Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет

Рада Мутавџић

Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Крагујевац
2020.

Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет

Рада Мутавџић

Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Крагујевац
2020.

Идентификациона страница докторске дисертације

Аутор

- Име и презиме: Рада Мутавџић
- Датум и место рођења: 2.8.1989, Чачак
- Запослење: асистент на Машинском факултету Универзитета у Београду

Докторска дисертација

- Наслов: Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа
- Број страна: 86
- Број слика и табела: 2 слике, 13 табела
- Установа у којој је израђена: Природно-математички факултет, Крагујевац
- Научна област (УДК): Математика 51
- Ментори: др Миодраг Спалевић, редовни професор на Машинском факултету Универзитета у Београду, др Александар Пејчев, ванредни професор на Машинском факултету Универзитета у Београду

Оцена и одбрана

- Датум пријаве теме: 26.06.2019.
- Број одлуке и датум прихватања теме дисертације: 440/XX-1, 28.08.2019.
- Комисија за оцену подобности теме и кандидата: IV-01-714/15, 11.09.2019.
  - др Марија Станић, редовни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу - председник комисије
  - др Дејан Бојовић, ванредни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
  - др Татјана Томовић, доцент, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
- Комисија за оцену и одбрану дисертације: број одлуке IV-01-6/6, 22.01.2020.
  - Академик др Градимир Миловановић, редовни професор у пензији Математичког института САНУ у Београду
  - др Марија Станић, редовни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу - председник комисије
  - др Дејан Бојовић, ванредни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
  - др Бранислав Поповић, ванредни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
  - др Татјана Томовић, доцент, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
- Датум одбране докторске дисертације: ...

Сажетак

Ова дисертација се бави оценом грешке у Гаус-Лобатоовој квадратурној формули за Бернштајн-Сегеове тежинске функције и Кронродовој екстензији за уопштене Мичели-Ривлинове квадратурне формуле за Фуријеове коефицијенте, као и интерналношћу уопштених усредњених Гаусових квадратурних формула у неким специјалним случајевима.

За аналитичке функције, остатак квадратурне формуле може бити представљен као контурни интеграл са комплексним језгром. За прве две квадратурне формуле лоциране су тачке на елиптичким контурама у којима је модул тог језгра максималан и тако добијене оцене грешке. За другу квадратурну формулу су такође нађене L^1-оцена грешке и оцена грешке добијена развојем остатка у ред. Укључени су и нумерички примери које пореде ове оцене грешке са стварном грешком.

На крају су посматране уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле и најједноставнија скраћења једног типа таквих формула за неке тежинске функције на интервалу $[0, 1]$ које је недавно посматрао Миловановић у раду [23]. Испитана је интерналност таквих формула за еквиваленте Јакобијевих полинома на интервалу $[0, 1]$ и у неким једноставним случајевима показана егзистенција Гаус-Кронродових квадратурних формула. Ти резултати су праћени нумеричким примерима, а укључени су и нумерички примери за одговарајуће процене грешке код неких некласичних ортогоналних полинома.

Abstract

In this thesis we consider the error bounds for the Gauss-Lobatto quadrature formulas with respect to the Bernstein-Szegő weight functions, Kronrod's extension of generalizations of the Micchelli-Rivlin quadrature formula for the Fourier-Chebyshev coefficients with the highest algebraic degree of exactness, as well as internality of the averaged Gaussian quadrature formulas in some special cases.

For analytic functions, the remainder term of the quadrature formulas can be represented as a contour integral with a complex kernel. We locate the points on elliptic contours where the modulus of the kernel is maximal for the first two quadrature formulas. We use this to derive the error bounds for these quadrature formulas. The L^1-error bounds and the error bounds by expanding the remainder term for the second formula are also obtained. Numerical examples that compare these error bounds with the actual error are included.

We also analyze the generalized averaged Gaussian quadrature formulas and the simplest truncated one of these formulas for some weight functions on $[0, 1]$ considered by Milovanović in [23]. We shall investigate internality of these formulas for the equivalents of the Jacobi polynomials on this interval and, in some special cases, prove the existence of the Gauss-Kronrod quadrature formula. We also include some examples showing the corresponding error estimates for some non-classical orthogonal polynomials.

Предговор

Предмет рада су оцене грешке за неке квадратурне формуле Гаусовог типа и интерналност уопштених усредњених Гаусових квадратурних формула, као и интерналност скраћења једног типа таквих формула.

Прве две секције представљају теоријску основу истраживања у овој дисертацији. Ту су наведене неке особине ортогоналних полинома на реалној правој, кратак осврт на интерполационе полиноме који се овде користе за апроксимацију функције приликом нумеричке интеграције и посебно су описане интерполационе квадратурне формуле. Међу њима су најважније Гаусове квадратурне формуле, које имају максималан алгебарски степен тачности, али ће нам бити значајне и разне њихове модификације. На крају су описане уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле, скраћења једног типа таквих формула и проблем интерналности који се јавља код њих.

У секцијама 3, 4 и 5 су представљена оригинална истраживања и резултати који су објављени (или прихваћени за штампу) у радовима [30], [29] и [31], редом.

У секцији 3 посматране су Гаус-Лобатоове квадратурне формуле за Бернштајн-Сегеове тежинске функције, тј. (четири) Чебишовљеве тежинске функције подељене полиномима облика $\rho(t) = 1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}t^2$, где је $t \in (-1, 1)$ и $\gamma \in (-1, 0]$. За аналитичке функције, остатак ове квадратурне формуле може бити представљен као контурни интеграл са комплесним језгром. Ако се за контуре изаберу конфокалне елипсе, максимум модула тог језгра ће се постизати у пресеку тих елипси са неким координатним осама. Тако се добија L^∞-оцена грешке.

У секцији 4 нађене су неке оцене грешке за Кронродову екстензију уопштених Мичели-Ривлинових квадратурних формула за Фуријеове коефицијенте када је интегранд аналитичка функција. Мичели-Ривлинова квадратурна формула (први пут посматрана 1972. године у раду [20]) је квадратурна формула са максималним алгебарским степеном тачности за рачунање Фуријеових коефицијената у односу на систем Чебишовљевих полинома прве врсте, када је фиксиран број израчунавања вредности функције или њених првих извода. Општији случај ових квадратурних формула које укључују вредности виших извода функције посматран је 2009. године у раду [1]. Ту су уведене и уопштене Мичели-Ривлинове квадратурне формуле, чије су оцене остатака за аналитичке функције на конфокалним елипсама посматрали Спалевић и Пејчев 2018. године у раду [43]. Кронродове екстензије за уопштене Мичели-Ривлинове формуле увели су у свом недавном раду 2019. године Миловановић, Ориве и Спалевић ([27]).

Као и у секцији 3, за аналитичке интегранде је нађена L^∞-оцена грешке ове формуле лоцирањем максимума модула језгра на конфокалним елипсама. Такође су нађене и L^1-оцена грешке и оцена грешке добијена развојем остатка у ред. На крају су урађени и нумерички примери које пореде добијене оцене грешке са стварном грешком.

Последња, пета секција посвећена је уопштеним усредњеним Гаусовим квадратурним формулама. Оне се, као и Гаус-Кронродове формуле, користе за процену грешке Гаусове квадратурне формуле са n чворова. Имају укупно $2n+1$ чворова, од чега n Гаусових и $n+1$ нових. Таква квадратурна формула са највећим могућим алгебарским степеном тачности је Гаус-Кронродова квадратурна формула. Међутим, реална Гаус-Кронродова квадратурна формула не постоји у општем случају, па се користи и други приступ (видети [16], [17], [36]). Лаури уводи у [17] анти-Гаусову квадратурну формулу помоћу које дефинише уопштену усредњену Гаусову квадратурну формулу Q^L_{2n+1} која има степен тачности $2n+1$. Недавно, користећи резултате из [37] за карактеризацију позитивних квадратурних формула, Спалевић у раду [47] уводи нову квадратурну формулу, коју називамо уопштеном усредњеном Гаусовом квадратурном формулом и означавамо са Q^S_{2n+1}. Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула има степен тачности најмање $2n+2$, али за једну класу функција тај степен је $3n+1$, па се тада ова формула поклапа са Гаус-Кронродовом формулом (видети [49]). Даље, у [45] су уведена скраћења за уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле, $Q^{(n-r)}_{2n-r+1}$, где је $n \geqslant 2$ и $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Те формуле имају мање чворова, а степен тачности исти као уопштене усредњене Гаусове формуле. Зато се оне могу користити као замена када (реалне) Гаус-Кронродове формуле не постоје.

Према радовима [17], [47] и [4], поменуте усредњене Гаусове формуле имају реалне чворове и позитивне тежине, а највише два крајња чвора могу бити спољашња (ван интервала интеграције). Зато остаје да се провери када је одговарајућа формула интернална, или другим речима, када су сви чворови унутрашњи. Ова особина је посебно важна када интегранд није дефинисан ван интервала интеграције.

Овде су анализиране поменуте усредњене квадратурне формуле за неке специјалне тежинске функције које су недавно посматране у раду [23]. У неким од тих случајева добијени су еквиваленти Јакобијевих полинома на интервалу $[0, 1]$ и тада је посматрана интерналност усредњених формула. У неким једноставним случајевима показана је егзистенција Гаус-Кронродових квадратурних формула. Ти резултати су праћени нумеричким примерима, а укључени су и нумерички примери за одговарајуће процене грешке код неких некласичних тежинских функција.

Захвалница

Захваљујем се Машинском факултету у Београду на финансијској помоћи и условима који су ми омогућили бављење научним радом. Посебно се захваљујем ментору проф. др Миодрагу Спалевићу на стрпљењу и корисним саветима, као и свим својим професорима са Природно-математичког факултета у Крагујевцу. На крају, највећу захвалност дугујем својој породици - мајци, супругу, брату и сестри на огромној подршци и разумевању.

Садржај

1. Ортогонални полиноми на реалној правој

1.1. Дефиниција и егзистенција ортогоналних полинома

Ортогонални полиноми се први пут појављују као имениоци у верижним разломцима у другој половини 19. века. Њихова важна примена је у конструкцији квадратурних формула максималног или скоро максималног алгебарског степена тачности за интеграле са позитивном мером. Једна од најважнијих класа ортогоналних полинома јесу ортогонални полиноми на реалној правој. У овој подсекцији су посматрана основна својства тих полинома (видети [8], [19]).

Нека је $\mu(t)$ неопадајућа функција на реалној правој $\mathbb{R}$ са коначним граничним вредностима кад $x \to -\infty$ и $x \to \infty$. Претпоставимо да индукована позитивна мера $d\mu$ има све коначне моменте

$$\mu_k = \mu_k(d\mu) = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

при чему је $\mu_0 > 0$. Означимо са $\mathcal{P}$ скуп свих алгебарских полинома, а са $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{P}$ скуп свих полинома степена не већег од d. За сваки пар полинома p, q из $\mathcal{P}$ може се увести скаларни производ формулом

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\mu(x). \tag{1.2}$$

Ако је $(p, q) = 0$ кажемо да је полином p *ортогоналан* на полином q. За $p = q$ уводимо *норму* полинома p формулом

$$\|p\| = \sqrt{(p, p)},$$

за коју је $\|p\| \geqslant 0$ за свако $p \in \mathcal{P}$ и важи Коши-Шварцова неједнакост

$$|(p, q)| \leqslant \|p\|\|q\|.$$

Дефиниција 1.1. За скаларни производ (1.2) кажемо да је *позитивно дефинитан* на $\mathcal{P}$ (односно $\mathcal{P}_d$) ако је $\|u\| > 0$ за све $u \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ (односно $u \in \mathcal{P}_d \setminus \{0\}$).

За проверу позитивне дефинитности могу се користити Ханкелове момент-детерминанте

$$\Delta_n = \det M_n, \quad M_n = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 1.1. Скаларни производ (1.2) је позитивно дефинитан на $\mathcal{P}$ ако и само ако је $\Delta_n > 0$ за $n = 1, 2, \ldots$ Он је позитивно дефинитан на $\mathcal{P}_d$ ако и само ако је $\Delta_n > 0$ за $n = 1, \ldots, d+1$.

Доказ. Нека је $u \in \mathcal{P}_d$, $u = c_0 + c_1 x + \cdots + c_d x^d$. Како је

$$\|u\|^2 = \int_a^b \sum_{k,l=0}^{d} c_k c_l x^{k+l} d\mu(x) = \sum_{k,l=0}^{d} \mu_{k+l} c_k c_l,$$

позитивна дефинитност на $\mathcal{P}_d$ је еквивалентна позитивној дефинитности Ханкелове матрице M_{d+1}. Ово је заправо еквивалентно условима $\Delta_n > 0$ за $n = 1, \ldots, d+1$. Резултат за $\mathcal{P}$ следи из случаја $d = \infty$. $\square$

Дефиниција 1.2. Низ моничних реалних полинома $\{\pi_k\}_{k=0}^{\infty}$ је ортогоналан у односу на меру $d\mu$ ако важи

$$\deg \pi_k = k$$

и

$$(\pi_k, \pi_l) = 0 \quad \text{ако и само ако је} \quad k \neq l.$$

Постоји бесконачно много ортогоналних полинома ако је скуп индекса неограничен или коначно много иначе. Нормализацијом $\tilde{\pi}_k = \pi_k / \|\pi_k\|$ добијамо ортонормиране полиноме.

Из ортогоналности једноставно следи да је скуп $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ моничних ортогоналних полинома линеарно независан. Тада се сваки полином $p \in \mathcal{P}$ може на јединствен начин представити као њихова линеарна комбинација у облику

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \pi_k, \quad c_k = \frac{(p, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}.$$

Следи да полиноми $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ чине базу простора $\mathcal{P}_n$.

Теорема 1.2. Ако је скаларни производ (1.2) позитивно дефинитан на $\mathcal{P}$, тада постоји јединствен бесконачан низ $\{\pi_k\}_{k=0}^{\infty}$ моничних ортогоналних полинома.

Доказ. Полиноми π_k се могу добити применом Грам-Шмитовог поступка ортогонализације на низ $e_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Тада је $\pi_0 = 1$, а за $k = 2, 3, \ldots$ индуктивно добијамо

$$\pi_k = e_k - \sum_{l=0}^{k-1} c_l \pi_l, \quad c_l = \frac{(e_k, \pi_l)}{(\pi_l, \pi_l)}.$$

Како је $(\pi_l, \pi_l) > 0$, полиноми π_k су јединствени и према конструкцији, ортогонални на све полиноме π_j, $j < k$. $\square$

Услови теореме 1.2 су испуњени ако функција μ има бесконачно много тачака раста, тј. тачака x_0 за које важи $\mu(x_0 + \epsilon) - \mu(x_0 - \epsilon) > 0$ за свако $\epsilon > 0$. Конвексни омотач скупа свих таквих тачака се назива *носач* мере $d\mu$.

Ако је μ апсолутно непрекидна функција, кажемо да је $\mu'(x) = w(x)$ *тежинска функција.* Тада се мера $d\mu$ може изразити као $d\mu(x) = w(x)dx$, при чему је тежинска функција $w(x)$ ненегативна и интеграбилна.

1.2. Особине ортогоналних полинома

Претпоставимо да је $d\mu$ позитивна мера на $\mathbb{R}$ која има бесконачно много тачака раста и све коначне моменте (1.1).

Дефиниција 1.3. Апсолутно непрекидна мера $d\mu(x) = w(x)dx$ је симетрична ако је њен носач интервал $[-a, a]$, $0 < a < \infty$ и $w(-x) = w(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.3. Ако је мера $d\mu$ симетрична, тада важи

$$\pi_k(-x) = (-1)^k \pi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Доказ. Нека је $\hat{\pi}_k(x) = (-1)^k \pi_k(-x)$. Тада је

$$(\hat{\pi}_k, \hat{\pi}_l) = (-1)^{k+l}(\pi_k, \pi_l) = 0 \quad \text{за} \quad k \neq l.$$

Како су полиноми $\hat{\pi}_k$ монични, на основу јединствености моничних ортогоналних полинома следи да је $\hat{\pi}_k = \pi_k$. □

Теорема 1.4. Све нуле полинома π_n су реалне, просте и леже у унутрашњости носача $[a, b]$ мере $d\mu$.

Доказ. Како је $\int_{\mathbb{R}} \pi_n(x) d\mu(x) = 0$ за $n \geqslant 1$, мора постојати најмање једна тачка у унутрашњости интервала $[a, b]$ у којој полином π_n мења знак. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_k$, $k \leqslant n$, све такве тачке. Ако је $k < n$, према ортогоналности је

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_n(x) \prod_{i=1}^{k} (x - x_i) d\mu(x) = 0,$$

што је немогуће, јер је интегранд константног знака. Дакле, $k = n$. □

Наредно тврђење описује главну везу између ортогоналних полинома у односу на скаларни производ (1.2). Наиме, они су повезани рекурентном релацијом другог реда. Главни разлог постојања такве релације је особина скаларног производа (1.2)

$$(xp, q) = (p, xq), \quad p, q \in \mathcal{P}.$$

Теорема 1.5. Нека су $\pi_0, \pi_1, \dots$ монични ортогонални полиноми у односу на меру $d\mu$. Тада важи

$$\pi_{-1}(x) = 0, \quad \pi_0(x) = 1,$$
$$\pi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\pi_k(x) - \pi_{k-1}(x), \tag{1.3}$$

где је

$$\alpha_k = \frac{(x\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{1.4}$$

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{1.5}$$

Скуп индекса је бесконачан (односно коначан) ако је скаларни производ позитивно дефинитан на $\mathcal{P}$ (односно на $\mathcal{P}_d$ а није на $\mathcal{P}_n$ за $n > d$).

Доказ. Како је $\pi_{k+1} - x\pi_k$ полином степена не већег од k, можемо написати

$$\pi_{k+1}(x) - x\pi_k(x) = -\alpha_k\pi_k(x) - \beta_k\pi_{k-1}(x) + \sum_{j=0}^{k-2} \gamma_{kj}\pi_j(x), \tag{1.6}$$

за неке константе α_k, β_k и γ_{kj}, при чему је $\pi_{-1}(x) = 0$ и сума за $k = 0$ и $k = 1$ је нула. Скаларним множењем обе стране претходне једнакости са π_k, према ортогоналности добијамо

$$-(x\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k),$$

одакле следи (1.4). Формула (1.5) се добија скаларним множењем обе стране једнакости (1.6) са π_{k-1}, $k \geqslant 1$,

$$-(x\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}),$$

јер је $(x\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, x\pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$.

Скаларним множењем обе стране једнакости (1.6) са π_i, $i < k - 1$, добијамо

$$-(x\pi_k, \pi_i) = \gamma_{ki}(\pi_i, \pi_i),$$

где је очигледно $(x\pi_k, \pi_i) = (\pi_k, x\pi_i) = 0$. Дакле, $\gamma_{ki} = 0$ за $i < k - 1$. □

Иако се β_0 у релацији (1.5) може узети произвољно, погодно је дефинисати

$$\beta_0 = (\pi_0, \pi_0) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(x). \tag{1.7}$$

Приметимо да су тада сви коефицијенти β_k позитивни и да се норма полинома π_n може изразити у облику

$$\|\pi_n\| = \sqrt{\beta_0\beta_1 \cdots \beta_n}. \tag{1.8}$$

Важи и тврђење обратно претходној теореми, које се обично приписује Фаварду (видети [8] за референце): ако неки (бесконачан) низ полинома задовољава рекурентну релацију (1.3) са свим коефицијентима β_k позитивним, тада је он ортогоналан у односу на неку позитивну меру са бесконачним носачем.

Теорема 1.6. Нека је носач $[a, b]$ мере $d\mu$ коначан. Тада важи

$$a < \alpha_k < b, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.9}$$

$$0 < \beta_k \leqslant \max\{a^2, b^2\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.10}$$

са скупом индекса као у теореми 1.5.

Доказ. Прва релација директно следи из (1.4). Применом Коши-Шварцове неједнакости на једнакост $\|\pi_k\|^2 = (\pi_k, \pi_k) = |(t\pi_{k-1}, \pi_k)|$ добијамо

$$\|\pi_k\|^2 \leqslant \max\{|a|, |b|\}\|\pi_{k-1}\|\|\pi_k\|.$$

Дељењем са $\|\pi_k\|$ и квадрирањем следи друга релација, јер је $\beta_k = \|\pi_k\|^2/\|\pi_{k-1}\|^2$. □

Нека су $\{\tilde{\pi}_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирани полиноми, тј.

$$\pi_k = \|\pi_k\|\tilde{\pi}_k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{1.11}$$

Теорема 1.7. За ортонормиране полиноме $\{\tilde{\pi}_k\}_{k=0}^{\infty}$ у односу на меру $d\mu$ важи

$$\sqrt{\beta_{k+1}}\tilde{\pi}_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\tilde{\pi}_k(x) - \sqrt{\beta_k}\tilde{\pi}_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{1.12}$$

$$\tilde{\pi}_{-1}(x) = 0, \quad \tilde{\pi}_0(x) = 1/\sqrt{\beta_0},$$

при чему су коефицијенти α_k и β_k и скуп индекса као у теореми 1.5.

Доказ. Заменом (1.11) у релацији (1.3) и дељењем са $\|\pi_{k+1}\|$ следи

$$\tilde{\pi}_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\frac{\tilde{\pi}_k(x)}{\sqrt{\beta_{k+1}}} - \beta_k\frac{\tilde{\pi}_{k-1}(x)}{\sqrt{\beta_{k+1}\beta_k}},$$

одакле множењем са $\sqrt{\beta_{k+1}}$ добијамо рекуретну релацију (1.12). Почетне вредности ортонормираних полинома следе из почетних вредности моничних полинома. $\square$

Дефиниција 1.4. Ако је скуп индекса у теореми 1.5 бесконачан, Јакобијева матрица у односу на меру $d\mu$ је бесконачна, симетрична и тродијагонална:

$$J_\infty := \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Њен главни водећи минор $n \times n$ означавамо са J_n.

Запишимо првих n једначина релације (1.12) у облику

$$x\tilde{\pi}_k(x) = \sqrt{\beta_k}\tilde{\pi}_{k-1}(x) + \alpha_k\tilde{\pi}_k(x) + \sqrt{\beta_{k+1}}\tilde{\pi}_{k+1}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1.14}$$

Ако означимо $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(x) = [\tilde{\pi}_0(x)\ \tilde{\pi}_1(x) \dots\ \tilde{\pi}_{n-1}(x)]^T$, тада се (1.14) може написати у матричном облику:

$$x\tilde{\boldsymbol{\pi}}(x) = J_n\tilde{\boldsymbol{\pi}}(x) + \sqrt{\beta_n}\tilde{\pi}_n(x)\mathbf{e_n},$$

где је $\mathbf{e_n} = [0\ 0 \dots\ 1]^T$ n-ти координатни вектор у $\mathbb{R}^n$. Тиме је показано следеће тврђење.

Теорема 1.8. Нуле $\tau_k^{(n)}$ ортогоналног полинома π_n су сопствене вредности Јакобијеве матрице J_n реда n, а $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tau_k^{(n)})$ су одговарајући сопствени вектори.

Последица 1.1. Нека је $\boldsymbol{v_k}$ нормализовани сопствени вектор матрице J_n који одговара сопственој вредности $\tau_k^{(n)}$, а $v_{k,1}$ његова прва компонента. Тада је

$$\beta_0 {v_{k,1}}^2 = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{n-1}[\tilde{\pi}_\nu(\tau_k^{(n)})]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказ. Тврђење следи из једнакости

$$\boldsymbol{v_k} = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1}[\tilde{\pi}_\nu(\tau_k^{(n)})]^2\right)^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\pi}}(\tau_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

поређењем првих компоненти на обе стране и њиховим квадрирањем, јер је $\tilde{\pi}_0 = 1/\sqrt{\beta_0}$. □

Нека је

$$K_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n}\tilde{\pi}_k(x)\tilde{\pi}_k(t). \tag{1.15}$$

Важна последица рекурентне релације је следећа теорема.

Теорема 1.9. (Кристофел-Дарбуова формула) Нека су $\tilde{\pi}_k$ ортонормирани полиноми у односу на меру $d\mu$. Тада за функцију $K_n(x,t)$ важи

$$K_n(x,t) = \sqrt{\beta_{n+1}}\cdot\frac{\tilde{\pi}_{n+1}(x)\tilde{\pi}_n(t) - \tilde{\pi}_n(x)\tilde{\pi}_{n+1}(t)}{x-t}, \tag{1.16}$$

$$K_n(t,t) = \sqrt{\beta_{n+1}}\cdot[\tilde{\pi}'_{n+1}(t)\tilde{\pi}_n(t) - \tilde{\pi}'_n(t)\tilde{\pi}_{n+1}(t)]. \tag{1.17}$$

Доказ. Множењем рекурентне релације (1.12) са $\tilde{\pi}_k(x)$ и одузимањем од исте у којој су променљивим x и t замењена места добијамо

$$\begin{aligned}(x-t)\tilde{\pi}_k(x)\tilde{\pi}_k(t) \;=\; &\sqrt{\beta_{k+1}}\cdot[\tilde{\pi}_{k+1}(x)\tilde{\pi}_k(t) - \tilde{\pi}_k(x)\tilde{\pi}_{k+1}(t)]\\ &-\sqrt{\beta_k}\cdot[\tilde{\pi}_k(x)\tilde{\pi}_{k-1}(t) - \tilde{\pi}_{k-1}(x)\tilde{\pi}_k(t)].\end{aligned}$$

Сумирањем обе стране од $k = 0$ до $k = n$, при чему је $\tilde{\pi}_{-1} = 0$, добијамо формулу (1.16). Узимањем граничне вредности када $x \to t$ добијамо формулу (1.17). □

Последица 1.2. Нека су π_k монични ортогонални полиноми у односу на меру $d\mu$. Тада је

$$\sum_{k=0}^{n}\beta_n\beta_{n-1}\cdots\beta_{k+1}\pi_k(x)\pi_k(t) = \frac{\pi_{n+1}(x)\pi_n(t) - \pi_n(x)\pi_{n+1}(t)}{x-t}. \tag{1.18}$$

Доказ. Заменимо $\tilde{\pi}_k = \pi_k/\|\pi_k\|$ у (1.16) уз $\sqrt{\beta_{n+1}} = \|\pi_{n+1}\|/\|\pi_n\|$ и (1.8). □

Примедба 1.1. Из једнакости (1.17) следи неједнакост

$$\tilde{\pi}'_{n+1}(t)\tilde{\pi}_n(t) - \tilde{\pi}'_n(t)\tilde{\pi}_{n+1}(t) > 0. \tag{1.19}$$

Овај резултат се може користити за доказ наредне теореме.

Теорема 1.10. Нуле полинома π_{n+1} и π_n су међусобно испреплетане, тј.

$$\tau_{n+1}^{(n+1)} < \tau_n^{(n)} < \tau_n^{(n+1)} < \tau_{n-1}^{(n)} < \cdots < \tau_1^{(n)} < \tau_1^{(n+1)},$$

где су $\tau_i^{(n+1)}$ и $\tau_k^{(n)}$ нуле полинома π_{n+1} и π_n, редом, у опадајућем поретку.

Доказ. Нека су τ и σ узастопне нуле полинома $\tilde{\pi}_n$. Тада је $\tilde{\pi}_n'(\tau)\tilde{\pi}_n'(\sigma) < 0$ и на основу (1.19) је $-\tilde{\pi}_n'(\tau)\tilde{\pi}_{n+1}(\tau) > 0$ и $-\tilde{\pi}_n'(\sigma)\tilde{\pi}_{n+1}(\sigma) > 0$. Дакле, полином $\tilde{\pi}_{n+1}$ има у τ и σ различите знакове, па постоји бар једна његова нула између τ и σ. Ово укључује најмање $n-1$ нулу полинома $\tilde{\pi}_{n+1}$. Међутим, постоје још две нуле полинома $\tilde{\pi}_{n+1}$, једна са десне стране највеће нуле $\tau_1^{(n)}$ полинома $\tilde{\pi}_n$ и једна са леве стране најмање нуле $\tau_n^{(n)}$. Заиста, $\tilde{\pi}_n'(\tau_1^{(n)}) > 0$ и на основу (1.19) важи $\tilde{\pi}_{n+1}(\tau_1^{(n)}) < 0$. Дакле, $\tilde{\pi}_{n+1}$ мора бити нула са десне стране нуле $\tau_1^{(n)}$, јер је $\tilde{\pi}_{n+1}(t) > 0$ за довољно велико t. Слично се проверава услов за $\tau_n^{(n)}$. $\square$

1.3. Верижни разломци

Као што је већ поменуто, ортогонални полиноми се први пут појављују као имениоци у верижним разломцима. Овде су бројиоци верижних разломака такође важни, јер они чине низ придружених ортогоналних полинома.

Нека је $d\mu$ позитивна мера са бесконачно много тачака раста и нека су α_k и β_k за $k = 0, 1, \ldots$ коефицијенти у трочланој рекурентној релацији за ортогоналне полиноме π_k, при чему је β_0 дефинисано формулом (1.7).

Дефиниција 1.5. *Јакобијев верижни разломак* придружен мери $d\mu$ је

$$\mathcal{J} = \frac{\beta_0}{x-\alpha_0-}\,\frac{\beta_1}{x-\alpha_1-}\,\frac{\beta_2}{x-\alpha_2-}\cdots. \tag{1.20}$$

Његов n-ти конвергент означавамо са

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\beta_0}{x-\alpha_0-}\,\frac{\beta_1}{x-\alpha_1-}\cdots\frac{\beta_{n-1}}{x-\alpha_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.21}$$

Из теорије верижних разломака познато је (видети [8] за референце) да бројиоци A_n и имениоци B_n задовољавају рекурентне релације

$$\begin{gathered} A_{k+1} = (x-\alpha_k)A_k - \beta_k A_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ A_0 = 0, \quad A_1 = \beta_0, \\ B_{k+1} = (x-\alpha_k)B_k - \beta_k B_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \\ B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1. \end{gathered}$$

Како је рекурентна релација за полиноме B_k, $k = 0, 1, \ldots$, иста као рекурентна релација за моничне ортогоналне полиноме, важи наредно тврђење.

Теорема 1.11. Имениоци B_k Јакобијевог верижног разломка (1.20) су управо монични ортогонални полиноми π_k,

$$B_k(x) = \pi_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Са друге стране, видимо да је $\beta_0^{-1}A_{k+1}$ монични полином степена k који не зависи од β_0.

Дефиниција 1.6. Полином

$$\pi_k^{[1]}(x) = \beta_0^{-1} A_{k+1}(x)$$

се назива *монични придружени полином* степена k у односу на меру $d\mu$.

Очигледно, монични придружени полиноми σ_k задовољавају рекурентну релацију

$$\pi_{k+1}^{[1]}(x) = (x - \alpha_{k+1})\pi_k^{[1]}(x) - \beta_{k+1}\pi_{k-1}^{[1]}(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\pi_{-1}^{[1]}(x) = 0, \quad \pi_0^{[1]}(x) = 1.$$

Како је $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ и $\beta_{k+1} > 0$ за $k = 0, 1, \ldots$, на основу Фаварове теореме важи да су монични придружени полиноми такође ортогонални у односу на неку позитивну меру $d\mu^{[1]}$. Међутим, та мера у општем случају није позната.

Аналогно се могу дефинисати придружени полиноми вишег реда,

$$\pi_{k+1}^{[s]}(x) = (x - \alpha_{k+s})\pi_k^{[s]}(x) - \beta_{k+s}\pi_{k-1}^{[s]}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.22}$$

$$\pi_{-1}^{[s]}(x) = 0, \quad \pi_0^{[s]}(x) = 1,$$

где је $s \geqslant 0$. Очигледно је $\pi_k^{[0]} = \pi_k$.

1.4. Стилтјесова трансформација мере и Кристофелови бројеви

Важно је посматрати Јакобијев верижни разломак (1.20) за $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$ изван носача $[a, b]$ мере $d\mu$. Тада је

$$\frac{\beta_0}{z - \alpha_0 -}\frac{\beta_1}{z - \alpha_1 -}\cdots\frac{\beta_{n-1}}{z - \alpha_{n-1}} = \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.23}$$

где је π_n монични ортогонални полином степена n и

$$\sigma_n(z) = \beta_0 \pi_{n-1}^{[1]}(z),$$

где је $\pi_{n-1}^{[1]}$ монични придружени полином степена $n - 1$. За полиноме σ_k важи

$$\sigma_{k+1}(z) = (z - \alpha_k)\sigma_k(z) - \beta_k \sigma_{k-1}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.24}$$

$$\sigma_0(z) = 0, \quad \sigma_1(z) = \beta_0.$$

Ако се дефинише $\sigma_{-1}(z) = -1$, тада претходна релација важи и за $k = 0$.

Теорема 1.12. Бројиоци у формули (1.23) су дати формулом

$$\sigma_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(z) - \pi_n(x)}{z - x} d\mu(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.25}$$

Доказ. Довољно је показати да интеграл на десној страни формуле задовољава релацију (1.24). За почетне вредности је то очигледно, јер је $\pi_0 = 1$ и $\pi_1 = z - \alpha_1$. Да бисмо показали тврђење за остале вредности, користимо рекурентну релацију за π_k и пишемо

$$\begin{aligned}\pi_{k+1}(z) - \pi_{k+1}(x) &= z\pi_k(z) - x\pi_k(x) - \alpha_k(\pi_k(z) - \pi_k(x)) - \beta_k(\pi_{k-1}(z) - \pi_{k-1}(x)) \\ &= (z-x)\pi_k(x) + (z-\alpha_k)(\pi_k(z) - \pi_k(x)) - \beta_k(\pi_{k-1}(z) - \pi_{k-1}(x)).\end{aligned}$$

Дељењем обе стране са $z - x$ и интеграцијом добијамо

$$\sigma_{k+1}(z) = \int_{\mathbb{R}} \pi_k(x) d\mu(x) + (z - \alpha_k)\sigma_k(z) - \beta_k \sigma_{k-1}(z).$$

Како је $k \geqslant 1$, интеграл на десној страни је нула због ортогоналности. □

Полиноми σ_n се називају *полиноми друге врсте* или *придружени полиноми* у односу на меру $d\mu$.

Нека је

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a,b].$$

Ова функција је нула у бесконачности и аналитичка у целој комплексној равни без интервала $[a,b]$. Када је носач мере $\mathbb{R}$, функција $F(z)$ је одвојено аналитичка у горњој и доњој полуравни, са различитим гранама у општем случају. Функција $F(z)$ је позната као *Стилтјесова трансформација мере* $d\mu$. Да бисмо извели везу између функције $F(z)$ и верижних разломака (1.23), развијмо функцију F по опадајућим степенима од z:

$$F(z) \sim \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^2} + \cdots , \tag{1.26}$$

где су μ_r моменти мере $d\mu$. Нека је

$$\rho_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(x)}{z - x} d\mu(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Очигледно је $\sigma_n(z) = \pi_n(z)F(z) - \rho_n(z)$. Развој функције ρ_n је

$$\rho_n(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{z^{k+1}}, \quad r_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \pi_n(x) d\mu(x).$$

Према ортогоналности је $r_k = 0$ за $k < n$, па је $\rho_n(z) = O(z^{-n-1})$ када $z \to \infty$. Следи да је

$$F(z) - \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{\rho_n(z)}{\pi_n(z)} = O(z^{-2n-1}) \quad \text{када} \quad z \to \infty.$$

Дакле, за свако $n = 1, 2, \ldots$, ако је σ_n/π_n развијен по опадајућим степенима од z, тада се тај развој поклапа са истим развојем за функцију $F(z)$, закључно са чланом z^{-2n}. За верижне разломке то значи да је Јакобијев верижни разломак (1.20) за меру $d\mu$ заправо верижни разломак „придружен” степеном реду (1.26) функције $F(z)$. Да бисмо прецизно описали ту везу, треба нам наредна дефиниција.

Дефиниција 1.7. Проблем момената за меру $d\mu$ је одређен, ако је мера $d\mu$ јединствено одређена својим моментима. У супротном је неодређен.

Наводимо наредно тврђење, за које се више детаља може наћи у [8] и [19].

Теорема 1.13. Ако је проблем момената за меру $d\mu$ одређен, тада важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = F(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a,b].$$

Приметимо сада да рационална функција (1.23) има само просте полове у нулама $\tau_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ортогоналног полинома π_n. Означимо са $\lambda_{n,k}$ одговарајуће резидууме:

$$\lambda_{n,k} = \operatorname*{Res}_{z=\tau_k^{(n)}} \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \lim_{z\to\tau_k^{(n)}} (z - \tau_k^{(n)}) \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{\sigma_n(\tau_k^{(n)})}{\pi_n'(\tau_k^{(n)})}.$$

Приметимо још да на основу формуле (1.25) важи

$$\lambda_{n,k} = \frac{1}{\pi_n'(\tau_k^{(n)})} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(x)}{x - \tau_k^{(n)}} d\mu(x), \tag{1.27}$$

па је по теореми о резидуумима

$$\frac{\sigma_n(x)}{\pi_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}}{x - \tau_k^{(n)}}.$$

Коефицијенти $\lambda_{n,k}$ су *Кристофелови бројеви* и имају важну улогу у нумеричкој интеграцији. Наиме, они се појављују као тежински коефицијенти у тзв. Гаусовој квадратурној формули (видети подсекцију 2.5).

Интеграл (1.27) се може изразити преко *Кристофелове функције* $\lambda_n(x)$,

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{K_{n-1}(x,x)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_k(x)]^2 \right)^{-1}, \tag{1.28}$$

где је $K_n(x,t)$ дефинисано формулом (1.15). Из Кристофел-Дарбуове формуле (1.16) за $t = \tau_k^{(n)}$ следи

$$K_{n-1}(x, \tau_k^{(n)}) = \sqrt{\beta_n} \cdot \frac{\tilde{\pi}_n(x)\tilde{\pi}_{n-1}(\tau_k^{(n)})}{x - \tau_k^{(n)}}.$$

Интеграцијом у односу на меру $d\mu(x)$ добијамо

$$\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}(x, \tau_k^{(n)}) d\mu(x) = \sqrt{\beta_n} \cdot \tilde{\pi}_{n-1}(\tau_k^{(n)}) \tilde{\pi}_n'(\tau_k^{(n)}) \lambda_{n,k}, \tag{1.29}$$

Интеграл на левој страни једнакости (1.29) је због ортогоналности једнак 1. Са друге стране, из формуле (1.17) за $x = \tau_k^{(n)}$ следи

$$K_{n-1}(\tau_k^{(n)}, \tau_k^{(n)}) = \sqrt{\beta_n} \tilde{\pi}_n'(\tau_k^{(n)}) \tilde{\pi}_{n-1}(\tau_k^{(n)}).$$

Комбиновањем претходних израза добијамо $1 = K_{n-1}(\tau_k^{(n)}, \tau_k^{(n)}) \lambda_{n,k}$, тј.

$$\lambda_{n,k} = \lambda_n(\tau_k^{(n)}), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.30}$$

где је функција $\lambda_n(x)$ дата формулом (1.28)

1.5. Класични ортогонални полиноми

Важну класу ортогоналних полинома чине тзв. класични ортогонални полиноми, који налазе посебну примену у теорији апроксимација и нумеричкој интеграцији.

Како се сваки интервал (a, b) линеарном трансформацијом може пресликати у један од интервала $(-1, 1)$, $(0, \infty)$ и $(-\infty, \infty)$, посматраћемо само њих.

Дефиниција 1.8. Тежинска функција $w(x)$ је *класична* ако задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d}{dx}\left(A(x)w(x)\right) = B(x)w(x), \tag{1.31}$$

где је $B(x)$ линеарни полином, а $A(x)$ у зависности од a и b има облик

$$A(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ако је } (a, b) = (-1, 1), \\ x, & \text{ако је } (a, b) = (0, \infty), \\ 1, & \text{ако је } (a, b) = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Ортогонални полиноми p_k у односу на класичну тежинску функцију $w(x)$ на (a, b) се називају *класични ортогонални полиноми.*

Класични ортогонални полиноми се могу класификовати као:
(1°) Јакобијеви полиноми $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, $\alpha, \beta > -1$, на $(-1, 1)$;
(2°) уопштени Лагерови полиноми $L_n^{\alpha}(x)$, $\alpha > -1$, на $(0, \infty)$;
(3°) Ермитови полиноми $H_n(x)$ на $(-\infty, \infty)$.

Тежинске функције и полиноми $A(x)$ и $B(x)$ су дати у табели 1.1.

Табела 1.1: Класификација класичних ортогоналних полинома

(a, b)	$w(x)$	$A(x)$	$B(x)$
$(-1, 1)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$
$(0, \infty)$	$x^{\alpha}e^{-x}$	x	$\alpha + 1 - x$
$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	1	$-2x$

Специјални случајеви Јакобијевих полинома су:

- Гегенбауерови полиноми $C_n^{\lambda}(x)$, $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, $\lambda > -1/2$;
- Лежандрови полиноми $P_n(x)$, $\alpha = \beta = 0$;
- Чебишовљеви полиноми прве врсте $T_n(x)$, $\alpha = \beta = -1/2$;
- Чебишовљеви полиноми друге врсте $U_n(x)$, $\alpha = \beta = 1/2$;
- Чебишовљеви полиноми треће врсте $V_n(x)$, $\alpha = -\beta = -1/2$;
- Чебишовљеви полиноми четврте врсте $W_n(x)$, $\alpha = -\beta = 1/2$.

Чебишовљеви полиноми су дати формулама

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$
$$V_n(\cos\theta) = \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}, \quad W_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

и задовољавају исту рекурентну релацију $p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x)$, $p_0(x) = 1$, са различитим почетним вредностима $p_1(x) = x,\ 2x,\ 2x-1,\ 2x+1$, редом за Чебишовљеве полиноме прве, друге, треће и четврте врсте.

1.6. Кристофелова формула

Теорема 1.14. Нека су $\tilde{\pi}_n(x)$ ортонормирани полиноми у односу на меру $d\mu(x)$ на интервалу $[a,b]$. Такође, нека је

$$\rho(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_l), \quad c \neq 0,$$

полином ненегативан на интервалу $[a,b]$. Тада се ортогонални полиноми $q_n(x)$ у односу на меру $\rho(x)d\mu(x)$ могу изразити преко полинома $\tilde{\pi}_n(x)$:

$$\rho(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} \tilde{\pi}_n(x) & \tilde{\pi}_{n+1}(x) & \cdots & \tilde{\pi}_{n+l}(x) \\ \tilde{\pi}_n(x_1) & \tilde{\pi}_{n+1}(x_1) & \cdots & \tilde{\pi}_{n+l}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\pi}_n(x_l) & \tilde{\pi}_{n+1}(x_l) & \cdots & \tilde{\pi}_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}. \tag{1.32}$$

У случају да нека од нула, рецимо x_k, има вишеструкост $m > 1$, такође укључујемо и врсте $[\tilde{\pi}_n^i(x_k)\ \tilde{\pi}_{n+1}^i(x_k)\ \cdots\ \tilde{\pi}_{n+l}^i(x_k)]$, за $i = 1,\dots,m-1$.

Доказ. Доказ је скоро очигледан. Десна страна у формули (1.32) је полином степена $n+l$ који је дељив полиномом $\rho(x)$. Зато је облика $\rho(x)q_n(x)$, где је $q_n(x)$ полином степена n. Штавише, он је линеарна комбинација полинома $\tilde{\pi}_n(x), \tilde{\pi}_{n+1}(x), \dots, \tilde{\pi}_{n+l}(x)$, тако да за произвољан полином $q(x)$ степена $n-1$ важи $\int_a^b \rho(x)q_n(x)q(x)d\mu(x) = 0$. Коначно, десна страна у формули (1.32) није идентички једнака нули. За то је довољно показати да коефицијент полинома $\tilde{\pi}_{n+l}(x)$, тј. детерминанта

$$\begin{vmatrix} \tilde{\pi}_n(x_1) & \tilde{\pi}_{n+1}(x_1) & \cdots & \tilde{\pi}_{n+l-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\pi}_n(x_l) & \tilde{\pi}_{n+1}(x_l) & \cdots & \tilde{\pi}_{n+l-1}(x_l) \end{vmatrix}$$

није нула. У супротном би постојали реални бројеви $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}$ који нису сви нула такви да је

$$\lambda_0\tilde{\pi}_n(x) + \lambda_1\tilde{\pi}_{n+1}(x) + \cdots + \lambda_{l-1}\tilde{\pi}_{n+l-1}(x) \tag{1.33}$$

једнако нули за $x = x_1,\dots,x_l$. Следи да је претходни израз облика $\rho(x)G(x)$, где је $G(x)$ полином степена $n-1$. Будући да је израз (1.33) ортогоналан на произвољан полином степена $n-1$, важи$\int_a^b \rho(x)G(x)G(x) = 0$, па је $G(x) \equiv 0$, што је контрадикција. $\square$

1.7. Бернштајн-Сегеове тежинске функције

Тежинска функција облика

$$w(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{S(x)}, \quad x \in (-1,1), \tag{1.34}$$

при чему је $S(x)$ полином који је позитиван на $[-1,1]$, изузев можда у простим нулама ± 1, назива се *Бернштајн-Сегеова тежинска функција*. Тада одговарајући ортогонални полиноми могу бити експлицитно написани.

Специјално, посматрајмо Бернштајн-Сегеове тежинске функције које се добијају дељењем тежинских функција $w^{(\alpha,\beta)}(t) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$, квадратним полиномом $\rho(t)$ који је строго позитиван на интервалу $[-1,1]$,

$$w^{(\pm 1/2)}(t) = \frac{(1-t^2)^{\pm 1/2}}{\rho(t)} \quad \text{и} \quad w^{(\pm 1/2, \mp 1/2)}(t) = \frac{(1-t)^{\pm 1/2}(1+t)^{\mp 1/2}}{\rho(t)}.$$

Квадратни реалан полином $\rho(t)$ је позитиван на интервалу $[-1,1]$ ако и само ако је облика

$$\rho(t) = \beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta-\alpha)t + (\alpha^2+\delta^2),$$

где је $0 < \alpha < \beta$, $\beta \neq 2\alpha$ и $|\delta| < \beta - \alpha$. Ова карактеризација је показана у [9]. Посебно, за $\delta = 0$, уз ознаку $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}(\gamma+1)$, полином $\rho(t)$ се своди на

$$\rho(t) = \alpha^2\left(1 - \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}t^2\right), \quad \text{где је} \quad \gamma \in (-1,1).$$

Ортогонални полиноми $\pi_n^{(\pm 1/2)}$ и $\pi_n^{(\pm 1/2, \mp 1/2)}$ у односу на Бернштајн-Сегеове тежинске функције су повезани са ортогоналним полиномима за одговарајуће класичне тежниске функције следећим релацијама (видети [32]):

$$\begin{aligned}
\pi_n^{(-1/2)} &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[T_n + \frac{2\delta}{\beta}T_{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)T_{n-2}\right], \quad n \geqslant 2,\\
\pi_n^{(1/2)} &= \frac{1}{2^{n}}\left[U_n + \frac{2\delta}{\beta}U_{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)U_{n-2}\right], \quad n \geqslant 1,\\
\pi_n^{(1/2,-1/2)} &= \frac{1}{2^{n}}\left[W_n + \frac{2\delta}{\beta}W_{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)W_{n-2}\right], \quad n \geqslant 2,\\
\pi_n^{(-1/2,1/2)}(t;\alpha,\beta,\delta) &= (-1)^n \pi_n^{(1/2,-1/2)}(-t;\alpha,\beta,-\delta),
\end{aligned}$$

уз $\pi_1^{(-1/2)}(t) = t + \frac{\delta}{\beta-\alpha}$ и $\pi_1^{(1/2,-1/2)}(t) = t + \frac{\alpha+\delta}{\beta}$.

Традиционалан начин доказивања асимптотских формула неких општих тежинских функција заснива се на њиховој апроксимацији тежинским функцијама облика (1.34). Затим се користе експлицитни изрази за ортогоналне полиноме у односу на тежинске функције (1.34) и одговарајућа анализа грешке ([19]).

2. Квадратурне формуле

2.1. Увод

Нумеричка интеграција је поступак приближног израчунавања одређених интеграла на основу низа вредности подинтегралне функције по одређеној формули. Формуле за нумеричко израчунавање једноструких (односно двоструких) интеграла називају се квадратурне (односно кубатурне) формуле.

У великом броју случајева јавља се потреба за нумеричком интеграцијом. Наиме, Њутн-Лајбницова формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

се не може увек успешно применити. Неки од тих случајева су:

(1°) функција F се не може представити помоћу коначног броја елементарних функција (на пример, за $f(x) = e^{-x^2}$);

(2°) примена претходне формуле доводи до компликованог израза чак и код израчунавања интеграла једноставнијих функција (на пример, за $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$);

(3°) код интеграције функција чије су вредности познате само на дискретном скупу тачака (на пример, вредности функције су добијене експериментално).

2.2. Лагранжов интерполациони полином

Нека је функција f дата својим вредностима $f_i = f(x_i)$ у тачкама $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$ и нека је

$$q_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i). \tag{2.1}$$

Лагранжов интерполациони полином $L_n f$ је јединствени полином степена највише $n-1$ који у тачкама x_i за $i = 1, \ldots, n$ узима вредности $f(x_i)$. Тај полином је дат формулом

$$L_n f(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) f(x_i), \tag{2.2}$$

где су *основни Лагранжови полиноми*

$$l_i(x) = \frac{q_n(x)}{q_n'(x_i)(x - x_i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

2.2.1. Грешка интерполације за аналитичке функције

За аналитичке функције, остатак Лагранжове интерполације

$$r_n(f; z) = f(z) - L_n f(z)$$

се може изразити експлицитно коришћењем Кошијеве теореме о резидууму.

Теорема 2.1. Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни $\mathbb{C}$ и нека чворови $x_1, \ldots, x_n$ леже у њеној унутрашњости. Ако је f аналитичка функција у области $\mathcal{D}$ у чијој се унутрашњости налази крива Γ, тада важи

$$r_n(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{q_n(z)}{q_n(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \operatorname{int} \Gamma. \tag{2.4}$$

Доказ. Дефинишимо функцију $\zeta \mapsto F(\zeta)$,

$$F(\zeta) = \frac{q_n(z)}{q_n(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

која има просте полове у тачкама z и x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ са резидуумима $f(z)$ и $-l_k(z) f(x_k)$, редом. Овде су $l_k(z)$ основни Лагранжови полиноми. Применом теореме о резидууму добијамо

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma F(\zeta) d\zeta = f(z) - \sum_{k=1}^{n} l_k(z) f(x_k) = f(z) - L_n f(z).$$

□

Последица 2.1.

$$L_n f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{q_n(\zeta) - q_n(z)}{q_n(\zeta)(\zeta - z)} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \operatorname{int} \Gamma. \tag{2.5}$$

Доказ. Резултат следи одузимањем (2.4) од $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. □

2.2.2. Рунгеов феномен

Важно питање је када низ интерполационих полинома $L_n(f)$ за непрекидне функције f конвергира ка f кад $n \to \infty$. Наредни пример је познат као *Рунгеов феномен* и у њему вредности добијене помоћу Лагранжовог интерполационог полинома дивергирају (видети [54] стр. 38-53).

Посматрајмо функцију

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1] \tag{2.6}$$

и њен Лагранжов полином $L_{10}(f)$ са једнако размакнутим чворовима.

Рунге је показао да за функцију $f_a(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}$ и $|a| \leqslant \frac{1}{5}$ важи

$$\|f_a - L_n(f_a)\| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f_a - L_n(f_a)| \to +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Ова особина је последица понашања функције $f(x)$ у комплексној равни ван интервала интеграције $[a, b] = [-1, 1]$.

Нека је f аналитичка функција у области $\mathcal{D}$ у комплексној равни у чијој се унутрашњости налази интервал $[a,b]$. Тада на основу теореме 2.1 важи

$$f(x)-p_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-x}\prod_{k=0}^{n}\frac{x-x_k}{z-x_k}dz$$

где је Γ граница области $\mathcal{D}$. Ако се изабере $r>|b-a|$,

$$\mathcal{D}=\{z \mid (\exists\, x\in[a,b])|z-x|\leqslant r\},$$

и $M=\max\limits_{z\in\mathcal{D}}|f(z)|$, следи да је

$$|f(x)-p_n(x)|\leqslant\left(r+\frac{b-a}{\pi}\right)M\cdot\left(\frac{b-a}{r}\right)^{n+1},$$

што тежи нули када $n\to\infty$. Дакле, при овим условима низ полинома p_n равномерно конвергира ка функцији f. Они нису испуњени за функцију (2.6), јер она има полове, па није аналитичка у области $\mathcal{D}$ ни за једно $r>2$.

2.3. Ермитов интерполациони полином

Посматрајмо сада општији проблем интерполације. Претпоставимо да су познате вредности

$$f(x_i),f'(x_i),\ldots,f^{(k_i-1)}(x_i),\quad i=1,\ldots,m,$$

функције f у различитим тачкама $x_1,\ldots,x_m\in[a,b]$, при чему је $k_1+\cdots+k_m=n$. Треба одредити полином $P(x)$ степена $n-1$ за који важи

$$P^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)=f_i^j,\quad j=0,1,\ldots,k_i-1,\quad i=1,\ldots,m. \tag{2.7}$$

Нека је $q_n(x)=\prod_{i=1}^m(x-x_i)^{k_i}$ и

$$l_{ij}=q_n(x)\frac{(x-x_i)^{j-k_i}}{j!}\frac{d^{(k_i-j-1)}}{dx^{(k_i-j-1)}}\left[\frac{(x-x_i)^{k_i}}{q_n(x)}\right]_{x=x_i}.$$

Јединствени полином степена $n-1$ који задовољава услове (2.7) је облика

$$P(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{k_i-1}f_i^j l_{ij}(x)$$

и назива се *Ермитов* интерполациони полином (видети [2], стр. 37).

Формула (2.5) за остатак Лагранжове интерполације за аналитичке функције важи и када чворови $x_1,\ldots,x_n$ нису различити и описује интерполациони полином у општијем случају Ермитове интерполације. Ради једноставности, претпоставимо да је $x_1=x_2$ и да се остали чворови међусобно разликују. Тада је

$$q_n(z)=(z-x_1)^2(z-x_3)\cdots(z-x_n),$$

па је $q_n(x_1) = 0$ и $q_n'(x_1) = 0$. Из формуле (2.5) следи

$$L_n f(x_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{q_n(\zeta)}{q_n(\zeta)(\zeta - x_1)} f(\zeta) d\zeta = f(x_1)$$

и

$$L_n' f(x_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q_n(\zeta) - q_n(z)}{\zeta - z} \right)_{z=x_1} \frac{f(\zeta)}{q_n(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x_1)^2} d\zeta = f'(x_1).$$

Са друге стране, једноставно се показује да је $L_n f(x_i) = f(x_i)$ за $i = 3, \ldots, n$, па је $L_n f$ тражени интерполациони полином.

2.4. Интерполационе квадратурне формуле

Нека је $d\mu$ позитивна мера чији је носач бесконачан скуп и за коју постоје сви моменти и коначни су. Слично као за полиноме, за реалне функције $f, g \in L^2(d\mu)$ уводимо скаларни производ

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) d\mu(x). \tag{2.8}$$

Квадратурна формула у односу на меру $d\mu$ је формула облика

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.9}$$

где сума

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{2.10}$$

представља апроксимацију интеграла

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x),$$

а $R_n(f)$ је одговарајућа грешка. Тачке x_k, за које претпостављамо да су међусобно различите, називамо *чворовима*, а коефицијенте A_k *тежинама* квадратурне формуле (2.9).

Кажемо да квадратурна формула (2.9) има (алгебарски) *степен тачности* d ако је тачна кад год је f полином степена не већег од d.

Нека је $d\mu(x) = w(x)dx$, где је тежинска функција $w(x)$ ненегативна и интеграбилна. У општем случају, да бисмо апроксимирали интеграл

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x) dx$$

за непрекидну функцију на $[-1, 1]$, можемо посматрати $Q_n(f)$ као линеарни функционал из простора $C[-1, 1]$ у $\mathbb{R}$. Норма функционала Q_n,

$$\|Q_n\| = \|Q_n\|_{C[-1,1]\to\mathbb{R}} = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |Q_n(f)| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|, \tag{2.11}$$

важна је за конвергенцију низа $Q_n(f)$ интегралу $I(f)$.

Дефиниција 2.1. Кажемо да низ квадратурних сума $\{Q_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *конвергира* ако и само ако је
$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \lim_{n\to\infty}[I(f) - Q_n(f)] = 0.$$
Низ $\{Q_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ је *стабилан* ако и само ако је $\sup_n \|Q_n\| < +\infty$ (*није стабилан* ако и само ако је $\sup_n \|Q_n\| = +\infty$).

Наводимо класичну теорему о униформној ограничености фамилије оператора.

Теорема 2.2. (Банах-Штајнхаус) Нека је X Банахов простор, Y нормиран простор, а $\mathcal{F}$ нека фамилија ограничених линеарних оператора из X у Y. Ако за свако $x \in X$ важи $\sup_{A\in\mathcal{F}} \|Ax\| < \infty$, онда је
$$\sup_{A\in\mathcal{F}} \|A\| < \infty.$$

Примедба 2.1. Ако је $\sup_n \|Q_n\| = +\infty$, тада према теореми Банах-Штајнхауса постоји функција $f_0 \in C[-1, 1]$ таква да је $\lim_{n\to\infty} R_n(f_0) = \pm\infty$. Другим речима, низ квадратурних сума који није стабилан не може конвергирати за све непрекидне функције. Низ квадратурних сума $Q_n(f)$ конвергира ако и само ако је стабилан и конвергира на подскупу густом у $C[-1, 1]$.

Познато је да се за датих n међусобно различитих чворова $x_1, \ldots, x_n$ увек може постићи степен тачности $d = n - 1$ интерполацијом у тим чворовима и интеграцијом интерполационог полинома. Интеграцијом Лагранжове интерполационе формуле
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x)f(x_k) + r_n(f; x),$$
где су функције $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ дате формулом (2.3), добијамо квадратурну формулу (2.9). При томе је
$$A_k = \frac{1}{q_n'(x_k)} \int_{\mathbb{R}} \frac{q_n(x)}{x - x_k}\, d\mu(x), \quad k = 1, \ldots, n \tag{2.12}$$
и
$$R_n(f) = \int_{\mathbb{R}} r_n(f; x)d\mu(x).$$

Квадратурна формула добијена на овај начин има степен тачности $n-1$ и позната је као *интерполациона квадратурна формула.* Формулу
$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.13}$$
са датим чворовима $x_k \in [-1, 1]$ називамо *тежинска Њутн-Коутсова квадратурна формула.* За $w(x) = 1$ и једнако размакнуте чворове $x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, добија се *класична Њутн-Коутсова квадратурна формула.*

Да бисмо доказали главно тврђење о конвергенцији интерполационих квадратурних формула, наводимо два класична помоћна тврђења о апроксимацији непрекидне функције полиномима (видети [54]).

Теорема 2.3. Нека је f реална функција, дефинисана и непрекидна на затвореном и ограниченом интервалу $[a, b]$. Тада за дато $\varepsilon > 0$ постоји полином p за који важи

$$\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

при чему је $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Према претходној теореми, свака функција $f \in C[a, b]$ се може произвољно добро апроксимирати из скупа свих полинома. Ипак, ако посматрамо само полиноме до одређеног степена, тада то више не важи. Зато је важно утврдити колико се добро дата функција $f \in C[a, b]$ може апроксимирати полиномима степена не већег од неког фиксног природног броја $n \geqslant 0$.

За дату функцију $f \in C[a, b]$ и фиксирано $n \geqslant 0$, полином $p_n \in \mathcal{P}_n$ за који је

$$\|f - p_n\|_\infty = \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_\infty$$

назива се *полином најбоље униформне апроксимације степена* n *функцији* f. За такав полином важи следеће тврђење.

Теорема 2.4. За дату функцију $f \in C[a, b]$ постоји полином $p_n \in \mathcal{P}_n$ такав да важи

$$\|f - p_n\|_\infty = \min_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_\infty.$$

Сада наводимо главно тврђење (видети [19]).

Теорема 2.5. Свака интерполациона квадратурна формула (2.13) за коју је $A_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n$, конвергира за све непрекидне функције.

Доказ. Приметимо да је низ $Q_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ стабилан, јер је

$$\|Q_n\| = \sum_{k=1}^n |A_k| = \sum_{k=1}^n A_k = \int_{-1}^1 w(x)dx = \mu_0 < +\infty.$$

Како је $R_n(f) = 0$ за све $f \in \mathcal{P}_{n-1}$, за полином најбоље униформне апроксимације $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ и свако $f \in C[-1, 1]$ важи

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= |R_n(f - p_{n-1})| \\ &\leqslant \int_{-1}^1 |f(x) - p_{n-1}(x)| w(x)dx + \sum_{k=1}^n A_k |f(x_k) - p_{n-1}(x_k)| \\ &\leqslant 2E_{n-1}(f)_\infty \mu_0, \end{aligned}$$

где грешка апроксимације $E_{n-1}(f)_\infty = \|f - p_{n-1}\|_\infty$ тежи нули кад $n \to \infty$. □

У случају класичних Њутн-Коутсових квадратурних формула, претходна теорема се не може применити јер су неки коефицијенти $A_k = A_k^{(n)}$ за $n \geqslant 8$ негативни. Испоставља се да низ $\{Q_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ не конвергира за све непрекидне функције. Заиста, овде се интеграли Лагранжов интерполациони полином, а у подсекцији 2.2.2 је показано да вредности добијене помоћу Лагранжовог интерполационог полинома могу да дивергирају.

Размотримо сада питање степена тачности квадратурне формуле (2.9) (видети [19]).

Теорема 2.6. За дато $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, квадратурна формула (2.9) има степен тачности $d = n - 1 + m$ ако и само ако важи:

(1°) формула (2.9) је интерполациона;

(2°) полином $q_n(x)$ дат формулом (2.1) задовољава

$$(p, q_n) = \int_{\mathbb{R}} p(x) q_n(x) d\mu(x) = 0 \quad \text{за све} \quad p \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

Доказ. Услови (1°) и (2°) су очигледно неопходни. Да бисмо показали да су они и довољни, узмимо произвољно $u \in \mathcal{P}_{n-1+m}$ и запишимо га у облику

$$u(x) = p(x) q_n(x) + r(x),$$

где је $p \in \mathcal{P}_{m-1}$ и $r \in \mathcal{P}_{n-1}$. Како је

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x) q_n(x) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}} r(x) d\mu(x),$$

по ортогоналности услова (2°) (у односу на скаларни производ (2.8)), први интеграл на десној страни је нула. Према услову (1°) други интеграл на десној страни се може изразити тачно као сума $Q_n(r)$, па имамо

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k u(x_k),$$

јер је $r(x_k) = u(x_k)$ за све $k = 1, \ldots, n$. Дакле, $R_n(u) = 0$. □

2.5. Гаусове квадратурне формуле

Према теореми 2.6, квадратурна формула (2.9) у односу на позитивну меру $d\mu(x)$ има максималан алгебарски степен тачности $2n - 1$, што значи да је оптимално узети $m = n$. Случај $m = n + 1$ би на основу услова (2°) подразумевао ортогоналност $(p, q_n) = 0$ за све $p \in \mathcal{P}_n$, што је немогуће за $p = q_n$.

Квадратурна формула (2.9) са максималним степеном тачности $2n - 1$ је позната као *Гаусова* или *Гаус-Кристофелова квадратурна формула* у односу на меру $d\mu$. Овај чувени метод нумеричке интеграције је открио Гаус 1814. Занимљиво је да је за $d\mu(x) = dx$ Гаус одредио параметре квадратурне формуле - чворове x_k и тежине A_k, $k = 1, \ldots, n$, за све $n \leqslant 7$.

Дакле, за $m = n$ из услова ортогоналности (2°) теореме 2.6 следи да полином q_n мора бити (моничан) ортогонални полином у односу на меру $d\mu$. Онда су чворови x_k нуле полинома $q_n(x) = \pi_n(d\mu; x)$. Одговарајуће тежине A_k (Кристофелови бројеви) су раније дати формулом (1.27), а могу се изразити формулом (1.30). Тиме је доказана наредна теорема (видети [19]).

Теорема 2.7. Параметри у Гаусовој квадратурној формули са n чворова у односу на позитивну меру $d\mu$ су

$$x_k = \tau_k^{(n)}, \quad A_k = \lambda_{n,k} = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_\nu(\tau_k^{(n)})]^2 \right)^{-1} > 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Другим речима, чворови су нуле ортогоналог полинома $\pi_n(x)$, а тежине су вредности Кристофелове функције (1.28) у тим нулама.

2.5.1. Конструкција Гаусове квадратурне формуле

Потребни параметри за конструкцију Гаусове квадратурне формуле x_i и A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, се могу добити решавањем система једначина

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i^k = \mu_k \quad \text{за} \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

где су μ_k моменти тежинске функције w. Међутим, овакав приступ није погодан, пре свега због *слабе условљености* овог система - мале промене улазних величина могу да изазову велике промене у решењу.

Карактеризација Гаусове квадратурне формуле помоћу сопствених вредноси и вектора Јакобијеве матрице је у основи наредних метода. Најпопуларнији међу њима су извели Голуб и Велш ([11]) и он се састоји у одређивању сопствених вредности и прве компоненте сопственог вектора Јакобијеве матрице. Њихова процедура је имплементирана у неколико програмских пакета, укључујући и најпознатији ORTHPOL ([7]).

Теорема 2.8. Чворови $\tau_k^{(n)}$ Гаусове квадратурне формуле (2.9) су сопствене вредности Јакобијеве матрице

$$J_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

и тежине A_k су

$$A_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \tag{2.14}$$

где је $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu$ и $v_{k,1}$ је прва компонента нормализованог сопственог вектора v_k који одговара сопственој вредности $\tau_k^{(n)}$.

Доказ. Чворови $\tau_k^{(n)}$ су нуле полинома $\pi_n(\cdot)$, које су, према теореми 1.8, сопствене вредности матрице J_n. Резултат за тежине следи комбиновањем резултата теореме 2.7

$$A_k = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_\nu(\tau_k^{(n)})]^2 \right)^{-1},$$

и последице 1.1

$$\beta_0 v_{k,1}^2 = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} [\tilde{\pi}_\nu(\tau_k^{(n)})]^2 \right)^{-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где је компонента $v_{k,1}$ описана у исказу теореме. $\square$

2.6. Гаус-Радауове и Гаус-Лобатоове формуле

Сада ћемо размотрити један тип квадратурних формула веома сличних Гаусовим. Претпоставимо да за носач $[a, b]$ мере $d\mu$ важи $a > -\infty$ и $b \leqslant \infty$. Тада можемо узети да крај интервала a буде чвор квадратурне формуле. Штавише, ако је $b < \infty$, тада међу чворове можемо укључити и a и b. То је некада погодно урадити, нарочито ако је функција једнака нули у тим чворовима.

2.6.1. Гаус-Радауове квадратурне формуле

Посматрајмо функцију $g(x)$ дату једначином

$$f(x) = f(a) + (x - a)g(x).$$

Тада је

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = f(a)\mu_0 + \int_a^b g(x)(x-a)d\mu(x),$$

где је $\mu_0 = \int_a^b d\mu(x)$. Ако конструишемо Гаусову квадратурну формулу са n чворова у односу на меру $d\mu_1(x) = (x - a)d\mu(x)$, добијамо

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = \mu_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k^G g(x_k^G) + R_n^G(d\mu_1; g),$$

где су чворови $x_k^G = x_k^G(d\mu_1)$ нуле ортогоналног полинома $\pi_n(d\mu_1; x)$, тежине су $A_k^G = \lambda_n(d\mu_1; x_k^G) > 0$ за $k = 1, 2, \dots, n$, а $R_n^G(d\mu_1; g)$ је одговарајућа грешка.

На овај начин добијамо *Гаус-Радауову квадратурну формулу*

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = A_0^R f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k^R f(x_k^R) + R_{n,1}^R(d\mu; f), \tag{2.15}$$

са чворовима $x_0^R = a,\ x_k^R = x_k^G,\ k = 1, \dots, n$ и тежинама A_k^R,

$$A_0^R = \mu_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k^R, \quad A_k^R = \frac{A_k^G}{x_k^G - a}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Формула (2.15) има алгебарски степен тачности $2n$.

Примедба 2.2. Чворови и тежине формуле (2.15) се могу добити малом модификацијом Голуб-Велшовог алгоритма из теореме 2.8. Наиме, матрица $J_n(d\mu)$ треба да се модификује тако да се добије следећа матрица реда $n+1$:

$$J_{n+1}^R(d\mu) = \begin{bmatrix} J_n(d\mu) & \sqrt{\beta_n}\mathbf{e}_n \\ \sqrt{\beta_n}\mathbf{e}_n^T & \alpha_n^R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = [0\ 0 \ldots\ 1]^T \in \mathbb{R}^n,$$

где је

$$\alpha_n^R = a - \beta_n \frac{\pi_{n-1}(d\mu; a)}{\pi_n(d\mu; a)}.$$

2.6.2. Гаус-Лобатоове квадратурне формуле

Посматрајмо функцију $g(x)$ дату једначином

$$f(x) - \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = (x-a)(b-a)g(x).$$

Нека је $d\mu_{1,1}(x) = (x-a)(x-b)d\mu(x)$ нова мера. Тада важи

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = \frac{f(a)}{b-a}\int_a^b (b-x)d\mu(x) + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)d\mu(x) + \int_a^b g(x)d\mu_{1,1}(x).$$

Гаусова квадратурна формула са n чворова у односу на меру $d\mu_{1,1}$ је

$$\int_a^b g(x)d\mu_{1,1}(x) = \sum_{k=1}^n A_k^G g(x_k^G) + R_n^G(d\mu_{1,1}; g),$$

где су чворови $x_k = x_k^G(d\mu_{1,1})$ нуле ортогоналног полинома $\pi_n(d\mu_{1,1}; x)$, тежине су $A_k^G = \lambda_n(d\mu_{1,1}; x_k^G) > 0$ за $k = 1, 2, \ldots, n$, а $R_n^G(d\mu_{1,1}; g)$ је одговарајућа грешка. Одавде се добија *Гаус-Лобатоова квадратурна формула*

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = A_0^L f(a) + \sum_{k=1}^n A_k^L f(x_k^L) + A_{n+1}^L f(b) + R_{n,1,1}^L(d\mu; f), \tag{2.16}$$

са чворовима $x_0^L = a,\ x_k^L = x_k^G,\ k = 1, \ldots, n,\ x_{n+1}^L = b$ и тежинама

$$A_k^L = \frac{A_k^G}{(x_k^G - a)(b - x_k^G)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$A_0^L = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b (b-x)d\mu(x) - \sum_{k=1}^n (b - x_k^G)A_k^L\right],$$

$$A_{n+1}^L = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b (x-a)d\mu(x) - \sum_{k=1}^n (x_k^G - a)A_k^L\right].$$

Формула (2.16) има алгебарски степен тачности $2n+1$.

Примедба 2.3. Чворови и тежине формуле (2.16) се могу добити малом модификацијом Голуб-Велшовог алгоритма из теореме, из сопствених вредности и вектора матрице реда $n+2$:

$$J_{n+2}^L(d\mu) = \begin{bmatrix} J_{n+1}(d\mu) & \sqrt{\beta_{n+1}^L}\mathbf{e}_{n+1} \\ \sqrt{\beta_{n+1}^L}\mathbf{e}_{n+1}^T & \alpha_{n+1}^L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{n+1} = [0\ 0 \ldots\ 1]^T \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где су α_{n+1}^L и β_{n+1}^L дати следећим системом једначина:

$$\begin{bmatrix} \pi_{n+1}(d\mu;a) & \pi_n(d\mu;a) \\ \pi_{n+1}(d\mu;b) & \pi_n(d\mu;b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n+1}^L \\ \beta_{n+1}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\pi_{n+1}(d\mu;a) \\ b\pi_{n+1}(d\mu;b) \end{bmatrix}.$$

2.7. Гаус-Кронродове квадратурне формуле

Гаусова квадратурна формула (2.9) са n чворова се може проширити на квадратурну формулу са $2n+1$ чворова додавањем $n+1$ чворова који припрадају носачу мере $d\mu$ и испреплетани су са Гаусовим чворовима. Додатне чворове бирамо тако да максимизујемо степен тачности. Ову идеју је први пут спровео Кронрод у случају $d\mu = dx$ да би проценио грешку Гаусове квадратурне формуле, користећи резултат проширене формуле за референтну вредност интеграла. Како су n вредности функције већ израчунате за Гаусову квадратурну формулу, потребно је одредити само $n+1$ додатних вредности ради процене грешке. Исто толико посла изискивало би одређивање Гаусове квадратурне формуле са $n+1$ чворова, али она у општем случају даје знатно мање тачне резултате од проширене формуле са $2n+1$ чворова. Дакле, проширена формула је облика

$$\int_{-1}^{1} f(x)d\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^K f(\tau_\nu^G) + \sum_{\mu=1}^{n+1} \lambda_\mu^{*K} f(\tau_\mu^K) + R_n^K(f), \tag{2.17}$$

где су τ_ν^G Гаусови чворови, а параметре λ_ν^K и λ_μ^{*K}, као и чворове τ_μ^K, треба одредити. Како је укупно $3n+2$ параметра, очекујемо да их је могуће изабрати тако да се постиже алгебарски степен тачности (барем) $3n+1$, тј. тако да је

$$R_n^K(f) = 0 \quad \text{за} \quad f \in \mathcal{P}_{3n+1}. \tag{2.18}$$

Формула облика (2.17) која задовољава претходни услов је *Гаус-Кронродова квадратурна формула*, а чворови τ_μ^K су *Кронродови чворови*. Нека је

$$\pi_{n+1}^K(x) = \prod_{\mu=1}^{n+1}(x - \tau_\mu^K).$$

Према теореми 2.6, да би за формулу (2.17) важило (2.18), мора бити

$$\int_{-1}^{1} \pi_{n+1}^K(x)p(x)\pi_n(x)d\mu(x) = 0 \quad \text{за све} \quad p \in \mathcal{P}_n. \tag{2.19}$$

Претходни услов даје нову врсту ортогоналности, јер је полином π_{n+1}^K степена $n+1$ ортогоналан на све полиноме мањег степена у односу на меру $\pi_n(x)d\mu(x)$, која не зависи само од n, већ се и мења на носачу $d\mu$. Ти полиноми су познати као *Стилтјесови полиноми* степена $n+1$ у односу на меру $d\mu$.

Када су одређени Кронродови чворови и ниједан од њих се не поклапа са Гаусовим чворовима, тежине се могу израчунати на основу интерполационог својства формуле.

Теорема 2.9. Ако је мера $d\mu$ позитивна, тада Стилтјесови полиноми π_{n+1}^K постоје и јединствени су за свако $n \geqslant 1$.

Доказ. Ако запишемо $\pi_{n+1}^K(x) = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, тада је услов (2.19) облика

$$\int_{-1}^{1} \left(x^{n+l+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+l} \right) \pi_n(x) d\mu(x) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n,$$

што је линеарни систем по коефицијентима c_k. Матрица система, по ортогоналности, има ненула елементе само у десном доњем троуглу, а на дијагонали су интеграли $\int_{-1}^{1} x^n \pi_n(x) d\mu(x) = \|\pi_n\|_{d\mu}^2 > 0$. Дакле, систем има јединствено решење. □

Иако је јединственост гарантована, Кронродови чворови не морају бити чак ни реални, а још мање садржани у носачу мере и испреплетани са Гаусовим чворовима. На пример, у случају Гаус-Лагерове и Гаус-Ермитове интерполације, непостојање реалне Гаус-Кронродове квадратурне формуле показано је у раду [15]). Гаус-Кронродове формуле су испитиване и за Гегенбауерове тежинске функције $w(x) = (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ на интервалу $[-1, 1]$ кад је $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$. Сеге је показао у [55] да су тада сви Кронродови чворови унутар интервала $[-1, 1]$ и да су испреплетани са Гаусовим чворовима. Рабинович је у [44] показао да је степен тачности $3n+1$ (за парно n, а за непарно n је $3n+2$ због симетрије). Даље је Монегато у [28] показао да су све тежине позитивне за $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а Персторфер и Петрас у [38] да за $\lambda > 3$ и довољно велико n овакве позитивне формуле не постоје. Аналогни резултати за Јакобијеве тежинске функције $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ могу се наћи у [39] - између осталог, да Гаус-Кронродове формуле не постоје за довољно велико n када је $\min\{\alpha, \beta\} \geqslant 0$ и $\max\{\alpha, \beta\} > \frac{5}{2}$.

Посебно би требало поменути четири Чебишовљеве тежинске функције, које су специјални случајеви Јакобијевих тежинских функција за $|\alpha| = |\beta| = 1/2$, јер тада Гаус-Кронродова квадратурна формула има специјални облик са познатим чворовима и тежинама (видети [34]). За Чебишовљеву тежинску функцију прве врсте, тј. када је $\alpha = \beta = -1/2$, у случају $n = 1$ Гаус-Кронродова квадратурна формула је Гаусова квадратурна формула са 3 чвора, а у случају $n \geqslant 2$ ова квадратурна формула је заправо Гаус-Лобатоова квадратурна формула са $2n+1$ чворова за исту тежинску функцију. У другом случају је $\tau_1^K = -1$ и $\tau_{n+1}^K = 1$. За Чебишовљеву тежинску функцију друге врсте, тј. када је $\alpha = \beta = 1/2$, Гаус-Кронродова квадратурна формула је Гаусова квадратурна формула за исту тежинску функцију. Коначно, за Чебишовљеве тежинске функције треће и четврте врсте, тј. када је $\alpha = \mp 1/2$, $\beta = \pm 1/2$, Гаус-Кронродова квадратурна формула се поклапа са Гаус-Радауовом квадратурном формулом за исту тежинску функцију, са додатим чвором 1 и -1, редом.

Размотримо сада питање конструкције полинома π_{n+1}^K. За $w(x) = 1$, полиноме π_{n+1}^K је још 1894. године посматрао Стилтјес, који је за $n \geqslant 1$ показао да важи

$$\frac{1}{\kappa_n(x)} = \pi_{n+1}^K + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{x^i}, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

где је κ_n Лежандрова функција друге врсте. Функција $y(x) = \kappa_n(x)$ задовољава Лежандрову диференцијалну једначину

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

и има облик

$$\kappa_n(x) = A(x) \ln \frac{1+x}{1-x} + B(x),$$

где су A и B полиноми степена n и $n-1$, редом.

Општи метод за конструкцију Гаус-Кронродових формула (у случају када оне имају реалне чворове и позитивне тежине) извео је Лаури у [18].

2.8. Гаус-Туранове квадратурне формуле

Први који је применио Гаусов метод на квадратурне формуле које укључују изводе функције био је Туран (1950).

Претпоставимо да сваки чвор има вишеструкост $r \geqslant 1$ и да је

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} [\lambda_{\nu,0} f(\tau_\nu) + \lambda_{\nu,1} f'(\tau_\nu) + \cdots + \lambda_{\nu,r-1} f^{(r-1)}(\tau_\nu)] + R_n(f). \tag{2.20}$$

Сада се подинтегрална функција апроксимира Ермитовим полиномом, па за дати скуп различитих чворова τ_ν претходна формула има степен тачности $d = rn - 1$. Зато се она зове *интерполациона* ако је $R(f) = 0$ за све $f \in \mathcal{P}_{rn-1}$.

Слично као у теореми 2.6, формула (2.20) има степен тачности $d = rn - 1 + k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, ако и само ако је интерполациона и важи

$$\int_{\mathbb{R}} [q_n(x)]^r p(x) d\mu(x) = 0 \quad \text{за све} \quad p \in \mathcal{P}_{k-1},$$

где је $q_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x - \tau_\nu)$. Полином $[q_n(x)]^r$ мора бити ортогоналан на све полиноме степена не већег од $k-1$, што зовемо *степена ортогоналност.* Осим за $k = 0$, број r мора бити непаран, јер је иначе $\int_{\mathbb{R}} [q_n(x)]^r d\mu(x) > 0$ и $[q_n(x)]^r$ не може бити ортогоналан на константу. Зато узмимо да је

$$r = 2s + 1, \quad s \geqslant 0,$$

па формула (2.20) добија облик

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\sigma=0}^{2s} \lambda_\nu^{(\sigma)} f^{(\sigma)}(\tau_\nu) + R_{n,s}(f).$$

Тада мора бити $k \leqslant n$, јер би иначе за $p = q_n$ важило $\int_{\mathbb{R}}[q_n(x)]^{r+1}d\mu(x) = 0$. Максималан степен тачности је $d = (2s+2)n - 1$ и постиже се ако важи

$$\int_{\mathbb{R}}[q_n(x)]^{2s+1}p(x)d\mu(x) = 0 \quad \text{за све} \quad p \in \mathcal{P}_{n-1},$$

а тежине $\lambda_\nu^{(\sigma)}$ су одређене Ермитовом интерполацијом. Описана квадратурна формула је *Гаус-Туранова квадратурна формула.* За одговорајуће полиноме $q_n(x)$ важи наредна теорема (за доказ видети [8]).

Теорема 2.10. Све нуле полинома $q_n(x)$ су реалне, просте и садржане у носачу мере $d\mu$. Нуле полинома $q_{n+1}(x)$ се преплићу са нулама полинома $q_n(x)$.

На основу претходне теореме, видимо да Гаус-Туранова квадратурна формула има многе особине које има и Гаусова квадратурна формула. Ипак, позитивност тежина не важи увек за Гаус-Туранове квадратурне формуле. За $s = 1$, Туран је показао да је $\lambda_\nu^{(2)} > 0$, док је за опште s у [21] и [35] показано да је $\lambda_\nu^{(\sigma)} > 0$ за парно $\sigma \geqslant 0$. Када је σ непарно, $\lambda_\nu^{(\sigma)}$ може у општем случају мењати знак.

2.9. Квадратурне формуле за Фуријеове коефицијенате

Један од класичних начина апроксимације функције f је помоћу парцијалне суме њеног Фуријеовог реда у односу на дати систем ортогоналних полинома $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)P_k(x).$$

Ако је $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ систем ортогоналних полинома на интервалу $[a, b]$ у односу на меру $d\mu(x)$, тада рачунање коефицијената

$$A_k(f) = \int_a^b P_k(x)f(x)d\lambda(x) \tag{2.21}$$

може захтевати употребу квадратурних формула. Примена Гаусове квадратурне формуле за n вредности интегранда $P_k(x)f(x)$, $k < 2n-1$, даје формулу која је тачна за све полиноме степена $2n-1-k$. Тада се поставља питање да ли постоји формула са n вредности функције f или њених извода која је тачна за полиноме f већег степена, као и који је највећи степен тачности који се може постићи са n израчунавања. Проучавајући ово питање за систем Чебишовљевих полинома прве врсте $\{T_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортогоналних на $[-1, 1]$ у односу на тежинску функцију $1/\sqrt{1-x^2}$, Мичели и Ривлин су у [20] открили чињеницу да је квадратурна формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n2^n}f'[\tau_1, \ldots, \tau_n] \tag{2.22}$$

тачна за све полиноме степена највише $3n-1$, где су $\tau_1, \ldots, \tau_n$ су нуле Чебишовљевог полинома прве врсте $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ за $x \in [-1, 1]$. Овде $g[x_1, \ldots, x_n]$ означава подељене разлике функције g у тачкама $x_1, \ldots, x_n$.

Претходна формула има највећи степен тачности међу формулама облика

$$\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k f'(x_k). \tag{2.23}$$

Јасно је да не постоји таква формула која је тачна за све полиноме степена $3n$. Заиста, она није тачна за полином

$$f(x) = T_n(x)(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2.$$

Јединственост квадратурне формуле (2.22) је показана у [22].

Посматрајмо сада формуле облика

$$\int_a^b P_k(x)f(x)d\lambda(x) \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\nu_j-1} c_{ji} f^{(i)}(x_j), \quad a < x_1 < \ldots < x_n < b, \tag{2.24}$$

где су ν_j дати природни бројеви (вишеструкости) и P_k је полином степена k. Нека је e_i најмањи ненегативан паран број који није мањи од $\nu_i - \mu_i$, где је μ_i вишеструкост нуле x_i полинома P_k. Приметимо да алгебарски степен тачности формуле (2.24) не прелази

$$e_1 + \cdots + e_n + k - 1,$$

јер формула није тачна за полином

$$(x-x_1)^{e_1} \cdots (x-x_n)^{e_n} P_k(x).$$

Ако је $P_k(x_i) \neq 0$, тада је $\mu_i = 0$. Приметимо да је у формули (2.21) P_k ортогоналан полином у односу на тежинску функцију $d\mu$ и зато су све његове нуле једноструке, па је $\mu_i \in \{0,1\}$. Из истог разлога као и у случају Гаус-Турanових формула, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ морају бити парни бројеви.

Квадратурна формула (2.24) се назива *гаусовска* ако је њен алгебарски степен тачности

$$e_1 + \cdots + e_n + k - 1.$$

Формула (2.22) је гаусовска јер је њен алгебарски степен тачности $3n-1$.

Слично формули (2.22), Фурије-Чебишовљеви коефицијенти се могу нумерички израчунати и применом формуле (2.24) за $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_n = 2s$, $s \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{2s-1} c_{ji} f^{(i)}(\tau_j). \tag{2.25}$$

Њен алгебарски степен тачности је $n(2s+1)-1$.

Посматрајмо још и Кронродово проширење претходне формуле (видети [26] и [27]):

$$\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{2s-1} B_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + \sum_{j=1}^{n+1} C_j f(\hat{\tau}_j). \tag{2.26}$$

Алгебарски степен тачности ове формуле је $2sn + 2n + 1$. Чворови τ_ν су исти као у (2.25), а чворови $\hat{\tau}_j$ су нуле моничног полинома

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}(T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)) = \frac{1}{2^{n-1}}(x^2 - 1)U_{n-1}(x),$$

где је $U_{n-1}(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$ Чебишовљев полином друге врсте степена $n - 1$.

2.10. Оцена грешке у квадратурној формули за аналитичке функције

Нека је Γ проста затворена крива као у теореми 2.1. Тада се, на основу поменуте теореме, грешка Гаусове квадратурне формуле

$$R_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(w)f(x_k)$$

може записати у облику

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma K_n(z)f(z)dz, \tag{2.27}$$

где је *језгро* дато помоћу

$$K_n(z) = \frac{1}{\pi_n(z)}\int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(x)w(x)}{z - x}dx, \quad z \notin [-1, 1]. \tag{2.28}$$

Овде су $\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - x_k)$ монични полиноми ортогонални у односу на меру $d\mu(x) = w(x)dx$. Применом Хелдерове неједнакости на (2.27) добијамо

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\|K_{n,s}\|_r \|f\|_{r'},$$

при чему је $1 \leq r \leq +\infty$, $1/r + 1/r' = 1$ и

$$\|f\|_r = \begin{cases} \left(\oint_\Gamma |f(z)|^r |dz|\right)^{1/r}, & 1 \leq r < +\infty, \\ \max\limits_{z\in\Gamma} |f(z)|, & r = +\infty. \end{cases}$$

Када је $r = +\infty$ и $r' = 1$ добија се оцена

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi}\left(\max_{z\in\Gamma}|K_{n,s}(z)|\right)\left(\max_{z\in\Gamma}|f(z)|\right), \tag{2.29}$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина криве Γ. Претходном формулом је дата L^∞-*оцена грешке.*

Са друге стране, за $r = 1$ и $r' = +\infty$ следи оцена

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\oint_\Gamma |K_{n,s}(z)||dz|\right)\left(\max_{z\in\Gamma}|f(z)|\right), \tag{2.30}$$

која је јача од оцене (2.29). Добијена оцена је L^1-*оцена грешке.*

За криву Γ се често бирају кружница $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}, r > 1$, или елипса $\mathcal{E}_\rho$ са жижама ± 1 и збиром полуоса $\rho > 1$, тј.

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{1}{2}\left(u + u^{-1}\right),\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}, \quad u = \rho\, e^{i\theta}. \tag{2.31}$$

2.11. Генерисање позитивних квадратурних формула

Нека је $d\mu$ позитивна мера и нека је $[a, b]$ најмањи затворени интервал који садржи носач мере $d\mu$, при чему је $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Претпостављамо да функција μ има бесконачно много тачака раста у овом интервалу. Ако је μ апсолутно непрекидна функција, онда је $d\mu(x) = w(x)\, dx$, где је $w(x) \geqslant 0$ тежинска функција.

Кажемо да је квадратурна формула

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + R_n(f) \tag{2.32}$$

позитивна ако су њене тежине λ_i позитивне. Квадратурну формулу називамо *унутрашњом* ако су сви њени чворови у затвореном интервалу $[a, b]$. Чворове ван интервала $[a, b]$ зовемо *спољашњим.*

У подсекцији 2.4 смо видели да позитивне квадратурне формуле конвергирају када $n \to \infty$. Таквим квадратурама се бавио Персторфер у раду [37] и овде ће бити приказани неки његови резултати.

Квадратурна формула (2.32) ће у општем случају имати мањи степен тачности од Гаусове квадратурне формуле. Називамо је $(2n-1-m, n, w)$-квадратурном формулом ако је тачна за све полиноме степена не већег од $2n - 1 - m$.

Кажемо да полином P_n степена n *генерише* $(2n - 1 - m, n, w)$-квадратурну формулу ако P_n има n једноструких нула $x_1 < \cdots < x_n$ у интервалу (a, b) и квадратурна формула максималног степена тачности са овим чворовима има степен тачности најмање $2n - 1 - m$. Са друге стране, знамо да полином P_n генерише $(2n - 1 - m, n, w)$-квадратурну фомулу ако и само ако је ортогоналан на све полиноме степена не већег од $n - 1 - m$.

Ако са $P^{[1]}_{n-1}(x)$ означимо придружени полином полиному $P(x)$ (као у подсекцијама 1.3 и 1.4), видимо да је

$$\lambda_i = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x_i)P_n'(x_i)} w(x)dx = \frac{P^{[1]}_{n-1}(x_i)}{P_n'(x_i)}\,,$$

где је

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Следи да су тежине λ_i позитивне ако и само ако су нуле полинома P_n и $P^{[1]}_{n-1}$ испреплетане.

На основу претходног може се формулисати следећа лема.

Лема 2.1. Нека је $m, n \in \mathbb{N}_0$. Полином P_n генерише позитивну $(2n-1-m, n, w)$-квадратурну формулу ако и само ако је полином P_n ортогоналан на све полиноме степена не већег од $n-1-m$, P_n има просте нуле у (a,b) и те нуле се преплићу са нулама полинома $P_{n-1}^{[1]}$.

За низове придружених полинома вишег реда важи релација

$$P_{n+1}^{[k]} = (x-\alpha_{k+1})P_n^{[k+1]} - \beta_{k+2}P_{n-1}^{[k+2]}.$$

Такође, за $2j \leqslant n$ важи

$$P_n^{[k]} = A \cdot P_{n-j}^{[k]} - B \cdot P_{n-j-1}^{[k]} \quad \Longleftrightarrow \quad A = P_j^{[n+k-j]},\ B = \beta_{n+k-j}P_{j-1}^{[n+k+1-j]}.$$

Показује се да важи

$$P_{n-1}P_{n-1}^{[1]} - P_nP_{n-2}^{[1]} = \beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1}.$$

Тако из испреплетаности нула полинома P_n и P_{n-1} следи испреплетаност нула P_n и $P_{n-1}^{[1]}$. Важи и да су нуле полинома $P_n^{[k]}$ реалне и испреплетане са нулама полинома $P_{n-1}^{[k]}$, као и са нулама полинома $P_{n-1}^{[k+1]}$.

Уведимо још систем ортогоналних полинома *у односу на позитивно дефинитан низ*. Ови полиноми не зависе од тежинске функције $w(x)$, већ само од одговарајућег низа. Ипак, постоје извесна ограничења за тај низ.

Нека је дат низ реалних бројева $\{c_i\}_{i=0}^N$. Таквом низу придружујемо линеарни функционал $\alpha_c : \mathcal{P}_N \to \mathbb{R}$,

$$\alpha_c\left(\sum_{i=0}^N a_ix^i\right) = \sum_{i=0}^N a_ic_i.$$

За низ $\{c_i\}_{i=0}^m$, $0 \leqslant m \leqslant N$, кажемо да је *позитивно дефинитан* на $[a,b]$, ако за произвољан полином $q \in \mathcal{P}_m$, $q \not\equiv 0$, важи да ако је

$$q(x) \geqslant 0 \text{ за } x \in [a,b], \quad \text{тада је} \quad \alpha_c(q) > 0.$$

Видимо да је тада и низ момената тежинске функције позитивно дефинитан.

Кажемо да је полином $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ ортогоналан у односу на позитивно дефинитан низ $\{c_i\}_{i=0}^m$, $2n-1 \leqslant m \leqslant N$, ако је

$$\alpha_c(x^kP_n(x)) = \sum_{i=0}^n a_ic_{k+i} = 0 \quad \text{за} \quad k = 0,\ldots,n-1.$$

Ортогонални полиноми у односу на позитивно дефинитан низ су међусобно повезани трочланом рекурентном релацијом.

Сада наводимо главно тврђење (видети [37]).

Теорема 2.11. Нека су $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leqslant n$, и нека је t_n моничан полином степена n. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) t_n генерише позитивну $(2n-1-m, n, w)$-квадратурну формулу;

(2) t_n је ортогоналан полином у односу на неки позитивно дефинитни низ $\{c_i\}_{i=0}^{2n-1}$ за који важи

$$c_i = \int_a^b x^i w(x)dx \quad \text{за} \quad i = 0, \ldots, 2n-1-m;$$

(3) t_n задовољава рекурентну везу

$$t_{i+1}(x) = (x - \tilde{\alpha}_i)t_i(x) - \tilde{\beta}_i t_{i-1}(x),$$

за $t_{-1} = 0$ и $t_0 = 1$, при чему је

$$\tilde{\beta}_i > 0, \quad \tilde{\alpha}_i = \alpha_i \;\text{ за }\; i \leqslant n - [\tfrac{m+1}{2}] \quad \text{и} \quad \tilde{\beta}_i = \beta_i \;\text{ за }\; i \leqslant n - [\tfrac{m}{2}],$$

и још $t_i(1) > 0$ и $(-1)^i t_i(-1) > 0$;

(4) за $l = [\frac{m+1}{2}]$, постоје монични полиноми q_l и g_{l-1} степена l и $l-1$ чије су све нуле једноструке, међусобно испреплетане и унутар интервала (a, b), за које важи

$$t_n = g_l \pi_{n-l} - \tilde{\beta}_{n-l} g_{l-1} \pi_{n-l-1},$$

при чему је

$$\tilde{\beta}_{n-i} > 0, \quad \tilde{\beta}_{n-i} = \beta_{n-i} \;\text{ за }\; m = 2i-1,$$

и $t_n(1) > 0$ и $(-1)^n t_n(-1) > 0$.

2.12. Усредњене квадратурне формуле

Посматрајмо Гаусову квадратурну формулу

$$Q_n^G(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) \tag{2.33}$$

на интервалу $[a, b]$ у односу на тежинску функцију w за интеграл

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx.$$

Важи

$$Q_n^G(p) = I(p), \quad p \in \mathcal{P}^{2n-1},$$

где је $\mathcal{P}^m$ скуп свих полинома степена не већег од m.

За процену грешке $(I - Q_n^G)(f)$ може се користити разлика $(A - Q_n^G)(f)$, где је A нека квадратурна формула степена већег од $2n-1$. Свака таква формула A захтева најмање $n+1$ додатних чворова, па ће она имати најмање $2n+1$ чворова. Класичан начин за конструкцију такве формуле A са $(2n+1)$ чворова је Гаус-Кронродова формула са степеном тачности најмање $3n+1$. Гаус-Кронродова формула је највећег могућег степена тачности када су чворови Гаусове квадратурне формуле $G_w^{(n)}$ укључени. Ипак, као што је већ поменуто раније, реална Гаус-Кронродова формула не постоји у општем случају.

Други приступ (видети [16], [17], [36]) је конструкција нове квадратурне формуле Q_{n+1} са $n+1$ чворова за функционал

$$I_\theta(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \theta Q_n^G(f),$$

за дато $\theta \in \mathbb{R}$, а потом коришћење усредњене формуле $Q_{2n+1} = \theta Q_n^G + Q_{n+1}$ да би се проценила грешка Q_n^G. Као специјалан случај, Лаури уводи у [17] анти-Гаусову квадратурну формулу Q_{n+1}^A,

$$(I - Q_{n+1}^A)(p) = -(I - Q_n^G)(p), \quad p \in \mathcal{P}^{2n+1}. \tag{2.34}$$

Усредњена формула

$$Q_{2n+1}^L = \frac{1}{2}(Q_n^G + Q_{n+1}^A), \tag{2.35}$$

такође уведена у [17], је усредњеног типа и има степен тачности најмање $2n+1$. Општија усредњена формула,

$$\frac{1}{2+\gamma}\big((1+\gamma)Q_n^G + Q_{n+1}^A\big), \quad \gamma > -1,$$

је посматрана у [5] за Лагерове и Ермитове тежинске функције. Ту је γ бирано тако да се повећа степен тачности. Те модификоване усредњене формуле су такође усредњеног типа и јединствене су усредњене формуле са максималним степеном тачности. Овде их озачавамо са Q_{2n+1}^{GF}.

Недавно, користећи резултате из [37] за карактеризацију позитивих квадратурих формула, Спалевић у раду [47] уводи нову квадратуру формулу са $(2n+1)$ чворова, коју називамо *уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула* и означавамо са Q_{2n+1}^S. У случају Лагерових и Ермитових тежиских фукција, испоставља се да се та формула поклапа са Q_{2n+1}^{GF}. Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула има степен тачности најмање $2n+2$, али за једну класу функција тај степен је $3n+1$, па се тада ова формула поклапа са Гаус-Кронродовом формулом (видети [49]). Даље, у [45] су уведена скраћења за уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле, $Q_{2n-r+1}^{(n-r)}$, где је $n \geqslant 2$ и $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Те формуле имају мање чворова, а степен тачности исти као уопштене усредњене Гаусове формуле. Зато се оне могу користити као замена када (реалне) Гаус-Кронродове формуле не постоје.

Према радовима [17], [47] и [4], поменуте усредњене Гаусове формуле имају реалне чворове и позитивне тежине, а највише два крајња чвора могу бити спољашња, тј. ван интервала интеграције. Зато остаје да се провери када је одговарајућа формула интернална, тј. када су сви чворови унутрашњи. Ова особина је посебно важна када интегранд није дефинисан ван интервала интеграције. За више класичих тежинских функција та интерналост је проверена (видети на пример [17] за анти-Гаусову формулу, [47] за уопштену усредњену Гаусову формулу и [4] за скраћења уопштених усредњених Гаусових формула).

Конструкција анти-Гаусове квадратурне формуле

Из формуле (2.34) видимо да је

$$Q_{n+1}^A(p) = 2I(p) - Q_n^G(p), \quad p \in \mathcal{P}_{2n+1}.$$

Следи да је Q_{n+1}^A Гаусова формула за линеарни функционал $2I - Q_n^G$. Чворови и тежине квадратурне формуле Q_{n+1}^A се зато могу добити применом наредног алгоритма.

1. Одредити коефицијенте α_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ и β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, који се појављују у рекурентној релацији (1.3) које задовољавају полиноми π_j ортогонални у односу на линеарни фукционал $2I - Q_n^G$. Као и раније, узимамо $\beta_0 = (2I - Q_n^G)(\pi_0)$.

2. Према теореми 2.8, чворови и тежине Гаусове квадратурне формуле се могу добити из Јакобијеве матрице J_n. Коефицијенти α_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ и β_j, $j = 1, \ldots, n$, се могу добити Стилтјесовим формулама

$$\alpha_j = \frac{(2I - Q_n^G)(x\pi_j^2)}{(2I - Q_n^G)(\pi_j^2)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$
$$\beta_j = \frac{(2I - Q_n^G)(\pi_j^2)}{(2I - Q_n^G)(\pi_{j-1}^2)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Нека је p_j низ ортогоналних полинома у односу на тежинску функцију $w(x)$ и нека он задовољава рекурентну релацију

$$p_{j+1}(x) = (x - a_j)p_j(x) - b_j p_{j-1}(x), \quad j = 0, 1, \ldots$$

где су

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1.$$

Као и раније, $b_0 = I(p_0)$, а остали коефицијенти су дати формулама

$$a_j = \frac{I(xp_j^2)}{I(p_j^2)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$
$$b_j = \frac{I(p_j^2)}{I(p_{j-1}^2)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Главно запажање је особина

$$(2I - Q_n^G)(p) = I(p),$$

$p \in \mathcal{P}^{2n-1}$, која следи из формуле (2.34), па је

$$\alpha_j = a_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\beta_j = b_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\pi_j = p_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Остаје само да се одреде α_n и β_n. Како су тачке $x_i^{(n)}$ у формули (2.33) нуле полинома π_n, резултат примене Гаусове формуле Q_n^G на било који израз чији је фактор π_n је једнак нули. Ако још приметимо да је степен полинома π_{n-1}^2 мањи од $2n-1$, добијамо

$$\alpha_n = \frac{I(xp_n^2)}{I(p_n^2)} = a_n$$
$$\beta_n = \frac{I(p_n^2)}{I(p_{n-1}^2)} = 2b_n.$$

Другим речима, узимамо исте коефицијете који се појављују у Гаусовој квадратурној формули Q_{n+1}^G, осим што је коефицијент β_n удвостручен.

Следећом теоремом (видети [17]) дате су особине анти-Гаусове квадратурне формуле.

Теорема 2.12. Анти-Гаусова формула Q_{n+1}^A има следеће особине:

(1) за тежине важи $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$;

(2) чворови ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, су реални и испреплетани са чворовима Гаусове квадратуре формуле Q_n^G, тј.

$$\xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \cdots < x_n < \xi_{n+1};$$

(3) унутрашњи чворови $\xi_2, \ldots, \xi_n$ леже унутар интервала интеграције;

(4) за чворове ξ_1 и ξ_{n+1} важи

$$\xi_1 \in [a, b] \quad \text{ако и само ако је} \quad \frac{p_{n+1}(a)}{p_{n-1}(a)} \geqslant b_n$$

и

$$\xi_{n+1} \in [a, b] \quad \text{ако и само ако је} \quad \frac{p_{n+1}(b)}{p_{n-1}(b)} \geqslant b_n,$$

где су p_j, $j = 0, 1, \ldots, n+1$, ортогонални полиноми у односу на полазну тежинску функцију.

Конструкција уопштене усредњене Гаусове формуле Q_{2n+1}^S

Спалевић у раду [47] уводи нову квадратурну формулу Q_{2n+1}^S која се може добити из тродијагоналне матрице $J_{2n+1}^S(w)$ конструисане на следећи начин:

(K1) горња квадратна подматрица реда $n+1$ је иста као Јакобијева матрица $J_{n+1}(w)$ за Гаусову квадратурну формулу са $n+1$ чворова;

(K2) доња квадратна подматрица реда l је иста као обрнута Јакобијева матрица за Гаусову квадратурну формулу са n чворова,

$$J_n^* = \begin{bmatrix} \alpha_{l-1} & \sqrt{\beta_{l-1}} & & 0 \\ \sqrt{\beta_{l-1}} & \alpha_{l-1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_1} \\ 0 & & \sqrt{\beta_1} & \alpha_0 \end{bmatrix}.$$

(K3) преостали елементи су исти као одговарајући елементи у Јакобијевој матрици за Гаусову квадратурну формулу са $n+2$ чвора. Дакле,

$$J^S_{2n+1} = \begin{bmatrix} J_{n+1} & \sqrt{\beta_n}\mathbf{e_n} & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_n}\mathbf{e_n}^T & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}}\mathbf{e_n}^T \\ \mathbf{0} & \sqrt{\beta_{n+1}}\mathbf{e_n} & J^*_n \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{e_n}$ означава n-ти координатни вектор у $\mathbb{R}^n$.

Према конструкцији добили смо квадратурну формулу са $2n+1$ чворова која има следеће особине:

(O1) степен тачности је $2n+2$;

(O2) чворови Гаусове формуле Q^G_n су подскуп новог скупа чворова;

(O3) тежине за те чворове су једнаке полазним тежинима помноженим константом.

Приметимо да квадратурна формула Q^S_{2n+1} има степен тачности $2n+3$, ако је $w(x)$ парна тежинска функција.

Уопштене усредњене Гаусове формуле, као и анти-Гаусове формуле се могу добити из Персторферових резултата о позитивним квадратурним формулама ([37]). Нека је у теореми 2.11 (4) $n = 2l+1$ и

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha}_{n-1-i} = \alpha_i \quad \text{и} \quad \tilde{\beta}_{n-i} = \beta_i \quad \text{за } i = 0, 1, \ldots, l-1, \\ &\tilde{\beta}_{n-l} = \beta_{n-l} \text{ за } m = 2l-1, \quad \text{односно} \quad \tilde{\beta}_{n-l} = \beta_l \text{ за } m = 2l, \end{aligned} \tag{2.36}$$

одакле следи да је

$$g_i = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

где је p_k monични ортогонални полином у односу на тежинску функцију $w(x)$.

Важи и обратно: за $g_l = p_l$ и $g_{l-1} = p_{l-1}$, следи релација (2.36). Тада се полином t_n из теореме 2.11 своди на

$$t_n = t_{2l+1} = p_l F_{l+1},$$

при чему је

$$F_{l+1}(x) = p_{l+1}(x) - \tilde{\beta}_{l-1}(x) = (x - \alpha_l)p_l(x) - \bar{\beta}_l p_{l-1}(x),$$

и $\bar{\beta}_l = \beta_l + \tilde{\beta}_{l+1}$.

Дакле, уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула G^S_{2l+1} је базирана на нулама полинома $t_{2l+1} = p_l F_{l+1}$. Приметимо да ако је $\tilde{\beta}_{l+1} = \beta_l$, $m = 2l$, тј. $\bar{\beta}_l = 2\beta_l$, тада одговарајућа квадратурна формула има степен тачности најмање $2l+1$ и зато је она усредњена Гаусова квадратурна формула коју је увео Лаури.

Како је $\bar{\beta}_l > 0$, следи да се нуле полинома p_l и F_{l+1} преплићу. Дакле, унутрашњи чворови x^F_k, $k = 2, 3, \ldots, l$, који су нуле полинома F_{l+1}, леже у интервалу $[a, b]$.

Квадратурне формуле добијене скраћивањем матрице J_{2n+1}^S

У раду [45] су посматране квадратурне формуле $Q_{2n-r+1}^{(n-r)}$, $n \geqslant 2$, одређене скраћивањем матрице J_{2n+1}^S за последњих r врста и колона, где је $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Овако добијена квадратурна формула има мање чворова, али у општем случају има исти степен тачности као квадратурна формула Q_{2n+1}^S (видети [4]). Овај поступак нам је од значаја јер се скраћивањем матрице може добити унутрашња квадратурна формула, чак и ако је полазна квадратурна формула имала спољашње чворове. Овако добијене квадратурне формуле зовемо *скраћеним уопштеним усредњеним.*

Најједноставније скраћене уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле добијамо за $r = n-1$. Оне су базиране на нулама полинома

$$t_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n-1})p_{n+1}(x) - \beta_{n+1}p_n(x).$$

и одговарају симетричној тродијагоналној матрици

$$\hat{J}_{n+2} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_n} & \\ & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}} \\ 0 & & & & \sqrt{\beta_{n+1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

Другим речима, матрица $\hat{J}_{n+2}$ се добија из матрице J_{n+2} заменом члана α_{n+1} са α_{n-1}.

Из резултата Персторфера у [37] следи да су и квадратурне формуле $Q_{2n+2}^{(1)}$ позитивне. Штавише, јасно је да су нуле полинома t_{n+2} испреплетане са нулама полинома p_{n+1}. Према томе, под претпоставком да је квадратурна формула одређена матрицом J_{n+1} унутрашња, међу нулама полинома t_{n+2} само највећа и најмања могу бити спољашње.

3. Оцена грешке Гаус-Лобатоове квадратурне формуле за Бернштајн-Сегеове тежинске функције

3.1. Увод

Гаус-Лобатоова квадратурна формула за (ненегативну) тежинску функцију w на интервалу $[-1,1]$ је

$$\int_{-1}^{1} f(t)w(t)dt = \lambda_0 f(-1) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(\tau_\nu) + \lambda_{n+1} f(1) + R_n(f), \tag{3.1}$$

где су τ_ν нуле (моничног) ортогоналног полинома $\pi_n^L(\cdot) = \pi_n^L(\cdot; w^L)$ степена n у односу на тежинску функцију $w^L(t) = (1-t^2)w(t)$ и $R_n(f)$ је одговарајућа грешка.

Овде су тежинске функције w Бернштајн-Сегеовог типа,

$$w(t) \equiv w_\gamma^{(\mp 1/2)}(t) = \frac{(1-t^2)^{\mp 1/2}}{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} t^2}, \qquad t \in (-1,1), \quad \gamma \in (-1,0], \tag{3.2}$$

$$w(t) \equiv w_\gamma^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}(t) = \frac{(1-t)^{\mp 1/2}(1+t)^{\pm 1/2}}{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} t^2}, \qquad t \in (-1,1), \quad \gamma \in (-1,0]. \tag{3.3}$$

Чебишовљеве тежинске функције су специјални случајеви тежинских функција (3.2) и (3.3) за $\gamma = 0$.

Означимо (моничне) ортогоналне полиноме у односу на тежинске функције (3.2) и (3.3) са $\pi_n^{(\mp 1/2)}(\cdot)$ и $\pi_n^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}(\cdot)$, редом.

Нека је f аналитичка функција у домену D који садржи интервал $[-1,1]$ и нека је Γ проста затворена крива у домену D која садржи интервал $[-1,1]$. Тада се остатак (3.1) може представити у облику

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma K_n(z) f(z) dz, \tag{3.4}$$

где је језгро дато помоћу

$$K_n(z) = \frac{\varrho_n(z)}{(1-z^2)\pi_n^L(z)}, \quad z \notin [-1,1],$$

и

$$\varrho_n(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n^L(t)}{z-t} w^L(t) dt.$$

Из формуле (3.4) следи оцена грешке

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right), \tag{3.5}$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина контуре Γ. Овде узимамо да је Γ елипса $\mathcal{E}_\rho$, чији су фокуси тачке ± 1, а сума њених полуоса је $\rho > 1$:

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \; z = \frac{1}{2}\left(u + u^{-1}\right), \; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}, \quad u = \rho\, e^{i\theta}.$$

3.2. Гаус-Лобатоове квадратурне формуле за тежинску функцију $w_\gamma^{(-1/2)}$

Посматрајмо квадратурну формулу (3.1) за тежинску функцију $w = w_\gamma^{(-1/2)}$ дату формулама (3.2):

$$\int_{-1}^{1} f(t) w_\gamma^{(-1/2)}(t)dt = Q_n^{(-1/2)}(f) + R_n^{(-1/2)}(f),$$
$$Q_n^{(-1/2)}(f) = \lambda_0^{(-1/2)} f(-1) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(-1/2)} f(\tau_\nu^{(-1/2)}) + \lambda_{n+1}^{(1/2)} f(1).$$

Како је $w_\gamma^{L(-1/2)}(t) = (1-t^2) w_\gamma^{(-1/2)} = w_\gamma^{(1/2)}(t)$, где је $w_\gamma^{(1/2)}(t)$ дата формулама (3.2), имамо (видети [33], стр. 5)

$$\varrho_n^{(-1/2)}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n^{(1/2)}(t)}{z-t} w_\gamma^{(1/2)}(t)dt, \qquad K_n^{(-1/2)}(z) = \frac{\varrho_n^{(-1/2)}(z)}{(1-z^2)\pi_n^{(1/2)}(z)}, \tag{3.6}$$

где је

$$\pi_n^{(1/2)}(z) = \frac{1}{2^n}(U_n(z) - \gamma U_{n-2}(z)), \quad n \geqslant 1, \tag{3.7}$$

и U_n је Чебишовљев полином друге врсте.

Нека је $z = (u+u^{-1})/2$, где је $u = z + \sqrt{z^2-1}$ и $u^{-1} = z - \sqrt{z^2-1}$. Тада је

$$U_n(z) = \frac{u^{n+1} - u^{-n-1}}{u - u^{-1}}. \tag{3.8}$$

Из формула (3.6) и (3.7) следи

$$\begin{aligned}\varrho_n^{(-1/2)}(z) &= \frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1} \frac{U_n\sqrt{1-t^2}}{(z-t)(1-\frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}t^2)}dt - \frac{\gamma}{2^n}\int_{-1}^{1} \frac{U_{n-2}\sqrt{1-t^2}}{(z-t)(1-\frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}t^2)}dt \\ &= -\frac{(1+\gamma)^2}{2^{n+2}\gamma}\left(A_n - \gamma A_{n-2}\right),\end{aligned}$$

где је (видети формулу (12) у [3])

$$A_k = \int_{-1}^{1} \frac{U_k\sqrt{1-t^2}}{(z-t)(t^2 - \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma})}dt = \begin{cases} \pi\dfrac{(z-\sqrt{z^2-1})^{k+1} - \gamma^{\frac{k+1}{2}}}{z^2 - \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}, & k \text{ непарно}, \\ \pi\dfrac{(z-\sqrt{z^2-1})^{k+1} - \frac{2z}{1+\gamma}\gamma^{\frac{k+2}{2}}}{z^2 - \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}, & k \text{ парно}. \end{cases}$$

Лако је видети да је

$$\varrho_n^{(-1/2)}(z) = \frac{1}{2^n}\frac{\pi(1+\gamma)^2}{u^{n-1}(u^2-\gamma)} \quad \text{за} \quad n \geqslant 1. \tag{3.9}$$

Даље је

$$(1-z^2)\pi_n^{(1/2)}(z) = -\frac{1}{2^{n+2}}(u^{n+1}-u^{-n-1}-\gamma(u^{n-1}-u^{-n+1}))(u-u^{-1}).$$

Дакле, израз за језгро у формули (3.6) постаје

$$K_n^{(-1/2)}(z) = \frac{4\pi(1+\gamma)^2}{u^{n-1}(\gamma-u^2)(u^{n+1}-u^{-n-1}-\gamma(u^{n-1}-u^{-n+1}))(u-u^{-1})}. \tag{3.10}$$

Да бисмо одредили горњу границу за модул језгра K_n, означимо

$$\begin{aligned} A(\theta) =& |\gamma-u^2|^2 = \rho^4 - 2\gamma\rho^2\cos 2\theta + \gamma^2, \\ B(\theta) =& |u-u^{-1}|^2 = 2(a_2 - \cos 2\theta), \\ C(\theta) =& |u^{n+1}-u^{-n-1}-\gamma(u^{n-1}-u^{-n+1})|^2 = 2(a_{2n+2}-\cos(2n+2)\theta) \\ &+ 2\gamma^2(a_{2n-2}-\cos(2n-2)\theta) - 4\gamma(a_{2n}\cos 2\theta - a_2\cos 2n\theta), \end{aligned} \tag{3.11}$$

где је $a_j = (\rho^j+\rho^{-j})/2$. Тако формула (3.10) постаје

$$\left|K_n^{(-1/2)}(z)\right| = \frac{4\pi(1+\gamma)^2}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A(\theta)B(\theta)C(\theta)}}. \tag{3.12}$$

У главним теоремама у овој секцији испитујемо асимптотско понашање посматрањем само водећег коефицијента. То није довољно у општем случају, али овде јесте и за то постоји формалан доказ (налази се у прегледном чланку Error estimates of Gaussian type quadrature formulae for analytic functions on ellipses - a survey of recent results, D. Lj. Djukić, R. M. Mutavdžić Djukić, A. V. Pejčev, M. M. Spalević, који се налази на рецензији у часопису Electronic Transactions on Numerical Analysis).

Теорема 3.1. За Гаус-Лобатоову квадратурну формулу (3.1) са тежинском функцијом $w_\gamma^{(-1/2)}$, где је $n > 1$ и $\gamma \in (-1,0)$, за свако ρ довољно велико, модул језгра (3.12) је максималан на реалној оси ($\theta = 0$) ако је $\gamma \geqslant -\frac{1}{2}$ и на позитивној имагинарној полу-оси ($\theta = \pi/2$) ако је $\gamma < -\frac{1}{2}$, тј.

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(-1/2)}(z)\right| = \begin{cases} \left|K_n^{(-1/2)}\left(\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|, & \text{за } \gamma \geqslant -\frac{1}{2}, \\ \left|K_n^{(-1/2)}\left(\frac{i}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|, & \text{за } \gamma < -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{за све} \quad \rho \geqslant \rho^*.$$

Ако је $n = 1$, модул језгра (3.12) постиже максималну вредност на реалној оси ($\theta = 0$).

Доказ. Коришћењем ознака из формула (3.11), треба показати да за $\theta_0 = 0$ или $\theta_0 = \pi/2$ важи

$$\frac{1}{A(\theta)B(\theta)C(\theta)} \leqslant \frac{1}{A(\theta_0)B(\theta_0)C(\theta_0)},$$

тј.

$$I_{\theta,\theta_0}(\rho) = A(\theta)B(\theta)C(\theta) - A(\theta_0)B(\theta_0)C(\theta_0) \geqslant 0,$$

за довољно велико ρ и свако $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ово ће важити ако и само ако је водећи коефицијент израза $I_{\theta,\theta_0}(\rho)$, написаног као степени ред по ρ, позитиван.

За $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ имамо

$$\begin{aligned}
A(0) &= \rho^4 - 2\gamma\rho^2 + \gamma^2, & A(\tfrac{\pi}{2}) &= \rho^4 + 2\gamma\rho^2 + \gamma^2, \\
B(0) &= 2(a_2 - 1), & B(\tfrac{\pi}{2}) &= 2(a_2 + 1), \\
C(0) &= 2(a_{2n+2} - 1) + 2\gamma^2(a_{2n-2} - 1) - 4\gamma(a_{2n} - a_2), && \\
C(\tfrac{\pi}{2}) &= 2a_{2n+2} + 2\gamma^2 a_{2n-2} + 4\gamma a_{2n} + (-1)^n(2 + 2\gamma^2 - 4\gamma a_2), &&
\end{aligned}$$

За $n = 1$ водећи коефицијент у изразу $I_{\theta,0}(\rho)$ је

$$2(1+\gamma)(1-\cos 2\theta)$$

и позитиван је за $\gamma \in (-1, 0)$ и свако $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Претпоставимо сада да је $n > 1$.

Степен од ρ у изразу $I_{\theta,0}(\rho)$ је највише $2n+6$ и коефицијент уз ρ^{2n+6} је

$$2\,(1+2\gamma)\,(1-\cos 2\theta)\,,$$

што је позитивно за $\gamma > -\frac{1}{2}$ и $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Слично, израз $I_{\theta,\pi/2}(\rho)$ је полином степена највише $2n+6$ по ρ и водећи коефицијент је

$$-2\,(1+2\gamma)\,(1+\cos 2\theta)\,,$$

што је позитивно за $\gamma < -\frac{1}{2}$ и $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Даље, за $\gamma = -\frac{1}{2}$, део израза $I_{\theta,0}(\rho)$ који садржи два највећа степена од ρ је

$$\begin{aligned}
&5\sin^2 2\theta\rho^{2n+4} + (2 + \tfrac{3}{2}\cos 2\theta - 2\cos^3 2\theta - \tfrac{3}{2}\cos 6\theta)\rho^{2n+2}, && \text{за } n = 2, \\
&3\sin^2 2\theta\rho^{2n+4} + (\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2\theta - 2\cos^3 2\theta - \cos 6\theta)\rho^{2n+2}, && \text{за } n = 3, \\
&3\sin^2 2\theta\rho^{2n+4} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2\theta - 2\cos^3 2\theta)\rho^{2n+2}, && \text{за } n > 3.
\end{aligned}$$

Тако је водећи коефицијент тривијално позитиван за $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, док је за $\theta = \frac{\pi}{2}$ он једнак 4, 3 и 1, редом. □

3.3. Гаус-Лобатоове квадратурне формуле за тежинску функцију $w_\gamma^{(1/2)}$

Посматрајмо формулу (3.1) за $w = w_\gamma^{(1/2)}$ дату формулом (3.2):

$$\int_{-1}^{1} f(t) w_\gamma^{(1/2)}(t) dt = Q_n^{(1/2)}(f) + R_n^{(1/2)}(f),$$
$$Q_n^{(1/2)}(f) = \lambda_0^{(1/2)} f(-1) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(1/2)} f(\tau_\nu^{(1/2)}) + \lambda_{n+1}^{(1/2)} f(1).$$

Имамо

$$\varrho_n^{(1/2)}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n^{L(1/2)}(t)}{z-t} w_\gamma^{L(1/2)}(t) dt, \qquad K_n^{(1/2)}(z) = \frac{\varrho_n^{(1/2)}(z)}{(1-z^2)\pi_n^{L(1/2)}(z)},$$

где је $w_\gamma^{L(1/2)} = (1-t^2) w_\gamma^{(1/2)}$ и $\pi_n^{L(1/2)}(t)$ је монични ортогонални полином n-тог степена у односу на тежинску функцију $w_\gamma^{L(1/2)}$. Тако, на основу теореме 3.4 у раду [33], имамо

$$\pi_n^{L(1/2)}(t) = \frac{1}{t^2-1} \left(\pi_{n+2}^{(1/2)}(t) - \alpha \pi_n^{(1/2)}(t) \right), \quad n \geqslant 1, \tag{3.13}$$

где је

$$\alpha = \frac{n - \gamma n + 3 - \gamma}{4(n - \gamma n + 1 + \gamma)} > 0. \tag{3.14}$$

Сада следи да је

$$\varrho_n^{(1/2)}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_{n+2}^{(1/2)}(t) - \alpha \pi_n^{(1/2)}(t)}{(t^2-1)(z-t)} (1-t^2) w_\gamma^{(1/2)}(t) dt = \alpha \varrho_n^{(-1/2)}(z) - \varrho_{n+2}^{(-1/2)}(z).$$

Дакле, из формуле (3.9) добијамо

$$\varrho_n^{(1/2)}(z) = \frac{\pi(4\alpha u^2 - 1)(1+\gamma)^2}{2^{n+2} u^{n+1} (u^2 - \gamma)}.$$

Штавише, заменом (3.7) и (3.8) у (3.13) следи

$$(1-z^2)\pi_n^{L(1/2)}(z) = -\frac{Q}{2^{n+2}(u - u^{-1})},$$

где је

$$Q = u^{n+3} - u^{-n-3} - (\gamma + 4\alpha)(u^{n+1} - u^{-n-1}) + 4\alpha\gamma(u^{n-1} - u^{-n+1}).$$

Коначно је

$$K_n^{(1/2)}(z) = \frac{\pi(1+\gamma)^2(4\alpha u^2 - 1)(u - u^{-1})}{u^{n+1}(\gamma - u^2) \cdot Q}. \tag{3.15}$$

Да бисмо одредили горњу границу за модул језгра, запишимо

$$\begin{aligned}
D(\theta) = |4\alpha u^2 - 1|^2 \;&=\; 16\alpha^2\rho^4 - 8\alpha\rho^2\cos 2\theta + 1,\\
E(\theta) = |Q|^2 \;&=\; 2(a_{2n+6} - \cos(2n+6)\theta) + 2(\gamma+4\alpha)^2(a_{2n+2} - \cos(2n+2)\theta)\\
&\quad +32\alpha^2\gamma^2(a_{2n-2} - \cos(2n-2)\theta\\
&\quad -4(\gamma+4\alpha)(a_{2n+4}\cos 2\theta - a_2\cos(2n+4)\theta)\\
&\quad +16\alpha\gamma(a_{2n+2}\cos 4\theta - a_4\cos(2n+2)\theta)\\
&\quad -16\alpha\gamma(\gamma+4\alpha)(a_{2n}\cos 2\theta - a_2\cos 2n\theta).
\end{aligned}$$

Тада израз (3.15) постаје

$$\left|K_n^{(1/2)}(z)\right| = \frac{\pi(1+\gamma)^2}{\rho^{n+1}}\sqrt{\frac{B(\theta)D(\theta)}{A(\theta)E(\theta)}}, \tag{3.16}$$

где су A и B дефинисани првим двема једначинама у формули (3.11).

Теорема 3.2. За Гаус-Лобатоову квадратурну формулу (3.1) у односу на тежинску функцију $w_\gamma^{(1/2)}$, за $n > 2$ и $\gamma \in (-1, 0)$, модул језгра (3.16) је максималан на позитивној имагинарној полу-оси ($\theta = \pi/2$) за довољно велико ρ, тј.

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(1/2)}(z)\right| = \left|K_n^{(1/2)}\left(\frac{i}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|, \quad \text{за} \quad \rho \geqslant \rho^*.$$

За $n = 1$ модул је максималан на позитивној имагинарној полу-оси ($\theta = \pi/2$) за $\gamma < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и на реалној оси ($\theta = 0$) за $\gamma \geqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

За $n = 2$ модул је максималан на позитивној имагинарној полу-оси ($\theta = \pi/2$) за $\gamma < g_1$, а на реалној оси ($\theta = 0$) за $\gamma \geqslant g_1$, где је $g_1 \approx -0{,}0474$ најмања нула полинома $-6\gamma^3 + 23\gamma^2 - 20\gamma - 1$.

Доказ. Треба показати да за $\theta_0 = 0$ или $\theta_0 = \pi/2$ важи

$$\frac{B(\theta)D(\theta)}{A(\theta)E(\theta)} \leqslant \frac{B(\theta_0)D(\theta_0)}{A(\theta_0)E(\theta_0)},$$

тј.

$$I_{\theta,\theta_0}(\rho) = B(\theta_0)D(\theta_0)A(\theta)E(\theta) - B(\theta)D(\theta)A(\theta_0)E(\theta_0) \geqslant 0$$

за довољно велико ρ и свако $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. То ће важити ако и само ако је водећи коефицијент израза $I_{\theta,\theta_0}(\rho)$, написаног као степени ред по ρ, позитиван.

За $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ имамо

$$D(0) = 16\alpha^2\rho^4 - 8\alpha\rho^2 + 1, \qquad D(\tfrac{\pi}{2}) = 16\alpha^2\rho^4 + 8\alpha\rho^2 + 1,$$

$$\begin{aligned}
E(0) =& 2(a_{2n+6} - 1) + 2(\gamma+4\alpha)^2(a_{2n+2} - 1) + 32\alpha^2\gamma^2(a_{2n-2} - 1)\\
&- 4(\gamma+4\alpha)(a_{2n+4} - a_2) + 16\alpha\gamma(a_{2n+2} - a_4) - 16\alpha\gamma(\gamma+4\alpha)(a_{2n} - a_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\tfrac{\pi}{2}) =& 2a_{2n+6} + 4(\gamma+4\alpha)a_{2n+4} + (16\alpha\gamma + 2(\gamma+4\alpha)^2)a_{2n+2}\\
&+ 16\alpha\gamma(\gamma+4\alpha)a_{2n} + 32\alpha^2\gamma^2 a_{2n-2}\\
&+ (-1)^n[2+2(\gamma+4\alpha)^2+32\alpha^2\gamma^2+4(\gamma+4\alpha)(1+4\alpha\gamma)a_2+16\alpha\gamma a_4].
\end{aligned}$$

Лако се види да је израз $I_{\theta,\pi/2}(\rho)$ највише степена $2n+14$ по ρ и да је коефицијент уз ρ^{2n+14} једнак

$$8\alpha(-16\alpha^2-8\gamma\alpha+4\alpha+1)(1+\cos 2\theta),$$

што према формули (3.14) постаје

$$\frac{8\alpha(-2\gamma^3(n^2-1)+\gamma^2(5n^2+4n-5)-4\gamma(n^2+n-1)+n^2-5)}{(1+\gamma+n-\gamma n)^2}(1+\cos 2\theta).$$

За $n>2$ и $\gamma\in(-1,0)$, ово је очигледно позитивно за све $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$. Даље, за $n=1$ и $n=2$ овај коефицијент је

$$8\alpha(\gamma^2-\gamma-1)(1+\cos 2\theta),$$

тј.

$$\frac{8\alpha(-6\gamma^3+23\gamma^2-20\gamma-1)}{(\gamma-3)^2}(1+\cos 2\theta),$$

што је позитивно на $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$ за $\gamma<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\gamma<g_1$, редом.

Даље, коефицијент у изразу $I_{\theta,0}(\rho)$ уз ρ^{2n+14} је

$$8\alpha(16\alpha^2+8\gamma\alpha-4\alpha-1)(1-\cos 2\theta),$$

што је позитивно на $\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$ за $\gamma>\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ако је $n=1$ и за $\gamma>g_1$ ако је $n=2$.

Коначно, за $(n,\gamma)=(1,\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ и $(n,\gamma)=(2,g_1)$ израз $I_{\theta,0}(\rho)$ је највише степена $2n+12$ по ρ. Водећи коефицијент је тада

$$(11+5\sqrt{5})(1-\cos 4\theta)$$

и

$$\frac{2(5-3g_1)\,(-3g_1^4-4g_1^3+46g_1^2-56g_1+9)}{(3-g_1)^3}(1-\cos 4\theta),$$

редом, што је позитивно за све $\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$. $\square$

3.4. Гаус-Лобатоове квадратурне формуле за тежинску функцију $w_\gamma^{(\mp 1/2,\pm 1/2)}$

Како је

$$w_\gamma^{(-1/2,1/2)}(t)=w_\gamma^{(1/2,-1/2)}(-t),$$

довољно је посматрати само тежинску функцију $w_\gamma^{(1/2,-1/2)}$.

Посматрајмо формулу (3.1) са тежинском функцијом $w=w_\gamma^{(1/2,-1/2)}$ датом формулом (3.3):

$$\int_{-1}^{1} f(t)w_\gamma^{(1/2,-1/2)}(t)dt=Q_n^{(1/2,-1/2)}(f)+R_n^{(1/2,-1/2)}(f),$$

$$Q_n^{(1/2,-1/2)}(f)=\lambda_0^{(1/2,-1/2)}f(-1)+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu^{(1/2,-1/2)}f(\tau_\nu^{(1/2,-1/2)})+\lambda_{n+1}^{(1/2,-1/2)}f(1).$$

Имамо

$$\varrho_n^{(1/2,-1/2)}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n^{L(1/2,-1/2)}(t)}{z-t} w_\gamma^{L(1/2,-1/2)}(t)dt$$

и

$$K_n^{(1/2,-1/2)}(z) = \frac{\varrho_n^{(1/2,-1/2)}(z)}{(1-z^2)\pi_n^{L(1/2,-1/2)}(z)},$$

где је

$$w_\gamma^{L(1/2,-1/2)} = (1-t^2)w_\gamma^{(1/2,-1/2)} = (1-t)w_\gamma^{(1/2)}(t)$$

и $\pi_n^{L(1/2,-1/2)}(t)$ је монични ортогонални полином n-тог степена у односу на тежинску функцију $w_\gamma^{L(1/2,-1/2)}$.

Из формула (3.23) и (3.21) у раду [33] имамо

$$\pi_n^{L(1/2,-1/2)}(t) = \frac{1}{t-1}(\pi_{n+1}^{(1/2)}(t) - \beta\pi_n^{(1/2)}(t)) \quad \text{за} \quad n \geqslant 1, \tag{3.17}$$

где је

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{(1-\gamma)n+2}{(1-\gamma)n+1+\gamma} > 0.$$

Сада из формуле (3.9) следи

$$\begin{aligned}\varrho_n^{(1/2,-1/2)}(z) &= \int_{-1}^{1} \frac{\pi_{n+1}^{(1/2)}(t) - \beta\pi_n^{(1/2)}(t)}{(t-1)(z-t)}(1-t)w_\gamma^{(1/2)}(t)dt = \beta\varrho_n^{(-1/2)} - \varrho_{n+1}^{(-1/2)} \\ &= \frac{\pi(2\beta u-1)(1+\gamma)^2}{2^{n+1}u^n(u^2-\gamma)}.\end{aligned}$$

Даље, заменом формула (3.7) и (3.8) у формулу (3.17) следи

$$\begin{aligned}(1-z^2)\pi_n^{L(1/2,-1/2)}(z) &= -(z+1)(\pi_{n+1}^{(1/2)}(z) - \beta\pi_n^{(1/2)}(z)) \\ &= -\frac{1}{2^{n+2}}\frac{u+1}{u-1}(u^{n+2} - u^{-n-2} - \gamma(u^n - u^{-n}) \\ &\quad -2\beta(u^{n+1} - u^{-n-1}) + 2\beta\gamma(u^{n-1} - u^{-n-1})).\end{aligned}$$

Зато је

$$K_n^{(1/2,-1/2)}(z) = \frac{2\pi(2\beta u-1)(1+\gamma)^2}{u^n(\gamma-u^2)\cdot P} \cdot \frac{u-1}{u+1}, \tag{3.18}$$

где је

$$P = u^{n+2} - u^{-n-2} - \gamma(u^n - u^{-n}) - 2\beta(u^{n+1} - u^{-n-1}) + 2\beta\gamma(u^{n-1} - u^{-n-1}).$$

Да бисмо извели горњу границу за модул језгра, запишимо

$$
\begin{aligned}
F(\theta) &= |2\beta u - 1|^2 = 4\beta^2\rho^2 - 4\beta\rho\cos\theta + 1,\\
G(\theta) &= |u-1|^2 = \rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1,\\
H(\theta) &= |u+1|^2 = \rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1,\\
J(\theta) &= \ |P|^2 = 2(a_{2n+4} - \cos(2n+4)\theta) + 2\gamma^2(a_{2n} - \cos 2n\theta)\\
&\quad +8\beta^2(a_{2n+2} - \cos(2n+2)\theta) + 8\beta^2\gamma^2(a_{2n-2} - \cos(2n-2)\theta)\\
&\quad -4\gamma(a_{2n+2}\cos 2\theta - a_2\cos(2n+2)\theta)\\
&\quad -8\beta(a_{2n+3}\cos\theta - a_1\cos(2n+3)\theta)\\
&\quad +8\beta\gamma(a_{2n+1}\cos 3\theta - a_3\cos(2n+1)\theta)\\
&\quad +8\beta\gamma(a_{2n+1}\cos\theta - a_1\cos(2n+1)\theta)\\
&\quad -8\beta\gamma^2(a_{2n-1}\cos\theta - a_1\cos(2n-1)\theta)\\
&\quad -16\beta^2\gamma(a_{2n}\cos 2\theta - a_2\cos 2n\theta).
\end{aligned}
$$

Тада формула (3.18) постаје

$$
\left|K_n^{(1/2,-1/2)}(z)\right| = \frac{2\pi(1+\gamma)^2}{\rho^n}\sqrt{\frac{F(\theta)G(\theta)}{A(\theta)H(\theta)J(\theta)}}, \tag{3.19}
$$

где је A дато првом једначином у формули (3.11).

Теорема 3.3. За Гаус-Лобатоову квадратурну формулу (3.1) са тежинском функцијом $w_\gamma^{(1/2,-1/2)}$, где је $\gamma \in (-1,0)$, модул језгра (3.19) је максималан на негативној реалној полу-оси ($\theta = \pi$) за довољно велико ρ, тј.

$$
\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(1/2,-1/2)}(z)\right| = \left|K_n^{(1/2,-1/2)}\left(-\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right| \quad \text{за} \quad \rho \geqslant \rho^*.
$$

Доказ. Треба да покажемо да важи

$$
\frac{F(\theta)G(\theta)}{A(\theta)H(\theta)J(\theta)} \leqslant \frac{F(\pi)G(\pi)}{A(\pi)H(\pi)J(\pi)},
$$

тј.

$$
I_\theta(\rho) = F(\pi)G(\pi)A(\theta)H(\theta)J(\theta) - F(\theta)G(\theta)A(\pi)H(\pi)J(\pi) \geqslant 0
$$

за довољно велико ρ и свако $\theta \in [0,\pi]$.

Степен израза $I_\theta(\rho)$ по ρ је $2n+13$ и коефицијент уз ρ^{2n+13} је

$$
4\beta(-4\beta^2 + 4\beta + 1)(1+\cos\theta),
$$

тј.

$$
\frac{4\beta(\gamma^2(2n^2-4n+1) + \gamma(6-4n^2) + 2n^2 + 4n + 1)}{(-n\gamma+\gamma+n+1)^2}(1+\cos\theta).
$$

Ово је очигледно позитивно за све $n > 1$, $\gamma \in (-1,0)$ и $\theta \in [0,\pi)$. Може се показати да је ово позитивно и за $n = 1$, $\gamma \in (-1,0)$ и $\theta \in [0,\pi)$. $\square$

Сада тврђење за тежинску функцију $w_\gamma^{(-1/2,1/2)}$ важи по симетрији.

Теорема 3.4. За Гаус-Лобатоову квадратурну формулу (3.1) за тежинску функцију $w_\gamma^{(-1/2,1/2)}$, где је $\gamma \in (-1,0)$, модул језгра (3.19) је максималан на позитивној реалној полу-оси ($\theta = 0$) за довољно велико ρ, тј.

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} \left|K_n^{(-1/2,1/2)}(z)\right| = \left|K_n^{(-1/2,1/2)}\left(\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right| \quad \text{за} \quad \rho \geqslant \rho^*.$$

3.5. Нумерички резултати

У теоремама 3.1, 3.2 и 3.3 показали смо да се, за дато n и γ, аргумент θ максимума z функције $|K_n(z)|$ на $\mathcal{E}_\rho$ коначно стабилизује за неку вредност $\theta_0 \in \{0, \pi/2, \pi\}$ како ρ расте. Најмања вредност ρ за коју се ово дешава је означено са ρ^*. Табеле које следе у сваком наведеном случају показује вредност ρ^* добијену експериментално са 4 значајне цифре.

Табела 1: Најмања могућа одговарајућа вредност ρ^* из теореме 3.1 у случају тежинске функције $w_\gamma^{(-1/2)}$ за $n = 10$.

γ	$-0{,}99$	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
ρ^*	1,006	1,056	1,097	1,133	1,183	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001

Табела 2: Најмања могућа одговарајућа вредност ρ^* из теореме 3.1 у случају тежинске функције $w_\gamma^{(1/2)}$ за $n = 10$.

γ	$-0{,}99$	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
ρ^*	1,006	1,054	1,092	1,124	1,152	1,179	1,204	1,229	1,255	1,282

Табела 3: Најмања могућа одговарајућа вредност ρ^* из теореме 3.1 у случају тежинске функције $w_\gamma^{(-1/2,1/2)}$ за $n = 10$.

γ	$-0{,}99$	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
ρ^*	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001

Пример 1. Претпоставимо да желимо да апроксимирамо интеграл

$$\int_{-1}^{1} \cos(t) w_\gamma^{(-1/2)}(t)dt$$

користећи Гаус-Лобатоову формулу (3.1), где је $w_\gamma^{(-1/2)}(t)$ дато формулом (3.2). Функција $f_1(z) = \cos(z)$ је цела и важи

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |\cos(z)| = \cosh(b_1), \quad \text{где је} \quad b_1 = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}).$$

Дужина елипсе у формули (3.5) може бити оцењена помоћу (видети [50, једн. (2.2)])

$$\ell(\mathcal{E}_\rho) \leqslant L(\rho) = 2\pi a_1 \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{3}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6}\right),$$

где је $a_1 = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})$. Тако добијамо оцену грешке

$$|R_n(f)| \leqslant r(f_1) = \inf_{\rho_n^* < \rho < +\infty} \left(\frac{4\pi(1+\gamma)^2}{\rho^{n-1}} \cdot L(\rho) \cdot \frac{\cosh(b_1)}{\sqrt{A(\theta_0)B(\theta_0)C(\theta_0)}} \right),$$

где су A, B, C и θ_0 описани у теореми 3.1.

У табели 4 ова оцена је упоређена са оценама (1.7) и (4.2) из рада [33] и стварном грешком, означеним са $\hat{r}_1^{(Not)}$, $\hat{r}_2^{(Not)}$ и Error, редом.

Табела 4: Вредности $\hat{r}_1^{(Not)}(f_1)$, $\hat{r}_2^{(Not)}(f_1)$, $r(f_1)$ и Error за неке n и $\gamma \in (-1, 0)$ у случају тежинске функције $w_\gamma^{(-1/2)}$.

n	γ	$\hat{r}_1^{(Not)}(f_1)$	$\hat{r}_2^{(Not)}(f_1)$	$r(f_1)$	Error
2	−0,9	1,36(−6)	4,43(−6)	4,09(−6)	1,33(−6)
5	−0,9	3,20(−14)	1,43(−13)	1,37(−13)	3,15(−14)
10	−0,9	1,33(−29)	7,96(−29)	7,78(−29)	1,32(−29)
20	−0,9	1,02(−65)	8,33(−65)	8,23(−65)	1,01(−65)

↓

n	γ	$\hat{r}_1^{(Not)}(f_1)$	$\hat{r}_2^{(Not)}(f_1)$	$r(f_1)$	Error
2	−0,5	3,41(−5)	1,11(−4)	1,02(−4)	3,30(−5)
5	−0,5	8,01(−13)	3,58(−12)	3,43(−12)	7,86(−13)
10	−0,5	3,33(−28)	1,99(−27)	1,94(−27)	3,30(−28)
20	−0,5	2,54(−64)	2,08(−63)	2,06(−63)	2,53(−64)
2	−0,1	1,11(−4)	3,63(−4)	3,32(−4)	1,07(−4)
5	−0,1	2,59(−12)	1,16(−11)	1,11(−11)	2,55(−12)
10	−0,1	1,08(−27)	6,45(−27)	6,30(−27)	1,07(−27)
20	−0,1	8,24(−64)	6,74(−63)	6,66(−63)	8,19(−64)

3.6. Закључак

За једну класу Бернштајн-Сегеових тежинских функција за аналитичке интегранде добијене су експлицитне оцене у радовима [51], [52], [53] за Гаусове квадратурне формуле и у радовима [41] и [3] за Гаус-Радауове и Гаус-Кронродове квадратурне формуле. У овој секцији настављена је аналогна анализа за Гаус-Лобатоове квадратурне формуле и добијена је оцена грешке. Укључени су и нумерички примери.

4. Оцена грешке у Кронродовој екстензији уопштене Мичели-Ривлинове формуле за аналитичке функције

4.1. Остатак Кронродове екстензије уопштене Мичели-Ривлинове формуле за аналитичке функције

Посматрајмо квадратурне формуле (2.26). Нека је f аналитичка функција у домену D која садржи интервал $[-1,1]$ и нека је Γ проста затворена крива у домену D која садржи интервал $[-1,1]$. Претпоставимо да знамо вредности функције f и њених извода $f^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2s-1$, у чворовима $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у интервалу $[-1,1]$, као и да знамо вредности функције f у чворовима $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ у интервалу $[-1,1]$, при чему је

$$y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \cdots < y_n < x_n < y_{n+1}.$$

Нека је

$$t_{2\nu} = x_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad t_{2\nu-1} = y_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Користећи резултат Гончарова из [12], грешка Ермитове интерполације функције f се може представити у облику

$$r_{n,s}(f;t) = f(t) - \sum_{\nu=1}^{2n+1} \sum_{i=0}^{2s_\nu-1} \ell_{i,\nu}(t) f^{(i)}(t_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\Omega_{n,s}(t)}{(z-t)\Omega_{n,s}(z)}\, dz, \tag{4.1}$$

где су $\ell_{i,\nu}$ основне функције Ермитове интерполације, $s_\nu = s$ ако је $t_\nu \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $s_\nu = 1/2$ ако је $t_\nu \in \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$ и

$$\Omega_{n,s}(z) = \prod_{\nu=1}^{2n+1} (z-t_\nu)^{2s_\nu} = \prod_{\nu=1}^{n} (z-x_\nu)^{2s} \cdot \prod_{\nu=1}^{n+1} (z-y_\nu).$$

Означимо са x_ν нуле Чебишовљевог полинома прве врсте T_n, тј. $x_\nu = \tau_\nu$ за $\nu = 1, 2, \ldots, n$. За $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, нека су η_ν нуле Чебишовљевог полинома друге врсте U_{n-1}. Уведимо ознаке $y_1 = \hat{\tau}_1 = -1$, $y_{\nu+1} = \hat{\tau}_{\nu+1} = \eta_\nu$ за $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ и $y_{n+1} = \hat{\tau}_{n+1} = 1$. Дакле, тачке $y_\nu = \hat{\tau}_\nu$ су нуле полинома $(t^2-1)U_{n-1}$ и оне представљају одговарајуће чворове у формули (2.26) (видети [27]).

Множењем формуле (4.1) са $\omega(t)T_n(t)$, где је $\omega(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ и интеграцијом по t дуж интервала $(-1,1)$, добијамо следећи облик за остатак формуле (2.26):

$$R_{n,s}(fT_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma K_{n,s}(z) f(z)\,dz, \tag{4.2}$$

где је језгро $K_{n,s}$ дато формулом

$$K_{n,s}(z) = \frac{\rho_{n,s}(z)}{(1-z^2)T_n^{2s}(z)\,U_{n-1}(z)}, \tag{4.3}$$

при чему је

$$\rho_{n,s}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\omega(t)}{z-t}\,(1-t^2)T_n^{2s+1}(t)\,U_{n-1}(t)\,dt. \tag{4.4}$$

Модул језгра је симетричан у односу на реалну осу, тј. $|K_{n,s}(\bar{z})| = |K_{n,s}(z)|$. Такође, на основу симетрије Јакобијевих полинома $T_n(z)$ и $U_n(z)$ важи $|K_{n,s}(-\bar{z})| = |K_{n,s}(z)|$. Дакле, модул језгра је симетричан у односу на обе осе.

4.2. L^∞- оцена грешке

Интеграл (4.4) рачунамо уводећи смену $t = \cos\theta$:

$$\rho_{n,s}(z) = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{z-\cos\theta}(\cos n\theta)^{2s+1}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}d\theta.$$

На основу формуле 1.320.7 из [13] за $(\cos n\theta)^{2s+1}$ добијамо

$$\rho_{n,s}(z) = \frac{1}{2^{2s}}\int_0^{\pi} \frac{\sum_{k=0}^{s}\binom{2s+1}{k}\cos(2s-2k+1)n\theta\sin n\theta\sin\theta}{z-\cos\theta}d\theta,$$

тј.

$$\begin{aligned}\rho_{n,s}(z) =&\frac{1}{2^{2s+2}}\int_0^{\pi} \frac{\sum_{k=-1}^{s-1}\left(\binom{2s+1}{k+1}-\binom{2s+1}{k}\right)\cos((2s-2k)n-1)\theta}{z-\cos\theta}d\theta\\ &-\frac{1}{2^{2s+2}}\int_0^{\pi} \frac{\sum_{k=-1}^{s-1}\left(\binom{2s+1}{k+1}-\binom{2s+1}{k}\right)\cos((2s-2k)n+1)\theta}{z-\cos\theta}d\theta,\end{aligned}$$

при чему дефинишемо $\binom{2s+1}{k} = 0$ за $k < 0$. Коришћењем формуле 3.613.1 из [13] (видети и [10, стр. 1176]) добијамо

$$\rho_{n,s}(z) = \frac{\pi}{2^{2s+2}}\frac{\sum_{k=-1}^{s-1}\left(\binom{2s+1}{k+1}-\binom{2s+1}{k}\right)\left(v^{(2s-2k)n-1}-v^{(2s-2k)n+1}\right)}{\sqrt{z^2-1}},$$

где је

$$v = z-\sqrt{z^2-1}.$$

Заменом

$$u = \frac{1}{v} \quad \text{и} \quad z = \frac{1}{2}\left(u+u^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(v+v^{-1}\right)$$

у претходном изразу, следи

$$\rho_{n,s}(z) = \frac{\pi}{2^{2s+1}}\sum_{k=-1}^{s-1}\left(\binom{2s+1}{k+1}-\binom{2s+1}{k}\right)u^{-(2s-2k)n}. \tag{4.5}$$

Коначно, како је

$$T_n(z) = \frac{u^n+u^{-n}}{2} \quad \text{и} \quad U_{n-1}(z) = \frac{u^n-u^{-n}}{u-u^{-1}}$$

(видети [10]), из (4.3) и (4.5) добијамо

$$K_{n,s}(z) = 2\pi \frac{\sum_{k=0}^{s} \left(\binom{2s+1}{s-k-1} - \binom{2s+1}{s-k} \right) u^{-2kn-2n}}{(u-u^{-1})(u^n+u^{-n})^{2s}(u^n-u^{-n})}. \tag{4.6}$$

Нека је

$$u = \rho e^{i\theta} \quad \text{и} \quad C_{s,k} = \binom{2s+1}{s-k-1} - \binom{2s+1}{s-k}.$$

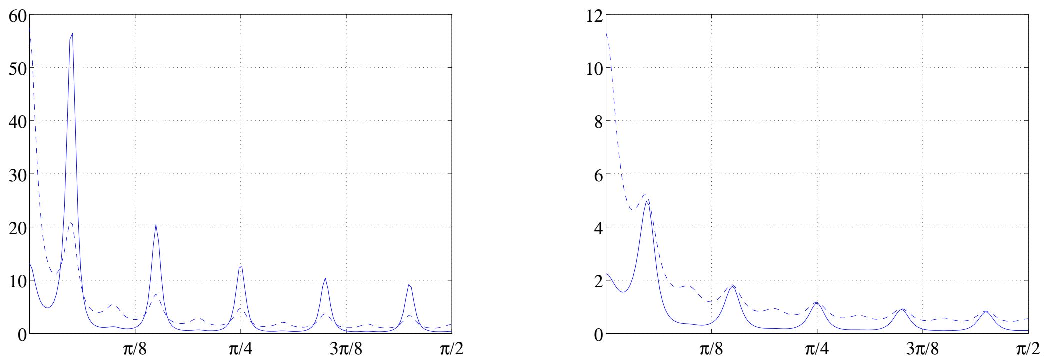
Да бисмо израчунали модул језгра, означимо

$$\begin{aligned} A(\theta) &= (\rho^{2sn+2n})^2 \left| \sum_{k=0}^{s} C_{s,k} u^{-2kn-2n} \right|^2 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{s} C_{s,k} \rho^{2sn-2kn} \cos(2kn+2n)\theta \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{s} C_{s,k} \rho^{2sn-2kn} \sin(2kn+2n)\theta \right)^2, \\ B(\theta) &= \rho^2 |u-u^{-1}|^2 = \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1, \\ C(\theta) &= \rho^{2n} |u^n - u^{-n}|^2 = \rho^{4n} - 2\rho^{2n} \cos 2n\theta + 1, \\ D(\theta) &= \rho^{2n} |u^n + u^{-n}|^2 = \rho^{4n} + 2\rho^{2n} \cos 2n\theta + 1. \end{aligned}$$

Тада је

$$|K_{n,s}(z)|^2 = \frac{4\pi^2}{\rho^{2n-2}} \frac{A(\theta)}{B(\theta)C(\theta)D(\theta))^{2s}}.$$

Графици функције $\theta \mapsto |K_{n,s}(z)|$ за дате вредности n, s и ρ су приказани на слици 4.1. Како је модул језгра симетричан у односу на обе осе, довољно је посматрати интервал $[0, \pi/2]$.



а) б)

Слика 4.1: Функције $\theta \mapsto |K_{10,s}(z)|$ за $s = 1$ (испрекидана линија) и $s = 2$ (пуна линија) за а) $\rho = 1{,}03$ и б) $\rho = 1{,}05$.

Сада можемо формулисати следећи резултат.

Теорема 4.1. За свако $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ и свако $s \in \mathbb{N}$ постоји $\rho_0 = \rho_0(n,s)$ такво да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,s}(z)| = \left| K_{n,s}\left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})\right)\right|,$$

за свако $\rho > \rho_0$.

Доказ. Треба показати да важи неједнакост

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)C(\theta)D(\theta)^{2s}} \leqslant \frac{A(0)}{B(0)C(0)D(0)^{2s}}.$$

Ако уведемо ознаку

$$I_{\theta,\theta_0}(\rho) = A(\theta)B(\theta_0)C(\theta_0)D(\theta_0)^{2s} - A(\theta_0)B(\theta)C(\theta)D(\theta)^{2s},$$

треба да важи $I_{\theta,0}(\rho) \leqslant 0$ за свако ρ веће од неког $\rho_0 = \rho_0(n,s)$. Израз $I_{\theta,0}(\rho)$ је полином степена $12sn + 4n + 2$ са водећим коефицијентом $2C_{s,0}^2(\cos 2\theta - 1)$, који је негативан за $\theta \in (0, \pi/2]$. Зато је $I_{\theta,0}(\rho)$ негативан за довољно велико ρ. □

Теорема 4.2. Нека је $n = 1$.

а) За $s = 1$ постоји ρ_0 такво да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{1,1}(z)| = \left| K_{1,1}\left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})\right)\right|,$$

за свако $\rho > \rho_0$.

б) За $s > 1$ постоји $\rho_0 = \rho_0(s)$ такво да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{1,s}(z)| = \left| K_{1,s}\left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1})\right)\right|,$$

за свако $\rho > \rho_0$.

Доказ. За $n = 1$ имамо

$$\begin{aligned} A(\theta) &= C_{s,0}^2\rho^{4s} + 2C_{s,0}C_{s,1}\rho^{4s-2}\cos 2\theta + \cdots, \\ B(\theta) = C(\theta) &= \rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1, \\ D(\theta) &= \rho^4 + 2\rho^2\cos 2\theta + 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A(0) &= C_{s,0}^2\rho^{4s} + 2C_{s,0}C_{s,1}\rho^{4s-2} + \cdots, \\ B(0) = C(0) &= \rho^4 - 2\rho^2 + 1, \\ D(0) &= \rho^4 + 2\rho^2 + 1. \end{aligned}$$

Тада је

$$A(\theta)B(0)C(0)D(0)^{2s} = C_{s,0}^2\rho^{12s+8} + (C_{s,0}^2(4s-4) + 2C_{s,0}C_{s,1}\cos 2\theta)\rho^{12s+6} + \cdots$$

и

$$A(0)B(\theta)C(\theta)D(\theta)^{2s} = C_{s,0}^2\rho^{12s+8} + (C_{s,0}^2(4s-4)\cos 2\theta + 2C_{s,0}C_{s,1})\rho^{12s+6} + \cdots,$$

где је

$$C_{s,0} = -\frac{2}{s}\binom{2s+1}{s-1}, \quad C_{s,1} = -\frac{4}{s+3}\binom{2s+1}{s-1} \quad \text{и} \quad C_{s,1}/C_{s,0} = \frac{2s}{s+3}.$$

Коефицијент у изразу $I_{\theta,0}(\rho)$ уз ρ^{12s+6} је

$$(C_{s,0}^2(4s-4) - 2C_{s,0}C_{s,1})(1-\cos 2\theta) = 4C_{s,0}^2\frac{s^2+s-3}{s+3}(1-\cos 2\theta),$$

који је негативан за свако $\theta \in (0, \pi/2]$ и $s = 1$.

Посматрајмо сада вредности

$$\begin{aligned} &A(\pi/2) = C_{s,0}^2\rho^{4s} - 2C_{s,0}C_{s,1}\rho^{4s-2} + \cdots, \\ &B(\pi/2) = C(\pi/2) = \rho^4 + 2\rho^2 + 1, \ D(\pi/2) = \rho^4 - 2\rho^2 + 1. \end{aligned}$$

Слично претходном случају, водећи коефицијент у изразу $I_{\theta,\pi/2}(\rho)$ је

$$-4C_{s,0}^2\frac{s^2+s-3}{s+3}(1+\cos 2\theta)$$

и негативан је за $\theta \in [0, \pi/2)$ и $s > 1$. $\square$

4.3. L^1- оцена грешке

Да бисмо извели L^1- оцену грешке, користимо (2.30) и посматрамо функцију

$$L_{n,s}(\mathcal{E}_\rho) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{E}_\rho} |K_{n,s}(z)||dz|, \tag{4.7}$$

где је језгро $K_{n,s}(z)$ дато помоћу (4.6).

Нека је $z = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$, при чему је $u = \rho e^{i\theta}$. Ако означимо $a_j = \frac{1}{2}(\rho^j + \rho^{-j})$ за $j \in \mathbb{N}$, имамо

$$|u^n \pm u^{-n}|^2 = 2(a_{2n} \pm \cos 2n\theta).$$

Пошто је $|dz| = 2^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a_2 - \cos 2\theta}\, d\theta$ (видети и [14]) у (4.7), заменом (4.6) и коришћењем претходних једначина добијамо

$$L_{n,s}(\mathcal{E}_\rho) = \frac{1}{2^{s+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi \frac{\left|\sum_{k=0}^s\left(\binom{2s+1}{k-1} - \binom{2s+1}{k}\right)u^{-2sn+2kn-2n}\right|}{\sqrt{a_{2n} - \cos 2n\theta}(a_{2n} + \cos 2n\theta)^s}d\theta. \tag{4.8}$$

Нека је

$$D_{s,k} = \binom{2s+1}{k-1} - \binom{2s+1}{k}.$$

Квадрат модула суме у једначини (4.8) је једнак (видети [25])

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{s} D_{s,k}u^{-2sn+2kn-2n}\right|^2 &= \left|u^{-2sn-2n}\sum_{k=0}^{s} D_{s,k}u^{2kn}\right|^2 \\
&= \rho^{-4sn-4n}\left(\sum_{l=0}^{s} D_{s,l}\rho^{2ln}e^{2iln\theta}\right)\left(\sum_{j=0}^{s} D_{s,j}\rho^{2jn}e^{-2ijn\theta}\right) \\
&= \rho^{-4sn-4n}\sum_{l,j=0}^{s} D_{s,l}D_{s,j}\rho^{2(l+j)n}e^{2i(l-j)n\theta} \\
&= \rho^{-4sn-4n}\sum_{k=0}^{s} A_k\cos 2kn\theta,
\end{aligned}$$

где је

$$A_k = \sum_{\substack{|l-j|=k\\ l,j=0,\dots,s}} D_{s,l}D_{s,j}\rho^{2(l+j)n},$$

тј.

$$A_0 = \sum_{j=0}^{s} D_{s,j}^2\rho^{4jn}, \quad A_k = 2\sum_{j=0}^{s-k} D_{s,j}D_{s,j+k}\rho^{4jn+2kn}, \quad k=1,2,\dots,s. \tag{4.9}$$

Дакле, из једначине (4.8) добијамо

$$L_{n,s}(\mathcal{E}_\rho) = \frac{1}{2^{s+\frac{1}{2}}\rho^{2sn+2n}}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{s} A_k\cos 2kn\theta}{(a_{2n}-\cos 2n\theta)(a_{2n}+\cos 2n\theta)^{2s}}}d\theta.$$

Како је интегранд периодична функција, претходни израз се своди на

$$L_{n,s}(\mathcal{E}_\rho) = \frac{1}{2^{s+\frac{1}{2}}\rho^{2sn+2n}}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{s} A_k\cos k\theta}{(a_{2n}-\cos \theta)(a_{2n}+\cos \theta)^{2s}}}d\theta. \tag{4.10}$$

Коришћењем формуле [13, једн. 3.616.7] налазимо

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos k\theta}{(a_{2n}+\cos\theta)^{2s}}d\theta = \frac{2^{2s}\pi(-1)^k\rho^{2(2s-k)n}}{(\rho^{4n}-1)^{4s-1}}\sum_{i=0}^{2s-1}E_{s,i}^k(\rho^{4n}-1)^i, \tag{4.11}$$

где је

$$E_{s,i}^k = \binom{2s+k-1}{i}\binom{4s-i-2}{2s-1}.$$

Сада смо спремни да докажемо главни резултат.

Теорема 4.3. За израз $L_{n,s}(\mathcal{E}_\rho)$ дат помоћу (4.7) важи

$$L_{n,s}(\mathcal{E}_\rho) \leqslant \frac{\pi\sqrt{Q_s(\rho^{4n})}}{\rho^n(\rho^{4n}-1)^{2s}}, \tag{4.12}$$

где је

$$Q_s(\rho^{4n}) = 2\sum_{k=0}^{s}{}'(-1)^k\left(\sum_{j=0}^{s-k} D_{s,j}D_{s,j+k}\rho^{4jn}\right)\left(\sum_{i=0}^{2s-1} E_{s,i}^k(\rho^{4n}-1)^i\right),$$
$$D_{s,j} = \binom{2s+1}{j-1} - \binom{2s+1}{j}, \quad E_{s,i}^k = \binom{2s+k-1}{i}\binom{4s-i-2}{2s-1} \tag{4.13}$$

и знак прим поред знака за суму означава да је први члан суме преполовљен.

Доказ. Применом Кошијеве неједнакости на израз (4.10) добијамо

$$L_{n,s}(\mathcal{E}_\rho) \leqslant \frac{1}{2^{s+\frac{1}{2}}\rho^{2sn+2n}}\sqrt{\int_0^\pi \frac{d\theta}{a_{2n}-\cos\theta}}\sqrt{\int_0^\pi \frac{\sum_{k=0}^s A_k\cos k\theta}{(a_{2n}+\cos\theta)^{2s}}d\theta}, \tag{4.14}$$

при чему су коефицијенти A_k за $k = 0, 1, \ldots, s$ дати једнакошћу (4.9). Даље је

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a_{2n}-\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a_{2n}^2-1}} = \frac{2\pi\rho^{2n}}{\rho^{4n}-1},$$

и на основу (4.9), (4.11) и (4.13)

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sum_{k=0}^s A_k\cos k\theta}{(a_{2n}+\cos\theta)^{2s}}d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{s}{}'\left(2\sum_{j=0}^{s-k} D_{s,j}D_{s,j+k}\rho^{4jn+2kn}\right)\left(\frac{2^{2s}\pi(-1)^k\rho^{2(2s-k)n}}{(\rho^{4n}-1)^{4s-1}}\sum_{i=0}^{2s-1} E_{s,i}^k(\rho^{4n}-1)^i\right) \\
&= \frac{2^{2s}\pi\rho^{4ns}}{(\rho^{4n}-1)^{4s-1}}Q_s(\rho^{4n}).
\end{aligned}$$

Следи да се (4.14) своди на (4.12). □

Примедба 4.1. Нека је $x = \rho^{4n}$. Прва три полинома $Q_s(x)$ у једначини (4.13) су

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 1 - 3x + 4x^2, \\
Q_2 &= 1 - 7x + 22x^2 - 42x^3 + 81x^4 + 25x^5, \\
Q_3 &= 1 - 11x + 56x^2 - 176x^3 + 385x^4 - 431x^5 + 3536x^6 + 2744x^7 + 196x^8.
\end{aligned}$$

Приметимо да је $\deg Q_s = 3s - 1$.

4.4. Оцена грешке базиране на развијању у ред

Ако је f аналитичка функција у унутрашњости елипсе $\mathcal{E}_\rho$, тада се она може представити у облику

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}{}'\alpha_k T_k(z), \tag{4.15}$$

где је

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}f(t)T_k(t)dt.$$

Овај ред конвергира за све z у унутрашњости елипсе $\mathcal{E}_\rho$. Као и раније, знак прим поред знака за суму означава да је први члан суме преполовљен.

Да бисмо одредили развој језгра, запишимо (4.6) у облику

$$K_{n,s}(z) = 2\pi\frac{\sum_{k=0}^{s}\left(\binom{2s+1}{s-k-1}-\binom{2s+1}{s-k}\right)u^{-2kn-2n}}{u(1-u^{-2})u^{2sn}(1+u^{-2n})^{2s}u^n(1-u^{-2n})}. \tag{4.16}$$

Према биномној теореми, за $|u^{-2n}|<1$ имамо

$$(1+u^{-2n})^{-2s} = \sum_{j=0}^{\infty}u^{-2jn}\binom{-2s}{j} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{2s-1+j}{2s-1}u^{-2jn}, \tag{4.17}$$

док је развој другог члана

$$\frac{1}{(1-u^{-2})(1-u^{-2n})} = \sum_{i=0}^{\infty}u^{-2i}\sum_{j=0}^{\infty}u^{-2jn} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(1+\left[\frac{i}{n}\right]\right)u^{-2i}. \tag{4.18}$$

Овде $[x]$ означава цео део реалног броја x. На основу (4.16), (4.17) и (4.18) добијамо

$$K_{n,s}(z) = 2\pi\sum_{k=0}^{s}\sum_{i,j=0}^{\infty}C_{s,k}(-1)^j\binom{2s-1+j}{2s-1}\left(1+\left[\frac{i}{n}\right]\right)u^p,$$

где је

$$C_{s,k} = \binom{2s+1}{s-k-1}-\binom{2s+1}{s-k}$$

и $p=-(2s+3)n-2((j+k)n+i)-1$. Коефицијент уз члан $u^{-(2s+3)n-2(an+b)-1}$ за који важи $0\leqslant a$ и $0\leqslant b\leqslant n-1$ у претходном изразу је

$$\omega_{n,2an+2b}^{(s)} = 2\pi\sum_{k=0}^{s}\sum_{j=0}^{a-k}C_{s,k}(-1)^j\binom{2s-1+j}{2s-1}(a-k-j+1), \tag{4.19}$$

па је

$$K_{n,s}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{n,2jn+2i}^{(s)}u^{-(2s+3)n-2jn-2i-1}. \tag{4.20}$$

Теорема 4.4. Остатак $R_{n,s}(fT_n)$ се може представити у облику

$$R_{n,s}(fT_n) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{(2s+3)n+k}\varepsilon_{n,k}^{(s)}, \tag{4.21}$$

при чему коефицијенти $\varepsilon_{n,k}^{(s)}$ не зависе од f. С друге стране, $\varepsilon_{n,2j+1}^{(s)}=0$ за $j=0,1,\ldots$

Доказ. Заменом (4.15) и (4.20) у (2.27) добијамо

$$R_{n,s}(fT_n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{E}_\rho}\left(\sum_{k=0}^{\infty}{}'\alpha_k T_k(z)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{n,2jn+2i}^{(s)}u^{-(2s+3)n-2jn-2i-1}\right)dz.$$

На основу леме 5 из [14], ово се своди на

$$R_{n,s}(fT_n) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{(2s+3)n+2jn+2i}\varepsilon_{n,2jn+2i}^{(s)}$$

уз

$$\varepsilon_{n,0}^{(s)} = \frac{1}{4}\omega_{n,0}^{(s)}, \quad \varepsilon_{n,1}^{(s)} = \frac{1}{4}\omega_{n,1}^{(s)}, \quad \varepsilon_{n,k}^{(s)} = \frac{1}{4}\left(\omega_{n,k}^{(s)} - \omega_{n,k-2}^{(s)}\right), \quad k = 2,3,\ldots \tag{4.22}$$

Очигледно је $\varepsilon_{n,2j+1}^{(s)} = 0$, $j = 0,1,\ldots$ Коначно, из (4.19) и (4.22) налазимо

$$\varepsilon_{n,k}^{(s)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\sum_{l=0}^{s}\sum_{i=0}^{j-l}\left(\binom{2s+1}{s-l-1} - \binom{2s+1}{s-l}\right)(-1)^i\binom{2s-1+i}{2s-1}, & k = 2jn, \\ 0, & k \neq 2jn, \end{cases} \tag{4.23}$$

за $j = 0,1,\ldots$ $\square$

Како је

$$|R_{n,s}(fT_n)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{(2s+3)n+k}||\varepsilon_{n,k}^{(s)}|, \tag{4.24}$$

да бисмо одредили експлицитну оцену за опште s, треба нам знак израза $\varepsilon_{n,k}^{(s)}$. У испитивању овог знака биће нам потребан рачун који следи.

Приметимо прво да је $C_{s,l} = 0$ за $l > s$ и

$$\sum_{l=0}^{p}C_{s,l} = \binom{2s+1}{s-p-1} - \binom{2s+1}{s}.$$

Следи да се сума у (4.23) може записати у облику

$$\varepsilon_{n,k}^{(s)} = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{j-i}C_{s,l}(-1)^i\binom{2s-1+i}{2s-1} = (-1)^{j+1}\frac{\pi}{2}(S_1 - S_2), \tag{4.25}$$

где је

$$S_1 = \binom{2s+1}{s}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{2s-1+i}{2s-1} \tag{4.26}$$

и

$$S_2 = \sum_{i=j-s+1}^{j}(-1)^{j-i}\binom{2s-1+i}{2s-1}\binom{2s+1}{s-j+i-1}. \tag{4.27}$$

Сума S_2 се може израчунати коришћењем леме 3 из [43], па је

$$S_2 = \frac{2js + 2s^2 + 3s + 1}{(j+s+1)(j+s+2)} \binom{2s}{s-1} \binom{2s+j}{j}. \tag{4.28}$$

С друге стране, суму S_1 не можемо израчунати у затвореном облику. Ипак, како нам треба само знак израза $S_1 - S_2$, довољно је наћи задовољавајућа ограничења за S_1. Горња граница за суму S_1 је одређена наредним тврђењем.

Лема 4.1. За свако $j \in \mathbb{N}_0$ и $s \in \mathbb{N},\ s > 1$, важи

$$\frac{1}{\binom{2s+1}{s}} S_1 = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{2s-1+i}{2s-1} \leqslant \frac{2s-1+j}{2s-1+2j} \binom{2s-1+j}{2s-1}. \tag{4.29}$$

Доказ. Користимо индукцију по j. За $j = 0$ и $j = 1$ неједнакост (4.29) важи тривијално, јер је еквивалентна неједнакостима

$$1 \leqslant 1 \quad \text{и} \quad -1 + 2s \leqslant \frac{2s}{2s+1} 2s,$$

редом.

Претпоставимо да оцена (4.29) важи за неко $j \in \mathbb{N}_0$. Показаћемо да она такође важи за $j+2$, тј. да је

$$\sum_{i=0}^{j+2} (-1)^{j-i} \binom{2s-1+i}{2s-1} \leqslant \frac{2s+1+j}{2s+3+2j} \binom{2s+1+j}{2s-1}. \tag{4.30}$$

Како је

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j+2} (-1)^{j-i} \binom{2s+1+i}{2s-1} &\leqslant \frac{2s-1+j}{2s-1} \binom{2s-1+j}{2s-1} - \binom{2s+j}{2s-1} + \binom{2s+1+j}{2s-1} \\
&= \binom{2s+1+j}{2s-1} \left(\frac{2s-1+j}{2s-1+2j} \frac{(j+1)(j+2)}{(2s+j)(2s+1+j)} - \frac{j+2}{2s+1+j} + 1 \right),
\end{aligned}$$

довољно је показати да важи

$$\frac{2s-1+j}{2s-1+2j} \frac{(j+1)(j+2)}{(2s+j)(2s+1+j)} - \frac{j+2}{2s+1+j} + 1 \leqslant \frac{2s+1+j}{2s+3+2j},$$

што је еквивалентно са

$$\frac{(j+2)(4(s-2)s+3)}{(j+2s)(j+2s+1)(2j+2s-1)(2j+2s+3)} \geqslant 0,$$

па очигледно важи за $s > 1$. $\square$

Овај резултат ћемо употребити да изведемо и доњу границу за S_1.

Лема 4.2. За свако $j \in \mathbb{N}_0$ и $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ имамо

$$S_1 \geqslant \frac{(2s-3+j)(2s-1+j)+j}{(2s+2j-3)(2s+j-1)} \binom{2s-1+j}{2s-1} \binom{2s+1}{s}. \tag{4.31}$$

Доказ. Лема 4.1 за $j-1$ уместо j даје

$$\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-1-i} \binom{2s-1+i}{2s-1} \leqslant \frac{2s-2+j}{2s-3+2j} \binom{2s-2+j}{2s-1},$$

одакле је

$$\begin{aligned} S_1 &= \binom{2s+1}{s} \left(\binom{2s-1+j}{2s-1} - \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-1-i} \binom{2s-1+i}{2s-1} \right) \\ &\geqslant \binom{2s+1}{s} \left(\binom{2s-1+j}{2s-1} - \frac{2s-2+j}{2s-3+2j} \binom{2s-2+j}{2s-1} \right). \end{aligned}$$

Ово је еквивалентно траженој неједнакости. ☐

Сада можемо упоредити суме S_1 и S_2. Како је

$$\binom{2s}{s-1} = \frac{s}{2s+1} \binom{2s+1}{s} \quad \text{и} \quad \binom{2s+j}{j} = \frac{2s+j}{2s} \binom{2s-1+j}{j},$$

једнакост (4.28) је еквивалентна са

$$\frac{S_2}{\binom{2s-1+j}{2s-1}\binom{2s+1}{s}} = \frac{2js+2s^2+3s+1}{(j+s+1)(j+s+2)} \frac{2s+j}{2(2s+1)}. \tag{4.32}$$

Из (4.31) и (4.32) добијамо

$$\frac{S_1 - S_2}{\binom{2s-1+j}{2s-1}\binom{2s+1}{s}} \geqslant L,$$

где је

$$L = \frac{(2s-3+j)(2s-1+j)+j}{(2s+2j-3)(2s+j-1)} - \frac{2js+2s^2+3s+1}{(j+s+1)(j+s+2)} \frac{2s+j}{2(2s+1)}.$$

Претходни израз је позитиван ако и само ако је

$$\begin{aligned} 0 < I &= ((2s-3+j)(2s-1+j)+j)(j+s+1)(j+s+2)(4s+2) \\ &\quad -(2js+2s^2+3s+1)(2s+j)(2s+2j-3)(2s+j-1) \\ &= 2j^4 + 2j^3(-1+8s) + j^2(-3-15s+46s^2) + j(3-17s-46s^2+64s^3) \\ &\quad +4(3+s-14s^2-4s^3+8s^4). \end{aligned}$$

За $s > 1$, сви коефицијенти у изразу I посматраном као полином по j су позитивни, па је $I > 0$ за свако $j \in \mathbb{N}_0$. Следи да је $S_1 - S_2 > 0$, што заједно са (4.25) даје

$$\operatorname{sgn}(\varepsilon_{n,2jn}^{(s)}) = (-1)^{j+1} \tag{4.33}$$

за $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ и $j \in \mathbb{N}_0$.

Даље, за $s = 1$ из једнакости (4.23) следи да је

$$\varepsilon_{n,2jn}^{(1)} = -\frac{\pi}{8}((-1)^j(2j+5)+3), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

и $\varepsilon_{n,2jn}^{(1)} = 0$ иначе, па једнакост (4.33) важи и у овом случају.

Овим је доказан следећи резултат.

Лема 4.3. За $\varepsilon_{n,2jn}^{(s)}$ дате формулом (4.23) важи

$$\operatorname{sgn}(\varepsilon_{n,2jn}^{(s)}) = (-1)^{j+1}, \tag{4.34}$$

за $s \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}_0$.

Сада ћемо из (4.24) извести експлицитну оцену за $|R_{n,s}(fT_n)|$.

У општем случају, Чебишовљеви коефицијенти α_k у (4.15) су непознати. Ипак, Елиот је у [6] описао неколико начина да се они оцене. Овде је

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{2}{\rho^k}\left(\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}|f(z)|\right). \tag{4.35}$$

Заменом (4.23) и (4.35) у (4.24) добијамо

$$|R_{n,s}(fT_n)| \leqslant \pi \max_{z\in\mathcal{E}_\rho}|f(z)|F(\rho), \tag{4.36}$$

где је

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho^{(2s+3)n}}\sum_{j=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,2jn}^{(s)}|\rho^{-2jn}, \tag{4.37}$$

Мада су функције $\varepsilon_{n,2jn}^{(s)}$ и саме суме, испоставља се да се функција $F(\rho)$ може изразити као коначна сума.

Лема 4.4. За функцију $F(\rho)$ дату формулом (4.37) за $\rho > 1$, важи

$$F(\rho) = \frac{\sum_{l=0}^{s}(-1)^{l+1}\left(\binom{2s+1}{s-l-1}-\binom{2s+1}{s-l}\right)\rho^{2(s-l)n}}{\rho^n(\rho^{2n}-1)^{2s}(\rho^{2n}+1)}. \tag{4.38}$$

Доказ. Из формуле (4.17) налазимо

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\rho^{2n}-1)^{2s}(\rho^{2n}+1)} &= \frac{1}{\rho^{2n(2s+1)}}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2s-1+i}{2s-1}\rho^{-2in}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\rho^{-2ln}\\ &= \frac{1}{\rho^{2n(2s+1)}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{2s-1+i}{2s-1}\rho^{-2mn}.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Нека је

$$C_{s,l} = \binom{2s+1}{s-l-1} - \binom{2s+1}{s-l}.$$

Из формула (4.39) и (4.38) добијамо

$$
\begin{aligned}
F(\rho) &= \frac{1}{\rho^{(2s+3)n}} \sum_{l=0}^{s} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} (-1)^{l+m+i+1} C_{s,l} \binom{2s-1+i}{2s-1} \rho^{-2(m+l)n} \\
&= \frac{1}{\rho^{(2s+3)n}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{s} \sum_{i=0}^{j-l} (-1)^{j+i+1} C_{s,l} \binom{2s-1+i}{2s-1} \rho^{-2jn}, \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

што се коришћењем (4.23) и (4.34) своди на (4.37). □

Најзад можемо да формулишемо главни резултат који смо овим доказали.

Теорема 4.5. За $s \in \mathbb{N}$ оцена (4.36) се може изразити у облику

$$
|R_{n,s}(fT_n)| \leqslant \pi \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \frac{\sum_{l=0}^{s} (-1)^{l+1} \left(\binom{2s+1}{s-l-1} - \binom{2s+1}{s-l} \right) \rho^{2(s-l)n}}{\rho^n (\rho^{2n}-1)^{2s} (\rho^{2n}+1)}. \qquad (4.41)
$$

4.5. Нумерички примери

Израчунајмо интеграл

$$
\int_{-1}^{1} T_n(t) f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},
$$

коришћењем квадратурне формуле (2.26) за две целе функције.

Ако означимо оцене у подсекцијама 4.2, 4.3 и 4.4 са $|R_{n,s}^{(i)}(f)| \leqslant r_i(f)$ за $i = 1, 2, 3$, редом, добијамо

$$
r_1(f) = \inf_{\rho_0 < \rho < +\infty} \left(B_1 \cdot \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right), \qquad (4.42)
$$

$$
r_i(f) = \inf_{1 < \rho < +\infty} \left(B_i \cdot \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right), \ i = 2, 3, \qquad (4.43)
$$

где је ρ_0 дефинисано у теореми 4.1, а функције B_i за $i = 1, 2, 3$ су дефинисане испод. Нумерички примери показују да су, за све n и све s, одговарајуће вредности $\rho_0(n, s)$ веома близу броју 1 (у већини случајева су мање од 1,1).

За дужину елипсе у (2.29) важи оцена (упоредити са [50, ф. (2.2)])

$$
\ell(\mathcal{E}_\rho) \leqslant 2\pi a_1 \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right),
$$

где је $a_1 = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})$. Тако из (2.29), теореме 4.1 и формуле (4.42) за $n > 1$ добијамо

$$
B_1 = a_1 \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right) \left| K_{n,s} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|. \qquad (4.44)
$$

На основу (2.30), (4.12) и (4.43) следи

$$
B_2 = \frac{\pi \sqrt{Q_s(x)}}{\rho^n (\rho^{4n}-1)^{2s}}, \qquad (4.45)
$$

где су функције Q_s дефинисане формулом (4.13). Коначно, из формула (4.41) и (4.43) добијамо

$$B_3 = \pi \frac{\sum_{l=0}^{s} (-1)^{l+1} \left(\binom{2s+1}{s-l-1} - \binom{2s+1}{s-l} \right) \rho^{2(s-l)n}}{\rho^n (\rho^{2n} - 1)^{2s} (\rho^{2n} + 1)}. \tag{4.46}$$

Ове грешке су израчунате за неке вредности n, s и ω. „Error” је стварна грешка, а I_ω је тачна вредност интеграла.

Пример 1. Нека је

$$f(z) = f_0(z) = e^{\omega z^2}, \quad \omega > 0.$$

Како је функција f_0 цела, добијена оцена важи унутар елипсе $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1$. Даље је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |e^{\omega z^2}| = e^{\omega a_1^2}, \ a_1 = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}).$$

Одговарајући резултати су приказани у табели 4.1.

Табела 4.1: Вредности оцена $r_1(f_0)$, $r_2(f_0)$ и $r_3(f_0)$ за неке вредности n, s и ω.

n	s	ω	$r_1(f_0)$	$r_2(f_0)$	$r_3(f_0)$	Error	I_ω
8	1	1	4,43(−29)	4,37(−29)	4,37(−29)	3,88(−30)	8,53(−4)
8	2	1	1,59(−44)	1,57(−44)	1,57(−44)	1,18(−45)	8,53(−4)
8	1	5	3,54(−14)	3,32(−14)	3,32(−14)	2,94(−15)	5,28(+0)
8	2	5	4,78(−24)	4,56(−24)	4,56(−24)	3,42(−25)	5,28(+0)
8	1	10	6,12(−7)	5,35(−7)	5,35(−7)	4,69(−8)	2,38(+3)
8	2	10	1,94(−14)	1,76(−14)	1,76(−14)	1,32(−15)	2,38(+3)
8	1	15	3,91(−2)	3,17(−2)	3,17(−2)	2,73(−3)	4,99(+5)
8	2	15	2,79(−8)	2,41(−8)	2,41(−8)	1,78(−9)	4,99(+5)
10	1	1	7,55(−39)	7,48(−39)	7,48(−39)	5,95(−40)	4,25(−5)
10	2	1	3,18(−59)	3,16(−59)	3,16(−59)	2,13(−60)	4,25(−5)
10	1	5	1,84(−20)	1,75(−20)	1,75(−20)	1,39(−21)	1,25(+0)
10	2	5	7,36(−34)	7,10(−34)	7,10(−34)	4,77(−35)	1,25(+0)
10	1	10	9,58(−12)	8,61(−12)	8,61(−12)	6,78(−13)	1,00(+3)
10	2	10	3,66(−22)	3,39(−22)	3,39(−22)	2,27(−23)	1,00(+3)
10	1	15	4,25(−6)	3,60(−6)	3,60(−6)	2,81(−7)	2,74(+5)
10	2	15	8,43(−15)	7,51(−15)	7,51(−15)	5,00(−16)	2,74(+5)
14	1	1	1,27(−59)	1,26(−59)	1,26(−59)	8,51(−61)	6,32(−8)
14	2	1	2,38(−90)	2,36(−90)	2,36(−90)	1,35(−91)	6,32(−8)
14	1	5	2,94(−34)	2,84(−34)	2,84(−34)	1,91(−35)	4,39(−2)
14	2	5	3,28(−55)	3,20(−55)	3,20(−55)	1,82(−56)	4,39(−2)
14	1	10	1,46(−22)	1,36(−22)	1,36(−22)	9,09(−24)	1,19(+2)
14	2	10	2,55(−39)	2,41(−39)	2,41(−39)	1,37(−40)	1,19(+2)
14	1	15	3,37(−15)	3,01(−15)	3,01(−15)	2,00(−16)	5,92(+4)
14	2	15	1,59(−29)	1,47(−29)	1,47(−29)	8,29(−31)	5,92(+4)

Пример 2. Нека је

$$f(z) = f_1(z) = e^{\cos(\omega z)}, \quad \omega > 0.$$

Као у претходном примеру, добијене грешке важе за $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1$. Имамо

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |e^{\cos(\omega z)}| = e^{\cosh(\omega b_1)},\ b_1 = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}).$$

Одговарајући резултати су приказани у табели 4.2.

Табела 4.2: Вредности оцена $r_1(f_1)$, $r_2(f_1)$ и $r_3(f_1)$ за неке вредности n, s и ω.

n	s	ω	$r_1(f_1)$	$r_2(f_1)$	$r_3(f_1)$	Error	I_ω
8	1	0,5	5,54(−39)	5,50(−39)	5,50(−39)	3,34(−40)	1,08(−6)
8	2	0,5	1,21(−56)	1,21(−56)	1,21(−56)	6,03(−58)	1,08(−6)
8	1	1	3,07(−27)	2,99(−27)	2,99(−27)	1,80(−28)	1,98(−4)
8	2	1	3,81(−40)	3,73(−40)	3,73(−40)	1,85(−41)	1,98(−4)
8	1	5	1,89(−5)	1,16(−5)	1,16(−5)	5,81(−7)	3,11(−1)
8	2	5	8,23(−9)	5,39(−9)	5,39(−9)	2,25(−10)	3,11(−1)
8	1	10	3,14(−1)	9,48(−2)	9,65(−2)	4,06(−3)	1,07(+0)
8	2	10	1,93(−2)	6,80(−3)	7,10(−3)	1,98(−4)	1,07(+0)
10	1	0,5	3,30(−50)	3,29(−50)	3,29(−50)	1,75(−51)	−1,29(−8)
10	2	0,5	8,16(−73)	8,12(−73)	8,12(−73)	3,56(−74)	−1,29(−8)
10	1	1	1,71(−35)	1,67(−35)	1,67(−35)	8,85(−37)	−9,13(−6)
10	2	1	3,73(−52)	3,66(−52)	3,66(−52)	1,60(−53)	−9,13(−6)
10	1	5	9,30(−8)	5,96(−8)	5,96(−8)	2,65(−9)	−1,72(−1)
10	2	5	2,35(−12)	1,60(−12)	1,60(−12)	5,93(−14)	−1,72(−1)
10	1	10	3,36(−2)	1,09(−2)	1,09(−2)	3,95(−4)	−8,80(−1)
10	2	10	5,72(−4)	2,09(−4)	2,12(−4)	6,01(−6)	−8,80(−1)
14	1	0,5	3,26(−73)	3,25(−73)	3,25(−73)	1,42(−74)	−1,37(−12)
14	2	0,5	6,75(−106)	6,73(−106)	6,73(−106)	2,43(−107)	−1,37(−12)
14	1	1	1,49(−52)	1,47(−52)	1,47(−52)	6,39(−54)	−1,47(−8)
14	2	1	6,70(−77)	6,59(−77)	6,59(−77)	3,68(−78)	−1,47(−8)
14	1	5	9,42(−13)	6,38(−13)	6,38(−13)	2,37(−14)	−4,23(−2)
14	2	5	5,79(−20)	4,10(−20)	4,10(−20)	2,72(−21)	−4,23(−2)
14	1	10	2,32(−4)	8,36(−5)	8,36(−5)	2,45(−6)	9,03(−2)
14	2	10	2,39(−7)	9,50(−8)	9,51(−8)	2,30(−9)	9,03(−2)

У претходним примерима видимо да су све три оцене истог реда величине (упоредити са аналогним резултатима у раду [43]) и да су јако блиске стварној грешки.

4.6. Закључак

За Кронродову екстензију уопштених Мичели-Ривлинових квадратурних формула када је интегранд аналитичка функција у конфокалним елипсама, нађене су три различите оцене грешке. Исте оцене за Мичели-Ривлинову квадратурну формулу и њено уопштење недавно су посматране у радовима [42], односно [43].

5. Уопштене усредњене квадратурне формуле за неке специјалне тежинске функције

Нека је $\{\pi_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$ низ моничних полинома ортогоналних на интервалу $[a,b]$ у односу на тежинску функцију $w(x)$. Ти полиноми задовољавају рекурентну релацију (1.3). Исти рекурентни коефицијенти се појављују у верижном разломку придруженом степеном реду функције $F(z)$, која представља Стилтјесову трансформацију мере (подсекција 1.4).

Недавно је у раду [46] посматран ред

$$T(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^2 + \cdots + \frac{1}{2l+1}x^l + \cdots ,$$

који се може представити у облику верижног разломка

$$T(x) = \frac{1}{1+}\frac{-\frac{1}{3}x}{1+}\frac{-\frac{4}{15}x}{1+}\cdots\frac{-\frac{l^2}{4l^2-1}x}{1+}\cdots . \tag{5.1}$$

Узимањем парног и непарног конвергента, добијена су четири низа моничних ортогоналних полинома $\{Q_l^{(\nu)}(x)\}_{l=0}^{\infty}$, $\nu = 1,2,3,4$. Ти полиноми задовољавају рекурентну релацију (1.3), при чему је $Q_0^{(\nu)}(x) = 1$ и $Q_1^{(1)}(x) = x - \frac{1}{3}$, $Q_1^{(2)}(x) = x - \frac{3}{5}$, $Q_1^{(3)}(x) = x - \frac{4}{15}$, $Q_1^{(4)}(x) = x - \frac{11}{21}$. Прва два полинома су класични ортогонални полиноми (видети [19, стр. 121–146]) и могу се добити из имениоца, а друга два су некласични и могу се добити из бројиоца разломка (5.1).

Посматрајмо сада полиноме $p_l^{(1)}(x)$ и $p_l^{(2)}(x)$ ортогоналне на интервалу $[0,1]$ у односу на тежинске функције

$$w^{(1)}(x) = (1-x)^{\lambda-1/2}/\sqrt{x} \quad \text{и} \quad w^{(2)}(x) = \sqrt{x}(1-x)^{\lambda-1/2}, \quad \lambda > -1/2. \tag{5.2}$$

Они задовољавају рекурентну релацију (1.3), са рекурентним коефицијентима (видети [23])

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= \frac{1}{2(\lambda+1)}, & a_l^{(1)} &= \frac{4l^2+4\lambda l+\lambda-1}{2(\lambda+2l-1)(\lambda+2l+1)}, \\ b_0^{(1)} &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+1)}, & b_l^{(1)} &= \frac{l(2l-1)(\lambda+l-1)(2\lambda+2l-1)}{4(\lambda+2l-2)(\lambda+2l-1)^2(\lambda+2l)}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

и

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} &= \frac{3}{2(\lambda+2)}, & a_l^{(2)} &= \frac{3\lambda+4l^2+4(\lambda+1)l}{2(\lambda+2l)(\lambda+2l+2)}, \\ b_0^{(2)} &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}{2\Gamma(\lambda+2)}, & b_l^{(2)} &= \frac{l(2l+1)(\lambda+l)(2\lambda+2l-1)}{4(\lambda+2l-1)(\lambda+2l)^2(\lambda+2l+1)}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где је $l \geqslant 1$. Заправо, то су (монични) Јакобијеви полиноми трансформисани на интервал $[0,1]$, са параметрима $(\lambda-1/2, \mp 1/2)$, тј.

$$p_l^{(1)}(x) = \frac{1}{2^l}p_l^{(\lambda-1/2,-1/2)}(2x-1), \qquad p_l^{(2)}(x) = \frac{1}{2^l}p_l^{(\lambda-1/2,1/2)}(2x-1), \tag{5.5}$$

где је $l \geqslant 0$ и $p_l^{(\alpha,\beta)}(x)$ су монични Јакобијеви полиноми ортогонални у односу на тежинску функцију $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на интервалу $[-1,1]$ (видети [19, стр. 131–140]).

Миловановић је у раду [23] показао да се за $\lambda = 1/2$, коефицијенти (5.3) и (5.4) своде на оне за полиноме $Q^{(1)}(x)$ и $Q^{(2)}(x)$, редом.

Нека су $a_l^{(\alpha,\beta)}$ и $b_l^{(\alpha,\beta)}$ рекуренти коефицијенти за моничне Јакобијеве полиноме $p_l^{(\alpha,\beta)}$ и тежинску функцију $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Очигледно за $l \geqslant 1$ важи

$$a_l^{(1)} = \frac{a_l^{(\lambda-1/2,-1/2)}+1}{2}, \qquad b_l^{(1)} = \frac{b_l^{(\lambda-1/2,-1/2)}}{4}, \tag{5.6}$$

$$a_l^{(2)} = \frac{a_l^{(\lambda-1/2,1/2)}+1}{2}, \qquad b_l^{(2)} = \frac{b_l^{(\lambda-1/2,1/2)}}{4}. \tag{5.7}$$

Посебно су важни случајеви $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Нека су $T_l(x)$, $U_l(x)$, $V_l(x)$ и $W_l(x)$ Чебишовљеви полиноми прве, друге, треће и четврте врсте, редом. За $\lambda = 0$ је $p_l^{(1)}(x) = \frac{1}{2^l}T_l(2x-1)$ и $p_l^{(2)}(x) = \frac{1}{2^l}V_l(2x-1)$, за $l \geqslant 0$. Слично, за $\lambda = 1$ добијамо $p_l^{(1)}(x) = \frac{1}{2^l}W_l(2x-1)$ и $p_l^{(2)}(x) = \frac{1}{2^l}U_l(2x-1)$ за $l \geqslant 0$.

У раду [23] је такође показано да су полиноми $Q^{(3)}(x)$ и $Q^{(4)}(x)$ ортогонални на интервалу $[0,1]$ у односу на тежинске функције

$$w^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{4(\tanh^{-1}\sqrt{x})^2+\pi^2} \quad \text{и} \quad w^{(4)}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4(\tanh^{-1}\sqrt{x})^2+\pi^2}, \tag{5.8}$$

редом. Одговарајући ортогонални полиноми су некласични на интервалу $[0,1]$ и њихови рекурентни коефицијенти су

$$a_0^{(3)} = \frac{4}{15}, \quad a_l^{(3)} = \frac{8l^2+12l+3}{(4l+1)(4l+5)}, \quad b_l^{(3)} = \frac{(2l)^2(2l+1)^2}{(4l-1)(4l+1)^2(4l+3)}, \tag{5.9}$$

и

$$a_0^{(4)} = \frac{11}{21}, \quad a_l^{(4)} = \frac{8l^2+20l+11}{(4l+3)(4l+7)}, \quad b_l^{(4)} = \frac{(2l+1)^2(2l+2)^2}{(4l+1)(4l+3)^2(4l+5)}, \tag{5.10}$$

где је $l \geqslant 1$. Касније ће бити приказани неки примери са одговарајућом проценом грешке у односу на те тежинске функције.

5.1. Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула Q_{2l+1}^L

Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула Q_{2l+1}^L уведена у раду [17] је унутрашња ако најмања x_1^π и највећа x_{l+1}^π нула полинома

$$\pi_{l+1}(x) = p_{l+1}(x) - \beta_l p_{l-1}(x)$$

припадају интервалу $[0,1]$. Овде су p_j, $j = 0,1,\ldots$, ортогонални полиноми у односу на полазну тежинску функцију и β_j, $j = 1,2,\ldots$, коефицијенти у рекурентној релацији за те полиноме. На основу теореме 2.12, највећа нула x_{l+1}^π припада интервалу $[0,1]$ ако и само ако је

$$\frac{p_{l+1}(1)}{\beta_l p_{l-1}(1)} \geqslant 1. \tag{5.11}$$

Слично, најмања нула x_1^π припада интервалу $[0,1]$ ако и само је

$$\frac{p_{l+1}(0)}{\beta_l p_{l-1}(0)} \geqslant 1. \tag{5.12}$$

Јасно је да су претходни услови еквивалентни одговарајућим условима за Јакобијеве полиноме. Заиста, користећи (5.5)–(5.7), ти услови се своде на

$$\frac{p_{l+1}^{(\lambda-1/2,\mp 1/2)}(x)}{\beta_l^{(\lambda-1/2,\mp 1/2)} p_{l-1}^{(\lambda-1/2,\mp 1/2)}(x)} \geqslant 1,$$

где је $x = 0$ или $x = 1$. Следи да се може применити теорема 3 из рада [16].

За тежинску функцију $w^{(1)}(x)$, услови (18) и (19) из рада [16] се своде на

$$2\lambda^3 + (8l-1)\lambda^2 + (8l^2-1)\lambda \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda^2 - \lambda \geqslant 0,$$

редом. Први услов очигледно важи за $\lambda \geqslant 0$. Са друге стране, за $\lambda \in (-1/2, 0)$ и довољно велико l не важи (водећи коефицијент уз l је негативан). Други услов важи за $\lambda \in (-1/2, 0] \cup [1, \infty)$.

Слично, за тежинску функцију $w^{(2)}(x)$, услови (18) и (19) из рада [16] се своде на

$$2\lambda^3 + (8l+3)\lambda^2 + (8l^2+8l+1)\lambda \geqslant 0 \quad \text{и} \quad 8l^2 + (8\lambda+8)l + 3\lambda^2 + 3\lambda \geqslant 0,$$

редом. Први услов важи за $\lambda \geqslant 0$, док за $\lambda \in (-1/2, 0)$ и довољно велико l не важи. Коначно, други услов важи за $\lambda > -1/2$.

Тиме смо показали наредни резултат.

Теорема 5.1. Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула Q_{2l+1}^L за тежинске функције $w^{(1)}(x)$ и $w^{(2)}(x)$ је интернална за $\lambda \geqslant 1$ и $\lambda \geqslant 0$, редом.

5.2. Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула Q_{2l+1}^S

Посматрајмо уопштену усредњену Гаусову квадратурну формулу Q_{2l+1}^S уведену у раду [47]. Ова формула је унутрашња ако најмања x_1^F и највећа x_{l+1}^F нула полинома

$$F_{l+1}(x) = p_{l+1}(x) - \beta_{l+1} p_{l-1}(x) \tag{5.13}$$

припадају интервалу $[0,1]$ (видети [47]). Овде су p_j, $j = 0, 1, \ldots$, ортогонални полиноми и β_j, $j = 2, 3, \ldots$, рекурентни коефицијенти у односу на полазну тежинску функцију. Највећа нула x_{l+1}^F припада интервалу $[0,1]$ ако и само ако је

$$\frac{p_{l+1}(1)}{\beta_{l+1} p_{l-1}(1)} \geqslant 1. \tag{5.14}$$

Слично, најмања нула x_1^F припада интервалу $[0,1]$ ако и само ако је

$$\frac{p_{l+1}(0)}{\beta_{l+1} p_{l-1}(0)} \geqslant 1. \tag{5.15}$$

Као и за формулу Q^L_{2l+1}, претходни услови се своде на одговарајуће услове за Јакобијеве полиноме, па можемо користити теорему 3.1 из рада [48].

За тежинску функцију $w^{(1)}(x)$, услови (3.5) и (3.6) из рада [48] се своде на

$$2\lambda^3 + (3+8l)\lambda^2 + (8l^2-5)\lambda \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda - \lambda^2 \geqslant 0.$$

Први услов важи за $\lambda \geqslant 0$. За $\lambda \in (-1/2, 0)$ и довољно велико l, овај услов није задовољен. Други услов важи за $\lambda \in [0,1]$.

За тежинску функцију $w^{(2)}(x)$, услови (3.5) и (3.6) из рада [48] се своде на

$$2\lambda^3 + (8l+7)\lambda^2 + (8l^2+8l-3)\lambda \geqslant 0 \quad \text{и} \quad 8l^2 + (8\lambda+8)l + 7\lambda - \lambda^2 \geqslant 0.$$

Први услов важи за $\lambda \geqslant 0$. Други услов важи за $\lambda \in (-1/2, 7)$, док за $\lambda \geqslant 7$ имамо

$$8l^2 + (8\lambda+8)l + 7\lambda - \lambda^2 > 8l^2 + 8\lambda l - \lambda^2 \geqslant 0 \quad \text{за} \quad l \geqslant \frac{\sqrt{6}-2}{4}\lambda.$$

Сада можемо формулисати наредно тврђење.

Теорема 5.2. Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула Q^S_{2l+1} за тежинску функцију $w^{(1)}(x)$ је интернала када је $\lambda \in [0,1]$. У случају тежинске функције $w^{(2)}(x)$, ова формула је интернала када је $\lambda \in [0,7)$; за $\lambda \geqslant 7$, интерналност важи за $l \geqslant \frac{\sqrt{6}-2}{4}\lambda$.

Посматрајмо сада случајеве $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ за тежинске функције (5.2). Тада се добијају полиноми $\frac{1}{2^l}T_l(2x-1)$, $\frac{1}{2^l}V_l(2x-1)$, $\frac{1}{2^l}W_l(2x-1)$ и $\frac{1}{2^l}U_l(2x-1)$ и важи $\alpha_l = \alpha$ и $\beta_l = \beta > 0$ за $l \geqslant r$, где је $r = 2$ за полином $\frac{1}{2^l}T_l(2x-1)$ и $r = 1$ за полиноме $\frac{1}{2^l}V_l(2x-1)$, $\frac{1}{2^l}W_l(2x-1)$ и $\frac{1}{2^l}U_l(2x-1)$. Следи да се може применити теорема 3.1 из рада [49].

Теорема 5.3. У случају тежинске функције $w^{(1)}(x)$ за $\lambda = 0$ и $l \geqslant 3$, квадратурне формуле Q^L_{2l+1} и Q^S_{2l+1} имају алгебарски степен тачности најмање $3l+1$. Дакле, ове формуле се поклапају са одговарајућим Гаус-Кронродовим формулама и одговарајући полиноми $\pi_{l+1} \equiv F_{l+1}$ се подударају са одговарајућим (моничним) Стилтјесовим полиномима. Исти резултат важи за тежинску функцију $w^{(1)}(x)$ када је $\lambda = 1$ и тежинску функцију $w^{(2)}(x)$ када је $\lambda \in \{0,1\}$ и $l \geqslant 1$.

Наравно, како се у овим случајевима уопштене усредњене квадратурне формуле Q^L_{2l+1} и Q^S_{2l+1} поклапају са Гаус-Кронродовим квадратурним формулама за Чебишовљеве тежинске функције, оне имају познате чворове и тежине и већи алгебарски степен тачности од $3n+1$. За Чебишовљеве тежинске функције прве врсте степен тачности је 5 када је $n=1$ и $4n-1$ када је $n \geqslant 2$; за Чебишовљеве тежинске функције друге врсте степен тачности је $4n+1$. Коначно, за Чебишовљеве тежинске функције треће и четврте врсте степен тачности је $4n$.

5.3. Скраћења уопштених усредњених Гаусових квадратурних формула Q_{2l+1}^S

Посматрајмо сада скраћења уопштених усредњених Гаусових квадратурних формула $Q_{2l-r+1}^{(l-r)}$ ($l \geqslant 2$) уведених у раду [45] за $r = l-1$. Ова формула је интернална ако најмања τ_1 и највећа τ_{l+2} нула полинома

$$t_{l+2}(x) = (x - \alpha_{l-1})p_{l+1}(x) - \beta_{l+1}p_l(x) \tag{5.16}$$

леже у интервалу $[0,1]$ (видети [4]). Овде су p_j, $j = 2,3,\ldots$, ортогонални полиноми и α_j, $j = 1,2,\ldots$, и β_j, $j = 3,4,\ldots$, рекурентни коефицијенти у односу на полазну тежинску функцију.

Као и раније, полиноми (5.16) имају крајње нуле унутар интервала $[0,1]$ ако и само ако одговарајући Јакобијеви полиноми имају крајње нуле унутар интервала $[-1,1]$. Према теореми 3.4 из рада [4], интерналност важи за $l \geqslant 3$.

Нека је $l = 2$. У случају тежинске функције $w^{(1)}(x)$, услови (3.12) и (3.13) из рада [4] се своде на

$$-\lambda^3 + 19\lambda^2 + 105\lambda + 45 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad 2\lambda^4 + 25\lambda^3 + 81\lambda + 63\lambda + 45 \geqslant 0.$$

Први услов важи за $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, где су $\lambda_1 \approx -0{,}46943$ и $\lambda_2 \approx 23{,}54142$ друга и трећа нула полинома $-x^3 + 19x^2 + 105x + 45$, редом. Други услов важи за $\lambda > -1/2$.

Слично, за тежинску функцију $w^{(2)}(x)$, услови (3.12) и (3.13) из рада [4] се своде на

$$\lambda^3 + 48\lambda^2 + 260\lambda + 216 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad 2\lambda^4 + 31\lambda^3 + 136\lambda^2 + 188\lambda + 168 \geqslant 0,$$

редом. Ови услови важе за $\lambda > -1/2$.

Дакле, имамо наредно тврђење.

Теорема 5.4. Скраћена уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула $Q_{l+2}^{(1)}$ у случају тежинске функције $w^{(1)}(x)$ је интернална за $\lambda > -1/2$ и $l \geqslant 3$. За $l = 2$ интерналност важи за $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, где су $\lambda_1 \approx -0{,}46943$ и $\lambda_2 \approx 23{,}54142$ друга и трећа нула полинома $-x^3 + 19x^2 + 105x + 45$, редом. За тежинску функцију $w^{(2)}(x)$ ова формула је интернала за $\lambda > -1/2$.

5.4. Нумерички резултати

Пример 5.1. Резултати теорема 5.1, 5.2 и 5.4 су илустровани кроз нека израчунавања у случају тежинских функција $w^{(2)}$ за неке вредности l и λ. У посматраним случајевима, одговарајуће квадратурне формуле су интерналне.

У табели 1 приказане су вредности чворова x_1^π и x_{l+1}^π за формулу Q_{2l+1}^L.

У табели 2 приказане су вредности чворова x_1^F и x_{l+1}^F за формулу Q_{2l+1}^S. Приметимо да се за $\lambda = 1$ ова формула поклапа са претходном и оне се поклапају са Гаус-Кронродовом квадратурном формулом (видети теорему 5.3).

У табели 3 приказане су вредности чворова τ_1 и τ_{l+2} за формулу $Q_{l+2}^{(1)}$.

Табела 1: Вредности чворова x_1^π и x_{l+1}^π за неке вредности l и λ у случају тежинских функција $w^{(2)}$.

λ	l	x_1^π	x_{l+1}^π
0,5	5	1,84918630347802(−2)	9,93315648803352(−1)
	10	5,32426071493249(−3)	9,98085997371715(−1)
	15	2,48373203616388(−3)	9,99108179903793(−1)
	20	1,43168514326074(−3)	9,99486155846300(−1)
1	5	1,70370868554659(−2)	9,82962913144534(−1)
	10	5,08927905953363(−3)	9,94910720940466(−1)
	15	2,40763666390156(−3)	9,97592363336098(−1)
	20	1,39810140940993(−3)	9,98601898590590(−1)

Табела 2: Вредности чворова x_1^F и x_{l+1}^F за неке вредности l и λ у случају тежинских функција $w^{(2)}$.

λ	l	x_1^F	x_{l+1}^F
0,5	5	1,85485046684558(−2)	9,93270563061661(−1)
	10	5,32892821283948(−3)	9,98082336550544(−1)
	15	2,48474645373049(−3)	9,99107386760496(−1)
	20	1,43202203935648(−3)	9,99485892741121(−1)
1	5	1,70370868554659(−2)	9,82962913144534(−1)
	10	5,08927905953363(−3)	9,94910720940466(−1)
	15	2,40763666390156(−3)	9,97592363336098(−1)
	20	1,39810140940993(−3)	9,98601898590590(−1)

Табела 3: Вредности чворова τ_1 и τ_{l+2} за неке вредности l и λ у случају тежинских функција $w^{(2)}$.

λ	l	τ_1	τ_{l+2}
0,5	5	4,05074383379349(−2)	9,76146311190531(−1)
	10	1,50966909367400(−2)	9,91134246875255(−1)
	15	7,80960712033176(−3)	9,95418464436467(−1)
	20	4,75922686471797(−3)	9,97209253940011(−1)
1	5	3,80602337443566(−2)	9,61939766255643(−1)
	10	1,45290912869740(−2)	9,85470908713026(−1)
	15	7,59612349389597(−3)	9,92403876506104(−1)
	20	4,65702698183462(−3)	9,95342973018165(−1)

Пример 5.2. Приказани су крајњи чворови у случају тежинске функције $w^{(1)}$ за формулу Q_{2l+1}^L када је $\lambda = 0{,}5$ и за формулу Q_{2l+1}^S када је $\lambda = 0{,}2$ за неке вредности l. Овде постоје чворови ван интервала [0, 1].

Табела 4: Вредности x_1^π и x_{l+1}^π за $w^{(1)}$, $\lambda = 0{,}5$ и неке l.

λ	l	x_1^π	x_{l+1}^π
0,5	5	−1,03583467673738(−5)	9,91983668229218(−1)
	10	−7,09110640371522(−7)	9,97894782375997(−1)
	15	−1,44570778097492(−7)	9,99048751274800(−1)
	20	−4,64835853269242(−8)	9,99460470025489(−1)

Табела 5: Вредности x_1^F и x_{l+1}^F за $w^{(2)}$, $\lambda = -0{,}2$ и неке l.

λ	l	x_1^F	x_{l+1}^F
−0,2	5	−4,13229856738924(−5)	1,00140197341566
	10	−2,37471751038235(−6)	1,00033417984287
	15	−4,59266799101858(−7)	1,00014681665572
	20	−1,43959966526914(−7)	1,00008217031089

Пример 5.3. Посматрајмо интеграл

$$I(f) = \int_0^1 f(t)w(t)dt,$$

где је $f(t) = 999{,}1^{\log_{10}(\varepsilon+t)}$, $\varepsilon = 10^{-6}$ и $w(t) = w^{(2)}(t)$. У табели 4 су добијене процене грешке $|I(f) - Q_l^G(f)|$ за Гаусову квадратурну формулу: $E_{LG} = \left|Q_{2l+1}^L(f) - Q_l^G(f)\right|$, $E_{SG} = |Q_{2l+1}^S(f) - Q_l^G(f)|$ и $E_{TSG} = |Q_{l+2}^{(1)}(f) - Q_l^G(f)|$ за неке l и λ. Као у претходном примеру, $Q_{2l+1}^L \equiv Q_{2l+1}^S$ за $\lambda = 1$. Стварна грешка је означена са Error, при чему је вредност интеграла рачуната Гаусовом квадратурном формулом са $5l$ чворова.

Табела 6: Процене грешке E_{LG}, E_{SG}, E_{TSG} и стварна грешка Error за неке l и λ.

λ	l	E_{LG}	E_{SG}	E_{TSG}	Error
0,5	5	1,5198(−10)	1,5192(−10)	1,4323(−10)	1,5219(−10)
	10	4,3114(−13)	4,3106(−13)	3,4123(−13)	4,3190(−13)
	15	1,3219(−14)	1,3218(−14)	8,7665(−15)	1,3244(−14)
	20	1,0866(−15)	1,0865(−15)	6,1493(−16)	1,0886(−15)
1	5	1,1092(−10)	1,1092(−10)	1,0410(−10)	1,1108(−10)
	10	3,5846(−13)	3,5846(−13)	2,8175(−13)	3,5911(−13)
	15	1,1599(−14)	1,1599(−14)	7,6384(−15)	1,1621(−14)
	20	9,8190(−16)	9,8190(−16)	5,5211(−16)	9,8378(−16)

Приметимо да интегранд из претходног примера није дефинисан за неке чворове из примера 5.2.

Пример 5.4. У наредној табели су приказане процене грешке E_{LG}, E_{SG}, E_{TSG} и стварна грешка Error за интегранд $f(t) = e^{3t}\sin 10t$ и тежинску функцију $w(t) = w^{(3)}(t)$ дату формулом (5.8). Приметимо да у случају тежинских функција датих формулом (5.8), немамо аналитички израз за ортогоналне полиноме, па се не можемо бавити интерналношћу као раније.

Табела 7: Процене грешке E_{LG}, E_{SG}, E_{TSG} и стварна грешка Error за неке вредности l.

l	E_{LG}	E_{SG}	E_{TSG}	Error
5	3,4273(−3)	3,4276(−3)	3,4209(−3)	3,4276(−3)
10	8,4359(−11)	8,4359(−11)	8,4340(−11)	8,4359(−11)
15	9,6941(−21)	9,6941(−21)	9,6934(−21)	9,6941(−21)
20	3,1798(−32)	3,1798(−32)	3,1797(−32)	3,1798(−32)

5.5. Закључак

За неке тежинске функције које су недавно посматране у раду [23] су анализиране уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле и скраћења једног типа таквих формула. У случају када се добијају Јакобијеви полиноми трансформисани на интервал $[0, 1]$, испитана је интерналност поменутих формула и урађени су одговарајући нумерички примери. За неке једноставне случајеве ових полинома, показано је да се уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле поклапају са Гаус-Кронродовим квадратурним формулама. Коначно, у случају некласичних ортогоналних полинома који су посматрани у раду [23], урађени су нумерички примери за одговарајуће процене грешке Гаусове квдаратурне формуле.

Литература

[1] B. Bojanov, G. Petrova, Quadrature formulae for Fourier coefficients, J. Comput. Appl. Math. 231, 378–391 (2009).

[2] P. J. Davis, Interpolation and Approximation, Dover Publications, Inc. New York (1975).

[3] D. Lj. Djukić, A. V. Pejčev, M. M. Spalević, The error bounds of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type. Numer. Algor. 77, 1003-1028 (2018).

[4] D. Lj. Djukić, L. Reichel, M. M. Spalević, Truncated generalized averaged Gauss quadrature rules, J. Comput. Appl. Math. 308, 408-418 (2016).

[5] S. Ehrich, On stratified extension of Gauss-Laguerre and Gauss-Hermite quadrature formulas, J. Comput. Appl. Math. 140, 291–299 (2002).

[6] D. Elliott, The evaluation and estimation of the coefficients in the Chebyshev series expansion of a functions, Math. Comp. 18, 82-90 (1964).

[7] W. Gautschy, Algorithm 726: ORTHPOL–a package of routines for generating ortogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules, ACM Trans. Math. Software 20, 21–62 (1994).

[8] W. Gautschy, Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation, Oxford University Press, Oxford (2004).

[9] W. Gautschi, S. E. Notaris, Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type, J. Comput. Appl. Math. 25, 199–224 (1989).

[10] W. Gautschi, R. S. Varga, Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions, SIAM J. Numer. Anal. 20, 1170–1186 (1983).

[11] G. Golub, J. H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rules, Math. Comp. 23, 221–230 (1969).

[12] V. L. Gončarov, Theory of Interpolation and Approximation of Functions, GITTL, Moscow, (1954) (на Руском).

[13] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, 6th edn (A. Jeffrey and D. Zwillinger, Eds), Academic Press, San Diego, 2000.

[14] D. B. Hunter, Some error expansions for Gaussian quadrature, BIT Numer. Math. 35, 64-82 (1995).

[15] D. K. Kahaner, G. Monegato, Nonexistence of extended Gauss-Laguerre and Gauss-Hermite quadrature rules with positive weights, Z. Angew. Math. Phys. 29, 983–986 (1978).

[16] D. P. Laurie, Stratified sequences of nested quadrature formulas, Quaest. Math. 15, 365–384 (1992).

[17] D. P. Laurie, Anti-Gaussian quadrature formulas, Math. Comp. 65, 739–747 (1996).

[18] D. P. Laurie, Calculation of Gauss-Kronrod quadrature rules, Math. Comp. 66, 1133–1145 (1997).

[19] G. Mastroianni, G. Milovanović, Interpolation Processes - Basic Theory and Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag (2008).

[20] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, Turán formulae and highest precision quadrature rules for Chebyshev coefficients, IBM J. Res. Develop. 16, 372–379 (1972).

[21] C. Micchelli, The fundamental theorem of algebra for monosplines with multiplicities, Linear operators and approximation, 20, 419–430 (1972).

[22] C. Micchelli, T. Rivlin, Some new characterizations of the Chebyshev polynomials, J. Approx. Theory 12, 420-424 (1974).

[23] G. V. Milovanović, A note on extraction of orthogonal polynomials from generating function for reciprocal of odd numbers, Indian J. Pure Appl. Math. 50, 15-22 (2019).

[24] Г. В. Миловановић: Нумеричка анализа, I-II део, Научна књига, Београд (1988).

[25] G. V. Milovanović, M. M. Spalević, An error expansion for some Gauss-Turán quadratures and L^1-estimates of the remainder term, BIT Numer. Math. 45, 117–136 (2005).

[26] G. V. Milovanović, M. M. Spalević, Kronrod extensions with multiple nodes of quadrature formulas for Fourier coefficients, Math. Comp. 83, 1207–1231 (2014).

[27] G. V. Milovanović, R. Orive, M. M. Spalević, Quadrature with multiple nodes for Fourier-Chebyshev coefficients, IMA J. Numer. Anal. 39, 271–296 (2019)

[28] G. Monegato, Positivity of the weights of extended Gauss-Legandre quadrature rules, Math. Comp. 32 (141) 243–245 (1978).

[29] R. M. Mutavdžić, A. V. Pejčev, M. M. Spalević, Error bounds for Kronrod extension of generalizations of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions, Electron. Trans. Numer. Anal., 50 (2018), pp. 20–35.

[30] R. M. Mutavdžić, A. V. Pejčev, M. M. Spalević, The error bounds of Gauss-Lobatto quadratures for weights of Bernstein-Szegő type, Appl. Anal. Discrete Math., 13 (3) (2019), pp. 733–745.

[31] R. M. Mutavdžić, Generalized averaged Gaussian formulas for certain weight functions, Kragujevac Journal of Mathematics, 46 (2) (2022), pp. 295–305.

[32] S. E. Notaris, The error norm of Gaussian quadrature formulas for weight functions of Bernstein-Szegö type, Numer. Math. 57, 271–283 (1990).

[33] S. E. Notaris, The error norm of Gauss-Lobatto quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type, Numer. Math. 64, 381–393 (1993).

[34] S. E. Notaris, Gauss-Kronrod quadrature formulae – a survey of fifty years of research, Electron. Trans. Numer. Anal. 45, 371–404 (2016).

[35] A. Ossicini, F. Rosati, Sulla convergenza dei funzionali ipergaussiani, Rend. Mat. 6, 97–108 (1978).

[36] T. N. L. Patterson, Stratified nested and related quadrature rules, J. Comput. Appl. Math. 112, 243–251 (1999).

[37] F. Peherstorfer, On positive quadrature formulas, ISNM, Birkhäuser, Basel, 112, 297–313 (1993).

[38] F. Peherstorfer, K. Petras, Ultraspherical Gauss-Kronrod quadrature is not possible for $\lambda > 3$, SIAM J. Numer. Anal. 37, 927–948 (2000).

[39] F. Peherstorfer, K. Petras, Stieltjes polynomials and Gauss-Kronrod quadrature for Jacobi weight functions, Numer. Math. 95, 689–706 (2003).

[40] A. V. Pejčev, M. M. Spalević, Error bounds for Gaussian quadrature formulae with Bernstein-Szegő weights that are rational modifications of Chebyshev weight functions of second kind, IMA J. Numer. Anal, 32, 1733–1754 (2012).

[41] A. V. Pejčev, M. M. Spalević, The error bounds of Gauss-Radau quadrature formulae with Bernstein-Szegő weight functions, Numer. Math. 133, 177–201 (2016).

[42] A. V. Pejčev, M. M. Spalević, Error bounds of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions, J. Approx. Theory 169 (2013), pp. 23–34.

[43] A. V. Pejčev, M. M. Spalević, Error bounds of a quadrature formula with multiple nodes for the Fourier-Chebyshev coefficients for analytic functions, Sci. China Math. 62, 1657–1668 (2019).

[44] P. Rabinowitz, The exact degree of precision of generalized Gauss-Kronrod integration rules, Math. Comp. 35, 1275–1283 (1980).

[45] L. Reichel, M. M. Spalević, T. Tang, Generalized averaged Gauss quadrature rules for the approximation of matrix functionals, BIT Numer. Math. 56, 1045–1067 (2016).

[46] P. Shashikala, Extraction of orthogonal polynomials from generating function for reciprocal of odd numbers, Indian J. Pure Appl. Math. 48(2), 177–185 (2017).

[47] M. M. Spalević, On generalized averaged Gaussian formulas, Math. Comp. 76, 1483–1492 (2007).

[48] M. M. Spalević, A note on generalized averaged Gaussian formulas, Numer. Algor. 46, 253–264 (2007).

[49] M. M. Spalević, On generalized averaged Gaussian formulas, II, Math. Comp. 86, 1877-1885 (2017).

[50] R. Scherer, T. Schira, Estimating quadrature errors for analytic functions using kernel representations and biorthogonal systems, Numer. Math. 84, 497–518 (2000).

[51] M. M. Spalević, Error bounds of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weights, Math. Comp. 82, 1037–1056 (2013).

[52] M. M. Spalević, M. S. Pranić, Error bounds of certain Gaussian quadrature formulae, J. Comput. Appl. Math. 234, 1049–1057 (2010).

[53] M. M. Spalević, M. S. Pranić, A. V. Pejčev, Maximum of the modulus of kernels of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weight functions, Appl. Math. Comput. 218, 5746–5756 (2012).

[54] E. Suli, D. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press (2003).

[55] G. Szegő, Über Gewisse Polynome, Die Zu Einer Oszillierenden Belegungsfunktion Gehören, Math. Ann. 110, 501–513 (1935)

Биографија

Рада Мутавџић је рођена 2.8.1989. у Чачку. Гимназију у Чачку је завршила 2007. године, а затим Математички факултет у Београду 2011. године, смер Професор математике и рачунарства, са просечном оценом 9,16. На истом факултету је одбранила мастер рад под насловом „Геодезијска пресликавања” 2013. године, а 2014. године уписала је докторске студије на Природно-математичком факултету у Крагујевцу. Од 2011. до 2013. радила је на Факултету техничких наука у Чачку као сарадник, а од 2014. до данас запослена је на Машинском факултету у Београду као асистент. До сада има три публикована рада, од чега два категорије M22 и један категорије M51.

Референце

1. R. M. Mutavdžić, A. V. Pejčev, M. M. Spalević, Error bounds for Kronrod extension of generalizations of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions, Electron. Trans. Numer. Anal., 50 (2018), pp. 20–35 [M22, ISSN 1068-9613, IF(2017)=1.138].

2. R. M. Mutavdžić, A. V. Pejčev, M. M. Spalević, The error bounds of Gauss-Lobatto quadratures for weights of Bernstein-Szegő type, Appl. Anal. Discrete Math., 13 (3) (2019), pp. 733–745 [M22, ISSN 1452-8630 (printed), ISSN 2406-100X (online)].

3. R. M. Mutavdžić, Generalized averaged Gaussian formulas for certain weight functions, Kragujevac Journal of Mathematics, 46 (2) (2022), pp. 295–305 [M51].

Applicable Analysis and Discrete Mathematics
available online at http://pefmath.etf.rs

Appl. Anal. Discrete Math. **13** (3) (2019), 733–745.
https://doi.org/10.2298/AADM190315030M

THE ERROR BOUNDS OF GAUSS-LOBATTO QUADRATURES FOR WEIGHTS OF BERNSTEIN-SZEGŐ TYPE

Dedicated to Academician Professor Gradimir Milovanović on the occasion of his 70th birthday.

Rada M. Mutavdžić, Aleksandar V. Pejčev and Miodrag M. Spalević*

In this paper, we consider the Gauss-Lobatto quadrature formulas for the Bernstein-Szegő weights, i.e., any of the four Chebyshev weights divided by a polynomial of the form $\rho(t) = 1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}t^2$, where $t \in (-1, 1)$ and $\gamma \in (-1, 0]$. Our objective is to study the kernel in the contour integral representation of the remainder term and to locate the points on elliptic contours where the modulus of the kernel is maximal. We use this to derive the error bounds for mentioned quadrature formulas.

1. INTRODUCTION

The Gauss-Lobatto quadrature formula for a (nonnegative) weight function w on the interval $[-1, 1]$ is given by

$$\int_{-1}^{1} f(t)w(t)dt = \lambda_0 f(-1) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(\tau_\nu) + \lambda_{n+1} f(1) + R_n(f), \tag{1}$$

where τ_ν are the zeros of the n-th degree (monic) orthogonal polynomial $\pi_n^L(\cdot) = \pi_n^L(\cdot; w^L)$ relative to the weight function $w^L(t) = (1 - t^2)w(t)$, and $R_n(f)$ is the

*Corresponding author. Rada M. Mutavdžić

2010 Mathematics Subject Classification. 65D32, 41A55
Keywords and Phrases. Gauss-Lobatto quadrature formula, Bernstein-Szegő weight functions, contour integral representation, remainder term for analytic functions, error bound.

Electronic Transactions on Numerical Analysis.
Volume 50, pp. 20–35, 2018.

ISSN 1068–9613.
DOI: 10.1553/etna_vol50s20

ETNA
Kent State University and
Johann Radon Institute (RICAM)

ERROR BOUNDS FOR KRONROD EXTENSION OF GENERALIZATIONS OF MICCHELLI-RIVLIN QUADRATURE FORMULA FOR ANALYTIC FUNCTIONS*

RADA M. MUTAVDŽIĆ†, ALEKSANDAR V. PEJČEV†, AND MIODRAG M. SPALEVIĆ†

Dedicated to Walter Gautschi on the occasion of his 90th birthday

Abstract. We consider the Kronrod extension of generalizations of the Micchelli-Rivlin quadrature formula for the Fourier-Chebyshev coefficients with the highest algebraic degree of precision. For analytic functions, the remainder term of these quadrature formulas can be represented as a contour integral with a complex kernel. We study the kernel on elliptic contours with foci at the points ∓ 1 and the sum of semi-axes $\rho > 1$ for the mentioned quadrature formulas. We derive L^∞-error bounds and L^1-error bounds for these quadrature formulas. Finally, we obtain explicit bounds by expanding the remainder term. Numerical examples that compare these error bounds are included.

Key words. Kronrod extension of generalizations of the Micchelli-Rivlin quadrature formula, Chebyshev weight function of the first kind, error bound, remainder term for analytic functions, contour integral representation

AMS subject classifications. 65D32, 65D30, 41A55

1. Introduction.

The Gaussian quadrature formula with multiple nodes

$$\int_{-1}^{1} f(t)T_n(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{2s-1} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + E_{n,s}(f) \tag{1.1}$$

for calculating the Fourier-Chebyshev coefficients of an analytic function f, where $n, s \in \mathbb{N}$, with respect to the Chebyshev weight function of the first kind $\omega(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$, was introduced in [1, p. 383] and then examined in more detail in [11]. Here T_n is the Chebyshev polynomial of the first kind of degree n, and the nodes τ_ν are its zeros. The quadrature rule has algebraic degree of precision $n(2s+1)-1$. The special case $s = 1$ of (1.1) represents the well-known Micchelli-Rivlin quadrature formula; see [7]. For more details on the theory of Gaussian quadrature formulas with simple and multiple nodes for calculating the Fourier-Chebyshev coefficients, see [1, 10, 11].

The authors of [11] considered the Kronrod extension of (1.1) in the form

$$\int_{-1}^{1} f(t)T_n(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{2s-1} B_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + \sum_{j=1}^{n+1} C_j f(\hat\tau_j) + R_{n,s}(f), \tag{1.2}$$

which has algebraic degree of precision $2sn + 2n + 1$. The nodes τ_ν are the same as in (1.1), and the $\hat\tau_j$ are the zeros of the monic polynomial

$$F_{n+1}(t) = \frac{1}{2^n}(T_{n+1}(t) - T_{n-1}(t)) = \frac{1}{2^{n-1}}(t^2-1)U_{n-1}(t),$$

where U_{n-1} is the Chebyshev polynomial of the second kind of degree $n-1$. A nice and detailed survey of Kronrod rules in the last fifty years is provided by Notaris [12].

Error bounds for the Micchelli-Rivlin quadrature formula, and then for (1.1), for functions being analytic on confocal ellipses that contain the interval $[-1, 1]$ in the interior, have been

*Received March 11, 2018. Accepted May 27, 2018. Published online on November 13, 2018. Recommended by L. Reichel. Research supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (Research Project: “Methods of numerical and nonlinear analysis with applications” (# 174002)).

†Department of Mathematics, University of Belgrade, Faculty of Mechanical Engineering, Kraljice Marije 16, 11120 Belgrade 35, Serbia ({rmutavdzic, apejcev, mspalevic}@mas.bg.ac.rs).

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Рада Мутавџић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 20.2.2020. године,

Рада Мутавџић

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Рада Мутавџић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 20.2.2020. године,

Рада Мутавџић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/