УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ **ОБРАЗАЦ 6.**

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. Датум и орган који је именовао комисију: Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду, 12. марта 2020.

2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:

   1) ***др Розалија Мадарас Силађи****, редовни професор, Алгебра и математичка логика, 26. 10. 1999 , Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, председник комисије*
   2) ***др Ивица Бошњак****, ванредни професор, Алгебра и математичка логика, 30. 1. 2020, Природно-математички факултет, Универзизет у Новом Саду, ментор*
   3) ***др Петар Ђапић****, ванредни професор, Алгебра и математичка логика, 1.6.2019, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду*
   4) ***др Петар Марковић****, редовни професор, Алгебра и математичка логика, 1.7.2015, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду*
   5) ***др Јованка Пантовић****, редовни професор, Теоријска и примењена математика, 24.6.2010, Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду*

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме: *Самир (Катица) Захировић*

2. Датум рођења, општина, држава: *18. јануар 1989, Нови Сад, Република Србија*

3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив
   Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
   Студијски програм: МА Математика
   Стечено звање: Мастер математичар

4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија
   2017, МД Математика

5. Назив факултета, назив мастер рада, научна област и датум одбране: Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Степене структуре и добре фактор релације, Алгебра и математичка логика, 9. јул 2013.

6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука:
   -

III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Алгебарска и комбинаторна својства графова придружених степено-асоцијативним групоидима
(Algebraic and Combinatorial Properties of Graphs Associated to Power-Associative Groupoids)

IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Докторска дисертација написана је на српском језику, латиничним писмом, на 134 стране у Б5 формату, и подељена је у четири главе. Дисертација садржи 73 библиографске јединице и 7 слика.

Прва глава је уводног типа, и састоји се од две секције. У првој секцији наводе се дефиниције и основне особине степено-асоцијативних групоида, са посебном пажњом посвећеном групама. У другој секцији наводе се основне особине графова.

Друга глава, која је подељена у 8 секција, посвећена је основним особинама степеног графа, усмереног степеног графа и обогаћеног степеног графа, као и проблему да ли, и у којој мери, ови графови одређују полазну структуру. У прве две секције изложене су основне особине Кејлијевог графа и комутирајућег графа. У трећој секцији уведени су појмови усмереног степеног графа, степеног графа и обогаћеног степеног графа. У четвртој секцији наводе се три различите верзије дефиниције степеног графа које се појављују у литератури, и у овој секцији доказује се да се та три графа међусобно одређују до на изоморфизам. У петој секцији, која је заснована на резултатима Годратолаха Алипура, Саједа Акбарија, Питера Камерона, Ризе Никандиша и Фарзада Шавеисија, изложено је у случају којих коначних група је степени граф једнак обогаћеном степеном графу, и у случају којих коначних група је обогаћени степени граф једнак комутирајућем графу. У шестој секцији изложен је доказ да степени граф коначне степено-асоцијативне лупе са инверзима одређује усмерени степени граф до на изоморфизам, као и у коликој мери степени граф коначне групе одређује полазну алгебарску структуру. Ова секција заснована је на резултатима Питера Камерона и Шамика Гоша. Седма секција бави се степеним графом торзионо-слободних група, и у њој је презентован доказ да степени граф торзионо-слободне групе класе нилпотентности 2 одређује усмерени степени граф те групе. Осма секција бави се обогаћеним степеним графом и његовим односом са степеним графом и усмереним степеним графом, и у њој се, између осталог, показује да коначне степено-асоцијативне лупе имају изоморфне степене графове ако и само ако имају изомофне обогаћене степене графове.

Трећа глава састоји се од 3 секције. Прва секција бави се алгебарским особинама обогаћеног степеног графа. Доказано је да је сваки изоморфизам степеног графа коначне групе изоморфизам обогаћеног степеног графа. За разне особине група, даје се карактеризација свих коначних група или степено-асоцијативних лупа са инверзима таквих да групе аутоморфизама њихових обогаћених степених графова имају те особине. У другој секцији пружа се опис обогаћених степених графова коначних Абелових група, а у трећој секцији се презентира и метод за конструкцију обогаћеног степеног графа подгрупе Силова на основу обогаћеног степеног графа коначне нилпотентне групе.

Четврта глава, која је подељена у 5 секција, бави се комбинаторним својствима обогаћеног степеног графа, и резултатима о комбинаторним особинама комутирајућег графа и степеног графа. У првој секцији презентиран је доказ да, ако комутирајући граф групе нема бесконачни независан скуп, тада комутирајући граф нема ни произвољно велике коначне независне скупове чворова, што је резултат Бернарда Нојмана. У другој секцији изожени су резултати Алипура, Акбарија, Камерона, Никандиша и Шавеисија на тему независних скупова степеног графа групе. У трећој секцији представљен је доказ да је хроматски број обогаћеног степеног графа степено-асоцијативне лупе са инверзима највише пребројив. У четвртој секцији изложен је доказ да је хроматски број степеног графа највише пребројив, што је резултат Јарослава Шитова. У петој секцији изложени су докази да је степени граф сваке коначне групе перфектан, што је резултат Алипура, Акбарија, Камерона, Никандиша и Шавеисија, и да коначна нилпотентна група има перфектан обогаћени степени граф ако и само ако има највише две нецикличне подгрупе Силова.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Прва глава:

Прва глава је уводна и у њој се на концизан и систематичан начин дефинишу основни појмови из теорије група и теорије графова, као и теореме, без доказа, које ће касније бити коришћене у дисертацији. Уз сваку теорему која се наводи даје се референца где се доказ може наћи. На крају дисертације се налази списак ознака које се користе у тези, што такође олакшава сналажење у тексту.

Друга глава:

Друга глава је најобимнији део дисертације и састоји се из 8 секција.

Секција 2.1

Ова секција је посвећена Кејлијевом графу, најстаријем и најпознатијем графу који је придружен групи. Прво се даје кратак историјски преглед, неколико примера, а најпознатији резултати се излажу кроз неформални наратив, без издвајања теорема. Тиме се читалац постепено уводи у тему. Како се касније Кејлијеви графови не спомињу више, сматрамо да је такав приступ одговарајући.

Секција 2.2

У овој секцији се даје прецизна дефиниција комутирајућег графа и даје се преглед неких најважнијих резултата који се односе на тај појам. Резултати се поново излажу кроз неформални наратив, али са прецизним навођењем референци.

Секција 2.3

У овој секцији се дају дефиниције појмова који су кључни за дисертацију: усмерени степени граф, степени граф и обогаћени степени граф. Дају се важни појмови, који показују да се ова три графа у општем случају не поклапају, истакнути су примери када су ти графови комплетни, као и примери који показују да ови графови придружени групи не одређују полазну структуру тј. да постоје неизоморфне групе чији су придружени графови изоморфни. Структура ове секције показује да је кандидат водио рачуна о одговарајућем методичком приступу приликом увођења нових појмова који су фундаментални за разумевање резултата тезе.

Секција 2.4

Ову секцију бисмо могли назвати „техничком“, јер се бави поређењем три могуће различите дефиниције степеног графа, у зависности од тога да ли је експонент у дефиницији цео број, природан број или ненула цео број. Оправдање за увођење позитивног степеног графа лежи у намери да се што више резултата са разних класа група прошири на степено-асоцијативне групоиде. У овој секцији се доказује да се степени граф, позитиван степени граф и ненула-степени граф степено-асоцијативне лупе са инверзима међусобно одређују. Сви резултати ове секције су самостални оригинални резултати кандидата, изложени у раду [72]: Лема 2.9, Теорема 2.10, Лема 2.11, Лема 2.12, Теорема 2.13, Последица 2.14.

Секција 2.5

У овој секцији приказују се резултати из [1] и бави се питањем за које коначне групе су придружени графови изоморфни. Докази који се излажу су нешто детаљнији него у раду [1]. Теорема 2.15 се доказује за коначне степено-асоцијативне лупе, док је у оригиналном раду резултат доказан за класу коначних група. Тврђења 2.16, 2.18, 2.20 и 2.21 су дата без доказа.

Секција 2.6

Цела секција 2.6 је посвећена резултату Питера Камерона из [12], према коме ако две коначне групе имају изоморфне усмерене степене графове, онда су и саме групе изоморфне. Леме које воде до тог резултата играју значајну улогу у овој дисертацији, па их је кандидат детаљно разрадио, и нешто другачије структурирао него у оригиналном раду. Поред тога, тамо где је могло, тврђења су проширена на класу коначних степено-асоцијативних лупа, то су: Теорема 2.22, Леме 2.23, 2.24, 2.26, као и главна Теорема 2.28.

Мали методички естетски недостатак је што се доказ Тврђења 2.27 оставља за секцију 2.8.

Секција 2.7

Ова секција се бави питањем одређености усмереног ненула-степеног графа торзионо слободне групе њеним ненула-степеним графом. У раду [14] доказано је да две торизионо слободне групе класе нилпотентности 2 које имају изоморфне степене графове, имају изоморфне и усмерене степене графове. Аутори рада [14] су поставили питање да ли та импликација важи и у случају када је бар једна од те групе торзионо слободна и класе нилпотентности 2. Главно тврђење ове секције, Теорема 2.51, даје позитиван одговор на то питање. Оригинални резултати кандидата у овој секцији су још и Леме 2.43, 2.44, Теорема 2.45 и Последица 2.46.

Секција 2.8

У овој секцији се доказује да ако две коначне степено-асоцијативне лупе имају изоморфне обогаћене степене графове, онда имају изоморфне и усмерене степене графове. Доказују се и неке особине обогаћених степених графова. Резултати се ослањају на рад [1], а оригинална тврђења ове секције су објављена у раду [73]. Главни оригинални резултати су приказани и Лемама 2.56 и 2.57 и Теореми 2.58.

Даље, у наставку секције кандидат разматра следеће: Камерон и Гош у раду [13] доказали су да ако две коначне групе имају изоморфне усмерене степене графове, онда те две групе имају исти број елемената истог реда. Због Теореме 2.58 сада имамо да ако две коначне степено-асоцијативне лупе имају изоморфне обогаћене степене графове, онда имају изоморфне и усмерене степене графове, па одмах добијамо да те две лупе имају исти број елемената истог реда. Кандидат тај закључак, међутим, поново доказује, на други начин, директно користећи структуру свих максималних клика обогаћеног степеног графа: видети Тврђење 2.62, и одговарајуће Последице 2.63, 2.64 и 2.65.

У раду [13] је доказано да ако две коначне Абелове групе имају изоморфне степене графове, онда су оне изоморфне. Кадидат на крају ове секције поново доказује тај резултат, на други начин. Наиме, ако две Абелове групе имају исти број елемената истог реда, онда су оне изоморфне, па кандидат даје конструкцију полазне Абелове групе, ослањајући се на структуру обогаћеног степеног графа (видети Т2.66).

Глава 3.

Секција 3.1

Ова секција се бави аутоморфизмима коначних степено-асоцијативних лупа и њихових придружених графова. Сва тврђења ове секције су оригинални допринос кандидата и објављена су у раду [13], то су: Теорема 3.1, Последица 3.2, Теорема 3.4, Последица 3.5, Лема 3.6, Теорема 3.7, Теорема 3.8, Последица 3.9 и Теорема 3.10.

Секција 3.2

Ова секција је у потпуности заснована на резултатима које је кандидат објавио у раду [73], и који описују обогаћене степене графове Абелових група. Уводе се појмови коренског p-стабла и p-семистабла. Доказује се да p-семистабла чине фамилију свих обогаћених степених графова коначних Абелових група, видети Теорему 3.11. Главна теорема 3.12 сада се лако добија из раније доказане Леме 2.56.

Секција 3.3.

Кандидат у овој секцији изучава обогаћене степене графове коначних нилпотентних група. Доказује се да из структуре обогаћеног степеног графа коначне групе можемо закључити да ли је та група нилпотентна. Сва тврђења из ове секције су оригинални допринос кандидата. То су Теорема 3.13, Лема 3.14, Теорема 3.16, Лема 3.17, Лема 3.18 и Теорема 3.19.

Глава 4.

Секција 4.1

У овој секцији се даје приказ резултата Бернхарда Нојмана из рада [54], у коме је дат потврдан одговор на једно Ердешово питање: Ако комутирајући граф групе не садржи бесконачан независан скуп, онда је његов α-број коначан. У овој секцији нема оригиналних резултата кандидата.

Секција 4.2

Ова секција је заснована на резултатима из рада [1] и оригиналном резултату кандидата из рада [72], и бави се хроматским бројем степеног графа и обогаћеног степеног графа. Лема 4.12 је у раду [1] доказана за групе, а кандидат примећује да се на аналоган начин резултат може доказати и за степено-асоцијативне лупе са инверзима.

Теорема 4.14, која је оригиналан допринос кандидата, заснива се на идејама Јарослава Шитова из рада [69], где је доказано да је могуће обојити степени граф било ког степено-асоцијативног групоида са пребројиво много боја. Нажалост, резултат Јарослава Шитова је доказан у следећој секцији, што донекле може отежати праћење доказа Теореме 4.14.

Секција 4.4

Ова секција је заснована на раду Јарослава Шитова [69] о горњој граници за хроматски број степеног графа. Приложени докази су нешто детаљнији него у оригиналном раду.

Секција 4.5

Први део ове секције бави се перфектношћу степеног графа групе и заснован је на резултатима рада [1]. Други део секције је заснован на оригиналним резултатима кандидата објављеним у раду [73] и бави се перфектношћу обогаћеног степеног графа групе. Дакле, прво се доказује резултат из рада [1], да свака група коначног експонента има перфектан степени граф, то су: Лема 4.23, Теорема 4.24, Последица 4.25, Последица 4.26 и Последица 4.27. Оригиналан резултат кандидата изложен је у Теореми 4.30, где се даје карактеризација коначних нилпотентних група које имају перфектне обогаћене степене графове.

На крају секције се дају две специјалне класе коначних група чији обогаћени степени графови су слабо перфектни (Теорема 4.31, Теорема 4.32). Комисија изражава наду да ће кандидат у скорој будућности успешно доказати или оповргнути хипотезу да је обогаћени степени граф сваке коначне групе слабо перфектан.

VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ

1. Samir Zahirović, Ivica Bošnjak, Rozália Madarász, *A Study of Enhanced Power Graphs of Finite Groups*, Journal of Algebra and Its Applications (2019), https://doi.org/10.1142/S0219498820500620
   (рад у међународном часопису категорије М23)

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Резултати добијени у овом раду могу се поделити у две класе. У једну спадају резултати који се односе на графове придружене групама, а у другу резултати о графовима придруженим степено- асоцијативним лупама са инверзима.

Што се тиче резултата који се односе а групе, у другој глави дат је одговор на питање које су поставили Камерон, Гуера и Јурина. Наиме показано је да ако група H и торзионо слободна група G класе нилпотентности 2 имају изоморфне степене графове, тада су им и усмерени степени графови изоморфни. У трећој глави се изучавају структуре чија група аутоморфизама обогаћеног степеног графа има неке, унапред задате особине.Даље, детаљно су описани обогаћени степени графови коначих Абелових група, и приказан је алгоритам који за групу G са јединственом p-подгрупом Силова H, на основу обогаћеног степеног графа групе G конструише обогаћени степени граф подгрупе H. У четвртој глави показано је између осталог да за разлику од степеног графа, обогаћени степени граф коначне групе не мора бити перфектан. Дат је потребан и довољан услов за перфектност обогаћеног степеног графа коначне нилпотентне групе.

Од резултата који се односе на степено-асоцијативне лупе са инверзима, требе истаћи да је у другој глави показано да се обогаћени степени граф и усмерени степени граф међусобно одређују у случају коначних степено-асоцијативних лупа са инверзима. Аналоган резултат раније је био познат за степени и усмерени степени граф коначне групе. У трећој глави доказано је да је група аутоморфизама степено-асоцијатвне лупе са инверзима подгрупа групе аутоморфизама њеног обогаћеног степеног графа.У последњој глави модификован је доказ Јарослава Шитова да је хроматски број степеног графа степено-асоцијативног групоида највише пребројив, да би се доказао аналоган резултат за обогаћени степени граф степено-асоцијативне лупе са инверзима.

Ови резултати указују на два могућа правца даљих истраживања. Један је истраживање особина обогаћеног степеног графа група, где је много тога и даље непознато. Други би био истраживање графова придружених општијим степено-асоцијативним структурама. Ту посебно мислимо на семигрупе, чији (пре свега усмерени) степени графови су били предмет изучавања на самом почетку развоја ове теорије, и где постоји значајан простор за даља истраживања.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

Комисија даје позитивну оцену за начин приказа и тумачење резултата истраживања кандидату Самиру Захиривићу.

IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Комисија сматра да је дисертација написана у складу са пријавом теме и садржи све битне елелементе који се траже од једне докторске дисертације. Дисертација даје оригиналан научни допринос изучавању степених графова, усмерених степених графова и обогаћених степених графова који су придружени групама и шире, степено-асоцијативним групоидима.

X ПРЕДЛОГ:
На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже да се докторска дисертација прихвати, а кандидату Самиру Захировићу одобри одбрана.

У Новом Саду, 13. мај 2020.

др Розалија Мадарас Силађи

др Ивица Бошњак

др Петар Ђапић

др Петар Марковић

др Јованка Пантовић