

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

VLADIMIR B. BEČEJAC

**OPTIMALNA POSTAVKA  
SINHROFAZORSKIH UREĐAJA ZA  
OBEZBEĐENJE POTPUNE  
TOPOLOŠKE OPSERVABILNOSTI  
PRIMENOM METODE  
GREBNEROVE BAZE**

doktorska disertacija

Beograd, 2020.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

VLADIMIR B. BEČEJAC

**OPTIMAL PHASOR  
MEASUREMENT UNITS  
PLACEMENT FOR FULL  
TOPOLOGICAL OBSERVABILITY  
IN POWER SYSTEM BY  
GROEBNER BASE TECHNIQUE**

doctoral dissertation

Belgrade, 2020.

**Mentor:**

dr PREDRAG STEFANOV, vanredni profesor

**članovi komisije:**

dr ALEKSANDAR SAVIĆ, vanredni profesor

dr ANDRIJA SARIĆ, redovni profesor

dr BRANKO MALEŠEVIĆ, redovni profesor

dr MILKA POTREBIĆ, redovni profesor

Datum odbrane:

# Zahvalnica

Ovaj doktorat posvećujem svojoj porodici, ocu BOŽIDARU, majci ZORICI i babi VERI GAJIĆ (1936-2018) koja je u svakom trenutku bila uz mene, pružila mi nesebičnu podršku i ljubav. Od početka školovanja su me ohrabivali i podržavali u mojoj profesionalnoj karijeri. Korisnim savetima kada sam bio na prekretnicama, pomogli su mi da odaberem pravi put i danas dođem do ovog koraka. Kao kruna mog višedecenijskog rada proizašla je ova doktorska disertacija, koja ne bi bila moguća da njih nije bilo. Još jedanput im se najtoplije zahvaljujem.

Želeo bih da se zahvalim STANKU MILJEVIĆU, profesoru u penziji Mašinsko-elektrotehničke škole „GOŠA” u Smederevskoj Palanci i preko 50 godina porodičnom prijatelju porodice BEČEJAC, koji je bio uz mene od prvog razreda osnovne škole. Preneo mi je svoju ljubav prema matematici, pomagao mi i kako se ispostavlja, pravilno i nenametljivim komentarima usmeravao ka matematici i tehničkim naukama.

Želeo bih najiskrenije da se zahvalim svom mentoru prof. dr PREDRAGU STEFANOVU vanrednom profesoru Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu na vođenju, kontinualnoj podršci, motivaciji, izdvojenom vremenu za rad tokom trajanja mojih doktorskih studija. Objavljivanje radova u međunarodnom časopisu, konferencijama i izrada ove doktorske disertacije zaista ne bi bile moguće bez njegovog iskustva, optimizma, strpljivosti i pažljivoj obradi i dopuni mog teksta.

Najiskrenije se zahvaljujem prof. dr NENADU CAKIĆU, redovnom profesoru Elektrotehničkog fakulteta u penziji, koji je od početka mojih studija bio uz mene, imao razumevanja i vere u mene kada je prihvatio da objavimo zbirku zadatka iz predmeta Matematika 3 za Elektrotehnički fakultet iako sam bio student osnovnih studija. Hvala i na nesebičnoj podršci i izdvojenom vremenu koje je utrošio na komentare i sugestije prilikom pisanja ove doktorske disertacije. Zahvaljujem se i prof. dr BRANKU MALEŠEVIĆU, redovnom profesoru Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, koji me je upućivao u teoriju GREBNERove baze i pomagao.

Zahvaljujem se i članovima Komisije za pregled i ocenu doktorske disertacije, prof. dr ALEKSANDRU SAVIĆU, prof. dr ANDRIJI SARIĆU, prof. dr BRANKU MALEŠEVIĆU i prof. dr MILKI POTREBIĆ na detaljno iščitanom rukopisu, korisnim primedbama, sugestijama i afirmativnim savetima koji su svakako doprineli kvalitetu ove doktorske disertacije.

*Autor*

MOJIM RODITELJIMA,

ZORICI I BOŽIDARU

Mojoj „KEVICI” (1936-2018)

# Rezime

U ovoj doktorskoj disertaciji je predstavljena nova metoda za određivanje minimalnog broja i lokacija sinhrofazorskih - PMU (Phasor Measurement Unit) uređaja u elektroenergetskom sistemu kako bi se obezbedila potpuna topološka opservabilnost. Razvoj, istraživanje i primena ovih uređaja imaju istoriju dužu od 30 godina. Još od tada tehnologija se neprestano razvija i na hardverskom i aplikativnom nivou. Sinhrofazorska tehnologija omogućava sinhronizaciju merenja na različitim geografskim lokacijama u elektroenergetskom sistemu, a korišćenjem vremenskih znački koje se dodeljuju svakom pojedinačnom merenju. Dalje, ova merenja se dovode na PDC (Phasor Data Concentrator) gde se vrši njihovo prikupljanje i obrada te se ima koherentna slika elektroenergetskog sistema. Ovako sinhronizovana merenja se mogu dovesti u estimator stanja koji služi kao glavna podloga čitavom spektru aplikacija važnih u operativnom radu u dispečerskim centrima.

Novi algoritam, predstavljen u ovoj disertaciji, je zasnovan na formiranju i rešavanju GREBNERove baze skupa jednačina postavljenog optimizacionog problema. Tehnika GREBNERove baze se može primeniti kad god se problem može predstaviti u obliku polinoma i kao takav se može pronaći u različitim problemima primenjene matematike. GREBNERova baza skupa polinoma predstavlja kanoničku formu ekvivalentnu originalnom skupu polinoma. Ulančanost polinoma GREBNERove baze i primena rekurzivnog algoritma za rešavanje trougao-nog sistema jednačina, jednu po jednu, omogućava brzo dobijanje rešenja. Optimalna postavka PMU uređaja kako bi se obezbedila potpuna topološka opservabilnost se u ovoj doktorskoj disertaciji prvo formuliše u linearnoj polinomnoj formi kroz uslove tipa nejednakosti. Međutim, kako GREBNERova baza zahteva da uslovi budu tipa jednakosti, predstavljeno je kako se u binarnom domenu nejednakosti mogu ekvivalentirati jednakostima, a bez uvođenja pomoćnih promenljivih. Ovakvim ekvivalentiranjem problem se predstavlja u nelinearnoj polinomnoj formi gde se primenjuje GREBNERova baza kako bi se rešavanje sistema uprostilo.

Kako u elektroenergetskom sistemu već postoje konvencionalna merenja, postavljen je i rešen prošireni optimizacioni zadatak kombinovanja ovih merenja sa PMU merenjima. Kako pored toga, u sistemu postoje i čvorovi nultog injektiranja, bez proizvodnje i potrošnje, problem je prirodno proširen na uticaj ovih čvorova i mogućnosti smanjivanja broja potrebnih PMU uređaja. Takođe, problem je proširen na zahtev potpune opservabilnosti u slučaju ispada jednog ili više elemenata sistema, odnosno ispada jednog ili više PMU uređaja, zatim na problem limitiranog broja kanala, kada uređaj nije u stanju da izmeri sve struje u njemu incidentnim granama. U elektroenergetskom sistemu postoji već dosta instaliranih PMU uređaja; definisan je i rešen problem potpune topološke opservabilnosti sa predefinisanim lokacijama.

Predloženu metodu GREBNERove baze posebno izdvaja mogućnost dobijanja svih skupova optimalnih lokacija. Testiranjem algoritma potvrđeno je da se sva rešenja dobijaju u polinomnom vremenu, tj. u ograničenom vremenu i za sisteme velikih dimenzija, kakvi su savremeni elektroenergetski sistemi. Na korisniku je tada da uspostavljanjem novih kriterijuma odabere koje rešenje mu odgovara, a u doktorskoj disertaciji je kao kriterijum uveden SORI (System Observability Redundancy Index) čime se obezbeđuje maksimalna opservabilnost i u poremećenim režimima rada sistema.

Predloženi algoritam je testiran na IEEE modelima mreže sa 14, 24, 30 i 118 čvorova kao i na prenosnom sistemu Republike Srbije i to 400 kV i 220 kV mreži.

**Ključne reči:** sinhrofazorska tehnologija, PMU, opservabilnost, Grebnerova baza, optimizacija, linearno programiranje, nelinearno programiranje

**Naučna oblast:** tehničke nauke, elektrotehnika

**Uža naučna oblast:** elektroenergetika

# Abstract

In this doctoral dissertation, a new method for determining the minimum number and locations of Phasor Measurement Units (PMU) in a power system is presented to provide complete topological observability. The development, research and application of these devices have a history of more than 30 years. Ever since then, technology has been constantly evolving at both hardware and application levels. Synchrophasor technology enables synchronization of measurements at different geographical locations in the power system, using the time tags assigned to each individual measurement. Further, these measurements are brought to the PDC (Phasor Data Concentrator) where they are collected and processed and make a coherent picture of the power system. Such synchronized measurements can be brought to the state estimator which serves as the main application for the whole range of applications important in operational work in dispatch centers.

The new algorithm, presented in this dissertation, is based on the formation and solving of GROEBNER's base set of equations of the optimization problem. The GROEBNER base technique can be applied whenever a problem can be represented in the form of polynomials and as such can be found in various problems of applied mathematics. GROEBNER bases of the set of polynomials represents the canonical form equivalent to the original set, similar to the way the row echelon form for linear systems represents the triangular form of the linear equations set. The canonical form of the GROEBNER bases polynomials, along with the utilization of recursive algorithms, allows the solution to be effortlessly obtained. In this doctoral dissertation, the optimal placement of the PMU devices to ensure complete topological observability is first formulated in linear polynomial form through inequality type conditions. However, as GROEBNER's base requires that conditions be of the equality type, it is presented how in the binary domain inequalities can be equivalent to equalities without introducing auxiliary variables. With this equivalence, the problem is presented in a nonlinear polynomial form where GROEBNER base is applied to simplify the solution of the system.

As conventional measurements already exist in the power system, an extended optimization task of combining these measurements with PMU measurements has been set and solved. In addition, there are zero injection buses in the system, without production and consumption, so the problem is naturally extended to the impact of these buses and the ability to reduce the number of PMUs required. Also, the problem was extended to the requirement of full observability in case of failure of one or more elements of the system, or failure of one or more PMU devices, then to the problem of a limited number of channels, when the device is unable to measure all currents in incident branches. There are already many installed PMU devices in the power system, so the problem of complete topological observability with predefined locations has been defined and solved.

The proposed GROEBNER base method in particular distinguishes the possibility of obtaining all sets of optimal locations. Testing the algorithm confirmed that all solutions are obtained in polynomial time, ie. for a limited time and for large-scale systems, such as modern power systems. It is then up to the user to establish which criteria will be used, and in



the doctoral dissertation SORI (System Observability Redundancy Index) is introduced as a criterion, thus providing maximum observability in disturbed modes of system operation.

The proposed algorithm was tested on IEEE models of networks with 14, 24, 30 and 118 buses, as well as on the transmission system of the Republic of Serbia, 400 kV and 220 kV.

**Key words:** synchrophasor technology, PMU, observability, Groebner base, optimization, linear programming, nonlinear programming

**Scientific area:** technical sciences, electrical engineering

**Specific scientific area:** power engineering

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>UVOD</b>	<b>1</b>
1.1	Pregled literature . . . . .	2
1.2	ISTORIJA SINHFOTAFORSKIH MERENJA . . . . .	3
1.3	Predstavljanje fazora . . . . .	5
1.4	Proces rada sinhrofazorskih uređaja . . . . .	7
1.5	Primena sinhrofazorske tehnologije . . . . .	9
1.5.1	Alat za grafički prikaz (vizualizacija) – WAMS sistem . . . . .	9
1.5.2	Estimacija stanja . . . . .	11
1.5.3	Unapređivanje bezbednog rada sistema . . . . .	12
1.5.4	Detekcija oscilacija . . . . .	13
1.5.5	Detektor ostrvskog rada . . . . .	15
1.5.6	Detekcija lažnog reagovanja distantne zaštite u trećem stepenu . . . . .	15
1.5.7	Detekcija naponske nestabilnosti . . . . .	17
1.6	EES Republike Srbije . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Opservabilnost sistema</b>	<b>20</b>
2.1	Definicija opservabilnosti . . . . .	20
2.2	Optimalna postavka PMU uređaja . . . . .	21
2.3	Pravila za postavku PMU uređaja bez konvencionalnih merenja . . . . .	21
2.4	Metoda linearnog programiranja . . . . .	23
2.5	Metoda nelinearnog programiranja . . . . .	25
2.6	Uticaj pseudo merenja - čvorovi nultog injektiranja . . . . .	26
2.7	Nova metoda modifikacije uslova u optimizacionom problemu u mreži sa ZIB . . . . .	30
2.8	Topološka modifikacija mreže sa ZIB-om . . . . .	33
2.9	Uticaj ispada jednog PMU uređaja . . . . .	38
2.10	Uticaj limitiranog broja kanala na PMU uređaju . . . . .	39
2.11	Uticaj već postojećih PMU uređaja u EES-u . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Grebnerova baza</b>	<b>42</b>
3.1	Monomijalni poredak . . . . .	44
3.2	Algoritam deljenja . . . . .	47
3.3	Grebnerova baza i njene osobine . . . . .	48
3.3.1	Buhbergerov algoritam . . . . .	50
3.3.2	Redukovana Grebnerova baza . . . . .	52
3.4	Primene Grebnerove baze . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Primena Grebnerove baze na problem opservabilnosti</b>	<b>56</b>
4.1	Indeksi BOI i SORI . . . . .	57
4.2	Kompleksnost izračunavanja Grebnerove baze . . . . .	58

<b>5</b>	<b>Rezultati proračuna</b>	<b>60</b>
5.1	Bez uvažavanja konvencionalnih merenja . . . . .	60
5.2	Uvažavanje čvorova nultog injektiranja . . . . .	62
5.3	Uticaj ispada jednog PMU uređaja . . . . .	63
5.4	Uticaj limitiranog broja kanala . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Zaključak i budući rad</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>Apendiks</b>	<b>66</b>
7.1	IEEE mreža sa 14 čvorova . . . . .	67
7.2	IEEE mreža sa 24 čvora . . . . .	68
7.3	IEEE mreža sa 30 čvorova . . . . .	69
7.4	IEEE mreža sa 118 čvorova . . . . .	78
7.5	Poljska mreža sa 2383 čvorova . . . . .	81
7.6	Prenosna mreža Srbije naponskog nivoa 400 kV . . . . .	85
7.7	Prenosna mreža Srbije naponskog nivoa 220 kV . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Biografija autora</b>	<b>99</b>

# Spisak slika

1.2.1 prvi sinhrofazorski uređaji (slika preuzeta iz [32]) . . . . .	4
1.3.1 analogija između vremenskog i kompleksnog domena . . . . .	6
1.4.1 blok šema tipičnog PMU uređaja (slika preuzeta iz [32]) . . . . .	8
1.4.2 PPS signal . . . . .	9
1.5.1 prikaz faznih uglova u WAMS aplikaciji . . . . .	10
1.5.2 prikaz efektivnih vrednosti napona u WAMS aplikaciji . . . . .	11
1.5.3 Prikaz ugaone razlike napona između dve trafostanice (slika preuzeta iz [47]) . .	12
1.5.4 Prikaz aplikacije u WAMS sistemu koji prati ugaonu razliku . . . . .	13
1.5.5 Prikaz aplikacije za detekciju oscilacija . . . . .	14
1.5.6 Prikaz aplikacije za analizu oscilacija . . . . .	14
1.5.7 Uz detekciju ostrvskog rada . . . . .	15
1.5.8 Prikaz R-X karakteristike distantnog releja . . . . .	16
1.5.9 prikaz nadgledanja distantne zaštite u 3. stepenu . . . . .	17
1.5.10 prikaz aplikacije za naponsku stabilnost . . . . .	17
2.3.1 slika uz pravilo broj 1 . . . . .	22
2.3.2 jednostavan EES sa četiri čvora . . . . .	23
2.4.1 IEEE mreža sa 7 čvorova . . . . .	24
2.6.1 IEEE mreža sa 7 čvorova gde je ZIB čvor 3 . . . . .	26
2.6.2 IEEE mreža sa ZIB u 3 i PMU uređajima postavljenim u čvorove 1 i 4 . . . . .	29
2.6.3 IEEE mreža sa ZIB u 3 i PMU uređajima postavljenim u čvorove 4 i 7 . . . . .	29
2.7.1 IEEE mreža sa 7 čvorova . . . . .	31
2.8.1 uz pravilo broj 8 . . . . .	33
2.8.2 uz pravilo broj 9 . . . . .	33
2.8.3 uz pravilo broj 10 . . . . .	34
2.8.4 IEEE mreža sa 30 čvorova sa ZIB . . . . .	34
2.8.5 IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 2 i 6 . . . . .	35
2.8.6 IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 9 i 11 . . . . .	35
2.8.7 IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 22 i 10 . . . . .	36
2.8.8 IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 25 i 26 . . . . .	36
2.8.9 IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 27 i 29 . . . . .	37
2.8.10 IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 8 i 28 . . . . .	38
2.10.1 IEEE mreža sa 7 čvorova . . . . .	40
7.1.1 IEEE mreža sa 14 čvorova . . . . .	67
7.2.1 IEEE mreža sa 24 čvora . . . . .	68
7.3.1 IEEE mreža sa 30 čvorova . . . . .	69
7.4.1 IEEE mreža sa 118 čvorova . . . . .	78
7.6.1 400 kV prenosna mreža Srbije . . . . .	85
7.7.1 220 kV mreža Srbije . . . . .	88

# Spisak tabela

1.1	Prikaz ispada pojedinih EES i broj korisnika u mraku . . . . .	5
4.1	BOI za sve čvorove i SORI za IEEE mrežu sa 7 čvorova . . . . .	58
5.1	Lokacije PMU uređaja za slučaj bez uticaja konvencionalnih merenja . . . . .	61
5.2	lokacije ZIB čvorova . . . . .	62
5.3	Lokacije PMU uređaja za slučaj sa uticajem konvencionalnih merenja . . . . .	62
5.4	Lokacije PMU za slučaj ispada jednog PMU uređaja . . . . .	63
5.5	Lokacije PMU za slučaj limitiranog broja kanala . . . . .	64
7.1	tabela povezanosti IEEE mreže sa 14 čvorova . . . . .	67
7.2	tabela povezanosti IEEE mreže sa 24 čvora . . . . .	68
7.3	tabela povezanosti IEEE mreže sa 30 čvorova . . . . .	69
7.4	sva optimalna rešenja za 30-IEEE mrežu, bez konvencionalnih merenja . . . . .	70
7.5	sva optimalna rešenja za 30-IEEE mrežu, sa konvencionalnim merenjima . . . . .	77
7.6	tabela povezanosti IEEE mreže sa 118 čvorova . . . . .	78
7.7	dodatna rešenja za IEEE mrežu sa 118 čvorova . . . . .	80
7.8	lokacije ZIB čvorova za poljsku mrežu . . . . .	81
7.9	lokacije PMU uređaja za poljsku mrežu bez uvažavanja konvencionalnih merenja . . . . .	82
7.10	lokacije PMU uređaja za poljsku mrežu bez uvažavanja konvencionalnih merenja . . . . .	84
7.11	broj čvora sa pripadajućom trafostanicom za 400 kV mrežu Srbije . . . . .	85
7.12	prikaz matrice incidencije u tabelarnom obliku za 400 kV mrežu Srbije . . . . .	86
7.13	sva optimalna rešenja za 400 kV mrežu Srbije . . . . .	86
7.14	broj čvora sa pripadajućom trafostanicom za 220 kV mrežu Srbije . . . . .	88
7.15	prikaz matrice incidencije u tabelarnom obliku za 220 kV mrežu Srbije . . . . .	89
7.16	sva optimalna rešenja za 220 kV mrežu Srbije . . . . .	89

# 1 UVOD

Promene u elektroenergetici se poslednjih godina odvijaju velikom brzinom. Deregulacija elektroenergetskih sistema je promenila način upravljanja i omogućila intenzivniju razmenu između sistema regiona i interkonekcije u celini [1]. Pored toga, razvoj obnovljivih izvora energije i njihova integracija u elektroenergetske sisteme ubrzava njihovu dinamiku i smanjuje nivo pouzdanosti isporuke električne energije. Sve to povećava zabrinutost u vezi obezbeđivanja zadovoljavajućeg nivoa pouzdanosti i stabilnosti elektroenergetskih sistema. Da bi se odgovorilo na ove zahteve, razvoj inteligentne elektroenergetske mreže sa unapređenjem performansi upravljanja je u stalnom progresu već nekoliko godina.

Upravljački algoritmi se i u savremenim sistemima baziraju na rezultatima estimatora stanja, zbog čega se sa pravom može reći da estimacija predstavlja osnovu SCADA/EMS sistema. Estimator stanja kreira kompletnu koherentnu sliku sistema na osnovu raspoloživih merenja iz sistema koja se u centar upravljanja prikupljaju u jednakim vremenskim intervalima. Konvencionalni estimatori stanja koriste napone čvorova mreže, tokove i injektiranja aktivnih i reaktivnih snaga kako bi obezbedili određivanje stanja koja najmanje odstupaju od stvarnih, trenutnih stanja sistema i pored svih grešaka i odstupanja koja prikupljena merenja u sebi sadrže. Ovakva stanja, tj. naponi u čvorovima, kao i tokovi snaga se dalje koriste kao osnova za primenu svih drugih algoritama pomoću kojih se formiraju upravljačke akcije za obezbeđenje sigurnosti i ekonomičnosti rada sistema u realnom vremenu.

Razvojem tehnologije sistema za globalno pozicioniranje i sinhronizaciju GPS (Global Positioning System) [2] omogućeno je da se izvrši vremenska sinhronizacija podataka sa znatno većom preciznošću, što omogućava da se umesto praćenja amplituda merenih signala mogu pratiti njihove talasne promene, preko fazora kao osnovnih reprezentata. Sinhrofazorski uređaji (PMU – Phasor Measurement Unit) omogućavaju da se talasi napona i struja, preuzeti direktno sa naponskih i strujnih mernih transformatora, vremenski sinhronizuju prema UTC (Coordinated Universal Time) vremenu sa tačnošću reda mikrosekunde. Postavkom PMU uređaja u određeni čvor dobija se informacija o fazoru napona čvora i u zavisnosti od dodatnog broja kanala koje uređaj ima, i određen broj fazora struja grana koje iz tog čvora polaze. Vremenski sinhronizovani podaci se dalje šalju na koncentratore podataka PDC (Phasor Data Concentrator) gde se vrši njihova obrada. Upotreba PMU uređaja značajno povećava preciznost i sigurnost u nadgledanju, zaštiti i kontroli elektroenergetskih sistema. Povećavanje učestanosti odabiranja i odgovarajući algoritmi obrade signala obezbeđuju da se u merene signale unosi manja greška, odnosno ovom tehnologijom se obezbeđuju najtačnija moguća merenja. Za razliku od postojećeg SCADA/EMS sistema, gde se merenja dobijaju sa periodom odabiranja od 2 – 4 s i postoji merenje samo amplitude odnosno efektivne vrednosti napona i struje, ova tehnologija omogućava dobijanje podataka sa visokim periodom odabiranja (u elektroenergetskom sistemu Srbije perioda odabiranja je 20 ms), što omogućava praćenje dinamike sistema u realnom vremenu. Nažalost, tehnologija je skupa i stoga je pri izboru broja i lokacija PMU uređaja potrebno izvršiti tehno-ekonomsku analizu, tj. postaviti željeni ekonomski kriterijum, definisati neophodne tehničke uslove i primeniti odgovarajuću optimizacionu metodu.

Metode zasnovane na linearnom programiranju, kao i mnoge klasične nelinearne i meta-heurističke metode dolaze do jednog optimalnog rešenja. Međutim, problem optimalne postavke PMU uređaja ima više optimalnih rešenja sa stanovišta izbora čvorova u kojima se PMU uređaji postavljaju. Ovaj broj mogućih rešenja se značajno povećava sa povećanjem dimenzija sistema.

Naučni doprinosi ove doktorske disertacije su:

- Razvijen je originalan algoritam za rešavanje problema optimalne postavke PMU uređaja koji obezbeđuje potpunu topološku opservabilnost u elektroenergetskom sistemu uz najmanje investicione troškove;
- Analizirane su mogućnosti primene metode GREBNEROVE baze u rešavanju problema sinhrofazorske tehnologije;
- Razvijena je nova postavka problema sa jednačinama za uvažavanje čvorova nultog injektiranja sa analizom mogućnosti primene sa i bez topoloških modifikacija sistema;
- Razvijene su nove jednačine za uvažavanje N-X kriterijuma sigurnosti;
- Predložena je nova formulacija problema kojom se uvažava limitiranost broja kanala na PMU uređajima;
- Definisan je efikasan način pretrage rešenja u cilju određivanja kompletnog skupa svih ekvivalentnih optimalnih rešenja optimizacionog problema što čini najznačajniju prednost predložene metode u odnosu na sve do sada u literaturi navedene metode;
- Obezbeđenjem potpune topološke opservabilnosti sistema u normalnim radnim režimima uz njenu maksimizaciju u poremećenim radnim režimima, greške koje prave aplikacije zasnovane na estimatoru stanja se svode na minimum;
- Dobijanjem potpune topološke opservabilnosti preko PMU uređaja, obezbeđuju se najtačniji i vremenski sinhronizovani podaci u realnom vremenu, primenljivi za dalju obradu u algoritmima dinamičkog upravljanja elektroenergetskih sistema.

### 1.1 Pregled literature

Problem optimalne lokacije PMU uređaja u EES-u može da se rešava na mnoge načine. Optimizacione metode se mogu podeliti u dve kategorije: matematičke i heurističke [3]. Mnoge optimizacione metode su razvijene za ovaj problem u proteklim godinama. Najčešće korišćena metoda u literaturi se bazira na linearnom programiranju. Prvi put je dovedena u korelaciju sa optimalnom postavkom PMU uređaja u radu [4] gde su linearna ograničenja dobijena na osnovu topologije EES-a. Međutim, metodu je moguće primenjivati samo u slučajevima kada u mreži nema konvencionalnih merenja, odnosno prisustva čvorova nultog injektiranja ili već postojećih tokova aktivne i reaktivne snage. U dosadašnjem pregledu literature, može se primetiti da postoje dve grupe za tretiranje čvorova nultih injektiranja. Jedna je topološkim modifikacijama EES-a, odnosno odgovarajućeg grafa, a druga je uvođenjem nelinearnih ograničenja u optimizacioni proces. U radu [5] su prvi put upotrebljene topološke modifikacije kojim se dobija sistem linearnih ograničenja u optimizacionoj metodi. Nakon toga, u radu [6] je predstavljena metoda za integraciju čvorova nultog injektiranja sa nekim od susednih čvorova čime se dimenzije sistema jednačina ili nejednačina smanjuju za broj čvorova nultog injektiranja. U radu [7] su posmatrani različiti uslovi u mreži metodom linearnog programiranja, a PMU uređaji su postavljani u etapama na određenom vremenskom horizontu. Predložena metoda je proširena

na problem limitiranog broja kanala PMU uređaja [8, 9, 10, 11] i kvarova na tim kanalima [10, 12], zatim ispadom dalekovoda ili transformatora [13], kombinacijom PMU merenja sa već postojećim merenjima [14, 15, 16]. Korelacija sa nadgledanjem i praćenjem dinamike sistema je data u [17], a u [10, 18] sa praćenjem sigurnosti sistema. Međutim, problem nalaženja svih binarnih promenljivih u velikim EES-ovima [19] koji rešavaju ovaj samo naizgled matematički prilično jednostavan optimizacioni problem, može dovesti do vremenski zahtevnog proračuna. U [20] je predstavljen nov algoritam zasnovan na celobrojnom programiranju. Sastoji se iz tri etape, gde se u iterativnoj proceduri određeni čvorovi eliminišu na osnovu valentnosti kao manje podobni za optimalno rešenje.

Pored pobrojanih metoda gde se koriste linearni tipovi ograničenja, postoje i druge formulacije, gde su ona nelinearna. Algoritam za pretragu predstavljen u [21] koristi metodu celobrojnog kvadratnog programiranja. Rad zasnovan na kvadratu odstupanja je predstavljen u [22], dok je sekvencijalno kvadratno programiranje dato u [23]. Kako se problem sastoji u pronalaženju lokalnih minimuma, a ne globalnog, pored klasičnih optimizacionih metoda, razvijene su i metode zasnovane na kompjuterskoj inteligenciji kao što su genetski algoritam [24, 25, 26], tabu algoritam pretrage [27], diferencijalna evolucija [28], binarni cuckoo optimizacioni algoritam [29]. Kombinacija teorije grafova i genetskog algoritma se može pronaći u [25] gde autori predlažu četiri topološke transformacije mreže i tri pravila za postavku PMU uređaja.

U budućnosti, trend pisanja radova i istraživanja na ovu tematiku će svakako postojati. U problem je potrebno uvažiti i mogućnosti loših podataka sa PMU uređaja, redundantnost, inteligentni razvoj mreže, hakerske napade, integraciju PMU merenja sa širokopojasnim sistemima za merenje (Wide Area Measurement System - WAMS), zatim za merenje, zaštitu i kontrolu (Wide Area Measurement Protection And Control - WAMPAC).

Pokazuje se da veći broj i klasičnih i metaheurističkih metoda nalazi jedno optimalno rešenje (kod metaheurističkih obično je to suboptimalno, a ne optimalno). Međutim, kako je OPP (Optimal PMU Placement) problem pretraživanja binarnih promenljivih, skoro uvek postoji više rešenja, koji se može jako povećati sa povećanjem dimenzija problema [25].

## 1.2 ISTORIJA SINHFROFAZORSKIH MERENJA

Mnoge aktivnosti vezane za planiranje, operativni rad ili post mortem analizu u EES-u su vezane za proračun i analizu tokova snaga [30]. Njihovim proračunom dobijaju se efektivne vrednosti i argumente napona, kao i vrednosti aktivne i reaktivne snage injektiranja u pojedinim čvorovima mreže. Jednačine tokova snaga, formirane prema matrici admitansi čvorova, gde je uzet rektangularni oblik za admitansu,  $\underline{Y} = G + jB$  i eksponencijalni oblik za napon čvora,  $\underline{U} = Ue^{j\theta}$  dat je jednačinama

$$P_i = \sum_{k=1}^n |\underline{U}_i| |\underline{U}_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})$$

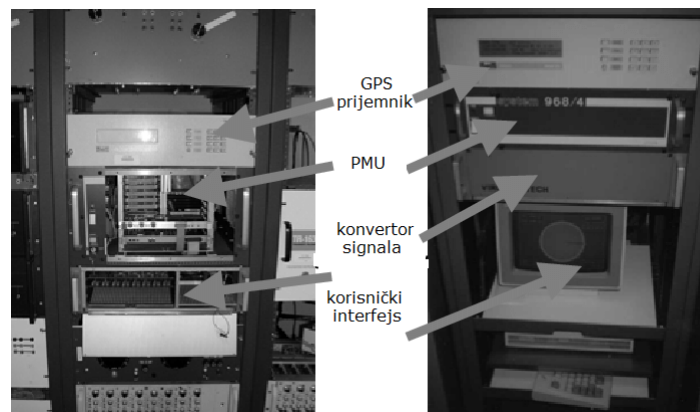
$$Q_i = \sum_{k=1}^n |\underline{U}_i| |\underline{U}_k| (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}).$$



Za realne mreže, a pre svega zbog male dužine vodova, ima se da su uglovi čvorova  $i$  i  $j$  jako bliskih vrednosti, te je  $\cos(\theta_i - \theta_j) \approx 1$  i  $\sin(\theta_i - \theta_j) \approx \theta_i - \theta_j$ . Ima se da je aktivna snaga proporcionalna sinusu fazne razlike napona, odnosno približno samo faznoj razlici. Iz ovog razloga je merenje ili izračunavanje faznog ugla napona od izuzetne važnosti. Prvi radovi na ovu temu su se pojavili osamdesetih godina [31]. Ovi sistemi su koristili satelitski prenos kako bi se izvršila vremenska sinhronizacija na geografski različitim tačkama u EES-u. Sledeći korak je bila estimacija faznog ugla u korelaciji sa satelitskim vremenom. Korišćenjem jednovremenog uzimanja odbiraka sa različitih trafostanica, inženjeri su dobili mogućnost da takve fazore stave na isti fazorski dijagram što pre nije bilo moguće. Tačnost merenja koje je postignuto u ovim sistemima je bilo reda  $40 \mu\text{s}$  [32].

Moderno doba sinhrofazorske tehnologije je počelo početkom osamdesetih godina prošlog veka i vezano je sa razvojem uređaja relejne zaštite. Ti uređaji su u svom algoritmu imali implementirane jednačine zasnovane na teoriji simetričnih komponenti. Ova teorija je omogućila da se svi kvarovi posmatraju kroz jednu jednačinu i data je u [33]. Ubrzo je primećeno da je nalažanje direktne komponente napona (teorija simetričnih komponenti daje i inverznu i nultu<sup>1</sup>) od izuzetne važnosti i dobijanjem svih direktnih komponenti napona ima se vektor stanja EES-a. Na ovoj konstataciji je zasnovan i rad [34] koji se može smatrati uvodom u modernu sinhrofazorsku analizu. Međutim, postojao je problem sinhronizacije merenja koja dolaze sa velikog broja tačaka iz jednog EES-a koji je i u električnom i u geografskom smislu veliki. Problem sinhronizacije je predupređen globalnim pozicionim sistemom (GPS - Global Positioning System) koji se u to vreme uveliko razvijao.

Prvi sinhrofazorski uređaji su razvijeni u Virginia Tech laboratoriji ranih osamdesetih godina prošlog veka. Na slici 1.2.1 su prikazana dva prototipa prvih sinhrofazorskih uređaja koji su instalirani u nekoliko trafostanica u SAD. Prva komercijalna proizvodnja PMU uređaja je počela od strane Macrodyne 1991. godine [35].



Slika 1.2.1: prvi sinhrofazorski uređaji (slika preuzeta iz [32])

Iako je tehnologija neprestano razvijana od početka osamdesetih, operatori EES-a su uvideli njen značaj, nažalost tek nakon potpunih ili delimičnih raspada sistema u svetu u

<sup>1</sup>neki autori nazivaju i pozitivna, negativna i nulta

prethodnim decenijama koji su pokazali da se za velike interkonektivne elektroenergetske sisteme visoki nivo sigurnosti i stabilnosti ne može postići sa ograničenim znanjem o sistemu i monitoringu samo njegovih delova. Siguran operativni rad EES-a može se postići ako operatori prenosnog sistema imaju pouzdane informacije o sistemu kojim upravljaju kao i sistemima u interkonekciji. U Tabeli 1.1 su prikazani ozbiljni potpuni i delimični ispadi EES-a kao i broj korisnika koji je trpeo posledice prekida napajanja električnom energijom [36].

Tabela 1.1: Prikaz ispada pojedinih EES i broj korisnika u mraku

EES	godina	broj korisnika u mraku (u milionima)	ispala potrošnja (MW)	trajanje (h)
Severna Amerika	2003.	50	61 800	16-72 za SAD do 192 u Kanadi
Iran	2003.	22	7 063	8
Italija	2003.	57	24 000	5-9
Pakistan	2006.	160	11 160	5-6
UCTE	2006.	45	14 500	oko 2
Kolumbija	2007.	41	6 644	4-5
Brazil	2011.	40	8 884	više od 3
Indija	2012.	6,70	48 000	2-8
Turska	2015.	70	32 200	više od 7

Danas, operatori prenosnog, ali i distributivnog sistema instaliraju PMU uređaje u velikom broju. Postoji više desetina proizvođača (Siemens, ABB, Sell...) a svi koriste standard IEEE koji je objavljen 1991. godine [37], a revidovan 2005. godine.

### 1.3 Predstavljanje fazora

Prostoperiodična veličina zapisana u kanoničnom obliku je

$$x(t) = X_{\max} \cdot \cos(\omega t + \xi), \quad (1)$$

gde je  $X_{\max}$  amplituda prostoperiodične veličine, član  $\omega t + \xi$  predstavlja trenutnu fazu struje, a za  $t = 0$  ima se član  $\xi$  koji se zove početna faza. Efektivna vrednost<sup>2</sup> se po definiciji izračunava pomoću formule

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}, \quad (2)$$

<sup>2</sup>u stranoj literaturi se označava i sa rms - root mean square

a za slučaj prostoperiodične funkcije ima se

$$\begin{aligned} X_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{X_{\text{max}}^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \xi) dt} = \sqrt{\frac{X_{\text{max}}^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\xi)}{2} dt} \\ &= \sqrt{\frac{X_{\text{max}}^2}{T} \left(\frac{T}{2} + 0\right)} = \frac{X_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

jer je srednja vrednost funkcije  $\cos(2\omega t + 2\xi)$  jednaka nuli. Jednačina (1) se može predstaviti i kao

$$x(t) = \text{Re} \{ X_{\text{max}} e^{j(\omega t + \xi)} \} = \text{Re} \{ X_{\text{max}} e^{j\xi} \cdot e^{j\omega t} \}.$$

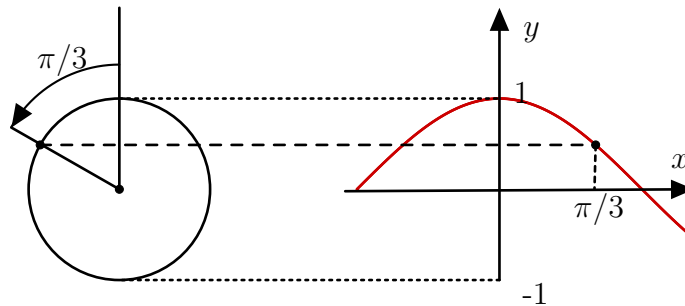
Uobičajeno je da se član  $e^{j\omega t}$  zanemari, vodeći računa da se ovaj fazor obrće ugaonom brzinom  $\omega$ . Prostoperiodična veličina (1) se može zapisati u polarnom (eksponencijalnom) obliku kao

$$\underline{X} = \frac{X_{\text{max}}}{\sqrt{2}} e^{j\xi},$$

a korišćenjem OJLEROVE (EULER) formule ( $e^{\pm j\xi} = \cos \xi \pm j \sin \xi$ ) se može doći i do pravougaonog (rektangularnog) oblika

$$\underline{X} = \frac{X_{\text{max}}}{\sqrt{2}} (\cos \xi + j \sin \xi) = X_{\text{rms}} (\cos \xi + j \sin \xi),$$

Na slici 1.3.1 je prikazana analogija između kompleksnog i vremenskog domena.



Slika 1.3.1: analogija između vremenskog i kompleksnog domena

Fazorska predstava je moguća jedino ako je signal sastavljen isključivo od prostoperiodične veličine. U praksi je to redak slučaj. Najčešće je signal kombinacija raznih signala različitih učestanosti. Uzimanje samo dela signala određene učestanosti je moguće ili primenom diskretne FURIJEOVE (FOURIER) transformacije (DFT) ili brze FURIJEOVE transformacije (FFT). Dakle, uzimanje odbiraka na jednom periodu osnovne učestanosti (50 Hz ili 60 Hz u Americi ili Japanu)

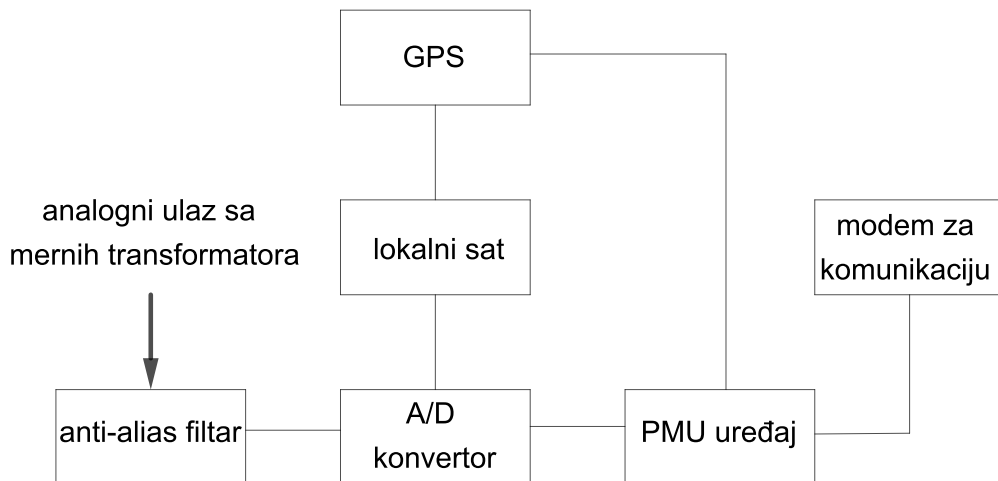
se vrši dobro poznatom formulom u teoriji transformacije:

$$\underline{X} = X_r + jX_i = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=1}^N \left( x_n \cos \frac{2\pi l}{N} + jx_n \sin \frac{2\pi l}{N} \right),$$

gde su  $X_r$  i  $X_i$  realni i imaginarni deo posmatranog signala  $x_n(t)$ , dok je  $N$  broj odbiraka na jednom periodu. Ako je frekvencija ulaznog signala različita od osnovne učestanosti, moraju se uzeti u obzir korekcije vezane za amplitudu (ili efektivnu vrednost) i fazni stav prilikom proračuna devijacije frekvencije. Ulazni signal mora biti pre bilo kakve obrade filtriran u skladu sa NIKVISTOVOM (NYQUIST) teoremom odabiranja kako se ne bi pojavili alijas efekti.

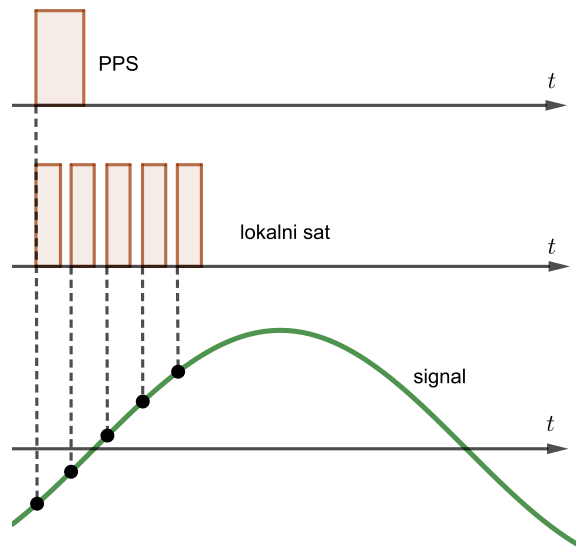
## 1.4 Proces rada sinhrofazorskih uređaja

Jako je teško govoriti uopšteno o PMU tehnologiji i procesu rada u današnje vreme kada svaki proizvođač ima nešto svoje čime proizvodu obezbeđuje konkurentnost na tržištu. Ipak, svi PMU uređaji u jezgru imaju sličnost koja će biti predstavljena u ovom odeljku. PMU uređaj se sastoji iz različitih modula: za izračunavanje, za prikupljanje podataka, za sinhronizaciju. Svaki PMU uređaj ima analogne ulaze, mogućnost njihovog filtriranja, digitalizacije, sinhronizacije, digitalnu obradu i komunikaciju. Na slici 1.4.1 je predstavljena blok šema tipičnog PMU uređaja današnjice. Analogni ulazi su postavljeni kako bi se trofazni signal sa sekundara naponskog i strujnog mernog transformatora doveo na dalju obradu. Iako je u suštini PMU uređaj mikroprocesorska zaštita, za razliku od nje, PMU može imati signale struja i napona sa različitih izvoda u trafostanici. Kako bi se trofazna struja i napon dalje obrađivali, moraju se dovesti na analogno-digitalni konvertor (A/D). U tu svrhu se pomoću oslabljivača ili instrumentalnih transformatora početni signali moraju redukovati (za napone tipično  $\pm 10$  V, za struje tipično par ampera u zavisnosti od proizvođača). Kako se ne bi pojavio alijas efekat, period odabiranja mora zadovoljavati NIKVISTOV kriterijum, te se koriste anti-alijas filtri. Kod mnogih modernih releja se može koristiti višestruko uzorkovanje (tzv. oversampling) sa odgovarajućom velikom učestanošću odsecanja (cut-off frequency) programiranom unutar analognog anti-alijas filtra. Ovim se postiže da se pomeri NIKVISTOVA frekvencija na dosta veću vrednost od nominalne frekvencije odabiranja pa se smanjuje kašnjenje filtra i štedi u prostoru. Digitalni decimacioni filter ima ulogu da odbirke uzima sa manjom učestanošću odabiranja praveći integrisani digitalni anti-alijas filter sa analognim anti-alijas filtrom [32]. Osnovna prednost takve strukture je u efikasnijem anti-alijas filtru koji je tipa analogni ulaz, analogni izlaz, a u kombinaciji sa digitalnim decimacionim filtrom dobija se stabilniji i imuniji rad na temperaturnim varijacijama kao i usporavanje procesa starenja.



Slika 1.4.1: blok šema tipičnog PMU uređaja (slika preuzeta iz [32])

Svi odbirci koji se dobijaju u opisanom procesu imaju vremenske značke (time tag). Sat koji vrši njihovo dodeljivanje je baždaren prema GPS vremenu koje se dobija od strane GPS satelita raspoređenih u šest orbitalnih ravni, svaka dva udaljena za po  $60^\circ$ , sa inklinacijom od  $55^\circ$  u odnosu na ekvatorijalnu ravan [32]. Sateliti imaju orbitalni radijus od oko 26500 km i običu Zemlju dva puta dnevno. GPS sateliti su tako postavljeni da u svakom trenutku svaku tačku na Zemlji posmatra najmanje šest satelita, te je prekid satelitskog vida komunikacije praktično nemoguć. Za vezu između PMU i GPS satelita najvažniji signal je jedan impuls u sekundi (one pulse per second - PPS). Ovaj impuls koji je primio bilo koji prijemnik na Zemlji, u ovom slučaju PMU, se podudara sa svim ostalim impulsima primljenim u periodu od  $1\ \mu\text{s}$ . Ovo praktično znači da je greška moguća tek na mikrosekundnom području za ovakav vid komunikacije. Međutim, GPS vreme ne uzima u obzir rotaciju Zemlje, pa ju je potrebno inkorporirati u GPS prijemnicima kako bi se dobilo UTC vreme. Impuls je definisan brojem sekundi kada su satovi počeli da rade - 6. januar 1980. Treba napomenuti da PMU uređaji koriste standard koji koristi UNIX vreme koje je počelo da se računa 1. januara 1970. godine [38]. Prvi satovi su mogli da uzimaju maksimalno 12 odbiraka na dužini jedne periode pri nominalnoj učestanosti, dok sa razvojem tehnologije, današnji satovi mogu da uzimaju od 96 do 128 odbiraka. Vremenske značke svim signalima koje PMU uređaj obrađuje se dobijaju od dva signala dobijena preko GPS satelita. Lokalni sat, koji se nalazi unutar PMU uređaja se okida PPS signalom kako bi počeo proces merenja, što je predstavljeno na slici 1.4.2.



Slika 1.4.2: PPS signal

Na kraju procesa, iz PMU uređaja izlazi vremenski sinhronizovani signal koji se telekomunikacionim putevima dovodi do sledećeg uređaja u hijerarhiji - PDC uređaja (Phasor Data Concentrator) koji ima ulogu da prikuplja, vrši obradu i odbacuje loše podatke primljene sa svih primljenih signala iz PMU uređaja. Za velike sisteme kada jedan PDC uređaj nije dovoljan, postavlja se više njih, a onda se signali iz PDC-ova dovode na super PDC uređaj. Za bilo kakav vid analize se pristupa PDC ili super PDC uređaju preko neke od razvijenih aplikacija npr. WAMS, o kojoj će biti reči u odeljku o primeni sinhrofazorske tehnologije. Treba napomenuti da je komunikacija na nivou PMU - PDC dvosmerna. Sa PDC uređaja se na PMU uređaj mogu poslati konfiguracione poruke, najčešće vezane za striming proces. Komunikacija se odvija preko fiber-optičkih kablova koji imaju ogroman kapacitet za prenos podataka.

## 1.5 Primena sinhrofazorske tehnologije

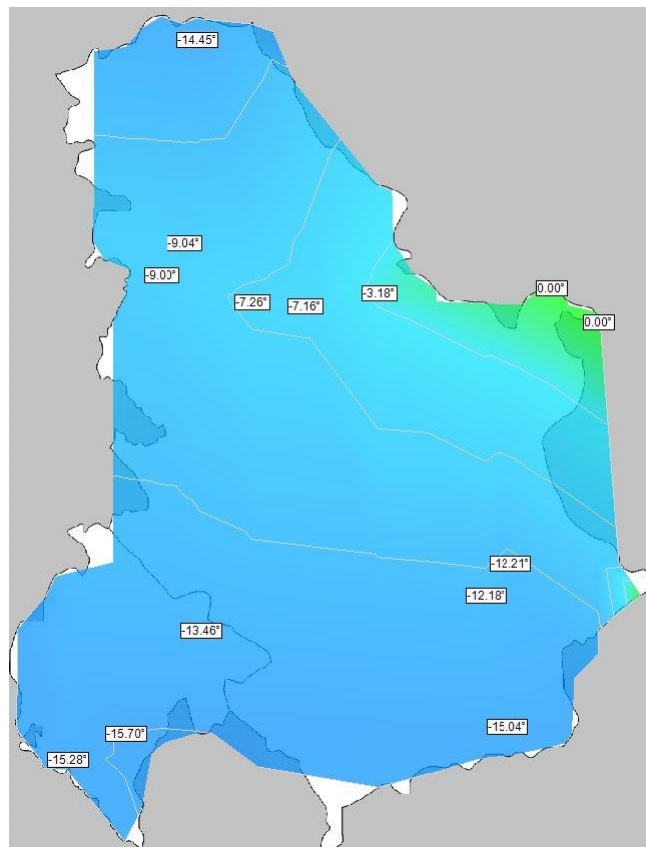
Primena sinhrofazorskih merenja može se svrstati u tri kategorije:

1. Širokopoljaska vizualizacija i povećanje sigurnosti;
2. Poboľšanje planiranja i analize;
3. Kontrolne aplikacije zasnovane na odzivu dobijenom iz širokopoljaskih merenja.

### 1.5.1 Alat za grafički prikaz (vizualizacija) – WAMS sistem

Tokom 2015. godine AD EMS je u saradnji sa proizvođačem softvera Wide Area Protector (WAP) implementirao aplikaciju koja se koristi za širokopoljasku vizuelizaciju informacija koje se dobijaju putem Wide Area Measurement System-a (WAMS). Konvencionalni SCADA/EMS

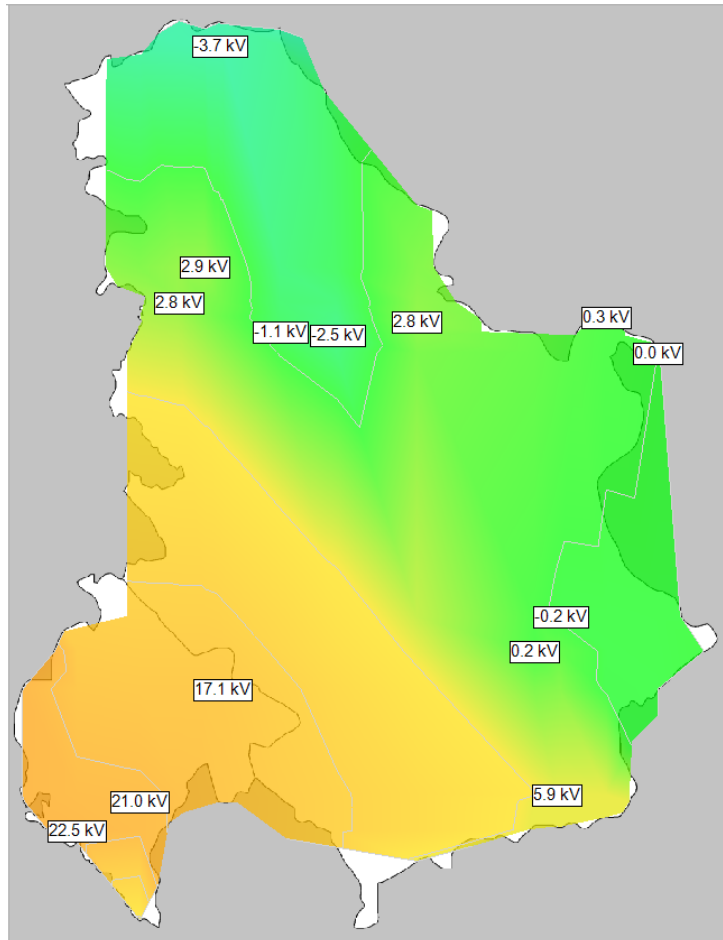
sistemi pružaju sinhronizovane podatke sa manjom tačnošću (vremenska rezolucija je između 1 s i 10 s). Takođe, ovi sistemi ograničeni su na stacionarna stanja i ne mogu se koristiti za praćenje dinamike u EES-u. Instalacijom WAMS-a dobija se i ta mogućnost. WAMS obezbeđuje vremenski sinhronizovane podatke na svakih 20 ms (za 50 Hz sistem), a svaki odbirak je sinhronizovan prema UTC vremenu. Korisna opcija u WAMS-u je grafički prikaz faznih uglova napona u čvorovima gde je instaliran PMU uređaj. Na ovaj način je moguće pratiti tokove aktivne snage u interkonekciji, detektovati generatorske i potrošačke oblasti. Dostupni su i grafički prikazi efektivnih vrednosti napona u čvorovima te je moguće pratiti i tokove reaktivne snage, zatim frekvenciju, fazore napona na oba kraja dalekovoda. Poznati su problemi sa stabilnošću prilikom prenosa velike snage na velika rastojanja, te primenom WAMS vizualizacije, ovi problemi mogu biti predupređeni odgovarajućim redispečingom u toku operativnog rada [39]. Na slici 1.5.1 su prikazani fazni uglovi napona u pojedinim trafostanicama u Srbiji. Može se zaključiti prema vrednostima faznih uglova napona da je u prikazanom trenutku sever i jug Srbije dominantna potrošačka oblast, dok je istočni i centralni deo (oko Đerdapa i Beograda) dominantna proizvođačka oblast. Aplikacija omogućava da se u realnom vremenu prate tokovi aktivnih snaga kako u Srbiji, tako i na nivou cele interkonekcije. Na slici 1.5.1 je za referentni čvor za računanje uglova uzeta TS Đerdap 1 pa su prikazane vrednosti uglova dobijene kao razlika faznog ugla napona u TS Đerdap 1 i posmatrane trafostanice.



Slika 1.5.1: prikaz faznih uglova u WAMS aplikaciji

Na slici 1.5.2 su prikazane efektivne vrednosti linijskih napona u trafostanicama u Srbiji. Može se zaključiti da su tokovi reaktivne strane iz pravca Crne Gore ka Srbiji. Na slici 1.5.2 je

za referentni čvor za računanje napona uzeta TS Đerdap 1, pa su prikazane vrednosti napona u čvorovima dobijene kao razlika napona u TS Đerdap 1 i posmatranoj trafostanici.



Slika 1.5.2: prikaz efektivnih vrednosti napona u WAMS aplikaciji

### 1.5.2 Estimacija stanja

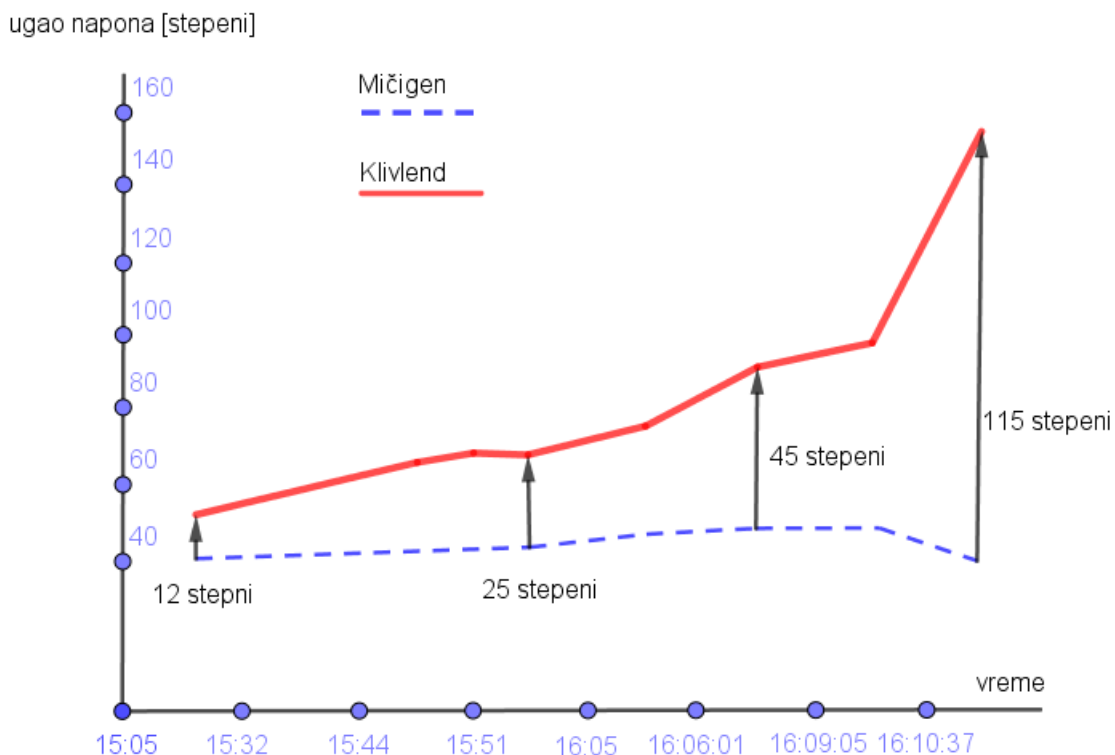
Estimator stanja (ES) određuje stanje EES-a na osnovu njegovog matematičkog modela i dostupnih merenja. ES prema modelu mreže nalazi rešenje koje odgovara približnije stvarnim merenjima. Predstavlja vitalnu aplikaciju u svakom operativnom centru [40]. ES zasnovan isključivo na PMU merenjima nije praktičan pre svega zbog troškova ugradnje i istorijski dugoročnih ulaganja u SCADA/EMS sistem koji je decenijama bio neprikosnoveni „vladar” estimacije stanja. Mnogo realniji pristup bi bio da se postojeća SCADA/EMS merenja i PMU merenja iskoriste kako bi se poboljšao kvalitet estimacije stanja. Neki radovi na ovu temu predstavljaju tehnike potkrepljene teorijom i simulacijama. Teškoće koje nastaju ovom prilikom se ogledaju u odabiru pravih podataka iz ogromnog skupa primljenih podataka, a takođe se dovodi u pitanje i konvergencija klasičnog ES potkrepljenog PMU podacima. U estimaciji stanja se najčešće koristi NJUTN-RAPSONOV (NEWTON-RAPHSON) metod, koji pak ignoriše članove stepena većeg od dva iz TEJLOROVOG (TAYLOR) razvoja [41]. Ovo ima smisla samo



ako je početni trenutak dobro odabran. Međutim, kako se PMU merenja dovode jednom, a SCADA merenja drugom učestanosti u ES, odabir početnog trenutka i konvergencija se sa pravom dovode u pitanje. Zanemarivanje članova stepena većeg od dva u TEJLORovom razvoju nije dovoljan kako bi polinomna aproksimacija tokova snaga bila prihvatljiva. Neki drugi algoritmi proračuna tokova snaga, npr. GAUS-ZAJDEL (GAUSS - SEIDEL) bi za velike sisteme, zbog brzine konvergencije bio neprihvatljiv. Kako bi se problemi integracije PMU i SCADA merenja izvršili, urađeni su brojni radovi [2, 42, 43, 44, 45].

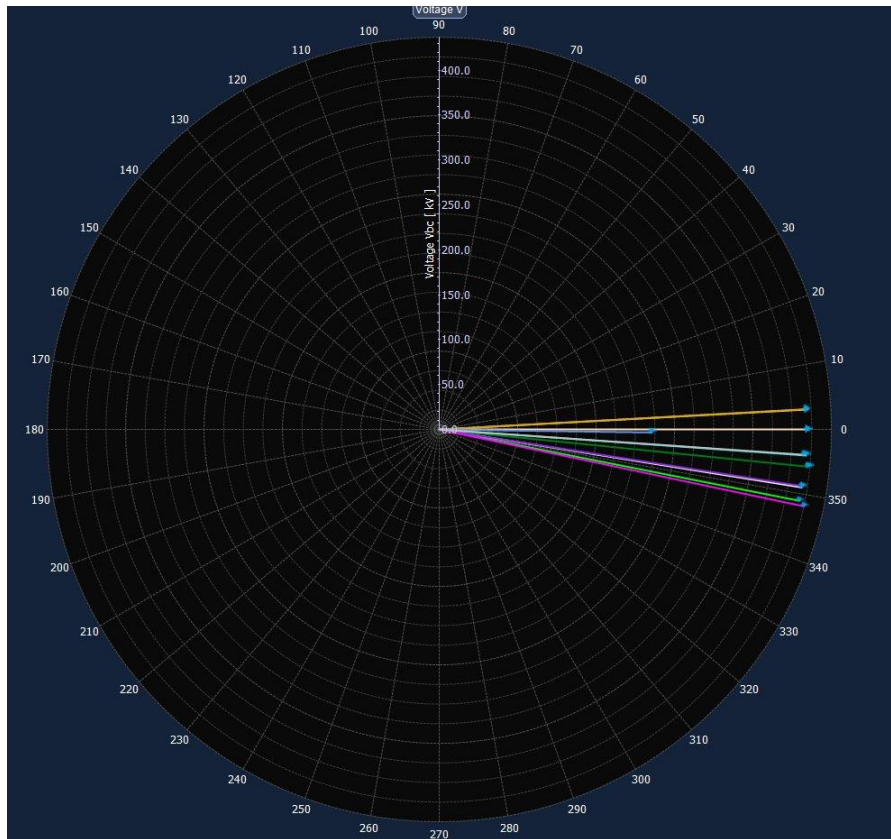
### 1.5.3 Unapređivanje bezbednog rada sistema

Događaj koji je ušao u knjige desio se 14.08.2003. godine kada je 45 miliona ljudi iz severoistočnog dela SAD i 10 miliona ljudi iz jugoistočnog dela Kanade bio u potpunom mraku više sati. Problem je počeo ispadom 345 kV dalekovoda koji je povezivao proizvođački i potrošački čvor. Usledio je kaskadni ispad. Kao jedan od ključnih razloga zbog kojih se problem proširio je što operatori prenosnog sistema (First Energy) nisu imali potpune informacije o sistemu, pre svega o njegovoj dinamici. Nažalost, merenja sa PMU uređaja poslužila su kasnije samo za post-mortem analizu [46]. Kao zaključak radne grupe koja je ovu analizu radila bio je, u vidu jake preporuke, da svi EES imaju instalirane PMU uređaje. Na slici 1.5.3 je prikazan trend rasta ugaone razlike fazora napona na krajevima dosta opterećenog dalekovoda između Klivlenda i Mičigena, koji je prvi ispao iz pogona 14. avgusta 2003. godine. WAMS sistemom bi se ovaj trend mogao ispratiti i preduprediti.



Slika 1.5.3: Prikaz ugaone razlike napona između dve trafostanice (slika preuzeta iz [47])

U Nacionalnom dispečerskom centru Srbije jedna od mogućnosti je upravo ovo praćenje. Sinhronizovanost odbiraka omogućava da se fazori mogu postaviti na isti fazorski dijagram, što nije bio slučaj kod SCADA/EMS sistema, slika 1.5.4.



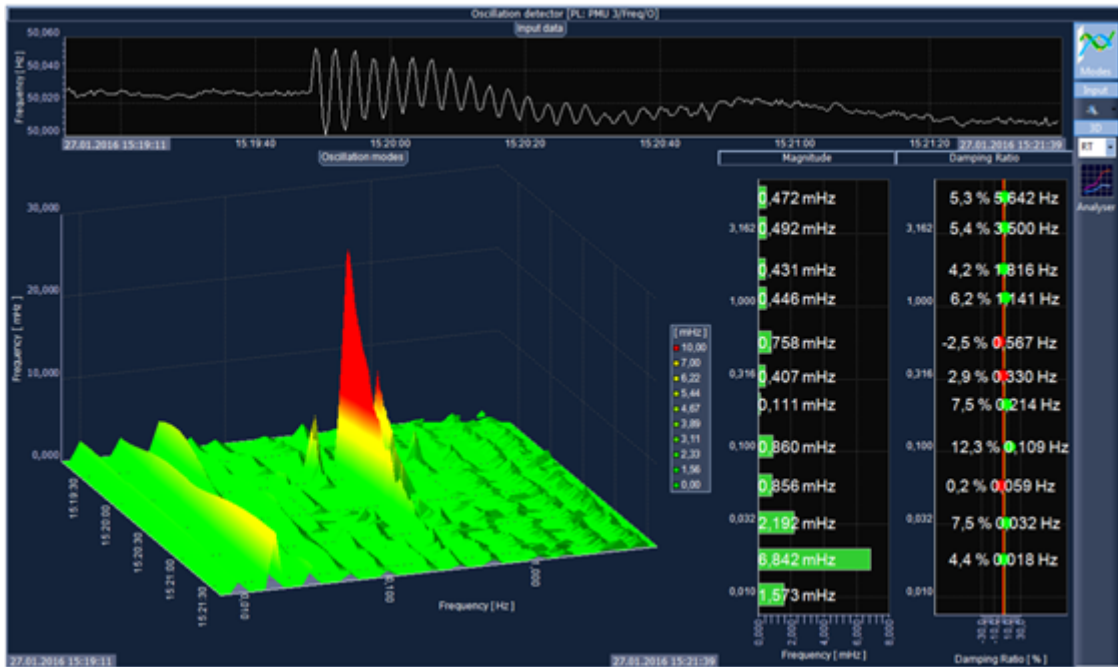
Slika 1.5.4: Prikaz aplikacije u WAMS sistemu koji prati ugaonu razliku

### 1.5.4 Detekcija oscilacija

Oscilacije niskih frekvencija se mogu dogoditi u EESu kada generator ili grupa generatora osciluju jedni u odnosu na druge. Opseg oscilacija koji je vezan za jedan generator ide od 0,8 Hz do 2 Hz, dok je za grupu generatora taj opseg (međuzonske oscilacije) od 0,1 Hz do 0,8 Hz [48]. Događaji kao što su ispad elektrane, dalekovoda ili manipulacije uključivanja ili isključenja nekih elemenata mogu dovesti do oscilacija. Različiti problemi u EESu koji se mogu pojaviti zahtevaju različite protivmere. Klasifikacija oscilacija u operativnom kontekstu može pomoći u određivanju najboljeg načina da se one ublaže ili da se uopšte izbegnu. Aplikacija koja koristi PMU merenja je prikazana na slici 1.5.5. Na njoj se nalaze dva grafika u desnom delu. Na oba grafika  $y$ -osa predstavlja frekvenciju oscilacija na logaritamskoj skali. Na levom grafiku  $x$ -osa predstavlja amplitudu svake oscilacije. Na desnom grafiku  $x$ -osa predstavlja koeficijent prigušenja u procentima. Zelenim tačkama označene su prigušene oscilacije, žutim tačkama bi bile prikazane oscilacije koje bi u budućnosti mogle da izazovu problem, dok su crvenim tačkama predstavljene ili neprigušene ili slabo prigušene oscilacije. U levom delu slike su prikazani ovi podaci na 3D grafiku. Aplikacija obrađuje podatke na svakih 200 ms. Ovo

# 1 UVOD

znači da se sopstvene vrednosti matrica snimaju u bazu podataka 5 puta u toku sekunde. Na slici 1.5.6 je prikazan četvorominutni opseg frekvencije signala. U gornjem delu slike 1.5.6 se vidi glavni prikaz signala, a moguća je i analiza koja izdvaja oscilacije, sa kojom frekvencijom i amplitudom učestvuju.



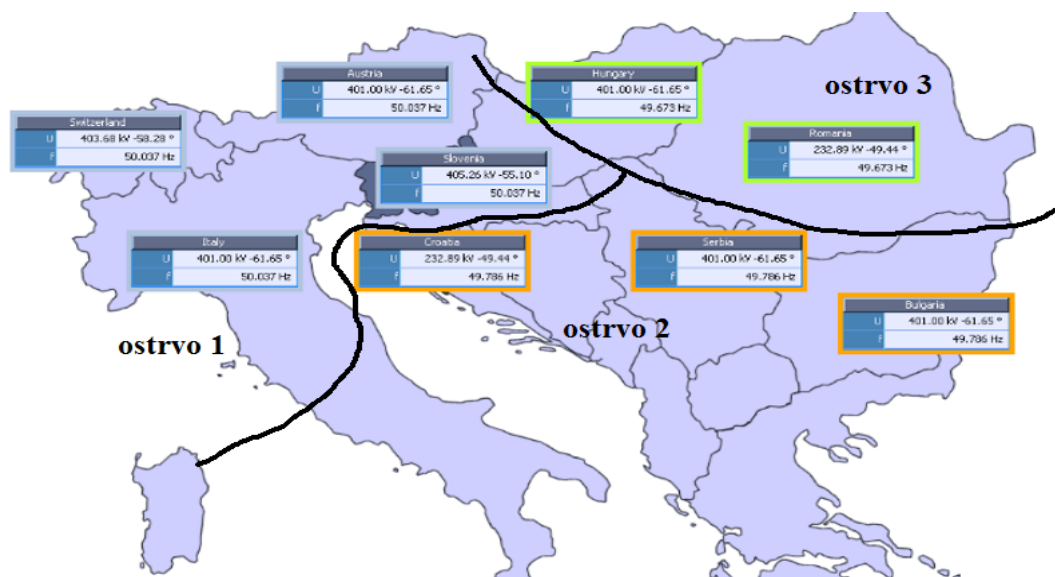
Slika 1.5.5: Prikaz aplikacije za detekciju oscilacija



Slika 1.5.6: Prikaz aplikacije za analizu oscilacija

### 1.5.5 Detektor ostrvskog rada

PMU uređaji, odnosno WAMS sistem mogu pomoći u detekciji ostrvskog rada. Ostrvski rad koji aplikacija može detektovati su: prouzrokovani odvajanjem od velike interkonekcije, razdvajanjem jednog sistema na više ostrva ili odvajanjem samo jednog generatora. Metode koje sistem koristi za detekciju zasnovane su na frekvenciji i/ili faznoj razlici napona. Na slici 1.5.7 su prikazana tri ostrva, koje PMU uređaji jasno identifikuju. Jedno ostrvo čine Austrija, Švajcarska, Italija i Slovenija, drugo ostrvo Srbija, Bugarska i Hrvatska i treće ostrvo Mađarska i Rumunija. Kako u ovoj interkonekciji postoji (samo) 9 PMU uređaja, imamo gruba mesta podele na ostrva.

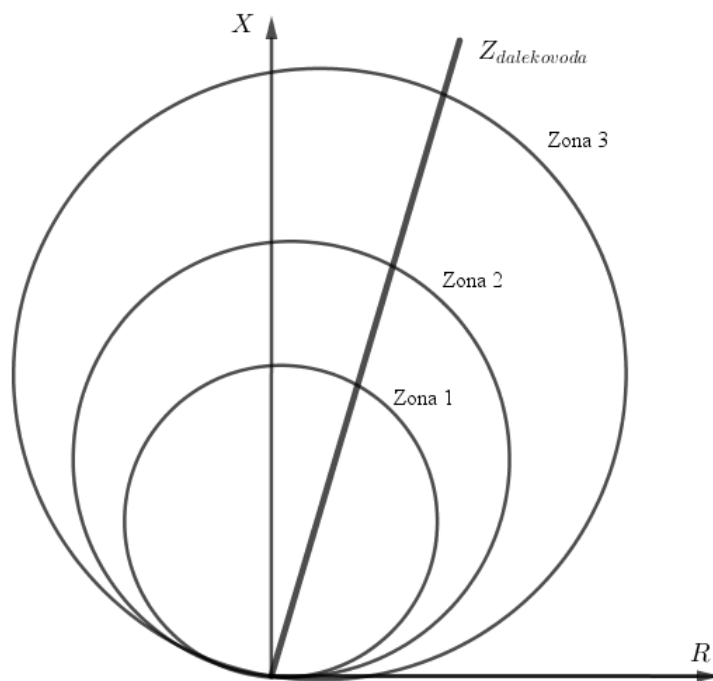


Slika 1.5.7: Uz detekciju ostrvskog rada

### 1.5.6 Detekcija lažnog reagovanja distantne zaštite u trećem stepenu

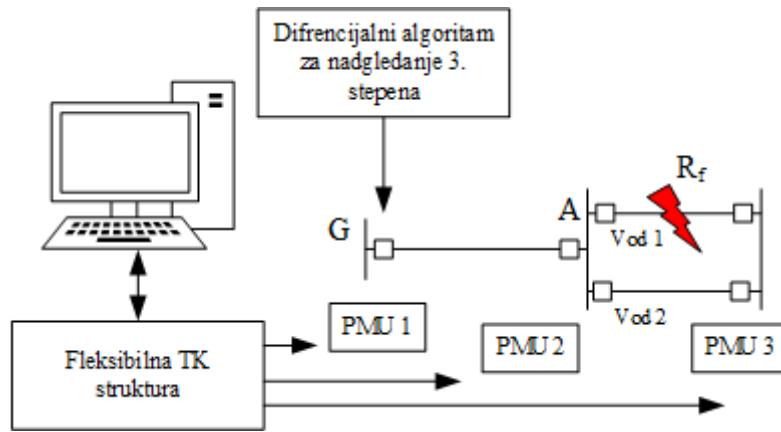
Stepenovana distantna zaštita je široko rasprostranjena za zaštitu nadzemnih vodova u EESu. Tokom specifičnih stanja u sistemu, kao što su oscilacija snage, naponska nestabilnost, može doći do lažne prorade distantne zaštite u višem stepenu (trećem). Za reperkusiju se mogu imati kaskadni ispadi dalekovoda nakon čega može doći do potpunog ili delimičnog raspada EESa. Današnje tehnike sprečavanja prorade distantne zaštite, korišćenjem lokalnih merenja su ograničene i u praksi su se pokazale nepouzdana (640 miliona korisnika je u Indiji zbog ovog razloga ostalo u mraku tokom 2012. godine čitava 2 dana! [49]). Korišćenjem WAMS sistema, proračuni u realnom vremenu su mogući. PMU uređaj šalje podatke PDC uređaju, čija se funkcionalnost može proširiti i na kontrolne. Sa PDC uređaja postoji mogućnost slanja signala uređajima u trafostanicama. Kašnjenje koje se unosi ovim putem omogućava da WAMS sistem postane zaštitni sistem tamo gde vreme nije od presudnog značaja (npr. distantnu zaštitu u trećem stepenu). Postoje različite tehnike za identifikaciju voda na kome je kvar i nadgledanje trećeg stepena. Jedna metoda se zasniva na pronalazanju čvora sa najmanjom pozitivnom sekvencom napona. Taj čvor bi bio električno najbliži kvaru. Fazni uglovi struja koja izlaze iz

identifikovanog čvora se upoređuju kako bi se utvrdio vod na kome je kvar. Druga metoda se zasniva na deljenju sistema na manje delove. Merenjem diferencijalnih struja ovih delova može se pronaći koji deo je pogođen kvarom, a zatim na osnovu korelacionih faktora da pronađemo vod pod kvarom. Na osnovu širkopojasnih merenja koji su vremenski sinhronizovani moguće je bolje sagledati situaciju u sistemu i prema tome sprečiti distantnu zaštitu da lažno reaguje i isključi dalekovod. Ovo se obezbeđuje preko specijalnog dodatnog signala koji se šalje iz PDC uređaja u uređaje lokalne zaštite. Tokom normalnih stanja u EESu rezistansa kvara  $R_f$  je veoma velika. Kada se kvar dogodi,  $R_f$  varira između nule i nekoliko desetina kilooma. Nagla promena rezistanse kvara je indikacija da je došlo do kvara u EESu. Na slici 1.5.8 je prikazana  $R - X$  karakteristika distantnog releja.



Slika 1.5.8: Prikaz R-X karakteristike distantnog releja

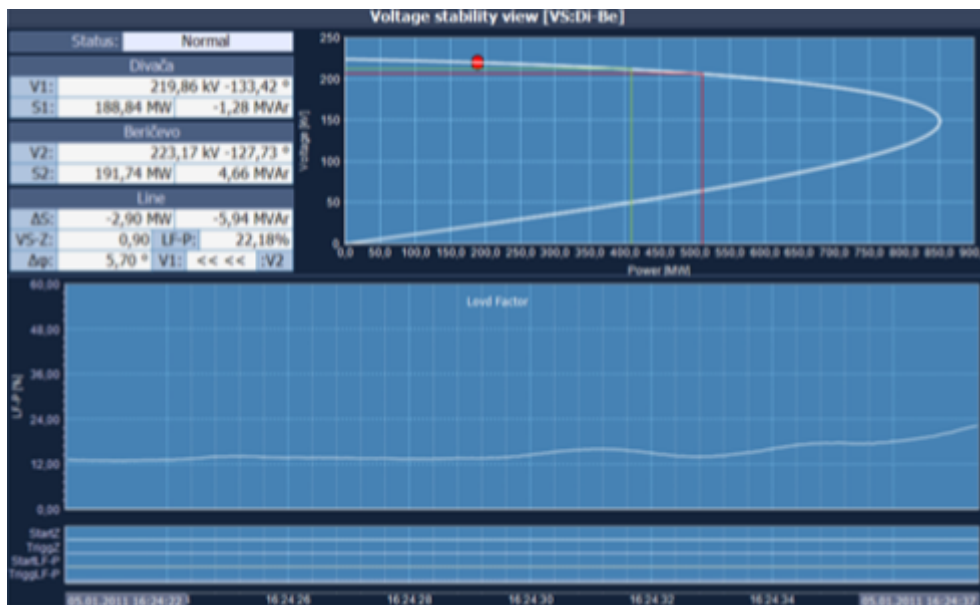
Na slici 1.5.9 je prikazan deo sistema, nadgledan PMU uređajima. Oni šalju podatke centralizovanoj jedinici, PDC uređaju. Ovde se izračunavaju vrednosti  $R_f$  za sve dalekovode u sistemu. Neka relej  $G$  štiti dalekovode 1 i 2 u zoni 3. Potrebna merenja za izračunavanje rezistanse kvara,  $R_f$ , npr.  $I_{a1}$ ,  $I_{b1}$ ,  $I_{c1}$  itd. se šalju PDC uređaju korišćenjem telekomunikacione mreže ili direktno releju  $G$  preko fiber optičkih veza. Korišćenjem vrednosti  $R_f$  (određeni opseg vrednosti) WAMS sistem odlučuje ili ne odlučuje da pošalje upravljački signal releju  $G$  koji bi reagovao u trećem stepenu (pod uslovom da releji u trafostanicama A i B nisu reagovali već u prvom ili drugom stepenu).



Slika 1.5.9: prikaz nadgledanja distantne zaštite u 3. stepenu

### 1.5.7 Detekcija naponske nestabilnosti

U WAMS aplikaciji se proračunava PV kriva koja daje vezu između napona i snage. U aplikaciji postoje indikatori vezani za operacione limite, kao što su rezerve reaktivne snage, dozvoljene snage na dalekovodima, opsezi tercijarne regulacione rezerve i naponski limiti. Vizualizacija naponske stabilnosti je data na slici 1.5.10. U realnom vremenu je moguće pratiti radnu tačku na krivi PV. U slučaju približavanja naponskoj nestabilnosti aplikacija će alarmirati operatora i ponuditi eventualne opcije, a na osnovu navedenih indikatora, kako bi se problem predupredilo.



Slika 1.5.10: prikaz aplikacije za naponsku stabilnost

## 1.6 EES Republike Srbije

U EES-u Republike Srbije za sada je instalirano 12 PMU uređaja i to na:

- DV 404 TS Niš 2 – TS Sofija Zapad (Bugarska);
- DV 405: RP Đerdap 1 – TS Portile de Fier (Rumunija);
- DV 407: TS Niš 2 – TS Kosovo B;
- DV 409/3: TS Sremska Mitrovica 2 – TS Ernestinovo (Hrvatska);
- DV 454: TS Subotica 3 – TS Šandorfalva;
- DV 455: TS Sremska Mitrovica 2 – TS Ugljevik (BiH);
- DV 463: TS Vranje 4 - TS Štip (Makedonija);
- Polje blok transformatora broj 3 u HE Đerdap 1;
- DV 424: TS Obrenovac - TE Nikola Tesla A (generator broj 5 - 400 kV);
- DV 449A: RP Mladost - TE Nikola Tesla B (generator broj 1 - 400 kV);
- RP Bajina Bašta - HE Bajina Bašta (generatori 1 i 2 - 220 kV)
- RP Drmno - TE Kostolac B (generator 1 - 400 kV).

Ova merenja su uvedena i u SCADA/EMS sistem koji se koristi u Nacionalnom dispečerskom centru Srbije (NDC) kako bi se poboljšao kvalitet estimacije, a imaju i prioritet za izračunavanje greške kontrolne oblasti (Area Control Error - ACE), koja je za operatora prenosnog sistema glavni pokazatelj ispravnog vođenja sistema

Godišnjim planom poslovanja za 2020. godinu Elektromreža Srbije planira instalaciju 8 novih PMU uređaja na lokacijama:

- PRP Čibuk 1: - transformatorsko polje broj 1;
- DV 256A: TS Obrenovac - Termoelektrana Nikola Tesla A, generator 1, u TS Obrenovac;
- DV 205: TS Kruševac 1 - TS Podujevo (Kosovo), u TS Kruševac 1;
- DV 203/1: TS Bajina Bašta - čvor Vardište, u TS Bajina Bašta;
- DV 214/3: TS Požega - čvor Vardište, u TS Požega;
- DV 266: TS Požega - TS Pljevlja 2 (Crna Gora), u TS Požega;
- DV 134/4: HE Potpeć - TS Pljevlja 1 (Crna Gora), u HE Potpeć;
- DV 1228A: RP Đerdap 2 - HE Đerdap 2, u HE Đerdap 2;

Ovom ugradnjom kompletiraće se i 220 kV interkonekcija. Zatim, biće postavljeni PMU uređaji u najvećoj vetroelektrani u Srbiji, VE Čibuk, na jednom generatoru Termoelektrane Nikola Tesla na 220 kV naponu, kao i na generatorima hidroelektrana Potpeć i Đerdap 2 na 110 kV naponu.

U budućnosti, planirana je širokopojasna vizuelizacija, kako bi WAMS sistem imao pun efekat. Za sada omogućena je međusobna razmena informacija sa PMU uređaja između operatora prenosnog sistema Srbije i Crne Gore. Planira se i razmena informacija sa članicama ENTSO-E interkonekcije, na ovom nivou samo sa PMU uređaja instaliranim na interkonektivnim dalekovodima. Ovim bi se mogao rešiti problem koji se dogodio u januaru 2019. godine

kada je oko 21 h registrovana devijacija frekvencije koja je trajala 9 sekundi. Minimalna vrednost frekvencije je bila 49,808 Hz, što predstavlja najveću devijaciju od 2006. godine (tzv. „Evropski mrak”) kada je frekvencija dostigla vrednost od 49 Hz. Prema izveštaju, veliki propad frekvencije su prouzrokovala dva faktora, jedan je ispad proizvodnje u Španiji i Francuskoj, a drugi, zamrznuto merenje aktivne snage na četiri 400 kV interkonektivna dalekooda između Austrije i Nemačke [50].



## 2 Opservabilnost sistema

Estimator stanja predstavlja veoma važan alat u svakodnevnom radu operativnog osoblja u dispečerskim centrima. Predstavlja proces dodeljivanja vrednosti nepoznatim merenjima, a koristeći poznata merenja iz trafostanica. Za estimator stanja je važna analiza opservabilnosti. Za određeni skup merenja i njihovu lokaciju u sistemu, primenom analize opservabilnosti može se reći da li se na EES može primeniti estimacija. Dakle, analizu opservabilnosti je neophodno sprovesti pre pokretanja estimatora stanja. Koliko je čitav proces značajan, govori i činjenica da se u dispečerskim centrima koristi veliki spektar aplikacija, koje su od vitalnog značaja za monitoring i kontrolu EES-a. Neke od njih su tokovi snaga (Power Flow), optimalni tokovi snaga (Optimal Power Flow), Voltage Var Dispatch (VVD) aplikacija preko koje se predlažu upravljačke akcije zasnovane na promeni reaktivne snage na generatorima i promeni otcepa na regulacionim transformatorima u cilju minimizacije gubitaka aktivne snage itd.

Usled nedostatka određenog broja merenja, estimacija je nemoguća. Problem u telekomunikacionim vezama ili topološke promene u mreži mogu da prouzrokuju nedostatak merenja. Tada kažemo da je sistem neopservabilan.

### 2.1 Definicija opservabilnosti

Za EES se može reći da je opservabilan ukoliko se na osnovu merenja može odrediti napon i njegova faza (fazor napona) u svakom čvoru. Postoje dva tipa opservabilnosti:

1. numerička opservabilnost;
2. topološka opservabilnost.

Kod numeričke opservabilnosti, model merenja koji se razmatra u estimaciji stanja je oblika

$$z = h(x) + e, \quad (2.1.1)$$

gde je  $x$  vektor stanja (fazori napona čvorova),  $z$  je merni vektor,  $h(x)$  je u opštem slučaju nelinearna funkcija preslikavanja između vektora stanja i merenog vektora. Član  $e$  je vektor greške merenja. Ukoliko se u estimaciji koriste isključivo PMU merenja, kao najtačnija, ima se da je  $e = 0$ . PMU merenja funkciju  $h(x)$  prave linearnom [51]. Tada iz jednačine (2.1.1) proizilazi

$$z = h \cdot x.$$

Kod numeričke opservabilnosti se proverava da li je rang matrice merenja potpun ili ne. Za  $n$  čvorova u mreži, skup merenja koji se dobija iz PMU merenja je  $2n$  (naponi i struje). Dakle, potrebno je da rang matrice  $h$  bude

$$\text{rang}(h) = 2n - 1. \quad (2.1.2)$$

Da bi se postigla potpuna numerička opservabilnost postoje dva načina. Jedan je da postepeno postavljamo PMU uređaje u čvorove, jedan po jedan, sve dok ne dobijemo potpun rang matrice merenja. Drugi način je da se postave PMU uređaji u sve čvorove i onda eliminiše jedan po jedan dok se ne zadovolji jednačina (2.1.2). U oba slučaja potrebno je da se izvrši veliki broj proračuna. Postoji veliki broj kombinacija, a za svaku moguću kombinaciju je potrebno proveravati uslov (2.1.2).

Kod topološke opservabilnosti potrebno je poznavati teoriju grafova. Da bi se topološka opservabilnost postigla, potrebno je da svaki čvor bude nadgledan bar jednim PMU uređajem. Jasno je da što se tiče matematičke zahtevnosti, kao i vremena potrebnog za proračun, sve prednosti ima topološka opservabilnost.

## 2.2 Optimalna postavka PMU uređaja

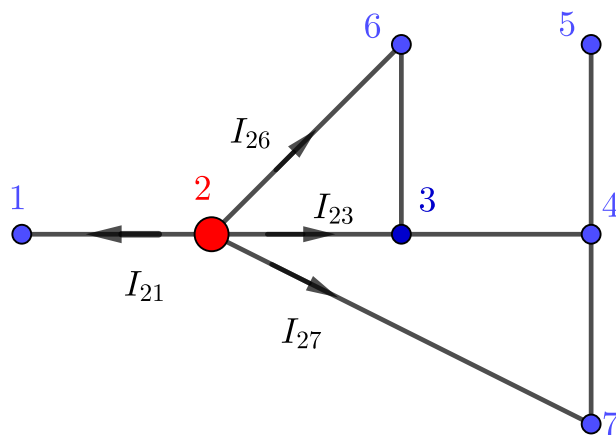
Pod optimalnom postavkom PMU uređaja se podrazumeva određivanje minimalnog broja čvorova u sistemu (trafostanice, razvodna postrojenja) gde je potrebno postaviti PMU uređaj kako bi dat EES bio u potpunosti opservabilan. U ovoj doktorskoj disertaciji biće razmatrana topološka opservabilnost. Kako je stanje u sistemu definisano pomoću fazora napona u čvorovima, opservabilnost se može dobiti ili direktnim merenjem ovih fazora napona ili njihovim izračunavanjem na indirektan način, na osnovu ostalih parametara sistema i merenja.

Kriterijum opservabilnosti koji se može naći u literaturi za rešavanje problema optimalne postavke PMU uređaja zavisi od činjenice koja su merenja povezana sa PMU uređajem, zatim da li je broj merenja PMU uređaja ograničen ili ne i da li su uvažena pseudo merenja, a takođe i od činjenice da li u sistemu već postoje PMU uređaji.

U svim narednim odeljcima, osim u odeljku 2.10, smatraće se da PMU uređaj ima dovoljno kanala da bi se izmerili svi naponi i struje.

## 2.3 Pravila za postavku PMU uređaja bez konvencionalnih merenja

**Pravilo 1.** Ako je PMU uređaj postavljen u čvor  $i$  tada je poznat napon čvora  $i$  i poznate su sve struje po vodovima koje iz čvora  $i$  polaze.



Slika 2.3.1: slika uz pravilo broj 1

Neka je PMU uređaj postavljen u čvor 2, kao na slici 2.3.1. Tada je poznat napon čvora 2, kao i struje  $\underline{I}_{21}$ ,  $\underline{I}_{23}$ ,  $\underline{I}_{26}$  i  $\underline{I}_{27}$ .

**Pravilo 2.** Ako je poznat napon čvora  $i$  na jednom kraju dalekovoda  $ij$ , zatim struja dalekovoda  $\underline{I}_{ij}$ , tada se primenom metode potencijala čvorova (koja je proizašla iz prvog KIRHOFOvog zakona) može odrediti napon na  $j$  kraju dalekovoda na sledeći način:

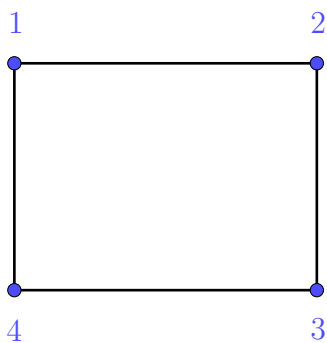
$$\underline{I}_{ij} = \frac{V_i - V_j}{\underline{Z}_{ij}},$$

odavde je

$$V_j = V_i - \underline{Z}_{ij} \cdot \underline{I}_{ij}.$$

Kao jednostavan primer primene sinhrofazorske tehnologije za opservabilnost EES-a, biće razmatrana slika 2.3.2. Ukoliko bi PMU uređaj bio postavljen u čvor 1, njemu susedni čvorovi, 2 i 4, bi bili takođe opservabilni. Kako je preostao čvor 3 neopservabilan, potrebno je postaviti PMU uređaj u čvor 3 ili u čvorove susedne čvoru 4, a to su 2 ili 4. Minimalan broj PMU uređaja koji je potreban je  $N_{\min} = 2$ . Nije teško pokazati da za ovakvu topologiju mreže, postoji  $\binom{4}{2} = 6$  optimalnih rešenja<sup>1</sup>. Skup rešenja je  $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ .

<sup>1</sup>paradoksalno, ovde ima više optimalnih rešenja jer se pod ovim pojmom misli na minimalni broj PMU uređaja



Slika 2.3.2: jednostavan EES sa četiri čvora

U narednim odeljcima biće predstavljene neke optimizacione metode korišćene za rešavanje problema optimalne postavke PMU uređaja. Jedna od njih je metoda linearnog programiranja, a zatim ekvivalentni prelazak sa metode linearnog programiranja na metod nelinearnog programiranja (u binarnom domenu) i zatim primena metode GREBNERove baze na ovako postavljen optimizacioni problem.

## 2.4 Metoda linearnog programiranja

Minimizacija troškova ugradnje PMU uređaja se može matematički predstaviti u formi

$$\min \sum_{k=1}^n w_k x_k, \quad (2.4.1)$$

gde je  $X = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ ,  $x_k \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  i predstavlja vektor binarnih promenljivih definisanih na sledeći način:

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{ako je PMU postavljen u čvor } k \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (2.4.2)$$

gde  $n$  predstavlja ukupan broj čvorova posmatranog EES-a,  $w_k$  je težinski faktor koji odgovara troškovima instalacije PMU uređaja. U ovom radu je u svim poglavljima uzeto da su troškovi instalacije isti, odnosno da je  $w_k = 1$ ,  $\forall k$ . U suprotnom, manji troškovi mogu se dobiti postavljanjem PMU uređaja na tačno određenim lokacijama, a ukoliko su PMU uređaji već postavljeni, tada će se za te čvorove usvajati da je  $w_k = 0$ . Troškovi instalacije mogu zavistiti od geografske lokacije, odnosno od troškova prevoza, zatim od troškova beznaponskog stanja prilikom ugradnje, od troškova instalacije u trafostanici, postoji mogućnost da nema fizičkog mesta u trafostanici, tada se kupuje novi ormar, zatim postoji mogućnost da novi ormar ne može da stane u prostoriju predviđenu u trafostanici. U tom slučaju ili se gradi nova prostorija ili se pronalazi neko drugo mesto, koje pak može da iziskuje dodatne troškove ožičavanja od PMU uređaja do strujnog i naponskog mernog transformatora itd.

Dakle, za opservabilnost svakog čvora u EES-u, neophodno je da ili PMU uređaj bude postavljen u posmatrani čvor ili da bude postavljen u neki susedni čvor. Ovaj uslov se može

predstaviti sistemom nejednačina, koje se pridružuju kriterijumskoj funkciji (2.4.1):

$$AX \geq b, \quad (2.4.3)$$

gde je  $A$  matrica incidencije sistema, čiji su članovi definisani sa

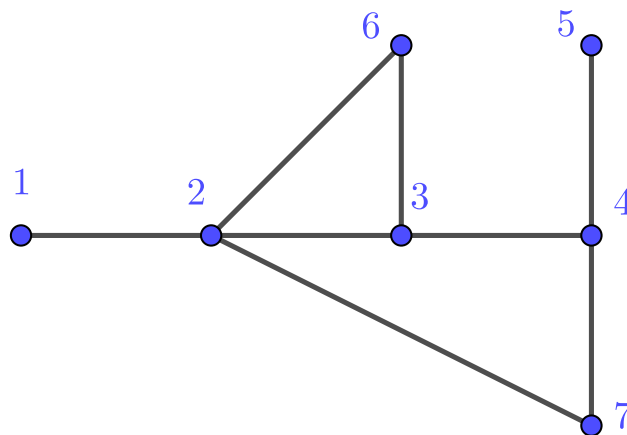
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 1, & \text{ako su } i \text{ i } j \text{ povezani,} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

a vektor  $b$  je vektor

$$b = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T. \quad (2.4.5)$$

**Primer 1.** Metoda linearnog programiranja će biti predstavljena na IEEE mreži sa 7 čvorova (IEEE 7-bus system) koja je prikazana na slici 2.4.1. Smatraće se da su svi težinski faktori jednaki jedinci pa se za kriterijumsku funkciju ima  $x_1 + x_2 + \dots + x_7$ . Prema (2.4.3) se dobijaju uslovi tipa nejednačine:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7 &\geq 1 \\ x_3 + x_2 + x_4 + x_6 &\geq 1 \\ x_4 + x_3 + x_5 + x_7 &\geq 1 \\ x_5 + x_4 &\geq 1 \\ x_6 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_7 + x_2 + x_4 &\geq 1 \end{aligned}$$



Slika 2.4.1: IEEE mreža sa 7 čvorova

Rešavanjem ovog sistema nejednačina, u programskom paketu Maple, dobija se rešenje  $x_2 = 1$  i  $x_4 = 1$ , a vrednost kriterijumske funkcije je 2.

Kako je i ovakva formulacija problema polinomna, moguća je primena GREBNEROVE baze. Osnovni problem u primeni bio bi vezan jedino za tretman nejednakosti, koji bi, kao i u klasičnim

optimizacionim postupcima mogao da bude rešen uvođenjem pomoćnih promenljivih<sup>2</sup>. Međutim, pokazuje se da su u tom slučaju transformacije ove tehnike ekvivalentne GAUSOVOJ (GAUSS) eliminaciji, što znači da zadržavaju sve prednosti, ali i mane dobro poznatih metoda linearnog programiranja. Zbog toga je za rešavanje celobrojnih linearnih optimizacionih problema u literaturi predložen drugačiji algoritam baziran na GREBNEROVOJ bazi. Algoritam je detaljno obrazložen u [52], i baziran je na transformaciji linearnih jednakosti polinoma kod kojih celobrojne promenljive postaju eksponenti polinoma. Umesto ovakvog rešenja, u radu je predložena drugačija formulacija problema na koju se tehnika GREBNEROVE baze može primeniti.

## 2.5 Metoda nelinearnog programiranja

Formulacija OPP problema kao linearnog je u literaturi najčešće primenjivana [4, 5, 14]. Međutim, u narednom tekstu prikazana formulacija, u kojoj se ograničenja opservabilnosti zadaju preko polinomnih jednačina višeg reda ima značajne prednosti pri primeni Grebnerove baze. Kriterijumska funkcija i dalje može izraziti u formi datoj relacijom (2.4.1). Ako se posmatraju ograničenja tipa nejednakosti definisana relacijom (2.4.3), ona se mogu prevesti u binarni domen na ograničenja tipa jednakosti na sledeći način [22, 23]:

$$f_i(x) = (1 - x_i) \cdot \prod_{j \in ADJ_i} (1 - x_j) = 0, \forall i \in S, \quad (2.5.1)$$

gde je  $S$  skup čvorova posmatrane mreže,  $ADJ_i^3$  je skup čvorova susednih čvoru  $i$ ,  $n$  je ukupan broj čvorova u EESu.

Očigledno, u ovoj formulaciji su sve nejednakosti iz (2.4.3) zamenjene jednakostima čime se eliminiše potreba za uvođenjem pomoćnih promenljivih pri primeni klasičnih algoritama zasnovanih na linearnom programiranju. Pored toga, kako su ograničenja već data u nelinearnoj polinomnoj formi, formulacija binarnih promenljivih, data relacijom (2.4.2) se takođe može iskazati na sličan način, primenom relacija:

$$x_i^2 - x_i = 0, \forall i \in S. \quad (2.5.2)$$

Jednačine (2.5.1) i (2.5.2) čine skup polinomnih jednačina čijim se rešavanjem dobijaju rešenja postavljenog problema optimalne postavke PMU uređaja. Za primer, posmatraće se IEEE sistem sa 7 čvorova sa slike 2.4.1, koji će u daljem tekstu služiti za ilustraciju svih predloženih metoda za problem optimalne postavke PMU uređaja. Ograničenja tipa jednakosti, dobijena pomoću jednačine (2.5.1) su:

---

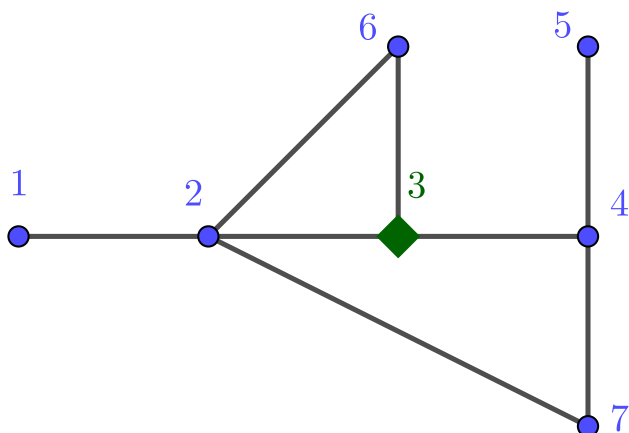
<sup>2</sup>auxiliary variables ili slack variables

<sup>3</sup>od eng. adjacent

$$\begin{aligned}
(1 - x_1)(1 - x_2) &= 0 \\
(1 - x_2)(1 - x_1)(1 - x_3)(1 - x_6)(1 - x_7) &= 0 \\
(1 - x_3)(1 - x_2)(1 - x_4)(1 - x_6) &= 0 \\
(1 - x_4)(1 - x_3)(1 - x_5)(1 - x_7) &= 0 \\
(1 - x_5)(1 - x_4) &= 0 \\
(1 - x_6)(1 - x_2)(1 - x_3) &= 0 \\
(1 - x_7)(1 - x_2)(1 - x_4) &= 0 \\
x_i^2 - x_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, 7.
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

## 2.6 Uticaj pseudo merenja - čvorovi nultog injektiranja

Elektroenergetski sistem sa čvorovima nultog injektiranja (zero-injection bus - ZIB) predstavlja uopšteniji slučaj optimalne postavke PMU uređaja od prethodno izloženog. Po definiciji, ovi čvorovi su oni u kojima ne postoji injektiranje struje u EES. U praksi, ovo mogu biti razvodna postrojenja. ZIB čvorovi predstavljaju problem optimalne postavke PMU uređaja, a od velike važnosti s obzirom na činjenicu da mogu da smanje ukupan broj PMU uređaja da bi sistem bio potpuno opservabilan i posledično mogu da smanje ukupne troškove instalacije. ZIB-ovi se mogu tretirati kao pseudo-merenja pridružena odgovarajućem čvoru. Kako bi se uvažila ova pseudo-merenja u problem optimalne postavke PMU uređaja, u radovima se predlaže usvajanje različitih pravila za topološku opservabilnost. U [6] se definisanim pravilima vrši topološka modifikacija mreže, sažimanjem čvorova na tri različita načina u zavisnosti od povezanosti ZIB čvorova sa ostalim, na koju se dalje primenjuju kriterijumi opservabilnosti. Za razliku od ovih topoloških modifikacija, u [53] se postavljenim pravilima razlikuju tri tipa čvorova - directly-observed, PMU-indirectly-observed and unobserved i za njih definišu različiti uslovi opservabilnosti, a u [15] se predlažu jednostavne modifikacije funkcija tipa (2.4.3) koje se odnose na čvorove sa ZIB, dobijene uvažavanjem činjenica da se opservabilnost može obezbediti primenom pseudo-merenja dobijenih na osnovu prvog KIRHOFOVOG zakona. U ovoj disertaciji za obuhvatanje ZIB-a predložena je modifikacija proizašla iz [4]. Neka je u IEEE mreži sa 7 čvorova čvor broj 3 ZIB, kao što je prikazano na slici 2.6.1.



Slika 2.6.1: IEEE mreža sa 7 čvorova gde je ZIB čvor 3

Čvorovi koji su susedni čvoru 3 su iz skupa  $ADJ_3 = \{2, 3, 4, 6\}$ . Ukoliko su bilo koja tri čvora iz skupa  $ADJ_3$  opservabilna, tada je i četvrti čvor iz skupa opservabilan primenom prvog KIRHOFOvog zakona na ZIB. Ako su npr. čvorovi 2, 3 i 4 na neki način opservabilni, tada iz prvog KIRHOFOvog zakona na čvor 3 dobija se:

$$\underline{I}_{32} + \underline{I}_{34} + \underline{I}_{36} = 0,$$

odnosno iz metode potencijala čvorova, a kako su parametri mreže poznati, ima se

$$\frac{V_3 - V_2}{Z_{32}} + \frac{V_3 - V_4}{Z_{34}} + \frac{V_3 - V_6}{Z_{36}} = 0. \quad (2.6.1)$$

U jednačini (2.6.1) jedino je nepoznat kompleksni potencijal  $V_6$  koji se jednostavno može odrediti.

Inicijalni skup nejednačina koje se imaju (bez smatranja da je čvor 3 ZIB)

$$f_1 = x_1 + x_2 \geq 1$$

$$f_2 = x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1$$

$$f_3 = x_3 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1$$

$$f_4 = x_4 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 1$$

$$f_5 = x_5 + x_4 \geq 1$$

$$f_6 = x_6 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$f_7 = x_7 + x_2 + x_4 \geq 1$$

Jednačine koje se za IEEE mrežu u ovom slučaju pišu su:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 \geq 1 \\ f_2^{\text{new}} &= x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7 + f_3 \cdot f_4 \cdot f_6 \geq 1 \\ f_3 &= x_3 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\ f_4^{\text{new}} &= x_4 + x_3 + x_5 + x_7 + f_2 \cdot f_3 \cdot f_6 \geq 1 \\ f_5 &= x_5 + x_4 \geq 1 \\ f_6^{\text{new}} &= x_6 + x_2 + x_3 + f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \geq 1 \\ f_7 &= x_7 + x_2 + x_4 \geq 1 \end{aligned}$$

U predstavljenim nejednačinama, operator „+” ima funkciju logičkog ILI, dok operator „·” ima funkciju logičkog I. U cilju objašnjenja sistema nejednačina, posmatrajmo uslov za čvor 2,

$$f_2 = x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7 + f_3 \cdot f_4 \cdot f_6 \geq 1.$$

Ona će biti zadovoljena ukoliko je PMU uređaj postavljen ili u čvor 2 ili u neki njemu susedni čvor, 1, 3, 6 ili 7. Ali, relacija će biti zadovoljena i ako su istovremeno  $f_3 = f_4 = f_6 = 1$ , čak i da su svi  $x = 0$ . Tvrdnja da je  $f_3 = f_4 = f_6 = 1$  implicira da su čvorovi 3, 4 i 6 na neki



način opservabilni (ili je PMU uređaj postavljen direktno u neki čvor ili u čvor njemu susedan). Ukoliko su svi čvorovi susedni ZIB-u opservabilni, tada iz jednačine prvog KIRHOFOVog zakona, odnosno metode potencijala čvorova, dobija se da je i on opservabilan. Jednačine za  $f_2$ ,  $f_4$  i  $f_6$  se mogu dodatno uprostiti, a koristeći se činjenicom da ako je  $A \subset B$ , tada je  $A + B = B$  (unija) i  $A \cdot B = A$  (presek). Posmatrajmo izraz

$$f_2^{\text{new}} = x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7 + \overbrace{(x_3 + x_2 + x_4 + x_6) \cdot (x_4 + x_3 + x_5 + x_7) \cdot (x_6 + x_2 + x_3)}^F.$$

U prvom koraku iz dela izraza označenim  $F$  može se izbrisati gde god se pojavljuju članovi  $x_2, x_1, x_3, x_6$  i  $x_7$ . Izraz je sada oblika

$$\begin{aligned} f_2^{\text{new}} &= x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7 + (x_4) \cdot (x_4 + x_5) \cdot (0) \\ &= x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7. \end{aligned}$$

Dalje za  $f_4^{\text{new}}$  se dobija

$$\begin{aligned} f_4^{\text{new}} &= x_4 + x_3 + x_5 + x_7 + (x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7) \cdot (x_3 + x_2 + x_4 + x_6) \cdot \\ &\quad \cdot (x_6 + x_2 + x_3) \\ &= x_4 + x_3 + x_5 + x_7 + (x_2 + x_1 + x_6) \cdot (x_2 + x_6) \cdot (x_6 + x_2) \\ &= x_4 + x_3 + x_5 + x_7 + x_2 + x_6 \end{aligned}$$

jer je kao rezultat preseka tri skupa, data izrazom  $(x_2 + x_1 + x_6) \cdot (x_2 + x_6) \cdot (x_6 + x_2)$  jednak  $x_2 + x_6$ .

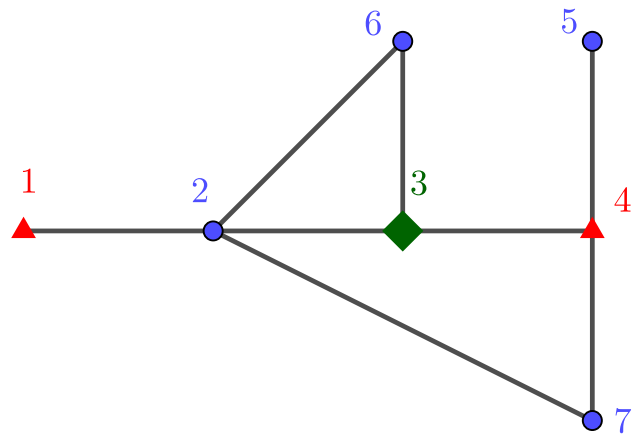
Konačno,

$$\begin{aligned} f_6^{\text{new}} &= x_6 + x_2 + x_3 + (x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7) \cdot (x_3 + x_2 + x_4 + x_6) \cdot \\ &\quad \cdot (x_4 + x_3 + x_5 + x_7) \\ &= x_6 + x_2 + x_3 + (x_1 + x_7) \cdot (x_4) \cdot (x_4 + x_5 + x_7) \\ &= x_6 + x_2 + x_3 + (x_1 + x_7) \cdot x_4 \end{aligned}$$

jer je presek skupova sa elementima  $\{x_4\}$  i  $\{x_4, x_5, x_7\}$  jednak  $x_4$ . Kako ne postoji presek skupova sa elementima  $\{x_1, x_7\}$  i  $\{x_4\}$  pribegavamo množenju, te se dobija

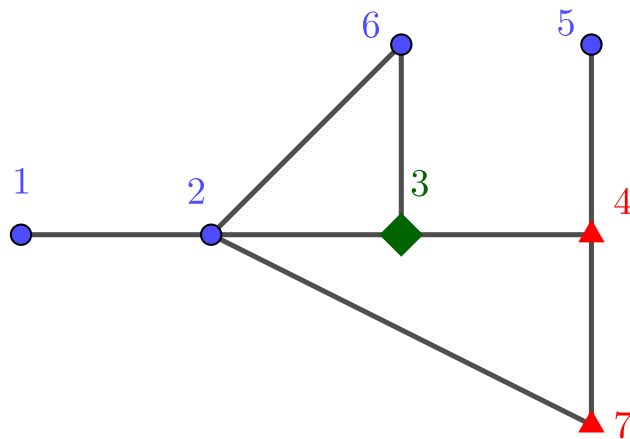
$$f_6^{\text{new}} = x_6 + x_2 + x_3 + x_1x_4 + x_7x_4 \geq 1. \quad (2.6.2)$$

Nejednačina (2.6.2) se može interpretirati na sledeći način. Posmatra se slika 2.6.1. Ako je PMU uređaj postavljen u sam čvor 6 ili u neki njemu susedni čvor tj. 2 ili 3 nejednačina je zadovoljena.



Slika 2.6.2: IEEE mreža sa ZIB u 3 i PMU uređajima postavljenim u čvorove 1 i 4

Međutim, ako PMU uređaj nije postavljen ni u jedan od pomenutih čvorova, opservabilnost šestog čvora se može postići ako su PMU uređaji postavljeni ili u čvorove 1 i 4 ili u čvorove 4 i 7. Ako su postavljeni u čvorove 1 i 4, kao na slici 2.6.2, ima se da je, preko čvora 1 opservabilan čvor 2, a preko čvora 4 je opservabilan čvor 3. Kako se radi o opservabilnosti čvora broj 6, primenom prvog KIRHOFOvog zakona na čvor 3 (ZIB) dobija se da je i čvor broj 6 opservabilan.



Slika 2.6.3: IEEE mreža sa ZIB u 3 i PMU uređajima postavljenim u čvorove 4 i 7

Sličnim rezonovanjem, postavkom PMU uređaja u čvorove 4 i 7, kao na slici 2.6.3 dobija se da je čvor 3 opservabilan preko čvora 4, a čvor 2 preko čvora 7. Primenom prvog KIRHOFOvog zakona na ZIB dobija se da je čvor broj 6 opservabilan.

Koristeći se gorenavedenim primerom mogu se napisati tri nova pravila za EES koji ima pseudo-merenja, odnosno ZIB-ove.

**Pravilo 3.** Ukoliko ZIB nije opservabilan, a svi njemu susedni čvorovi jesu na neki način opservabilni, tada je i ZIB opservabilan, primenom prvog KIRHOFOvog zakona, odnosno metodom potencijala čvorova.

**Pravilo 4.** Ukoliko ZIB jeste opservabilan i svi njemu susedni čvorovi sem jednog jesu opservabilni na neki način, tada je primenom prvog KIRHOFOvog zakona, odnosno metoda potencijala čvorova i taj jedan neopservabilan čvor postaje opservabilan.

**Pravilo 5.** Ukoliko postoji grupa neopservabilnih ZIB-ova, tada će svi ZIB-ovi biti opservabilni ako su svi čvorovi susedni grupi ZIB-ova na neki način opservabilni.

**Pravilo 6.** Jednačine za ZIB izbrisati iz uslova, jednačine za čvorove susedne ZIB-ovima modifikovati na sledeći način:

Ako je čvor  $i$  ZIB, tada jednačine za susedne čvorove čvoru  $i$  napisati u obliku

$$f_j^{\text{new}} = \prod_{n \in \text{ADJ}_j} (1 - x_n) \cdot \prod (1 - T_n) = 0, \quad (2.6.3)$$

gde je  $\text{ADJ}_j$  skup čvorova susednih čvoru  $j$ , uključujući  $j$ ,  $T_n$  su članovi koji proizilaze iz proizvoda  $\prod_{k \in \text{ADJ}_i, k \neq i} f_k$ . Jednačine oblika (2.5.2) ostaju iste. Time se softverski rešava da se prikažu rešenja koja pripadaju binarnom domenu.

**Primer 2.** Primenom ovih pravila, a korišćenjem jednačine oblika (2.6.3) za mrežu sa slike 2.6.1 dobija se

$$\begin{aligned} f_1^{\text{new}} &= (1 - x_1) (1 - x_2) (1 - x_6 x_7) (1 - x_3 x_7) = 0 \\ f_4^{\text{new}} &= (1 - x_4) (1 - x_3) (1 - x_5) (1 - x_7) (1 - x_2) (1 - x_6) = 0 \\ f_6^{\text{new}} &= (1 - x_2) (1 - x_3) (1 - x_6) (1 - x_1 x_4) (1 - x_4 x_7) = 0 \\ f_7^{\text{new}} &= (1 - x_2) (1 - x_4) (1 - x_7) (1 - x_1 x_6) (1 - x_1 x_3) = 0. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

## 2.7 Nova metoda modifikacije uslova u optimizacionom problemu u mreži sa ZIB

Za analizu potpune topološke opservabilnosti EES-a kada u mreži postoje ZIB-ovi do sada su predstavljena u suštini dva načina. Jedna metoda se zasniva na topološkim modifikacijama grafa uz određene uslove koje sa sobom nosi ZIB, a koje su već opisane u odeljku (2.6). U suštini metode je da se ZIB integriše sa jednim čvorom mreže i time dobije mreža sa manjim brojem čvorova na koju će se dalje primenjivati neki od predloženih algoritama. Kao prednost metode se može izdvojiti brzina matematičkog dela proračuna jer se radi sa manjim brojem jednačina. Međutim, ako se zahtevaju sva optimalna rešenja za lokaciju PMU uređaja, mana metode bi bila, da u nekim situacijama, ne postoji samo jedan čvor koji je „pogodan” za integraciju sa ZIB-om. U tom slučaju algoritam, odnosno proračun se mora iznova pokretati za svaku kombinaciju.

Druga metoda je zasnovana na modifikaciji uslova mreže u kojoj postoje ZIB-ovi. Kako bi ova metoda bila ilustrovana, posmatra se IEEE mreža sa 7 čvorova, kao na slici 2.7.1. Čvor broj 3 je uzet za ZIB. Prema uslovima tipa nejednakosti (2.4.3) za čvorove koji su susedni ZIB-u

dobija se

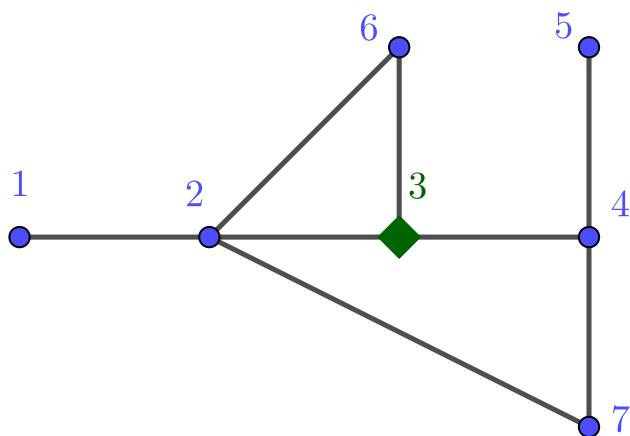
$$\begin{aligned} f_2 &= x_2 + x_1 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ f_3 &= x_3 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\ f_4 &= x_4 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 1 \\ f_6 &= x_6 + x_2 + x_3 \geq 1 \end{aligned}$$

koji se može zapisati kroz jedan uslov

$$\text{ZIB}_3 : f_2 + f_3 + f_4 + f_6 \geq 3. \quad (2.7.1)$$

Može se primetiti da prostim sabiranjem funkcija  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  i  $f_6$  na desnoj strani nejednakosti bi trebalo biti 4, ali kako se modeluje ZIB, koji uvodi još jednu vezu - prvi KIRHOFOV zakon, broj 4 je potrebno umanjiti za jedan. Konačni uslovi za IEEE mrežu sa 7 čvorova su:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 \geq 1 \\ f_{\text{zib}} &= x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 3 \\ f_5 &= x_5 + x_4 \geq 1 \\ f_7 &= x_7 + x_2 + x_4 \geq 1. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$



Slika 2.7.1: IEEE mreža sa 7 čvorova

Sa uslovom (2.7.1) je potrebno biti posebno obazriv. Pretpostavimo da su PMU uređaji instalirani u čvorove 4 i 7. Tada su svi uslovi (2.7.2) zadovoljeni, te je opservabilnost matematički zadovoljena, ali nije topološki [15] jer je očigledno da čvor 1 nije opservabilan.

Glavni razlog što se javlja problem između matematičke i topološke opservabilnosti leži u činjenici da je na desnoj strani nejednačine broj veći od 1. Još jedan problem koji se pojavljuje je kako nejednačinu  $f_{\text{zib}} = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 3$  ekvivalentirati u binarnom domenu jednačinom koja bi bila zgodna za primenu GREBNEROVE baze. Ako uočimo čvorove koji su susedni ZIB-u, dobija se skup  $ADJ_3 = \{2, 3, 4, 6\}$  pa se može zapisati nejednačina

$$f_2 + f_3 + f_4 + f_6 = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 3.$$

Moguće je napraviti skup uslova

$$\begin{aligned} f_2 + f_3 &\geq 1 \\ f_2 + f_4 &\geq 1 \\ f_2 + f_6 &\geq 1 \\ f_3 + f_4 &\geq 1 \\ f_3 + f_6 &\geq 1 \\ f_4 + f_6 &\geq 1. \end{aligned}$$

Ovakvim proširivanjem uslova problemi neslaganja matematičke i topološke opservabilnosti su rešeni. Takođe, uslov

$$f_2 + f_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_6 + x_7 \geq 1$$

je moguće prevesti na jednačinu u binarnom domenu,

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_6)(1 - x_7) = 0.$$

Drugo pitanje koje se nameće je kako tretirati EES sa više ZIB-ova. Postoje dva slučaja. Jedan je kada se čvorovi susedni svim ZIB-ovima ne preklapaju. U tom slučaju ih tretiramo na prethodno izložen način. Druga situacija je kada postoje čvorovi susedni ZIB-ovima koji se preklapaju. U IEEE mreži sa 7 čvorova uzmimo da su čvorovi 3 i 7 ZIB-ovi. Ima se  $ADJ_3 = \{2, 3, 4, 6\}$  i  $ADJ_7 = \{2, 4, 7\}$ . Odgovarajući uslovi su

$$\begin{array}{cc|c} (f_2) + f_3 & f_3 + f_6 & (f_2) + [f_4] \\ (f_2) + [f_4] & [f_4] + f_6 & (f_2) + f_7 \\ (f_2) + f_6 & & [f_4] + f_7 \\ f_3 + [f_4] & & \end{array} \geq 1.$$

Kako su čvorovi 2 i 4 zajednički za oba ZIB-a, logičkim sabiranjem izraza gde se javljaju  $f_2$  i  $f_4$  dobija se sledeći skup uslova:

$$\begin{array}{ccc} f_2 + f_3 + f_4 & f_2 + f_6 + f_4 & \\ f_2 + f_3 + f_7 & f_2 + f_6 + f_7 & \\ f_2 + f_4 & f_3 + f_4 + f_7 & f_3 + f_6 \\ f_2 + f_4 + f_7 & f_4 + f_6 + f_7 & \end{array} \geq 1$$

Za opšti slučaj će biti izvedene jednačine. Neka su ZIB-ovi u mreži čvorovi označeni sa  $i_1, i_2, \dots, i_n$  i neka su skupovi čvorova susedni ZIB-ovima označeni sa  $ADJ_{i_1}, ADJ_{i_2}, \dots, ADJ_{i_n}$ , respektivno. Ukoliko u mreži nema preseka skupova  $ADJ$  tada su nejednačine oblika

$$\binom{f_{ADJ_i}}{2} \geq 1,$$

gde je izraz  $\binom{f_{ADJ_i}}{2}$  kombinacija druge vrste uslova za čvorove susedne  $i$ -tom ZIB čvoru uključujući i njega.

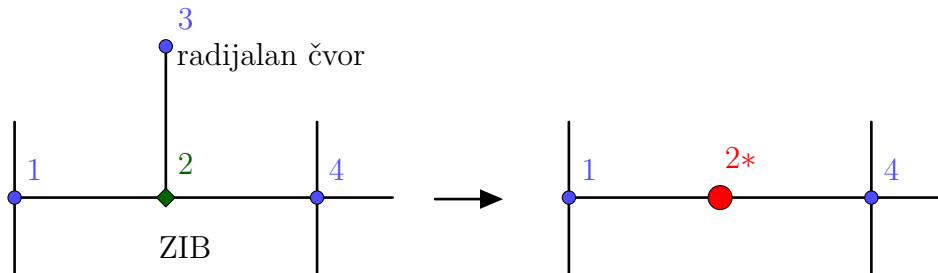
Ukoliko presek skupova  $ADJ$  postoji, tada je potrebno napraviti logičko sabiranje izraza koji odgovaraju čvorovima iz preseka skupova  $ADJ$ .

## 2.8 Topološka modifikacija mreže sa ZIB-om

Drugi način za tretiranje ZIB-ova podrazumevaju njihovu integraciju sa jednim od njemu susednih čvorova, a prema sledećim pravilima:

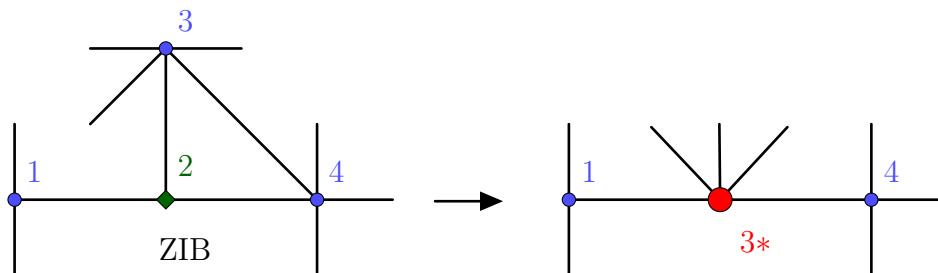
**Pravilo 7.** Čvor koji se koristi za integraciju ne sme prethodno da bude korišćen u procesu integracije.

**Pravilo 8.** Ako je ZIB susedan radijalnom čvoru, radijalan čvor i ZIB integrisati na jedan čvor.



Slika 2.8.1: uz pravilo broj 8

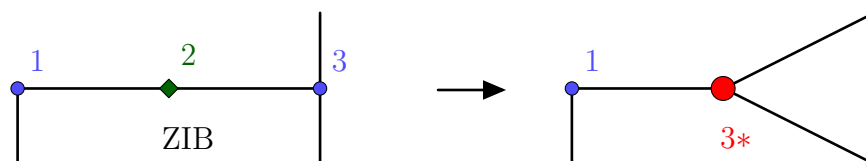
**Pravilo 9.** Ako pravilo 7 ne može da se iskoristi i ako je više čvorova povezano sa ZIB-om, integrisati ZIB sa onim čvorom koji ima najviše susednih čvorova, pod uslovom da je jedan od tih susednih čvorova povezan sa pomenutim ZIB-om, a da on sam nije ZIB. Ukoliko postoji više ovakvih čvorova, za integraciju izabrati nasumično jedan.



Slika 2.8.2: uz pravilo broj 9

**Pravilo 10.** Ako pravila 7 i 8 ne mogu da se primene, tada ZIB integrisati sa onim susednim čvorom koji ima najviše susednih čvorova. Ukoliko više čvorova ima isti broj njemu susednih, odabrati nasumično čvor za integraciju. <sup>4</sup>

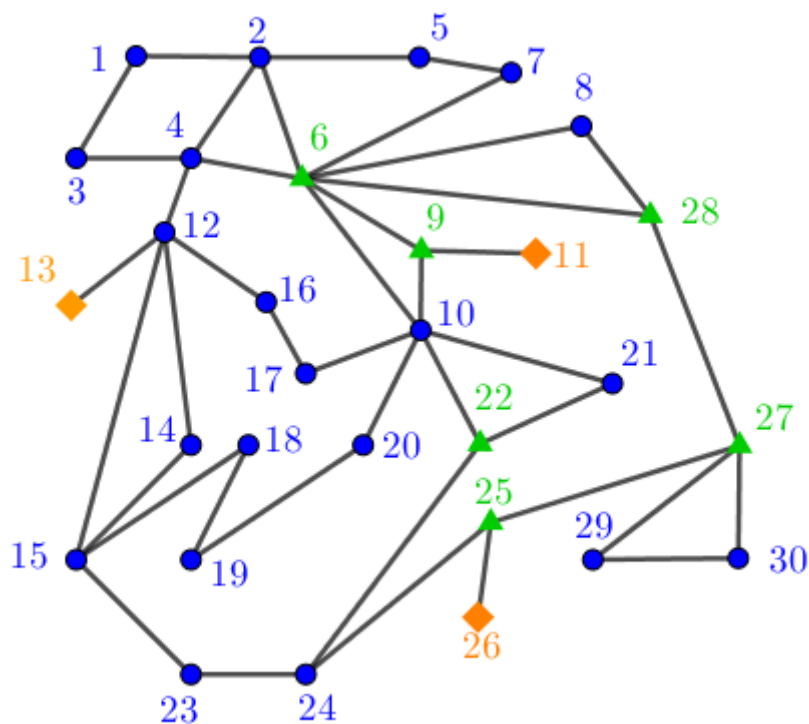
<sup>4</sup>Ovo bi bila glavna mana predložene metode ukoliko želimo da odredimo skup svih optimalnih rešenja. Algoritam bi morao da se od ovog trenutka pokreće iznova i iznova dok se ne potroše svi mogući čvorovi za integraciju.



Slika 2.8.3: uz pravilo broj 10

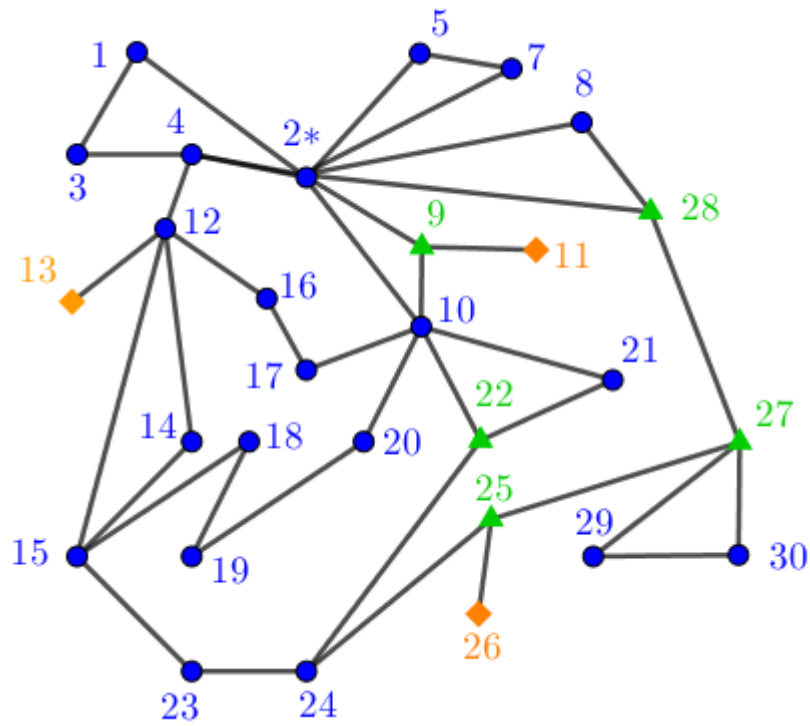
U doktoratu su obrađene IEEE mreže sa 7, 14, 24, 30, 39 i 118 čvorova.

Kao primer biće uzeta IEEE mreža sa 30 čvorova prikazana na slici 2.8.4. Sa ▲ su označeni ZIB-ovi i to su čvorovi 6, 9, 22, 25, 27 i 28, dok su sa ◆ označeni radijalni čvorovi i to 11, 13 i 26.



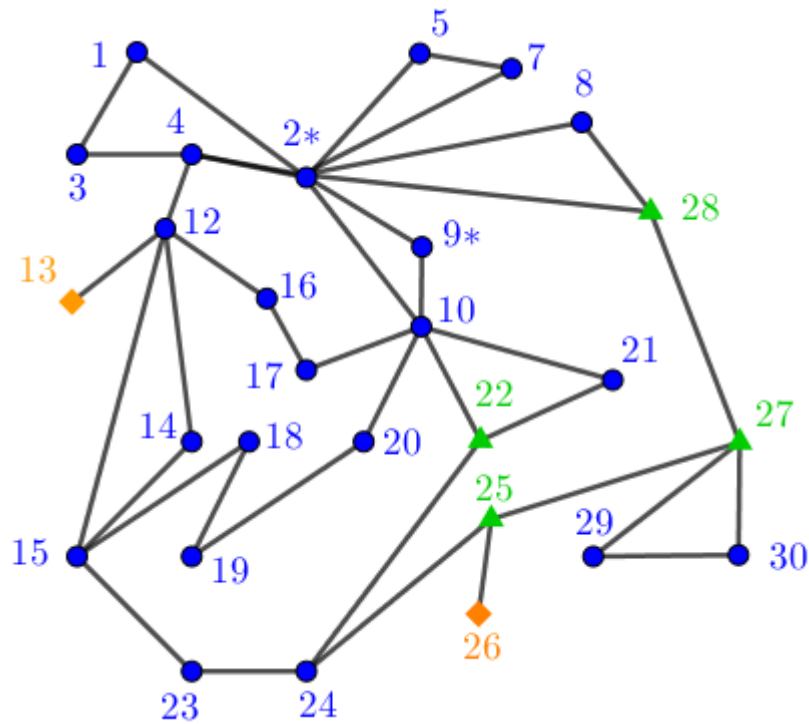
Slika 2.8.4: IEEE mreža sa 30 čvorova sa ZIB

Posmatrajmo ZIB broj 6. Prema pravilu broj 9 dobija se da je čvor broj 10 onaj koji ima najviše incidentnih grana a ujedno je i susedan ZIB-u čvoru 6. Međutim, kako je čvor 9 takođe ZIB i povezan je sa čvorom 10, pravilo broj 9 se ne može primeniti te se prelazi na pravilo broj 10. Ima se da su čvorovi 2 i 4 sa najvećim brojem incidentnih grana te je svedjedno koji ćemo uzeti za proces integracije. U ovom primeru uzmimo čvor broj 2. Dobija se mreža kao na slici 2.8.5.



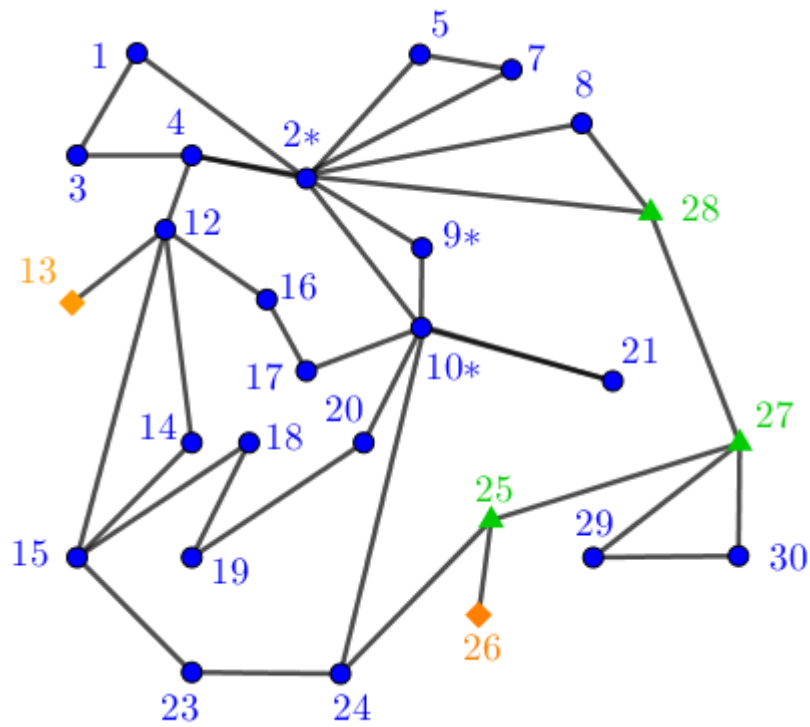
Slika 2.8.5: IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 2 i 6

Za ZIB broj 9 ima se da je njemu radijalan čvor broj 11, te prema pravilu broj 8 se vrši njihova integracija. Dobija se mreža kao na slici 2.8.6



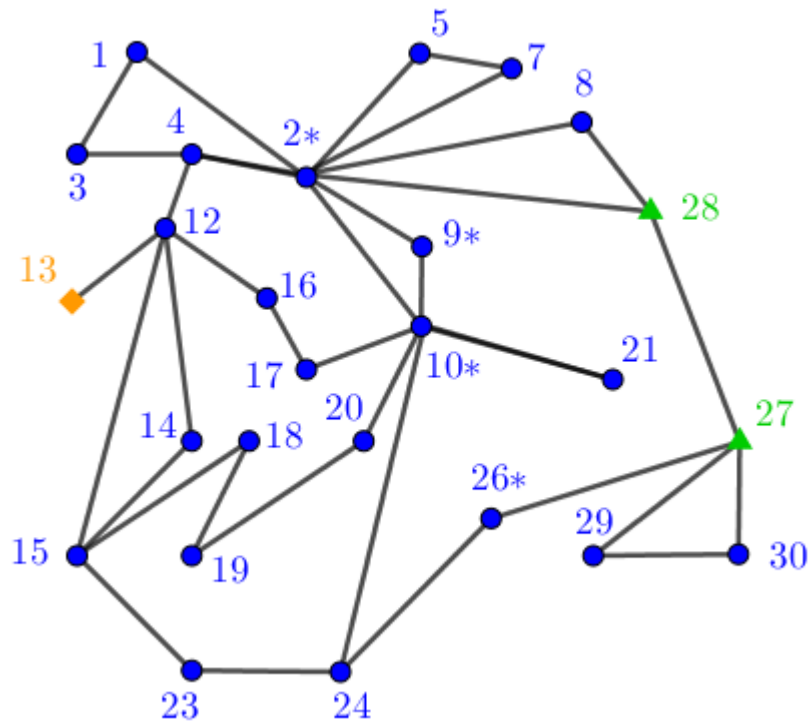
Slika 2.8.6: IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 9 i 11





Slika 2.8.7: IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 22 i 10

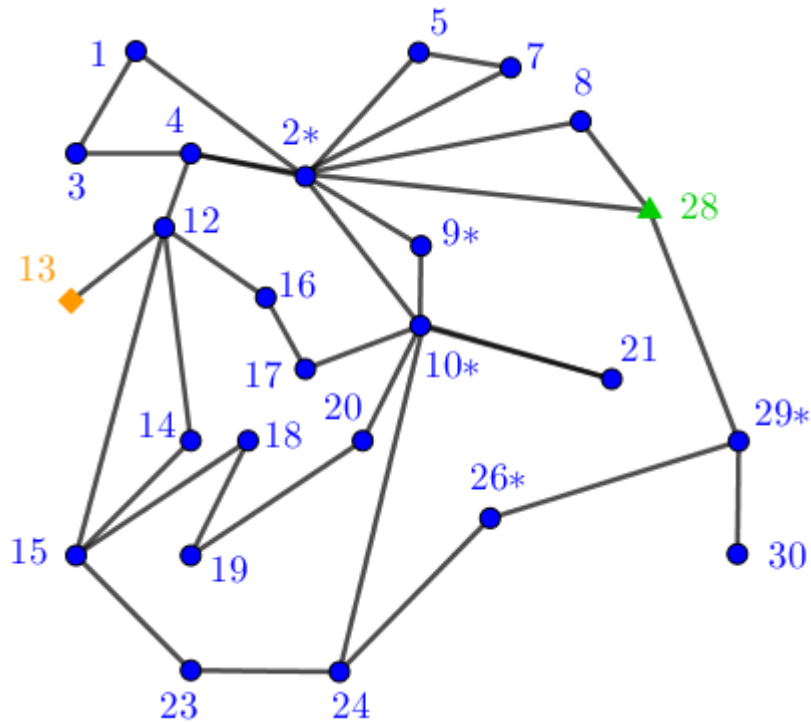
Za ZIB broj 22 ima se da je čvor 10 njemu susjedan sa najvećim brojem incidentnih čvorova i kako je jedan od njih čvor broj 21 koji je povezan sa istim ZIB-om, primenjuje se pravilo broj 9. Nakon integracije dobija se mreža kao na slici 2.8.7.



Slika 2.8.8: IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 25 i 26

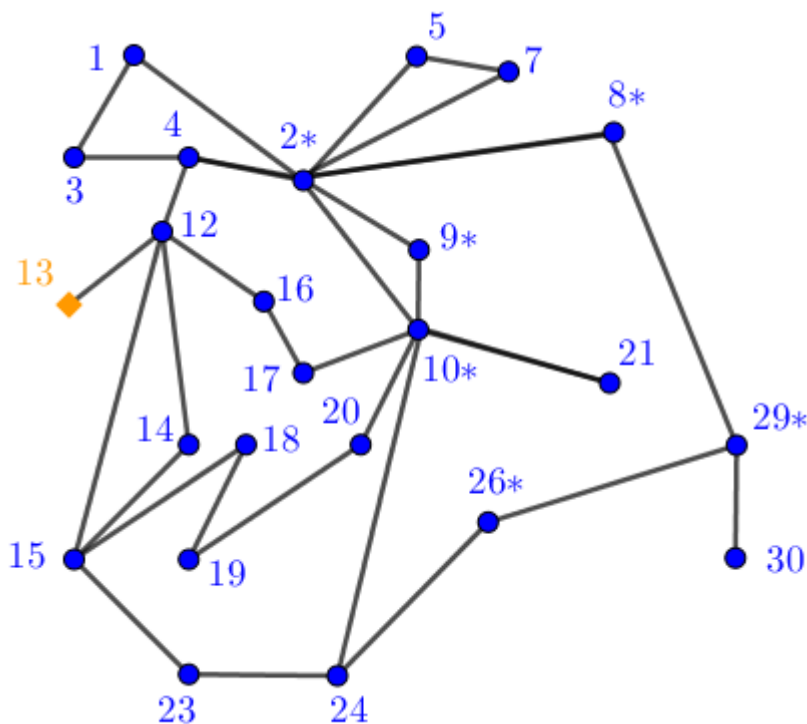
Za čvor 25 koji je takođe ZIB može se primetiti da je njemu susedan čvor broj 26 koji je radijalan, pa primenjujući pravilo broj 8, izvršiće se integracija čvorova 25 i 26. Dobija se mreža kao na slici 2.8.8

Za ZIB koji se nalazi u čvoru 27, postoji mogućnost integracije sa čvorovima 29 ili 30. Prema pravilu 7, čvor 26\*, koji je već bio u procesu integracije se više ne sme razmatrati. Kako oba čvora, 29 i 30 imaju isti broj incidentnih čvorova, nasumično je odabran čvor 29 za integraciju sa ZIB-om 27. Dobija se mreža kao na slici 2.8.9.



Slika 2.8.9: IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 27 i 29

Kao poslednji nerešeni ZIB ima se onaj u čvoru 28. Kako ima tri incidentna čvora, 2\*, 8 i 29\*, jedini od ranije neintegrirani čvor je 8, pa se on nameće za poslednji korak integracije. Dobija se mreža sa slike 2.8.10.



Slika 2.8.10: IEEE mreža sa 30 čvorova nakon integracije čvorova 8 i 28

## 2.9 Uticaj ispada jednog PMU uređaja

Analiza sigurnosti se odnosi na nemogućnost primenjenog estimatora da identifikuje odgovarajuće stanje u sistemu pri nekom poremećaju. Taj poremećaj može biti izazvan kvarom samog PMU uređaja, kvarom pojedinih kanala merenja ili poremećajem u komunikacionim vezama (fizičke, logičke, hakerske). Problem koji je u ovom odeljku razmatran odnosi se na gubitak informacija celog PMU uređaja ili pojedinih njegovih kanala merenja, kao nezavisan događaj koji može da ugrozi opservabilnost sistema. Postavljanjem minimalnog skupa PMU uređaja neka merenja postaju redundantna, a veći broj takvih merenja će obezbediti bolje funkcionisanje sistema, kao i njegov nesmetani rad pri njihovom gubitku. To dovodi do neophodnosti da se uvedu Bus Observability Index (BOI) i System Observability Redundancy Index (SORI) kao jedan od kriterijuma optimizacije i koji će biti objašnjeni u odeljku 4.1. Međutim, u ovde izvršenim analizama sigurnost je vezana za ispad celog PMU uređaja, kao verovatan događaj koji može da bude posledica kvara na uređaju ili gubitka veze sa uređajem. U tom slučaju, dolazi do gubitka svih merenja vezanih za uređaj, što je znatno kritičnije od gubitka pojedinačnog merenja. Zahtev za ograničenjem koji će ovde biti uveden, odnosi se na opservabilnost sistema pri gubitku bilo kog od PMU uređaja (pojedinačni ispad –  $N - 1$  kriterijum sigurnosti). Simultani ispad više uređaja je svakako moguć, posebno usled mogućih sajber (cyber) napada, ali on zahteva posebna razmatranja i posebne sisteme zaštite.

U disertaciji je akcenat stavljen na zahtev da se opservabilnost ostvari instaliranjem minimalnog broja PMU uređaja. U estimaciji se pored postojećih merenja definišu i dodatna virtuelna i pseudo-merenja, kao dodatna merenja koja se mogu koristiti u estimaciji stanja.

U radu je korišćena definicija pseudo-merenja iz [4], pridruženi ZIB čvorovi, koja injektiranje čvora izjednačavaju sa nulom i omogućavaju da se na osnovu prvog KIRHOFOvog zakona odrede struje jedne grane ako su ostale struje incidentne datom čvoru poznate.

U disertaciji je predložena nova formula za izloženi problem. Uslovi koji su bili dati u slučaju linearnog programiranja (2.4.3) su sada oblika

$$Ax \geq 2, \quad (2.9.1)$$

dok je za slučaj nelinearnog programiranja, oblika

$$f_i(x) = \prod (2 - C_2^{x_{ADJ_i}}) n = 0, \quad (2.9.2)$$

gde je  $f_i$  jednačina za  $i$ -ti čvor,  $ADJ_i$  je skup čvorova susednih čvoru  $i$ , uključujući i sam čvor  $i$ , dok su sa  $C_2^{x_{ADJ_i}}$  označene kombinacije druge klase nad skupom  $x_{ADJ_i}$ .

Na primer, za IEEE sistem sa 7 čvorova, prikazan na slici 2.4.1, za čvor 4 dobija se

$$f_4 = (2 - x_3 - x_4)(2 - x_3 - x_5)(2 - x_3 - x_7)(2 - x_4 - x_5)(2 - x_4 - x_7)(2 - x_5 - x_7).$$

Ovako definisani uslovi u optimizacionom procesu, bilo da su oblika (2.9.1) ili (2.9.2) govore da će čvor  $i$  biti opservabilan u slučaju ispada jednog PMU uređaja ako je jedan PMU uređaj postavljen baš u čvoru  $i$  i jedan u nekom njemu susednom čvoru ili ako je po jedan PMU uređaj raspoređen u dva čvora susedna čvoru  $i$ .

Jasno je da ovako definisan problem značajno povećava potreban broj PMU uređaja kako bi se postigla potpuna opservabilnost. Algoritam je lako prepravljen, i za slučaj ispada  $X$  PMU uređaja nejednačina (2.9.1) postaje

$$Ax \geq X,$$

dok jednačina (2.9.2) postaje

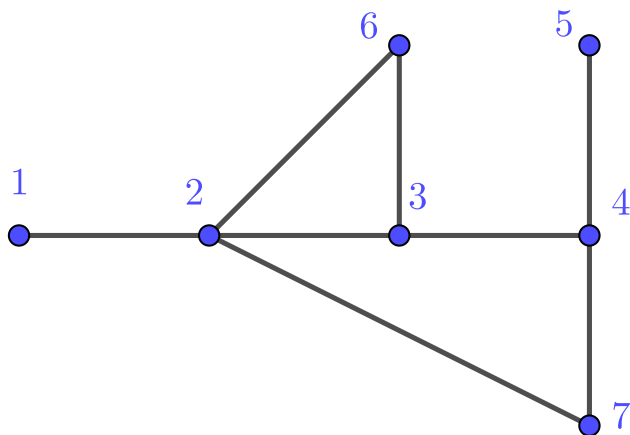
$$f_i(x) = \prod (X - C_X^{x_{ADJ_i}}) = 0.$$

## 2.10 Uticaj limitiranog broja kanala na PMU uređaju

U svim prethodno razmatranim slučajevima na PMU uređajima je smatrano da nemaju ograničenja sa brojem kanala. Jedan ulaz pruža mogućnost jednofaznog merenja jednog napona ili struje. U današnjim specifikacijama PMU uređaja mogu se pronaći proizvodi sa različitim brojem ulaza, recimo 9, 18, 26, 32, 36, 64, [54]. Ukoliko PMU uređaj ima 36 ulaza (inputs), moguće je meriti najviše 12 trofaznih napona ili struja. Prilikom planiranja instalacije PMU uređaja u sistem, bilo bi poželjno da se sagleda trafostanica sa najvećim brojem dalekovoda koji iz nje polaze. Ako je taj broj  $X$ , tada je potrebno uzeti PMU uređaj sa  $3(X + 1)$  ulaza. U ovom izrazu član  $3X$  je za sve trofazne struje, a tri ulaza su rezervisana za trofazni napon čvora.

Ukoliko se iz raznih razloga tokom planiranja nabavke PMU uređaja ovo ne sagleda ili, što je verovatnije, da se topologija mreže promenila usled izgradnje novog dalekovoda, problem uticaja limitiranog broja kanala se ispoljava. Kao primer je uzeta IEEE mreža sa 7 čvorova sa slike (2.10.1). Ukoliko se primenjuju u optimizaciji PMU uređaji koji imaju 12 fazora tj. 4 kanala, od čega će jedan biti zauzet za napon čvora, postoje na raspolaganju da se izmere 3

fazora, odnosno 3 trofazne struje koje polaze iz čvora. Ovakva postavka problema znači da PMU uređaj koji bi se eventualno postavio u čvor 2 ima za reperkusiju nemogućnost opservabilnosti svih čvorova njemu susednih, već bi jedan od čvorova  $\{1, 3, 6, 7\}$  bio neopservabilan.



Slika 2.10.1: IEEE mreža sa 7 čvorova

Problem se svodi na proširivanje broja vrsta matrice incidencije za  $n_k$

$$n_k = \begin{cases} \binom{N_k}{c_l-1}, & c_l - 1 < N_k \\ 1, & c_l - 1 \geq N_k \end{cases}$$

gde je  $N_k$  broj dalekovoda koji polazi iz čvora  $k$ ,  $c_l$  je broj kanala PMU uređaja, a član

$$\begin{aligned} \binom{N_k}{c_l-1} &= \frac{N_k!}{(c_l-1)! (N_k - (c_l-1))!} \\ &= \frac{N_k \cdot (N_k - 1) \cdots (N_k - (c_l-1) + 1)}{(c_l-1) \cdot ((c_l-1) - 1) \cdots 1}, \quad N_k \geq c_l - 1 \geq 0, \quad N_k, c_l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

predstavlja kombinacije bez ponavljanja  $c_l - 1$ -te klase<sup>5</sup> od  $N_k$  elemenata.

Za mrežu sa slike (2.10.1), ako je broj kanala  $c_l = 4$  dobija se, a zbog čvora 2, da se matrica incidencije mora proširiti za

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

vrste. Za sve ostale čvorove je broj grana koje iz njih polaze manji od broja  $c_l - 1 = 3$  te za te čvorove se dobija samo jedna (već postojeća vrsta). Za čvor 2 imaju se kombinacije treće klase skupa  $\{1, 3, 6, 7\}$ , odnosno  $\{1, 3, 6\}$ ,  $\{1, 3, 7\}$ ,  $\{1, 6, 7\}$ ,  $\{3, 6, 7\}$ . Primetiti da čvor 2 ne učestvuje u kombinacijama jer se za njega pišu uslovi, te se on podrazumeva. Matrica incidencije je sada oblika

<sup>5</sup>oduzima se jedan jer jedan kanal mora da bude za napon posmatranog čvora

1	1	0	0	0	0	0	čvor 1
1	1	1	0	0	1	0	čvor 2
1	1	1	0	0	0	1	čvor 2
1	1	0	0	0	1	1	čvor 2
0	1	1	0	0	1	1	čvor 2
0	1	1	1	0	1	0	čvor 3
0	0	1	1	1	0	1	čvor 4
0	0	0	1	1	0	0	čvor 5
0	1	1	0	0	1	0	čvor 6
0	1	0	1	0	0	1	čvor 7

Iz matrice incidencije se formiraju uslovi optimizacionog procesa i to za slučaj linearnog programiranja primenom jednačine (2.4.3) ili za slučaj nelinearnog programiranja primenom jednačine (2.5.1). U konkretnom slučaju, za čvor 2 je potrebno uzimati jednu po jednu jednačinu i iznova pokretati optimizacioni proces. Za slučaj da se za više čvorova proširuje matrica incidencije, potrebno je izvršiti sve njihove moguće kombinacije.

## 2.11 Uticaj već postojećih PMU uređaja u EES-u

Čest slučaj u EES-u je da su PMU uređaji u neke čvorove već instalirani. U ovom odeljku će biti izložena formulacija ovakvog tipa problema. Takođe, može se obuhvatiti slučaj kada su neke lokacije za instalaciju PMUova već predefinisane zahtevima da se njihovim merenjem reprezentuje i kritična dinamika sistema [18], vezana za ugaonu i/ili naponsku stabilnost. Predložena modifikacija se može izvršiti bez izmena kriterijumske funkcije (2.4.1). Polazeći od relacija (2.5.1) i (2.5.2) u baznom slučaju (base case), ili (2.6.3) i (2.9.2), respektivno za slučajeve sistema sa ZIB, odnosno sa uvažavanjem  $N - 1$  kriterijuma, dovoljno je postaviti sve upravljačke promenljive u kojima je već postavljen PMU na  $x_i = 1$ , uz eliminisanje odgovarajućih jednačina koje time postaju identiteti. Ovim se samo uprošćava problem bez bilo kakvih zahteva vezanih za izmenu oblika kriterijumskih funkcija. Sve navedene formulacije optimalne postavke PMU uređaja su sa kriterijumskom funkcijom i svim ograničenjima tipa jednakosti u polinomnoj formi.

Za slučaj 400 kV mreže Srbije koja je prikazana na slici 7.6.1 u Apendiksu, a uz uvažavanje trenutno instaliranih PMU uređaja, datih u odeljku 1.6 dobija se da je za potpunu opservabilnost potrebno postaviti još jedan PMU uređaj, ili u čvor 17 - TS Beograd 20 ili u čvor 7 - TS Pančevo 2.

U 220 kV mreži Srbije, predstavljenoj na slici 7.7.1, trenutno je PMU uređaj instaliran jedino u čvoru 11 (TS Bajina Bašta). Kako postoji veliki broj optimalnih rešenja sa uključenim čvorom 11 (tabela 7.16), uzećemo ono sa najvećim SORI indeksom, a koje je predstavljeno u Tabeli 5.1. SORI indeks za rešenje 2,5,7,11,13,18,20,21 je 36, te bi se operatoru prenosnog sistema predložilo da u budućnosti razmatra ove pozicije za instalaciju PMU uređaja.

# 3 Grebnerova baza

U ovom odeljku je predstavljena deo teorije algebre koja se odnosi na polinome, a koja će biti upotrebljena kasnije za definisanje teorije GREBNEROVE baze. Matematičke veze između delova algebre i geometrije mogu da budu veoma složene. U ovom radu zadržaćemo se na jednom delu algebre, teoriji GREBNEROVH baza, koja je primenjivana za problem opservabilnosti. Stoga, biće predstavljena teorija koja je potrebna da bi se problem opservabilnosti sistema rešio metodom GREBNEROVE baze.

Projam Grebnerove baze je uveo BRUNO BUHBERGER (BRUNO BUCHBERGER) 1965. godine u svojoj doktorskoj disertaciji [55, 56] i nazvana je u čast njegovog mentora VOLFGANGA GREBNERA (WOLFGANG GROEBNER). Do istog pojma je došao i HEISUKE HIRONAKA u radu [57].

Navodimo neke osnovne definicije teorije GREBNEROVH baza polinomijalnih idealala:

**Definicija 1.** [71] Monomom zovemo izraz oblika  $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ , gde su stepeni  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  nenegativni celi brojevi. Kažemo da je stepen ovako definisanog monoma  $A = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ .

**Definicija 2.** [71] Polinomom  $\mathcal{P}$  sa koeficijentima iz polja  $k$  je konačna linearna kombinacija (sa svim koeficijentima iz polja  $k$ ) monoma. Pisaćemo ovakav polinom kao

$$\mathcal{P} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \in k, \quad \alpha \geq 0.$$

Skup svih polinoma u  $x_1, \dots, x_n$  sa koeficijentima u polju  $k$  biće označeni sa  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Primer 3.** Kao primer u polju  $k[x_1, x_2, x_3] = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$  navodimo polinom

$$\mathcal{P} = \pi x_1 x_2^2 x_3^3 - \frac{e}{3} x_2^2 + 3x_3^3.$$

**Definicija 3.** [71] Neka je  $\mathcal{P} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$  polinom u polju  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

1.  $a_{\alpha}$  zovemo koeficijentom monoma  $x^{\alpha}$ .
2. Ako je  $a_{\alpha} \neq 0$ , tada je  $a_{\alpha} x^{\alpha}$  član polinoma  $\mathcal{P}$ .
3. Stepen polinoma  $\mathcal{P}$  je maksimalna vrednost  $\alpha$  i označavamo sa  $\deg(\mathcal{P})^1$

**Primer 4.** Za polinom  $\mathcal{P} = \pi x_1 x_2^2 x_3^3 - \frac{e}{3} x_2^2 + 3x_3^3$  imamo da je njegov stepen  $\deg(\mathcal{P}) = 6$ .

---

<sup>1</sup>skraćeno od degree (stepen)

**Definicija 4.** [71] Podskup  $I \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  je ideal ako je ispunjeno:

1.  $0 \in I$
2. Ako je  $f, g \in I$ , tada  $f + g \in I$
3. Ako je  $f \in I$  i  $h \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , tada je  $h \cdot f \in I$ .

**Definicija 5.** [71] Neka su  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s$  polinomi u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Tada kažemo da je skup

$$\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i \cdot f_i \mid h_1, h_2, \dots, h_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n] \right\}.$$

ideal.

**Definicija 6.** [71] Neka je dat nenulti polinom  $\mathcal{P} \in k[x]$  oblika

$$\mathcal{P}(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_{n-m},$$

gde su koeficijenti  $c_i \in k$ ,  $c_n \neq 0$ . Tada član  $c_n x^n$  zovemo vodeći član polinoma  $\mathcal{P}$  i pisaćemo  $LT(\mathcal{P})^2$ .

**Teorema 1.** [71] (*Algoritam deljenja u polju  $k[x]$* ) Neka je  $k[x]$  polje u kome je definisan polinom  $\mathcal{G}$ . Tada se svaki polinom  $\mathcal{P}$  može zapisati u obliku

$$\mathcal{P} = Q \cdot \mathcal{G} + R,$$

gde su polinomi  $Q$  i  $R \in k[x]$  količnik i ostatak, respektivno. Polinomi  $Q$  i  $R$  su jedinstveno određeni. Polinom  $R$  je ili nulti polinom ili ima manji stepen od polinoma  $\mathcal{G}$ .

Algoritam bi mogao da se predstavi na sledeći način<sup>3</sup>: prvo se podele najviši stepeni oba polinoma. Sa novodobijenim polinomom se množi polinom delilac koji se zatim oduzima od polinoma deljenika. U tako dobijenom polinomu opet se deli njegov najveći stepen sa najvećim stepenom polinomom delioca i postupak se ponavlja sve dok se ne dobije ili nula ostatak ili polinom stepena manjeg od stepena delioca.

**Primer 5.** Kao primer ilustrovanog algoritma, uzmimo dva polinoma

$$\mathcal{P}(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 3x + 2 \text{ i } \mathcal{G} = x^2 - 1$$

<sup>2</sup>skraćeno od leading term (vodeći član)

<sup>3</sup>algoritam je primenljiv u ovom obliku samo na polinome jedne promenljive



i podelimo ih:

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - 3x^4 \quad - 2x^2 + 3x + 2 = (x^2 - 1) (2x^3 - 3x^2 + 2x - 5) + 5x - 3 \\
 - 2x^5 \quad + 2x^3 \\
 \hline
 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 \\
 3x^4 \quad - 3x^2 \\
 \hline
 2x^3 - 5x^2 + 3x \\
 - 2x^3 \quad + 2x \\
 \hline
 - 5x^2 + 5x + 2 \\
 5x^2 \quad - 5 \\
 \hline
 5x - 3
 \end{array}$$

Imamo da je količnik deljenja razlomaka jednak  $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ , a da je ostatak jednak  $R(x) = 5x - 3$ .

**Definicija 7.** [71] Najveći zajednički delilac polinoma  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s \in k[x]$  je polinom  $h$  takav da:

1.  $h$  deli  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s$
2. Ako je  $\mathcal{T}$  polinom koji deli polinome  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s$ , tada  $\mathcal{T}$  deli i  $h$ .

Polinom  $h$  sa ovim osobinama zovemo najveći zajednički delilac i pišemo  $h = gcd(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s)$ <sup>4</sup>

Za nalaženje  $gcd$  se koristi Euklidov (EUCLID) algoritam.

### 3.1 Monomijalni poredak

Prilikom deljenja polinoma u polju  $k[x]$  ili prilikom primene GAUSOVOG algoritma rešavanja sistema linearnih jednačina, najvažniji faktor je monomijalni poredak polinoma. Pre procesa deljenja dva polinoma potrebno ih je grupisati u opadajućem poretku, a zatim treba podeliti vodeće članove oba polinoma u cilju poništavanja vodećeg člana deljenika. Kod polinoma u polju jedne promenljive  $k[x]$  očevitno je da opadajući monomijalni poredak izgleda

$$\dots > x^{n+1} > x^n > x^{n-1} > \dots > x^2 > x^1 > 1.$$

Efektivnost algoritma leži u činjenici pravilno uređenog polinoma prema opadajućem monomijalnom poretku. Slična procedura se može primeniti i na kreiranje nultih vrsta u matrici sistema kod GAUSOVOG algoritma.

Postavlja se pitanje redosleda pisanja članova polinoma u slučaju više promenljivih, odnosno u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Da bismo mogli da odgovorimo na ovo pitanje, potrebno je da postoji mogućnost poređenja članova polinoma. Zbog ovoga zahtevano je da poredak bude linearan ili

<sup>4</sup>skrećeno od eng. greatest common divisor

totalan. Ovo implicira da za svaki par monoma  $x^\alpha$  i  $x^\beta$ , mora važiti samo jedna od sledeće tri pretpostavke:

$$x^\alpha > x^\beta, \quad x^\alpha = x^\beta, \quad x^\alpha < x^\beta.$$

Za totalni poredak se zahteva osobina tranzitivnosti relacije<sup>5</sup>, odnosno ako je  $x^\alpha > x^\beta$  i  $x^\beta > x^\gamma$  ima se implikacija  $x^\alpha > x^\gamma$ .

**Definicija 8.** [71] Monomijalni poredak  $>$  u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  je relacija  $>$  na skupu pozitivnih celih brojeva  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  ili ekvivalentno, relacija za skup polinoma  $x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , koja zadovoljava:

1.  $>$  je relacija totalnog poretka (ili linearna<sup>6</sup>) na  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$
2. Ako je  $\alpha > \beta$  i  $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , tada  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ .
3.  $>$  je relacija dobrog uređenja na skupu  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Ovo znači da svaki neprazni podskup skupa  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  ima minimalni element.

U literaturi se nekoliko monomijalnih poredaka javlja:

**Definicija 9.** [71] *Leksikografski poredak*: Neka je  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  i  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Kažemo da je  $\alpha >_{lex} \beta$  ako je prva nenulta pozicija sa leve strane u vektorskoj razlici  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$  pozitivna. Tada pišemo  $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ . Ova relacija je relacija monomijalnog poretka.

**Primer 6.** Kod leksikografskog poretka se ima da je

1.  $x >_{lex} y >_{lex} z$  jer je  $(1, 0, 0) >_{lex} (0, 1, 0) >_{lex} (0, 0, 1)$
2.  $x^3y^2z^6 >_{lex} x^3y^2z^2$  jer je  $\alpha = (3, 2, 6) >_{lex} \beta = (3, 2, 2)$ , a  $\alpha - \beta = \left(0, 0, \underset{>0}{4}\right)$ .

**Definicija 10.** [71] *Relacija gradiranog leksikografskog poretka*: Neka je  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  i  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Kažemo da je  $\alpha >_{grlex} \beta$  ako

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i.$$

U slučaju da je  $|\alpha| = |\beta|$ , tada koristimo leksikografski poredak, odnosno  $\alpha >_{lex} \beta$ . Ova relacija je relacija monomijalnog poretka.

**Primer 7.** Kod gradiranog leksikografskog poretka se dobija

1.  $xy^2z^3 >_{grlex} x^3y^2$  jer je  $\alpha = 1 + 2 + 3 = 6$ , a  $\beta = 3 + 2 = 5$  i  $\alpha > \beta$ .
2.  $xy^2z^4 >_{grlex} xyz^5$ . Kako je  $\alpha = 1 + 2 + 4 = 7$  i  $\beta = 1 + 1 + 5 = 7$ , presudiće leksikografski poredak  $(1, 2, 4) - (1, 1, 5) = \left(0, \underset{>0}{1}, -1\right)$ .

<sup>5</sup>za relaciju  $\rho$  u skupu  $S$  kažemo da je tranzitivna ako  $(\forall a, b, c \in S) a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$

<sup>6</sup>Za relaciju  $\rho$  nad skupom  $S$  kažemo da je linearna ako važi  $(x, y \in S) x\rho y \vee y\rho x$

**Definicija 11.**[71] *Relacija obrnutog gradiranog leksikografskog poretka:*

Neka je  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  i  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Kažemo da je  $\alpha >_{\text{grevlex}} \beta$  ako

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i.$$

U slučaju da je  $|\alpha| = |\beta|$ , tada je  $\alpha >_{\text{grevlex}} \beta$  ako je prva nenulta pozicija sa desne strane u vektorskoj razlici  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  negativna. Ova relacija je relacija monomijalnog poretka.

**Primer 8.** Kod obrnutog gradiranog leksikografskog poretka se dobija

1.  $x^4y^7z >_{\text{grevlex}} x^4y^2z^3$  jer je  $\alpha = 4 + 7 + 1 = 12$ , a  $\beta = 4 + 2 + 3 = 9$  i  $\alpha > \beta$
2.  $xy^5z^2 >_{\text{grevlex}} x^4yz^3$ . Kako je  $\alpha = 1 + 5 + 2 = 8$  i  $\beta = 4 + 1 + 3 = 8$ , presudiće vektorska razlika  $(1, 5, 2) - (4, 1, 3) = \begin{pmatrix} -3, 4, -1 \\ <0 \end{pmatrix}$ .

**Primer 9.** Da bi se videlo koliko je važno koji je monomijalni poredak usvojen, razmatraće se polinom  $\mathcal{P}(x, y, z) = -x^3 + z^2 + 2x^2z^2 + 5xy^2z$ . Tada je za

1. leksikografski poredak  $\mathcal{P}(x, y, z) = -x^3 + 2x^2z^2 + 5xy^2z + z^2$
2. gradirani leksikografski poredak  $\mathcal{P}(x, y, z) = 2x^2z^2 + 5xy^2z - x^3 + z^2$
3. obrnuti gradirani leksikografski poredak  $\mathcal{P}(x, y, z) = 5xy^2z + 2x^2z^2 - x^3 + z^2$ .

**Definicija 12.** [71] Neka je  $\mathcal{P} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}x^{\alpha}$  nenulti polinom u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  i neka je usvojen  $>$  monomijalni poredak. Tada je

1. **multistepen** polinoma  $\mathcal{P}$   $\text{multideg}(\mathcal{P}) = \max(\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid a_{\alpha} \neq 0)^7$
2. **vodeći koeficijent** polinoma  $\mathcal{P}$   $LC(\mathcal{P}) = a_{\text{multideg}(\mathcal{P})} \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]^8$
3. **vodeći monom** polinoma  $\mathcal{P}$   $LM(\mathcal{P}) = x^{\text{multideg}(\mathcal{P})}{}^9$
4. **vodeći član** polinoma  $\mathcal{P}$   $LT(\mathcal{P}) = LC(\mathcal{P}) \cdot LM(\mathcal{P})^{10}$

**Primer 10.** Kao primer uzmimo polinom  $\mathcal{P}(x, y, z) = -x^3 + z^2 + 2x^2z^2 + 5xy^2z$ . Prvi korak je koji monomijalni poredak je usvojen. Neka je to leksikografski poredak. Tada je prema primeru 9  $\mathcal{P}(x, y, z) = -x^3 + 2x^2z^2 + xy^2z + z^2$ . Prema definiciji 12 ima se

$$\text{multideg}(\mathcal{P}) = (3, 0, 0),$$

$$LC(\mathcal{P}) = -1,$$

$$LM(\mathcal{P}) = x^3,$$

<sup>7</sup>skraćeno od eng. multi degree

<sup>8</sup>skraćeno od eng. leading coefficient

<sup>9</sup>skraćeno od eng. leading monomial

<sup>10</sup>skraćeno od eng. leading term

$$LT(\mathcal{P}) = -x^3.$$

## 3.2 Algoritam deljenja

Prilikom deljenja polinoma u polju  $k[x]$  odnosno polinoma jedne promenljive količnik i ostatak su jedinstveni. Lako se može pokazati da za deljenje polinoma u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  ni količnik ni ostatak nisu jedinstveni i da zavise od monomijalnog poretka koji je pre operacije deljenja usvojen. Ukoliko se polinom  $\mathcal{P} \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  deli sa  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , to implicira da se polinom  $\mathcal{P}$  može predstaviti u obliku

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1 + \mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{Q}_s\mathcal{P}_s + \mathcal{R},$$

gde su  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_s$  količnici, dok je  $\mathcal{R}$  ostatak (rezidum) deljenja. I količnici i ostatak takođe pripadaju polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

Algoritam deljenja u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  se može predstaviti sledećim koracima:

1. Postaviti sve  $\mathcal{Q}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  na nulu.
2. Ako je  $\mathcal{P} = 0$  prekinuti algoritam. U suprotnom, za svako  $i = 1, 2, \dots, s$  proveriti da li  $LT(\mathcal{P}_i)$  deli  $LT(\mathcal{P})$ . Ako deli, zameniti  $\mathcal{P}$  sa  $\mathcal{P} - \frac{LT(\mathcal{P})}{LT(\mathcal{P}_i)}$ , dodati  $\frac{LT(\mathcal{P})}{LT(\mathcal{P}_i)}$  na  $\mathcal{Q}_i$  i vratiti se na početak ovog koraka. Ako  $LT(\mathcal{P}_i)$  ne deli  $LT(\mathcal{P})$  ni za jedno  $i = 1, 2, \dots, s$ , tada
3. Dodati  $LT(\mathcal{P})$  na  $\mathcal{R}$ , zameniti  $\mathcal{P}$  sa  $\mathcal{P} - LT(\mathcal{P})$  i vratiti se na početak tačke 2.

Algoritam mora da se završi uvek. Razlog leži u činjenici da je usvojeno dobro uređenje za sve definisane monomijalne poretke, a multistepen polinoma koji se deli,  $\mathcal{P}$ , smanjuje se u svakoj iteraciji.

**Primer 11.** Primena izloženog algoritma biće data na primeru deljenja polinoma  $\mathcal{P} = x^3y^2 + xy + x + 1$  polinomima  $\mathcal{P}_1 = x^3 + 1$  i  $\mathcal{P}_2 = y^2 + 1$ . Korišćen je leksikografski monomijalni poredak  $x >_{lex} y$ .

Vodeći član polinoma  $\mathcal{P}$  je deljiv vodećim članom polinoma  $\mathcal{P}_1$  pa ta dva polinoma delimo. Dobija se

$$\begin{aligned} (x^3y^2 + xy + x + 1) : (x^3 + 1) &= y^2 \\ &- (x^3y^2 + y^2) \\ &xy + x - y^2 + 1 \end{aligned}$$

Vodeći član dobijenog polinoma  $xy + x - y^2 + 1$  nije deljiv vodećim članom polinoma  $x^3 + 1$ , te član  $xy$ , zatim  $x$ ,  $-y^2$  i  $1$  (koji takođe nisu deljivi) se prepisuju i dalje nastavljamo deljenje polinomom  $y^2 + 1$ . Članovi  $xy$  i  $x$  nisu deljivi i oni odlaze u polinom koji pripada ostatku, a proces se nastavlja počevši od  $-y^2 + 1$ . Ima se

$$\begin{array}{r} (xy + x - y^2 + 1) : (y^2 + 1) = -1 \quad \rightarrow xy + x \\ - (-y^2 - 1) \\ \hline 2 \end{array}$$

Polinom nultog stepena 2 nije moguće dalje deliti, što znači da i on pripada ostatku. Konačno,

$$x^3y^2 + xy + x + 1 = \underbrace{y^2}_{\mathcal{Q}_1} (x^3 + 1) + \underbrace{(-1)}_{\mathcal{Q}_2} (y^2 + 1) + \underbrace{(xy + x + 2)}_{\mathcal{R}}$$

Međutim, da je polinom  $\mathcal{P}$  prvo podeljen polinomom  $y^2 + 1$  dobilo bi se

$$\begin{array}{r} (x^3y^2 + xy + x + 1) : (y^2 + 1) = x^3 \\ - (x^3y^2 + x^3) \\ \hline -x^3 + xy + x + 1 \end{array}$$

A dalje,

$$\begin{array}{r} (-x^3 + xy + x + 1) : (x^3 + 1) = -1 \\ - (-x^3 - 1) \\ \hline xy + x + 2 \end{array}$$

Odnosno

$$x^3y^2 + xy + x + 1 = (-1)(x^3 + 1) + x^3(y^2 + 1) + (xy + x + 2).$$

Može se uočiti da se ne dobija isto  $\mathcal{Q}_1$  i  $\mathcal{Q}_2$ . Ne mora da znači da će se prilikom deljenja u prstenu  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  dobiti ni isti ostatak.

### 3.3 Grebnerova baza i njene osobine

Kako se ne dobija jedinstven oblik polinoma koji predstavljaju količnik i ostatak prilikom deljenja polinoma u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , u tekstu koji sledi biće korišćeno da GREBNEROVA baza imati osobinu da prilikom deljenja polinoma, bez obzira na redosled deljenja elementnima GREBNEROVE baze, uvek daje isti ostatak.

**Definicija 13.** [71] Neka je  $I$  nenula ideal u polju  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Tada korišćenjem vodećih članova ideala  $LT(I) = \langle LT(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in I \rangle$  se generiše ideal vodećih članova

$$\langle LT(I) \rangle = \langle LT(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in I \rangle.$$

**Teorema 2.** [71] *Neka je  $I$  nenula ideal u  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Tada važi:*

1.  $\langle LT(I) \rangle$  je monomijalni ideal u  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$
2.  $(\exists g_1, g_2, \dots, g_s \in I) \langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2), \dots, LT(g_s) \rangle$ .

**Teorema 3.** [71] *Hilbertova teorema o bazi: Svaki ideal  $I \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  je konačno generisan ideal.*

**Definicija 14.** [71] Za unapred određen monomijalni poredak na prstenu polinoma  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  konačan podskup  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  ideala  $I \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  različit od nula skupa  $\{0\}$  se zove GREBNEROVA baza ako

$$\langle LT(g_1), LT(g_2), \dots, LT(g_s) \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Ekvivalentno, može se reći da je skup  $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  GREBNEROVA baza ideala  $I$  ako i samo ako je vodeći član svakog elementa  $I$  deljiv vodećim članom  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

**Teorema 4.** [58] *Svaki nenula ideal  $\langle LT(I) \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  u odnosu na fiksirani monomijalni poredak ima (standardnu) Grebnerovu bazu  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  koja je ujedno i baza ideala  $I$ .*

**Teorema 5.** [58] *Konačan skup  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  ideala  $\langle LT(I) \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jeste (standardna) Grebnerova baza u odnosu na fiksirani monomijalni poredak ako i samo ako za svaki polinom  $\mathcal{P} \in I$  važi  $(\exists g_i \in G) LT(g_i) | LT(\mathcal{P})$ .*

**Teorema 6.** [71] *Neka je  $I \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  ideal i neka je  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  Grebnerova baza ideala  $I$ . Tada, za polinom  $\mathcal{P} \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  postoji jedinstven ostatak  $\mathcal{R} \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  koji ima sledeće osobine:*

1. Nijedan član  $\mathcal{R}$  nije deljiv sa  $LT(g_1), LT(g_2), \dots, LT(g_s)$ .
2. Postoji  $g \in I$  tako da je  $\mathcal{P} = g + \mathcal{R}$ .

Praktično, ostatak  $\mathcal{R}$  prilikom deljenja  $\mathcal{P}$  sa  $G$  će biti jedinstven, bez obzira kako su poredani elementi  $G$ .<sup>11</sup>

**Teorema 7.** [58] *Neka su  $G_1$  i  $G_2$  dve Grebnerove baze ideala  $\langle LT(I) \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  u odnosu na fiksirani monomijalni poredak. Za proizvoljni polinom  $\mathcal{P} \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  važi  $REM(\mathcal{P}, G_1) = REM(\mathcal{P}, G_2)$ .*

Napomena. Ostatak  $r = REM(\mathcal{P}, g_1, g_2, \dots, g_s)$  nazivamo ostatak polinoma  $\mathcal{P}$  u odnosu na Grebnerovu bazu  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  pri fiksiranom monomijalnom poretku i označavamo ga sa  $r = REM(\mathcal{P}, G)$ .

**Teorema 8.** [58] *Neka je  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  (standardna) Grebnerova baza ideala  $\langle LT(I) \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  u odnosu na fiksirani monomijalni poredak. Tada za svaki polinom  $\mathcal{P} \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  važi sledeći kriterijum pripadnosti polinoma posmatranom nenula idealu:*

$$\mathcal{P} \in I \Leftrightarrow REM(\mathcal{P}, G) = 0$$

**Definicija 15.** [71] *Neka su  $\mathcal{P}, \mathcal{G} \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nenulti polinomi.*

1. Ako je  $\text{multideg}(\mathcal{P}) = \alpha$  i  $\text{multideg}(\mathcal{G}) = \beta$  i neka je  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ , gde je  $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Kaže se da je  $x^\gamma$  **najmanji zajednički sadržalac** posmatranih monoma. Pišemo

$$LCM(LM(\mathcal{P}), LM(\mathcal{G})) = x^\gamma.$$

<sup>11</sup>Grebnerova baza može biti okarakterisana i kao teorema jedinstvenog ostatka.

2.  $S$ -polinom<sup>12</sup> polinoma  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{G}$  je linearna kombinacija

$$S(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \frac{x^\gamma}{LT(\mathcal{P})} \cdot \mathcal{P} - \frac{x^\gamma}{LT(\mathcal{G})} \cdot \mathcal{G}.$$

Na ovaj način definisan je novi polinom koji služi da poništi vodeće članove.

**Primer 12.** Neka je  $\mathcal{P} = x^3y - xy^2 + 1$  i  $\mathcal{G} = x^2y^2 - y^3 - 1$ ,  $\mathcal{P}, \mathcal{G} \in \mathbb{Q}[x, y]$ , i neka je usvojen gradirani leksikografski poredak  $x >_{grlex} y$ . Tada, upoređivanjem samo vodećih članova polinoma, ima se  $LT(\mathcal{P}) = x^3y$  i  $LT(\mathcal{G}) = x^2y^2$ , pa je  $\gamma = (3, 2)$ . Sada je  $S$ -polinom oblika

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}, \mathcal{G}) &= \frac{x^3y^2}{x^3y} \cdot (x^3y - xy^2 + 1) - \frac{x^3y^2}{x^2y^2} \cdot (x^2y^2 - y^3 - 1) \\ &= y \cdot (x^3y - xy^2 + 1) - x \cdot (x^2y^2 - y^3 - 1) \\ &= x^3y^2 - xy^3 + y - x^3y^2 + xy^3 + x \\ &= x + y \end{aligned}$$

**Teorema 9.**<sup>[71]</sup> *Buhbergerov kriterijum:* Neka je  $I$  ideal. Tada je konačan skup  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  baza za ideal  $I$ , odnosno Grebnerova baza ako i samo ako za sve parove  $i \neq j$  ostatak deljenja  $S$ -polinoma  $S(g_i, g_j)$  sa  $G$  (prema nekom usvojenom monomijalnom poretku) jednak nuli.

**Primer 13.** Posmatrajmo ideal  $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$  u polju  $k \in \mathbb{R}[x, y, z]$ . Neka je usvojen monomijalni poredak  $y >_{lex} z >_{lex} x$ . Prvi korak u određivanju GREBNEROVE baze za ideal  $I$  će biti pronalaženje  $S$ -polinoma:

$$S(y - x^2, z - x^3) = \frac{yz}{y} \cdot (y - x^2) - \frac{yz}{z} \cdot (z - x^3) = -zx^2 + yx^3.$$

Drugi korak je deljenje  $S$ -polinoma sa  $I$ . Ima se da je

$$-zx^2 + yx^3 = x^3(y - x^2) + (-x^2) \cdot (z - x^3) + 0,$$

dakle ostatak je jednak nuli, pa dati ideal  $I$  jeste GREBNEROVA baza.

Posmatrajmo sada isti ideal, a neka je usvojen monomijalni poredak  $x >_{lex} y >_{lex} z$ . Ima se  $I = \langle -x^2 + y, -x^3 + z \rangle$ .  $S$ -polinom je

$$\begin{aligned} S(-x^2 + y, -x^3 + z) &= \frac{x^3}{-x^2} \cdot (-x^2 + y) - \frac{x^3}{-x^3} \cdot (-x^3 + z) = \\ &= x^3 - xy - x^3 + z \\ &= -xy + z \end{aligned}$$

Primetiti da se izraz  $xy - z$  ne može podeliti ni sa jednim članom ideala  $I$ . Dakle, u ovom slučaju ideal  $I$  nije GREBNEROVA baza.

### 3.3.1 Buhbergerov algoritam

Kako bi bilo određeno da li je neki ideal GREBNEROVA baza ili ne ili kako bi se na osnovu nekog datog ideala konstruisala GREBNEROVA baza, BRUNO BUHBERGER je dao sledeću teoremu (algoritam):

<sup>12</sup>usvojeno je slovo  $S$  kao skraćenica od lat. *syzigia* - konjukcija

**Teorema 10.** [71] *Neka je ideal  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$ . Tada se Grebnerova baza može odrediti u konačno mnogo koraka sledećim algoritmom:*

1. Učitati  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ .
2. Izabrati par  $f_i$  i  $f_j$  ( $i \neq j$ ) i izračunati  $S$ -polinom na način predstavljen u definiciji 15.
3. Podeliti  $S$ -polinom sa  $F$  i neka je ostatak deljenja  $\mathcal{R}$ , u oznaci,  $\overline{S(f_i, f_j)}^F = \mathcal{R}$ .
4. Ako je  $\mathcal{R} = 0$ , ići na sledeći par  $f_i, f_j$  ( $i \neq j$ ). Ako je  $\mathcal{R} \neq 0$ , dodati polinom  $\mathcal{R}$  na skup  $F$ .
5. Početi ponovo sa proširenim skupom  $F$ .
6. Prekinuti algoritam kada svi  $\mathcal{R}$ -ovi postanu nula.

**Primer 14.** Kao primer generisanja GREBNERove baze, uzmimo ideal

$$I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle -5x^2 - 8x + 4y^2, -4x - 3y - 2 \rangle.$$

Neka je usvojen obrnuti gradirani leksikografski poredak  $x >_{grelex} y$ . Kako je  $\text{multideg}(f_1) = (2, 0)$  i  $\text{multideg}(f_2) = (1, 0)$  ima se da je najmanji zajednički sadržalac polinoma  $f_1$  i  $f_2$   $x^2$ . Kako je  $LT(f_1) = -5x^2$  i  $LT(f_2) = -4x$  dobija se  $S$ -polinom

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{x^2}{-5x^2} \cdot (-5x^2 - 8x + 4y^2) - \frac{x^2}{-4x} \cdot (-4x - 3y - 2) \\ &= -\frac{3}{4}xy + \frac{11}{10}x - \frac{4}{5}y^2. \end{aligned}$$

Dobijeni  $S$ -polinom nije deljiv polinomom  $f_1$  iz ideala, ali jeste deljiv polinomom  $f_2$ . Može se zapisati

$$-\frac{3}{4}xy + \frac{11}{10}x - \frac{4}{5}y^2 = 0 \cdot (-x^2 - 8x + 4y^2) + \left(\frac{3}{16}y - \frac{11}{40}\right) \cdot (-4x - 3y - 2) - \frac{19}{80}y^2 - \frac{9}{20}y - \frac{11}{20}.$$

Dakle,

$$\overline{S(f_i, f_j)}^F = -\frac{19}{80}y^2 - \frac{9}{20}y - \frac{11}{20}.$$

Proširena baza je oblika

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \left\langle -5x^2 - 8x + 4y^2, -4x - 3y - 2, -\frac{19}{80}y^2 - \frac{9}{20}y - \frac{11}{20} \right\rangle.$$

Novi  $S$ -polinomi koji se dobijaju su:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_3) &= -\frac{36x^2y}{19} - \frac{44x^2}{19} + \frac{8xy^2}{5} - \frac{4y^4}{5}, \\ S(f_2, f_3) &= -\frac{36xy}{19} - \frac{44x}{19} + \frac{3y^3}{4} + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

BUHBERGERov algoritam se sada prekida jer su svi  $S$ -polinomi deljivi (bez ostatka) sa članovima proširene baze.

Konačno, GREBNERova baza ideala  $I = \langle -5x^2 - 8x + 4y^2, -4x - 3y - 2 \rangle$  je

$$G = \left\langle -5x^2 - 8x + 4y^2, -4x - 3y - 2, -\frac{19}{80}y^2 - \frac{9}{20}y - \frac{11}{20} \right\rangle.$$



### 3.3.2 Redukovana Grebnerova baza

**Definicija 16.** [58] Grebnerova baza  $G$  ideala  $I \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jeste redukovana Grebnerova baza ideala  $I$  ako važi:

1.  $(\forall p \in G) LC(p) = 1$
2. Za svako  $p \in G$  ne postoji monom  $\mathbf{x}^\alpha$  polinoma  $p$  tako da  $\mathbf{x}^\alpha \in \langle LT(G \setminus \{p\}) \rangle$ .

**Teorema 11.** [58] Redukovana Grebnerova baza je jedinstvena i predstavlja specijalan slučaj minimalne Grebnerove baze nenula ideala  $I$ .

Algoritam redukcije GREBNERove baze se sastoji u sledećim koracima:

```

Input:  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  - GREBNERova baza
Output:  $\hat{G} = \{\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_s\}$  - redukovana GREBNERova baza
 $\hat{G} := G$ 
for all  $g \in \hat{G}$  do
if  $(\exists \mu \in \hat{G} | \mu \neq g) LT(\mu) | LT(g)$  then
     $\hat{G} := \hat{G} \setminus \{g\}$ 
else
     $g := REM(g, \hat{G} \setminus \{g\})$ 
for all  $g \in \hat{G}$  do
     $g = \frac{g}{LC(g)}$ 

```

Kada se izloženi algoritam primeni na primer 14, dobija se da je redukovana GREBNERova baza

$$\hat{G} = \{44 + 36y + 19y^2, 4x + 3y + 2\}.$$

Svi savremeni sistemi kompjuterske algebre (CAS), kao što su Maple, Matlab, Mathematica, MuPAD, koriste programsku realizaciju računanja redukovane GREBNERove baze.

## 3.4 Primene Grebnerove baze

GREBNERova baza se danas primenjuje u komutativnoj algebri kroz probleme pripadnosti idealu, preseka ideala, jednakosti ideala, probleme preseka površi višeg reda, zatim za dokazivanje problema elementarne geometrije koje uključuju polinomne jednačine i nejednačine. Veliku primenu je GREBNERova baza našla i u teoriji grafova za problem bojenja grafova. Graf  $G(V, E)$  je potrebno obojiti sa  $k$  boja tako da su čvorovi koji povezuju granu obojeni drugačijim bojama.

GREBNERova baza se može primeniti i na problem linearnog programiranja [52, 71]. Kao primer, neka su uslovi koje optimalno rešenje treba da zadovoljava dati sa

$$\begin{aligned} 3\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 &= 10 \\ 4\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 5. \end{aligned}$$

Biće uvedene dve promenljive,  $x_1$  i  $x_2$ , koje će odgovarati svakoj jednačini iz navedenih uslova. Može se pokazati

$$x_1^{3\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4} = x_1^{10} \quad (3.4.1)$$

$$x_2^{4\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} = x_2^5. \quad (3.4.2)$$

Množenjem jednačina (3.4.1) i (3.4.2) i regrupisanjem članova dobija se

$$(x_1^3 x_2^4)^{\sigma_1} (x_1^2 x_2^1)^{\sigma_2} (x_1 x_2)^{\sigma_3} (x_1)^{\sigma_4} = x_1^{10} x_2^5.$$

Biće uvedene i četiri  $y$  promenljive, za svaku promenljivu  $\sigma$  iz uslova. Odgovarajuće polinomno mapiranje  $\phi : \mathbb{Q}[y_1, y_2, y_3, y_4] \rightarrow k[x_1, x_2] = \mathbb{Q}[x_1, x_2]$  je

$$y_1 \rightarrow x_1^3 x_2^4$$

$$y_2 \rightarrow x_1^2 x_2^1$$

$$y_3 \rightarrow x_1 x_2$$

$$y_4 \rightarrow x_1.$$

U sledećem koraku se pravi od ideala  $I = \langle y_1 - x_1^3 x_2^4, y_2 - x_1^2 x_2^1, y_3 - x_1 x_2, y_4 - x_1 \rangle$  GREBNEROVA baza, a prema leksikografskom poretku  $x_1 > x_2 > y_1 > y_2 > y_3 > y_4$ . Ima se

$$G = \{x_1 - y_4, x_2 y_4 - y_3, x_2 y_3^3 - y_1, y_2 - y_3 y_4, y_1 y_4 - y_4^3\}.$$

Navodimo bitan primer prema [71] gde će biti razmatran izraz  $x_1^{-1} x_2^2$  iako nije ni monom ni polinom. Pogodno je da se koristiti prsten  $k[x_1, x_2, w]$  uz korišćenje veze  $x_1 x_2 w = 1$ . Dobija se

$$x_1^{-1} x_2^2 = (x_1^{-1} x_2^2) \cdot (x_1 x_2) (x_1^{-1} x_2^{-1}) = x_2^3 w.$$

Ovakvom transformacijom je postignuto da eksponent u  $x_1$  u polaznom izrazu više nije negativan, ali uz dodavanje nove jednačine  $x_1 x_2 w = 1$ .

Posmatra se sistem jednačina

$$3\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = -1$$

$$4\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 5.$$

Postoje dve promenljive,  $x_1$  i  $x_2$ , za napisane dve jednačine. Takođe, postoje četiri  $y$  nepoznate, za svako  $\sigma$  po jedna, dakle  $y_1, y_2, y_3$  i  $y_4$ . Na sličan način, kao u prethodnom primeru, dobija se

$$x_1^{3\sigma_1-2\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4} = x_1^{-1}$$

$$x_2^{4\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3} = x_2^5.$$

Preuređenjem se dobija

$$(x_1^3 x_2^4)^{\sigma_1} (x_1^{-2} x_2^1)^{\sigma_2} (x_1 x_2^{-1})^{\sigma_3} (x_1^{-1})^{\sigma_4} = x_1^{-1} x_2^5.$$

U cilju oslobađanja negativnih koeficijenata dobija se

$$(x_1^{-2}x_2^1) = (x_1^{-2}x_2^1) \cdot (x_1^2x_2^2) (x_1^{-2}x_2^{-2}) = x_2^3w^2$$

$$(x_1^1x_2^{-1}) = (x_1^1x_2^{-1}) \cdot (x_1^1x_2^1) (x_1^{-1}x_2^{-1}) = x_1^2w$$

$$x_1^{-1} = x_1^{-1} \cdot (x_1^1x_2^1) (x_1^{-1}x_2^{-1}) = x_2^1w.$$

$$x_1^{-1}x_2^5 = x_1^{-1}x_2^5 \cdot (x_1^1x_2^1) (x_1^{-1}x_2^{-1}) = x_2^6w.$$

Ideal je  $I = \langle y_1 - x_1^3x_2^4, y_2 - x_2^3w^2, y_3 - x_1^2w, y_4 - x_2w, x_1x_2w - 1 \rangle$  od koga se pravi GREBNEROVA baza, a poštujući leksikografski poredak

$$x_1 >_{lex} x_2 >_{lex} w >_{lex} y_1 >_{lex} y_2 >_{lex} y_3 >_{lex} y_4.$$

Dobija se

$$G = \left\{ \underbrace{y_2y_3 - y_4}_{f_1}, \underbrace{y_1y_4^{11} - y_2^4}_{f_2}, \underbrace{y_1y_3y_4^{10} - y_2^3}_{f_3}, \underbrace{y_1y_3^2y_4^9 - y_2^2}_{f_4}, \underbrace{y_1y_3^3y_4^8 - y_2}_{f_5}, \underbrace{y_1y_3^4y_4^7 - 1}_{f_6}, \right. \\ \left. \underbrace{w - y_3y_4^2}_{f_7}, \underbrace{x_2 - y_1y_4^6y_3^3}_{f_8}, \underbrace{x_1 - y_1y_4^6y_3^4y_1}_{f_9} \right\}.$$

Sledeći korak je redukovanje člana  $x_2^6w$  sa elementima iz  $G$ . U programskom alatu Maple komandom *NormalForm* dobija se ostatak prilikom deljenja željenog polinoma sa elementima iz skupa  $G$ . Međutim, postoji više rešenja koja zadovoljavaju polazni sistem jednačina:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \{(1, 1, 0, 2), (2, 0, 3, 10), (6, 38, 57, 0), (6, 0, 19, 38), \\ (5, 0, 15, 31), (3, 0, 7, 17), (4, 0, 11, 24)\}$$

Jasno je da u zavisnosti od oblika kriterijumske funkcije  $f(\sigma) = \sum_{i=1}^n w_i \sigma_i$  različite uređene četvorke će zadovoljavati optimizacioni problem. Stoga je potrebno napraviti korelaciju između faktora  $w_i$  i GREBNEROVE baze.

**Definicija 16.** [71] Poredak  $<_{w_i}$  promenljivih  $y$  kažemo da je kompatibilan sa težinskim faktorom iz kriterijumske funkcije  $\sum_{i=1}^n w_i \sigma_i$  i mapiranjem  $\phi$  ako

$$\phi(y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \cdots y_n^{\sigma_n}) = \phi\left(y_1^{\sigma'_1} y_2^{\sigma'_2} \cdots y_n^{\sigma'_n}\right)$$

i

$$c(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) < c(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n)$$

implicira da je  $y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \cdots y_n^{\sigma_n} < y_1^{\sigma'_1} y_2^{\sigma'_2} \cdots y_n^{\sigma'_n}$ .

Jedna od najvažnijih osobina GREBNEROVE baze je rešavanje sistema nelinearnih jednačina i uopšte u nalaženju odgovora na pitanje da li je neki nelinearan sistem rešiv. Kod linearnog sistema jednačina stvar je dosta jednostavnija u poređenju sa nelinearnim i dovoljno je znati matricu i proširenu matricu sistema, zatim primeniti KRONEKER-KAPELIJEVU (CRONECKER - CAPELLI) teoremu i videti da li je sistem rešiv (saglasan) ili ne.

Kako bi se rešio bilo kakav sistem polinomnih jednačina  $\mathcal{S}$  potrebno je odrediti GREBNEROVU bazu ideala  $I = \langle \mathcal{S} \rangle$ .

Posmatran je sistem jednačina

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 2x \\2x - 3y - z &= 0\end{aligned}$$

Ima se

$$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x, 2x - 3y - z \rangle,$$

a GREBNEROVA baza, dobijena u programskom alatu Maple, dobijena uz leksikografski poredak  $x >_{lex} y >_{lex} z$  je

$$G = \langle 2x - 1, 3y + z - 1, 40z^2 - 8z - 23 \rangle.$$

Dobijen je nov sistem jednačina, koji je ekvivalentan datom, sa bitnom razlikom, da je u jednoj jednačini i to  $40z^2 - 8z - 23$  samo jedna nepoznata. Rešavajući nov sistem, počevši upravo od ove jednačine, dobijaju se potrebne vrednosti za  $z$ , a zamenom unazad u jednačinu  $3y + z - 1$  nalazimo  $y$  i na kraju zamenom u jednačinu  $2x - 1$  nalazimo  $x$ .

GREBNEROVA baza može poslužiti za odgovor na pitanje konačne rešivosti nelinearnog sistema jednačina. Važi teorema [58]:

**Teorema 12.** *Neka je  $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  polje i neka je  $I \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  ideal u polju  $k$  i neka je  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  Grebnerova baza ideala  $I$  u odnosu na usvojeni leksikografski poredak. U tom slučaju sistem polinomskih jednačina*

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\&\vdots \\f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

ima konačno mnogo rešenja ako i samo ako je ispunjeno

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) (\exists g^{(i)} \in G) (\exists m_i \in \mathbb{N}_0) LM(g^{(i)}) = x_i^{m_i}.$$

U nauci se GREBNEROVA baza primenjuje za nalaženje mrežnog koda [2] u teoriji kodovanja i kriptografiji [62], kinematiku u robotici [60, 61, 63, 64], naftnoj industriji [65], kompjuterskoj grafici [66] itd.

U energetici GREBNEROVA baza je našla primenu u rešavanju najčešćeg zadatka u elektroenergetskim sistemima – proračun tokova snaga je predložen u [67], dok je u [68] ovaj problem proširen nalaženjem svih rešenja jednačina tokova snaga, kojim se mogu na efikasan način dobiti kompletne zavisnosti napona od aktivne ili reaktivne snage potrošača i identifikovati granice naponske stabilnosti sistema. Pored ovog problema, GREBNEROVA baza je primenjena na više različitih problema koje je moguće odgovarajućim transformacijama prikazati skupom polinomnih jednačina. U [69] je diferencijalna GREBNEROVA baza korišćena za određivanje frekvencije oscilacija u EES-u, dok su u [70] autori sistem jednačina više promenljivih, primenom GREBNEROVE baze, sveli na rešavanje samo dve jednačine višeg reda sa više promenljivih i time drastično uprostiti upravljački algoritam za eliminaciju viših harmonika.

## 4 Primena Grebnerove baze na problem opservabilnosti

U ovom odeljku su prikazani rezultati rada [74]. Kao što je u odeljku 2.5 navedeno, relacijama (2.5.1) i (2.5.2) je dat kompletan skup ograničenja osnovnog OPP problema, koji obezbeđuje punu opservabilnost sistema, pri tom uvažavajući da su sve promenljive pridružene PMU uređajima u pojedinim čvorovima sistema, binarne promenljive. Kako su sva ograničenja tipa jednakosti i kako su sva data u polinomnoj formi, na njih je direktno primenljiva tehnika GREBNEROVE baze. Navodi se algoritam koji se tada sastoji od sledećih koraka:

1. Na osnovu topološke povezanosti sistema, formirati skup jednačina  $f$ , prema relaciji (2.5.1)
2. Ovom skupu dodati skup jednačina (2.5.2) i formirati prošireni skup jednačina  $f^{\text{exp}}$
3. Usvojiti monomijalni poredak prema težinskim faktorima  $w_k$  kriterijumske funkcije (2.1)
4. Primenom BUHBERGEROVOG algoritma formirati GREBNEROVU bazu
5. Rekurzivnom metodom zamene unazad rešiti sistem jednačina koji odgovara GREBNEROVOJ bazi.

Kao što je navedeno, data rešenja su jednaka skupu rešenja postavljenog sistema jednačina. Promenom monomijalnog poretka, promeniće se samo redosled jednačina GREBNEROVE baze, kao i redosled proračunavanja promenljivih  $x_i$ , tako da se pri rešavanju jednačina težište stavlja na preferencijalnu. U slučaju kada ne postoje preferencijalne lokacije PMU uređaja, tj. kada su svi težinski faktori međusobno jednaki (obično jednaki jedinici), ne postoje ni preferencijalne promenljive. Primenom GREBNEROVOG algoritma se u tom slučaju prvo dobija rešenje sa minimalnim brojem promenljivih  $x_i$  različitim od nule, odnosno rešenje sa minimalnim brojem PMU. To je najčešće i osnovni zadatak OPP. Pokazuje se da je za dobijanje tog rešenja potrebno računarsko vreme uporedivo sa u literaturi predloženim algoritmima, (na primer [22]).

Očigledno je da rezultat predloženog algoritma nije samo jedno rešenje. Rešavanjem GREBNEROVE baze dobijaju se sva moguća rešenja. Ako iz ukupnog skupa rešenja želimo da izdvojimo samo rešenja sa minimalnim brojem PMU, potrebno je algoritam GREBNEROVE baze ponoviti još jednom dodavanjem jednačine koja će definisati broj PMU. Dodatna jednačina je:

$$\sum_{j=1}^n x_j = N,$$

gde je  $N$  unapred specificirani (minimalni) broj PMU (dobijen u prethodnom postupku). Ponavljanje GREBNEROVOG algoritma daće ukupan skup svih optimalnih, međusobno uporedivih rešenja. Pored toga, uzimanjem za  $N$  manjeg broja od minimalnog, ponavljanjem algoritma će se dobiti da GREBNEROVA baza ne postoji, odnosno dobiće se rezultat  $G = \{1\}$  i u tom slučaju polazni sistem je kontradiktoran - nemoguć. Na taj način se može jednostavno potvrditi da dobijeno rešenje pripada skupu optimalnih rešenja, odnosno rešenja sa minimalnim brojem PMU. Sličnom procedurom, pri čemu se u koraku 1 primenom relacije (2.6.3) pri određivanju

skupa optimalnih rešenja mogu uvažiti ZIB u sistemu, dok se korišćenjem relacija (2.9.2) umesto (2.5.1) može rešavati problem obezbeđenja potpune opservabilnosti u slučaju ispada jednog ili više PMU uređaja.

Kao ilustracija proračuna, ponovo će biti razmatrana mreža IEEE sa 7 čvorova, prikazana na slici 2.4.1. Dobijena GREBNEROVA baza, formirana na osnovu relacija (2.5.3) je:

$$G = \{x_7^2 - x_7, x_6^2 - x_6, x_5^2 - x_5, 1 - x_5 - x_4 + x_4x_5, x_4^2 - x_4, x_3^2 - x_3, x_2^2 - x_2, \\ 1 - x_2 - x_1 + x_1x_2, x_1^2 - x_1, -1 + x_7 + x_4 - x_4x_7 + x_2 - x_2x_7 - x_2x_4 + x_2x_4x_7, \\ -1 + x_6 + x_3 - x_6x_3 + x_2 - x_2x_6 - x_2x_3 + x_2x_3x_6\}. \quad (4.0.1)$$

I bez rešavanja pridruženog skupa jednačina, analizom članova GREBNEROVE baze se može zaključiti da je PMU potrebno postaviti u najmanje jedan od čvorova 4 i 5, bar u jedan od čvorova 1 i 2, kao i u bar jedan čvor skupa čvorova  $\{2, 4, 7\}$ , odnosno  $\{2, 3, 6\}$ . Jednostavnim zaključivanjem dobija se da je minimalan broj potrebnih PMU u ovom slučaju  $N = 2$ , a moguća rešenja su  $x_2 = x_4 = 1$  i  $x_2 = x_5 = 1$ .

Ako je čvor broj 3 ZIB, tada je, prema (2.6.4) GREBNEROVA baza:

$$G_{zib} = \{x_7^2 - x_7, x_6^2 - x_6, x_5^2 - x_5, 1 - x_5 - x_4 + x_4x_5, x_4^2 - x_4, x_3^2 - x_3, x_2^2 - x_2, \\ 1 - x_2 - x_1 + x_1x_2, x_1^2 - x_1, -1 + x_7 + x_4 - x_4x_7 + x_2 - x_2x_7 - x_2x_4 + x_2x_4x_7, \\ x_2x_3x_4x_6 + 1 - x_2x_3x_4 - x_2x_3x_6 - x_2x_4x_6 - x_3x_4x_6 \\ + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_6 - x_2 - x_3 - x_4 - x_6\}.$$

U ovom slučaju, iz GREBNEROVE baze se zaključuje da se potrebni minimalni uslovi za postavljanje PMU uređaja ostavaruju njihovom instalacijom u bar jedan od čvorova 4 i 5, u bar jedan od čvorova 1 i 2 i u bar jedan čvor iz skupa čvorova  $\{2, 4, 7\}$ . Minimalan broj potrebnih PMU u ovom slučaju je ponovo  $N = 2$ , a moguća rešenja su  $x_1 = x_4 = 1$ ,  $x_2 = x_4 = 1$  i  $x_2 = x_5 = 1$ .

## 4.1 Indeksi BOI i SORI

Do sada je pokazano da problem optimalne postavke PMU uređaja sa ciljem potpune topološke opservabilnosti nema jedinstveno rešenje kada su svi težinski faktori  $w_k = 1$ . Da bi se kvantitativno ova rešenja uporedila i najbolje moguće izdvojilo, uveden je indeks BOI (Bus Observability Index) kao pokazatelj kvaliteta optimizacije [7].

Indeks BOI se matematički definiše kao broj PMU uređaja koji nadgleda neki čvor mreže, bilo direktno ili indirektno. Ako je u mreži čvor  $i$  onaj koji ima najveći broj incidentnih čvorova  $j$ , tada je jasno da BOI ( $\beta_i$ ) ne može biti veći od broja  $j + 1$ , odnosno

$$\beta_i \leq j + 1.$$

Indeks SORI (System Observability Redundancy Index) se definiše kao zbir svih BOI indeksa.

Ako u mreži ima  $N$  čvorova, tada je SORI indeks dat izrazom:

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i.$$

Što je SORI veći, veći će broj čvorova ostati opservabilan u slučaju ispada nekog PMU uređaja. SORI se može dobiti i primenom formule

$$\sigma = \mathbf{uAx},$$

gde je  $\mathbf{u}$   $N$ -dimenzioni jedinični vektor  $\mathbf{u} = \left[ \underbrace{111 \dots 1}_N \right]^T$ ,  $\mathbf{A}$  je matrica incidencije, formirana izrazom (2.4.4), dok je  $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_N]^T$  binarni vektor, dat izrazom (2.4.2).

U primeru IEEE mreže sa 7 čvorova, rešavanjem sistema (4.0.1) dobijaju se dva rešenja:  $x_2 = x_4 = 1$  i  $x_2 = x_5 = 1$ . Za oba rešenja u Tabeli 4.1 su date vrednosti BOI za sve čvorove, kao i SORI. U prvom slučaju vrednost SORI je 9, a u drugom 7. Dakle, ispadom PMU uređaja u npr. čvoru 2, u mreži sa većim SORI imaćemo 4 opservabilna čvora i to 3, 4, 5 i 7, dok u mreži sa manjim SORI imaćemo samo 2 opservabilna čvora i to 4 i 5.

Tabela 4.1: BOI za sve čvorove i SORI za IEEE mrežu sa 7 čvorova

$x_2 = x_4 = 1$	čvor	BOI	$x_2 = x_5 = 1$	čvor	BOI
	1	1		1	1
	2	1		2	1
	3	2		3	1
	4	1		4	1
	5	1		5	1
	6	1		6	1
	7	2		7	1
SORI		9	SORI		7

Kako je predloženim algoritmom GREBNERove baze moguće dobiti sva optimalna rešenja, moguće je dobiti i sve moguće vrednosti za SORI, pa se dalje mogu izdvojiti samo ona koja će imati maksimalnu vrednost ovog indeksa.

## 4.2 Kompleksnost izračunavanja Grebnerove baze

Iako su do sada uloženi značajni naponi za unapređivanjem izračunavanja GREBNERove baze, kao i stalni napredak kompjuterskih performansi, izračunavanje GREBNERove baze može u nekim situacijama da uzme dosta vremena i memorijskog prostora. Razlozi su [71]:

- stepeni polinoma koji nastaju kroz algoritam izračunavanja GREBNERove baze mogu biti veoma veliki;
- koeficijenti polinoma mogu biti veliki racionalni brojevi, čak i ako su koeficijenti polaznih polinoma male celobrojne vrednosti;

Za proračun koji je upotrebljen u ovoj doktorskoj disertaciji izračunavanje GREBNERove baze nije pokazivalo slabosti iz ugla vremena i memorijskog prostora. Razlog leži u činjenici da

jednačine od kojih je pravljena GREBNEROVA baza nisu sadržale mnogo članova oblika  $(1 - x_i)$  gde su svi  $x_i$  bili binarni brojevi. Takođe, proces izračunavanja GREBNEROVE baze se može ubrzati, kada unapred znamo neka rešenja postavljenog sistema jednačina, npr. za slučaj radijalnog čvora; PMU uređaj mora biti u čvoru do radijalnog, postavljanjem da je  $x_{\text{sused\_radijalni}} = 1$  dobijamo da će neke jednačine iz postavljenih uslova biti zadovoljene te neće učestvovati u kreiranju GREBNEROVE baze.



## 5 Rezultati proračuna

Ovde će biti tabelarno prikazani rezultati proračuna za IEEE mreže sa 14, 24, 30, 118 čvorova, čiji su grafovi prikazani na slikama 7.1.1, 7.2.1, 7.3.1 i 7.4.1, respektivno. Urađen je i proračun za za prenosnu mrežu Srbije (400 kV i 220 kV), a koje su predstavljene na slikama 7.6.1 i 7.7.1, respektivno. Takođe, urađen je i slučaj velike mreže i to Poljske sa 2383 čvorova.

Ovo poglavlje je podeljeno u više delova i to:

1. Bez uvažavanja konvencionalnih merenja;
2. Sa uvažavanjem čvorova nultog injektiranja (ZIB);
3. Uticaj ispada jednog PMU uređaja;
4. Uticaj limitiranog broja kanala.

Za verifikaciju predložene metode, korišćeni su radovi [10, 20, 22, 72] gde se može videti da različitim optimizacionim procesima primenjenim na IEEE mreže sa 14, 24, 30, 118 čvorova, kao i za veliki sistem mreže Poljske sa 2383 čvorova dobija se isti minimalni broj PMU uređaja kao i metodom GREBNERove baze.

### 5.1 Bez uvažavanja konvencionalnih merenja

U ovom slučaju problem optimalne postavke PMU uređaja je rešen bez uvažavanja čvorova nultog injektiranja (ZIB). U Tabeli 5.1 su prikazani odgovarajući sistemi, minimalan broj potrebnih PMU uređaja, njihove lokacije, vrednost SORI indeksa za svako od optimalnih rešenja, kao i odnos broja čvorova sa PMU uređajima i ukupan broj čvorova. Za IEEE mreže sa 14 i 24 čvora su prikazana sva optimalna rešenja, dok je za IEEE mrežu sa 30 čvorova dato samo nekoliko od 858 ukupnih. Preostala rešenja su data u Apendiksu.

Za IEEE mrežu sa 118 čvorova i mrežu Poljske sa 2383 čvorova sva optimalna rešenja nisu tražena jer se ukupan broj meri u hiljadama. Dodatna optimalna rešenja su prikazana za IEEE mrežu sa 118 čvorova u Tabeli 7.7 u Apendiksu. Jedno rešenje za mrežu Poljske je dato u Apendiksu. Što se tiče prenosne mreže Srbije i to 400 kV i 220 kV naponske nivoe, nekoliko rešenja je prikazano, dok su sva preostala data u Apendiksu, tabele 7.13 i 7.16, respektivno.

Tabela 5.1: Lokacije PMU uređaja za slučaj bez uticaja konvencionalnih merenja

sistem (broj optimalnih rešenja)	broj PMU uređaja	lokacija PMU uređaja (SORI)	$N_{\text{pmu}}/N_{\text{uk}}$
IEEE 14 (5)	4	2,8,10,13 (14) 2,7,10,13 (16) 2,7,11,13 (17) 2,6,7,9 (19) 2,6,8,9 (16)	0, 286
IEEE 24 (5)	7	2,3,7,10,16,21,23 (29) 2,3,8,10,16,21,23 (31) 3,4,7,10,16,21,23 (28) 3,4,8,10,16,21,23 (30) 2,8,10,16,21,23,24 (30)	0, 292
IEEE 30 (858)	10	2,3,6,9,10,12,15,18,25,27 (50) 2,3,6,9,10,12,15,19,25,27 (50) 1,2,6,10,11,12,19,23,25,29(44) 2,3,6,10,11,12,18,23,25,30(44) 2,3,6,9,10,12,15,20,25,29(48) 2,3,6,9,10,12,15,20,25,30(48) 2,3,6,9,10,12,15,19,25,27(50) 2,4,6,9,10,12,15,18,25,27(52) ... <sup>1</sup>	0, 333
IEEE 118	32	3,5,9,12,15,17,21,25,28,34, 37,40,5,49,52,56,62,64,68,70, 71,76,79,5,86,89,92,96,100, 105, 110,114 (164)	0, 271
Poljska 2383	746	u apendiksu	0, 313
400 kV Srbija (132)	7	1,4,10,11,14,16,17 (23) 1,4,10,11,14,15,17 (24) 1,4,8,10,14,15,17 (24) 1,4,5,10,14,16,17 (24) 1,4,8,10,14,16,17 (23) 1,4,5,10,14,15,17 (25) ...	0,388

<sup>1</sup>preostala rešenja su data u apendiksu

(nastavak Tabele 5.1)

sistem (broj optimalnih rešenja)	broj PMU uređaja	lokacija PMU uređaja (SORI)	$N_{pmu}/N_{uk}$
220 kV Srbija (535)	8	2,5,7,11,13,18,20,21 (36) 2,5,6,8,11,13,20,22 (28) 2,5,6,8,11,13,20,21 (29) 1,2,5,7,11,13,20,22 (33) ...	0,348

Iz tabele 5.1 može se uočiti da se sa porastom dimenzija mreže raste neophodan broj PMU uređaja za potpunu topološku opservabilnost. Taj broj se kreće u proseku oko 30% od ukupnog broja čvorova u mreži [73].

## 5.2 Uvažavanje čvorova nultog injektiranja

U ovom slučaju ZIB čvorovi su uvažavani. U Tabeli 5.2su date njihove lokacije. Za mrežu Poljske lokacije ZIB čvorova su date u Apendiksu.

Tabela 5.2: lokacije ZIB čvorova

sistem	lokacije ZIB čvorova	broj ZIB čvorova
IEEE 14	7	1
IEEE 24	11, 12, 17, 24	4
IEEE 30	6, 9, 22, 25, 27, 28	6
IEEE 118	5, 9, 30, 37, 38, 63, 64, 68, 71, 81	10
Poljska 2383	apendiks	552

U Tabeli 5.3 su prikazani rezultati proračuna. Za IEEE mrežu sa 30 čvorova su sva rešenja data u Apendiksu, dok su u Tabeli 5.3 data samo neka. Treba primetiti uticaj ZIB čvorova na smanjenje broja PMU uređaja iz tabele 5.1.

Tabela 5.3: Lokacije PMU uređaja za slučaj sa uticajem konvencionalnih merenja

sistem (broj optimalnih rešenja)	broj PMU uređaja	lokacija PMU uređaja (SORI)
IEEE 14 (1)	3	2,6,9 (15)
IEEE 24 (4)	6	1,2,8,16,18,23 (24) 1,2,8,16,22,23 (24) 1,2,8,16,21,23 (25) 1,2,8,14,20,21 (22)

(nastavak Table 5.3)

sistem (broj optimalnih rešenja)	broj PMU uređaja	lokacija PMU uređaja (SORI)
IEEE 30 (95)	7	3,7,10,12,15,18,27 (32) 3,7,10,12,15,20,27 (32) 1,7,10,12,15,20,29 (30) 1,7,10,12,19,24,30 (29) 2,4,10,12,15,18,27 (36) 1,5,10,12,15,18,30 (30) 3,5,10,12,18,23,30 (28) 1,2,10,12,15,19,27 (34) 2,3,10,12,19,24,27 (33) 2,4,10,12,19,24,27 (35) ...
IEEE 118	28	3, 8, 11, 12, 17, 21, 27, 31, 32, 34, 37, 40, 45, 49, 52, 56, 62, 72, 75, 77, 80, 85, 86, 90, 94, 102, 105, 110 (156)
Poljska 2383	553	apendiks

### 5.3 Uticaj ispada jednog PMU uređaja

U ovom delu su prikazani rezultati proračuna kada se zahteva da svaki čvor u mreži bude posmatran sa bar dva PMU uređaja. Tada, u slučaju ispada jednog PMU uređaja mreža ostaje opservabilna. Očigledno je da će se broj neophodnih PMU uređaja povećati u zavisnosti od dimenzija sistema.

Tabela 5.4: Lokacije PMU za slučaj ispada jednog PMU uređaja

sistem	broj PMU uređaja	lokacija PMU uređaja
IEEE 14	9	1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13
IEEE 24	14	1,2,7,8,9,10,12,15,16,17,19,21,23, 24
IEEE 30	21	1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29
IEEE 118	68	2,3,5,7,9,10,11,12,15,17,19,21,22,24,25, 26,27,29,31,32,34,36,37,40,42,44,45,46, 49,52,53,56,57,58,59,62,64,65,67,68,70, 71,73,75,77,79,80,84,85,86,87,89,91,92, 94,96,100,102,105,107,109,110,111,112, 115,116,117,118

## 5.4 Uticaj limitiranog broja kanala

U ovom delu posmatrano je više slučajeva za IEEE mreže sa 14, 24 i 30 čvorova. U svakoj mreži su posmatrani PMU uređaji i to sa 2, 3, 4 i 5 kanala. Rezultati su prikazani u Tabeli 5.5.

Tabela 5.5: Lokacije PMU za slučaj limitiranog broja kanala

sistem	broj PMU uređaja	broj kanala	lokacija PMU uređaja
IEEE 14	7	2	1,3,5,7,9,10,12
IEEE 14	5	3	2,5,7,10,13
IEEE 14	4	4	2,6,7,9
IEEE 14	4	5	2,6,7,9
IEEE 24	12	2	1,2,3,6,7,11,12,15,16,17,19
IEEE 24	8	3	1,2,8,11,12,15,17,19
IEEE 24	7	4	2,3,8,10,16,21,23
IEEE 24	7	5	2,3,8,10,16,21,23
IEEE 30	15	2	1,2,5,6,9,10,12,14,16,18,21,23,25,27,29
IEEE 30	11	3	3,5,9,10,10 <sup>2</sup> ,12,15,18,25,27,28
IEEE 30	10	4	2,4,6,9,10,12,18,24,25,27
IEEE 30	10	5	1,2,6,9,10,12,15,19,25,27

<sup>2</sup>dva PMU uređaja su postavljena u čvor 10, pri čemu jedan PMU uređaj meri struje po granama 10-20 i 10-22, dok drugi PMU uređaj meri struje po granama 10-17 i 10-21

## 6 Zaključak i budući rad

U ovoj doktorskoj disertaciji je izložena metoda GREBNERove baze za dobijanje potpune topološke opservabilnosti energetskog sistema primenom sinhrofazorske tehnologije. Predloženi algoritam je baziran na nelinearnoj polinomnoj formulaciji optimizacionog problema. Algoritmom se uspešno vrši određivanje lokacija minimalanog broja PMU kojima se postiže puna opservabilnost sistema sa i bez ZIB, odnosno u slučaju pojedinačnog ispada nekog PMUa u sistemu. Predloženi algoritam je implementiran u programskom alatu Maple i uspešno testiran na IEEE mreže sa 14, 24, 30, 118 čvorova, zatim na poljsku 2383 mrežu i prenosnu mrežu Srbije (400 kV i 220 kV naponske nivoe).

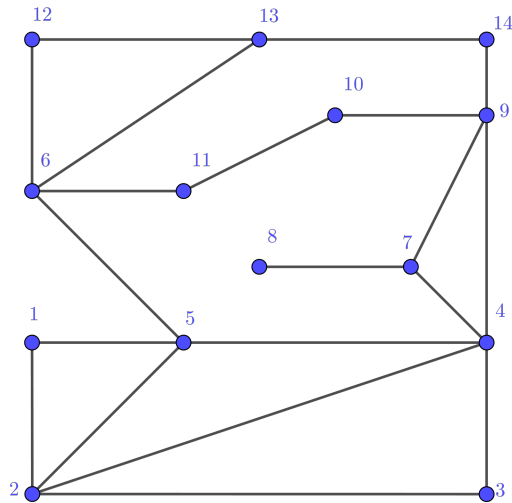
Osnovna karakteristika algoritma je što se njime dobijaju sva rešenja problema optimalne postavke PMU uređaja. Testiranjem algoritma potvrđeno je da se samo formiranje baze, kao i nalaženje rešenja sa minimalnim brojem PMU dobija u jako kratkom vremenu. Na osnovu toga može se zaključiti da ako je zadatak određivanje jedne od optimalnih kombinacija lokacija, algoritam je izuzetno efikasan. Međutim, nalaženje svih optimalnih rešenja, što predstavlja izuzetnu prednost za sisteme manje dimenzionalnosti, za sisteme većih dimenzija, može da bude sa značajnim računarskim zahtevima. U tom slučaju, sama analiza dobijene GREBNERove baze, kao najjednostavnijeg ekvivalenta problema, može da ukaže na preferencijalne lokacije i da pomogne donosiocu odluke u izboru konačnog rešenja. Sa druge strane, pomenuti problem je planerskog karaktera, te vreme izvršenja proračuna nije od ključnog značaja.

Problem u nalaženju optimalnog rešenja može nastati i u slučaju da nisu svi težinski koeficijenti pridruženi pojedinim PMU međusobno jednaki. Zadavanjem odgovarajućeg monomijalnog poretka vezanog za vrednosti ovih koeficijenata, dobiće se rešenje kojim se preferiraju jeftiniji PMU, što može rezultovati rešenjem koje nije globalno optimalno. Dalji zadatak autora vezan je za određivanje takvog monomijalnog poretka kojim će se to obezbediti.

## 7 Apendiks

## 7.1 IEEE mreža sa 14 čvorova

Na slici 7.1.1 je prikazan graf IEEE mreže sa 14 čvorova, a u Tabeli 7.1 je data povezanost čvorova.



Slika 7.1.1: IEEE mreža sa 14 čvorova

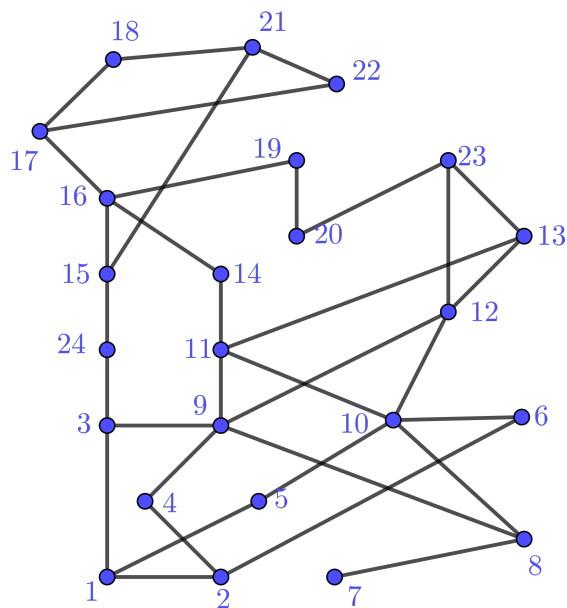
Tabela 7.1: tabela povezanosti IEEE mreže sa 14 čvorova

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
1	2	6	11
1	5	6	12
2	3	6	13
2	4	7	8
2	5	7	9
3	4	9	10
4	5	9	14
4	7	10	11
4	9	12	13
5	6	13	14



## 7.2 IEEE mreža sa 24 čvora

Na slici 7.2.1 je prikazan graf IEEE mreže sa 24 čvora, a u Tabeli 7.2 je data povezanost čvorova.



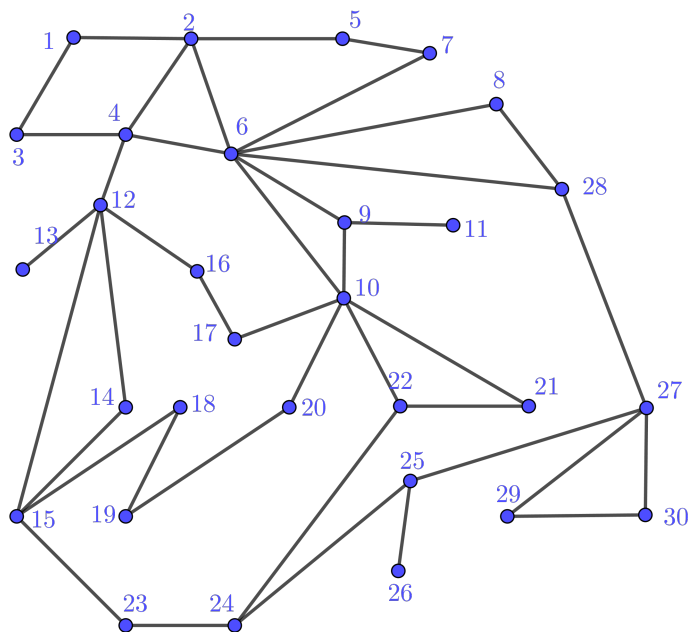
Slika 7.2.1: IEEE mreža sa 24 čvora

Tabela 7.2: tabela povezanosti IEEE mreže sa 24 čvora

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
1	2	7	8
1	3	8	9
1	5	8	10
2	4	9	11
2	6	9	12
3	9	10	11
3	24	10	12
4	9	11	13
5	10	11	14
6	10	12	13

### 7.3 IEEE mreža sa 30 čvorova

Na slici 7.3.1 je prikazan graf IEEE mreže sa 30 čvorova, a u Tabeli 7.3 je data povezanost čvorova.



Slika 7.3.1: IEEE mreža sa 30 čvorova

Tabela 7.3: tabela povezanosti IEEE mreže sa 30 čvorova

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
1	2	12	13	22	24
1	3	12	14	23	24
2	4	12	15	24	25
3	4	12	16	25	26
2	5	14	15	25	27
2	6	16	17	28	27
4	6	15	18	27	29
5	7	18	19	27	30
6	7	19	20	29	30
6	8	10	20	8	28
6	9	10	17	6	28
6	10	10	21		
9	11	10	22		
9	10	21	22		
4	12	15	23		

Sva optimalna rešenja za slučaj bez uvažavanja konvencionalnih merenja su data u Tabeli 7.4:

Tabela 7.4: sva optimalna rešenja za 30-IEEE mrežu, bez konvencionalnih merenja

čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem
10,12,15,18,2,25,27,3,6,9	10,11,12,15,19,2,25,27,3,6	10,12,15,18,25,27,3,5,6,9
1,10,12,15,18,2,25,27,6,9	10,11,12,15,19,2,25,27,4,6	10,12,15,18,25,27,3,6,7,9
10,12,15,18,2,25,27,4,6,9	1,10,11,12,15,19,2,25,27,6	10,12,15,18,25,3,30,6,7,9
10,12,15,18,2,25,3,30,6,9	10,11,12,15,19,2,25,3,30,6	10,12,15,18,25,3,30,5,6,9
1,10,12,15,18,2,25,30,6,9	1,10,11,12,15,19,2,25,30,6	10,12,15,18,25,29,3,5,6,9
10,12,15,18,2,25,30,4,6,9	10,11,12,15,19,2,25,30,4,6	10,12,15,18,25,29,3,6,7,9
10,12,15,18,2,25,29,3,6,9	10,11,12,15,19,2,25,29,3,6	10,12,15,20,25,27,3,6,7,9
1,10,12,15,18,2,25,29,6,9	10,11,12,15,19,2,25,29,4,6	10,12,15,20,25,27,3,5,6,9
10,12,15,18,2,25,29,4,6,9	1,10,11,12,15,19,2,25,29,6	10,12,15,20,25,3,30,6,7,9
10,12,15,2,20,25,27,3,6,9	1,10,12,15,18,25,27,6,7,9	10,12,15,20,25,3,30,5,6,9
1,10,12,15,2,20,25,27,6,9	1,10,12,15,18,25,27,5,6,9	10,12,15,20,25,29,3,5,6,9
10,12,15,2,20,25,27,4,6,9	1,10,12,15,18,25,30,6,7,9	10,12,15,20,25,29,3,6,7,9
10,12,15,2,20,25,3,30,6,9	1,10,12,15,18,25,30,5,6,9	10,12,15,19,25,27,3,5,6,9
1,10,12,15,2,20,25,30,6,9	1,10,12,15,18,25,29,6,7,9	10,12,15,19,25,27,3,6,7,9
10,12,15,2,20,25,30,4,6,9	1,10,12,15,18,25,29,5,6,9	10,12,15,19,25,3,30,6,7,9
10,12,15,2,20,25,29,3,6,9	1,10,12,15,20,25,27,6,7,9	10,12,15,19,25,3,30,5,6,9
1,10,12,15,2,20,25,29,6,9	1,10,12,15,20,25,27,5,6,9	10,12,15,19,25,29,3,5,6,9
10,12,15,2,20,25,29,4,6,9	1,10,12,15,20,25,30,6,7,9	10,12,15,19,25,29,3,6,7,9
10,12,15,19,2,25,27,3,6,9	1,10,12,15,20,25,30,5,6,9	10,11,12,15,18,25,27,3,6,7
1,10,12,15,19,2,25,27,6,9	1,10,12,15,20,25,29,5,6,9	10,11,12,15,18,25,27,3,5,6
10,12,15,19,2,25,27,4,6,9	1,10,12,15,20,25,29,6,7,9	10,11,12,15,18,25,3,30,5,6
10,12,15,19,2,25,3,30,6,9	1,10,12,15,19,25,27,6,7,9	10,11,12,15,18,25,3,30,6,7
1,10,12,15,19,2,25,30,6,9	1,10,12,15,19,25,27,5,6,9	10,11,12,15,18,25,29,3,5,6
10,12,15,19,2,25,30,4,6,9	1,10,12,15,19,25,30,6,7,9	10,11,12,15,18,25,29,3,6,7
10,12,15,19,2,25,29,3,6,9	1,10,12,15,19,25,30,5,6,9	10,11,12,15,20,25,27,3,5,6
1,10,12,15,19,2,25,29,6,9	1,10,12,15,19,25,29,5,6,9	10,11,12,15,20,25,27,3,6,7
10,12,15,19,2,25,29,4,6,9	1,10,12,15,19,25,29,6,7,9	10,11,12,15,20,25,3,30,6,7
10,11,12,15,18,2,25,27,3,6	1,10,11,12,15,18,25,27,5,6	10,11,12,15,20,25,3,30,5,6
10,11,12,15,18,2,25,27,4,6	1,10,11,12,15,18,25,27,6,7	10,11,12,15,20,25,29,3,5,6
1,10,11,12,15,18,2,25,27,6	1,10,11,12,15,18,25,30,6,7	10,11,12,15,20,25,29,3,6,7
10,11,12,15,18,2,25,3,30,6	1,10,11,12,15,18,25,30,5,6	10,11,12,15,19,25,27,3,5,6
1,10,11,12,15,18,2,25,30,6	1,10,11,12,15,18,25,29,5,6	10,11,12,15,19,25,27,3,6,7
10,11,12,15,18,2,25,30,4,6	1,10,11,12,15,18,25,29,6,7	10,11,12,15,19,25,3,30,5,6
10,11,12,15,18,2,25,29,3,6	1,10,11,12,15,20,25,27,6,7	10,11,12,15,19,25,3,30,6,7
10,11,12,15,18,2,25,29,4,6	1,10,11,12,15,20,25,27,5,6	10,11,12,15,19,25,29,3,6,7
1,10,11,12,15,18,2,25,29,6	1,10,11,12,15,20,25,30,6,7	10,11,12,15,19,25,29,3,5,6
10,11,12,15,2,20,25,27,3,6	1,10,11,12,15,20,25,30,5,6	10,12,18,2,24,25,27,3,6,9
1,10,11,12,15,2,20,25,27,6	1,10,11,12,15,20,25,29,5,6	1,10,12,18,2,24,25,27,6,9
10,11,12,15,2,20,25,27,4,6	1,10,11,12,15,20,25,29,6,7	10,12,18,2,24,25,27,4,6,9
10,11,12,15,2,20,25,3,30,6	1,10,11,12,15,19,25,27,5,6	10,12,18,2,24,25,3,30,6,9
1,10,11,12,15,2,20,25,30,6	1,10,11,12,15,19,25,27,6,7	1,10,12,18,2,24,25,30,6,9
10,11,12,15,2,20,25,30,4,6	1,10,11,12,15,19,25,30,6,7	10,12,18,2,24,25,30,4,6,9
10,11,12,15,2,20,25,29,3,6	1,10,11,12,15,19,25,30,5,6	10,12,18,2,24,25,29,3,6,9
1,10,11,12,15,2,20,25,29,6	1,10,11,12,15,19,25,29,5,6	1,10,12,18,2,24,25,29,6,9
10,11,12,15,2,20,25,29,4,6	1,10,11,12,15,19,25,29,6,7	10,12,18,2,24,25,29,4,6,9

7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.4)

čvor sa PMU uređajem
10,12,18,2,23,25,27,3,6,9
1,10,12,18,2,23,25,27,6,9
10,12,18,2,23,25,27,4,6,9
10,12,18,2,23,25,3,30,6,9
1,10,12,18,2,23,25,30,6,9
10,12,18,2,23,25,30,4,6,9
10,12,18,2,23,25,29,3,6,9
1,10,12,18,2,23,25,29,6,9
10,12,18,2,23,25,29,4,6,9
10,11,12,18,2,24,25,27,3,6
1,10,11,12,18,2,24,25,27,6
10,11,12,18,2,24,25,27,4,6
10,11,12,18,2,24,25,3,30,6
1,10,11,12,18,2,24,25,30,6
10,11,12,18,2,24,25,30,4,6
10,11,12,18,2,24,25,29,3,6
1,10,11,12,18,2,24,25,29,6
10,11,12,18,2,24,25,29,4,6
10,11,12,18,2,23,25,27,3,6
10,11,12,18,2,23,25,27,4,6
1,10,11,12,18,2,23,25,27,6
10,11,12,18,2,23,25,3,30,6
1,10,11,12,18,2,23,25,30,6
10,11,12,18,2,23,25,30,4,6
10,11,12,18,2,23,25,29,3,6
10,11,12,18,2,23,25,29,4,6
1,10,11,12,18,2,23,25,29,6
1,10,12,18,24,25,27,6,7,9
1,10,12,18,24,25,27,5,6,9
1,10,12,18,24,25,30,6,7,9
1,10,12,18,24,25,30,5,6,9
1,10,12,18,24,25,29,5,6,9
1,10,12,18,24,25,29,6,7,9
1,10,12,18,23,25,27,6,7,9
1,10,12,18,23,25,27,5,6,9
1,10,12,18,23,25,30,6,7,9
1,10,12,18,23,25,30,5,6,9
1,10,12,18,23,25,29,5,6,9
1,10,12,18,23,25,29,6,7,9
1,10,11,12,18,24,25,27,6,7,
1,10,11,12,18,24,25,27,5,6
1,10,11,12,18,24,25,30,6,7,
1,10,11,12,18,24,25,30,5,6
1,10,11,12,18,24,25,29,5,6
1,10,11,12,18,24,25,29,6,7,

čvor sa PMU uređajem
1,10,11,12,18,23,25,27,5,6
1,10,11,12,18,23,25,27,6,7
1,10,11,12,18,23,25,30,6,7
1,10,11,12,18,23,25,30,5,6
1,10,11,12,18,23,25,29,5,6
1,10,11,12,18,23,25,29,6,7
10,12,18,24,25,27,3,6,7,9
10,12,18,24,25,27,3,5,6,9
10,12,18,24,25,3,30,6,7,9
10,12,18,24,25,3,30,5,6,9
10,12,18,24,25,29,3,5,6,9
10,12,18,24,25,29,3,6,7,9
10,12,18,23,25,27,3,5,6,9
10,12,18,23,25,27,3,6,7,9
10,12,18,23,25,3,30,6,7,9
10,12,18,23,25,3,30,5,6,9
10,12,18,23,25,29,3,5,6,9
10,12,18,23,25,29,3,6,7,9
10,11,12,18,24,25,27,3,5,6
10,11,12,18,24,25,27,3,6,7
10,11,12,18,24,25,3,30,6,7
10,11,12,18,24,25,3,30,5,6
10,11,12,18,24,25,29,3,5,6
10,11,12,18,24,25,29,3,6,7
10,11,12,18,23,25,27,3,5,6
10,11,12,18,23,25,27,3,6,7
10,11,12,18,23,25,3,30,5,6
10,11,12,18,23,25,3,30,6,7
10,11,12,18,23,25,29,3,6,7
10,11,12,18,23,25,29,3,5,6
10,11,12,18,23,25,27,3,6,7
10,11,12,18,23,25,3,30,5,6
10,11,12,18,23,25,3,30,6,7
10,11,12,18,23,25,29,3,6,7
10,11,12,18,23,25,29,3,5,6
10,12,19,2,24,25,27,3,6,9
1,10,12,19,2,24,25,27,6,9
10,12,19,2,24,25,27,4,6,9
10,12,19,2,24,25,3,30,6,9
1,10,12,19,2,24,25,30,6,9
10,12,19,2,24,25,30,4,6,9
10,12,19,2,24,25,29,3,6,9
1,10,12,19,2,24,25,29,6,9
10,12,19,2,24,25,29,4,6,9
10,12,19,2,23,25,27,3,6,9
1,10,12,19,2,23,25,27,6,9
10,12,19,2,23,25,27,4,6,9
10,12,19,2,23,25,3,30,6,9
1,10,12,19,2,23,25,30,6,9
10,12,19,2,23,25,29,5,6
1,10,11,12,19,24,25,27,6,7
1,10,11,12,19,24,25,30,6,7
1,10,11,12,19,24,25,30,5,6
1,10,11,12,19,24,25,29,5,6
1,10,11,12,19,24,25,29,6,7
1,10,11,12,19,23,25,27,5,6
1,10,11,12,19,23,25,27,6,7
1,10,11,12,19,23,25,30,6,7
1,10,11,12,19,23,25,30,5,6
1,10,11,12,19,23,25,29,5,6
1,10,11,12,19,23,25,29,6,7

čvor sa PMU uređajem
10,12,19,2,23,25,29,3,6,9
1,10,12,19,2,23,25,29,6,9
10,12,19,2,23,25,29,4,6,9
10,11,12,19,2,24,25,27,3,6
1,10,11,12,19,2,24,25,27,6
10,11,12,19,2,24,25,27,4,6
10,11,12,19,2,24,25,3,30,6
1,10,11,12,19,2,24,25,30,6
10,11,12,19,2,24,25,30,4,6
10,11,12,19,2,24,25,29,3,6
1,10,11,12,19,2,24,25,29,6
10,11,12,19,2,24,25,29,4,6
10,11,12,19,2,23,25,27,3,6
10,11,12,19,2,23,25,27,4,6
1,10,11,12,19,2,23,25,27,6
10,11,12,19,2,23,25,3,30,6
1,10,11,12,19,2,23,25,30,6
10,11,12,19,2,23,25,30,4,6
10,11,12,19,2,23,25,29,3,6
10,11,12,19,2,23,25,29,4,6
1,10,11,12,19,2,23,25,29,6
1,10,12,19,24,25,27,6,7,9
1,10,12,19,24,25,27,5,6,9
1,10,12,19,24,25,30,6,7,9
1,10,12,19,24,25,30,5,6,9
1,10,12,19,24,25,29,5,6,9
1,10,12,19,24,25,29,6,7,9
1,10,12,19,23,25,27,6,7,9
1,10,12,19,23,25,27,5,6,9
1,10,12,19,23,25,30,6,7,9
1,10,12,19,23,25,30,5,6,9
1,10,12,19,23,25,29,5,6,9
1,10,12,19,23,25,29,6,7,9
1,10,11,12,19,24,25,27,6,7
1,10,11,12,19,24,25,27,5,6
1,10,11,12,19,24,25,30,6,7
1,10,11,12,19,24,25,30,5,6
1,10,11,12,19,24,25,29,5,6
1,10,11,12,19,24,25,29,6,7
1,10,11,12,19,23,25,27,5,6
1,10,11,12,19,23,25,27,6,7
1,10,11,12,19,23,25,30,6,7
1,10,11,12,19,23,25,30,5,6
1,10,11,12,19,23,25,29,5,6
1,10,11,12,19,23,25,29,6,7

## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.4)

čvor sa PMU uređajem
10,12,19,24,25,27,3,6,7,9
10,12,19,24,25,27,3,5,6,9
10,12,19,24,25,3,30,6,7,9
10,12,19,24,25,3,30,5,6,9
10,12,19,24,25,29,3,5,6,9
10,12,19,24,25,29,3,6,7,9
10,12,19,23,25,27,3,5,6,9
10,12,19,23,25,27,3,6,7,9
10,12,19,23,25,3,30,6,7,9
10,12,19,23,25,3,30,5,6,9
10,12,19,23,25,29,3,5,6,9
10,12,19,23,25,29,3,6,7,9
10,11,12,19,24,25,27,3,5,6
10,11,12,19,24,25,27,3,6,7
10,11,12,19,24,25,3,30,6,7
10,11,12,19,24,25,3,30,5,6
10,11,12,19,24,25,29,3,5,6
10,11,12,19,24,25,29,3,6,7
10,11,12,19,23,25,27,3,6,7
10,11,12,19,23,25,27,3,5,6
10,11,12,19,23,25,3,30,5,6
10,11,12,19,23,25,3,30,6,7
10,11,12,19,23,25,29,3,5,6
10,11,12,19,23,25,29,3,6,7
10,12,18,2,24,26,27,3,6,9
1,10,12,18,2,24,26,27,6,9
10,12,18,2,24,26,27,4,6,9
10,11,12,18,2,24,26,27,3,6
1,10,11,12,18,2,24,26,27,6
10,11,12,18,2,24,26,27,4,6
10,12,18,2,24,26,3,30,6,9
1,10,12,18,2,24,26,30,6,9
10,12,18,2,24,26,30,4,6,9
10,11,12,18,2,24,26,3,30,6
1,10,11,12,18,2,24,26,30,6
10,11,12,18,2,24,26,30,4,6
10,12,18,2,24,26,29,3,6,9
1,10,12,18,2,24,26,29,6,9
10,12,18,2,24,26,29,4,6,9
10,11,12,18,2,24,26,29,3,6
1,10,11,12,18,2,24,26,29,6
10,11,12,18,2,24,26,29,4,6
10,12,18,2,23,26,27,3,6,9
1,10,12,18,2,23,26,27,6,9
10,12,18,2,23,26,27,4,6,9
10,11,12,18,2,24,26,29,3,6
1,10,11,12,18,2,24,26,29,6
10,11,12,18,2,24,26,29,4,6
10,12,18,2,23,26,27,3,6,9
1,10,12,18,2,23,26,27,6,9
10,12,18,2,23,26,27,4,6,9

čvor sa PMU uređajem
10,11,12,18,2,23,26,27,3,6
10,11,12,18,2,23,26,27,4,6
1,10,11,12,18,2,23,26,27,6
10,12,18,2,23,26,3,30,6,9
1,10,12,18,2,23,26,30,6,9
10,12,18,2,23,26,30,4,6,9
10,11,12,18,2,23,26,3,30,6
1,10,11,12,18,2,23,26,30,6
10,11,12,18,2,23,26,30,4,6
10,12,18,2,23,26,29,3,6,9
1,10,12,18,2,23,26,29,6,9
10,12,18,2,23,26,29,4,6,9
10,11,12,18,2,23,26,29,3,6
10,11,12,18,2,23,26,29,4,6
1,10,11,12,18,2,23,26,29,6
1,10,12,18,23,26,27,6,7,9
1,10,12,18,23,26,27,5,6,9
1,10,11,12,18,23,26,27,6,7
1,10,11,12,18,23,26,27,5,6
10,12,18,23,26,27,3,6,7,9
10,12,18,23,26,27,3,5,6,9
10,11,12,18,23,26,27,3,5,6
10,11,12,18,23,26,27,3,6,7
1,10,12,18,23,26,29,6,7,9
1,10,12,18,23,26,29,5,6,9
1,10,11,12,18,23,26,29,5,6
1,10,11,12,18,23,26,29,6,7
10,12,18,23,26,29,3,6,7,9
10,12,18,23,26,29,3,5,6,9
10,11,12,18,23,26,29,3,5,6
10,11,12,18,23,26,29,3,6,7
1,10,12,18,23,26,30,6,7,9
1,10,12,18,23,26,30,5,6,9
1,10,11,12,18,23,26,30,5,6
1,10,11,12,18,23,26,30,6,7
10,12,18,23,26,3,30,6,7,9
10,12,18,23,26,3,30,5,6,9
10,11,12,18,23,26,3,30,5,6
10,11,12,18,23,26,3,30,6,7
1,10,12,18,24,26,27,6,7,9
1,10,12,18,24,26,27,5,6,9
1,10,11,12,18,24,26,27,5,6
1,10,11,12,18,24,26,27,6,7
10,12,18,24,26,27,3,6,7,9
10,12,18,24,26,27,3,5,6,9

čvor sa PMU uređajem
10,11,12,18,24,26,27,3,5,6
10,11,12,18,24,26,27,3,6,7
1,10,12,18,24,26,29,6,7,9
1,10,12,18,24,26,29,5,6,9
1,10,11,12,18,24,26,29,5,6
1,10,11,12,18,24,26,29,6,7
10,12,18,24,26,29,3,6,7,9
10,12,18,24,26,29,3,5,6,9
10,11,12,18,24,26,29,3,5,6
10,11,12,18,24,26,29,3,6,7
1,10,12,18,24,26,30,6,7,9
1,10,12,18,24,26,30,5,6,9
1,10,11,12,18,24,26,30,6,7
1,10,11,12,18,24,26,30,5,6
10,12,18,24,26,3,30,6,7,9
10,12,18,24,26,3,30,5,6,9
10,11,12,18,24,26,3,30,6,7
10,11,12,18,24,26,3,30,5,6
10,12,19,2,23,26,27,3,6,9
1,10,12,19,2,23,26,27,6,9
10,12,19,2,23,26,27,4,6,9
10,11,12,19,2,23,26,27,3,6
10,11,12,19,2,23,26,27,4,6
1,10,11,12,19,2,23,26,27,6
10,12,19,2,23,26,3,30,6,9
1,10,12,19,2,23,26,30,6,9
10,12,19,2,23,26,30,4,6,9
10,11,12,19,2,23,26,3,30,6
1,10,11,12,19,2,23,26,30,6
10,11,12,19,2,23,26,30,4,6
10,12,19,2,23,26,29,3,6,9
1,10,12,19,2,23,26,29,6,9
10,12,19,2,23,26,29,4,6,9
10,11,12,19,2,23,26,29,3,6
10,11,12,19,2,23,26,29,4,6
1,10,11,12,19,2,23,26,29,6
10,12,19,2,24,26,27,3,6,9
1,10,12,19,2,24,26,27,6,9
10,12,19,2,24,26,27,4,6,9
10,11,12,19,2,24,26,27,3,6
10,11,12,19,2,24,26,27,4,6
1,10,11,12,19,2,24,26,27,6
10,12,19,2,24,26,3,30,6,9
1,10,12,19,2,24,26,30,6,9
10,12,19,2,24,26,30,4,6,9

7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.4)

čvor sa PMU uređajem
10,11,12,19,2,24,26,3,30,6
10,11,12,19,2,24,26,30,4,6
1,10,11,12,19,2,24,26,30,6
10,12,19,2,24,26,29,3,6,9
10,12,19,2,24,26,29,4,6,9
1,10,12,19,2,24,26,29,6,9
10,11,12,19,2,24,26,29,3,6
10,11,12,19,2,24,26,29,4,6
1,10,11,12,19,2,24,26,29,6
1,10,12,19,23,26,27,6,7,9
1,10,12,19,23,26,27,5,6,9
1,10,11,12,19,23,26,27,5,6
1,10,11,12,19,23,26,27,6,7
10,12,19,23,26,27,3,6,7,9
10,12,19,23,26,27,3,5,6,9
10,11,12,19,23,26,27,3,5,6
10,11,12,19,23,26,27,3,6,7
1,10,12,19,23,26,29,6,7,9
1,10,12,19,23,26,29,5,6,9
1,10,11,12,19,23,26,29,5,6
1,10,11,12,19,23,26,29,6,7
10,12,19,23,26,29,3,6,7,9
10,12,19,23,26,29,3,5,6,9
10,11,12,19,23,26,29,3,5,6
10,11,12,19,23,26,29,3,6,7
1,10,12,19,23,26,30,6,7,9
1,10,12,19,23,26,30,5,6,9
1,10,11,12,19,23,26,30,6,7
1,10,11,12,19,23,26,30,5,6
10,12,19,23,26,3,30,6,7,9
10,12,19,23,26,3,30,5,6,9
10,11,12,19,23,26,3,30,6,7
10,11,12,19,23,26,3,30,5,6
1,10,12,19,24,26,27,6,7,9
1,10,12,19,24,26,27,5,6,9
1,10,11,12,19,24,26,27,6,7
1,10,11,12,19,24,26,27,5,6
10,12,19,24,26,27,3,6,7,9
10,12,19,24,26,27,3,5,6,9
10,11,12,19,24,26,27,3,6,7
10,11,12,19,24,26,27,3,5,6
1,10,12,19,24,26,29,6,7,9
1,10,12,19,24,26,29,5,6,9
1,10,11,12,19,24,26,29,6,7
1,10,11,12,19,24,26,29,5,6

čvor sa PMU uređajem
10,12,19,24,26,29,3,6,7,9
10,12,19,24,26,29,3,5,6,9
10,11,12,19,24,26,29,3,6,7
10,11,12,19,24,26,29,3,5,6
1,10,12,19,24,26,30,6,7,9
1,10,12,19,24,26,30,5,6,9
1,10,11,12,19,24,26,30,6,7
1,10,11,12,19,24,26,30,5,6
10,12,19,24,26,3,30,6,7,9
10,12,19,24,26,3,30,5,6,9
10,11,12,19,24,26,3,30,5,6
10,11,12,19,24,26,3,30,6,7
1,10,12,15,18,25,27,7,8,9
1,10,12,15,18,25,27,5,8,9
1,10,12,15,18,25,27,28,7,9
1,10,12,15,18,25,27,28,5,9
1,10,12,15,20,25,27,7,8,9
1,10,12,15,20,25,27,5,8,9
1,10,12,15,20,25,27,28,5,9
1,10,12,15,20,25,27,28,7,9
1,10,12,15,19,25,27,7,8,9
1,10,12,15,19,25,27,5,8,9
1,10,12,15,19,25,27,28,5,9
1,10,12,15,19,25,27,28,7,9
1,10,11,12,15,18,25,27,7,8
1,10,11,12,15,18,25,27,5,8
1,10,11,12,15,18,25,27,28,5
1,10,11,12,15,18,25,27,28,7
1,10,11,12,15,20,25,27,7,8
1,10,11,12,15,20,25,27,5,8
1,10,11,12,15,20,25,27,28,5
1,10,11,12,15,20,25,27,28,7
1,10,11,12,15,19,25,27,7,8
1,10,11,12,15,19,25,27,5,8,
1,10,11,12,15,19,25,27,28,5,
1,10,11,12,15,19,25,27,28,7
10,12,15,18,25,27,3,5,8,9
10,12,15,18,25,27,28,3,5,9
10,12,15,20,25,27,3,5,8,9
10,12,15,20,25,27,28,3,5,9
10,12,15,19,25,27,3,5,8,9
10,12,15,19,25,27,28,3,5,9
10,11,12,15,18,25,27,28,3,5
10,11,12,15,18,25,27,3,5,8
10,11,12,15,20,25,27,3,5,8

čvor sa PMU uređajem
10,11,12,15,20,25,27,28,3,5
10,11,12,15,19,25,27,28,3,5
10,11,12,15,19,25,27,3,5,8
1,10,11,12,15,18,25,30,7,8
1,10,11,12,15,18,25,30,5,8
1,10,11,12,15,18,25,29,5,8
1,10,11,12,15,18,25,29,7,8
1,10,11,12,15,18,25,28,30,7
1,10,11,12,15,18,25,28,30,5
1,10,11,12,15,18,25,28,29,7
1,10,11,12,15,18,25,28,29,5
1,10,11,12,15,20,25,30,7,8
1,10,11,12,15,20,25,30,5,8
1,10,11,12,15,20,25,29,5,8
1,10,11,12,15,20,25,29,7,8
1,10,11,12,15,20,25,28,30,7
1,10,11,12,15,20,25,28,30,5
1,10,11,12,15,20,25,28,29,5
1,10,11,12,15,20,25,28,29,7
1,10,11,12,15,19,25,30,7,8
1,10,11,12,15,19,25,30,5,8
1,10,11,12,15,19,25,29,5,8
1,10,11,12,15,19,25,29,7,8
1,10,11,12,15,19,25,28,30,7
1,10,11,12,15,19,25,28,30,5
1,10,11,12,15,19,25,28,29,5
1,10,11,12,15,19,25,28,29,7
1,10,12,15,18,25,30,7,8,9
1,10,12,15,18,25,30,5,8,9
1,10,12,15,18,25,29,5,8,9
1,10,12,15,18,25,29,7,8,9
1,10,12,15,18,25,29,7,8,9
1,10,12,15,20,25,29,5,8,9
1,10,12,15,20,25,28,30,7,9
1,10,12,15,20,25,28,30,5,9
1,10,12,15,18,25,28,29,5,9
1,10,12,15,18,25,28,29,7,9
1,10,12,15,20,25,30,7,8,9
1,10,12,15,20,25,30,5,8,9
1,10,12,15,20,25,29,7,8,9
1,10,12,15,20,25,29,5,8,9
1,10,12,15,20,25,28,30,7,9
1,10,12,15,20,25,28,30,5,9
1,10,12,15,20,25,28,29,7,9
1,10,12,15,20,25,28,29,5,9
1,10,12,15,19,25,30,7,8,9
1,10,12,15,19,25,30,5,8,9

## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.4)

čvor sa PMU uređajem
1,10,12,15,19,25,29,7,8,9
1,10,12,15,19,25,29,5,8,9
1,10,12,15,19,25,28,30,7,9
1,10,12,15,19,25,28,30,5,9
1,10,12,15,19,25,28,29,7,9
1,10,12,15,19,25,28,29,5,9
10,12,15,18,25,3,30,5,8,9
10,12,15,18,25,29,3,5,8,9
10,12,15,18,25,28,3,30,5,9
10,12,15,18,25,28,29,3,5,9
10,12,15,20,25,3,30,5,8,9
10,12,15,20,25,29,3,5,8,9
10,12,15,20,25,28,29,3,5,9
10,12,15,20,25,28,3,30,5,9
10,12,15,19,25,3,30,5,8,9
10,12,15,19,25,29,3,5,8,9
10,12,15,19,25,28,29,3,5,9
10,12,15,19,25,28,3,30,5,9
10,11,12,15,18,25,3,30,5,8
10,11,12,15,18,25,29,3,5,8
10,11,12,15,18,25,28,29,3,5
10,11,12,15,18,25,28,3,30,5
10,11,12,15,20,25,3,30,5,8
10,11,12,15,20,25,29,3,5,8
10,11,12,15,20,25,28,29,3,5
10,11,12,15,20,25,28,3,30,5
10,11,12,15,19,25,3,30,5,8
10,11,12,15,19,25,29,3,5,8
10,11,12,15,19,25,28,29,3,5
10,11,12,15,19,25,28,3,30,5
1,10,12,18,24,25,27,7,8,9
1,10,12,18,24,25,27,5,8,9
1,10,12,18,24,25,27,28,5,9
1,10,12,18,24,25,27,28,7,9
1,10,12,18,23,25,27,7,8,9
1,10,12,18,23,25,27,5,8,9
1,10,12,18,23,25,27,28,5,9
1,10,12,18,23,25,27,28,7,9
1,10,11,12,18,24,25,27,7,8
1,10,11,12,18,24,25,27,5,8
1,10,11,12,18,24,25,27,28,5
1,10,11,12,18,24,25,27,28,7
1,10,11,12,18,23,25,27,7,8
1,10,11,12,18,23,25,27,5,8
1,10,11,12,18,23,25,27,28,5
1,10,11,12,18,24,25,27,28,7
1,10,11,12,18,23,25,27,7,8
1,10,11,12,18,23,25,27,5,8
1,10,11,12,18,23,25,27,28,5

čvor sa PMU uređajem
1,10,11,12,18,23,25,27,28,7
10,12,18,24,25,27,3,5,8,9
10,12,18,24,25,27,28,3,5,9
10,12,18,23,25,27,3,5,8,9
10,12,18,23,25,27,28,3,5,9
10,11,12,18,24,25,27,3,5,8
10,11,12,18,24,25,27,28,3,5
10,11,12,18,23,25,27,28,3,5
10,11,12,18,23,25,27,3,5,8
1,10,11,12,18,24,25,30,7,8
1,10,11,12,18,24,25,30,5,8
1,10,11,12,18,24,25,29,5,8
1,10,11,12,18,24,25,29,7,8
1,10,11,12,18,24,25,28,30,7
1,10,11,12,18,24,25,28,30,5
1,10,11,12,18,24,25,28,29,5
1,10,11,12,18,24,25,28,29,7
1,10,11,12,18,23,25,30,7,8
1,10,11,12,18,23,25,30,5,8
1,10,11,12,18,23,25,29,5,8
1,10,11,12,18,23,25,29,7,8
1,10,11,12,18,23,25,28,30,7
1,10,11,12,18,23,25,28,30,5
1,10,11,12,18,23,25,28,29,5
1,10,11,12,18,23,25,28,29,7
1,10,12,18,24,25,30,7,8,9
1,10,12,18,24,25,30,5,8,9
1,10,12,18,24,25,29,7,8,9
1,10,12,18,24,25,29,5,8,9
1,10,12,18,24,25,28,30,7,9
1,10,12,18,24,25,28,30,5,9
1,10,12,18,24,25,28,29,7,9
1,10,12,18,24,25,28,29,5,9
1,10,12,18,23,25,30,7,8,9
1,10,12,18,23,25,30,5,8,9
1,10,12,18,23,25,29,7,8,9
1,10,12,18,23,25,29,5,8,9
1,10,12,18,23,25,28,30,7,9
1,10,12,18,23,25,28,30,5,9
1,10,12,18,23,25,28,29,7,9
1,10,12,18,23,25,28,29,5,9
10,12,18,24,25,3,30,5,8,9
10,12,18,24,25,29,3,5,8,9
10,12,18,24,25,28,29,3,5,9
10,12,18,24,25,28,3,30,5,9

čvor sa PMU uređajem
10,12,18,23,25,3,30,5,8,9
10,12,18,23,25,29,3,5,8,9
10,12,18,23,25,28,29,3,5,9
10,12,18,23,25,28,3,30,5,9
10,11,12,18,24,25,3,30,5,8
10,11,12,18,24,25,29,3,5,8
10,11,12,18,24,25,28,29,3,5
10,11,12,18,24,25,28,3,30,5
10,11,12,18,23,25,3,30,5,8
10,11,12,18,23,25,29,3,5,8
10,11,12,18,23,25,28,29,3,5
10,11,12,18,23,25,28,3,30,5
1,10,11,12,19,24,25,27,7,8
1,10,11,12,19,24,25,27,5,8
1,10,11,12,19,24,25,27,28,5
1,10,11,12,19,24,25,27,28,7
1,10,11,12,19,23,25,27,7,8
1,10,11,12,19,23,25,27,5,8
1,10,11,12,19,23,25,27,28,5
1,10,11,12,19,23,25,27,28,7
1,10,12,19,24,25,27,7,8,9
1,10,12,19,24,25,27,5,8,9
1,10,12,19,24,25,27,28,7,9
1,10,12,19,24,25,27,28,5,9
1,10,12,19,23,25,27,7,8,9
1,10,12,19,23,25,27,5,8,9
1,10,12,19,23,25,27,28,7,9
1,10,12,19,23,25,27,28,5,9
10,12,19,24,25,27,3,5,8,9
10,12,19,24,25,27,28,3,5,9
10,12,19,23,25,27,28,3,5,9
10,12,19,23,25,27,3,5,8,9
10,11,12,19,24,25,27,3,5,8
10,11,12,19,24,25,27,28,3,5
10,11,12,19,23,25,27,28,3,5
10,11,12,19,23,25,27,3,5,8
1,10,11,12,19,24,25,30,7,8
1,10,11,12,19,24,25,30,5,8
1,10,11,12,19,24,25,29,7,8
1,10,11,12,19,24,25,29,5,8
1,10,11,12,19,24,25,28,30,7
1,10,11,12,19,24,25,28,30,5
1,10,11,12,19,24,25,28,29,7
1,10,11,12,19,24,25,28,29,5
1,10,11,12,19,23,25,30,7,8





7 Apendiks

(nastavak Tabele7.4)

čvor sa PMU uređajem
1,10,12,19,23,26,28,30,7 ,9
1,10,12,19,23,26,28,30,5 ,9
1,10,12,19,23,26,28,29,7 ,9
1,10,12,19,23,26,28,29,5 ,9
1,10,11,12,19,23,26,28,30,7
1,10,11,12,19,23,26,28,30,5
1,10,11,12,19,23,26,28,29,7
1,10,11,12,19,23,26,28,29,5
10,12,19,23,26,28,3,30,5,9
10,12,19,23,26,28,29,3,5,9
10,11,12,19,23,26,28,3,30,5
10,11,12,19,23,26,28,29,3,5
1,10,12,19,23,26,29,5,8,9
1,10,12,19,23,26,29,7,8,9
1,10,12,19,23,26,30,7,8,9
1,10,12,19,23,26,30,5,8,9
1,10,11,12,19,23,26,30,7,8
1,10,11,12,19,23,26,30,5,8
1,10,11,12,19,23,26,29,7,8
1,10,11,12,19,23,26,29,5,8
10,12,19,23,26,3,30,5,8,9
10,12,19,23,26,29,3,5,8,9
10,11,12,19,23,26,29,3,5,8
10,11,12,19,23,26,3,30,5,8
1,10,12,19,24,26,28,29,5,9
1,10,12,19,24,26,28,29,7,9
1,10,12,19,24,26,28,30,7,9
1,10,12,19,24,26,28,30,5,9
1,10,11,12,19,24,26,28,30,7
1,10,11,12,19,24,26,28,30,5
1,10,11,12,19,24,26,28,29,7
1,10,11,12,19,24,26,28,29,5
10,12,19,24,26,28,3,30,5,9
10,12,19,24,26,28,29,3,5,9
10,11,12,19,24,26,28,29,3,5
10,11,12,19,24,26,28,3,30,5
1,10,11,12,19,24,26,29,5,8
1,10,11,12,19,24,26,29,7,8
1,10,11,12,19,24,26,30,7,8
1,10,11,12,19,24,26,30,5,8
1,10,12,19,24,26,29,5,8,9
1,10,12,19,24,26,30,7,8,9
1,10,12,19,24,26,29,7,8,9
1,10,12,19,24,26,30,5,8,9
10,12,19,24,26,3,30,5,8,9

čvor sa PMU uređajem
10,12,19,24,26,29,3,5,8,9
10,11,12,19,24,26,3,30,5,8
10,11,12,19,24,26,29,3,5,8

## 7 Apendiks

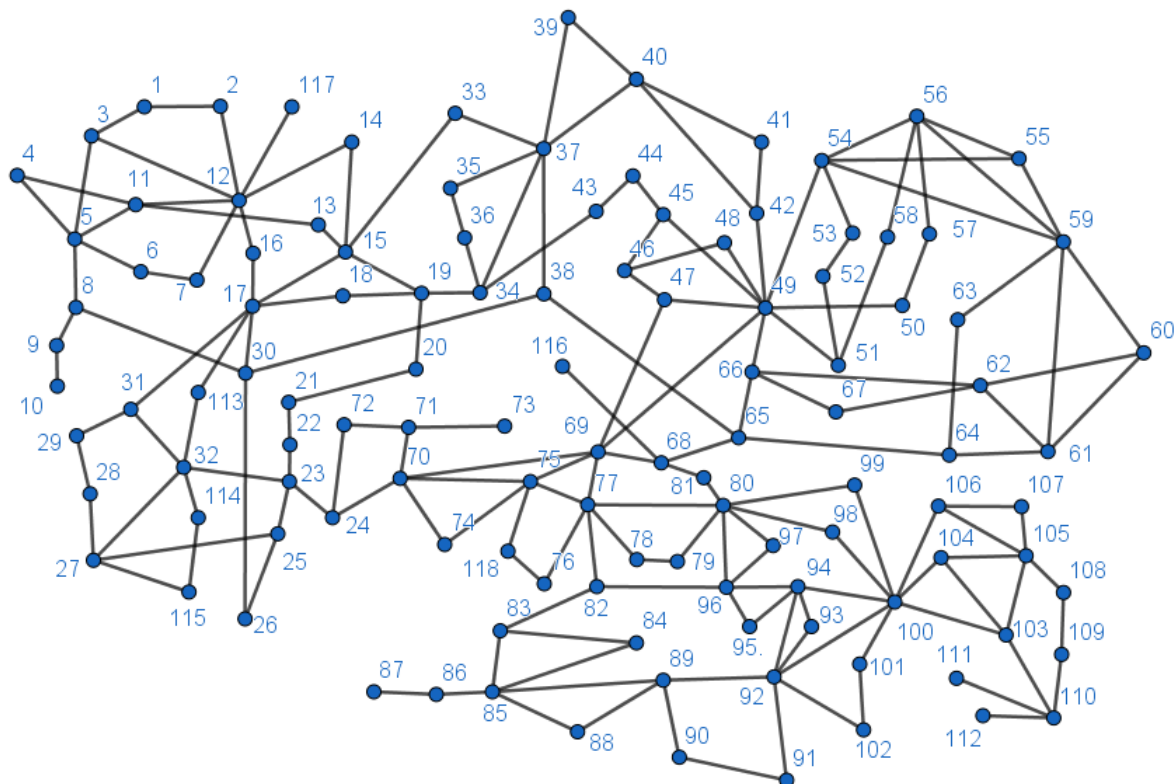
Sva optimalna rešenja za slučaj sa uvažavanjem konvencionalnih merenja su data u Tabeli 7.5:

Tabela 7.5: sva optimalna rešenja za 30-IEEE mrežu, sa konvencionalnim merenjima

čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem
15,18,27,3,7,10,12	19,2,23,27,4,10,12	18,24,29,3,5,10,12
15,20,27,3,7,10,12	1,19,2,23,27,10,12	18,24,3,30,5,10,12
15,19,27,3,7,10,12	18,2,24,27,3,10,12	18,23,27,3,5,10,12
1,15,18,27,7,10,12	18,2,24,27,4,10,12	18,23,29,3,5,10,12
1,15,18,29,7,10,12	1,18,2,24,27,10,12	18,23,3,30,5,10,12
1,15,18,30,7,10,12	18,2,23,27,3,10,12	1,19,2,24,27,10,12
1,15,20,27,7,10,12	1,18,2,23,27,10,12	19,2,23,27,3,10,12
1,15,20,29,7,10,12	18,2,23,27,4,10,12	1,18,23,30,5,10,12
1,15,20,30,7,10,12	1,15,18,27,5,10,12	18,24,27,3,5,10,12
1,15,19,27,7,10,12	1,15,18,29,5,10,12	19,2,23,27,3,10,12
1,15,19,29,7,10,12	1,15,18,30,5,10,12	1,18,23,30,5,10,12
1,15,19,30,7,10,12	1,15,20,27,5,10,12	18,24,27,3,5,10,12
19,24,27,3,7,10,12	1,15,20,29,5,10,12	19,2,23,27,3,10,12
19,24,29,3,7,10,12	1,15,20,30,5,10,12	1,18,23,30,5,10,12
19,24,3,30,7,10,12	1,15,19,27,5,10,12	1,19,2,24,27,10,12
19,23,27,3,7,10,12	1,15,19,30,5,10,12	19,2,23,27,3,10,12
1,19,24,27,7,10,12	1,15,19,29,5,10,12	1,18,23,30,5,10,12
1,19,24,29,7,10,12	15,18,27,3,5,10,12	18,24,27,3,5,10,12
1,19,24,30,7,10,12	15,18,3,30,5,10,12	18,23,29,3,5,10,12
1,19,23,27,7,10,12	15,18,29,3,5,10,12	18,23,3,30,5,10,12
1,19,23,29,7,10,12	15,20,27,3,5,10,12	1,19,2,24,27,10,12
1,19,23,30,7,10,12	15,20,3,30,5,10,12	19,2,23,27,3,10,12
18,24,27,3,7,10,12	15,20,29,3,5,10,12	1,18,23,30,5,10,12
18,24,29,3,7,10,12	15,19,27,3,5,10,12	18,24,27,3,5,10,12
18,24,3,30,7,10,12	15,19,29,3,5,10,12	
18,23,27,3,7,10,12	15,19,3,30,5,10,12	
1,18,24,27,7,10,12	1,19,24,27,5,10,12	
1,18,24,29,7,10,12	1,19,24,30,5,10,12	
1,18,24,30,7,10,12	1,19,24,29,5,10,12	
1,18,23,27,7,10,12	1,19,23,27,5,10,12	
1,18,23,30,7,10,12	1,19,23,30,5,10,12	
1,18,23,29,7,10,12	1,19,23,29,5,10,12	
15,18,2,27,3,10,12	19,24,27,3,5,10,12	
1,15,18,2,27,10,12	19,24,3,30,5,10,12	
15,18,2,27,4,10,12	19,24,29,3,5,10,12	
15,2,20,27,3,10,12	19,23,27,3,5,10,12	
15,2,20,27,4,10,12	19,23,29,3,5,10,12	
1,15,2,20,27,10,12	19,23,3,30,5,10,12	
15,19,2,27,3,10,12	1,18,24,27,5,10,12	
15,19,2,27,4,10,12	1,18,24,30,5,10,12	
1,15,19,2,27,10,12	1,18,24,29,5,10,12	
19,2,24,27,3,10,12	1,18,23,27,5,10,12	
19,2,24,27,4,10,12	1,18,23,29,5,10,12	

## 7.4 IEEE mreža sa 118 čvorova

Na slici 7.4.1 je prikazana IEEE mreža sa 118 čvorova.



Slika 7.4.1: IEEE mreža sa 118 čvorova

Tabela 7.6: tabela povezanosti IEEE mreže sa 118 čvorova

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
1	2	5	11	15	17	15	17
1	3	11	12	16	17	16	17
4	5	2	12	17	18	17	18
3	5	3	12	18	19	18	19
5	6	7	12	19	20	19	20
6	7	11	13	15	19	15	19
8	9	12	14	20	21	20	21
8	5	13	15	21	22	21	22
9	10	14	15	22	23	22	23
4	11	12	16	23	24	23	24
23	25	23	25	39	40	55	56
26	25	26	25	40	41	56	57
25	27	25	27	40	42	50	57
27	28	27	28	41	42	56	58
28	29	28	29	43	44	51	58

## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.6)

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
30	17	30	17	34	43	54	59
8	30	8	30	44	45	56	59
26	30	26	30	45	46	56	59
17	31	17	31	46	47	55	59
29	31	29	31	46	48	59	60
23	32	23	32	47	49	59	61
31	32	31	32	42	49	60	61
27	32	27	32	42	49	60	62
15	33	15	33	45	49	61	62
19	34	19	34	48	49	63	59
35	36	35	36	49	50	63	64
35	37	35	37	49	51	64	61
33	37	33	37	51	52	38	65
34	36	34	36	52	53	64	65
34	37	34	37	53	54	49	66
38	37	38	37	49	54	49	66
37	39	37	39	49	54	62	66
37	40	37	40	54	55	62	6,7
30	38	30	38	54	56	65	66
65	66	68	81	94	96	103	110
66	67	81	80	80	97	109	110
65	68	77	82	80	98	110	111
47	69	82	83	80	99	110	112
49	69	83	84	92	100	17	113
68	69	83	85	94	100	32	113
69	70	84	85	95	96	32	114
24	70	85	86	96	97	27	115
70	71	86	87	98	100	114	115
24	72	85	88	99	100	68	116
71	72	85	89	100	101	12	117
71	73	88	89	92	102	75	118
70	74	89	90	101	102	76	118
70	75	89	90	100	103	77	78
69	75	90	91	100	104	78	79
74	75	89	92	103	104	77	80
76	77	89	92	103	105	77	80
69	77	91	92	100	106	79	80
75	77	92	93	104	105	92	94

## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.6)

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
105	106	105	107
93	94	105	108
94	95	106	107
80	96	108	109
82	96		

Dodatna optimalna rešenja za IEEE mrežu sa 118 čvorova su prikazana u Tabeli 7.7.

Tabela 7.7: dodatna rešenja za IEEE mrežu sa 118 čvorova

2,5,9,12,15,17,21,25,29,34,37,40,45,49,52,56,62,63,68,70,71,75,77,80,85, 86,90,94,102,105,110,114
1,5,9,11,12,17,21,25,29,34,37,40,45,49,52,56,62,64,72,73,75,77,80,85, 86,91,94,101,105,110,114,116
3,5,9,11,12,17,21,25,29,34,37,40,45,49,52,56,62,63,68,70,71,75,77,80,85,86 90,94,102,105,110,114
2,5,9,12,15,17,21,23,25,28,34,37,40,45,49,52,56,62,64,71,75,77 80,85,87,91,94,101,105,110,114,116

## 7.5 Poljska mreža sa 2383 čvorova

U Tabeli 7.8 su prikazane lokacije ZIB čvorova:

Tabela 7.8: lokacije ZIB čvorova za poljsku mrežu

lokacije ZIB čvorova	1 2 3 4 5 6 7 8 9 11 12 13 14 15 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 32 33 34 35 36 37 38 39 40 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 59 60 61 62 66 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 88 89 90 91 92 94 96 98 99 100 101 102 106 107 108 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 128 129 130 133 134 135 136 137 138 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 16,7 168 169 170 171 172 173 174 175 178 179 194 204 243 280 309 310 312 321 322 332 336 355 361 362 374 375 449 450 470 513 516 517 518 519 539 546 564 565 568 569 576 587 614 617 634 644 645 662 663 682 726 727 734 751 777 786 789 791 797 799 800 801 806 807 812 817 819 821 822 825 826 829 833 836 840 844 848 854 855 856 863 864 869 874 876 879 880 881 885 893 898 903 915 916 921 923 924 926 927 928 931 932 933 934 936 937 938 940 941 946 953 956 966 96,7 969 971 972 977 981 984 985 986 987 989 990 991 1003 1006 1007 1008 1013 1017 1018 1019 1021 1023 1025 1031 1040 1043 1044 1047 1048 1049 1050 1052 1057 1062 1063 1065 1069 1070 1081 1085 1092 1093 1095 1096 1098 1101 1108 1111 1112 1114 1115 1119 1120 1121 1123 1127 1129 1131 1135 1151 1152 1153 1157 1158 1159 1161 1162 1164 1166 116,7 1178 1180 1188 1189 1196 1199 1200 1208 1209 1212 1213 1219 1222 1225 1226 1227 1230 1231 1239 1243 1248 1252 1253 1256 1257 1261 1264 1265 1271 1274 1275 1279 1281 1288 1298 1299 1300 1305 1306 1307 1315 1318 1319 1321 1323 1334 1335 1341 1343 1344 1350 1353 1362 1365 1370 1371 1376 1378 1382 1383 1384 1392 1394 1396 1397 1400 1401 1407 1412 1413 1423 1431 1432 1439 1440 1443 1448 1449 1455 1456 1459 1460 1465 1466 1468 1470 1484 1491 1494 1498 1499 1502 1503 1511 1520 1522 1523 1524 1531 1532 1539 1548 1560 1561 1562 1563 1564 1569 1570 1577 1581 1583 1589 1591 1592 1601 1618 1621 1631 1632 1636 1647 1648 1649 1650 1665 16,70 1681 1695 1713 17321736 1740 1747 1748 1762 1774 1775 1777 1780 1783 1790 1797 1802 1811 1812 1814 1822 18231835 1840 1846 1851 1865 1872 1877 1878 1880 1881 1885 1887 1896 1899 1902 1903 1906 1907 1914 1919 1920 1922 1944 1948 1956 1958 1972 1982 1987 2009 2014 2017 2019 2025 2031 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 206,7 2068 2069 2070
----------------------------	---

7 Apendiks

(nastavak tabele 7.8)

lokacije	2071	2072	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079	2080	2081
ZIB	2089	2090	2092	2109	2111	2112	2113	2133	2134	2157	2158
čvorova	2163	2165	2166	2169	2170	2181	2186	2187	2188	2227	2257
				2258	2261	2280	2314	2325			

U Tabeli 7.9 su date lokacije PMU uređaja za slučaj bez konvencionalnih merenja:

Tabela 7.9: lokacije PMU uređaja za poljsku mrežu bez uvažavanja konvencionalnih merenja

lokacija	6	22	23	28	29	35	42	43	55	58	61	63	64	71	73	74	76	81	90	105
PMU	106	110	119	121	126	133	136	138	143	145	152	163	168	174						
uređaja	176	179	187	188	189	192	194	196	200	208	213	215	217	219						
	224	229	230	233	236	240	246	247	249	251	257	259	263	265						
	275	277	281	282	284	285	287	295	299	303	307	309	310	314						
	319	321	322	324	330	334	335	336	338	339	347	348	352	353						
	354	355	360	361	365	366	368	372	373	375	377	378	379	380						
	382	383	391	404	409	413	417	425	438	439	444	445	446	448						
	459	463	468	476	479	480	481	486	493	494	498	500	502	510						
	511	512	515	516	517	519	522	523	525	526	527	529	535	540						
	545	547	548	550	551	553	556	557	560	564	565	568	569	571						
	582	583	584	590	591	593	594	595	603	613	615	618	622	626						
	635	638	644	645	646	649	651	661	662	666	6,79	680	682	685						
	690	692	694	696	703	704	708	709	710	712	715	716	717	721						
	722	724	726	727	735	740	741	747	748	750	754	758	763	765	768					
	778	784	785	796	797	798	799	806	812	817	819	821	822	824						
	825	829	831	834	839	854	855	858	859	863	869	870	871	873						
	876	885	892	898	902	910	912	915	916	919	923	926	928	932						
	936	937	944	953	960	966	971	972	973	978	979	981	985	986						
	989	990	997	1002	1006	1007	1017	1018	1019	1024	1025	1041								
	1042	1049	1050	1051	1054	1057	1059	1063	1065	1069	1070									
	1081	1082	1087	1092	1093	1095	1096	1101	1106	1108	1111									
	1112	1114	1119	1120	1123	1127	1129	1130	1138	1140	1141									
	1151	1153	1154	1157	1161	1162	1164	116,7	1169	1178	1182									
	1183	1184	1186	1189	1190	1192	1193	1198	1199	1201	1203									
	1204	1207	1209	1212	1213	1216	1217	1218	1221	1225	1226									
	1228	1229	1230	1231	1233	1234	1238	1240	1243	1245	1246									
	1250	1253	1254	1257	1258	1259	1261	1265	1270	1273	1274									
	1277	1278	1284	1285	1288	1297	1306	1307	1309	1311	1314									
	1317	1318	1320	1321	1324	1328	1330	1333	1334	1337	1338									
							1345	1346												

## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.9)

lokacija PMU uredaja	1350	1353	1356	1359	1361	1365	1366	136,7	1371	1375	1378
	1384	1387	1392	1393	1395	1400	1407	1410	1413	1414	1415
	1416	1421	1426	1427	1430	1434	1438	1439	1441	1445	1448
	1449	1454	1457	1460	1462	1465	1466	1468	1469	1470	1471
	1472	1475	1476	1483	1484	1486	1489	1490	1492	1494	1498
	1499	1502	1504	1505	1507	1511	1512	1514	1516	1517	1518
	1520	1522	1523	1524	1531	1532	1533	1539	1540	1543	1545
	1547	1550	1552	1556	1561	1569	1570	1574	1575	1576	1580
	1582	1585	1589	1592	1603	1604	1607	1610	1619	1620	1624
	1632	1635	1647	1652	1656	1659	1660	1662	1664	166,7	1669
	16,73	16,74	1680	1681	1682	1684	1686	1687	1690	1692	1694
	1696	1712	1716	1717	1722	1723	1728	1729	1734	1735	1740
	1745	1747	1748	1751	1755	1756	1757	1760	1761	1766	1771
	1772	1774	1776	1783	1793	1795	1797	1802	1806	1811	1812
	1814	1822	1825	1829	1840	1845	1858	1859	1862	1864	1866
	186,7	1871	1873	1874	1875	1882	1883	1884	1885	1889	1892
	1895	1898	1901	1902	1903	1905	1906	1907	1910	1912	1914
	1916	1918	1919	1920	1926	1932	1933	1937	1939	1940	1943
	1944	1947	1951	1955	1957	1961	1963	1965	1974	1977	1978
	1980	1982	1991	1992	1999	2000	2001	2003	2006	2007	2019
	2020	2024	2025	2027	2031	2032	2034	2035	2039	2040	2044
	2047	2052	2053	2054	2056	2059	2060	2061	2062	2063	206,7
	2068	2069	2071	2074	2076	2078	2079	2080	2085	2086	2087
	2090	2091	2092	2093	2098	2102	2105	2106	2108	2112	2113
	2121	2122	2128	2133	2134	2135	2137	2140	2144	2146	2157
	2159	2166	216,7	2168	2169	2170	2172	2173	2174	2176	2184
	2185	2187	2191	2193	2194	2195	2196	2202	2203	2204	2209
	2217	2218	2223	2224	2229	2235	2236	2244	2245	2249	2251
	2252	2255	2258	2259	2261	2264	2265	2274	2277	2280	2281
	2283	2285	2289	2290	2292	2293	2298	2300	2303	2305	2306
	2309	2313	2323	2336	2339	2340	2342	2345	2350	2352	2360
		2361	2364	2369	2373	2374	2379	2380	2381	2383	



## 7 Apendiks

U Tabeli 7.10 su date lokacije PMU uređaja za slučaj kada se u poljskoj mreži nalaze ZIB čvorovi:

Tabela 7.10: lokacije PMU uređaja za poljsku mrežu bez uvažavanja konvencionalnih merenja

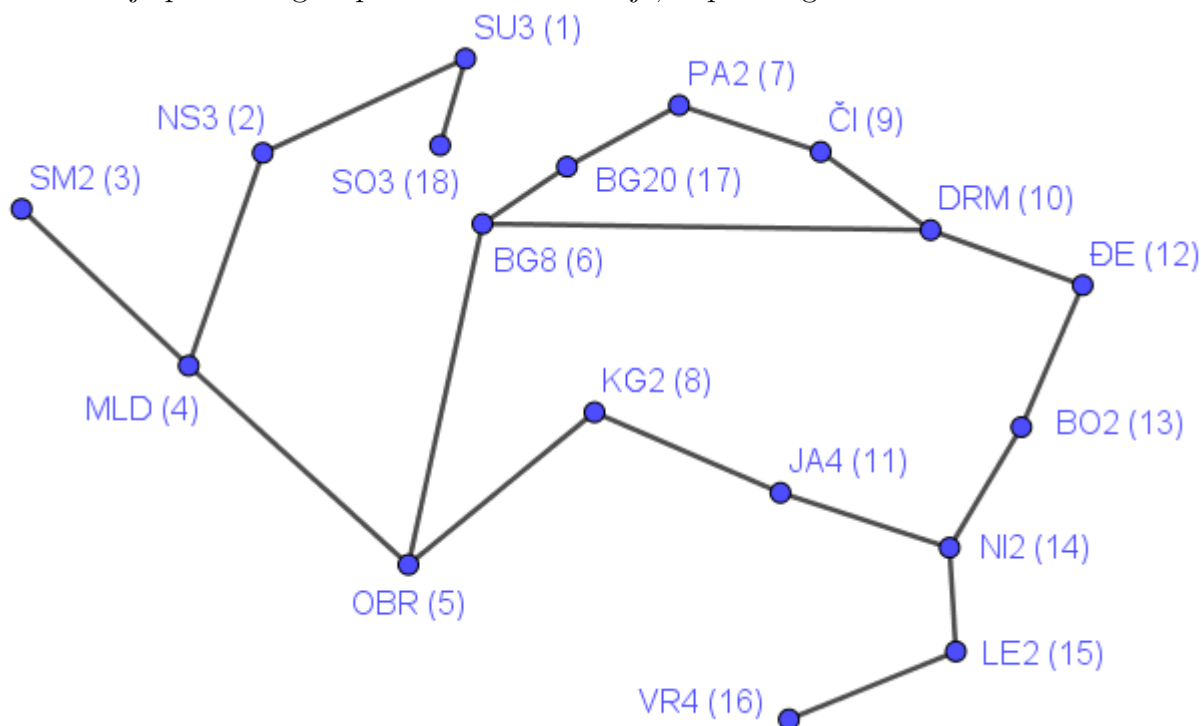
lokacija PMU uređaja	12 15 18 29 35 39 41 50 61 69 80 84 86 88 105 126 129 130 133 150 151 154 158 160 162 172 175 178 179 189 190 192 195 199 202 209 213 214 215 217 219 220 222 229 235 240 244 245 246 247 249 259 265 275 281 282 287 292 293 295 299 307 308 309 310 314 316 319 324 326 337 339 341 347 348 352 353 354 356 360 363 365 366 36,7 369 371 372 380 383 384 389 393 394 404 408 411 418 425 428 434 446 448 456 460 464 466 468 475 476 481 485 493 494 497 502 511 512 515 516 523 525 526 527 529 530 540 542 545 550 551 556 563 568 575 579 583 584 586 591 592 601 603 609 613 615 618 622 635 643 644 649 650 651 655 657 658 660 663 6,75 6,76 6,79 685 687 689 690 692 694 696 698 703 705 707 710 713 714 716 717 722 723 733 740 750 754 755 763 768 769 771 773 775 778 785 794 796 797 802 808 814 815 817 821 826 832 833 834 838 839 852 857 858 859 861 870 871 876 883 892 895 899 900 906 908 912 914 918 919 920 943 947 961 96,7 968 973 978 979 981 985 990 992 993 996 997 1024 1050 1054 1057 1059 1063 1069 1070 1076 1082 1095 1096 1097 1104 1105 1106 1120 1134 1138 1140 1141 1149 1155 1168 1175 1182 1184 1190 1191 1192 1195 1201 1202 1213 1216 1217 1222 1231 1232 1233 1240 1245 1250 1251 1256 1261 1269 1275 1283 1284 1285 1289 1295 1309 1311 1320 1328 1330 1335 1337 1342 1343 1345 1346 1351 1354 1365 1371 1372 1375 1381 1384 1415 1416 1417 1418 1422 1426 1427 1439 1460 1468 1469 1476 1483 1489 1490 1500 1503 1505 1506 1507 1514 1518 1520 1522 1524 1531 1533 1534 1536 1538 1539 1540 1552 1553 1556 1560 1564 1565 1576 1580 1584 1591 1594 1595 1601 1603 1605 1607 1610 1616 1618 1619 1623 1624 1625 1642 1643 1647 1650 1652 1655 1656 1658 1659 1662 166,7 1668 1669 16,73 1680 1683 1684 1686 1687 1688 1689 1691 1697 1701 1716 1717 1723 1726 1728 1729 1730 1734 1735 1744 1745 1752 1755 1760 1761 1772 1786 1793 1796 1805 1810 1814 1829 1831 1841 1844 1845 1862 186,7 1869 1871 1873 1879 1881 1882 1883 1884 1885 1886 1889 1892 1894 1897 1900 1904 1906 1916 1918 1919 1920 1921 1923 1924 1926 1929 1930 1933 1945 1949 1951 1953 1963 1974 1989 1993 1996 1998 2001 2002 2003 2006 2007 2020 2021 2037 2038 2039 2042 2044 2045 2047
----------------------------	--

(nastavak tabele 7.10)

lokacija	2048	2050	2052	2054	2056	2060	2065	2087	2088	2091	2099
PMU	2101	2102	2105	2107	2113	2119	2121	2122	2124	2127	2134
uređaja	2135	2137	2140	2143	2145	2146	2154	2157	2161	216,7	2168
	2170	2172	2173	2174	2175	2190	2191	2194	2195	2196	2202
	2203	2209	2210	2217	2218	2221	2223	2224	2229	2232	2233
	2235	2236	2244	2245	2247	2251	2255	2260	2261	2265	2270
	2274	2279	2281	2283	2286	2289	2291	2300	2306	2309	2311
	2313	2323	2330	2342	2345	2350	2360	2372	2374	2379	2380

## 7.6 Prenosna mreža Srbije naponskog nivoa 400 kV

Na slici 7.6.1 je prikazan graf prenosne mreže Srbije, naponskog nivoa 400 kV.



Slika 7.6.1: 400 kV prenosna mreža Srbije

U Tabeli 7.11 su prikazani nazivi trafostanica i odgovarajući broj čvora u grafu sa slike 7.6.1.

Tabela 7.11: broj čvora sa pripadajućom trafostanicom za 400 kV mrežu Srbije

broj čvora	trafostanica	broj čvora	trafostanica	broj čvora	trafostanica
1	Subotica 3	7	Pančevo 2	13	Bor 2
2	Novi Sad 3	8	Kragujevac 2	14	Niš 2
3	Sremska Mitrovica 2	9	Čibuk	15	Leskovac 2
4	Mladost	10	Drmno	16	Vranje 4
5	Obrenovac	11	Jagodina 4	17	Beograd 20
6	Beograd 8	12	Đerdap 1	18	Sombor 3

Prikaz matrice incidencije je dat u Tabeli 7.12.

Tabela 7.12: prikaz matrice incidencije u tabelarnom obliku za 400 kV mrežu Srbije

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
1	2	5	6	9	10
1	18	6	10	10	12
2	4	6	17	12	13
3	4	7	9	13	14
4	5	7	17	14	15
5	8	8	11	11	14
		15	16		

Sva optimalna rešenja za slučaj bez uvažavanja konvencionalnih merenja su data u Tabeli 7.13:

Tabela 7.13: sva optimalna rešenja za 400 kV mrežu Srbije

čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem
1,10,11,14,16,17,4	1,10,11,13,16,17,4	11,13,15,17,18,4,9
1,10,11,14,15,17,4	1,10,11,12,15,17,4	11,13,16,17,18,4,9
1,10,14,15,17,4,8	1,10,11,13,15,17,4	1,11,13,15,17,4,9
1,10,14,16,17,4,5	10,11,12,16,18,4,7	1,11,13,16,17,4,9
1,10,14,16,17,4,8	10,11,13,16,18,4,7	11,12,16,18,4,6,9
1,10,14,15,17,4,5	10,11,12,15,18,4,7	11,12,15,18,4,6,9
10,11,14,16,17,18,4	10,11,13,15,18,4,7	11,12,15,18,4,6,7
10,11,14,15,17,18,4	1,10,11,12,15,4,7	11,12,16,18,4,6,7
10,14,16,17,18,4,8	1,10,11,13,15,4,7	11,13,16,18,4,6,7
10,14,15,17,18,4,5	1,10,11,12,16,4,7	11,13,15,18,4,6,7
10,14,15,17,18,4,8	1,10,11,13,16,4,7	11,13,15,18,4,6,9
10,14,16,17,18,4,5	1,10,12,15,17,3,8	11,13,16,18,4,6,9
10,11,14,16,18,4,7	1,10,13,15,17,3,8	1,11,12,16,4,6,7
10,11,14,15,18,4,7	1,10,13,15,3,7,8	1,11,12,15,4,6,7
10,14,15,18,4,7,8	1,10,12,15,3,7,8	1,11,12,15,4,6,9
10,14,16,18,4,5,7	1,12,14,16,4,5,7	1,11,12,16,4,6,9
10,14,16,18,4,7,8	12,14,15,18,4,5,7	1,11,13,16,4,6,9
10,14,15,18,4,5,7	12,14,16,18,4,5,7	1,11,13,16,4,6,7
1,10,11,14,16,4,7	1,12,14,15,4,5,7	1,11,13,15,4,6,7
1,10,11,14,15,4,7	1,12,14,15,3,5,7	1,11,13,15,4,6,9
1,10,14,16,4,7,8	1,12,14,16,3,5,7	11,12,16,18,4,5,7
1,10,14,15,4,7,8	1,12,15,17,4,8,9	11,12,15,18,4,5,7
1,10,14,15,4,5,7	12,15,17,18,4,8,9	1,11,12,16,4,5,7
1,10,14,16,4,5,7	12,15,17,18,4,7,8	1,11,12,15,4,5,7
1,10,14,15,17,3,5	1,12,15,17,4,7,8	1,12,15,3,6,7,8
1,10,14,16,17,3,5	13,15,17,18,4,8,9	1,13,15,3,6,7,8
1,10,14,15,17,3,8	1,13,15,17,4,8,9	1,12,15,3,6,8,9
1,10,14,16,17,3,8	13,15,18,4,6,7,8	1,13,15,3,6,8,9
1,10,14,15,3,5,7	13,15,18,4,6,8,9	1,11,13,16,3,6,7
1,10,14,16,3,5,7	12,15,18,4,6,7,8	1,11,12,15,3,6,7

7 Apendiks

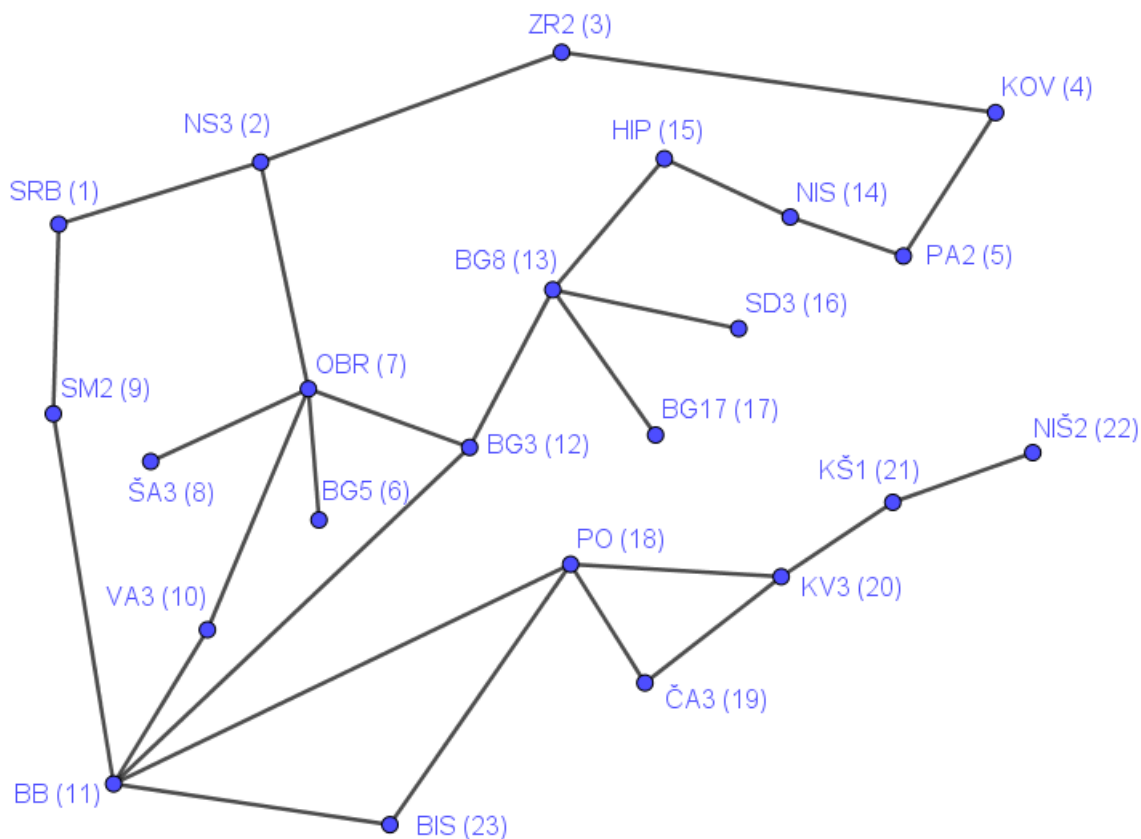
(nastavak Tabele 7.13)

čvor sa PMU uređajem
10,12,15,18,4,7,8
1,12,15,4,6,7,8
1,12,15,4,6,8,9
1,12,15,4,5,7,8
1,10,14,15,3,7,8
1,10,14,16,3,7,8
10,13,15,17,18,4,8
1,10,13,15,17,4,8
10,12,15,17,18,4,8
1,10,12,15,17,4,8
10,13,15,18,4,7,8
1,10,12,15,4,7,8
1,10,13,15,4,7,8
10,11,12,16,17,18,4
10,11,13,16,17,18,4
10,11,13,15,17,18,4
10,11,12,15,17,18,4
1,10,11,12,16,17,4
1,11,12,16,17,4,7
1,11,12,15,17,4,9
1,11,12,16,17,4,9

čvor sa PMU uređajem
12,15,18,4,5,7,8
12,15,18,4,6,8,9
1,13,15,4,6,8,9
1,13,15,4,6,7,8
1,11,12,16,3,6,7
1,11,13,15,3,6,7
1,11,12,16,3,6,9
1,11,12,15,3,6,9
1,11,13,16,3,6,9
1,11,13,15,3,6,9
11,12,15,17,18,4,9
11,12,16,17,18,4,9
11,12,15,17,18,4,7
11,12,16,17,18,4,7
1,11,12,15,17,4,7
1,13,15,17,3,8,9
1,12,15,17,3,8,9
1,12,15,17,3,7,8
1,12,15,3,5,7,8
1,11,12,16,3,5,7
1,11,12,15,3,5,7

## 7.7 Prenosna mreža Srbije naponskog nivoa 220 kV

Na slici [7.7.1](#) je prikazan graf prenosne mreže Srbije, naponskog nivoa 220 kV.



Slika 7.7.1: 220 kV mreža Srbije

U Tabeli [7.14](#) su prikazani nazivi trafostanica i odgovarajući broj čvora u grafu sa slike [7.7.1](#).

Tabela 7.14: broj čvora sa pripadajućom trafostanicom za 220 kV mrežu Srbije

broj čvora	trafostanica
1	Srbobran
2	Novi Sad 3
3	Zrenjanin 2
4	Kovačica
5	Pančevo 2
6	Beograd 5
7	Obrenovac
8	Šabac 3

broj čvora	trafostanica
9	Sremska Mitrovica 2
10	Valjevo 3
11	Bajina Bašta
12	Beograd 3
13	Beograd 8
14	NIS
15	HIP
16	Smederevo 3

broj čvora	trafostanica
17	Beograd 17
18	Požega
19	Čačak 3
20	Kraljevo 3
21	Kruševac 1
22	Niš 2
23	Bistrica

Prikaz matrice incidencije je dat u Tabeli [7.15](#).

Tabela 7.15: prikaz matrice incidencije u tabelarnom obliku za 220 kV mrežu Srbije

od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru	od čvora	ka čvoru
1	2	6	7	11	12
2	3	7	12	12	13
2	7	7	8	13	15
3	4	7	10	13	16
4	5	9	11	13	17
5	14	10	11	14	15
20	21	11	23	18	20
21	22	11	18	18	19
1	9	19	20	18	23

Sva optimalna rešenja za slučaj bez uvažavanja konvencionalnih merenja su data u Tabeli 7.16:

Tabela 7.16: sva optimalna rešenja za 220 kV mrežu Srbije

čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem	čvor sa PMU uređajem
11,13,2,20,22,5,6,8	11,13,16,19,2,22,5,7	11,13,18,19,2,21,5,7
11,13,2,20,21,5,6,8	11,13,19,2,22,3,5,7	11,13,18,2,21,4,5,7
1,11,13,2,20,22,5,7	11,13,19,2,22,23,5,7	11,13,18,2,21,5,7,8
11,13,2,20,22,5,7,9	11,13,19,2,21,3,5,7	11,13,18,2,21,22,5,7
1,11,13,2,20,21,5,7	11,13,19,2,21,23,5,7	11,13,14,18,2,21,5,7
11,13,2,20,21,5,7,9	10,11,13,19,2,22,5,7	11,13,18,2,21,3,5,7
11,13,2,20,22,4,5,7	11,13,19,2,22,4,5,7	11,13,15,18,2,22,5,7
11,13,15,2,20,22,5,7	11,12,13,19,2,21,5,7	11,13,18,2,22,5,7,8
11,13,2,20,22,23,5,7	11,13,19,2,21,5,7,8	11,12,13,18,2,21,5,7
11,13,2,20,21,5,7,8	11,13,14,19,2,22,5,7	11,13,15,18,2,22,4,7
11,13,19,2,20,22,5,7	11,13,15,19,2,22,5,7	11,13,15,18,2,21,4,7
11,13,2,20,22,3,5,7	11,13,19,2,21,4,5,7	11,13,15,19,2,22,4,7
11,12,13,2,20,22,5,7	10,11,13,19,2,21,5,7	11,13,15,19,2,21,4,7
10,11,13,2,20,21,5,7	11,13,19,2,22,5,6,7	11,13,14,18,2,22,4,7
11,13,16,2,20,22,5,7	11,13,17,19,2,21,5,7	11,13,14,18,2,22,3,7
11,13,18,2,20,22,5,7	11,12,13,19,2,22,5,7	11,13,14,18,2,21,3,7
11,13,14,2,20,21,5,7	11,13,14,19,2,21,5,7	11,13,14,18,2,21,4,7
11,13,2,20,21,3,5,7	11,13,19,2,22,5,7,8	11,13,14,19,2,22,4,7
11,13,2,20,21,23,5,7	11,13,19,2,21,5,6,7	11,13,14,19,2,22,3,7
11,13,2,20,22,5,6,7	11,13,17,19,2,22,5,7	11,13,14,19,2,21,4,7
11,13,2,20,21,4,5,7	11,13,19,2,21,22,5,7	11,13,14,19,2,21,3,7
11,13,14,2,20,22,5,7	11,13,16,19,2,21,5,7	1,11,13,14,20,22,4,7
11,13,2,20,21,22,5,7	11,13,15,19,2,21,5,7	11,13,14,20,22,4,7,9
10,11,13,2,20,22,5,7	11,13,18,2,22,5,6,8	1,11,13,14,20,21,4,7
11,13,18,2,20,21,5,7	11,13,18,2,21,5,6,8	11,13,14,20,21,4,7,9
11,13,17,2,20,21,5,7	1,11,13,18,2,22,5,7	1,11,13,20,22,4,5,7
11,13,2,20,21,5,6,7	11,13,18,2,22,5,7,9	11,13,20,22,4,5,7,9
11,13,19,2,20,21,5,7	1,11,13,18,2,21,5,7	1,11,13,20,21,4,5,7
11,13,15,2,20,21,5,7	11,13,18,2,21,5,7,9	11,13,20,21,4,5,7,9



## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.16)

čvor sa PMU uređajem
1,13,15,18,21,22,4,7
1,12,13,18,21,4,5,7
1,13,18,2,21,4,5,7
1,13,18,19,21,4,5,7
1,12,13,15,18,21,4,7
1,13,17,18,21,4,5,7
1,13,15,16,18,21,4,7
1,13,15,18,21,23,4,7
1,13,18,20,21,4,5,7
1,13,18,21,22,4,5,7
1,13,16,18,21,4,5,7
1,13,15,18,21,4,6,7
1,13,15,18,21,3,4,7
1,13,18,21,4,5,6,7
1,13,15,18,21,4,5,7
1,13,14,18,21,4,7,9
13,14,18,21,4,7,8,9
13,14,18,2,21,4,7,9
13,14,18,21,4,5,7,9
13,14,18,20,21,4,7,9
13,14,18,21,22,4,7,9
13,14,18,21,4,6,7,9
13,14,17,18,21,4,7,9
12,13,14,18,21,4,7,9
13,14,18,21,23,4,7,9
13,14,16,18,21,4,7,9
13,14,18,19,21,4,7,9
10,13,14,18,21,4,7,9
13,14,15,18,21,4,7,9
13,14,18,21,3,4,7,9
1,13,18,21,4,5,7,9
13,18,21,4,5,7,8,9
1,13,15,18,21,4,7,9
13,15,18,21,4,7,8,9
13,18,20,21,4,5,7,9
13,15,18,19,21,4,7,9
13,18,21,3,4,5,7,9
12,13,15,18,21,4,7,9
13,18,2,21,4,5,7,9
13,16,18,21,4,5,7,9
13,15,16,18,21,4,7,9
12,13,18,21,4,5,7,9
13,15,18,2,21,4,7,9
10,13,18,21,4,5,7,9
13,15,18,21,4,6,7,9

čvor sa PMU uređajem
13,15,18,21,23,4,7,9
13,18,21,4,5,6,7,9
13,18,21,23,4,5,7,9
13,18,19,21,4,5,7,9
13,15,18,21,4,5,7,9
13,15,18,20,21,4,7,9
13,15,17,18,21,4,7,9
13,17,18,21,4,5,7,9
13,15,18,21,22,4,7,9
13,15,18,21,3,4,7,9
10,13,15,18,21,4,7,9
13,18,21,22,4,5,7,9
1,10,13,14,18,22,3,7
1,13,14,18,22,3,7,8
1,13,14,18,22,3,7,9
13,14,18,22,3,7,8,9
1,13,14,18,20,22,3,7
13,14,17,18,22,3,7,9
13,14,18,19,22,3,7,9
1,12,13,14,18,22,3,7
1,13,14,15,18,22,3,7
1,13,14,18,22,23,3,7
1,13,14,18,22,3,6,7
1,13,14,18,2,22,3,7
13,14,18,22,3,6,7,9
13,14,18,2,22,3,7,9
1,13,14,17,18,22,3,7
13,14,15,18,22,3,7,9
1,13,14,16,18,22,3,7
13,14,16,18,22,3,7,9
10,13,14,18,22,3,7,9
13,14,18,20,22,3,7,9
13,14,18,22,23,3,7,9
1,13,14,18,19,22,3,7
12,13,14,18,22,3,7,9
1,10,13,14,18,21,3,7
1,13,14,18,21,3,7,8
1,13,14,18,21,3,7,9
13,14,18,21,3,7,8,9
13,14,18,21,3,6,7,9
1,13,14,18,19,21,3,7
13,14,15,18,21,3,7,9
1,12,13,14,18,21,3,7
10,13,14,18,21,3,7,9
13,14,18,2,21,3,7,9

čvor sa PMU uređajem
1,13,14,17,18,21,3,7
13,14,16,18,21,3,7,9
1,13,14,18,21,22,3,7
1,13,14,15,18,21,3,7
1,13,14,18,2,21,3,7
1,13,14,18,20,21,3,7
13,14,18,21,22,3,7,9
13,14,17,18,21,3,7,9
1,13,14,18,21,23,3,7
13,14,18,20,21,3,7,9
1,13,14,16,18,21,3,7
13,14,18,19,21,3,7,9
13,14,18,21,23,3,7,9
1,13,14,18,21,3,6,7
12,13,14,18,21,3,7,9
1,10,13,18,2,22,5,7
1,13,18,2,22,5,7,8
1,13,18,2,22,5,7,9
13,18,2,22,5,7,8,9
13,18,2,22,5,6,7,9
13,15,18,2,22,5,7,9
1,13,18,19,2,22,5,7
13,14,18,2,22,5,7,9
1,13,14,18,2,22,5,7
13,17,18,2,22,5,7,9
1,13,18,2,22,3,5,7
1,13,18,2,20,22,5,7
13,16,18,2,22,5,7,9
13,18,2,22,3,5,7,9
1,13,15,18,2,22,5,7
1,13,18,2,22,23,5,7
10,13,18,2,22,5,7,9
13,18,19,2,22,5,7,9
1,13,18,2,22,5,6,7
1,13,16,18,2,22,5,7
1,13,17,18,2,22,5,7
13,18,2,20,22,5,7,9
13,18,2,22,23,5,7,9
1,12,13,18,2,22,5,7
12,13,18,2,22,5,7,9
1,10,13,18,2,21,5,7
1,13,18,2,21,5,7,8
1,13,18,2,21,5,7,9
13,18,2,21,5,7,8,9
1,12,13,18,2,21,5,7



## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.16)

čvor sa PMU uređajem
13,17,18,2,21,5,7,9
13,14,18,2,21,5,7,9
13,18,19,2,21,5,7,9
1,13,18,19,2,21,5,7
13,18,2,21,22,5,7,9
10,13,18,2,21,5,7,9
1,13,16,18,2,21,5,7
1,13,14,18,2,21,5,7
1,13,15,18,2,21,5,7
1,13,17,18,2,21,5,7
1,13,18,2,21,22,5,7
1,13,18,2,21,3,5,7
1,13,18,2,21,23,5,7
13,16,18,2,21,5,7,9
1,13,18,2,21,5,6,7
13,18,2,21,3,5,7,9
13,15,18,2,21,5,7,9
13,18,2,21,5,6,7,9
13,18,2,20,21,5,7,9
13,18,2,21,23,5,7,9
1,13,18,2,20,21,5,7
12,13,18,2,21,5,7,9
1,10,13,18,22,3,5,7
1,13,18,22,3,5,7,8
1,13,18,22,3,5,7,9
13,18,22,3,5,7,8,9
1,13,18,22,23,3,5,7
13,18,22,3,5,6,7,9
1,12,13,18,22,3,5,7
1,13,18,19,22,3,5,7
10,13,18,22,3,5,7,9
1,13,14,18,22,3,5,7
1,13,16,18,22,3,5,7
13,17,18,22,3,5,7,9
13,18,19,22,3,5,7,9
1,13,15,18,22,3,5,7
1,13,18,20,22,3,5,7
13,18,22,23,3,5,7,9
13,16,18,22,3,5,7,9
13,14,18,22,3,5,7,9
13,18,20,22,3,5,7,9
1,13,18,22,3,5,6,7
1,13,17,18,22,3,5,7
13,15,18,22,3,5,7,9
12,13,18,22,3,5,7,9

čvor sa PMU uređajem
1,10,13,18,21,3,5,7
1,13,18,21,3,5,7,8
1,13,18,21,3,5,7,9
13,18,21,3,5,7,8,9
13,15,18,21,3,5,7,9
1,13,15,18,21,3,5,7
1,13,17,18,21,3,5,7
1,13,18,21,22,3,5,7
13,18,21,22,3,5,7,9
13,18,20,21,3,5,7,9
13,18,21,3,5,6,7,9
1,13,18,21,3,5,6,7
1,12,13,18,21,3,5,7
1,13,14,18,21,3,5,7
13,18,19,21,3,5,7,9
1,13,16,18,21,3,5,7
13,16,18,21,3,5,7,9
13,18,21,23,3,5,7,9
1,13,18,19,21,3,5,7
1,13,18,21,23,3,5,7
10,13,18,21,3,5,7,9
1,13,18,20,21,3,5,7
13,14,18,21,3,5,7,9
13,17,18,21,3,5,7,9
12,13,18,21,3,5,7,9
1,14,16,17,18,21,4,7
14,16,17,18,21,4,7,9
1,14,16,17,18,21,3,7
14,16,17,18,21,3,7,9
14,16,17,18,22,4,7,9
1,14,16,17,18,22,4,7
14,16,17,18,22,3,7,9
1,14,16,17,18,22,3,7
1,15,16,17,18,22,4,7
15,16,17,18,22,4,7,9
1,15,16,17,18,21,4,7
15,16,17,18,21,4,7,9
1,13,14,20,22,23,4,7
1,13,14,20,21,23,4,7
1,13,15,20,21,23,4,7
1,13,15,20,22,23,4,7
1,13,20,22,23,4,5,7
1,13,20,21,23,4,5,7
13,14,20,22,23,4,7,9
13,14,20,21,23,4,7,9

čvor sa PMU uređajem
13,20,22,23,4,5,7,9
13,20,21,23,4,5,7,9
13,15,20,22,23,4,7,9
13,15,20,21,23,4,7,9
13,14,20,21,23,3,7,9
13,14,20,22,23,3,7,9
1,13,14,20,22,23,3,7
1,13,14,20,21,23,3,7
13,20,22,23,3,5,7,9
1,13,20,22,23,3,5,7
13,20,21,23,3,5,7,9
1,13,20,21,23,3,5,7
1,13,2,20,22,23,5,7
13,2,20,22,23,5,7,9
1,13,2,20,21,23,5,7
13,2,20,21,23,5,7,9
1,13,14,19,22,23,4,7
1,13,14,19,21,23,4,7
1,13,19,21,23,4,5,7
1,13,15,19,21,23,4,7
1,13,15,19,22,23,4,7
1,13,19,22,23,4,5,7
13,14,19,22,23,4,7,9
13,14,19,21,23,4,7,9
13,15,19,21,23,4,7,9
13,15,19,22,23,4,7,9
13,19,21,23,4,5,7,9
13,19,22,23,4,5,7,9
13,14,19,21,23,3,7,9
13,14,19,22,23,3,7,9
1,13,14,19,22,23,3,7
1,13,14,19,21,23,3,7
13,19,2,22,23,5,7,9
1,13,19,2,22,23,5,7
13,19,2,21,23,5,7,9
1,13,19,2,21,23,5,7
1,13,19,22,23,3,5,7
13,19,22,23,3,5,7,9
13,19,21,23,3,5,7,9
1,13,19,21,23,3,5,7
11,13,16,2,20,21,5,7
11,13,2,20,22,5,7,8
11,13,16,18,2,21,5,7
11,13,15,18,2,21,5,7
1,11,13,15,20,22,4,7

## 7 Apendiks

(nastavak Tabele 7.16)

čvor sa PMU uređajem
11,12,13,2,20,21,5,7
11,13,17,2,20,22,5,7
11,13,15,2,20,22,4,7
11,13,15,2,20,21,4,7
11,13,14,2,20,22,4,7
11,13,14,2,20,22,3,7
1,11,13,18,22,4,5,7
11,13,14,2,20,21,4,7
11,13,14,2,20,21,3,7
11,13,19,2,22,5,6,8
11,13,19,2,21,5,6,8
1,11,13,19,2,22,5,7
11,13,14,20,21,3,7,9

čvor sa PMU uređajem
11,13,18,2,22,4,5,7
11,13,17,18,2,22,5,7
11,13,18,2,21,5,6,7
11,13,18,19,2,22,5,7
10,11,13,18,2,22,5,7
11,13,14,18,2,22,5,7
1,13,14,17,18,22,4,7
11,13,18,2,21,23,5,7
11,12,13,18,2,22,5,7
11,13,17,18,2,21,5,7
10,11,13,18,2,21,5,7
11,13,16,18,2,22,5,7
1,11,13,14,18,22,4,7

čvor sa PMU uređajem
11,13,15,20,22,4,7,9
1,11,13,15,20,21,4,7
11,13,15,20,21,4,7,9
1,11,13,20,22,3,5,7
11,13,20,22,3,5,7,9
1,11,13,20,21,3,5,7
11,13,20,21,3,5,7,9
13,15,18,22,3,4,7,9
1,11,13,14,20,22,3,7
11,13,14,20,22,3,7,9
1,11,13,14,20,21,3,7

# Literatura

- [1] Amin, S. Massoud, and Bruce F. Wollenberg. "Toward a smart grid: power delivery for the 21st century." *IEEE power and energy magazine* 3.5 (2005): 34-41.
- [2] Avila-Rosales, Rene, et al. "Recent experience with a hybrid SCADA/PMU on-line state estimator." 2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting. IEEE, 2009.
- [3] Manousakis, Nikolaos M., George N. Korres, and Pavlos S. Georgilakis. "Taxonomy of PMU placement methodologies." *IEEE Transactions on Power Systems* 27.2 (2012): 1070-1077.
- [4] Xu, Bei, and Ali Abur. "Observability analysis and measurement placement for systems with PMUs." *IEEE PES Power Systems Conference and Exposition*, 2004.. IEEE, 2004.
- [5] Gou, Bei. "Optimal placement of PMUs by integer linear programming." *IEEE Transactions on power systems* 23.3 (2008): 1525-1526.
- [6] Rahman, Nadia HA, and Ahmed F. Zobaa. "Optimal PMU placement using topology transformation method in power systems." *Journal of Advanced Research* 7.5 (2016): 625-634.
- [7] Dua, Devesh, et al. "Optimal multistage scheduling of PMU placement: An ILP approach." *IEEE Transactions on Power delivery* 23.4 (2008): 1812-1820.
- [8] Korkali, Mert, and Ali Abur. "Placement of PMUs with channel limits." 2009 IEEE power & energy society general meeting. IEEE, 2009.
- [9] Miljanić, Z., I. Djurović, and I. Vujošević. "Optimal placement of PMUs with limited number of channels." *Electric Power Systems Research* 90 (2012): 93-98.
- [10] Khokhlov, M. V., et al. "Optimal PMU placement for topological observability of power system: Robust measurement design in the space of phasor variables." 2016 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT-Europe). IEEE, 2016.
- [11] Korkali, Mert, and Ali Abur. "Impact of network sparsity on strategic placement of phasor measurement units with fixed channel capacity." *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. IEEE, 2010.
- [12] Abiri, Ebrahim, et al. "Optimal PMU placement method for complete topological observability of power system under various contingencies." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 61 (2014): 585-593.
- [13] Emami, Roozbeh, and Ali Abur. "Robust measurement design by placing synchronized phasor measurements on network branches." *IEEE Transactions on power systems* 25.1 (2009): 38-43.
- [14] Nuqui, Reynaldo F., and Arun G. Phadke. "Phasor measurement unit placement techniques for complete and incomplete observability." *IEEE Transactions on Power Delivery* 20.4 (2005): 2381-2388.

- [15] Khajeh, Kiarash Gharani, et al. "Integrated model considering effects of zero injection buses and conventional measurements on optimal PMU placement." *IEEE Transactions on Smart Grid* 8.2 (2015): 1006-1013.
- [16] Kavasseri, Rajesh, and Sudarshan K. Srinivasan. "Joint placement of phasor and power flow measurements for observability of power systems." *IEEE Transactions on Power Systems* 26.4 (2011): 1929-1936.
- [17] Amare, Kunal, Virgilio A. Centeno, and Anamitra Pal. "Unified PMU placement algorithm for power systems." 2015 North American Power Symposium (NAPS). IEEE, 2015.
- [18] Göl, Murat, and Ali Abur. "Optimal PMU placement for state estimation robustness." *IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies, Europe*. IEEE, 2014.
- [19] Theodorakatos, Nikolaos P. "Optimal phasor measurement unit placement for numerical observability using branch-and-bound and a binary-coded genetic algorithm." *Electric Power Components and Systems* 47.4-5 (2019): 357-371.
- [20] Roy, BK Saha, A. K. Sinha, and A. K. Pradhan. "An optimal PMU placement technique for power system observability." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 42.1 (2012): 71-77.
- [21] Chakrabarti, Saikat, Elias Kyriakides, and Demetrios G. Eliades. "Placement of synchronized measurements for power system observability." *IEEE Transactions on power delivery* 24.1 (2008): 12-19.
- [22] Manousakis, Nikolaos M., and George N. Korres. "A weighted least squares algorithm for optimal PMU placement." *IEEE Transactions on Power Systems* 28.3 (2013): 3499-3500.
- [23] Theodorakatos, Nikolaos P., Nikolaos M. Manousakis, and George N. Korres. "A sequential quadratic programming method for contingency-constrained phasor measurement unit placement." *International Transactions on Electrical Energy Systems* 25.12 (2015): 3185-3211.
- [24] Müller, Heloisa H., and Carlos A. Castro. "Genetic algorithm-based phasor measurement unit placement method considering observability and security criteria." *IET Generation, Transmission & Distribution* 10.1 (2016): 270-280.
- [25] Gopakumar, Pathirikkat, Maddikara Jaya Bharata Reddy, and Dusmanta Kumar Mohanta. "A novel topological genetic algorithm-based phasor measurement unit placement and scheduling methodology for enhanced state estimation." *Electric Power Components and Systems* 43.16 (2015): 1843-1858.
- [26] Theodorakatos, N. P., N. M. Manousakis, and G. N. Korres. "Optimal placement of PMUs in power systems using binary integer programming and genetic algorithm." (2014): 23-6.
- [27] Peng, Jiangnan, Yuanzhang Sun, and H. F. Wang. "Optimal PMU placement for full network observability using Tabu search algorithm." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 28.4 (2006): 223-231.
- [28] Vedik, B., and Ashwani K. Chandel. "Optimal placement of PMUs using differential evolution." 2013 International Conference on Intelligent Systems and Signal Processing (ISSP). IEEE, 2013.
- [29] Dalali, Milad, and Hossein Kazemi Karegar. "Optimal PMU placement for full observability of the power network with maximum redundancy using modified binary cuckoo optimisation algorithm." *IET Generation, Transmission & Distribution* 10.11 (2016): 2817-2824.

- [30] N.Rajaković: Analiza elektroenergetskih sistema 2, Akademska misao, 2010
- [31] Bonanomi, P. "Phase angle measurements with synchronized clocks-principle and applications." IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 12 (1981): 5036-5043.
- [32] A.Phadke, J.Throp: Synchronized Phasor Measurements and Their Application, Springer, 2008
- [33] Phadke, Arun G., M. Ibrahim, and T. Hlibka. "Fundamental basis for distance relaying with symmetrical components." IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 96.2 (1977): 635-646.
- [34] Habiballah, Ibrahim O., and Malcolm R. Irving. "Observability analysis for state estimation using linear programming." IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution 148.2 (2001): 142-145.
- [35] "Macrodyne Model 1690 PMU Disturbance Recorder", Macrodyne Inc. 4 Chelsea Place, Clifton Park, NY, 12065.
- [36] Atputharajah, A., & Saha, T. K. (2009, December). Power system blackouts-literature review. In 2009 International Conference on Industrial and Information Systems (ICIIS) (pp. 460-465). IEEE.
- [37] "IEEE Standard for Synchrophasors for Power Systems", C37.118–2005, pp 56–57, IEEE 1344–1995. Sponsored by the Power System Relaying Committee of the Power Engineering Society, pp 56–57.
- [38] Narendra, Krish. "Role Of Phasor Measurement Unit (Pmu) In Wide Area Monitoring And Control." Erlphase Power Technology Ltd, Winnipeg, Canada, Tutorial-Cbip (2007).
- [39] Matsumoto, S., et al. "Wide-area situational awareness (WASA) system based upon international standards." (2012): 82-82.
- [40] Gomez-Exposito, Antonio, et al. "On the use of PMUs in power system state estimation." Proceedings of the 17th PSCC (2011).
- [41] Oh, H. (2017). Situational Awareness with PMUs and SCADA. arXiv preprint arXiv:1706.00795.
- [42] Overbye, Tom, et al. "Using PMU data to increase situational awareness." Power System Engineering Research Center (PSERC) Publication 21 (2010): 10-16.
- [43] Giri, Jay, et al. "The situation room: Control center analytics for enhanced situational awareness." IEEE Power and Energy Magazine 10.5 (2012): 24-39.
- [44] Korres, George N., and Nikolaos M. Manousakis. "State estimation and bad data processing for systems including PMU and SCADA measurements." Electric Power Systems Research 81.7 (2011): 1514-1524.
- [45] Das, Kaushik, et al. "Real-time hybrid state estimation incorporating SCADA and PMU measurements." 2012 3rd IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT Europe). IEEE, 2012.
- [46] U.S.-Canada Power System Outage Task Force, "Final Report on the August 14, 2003 Blackout in the United States and Canada: Causes and Recommendations.," US FERC Report, 2004. [Online]. Available: <http://www.ferc.gov/industries/electric/industryact/reliability/blackout/ch1-3.pdf>.

- [47] Parashar, Manu, Jim Dyer, and Terry Bilke. "EIPP real-time dynamics monitoring system." Electric Power Group, Midwest ISO from Eastern Interconnection Phasor Projects, or NASP, EUA (2006).
- [48] P.Kundur: Power system stability and control, McGraw-Hill Education, 1994
- [49] Dong, X. Z., Cao, R. B., Wang, B., Shi, S. X., & Bak, D. (2013). India blackout and three functions of protective relay. *Power System Protection and Control*, 41(2), 19-25.
- [50] [https://docstore.entsoe.eu/Documents/News/2019/190522\\_SOC\\_TOP\\_11.6\\_Task%20Force%20Significant%20Frequency%20Deviations\\_External%20Report.pdf](https://docstore.entsoe.eu/Documents/News/2019/190522_SOC_TOP_11.6_Task%20Force%20Significant%20Frequency%20Deviations_External%20Report.pdf).
- [51] Yoon, Y. J. (2006). Study of the utilization and benefits of phasor measurement units for large scale power system state estimation (Doctoral dissertation, Texas A&M University).
- [52] C. Wendler: "Groebner Bases with an Application to Integer Programming", (<http://documents.kenyon.edu/math/CWendler.pdf>), 2004
- [53] Lu, Chengchao, et al. "An Optimal PMU Placement with Reliable Zero Injection Observation." *IEEE Access* 6 (2018): 54417-54426.
- [54] <https://www.qualitrolcorp.com/products/phasor-measurement/qualitrol-pmu-91836-phasor-measurement-unit/>
- [55] Buchberger, Bruno. "Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal." PhD thesis, Universitat Innsbruck (1965).
- [56] Buchberger, B. (2006). Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *Journal of symbolic computation*, 41(3-4), 475-511.
- [57] Hironaka, Heisuke. "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: II." *Annals of Mathematics* (1964): 205-326.
- [58] B.Malešević: Grebnerove baze i primena, Predavanja sa master kursa Simoblička algebra 2008, URL: <http://simba.etf.rs>
- [59] Orlović, Dušan, Ivan Stanojević, and Vojin Šenk. "Rešavanje problema mrežnog koda upotrebom Grobnerovih baza.", 18. Telekomunikacioni forum TELFOR 2010
- [60] Kendrick, Kimberly D., et al. "An inverse kinematic mathematical model using groebner basis theory for arm swing movement in the gait cycle." *IMA Preprint Series #2329* (2010).
- [61] Wang, Yan, Lu-bin Hang, and Ting-li Yang. "Inverse Kinematics Analysis of General 6R Serial Robot Mechanism Based on Groebner Base." *Frontiers of Mechanical Engineering in China* 1.1 (2006): 115-124.
- [62] Sala, Massimiliano. "Gröbner bases, coding, and cryptography: a guide to the state-of-art." *Gröbner Bases, Coding, and Cryptography*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. 1-8.
- [63] Wang, Yan, Lu-bin Hang, and Ting-li Yang. "Inverse Kinematics Analysis of General 6R Serial Robot Mechanism Based on Groebner Base." *Frontiers of Mechanical Engineering in China* 1.1 (2006): 115-124.
- [64] B.Banjac, G.Dimitrijević, S.Obradović, N.Ajduković, M.Čampraga, B.Malešević: "Primena Grebnerovih baza na problem inverzne kinematike u robotici, III Simpozijum Matematika i primene, 2012

- [65] Buchberger, B., & Kauers, M. (2010). Groebner basis. *Scholarpedia*, 5(10), 7763.
- [66] Malesevic, Branko J., Ivana V. Jovovic, and Milan Z. Campara. "Groebner bases in Java with applications in computer graphics." *arXiv preprint arXiv:1005.3992* (2010).
- [67] Ning, Jiabin, et al. "The application of the Groebner basis technique in power flow study." *41st North American Power Symposium. IEEE*, 2009.
- [68] Kavasseri, Rajesh G., and Parthasarathi Nag. "An algebraic geometric approach to analyze static voltage collapse in a simple power system model." *Fifteenth National Power Systems Conference*. 2008.
- [69] Duan, Nan, et al. "Analysis of power system oscillation frequency using differential Groebner basis and the harmonic balance method." *2015 IEEE Power & Energy Society General Meeting. IEEE*, 2015.
- [70] Yang, Kehu, et al. "Selective harmonic elimination with Groebner bases and symmetric polynomials." *IEEE transactions on Power Electronics* 31.4 (2015): 2742-2752.
- [71] Cox, D., Little, J., & OShea, D. (2013). *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer Science & Business Media.
- [72] Makram, Elham, Zheng Zhao, and Adly Girgis. "An improved model in optimal PMU placement considering sensitivity analysis." *2011 IEEE/PES Power Systems Conference and Exposition. IEEE*, 2011.
- [73] Baldwin, Thomas L., et al. "Power system observability with minimal phasor measurement placement." *IEEE Transactions on Power Systems* 8.2 (1993): 707-715.
- [74] Bečejac, Vladimir, and Predrag Stefanov. "Groebner bases algorithm for optimal PMU placement." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 115 (2020): 105427.

## 8 Biografija autora

VLADIMIR B. BEČEJAC je rođen 17. maja 1989. godine u SMEDEREVSKOJ PALANCI. Osnovnu školu „HEROJ RADMILA ŠIŠKOVIĆ“ i „PALANAČKU GIMAZIJU“ završio je sa Vukovim diplomama i kao matematičar generacije. Školske 2008/09. godine upisao je Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Odsek za energetiku, Katedra za elektroenergetske sisteme. Osnovne akademske studije završio je školske 2011/12. godine sa prosečnom ocenom 9,33. Diplomirao je 6. jula 2012. godine sa ocenom 10 na temu „Simulacija kvarova u trofaznim transformatorima“ kod prof. dr MILENKA ĐURIĆA. Master studije na Elektrotehničkom fakultetu (modul: Elektroenergetski sistemi) upisao je u oktobru 2012. godine. Sve ispite na izabranom modulu položio je sa ocenama 10. Master rad pod nazivom „Proračun parametara, Ferantijevog efekta i prirodne snage nadzemnih elektroenergetskih vodova“ je odbranio 11. septembra 2013. godine sa ocenom 10. Mentor rada je bio prof. dr MILENKO ĐURIĆ. Doktorske akademske studije na Elektrotehničkom fakultetu, modul Elektroenergetske mreže i sistemi je upisao 2014. godine i položio sve ispite sa prosečnom ocenom 10. Mentor na doktorskim studijama je prof. dr PREDRAG STEFANOV.

Tokom studija bio je aktivan u studentskom organizovanju: član Saveta Elektrotehničkog fakulteta tokom školskih godina 2011/12. i 2012/13, član Nastavno – naučnog veća Elektrotehničkog fakulteta školskih godina 2010/11. 2011/12. i 2012/13, delegat Odseka za energetiku tokom osnovnih i master studija, predsednik Studenskog parlamenta, tri godine je bio demonstrator na predmetima Teorija električnih kola i Praktikum iz računarske analize kola kod prof. dr MILKE POTREBIĆ, a dve godine na predmetima Matematika 1, 2 i 3 kod prof. dr NENADA CAKIĆA. Tokom studiranja sa prof. dr NENADOM CAKIĆEM napisao je zbirke zadataka iz Matematike 3 pod naslovom „Zbirka rešenih zadataka iz Matematike 3 - funkcije više promenljivih, višestruki integrali“ kao i „Zbirka rešenih testova iz matematike za upis na Elektrotehnički fakultet u Beogradu“. Obe zbirke su za sada doživele dva izdanja.

Od 2013. godine VLADIMIR BEČEJAC radi u AD Elektromreža Srbije. Danas je na poziciji vodećeg inženjera za operativno upravljanje u Nacionalnom dispečerskom centru Srbije.

Glavne oblasti istraživanja VLADIMIRA BEČEJCA su sinhrofazorska tehnologija i njene primene u operativnim centrima upravljanja, estimacija stanja i metode optimizacije u elektroenergetskom sistemu. Dosadašnji rezultati naučno – istraživačkog rada su prikazani u vidu 14 naučnih publikacija: 1 rad u međunarodnim časopisima sa SCI liste, 1 rad u nacionalnim časopisima, 1 na međunarodnoj konferenciji (prihvaćen sinopsis, u fazi izrade), 11 radova na nacionalnim konferencijama.



## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Владимир Бечејац

Број индекса 14/5020

### Изјављујем

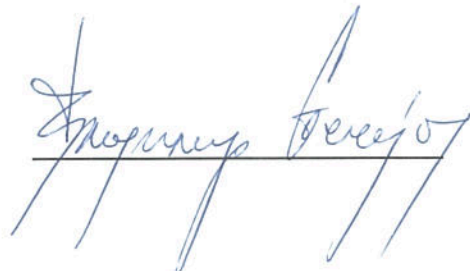
да је докторска дисертација под насловом

**Оптимална поставка синхрофазорских уређаја за обезбеђење потпуне тополошке опсервабилности применом методе Гребнерове базе**

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 20. III 2020.



Владимир Бечејац

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Владимир Бечејац

Број индекса 14/5020

Студијски програм Електротехника и рачунарство

Наслов рада Оптимална поставка синхрофазорских уређаја за обезбеђење  
потпуне тополошке опсервабилности применом методе Гребнерове базе

Ментор проф. др Предраг Стефанов

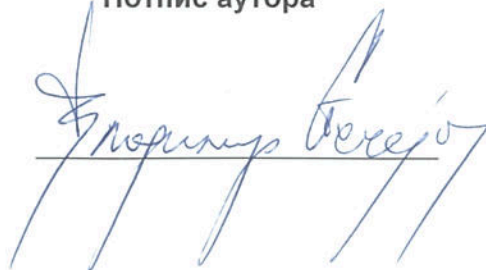
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 20. III 2020.

Потпис аутора



## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**Оптимална поставка синхрофазорских уређаја за обезбеђење потпуне тополошке опсервабилности применом методе Гребнерове базе**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

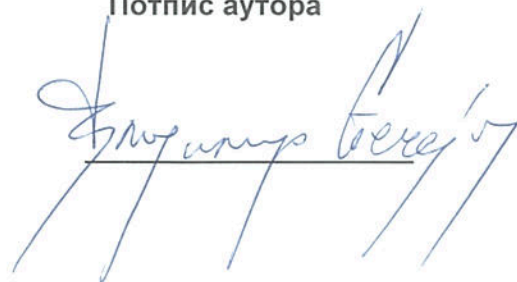
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.  
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

У Београду, 20. III 2020.

Потпис аутора



1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.