\, f(x,u)\,/\,m(x,u)\ , \\ dx/dt &= \theta\,/\,m(x,u)\ , \qquad\qquad t \in I \\ d\theta/dt &= 0, \end{aligned}$$

$$b(u(0)\ ,\ u(1)) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

i sada je nezavisna promenljiva takodje nepoznata.

Diskretizacija sistema (1) vrši se centralnom Eulerovom šemom na ek. t-mreži sa korakom $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$(2) \qquad \begin{aligned} u_i - u_{i-1} &= h(\theta_i + \theta_{i-1})f_{i-1/2}/(2m_{i-1/2}), \\ x_i - x_{i-1} &= h(\theta_i + \theta_{i-1})/(2m_{i-1/2}), \qquad i = 1(1)n, \\ \theta_i - \theta_{i-1} &= 0, \\ b(u_0,u_n) &= 0, \quad x_0 = 0, \quad x_n = 1\ , \end{aligned}$$

gde je $g_{i-1/2} = g(x_{i-1/2}, (u_i + u_{i-1})/2)$.

White (1979) nastavlja sa ispitivanjem diskretnog problema (2). Glavni rezultat je da njegovo rešenje (u_h, x_h, θ_h) postoji i jedinstveno je, i važi

$$\|u_h - y_h\| < K h^2 ,$$
$$\chi(x_i) - \chi(x_{i-1}) = h + O(h^2), \quad i = 1(1)n.$$

Za drugu jednakost kažemo da x_h asimptotski ekvidistribuira monitor $\chi(x)$.

3.1.3 Najvažniji problem je naravno izbor funkcije $m(x,y)$. U White (1979) je predloženo više mogućnosti :

$$m_0(x,y) \equiv 1,$$
$$m_1(x,y) = (\alpha^2 + \|y'\|_2^2)^{1/2},$$
$$m_2(x,y) = (\alpha^2 + \|y''''\|_2^2)^{1/6}$$
$$m_3(x,y) = (\alpha^2 + \|y''''\|_2^2)^{1/4}.$$

Ovde je

$$\|y\|_2^2 = \int_0^1 (|y_1(x)|^2 + |y_2(x)|^2 + \ldots + |y_s(x)|^2)dx ,$$

α je konstanta, a y', y''', su izraženi iz 3.1.1(1) preko $f(x,y)$ i njenih parcijalnih izvoda.

Izbor m_0 daje ek. x-mrežu. Funkcija m_1 odgovara tzv. monitoru lučne dužine, jer se dužina luka s-dimenzionalne vektor funkcije $y(x)$, $x \in I$, izračunava kao

$$\bar{\chi}(x) = \int_0^x (1 + \|y'(x)\|_2^2)^{1/2} dx , \quad (\alpha = 1).$$

Dakle, ovde x_h asimptotski ekvidistribuira dužinu luka tačnog rešenja y, pri čemu je $\bar{\chi}(x)$ zapisano u normalizovanoj formi :

$$\chi(x) = \bar{\chi}(x)/\theta .$$

Funkcije m_2 i m_3 asimptotski ekvidistribuiraju grešku u jednom koraku i grešku odsecanja diskretizacione šeme,

v. White (1979) za više detalja. Slični rezultati i pregledi rezultata dati su u Pereyra et al. (1975), Russell et al. (1978), Thompson (1985).

3.1.4 Sada ćemo dati neke numeričke rezultate iz White (1979) da bismo ih kasnije mogli uporedjivati.

Numerički se rešava problem 1.1.1(1) korišćenjem monitora lučne dužine ($\alpha=1$) sa $n=10$. Prethodno je problem zapisan u formi sistema :

$$\varepsilon u' = v \; , \quad u(0) = 0,$$

$$\varepsilon v' = -v + \varepsilon^2 u - \varepsilon \sin t \; , \quad u(\pi) = 0,$$

i ovakva transformacija je u suštini motivisana poznavanjem ponašanja tačnog rešenja, v. Poglavlje 5.

U sledećoj tabeli (Tabela 57 iz White (1979)) je data maksimalna greška u tačkama mreže za različite vrednosti ε.

TABELA.

ε	u	v
1	5.97E-3	1.05E-3
1E-2	2.48E-1	1.70E-1
1E-4	1.60E-1	4.14E-2
1E-6	1.53E-1	3.10E-2
1E-8	1.53E-1	3.09E-2

Za $\varepsilon=1$ imamo ubedljivo najbolje rezultate, ali se neuniformnost kad $\varepsilon\to 0$ ne pojavljuje. Za sve posmatrane ε broj koraka mreže, koji leže unutar intervala $[0,\varepsilon]$ je 4, tj. 40%.

3.2 Alternativni metodi

3.2.1 Suština alternativnih metoda je već opisana u Odeljku 2.2. Sada ćemo još dati neke detalje, sledeći radove Pearson (1986 a,b), (v. takodje Flaherty et al. (1977)), i Kreiss et al. (1981).

Ciklus menjanja mreže diskretizacije može da ima tri koraka :

a) dodavanje novih tačaka mreže

b) brisanje nekih starih tačaka mreže

c) postupak izgladjivanja .

Svaki od ova tri koraka vrši se pomoću nekih kriterijuma.

U koraku a) se ubacuju nove tačke mreže u oblasti u kojima se rešenje, dobijeno na prethodnoj mreži, naglo menja.

U koraku b) stare tačke mreže se odstranjuju iz oblasti u kojima se prethodno rešenje veoma malo menja. Ovaj korak se može izostaviti, kao što je to slučaj u radu Pearson (1968 a,b).

U koraku c) se izgladjuje mreža dobijena posle koraka a) i b). Dodaju se neke nove tačke sa ciljem da se izbegne moguća nagla lokalna promena dužine koraka mreže, što bi moglo dovesti do gubitka reda tačnosti rezultata.

Koraci b) i c) se izvršavaju samo ako se a) izvršava, tj. ako kriterijum u koraku a) ne zahteva nijednu novu tačku mreže, čitava procedura se završava.

3.2.2 Sada ćemo dati neke kriterijume za korake a), b), c) u slučaju skalarnog konturnog problema. Neka u_h označava numeričko rešenje koje je dobijeno na prethodnoj mreži $I_h = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Kriterijumi su sledeći :

a) Ako za neko $i=1(1)n$ imamo

$$\rho(u_{i-1}, u_i) > d ,$$

gde je $d > 0$, ($\rho(u_{i-1}, u_i)$ će se definisati kasnije), tada dodajemo $p \in \mathbb{N}$ ekvidistantnih tačaka mreže u (x_{i-1}, x_i).

b) Ako za neko $i=1(1)n$ imamo

$$\rho(u_{i-1}, u_i) + \rho(u_i, u_{i+1}) < d / \chi, \qquad \chi > 1,$$

tada izbacujemo x_i i ponavljamo ovaj korak počinjući od poslednje stare tačke mreže koja je ostala neizbačena.

c) Ako za sve $i=2(1)n$ važi

(1) $$1/Q < h_i / h_{i-1} < Q ,$$

za neko $Q \geq 1$, tada ne dodajemo ni jednu novu tačku mreže.

Ako za neko $i=2(1)n$ važi

$$h_i / h_{i-1} > Q,$$

tada dodajemo $x_{i-1/2}$ kao novu tačku mreže. Slično, ako

$$h_i / h_{i-1} < 1/Q ,$$

dodajemo $x_{i-1-1/2}$. Ovo ponavljamo dok se (1) ne postigne za sve i.

Definišući različite $\rho(u_{i-1},u_i)$, d i p dobijamo više adaptivnih postupaka. Oni će biti numerički testirani u Odeljku 4.4 i počinjaće sa ek. mrežom.

A1. $\rho(u_{i-1},u_i) = |u_{i-1}-u_i|$; $d = \delta(\max_i |u_i| - \min_i |u_i|)$,

za neko unapred zadato $\delta > 0$; $p = [\rho(u_{i-1},u_i) / d]$, gde $[x]$ označava najveći ceo broj manji od x.

Ovakav korak a) je iz Pearson (1968 a,b). Ipak, Pearsonov adaptivni postupak koristi drukčiji korak c) i izostavlja korak b).

A2. $\rho(u_{i-1},u_i)$, d kao u A1 i p=1.

Ovakav izbor p i koraka c) (Q=3) je iz Kreiss et al. (1981).

A3. $\rho(u_{i-1},u_i) = \ell_i := h_i(1+(u_i-u_{i-1})^2 / h_i^2)^{1/2} \approx$

$$\approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1+(u'(x))^2)^{1/2} dx ;$$

$$d = \delta \sum_{i=1}^{n} \ell_i$$

za neko unapred zadato $\delta > 0$; p kao u A1.

Za ovakav izbor ρ upor. Odeljak 3.1 i Russell et al. (1978, p.64).

A4. $\rho(u_{i-1},u_i)$ i d kao u A3 i $p=1$.

3.2.3 Koraci a) i b) u radu Kreiss et al. (1981) koriste ρ koje ocenjuje grešku numeričkog rešenja u_h. Isti je slučaj u radovima Lentini i Pereyra (1974,1977). (Pored toga, Lentini i Pereyra predlažu da se korak b) izostavi.)

Treba istaći da zahtev za minimizacijom greške numeričkog rešenja u_h ne mora dati tačke mreže koje će se zgusnuti u slojevima. Ovo se jasno vidi u radu Denny et al. (1977), upor. White (1979). Prema tome, kriterijumi u koracima a) i b) bi trebalo da uključuju i ocenu greške i ponašanje rešenja. Ipak, mi ovde nećemo ocenjivati grešku, već ćemo to ostaviti za kasnija razmatranja. U Odeljku 4.4 ćemo ilustrovati tačnost metoda A1-A4 uporedjujući numeričke rezultate sa tačnim rešenjima.

4. Konačno-diferencne šeme u alternativnim metodima

4.1 Konačno-diferencni operatori

4.1.1 Podsetimo da I_h označava kek. mrežu na intervalu I. U ovom Odeljku navešćemo neke diferencne operatore koji će se kasnije koristiti. Upotrebićemo sledeću notaciju :

$$D_T^{(k)} u(\xi_i) \approx u^{(k)}(\xi_i), \quad k = 0,1,2 ,$$

gde je $\xi_i = x_i$ ili $\xi_i = x_{i \pm 1/2}$; $x_i \in I_h$, $i = 0(1)n$, a $D_T^{(k)}$ predstavlja konačno-diferencni operator (T označava njegov tip). Ovde je $u \in C^{k+2}(I)$. Dalje ćemo pisati u_i za $u(x_i)$ itd. Neka su j i ℓ nenegativni prirodni brojevi i $0 < j < \ell < n$. Tada :

$$U_{j,\ell}^{(k+2)} = \max_{x_j \leq x \leq x_\ell} | u^{(k+2)}(x) |$$

i

$$H_{j+1,\ell} = \max(h_{j+1}, h_{j+2}, \ldots, h_{\ell-1}, h_\ell) ,$$

$$\underline{h}_{j+1,\ell} = \min(h_{j+1}, h_{j+2}, \ldots, h_{\ell-1}, h_\ell) .$$

Neka je

$$r_T^{(k)}u(\xi_i) = D_T^{(k)}u(\xi_i) - u^{(k)}(\xi_i)$$

odgovarajuća greška konzistencije.

Konačno-diferencni operator $D_T^{(k)}$ je konzistentan sa $u^{(k)}$ ako važi

$$|r_T^{(k)}u(\xi_i)| < K H^s$$

za neko $s > 0$.

Konačno-diferencni operatori koje ćemo koristiti biće uglavnom drugog (kvadratnog) reda konzistencije ($s=2$), ili prvog (linearnog) reda konzistencije ($s=1$).

4.1.2 Počnimo sa aproksimacijama drugog izvoda. Imamo centralnu aproksimaciju:

$$D_C''u_i = 2(h_{i+1}u_{i-1} - (h_i + h_{i+1})u_i + \\ + h_i u_{i+1}) / (h_i h_{i+1}(h_i + h_{i+1}))$$

sa

$$|r_C''u_i| \leq M(|h_{i+1} - h_i||u'''(x_i)| + H^2_{i,i+1}U^{IV}_{i-1,i+1}) .$$

Dakle, ovaj operator je drugog reda konzisteencije na lsek. mrežama.

Druga aproksimacija je nek. uopštenje srednjetačkaste šeme Gushchina-Shchennikova (1974) :

(1) $D_M''u_{i+1/2} = \alpha_i u_{i-1} + \beta_i u_i + \gamma_i u_{i+1} + \delta_i u_{i+2}$,

gde je

$$\alpha_i = (2 - h_{i+2}(h_{i+1} + h_{i+2})\delta_i) / (h_i(h_i + h_{i+1})) ,$$

$$(2) \quad \beta_i = (-2 + h_{i+2}(h_i + h_{i+1} + h_{i+2})\delta_i) / (h_i h_{i+1}) ,$$

$$\gamma_i = (2-(h_{i+1} + h_{i+2})(h_i + h_{i+1} + h_{i+2})\delta_i)/(h_{i+1}(h_i + h_{i+1})).$$

Ako je

$$\delta_i = 1 / (2 H^2_{i,i+2}) ,$$

onda imamo aproksimaciju koja je označena sa D''_{M+} i važi

$$|r''_{M+}u_{i+1/2}| \leq M(|h_{i+1}-h_i| (H_{i,i+2}/\underline{h}_{i,i+2})|u'''(x_{i+1/2})| + (H^3_{i,i+2} / \underline{h}_{i,i+2})U^{IV}_{i-1,i+2}) .$$

Dakle, sada imamo ponovo konzistenciju drugog reda na lsek. mrežama.

Isto važi za operator

$$D''_{M-}u_{i-1/2} = \alpha_{i-1}u_{i-2} + \beta_{i-1}u_{i-1} + \gamma_{i-1}u_i + \delta_{i-1}u_{i-1} ,$$

gde su α_{i-1}, β_{i-1}, γ_{i-1} kao pre, a δ_{i-1} je uzeto tako da važi

$$\alpha_{i-1} = 1 / (2 H^2_{i-1,i+1}) .$$

Kada je mreža ek. imamo

$$D''_{M+}u_{i+1/2} = (u_{i-1} - u_i - u_{i+1} + u_{i+2}) / (2h^2) .$$

i

$$D''_{M-}u_{i-1/2} = D''_{M+}u_{i-1+1/2} ,$$

pa $\delta_i, \alpha_i \to 1/(2h^2)$ kad I_h teži ka ek. mreži.

4.1.3 Posmatrajmo sada aproksimacije prvog izvoda. Imamo centralnu aproksimaciju :

$$D'_c u_i = (-h^2_{i+1}u_{i-1} + (h^2_{i+1}-h^2_i)u_i + h^2_i u_{i+1})/(h_i h_{i+1}(h_i + h_{i+1}))$$

Sledi

$$|r_C' u_i| < M H^2_{i,i+1} U'''_{i-1,i+1} \quad ,$$

pa se dobija kvadratna konzistencija na proizvoljnoj mreži.

Koristićemo i drugu srednjetačkastu aproksimaciju koja je takodje drugog reda konzistencije :

$$D_M' u_{i+1/2} = (u_{i+1} - u_i) / h_{i+1} \quad ,$$

$$|r_M' u_{i+1/2}| < M h^2_{i+1} U'''_{i,i+1} \quad .$$

Sada neka je

$$D_+' u_i = (u_{i+1} - u_i) / h_{i+1}, \quad D_-' u_i = (u_i - u_{i-1}) / h_i \quad .$$

Ovi jednostrani operatori se koriste pri formiranju tzv. up-wind aproksimacije :

$$b(x_i) D_U' u_i = \begin{cases} b(x_i) D_+' u_i \ , & b(x_i) > 0 \\ b(x_i) D_-' u_i \ , & b(x_i) < 0 \end{cases}$$

Za D_U' imamo

$$|r_U' u_i| < M H_{i,i+1} U''_{i-1,i+1} \quad ,$$

pa je to operator prvog reda konzistencije.

4.1.4 Za aproksimiranje $u_{i\pm 1/2}$ koristićemo tri srednjetačkasta operatora :

$$D_M^0 u_{i+1/2} = (u_i + u_{i+1}) / 2 \ ,$$

$$D_{M+}^0 u_{i+1/2} = ((2h_i + h_{i+1}) u_i - h_{i+1} u_{i-1}) / (2h_i) \ ,$$

$$D_{M-}^0 u_{i-1/2} = ((2h_{i+1} + h_i) u_i - h_i u_{i+1}) / (2h_{i+1}) \ ,$$

sa

$$|r_M^0 u_{i+1/2}| < M h^2_{i+1} U''_{i,i+1}$$

i

$$|r_{M\pm}^0 u_{i\pm 1/2}| < M (H^3_{i,i+1} / \underline{h}_{i,i+1}) U''_{i-1,i+1} \ ,$$

(drugi red konzistencije na lkek. mrežama).

4.1.5. Neka je $\{\ell_i\}$ mrežna funkcija sa $\ell_i = 1$, $i = 0(1)n$. Lako je videti da važi

(1a) $D''_C \ell_i = 0$, $D''_{M\pm} \ell_{i\pm 1/2} = 0$,

(1b) $D'_C \ell_i = 0$, $D'_M \ell_{i+1/2} = 0$, $D'_U \ell_i = 0$,

(1c) $D^0_M \ell_{i+1/2} = 1$, $D^0_{M\pm} \ell_{i\pm 1/2} = 1$.

S druge strane, imamo :

(2a) $D''_C x_i = 0$, $D''_{M\pm} x_{i\pm 1/2} = 0$,

(2b) $D'_C x_i = 1$, $D'_M x_{i+1/2} = 1$, $D'_U x_i = 1$,

(2c) $D^0_M x_{i+1/2} = x_{i+1/2}$, $D^0_{M\pm} x_{i\pm 1/2} = x_{i\pm 1/2}$.

4.2 Diskretizacija linearnih singularno perturbovanih problema

4.2.1 Počnimo posmatranjem sledećeg linearnog s.p. problema

(1) $L_\varepsilon u := -\varepsilon u'' - b(x)u' + c(x)u = f(x)$, $x \in I = [0,1]$,
$u(0) = U_0$, $u(1) = U_1$,

gde je $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ mali perturbacioni parametar.

Pretpostavimo da $b, c, f \in C^2(I)$, $c(x) \geq 0$, $x \in I$, dok $b(x)$ može menjati znak u I. Preciznije, dopuštamo da $b(x)$ ima konačno mnogo izolovanih nula $z_1, z_2, \ldots, z_k$ u I, $k \in \mathbb{N}$. Dalje, mogu postojati disjunktni podintervali $[\alpha_j, \beta_j] \subset I$, $j = 1(1)\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, takvi da $b(x) \equiv 0$, $x \in [\alpha_j, \beta_j]$.

Slučaj kada $b(x) > 0$, $x \in I$, je takodje moguć ($b(x) < 0$, $x \in I$, se svodi na $b(x) > 0$ transformacijom $x \to 1-x$).

Sa u_ε označimo rešenje problema (1), $u_\varepsilon \in C^4(I)$. Pod datim pretpostavkama moguće su velike razlike u ponašanju u_ε u zavisnosti od ε, v. Pearson (1968 a). Jedan ili više graničnih i unutrašnjih slojeva mogu da se pojave.

4.2.2 Neka je w_h mrežna funkcija na I_h. Koristićemo konačno-diferencne operatore iz prethodnog Odeljka da bismo diskretizovali s.p. problem 4.2.1(1). Posmatraćemo sledeće diskretizacione šeme :

$$L_C^h w_i := -\varepsilon D''_C w_i - b_i D'_C w_i + c_i w_i = f_i ,$$

$$L_U^h w_i := -\varepsilon D''_C w_i - b_i D'_U w_i + c_i w_i = f_i ,$$

$$L_{M\pm}^h w_{i\pm1/2} := -\varepsilon D''_{M\pm} w_{i\pm1/2} - (D_M^0 b_{i\pm1/2})(D'_M w_{i\pm1/2}) + $$
$$+ (D_M^0 c_{i\pm1/2})(D_{M\pm}^0 w_{i\pm1/2}) = f_{i\pm1/2} .$$

Notaciju $w_{i\pm1/2}$ treba shvatiti formalno.

Neka su r_C, r_U, $r_{M\pm}$ odgovarajuće greške konzistencije :

$$r_C u_i := L_C^h u_i - (L_\varepsilon u)(x_i)$$

za svako $u \in C^2(I)$,itd.

LEMA. *Red konzistencije s diskretizacione šeme* L^h *za kontinualni operator* L_ε *je dat sa* $s=\min(s_0,s_1,s_2)$ *, gde je* s_k *red konzistencije konačno-diferencnog operatora* $D_T^{(k)}$, $k=0,1,2$.

Dakle, iz 4.1 sledi da je svaka od šema prvog reda konzistencije (na kek. mrežama). Ipak, ako je mreža lsek. L_C^h i $L_{M\pm}^h$ su drugog reda konzistencije. Ove dve šeme ćemo nekada koristiti na lkek. mrežama, očekujući ipak bolje rezultate nego za L_U^h , v. 4.4.

Sada sa $\{\ell_i\}$ kao u 4.1.5 iz 4.1.5(1) imamo

(1) $L_c^h \ell_i = c_i, \quad L_U^h \ell_i = c_i, \quad L_{M\pm}^h \ell_{i\pm 1/2} = (c_i + c_{i\pm 1})/2$,

i iz 4.1.5(2):

$$L_c^h x_i = -b_i + c_i x_i, \quad L_U^h x_i = -b_i + c_i x_i \ ,$$

(2)

$$L_{M\pm}^h x_{i\pm 1/2} = -(b_i + b_{i\pm 1/2})/2 + ((c_i + c_{i\pm 1})/2) x_{i\pm 1/2} \ .$$

4.2.3 Posmatrajmo konačno-diferencnu diskretizaciju problema 4.2.1(1) pomoću up-wind šeme :

$$w_0 = U_0, \quad L_U^h w_i = f_i, \ i = 1(1)n-1, \quad w_n = U_1 \ .$$

Ovaj diskretni problem se može napisati u matričnoj formi :

$$A_U^h w_h = \tilde{f}_h \ ,$$

gde je $\tilde{f}_h = [U_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, U_1]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$,a A_U^h je odgovarajuća tridijagonalna matrica u $\mathbb{R}^{n+1,n+1}$.

DEFINICIJA. *Matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N,N}, N \in \mathbb{N}$, *se naziva* L-MATRICA *ako je* $a_{ii} > 0$, $i=1(1)N$ *i* $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, $i,j=1(1)N$.

Regularna matrica A *je* INVERZNO MONOTONA *ako* $A^{-1} \geq 0$.

Regularna matrica A *je* M-MATRICA *ako je inverzno monotona* L-*matrica.*

U Pododeljku 4.2.5 ćemo pokazati značaj M-matrica u dokazivanju stabilnosti (uniformne po ε) konačno-diferencnih šema. Kako je za M-matrice neophodno da budu L-matrice, posmatraćemo prvo samo L-matrice.

Smatraćemo da pretpostavke o kontinualnom s.p. problemu 4.2.1(1) važe do kraja Dela II. Tada je očigledno da važi :

LEMA 1. *Matrica* A_U^h *je* L-*matrica.*

Neka je A_C^h matrica koja odgovara diskretizaciji :

$$w_0 = U_0,\ L_C^h w_i = f_i,\ i = 1(1)n-1,\ w_n = U_1.$$

Tada imamo :

LEMA 2. *Matrica* A_C^h *je* L-*matrica ako važi*

(1) $$-1/h_i < \rho_i < 1/h_{i+1},\quad i = 1(1)n-1\ ,$$

gde je $\rho_i := b_i/(2\varepsilon)$.

DOKAZ. Neka je $A_C^h = [a_{ij}]$. Za $i=1(1)n-1$ imamo

$$a_{ii} = 2\varepsilon/(h_i h_{i+1}) + b_i(h_i - h_{i+1})/(h_i h_{i+1}) + c_i,$$

$$a_{i,i-1} = -2\varepsilon/(h_i(h_i+h_{i+1})) + b_i h_{i+1}/(h_i(h_i+h_{i+1})),$$

$$a_{i,i+1} = -2\varepsilon/(h_{i+1}(h_i+h_{i+1})) - b_i h_i/(h_{i+1}(h_i+h_{i+1})),$$

$a_{11} = 1$, $a_{nn} = 1$, a ostali elementi su nule. Važi $a_{i,i\pm1} \leq 0$ akko važi (1), a iz (1) sledi $a_{ii} > 0$, Q.E.D.

Očigledno da je teško ispuniti uslov (1) u praksi. Šta više, Lorenz (1980 a) i Hemker (1982) su pokazali da na ek. mreži matrica A_C^h teži ka singularnoj matrici kad $\varepsilon \to 0$.

Zbog toga ne možemo očekivati stabilnost uniformnu po ε kada koristimo centralnu šemu diskretizacije. Up-wind šema nema taj nedostatak, ali je ona samo prvog reda konzistencije. Da li je moguće konstruisati konačno-diferencnu diskretizaciju problema 4.2.1(1), koja će biti drugog reda konzistencije (barem na lsek. mrežama), a za koju je odgovarajuća matrica L-matrica? Odgovor je potvrdan, upor. Vulanović (u pripremi). Tražena šema L_{CM}^h kombinuje L_C^h, L_U^h i L_M^h na sledeći način :

(2a) $$w_0 = U_0\ ,$$

$$(2b)\qquad L^h_{CM}w_1 := \begin{cases} L^h_C w_1 = f(x_1), \text{ako} -1/h_1 \leqslant \rho_1 \leqslant 1/h_2 \\ L^h_{M+}w_{1+1/2} = f(x_{1+1/2}), \ \text{ako}\ \ \rho_1 > 1/h_2\ , \\ L^h_U w_1 = f(x_1)\ \ ,\ \ \text{ako}\ \ \rho_1 < -1/h_1 \end{cases}$$

$$(2c)\qquad L^h_{CM}w_i := \begin{cases} L^h_C w_i = f(x_i),\ \ \text{ako}\ \ -1/h_i \leqslant \rho_i \leqslant 1/h_{i+1} \\ L^h_{M+}w_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}),\ \ \text{ako}\ \ \rho_i > 1/h_{i+1}, \\ L^h_{M-}w_{i-1/2} = f(x_{i-1/2});\ \ \text{ako}\ \ \rho_i < -1/h_i \end{cases}$$

$$i = 2(1)n-2\ ,$$

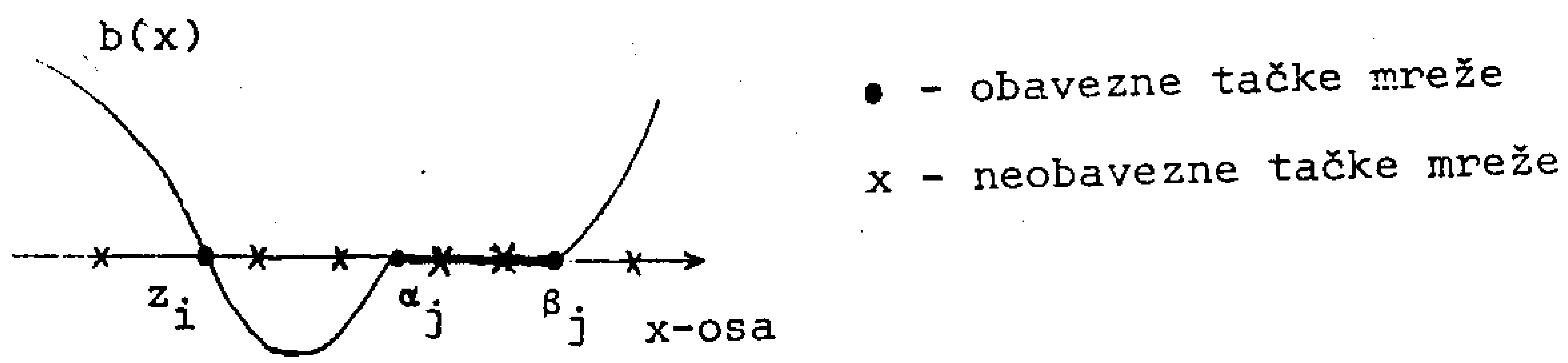
$$(2d)\qquad L^h_{CM}w_{n-1} := \begin{cases} L^h_C w_{n-1} = f(x_{n-1}),\ \ \text{ako}\ \ -1/h_{n-1} \leqslant \rho_{n-1} \leqslant 1/h_n \\ L^h_{M-}w_{n-1/2} = f(x_{n-1/2}),\ \ \text{ako}\ \ \rho_{n-1} < -1/h_{n-1}\ , \\ L^h_U w_{n-1} = f(x_{n-1}),\ \ \text{ako}\ \ \rho_{n-1} > 1/h_n \end{cases}$$

$$(2e)\qquad w_n = U_1\ .$$

Ideja za ovakvu kombinaciju data je u radu Gushchin et al. (1974) na ek. mrežama u slučaju $c(x)\equiv 0$. Ipak, u opštem slučaju nije moguće dokazati da je odgovarajuća matrica L-matrica kada se koristi ek. mreža. Moraju se uvesti i neke pretpostavke o mreži diskretizacije: od sada ćemo pretpostaviti da se L^h_{CM} koristi na mreži I_h sa osobinom:

$$(3)\qquad z_i, \alpha_j, \beta_j \in I_h,\quad i=1(1)k,\quad j=1(1)\ell\ ,$$

v. 4.2.1, ako neka od ovih tačaka postoji. Na Slici 1 prikazujemo kako su tačke mreže rasporedjene :



Sl. 1

Neka matrica A^h_{CM} odgovara diskretizaciji (2).

LEMA 3. *Matrica* A^h_{CM} *je* *L-matrica.*

DOKAZ. Posmatrajmo npr. L^h_{M+} . Primetimo da je

$\delta_i > 0$ uzeto tako da važi $\alpha_i > 0$ i sledeća implikacija je zadovoljena :

$$\rho_i > 1/h_{i+1} \Rightarrow -\varepsilon\beta_i + (\overset{0}{D}_M b_{i+1/2})/h_{i+1} > 0,\ -\varepsilon\gamma_i - (\overset{0}{D}_M b_{i+1/2})/h_{i+1} \leq 0.$$

Dokaz sledi iz (3) jer $\overset{0}{D}_M b_{i+1/2} \geq b_i/2$, (primetimo da $b_i > 0 \Rightarrow b_{i+1} \geq 0$).

Analogne činjenice važe za L^h_{M-} kada je $\rho_i < -1/h_i$. Lema je dokazana.

Diskretizacija (2) je drugog reda konzistencije na lsek. mrežama, iako se u tačkama x_1 i x_{n-1} može koristiti L^h_U, v. Odeljak 4.2.6.

PRIMEDBA. Moguće je šemu L^h_{CM} modifikovati tako da je (3) nepotrebno, upor. Vulanović (u pripremi). Označimo ovu modifikaciju sa $\bar{L}^h_{CM}$. Za i=1(1)n-1 neka je

$$\bar{L}^h_{CM} w_i = \begin{cases} L^h_U w_i, & \text{ako } \rho_i > 1/h_{i+1} \text{ i } b_{i+1} < 0, \text{ ili} \\ & \phantom{\text{ako }} \rho_i < -1/h_i \text{ i } b_{i-1} > 0 \\ L^h_{CM} w_i, & \text{inače} \end{cases}.$$

$\bar{L}^h_{CM}$ zadržava drugi red konzistencije na lsek. mrežama uprkos mogućem korišćenju L^h_U u nekoj od tačaka x_i, i=2(1)n-2, jer važi $|b_i| \leq KH_{i,i+1}$, (L^h_U se koristi kada je $b_i > 0$ i $b_{i+1} < 0$, ili $b_i < 0$ i $b_{i-1} > 0$).

Kada (3) važi, imamo $\bar{L}^h_{CM} = L^h_{CM}$. Pošto je to slučaj u svim našim numeričkim primerima, šemu $\bar{L}^h_{CM}$ više nećemo pominjati.

4.2.4 Pored diskretizacija dobijenih pomoću L^h_U, L^h_C i L^h_{CM}, za diskretizaciju 4.2.1(1) ćemo koristiti još dve šeme.

Neka je

$$L^h_{CU} w_i = \begin{cases} L^h_C w_i, & \text{ako } -1/h_i \leq \rho_i \leq 1/h_{i+1} \\ L^h_U w_i, & \text{inače.} \end{cases}$$

4.2.4

Sledeća diskretizacija :

$$w_0 = U_0, \quad L^h_{CU} = f(x_i), \quad i=1(1)n-1, \quad w_n = U_1$$

biće testirana numerički u Odeljku 4.4. Za odgovarajuću matricu A^h_{CU} važi :

LEMA 1. *Matrica* A^h_{CU} *je* L-*matrica*.

Druga diskretizacija se dobija korišćenjem eksponencijalno fitovane šeme L^h_F iz rada Zadorin et al. (1983) :

$$L^h_F w_i := -\sigma_i D''_C w_i - b(x_i) D'_C w_i + c(x_i) w_i = f(x_i), \quad i=1(1)n-1$$

gde je, ako $b'(x_i) \neq 0$:

$$\sigma_i = (b(x_i)/2)\{h^2_{i+1} a_2 [\exp(a_1 h_i/\varepsilon)-1] +$$

$$+ h^2_i a_1 [1-\exp(-a_2 h_{i+1}/\varepsilon)]\}/\{h_{i+1} a_2 [\exp(a_1 h_i/\varepsilon)-1] -$$

$$- h_i a_1 [1-\exp(-a_2 h_{i+1}/\varepsilon)]\} ,$$

$$a_1 = b(x_i - \tilde{h}_i), \quad a_2 = b(x_i + \tilde{h}_i h_i/h_{i+1}) ,$$

$$0 \leq \tilde{h}_i \leq \min(h_i, h_{i+1});$$

a ako je $b'(x_i) = 0$:

$$\sigma_i = (b'(x_i)\tilde{h}_i h_i/2)[\exp(\theta_i)-1]/[\exp(\theta_i)-\theta_i-1],$$

$$\theta_i = b'(x_i)\tilde{h}_i h_i/\varepsilon .$$

Ova šema se svodi na poznatu eksponencijalno fitovanu šemu Il'ina-Southwella (v. Il'in (1969), Kellogg et al. (1978), Doolan et al. (1980), Lorenz (1980 b)), kada je $\tilde{h}_i=0$.

Dodatne pretpostavke su da se $b(x)$ anulira samo u tačkama mreže, a ako je $b(x)=0$, onda $b'(x)\neq 0$. Primetimo da je to jače od naše pretpostavke 4.2.1(3).

Za grešku konzistencije r_F imamo (v. Zadorin et al. (1983)):

$$|r_F u_i| \leq K(|h_{i+1}-h_i| + H^2_{i,i+1}),$$

za $u \in C^4(I)$. Dakle, L_F^h je još jedna šema drugog reda konzistencije na Isek. mrežama. Dalje, odgovarajuća matrica A_F^h zadovoljava :

LEMA 2. *Matrica* A_F^h *je* L-*matrica.*

Primetimo da važe sledeće jednakosti ($\{\ell_i\}$ je dato u 4.2.2):

$$(1)_i \qquad L_{CU}^h \ell_i = c_i, \quad L_F^h \ell_i = c_i$$

$$(2) \qquad L_{CU}^h x_i = -b_i + c_i x_i, \quad L_F^h x_i = -b_i + c_i x_i .$$

4.2.5 Na početku ćemo dati varijantu poznatog M-kriterijuma, v. Lorenz (1977), Herceg (1979), Bohl et al. (1979).

TEOREMA 1. *Neka je* $A=[a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{N,N}$, $N \in \mathbb{N}$ L-*matrica i neka za neki vektor* $y \in \mathbb{R}^N$, $y>0$, *važi* $Ay>0$ *i za svako* $i=i_0$, *takvo da* $(Ay)_i=0$, *postoje indeksi* $i_1, i_2, \ldots, i_r$, *sa osobinom*

$$a_{i_{j-1} i_j} \neq 0, \quad j=1(1)r,$$

i : $\qquad (Ay)_{i_r} > 0$.

Tada je A *inverzno monotona, tj.* M-*matrica.*

TEOREMA 2. *Matrice* A_U^h *i* A_F^h *su* M-*matrice.*

DOKAZ. Zbog 4.2.2(1) za L_U^h i 4.2.4(1) za L_F^h imamo

$$A_U^h \ell_h = \tilde{c}_h, \quad A_F^h \ell_h = \tilde{c}_h,$$

gde je $\ell_h = [1,1,\ldots,1]^T$, $\tilde{c}_h = [1,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1},1]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Za $c_i>0$, $i=1(1)n-1$, dokaz sledi odmah. Ako za neko i imamo $c_i=0$, tada postoji lanac indeksa iz Teoreme 1 :

$$i_1=i-1, \; i_2=i-2, \ldots, i_r=0, \text{ ili}$$

4.2.5

$$i_1 = i+1,\ i_2=i+2,\dots,i_r = n,$$

jer su u matricama A_U^h i A_F^h elementi uz dijagonalne striktno negativni, (v. Zadorin et al. (1983) za A_F^h). Teorema je dokazana.

Ovaj dokaz ne možemo primeniti na matrice A_{CU}^h i A_{CM}^h jer se može desiti sledeća situacija (upor. Lemu 2,4.2.3):

- kada je $\rho_i = -1/h_i$, elementi i-te vrste desno od dijagonale su nule,

- kada je $\rho_i = 1/h_{i+1}$, elementi i-te vrste levo od dijagonale su nule. Zbog toga je moguće da ne možemo stići do $i_r=0$ ili $i_r=n$ kao u Teoremi 2.

Ipak, važi :

TEOREMA 3. *Matrice* A_{CU}^h *i* A_{CM}^h *su* M-*matrice ako važi jedan od sledećih uslova :*

a) $c(x)>0,\quad x\in I\setminus\{0,1\}$;

b) *postoji tačka* $p\in I$, *takva da je*

$b(x)\leqslant 0$ *za* $x\in(0,p)$ *i* $b(x)\geqslant 0$ *za* $x\in(p,1)$. *)

DOKAZ. Neka važi uslov a). Tada zbog 4.2.2(1) imamo

$$A_{CU}^h\ell_h > 0,\qquad A_{CM}^h\ell_h > 0,$$

$(\ell_h = [1,1,\dots,1]\in\mathbb{R}^{n+1})$, i dokaz sledi iz Teoreme 1.

Sada neka važi b). Ako je za neko i, $1\leqslant i\leqslant n-1$, $c(x_i) = 0$, tada $(A_{CU}^h\ell_h)_i = 0$ i $(A_{CM}^h\ell_h)_i = 0$, ali postoji odgovarajući lanac indeksa iz Teoreme 1. Posmatrajmo A_{CU}^h.

Za $p\leq x_i$, uzimamo

$$i_1 = i+1,\ i_2 = i+2,\ \dots,\ i_r=n\ ;$$

a ako je $p\geqslant x_i$, onda

$$i_1 = i-1,\ i_2 = i-2,\ \dots,i_r = 0\ .$$

*) Za p=0 ili p=1 : $(0,0)=\emptyset$, $(1,1)=\emptyset$.

Slične činjenice važe za A^h_{CM}. Primetimo da prilikom primene $L^h_{M\pm}$ imamo bar po jedan negativan element levo i desno od dijagonalnog ($\alpha_i, \delta_i > 0$, v. Lemu 3, 4.2.3). Teorema je dokazana.

S druge strane, možemo modifikovati L^h_{CU} na sledeći način : neka se L^h_C koristi kada je $-1/h_i < \rho_i < 1/h_{i+1}$, inače ćemo primeniti šemu L^h_U. Označimo odgovarajuću matricu sa A'^h_{CU}. Imamo analognu modifikaciju A'^h_{CM} za A^h_{CM}. Tada možemo dokazati sledeću Teoremu koristeći istu tehniku kao u Teoremi 2 :

TEOREMA 4. *Matrice* A'^h_{CU} *i* A'^h_{CM} *su* M-*matrice*.

Sada će nas interesovati stabilnost diskretizacija razmatranih u prethodnom Odeljku. Sledeće Leme su očigledne:

LEMA 1. *Ako postoji konstanta* K *(nezavisna od* ε*), takva da je* $\|A^{-1}\| \leq K$ *, gde* A *stoji umesto* A^h_U *,* A^h_{CM} *,* A^h_{CU} *i* A^h_F *, tada je odgovarajuća konačno-diferencna diskretizacija stabilna (uniformno po* ε*).*

LEMA 2. *Neka je* $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ *inverzno monotona i neka je* $y \in \mathbb{R}^N$. *Ako za neko* $\eta > 0$ *važi* $Ay \geq \eta \ell$, $\ell = [1,1,\ldots,1] \in \mathbb{R}^N$, *tada sledi*

$$\|A^{-1}\| \leq \|y\| / \eta \ .$$

Sada možemo formulisati teoremu o stabilnosti posmatranih diskretizacija, upor. Zadorin et al. (1983).

TEOREMA 5. *Neka važi jedan od sledećih uslova na problem* 4.2.1(1):

a) $c(x) \geq m_0 > 0, \quad x \in I^0 := I \setminus \{0,1\}$;

b) $b(x) \geq 0, \quad x \in I^0$, ili $b(x) \leq 0, \quad x \in I^0$, i
$|b(x)| + c(x) \geq m_1 > 0, \quad x \in I^0$.

Tada imamo

(1) $\|A^{-1}\| \leq M,$

gde A *stoji za* A_U^h, A_{CU}^h, A_{CM}^h, A_F^h . *Dakle, odgovarajuće diskretizacije su stabilne uniformno po* ε.

DOKAZ. Iz Teorema 2 i 3 sledi da je A M-matrica.

U slučaju da važi a) koristićemo Lemu 2 sa $y = \ell_h \in \mathbb{R}^{n+1}$, ($\ell_h$ kao obično), i dobićemo (v. 4.2.2(1) i 4.2.4(1)):

$$A\ell_h \geq \min(1, m_0)\ell_h \ .$$

Dakle imamo (1) sa $M = 1/\min(1, m_0)$.

U slučaju da važi b) uzimamo $y = y_h = [y_0, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, sa

$$y_i = \begin{cases} 2 - x_i, & \text{ako} \quad b(x) \geq 0 \\ 1 + x_i, & \text{ako} \quad b(x) < 0 \end{cases} , \quad i = 0(1)n \ .$$

Neka važi $b(x) \geq 0$ (za $b(x) \leq 0$ dokaz je analogan). Iz 4.2.2 (1-2) i 4.2.4 (1-2) imamo

$$A_U^h y_h = A_{CU}^h y_h = A_F^h y_h =$$

$$= [2, b_1 + (2-x_1)c_1, \ldots, b_{n-1} + (2-x_{n-1})c_{n-1}, 1]^T \geq$$

$$\geq [2, m_1, m_1, \ldots, m_1, 1]^T \geq \min(1, m_1)\ell_h \ ,$$

i slično :

$$A_{CM}^h y_h \geq \min(1, m_1)\ell_h \ .$$

Dakle, imamo (1) sa $M = 1/\min(1, m_1)$.

4.2.6 Sada ćemo posmatrati red konvergencije šema L_U^h , L_{CU}^h , L_{CM}^h i L_F^h za fiksirano ε. Primetimo da još ne možemo govoriti o konvergenciji uniformnoj po ε, jer nam je za to potrebno poznavanje ponašanja egzaktnog rešenja u_ε problema 4.2.1(1) u zavisnosti od ε, a problem 4.2.1 je suviše opšti. Iz istog razloga za sada možemo primeniti samo implicitne metode konstrukcije mreža i ostavljamo eksplicitne metode za neke specijalne tipove problema 4.2.1(1).

TEOREMA. *Neka jedan od uslova a), b) iz Teoreme 5, 4.2.5 važi.*

(i) Tada diskretizacije L_U^h, L_{CU}^h, L_{CM}^h *i* L_F^h *imaju prvi red konvergencije (za fiksirano* ε*).*

(ii) Ako je uz to mreža diskretizacije lsek, tada L_{CM}^h *i* L_F^h *imaju drugi red konvergencije (za fiksirano* ε*).*

DOKAZ. Deo (i) Teoreme sledi iz Pododeljka 4.2.2 (u kome je razmatran red konzistencije šema L_U^h, L_C^h i $L_{M\pm}^h$) i 4.2.4 (gde je posmatrano L_F^h), te iz Teoreme 5, 4.2.5, korišćenjem našeg glavnog principa 2.3.2(4), upor. Lemu 2.3.2.

Deo (ii) se dokazuje slično. Primetimo da su L_C^h, $L_{M\pm}^h$ i L_F^h drugog reda konzistencije na lsek. mrežama. Ipak, ostaje da se dokaže da moguće korišćenje šeme L_U^h u tački x_1 i/ili x_{n-1} ne dovodi do gubitka drugog reda konzistencije šeme L_{CM}^h. Za ovo koristimo tehniku iz Lorenz (1977).

Imamo :

$$(1) \qquad A_{CM}^h(u_\varepsilon^h - w_h) = r_{CM}u_\varepsilon^h \quad ,$$

gde je w_h rešenje diskretnog problema 4.2.3(2) i

$$r_{CM}u_\varepsilon^h = [0, r_{CM}u_\varepsilon(x_1), r_{CM}u_\varepsilon(x_2), \ldots, r_{CM}u_\varepsilon(x_{n-1}), 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad ,$$

$$r_{CM}u_\varepsilon(x_i) = L_{CM}^h(u_\varepsilon(x_i) - w_i) = L_{CM}^h u_\varepsilon(x_i) - (L_\varepsilon u_\varepsilon)(\xi_i) \quad ,$$

$\xi_i = x_i$, $x_{i-1/2}$ ili $x_{i+1/2}$, zavisno od diskretizacije 4.2.3(2) u tački x_i.

Pretpostavimo da se L_U^h koristi i u x_1 i u x_{n-1}. Tada $\rho_1 < -1/h_1$ i $\rho_{n-1} > 1/h_n$ $(b(x_1) < 0,\ b(x_{n-1}) > 0)$, v. 4.2.3 (2). Formirajmo sistem :

$$\tilde{A}^h_{CM}(u^h_\varepsilon - w_h) = \tilde{r}_{CM}u^h_\varepsilon ,$$

koji je ekvivalentan sa (1) i gde je

$$\tilde{A}^h_{CM} = BA^h_{CM} , \ \tilde{r}_{CM}u^h_\varepsilon = Br_{CM}u^h_\varepsilon ,$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ \chi & H & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & H & \chi \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1} ,$$

$\chi > 0$ će se izabrati na odgovarajući način. Sada važi

(2) $$\|r_{CM}u^h\| \leq K H^2 .$$

Matrica A^h_{CM} se razlikuje od A^h_{CM} samo po prvoj vrsti (koja odgovara tački x_1) i po $(n-1)$-oj vrsti. Te vrste izgledaju :

$$[a_1^-, a_1, a_1^+, 0, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{1,n+1} ,$$

$$[0, 0, \dots, 0, a_{n-1}^-, a_{n-1}, a_{n-1}^+] \in \mathbb{R}^{1,n+1} ,$$

gde je

$$a_1^- = \chi - 2\varepsilon H/(h_1(h_1 + h_2)) + b(x_1)H/h_1 ,$$

$$a_1 = 2\varepsilon H/(h_1, h_2) - b(x_1)H/h_1 + c(x_1)H ,$$

$$a_1^+ = -2\varepsilon H/(h_2(h_1 + h_2));$$

$$a_{n-1}^- = -2\varepsilon H/(h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)) ,$$

$$a_{n-1} = 2\varepsilon H/(h_{n-1}h_n) + b(x_{n-1})H/h_n + c(x_{n-1})H ,$$

$$a_{n-1}^+ = \chi - 2\varepsilon H/(h_n(h_{n-1} + h_n)) - b(x_{n-1})H/h_n .$$

Odredimo sada χ tako da je $a_1^- < 0$, $a_{n-1}^+ < 0$. Tada je $\tilde{A}^h_{CM}$ M-matrica na isti način kao u Teoremi 3, 4.2.5. Za to je izbor

(3) $$\chi = \min(-b(x_1),\ b(x_{n-1}))$$

zadovoljavajući.

Sada na isti način kao u dokazu Teoreme 5, 4.2.3 imamo :

(4) $$\|(\tilde{A}^h_{CM})^{-1}\| \leq 1 / \min(1,\chi,m)\ ,$$

gde je $m=m_0$ ili $m=m_1$, (m_0 i m_1 su dati u uslovima a) i b) Teoreme 5, 4.2.5). Neka je χ dato kao u (3). Zbog toga što iz $\rho_1 < -1/h_1$ i $\rho_{n-1} > 1/h_n$ imamo :

$$\chi > 2\varepsilon / H\ ,$$

iz (2) i (4) sledi :

$$\|u^h_\varepsilon - w_h\| \leq K H^2$$

za fiksirano ε, Q.E.D.

PRIMEDBA. Primetimo da ako važi

$$-b(x_1),\ b(x_{n-1}) \geq M_1$$

za neko pozitivno M_1, nezavisno od ε i od mreže diskretizacije, onda možemo da uzmemo $\chi = M_1$. To će biti slučaj u nekim specijalnim tipovima problema 4.2.1(1), koje ćemo razmatrati u Delu III, naime: $b(x) > \beta > 0$, $x \in I$; $b(x) = x\,a(x)$, $a(x) > > \alpha > 0$, $x \in I$, (u oba slučaja L^h_U se koristi samo u tački x_{n-1}). Dakle, za ove probleme dovoljno je dokazati drugi red konzistencije uniformne po ε, da bi se dobila kvadratna konvergencija uniformna po ε.

4.3. Postupak za nelinearne singularno perturbovane probleme

4.3.1 Sada ćemo posmatrati blagu formu nelinearnosti s.p. problema :

$$(1) \quad \begin{aligned} T_\varepsilon u := -\varepsilon u'' - b(x)u' + c(x,u) = 0, \quad x \in I, \\ u(0) = U_0, \quad u(1) = U_1, \end{aligned}$$

gde je

$$c_u(x,u) \geq 0, \quad (x,u) \in I \times \mathbb{R} .$$

Postoje dva glavna metoda za numeričko rešavanje ovih problema pomoću konačnih razlika: metod linearizacije-diskretizacije (LD.) i metod diskretizacije-linearizacije (DL.).

Kod LD. metoda se problem (1) linearizuje uvodjenjem sledećeg Newtonovog niza $u_0, u_1, u_2, \ldots$ of $C^2(I)$ funkcija iz $C^2(I)$, v. Doolan et al. (1980):

- neka u_0 zadovoljava konturne uslove

$$u_0(0) = U_0, \quad u_0(1) = U_1 ;$$

- nova aproksimacija u_{j+1} se dobija kao rešenje linearnog problema

$$(2) \quad \begin{aligned} L_j u := -\varepsilon u''_{j+1} - b(x)u'_{j+1} + c_u(x,u_j)u_{j+1} = c_u(x,u_j)u_j - \\ - c(x,u_j), \quad x \in I, \\ u_{j+1}(0) = U_0, \quad u_{j+1}(1) = U_1, \end{aligned}$$

$j = 0,1,2,\ldots$.

Zatim se za svaki linearni problem (2) formira konačno-diferencna diskretizacija i nalazi njeno rešenje $w_{j+1,h}$.

Za dokaz sledeće teoreme v. Teoremu 14.1 u knjizi Doolan et al. (1980).

TEOREMA 1. *Neka je* $b \in C^2(I)$, $c \in C^2(I \times \mathbb{R})$ *i neka je* $u_\varepsilon \in C^4(I)$ *rešenje s.p. problema (1). Tada važi*

$$\| u_\varepsilon - u_{j+1} \| \leq M \| u_\varepsilon - u_j \|^2, \quad j = 0,1,\ldots,$$

gde je M *nezavisno od* j *(i od* ε*).*

POSLEDICA. *Ako je* u_0 *dovoljno blizu rešenju* u_ε *(u smislu norme* $\|\cdot\|$*), tada niz* $u_0, u_1, \ldots$ *konvergira ka* u_ε *(u normi* $\|\cdot\|$*), uniformno po* ε.

Za diskretizaciju linearnih problema (2) možemo koristiti diferencne šeme iz 4.2, L_U^h, L_{CU}^h, L_{CM}^h i L_F^h. Neka je $w_{j+1,h}$ rešenje neke od tih diskretizacija problema (2).

TEOREMA 2. *Neka važe uslovi Teoreme 1 i uslovi na* L_j, $j=0,1,..$ *analogni uslovima a) i b) Teoreme 3, 4.2.5.*

Tada postoji $J \in \mathbb{N}$ *takvo da važi*

$$\| w_{j+1,h} - u_\varepsilon^h \| \leq K H^s$$

za sve $j \geq J$, *pri čemu je* u_0 *dovoljno blisko* u_ε. *Ovde je* $s=1$ *ili* $s=2$ *, u zavisnosti od tipa diskretozacije i mreže.*

Kreiss et al. (1981) su koristili LD. metod i alternativni metod konstrukcije mreže.

4.3.2 Kod DL. metoda se direktno formira diskretizacija problema 4.3.1(1) i rezultujući nelinearni sistem se rešava nekim odgovarajućim metodom, npr. iteracijama paralelne sečice (Bohl et al. (1979), Herceg (1979)) ili Newtonovim metodom linearizacije (Henrici (1962)). Za jedan drugi metod rešavanja nelinearnih diskretizacija v. Osher (1981) i Abrahamsson et al. (1982), gde se uvodi veštačka vremenska promenljiva.

Ovde je moguće formirati diskretizacije problema 4.3.1 (1) koje su analogne diskretizacijama datim za linearni slučaj, i pokazati, koristeći tehniku iz Henrici (1962), da Newtonov metod konvergira ka rešenju nelinearnog diskretnog problema. Ovo ćemo ipak izostaviti i koristiti samo LD. metode.

4.4 Pregled test primera

4.4.1 Pošto je sledeći Odeljak prvi u kome se daju numerički rezultati, sada ćemo navesti sve test primere koji će se posmatrati do kraja Teze.

Prvi primer je 1.1.1(1). Zapisaćemo ga u obliku

$$-\varepsilon u'' - \pi u' + \varepsilon\pi^2 u = \pi^2 \sin \pi x \ , \quad x \in [0,1],$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Njegovo rešenje je dato sa

$$u_\varepsilon(x) = [A \ \exp(r_1 x) + B \ \exp(r_2 x) + 2\varepsilon \sin(\pi x) + \cos(\pi x)] \ / \ (1+4\varepsilon^2) \ ,$$

gde je

$$r_1 = -\pi Q \ / \ (2\varepsilon), \quad r_2 = 2\pi\varepsilon \ / \ Q, \quad Q = 1 + \sqrt{1+4\varepsilon^2} \ ,$$

$$A = (1 + \exp(r_2)/(\exp(r_1) - \exp(r_2)) \ ,$$

$$B = (1 + \exp(r_1)) \ / \ (\exp(r_2) - \exp(r_1)) \ .$$

4.4.2 Problemi sa povratnom tačkom :

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} &-\varepsilon u'' - xu' + 2u = f(x) \ , \quad x \in [-1,1] \ , \\ &u(\pm 1) = \pm 1 + \exp(-1/\varepsilon) \ , \end{aligned}$$

gde je $f(x) = (2x^2/\varepsilon - 4)\exp(-x^2/\varepsilon) - x$,
tako da rešenje glasi:

$$u_\varepsilon(x) = \exp(-x^2/\varepsilon) + x.$$

Ovo rešenje ima unutrašnji sloj širine $O(\varepsilon^{1/2})$ pri $x = 0$.

Takodje ćemo posmatrati analogni problem na intervalu $[0,1]$:

$$\text{(2)} \quad \begin{aligned} &-\varepsilon u'' - xu' + 2u = f(x), \quad x \in [0,1] \ , \\ &u(0) = 1, \quad u(1) = 1 + \exp(-1/\varepsilon), \end{aligned}$$

sa istim rešenjem $u_\varepsilon(x)$.

4.4.3 Nelinearni problem iz Blatov et al. (1985):

$$-\varepsilon u'' - u' + (\pi/2)\sin(\pi x/2)e^{u} = 0, \quad x \in [0,1] ,$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Njegovo rešenje se može zapisati u obliku

$$u_\varepsilon(x) = \bar{u}_\varepsilon(x) + O(\varepsilon),$$

gde je

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = -\ell n[\cos(\pi x/2)+1)] + \ell n 2 \exp(-x/\varepsilon) .$$

4.4.4 S.p. problem u samoadjungovanoj formi (v. 1.2.4):

$$-\varepsilon u'' + u = -\cos^2(\pi x) - 2\varepsilon\pi^2\cos(2\pi x) , x \in [0,1] ,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

sa tačnim rešenjem

$$u_\varepsilon(x) = (\exp(-x/\mu) + \exp((x-1)/\mu)/(1 + \exp(-1/\mu)) -$$
$$- \cos^2(\pi x) , \quad \mu = \varepsilon^{1/2} .$$

Ovaj problem je posmatran u Doolan et al. (1980), Vulanović (1983) i Vulanović et al. (1986).

4.4.5 Problem bez povratne tačke :

$$-\varepsilon u'' - u' = -x , x \in [0,1] ,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

sa rešenjem

$$u_\varepsilon(x) = (\varepsilon - 1/2)(1 - \exp(-x/\varepsilon))/(1 - \exp(-1/\varepsilon)) -$$
$$- \varepsilon x + x^2/2 .$$

Ovo je problem iz Liseikin et al. (1981).

4.4.6 Problem sa mešovitim graničnim uslovima :

$$-\varepsilon u'' - u' = -x , \quad x \in [0,1]$$
$$u(0) = A/\varepsilon , \quad u(1) = 0,$$

gde je

$$A = (\varepsilon-1/2)/(1 - \exp(-1/\varepsilon)) - \varepsilon^2 ,$$

tako da rešenje zadovoljava $u_\varepsilon(0)=0$. Prema tome, u_ε je isto kao u 4.4.5. Ovaj problem je posmatran u Zadorin (1984).

4.4.7 Problem sa stepenim graničnim slojem :

$$-(\varepsilon+x)^2u''+u = x, \quad x\in[0,1],$$
$$u(0)=1, \quad u(1)=1+(\varepsilon/(\varepsilon+1))^r,$$

$r=(\sqrt{5}-1)/2$. Njegovo rešenje je dato sa :

$$u_\varepsilon(x) = (1+x/\varepsilon)^{-r}+x .$$

Ovo je poslednji test primer.

4.4.8 Za testiranje alternativnih metoda za konstrukciju mreže koristićemo prva tri problema. U svim tabelama numeričkih rezultata sa *error* označavamo maksimalnu grešku numeričkog rešenja u tačkama mreže. Ona se dobija poredjenjem numeričkog rešenja sa tačnim u tačkama mreže. Izuzetak je problem 4.4.3, gde se numeričko rešenje upoređjuje sa $\bar{u}_\varepsilon(x)$ u tačkama mreže.

4.5 Numerički rezultati

4.5.1 U ovom Odeljku ćemo kombinovati adaptivne postupke A1-4. iz 3.2 sa konačno-diferencnim šemama iz 4.2.

Počećemo posmatranjem adaptivnog postupka A1 i upoređjivanjem numeričkih rezultata za različite vrednosti parametara $\varepsilon,\delta,\chi,Q$, v. 3.2.2, i za različite šeme. Svi numerički rezultati u ovom Pododeljku se odnose na test problem 4.4.2 (1).

Sa n_s ćemo označiti broj koraka mreže u početnoj ek. mreži. Sa k označavamo broj profinjenja mreže do završetka postupka. n_f označava broj koraka mreže u konačnoj mreži, tj. u mreži dobijenoj u k-tom profinjenju, a n_t označava koliko je ukupno koraka mreže korišćeno tokom čitavog postupka. (Brojevi n_f, k i n_t su prikazani u Tabelama 8,9). Šeme su označene svojim tipom (U- za up-wind itd.). Rezultati za L_F^h su dati u slučaju $\tilde{h}_i = 0$, i=1(1)n-1. Napominjemo da su rezultati za druge izbore $\tilde{h}_i$ veoma slični. U slučaju šeme L_{CM}^h korak b) preskače tačku $x_i=0$ jer je to nula funkcije $b(x)=x$, v. 4.2.3.

TABELA 1. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.1$, $\chi = 1$, $Q = 10$, $n_s = 20$

šema	k	n_f	n_t	error
U	5	62	291	0.0191
C	7	65	429	0.103
CU	4	64	230	0.0803
CM	4	68	240	0.0970
F	4	65	258	0.0113

TABELA 2. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.1$, $\chi = 1$, $Q = 3$, $n_s = 20$

šema	k	n_f	n_t	error
U	3	66	179	0.0217
C	3	66	186	0.0257
CU	3	66	179	0.0208
CM	3	68	176	0.0250
F	3	68	200	0.00512

TABELA 3. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.1$,korak b) izostavljen,$Q = 3$, $n_s=20$

šema	k	n_f	n_t	error
U	3	74	194	0.0202
C	3	78	212	0.00615
CU	3	74	194	0.00979
CM	3	75	190	0.0111
F	3	76	216	0.00449

TABELA 4. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.05$, $\chi = 1$, $Q = 3$, $n_s = 20$

šema	k	n_f	n_t	error
U	3	126	351	0.0153
C	3	125	334	0.0118
CU	2	126	226	0.0129
CM	3	125	341	0.00824
F	3	127	359	0.00345

TABELA 5. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.1$, $\chi = 1$, $Q = 3$, $n_s = 40$

šema	k	n_f	n_t	error
U	2	59	134	0.0208
C	2	60	139	0.0141
CU	2	60	135	0.0119
CM	2	58	130	0.0152
F	2	59	135	0.00485

TABELA 6. $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.1$, $\chi = 1$, $Q = 3$, $n_s = 40$

šema	k	n_f	n_t	error
U	3	73	199	0.0228
C	8	73	578	0.0144
CU	3	73	199	0.0367
CM	4	70	258	0.00838
F	3	70	198	0.00782

TABELA 7. $\varepsilon = 10^{-7}$, $\delta = 0.1$, $\chi = 1$, $Q = 3$, $n_s = 40$

šema	k	n_f	n_t	error
U	4	75	262	0.0205
C *)	10	79	770	0.0327
CU	4	74	262	0.0140
CM	4	72	243	0.0107
F	4	74	262	0.00334

Posledice promene parametara δ, χ i Q, i n_s su očekivane (Tabele 1-5). Promena malog parametra ε (Tabele 5-7)

---

*) Postupak je prekinut posle 10 profinjenja mreže, ali kriterijumi nisu ispunjeni.

izaziva povećanje računanja što je normalno, ali je jasno da metod nije uniforman po ε kada se startuje sa ek. mrežom. Trebalo bi postupiti na sledeći način : uzeti krajnju mrežu dobijenu za veću vrednost parametra ε kao početnu mrežu za sledeće manje ε. Postupak sa takvim ε-koracima je korišćen u Pearson (1968 a,b) da bi se izbegla nestabilnost centralne šeme, (koja je ovde očigledna iz k u Tabelama 1,6,7). Jasna je superiornost šeme L_F^h, mada je broj n_t najveći upravo za ovu šemu u Tabelama 1-4. Rezultati ostalih šema, sem L_C^h po nekad, su uporedivi. U Tabelama 8 i 9 daćemo neke detalje rezultata iz Tabela 3 i 4, respektivno.

TABELA 8. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.1$, korak b) izostavljen, $Q = 3$, $n_s = 20$

korak profinjenja	L_{CU}^h		L_{CM}^h		L_F^h	
	n	error	n	error	n	error
0	20	0.823	20	0.860	20	0.818
1	43	0.0133	40	0.0205	45	0.0119
2	57	0.00941	55	0.0112	75	0.00437
3=k	$74=n_f$	0.00979	$75=n_f$	0.0111	$76=n_f$	0.00449
n_t	194		190		216	

TABELA 9. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.05$, $\chi = 1$, $Q = 3$, $n_s = 20$

korak profinjenja	L_C^h		L_{CM}^h		L_F^h	
	n	error	n	error	n	error
0	20	0.791	20	0.860	20	0.818
1	95	0.00232	76	0.00544	84	0.00323
2	94	0.0107	120	0.0125	128	0.00282
3=k	$125=n_f$	0.0118	$125=n_f$	0.00824	$127=n_f$	0.00345
n_t	334		341		359	

Konačno, u sledećoj Tabeli ćemo ilustrovati gustinu mreže u intervalu $[-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon}]$, (v. 4.4.2), prikazujući broj n_ℓ tačaka mreže koje leže u tom intervalu. Izbor parametara je isti kao u Tabeli 2.

TABELA 10. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.1$, $\chi = 1$, $Q = 3$, $n_s = 20$

korak profinjenja	L_{CU}^h n	L_{CU}^h n_ℓ	L_{CM}^h n	L_{CM}^h n_ℓ	L_F^h n	L_F^h n_ℓ
0	20	1	20	1	20	1
1	43	7	40	5	45	7
2	50	17	48	15	67	17
3	66	17	68	20	68	18

4.5.2 U ovom Pododeljku ćemo dati rezultate adaptivnog postupka A3. primenjenog na problem 4.4.2(1). Posmatraće se samo šeme L_U^h, L_{CM}^h i L_F^h. Fiksirane vrednosti parametara su $\chi=1$, $Q=3$, $n_s=40$.

TABELA 1. $\varepsilon = 10^{-7}$, $\delta = 0.1$

šema	k	n_f	n_t	error
U	5	33	167	0.0673
CM	5	32	168	0.0835
F	6	33	200	0.0429

TABELA 2. $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.05$

šema	k	n_f	n_t	error
U	5	31	187	0.0316
CM	2	32	95	0.0266
F	2	32	96	0.00594

TABELA 3. $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.05$

šema	k	n_f	n_t	error
U	6	38	200	0.0276
CM	4	42	178	0.0223
F	3	38	143	0.0105

TABELA 4. $\varepsilon = 10^{-7}$, $\delta = 0.05$

šema	k	n_f	n_t	error
U	5	45	232	0.0460
CM	4	46	178	0.0149
F	5	46	235	0.00917

Tabelu 1 treba uporediti sa Tabelom 7, 4.5.1 i postupkom A1. Superiornost šeme L_F^h je i ovde očigledna.

4.5.3 Sada ćemo posmatrati test problem 4.4.1. Fiksirane vrednosti su $\chi=1$, $Q=3$ i $n_s=10$.

TABELA 1. $\varepsilon = 10^{-4}$, A1. $\delta = 0.1$

šema	k	n_f	n_t	error
U	6	38	213	0.149
C*)	2	205	-	-
CU	5	39	177	0.121
CM	5	40	181	0.0964
F	6	40	214	0.121

TABELA 2. A3. $\delta = 0.05$, L_{CM}^h

ε	k	n_f	n_t	error
1	1	25	35	7.21E-4
1E-2	3	33	99	0.0725
1E-4	5	39	179	0.0908
1E-6	7	45	270	0.113
1E-8	9	52	377	0.115

TABELA 3. A3. $\delta = 0.05$, L_F^h

ε	k	n_f	n_t	error
1	1	25	35	4.75E-4
1E-2	4	33	128	0.109
1E-4	6	40	215	0.121
1E-6	8	45	313	0.121
1E-8	10	52	426	0.121

U ovom slučaju L_{CM}^h pokazuje najbolje rezultate. Tabele 2 i 3 možemo uporediti sa Tabelom 3.1.4 i ova je naravno bolja jer je broj koraka mreže 10 za sve vrednosti ε.

---

*) Postupak je prekinut jer je maksimalni dozvoljeni broj koraka mreže bio 200.

4.5.4 U ovom Pododeljku ćemo dati neke rezultate za adaptivne postupke A2. i A4. Rezultati su mnogo lošiji od prethodnih, što je ilustrovano sledećim tabelama (uzeto je $\varepsilon=10^{-5}$, $\chi=1$, $Q=3$ i $n_s=40$). Posmatran je primer 4.4.2(2).

TABELA 1. A2. $\delta = 0.1$

šema	k	n_f	n_t	error
U	8	71	374	0.0185
CM	8	74	385	0.00570
F	8	72	375	0.00472

TABELA 2. A4. $\delta = 0.05$

šema	k	n_f	n_t	error
U	6	38	200	0.0276
CM	7	40	256	0.0239
F	7	37	237	0.0126

Tabelu 1 treba uporediti sa Tabelom 6, 4.5.1, a Tabelu 2 sa Tabelom 3, 4.5.2.

4.5.5 Na kraju ćemo posmatrati nelinearni primer 4.3.3. Koristićemo adaptivni postupak A3. sa $\delta=0.05$, $\chi=1$, $Q=3$ i $n_s=10$. Potrebne su tri iteracije 3.4.1(2) da se postigne

$$\|w_{3,h} - w_{2,h}\| < 0.001,$$

($w_{j,h}$ kao u 4.3.1) što je bio izlazni kriterijum pri rešavanju 4.4.3 na svakoj mreži tokom adaptivnog postupka. Dakle, počeli smo sa $w_{0,h}\equiv 0$ i ek. mrežom i dobili $w_{3,h}$ na toj ek. mreži. Tada je izvršeno profinjenje mreže i 4.3.1(2) je rešavano na toj novoj mreži ponovo počinjući sa $w_{0,h}\equiv 0$ itd.

TABELA 1. L^h_{CM}

ε	k	n_f	n_t	error
1E-2	3	29	94	0.0169
1E-4	5	36	173	0.0237
1E-6	8	45	306	0.0219

TABELA 2. L^h_F

ε	k	n_f	n_t	error
1E-2	3	30	96	0.0311
1E-4	6	38	209	0.0323
1E-6	8	43	298	0.0323

Prikazani su samo rezultati za L^h_{CM} i L^h_F i prvi su nešto bolji. Kod primenjivanja L^h_{CM} na diskretizaciju problema 4.3.1(2) korišćena je aproksimacija

$$w_{j,i+1/2} \approx (w_{j,i}+w_{j,i+1})/2$$

pošto su vrednosti prethodne iteracije $w_{j,h}$ poznate samo u tačkama mreže.

III EKSPLICITNI METODI ZA KONSTRUKCIJU MREŽA

5. Analiza kontinualnih rešenja

5.1 Pregled skalarnih problema

5.1.1 U ovom Odeljku ćemo imati $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0] \subset \mathbb{R}$. Posmatraćemo različite tipove s.p. problema koji se mogu zapisati u opštoj formi :

$$T_\varepsilon u := -\varepsilon u'' - b(x)u' + c(x,u) = 0, \quad x \in I = [0,1] ,$$
$$B_\varepsilon u = (U_0, U_1),$$

gde B_ε označava neki granični operator , a $U_{0,1} \in \mathbb{R}$ su dati. Pretpostavićemo da su funkcije b i c dovoljno glatke : $b \in C^k(I)$, $c \in C^k(I \times \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, i da važi $c_u(x,u) > 0$, $(x,u) \in I \times \mathbb{R}$.

5.1.2 S.p. problem u samoadjungovanoj formi :

$$b(x) \equiv 0, \; c_u(x,u) > \gamma^2 > 0, \; (x,u) \in I \times \mathbb{R};$$
$$B_\varepsilon u = Bu := (u(0), u(1)) .$$

Numeričko rešavanje ovog problema u linearnom slučaju je posmatrano u Bakhvalov (1969)+, Doolan et al. (1980)*, Herceg (1981)*, Herceg et al.(1981)+, Boglaev (1981)*, Shishkin (1983)+, Vulanović (1982*, 1983 a*,+, 1985a*,+), a u nelinearnom slučaju u Vulanović (1983 b)+, Boglaev (1984)*,+ i Vulanović et al. (1986)+. Opštiji problem sa dva mala parametra je posmatran u Vulanović (1985 b)+.

5.1.3 S.p. problem bez povratne tačke :

$$b(x) > \beta > 0, \; x \in I; \quad B_\varepsilon u = Bu := (u(0),u(1)).$$

Ovaj tip problema je numerički rešavan u Il'in (1969)*, Kellogg et al. (1978)*, Lorenz (1979,1980 a*, 1980b*), Veldhuizen (1978)+, Bohl (1979), Stoyan (1979), Berger et al. (1980)*, Carrol et al. (1980)*, Liseikin et al. (1981+, 1984+),

---

+,* v. 5.1.6

Vulanović (1983 a*,+), O´Riordan (1984), Emel´yanov (1978)*.

5.1.4 S.p. problem sa mešovitim graničnim uslovima :

$b(x) > \beta > 0,\ x\in I;\ c_u(x,u)\geq\gamma\geq 0,\ x\in I \times \mathbb{R}$;

$B_\varepsilon u := (A_1u(0)-u'(0),\ A_2u(1) + A_3u'(1))$,

$A_i\geq 0,\ i=1,2,3,\ \ A_2 + \min(A_3,\gamma)>0$.

Problem ovog tipa numerički je rešavan u Emel´yanov (1975)*, Doolan et al. (1980)*, Surla (1982)*, Liseikin et al. (1984)+, Vulanović (1986)+. Zadorin (1984)* posmatra slučaj u kome je

(1) $B_\varepsilon u := (-\varepsilon u'(0),\ u(1))$,

što je bliže problemu 5.1.3.

5.1.5 S.p. problem sa povratnom tačkom :

$b(x) = xa(x),\ \ a(x) \geq \alpha > 0,\ x\in I$;

$c_u(x,u)>\gamma>0,\ \ x\in I \times \mathbb{R}$;

$B_\varepsilon u = Bu := (u(0),u(1))$.

Ovo nije pravi problem sa povratnom tačkom, ali se problem gde je

(1) $I = [-1,1]$ i $B_\varepsilon u = Bu := (u(-1),u(1))$

može tretirati analogno.

Numeričko rešavanje problema ovog tipa posmatrano je u Farrel (1980*,1984*), Kellogg (1981)*, Berger et al. (1982)*, Liseikin (1982+, 1984+), Liseikin et al.(1984)+, Vulanović (1984)+. Opštiji problemi u kojima b(x) više puta menja znak u I, posmatrani su u radovima: Pearson (1968)+, Miranker (1981), Kreiss et al. (1981)+, Zadorin et al. (1983)*, Vulanović (u pripremi).

5.1.6 Primetimo da navedena bibliografija ne pretenduje da bude iscrpna.

Radovi označeni sa * koriste eksponencijalno fitovanje pri numeričkom rešavanju relevantnih problema. Eksponencijalne osobine egzaktnih rešenja su uvedene ili preko koeficijenata konačno-diferencnih šema, ili preko baza u metodima konačnih elemenata. Za ovo drugo v. Boglaev (1981,1984) i O'Riordan (1984).

Radovi označeni sa + koriste specijalne mreže diskretizacije, što je metod koji nas ovde interesuje. Kasnije ćemo se vratiti tim rezultatima.

5.2 Ocene izvoda

5.2.1 U ovom Odeljku ćemo dati ocene izvoda egzaktnih rešenja problema iz 5.1. Potreba za tim ocenama je objašnjena u 1.2.

Ističemo da eksponencijalno fitovane šeme zahtevaju poznavanje asimptotskih razvoja egzaktnih rešenja. S druge strane , za metode koji koriste specijalne mreže diskretizacije često je dovoljno poznavati samo ocene izvoda egzaktnih rešenja. To ne isključuje mogućnost da se i asimptotski razvoji rešenja koriste pri konstrukciji mreža. Dakle, navešćemo i neke asimptotske razvoje.

5.2.2 Za asimptotske razvoje rešenja različitih tipova s.p. problema v. Vishik et al. (1957) i O'Malley (1974).

Ocene izvoda egzaktnih rešenja s.p. problema mogu da se dobiju raznim tehnikama u zavisnosti od tipa problema. Jedna od najvažnijih osobina s.p. problema datih u 5.1 je inverzna monotonija. Operatori $(T_\varepsilon, B_\varepsilon)$ su inverzno monotoni i možemo izvesti da za svaki problem postoji jedinstveno rešenje $u_\varepsilon \in C^{k+2}(I)$ koje je ograničeno nezavisno od ε, tj. $\|u_\varepsilon\| < M$. Za ovo v. Baily et al. (1968), Vasil'ev et al. (1978) i Lorenz (1980 a).

Za neke probleme je moguće dobiti ocene izvoda od u_ε samo korišćenjem inverzne monotonije. To je slučaj sa problemom 5.1.2, v. Leme 1 i 2 u 1.2.3. Pored $(T_\varepsilon, B_\varepsilon)$ mogu se koristiti i drugi pogodni operatori.

Za druge probleme se koristi metod diferenciranja i integralnih transformacija originalnih jednačina. Ovaj metod ćemo zvati "direktan". To je metod iz rada Kellogg et al. (1978, Leme 2.2, 2.3).

Neki problemi zahtevaju kombinaciju ove dve tehnike, v. Liseikin (1982, 1984).

Postoji još jedna tehnika iz Bakhvalov (1969) koja takodje koristi inverznu monotoniju, v. 5.3.2.

5.2.3 TEOREMA 1. *Neka je* $u_\varepsilon \in C^{k+2}(I)$ *rešenje s.p. problema 5.1.2. Tada važi sledeća reprezentacija :*

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + g ,$$

gde je $\|g^{(i)}\| \leq M, \; i=0(1)k,$

$$|v_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq \begin{cases} M\mu^{-i}\exp(-\gamma x/\mu), & 0\leq x\leq 1/2 , \\ M\mu^{-i}\exp(-\gamma(1-x)/\mu), & 1/2\leq x\leq 1, \end{cases}$$
$$i = 0(1)k, \; x\in I, \; \mu=\sqrt{\varepsilon} .$$

Dokaz se bazira na inverznoj monotoniji $(T_\varepsilon, B_\varepsilon)$ i može se naći u Shishkin (1983) i Vulanović (1983 b). U stvari, rezultat Teoreme 1 je nastavak Leme 2, 1.2.3. Primetimo da se $u_\varepsilon^{(k+1)}$ i $u_\varepsilon^{(k+2)}$ ne mogu oceniti ovom tehnikom. Koristeći tehniku iz Bakhvalov (1969) možemo dobiti nešto lošije ocene, ali koje važe za sve izvode u_ε :

TEOREMA 2. *Neka je* $u_\varepsilon \in C^{k+2}(I)$, *k parno, rešenje s.p. problema 5.1.2. Tada za* $i=0(1)k+2$ *i* $x\in I$ *imamo*

$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq M(\mu^{-i'}+\mu^{-i}(\exp(-\delta x/\mu)+\exp(-\delta(1-x)/\mu)),$$
$$i'= \max(0,i-2), \quad \mu=\sqrt{\varepsilon} ,$$

i $\delta=\gamma_1/2$, $c_u(x,u)\geq\gamma_1>0$, $(x,u)\in(I \times \mathbb{R})$.

Dokaz će biti dat kasnije za slučaj sistema drugog reda.

5.2.4 TEOREMA. *Neka je* $u_\varepsilon\in C^{k+2}(I)$ *rešenje s.p. problema 5.1.3. Tada važi sledeća reprezentacija :*

$$u_\varepsilon(x) = p_\varepsilon \exp(-b(0)x/\varepsilon)+z_\varepsilon(x) ,$$

gde je $p_\varepsilon = -\varepsilon u_\varepsilon'(0)/b(0)$, $|p_\varepsilon| \leq M$,

$$|z_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq M(1+\varepsilon^{1-i}\exp(-\beta x/\varepsilon)),\ i=0(1)k+1,\ x\in I.$$

Dokaz je dat u Kellogg et al. (1978, Lema 2.4). Slične ocene dobijene pomoću inverzne monotonije v. u Liseikin et al. (1981, 1984).

5.2.5 TEOREMA. *Neka je* $u_\varepsilon\in C^{k+2}(I)$ *rešenje s.p. problema 5.1.4. Tada imamo sledeću reprezentaciju*

$$u_\varepsilon(x) = p_\varepsilon\varepsilon \exp(-b(0)x/\varepsilon) + z_\varepsilon(x),$$

gde je $|p_\varepsilon| \leq M$,

$$|z_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq M(1+\varepsilon^{2-i}\exp(-\beta x/\varepsilon)),\ i=0(1)k+1,\ x\in I .$$

Dokaz je analogan dokazu Teoreme 5.2.4, upor. Vulanović (1986).

U slučaju problema 5.1.4 sa graničnim operatorom 5.1.4(1), reprezentacija u_ε je ista kao u Teoremi 5.2.4.

5.2.6 TEOREMA 1. *Neka je* $u_\varepsilon \in C^3(I)$ *rešenje problema 5.1.5 sa* $a\in C^1(I)$ *i* $c(x,u)\in C^2(I \times \mathbb{R})$. *Neka je* $p=\min(1,\gamma/a(0))$. *Tada važe sledeće ocene :*

$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq \begin{cases} M\mu^{-i}, & 0\leq x\leq m_0\mu \\ M(\mu^{-i}\exp(-m_1 x/\mu)+x^{p-i}), & m_0\mu\leq x\leq 1 \end{cases} ,\ i=1,2 ,$$

$$|u_\varepsilon^{(3)}(x)| \leq \begin{cases} M\mu^{-3}, & 0\leq x\leq m_0\mu \\ M(\mu^{-3}\exp(-m_1x/\mu)+\mu^{-2}x^{p-1}, & m_0\mu\leq x\leq 1 \end{cases},$$

gde je $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, a m_0 i m_1 su proizvoljne pozitivne konstante.

Ova teorema je dokazana u linearnom slučaju u radu Liseikin (1984). Navešćemo ovde dokaz detaljno zato što on ilustruje primenu i inverzne monotonije i direktnog metoda, v. 5.2.7. Analogno važi

TEOREMA 2. *Neka je* $u_\varepsilon\in C^4(I)$ *rešenje problema 5.1.5 sa* $a\in C^2(I)$, $c(x,u)\in C^3(I\times\mathbb{R})$.

Tada važe sledeće ocene :

$$\begin{array}{ll} \text{(1a)} \\ \text{(1b)} \end{array} \quad |u_\varepsilon^{(i)}(x)|\leq \begin{cases} M\mu^{-i}, & 0\leq x\leq m_0\mu \\ M(\mu^{-i}\exp(-m_1x/\mu)+x^{p-i}), & m_0\mu\leq x\leq 1 \end{cases} \quad i=1,2,3,$$

$$\begin{array}{ll} \text{(2a)} \\ \text{(2b)} \end{array} \quad |u_\varepsilon^{(i)}(x)|\leq \begin{cases} M\mu^{-i}, & 0\leq x\leq m_0\mu \\ M(\mu^{-i}\exp(-m_1x/\mu)+\mu^{-2}x^{p+2-i}), & m_0\mu\leq x\leq 1 \end{cases} \quad i=3,4,$$

gde su p,μ,m_0 *i* m_1 *kao u prethodnoj teoremi.*

Analogne ocene važe za problem 5.1.5(1).

5.2.7 Dokaz Teoreme 1 iz 5.2.6.

Dokaz se bazira na linearizaciji problema 1.1.5, upor. Lorenz (1980 a), Vulanović (1983 b) i na tehnici iz Liseikin (1984), takodje upor. Liseikin (1982), Vulanović (1984) i Liseikin et al. (1984).

Radi jednostavnosti neka je $u(x)=u_\varepsilon(x)$ i neka je

$$f(x) = f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\int_0^x ta(t)dt.$$

Prvo ćemo dokazati

$$\text{(1)} \qquad |u^{(i)}(0)| \leq M\mu^{-i}, \; i=1,2,3.$$

Zapišimo problem 1.1.5 u obliku

$$\text{(2a)} \qquad \mu^2u'' + xa(x)u' = c(x,u),$$

$$\text{(2b)} \qquad \mu^2u'' + (xa(x)u)' = c(x,u) + (xa(x))'u.$$

Integralimo (2b) od 0 do s, gde je s takva tačka da važi

$0<s<\mu$, $u'(s)=(u(\mu)-u(0))/\mu$, dakle $|u'(s)|\leq M/\mu$. Dobijamo (1) za $i=1$ i iz (2a) direktno sledi da (1) važi takodje za $i=2$. Nejednakost (1) za $i=3$ se dobija diferenciranjem (2a).

Sada direktnim metodom možemo dobiti :

(3) $$|u^{(i)}(x)| \leq M\mu^{-i} \ , \ i=1,2, \ x\in I \ .$$

Zaista, iz (2a) imamo

$$u'(x) = \mu^{-2} \int_0^x c(t,u(t))\exp(f(t)-f(x))dt+u'(0)\exp(-f(x)) \ .$$

Zbog

$$f(t)-f(x) \leq -\mu^{-2}\alpha \int_t^x sds \leq \frac{\alpha}{2}\mu^{-2}x(t-x), \quad 0\leq t\leq x \ ,$$

i (1), dobijamo

$$|u'(x)| \leq M(1-\exp(-M(x/\mu)^2)/x+M/\mu \leq M/\mu \ ,$$

pa je dokazano (3) za $i=1$. Slično se diferenciranjem (2a) i izražavanjem $u''(x)$ može dobiti (3) za $i=2$.

Posmatrajmo sada $0\leq x\leq m_0\mu$ za neko proizvoljno m_0, takvo da je $m_0\mu\leq 1$. Iz

$$\mu^2 u'''+xa(x)u'' + (xa(x))'u' = c_x(x,u)+c_u(x,u)u'$$

i (3) imamo $|u'''(x)| \leq M\mu^{-3}$. Time smo dokazali

$$|u^{(i)}(x)| \leq M\mu^{-i} \ , \quad 0\leq x\leq m_0\mu \quad , \ i=1,2,3 \ .$$

U drugom delu dokaza imamo $m_0\mu\leq x\leq 1$. Za $z \in C^2(I)$ definišemo linearni operator L_ε :

$$L_\varepsilon z := -\varepsilon z'' - xa(x)z'+g(x)z \ ,$$

gde je

$$g(x) = \int_0^1 c_u(x,su(x))ds >\gamma>0.$$

Očigledno imamo

(4) $$L_\varepsilon u = T_\varepsilon u - T_\varepsilon 0 = -c(x,0) \ .$$

Dalje je

$$\pm L_\varepsilon(g(x)u(x)+c(x,0)) \leq M x$$

i za $q(x)=M_1\exp(-f(x))+M_2x^p$ sledi

$$L_\varepsilon q(x) = M_1((xa(x))' + g(x))\exp(-f(x)) +$$

$$+ M_2(-\mu^2 p(p-1)x^{p-2} + x^p(g(x)-pa(x))) \geq$$

$$\geq M_1 xa'(x)\exp(-f(x)) + M_2 x^p(g(x)-pa(x)) \ .$$

Važi $g(0)-pa(0) > \gamma - pa(0) \geq 0$, pa postoji broj $M_0 \leq 1$, takav da $g(x)-pa(x) > M$ za $m_0\mu \leq x \leq M_0$. Sada se lako vidi da M_1 i M_2 mogu biti izabrani tako da važi

$$q(s) \geq |g(s)u(s)+c(s,0)| \quad \text{za} \quad s=m_0\mu \quad \text{i} \quad s=M_0 ,$$

i

$$L_\varepsilon q(x) \geq Mx \geq \pm L_\varepsilon(g(x)u(x)+c(x,0)) \ .$$

Tako zbog inverzne monotonije operatora L_ε imamo

$$|g(x)u(x)+c(x,0)| \leq q(x), \quad m_0\mu \leq x \leq M_0 \ .$$

Ova se nejednakost može proširiti na $[m_0\mu, 1]$ jer važi $|g(x)u(x)+c(x,0)| \leq M$, $x \in I$, pa imamo :

$$(5) \qquad |g(x)u(x)+c(x,0)| \leq M(\exp(-f(x)) + x^p), \quad m_0\mu \leq x \leq 1 \ .$$

Sada možemo dokazati ocene za $|u'(x)|$, $m_0\mu \leq x \leq 1$. Posmatrajmo (4) i koristimo direktan metod. Zbog (5) dobijamo

$$|u'(x)| \leq M\mu^{-2}\exp(-f(x))\Big(\int_0^{m_0\mu} \exp(f(t))dt + \int_{m_0\mu}^{x} (1 +$$

$$+ t^p\exp(f(t)))dt\Big) + M\mu^{-1}\exp(-f(x)) \leq$$

$$\leq M(\mu^{-1} + x\mu^{-2})\exp(-f(x)) + M\mu^{-2}\int_{m_0\mu}^{x} t^p\exp(f(t)-f(x))dt \ .$$

Kako je

$$f(t)-f(x) \leq M\mu^{-2}x^{1-p}(t^{1+p} - x^{1+p}), \quad 0 \leq t \leq x ,$$

sledi

$$|u'(x)| \leq M(\mu^{-1} + x\mu^{-2})\exp(-f(x)) + Mx^{p-1} \leq$$

$$(6) \qquad \leq M(\mu^{-1}\exp(-f(x)/2) + x^{p-1}) \ .$$

Analogno, koristeći (6) , direktnim metodom dobijamo

$$(7) \qquad |u''(x)| \leq M(\mu^{-2}\exp(-f(x)/2) + x^{p-2}), \quad m_0\mu \leq x \leq 1 ,$$

v. Liseikin (1984).

Sada diferenciranjem (4) i korišćenjem (6) i (7) dobijamo

(8) $|u'''(x)| \leq M\mu^{-2}(1+x^{p-1}+(\mu^{-1}+x\mu^{-2})\exp(-f(x)/2)) \leq$

$$\leq M(\mu^{-3}\exp(-f(x)/3)+\mu^{-2}x^{p-1}), \quad m_0\mu\leq x\leq 1 .$$

Zbog

$$\exp(-f(x)/2) \leq \exp(-f(x)/3) \leq M\exp(-m_1x/\mu) \quad ,$$

v. Liseikin (1984), iz (6),(7),(8) imamo tražene ocene i dokaz je završen.

5.3 Jedan sistem drugog reda

5.3.1 Posmatrajmo s-dimenzionalni sistem koji se u slučaju s=1 svodi na problem 5.1.2 :

(1) $$T_\varepsilon u := -\varepsilon u'' + c(x,u) = 0, \quad x\in I ,$$
$$u(0) = U_0, \quad u(1) = U_1 ,$$

gde $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $u(x)=[u_1(x),u_2(x),\ldots,u_s(x)]^T\in \mathbb{R}^s$, $c(x,u) = [c_1(x,u_1,\ldots,u_s), c_2(x,u_1,\ldots,u_s), c_s(x,u_1,\ldots,u_s)]^T\in \mathbb{R}^s$, $U_0,U_1\in \mathbb{R}^s$.

Osnovne pretpostavke su :

(2) $$c(x,u) \in C_s^2(I\times R^s) .$$

(3) Postoji $\gamma_1>0$ takvo da je za $(x,u)\in I\times\mathbb{R}^s$ matrica $c_u(x,u)-\gamma_1^2E\in \mathbb{R}^{s,s}$ nenegativno definitna. Ovde $c_u(x,u)$ označava jakobijan :

$$c_u(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial u_1} & \frac{\partial c_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial c_1}{\partial u_s} \\ \frac{\partial c_2}{\partial u_1} & \frac{\partial c_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial c_2}{\partial u_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial c_s}{\partial u_1} & \frac{\partial c_s}{\partial u_2} & & \frac{\partial c_s}{\partial u_s} \end{bmatrix} (x,u) .$$

$$2(y,z'') \leq \sigma(y,y)+\sigma^{-1}(z'',z''), \quad \sigma=\gamma_1^2 / \mu^2 ,$$

stižemo do

$$-\mu^2 Y'' + 2\gamma_1^2 Y \leq \gamma_1^2 Y + \mu^4 Z ,$$

$$-\mu^2 Y'' + \gamma_1^2 Y \leq \mu^4 Z/\gamma^2 , \tag{2}$$

gde je $Z = \sup_{x \in I} (z'',z'')$.

Sada neka je

$$V(x) = \mu^4 Z/\gamma_1^4 + Y(0)\exp(-\gamma_1 x/\mu)+Y(1)\exp(-\gamma_1(1-x)/\mu) .$$

Zbog inverzne monotonije diferencijalnog operatora u (2), imamo

$$Y(x) \leq V(x) , \quad x \in I ,$$

i

$$\|y(x)\| \leq M(\mu^2+\exp(-\delta x/\mu)+\exp(-\delta(1-x)/\mu)), \quad x \in I . \tag{3}$$

Kako je

$$u''(x) = \mu^{-2} g(x)y(x),$$

iz (3) dobijamo (1) za $i=2$.

Sada ćemo koristiti Lemu 1 iz Bakhvalov (1969). Ona glasi da za svaku s-dimenzionalnu vektor funkciju $f \in C^2(I)$ i $\alpha<\beta$, $\alpha,\beta \in I$, imamo

$$\|f'(x)\| \leq \|(f(\beta)-f(\alpha))/(\beta-\alpha)\| + \tag{4}$$
$$+ (\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f''(x)\|)(\beta-\alpha)/2 , \quad \alpha \leq x \leq \beta .$$

Neka $\mu_0=\sqrt{\varepsilon_0}$. Za $x \in [0,1/2]$ koristimo (4) sa $f(x)=u(x)$, $\alpha=x$, $\beta=x+\mu/(2\mu_0) \leq 1$. Za $x \in [1/2,1]$ uzimamo $f(x)=u(x)$, $\alpha=x-\mu/(2\mu_0)$, $\beta=x$.Koristeći $\| u(\beta)-u(\alpha) \| \leq \|y(\beta)-y(\alpha)\|+M(\beta-\alpha)$ i (3) dobijamo (1) za $i=1$.

Sada dva puta diferencirajmo

$$-\mu^2 u'' + g(x)u = g(x)z$$

i izrazimo $u^{(4)}$. Iz prethodno dobijenih ocena imamo (1) za $i=4$. Konačno koristimo (4) sa $f(x)=u''(x)$ da bismo dobili (1) za $i=3$ na analogan način. Dokaz je završen.

5.4 Problemi sa stepenim slojem

5.4.1 Prvo ćemo izneti rezultat iz Liseikin et al. (1984) koji se odnosi na sledeći problem sa stepenim slojem :

$$(1)\qquad \begin{aligned} L_\varepsilon u &:= -(\varepsilon+x)u''-a(x)u'+c(x)u = f(x), \quad x\in I ,\\ Bu &:= (u(0),u(1)) = (U_0,U_1) , \end{aligned}$$

sa $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $c(x) \geq 0$, $x\in I$ i $\alpha=a(0)>0$. Neka $a,c,f\in C^k(I)$, $k\in \mathbb{N}$. Tada postoji jedinstveno rešenje $u_\varepsilon\in C^{k+2}(I)$ problema (1) i $|u_\varepsilon(x)|\leq M$, $x\in I$.

TEOREMA 1. *Neka je* $k=2$ *i* $0<\alpha<1$. *Tada važi*
$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq M(\varepsilon+x)^{1-\alpha-i} , \quad i=1,2,3, \ x\in I .$$

TEOREMA 2. *Neka je* $k=2$ *i* $\alpha\geq 1$. *Tada važi*
$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq \begin{cases} M(1+(\varepsilon+x)^{-i}/|\ln\varepsilon|) , & \alpha=1 ,\\ M(1+\varepsilon^{\alpha-1}/(\varepsilon+x)^{\alpha-1+i}), & \alpha>1 ; \end{cases}$$
$i=1,2,3$, $x\in I$.

Dokaz v. u Liseikin et al. (1984). On se zasniva na direktnom metodu i inverznoj monotoniji.

5.4.2 Kao što smo videli u 5.2, eksponencijalne funkcije graničnih slojeva su oblika $\exp(-\gamma x/\varepsilon)$ za neko $\gamma>0$. Ovde stepena funkcija graničnog sloja ima oblik $(\varepsilon/(\varepsilon+x))^\gamma = (1+x/\varepsilon)^{-\gamma}$, $\gamma>0$, što je očigledno iz Teoreme 2, 5.4.1, slučaj $\alpha>1$, i iz sledećeg problema, Teorema 5.4.3. Primetimo da je $\exp(-\gamma x/\varepsilon)\leq(1+x/\varepsilon)^{-\gamma}$ i da je eksponencijalni sloj izraženiji.

Asimptotski razvoji rešenja problema sa stepenim slojem su posmatrani u mogim radovima S.A. Lomova, upor. Trenogin (1970).

5.4.3 Sada posmatrajmo sledeći problem :

$$(1)\qquad \begin{aligned} L_\varepsilon u &:= -(\varepsilon+x)^2u''+c(x)u = f(x)\ ,\ x\in I,\\ Bu &:= (u(0),\ u(1)) = (U_0,U_1)\ , \end{aligned}$$

gde je $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $c(x)\geq\gamma>0$, $x\in I$. Neka $c,f\in C^1(I)$. Tada postoji jedinstveno rešenje $u_\varepsilon\in C^3(I)$ problema (1) i zbog inverzne monotonije (L_ε,B) očigledno je da važi $|u_\varepsilon(x)|\leq M$, $x\in I$.

TEOREMA. *Rešenje* $u_\varepsilon\in C^3(I)$ *problema (1) se može predstaviti na sledeći način :*

$$u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon v_\varepsilon(x) + z_\varepsilon(x)\ ,\quad x\in I\ ,$$

gde je

$$|\eta_\varepsilon| \leq M,\quad v_\varepsilon(x) = (1+x/\varepsilon)^{-r},\ r = (\sqrt{1+4c(0)}-1)/2>0,$$

$$|z_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq M(\varepsilon+x)^{1-i},\quad i=1,2,3\ ,\ x\in I.$$

Dokaz je sličan dokazu za problem 5.1.2 iz Vulanović (1982), takodje v. Kellogg et al. (1978, Lema 2.4). Trebaće nam sledeća

LEMA. *Za rešenje* $u_\varepsilon\in C^3(I)$ *problema (1) važi*

$$(2)\qquad |u_\varepsilon^{(i)}(x)| \leq M(\varepsilon+x)^{-i},\quad i=1,2,3\ ,\ x\in I\ .$$

5.4.4 Dokaz Leme 5.4.3.

Iz 5.4.3(1) je očigledno da imamo 5.4.3(2) za i=2. Dalje ćemo koristiti Lemu 1 iz Bakhvalov (1969), v. 5.3.2(4). Sledi da za $0\leq\alpha<\beta\leq1$ važi

$$(1)\quad |u_\varepsilon'(x)| \leq M(1/(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)/(\varepsilon+\alpha)^2)\ ,\quad \alpha\leq x\leq\beta\ .$$

Kada je $0\leq x\leq 1/2$, uzmimo $\alpha=x/2\leq x$, $\beta=x+\varepsilon/2$, tako da je $x<\beta\leq1$.

Kada je $1/2\leq x\leq1$, uzmimo $\beta=x$ i $\alpha=x/2-\varepsilon/4$, tako da je $0\leq\alpha\leq1/2\leq x$. U oba slučaja dobijamo 5.4.3(2) za i=1.

Sada diferencirajmo 5.4.3(1) da dobijemo 5.4.3(2) za $i=3$.

PRIMEDBA. Primetimo da Lema 5.4.3 važi i ako $|f(x)|\leq M$, $|f'(x)|\leq M/(\varepsilon+x)$, $x\in I$.

5.4.5 Dokaz Teoreme 5.4.3.

Neka je $\eta_\varepsilon = u_\varepsilon'(0)/v_\varepsilon'(0) = -\varepsilon u_\varepsilon'(0)/r$. Tada zbog Leme 5.4.3 imamo $|\eta_\varepsilon| \leq M$. Očigledno:

(1) $$z_\varepsilon'(0) = 0 \quad \text{i} \quad |z_\varepsilon'(1)| \leq M.$$

Sada definišimo operator

$$\tilde{L}_\varepsilon w := -(\varepsilon+x)^2 w'' - 2(\varepsilon+x)w' + c(x)w \ , \quad w\in C^2(I) \ .$$

Sledi

(2) $$\tilde{L}_\varepsilon z_\varepsilon' = \tilde{L}_\varepsilon u_\varepsilon' - \eta_\varepsilon \tilde{L}_\varepsilon v_\varepsilon' = f' - b' u_\varepsilon - \eta_\varepsilon \tilde{L}_\varepsilon v_\varepsilon' \ .$$

Kako je

$$\tilde{L}_\varepsilon v_\varepsilon' = r((r+1)(r+2) - 2(r+1) - c(x))(\varepsilon+x)^{-1}(1+x/\varepsilon)^{-r}$$

i

$$(r+1)(r+2) - 2(r+1) = r(r+1) = c(0) \ ,$$

imamo $|\tilde{L}_\varepsilon v_\varepsilon'(x)| \leq M$, $x\in I$. Zaista :

$$|(c(0)-c(x))(\varepsilon+x)^{-1}| \leq Mx/(\varepsilon+x) \leq M.$$

Dalje je

$$|(\tilde{L}_\varepsilon v_\varepsilon'(x))'| \leq M/(\varepsilon+x), \quad x\in I \ .$$

Sada zbog Leme 5.4.3 i Primedbe 5.4.4 iz (2) i (1) imamo

$$|(z_\varepsilon'(x))^{(i)}| \leq M(\varepsilon+x)^{-i}, \ i=0,1,2 \ , \ x\in I \ ,$$

i dokaz je završen.

6. Mreže Bakhvalovljevog tipa

6.1 Konstrukcija mreža

6.1.1 Bakhvalov je 1969-te godine koristio jedan eksplicitni metod za konstrukciju mreža pri rešavanju s.p. problema 5.3.1(1) u linearnom slučaju. Uzevši u obzir ocene izvoda tačnog rešenja, Bakhvalov je došao do odgovarajuće funkcije $\lambda=\lambda_\varepsilon : I \to I$ koja generiše mrežu (v. Definiciju 2.1.6). Ova funkcija sastoji se iz tri dela : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Funkcije λ_1 i λ_2 generišu mrežu u graničnim slojevima u okolini tačaka $x=0$ i $x=1$ respektivno. Korišćena je simetrija $\lambda_3=1-\lambda_1(1-t)$. Funkcija λ_2 generiše mrežu van graničnih slojeva. Ona se uzima kao tangenta na λ_1 i λ_3, i $\lambda_2(1/2)=1/2$.

Forma funkcije λ_1 u suštini se dobija inverzijom funkcije graničnog sloja $\exp(-mx/\mu)$, mada je sam Bakhvalov dao drugo objašnjenje koje nastaje iz analize greške konzistencije. Dakle, λ_1 je odgovarajuća logaritamska funkcija i može se koristiti kod svih problema sa slojem eksponencijalnog tipa. Prirodno, ako rešenje ima samo jedan granični sloj, recimo kod $x=0$, tada se λ sastoji samo od λ_1 i glatkog dela λ_2 .

Kasnije je napravljeno više modifikacija i uopštenja Bakhvalovljeve funkcije za generisanje mreže. Ona su primenjena na različite tipove s.p. problema, i u transformacionom i u netransformacionom pristupu, (kod transformacionih metoda $x=\lambda(t)$ je neprekidna smena nezavisne promenljive, v. 2.2.3.).

U radu Herceg et al. (1981) linearni problem 5.1.2 je posmatran, a mreža Bakhvalova je modifikovana da bi se povećala njena gustina u graničnim slojevima. Shishkin (1983) i Boglaev (1984) koriste funkciju za generisanje mreže sličnu Bakhvalovljevoj, pri rešavanju istog problema pomoću jednog metoda trećeg reda, odnosno metoda konačnih elemenata. U Liseikin et al. (1981,1984) modifikovana je funkcija za generisanje mreže na taj način što je λ_1 produženo polinomom drugog, odnosno trećeg reda (v. 6.1.2). Taj metod je primenjen na probleme 5.1.3, 5.1.4, 5.4.1(1). Isto važi za problem 5.1.5 u Liseikin (1982,1984).

U radovima Vulanović (1983 a,b) je pokazano da λ_1 ne mora biti logaritamska funkcija. Klasa pogodnih funkcija za generisanje mreža je data i ona uključuje funkcije jednostavnije racionalne forme (v. 6.1.2). Sem na problem 5.1.2, ove racionalne funkcije su primenjene i na probleme 5.1.5, Vulanović (1984); 5.1.4, Vulanović (1986); 5.1.5, Vulanović (u pripremi). U Vulanović et al. (1986) ne koristi se glatki deo λ_2 ali se takva funkcija za generisanje mreže može primeniti samo na problem 5.1.2.

6.1.2 Sada ćemo dati tri oblika funkcije za generisanje mreže, koji se mogu primeniti u netransformacionim metodima za rešavanje problema 5.1.4.

Originalni Bakhvalovljev oblik dat je sa :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \psi(t) := -A\varepsilon \ln(1-t/q) & , t\in[0,\tau] \\ \psi(\tau) + \psi'(\tau)(t-\tau) & , t\in[\tau,1] \end{cases},$$

(sada $\psi(t)$ stoji umesto $\lambda_1(t)$, v. 6.1.1). Ovde je $A\beta\geq 2$, $q\in(0,1)$ i $A\varepsilon_0<q$. Tada postoji jedinstvena tačka $\tau\in(0,q)$

koja je apscisa dodirne tačke tangente iz (1,1) na krivu $\psi(t)$. Da bi se našlo τ treba rešiti nelinearnu jednačinu :

$$(1) \qquad \psi(\tau) + \psi'(\tau)(1-\tau) = 1 ,$$

što se ne može tačno uraditi. Predloženi su iterativni postupci za to, v. Bakhvalov (1969), Herceg et al. (1981).

Funkcija za generisanje mreže :

$$(2) \qquad \lambda(t) = \begin{cases} \psi(t) := A\varepsilon t/(q-t) & , t \in [0,\tau] \\ \psi(\tau) + \psi'(\tau)(t-\tau) & , t \in [\tau,1] \end{cases}$$

uvedena je u Vulanović (1983 a,b), upor. 1.2.3(9). Ovde je $q \in (0,1)$, $A \in (0,q/\varepsilon_0)$,a τ ima isto značenje kao gore. Sada se jednačina (1) svodi na kvadratnu i τ se može tačno odrediti, upor. 1.2.3(9). Funkcija $\psi(t)$ nastaje kao inverzna za funkciju stepenog sloja (v. 5.4.2) $(1+x/\varepsilon)^{-1}$. Primetimo da je $\exp(-x/\varepsilon) \approx (1+x/\varepsilon)^{-1}$ po Padéovoj aproksimaciji !

Sada ćemo dati fukciju za generisanje mreže iz rada Liseikin et al. (1984) :

$$(3) \qquad \lambda(t) = \begin{cases} (3\varepsilon_1/\beta)\ln(1-pt) & , t \in [0,1/2] \\ (-3\varepsilon_1/(2\beta))\ln\varepsilon + (3p\varepsilon_1/(\beta\mu))(t-1/2) + \\ + 4(1+(3\varepsilon_1/(2\beta))\ln\varepsilon - 3p\varepsilon_1/(\beta\mu))(t-1/2)^2, \\ \qquad t \in [1/2,1] \end{cases}$$

$$p=2(1-\mu) , \ \varepsilon_1=\beta\varepsilon/(\beta+3\mu) , \ \varepsilon_0 \le 1/e .$$

Polinom u drugom delu fukcije λ uzet je tako da $\lambda \in C^1(I)$ i $\lambda(1)=1$. Ovde ne moramo da odredjujemo dodirnu tačku τ jer je ona unapred data, $\tau = 1/2$. Primetimo da ova funkcija za generisanje mreže ne sadrži ni jedan slobodan parametar kojim bi se mogla menjati gustina mreže u slojevima.

U sledećim razmatranjima koristiće se samo funkcija (2) i njene varijante. Uporedjenje numeričkih rezultata dobijenih pomoću (2) i originalne Bakhvalovljeve funkcije dato je u Vulanović (1983 a,b) (rezultati su veoma slični). Neka poredjenja funkcija kojim se generiše mreža iz (2) i (3) biće data kasnije. Primetimo da λ iz (2) ne pripada prostoru $C^2(I)$ što je važno u smislu Leme 2.1.7. Ipak, korišćenjem ove funkcije za konstrukciju mreže možemo dokazati konvergenciju drugog reda uniformnu po ε, u slučaju šema iz 4. koje imaju drugi red konzistencije na lsek. mrežama, upor. 1.2.3.

6.2 Netransformacioni metodi

6.2.1 U ovom Odeljku formiraćemo diskretizacije s.p. problema iz Poglavlja 5. Koristićemo konačno-diferencne šeme na nek. mrežama iz 4. Sve diskretizacije biće stabilne uniformno po ε, v. 4.2. Prema tome, da bi se dokazala konvergencija uniformna po ε, dovoljno je dokazati konzistenciju uniformnu po ε. Ovi dokazi u suštini koriste tehniku iz Bakhvalov (1969), upor. 1.2, i neki od njih biće izostavljeni.

TEOREMA. *Neka je* u_ε *rešenje s.p. problema* 5.1.4 *sa* $b \in C^2(I)$, $c \in C^2(I\times\mathbb{R})$ *neka je* w_h *rešenje diskretnog problema*

$$A_1 w_0 - D'_+ w_0 = U_0 ,$$

$$-\varepsilon D''_C w_i - b(x_i) D'_+ w_i + c(x_i, w_i) = 0 , \quad i=1(1)n-1 ,$$

$$A_2 w_n + A_3 D'_- w_n = U_1 ,$$

na mreži 6.1.2(2) *sa* $n>3/q$.

Tada važi

$$\| u_{\varepsilon,h} - w_h \| \leq Mh .$$

Za dokaz v. Vulanović (1986) i 6.2.2 gde će se dokazati kvadratna konvergencija uniformna po ε.

Numeričko rešavanje problema 5.1.2 v. u Vulanović (1983 b), 1.2, i 6.2.4 gde će se posmatrati sistem 5.3.1(1).

6.2.2 Sada ćemo posmatrati probleme 5.1.3 i 5.1.4(1) u linearnom slučaju :

$$(1)\qquad \begin{aligned} L_\varepsilon u &:= -\varepsilon u'' - b(x)u' + c(x)u = f(x) \;, \; x \in I \;, \\ B_\varepsilon u &= (U_0, U_1) \;, \end{aligned}$$

gde je operator graničnih vrednosti dat sa

$$(2)\qquad B_\varepsilon u = B_\varepsilon^1 u := (-\varepsilon u'(0), u(1))$$

ili

$$(3)\qquad B_\varepsilon u = Bu := (u(0), u(1)) \;.$$

Osnovne pretpostavke su :

$$b, c, f \in C^3(I) \;;\; b(x) > \beta > 0 \;,\; c(x) \geq 0 \;,\; x \in I \;.$$

Prema Teoremi 5.2.4 rešenje $u_\varepsilon \in C^5(I)$ problema (1) ima oblik :

$$u_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x) + z_\varepsilon(x) \;,\; v_\varepsilon(x) = p_\varepsilon \exp(-b(0)x/\varepsilon) \;.$$

Prvo ćemo posmatrati problem (1),(2) u kom slučaju je funkcija $v_\varepsilon(x)$ poznata. Naći ćemo $z_\varepsilon(x)$ numerički i na taj način odrediti numeričku aproksimaciju za $u_{\varepsilon,h}$. Funkcija $z_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$ je rešenje problema

$$(4)\qquad L_\varepsilon z_\varepsilon = g(x) \;,\; B_\varepsilon^1 z_\varepsilon = (0, d) \;,$$

gde su $g(x)$ i d dati na odgovarajući način.

Diskretizacija problema (4) formira se na mreži generisanoj sa $\lambda(t)$ iz 6.1.2(2). Osnovne osobine funkcije $\lambda(t)$ su :

$$(5a)\qquad \lambda^{(k)}(t) \geq 0 \;,\; k = 0, 1, \ldots \;,\; t \in I \;,$$

$$(5b)\qquad \lambda^{(k)}(t) \leq M \;,\; k = 0, 1 \;,\; \lambda''(t) \leq M/\mu \;,$$

$$(5c)\qquad \lambda(\tau) \geq M\mu \;,$$

dato je u Vu ...

Neka pored ... 'I ,

(3) biće ... $0<q-Mh\le t$.

storu ...

njem ... tizacije problema (4) biće kori-

ve ... L^h_{CM}, v. 4.2.3(2). Ona će biti

k ... mrežna funkcija. Tada:

$$L^h_{CM1}w_0 := -D'_M w_{0+1/2} = 0 \ ,$$

$$(6) \qquad L^h_{CM1}w_i := \begin{cases} L^h_C w_i = g(x_i) & ,\text{ako } \rho_i := (b(x_i)h_{i+1})/(2\varepsilon)\le 1 \\ L^h_{M1}w_{i+1/2} = g(x_{i+1/2}) & ,\text{ako } \rho_i > 1 \end{cases}$$

$$i=1(1)n-2 \ ,$$

$$L^h_{CM1}w_{n-1} := L^h_U w_{n-1} = g(x_{n-1}) \ ,$$

$$L^h_{CM1}w_n := w_n = d \ ,$$

predstavlja diskretizaciju problema (4).Ovde je

$$L^h_{M1}w_{i+1/2} := -\varepsilon D''_{M1}w_{i+1/2} - b(x_{i+1/2})D'_M w_{i+1/2} + \\ + c(x_{i+1/2})D^0_M w_{i+1/2} \ ,$$

gde je D''_{M1} dato preko 4.1.2(1-2) sa

$$\delta_i = (2h_i+h_{i+1})/(h_{i+2}(h_{i+1}+h_{i+2})(h_i+h_{i+1}+h_{i+2})),$$

tako da je

$$(7) \qquad |r''_{M1}u_{i+1/2}| \le M(H^3_{i,i+2}/\underline{h}_{i,i+2})U^{iv}_{i-1,i+2} \ ,$$

za neko $u \in C^4(I)$, (v. oznake u 4.1). Dakle, L^h_{M1} je modifikacija od L^h_{M+} koja je ovde pogodnija zbog nekih tehničkih detalja u dokazu sledeće Teoreme.

TEOREMA 1. *Neka je* z_ε *rešenje problema* (4) *i neka je* w_h *rešenje diskretnog problema* (6) *na mreži generisanoj preko* $\lambda(t)$ *sa* $n\ge n_1$, *gde je* $n_1\in\mathbb{N}$ *dovoljno velik broj* *nezavisan od* ε.

Tada imamo

$$\| z_{\varepsilon,h} - w_h \| \leq Mh^2 \quad .$$

DOKAZ. Ako $b'(x) \geq -\beta_1$, $c(x) \leq G$, $x \in I$, $\beta_1 \geq 0$,uzećemo $n \geq \psi'(\tau)(\beta_1+G)/\beta$, što je dovoljan uslov za implikaciju :

$$\rho_i > 1 \Rightarrow -\varepsilon\gamma_i - b(x_{i+1/2})/h_{i+1} + c(x_{i+1/2})/2 \leq 0 \ ,$$

(γ_i je koeficijent iz D''_{M1}). Prema tome, matrica koja odgovara sistemu (6) je M-matrica i važi stabilnost uniformna po ε, upor. 4.2.3, 4.2.5. Dalje ćemo uzeti $n > 4/q$, pa je n_1 eksplicitno zadato i nezavisno od ε (primetimo da $\psi'(\tau) \leq M$).

Ostaje da se dokaže konzistencija uniformna po ε. Može se dokazati

$$|r_C z_\varepsilon(x_i)| \leq Mh^2 \ , \ |r_{M1} z_\varepsilon(x_{i+1/2})| \leq Mh^2 \ , \ i=1(1)n-2,$$

$$|r_U z_\varepsilon(x_{n-1})| \leq Mh \ , \ |r'_M z_\varepsilon(x_{0+1/2})| \leq Mh^2 \quad .$$

Dokazaćemo samo drugu nejednakost, pošto se ostale dokazuju analogno. Tada konvergencija drugog reda sledi na isti način kao u Teoremi 4.2.6.

Neka je $i=1(1)n-2$ i $t_i = ih$, $h=1/n$. Neka

$$y(x) = \exp(-\beta x/\varepsilon) \ .$$

Zbog (7) i grešaka konzistencije r'_M , r^0_M (v. 4.1.3 i 4.1.4), koristeći (5a) dolazimo do

$$(8) \qquad | r_{M1} z_\varepsilon(x_{i+1/2}) | \leq Mh^2(\varepsilon(\lambda'(t_{i+2})^3/\lambda'(t_{i-1}))Y_i^{iv} + \lambda'(t_{i+1})^2(Y_i''' + Y_i'')) \ ,$$

$$Y_i^{(k)} = 1 + \varepsilon^{1-k} y(x_{i-1}) \ , \ k=2,3,4.$$

U prva dva koraka dokaza koristićemo (8). Zbog (5a, b,d) dovoljno je dokazati :

(9) $$(\lambda'(t_{i+2})/\varepsilon)^k y(x_{i-1}) \le M \ , \ k=2,3 \ .$$

1° Neka je $t_{i-1} \ge \tau$. Tada (9) sledi zbog (5b,c).

2° Neka je $t_{i-1} < \tau$ i $t_{i-1} \le q-4h$. Sada imamo

$$q-t_{i+2} \ge (q-t_{i-1})/4 \quad \text{i} \quad t_{i+2}<q \ .$$

Koristeći ovo i $\lambda'(t_{i+2}) \le \psi'(t_{i+2})$ dobijamo (9) ponovo.

3° Na kraju imamo $0<q-4h<t_{i-1}<\tau$. Sada sledi da je $\varepsilon \le Mh^2$.

Druge ocene za r_{M1} biće korišćene :

$$|r_{M1}z_\varepsilon(x_{i+1/2})| \le M(\varepsilon Y_i'' + (1/h_{i+1})J_3(x_i,x_{i+1};x_{i+1/2})+$$
$$+ J_2(x_i,x_{i+1/2};x_i) + J_3(x_{i+1/2},x_{i+1};x_{i+1})),$$

gde je

$$J_k(\sigma,\eta;\theta) := |\int_\sigma^\eta (s-\theta)^{k-1} z_\varepsilon^{(k)}(s)ds| \ .$$

Za integralne članove upor. Kellogg et al. (1978).

Iz (5e) sada sledi

$$\varepsilon Y_i'' \le Mh^2 \ .$$

Dokažimo

(10) $$S := (1/h_{i+1})J_3(x_i,x_{i+1};x_{i+1/2}) \le Mh^2 \ .$$

Imamo

$$S \le M(h^2 + (1/(h_{i+1}\varepsilon^2))\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi(s)ds \quad ,$$

gde je $\phi(s) = (s-x_{i+1/2})^2 y(s)$. Zbog

$$\phi(s) \le \phi(2\varepsilon/\beta + x_{i+1/2})$$

i (5e) dobijamo (10).

Drugi integralni članovi mogu se tretirati analogno. Teorema je dokazana. (Upor. tehniku sa 1.2.3.)

Sada ćemo posmatrati problem (1),(3). Njegovo numeričko rešenje nalazimo u formi odgovarajuće linearne kombinacije numeričkih aproksimacija za $u_\varepsilon^j(x)$, gde su $u_\varepsilon^j(x)$, $j=1,2$, rešenja problema

$$L_\varepsilon u = f(x) \ , \ x\in I \ , \ B_\varepsilon^1 u = (U_0^j, U_1) \ , \ j=1,2 \ , \ U_0^1 \neq U_0^2,$$

respektivno.

Neka su W_h^j odgovarajuće numeričke aproksimacije za $u_{\varepsilon,h}^j$, $j=1,2$, koje su dobijene gore opisanim metodom. (Primetimo da se dva rezultujuća linearna sistema razlikuju samo u desnim stranama.)

LEMMA. *Neka je*

(11) $$U_0^1 - U_0^2 = m_1 > 0 \ .$$

Tada postoji pozitivna konstanta M_1 *takva da*

$$u_\varepsilon^2(0) - u_\varepsilon^1(0) \geq M_1 \ .$$

Dokaz. Neka je $V(x)=u_\varepsilon^2(x)-u_\varepsilon^1(x)$. Imamo $L_\varepsilon V = 0$, $B_\varepsilon^1 V=(m_1,0)$. Neka je

$$s(x) = P + Q\exp(-Rx/\varepsilon)$$

gde je $R = (B+(B^2+4G\varepsilon)^{1/2})/2$, $(b(x)\leq B \ , \ c(x)\leq G \ , \ x\in I)$, $Q=m_1/R$, $P=-Q\exp(-R/\varepsilon)$. Lako je proveriti da

$$L_\varepsilon s \leq 0 = L_\varepsilon V \ , \ B_\varepsilon^1 s = B_\varepsilon^1 V$$

i zbog inverzne monotonije $(L_\varepsilon, B_\varepsilon^1)$, (v. Doolan et al. (1980), Zadorin (1984)) imamo $V(x) \geq s(x)$, $x\in I$, i posebno $V(0)\geq s(0)\geq M_1>0$. Lema je dokazana.

Neka je $u_\varepsilon(x)$ rešenje problema (1),(3) i

$$(12) \quad W_i = ((W_0^2-U_0)W_i^1 + (U_0-W_0^1)W_i^2)/(W_0^2-W_0^1), \quad i=0(1)n.$$

TEOREMA 2. *Neka važi (11). Tada postoji* $n_2 \in \mathbb{N}$, *nezavisno od* ε, *takvo da za sve* $n \geq n_2$ *važi :*

$$\| u_{\varepsilon,h} - w_h \| \leq Mh^2 .$$

DOKAZ. Iz Leme sledi da se $u_\varepsilon(x)$ može zapisati u obliku :

$$(13) \quad u_\varepsilon(x) = ((u_\varepsilon^2(0)-U_0)u_\varepsilon^1(x)+(U_0-u_\varepsilon^1(0))u_\varepsilon^2(x))/(u_\varepsilon^2(0)-u_\varepsilon^1(0)).$$

Uzmimo $n_2 \geq n_1$ (n_1 iz Teoreme 1) takvo da je

$$W_0^2 - W_0^1 \geq M_2 > 0.$$

Takvo n_2 postoji zbog Leme i Teoreme 1. (U stvari, n_2 se može naći eksplicitno, ali ćemo to izostaviti.) Sada je moguće definisati W_h kao u (12) i dokaz sledi iz (12),(13) i Teoreme 1.

Ovde smo posmatrali samo linearne slučajeve problema 5.1.3 i 5.1.4(1) jer se nelinearni problemi numerički rešavaju pomoću LD. metoda, v. 4.3. Ipak, moguće je formirati diskretizacije nelinearnih problema, koje su analogne šemi L^h_{CM1}, i zatim primeniti neki DL. metod. Isto važi za problem 5.1.5 u sledećem Pododeljku.

6.2.3 Zapišimo problem 5.1.5 u linearnom slučaju, u sledećem obliku

$$(1) \quad \begin{aligned} L_\varepsilon u &:= -\varepsilon u''-a(x)(xu)'+(a(x)+c(x))u = f(x), \quad x \in I , \\ u(0) &= U_0, \quad u(1) = U_1, \end{aligned}$$

gde je $a(x) \geq \alpha > 0$, $c(x) > \gamma > 0$, $x \in I$ i $a \in C^2(I)$, $c, f \in C^3(I)$, upor. Teoremu 2,5.2.6. Neka je $p=\min(1,\gamma/a(0))$.

Modifikovaćemo funkciju za generisanje mreže 6.1.2 (2) analogno radu Liseikin (1984) :

$$\lambda(t) = \lambda_1(t)^{2/p}, \quad t \in I,$$

(2)

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} \psi(t):=A\mu^{p/2}t/(q-t), & t \in [0,\tau], \\ \pi(t):=\psi'(\tau)(t-\tau)+\psi(\tau), & t \in [\tau,1] \end{cases}$$

gde je $q\in(0,1)$, $A>0$, $A\mu_0^{p/2}<q$ i $\tau\in(0,q)$ ($(\tau,\psi(\tau))$, je tačka dodira tangente iz tačke $(1,1)$ na krivu $\psi(t)$), $\tau=q-M\mu^{p/4}$. Funkcija $\lambda(t)$ ima sledeće osobine :

(3a) $\lambda^{(k)}(t) \geq 0, \quad k=1,2,3, \quad t \in I,$

(3b) $\lambda'(t) \leq M\lambda(t)^{1-p/2}, \quad t \in I,$

(3c) $\lambda''(t) \leq M\lambda(t)^{1-p}, \quad \tau < t < 1.$

Takodje ćemo modifikovati šemu L^h_{CM1} iz tehničkih razloga. Tu šemu ćemo označiti sa L^h_{CM2}, (upor. Vulanović (u pripremi)) :

$$w_0 = U_0,$$

$$(4)\quad L^h_{CM2}w_i := \begin{cases} L^h_{C1}w_i=f(x_i) \text{ ako } \rho_i:=h_ix_{i-1}a_i/(2\varepsilon) \leq 1, \\ L^h_{M2}w_{i+1/2}=f(x_{i+1/2}) \text{ ako } \rho_i > 1 \\ i = 1(1)n-2, \end{cases}$$

$$L^h_{CM2}w_{n-1} := L^h_U w_{n-1} = f(x_{n-1}),$$

$$w_n = U_1.$$

Ovde je w_h mrežna funkcija i

$$L^h_{C1}w_i := -\varepsilon D''_C w_i - a(x_i)D'_{C1}(x_iw_i)+(a+c)(x_i)w_i ,$$

$$D'_{C1}w_i := (w_{i+1}-w_{i-1})/(h_i+h_{i+1}) ;$$

$$L^h_{M2}w_{i+1/2} := -\varepsilon D''_{M1}w_i - a(x_{i+1/2})D'_M(x_{i+1/2}w_{i+1/2}) + (a+c)(x_{i+1/2})D^0_{M1}w_{i+1/2} ,$$

$$D^0_{M1}w_{i+1/2} := (3w_i-w_{i-1})/2.$$

TEOREMA. *Neka je* u_ε *rešenje problema (1) i neka je* w_h *rešenje diskretnog problema (4) sa* $n \geq n_1$ *, gde je* $n_1 \in \mathbb{N}$ *dovoljno veliko i nezavisno od* ε.

Tada važi

$$\| u_{\varepsilon,h} - w_h \| \leq Mh^2 .$$

DOKAZ. Uzećemo $n > 6/\tau$ i $n \geq 2\lambda'(1)\alpha_1/\alpha$, gde je $a'(x) \geq -\alpha_1$, $x \in I$, $\alpha_1 \geq 0$. Tako je n_1 eksplicitno poznato i nezavisno od ε. Iz druge nejednakosti za n sledi

$$-\varepsilon\gamma_i - a(x_{i+1/2})x_{i+1}/h_{i+1} < 0 \quad \text{kada} \quad \rho_i > 1 ,$$

(γ_i je koeficijent iz šeme D''_{M1}), i matrica koja odgovara sistemu (4) je M-matrica, pa imamo stabilnost uniformnu po ε, upor. 4.2.3, 4.2.5.

Sada treba da dokažemo konzistenciju uniformnu po ε. Može se dokazati :

$$|r_{C1}u_\varepsilon(x_i)| \leq Mh^2 , \quad i=1(1)n-2,$$
$$|r_{M2}u_\varepsilon(x_{i+1/2})| \leq Mh^2, \quad i=2(1)n-2 ,$$

(primetimo da se u tački x_1 primenjuje L^h_{C1}),

$$|r_U u_\varepsilon(x_{n-1})| \leq Mh .$$

Dokazaćemo samo drugu nejednakost, pošto se ostale mogu dokazati analogno. Tada uniformna konvergencija drugog reda sledi na isti način kao u Teoremi 4.2.6.

Neka je $i=2(1)n-2$ i $t_i = ih$, $h=1/n$. Treba dokazati

$$\text{(5a)} \qquad R'' := \varepsilon|r''_{M1}u_\varepsilon(x_{i+1/2})| \leq Mh^2 ,$$
$$\text{(5b)} \qquad R' := |r'_M x_{i+1/2}u_\varepsilon(x_{i+1/2})| \leq Mh^2 ,$$
$$\text{(5c)} \qquad R^0 := |r^0_{M1}u_\varepsilon(x_{i+1/2})| \leq Mh^2 .$$

Koristeći (3a) dobijamo :

(6a) $R'' \leq Mh^2\mu^2(\lambda'(t_{i+2})^3/\lambda'(t_{i-1}))U^{IV}_{i-1,i+2}$,

(6b) $R' \leq Mh^2\lambda'(t_{i+1})^2 \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |(xu_\varepsilon(x))''''|$,

(6c) $R^0 \leq M((h_{i+1}-h_i)U'_{i-1,i+1}+h^2\lambda'(t_{i+1})^2U''_{i-1,i+1})$,

sa oznakama iz 4.1.1 sa $u(x)=u_\varepsilon(x)$. Druge forme koje ćemo koristiti su :

(7a) $R'' \leq M\mu^2U''_{i-1,i+2}$,

(7b) $R' \leq M(1/h_{i+1})|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(s-x_{i+1/2})(su_\varepsilon(s))''ds|$,

(7c) $R^0 \leq M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|u'_\varepsilon(s)|ds$.

Neka je $j\in \mathbb{N}$ dato sa $t_{j-1}<\tau/2\leq t_j$. Kako je $n>6/\tau$ imamo $j\geq 4$ i $t_{j+2}<\tau/2+3h<\tau$. Tada je

$$x_{j+2} = \psi(t_{j+2})^{2/p} \leq m_0\mu .$$

Dokaz će biti dat po sledećim koracima :

1^0 $i = 2(1)j$

2^0 $i = j+1(1)n-2$

2^01 $t_{i-1} \geq \tau+h$

2^02 $\tau+h > t_{i-1} \geq \tau$

$2^02a)$ $h \leq \mu^{p/4}$

$2^02b)$ $h \geq \mu^{p/4}$

2^03 $t_{i-1}<\tau$, $t_{i-1} \leq q-4h$

2^04 $q-4h < t_{i-1} < \tau$.

Koristićemo ocene iz Teoreme 2, 5.2.6. Pošto se sa eksponencijalnim članovima može postupati isto kao u Teoremi 1,6.2.2, ovde ćemo posmatrati samo neeksponencijalne članove.

Prvo će nam trebati

LEMA. *U slučajevima* 1^0, 2^01, $2^02a)$ *i* 2^03 *važi*

(8) $\lambda^{(k)}(t_{i+2})/\lambda^{(k)}(t_{i-1}) \leq M$, $k=0,1$.

DOKAZ. Dokažimo (8) za $k=0$. U slučaju 2^01 treba dokazati

$$Q := \pi(t_{i+2})/\pi(t_{i-1}) < M.$$

Neka je $s=t_{i-1}-\tau > h$. Važi $Q \leq Mg(s)$ sa

$$g(s) = (s+2h+\mu^{p/4})/(s+\mu^{p/4}) .$$

Iz $g'(s)<0$, sledi

$$g(s) < g(h) < M$$

i ovaj deo dokaza je završen.

U slučaju $2^02a)$ imamo

$$Q < M(h+\mu^{p/4})/\mu^{p/4} < M$$

i (8) ponovo važi.

U slučaju 2^03 treba dokazati

(9) $\psi(t_{i+2})/\psi(t_{i-1}) < M$

jer je $t_{i+2}<q$ i $\lambda_1(t_{i+2})<\psi(t_{i+2})$. Dalje u ovom slučaju imamo

$$q-t_{i+2} > (q-t_{i-1})/4$$

i (9) odmah sledi.

U slučaju 1^0 takodje treba dokazati (9). Sada je

$$(q-t_{i-1})/(q-t_{i+1}) < 1 + 3h/(\tau/2-3h) < M$$

pa (9) ponovo dobijamo.

Nejednakost (8) za $k=1$ možemo dokazati na isti način jer važi

$$\lambda'(t) = (p/2)\lambda_1(t)^{p/2-1}\lambda_1'(t) .$$

Lema je dokazana.

Sada ćemo nastaviti sa dokazivanjem (5).

1^0 Koristićemo Lemu za k=1, ocene 5.2.6 (1a,2a) i činjenice da važi

$$\lambda'(t_{i+2}) \le M\mu ,$$
$$h_{i+1}-h_i \le Mh^2\lambda''(t_{i+1}) \le Mh^2\mu$$

da dobijemo (5) iz (6).

2^0 Posmatrajući neeksponencijalne članove u 5.2.6 (1b,2b) zaključujemo da je pri korišćenju (6) dovoljno dokazati

$$P'' := (\lambda'(t_{i+2})^3/\lambda'(t_{i-1}))\lambda(t_{i-1})^{p/2} \le M,$$
$$P' := (\lambda'(t_{i+1})^2\lambda(t_{i-1})^{p-2} \le M,$$
$$P^0 := (h_{i+1}-h_i)\lambda(t_{i-1})^{p-1} \le Mh^2 , \tag{10}$$

($P^{(k)}$ su izvedeni iz ocena (6) za $R^{(k)}$, k=0,1,2). U slučajevima $2^0 1$, $2^0 2$ a) i $2^0 3$ dobijamo

$$P^{(k)} \le M, \ k=1,2,$$

zbog Leme i (3b). U slučajevima $2^0 1$ i $2^0 2$ a) imamo

$$h_{i+1}-h_i \le h^2\lambda''(t_{i+1}) \tag{11}$$

i zbog (3c) i Leme dobijamo (10). Dokažimo sada (10) u slučaju $2^0 3$. Ako je $t_i \le \tau$, tada zbog $\pi(t_{i+1}) \le \psi(t_{i+1})$ (11) ponovo važi sa $\lambda=\psi^{2/p}$. Iz

$$q-t_{i+1} \ge (q-t_{i-1})/4 \tag{12}$$

sledi

$$P^0 \le Mh^2\mu^p/(q-t_{i-1})^4$$

ali kako je

$$q-t_{i-1} > q-\tau = M\mu^{p/4}$$

dobijamo (10). Ako $t_i > \tau > t_{i-1}$ koristimo, upor. 1.2.3,

$$\begin{aligned} h_{i+1}-h_i &= \pi(t_{i+1})^{2/p}-2\pi(t_i)^{2/p}+\psi(t_{i-1})^{2/p} \le \\ &\le \psi(t_{i+1})^{2/p}-2\psi(t_i)^{2/p}+\psi(t_{i-1})^{2/p}+2(\psi(t_i)^{2/p}-\pi(t_i))^{2/p} \le \\ &\le h^2(\psi^{2/p})''(t_{i+1})+(4/p)\psi(t_i)^{2/p-1}(\psi(t_i)-\pi(t_i)) \le \\ &\le Mh^2((\psi^{2/p})''(t_{i+1})+\psi(t_i)^{2/p-1}\psi''(t_i)). \end{aligned}$$

Sada iz (12) sledi

$$P^0 \leq Mh^2\mu^p/(q-t_{i-1})^4 \leq Mh^2$$

Ostaje da se dokaže (5) u slučajevima $2^0 2$ b) i $2^0 4$. Sada ćemo koristiti ocene (7). Ponovo posmatramo samo neeksponencijalne članove iz 5.2.6 (1b,2b). Dovoljno je dokazati:

$$S'' := \mu^2\lambda(t_{i-1})^{p/2} \leq Mh^2 ,$$

$$S' := \int_{x_i}^{x_{i+1}} s^{p-1}ds \leq Mh^2 ,$$

$$S^0 := \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} s^{p-1}ds \leq Mh^2 ,$$

($S^{(k)}$ je izvedeno iz ocene (7) za $R^{(k)}$, k=0,1,2).

$2^0 2$ b) Dokaz za S^0 i S' sledi odmah jer važi

$$S^{(k)} \leq x_{i+1}^p = \pi(t_{i+1})^2 \leq M(h+\mu^{p/4})^2 \leq Mh^2, \; k=0,1 .$$

Za S'' imamo

$$S'' \leq M\mu^2\pi(\tau+h)^{(2/p)(p-2)} \leq M\mu^{1+p/2} \leq Mh^2 .$$

$2^0 4$ Sada zbog $q-4h<t_{i-1}<\tau = q-M\mu^{p/4}$ imamo $\mu^{p/4} \leq Mh$. Kako je

$$S'' \leq \mu^2(\psi(\tau))^{(2/p)(p-2)} \leq M\mu^p \leq Mh^2$$

$$S^{(k)} \leq x_{i+1}^p \leq M(\psi(\tau)+h)^2 \leq Mh^2, \; k=0,1 ,$$

Teorema je dokazana.

Problem 5.1.5(1) se može tretirati analogno. Treba proširiti $\lambda(t)$ na $[-1,0]$ korišćenjem centralne simetrije u odnosu na t=0, upor. Liseikin (1984).

6.2.4 Sada ćemo posmatrati diskretizaciju s.p. sistema 5.3.1(1) :

$$w_0 = U_0 ,$$

(1) $$T_C^h w_i := -\varepsilon D''_C w_i + c(x_i,w_i) = 0, \; i=1(1)n-1,$$

$$w_n = U_1 .$$

Važi $w_i = [w_{i,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{i,s}]^T \in \mathbb{R}^s$ i sve mrežne funkcije koje će se kasnije koristiti u ovom Pododeljku biće s-vektori. Pretpostavljamo da važi (2),(3) i (4) iz 5.3.1.

Posmatrajući linearan slučaj sistema 5.3.1(1), Bakhvalov je u stvari dao jedan LD. metod za rešavanje nelinearnog slučaja. Ovde nas neće interesovati detalji o numeričkom rešavanju nelinearnog diskretnog problema (1), već samo konvergencija uniformna po ε. Pomenimo da se (1) može rešavati Newtonovim metodom.

TEOREMA. *Neka je* u_ε *rešenje problema 5.3.1(1) i neka je* w_h *rešenje sistema (1) na mreži diskretizacije datoj u 1.2.3 sa* $n > 3/q$. *Tada važi*

$$\| u_{\varepsilon,h} - w_h \| \leq Mh^2.$$

DOKAZ. Neka je za $i=1(1)n-1$

$$r_i := r_C u_\varepsilon(x_i) = T_C^h u_\varepsilon(x_i) - (T_\varepsilon u_\varepsilon)(x_i) =$$
$$= T_C^h u_\varepsilon(x_i) - T_C^h w_i = L^h(u_\varepsilon(x_i) - w_i) ,$$

gde je

$$L^h v_i := -\varepsilon D''_C v_i + g(x_i) v_i ,$$
$$g(x_i) = \int_0^1 c_u(x_i, w_i + s(u_\varepsilon(x_i) - w_i))ds ,$$

za svaku mrežnu funkciju v_h. Neka je $y_i = u_\varepsilon(x_i) - w_i$. Množeći

$$L^h y_i = r_i$$

sa $2y_i^T\cdot$ dobijamo

$$(2) \qquad -\varepsilon D''_C Y_i + 2\gamma_1^2 Y_i \leq 2y_i^T r_i,$$

gde je $Y_i = y_i^T y_i$. Ovo je stoga što važi

$$2y_i^T D''_C y_i = D''_C Y_i - A_i(y_{i-1} - y_i)^T(y_{i-1} - y_i) -$$
$$- C_i(y_{i+1} - y_i)^T(y_{i+1} - y_i) ,$$

gde je

$$D''_C v_i = A_i(v_{i-1} - v_i) + C_i(v_{i+1} - v_i) ,$$

$A_i, C_i > 0$. Iz (2) sledi

$$-\varepsilon D_C'' Y_i + 2\gamma_1^2 Y_i \leq \gamma_1^2 Y_i + \frac{1}{\gamma_1^2} r_i^T r_i$$

i

$$\tilde{L}_h Y_i := -\varepsilon D_C'' Y_i + \gamma_1^2 Y_i \leq \frac{1}{\gamma_1^2} r_i^T r_i =: \gamma_1^2 V_i \ .$$

Pošto je $\tilde{L}_h$ inverzno monotono i

$$\tilde{L}_h V_i = \frac{1}{\gamma_1^2} r_i^T r_i \ , \ V_k \geq Y_k = 0, \quad k=0,n,$$

dobijamo

$$Y_i \leq V_i \ .$$

Dakle,

$$\| u_{\varepsilon,h} - w_h \| \leq M \| r_h \| \ .$$

Ovaj deo dokaza je analogan dokazu Bakhvalova (1969) i dokazu Teoreme 5.3.2 gde je posmatran kontinualni problem.

Sada se može dokazati

$$|r_i| \leq Mh^2 \ , \quad i=1(1)n-1 \ ,$$

na osnovu specijalne nek. mreže i koristeći ocene iz Teoreme 5.3.2. Tehnika je ista kao u 1.2.3.

6.2.5 U ovom Pododeljku ćemo posmatrati problem sa stepenim slojem 5.4.3(1) sa svim pretpostavkama iz 5.4.3. Diskretizacija problema 5.4.3(1) je data sa

$$w_0 = U_0,$$

$$(1) \qquad -(\varepsilon + x_{i-1})^2 D_C'' w_i + c(x_i) w_i = f(x_i), \ i=1(1)n-1,$$

$$w_n = U_1 \ ,$$

i ona je očigledno stabilna uniformno po ε. Primetimo pomeranje $\varepsilon + x_{i-1}$ (umesto $\varepsilon + x_i$) koje je uvedeno iz tehničkih razloga.

Mreža diskretizacije generiše se pomoću :

$$(2) \qquad \lambda(t) = \begin{cases} \psi(t) := A\varepsilon((q/(q-t))^p - 1), & t \in [0,\tau] \ , \\ \pi(t) := A_1(t-\tau) + A_2, & t \in [\tau,1] \end{cases}$$

Ovde je $\tau\in(0,1)$ dato, $q=\tau+\varepsilon^{1/(p+1)}$, $p>1/r$ (r je iz Teoreme 5.4.3), $A_2=\psi(\tau)$, $\pi(1)=1$ i $A=(pq^p(1-\tau)+\varepsilon((q/(q-\tau))^p-1))^{-1}$, tako da $\psi'(\tau)=\pi'(\tau)$. Dakle $\lambda\in C^1(I)$. Ovo je modifikovan Liseikinov pristup u konstrukciji funkcija za generisanje mreža, v. 6.1.2, u tom smislu da je τ unapred dato. Ovde nije pogodno odredjivati dodirnu tačku τ kao u 6.1.2(2) jer se nelinearna jednačina 6.1.2(1) u ovom slučaju ne može egzaktno rešiti. Ipak, produženje $\pi(t)$ nije kvadratni polinom već tangenta, što se dobija pomoću specijalnog izbora parametra A.

Osobine funkcije λ su :

(3a) $\lambda^{(k)}(t) > 0, \quad k=0,1,2, \quad t\in I$,

(3b) $\lambda'(t) < M, \quad t\in I$,

(3c) $\lambda(t) > M\varepsilon^{1/(p+1)}, \quad t>\tau$,

(3d) $\lambda(t) > M\varepsilon n$, za $t>q-Mh>0$.

TEOREMA. *Neka je* u_ε *rešenje problema 5.4.3(1) i neka je* w_h *rešenje problema (1) na mreži datoj preko (2) sa* $n>3/\tau$.

Tada imamo

$$\|u_{\varepsilon,h}-w_h\| < Mh.$$

DOKAZ. Uzećemo reprezentaciju u_ε iz Teoreme 5.4.3 da bismo dokazali

(4a) $|r_i(v_\varepsilon)| < Mh$

i

(4b) $|r_i(z_\varepsilon)| < Mh$,

gde je

$$r_i(g) = -(\varepsilon+x_{i-1})^2 D_C'' g(x_i)+(\varepsilon+x_i)^2 g''(x_i) ,$$

$i=1(1)n-1$, $g\in C^2(I)$. Prvo uzmimo

$$r_i(g) = r_i^1(g) + r_i^2(g) ,$$

$$r_i^1(g) = ((\varepsilon+x_i)^2-(\varepsilon+x_{i-1})^2)\, g''(x_i) ,$$

$$r_i^2(g) = (\varepsilon+x_{i-1})^2(g''(x_i)-D_C'' g(x_i)) .$$

Tada je zbog (3b) očigledno

$$|r_i^1(z_\varepsilon)| \le Mh_i(x_i+x_{i-1}+2\varepsilon)/(\varepsilon+x_i) \le Mh$$

S druge strane imamo

$$|r_i^2(z_\varepsilon)| \le Mh(\varepsilon+x_{i-1})^2 \max_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}} |z_\varepsilon'''(x)| \le Mh$$

i (4b) je dokazano.

Dokažimo sada (4a).

1^0 Neka je $t_{i-1} \ge \tau$. Koristeći (3a,b,c) dobijamo

$$|r_i^k(v_\varepsilon)| \le Mh(\varepsilon+x_{i-1})^{-1}(\varepsilon/(\varepsilon+x_{i-1}))^r \le$$

$$\le Mh\ \varepsilon^r x_{i-1}^{-(r+1)} \le Mh\varepsilon^{r-(r+1)/(p+1)} \le Mh\ ,$$

$k=1,2$.

2^0 Neka je $t_{i-1}<\tau$ i $t_{i-1}\le q-3h$. Tada $t_{i+1}<q$ i

$$q-t_{i+1} \ge (q-t_{i-1})\ /\ 3\ .$$

Sada za $k=1,2$ imamo :

$$|r^k{}_i(v_\varepsilon)| \le Mh\lambda'(t_{i+1})\varepsilon^r(\varepsilon+x_{i-1})^{-(r+1)} \le Mh(1/(q-t_{i+1})^{p+1}) \times$$

$$\times(\varepsilon/(\varepsilon+\lambda(t_{i-1})))^{r+1} \le Mh(q-t_{i-1})^{p(r+1)-(p+1)} \le Mh.$$

3^0 Neka je $0<q-3h<t_{i-1}<\tau$. Tada iz (3d) sledi

$$|r_i^k(v_\varepsilon)| \le M(\varepsilon/(\varepsilon+x_{i-1}))^2 \le Mh^{pr} \le Mh\ ,\ k=1,2.$$

Dakle, (4a) je dokazano, a time i Teorema.

6.3 Transformacioni metodi

6.3.1 Transformacioni eksplicitni metodi su korišćeni u radovima Liseikin et al. (1981, 1984) i Liseikin (1982). Prikazaćemo ovde neke od tih rezultata.

Počnimo posmatranjem s.p. problema 5.1.3 u linearnom slučaju, (Liseikin et al. (1981, 1984)):

$$-\varepsilon u'' - b(x)u' + c(x)u = f(x),\ x\in I,$$
$$u(0) = U_0,\ \ u(1) = U_1\ ,$$

gde je $b(x)\geq 3$, $c(x)\geq 0$, $x\in I$; $b,c,f\in C^2(I)$. Posle uvodjenja nove nezavisne promenljive $x=\lambda(t)$, $\lambda=\lambda_\varepsilon : I\to I$, $\lambda\in C^2(I)$, stižemo do transformisanog problema :

$$(1)\quad \begin{aligned} -\varepsilon u_1''(t)-b_1(t)u_1'(t)+c_1(t)u_1(t) &= f_1(t),\ t\in I,\\ u_1(0) = U_0,\quad u_1(1) &= U_1 , \end{aligned}$$

gde je
$$u_1(t) = u(x) = u(\lambda(t)) ,$$
$$b_1(t) = \lambda'(t)(b(x)-\varepsilon\lambda''(t)/\lambda'(t)^2) ,$$
$$c_1(t) = c(x)\lambda'(t)^2, \quad f_1(t) = f(x)\lambda'(t)^2$$

Funkcija $\lambda(t)$ je data sa :

$$\lambda(t) = \begin{cases} -3\varepsilon\ln(1-pt), & 0\leq t\leq 1/2 , \\ -\varepsilon\ln\varepsilon+3p\varepsilon^{2/3}(t-1/2)+(3/2)p^2\varepsilon^{1/3}(t-1/2)^2 + \\ + k(t-1/2)^3, & 1/2\leq t\leq 1 , \end{cases}$$

gde je $p=2(1-\varepsilon^{1/3})$, $k=\varepsilon(1+\varepsilon\ln\varepsilon-(3/2)p\varepsilon^{2/3}-3p^2\varepsilon^{1/3}/8)$.
Primetimo da jednostavnija funkcija λ, npr. iz 6.1.2(2), pa čak ni funkcija Liseikina 6.1.2(3) ovde ne može da se koristi zbog zahteva $\lambda\in C^2(I)$.

Problem (1) je rešavan na ekvidistantnoj t-mreži korišćenjem up-wind šeme i dokazana je linearna konvergencija uniformna po ε. U Liseikin et al. (1981) je posmatrana i šema Samarskog (v. Samarskii (1971), Kellogg et al. (1978), Vulanović (1985 b)), ali je red uniformne konvergencije ostao 1. Dalje, data je i funkcija

$$(2)\quad \lambda(t) = \begin{cases} -4\varepsilon\ln(1-2t(1-\varepsilon^{1/4})), & 0\leq t\leq 1/2 \\ \pi(t), & 1/2\leq t\leq 1 \end{cases} ,$$

($\pi(t)$ je polinom petog reda , takav da $\lambda\in C^4(I)$) koju bi trebalo koristiti sa nekom uniformno stabilnom šemom drugog reda na ek. mreži, kada je $b,c,f\in C^3(I)$, $b(x)\geq 4$, $x\in I$. Tada bi se dobio drugi red uniformne konvergencije. Ipak, nije rečeno koju bi šemu trebalo koristiti.

U radu Liseikin (1982) je posmatran s.p. problem 5.1.5 na sličan način. Rad Liseikin et al. (1984) sadrži i neke eksplicitne netransformacione metode. Posmatrani su problemi 5.1.4 i 5.1.5, pri čemu je mreža za 5.1.4 generisana sa 6.1.2 (3).

6.3.2 Pored toga, u Liseikin et al. (1984) je posmatran problem sa stepenim slojem 5.4.1(1). Teoreme 1 i 2, 5.4.1 su korišćene pri konstrukciji transformacionog eksplicitnog metoda. Funkcija $\lambda(t)$ je data sa :

1^0 $\alpha<1$ (v. 5.4.1).

$$\lambda(t) = (\varepsilon^{1-\beta}+pt)^{1/(1-\beta)} ,$$

$$p = (\varepsilon+1)^{1-\beta}-\varepsilon^{1-\beta}, \ \beta = (\alpha+2)/3 .$$

2^0 $\alpha=1$.

$$\lambda(t) = \begin{cases} \varepsilon(p^{2t}-1), & 0\leq t\leq 1/2 \\ \pi(t) , & 1/2\leq t\leq 1 \end{cases} ,$$

gde je $p=1-(1/\varepsilon)\ln^{-4}\varepsilon$,a $\pi(t)$ je pogodan polinom četvrtog reda.

3^0 $\alpha>1$.

$$\lambda(t) = \begin{cases} T\varepsilon((1-2pt)^{m/(1-\alpha)}-1), & 0\leq t\leq 1/2 \\ \pi(t) , & 1/2\leq t\leq 1 \end{cases} ,$$

gde je $p=1-\varepsilon^{3\ell/m}$, $\ell=(\alpha-1)/(\alpha+2)$, $6<m<9$,

$$T = (\alpha-1)^2/((\alpha-1)^2+(\alpha-1+m)^2\varepsilon^{\ell(m-\ell)/m}) ,$$

a $\pi(t)$ je pogodan polinom trećeg reda.

U sva tri slučaja korišćena je up-wind šema. U slučajevima 1^0 i 3^0 je dobijena linearna konvergencija uniformna po ε, a u slučaju (2) red konvergencije je $h\ln^2(1/\varepsilon)$.

6.4 Numerički rezultati

6.4.1 Numerički rezultati za problem 5.1.2 (primer 4.4.4) su dati u 1.2.4, v. Vulanović (1983 b) takodje.

6.4.2 Sada ćemo posmatrati problem 4.4.6. Rešavaćemo ga koristeći metod Teoreme 1, 6.2.2. Pored šeme L^h_{CM1} testirećemo i L^h_U i L^h_{CU}. Naravno, prva šema daje najbolje rezultate.

TABELA 1. L^h_{CM1}, A=1

error	n = 20		n = 40	
	q=0.5	q=0.8	q=0.5	q=0.8
ε=1E-2	3.04E-3	0.0136	6.75E-4	3.21E-3
1E-5	4.94E-3	0.0305	1.23E-3	7.62E-3
1E-8	5.00E-3	0.0312	1.25E-3	7.81E-3
1E-12	5.00E-3	0.0313	1.25E-3	7.81E-3

TABELA 2. L^h_U , A=1, n=20

error	q=0.5	q=0.8
ε=1E-2	0.0385	0.0748
1E-5	0.0494	0.122
1E-8	0.0500	0.125
1E-12	0.0500	0.125

Rezultati za L^h_{CU} su praktično isti kao za L^h_U. Iz Tabele 1 je očigledno da imamo uniformnu konvergenciju drugog reda. Procenat koraka mreže unutar $[0,\varepsilon]$ iznosi 25% i 40% za q=0.5 i q=0.8, respektivno.

6.4.3 U ovom Pododeljku ćemo dati rezultate za problem 4.4.5. Primenićemo šeme L^h_{CM1}, L^h_U i L^h_{CU} direktno na mreži generisanoj sa $\lambda(t)$ iz 6.1.2(2), tj. nećemo vršiti transformaciju problema izdvajanjem funkcije graničnog sloja (v. 6.2.2). Rezultati su lošiji nego u 6.4.2 (ta dva problema su praktično ista), ali se neuniformnost po ε ne pojavljuje.

TABELA 1. L^h_{CM1} , A=1, q=0.5

error	n=20	n=40
ε=1E-2	0.027	0.011
1E-5	0.023	0.0099
1E-8,1E-12	0.022	0.0099

TABELA 2. A=1, q=0.5, n=20

error	L^h_U	L^h_{CU}
ε=1E-2	0.0892	0.0400
1E-5	0.103	0.0527
1E-8,1E-12	0.104	0.0533

Ove rezultate treba uporediti sa sledećom tabelom iz Liseikin et al. (1981), gde je na isti problem primenjen metod iz 6.3.1 :

TABELA 3. n=20

ε	1E-2	1E-5	1E-8
error	0.120	0.170	0.172

Očigledno je da su naši rezultati bolji.

6.4.4 Sada posmatrajmo problem 4.4.1. Koristimo L^h_{CM1} i isti metod kao u 6.4.3. Uzeto je n=10 i ista gustina tačaka mreže u sloju kao u Tabeli 3.1.4, da bismo mogli uporediti rezultate. Rezultati Whitea su bolji.

TABELA. A=0.3, q=0.6

ε	1E-2	1E-4	1E-6	1E-8
error	0.227	0.299	0.306	0.307

6.4.5 Posmatrajmo test problem 4.4.2(2). Koristimo metod iz Teoreme 6.2.3.

TABELA. A=0.5, q=0.5, p=1, n=50

μ	1E-2	1E-3	1E-6	1E-9	1E-12
error	2.77E-3	4.49E-3	4.99E-3	5.24E-3	5.30E-3

Imamo 32% koraka mreže u sloju $[0,\mu]$.

6.4.6 Sada ćemo dati neke rezultate za nelinearni problem 4.4.3. Primenjen je metod iz 6.4.3.

TABELA. A=1, q=0.8, n=20

ε	1E-2	1E-4	1E-6	1E-8
error	0.0272	0.0454	0.0482	0.0485

Imamo 40% koraka mreže u $[0,\varepsilon]$. Iteracije 4.3.1(2) su vršene na isti način kao u 4.5.5. Ponovo su bile potrebne tri iteracije.

6.4.7 Na kraju ćemo prikazati numeričke rezultate za problem sa stepenim slojem 4.4.7. U Tabelama 1-2 dajemo rezultate metoda iz Teoreme 6.2.5. Sa n_ℓ je označen broj koraka mreže unutar graničnog sloja $[0, \varepsilon^{r/(r+1)}]$.

TABELA 1. p=1/r , n=20

ε	$\tau=0.5$		$\tau=0.8$	
	error	n_ℓ	error	n_ℓ
0.1	0.0679	12	0.0575	16
1E-3	0.169	10	0.119	15
1E-6	0.212	10	0.149	16
1E-9	0.217	10	0.152	16
1E-12	0.217	10	0.153	16
1E-18	0.217	10	0.153	16

TABELA 2. p=1/r , τ=0.8, n=50

ε	0.1	1E-3	1E-6	1E-9,1E-12,1E-18
error	0.0227	0.0490	0.0606	0.0618
n_ℓ	38	38	40	40

Linearna konvergencija uniformna po ε je očigledna. Ipak, za ovaj primer možemo dokazati kvadratnu konvergenciju uniformnu po ε ako uzmemo $p \geqslant 2/r$ i $(\varepsilon - x_i)^2$ u 6.2.5(1) umesto $(\varepsilon - x_{i-1})^2$. Ovo se ilustruje sledećim rezultatima :

TABELA 3. $p=2/r$, $\tau=0.8$

	n=20		n=50	
ε	error	n_ℓ	error	n_ℓ
0.1	3.18E-3	16	5.13E-4	40
1E-3	6.95E-3	15	1.13E-3	36
1E-6	6.14E-3	16	1.09E-3	38
1E-9	7.69E-3	16	1.45E-3	40
1E-12	8.66E-3	16	1.65E-3	40
1E-18	8.90E-3	16	1.69E-3	40

7. Richardsonova ekstrapolacija

7.1 Osnovne ideje

7.1.1 Richardsonova ekstrapolacija (R.e.) je efikasno orudje za povišenje tačnosti numeričkih rezultata diferencijalnih jednačina različitog tipa. Knjiga Marchuka i Shaidurova (1979) razmatra R.e. na ek. mrežama. Ipak, ovaj metod se može primeniti i na nek. mrežama, v. Keller (1969,1974) npr.

Neka razmatranja R.e. na ek. mrežama prilikom rešavanja s.p. problema data su u Doolan et al. (1980). U radu Vulanović et al. (1986) R.e. se koristi na nek. mreži Bakhvalovljevog tipa (v. Odeljak 6.1) pri rešavanju problema 5.1.2. U 7.1.2 ćemo prikazati rezultate koji ilustruju metod toga rada. Ponovo će se posmatrati problem 5.1.2, ali se isti metod može primeniti i na druge tipove s.p. problema iz Poglavlja 5. Ovo će biti ilustrovano numeričkim rezultatima u 7.2. Svi ovi rezultati odnose se na netransformacione metode konstrukcije mreža. Ipak, R.e. na ek. mreži lako se može koristiti i pri rešavanju s.p. problema transformacionim metodima.

7.1.2 Posmatrajmo problem 5.1.2 sa $c \in C^6(I\times\mathbb{R})$. Tada $u_\varepsilon \in C^8(I)$. Koristićemo razlaganje rešenja iz Teoreme 1, 5.2.3 (ocene iz Teoreme 2,5.2.3 ovde nisu pogodne).

Funkcija za generisanje mreže

$$(1) \qquad \lambda(t) = \begin{cases} A\mu t(1/2 + (A\mu)^{1/3} - t)^{-3} , & t\in[0,1/2] \\ 1 - \lambda(1-t) , & t\in[1/2,1] \end{cases} ,$$

je iz Vulanović et al. (1986). Ovde je $A>0$ nezavisno od ε. Pretpostavićemo da je broj koraka mreže paran, $n=2n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\geq 3$.

Koristimo centralnu diskretizaciju :

$$(2) \qquad \begin{aligned} w_0 &= U_0 , \\ - D''_C w_i + c(x_i,w_i) &= 0 , \quad i=1(1)n-1 , \\ w_n &= U_1 , \end{aligned}$$

(w_h je mrežna funkcija). Tada za grešku konzistencije važi :

LEMA. *Neka je diskretizacija* (2) *data na mreži generisanoj sa* (1). *Tada za rešenje* u_ε *problema* 5.1.2 *važi*

$$r_C u_\varepsilon(x_i) = a_i h^2 + R_C u_\varepsilon(x_i) , \quad i=1(1)n-1 ,$$

gde su a_i *koeficijenti nezavisni od* n *i*

$$|R_C u_\varepsilon(x_i)| \leq Mh^4 .$$

DOKAZ. Vidi Vulanović et al. (1986), gde su dati razvoji za $r_C u_\varepsilon(x_i)$ višeg reda.

Koristeći ovu Lemu možemo dokazati (upor. Vulanović et al. (1986) i Marchuk et al. (1979, Teorema 6.2)) :

TEOREMA. *Neka su* $\{w_i^h\}$ *i* $\{w_i^{h/2}\}$ *rešenja diskretnog problema* (2) *na mreži sa tačkama* $x_i=\lambda(ih)$ *i* $x_i=\lambda(ih/2)$ *respektivno* (λ *je funkcija iz* (1)).

Tada važi

$$|u_\varepsilon(x_i)-(4w_{2i}^{h/2}-w_i^h)/3| \leq Mh^4 , \quad i=1(1)n-1 .$$

7.2 Numerički rezultati

7.2.1 Prvo ćemo dati numeričke rezultate iz rada Vulanović et al. (1986) koji se odnose na test problem 4.4.4. Sa n_1 označavamo broj koraka mreže koji leže unutar $[0,\mu]$.

TABELA 1. A=1 , n=40

μ	1.E-3	1.E-6	1.E-9,1.E-12
error	8.3 E-6	7.2 E-6	8.1 E-6
n_1	4	3	3

TABELA 2. A=0.1 , n=40

μ	1.E-3	1.E-6	1.E-9,1.E-12
error	3.0 E-5	4.5 E-5	4.7 E-5
n_1	10	8	8

7.2.2 Sada ćemo prikazati numeričke rezultate za test problem 4.4.2(2). Ekstrapolacija je vršena na mreži datoj sa 6.2.3(2), (upor. 6.4.5) :

TABELA 1. A=0.5 , q=0.5 , p=1 , n=50

μ	1.E-2	1.E-6
error	3.05 E-4	1.49 E-4

Radi uporedjenja dajemo rezultate metoda 6.2.3 sa n=100 bez ekstrapolacije (upor. 6.4.5 ponovo) :

TABELA 2. A=0.5 , q=0.5 , p=1 , n=100

μ	1.E-2	1.E-6
error	6.92 E-4	1.34 E-3

7.2.3 Na kraju dajemo rezultate za test problem 4.4.5. Ekstrapolacija je vršena na mreži generisanoj sa 6.1.2(2), a korišćen je metod iz Tabele 1,6.4.3.

TABELA. A=1 , q=0.5 , n=20

ε	1.E-2	1.E-5	1.E-8	1.E-12
error	7.44 E-3	8.28 E-3	8.33 E-3	8.34 E-3

LITERATURA

Abrahamson,L.,S.Osher (1982): Monotone difference schemes for singular perturbation problems, SIAM J.Numer.Anal.19, 5,979-992

Ascher,U.,R.Weiss (1983): Collocation for singular perturbation problems I: First order systems with constant coefficients, SIAM J.Numer.Anal.20,3,537-557

Bailey,P.B.,L.F.Shampine,P.E.Waltman (1968): Nonlinear Two Point Boundary Value Problems, Academic Press, New York and London

Bakhvalov,N.S. (1969): K optimizacii metodov resheniya kraevykh zadach pri nalichii pogranichnogo sloya, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.9,4,841-859

Berger,A.E.,J.M.Solomon,M.Ciment (1980): Uniformly accurate difference methods for a singular perturbation problem, in: J.J.H.Miller (ed.), BAIL*) I

Berger,A.E.,H.Han,R.B.Kellogg (1982): On the behaviour of the exact solution and the error in a numerical solution of a turning point problem, in: J.J.H.Miller (ed.), BAIL*) II

Blatov,I.A.,V.V.Strygin (1985): Skhodimost' metoda Galerkina dlya nelineinoi dvukhtochechnoi singulyarno-vozmushchennoi kraevoi zadachi v prostranstve C[a,b],Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.25,7,1001-1008

Boglaev,I.P. (1981): Variacionno-raznostnaya skhema dlya kraevoi zadachi s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.21,4,887-896

Boglaev,I.P. (1984): Priblizhennoe reshenie nelineinoi kraevoi zadachi s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.24,11,1649-1656

Bohl,E. (1979): Inverse monotonicity in the study of continuous and discrete singular perturbation problems, in: P.W.Hemker,J.J.H.Miller (eds), Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, Academic Press, London

Bohl,E.,J.Lorenz (1979): Inverse monotonicity and difference schemes of higher order. A summary for two-point boundary value problems, Aeq.Math.19,1-36

Carrol,J.,J.J.H.Miller (1980): Completely exponentially fitted finite difference schemes for some singular perturbation problems, in: J.J.H.Miller (ed.), BAIL*)I

Denny,V.E.,R.B.Landis (1972): A new method for solving two-point boundary value problems using optimal node distribution, J.Comp.Phys.9,120-137

Diekmann,O.,D.Hilhorst,L.A.Peletier (1980): A singular boundary value problem arising in a pre-breakdown gas discharge, SIAM J.Appl.Math. 39,1,48-66

Doolan,E.P.,J.J.H.Miller,W.H.A.Schilders (1980): Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers, Boole Press, Dublin

Emel'yanov,K.V. (1975): O raznostnom metode resheniya tret'ei kraevoi zadachi dlya differencial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.15,6,1457-1465

Emel'yanov,K.V. (1978): O raznostnoi skheme obyknovennogo differencial'nogo uravneniya s malym parametrom, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.18,5,1146-1153

Farrel,P.A. (1980): A uniform convergent difference scheme for turning point problem, in: J.J.H.Miller (ed.), BAIL*)I

Farrel,P.A. (1984): Sufficient conditions for the uniform convergence of difference schemes for singularly perturbed turning and non-turning point problems, in: J.J.H.Miller (ed.), BAIL*) III

Flaherty,J.E.,R.E.O'Malley,Jr. (1977): The numerical solution of boundary value problems for stiff differential eqations, Math.Comp.31,137,66-83

Gushchin,V.A.,V.V.Shchennikov (1974): Ob odnoi monotonnoi raznostnoi skheme vtorogo poryadka tochnosti, Zh. vychisl.mat. i mat.fiz.14,3,789-792

Hemker,P.W. (1982): The use of defect correction for the solution of a singularly perturbed o.d.e., in: R.März (ed.), Proceedings of the Third Conference on Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Seminarbericht 46, Berlin

Henrici,P. (1962): Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, Wiley, New York

Herceg,D. (1979): Diferencni postupci sa neekvidistantnim mrežama, Ph.D.Thesis, University of Novi Sad

Herceg,D. (1981): A uniformly convergent scheme with quasi -constant fitting factors, Zb.rad.Prir.-mat.Fak.Univ. u Novom Sadu,Ser.Mat.11,105-115

Herceg,D.,R.Vulanović (1981): Some finite-difference schemes for a singular perturbation problem on a non-uniform mesh, Zb.rad.Prir.-mat.Fak.Univ. u Novom Sadu, Ser. Mat.11,117-134

Howes,F.A. (1979): Singularly perturbed semilinear systems, Stud.Appl.Math.61,185-209

Il'in,A.M. (1969): Raznostnaya skhema dlya differencial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Matem.zametki 6,2,237-248

Kalnáy de Rivas,E. (1972): On the use of nonuniform grids in finite-difference equations, J.Comput.Physics 10, 202-210

Keller,H.B. (1969): Accurate difference methods for linear ordinary differential systems subject to linear constraints, SIAM J.Numer.Anal.6,1,8-30

Keller,H.B. (1974): Accurate difference methods for non-linear two-point boundary value problems, SIAM J.Numer. Anal.11,2,305-320

Kelley,W.G. (1979): A nonlinear singular perturbation problem for second order systems, SIAM J.Math.Anal.10,1,32-37

Kellogg,R.B. (1981): Difference approximation for a singular perturbation problem with turning points, in: S.Axelson,L.S.Frank,A.van der Sluis (eds), Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis, North-Holland

Kellogg,R.B.,A.Tsan (1978): Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, Math.Comp.32,1025-1039

Kreiss,B.,H-O.Kreiss (1981): Numerical methods for singular perturbation problems, SIAM J.Numer.Anal.18,2,262-275

Lentini,M.,V.Pereyra (1974): A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems, Math.Comp.28,128,981-1003

Lentini,M.,V.Pereyra (1977): An adaptive finite difference solver for nonlinear two-point boundary problems with mild boundary layers, SIAM J.Numer.Anal.14,1,91-111

Liseikin,V.D. (1982): O chislennom reshenii obyknovennogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Chisl.met.mekh. splosh.sredy 13,3,71-80

Liseikin,V.D. (1984): O chislennom reshenii singulyarno-vozmushchennogo uravneniya s tochkoi povorota, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.24,12,1812-1818

Liseikin,V.D.,N.N.Yanenko (1981): O ravnomerno-skhodyashchemsya algoritme chislennogo resheniya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Chisl.met.mekh.splosh.sredy 12,2,45-56

Liseikin,V.D.,N.N.Yanenko (1984): On the numerical solution of equations with interior and exterior boundary layers on a nonuniform mesh, in: J.J.H.Miller (ed.), BAIL*) III

Lorenz,J. (1977): Zur Inversmonotonie diskreter Probleme, Numer.Math.27,227-238

Lorenz,J. (1979): Combinations of initial and boundary value methods for a class of singular perturbation problems, Proceedings of the Conference on the Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, London

Lorenz,J. (1980 a): Zur Theorie und Numerik von Differenzenverfahren für singuläre Störungen, Habilitationsschrift, Konstanz

Lorenz,J. (1980 b): Stability and consistency analysis of difference methods for singular perturbation problems, in:

O.Axelsson,L.S.Frank,A.van der Sluis (eds), Proceedings of the Conference on Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis, North -Holland

Marchuk,G.I.,V.V.Shaidurov (1979): Povishenie tochnosti reshenii raznostnykh skhem, Nauka, Moskva

Markush,I.I. (1975): Rozvytok asymptotichnykh metodiv u teorii dyferencial'nykh rivnyan', Matematychnyi fakul'tet, Uzhgorod

Miranker,W.L. (1981): Numerical Methods for Stiff Equations (and Singular Perturbation Problems), D.Reidel Publ. Co., Dodrecht.Boston.London

O'Malley,R.E.,Jr. (1969): A non-linear perturbation problem arising in the study of chemical flow reactors, J. Inst.Maths.Applics.6,12-20

O'Malley,R.E.,Jr. (1974): Introduction to Singular Perturbations, Academic Press, New York and London

O'Riordan,E. (1984): Singularly perturbed finite element methods, Numer.Math.44,425-434

Osher,S. (1981): Nonlinear singular perturbation problems and one sided difference schemes, SIAM J.Numer.Anal. 18,1,129-144

Pearson,C.E. (1968 a): On a differential equation of boundary layer type, J.Math.Phys.47,134-154

Pearson,C.E. (1968 b): On non-linear ordinary differential equations of boundary layer type,J.Math.Phys.47, 351-358

Pereyra,V.,E.G. Sewell (1975): Mesh selection for discrete solution of boundary problems in ordinary differential equations, Numer.Math.23,261-268

Russell,R.D. (1979): Mesh selection methods, Lecture Notes in Computer Science 76, Springer-Verlag, New York, 228-242

Russell,R.D.,J.Christiansen (1978): Adaptive mesh selection strategies for solving boundary value problems, SIAM J.Numer.Anal.15,1,59-80

Samarskii,A.A. (1971): Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem, Nauka, Moskva

Shishkin,G.I. (1983): Raznostnaya skhema na neravnomernoi setke dlya differencial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.23,3,609-619

Stoyan,G. (1979): Monotone difference schemes for diffusion -convection problems, ZAMM 59,361-372

Surla,K. (1982): On the convergence of some finite difference schemes for a singular perturbation problem. Zb. rad.Prir.-mat.Fak.Univ. u Novom Sadu, Ser.Mat.12, 191-203

Thompson,J.F. (1985): A survey of dynamically-adaptive grids in the numerical solution of partial differential equations, Applied Numer.Math.1,3-27

Trenogin,V.A. (1970): Razvitie i prilozheniya asimptoticheskogo metoda Lyusternika-Vishika, Uspekhi matem. nauk 25,4,123-156

Vasil'ev,N.I.,Yu.A.Klokov (1978): Osnovy teorii kraevykh zadach obyknovennykh differencial'nykh uravnenii, Zinatne, Riga

Veldhuizen,M.van (1978): Higher order methods for a singularly perturbed problem, Numer.Math.30,267-279

Vishik,M.I.,L.A.Lyusternik (1957): Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnii sloi dlya lineinikh differencial'nykh uravnenii s malym parametrom, Uspekhi matem. nauk 12, 5,3-122

Vulanović,R. (1982): An exponentially fitted scheme on a non--uniform mesh, Zb.rad.Prir.-mat.Fak.Univ. u Novom Sadu, Ser.Mat.12,205-215

Vulanović,R. (1983 a): Numeričko rešavanje konturnog problema drugog reda sa malim parametrom, Master's Thesis, University of Novi Sad

Vulanović,R. (1983 b): On a numerical solution of a type of singularly perturbed boundary value problem by using a special discretization mesh, Zb.rad.Prir.-mat.Fak. Univ. u Novom Sadu, Ser.Mat.13,187-201

Vulanović,R. (1984): Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems, in: G.V.Milovanović (ed.), Numer.Meth. and Approximat. Theory, Niš

Vulanović,R. (1985 a): Exponential fitting and special meshes for solving singularly perturbed problems, in: B.Vrdoljak (ed.), IV Conference on Applied Mathematics, Split

Vulanović,R. (1985 b): On numerical solution of singularly perturbed boundary value problem with two small parameters, in: D.Herceg (ed.), Numer.Meth. and Approximat.Theory II, Novi Sad

Vulanović,R. (1986): On numerical solution of a singular perturbation problem with mixed boundary conditions, ZAMM 66,334-335

Vulanović,R.(u pripremi): Non-equidistant generalizations of the Gushchin-Shchennikov scheme

Vulanović,R.,D.Herceg,N.Petrović (1986): On the extrapolation for a singularly perturbed boundary value problem, Computing 36,1-2,69-79

White,A.B.,Jr. (1979): On selection of equidistributing meshes for two-point boundary-value problems, SIAM J. Numer.Anal.16,3,472-501

Zadorin,A.I. (1984): O chislennom reshenii tret'ei kraevoi zadachi dlya uravneniya s malym parametrom, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.24,7,1008-1015

Zadorin,A.I.,V.N.Ignat'ev (1983): O chislennom reshenii uravneniya s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, Zh.vychisl.mat. i mat.fiz.23,3,620-628

---

*) BAIL : Proceedings of International Conference on Boundary and Interior Layers: Computational and Asymptotic Methods, Boole Press, Dublin

Relja Vulanović

KRATKA BIOGRAFIJA

Relja Vulanović je rodjen 2.XI 1957. godine u Bečeju, SAPV, i po nacionalnosti je Srbin. Osnovnu školu pohadjao je u Sarajevu i Bečeju, a Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu. Na kraju gimnazijskog školovanja nagradjen je diplomama "Vuk Karadžić", "Mihailo Petrović Alas" za matematiku, fiziku i geografiju i "Svetozar Marković" za ruski jezik. Kao najbolji učenik u generaciji nosilac je Povelje "Jovan Jovanović Zmaj".

Školske 1976/77. godine upisao se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, na nastavno-naučnu grupu za matematiku. Diplomirao je 30.VI 1980. sa prosečnom ocenom 10, dok mu je prosečna ocena iz svih ispita tokom studija 9,53. Tokom studija više puta je nagradjivan za uspehe.

Školske 1980/81. godine nastavlja poslediplomske studije iz oblasti Analiza i numerička matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Sve predvidjene ispite položio je sa prosečnom ocenom 10. Magistarski rad pod naslovom "Numeričko rešavanje konturnog problema drugog reda sa malim parametrom" odbranio je 6.VI 1983.

Od kraja 1980. godine radi kao asistent na Institutu za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Do sada je držao vežbe iz više predmeta studentima matematike, fizike i Poljoprivrednog fakulteta. Saradnik je naučno-istraživačkih projekata na Institutu. Naučno-istraživačka oblast mu je numerička matematika, posebno numeričko rešavanje konturnih problema sa malim parametrom. Ima više naučnih radova iz ove oblasti, objavljenih u domaćim i stranim naučnim časopisima.

U SKJ je primljen 1974. godine. Član je više samoupravnih organa i delegacija Instituta i Fakulteta.

Oženjen je i ima dvoje dece. Živi sa porodicom u Novom Sadu. Od stranih jezika vlada engleskim, ruskim i poljskim.