UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KONGRUENCIJE NA π-REGULARNIM POLUGRUPAMA

(Doktorska disertacija)

PETAR PROTIĆ

NOVI SAD

1986

S A D R Ž A J

strana

UVOD

Polugrupa je jedna od osnovnih algebarskih struktura. Zbog "siromaštva" ove strukture pristupa se njenom "obogaćivanju", tj. dodavanju nekih specijalnih uslova. Na taj način se dobijaju razne klase polugrupa koje su predmet izučavanja Teorije polugrupa. Dobiveni rezultati direktno utiču na proučavanja "bogatijih" algebarskih struktura, a samim tim i na istraživanja kako u čisto algebarskim tako i u drugim matematičkim disciplinama.

Pojam π-regularnosti prvo je uveden za element prstena, a u Teoriju polugrupa ga uvodi Putcha , |48|. Klasa π-regularnih polugrupa je veoma široka, naprimer obuhvata klasu periodičkih polugrupa, pa je možda to razlog što podrobnije proučavanje ove klase polugrupa počinje tek dve do tri godine unazad. Pri tome ovim polugrupama su davani razni nazivi: stepeno regularne a zatim π-regularne u radovima S. Bogdanovića i S. Milića, kvazi-regularne u radovima J.L. Galbiati i M.L. Veronesi, eventualno regularne u radovima P. Edwardsa i D. Easdowna i kvazi periodičke u radovima Ševrina.

Kongruencije na regularnim polugrupama su dosta proučavane, a kod nas jedino u radovima B. Alimpić i D. Krgović. U ovom radu su ispitivane kongruencije na π-regularnim polugrupama i na nekim njenim podklasama. Ova problematika je do sada, prema dostupnoj literaturi, veoma malo proučavana i to u radovima |8|, |10|, |17|, |23| i uglavnom su proučavane kongruencije koje razdvajaju idempotente. Ovde, u Glavi IV takodje proučavamo ovu vrstu kongruencija, ali sa drugačijim metodološkim pristupom. Kongruencije koje razmatramo u Glavama II, III, V i VI na π-regularnim polugrupama do sada nisu proučavane.

U Glavi I su navedeni osnovni pojmovi o polugrupama i o relacijama na njima. Takodje su dati pojmovi regularne i π-regularne polugrupe i u vezi sa njima su navedeni neki važni rezultati koji se koriste u narednim glavama. Pojmovi i rezultati ove glave nisu originalni već su preuzeti iz citiranih radova i monografija.

U glavi VI nisu originalni pojmovi dopustivog i normalnog razbijanja, dok su svi ostali pojmovi i rezultati originalni.

Na početku Glave II, u Lemi 1, uopštavamo poznatu Lallementovu lemu, a zatim uvodimo pojam r-kongruencije π-regularne polugrupe S (Definicija 1). Ovaj pojam je veoma bitan za ispitivanja koja su vršena u narednim glavama. U Teoremi 1 je dokazano da kongruencija ρ π-regularne polugrupe S jeste r-kongruencija ako i samo ako je S/ρ regularna polugrupa. Ovo znači da ortodoksne, inverzne i grupne kongruencije, koje su kod regularnih polugrupa dosta ispitivane, kod π-regularnih polugrupa moraju biti r-kongruencije. Ovde uvodimo i pojam r-homomorfizma i dokazujemo da na π-regularnoj polugrupi svakoj r-kongruenciji odgovara r-homomorfizam i obratno, svakom r-homomorfizmu odgovara r-kongruencija, (Teorema 2). Zatim uvodimo pojam samokonjugovane podpolugrupe π-regularne polugrupe (Definicija 3) i pojam π-konvencionalne polugrupe (Definicija 4). Rezultati koje dalje dokazujemo opisuju osobine π-konvencionalnih, π-ortodoksnih, π-inverznih i strogo π-inverznih polugrupa i π-grupa pomoću kongruencija, homomorfizama, idempotenata i inverznih elemenata. Pri ovome uopštavamo neke rezultate iz Teorije regularnih polugrupa. Definicijom 5 uvodimo pojam r-poluproste kongruencije koja će u narednim glavamo imati veoma važnu ulogu.

U Tački 1 Glave III najpre uvodimo pojmove inverzno zatvorene, strogo inverzno zatvorene, normalne i r-poluproste podpolugrupe π-regularne polugrupe. Od rezultata ističemo Teoremu 1.1 u kojoj dokazujemo neke važne osobine jezgra (r-poluproste) kongruencije π-ortodoksne polugrupe.

U Tački 2 najpre uvodimo pojam r-polugrupe (Definicija 2.1) koji će za razmatranja u narednim glavama biti veoma bitan. Klasa r-polugrupa je podklasa klase π-regularnih polugrupa, ali je bitno šira od klase regularnih polugrupa što se vidi i iz navedenih primera. Dalje definišemo kongruencijski par strogo π-inverzne r-polugrupe S (Definicija 2.3) i dokazujemo Teoremu 2.2. kojom se tvrdi da svakom kongruencijskom paru odgovara r-poluprosta kongruencija i obratno, svakoj r-poluprostoj kongruenciji odgovara kongruencijski par. Ova teorema uopštava rezultat M. Petricha |45| za inverzne polugrupe.

Glava IV ima tri paragrafa u kojima razmatramo kongruencije koje na π-regularnoj polugrupi razdvajaju idempotente. U ovoj glavi dosta koristimo ekvivalencije L^*, R^* i H^* koje su u radu |16| uvele J.L. Galbiati i M.L. Veronesi. Ove relacije predstavljaju jedno uopštenje poznatih Greenovih relacija. Na početku Tačke 1 dajemo potreban i dovoljan uslov da r - poluprosta kongruencija na π-regularnoj polugrupi razdvaja idempotente (Teorema 1.1), a dalje opisujemo najveću kongruenciju koja razdvaja idempotente na π-regularnoj polugrupi (Teorema 1.2), na r-polugrupi (Posledica 1.1), na π-konvencionalnoj polugrupi (Teorema 1.6), na π-ortodoksnoj r-polugrupi (Teorema 1.7), na strogo π-inverznoj polugrupi (Teorema 1.9) i na strogo π-inverznoj r-polugrupi (Posledica 1.2). Ovi rezultati uopštavaju opise kongruencija koje razdvajaju idempotente na odgovarajućim regularnim polugrupama. Posledica 1.3 opisuje najmanju r-poluprostu kongruenciju koja na r-polugrupi razdvaja idempotente.

Iz prethodnog sledi da na r-polugrupi imamo opise najveće i najmanje r-poluproste kongruencije koje razdvajaju idempotente, što povlači da r-poluproste kongruencije koje na r-polugrupi razdvajaju idempotente čine mrežu. U Tački 2 uvodimo pojmove L^*-(R^*-) zatvorenog, L^*-(R^*-) samokonjugovanog i H^*-regularnog podskupa π-regularne polugrupe. Pomoću ovih i ranije uvedenih pojmova na r-polugrupi definišemo skupove A i B kao familije nekih podskupova sa specijalnim svojstvima. Pomenutu mrežu kongruencija opisujemo pomoću bijekcije iz skupa B na skup svih r-poluprostih kongruencija koje na r-polugrupi razdvajaju idempotente (Teorema 2.4). Ovaj rezultat uopštava opis mreže kongruencija koji je dala R.Fiegenbaum u radu |12| za regularne polugrupe, U Tački 3 su razmatrana još neka svojstva kongruencija koje na π-regularnoj polugrupi i na nekim njenim podklasama razdvajaju idempotente, a uopštavaju se rezultati D. Krgović |29|.

U Glavi V razmatramo grupne kongruencije π-regularne polugrupe. Najpre dajemo opis grupne kongruencije, a cilj daljeg rada je opis najmanje grupne r-poluproste kongruencije na r-polugrupi (Teoreme 3 i 5). Pošto je univerzalna kongruencija $\omega = S\times S$ najveća grupna kongruencija, sledi da grupne r-poluproste kongruencije na r-polugrupi čine mrežu. Teorema 7 daje opis ove mreže pomoću bijekcije između skupa $\bar{C}$ koji definišemo i skupa grupnih r-poluprostih kongruencija na S. Takodje dajemo opis najmanje grupne r-poluproste kongruencije π-ortodoksne r-polugrupe (Posledica 1) i π-konvencionalne r-polugrupe (Teorema 4). Na kraju glave opisujemo najmanju π-ortodoksnu i najmanju inverznu kongruenciju π-regularne polugrupe (Teoreme 9 i 10).

U Glavi VI razmatramo kongruencije čije su restrikcije na skupu idempotenata r-polugrupe jednake. U uvodu glave data je poznata definicija dopustivog razbijanja skupa E idempotenata polugrupe S i navedeno je da kongruencija(π-regularne) polugrupe indukuje na skupu E dopustivo razbijanje. Interesantan je obratni problem. Ako je U najmanja samokonjugovana podpolugrupa r-polugrupe S koja sadrži skup E i τ normalna kongruencija na U, tada je opisana r-poluprosta kongruencija na S koja na skupu E indukuje isto razbijanje kao i τ, (Teorema 1). U Teoremi 2 je opisana najmanja takva kongruencija. J. Meakin je u radu

|35| definisao normalno razbijanje podpolugrupe E ortodoksne polugrupe. Tu definiciju koristimo i kod π-ortodoksnih polugrupa jer je po Teoremi II 5 RegS ortodoksna polugrupa. Na π-ortodoksnoj r-polugrupi dajemo opise najmanje i najveće r-poluproste kongruencije čija se restrikcija na podpolugrupi E poklapa sa ekvivalencijom koja je indukovana normalnim razbijanjem, (Teorema 5 i 6).

Materijal iz Glava II, IV 2, IV 3, V i VI prvi put je izložen ovde, materijal iz Glave III, mada ne u potpunosti, izložen je u radu |46|, a materijal iz Glave IV 1 u radu |47|.

Literatura korišćena pri izradi ovog rada navedena je na kraju i čini je 53 bibliografskih jedinica.

Docent Dr Stojan Bogdanović mi je, kao i u drugim prilikama, i ovaj put svojim savetima bio od izuzetne koristi za šta mu se posebno zahvaljujem.

GLAVA I.

ELEMENTARNI POJMOVI I π-REGULARNE POLUGRUPE

1. ELEMENTARNI POJMOVI

1.1. *Binarnom operacijom* na skupu S nazivamo preslikavanje SxS u S, gde je SxS skup svih uredjenih parova elemenata iz S. Ako je operacija multiplikativna, onda sliku u S elementa (a,b) iz SxS označavamo sa $a\cdot b$. Najčešće je tačka izostavljena i piše se samo ab.

1.2. *Grupoidom* nazivamo uredjeni par $(S,.)$ nepraznog skupa S i binarne operacije "$\cdot$" definisane na njemu. Često ćemo pisati samo S umesto $(S,\cdot)$.

1.3. *Binarna operacija* "$\cdot$" na skupu S naziva se *asocijativnom* ako je ispunjeno

$$(\forall a,b,c \in S)(\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c\ ).$$

Polugrupa je grupoid $(S,\cdot)$, pri čemu je operacija "$\cdot$" asocijativna. Dalje ćemo kraće pisati "S je polugrupa". Podgrupoid polugrupe S ćemo nazivati *podpolugrupa*.

1.4. Elemen e S nazivamo *desnom jedinicom* grupoida S ako je $xe=x$, za svaki $x\in S$. Analogno se definiše *leva jedinica*. Element $e\in S$ je *dvostrana jedinica* grupoida S ili prosto *jedinica* ako je e istovremeno desna i leva jedinica grupoida S.

1.5. *Grupa* je polugrupa S pri čemu je

$$(\forall x \in S)(ex=x)$$

i

$$(\forall x \in S)(\exists x^{-1} \in S)(x^{-1}x=e)$$

gde je sa e označena jedinica u S.

1.6. Polugrupa S je *komutativna* ako je

$$(\forall x\in S)(\forall y\in S)(xy=yx)$$

1.7. Element $x \in S$ nazivamo *idempotentnim* ako je $x^2 = x$. Komutativnu polugrupu čiji je svaki element idempotent nazivamo *polumreža*. Polugrupa S je *pravougaona traka* ako je $aba = a$ za svaki $a,b\in S$.

1.8. *Red polugrupe* S je broj elemenata u S, ako je S konačna, u suprotnom S je beskonačnog reda. Važi da je red $S=\mathrm{kard}S$. Polugrupa čiji je red 1 je trivijalna polugrupa.

Red elementa a polugrupe S je red ciklične podpolugrupe od S koja je generisana sa a. Polugrupa čiji su svi elementi konačnog reda je periodička.

1.9. Preslikavanje f polugrupe S u polugrupu T je *homomorfizam* ako je

$$(af)(bf)=(ab)f$$

za svaki $a,b \in S$. Ako je f na, tada T nazivamo *homomorfnom slikom* od S, a f *epimorfizmom*. Ako je f 1-1, tada ga zovemo *monomorfizmom*, a ako je i 1-1 i na, tada ga zovemo *izomorfizmom*.

1.10. *Binarnom relacijom* ρ na skupu A nazivamo podskup direktnog proizvoda AxA. Pisaćemo $a\,\rho\,b$ i reći a i b su u relaciji ρ ako $(a,b)\in\rho$, a ρ ćemo zvati jednostavno relacijom. Relacija ρ na skupu A je

refleksivna ako je $a\,\rho\,a$,

simetrična ako $a\,\rho\,b$ povlači $b\,\rho\,a$,

tranzitivna ako $a\,\rho\,b$ i $b\,\rho\,c$ povlači $a\,\rho\,c$,

antisimetrična ako $a\,\rho\,b$ i $b\,\rho\,c$ povčači $a=b$

za sve $a,b,c \in S$.

1.11. Relaciju ρ koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna nazivamo *relacijom uredjenja*.

Relaciju ρ koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna nazivamo *relacijom ekvivalencije*.

Ako je ρ relacija ekvivalencije, ili kraće ekvivalencija, skupa A, tada je za $a\in A$ skup $a\rho=\{b\in A:\ a\,\rho\,b\}$ klasa ekvivalencije elementa a. Svaki element klase $a\rho$ je njen pretstavnik, odnosno za svaki $x\in a\rho$ je $x\rho=a\rho$.

1.12. Relacija ekvivalencije polugrupe S je *desna kongruencija* na S ako

$$(\forall a,b,x\in S)(\ (a,b)\in\rho \Rightarrow (ax,bx)\in\rho)$$

Leva kongruencija se definiše dualno.

Relacija ekvivalencije je *kongruencija* ako

$$(\forall a,b,c,d \in S)((\ (a,b)\in\rho \ \wedge\ (c,d)\in\rho) \Rightarrow (ac,bd)\in\rho).$$

Teorema 1.1 |25|. Relacija ρ polugrupe S je kongruencija ako i samo ako ρ jeste i leva i desna kongruencija. $\square$

1.13. Ako je ρ kongruencija polugrupe S, tada skup klasa ekvivalencije u oznaci S/ρ nazivamo *količnik skupom*. Preslikavanje $a \to a\rho$ je *prirodni homomorfizam* iz S na S/ρ i označavamo ga sa nat ρ, pri čemu je S/ρ polugrupa sa operacijom definisanom na sledeći način

$$(a\rho)(b\rho)=(ab)\rho$$

za svaki

$$a\rho, b\rho \in S/\rho .$$

Teorema 1.2 |25| Ako je ρ kongruencija polugrupe S, tada preslikavanje $\mathrm{nat}\rho : S \to S/\rho$ definisano sa

$$x\mathrm{nat}\rho = x\rho \qquad (x \in S)$$

jeste homomorfizam.

Ako je $\phi : S \to T$ homomorfizam polugrupe S u polugrupu T, tada relacija

$$\ker\phi = \phi\cdot\phi^{-1} = \{(a,b) \in SxS : a\phi = b\phi\}$$

jeste kongruencija na S i postoji monomorfizam $\alpha : S/\ker\phi \to T$ takav da je dijagram

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{nat}(\ker\phi)"'] & T \\ S/\ker\phi \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

komutativan, to jest da važi $\mathrm{nat}(\ker\rho)\cdot\alpha=\phi$.

Teorema 1.3 |25| Ako je ρ relacija ekvivalencije polugrupe S, tada je

$$\rho = \{(a,b) \in SxS : (\forall x,y \in S^1)(xay,xby)\in\rho\}$$

najveća kongruencija na S sadržana u ρ.

/-/

2. π-REGULARNE POLUGRUPE

2.1. Polugrupa S je *regularna* ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a=axa).$$

Pojam regularnosti prvi je uveo J. von Neumann (On regular rings, Proc.Nat.Acad.Sci., USA, 22(1936), 707-713) za elemente prstena. Element prstena, je ustvari, regularan ako je regularan kao element multiplikativne polugrupe prstena.

U opštoj teoriji polugrupa regularne polugrupe pod nazivom "demi-groupes inversifs" su prvi put razmatrane od strane G. Thierrina (Sur une condition necessaire et suffisante pour qu´un semigroupe soit un groupe, C.T.Aca.Sci., Paris, 232 (1951), 376-378).

G.Thierrin je u pomenutom radu, izmedju ostalog, dokazao sledeću teoremu koju ćemo kasnije koristiti.

Teorema 2.1. Ako regularna polugrupa S ima samo jedan idempotent, onda S jeste grupa. /-/

2.2. Polugrupa S je *π-regularna* ako

$$(\forall a \in S)(\exists m \in N)(\exists x \in S)(a^m=a^m x a^m),$$

a sa N je označen skup prirodnih brojeva.

Pojam π-regularnosti u teoriju polugrupa uvodi M.S. Putcha (Semilattice decomposition of semigroups, Semigroup Forum 6, No 1, 1973, 12-34). Podrobnije proučavanje ovih polugrupa počinje tek tri-četiri godine unazad i to pod raznim imenima: stepeno regularne a zatim π-regularne u radovima

S.Bogdanovića i S. Bogdanovića i S. Milića, kvazi-regularne u radovima J.L. Galbiati i M.L. Veronesi, eventualno regularne u radovima P. Edwardsa i D. Easdowna i kvazi-periodičke u radovima Ševrina.

Klasa π-regularnih polugrupa je veoma široka, bitno šira od klase regularnih polugrupa, a obuhvata, pored ostalih, i sve periodičke polugrupe.

Sa RegS ćemo označavati skup svih regularnih elemenata π-regularne polugrupe S, to jest, $\mathrm{Reg}S=\{a \in S: (\exists x \in S)\, a=axa\}$.

Ako je $a=axa$, tada $(ax)^2=axax=ax$ što znači da skup idempotenata π-regularne polugrupe S nije prazan i označavaćemo ga sa $E(S)$.

2.3. Element a' polugrupe S je *inverzan* elementu $a \in S$ ako je $a=aa'a$ i $a'=a'aa'$. Skup svih elemenata polugrupe S inverznih elementa $a \in S$ ćemo označavati sa $V(a)$. Ako je S regularna polugrupa, tada je $V(a)\neq\emptyset$ za svaki $a \in S$, i za $A \subseteq S$ je $V(A)=\bigcup\{V(a) : a \in A\}$. Na π-regularnoj polugrupi je $V(a)\neq\emptyset$ za svaki $a \in \mathrm{Reg}S$.

S. Bogdanović, |2| dokazuje sledeći rezultat čime uopštava poznatu Lallementovu lemu koja važi za regularne polugrupe.

Teorema 2.2. Neka je ρ kongruencija π-regularne polugrupe S i $A,B \in S/\rho$ takvi da je $A=ABA$ i $B=BAB$. Tada postoje $a,b \in S$ takvi da $a \in A$, $b \in B$ i važi $a=aba$, $b=bab$. /=7

2.5. Polugrupa S je *ortodoksna* ako je regularna i idempotenti čine podpolugrupu. Polugrupa S je π-ortodoksna ako je π-regularna i idempotentni čine podpolugrupu, |1| .

Teorema 2.3 |43| Sledeća tri uslova za polugrupu S su ekvivalentna:

(i) $E(S)$ je podpolugrupa od S ;

(ii) Za svaki $a,b \in S$ i njihove inverzne a',b', element $b'a'$ je inverzan za ab;

(iii) Za svaki $a,b,x,y \in S$, $a=axa$ i $b=byb$ povlači $ab=abyxyb$.

$\boxed{-}$

Iz ove teoreme neposredno sledi

Posledica 2.4. Ako je S π-ortodoksna polugrupa, tada je $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S. $\boxed{-}$

2.6. Ako je ρ kongruencija polugrupe S, tada se njeno *jezgro* označava sa $\ker\rho$ i definiše sa

$$\ker\rho = \{a \in S: (\exists e \in E(S))\ a\ \rho\ e\}.$$

J. Meakin, |37| je dokazao sledeću

Teorema 2.5. Neka je S ortodoksna polugrupa i ρ kongruencija na S, tada je $V(\ker\rho) \subseteq \ker\rho$. $\boxed{-}$

2.7. Polugrupa S je inverzna ako za svaki $a \in S$ postoji jedinstveni $x \in S$ da je $a=axa$ i $x=xax$.

Teorema 2.6. |25| Polugrupa S je inverzna ako i samo ako S je regularna i idempotenti iz S komutiraju. $\boxed{-}$

Sledeća dva pojma uvodi S.Bogdanović u radu |1|.

Polugrupa S je π-inverzna ako za svaki $a \in S$ postoji prirodan broj m i jedinstveni $x \in S$ da je $a^m=a^mxa^m$ i $x=xa^mx$. Pokazuje se da kod π-inverzne polugrupe idempotenti ne moraju činiti podpolugrupu.

Polugrupa S je *strogo π-inverzna* ako je π-regularna i idempotenti čine polumrežu. U pomenutom radu S. Bogdanović dokazuje da je polugrupa S strogo π-inverzna ako i samo ako je π-inverzna i idempotenti čine podpolugrupu.

Polugrupa S je *π-grupa* ako je π-regularna i ima jedinstven idempotent. Ovaj pojam uvode S. Bogdanović i S.Milić u radu |5| čime direktno uopštavaju pojam grupe kao regularne polugrupe koja ima jedinstven idempotent.

2.8. Relacija $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ i $\mathcal{H}^*$ definisane na π-regularnoj polugrupi S na način

(i) $a\mathcal{L}^*b \iff Sa^m = Sb^n$

(ii) $a\mathcal{R}^*b \iff a^mS = b^nS$

(iii) $\mathcal{H}^* \iff \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*$

gde su m i n najmanji prirodni brojevi da $a^m, b^n \in \mathrm{Reg}S$, jesu relacije ekvivalencije. Ove relacije uvode J. L. Galbiati i M. L. Veronesi |16|. Na regularnoj polugrupi relacije $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ i $\mathcal{H}^*$ se poklapaju sa poznatim Greenovim relacijama $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$, respektivno. U pomenutom radu autori su dokazali sledeća tvrdjenja koja će biti veoma bitna za dalji rad.

Teorema 2.7. Neka je S π-regularna polugrupa.

(i) Svaka $\mathcal{H}^*$-klasa sadrži najviše jedan idempotent.

(ii) Ako $a,b \in S$ i p i q najmanji prirodni brojevi takvi da $a^p, b^q \in \mathrm{Reg}S$, tada $(a,b) \in \mathcal{H}^*$ ako i samo ako postoje $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$ takvi da je $a'a^p = b'b^q$, $a^pa' = a^qb'$.

Iz dokaza tvrdjenja (ii) može se uočiti sledeće:

$$a\mathcal{L}^*b \Rightarrow (\forall a'\in V(a^p))(\exists b'\in V(b^q))\ a'a^p=b'b^q$$

i

$$a\mathcal{H}^*b \Rightarrow (\forall a'\in V(a^p))(\exists b'\in V(b^q))\ a'a^p=b'b^q,\ a^pa'=b^qb'.$$ [7]

Neka je S π-regularna polugrupa. $\mathcal{L}^*$-($\mathcal{R}^*$-) klasu koja zadrži element $a\in S$ označavamo sa L^*_a (R^*_a). Uredjenje u skupu $\mathcal{L}^*$-($\mathcal{R}^*$-) klasa polugrupe S uvodimo na sledeći način:

$$L^*_a \le L^*_b \iff S^m_a \subseteq S^n_b \quad (R^*_a \le R^*_b \iff a^mS\subseteq b^nS)$$

gde su m i n najmanji prirodni brojevi da $a^m, b^n \in \mathrm{Reg}S$.

2.9. Skup P nazivamo *uredjenim* ako je neprazan i ako je na njemu definisana relacija uredjenja koja se najčešće označava sa $\le$, a zapis $a\le b$ čitamo "a manje ili jednako b". Elemente a i b uredjenog skupa P nazivamo *uporedivim* ako je $a\le b$ ili $b\le a$. Element v uredjenog skupa P nazivamo *najvećim* ako je $x\le v$ za svaki $x\in P$. Ako je $u\le x$ za svaki $x\in P$, tada element u nazivamo *najmanjim*. Iz antisimetričnosti relacije uredjenja sledi da svaki uredjeni skup sadrži najviše jedan najveći i najviše jedan najmanji element. Najveći element često nazivamo *jedinicom*, a najmanji *nulom* i koristimo oznake 1_P i 0_P respektivno.

Uredjeni skup M je *mreža* ako svaki njegov dvoelementni podskup $\{x,y\}$ ima i supremum $\sup_M\{x,y\}$ i infimum $\inf_M\{x,y\}$. Umesto $\sup_M\{x,y\}$ najčešće se piše $x\vee y$, a umesto $\inf_M\{x,y\}$ se piše $x\wedge y$.

Uredjen skup M je *potpuna mreža* ako za svaki podskup A od M postoji $\sup_M A$ i $\inf_M A$.

Iz definicija mreže i potpune mreže sledi da svaka potpuna mreža jeste mreža.

Teorema 2.8. |49| Ako uredjen skup P ima jedinicu i svaki njegov nepazni podskup ima infimum, tada je P potpuna mreža. $\square$

GLAVA II.

KONGRUENCIJE, HOMOMORFIZMI, IDEMPOTENTI I INVERZI NA π-REGULARNOJ POLUGRUPI

U ovoj glavi razmatramo neka opšta svojstva kongruencija, homomorfizama, idempotenata i inverznih elemenata na π-regularnoj polugrupi S i na nekim njenim podklasama. Ovde uvodimo pojam r-kongruencije i r-poluproste kogruencije π-regularne polugrupe, a ova druga će imati važnu ulogu u razmatranjima koja slede u narednim glavama. Takodje, uopštavaju se neki poznati rezultati teorije regularnih polugrupa.

Jedan deo naredne leme, koja uopštava poznatu Lallementovu lemu za regularne polugrupe, dokazan je i u radovima |2| i |8| kao i u monografiji |3|, ali na drugačiji način.

Lema 1. Neka je ρ kongruencija π-regularne polugrupe S. Tada je S/ρ π-regularna polugrupa. Ako je $a\rho$ idempotent u S/ρ, tada postoji idempotent e iz S da je $a\rho=e\rho$. Šta više, idempotent e možemo izabrati tako da je $L^*_e\leq L^*_a$ i $R^*_e\leq R^*_a$.

Dokaz. Neka $A\in \mathrm{Reg}(S/\rho)$. Za svaki $a\in A$ važi $a\rho=A$ i a ne može pripadati skupu $\mathrm{Reg}S$. U suprotnom bi postojao $x\in S$ da je $a=axa$ što bi povlačilo

$$A=a\rho=(axa)\rho=(a\rho)(x\rho)(a\rho)=A(x\rho)A.$$

pa bi $A \in Reg(S/\rho)$ suprotno pretpostavci. Neka je m prirodan broj takav da $a^m \in RegS$. Sada postoji $y \in S$ da je $a^m = a^m y a^m$ pa je

$$A^m = (a\rho)^m = a^m\rho = (a^m y a^m)\rho = a^m\rho y\rho \cdot a^m\rho = (a\rho)^m (y\rho)(a\rho)^m$$
$$= A^m (y\rho) A^m.$$

Dakle, $A^m \in Reg(S/\rho)$ pa je S/ρ π-regularna polugrupa.

Neka $a \in S$ i neka je $a\rho$ idempotent u S/ρ, tada je

(1) $$a\rho = a^k\rho$$

za svaki prirodan broj k. Neka je p najmanji prirodan broj takav da $a^p \in RegS$ i neka je n takav prirodan broj da $a^{np} \in RegS$ i $n \geq 2$. Ovakav broj sigurno postoji jer ako postoji prirodan broj s da $a^{sp} \notin RegS$, tada zbog π-regularnosti polugrupe S sledi da postoji prirodan broj r da $a^{rsp} \in RegS$, pa je $n=rs$. Neka $x \in V(a^{np})$ i neka je $e = a^{(n-1)p} x a^p$. Kako je $x = x a^{np} x$ biće

$$e^2 = ee = (a^{(n-1)p} x a^p)(a^{(n-1)p} x a^p) = a^{(n-1)p}(x a^{np} x) a^p$$
$$= a^{(n-1)p} x a^p = e$$

pa je e idempotent. Iz (1) sledi

$$e = a^{(n-1)p} x a^p \rho a^{np} x a^{np} = a^{np}\rho a$$

pa je $e\rho = a\rho$. Iz $e = a^{(n-1)p} x a^p$ sledi $eS = a^{(n-1)p} x a^p S \subseteq a^p S$ što je ekvivalentno sa $L^*_e \leq L^*_a$. Slično se dobija $Se \subseteq Sa^p$ što je ekvivalentno sa $R^*_e \leq R^*_a$. $\fbox{-}$

Lema 2. Neka je $\phi: S \to T$ homomorfizam π-regularne polugrupe S u polugrupu T. Tada je $S\phi$ π-regularna polugrupa. Ako je f idempotent u S, tada postoji idempotent $e \in S$ takav da je $e\phi = f$.

Dokaz. Homomorfizmu ϕ, po Teoremi I 1.2, odgovara kongruencija $\ker\phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(a,b) \in S\times S : a\phi = b\phi\}$, a monomorfizam $\alpha : S/\ker\phi \to T$ je izomorfizam iz $S/\ker\phi$ na $S\phi$. Kako je po Lemi 1 $S/\ker\phi$ π-regularna polugrupa, to je zbog izomorfnosti takva i polugrupa $S\phi$. Neka je f idempotent u $S\phi$. Tada postoji $A \in S/\ker\phi$ da je $A^{\alpha} = f$. Ako $a \in A$, tada je $a\ker\phi = A$ i $(a\ker\phi)\alpha = f$. Odavde očigledno sledi da je $a\ker\phi$ idempotent u $S/\ker\phi$ pa po Lemi 1 postoji $e \in E(S)$ da je $a\ker\phi = e\ker\phi$. Po Teoremi I 1.2 dijagram

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{nat}(\ker\phi)"'] & S \\ S/\ker\phi \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

jeste komutativan, pa je $\phi = \mathrm{nat}(\ker\phi)\circ\alpha$. Sada je

$$e\phi = e\,\mathrm{nat}(\ker\phi)\circ\alpha = (e\,\mathrm{nat}(\ker\phi))\alpha = (e\ker\phi)\alpha$$

$$= (a\ker\phi)\alpha = f. \quad /\!=\!/$$

Difinicija 1. Relacija ρ π-regularne polugrupe S je r-relacija ako za svaki $a \in S$ postoji $x \in \mathrm{Reg}S$ da je $a\rho x$. $/\!=\!/$

Neka je S π-regularna polugrupa i $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S. Iz teorije regularnih polugrupa poznate su različite kongruencije na regularnoj polugrupi $\mathrm{Reg}S$ (grupne, inverzne, koje razdvajaju idempotente i druge). Ideja uvodjenja pojma r-relacije sastoji se u tome da se ove poznate kongruencije sa $\mathrm{Reg}S$ prošire na celu polugrupu S, mada samo ovaj uslov nije dovoljan. U narednim glavama, uvodjenjem novih pojmova i kroz konkretne dokaze, ova ideja će postati jasnija.

Ekvivalencije $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ i $\mathcal{H}^*$ su r-ekvivalencije.

Teorema 1. Kongruencija ρ π-regularne polugrupe S je r-kongruencija ako i samo ako je S/ρ regularna polugrupa.

Dokaz. Neka je ρ r-kongruencija π-regularne polugrupe S i neka je $A \in S/\rho$. Tada posoji $a \in S$ da $a \in A$, pa je $a\rho = A$, i postoji $x \in \operatorname{Reg}S$ da je $a\rho = x\rho$. Odavde sledi $x\rho = A$. Ako je $y \in S$ takav da je $x = xyx$, tada je

$$A = x\rho = (xyx)\rho = x\rho y\rho x\rho = A(y\rho)A.$$

Pošto $y\rho \in S/\rho$ sledi da je A regularan element polugrupe S/ρ što povlači da je polugrupa S/ρ regularna.

Obratno, neka je ρ kongruencija π-regularne polugrupe S takva da je S/ρ regularna polugrupa. Ako $a \in S$, tada za $a\rho \in S/\rho$ postoji $B \in S/\rho$ da je $a\rho = a\rho \cdot B \cdot a\rho$ i $B = B \cdot a\rho \cdot B$. Po Teoremi I 2.2 postoje $x \in a\rho$ i $y \in B$ da je $x = xyx$ i $y = yxy$. Dakle, $x \in \operatorname{Reg}S$ a iz $x \in a\rho$ sledi $x\rho = a\rho$ što znači da je ρ r-kongruencija. $\square$

Definicija 2. Preslikavanje $\phi : S \to T$ π-regularne polugrupe S u polugrupu T je r-preslikavanje ako za svaki $a \in S$ postoji $x \in \operatorname{Reg}S$ tako da je $a\phi = x\phi$. $\square$

Teorema 2. Ako je ρ r-kongruencija π-regularne polugrupe S, tada je preslikavanje $\operatorname{nat}\rho : S \to S/\rho$ definisano sa

$$(2) \qquad x\operatorname{nat}\rho = x\rho \qquad (x \in S)$$

r-preslikavanje koje je homomorfizam.

Ako je : $S \to T$ r-homomorfizam π-regularne polugrupe S u polugrupu T, tada relacija

(3) $\ker\phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(a,b) \in S \times S : a\phi = b\phi\}$

jeste r-kongruencija na S i postoji monomorfizam $\alpha : S/\ker\phi \to T$ takav da je dijagram

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{nat}(\ker\phi)"'] & T \\ S/\ker\phi \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

komutativan.

Dokaz. Neka je ρ r-kongruencija π-regularne polugrupe S. Prirodno preslikavanje $\mathrm{nat}\rho : S \to S/\rho$ definisano sa (2) je homomorfizam po Teoremi I 1.2. Ako $a \in S$, tada postoji $y \in \mathrm{Reg}S$ da je $a\rho = y\rho$ pa je $a\,\mathrm{nat}\rho = a\rho = y\rho = y\,\mathrm{nat}\rho$. Dakle, $\mathrm{nat}\rho$ je r-homomorfizam.

Obratno, neka je ϕ r-homomorfizam. Po Teoremi I.1.2. relacija $\ker\phi$ je kongruencija na S. Kako za svaki $a \in S$ postoji $y \in \mathrm{Reg}S$ da je $a\phi = y\phi$, to po (3) sledi da $(a,y) \in \ker\phi$. Dakle, $\ker\phi$ je r-kongruencija na S. Ostatak teoreme važi po Teoremi I 1.2. $\square$

Znači, na π-regularnoj polugrupi postoji zatvorena korespodencija izmedju r-kongruencija i r-homomorfizama, odnosno, svakoj r-kongruenciji odgovara r-homomorfizam i svakom r-homomorfizmu odgovara r-kongruencija.

Definicija 3. Podskup A π-regularne polugrupe S je samokonjugovan ako je $aAa' \in A$ za svaki $a \in \mathrm{Reg}S$ i svaki $a' \in V(a)$. $\square$

Definicija 4. π-regularna polugrupa S je π-konvencionalna ako je skup idempotenata $E(S)$ samokonjugovan. /=7

Ako je S regularna polugrupa tada se dobija poznata definicija konvencionalne polugrupe.

Primer 1. Polugrupa $S = \{o,e,f,a\}$ zadata tablicom

	o	e	f	a
o	o	o	o	o
e	o	e	a	a
f	o	o	f	o
a	o	o	a	o

jeste π-konvencionalna. Kod nje je $\mathrm{Reg}S = \{o,e,f\} = E(S)$, $a^2 = o \in \mathrm{Reg}S$ i $E(S)$ nije podpolugrupa od S. /=7

Lema 3. Na π-regularnoj polugrupi sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $aE(S)a' \subseteq E(S)$ za svaki $a \in \mathrm{Reg}S$ i svaki $a' \in V(a)$;

(ii) $eE(S)e \subseteq E(S)$ za svaki $e \in E(S)$.

Dokaz. Pošto $e \in V(e)$ to iz (i) sledi (ii).

Obratno, neka $a \in \mathrm{Reg}S$, $a' \in V(a)$ i $e \in E(S)$. Po uslovu (ii), pošto $a'a \in E(S)$, imamo da $a'aea'a \in E(S)$ pa je

$$
\begin{aligned}
(aea')(aea') &= (aa'aea')(aa'aea'aa') \\
&= a(a'aea'a)(a'aea'a)a' \\
&= a(a'aea'a)a' = aea'.
\end{aligned}
$$

Dakle, $aea' \in E(S)$ pa uslov (i) važi. /=7

Teorema 3. π-regularna polugrupa S je π-konvencionalna ako i samo ako postoji dekompozicija skupa idempotenata $E(S)$ takva da je $E(S) = \bigcup\{E_\alpha : \alpha \in Y\}$, ova unija je disjunktna, svaki E_α je pravougaona traka i $E_\alpha E_\beta E_\alpha \subseteq E_{\alpha\beta\alpha}$

za svaki $\alpha, \beta \in Y$.

Dokaz. Neka je S π-konvencionalna polugrupa. Tada za svaki $e \in E(S)$ je $\{e\}$ pravougaona traka. Indeksijući svaki jednoelementni podskup od $E(S)$ elementima skupa $Y = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ dobijamo da za $\alpha, \beta \in Y$ i $E_\alpha = \{e\}$, $E_\beta = \{f\}$ važi $E_\alpha E_\beta E_\gamma \subseteq E_{\alpha\beta\gamma}$ pošto po Lemi 3 $efe \in E(S)$.

Obratno, ako $e \in E_\alpha$, $f \in E_\beta$, tada $efe \in E_\alpha E_\beta E_\alpha \subseteq E_{\alpha\beta\alpha}$ što povlači da $efe \in E(S)$ pa po Lemi 3 sledi da je polugrupa S π-konvencionalna. /=7

Teorema 4. Ako je ρ kongruencija π-konvencionalne polugrupe S, tada je S/ρ π-konvencionalna polugrupa. Ako je ρ r-kongruencija, tada je S/ρ konvencionalna polugrupa.

Dokaz. Neka je ρ kongruencija. Po Lemi 1 je S/ρ π-regularna polugrupa. Neka $A \in Reg(S/\rho)$, $A' \in V(A)$ i $B \in E(S/\pi)$, tada po Teoremi I 2.2 postoje $a \in A$, $a' \in A'$ da je $a\rho = A$, $a'\rho = A'$ i $a' \in V(a)$. Po Lemi 1 postoji $e \in E(S)$ da je $e\rho = B$. Sada je

$$ABA' = a\rho e\rho a'\rho = (aea')\rho \in E(S/\rho)$$

jer je $aea' \in E(S)$ pošto je polugrupa S π-konvencionalna. Dakle, polugrupa S/ρ je π-konvencionalna.

Ako je ρ r-kongruencija, tada je S/ρ regularna polugrupa pa slično prethodnom razmatranju dobijamo da je S/ρ konvencionalna polugrupa. /=7

Posledica 1. Ako je $\phi : S \to T$ homomorfizam, S π-konvencionalna polugrupa, a T polugrupa, tada je $S\phi$ π-konvencionalna polugrupa. Ako je ρ r-homomorfizam, tada je $S\phi$ konvencionalna polugrupa.

Dokaz. Prvi deo tvrdjenja sledi po Teoremi I 1.2. a drugi deo po Teoremi 2, slično dokazu Leme 2. /=7

Polugrupa S je ortodoksna (π-ortodoksna) ako je regularna (π-regularna) i idempotenti čine podpolugrupu.

Sledećom teoremom opisujemo π-ortodoksne polugrupe.

Teorema 5. Neka je S π-regularna polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\mathrm{Reg}S$ je ortodoksna polugrupa;

(ii) S je π-ortodoksna polugrupa;

(iii) $(\forall a,b\in \mathrm{Reg}S)(\exists a'\in V(a))(\exists b'\in V(b))(\,b'a'\in V(ab))$;

(iv) Ako $e\in E(S)$, tada je $V(e)\subseteq E(S)$ i $\mathrm{Reg}S$ je podpolugrupa od S.

Dokaz. (i) => (ii) Kako je $E(S)\subseteq \mathrm{Reg}S$ i $\mathrm{Reg}S$ ortodoksna polugrupa, to je $E(S)$ podpolugrupa od $\mathrm{Reg}S$ pa i od S, što znači da je S π-ortodoksna polugrupa.

(ii) <=> (iii) Po Teoremi I.2.3.

(iii) => (iv) Neka $e\in E(S)$ i $x\in V(e)$. Tada $ex,xe\in E(S)$ pa su zbog toga sami sebi inverzni. Po (iii) je $(ex)(xe)\in V((xe)(ex))$, to jest $ex^2e\in V(xex=x)$. Dakle

$$x=x(ex^2e)x = (xex)(xex) = xx = x^2$$

pa $x\in E(S)$. Kako je (ii) <=> (iii) to iz π-ortodoksnosti polugrupe S i po Teoremi I 2.3 sledi da je $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S.

(iv) => (i) Pošto je $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S i ako $e,f\in E(S)\subseteq \mathrm{Reg}S$, sledi da $ef\in \mathrm{Reg}S$. Neka $x\in V(ef)$. Sada je

$$(ef)(fxe)(ef) = efxef = ef$$

i

$$(fxe)(ef)(fxe) = f(xefx)e = fxe$$

pa $ef \in V(fxe)$. Dalje je

$$(fxe)^2 = f(xefx)e = fxe$$

pa $fxe \in E(S)$, što po (iv) povlači da $ef \in E(S)$.

Iz uslova (iii) sledi da na π-ortodoksnoj polugrupi za svaki $a,b \in RegS$ važi $V(b)V(a) \subseteq V(ab)$.

Lema 4. Ako je S π-ortodoksna polugrupa, $e \in E(S)$ i $a \in RegS$, tada za svaki $a' \in V(a)$ važi da aea', $a'ea \in E(S)$.

Dokaz. Neka $a \in RegS$, $a' \in V(a)$ i $e \in E(S)$. Tada je

$$(aea')(aea') = a(a'aea'a)(a'aea'a)a' = aa'ae \cdot a'aa' = aea',$$

pa $aea' \in E(S)$. Slično se pokazuje da $a'ea \in E(S)$. /=/

Teorema 6. Ako je ρ kongruencija π-ortodoksne polugrupe S, tada je S/ρ π-ortodoksna polugrupa. Ako je ρ r-kongreuencija, tada je S/ρ ortodoksna polugrupa.

Dokaz. Ako je ρ kongruencija π-ortodoksne polugrupe S, tada je S/ρ π-regularna polugrupa. Neka $A,B \in E(S/\rho)$, tada po Lemi 1 postoje $e,f \in E(S)$ da je $A=e\rho$, $B=f\rho$. Sada je

$$(AB)^2 = ABAB = (e\rho)(f\rho)(e\rho)(f\rho) = (efef)\rho = (ef)^2\rho = (ef)\rho =$$

$$= (e\rho)(f\rho) = AB.$$

Dakle, $E(S/\rho)$ je podpolugrupa od S/ρ pa je S/ρ π-ortodoksna polugrupa.

Ako je ρ r-kongruencija, tada po Teoremi 1 i prethodnom razmatranju sledi da je S/ρ ortodoksna polugrupa. /=/

Posledica 2. Ako je $\phi: S \to T$ homomorfizam (r-homomorfizam) π-ortodoksne polugrupe S u polugrupu T, tada je $S\phi$ π-ortodoksna (ortodoksna) polugrupa. $\Box$

Teorema 7. Ako je ρ kongruencija (r-kongruencija) π-inverzne polugrupe S, tada je S/ρ π-inverzna (inverzna) polugrupa.

Dokaz. Neka je ρ kongruencija π-inverzne polugrupe S, tada je S/ρ π-regularna polugrupa. Neka $A,A',A''\in S/\rho$ i $A',A''\in V(A)$. Po Teoremi I 2.2 postoje $a\in A$, $a'\in A'$ i $a''\in A''$ takvi da $a',a''\in V(a)$ i da je $a\rho=A$, $a'\rho=A'$, $a''\rho=A''$. Kako je S π-inverzna polugrupa, to je $a'\rho=a''\rho$, pa je $A'=A''$. Dakle, S/ρ je π-inverzna polugrupa.

Ako je ρ r-kongruencija, tada po Teoremi 1, razmatranju I 2.7, i prethodnom razmatranju sledi da je S/ρ inverzna polugrupa.

Posledica 3. Ako je $\phi: S\rightarrow T$ homomorfizam (r-homomorfizam) π-inverzne polugrupe S u polugrupu T, tada je $S\phi$ π-inverzna (inverzna) polugrupa. $\Box$

Teorema 8. Ako je ρ kongruencija (r-kongruencija) strogo π-inverzne polugrupe S, tada je S/ρ strogo π-inverzna (inverzna) polugrupa.

Dokaz. Ako je ρ kongruencija strogo π-iverzne polugrupe S, tada je po Teoremi 6 S/ρ π-ortodoksna polugrupa. Neka $A,B\in E(S/\rho)$, tada postoje $e,f\in E(S)$ da je $e\rho=A$, $f\rho=B$, pa kako je $ef=fe$ biće

$$AB=(e\rho)(f\rho)=(ef)\rho=(fe)\rho=(f\rho)(e\rho)=BA.$$

Dakle, $E(S/\rho)$ je polumreža pa je S/ρ strogo π-inverzna polugrupa.

Ako je ρ r-kongruencija, tada po prethodnoj teoremi sledi da je S/ρ inverzna polugrupa. $\square$

Posledica 4. Ako je $\phi : S \to T$ homomorfizam (r-homomorfizam) strogo π-inverzne polugrupe S u polugrupu T, tada je $S\phi$ strogo π-inverzna (inverzna) polugrupa. $\square$

Polugrupa S je π-grupa ako je π-regularna i ima jedinstven idempotent, |5| .

Teorema 9. Ako je ρ kongruencija (r-kongruencija) π-grupe S, tada je S/ρ π-grupa (grupa).

Dokaz. Ako je ρ kongruencija π-grupe S, tada je S/ρ π-regularna polugrupa. Neka $A,B \in E(S/\rho)$ i neka je e jedinstveni idempotent π-grupe S. Tada je $e\rho = A$ i $e\rho = B$ pa je $A = B$, što znači da S/ρ ima jedinstven idempotent.

Ako je ρ r-kongruencija, tada je S/ρ regularna polugrupa sa jedinstvenim idempotentom i po Teoremi I 2.1 S/ρ je grupa. $\square$

Posledica 5. Ako je $\phi : S \to T$ homomorfizam (r-homomorfizam) π-grupe S u polugrupu T, tada je $S\phi$ π-grupa (grupa) $\square$

Na π-regularnoj polugrupi S moguće je definisati preslikvanje $r : S \to \mathrm{Reg}S$ na način

$$(\forall a \in S)\ r(a) = a^m$$

gde je m najmanji prirodan broj takav da $a^m \in \mathrm{Reg}S$. Preslikavanje r je surjekcija i očigledno važi $r(r(a)) = r(a)$. Sada se relacije $\mathcal{L}^*$ i $\mathcal{R}^*$ mogu zapisati ovako:

$a\mathcal{L}^*b \iff Sr(a) = SR(b)$, $a\mathcal{R}^*b \iff r(a)S = r(b)S$.

Uvodjenjem ovog preslikavanja rad sa elementima π-regularne polugrupe S postaje jednostavniji.

Definicija 5. Relacija ρ π-regularne polugrupe S je r-poluprosta ako je

$$a\rho r(a)$$

za svaki $a \in S$. /-/

Ekvivalencije $\mathcal{L}^*$ i $\mathcal{R}^*$ su r-poluproste. Svaka r-poluprosta relacija je r-relacija.

Lema 5. Ako je ρ r-(r-poluprosta) relacija π-regularne polugrupe S i σ relacija na S takva da je $\rho\subseteq\sigma$, tada je i σ r-(r-poluprosta) relacija na S.

Dokaz. Ako je ρ r-relacija na S, tada za svaki $a \in S$ postoji $x\in \mathrm{Reg}S$ da je $a\rho x$. Iz $\rho\subseteq\sigma$ sledi $a\sigma x$ pa jeste r-relacija. Slično se dokazuje i drugi deo tvrdjenja. /-/

Lema 6. Ako je ρ r-(r-poluprosta) ekvivalencija i σ ekvivalencija π-regularne polugrupe S, tada su $\rho\circ\sigma$, $\sigma\circ\rho$ r-(r-poluproste) ekvivalencije na S.

Dokaz. Ako je ρ r-ekvivalencija na S, tada za svaki $a\in S$ postoji $x\in \mathrm{Reg}S$ da je $a\rho x$. Kako je još $x\sigma x$ sledi $a\,\rho\circ\sigma x$ pa je $\rho\circ\sigma$ r-ekvivalencija na S. Slično se dokazuje da je $\sigma\circ\rho$ r-ekvivalencija. Drugi deo tvrdjenja dokazuje se slično prethodnom. /-/

Teorema 10. Ako su ρ i σ r-poluproste kongruencije π-grupe S, tada je $\rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho$.

Dokaz. Kako je $|E(S)|=1$ i $E(S)$ podpolugrupa od S, to je po Teoremi I 2.3 RegS regularna podpolugrupa od S. Kako RegS ima jedinstven idempotent, sledi da je grupa. Neka su $a,b\in S$ i $a\,\rho\circ\sigma\,b$. Tada postoji $c\in S$ da je $a\rho c$, $c\,\sigma\, b$. Kako su ρ i σ r-poluproste kongruencije, to je

$$r(a)\rho a\rho c\rho r(c) \quad \text{i} \quad r(c)\sigma c\sigma b\sigma r(b)\ ,$$

odnosno, $r(a)\rho r(c)$ i $r(c)\sigma r(b)$. Ako zbog jedinstvenosti označimo sa $r(c)^{-1}$ element inverzan elementu $r(c)$ tada je

$$r(a)=r(c)r(c)^{-1}r(a)\sigma r(b)r(c)^{-1}r(a)$$

i

$$r(b)r(c)^{-1}r(a)\rho r(b)r(c)^{-1}r(c)=r(b)$$

Dakle, $r(a)\sigma\circ\rho\ r(b)$ pa kako je po Lemi 6 $\sigma\circ\rho$ r-poluprosta kongruencija sledi da je $\rho\circ\sigma\subseteq\sigma\circ\rho$. Slično se dokazuje obratna inkluzija pa je $\rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho$. $\square$

GLAVA III.

NEKE KONGRUENCIJE NA STROGO π-INVERZNOJ POLUGRUPI

U prvom delu ove glave uvodimo neke nove pojmove i opisujemo osobine jezgra (r-poluproste) kongruencije na π-ortodoksnoj polugrupi. U drugom delu glave najpre uvodimo pojam r-polugrupe, a glavni rezultat je opis kongruencijskog para strogo π-inverzne polugrupe. Ovaj rezultat uopštava poznati rezultat M. Petricha |45| za inverzne polugrupe.

1. JEZGRO KONGRUENCIJE NA π-ORTODOKSNOJ POLUGRUPI

Definicija 1.1. Neka je S π-regularna polugrupa i K podpolugrupa od S. Označimo sa

$$\mathrm{reg}K = \{a \in K : \quad a \in \mathrm{Reg}S\} = K \cap \mathrm{Reg}S$$

i sa

$$\mathrm{Reg}K = \{a \in K : \quad (\exists x \in K)\ a = axa\}.$$

Podpolugrupa K je inverzno zatovrena ako je $V(\mathrm{reg}K) \subseteq \mathrm{reg}K$, a strogo inverzno zatvorena ako je $V(\mathrm{Reg}K) \subseteq \mathrm{Reg}K$. $\square$

Ako je S regularna polugrupa, tada je $\mathrm{Reg}K = K$ pa se ova definicija svodi na poznatu definiciju inverzno zatovrene podpolugrupe iz teorije regularnih polugrupa.

Podpolugrupa K polugrupe S je puna ako je $E(S) \subseteq K$.

Definicija 1.2. Podpolugrupa K π-regularne polugrupe S je normalna ako je puna, samokonjugovana i inverzno zatvorena. $\square$

Ako je S regularna polugrupa, tada se ova definicija svodi na poznatu definiciju iz teorije regularnih polugrupa.

Podskup A polugrupe S je poluprost ako iz $a^2 \in A$ sledi $a \in A$. Ovde uvodimo

Definicija 1.3. Podskup A π-regularne polugrupe S je r-poluprost ako za svaki $a \in S$, $r(a) \in A$ povlači $a \in A$. $\square$

Teorema 1.1. Neka je ρ (r-poluprosta) kongruencija π-ortodoksne polugrupe S, tada je $\ker\rho$ normalna (r-poluprosta) podpolugrupa od S.

Dokaz. Neka je ρ kongruencija π-ortodoksne polugrupe S i neka $a,b \in \ker\rho = \{x \in S: (\exists e \in E(S))\ x \rho e\}$. Tada postoje $f,g \in E(S)$ da je $a \rho f$, $b \rho g$, pa sledi $ab \ \rho\ fg$. Pošto $fg \in E(S)$ imamo da $ab \in \ker\rho$, pa $\ker\rho$ jeste podpolugrupa od S.

Iz $e \rho e$ za svaki $e \in E(S)$ sledi $E(S) \subseteq \ker\rho$ pa je podpolugrupa $\ker\rho$ puna.

Neka $a \in \mathrm{Reg}S$ i $a' \in V(a)$. Tada je

$$a\cdot(\ker\rho)\cdot a' = \{ aba' :\ b \in \ker\rho \}.$$

Iz $b \in \ker\rho$ sledi da postoji $e \in E(S)$ da je $b \rho e$, pa je

$aba' \rho aea'$. Po Lemi II.4 imamo da $aea' \in E(S)$ što povlači $aba' \in \ker\rho$. Dakle, $a(\ker\rho)a' \subseteq \ker\rho$ pa je $\ker\rho$ samokonjugovana podpolugrupa od S.

Pošto je po Teoremi II.5 RegS ortodoksna polugrupa i

$\rho_{|RegS}$ kongruencija na RegS i kako je

$$\ker(\rho_{|RegS}) = \ker\rho \cap RegS = reg(\ker\rho),$$

to po Teoremi I.2.5 sledi

$$V(\ker(\rho_{|RegS})) \subseteq \ker(\rho_{|RegS})$$

to jest,

$$V(reg(\ker\rho)) \subseteq reg(\ker\rho).$$

Dakle, $\ker\rho$ je inverzno zatvorena podpolugrupa od S, pa iz svega sledi da je $\ker\rho$ normalna podpolugrupa od S.

Ako je ρ r-poluprosta kongruencija na S, $a \in S$ i $r(a) \in \ker\rho$, tada postoji $e \in E(S)$ da je $r(a)\rho\, e$. Kako je još $r(a)\rho\, a$, to sledi $a\,\rho\, e$ pa $e \in \ker\rho$. Dakle, u ovom slučaju je $\ker\rho$ normalna r-poluprosta podpolugrupa od S. /-/

Teorema 1.2. Ako je K puna, π-regularna podpolugrupa π-regularne polugrupe S i RegS podpolugrupa od S, tada je K strogo inverzno zatvorena podpolugrupa od S.

Dokaz. Neka $a \in RegK$ i neka je $a' \in V(a)$ takav da $a' \in K$. Neka je $x \in V(a)$ proizvoljan. Pošto $a' \in RegK$ i pošto je RegK puna podpolugrupa od S (jer je RegS podpolugrupa od S) sledi

$$x = xax = x(aa'a)x = (xa)a'(ax) \in E(S)\cdot RegK\cdot E(S) \subseteq RegK,$$

Prema tome, $V(a) \subseteq RegK$ što povlači $V(RegK) \subseteq RegK$ pa je K strogo inverzno zatovrena podpolugrupa od S. /=/

Teorema 1.3. Ako je K inverzno zatvorena podpolugrupa π-regularne polugrupe S, tada je regK = RegK i K je π-regularna podpolugrupa od S.

Dokaz. Očigledno je RegK $\subseteq$ regK. Neka $a \in$ regK i $x \in V(a)$. Pošto je V(regK) $\subseteq$ regK sledi $x \in$ regK. Dakle, element a je regularan u K pa pripada RegK, što povlači regK $\subseteq$ RegK i regK=RegK. Podpolugrupa K je π-regularna jer za svaki $a \in K$, svaki njegov regularni stepen sa svim svojim inverznim elementima pripada K. /=/

Posledica 1.1. Neka je ρ (r-poluprosta) kongruencija π-ortodoksne polugrupe S, tada je kerρ normalna π-ortodoksna (r-poluprosta) podpolugrupa od S i reg(kerρ) = Reg(kerρ).

Dokaz. Ako je ρ (r-poluprosta) kongruencija π- ortodoksne polugrupe S, tada je po Teoremi 1.1 kerρ normalna (r-poluprosta) podpolugrupa od S. Kako je kerρ inverzno zatvorena, to po prethodnoj teoremi sledi da je reg(kerρ) = = Reg(kerρ) i da je kerρ π-regularna podpolugrupa od S. Kako je kerρ puna i E(S) podpolugrupa, sledi da je kerρ π- ortodoksna podpolugrupa od S. /=/

2. KONGRUENCIJSKI PAR STROGO π-INVERZNE r-POLUGRUPE

Naredna definicija predstavlja nastavak razvoja ideje započete u prethodnoj glavi uvodjenjem pojma r-kongruencije da se kongruencija sa RegS (ako je podpolugrupa od S) proširi na celu polugrupu S.

Definicija 2.1. π-regularna polugrupa S je r-polugrupa ako je

(1) $(\forall x,y\in S)(r(xy) = r(x)r(y))$. /=/

Na ovaj način definišemo jednu podklasu klase π-regularnih polugrupa koja u sebi sadrži klasu svih regularnih polugrupa, pa je samim tim ova klasa dovoljno široka i interesantna za proučavanje.

Primer 2.1. Polugrupa $S=\{e,f,a\}$ zadata tablicom

	e	f	a
e	e	e	e
f	e	f	f
a	e	f	f

je strogo π-inverzna r-polugrupa, ali nije regularna. Ovde je $\mathrm{Reg}S=\{e,f\} = E(S)$, $r(a)=a^2=f$. Na primer, $r(af)=r(f)=f$ i $r(a)r(f) = a^2f=ff=f$ pa je $r(af)=r(a)r(f)$. Ostali slučajevi ispituju se slično. /=/

Primer 2.2. Polugrupa $S=\{1,2,3,4,5\}$ zadata tablicom

	1	2	3	4	5
1	2	3	1	1	2
2	3	1	2	2	3
3	1	2	3	3	1
4	1	2	3	4	1
5	2	3	1	1	2

je strogo π-inverzna polugrupa koja nije r-polugrupa. Ovde je $E(S)=\{3,4\}$ polumreža, $\mathrm{Reg}S = \{1,2,3,4\}$, $r(5)=5^2=2$. Važi da je $r(51)=r(2)=2$ i $r(5)r(1)=21=3$ pa je $r(51)\neq r(5)r(1)$.

Dakle, S nije r-polugrupa. /=/

Primer 2.3. Polugrupa $S = \{o,e,f,a\}$ zadata tablicom

	o	e	f	a
o	o	o	o	o
e	o	e	a	a
f	o	o	f	o
a	o	o	a	o

je π-regularna. Ovde je $\mathrm{Reg}S = \{0,e,f\} = E(S)$ i $r(a)=a^2=0$. Kako je $r(ef)=r(a)=a^2=0$ i $r(e)r(f)=ef=a\neq o$, sledi da S nije r-polugrupa. /=/

Lema 2.1. Ako je S r-polugrupa, tada je $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S a preslikavanje $r\colon S \to \mathrm{Reg}S$ je epimorfizam.

Dokaz. Neka $a,b\in \mathrm{Reg}S$, tada je

$$ab = r(a)r(b) = r(ab)\in \mathrm{Reg}S$$

pa je $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S. Kako je sada r preslikavanje polugrupe S na polugrupu $\mathrm{Reg}S$ koje zadovoljava uslov (1), sledi da je r epimorfizam. /=/

Ako je S strogo π-inverzna polugrupa, tada ćemo sa a^{-1} označavati jedinstveni inverzni element elemenata $a \in \mathrm{Reg}S$.

Definicija 2.2. Neka je S strogo π-inverzna polugrupa. Kongruencija ξ na polumreži $E(S)$ je normalna ako

$$e\ \xi\ f \quad \Rightarrow \quad r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}fr(a)$$

za $e,f\in E(S)$ i svaki $a \in S$. /=/

Teorema 2.1. Ako je S strogo π-inverzna polugrupa i ξ normalna kongruencija na $E(S)$, tada je relacija $\hat{\xi}$ definisana na $E(S)$ sa

$$e\ \hat{\xi}\ f \iff r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}fr(a)$$

za svaki $a \in S$, normalna kongruencija na $E(S)$ i $\xi \subseteq \hat{\xi}$.

Dokaz. Pošto je ξ normalna kongruencija na $E(S)$, to za svaki $e \in E(S)$ i svaki $a \in S$ važi

$$e\ \xi\ e \implies r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}er(a)$$

što povlači $e\ \hat{\xi}\ e$ pa je $\hat{\xi}$ refleksivna relacija.

Relacija $\hat{\xi}$ je očigledno simetrična.

Neka su $e,f,g \in E(S)$ i

$$e\ \hat{\xi}\ f \iff r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}fr(a)$$

i

$$f\ \hat{\xi}\ g \iff r(a)^{-1}fr(a)\ \xi\ r(a)^{-1}gr(a)$$

za svaki $a \in S$. Pošto po Lemi II.4 $r(a)^{-1}er(a)$, $r(a)^{-1}fr(a)$, $r(a)^{-1}gr(a) \in E(S)$, to zbog tranzitivnosti kongruencije ξ sledi $r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}gr(a)$ za svaki $a \in S$, što je ekvivalentno sa $e\ \hat{\xi}\ g$. Dakle, relacija $\hat{\xi}$ je tranzitivna što zajedno sa prethodnim povlači da je $\hat{\xi}$ ekvivalencija.

Neka su $e,f,g,h \in E(S)$ i neka je

$$e\ \hat{\xi}\ f \iff r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}fr(a)$$

i

$$g\ \hat{\xi}\ h \iff r(a)^{-1}gr(a)\ \xi\ r(a)^{-1}hr(a)$$

za svaki $a \in S$. Kako je ξ kongruencija na $E(S)$ i $r(a)^{-1}er(a)$, $r(a)^{-1}fr(a)$, $r(a\ )^{-1}gr(a)$, $r(a)^{-1}hr(a) \in E(S)$ to je

$$(r(a)^{-1}er(a))(r(a)^{-1}gr(a))\ \xi\ (r(a)^{-1}fr(a))(r(a)^{-1}hr(a)),$$

odnosno

$$r(a)^{-1}e(r(a)r(a)^{-1})gr(a)\ \xi\ r(a)^{-1}f(r(a)r(a)^{-1})hr(a).$$

Pošto je $E(S)$ polumreža biće

$$r(a)^{-1}r(a)r(a)^{-1}egr(a)\ \xi\ r(a)^{-1}r(a)r(a)^{-1}fhr(a)$$

odnosno

$$r(a)^{-1}(eg)r(a)\ \xi\ r(a)^{-1}(fh)r(a).$$

Kako ovo važi za svaki $a \in S$ i kako je $eg, fh \in E(S)$, sledi $eg\ \xi\ fh$ što zanči da je ξ kongruencija na $E(S)$.

Neka $e,f \in E(S)$ i neka je

$$e\ \hat{\xi}\ f \iff r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}fr(a)$$

za svaki $a \in S$. Tada je

$$r(b)^{-1}(r(a)^{-1}er(a))r(b)\ \xi\ r(b)^{-1}(r(a)^{-1}fr(a))r(b)$$

za svaki $b \in S$, jer je kongruencija ξ normalna, što je ekvivalentno sa $r(a)^{-1}er(a)\ \hat{\xi}\ r(a)^{-1}fr(a)$. Dakle, $\hat{\xi}$ je normalna kongruencija na $E(S)$.

Ako $e,f \in E(S)$ i pošto je ξ normalna kongruencija, imamo da je

$$e\ \xi\ f \Rightarrow r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}fr(a)$$
$$\iff e\ \hat{\xi}\ f$$

za svaki a S, pa je $\xi \subseteq \hat{\xi}$. $\square$

Definicija 2.3. Neka je S strogo π-inverzna r-polugrupa i neka je K normalna r-poluprosta podpolugrupa od S. Ako je ξ normalna kongruencija na $E(S)$ koja zadovoljava svojstva

(i) $r(a)e \in K,\ e\ \xi\ r(a)^{-1}r(a) \Rightarrow r(a) \in K,$

(ii) $a \in K \Rightarrow r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(a)^{-1}r(a)e$

za svaki $e \in E(S)$, $a \in S$, tada je (ξ, K) kongruencijski par za S. U ovom slučaju definišemo relaciju $K_{(\xi,K)}$ na S sa

$$a\, K_{(\xi,K)} b \iff r(a)^{-1}r(a)\,\xi\, r(b)^{-1}r(b),\ r(a)r(b)^{-1}\in K. \quad /\!=\!/$$

Uočimo da je relacija $K_{(\xi,K)}$ r-poluprosta jer je očigledno $a\, K_{(\xi,K)} r(a)$.

Lema 2.2. Neka je (ξ,K) kongruencijski par strogo π-inverzne r-polugrupe S. Tada je

(i) $r(a)er(b)\in K,\ e\xi r(a)^{-1}r(a) \Rightarrow r(ab)=r(a)r(b)\in K,$

(ii) $ab\in K \Rightarrow r(a)er(b)\in K,$

(iii) $r(a)r(b)^{-1}\in K,\ r(a)^{-1}r(a)\,\xi\, r(b)^{-1}r(b)$

$$\Rightarrow r(a)^{-1}er(a)\,\xi\, r(b)^{-1}er(b)$$

za svaki $e\in E(S)$, $a,b\in S$.

Dokaz. Neka u sva tri slučaja $a,b\in S$ i $e\in E(S)$.

(i) Neka $r(a)er(b)\in K$ i $e\,\xi\, r(a)^{-1}r(a)$. Pošto je S r-polugrupa imamo

(2) $$r(a)er(b)=r(a)e(r(b)r(b)^{-1}r(b))=r(a)r(b)r(b)^{-1}er(b)$$
$$=r(ab)(r(b)^{-1}er(b))\in K.$$

Pošto je ξ normalna kongruencija na $E(S)$ biće

(3) $$r(ab)^{-1}r(ab) = (r(a)r(b))^{-1}r(a)r(b)$$
$$=r(b)^{-1}r(a)^{-1}r(a)r(b)\,\xi\, r(b)^{-1}er(b).$$

Iz (2) i (3) po Definiciji 2.3. (i) imamo da $r(ab)=r(a)r(b)\in K$ pošto $r(b)^{-1}er(b)\in E(S)$.

(ii) Neka $ab\in K$. Tada je po (2)

$$r(a)er(b)=r(ab)(r(b)^{-1}er(b))\in K\cdot E(S)\subseteq K$$

jer je $E(S)\subseteq K$.

(iii) Neka $r(a)r(b)^{-1} \in K$ i $r(a)^{-1}r(a)\xi r(b)^{-1}r(b)$.

Tada po Definiciji 2.3 (ii) imamo

$$(r(a)r(b)^{-1})^{-1}er(a)r(b)^{-1}\xi(r(a)r(b)^{-1})^{-1}r(a)r(b)^{-1}e,$$

odnosno

$$(4) \qquad r(b)r(a)^{-1}er(a)r(b)^{-1}\xi r(b)r(a)^{-1}r(a)r(b)^{-1}e$$
$$\xi r(b)r(b)^{-1}r(b)r(b)^{-1}e$$
$$= r(b)r(b)^{-1}e.$$

Sada je

$$r(a)^{-1}er(a)=(r(a)^{-1}r(a))(r(a)^{-1}er(a))(r(a)^{-1}r(a))$$
$$\xi(r(b)^{-1}r(b))(r(a)^{-1}er(a))(r(b)^{-1}r(b))$$
$$= r(b)^{-1}(r(b)r(a)^{-1}er(a)r(b)^{-1})r(b)$$
$$\xi\ r(b)^{-1}r(b)r(b)^{-1}er(b) = r(b)^{-1}er(b). \quad \square$$

Neka je ρ kongruencija strogo π-inverzne polugrupe S sa polumrežom idempotenata $E(S)$. Restrikcija $\rho_{|E(S)}$ je trag kongruencije ρ i označavaćemo ga sa $\mathrm{tr}\rho$. Ovaj pojam je poznat iz teorije regularnih polugrupa.

Glavni rezultat ove tačke je sledeća

Teorema 2.2. Neka je (ξ,K) kongruencijski par strogo π-inverzne r-polugrupe S. Tada je $\mathcal{K}_{(\xi,K)}$ r-poluprosta kongruencija na S sa tragom ξ i jezgrom K. Obratno, ako je ρ r-poluprosta kongruencija strogo π-inverzne r-polugrupe S, tada je $(\mathrm{tr}\rho,\ker\rho)$ kongruencijski par na S i $\rho=\mathcal{K}_{(\mathrm{tr}\rho,\ker\rho)}$.

Dokaz. Neka je (ξ,K) kongruencijski par strogo π-inverzne r-polugrupe S i neka je $\mathcal{K}=\mathcal{K}_{(\xi,K)}$. Pošto je ξ kongruencija na $E(S)$, $E(S)\subseteq K$ i $r(a)r(a)^{-1}\in E(S)$ sledi da je

$$aKa \iff r(a)^{-1}r(a)\xi r(a)^{-1}r(a), \quad r(a)r(a)^{-1} \in K$$

za svaki $a \in S$ pa relacija K jeste refleksivna.

Neka $a,b \in S$ i

$$aKb \iff r(a)^{-1}r(a)\xi r(b)^{-1}r(b), \quad r(a)r(b)^{-1} \in K.$$

Kako je podpolugrupa K inverzno zatvorena, sledi da $(r(a)r(b)^{-1})^{-1} = r(b)r(a)^{-1} \in K$. Odavde sledi bKa pa je relacija K simetrična.

Naka su $a,b,c \in S$ i

$$aKb \iff r(a)^{-1}r(a)\xi r(b)^{-1}r(b), \quad r(a)r(b)^{-1} \in K,$$

$$bKc \iff r(b)^{-1}r(b)\xi r(c)^{-1}r(c), \quad r(b)r(c)^{-1} \in K.$$

Zbog tranzitivnosti kongruencije ξ sledi $r(a)^{-1}r(a)\xi r(c)^{-1}r(c)$. Pošto je K podpolugrupa sledi da $(r(a)r(b)^{-1})(r(b)r(c)^{-1}) = r(a)(r(b)^{-1}r(b))r(c)^{-1} \in K$, pa kako je još $r(b)^{-1}r(b)\xi r(a)^{-1}r(a)$ to po Lemi 2.2 (i) sledi $r(a)r(c)^{-1} \in K$. Iz ovih razmatranja sledi da je aKc pa je relacija K tranzitivna što povlači da je K ekvivalencija.

Neka $a,b,c \in S$ i

$$a\mathcal{K}b \iff r(a)^{-1}r(a)\xi r(b)^{-1}r(b),\quad r(a)r(b)^{-1} \in K,$$

tada je

$$r(ac)^{-1}r(ac)=(r(a)r(c))^{-1}r(a)r(c)=r(c)^{-1}r(a)^{-1}r(a)r(c)$$

$$\xi r(c)^{-1}r(b)^{-1}r(b)r(c)=r(bc)^{-1}r(bc).$$

Sada po Lemi 2.2 (ii) iz $r(a)r(b)^{-1} \in K$ sledi da $r(a)(r(c)r(c)^{-1})r(b)^{-1} \in K$ pa je

$$(6)\qquad r(a)(r(c)r(c)^{-1})r(b)^{-1}=r(a)r(c)(r(b)r(c))^{-1}$$

$$= r(ac)r(bc)^{-1} \in K.$$

Iz (5) i (6) sledi $ac\mathcal{K}bc$ pa sledi da je ekvivalencija $\mathcal{K}$ desna kongruencija. Dalje, iz $a\mathcal{K}b$ po Lemi 2.2 (ili) sledi $r(a)^{-1}er(a)\ \xi\ r(b)^{-1}er(b)$ za svaki $e \in E(S)$, pa pošto $r(c)^{-1}r(c) \in E(S)$ biće

$$(7)\qquad r(ca)^{-1}r(ca)=(r(c)r(a))^{-1}r(c)r(a)=r(a)^{-1}(r(c)^{-1}r(c))r(a)$$

$$\xi r(b)^{-1}(r(c)^{-1}r(c))r(b)=r(cb)^{-1}r(cb).$$

Pošto je podpolugrupa K samo konjugovana imamo

$$(8)\qquad r(ca)r(cb)^{-1}=r(c)r(a)(r(c)r(b))^{-1}$$

$$=r(c)(r(a)r(b)^{-1})r(c)^{-1}$$

$$\in r(c)\cdot K\cdot r(c)^{-1} \subseteq K.$$

Iz (7) i (8) sledi $ca\mathcal{K}cb$ pa je K leva kongruencija. Prema tome, $\mathcal{K}$ je r-poluprosta kongruencija na S.

Ako $e,f \in E(S)$, tada je $e^{-1}=e$, $f^{-1}=f$ pa je

$$e\mathcal{K}f \iff e\ \xi\ f,\quad ef \in K.$$

Pošto $ef \in K$ uvek, sledi da se $\mathcal{K}$ i ξ poklapaju na $E(S)$, odnosno da je $\operatorname{tr} \mathcal{K} = \xi$.

Neka $a \in \ker \mathcal{K}$. Tada postoji $e \in E(S)$ da je

$$a\mathcal{K}e \iff r(a)^{-1}r(a)\,\xi\, e, \quad r(a)e \in K,$$

a odavde po Definiciji 2.3 (i) sledi $r(a) \in K$. Kako je K r-poluprosta podpolugrupa od S, sledi da $a \in K$ pa je $\ker\mathcal{K} \subseteq K$. Obratno, neka $a \in K$. Tada $r(a)=r(a)r(a)^{-1}r(a) \in K$ i $r(a)^{-1}r(a)\ \xi\ r(a)^{-1}r(a)=r(a)^{-1}r(a)r(a)^{-1}r(a)$. Pošto $r(a)^{-1}r(a) \in E(S)$ to po definiciji relacije $\mathcal{K}$ sledi $a\mathcal{K}r(a)^{-1}r(a)$, što povlači $a \in \ker\mathcal{K}$. Dakle, $K \subseteq \ker\mathcal{K}$ i konačno je $K=\ker\mathcal{K}$.

Obratno, neka je ρ r-poluprosta kongruencija strogo π-inverzne r-polugrupe S. Po Teoremi 1.1 $\ker\rho$ je normalna r-poluprosta podpolugrupa od S. Pošto je ρ kongruencija i $E(S)$ polugrupa, sledi da je $\rho_{|E(S)} = \operatorname{tr}\rho$ normalna kongruencija na $E(S)$.

Neka $a \in S$, $e \in E(S)$ i $r(a)e \in \ker\rho$, $e\operatorname{tr}\rho\, r(a)^{-1}r(a)$. Tada postoji $f \in E(S)$ da je $r(a)e\ \rho\ f$. Sada je

$$r(a)=r(a)r(a)^{-1}r(a)\ \rho\ r(a)e\ \rho\ f$$

pa $r(a) \in \ker\rho$. Dakle, uslov (i) Definicije 2.3. važi.

Neka $a \in \ker\rho$, tada $r(a) \in \ker\rho$ pa sledi da postoji $e \in E(S)$ da je $r(a)\rho e$. Odavde je $r(a)^{-1}r(a)\ \rho\ r(a)^{-1}e$ što zajedno sa $e\rho r(a)$ daje $r(a)^{-1}r(a)e\rho r(a)^{-1}er(a)$, to jest, uslov (ii) Definicije 2.3 važi. Dakle, $(\operatorname{tr}\rho, \ker\rho)$ je kongruencijski par polugrupe S.

Neka $a,b \in S$ i

$$a\mathcal{K}_{(\operatorname{tr}\rho,\ker\rho)}b \iff r(a)^{-1}r(a)\ \operatorname{tr}\rho\ r(b)^{-1}r(b),\ r(a)r(b)^{-1} \in \ker\rho.$$

Tada postoji $e \in E(S)$ da je $r(a)r(b)^{-1} \rho e$. Kako su $r(a)r(b)^{-1}$ i $r(b)r(a)^{-1}$ uzajamno inverzni i $\ker\rho$ inverzno zatvorena podpolugrupa, to iz $r(a)r(b)^{-1} \in \ker\rho$ sledi $r(b)r(a)^{-1} \in \ker\rho$ pa postoji $f \in E(S)$ da je $r(b)r(a)^{-1} \rho f$. Sada je

$$r(a)r(b)^{-1} = r(a)r(b)^{-1}r(b)r(a)^{-1}r(a)r(b)^{-1} \rho \cdot efe = ef$$

pa je

(9) $\qquad ef \rho r(a) \cdot r(b)^{-1} \rho e.$

Slično je

$$r(b)r(a)^{-1} = r(b)r(a)^{-1}r(a)r(b)^{-1}r(b)r(a)^{-1} \rho fef = ef$$

pa je

(10) $\qquad ef \rho r(b)r(a)^{-1} \rho f.$

Iz (9) i (10) sledi $e \rho f$ i $r(b)r(a)^{-1} \rho e$. Sada je

$$r(a) = r(a)r(a)^{-1}r(a) \rho r(a)r(b)^{-1}r(b) \rho er(b)$$

i

$$r(b) = r(b)r(b)^{-1}r(b) \rho r(b)r(a)^{-1}r(a) \rho er(a),$$

pa je

$$r(a) \rho er(b) \rho e(er(a)) = er(a) \rho r(b).$$

Pošto je ρ r-poluprosta kongruencija, to iz $r(a) \rho r(b)$ sledi $a \rho b$. Dakle, $K(\mathrm{tr}\rho, \ker\rho) \subseteq \rho$.

Obratno, neka je $a \rho b$. Tada je $r(a) \rho r(b)$ što povlači $r(a)r(b)^{-1} \rho r(b)r(b)^{-1}$ pa

(11) $\qquad r(a)r(b)^{-1} \in \ker\rho.$

Takodje je

(12) $\qquad r(a)^{-1}r(a) \rho r(a)^{-1}r(b) \quad$ i $\quad r(b)^{-1}r(a) \rho r(b)^{-1}r(b),$

pa $r(a)^{-1}r(b)$, $r(b)^{-1}r(a) \in \ker\rho$. Kako su ova dva elementa uzajamno inverzna to po razmatranju koje bi bilo slično više učinjenom zaključujemo da postoji $e \in E(S)$ da je $r(a)^{-1}r(b) \rho$

$r(b)^{-1}r(a)\,\rho\, e$. Sada po (12) sledi $r(a)^{-1}r(a)\rho\; r(b)^{-1}r(b)$ što zajedno sa (11) daje $a\mathcal{K}_{(tr\rho,ker\rho)}b$. Dakle, $\rho \subseteq \mathcal{K}_{(tr\rho,ker\rho)}$ šta konačno daje $\rho = \mathcal{K}_{(tr\rho,ker\rho)}$ čime je dokaz teoreme završen. /-7

Definicija 2.3 Teorema 2.2 uopštavaju poznatu definiciju i teoremu M. Petricha |45|, koje radi lakšeg praćenja daljeg rada navodimo.

Definicija 2.4. |45|. Neka je S inverzna polugrupa sa polumrežom idempotenata E(S). AKo je K normalna podpolugrupa od S i ξ normalna kongruencija na E(S) koja zadovoljava uslove

$$\text{(i)} \qquad ae\in K,\ \ e\,\xi\, a^{-1}a \ \Rightarrow\ a\in K$$

$$\text{(ii)} \qquad a\in K \ \Rightarrow\ a^{-1}ea\ \xi\ a^{-1}ae$$

za svaki $a\in S$, $e\in E(S)$, tada je (ξ,K) kongruencijski par za S. U ovom slučaju definišemo relaciju $\mathcal{K}_{(\xi,K)}$ na S sa

$$a\,\mathcal{K}_{(\xi,K)}b \iff a^{-1}a\,\xi\, b^{-1}b,\ \ ab^{-1}\in K.$$ /-7

Posledica 2.1. |45|. Ako je (ξ,K) kongruencijski par inverzne polugrupe S, tada je $\mathcal{K}_{(\xi,K)}$ kongruencija na S sa tragom ξ i jezgrom K. Obratno, ako je ρ kongruencija na S, tada je $(tr\rho, ker\rho)$ kongruencijski par na S i $\rho = \mathcal{K}_{(tr\rho,ker\rho)}$. /-7

Ako je S strogo π-inverzna r-polugrupa, tada je RegS inverzna polugrupa pa na S i RegS imamo kongruencijske parove u smislu Definicija 2.3 i 2.4 respektivno. Interesantno je ispitati kakva veza postoji izmedju ovih kongruencijskih parova i izmedju kongruencija koje im odgovaraju. Pre nego što odgovorimo na to pitanje dokazaćemo naredne dve leme.

Lema 2.3. Ako je S r-polugrupa i K podpolugrupa od RegS, tada je

$$\tilde{K} = \{x \in S : r(x) \in K\}$$

r-poluprosta podpolugrupa od S i $K \subseteq \tilde{K}$.

Dokaz. Neka $a,b \in \tilde{K}$, tada $r(a),r(b) \in K$ što povlači $r(ab) = r(a)r(b) \in K$ jer je K podpolugrupa. Po definiciji $\tilde{K}$ sledi da $ab \in \tilde{K}$ pa je $\tilde{K}$ podpolugrupa od S.

Neka $a \in S$, $r(a) \in \tilde{K}$. Tada je $r(r(a))=r(a) \in K$ što povčaki $a \in \tilde{K}$. Dakle, $\tilde{K}$ je r-poluprosta podpolugrupa.

Ako $a \in K$, tada $a \in$ RegS pa je $r(a)=a \in K$ što povlači $a \in \tilde{K}$, pa je $K \subseteq \tilde{K}$. /=/

Lema 2.4. Ako je S r-polugrupa i ρ kongruencija podpolugrupe RegS, tada je relacija $\tilde{\rho}$ definisana na S sa

$$a \, \tilde{\rho} \, b \iff r(a) \rho \, r(b)$$

r-poluprosta kongruencija na S.

Dokaz. Relacija $\tilde{\rho}$ je očigledno r-poluprosta. Refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije $\tilde{\rho}$ slede neposredno iz refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti kongruencije ρ. Neka su $a,b,c,d \in S$ i

$$a \, \tilde{\rho} \, b \iff r(a) \rho r(b), \quad c \, \tilde{\rho} \, d \iff r(c) \rho r(d).$$

Sada je

$$r(ac)=r(a)r(c) \, \rho \, r(b)r(d) = r(bd)$$

što je ekvivalentno sa $ac \, \tilde{\rho} \, bd$. Dakle, ρ je kongruencija na S. /=/

Teorema 2.3. Neka je S strogo π-inverzna r-polugrupa. Ako je (ξ,K) kongruencijski par na S, tada je $(\xi,\mathrm{reg}K)$ kongruencijski par inverzne polugrupe RegS i važi da je $\mathcal{K}_{(\xi,\mathrm{reg}K)} = \mathcal{K}_{(\xi,K)}|_{\mathrm{Reg}S}$. Obratno, ako je (ξ,K) kongruencijski par na RegS, tada je $(\xi,\tilde{K})$ kongruencijski par na S $(\tilde{K}=\{x\in S : r(x)\in K\})$ i ako je za $a,b\in S$ relacija ρ na S definisana sa $a\rho b \iff r(a)\,\mathcal{K}_{(\xi,K)}\,r(b)$, tada je $\rho=\mathcal{K}_{(\xi,\tilde{K})}$.

Dokaz. Neka je (ξ,K) kongruencijski par strogo π-inverzne r-polugrupe S. Pošto je K normalna podpolugrupa od S, to je $\mathrm{reg}K = K\cap \mathrm{Reg}S$ normalna podpolugrupa od RegS i ξ je normalna kongruencija na $E(S)\subseteq \mathrm{Reg}S$. Uslovi (i) i (ii) Definicije 2.4 važe jer važe uslovi (i) i (ii) Definicije 2.3 za svaki $a\in S$ pa i za svaki $a\in \mathrm{Reg}S$. Dakle, $(\xi,\mathrm{reg}K)$ je kongruencijski par inverzne polugrupe RegS. Iz Definicija 2.3 i 2.4 očigledno sledi da je $\mathcal{K}_{(\xi,\mathrm{reg}K)} = \mathcal{K}_{(\xi,K)}|_{\mathrm{Reg}S}$.

Ako je (ξ,K) kongruencijski par inverzne polugrupe RegS, tada je K normalna polugrupa od RegS. Kako je $K\subseteq\tilde{K} = \{x\in S : r(x)\in K\}$, to iz $E(S)\subseteq K$ sledi $E(S)\subseteq\tilde{K}$. Po Lemi 2.3 sledi da je K puna, r-poluprosta podpolugrupa od S. Neka $a\in S$, $a'\in V(r(a))$, tada je

$$r(a)\tilde{K}a' = \{r(a)ba' : b\in\tilde{K}\}.$$

Kako $r(a),a'\in \mathrm{Reg}S$ i pošto je S r-polugrupa, to je

$$r(r(a)ba') = r(r(a))r(b)r(a') = r(a)r(b)a'\in K$$

jer je K samokonjugovana podpolugrupa od RegS. Po definiciji skup $\tilde{K}$ sledi $r(a)ba'\in\tilde{K}$, što povlači $r(a)\tilde{K}a'\subseteq\tilde{K}$.

Dakle, $\tilde{K}$ je samokonjugovana podpolugrupa od S. Kako je $K = \mathrm{reg}\tilde{K}$, to iz inverzne zatvorenosti podpolugrupe K u $\mathrm{Reg}S$ sledi inverzna zatvorenost podpolugrupe K u S. Znači, K je normalna r-poluprosta podpolugrupa od S. Neka $r(a)e \in \tilde{K}$ i $e \,\xi\, r(a)^{-1}r(a)$, tada $r(r(a)e) = r(a)e \in K$ što po Definiciji 2.4 (i) sledi da $r(a) \in K \subseteq \tilde{K}$. Ako $a \in \tilde{K}$, tada $r(a) \in K$ što po Definiciji 2.4 (ii) povlači $r(a)^{-1}er(a) \,\xi\, r(a)^{-1}r(a)e$. Ova poslednja dva razmatranja važe za svaki $e \in E(S)$, $a \in S$ pa uslovi (i) i (ii) Definicije 2.3 važe. Kako je ξ normalna kongruencija na $E(S)$, sledi da je $(\xi, \tilde{K})$ kongruencijski par na S.

Neka $a, b \in S$ i ρ relacija definisana sa

$$a \,\rho\, b \iff r(a)\mathcal{K}_{(\xi,K)}r(b).$$

Po Lemi 2.4 ρ je r-poluprosta kongruencija na S. Takodje je po Definiciji 2.4.

$$a \,\rho\, b \iff r(a)^{-1}r(a) \,\xi\, r(b)^{-1}r(b),\ r(a)r(b)^{-1} \in K.$$

Kako je $K \subseteq \tilde{K}$, to iz poslednje relacije i po Definiciji 2.3 imamo

$$a \,\rho\, b \Rightarrow r(a)^{-1}r(a) \,\xi\, r(b)^{-1}r(b),\ r(a)r(b)^{-1} \in \tilde{K}$$
$$\iff a\,\mathcal{K}_{(\xi,\tilde{K})}b,$$

pa je $\rho \subseteq \mathcal{K}_{(\xi,\tilde{K})}$.

Obrtno iz

$$a\mathcal{K}_{(\xi,\tilde{K})}b \iff r(a)^{-1}r(a) \,\xi\, r(b)^{-1}r(b), r(a)r(b)^{-1} \in \tilde{K},$$

pošto je $K = \mathrm{reg}\tilde{K}$ i $r(a)r(b)^{-1} \in \mathrm{reg}K$ jer je $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S i po Definiciji 2.4. imamo

$$aK_{(\xi,\tilde{K})}b \quad \Rightarrow \quad r(a)^{-1}r(a)\ \xi\ r(b)^{-1}r(b),\ r(a)r(b)^{-1} \in K$$

$$\Leftrightarrow r(a)K_{(\xi,K)}r(b) \quad \Leftrightarrow \quad a\ \rho\ b,$$

što povlači $K_{(\xi,\tilde{K})} \subseteq \rho$. Dakle, $\rho = K_{(\xi,\tilde{K})}$ čime je teorema dokazana. /-/

Teoremama2.2 i 2.3, isto tvrdjenje dokazujemo na dva različita načina.

GLAVA IV.

KONGRUENCIJE KOJE RAZDVAJAJU IDEMPOTENTE NA π-REGULARNOJ POLUGRUPI

U radu |8| Edwards je opisao najveću kongruenciju koja na π-regularnoj polugrupi razdvaja idempotente i ona je data sa

$$\mu=\{(a,b)\in S\times S : \text{ako } x\in S \text{ je regularan tada svaki od } x\,\mathcal{R}\,xa,\ x\,\mathcal{L}\,xb \text{ povlači } xa\,\mathcal{H}\,xb, \text{ i svaki od } x\,\mathcal{R}\,ax,\ x\,\mathcal{L}\,bx \text{ povlači } ax\,\mathcal{H}\,bx\}.$$

U prvom paragrafu ove glave, drugačijom metodologijom, mi opisujemo najveću kongruenciju koja na π-regularnoj polugrupi razdvaja idempotente i njene varijante na nekim podklasama π-regularnih polugrupa. Takodje, opisujemo i najmanju r-poluprostu kongruenciju koja na r-polugrupi razdvaja idempotente, a opisujemo i jezgra ovih kongruencija. Pri ovome mi uopštavamo rezultate Howiea |24|, Meakina |37|, |39| i R. Fiegenbaum |12| , |13|. U drugom paragrafu opisujemo mrežu r-poluprostih kongruencija koje na r-polugrupi razdvajaju idempotente i pri tome uopštavamo rezultate R. Fiegenbaum |12|. U trećem paragrafu takodje razmatramo kongruencije koje na π-regularnoj polugrupi razdvajaju idempotente i pri tome uopštavamo rezultate D. Krgović |29|.

1. NAJVEĆE I NAJMANJA r-POLUPROSTA KONGRUENCIJA KOJE NA NEKIM π-REGULARNIM POLUGRUPAMA RAZDVAJAJU IDEMPOTENTE

Kongruencija polugrupe S rezdvaja idempotente ako svaka ρ-klasa sadrži najviše jedan idempotent.

Naredna teorema uopštava poznati rezultat Lallementa |30| koji važi za regularne polugrupe.

Teorema 1.1. Ako je S π-regularna polugrupa, tada r-poluprosta kongruencija ρ na S razdvaja idempotente ako i samo ako je $\rho \subseteq \mathcal{H}^*$. Kongruencija

$$\mathcal{H}^{*b} = \{(a,b) \in S\times S \ : \ (\forall x,y \in S^1)(xay, xby) \in \mathcal{H}^*\}$$

je najveća koja na S razdvaja idempotente.

Dokaz. Pošto svaka $\mathcal{H}^*$-klasa na π-regularnoj polugrupi sadrži najviše jedan idempotent, sledi da svaka kongruencija ρ koja je sadržana u $\mathcal{H}^*$ razdvaja idempotente.

Obratno, neka je ρ r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente, $a,b \in S$ i neka je $a\,\rho\,b$. Tada je $r(a)\,\rho\,r(b)$. Ako $a' \in V(r(a))$, tada je $(r(a)a')\rho = (r(b)a')\rho$ idempotent u S/ρ jer je $r(a)a'$ idempotent u S. Po Lemi 2.1 postoji $e \in E(S)$ da je $e\rho = r(b)a'\rho$ i $R^*_e \leq R^*_{r(b)a'}$. Pošto ρ razdvaja idempotente imamo da je $e = r(a)a'$. Iz $r(a) = r(a)a'r(a)$ sledi $r(a)S = r(a)a'r(a)S \subseteq r(a)a'S$ i $r(a)a'S \subseteq r(a)S$, pa je $r(a)S = r(a)a'S$ što je ekvivalentno sa $R^*_a = R^*_{r(a)a'}$. Neka je $r(r(b)a') = (r(b)a')^p$. Sada imamo

$$r(r(b)a')S = r(b)a'(r(b)a))^{p-1}S \subseteq r(b)S$$

što povlači $R^*_{r(b)a'} \leq R^*_b$. Dakle,

$$R^*_e = R^*_a = R^*_{r(a)a'} \leq R^*_{r(b)a'} \leq R^*_b.$$

Slično je $R^*_b \leq R^*_a$ pa je

$$R^*_a = R^*_b \iff r(a)S = r(b)S \iff a\mathcal{R}^*b.$$

Na potpuno sličan način dokazujemo da je $a\mathcal{L}^*b$, pa je $a\mathcal{H}^*b$.

Po Teoremi I 1.3 relacija

$$\mathcal{H}^{*b} = \{(a,b) \in S \times S : (\forall x,y \in S^1)(xay, xby) \in \mathcal{H}^*\}$$

je najveća kongruencija na S sadržana u $\mathcal{H}^*$. Pošto relacija $\mathcal{H}^*$ razdvaja idempotente, to kongruencija $\mathcal{H}^{*b}$ takodje razdvaja idempotente. Neka je ρ kongruencija koja razdvaja idempotente na S takva da je $\mathcal{H}^{*b} \subsetneq \rho$, tada je $\mathcal{H}^* \subsetneq \rho$. Kako je $\mathcal{H}^*$ r-poluprosta ekvivalencija, to po Lemi II 5 sledi da je ρ r-poluprosta kongruencija pa po prethodnom razmatranju sledi da je $\rho \subsetneq \mathcal{H}^*$ što je kontradikcija. Dakle, $\mathcal{H}^{*b}$ je najveća kongruencija koja na π-regularnoj polugrupi razdvaja idempotente. /=/

Sada uvodimo sledeću oznaku: ako je a element π-regularne polugrupe S tada definišemo

$$EL^*(a) = \{e \in E(S) : L^*_e \leq L^*_a\} \quad \text{i} \quad ER^*(a) = \{e \in E(S) : R^*_e \leq R^*_a\}$$

Pošto za $a' \in V(r(a))$ važi $Sa'r(a) = Sr(a)$ što je ekvivalentno sa $L^*_{a'r(a)} = L^*_a$, sledi da $a'r(a) \in EL^*(a)$ pa je $EL^*(a) \neq \emptyset$. Slično je $ER^*(a) \neq \emptyset$. Za $a\mathcal{L}^*b \iff L^*_a = L^*_b$ $(a\mathcal{R}^*b \iff R^*_a = R^*_b)$ imamo $EL^*(a) = EL^*(b)$ $(ER^*(a) = ER^*(b))$. Dakle, ako je $a\mathcal{H}^*b$, tada je $EL^*(a) = EL^*(b)$ i $ER^*(a) = ER^*(b)$. Takodje, pošto je $a\mathcal{L}^*r(a)$ $(a\mathcal{R}^*r(a))$ sledi $EL^*(a) = EL^*(r(a))$ $(ER^*(a) = ER^*(r(a)))$.

Lema 1.1. Neka su e,f idempotenti π-regularne polugrupe S. Tada je

$$L^*_e \leq L^*_f \iff ef = e \quad \text{i} \quad R^*_e \leq R^*_f \iff fe = e.$$

Dokaz. Ako je $L^*_e \leq L^*_f$, tada je $Se \subseteq Sf$ pa postoji $x \in S$ da je $e = xf$. Sada je $ef = xff = xf = e$. Obratno, ako je $e = ef$, tada je $Se = Sef \subseteq Sf$ pa je $L^*_e \leq L^*_f$. Slično se dokazuje drugo tvrdjenje. /=7

Teorema 1.2. Neka je S π-regularna polugrupa, tada relacija

$$(1) \qquad \mu = \{(a,b) \in S\times S: \ (\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))$$
$$[(\forall e \in EL^*(a) \cup EL^*(b)) \ r(a)ea' = r(b)eb' \quad i$$
$$(\forall f \in ER^*(a) \cup ER^*(b)) \ a'fr(a) = b'fr(b)]\}$$

je r-poluprosta ekvivalencija koja razdvaja idempotente i sadrži svaku r-poluprostu kongruenciju koja na S razdvaja idempotente. Najveća kongruencija koja na S razdvaja idempotente data je sa

$$\mu^b = \{(a,b) \in S\times S: \ (\forall x,y \in S^1)(xay,xby) \in \mu\}.$$

Dokaz. Očigledno je μ r-poluprosta, refleksivna i simetrična relacija. Pre dokaza tranzitivnosti dokazaćemo da je relacija μ sadržana u ekvivalenciji H^*.

Neka $(a,b) \in \mu$, tada $(r(a),r(b)) \in \mu$ i neka su $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b)$ kao u definiciji (1) za μ. Pri dokazu Teoreme 1.1 dokazali smo da je $r(a)S = r(a)a'S$ što je ekvivalentno sa $R^*_a = R^*_{r(a)a'}$, pa je $r(a)a' \in ER^*(a) = ER^*(r(a)a')$. Slično dobijamo da $r(b)b' \in ER^*(b) = ER^*(r(b)b')$. Sada po (1) sledi

$$a'r(a) = a'(r(a)a')r(a) = b'(r(a)a')r(b)$$

i

$$b'r(b) = b'(r(b)b')r(b) = a'(r(b)b')r(b)$$

Slično, $a'r(a) \in EL^*(a) = EL^*(a'r(a))$ i $b'r(b) \in EL^*(b) = EL^*(b'r(b))$ pa je

$$r(a)a' = r(a)(a'r(a))a' = r(b)(a'r(a))b'$$

i

$$r(b)b'=r(b)(b'r(b))b'=r(a)(b'r(b))a'.$$

Iz prve od ovih relacija i $a'r(a)\in EL^*(a)$ sledi da $b'r(a)a'r(b)\in EL^*(a)$ pa je

$$r(a)a'= r(a)(a'r(a))a'= r(a)(b'r(a)a'r(b))a'$$

$$= r(b)(b'r(a)a'r(b))b'= (r(b)b')(r(a)')(r(b)b').$$

Dakle,

$$(r(b)b')(r(a)a') = r(b)b'r(a)a'r(b)b' = r(a)a'$$

i

$$(r(a)a')(r(b)b') = r(b)b'r(a)a'r(b)b' = r(a)a'.$$

Po simetriji je $r(b)b' = (r(b)b')(r(a)a') = (r(a)a')(r(b)b')$ pa je $r(a)a' = r(b)b'$. Slično se dokazuje da je $a'r(a)=b'r(b)$. Po Teoremi I 2.7 sledi da $(a,b)\in \mathcal{H}^*$, pa je $\mu \subseteq \mathcal{H}^*$.

Neka (a,b), $(b,c)\in \mu$. Tada je $a\,\mathcal{H}^*b\,\mathcal{H}^*c$ i postoje $a'\in V(r(a))$, $b',b^*\in V(r(b))$ i $c^*\in V(r(c))$ da je $r(a)ea' = r(b)eb'$, $r(b)eb^*= r(c)ec^*$ za svaki $e\in EL^*(a) = EL^*(a'r(a)) = EL^*(b'r(b)) = EL^*(b) = EL^*(b^*r(b)) = EL^*(c^*r(c)) = EL^*(c)$. Slično je $a'fr(a) = b'fr(b)$, $b^*fr(b) = c^*fr(c)$ za svaki $f\in ER^*(a) = ER^*(b) = ER^*(c)$. Tada je $r(a)a'=r(b)b'$, $a'r(a)=b'r(b)$, $r(b)b^* = r(c)c^*$, $b^*r(b)= c^*r(c)$. Po Teoremi I 2.7 postoje $a^*\in V(r(a))$ i $c'\in V(r(c))$ da je $r(a)a' = r(c)c'$, $a'r(a)=c'r(c)$ i $r(a)a^* = r(c)c^*$, $a^*r(a) = c^*r(c)$. Sada za svaki $e\in EL^*(a) = EL^*(b) = EL^*(c)$ mi imamo

$$r(a)ea^*=r(a)(ea'r(a))a^* = (r(a)ea')(r(a)a^*)$$

$$=(r(a)ea')(r(b)b^*) = (r(b)eb')(r(b)b^*)$$

$$= r(b)(eb'r(b))b^*= r(b)eb^* = r(c)ec^*,$$

i za svaki $f\in ER^*(a) = ER^*(b) = ER^*(c)$ imamo

$$a^*fr(a) = a^*(r(a)a'f)r(a\ ) = (a^*r(a))(a'fr(a))$$

$$= (b^*r(b))(a'fr(a)) = (b^*r(b))(b'fr(b))$$

$$= b^*(r(b)b'f)r(b) = b^*fr(b) = c^*fr(c).$$

Dakle, $(a,c)\in\mu$, pa je relacija μ tranzitivna što povlači da je μ r-poluprosta ekvivalencija.

Iz već dokazanog $\mu\subseteq\mathcal{H}^*$ sledi po Teoremi 1.1 da μ razdvaja idempotente na S.

Neka je ρ r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente, i neka $(a,b)\in\rho$. Tada po Teoremi 1.1 $(a,b)\in\mathcal{H}^*$ i postoje $a'\in V(r(a\ ))$, $b'\in Vr(b)$ da je $r(a)a' = r(b)b'$ i $a'r(a) = b'r(b)$. Neka $e\in EL^*(a) = EL^*(r(a)) = EL^*(a'r(a)) = EL^*(b) = EL^*(r(b)) = EL^*(b'r(b))$. Tada je $ea'r(a) = e = eb'r(b)$ (po Lemi 1.1) i

$$(r(a)ea')(r(a)ea') = r(a)(ea'r(a))ea' = r(a)eea'$$

$$= r(a)\cdot ea'\in E(S),$$

i slično $r(b)eb'\in E(S)$. Pošto je ρ r-poluprosta kongruencija iz $(r(a),r(b))\in\rho$ sledi

$$b' = b'r(b)b' = b'r(a)a'\ \rho\ b'r(b)a' = a'r(a)a' = a'$$

pa $(a',b')\in\rho$. Iz prethodno rečenog sledi $(r(a)ea', r(b)eb')\in\rho$. Kako $r(a)ea'$, $r(b)eb'\in E(S)$, sledi da je $r(a)ea' = r(b)eb'$ pošto kongruencija ρ razdvaja idempotente. SLično se dokazuje da je $a'fr(a) = b'fr(b)$ za svaki $f\in ER^*(a) = ER^*(b)$ pa je $(a,b)\in\mu$. Dakle, $\rho\subseteq\mu$ pa sledi da ekvivalencija μ sadrži svaku r-poluprostu kongruenciju koja na S razdvaja idempotente.

Takodje, možemo zaključiti da ne postoji kongruencija ρ koja na S razdvaja idempotente takva da je $\mu\subseteq\rho$. U suprotnom, iz $\mu\subsetneq\rho$ bi sledilo da je ρ r-poluprosta kongruencija, a po gornjem razmatranju bi bilo $\rho\subseteq\mu$.

Dokaz da je $\mu^b=\{(a,b)\in S\times S : (\forall x,y\in S^1)(xay,xby)\in\mu\}$ najveća kongruencija koja na S razdvaja idempotente analogan je odgovarajućem delu dokaza Teoreme 1.1. /=7

Lema 1.2. Neka je S r-polugrupa, tada je ekvivalencija $\mathcal{L}^*$ $(\mathcal{R}^*)$ desna (leva) kongruencija.

Dokaz. Neka $a,b,c\in S$ i $a\mathcal{L}^*b \Leftrightarrow Sr(a) = Sr(b)$. Tada je

$$Sr(ac) = Sr(a)r(c) = Sr(b)r(c) = Sr(bc) \Leftrightarrow ac\mathcal{L}^*bc$$

pa $\mathcal{L}^*$ jeste desna kongruencija. Slično, $\mathcal{R}^*$ je leva kongruencija. /=7

Posledica 1.1. Neka je S r-polugrupa, tada je relacija μ definisana sa (1) najveća kongruencija koja razdvaja idempotente.

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme treba još pokazati stabilnsot ekvivalencije μ. Neka $a,b,c\in S$, $(a,b)\in\mu$ i $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b)$ kao u (1), tada $(a,b)\in\mathcal{H}^*\subseteq\mathcal{R}^*$. Po prethodnoj lemi je $\mathcal{R}^*$ leva kongruencija pa $(ca,cb)\in\mathcal{R}^*$. Ako je još $r(ca)'\in V(r(ca)=r(c)r(a))$, tada je

$$\begin{aligned} r(ca)&=r(c)r(a)=r(c)r(a)r(ca)'r(c)r(a)\\ &=r(c)r(a)(a'r(a))r(ca)'(r(c)r(a))(a'r(a))\\ &=r(c)r(a)(b'r(b))r(ca)'(r(c)r(a))(b'r(b))\\ &=r(c)r(a)b'r(b)r(ca)'r(ca)b'r(b). \end{aligned}$$

Kako je $r(ca)'r(ca) \in Sr(a)$, to $r(ca)'r(ca) \in EL^*(a) = EL^*(r(a))$ pa je po (1)

$$r(b)(r(ca)'r(ca))b' = r(a)(r(ca)'r(ca))a'.$$

Sada je

$$\begin{aligned} r(ca) &= r(c)r(a) = r(c)r(a)b'r(b)r(ca)'r(ca)b'r(b) \\ &= r(ca)b'r(a)r(ca)'r(c)r(a)'r(b) \\ &= r(ca)b'r(a)r(ca)'r(c)r(b)b'r(b) \\ &= r(ca)b'r(a)r(ca)'r(c)r(b) \in Sr(c)r(b) = Sr(cb). \end{aligned}$$

Odavde je

$$Sr(ca) \subseteq Sr(cb) \iff L^*_{ca} \le L^*_{cb}.$$

Slično je $L^*_{cb} \le L^*_{ca}$ pa je

$$L^*_{ca} = L^*_{cb} \iff Sr(ca) = Sr(cb) \iff ca\ \mathcal{L}^* cb.$$

Iz $(ca,cb) \in \mathcal{R}^*$ i $(ca,cb) \in \mathcal{L}^*$ sledi $(ca,cb) \in \mathcal{H}^*$ što je ekvivalentno sa $(r(ca),r(cb)) \in \mathcal{H}^*$. Sa $r(cb)'$ ćemo označiti inverzni element elementa $r(cb)$ koji je $\mathcal{H}^*$-ekvivalentan sa $r(ca)' \in V(r(ca))$. Ako $e \in EL^*(cb) = EL^*(ca) = EL^*(r(ca)'r(ca))$, tada je $e(r(ca)'r(ca)) = e$. Takodje

$$L^*_{r(ca)'r(ca)} \le L^*_a = L^*_{a'r(a)} \implies r(ca)'r(ca) \in EL^*(a) = EL^*(b),$$

jer je $Sr(ca)'r(ca) \subseteq Sr(a)$, pa je $L^*_e \le L^*_a = L^*_{a'r(a)}$ i $ea'r(a) = e$

Sada je

$$\begin{aligned} r(ca)er(ca)' &= r(c)r(a)e\,a'r(a)r(ca)' \\ &= r(c)r(b)eb'r(a)r(ca)' \\ &= r(cb)eb'r(a)r(ca)'r(ca)r(ca)' \\ &= r(cb)eb'r(a)r(ca)'r(cb)r(cb)' \\ &= r(cb)eb'r(a)r(ca)'r(c)r(b)b'r(b)\,r(cb)' \end{aligned}$$

$$=r(cb)eb'r(a)r(ca)'r(c)r(a)a'r(b)r(cb)'$$

$$=r(cb)eb'r(b)r(ca)'r(ca)b'\cdot r(b)r(cb)'$$

$$=r(cb)(eb'r(b))r(ca)'r(ca)a'r(a)r(cb)'$$

$$=r(cb)er(ca)'r(ca)r(cb)'$$

$$=r(cb)er(cb)'r(cb)r(cb)'$$

$$=r(cb)er(cb)'.$$

Neka $f \in ER^*(ca) = ER^*(cb) = ER^*(r(ca)r(ca)')$. Tada je $r(ca)r(ca)'f = f$. Takodje je $r(ca)'fr(ca) \in E(S)$ i

$$Sr(ca)'fr(ca) = Sr(ca)'fr(c)r(a) \subseteq Sr(a),$$

pa

$$L^*_{r(ca)'fr(ca)} \leq L^*_a \Rightarrow r(ca)'fr(ca) \in EL^* = EL^*(b).$$

Dakle,

$$r(ca)'fr(ca)=r(ca)'r(ca)r(ca)'fr(ca)r(ca)'r(ca)$$

$$=r(cb)'r(cb)r(ca)'fr(ca)r(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'r(c)r(b)b'r(b)r(ca)'fr(c)r(a)a'r(a)(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'(r(c)r(b)b')r(b)r(ca)'fr(c)r(a)b'r(b)r(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'(r(c)r(b)b')r(a)(r(ca)'fr(c)r(a))a'r(b)r(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'(r(c)r(a))(a'r(a))r(ca)'fr(c)r(a)a'r(b)r(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'r(ca)(r(ca)'fr(c)r(b)b'r(b))r(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'r(ca)(r(ca)'fr(cb))r(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'r(cb)r(cb)'fr(cb)r(cb)'r(cb)$$

$$=r(cb)'fr(cb).$$

Znači, $ca\,\mu\,cb$ pa μ jeste leva kongruencija. Slično se dokazuje da je μ desna kongruencija pa sledi da je μ najveća r-poluprosta kongruencija koja na r-polugrupi S razdvaja idempotente. $\not\!\!\square$

Teorema 1.3. Neka je S r-polugrupa i τ relacija data sa

$$\tau = \{(a,b) \in S\times S : (\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))$$

$$r(a)a' = r(b)b', \quad a'r(a)=b'r(b), \ r(a)b' \in \ker\mu\},$$

tada je $\tau = \mu$.

Dokaz. Neka je $a\,\tau\, b$, tada postoje $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$ da je $r(a)a'=r(b)b'$ i $a'r(a)=b'r(b)$ što povlači $a\,\mathcal{H}^*b$ i $a'\mathcal{H}^*b'$. Odavde je $a'\mathcal{R}^*b'$ pa pošto je $\mathcal{R}^*$ leva kongruencija sledi da je $r(a)a'\ \mathcal{R}^*r(a)b'$. Slično, iz $a\mathcal{L}^*b \iff r(a)\mathcal{L}^*r(b)$ sledi $r(a)b'\mathcal{L}^*r(b)b'$ jer je $\mathcal{L}^*$ desna kongruencija. Kako je $r(a)a'=r(b)b'$ imamo da je $r(b)b'\ \mathcal{R}^*\ r(a)b'$ pa sledi da je $r(a)b'\ \mathcal{H}^*r(b)b'$. Pošto $r(a)b' \in \ker\mu$, tada postoji $e \in E(S)$ da je $r(a)b'\,\mu\, e$. Iz $\mu \subseteq \mathcal{H}^*$ sledi $r(a)b'\mathcal{H}^*\ e$. Sada je $r(b)b'=e$, pošto svaka $\mathcal{H}^*$-klasa sadrži najviše jedan idempotent. Dakle, $r(a)b'\mu\ r(b)b'$. Sada je

$$a\mu = r(a)\mu = r(a)\mu(a'r(a))\mu = r(a)\mu(b'r(b))\mu$$

$$=(r(a)b')\mu r(b)\mu=(r(b)b')\mu r(b)\mu=r(b)\mu = b\mu.$$

Dakle, $\tau \subseteq \mu$. Obratno, ako je $a\,\mu\, b$, tada postoje $a' \in V(r(a)$ i $b' \in V(r(b))$ takvi da je $r(a)a'=r(b)b'$ i $a'r(a)=b'r(b)$ (po dokazu Teoreme 2.1). Po dokazu Posledice 1.1 imamo da $a\,\mu\, b \iff r(a)\,\mu\, r(b)$ povlači $r(a)b'\,\mu\, r(b)b'$ pa $r(a)b' \in \ker\mu$. Sada je $\mu \subseteq \tau$ i konačno $\tau = \mu$. $\not\!\!\square$

Pre nego što dokažemo teoremu koja opisuje jezgro kongruencije μ r-polugrupe, dokazaćemo sledeće dve leme.

Lema 1.2. Neka je S π-regularna polugrupa i $e \in E(S)$. Tada za svaki $g \in EL^*(e)$, $ge, eg \in E(S)$ i $ge=g$, a za svaki $h \in ER^*(e)$, $eh, he \in E(S)$ i $eh=h$.

Dokaz. Ako $g \in EL^*(a)$, tada je $ge=g$ po Lemi 1.1 i još je

$$(eg)(eg) = e(ge)g=egg=eg.$$

Slično se dokazuje i drugi deo leme. $\square$

Lema 1.3. Neka je S π-regularna polugrupa i $a \in S$. Tada za svaki $e \in EL^*(a)$ i svaki $a' \in V(r(a))$ važi $ea'r(a)=e$ što povlači $r(a)ea' \in E(S)$, i za svaki $f \in ER^*(a)$ i svaki $a^* \in V(r(a))$ važi $r(a)a^*f=f$ što povlači $a^*fr(a) \in E(S)$.

Dokaz. Neka $a \in S$, $e \in EL^*(a)$ i $a' \in V(r(a))$. Iz $a\mathcal{L}^*a'r(a)$ sledi $EL^*(a)=EL^*(a'r(a))$ pa $e \in EL^*(a'r(a))$. Po prethodnoj lemi je $ea'r(a)=e$ i

$$(r(a)ea')(r(a)ea')=r(a)(ea'r(a))ea'=r(a)ea'.$$

Analogno se dokazuje i drugi deo leme. $\square$

Naredna teorema daje opis jezgra kongruencije μ na r-polugrupi.

Teorema 1.4. Neka je S r-polugrupa, tada je

$$\ker \mu = \{a \in S \ : \ (\exists a' \in V(r(a)))[(\forall e \in EL^*(a))\, r(a)ea'e = a'r(a)e \ \text{ i } \ (\forall f \in ER^*(a)) \ fa'fr(a)=fr(a)a']\}.$$

Dokaz. Neka $a \in \ker \mu$, tada postoji $g \in E(S)$ da je $a \mu g$. Kako je $\mu \subseteq \mathcal{H}^*$ to iz $a\,\mathcal{H}^*g$ po Teoremi I 2.7 postoji $a' \in V(r(a))$ da za $g \in V(g)$ važi $a'r(a)=g=r(a)a'$. Kako je $(a,g) \in \mu \Leftrightarrow (r(a),g) \in \mu$ to je

$$(g,a') = (r(a)a',a'r(a)a') = (r(a)a',ga') \in \mu$$

pa $a' \in \ker\mu$. Kako je $\mu \subseteq \mathcal{L}^*$ to iz $a\mathcal{L}^*g$ sledi $EL^*(a) = EL^*(g)$ i neka $e \in EL^*(a) \cup EL^*(g)$. Po Lemo 1.2 $ge \in E(S)$, a po Lemi 1.3 $r(a)ea', geg \in E(S)$ pa iz $(r(a)e,ge) \subseteq \mu$ i $(a',g) \in \mu$ sledi $(r(a)ea',geg) \in \mu$. Pošto μ razdvaja idempotente imamo da je $r(a)ea'=geg$. Sada iz $a'r(a) = g$ sledi

$$r(a)ea'e=gege=ge=a'r(a)e.$$

Slično se dokazuje da je $fa'fr(a)=fr(a)a'$ za svaki $f \in ER^*(a)$.

Obratno, neka a pripada skupu sa desne strane znaka jednakosti iz postavke teoreme. Pošto $a'r(a) \in EL^*(a)$ to je

$$r(a)a'a'r(a)=r(a)(a'r(a))a'(a'r(a))=a'r(a)(a'r(a))=a'r(a)$$

i kako $r(a)a' \in ER^*(a)$

$$r(a)a'a'r(a) = (r(a)a')a'(r(a)a')r(a) = (r(a)a')r(a)a'=r(a)a',$$

pa je $a'r(a) = r(a)a'$. Iz $a\mathcal{L}^*a'r(a) = r(a)a'$ sledi $EL^*(a) = EL^*(r(a)a')$ i neka $e \in EL^*(r(a)a')$. Po Lemi 1.2 $a'r(a)e = r(a)a'e \in E(S)$ i pošto $a'r(a)=r(a)a'e= r(a)a'e \in r(a)S$ sledi da $a'r(a)e \in ER^*(a)$. Sada je

$$r(a)ea'=r(a)((a'r(a)e)a'r(a))a'=r(a)((a'r(a)e)r(a)a')a'$$
$$=r(a)((a'r(a)e)a'(a'r(a)e)r(a))a'=$$
$$=r(a)ea'(a'r(a))er(a)a'$$
$$=r(a)ea'(r(a)a')er(a)a'=(r(a)ea'e)r(a)a'$$
$$=(a'r(a)e)r(a)a'=r(a)a'er(a)a'.$$

Dalje, $a\mathcal{R}^*r(a)a'$ povlači $ER^*(a)=ER^*(r(a)a')$. Neka $f \in ER^*(r(a)a')$. Po Lemi 1.2 $fr(a)a' \in E(S)$ i iz $fr(a)a'=$

$fa'r(a) \in Sr(a)$ sledi $fr(a)a' \in EL^*(a)$. Sada je

$$a'fr(a)=a'(r(a)a'(fr(a)a'))r(a)=a'(a'r(a)(fr(a)a'))r(a)$$
$$=a'(r(a)(fr(a)a')a'(fr(a)a'))r(a)$$
$$=a'r(a)f(r(a)a')afr(a)=a'r(a)f(a'r(a))a'fr(a)$$
$$=a'r(a)(fa'fr(a))=a'r(a)(fr(a)a')=r(a)a'fr(a)a'.$$

Po Posledici 1.1. sledi $(a,r(a)a') \in \mu$ što povlači $a \in \ker\mu$ čime je teorema dokazana. /=/

Posledica 1.1 uopštava poznati rezultat J. Meakina |39| koji je opisao najveću kongruenciju koja na regularnoj polugrupi razdvaja idempotente. Pošto na r-polugrupi regularni element čine regularnu podpolugrupu, važi da se $\mu|_{RegS}$ poklapa sa kongruencijom koju je opisao Meakin. U radu |12| R. Fiegenbaum je opisala jezgro najveće kongruencije koja na regularnoj polugrupi razdvaja idempotente. Ako taj rezultat primenimo na slučaj r-polugrupe dobijamo da je

$$\ker \mu|_{RegS} = \{a \in RegS : (\exists a' \in V(a)) \mid (\forall e \in EL^*(a))aea'e$$
$$=a'ae \quad i \quad (\forall f \in ER^*(a))fa'fa=faa' \mid \}.$$

Sada se može dokazati sledeća

Teorema 1.5. Neka je S r-polugrupa, tada je

$$\ker\mu = \{a \in S : r(a) \in \ker\mu|_{RegS}\}.$$

Dokaz. Neka je $A=\{a \in S : r(a) \in \ker\mu|_{RegS}\}$, tada $a \in A$ povlači $r(a) \in \ker\mu|_{RegS}$. Sada postoji $e \in E(S)$ da je $r(a)\mu|_{RegS}e$. Odavde je $r(a)\,\mu\, e$ pa pošto je μ r-poluprosta kongruencija sledi $a\,\mu\, e$. Dakle, $a \in \ker\mu$ pa je $A \subseteq \ker\mu$.

Obratno, $a \in \ker\mu$ povlači da je $a\,\mu\, e$ za neki

$e \in E(S)$, pa je $r(a)\,\mu\, a\, \mu\, e$. Pošto $r(a), e \in RegS$ sledi $r(a)\mu_{|RegS}e$ pa $r(a) \in \ker\mu_{|RegS}$ i $a \in A$. Dakle, $\ker\mu \subseteq A$ pa je $\ker\mu = A$. $\boxed{-}$

Teorema 1.6. Neka je S π-konvencionalna polugrupa i definišimo na S relaciju

$$(2) \qquad \mu_1 = \{(a,b) \in S\mathrm{x}S : (\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))$$
$$(\forall e \in E(S))\ r(a)ea' = r(b)eb' \ \text{ i } \ a'er(a) = b'er(b)\}.$$

Relacija μ_1 je r-poluprosta ekvivalencija koja na S razdvaja idempotente i sadrži svaku r-poluprostu kongruenciju koja na S razdvaja idempotente. Najveća kongruencija koja na S razdvaja idempotente data je sa

$$\mu_1^b = \{(a,b) \in S\mathrm{x}S : (\forall x,y \in S^1)(xay,xby) \in \mu_1\}.$$

Dokaz. Očigledno je μ_1 r-polurpsta, refleksivna i simetrična relacija. Pre dokaza tranzitivnosti dokazaćemo da je $\mu_1 \subseteq \mathcal{H}^*$. Neka $a,b \in S$, $a\,\mu_1\, b$ i naka su $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$ kao u definiciji (2) relacije μ_1. Pošto je S π-konvencionalna polugrupa, imamo da je $r(a)a'r(b)b'r(a)a' \in E(S)$ Po (2) sledi

$$a'(r(a)a'r(b)b'r(a)a')r(a) = b'(r(a)a'r(b)b'r(a)a')r(b).$$

Pošto $b'r(a)a'r(b) \in E(S)$ imamo

$$(3) \quad a'r(b)b'r(a) = (b'r(a)a'r(b))(b'r(a)a'r(b)) = b'r(a)a'r(b).$$

Kako je $r(b)b' \in E(S)$ biće

$$a'(r(b)b')r(a) = b'(r(b)b')r(b) = b'r(b)$$

i slično $b'((r(a)a')r(b) = a'r(a)$. Iz (3) sada sledi

$a'r(a)=b'r(b)$. Na potpuno sličan način dobijamo $r(a)a'=r(b)b'$. Iz prethodna dva rezultata i po Teoremi I 2.7 dobijamo $\mu_1 \subseteq H^*$.

Neka $a,b,c \in S$ i $a\mu_1 b$, $b\mu_1 c$. Tada postoje $a' \in V(r(a))$, $b',b^* \in V(r(b))$ i $c^* \in V(r(c))$ da je

$$a'er(a)=b'er(b),\ r(a)ea'=r(b)eb',\ b^*er(b)=c^*er(c) \text{ i}$$

$$r(b)eb^*=r(c)ec^*$$

za svaki $e \in E(S)$. Odavde, kao u prethodnom razmatranju, zaključujemo da je $r(a)a'=r(b)b'$, $a'r(a)=b'r(b)$, $r(b)b^*=r(c)c^*$, $b^*r(b)=c^*r(c)$ i da su a,b i c H^*-ekvivalentni elementi u S. Po Teoremi I 2.7 sledi da postoje $a^* \in V(r(a))$ i $c' \in V(r(c))$ da je

$$r(a)a'=r(b)b'=r(c)c',\quad a'r(a)=b'r(b)=c'r(c)$$

i

$$r(a)a^*=r(b)b^*=r(c)c^*,\quad a^*r(a)=b^*r(b)=c^*r(c).$$

Kako je

$$r(a)(a^*r(a)a')r(a)=r(a)a'r(a)=r(a)$$

i

$$(a^*r(a)a')r(a)(a^*r(a)a')=a^*r(a)a^*r(a)a'=a^*r(a)a',$$

to sledi da $a^*r(a)a' \in V(r(a))$. Slično dokazujemo da $c^*r(c)c' \in V(r(c))$ pa je za svaki $e \in E(S)$

$$\begin{aligned}(a^*r(a)a')er(a)&=(a^*r(a))(a'er(a))=(b^*r(b))(b'er(b))\\&=(b^*r(b))(b'er(b)b'r(b))=b^*(r(b)b'er(b)b')r(b)\\&=c^*(r(c)c'er(c)c')r(c)=(c^*r(c)c')er(c)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}r(a)e(a^*r(a)a')&=r(a)(a^*r(a)ea^*r(a))a'=r(b)(b^*r(b)eb^*r(b))b'\\&=(r(b)eb^*)(r(b)b')=(r(c)ec^*)(r(c)c')=r(c)e(c^*r(c)c').\end{aligned}$$

Sada je $a\mu_1 c$ pa je relacija μ_1 tranzitivna. Dakle μ_1 je r-poluprosta ekvivalencija, a iz već pokazanog $\mu_1 \subseteq H^*$ sledi da μ_1 razdvaja idempotente.

Neka je ρ r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente. Ako $(a,b)\in\rho$ po Teoremi 1.1. sledi da $(a,b)\in H^*$ pa postoje $a'\in V(r(a))$ i $b'\in V(r(b))$ da je $r(a)a'=r(b)b'$ i $a'r(a)=b'r(b)$. Pošto je $a\rho b \iff r(a)\rho r(b)$ mi imamo $r(b)b'=r(a)a'\rho\, r(b)a'$ pa je

$$b'=b'r(b)b' \rho\, b'r(b)a'=a'r(a)a'=a'$$

to jest, $(b',a')\in\rho$. Kako je $r(b)e\rho r(a)e$ za svaki $e\in E(S)$, to je $r(b)eb'\rho r(a)ea'$. Pošto $r(a)ea', r(b)eb'\in E(S)$ i pošto ρ razdvaja idempotente, sledi da je $r(a)ea'=r(b)eb'$. Takodje $(a'er(a), b'er(b))\in\rho$ pa je $a'er(a)=b'er(b)$. Odavde sledi $(a,b)\in\mu_1$ pa je $\rho\subseteq\mu_1$.

Slično kao kod Teoreme 1.2 zaključujemo da ne postoji na S kongruencija koja razdvaja idempotente i koja sadrži μ_1.

Dokaz da je $\mu_1^b=\{(a,b\in SxS : (\forall x,y\in S^1)(xay,xby)\in\mu_1\}$ najveća kongruencija koja na S razdvaja idempotente analogan je odgovarajućem delu dokaza Teoreme 1.1. $\square$

Stav 1.1. Ako je S π-konvencionalna polugrupa, $(a,b)\in\mu_1$ i a^* proizvoljan inverz elementa $r(a)$, tada postoji b^* inverzan za $r(b)$ da je $r(a)ea^*=r(b)eb^*$ i $a^*er(a)=b^*er(b)$ za svaki $e\in E(S)$.

Dokaz. Neka $(a,b)\in\mu_1$ i neka je $a^*\in V(r(a))$ proizvoljan, tada postoje $a'\in V(r(a))$ i $b'\in V(r(b))$ da je

$r(a)ea'=r(b)eb'$ i $a'er(a)=b'er(b)$ za svaki $e\in E(S)$. Takodje, pošto $(a,b)\in H^*$ postoji $b^*\in V(r(b))$ da je $r(a)a^*=r(b)b^*$ i $a^*r(a)=b^*r(b)$. Sada je za svaki $e\in E(S)$

$$\begin{aligned} r(a)ea^* &= r(a)(a^*r(a)ea^*r(a))a^* = r(a)(a^*r(a)ea^*r(a)a'r(a))a^* \\ &= r(a)(a^*r(a)ea^*r(a))a'(r(a)a^*) \\ &= r(b)(a^*r(a)ea^*r(a))b'(r(b)b^*) \\ &= r(b)(b^*r(b)eb^*r(b))b'r(b)b^* = r(b)eb^*. \end{aligned}$$

Slično se dokazuje $a^*er(a)=b^*er(b)$. /=/

Teorema 1.7. Neka je S π-ortodoksna r-polugrupa, tada relacija μ_1 definisana sa (2) je najveća kongruencija koja na S razdvaja idempotente.

Dokaz. Pokazaćemo da je $\mu_1=\mu$ jer u tom slučaju tvrdjenje teoreme važi po Posledici 1.1.

Očigledno je $\mu_1\subseteq\mu$.

Obratno, neka $(a,b)\in\mu$. Po dokazu Teoreme 1.2. imamo da je $r(a)a'=r(b)b'$ i $a'r(a)=b'r(b)$ gde su $a'\in V(r(a))$ i $b'\in V(r(b))$ kao u definiciji relacije μ. Takodje je $EL^*(a) = EL^*(r(a)) = EL^*(a'r(a))$. Ako $h\in E(S)$, tada je $Sha'r(a) \subseteq Sr(a) \iff L^*_{ha'r(a)}\leq L^*_{r(a)}$ pa $ha'r(a)\in EL^*(a)$ (ovde $ha'r(a)$ pripada skupu $E(S)$ jer je π-ortodoksna polugrupa). Sada je

$$\begin{aligned} r(a)ha' &= r(a)h(a'r(a)a') = r(a)(ha'r(a))a' \\ &= r(b)(ha'r(a))b' = r(b)(hb'r(b))b' \\ &= r(b)h(b'r(b)b') = r(b)hb'. \end{aligned}$$

Slično je $ER^*(a)=ER^*(r(a))=ER^*(r(a)a')$, $r(a)a'hS\subseteq r(a)S \iff$

$R^*_{r(a)a'h} \leq R^*_a$ pa $r(a)a'h \in ER^*(a)$. Sada je

$$a'hr(a) = a'(r(a)a'h)r(a) = b'(r(a)a'h)r(b)$$

$$= b'(r(b)b'h) \cdot r(b) = b'hr(b).$$

Dakle, $\mu \subseteq \mu_1$ pa je $\mu = \mu_1$. /=/

Ova Teorema uopštava poznati rezultat J.Meakina |37|. Na π-ortodoksnoj polugrupi je po Teoremi II5 RegS ortodoksna polugrupa. Kongruencija $\bar{\mu}_1 = \mu_1|_{RegS}$ je najveća koja na RegS razdvaja idempotente i poklapa se sa onom koju je u pomenutom radu opisao Meakin. R. Fiegenbaum je u radu |13| opisala jezgro najveće kongruencije koja na ortodoksnoj polugrupi S razdvaja idempotente. Primenjeno na slučaj π-ortodoksne polugrupe S taj rezultat izgleda ovako:

$$\ker \bar{\mu}_1 = \{a \in RegS : (\exists a' \in V(a))(\forall e \in E(S))\, a'eae = aa'e$$
$$\text{i } eaea' = ea'a\}.$$

Teorema 1.8. Neka je S π-ortodoksna r-polugrupa. Tada je

$$\ker \mu_1 = \{a \in S : r(a) \in \ker \bar{\mu}_1\}$$
$$= \{a \in S : (\exists a' \in V(r(a)))(\forall e \in E(S))\, a'er(a)e = r(a)a'e$$
$$\text{i } er(a)ea' = ea'r(a)\}.$$

Dokaz. Najpre, jednakost skupova iz postavke teoreme je očigledna. Sam dokaz možemo uraditi na dva načina, kao u slučaju r-polugrupe (Teorema 1.4 i Teorema 1.5). Prvi način je dosta dugačak pa ga zbog toga ovde izostavljamo i razlikuje se od dokaza Teoreme 1.4. Kao dokaz navedene teoreme smatraćemo drugi način koji je u potpunosti analogan dokazu Teoreme 1.5 pa ga zbog toga ne navodimo. /=/

Neka je S strogo π-inverzna polugrupa i $a \in S$, tada jedinstven inverz elementa $r(a)$ označavamo sa $r(a)^{-1}$.

Teorema 1.9. Neka je S strogo π-inverzna polugrupa, tada relacija

$$\mu_2 = \{(a,b) \in SxS : (\forall e \in E(S))\ r(a)^{-1}er(a)=r(b)^{-1}er(b)\}$$

je r-poluprosta ekvivalencija koja na S razdvaja idempotente i sadrži svakü r-poluprostu kongruenciju koja na S razdvaja idempotente. Najveća kongruencija koja na S razdvaja idempotente data je sa

(4) $\quad \mu_2^b = \{(a,b) \in SxS : (\forall x,y \in S^1)(xay,xby) \in \mu_2\}.$

Dokaz. Relacija μ_2 je očigledno r-poluprosta ekvivalencija na S. Ako $e,f \in E(S)$, tada je

$$e=e^{-1}ee=f^{-1}ef=ef \quad \text{i} \quad f=f^{-1}ff=e^{-1}fe=ef$$

pa je $e = f$ i μ_2 razdvaja idempotente. Dokaz da μ_2 sadrži svaku r-poluprostu kongruenciju koja na S razdvaja idempotente analogan je dokazu odgovarajućeg dela Teoreme 1.6. Takodje ne postoji kongruencija koja na S razdvaja idempotentne takva da sadrži μ_2. Dokaz da je μ_2^b najveća kongruencija koja na S razdvaja idempotente analogan je dokazu odgovarajućeg dela Teoreme 1.1. /=/

Posledica 1.2. Neka je S strogo π-inverzna r-polugrupa, tada je relacija μ_2 definisana sa (4) najveća r-poluprosta kongruencija koja razdvaja idempotente.

Dokaz. Po prethodnoj teoremi sledi da treba još dokazati stabilnsot ekvivalencije μ_2. Neka su zato $a,b,c \in S$ i $a\mu_2 b$. To znači da je $r(a)^{-1}er(a)=r(b)^{-1}er(b)$ za svaki $e \in E(S)$. Odavde, pošto $r(c)^{-1}er(c) \in E(S)$ za svaki

$e \in E(S)$, imamo

$$\begin{aligned} r(ca)^{-1}er(ca) &= (r(c)r(a))^{-1}er(c)r(a) \\ &= r(a)^{-1}r(c)^{-1}er(c)r(a) \\ &= r(b)^{-1}r(c)^{-1}er(c)r(b) \\ &= r(cb)^{-1}er(cb) \end{aligned}$$

pa μ_2 jeste leva kongruencija. Takodje je

$$\begin{aligned} r(ac)^{-1}er(ac) &= r(c)^{-1}(r(a)^{-1}er(a))r(c) \\ &= r(c)^{-1}(r(b)^{-1}er(b))r(c) \\ &= r(bc)^{-1}er(bc) \end{aligned}$$

pa μ_2 jeste leva kongruencija. Dakle, μ_2 je kongruencija. /=/

Ova posledica uopštava poznati rezultat J. Howiea |24| koji je opisao najveću kongruenciju koja na inverznoj polugrupi razdvaja idempotente. Na strogo π-inverznoj polugrupi S je RegS inverzna polugrupa, a kongruencija $\bar{\mu}_2 = \mu_2 |_{\mathrm{RegS}}$ je baš ona koju je opisao Howie. R. Fiegenbaum je u radu |13| opisala jezgro najveće kongruencije koja na inverznoj polugrupi razdvaja idempotente. Primenjeno na ovaj slučaj dobijamo da je

$$\ker\bar{\mu}_2 = \{a \in \mathrm{RegS} : (\forall e \in E(S))\ ea = ae\}.$$

Teorema 1.10. Neka je S strogo π-inverzna r-polugrupa, tada je

$$\begin{aligned} \ker\mu_2 &= \{a \in S : (\forall e \in E(S))\ er(a) = r(a)e\} \\ &= \{a \in S : r(a) \in \ker\bar{\mu}_2\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Jednakost skupova sa desne strane znaka jednakosti je očigledna. Drugi deo dokaza može se izvesti direktno ili kao u Teoremi 1.5. /=/

Na svakoj polugrupi najmanja kongruencija je jednakost i ona razdvaja idempotente.

Teorema 1.11. Neka je S π-regularna polugrupa, tada relacija

$$\nu=\{(a,b)\in S\times S : r(a) = r(b)\}$$

je r-poluprosta ekvivalencija koja razdvaja idempotente i ona je sadržana u svakoj r-poluprostoj ekvivalenciji na S. Kongruencija

$$\nu^{b}=\{(a,b)\in S\times S : (\forall x,y\in S^{1})(xay,xby)\in \nu\}$$

je kongruencija koja na S razdvaja idempotente.

Dokaz. Očigledno je ν r-poluprosta ekvivalencija. Neka $e,f\in E(S)$, tada je $e\,\nu\, f \iff e = f$ pa ν razdvaja idempotente. Pretpostavimo da je ρ r-poluprosta ekvivalencija na S. Tada je

$$a\,\nu\, b \iff r(a)\,\nu\, r(b) \iff r(a) = r(b).$$

Iz poslednje jednakosti sledi $r(a)\,\rho\, r(b)$, a kako je ρ r-poluprosta ekvivalencija sledi $a\,\rho\, b$ pa je $\nu\subseteq\rho$. Pošto je $\nu^{b}\subseteq\nu$ sledi da ν^{b} razdvaja idempotente. /=/

Posledica 1.3. Neka je S r-polugrupa, tada je relacija ν najmanja r-poluprosta kongruencija na S i razdvaja idempotente.

Dokaz. Neka $a,b,c,d\in S$, tada je

$$a\,\nu\, b, c\,\nu\, d \iff r(a) = r(b),\ r(c) = r(d)$$

$$\Rightarrow r(ac) = r(a)r(c) = r(b)r(d) = r(bd)$$

$$\Leftrightarrow ac \, \nu \, bd,$$

pa je ν kongruencija. $\square$

Na regularnoj polugrupi relacija ν i jednakost se poklapaju.

Teorema 1.12. Neka je S r-polugrupa, tada je

$\ker\nu = \{a \in S : r(a) \in E(S)\}$.

Dokaz. Neka je $A = \{a \in S : r(a) \in E(S)\}$. Ako $a \in \ker\nu$, tada postoji $e \in E(S)$ da je $a \, \nu \, e$ što je ekvivalentno sa $r(a) = e$, pa $a \in A$. Obratno, ako $a \in A$, tada je $r(a) \in E(S)$ pa zbog $a \, \nu \, r(a)$ imamo da $a \in \ker\nu$. Dakle, $\ker\nu = A$. $\square$

2. MREŽA r-POLUPROSTIH KONGRUENCIJA KOJE NA r-POLUGRUPI RAZDVAJAJU IDEMPOTENTE

Na π-regularnoj polugrupi S sa $\Lambda(S)$ ćemo označiti skup svih kongruencija koje razdvajaju idempotente, a sa $\mathcal{T}(S)$ skup svih r-poluprostih kongruencija koje razdvajaju idempotente.

Teorema 2.1. Relacija ν r-polugrupe S definisana sa

$$a \, \nu \, b \Leftrightarrow r(a) = r(b)$$

je jedinica u skupu $\mathcal{T}(S)$ u odnosu na kompoziciju kongruencija.

Dokaz. Po Posledici 1.3. relacija ν je najmanja r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente. Neka $a,b \in S$ i $\rho \in \mathcal{C}(S)$. Sada je

$$
\begin{aligned}
a(\rho \circ \nu)b \iff & (\ c \in S)\ a\,\rho\, c,\ c\,\nu\, b \\
& \Rightarrow (\ c \in S)\ r(a)\,\rho\, r(c),\ r(c) = r(b) \\
& \Rightarrow r(a)\,\rho\, r(b) \\
& \iff a\,\rho\, b,
\end{aligned}
$$

pa je $\rho \circ \nu \subseteq \rho$. Obratno,

$$
\begin{aligned}
a\,\rho\, b \iff & r(a)\,\rho\, r(b),\ r(b) = r(b) \\
& \Rightarrow a\,\rho\, b,\ b\,\nu\, b \\
& \iff a(\rho \circ \nu)b,
\end{aligned}
$$

pa je $\rho \subseteq \rho \circ \nu$. Dakle, $\rho \circ \nu = \rho$ što povlači da je ν desna jedinica skupa $\mathcal{C}(S)$. SLično se dokazuje da je ν leva jedinica u $\mathcal{C}(S)$. $\square$

Teorema 2.2. Na r-polugrupi S r-poluproste kongruencije koje razdvajaju idempotente čine potpunu mrežu.

Dokaz. Na r-polugrupi S skup $\mathcal{C}(S)$ je uredjen u odnosu na inkluziju i po Posledici 1.1 ima najveći element μ $(\mu = 1_{\mathcal{C}(S)})$, a po Posledici 1.3 ima i najmanji element ν $(\nu = 0_{\mathcal{C}(S)})$. Pošto presek bilo koja dva elementa iz skupa $\mathcal{C}(S)$ opet pripada skupu $\mathcal{C}(S)$, sledi da svaki njegov neprazan podskup ima infimum. Po Teoremi I 2.8 zaključujemo da r-poluproste kongruencije koje na r-polugrupi razdvajaju idempotente čine potpunu mrežu. $\square$

Kongruencije koje na π-regularnoj polugrupi razdvajaju idempotente takodje čine potpunu mrežu jer je skup $\Lambda(S)$ zatvoren u odnosu na presek, a najveći element mu je kongruencija μ koji je opisao Edvards, |8|. Ovde ćemo opisati mrežu r-poluprostih kongruencija koje na r-polugrupi razdvajaju idempotente.

Definicija 2.1. Podskup A π-regularne polugrupe S je L^*-zatvoren) (R^*-zatvoren) ako $a,b\in A$ i $L_a^*\leq L_b^*$ $(E_a^*\leq R_b^*)$ povlači $ab,ba\in A$. Ako je podskup A L^*-zatvoren i R^*-zatvoren, tada kažemo da je A L^*- R^*-zatvoren. /=/

Definicija 2.2. Podskup A π-regularne polugrupe S je L^*-samokonjugovan (R^*-samokonjugovan) ako $a\in A$ i $x\in \mathrm{Reg}S$ tako da je $L_a^*\leq L_x^*$ $(R_a^*\leq R_x^*)$ povlači $xax'\in A$ $(x'ax\in A)$ za svaki $x'\in V(x)$. Ako je A L^*-samokonjugovan i R^*-samokonjugovan, tada je A L^*-R^*-samokonjugovan. /=/

Na regularnoj polugrupi Definicije 2.1 i 2.2 bi se poistovetile sa definicijama koje je u radu |12| uvela R. Fiegenbaum.

Lema 2.1. Neka je S π-regularna polugrupa. Ako $\rho\in \mathcal{C}(S)$, tada je $\ker\rho = \{x\in S : (\exists e\in E(S))\ x\,\rho\, e\}$ pun, L^*-R^*-zatvoren, L^*-R^*-samokonjugovan podskup od S.

Dokaz. Očigledno je $E(S)\subseteq \ker\rho$ pa je $\ker\rho$ pun skup.

Neka $a,b\in\ker\rho$ i $L_a^*\leq L_b^*$, tada je $Sr(a)\subseteq Sr(b)$ pa postoji $x\in S$ da je $r(a) = xr(b)$. Takodje postoje $e,f\in E(S)$ da je $a\rho = e\rho$, $b\rho = f\rho$ pa $a,b\in E(S/\rho)$. Sada je

$$(ab)\rho = a\rho b\rho = r(a)\rho r(b)\rho = (xr(b))\rho r(b)\rho = x\rho r(b)\rho r(b)\rho$$

$$= x\rho r(b)\rho = (xr(b))\rho = r(a)\rho = a\rho\in E(S/\rho).$$

Dalje je

$$(ba)\rho(ba)\rho = b\rho(ab)\rho a\rho = b\rho a\rho a\rho = b\rho a\rho = (ba)\rho$$

pa $(ba)\rho \in E(S/\rho)$. Dakle, $ab, ba \in \ker\rho$ pa je skup $\ker\rho$ L^*- zatvoren. SLično se dokazuje da je $\ker\rho$ R^*-zatovren pa znači i L^*-R^*-zatvoren.

Pretpostavimo da $a \in \ker\rho$, $c \in RegS$, $c' \in V(c)$ i da je $L_a^* \leq L_c^*$. Tada je $a=xc$ za neki $x \in S$. Pošto $a\rho \in E(S/\rho)$ imamo da je

$$(cac')\rho(cac')\rho = c\rho a\rho c'\rho c\rho a\rho c'\rho = c\rho(xc)\rho c'c\rho a\rho c'\rho$$

$$= c\rho x\rho(cc'c)\rho a\rho c'\rho = c\rho x\rho c\rho a\rho c\rho' = c\rho(xc)\rho a\rho c'\rho$$

$$= c\rho a\rho a\rho c'\rho = c\rho a\rho c'\rho = (cac')\rho$$

pa $cac' \in \ker\rho$. Znači, $\ker\rho$ je L^*-samokonjugovan skup. Slično se dokazuje da je $\ker\rho$ R^*-samokonjugovan skup, pa sledi da je L^*-R^*-samokonjugovan. /=/

Definicija 2.3. Podskup A π-regularne polugrupe S je H^*-regularan ako za svaki $a \in A$ važi

$$V(r(a)) \cap H_a^* \cap A \neq \emptyset. \quad /=/$$

Lema 2.2. Ako je S π-regularna polugrupa i $\rho \in \mathcal{T}(S)$, tada su $\ker\rho$ i $E(S)$ H^*-regularni skupovi.

Dokaz. Neka $a \in \ker\rho$, tada je $(a,e) \in \rho$ za neki $e \in E(S)$. Zbog $\rho \subseteq \mathcal{H}^*$ sledi $a'r(a) = e = r(a)a'$, za neki $a' \in V(r(a))$, pa je $a\mathcal{H}^*a'$. Dalje, kao u dokazu Teoreme 1.4, zaključujemo da $a' \in \ker\rho$. Dakle, $a' \in V(r(a)) \cap H_a^* \cap \ker\rho$ pa je $\ker\rho$ H^*-regularan skup.

Pošto za $e \in E(S)$ važi $e \in V(e) \cap H^*_e \cap E(S)$ to je $E(S)$ H^*-regularan skup. $\square$

Definicija 2.4. Neka je S r-polugrupa, a ν i μ respektivno najmanja i najveća r-poluproste kongruencije opisane u prethodnom paragrafu. Tada definišemo skup

$A = \{A \subseteq S$: $\ker\nu \subseteq A \subseteq \ker\mu$ i A je L^*-R^*-zatvoren, L^*-R^*-samokonjugovan, H^*- regularan podskup od $S\}$. $\square$

$\square$

Skup A nije prazan jer po Lemi 2.1 i Lemi 2.2 sledi da mu pripadaju $\ker\nu$ i $\ker\mu$.

Teorema 2.3. Neka je S r-polugrupa i $A \in A$, tada je relacija

$$(A) = \{(a,b) \in S \times S : (\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))$$
$$r(a)a' = r(b)b',\ a'r(a) = b'r(b),\ r(a)b', a'r(b) \in A\}$$

r-poluprosta kongruencija koja razdvaja idempotente na S.

Dokaz. Relacija (A) je očigledno refleksivna i r-poluprosta.

Neka $a,b \in S$ i $(a,b) \in (A)$, tada $(a,b) \in H^* \subseteq R^*, L^*$, i $(a',b') \in H^*$. Pošto $r(a)b'$, $a'r(b) \in \mathrm{Reg}S$, jer je $\mathrm{Reg}S$ podpolugrupa od S, imamo

$$Sa'r(b) \subseteq Sr(b) = Sr(a) \iff L^*_{a'r(b)} \leq L^*_a$$

i

$$r(a)b'S \subseteq r(a)S = r(b)S \iff R^*_{r(a)b'} \leq R^*_b.$$

Kako je skup A L^*-R^*-samokonjugovan biće

$$r(b)a' = (r(b)b')r(b)a' = r(a)(a'r(b))a' \in A$$

i

$$b'r(a) = b'r(a)(a'r(a)) = b'(r(a)b')r(b) \in A.$$

Dakle, $(b,a) \in (A)$ pa je relacija (A) simetrična.

Ako $(a,b) \in (A)$, tada $(b,a) \in (A)$ pa postoje $b' \in V(r(b))$, $a' \in V(r(a))$ da je $r(b)b' = r(a)a'$, $b'r(b) = a'r(a)$ i $r(b)a', b'r(a) \in A$. Sada je $a\mathcal{H}^*b$. Iz $b'r(a) \in Sr(a) = Sr(b)$ i $r(b)a' \in r(b)S = r(a)S$ sledi $L^*_{b'r(a)} \leq L^*_b$ i $R^*_{r(b)a'} \leq R^*_a$. Odavde je za proizvoljne $a^* \in V(r(a))$, $b^* \in V(r(b))$

(1) $$r(a)b^* = (r(a)a')r(a)b^* = r(b)(b'r(a))b^* \in A$$

i

(2) $$a^*r(b) = a^*r(b)(b'r(b)) = a^*(r(b)a')r(a) \in A$$

jer je skup A L^*-R^*-samokonjugovan.

Pretpostavimo sada da $(a,b), (b,c) \in (A)$. Tada postoje $a' \in V(r(a))$, $b', b^* \in V(r(b))$ i $c^* \in V(r(c))$ da je $r(a)a' = r(b)b'$, $a'r(a) = b'r(b)$, $r(b)b^* = r(c)c^*$ i $b^*r(b) = c^*r(c)$. Odavde sledi $a\,\mathcal{H}^*b\mathcal{H}^*c$ pa postoji $c' \in V(r(c))$ da je $r(a)a' = r(b)b' = r(c)c'$ i $a'r(a) = b'r(b) = c'r(c)$. Sada je $a'\,\mathcal{H}^*b'\mathcal{H}^*c'$. Iz $(a,b), (b,c) \in (A)$ i (1) i (2) imamo da $r(a)b', a'r(b), r(b)c', b'r(c) \in A$. Pošto je na r-polugrupi, po Lemi 1.2, $\mathcal{R}^*$ leva kongruencija, to $a'\mathcal{R}^*b'$ povlači $r(a)a'\mathcal{R}^*\, r(a)b'$ i $b'\mathcal{R}^*\, c'$ povlači $r(b)b'\mathcal{R}^*r(b)c'$. Dakle, $r(a)b'\mathcal{R}^*r(a)a' = r(b)b'\mathcal{R}^*r(b)c'$. Pošto je A R^*-zatvoren, to $r(a)b', r(b)c' \in A$ i $R^*_{r(a)b'} = R^*_{r(b)c'}$ povlači $r(a)c' = r(a)(a'r(a)c' = (r(a)b')(r(b)c') \in A$. Dalje, $a\mathcal{R}^*b \Longleftrightarrow r(a)\mathcal{R}^*r(b)$ povlači $a'r(a)\mathcal{R}^*a'r(b)$ i $b\mathcal{R}^*c \Longleftrightarrow r(b)\mathcal{R}^*r(c)$ povlači $b'r(b)\mathcal{R}^*b'r(c)$. Sada je $a'r(b)\,\mathcal{R}^*a'r(a) = b'r(b)\mathcal{R}^*b'r(c)$. Kako je A R^*-zatvoren skup, $a'r(b), b'r(c) \in A$ i

$R^*_{a'r(b)} = R^*_{b'r(c)}$ povlači $a'r(c)=a'(r(a)a')r(c) = =(a'r(b))(b'r(c))\in A$. Dakle, $(a,c)\in(A)$ pa je (A) relacija ekvivalencije.

Primetimo da se kongruencija μ opisana u Teoremi 1.3 poklapa sa relacijom $(\ker\mu)$. Zaista, ako je $a\,\mu\, b$, tada iz $r(a)\mu r(b)$ sledi $a'r(a)\,\mu\, a'r(b)$ pa $a'r(b)\in\ker\mu$ što povlači $\mu=(\ker\mu)$.

Sada, iz $A\subseteq\ker\mu$ sledi $(A)\subseteq\mu$. Pošto μ razdvaja idempotente to čini i (A).

Neka $(a,b)\in(A)$ i $c\in S$. Zbog $(A)\subseteq\mu$ imamo $(a,b)\in\mu$ pa je $(ac,bc)\in\mu$. Sada postoje $(ac)'\in V(r(ac))$, $(bc)'\in V(r(bc))$ da je $r(ac)(ac)' = r(bc)(bc)'$, $(ac)'r(ac)= = (bc)'r(bc)$. Iz $(a,b)\in(A)$ sledi da postoje $a'\in V(r(a))$ i $b'\in V(r(b))$ da je $r(a)a'=r(b)b'$, $a'r(a)=b'r(b)$. Sada je

$$r(ac)(bc)'=r(a)r(c)(bc)'=r(a)(a'r(a))r(c)(bc)'$$

$$=r(a)b'(r(b)r(c))(bc)'=r(a)b'r(bc)(bc)'.$$

Pošto je

$$r(a)b'=(r(a)a')r(a)b'=r(b)(b'r(a)b') \Rightarrow r(a)b'S\subseteq r(b)S$$

i

$$r(b) = (r(b)b')(r(b)b')r(b) = r(a)(a'r(a))a'r(b)$$

$$= r(a)b'(r(b)a'r(b)) \Rightarrow r(b)S \subseteq r(a)b'S,$$

imamo da je $r(a)b'\mathcal{R}^*b$ jer $r(a)b'\in \mathrm{Reg}S$. Kako je $r(bc)(bc)'\in E(S)\subseteq A$, $r(a)b'\in A$ i $r(bc)(bc)'\in r(b)S$, to je $R^*_{r(bc)(bc)'}\le R^*_b = R^*_{r(a)b'}$ pa imamo da $r(a)b'r(bc)(bc)'\in A$ jer je skup A R^*-zatvoren. Dakle, $r(ac)(bc)'\in A$.

Iz $(a,b)\in(A)$ sledi $(b,a)\in(A)$ pa po (1) sledi da $r(b)a'\in A$. Sada je

$$(ac)'r(bc)=(ac)'r(b)r(c)=(ac)'r(b)(b'r(b))r(c)$$
$$=(ac)'r(b)a'r(ac).$$

Takodje je

$$r(b)a'=r(b)b'r(b)a'=r(a)a'r(b)a'\in r(a)S$$

i

$$r(a) = (r(a)a')(r(a)a')r(a)=r(b)(b'r(b))b'r(a)$$
$$=r(b)a'(r(a)b'r(a))\in r(b)a'S,$$

pa sledi da je $r(b)a'\mathcal{R}^*a$. Iz $r(ac)(ac)'\in r(a)S$, $r(ac)(ac)'\in E(S)\subseteq A$ i $r(b)a'\in A$ sledi $R^*_{r(ac)(ac)'}\leq R^*_a=R^*_{r(b)a'}$ što povlači $r(ac)(ac)'r(b)a'\in A$ jer je A R^*-zatvoren. Dalje, $r(ac)(ac)'r(b)a'\in r(ac)S$ povlači $R^*_{r(ac)(ac)'r(b)a'}\leq R^*_{r(ac)}$ odakle je

$$(ac)'r(b)a'r(ac)=(ac)'r(ac)(ac)'r(b)a'r(ac)\in A$$

jer je skup A R^*-samokonjugovan. Dakle, $(ac)'r(bc)$ A. Sada je

$$r(ac)(ac)'=r(bc)(bc)',\quad (ac)'r(ac)=(bc)'r(bc)$$

i

$$r(ac)(bc)',\quad (ac)'r(bc)\in A$$

što povlači $(ac,bc)\in(A)$. Slično se pokazuje da $(ca,cb)\in(A)$ pa sledi da je relacija (A) r-poluprosta kongruencija koja na r-polugrupi S razdvaja idempotente. /-/

Teorema 2.4. Preslikavanje $A\to(A)$ je surjekcija skupa $\mathcal{A}$ na skup r-poluprostih kongruencija koje na r-polugrupi razdvajaju idempotente i ono očuvava uredjenje.

Dokaz. Po prethodnoj teoremi, za svaki $A \in \mathcal{A}$, relacija (A) je r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente.

Neka je ρ r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente. Tada je $\rho \subseteq \mu$. Po Lemi 2.1 skup $\ker\rho$ je pun, L^*-R^*-zatvoren, L^*-R^*-samokonjugovan. Po Lemi 2.2 je $\ker\rho$ H^*-regularan skup pa sledi da $\ker\rho \in \mathcal{A}$.

Neka $(a,b) \in (\ker\rho)$, tada postoje $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$ da je $r(a)a' = r(b)b'$, $a'r(a) = b'r(b)$ i $r(a)b'$, $a'r(b) \in \ker\rho$. Sada je

$$r(a)b' = (r(a)b'r(b)b'$$

i

$$r(b)b' = r(b)(b'r(b))b' = (r(b)a')r(a)b'$$

pa je $r(a)b' \mathcal{L}^* r(b)b'$. SLično je

$$r(a)b' = (r(a)a')r(a)b' = r(b)b'(r(a)b')$$

i

$$r(b)b' = (r(b)b')(r(b)b') = r(a)(a'r(a))a'$$

$$= r(a)b'(r(b)a')$$

pa je $r(a)b' \mathcal{R}^* r(b)b'$. Dakle, $r(a)b' \mathcal{H}^* r(b)b'$. Iz $r(a)b' \in \ker\rho$ sledi da postoji $e \in E(S)$ da je $r(a)b' \rho\, e$. Pošto je $\rho \subseteq \mathcal{H}^*$ i pošto svaka $\mathcal{H}^*$-klasa sadrži najviše jedan idempotent, to je $r(b)b' = e$ što povlači $r(a)b' \rho\, r(b)b'$. Sada je

$$a\rho = r(a)\rho = r(a)\rho(a'r(a))\rho = r(a)\rho(b'r(b))\rho$$

$$= (r(a)b')\rho r(b)\rho = (r(b)b')\rho r(b)\rho = r(b)\rho = b\rho,$$

pa je $(\ker\rho) \subseteq \rho$.

Obratno, neka $(a,b) \in \rho$. Iz $\rho \subseteq \mathcal{H}^*$ sledi $(a,b) \in \mathcal{H}^*$.

Ako $a' \in V(r(a))$, tada postoji $b' \in V(r(b))$ da je $r(a)a' = r(b)b'$, $a'r(a) = b'r(b)$. Iz $(r(a), r(b)) \in \rho$ sledi $(r(a)b', r(b)b')$, $(a'r(a), a'r(b)) \in \rho$. Dakle, $r(a)b', a'r(b) \in \ker\rho$ pa je $(a,b) \in (\ker\rho)$ što povlači $\rho \subseteq (\ker\rho)$, pa je konačno $\rho = (\ker\rho)$. Znači, definisano preslikavanje je surekcija. $\square$

Definicija 2.5. Podskup A π-regularne polugrupe S je strogo r-poluprost ako $a \in A$ povlači $r(a) \in A$ i obratno, $r(a) \in A$ povlači $a \in A$. $\square$

Lema 2.4. Jezgro r-poluproste kongruencije ρ π-regularne polugrupe S je strogo r-poluprost skup.

Dokaz. Ako $a \in \ker\rho$, tada postoji $e \in E(S)$ da je $a \rho e$ pa zbog $a \rho r(a)$ sledi $r(a) \rho e$. Dakle, $r(a) \in \ker\rho$. Iz $r(a) \in \ker\rho$ sledi $r(a) \rho e$ za neki $e \in E(S)$. Zbog $a \rho r(a)$ sledi $a \rho e$ pa $a \in \ker\rho$. Znači, $\ker\rho$ je strogo r-poluprost skup. $\square$

Definicija 2.6. Neka je S r-polugrupa. Definišimo skup

$\mathcal{B} = \{A \subseteq S$: $\ker\nu \subseteq A \subseteq \ker\mu$ i A je L^*-R^*-zatvoren, L^*-R^*-samokonjugovan, H^*-regularan strogo r-poluprost podskup od $S\}$. $\square$

Jezgro r-poluproste kongruencije je strogo r-poluprost skup, a takodje ima i ostala svojstva navedena u definiciji. Dakle, skupu $\mathcal{B}$ pripadaju $\ker\nu$ i $\ker\mu$ pa nije prazan. Očigledno je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorema 2.5. Preslikavanje $A \to (A)$ je bijekcija iz skupa $\mathcal{B}$ na skup r-poluprostih kongruencija koje na r-polugrupi razdvajaju idempotente.

Dokaz. Po Teoremi 2.3 sledi da još treba pokazati da je definisano preslikavanje injekcija. Zato neka su $A,B \in \mathcal{B}$ takvi da je $(A) = (B)$. Ako $a \in A$, tada zbog H^*-regularnosti postoji $a' \in V(r(a)) \cap H^*_a \cap A$. Odavde je $a'\mathcal{H}^*a$. Pošto je $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{R}^*, \mathcal{L}^*$ biće $r(a)a' \; \mathcal{R}^* a \mathcal{R}^* a' \mathcal{R}^* a'r(a)$ i $r(a)a' \mathcal{L}^* a \mathcal{L}^* a' \mathcal{L}^* a'r(a)$ što povlači $r(a)a' \mathcal{H}^* a'r(a)$. Kako $\mathcal{H}^*$-klasa može sadržati najviše jedan idempotent sledi da je $r(a)a' = a'r(a)$. Dakle, pošto $a' \in V(r(a))$ i $r(a)a' \in V(r(a)a')$ važi $r(a)a' = (r(a)a')(r(a)a')$, $a'r(a) = r(a)a'$. Iz $a \in A$, pošto je A strogo r-poluprost skup, sledi $r(a) \in A$ pa $r(a) = r(a)a'r(a) = r(a)(r(a)a') \in A$. Takodje, zbog H^*-regularnosti imamo da $a' \in A$ pa $a' = a'(r(a)a') \in A$. Iz nekoliko, poslednjih zaključaka sledi $(a, r(a)a') \in (A)$. Kako je po pretpostavci $(A) = (B)$, to iz $(a, r(a)a') \in (B)$ i po (1) sledi da $r(a)(r(a)a')^* \in B$ za svaki $(r(a)a')^* \in V(r(a)a')$. Specijalno, pošto $r(a)a' \in V(r(a)a')$ sledi da $r(a)(r(a)a') \in B$. Sada je $r(a) = r(a)a'r(a) = r(a)r(a)a' \in B$. Kako je B strogo r-poluprost skup sledi da $a \in B$ pa je $A \subseteq B$. Na sličan način se dokazuje da je $B \subseteq A$, pa sledi $A = B$. Dakle, definisano preslikavanje je injekcija što zajedno sa prethodnom teoremom daje da je bijekcija. $\square$

3. NEKE KONGRUENCIJE KOJE NA π-REGULARNOJ POLUGRUPI RAZDVAJAJU IDEMPOTENTE

U ovom paragrafu najpre razmatramo neke relacije ekvivalencije π-regularne polugrupe koje se sadrže u ekvivalenciji $\mathcal{L}^*$. Zatim opisujemo neke kongruencije koje na π-regularnoj polugrupi razdvajaju idempotente, a kao posledicu dobijamo opis najveće takve kongruencije na r-polugrupi koji se poklapa sa opisom iz Teoreme 1.3. Koristeći definiciju normalne podpolugrupe dajemo opis r-poluproste kongruencije koja na π-ortodoksnoj r-polugrupi razdvaja idempotente. Pri ovome mi uopštavamo rezultate D. Krgović iz rada |29|.

Lema 3.1. Neka je α relacija ekvivalencije π-regularne polugrupe S. Tada

(i) $\alpha \subseteq \mathcal{L}^* \Rightarrow \ker\alpha = \{a \in S : (\exists a' \in V(ar(a)))\, a\alpha a'r(a)\}$.

(ii) $\alpha \subseteq \mathcal{H}^* \Rightarrow \ker\alpha = \{a \in A : (\exists a' \in V(r(a)))$

$a\alpha a'r(a) \wedge a'r(a) = r(a)a'\}$.

Dokaz. (i) Neka je $\alpha \subseteq \mathcal{L}^*$ i $a \in \ker\alpha$. Tada postoji $e \in E(S)$ da je $a\,\alpha\, e$, pa sledi $a\mathcal{L}^*e$. Pošto $e \in V(e)$, po Teoremi I 2.7 sledi da postoji $a' \in V(r(a))$ da je $a'r(a) = ee = e$. Sada je $a\,\alpha\, a'r(a)$ pa je $\ker\alpha \subseteq \{a \in S : (\exists a' \in V(r(a))\; a\,\alpha\, a'r(a)\}$. Suprotna inkluzija važi jer $a'r(a) \in E(S)$ za svaki $a' \in V(r(a))$.

(ii) Neka je $\alpha \subseteq \mathcal{H}^*$ i $a \in \ker\alpha$. Pošto iz $a\,\alpha\, e$, za neki $e \in E(S)$, sledi $a\mathcal{H}^*e$ to po Teoremi I 2.7 za $e \in V(e)$ postoji $a' \in V(r(a))$ da je $a'r(a) = e = r(a)a'$. Ostatak tvrdjenja se dokazuje kao pod (i). /=/

Teorema 3.1. Neka je K puna, inverzno zatvorena podpolugrupa π-regularne polugrupe S i α relacija ekvivalencije na S takva da je $\alpha \subseteq \mathcal{L}^*$. Relacija (K_α) definisana na S sa

$$a(K_\alpha)b \Rightarrow (a\,\alpha\, b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\, r(a)b' \in K)$$

je ekvivalencija na S i važi

$$reg(ker(K_\alpha)) = K \cap reg(ker\alpha) \quad i \quad tr(K_\alpha) = tr\alpha .$$

Dokaz. Pošto je K puna podpolugrupa sledi da je relacija (K_α) refleksivna.

Neka $a,b \in S$ i

$$a(K_\alpha)b \iff (a \alpha b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))r(a)b' \in K).$$

Iz simetričnosti ekvivalencije α sledi $b \alpha a$. Kako je $\alpha \subseteq L^*$ to iz aL^*b sledi da postoji $a' \in V(r(a))$ da je $a'r(a)=b'r(b)$. Sada je $r(b)=r(b)b'r(b)=r(b)a'r(a)$ pa je

$$r(a)b'r(b)a'r(a)b' = r(a)b'r(b)b'r(b)b'$$

$$= r(a)b'r(b)b'=r(a)b'$$

i

$$r(b)a'r(a)b'r(b)a'=r(b)b'r(b)b'r(b)a'$$

$$= r(b)b'r(b)a'=r(b)a'$$

pa $r(b)a' \in V(r(a)b')$. Pošto je podpolugrupa K inverzno zatvorena to iz $r(a)b' \in K$ sledi $r(b)a' \in K$. Dakle, relacija (K_α) je simetrična.

Neka su $a,b,c \in S$ i

$$a(K_\alpha)b \iff (a\alpha b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\ r(a)b' \in K)$$

i

$$b(K_\alpha)c \iff (b\alpha c \wedge (\exists c' \in V(r(c)))\ r(b)c' \in K).$$

Iz aL^*b sledi da postoji $a' \in V(r(a))$ da je $a'r(a)=b'r(b)$ pa je

$$r(a)c'=r(a)a'r(a)c'=(r(a)b')(r(b)c') \in K$$

jer je K podpolugrupa. Iz tranzitivnosti ekvivalencije α sledi $a\,\alpha\,c$, pa relacija (K_α) jeste tranzitivna. Dakle, (K_α) je ekvivalencija.

Ako $a \in reg(ker(K_\alpha))$, tada $a \in RegS$ pa je $V(a) \neq \emptyset$ i postoji $e \in E(S)$ da je

$$a(K_\alpha)e \iff (a\,\alpha\,e \wedge (\exists e' \in V(e))\ ae' \in K).$$

Znači, $a \in reg(ker\alpha)$. Iz $a\mathcal{L}^*e$ sledi da postoji $a' \in V(a)$ da je $a'a = e'e$ pa je $a = aa'a = (ae')e \in K \cdot E(S) \subseteq K$. Dakle, $reg(ker(K_\alpha)) \subseteq K \cap reg(ker\alpha)$. Ako $a \in K \cap reg(ker\alpha)$, tada $a \in RegS$ i zbog $\alpha \subseteq \mathcal{L}^*$ po Lemi 3.1. postoji $a' \in V(a)$ da je $a\,\alpha\,a'a$. Kako $a(a'a) = a \in K$ i $a'a \in V(a'a)$, to je $a(K_\alpha)a'a$ pa $a \in reg(ker(K_\alpha))$ što povlači $K \cap reg(ker\alpha) \subseteq reg(ker(K_\alpha))$.

Neka $e,f \in E(S)$, tada iz $e(K_\alpha)f$ sledi $e\,\alpha\,f$. Obratno, iz $e\,\alpha\,f$, $f \in V(f)$ i $ef \in K \cdot K \subseteq K$ sledi $e(K_\alpha)f$. Dakle, $tr(K_\alpha) = tr\alpha$. /=7

Posledica 3.1. Neka je K puna, inverzno zatvorena r-poluprosta podpolugrupa π-regularne polugrupe S i α r-poluprosta ekvivalencija na S takva da je $\alpha \subseteq \mathcal{L}^*$. Relacija (K_α) definisana na S na

$$a(K_\alpha)b \iff (a\,\alpha\,b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\ r(a)b' \in K)$$

je r-poluprosta ekvivalencija na S i važi

$$ker(K_\alpha) = K \cap ker\alpha \quad \text{i} \quad tr(K_\alpha) = tr\alpha.$$

Dokaz. Po prethodnoj teoremi je (K_α) ekvivalencija. Pošto je α r-poluprosta ekvivalencija, to očigledno sledi da je (K_α) takodje r-poluprosta ekvivalencija. Ako

$a \in \ker(K_\alpha)$, tada slično kao u prethodnoj teoremi zaključujemo da $a \in \ker\alpha$ i da $r(a) \in K$. Pošto je K r-poluprosta podpolugrupa sledi da $a \in K$. Dakle, $\ker(K_\alpha) \subseteq K \cap \ker\alpha$. Obratna inkluzija se dokazuje slično kao u prethodnoj teoremi. $\square$

Stav 3.1. Neka je ρ r-poluprosta kongruencija koja na π-regularnoj polugrupi S razdvaja idempotente, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $a \in \ker\rho$;

(ii) $(\exists a' \in V(r(a)))(\, a\rho a'r(a) \wedge a'r(a) = r(a)a')$;

(iii) $(\exists a' \in V(r(a)))(\, a\rho a'r(a)\rho r(a)a')$;

(iv) $(\exists a' \in V(r(a)))\ a\rho a'r(a)$;

(v) $(\exists a' \in V(r(a)))\ a\,\rho\, r(a)a'$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Pošto je ρ r-poluprosta kongruencija koja razdvaja idempotente, to po Teoremi 1.1 sledi da je $\rho \subseteq H^*$ pa zatim primenimo Lemu 3.1.

Ekvivalentnost ostalih uslova je očigledna. $\square$

Teorema 3.2. Neka je S π-regularna polugrupa, ρ r-polurposta kongruencija, ξ kongruencija takva da je $\rho \subseteq \xi$ i ρ i ξ razdvajaju idempotente. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $a\,\rho\, b$;

(ii) $a\,\xi\, b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\ r(a)b' \in \ker\rho$;

(iii) $a\, H^* b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\ r(a)b' \in \ker\rho$;

(iv) $(\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))(\ a'r(a)=b'r(b),$

$$r(a)a' = r(b)b',\ r(a)b' \in \ker\rho).$$

Dokaz. (i) => (ii) Neka $a,b \in S$ i $a\ \rho\ b$. Tada je $r(a)\rho r(b)$ pa za svaki $b' \in V(r(b))$ važi $r(a)b' = r(b)b'$, što povlači $r(a)b' \in \ker\rho$. Iz $\rho \subseteq \xi$ sledi $a\ \xi\ b$.

(ii) => (iii) Pošto je ρ r-poluprosta kongruencija, iz $\rho \subseteq \xi$ sledi da je i ξ r-poluprosta. Sada po Teoremi 1.1 imamo $\xi \subseteq \mathcal{H}^*$ pa uslov (iii) važi.

(iii) => (iv) Važi po Teoremi I.2.7.

(iv) => (i) Iz $a'r(a)=b'r(b)$ sledi

$$Sr(a) = Sr(a)a'r(a)=Sr(a)b'r(b) \subseteq Sr(b),$$ i slično $Sr(b) \subseteq Sr(a)$ pa je $Sr(a)=Sr(b) \Leftrightarrow a\mathcal{L}^*b$. Slično se dobija $a'\mathcal{R}^*b'$. Kako je $r(a)b'r(b)a'r(a)b'=r(a)a'r(a)a'r(a)b'=r(a)b'$, to $r(a)b' \in RegS$ pa iz $Sr(a)=Sr(b)$ sledi

$$Sr(a)b' = Sr(b)b' \Leftrightarrow r(a)b'\mathcal{L}^*r(b)b'.$$

Slično, iz $a'S = b'S$ sledi

$$r(a)a'S = r(a)b'S \Leftrightarrow r(a)a'\mathcal{R}^*r(a)b'.$$

Kako je $r(a)a'=r(b)b'$ imamo $r(a)b'\mathcal{H}^*r(b)b'$. Iz $r(a)b' \in \ker\rho$ sledi $r(a)b'\rho e$, za neki $e \in E(S)$. Pošto je po Teoremi 1.1 $\rho \subseteq \mathcal{H}^*$ imamo $r(a)b'\mathcal{H}^*e$ pa kako $\mathcal{H}^*$ klase sadrže po najviše jedan idempotent sledi da je $r(b)b'=e$. Sada je $r(a)b'\ \rho\ r(b)b'$ što povlači $r(a)b'r(b)\rho r(b)b'r(b)$, pa je

$$r(a)=r(a)a'r(a)=r(a)b'r(b)\rho r(b)b'r(b)=r(b)$$

Kako je ρ r-poluprosta kongruencija sledi $a\ \rho\ b$. $\square$

Naredna posledica daje opis najveće kongruencije koja na r-polugrupi S razdvaja idempotente i on je identičan sa opisom datim u Teoremi 1.3.

Posledica 3.2. Neka je S r-polugrupa i μ najveća r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $a\,\mu\,b$;

(ii) $a\mathcal{H}^*b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\, r(a)b' \in \ker\mu$;

(iii) $(\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))(a'r(a) = b'r(b),$

$r(a)a' = r(b)b', \ r(a)b' \in \ker\mu).$

Dokaz. Tvrdjenje sledi direktno po prethodnoj teoremi. /=/

Lema 3.2. Neka je K inverzno zatovrena samokonjugovana podpolugrupa π-regularne polugrupe S. Ako $a,b \in S$ i $a' \in V(r(a))$ tada postoji $b' \in V(r(b))$, da

$$(a\,\mathcal{L}^*b \wedge r(a)b' \in K) \Rightarrow a'r(b) \in K.$$

Dokaz. Iz $a\mathcal{L}^*b$, po Teoremi I.2.7, postoji $b' \in V(r(b))$ da je $a'r(a) = b'r(b)$. Iz $r(a)b' \in K$, kao u Teoremi 3.1, dobijamo zbog inverzne zatovrenosti da $r(b)a' \in K$. Sada iz samokonjugovanosti podpolugrupe K sledi

$$a'r(b) = a'r(b)b'r(b) = a'(r(b)a')r(a) \in a'Kr(a) \subseteq K.$$ /=/

Podpolugrupa K π-ortodoksne polugrupe S je normalna ako je puna, samokonjugovana i inverzno zatvorena.

Teorema 3.3. Neka je K normalna r-poluprosta podpolugrupa π-ortodoksne polugrupe S i ρ (r-poluprosta) kongruencija na S takva da je $\rho \subseteq L^*$. Relacija (K_ρ) definisana na S sa

$$a(K_\rho)b \iff (a\rho b \wedge (\exists b' \in V(r(b))\ r(a)b' \in K)$$

je (r-poluprosta) kongruencija na S i važi da je

$\mathrm{reg}(\ker(K_\rho))=\mathrm{reg}K \cap \mathrm{reg}(\ker_\rho)$ ($\ker(K_\rho)=K \cap \ker\rho$) i $\mathrm{tr}(K_\rho)=\mathrm{tr}\rho$.

Dokaz. Po Teoremi 3.1 i Posledici 3.1 sledi da treba još pokazati stabilnost ekvivalencije (K_ρ). Neka su $a,b,c \in S$ i

$$a(K_\rho)b \iff (a\,\rho\, b \ \wedge\ (\exists b' \in V(r(b)))r(a)b' \in K).$$

Iz $\rho \subseteq H^*$ sledi da postoji $a' \in V(r(a))$ da je $a'r(a) = b'r(b)$. Pošto je K samokonjugovana i puna to za proizvoljan $c' \in V(r(c))$ važi

$$r(ac)c'b' = r(a)r(c)c'b'r(b)b' = r(a)r(c)c'a'r(a)b'$$
$$=(r(a)r(c)c'a')r(a)b' \in r(a)\cdot K\cdot a'\cdot K \subseteq KK \subseteq K.$$

Kako po Teoremi II 5 $c'b' \in V(r(b)r(c)=r(bc))$ i pošto je ρ kongruencija imamo

$$ac\,\rho\, bc \wedge (\exists c'b' \in V(r(bc)))\ r(ac)c'b' \in K$$

što je ekvivalentno sa $ac(K_\rho)bc$. SLično je $ca(K_\rho)cb$ pa (K_ρ) jeste kongruencija. /=/

Naredna teorema daje opis r-poluproste kongruencije koja na π-ortodoksnoj r-polugrupi razdvaja idempotente.

Teorema 3.4. Neka je S π-ortodoksna r-polugrupa i K normalna r-poluprosta podpolugrupa od S, takva da je

$K \subseteq \ker\mu$. Relacija (K_μ) definisana na S sa

$$a(K_\mu)b \iff (a\mu b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\ r(a)b' \in K)$$

je r-poluprosta kongruencija koja na S razdvaja idempotente i $K = \ker(K_\mu)$.

Obratno, ako je ρ r-poluprosta kongruencija koja na π-ortodoksnoj r-polugrupi S razdvaja idempotente, tada je $\ker\rho$ normalna r-poluprosta podpolugrupa od S, $\ker\rho \subseteq \ker\mu$ i $\rho = (K_\mu)$ i $K = \ker\rho$.

Dokaz. Kako je $\mu \subseteq H^* \subseteq L^*$ to po Teoremi 3.3 sledi da je (K_μ) r-poluprosta kongruencija i ona razdvaja idempotente jer to čini i μ. Takodje po Teoremi 3.3 imamo

$$K = K \cap K = K \cap \ker\mu = \ker(K_\mu).$$

Obratno, po Teoremi III 1.1 sledi da je $\ker\rho$ normalna r-poluprosta podpolugrupa od S, a iz $\rho \subseteq \mu$ imamo $\ker\rho \subseteq \ker\mu$. Po Teoremi 3.2, kad umesto ξ uzmemo μ, dobijamo

$$a\,\rho\, b \iff (a\mu b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))r(a)b' \in \ker\rho).$$

Uporedjujući ovo sa

$$a(K_\mu)b \iff (a\mu b \wedge (\exists b' \in V(r(b)))\ r(a)b' \in K),$$

imamo da je $\rho = (K_\mu)$ i $\ker\rho = K$. /=/

GLAVA V.

GRUPNE KONGRUENCIJE I MREŽA GRUPNIH KONGRUENCIJA NA r-POLUGRUPI

Kongruencija ρ polugrupe S je grupna ako je S/ρ grupa. Univerzalna kongruencija $\omega = S \times S$ definisana sa $(a,b) \in \omega$ za svaki $a,b \in S$ je najveća grupna kongruencija jer je $|S/\omega| = 1$, odnosno, S/ω je trivijalna grupa. Ako je S π-regularna polugrupa, tada je kongruencija ω očigledno r-poluprosta. U ovoj glavi opisujemo najmanju grupnu r-poluprostu kongruenciju na π-regularnoj polugrupi i na nekim njenim podklasama. Takodje, opisujemo mrežu r-poluprostih grupnih kongruencija r-polugrupe S. Pri ovome uopštavamo poznate rezultate R. Fiegenbaum |12|, J. Meakina |38| , F. Masata |32|,|33| i D. La Torea |31| koji važe za regularne polugrupe.

Primetimo da je svaka grupna kongruencija π-regularne polugrupe S r-kongruencija (Teorema II.1.).

Teorema 1. Kongrunecija ρ π-regularne polugrupe S je grupna ako i samo ako ρ je r-kongruencija i $(e,f) \in \rho$ za svaki $e,f \in E(S)$.

Dokaz. Neka je S π-regularna polugrupa. Ako je ρ grupna kongruencija na S, tada je po Teoremi II.1. ρ

r-kongruencija. Ako $e,f \in E(S)$, tada $e\rho, f\rho \in E(S/\rho)$. Pošto je $|E(S/\rho)| = 1$ jer je S/ρ grupa, dobijamo da je $e\rho = f\rho$, odnosno, $(e,f) \in \rho$.

Obratno, ako je ρ r-kongruencija, tada je po Teoremi II.1. S/ρ regularna polugrupa. Ako $A,B \in E(S/\rho)$, tada po Lemi II.1. postoje $e,f \in E(S)$ da je $e\rho = A$, $f\rho = B$. Iz $e\rho = f\rho$ sledi $A = B$, pa regularna polugrupa S/ρ ima jedinstven idempotent što znači da je grupa (Teorema I 2.1). Dakle, ρ je grupna kongruencija. /=/

Lema 1. Ako je ρ grupna kongruencija π-regularne polugrupe S, tada je $\ker\rho$ puna samokonjugovana podpolugrupa od S.

Dokaz. Neka je ρ grupna kongruencija π-regularne polugrupe S, tada je S/ρ grupa i njen jedinstveni idempotent označimo sa 1. Po prethodnoj teoremi važi da je $e\rho = f\rho = 1$ za svaki $e,f \in E(S)$. Ako $a,b \in \ker\rho$, tada postoje $e,f \in E(S)$ da je $a\rho e$, $b\rho f$ pa je $a\rho = e\rho = 1 = f\rho = b\rho$. Sada je $(ab)\rho = a\rho b\rho = 1$, pa je $(ab)\rho \in E(S/\rho)$. Dakle, $ab \in \ker\rho$ pa $\ker\rho$ jeste podpolugrupa od S.

Iz $e\rho e$ za svaki $e \in E(S)$ sledi $E(S) \subseteq \ker\rho$ pa je $\ker\rho$ puna podpolugrupa od S.

Neka $a \in S$, $a' \in V(r(a))$, tada je

(1) $\qquad r(a)\ker\rho \cdot a' = \{r(a)ca' : c \in \ker\rho\}$

pa postoji $e \in E(S)$ da je $c\rho = e\rho = 1$. Sada je

$$(r(a)ca')\rho = r(a)\rho c\rho a'\rho = r(a)\rho 1\, a'\rho = (r(a)a')\rho = 1$$

jer je $r(a)a' \in E(S)$. Dakle, $r(a)ca' \in \ker\rho$, a iz (1) sledi da je $r(a)\ker\rho a' \subseteq \ker\rho$ što znači da je $\ker\rho$ samokonjugavana podpolugrupa od S. $\square$

Neka je S π-regularna polugrupa i

$\mathcal{C}=\{H\subseteq S$: je puna, samokonjugovana podpolugrupa od $S\}$.
Po Lemi 1 skupu $\mathcal{C}$ pripada jezgro grupne kongruencije pa on nije prazan. Neka je $U=\bigcap\mathcal{C}$. Ovaj presek nije prazan jer sadrži $E(S)$. Lako je proveriti da je U puna, samokonjugovana podpolugrupa od S što povlači da je U najmanji element skupa $\mathcal{C}$ u odnosu na inkluziju.

Teorema 2. Ako je S r-polugrupa, tada za svaki $H\in\mathcal{C}$ relacija

$$\beta_H=\{(a,b)\in S\times S:\ xr(a)=r(b)y \text{ za neke } x,y\in H\}$$

jeste grupna r-poluprosta kongruencija na S.

Dokaz. Neka $H\in\mathcal{C}$, $a\in S$ i $a'\in V(r(a))$. Tada je $(r(a)a')r(a)=r(a)(a'r(a))$, pa pošto $r(a)a',\ a'r(a)\in E(S)\subseteq H$ imamo da $(a,a)\in\beta_H$. Dakle, β_H je refleksivna relacija.

Neka $(a,b)\in\beta_H$, tada je $xr(a)=r(b)y$ za neke $x,y\in H$. Sada je

$$(2)\qquad (r(a)a'(r(b)yb'))r(b)=r(a)(a'(xr(a)b'r(b)).$$

Pošto je H puna i samokonjugovana podpolugrupa od S sledi

$$r(a)a'(r(b)yb')\in E(S)\cdot r(b)Hb'\subseteq H\cdot H\subseteq H$$

i

$$(a'xr(a))b'r(b)\in a'Hr(a)\cdot E(S)\subseteq H\cdot H\subseteq H,$$

pa iz (2) sledi $(b,a)\in\beta_H$. Znači, relacija β_H je simetrična.

Neka $(a,b),\ (b,c)\in\beta_H$, tada je $xr(a)=r(b)y$, $zr(b)=r(c)t$ za neke $x,y,z,t\in H$. Prema tome je $zxr(a)=$

$= zr(b)y = r(c)ty$ gde $zx, ty \in H \cdot H \subseteq H$. Dakle, $(a,c) \in \beta_H$ pa je ova relacija tranzitivna. Znači, β_H je ekvivalencija i očigledno je r-poluprosta.

Neka $(a,b) \in \beta_H$ i $c \in S$, tada je $xr(a) = r(b)y$ za neke $x,y \in H$. Sada je za $b' \in V(r(b))$ i $c' \in V(r(c))$

$$(r(b)r(c)c'b'(xr(a)a'))r(ac)=r(bc)(c'b'(r(b)y)a'r(a)r(c))$$

što zajedno sa

$$r(b)r(c)c'b'(xr(a))a'=r(b)(r(c)c')b'\cdot x(r(a)a')$$

$$\in r(b)E(S)b'\cdot H\cdot E(S) \subseteq H.H\cdot H \subseteq H$$

i

$$c'b'(r(b)y)a'r(a)r(c)=c'(((b'r(b))y(a'r(a))))r(c)$$

$$\in c'(E(S)yE(S))r(c) \subseteq c'Hr(c) \subseteq H$$

povlači $(ac,bc) \in \beta_H$. Slično, iz

$$(r(c)r(b)b'(xr(a))a'c')r(ca)=r(cb)(b'(r(b)y)a'c'r(c)r(a))$$

i

$$r(c)((r(b)b')x(r(a)a'))c' \in r(c)(E(S)\cdot H\cdot E(S))c' \subseteq r(c)Hc' \subseteq H,$$

$$(b'r(b))ya'(c'r(c))r(a) \in E(S)Ha'E(S)r(a) \subseteq HH \subseteq H$$

sledi $(ca,cb) \in \beta_H$. Dakle, β_H je r-poluprosta kongruencija što povlači da je S/β_H regularna polugrupa. Neka $a,b \in S$ i $a\beta_H, b\beta_H \in E(S/\beta_H)$, tada postoje $e,f \in E(S)$ da je $a\beta_H = e\beta_H$ i $b\beta_H = f\beta_H$. Kako je $(f)e=f(e)$ i $e,f \in H$, to po definiciji relacije β_H sledi $e\beta_H = f\beta_H$. Prema tome, $a\beta_H = b\beta_H$ pa regularna polugrupa S/β_H ima tačno jedan idempotent što znači da je grupa, a β_H je grupna kongruencija. /=/

Teorema 3. Najmanja r-poluprosta kongruencija r-polugrupe S data je relacijom

$$\beta_U=\{(a,b)\in SxS \ :\ xr(a)=r(b)y \ \text{ za neke } \ x,y\in U\}.$$

Dokaz. Pošto $U\in C$, po prethodnoj teoremi je β_U r-poluprosta grupna kongruencija na S. Neka je τ proizvoljna r-poluprosta grupna kongruencija na S. Tada $\ker\tau=\{a\in S: a\tau=1\}$, gde je 1 jedinični element grupe S/τ, pripada skupu C po Lemi 1. Pošto je $U=\cap C$, to je $U\subseteq\ker\tau$. Ako $(a,b)\in\beta_U$ tada je $xr(a)=r(b)y$ za neke $x,y\in U\subseteq\ker\tau$. Kako je $x\tau=1 = y\tau$ biće

$$a\tau= r(a)\tau= 1r(a) =x\tau r(a)\tau=(xr(a))\tau= (r(b)y)\tau$$

$$=r(b)\tau y\tau= r(b)\tau 1 = r(b)\tau= b\tau,$$

pa $(a,b)\in\tau$. Dakle važi $\beta_U\subseteq\tau$ i teorema je dokazana. /-/

Posledica 1. Ako je S π-ortodoksna r-polugrupa, tada se najmanja grupa r-poluprosta kongruencija β_U poklapa sa relacijom

$$\sigma=\{(a,b)\in SxS \ :\ er(a)e = er(b)e \ \text{ za neki } \ e\in E(S)\}.$$

Dokaz. Ako je S π-ortodoksna r-polugrupa, tada je $E(S)$ puna i, po Lemi II.4, samokonjugovana podpolugrupa od S, pa je $U=E(S)$. Dakle, sada je

$$\beta_U=\{(a,b)\in SxS \ :\ er(a) = r(b)f \ \text{ za neke } \ e,f\in E(S)\}.$$

Ako $(a,b)\in\beta_U$, tada je $er(a)=r(b)f$ za neke $e,f\in E(S)$. pa je

$$(fe)r(a)(fe)=fe(er(a))fe=fe(r(b)f)fe=(fe)r(b)(fe).$$

Pošto $fe\in E(S)$, sledi da $(a,b)\in\sigma$ pa je $\beta_U\subseteq\sigma$.

Obratno, ako $(a,b)\in\sigma$ imamo da je $er(a)e=er(b)e$ za neki $e\in E(S)$, pa je za $a'\in V(r(a))$ i $b'\in V(r(b))$

$$(r(b)b'(er(a)e)a')r(a)=r(b)(b'(er(b)e)a'r(a)).$$

Ovo zajedno sa

$$r(b)b'(er(a)e)a'=r(b)b'e(r(a)ea')\in E(S)E(S)E(S)\subseteq E(S)$$

i

$$b'(er(b)e)a'r(a)=(b'er(b))ea'r(a)\in E(S)E(S)E(S)\subseteq E(S)$$

povlači $(a,b)\in\beta_U$. Dakle, $\sigma\subseteq\beta_U$ pa je $\beta_U=\sigma$. /=7

Lema 2. Neka je S π-regularna polugrupa i RegS podpolugrupa od S, tada za svaki $e,f\in E(S)$ postoji idempotent $g\in V(ef)$ takav da je $ge=fg=g$.

Dokaz. Kako je RegS podpolugrupa od S, to znači da je $V(ef)\neq\emptyset$. Neka $x\in V(ef)$, to jest, $efxef=ef$ i $xefx=x$. Sada je

$$(fxe)^2=f(xefx)e=fxe$$

pa $fxe\in E(S)$. Takodje je

$$ef(fxe)ef=efxef=ef$$

i

$$fxe(ef)fxe=fxefxe=fxe,$$

pa $fxe\in V(ef)$. Pošto je $(fxe)e=fxe=f(fxe)$, sledi da je fxe traženi idempotent. /=7

Lema 3. Neka je S π-konvencionalna polugrupa, RegS podpolugrupa od S i β relacija definisana sa

(3) $\qquad \beta=\{(a,b)\in S\times S:\ er(a)e=er(b)e \text{ za neki } e\in E(S)\}.$

Ako $(a,b)\in\beta$ i $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$, tada postoji $f\in E(S)$ da je $fa'f=fb'f$, to jest, $(a',b')\in\beta$.

Dokaz. Iz $(a,b)\in\beta$ sledi da postoji $e\in E(S)$ da je $er(a)=er(b)$. Neka $a'\in V(r(a))$ i $b'\in V(r(b))$ i neka je

$f_1=eb'er(b)e \in eb'E(S)r(b)e \subseteq eE(S)e \subseteq E(S)$ i $f_2=er(a)ea'e$ $\in er(a)E(S)a'e \subseteq eE(S)e \subseteq E(S)$ (jer je S π-konvencionalna). Dakle, f_1 i f_2 su idempotenti. Očigledno je $f_1 \cdot e=f_1$ i $ef_2= f_2$. Sada je

$$f_1a'f_2=f_1f_1a'f_2=f_1(eb'er(b)e)a'f_2=(f_1e)b'(er(b)e)a'ef_2$$

$$= f_1b'(er(a)e)(a'e)f_2= f_1b'(er(a)ea'e)f_2$$

$$= f_1b'f_2f_2= f_1b'f_2.$$

Po Lemi 2 postoji $f \in E(S)$, $f \in V(f_1f_2)$ da je $ff_1= f_2f = f$. Prema tome,

$$fa'f = ff_1a'f_2f=ff_1b'\cdot f_2f = fb'f,$$

a po (3) sledi $(a',b') \in \beta$. /=/

Teorema 4. Ako je S π-konvencioanla r-polugrupa, tada je relacija β definisana sa (3) najmanja grupna r-poluprosta kongruencija na S.

Dokaz. Relacija β definisana sa (3) je očigledno r-poluprosta, refleksivna i simetrična.

Neka $a,b,c \in S$ i neka je $(a,b), (b,c) \in \beta$. Po (3) i po Lemi 3 postoje $e,f \in E(S)$ da je $er(a)e=er(b)e$ i $fb'f=fc'f$, gde su $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$ i $c' \in V(r(c))$. Neka $x \in V(ef)$, $y \in V(fe)$ (x i y postoje jer je RegS podpolugrupa od S) i neka je

$$u_1=fxe, \quad v_1= eyf, \quad u_2=r(c)v_1c', \quad v_2=b'u_1r(b).$$

Sada je

$$u_1^2= (fxe)(fxe) = f(xefx)e = fxe = u_1$$

$$v_1^2= eyfeyf = eyf = v_1,$$

$$u_2 = r(c)v_1c' \in r(c)E(S)c' \subseteq E(S),$$

$$v_2 = b'u_1r(b) \in b'E(S)r(b) \subseteq E(S),$$

pa u_1, u_2, v_1, $v_2 \in E(S)$. Neka je $g_1 = u_1u_2u_1$ i $g_2 = v_1v_2v_1$. Elementi g_1 i g_2 su idempotenti jer je polugrupa s π-konvencionalna, $u_1 \in V(u_1)$, $v_1 \in V(v_1)$ i $u_2, v_2 \in E(S)$.
Pošto je $g_1u_1 = g_1$, $v_2g_2 = g_2$ imamo

$$\begin{aligned} g_1r(a)g_2 &= g_1g_1r(a)g_2 = g_1(u_1u_2u_1)r(a)(v_1v_2v_1) \\ &= (g_1u_1)r(c)v_1c'u_1r(a)v_1v_2v_1 \\ &= (g_1u_1)r(c)eyfc'fxer(a)eyf(v_2v_1) \\ &= (g_1u_1)r(c)ey(fc'f)x(er(a)a)e)yf(v_2v_1) \\ &= g_1r(c)eyfb'fxer(b)eyf(v_2v_1) \\ &= (g_1r(c)v_1)(b'fxer(b))(v_1v_2v_1) \\ &= (g_1r(c)v_1)(b'u_1r(b))(v_1v_2v_1) \\ &= g_1r(c)v_1v_2g_2 \\ &= g_1r(c)v_1v_2v_1g_2 \\ &= g_1r(c)g_2^2 = g_1r(c)g_2. \end{aligned}$$

Po Lemi 2 postoji $g \in E(S)$ da je $g \cdot g_1 = g_2g = g$ pa je

$$gr(a)g = gg_1r(a) \cdot g_2g = gg_1r(c)g_2g = gr(c)g .$$

Dakle, $(a,c) \in \beta$ što povlači da je β r-poluprosta ekvivalencija.

Neka $(a,b) \in \beta$, $c \in S$, $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$ i $c' \in V(r(c))$. Po Lemi 3 postoji $f \in E(S)$ da je $fa'f = fb'f$. Kako je RegS podpolugrupa od S, sledi da postoji

$x \in V(fr(c))$ pa $xfr(c) \in E(S)$ i $(r(c)xf)^2 = r(c)xfr(c)xf =$ $= r(c)xf \in E(S)$. Kako je S π-konvencionalna i $f \in V(f)$ sledi $u = f(xfr(c))f \in E(S)$. Neka je $v = r(c)xf$ i neka je $f_1 = ur(b)vb'u$ i $f_2 = c'va'ur(a)vr(c)$. Iz $v \in E(S)$ i iz π- konvencionalnosti polugrupe S sledi $f_1, f_2 \in E(S)$. Primetimo da je $f_1 u = f_1$ i $r(c)c'v = v = v^2 = vr(c)c'v$. Sada je

$$
\begin{aligned}
f_1 r(ac) f_2 &= f_1 r(a) r(c) f_2 = (f_1 f_1)(r(a)r(c)f_2) \\
&= f_1 (ur(b)vb'u) r(a) r(c) f_2 \\
&= (f_1 u)(r(b)r(c)xfb'f(xfr(c))f)r(a)r(c)f_2 \\
&= (f_1 u)(r(b)r(c)x)(fb'f)(xfr(c)f)(r(a)r(c)f_2) \\
&= f_1 (r(b)r(c)x)(fa'f)(xfr(c)f)(r(a)r(c))f_2 \\
&= (f_1 r(b)r(c))(c'r(c)xfa')(fxfr(c)fr(a))(r(c)f_2) \\
&= (f_1 r(b)r(c))(c'va'ur(a))(r(c)c'va'ur(a)vr(c)) \\
&= (f_1 r(b)r(c))(c'va'ur(a))(vr(c)c'v)(a'ur(a)vr(c) \\
&= (f_1 r(b)r(c))(c'va'ur(a)vr(c))(c'va'ur(a)vr(c)) \\
&= f_1 r(bc)(c'va'ur(a)vr(c))(c'va'ur(a)vr(c)) \\
&= f_1 r(bc) f_2 f_2 = f_1 r(bc) f_2 .
\end{aligned}
$$

Po Lemi 2 postoji $g \in E(S)$ da je $gf_1 = f_2 g = g$. Dakle, $gr(ac)g = gr(bc)g$ povlači $ac\,\beta\,bc$ pa je β desna kongruencija. SLično se dokazuje da je β leva kongruencija. Znači, β je r-poluprosta kongruencija.

Neka $e, f \in E(S)$, tada je $eef = eff$ i po Lemi 2 postoji $g \in E(S) \cap V(ef)$ da je $ge = fg = g$. Znači,

$$geg = fgg = fg = g = gg = gfg$$

pa $(e,f) \in \beta$. Dakle, β identifikuje sve idempotente na S, pa S/β ima jedinstven idempotent. Pošto je S/β regularna polugrupa sledi da je S/β grupa i da je β grupna kongruencija.

Neka je τ proizvoljna grupna r-poluprosta kongruencija na S. Ako $(a,b) \in \beta$, tada je $er(a)e = er(b)e$ za neki $e \in E(S)$, pa je

$$(e\tau)(r(a)\tau)(e\tau) = (e\tau)(r(b)\tau)(e\tau).$$

Pošto je $e\tau$ jedinica grupe S/τ, to je $r(a)\tau = r(b)\tau$ pa kako je τ r-poluprosta kongruencija imamo $a\tau = b\tau$. Znači, $\beta \subseteq \tau$ pa je β najmanja r-poluprosta grupna kongruencija na S. /=7

Ako bi u ovoj teoremi polugrupa S bila konvencionalna, tada bismo dobili poznati Masatov rezultat iz rada |32|.

Neka je S π-regularna polugrupa i $H \subseteq S$, tada analogno kao u teoriji regularnih polugrupa definišemo zatvorenje od H sa

(4) $\qquad H\omega = \{a \in S : \ ha \in H \ \text{ za neki } \ h \in H\}$

Skup H zovemo zatvorenim ako je $H\omega = H$. U opštem slučaju ne važi da je $H \subseteq H\omega$, ali ako je H podpolugrupa od S, tada je očigledno $H \subseteq H\omega$.

Uvodjenje ovog pojma omogućuje alternativan opis grupne r-poluproste kongruencije β_H, $H \in \mathcal{C}$.

Teorema 5. Neka je r-polugrupa, tada za svaki $H \in \mathcal{C}$ je

$$\beta_H = \{(a,b) \in S \times S : \ r(a)b' \in H\omega \ \text{ za neki } \ b' \in V(r(b))\}.$$

Dokaz. Neka $H \in \mathcal{C}$ i neka je

$$\rho=\{(a,b)\in S\times S \ : \ r(a)b'\in H\omega \ \text{ za neki } \ b'\in V(r(b))\}.$$

Ako $(a,b)\in \beta_H$, gde je β_H relacija definisana u Teoremi 2, tada postoje $x,y\in H$ da je $xr(a)=r(b)y$. Sada je

$$xr(a)b' = r(b)yb'\in r(b)Hb'\subseteq H$$

za svaki $b'\in V(r(b))$. Pošto $x\in H$, iz $xr(a)b'\in H$ po (4) sledi $r(a)b'\in H\omega$. Dakle, $(a,b)\in\rho$ pa je $\beta_H\subseteq\rho$.

Obratno, neka $(a,b)\in\rho$, tada je $r(a)b'\in H\omega$ za neki $b'\in V(r(b))$ pa postoji $x\in H$ da $xr(a)b'\in H$. Neka $a'\in V(r(a))$, tada imamo

$$(r(b)b'(xr(a)b')r(b)a')r(a)=r(b)(b'(xr(a)b')r(b)a'r(a))$$

što zajedno sa

$$r(b)b'(xr(a)b')r(b)a'=(r(b)b')x(r(a)(b'r(b)a')$$

$$\in E(S)Hr(a)E(S)a'\subseteq HHr(a)Ha'\subseteq HH\subseteq H$$

i

$$b'(xr(a)b')r(b)a'r(a)=(b'(xr(a)b')r(b)a'r(a)$$

$$\in b'Hr(b)E(S)\subseteq HH\subseteq H.$$

daje $(a,b)\in H$. Prema tome je $\rho\subseteq\beta_H$ čime je teorema dokazana. $\square$

Lema 4. Neka je S π-regularna polugrupa, $H\in\mathcal{C}$ i

(i) $r(a)b'\in H\omega$ za neki (svaki) $b'\in V(r(b))$;

(ii) $a'r(b)\in H\omega$ za neki (svaki) $a'\in V(r(a))$;

(iii) $r(b)a'\in H\omega$ za neki (svaki) $a'\in V(r(a))$;

(iv) $b'r(a)\in H\omega$ za neki (svaki) $b'\in V(r(b))$, tada je (i) <=> (ii) i (iii) <=> (iv).

Dokaz. Dokažimo da je (i) <=> (ii). Neka $H \in C$ i pretpostavimo da $r(a)b' \in H\omega$ za neki $b' \in V(r(b))$, tada postoji $x \in H$ da $xr(a)b' \in H$. Sada za svaki $a' \in V(r(a))$ važi

$$a'(xr(a)b')r(a) \in a'Hr(a) \subseteq H$$

i

$$(a'xr(a)b'r(a))a'r(b) = (a'xr(a))b'(r(a)a')r(b)$$

$$\in (a'Hr(a))(b'\cdot H \cdot r(b)) \subseteq HH \subseteq H,$$

pa $a'r(b) \in H\omega$ za svaki $a' \in V(r(a))$.

Obratno, neka $a'r(b) \in H\omega$ za neki $a' \in V(r(a))$, tada $xa'r(b) \in H$ za neki $x \in H$. Sada je

$$r(a)(xa'r(b))a' \in r(a)Ha' \subseteq H$$

i za svaki $b' \in V(r(b))$

$$(r(a)xa'r(b)a')r(a)b' = (r(a)xa')r(b)(a'r(a))b'$$

$$\in (r(a)Ha')(r(b)Hb') \subseteq HH \subseteq H.$$

Dakle, $r(a)b' \in H\omega$ za svaki $b' \in V(r(b))$. Prema tome (i) <=> (ii).

Ako u prethodnom razmatranju elementi a i b zamene mesta, onda se dobija (iii) <=> (iv). /=/

Teorema 6. Neka je S r-polugrupa, $H \in C$ i $a,b \in S$, tada je $a\beta_H b$ ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:

(i) $r(a)b' \in H\omega$ za neki (svaki) $b' \in V(r(b))$;

(ii) $a'r(b) \in H\omega$ za neki (svaki) $a' \in V(r(a))$;

(iii) $r(b)a' \in H\omega$ za neki (svaki) $a' \in V(r(a))$;

(iv) $b'r(a) \in H\omega$ za neki (svaki) $b' \in (r(b))$.

Dokaz. Po Teoremi 5 je $a\beta_H b$ ako i samo ako $r(a)b' \in H$ za neki $b' \in V(r(b))$. Zbog simetričnosti imamo $b\beta_H a$ što povlači $r(b)a' \in H$ za neki $a' \in V(r(a))$. Ovo dalje povlači ekivivalentnost uslova (i) i (iii). Po Lemi 4 zaključujemo da su svi uslovi medjusobno ekvivalentni.

Obrat teoreme sledi direktno iz definicije relacije β_H. /=7

Neka je S π-regularna polugrupa. Definišimo skup $\bar{C} = \{H \subseteq S$: H je puna, samokonjugovana, zatvorena r-poluprosta podpolugrupa od $S\}$.

Lema 5. Ako je S π-regularna polugrupa i $H \subseteq S$ takav da $H \in \bar{C}$, tada je podpolugrupa H inverzno zatvorena i H je π-regularna podpolugrupa od S.

Dokaz. Neka $a \in H$, tada $r(a) \in H$ pa za svaki $a' \in V(r(a))$ važi $r(a)a' \in E(S) \subseteq H = H\omega$. Po definiciji $H\omega$ sledi $a' \in H\omega = H$ pa je $V(r(a)) \subseteq H$, što povlači $V(\mathrm{reg}H) \subseteq \mathrm{reg}H$ i H je π-regularna podpolugrupa od S. /=7

Lema 6. Ako je ρ grupna kongruencija π-regularne polugrupe S, tada je $(\ker\rho)\omega$ podpolugrupa od S.

Dokaz. Neka $a,b \in (\ker\rho)\omega$, tada postoje $x,y \in \ker\rho$ da $xa, yb \in \ker\rho$. Označimo sa 1 jedinični element grupe S/ρ. Pošto postoje $e,f \in E(S)$ da je $(xa)\rho = e\rho$, $(yb)\rho = f\rho$ i kako je $e\rho = 1 = f\rho$, to je $(xa)\rho = 1 = (yb)\rho$ pa je

$$((yx)(ab))\rho = y\rho(xa)\rho b\rho = y\rho 1\, b\rho = y\rho b\rho = (yb)\rho = 1.$$

Dakle, $(yx)(ab) \in \ker\rho$, pa kako je po Lemi 1 $\ker\rho$ podpolugrupa od S, imamo da $xy \in \ker\rho$ povlači $ab \in (\ker\rho)\omega$. /=7

Teorema 7. Neka je S r-polugrupa, tada preslikavanje $H \to (H) = \{(a,b) \in S\times S : r(a)b' \in H$ za neki $b' \in V(r(b))\}$ jeste 1:1 preslikavanje skupa $\bar{C}$ na skup grupnih r-poluprostih kongruencija na S i ono očuvava uredjenje.

Dokaz. Neka $H \in \bar{C}$. Kako je $\bar{C} \subseteq C$ to po Teoremi 2 sledi da je β_H grupna r-poluprosta kongruencija na S. Kako je $H = H\omega$, to je po Teoremi 5 $(H) = \beta_H$ pa (H) jeste grupna r-poluprosta kongruencija na S.

Neka je τ grupna r-poluprosta kongruencija na S. Po Lemi 1 $\ker\tau$ je puna, samokonjugovana podpolugrupa od S pa sledi da je $\ker\tau \subseteq (\ker\tau)\omega$. Obratno, ako $a \in (\ker\tau)\omega$, tada $xa \in \ker\tau$ za neki $x \in \ker\tau$. Ako je 1 jedinični element grupe S/τ, tada je $y\tau = 1$ za svaki $y \in \ker\tau$ pa je

$$a\tau = 1\cdot a\tau = x\tau a\tau = (xa)\tau = 1$$

što znači da $a \in \ker\tau$. Sada je $(\ker\tau)\omega \subseteq \ker\tau$ što povlači $\ker\tau = (\ker\tau)\omega$.

Ako $a \in S$ i $r(a) \in \ker\tau$, tada postoji $e \in E(S)$ da je $a\tau r(a)\tau e$ pa $a \in \ker\tau$ što znači da je $\ker\tau$ r-poluprosta podpolugrupa. Dakle, $\ker\tau \in \bar{C}$.

Neka $(a,b) \in (\ker\tau)$, tada $r(a)b' \in \ker\tau$ za neki $b' \in V(r(b))$. Pošto $b'r(b) \in E(S) \subseteq \ker\tau$ biće

$$a\tau = r(a)\tau = r(a)\tau\cdot 1 = r(a)\tau(b'r(b))\tau =$$

$$= (r(a)b')\tau r(b)\tau = 1\cdot r(b)\tau = r(b)\tau = b\tau.$$

Znači, $(a,b)\in\tau$ pa je $(\ker\tau)\subseteq\tau$. Obratno, neka $(a,b)\in\tau$, tada $(r(a),r(b))\in\tau$, a odavde sledi $(r(a)b', r(b)b')\in\tau$ za svaki $b'\in V(r(b))$. Kako $r(b)b'\in E(S)$, sledi da $r(a)b'\in\ker\tau$ pa $(a,b)\in(\ker\tau)$. Dakle, $\tau\subseteq(\ker\tau)$ pa je $\tau=(\ker\tau)$ što povlači da je definisano preslikavanje surjekcija.

Neka $C,D\in\bar{\mathcal{C}}$ i pretpostavimo da je $(C)=(D)$. Ako $c\in C$, tada $r(c)\in C$ i $r(c)(c'r(c))\in C$, pa pošto $c'r(c)\in V(c'r(c))$ sledi $(c,c'r(c))\in(C)=(D)$. Dakle, po definiciji relacije (D), sledi da $r(c)(c'r(c))^*\in D$ za neki $(c'r(c))^*\in V(c'r(c))$. Kako je $D=D_\omega$, to po Teoremi 6 imamo da $r(c)(c'r(c))^{**}\in D$ za svaki $(c'r(c))^{**}\in V(c'r(c))$, što povlači $r(c)(c'r(c))\in D$. Znači, $r(c)\in D$ i pošto je D r-poluprosta podpolugrupa sledi $c\in D$ pa je $C\subseteq D$. Slično se dokazuje da je $D\subseteq C$, pa je $C=D$. Ovo znači da je definisano preslikavanje 1 : 1, što povlači da je bijekcija.

Ako $H,K\in\bar{\mathcal{C}}$ i $H\subseteq K$, tada iz $a(H)b$ sledi $r(a)b'\in H\subseteq K$, za neki $b'\in V(r(b))$, pa je $a(K)b$. Dakle, $(H)\subseteq(K)$ pa definisano preslikavanje očuvava uredjenje. /=7

Ako je τ grupna r-poluprosta kongruencija r-polugrupe S, tada po dokazu Teoreme 7 sledi $\tau=(H)$, gde je $H=\ker\tau\in\bar{\mathcal{C}}$. Prema tome, $a\,\tau\,b$ ako i samo ako $r(a)b'\in H=H_\omega$ za neki $b'\in V(r(b))$. Iz $\bar{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}$ sledi $\tau=\beta_H$. Dakle, svaka grupna r-poluprosta kongruencija je oblika β_H za neki $H\in\bar{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}$. Sada može biti dokazana sledeća

Teorema 8. Za svaku grupnu r-poluprostu kongruenciju τ r-polugrupe S, recimo $\tau=\beta_H$ za neki $H\in\mathcal{C}$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $a \tau b$;

(ii) $r(a)xb' \in H$ za neki $x \in H$ i neki (svaki) $b' \in V(r(b))$;

(iii) $a'xr(b) \in H$ za neki $x \in H$ i neki (svaki) $a' \in V(r(a))$;

(iv) $r(b)xa' \in H$ za neki $x \in H$ i neki (svaki) $a' \in V(r(a))$;

(v) $b'xr(a) \in H$ za neki $x \in H$ i neki (svaki) $b' \in V(r(b))$;

(vi) $r(a)x = yr(b)$ za neke $x,y \in H$;

(vii) $xr(a) = r(b)y$ za neke $x,y \in H$;

(viii) $Hr(a)H \cap Hr(b)H \neq \emptyset$.

Dokaz. (ii) => (iii) Neka $r(a)xb' \in H$ za neki $x \in H$ i neki $b' \in V(r(b))$, tada je za svaki $a' \in V(r(a))$

$$a'(r(a)xb')r(b) = (a'r(a))x(b'r(b)) \in E(S)HE(S) \subseteq H$$

pa uslov (iii) važi.

(iii) => (vi) Neka $a'xr(b) \in H$ za neki $x \in H$ i neki $a' \in V(r(a))$, tada $(r(a)a')x \in E(S)H \subseteq H$ pa je

$$r(a)(a'xr(b)) = (r(a)a'x)r(b).$$

(vi) => (viii) Ako je $r(a)x = yr(b)$ za neke $x,y \in H$, tada je $yr(a)x^2 = y^2r(b)x$, pa je $Hr(a)H \cap Hr(b)H \neq \emptyset$.

(viii) => (ii) Neka je $Hr(a)H \cap Hr(b)H \neq \emptyset$ i neka je $xr(a)y = x_1r(b)y_1$ gde su $x,y,x_1,y_1 \in H$. Ako $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$, tada $a'xr(a)$, $b'xr(b) \in H$ jer je podpolugrupa H samokonjugovana. Sada $(a'xr(a))y \in H$ pa je

$$r(a)(a'xr(a)y)b' = r(a)a'(xr(a)y)b' = r(a)a'(x_1r(b)y_1)b'$$

$$= (r(a)a')x_1(r(b)y_1b') \in E(S)HH \subseteq H$$

pa uslov (ii) važi.

Sličnim razmatranjima se dokazuje ekvivalentnost uslova (iv), (v), (vii) i (viii). Po Teoremi 2 sledi ekvivalentnost uslova (i) i (vii) pa je teorema dokazana. $\square$

Već ranije smo označili $U = \cap C$. Sada važi

Posledica 2. Neka σ označava najmanju grupnu r-poluprostu kongruenciju r-polugrupe S, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $a\,\sigma\,b$,

(ii) $r(a)ub' \in U$ za neki $u \in U$ i neki (svaki) $b' \in V(r(b))$,

(iii) $a'ur(b) \in U$ za neki $u \in U$ i neki (svaki) $a' \in V(r(a))$,

(iv) $r(b)ua' \in U$ za neki $u \in U$ i neki (svaki) $a' \in V(r(a))$,

(v) $b'ur(a) \in U$ za neki $u \in U$ i neki (svaki) $b' \in V(r(b))$,

(vi) $r(a)u = vr(b)$ za neke $u, v \in U$;

(vii) $ur(a) = r(b)v$ za neke $u, v \in U$,

(viii) $ur(a)U \cap Ur(b)U \neq \emptyset$. $\square$

Sada ćemo opisati još neke kongruencije π-regularne polugrupe S, a dokazane teoreme uopštavaju poznate rezultate F.Masata |33| za regularne polugrupe.

Teorema 9. Neka je na π-regularnoj polugrupi S definisana relacija

$$\lambda = \{(ef, efef) \in S \times S : \forall e, f \in E(S)\},$$

tada kongruencija λ^* generisana sa λ jeste najmanja π-ortodoksna kongruencija na S i $Reg(S/\lambda^*)$ je ortodoksna polugrupa. Štaviše, ako je ρ kongruencija na S koja sadrži λ, tada je S/ρ takodje π-ortodoksna polugrupa.

Dokaz. Po Lemi II.2.1 S/λ^* je π-regularna polugrupa. Ako $A,B\in E(S/\lambda^*)$, tada po istoj lemi postoje $e,f\in E(S)$ da je $A=e\lambda^*$ i $B=f\lambda^*$. Pošto je $\lambda\subseteq\lambda^*$ imamo $(ef)\lambda^* = =(efef)\lambda^*$ pa je

$$(AB)^2 = ABAB = e\lambda^*f\lambda^*e\lambda^*f\lambda^* = (efef)\lambda^* = (ef)\lambda^*$$
$$= e\lambda^*f\lambda^* = AB.$$

Dakle, $E(S/\lambda^*)$ je podpolugrupa od S/λ^* pa je S/λ^* π-ortodoksna polugrupa. Po Teoremi II.2.5 sledi da je $Reg(S/\lambda^*)$ ortodoksna polugrupa.

Neka je α π-ortodoksna kongruencija na S i $e,f \in E(S)$, tada $e\alpha$, $f\alpha\in E(S/\alpha)$. Zbog π-ortodoksnosti sledi $(e\alpha f\alpha)^2 = e\alpha f\alpha$, odnosno, $(efef)\alpha = (ef)\alpha$. Kako $(ef,efef)\in\lambda$ za sve $e,f\in E(S)$, sledi $\lambda\subseteq\alpha$. Pošto je λ^* najmanja kongruencija koja sadrži λ imamo da je $\lambda^*\subseteq\alpha$.

Neka je ρ kongruencija na S koja sadrži λ i $e,f\in E(S)$. Iz $ef\,\lambda\,efef$ sledi $ef\rho efef$ pa se slično prethodnom dokazuje da je S/ρ π-ortodoksna polugrupa. /=/

Teorema 10. Na π-regularnoj polugrupi S definišemo relaciju

$$\delta = \{(a,b)\in S\times S : V(r(a))\cap V(r(b)) \neq \emptyset\}.$$

Kongruencija δ^* generisana relacijom δ je najmanja inverzna r-poluprosta kongruencija na S. Ako je ρ kongruencija na S koja sadrži δ, tada je S/ρ takodje inverzna polugrupa.

Dokaz. Pošto za svaki $a\in S$ važi $V(r(a))\cap V(r(a)) = V(r(a)) \neq \emptyset$, to je $(a,r(a))\in\delta$ pa δ jeste r-poluprosta relacija. Iz $\delta\subseteq\delta^*$, po Lemi II 5 sledi da je δ^* r-poluprosta kongruencija, a po Teoremi II 1 sledi da je S/δ^*

regularna polugrupa. Neka $A, A', A'' \in S/\delta^*$ i $A', A'' \in V(A)$, to jest,

$$A=AA'A,\ A'=A'AA',\ A=AA''A,\ A''=A''AA''.$$

Po Teoremi I 2.4 postoje $a \in A$, $a' \in A'$, $a'' \in A''$ da je

$$a=aa'a,\ a'=a'aa',\ a=aa''a,\ a''=a''aa''.$$

Odavde sledi da $a \in V(a') \cap V(a'')$ pa po definiciji relacije δ imamo da $(a', a'') \in \delta$, što povlači $(a', a'') \in \delta^*$. Kako je $a'\delta^* = A'$, $a''\delta^* = A''$, sledi $a' = a''$ što povlači $|V(A)| = 1$. Dakle, polugrupa S/δ^* je inverzna i δ^* je inverzna kongruencija.

Neka je α inverzna r-poluprosta kongruencija na S i neka $(a,b) \in \delta$, tada je $V(r(a)) \cap V(r(b)) \neq \emptyset$. Ako $x \in V(r(a)) \cap V(r(b))$, tada $r(a), r(b) \in V(x)$ što povlači $r(a)\alpha, r(b)\alpha \in V(x\alpha)$. Kako je S/α inverzna polugrupa to je $r(a)\alpha = r(b)\alpha$, odnosno $(r(a), r(b)) \in \alpha$. Pošto je kongruencija α r-poluprosta, imamo $(a,b) \in \alpha$ pa je $\delta \subseteq \alpha$. Kako je δ^* najmanja r-poluprosta kongruencija koja sadrži δ, sledi $\delta^* \subseteq \alpha$.

Neka je ρ kongruencija na S takva da je $\delta^* \subseteq \rho$, a odavde sledi da je ρ r-poluprosta kongruencija. Ako $A, A', A'' \in S/\rho$ i $A', A'' \in V(A)$, a $V(A)$ postoji jer je S/ρ regularna polugrupa, tada analogno gornjem razmatranju postoje $a \in A$, $a' \in A'$, $a'' \in A''$ da je $a \in V(a') \cap V(a'')$. Dakle, $(a', a'') \in \delta$ pa je $A' = a'\rho = a''\rho = A''$ što povlači da je S/ρ inverzna polugrupa. /=7

Posledica 3. Ako je S strogo π-inverzna polugrupa, tada je

$$\delta = \{(a,b) \in S \times S : r(a) = r(b)\}.$$

Ako je S strogo π-inverzna r-polugrupa, tada je $\delta = \delta^*$.

Dokaz. Neka je S strogo π-inverzna polugrupa i $(a,b) \in \delta$, tada postoji $x \in V(r(a)) \cap V(r(b))$ pa $r(a), r(b) \in V(x)$ što povlači $r(a) = r(b)$. Obratno, iz $r(a) = r(b)$ sledi $V(r(a)) \cap V(r(b)) \neq \emptyset$ pa $(a,b) \in \delta$.

Ako je S strogo π-inverzna r-polugrupa, tada po Posledici IV 1.3 imamo da je $\delta = \nu$ kongruencija na S pa je $\delta = \delta^*$. /=7

GLAVA VI.

KONGRUENCIJE EKVIVALENTNE NA IDEMPOTENTIMA

Ako je S polugrupa sa nepraznim skupom idempotenata E, tada svaka kongruencija polugrupe S indukuje razbijanje skupa E. Dve kongruencije τ_1 i τ_2 su ekvivalentne na idempotentima ako indukuju isto razbijanje na skupu E, odnosno ako je $\tau_{1/E} = \tau_{2/E}$. Neka $\Pi_{P(E)}$ označava ekvivalenciju indukovanu razbijanjem $P(E)$ skupa E. U ovoj glavi ćemo opisati najmanju r-poluprostu kongruenciju r-polugrupe i najveću r-poluprostu kongruenciju π-ortodoksne r-polugrupe, tako da se njihove restrikcije na skupu E poklapaju sa $\Pi_{P(E)}$. Pri ovome mi uopštavamo rezultate R. Fiegenbaum iz radova |12| i |13|.

Razbijanje $P(E) = \{E_\alpha : \alpha \in J\}$ skupa idempotenata E π-regularne polugrupe S zovemo dopustivim razbijanjem ako za $\alpha_i \in J$ i $x_i, y_i \in S^1$ $(i=0,1,\dots,n)$ važi $x_i E\alpha_i \cap x_{i+1} E\alpha_{i+1} \neq \emptyset$ za $i=0,1,\dots,n-1$ i još $x_o E\alpha_o y_o \cap E \neq \emptyset$ i $x_n E\alpha_n y_n \cap E \neq \emptyset$ povlači $x_o E\alpha_o y_o \cap E \subseteq E_\alpha$ i $x_n E\alpha_n y_n \cap E \subseteq E_\alpha$ za neki $\alpha \in J$. Ekvivalencija $\Pi_{P(E)}$ indukovana razbijanjem $P(E)$ definisana je na način: $(e,f) \in \Pi_{P(E)}$ ako i samo ako $e,f \in E_\alpha$ za neki $\alpha \in J$. Primetimo da ekvivalencija $\Pi_{P(E)}$ ima adiciono svojstvo, to jest $(e,f) \in \Pi_{P(E)}$ i $xey, xfy \in E$ za $x,y \in S^1$ povlači $(xey, xfy) \in \Pi_{P(E)}$. Zaista, $(e,f) \in \Pi_{P(e)}$ povlači $e,f \in E_\alpha$ za neki $\alpha \in J$. Za one

$x,y\in S^1$ za koje $xey,xfy\in E$ važi $xey,xfy\in xE_\alpha y\subseteq E_\beta$ za $\beta\in J$, pa sledi $(xey,xfy)\in \Pi_{P(E)}$.

R. Fiegenbaum, |12| je pokazala da kongruencija τ polugrupe S indikuje dopusitvo razbijanje na skupu idempotenata E.

Nadalje ćemo sa U označavati najmanju samokonjugovanu podpolugrupu od S koja sadrži E. Ako je τ kongruencija na S, tada je $\tau_{|U}$ kongruencija na U. Ako $x,y\in U$ i $(x,y)\in\tau_{|U}$ i ako $a\in \mathrm{Reg}S$, $a'\in V(a)$, tada $(axa',aya')\in\tau_{|U}$ jer zbog samokonjugovanosti axa', $aya'\in U$. Znači, kongruencija $\tau_{|U}$ ima adiciono svojstvo. Svaku kongruenciju ρ na podpolugrupi U koja ima adiciono svojstvo zvaćemo normalnom kongruencijom na U.

Lema 1.1. Neka je S r-polugrupa i $a,b,c\in S^1$, tada $r(c)(abc)'r(ab)$, $r(bc)(abc)'r(a)\in E$, gde je $(abc)'\in V(r(abc))$.

Dokaz. Neka $a,b,c\in S^1$, tada je $r(abc)=r(a)r(b)r(c)$ i neka $(abc)'\in V(r(abc))$. Tada je

$$(r(c)(abc)'r(ab))(r(c)(abc)'r(ab))=r(c)((abc)'(abc)(abc)')r(ab)$$
$$=r(c)(abc)'r(ab)$$

i

$$(r(bc)(abc)'r(a))(r(bc)(abc)'r(a))=r(bc)((abc)'(abc)(abc)')r(a)$$
$$=r(bc)(abc)'r(a).$$ $\square$

Lema 1.2. Svaki idempotent e π-regularne polugrupe S je desna jedinica za elemente skupa $L_e^*\cap \mathrm{Reg}S$, leva jedinica za elemente skupa $R_e^*\cap \mathrm{Reg}S$ i dvostrana jedinica za elemente skupa $H_e^*\cap \mathrm{Reg}S$.

Dokaz. Neka $a\in L_e^*\cap \mathrm{Reg}S$, tada je $a\mathcal{L}^*e \Leftrightarrow Sr(a)=Sr(e)$. Pošto $a,e\in \mathrm{Reg}S$ imamo da je $r(a)=a$, $r(e)=e$ pa je $a\mathcal{L}^*e \Leftrightarrow Sa=Se$. Sada za $a'\in V(a)$ važi $a=aa'a\in Se$ pa postoji $x\in S$ da je $a=xe$. Dakle,

$$ae=(xe)e = xe = a$$

pa e jeste desna jedinica skupa $L_e^*\cap \mathrm{Reg}S$. Slično se dokazuju preostala dva tvrdjenja. /=/

Lema 1.3. Neka je S r-polugrupa i τ^* normalna kongruencija na U. Neka $x,y\in S$, $x'\in V(r(x))$, $y'\in V(r(y))$ i neka je $u\in U$ takav da je $(x'r(x))\tau^*=r(u)\tau^*$. Tada za svaki $(xy)'\in V(r(xy))$, $(xuy)'\in V(r(xuy))$ važi

(1) $\quad (r(xuy)(xuy)')\tau^* = (r(xy)(xy)'r(xuy)(xuy)')\tau^*$

i

(2) $\quad ((xuy)'r(xuy))\tau^* = ((xuy)'r(xuy)(xy)'r(xy))\tau^*.$

Dokaz. Pošto je τ^* kongruencija na U, to $(x'r(x))\tau^* = r(u)\tau^*$ povlači $(r(x)x')\tau^*=(r(x)(x'r(x))x')\tau^*$ $=(r(x)r(u)x')\tau^*$. Element $r(y)(xuy)'r(xu)\in E$ po Lemi 5.1 pa sledi

$$(r(u)r(y)(xuy)'r(xu))\tau^*=r(u)\tau^*(r(y)(xuy)'r(xu))\tau^*$$
$$= (x'r(x))\tau^*(r(y)(xuy)'r(xu))\tau^*$$
$$= (x'r(xy)(xuy)'r(xu))\tau^*.$$

Pošto je τ^* normalna kongruencija sledi

(3) $\quad (r(x)r(u)r(y)(xuy)'r(xu)x')\tau^*=(r(x)(r(u)r(y)(xuy)'r(xu))x')\tau^*$
$$= (r(x)(x'r(x)r(y)(xuy)'r(xu))x')\tau^*$$
$$= (r(x)r(y)(xuy)'r(xu)x')\tau^*.$$

Sada je

$$(4) \qquad (r(xuy)(xuy)')\tau^* = (r(xuy)(xuy)'r(x)r(uy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xuy)(xuy)'r(x)x'r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xuy)(xuy)')\tau^*(r(x)x')\tau^*(r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xuy)(xuy)')\tau^*(r(x)r(u)x')\tau^*(r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(x)r(u)r(y)(xuy)'r(xu)x')\tau^*(r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(x)r(y)(xuy)'\cdot r(xu)x')\tau^*(r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xy)(xuy)'r(xu)x'r(xuy)(xuy)')\tau^*.$$

Dakle,

$$(r(xy)(xy)'\cdot r(xuy)(xuy)')\tau^* = (r(xy)(xy)')\tau^*(r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xy)(xy)')\tau^*(r(xy)(xuy)'\cdot r(xu)x'r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xy)(xy)'r(xy)(xuy)'r(xu)x'r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xy)(xuy)'r(xu)x'r(xuy)(xuy)')\tau^*$$

$$=(r(xuy)(xuy)')\tau^*.$$

Takodje, po Lemi 1.1 $r(y)(xuy)'r(xu) \in E$ i $r(u)\tau^* = (x'r(x))\tau^*$ povlači

$$(5) \qquad (r(y)(xuy)'r(xu)(x'r(x))r(u))\tau^* =$$

$$=(r(y)(xuy)'r(xu)(x'r(x)))\tau^*(r(u))\tau^*$$

$$=(r(y)(xuy)'r(xu)(x'r(x)))\tau^*\cdot(x'r(x))\tau^*$$

$$=(r(y)(xuy)'r(xu)(x'r(x))(x'r(x)))\tau^*$$

$$=(r(y)(xuy)'r(xu)x'r(x))\tau^*$$

Kako je τ^* normalna kongruencija biće

$$(6)\qquad (y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xuy))\tau^*$$

$$=(y'(r(y)(xuy)'r(xu)(x'r(x))\cdot r(y))\tau^*$$

$$=(y'(r(y)(xuy)'r(xu)(x'r(x)))r(y))\tau^*$$

$$=(y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*.$$

Iz $(x'r(x))\tau^*=r(u)\tau^*$ sledi $(r(x)x'r(x)x')\tau^*=(r(x)x')\tau^*$ $=(r(x)r(u)x')\tau^*$ što povlači $((xuy)'r(x)x'r(xuy))\tau^*$ $=((xuy)'r(x)r(u)x'r(xuy))\tau^*$. Sada je

$$(7)\qquad ((xuy)'r(xuy))\tau^*=((xuy)'r(x)x'r(x)r(uy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(x)r(u)x'r(xuy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xuy)(xuy)'r(xu)x'r(xuy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(x)r(u)r(y)y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xuy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xuy)y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xuy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xuy))\tau^*(y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xuy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xuy))\tau^*(y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'\cdot r(xuy)y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xu)r(y)y'r(y)(xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xuy)(xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*.$$

Dakle,

$$((xuy)'r(xuy)(xy)'r(xy))\tau^*=((xuy)'r(xuy))\tau^*((xy)'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*((xy)'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xu)x'r(xy)(xy)'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xu)x'r(xy))\tau^*$$

$$=((xuy)'r(xuy))\tau^*.\ \square$$

Teorema 1.1. Ako je S r-polugrupa i τ^* normalna kongruencija na U, tada relacija

$$(8)\quad \tau=\{(a,b)\in S\times S:\ \text{postoje}\ a'\in V(r(a)),\ b'\in V(r(b)),$$
$$u,v,w,z\in U\ \text{da je}\ (r(a)a')\tau^*=(r(b)b'r(a)a')\tau^*=r(u)\tau^*,$$
$$(a'r(a))\tau^*=(a'r(a)b'r(b))\tau^*=r(w)\tau^*,\quad (r(b)b')\tau^*$$
$$=(r(a)a'r(b)b')\tau^*=r(z)\tau^*,\ (b'r(b))\tau^*=(b'r(b)a'r(a))\tau^*$$
$$=r(v)\tau^*\ \ \text{i}\ \ r(ua)=r(bv),\ r(aw)=r(zb)\}$$

jeste kongruencija na S. Još više, $\tau|_E=\tau^*|_E$.

Dokaz. Ako u (8) element a ostane na svom mestu, element b smenimo sa $r(a)$, uzmemo $u=z=r(a)a'\in E\subseteq U$ i $v=w=a'r(a)\in E\subseteq U$, gde $a'\in V(r(a))$, tada su prve četiri jednakosti iz (8) očigledno ispunjene. Takodje je

$$r(ua)=r(r(a)a'a)=r(r(a))r(a')r(a)=r(r(a))r(a')r(r(a))$$
$$=r(r(a)a'r(a))=r(r(a)v)$$

i

$$r(aw)=r(aa'r(a))=r(a)r(a')\cdot r(r(a))=r(r(a))r(a')r(r(a))$$
$$=r(r(a)a'r(a))=r(zr(a)).$$

Iz svega ovoga sledi $(a,r(a))\in\tau$ pa relacija τ jeste r-poluprosta.

Ako u (8) element a ostane na svom mestu, element b smenimo sa a, a $u,v,w,z\in U$ budu kao u prethodnom razmatranju, onda su prve četiri jednakosti opet očigledno ispunjene i važi

$$r(ua)=r(r(a)v)=r(r(a))r(v)=r(a)r(v)=r(av)$$

i

$$r(aw)=r(zr(a))=r(z)r(r(a))=r(z)r(a)=r(za).$$

Dakle, $(a,a)\in\tau$ pa je relacija τ refleksivna.

Simetričnost relacije τ je očigledna.

Neka $a,b,c\in S$ i neka je

$(a,b)\in\tau \Leftrightarrow$ postoje $a'\in V(r(a)), b'\in V(r(b)), u,v,w,z\in U$ da je $(r(a)a')\tau^*=(r(b)b'r(a)a')\tau^*=r(u)\tau^*$, $(a'r(a))\tau^*=(a'r(a)b'r(b))\tau^*=r(w)\tau^*$, $(r(b)b')\tau^*=(r(a)a'r(b)b')\tau^*=r(z)\tau^*$, $(b'r(b))\tau^*=(b'r(b)a'r(a))\tau^*=r(v)\tau^*$ i $r(ua)=r(bv)$, $r(aw)=r(zb)$

i

$(b,c)\in\tau \Leftrightarrow$ postoje $b^*\in V(r(b)), c^*\in V(r(c)), \bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{z}\in U$ da je $(r(b)b^*)\tau^*=(r(c)c^*r(b)b^*)\tau^*=r(\bar{u})\tau^*$, $(b^*r(b))\tau^*=(b^*r(b)c^*r(c))\tau^*=r(\bar{w})\tau^*$, $(r(c)c^*)\tau^*=(r(b)b^*r(c)c^*)\tau^*=r(\bar{z})\tau^*$, $(c^*r(c))\tau^*=(c^*r(c)b^*r(b))\tau^*=r(\bar{v})\tau^*$ i $r(\bar{u}b)=r(c\bar{v})$, $r(b\bar{w})=r(\bar{z}c)$.

Sada je

$$\begin{aligned}(r(a)a')\tau^*&=(r(b)b'r(a)a')\tau^*=(r(b)b^*r(b)b'r(a)a')\tau^*\\&=(r(b)b^*)\tau^*(r(b)b'r(a)a')\tau^*\\&=(r(c)c^*r(b)b^*)\tau^*(r(b)b'r(a)a')\tau^*\\&=(r(c)c^*)\tau^*(r(b)b^*r(b)b'r(a)a')\tau^*\\&=(r(c)c^*)\tau^*(r(b)b'r(a)a')\tau^*\\&=(r(c)c^*)\tau^*(r(a)a')\tau^*=(r(c)c^*r(a)a')\tau^*\end{aligned}$$

i

$$(c^*r(c))\tau^*=(c^*r(c)b^*r(b))\tau^*=(c^*r(c)b^*r(b)b'r(b))\tau^*$$

$$=(c^*r(c)b^*r(b))\tau^*(b'r(b))\tau^*=(c^*r(c)b^*r(b))\tau^*(b'r(b)a'r(a))\tau^*$$

$$=(c^*r(c)b^*r(b)b'r(b))\tau^*(a'r(a))\tau^*$$

$$=(c^*r(c)b^*r(b))\tau^*(a'r(a))\tau^*=(c^*r(c))\tau^*(a'r(a))\tau^*$$

$$=(c^*r(c)a'r(a))\tau^*.$$

Dalje, pošto $\bar{u},u,\bar{v},v\in U$ i U je podpolugrupa, sledi da $\bar{u}u,\bar{v}v\in U$ pa je $r((\bar{u}u)a)=r(\bar{u}bv)=r(c(\bar{v}v))$, gde je

$$r(\bar{u}u)\tau^*=r(\bar{u})\tau^*r(u)\tau^*=(r(b)b^*)\tau^*(r(b)b'r(a)a')\tau^*$$

$$=(r(b)b^*r(b)b'r(a)a')\tau^*=(r(b)b'r(a)a')\tau^*=(r(a)a')\tau^*$$

i

$$r(\bar{v}v)\tau^*=r(\bar{v})\tau^*r(v)\tau^*=(c^*r(c)b^*r(b))\tau^*(b'r(b))\tau^*$$

$$=(c^*r(c)b^*r(b)b'r(b))\tau^*=(c^*r(c)b^*r(b))\tau^*=(c^*r(c))\tau^*.$$

Simetrično, $(r(c)c^*)\tau^*=(r(a)a'r(c)c^*)\tau^*$, $(a'r(a))\tau^*=$ $=(a'r(a)c^*r(c))\tau^*$ i $r((z\bar{z})c)=r(a(w\bar{w}))$ gde je $r(z\bar{z})\tau^*=$ $=(r(c)c^*)\tau^*$, $(w\bar{w})\tau^* = (a'r(a))\tau^*$. Dakle, $(a,c)\in\tau^*$ pa je relacija τ tranzitivna što povlači da je r-poluprosta ekvivalencija. Pretpostavimo da $a,b,c\in S$ i da je $a\,\tau\, b$, tada postoje $a'\in V(r(a)),b'\in V(r(b))$, $u,v,w,z\in U$ takvi da su ispunjeni uslovi definicije (8). Neka $(ac)'\in V(r(ac))$, $(bc)'\in V(r(bc))$ i $(bvc)'\in V(r(bvc))$. Iz relacije $r(bvc)(bvc)'r(bvc)=r(bvc)$ sledi $r(bvc)(bvc)'\cdot S=r(bvc)S$ što je ekvivalentno sa $r(bvc)(bvc)'\,\mathcal{R}^*r(bvc)$. Kako je $r(ua) =$ $=r(bv)$, imamo da je $r(bvc)(bvc)'\,\mathcal{R}^*\, r(bvc)=r(bv)\cdot r(c)= r(ua)r(c)$ $=r(uac)$. Pošto $r(bvc)(bvc)'\in E$ i $r(uac)\in R^*_{r(bvc)(bvc)'}$ $\cap \operatorname{Reg}S$, to po Lemi 1.2 sledi

$$r(bvc)(bvc)'r(uac)=r(uac) \tag{9}$$

Takodje, po Lemi 1.3 iz $(b'r(b))\tau^*=r(v)\tau^*$ sledi

(10) $$(r(bvc)(bvc)')\tau^*=(r(bc)(bc)'r(bvc)(bvc)')\tau^*.$$

Sada je

(11) $$(r(ac)(ac)')\tau^*=((r(a)a')r(ac)(ac)')\tau^*=(r(a)a')\tau^*(r(ac)(ac)')\tau^*$$
$$=r(u)\tau^*(r(ac)(ac)')\tau^*=(r(u)r(ac)(ac)')\tau^*$$
$$=(r(uac)(ac)')\tau^*=(r(bvc)(bvc)'r(uac)(ac)')\tau^*$$
$$=(r(bvc)(bvc)')\tau^*(r(uac)(ac)')\tau^*$$
$$=(r(bc)(bc)'r(bvc)(bvc)')\tau^*(r(uac)(ac)')\tau^*$$
$$=(r(bc)(bc)')\tau^*(r(bvc)(bvc)'\cdot r(uac)(ac)')\tau^*$$
$$=(r(bc)(bc)')\tau^*(r(uac)(ac)')\tau^*$$
$$=(r(bc)(bc)')\tau^*(r(ac)(ac)')\tau^*=(r(bc)(bc)'r(ac)(ac)')\tau^*$$

Neka sada $(awc)'\in V(r(awc))$. Iz $(awc)'r(awc)=(awc)'r(awc)$ sledi $S(awc)'r(awc)=Sr(awc)$ što je ekvivalentno sa $(awc)'r(awc)\mathcal{L}^*r(awc)$. Kako je $r(aw)=r(zb)$ to je $(awc)'r(awc)\mathcal{L}^*r(aw)r(c)=r(zb)r(c)=r(zbc)$. Pošto $(awc)'r(awc)\in E$ i $r(zbc)\in L^*_{(awc)'r(awc)}\cap RegS$, to po Lemi 1.2 sledi

(12) $$r(zbc)(awc)'r(awc)=r(zbc),$$

Takodje, $(a'r(a))\tau^*=r(w)\tau^*$ povlači po Lemi 1.3

(13) $$((awc)'r(awc))\tau^*=((awc)'r(awc)(ac)'r(ac))\tau^*.$$

Kako je τ^* normalna kongruencija, to $r(z)\tau^*=(r(b)b')\tau^*$ daje

(14) $$((bc)'r(z)r(bc))\tau^*=((bc)'r(b)b'r(bc))\tau^*=((bc)'r(b)b'r(b)r(c))\tau^*$$
$$=((bc)'r(bc))\tau^*.$$

Dakle,

(15) $((bc)'r(bc))\tau^* = ((bc)'r(z)r(bc))\tau^* = ((bc)'r(zbc))\tau^*$

$= ((bc)'r(zbc)(awc)'r(awc))\tau^*$

$= ((bc)'r(zbc))\tau^*((awc)'r(awc))\tau^*$

$= ((bc)'r(zbc))\tau^*((awc)'r(awc)(ac)'r(ac))\tau^*$

$= ((bc)'r(zbc)\cdot(awc)'r(awc))\tau^*((ac)'r(ac))\tau^*$

$= ((bc)'r(zbc))\tau^*((ac)'r(ac))\tau^*$

$= ((bc)'r(z)r(bc))\tau^*((ac)'r(ac))\tau^*$

$= ((bc)'r(bc))\tau^*((ac)'r(ac))\tau^* = ((bc)'r(bc)(ac)'r(ac))\tau^*.$

Dalje, $r(ua) = r(bv)$ povlači

(16) $(r(bc)(bc)'r(u)r(ac)(ac)')r(ac) = (r(bc)(bc)'r(ua)r(c)(ac)')r(ac)$

$= (r(bc)(bc)'r(bv)\cdot r(c)(ac)')r(ac)$

$= r(bc)((bc)'r(bc)(bc)'r(bvc)(ac)')r(ac)$

$= r(bc)((bc)'r(b)r(c)(bc)'r(bvc)(ac)')r(ac)$

$= r(bc)((bc)'r(bc)c'\cdot r(c)(bc)'r(bvc)(ac)'r(ac)).$

Sada $r(u)\tau^* = (r(a)a')\tau^*$ daje

(17) $(r(bc)(bc)'r(u)r(ac)(ac)')\tau^* = (r(bc)(bc)')\tau^* r(u)\tau^*(r(ac)(ac)')\tau^*$

$= (r(bc)(bc)')\tau^*(r(a)a')\tau^*(r(ac)(ac)')\tau^*$

$= (r(bc)(bc)'r(a)a'r(ac)(ac)')\tau^*$

$= (r(bc)(bc)'r(ac)(ac)')\tau^* = (r(ac)(ac)')\tau^*.$

Po Lemi 1.1 $r(c)(bc)'r(b) \in E$ što zajedno sa $r(v)\tau^* = (b'r(b))\tau^*$ daje

(18) $(r(c)(bc)'r(b)r(v))\tau^*=(r(c)(bc)'r(b))\tau^*r(v)\tau^*$

$=(r(c)(bc)'r(b))\tau^*(b'r(b))\tau^*$

$=(r(c)(bc)'r(b)b'r(b))\tau^*=(r(c)(bc)'r(b))\tau^*.$

Kako je τ^* normalna kongruencija sledi da je

(19) $(c'r(c)(bc)'r(b)r(v)r(c))\tau^*=(c'r(c)(bc)'r(b)r(c))\tau^*.$

Dakle,

(20) $((bc)'r(bc)c'r(c)(bc)'r(bvc)(ac)'r(ac))\tau^*$

$=((bc)'r(bc))\tau^*(c'r(c)(bc)'r(bvc))\tau^*((ac)'r(ac))\tau^*$

$=((bc)'r(bc))\tau^*(c'r(c)(bc)'r(bc))\tau^*((ac)'r(ac))\tau^*$

$=((bc)'r(bc)c'r(c)(bc)'r(bc)(ac)'r(ac))\tau^*$

$=((bc)'r(bc)(ac)'r(ac))\tau^*=((bc)'r(bc))\tau^*.$

Neka je x početni element relacije (17), tada

$$x=r(bc)(bc)'r(u)r(ac)(ac)'\in E\cdot U\cdot E\subseteq U.$$

Ako je y početni element relacije (20), tada je

$$y=(bc)'r(bc)c'r(c)(bc)'r(bvc)(ac)'r(ac)$$

$$=(bc)'r(bc)(bc)'r(bv)r(c)(ac)'r(ac)$$

$$=(bc)'r(ua)r(c)(ac)'r(ac)$$

$$=(bc)'r(u)r(ac)(ac)'r(ac)=(bc)'r(u)r(ac)\in U$$

jer je po (20) τ^*-ekvivalentan sa idempotentom $(bc)'r(bc)$.

Pošto je $r(x)=x, r(y)=y$ imamo

$$r(x(ac))=r(x)r(ac)=xr(ac)=r(bc)(bc)'r(u)r(ac)(ac)'r(ac)$$

$$=r(bc)(bc)'r(u)r(ac)$$

i

$$r((bc)y)=r(bc)r(y)=r(bc)y=r(bc)(bc)'r(u)r(ac).$$

Iz poslednje dve relacije sledi $r(x(ac))=r((bc)y)$.

Simetrično se dokazuje da je

$$(r(bc)(bc)')\tau^*=(r(ac)(ac)'r(bc)(bc)')\tau^*.$$

$$((ac)'r(ac))\tau^*=((ac)'r(ac)(bc)'r(bc))\tau^*$$

i $r(s(bc))=r((ac)t)$ gde su $s,t\in U$ takvi da je $r(s)\tau^*=(r(bc)(bc)')\tau^*$ i $r(t)\tau^*=((ac)'r(ac))\tau^*$.

Dakle, $(ac,bc)\in\tau$ po definiciji (8) relacije τ, pa τ jeste desna kongruencija. Da je τ leva kongruencija sledi iz razmatranja sličnim prethodnim, što sve skupa povlači da je τ kongruencija.

Neka $e,f\in E$ i $(e,f)\in\tau$. Tada postoje $e'\in V(e)$, $f'\in V(f)$, $u,v\in U$ da je $r(u)\tau^*=(ee')\tau^*$, $r(v)\tau^*=(f'f)\tau^*$ i $r(ue)=r(fv)$. Sada je

$$e\tau^*=(ee')\tau^*e\tau^*=r(u)\tau^*e\tau^*=(r(u)e)\tau^*=(r(ue))\tau^*=(r(fv))\tau^*$$
$$=(fr(v))\tau^*=f\tau^*r(v)\tau^*=f\tau^*(f'f)\tau^*=f\tau^*$$

pa $(e,f)\in\tau^*$.

Obratno, neka $e,f\in E$ i $(e,f)\in\tau^*$. Pošto $e\in V(e)$ i $f\in V(f)$, sledi da e i f zadovoljavaju uslove definicije (8) pa $(e,f)\in\tau$. Dakle, $\tau|_E=\tau^*|_E$. /=7

Teorema 1.1. daje način kojima se normalna kongruencija podpolugrupe U može proširiti do kongruencije na celoj polugurpi S, ali tako da im restrukcije na skupu idempotenata E budu jednake.

Teorema 1.2. Neka je S r-polugrupa i σ^* najmanja r-poluprosta normalna kongruencija na U čija restrikcija ne E je $\Pi_{P(E)}$, tada je proširenje σ od σ^*,definisano analogno sa (8), kongruencija na S čija restrikcija na E je $\Pi_{P(E)}$, a restrikcija na U je σ^*. Još više, σ je najmanja r-poluprosta kongruencija na S za koju je $\sigma_{|E}=\Pi_{P(E)}$.

Dokaz. Po Teoremi 1.1, ako je σ^* najamnja r-poluprosta normalna kongruencija na U za koju je $\sigma^*_{|E}=\Pi_{P(E)}$, tada σ^* može da se proširi do r-poluproste kongruencije σ na S za koju je $\sigma_{|E}=\sigma^*_{|E}=\Pi_{P(E)}$.

Kao što smo konstantovali na početku ove glave kongruencija $\sigma_{|U}$ ima adiciono svojstvo, odnosno $\sigma_{|U}$ je normalna kongruencija na U i za nju važi $(\sigma_{|U})_{|E}=\sigma_{|E}=\Pi_{P(E)}$ jer je $E\subseteq U$. Odavde sledi da je $\sigma^*\subseteq\sigma_{|U}$ jer je po pretpostavci σ^* najmanja normalna kongruencija na U. Obratno, ako $a,b\in U$ i $(a,b)\in\sigma$, tada postoje $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$, $u,v\in U$ da je $r(u)\sigma^*=(r(a)a')\sigma^*$, $r(v)\sigma^*=(b'r(b))\sigma^*$ i $r(ua)=r(bv)$. Pošto $a,b\in U$, tada $r(a),r(b)\in U$ pa je

$$r(a)\sigma^*=(r(a)a')\sigma^*r(a)\sigma^*=r(u)\sigma^*r(a)\sigma^*=r(ua)\sigma^*=r(bv)\sigma^*$$

$$=r(b)\sigma^*r(v)\sigma^*=r(b)\sigma^*r(b'r(b)\sigma^*=r(b)\sigma^*.$$

Znači, $(r(a),r(b))\in\sigma^*$ pa kako je σ^* r-poluprosta kongruencija to je $(a,b)\in\sigma^*$ pa je $\sigma_{|U}\subseteq\sigma^*$. Dakle $\sigma_{|U}=\sigma^*$.

Neka je τ r-poluprosta kongruencija na S za koju je $\tau_{|E}=\Pi_{P(E)}$, tada je $\tau_{|U}$ normalna kongruencija na U i za nju važi $(\tau_{|U})_{|E}=\tau_{|E}=\Pi_{P(E)}$. Pošto je $\tau_{|U}$ r-poluprosta normalna kongruencija na U to je $\sigma^* \subseteq \tau_{|U}$. Neka $(a,b) \in \sigma$, tada postoje $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$, $u,v \in U$ da je $r(u)\sigma^* = (r(a)a')\sigma^*$, $r(v)\sigma^* = (b'r(b))\sigma^*$ i $r(ua) = r(bv)$. Kako je $\sigma^* \subseteq \tau_{|U}$, sledi $r(u)\tau = (r(a)a')\tau$ i $r(v)\tau = (b'r(b))\tau$. Dakle,

$$r(a)\tau = (r(a)a')\tau r(a)\tau = r(u)\tau r(a)\tau = r(ua)\tau = r(bv)$$

$$= r(b)\tau r(v)\tau = r(b)\tau(b'r(b)\tau = r(b)\tau.$$

Iz $(r(a),r(b)) \in \tau$ sledi $(a,b) \in \tau$ jer je τ r-poluprosta kongruencija pa sledi $\sigma \subseteq \tau$. Dakle, σ je najmanja r-poluprosta kongruencija na S takva da je $\sigma_{|E} = \Pi_{P(E)}$. /=7

Teorema 1.3. Ako je τ kongruencija r-polugrupe S, tada je $\tau_{|E} = \sigma_{|E}$ ako i samo ako $\tau_{|V} = \sigma_{|V}$, gde je $V = \ker\sigma^* = \ker\sigma \cap U$.

Dokaz. Pošto je $\sigma_{|U} = \sigma^*$ sledi da je $\ker\sigma \cap U = \ker\sigma^*$. Neka je τ kongruencija na S. Pošto je $E \subseteq \ker\sigma$ i $E \subseteq U$, imamo da je $E \subseteq V$, pa iz pretpostavke $\tau_{|V} = \sigma_{|V}$ jasno sledi $\tau_{|E} = (\tau_{|V})_{|E} = (\sigma_{|V})_{|E} = \sigma_{|E}$. Obratno, neka je $\tau_{|E} = \sigma_{|E}$. Kako je $\tau_{|U}$ normalna kongruencija na U, imamo da je

$(\tau_{|U})_{|E} = \tau_{|E} = \sigma_{|E} = \Pi_{P(E)}$ i $\sigma_{|U} = \sigma^* \ \tau_{|U}$.

Sada $V = \ker\sigma \cap U \subseteq U$ daje $\sigma_{|V} = (\sigma_{|U})_{|V} \subseteq (\tau_{|U})_{|V} = \tau_{|V}$.

Neka dalje $a,b \in V$ i $(a,b) \in \tau$. Pošto $a,b \in V$, to $a,b \in \ker\sigma$ pa postoje $e,f \in E$ da (a,e), $(b,f) \in \sigma$. Tada $\sigma_{|V} \subseteq \tau_{|V}$ povlači $(a,e),b,f) \in \tau$. Kako je $(a,b) \in \tau$, po tranzitivnosti sledi $(e,f) \in \tau$, pa iz $\tau_{|E} = \sigma_{|E}$ sledi $(e,f) \in \sigma$. Ovo povlači $(a,e),(b,f),(e,f) \in \sigma$ pa je $(a,b) \in \sigma$ i $\tau_{|V} \subseteq \sigma_{|V}$, što konačno daje $\tau_{|V} = \sigma_{|V}$. /=7

J. Meakin u radu |35| definiše normalno razbijanje podpolugrupe E ortodoksne polugrupe S, kao razbijanje $P(E)=\{E_\alpha : \alpha\in J\}$ koje zadovoljava sledeće uslove:

(i) za svaki $\alpha,\beta\in J$, postoji $\gamma\in J$ da je $E_\alpha E_\beta\subseteq E_\gamma$;

(ii) za svaki $\alpha\in J$, $a\in S$, $a'\in V(a)$, postoji $\beta\in J$ da je $aE_\alpha a'\subseteq E_\beta$.

Ako je S π-ortodoksna polugrupa, tada je RegS ortodoksna polugrupa i neka je

(ii)$'$ za svaki $\alpha\in J$, $a\in S$, $a'\in V((r(a))$, postoji $\beta\in J$ da je $r(a)E_\alpha a'\subseteq E_\beta$.

Uslovi (ii) na RegS i (ii)$'$ na S su ekvivalentni jer je $r:S\to$ RegS surjekcija. Dakle, normalno razbijanje skupa E ortodoksne polugrupe RegS je istovremeno normalno razbijanje skupa E π-ortodoksne polugrupe S. R.Fiegenbaum je u radu |12| dokazala da dopustivo razbijanje skupa E ortodoksne polugrupe S jeste normalno razbijanje. Dopustivo razbijanje skupa E π-ortodoksne polugrupe S je istovremeno dopustivo razbijanje skupa E ortodoksne polugrupe RegS. Po gornjem razmatranju sada zaključujemo da je dopustivo razbijanje skupa E π-ortodoksne polugrupe S istovremeno i njegovo normalno razbijanje. Pošto svaka kongruencija polugrupe S indikuje dopustivo razbijanje na E, sledi da svaka kongruencija na π-ortodoksnoj polugrupi indukuje normalno razbijanje podpolugrupe E.

J. Meakin je u pomenutom radu pokazao da ako je $P(E)$ normalno razvijanje podpolugrupe E ortodoksne polugrupe S, tada postoji kongruencija τ na S da je $\tau|_E=\Pi_{P(E)}$. Ako je S π-ortodoksna r-polugrupa i $P(E)$ normalno razbijanje podpolugrupe E, tada po prethodnom postoji kongruencija τ na ortodoksnoj polugrupi RegS takva da je $\tau|_E=\Pi_{P(E)}$. Neka je $\tilde{\tau}$ relacija na S definisana sa

$$a\,\tilde{\tau}\,b \iff r(a)\,\tau\,r(b) \qquad (a,b\in S).$$

Po Lemi III 2.4 sledi da je $\tilde{\tau}$ r-poluprosta kongruencija na S. Kako je $\tilde{\tau}|_E=\tau|_E=\Pi_{P(E)}$, sledi da svako normalno razbijanje indukuje kongruenciju na π-ortodoksnoj r-polugrupi S.

Neka je S π-ortodoksna r-polugrupa i $P(E)=\{E_\alpha ; \alpha\in J\}$ normalno razbijanje skupa E, to jest

(i) za svaki $\alpha,\beta\in J$ postoji $\gamma\in J$ da je $E_\alpha E_\beta\subseteq E_\gamma$;

(ii) za svaki $\alpha\in J$, $a\in S$, $a'\in V(r(a))$ postoji $\beta\in J$ da je $r(a)E_\alpha a'\subseteq E_\beta$

Kao i do sada, sa $\Pi_{P(E)}$ označavamo ekvivalenciju skupa E indukovanu normalnim razbijanjem $P(E)$. Ako su $e,f\in E$, tada je $e\sim f$ ako e i f pripadaju istoj E klasi razbijanja $P(E)$.

Teorema 1.4. Neka je S π-ortodoksna r-polugrupa i

(21) $\sigma=\{(a,b)\in S\times S$: postoje $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in J$ i $e\in E_\alpha$, $f\in E_\delta$, $g\in E_\beta$, $h\in E_\gamma$ takvi da $r(a)a', r(b)b'r(a)a'\in E_\alpha$; $a'r(a)$, $a'r(a)b'r(b)\in E_\beta$; $r(b)b', r(b)b'r(a)a'\in E_\gamma$; $b'r(b), b'r(b)a'r(a)\in E_\alpha$; i $er(a)=r(b)f$, $r(a)g = hr(b)\}$.

Tada je σ najmanja r-poluprosta kongruencija na S čija se restrikcija na E poklapa sa $\Pi_{P(E)}$.

Dokaz. Primetimo da je relacija σ očigledno r-poluprosta.

Neka $a\in S$, $a'\in V(r(a))$ i neka je $r(a)a'=e, a'r(a)=f$. Tada postoje $\alpha=\gamma, \beta=\delta\in J$ da $r(a)a'=r(a)a'r(a)a'\in E_\alpha$, $a'r(a)=a'r(a)a'r(a)\in E_\beta$, da je $er(a)=r(a)a'r(a)=r(a)f$ i uzećemo $e=h$, $f=g$. Sada po (21) sledi da je relacija σ refleksivna.

Simetričnost relacije σ je očigledna.

Neka $(a,b), (b,c)\in\sigma$. Iz $(a,b)\in\sigma$ sledi da postoje $a'\in V(r(a)), b'\in V(r(b))$ i $e,f,g,h\in E$ da je $e\sim r(a)a'$ $\sim r(b)b'r(a)a'$, $f\sim b'r(b)\sim b'r(b)a'r(a)$; $g\sim a'r(a)\sim a'r(a)b'r(b)$; $h\sim r(b)b'\sim r(a)a'r(b)b'$ i $er(a)=r(b)f$, $r(a)g=hr(b)$. Iz $(b,c)\in\sigma$ sledi da postoje $b^*\in V(r(b))$, $c^*\in V(r(c))$ i $\bar{e},\bar{f},\bar{g},\bar{h}\in E$ da je $\bar{e}\sim r(b)b^*\sim r(c)c^*r(b)b^*$; $\bar{f}\sim c^*r(c)\sim c^*r(c)b^*r(b)$, $\bar{g}\sim c^*r(c)\sim c^*r(c)b^*r(b)$, $\bar{h}\sim r(c)c^*\sim r(b)b^*r(c)c^*$ i $\bar{e}r(b)=r(c)\bar{f}$, $r(b)\bar{g}=\bar{h}r(c)$. Sada je

$$\begin{aligned} r(a)a'\sim r(b)b'r(a)a' &= r(b)b^*(r(b)b^*)r(b)b'r(a)a' \\ &\sim r(b)b^*(r(c)c^*r(b)b^*)r(b)b'r(a)a' \\ &= (r(b)b^*r(c)c^*)(r(b)b'r(a)a')\sim r(c)c^*r(a)a'. \end{aligned}$$

Takodje je

$$\begin{aligned} c^*r(c)\sim c^*r(c)b^*r(b) &= c^*r(c)b^*r(b)(b'r(b)b'r(b)) \\ &\sim c^*r(c)b^*r(b)(b'r(b)a'r(a)b'r(b)) \\ &= (c^*r(c)b^*r(b))(a'r(a)b'r(b))\sim c^*r(c)a'r(a). \end{aligned}$$

Dalje je

$$(\bar{e}e)r(a) = \bar{e}r(b)f = r(c)(\bar{f}f)$$

gde je

$$\bar{e}e \sim r(b)b^*(r(a)a') \sim r(b)b^*r(b)b'r(a)a' = r(b)b'r(a)a' \sim r(a)a'$$

i

$$\bar{f}f \sim (c^*r(c))b'r(b) \sim c^*r(c)b^*r(b)b'r(b) \sim c^*r(c)b^*r(b) \sim c^*r(c).$$

Simetrično je

$$r(c)c^* \sim r(a)a'r(c)c^*, \quad a'r(a) \sim a'r(a)c^*r(c), r(a)(g\bar{g}) = (h\bar{h})r(c)$$

gde je $\bar{g}g \sim a'r(a)$, $h\bar{h} \sim r(c)c^*$. Dakle, $(a,c) \in \sigma$ pa σ jeste r-poluprosta ekvivalencija na S.

Neka $(a,b) \in \sigma$ i $c \in S$. Tada postoje $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$, $e,f,g,h \in E$ da su ispunjeni uslovi definicije (21). Neka $c' \in V(r(c))$. Tada po Teoremi II 5 $c'a' = (r(a)r(c)=r(ac))' \in V(r(ac))$ i $c'b' = (r(b)r(c)=r(bc))' \in V(r(bc))$ pa je

$$\begin{aligned}
(22) \quad r(ac)(r(ac))' &= r(a)r(c)c'a' = r(a)(a'r(a))r(c)c'a' \\
&\sim r(a)a'r(a)(b'r(b)r(c)c')a' \\
&= r(a)(a'r(a))b'r(b)r(c)c'b'r(b)(b'r(b))r(c)c'a' \\
&\sim r(a)gb'r(b)r(c)c'b'r(b)fr(c)c'a' \\
&= hr(b)b'r(b)r(c)c'b'er(a)r(c)c'a' \\
&\sim r(b)b'r(b)b'r(b)r(c)c'b'r(a)a'r(a)r(c)c'a' \\
&\sim r(b)r(c)(r(b)r(c))'r(a)r(c)(r(a)r(c))' \\
&= r(bc)(r(bc))'r(ac)(r(ac))'.
\end{aligned}$$

i

(23) $\quad (r(bc))'r(bc)=(r(b)r(c))'r(b)r(c)=c'(b'r(b))r(c)c'r(c)$

$$=c'b'r(b)(a'r(a)r(c)c')r(c)$$

$$=c'(b'r(b)a'r(a))r(c)c'a'r(a)r(c)c'r(c)$$

$$=c'b'r(b)r(c)c'a'r(a)r(c)$$

$$=(r(b)r(c))'r(b)r(c)(r(a)r(c))'r(a)r(c)$$

$$=(r(bc))'r(bc)(r(ac))'r(ac).$$

Primetimo da $r(bc)(r(bc))'er(ac)(r(ac))'\in E$ jer je E podpolugrupa od S, a da $c'b'r(b)fr(c)\in E$ jer je po Lemi II 4 podpolugrupa E samokonjugovana.

Neka je $\bar{e} = r(bc)(r(bc))'er(ac)(r(ac))'$ i $\bar{f}=c'b'r(b)fr(c)$.
Sada je

$$\bar{e}r(ac)=r(bc)c'b'er(a)r(c)c'a'r(ac)$$

$$=r(bc)(c'b'r(b)fr(c)c'a'r(ac))$$

$$=r(bc)(c'b'er(ac)(r(ac))'r(ac))$$

$$=r(bc)(c'b'er(a)r(c))=r(bc)(c'b'r(b)fr(c))$$

$$=r(bc)\bar{f}.$$

Odavde i po (22) sledi

$$\bar{e}=r(b)r(c)c'b'er(a)r(c)c'a'=r(b)r(c)c'b'r(a)a'r(a)r(c)c'a$$

$$=r(b)r(c)c'b'r(a)r(c)c'a'=r(bc)(r(bc))'r(ac)(r(ac))'$$

$$=r(ac)(r(ac))',$$

a još po (23) dobijamo

$$\bar{f}=c'b'r(b)fr(c)=c'b'er(a)r(c)=c'b'er(a)r(c)c'a'r(a)r(c)$$

$=c'b'r(b)fr(c)c'a'r(a)r(c)\sim c'b'r(b)b'r(b)r(c)c'a'r(ac)$

$=c'b'r(b)r(c)c'a'r(ac)=(r(bc))'r(bc)(r(ac))'r(ac)$

$\sim(r(bc))'r(bc).$

Simetrično je $r(bc)(r(bc))'\sim r(ac)(r(ac))'r(bc)(r(bc))'$,

$(r(ac))'r(ac)\sim(r(ac))'r(ac)(r(bc))'r(bc)$ i $r(ac)\bar{g}=\bar{h}r(bc)$ za neki $\bar{g},\bar{h}\in E$, $\bar{g}\sim(r(ac))'r(ac)$, $\bar{h}\sim r(bc)(r(bc))'$. Dakle, $(ac,bc)\in\sigma$. Slično se dokazuje da je $(ca,cb)\in\sigma$ pa je σ r-poluprosta kongruencija na S.

Neka je τ r-poluprosta kongruencija na S takva da je $\tau_{|E}=\Pi_{P(E)}$. Za $(a,b)\in\sigma$ postoje $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$, $e,f,g,h\in E$ da je $e\sim r(a)a'$, $f\sim b'r(b)$, $g\sim a'r(a)$, $h\sim r(b)b'$, i da važe definicione osobine za σ. Sada je

$a\tau=r(a)\tau=(r(a)a')\tau r(a)\tau=e\tau r(a)\tau=(er(a))\tau$

$=(r(b)f)\tau=(r(b)\tau f\tau=r(b)\tau(b'r(b))\tau=(r(b))\tau=b\tau.$

Dakle, $(a,b)\in\tau$ pa je $\sigma\subseteq\tau$ i znači σ je najmanja r-poluprosta kongruencija na S da je $\sigma_{|E}=\Pi_{P(E)}$. /=/

Teorema 1.5. Neka je S π-ortodoksna r-polugrupa i $\rho=\{(a,b)\in S\times S$: postoje $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$ tako da za svaki $\varepsilon\in J$ postoje $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in J$ da je $r(a)E_\varepsilon a'$, $r(b)E_\varepsilon b'r(a)E_\varepsilon a'\in E_\alpha$; $a'E_\varepsilon r(a)$, $a'E_\varepsilon r(a)b'E_\varepsilon r(b)\in E_\beta$; $r(b)E_\varepsilon b'$, $r(a)E_\varepsilon a'r(b)E_\varepsilon b'\in E_\gamma$; $b'E_\varepsilon r(b)$, $b'E_\varepsilon r(b)a'E_\varepsilon r(a)\in E_\delta\}$. Tada je ρ najveća r-poluprosta kongruencija na S čija restrikcija na E je $\Pi_{P(E)}$.

Dokaz. Relacija ρ je očigledno refleksivna i simetrična.

Neka $(a,b),(b,c)\in\rho$, tada postoje $a'\in V(r(a))$, $b',b^*\in V(r(b))$ i $c^*\in V(r(c))$ tako da važe svojstva iz definicije relacija ρ. Neka $\varepsilon\in J$ i izaberimo $e\in E_\varepsilon$. Po Teoremi II 5 sledi da eb', $eb^*\in V(r(b)e)$ pa je

$$r(b)eb'S=r(b)eeb^*r(b)eb'S\subseteq r(b)eb^*S$$

i

$$r(b)eb^*S=r(b)eeb'r(b)eb^*S\subseteq r(b)eb'S.$$

Dakle,

$$(24)\qquad r(b)eb'S=r(b)eb^*S.$$

Pošto su $r(b)eb'$, $r(b)eb^*\in E$, to je $r(r(b)eb')=r(b)eb'$ i $r(r(b)eb^*)=r(b)eb^*$ pa je relacija (24) ekvivalentna sa $r(b)eb'\mathcal{R}^*r(b)eb$. Kako $b'e,b^*e\in V(er(b))$, slično prethodnom razmatranju dobijamo $b'er(b)\mathcal{L}^*b^*er(b)$. Sada je

$$\begin{aligned}
r(a)ea'\sim r(b)eb'r(a)ea'&=r(b)eeb^*r(b)eeb^*r(b)eb'r(a)ea'\\
&=r(b)eb^*(r(b)eb^*)r(b)eb'r(a)ea'\\
&\sim r(b)eb^*r(c)ec^*(r(b)eb^*r(b)eb')r(a)ea'\\
&=(r(b)eb^*r(c)ec^*)(r(b)eb'r(a)ea')\\
&\sim r(c)ec^*r(a)ea'.
\end{aligned}$$

Dakle, $r(a)ea'$ i $r(c)ec^*r(a)ea'$ pripadaju istoj klasi normalnog razbijanja $P(E)$. Slično,

$$\begin{aligned}
a'er(a)\sim a'er(a)b'er(b)&=a'er(a)b'er(b)(b^*eer(b))b^*eer(b)\\
&\sim a'er(a)(b'er(b)b^*er(b))c^*er(c)b^*er(b)\\
&=(a'er(a)b'er(b))(c^*er(c)b^*er(b))\\
&\sim a'er(a)c^*er(c).
\end{aligned}$$

Znači, $a'er(a)$ i $a'er(a)c^*er(c)$ pripadaju istoj klasi razbijanja $P(E)$. Simetrično, $r(c)ec^* \sim r(a)ea'r(c)ec^*$ i $e^*er(c) \sim c^*er(c)a'er(a)$. Iz svega ovoga sledi $(a,c) \in \rho$ pa je relacija ρ tranzitivna.

Znači ρ je ekvivalencija. Iz refleksivnosti neposredno sledi da je ρ r-poluprosta relacija. Dakle, ρ je r-poluprosta ekvivalencija.

Neka $(a,b) \in \rho$ i $c \in S$. Tada postoje $a' \in V(r(a))$ i $b' \in V(r(b))$ da su ispunjeni uslovi definicije relacije ρ. Neka $c' \in V(r(c))$, tada $c'a' = (r(a\cdot c))' \in V(r(ac))$ i $c'b' = (r(bc))' \in V(r(bc))$ (po Teoremi II 5). Neka $\varepsilon \in J$ i $e \in E_\varepsilon$, tada je

$$r(ac)e(r(ac))' = r(a)(r(c)ec')a' \sim r(b)(r(c)ec')b'r(a)(r(c)ec')a'$$

$$= r(bc)e(r(bc))'r(ac)e(r(ac))'$$

Pošto je $b'er(b)r(c)c'$ idempotent biće

$$(r(ac))'er(ac) = c'(a'e\cdot r(a))r(c)c'r(c)$$

$$\sim c'(a'er(a)b'er(b))r(c)c'r(c)$$

$$= c'a'er(a)(b'er(b)r(c)c')r(c)$$

$$= c'a'er(a)(b'er(b)r(c)c'b'er(b)r(c)c')r(c)$$

$$= c'(a'er(a)b'er(b))r(c)c'b'er(b)r(c)$$

$$\sim c'a'er(a)r(c)c'b'er(bc)$$

$$= (r(ac))'er(ac)(r(bc))'er(bc).$$

Na sličan način dobijamo

$$r(bc)e(r(bc))' \sim r(ac)e(r(ac))'r(bc)er(bc))'$$

i

$$(r(bc))'er(bc)\sim(r(bc))'er(bc)(r(ac))'er(ac)$$

pa je ρ desna kongruencija. Slično dokazujemo da je ρ leva kongruencija, pa sledi da je ρ kongruencija

Neka $e,f\in E$ i $e\Pi_{P(E)}f$, tada postoji $\alpha\in J$ da $e,f\in E_\alpha$. Pošto $e\in V(e)$, $f\in V(f)$ i po osobini (i) normalnog razbijanja imamo da za svaki $\varepsilon\in J$ i $g\in E_\varepsilon$ da je

$$ege=egeege\in E_\alpha E_\varepsilon E_\alpha E_\alpha E_\varepsilon E_\alpha\subseteq E_\beta$$

za neki $\beta\in J$, pa $eE_\alpha\cdot e\subseteq E_\beta$. Takodje $eE_\alpha efE_\alpha f\subseteq E_\alpha E_\varepsilon E_\alpha E_\alpha E_\varepsilon E_\alpha\subseteq E$ Slično se proverava da važe ostali uslovi iz definicije kongruencije ρ pa sledi $e\rho f$, što znači $\Pi_{P(E)}\subseteq\rho_{|E}$. Neka sada $e,f\in E$ i $(e,f)\in\rho$. Tada postoje $e'\in V(e)$ i $f'\in V(f)$ da važe svojstva iz definicije relacije ρ. Kako $e',f'\in E$ biće

$$e=(ee'e')e\sim(fe'f'ee'e')e=fe'f'e$$

$$=f(f'f'fe'f'e)\sim f(f'f'ff'f'f)=f,$$

pa je $e\Pi_{P(E)}f$. Znači, $\rho_{|E}\subseteq\Pi_{P(E)}$ pa je $\rho_{|E}=\Pi_{P(E)}$.

Neka je τ r-poluprosta kongruencija na S takva da je $\tau_{|E}=\Pi_{P(E)}$. Neka $(a,b)\in\tau$, $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$ $\varepsilon\in J$ i $e\in E_\varepsilon$. Tada $(r(a), r(b))\in\tau$ pa $(r(a)e,r(b)e)\in\tau$. Pošto je S/τ ortodoksna polugrupa po Teoremi II 6, imamo da $ea'\in V(r(a)e)$ povlači $(ea')\tau\in V((r(a)e)\tau)$ i $eb'\in V(r(b)e)$ povlači $(eb')\tau\in V((r(b)e)\tau)$. Sada je

$$(r(a)e)\tau=(r(a)e)\tau(ea')\tau(r(a)e)\tau=(r(a)ea')\tau(r(a)e)\tau$$

pa je

$$(r(a)e)\tau\cdot S/\tau\subseteq(r(a)ea')\tau\cdot S/\tau.$$

S druge strane je

$$(r(a)ea')\tau\cdot S/\tau=(r(a)e)\tau\cdot a'\tau\cdot S/\tau\subseteq(r(a)e)\tau\cdot S/\tau$$

pa je

$$(r(a)ea')\tau.S/\tau=(r(a)e)\tau.S/\tau \iff (r(a)ea')\tau\,\mathcal{R}\,(r(a)e)\tau$$
$$=(r(b)e)\tau\,\mathcal{R}\,(r(b)eb')\tau.$$

Odavde sledi $(r(a)ea')\tau\cdot S/\tau=(r(b)eb')\tau\cdot S/\tau$ pa postoje $X,Y\in S/\tau$ da je $(r(a)ea')\tau=(r(b)eb')\tau\cdot X$ i $(r(b)eb')\tau=(r(a)eb')\tau\cdot Y$ što povlači

(25) $$(r(a)ea')\tau=(r(b)eb')\tau\cdot(r(a)ea')\tau$$

i

(26) $$(r(b)eb')\tau=(r(a)ea')\tau\cdot(r(b)eb')\tau,$$

jer su $(r(a)ea')\tau$ i $(r(b)eb')\tau$ idempotenti u S/τ. Sada iz (25) sledi $(r(a)ea')\tau=(r(b)eb'r(a)ea')\tau$, odnosno $r(a)ea'\sim r(b)eb'r(a)ea'$ jer je $\tau_{|E}=\varepsilon_{P(E)}$. Takodje, iz (26) sledi $(r(b)eb')\tau=(r(a)ea'r(b)eb')\tau$, pa je $r(b)eb'\sim r(a)ea'r(b)eb'$. Slično dokazujemo da je $a'er(a)\sim a'er(a)b'er(b)$ i $b'er(b)\sim b'er(b)a'er(a)$. Dakle, ispunjeni su uslovi definicije relacije ρ pa $(a,b)\in\rho$ što povlači $\tau\subseteq\rho$. /=/

I N D E K S

L I T E R A T U R A

|1| S.BODANOVIĆ.: *Power regular semigroups, Zbornik radova PMF u Novom Sadu, Vol.12 (1982), 417-423.*

|2| S.BOGDANOVIĆ,: *Right π-inverse semigroup I, Zbornik radova PMF u Novom Sadu (u štampi).*

|3| S.BOGDANOVIĆ,: *"Semigroups with a system of subsemigroups", Novi Sad, 1985.*

|4| S.BOGDANOVIĆ,: *Semigroups of Galbiati-Veronesi,Proc.of the konference,"Algebra and logic",Zagreb,1984, 9-20.*

|5| S.BOGDANOVIĆ and S.MILIĆ,: *A nil extension of a completely simple semigroup, Public. de l'institut math., tome 36 (50), 1984, 45-50.*

|6| Г.ЧУПОНА,Б.ТРПЕНОВСКИ., "Предавања по алгебра", книга II, Скопје, 1973.

|7| M.P.DRAZIN,: *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups, Amer. Math. Mon. 65 (1958),506-514 .*

|8| P.M.EDWARDS,: *Eventually regular semigroups, Bul. Austral. Math. Soc. Vol. 28 (1983), 23-38.*

|9| P.M.EDWARDS,: *Fundamental semigroups, Procedings the Royal Society of Edinburgh, 99A, 1985, 313-317.*

|10| P.M.EDWARDS, : *On the lattice of congruences on an eventually regular semigroup, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 38 (1985), 281-286.*

|11| D.EASDOWN,: *Biordered sets of eventually regular semigroups, Proc. London Math. Soc. (3), 49 (1984), 483-503.*

|12| R.FIEGENBAUM,: *Kernels of regular semigroup homomorphism,Doctoral dissertacion, Universiti of South Carolina,1975.*

|13| R.FIEGENBAUM,: *Kernels of orthodox semigroup homomorphism, J.Austral, Math. Soc. 22 (Series A) (1976),234-245.*

|14| R.FIEGENBAUM,: *Regular semigroup congruences, Semigroup Form 17 (1979), 373-377.*

|15| *J.L.GALBIATI e M.L.VERONESI,: Sui semigruppi che sono un band di t-semigruppi, Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 114 (1980), 217-234.*

|16| *J.L.GALBIATI e M.L. VERONESI,: Sui semigruppi quasi regolari, Instituto Lombardo (Rend. Sc.) A Vol.116 (1982).*

|17| *J.L.GALBIATI e M.L. VERONESI,: Sui semigruppi quasi completamente inversi, (privatna korespodencija).*

|18| *J.L.GALBIATI and M.L.VERONESI,: On quasi completely regular semigroups, Semigroup Form.*

|19| *J.A.GREEN,: On the structure of semigroups; Ann.of.math. 54 (1951), 163-172.*

|20| *T.E.HALL,: On regular semigroups whose idempotents form subsemigroup, Bull. Austral. Math. Soc. Vol.1 (1969), 195-208.*

|21| *T.E.HALL,: Congruences and Green's relations on regular semigroup, Glasgow Math. J. 13 (1972), 167-175.*

|22| *T.E.HALL,: On regular semigroups, J. Algebra 24 (1973) 1-24.*

|23| *K.S.HARINATH,: Some results on k-regular semigroups, Indian J. Pure Appl. Math. 10 (1979), 1422-1431.*

|24| *J.HOWIE,: The maximum idempotent-separating congruence on an inverse semigroup, Proc. Edinburg Math. Soc.14 (1964), 71-79.*

|25| *J.HOWIE, : "An introduction to semigroup theory", Academic Press 1976.*

|26| *J. HOWIE and G.LALLEMENT,: Certain fundamental congruences on a regular semigroups, Proc. Glasgow Math.J.7 (1965), 145-159.*

|27| А.КЛИФФОРД,Г.ПРЕСТОН,: "Алгебараическая теория полугрупп",Том 1, "МИР", Москва, 1972.

|28| А.КЛИФФОРД,Г.ПРЕСТОН,: "Алгебараическая теория полугрупп",ТОМ 2, "МИР", Москва, 1972.

|29| *D.KRGOVIĆ,: Idempotent separating congruences on a regular semigroups, Third algebraic conference, Beograd, 1982, 85-92.*

|30| *G.LALLEMENT,: Congruences et equivalences de Green sur un demigroupe regulier, C.R. Acad. Sci. Paris, 1966, 262, 613-616.*

|31| *D.R.LaTORRE,: Group congruences on regular semigroups,Semigroup Forum, 24 (1982), 327-240.*

|32| F.MASAT,: *Right group and group congruences on a regular semigroup, Duke Math. J., Vol. 40 (1973), 393-402.*

|33| F.MASAT,: *Congruences on conventional semigroups, Czechoslovak Math. J., Vol. 31 (106) (1981), 199-205.*

|34| F.MASAT,: *Idempotents and inverses in conventional semigroups, Czechoslovak Math. J., 32 (107) (1982),384-388.*

|35| J.MEAKIN,: *Idempotent-equivalent congruences on orthodox semigroups, J. Austral. Math. Soc. 11 (1970), 221-241.*

|36| J.MEAKIN,: *Congruences on regular semigroups, Semigroup Forum, Vol. 1 (1970), 232-235.*

|37| J.MEAKIN,: *Congruences on orthodox semigroups, J. Austral. Math. Soc., Vol. 12 (1971), 323-341.*

|38| J.MEAKIN,: *Congruences on orthodox semigroups II, J. Austral Math. Soc., Vol. 13 (1972), 259-266.*

|39| J.MEAKIN,: *The maximum idempotent-separating congruence on a regular semigroup,Proc.Edin.Math.Soc.18 (1972-73)85-92.*

|40| B.L.MEDISON, T.K.MUKHERJEE, M.K.SEN,: *Periodic properties of groupbound semigroup I, Semigroup Form, 22 (1981), 225-234.*

|41| B.L.MEDISON, T.K. MUKHERJEE, M.K.SEN,: *Periodic properties of groupbound semigroup II, Semigroup Forum,26 (1983), 229-236.*

|42| W.D.MUNN,: *Pseudoinverses in semigroups, Proc. Cambridge Phil. Soc. 57 (1961), 247-250.*

|43| M.PETRICH,: *"Introduction to semigroups", Merill. Columbus,1973.*

|44| M.PETRICH,: *"Lectures in semigroups", Acad.-Verlag Berlin,1977.*

|45| M.PETRICH,: *Congruences on inverse semigroups, J. Algebra, 55 (1978), 231-256.*

|46| P.PROTIĆ and S.BOGDANOVIĆ,: *Some congruences on a strongly π-inverse r-semigroup, Zbornik radova PMF u Novom Sadu (u štampi).*

|47| P.PROTIĆ and S.BOGDANOVIĆ,: *Some idempotent-separating congruences on a π-regular semigroup, (u štampi).*

|48| M.S.PUTCHA,: *Semilattice decomposition of semigroups, Semigroup Forum 6, N^{o} 1, 1973, 12-34.*

|49| N.R.REILLY and H.E.SCHEIBLICH,: *Congruences on regular semigroups, Pacific J.Math. 23 (1967),349-360.*

|50| Л.А.СКОРНЯКОВ,:"Элементы теории структур", "Наука",Москва,1982.

|51| *M.L.VERONESI,: Sui semigruppi quasi fortemente regolari,(privatna korespondencija).*

|52| Л.Н.ШЕВРИН,: *On decomposition of a quasiperiodic semigroups into a band of archmedean semigroups, 14 th All-Union Algebraic conference, Abstracts, Novosibirsk 1977, part 1, 104-105, (na Ruskom).*

|53| Л.Н.ШЕВРИН,: *Quasiperiodic semigroups possesing a decomposition into unipotent semigroups, XVI Al-Union Algebraic Conference, Abstracts, Leningrad, 1981, Part 1, 177-178 (na Ruskom).*