UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Ivana Štajner - Papuga

Uopštena konvolucija

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2001.

21714

Uvod

Konvolucija je operacija sa funkcijama koja spada u aparaturu klasične analize. Ova operacija ima važnu ulogu u mnogim oblastima kao što su parcijalne diferencijalne jednačine, Fourier-ova analiza i teorija sistema. Razlog za uopštavanje klasične konvolucije se ogleda u potrebi za opštijom teorijom koja pokriva važne operacije sa funkcijama iz mnogih matematičkih oblasti, npr. probabilističkih metričkih prostora, parcijalnih diferencijalnih jednačina, teorija odlučivanja, sistema, kontrole i fazi brojeva. Uopštenja data u ovoj tezi spadaju u domen pseudo-analize, relativno nove oblasti koja je generalizacija klasične analize i ima široku primenu u mnogim oblastima ([2, 3, 13, 16, 22, 27, 33, 38, 45, 64, 65, 82, 93, 95]).

Kako se u osnovi pseudo-analize nalaze uopštenja klasičnih operacija poznata kao pseudo-operacije, važan pojam pseudo-analize je poluprsten, struktura koja se sastoji od nepraznog skupa i dve pseudo-operacije definisane nad tim skupom. Upravo na toj strukturi se bazira, kako konstrukcija specijalnih monotonih skupovnih funkcija koje su uopštenja klasične mere i odgovarajućih integrala, tako i konstrukcija uopštene konvolucije. Razmatraju se realni poluprsteni $([a,b],\oplus,\odot)$, $[a,b]\subseteq[-\infty,+\infty]$ gde se binarne operacije $\oplus$ i $\odot$ nazivaju pseudo-sabiranje i pseudo-množenje, respektivno. Važnu grupu pseudo-operacija čine pseudo-operacije definisane na jediničnom intervalu poznate kao trougaone norme i trougaone konorme ([31]).

Još jedan bitan pojam pseudo-analize je specijalna ne-aditivna mera, tzv. $\oplus$-dekompozabilna mera koja pretstavlja uopštenje klasične mere. Mera u klasičnom smislu mora da ispunjava uslov σ-aditivnosti. Poznati Ellsberg-ov paradoks ([22]) ilustruje nepodobnost klasične mere za modeliranje ljudskog ponašanja. Ovaj problem se lako rešava upotrebom ne-aditivnih mera. Integrali bazirani na poluprstenu i ne-aditivnim merama imaju značajnu ulogu u mnogim matematičkim oblastima i nazivaju se pseudo-integrali. Upravo različiti tipovi pseudo-integrala se koriste za konstrukciju uopštenja klasične konvolucije, što i pretstavlja osnovu ove disertacije. U ovoj disertaciji je pokazano da takva uopštenja klasične konvolucije imaju važno mesto u mnogim matematičkim teorijama.

Prva glava ovog rada sadrži rezultate vezane za pseudo-operacije i poluprsten ([1, 19, 20, 25, 38, 53, 57, 61, 66, 79]). Posebna pažnja je posvećena trougaonim normama, trougaonim konormama i uninormama ([8, 18, 31, 61, 98]). Data je klasifikacija realnih poluprstena ([61, 66, 79]) i veza izmedju tih različitih klasa ([51]). Razmatrana su uopštenja realnih poluprstena do kojih se dolazi slabljenjem odredjenih uslova. U tom smislu, dat je uslovno distributivan poluprsten kod kojeg je oslabljen uslov distributivnosti ([15, 31, 32]). Pretstavljen je slučaj u kome su pseudo-operacije zamenjene uopštenim pseudo-operacijama koje ne moraju biti ni komutativne ni asocijativne ([76, 78]). Rezultat koji opisuje granične procese za specijalnu klasu uopštenih pseudo-operacija spada u orginalni deo ove teze (sekcija 1.5.2).

Rezultati vezani za neaditivne mere i odgovarajući integrali su u drugoj glavi. Prvo je dat slučaj opštih monotonih skupovnih funkcija (fazi mere) i integrala baziranih na njima poznatih kao Choquet-ov i Sugeno-ov integral ([4, 5, 12, 47, 57, 61, 88]). Definisane su $\oplus$-dekompozabilne mere, neaditivne mere kod kojih se pojavljuje uslov $\oplus$-aditivnosti, kao i odgovarajući integral ([4, 5, 36, 38, 45, 57, 60, 61, 62, 94]). Data je klasifikacija posmatranih integrala ([66]) kao i veza izmedju integrala baziranih na različitim klasama poluprstena ([51]). Izneti su rezultati iz [15, 29, 31, 32] koji se odnose ne hibridne verovatnosno-mogućnosne S-mere i integrale bazirane na uslovno distributivnim poluprstenima. Zatim, konstruisane su mere i integrali nad specijalnom klasom uopštenih pseudo-operacija ([73]). Rezultati vezani za meru i integral nad uopštenim pseudo-operacijama, kao i pseudo Henstock-Kurzweil-ov integral baziran na istim uopštenim operacijama ([90]) spadaju u orginalne doprinose ove disertacije (sekcije 2.3.2 i 2.3.3).

Treća glava sadrži orginalne rezultate vezane za uopštenja klasične konvolucije i jeste srž ove disertacije. Osnovno uopštenje, poznato kao pseudo-konvolucija, se bazira na realnom poluprstenu $([a,b],\oplus,\odot)$, $[a,b] \subseteq [-\infty,+\infty]$, i odgovarajućoj σ-$\oplus$-dekompozabilnoj meri [68, 69, 70]. Operacija iz domena posmatranih funkcija koja je u slučaju klasične konvolucije obično sabiranje, je zamenjena binarnom operacijom na skupu realnih brojeva koja zadovoljava odredjene uslove. Na ovaj način, značajno je proširena klasa operacija sa funkcijama koje je moguće interpretirati kao uopštene konvolucije. Dokazana je veza izmedju pseudo-konvolucija baziranih na poluprstenima različitih klasa ([71]). Definisana je (S,U)-konvolucija bazirana na uslovno distributivnom poluprstenu $([0,1],S,U)$ i S-meri (videti [72]). Dat je još jedan vid proširenja pseudo-konvolucije iz [73]. Sada, se umesto pseudo-sabiranja i pseudo-množenja koje čine realni poluprsten, koriste uopštene pseudo-operacije.

Četvrta glava pretstavlja primenu uopštene konvolucije u mnogim važnim matematičkim teorijama. Prvo je uspostavljena veza uopštenih konvolucija i probabilističkih metričkih prostora, tačnije trougaonih funkcija ([24, 31, 80, 84, 87]). Zatim, data je veza uopštenih konvolucija i kopula ([31, 54]). Slede problemi teorije opimizacije ([27, 63, 67, 79, 81]), variacione analize ([27, 81, 82]) i teorije informacije ([26, 31, 86]) u kojima uopštena konvolucija ima značajnu ulogu. Pokazana je veza uopštenih konvolucija sa teorijom fazi brojeva ([11, 17, 34, 37, 42, 43, 48, 49, 50]). Dokazan je uticaj uopštenih konvolucija na teoriju sistema ([2, 3]), matematičku morfologiju ([9, 10]) i teoriju brojeva ([35]). Posebna pažnja je posvećena nelinearnim diferencijalnim jednačinama i ulozi uopštene konvolucija i uopštenih pseudo-operacija u nihovom rešavanju ([39, 57, 61, 66, 74, 76, 77, 78]). Osim orginalnih interpretacija uopštene konvolucije u napred navedenim oblastima, specijalno naglašavamo orginalne rezultate vezane za nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine u sekciji 4.8.2. U četvrtoj glavi su ispitane i one operacije iz pomenutih teorija kod kojih dolazi do odstupanja od uopštenih konvolucija i koje je moguće interpretirati kao modifikacije uopštene konvolucije.

Izrada ove doktorske disertacije je potpomognuta od strane Univerziteta Johannes Kepler u Linz-u i medjunarodnog projekta CEEPUS (SK-42). Ovom prilikom, želim da se zahvalim na podršci i nesebičnoj pomoći dr Olgi Hadžić, dr Radku Mesiaru, dr Arpadu Takačiju i mentoru dr Endre Papu.

Sadržaj

1 Realni poluprsteni

Posle uvodnih pojmova vezanih za opšti slučaj ([20, 25]), u ovoj glavi su posebno razmatrani poluprsteni definisani na skupu realnih brojeva ([38, 45, 57, 58]). Prvo su dati osnovni pojmovi i rezultati vezani za pseudo-operacije definisane na skupu realnih brojeva ([66, 79]). Posebna pažnja je posvećena trougaonim normama, trougaonim konormama i uninormama, tj. specijalnim pseudo-operacijama definisanim na jediničnom intervalu koje imaju veliku primenu ([8, 18, 28, 31, 98]). Zatim, dat je pregled rezultata vezanih za poluprstene oblika $([a, b], \oplus, \odot)$, gde je $[a, b] \subseteq [-\infty, +\infty]$, kao i njihova klasifikacija ([57, 66, 79]). Dati su i granični procesi iz [51, 78] koji uspostavljaju vezu izmedju različitih klasa poluprstena definisanih na skupu realnih brojeva.

Pored nabrojanog, u ovoj glavi su data uopštenja realnih poluprstena, tj. posmatrani su i poluprsteni kod kojih su oslabljeni neki od uslova iz osnovne definicije. Data je definicija uslovno distributivnog poluprstena ([15, 29, 31, 32]) i poluprstena sa neasocijativnim i ne komutativnim pseudo-operacijama ([76, 78]).

1.1 Opšti poluprsten

U ovoj sekciji su izneseni opšti pojmovi i rezultati vezani za apstraktni poluprsten. Objašnjen je uticaj homomorfizama na strukturu poluprstena, kao i veza izmedju relacije poretka i strukture poluprstena. Literatura relevantna za ovu sekciju je [20, 25].

Sledi definicija apstraktnog poluprstena iz [25].

Definicija 1.1 *Neka je A neprazan skup i neka su $\oplus$ i $\odot$ dve binarne operacije definisane na A. Tada $(A, \oplus, \odot)$ se naziva poluprsten ako su sledeći uslovi ispunjeni:*

(i) $(A, \oplus)$ *je komutativna polugrupa,*

(ii) $(A, \odot)$ *je polugrupa,*

(iii) važi distributivni zakon, tj. za svako $x, y, z \in A$ važi

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \quad i \quad (x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z).$$

Poluprsten $(A, \oplus, \odot)$ je komutativan ako je polugrupa $(A, \odot)$ komutativna, idempotentan ako je polugrupa $(A, \oplus)$ idempotentna, aditivno kancelativan ako je polugrupa $(A, \oplus)$ kancelativna, tj. $x + z = y + z$ implicira $x = y$ za svako $x, y, z \in A$.

U daljem tekstu, neutralni element za $\oplus$, ako postoji, se naziva nula poluprstena i obeležen je sa $\mathbf{0}$. Neutralni elemant za $\odot$, ako postoji, se naziva jedinični element i obeležava sa $\mathbf{1}$.

Sledi teorema iz [25] koja povezuje homomorfna preslikavanja i strukturu poluprstena.

Teorema 1.1 *Neka je $(A, \oplus_a, \odot_a)$ poluprsten i neka je $\varphi : (A, \oplus_a, \odot_a) \to (B, \oplus_b, \odot_b)$ homomorfizam. Tada važi sledeće:*

(i) Homomorfna slika $(\varphi(A), \oplus_b, \odot_b)$ je poluprsten. Ako je $(A, \oplus_a, \odot_a)$ komutativan poluprsten i homomorfna slika je komutativan poluprsten.

(ii) Ako za $(A, \oplus_a, \odot_a)$ postoji $\mathbf{0}$, tada $\varphi(\mathbf{0})$ je neutralni element za $\oplus_b$ na $\varphi(A)$.

(iii) Ako za $(A, \oplus_a, \odot_a)$ postoji $\mathbf{1}$, tada $\varphi(\mathbf{1})$ je neutralni element za $\odot_b$ na $\varphi(A)$.

Za dva poluprstena $(A, \oplus_a, \odot_a)$ i $(B, \oplus_b, \odot_b)$ kažemo da su izomorfna ako postoji izomorfizam $\varphi : (A, \oplus_a, \odot_a) \to (B, \oplus_b, \odot_b)$. Treba primetiti da relacija definisana na skupu poluprstena "biti izomorfan" je relacija ekvivalencije.

Veoma bitno pitanje vezano za poluprstene je postojanje parcijalnog uredjenja. Slede rezultati vezani za parcijalno uredjenje na poluprstenu iz [25] (videti i [19]).

Neka je A neprazan skup sa parcijalnim uredjenjem $\preceq$ i neka je $\oplus$ monotona operacija u odnosu na $\preceq$. Ako za neko $x \in A$ važi $y \preceq y \oplus x$ za svako $y \in A$, element x je pozitivan (u odnosu na $\preceq$). Skup svih pozitivnih elemenata je obeležen sa P. Analogno prethodnom, moguće je definisati negativne elemente. Skup svih negativnih elemenata je označen sa N. Ako za $\oplus$ postoji neutralni element, tada važi $P = \{x \in A \mid \mathbf{0} \preceq x\}$ i $N = \{x \in A \mid x \preceq \mathbf{0}\}$.

Sa A^* je označen skup $A \backslash \{\mathbf{0}\}$. Jasno, ako neutralni element za $\oplus$ ne postoji važi $A^* = A$.

Definicija 1.2 *Neka je $(A, \oplus, \odot)$ komutativan poluprsten i neka je $\preceq$ parcijalno uredjenje na skupu A. Za posmatrani komutativan poluprsten kažemo da je parcijalno uredjen ako važi*

(i) $x \prec y \Rightarrow x \oplus z \preceq y \oplus z$ za svako $x, y, z \in A$,

(ii) $x \prec y \Rightarrow x \odot z \preceq y \odot z$ za svako $x, y \in A$ i svako $z \in A^* \cap P$,

gde je $x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y$ i $x \neq y$.

Napomena 1.1 U daljem tekstu se komutativan parcijalno uredjeni poluprsten, radi jednostavnosti, naziva samo uredjeni poluprsten.

Kaošto je već rečeno, parcijalno uredjenje na poluprstenu $(A, \oplus, \odot)$ definiše skup pozitivnih elemenata. Isto tako, pod uslovom da je $(A, \oplus)$ grupa, unapred zadat skup pozitivnih elemenata može indukovati parcijalno uredjenje na poluprstenu i to na sledeći način:

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \oplus z = y \quad \text{za neko } z \in P.$$

1.2 Pseudo-operacije na $[-\infty, +\infty]$

Rezultati iz [20, 45, 57, 66, 79] dati u ovoj glavi se odnose na uopštenja klasičnih operacija, tj. na pseudo-operacije. Pored opštih pojmova vezanih za pseudo-operacije, date su i pseudo-operacije definisane na jediničnom intervalu, poznate kao trougane norme, trougaone konorme i uninorme. Ova tema je obradjena u [8, 18, 31].

Neka je A proizvoljan neprazan podskup skupa $\mathbb{R}^n$ i neka je $\preceq$ parcijalno uredjenje definisano na tom skupu. Sledi opšta definicija pseudo-operacije iz [19].

Definicija 1.3 *Binarna operacija* $\circ : A \times A \to A$ *je pseudo-operacija ako za svako* $x, y, z \in A$ *važi:*

(i) $x \circ y = y \circ x$;

(ii) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;

(iii) $x \prec y \Rightarrow x \circ z \preceq y \circ z$;

(iv) postoji $e \in A$ *takvo da* $x \circ e = x$,

gde je $x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y$ *i* $x \neq y$.

Pseudo-operacije jesu monotone po obe komponente, tj. za svako $x, y, z, w \in A$ važi
$$x \preceq y \text{ i } z \preceq w \Rightarrow x \circ z \preceq y \circ w.$$

Za neku pseudo-operaciju $\circ$ kažemo da je striktno rastuća ako za svako $z \in A$ važi:
$$x \prec y \Rightarrow x \circ z \prec y \circ z.$$

Jasno, neka pseudo-operacija $\circ$ je neprekidne ako je funkcija dve promenljive $\circ : A^2 \to A$ neprekidna. Neprekidna striktno rastuća pseudo-operacija se naziva striktna pseudo-operacija.

U ovoj glavi, skup A iz prethodne definicije je podskup skupa $\overline{\mathbb{R}}$, i to zatvoren ili poluotvoren interval, a relacija $\preceq$ totalno uredjenje na skupu A. Totalno uredjenje $\preceq$ može biti uobičajeni poredak na skupu realnih brojeva ili neki dugi poredak, npr. poredak suprotan uobičajenom.

Naredni rezultati se odnose na pseudo-operacije definisane nad konačnim intervalima i njihovi dokazi se mogu naći u [66, 79].

Teorema 1.2 *Neka je* $\circ$ *proizvoljna pseudo-operacija nad konačnim intervalom* $[a, b]$. *Tada važi*
$$a \circ b \in \{a, b\}.$$

Sada, pseudo-operacija $\circ$ nad intervalom $[a, b]$ je pseudo-operacija prve vrste ako je $a \circ b = a$. Ako je $a \circ b = b$, pseudo-operacija $\circ$ nad intervalom $[a, b]$ je pseudo-operacija druge vrste.

Sledeća teorema opisuje ponašanje pseudo-operacije zadate na konačnom intervalu u zavisnosti od toga da li je u pitanju pseudo-operacija prve ili druge vrste. Dokaz se može naći u [79].

Teorema 1.3 *Neka je $\circ$ pseudo-operacija, takva da su parcijalna preslikavanja $x \mapsto x \circ a$ i $x \mapsto x \circ b$ neprekidne funkcije za svako $x \in [a, b]\backslash\{e\}$. Tada*

(i) ako je $\circ$ pseudo-operacija prve vrste, onda za svako $x \in [a, e)$ važi $x \circ b = x$;

(ii) ako je $\circ$ pseudo-operacija druge vrste, onda za svako $x \in (e, b]$ važi $x \circ a = x$;

Specijalno, ako je $[a, b]$ konačan interval i $\circ$ neprekidna pseudo-operacija sa neutralnim elementom $e = a$ ili $e = b$, uredjena dvojka $([a, b], \circ)$ je I-semigrupa Mostert-a i Shields-a ([53]).

Napomena 1.2 Topološka polugrupa $([a, b], *)$, gde je $[a, b]$ zatvoreni podinterval proširene realne ose, $a < b$, jedna granica intervala neutralni element za $*$, a druga granica intervala anihilator, je I-semigrupa Mostert-a i Shields-a iz [53].

Dalje, postavlja se pitanje reprezentacije pseudo-operacija. Ovaj problem se oslanja na poznatu Aczél-ovu teoremu o reprezentaciji striktnih, asocijativnih funkcija, neopadajućih po svakoj komponenti ([1]). U radovima P. S. Mostert-a i A. L. Shields-a ([53]), Aczél-ova teorema o reprezentaciji je proširena i na neprekidne, asociative funkcije koje ne moraju biti striktno monotone. Za formulaciju narednih teorema iz [53], prvo je potrebno definisati pojam pseudo-inverzne funkcije, tj. proširenja standardne inverzne funkcije iz [30, 31].

Definicija 1.4 *Neka su $[a, b]$ i $[c, d]$ dva zatvorena podintervala proširenog skupa realnih brojeva i neka je $g : [a, b] \to [c, d]$ monotona funkcija. Tada je pseudo-inverzna funkcija $g^{(-1)} : [c, d] \to [a, b]$ data sa*

$$g^{(-1)}(y) = \sup\{x \in [a, b] \mid (g(x) - y)(g(b) - g(a)) < 0\}.$$

U daljem radu, potrebna nam je pseudo-inverzna funkcija neprekinih, striktno monotonih funkcija, pa ako je $g : [a, b] \to [0, \infty]$ neprekidna i rastuća funkcija, tada je pseudo-inverzna funkcija data sa

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} a & \text{za} \quad x \in [0, g(a)] \\ g^{-1}(x) & \text{za} \quad x \in [g(a), g(b)] \\ b & \text{za} \quad x \in [g(b), \infty]. \end{cases}$$

Za neprekidne i opadajuće funkcije $g : [a,b] \to [0,\infty]$, pseudo-inverzna funkcija je

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} b & \text{za} \quad x \in [0, g(b)] \\ g^{-1}(x) & \text{za} \quad x \in [g(b), g(a)] \\ a & \text{za} \quad x \in [g(a), \infty]. \end{cases}$$

U [31] je dokazana teorema koja daje formu pseudo-inverzne funkcije u opštem slučaju.

Sada je moguće formulisati teoremu o reprezentaciji iz [53]:

Teorema 1.4 *Neka je $F : A \times A \to A$, $A = [a,b] \subseteq [-\infty, +\infty]$, neprekidna asocijativna funkcija, neopadajuća po svakoj komponenti (u odnosu na uobičajenu relaciju poretka u skupu realnih brojeva). Ako je a (b) neutralni element i važi uslov $F(x,x) > x$ ($F(x,x) < x$) za svako $x \in (a,b)$, tada postoji neprekidna rastuća (opadajuća) funkcija $g : [a,b] \to [0,\infty]$ takva da je*

$$F(x,y) = g^{(-1)}\left(g(x) + g(y)\right). \tag{1}$$

Važi i obrnuto tvrdjenje:

Teorema 1.5 *Neka je $g : A \to [0,\infty]$, $A = [a,b] \subseteq [-\infty, +\infty]$, neprekidna rastuća (opadajuća) funkcija. Tada je sa (1) definisana neprekidna asocijativna funkcija na A^2, neopadajuća po svakoj komponenti (u odnosu na uobičajenu relaciju poretka u skupu realnih brojeva), a (b) neutralni element i važi uslov $F(x,x) > x$ ($F(x,x) < x$) za svako $x \in (a,b)$.*

Funkcija g iz prethodnih teorema se naziva aditivni generator funkcije F.

Napomena 1.3 Ako interval A nije zatvoren, npr. $(a,b]$ ili (a,b), moguće je umesto uslova $F(a,y) = y$ uzeti sledeće: za svako $y \in (a,b]$ ili $y \in (a,b)$

$$\lim_{x \to a^+} F(x,y) = y, \qquad \lim_{x \to a^+} F(x,x) = a.$$

Iz teoreme 1.4 sledi da svaka neprekidna pseudo-operacija $\circ$ definisana na $[a,b]^2$, sa neutralnim elementom a ili b, koja zadovoljava uslov $x \circ x > x$, odnosno $x \circ x < x$, ima odgovarajući aditivni generator $g : [a,b] \to [0,\infty]$ i

$$x \circ y = g^{(-1)}\left(g(x) + g(y)\right). \tag{2}$$

Ako je posmatrana pseudo-operacija striktna, po Aczél-ovoj teoremi iz [1], umesto pseudo-inverzne funkcije u izrazu (2) se pojavljuje baš inverzna funkcija funkcije g.

1.2.1 Trougaone norme i konorme

Važnu grupu pseudo-operacija čine pseudo-operacije definisane na jediničnom intervalu poznate kao trougaone norme i trougaone konorme. Pojam trougaona norma se prvi put pojavljuje kod Menger-a 1942 godine ([46]) u nešto drugačijoj formi od one u kojoj se danas sreće, a definicija trougaonih normi koja se danas koristi uvode Schweizer i Sklar ([84, 85]). U ovoj glavi su dati osnovni rezultati vezani za ove specifične pseudo-operacije. Više o ovoj temi kao i dokazi rezultata koji su izloženi može se naći u [31].

Definicija 1.5 *Preslikavanje* $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *koje je komutativno, asocijativno, neopadajuće (u odnosu na uobičajenu relaciju poretka na skupu realnih brojeva) i ima jedinicu kao neutralni element zove se trougaona norma ili t-norma.*

Preslikavanje $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *koje je komutativno, asocijativno, neopadajuće (u odnosu na uobičajenu relaciju poretka na skupu realnih brojeva) i ima nulu kao neutralni element zove se trougaona konorma ili t-konorma.*

Veza izmedju t-normi i t-konormi je data sledećim tvrdjenjem ([31]).

Teorema 1.6 *Funkcija* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je t-konorma ako i samo ako postoji t-norma* T *takva da za svako* $x, y \in [0,1]$ *važi*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y). \tag{3}$$

Za t-norme i t-konorme koje zadovoljavaju (3) kažemo da su medjusobno dualne. Zbog dualnosti, mnoga tvrdjenja formulisana za t-norme je moguće prevesti u odgovarajuća tvrdjenja za t-konorme i obrnuto.

Primer 1.1 Neke od važnih t-konormi i njima odgovarajućih t-normi su:

$$\begin{array}{ll} S_M(x,y) = \max(x,y), & T_M(x,y) = \min(x,y), \\ S_P(x,y) = x + y - xy, & T_P(x,y) = xy, \\ S_L(x,y) = \min(1, x+y), & T_L(x,y) = \max(0, x+y-1), \end{array}$$

$$S_D(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & \min(x,y) = 0, \\ 1, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$T_D(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \max(x,y) = 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Trougaona konorma S_L iz primera 1.1 je Lukasiewicz-eva t-konorma, a T_L Lukasiewicz-eva t-norma. Trougaona norma T_M se naziva najjača t-norma, T_D najslabija t-norma, S_M najslabija t-konorma, a S_M najjača t-konorma.

Napomena 1.4 Posebno važan primer t-norme je Krause-ova t-norma, poznata još pod imenom "Djavolje terase". Karakteristično za ovu t-nomu je to što, mada nije ni desno ni levo neprekidna, ima neprekidnu dijagonalu. Detaljan prikaz se može naći u [31].

Asocijativnost t-normi i t-konormi omogućava njihovo proširenje na n-arne operacije. Za svaku n-torku $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$ definisana je, pomoću indukcije, n-arna operacija na sledeći način:

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$S_{i=1}^{n} x_i = S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = S(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Postojanje najjače t-norme i t-konorme dozvoljava proširenje t-normi i t-konormi na prebroive operacije na sledeći način:

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n} x_i, \qquad S_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} S_{i=1}^{n} x_i,$$

gde je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata iz $[0,1]$. Uvode se sledeće oznake:

$$x_T^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } n = 0, \\ x & \text{ako je } n = 1, \\ T(\underbrace{x, x, \cdots, x}_{n}) & \text{ako je } n > 1, \end{cases}$$

i

$$x_S^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } n = 0, \\ x & \text{ako je } n = 1, \\ S(\underbrace{x, x, \cdots, x}_{n}) & \text{ako je } n > 1. \end{cases}$$

Definicija 1.6 *Za t-normu T (t-konormu S) kažemo da je Arhimedova ako za svako $x, y \in (0,1)$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $x_T^{(n)} < y$ ($x_S^{(n)} > y$).*

Treba primetiti da kako Arhimedova osobina isključuje mogućnost postojanja idempotentnih elemenata, Arhimedova t-norma T (t-konorma S) zadovoljava uslov $T(x,x) < x$ ($S(x,x) > x$). Neprekidne Arhimedove t-norme i t-konorme ispunjavaju sve uslove teoreme 1.4, pa postoje njihovi aditivni generatori:

$$T(x,y) = t^{-1}\left(\min(t(0), t(x) + t(y))\right) \tag{4}$$

i

$$S(x,y) = s^{-1}\left(\min(s(1), s(x) + s(y))\right) \tag{5}$$

gde je $t : [0,1] \to [0,\infty]$ neprekidna opadajuća funkcija, $t(1) = 0$, $s : [0,1] \to [0,\infty]$ neprekidna rastuća funkcija i $s(0) = 0$.

Naravno, kada su u pitanju striktne t-norme i t-konorme, po Aczél-ovoj teoremi o reprezentaciji imamo:

$$T(x,y) = t^{-1}\left(t(x)+t(y)\right) \quad \text{i} \quad S(x,y) = s^{-1}\left(s(x)+s(y)\right).$$

Ako su t-norma T i t-konorma S medjusobno dualne, veza izmedju njihovih aditivnih generatora je data jednakošću:

$$s(x) = t(1-x).$$

Napomena 1.5 Trouganoa norma je striktna ako je meprekidna i striktno monotona, tj. ako za sve $x > 0$ i $y < z$ važi $T(x,y) < T(x,z)$.

Slaede primeri iz [31].

Primer 1.2 Funkcija $t_L(x) = 1 - x$ je aditivni generator za Lukasiewicz-evu t-normu T_L. Aditivni generator za dualnu t-konormu S_L je $s_L(x) = x$.

Primer 1.3 Funkcija

$$t_D(x) = \begin{cases} 2-x & \text{za } x \in [0,1), \\ 0 & \text{za } x = 1, \end{cases}$$

je aditivni generator najslabije t-norme T_D. Odgovarajući aditivni generator najjače t-konorme S_D je

$$s_D(x) = \begin{cases} 1+x & \text{za } x \in (0,1], \\ 0 & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Postojanje aditivnog generatora povlači i postojanje multiplikativnog generatora, pa je trougaonu normu moguće pretstaviti pomoću rastuće funkcije $\varphi_T : [0,1] \to [0,1]$, takve da je $\varphi_T(1) = 1$, kao

$$T(x,y) = \varphi_T^{-1}\left(\max\left(\varphi_T(0), \varphi_T(x)\cdot\varphi_T(y)\right)\right).$$

Slično važi i za t-konorme:

$$S(x,y) = \varphi_S^{-1}\left(\max(\varphi_S(1), \varphi_S(x)\cdot\varphi_S(y))\right),$$

gde je $\varphi_S : [0,1] \to [0,1]$ opadajuća funkcija i $\varphi_S(0) = 1$. Veza izmedju aditivnih i multiplikativnih generatora t-normi i t-konormi je data sledećim jednakostima

$$t = -\ln\varphi_T \quad \text{i} \quad s = -\ln\varphi_S.$$

Jedan metod konstrukcije novih t-normi je metod ordinalnih suma iz [31].

Definicija 1.7 *Neka je $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ sistem t-normi, neka je $((a_\alpha, e_\alpha))_{\alpha\in A}$ sistem otvorenih, po parovima disjunktnih podintervala jediničnog intervala i neka je A najviše prebrojiv skup indeksa. Tada t-norma definisana sa*

$$T(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha)\cdot T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}\right) & \text{za } (x,y)\in[a_\alpha,e_\alpha]^2, \\ \min\{x,y\} & \text{inače,} \end{cases} \tag{6}$$

je ordinalna suma sumanada $\langle a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha\rangle$, $\alpha\in A$, tj. $T = (\langle a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$.

Dokaz da (6) je trougaona norma se može naći u [31].

Značaj t-normi i t-konormi za pseudo-operacije, pored toga što t-norme i t-konorme i same jesu pseudo-operacije na intervalu $[0,1]$, je ilustrovan sledećim rezultatima iz [67, 79].

Definicija 1.8 *Pseudo-operacija nad konačnim intervalom $[a,b]$ sa neutralnim elementom b naziva se uopštena t-norma nad intervalom $[a,b]$.*

Pseudo-operacija nad konačnim intervalom $[a,b]$ sa neutralnim elementom a naziva se uopštena t-konorma nad intervalom $[a,b]$.

Teorema 1.7 *Neka je $\circ : [a,b]^2 \to [a,b]$ pseudo-operacija sa neutralnim elementom $e\in(a,b)$ definisana nad konačnim intervalom $[a,b]$, tako da su parcijalna preslikavanja $x\mapsto x\circ a$ i $x\mapsto x\circ b$ neprekidne funkcije na skupu $[a,b]\setminus\{e\}$. Neka je $\circ_T = \circ|_{[a,e]}$ uopštena t-norma na intervalu $[a,e]$, a $\circ_S = \circ|_{[e,b]}$ uopštena t-konorma na intervalu $[e,b]$.*

(i) Ako je $a\circ b = a$ (pseudo-operacija prve vrste) važi

$$x\circ y = \begin{cases} x\circ_T y & \text{za } x,y\in[a,e] \\ x\circ_S y & \text{za } x,y\in[e,b] \\ \min(x,y) & \text{ako je } \min(x,y)\le e\le\max(x,y). \end{cases}$$

(ii) Ako je $a\circ b = b$ (pseudo-operacija druge vrste) važi

$$x\circ y = \begin{cases} x\circ_T y & \text{za } x,y\in[a,e] \\ x\circ_S y & \text{za } x,y\in[e,b] \\ \max(x,y) & \text{ako je } \min(x,y)\le e\le\max(x,y). \end{cases}$$

1.2.2 Uninorme

Poput t-normi i t-konormi, uninorme pripadaju klasi pseudo-operacija definisanih na jediničnom kvadratu. Osnovna razlika se ogleda u tome što neutralni element uninormi može biti bilo koji broj iz jediničnog interval. Koncept uninormi su uveli Yager i Rybalov 1996. godine (videti [98]) dok se sam pojam uninorma prvi put sreće kod Yager-a već 1994. godine ([97]). Rezultati i definicije iznesene u ovoj sekciji se mogu naći u [7, 8, 14, 18, 28, 31, 61].

Definicija 1.9 *Preslikavanje* $U : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *koje je komutativno, asocijativno, neopadajuće (u odnosu na uobičajenu relaciju poretka definisanu na skupu realnih brojeva) i ima neutralni element* $e \in [0,1]$ *zove se uninorma.*

Napomena 1.6 Za razliku od prethodne definicije, u nekim radovima ([31]) se pod uninormama podrazumevaju preslikavanja sa svim navedenim osbinama s tim što se traži da neutralni element pripada otvorenom intervalu $(0,1)$. Do kraja ovog poglavlja pretpostavljamo da se neutralni element uninorme U nalazi u otvorenom intervalu $(0,1)$. Tada posmatrana uninorma nije ni t-norma ni t-konorma.

Forma uninorme na $[0,e]^2$ i $[e,1]^2$ u velikoj meri zavisi od t-normi i t-konormi, tj. uvek postoje t-norma T i t-konorma S takve da je

$$U(x,y) = e \cdot T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) \text{ za } 0 \leq x, y \leq e \tag{7}$$

i

$$U(x,y) = e + (1-e) \cdot S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) \text{ za } 0 \geq x, y \geq e, \tag{8}$$

t-norma T iz (7) se naziva odgovarajuća t-norma za uninormu U, a t-konorma S iz (8) je odgovarajuća t-konorma za uninormu U.

Kao što postoje najslabija i najjača t-norma postoje i granične uninorme. Njihov oblik je dat u sledećom teoremom ([8]).

Teorema 1.8 *Za svaku uninormu* U *sa neutralnim elementom* $e \in (0,1)$ *važi nejednakost:*

$$\underline{U}_e(x,y) \leq U(x,y) \leq \bar{U}_e(x,y),$$

gde je

$$\underline{U}_e(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{ako } 0 \leq x, y < e, \\ \max(x,y) & \textit{ako } e \leq x, y \leq 1, \\ \min(x,y) & \textit{inače,} \end{cases} \tag{9}$$

$$\bar{U}_e(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{ako } 0 \leq x, y < e, \\ 1 & \textit{ako } e \leq x, y \leq 1, \\ \max(x,y) & \textit{inače.} \end{cases} \tag{10}$$

Kako uninorme jesu pseudo-operacije definisane nad konačnim intervalom, posledica teoreme 1.2 je sledeća osobina uninormi:

$$U(0,1) \in \{0,1\}.$$

Sada je moguće izvršiti klasifikaciju uninormi. Ako je $U(0,1) = 0$ uninorma U se naziva konjuktivna (eng. andlike) i je pseudo-operacija prve vrste, a ako je

$U(0,1) = 1$ uninorma U se naziva disjunktivna (eng. orlike) i je pseudo-operacija druge vrste.

Kao posledicu teorema 1.3 i 1.7 kao i činjenice da uninorme jesu pseudo--operacije definisane na konačnom intervalu imamo narednu teoremu koja daje formu posmatranih uninormi i vrši njihovu klasifikaciju ([8]).

Teorema 1.9 *Pretpostavimo da je U uninorma sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$ i da su parcijalna preslikavanja $x \mapsto U(x,1)$ i $x \mapsto U(x,0)$ $(x \in [0,1])$ neprekidna osim, možda, u tački $x = e$. Tada uninorma U ima jedan od sledećih oblika:*

(i) ako je $U(0,1) = 0$ tada

$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{za } 0 \le x, y \le e, \\ e + (1-e) \cdot S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{za } e \le x, y \le 1, \\ \min(x,y) & \text{za } \min(x,y) \le e \le \max(x,y); \end{cases} \tag{11}$$

(ii) ako je $U(0,1) = 1$ tada

$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{za } 0 \le x, y \le e, \\ e + (1-e) \cdot S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{za } e \le x, y \le 1, \\ \max(x,y) & \text{za } \min(x,y) \le e \le \max(x,y). \end{cases} \tag{12}$$

Sa T je obeležena odgovarajuća t-norma, a sa S odgovarajuća t-konorma.

Kako je uspostavljena veza izmedju uninormi i t-normi i t-konormi i kako je poznato da t-norme i t-konorme, pod odredjenim uslovima, imaju aditivne generatore (videti [14, 28, 57]), postavlja se pitanje da li i kada postoji neprekidna, strogo rastuća funkcija $u : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ takva da je uninormu U moguće pretstaviti kao

$$U(x,y) = u^{(-1)}\left(u(x) + u(y)\right), \qquad x, y \in [0,1]$$

gde je $u^{(-1)}$ pseudo-inverzna funkcija funkcije u. Sledi teorema iz [28] koja daje odgovor na prethodno pitanje (videti [14, 18]).

Teorema 1.10 *Neka je $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ preslikavanje i neka $e \in (0,1)$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(i) U je uninorma sa neutralnim elementom e, strogo rastuća na skupu $(0,1)^2$ i neprekidna na $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$.

(ii) Postoji striktno rastuća bijekcija $u : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ tako da je $u(e) = 0$ i tako da za sve $x, y \in [0,1]$ važi

$$U(x,y) = u^{-1}\left(u(x) + u(y)\right)$$

U slučaju konjuktivne uninorme koristi se konvencija $+\infty + (-\infty) = -\infty$, *a u slučaju disjunktivne* $+\infty + (-\infty) = +\infty$.

Kao i u slučaju t-normi i t-konormi, postojanje aditivnog generatora povlači postojanje multiplikativnog generatora, tj. ako je u aditivni generator neke uninorme U tada funkcija φ definisana sa $\varphi(x) = \exp(-u(x))$ je multiplikativni generator za U, tj. $U(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y))$.

1.3 Poluprsten na intervalu $[a,b] \subseteq [-\infty,+\infty]$ i klasifikacija

U ovoj sekciji su dati rezultati vezani za specijalnu klasu uredjenih poluprstena iz definicije 1.2. Data je i klasifikacija realnih poluprstena. Literatura relevantna za ovu sekciju je [38, 45, 57, 61, 66, 79].

Neka je dat interval $[a,b] \subseteq [-\infty,+\infty]$ i neka je $\preceq$ totalno uredjenje na $[a,b]$. Pseudo-operacija u smislu definicije 1.3 za $A = [a,b]$ se naziva pseudo-sabiranje. U daljem radu, neutralni element za pseudo-sabiranje je obeležen sa $\mathbf{0}$.

Neka je sa $[a,b]_+$ obeležen skup $\{x \in [a,b] \mid \mathbf{0} \preceq x\}$.

Definicija 1.10 *Binarna operacija* $\odot : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$ *koja je komutativna, asocijativna, pozitivno neopadajuća u odnosu na relaciju* $\preceq$ ($x \preceq y \to x \odot z \preceq y \odot z$, $z \in [a,b]_+$) *i ima neutralni element obelažen sa* $\mathbf{1}$, *zove se pseudo-množenje.*

Treba primetiti da pseudo-množenje je pseudo-operacija u smislu definicije 1.3 samo u slučaju kada se interval $[a,b]_+$ poklapa sa intervalom $[a,b]$.

Dalje posmatramo važan specijalni slučaj uredjenog poluprstena (u smislu definicija 1.1 i 1.2) za koji je $A = [a,b] \subseteq [-\infty,+\infty]$, $\oplus$ pseudo-sabiranje, $\odot$ pseudo množenje i za svako $x \in [a,b]$ važi $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$. Ovaj specijalni slučaj poluprstena se naziva realni poluprsten.

Ako je interval $[a,b]$ konačan, odgovarajući poluprsten je konačan poluprsten. Slede rezultati iz [66, 79].

Teorema 1.11 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *konačan poluprsten. Tada, ili je* $\mathbf{0} = a$ *ili je* $\mathbf{0} = b$.

Posledica prethodne teoreme je činjenica da pseudo-sabiranje iz konačnog poluprstena mora biti, u zavisnosti od toga da li je $\mathbf{0} = a$ ili $\mathbf{0} = b$, ili uopštena t-konorma ili uopštena t-norma na intervalu $[a,b]$. Isto tako, za konačne poluprstene važi $[a,b] = [a,b]_+$, pa pseudo-množenje je pseudo-operacija u smislu definicije 1.3.

Teorema 1.12 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *konačan poluprsten. Tada važi*

(i) ako je $\mathbf{0} = a$ *onda* $\odot$ *je pseudo-množenje prve vrste, tj.* $a \odot b = a$;

(ii) ako je $\mathbf{0} = b$ *onda* $\odot$ *je pseudo-množenje druge vrste, tj.* $a \odot b = b$.

Teorema 1.13 *Ako je pseudo-sabiranje operator maksimuma ili operator minimuma i pseudo-množenje proizvoljna pseudo-operacija nad konačnim intervalom* $[a, b]$, *tada važi distributivni zakon pseudo-množenja prema pseudo-sabiranju.*

Dokazi prethodnih teorema se mogu naći u [79].

U zavisnosti od osobina pseudo-sabiranja i pseudo-množenja koje učestvuju u strukturi poluprstena razlikujemo tri klase poluprstena. U prvu klasu spadaju poluprsteni kod kojih je pseudo-sbiranje idempotentna operacija, a pseudo-množenje nije. Drugu klasu sačinjavaju poluprsteni sa striktnim pseudo-sabiranjem, tj. postoji aditivni generator za $\oplus$. Treću klasu sačinjavaju poluprsteni sa obe idempotentne pseudo-operacije.

Veza izmedju pseudo-sabiranja i relacije poretka $\preceq$ u slučaju prve i treće klase poluprstena data je na sledeći način: $x \preceq y \Longleftrightarrow x \oplus y = y$.

Ako je pseudo-sabiranje zadato generatorom, relacija poretka zavisi od monotonosti generatorske funkcije g, tj. $x \preceq y \Longleftrightarrow g(x) \leq g(y)$.

Sledi klasifikacija realnih poluprstena ([57, 61, 66, 79]).

KLASA I

Neka je $[a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$. Pseudo-sabiranje je idempotentna operacija, a pseudo-množenje nije:

a) $x \oplus y = \max(x, y)$, $\mathbf{0} = a$ i $\odot$ je proizvoljno, neidempotentno pseudo-množenje.

   Operator maksimuma indukuje uobičajen poredak:

$$x \preceq y \Longleftrightarrow \max(x, y) = y \Longleftrightarrow x \leq y.$$

   U cilju očuvanja struktur poluprstena, $\odot$ mora biti pseudo-množenje prve vrste, tj. $a \odot b = a$.

   Ako pseudo-množenje ima Arhimedovu osobinu, tada postoji rastuća generatorska funkcija $g : [a, b] \to [0, \infty]$, takva da je $g(\mathbf{0}) = g(a) = 0$, $g(\mathbf{1}) = 1$ i

$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

b) $x \oplus y = \min(x, y)$, $\mathbf{0} = b$ i $\odot$ je proizvoljno, neidempotentno pseudo-množenje.

   Operator minimuma indukuje poredak suprotan uobičajenom:

$$x \preceq y \Longleftrightarrow \min(x, y) = y \Longleftrightarrow x \geq y.$$

   U cilju očuvanja struktur poluprstena, $\odot$ mora biti pseudo-množenje druge vrste, tj. $a \odot b = b$.

Ako je pseudo-množenje Arhimedova pseudo-operacija, postoji opadajuća generatorska funkcija $g : [a,b] \to [0,\infty]$, takva da je $g(\mathbf{0}) = g(b) = 0$, $g(\mathbf{1}) = 1$ i

$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

KLASA II

Pseudo-sabiranje je striktno. Tada po Aczel-ovoj teoremi reprezentacije postoji aditivni generator $g : [a,b] \to [0,\infty]$ takva da je $g(\mathbf{0}) = 0$ i važi

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)).$$

a) Neka je $\mathbf{0} = a$. Aditivni generator g je rastuća funkcija i važi $g(a) = 0$ i $g(b) = \infty$. Tada operacija $\oplus$ indukuje uobičajeni poredak:

$$x \preceq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y) \Leftrightarrow x \leq y.$$

b) Ako je b neutralni element za $\oplus$, funkcija g je opadajuća, $g(a) = \infty$, $g(b) = 0$ i pseudo-sabiranje indukuje relaciju poretka suprotnu uobičajenom:

$$x \preceq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y) \Leftrightarrow x \geq y.$$

Može se primetiti da je funkcija g izomorfizam izmedju semigrupa $([a,b],\oplus)$ i $([0,\infty],+)$.

Za strukturu poluprstena potrebna je i operacija pseudo-množenja definisana na $[a,b] \times [a,b]$ koja zadovoljava dva već pomenuta uslova i koja je data preko aditivnog generatora za pseudo-sabiranje. Jedini način da se to uradi je sledeći:

$$x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

Ovde je potrebno prihvatiti i konvenciju $0 \cdot (+\infty) = 0$.

KLASA III

I pseudo-sabiranje i pseudo-množenje su idempotentne operacije:

$$a)\ ([-\infty,+\infty],\max,\min)\,, \qquad \mathbf{0} = -\infty, \qquad \mathbf{1} = +\infty;$$

$$b)\ ([-\infty,+\infty],\min,\max)\,, \qquad \mathbf{0} = +\infty, \qquad \mathbf{1} = -\infty.$$

Operacija $\oplus = \max$ indukuje uobičajen poredak, dok operacija $\oplus = \min$ indukuje poredak suprotan uobičajenom.

Napomena 1.7 Poluprstenima sa idempotentnim pseudo-sabiranjem sa bave [38, 45].

1.4 Granične vrednosti realnih poluprstena druge klase

U ovoj glavi su prezentovani rezultati iz [51] koji daju vezu izmedju poluprstena druge klase i poluprstena prve ili treće klase iz poglavlja 1.3.

Posmatrajmo poluprsten druge klase $([a,b],\oplus,\odot)$ zadat generatorom $g : [a,b] \to [0,+\infty]$ tako da je $g(\mathbf{0}) = 0$. Za svako $\lambda \in (0,\infty)$ data je funkcija g^λ, tj. funkcija g na stepen λ. Sada, g^λ je generator poluprstena $([a,b],\oplus_\lambda,\odot_\lambda)$, gde je

$$x \oplus_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}(g^\lambda(x) + g^\lambda(y)) \tag{13}$$

i, kako je $(g^\lambda(x))^{-1} = g^{-1}(x^{1/\lambda})$,

$$x \odot_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}(g^\lambda(x) g^\lambda(y)) = x \odot y. \tag{14}$$

Znači, g^λ je generator poluprstena $([a,b],\oplus_\lambda,\odot)$.

Teorema 1.14 *Neka je $g : [a,b] \to [0,\infty]$ striktno opadajući generator poluprstena druge klase $([a,b],\oplus,\odot)$. Tada, za $\lambda \in (0,\infty)$, funkcije g^λ su generatori poluprstena $([a,b],\oplus_\lambda,\odot)$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji λ_0 takvo da je*

$$|x \oplus_\lambda y - \min(x,y)| < \varepsilon$$

za svako $\lambda \geq \lambda_0$ i $(x,y) \in [a,b]^2$.

Ako je g striktno rastuća funkcija, za svako $\varepsilon > 0$ postoji λ_0 takvo da je

$$|x \oplus_\lambda y - \max(x,y)| < \varepsilon$$

za svako $\lambda \geq \lambda_0$ i $(x,y) \in [a,b]^2$.

Dokaz prethodne teoreme se može naći u [51].

Napomena 1.8 Neka je $g : [a,b] \to [0,\infty]$ striktno opadajući generator poluprstena druge klase $([a,b],\oplus,\odot)$ i neka $\lambda \in (-\infty,0)$. Tada, $\oplus_\lambda \to \max$ za $\lambda \to -\infty$. Ako je g striktno rastući generator tada, $\oplus_\lambda \to \min$ za $\lambda \to -\infty$.

Posledica 1.1 *(i) Neka je $([a,b],\min,\odot)$ poluprsten prve klase i neka je pseudo-množenje $\odot$ dato striktno opadajućim multiplikativnim generatorom $g : [a,b] \to [0,\infty]$. Tada, poluprsten $([a,b],\min,\odot)$ je granična vrednost niza poluprstena druge klase $([a,b],\oplus_{\lambda_n},\odot_{\lambda_n})$, kada $\lambda_n \to \infty$, a $\oplus_{\lambda_n}$ i $\odot_{\lambda_n}$ su pseudo-operacije date sa (13) i (14).*

(ii) Neka je $([a,b],\max,\odot)$ poluprsten prve klase i neka je pseudo-množenje $\odot$ dato striktno rastućim multiplikativnim generatorom $g : [a,b] \to [0,\infty]$. Tada, poluprsten $([a,b],\max,\odot)$ je granična vrednost niza poluprstena druge klase $([a,b],\oplus_{\lambda_n},\odot_{\lambda_n})$, kada $\lambda_n \to \infty$, a $\oplus_{\lambda_n}$ i $\odot_{\lambda_n}$ su pseudo-operacije date sa (13) i (14).

Moguće je i poluprsten treće klase dobiti kao graničnu vrednost niza poluprstena druge klase. Na primer, familija aditivnih generatora $h_n : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) = \exp\left((-(2n-1)\ln x)^{(2n-1)}\right)$$

koja generiše niz poluprstena druge klase, a. poluprsten $([0, \infty], \min, \max)$ je granična vrednost ([51]).

1.5 Uopštenja realnih poluprstena

Kao što je izloženo u sekciji 1.3, pseudo-operacije koje čine realni poluprsten moraju da zadovoljavaju odredjene uslove. Zamena nekih od tih uslova slabijim se pokazala vrlo korisnim u primeni, pa se ova sekcija upravo bavi pseudo-operacijama koje zadovoljavaju te relaksirane uslove.

Prvi problem razmatran u ovoj sekciji je problem uslovne distributivnosti, tj. posmatran je poluprsten na jediničnom intervalu kod koga je uslov ditrubutivnosti zamenjen nešto slabijim uslovom. Ova problematika je razmatrana u [15, 29, 31, 32].

Dalje, date su generalizovane pseudo-operacije iz [76]. Karakteristično za ove operacije je to što one ne moraju biti ni komutativne ni asocijativne. Više o ovoj problematici se može naći u [76, 78].

1.5.1 Uslovno distributivni poluprsten

Pokazalo se da t-konorme, t-norme i uninorme imaju veliku primenu u različitim matematičkim teorijama i tom prilikom t-konorme se često koriste kao uopštenja klasičnog sabiranja, a t-norme i uninorm kao uopštenja klasičnog množenja. Shodno tome, postavlja se pitanje kada uredjene trojeke $([0,1], S, T)$ i $([0,1], S, U)$ jesu realni poluprsteni iz sekcije 1.3. Problem pretstavlja uslov distributivnosti. Ovaj problem za $([0,1], S, T)$ je razmatran u [31], a analiza opštijeg slučaja koji obuhvata i uninorme se može naći u [29, 32].

Sledi definicija iz [31].

Definicija 1.11 *Neka je T trougaona norma, a S trougaona konorma. Kažemo da je T distributivna t-norma u odnosu na t-konormu S ako za svako $x, y, z \in [0,1]$ važi*

$$T(x, S(y, z)) = S(T(x, y), T(x, z)).$$

S je distributivna t-konorma u odnosu na t-normu T ako za svako $x, y, z \in [0,1]$ važi

$$S(x, T(y, z)) = T(S(x, y), S(x, z)).$$

Ako je T distributivno u odnosu na S i S distributivno u odnosu na T, par (T, S) se naziva distributivan par t-norme i t-konorme.

Sledeće tvrdjenje ilustruje značaj najjače t-norme i najslabije t-konorme za distributivnost ([31]).

Teorema 1.15 *Neka je T trougaona norma, a S trougaona konorma. Tada važi:*

(i) S distributivno u odnosu na T ako i samo ako $T = T_M$.

(ii) T distributivno u odnosu na S ako i samo ako $S = S_M$.

(iii) (T, S) je distributivan par ako i samo ako $T = T_M$ i $S = S_M$.

Napomena 1.9 Ako je T t-norma, S dualna t-konorma i T je distributivno u odnosu na S (ili S distributivno u odnosu na T), tada je $T = T_M$ i $S = S_M$.

Kao što se može zaključiti iz prethodnog tvrdjenja, za proizvoljnu t-konormu jedina distributivna operacija je min. Upravo iz tog razloga se javlja potreba za oslabljenjem uslova distributivnosti i uvodi se uslovna distributivnost ([15, 29, 31, 32]).

Definicija 1.12 *Neka je S t-konorma i U t-norma ili uninorma. Tada, U je uslovno distributivno u odnosu na S ako za svako $x \in [0,1]$ i $y, z \in [0,1)$ takvo da je $S(y,z) < 1$, važi*

$$U(x, S(y,z)) = S(U(x,y), U(x,z)). \tag{15}$$

Uredjena trojka $([0,1], S, U)$ gde je S neprekidna t-konorma, a U levo-neprekidna t-norma ili uninorma i U je uslovno distributivno u odnosu na S naziva se uslovno distributivan poluprsten.

Za neke specijalne slučajeve, u [32] je data karakterizacija uslovno distributivnog para (S, U). Njihova potpuna karakterizacija je još uvek otvoren problem.

Teorema 1.16 *Neka je $([0,1], S, U)$ uslovno distributivan poluprsten.*

(i) Ako je $S = \max$, tada je U bilo koja levo neprekidna uninorma ili t-norma.

(ii) Ako je S striktna t-konorma, tj. t-konorma zadata bijektivnim aditivnim generatorom $s : [0,1] \to [0, +\infty]$, tada je U uninorma generisana funkcijom $c \cdot s$ gde $c \in (0, +\infty)$. Neutralni element uninorme U je $s^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$.

(iii) Ako je S nilpotentna t-konorma, tj. t-konorma data (jedinstvenim) aditivnim generatorom s koji je rastuća bijekcija $s : [0,1] \to [0,1]$, tada U je t-norma sa multiplikativnim generatorom s.

(iv) Ako je S nearhimedova t-konorma, tj. ima netrivijalne idempotentne elemente, i U t-norma, tada postoji $a \in [0,1]$, proizvoljna t-norma T, nilpotentna t-konorma S^* i striktna t-norma T^* tako da aditivni generator s^* za S^* ispunjava uslov $s^*(1) = 1$ i je multiplikativni generator za T^* tako da

$$S(x,y) = \begin{cases} a + (1-a)S^*\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & za\ (x,y) \in [a,1]^2, \\ \max\{x,y\} & inače, \end{cases}$$

$$U(x,y)=\begin{cases} aT\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right) & \textit{za } (x,y)\in[0,a]^2,\\ a+(1-a)T^*\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right) & \textit{za } (x,y)\in[a,1]^2,\\ \min\{x,y\} & \textit{inače,}\end{cases}$$

Napomena 1.10 Trougaona konorma S i trougaona norma U iz tvrdjenja 1.16 (iv) jesu konstruisane metodom ordinalnih suma, tj. $S=(\langle a,1,S^*\rangle)$ i $U=(\langle 0,a,T\rangle,\langle a,1,T^*\rangle)$.

U sledećem primeru je dat kanonički pretstavnik uslovno-distributivnih parova ([15, 31, 32]).

Primer 1.4 Za neko $a\in[0,1]$, trougaona norma $T=(\langle 0,a,T_1\rangle,\langle a,1,T_P\rangle)$, gde je T_1 proizvoljna levo neprekidna t-norma, je uslovno distributivna u odnosu na t-konormu $S=(\langle a,1,S_L\rangle)$.

Specijalno, za $a=0$ dobijamo da je T_P uslovno distributivno u odnosu na S_L, a za $a=1$ dobijamo da je proizvoljna levo neprekidna t-norma uslovno distributivna u odnosu na S_M.

Primer 1.5 Date t-konorma S i t-norma T jesu uslovno distributivne:

$$S(x,y)=\begin{cases} \min\left(\frac{2x+2y-1}{2},1\right) & \text{ako } x,y\in[\frac{1}{2},1],\\ \max(x,y) & \text{inače}\end{cases}$$

i

$$T(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}T_1(2x,2y) & \text{ako } x,y\in[0,\frac{1}{2}],\\ 2xy-x-y+1 & \text{ako } x,y\in[\frac{1}{2},1],\\ \min(x,y) & \text{inače}\end{cases}$$

gde je T_1 proizvoljna t-norma.

1.5.2 Poluprsten sa nekomutativnim i neasocijativnim pseudo-operacijama

U ovoj sekciji je dato uopštenje pseudo-operacije iz [76, 78]. Osnovna karakteristika ovih operacija je to što ne moraju biti komutativne i asocijativne. Kako se za ove operacije zahteva neprekidna diferencijabilnost, klasa uopštenih pseudo-operacija je mnogo šira od klase pseudo-operacija u smislu definicije 1.3 za koje se traži i neprekidna diferencijabilnost.

Definicija 1.13 *Realne binarne operacije $\oplus$ i $\odot$ se nazivaju uopšteno pseudo-sabiranje i uopšteno pseudo-množenje (s desna) ako ispunjavaju sledeće uslove*

(i) $\oplus,\odot\in C^2(\mathbb{R}^2)$, *(ili* $\odot\in C^2([0,+\infty)^2)$*),*

(ii) za dato z, jednačina $t\oplus t=z$ je jedinstveno rešiva,

(iii) $\odot$ *je desno distributivno u odnosu na* $\oplus$:

$$(D_r) \quad (x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z).$$

Ako je umesto uslova (iii) u prethodnoj definiciji data leva distributivnost

$$(D_l) \quad z \odot (x \oplus y) = (z \odot x) \oplus (z \odot y),$$

imamo uopšteno pseudo-sabiranje i uopšteno pseudo-množenje (s leva). Svi rezultati dobijeni za desni slučaj mogu biti preneti i na levi uvodjenjem nove operacije $\odot' \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$x \odot' y = y \odot x.$$

Tokom ovoe sekcije su korišćene sledeće oznake:

$$(u)_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad (u)_2 = \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad (u)_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy},$$

gde je $u = u(x, y)$ funkcija dve realne promenljive.

Naredne četiri leme su neophodne za formulaciju i dokaz teoreme o reprezentaciji uopštenih pseudo-operacija. Dokazi se mogu naći u [76].

Lema 1.1 *Neka su* $\oplus$ *i* $\odot$ *uopštene pseudo-operacije koje zadovoljavaju sledeći uslov: postoji* y_0 *takvo da* $(x \odot y_0)_1 \neq 0$. *Tada je* $(x \oplus y)_1 \neq 0$ *i* $(x \oplus y)_2 \neq 0$ *za svako* x, y *i ili je* $(x \odot y)_1 \neq 0$ *za svako* x, y *ili postoji* z_0 *takvo da* $x \odot z_0 = const$ *za svako* x.

Lema 1.2 *Neka su* $\oplus$ *i* $\odot$ *operacije koje zadovoljavaju sledeće uslove:*

(i) $\oplus, \odot \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

(ii) za svako fiksno z, *jednačina* $t \oplus t = z$ *je jedinstveno rešiva,*

(iii) $(x \oplus y)_1 \neq 0$ *i* $(x \oplus y)_2 \neq 0$;

(iv) $\odot$ *je desno distributivno u odnosu na* $\oplus$.

Tada, operacija $\oplus'$ *definisana sa*

$$x \oplus' y = \varphi^{-1}(x \oplus y), \tag{16}$$

gde je $\varphi(x) = x \oplus x$, *je idempotentna,* $\odot$ *je desno distributivno u odnosu na* $\oplus'$ *i* $(x \oplus' y)_1 \neq 0, (x \oplus' y)_2 \neq 0$.

Lema 1.3 *Ako su* $\oplus$ *i* $\odot$ *uopšteno pseudo-sabiranje i uopšteno pseudo-množenje (s desna), i ako* $(x \odot y)_1 \neq 0$ *za svako* x, y, *tada važi:*

$$u \odot z = h^{-1}(f(z)h(u) + \alpha(z)), \tag{17}$$

gde je, za γ, u, β, s iz domena operacija $\oplus$ i $\odot$ i a proizvoljnu nenula konstantu,

$$h(u) = \int_{\gamma}^{u} \left(e^{-\frac{1}{a} \int_{\beta}^{s} (t \oplus' t)_{12}\, dt} \right) ds. \tag{18}$$

f i α su proizvoljne funkcije iz $C^2(\mathbb{R})$.

Lema 1.4 *Ako, u lemu 1.3, stavimo $h(x) = u, h(y) = v$ i definišemo*

$$u \boxplus v = h(h^{-1}(u) \oplus h^{-1}(v)), \tag{19}$$

gde je h dato sa (18), tada operacija $\boxplus$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$(u \boxplus v) f(z) + \alpha(z) = (u f(z) + \alpha(z)) \boxplus (v f(z) + \alpha(z)). \tag{20}$$

Kao posledica lema 1.2, 1.3 i 1.4 dobijena je sledeća teorema o reprezentaciji iz [76]:

Teorema 1.17 *Realne operacije $\oplus$ i $\odot$ iz $C^2(\mathbb{R}^2)$, takve da je $(x \odot y)_1 \neq 0$ za svako x, y, su uopšteno pseudo-sabiranje i uopšteno pseudo-množenje (s desna) ako i samo ako se mogu pretstaviti jednačinom (17), tj.*

$$u \odot z = h^{-1}(f(z) h(u) + \alpha(z)),$$

i

$$x \oplus y = h^{-1}((h(x) \boxplus h(y)), \tag{21}$$

gde su f i α proizvoljne funkcije iz $C^2(\mathbb{R})$, funkcija h je data sa (18) i $\boxplus$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu (20).

Definicija 1.14 *Za dato uopšteno pseudo-sabiranje i uopšteno pseudo-množenje (s desna) funkcija h iz teorema 1.17 je generator operacija $\odot$ i $\oplus$.*

Sledeće dve teoreme daju karakterizaciju uopštenog pseudo-sabiranje i uopštenog pseudo-množenje (s desna) i dokazi se mogu naći u [76].

Teorema 1.18 *Neka su $\oplus$ i $\odot$ uopšteno pseudo-sabiranje i uopšteno pseudo-množenje (s desna), tako da važi $(x \odot y)_1 \neq 0$ za svako x, y. Tada,*

$$x \oplus y = h^{-1}(h(y) + \psi(h(x) - h(y))), \quad i \quad x \odot y = h^{-1}(h(x) + \alpha(y))$$

ili

$$x \oplus y = h^{-1}(h(y) + \psi(h(x) - h(y))), \quad i \quad x \odot y = h^{-1}(\alpha(y) - h(x)),$$

gde je ψ neparna funkcija, ili

$$x \oplus y = h^{-1}(h(y) + a(h(x) - h(y))), \quad i \quad x \odot y = h^{-1}(h(x) f(y) + \alpha(y)),$$

gde je $\psi(t) = t \boxplus 0$, a je konstanta i $\boxplus, \alpha, f, h$ su funkcije iz teoreme 1.17.

Teorema 1.19 *Neka su $\oplus$ i $\odot$ uopšteno pseudo-sabiranje i uopšteno pseudo-množenje (s desna), i neka važi sledeće:*

(i) $x \odot 0 = a$ *(konstanta) za svako* x,

(ii) postoji y_0 *takvo da* $(x \odot y_0)_1 \neq 0$.

Tada, za neko $c \in \mathbb{R}$ *važi*

$$x \oplus y = h^{-1}(ch(x) + h(y)) \quad ili \quad x \oplus y = h^{-1}(h(x) + ch(y))$$

$$x \odot y = h^{-1}(f(y)h(x)),$$

gde je (za γ, β *proizvoljne nenula konstante)*

$$h(x) = (\gamma \oplus \beta)_2 \int \frac{(x \oplus \beta)_1}{(x \oplus \beta)_2} dx,$$

i f *je proizvoljna funkcija iz* $C^2(\mathbb{R})$ *takva da je* $f(0) = 0$.

Dalje, u ovoj glavi, data je i specijalna klasa uopštenih pseudo-operacija koje zavise od tri parametra. Posmatramo sledeće skupove:

$$\mathcal{K}_0 := \{k \text{ striktno monotona pozitivna funkcija iz } C^2(\mathbb{R})\},$$

$$\mathcal{K} := \begin{array}{l}\{k \text{ striktno monotona pozitivna funkcija iz } C^2(\mathbb{R}),\\ \text{takva da } k'(u) \neq 0, \forall u\}.\end{array}$$

Teorema 1.20 *Neka su* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *realni pozitivni brojevi i neka je* $k \in \mathcal{K}_0$. *Ako je operacija* $\oplus$ *definisana sa*

$$u \oplus v = k^{-1}(\varepsilon_1 k(u) + \varepsilon_2 k(v)), \tag{22}$$

tada je jednačina $t \oplus t = z$ *rešiva.*

Dokaz ove i narednih teorema se može naći u [78].

Sada se uvodi operacja $\odot$ definisana za $\gamma > 0$ na sledeći način:

$$u \odot v = k^{-1}\left(k(u)^{\gamma} k(v)\right). \tag{23}$$

Teorema 1.21 *Operacija (23) je levo distributivna u odnosu na (22).*

Teorema 1.22 *Ako* k *pripada familiji* $\mathcal{K}$, *tada* $(u \odot v)_1 \neq 0$.

Napomena 1.11 Operacije (22) i (23) jesu uopštenje operacija

$$u \oplus v = k^{-1}\left(\varepsilon k(u) + k(v)\right) \text{ i } u \odot v = k^{-1}\left(k(u)^{\varepsilon} k(v)\right) \tag{24}$$

koje su definisane u radu [76]. Dalje uopštenje oblika $u \odot' v = k^{-1}(k(u)^{\gamma_1} k(v)^{\gamma_2})$, je nemoguće jer tako definisano $\odot'$ nije distributivno u odnosu na $\oplus$ dato sa (22).

Sledi teorema iz [78].

Teorema 1.23 *Neka su dati parametri $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, i γ. Tada, operacije definisane sa (22) i (23) za $k \in \mathcal{K}$, jesu generalizovane pseudo-operacije u smislu definicije 1.13 i pripadaju klasi (i) teoreme 1.18, tj. imaju sledeću reprezentaciju:*

$$u \oplus v = h^{-1}\left(h(v) + \Phi(h(v) - h(u))\right), \tag{25}$$

$$u \odot v = h^{-1}\left(h(v) + \alpha(u)\right),$$

gde je $h(x) = \log(k(x)), \Phi(t) = \log(\varepsilon_1 e^{-t} + \varepsilon_2), \alpha(x) = \gamma \log k(u(x))$.

Posledica 1.2 *Za svaki par operacija definisan sa (22) i (23) gde $k \in \mathcal{K}$, postoji $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ i operacija $\oplus_{\varepsilon''}$ za $\varepsilon'' > 0$ tipa (24) data sa*

$$u \oplus_{\varepsilon''} v = k^{-1}(\varepsilon'' k(u) + k(v)),$$

tako da $\Phi(t) = \varepsilon' + \psi(\varepsilon'' e^{-t} + 1)$, gde je Φ funkcija iz (25) i ψ je odgovarajuća funkcija iz teoreme 1.18 (i) za operaciju $\oplus_{\varepsilon''}$.

Sledeća direktna posledica teoreme 1.23, daje specijalnu podklasu uopštenih pseudo-operacija koje se nalaze u osnovi integrala iz poglavlja 2.3.2 i 2.3.3 kao i u osnovi konvolucije iz poglavlja 3.3.

Posledica 1.3 *Neka su ε i γ pozitivni realni brojevi i neka je k pozitivna striktno monotona neprekidna funkcija definisana na $\mathbb{R}$ ili $[0, \infty)$. Tada*

$$u \oplus v = k^{-1}\left(\varepsilon k(u) + k(v)\right) \ \text{ i } \ u \odot v = k^{-1}\left(k(u)^{\gamma} k(v)\right) \tag{26}$$

jesu uopštene pseudo-operacije u smislu definicije 1.13.

Za uopšteno pseudo-sabiranje moguće je dokazati analogan teoreme 1.14 ([51, 78]).

Teorema 1.24 *Neka je $k : [a, b] \to [0, \infty]$ striktno opadajuća generatorska funkcija za $\oplus$, tj. za neko $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $x \oplus y = k^{-1}(\varepsilon_1 k(x) + \varepsilon_2 k(y))$. Za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ uopštena pseudo-operacija $\oplus_\lambda$ je data sa $x \oplus_\lambda y = (k^\lambda)^{-1}(\varepsilon_1 k^\lambda(x) + \varepsilon_2 k^\lambda(y))$. Tada, za svako $\omega > 0$ postoji λ_0 tako da*

$$|x \oplus_\lambda y - \min\{x, y\}| < \omega$$

za svako $\lambda \geq \lambda_0$ i $(x, y) \in [a, b]^2$.

Ako je k striktno rastuća generatorska funkcija, tada za svako $\omega > 0$ postoji λ_0 tako da

$$|x \oplus_\lambda y - \max\{x, y\}| < \omega$$

za svako $\lambda \geq \lambda_0$ i $(x, y) \in [a, b]^2$.

Dokaz. Neka su $(x,y) \in (a,b)^2$ tako da $a < x \leq y < b$ (za $x = a$ ili $y = b$ lako se proveri da tvrdjenje važi). Zbog monotonosti generatora k imamo $0 < \frac{k(y)}{k(x)} \leq 1$. Sada, za svako $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \oplus_\lambda y &= (k^\lambda)^{-1}(\varepsilon_1 k^\lambda(x) + \varepsilon_2 k^\lambda(y)) \\ &= k^{-1}\left((\varepsilon_1 k^\lambda(x) + \varepsilon_2 k^\lambda(y))^{\frac{1}{\lambda}}\right) \\ &= k^{-1}\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{\lambda}} k(x) \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \left(\frac{k(y)}{k(x)}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Kako je $\frac{k(y)}{k(x)} \in [0,1]$, $\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \left(\frac{k(y)}{k(x)}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} = 1$ i $\lim_{\lambda\to\infty} \varepsilon_2^{\frac{1}{\lambda}} = 1$, dobija se traženo, tj.

$$\lim_{\lambda\to\infty} x \oplus_\lambda y = k^{-1}(1 \cdot k(x) \cdot 1) = \min\{x,y\}.$$

Ako je k striktno rastuća funkcija, tada $0 < \frac{k(x)}{k(y)} \leq 1$ i

$$x \oplus_\lambda y = k^{-1}\left(\varepsilon_1^{\frac{1}{\lambda}} k(y) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \left(\frac{k(x)}{k(y)}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

iz čega sledi

$$\lim_{\lambda\to\infty} x \oplus_\lambda y = k^{-1}(1 \cdot k(y) \cdot 1) = \max\{x,y\}.$$

□

Napomena 1.12 (i) Tvrdjenje važi i za $\lambda \to -\infty$ uz promenu monotonosti generatora k.

(ii) Ako je k generatorska funkcija za $\odot$, tj. $x \odot y = k^{-1}(k^\gamma(x)k(y))$, za svako $\lambda \in \mathbb{R}$, k^λ je takodje generatorska funkcija za $\odot$.

2 Ne-aditivne mere i integrali bazirani na njima

U prvoj sekciji ovog poglavlja dati su Choquet-ov i Sugeno-ov integral ([12, 4, 5, 57]). Njihove definicije su zasnovane na monotonim skupovnim funkcijama poznatim kao fazi mere. Dalje, druga sekcija ovog poglavlja se bavi i nešto užom klasom fazi mera i integralima konstruisanim pomoću tih skupovnih funkcija. Razmatrana su uopštenja klasične mere kod kojih je klasična aditivnost zamenjena pseudo-aditivnošću. Mere tog tipa se nazivaju $\oplus$-dekompozabilne mere ([22, 36, 57, 59, 60, 61, 79, 94]). U ovom slučaju, pri konstrukciji odgovarajućih integrala, se koristi postupak analogan konstrukciji Lebesgue-ovog integrala. Naravno, za odredjen izbor pseudo-operacija, pseudo-aditivna mera i odgovarajući integral sa poklapaju sa Lebesgue-ovom merom i integralom. Posebna pažnja je posvćena merama i integralima baziranim na uopštenim realnim poluprstena, tj. na poluprstenima kod kojih su neki od uslova oslabljeni. Posmatrana je hibridna verovatnosno-mogućnosna S-mera vezana za uslovno distributivan poluprsten, kao i odgovarajući integral ([15, 31, 32]). Data su orginalni rezultati iz [73, 90] vezani za konstrukcija integrala za poluprsten sa specijalnom klasom uopštenih pseudo-operacija iz poglavlja 1.5.2.

2.1 Choquet-ov i Sugeno-ov integral

Kako su i Choquet-ov i Sugeno-ov integral bazirani na fazi merama u najširem smislu, prvo je potrebno dati preciznu definiciju fazi mere. Neka je sa Σ obeležena $\sigma-$algebra podskupova univerzalnog skupa X. Sledi definicija ioz [57].

Definicija 2.1 *Funkcija $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ se naziva monotona skupovna funkcija ili fazi mera ako je ispunjeno:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) za svako $A, B \in \Sigma$, $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Ako su ispunjeni i uslovi:

(iii) neprekidnost od dole, tj. za svaki rastući niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* Σ *važi:* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$;

(iv) neprekidnost od gore, tj. za svaki opadajući niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* Σ *takav da je* $m(A_1) < +\infty$ *važi:* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$;

datu fazi meru nazivamo neprekidna od dole, odnosno, od gore.

Napomena 2.1 U slučaju konačnog skupa X, uslovi 3) i 4) su automatski ispunjeni, pa svaka fazi mera je neprekidana od dole i neprekidna od gore.

Primeri fazi mera su mera verovanja (eng. belief measure) i mera plauzabilnosti (eng. plausibility measure) koje imaju značajnu ulogu u Dempster-Shafer-ovoj teoriji odlučivanja ([61]).

U cilju definisanja Choquet-ovog i Sugeno-vog integrala, potrebno je definisati merljive, bazične i jednostavne funkcije. Neka je X neprazan proizvoljan skup, Σ σ-algebra podskupova skupa X i $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ fazi mera. Neka je $f : X \to [0, +\infty]$ proizvoljna funkcija kojoj je pridružena familija $\mathbf{C}_f = \{C_f(x) \mid x \in [0, +\infty]\} \cup \{C'_f(x) \mid x \in [0, +\infty]\}$ gde su $C_f(x) = \{y \in X \mid f(y) > x\}$ i $C''_f(x) = \{y \in X \mid f(y) \geq x\}$. Familija $\mathbf{C}_f$ je lanac pridružen funkciji f.

Svaka funkcija f definiše relaciju $<_f$ na sledeći način

$$x_1 <_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

i dve funkcije f i g se nazivaju komonotone ako i samo ako ne postoji par $x_1, x_2 \in X$ takav da $x_1 <_f x_2$ i $x_2 <_g x_1$.

Neka je sa $\mathcal{F}(X)$ označen skup svih $\mathbf{\Sigma}$- merljivihne negativnih funkcija, tj. skup svih funkcija f za koje važi $\mathbf{C}_f \subseteq \Sigma$. Za svako $a \in [0, +\infty]$, i za svako $A \in \Sigma$ definiše se bazična funkcija na sledeći način:

$$b(a, A)(x) = \begin{cases} a & \text{ako } x \in A, \\ 0 & \text{ako } x \notin A. \end{cases}$$

Merljiva funkcija $s : X \to [0, +\infty]$ se naziva jednostavna funkcija ako je njen kodomen konačan skup. Sa $\mathcal{S}(X)$ je označen skup svih jednostavnih funkcija definisanih na X. Ako je kodomen jednostavne funkcije s skup $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, jednostavna funkcija se može zapisati preko bazičnih funkcija na sledeći način:

$$s = \sum_{i=1}^{n} b(a_i, A_i) \equiv \max_{i=1,\ldots,n} b(a_i, A_i),$$

gde je $A_i = \{x \in X \mid s(x) = a_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sledi definicija Choquet-ovog integrala (videti [4, 5, 12, 57]).

Definicija 2.2 *Choquet-ov integral je funkcionela $\mathcal{F}(X) \to [0, +\infty]$ definisana sa*

$$(C) \int f d\mu =: \int_0^{\infty} \mu(\mathbf{C}_f(x)) dx.$$

Osnovne osobine Choquet-ovog integrala su date narednom teoremom čiji se dokaz može naći u [5, 12, 57].

Još jedno značajno uopštenje Lebesgue-vog integrala je Sugeno-ov integral. I pri konstrukciji Sugeno-ovog integrala se koristi fazi mera u smislu definicije 2.1.

Neka je $\mu : \Sigma \to [0, 1]$ fazi mera i neka je $\mathcal{F}_1(X)$ familija Σ-merljivih funkcija koje slikaju skup X u jedinični interval.

Definicija 2.3 *Sugeno-ov integral je funkcionela $\mathcal{F}_1(X) \to [0, 1]$ definisana sa*

$$(S) \int f d\mu =: \sup_{x \in [0,1)} \left(\min\{x, \mu(\mathbf{C}_f(x))\} \right).$$

Više o ovom tipu integrala kao se može naći u [5, 57].

2.2 $\oplus$-dekompozabilna mera i pseudo-integral

U ovoj sekciji je dat specijalan slučaj fazi mera kod kojih je mera unije medjusobno disjunktnih skupova izražena preko mera svakog skupa ponaosob u zavisnosti od operacije $\oplus$ (videti [12, 45, 36, 57, 59, 60, 61, 79, 94]).

Posmatran je realni poluprsten $([a,b], \oplus, \odot)$ i totalno uredjenje $\preceq$ iz poglavlja 1.3. Neka je sa Σ obeležena $\sigma-$algebra podskupova univerzalnog skupa X. Slede definicije iz [57].

Definicija 2.4 *Skupovna funkcija $\mu : \Sigma \to [a,b]_+$ je $\oplus$-dekompozabilna mera ako je ispunjeno:*

(i) $\mu(\emptyset) = \mathbf{0}$,

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) \oplus \mu(B)$,

gde su A i B disjunktni skupovi iz Σ.
Ako je $\oplus$ idempotentna operacija uslov (i) i disjunktnost skupova mogu biti izostavljeni.

Definicija 2.5 *$\oplus-$dekompozabilna mera μ je $\sigma-\oplus-$dekompozabilna ako za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ medjusobno disjunktnih skupova iz Σ važi:*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{n\to+\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

U slučaju idempotentnosti pseudo-sabiranja, disjunktnost nije neophodna.

Specijalno, za $\oplus = \max$, max-dekompozabilna mera $\mu : \Sigma \to [a,b]$, tj. mera koja zadovoljava uslov

$$\mu(A \cup B) = \max(\mu(A), \mu(B))$$

za svako $A, B \in \Sigma$, se naziva (konačno) maksitivna mera.

Maksitivna mera μ je kompletno maksitivna ili sup-dekompozabilna ako za svaku familiju skupova $(A_i)_{i\in I}$ iz Σ važi

$$\mu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup_{i\in I} \mu(A_i).$$

Ako je skup indeksa I prebrojiv, μ je σ -maksitivna mera.

Slično, za $\oplus = \min$ skupovna funkcija $\mu : \Sigma \to [a,b]$ je (konačno) min-dekompozabilna mera ako ispunjava uslove

$$\mu(A \cup B) = \min(\mu(A), \mu(B))$$

za svako $A, B \in \Sigma$.

Min-dekompozabilna mera μ je kompletno min-dekompozabilna ili inf-dekompozabilna ako za svaku familiju skupova $(A_i)_{i\in I}$ iz Σ važi

$$\mu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \inf_{i\in I} \mu(A_i).$$

Ako je skup indeksa I prebrojiv, μ je σ -min-dekompozabilna mera.

Zbog idempotentnosti operatora maksimuma i minimuma, uslov o disjunktnosti skupova u prethodnim primerima je izostavljen.

Naredni primeri maksitivne i kompletno min-dekompozabilne mere su od velikog značaja za konstrukciju pseudo-integrala nad poluprstenima prve i treće klase iz poglavlja 1.3 ([57, 59, 60]).

Primer 2.1 Svaka funkcija $f : X \to [0, \infty)$ definiše kompletno maksitivnu meru na $\mathcal{P}(X)$ sa $\mu(A) = \sup_{x\in A} f(x)$. Obrnuto, svaka maksitivna mera μ na $\mathcal{P}(X)$ definiše funkciju raspodele $f : X \to [0, \infty]$ kao $f(x) = \mu(\{x\})$.

Primer 2.2 Svaka funkcija $f : X \to [0, \infty)$ definiše kompletno min-dekompozabilnu meru na $\mathcal{P}(X)$ kao $\mu(A) = \inf_{x\in A} f(x)$. Obrnuto, svaka kompletno min-dekompozabilna mera μ na $\mathcal{P}(X)$ definiše funkciju raspodele $f : X \to [0, \infty]$ kao $f(x) = \mu(\{x\})$.

Sledi konstrukcija pseudo-integrala i postupak konstrukcija je analogan konstrukciji Lebesgue-ovog integrala (videti [31, 57, 61]). Prvo je potrebno definisati merljivu funkciju, jednostavnu merljivu funkciju i elementarnu merljivu funkciju.

I dalje posmatramo realni poluprsten $([a, b], \oplus, \odot)$ i odgovarajuće totalno uredjenje $\preceq$ iz poglavlja 1.3. Neka je sa $\mathcal{D}$ obeležena proizvoljna familija podskupova univerzalnog skupa X.

Definicija 2.6 *Funkcija $f : X \to [a, b]$ je $\mathcal{D}$- merljiva od dole ako za svako $c \in [a, b]$ skupovi $\{x : f(x) \leq c\}$ i $\{x : f(x) < c\}$ pripadaju familiji $\mathcal{D}$.*

Funkcija $f : X \to [a, b]$ je $\mathcal{D}$- merljiva od gore ako za svako $c \in [a, b]$ skupovi $\{x : f(x) \geq c\}$ i $\{x : f(x) > c\}$ pripadaju familiji $\mathcal{D}$.

Funkcija $f : X \to [a, b]$ je $\mathcal{D}$- merljiva ako je $\mathcal{D}$-merljiva i od gore i od dole.

Napomena 2.2 Merljivost neke funkcije se poklapa sa njenom merljivošću od dole (ili od gore) ako umesto proizvoljne familije $\mathcal{D}$ posmatramo σ-algebru Σ.

Sada, neka su f i g dve funkcije definisane na X sa intervalom $[a, b]$ kao kodomenom. Tada, za svako $x \in X$ i $c \in [a, b]$, definišemo:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x), \ (f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x) \ \text{ i } \ (c \odot f)(x) = c \odot f(x).$$

Uopštenjem klasične karakteristične funkcije dobija se pseudo-karakteristična funkcija koja je neophodna za konstrukciju jednostavne i elementarne merljive funkcije.

Definicija 2.7 *Pseudo-karakteristična funkcija za neki skup A je*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & za \quad x \in A \\ \mathbf{0} & za \quad x \notin A. \end{cases}$$

Jasno, $\mathbf{0}$ iz prethodne definicije je neutralni element za pseudo-sabiranje, a $\mathbf{1}$ neutralni element za pseudo-množenje.

Sada slede definicije jednostavne i elementarne funkcije iz [57].

Definicija 2.8 *Preslikavanje $s : X \to [a, b]$ je jednostavna (merljiva) funkcija ako se može pretstaviti kao*

$$s = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \chi_{A_i},$$

gde $a_i \in [a, b], A_i \in \Sigma$. Ako $\oplus$ nije idempotentna operacija, skupovi A_i moraju biti medjusobno disjunktni.

Definicija 2.9 *Elementarna funkcija $e : X \to [a, b]$ se može pretstaviti kao*

$$e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \chi_{A_i},$$

gde su $a_i \in [a, b], A_i \in \Sigma$. Ako $\oplus$ nije idempotentna operacija, skupovi A_i moraju biti medjusobno disjunktni.

Pretpostavimo da su $([a, b], \oplus)$ i $([a, b], \odot)$ polugrupe i to kompletne mreže sa poretkom. Kompletna mreža znači da za svaki skup $A \subseteq [a, b]$ ograničen od gore (od dole) postoji $\sup A$ ($\inf A$). Takodje, pretpostavimo da je $[a, b]$ snadbeven metrikom d kompatibilnom sa lim sup i lim inf, tj. iz $\limsup x_n = x$ i $\liminf x_n = x$, sledi $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Neka pomenuta metrika zadovoljava jedan od sledećih uslov:

(a) $d(x \oplus y,\ x' \oplus y') \leq d(x, x') + d(y, y')$

(b) $d(x \oplus y,\ x' \oplus y') \leq \max\{d(x, x'),\ d(y, y')\}$.

Prethodni uslovi impliciraju sledeće:

$$d(x_n, y_n) \to 0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n \oplus z,\ y_n \oplus z) \to 0,$$

za svako $z \in [a, b]$. Uslov (b) implicira i

$$d(\bigoplus_{i=1}^{n} x_i,\ \bigoplus_{j=1}^{n} y_j) \leq \min_j \max_i d(x_i, y_j).$$

Takodje se pretpostavlja monotonost metrike d, tj.

$$x \preceq z \preceq y \quad \Rightarrow \quad d(x, y) \geq \max\{d(y, z), d(x, z)\}.$$

Slede primeri metrika iz [57, 61] na realnim poluprstenima koje zadovoljavaju uslov kompatibilnosti, (b) (iz čega sledi i (a)) i jesu monotone. Za poluprsten $((-\infty, +\infty], \min, +)$, odgovarajuća metrika je data sa

$$d(x,y) = e^{-\min\{x,y\}} - e^{-\max\{x,y\}},$$

a za poluprsten $((-\infty, +\infty], \max, \min)$, odgovarajuća metrika je

$$d(x,y) = \arctan(\max\{x,y\}) - \arctan(\min\{x,y\}).$$

Definicija 2.10 *Neka je ε pozitivan realan broj i $B \subset [a,b]$. Podskup $\{l_i^\varepsilon\}$ skupa B je $\varepsilon-$mreža ako za svako $x \in B$ postoji l_i^ε takav da $d(l_i^\varepsilon, x) \leq \varepsilon$. Ako imamo $l_i^\varepsilon \preceq x$, onda ćemo $\{l_i^\varepsilon\}$ zvati opadajuća $\varepsilon-$ mreža. Ako važi $l_i^\varepsilon \preceq l_{i+1}^\varepsilon$, onda $\{l_i^\varepsilon\}$ je monotona.*

Naredna teorema iz [57] je u osnovi same definicije pseudo-integrala.

Teorema 2.1 *Neka je $f : X \to [a,b]$ merljiva od dole funkcija ako je pseudo sabiranje idempotentno, ili je, ako nemamo idempotentnost, f merljiva i za svaki pozitivan realan broj ε postoji monotona $\varepsilon-$mreža u $f(X)$. Tada, postoji niz $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementarnih funkcija takvih da, za svako $x \in X$,*

$$d(\varphi_n(x), f(x)) \to 0 \quad \textit{uniformno kad} \quad n \to \infty.$$

Definicija 2.11 *Pseudo-integral jednostavne i elementarne funkcije, redom, je:*

$$\int_X^{\oplus} s \odot d\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \mu(A_i), \qquad \int_X^{\oplus} e \odot d\mu = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu(A_i).$$

Sada je moguće definisati pseudo-integral ograničene, merljive (samo merljive od dole ako je $\oplus$ idempotentno) funkcije $f : X \to [a,b]$. Ako $\oplus$ nije idempotentno traži se još i postojanje monotone $\varepsilon-$mreže na $f(X)$ ([57]).

Definicija 2.12 *Kada funkcija f ispunjava sve gore pomenute uslove, pseudo-integral te funkcije je dat na sledeći način:*

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\mu,$$

gde je $(\varphi_n)_{i\in\mathbb{N}}$ niz elementarnih funkcija konstruisan u dokazu teoreme 2.1.

Teorema 2.2 *Pseudo-integral dat u prethodnoj definiciji ne zavisi od izbora niza elementarnih funkcija $(\varphi_n)_{i\in\mathbb{N}}$.*

2.2.1 Osnovne osobine pseudo-integrala i klasifikacija

Ova podsekcija daje osnovne osobine pseudo-integrala iz [57, 61, 79] kao i njihovu klasifikaciju koja je u skladu sa klasifikacijom poluprstena iz poglavlja 1.3.

Neka je X neprazan skup, Σ σ-algebra podskupova skupa X, $[a,b] \subseteq [-\infty,+\infty]$ i neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ realni poluprsten. Neka su date pseudo-integrabilne funkcije $f, f_1, f_2 : X \to [a,b]$ i $c \in [a,b]$. Pod ovim pretpostavkama, moguće je formulisati sledeće teoreme.

Teorema 2.3 *Neka je $\oplus$ neprekidna, beskonačno komutativna i asocijativna operacija i neka je $\odot$ neprekidna operacija. Tada:*

(i) $\int_X^{\oplus} (f_1 \oplus f_2) \odot d\mu = \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu \oplus \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu$,

(ii) $\int_X^{\oplus} (c \odot f) \odot d\mu = c \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\mu$.

Teorema 2.4 *Neka su A i B neprazni disjunktni podskupovi skupa X koji pripadaju σ-algebri Σ. Tada važi:*

$$\int_{A\cup B}^{\oplus} f \odot d\mu = \int_A^{\oplus} f \odot d\mu \oplus \int_B^{\oplus} f \odot d\mu.$$

Teorema 2.5 *Važi:*

$$f_1 \preceq f_2 \Rightarrow \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\mu \preceq \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\mu.$$

Dokazi izloženih teorema se mogu naći u [57, 61, 79].

Kako u zavisnosti od osobina pseudo-operacija koje se javljaju u strukturi poluprstena razlikujemo tri klase realnih poluprstena, sledi forma pseudo-integrala za svaku od pomenutih klasa ([57, 61, 67, 79]).

KLASA I

a) Posmatrani poluprsten je $([a,b], \max, \odot)$, $[a,b] \subseteq [-\infty,+\infty]$, gde $\odot$ nije idempotentna operacija. Pseudo-sabiranje povlači sup-dekompozabilnu meru i postojanje funkcije $h : \mathbb{R} \to [a,b]$ tako da je $m(A) = \sup_{x\in A} h(x)$. Pseudo-integral funkcije $f : \mathbb{R} \to [a,b]$ nad celim skupom realnih brojeva u odnosu na meru m je

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x\in\mathbb{R}} (f(x) \odot h(x)).$$

b) Ako je posmatrani poluprsten oblika $([a,b], \min, \odot)$, $[a,b] \subseteq [-\infty,+\infty]$, gde $\odot$ nije idempotentna operacija, pseudo-sabiranje povlači inf-dekompozabilnu meru i postojanje funkcije $h : \mathbb{R} \to [a,b]$ tako da je $m(A) = \inf_{x\in A} h(x)$. Sada, odgovarajući pseudo-integral funkcije $f : \mathbb{R} \to [a,b]$ je

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = \inf_{x\in\mathbb{R}} (f(x) \odot h(x)).$$

KLASA II

Posmatramo poluprsten $([a,b], \oplus, \odot)$ generisan aditivnim generatorom pseudo-sabiranja $g : [a,b] \to [0,\infty]$. Pseudo-integral funkcije $f : \mathbb{R} \to [a,b]$ je dat sa

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} g\,(f(x))\,dx\right),$$

gde je $dx = d(g \circ m)$. Kompozicija $g \circ m$ je Lebesgue-ova mera i integral sa desne strane jednakosti je Lebesgue-ov integral. U ovom slučaju, pseudo-integral se zove još i g-integral i u osnovi je g-računa (videti [57, 59, 60, 61]).

KLASA III

a) Posmatramo poluprsten $([-\infty, +\infty], \max, \min)$. Sada, pseudo-sabiranje daje sup-dekompozabilnu meru i funkciju $h : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ tako da je $m(A) = \sup_{x \in A} h(x)$. Pseudo-integral funkcije $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ u ovom slučaju je

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\min(f(x), h(x))\right).$$

b) Ako posmatramo poluprsten $([-\infty, +\infty], \min, \max)$, pseudo-sabiranje daje inf-dekompozabilnu meru i funkciju $h : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ tako da $m(A) = \inf_{x \in A} h(x)$ i pseudo-integral funkcije $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ je definisan sa

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left(\max(f(x), h(x))\right).$$

2.2.2 Granične vrednosti g-integrala

U ovoj sekciji su dati rezultati iz [51] koji povezuju pseudo-integrale bazirane na različitim klasama poluprstena. Prvo, nephodno je ispitati ponašanje sup-dekompozabilne mere. Zaključci iz [51] se analogno prenose na inf-dekompozabilnu meru.

Neka je m $\sigma - \oplus$-dekompozabilna mera gde je $\oplus$ pseudo-sbiranje zadato generatorskom funkcijom g. Tada, kompozicija $g \circ m$ je klasična σ-aditivna mera. Sada, ako je g_n generator za $\oplus_n$ i $\oplus_n \to \sup$ kada $n \to +\infty$, postavlja se pitanje da li i odgovarajuća $\sigma - \oplus_n$-dekompozabila mera teži ka sup-dekompozabilnoj meri. Jasno $g_n \circ m_n = \mu_n$, gde je μ_n klasična σ-aditivna mera. Pretpostavimo da je μ_n apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesge-ovu meru μ. Sa h_n je označen Radon-Nikodym-ev izvod, tj

$$h_n = \frac{dg_n \circ m_n}{d\mu}.$$

Sada, $\sigma - \oplus_n$-dekompozabilnu meru je moguće izraziti preko Lebesgue-vog integrala i to na sledeći način:

$$m_n(A) = g_n^{-1}\left(\int_A h_n d\mu\right).$$

Sledeći primer iz [51] pokazuje da je rezultujuću sup-dekompozabilnu meru moguće svesti na skupovnu funkciju sa dvoelementnim kodomenom.

Primer 2.3 Neka je $\oplus$ pseudo-sabiranje generisano striktno rastućim generatorom g i neka je $\oplus_\lambda$ pseudo-sabiranje generisano generatorom g^λ, za $\lambda \in (0, +\infty)$. Neka je data familija pseudo-aditivnih mera $(m_\lambda)_{\lambda\in(0,+\infty)}$ tako da za svako $\lambda \in (0, +\infty)$ važi $g^\lambda \circ m_\lambda = g \circ m$ gde je m $\oplus$- dekompozabilna mera. Tada

$$m_\lambda = g^{-1}\left((g \circ m)^{1\setminus\lambda}\right)$$

uz uslov $g^{-1}(1) = \mathbf{1}$ je $\oplus_\lambda$-dekompozabilna mera i za $\lambda \to +\infty$ dobijamo $m_\lambda \to M$ gde je M sledeća sup-dekompozabilna mera

$$m(A) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{za } m(A) = 0, \\ \mathbf{1} & \text{za } m(A) > 0. \end{cases}$$

Teorema 2.6 *Neka je m sup-dekompozabilna mera na $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$, gde je $m(A) = ess\ \sup_\mu(\varphi(x) : x \in A)$ i $\varphi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ neprekidna funkcija gustine. Tada, za neki rastući generator g postoji familija $(m_\lambda)_{\lambda\in(0,+\infty)}$ $\oplus_\lambda$-dekompozabilnih mera na $([0, +\infty), \mathcal{B})$, gde je $\oplus_\lambda$ generisano funkcijom g^λ, $\lambda \in (0, +\infty)$, i*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} m_\lambda = m.$$

Dokaz prethodne teoreme kao i naredne koja se odnosi na granične procese kod pseudo-integrala se može naći u [51]

Teorema 2.7 *Neka je $([0, +\infty], \sup, \odot)$ poluprsten i $\odot$ pseudo-množenje generisano generatorskom funkcijom g. Neka m ispunjava uslove teoreme 2.6. Tada, postoji familija $(m_\lambda)_{\lambda\in(0,+\infty)}$ $\oplus_\lambda$-dekompozabilnih mera gde je $\oplus_\lambda$ generisano funkcijom g^λ, tako da za svaku neprekidnu funkciju $f : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ važi*

$$\int^{\sup} f \odot dm = \lim_{\lambda\to+\infty} \int^{\oplus_\lambda} f \odot dm_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty} (g^\lambda)^{-1}(\int g^\lambda \circ f dx).$$

2.3 Mere i integrali bazirani na uopštenim realnih poluprstena

Ova sekcija se bavi merama i odgovarajućim integralima baziranim na specijalnim uopštenjima realnih poluprstena koja su data u glavi 1.5. Prvo, izneti su rezultati vezni za uslovno distributivne poluprstene, tj. pluprstene na jediničnom intervalu kod kojih je oslabljen uslov distributivnosti. Data je hibridna S-mera i odgovarajući (S, U)-intergal. Ova problematika je razmatrana u [31, 32, 72]. Dalje, drugi deo ove sekcije daje orginalve rezultate vezane za mere i integrale bazirane na realnom poluprstenu kod kojeg su oslabljeni uslovi za pseudo-operacije ([76, 78, 73]). U osnovi ovih poluprstena su specijalne uopštene pseudo-operacije obradjene u glavi 1.5.2. U poslednjoj podsekciji je pretstavljeno uopštenje Henstock-Kurzweil-ovog integrala, takodje zasnovano na proširenju realnih poluprstena preko uopštenih pseudo-operacija ([90]).

2.3.1 S-mera i (S, U)-integral

U ovom delu su date definicije S-postojane S-mere i odgovarajućeg integrala baziranod na uslovno distributivnom poluprstenu $([0,1], S, U)$. Kao što je već rečeno, ova problematika je obradjena u [31, 32].

Mera neophodna za konstrukciju (S, U)-integrala, gde je S t-konorma, a U t-norma ili uninorma jeste S-dekompozabilna mera u smislu definicije 2.4 ($\oplus = S$) sa jediničnim intervalom kao kodomenom, za koju se još dodatno traži i neprekidnost od dole. Ovaj specijalni slučaj $\oplus$-dekompozabilne mere se naziva S-mera.

Napomena 2.3 (i) Ako je S levo-neprekidna t-konorma, tada se S-mera poklapa sa σ-S-dekompozabilnom merom u smislu definicije 2.5.

(ii) Ako je skup X konačan ili najviše prebrojiv i ako je S levo neprekidna t-konorma, tada je svaka S-mera $m : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ jedinstveno odredjena vrednostima $m(\{x\})$, $x \in X$.

S- mera može da se ponaša i kao mera verovatnoće i kao mera mogućnosti i kao kombinacija mere verovatnoće i mere mogućnosti. Ta "kombinovana" S-mera se naziva hibridna verovatnosno-mogućnosna mešavina i bazirana je na teoremi 1.16. Opisani koncept hibridnih mešavina nalazi primenu u, izmedju ostalog, teoriji odlučivanja pri neodredjenosti (videti [15]). Sledi primer hibridne mere iz [15].

Primer 2.4 Neka je $([0,1], S, U)$ uslovno distributivni poluprstena iz primera 1.4, tj. $S = (\langle a, 1, S_L \rangle)$, $U = (\langle 0, a, T_1 \rangle, \langle a, 1, T_P \rangle)$, gde je T_1 proizvoljna neprekidna t-norma i $a \in [0,1]$. Tada, S-mera jeste mera mogućnosti ako se primenjuje na vrednosti manje ili jednake parametru a, a za vrednosti veće od parametra a posmatrana S-mera jeste mera verovatnoće. Važi i sledeće:

$$m(A \cup B) = \begin{cases} m(A) + m(B) - a & \text{za } m(A) > a, m(B) > a, \\ \max(m(A), m(B)) & \text{inače,} \end{cases}$$

Specijalno, za $a = 0$ posmatrana S-mera je u potpunosti mera verovatnoće, a za $a = 1$ mera mogućnosti.

Veza izmedju klasične mere i S mere je data narednom teoremom iz [31].

Teorema 2.8 *Neka je S neprekidna Arhimedova t-konorma, $s : [0,1] \to [0,\infty]$ aditivni generator za S, Σ σ-algebra podskupova osnovnog skupa X i neka je $m : \Sigma \to [0,\infty]$ klasična mera. Tada, funkcija $s^{(-1)} \circ m : \Sigma \to [0,\infty]$ je S-mera.*

Sledeća definicija iz [29, 32] daje uopštenje σ-konačnih mera za S-mere.

Definicija 2.13 *Neka je S t-konorma, Σ σ-algebra podskupova osnovnog skupa X i neka je $m : \Sigma \to [0,1]$ S-mera.*

(i) Za skup $A \in \Sigma$ kažemo da je S-m-postojan ako za svako $B \in \Sigma$ takvo da je $B \subseteq A$ važi:

$$S(u, v) < 1 \text{ za svako } u < m(B) \text{ i } v < m(A \backslash B).$$

(ii) Particija skupa X, $\mathbf{C} = \{C_k \mid C_k \in \Sigma, k \in K\}$, gde je K konačan ili najviše prebrojiv skup indeksa, se naziva S-m-particija ako za svako $k \in K$ skup C_k je S-m-postojan.

(iii) S-mera je S-postojana ako postoji S-m-postojana particija $\mathbf{C}$ skupa X.

Neka je sa $\mathcal{M}$ obeležen skup svih Σ-merljivih funkcija koje slikaju X u $[0,1]$ i sa $\mathcal{S}$ skup svih jednostavnih funkcija kodomena $[0,1]$. Neka je φ proizvoljna jednostavna funkcija tako da je $\text{Range}(\varphi) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varphi}\}$, $a_i \neq a_j$ za svako $i \neq j$, i neka je $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$. Tada jednostavna funkcija φ ima sledeću kanoničku reprezentaciju:

$$\varphi = \underset{i=1}{\overset{n_\varphi}{\mathsf{S}}} U(a_i, \chi_{A_i}), \tag{27}$$

gde je χ_A pseudo-karakteristična funkcija skupa A u odnosu na operacije uslovno distributivnog poluprstena $([0,1], S, U)$.

Sledi definicija (S,U)-integrala iz [29, 31].

Definicija 2.14 *Neka je $m : \Sigma \to [0,1]$ S-postojana S-mera.*

(i) Za datu S-m-postojanu particiju $\mathbf{C} = \{C_k \mid k \in K\}$, (S,U)-integral merljive jednostavne funkcije $\varphi : X \to [0,1]$ je

$$\int_X^{(S,U)} \varphi \, dm = \underset{k \in K}{\mathsf{S}} \Big(\underset{i=1}{\overset{n_\varphi}{\mathsf{S}}} U(a_i, m(A_i \cap C_k)) \Big).$$

(ii) (S,U)-integral merljive funkcije $f : X \to [0,1]$ je

$$\int_X^{(S,U)} f \, dm = \lim_{n \to \infty} \int_X^{(S,U)} \varphi_n \, dm,$$

gde je (φ_n) *niz jednostavnih funkcije takav da* $\varphi_n \nearrow f$.

(iii) (S,U)*-integral merljive funkcije* $f : X \to [0,1]$ *nad skupom* $A \in \Sigma$ *je*

$$\int_A^{(S,U)} f\,dm = \int_X^{(S,U)} U(\chi_A, f)\,dm.$$

U radovima [29, 32] su ispitane osobine ovako definisanog integrala. Pokazano je da (S,U)-integral ne zavisi od izbora niza jednostavnih funkcija iz definicije 2.14. Zatim, pokazana je monotonost tako definisanog integrala i data je njegova reprezentacija. Dokazane su i neke klasične teoreme konvergencije, kao što su Fatou-ova lemma i Beppo-Levi-eva teorema

Tvrdjenje 2.1 (S,U)-integral merljive funkcije f za t-konormu S i t-normu U iz teoreme 1.16 i odgovarajuću S-meru m ima sledeći oblik:

a) za $f(x) \geq a$ i $m(A) \geq a$

$$\int_A^{(S,U)} f\,dm = s^{*-1}\left(\int_A s^*\left(f(x)\right)\,dx\right),$$

(ii) za $f(x) \leq a$ i $m(A) \leq a$

$$\int_A^{(S,U)} f\,dm = \sup_{b\in[0,1]}\left(T\left(b, m(A)\right)\right),$$

c) u svim ostalim slučajevima

$$\int_A^{(S,U)} f\,dm = \sup_{b\in[0,1]}\left(\min\left(b, m(A_b)\right)\right),$$

gde je $A_b = \{x \in A \mid f(x) \geq b\}$.

U daljem radu, neophodna je mera definisana preko (S,U)-integrala. Definicija i osobine te mere su date narednom teoremom iz [32].

Teorema 2.9 *(i) Za svako* $f \in \mathcal{M}$ *funkcije* $m_f : \Sigma \to [0,1]$ *definisana sa*

$$m_f(A) = \int_A^{(S,U)} f\,dm,$$

je S*-postojana* S*-mera.*

(ii) Za svako $f, g \in \mathcal{M}$ *važi*

$$\int_X^{(S,U)} f\,dm_g = \int_X^{(S,U)} g\,dm_f = \int_X^{(S,U)} U(f,g)\,dm.$$

Za odredjen izbora t-norme i uninorme (ili t-konorme), (S, U)-integral se poklapa sa nekim od već poznatih integrala što su Lebesgue-ov i Sugeno-ov integral. Više o ovoj temi se može naći u [29, 31, 32].

Pri konstrukciji (S, U)-integrala dozvoljeno je uninormu, odnosno, t-normu zameniti nekom binarnom operacijom $\diamond$ za koju se traži da bude levo neprekidna, neopadajuća po svakoj komponenti, uslovno distributivna u odnosu na S i da ima levi neutralni element $e \in (0, 1]$ i anihilator 0 (videti [31, 32]).

2.3.2 Pseudo-integral bazirani na nekomutativnom i neasocijativnom realnom poluprstenu

U ovoj sekciji posmatramo nekomutativan i neasocijativan realni poluprsten $([a, b], \oplus, \odot)$ gde $\oplus$ i $\odot$ pripadaju specijalnoj klasi generalizovanih pseudo-operacija iz poglavlja 1.5.2 i date su jednakošću (26), tj. za ε i γ prloizvoljne ali fiksne pozitivne realne brojeve i k pozitivnu striktno monotonu neprekidnu funkciju definisanu na $\mathbb{R}$ ili na $[0, +\infty)$, $\oplus$ i $\odot$ su

$$x \oplus y = k^{-1}(\varepsilon k(x) + k(y)) \quad \text{i} \quad x \odot y = k^{-1}(k(x)^{\gamma} k(y)) \tag{28}$$

Rezultati izloženi u ovoj sekciji spadaju u orginalni deo ovog rada i mogu se naći u [73].

Napomena 2.4 (i) Zbog monotonosti generatora k, $\oplus$ je striktno rastuća funkcija, tj za $x < y$ važi $x \oplus z < y \oplus z$ i $z \oplus x < z \oplus y$, $\quad x, y, z \in \mathbb{R}$ ili $x, y, z \in [0, \infty)$.

(ii) Ova klasa generalizovanih pseudo-operacija za $\varepsilon = 1$ i $\gamma = 1$ se poklapa sa operacijama g-računa ([55, 56, 57]).

(iii) Neutralni element sa leve strane za pseudo-sabiranje dato jednačinom (28) je $k^{-1}(0)$. Levi inverzni element je $(-x_l) = k^{-1}(-\frac{1}{\varepsilon}k(x))$.

Kako generalizovane pseudo-operacije ne moraju biti komutativne i asocijativne, za dalji rad je neophodno definisati pseudo-sumu n elemenata kao i pseudo-sumu pseudo-proizvoda.

Definicija 2.15 *Neka su $\oplus$ i $\odot$ operacije date sa (28) i neka $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(\alpha_i \in [0, +\infty)$ $)i \in \{1, 2, \ldots n\}$. Tada*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i = (\ldots((\alpha_1 \oplus \alpha_2) \oplus \alpha_3) \oplus \ldots) \oplus \alpha_n = k^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{n-i} k(\alpha_i)\right).$$

Pseudo-suma pseudo-proizvoda je:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} (\alpha_i \odot \beta_i) = k^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{n-i} k(\alpha_i)^{\gamma} \cdot k(\beta_i)\right).$$

Sada je moguće definisati uopštenje klasične mere koje je zasnovano na prethodno datim operacijama.

Neka je A neprazan podskup skupa realnih brojeva i neka je, za neko $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \{A_i\}_{i=1}^n$ familija medjusobno disjunktnih skupova A_i takvih da $\cup_{i=1}^n A_i = [a,b]$, tj. P_n je n-particija intervala $[a,b]$. Kako je $\oplus$ operacija koja ne mora biti komutativna, particije $P_n = \{A_i\}_{i=1}^n$ i $P'_m = \{B_j\}_{j=1}^m$ intervala $[a,b]$ smatramo jednakim ako i samo ako $n = m$ i $A_s = B_s$ za svako $s \in \{1,2,\ldots,n\}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ i svaku n-particiju P_n, pseudo-mera je definisana na sledeći način:

Definicija 2.16 *Neka je P_n n-particija intervala $[a,b]$, ν klasična mera definisana na $\mathcal{P}([a,b])$ i k generator operacije $\oplus$. Preslikavanje $\mu_{P_n} : P_n \to [0,\infty)$ dato sa*

$$\mu_{P_n}(A_i) = k^{-1}\left(\frac{\nu(A_i)}{\varepsilon^{n-i}}\right). \tag{29}$$

se naziva $\oplus$-mera za datu n-particiju P_n.

Napomena 2.5 Treba primetiti da je na prethodno definisani način konstruisana familija $\oplus$-mera, tj. svakoj familiji particija posmatranog skupa A odgovara familija $\oplus$-mera.

Teorema 2.10 *Neka je μ_{P_n} $\oplus$-mera iz prethodne definicije. Tada važi*

(i) Neka $n \in \mathbb{N}$ i neka je P_n proizvoljnja n-particija koja sadrži prazan skup, tada $\mu_{P_n}(\emptyset) = k^{-1}(0)$.

(ii) Neka je P_1 1-particija posmatranog skupa A, tada

$$\mu_{P_1}(A) = k^{-1}(\nu(A)).$$

(iii) Date su n-particija $P_n = \{A_i\}_{i=1}^n$, i $(n-r+j)$-particija $P_{n-r+j} = \{B_s\}_{s=1}^{n-r+j}$, $1 \le j \le r \le n$, tako da važi $B_s = A_s$ za $s = 1,2,\cdots,j-1$, $B_j = \cup_{i=j}^r A_i$ i $B_s = A_{s+r-j}$ za $s = j+1,\cdots,n-r+j$. Tada

$$\mu_{P_{n-r+j}}(\cup_{i=j}^r A_i) = \bigoplus_{i=j}^{r} \mu_{P_n}(A_i).$$

Dokaz.

(i) Sledi direktno iz osobina klasične mere.

(ii) Jedina mogućnost za 1-particiju skupa A je $P_1 = \{A\}$, pa

$$\mu_{P_1}(A) = k^{-1}\left(\frac{\nu(A)}{\varepsilon^0}\right) = k^{-1}(\nu(A)).$$

(iii) Zbog aditivnosti klasične mere za n-particiju $P_n = \{A_i\}_{i=1}^n$ imamo:

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i=j}^{r} \mu_{P_n}(A_i) &= k^{-1}\left(\sum_{i=j}^{r} \varepsilon^{r-i} k\left(\mu_{P_n}(A_i)\right)\right)\\ &= k^{-1}\left(\sum_{i=j}^{r} \varepsilon^{r-i}\frac{\nu(A_i)}{\varepsilon^{n-i}}\right)\\ &= k^{-1}\left(\frac{\nu(\cup_{i=j}^{r} A_i)}{\varepsilon^{n-r}}\right).\end{aligned}$$

Kako je $P_{n-r+j} = \{B_s\}_{s=1}^{n-r+j}$ $(n-r+j)$-particija dobijena iz particija P_n na sledeći način

- $B_s = A_s$ za $s = 1, 2, \cdots, j-1$,
- $B_j = \cup_{i=j}^{r} A_i$,
- $B_s = A_{s+r-j}$ za $s = j+1, \cdots, n-r+j$,

važi

$$\mu_{P_{n-r+j}}\left(\cup_{i=j}^{r} A_i\right)$$

$$= \mu_{P_{n-r+j}}(B_j) = k^{-1}\left(\frac{\nu(B_j)}{\varepsilon^{(n-r+j)-j}}\right) = k^{-1}\left(\frac{\nu(\cup_{i=j}^{r} A_i)}{\varepsilon^{n-r}}\right). \square$$

Posledica 2.1 *Neka je μ_{P_n} $\oplus$-mera iz prethodne definicije. Tada*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mu_{P_n}(A_i) = k^{-1}(\nu([a,b])).$$

Dokaz. Sledi direktno iz teoreme 2.10. $\square$

Specijalna podfamilija ove familije $\oplus$-mera korišćena je za konstrukciju $\oplus$-integrala ([73]). Konstrukcija ovog tipa integrala je analogna konstrukciji Riemann-ovog integrala.

Neka je $\mathbf{C}$ familija poluzatvorenih podintervala skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada $\mathbf{C}$ je poluprsten skupova, tj. $\emptyset \in \mathbf{C}$, $A, B \in \mathbf{C}$ implicira $A \cap B \in \mathbf{C}$, i za svako $A, B \in \mathbf{C}$ postoje skupovi $C_1, ..., C_n$ iz $\mathbf{C}$ takvi da $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$, i $A \setminus B = \cup_{k=1}^{n} C_k$.

Neka je $(a, b] \subset \mathbb{R}$ proizvoljan fiksan poluzatvoren interval i neka je P_n n-particija intervala $(a, b]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$. Neka je $\mathbf{C}_{(a,b]} = \mathbf{C} \cap \{(a, b]\}$. Sa $\mathcal{C}_{(a,b]}^{P_n}$ je označena podfamilija familije $\mathcal{C}_{(a,b]}$ koja sadrži intervale $(x_i, x_{i+1}]$ iz particije P_n intervala $(a, b]$.

Ako je $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ n-particija P_n intervala $[a, b]$, $(n+1)$-particija $P_n{}'$ se dobija kada se zadrže sve tačke prethodne particije, doda još jedna i izvrši prenumeracija svih tačaka u rastućem redosledu. Posle s ponavljanja prethodno opisane procedure, dobije se $(n+s)$-particija $P_n{}^{(s)}$. Familija mera neophodnih za konstrukciju $\oplus$-integrala opisana je narednim primerom.

Primer 2.5 Preslikavanje $\mu_{P_n} : \mathbf{C}^{P_n}_{(a,b]} \to [0,\infty)$ dato sa

$$\mu_{P_n}((x_i, x_{i+1}]) = k^{-1}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon^{n-i-1}}\right), \tag{30}$$

gde $i \in \{0,1,\dots n-1\}$, je $\oplus$-mera u smislu definicije 2.16 gde je za ν uzeta Lebesge-ova mera.

Dodavanjem nove tačke $y \in (a,b]$ particiji P_n takvo da $x_i < y \le x_{i+1}$ formirana je nova $(n+1)$-particija $P_n{}'$ i za odgovarajuća $\oplus$-mera $\mu_{P_n{}'} : \mathbf{C}^{P_n{}'}_{(a,b]} \to [0,\infty)$ važi

$$\mu_{P_n{}'}((x_i, y]) = k^{-1}\left(\frac{y-x_i}{\varepsilon^{n-i}}\right) \quad \text{i} \quad \mu_{P_n{}'}((y, x_{i+1}]) = k^{-1}\left(\frac{x_{i+1}-y}{\varepsilon^{n-i-1}}\right). \tag{31}$$

Napomena 2.6 Jednačina (31) transformiše $\oplus$-meru μ_{P_n} u $\oplus$-meru $\mu_{P_n{}'}$ za $(n+1)$-particiju $P_n{}'$ koja se razlikuje od početne n-particije po tački y, na takav način da sledeće važi

$$\mu_{P_n}((x_i, x_{i+1}]) = \mu_{P_n{}'}((x_i, y]) \oplus \mu_{P_n{}'}((y, x_{i+1}]) \tag{32}$$

što je u saglasnosti sa tvrdjenjem teoreme 2.10. Treba naglasiti da u odnosu na μ_{P_n} vrednosti $\mu_{P_n{}'}((x_j, x_{j+1}])$ za $j > i$ su ne promenjene, $\mu_{P_n{}'}((x_i, y])$ i $\mu_{P_n{}'}((y, x_{i+1}])$ su date sa (29) i za $j < i$ imamo

$$\mu_{P_n{}'}((x_j, x_{j+1}]) = k^{-1}(k(\mu_{P_n}((x_j, x_{j+1}])/\varepsilon).$$

Za svaki interval $(a_1, b_1] \subseteq (a,b]$ može se odrediti vrednost $\mu_{P_n{}''}((a_1, b_1])$ pomoću μ_{P_n} i novoformirane najviše $(n+2)$-particije.

Primer 2.6 Data je funkcija $k : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $k(x) = x^m$, $m > 0$. Operacije $x \oplus y = \sqrt[m]{\varepsilon x^m + y^m}$ i $x \odot y = x^\gamma y$, gde $x, y \in [0,+\infty)$ i $\varepsilon, \gamma > 0$, su generalizovano pseudo-sabiranje i pseudo-množenje. Neka je p 1-particija intervala $(0,3]$ $0 = x_0 < 3 = x_1$ i p' 2-particija intervala $[0,3]$ $0 = x_0' < 1 = x_1' < 3 = x_2'$.

Po definiciji 2.16 za $\mu_p : \mathcal{C}^p_{(0,3]} \to [0,\infty)$ i $\mu_{p'} : \mathcal{C}^{p'}_{(0,3]} \to [0,\infty)$ imamo

$$\mu_p((0,3]) = \sqrt[m]{3}, \quad \mu_{p'}((0,1]) = \sqrt[m]{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{i} \quad \mu_{p'}((1,3]) = \sqrt[m]{2}.$$

Sada,

$$\mu_{p'}((0,1]) \oplus \mu_{p'}((1,3]) = \mu_p((0,3]).$$

Ako je particiji p' dodata još jedna tačka $y = 2$, dobija se particija p'', i po (29) za $\mu_{p''} : \mathcal{C}^{p''}_{(0,3]} \to [0,\infty)$ imamo

$$\mu_{p''}((1,2]) = \sqrt[m]{\frac{1}{\varepsilon}}, \qquad \mu_{p''}((2,3]) = 1,$$

pa jednakost (31) važi, tj. $\mu_{p''}((1,2]) \oplus \mu_{p''}((2,3]) = \mu_{p'}((1,3])$. Isto tako važi i

$$\mu_{p''}((0,1]) \oplus \mu_{p''}((1,2]) \oplus \mu_{p''}((2,3]) = \mu_p((0,3]) = \sqrt[m]{3}.$$

Za konstrukciju $\oplus$-integrala potreban je niz particija intervala $(a,b]$, pa, samim tim, i niz odgovarajućih $\oplus$-mera. Postupkom opisanim u (29) $\oplus$-mera μ_{P_n} data za n-particiju P_n definiše $\oplus$-meru $\mu_{P_n'}$ za $(n+1)$-particiju P_n'. Ponavljanjem tog postupka s-puta, dobijamo $\oplus$-meru $\mu_{P_n^{(s)}}$ za $(n+s)$-particiju $P_n^{(s)}$.

Definicija 2.17 *Neka je $f:[a,b]\to[0,\infty)$ neprekidna funkcija. Odgovarajući $\oplus$-integral funkcije f je definisan na sledći način:*

$$\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f\,d\mu_{P_n} = \lim_{\substack{\mu_{P_n^{(s)}}((x_i,x_{i+1}])\to k^{-1}(0)\\ (s\to\infty)}} \left(\bigoplus_{i=0}^{n+s-1}\left(f(x_{i+1})\odot\mu_{P_n^{(s)}}((x_i,x_{i+1}])\right)\right)$$

(ako granična vrednost postoji).

Naredna teorema daje nezavisnost $\oplus$-integrala nad intervalom $(a,b]$ od particija tog intervala.

Teorema 2.11 *Za svaku particiju P intervala $[a,b]$, $\oplus$-integral neprekidne funkcije $f:[a,b]\to[0,\infty)$ u odnosu na $\oplus$-meru μ_P je dat na sledeći način:*

$$\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f\,d\mu_P = k^{-1}\left(\int_a^b (k(f(t)))^\gamma\,dt\right). \tag{33}$$

Dokaz. Neka je $f:[a,b]\to[0,\infty)$ neprekidna funkcija i neka je P prizvoljna n-particija intervala $[a,b]$ za $n\in\mathbb{N}$. Tada

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f\,d\mu_P\\
&= \lim_{\mu_{P^{(s)}}((x_i,x_{i+1}])\to k^{-1}(0)} \left(\bigoplus_{i=0}^{n+s-1}(f(x_{i+1})\odot\mu_{P^{(s)}}((x_i,x_{i+1}]))\right)\\
&= \lim_{s\to\infty}\left(\bigoplus_{i=0}^{n+s-1}(f(x_{i+1})\odot\mu_{P^{(s)}}((x_i,x_{i+1}]))\right)\\
&= \lim_{s\to\infty} k^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n+s-1}\varepsilon^{n+s-i-1}(k(f(x_{i+1})))^\gamma\, k(\mu_{P^{(s)}}((x_i,x_{i+1}]))\right)\\
&= k^{-1}\left(\lim_{s\to\infty}\sum_{i=0}^{n+s-1}(k(f(x_{i+1})))^\gamma(x_{i+1}-x_i)\right)\\
&= k^{-1}\left(\int_a^b (k(f(t)))^\gamma\,dt\right)
\end{aligned}$$

□

Kako integral na desnoj strani jednakosti (33) ne zavisi od particija intervala $[a,b]$, desna strana jednakosti (33) je označena sa $\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f$.

Napomena 2.7 Za $\gamma=1$, $\oplus$-integral se poklapa sa g-integralom.

Naredna teorema daje osnovne osobine $\oplus$-integrala. Prvo, potrebno je uvesti transformaciju $[\cdot]_k$ na sledeći način:

$$[f]_k(x) = k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(f(x))\right),$$

gde je f neprekidna funkcije koja slika $[a,b]$ u $[0,\infty)$. Ako se ova transformacije primeni na konstantu α iz $[0,\infty)$:

$$[\alpha]_k = k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(\alpha)\right).$$

Teorema 2.12 *Neka su $f,g : [a,b] \to [0,+\infty)$ neprekidne funkcije i neka je α konstanta iz $[0,\infty)$. Tada*

(i) $\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[f]_k \oplus \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[g]_k = \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[f\oplus g]_k;$

(ii) $\alpha \odot \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f = \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} ([\alpha]_k \odot f).$

Dokaz.

(i) Iz definicije pseudo-operacije $\oplus$ i teoreme 2.11 sledi:

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[f]_k \oplus \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[g]_k &= k^{-1}\left(\int_a^b k\,(f(t)\oplus g(t))\;dt\right)\\
&= k^{-1}\left(\int_a^b \left(k\left(k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(f(t)\oplus g(t))\right)\right)\right)^{\gamma}\;dt\right)\\
&= \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(f\oplus g)\right)\\
&= \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[f\oplus g]_k.
\end{aligned}$$

(ii) Iz definicije pseudo-operacije $\odot$ i teoreme 2.11 sledi:

$$\begin{aligned}
\alpha \odot \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f &= k^{-1}\left(\int_a^b (k(\alpha)\cdot k(f(t)))^{\gamma}\;dt\right)\\
&= k^{-1}\left(\int_a^b \left(k\left(k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(\alpha)\right)\odot f(t)\right)\right)^{\gamma}\;dt\right)\\
&= k^{-1}\left(\int_a^b (k([\alpha]_k\odot f(t)))^{\gamma}\;dt\right)\\
&= \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}([\alpha]_k\odot f).
\end{aligned}$$

□

Moguće je uvesti i uopštenje g-izvoda, koji je definisan u [56, 57].

Definicija 2.18 *Neka je $f \in C^1[a,b]$. Uopšteni izvod funkcije f je*

$$(f)^{(\prime,\gamma)} = k^{-1}\left(\left(\frac{d}{dx}k(f(x))\right)^{1/\gamma}\right)$$

ako postoji.

Uopšteni izvod ima sledeće osobine:

(i) $k\left(\int_{[a,x]}^{(\oplus,\odot)} f^{(\prime,\gamma)}\right) + k(f(a)) = k(f(x))$ i $\left(\int_{[a,x]}^{(\oplus,\odot)} f\right)^{(\prime,\gamma)} = f(x)$.

(ii) $(\alpha \odot f)^{(\prime,\gamma)} = [\alpha]_k \odot f^{(\prime,\gamma)}$.

Primer 2.7 Neka su k, $\oplus$ i $\odot$ generatorska funkcija i operacije iz primera 2.6 i neka su $f, g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ neprekidne funkcije. Pseudo-integral funkcije f u smislu definicije 2.17 i teoreme 2.11 je

$$\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f = \sqrt[m]{\int_a^b f^{m\gamma}(t)\, dt}.$$

Za posmatrani generator $k(x) = x^m$ ranije pominjane transformacije su oblika $[f]_k = \sqrt[\gamma]{f}$ i $[\alpha]_k = \sqrt[\gamma]{\alpha}$, gde je $\alpha > 0$. Sada važi

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} \sqrt[\gamma]{f} \oplus \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} \sqrt[\gamma]{g} &= \sqrt[m]{\gamma \int_a^b f^m(t)dt + \int_a^b g^m(t)dt} \\ &= \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} \sqrt[\gamma]{f \oplus g}\end{aligned}$$

i

$$\alpha \odot \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f = \sqrt[m]{\int_a^b \alpha^{m\gamma} f^{m\gamma}} = \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} \alpha f = \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} \left(\sqrt[\gamma]{\alpha} \odot f\right).$$

2.3.3 Pseudo Henstock-Kurzweil-ov integral

U ovom poglavlju su pretstavljeni orginalni rezultati iz [90] vezani za uopštenje Henstock-Kurzweil-ov integrala bazirano na specijalnoj klasi uopštenih pseudo-operacija iz sekcije 1.6.2 datih jednakošću (26).

Neka je $[a, b]$ podinterval realne ose i neka je δ pozitivna funkcija definisana na $[a, b]$.Posmatramo particije intervala $[a, b]$ oblika $P_n = \{(A_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ gde su A_i medjusobno disjunktnih intervala i $\xi_i \in A_i$ tako da $[a,b] = \cup_{i=1}^n A_i$. Particija P_n je δ-fina ako za svako $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ važi: $A_i \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$. Cousin-ova lema (videti [6]) garantuje postojanje δ-fine particije za svaku pozitivnu funkciju δ definisanu na $[a, b]$. Neka je μ Lebesgue-ova mera.

Sledi definicija Henstock-Kurzweil-ovog integrala funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ iz [6].

Definicija 2.19 *Funkcija f je Henstock-Kurzweil integrabilna na $[a, b]$ ako postoji realan broj I koji ispunjava sledeće uslove: za svako $\omega > 0$ postoji pozitivna funkcija δ definisana na $[a, b]$, tako da*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(A_i) - I\right| < \omega,$$

za svaku δ-finu particiju P_n intervala $[a, b]$.

Broj I iz prethodne definicije je Henstock-Kurzweil-ov integral funkcije f nad intervalom $[a,b]$ i, zbog Cousin-ove leme, je jedinstveno odredjen. U daljem radu, Henstock-Kurzweil-ov integral funkcije f nad $[a,b]$ je označen sa $\int_a^b f$. Za funkciju f se kaže da je Henstock-Kurzweil integrabilna na skupu $E \subseteq [a,b]$ ako $f\chi_E$ je Henstock-Kurzweil integrabilna na $[a,b]$. Više o ovom tipu integrala se može naći u [6, 21].

Za konstrukciju pseudo Henstock-Kurzweil integrala neophodna nam je pseudo-operacija koja odgovara klasičnom oduzimanju. U [4] operacija $\ominus$, tj. pseudo-oduzimanje, je definisana na sledeći način:

$$x \ominus y = \sup\{z \mid z \oplus y = x\}.$$

Nama će biti potrebna ova operacija u odnosu na pseudo-sabiranje dato jednačinom (28). Kako posmatrano pseudo-sabiranje nije komutativna operacija (osim za $\varepsilon = 1$), razlikujemo dva tipa pseudo-oduzimanja:

$$x \ominus_l y = \sup\{z \mid z \oplus y = x\} \text{ i } x \ominus_d y = \sup\{z \mid y \oplus z = x\}.$$

U daljem radu koristi se levo pseudo-oduzimanje i oznaku $\ominus = \ominus_l$.

Teorema 2.13 *Neka je $\oplus$ pseudo-sabiranje dato jenakošću (28). Tada, pseudo-oduzimanje ima sledeći oblik:*

$$x \ominus y = k^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}k(x) - \frac{1}{\varepsilon}k(y)\right) \tag{34}$$

Napomena 2.8 Levi inverzni element za $\oplus$ se može dobiti i na sledeći način:

$$(-x_l) = k^{-1}(0) \ominus x = k^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}k(x)\right).$$

Sada, uz pomoć pseudo-oduzimanja (34), moguće je definisati mertiku na $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = \max\{k(x \ominus y), k(y \ominus x)\},$$

gde $x, y \in \mathbb{R}$ i k je generator za $\oplus$. Lako se da proveriti da d jeste metrika.

Uz pomoć pseudo-operacija iz sekcije 1.5.2, prethodno opisane metrike i $\oplus$-mere date definicijom 2.16, za ν Lebesgue-ovu meru i uz notaciju

$$\bigoplus_{i=1}^{n} f(\xi_i) \odot \mu_{P_n}(A_i) = \bigoplus_{P_n} f,$$

moguće je definisati pseudo Henstock-Kurzweil-ov integral neke funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$:

Definicija 2.20 *Funkcija f je pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna na $[a,b]$ ako postoji realni broj PI koji ispunjava sledeće uslove: za svako $\omega > 0$ postoji pozitivna funkcija δ definisana na $[a,b]$, tako da*

$$d\left(\bigoplus_{P_n} f, PI\right) < \omega,$$

za svaku δ-finu particiju P_n intervala $[a,b]$.

Teorema 2.14 *Broj PI iz prethodne definicije je jedinstveno odredjen.*

Dokaz. Pretpostavimo da za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ postoji broj PJ koji ispunjava uslove prethodne definiciji i $PI \neq PJ$. Neka je $\omega = d(PI, PJ)\backslash 2$. Tada, postoje dve pozitivne funkcije δ_1 i δ_2 definisane na intervalu $[a,b]$ tako da

- $d(\bigoplus_{P_{n_1}} f, PI) < \omega$ za svaku δ_1-finu particiju intervala $[a,b]$,
- $d\left(\bigoplus_{P_{n_2}} f, PJ\right) < \omega$ za svaku δ_2-finu particiju intervala $[a,b]$.

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ i kako za svako δ postoji δ-fina particija koja je u isto vreme i δ_1-particija i δ_2-particija, imamo:

$$d\left(PI, PJ\right) \leq d\left(PI, \bigoplus_{P_n} f\right) + d\left(\bigoplus_{P_n} f, PJ\right) < 2\omega = d\left(PI, PJ\right),$$

što je u kontradikciji sa početnom pretpostavkom. □

Realni broj PI iz prethodne definicije je Henstock-Kurzweil-ov integral funkcije f na $[a,b]$ i označen je sa $(pHK) \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f$.

Teorema 2.15 *Ako je f pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$, tada $k^\gamma \circ f$ je Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$ i*

$$(pHK) \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f = k^{-1}\left(\int_a^b k^\gamma \circ f\right), \tag{35}$$

gde integral na desnoj strani jednakosti jeste Henstock-Kurzweil-ov integral.

Ako je f Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$, tada $k^{-1} \circ f^{1\backslash\gamma}$ jeste pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$.

Dokaz. Prvo, neka je f pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$, što znači da za svako $\omega > 0$ postoji pozitivna funkcija δ definisana na $[a,b]$, tako da

$$d\left(\bigoplus_{P_n} f, PI\right) < \omega,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ i svaku δ-finu n-particiju P_n intervala $[a,b]$. Sad, imamo

$$\begin{aligned} d\left(\bigoplus_{P_n} f, PI\right) = &= \max\left\{\bigoplus_{P_n} f \ominus PI, PI \ominus \bigoplus_{P_n} f\right\} \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon}\left|\sum_{i=1}^{n}(k(f(\xi)))^{\gamma}\nu(A_i) - k(PI)\right|. \end{aligned}$$

Iz prethodnog sledi da za svako $\omega_1 > 0$ postoji pozitivna funkcija δ definisana na $[a,b]$, tako da

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(k(f(\xi)))^{\gamma}\nu(A_i) - k(PI)\right| < \omega_1,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ i svaku δ-finu n-particiju P_n intervala $[a,b]$, tj. broj $k(PI)$ je klasičnu Henstock-Kurzweil-ov integral funkcije $(k \circ f)^{\gamma}$. Ovo implicira da $(k \circ f)^{\gamma}$ jeste Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija i da jednakost (35) važi.

Dokaz drugog dela ove teoreme je analogan dokazu prvog dela. □

Primer 2.8 Data je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ za $x \in (0,1]$ i $f(0) = +\infty$. Funkcija f nije Henstock-Kurzweil integrabilna na intervalu $[0,1]$.

Data je generatorska funkcija $k : [0,1] \to [0,+\infty)$, $k(x) = \frac{1}{x}$ za $x \in (0,+\infty)$ i $k(0) = +\infty$. Sada, za fiksne pozitivne vrednosti ε i γ imamo

$$x \oplus y = \frac{xy}{\varepsilon y + x} \quad \text{i} \quad x \odot y = x^{\gamma} y$$

i

$$(pHK)\int_{[0,1]}^{(\oplus,\odot)} f = \left(\int_0^1 f^{-\gamma}\right)^{-1} = \gamma + 1,$$

tj. funkcija f je pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna.

Sledeće teoreme su zasnovane na jednakosti (35) i osobinama klasičnog Henstock-Kurzweil-ovog integrala.

Posledica 2.2 *Ako je funkcija f pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna na intervalu $[a,b]$, tada je i Lebesgue merljiva.*

Dokaz. Poznato je da su sve Henstock-Kurzweil integrabilne funkcije istovremeno i Lebesgue merljive, pa kako pseudo Henstock-Kurzweil integrabilnost funkcije f povlači Henstock-Kurzweil integrabilnost funkcije $(k \circ f)^{\gamma}$, znamo da $(k \circ f)^{\gamma}$ jeste Lebesgue merljiva funkcija Sada, funkciju f je moguće dobiti kao kompoziciju neprekidne i Lebesgue merljive funkcije, što znači da je i f Lebesgue merljiva funkcija. □

Potreban je i pojam jednakosti skoro svuda:

> $f = h$ skoro svuda na intervalu $[a,b]$ ako je $\oplus$-mera skupa $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq h(x)\}$ jednaka $\oplus$-meri praznog skupa, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ i sve n-particije P_n, $\mu_{P_n}(A) = k^{-1}(0)$.

Teorema 2.16 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ako je $f = k^{-1}(0)$ skoro svuda na intervalu $[a,b]$, tada f jeste pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$ i $(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f = k^{-1}(0)$.*

Dokaz. Sledi direktno iz jednakosti (35) i iz činjenice da ako je $f = 0$ skoro svuda na $[a,b]$ u klasičnom smislu, tada f jeste Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$ i $\int_a^b f = 0$. □

Naredna teorema daje pseudo-linearnost i monotonost pseudo Henstock-Kurzweil integrala. Potrebne su transformacije $[\cdot]_k$ uvedene u prethodnoj sekciji.

Teorema 2.17 *Neka su f, g, $[f]_k$ i $[g]_k$ pseudo Henstock-Kurzweil integrabilne funkcije na intervalu $[a,b]$. Tada*

(i) $[\alpha]_k \odot f$ je pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna na $[a,b]$ i

$$(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} ([\alpha]_k \odot f) = \alpha \odot (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f$$

za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \in [0,\infty)$);

(ii) $[f \oplus g]_k$ je pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna na $[a,b]$ i

$$(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} [f \oplus g]_k = (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} [f]_k \oplus (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} [g]_k;$$

(iii) ako je $f \leq g$ skoro svuda na $[a,b]$, tada

$$(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f \leq (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} g;$$

(iv) ako je $f = g$ skoro svuda na $[a,b]$, tada

$$(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f = (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} g.$$

Dokaz. (i) Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ (ili $\alpha \in [0,\infty)$) i neka je f pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$:

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f &= k^{-1}\left(\int_a^b (k(\alpha)\cdot k(f(t)))^\gamma\right)\\
&= k^{-1}\left(\int_a^b \left(k\left(k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(\alpha)\right)\odot f(t)\right)\right)^\gamma\right)\\
&= k^{-1}\left(\int_a^b (k([\alpha]_k \odot f(t)))^\gamma\right)\\
&= (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} ([\alpha]_k \odot f).
\end{aligned}$$

(ii) Neka su $[f]_k$ i $[g]_k$ pseudo Henstock-Kurzweil integrabilne funkcije na $[a,b]$:

$$\begin{aligned}
(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[f]_k \oplus (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[g]_k &= k^{-1}\left(\int_a^b k\left(f(t)\oplus g(t)\right)\right) \\
&= (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} k^{-1}\left(k^{1/\gamma}\left(f\oplus g\right)\right) \\
&= (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)}[f\oplus g]_k.
\end{aligned}$$

Dokaz za (iii) i (iv) sledi iz monotonosti generatorske funkcije, osobina klasičnog Henstock-Kurzweil-ovog integrala i jednakosti (35). □

Sledi teorema koja uspostavlja vezu izmedju pseudo Henstock-Kurzweil-ovog integrala i opšteg izvoda opisanog u prethodnoj sekciji.

Teorema 2.18 *Neka je f diferencijabilna funkcija na $[a,b]$, tada opšti izvod $f^{(\prime,\gamma)}$, ako postoji, je pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$ i*

$$k\left((pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f^{(\prime,\gamma)}\right) = k\left(f(b)\right) - k\left(f(a)\right). \tag{36}$$

Dokaz. Za svaku diferencijabilnu funkciju h na $[a,b]$ važi: $\int_a^b h' = h(b) - h(a)$, gde je h' klasični izvod funkcije h. Kako

$$(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f^{(\prime,\gamma)} = k^{-1}\left(\int_a^b \frac{d}{dx}k(f(x))\right)$$

i $\frac{d}{dx}k(f(x))$ je klasični izvod, jednakost (36) važi. □

Dalje, date su odgovarajuće teoreme o konvergenciju pseudo Henstock-Kurzweil-ovog integrala.

Teorema 2.19 *(i) Neka je k striktno rastuća neprekidna generatorska funkcija. Ako je $f_1 \le f_2 \le \dots f_n \le \dots$ niz pseudo Henstock-Kurzweil integrabilnih funkcija na $[a,b]$ tako da postoji $k\left(\lim_{n\to\infty}(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f_n\right)$ i to konačno, tada $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ je pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$ i $\lim_{n\to\infty}(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f_n = (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f$.*

(ii) Neka je k striktno opadajuća neprekidna generatorska funkcija. Ako je $f_1 \ge f_2 \ge \dots f_n \ge \dots$ niz pseudo Henstock-Kurzweil integrabilnih funkcija na $[a,b]$ tako da postoji $k\left(\lim_{n\to\infty}(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f_n\right)$ i to konačno, tada $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ jeste pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na $[a,b]$ i $\lim_{n\to\infty}(pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f_n = (pHK)\int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f$.

Dokaz. Dokaz sledi iz osobina klasičnog Henstock-Kurzweil-ovog integrala, tj. teoreme o monotonoj konvergenciji za Henstock-Kurzweil-ov integral, i jednakosti (35). □

Teorema 2.20 *Ako je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz pseudo Henstock-Kurzweil integrabilnih funkcija na* $[a,b]$ *tako da važi*

(i) $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *i* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *su pseudo Henstock-Kurzweil integrabilne na* $[a,b]$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *skoro svuda na* $[a,b]$,

tada, f *jeste pseudo Henstock-Kurzweil integrabilna funkcija na* $[a,b]$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} (pHK) \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f_n = (pHK) \int_{[a,b]}^{(\oplus,\odot)} f.$$

Dokaz. Dokaz sledi iz osobina klasičnog Henstock-Kurzweil-ovog integrala, tj. teoreme o dominantnoj konvergenciji za Henstock-Kurzweil-ov integral, i jednakosti (35). □

3 Uopštena konvolucija

Klasična konvolucija je operacija sa funkcijama iz domena klasične analize koja nalazi primenu u mnogim oblastima, npr. u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, Fourier-ovoj analizi i teoriji sistema. Sledi definicija klasične konvolucije iz [92].

Neka su f i h dve funkcija iz $L(-\infty,+\infty)$, tada funkcija k definisana sa

$$k(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)h(t)dt$$

je klasična konvolucija, tj. $k=f\star h$.

Konvolucija je definisana skoru svuda i pripada klasi $L(-\infty,+\infty)$. Postoje dva tipa klasične konvolucije. Jedan tip je dat prethodnom jednakošću, a drugi tip se dobija kad se integraljenje vrši nad intervalom $[0,x]$. Klasična konvolucija je komutativna, asocijativna, linearna operacija i ako je F Fourier-ova transformacija, važi $F[f\star h]=\sqrt{2\pi}F[f]F[h]$. Takodje, ako su f i h raspodele gustina nezavisnih slučajnih promenljivih X i Y, tada je $f\star h$ raspodela gustine slučajne promenljive $X+Y$. Više o klasičnim konvolucijama se može naći u [92].

U ovoj glavi su dati orginalni rezultati iz [68, 69, 70, 72, 73] vezani za uopštenja klasične konvolucije. Prvo je definisano uopštenje konvolucije iz [68, 69] poznato ka pseudo-konvolucija. Dokazane su bitne osobine pseudo-konvolicija i dati su granični procesi koji povezuju pseudo-konvolucije bazirane na različitim klasama realnih poluprstena iz poglavlja 1.3. Sledi uopštenje klasične konvolucije bazirano na uslovno distributivnom poluprstenu iz poglavlja 1.6.1 i odgovarajućoj S-meri iz poglavlja 2.3.1. Konstruisana je konvolucija bazirana na specijalnoj klasi uopštenih pseudo-operacija iz poglavlja 1.6.2.

3.1 Pseudo-konvolucija

U ovoj sekciji su date pseudo-konvolucije, uopštenja klasične konvolucije iz iz [68, 69]. Ispitane su osobine ovih operacija sa funkcijama ([70, 89]) kao i granični procesi ([23, 71]).

Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$, $[a,b]\subseteq[-\infty,+\infty]$ realni poluprsten iz poglavlja 1.3 i m odgovarajuća σ-$\oplus$-dekompozabilna mera. Neka je G podskup skupa realnih brojeva, $*$ komutativna binarna operacija definisana na skupu realnih brojeva za koju važi zakon kancelacije, takva da je $(G,*)$ polugrupa sa neutralnim elementom e i neka je $G_+=\{x \mid x\in G, x\geq e\}$.

Definicija 3.1 *Pseudo-konvolucije prvog tipa funkcija $f: G_+\to[a,b]$ i $h: G_+\to[a,b]$ u odnosu na $\sigma-\oplus$-dekompozabilnu meru m je funkcija koja slika skup G_+ u interval $[a,b]$ na sledeći način:*

$$(f\star h)(x)=\int_{G_+^x}^{\oplus} f(u)\odot dm_h(v),$$

gde je $G_+^x = \{(u,v) \mid u * v = x, v \in G_+, u \in G_+\}$ *i*

- $m_h(A) = \sup_{x\in A} h(x)$ *za* $\oplus = \max$, *tj.* m *je* sup-*dekompozabilna mera,*
- $m_h(A) = \inf_{x\in A} h(x)$ *za* $\oplus = \min$, *tj.* m *je* inf-*dekompozabilna mera,*
- $dm_h = h \odot d(g^{-1} \circ \lambda)$ *ako je* $\oplus$ *striktno pseudo-sabiranje pretstavljeno aditivnim generatorom* g *i* $\lambda = g \circ m$ *je Lebesgue-ova mera (g-račun [57]).*

Neka je $(G,*)$ *grupa. Pseudo-konvolucije drugog tipa funkcija* $f : G \to [a,b]$ *i* $h : G \to [a,b]$ *je funkcija koja slika skup* G *u interval* $[a,b]$ *na sledeći način:*

$$(f \star h)(x) = \int_G^{\oplus} f(x * (-t)) \odot dm_h(t),$$

gde je $(-t)$ *inverzni element za* t, $x \in G$.

Napomena 3.1 Ako je pseudo-sabiranje striktno, tj. zadato preko aditivnog generatora g, odgovarajuća pseudo-konvolucija se naziva g -konvolucija.

Napomena 3.2 U radu [68] je definisana pseudo-konvolucije koja je specijalni slučaj pseudo-konvolucije iz definicije 3.1 ($* = +$). U ovoj tezi se pod pseudo-konvolucijom podrazumeva opštiji slučaj, tj. operacija sa funkcijama iz definicije 3.1.

Naredna definicija uvodi pojam pseudo-delta funkcije, neutralnog elementa za pseudo-konvolucije oba tipa definisane nad poluprstenima prve i treće klase.

Definicija 3.2 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *poluprsten sa idempotentnim pseudo-sabiranjem. Pseudo-delta funkcija je*

$$\delta^{\oplus,\odot}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & za\ x = e, \\ \mathbf{0} & za\ x \neq e, \end{cases}$$

gde je $\mathbf{0}$ *neutralni element za* $\oplus$, $\mathbf{1}$ *neutralni element za* $\odot$ *i* e *neutralni element za* $*$.

Napomena 3.3 Kako pseudo-delta funkcija ne mora biti funkcija u klasičnom smislu, analogno klasičnom sučaju, ispituje se postojanje nizova funkcija koji konvergiraju ka $\delta^{\oplus,\odot}$. U [75] i [91] uvodi se pojam pseudo-delta niza kao niza ograničenih funkcija $\left(\delta_n^{\oplus,\odot}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_n^{\oplus,\odot} : G \to [a,b]$, sa osobinama:

1) $\lim_{n\to\infty} \left(\delta_n^{\oplus,\odot} \star f\right)(x) = f(x)$.

2) $\lim_{n\to\infty} \int_G^{\oplus} \delta_n^{\oplus,\odot}(x)dx = \mathbf{1}$.

3.1.1 Pseudo-konvolucija i osnovne klase poluprstena

Pseudo-konvolucija oba tipa u zavisnosti od klase poluprstena na kojem su bazirane je data sledećim primerima ([69]).

KLASA I

Posmatramo poluprsten klase I, tj. $\oplus$ je idempotentana operacija, a $\odot$ nije.

1) Neka je $G = \mathbb{R}$ i $* = +$.

a) Posmatramo poluprsten $([a,b], \max, \odot)$ gde $\odot$ nije idempotentna pseudo-operacija i važi $a \odot b = a$ ($\odot$ je pseudo-množenje prve vrste), pseudo-konvolucije prvog tipa funkcija f i h je

$$(f \star h)(x) = \sup_{0 \le t \le x} (f(x-t) \odot h(t)),$$

a neutralni element je

$$\delta^{\max,\odot}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{ako je } x = 0, \\ \mathbf{0}(=a) & \text{ako je } x \neq 0. \end{cases}$$

Ukoliko je pseudo-množenje striktno i pretstavljeno preko aditivnog generatora g_a, pseudo-konvolucij prvog tipa je

$$(f \star h)(x) = \sup_{0 \le t \le x} \left(g_a^{-1}\left(g_a\left(f(x-t)\right) + g_a\left(h(t)\right)\right)\right).$$

Kada je pseudo-množenje striktno i dato pomoću multiplikativnog generatora g_m,

$$(f \star h)(x) = \sup_{0 \le t \le x} \left(g_m^{-1}\left(g_m\left(f(x-t)\right) \cdot g_m\left(h(t)\right)\right)\right).$$

Za pseudo-konvolucije drugog tipa supremum se traži nad celim skupom realnih brojeva.

b) Ako posmatramo poluprsten $([a,b], \min, \odot)$ gde je $\odot$ neidempotentno pseudo-množenje druge vrste ($a \odot b = b$), funkcija

$$\delta^{\min,\odot}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{za } x = 0, \\ \mathbf{0}(=b) & \text{za } x \neq 0, \end{cases}$$

je neutralni element za pseudo-konvolucije prvog i drugog tipa i

$$(f \star h)(x) = \inf_{0 \le t \le x} (f(x-t) \odot h(t))$$

je pseudo-konvolucija prvog tipa. Ako je pseudo-množenje striktno i pretstavljeno aditivnom generatorskom funkcijom g_a, pseudo-konvolucija prvog tipa je

$$(f \star h)(x) = \inf_{0 \le t \le x} \left(g_a^{-1}\left(g_a\left(f(x-t)\right) \cdot g_a\left(h(t)\right)\right)\right),$$

a za striktno pseudo-množenje zadato preko multiplikativnog generatora g_m

$$(f \star h)(x) = \inf_{0 \le t \le x} \left(g_m^{-1}\left(g_m\left(f(x-t)\right) \cdot g_m\left(h(t)\right)\right)\right).$$

Za pseudo-konvolucije drugog tipa, inf je nad celim skupom realnih brojeva.
2) Neka je $G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i $* = \cdot$.
a) Posmatramo poluprsten $([a,b], \max, \odot)$, gde je $\odot$ pseudo-množenje prve vrste. Sada

$$(f \star h)(x) = \sup_{1 \leq t \leq x} (f(\frac{x}{t}) \odot h(t))$$

je pseudo-konvolucija prvog tipa. Ako je pseudo-množenje striktno i dato aditivnim generatorom g_a, pseudo konvolucije prvog tipa je

$$(f \star h)(x) = \sup_{1 \leq t \leq x} \left(g_a^{-1} \left(g_a \left(f(\frac{x}{t}) \right) + g_a \left(h(t) \right) \right) \right).$$

Kada je $\odot$ dato multiplikativnim generatorom g_m

$$(f \star h)(x) = \sup_{1 \leq t \leq x} \left(g_m^{-1} \left(g_m \left(f(\frac{x}{t}) \right) \cdot g_m \left(h(t) \right) \right) \right)$$

je pseudo-konvolucija prvog tipa. Neutralni element se razlikuje od onog definisanog pod 1) utoliko što je sada $e = 1$. Odgovarajuća pseudo-delta funkcija je

$$\delta^{\oplus,\odot}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{za } x = 1, \\ \mathbf{0}(= a) & \text{za } x \neq 1. \end{cases}$$

Za pseudo-konvolucije drugog tipa supremum se traži nad celim skupom $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

KLASA II

Poluprsteni u ovom primeru su iz klase II, tj. pseudo-operacije su pretstavljene generatorm g.
1) Neka je $G = \mathbb{R}$ i $* = +$. Sada, g-konvolucija prvog tipa je

$$\begin{aligned} (f \star h)(x) &= \int_{[0,x]}^{\oplus} f(x-t) \odot h(t)dt \\ &= g^{-1}(\int_0^x g(f(x-t)) \cdot g(h(t))dt), \end{aligned}$$

a za g-konvoluciju drugog tipa integraljenje se vrši nad celim skupom realnih brojeva.
2) Neka je $G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i $* = \cdot$. U ovom slučaju pseudo-konvolucija prvog tipa je

$$(f \star h)(x) = \int_{[1,x]}^{\oplus} f(\frac{x}{t}) \odot h(t)dt = g^{-1}(\int_1^x g(f(\frac{x}{t})) \cdot g(h(t))dt).$$

Kod pseudo-konvolucije drugog tipa integraljenje se vrši nad skupom $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

KLASA III

Poluprsteni posmatrani u ovom primenu pripadaju trećoj klasi, tj. obe pseudo-operacije su idempotentne.

1) Neka je $G = \mathbb{R}$ i $* = +$.
a) Za poluprsten $([-\infty, \infty], \max, \min)$ pseudo-konvolucija prvog tipa je

$$(f \star h)(x) = \sup_{0 \leq t \leq x} (\min(f(x-t), h(t))).$$

Neutralni element, pseudo-delta funkcija, je dat sa

$$\delta^{\max,\min}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \ (= +\infty) & \text{za } x = 0, \\ \mathbf{0} \ (= -\infty) & \text{za } x \neq 0. \end{cases}$$

Za pseudo-konvoluciju drugog tipa tražimo sup nad celim skupom realnih brojeva.
b) Za poluprsten $([-\infty, \infty], \min, \max)$ pseudo-konvolucija prvog tipa je

$$(f \star h)(x) = \inf_{0 \leq t \leq x} (\max(f(x-t), h(t))).$$

Pseudo-delta funkcija u ovom slučaju je

$$\delta^{\min,\max}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \ (= -\infty) & \text{za } x = 0, \\ \mathbf{0} \ (= +\infty) & \text{za } x \neq 0. \end{cases}$$

Za pseudo-konvoluciju drugog tipa tražimo inf nad celim skupom realnih brojeva.
2) Neka je $G = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ i $* = \cdot$.
a) Na poluprstenu $([-\infty, \infty], \max, \min)$ pseudo-konvolucija prvog tipa je

$$(f \star h)(x) = \sup_{1 \leq t \leq x} (\min(f(\frac{x}{t}), h(t))).$$

Neutralni element je

$$\delta^{\oplus,\odot}(x) = \begin{cases} \mathbf{1}(= \infty) & \text{za } x = 1, \\ \mathbf{0}(= -\infty) & \text{za } x \neq 1. \end{cases}$$

Za pseudo-konvoluciju drugog tipa tražimo sup nad skupom $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Primer 3.1 Posmatrajmo poluprsten $([0,1], \min, S)$ gde je S proizvoljna t-konorma. Neka je definisana binarna operacija na skupu celih brojeva sa $x * y = x + y - 2$. Neutralni element za ovako definisano $*$ je $e = 2$, pa $G_+ = [2, \infty] \cap \mathbb{Z}$. Pseudo-konvolucija prvog tipa funkcija $f, h : [2, \infty] \cap \mathbb{Z} \to [0,1]$ je

$$\begin{aligned} (f \star h)(x) &= \int_{[2,x] \cap \mathbb{Z}}^{\oplus} f(x - t + 2) \odot dm_h(t) \\ &= \sup \{S(f(u), h(v)) \mid u + v - 2 = x \wedge u, v \in [2, \infty] \cap \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Pseudo-konvolucija drugog tipa je data sa

$$\begin{aligned} (f \star h)(x) &= \int_{\mathbb{Z}}^{\oplus} f(x - t + 2) \odot dm_h(t) \\ &= \sup_{t \in \mathbb{Z}} \{S(f(x - t + 2), h(t))\}. \end{aligned}$$

Neutralni element je

$$\delta^{\oplus,\odot}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x = 2, \\ 1 & \text{za } x \neq 2. \end{cases}$$

3.1.2 Osnovne osobine pseudo-konvolucija

Osnovne osobine pseudo-konvolucija oba tipa izložene u ovoj sekciji su razmatrane u [68, 69, 70, 89]. Naredne teoreme iz [89] daju potrebne uslove za komutativnost i asocijativnost kao i za postojanje neutralnog elementa kod pseudo-konvolucija sa idempotentnim pseudo-sabiranjem. Dati su i rezultati vezani za osobine g-konvolucije.

Teorema 3.1 *Neka je $\mathcal{F}$ klasa funkcija f takvih da $f : G_+ \to [a, b]$, gde za $(G, *)$ važe pretpostavke definicije 3.1. Neka je $\odot$ neprekidno pseudo-množenje prve ili druge vrste na intervalu $[a, b]$. Tada, pseudo-konvolucije prvog tipa sa idempotentnim pseudo-sabiranjem (klase I i III) jesu komutativne, asocijativne operacije se neutralnim elementom $\delta^{\oplus,\odot}$.*

Dokaz.
KLASA I
a) Neka je $\oplus = \max$ i $\odot$ proizvoljno pseudo-množenje prvog tipa. Sad, za proizvoljno $x \in G_+$

$$(f \star h)(x) = \sup\{f(u) \odot h(v) \mid u * v = x;\ u, v \in G_+\}.$$

Jasno, $f \star h : G_+ \to [a, b]$. Komutativnost pseudo-konvolcije u ovom slučaju je direktna posledica komutativnosti operacija $\odot$ i $*$, dok je za dokazivanje asocijativnosti potrebna sledeća jednakost:

$$\sup\{x \odot t \mid x \in A\} = s \odot t,$$

gde je A podskup intervala $[a, b]$ i $s = \sup A$ (posledica monotonosti i neprekidnosti pseudo-množenja). Sada, za svako f, k, h iz $\mathcal{F}$ i $x \in \mathbb{R}^+$ važi:

$$((f \star k) \star h)(x)$$

$$\begin{aligned} &= \sup\Big\{ (f \star k)(s) \odot h(v) \mid s * v = x;\ s, v \in G_+\Big\} \\ &= \sup\Big\{ \sup\Big\{ f(t) \odot k(u) \mid t * u = s;\ t, u \in G_+\Big\} \odot h(v) \mid \\ &\qquad s * v = x;\ s, v \in G_+\Big\} \\ &= \sup\Big\{ \sup\Big\{ (f(t) \odot k(u)) \odot h(v) \mid t * u = s;\ t, u \in G_+\Big\} \mid \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& s * v = x;\ s, v \in G_+ \Big\} \\
= & \sup \Big\{ (f(t) \odot k(u)) \odot h(v) \mid t * u = s;\ t, u \in G_+;\ s * v = x;\ s, v \in G_+ \Big\} \\
= & \sup \Big\{ (f(t) \odot k(u)) \odot h(v) \mid ((t * u) * v) = x;\ t, u, v \in G_+ \Big\}.
\end{aligned}
$$

Analogno prethodnom postupku, moguće je pokazati i

$$
(f \star (k \star h))(x) = \sup \Big\{ f(t) \odot (k(u) \odot h(v)) \mid (t * (u * v)) = x;\ t, u, v \in G_+ \Big\}.
$$

Sada, iz navedenih jednakosti i asocijativnosti operacija $\odot$ i $*$ sledi tražena asocijativnost pseudo-konvolucije.

Potrebno je pokazati i postojanje neutralnog elementa i to oblika

$$
\delta^{\max,\odot}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{za } x = e, \\ \mathbf{0} = a & \text{za } x \neq e. \end{cases}
$$

Za svako $f \in \mathcal{F}$ i svako $x \in G_+$ imamo:

$$
\begin{aligned}
\left(f \star \delta^{\max,\odot}\right)(x) &= \sup\{f(u) \odot \delta^{\max,\odot}(v) \mid u * v = x;\ u, v \in G_+\} \\
&= \sup\{f(u) \mid u * e = x;\ u \in G_+\} \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Zbog već pokazane komutativnosti važi i $(\delta^{\max,\odot} \star f)(x) = f(x)$, tj. $\delta^{\max,\odot}$ je neutralni element pseudo-konvolucija ove klase.

b) Neka je $\oplus = \min$ i $\odot$ proizvoljno pseudo-množenje drugog tipa.

$$
(f \star h)(x) = \inf \{f(u) \odot h(v) \mid u * v = x;\ u, v \in G_+\}
$$

Dokaz je analogan dokazu pod a), s tim što ovde umesto operatora maksimuma figuriše operator minimuma i pseudo-delta funkcija ima sledeću formu:

$$
\delta^{\min,\odot}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{za } x = e, \\ \mathbf{0} = b & \text{za } x \neq e. \end{cases}
$$

KLASA III

a) Posmatrajmo, sada, poluprsten treće klase i to slučaj $\oplus = \max$ i $\odot = \min$. U ovom slučaju pseudo-konvolucija ima sledeći oblik:

$$
(f \star h)(x) = \sup \{\min\{f(u), h(v)\} \mid u * v = x;\ u, v \in G_+\}.
$$

Komutativnost je očigledna pošto su i min i max komutativne operacije. Kako važi jednakosti $\sup\{\min\{x, t\} \mid x \in A\} = \min\{s, t\}$ gde je A podskup intervala $[a, b]$ i $s = \sup A$, za svako f, k, h iz $\mathcal{F}$ i svako $x \in G_+$ imamo:

$$
((f \star k) \star h)(x) =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\Big\{ \min\{(f\star k)(s), h(v)\} \mid s*v = x;\ s,v\in G_+\Big\}\\
&= \sup\Big\{ \min\Big\{ \sup\Big\{ \min\{f(t),k(u)\} \mid t*u = s;\ t,u\in G_+\Big\}, h(v)\Big\} \mid \\
&\qquad s*v=x;\ s,v\in G_+\Big\}\\
&= \sup\Big\{ \sup\Big\{ \min\Big\{ \min\{f(t),k(u)\}, h(v)\Big\} \mid t*u=s; t,u\in G_+\Big\} \mid \\
&\qquad s*v=x;\ s,v\in G_+\Big\}\\
&= \sup\Big\{ \min\{f(t),k(u),h(v)\} \mid t*u=s; t,u\in G_+, s*v=x;\ s,v\in G_+\Big\}\\
&= \sup\Big\{ \min\{f(t),k(u),h(v)\} \mid t*u*v=x;\ t,u,v\in G_+\Big\}.
\end{aligned}
$$

Na sličan način se može pokazati i

$$(f\star(k\star h))(x) = \sup\Big\{ \min\{f(t),k(u),h(v)\} \mid t*u*v=x;\ t,u,v\in G_+\Big\},$$

pa samim tim i asocijativnost pseudo-konvolucija definisanih na ovoj klasi poluprstena.

Treba još pokazati i postojanje neutralnog elementa i to odlika

$$\delta^{\max,\min}(x) = \begin{cases} \mathbf{1}\ (=b) & \text{za } x=e,\\ \mathbf{0}\ (=a) & \text{za } x\neq e.\end{cases}$$

Za svako $f\in\mathcal{F}$ i svako $x\in G_+$ važi:

$$
\begin{aligned}
\left(f\star\delta^{\max,\min}\right)(x) &= \sup\Big\{ \min\{f(u),\delta^{\max,\min}(v)\} \mid u*v=x;\ u,v\in G_+\Big\}\\
&= \sup\{f(u) \mid u*e=x;\ u\in G_+\}\\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Zbog već pokazane komutativnosti važi i $\left(\delta^{\max,\min}\star f\right)(x) = f(x)$, tj. funkcija $\delta^{\max,\min}$ je neutralni element za pseudo-konvolucije koje su definisane na ovoj klasi poluprstena.
b) Dokaz za min – max pseudo-konvolucije, tj. za pseudo-konvolucije oblika

$$(f\star h)(x) = \inf\{\max\{f(u),h(v)\} \mid u*v=x;\ u,v\in G_+\},$$

je analogan dokazu za treću klasu pod a). □

Analogno tvrdjenje je pokazano i za pseudo-konvolucije drugog tipa ([69, 89]).

Teorema 3.2 *Neka je $\mathcal{F}$ klasa funkcija f takvih da $f: G\to[a,b]$, gde je $(G,*)$ kancelativna komutativna grupa sa neutralnim elementom e. Neka je $\odot$ neprekidno pseudo-množenje prve ili druge vrste na intervalu $[a,b]$. Tada, pseudo-konvolucije drugog tipa sa idempotentnim pseudo-sabiranjem (klase I i III) jesu komutativne, asocijativne operacije se neutralnim elementom $\delta^{\oplus,\odot}$.*

Napomena 3.4 Ako je pseudo-sabiranje $\oplus = \max$, dovoljno je da pseudo-množenje bude levo neprekidna pseudo-operacija.

Slede rezultati vezani za g-konvoluciju i to za slučaj kada operacija $*$ je klasično sabiranje.

Neka je sa $L_1(G)$ označen prostor Lebesgue integrabilnih funkcija.

Teorema 3.3 *Neka je G skup realnih brojeva, $*$ uobičajeno sabiranje na $\mathbb{R}$ i $g \circ f \in L_1(\mathbb{R})$ za svaku funkciju f na koju se g-konvolucija primenjuje. Tada, g-konvolucija prvog ili drugog tipa je komutativna i asocijativna operacija.*

Dokaz. Dokaz je dat za g-konvoluciju prvog tipa. Dokaz za g-konvoluciju drugog tipa je analogan.

Pri dokazivanju komutativnosti, zbog monotonosti funkcije g, uvodi se smena $u = x - t$.

$$\begin{aligned}\int_0^x g\left(f(x-t)\right) g\left(h(t)\right) dt &= \int_0^x g\left(h(x-u)\right) g\left(f(u)\right) du \\ &= \int_0^x g\left(h(x-t)\right) g\left(f(t)\right) dt.\end{aligned}$$

Znači, $g^{-1}\left(\int_0^x g\left(f(x-t)\right) g\left(h(t)\right) dt\right) = g^{-1}\left(\int_0^x g\left(h(x-t)\right) g\left(f(t)\right) dt\right)$, tj. $f \star h = h \star f$.

Potrebno je pokazati i asocijativnost. Neka je $u = t + t_1$.

$$\begin{aligned}((f\star h)\star k)(x) &= g^{-1}\left(\int_0^x g\left((f\star h)(x-t)\right) g\left(k(t)\right) dt\right) \\ &= g^{-1}\left(\int_0^x \left(\int_0^{x-t} g\left(f(x-t-t_1)\right) g\left(h(t_1)\right) dt_1\right) g\left(k(t)\right) dt\right) \\ &= g^{-1}\left(\int_0^x \left(\int_t^{x} g\left(f(x-u)\right) g\left(h(u-t)\right) du\right) g\left(k(t)\right) dt\right) \\ &= g^{-1}\left(\int_0^x g\left(f(x-u)\right) \left(\int_0^{u} g\left(h(u-t)\right) g\left(k(t)\right) dt\right) du\right) \\ &= g^{-1}\left(\int_0^x g\left(f(x-u)\right) g\left((h\star k)(u)\right) du\right) \\ &= (f\star(h\star k))(x).\square\end{aligned}$$

Napomena 3.5 Treba primetiti da g-konvolucija iz prethodne teoreme nema neutralni element. U [87] konvolucija dve funkcije je definisana kao

$$(f\star h)(x) = \int_{[0,x)} f(x-t)dh(t) \tag{37}$$

za svako $x \in (0, \infty)$ i $(f \star h)(0) = 0$ i $(f \star h)(\infty) = 1$. Osnovna razlika izmedju g-konvolucije date definicijom 3.1 za $G = \mathbb{R}$ i $* = +$ i konvolucije (37) je upravo postojanje sledećeg neutralnog elementa za (37):

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x = 0 \\ 1 & \text{za } x > 0. \end{cases}$$

Definicija poluprstena sadrži i uslov $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$, koji je slabiji od uslova "za operaciju $\odot$ ne postoji delitelj nule". Postavlja se pitanje da li važi zakon kancelacije, koji implicira nepostojanje delitelja nule, za pseudo-konvoluciju i kada. Ovaj problem je razmatran u [70, 89]. Sledi primer iz [100] koji ilustruje mogućnost da zakon kancelacije ne bude zadovoljen.

Primer 3.2 Neka su $f(x) = e^x$, $k(x) = e^{2x}$ i $h(x) = e^{-x}$ funkcije sa vrednostima u poluprstenu $((-\infty, +\infty], \inf, +)$. Tada

$$(f \star h)(x) = \inf_{y+z=x} \Big(f(y) + h(z)\Big) = 0$$

i

$$(k \star h)(x) = \inf_{y+z=x} \Big(k(y) + h(z)\Big) = 0.$$

Znači $f \star h = k \star h$ i nije $f \equiv k$, tj. ne važi zakon kancelacije.

Ostaje pitanje za koje klase funkcija i koji tip pseudo-konvolucije on važi. Sledeće teoreme daju rezultate koji se odnose na pseudo-konvoluciju na poluprstenu $((-\infty, +\infty], \inf, +)$. Dokazi se mogu naći u [100] i radjeni su u polju kompleksne analize za funkcije definisane na realnim lokalno konveksnim vektorsko topološkim prstorima.

Teorema 3.4 *Neka su $f, k, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ prave donje poluneprekidne konveksne funkcije i neka je h još i striktno konveksna funkcija koja ispunjava uslov*

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{h(x)}{|x|} = \infty.$$

Tada,

$$f \star h \equiv k \star h \Rightarrow f \equiv k,$$

tj. za $\star$, u ovom slučaju, važi zakon kancelacije.

Teorema 3.5 *Neka su $f, k, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ prave donje poluneprekidne konveksne funkcije i neka je h još i uniformno konveksna funkcija. Tada*

$$f \star h \equiv k \star h \Rightarrow f \equiv k.$$

Ako posmatramo pseudo-operacije zadate preko specijalnog aditivnog generatora $g(x) = x$, Titchmarsh-ova teorema definiše klasu funkcija za koje odgovarajuća g-konvolucija, za $* = +$, nema delitelj nule, tj. imamo odgovor za uslov slabiji od zakona kancelacije. Analogno dokazu pomenute teoreme moguće je dokazati opštije tvrdjenje. Neka je sa $\mathcal{L}$ obeležena klasa realnih funkcija koje su Lebesgue integrabilne na svakom kompaktnom podskupu skupa $\mathbb{R}^+$.

Teorema 3.6 *Neka je g generator poluprstena $([a,b], \oplus, \odot)$ i neka $f, h : \mathbb{R} \to [a,b]$. Ako kompozicije $g \circ f$ i $g \circ h$ pripadaju klasi $L_1(\mathbb{R})$, tada g-konvolucija prvog tipa za $G = \mathbb{R}$ i $* = +$*

$$f \star h(x) = g^{-1}\left(\int_0^x g\left(f(t)\right) \cdot g\left(h(x-t)\right) dt\right)$$

nema delitelja nule.

U radovima [41, 44] je ispitano postojanje idempotentnih elemenata za pseudo-konvolucije prvog tipa bazirane na idempotentnim neprekidnim realnim poluprstenima.

3.1.3 Pseudo-konvolucija sa idempotentnim pseudo-sabiranjem kao granična vrednost g-konvolucija

U sekcijama 1.4 i 2.2.2 su već dati rezultati iz [51] koji povezuju poluprsten sa idempotentnim pseudo-sabiranjem i familije poluprstena druge klase, kao i posledice koje ovaj granični proces ima na dekompozabilne mere i pseudo-integrale. Ova sekcija daje rezultate vezane za limit g-konvolucija ([71]).

Posmatramo poluprsten druge klase $([a,b], \oplus, \odot)$ sa generatorom $g : [a,b] \to [0,+\infty]$ $(g(\mathbf{0}) = 0)$, $\lambda \in (0,\infty)$ i funkciju g^λ. Sada, g^λ je genarator za poluprsten $([a,b], \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$, gde je $x \oplus_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}(g^\lambda(x) + g^\lambda(y))$ i, kako je $(g^\lambda(x))^{-1} = g^{-1}(x^{1/\lambda})$, $x \odot_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}(g^\lambda(x) g^\lambda(y)) = x \odot y$. Znači, g^λ je generator poluprstena $([a,b], \oplus_\lambda, \odot)$.

Veza izmedju pseudo-konvolucija definisanih na poluprstenu prve ili treće klase i g-konvolucija, za slučaj $G = \mathbb{R}$ i $* = +$ je data sledećom teoremom ([71]).

Teorema 3.7 *Neka je $([0,+\infty], \oplus, \odot)$ poluprsten prve klase, tj. $\oplus \in \{\max, \min\}$ i $\odot$ je generisano funkcijom g. Neka su $f, h : G_+ \to [0,\infty]$ neprekidne funkcije. Tada, postoji familija poluprstena $([0,+\infty], \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$, takva da ili*

$$f \star h = \lim_{\lambda \to +\infty} f \star_\lambda h$$

ili

$$f \star h = \lim_{\lambda \to -\infty} f \star_\lambda h,$$

gde je $f \star_\lambda h$ g^λ-konvolucija prvog tipa bazirana na poluprstenu $([0,+\infty], \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$, i $f \star h$ je pseudo-konvolucija prvog tipa bazirana na poluprstenu sa idempotentnim pseudo-sabiranjem ($\oplus \in \{\min, \max\}$).

Dokaz. Razlikuju se četiri slučaja u zavisnosti od toga da li je $\oplus = \min$ ili $\oplus = \max$ i da li je generator g rastuća ili opadajuća funkcija.

(i) Neka je $\oplus = \max$ i neka je g rastuća funkcija:

$$\begin{aligned} f \star h(x) &= \sup_{t\in[0,x]} \left(g^{-1}\left((g\circ f)(x-t)\cdot(g\circ h)(t)\right)\right) \\ &= \sup_{t\in[0,x]}(f(x-t)\odot h(t)). \end{aligned}$$

Kako je $\left(g^\lambda\right)^{-1}(x) = g^{-1}\left(x^{1/\lambda}\right)$, važi

$$f \star_\lambda h(x) = g^{-1}\left(\left(\int_0^x g^\lambda \circ f(x-t)\cdot(g^\lambda\circ h)(t)\, dv\right)^{1/\lambda}\right).$$

Sada imamo

$$\int_0^x (g^\lambda \circ f)(x-t)\cdot g^\lambda\circ h(t)\, dv$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^n \left(g^\lambda\circ f(x-t_i)\cdot(g^\lambda\circ h)(t_i)\cdot\frac{x}{n}\right)\right).$$

Neka je $S_n = \sum_{i=1}^n \left((g^\lambda\circ f)(x-t_i)\cdot(g^\lambda\circ h)(t_i)\cdot\frac{x}{n}\right)$. Zbog neprekidnosti generatora, važi

$$\lim_{\lambda\to+\infty} f\star_\lambda h(x) = g^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\lim_{\lambda\to+\infty} S_n^{1/\lambda}\right).$$

Nejednakost

$$S_{n,l}{}^{1/\lambda} \leq S_n^{1/\lambda} \leq S_{n,r}{}^{1/\lambda}$$

gde je

$$S_{n,l} = \frac{x}{n}\sup_{i\in\{1,\dots,n\}}\left((g^\lambda\circ f)(x-t_i)\cdot(g^\lambda\circ h)(t_i)\right)$$

i

$$S_{n,r} = x\sup_{i\in\{1,\dots,n\}}\left((g^\lambda\circ f)(x-t_i)\cdot(g^\lambda\circ h)(t_i)\right)$$

implicira sledeće:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S_n^{1/\lambda} = \sup_{i\in\{1,\dots,n\}}((g\circ f)(x-t_i)\cdot(g\circ h)(t_i)).$$

Sada važi

$\lim_{\lambda\to+\infty} f \star_\lambda h(x)$

$= g^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty} \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}}((g\circ f)(x-t_i)\cdot(g\circ h)(t_i))\right)$
$= g^{-1}\left(\sup_{t\in[0,x]}((g\circ f)(x-t)\cdot(g\circ h)(t))\right)$
$= \sup_{t\in[0,x]}(f(x-t)\odot h(t))$.

(ii) Neka je $\oplus = \min$ i g rastuća funkcija. U ovom slučaju, pseudo-konvolucija definisana na poluprstenu prve klase se može dobiti kao granica g^λ-konvolucija za $\lambda \to -\infty$.

(iii) Ako je $\oplus = \max$ i g opadajuća funkcija, pseudo-konvolucija definisana na poluprstenu prve klase se može dobiti kao granica g^λ-konvolucija za $\lambda \to -\infty$.

(iv) Ako je g opadajuća funkcija i $\oplus = \min$ pseudo-konvolucija definisana na poluprstenu prve klase se dobija kao granica g^λ-konvolucija za $\lambda \to +\infty$. □

Napomena 3.6 Isti rezultat važi i za pseudo-konvolucije drugog tipa.

Primer 3.3 Posmatrajmo niz poluprstena $([0,+\infty],\oplus_\lambda,\odot_\lambda)$ sa generatorima $g^\lambda : [0,+\infty] \to [0,+\infty]$, $g^\lambda(x) = e^{\lambda x}$, tj. $x\oplus_\lambda y = \frac{\ln(e^{\lambda x}+e^{\lambda y})}{\lambda}$ i $x\odot_\lambda y = x+y$, za $\lambda \in (-\infty, 0)$. Neka su $f, h : [0,+\infty] \to [0,+\infty]$ dve neprekidne funkcije i g^λ-konvolucija prvog tipa za funkcije f i h je

$$f\star_\lambda h(x) = \frac{\ln\left(\int_0^x e^{\lambda(f(x-t)+h(t))}dt\right)}{\lambda}.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to-\infty} f\star_\lambda h(x) &= \ln\left(\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_0^x e^{\lambda(f(x-t)+h(t))}dt\right)^{1/\lambda}\right),\\
&= \ln\left(\inf_{0\le t\le x} e^{(f(x-t)+h(t))}\right),\\
&= \inf_{0\le t\le x}(f(x-t)+h(t)) = f\star h(x),
\end{aligned}$$

gde je $f\star h(x)$ pseudo-konvolucija prvog tipa na poluprstenu $([0,+\infty],\min,\odot)$ ($\odot$ je generisano funkcijom $g(x) = e^x$, tj. $x\odot y = x+y$).

Sledeća teorema uspostavlje vezu izmedju pseudo-konvolucija definisanih na poluprstenu treće klase i g-konvolucija. I dalje posmatramo slučaj $G = \mathbb{R}$ i $* = +$.

Teorema 3.8 *Dat je poluprsten* $([0,+\infty),\max,\min)$. *Neka su* $f, h : G_+ \to [0,\infty)$ *neprekidne funkcije. Tada, postoji niz poluprstena* $(([0,+\infty),\oplus_n,\odot_n))_{n\in\mathbb{N}}$, *tako da*

$$f \star_{\max,\min} h = \lim_{n\to+\infty} f\star_n h,$$

gde je $\star_{\max,\min}$ pseudo-konvolucija prvog ili drugog tipa bazirana na poluprstenu $([0,+\infty),\max,\min)$ i $\star_n$ su g_n-konvolucije prvog ili drugog tipa bazirana na poluprstenima $([0,+\infty),\oplus_n,\odot_n)$.

Dokaz. Moguće je dobiti max – min slučaj (na intervalu $[0,+\infty)$) za

$$g_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x=0\\ \exp(-(\frac{n}{x})^n) & \text{za } x\leq n\\ \frac{x}{ne} & \text{za } x>n.\end{cases}$$

Posmatramo niz poluprstena $(([0,+\infty),\oplus_n,\odot_n))_{n\in\mathbb{N}}$, gde je

$$x\oplus_n y=g_n^{-1}(g_n(x)+g_n(y)) \quad \text{i} \quad x\odot_n y=g_n^{-1}(g_n(x)g_n(y)).$$

Za $n\to+\infty$ dobija se $x\oplus_n y\to\max(x,y)$ i, za sve konačne vrednosti x,y, $x\odot_n y\to\min(x,y)$. Sada, za $n\to\infty$ i $x\leq n$ imamo

$$g_n(x)\sim\frac{1}{e^{(\frac{n}{x})^n}} \quad \text{i} \quad g_n^{-1}(x)\sim\frac{n}{\sqrt[n]{\ln\frac{1}{x}}}.$$

Za pseudo-sabiranje $\oplus_n$ važi:

$$\begin{aligned} x\oplus_n y &= g_n^{-1}(g_n(x)+g_n(y))\\ &= \frac{n}{\sqrt[n]{\ln\frac{1}{\frac{1}{e^{(\frac{n}{x})^n}}+\frac{1}{e^{(\frac{n}{y})^n}}}}}\\ &= \frac{n}{\sqrt[n]{(\frac{n}{x})^n+(\frac{n}{y})^n-\ln\left(e^{(\frac{n}{x})^n}+e^{(\frac{n}{y})^n}\right)}}\\ &= \frac{n}{\sqrt[n]{U}},\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} U &= (\frac{n}{x})^n+(\frac{n}{y})^n-\ln\left(e^{(\frac{n}{x})^n}\left(1+\frac{e^{(\frac{n}{y})^n}}{e^{(\frac{n}{x})^n}}\right)\right)\\ &= (\frac{n}{y})^n-\ln\left(1+\frac{e^{(\frac{n}{y})^n}}{e^{(\frac{n}{x})^n}}\right)\end{aligned}$$

Neka je $0<x\leq y$, pa $e^{(\frac{n}{x})^n}\geq e^{(\frac{n}{y})^n}$ i $0\leq\frac{e^{(\frac{n}{y})^n}}{e^{(\frac{n}{x})^n}}\leq 1$. Sada

$$(\frac{n}{y})^n\geq U\geq(\frac{n}{y})^n-\ln 2,$$

tj.

$$y\leq\frac{n}{\sqrt[n]{U}}\leq\frac{y}{\sqrt[n]{1-\ln 2(\frac{y}{n})^n}}.$$

Kako $n \to +\infty$, možemo pretpostaviti da je $y \leq n$, pa $(\frac{y}{n})^n \leq 1$ i $\ln 2 < 1$ impliciraju

$$0 < \ln 2(\frac{y}{n})^n < 1.$$

Dakle

$$a < 1 - \ln 2(\frac{y}{n})^n < 1$$

gde je $a > 0$. Iz prethodnog sledi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 - \ln 2(\frac{y}{n})^n} = 1$ i

$$\lim_{n\to+\infty} x \oplus_n y = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{U}} = y = \max\{x, y\}.$$

Za pseudo-množenje važi

$$\begin{aligned} x \odot_n y &= g_n^{-1}(g_n(x) \cdot g_n(y)) \\ &= \frac{n}{\sqrt[n]{\ln e^{(\frac{n}{x})^n} \cdot e^{(\frac{n}{y})^n}}} \\ &= \frac{n}{\sqrt[n]{(\frac{n}{x})^n + (\frac{n}{y})^n}}. \end{aligned}$$

Sada, nejednakosti

$$\frac{n}{\sqrt[n]{2\max\left((\frac{n}{x})^n, (\frac{n}{y})^n\right)}} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{(\frac{n}{x})^n + (\frac{n}{y})^n}} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{\max\left((\frac{n}{x})^n, (\frac{n}{y})^n\right)}}$$

i

$$\frac{n}{\sqrt[n]{2(\frac{n}{\min(x,y)})^n}} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{(\frac{n}{x})^n + (\frac{n}{y})^n}} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{(\frac{n}{\min(x,y)})^n}},$$

impliciraju

$$\frac{\min(x,y)}{\sqrt[n]{2}} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{(\frac{n}{x})^n + (\frac{n}{y})^n}} \leq \min(x,y).$$

Kako je $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ imamo:

$$\lim_{n\to+\infty} x \odot_n y = \min(x,y).$$

Znači, za $0 = x < y$ dobijamo $x \oplus y = y$ $x \odot y = x$, tj. $\oplus = \max$ i $\odot = \min$.

Sada uzimamo niz poluprstena $(([0,+\infty), \oplus_n, \odot_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konstruisan u prethodnom koraku. Kada $n \to +\infty$ dobijamo $x \oplus_n y \to \max(x,y)$ i, za konačne vrenosti x, y, $x \odot_n y \to \min(x,y)$. Pseudo-konvolucije prvog tipa zadate na poluprstenima iz niza $(([0,+\infty), \oplus_n, \odot_n))_{n\in\mathbb{N}}$ su

$$f\star_n h(x) = g_n^{-1}\left(\int_0^x (g_n \circ f)(x-t) \cdot (g_n \circ h)(t)dt\right),$$

i, za $n \to +\infty$, dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f\star_n h(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{-\ln\int_0^x (\exp((n\backslash f(x-t))^n + (n\backslash h(t))^n))^{-1}\,dt}} \\ &= \sup_{t\in[0,x]}\{\min\{f(x-t), h(t)\}\} = f\star_{\max,\min} h(x),\end{aligned}$$

gde je $f\star_{\max,\min} h$ pseudo-konvolucija prvog tipa bazirana na $([0,\infty), \max, \min)$.

Dokaz je analogan za pseudo-konvolucije drugog tipa. □

Napomena 3.7 prethodna teorema ne važi za funkcije sa vrednostima u zatvorenom intervalu $[0,\infty]$. Ako $x = \infty$ i $y \neq 0$, ili obrnuto, tada $x \odot y = \infty$. Neprekidno proširenje granice niza $\odot_n$ na otvoreni interval je inf, ali ne postoji generator koji proširuje inf na $[0,\infty]^2$ jer uvek važi $\infty \odot x = \infty$ za $x \neq 0$.

U radu [23], kao posledica prethodne dve teoreme, je data i veza izmedju pseudo-konvolucija definisanih na poluprstenu prve klase gde je pseudo-množenje zadato generatorom i pseudo-konvolucija definisanih na poluprstenu treće klase.

Teorema 3.9 *Dat je poluprsten* $([0,+\infty), \max, \min)$. *Neka su* $f, h : G \to [0,\infty)$ *neprekidne funkcije. Tada, postoji niz poluprstena druge klase* $(([0,+\infty), \max, \odot_n))_{n\in\mathbb{N}}$, *tako da*

$$f\star_{\max,\min} h = \lim_{n\to+\infty} f\star_{\max,n} h,$$

gde je $\star_{\max,\min}$ *pseudo-konvolucija prvog ili drugog tipa bazirana na poluprstenu* $([0,+\infty), \max, \min)$, $\star_{\max,n}$ *pseudo-konvolucije prvog ili drugog tipa bazirane na poluprstenima* $([0,+\infty), \max, \odot_n)$ *i* $\odot_n$ *su striktna pseudo-množenja zadata generatorskim funkcijama.*

Dokaz. Neka su striktna pseudo-množenja iz niza poluprstena $(([0,+\infty), \max, \odot_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zadata aditivnim generatorima.

U poglavlju 1.4 je data teorema iz [51] po kojoj za striktno opadajuću funkciju k i $\lambda \in (0,\infty)$ važi:

za svako $\varepsilon > 0$, postoji λ_0 tako da

$$|(k^\lambda)^{-1}(k^\lambda(x) + k^\lambda(y)) - \min(x,y)| < \varepsilon,$$

za svako $\lambda \geq \lambda_0$ i $(x,y) \in [a,b]^2$.

Sada, ako je $x \odot_n y = (g_n)^{-1}(g_n(x) + g_n(y))$, gde $n \in \mathbb{N}$ i g je opadajući aditivni generator važi:

$$\lim_{n\to\infty} x \odot_n y = \min\{x,y\}.$$

Posmatrajmo sada niz pseudo-konvolucija (prvog ili drugog tipa) baziranih na poluprstenima $([0,+\infty), \max, \odot_n)$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f\star_{\max,n} h(x) &= \lim_{n\to\infty} \sup\left((g_n)^{-1}(g_n(f(x-t)) + g_n(h(t)))\right) \\ &= \sup(\min\{f(x-t), h(t)\}) \\ &= f\star_{\max,\min} h(x)\end{aligned}$$ □

Primer 3.4 Dat je niz poluprstena druge klase $(([0,1], \max, \odot_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gde su pseudo-množenja zadata aditivnim generatorima

$$g_n(x) = \begin{cases} (-\ln x)^n & \text{za } x \in (0,1], \\ +\infty & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Odgovarajuće pseudo-konvolucije prvog tipa za funkcije $f, h : \mathbb{R} \to [0,1]$ su

$$f \star_{\max,n} h(x) = \sup_{t\in[0,x]} \left((g_n)^{-1}(g_n(f(x-t)) + g_n(h(t)))\right)$$

gde je, za neko fiksno $t \in [0,x]$ takvo da $f(x-t), h(t) \in (0,1)$,

$$(g_n)^{-1}(g_n(f(x-t)) + g_n(h(t)))$$

$$= \exp\left(\min\{\ln f(x-t), \ln h(t)\}\left(1 + \left(\frac{\max\{\ln f(x-t), \ln h(t)\}}{\min\{\ln f(x-t), \ln h(t)\}}\right)^n\right)^{1\backslash n}\right),$$

a za $f(x-t) = 0$ ili $h(t) = 0$ i $f(x-t) = 1$ ili $h(t) = 1$

$$(g_n)^{-1}(g_n(f(x-t)) + g_n(h(t))) = \min\{f(x-t), h(t)\}.$$

Kako je, za $f(x-t), h(t) \in (0,1)$, $0 < \frac{\max\{\ln f(x-t), \ln h(t)\}}{\min\{\ln f(x-t), \ln h(t)\}} \leq 1$, kada $n \to +\infty$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} f \star_{\max,n} h(x) = \sup_{t\in[0,x]} \min\{f(x-t), h(t)\}.$$

Isto važi i za pseudo-konvolucije drugog tipa.

3.2 (S, U)-konvolucija

Ova glava se bavi pseudo-konvolucijama baziranim na uslovno distributivnom poluprstenu iz poglavlja 1.6.1 i odgovarajućim merama opisanim u poglavlju 2.3.1. Ova problematika je obradjena u radu [72], a specijalan slučaj koji se odnosi na užu klasu uslovno distributivnih poluprstena $([0,1], S, T)$ je obradjen u [31].

Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra podskupova nekog skupa X i neka je $m : \mathcal{A} \to [0,1]$ S-postojana S-mera za koju važi $m([0,\infty)) = 1$ i koja je translatorno invarijantna, tj. za svako $a \in [0,\infty)$ i za svako $A \in \mathcal{A}$ $m(A) = m(\{a + x \mid x \in A\})$.

Primer 3.5 *i) Jedina translatorno invarijantna S_M-mera $m : \mathcal{P}([0,\infty)) \to [0,1]$ za koju važi $m([0,\infty)) = 1$ i koja je kompletno maksitivna je*

$$m(A) = \begin{cases} 0 & \textit{za } A = \emptyset \\ 1 & \textit{inače.} \end{cases}$$

ii) Translatorno invarijantna S_L-postojana S_L-mera definisana za Borel-ove podskupove intervala $[0,\infty)$ *takva da je* $m([0,\infty)) = 1$, *je data sa*

$$m(A) = \min\left(c\cdot\lambda(A), 1\right),$$

λ *je Lebesgue-ova mera i* $c \in (0,\infty)$.

iii) Translatorno invarijantna S-postojana S-mera definisana za Borel-ove podskupove intervala $[0,\infty)$ *takva da* $m([0,\infty)) = 1$, *gde je S t-konorm iz primer 1.5, je data sa*

$$m(A) = \begin{cases} \min\left(\frac{\lambda(A)+1}{2}, 1\right) & za\ \lambda(A) > 0 \\ m(\{0\}) & za\ \lambda(A) = 0, \end{cases}$$

λ *je Lebesgue-ova mera i* $m(\{0\}) \leq \frac{1}{2}$.

Sledi definicije (S,U)-konvolucije:

Definicija 3.3 *Neka su* $f,h : [0,\infty) \to [0,1]$ *merljive funkcije.* (S,U)*-konvolucija* $f \star^{(S,U)} h : [0,\infty) \to [0,1]$ *funkcija f i h u odnosu na S-meru m je*

$$f \overset{(S,U)}{\star} h(x) = \int_{[0,x]}^{(S,U)} U\left(f(x-t), h(t)\right)\, dm(t).$$

Iz ranije navedene teoreme 2.9 sledi jednakost:

$$f \overset{(S,U)}{\star} h(x) = \int_{[0,x]}^{(S,U)} f(x-t)\, dm_h(t).$$

Sledi primer iz [28] važan za kompenzatorne operatore.

Primer 3.6 Data je uninorma

$$U(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} & \text{if } \{x,y\} \neq \{0,1\}, \\ 0 & \text{inače}, \end{cases}$$

koja je uslovno distributivna u odnosu na S_M i kompletno maksitivna S_M-mera. (S_M,U)-konvolucija je data sa

$$\begin{aligned} f \overset{(S_M,U)}{\star} h(x) &= \sup\nolimits_{t\in[0,x]}\left(u^{-1}\left(u(f(x-t)) + u(h(t))\right)\right), \\ &= \sup\nolimits_{t\in[0,x]}\left(\frac{f(x-t)h(t)}{f(x-t)h(t)+(1-f(x-t))(1-h(t))}\right). \end{aligned}$$

Za naredni primera neophodna je teorema 1.16 (iv), tj posmatramo uslovno distributivni poluprsten $([0,1], S, U)$ gde je

$$S = (\langle a,1,S^*\rangle) \quad \text{i} \quad U = (\langle 0,a,T\rangle, \langle a,1,T^*\rangle).$$

S^* nilpotentna t-konorma sa aditivnim generatorom s^*, $s^*(1) = 1$, T^* je striktna t-norma sa multiplikativnim generatorom s^* i T_1 proizvoljna neprekidna t-norma.

Primer 3.7 Neka je U trougaona norme T iz teoreme 1.16 i m odgovarajuća hibridna S-mera koja je kompletno maksitivna na onom delu jediničnog kvadrata gde je $S(x,y) = \max(x,y)$. (S,U)-konvolucija, tj. kako je $U = T$ (S,T)-konvolucija, $f \overset{(S,T)}{\star} h$ ima sledeći oblik:

- za $a \in [0,1)$ tako da je $f(x-t) \geq a$ i $h(t) \geq a$

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = s^{*-1}\left(\int_{[0,x]} s^*\left(f(x-t)\right) s^*\left(h(t)\right)\, dt\right),$$

- za $a \in [0,1)$ tako da je $f(x-t) < a$ ili $h(t) < a$

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = \sup_{t\in[0,x]} \left(\min\left(f(x-t), h(t)\right)\right),$$

- za $a = 1$ važi

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = \sup_{t\in[0,x]} \left(T_1\left(f(x-t), h(t)\right)\right).$$

Primer 3.8 Neka su U i S t-norma i t-konorma iz primera 1.5 i neka je m odgovarajuća S-mera iz primera 3.5(iii) koja je kompletno maksitivna na onom delu jediničnog kvadrata gde je $S(x,y) = \max(x,y)$. Ako je $m(\{0\}) = \frac{1}{2}$, (S,T)-konvolucija $f \overset{(S,T)}{\star} h$ za $f(x-t) \geq \frac{1}{2}$ i $h(t) \geq \frac{1}{2}$ je data sa

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = \int_{[0,x]} f(x-t)h(t)\, dt,$$

za $f(x-t) \leq \frac{1}{2}$ i $h(t) \leq \frac{1}{2}$

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,x]} \left(T_1\left(2f(x-t), 2h(t)\right)\right)$$

i u svim ostalim slučajevima

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = \sup_{t\in[0,x]} \left(\min\left(f(x-t), h(t)\right)\right).$$

Ako je $m(\{0\}) < \frac{1}{2}$, za $f(x-t) \leq \frac{1}{2}$ i $h(t) \leq \frac{1}{2}$ (S,T)-konvolucija je data sa

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,x]} \left(T_1\left(T_1\left(2f(x-t), 2h(t)\right), 2m(\{0\})\right)\right),$$

a u svim ostalim slučajevima (S,T)-konvolucija je

$$f \overset{(S,T)}{\star} h(x) = \sup_{t\in[0,x]} \left(\min\left(f(x-t), h(t), m(\{0\})\right)\right).$$

Slede teoreme koje se bave osobinama (S, U)-konvolucija ([72]).

Teorema 3.10 *(S, U)-konvolucija je komutativna i monotona binarna operacija na $\mathcal{M}$.*

Dokaz. Neka su ψ i φ jednostavne funkcije, tj. neka je kodomen funkcije φ skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varphi}\}$, a funkcije ψ skup $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n_\psi}\}$. Tada važi:

$$
\begin{aligned}
\varphi \overset{(S,U)}{\star} \psi(x) &= \int_{[0,x]}^{(S,U)} \varphi(x-t)\, dm_\psi(t) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n_\varphi} U(a_i, m_\psi(A_i)) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n} U(a_i, \mathop{\mathrm{S}}_{j=1}^{m} U(b_j, m(A_i \cap B_j)) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n} \mathop{\mathrm{S}}_{j=1}^{m} U(a_i, U(b_j, m(A_i \cap B_j)) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n_\varphi} \mathop{\mathrm{S}}_{j=1}^{n_\psi} U(U(a_i, b_j), m(A_i \cap B_j)),
\end{aligned}
$$

gde je $A_i = \{t \in [0,x] \mid \varphi(x-t) = a_i\}$ i $B_j = \{t \in [0,x] \mid \psi(t) = b_j\}$. S druge strane

$$
\begin{aligned}
\psi \overset{(S,U)}{\star} \varphi(x) &= \int_{[0,x]}^{(S,U)} \psi(x-t)\, dm_\varphi(t) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{j=1}^{n_\psi} U(b_j, m_\varphi(B_j)) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{j=1}^{m} U(b_j, \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n} U(a_i, m(B_j \cap A_i)) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{j=1}^{m} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n} U(b_j, U(a_i, m(B_j \cap A_i)) \\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{j=1}^{n_\psi} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n_\varphi} U(U(b_j, a_i), m(B_j' \cap A_i')),
\end{aligned}
$$

gde je $A_i' = \{p \in [0,x] \mid \varphi(p) = a_i\}$ i $B_j' = \{p \in [0,x] \mid \psi(x-p) = b_j\}$. Kako je mera m translatorno invarijantna, sledeća jednakost važi za svako $i \in \{1, 2, \cdots n_\varphi\}$ i svako $j \in \{1, 2, \cdots n_\psi\}$

$$m(A_i \cap B_j) = m(A_i' \cap B_j').$$

Komutativnost (S, U)-konvolucije za jednostavne funkcije sledi iz komutativnosti uninorme i prethodne jednakosti.

Neka su sada $f, h : [0, \infty) \to [0, 1]$ merljive funkcije i $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ i $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nizovi step funkcija za koje važi $\varphi_m \nearrow f$ i $\psi_n \nearrow h$.

Iz teoreme 2.9 i komutativnosti za jednostavne funkcije sledi:

$$\begin{aligned}
f \overset{(S,U)}{\star} h(x) &= \int_{[0,x]}^{(S,U)} f(x-t)\, dm_h(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,x]}^{(S,U)} \varphi_n(x-t)\, dm_h(t) \\
&= \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,x]}^{(S,U)} \varphi_n(x-t)\, dm_{\psi_k}(t) \\
&= \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,x]}^{(S,U)} \psi_k(x-t)\, dm_{\varphi_n}(t) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{[0,x]}^{(S,U)} \psi_k(x-t)\, dm_f(t) \\
&= \int_{[0,x]}^{(S,U)} h(x-t)\, dm_f(t) \\
&= h \overset{(S,U)}{\star} f(x),
\end{aligned}$$

tj. (S,U)-konvolucija je komutativna operacija.

Monotonost (S,U)-konvolucije sledi iz monotonosti uninorme i samog (S,U)-integrala. □

Teorema 3.11 *(S_M, U)-konvolucija u odnosu na kompletno maksitivnu meru je asocijativna operacija na $\mathcal{M}$.*

Dokaz. Neka su $f, h, k : [0,\infty) \to [0,1]$ funkcije iz $\mathcal{M}$. (S_M, U)-konvolucija ovih funkcija u odnosu na kompletno maksitivnu meru je

$$f \overset{(S_M,U)}{\star} h(x) = \sup_{u+v=x} U\left(f(u), h(v)\right).$$

Kako je uninorma U levo neprekidna, važi

$$\begin{aligned}
\left(f \overset{(S_M,U)}{\star} h\right) \overset{(S_M,U)}{\star} k(x) &= \sup_{u+v=x} U\left(f \overset{(S_M,U)}{\star} h(u), k(v)\right), \\
&= \sup_{u+v=x} U\left(\sup_{w+z=u} U\left(f(w), h(z)\right), k(v)\right), \\
&= \sup_{w+z+v=x} U\left(U(f(w), h(z)), k(v)\right).
\end{aligned}$$

S druge strane

$$\begin{aligned}
f \overset{(S_M,U)}{\star} \left(h \overset{(S_M,U)}{\star} k\right)(x) &= \sup_{u_1+v_1=x} U\left(f(u_1), h \overset{(S_M,U)}{\star} k(v_1)\right), \\
&= \sup_{u_1+v_1=x} U\left(f(u_1), \sup_{w_1+z_1=v_1} U\left(h(w_1), k(z_1)\right)\right), \\
&= \sup_{u_1+w_1+z_1=x} U\left(f(u_1), U(h(w_1), k(z_1))\right).
\end{aligned}$$

Iz asocijativnosti uninorme i prethodnih jednakosti sledi i asocijativnost (S_M, U)-konvolucije. □

Za svaku S-postojanu S-meru $m : \mathcal{A} \to [0,1]$ definišemo familiju $\mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{M}$ sa

$$\mathcal{M}_m = \{f \in \mathcal{M} \mid X \text{ je } S - m_f\text{-postojana}\},$$

gde je m_f mera data teoremom 2.9.

Teorema 3.12 *Ako je S t-konorma zadata aditivnim generatorom s, $s(e) = 1$, i s je multiplikativni generator za U, tada (S, U)-konvolucija je asocijativna operacija na $\mathcal{M}_m$.*

Dokaz. Neka su S i U zadate na sledeći način: $S(x,y) = s^{-1}(s(x) + s(y))$ i $U(x,y) = s^{-1}(s(x)s(y))$. Odgovarajuća (S,U)-konvolucija je data sa

$$f \overset{(S,U)}{\star} h(x) = s^{-1}\left(\int_{[0,x]} s(f(x-t))s(h(t))\, dt\right).$$

Asocijativnost takve (S,U)-konvolucije sledi iz asocijativnosti g-konvolucije, tj. iz teoreme 3.3. □

3.3 Pseudo-konvolucija bazirana na nekomutativnim i neasocijativnim pseudo-operacijama

U ovoj sekciji posmatramo specijalnu klasu uopštenih pseudo-operacija iz tvrdjenja 1.3, tj. $x \oplus y = k^{-1}(\varepsilon k(x) + k(y))$ i $x \odot y = k^{-1}(k^{\gamma}(x)k(y))$, gde su ε i γ fiksne pozitivne konstante, a k neprekidna striktno monotona funkcije definisana na $\mathbb{R}$. Koristeći odgovarajući integral i njegovu reprezentaciju iz teoreme 2.11, moguće je definisati sledeće uopštenje g-konvolucije za $G = \mathbb{R}$ i $* = +$ ([73]).

Definicija 3.4 *Neka su $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ neprekidan funkcije. Pseudo-konvolucija $f \star g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ funkcija f i g je*

$$f \star h(x) = k^{-1}\left(\int_0^x (k(f(x-t)))^{\gamma}\,(k(h(t)))^{\gamma}\, dt\right). \tag{38}$$

Za formulaciju naredne teoreme, poterbna je ranije definisan transformacija $[\cdot]_k$ tj.

$$[f]_k(x) = k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(f(x))\right),$$

kada je f neprekidna funkcija koja slika interval $[0,\infty)$ u $[0,\infty)$.

Teorema 3.13 *Neka su $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ neprekidne funkcije. Tada, pseudo-konvolucija funkcija f i g ima sledeću formu*

$$f \star h(x) = \int_{[0,x]}^{(\oplus,\odot)} ([f]_k(x-t) \odot h(t)) \,.$$

Dokaz. Iz definicije 3.4 sledi

$$\begin{aligned} f \star h(x) &= k^{-1}\left(\int_0^x (k(f(x-t)))^\gamma (k(h(t)))^\gamma \, dt\right) \\ &= k^{-1}\left(\int_0^x (k(f(x-t)) \cdot k(h(t)))^\gamma \, dt\right) \\ &= k^{-1}\left(\int_0^x \left(k\left(k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(f(x-t))\right) \odot h(t)\right)\right)^\gamma \, dt\right) \\ &= \int_{[0,x]}^{(\oplus,\odot)} \left(k^{-1}\left(k^{1/\gamma}(f(x-t))\right) \odot h(t)\right) \\ &= \int_{[0,x]}^{(\oplus,\odot)} ([f]_k(x-t) \odot h(t)) \end{aligned}$$

□

Posledica 3.1 *Pseudo-konvolucija je komutativna operacija, tj.*

$$f \star h(x) = h \star f(x).$$

Dokaz. Dokaz sledi iz jednakosti (38) pomuću smene $t_1 = x - t$. □

Kako pseudo-konvolucija iz definicije 3.4 je uopštenje g-konvolucije prvog tipa u smislu definicije 3.1 za $G = \mathbb{R}$ i $* = +$, postavlja se pitanje šta se dobija kao granična vrednost niza pseudo-konvolucija. Ovaj problem za g-konvolucije je obradjen u poglavlju 3.1.5, dok sledeće tvrdjenje daje odgovor za pseudo-konvolucije u smislu definicije 3.4

Teorema 3.14 *Neka je $(([0, +\infty), \oplus_\lambda, \odot_\lambda))_{\lambda \in [0,+\infty)}$ familija proširenih realnih poluprstena sa uopštenim pseudo operacijama datim striktno monotonom generatorskom funkcijom $k : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, tj. za $\varepsilon, \gamma > 0$ i $\lambda \in [0, +\infty)$*

$$x \oplus_\lambda y = (k^\lambda)^{-1}(\varepsilon k^\lambda(x) + k^\lambda(y)) \quad i \quad x \odot_\lambda y = (k^\lambda)^{-1}(k^{\gamma\lambda}(x) k^\lambda(y)).$$

Neka su $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ neprekidne funkcije. Tada, ako je sa $\star_\lambda$ označena pseudo-konvolucija u smislu definicije 3.4 za generator k^λ, važi:

(i) ako je k striktno rastuća funkcija

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f \star_\lambda [h]_k(x) = \sup_{t \in [0,x]} (f(x-t) \odot h(t)) \,, \tag{39}$$

gde je $\odot = \odot_1$,

(ii) ako je k striktno opadajuća funkcija

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f \star_\lambda [h]_k(x) = \inf_{t \in [0,x]} (f(x-t) \odot h(t)) \,, \tag{40}$$

gde je $\odot = \odot_1$.

Dokaz. (i) Posmatramo familiju uopštenih pseudo-operacija u smislu tvrdjenja 1.3 zadatih generatorom k^λ gde je k striktno rastuća funkcija i $\lambda \in (0,+\infty)$, tj.

$$x \oplus_\lambda y = (k^\lambda)^{-1}(\varepsilon k^\lambda(x) + k^\lambda(y)) \quad \text{i} \quad x \odot_\lambda y = (k^\lambda)^{-1}(k^{\gamma\lambda}(x) k^\lambda(y)).$$

Odgovarajuće konvolucije su oblika

$$f \star_\lambda h(x) = k^{-1}\left(\left(\int_0^x (k^{\gamma\lambda} \circ f)(x-t) \cdot (k^{\gamma\lambda} \circ h)(t)\, dt\right)^{1/\lambda}\right).$$

Sada, analogno dokazu teoreme 3.7, imamo

$$\int_0^x (k^{\gamma\lambda} \circ f)(x-t) \cdot (k^{\gamma\lambda} \circ h)(t)\, dt$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left((k^{\gamma\lambda} \circ f)(x-t_i) \cdot (k^{\gamma\lambda} \circ h)(t_i) \cdot \frac{x}{n}\right)\right).$$

Ako je $S_n = \sum_{i=1}^n \left((k^{\gamma\lambda} \circ f)(x-t_i)(k^{\gamma\lambda} \circ h)(t_i) \cdot \frac{x}{n}\right)$, zbog neprekidnosti generatora, važi

$$\lim_{\lambda\to+\infty} f \star_\lambda h(x) = k^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\lim_{\lambda\to+\infty} S_n^{1/\lambda}\right).$$

Iz nejednakosti

$${S_{n,l}}^{1/\lambda} \le S_n^{1/\lambda} \le {S_{n,r}}^{1/\lambda}$$

gde je

$$S_{n,l} = \frac{x}{n} \sup_{i\in\{1,\dots,n\}}\left((k^{\gamma\lambda} \circ f)(x-t_i) \cdot (k^{\gamma\lambda} \circ h)(t_i)\right)$$

i

$$S_{n,r} = x \sup_{i\in\{1,\dots,n\}}\left((k^{\gamma\lambda} \circ f)(x-t_i) \cdot (k^{\gamma\lambda} \circ h)(t_i)\right)$$

sledi:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S_n^{1/\lambda} = \sup_{i\in\{1,\dots,n\}}((k^\gamma \circ f)(x-t_i) \cdot (k^\gamma \circ h)(t_i)).$$

Sada važi

$$\lim_{\lambda\to+\infty} f \star_\lambda h(x)$$

$$= k^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty} \sup_{i\in\{1,\dots,n\}}((k^\gamma \circ f)(x-t_i) \cdot (k^\gamma \circ h)(t_i))\right)$$

$$= k^{-1}\left(\sup_{t\in[0,x]}((k^\gamma \circ f)(x-t) \cdot (k^\gamma \circ h)(t))\right).$$

Ako primenimo prethodnu jednakost na f i $[h]_k$, zbog neprekidnosti operacija sup i definicije pseudo-operacije $\odot$, dobijamo traženo.

(ii) Ukoliko je generatorska funkcija k striktno opadajuća, analogno prethodnom, imamo

$$\lim_{\lambda\to+\infty} f \star_\lambda h(x)$$

$$= k^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\inf_{i\in\{1,\dots,n\}}((k^{\gamma}\circ f)(x-t_i)\cdot(k^{\gamma}\circ h)(t_i))\right)$$
$$= k^{-1}\left(\inf_{t\in[0,x]}((k^{\gamma}\circ f)(x-t)\cdot(k^{\gamma}\circ h)(t))\right).$$

Sada, primenom prethodne jednakosti na f i $[h]_k$, zbog neprekidnosti operacija inf i same definicije pseudo-operacije $\odot$, dobijamo traženo. □

Napomena 3.8 Desna stranu jednakosti (39), kao i jednakosti (40), jesu modifikacije pseudo-konvolucije konstruisane u stilu pseudo-konvolucija iz definicije 3.1 ($G = \mathbb{R}$, $* = +$) ali na proširenom realnom poluprstenu prve klase gde je za pseudo-množenje uzeta upravo uopštena pseudo-operacija $x \odot y = k^{-1}\left(k^{\gamma}(x)k(y)\right)$.

Primer 3.9 Neka su k, $\oplus$ i $\odot$ generatorska funkcija i operacije iz primera 2.6 i neka su $f, h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ neprekidne funkcije. Pseudo-konvolucija funkcija f i g u smislu definicije 3.4

$$f \star h(x) = \sqrt[m]{\int_0^x f^{m\gamma}(x-t)h^{m\gamma}(t)\, dt.}$$

Za posmatrani generator $k(x) = x^m$ potrebna transformacije je oblika $[f]_k = \sqrt[\gamma]{f}$. Sada važi

$$f \star_{\lambda} [h]_k(x) = \sqrt[m\lambda]{\int_0^x f^{m\gamma\lambda}(x-t)h^{m\lambda}(t)\, dt}$$

i

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty} f \star_{\lambda} [h]_k(x) &= \lim_{\lambda\to+\infty} \sqrt[m\lambda]{\int_0^x f^{m\gamma\lambda}(x-t)h^{m\lambda}(t)\, dt}\\ &= \sup_{t\in[0,x]}\left(\sqrt[m]{f^{m\gamma}(x-t)\cdot h^{m}(t)}\right)\\ &= \sup_{t\in[0,x]}(f(x-t)\odot h(t)).\end{aligned}$$

4 Uopštena konvolucija kroz primene

Ova glava pokazuje ulogu uopštenih konvolucija u različitim matematičkim teorijama. Ispitane su i one operacije iz posmatranih oblasti koje je moguće tumačiti kao modifikacije uopštene konvolucije.

Prvo je pokazana veza izmedju centralnog pojma teorije probabilističkih metričkih prostora, trougaonih funkcija, i pseudo-konvolucije bazirane na realnim poluprstenima prve klase ([31, 24, 87]). Ispitane su i moguće modifikacije pseudo-konvolucije u cilju obuhvatanja što šire klase trougaonih funkcija. Dalje, ispitana je veza kopula, bitnog pojma statistike i verovatnoće, i funkcija raspodela slučajnih promenljivih sa uopštenim konvolucijama baziranim na poluprstenu prvog tipa ([31, 54, 87]). Treća sekcija ispituje ulogu pseudo-konvolucije u smislu definicije 3.1 u problemima optimizacije ([31, 67, 79]) i u varijacionoj analizi ([82]). U četvrtoj sekciji je pokazana uloga uopštene konvolucije i to pseudo-konvolucije prvog tipa u smislu definicije 3.1, u teoriji informacija ([26, 86]). Dalje, data je veza izmedju operacija sa fazi-brojevima i pseudo-konvolucija drugog tipa baziranih na poluprstenima prve klase ([17, 23, 34, 37, 42, 43, 49, 50]). U cilju proširenja klase operacija sa fazi brojevima koje je moguće interpretirati kao pseudo-konvolucije, razmatran je jedan vid modifikacije takvih pseudo-konvolucija. Ispitan je uticaj graničnih procesa iz poglavlja 3.1.5 na operacije sa fazi-brojevima ([23]). U šestoj i sedmoj sekciji posmatrane su teorija sistema ([2, 45, 67]) i matematička morfologija ([9, 10]) i uloga uopštenih konvolucija u tim teorijama. Osma sekcija daje primer diskretne pseudo-konvolucije baziranine na idempotentnom poluprstenu koja ima značajnu ulogu u teoriji brojeva ([35]). Poslednja sekcija pokazuje ulogu pseudo-konvolucija i uopštenih pseudo-operacija pri rešavanju nelinearnih diferencijalnih jednačina ([56, 57, 61, 67, 76, 78]).

4.1 Probabilistički metrički prostori

U ovoj sekciji je data veza probabilističkih metričkih prostora, tačnije, truogaonih funkcija i pseudo-konvolucija prvog tipa u smislu definicije 3.1 baziranih na poluprstenu prve klase.

Neka je sa Δ^+ označena familija funkcija distribucije sa sledećim osobinama: $F : [0, +\infty] \to [0, 1]$, $F(0) = 0$ i $F(+\infty) = 1$. Slede definicije trougaonih funkcija i probabilističkih metričkih prostora iz [31, 87].

Definicija 4.1 *Trougaona funkcija τ je binarna operacija na Δ^+ koja je komutativna, asocijativna, ne opada po obe konponente i ima neutralni element $\varepsilon_0 : [0, +\infty] \to [0, 1]$ definisan sa*

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & za\ x = 0, \\ 1 & za\ 0 < x \leq +\infty. \end{cases}$$

Definicija 4.2 *Probabilistički metrički prostor je uredjena trojka* $(M, \mathcal{F}, \tau)$ *gde je* M *neprazan skup,* $\mathcal{F} : M^2 \to \Delta^+$ *preslikavanje dato sa* $(p,q) \mapsto F_{pq}$*, a* τ *trougaona funkcija, takva da su sledeći uslovi ispunjeni za svako* $p, q, r \in M$*:*

(i) $F_{pp} = \varepsilon_0$;

(ii) $F_{pq} \neq \varepsilon_0$ *za* $p \neq q$;

(iii) $F_{pq} = F_{qp}$;

(iv) $F_{pr} \geq \tau(F_{pq}, F_{qr})$.

Jedan od važnih primera probabilističkih metričkih prostora je Menger-ov prostor kome trougaona funkcija iz naredne teoreme.

Teorema 4.1 *Neka je* T *je levo neprekidna t-norma i neka* $F, H \in \Delta^+$, $u, v, x \in [0, \infty]$. *Tada pseudo-konvolucija prvog tipa za* $\oplus = \max$, $\odot = T$ *i* $* = +$

$$F \star H(x) = \sup \{T(F(u), H(v)) \mid u + v = x\},$$

je trougaona funkcija.

Kako različite trougaone funkcije omogućavaju konstrukciju novih probabilističkih metričkih prostora, veliki značaj se pridaje problemu konstrukcije trougaonih funkcija. Sledeća teorema daje postupak konstrukcije novih trougaonih funkcija koji je u direktnoj vezi sa pseudo-konvolucijama. Prvo je potrebno definisati klasu binarnih operacija ([87]).

Definicija 4.3 $\mathcal{L}$ *je klasa binarnih operacija* L *definisanih na* $[0, +\infty)$ *koji zadovoljavaju sledeće uslove*

(i) $L : [0, +\infty)^2 \to [0, +\infty)$,

(ii) L *ne opada po obe komponente,*

(iii) L *je neprekidna na* $[0, +\infty)^2$.

Sledi teorema koja daje vezu trougaonih funkcija i pseudo-konvolucija.

Teorema 4.2 *Neka je* T *levo neprekidna t-norma,* S *neprekidna t-konorma,* $*$ *binarna operacija iz definicije 3.1 koja pripada klasi* $\mathcal{L}$ *i neka su* $F, H \in \Delta^+$, $u, v, x \in [0, \infty]$. *Tada pseudo-konvolucije prvog tipa funkcija* F *i* H *u smislu definicije 3.1 bazirane na poluprstenima prve klase* $([0, +\infty], \max, T)$ *i* $([0, +\infty], \min, S)$, *tj.*

$$F \star G(x) = \sup \{T\,(F(u), G(v)) \mid u * v = x\}$$

i

$$F \star G(x) = \inf \{S\,(F(u), G(v)) \mid u * v = x\}.$$

jesu trougaone funkcije.

Napomena 4.1 U [87] je data konstrukcija trougaonih funkcija pomoću binarnih operacija iz klase $\mathcal{L}$, ali pri tom postupku binarane operacije ne moraju zadovoljavati zakon kancelacije. Tako formirane trougaone funkcije jesu $\tau_{T,L} = \sup\{T(F(u), G(v)) \mid L(u,v) = x\}$ i $\tau_{S,L} = \inf\{S(F(u), G(v)) \mid L(u,v) = x\}$ i mada njihiova asocijativnost nije narušena, nisu pseudo-konvolucije u smislu definicije 3.1. Ove operacije se mogu smatrati jednim vidom modifikacije pseudo-konvolucija iz definicije 3.1 kod koga je uslov kancelacije za $*$ zamenjen nešto slabijim uslovom

$$u_1 < u_2 \wedge v_1 < v_2 \Rightarrow L(u_1, v_1) < L(u_2, v_2), \tag{41}$$

Karakteristični predstavnici ove modifikacije su trougaone funkcije $\tau_{T,\max}$ i $\tau_{S,\max}$.

Napomena 4.2 Neka su $F, H \in \Delta^+$ i $x \in [0, \infty]$. Trougaona funkcija sa identitetom ε_0 iz [87]

$$(F \star H)(x) = \int_{[0,x)} F(x-t)dH(t) \text{ za } x \in (0, \infty),$$

$$(F \star H)(0) = 0 \text{ i } F \star H(\infty) = 1,$$

nije g-konvolucija u smislu definicije 3.1. Ovakva trougaona funkcija se može smatrati modifikacijom g-konvolucije. Obične g-konvolucije primenjene na funkcije distribucije nisu trougaone funkcije zbog nepostojanja neutralnog elementa.

4.1.1 Kopule

Kopule (eng. copulas) su važan pojam kako u statistici i teoriji verovatnoće ([31, 24, 87]) tako i u probabilističkim metričkim prostorima ([54, 31, 84, 87]). U ovoj sekciji je data veza izmedju kopula i uopštenih konvolucija. Slabljenjem odredjenih uslova za operacije poluprstena i operaciju $*$ iz definicije 3.1 uveden je i jedan vid modifikacije pseudo-konvolucije koji ima primenu u probabilističkim metričkim prostorima.

Slede definicije subkopule i kopule iz [54].

Definicija 4.4 *Dvodimenziona subkopula (2-subkopula ili subkopula) je funkcija C' koja ima sledeće osobine:*

(i) *domen funkcije C' je $S_1 \times S_2$ gde su S_1 i S_2 podskupovi jediničnog intervala koji sadrže* 0 *i* 1,

(ii) *za svaki pravouganik $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ takav da tačke (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) i (x_2, y_2) pripadaju domenu funkcije C' važi*

$$C'(x_2, y_2) - C'(x_2, y_1) - C'(x_1, y_2) + C'(x_1, y_1) \geq 0$$

i $c'(x, 0) = 0 = C'(0, y)$ za svako $(x, y) \in S_1 \times S_2$, *(iii) za svako $u \in S_1$ i svako $v \in S_2$ važi*

$$C'(u,1) = u \quad i \quad C'(1,v) = v.$$

Definicija 4.5 *Dvodimenziona kopula (2-kopula ili kopula) je 2-subkopula sa domenom* $[0,1]^2$.

U [54] je pokazano da je kopule moguće oceniti, tj. za svaku kopulu C i svako $(u,v) \in [0,1]^2$ važi

$$T_L(u,v) \leq C(u,v) \leq T_M(u,v), \tag{42}$$

gde je $T_M(u,v) = \min(u,v)$, a $T_L(u,v) = \max(u+v-1,0)$. Nejednakost (42) je verzija nejednakosti Fréchet-Hoeffding-a za kopule (videti [54]). T_L se naziva donje ograničenje Fréchet-Hoeffding-a, a T_M gornje ograničenje Fréchet-Hoeffding-a.

Kako iz (42) sledi da se sve kopule nalaze izmedju najjače i Lukasiewicz-eve t-norme, postavlja se pitanje odnosa t-normi i kopula. Ta veza je obradjena u [31]. Izmedju ostalog, dokazano je da Arhimedova t-norma zadata generatorom je kopula ako i samo ako je generator konveksna funkcija.

U ovoj sekciji posmatramo problem odredjivanja zajedničke raspodele dve slučajne promenljive X i Y iz [54]. Važi sledeća teorema

Teorema 4.3 *(Sklar) Neka je H zajednička distribucija sa marginama F i G. Tada, postoji kopula C takva da za svako $x, y \in [-\infty, +\infty]$ važi*

$$H(x,y) = C\left(F(x), G(y)\right). \tag{43}$$

Ako su F i G neprekidne, kopula C je jedinstveno odredjena. U Suprotnom, kopula C je jedinstveno odredjena na $rangF \times rangG$. Ako je C kopula iF i G distribucije, tada H definisano sa (43) je zajednička distribucija sa marginama F i G.

Tražena zajednička raspodela je ocenjena pseudo-konvolucijama baziranim na poluprstenima prve klase. Neka su X i Y dve slučajne promenljive sa funkcijama raspodela F_X i F_Y. Raspodela njihove sume je označena sa G, tj. $G(z) = P[X+Y \leq z]$. Problem iz [54] se svodi na odredjivanje rubnih vrednosti $G^*(z) = \sup_G G(z)$ i $G_*(z) = \inf_G G(z)$ gde se supremum i infimum traže na Fréchet-Hoeffding-ovoj klasi $H(F_X, F_Y)$ svih zajedničkih distribucija H sa marginama F_X i F_Y. Odgovor na to pitanje daje naredna teorema koja je bazirana na odgovarajućoj teoremi iz [54].

Teorema 4.4 *Neka su X i Y slučajne promenljive sa raspodelama F_X i F_Y. Ako je G raspodela promenljive $X+Y$, tada*

$$F_X \star_{\max,T_L} F_Y(z) \leq G(z) \leq F_X \star_{\min,S_L} F_Y(z),$$

gde su $\star_{\max,T_L}$ i $\star_{\min,S_L}$ pseudo-konvolucije u smislu definicije 3.1 bazirane na poluprstenima $([0,1], \max, T_L)$ i $([0,1], \min, S_L)$ i $* = +$.

Kao što je već pomenuto, T_L je Lukasiewicz-eva t-norma, a S_L je Lukasiewicz-eva t-konorma.

Veza izmedju pseudo-konvolucija $\star_{\max,T_L}$ i $\star_{\min,S_L}$ i kopula proističe iz Sklar-ove teoreme koja je formulisana za funkcije distribucije u opštem slučaju (videti [54]).

Analogan rezultat je moguće primeniti i na druge operacije, tj. sabiranje slučajnih promenljivih u teoremi ?? se može zameniti sa $L(X,Y)$ gde je $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neopadajuća i neprekidna funkcija. Tada, ako L ispunjava sve neophodne uslove iz definicije 3.1, problem se svodi na odredjivanje pseudo-konvolucija baziranih na istim poluprstenima kao u teoremi 4.4, ali za $* = L$.

Moguće je uspostaviti još jedan vid veze izmedju kopula i pseudo-konvolucija i to u smislu predhodnog poglavlja. U [87] je dato sledeće tvrdjenje:

Teorema 4.5 *Neka je C kopula, $L \in \mathcal{L}$ i $F, G \in \Delta^+$. Ako je C asocijativna operacija (iz čega sledi komutativnost) i ako je L komutativna i asocijativna operacija sa nulom kao neutralnim elementom koja ispunjava uslov (41), tada funkcija definisana sa*

$$\rho_{C,L}(F,G)(x) = \inf\left\{\overline{C}\,(F(u), G(v)) \mid L(u,v) = x\right\}$$

gde $x \in \mathbb{R}^+$ i $\overline{C}(x,y) = x + y - C(x,y)$ je trougaona funkcija.

Kako dual kopule $\overline{C}$ ne mora ispunjavati sve uslove neophodne za pseudo-množenje iz definicije 1.10, uredjena trojka $([0,1], \min, \overline{C})$ nije realni poluprsten iz poglavlja 1.3, pa funkcija $\rho_{C,L}(F,G)(x)$ je modifikacija pseudo-konvolucije date definicijom 3.1 bazirana na uredjenoj trojci $([0,1], \min, \overline{C})$. Operacija L koja ima ulogu operacije $*$ iz definicije 3.1 ne mora biti kancelativna, pa se modifikacija pseudo-konvolucije iz poglavlja 3.1.1 ogleda i u relaksaciji ovog uslova.

4.2 Optimizacija

U ovoj sekciji je ispitana veza izmedju uopštene konvolucije i problema optimizacije. Data je definicija pseudo-Laplace-ove transformacije i formula pseudo-razmene iz [61, 67, 79], tj. aparatura koja povezuje pseudo-konvolucije i pseudo-operacije.

Problem teorije optimizacije koji se ovde rešava je maksimizacija funkcije korisnosti (eng. utility function), tj. traženja maksimuma izraza

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_N(x_N),$$

na domenu $D = \{(x_1, x_2, ..., x_N) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_N = x,\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., N\}$. Izloženi problem se može prevesti na odredjivanje funkcije $f(x)$ oblika

$$f(x) = \max_D \left(f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_N(x_N)\right),$$

tj. na traženje funkcije

$$f(x) = f_1 \star f_2 \star \cdots \star f_N(x)$$

koja je pseudo-konvolucija prvog tipa na poluprstenu $([0,\infty), \max, +)$.

Ovaj tip problema se često javlja u matematičkoj ekonomiji i operacionim istraživanjima (videti [2], [3]) i moguće ga je rešiti primenom pseudo-Laplace-ovih transformacija, formule pseudo-zamene (eng. pseudo-exchange) i inverzne pseudo-Laplace-ove transformacije. Slede definicije i teoreme iz [61, 67].

Definicija 4.6 *Pseudo-karakter groupe $(G,+)$, $G \subset \mathbb{R}$ je neprekidno (u odnosu na uobičajenu topologiju na skupu realnih brojeva) preslikavanje $\xi : G \to P$ grupe $(G,+)$ u poluprsten $(P, \oplus, \odot)$ sa osobinom*

$$\xi(x+y) = \xi(x) \odot \xi(y), \quad x, y \in G.$$

Forma pseudo-karaktera za tri već pomenute klase poluprstena se može pronaći u [31, 61, 67].

Neka je $G = \mathbb{R}$, $(G,+)$ komutativna grupa i P poluprsten I, II ili III klase.

Definicija 4.7 *Poluprsten $B(G,P)$ u slučaju klasa I i III (pseudo-sabiranje je idempotentno) se sastoji od ograničenih (u odnosu na poredak definisan na P) funkcija, a u slučaju klase II (pseudo-sabiranje je zadato aditivnim generatorom) se sastoji od funkcija $f : G \to P$ takvih da $g^{-1}(|f|) \in L_1(G)$.*

Definicija 4.8 *Pseudo-Laplace-ova transformacija $\mathcal{L}^{\oplus}(f)$ funkcije $f \in B(G,P)$ je definisana sa*

$$(\mathcal{L}^{\oplus} f)(\xi)(z) = \int_{G\cap[0,\infty)}^{\oplus} \xi(x,z) \odot dm_f(x),$$

gde je ξ pseudo-karakter.

Ako je bar pseudo-sabiranje idempotentna operacija, posmatramo i drugi tip pseudo-Laplace-ove transformacije:

$$(\mathcal{L}^{\oplus} f)(\xi)(z) = \int_{G}^{\oplus} \xi(x,z) \odot dm_f(x),$$

tj. pseudo-integraljenje se vrši preko celog skupa G.

Forma pseudo-Laplace-ove transformacije je poznat za tri specijalne klase poluprstena i može se pronaći u [67]. Kako je za početan problem relevantan poluprsten $([0,\infty), \max, +)$, pseudo-Laplace-ova transformacija ima oblik

$$(\mathcal{L}^{\oplus} f)(z) = \sup_{x\geq 0}(-xz + f(x)).$$

Napomena 4.3 Upravo poznata Legendre-Fenchel-ov transformacija: $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(xy - f(y))$ za neko $y \in \mathbb{R}$, koja ima veliku primenu u matematici finansija ([27, 81]) je pseudo -Laplace-ova transformacija za $\oplus = \sup$ i $\odot = +$ funkcije $-f$.

Važan rezultat, dokazan u [67], koji je neophodan za rešavanje početnog problema je formula pseudo-razmene, formula koja prevodi pseudo-konvolucije prvog i drugog tipa u pseudo-množenje.

Teorema 4.6 *Za proizvoljne funkcije f_1 i f_2 iz $B(G,P)$ važi*

$$\mathcal{L}^{\oplus}(f_1 \star f_2) = \mathcal{L}^{\oplus}(f_1) \odot \mathcal{L}^{\oplus}(f_2).$$

Potrebno je još i postojanje inverzne pseudo-Laplace-ove ([67]).

Teorema 4.7 *Ako je $\mathcal{L}^{\oplus}(f) = F$ za poluprsten $([0,\infty), \max, +)$, tada postoji $(\mathcal{L}^{\oplus})^{-1}$, inverzna pseudo-Laplace-ova transformacija, i*

$$((\mathcal{L}^{\oplus})^{-1}(F))(x) = \inf_{z\geq 0}(xz + F(z)).$$

Neka je

$$f(x) = \max_{D}(f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_N(x_N)),$$

pseudo-konvolucija prvog tipa funkcija $f_1, \ldots, f_N$ sa početka ove sekcije.

Primenom pseudo-Laplace-ove transformacije, formule pseudo-razmene i inverzne pseudo-Laplace-ove transformacije, dobijamo rešenje početnog problema:

$$\mathcal{L}^{\oplus}(f) = \mathcal{L}^{\oplus}(f_1(x_1) \star \cdots \star f_N(x_N)) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^{\oplus}(f_i),$$

i

$$f(x) = \left(\left(\mathcal{L}^{\oplus}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^{\oplus}(f_i)\right)(x) = \min_{z\geq 0}\left(xz + \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^{\oplus}(f_i)(z)\right).$$

4.2.1 Variaciona analiza u optimizaciji

Ova podsekcija se bavi ulogom pseudo-konvolucije bazirane na specijalnom poluprstenu $([-\infty, +\infty], \oplus, \odot)$ u problemima odredjivanja minimuma i maksimuma neke funkcije nad n-dimenzionim skupom. Problem minimuma i maksimuma nad n-dimenzionim skupom spada u fundamentalne probleme variacione analize i o toj temi se moze vise naći u [82].

U [82] je dat princip apstraktne minimizacije:

> Problem minimizacije konačne funkcije f nad nekim podskupom C skupa $\mathbb{R}^n$ je ekvivalentan problemu minimizacije posmatrane funkcije $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ nad celim $\mathbb{R}^n$ uz identifikaciju
>
> $$dom f = \text{skup mogućih rešenja},$$

$$argminf = \text{skup optimalnih rešenja},$$

$$\inf f = \text{optimalne vrednosti},$$

gde je $argminf = \begin{cases} \{x \in C \mid f(x) = \inf_C f\} & \text{za } \inf_C f \neq +\infty, \\ \varnothing & \text{za } \inf_C f = +\infty. \end{cases}$

Identifikacijom skupa C njegovom karakterističnom funkcijom je uspostavljena veza izmedju podskupova skupa $\mathbb{R}^n$ i funkcija na $\mathbb{R}^n$. Na taj način je ukršten geometrijski i analitički koncept problema. U variacionoj analizi grafovi i dalje imaju značajnu ulogu pri radu sa vektor-valued funkcijama, ali funkcije sa kodomenom $[-\infty, +\infty]$ zahtevaju nešto drugačiji pristup. Uvodi se pojam epigraf ([82]).

Definicija 4.9 *Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ epigraf je skup definisan na sledeći način:*

$$epif = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \alpha \geq f(x)\}.$$

U [82] je data i teorema koja sadrži uslove neophodne da funkcija $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ dostigne minimum nad $\mathbb{R}^n$ u nekoj tački, tj. da skup $argminf$ bude neprazan.

U [82] su definisane operacije sa funkcijama oblika $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$. Operacija poznata kao epi-sabiranje je definisana na sledeći način:

$$f_1 \sharp f_2(x) = \inf_t \{f_1(x-t) + f_2(t)\},$$

gde su $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ i prihvaćena je konvencija $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$. Ovako definisano epi-sabiranje je upravo pseudo-konvolucija drugog tipa u smislu definicije 3.1 bazirana na poluprstenu $([-\infty, +\infty], \min, +)$. U [82] je pokazano da je epi-sabiranje komutativna, asocijativna operacija sa neutralnim elemntom što je u saglasnosti sa osobinama pseudo-konvolucija baziranih na poluprstenima prve klase.

U [82] je pokazana i veza izmedju zbira skupova i epi-sabiranja, tj. pseudo-konvolucije njihovih karakterističnih funkcija:

$$\chi_{C+D} = \chi_C \sharp \chi_D = \chi_C \star \chi_D,$$

gde je $C + D = \{c + d \mid c \in C, \ d \in D\}$. Drugim rečima, suma Minkowski-ja ([38]) je pseudo-konvolucija drugog tipa bazirana na poluprstenu $([-\infty, +\infty], \min, +)$.

Neke važne pojmove variacione analize je moguće predstaviti preko epi-sabiranja, tj. pseudo-konvolucije:

- funkcija daljine d_C: $d_C = \chi_C \sharp |\cdot| = \chi_C \star |\cdot|$,
- Moreau-ov omot $e_\lambda f$: $e_\lambda f = f \sharp \frac{1}{2\lambda}|\cdot|^2 = f \star \frac{1}{2\lambda}|\cdot|^2$,

gde je χ_C karakteristična funkcije skupa C, a $|\cdot|$ apsolutna vrednost (videti [82]).

Takodje, u [82] dokazan je analogan formule pseudo-razmene date teoremom 4.6:

$$epi(f_1 \sharp f_2) = epi(f_1 \star f_2) = epi f_1 + epi f_2,$$

kada postoji konačan vrednost $f_1 \sharp f_2$.

4.3 Teorija informacija

U ovoj sekciji je ispitana veza uopštenih konvolucija, tačnije jednog vida modifikacije pseudo-konvolucije iz definicije 3.1, i aksiome aditivnosti ključne za definiciju mere informacije ([26, 31, 83, 87, 95].

Teoriju informacija zasnovanu na osnovnim pojmovima teorije verovatnoće uvode 1948. godine Wiener [95] i 1949. godine Shannon [83]. Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ prostor verovatnoće. Sada, za neki dogadjaj $A \in \mathcal{A}$ moguće je definisati funkciju

$$J(A) = -\log p(A)$$

koja predstavlja informaciju odredjenu realizacijom dogadjaja A. Preslikavanje $J : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se naziva Wiener-Shannon mera informacije.

Opštiju definiciju mere informacije daju Kampè de Fèriet i Forte 1967. godine (videti [26]).

Definicija 4.10 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ prostor verovatnoće. Tada se preslikavanje $J : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ naziva mera informacije ako zadovoljava sledeće uslove:*
(I1) $J(\Omega) = 0, J(\emptyset) = +\infty$;
(I2) $B \subset A \to J(B) \geq J(A)$;
(I3) ako su dogadjaji A i B nezavisni u smislu Banach-Marczewski-og, tada $J(A \cap B) = J(A) + J(B)$;
(I4) ako je $A \cap B = \emptyset$, $J(A \cup B) = F(J(A), J(B))$ za neku funkciju F;
(I5) $J(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to +\infty} J(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

Funkcija F koja se pojavljuje u definiciji 4.10 se naziva zakon kompozicije. Obično, za F se traži neprekidnost, simetričnost ($F(x, y) = F(y, x)$), asocijativnost ($F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$), monotonost ($F$ je neopadajuće po obe komponente) i postojanje neutralnog elementa ($F(x, \infty) = x$).

Godine 1969. Schweizer i Sklar ([86]) predlažu da se informacija J posmatra kao slučajna promenljiva na intervalu $[0, \infty]$ umesto do tada prihvaćenog pristupa po kojem je J tretirano kao nenegativan realan broj. Pomenuta ideja je slična Menger-ovoj generalizaciji metričkih prostora. Schweizer i Sklar uvode funkciju distribucije

$$K(A) : [0, \infty] \to [0, 1]$$

kao levo neprekidno neopadajuće preslikavanje koje zadovoljava uslov $K(A)(0) = 0$. Sada, neka je $J(A)$ slučajna informacija na $[0, \infty]$ za svako $A \in \mathcal{A}$ i $K(A, x)$ verovatnoća da je informacija dobijena realizacijom dogadjaja A manja od x. Aksiome $(I1) - (I5)$ je moguće zapisati u stilu Schweizer-a i Sklar-a. Aksiom aditivnosti je transformisati u sledeći oblik:

(I4') za svako $A, B \in \mathcal{A}$ takvo da $A \cap B = \varnothing$ važi

$$K(A \cup B) = \phi(K(A), K(B)),$$

gde je ϕ neprekidna, komutativna, neopadajuća funkcija na sistemu distribucija zadatih na intervalu $[0, \infty]$, sa neutralnim elementom 0 i anihilatorom 1.

Jedna od često korišćenih funkcija ϕ iz uslova I4' je data sledećom teoremom.

Teorema 4.8 *Neka je S neprekidna t-konorma, $u, v, x \in [0, +\infty]$ i neka su H i G distribucije na $[0, +\infty]$. Tada modifikacija pseudo-konvolucije prvog tipa (iz definicije 3.1) bazirana na $([0,1], \max, S)$ za $* = +$ data sa*

$$H \star G(x) = \sup_{u+v=x} S(H(u), G(v)), \tag{44}$$

ispunjava sve uslove funkcije ϕ iz aksiome $I4'$.

Napomena 4.4 Kao što je već rečeno, uredjena trojka $([0,1], \max, S)$ nije realni poluprsten iz sekcije 1.3 jer dolazi do odstupanja kod uslova $x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. U tom slučaju, neutralni element za modifikovanu pseudo-konvoluciju (44), tj. pseudo-delta funkcija iz poglavlja 3.1, je identički jednaka nuli što u potpunosti odgovara osobinama funkcije ϕ.

4.4 Fazi brojevi

U ovom delu teze je objašnjen značaj pseudo-konvolucija drugog tipa baziranih na poluprstenima prve ili treće klase za teoriju fazi brojeva. Pokazano je da se operacije sa fazi brojevima mogu interpretirati kao pseudo-konvolucije iz poglavlja 3.1, a poredjenje fazi brojeva kao jedan vid modifikacije pomenutih pseudo-konvolucija.

Fazi broj se definiše kao fazi podskup skupa realnih brojeva koji je dat svojom funkcijom pripadnosti (videti [16]). Takva definicija je najsveobuhvatnija definicija fazi broja. Kako se u praksi koriste neke mnogo manje opšte definicije, jedna od njih (videt [28]) je data u daljem tekstu.

Ako je A fazi broj, njegova funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ je obeležena sa $A(x)$.

Definicija 4.11 *Neka je A fazi podskup skupa realnih brojeva. A je fazi broj ako je normalizovan i konveksan, tj. ako je ispunjeno:*

(i) $A(x) = 1$ *za neko* $x \in \mathbb{R}$;

(ii) za svako $x, y, z \in \mathbb{R}$ *važi*

$$x < y < z \quad \Rightarrow \quad A(y) \geq \min\left(A(x), A(z)\right).$$

Sledeći primeri daju fazi brojeve koji se najčešće javljaju u praksi.

Primer 4.1 Date su dve nerastuće neprekidne funkcije $L, R : [0,1] \to [0,1]$ za koje važi $L(0) = R(0) = 1$ i $L(1) = R(1) = 0$.

LR-fazi broj **A**, $A = (a, \alpha, \beta)_{L,R}$, je funkcija koja slika skup realnih brojeva na interval $[0,1]$ zadata na sledeći način

$$A(x) = \begin{cases} R\left(\frac{x-a}{\beta}\right) & \text{ako } a \leq x \leq a + \beta, \\ L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & \text{ako } a - \alpha \leq x \leq a, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Tačka $a \in \mathbb{R}$ se naziva centar, $\alpha > 0$ je leva širina, $\beta > 0$ desna širina za A. Za $L(x) = R(x) = 1 - x$, dobija se trougaoni fazi broj.

LR-fazi interval **A**, $A = (l, r, \alpha, \beta)_{L,R}$, za $l \leq r$ je funkcija koja slika skup realnih brojeva na interval $[0,1]$:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq l - \alpha, \\ L\left(\frac{l-x}{\alpha}\right) & \text{za } l - \alpha \leq x \leq l, \\ 1 & \text{za } l \leq x \leq r, \\ R\left(\frac{x-r}{\beta}\right) & \text{za } r \leq x \leq r + \beta, \\ 0 & \text{za } r + \beta \leq x. \end{cases}$$

Tačke l i r se nazivaju levi i desni vrh, $\alpha > 0$ leva širina i $\beta > 0$ desna širina za A.
Specijalno, za $L(x) = R(x) = 1 - x$ dobijamo trapeziodni fazi interval.

Aritmetičke operacije sa fazi brojevima su zasnovane na Zadeh-ovom principu proširenja (eng. extension principle) (videti [33, 99]), tj ako je $*$ binarna operacija na $\mathbb{R}$, T proizvoljna t-norma i A i B fazi brojevi, tada

$$A *_T B(z) = \sup_{x*y=z} T(A(x), B(y)) \qquad \text{za } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Upravo na principu proširenja je bazirana i naredna teorema.

Teorema 4.9 *Neka je T proizvoljna t-norma i $*$ komutativna, asocijativna, kancelativna binarna operacija na $\mathbb{R}$ koja ima neutralni element. Tada, pseudo-konvolucije drugog tipa bazirane na poluprstenu $([0,1], \max, T)$ jesu proširenje operacije $*$ na skup fazi brojeva.*

Oduzimanje i deljenje fazi brojeva, zbog činjenice da oduzimanje i deljenje na skupu realnih brojeva nisu komutativne operacije, nisu pseudo-konvolucije u smislu definicije 3.1, već se mogu smatrati jednim vidom modifikacije pomenute pseudo-konvolucije do koje se dolazi relaksacijom uslova za operaciju $*$. Kao posledicu teorema 3.1 i 4.9 dobijamo da su sabiranje i množenje fazi brojeva komutativne i asocijativne operacije sa neutralnim elementom za svaku levo neprekidnu t-normu T. Naravno, zbog oslabljenih uslova za $*$, teorema 3.1 se ne može primeniti na modifikovane pseudo-konvolucije koje odgovaraju oduzimanju i deljenju fazi brojeva.

Napomena 4.5 U orginalnom Zadeh-ovom principu proširenja koristi se najjača t-norma $T_{\mathbf{M}} = \min$. U tom slučaju sabiranje i množenje fazi brojeva jesu pseudo-konvolucije bazirane na poluprstenu treće klase.

Na sabiranje fazi brojeva je moguće primeniti i teorema iz poglavlja 3.1.5 koje nam daje vezu izmedju pseudo-konvolucija baziranih na poluprstenima prve klase i poluprsrenima treće klase. Sledeća teorema uspostavlja vezu izmedju orginalnog i proširenog Zadeh-ovog principa (videti [23]).

Teorema 4.10 Neka su A i B dva fazi broja. Tada, postoji niz striktnih t-normi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da važi:

$$\lim_{n\to\infty} A \oplus_{T_n} B(x) = A \oplus_{\min} B(x).$$

Dokaz sledi iz teoreme 3.9 primenjene na sabiranje fazi brojeva.

U praksi se, kao jedan od uobičajenih zahteva, pojavljuje zahtev za invarijantnošću oblika fazi brojeva pri aritmetičkim operacijama. Očuvanje oblika omogućava kontrolu rezultujuće širine pri radu sa LR-fazi brojevima ili LR-fazi intervalima (videti [11, 34, 37, 42, 43, 48, 49, 50]). Ako su aritmetičke operacije sa kojima radimo baš pseudo-konvolucija, očuvanje oblika znači da tražimo zatvorenost pseudo-konvolucije u odnosu na odredjenu familiju funkcija, odnosno, fazi brojeva. Sledeće teoreme su posledice rezultata iz [17] i daju nam odgovor za slučaj najjače i najslabije t-norme.

Teorema 4.11 Neka je dato n LR-fazi intervala $A_i = (l_i, r_i, \alpha_i, \beta_i)_{L,R}$, $i = 1, ..., n$. Tada, suma $(\bigoplus_T)_{i=1}^n A_i$ bazirana na T_M (pseudo-konvolucija drugog tipa na poluprstenu $([0,1], \max, T_M)$) je data sa

$$(\bigoplus_{T_{\mathbf{M}}})_{i=1}^n A_i = A_1 \star_{T_M} \cdots \star_{T_M} A_n = \left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n r_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i\right)_{LR}. \quad (45)$$

Teorema 4.12 Neka je dato n LR-fazi intervala $A_i = (l_i, r_i, \alpha_i, \beta_i)_{L,R}$, $i = 1, ..., n$. Tada, suma $(\bigoplus_{T_{\mathbf{D}}})_{i=1}^n A_i$ bazirana na $T_{\mathbf{D}}$ (pseudo-konvolucija drugog tipa na poluprstenu $([0,1], \max, T_{\mathbf{D}})$) je data sa

$$(\bigoplus_{T_{\mathbf{D}}})_{i=1}^n A_i = A_1 \star_{T_D} \cdots \star_{T_D} A_n = \left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n r_i, \max_{1\le i\le n} \alpha_i, \max_{1\le i\le n} \beta_i\right)_{LR}. \quad (46)$$

Postavlja se još i pitanje poredjenja fazi brojeva. Skup fazi brojeva je moguće parcijalno urediti. Osnovna ideja izložena je u [33] i tom prilikom se klasični operatori minimuma i maksimuma proširuju na operacije sa fazi brojevima pomoću orginalnog Zadeh-ovog principa proširenja:

$$MIN(A,B)(z) = \sup_{\min(x,y)=z} \min(A(x), B(y))$$

i

$$MAX(A,B)(z) = \sup_{\max(x,y)=z} \min(A(x), B(y)).$$

Za $*$ je uzeta operacija min, odnosno, max. Kako obe operacije nisu kancelativne, $MIN(A,B)$ i $MAX(A,B)$ jesu fazi brojevi i to dobijeni primenom modifikacije pseudo-konvolucije drugog tipa bazirane na poluprstenu treće klase na skup fazi brojeva.

4.5 Teorija sistema

Poput klasične konvolucije i pseudo-konvolucija ima značajnu ulogu u teoriji sistema (videti [2, 45, 67]).U ovoj sekciji je data veza uopštenih konvolucija i teorije sistema.

Neka je dat prizvoljan skup dogadjaja. Postoji način na koji je moguće dodeliti broj svakom dogadjaju po redosledu njihovog stvarnog dešavanja. Ovaj proces se započinje konačnom početnom vrednošću $k_0 \in \mathbb{Z}$ (dozvoljena je i negativna vrednost). Postoji i specijalan tip dogadjaja koji odgovaraju otkucajima apsolutnog sata. Ti otkucaji su numerisani rastućim nizom koji počinje nekom vrednošću $t_0 \in \mathbb{Z}$.
Preslikavanje iz $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$ takvo da je odgovarajući graf skup svih uredjenih parova oblika (broj dogadjaja, vrednost sata (otkucaj)) je dater pridružen odredjenom tipu dogadjaja. Sledeće definicije su iz [2].

Definicija 4.12 *Signal u je preslikavanje iz* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *u* $([-\infty, \infty], \max, +)$. *Signal koji je neopadajuća funkcija se naziva dater.*

Dater, u oznaci d, ne mora biti striktno rastuća funkcija pošto se dogadjaji istog tipa mogu odigrati istovremeno. Po konvenciji važi:

$$d(k) = \begin{cases} -\infty & \text{za } k < k_0, \\ +\infty & \text{ako se dogadjaj nije odigrao} \\ \text{proizvoljna konačna vrednost} & \text{inače.} \end{cases}$$

Domen funkcije d je moguće proširiti: $d(-\infty) = -\infty$ i $d(\infty) = \infty$. Sada, poluprsten koji odgovara domenu funkcije d je $([-\infty, \infty], \max, +)$. Sabiranje $+_d$ je operator maximuma, tj.

$$\Big(d_1 +_d d_2\Big)(k) = d_1(k) +_d d_2(k) = \max\Big(d_1(k), d_2(k)\Big),$$

za svako $k \in \mathbb{Z}$.

Množenje datera je direktno povezano sa pseudo-konvolucijama što i sledi iz naredne toereme bazirane na rezultatima iz [2].

Teorema 4.13 *Neka su d_1 i d_2 dateri (u smislu definicije 4.12). Tada, diskretna pseudo-konvolucija drugog tipa funkcija d_1 i d_2 u smislu definicije 3.1 bazirana na poluprstenu $([-\infty, \infty], \max, +)$ za $* = +$*

$$d_1 \star d_2(k) = \sup_{l \in \mathbb{Z}} (d_1(l) + d_2(k-l)) .$$

je množenje datera.

Neka je sa $\mathcal{U}$ skup svih signala. Tada, sistem je operator $S : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $u \mapsto y$, gde su u i y se zovu ulazni (eng. input) i izlazni (eng. output) signal. Jedan od elementarnih sistema je i translacija Γ^g. Ovaj sistem slika ulazne vrednosti u izlazne prema jednačini $y(k) = u(k-g)$ za svako k, gde je u signal.

Definicija 4.13 *Pseudo-linearni sistem S se zove translatorna invarijanta ako komutira sa svim translatornim operatorima, tj. ako za svako u i svako c,*

$$S\Big(\Gamma^c(u)\Big) = \Gamma^c\Big(S(u)\Big).$$

Sledi teorema koja je bazirana na rezultatima iz [2].

Teorema 4.14 *Dat je translatorno invarijantan sistem sa ulaznim signalom u i izlaznim signalom y. Tada izlazni signal je pseudo-konvolucija drugog tipa bazirana na poluprstenu prve klase, tj.*

$$y(k) = u \star u(k) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \Big(h(k-s) + u(s)\Big),$$

gde je h funkcija sistema.

4.6 Analiza slike matematičkom morfologijom

Matematička morfologija dozvoljava obradu digitalnih slika u zavisnosti od njihovog oblika. Jezik matematičke morfologije je jezik teorije skupova, a same morfološke transformacije se definišu na n-dimenzionalnim prostorima gde dimenzija prostora zavisi od kompleksnosti slika koja se obradjuje. Ova sekcija daje vezu izmedju uopštenih konvolucija i morfoloških transformacija namenjenih obrati sivih slika. Literatura relevantna za ovu glavu je [9, 10].

Proizvoljna binarna slika je u potpunosti odredjena skupom crnih piksela (eng. pixel) odnosno, skupom belih piksela. Binarni morfološki operator P transformiše objekat A pomoću strukturalnog elementa B koji je takodje objekat, u novi objekat $P(A, B)$. Objekti A i B su definisani kao podskupovi skupa $\mathbb{R}^n$.

Podrazumeva se da skup A predstavlja strukturu koja se analizira, a skup B je skup koji ptipada jednoj ograničenoj klasi skupova i pomoću njega se vrši analiza strukture A. Osnovne morfološke transformacije su (binarna) dilatacija $\mathbf{D}$ i (binarna) erozija $\mathbf{E}$ koje su definisane na sledeći način:

$$\mathbf{D}(A,B) = \{y \mid T_y(B) \cap A \neq \varnothing\} \qquad \mathbf{E}(A,B) = \{y \mid T_y(B) \subset A\},$$

gde je T_y translacija definisana sa $T_y(B) = \{x \mid x - y \in B\}$.

U praksi se dilatacija i erozija primenjuju u parovima. Kako dilatacija i erozija nisu inverzne operacije, njihovom kompozicijom se dobijaju nove operacije (binarno) zatvaranje $\mathbf{C}$ i (binarno) otvaranje $\mathbf{O}$:

$$\mathbf{C}(A,B) = \mathbf{E}\left(\mathbf{D}(A,B), -B\right) \qquad \mathbf{O}(A,B) = \mathbf{D}\left(\mathbf{E}(A,B), -B\right),$$

gde je sa $-B$ označena refleksija skupa B, tj. $-B = \{-b \mid b \in B\}$. Treba primetiti da zatvaranje i otvaranje nisu kompozicije dilatacije i erozije u punom značenju tog pojma.

Binarne morfološke operacije, dilataciju, eroziju, otvaranje i zatvaranje, je moguće uopštiti do operacija koje dozvoljavaju obradu sivih slika, tj. rad sa ne sasvim crnim (belim) pikselima ([9, 10]). Drugim rečima, fazi morfološki operatori deluju na fazi objekte, sive slike kod kojih je interval $[0,1]$ skup svih mogućij stepena "sivoće".

Kako u osnovi binarni morfoloških operacija jesu presek i inkluzija, operacije sa skupovima kojima odgovaraju logičke operacije konjukcija i implikacija, potrebno je izvršiti fazifikaciju tih operacija. Više o fazifikaciji logičkih operatora, tj. o fazi logici, se može naći u [22, 61]. Slede definicije iz [9].

Definicija 4.14 *Opadajući unarni operator $\mathcal{N}$ definisan na $[0,1]$ je negacija ako se poklapa se Boolean-ovom negacijom na skupu $\{0,1\}$.*

Definicija 4.15 *Rastući binarni operator $\mathcal{C} : [0,1]^2 \to [0,1]$ je konjukcija ako se poklapa se Boolean-ovom konjukcijom na skupu $\{0,1\}^2$.*

Definicija 4.16 *Binarni operator $\mathcal{I} : [0,1]^2 \to [0,1]$ sa opadajućim parcijalnim preslikavanjem po prvoj komponenti i rastućim parcijalnim preslikavanjem po drugoj komponenti je implikacija ako se poklapa se Boolean-ovom imlikacijom na skupu $\{0.1\}^2$; svaka implikacija indukuje negaciju $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}(a) = \mathcal{I}(a,0)$.*

Neka su date konjukcija $\mathcal{C}$, implikacija $\mathcal{I}$ i dva fazi objekta (sive slike) A i B. Osnovne fazi morfološke transformacije, fazi dilatacija i fazi erozija, su date sledećom definicijom ([9, 10]).

Definicija 4.17 *Fazi dilatacija $\mathbf{D}(A,B)$ i fazi erozija $\mathbf{E}(A,B)$ fazi objekta A pomoću fazi objekta B su definisane sa*

$$\mathbf{D}(A,B)(y) = \sup_x \mathcal{C}\left(B(x-y), A(x)\right)$$
$$\mathbf{E}(A,B)(y) = \inf_x \mathcal{I}\left(B(x-y), A(x)\right).$$

Ako strukturalni element B ima konačan nosač, supremum i infinum iz predhodne definicije je moguće zameniti sa maksimum i minimumom.

Naredna teorema koja daje vezu izmedju uopštenih konvolucija i fazi morfologije sledi upravo iz prethopdne definicije.

Teorema 4.15 *Neka je $\mathcal{C}$ konjukcija koja ispunjava sve osobine pseudo-množenja iz definicije 1.10. Tada, fazi dilatacija je pseudo-konvolucija drugog tipa definisana na poluprstenu $([0,1], \max, \mathcal{C})$ za $G = \mathbb{R}^n$ i $* = +$, tj.*

$$\mathbf{D}(A, B)(y) = \hat{B} \star A(y),$$

gde je $\hat{B}(x) = B(-x)$.

4.7 Aritmetičke funkcije

U ovoj sekciji je dat primer diskretne pseudo-konvolucije u smislu definicije 3.1 bazirane na poluprstenu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Ispitana je veza takvih uopštenih konvolucija i teorije brojeva.

U teoriji brojeva često se pojavljuju nizovi realnih ili kompleksnih brojeva. Takvi nizovi se nazivaju aritmetičke funkcije. U ovoj sekciji su date različite aritmetičke funkcije koje imaju veliku ulogu u teoriji brojeva ([35]). Dato je i Dirichlet-ovo množenje koje doprinosi razjašnjavanju medjusobnog odnosa različitih aritmetičkih funkcija. Veza izmedju teorije brojeva i pseudo-konvolucije se ogleda upravo u definiciji Dirichlet-ovog množenja.

Prvo, dati su primeri bitnih aritmetičkih funkcija iz [35].

Primer 4.2 Möbius-ova aritmetička funkcija se definiše na sledeći način:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 1, \\ (-1)^k & \text{za } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

gde su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ različiti prosti brojevi.

Möbius-ova aritmetička funkcija se često pojavljuje u teoriji brojeva, a njena značajna osobina je jednostavnost formule za sumu pozitivnih delitelja prirodnog broja n:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 1, \\ 0 & \text{za } n > 1. \end{cases}$$

Drugi važan primer aritmetičke funkcije je Euler-ova zbirna funkcija φ koja se, za neko $n \in \mathbb{N}$, definiše kao broj prirodnih brojeva manjih od n uzajamno prostih sa n, tj. $\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n}{}' 1$, gde $'$ označava da se suma odnosi samo na one vrednosti k koje su uzajamno proste sa n.

I ova aritmetička funkcija ima jednostavnu formulu za za sumu pozitivnih delitelja prirodnog broja n: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Möbius-ova i Euler-ova funkcija, kao i ostale aritmetičke funkcije, jesu elementarne funkcije u smislu definicije 2.9. Odnos dve predhodno opisane aritmetičke funkcije je dat narednom teoremom koja je bazirana na rezultatima iz [35] i uspostavlja vezu izmedju teorije brojeva i uopštenih konvolucija.

Teorema 4.16 *Neka su μ i φ Möbius-ova i Euler-ova funkcija. Tada, za $n \geq 1$ važi:*

$$\varphi(n) = \mu \star i(n) \tag{47}$$

gde je $\star$ pseudo-konvolucija prvog tipa (u smislu definicije 3.1) bazirana na poluprstenu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, za $G = \mathbb{N}$ i $*$ klasično množenje na skupu prirodnih brojeva i i identičko preslikavanje.

Upravo prethodno opisana veza izmedju Möbius-ove i Euler-ove funkcije se prenosi na sve aritmetičke funkcije u vidu Dirichlet-ovog proizvoda:

Teorema 4.17 *Neka su f i l dve aritmetičke funkcije. Tada, njihov Dirichlet-ov proizvod, aritmetička funkcija h, je pseudo-konvolucija prvog tipa (u smislu definicije 3.1) bazirana na poluprstenu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (ili $(\mathbb{C}, +, \cdot)$) za $G = \mathbb{N}$ i $*$ klasično množenje na skupu prirodnih brojeva:*

$$h(n) = f \star l(n).$$

Sledeća teorema iz [35] koja daje osnovne osobine Dirichlet-ovog proizvoda je u saglasnosti sa teoremom 3.1 dokazanom u poglavlju 3.1.2.

Teorema 4.18 *Dirichlet-ov proizvod je komutativna i asocijativna operacija.*

Pokazano je i postojanje neutralnog elementa za Dirichlet-ov proizvod. U smislu uopštenih konvolucija, teorema o neutralnom elementu ima sledeću formu:

Teorema 4.19 *Za svaku aritmetičku funkciju f važi $I \star f = f \star I = f$, gde je I aritmetčka funkcija data sa*

$$I(n) = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 1, \\ 0 & \text{za } n > 1. \end{cases}$$

Napomena 4.6 Funkcija I iz predhodne teoreme odgovara pseudo-delta-funkciji iz poglavlja 3.1.

I često korišćena Möbius-ova inverzna formula je u direktnoj vezi sa pseudo-konvolucijama. Ta veza sledi iz naredne teoreme bazirane na rezultatima iz [35].

Teorema 4.20 *Neka su f i l dve aritmetičke funkcije i neka je $\star$ pseudo-konvolucija prvog tipa (u smislu definicije 3.1) bazirana na poluprstenu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (ili $(\mathbb{C}, +, \cdot)$) za $G = \mathbb{N}$ i $*$ klasično množenje na skupu prirodnih brojeva. Tada važi*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = f \star \mu(n).$$

Möbius-ova inverzna formula za Euler-ovu funkciju je već data jednačinom (47).

4.8 Nelinearne diferencijalne jednačine

Ova sekcija se bavi primenom pseudo-operacija i pseudo-konvolucija na rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina ([39, 74]). Dati su rezultati iz [56, 57, 61] koji se odnose na pseudo-operacije realnog poluprstena druge klase iz poglavlja 1.3, tj. na g-račun. Ilustrovan je uloga pseudo-konvolucija baziranih na poluprstenu prve klase u rešavanju Hamilton-Jacobi-jeve jednačine.Pokazani su orginalni rezultati iz [76, 77, 78] koji se odnose na specijalnu klasu uopštenih pseudo-operacija opisanu u poglavlju 1.6.2. Uopštene pseudo-operacije sa tri parametra jesu generalizacija upravo g-operacija i iskorišćene su za traženje novih rešenja jednačina Burgers-ovog tipa.

4.8.1 Primena pseudo-operacija na PDJ

U ovoj podsekciji su dati rezultati iz [56, 57, 61, 67] koji povezuju pseudo-operacije poluprstena druge klase i nelinerane diferencijalne jednačine.

Dat je poluprsten druge klase $([a,b],\oplus,\odot)$ opisan u poglavlju 1.3, tj. postoji aditivni generator $g:[a,b]\to[0,+\infty]$ takav da je $g(\mathbf{0})=0$,

$$x\oplus y=g^{-1}(g(x)+g(y)) \quad \text{i} \quad x\odot y=g^{-1}(g(x)g(y)).$$

Za $f:[c,d]\to[a,b]$ diferencijabilnu funkciju na (c,d) iste monotonosti kao i g, u [57] je definisan analogan klasičnog izvoda poznat kao g-izvod :

$$\frac{d^{\oplus}f(x)}{dx}=g^{-1}\left(\frac{d}{dx}g\left(f(x)\right)\right),$$

kada desna strana jednakosti postoji.

Za g-izvod u [57] su dokazane osobine koje odgovaraju osobinama klasičnog izvoda; tj. g-izvod pseudo-zbira je jednak pseudo-zbiru g-izvoda, g-izvod konstante je jednak neutralnom elementu za pseudo-sabiranje, itd. O primani ove aparature (zajedno sa g-inegralom opisanim u poglavlju 2.2.) na diferencijalne jednačine se može naći u [56, 57, 61].

Pseudo-operacije poluprstena druge klase je moguće primeniti i na rešavanje Burgers-ove diferencijalne jednačine (videti [56, 57, 61])

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{c}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{48}$$

za dati početni uslov $u(x,0)=u_0(x)$, gde $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ i $c\in\mathbb{R}^+$. U [57] ova jednačina je interpretirana pomoću operacija zadatih generatorom $g(u)=e^{-\frac{u}{c}}$, tj. $x\oplus y=-c\ln\left(e^{-\frac{x}{c}}+e^{-\frac{y}{c}}\right)$ i $x\odot y=x+y$. Odgovarajući g-integral je

$$\int^{\oplus} f\odot\, dm=-c\ln\left(\int e^{-\frac{f(x)}{c}}\,dx\right)$$

i rešenje početnog problema je

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\ln(2\pi ct) \odot \int^{\oplus} \left(\frac{(x-s)^2}{2t}\right) \odot u_0 \odot\ dm.$$

Pokazano je i da pseudo-linearna kobinacija rešenja jednačine (48) je opet rešenje jednačine (48), tj. ako su u i v rešenja posmatrane jednačine to je i $(a_1 \odot u) \oplus (a_2 \odot v)$ gde su $a_1, a_2 \in (0, +\infty]$.

Ako pustimo konstantu c iz jednačine (48) da teži ka nuli, posmatrana jednačina postaje Hamilton-Jacobi-eva jednačina

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

a poluprsten druge klase sa opadajućim generatorom $g(u) = e^{-\frac{u}{c}}$, u skladu sa poglavljem 1.4, prelazi u poluprsten prve klase $([a,b], \min, +)$.

Sada, pri daljem rešavanju Hamilton-Jacobi-eve jednačine sa Hamiltonijanom koji nije gladak već samo konveksan, svoju ulogu pronalazi pseudo-konvolucija u smislu definicije 3.1 bazirana upravo na poluprstenu $([a,b], \min, +)$. Za konstrukciju pseudo-slabog rešenja u klasi ograničenih funkcije takve jednačine neophodna je i pseudo-Laplace-ova transformacija na poluprstenu $([a,b], \min, +)$ opisana u sekciji 4.3.

Dat je Cauchy-ev problem za Hamilton-Jacobi-jevu jednačinu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad u|_{t=0} = u(x,0) = u_0(x), \tag{49}$$

gde $x \in \mathbb{R}^n$, a funkcija $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konveksna (i neprekidna). Pseudo-Laplace-ova transformacija Hamiltonijana H, $\mathcal{L}^{\oplus}(H)(z)$ je, takodje, konveksna ali, za razliku, od H ne mora biti i neprekidna funkcija. U [61] definisana je familija operatore $\{R_t\}_{t>0}$ za funkciju $u_0(x)$ ograničenu od dole:

$$(R_t u_0)(x) = u(t,x) = \inf_{z\in\mathbb{R}^n} \left(u_0(z) + t\mathcal{L}^{\oplus}(H)\left(\frac{x-z}{t}\right)\right),$$

tj.

$$(R_t u_0)(x) = u(t,x) = h \star u_0(x),$$

gde je $h(x) = t\mathcal{L}^{\oplus}(H)\left(\frac{x}{t}\right)$ za fiksno t i $\star$ pseudo-konvolucija drugog tipa u smislu definicije 3.1 bazirana na poluprstenu $((-\infty, +\infty], \min, +)$ za $G = \mathbb{R}^n$ i $* = +$. Ova familija operatora, odnosno, pseudo-konvolucija je od esencijalnog značaja za rešavanje problema (49) što i sledi iz naredne teoreme ([61, 66]).

Teorema 4.21 *Za proizvoljnu funkciju $u_0(x)$ ograničenu od dole, slabo pseud-rešenje Cauchy-evog problema (49) je dato sa*

$$(R_t u_0)(x) = (R_t C_l u_0)(x) = h \star C_l u_0(x),$$

gde je $C_l k(x) = \sup\{\psi(x) \mid \psi \in C(\mathbb{R}^n),\ \psi \leq k\}$, $h(x) = t\mathcal{L}^{\oplus}(H)\left(\frac{x}{t}\right)$ *za fiksno t i $\star$ pseudo-konvolucija drugog tipa (u smislu definicije 3.1) bazirana na poluprstenu* $((-\infty, +\infty], \min, +)$ *za* $G + \mathbb{R}^n$ *i* $* = +$.

U [61] je još dokazano i da je pseudo-linearna kombinacija rečenja Hamilton-Jacobi-eve jednačine za $H \in C(\mathbb{R}^3)$ takodje rešenje. Posmatrane su pseudo-operacije iz poluprstena prve klase

Napomena 4.7 U teoriji kontrole veliku primenu ima Hamilton-Jacobi-eva jednačina sa Hamiltonijanom $H(p) = \max_{(f,g)\in K}(\langle f, g\rangle + g)$ gde je K neki kompaktan podskup od $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.8.2 Uopštenje bazirano na nekomutativnom i neasocijativnom poluprstenu

Ova sekcija se bavi primenom specijalne klase uopštenih pseudo-operacija sa tri parametra koja je predstavljena u sekciji 1.6.2, na jednačine Burgers-ovog tipa. Dokazani su orginalni rezultati iz [78].

U radu [76] je pokazano da ako su u i v rešenja Burgers-ove jednačine

$$u_t + \frac{1}{2}u_x^2 = cu_{xx}, \tag{50}$$

gde je $c > 0$, tada za $\varepsilon > 0$ i $a \in \mathbb{R}$, $u \oplus v = k^{-1}(\varepsilon k(u) + k(v))$ i $a \odot v = k^{-1}(k(a)^{\varepsilon} + k(v))$ jesu rešenja jednačine (50). Treba voditi računa o tome da posmatrane operacije ne moraju biti komutativne, pa $u \odot a$ je rešenje ako i samo ako $\varepsilon = 1$. U ovoj sekciji su dati opštiji rezultati iz [78] koji obuhvataju širu klasu uopštenih pseudo-operacija

$$u \oplus v = k^{-1}(\varepsilon_1 k(u) + \varepsilon_2 k(v)) \quad \text{i} \quad u \odot v = k^{-1}(k(u)^{\delta} k(v))$$

i širu klasu nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina poznatu kao jednačine Burgers-ovog tipa:

$$u_t - \alpha u_{xx} = \alpha\Phi(u)u_x^2, \tag{51}$$

gde je Φ data neprekidna funkcija i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.22 *Za jednačinu (51), gde je Φ neprekidna funkcija i $\alpha \in \mathbb{R}$, postoje pseudo-operacija sa tri parametra $\oplus$ i $\odot$ date sa (22) i (23), redom, preko generatorske funkcije*

$$k(x) = \pm \int_0^x \exp\left(\int_0^t \Phi(s)\, ds\right) dt, \tag{52}$$

gde se pozitivan znak uzima za $\int_0^x \exp(\int_0^t \Phi(s)\, ds)\, dt$ veće od nule, a negativan za $\int_0^x \exp(\int_0^t \Phi(s)\, ds)\, dt$ manje od nule, tako da pseudo-linearna kombinacija rešenja jednačine (51) je rešenje jednačine (51).

Dokaz. Neka su u i v rešenja jednačine (51) i neka su date pseudo-operacije $u \oplus v = k^{-1}(\varepsilon_1 k(u) + \varepsilon_2 k(v))$ i $u \odot v = k^{-1}(k(u)^{\delta} k(v))$, gde je k generator (52) i $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i δ realni pozitivni brojevi. Lako se proveri da k dato sa (52) je striktno monotona pozitivna funkcija, tj. ispunjava sve nophodne uslove za generatorsku funkciju u smislu tvrdjenja 1.3. Veza izmedju generatora i neprekidne funkcije Φ se može izraziti i na sledeći način:

$$\frac{k''}{k'} = \Phi. \tag{53}$$

Neka je w pseudo-linearna kombinacija rešenja u i v, tj. za neko $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $w = (a_1 \odot u) \oplus (a_2 \odot v)$. Iz (22) i (23) sledi

$$k(w) = \varepsilon_1 k^\delta(a_1)k(u) + \varepsilon_2 k^\delta(a_2)k(v)$$

i

$$k'(w)w_t = \varepsilon_1 k^\delta(a_1)k'(u)u_t + \varepsilon_2 k^\delta(a_2)k'(v)v_t, \tag{54}$$

$$k'(w)w_{xx} + k''(w)w_x^2 =$$
$$\varepsilon_1 k^\delta(a_1)k'(u)u_{xx} + \varepsilon_1 k^\delta(a_1)k''(u)u_x^2 + \varepsilon_2 k^\delta(a_2)k'(u)v_{xx} + \varepsilon_2 k^\delta(a_2)k''(u)v_x^2. \tag{55}$$

Množenjem jednakost (55) parametrom α i, zatim, oduzimanjem jednakosti (54), dobija se sledeće

$$k'(w)\left(w_t - \alpha w_{xx} - \alpha\frac{k''(w)}{k'(w)}w_x^2\right)$$
$$= \varepsilon_1 k^\delta(u)k'(u)\left(u_t - \alpha u_{xx} - \alpha\frac{k''(u)}{k'(u)}u_x^2\right)$$
$$+\varepsilon_2 k^\delta(v)k'(v)\left(v_t - \alpha v_{xx} - \alpha\frac{k''(v)}{k'(v)}v_x^2\right).$$

Iz pretpostavke da u i v jesu rešenja jednačine (51) i uz uslov $k' \neq 0$ (važi jer je $k'(x) = \pm\exp(\int \Phi(x)\, dx)$), dobijamo

$$w_t - \alpha w_{xx} - \alpha\Phi(w)w_x^2 = 0,$$

tj. w je rešenje jednačine (51). □

Dalje. za neko proizvoljno ali fiksno $\lambda \in \mathbb{R}$, definiše se λ-odgovarajuća jednačina za jednačinu (51) kao

$$u_t - \alpha u_{xx} = \alpha\Phi_\lambda(u)u_x^2, \tag{56}$$

gde je k generatorska funkcija iz teoreme 4.22 i $\Phi_\lambda = \frac{(k^\lambda)''}{(k^\lambda)'}$.

Teorema 4.23 *Neka je $u_t - \alpha u_{xx} = \alpha\Phi_\lambda(u)u_x^2$ λ-odgovarajuća jednačina za jednačinu (51). Tada, svaka pseudo-linearna kombinacija rešenja λ-odgovarajuće jednačine u odnosu na pseudo-operacije $\oplus_\lambda$ i $\odot_\lambda$ date generatorom k^λ je rešenje λ-odgovarajuće jednačine.*

Dokaz. Neka su u i v rešenja λ-odgovarajuće jednačine (56) za jednačinu (51). Pseudo-operacije $\oplus_\lambda$ i $\odot_\lambda$ su

$$u \oplus_\lambda v = (k^\lambda)^{-1}\left(\varepsilon_1 k^\lambda(u) + \varepsilon_2 k^\lambda(v)\right) \quad \text{i} \quad u \odot_\lambda v = (k^\lambda)^{-1}\left(k^{\lambda\delta}(u) k^\lambda(v)\right),$$

gde je k generator iz teoreme 4.22, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i δ realni pozitivni brojevi i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sa w je označena pseudo-linearna kombinacija rešenja u i v u odnosu na operacije $\oplus_\lambda$ i $\odot_\lambda$, tj. za neko $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $w = (a_1 \odot_\lambda u) \oplus_\lambda (a_2 \odot_\lambda v)$ i $k^\lambda(w) = \varepsilon_1 k^{\lambda\delta}(a_1) k^\lambda(u) + \varepsilon_2 k^{\lambda\delta}(a_2) k^\lambda(v)$. Ostatak dokaza je analogan dokazu teoreme 4.22. □

Primer 4.3 Posmatramo jednačinu Burgers-ovog tipa:

$$u_t - c u_{xx} = -\frac{c}{2} u_x^2, \tag{57}$$

gde je $c > 0$. U ovom primeru važi: $\Phi(u) = -\frac{1}{2}$, $\alpha = c$ i odgovarajući generator je $k(u) = 2\exp(-\frac{u}{2})$. Pseudo-operacije date preko generatora k su

$$x \oplus y = -2\ln\left(\varepsilon_1 \exp(-\frac{x}{2}) + \varepsilon_2 \exp(-\frac{y}{2})\right) \quad \text{i} \quad x \odot y = \delta x + y - 2\delta \ln 2,$$

gde su $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i δ pozitivni realni brojevi. Po teoremi 4.22, ako su u i v rešenja jednačine (57), njihova pseudo-linearna kombinacija

$$\begin{aligned} w &= (a_1 \odot u) \oplus (a_2 \odot y) \\ &= -2\ln\left(\varepsilon_1 \exp(-\tfrac{\delta a_1 + u}{2} + \delta \ln 2) + \varepsilon_2 \exp(-\tfrac{\delta a_2 + v}{2} + \delta \ln 2)\right), \end{aligned}$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, je rešenje jednačine (57). Sada, λ-odgovarajuća jednačina za (57) je

$$u_t + \frac{c\lambda}{2} u_x^2 - c u_{xx} = 0. \tag{58}$$

Pseudo-linearna kombinacija rešenja u i v je

$$\begin{aligned} w &= (a_1 \odot_\lambda u) \oplus_\lambda (a_2 \odot_\lambda y) \\ &= -\tfrac{2}{\lambda}\ln\left(\varepsilon_1 \exp(-\lambda\tfrac{\delta a_1 + u}{2} + \lambda\delta \ln 2) + \varepsilon_2 \exp(-\lambda\tfrac{\delta a_2 + v}{2} + \lambda\delta \ln 2)\right) \end{aligned}$$

i, po teoremi 4.23, je rešenje za (58). Predhodno korišćene pseudo-operacije $\oplus_\lambda$ i $\odot_\lambda$ su generisane funkcijom $k^\lambda(u) = 2^\lambda \exp(-\frac{\lambda u}{2})$,tj.

$$x \oplus_\lambda y = -\frac{2}{\lambda}\ln\left(\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{\lambda x}{2}\right) + \varepsilon_2 \exp\left(-\frac{\lambda y}{2}\right)\right)$$

i

$$x \odot_\lambda y = \delta x + y - 2\delta \ln 2.$$

Specijalno, za $\lambda = \dfrac{1}{c}$, jednačina (58) se svodi na Burgers-ovu jednačinu (50). Ako su u i v rešenja Burgers-ove jednačine, to je i njihova pseudo-linearna kombinacija

$$\begin{aligned} w &= (a_1 \odot_{\frac{1}{c}} u) \oplus_{\frac{1}{c}} (a_2 \odot_{\frac{1}{c}} v) \\ &= -2c \ln\left(\varepsilon_1 \exp(-\tfrac{\delta a_1 + u}{2c} + \tfrac{\delta \ln 2}{c}) + \varepsilon_2 \exp(-\tfrac{\delta a_2 + v}{2c} + \tfrac{\delta \ln 2}{c})\right). \end{aligned}$$

Primer 4.4 Data je generatorska funkcija $k(x) = x^p$, gde je p fiksan realni broj. Odgovarajuće operacije su

$$x \oplus y = \sqrt[p]{\varepsilon_1 x^p + \varepsilon_2 y^p} \quad \text{i} \quad x \odot y = x^\delta y,$$

gde su $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i δ pozitivni realni brojevi. Kako je u ovom slučaju $\Phi(u) = \frac{k''(u)}{k'(u)} = \frac{p-1}{u}$, odgovarajuća jednačina Burgers-ovog tipa (51) je

$$u_t - \alpha u_{xx} = \alpha \frac{p-1}{u} u_x^2. \tag{59}$$

Njena λ-odgovarajuća jednačina je:

$$u_t - \alpha\left((\lambda - 1)\frac{p}{u} + \frac{p-1}{u}\right) u_x^2 - \alpha u_{xx} = 0 \tag{60}$$

Ako su u i v rešenja za (59), njihova pseudo-linearna kombinacija

$$(a_1 \odot u) \oplus (a_2 \odot v) = \sqrt[p]{\varepsilon_1 a_1^\delta u + \varepsilon_2 a_2^\delta v},$$

gde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, je rešenje za (59). Ako su u i v rešenja za (60), pseudo-linearna kombinacija se formira pomoću pseudo-operacija zadatih generatorom $k^\lambda(x) = x^{\lambda p}$ i, po teoremi 4.23, $\sqrt[\lambda p]{\varepsilon_1 a_1^{\lambda\delta} u^\lambda + \varepsilon_2 a_2^{\lambda\delta} v^\lambda}$ je rešenje za (60).

Teorema 4.24 *Hamilton-Jacobi-eva jednačina*

$$u_t - \frac{k'(u)}{k(u)} u_x^2 = 0, \tag{61}$$

gde je k generator iz teoreme 4.22 je granična vrednost λ-odgovarajućih jednačina (56) za $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ kada $\lambda \to +\infty$.

Pseudo-linearna kombinacija rešenja jednačine (61) u odnosu na granični slučaj operacija $\oplus_\lambda$ i $\odot_\lambda$ kada $\lambda \to +\infty$, tj. u odnosu na $\oplus = \min$ za k striktno opadajuće, $\oplus = \max$ za k striktno rastuće i $x \odot y = k^{-1}(k^\delta(x)k(y))$, je rešenje jednačine (61).

Dokaz. Posmatrana je jednačina Burgers-ovog tipa (51) i njena λ-odgovarajuća jednačina (56). Za parametar α iz (56) uzeta je vrednost $1\backslash\lambda$ i posmatrana jednačina postaje

$$u_t - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{k'(u)}{k(u)} + \frac{1}{\lambda} \frac{k''(u)}{k'(u)} \right) u_x^2 - \frac{1}{\lambda} u_{xx} = 0. \tag{62}$$

Kada $\lambda \to \infty$, dobija se upravo Hamilton-Jacobi-eva jednačina (61).

Po teoremi 1.24 iz poglavlja 1.6.2 imamo da za k striktno rasuću funkciju $\lim_{\lambda \to +\infty} \oplus_\lambda = \max$ i za k striktno opadajuću funkciju $\lim_{\lambda \to +\infty} \oplus_\lambda = \min$. Kako je za svako λ, $\odot_\lambda = \odot$, u zavisnosti od monotonosti generatora k, pseudo-linearna kombinacija rešenja jednačine (61) u i v u odnosu na granične slučajeva za operacije $\oplus_\lambda$ i $\odot_\lambda$ je $\min\{a_1 \odot u, a_2 \odot v\}$ ili $\max\{a_1 \odot u, a_2 \odot v\}$. Pseudo-linearna kombinacija je označena sa w. Neka je k striktno opadajuća funkcija i $a_1 \odot u \leq a_2 \odot v$, tj. $w = \min\{a_1 \odot u, a_2 \odot v\} = a_1 \odot u$. Sada, kako je $k(w) = k^\delta(a_1)k(u)$ i $k'(w)w_t = k^\delta(a_1)k'(u)u_t$ dobijamo

$$k'(w) \left(w_t - \frac{k'(w)}{k(w)} w_t^2 \right) = k^\delta(a_1)k'(u) \left(u_t - \frac{k'(u)}{k(u)} u_x^2 \right). \tag{63}$$

Kako je u rešenje za (61) i $k' \neq 0$, iz (63) sledi da w je rešenje za (61).

Za k opadajuću funkciju i $a_1 \odot u \geq a_2 \odot v$ i za k rastuću funkciju, dokaz je analogan. □

Primer 4.5 Jednačina (58) iz primera 4.3 za $\alpha = c = \frac{1}{\lambda}$ ima sledeći oblik

$$u_t + \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{\lambda} u_{xx} = 0.$$

Kada $\lambda \to \infty$, dobija se Hamilton-Jacobi-eva jednačina $u_t + \frac{1}{2} u_x^2 = 0$ (videti [57]).

Primer 4.6 Jednačina (60) iz primera 4.4 za $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ ima sledeći oblik

$$u_t - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{p}{u} + \frac{p - 1}{\lambda u} \right) u_x^2 - \frac{1}{\lambda} u_{xx} = 0.$$

Ako $\lambda \to \infty$ dobija se Hamilton-Jacobi-eva jednačina $u_t - \dfrac{p}{u} u_x^2 = 0$.

Napomena 4.8 Treba pomenuti i rezultat iz [77] koji se odnosi na jednačine oblika

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = g(u) \tag{64}$$

za $g \neq 0$. Dokazano je da sledeći m-dimenzioni princip pseudo-supepozicije važi: ako su $u_1, \dots, u_m$ rešenja jednačine (64) tada su i njihova uopštena geometrijska sredina

$$G(u_1, \dots, u_m) = f^{-1}(f(u_1)^{a_1} \cdots f(u_m)^{a_m})$$

i uopštena aritmetička sredina

$$A(u_1,\dots,u_m) = f^{-1}\left((a_1 f(u_1)^p + \cdots + a_m f(u_m)^p)^{1/p}\right),$$

gde je

$$f(x) = \exp\left(\int_\beta^x \frac{dt}{g(t)}\right),$$

$a_i \geq 0\ (i = 1,\dots,m)$, $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ i $p > 0$, rešenja jednačine (64).

Literatura

[1] J. Aczél, **Lectures on Functional Equations and their Applications**, Academic Press, New York, 1969.

[2] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder and Quadrat, **Synchronization and Linearity: an Algebra for Discrete Event Systems**, John-Wiley and Sons, New York, 1992.

[3] R. E. Bellman, S. E. Dreyfus, **Applied Dynamic Programming**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[4] P. Benvenuti, R. Mesiar, *Integrals with respect to a general fuzzy measure*, Fuzzy Measures and Integrals (M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno eds.) Physica-Verlag (Springer-Verlag Company), Heidelberg 2000, 205-232.

[5] P. Benvenuti, R. Mesiar, D. Vivina *Monotone set-functions-based integrals*, Handbook Mathematics of Measure Theory (E. Pap eds.), North-Holland, (u štampi).

[6] B. Bongiorno, *The Henstock-Kurzweil integral*, Handbook Mathematics of Measure Theory (E. Pap eds.), North-Holland, (u štampi).

[7] E. Czogala, J. Drewniak, *Associative Monotonic Operations in Fuzzy Sets Theory*, Fuzzy Set and Systems 12 (1984), 249-269.

[8] B. De Baets, *Idempotent Uninorms*, European J. Oper. Res. (prihvaćeno za štampu).

[9] B. De Baets, *Fuzzy morphology: A logical approach* Uncertainty Analysis in Engineering and the Sciences (B. Ayyub, M. Gupta, eds.) Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997.

[10] B. De Baets, *Generalized idempotence in fuzzy mathematical morphology* (prihvaćeno za štampu).

[11] B. De Baets, A. Marková-Stupňanová, *Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals*, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 203-214.

[12] D. Denneberg, **Non-additive measure and integral**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1994.

[13] G.B. Devedžić, E. Pap, *Multicriteria-multistages linguistic evaluation and ranking of machine tools*, Fuzzy Sets and Systems, 102, (1999) 451-461.

[14] J. Dombi, *Basic Concepts for the Theory of Evaluation: the Aggregative operator*, Europ. J. Oper. Res. 10 (1982), 282-293.

[15] D. Dubois, E. Pap, M. Prade, *Hybrid Probabilistic-Possibilistic Mixtures and Utility Functions*, (J. Fodor, B. de Baets, P. Perny, eds.) Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge, Springer-Verlag, 51-73.

[16] D. Dubois, M. Prade, **Fuzzy sets and systems: Theory and applications**, Academic Press, New York, 1980.

[17] D. Dubois, M. Prade, *Fuzzy numbers: an overview*, J. Bezdek (Ed.), Analysis of Fuzzy Information Vol. 2, CRC-Press, Boca Raton, 1988, 3-39.

[18] J.C. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov, *Structure of Uninorms*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 5 (1997), 411-427.

[19] L. Fuchs, **Partially ordered algebraic systems**, Pergamon Press, 1963.

[20] J. S. Golan, **The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science**, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math. 54, Longman, New York, 1992.

[21] R. A. Gordon, **The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock**, Graduate Studies in Mathematics Vol. 4, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994.

[22] M. Grabisch, H. T. Nguyen, E. A. Walker, **Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1995.

[23] T. Grbić, I. Štajner-Papuga, Z. Ovcin, *A Note on Fuzzy Numbers*, BAM-1662/'99 XC-A, 17-24.

[24] O. Hadžić, E. Pap, **Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces** , Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (u štampi)

[25] U. Hebisch, H. J. Weinert, **Semirings - Algebraic Theory and Applications in Computer Science**, Series in Algebra vol. 5, World Scientific, Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 1993.

[26] J. Kampé de Fériet, B. Forte, *Information et probabilité*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 256 (1967) 110-114, 142-146, 1017-1021.

[27] I. Karatzas, S. E. Shreve, **Methods of Mathematical Finance**, Springer, 1998.

[28] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *On the relationship of associative compensatory operators to triangular norms and conorms*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems Vol. 4, No. 2 (1996), 129-144.

[29] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *(S, U)-integral.* Proc. EUSFLAT - 99, Palma de Mallorca, 1999, 371-374.

[30] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Quasi- and pseudo-inverses of monotone functions, and the construction of t-norms*, Fuzzy Sets and Systems 104 (1999) 3-13.

[31] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, **Triangular norms**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[32] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Integration with respect to decomposable measures, based on a conditionally distributive semirinb on the unit interval*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems Vol. 8, No. 6 (2000) 701-717.

[33] G.J. Klir, B. Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications**, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[34] A. Kolesárová, *Triangular norm-based addition of linear fuzzy numbers*, Tatra Mt. Math. Publ. 6 (1995) 75-81.

[35] H. Koch, **Number Theory: Algebraic Numbers and Functions**, Humboldt-University AMS, 2000.

[36] A. Kolesárová, *Integration of real functions with respect to a $\oplus$-measure*, Math. Slovaca, 46 (1996) 41-52.

[37] A. Kolesárová, *Similarity preserving t-norm-based additions of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 215-230.

[38] V. N. Kolokoltsov, V.P. Maslov, **Idempotent Analysis and Its Applications**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[39] P. L. Lions, **Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations**, Pitman, London, 1982.

[40] P. Maličký, *Nontrivial example of an associative convolution*, Tatra Mountains Math. Publ. 1 (1992) 99-103.

[41] A. Marková-Stupňanová, *Pseudo-convolutions and their idempotents*, Proc. IFSA'97 ,Academia, Prague, 1997, 484-487.

[42] A. Marková-Stupňanová, *T-sum of $L - R$ fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 85 (1997) 379-384.

[43] A. Marková-Stupňanová, *A note to the addition of fuzzy numbers based on a continuous Archimedean t-norm*, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 253-258.

[44] A. Marková-Stupňanová, *A note to the idempotent functions with respect to pseudo-convolution* Proc. IPMU'98, Paris, La Sorbonne, 1998.

[45] V.P. Maslov, S.N. Samborskij (eds.), *Idempotent Analysis*, Advances in Soviet Mathematics 13, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1992.

[46] K. Menger, *Statistical metrics*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 8, (1942) 535-537.

[47] R. Mesiar, *Choquet-like integrals*, J. Math. Anal. Appl. 194 (1995) 477-488.

[48] R. Mesiar, *Computation over LR-fuzzy numbers*, Proc. CIFT'95, Trento 1995, 165-261.

[49] R. Mesiar, *Shape preserving additions of fuzzy intervals*, Fuzzy Sets and Systems 86 (1997) 73-78.

[50] R. Mesiar, *Triangular-norm-based addition of fuzzy intervals*, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 231-238.

[51] R. Mesiar, E. Pap, *Idempotent integral as limit of g-integrals*, Fuzzy Sets and Systems 102 (1999) 385-392.

[52] R. Mesiar, J. Rybarik, *PAN-operations structure*, Fuzzy Sets and Systems 74 (1995) 365-369.

[53] P. S. Mostert, A. L. Shields, *On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary*, Ann. of Math. 65 (1957), 117-143.

[54] R. B. Nelsen, **An Introduction to Copulas**, Springer, 1999.

[55] E.Pap, *An integral generated by decomposable measures*, Univ. Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.Ser. Mat. 20,1 (1990) 135-144.

[56] E. Pap, *g-calculus*, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 23 (1) (1993), 145-156.

[57] E. Pap, **Null-Additive Set Functions**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht- Boston-London, 1995.

[58] E. Pap, *Pseudo-analysis as a mathematical base for soft computing*, Soft Computing (Springer-Verlag) 1 (1997) 61-68.

[59] E. Pap, *Decomposable measures and nonlinear equations*, Fuzzy Sets and Systems 92 (1997) 205-222.

[60] E. Pap, *Applications of decomposable Measures* u Mathematics of fuzzy sets: Logic, Topology and Measure Theory, (U. Höhle, S. E. Rodabaugh eds.) The Handbooks of Fuzzy sets series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht- Boston-London, (1999) 675-700.

[61] E. Pap, **Fazi mere i njihova primena**, PMF Novi Sad, 1999.

[62] E. Pap, *Pseudo-convolution and its applications*, u Fuzzy Measures and Integrals-Theory and Applications (M. Grabisch, M. Murofushi, M. Sugeno eds.) Studies in Fuzziness, vol. 40, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000, 171-204.

[63] E. Pap, *Pseudo-additive measures and their applicationa* u Handbook of Measure Theory (E. Pap eds.) North-Holland, (u štampi).

[64] E. Pap, Z. Bošnjak, S. Bošnjak, *Application of fuzzy sets with different t-norms in the interpretation of portfolio matrices in strategic management*, Fuzzy Sets and Systems, 114, (2000) 123-131.

[65] E. Pap, K. Jegdić, *Pseudo-analysis and its application in railway routing* Fuzzy Sets and Systems, 116, (2000) 103-118.

[66] E. Pap, N. Ralević, *Pseudo operations on finite intervals*, Novi Sad J. Math. **29** (1)(1999) 1-6.

[67] E. Pap, N. Ralević, *Pseudo-Laplace transform*, Nonlinear Analysis 33 (1998) 553-560.

[68] E. Pap, I. Štajner, *Pseudo-convolution in the theory of probabilistic metric spaces, information, fuzzy numbers, optimization, system theory*, Proc. IFSA'97, Academia, Prague, 1997, 491-496.

[69] E. Pap, I. Štajner, *Generalized pseudo-convolution in the theory of Pprobabilistic metric spaces, information, fuzzy numbers, optimization, system theory*, Fuzzy Sets and Systems 102 (1999) 393-415.

[70] E. Pap, I. Štajner, *Generalized pseudo-convolution*, Proc. IPMU'98, Paris, La Sorbonne, 1998, 1216-1222.

[71] E. Pap, I. Štajner, *Pseudo-convolution based on idemplotent operaation as limit of g-convolution*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 7, No. 6 (1999) 615-629.

[72] E. Pap, I. Štajner-Papuga (2000), *(S, U)-convolution.* Proc. IPMU2000, Madrid, 2000, 563-568.

[73] E. Pap, I. Štajner-Papuga, *Pseudo-integral based on non-associative and non-commutative pseudo-addition and pseudo-multiplication*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 9, No. 2 (2001) 159-167.

[74] E. Pap, A. Takači, Dj. Takači, **Partial Differential Equations through Examples and Exercises**, Kluwe Academic Publishers, 1997.

[75] E. Pap, N. Teofanov, *Pseudo-delta functions and sequences in the optimization theory*, Yug. J. Oper. Res. 8 (1998) 111-128.

[76] E. Pap, D. Vivona, *Non-commutative and non-associative pseudo-analysis and its applications on nonlinear partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **246/2** (2000), 390-408.

[77] E.Pap, D.Vivona, *Application of aggregation operators on nonlinear PDE*, Proc.IPMU Madrid 2000, 1159-1164.

[78] E. Pap, D. Vivona, I. Štajner-Papuga, *On a pair of generated pseudo-operations with three parameters and its application on the Burgers type equations*, Atti del Seminario Matematico e Fisico dellUniversita di Modena (u štampi).

[79] N. Ralević, **Pseudo-analiza i primena na rešavanje nelinearnih jednačina**, Doktorska disertacija, PMF Novi Sad, 1997.

[80] A. Rényi, **Probability Theory**, North-Holland, Amsterdam, 1967.

[81] R. T. Rockafellar, **Convex Analysis**, Princeton, New Jersey, 1970.

[82] R. T. Rockafellar, R. J-B. Wets, **Variational analysis**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[83] C. Shannon, W. Weaver, **The Mathematical Theory of Communication**, University Press, Urbana, 1949.

[84] B. Schweizer, A. Sklar, *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math. 10, 313-334.

[85] B. Schweizer, A. Sklar, *Associatice functions and statistical triangle inequalities*, Publ.Math. Debrecen 8, 169-186.

[86] B. Schweizer, A. Sklar, *Measures aléatoires de l'information*, C. R. Acad. Sci. 269 A (1969) 721-723.

[87] B. Schweizer, A. Sklar, **Probabilistic Metric Spaces**, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[88] M. Sugeno, T. Murofushi, *Pseudo-additive measures and integrals*, J. Math. Anal. Appl. 122 (1987) 197-222.

[89] I. Štajner, *Pseudo-konvolucija i njene primene*, Magistarski rad, PMF Novi Sad, 1999.

[90] I. Štajner-Papuga, *Pseudo Henstock-Kurzweil integral* Journal of Electrical Engineering, vol.52, No10/s (2001) 24-29.

[91] N. Teofanov, **Aproksimacije malim talasima i delta nizovima**, Magistarski rad, PMF Novi Sad, 1996.

[92] E. C. Titchmarsh, **Introduction to the theory of Fourier integrals**, Oxford Univ. Press, 1948.

[93] Z. Wang , G. J. Klir, **Fuzzy Measure Theory**, Plenum Press, New York, 1992.

[94] S. Weber,$\perp$-*decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorm* $\perp$, J.Math.Anal.Appl. 101 (1984) 114-138.

[95] N. Wiener, **Cybernetics**, Hermann, Pariz, 1948.

[96] H.C. Wu, *Fuzzy-valued integrals of fuzzy-valued measurable functions with respect to fuzzy-valued measures based on closed intervals*, Fuzzy Sets and Systems 87 (1997) 65-78.

[97] R. R. Yager, *Misrepresentations and Challenges: a Response to Elkan*, IEEE Expert August (1994), 41-42.

[98] R. R. Yager, A. Rybalov, *Uninorm aggregation operators* Fuzzy Sets and Systems 80 (1996), 111-120.

[99] L. A. Zadeh, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part I*, Inform. Sci. 8 (1975) 199-249.

[100] D. Zagrodny, *The cancellation law for inf-convolution of convex functions*, Studia Mathematica 110 (3) (1994), 271-282.

BIOGRAFIJA

Ivana Štajner-Papuga je rodjena 15.04.1974.g. u Novom Sadu. Osnovnu školu i prirodno-matematičku gimnaziju "Jovan Jovanović - Zmaj" završila je sa odličnim uspehom. Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, studijska grupa matematika, smer diplomirani matematičar upisala se školske 1992\93 godine. Diplomirala je 01.07.1996.g. sa prosečnom ocenom 9,63 (devet i 63/100). Na diplomskom ispitu dobila je ocenu 10 (deset). Jula 1996.g. bila je na studijskom boravku na University of Ilinois - Chicago.

Magistarske studije je upisala školske 1996\97 godine. Magistrirala je 04.05.1999. godine. Naslov magistarskog rada je "Pseudo-konvolucija i njene primene".

Decembra 1996.g. zaposlila se na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, Institut za matematiku, u zvanju asistenta pripravnika za naučnu oblast Matematika, uža naučna oblas Analiza i verovatnoća (predmeti: Teorija mera i Analiza II). U zvanje asistenta je izabrana 2000. godine.

Drži vežbe iz Teorije mera studentima četvrte godine matematike, Analize I studentima prve godine informatike, Teorija odlučivanja studentima treće godine matematike finansija i Matematike studentima hemije.

Autor ili koautor je u devet naučnih radova objavljenih u zemlji i inostranstvu. Učestvovala je sa saopštenjima na sedam medjunarodnih i četiri domaća naučna skupa.

Koautor je zbirke zadataka iz Analize I namenjene studentima prve godine matematike i informatike.

Ivana Štajner-Papuga govori i piše engleski jezik.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapias: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: mr Ivana Štajner-Papuga
AU
Mentor: Prof. dr Endre Pap
MN

Naslov rada: Uopštena konvolucija
NR

Jezik publikacije: srpski, latinica
JP
Jezik izvoda: srpski
JI
Zemlja publikovanja: Savezna Republika Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2001.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet
MA
Fizički opis rarda: 4/107+2/100/0/0/0/0
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: poluprsten, pseudo-operacije, neaditivne mere, uopštena konvolucija, mera, verovarnoća, PDJ, probabilistički metrički prostori, fazi brojevi
PO

UDK:
Čuva se: u biblioteci Instituta za matematiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U ovoj tezi je definisana uopštena konvolucija koja pripada domenu pseudo-analize i ima veliku primenu u mnogim matematičkim teorijama, npr. u probabilističkim metričkim prostorima, PDJ, teorijama odlučivanja, sistema, kontrole i fazi brojeva. Dokazane su bitne osobine ove operacije sa funkcijama. Dokazana je veza izmedju pseudo-konvolucija baziranih na poluprstenima različitih klasa Definisana je (S, U)-konvolucija bazirana na uslovno distributivnom poluprstenu $([0, 1], S, U))$. Dat je još jedan vid uopštenja konvolucije baziran na uopštenim pseudo-operacijama.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 29.12.2000.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Olga Hadžić, red. prof. PMF
Član: df Endre Pap, red. prof. PMF, mentor
Član: dr Arpad Takači, red. prof. PMF
Član: dr Radko Mesiar, red. prof. Tehničkog Univerziteta u Bratislavi

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic type
DT
Type of record: Text printed material
TR
Contents code: PhD thesis
CC
Author: mr Ivana Štajner-Papuga
AU
Mentor: Prof. dr Endre Pap
MN

Title: Generalized convolution
TI

Language of text: serbian
LT
Language of abstract: serbian
LA
Country of publication: Federal Republic of Yugoslavia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2001.
PY
Publisher: Author's reprint
PU

Publ.place: University of Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics
PP
Physical description: 4/107+2/100/0/0/0/0
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientifisc discipline:Analysis
SD
Subject / Key words: semiring, pseudo-operations, non-additive measures, generalized convolution, measure, probability, PDE, fuzzy numbers, Probabilistic Metric Spaces
SKW
UC:
Holding data: the library at Institute of Mathematics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this thesis the generalized convolution have been defined. This operation with functions has applications in different mathematical theories, for example in Probabilistic Metric Spaces, PDE, System and Control Theory, Fuzzy numbers. Some basic properties of this operation has been proved, as well as connection between generalized convolutions based on different classes of semirings. (S,U)-convolution has been defined, as well as convolution based on generalized pseudo-operations.
AB

Accepted by Scientific Board on: 29.12.2000.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board::
DB
President: dr Olga Hadžić, prof. PMF
Member: df Endre Pap, prof. PMF, mentor
Member: dr Arpad Takači, prof. PMF
Member: dr Radko Mesiar, prof. STU Bratislava, Civil Engennering