PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U NOVOM SADU

Ljiljana Cvetković

TEORIJA KONVERGENCIJE RELAKSACIONIH POSTUPAKA ZA REŠAVANJE SISTEMA JEDNAČINA

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

Novi Sad, 1987.

S A D R Ž A J

0. UVODNI DEO

0.1. UVOD

U mnogim problemima numeričke analize, kao što su konturni problemi običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednačina, integralne jednačine, dvodimenzionalni varijacioni problemi, problemi optimalne kontrole, potrebno je rešiti sistem jednačina, linearnih ili nelinearnih. Takvi sistemi su najčešće velikih dimenzija, te su direktni postupci za njihovo rešavanje praktično neprimenljivi. To nas motiviše da pristupimo proučavanju iterativnih postupaka.

Dva su osnovna principa kojima se rukovodimo prilikom izbora iterativnog postupka za rešavanje datog sistema. Prvo, iterativno pravilo treba da bude što jednostavnije, i drugo, postupak treba što brže da konvergira. Time ćemo se rukovoditi i prilikom istraživanja u okviru ove disertacije.

Rezultati, koji se mogu svrstati u oblast linearne algebre, a izloženi su u radu [CH,86a], pokazali su se kao veoma značajni za pronalaženje oblasti konvergencije posmatranih postupaka, te su posebno izloženi u uvodnom delu.

Prvi deo posvećen je rešavanju sistema linearnih jednačina. Pored dobro poznatih Jakobijevog, Gaus-Zajdelovog, JOR i SOR postupaka (ovaj poslednji iscrpno je proučen u knjizi [Yo,71]), Hadjidimos je u svom radu [Ha,78] formulisao AOR postupak kao dvoparametarsku generalizaciju SOR postupka, i na jednostavnom primeru pokazao njegovu opravdanost. Ispostavilo se da je AOR postupak ekstrapolirani SOR, odnosno ekstrapolirani Jakobijev postupak i nizali su se mnogi radovi o njegovoj konvergenciji, izboru parametara, daljoj generalizaciji. Pri tom su oblasti konvergencije proučavane za sledeće klase matrica : strogo dijagonalno dominantne (SDD), generalizovano dijagonalno dominantne (GDD), nerazložive dijagonalno dominantne (NDD), pozitivno definitne, konzistentno uredjene, M- i H-matrice. Kako je svaka SDD, NDD ili M- matrica istovremeno GDD=H-matrica, u disertaciji je data generalna oblast konvergencije za klasu H-matrica (v.[CH,87b],[CH,87c]), koja predstavlja proširenje svih oblasti konvergencije pomenutih u literaturi za svaku klasu matrica ponaosob. Pokazano je, medjutim, da ima smisla posmatrati zasebno neke potklase H-matrica, jer ne samo da se za njih dobijaju proverljiviji, nego ponekad i širi intervali konvergencije ([CH,87b]).

U prvom delu je zatim data jedna generalizacija AOR postupka, tzv. MAOR postupak, koji je "potekao" iz nelinearnog slučaja ([CH,85]), a koji ipak ima prednosti i u linearnom slučaju. Kada je matrica sistema konzistentno uredjena, na primeru je ilustrovan "kvazioptimalan" izbor parametara, dat u [HC,86].

Na kraju prvog dela razmatra se metod AFC, koji je definisan u radu [So,57], a razmatran od strane mnogih autora, npr. [Ba,86]. Dati su neki novi dovoljni uslovi konvergencije, ([CH,87]), koji su bolji od odgovarajućih iz [Si,61], a zatim su ispitivane mogućnosti kombinovanja AFC i AOR postupka, ([CH,87a]).

Drugi deo posvećen je postupcima za rešavanje sistema nelinearnih jednačina, od kojih se u literaturi najčešće sreću sledeće dve klase. Prvu čine Njutnov postupak i njegove brojne varijante, čija je prednost što lokalno konvergiraju veoma brzo, a nedostatak što imaju velike memorijske zahteve za matricu koeficijenata (u svakom koraku se rešava po jedan linearni sistem). Kod samog Njutnovog postupka prisutan je još i problem izračunavanja svih parcijalnih izvoda. Drugu klasu čine postupci u osnovi kojih je sledeći princip: n jednačina sistema ciklično se pretražuju i rešavaju po jednoj nepoznatoj, a zatim se pomoću te "medjuaproksimacije" i već izračunatih komponenata približnog rešenja konstruiše sledeća aproksimacija. Ovakvi postupci konvergiraju samo linearno, medjutim zahtevaju neuporedivo manje memorijskih mesta (samo za vektore približnih rešenja) i imaju jednostavno iterativno pravilo. Obe ove klase možemo tretirati kao kombinaciju linearnih i nelinearnih postupaka. Od linearnih opredelićemo se za MAOR, a od nelinearnih za Njutnov postupak i pokazati prednost MAOR-Njutnovog nad Njutn-MAOR postupkom. Za specijalan izbor parametara (kada su medjusobno jednaki) MAOR-Njutnov postupak svodi se na vSOR-Njutnov, definisan u [Gi,80]. Teoreme o lokalnoj konvergenciji u tom slučaju opštije su od odgovarajućih iz [Gi,80]. Dokazane teoreme o lokalnoj konvergenciji MAOR-Njutnovog postupka direktna su posledica teorema o konvergenciji MAOR postupka iz prvog dela.

O globalnoj konvergenciji možemo govoriti samo u specijalnim slučajevima. Opredelili smo se za rezultate iznete u radu [Ch,83], koji se odnose na AOR-Njutnov postupak, uz napomenu da je predmet daljeg istraživanja nalaženje sličnih dovoljnih uslova za globalnu konvergenciju MAOR-Njutnovog postupka.

Disertacija je protkana numeričkim primerima, koji ili ilustruju dokazane teoreme ili pokazuju u kojoj meri je novoformirani postupak "bolji" od postojećih.

Ova disertacija je nastala kao rezultat višegodišnjeg zajedničkog rada sa dr Dragoslavom Hercegom, vanrednim profesorom PMF-a u Novom Sadu, kome se ovom prilikom zahvaljujem na savetima, idejama, zainteresovanosti i pomoći tokom celokupnog mog dosadašnjeg naučnog rada.

Posebno se zahvaljujem dr Zvonimiru Bohteu, redovnom profesoru Univerziteta u Ljubljani, koji je već nekoliko godina upoznat sa mojim radom i čije su sugestije i odobravanje bili velika podrška i ohrabrenje.

Takodje se zahvaljujem dr Zoranu Stojakoviću, redovnom profesoru PMF-a u Novom Sadu, na interesovanju i odobravanju, kojima je pratio moj rad.

0.2. NEKE OZNAKE, DEFINICIJE I TEOREME

U disertaciji se koriste sledeće oznake :

N - skup prirodnih brojeva
R - skup realnih brojeva
R_+ - skup nenegativnih realnih brojeva
C - skup kompleksnih brojeva

R^n - skup n-dimenzionalnih realnih vektora
C^n - skup n-dimenzionalnih kompleksnih vektora
$R^{n,n}$ - skup realnih kvadratnih matrica reda n
$C^{n,n}$ - skup kompleksnih kvadratnih matrica reda n

$N = \{1,2,\dots,n\}$,
$N(i_1,\dots,i_k)=N\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$

$P_i(A) = \sum_{j\in N(i)} |a_{ij}|$, $Q_i(A) = \sum_{j\in N(i)} |a_{ji}|$, $R_i(A) = \sum_{j\in N} |a_{ij}|$

$P_{i,\alpha}(A) = \alpha P_i(A)+(1-\alpha)Q_i(A)$, $Q_i^*(A) = \max_{j\in N(i)} |a_{ji}|$,

$Q_i^{(r)}(A) = \max_{t_r\in\theta_r} \sum_{j\in t_r} |a_{ji}|$, pri čemu je $i,r\in N$, $\alpha\in[0,1]$,

$A = [a_{ij}]\in C^{n,n}$, a θ_r skup svih izbora $t_r = \{i_1,\dots,i_r\}$ različitih indeksa iz N

A^T - transponovana matrica za matricu A
A^H - konjugovano transponovana matrica za matricu A
A^{-1} - inverzna matrica za matricu A
det A - determinanta matrice A

$x \geq (>) 0$ akko $x_i \geq (>) 0$, $i \in N$, gde je $x=[x_1,\dots,x_n] \in R^n$

$A \geq (>) B$ akko $a_{ij} \geq (>) b_{ij}$, $i,j \in N$, pri čemu je $A=[a_{ij}] \in R^{n,n}$, $B=[b_{ij}] \in R^{n,n}$

$D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)>0$ akko $d_i>0$, $i \in N$

$M(A)=[m_{ij}] \in R^{n,n}$, $m_{ii}=|a_{ii}|$, $m_{ij}=-|a_{ij}|$, $i \in N$, $j \in N(i)$,

pri čemu je $A=[a_{ij}] \in C^{n,n}$

E – jedinična matrica proizvoljnog reda

$A=D-T-S=D(E-L-U)$ standardno razlaganje matrice A (D dijagonalna, T i L strogo donje , a S i U strogo gornje trougaone matrice)

$\mathrm{int}(D)$ – unutrašnjost oblasti D

Definicija 0.1. Neka je $A \in C^{n,n}$. Spektar $S(A)$ matrice A je skup svih njenih karakterističnih korena. Spektralni radijus $\rho(A)$ matrice A je $\rho(A)= \max\limits_{\lambda \in S(A)} |\lambda|$.

Definicija 0.2. Neka je $A \in C^{n,n}$ i $S^*(A)$ najmanji konveksan skup koji sadrži $S(A)$. Uopšteni spektralni radijus $\rho^*(A)$ matrice A je $\rho^*(A)= \max\limits_{\lambda \in S^*(A)} |\lambda|$.

Definicija 0.3. Matrica $A \in C^{n,n}$ $(R^{n,n})$ naziva se hermitska (simetrična) ako i samo ako je $A=A^H$ $(A=A^T)$.

Definicija 0.4. Matrica $A=[a_{ij}] \in C^{n,n}$ naziva se dijagonalno dominantna ako i samo ako je

$$|a_{ii}| \geq P_i(A) \text{ za svako } i \in N,$$

pri čemu bar za jedno $i \in N$ važi stroga nejednakost. Ako za svako $i\in N$ važi stroga nejednakost, matrica A naziva se strogo dijagonalno dominantna (SDD).

Definicija 0.5. Permutaciona matrica je kvadratna matrica kod koje je u svakoj vrsti i svakoj koloni jedan elemenat jedinica, a ostali su nule.

Definicija 0.6. Matrica $A\in C^{n,n}$ naziva se razloživa ako i samo ako postoji permutaciona matrica $P\in R^{n,n}$ takva da je

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} ,$$

gde su B_{11} i B_{22} kvadratne matrice reda manjeg od n. Matrica je nerazloživa ako nije razloživa.

Definicija 0.7. Matrica $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$ naziva se L-matrica ako i samo ako je $a_{ii}>0$, $a_{ij}\leq 0$ za $i\in N$, $j\in N(i)$.

Definicija 0.8. Matrica $A\in R^{n,n}$ naziva se regularna M-matrica (kratko M-matrica) ako i samo ako je L-matrica za koju je $A^{-1}\geq 0$.

Definicija 0.9. Matrica $A\in C^{n,n}$ naziva se H-matrica ako i samo ako je $M(A)$ M-matrica.

Definicija 0.10. Matrica $A\in R^{n,n}$ naziva se pozitivno definitna ako i samo ako je za svako $x\in R^n$, $x\neq 0$ $x^TAx>0$.

Definicija 0.11. Neka je $A\in C^{n,n}$. Za $i,j\in N$ kažemo da su pridruženi u odnosu na A ako i samo ako je $a_{ij}\neq 0$ ili $a_{ji}\neq 0$. Matrica A naziva se konzistentno uredjena ako i samo ako za neko $t\in N$ postoje disjunktni podskupovi $S_1,\ldots,S_t$ od N takvi da je $S_1 \cup S_2 \cup\ldots\cup S_t = N$ i da važi:
ako su i i j pridruženi u odnosu na A i $i\in S_k$, tada $j\in S_{k+1}$ za $j>i$ i $j\in S_{k-1}$ za $j<i$.

Definicija 0.12. Za matricu A kažemo da ima "osobinu A" ako i samo ako postoji permutaciona matrica P, takva da je

$$PAP^T = \begin{bmatrix} D_1 & M_1 \\ M_2 & D_2 \end{bmatrix} ,$$

gde su D_1 i D_2 kvadratne dijagonalne matrice.

Definicija 0.13. Matrica A naziva se generalizovano dijagonalno dominantna (GDD) ako i samo ako postoji regularna dijagonalna matrica W, takva da je AW SDD.

Definicija 0.14. Matrice A i B, $A,B \in C^{n,n}$, su slične ako i samo ako postoji regularna matrica $P \in C^{n,n}$, takva da je $P^{-1}AP = B$.

Definicija 0.15. Neka je $\{x^k\} \subset R^n$ proizvoljan niz koji konvergira ka x. Tada se brojevi

$$R_p\{x^k\} = \begin{cases} \limsup\limits_{k\to\infty} \|x^k - x\|^{1/k}, & \text{za } p=1 \\ \limsup\limits_{k\to\infty} \|x^k - x\|^{1/p^k}, & \text{za } p>1 \end{cases}$$

nazivaju R-faktorima tog niza. Ako je J iterativni postupak za nalaženje x i C(J,x) skup svih nizova, dobijenih postupkom J, koji konvergiraju ka x, tada se brojevi

$$R_p(J,x) = \sup\{R_p\{x^k\} \mid \{x^k\} \in C(J,x)\},\ 1 \le p < \infty,$$

nazivaju R-faktorima postupka J u tački x.

Definicija 0.16. Neka je J iterativni postupak za nalaženje x. Broj

$$O_R(j,x) = \begin{cases} \infty, & \text{ako je } R_p(J,x)=0 \text{ za svako } p\in[1,\infty), \\ \inf\{p\in[1,\infty) \mid R_p(J,x)=1\}, & \text{inače,} \end{cases}$$

naziva se R-red postupka J u tački x.

Definicija 0.17. Ako je $0<R_1(J,x)<1$, konvergencija postupka J u tački x naziva se R-linearna.

Definicija 0.18. Neka su J_1 i J_2 dva iterativna postupka za nalaženje x. Reći ćemo da J_1 brže konvergira nego J_2 u tački x ako i samo ako postoji $p\in[1,\infty)$ takvo da je

$$R_p(J_1,x) < R_p(J_2,x).$$

Definicija 0.19. Neka je $G:W\subset R^n\to R^n$. Tačka x naziva se tačka privlačenja iteracija

$$(0.1) \qquad x^{k+1}=Gx^k,\ k=0,1,\ldots,$$

ako i samo ako postoji otvorena okolina $W_0\subset W$ te tačke takva da za svako $x^0\in W_0$ sve iteracije x^k definisane sa (0.1) leže u W i konvergiraju ka x.

Definicija 0.20. Preslikavanje $G:W\ R^n\to R^n$ naziva se F-diferencijabilno (Freše-diferencijabilno) u tački $x\in \mathrm{int}(W)$ ako i samo ako postoji matrica $A\in R^{n,n}$ takva da je

$$\lim_{h\to 0} \|G(x+h)-G(x)-Ah\|/\|h\| = 0. \ .$$

Matricu A tada nazivamo F-izvodom preslikavanja G u tački x i označavamo $A=G'(x)$.

Teorema 0.1. Slične matrice imaju iste karakteristične korene. Karakteristični koreni hermitske matrice su realni.

Teorema 0.2. Ako je matrica SDD, GDD ili NDD (nerazloživa dijagonalno dominantna), tada je ona regularna.

Teorema 0.3. Ako za matricu $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$ važi bar jedan od sledećih uslova :

(i) $\quad |a_{ii}| > P_{i,\alpha}(A)$, $i\in N$, za neko $\alpha\in[0,1]$,

(ii) $\quad |a_{ii}| > P_i^{\alpha}(A)Q_i^{1-\alpha}(A)$, $i\in N$, za neko $\alpha\in[0,1]$,

(iii) $|a_{ii}||a_{jj}| > P_i(A)P_j(A)$, $i\in N$, $j\in N(i)$,

(iv) $|a_{ii}||a_{jj}| > P_i^{\alpha}(A)Q_i^{1-\alpha}(A)P_j^{\alpha}(A)Q_j^{1-\alpha}(A)$, $i\in N$, $j\in N(i)$,

za neko $\alpha\in[0,1]$,

(v) Za svako $i\in N$ važi

$|a_{ii}| > P_i(A)$ ili

$$|a_{ii}| + \sum_{j\in J}|a_{jj}| > Q_i(A)+\sum_{j\in J}Q_j(A), \text{ gde je } J:=\{i\in N : |a_{ii}|\le Q_i(A)\},$$

(vi) $|a_{ii}| > \min(P_i(A),Q_i^*(A))$, $i\in N$ i

$|a_{ii}|+|a_{jj}| > P_i(A)+P_j(A)$, $i\in N$, $j\in N(i)$,

(vii) $|a_{ii}| > Q_i^{(p)}(S+T)$, $i\in N$ i

$\sum_{j\in t_p}|a_{ii}| > \sum_{j\in t_p}P_i(A)$, $t_p\in\theta_p$, za neko $p\in N$,

($A=D-T-S$ je standardno razlaganje matrice A)

(viii) Postoji $i\in N$ takvo da je

$|a_{ii}|(|a_{jj}|-P_j(A)+|a_{ji}|) > P_i(A)|a_{ji}|$, $j\in N(i)$,

tada je A regularna matrica.

Teorema 0.4. Ako je A konzistentno uredjena matrica, tada $\det(\alpha T+\alpha^{-1}S-\beta D)$ ne zavisi od α za $\alpha\neq 0$, $\alpha\in C$ i za svako $\beta\in C$.

Teorema 0.5. Neka je $D\in C^{n,n}$ dijagonalna matrica. Ako je $A\in C^{n,n}$ konzistentno uredjena, tada je i $A+D$ konzistentno uredjena matrica.

Teorema 0.6. Ako je matrica A konzistentno uredjena, tada ona ima "osobinu A".

Teorema 0.7. Matrica A ima "osobinu A" ako i samo ako postoji permutaciona matrica P, takva da je $P^{-1}AP$ konzistentno uredjena matrica.

Teorema 0.8. Iterativni postupak

$$(0.2) \qquad x^{k+1} = Mx^k + d, \quad k=0,1,\dots ,$$

gde je $M \in C^{n,n}$, $x^0, d \in C^n$, konvergira za svako $x^0 \in C^n$ ka jedinvenom rešenju x^* sistema $x = Mx+d$ ako i samo ako je $\rho(M)<1$.

Teorema 0.9. (Ekstrapolaciona teorema) Neka iterativni postupak (0.2) konvergira ka x^* za svako x^0, tj. neka je $\rho(M)<1$. Tada je za $0<\omega<2/(1+\rho(M))$

$$\rho((1-\omega)E+\omega M) \leq |1-\omega|+\omega\rho(M) < 1,$$

tj. takozvani ekstrapolirani iterativni postupak

$$(0.3) \qquad x^{k+1} = ((1-\omega)E+\omega M)x^k + \omega d, \quad k=0,1,\dots ,$$

konvergira ka x^* za svako $x^0 \in C^n$.

Teorema 0.10. (Teorema Ostrovskog) Neka preslikavanje $G: W \subset R^n \to R^n$ ima nepokretnu tačku $x \in \mathrm{int}(W)$ i neka je G F-diferencijabilno u x. Ako je $\rho(G'(x))<1$, tada je x tačka privlačenja iteracija (0.1).

Teorema 0.11. Neka su ispunjene pretpostavke teoreme Ostrovskog. Tada je $R_1(J,x)=\rho(G'(x))$. Osim toga, ako je $\rho(G'(x))>0$, tada je $O_R(J,x)=1$. Sa J je označen iterativni postupak (0.1).

Teorema 0.12. Neka je preslikavanje $G: W \subset R^n \to R^n$ F-diferencijabilno u otvorenoj okolini $W_0 \subset W$ tačke x i neka je G' neprekidno u x, gde je $Gx=0$. Neka je $B: W_0 \to R^{n,n}$ neprekidno u x, matrica B(x) regularna i $\rho((B(x))^{-1}C(x))<1$, gde je $G'(y)=B(y)-C(y)$. Tada je x tačka privlačenja iteracija

$$(J_1) \qquad x^{k+1} = x^k - (B(x^k))^{-1}Gx^k, \; k=0,1,\dots ,$$

i važi $R_1(J_1,x)=\rho((B(x))^{-1}C(x))$.

Teorema 0.13. Ako su preslikavanja $G:W\subset R^n\text{->}R^n$ i $H:W\subset R^n\text{->}R^n$ F-diferencijabilna u tački $x\in \operatorname{int}(W)$, tada je za svako $\alpha,\beta\in R$ preslikavanje $K:W\subset R^n\text{->}R^n$, $K(x)=\alpha G(x)+\beta H(x)$ takodje F-diferencijabilno u tački x i važi $K'(x)=\alpha G'(x)+\beta H'(x)$.

Teorema 0.14. Ako je $G(x)=Ax+b$, $A\in R^{n,n}$, $b\in R^n$, za $x\in R^n$, tada je $G'(x)=A$ za svako $x\in R^n$.

Teorema 0.15. Ako je matrica $A\in R^{n,n}$ takva da je $\rho(A)<1$ i $b\in R^n$, tada iterativni postupak

$$(J) \qquad x^{k+1} = Ax^k + b, \; k=0,1,\dots , \; x^0\in R^n,$$

ima R-faktor konvergencije $R_1(J,x)=\rho(A)$. Ako je još $\rho(A)>0$, tada je $O_R(J,x)=1$.

0.3. KARAKTERIZACIJA H-MATRICA

Neka su $e_i:R_+^{2p(i)}\text{->} R_+$, $p(i)\in N$, $i=1,2$, dve funkcije koje zadovoljavaju sledeći uslov

$$(0.4) \qquad x\geq y \Rightarrow e_i(x) \geq e_i(y), \text{ za sve } x,y\in R_+^{2p(i)}, i=1,2.$$

Za svako $A\in C^{n,n}$, $s\in N$, $J=\{j_1,\dots,j_q\}\subset N$ i $t_r\in\theta_r$ definišimo

$$e_1(A,t_r,s) = e_1(R_{i_1}(A),\dots,R_{i_r}(A),Q_{i_1}^{(s)},\dots,Q_{i_r}^{(s)}(A)),$$

$$e_2(A,J,s) = e_2(R_{j_1}(A),\dots,R_{j_q}(A),Q_{j_1}^{(s)},\dots,Q_{j_q}^{(s)}(A)).$$

$$e(A,t_r) = e_1(A,t_r,s) + e_2(A,J,s).$$

Očigledno je tada $p(1)=r$ i $p(2)=q$.
Dalje, sa $e_1^{(k)}$, $e_2^{(k)}$ i $e^{(k)}$ označimo funkcije gore navedenog oblika, a sa $K(m)=\{(e_1^{(k)},e_2^{(k)}):k=1,\dots,m\}$.
Napomenimo da u različitim funkcijama $e^{(k)}(A,t_r)$ mogu da figurišu različiti s i J, kao i da r može da zavisi od k. Drugim rečima, različite funkcije $e_1^{(k)}$ i $e_2^{(k)}$ mogu da imaju različite dimenzije.

Od interesa za dalje istraživanje biće samo dimenzije funkcija $e_1^{(k)}$, tj. prvih komponenti elemenata skupa $K(m)$.

Najpre, neka sve funkcije $e_1^{(k)}$ imaju istu dimenziju.

Definicija 0.21. Matrica A se naziva $K(m,r)$-dijagonalno dominantna ako i samo ako za svako $t_r\in\theta_r$ postoji $k\in\{1,\dots,m\}$, tako da važi

$$e^{(k)}(D,t_r) > e^{(k)}(S+T,t_r).$$

Definicija 0.22. Skup $K(m)$ se naziva K-regularan ako i samo ako je svaka $K(m,r)$-dijagonalno dominantna matrica regularna.

Neka sada različite funkcije $e_1^{(k)}$ mogu da imaju različite dimenzije.

Definicija 0.23. Matrica A se naziva $K(r(1),\dots,r(m))$-dijagonalno dominantna ako i samo ako za svako $j\in\{1,2,\dots,m\}$ i za svako $t_{r(j)}\in\theta_{r(j)}$ važi

$$e^{(j)}(D,t_{r(j)}) > e^{(j)}(S+T,t_{r(j)}).$$

Definicija 0.24. Skup $K(m)$ se naziva K_1-regularan ako i samo ako je svaka $K(r(1),\dots,r(m))$-dijagonalno dominantna matrica regularna.

Teorema 0.16. Neka je $K(m)$ K-regularan skup. Ako je matrica A $K(m,r)$-dijagonalno dominantna, tada je A H-matrica.

D o k a z : Ako je $A=D-T-S$, onda je $M(A)=|D|-|T|-|S|$. Označimo sa $M:=|D|^{-1}(|S|+|T|)$ i dokažimo da je $\rho(M)<1$.

Pretpostavimo suprotno, da postoji karakteristični koren λ matrice M sa osobinom $|\lambda|\geq 1$. Kako je A, a samim tim i M(A) K(m,r)-dijagonalno dominantna matrica, sledi da je to i matrica $N:=\lambda|D|-|T|-|S|$, jer za svako $t_r \in \theta_r$ postoji $k\in\{1,\ldots,m\}$ takvo da važi

$$e^{(k)}(\lambda|D|,t_r)=e^{(k)}(|\lambda||D|,t_r)\geq e^{(k)}(|D|,t_r)>E^{(k)}(|S|+|T|,t_r).$$

K(m) je K-regularan skup, pa je, dakle, matrica N regularna. Medjutim, tada je i matrica $|D|^{-1}N = \lambda E-M$ regularna, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je λ karakteristični koren matrice M.

Dakle, $\rho(M)<1$, matrica E-M je regularna i

$$(E-M)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(M)^i \geq 0.$$

Tada $M(A)^{-1}$ postoji i $M(A)^{-1} = (E-M)^{-1}|D| \geq 0$.

Analogno možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 0.17. Neka je K(m) K_1-regularan skup. Ako je matrica A K(r(1),...,r(m))-dijagonalno dominantna, tada je A H-matrica.

Teorema 0.18. Matrica $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$ je H-matrica ako važi bar jedan od sledećih uslova:

(i) $|a_{ii}| > P_i(A)$, $i\in N$, (A je SDD),

(ii) $|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(A)$, $i\in N$, za neko $\alpha\in[0,1]$,

(iii) $|a_{ii}| > P_i^{\alpha}(A)Q_i^{1-\alpha}(A)$, $i\in N$, za neko $\alpha\in[0,1]$,

(iv) $|a_{ii}||a_{jj}| > P_i(A)P_j(A)$, $i\in N$, $j\in N(i)$,

(v) $|a_{ii}||a_{jj}| > P_i^{\alpha}(A)Q_i^{1-\alpha}(A)P_j^{\alpha}(A)Q_j^{1-\alpha}(A)$, $i\in N$, $j\in N(i)$,

za neko $\alpha\in[0,1]$,

(vi) Za svako $i \in N$ važi

$$|a_{ii}| > P_i(A) \quad \text{ili}$$

$$|a_{ii}| + \sum_{j\in J} |a_{jj}| > Q_i(A) + \sum_{j\in J} Q_j(A),$$

gde je $J := \{i \in N : |a_{ii}| \le Q_i(A)\}$,

(vii) $|a_{ii}| > \min(P_i(A), Q_i^*(A))$, $i \in N$ i

$$|a_{ii}| + |a_{jj}| > P_i(A) + P_j(A),\ i \in N,\ j \in N(i),$$

(viii) $|a_{ii}| > Q_i^{(p)}(S+T)$, $i \in N$ i

$$\sum_{j\in t_p} |a_{ii}| > \sum_{j\in t_p} P_i(A),\quad t_p \in \theta_p, \text{ za neko } p \in N,$$

(ix) Postoji $i \in N$ takvo da je

$$|a_{ii}|(|a_{jj}| - P_j(A) + |a_{ji}|) > P_i(A)|a_{ji}|,\ j \in N(i).$$

D o k a z :

(ix) se dokazuje slično kao u dokazu Teoreme 0.16.

(i) $|a_{ii}| = R_i(D) > R_i(S+T) = P_i(A)$, $i \in N$.

Neka je $r=1$, $m=1$ i $e_1(x_1,x_2)=x_1, e_2=0$. Uslov (i) znači da je A K(1,1)-dijagonalno dominantna. Kako je $K(1,1)=\{(e_1,e_2)\}$ K-regularan skup, na osnovu Teoreme 0.16 sledi da je A H-matrica.

Tvrdjenja (ii)-(viii) mogu se slično dokazati ako biramo :

uslov	m	r	s	$e_1^{(k)}, k=1,\dots,m$	$e_2^{(k)}, k=1,\dots,m$
(ii)	1	1	n	$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$	0
(iii)	1	1	n	$x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$	0
(iv)	1	2	n	x_1x_2	0
(v)	1	2	n	$(x_1x_2)^{\alpha}(x_3x_4)^{1-\alpha}$	0
(vi)	2	1	n	x_1	0
				x_2	$\sum_{j\in J} x_{j+q}$, $q=\text{card } J$
(vii)	2	1	1	$\min(x_1,x_2)$	0
		2	n	x_1+x_2	0
(viii)	2	1	p	x_2	0
		p	p	$\sum_{j\in t_p} x_j$	0

<u>Teorema 0.19.</u> Matrica A je GDD ako i samo ako je H-matrica.

D o k a z : Neka je A GDD. Tada postoji regularna dijagonalna matrica W takva da je AW SDD. Tada je AW H-matrica, tj. $M(AW)=M(A)M(W)$ je M-matrica. Pošto je $M(W)$ regularna i $M(W)>0$, sledi

$$(M(A))^{-1} = M(W)(M(AW))^{-1} \geq 0.$$

Obrnuto, ako je A H-matrica, tj. ako je $M(A)$ M-matrica, tada, postoji vektor $z\in R^{n,n}$, $z>0$, takav da je $M(A)z>0$, odnosno

$$|a_{ii}|z_i > \sum_{j\in N(i)} |a_{ij}|z_j \text{ za svako } i\in N.$$

Očigledno, za matricu W možemo izabrati $W=\text{diag}(z_1,\dots,z_n)$.

1. ITERATIVNO REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

1.1. AOR POSTUPAK

1.1.1. FORMULACIJA

Da bismo pokazali ideju kojom se dolazi do AOR postupka, posmatraćemo, radi jednostavnosti, sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

pri čemu ćemo pretpostaviti da je $a_{ii} \neq 0$, $i=1,2,3$. Sistem (1.1) može se zapisati u ekvivalentnom obliku

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11},\\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22},\\
x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Ako je poznata k-ta aproksimacija x_i^k, $i=1,2,3$, tačnog rešenja x_i, $i=1,2,3$, (k+1)-vu aproksimaciju možemo izračunati na sledeći način :

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)/a_{11},\\
x_2^{k+1} &= (b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k)/a_{22},\\
x_3^{k+1} &= (b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k)/a_{33}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Dobijeni postupak naziva se Jakobijev iterativni postupak. To je jedan od tzv. postupaka zajedničkog koraka, odnosno postupaka kod kojih se izračunate iteracije x_i^k, $i=1,2,3$, (komponente vektora x^k) koriste tek za izračunavanje komponenti vektora x^{k+1}.

Medjutim, sistem (1.2) može se rešavati i na drugi način :

$$x_1^{k+1} = (b_1-a_{12}x_2^k-a_{13}x_3^k)/a_{11},$$

$$x_2^{k+1} = (b_2-a_{21}x_1^{k+1}-a_{23}x_3^k)/a_{22}, \qquad (1.4)$$

$$x_3^{k+1} = (b_3-a_{31}x_1^{k+1}-a_{32}x_2^{k+1})/a_{33}.$$

Tako dobijeni postupak naziva se Gaus-Zajdelov iterativni postupak, koji spada u klasu tzv. postupaka pojedinačnog koraka, tj. onih kod kojih se za izračunavanje nove komponente x_i^{k+1} vektora x^{k+1} koriste već izračunate komponente $x_1^{k+1},\dots,$ x_{i-1}^{k+1} tog vektora.

Imajući u vidu navedenu razliku izmedju Jakobijevog i Gaus-Zajdelovog postupka, može se očekivati da Gaus-Zajdelov postupak brže konvergira od Jakobijevog. Medjutim, to nije tačno. Primer 1.1.1 pokazuje da u nekim slučajevima Gaus-Zajdelov postupak ne konvergira, a Jakobijev konvergira, dok je u drugim slučajevima obrnuto.

Zaključujemo, dakle, da je od interesa ispitivati kako postupke zajedničkog, tako i postupke pojedinačnog koraka.

Postupak (1.3) može se zapisati u sledećem obliku :

$$x_1^{k+1} = x_1^k + (b_1-a_{11}x_1^k-a_{12}x_2^k-a_{13}x_3^k)/a_{11},$$

$$x_2^{k+1} = x_2^k + (b_2-a_{21}x_1^k-a_{22}x_2^k-a_{23}x_3^k)/a_{22}, \qquad (1.5)$$

$$x_3^{k+1} = x_3^k + (b_3-a_{31}x_1^k-a_{32}x_2^k-a_{33}x_3^k)/a_{33}.$$

Veličine koje "dodajemo" komponentama x_1^k, x_2^k, x_3^k da bismo dobili x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, x_3^{k+1} označimo redom sa δ_1^k, δ_2^k, δ_3^k. Dakle,

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \delta_i^k, \quad i=1,2,3.$$

Ukoliko te veličine "korigujemo" pomoću realnog parametra $\omega \neq 0$ i dodamo već izračunatim komponentama dobijamo tzv. JOR (Jacobi overrelaxation) postupak.

$$(1.6) \qquad x_i^{k+1} = x_i^k + \omega\delta_i^k, \quad i=1,2,3,$$

koji takodje spada u grupu postupaka zajedničkog koraka.

Po istom principu od Gaus-Zajdelovog postupka možemo formirati novi postupak :

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} x_1^{k+1} &= x_1^k + \omega(b_1 - a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)/a_{11}, \\ x_2^{k+1} &= x_2^k + \omega(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{22}x_2^k - a_{23}x_3^k)/a_{22}, \\ x_3^{k+1} &= x_3^k + \omega(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{33}x_3^k)/a_{33}, \end{aligned}$$

koji se naziva SOR (succesive overrelaxation) postupak i spada u grupu postupaka pojedinačnog koraka. Zapišimo ga u obliku

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega\gamma_i^k \ , \quad i=1,2,3.$$

Formirajmo sada postupak koji kombinuje "popravke" i Jakobijevog i Gaus-Zajdelovog postupka koristeći dva realna parametra $\omega \neq 0$ i σ :

$$(1.8) \qquad x_i^{k+1} = x_i^k + (\omega-\sigma)\delta_i^k + \sigma\gamma_i^k \ , \quad i=1,2,3.$$

Dobijeni postupak poznat je pod imenom AOR (accelerated overrelaxation) postupak. Spada u grupu postupaka pojedinačnog koraka, za $\sigma=0$ svodi se na JOR postupak, a za $\sigma=\omega$ svodi se na SOR postupak. Ima za cilj, kao i JOR i SOR postupci, ubrzanje konvergencije, o čemu će kasnije biti reči.

Zapišimo sada sistem (1.1) u matričnom obliku

$$Ax = b.$$

Neka je $A=D-T-S=D(E-L-U)$ standardno razlaganje matrice A. Tada su formirane iteracije u matričnom zapisu sledećeg oblika :

Jakobijev postupak:

$$x^{k+1} = (L+U)x^{k} + D^{-1}b\ ,$$

Gaus-Zajdelov postupak:

$$x^{k+1} = (E-L)^{-1}Ux^{k} + (E-L)^{-1}D^{-1}b,$$

JOR postupak:

$$x^{k+1} = ((1-\omega)E+\omega(L+U))x^{k} + \omega D^{-1}b\ ,$$

SOR postupak:

$$x^{k+1} = (E-\omega L)^{-1}((1-\omega)E+\omega U)x^{k} + \omega(E-\omega L)^{-1}D^{-1}b,$$

AOR postupak:

$$x^{k+1} = (E-\sigma L)^{-1}((1-\omega)E+(\omega-\sigma)L+\omega U)x^{k} + \omega(E-\sigma L)^{-1}D^{-1}b.$$

U prvom delu disertacije bavićemo se iterativnim rešavanjem sistema linearnih jednačina

(1.9) $\quad Ax = b,$

gde je $A\in C^{n,n}$ regularna matrica sa osobinom $a_{ii}\neq 0$, $i\in N$, a

$b \in C^n$. Sistem (1.9) rešavaćemo AOR postupkom

$$\text{(AOR)} \quad x^0 \in C^n, \quad x^{k+1} = M_{\sigma,\omega} x^k + d_{\sigma,\omega}, \quad k=0,1,\ldots,$$

gde je $M_{\sigma,\omega} = (E-\sigma L)^{-1}((1-\omega)E+(\omega-\sigma)L+\omega U)$,

$d_{\sigma,\omega} = \omega(E-\sigma L)^{-1}D^{-1}b$, $\sigma \in R$, $\omega \in R$, $\omega \neq 0$.

AOR postupak definisan je u radu Hadjidimosa [Ha,78], a po rečima samog autora (v.[Ha,86]) prvi rezultati o ovom postupku dobijeni su od strane Sislera 1973. godine.

Specijalni slučajevi AOR postupka su:

$$\text{AOR} \begin{cases} \xrightarrow{\sigma=0} \text{JOR} \xrightarrow{\omega=1} \text{Jakobijev} \\ \xrightarrow{\sigma=\omega} \text{SOR} \xrightarrow{\omega=1} \text{Gaus-Zajdelov} \end{cases}$$

Od nama dostupne literature SOR postupak najdetaljnije je proučen u knjizi Younga [Yo,71], a prvi rezultati o ovom postupku datiraju iz 1946. godine.

JOR postupak je ekstrapolirani Jakobijev postupak, pa se svi rezultati iz teorije ekstrapolacije mogu direktno primeniti na njega.

Takodje, AOR postupak može se smatrati ektrapolacionim postupkom. Naime, za $\sigma=0$, to je ekstrapolirani Jakobijev, a za $\sigma\neq 0$ ekstrapolirani SOR postupak :

$$M_{\sigma,\omega} = (1-\omega/\sigma)E + \omega/\sigma\, M_{\sigma,\sigma}, \quad \text{za } \sigma\neq 0.$$

Prvi zadatak u ovom delu biće ispitivanje konvergencije AOR postupka, tj. odredjivanje intervala za parametre σ i ω za koje AOR postupak konvergira. U opštem slučaju, kada se o matrici A sistema ništa ne zna, nije moguće vršiti nikakvu analizu. Zato ćemo o konvergenciji AOR postupka govoriti za neke specijalne klase matrica, koje se u praksi najčešće sreću.

Drugi zadatak, čini se dosta teži, biće odredjivanje parametara tako da AOR postupak što je moguće brže konvergira, u smislu Definicije 0.18. Prema Teoremi 0.15, brzinu konvergencije odredjuje $\rho(M_{\sigma,\omega})$. Dakle, pitanje glasi: za koje σ i ω je $\rho(M_{\sigma,\omega})$ minimalno.

1.1.2. STROGO DIJAGONALNO DOMINANTNE MATRICE

Ispitivanje konvergencije za klasu SDD matrica interesantno je iz dva razloga. Prvo, SDD matrice se vecma često susreću u praksi, te je od interesa ispitivati ih posebno, i drugo, intervali konvergencije za parametre AOR postupka dobijeni za SDD matrice mogu poslužiti za nalaženje intervala konvergencije za vecma široku klasu H-matrica.

Kao pomoćni rezultat izvedimo najpre jedno gornje ograničenje za spektralni radijus matrice koraka AOR postupka.

<u>Lema 1.1.</u> Neka je $1-|\sigma|P_i(L)>0$, $i\in N$. Tada važi

$$\rho(M_{\sigma,\omega})\leq \max_{1\leq i\leq n}(|1-\omega|+|\omega-\sigma|P_i(L)+|\omega|P_i(U))/(1-|\sigma|P_i(L)). \tag{1.10}$$

D o k a z : Pretpostavimo suprotno, da je za svako $i \in N$

$$|\lambda| > (|1-\omega|+|\omega-\sigma|P_i(L)+|\omega|P_i(U))/(1-|\sigma|P_i(L)),$$

gde je sa λ označen onaj karakteristični koren matrice $M_{\sigma,\omega}$, za koji je $\rho(M_{\sigma,\omega})=|\lambda|$. Tada za svako $i \in N$ važi:

$$|\lambda-1+\omega| \geq |\lambda|-|1-\omega| > |\omega-\sigma|P_i(L)+|\lambda||\sigma|P_i(L)+|\omega|P_i(U)$$

$$\geq |\omega+\sigma(\lambda-1)|P_i(L)+|\omega|P_i(U),$$

što znači da je matrica $(\lambda-1+\omega)E-(\omega+\sigma(\lambda-1))L-\omega U =: C$ SDD matrica,pa time i regularna. Medjutim,

$$C = \lambda(E-\sigma L)-((1-\omega)E+(\omega-\sigma)L+\omega U) = (E-\sigma L)(\lambda E-M_{\sigma,\omega}).$$

Kako je $E-\sigma L$ regularna matrica, sledi da je i $\lambda E-M_{\sigma,\omega}$ regularna, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je λ karakteristični koren matrice $M_{\sigma,\omega}$.

Dokažimo sada sledeću teoremu.

Teorema 1.1. Neka je A SDD matrica. Tada AOR postupak konvergira za :

(i) $0 \leq \sigma < 2/(1+\rho(M_{0,1}(M(A)))) =: s$,

$0<\omega<\max\{r:=2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})), t:=\min_i 2/(1+P_i(L+U))\}$ ili

(ii) $\max_i (-\omega(1-P_i(L+U))+2\max(0,\omega-1))/2P_i(L) < \sigma < 0$, $0<\omega<t$ ili

(iii) $t \leq \sigma < \min_i (\omega(1+P_i(L)-P_i(U))+2\min(0,1-\omega))/2P_i(L)$, $0<\omega<t$.

D o k a z :

(i) Pošto je A SDD matrica, na osnovu Teoreme 0.18 sledi da je M(A) M-matrica. Poznato je (v.[V,76]) da tada važi

$$0<\sigma<s \Rightarrow \rho(M_{\sigma,\sigma}) < 1 .$$

Na osnovu ekstrapolacione teoreme zaključujemo da je

$$\rho(M_{\sigma,\omega})<1 \quad \text{za } 0<\omega/\sigma<2/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})).$$

Prema tome, ostaje da se analizira slučaj

$$2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\leq\omega<t, \quad 0\leq\sigma<s.$$

Zbog $\sigma<2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))$, tada važi $0\leq\sigma<\omega<t$.

Lako se verifikuje da je za tako odabrano σ zadovoljen uslov

$$1-|\sigma|P_i(L)>0, \quad i\in N.$$

Pokažimo da za svako $i\in N$ važi implikacija:

$$0\leq\sigma<\omega<2/(1+P_i(L+U)) \Rightarrow |1-\omega|+(\omega-\sigma)P_i(L)+\omega P_i(U)<1-\sigma P_i(L).$$

Razlikujemo dva slučaja. Ako je $0<\omega<1$, važi

$$-\omega(1-P_i(L+U))<0 \Rightarrow 1-\omega+(\omega-\sigma)P_i(L)+\omega P_i(U)<1-\sigma P_i(L),$$

a ako je $1\leq\omega<2/(1+P_i(L+U))$ važi

$$\omega+\omega P_i(L+U)<2 \Rightarrow \omega-1+(\omega-\sigma)P_i(L)+\omega P_i(U)<1-\sigma P_i(L).$$

Sada, na osnovu Leme 1.1, sledi $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$.

Time je (i) u potpunosti dokazano.

(ii) Slično se dokazuje da za ovako odabrane σ i ω važi

$$1-|\sigma|P_i(L)>0, \ i\in N \ \text{ i}$$

$$|1-\omega|+(\omega-\sigma)P_i(L)+\omega P_i(U)<1+\sigma P_i(L), \ i\in N.$$

Tvrdjenje sledi na osnovu Leme 1.1.

(iii) U ovom slučaju za svako $i\in N$ važi

$$1-|\sigma|P_i(L)>0, \ \text{ i}$$

$$|1-\omega|+(\sigma-\omega)P_i(L)+\omega P_i(U)<1-\sigma P_i(L),$$

pa je, opet na osnovu Leme 1.1, $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$.

Kao što pokazuje primer 1.1.2 oblast konvergencije AOR postupka, dobijena pomoću Teoreme 1.1, šira je od oblasti konvergencije dobijene u [M,83], a samim tim i od ostalih oblasti, datih u navedenoj literaturi, koje se odnose na klasu SDD matrica.

Medjutim, koristeći drugačiju tehniku dokaza, koja se bazira na jednom uopštenju Sasenfeldovog kriterijuma, možemo još proširiti oblast konvergencije AOR postupka za klasu SDD matrica.

Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je

$$a_{ii}=1, \ i\in N.$$

Dokažimo najpre da važi sledeća lema.

<u>Lema 1.2.</u> Neka je $p_i(\sigma)=\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|(|1-\sigma|+|\sigma|p_j(\sigma)) + \sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|, \ i\in N$,

$p(\sigma)=\max_i p_i(\sigma)$. Tada za matricu $M_{\sigma,\omega}$ AOR postupka važi

$$\|M_{\sigma,\omega}\|_\infty \leq |1-\omega|+|\omega|p(\sigma).$$

D o k a z : Po definiciji matrične norme $\| \ \|_\infty$, postoji vektor $y\in C^n$, takav da je

$$\|y\|_\infty=1, \quad \|M_{\sigma,\omega}\|_\infty=\|M_{\sigma,\omega}y\|_\infty.$$

Označimo $z=M_{\sigma,\omega}y$. Dakle, važi:

$$(1.11) \qquad (E-\sigma L)z = ((1-\omega)E+(\omega-\sigma)L+\omega U)y.$$

Dokažimo da za svako $i\in N$ važi:

$$(1.12) \qquad |z_i-(1-\omega)y_i| \leq |\omega|p_i(\sigma) \text{ i } |z_i| \leq |1-\omega|+|\omega|p_i(\sigma).$$

Za $i=1$, na osnovu (1.11) imamo

$$z_1 = (1-\omega)y_1 - \omega\sum_{j=2}^{n} a_{1j}y_j,$$

pa (1.12) sledi zbog $|y_i|\leq 1$, $i\in N$.
Pretpostavimo da (1.12) važi za svako $i\leq k-1$ $(k=2,\dots,n)$ i dokažimo da tada važi i za $i=k$. Na osnovu (1.11) imamo

$$z_k-(1-\omega)y_k = -\omega\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}y_j - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}(\omega y_j+\sigma z_j-\sigma y_j)$$

$$= -\omega\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}y_j - \omega\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}[(1-\sigma)y_j+\sigma(z_j-(1-\omega)y_j)/\omega],$$

$$|z_k-(1-\omega)y_k| \leq |\omega|\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}| +$$

$$|\omega|\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|(|1-\sigma|+|\sigma||z_j-(1-\omega)y_j|/|\omega|)$$

$$\leq |\omega|p_k(\sigma).$$

Sada trivijalno sledi da je

$$|z_k| \le |1-\omega|+|\omega|p_k(\sigma).$$

Druga nejednakost iz (1.12) daje $\|z\|_\infty \le |1-\omega|+|\omega|p(\sigma)$, čime je dokaz kompletiran.

Direktna posledica dokazane leme je sledeća

<u>Lema 1.3.</u> Neka je $1-|\sigma|l_i > 0$, $i\in N$. Tada je

$$\|M_{\sigma,\omega}\|_\infty \le \max_i \ (|1-\omega|+(|\omega||1-\sigma|-|\sigma||1-\omega|)l_i+|\omega|u_i)/(1-|\sigma|l_i),$$

gde je $l_i=P_i(L)$, $u_i=P_i(U)$.

D o k a z : Očigledno je

$$p(\sigma) \le (|1-\sigma|+|\sigma|p(\sigma))l_m+u_m,$$

za $m\in N$ za koje je $p(\sigma)=p_m(\sigma)$. Dakle, važi

$$p(\sigma) \le \max_i \ (|1-\sigma|l_i+u_i)/(1-|\sigma|l_i).$$

Sada je

$$\|M_{\sigma,\omega}\|_\infty \le |1-\omega|+|\omega|p(\sigma)$$

$$\le \max_i \ (|1-\omega|+(|\omega||1-\sigma|-|\sigma||1-\omega|)l_i+|\omega|u_i)/(1-|\sigma|l_i),$$

čime je dokaz završen.

Lema 1.3 daje jedno gornje ograničenje (označimo ga sa ε) za spektralni radijus matrice $M_{\sigma,\omega}$, tako da dovoljne uslove za konvergenciju AOR postupka možemo pročitati iz uslova $\varepsilon < 1$. Jasno je da je uslov

$$|1-\omega|+|\omega|p(\sigma) < 1,$$

koji je izveden u [Ch,83] , opštiji od uslova $\varepsilon < 1$, ali on ne daje mogućnost da se unapred kaže kako treba birati parametre σ i ω da bi AOR postupak konvergirao. Medjutim, diskutovanjem nejednakosti $\varepsilon < 1$, uz korišćenje ekstrapolacione teoreme, možemo dobiti sledeću oblast konvergencije AOR postupka:

<u>Teorema 1.2.</u> Neka je A SDD matrica i neka je $A=E-L-U, l_i=P_i(L)$, $u_i=P_i(U)$, $i\in N$. Tada AOR postupak konvergira za:

(i) $0<\sigma<2/(1+\rho(M_{0,1}(M(A))))=:s$, $0<\omega<2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))=:r$ ili

(ii) $0<\omega\leq 1$, $-\min_i(1-l_i-u_i)/2l_i<\sigma<\min_i(1+l_i-u_i)/2l_i$ ili

(iii) $1<\omega<2-\max_i 2u_i/(1+u_i-l_i)=:q$,

$\max\{0,\max_i(\omega(1+l_i+u_i)-2)/2(\omega-1)l_i\}<\sigma<\min_i(2-\omega(1-l_i+u_i))/2l_i$,

pri čemu sa leve strane može da stoji znak jednakosti ako je maksimum jednak nuli, ili

(iv) $1<\omega<2/(1+\max_i(l_i+u_i))=:t$,

$\max_i(\omega(1+l_i+u_i)-2)/2l_i<\sigma<0$.

D o k a z : Lako se verifikuje da za svako σ, izabrano kao u (ii),(iii) ili (iv), važi

$1-|\sigma|l_i>0$, $i\in N$.

(i) Kako je A SDD matrica, to je $M(A)$ M-matrica, pa na osnovu [V,76] sledi da je za $0<\sigma<s$, $\rho(M_{\sigma,\sigma})<1$. Na osnovu ekstrapolacione teoreme sledi da je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$ za $0<\frac{\omega}{\sigma}<r$.

(ii) Ako je $0\leq\sigma\leq 1$, važi $|\omega||1-\sigma|-|\sigma||1-\omega|=\omega-\sigma$ i

$1-\omega+(\omega-\sigma)l_i+\omega u_i < 1-\sigma l_i$, $i\in N$ zbog

$$-\omega(1-l_i-u_i) < 0, \ i\in N.$$

Ako je $\sigma>1$, važi $|\omega||1-\sigma|-|\sigma||1-\omega|=2\sigma\omega-\sigma-\omega$ i

$$\begin{aligned}
&\sigma < (1-u_i+l_i)/2l_i \\
&\Rightarrow 2\sigma l_i < 1-u_i+l_i \\
&\Rightarrow 2\sigma\omega l_i-\omega+\omega u_i-\omega l_i < 0 \\
&\Rightarrow 1-\omega+(2\sigma\omega-\sigma-\omega)l_i+\omega u_i < 1-\sigma l_i, \ i\in N,
\end{aligned}$$

pa na osnovu Leme 1.3 dobijamo $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$.

Ako je $\sigma<0$, važi $|\omega||1-\sigma|-|\sigma||1-\omega|=\sigma+\omega-2\sigma\omega$ i

$$\begin{aligned}
&\sigma > -(1-l_i-u_i)/2l_i \\
&\Rightarrow -2\sigma\omega l_i < \omega-\omega l_i-\omega u_i \\
&\Rightarrow 1-\omega+(\sigma+\omega-2\sigma\omega)l_i+\omega u_i < 1+\sigma l_i, \ i\in N.
\end{aligned}$$

Na osnovu Leme 1.3 sledi da je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$.

(iii) i (iv) se dokazuju analogno, pomoću iste Leme 1.3.

Uporedimo oblasti konvergencije AOR postupka dobijene Teoremama 1.1 i 1.2. Neka je ispunjen uslov (ii) iz Teoreme 1.1. Ako je $0<\omega\leq 1$, važi (ii) iz Teoreme 1.2, a ako je $\omega>1$, zadovoljen je uslov (iv) iz Teoreme 1.2. Neka je sada ispunjen uslov (iii) iz Teoreme 1.1. Ako je $0<\omega\leq 1$, važi (ii) iz Teoreme 1.2, a ako je $\omega>1$ važi (iii) iz Teoreme 1.2. Ako važi uslov (i) iz Teoreme 1.1, tada ili važi i uslov (i) iz Teoreme 1.2, ili je $\sigma=0$, $0<\omega<t$, u kom slučaju je zadovoljeno (ii) ili (iii) iz Teoreme 1.2, ili je $0\leq\sigma<s$, $r\leq\omega<t$. U ovom poslednjem slučaju je zadovoljeno $0\leq\sigma<r\leq\omega<t$ i lako se proverava da važi jedan od uslova (ii) ili (iii) iz Teoreme 1.2.
Obrnuto, ako je zadovoljen jedan od uslova (ii) ili (iii) iz Teoreme 1.2, ne mora biti zadovoljen ni jedan uslov iz Teoreme 1.1. Kao ilustracija u kolikoj meri Teorema 1.2 daje širu oblast konvergencije nego Teorema 1.1, može poslužiti Primer 1.1.3.

1.1.3. H-MATRICE

Podsetimo se (Teorema 0.19) da je klasa H-matrica identična sa klasom GDD matrica.

Da bismo razlikovali matrice koraka AOR postupka za različite linearne sisteme, pisaćemo $M_{\sigma,\omega}(B)$ za matricu koraka AOR postupka za rešavanje sistema sa matricom B. U skladu sa dosadašnjim oznakama, bez opasnosti od zabune, pisaćemo $M_{\sigma,\omega}=M_{\sigma,\omega}(A)$.

Teorema, koja će nam omogućiti da iskoristimo tvrdjenja o konvergenciji AOR postupka za SDD matrice, dokazana je u radu [M,82] i glasi:

<u>Teorema 1.3.</u> Neka je $A\in C^{n,n}$ i $A^*=AW$, gde je $W\in C^{n,n}$ regularna dijagonalna matrica. Tada matrice koraka AOR postupka za A i A^* imaju iste karakteristične korene (za iste σ i ω).

D o k a z : Neka je $A^*=D^*(E-L^*-U^*)$ standardno razlaganje matrice A^*. Očigledno, tada je $D^*=DW$, $L^*=W^{-1}LW$, $U^*=W^{-1}UW$, pa je matrica koraka AOR postupka za A^*

$$
\begin{aligned}
M^*_{\sigma,\omega} &= (E-\sigma L^*)^{-1}((1-\omega)E+(\omega-\sigma)L^*+\omega U^*) \\
&= (E-\sigma W^{-1}LW)^{-1}((1-\omega)E+(\omega-\sigma)W^{-1}LW+\omega W^{-1}UW) \\
&= W^{-1}(E-\sigma L)^{-1}WW^{-1}((1-\omega)E+(\omega-\sigma)L+\omega U)W \\
&= W^{-1}M_{\sigma,\omega}W,
\end{aligned}
$$

slična sa $M_{\sigma,\omega}$, te imaju iste karakteristične korene.

<u>Teorema 1.4.</u> Neka je A H-matrica, tj. GDD matrica. Neka je W regularna dijagonalna matrica takva da je $A^*=AW$ SDD i $DW=E$. Neka je $l_i=P_i(LW)$, $u_i=P_i(UW)$. Tada je $\rho(M_{\sigma,\omega})=\rho(M^*_{\sigma,\omega})<1$ za:

(i) $\quad 0<\sigma<2/(1+\rho(M_{0,1}(M(A))))=:s,$

$\quad 0<\omega<r:=2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))$ ili

(ii) $\quad 0<\omega\leq 1, \; -\min_i(1-l_i-u_i)/2l_i<\sigma<\min_i(1+l_i-u_i)/2l_i$ ili

(iii) $\quad 1<\omega<2-\max_i 2u_i/(1+u_i-l_i)=:q,$

$$\max\{0,\max_i(\omega(1+l_i+u_i)-2)/2(\omega-1)l_i\}<\sigma<\min_i(2-\omega(1-l_i+u_i))/2l_i,$$

pri čemu sa leve strane može da stoji znak jednakosti ako je maksimum jednak nuli, ili

(iv) $\quad 1<\omega<2/(1+\max_i(l_i+u_i))=:t,$

$\quad \max_i(\omega(1+l_i+u_i)-2)/2l_i<\sigma<0.$

D o k a z : Ako primetimo da je $\rho(M_{0,1}(M(A)))=\rho(M_{0,1}(M(A^*)))$ i $\rho(M_{\sigma,\sigma}(A))=\rho(M_{\sigma,\sigma}(A^*))$, dokaz sledi direktno na osnovu Teoreme 1.2 i Teoreme 1.3.

Klasa H-matrica je veoma široka i to svakako doprinosi značaju Teoreme 1.4. Medjutim, ostaje problem nalaženja matrice W sa gore navedenim osobinama, koji se ne može rešiti generalno. Jedan način da se taj problem zaobidje jeste da se parametri biraju na sledeći način:

$\quad 0\leq\sigma<s, \; 0<\omega<r,$

ili još uže:

$\quad 0\leq\sigma\leq 1, \; 0<\omega\leq 1.$

Drugi način se sastoji u tome da umesto čitave klase H-matrica posmatramo neke njene potklase i za svaku pojedinačno nadjemo oblast konvergencije, koja će biti "proverljiva". Pokazaće se da je tako nadjena oblast ponekad čak i šira od odgovarajuće oblasti konvergencije iz Teoreme 1.4.

Napomenimo da Teorema 1.4, izmedju ostalog, daje i oblast konvergencije za klasu NDD, kao i za klasu M-matrica, koja je i dalje šira od svih oblasti konvergencije, koje se odnose na ove klase matrica, a date su u citiranoj literaturi.

1.1.4. NEKE POTKLASE H-MATRICA

U ovom delu koristićemo oznake iz paragrafa 0.3. Funkcionele e_i, $i=1,2$, osim uslova (0.4), neka zadovoljavaju i sledeći uslov:

$$(1.13)\quad e_i(\alpha x+\beta y) = \alpha e_i(x)+\beta e_i(y), \text{za sve } \alpha,\beta\in R_+,\ x,y\in R_+^{2p(i)}.$$

Lema 1.4. Neka je $K(1)=\{(e_1,e_2)\}$ K-regularan skup i $p=e(E,t_r)$ za svako $t_r\in\theta_r$ (s i J su fiksirani). Ako je $|\sigma|e(L,t_r)<p$ za svako $t_r\in\theta_r$, tada važi

$$\rho(M_{\sigma,\omega}) \leq \max_{t_r\in\theta_r}\frac{p|1-\omega|+|\omega-\sigma|e(L,t_r)+|\omega|e(U,t_r)}{p-|\sigma|e(L,t_r)} .$$

D o k a z : Radi kraćeg pisanja označimo $e(A):=e(A,t_r)$. Pretpostavimo suprotno, da postoji karakteristični koren λ matrice $M_{\sigma,\omega}$ sa osobinom

$$|\lambda| > \frac{p|1-\omega|+|\omega-\sigma|e(L)+|\omega|e(U)}{p-|\sigma|e(L)},\ \text{za svako } t_r\in\theta_r.$$

Tada važi

$$\begin{aligned} p|\lambda-1+\omega| &\geq p|\lambda|-p|1-\omega| > (|\sigma\lambda|+|\omega-\sigma|)e(L)+|\omega|e(U)\\ &\geq |\omega+\sigma(\lambda-1)|e(L)+|\omega|e(U)\\ &= e(|\omega+\sigma(\lambda-1)|L+|\omega|U). \end{aligned}$$

(Poslednja jednakost sledi na osnovu osobine (1.13).)
To znači da je matrica $B:=(1-\lambda-\omega)E+(\omega+\sigma(\lambda-1))L+\omega U$ $K(1,r)$-dijagonalno dominantna. Kako je $K(1)$ K-regularan skup, sledi $\det B\neq 0$. Medjutim, tada je i $\det(M_{\sigma,\omega}-\lambda E)=\det(E-\sigma L)^{-1}\det B \neq 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je λ karakteristični koren matrice $M_{\sigma,\omega}$.

<u>Teorema 1.5.</u> Neka je $K(1)=\{(e_1,e_2)\}$ K-regularan skup, $D^{-1}A$ $K(1,r)$-dijagonalno dominantna matrica i $p=e(E,t_r)$. Tada je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$ za:

(i) $0\leq\sigma<\max\{2/(1+\rho(M_{0,1}(M(A))))=:s,\ \min\limits_{t_r\in\theta_r} 2p/(p+e(L+U,t_r))=:t'\}$,

$0<\omega<\max\{2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})),t'\}$ ili

(ii) $\max\limits_{t_r\in\theta_r}(-\omega(p-e(L+U,t_r))+2p\max(0,\omega-1))/2e(L,t_r)<\sigma<0$, $0<\omega<t'$ ili

(iii) $t'\leq\sigma<\min\limits_{t_r\in\theta_r}(\omega(p+e(L,t_r)-e(U,t_r))+2p\min(0,1-\omega))/2e(L,t_r)$, $0<\omega<t'$.

D o k a z : (i) Na osnovu Teoreme 0.16 sledi da je $D^{-1}A$ H-matrica. Tada je, medjutim i A H-matrica, pa kao u dokazu Teoreme 1.1 zaključujemo da je $\rho(M_{\sigma,\omega}) < 1$ za

$$0<\sigma<s,\ 0<\omega/\sigma<2/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})).$$

Na osnovu Leme 1.4, lako se pokazuje da je za $0<\sigma<t'$ $\rho(M_{\sigma,\sigma})<1$, pa na osnovu ekstrapolacione teoreme sledi da je i za $0<\sigma<t'$, $0<\omega/\sigma<2/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))$, takodje $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$.

Ostaje da se analizira slučaj $2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\leq\omega<t'$, $0\leq\sigma<\max\{s,t'\}$. Zbog $\sigma<2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))$, sledi $0\leq\sigma<\omega<t'$, $p-\sigma e(L)>0$ i

$$0\le\sigma<\omega<2p/(p+e(L)+e(U)) \Rightarrow p|1-\omega|+(\omega-\sigma)e(L)+\omega e(U)<p-\sigma e(L).$$

Primetimo da je $p=e(E) > e(L+U)$. (Ponovo skraćeno pišemo $e(A):=e(A,t_r)$.) Na osnovu Leme 1.4 sada sledi $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$.

(ii) i (iii) se dokazuju slično, koristeći Lemu 1.4.

<u>Posledica 1.5.1.</u> Neka je $\alpha\in[0,1]$ i A matrica sa osobinom

$$1 > P_{i,\alpha}(D^{-1}A)\ ,\ i\in N.$$

Tada je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$ za :

(i) $0\le\sigma<\max\{s, \min_i 2/(1+P_{i,\alpha}(L+U))=:t'\}$,

$0<\omega<\max\{t',2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\}$ ili

(ii) ili (iii) kao u Teoremi 1.1 , pri čemu je svako P_i zamenjeno sa $P_{i,\alpha}$, a t sa t'.

<u>Posledica 1.5.2.</u> Neka je A matrica sa osobinom

$$2 > P_i(D^{-1}A)+P_j(D^{-1}A),\ i\in N,\ j\in N(i).$$

Tada je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$ za :

(i) $0\le\sigma<\max\{s, \min_{i\ne j} 4/(2+P_i(L+U)+P_j(L+U))=:t'\}$,

$0<\omega<\max\{t',2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\}$ ili

(ii) ili (iii) kao u Teoremi 1.1 , pri čemu je svako P_i zamenjeno sa $(P_i+P_j)/2$, max i min se traže po $i\ne j$, a t je zamenjeno sa t'.

1.1.5. POZITIVNO DEFINITNE MATRICE

U [Yo,71] dokazana je teorema po kojoj ako je A simetrična matrica sa pozitivnim dijagonalnim elementima, SOR postupak konvergira, tj. $\rho(M_{\omega,\omega})<1$ ako i samo ako je A pozitivno definitna i $0<\omega<2$. Direktna posledica ovog tvrdjenja i ekstrapolacione teoreme je tvrdjenje (i) sledeće teoreme.

Teorema 1.6. Neka je $A\in R^{n,n}$ pozitivno definitna matrica. Tada je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$ za:

(i) $0 < \sigma < 2$, $0 < \omega < 2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))$ ili

(ii) $\sigma=2$, $0 < \omega < 2$.

Dokaz tvrdjenja pod (ii) nalazi se u [AHaY,80].

1.1.6. KONZISTENTNO UREDJENE MATRICE

U ovom paragrafu razmatraćemo klasu konzistentno uredjenih matrica, uz napomenu da dobijena tvrdjenja možemo primeniti i na klasu matrica sa "osobinom A", koja je šira. Naime, na osnovu Teoreme 0.7, svaka matrica sa "osobinom A" može se pomoću jedne permutacione matrice transformisati u konzistentno uredjenu matricu.

Lema 1.5. Neka je $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$ konzistentno uredjena matrica, takva da je $a_{ii}\neq 0$ za svako $i\in N$. Neka je $\omega\in R$, $\omega\neq 0$. Tada važi:

(i) Ako je μ karakteristični koren matrice $L+U$ višestrukosti p, tada je $-\mu$ takodje karakteristični koren matrice $L+U$ višestrukosti p;

(ii) λ zadovoljava jednačinu $(\lambda+\omega-1)^2=\omega^2\mu^2\lambda$ za neki karakteristični koren μ matrice $L+U$ ako i samo ako λ zadovoljava jednačinu $\lambda+\omega-1=\omega\mu\lambda^{1/2}$ za neki karakteristični koren μ matrice $L+U$;

(iii) λ zadovoljava jednu odnosno obe jednačine iz (ii) za neki karakteristični koren μ matrice $L+U$ ako i samo ako je λ karakteristični koren matrice $M_{\omega,\omega}$.

D o k a z : (i) Na osnovu Teoreme 0.4 sledi (za $\alpha=1,\alpha=-1$)

$$\det(T+S-\mu D)=\det(-T-S-\mu D)=\pm\det(T+S+\mu D),\ \text{odnosno}$$

$$\det(L+U-\mu E)=\pm\det(L+U+\mu E),$$

što znači da je karakteristični polinom matrice $L+U$ polinom po stepenima μ^2.

(ii) Pretpostavimo da λ zadovoljava jednačinu

$$(*)\qquad (\lambda+\omega-1)^2=\omega^2\mu^2\lambda$$

za neki karakteristični koren μ matrice $L+U$. Tada je ili

$$(**)\qquad \lambda+\omega-1=\omega\mu\lambda^{1/2}$$

$$\text{ili}\qquad \lambda+\omega-1=-\omega\mu\lambda^{1/2}.$$

U poslednjem slučaju λ takodje zadovoljava jednačinu (**) za karakteristični koren $-\mu$ matrice $L+U$.

Obrnuta implikacija sledi trivijalno.

(iii) Pretpostavimo da λ zadovoljava jednačine (*) i (**). Ako je $\lambda=0$, tada je $\omega=1$, pa je

$$\det(\lambda E-M_{1,1})=\det(E-L)^{-1}\det(\lambda E-\lambda L-U)=0,$$

što znači da je $\lambda=0$ karakteristični koren matrice $M_{1,1}$.
Ako je $\lambda\neq 0$, tada je

$$\begin{aligned}\det(M_{\omega,\omega}-\lambda E)&=\det(\omega U+\omega\lambda L-(\lambda+\omega-1)E)\\&=\omega^n\lambda^{n/2}\det(\lambda^{1/2}L+\lambda^{-1/2}U-(\lambda+\omega-1)\omega^{-1}\lambda^{-1/2}E)\\&=\omega^n\lambda^{n/2}\det(L+U-(\lambda+\omega-1)\omega^{-1}\lambda^{-1/2}E)\\&=\omega^n\lambda^{n/2}\det(L+U-\mu E)=0.\end{aligned}$$

Obrnuto, neka je λ karakteristični koren matrice $M_{\omega,\omega}$. Tada je za $\lambda=0$ $\det(M_{\omega,\omega})=(1-\omega)^n=0$, dakle $\omega=1$, pa je jednačina (*) zadovoljena za svaki karakteristični μ koren matrice L+U.
Ako je $\lambda\neq 0$, tada je

$$\det(M_{\omega,\omega}-\lambda E)=\omega^n\lambda^{n/2}\det(L+U-(\lambda+\omega-1)\omega^{-1}\lambda^{-1/2}E)=0,$$

što znači da je $(\lambda+\omega-1)\omega^{-1}\lambda^{-1/2}$ karakteristični koren matrice L+U.

Teorema 1.7. Neka je $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$ konzistentno uredjena matrica sa osobinom $a_{ii}\neq 0$, $i\in N$. Tada za neko μ, koje je karakteristični koren matrice L+U, λ zadovoljava jednačinu

$$(1.14)\qquad (\lambda-1+\omega)^2=\omega\mu^2(\sigma(\lambda-1)+\omega)$$

ako i samo ako je λ karakteristični koren matrice $M_{\sigma,\omega}$.

D o k a z : Na osnovu Leme 1.5 (iii), γ je karakteristični koren matrice $M_{\sigma,\sigma}$ ako i samo ako je

$$(\gamma-1+\sigma)^2=\sigma^2\mu^2\gamma$$

za neki karakteristični koren μ matrice L+U.
Neka je $\sigma\neq 0$. Tada je λ karakteristični koren matrice $M_{\sigma,\omega}$ ako i samo ako je

$$\lambda = 1 - \frac{\omega}{\sigma} + \frac{\omega}{\sigma}\gamma, \text{ tj. } \gamma = (\omega+\sigma(\lambda-1))/\omega$$

za neki karakteristični koren γ matrice $M_{\sigma,\sigma}$. Dakle, λ je karakteristični koren matrice $M_{\sigma,\omega}$ ako i samo ako je

$$(\sigma-1+(\omega+\sigma(\lambda-1))/\omega)^2=\sigma^2\mu^2(\omega+\sigma(\lambda-1))/\omega$$

za neki karakteristični koren μ matrice L+U, što je ekvivalentno sa (1.14).
Ako je $\sigma=0$, λ je karakteristični koren matrice $M_{0,\omega}$ ako i samo ako je $\lambda=1-\omega+\omega\mu$ za neki karakteristični koren matrice L+U, a to je, zbog Leme 1.5 (i), ekvivalentno sa (1.14).

Relacija (1.14) daje nam vezu izmedju karakterističnih korena AOR matrice i matrice Jakobijevog postupka u slučaju kada je matrica A konzistentno uredjena. Poznavanje takve veze omogućuje nam da damo potreban i dovoljan uslov za konvergenciju AOR postupka, jer umesto da odredjujemo parametre σ i ω iz uslova da je neko gornje ograničenje za spektralni radijus AOR matrice manje od jedan, sada ih odredjujemo iz uslova $|\lambda|<1$, za svaki karakteristični koren λ AOR matrice. Naravno, u mnogim slučajevima (kao što su SDD,NDD,H-matrice,na primer) nije nam poznata takva veza, pa smo prinudjeni da dajemo samo dovoljne uslove za konvergenciju.

Detaljno ispitivanje uslova $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$, koje je sprovedeno u [Ha,78], daje sledeću teoremu.

<u>Teorema 1.8.</u> Neka je $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$ konzistentno uredjena matrica sa osobinom $a_{ii}\neq 0$, $i\in N$. Neka matrica $L+U=M_{0,1}$ ima real-

ne karakteristične korene μ_i, $i\in N$ i neka je $\underline{\mu}=\min_i|\mu_i|$, $\bar{\mu}=\max_i|\mu_i|$. Tada je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$ ako i samo ako je $\bar{\mu}=\rho(M_{0,1})<1$ i $\sigma\in I_\sigma$, $\omega\in I_\omega$, gde je

za $\underline{\mu}\neq 0$:

$$I_\omega=(-2(1-\underline{\mu}^2)^{-1/2},0)\ ,\ I_\sigma=(\beta(\underline{\mu}^2),\alpha(\bar{\mu}^2))\quad \text{ili}$$

$$I_\omega=(0,2]\ ,\ I_\sigma=(\alpha(\bar{\mu}^2),\beta(\bar{\mu}^2))\quad \text{ili}$$

$$I_\omega=[2,2(1-\underline{\mu}^2)^{-1/2})\ ,\ I_\sigma=(\alpha(\bar{\mu}^2),\beta(\underline{\mu}^2))\ ,$$

a za $\underline{\mu}=0$:

$$I_\omega=(0,2)\ ,\ I_\sigma=(\alpha(\bar{\mu}^2),\beta(\bar{\mu}^2)).$$

Pri tom je

$$\alpha(z)=(2\omega z)^{-1}(\omega^2(z-1)+4\omega-4),\ \beta(z)=z^{-1}(\omega z-\omega+2),\ z>0,$$
$$\alpha(0)=-\infty\ ,\ \beta(0)=+\infty.$$

Ispitivanje uslova da matrica L+U ima realne karakteristične korene može se izbeći ako je A pozitivno definitna matrica. Naime, važi :

<u>Lema 1.6.</u> Ako je A pozitivno definitna konzistentno uredjena matrica, tada matrica L+U ima realne karakteristične korene i važi $\bar{\mu}=\rho(L+U)<1$.

D o k a z : Kako je A pozitivno definitna matrica, ona ima pozitivne dijagonalne elemente. Neka je μ karakteristični koren matrice L+U. Tada je $(L+U)x=\mu x$ za neko $x\neq 0$, odnosno $Ax=(1-\mu)Dx$. Dakle, $x^TAx=(1-\mu)x^TDx>0$, odakle sledi $1-\mu>0$.

Kako su, na osnovu Leme 1.5, μ i $-\mu$ istovremeno karakteristični koreni matrice L+U, sledi tvrdjenje.

Posledica 1.8.1. Ako je A pozitivno definitna konzistentno uredjena matrica, tada je $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$ za $\sigma \in I_{\sigma}$, $\omega \in I_{\omega}$, gde su I_{σ} i I_{ω} kao u Teoremi 1.8.

1.1.7. IZBOR PARAMETARA

Do sada smo se bavili pitanjem odredjivanja oblasti konvergencije AOR postupka. Medjutim, čak i u slučaju konzistentno uredjenih matrica, kada se zna za koje σ i ω AOR postupak konvergira, a za koje ne, nisu svi problemi rešeni. Naime, treba tada odabrati parametre tako da je konvergencija što je moguće brža. Kako se brzina konvergencije meri spektralnim radijusom AOR matrice, koji je funkcija od σ i ω, treba, dakle minimizirati tu funkciju po σ i ω. To je moguće učiniti samo u slučaju kada se zna zavisnost karakterističnih korena AOR matrice od σ i ω.

Problem optimalnog izbora parametara AOR postupka razmatran je u radovima [AHa,81],[Mi,84],[Mi,84a],[A-pK,84] za klasu konzistentno uredjenih matrica i u [GaHaY,83] za klasu pozitivno definitnih matrica.

Ukoliko se podsetimo da je AOR postupak ekstrapolirani SOR odnosno Jakobijev postupak, problem odredjivanja optimalnih parametara AOR postupka možemo obuhvatiti opštijim problemom optimalne ekstrapolacije, koji je razmatran u velikom broju radova, npr.[Ha,82a],[Ha,83],[HaY,82a].

U svakom slučaju, tehnika dokaza da je odredjeni izbor parametara optimalan veoma je komplikovana, iako se zasniva na jednostavnom principu - minimizaciji jedne funkcije ($\rho(M_{\sigma,\omega})$) od dve promenljive (σ i ω). Verovatno je to i razlog što su se u literaturi pojavila dva različita izbora "optimalnih" parametara za istu klasu matrica.Preciznije rečeno, u radu [AHa,81] dat je optimalan izbor parametara AOR postupka u slučaju kada je matrica A konzistentno uredjena, uz još neke dodatne pretpostavke. Medjutim, u radu [W*,84], koji je, na žalost, na kineskom jeziku, tvrdi se da u jednom slučaju taj izbor nije optimalan!

Ovde se nećemo zadržavati na iznošenju spomenutih rezultata. Zadovoljićemo se primerom 1.1.5, koji dobro ilustruje u kolikoj meri može brzina konvergencije da zavisi od izbora parametara, a koji ujedno pokazuje superiornost AOR postupka.

1.1.8. NUMERIČKI PRIMERI

Dva različita pristupa u iterativnom rešavanju linearnih sistema generišu dve grupe relaksacionih postupaka: postupke zajedničkog i postupke pojedinačnog koraka. Prvi primer pokazuje da u opštem slučaju nijednoj od ove dve grupe postupaka ne možemo dati prednost.

<u>Primer 1.1.1.</u> Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$M_{0,1}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{0,1}(B) = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{1,1}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix}, \quad M_{1,1}(B) = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$\rho(M_{0,1}(A))=0, \qquad \rho(M_{0,1}(B))=1,$$

$$\rho(M_{1,1}(A))=2(1+\sqrt{2}), \quad \rho(M_{1,1}(B))=1/2.$$

Dakle, za rešavanje sistema sa matricom A Jakobijev postupak konvergira za svaki početni vektor, a Gaus-Zajdelov ne, dok je kod rešavanja sistema sa matricom B obrnuto.

U citiranoj literaturi najšira oblast konvergencije za klasu SDD matrica dobijena je u [M,83]. Sledeća dva primera pokazuju koliko je proširenje dobijeno teoremama 1.1 i 1.2.

Primer 1.1.2. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

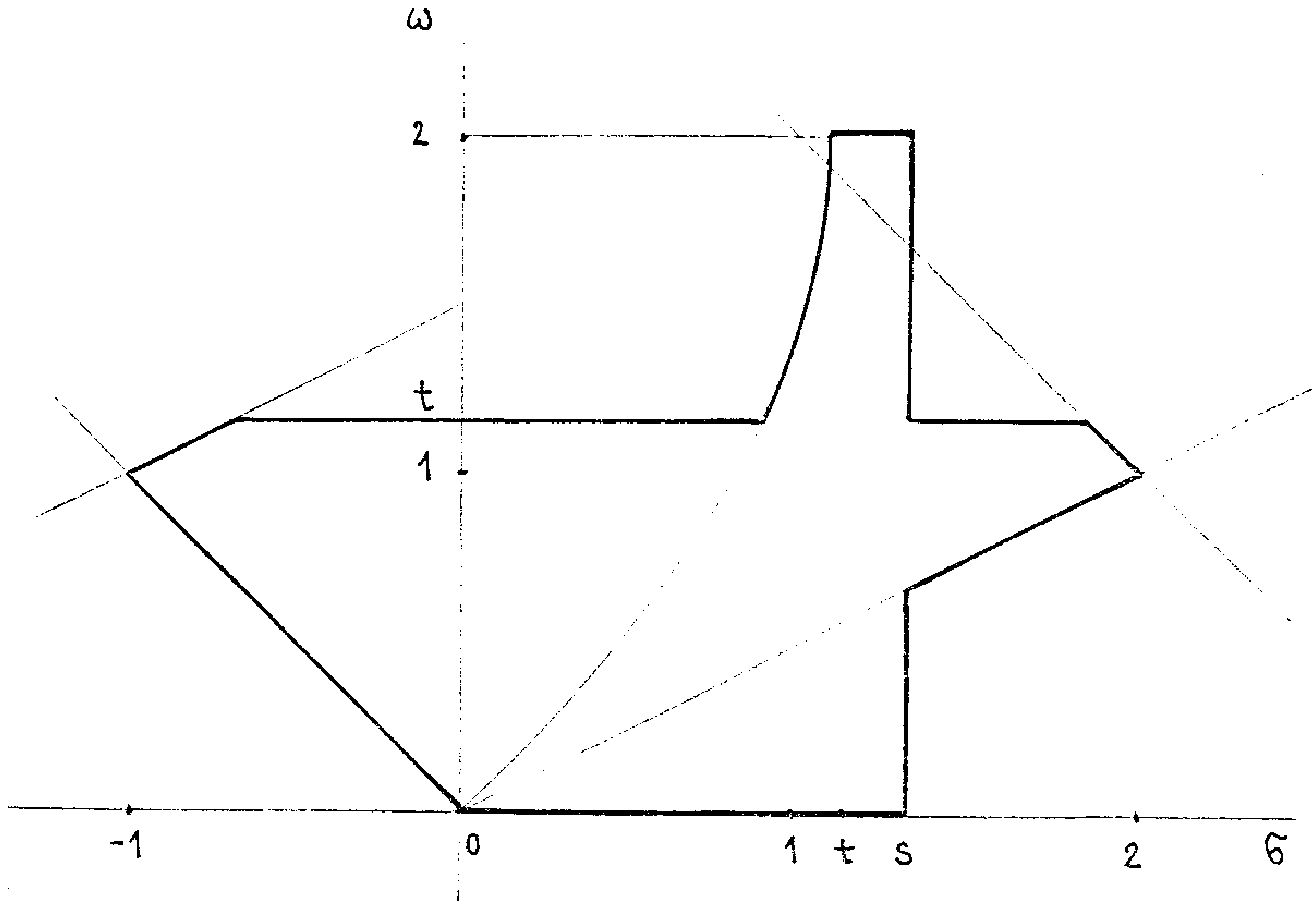
Na osnovu Teoreme 1.1, AOR postupak će konvergirati za svaki početni vektor ako parametre σ i ω biramo na sledeći način:

(i) $0\leq\sigma<4/3$, $0<\omega<\max\{8/7,2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\}$ ili

(ii) $0<\omega\leq1$, $-\omega<\sigma<0$ ili $1<\omega<8/7$, $2\omega-3<\sigma<0$ ili

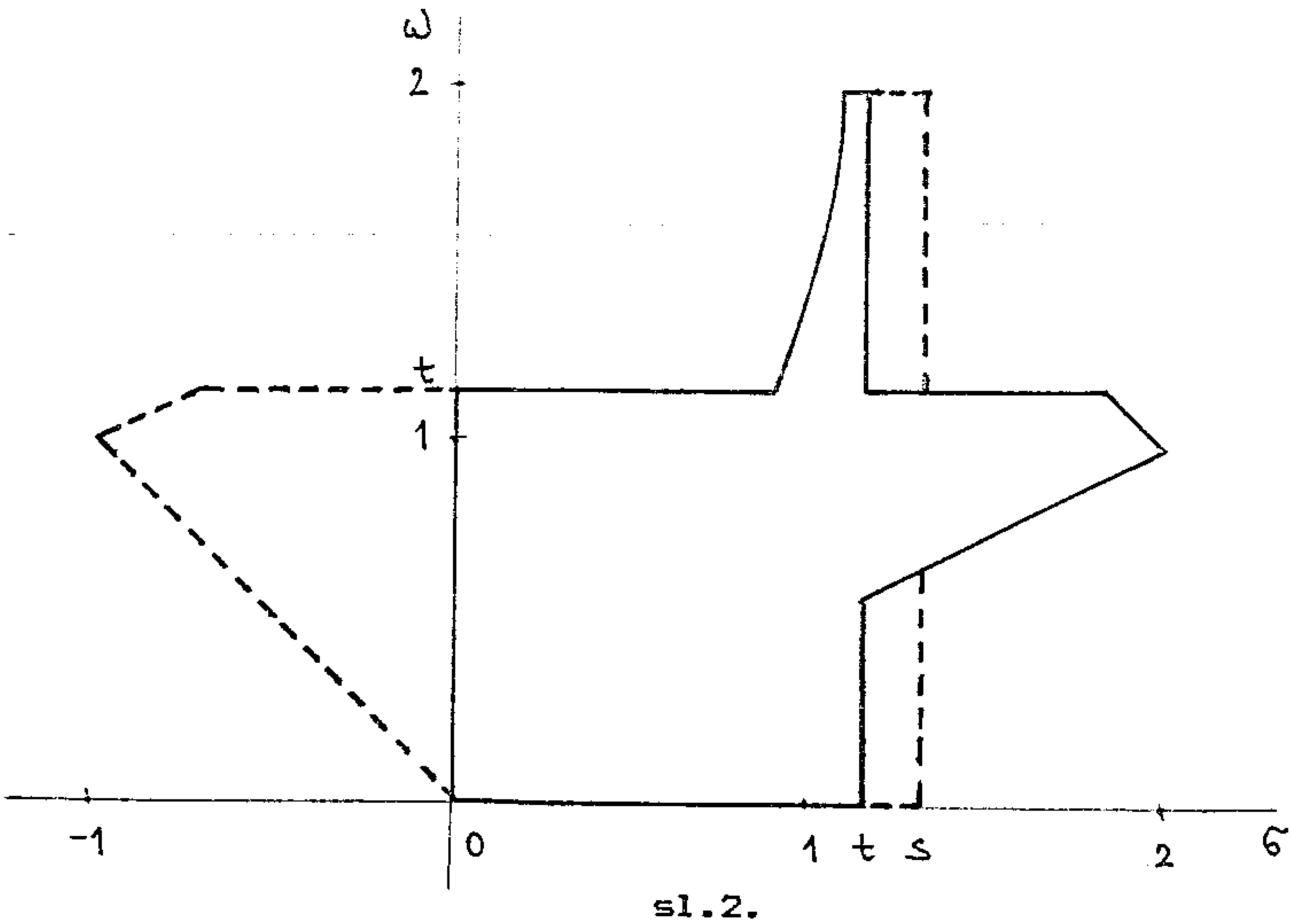
(iii) $0<\omega\leq1$, $8/7\leq\sigma<2\omega$ ili $1<\omega<8/7$, $8/7\leq\sigma<3-\omega$.

Geometrijska interpretacija ove oblasti data je na slici 1.



sl.1.

Slika 2 pokazuje koliko je gornja oblast (sada označena isprekidanom linijom) šira od oblasti konvergencije, koju daje Teorema 4 iz [M,83], a koja je označena punom linijom.



sl.2.

Primer 1.1.3. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.0625 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oblast konvergencije AOR postupka, dobijena na osnovu Teoreme 1.2 je:

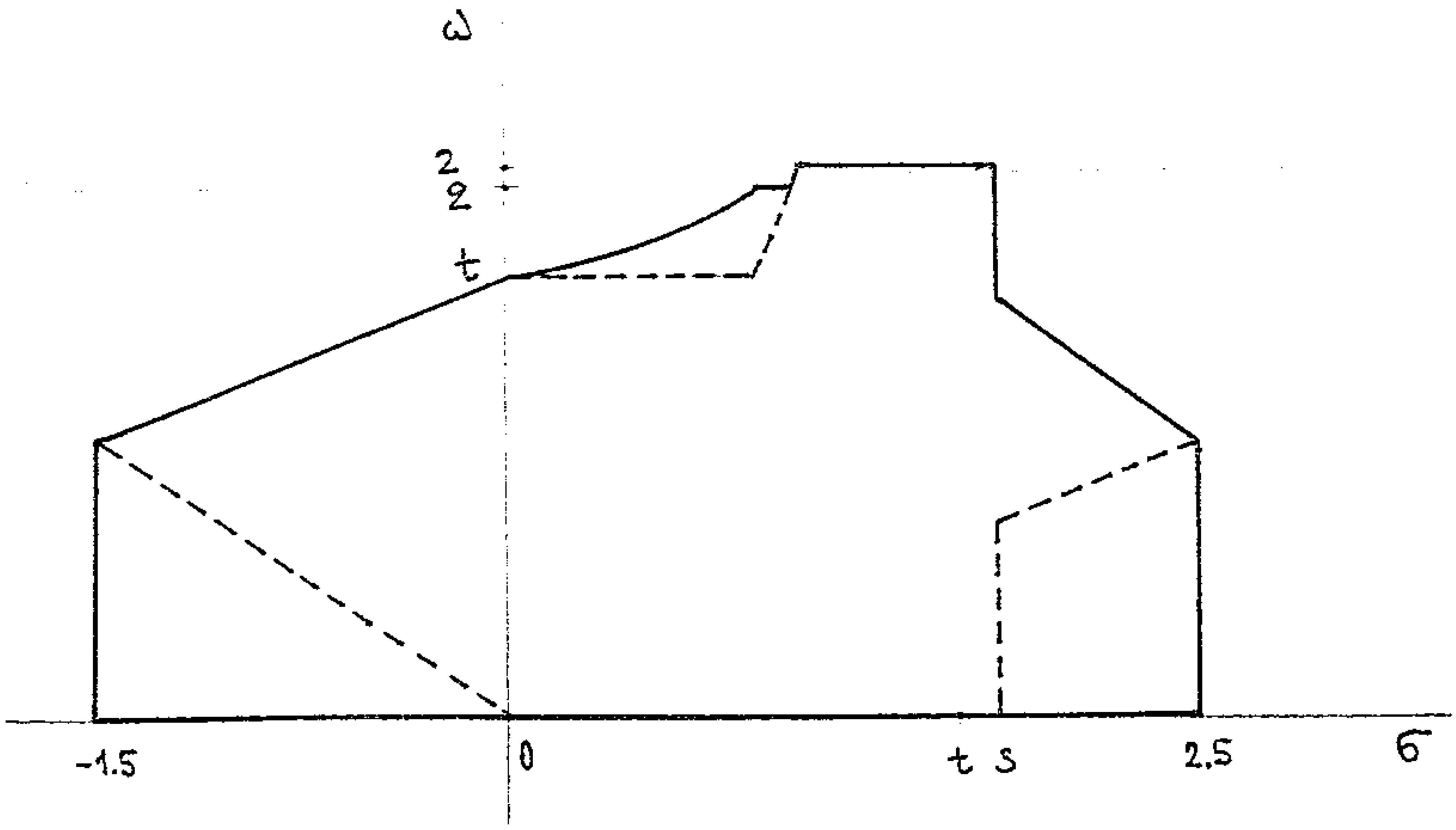
(i) $0 < \sigma < 16/9$, $0 < \omega < 2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))$ ili

(ii) $0 < \omega \leq 1$, $-1.5 < \sigma < 2.5$ ili

(iii) $1.6 < \omega < 32/17$, $(5\omega-8)/(2\omega-2) < \sigma < (8-3\omega)/2$ ili
$1 < \omega < 1.6$, $0 \leq \sigma < (8-3\omega)/2$ ili

(iv) $1 < \omega < 1.6$, $(5\omega-8)/2 < \sigma < 0$,

i prikazana je na slici 3 punom linijom. Ona je šira od oblasti dobijene na osnovu Teorema 1.1, prikazane na istoj slici isprekidanom linijom.



sl.3.

U radu [M,83] Teorema 8 daje oblast konvergencije AOR postupka za klasu M-matrica (i samo za tu klasu). Da je ta oblast uža od one, koja se dobija na osnovu Teoreme 1.4, pokazuje isti ovaj primer 1.1.3, jer je matrica A ujedno i M-matrica.

Naravno, Teorema 1.4 daje oblast konvergencije sličnog tipa za mnogo širu klasu H-matrica.

Razlog za posebno ispitivanje nekih potklasa H-matrica bio je nepoznavanje matrice W, pomoću koje se H-matrica transformiše u SDD matricu. Medjutim, dokazane teoreme (npr. Posledica 1.5.1) daju ponekad i šire oblasti konvergencije, što se vidi na sledećem primeru.

Primer 1.1.4. Neka je A matrica kao u primeru 1.1.2. Pretpostavke Posledice 1.5.1 ispunjene su za $\alpha=0.5$. Kako je

$P_{i,\alpha}(L+U)=13/24$, $t'=48/37 > t=8/7$, oblast konvergencije koju

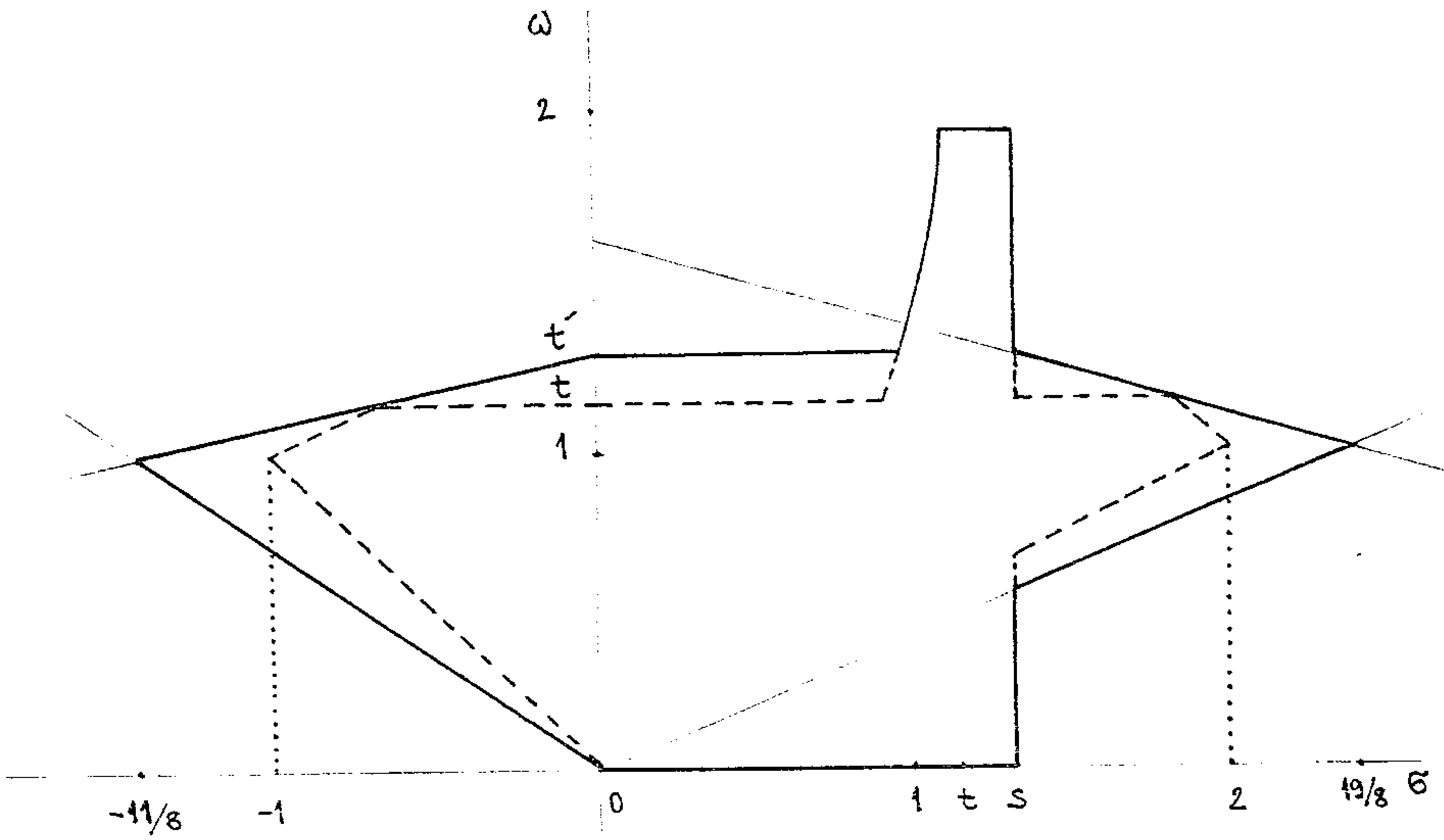
daje Posledica 1.5.1 je:

(i) $0\leq\sigma<4/3$, $0<\omega<\max\{48/37, 2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\}$ ili

(ii) $0<\omega\leq 1$, $-11/8\omega<\sigma<0$ ili $1<\omega<48/37$, $37/48\omega-6<\sigma<0$ ili

(iii) $0<\omega\leq 1$, $48/37\leq\sigma<19/8\omega$ ili $1<\omega<48/37$, $48/37\leq\sigma<6-29/8\omega$,

i, kao što se vidi na slici 4, šira je od oblasti dobijene pomoću Teoreme 1.1 (isprekidana linija), a nije cela obuhvaćena ni oblašću koju daje Teorema 1.2 (tačkasta linija).



sl.4

Koliko izbor parametara može da utiče na brzinu konvergencije pokazuje sledeći primer.

<u>Primer 1.1.5.</u> Sistem $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ima tačno rešenje $x=[1,1]^T$.

Kako je A konzistentno uredjena matrica, moguće je naći optimalne parametre kako SOR tako i AOR postupka. To su za AOR postupak $\sigma=3/2$, $\omega=3$ (prema [AHa,81]), a za SOR postupak $\omega=3/2$ (vidi, npr.[Yo,71]).

Sledeće dve tabele prikazuju približna rešenja posmatranog sistema dobijena optimalnim AOR i optimalnim SOR postupkom respektivno, polazeći od početnog vektora $x^0=0$.

optimalni AOR :

k	0	1	2	3
x^k	0	-1	1	1
	0	0	1	1

optimalni SOR :

k	0	1	2	3	...	40	41
x^k	0	-0.5	-0.25	0.125		0.9999999999	1
	0	0	0.25	0.5		1	1

Ukoliko bi se sistem rešavao Gaus-Zajdelovim postupkom, tačno rešenje bi se dobilo tek posle 205 iteracija. (Sva računanja su izvodjena sa deset cifara iza decimalne tačke.)
Velike razlike u broju potrebnih iteracija da bi se došlo do tačnog rešenja opravdava i veličina spektralnog radijusa pojedinih postupaka:

$$\rho(M_{3/2,3})=0, \quad \rho(M_{3/2,3/2})=1/2, \quad \rho(M_{1,1})=8/9.$$

1.2. MAOR POSTUPAK

1.2.1. FORMULACIJA I MOTIVACIJA

MAOR (modified accelerated overrelaxation) postupak formulisan je, najpre, u svojoj nelinearnoj varijanti, u radu [CH,85], kao dvoparametarska generalizacija tzv. vSOR-Njutnovog postupka, proučavanog u [Gi,80]. Medjutim, kao što ćemo videti u drugom delu teze, ispitivanje lokalne konvergencije tog nelinearnog postupka zasniva se na poznavanju uslova za konvergenciju odgovarajućeg linearnog postupka. Iz tog razloga od interesa je sprovesti najpre analizu konvergencije u linearnom slučaju.

Ipak, bez obzira kako i zašto je nastao, MAOR postupak se pokazao efikasnijim od AOR postupka u nekim slučajevima, što pokazuje primer 1.2.1.

Neka je $F = \mathrm{diag}(f_1,\dots,f_n)$ regularna matrica, a σ i ω neka su kao i do sada realni parametri, $\omega\neq 0$. Tada se MAOR postupak za rešavanje sistema $Ax=b$ može zapisati u obliku

$$x^{k+1} = M(F,\sigma,\omega)x^k + d\ ,\quad k=0,1,\dots\ ,\ x^0\in C^n,$$

gde je $M(F,\sigma,\omega)=(F-\sigma T)^{-1}(F-\omega D+(\omega-\sigma)T+\omega S)$, $d=\omega(F-\sigma T)^{-1}b$.

Očigledno je $M(D,\sigma,\omega)=M_{\sigma,\omega}$, tj. za $F=D$ MAOR postupak svodi se na AOR.

1.2.2. KONVERGENCIJA

U ovom delu bavićemo se ispitivanjem konvergencije MAOR postupka u slučaju kada je matrica sistema H-matrica. Pri tom ćemo stalno koristiti oznaku

$$q = \min_{i\in N} f_i/a_{ii}.$$

Teorema 1.9. Neka je A H-matrica, $f_i/a_{ii}\in R$ za svako $i\in N$, $q>0$ i $\sigma\in [0,q]$, $\omega\in (0,q]$. Tada je $\rho(M(F,\sigma,\omega))<1$, tj. MAOR postupak konvergira za svaki početni vektor.

D o k a z : Pretpostavimo suprotno, da postoji karakteristični koren λ matrice $M(F,\sigma,\omega)$ sa osobinom $|\lambda|\geq 1$. U [C,85] je pokazano da tada važi

$$(1.15)\qquad |(1-\lambda)f_i-\omega a_{ii}| \geq \varepsilon|a_{ii}| ,$$

gde je $\varepsilon = \max\{|\sigma(\lambda-1)+\omega|,\omega\}$.

Kako je A H-matrica, postoji regularna dijagonalna matrica $W=\mathrm{diag}(w_1,\dots,w_n)$ takva da je AW SDD matrica. Označimo sa

$$C=(1-\lambda)F-\omega D+(\omega+\sigma(\lambda-1))T+\omega S,$$

a elemente matrice C sa c_{ij}, $i,j\in N$. Važi:

$$\begin{aligned}|c_{ii}w_i| &> |c_{ii}| \sum_{j\in N(i)} |a_{ij}||w_j|/|a_{ii}| \\ &\geq \sum_{j\in N(i)} \varepsilon|a_{ij}||w_j| \\ &\geq \sum_{j<i} |\omega+\sigma(\lambda-1)||a_{ij}||w_j| + \sum_{j>i} \omega|a_{ij}||w_j|\end{aligned}$$

$$= \sum_{j\in N(i)} |c_{ij}||w_j| = P_i(CW),$$

tj. C je GDD (H-) matrica, pa time i regularna. Medjutim, tada je i $(F-\sigma T)^{-1}C = M(F,\sigma,\omega)-\lambda E$ regularna matrica, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je λ karakteristični koren matrice $M(F,\sigma,\omega)$.

Kao direktnu posledicu ove teoreme dobijamo tvrdjenja da MAOR postupak konvergira ako biramo $\sigma\in[0,q]$, $\omega\in(0,q]$, a matrica sistema je:

- strogo dijagonalno dominantna,
- nerazloživa dijagonalno dominantna,
- $K(m,r)$-dijagonalno dominantna, gde je $K(m)$ K-regularan skup,
- $K(r(1),\ldots,r(m))$-dijagonalno dominantna, gde je $K(m)$ K_1-regularan skup ili
- matrica čiji elementi zadovoljavaju bar jedan od uslova (i)-(ix) iz Teoreme 0.18.

Medjutim, u nekim od pomenutih slučajeva moguće je proširiti intervale konvergencije za σ i ω, koristeći ocene spektralnog radijusa matrice MAOR postupka. Tehnika kojom se dobija to proširenje slična je onoj iz paragrafa 1.1.2 (Lema 1.1 i Teorema 1.1) i prikazaćemo je na primeru klase matrica sa osobinom

$$|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(A),\ i\in N,$$

koja kao specijalan slučaj ($\alpha=1$) sadrži klasu SDD matrica.

Lema 1.7. Neka je $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$, $F=\mathrm{diag}(f_1,\ldots,f_n)\in C^{n,n}$, $\alpha\in[0,1]$ i $|f_i|-|\sigma|P_{i,\alpha}(T)>0$, $i\in N$. Tada je

$$\rho(M(F,\sigma,\omega)) \le \max_{i\in N} (|f_i-\omega a_{ii}|+|\omega-\sigma|t_i+|\omega|s_i)/(|f_i|-|\sigma|t_i),$$

gde je $t_i=P_{i,\alpha}(T)$, $s_i=P_{i,\alpha}(S)$, $i\in N$.

D o k a z : Primetimo najpre da je F regularna matrica. Pretpostavimo suprotno, da za neki karakteristični koren λ matrice $M(F,\sigma,\omega)$ važi

$$|\lambda| > (|f_i-\omega a_{ii}|+|\omega-\sigma|t_i+|\omega|s_i)/(|f_i|-|\sigma|t_i),\ i\in N.$$

Neka je C matrica kao u dokazu teoreme 1.9. Tada važi

$$\begin{aligned}|c_{ii}| &= |(\lambda-1)f_i+\omega a_{ii}| \geq |\lambda||f_i|-|f_i-\omega a_{ii}|\\ &> (|\sigma\lambda|+|\omega-\sigma|)t_i+|\omega|s_i\\ &\geq |\omega+\sigma(\lambda-1)|t_i+|\omega|s_i\\ &= P_{i,\alpha}(|\omega+\sigma(\lambda-1)|T+|\omega|S) = P_{i,\alpha}(C),\end{aligned}$$

pa na osnovu Teoreme 0.3 sledi $\det C\neq 0$, što je kontradikcija (vidi dokaz Teoreme 1.9).

Teorema 1.10. Neka je $A=[a_{ij}]\in C^{n,n}$, $F=\mathrm{diag}(f_1,...,f_n)\in C^{n,n}$, $\alpha\in[0,1]$ i $f_i>0$, $i\in N$ i neka važi

$$|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(A),\ i\in N,$$

Tada je $\rho(M(F,\sigma,\omega))<1$ za:

(i) $0\leq\sigma<\underline{t}:=\min_i 2f_i/(a_{ii}+P_{i,\alpha}(A))$,

$0<\omega<\max\{\underline{t},2\sigma/(1+\rho(M(F,\sigma,\sigma)))\}$ ili

(ii) $\max_i\ (-\omega(a_{ii}-P_{i,\alpha}(A))+2\max(0,\omega a_{ii}-f_i)/2P_{i,\alpha}(T)<\sigma<0$,

$0<\omega<\underline{t}$ ili

(iii) $\underline{t}\leq\sigma<\min_i\ (\omega(a_{ii}+P_{i,\alpha}(T)-P_{i,\alpha}(S))+2\min(0,f_i-\omega a_{ii}))/2P_{i,\alpha}(T)$,

$0<\omega<\underline{t}$.

D o k a z : Lako se verifikuje da je za svako σ, odabrano sa (i),(ii) ili (iii), zadovoljen uslov

$$f_i-|\sigma|P_{i,\alpha}(T)>0, \quad i\in N.$$

(i) Dokažimo najpre da važi

$$(1.16) \qquad 0<\sigma<\underline{t} \Rightarrow \rho(M(F,\sigma,\sigma)) < 1 .$$

Zbog Leme 1.7, dovoljno je dokazati da za svako $i\in N$ važi

$$0<\sigma<2f_i/(a_{ii}+P_{i,\alpha}(A)) \Rightarrow |f_i-\sigma a_{ii}|+\sigma s_i < f_i-\sigma t_i,$$

gde je $t_i=P_{i,\alpha}(T)$, $s_i=P_{i,\alpha}(S)$, $i\in N$.

Ako je $0<\sigma\leq f_i/a_{ii}$ sledi

$$-\sigma(a_{ii}-s_i-t_i) < 0 \text{ i}$$
$$f_i-\sigma a_{ii}+\sigma s_i < f_i-\sigma t_i.$$

Ako je $f_i/a_{ii}<\sigma<2f_i/(a_{ii}+P_{i,\alpha}(A))$ sledi

$$\sigma a_{ii}+\sigma P_{i,\alpha}(A) < 2f_i \text{ i}$$
$$-f_i+\sigma a_{ii}+\sigma s_i < f_i-\sigma t_i.$$

Time je (1.16) dokazano. Pošto je za $\sigma\neq 0$

$$M(F,\sigma,\omega) = (1-\frac{\omega}{\sigma})E + \frac{\omega}{\sigma} M(F,\sigma,\sigma),$$

na osnovu ekstrapolacione teoreme zaključujemo da je za

$0<\sigma<\underline{t}$, $0<\omega/\sigma<2/(1+\rho(M(F,\sigma,\sigma)))$, $\rho(M(F,\sigma,\omega))<1$.

Prema tome, ostaje da se analiziraju slučajevi

$$2\sigma/(1+\rho(M(F,\sigma,\sigma)))\leq\omega<\underline{t}, \quad 0<\sigma<\underline{t} \text{ i}$$

$$\sigma=0, \quad 0<\omega<\underline{t}.$$

Zbog $\sigma<2\sigma/(1+\rho(M(F,\sigma,\sigma)))$, u oba slučaja važi

$$0\leq\sigma<\omega<\underline{t}.$$

Slično kao u dokazu Teoreme 1.1, pokazuje se da za svako $i\in N$ važi implikacija

$$0\leq\sigma<\omega<2f_i/(a_{ii}+P_{i,\alpha}(A)) \Rightarrow$$
$$|f_i-\omega a_{ii}|+(\omega-\sigma)t_i+\omega s_i < f_i-\sigma t_i.$$

Sada, na osnovu Leme 1.7, sledi $\rho(M_{\sigma,\omega})<1$.

(ii) Slično se dokazuje da za ovako odabrane σ i ω važi

$$|f_i-\omega a_{ii}|+(\omega-\sigma)t_i+\omega s_i < f_i+\sigma t_i,\quad i\in N.$$

Tvrdjenje sledi na osnovu Leme 1.7.

(iii) U ovom slučaju za svako $i\in N$ važi

$$|f_i-\omega a_{ii}|+(\sigma-\omega)t_i+\omega s_i < f_i-\sigma t_i,$$

pa je, opet na osnovu Leme 1.7, $\rho(M(F,\sigma,\omega))<1$.

Kao što pokazuje primer 1.2.2 tvrdjenje ove teoreme u slučaju AOR postupka (F=D) ne poklapa se sa tvrdjenjem Posledice 1.5.1!

1.2.3. IZBOR PARAMETARA

Matrica MAOR postupka zavisi od n+2 parametra (n je red matrice sistema): σ, ω, f_1, $f_2, \ldots, f_n$. Ako se setimo koliko problema je izazvalo traženje optimalnih parametara AOR postupka, koji zavisi samo od dva parametra (σ i ω), onda je jasno da je problem optimalnog izbora parametara MAOR postupka u opštem slučaju praktično nerešiv.

Zato problem optimizacije pojednostavljujemo i za fiksiranu matricu F, tražimo "najbolji" mogući izbor za σ i ω, opet u slučaju kada je matrica sistema pozitivno definitna i konzistentno uredjena. Medjutim, čak i u tom slučaju, optimalni izbor parametara σ i ω nije u potpunosti rešen. U radu [HC,86] dat je "kvazioptimalan" izbor za σ i ω, tako što je minimizirano jedno gornje ograničenje za spektralni radijus matrice MAOR postupka. Ovde nećemo detaljnije opisivati kako je dobijen taj "kvazioptimalan" izbor za σ i ω, već ćemo na primeru 1.2.3 uporediti brzine konvergencije optimalnih odnosno "kvazioptimalnih" SOR, AOR, MSOR i MAOR postupaka. Napomenimo samo da je "kvazioptimalan" izbor parametara σ i ω u slučaju MSOR postupka preuzet iz [Gi,80], gde je ovaj postupak proučavan u svojoj nelinearnoj varijanti pod imenom vSOR-Njutnov postupak (verallgemeinerte SOR-Newton's method).

1.2.4. NUMERIČKI PRIMERI

Kako birati matricu F da bi konvergencija MAOR postupka bila što brža, ostalo je otvoreno pitanje. Da ono ima smisla pokazuje sledeći primer.

Primer 1.2.1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} C & -E & 0 \\ -E & C & -E \\ 0 & -E & C \end{bmatrix} \in R^{9,9},$$

gde je

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E \in R^{3,3}.$$

Neka je

$$F_1 = D = 4E,$$

$$F_2 = \mathrm{diag}(3.2, 4.04, 3.68, 3.692, 3.676, 3.56, 3.284, 3.372, 3.844).$$

Može se pokazati da je optimalni AOR postupak u ovom primeru optimalni SOR postupak sa parametrom $\omega=1.1715$. Tabela pokazuje da je MSOR postupak sa $F=F_2$ i $\omega=1.3116$ brži od optimalnog SOR, odnosno optimalnog AOR postupka.

i	ω	$\rho(M(F_i,\omega,\omega))$
1	1.1715	0.1715
2	1.3116	0.1631

Označimo sa C_1 klasu matrica čiji elementi a_{ij} zadovoljavaju uslov

$$|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(A), \text{ za svako } i \in N \text{ i neko } \alpha \in [0,1],$$

a sa C_2 klasu matrica sa osobinom

$$1 > P_{i,\alpha}(D^{-1}A) \text{ za svako } i \in N \text{ i neko } \alpha \in [0,1].$$

Sledeći primer pokazuje da se ove dve klase ne poklapaju i da nijedna od njih nije podskup druge, što opravdava zasebno ispitivanje konvergencije za ove dve klase matrica.

Primer 1.2.2. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha=0.1.$$

Matrica A pripada klasi C_1, jer važi:

$$4 = |a_{11}| > \alpha|a_{12}|+(1-\alpha)|a_{21}| = 3.7,$$
$$2 = |a_{22}| > \alpha|a_{21}|+(1-\alpha)|a_{12}| = 1.3,$$

a ne pripada klasi C_2 jer je

$$D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & .25 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i}$$

ni za jedno $\alpha\in[0,1]$ ne važi istovremeno

$$1 > 0.25\alpha+2(1-\alpha) = 2-1.75\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 4/7 \quad \text{i}$$
$$1 > 2\alpha+0.25(1-\alpha) = 0.25+1.75\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 3/7.$$

Obrnuto, neka je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \alpha\in(0,1).$$

Matrica A pripada klasi C_2 jer je

$$D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i važi}$$

$$1 > 4\alpha/5+(1-\alpha) = 1-\alpha/5 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 0,$$
$$1 > \alpha+4(1-\alpha)/5 = 4/5+\alpha/5 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1.$$

Medjutim, ni za jedno $\alpha\in[0,1]$ ne važi

$$3 > 3\alpha+4(1-\alpha) = 4-\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1,$$

što znači da matrica A ne pripada klasi C_1.

Na primeru 1.2.1 videli smo da MAOR postupak može brže da konvergira nego optimalni AOR postupak. Medjutim, najčešće ne poznajemo način na koji bismo došli do odgovora kako da biramo matricu F da bismo ubrzali konvergenciju. Zato se mirimo sa činjenicom da ćemo uvodjenjem MAOR postupka možda i izgubiti na brzini konvergencije, jer MAOR postupak u nelinearnom slučaju pruža drugu pogodnost : nije potrebno izračunavati parcijalne izvode datog nelinearnog preslikavanja (vidi paragraf 2.2). Sledeći primer ilustruje koliki je taj "gubitak" konvergencije.

<u>Primer 1.2.3.</u> Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & -7.1 & 11.3 \\ 3.2 & 0.2 & 1 & 0 \\ 2 & 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporedjujemo optimalni SOR (ω=5/3), optimalni AOR (σ=5/3, ω=35/12), "kvazioptimalni" MSOR (kao u [Gi,80]) i "kvazioptimalni" MAOR (kao u [HC,86]) postupak. Pri tom za MSOR i MAOR postupak biramo F=diag(1.2, 0.8, 0.9, 1).

postupak	σ	ω	spektralni radijus matrice koraka
SOR	5/3	5/3	0.6666666666
AOR	5/3	35/12	0.5651941653
MSOR	1.606334576	1.606334576	0.8112499933
MAOR	1.606334576	0.2811025508	0.6696874878

1.3. AFC POSTUPAK

1.3.1. FORMULACIJA

AFC postupak (method of averaging functional corrections) formulisan je u radu [So,57], a neki dovoljni uslovi za njegovu konvergenciju dati su u [Si,61]. Od rezultata novijeg datuma spomenimo [Ba,86]. Razlog za njegovo detaljnije ispitivanje jeste mogućnost ubrzavanja konvergencije bazičnog metoda, kao što pokazuje primer 1.3.1.

AFC postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina

$$(1.17)\qquad x = Ax + b,\quad A=[a_{ij}]\in R^{n,n},\quad b=[b_i]\in R^n$$

je oblika

$$(\mathrm{AFC})\qquad x^0\in R^n,\quad x^{k+1}=A(x^k+y^k)+b,\quad k=0,1,\ldots,$$

gde je

$$y^k = s_k[1,1,\ldots,1]^T\in R^n,$$

$$s_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{k+1}-x_i^k).$$

Realizaciju, tj. efektivno računanje AFC postupkom omogućuje njegov ekvivalentni zapis, dat u [Si,61]:

Algoritam.

Korak 0. $d = n - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$;

Korak 1. Ako je $d \leq 0$ stop, inače predji na korak 2 ;

Korak 2. Izaberi $x^0 \in R^n$;

Korak 3. $s_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i / d$; $k = 0$;

Korak 4. Izračunaj x^{k+1} pomoću formule (AFC) ;

Korak 5. $s_{k+1} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_i^{k+1} - x_j^k - s_k)$;

Korak 6. $k = k+1$ i vrati se na korak 4.

1.3.2. KONVERGENCIJA

Sledeće dve teoreme dokazane su u [Si,61].

Teorema 1.11. Neka je $d > 0$ i $q < 1$, gde je

$$q = h + (1+h)\frac{z}{d} \ , \ h > \|A\|_\infty \ , \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .$$

Tada AFC postupak konvergira za svako $x^0 \in R^n$ i važi ocena

$$\|x-x^k\|_\infty \leq \frac{h \ \|x^1-y^0\|_\infty}{1+h} (q^{k-1} + \frac{2h^k}{1-h}), \ k=1,2,\ldots,$$

pri čemu je x tačno rešenje sistema (1.17).

Teorema 1.12. Neka je $d > 0$ i $w < 1$, gde je

$$w = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik})^2\{1 + \frac{1}{d}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik})^2 - (n-d)^2}\}^2.$$

Tada AFC postupak konvergira za svako $x^0 \in R^n$.

Medjutim, u radu [CH,87] dati su dovoljni uslovi za konvergenciju AFC postupka koji su širi od uslova $q<1$ i $w<1$. Pre nego što ih ovde prezentujemo, uvedimo sledeće oznake:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}, \quad a_i^* = \sum_{j=1}^{n}a_{ji}, \quad a = n-d = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} \quad .$$

Nadalje ćemo stalno pretpostavljati da je $|a|<n$. Može se pokazati da je ovaj uslov posledica pretpostavki Teoreme 1.11, tj. da nije nikakvo dodatno ograničenje.

AFC postupak zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$x^0 \in R^n, \quad (E - \frac{1}{n}AP)x^{k+1} = (A - \frac{1}{n}AP)x^k + b, \quad k=0,1,\ldots,$$

gde je $P \in R^{n,n}$ matrica čiji su svi elementi jednaki jedinici. Kako je $\rho(\frac{1}{n}AP) = \frac{|a|}{n} < 1$,
sledi da je matrica $E - \frac{1}{n}AP$ regularna i da važi

$$(E - \frac{1}{n}AP)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{n}AP)^i.$$

Zbog $(\frac{1}{n}AP)^2 = \frac{a}{n}\frac{1}{n}AP$ sada važi

$$(E - \frac{1}{n}AP)^{-1} = E + \frac{1}{n}AP\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{a}{n})^i = E + \frac{1}{n-a}AP.$$

Dakle, AFC postupak se može zapisati u obliku

$$x^0 \in R^n, \quad x^{k+1} = Bx^k + b', \quad k=0,1,\ldots,$$

gde je

$$B = (E - \frac{1}{n-a} AP)A(E - \frac{1}{n}P) \quad , \; b' = (E + \frac{1}{n-a} AP)b \; .$$

Elementi matrice B su, prema tome, oblika

$$(B)_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{n-a} a_i (1 - a_j^*) \quad ,i,j= 1,2,\ldots,n.$$

Jedan od načina da dobijemo dovoljne uslove za konvergenciju AFC postupka jeste da ispitamo uslove $\|B\|_\infty<1$ i $\|B\|_1<1$. Tako dobijamo sledeću teoremu.

<u>Teorema 1.13.</u> Neka je $a<n$, $a_i\geq 0$, $a_i^*\leq 1$, $i=1,2,\ldots,n$. Tada važi

(i) $\beta_1 < 1 \implies \|B\|_\infty < 1$,

(ii) $\beta_2 < 1 \implies \|B\|_1 < 1$,

gde je

$$\beta_1 = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + |a_{ij}|),$$

$$\beta_2 = \frac{a}{n-a} + \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} (|a_{ij}| - \frac{a}{n-a} a_{ij}).$$

D o k a z : Za svako $i=1,2,\ldots,n$ važi

$$\sum_{j=1}^{n} |(B)_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \frac{1}{n-a} a_i \sum_{j=1}^{n} (1-a_j^*) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + a_i < 1,$$

tj. $\|B\|_\infty < 1$. Slično se dokazuje i druga implikacija.

Teorema 1.14. Neka je $|a|<n$ i $\beta < 1$, gde je

$$\beta = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{s=1}^{n} |(B)_{is} - (B)_{js}| .$$

Tada AFC postupak konvergira za svako $x^{0} \in R^{n}$.

D o k a z : Matrica B ima konstantnu sumu po kolonama (jednaku nuli), tako da za svaki karakteristični koren λ matrice B, važi $|\lambda| \leq \beta$ (vidi [DeZ,71],Se,81]). Dakle, $\rho(B) \leq \beta < 1$.

Posledica 1.14.1. Neka je $A \geq 0$, $\|A\|_1 \leq 1$, $\|A\|_\infty < 1$. Tada je $\rho(B) < 1$,

tj. AFC postupak konvergira za svako $x^{0} \in R^{n}$.

D o k a z : Za $i,j=1,2,\ldots,n$ važi $a_i < 1$, $a_j^* \leq 1$ i

$$\sum_{s=1}^{n} |(B)_{is}-(B)_{js}| \leq \sum_{s=1}^{n} |a_{is}-a_{js}| + \frac{1}{n-a} |a_i - a_j| \sum_{s=1}^{n} (1-a_s^*)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} |a_{is}-a_{js}| + |a_i - a_j| \leq a_i + a_j + |a_i - a_j| = 2\max(a_i, a_j) < 2.$$

Napomenimo da Teorema 1.13 i Posledica 1.14.1 daju "proverljivije" dovoljne uslove za konvergenciju AFC postupka nego Teorema 1.14, u smislu da se ti uslovi odnose direktno na matricu A bazičnog sistema.

1.3.3. NUMERIČKI PRIMERI

Prvi primer ilustruje mogućnost ubrzanja konvergencije bazičnog iterativnog postupka pomoću AFC postupka.

<u>Primer 1.3.1.</u> Neka je

$$A = \begin{bmatrix} .1250 & .5000 & .1250 & .1250 & .0625 & .0624 \\ .2400 & .2500 & .1250 & .1250 & .0624 & .1325 \\ .1200 & .1250 & .1250 & .0625 & .5000 & .0625 \\ .1250 & .1200 & .1250 & .5000 & .0625 & .0624 \\ .0625 & .0000 & .2500 & .0625 & .0625 & .4900 \\ .3270 & -.0010 & .2400 & .0124 & .2500 & .1630 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1.0625 \\ 1.4375 \\ -\ .7500 \\ -\ .3025 \\ .9375 \\ -\ .2480 \end{bmatrix}.$$

Tačno rešenje sistema $Ax = b$ je $x = [0,2,0,0,1,0]^T$.

Označimo sa $\{x^k\}$ i $\{u^k\}$ nizove približnih rešenja dobijenih bazičnim i AFC postupkom respektivno sa istim početnim vektorom

$$x^0 = u^0 = [100,-200,100,-300,1000,-1200]^T.$$

Odgovarajuće vektor-greške označimo sa

$$\varepsilon_k = x^k - x \ , \quad \delta_k = u^k - x \ .$$

U sledećoj tabeli date su vrednosti za $\|\varepsilon_k\|_\infty$ i $\|\delta_k\|_\infty$.

k	$\Vert\varepsilon_k\Vert_\infty$	$\Vert\delta_k\Vert_\infty$	k	$\Vert\varepsilon_k\Vert_\infty$	$\Vert\delta_k\Vert_\infty$
0	1.2000 E 03	1.2000 E 03	8	6.1809 E 01	5.5136 E-01
1	5.1306 E 02	5.1299 E 02	9	5.9996 E 01	2.4666 E-01
2	2.4294 E 02	1.7638 E 02	10	5.8314 E 01	1.1328 E-01
3	9.2854 E 01	8.3829 E 01	15	5.0841 E 01	2.2351 E-03
4	7.5710 E 01	2.1475 E 01	20	4.4373 E 01	4.4223 E-05
5	7.0026 E 01	7.6904 E 00	25	3.8730 E 01	8.7358 E-07
6	6.6322 E 01	2.9530 E 00	30	3.3803 E 01	1.2107 E-08
7	6.3866 E 01	1.1953 E 00	35	2.9504 E 01	5.4832 E-10

Broj iteracija potrebnih da se norma vektor-greške u odnosu na normu početne vektor-greške redukuje za faktor 10^{-6} je približno 406 za bazični postupak, a 16 za AFC postupak!

Primer 1.3.2. Posmatraćemo sledećih 8 matrica i izvršiti numeričku verifikaciju dovoljnih uslova za konvergenciju AFC postupka, dobijenih u prethodnom paragrafu.

$$A_1 = \begin{bmatrix} .82 & .02 & .12 & .14 \\ .02 & .64 & .04 & .06 \\ .12 & .04 & .28 & .08 \\ .14 & .06 & .08 & .26 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} .43 & -.22 & -.12 & -.08 \\ -.32 & .00 & .00 & .32 \\ .00 & -.03 & .435 & -.28 \\ .22 & .26 & -.18 & -.26 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} .43 & -.22 & -.12 & -.08 \\ -.32 & .00 & .00 & .32 \\ .00 & -.03 & .425 & -.28 \\ .23 & .27 & -.18 & -.26 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} A_2 = A_1 + \mathrm{diag}(-.12,.60,.32,.04), \\ A_4 = A_3 + \mathrm{diag}(.00,.00,.01,.00), \\ A_6 = A_5 + \mathrm{diag}(.00,.00,-.01,.00), \end{array}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} .43 & -.22 & -.12 & -.08 \\ .32 & .00 & .00 & .15 \\ .00 & .08 & .20 & -.28 \\ .24 & .26 & -.18 & -.26 \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} .43 & -.22 & -.12 & -.08 \\ .32 & .00 & .00 & .15 \\ .00 & .48 & .25 & -.28 \\ .24 & .26 & -.18 & -.26 \end{bmatrix}.$$

Matrice A_1 i A_2 su nenegativne, a za sve matrice važi

$$|a| < n \;,\; a_i \geq 0 \;,\; a_i^* \leq 1 \;,\quad i=1,2,3,4 \;.$$

U sledećoj tabeli date su vrednosti za q, w, β_1, β_2, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|B\|_\infty$ i $\|B\|_1$.

mat.	q	w	β_1	β_2	$\|A\|_\infty$	$\|A\|_1$	$\|B\|_\infty$	$\|B\|_1$
A_1	6.7778	2.5472	2.2000	2.7037	1.1000	1.1000	1.8437	1.3704
A_2	4.5000	1.8354	1.9600	1.7778	.9800	.9800	1.3950	1.3333
A_3	2.5037	1.0381	.9600	1.0007	.9200	.9700	.9253	.9995
A_4	2.4946	1.0207	.9600	.9988	.9200	.9700	.9254	.9959
A_5	2.5495	1.0328	1.0000	1.0120	.9400	.9800	.9484	1.0030
A_6	2.5402	1.0163	1.0000	1.0102	.9400	.9800	.9485	.9995
A_7	2.5212	1.0099	1.0000	.9994	.9400	.9900	.9691	.9884
A_8	3.1936	1.4312	1.4600	1.2535	1.0100	.9900	1.0025	.9897

U sledećoj tabeli može se videti koja tvrdjenja iz prethodnog paragrafa su ispunjena (+), a koja nisu (−), za svaku od navedenih 8 matrica.

	1.11	1.12	$\|B\|_\infty<1$	$\|B\|_1<1$	1.13(i) ($\beta_1<1$)	1.13(ii) ($\beta_2<1$)	1.14 ($\beta<1$)	1.14.1
A_1	–	–	–	–	–	–	+	–
A_2	–	–	–	–	–	–	+	+
A_3	–	–	+	+	+	–	+	–
A_4	–	–	+	+	+	+	+	–
A_5	–	–	+	–	–	–	+	–
A_6	–	–	+	+	–	–	+	–
A_7	–	–	+	+	–	+	+	–
A_8	–	–	–	+	–	–	+	–

Kao što se vidi iz tabele najopštiji uslov konvergencije daje Teorema 1.14.

1.4. AOR+AFC POSTUPAK

Videli smo da se AFC postupak primenjuje na sistem linearnih jednačina oblika (1.17). U funkciji matrice A možemo birati, na primer, matricu $M_{\sigma,\omega}$ AOR postupka i tako dobiti AOR+AFC postupak :

$$\text{(AOR+AFC)} \quad x^{0}\in R^{n,n},\ x^{k+1} = M_{\sigma,\omega}(x^{k}+y^{k}) + d,\ k=0,1,\dots,$$

gde je $y^{k}=a_{k}[1,1,\dots,1]^{T}\in R^{n,n},\ a_{k}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{k+1}-x_i^{k})$.

Algoritam za efektivno računanje AOR+AFC postupkom isti je kao u paragrafu 1.3.1 (za AFC postupak), samo što je matrica A zamenjena sa $M_{\sigma,\omega}$.

1.4.4. KONVERGENCIJA

Uvedimo oznake d, h i z kao u paragrafu 1.3.2, pri čemu stalno pretpostavljamo $A=M_{\sigma,\omega}$. Neka je još $g:=(d+z)^{-1}(d-z)$. Važi sledeća

<u>Teorema 1.15.</u> Neka je $l:=\|L\|_{\infty}$, $u:=\|U\|_{\infty}$. AOR+AFC postupak konvergira za svaki početni vektor ako je :

$$0<g<1,\ u/(1-l)<g,\ (1-g)/(1-u-gl)<\omega<(1+g)/(1+u+gl),$$

$$\max\{0,(|1-\omega|-g+\omega(l+u))/(1-g)l\}<\sigma<(g+\omega(l-u)-|1-\omega|)/(1+g)l$$

ili

$$0<g<1,\ u+l<g,\ (1-g)/(1-l-u)<\omega<(1+g)/(1+l+u),$$

$$(|1-\omega|-g+\omega(l+u))/(1+g)l<\sigma\leq 0.$$

D o k a z se zasniva na proveri uslova $d>0$ i $h<g$ (što je ekvivalentno sa $q<1$ iz Teoreme 1.11), a tehnički je dosta komplikovan, te ga izostavljamo.

Smisao navedene teoreme je sledeći: kada se izaberu σ i ω i formira matrica $M_{\sigma,\omega}$, pristupa se proveri uslova ove teoreme i, ako su ispunjeni, zaključuje se da AOR+AFC postupak konvergira. Naravno, mnogo veću vrednost imali bi dovoljni uslovi za konvergenciju AOR+AFC postupka, koji ne bi zahtevali poznavanje matrice $M_{\sigma,\omega}$, već bi a priori dali intervale konvergencije za parametre σ i ω. Tog tipa je sledeća teorema, dokazana u [CH,87a].

Teorema 1.16. Neka je

$$u+l<1/3,\quad 2/3(1-l-u)<\omega<4/3(1+l+u),\quad (3|1-\omega|-1+3\omega(l+u))/4l<\sigma\le 0$$

ili

$$l+3u<1,\ 2/(3-3u-l)<\omega<4/(3+3u+l),$$
$$\max\{0,(3|1-\omega|-1+3\omega(l+u))/2l\}<\sigma<(1+3\omega(l-u)-3|1-\omega|)/4l.$$

Tada AOR+AFC postupak konvergira za svaki početni vektor.

Geometrijska interpretacija ove oblasti konvergencije data je u primeru 1.4.1.

1.4.2. NUMERIČKI PRIMERI

Primer 1.4.1. Neka je

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -.02 & -.12 & -.14 \\ -.02 & 2 & -.04 & .06 \\ -.12 & -.04 & 2 & -.08 \\ -.14 & .06 & -.08 & 2 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 2 \\ -.02 \\ -.12 \\ -.14 \end{bmatrix}.$$

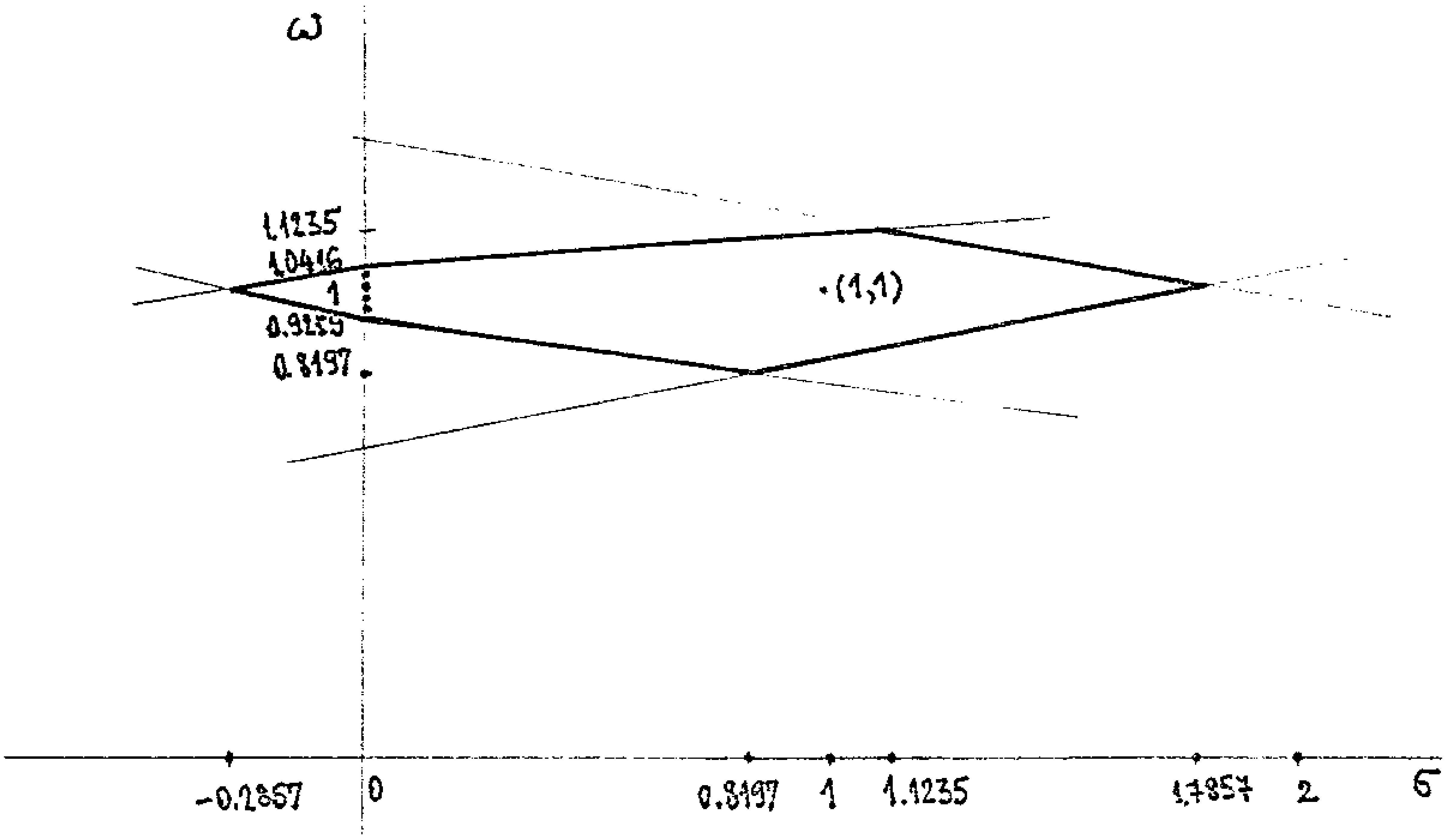
Tada je $l+u=.28$ ($<1/3$) i $l+3u=.56$ (<1). Na osnovu Teoreme 1.16, oblast konvergencije AOR+AFC postupka je:

$$.9259\le\omega\le 1.0416,\quad -1.7857+1.5\omega+5.3571|1-\omega|\le\sigma\le 0,$$

odnosno

$$.8197\le\omega\le 1.1235,$$
$$\max\{0,-3.5714+3\omega+10.7142|1-\omega|\}<\sigma<1.7857-5.3571|1-\omega|.$$

Obe oblasti prikazane su na slici 5.



sl.5

Jasno je da u okviru tih oblasti konvergencije nije svejedno koje σ i ω ćemo odabrati. To se vidi iz sledeće tabele, koja prikazuje grešku $\|x-x^k\|_\infty$, gde je x tačno rešenje sistema Ax=b, a x^k k-ta iteracija dobijena AOR+AFC postupkom, sa početnim vektorom $x^0=[100,-20,100,100]^T$.

k \ (σ, ω)	σ = 0, ω = 1	σ = 1, ω = 1	σ = .975, ω = .985
1	1.28 E 01	1.28 E 01	1.41 E 01
2	6.22 E-01	2.81 E-01	9.81 E-02
3	2.13 E-02	3.04 E-03	1.27 E-03
4	1.70 E-03	6.85 E-05	4.77 E-05
5	7.23 E-05	3.68 E-06	1.80 E-07
6	6.11 E-06	8.71 E-08	8.61 E-09
7	3.21 E-07	1.16 E-09	8.72 E-11
8	2.76 E-08	1.51 E-11	7.75 E-13
9	1.86 E-09	3.43 E-13	1.74 E-14
10	1.53 E-10	1.32 E-14	2.72 E-16
11	5.19 E-12	2.70 E-16	6.31 E-17
12	2.75 E-13	4.86 E-18	3.37 E-18

AFC postupak se uvodi radi ubrzanja konvergencije bazičnog iterativnog postupka, te očekujemo da će AOR+AFC postupak brže konvergirati od odgovarajućeg AOR postupka. To pokazuje i sledeći primer.

Primer 1.4.2. Neka je A matrica kao u primeru 1.2.1 (takva matrica se susreće, npr. kod približnog rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina), a vektor $b=[3,2,3,2,1,2,3,2,3]^T$. U tabeli su date vrednosti za $\|x-x^k\|_\infty$ sa $x^0=0$.

Postupak	Jakobijev	Jakobi+AFC	Gaus-Zajdelov	Gaus-Zajdel+AFC
σ	0	0	1	1
k \ ω	1	1	1	1
1	5.00 E-00	1.00 E 00	7.23 E-01	8.13 E-01
2	2.50 E-01	1.67 E-01	3.44 E-01	6.82 E-02
3	1.25 E-01	2.60 E-02	2.34 E-01	3.05 E-02
4	1.25 E-01	2.20 E-02	1.17 E-01	1.49 E-02
5	6.25 E-02	1.40 E-02	5.80 E-02	3.82 E-03
6	6.25 E-02	9.99 E-03	2.92 E-02	8.03 E-04
7	3.13 E-02	6.99 E-03	1.46 E-02	4.16 E-04
8	3.13 E-02	4.91 E-03	7.32 E-03	1.21 E-04
9	1.56 E-02	3.45 E-03	3.66 E-03	2.19 E-05
10	1.56 E-02	2.42 E-03	1.83 E-03	9.10 E-06
11	7.80 E-03	1.69 E-03	9.15 E-04	3.83 E-06
12	7.80 E-03	1.19 E-03	4.57 E-04	7.73 E-07

Lako se pokazuje da kada se kombinuje optimalni AOR postupak (kada se uopšte zna koji je to!) sa AFC postupkom, dobijeni AOR+AFC postupak nije optimalan. Kako birati parametre σ i ω tako da AOR+AFC postupak najbrže konvergira ostaje otvoreno pitanje.

2. ITERATIVNO REŠAVANJE SISTEMA NELINEARNIH JEDNAČINA

U ovom delu ćemo se baviti približnim rešavanjem sistema nelinearnih jednačina

(2.1) $\quad Gx = 0,$

gde je $G\colon W \subset R^n \to R^n$ neprekidno, F-diferencijabilno preslikavanje u nekoj otvorenoj okolini $W_0 \subset W$ rešenja x^* sistema (2.1), takvo da je $\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x) \neq 0$ za $x \in W_0$, $i \in N$, pri čemu je sa g_i označena i-ta komponenta preslikavanja G.

2.1. NELINEARNO-LINEARNI POSTUPCI. N-MAOR POSTUPAK

Ako se odlučimo da sistem (2.1) rešavamo nekim nelinearnim postupkom, na primer Njutnovim, u svakoj iteraciji moramo rešavati jedan linearan sistem. Naime, Njutnov postupak

$$x^0 \in R^n,\ x^{k+1} = x^k - G'(x^k)^{-1} G x^k,\ k=0,1,\ldots$$

može se zapisati u ekvivalentnom obliku

$$x^{0}\in R^{n},\ G'(x^{k})x^{k+1}=G'(x^{k})x^{k}-Gx^{k},\ k=0,1,\ldots .$$

Svaki od ovih linearnih sistema (sa matricom $G'(x^{k}), k=0,1,\ldots$) možemo rešavati, na primer, MAOR postupkom. Tako dobijeni postupak nazvaćemo Njutn-MAOR ili N-MAOR postupak.
Neka je

$$(2.2)\qquad G'(x)=D(x)-T(x)-S(x)$$

standardno razlaganje matrice $G'(x)$, a

$$F(x)=\mathrm{diag}(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))$$

za svako $x\in W$ regularna matrica. N-MAOR postupak je sada

$$\text{(N-MAOR)}\quad x^{0}\in R^{n},\ x^{k+1}=x^{k}-\omega(F(x^{k})-\sigma T(x^{k}))^{-1}Gx^{k},\ k=0,1,\ldots .$$

Ovo je samo jedan primer formiranja iterativnog postupka nelinearno-linearnog tipa. Na sličan način mogli smo konstruisati i npr. Njutn-AOR, Njutn-SOR, sečice-MAOR postupke.

Nedostatak formiranog N-MAOR postupka je u tome što, da bismo ga primenili, moramo poznavati bar matricu $T(x^{k})$, tj. bar neke parcijalne izvode posmatranog nelinearnog preslikavanja. Pošto ćemo kod linearno-nelinearnih postupaka taj nedostatak moći otkloniti, ovde se više nećemo zadržavati na proučavanju N-MAOR postupka. Napomenimo samo da sve teoreme o lokalnoj konvergenciji MAORN postupka, koje će biti prezentovane u paragrafu 2.2.1, važe i za N-MAOR postupak (v.[C,85]).

2.2. LINEARNO-NELINEARNI POSTUPCI. MAORN POSTUPAK

Drugi pristup rešavanju sistema nelinearnih jednačina jeste da se postupci, koji se koriste za rešavanje sistema linearnih jednačina uopšte na nelinearan slučaj. Na primer, nelinearni Gaus-Zajdelov postupak bio bi:

i-ta komponenta (k+1)-ve iteracije, x_i^{k+1}, $i\in N, k=0,1,\ldots$, dobija se kao rešenje jednačine

$$g_i(x_1^{k+1},\ldots,x_{i-1}^{k+1},x_i,x_{i+1}^k,\ldots,x_n^k)=0 \tag{2.3}$$

po x_i.

Dakle, posle izračunate k-te iteracije (k+1)-va se dobija rešavanjem n nelinearnih jednačina.

Po analogiji sa linearnim slučajem, nelinearni SOR postupak definišemo na sledeći način:

za $k=0,1,\ldots$, $i\in N$,

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega(x_i - x_i^k),$$

gde je $\omega\neq 0$, $\omega\in R$ relaksacioni parametar, a x_i rešenje jednačine (2.3). Za $\omega=1$, nelinearni SOR se svodi na nelinearni Gaus-Zajdelov postupak.

Nelinearni AOR postupak sa realnim parametrima σ i ω, $\omega\neq 0$, definišemo na sledeći način:

ako je $\sigma\neq 0$, posle izračunate k-te iteracije, (k+1)-vu dobijamo tako što nadjemo najpre (k+1)-vu iteraciju $\underline{x}^{k+1}$ nelinearnim SOR postupkom sa parametrom σ, a zatim

$$x^{k+1} = (1-\frac{\omega}{\sigma})x^k + \frac{\omega}{\sigma}\,\underline{x}^{k+1},$$

a ako je $\sigma=0$

$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \omega x_i'$, $i\in N$, $k=0,1,\ldots,$

gde je x_i' rešenje jednačine

$$(2.4)\qquad g_i(x_1^k,\ldots,x_{i-1}^k,x_i',x_{i+1}^k,\ldots,x_n^k)=0.$$

Dakle, i u ovom slučaju, potrebno je rešiti n nelinearnih jednačina. Za $\sigma=\omega$ nelinearni AOR postupak svodi se na nelinearni SOR, a za $\sigma=0$ na nelinearni JOR postupak. Nelinearni JOR, za $\omega=1$, postaje nelinarni Jakobijev postupak.

Nelinearni SOR postupak proučavan je u [OR,70], gde su dati i dovoljni uslovi za globalnu konvergenciju ovog postupka za neke specijalne klase nelinearnih sistema. Nedostatak ovakvih postupaka je u tome što se jednačine (2.3) ili (2.4) najčešće ne mogu tačno rešiti. Jedan način da se taj nedostatak otkloni jeste da se svaka od pomenutih nelinearnih jednačina (za fiksno k i i) rešava nekim od numeričkih postupaka, npr. Njutnovim postupkom ili postupkom sečice do postizanja željene tačnosti, a da se tek tada predje na rešavanje nove jednačine (za drugo i ili k). Da takva "kombinacija" dobro funkcioniše pokazano je u [As,85], za nelinearni SOR postupak.

Mi ćemo se zadržati na nešto drugačijoj "kombinaciji" nelinearnog SOR, odnosno AOR postupka sa Njutnovim postupkom. Naime, svaku od nelinearnih jednačina (2.3) ili (2.4) rešavaćemo samo sa po jednim korakom Njutnovog postupka. Tako, npr. dobijamo Gaus-Zajdelov-Njutnov postupak:

$$x^0\in R^n,\; x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{g_i(x^{k,i})}{\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x^{k,i})},\; i\in N,\; k=0,1,\ldots,$$

pri čemu je $x^{k,i} = [x_1^{k+1},\ldots,x_{i-1}^{k+1},x_i^k,\ldots,x_n^k]^T$,

zatim SOR-Njutnov ili SORN postupak:

$$\text{(SORN)} \quad x^0 \in R^n, \; x_i^{k+1} = x_i^k - \omega \frac{g_i(x^{k,i})}{\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x^{k,i})}, \; i \in N, \; k=0,1,\ldots,$$

i AOR-Njutnov ili AORN postupak:

$$\text{(AORN)} \quad x^0 \in R^n, \; x_i^{k+1} = x_i^k - \omega \frac{g_i(z^{k,i})}{\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(z^{k,i})}, \; i \in N, \; k=0,1,\ldots,$$

gde je

$$z_1^k = x_1^k - \sigma \frac{g_1(x^k)}{\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^k)},$$

$$z_i^k = x_i^k - \sigma \frac{g_i(z^{k,i})}{\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(z^{k,i})}, \; i=2,3,\ldots,n,$$

$$z^{k,i} = [z_1^k,\ldots,z_{i-1}^k,x_i^k,\ldots,x_n^k]^T.$$

Primetimo da formule (AORN) važe i u slučaju $\sigma=0$, kada se svode na

$$\text{(JORN)} \quad x^0 \in R^n, \; x_i^{k+1} = x_i^k - \omega \frac{g_i(x^k)}{\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x^k)}, \; i \in N, \; k=0,1,\ldots.$$

Nedostatak ovako formiranog AORN postupka jeste što njegova primena zahteva poznavanje parcijalnih izvoda komponenti posmatranog nelinearnog preslikavanja G. Ako uklonimo taj nedostatak tako što umesto funkcija $\partial g_i/\partial x_i$ koristimo neke neprekidne funkcije f_i, $i \in N$, dobićemo sledeći postupak:

$$\text{(MAORN)} \quad x^0 \in R^n, \; x_i^{k+1} = x_i^k - \omega \frac{g_i(z^{k,i})}{f_i(z^{k,i})}, \; i \in N, \; k=0,1,\ldots,$$

gde je $z^{k,i}$ definisano kao ranije.

Iako smo do ovog postupka došli na nešto drugačiji način nego do AORN postupka, na primer, pokazaće se da je i to postupak linearno-nelinearnog tipa, u smislu da se o njegovoj konvergenciji može govoriti na osnovu rezultata o konvergenciji odgovarajućeg linearnog postupka. To će u ovom slučaju biti MAOR postupak, što opravdava i dato ime: MAORN.

Kako uvek možemo sistem (2.1) preformulisati tako da važi

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x) > 0, \ i \in N, \ x \in W,$$

to ćemo u daljem radu stalno pretpostavljati da je gornji uslov zadovoljen. Takodje ćemo stalno funkcije f_i birati tako da važi

$$f_i(x) > 0, \ i \in N, \ x \in W.$$

2.2.1. LOKALNA KONVERGENCIJA

O lokalnoj konvergenciji MAORN postupka ćemo govoriti u smislu definicije 0.19, tj. naći ćemo neke dovoljne uslove za preslikavanje G i njegovo ponašanje u tački x^*, pod kojima je x^* tačka privlačenja iteracija dobijenih MAORN postupkom. Prema Teoremi Ostrovskog, treba ispitati pod kojim uslovima je spektralni radijus F-izvoda MAORN preslikavanja u tački x^* manji od jedan.

U [Gi,80] je dokazana sledeća teorema.

Teorema 2.1. Neka je preslikavanje $G: W \subset R^n \to R^n$ F-dierencijabilno u tački $x^* \in \mathrm{int}(W)$, za koju je $Gx^* = 0$ i neka su funkcionele $f_i: W \to R$, $i \in N$ neprekidne u x^*. Neka je za $x \in W$, $F(x) \in R^{n,n}$,

$F(x) = \mathrm{diag}(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ regularna matrica i $H(x) = x - (F(x))^{-1} Gx$.

Neka je $\omega\neq 0$ i $H_\omega : W_\omega\ R^n \to R^n$ definisano na sledeći način:

$$H_\omega(x)=[H_{\omega 1}(x),H_{\omega 2}(x),\dots,H_{\omega n}(x)]^T,$$

$$(2.5)\qquad H_{\omega 1}(x)=(1-\omega)x_1+\omega H_1(x),$$

$$H_{\omega i}(x)=(1-\omega)x_i+\omega H_i([H_{\omega 1}(x),\dots,H_{\omega i-1}(x),x_i,\dots,x_n]^T),$$
$$i=2,3,\dots,n$$

pri čemu je $x=[x_1,\dots,x_n]^T$, $H(x)=[H_1(x),\dots,H_n(x)]^T$, a W_ω

najveći skup na kome je H_ω definisano. Tada važi:

(i) $x^* \in \mathrm{int}(W_\omega)$,

(ii) H_ω je F-diferencijabilno u x^*,

(iii) $H'_\omega(x^*)=(F(x^*)-\omega T(x^*))^{-1}(F(x^*)-\omega D(x^*)+\omega S(x^*))$,

gde je $G'(x^*)=D(x^*)-T(x^*)-S(x^*)$. standardno razlaganje matrice $G'(x^*)$.

Koristeći ovu teoremu, sada možemo dokazati i sledeću, osnovnu teoremu o lokalnoj konvergenciji MAORN postupka.

Teorema 2.2. Neka je preslikavanje $G: W\subset R^n \to R^n$ F-diferencijabilno u otvorenoj okolini $W_0 \subset W$ tačke $x^* \in \mathrm{int}(W)$, za koju je $Gx^*=0$ i neka je G' neprekidno u x^*. Neka G' ima standardno razlaganje (2.2). Neka je $F(x)=\mathrm{diag}(f_1(x),\dots,f_n(x))$, pri čemu su funkcionele $f_i: W\to R$, $i\in N$, za $x\in W_0$ neprekidne i imaju osobinu $f_i(x)>0$. Neka je još $\sigma\neq 0$, $\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x)>0$, za $x\in W_0$, $i\in N$ i

$$H_{F,\sigma,\omega}(x)=(F(x)-\sigma T(x))^{-1}(F(x)-\omega D(x)+(\omega-\sigma)T(x)+\omega S(x)).$$

Ako je $\rho(H_{F,\sigma,\omega}(x^*)) < 1$, tada je x^* tačka privlačenja iteracija dobijenih MAORN postupkom i $R_1(\mathrm{MAORN},x^*)=\rho(H_{F,\sigma,\omega}(x^*))$.

D o k a z : Zapišimo MAORN postupak u obliku

(MAORN) $x^0 \in R^n$, $x^{k+1}=G_{F,\sigma,\omega}(x^k)$, $k=0,1,\ldots$.

Kako su ispunjene pretpostavke Teoreme 2.1, sledi da je preslikavanje $G_{F,\sigma,\sigma}$ F-diferencijabilno u tački x^* i

$$G'_{F,\sigma,\sigma}(x^*)=(F(x^*)-\sigma T(x^*))^{-1}(F(x^*)-\sigma D(x^*)+\sigma S(x^*)).$$

Kako je

$$G_{F,\sigma,\omega}(x) = (1-\frac{\omega}{\sigma})x + \frac{\omega}{\sigma}G_{F,\sigma,\sigma}(x),$$

sledi da je i $G_{F,\sigma,\omega}$ F-diferencijabilno u tački x^* i važi

$$G'_{F,\sigma,\omega}(x^*) = (1-\frac{\omega}{\sigma})E + \frac{\omega}{\sigma} G'_{F,\sigma,\sigma}(x^*) = H_{F,\sigma,\omega}(x^*).$$

Na osnovu Teoreme 0.11 sledi $R_1(\text{MAORN},x^*)=\rho(H_{F,\sigma,\omega}(x^*))$.

Primedba. Važi analogna teorema Teoremi 2.2, koja se odnosi na Njutn-MAOR postupak. Dokaz sledi direktno na osnovu Teoreme 0.12 sa

$$B(x)=\omega^{-1}(F(x)-\sigma T(x)),$$

$$C(x)=\omega^{-1}(F(x)-\omega D(x)+(\omega-\sigma)T(x)+\omega S(x)),$$

jer je

$$G'(x)=B(x)-C(x),$$

$$H_{F,\sigma,\omega}(x)=(B(x))^{-1}C(x).$$

Zahvaljujući Teoremi 2.2, sada smo u mogućnosti da formulišemo neke dovoljne uslove za lokalnu konvergenciju MAORN, a istovremeno i N-MAOR postupka. Potrebno je samo ispitati pod kojim uslovima za matrice $G'(x^*)$ i $F(x^*)$ i parametre σ i ω važi

$$\rho(H_{F,\sigma,\omega}(x^*)) < 1.$$

Odgovor se dobija korišćenjem neke od teorema o konvergenciji MAOR postupka iz prvog dela teze. Na primer, direktna posledica Teorema 2.2 i 1.9 je sledeća

Teorema 2.3. Neka su za preslikavanje G i matricu F ispunjene pretpostavke Teoreme 2.2. Neka je $G'(x^*)$ H-matrica i

$$q = \min_{i\in N} f_i(x^*)/g_i'(x^*),$$

gde je $g_i'(x)=\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x)$.

Tada je za $0 < \omega \le q$, $0 < \sigma \le q$, x^* tačka privlačenja iteracija dobijenih MAORN (ili N-MAOR) postupkom.

2.2.2. GLOBALNA KONVERGENCIJA

O globalnoj konvergenciji MAORN postupka možemo govoriti samo u slučaju kada je posmatrani nelinearni sistem specijalnog oblika. Na primer, u [BKa,84], [BKa,85], [BKa,85a], [BKa,86] ispitivana je globalna konvergencija SORN postupka, ali samo za nelinearne sisteme, čije je rešavanje potrebno za nalaženje minimuma nekog konveksnog funkcionala na konveksnom skupu. Ovde se nećemo zadržavati na takvim sistemima, jer analiza konvergencije za takve sisteme zahteva obiman preliminarni materijal.

Neke teoreme o globalnoj konvergenciji MSORN postupka date su u [Gi,80].

Ovde ćemo se zadržati na ispitivanju globalne konvergencije AORN postupka za rešavanje sistema nelinearnih jednačina sledećeg oblika:

$$(2.6)\qquad g_i(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i(x_i) - b_i = 0,\ i=1,2,\dots,n,$$

gde su $y_i(x)$ nelinearne dva puta diferencijabilne funkcije.

Uvedimo sledeće oznake:

$$p_1(\sigma) = \max_{i\in N} p_{1i}(\sigma),\ p_{1i}(\sigma)=\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}(|1-\sigma|+|\sigma|p_{1j}(\sigma))+\sum_{j=i+1}^{n} A_{ij},$$

$$p_2(\sigma) = \max_{i\in N} p_{2i}(\sigma),\ p_{2i}(\sigma)=|\sigma|\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}(c_jY_j+p_{2j}(\sigma)).$$

Važi sledeća teorema (v.[Ch,83]).

<u>Teorema 2.4.</u> Neka za svako $x_i\in[x_i^0-r,x_i^0+r]$ važi:

$$a_{ii}+y_i'(x_i)\neq 0,\ |a_{ij}|/|a_{ii}+y_i'(x_i)|\le A_{ij},$$

$$1/|a_{ii}+y_i'(x_i)|\le c_i\le c,\ |y_i''(x_i)|\le Y_i\le Y.$$

Dalje, neka je

$$|x_i^1-x_i^0|\le k(\sigma,\omega),\ i\in N,$$

$$h(\sigma,\omega)=|1-\omega|+|\omega|p_1(\sigma)+((1+|1-\omega|)cY+(2+|\omega|)p_2(\sigma))k(\sigma,\omega)/2 < 1,$$

$$k(\sigma,\omega)/(1-h(\sigma,\omega))=r^*(\sigma,\omega)\le r.$$

Tada na skupu $|x_i-x_i^0|\le r^*(\sigma,\omega)$, $i\in N$, postoji rešenje x^* sistema (2.6), ka njemu konvergira AORN postupak i važi ocena greške:

$$|x_i^*-x_i^m|\le r^*(\sigma,\omega)h^m(\sigma,\omega),\ i\in N,\ m=0,1,\dots,$$

pri čemu je sa x^m označena m-ta iteracija dobijena AORN postupkom.

Ukoliko nelinearni sistem (2.6) ima osobinu stroge dijagonalne dominacije, tj. ako za svako $t\in(-\infty,\infty)$ i svako $i\in N$ važi:

$$a_{ii}+y_i'(t)\neq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|/|a_{ii}+y_i'(t)|\leq H_1,$$

$$\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|/|a_{ii}+y_i'(t)|\leq H_2,$$

$$H_1+H_2=H<1,$$

kao direktnu posledicu Teoreme 2.4, dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.5. Neka za svako $t\in(-\infty,\infty)$ važi

$$1/|a_{ii}+y_i'(t)|\leq c,\quad |y_i''(t)|\leq Y,\quad i\in N,$$

a za svako $\sigma\in(-H_1,H_2)$

$$|\omega^{-1}(x_i^0-x_i^1)|\leq Z,\quad i\in N.$$

Dalje, neka je

$$2H+ZcY<2 \text{ i}$$

$$h(\sigma,\omega)=|1-\omega|+|\omega|(H_1|1-\sigma|+H_2)/(1-|\sigma|H_1)+$$

$$+(ZcY|\omega|(1+|1-\omega|+(2+|\omega|)|\sigma|H_1/(1-|\sigma|H_1)))/2<1.$$

Tada na skupu $|x_i-x_i^0|\leq|\omega|Z/(1-h(\sigma,\omega))$, $i\in N$, postoji rešenje x^* sistema (2.6), ka njemu konvergira AORN postupak i važi ocena greške:

$$|x_i^*-x_i^m|\leq|\omega|Zh^m(\sigma,\omega)/(1-h(\sigma,\omega)),\quad i\in N,\ m=0,1,\ldots .$$

U radu [Ch,83] još su uporedjivani Jakobi-Njutnov i Gaus-Zajdel-Njutnov postupak i pokazano je da u slučaju "jače" nelinearnosti posmatranog sistema (2.6) prednost ima Jakobi-Njutnov postupak, a u slučaju "slabije" nelinearnosti, Gaus-Zajdel-Njutnov postupak. To pokazuje i Primer 2.2.2, preuzet iz istog rada.

2.2.3. NUMERIČKI PRIMERI

Primer 2.2.1. Rešava se sistem

$$3x_1-4x_2+\exp(-px_2)-\exp(-p)+1 = 0,$$

$$2x_1-3x_2+\exp(-qx_1)-\exp(-q)+1 = 0,$$

gde su p i q realni parametri. Ovaj sistem ima tačno rešenje $x=[x_1,x_2]=[1,1]$.

Za njegovo približno rešavanje koristimo AORN postupak i odredjujemo k iz uslova

$$\|x-x^k\|_\infty < 10^{-8}, \tag{2.7}$$

pri čemu smo sa x^k označili k-tu iteraciju dobijenu AORN postupkom, sa početnim vektorom $x^0=[2,8]$. Rezultati su dati u vidu sledeće dve tabele.

Tabela 1. p=2, q=8

(ω,σ)	(3,1.5)	(1.5,1.5)	(1,1)	(1,0)
k	44	104	356	692

Tabela 2. p=4, q=8

(ω,σ)	(3,1.5)	(1.5,1.5)	(1,1)	(1,0)
k	15	50	200	394

Iz linearnog slučaja je poznato da su (3,1.5) i (1.5,1.5) redom optimalni izbori parametara AOR i SOR postupka za rešavanje sistema sa matricom $G'(x)$ $(x=[1,1])$. Kako se brzina konvergencije AORN postupka meri spektralnim radijusom AOR matrice za linearan sistem sa matricom $G'(x)$, to su navedeni izbori parametara optimalni i za AORN, odnosno SORN postupak. Tabele 1 i 2 ilustruju koliko AORN postupak može biti efektivniji od SORN postupka.

Na istom primeru pokažimo da broj iteracija, k, potrebnih za postizanje tačnosti (2.7) malo zavisi od izbora početnog vektora.

Tabela 3. $\omega=3$, $\sigma=1.5$, p=4, q=8

početni vektor	[2,8]	[32,128]	[-1,0.5]	[0,-0.125]
k	15	15	15	16

Sledeći primer uporedjuje Jakobi-Njutnov (JN) i Gaus-Zajdel-Njutnov (GSN) postupak u slučajevima veće ili manje nelinearnosti posmatranog sistema.

<u>Primer 2.2.2.</u> Rešava se sistem

$$10x_i-k_1x_{i-1}-k_2x_{i+1}+\exp(k_3x_i)-100 = 0, \quad i=1,\dots,5,$$

$$x_0=0, \quad x_6=0.$$

Za početni vektor uzima se $x_i^0=-1$, $i=1,\dots,5$ i iterativni postupak se sprovodi dok se ne ispuni uslov

$$|x_i^{m+1}-x_i^m| \le 10^{-3}.$$

U Tabeli 4 prikazan je najmanji broj m sa navedenom osobinom. Stepen nelinearnosti meri se konstantom k_3, a istovremeno se variraju i konstante k_1 i k_2. Poslednje tri vrste u tabeli se odnose na linearan sistem

$$10x_i-k_1x_{i-1}-k_2x_{i+1}-100 = 0,\ i=1,\ldots,5,$$

$$x_0=0,\ x_6=0.$$

Tabela 4.

k_1	k_2	k_3	GSN	JN
1	1		11	10
5	5	1	18	10
8	1		30	11
1	1		111	99
5	5	10	-	95
8	1		-	99
1	1		6	7
5	5		37	68
8	1		9	18

L I T E R A T U R A

[A,82] G.AVDELAS,"A second order stationary scheme for complex linear systems",TR No.89,Department of Mathematics,University of Ioannina,Greece,1982.

[AG,83] G.AVDELAS & S.GALANIS,"Optimum three-level stationary iterative schemes",Rev.Roum.Math.Pures et Appl.,T.XXVIII,No.2,1983,pp.107-116.

[AGHa,78] G.AVDELAS,S.GALANIS & A.HADJIDIMOS,"Three-level iterative methods with symmetric and commutative coefficient matrices for the numerical solution of linear systems",Mathematica Balkanica 8,1978, pp.7-15.

[AHa,81] G.AVDELAS & A.HADJIDIMOS,"Optimum accelerated overrelaxation method in a special case",Math. Comp.36,1981,pp.183-187.

[AHa,83] G.AVDELAS & A.HADJIDIMOS,"Optimum second order stationary extrapolated iterative schemes", Math. Comput.Simulation XXV,1983,pp.189-198.

[AHaY,80] G.AVDELAS,A.HADJIDIMOS & A.YEYIOS,"Some theoretical and computational results concerning the accelerated overrelaxation (AOR) method", Anal.Numér. Théor.Approx.,T.9, No 1,1980,pp.5-10.

[APHaN,83] G.AVDELAS,J.de PILLIS,A.HADJIDIMOS & M.NEUMANN, "On a class of convergent monoparametric second order schemes for the solution of linear systems whose coefficient is a nonsingular M-matrix",TR No.97,Department of Mathematics,University of Ioannina,Greece,1983.

[Al,79] H.-J.ALBRAND,"l_1-Approximation und angepaßte Iterationsverfahren",Rostock.Math.Kolloq.12,1979,pp. 65-76.

[Ale,72] G.ALEFELD,"Über reguläre Zerlegungen bei nichtlinearen Abbildungen",Z.Angew.Math.Mech.52,1972,pp. 233-238.

[A-j,61] J.ALBRECHT,"Fehlerabschätzungen bei Relaxationsverfahren zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme",Numer.Math.3,1961,pp.188-201.

[A-pK,84] P.ALBRECHT & M.P.KLEIN,"Extrapolated iterative methods for linear systems",SIAM.J.Numer.Anal.21, 1984,pp.192-201.

[As,85] E.J.van ASSELT,"On M-functions and nonlinear relaxation methods",BIT 25,1985,pp.380-385.

[BKa,84] M.E.BREWSTER & R.KANNAN,"Nonlinear successive overrelaxation",Numer.Math.44,1984,pp.309-315.

[BKa,85] M.E.BREWSTER & R.KANNAN,"Global convergence of nonlinear successive overrelaxation via linear theory",Computing 34,1985,pp.73-79.

[BKa,85a] M.E.BREWSTER & R.KANNAN,"Varying relaxation parameters in nonlinear successive overrelaxation", Computing 34,1985,pp.81-85.

[BKa,86] M.E.BREWSTER & R.KANNAN,"A computational process for choosing the relaxation parameter in nonlinear SOR",Computing 37,1986,pp.19-29.

[Bo,74] E.BOHL,Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operator Gleichungen,Springer Tracts in Natural Philosophy 25,Berlin,Heidelberg,New York,1974.

[Bo,81] E.BOHL,Finite Modelle gewöhnlicher Randwertaufgaben,Teubner,Stuttgart,1981.

[Bu,72] W.BURMEISTER,"Inversionsfreie Verfahren zur Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen",Z.Angew. Math.Mech.52,1972,pp.101-110.

[Bus,80] J.C.P.BUS,Numerical solution of systems of nonlinear equations,Mathematical Centre Tracts 122, Methematisch Centrum,Amsterdam,1980.

[C,83] LJ.CVETKOVIć,"On a local convergence of the vAORN method",Zb.Rad.Prir.Mat.Fak.Univ.Novom Sadu,Ser. mat.13,1983,pp.203-209.

[C,85] LJ.CVETKOVIć,"Relaksacioni postupci za rešavanje sistema linearnih i nelinearnih jednačina",magistarski rad,Novi Sad,1985.

[CH,84] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"Some sufficient conditions for convergence of AOR-method",Numerical Methods and Approximation Theory (G.V.Milovanović ed.),Faculty of Electronic Engineering,Niš,1984, pp.143-148.

[CH,85] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"On a generalized vSOR-Newton's method",IV Conference on Applied Mathematics (B.Vrdoljak,ed.),Faculty of Civil Engineering,Split,1985,pp.99-103.

[CH,86] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"über die Konvergenz des VAOR-Verfahrens", Z.Angew.Math.Mech. 66,1986, pp. 405-406.

[CH,86a] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"Some results on M- and H- matrices", Zb.Rad.Prir.Mat.Fak.Univ.Novom Sadu Ser.Mat.16,No.2,1986,to appear.

[CH,87] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"Some sufficient conditions for the convergence of the method of averaging functional corrections",to appear.

[CH,87a] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"Eine Modifikation des AOR Verfahrens",Z.Angew.Math.Mech.67,1987,to appear.

[CH,87b] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"Convergence theory for AOR method",to appear.

[CH,87c] LJ.CVETKOVIć & D.HERCEG,"Improvement of the area of convergence of the AOR method",to appear.

[Ch,83] V.YA.CHERNYAK,"O vliyanii nelineǐnosti reshaemoǐ sistemy na shodimost' metodov Yakobi, PVR- i UVR-N'yutona",Chislennye metody analiza i ih prilozheniya,Akad.Nauk SSSR Sibirsk.Otdel.,Energet.Inst., Irkutsk,1983,pp.139-150.

[Co,64] L.COLLATZ,Funktionalanalysis und numerische Mathematik,Springer,Berlin,Göttingen,Heidelberg,1964.

[DZ,70] L.S.DASHNIC & M.S.ZUSMANOVICH,"O nekotoryh kriteriyah regulyarnosti matric i lokalizacii ih spektra", Zh.vychisl.matem.i matem.fiz. 5,1970, pp. 1092-1097.

[DeZ,71] E.DEUTSCH & CH.ZENGER,"Inclusion domains for the eigenvalues of stochastic matrices",Numer.Math.18, 1971,pp.182-192.

[FPt,62] M.FIEDLER & V.PTAK,"On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors",Czech.Math.J.12(87),1962,pp.382-400.

[GHaNo,85] S.GALANIS,A.HADJIDIMOS & D.NOUTSOS,"On the equivalence of the k-step iterative Euler methods and successive overrelaxation (SOR) methods for k-cyclic matrices", TR No.124,Department of Mathematics,University of Ioannina,Greece,1985.

[GHaNo,86] S.GALANIS,A.HADJIDIMOS & D.NOUTSOS,"On the relationship between the Jacobi and the successive overrelaxation (SOR) matrices of a k-cyclic matrix",TR No.127,Department of Mathematics,University of Ioannina,Greece,1986.

[GaHaY,83] N.GAITANOS,A.HADJIDIMOS & A.YEYIOS,"Optimum accelerated overrelaxation (AOR) method with positive definite coefficient matrix",SIAM J.Numer.Anal. 20,1983,pp.774-783.

[Gi,80] M.GIPSER,"Untersuchungen an Relaxationsverfahren zur Lösung grösser nichtlinearer Gleichungssysteme mit schwach besetzten Funktionalmatrizen",Dissertation,Darmstadt,1980.

[Gu,86] M.M.GUPTA,"A spectrum enveloping technique for iterative solution of central difference approximations of convection-diffusion equations",SIAM J.Alg.Disc.Meth.7,No.4,1986,pp.513-526.

[H,83] D.HERCEG,"Remarks on different splittings and associated generalized linear methods",Zb.Rad.Prir. Mat.Fak.Univ.Novom Sadu,Ser.mat.13,1983,pp.177-186.

[H,85] D.HERCEG,"Über die Konvergenz des AOR-Verfahrens" Z.Angew.Math.Mech.65,1985,pp.378-379.

[H,85a] D.HERCEG,"Some sufficient conditions for convergence of vSOR-Newton method",IV Conference on Applied Mathematics (B.Vrdoljak,ed.),Faculty of Civil Engineering,Split,1985,93-98.

[HC,86] D.HERCEG & LJ.CVETKOVIć,"über die Bestimmung der parameters für das VAOR-Verfahren",Z.Angew.Math. Mech.66,1986,pp.411-413.

[HC,87] D.HERCEG & LJ.CVETKOVIć,"On the extrapolation method and USA algorithm", to appear.

[Ha,78] A.HADJIDIMOS,"Accelerated Overrelaxation Method", Math.Comp.32, 1978,pp.149-157.

[Ha,80] A.HADJIDIMOS,"Some basic results on M-matrices in connection with the accelerated overrelaxation (AOR) method",Computing 24,1980,pp.259-268.

[Ha,82] A.HADJIDIMOS,"A note on the extrapolation technique for the solution of linear systems",TR. No. 83,Department of Mathematics,University of Ioannina,Greece,1982.

[Ha,82a] A.HADJIDIMOS,"The optimal solution of the problem of complex extrapolation of a first order scheme",TR No.86,Department of Mathematics,University of Ioannina, Greece,1982.

[Ha,83] A.HADJIDIMOS,"The optimal solution of the extrapolation problem of a first order scheme",Intern. J.Computer Math.13,1983,pp.153-168.

[Ha,83a] A.HADJIDIMOS,"On the generalization of the basic iterative methods for the solution of linear systems",Intern.J.Computer Math.14,1983,pp.355-369.

[Ha,86] A.HADJIDIMOS,"A survey of the iterative methods for the solution of linear systems by extrapolation, relaxation and other techniques",TR No.131, Department of Mathematics,University of Ioannina, Greece,1986.

[HaY,80] A.HADJIDIMOS & A.YEYIOS,"The principle of extrapolation in connection with the accelerated overrelaxation method", Linear Algebra Appl. 30,1980, pp.115-128.

[HaY,82] A.HADJIDIMOS & A.YEYIOS,"On some extensions of the accelerated overrelaxation (AOR) theory",Internat.J.Math.& Math.Sci.5,1982,49-60.

[HaY,82a] A.HADJIDIMOS & A.YEYIOS,"How to improve on the convergence rates of a first order scheme",Intern. J.Computer Math.10,1982,283-294.

[HaY,82b] A.HADJIDIMOS & A.YEYIOS,"Symmetric accelerated overrelaxation (SAOR) method",Math.Comput.Simulation XXIV,1982,pp.72-76.

[HagYo,81] L.A.HAGEMAN & D.M.YOUNG,Applied iterative methods, Academic Press,New York London Toronto Sydney San Francisco,1981.

[Hh,86] A.J.HUGHES HALLETT,"The convergence of accelerated overrelaxation iterations",Math.Comp.47,1986, pp.219-223.

[Ho,75] A.S.HOUSEHOLDER,The theory of matrices in numerical analysis,Dover Publications,Inc.,New York, 1975.

[Ka,84] R.KANNAN,"Relaxation methods in nonlinear problems",Lecture Notes in Mathematics 1107,Nonlinear Analysis and Optimization (C.Vinti,ed.),Springer-Verlag,Berlin Heidelberg New York Tokyo,1984.

[KhT,85] A.KHILNANI & E.TSE,"A fixed point algorithm with economic applications",J.of Economic Dynamics and Control 9,1985,pp.127-137.

[L,80] G.LOIZOU,"The generalized accelerated symmetric overrelaxation method",BIT 20,1980,378-381.

[La,69] P.LANCASTER,Theory of matrices,Academic Press,New York,1969.

[LjMaj,70] YU.I.LYUBICH & G.D.MAǏSTROVSKIǏ,"Obshchaya teoriya relaksacionnyh processov dlya vypuklyh funkcionalov", Uspehi matematicheskih nauk, T.XXV, No.1 (151), 1970,pp.57-112.

[Lu,65] A.YU.LUCHKA,The Method of Averaging Functional Corrections,Academic Press,New York and London, 1965.

[M,80] M.MARTINS,"On an accelerated overrelaxation iterative method for linear systems with strictly diagonally dominant matrix",Math.Comp.35,1980,pp. 1269-1273.

[M,81] M.MARTINS,"Note on irreducible diagonally dominant matrices and the convergence of the AOR iterative method",Math.Comp.37,1981,pp.101-103.

[M,82] M.MARTINS, "Generalized diagonal dominance in connection with the accelerated overrelaxation (AOR) method", BIT,22,1982,pp.73-78.

[M,83] M.MARTINS,"An improvement for the area of convergence of the accelerated overrelaxation iterative method",Anal. Numér.Théor.Approx.,T.12,No.1,1983, pp.65-76.

[MaMin,64] M.MARCUS & H.MINC,A survay of matrix theory and matrix inequalities,Allyn and Bacon,Inc.,Boston, 1964.

[Man,79] R.MANN,"Averaging to improve convergence of iterative processes",Lecture Notes in Mathematics 701 Functional Analysis Methods in Numerical Analysis (M.Z.Nashed,ed.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York,1979,pp.169-179.

[Mi,84] N.M.MISSIRLIS,"Convergence theory of extrapolated iterative methods for a certain class of non-symmetric linear systems",Numer.Math.45,1984,pp.447-458.

[Mi,84a] N.M.MISSIRLIS,"The extrapolated first order method for solving systems with complex eigenvalues",BIT 24,1984,pp.357-365.

[Mu,71] R.G.MUHARLYAMOV,"O reshenii sistem nelineǐnyh uravneniǐ", Zh.vychisl.matem.i matem.fiz.11,1971, pp.829-836.

[N,86] M.NEUMANN,"Neighborhoods of dominant convergence for the SSOR method",SIAM J.Alg.Disc.Meth.7,No.4, 1986,pp.551-559.

[NV,80] M.NEUMANN & R.S.VARGA,"On the sharpness of some upper bounds for the spectral radii of S.O.R. iteration matrices",Numer.Math.35,1980,pp.69-79.

[OR,70] J.M.ORTEGA & W.C.RHEINBOLDT,Iterative solution of nonlinear equations of several variables,Academic Press,New York,1970.

[Pl,77] R.J.PLEMMONS,"M-matrix characterizations. I-Nonsingular M-matrices",Linear Algebra Appl.18,1977, pp.175-188.

[Pu,83] V.A.PUPKOV,"Ob izolirovannom sobstvennom znachenii matricy i strukture ego sobstvennogo vektora" Zh.vychisl. matem.i matem.fiz. 23,1983,pp. 1304-1313.

[Pu,84] V.A.PUPKOV,"Neskol'ko dostatochnyh usloviĭ nevyrozhdenosti matric",Zh.vychisl.matem.i matem.fiz. 24,1984,pp.1733-1737.

[S,83] V.N.SOLOV'EV,"Obobshchenie teoremy Gershgorina", Dokl. Akad.Nauk SSSR,47,1983,pp.1285-1301.

[Sch,79] H.SCHOMBERG,"Monotonically convergent iterative methods for nonlinear systems of equations",Numer. Math.32,1979,pp.97-104.

[SheW,84] J.M.SHEARER & M.A.WOLFE,"Some algorithms for the solution of a class of nonlinear algebraic equations",Computing 35,1984,pp.63-72.

[Se,81] E.SENETA,Non-negative matrices and Markov chains, Springer-Verlag,New York Heidelberg Berlin,1981.

[Si,61] V.K.SIRENKO,"Ob chislennoĭ realizacii metoda osredneniya funkcional'nyh popravok",UMŽ 4,1961,13, pp.51-66.

[So,57] YU.D.SOKOLOV,"O metode osredneniya funkcional'nyh popravok",UMŽ T.IX,No.1,1957,pp.82-100.

[StH,85] Z.STOJAKOVIć & D.HERCEG,Numeričke metode linearne algebre,Gradjevinska knjiga,Beograd,1985.

[V,62] R.S.VARGA,Matrix iterative analysis,Prentice-Hall Englewood Cliffs,1962.

[V,73] R.S.VARGA,"Extensions of the successive overrelaxation theory with applications to finite element approximations",Topics in Numerical Analysis,H.H. J.Miller,ed.,Academic Press,New York,1973.

[V,76] R.S.VARGA,"On recurring theorems on diagonal dominance", Linear Algebra Appl.13,1976,pp.1-9.

[Va,72] M.M.VAǏNBERG,Variacionnyĭ metod i metod monotonnyh operatorov,Nauka,Moskva,1972.

[W*,84] 鄂 维 南 AOR 方法的最优因子及效果分析
计 算 数 学 1984年3月
(E.WEI-NAN,"The optimal parameters of the AOR method and their effect",(Chinese),Math.Numer.Sinica 6,1984,pp.329-333.)

[Yo,71] D.M.YOUNG,Iterative solution of large linear systems,Academic Press,New York,1971.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rodjena sam 7.8.1960.godine u Vrbasu,SAP Vojvodina. Osnovnu školu završila sam u Šajkašu,a Gimnaziju "S.Markovič" u Novom Sadu kao nosilac više diploma:"Vuk Stefanovič Karadžič","Mihailo Petrovič Alas","Svetozar Markovič" i povelje "Svetozar Markovič" kao najbolji učenik Gimnazije u generaciji. Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, grupa matematika, upisala sam se školske 1978/79.godine, a diplomirala juna 1982.godine, sa prosečnom ocenom 9,92. Bila sam korisnik stipendije i nosilac povelje "Narodnih heroja". Oktobra 1982. godine upisala sam se na poslediplomske studije na PMF-u u Novom Sadu, smer Numerička matematika. Sve ispite položila sam sa prosečnom ocenom 10, a magistarski rad "Relaksacioni postupci za rešavanje sistema linearnih i nelinearnih jednačina" odbranila sam 8.11.1985.godine.

Od oktobra 1982. do marta 1986.godine radila sam u zvanju asistenta-pripravnika u naučnom radu, a od marta 1986. radim kao asistent PMF-a u Novom Sadu.

Autor sam ili koautor 19 naučnih radova i 10 naučnih saopštenja na domaćim i medjunarodnim naučnim skupovima. Od 1985.godine član sam GAMM-a.

Udata sam i majka jednog deteta.

Novi Sad, 15.februara 1987. Ljiljana Cvetković