UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

mr Sanja Rapajić

Iterativni postupci sa regularizacijom za rešavanje nelinearnih komplementarnih problema

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2005.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

mr Sanja Rapajić

Iterativni postupci sa regularizacijom za rešavanje nelinearnih komplementarnih problema

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2005.

Predgovor

Matematički modeli mnogih prirodnih, društvenih i tehničkih procesa svode se na nelinearne komplementarne probleme (NCP). Modeliranje ekonomskih problema omogućuje bolji uvid u složenost rada ekonomskog sistema. Osnova svakog ekonomskog sistema je ravnoteža između ponude i potražnje, a ona se formuliše kao problem nelinearne komplementarnosti. Koncept komplementarnosti sastavni je deo modeliranja mnogih realnih problema koji se javljaju u inženjerstvu, optimizaciji, strukturalnoj analizi i mehanici. Zbog izuzetno velike zastupljenosti problema ovakvog tipa njihovo rešavanje je veoma aktuelno.

Prvi korak u rešavanju nelinearnih komplementarnih problema je preformulacija na probleme određivanja nule nelinearnog preslikavanja. Tako nastali sistemi nelinearnih jednačina nisu glatki, pa se za njihovo rešavanje ne može primeniti klasična teorija. Stoga se koriste iterativni postupci dobijeni generalizacijom postupaka za glatke sisteme. Ti postupci se mogu svrstati u tri klase: generalizovane postupke Njutnovog tipa, postupke sa regularizacijom sistema jednačina i postupke sa regularizacijom matrice jakobijana.

U ovoj disertaciji posebna pažnja posvećena je postupcima sa regularizacijom matrice jakobijana. To je klasa postupaka nastala povezivanjem generalizovanih postupaka Njutnovog tipa i postupaka sa regularizacijom sistema jednačina, a sa ciljem da se prevaziđu njihovi pojedinačni nedostaci. Ovi postupci su zasnovani na ideji da se neglatka funkcija aproksimira glatkim operatorom i da se u klasičnoj Njutnovoj jednačini originalna funkcija kombinuje sa matricom jakobijana glatkog operatora koji je aproksimira.

Prvi deo disertacije obuhvata pregled oznaka, definicija, kao i teorema koje se odnose na glatke funkcije. U drugom delu su navedene vrste komplementarnih problema, definisane semiglatke funkcije i njihove osobine i tipovi regularizacije. Iterativni postupci za rešavanje glatkih sistema jednačina izloženi su u trećem delu, sa osvrtom na Njutnov postupak i njegove modifikacije. U četvrtom delu predstavljeni su generalizovani postupci za sisteme semiglatkih jednačina, nastali uopštavanjem Njutnovog postupka i njegovih modifikacija. Definisan je novi postupak za rešavanje NCP, dobijen uopštavanjem postupka sa modifikacijom slobodnog vektora za glatke sisteme i dokazana je njegova lokalna konvergencija. Iterativni postupci sa regularizacijom matrice jakobijana za rešavanje nelinearnih komplementarnih problema opisani su u petom delu. Formulisani su novi postupci ove klase koja obuhvata netačni Njutnov postupak i Njutnov postupak, kao njegov specijalni slučaj, zatim, Braunov i hibridni Braun-Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana. Dokazana je globalna konvergencija netačnog Njutnovog postupka sa regularizacijom jakobijana, kao i lokalna konvergencija Braunovog i hibridnog Braun-Njutnovog postupka sa regularizacijom jakobijana. U šestom delu prikazani su numerički rezultati dobijeni testiranjem teorijskih rezultata na relevantnim numeričkim primerima.

* * *

Posebno se zahvaljujem svom mentoru dr Nataši Krejić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koja je svojim idejama, savetima i sugestijama pratila i svesrdno pomagala izradu moje doktorske disertacije.

Veliku zahvalnost dugujem dr Dragoslavu Hercegu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu na interesovanju, podršci i praćenju mog dosadašnjeg rada.

Zahvaljujem se dr Miodragu Petkoviću, redovnom profesoru Elektronskog fakulteta u Nišu i dr Zorani Lužanin, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu na pokazanom interesovanju prilikom izrade ove disertacije.

Želim da izrazim svoju zahvalnost mojoj porodici, suprugu i deci, sestri, a posebno svojim roditeljima na velikoj podršci i pruženoj pomoći tokom svih ovih godina.

Novi Sad, 10. maj 2005. Sanja Rapajić

Sadržaj

1

Uvod

1.1 Oznake, definicije i teoreme

N - skup prirodnih brojeva

R - skup realnih brojeva

R^n - skup n - dimenzionalnih realnih vektora

$R^{m \times n}$ - skup realnih matrica formata $m \times n$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ - n-dimenzionalni vektor

x_i^k - i-ta komponenta vektora $x^k \in R^n$

$A = [a_{ij}]$ - matrica iz $R^{n \times n}$ sa elementima a_{ij}, $\quad i, j = 1, ..., n$

$A = [a^1, a^2, ..., a^n]$ - matrica iz $R^{n \times n}$ sa kolonama $a^i \in R^n$

$[A]_j$ - j-ta vrsta matrice $A \in R^{n \times n}$

A_{IJ} - podmatrica $|I| \times |J|$ matrice $A \in R^{n \times n}$ sa elementima a_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, gde su $I, J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ neprazni skupovi

A^{-1} - inverzna matrica matrice A

$A^\top$ - transponovana matrica matrice A

$D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$ - dijagonalna matrica sa elementima d_i, $i = 1, 2, ..., n$ na dijagonali

$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = 0$ za $i < j$ - donja trougaona matrica

$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = 0$ za $i > j$ - gornja trougaona matrica

E - jedinična matrica iz $R^{n\times n}$

$\rho(A)$ - sprektralni radijus matrice A

e^i - jedinični vektor prostora R^n

$< x, y >= x^\top y$ - skalarni proizvod vektora $x, y \in R^n$

$\{x^k\}$ - niz realnih vektora x^0, x^1, x^2,...

$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ - vektorska p-norma, $1 \leq p \leq \infty$

$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ - matrična norma indukovana vektorskom normom $\|\cdot\|_1$

$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ - matrična norma indukovana vektorskom normom $\|\cdot\|_\infty$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}$ - matrična norma indukovana vektorskom normom $\|\cdot\|_2$

$\|A\|_F = (\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ - Frobenijusova norma

$C^k(D)$ - skup k puta neprekidno diferencijabilnih realnih funkcija na D

f' - jakobijan preslikavanja $f : R^n \to R^n$

∇f - gradijent preslikavanja $f : R^n \to R$

coS - konveksna obvojnica skupa S

$\mathcal{N}(x, \varepsilon) = \{y \in R^n, \ \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ - ε okolina tačke x

$dist(A, \mathcal{A}) = \inf_{B\in\mathcal{A}} \|A - B\|$ - rastojanje matrice A od nepraznog skupa matrica $\mathcal{A}$

□ - kraj dokaza

♣ - kraj algoritma

Definicija 1.1 *Elementarne matrice su matrice dobijene od jedinične matrice vršenjem neke od sledećih elementarnih transformacija:*

- *međusobna zamena dve vrste matrice,*
- *množenje svih elemenata jedne vrste brojem različitim od nule,*
- *dodavanje elemenata jedne vrste matrice, prethodno pomnoženih brojem različitim od nule, odgovarajućim elementima druge vrste matrice.*

Teorema 1.1 *Neka je $A \in R^{n\times n}$. Ako je P elementarna matrica dobijena vršenjem jedne od elementarnih transformacija na jediničnoj matrici, onda je PA matrica koja se dobija od matrice A vršenjem na A te iste elementarne transformacije.*

Definicija 1.2 *Spektralni radijus matrice $A \in R^{n\times n}$ je njen karakteristični koren maksimalnog modula, odnosno*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, \;\; i = 1, ..., n\},$$

gde su λ_i karakteristični koreni matrice A, tj. λ_i su rešenja karakteristične jednačine

$$|\lambda E - A| = 0.$$

Teorema 1.2 *Neka je $A \in R^{n\times n}$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodna matrična norma $\|\cdot\|$ takva da je*

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Definicija 1.3 *Matrica $A \in R^{n\times n}$ je*

- *ortogonalna, ako je $A^\top A = E$,*
- *Givensova matrica (transformacija, rotacija), ako je oblika*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \dots & -s & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & s & \dots & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde je $c = \cos\theta$ i $s = \sin\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$,

- *P_0 - matrica ako su svi glavni minori nenegativni,*
- *P - matrica ako su svi glavni minori pozitivni.*

Definicija 1.4 *Funkcija $F : R^n \to R^n$ je*

- *P_0-funcija, ako za svako $x, y \in R^n$, $x \neq y$, postoji indeks i takav da važi*
$$x_i \neq y_i, \quad (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0,$$
- *P-funkcija, ako za svako $x, y \in R^n$, $x \neq y$, postoji indeks i takav da važi*
$$(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) > 0,$$
- *uniformna P-funkcija, ako postoji konstanta $c > 0$ takva da za svako $x, y \in R^n$ postoji indeks i za koji važi*
$$(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq c\|y - x\|^2,$$
- *monotona funkcija, ako za svako $x, y \in R^n$ važi*
$$(x - y)^\top (F(x) - F(y)) \geq 0,$$

- *strogo monotona funkcija, ako za svako* $x, y \in R^n$, $x \neq y$ *važi*

$$(x-y)^{\mathsf{T}}(F(x)-F(y)) > 0,$$

- *jako monotona funkcija, ako postoji konstanta* $c > 0$ *takva da za svako* $x, y \in R^n$ *važi*

$$(x-y)^{\mathsf{T}}(F(x)-F(y)) \geq c\|y-x\|^2.$$

Teorema 1.3 *[19] Svaka monotona funkcija je* P_0*-funkcija, svaka strogo monotona funkcija je* P*-funkcija, svaka jako monotona funkcija je uniformna* P*-funkcija.*

Teorema 1.4 *[19] Jakobijan svake neprekidno diferencijabilne* P_0*-funkcije je* P_0*-matrica. Ako je jakobijan neprekidno diferencijabilne funkcije* P*-matrica za svako* x*, onda je funkcija* P*-funkcija.*

Definicija 1.5 *Preslikavanje* $F : D \subset R^n \to R^n$ *zadovoljava Lipšicov uslov u tački* x *sa konstantom* $L > 0$ *ako za svako* $y \in D$ *važi*

$$\|F(x)-F(y)\| \leq L\|x-y\|.$$

Definicija 1.6 *Preslikavanje* $F : D \subset R^n \to R^n$ *je Lipšic neprekidno sa konstantom* L *nad oblasti* D *ako za svako* $x, y \in D$ *važi*

$$\|F(x)-F(y)\| \leq L\|x-y\|.$$

Definicija 1.7 *Preslikavanje* $F : D \subset R^n \to R^n$ *je lokalno Lipšicovo na* D *ako za svako* $x \in D$ *postoji okolina* $N(x,\varepsilon)$ *takva da je* F *Lipšic neprekidno na* $N(x,\varepsilon)$.

Lema 1.1 *[49] Neka je* $F : D \subset R^n \to R^m$ *diferencijabilno preslikavanje na konveksnom skupu* $D_0 \subset D$*. Tada za svako* $x, y \in D_0$ *važi*

$$\|F(y)-F(x)\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|F'(x+t(y-x))\|\|y-x\|.$$

Lema 1.2 *[49] Neka je $F : D \subset R^n \rightarrow R^m$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje na konveksnom skupu $D_0 \subset D$ i neka $x \in D_0$. Ako je zadovoljena nejednakost*

$$\|F'(y) - F'(x)\| \leq L(x)\|y - x\|$$

za svako $y \in D_0$, tada važi

$$\|F(y) - F(x) - F'(x)(y - x)\| \leq \frac{1}{2}L(x)\|y - x\|^2$$

za sve $y \in D_0$.

Lema 1.3 *[14] Neka je $F : D \subset R^n \rightarrow R^n$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje na konveksnom skupu $D_0 \subset D$ i neka je F' Lipšic neprekidno u $x \in D_0$, tada važi*

$$\|F(v) - F(u) - F'(x)(v - u)\| \leq \frac{L}{2}(\|v - x\| + \|u - x\|)\|v - u\|$$

za svako $u, v \in D_0$.

Lema 1.4 *[13] Neka je $F : D \subset R^n \rightarrow R^n$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje na otvorenom konveksnom skupu D i neka F' zadovoljava Lipšicov uslov u tački $z \in D$ sa konstantom L. Tada za svako $x, y \in D$ važi*

$$\|F(x) - F(y) - F'(z)(x - y)\| \leq L \max\{\|x - z\|, \|y - z\|\}\|x - y\|.$$

Lema 1.5 *[49] Neka je $F : D \subset R^n \rightarrow R^n$ neprekidno diferencijabilno u x. Za ma koje $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi*

$$\|F(y) - F(x) - F'(x)(y - x)\| \leq \varepsilon\|y - x\|$$

za $\|y - x\| < \delta$.

Lema 1.6 *[14] Neka su $M, N \in R^{n \times n}$. Ako je M regularna matrica i ako je $\|M^{-1}(N - M)\| < 1$ tada je i N regularna i važi*

$$\|N^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}(N - M)\|}.$$

Teorema 1.5 *[14] (Ekvivalencija normi) Neka su* $\|\cdot\|$ *i* $\|\cdot\|_*$ *dve vektorske norme na* R^n. *Tada postoje pozitivne konstante* α *i* β *takve da za* $x \in R^n$ *važi*

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_* \leq \beta\|x\|.$$

Pri rešavanju sistema nelinearnih jednačina primenom postupaka razmatranih u ovom radu, javlja se problem rešavanja sistema linearnih jednačina. Postoje mnogobrojni postupci za rešavanje linearnih sistema. Oni se mogu podeliti na direktne i iterativne. Direktnim postupcima dobija se tačno rešenje linearnog sistema posle konačno mnogo aritmetičkih operacija u tačnoj aritmetici, a iterativni postupci daju približno rešenje sistema linearnih jednačina. Pri numeričkim izračunavanjima u ovoj disertaciji korišćen je GMRES postupak, koji spada u iterativne postupke za rešavanje linearnih sistema, te je stoga posebno izdvojen.

Neka je dat linearni sistem oblika

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

gde je $A \in R^{n\times n}$ regularna matrica i $b \in R^n$.

Definicija 1.8 *Neka je* $A \in R^{m\times n}$, $m > n$. *Razlaganje* $A = QR$, *gde je* $Q \in R^{m\times m}$ *ortogonalna matrica i* $R \in R^{m\times n}$ *gornja trougaona matrica, naziva se QR dekompozicija matrice* A.

GMRES postupak (Generalized Minimum RESidual) je postupak tipa Krilova za nesimetrične sisteme. Ideja je da se k-ta iteracija odredi kao rešenje problema najmanjih kvadrata

$$\min_{x\in x^0+\mathcal{K}_k} \|b - Ax\|_2,$$

gde je $\mathcal{K}_k$ k-ti Krilov potprostor. Navedeni algoritam koristi Gram-Šmitov proces ortogonalizacije i Givensove rotacije, kao i QR faktorizaciju matrice H.
Notacija $G_j(c,s)$ se odnosi na Givensovu rotaciju za j i $(j+1)$ vrstu i kolonu, a $H_k = Q_kR_k$ na QR faktorizaciju matrice H_k.

Konvergencija GMRES postupka je dokazana u slučaju kada se primenjuje restart, ali praksa pokazuje da restart veoma često nije potreban.

GMRES POSTUPAK (Generalized Minimum RESidual)

GM1: $r = b - Ax, \quad v^1 = r/\|r\|_2$

$\rho = \|r\|_2, \quad \beta = \rho$

$k = 0, \quad g = \rho(1, 0, ..., 0)^\top \in R^{k_{\max}+1}$

GM2: While $\rho > \varepsilon\|b\|_2$ i $k < k_{\max}$ do

a) $k = k + 1$

b) $v^{k+1} = Av^k$

for $j = 1, 2, ..., k$ do

i) $h_{k,j} = (v^{k+1})^\top v^j$

ii) $v^{k+1} = v^{k+1} - h_{k,j}v^j$

c) $h_{k,k+1} = \|v^{k+1}\|_2$

d) provera ortogonalnosti

e) $v^{k+1} = v^{k+1}/\|v^{k+1}\|_2$

f) i) if $k > 1$ k-ta kolona matrice H se dobija kao proizvod Q_{k-1} i k-te kolone matrice H, inače ostaje ista

ii) $\nu = \sqrt{h_{k,k}^2 + h_{k,k+1}^2}$

iii) $c_k = h_{k,k}/\nu, \quad s_k = -h_{k,k+1}/\nu$

$h_{k,k} = c_k h_{k,k} - s_k h_{k,k+1}, \quad h_{k,k+1} = 0$

iv) $g = G_k(c_k, s_k)g$

g) $\rho = |g_{k+1}|$

GM3: $r_{i,j} = h_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq k$

$\omega_i = g_i, \quad 1 \leq i \leq k$

rešiti gornji trougaoni sistem $Ry^k = \omega$

GM4: $x^k = x^0 + V_k y^k$. ♣

Sistemi nelinearnih jednačina rešavaju se iterativnim postupcima. Neka je dat sistem nelinearnih jednačina oblika

$$f(x) = 0, \tag{1.2}$$

pri čemu je $f : D \subset R^n \to R^n$. Svaki broj x^* za koji je $f(x^*) = 0$ naziva se rešenje jednačine (1.2).

Neka postoji rešenje x^* jednačine (1.2) na skupu D. Jednačina (1.2) se uvek može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$x = Mx,$$

gde je $M : D \subset R^n \to R^n$. Najčešći izbor preslikavanja M je

$$Mx = x - A(x)f(x), \quad A(x) \in R^{n \times n}, \quad x \in D.$$

Na ovaj način se problem rešavanja sistema (1.2) svodi na problem određivanja nepokretne tačke preslikavanja M. Izabere se početna aproksimacija $x^0 \in D$. Niz $\{x^k\}$ definisan sa

$$x^{k+1} = M(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.3}$$

naziva se iterativni niz, funkcija M funkcija koraka, a formula (1.3) iterativni postupak ili iterativno pravilo.

Ukoliko iterativni niz $\{x^k\}$ konvergira ka tačnom rešenju x^*, kaže se da iterativni postupak konvergira. Prilikom analize iterativnih postupaka javljaju se dva značajna problema i to su: problem dobre definisanosti, u smislu da za svako k važi da $M(x^k)$ pripada skupu D, i problem konvergencije iterativnog postupka. U ovoj disertaciji razmatrane su lokalna i globalna konvergencija. Pod lokalnom konvergencijom se podrazumeva da postupak konvergira ka tačnom rešenju x^* za svaku početnu aproksimaciju x^0 dovoljno blisku rešenju x^*, a pod globalnom da postupak konvergira za svaku početnu aproksimaciju iz domena D.

Ukoliko iterativni postupak konvergira, postavlja se pitanje brzine konvergencije tj. reda konvergencije.

Definicija 1.9 *Neka je* $\{x^k\} \in D$ *i* $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$. *Tada iterativni niz* $\{x^k\}$ *konvergira*

- *q-linearno ako postoji* $c \in (0,1)$ *takvo da je*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq c\|x^k - x^*\|,$$

- *q-superlinearno ako je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = 0,$$

- *sa q-redom bar* α, $\alpha > 1$ *ako postoji* $c > 0$ *takvo da je*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq c\|x^k - x^*\|^\alpha,$$

- *q-kvadratno ako postoji* $c > 0$ *takvo da je*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq c\|x^k - x^*\|^2,$$

- *r-linearno ako postoji niz* c_k *koji konvergira q-linearno ka nuli tako da je*

$$\|x^k - x^*\| \leq c_k,$$

- *sa r-redom bar* α *ako je* $\|x^k - x^*\|$ *ograničeno sa gornje strane nekim nizom čiji je q-red konvergencije ka nuli bar* α.

Definicija 1.10 *Neka je* $\{x^k\}$ *niz koji konvergira ka* x^*, *i neka su* g *i* h *neprekidne, nenegativne realne funkcije. Uvode se oznake*

- $g(x^k) = o(h(x^k))$ *kad* $k \to \infty$, *ako je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(x^k)}{h(x^k)} = 0,$$

- $g(x^k) = \mathcal{O}(h(x^k))$ *kad* $k \to \infty$, *ako je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(x^k)}{h(x^k)} < \infty.$$

Lema 1.7 *[14] Neka $\{x^k\}$ konvergira q-superlinearno ka x^*. Tada važi*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k - x^*\|} = 1.$$

U daljem tekstu su radi konciznosti navedeni termini korišćeni bez prefiksa q kada se radi o konvergenciji q-tipa.

Definicija 1.11 *Za iterativni postupak kažemo da je afino invarijantan (na kodomenu) ako primenjen na probleme $\bar{f} \equiv Tf(x) = 0$ i $f(x) = 0$, gde je T regularna matrica, daje identične iterativne nizove za svaku početnu aproksimaciju.*

2

Nelinearni komplementarni problemi

Komplementarni problemi su veoma zastupljeni u mnogim oblastima poput teorije optimizacije i ekonomije.

Neka je $F : R^n \to R^n$ nelinearna, neprekidno diferencijabilna funkcija. Problem oblika

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^\top F(x) = 0, \tag{2.1}$$

naziva se nelinearni komplementarni problem (NCP). Ukoliko se vektor x i funkcija F predstave po komponentama, NCP se može zapisati u obliku

$$x_i \geq 0, \quad F_i(x) \geq 0, \quad x_i F_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

pri čemu je $x = (x_1, ..., x_n)^\top$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))^\top$.

Svaki vektor $x^* \in R^n$ koji zadovoljava (2.1) je rešenje NCP.

Definicija 2.1 *Neka je x^* rešenje NCP (2.1) i neka su definisani sledeći skupovi indeksa*

$$\alpha(x^*) = \{i, \ x_i^* > F_i(x^*) = 0\},$$

$$\beta(x^*) = \{i, \ x_i^* = F_i(x^*) = 0\},$$

$$\gamma(x^*) = \{i, \ 0 = x_i^* < F_i(x^*) = 0\}.$$

Ako je $\beta(x^*) = \emptyset$ rešenje x^* je strogo komplementarno, a ukoliko je $\beta(x^*) \neq \emptyset$ x^* je degenerisano rešenje.

Definicija 2.2 *Rešenje x^* NCP naziva se*

- *b-regularno, ako su glavne podmatrice $F'(x^*)_{\alpha\cup\delta,\alpha\cup\delta}$ regularne za sve podskupove δ za koje važi $\emptyset \subseteq \delta \subseteq \beta$.*
- *R-regularno, ako je $F'(x^*)_{\alpha,\alpha}$ regularna matrica i ako je njen Šurov komplement u*

$$\begin{bmatrix} F'(x^*)_{\alpha,\alpha} & F'(x^*)_{\alpha,\beta} \\ F'(x^*)_{\beta,\alpha} & F'(x^*)_{\beta,\beta} \end{bmatrix}$$

P-matrica, pri čemu Šurov komplement matrice $F'(x^*)_{\alpha,\alpha}$ glasi

$$F'(x^*)_{\beta,\beta} - F'(x^*)_{\beta,\alpha} F'(x^*)_{\alpha,\alpha}^{-1} F'(x^*)_{\alpha,\beta} \in R^{|\beta|\times|\beta|}.$$

U savremenoj numeričkoj matematici koriste se mnogobrojni načini za preformulaciju problema tipa (2.1) na ekvivalentan sistem semiglatkih jednačina. Jedan od njih je

$$\min\{x, F(x)\} = 0, \tag{2.2}$$

gde se operator min uzima po komponentama.

2.1 Vrste komplementarnih problema

Klasifikacija komplementarnih problema se vrši po veličini, tipu i kompleksnosti. Pored uobičajene podele na linearne i nelinearne, poznata je i podela na horizontalne, vertikalne i mešovite komplementarne probleme.

Linearni komplementarni problem

Specijalan slučaj problema (2.1), gde je $F : R^n \to R^n$ linearna funkcija oblika $F(x) = Mx + q$, naziva se linearni komplementarni problem

$$x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0, \quad x^{\mathrm{T}}(Mx + q) = 0.$$

Mešovit nelinearni komplementarni problem

U nelinearnim komplementarnim problemima tipa (2.1) zastupljena su samo donja ograničenja promenljivih i funkcija, a uslovi komplementarnosti se primenjuju na sve promenljive i funkcije. U praksi se javljaju opštiji problemi kod kojih su ograničenja definisana sistemom nelinearnih jednačina, dok su uslovi komplementarnosti primenjeni samo na neke promenljive i funkcije. Ti opštiji problemi nazivaju se *mešoviti nelinearni komplementarni problemi* i imaju oblik

$$F_i(x) = 0, \quad i \in I,$$

$$x_i \geq 0, \quad F_i(x) \geq 0, \quad x_i F_i(x) = 0, \quad i \in J,$$

gde skupovi I i J čine particiju skupa $\{1, 2, ..., n\}$.

U specijalnom slučaju, kada je $I = \{1, 2, ..., n\}$, mešovit nelinearni komplementarni problem transformiše se u sistem nelinearnih jednačina oblika

$$F(x) = 0.$$

Vertikalni nelinearni komplementarni problem

Posmatrajući preformulaciju NCP na semiglatki sistem nelinearnih jednačina oblika

$$\min\{x, F(x)\} = 0,$$

uočava se da je jedna od funkcija u ovoj formulaciji potpuno proizvoljna, dok je druga identitet.

Mnogi realni problemi imaju opštiju formu

$$\min\{F^1(x), F^2(x), ..., F^m(x)\} = 0,$$

pri čemu su F^1, F^2,...,$F^m : R^n \to R^n$ nelinearne funkcije. Problemi ovakvog oblika nazivaju se *vertikalni nelinearni komplementarni problemi.* Na osnovu analogije sa NCP (2.1) jasno je da za vertikalni nelinearni komplementarni problem važi $F_i^j(x) \geq 0$ za svako $i = 1, 2, ..., n$ i svako $j = 1, 2, ..., m$, kao i da za svako i važi $F_i^j(x) = 0$ za bar jedno j. Vertikalni nelinearni komplementarni problemi se mogu tumačiti i kao mešoviti, uvođenjem dopunskih promenljivih.

2.2 Preformulacija NCP

Prvi korak pri rešavanju nelinearnog komplementarnog problema (2.1) je transformacija na ekvivalentan sistem nelinearnih jednačina, korišćenjem NCP funkcija.

Definicija 2.3 *Funkcija* $h : R^2 \to R$ *naziva se NCP funkcija ako važi*

$$h(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab = 0. \tag{2.3}$$

Za datu NCP funkciju h, vektor $x = (x_1, ..., x_n)^\top \in R^n$ i $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))^\top \in R^n$, definiše se preslikavanje $H : R^n \to R^n$,

$$H(x) = (h(x_1, F_1(x)), ..., h(x_n, F_n(x)))^\top.$$

Na osnovu definicije NCP funkcije uočava se ekvivalencija problema (2.1) i sistema

$$H(x) = 0, \tag{2.4}$$

što znači da je x^* rešenje problema (2.1) ako i samo ako je x^* rešenje (2.4).

Među mnogobrojnim NCP funkcijama poznatim iz literature, Ferris, Kanzow [20], Fischer [22], Kanzow et all. [30], Mangasarian [44], Sun, Qi [55], nalaze se minimum funkcija

$$g(a,b) = \min\{a,b\} \tag{2.5}$$

i Fišerova funkcija

$$\phi(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b. \tag{2.6}$$

Najčešći oblici preformulacije NCP (2.1) dobijaju se upravo pomoću ovih funkcija, te su zbog toga one i korišćene u ovoj disertaciji.

Dakle, jedan od načina za preformulisanje (2.1) je transformacija na sistem

$$G(x) = 0, \tag{2.7}$$

gde je $G(x) = (g(x_1, F_1(x)), ..., g(x_n, F_n(x)))^\top$, a g je dato sa (2.5), a drugi je preformulacija na sistem

$$\Phi(x) = 0, \tag{2.8}$$

pri čemu je

$$\Phi(x) = (\phi(x_1, F_1(x)), ..., \phi(x_n, F_n(x)))^\top, \tag{2.9}$$

a ϕ je dato sa (2.6).

Dobijeni sistemi (2.7) i (2.8) su sistemi nelinearnih jednačina, ali preslikavanja $G, \Phi : R^n \to R^n$ nisu glatka. Naime, ako je $x_i = F_i(x)$ za neko i, $i = 1, ..., n$, može se desiti da ne postoji izvod funkcije G u tački x i analogno, ukoliko je $x_i = F_i(x) = 0$ za neko i, $i = 1, ..., n$, može se dogoditi da funkcija Φ nije diferencijabilna u x, što znači da G i Φ nisu glatke funkcije.

2.3 Semiglatke funkcije

Pojam semiglatkih funkcija ima značajnu ulogu prilikom proučavanja nelinearnih komplementarnih problema, pa će stoga najpre biti navedene neophodne definicije i neke osobine semiglatkih funkcija.

Neka je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova funkcija. Na osnovu Rademaherove teoreme izložene u Clarke [7], H je diferencijabilna skoro svuda.

Definicija 2.4 *Neka je D_H skup tačaka $x \in R^n$ na kome je funkcija H diferencijabilna. Tada je B-subdiferencijal funkcije H u tački x*

$$\partial_B H(x) = \{ \lim_{x^k \to x} H'(x^k) : \quad x^k \in D_H \}, \tag{2.10}$$

a konveksna obvojnica ovog skupa

$$\partial H(x) = co \partial_B H(x) \tag{2.11}$$

naziva se generalizovani jakobijan funkcije H u tački x.

Skup $\partial_B H(x)$ je neprazan i kompaktan. Za funkciju $H(x) = (H_1(x), H_2(x), ..., H_n(x))^\top$ definišu se skupovi:

$$\partial_b H(x) = \partial_B H_1(x) \times \partial_B H_2(x) \times ... \times \partial_B H_n(x) \qquad (2.12)$$

i

$$\partial_C H(x) = \partial H_1(x) \times \partial H_2(x) \times ... \times \partial H_n(x), \qquad (2.13)$$

koji se nazivaju b-subdiferencijal i C-subdiferencijal funkcije H u tački x i koji se u praksi češće koriste od generalizovanog jakobijana.

Teorema 2.1 *[51] Neka je $x \in R^n$ i neka za ma koje $v \in R^n$ postoji*

$$\lim_{\substack{V \in \partial H(x+tv) \\ t \to 0}} \{Vv\},$$

tada postoji i izvod funkcije H u pravcu v

$$H'(x; v) = \lim_{t \to 0} \frac{H(x+tv) - H(x)}{t}$$

i važi

$$H'(x; v) = \lim_{\substack{V \in \partial H(x+tv) \\ t \to 0}} \{Vv\}.$$

Definicija 2.5 *Funkcija $H : R^n \to R^n$ je semiglatka u x ako je H lokalno Lipšicova u x i ako za svako $v \in R^n$ postoji*

$$\lim_{\substack{V \in \partial H(x+tv') \\ v' \to v, t \to 0}} \{Vv'\}.$$

Konveksne funkcije i glatke funkcije su primeri semiglatkih funkcija. Skalarni proizvodi i sume semiglatkih funkcija su takođe semiglatke funkcije. Ova grupa funkcija nalazi se između Lipšicovih funkcija i C^1 funkcija.

Definicija 2.6 *Semiglatka funkcija H je BD-regularna u x ako su svi elementi skupa $\partial_B H(x)$ regularni.*

Lema 2.1 *[51] Neka je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova funkcija i neka postoji $H'(x; v)$ za svako v u x. Tada važi*

i) *$H'(x; \cdot)$ je Lipšicova funkcija,*

ii) *za svako v postoji $V \in \partial H(x)$ takvo da je*

$$H'(x; v) = Vv.$$

Teorema 2.2 *[51] Neka je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova funkcija, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

i) *H je semiglatka u x,*

ii) *$\{Vv\}$ uniformno konvergira kad $V \in \partial H(x+tv)$, $\|v\| = 1$, $t \to 0$,*

iii) *$\{Vv'\}$ uniformno konvergira kad $V \in \partial H(x + tv')$, $v' \to v$, $\|v\| = 1$, $t \to 0$,*

iv) *za ma koje $V \in \partial H(x + v)$, $v \to 0$ važi*

$$\|Vv - H'(x; v)\| = o(\|v\|),$$

v)

$$\lim_{\substack{x + v \in D_H \\ v \to 0}} \frac{\|H'(x + v; v) - H'(x; v)\|}{\|v\|} = 0.$$

Teorema 2.3 *[51] Neka je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova funkcija. H je semiglatka u x ako i samo ako je svaka komponenta funkcije H semiglatka u x.*

Teorema 2.4 *[18] Neka je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova i semiglatka u $x \in R^n$. Tada za ma koje $V \in \partial H(x+v)$, $v \to 0$ važi*

$$\|H(x+v) - H(x) - Vv\| = o(\|v\|).$$

Definicija 2.7 *Ako za ma koje $V \in \partial H(x+v)$, $v \to 0$ važi*

$$\|Vv - H'(x;v)\| = \mathcal{O}(\|v\|^{p+1}), \quad 0 < p \leq 1,$$

tada je H semiglatka reda p u x.

Teorema 2.5 *[18] Ako je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova i semiglatka u x, tada za bilo koje $v \to 0$ važi*

$$\|H(x+v) - H(x) - H'(x;v)\| = o(\|v\|),$$

a ukoliko je H semiglatka reda p u x, tada za ma koje $v \to 0$ važi

$$\|H(x+v) - H(x) - H'(x;v)\| = \mathcal{O}(\|v\|^{p+1}).$$

Definicija 2.8 *Funkcija $H : R^n \to R^n$ je jako semiglatka u x ukoliko je ona semiglatka u x i ako za svako $V \in \partial H(x+v)$, gde $v \to 0$ važi*

$$\|Vv - H'(x;v)\| = \mathcal{O}(\|v\|^2).$$

Teorema 2.6 *[18] Ako je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova i jako semiglatka u x i ako postoji izvod funkcije H u x u pravcu v, tada važi*

$$\limsup_{\substack{V \in \partial H(x+v) \\ v \to 0}} \frac{\|H(x+v) - H(x) - Vv\|}{\|v\|^2} < \infty.$$

Ako je $H : R^n \to R^n$ neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je ona i semiglatka i važi

$$\partial_B H(x) = \partial H(x) = \{H'(x)\}$$

za svako $x \in R^n$. Ukoliko je H diferencijabilna funkcija sa lokalno Lipšicovim jakobijanom, tada je ona i jako semiglatka.

Najčešći oblik preformulacije NCP je transformacija (2.1) na ekvivalentan sistem nelinearnih jednačina oblika (2.7) ili (2.8). Funkcije $G, \Phi : R^n \to R^n$ koje se koriste u datim preformulacijama nisu glatke, ali su lokalno Lipšicove. Naime, tako definisane funkcije G i Φ su semiglatke u smislu definicije 2.5, pa su dobijeni sistemi (2.7) i (2.8) nelinearni sistemi semiglatkih jednačina.

2.4 Vrste regularizacije

Za rešavanje semiglatkog sistema

$$H(x) = 0, \tag{2.14}$$

dobijenog preformulacijom NCP (2.1), razvijeni su mnogobrojni postupci zasnovani na Njutnovom postupku i njegovim modifikacijama u glatkom slučaju. Svi ti postupci mogu se podeliti na generalizovane postupke Njutnovog tipa i na postupke sa regularizacijom, koji će detaljno biti razmatrani.

Osnovna ideja postupaka sa regularizacijom je aproksimiranje neglatke funkcije $H : R^n \to R^n$ glatkim operatorom $H_\mu : R^n \to R^n$, tako da za svako $x \in R^n$ postoji $\tau > 0$ i važi

$$\|H(x) - H_\mu(x)\| \leq \tau\mu,$$

gde je $\mu > 0$ parametar regularizacije.

Definicija 2.9 *Neka je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova funkcija. Preslikavanje $H_\mu : R^n \to R^n$ je glatka aproksimacija (funkcija regularizacije) funkcije H ako*

i) postoji $\tau > 0$ takvo da za svako $x \in R^n$ i $\mu > 0$ važi

$$\|H(x) - H_\mu(x)\| \leq \tau\mu, \tag{2.15}$$

ii) za ma koje $x \in R^n$ i $\mu > 0$ postoji $H'_\mu(x)$, i H'_μ je neprekidna, *iii) za ma koje* $x \in R^n$ *postoji* $H^0(x)$ *tako da je*

$$H^0(x) = \lim_{\mu \to 0} H'_\mu(x).$$

Definicija 2.10 *Funkcija* $H_\mu : R^n \to R^n$ *zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom, ako za ma koje* $x \in R^n$ *važi*

$$H^0(x) \in \partial_C H(x), \tag{2.16}$$

gde je $\partial_C H(x)$ *C-subdiferencijal funkcije* H *u tački* x *definisan sa (2.13).*

Lema 2.2 *[5] Neka je* H *semiglatka funkcija u* x *i neka* H_μ *zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom, tada važi*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|H(x+v) - H(x) - H^0(x+v)v\|}{\|v\|} = 0.$$

Lema 2.3 *[5] Neka funkcija* H_μ *zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom. Ako su svi elementi skupa* $\partial_C H(x)$ *regularni, tada postoje okolina* $\mathcal{N}(x,r)$ *i konstanta* $M > 0$, *takve da za svako* $y \in \mathcal{N}(x,r)$ *sledi da je* $H^0(y)$ *regularna matrica i važi*

$$\|H^0(y)^{-1}\| \leq M.$$

Osim toga, postoje $M_1 \geq M$ *i* $\bar{\mu} > 0$ *takve da za ma koje* $y \in \mathcal{N}(x,r)$ *i* $\mu \in (0, \bar{\mu})$ *sledi da je* $H'_\mu(y)$ *regularna i*

$$\|H'_\mu(y)^{-1}\| \leq M_1.$$

U radu su korišćene transformacije NCP na sisteme (2.7) i (2.8), pri čemu su funkcije G i Φ semiglatke, pa se zato navode neke od glatkih aproksimacija ovih funkcija, kao i njihove osobine.

Za $\mu > 0$ funkcija G aproksimira se glatkim operatorom $G_\mu : R^n \to R^n$,

$$G_\mu = (g_\mu(x_1, F_1(x)), ..., g_\mu(x_n, F_n(x)))^{\mathrm{T}},$$

pri čemu je

$$g_\mu(a,b) = \frac{a+b-\sqrt{(a-b)^2+\mu^2}}{2}$$

aproksimacija minimum NCP funkcije (2.5). Fukcija Φ aproksimira se operatorom $\Phi_\mu : R^n \to R^n$

$$\Phi_\mu = (\phi_\mu(x_1, F_1(x)), ..., \phi_\mu(x_n, F_n(x)))^\top, \tag{2.17}$$

gde je funkcija Kanzova

$$\phi_\mu(a,b) = \sqrt{a^2+b^2+2\mu} - a - b, \quad \mu > 0, \tag{2.18}$$

glatka aproksimacija Fišerove NCP funkcije (2.6).

Lema 2.4 *[29] Funkcija $\phi_\mu : R^2 \to R$ definisana sa (2.18) je neprekidno diferencijabilna i za svako $(a,b) \in R^2$ i μ_1, $\mu_2 \geq 0$ važi*

$$|\phi_{\mu_1}(a,b) - \phi_{\mu_2}(a,b)| \leq \sqrt{2}|\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}|,$$

$$|\phi_{\mu_1}(a,b) - \phi(a,b)| \leq \sqrt{2\mu_1}.$$

Lema 2.5 *[29] Funkcija $\Phi_\mu : R^n \to R^n$ definisana sa (2.17) je neprekidno diferencijabilna i za svako $x \in R^n$ i μ_1, $\mu_2 \geq 0$ važi*

$$\|\Phi_{\mu_1}(x) - \Phi_{\mu_2}(x)\| \leq \sqrt{2n}|\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}|, \tag{2.19}$$

$$\|\Phi_{\mu_1}(x) - \Phi(x)\| \leq \sqrt{2n\mu_1}. \tag{2.20}$$

3

Iterativni postupci za rešavanje glatkih sistema

3.1 Njutnov postupak

Sistemi nelinearnih jednačina oblika

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

gde je $f : D \subseteq R^n \to R^n$ nelinearna funkcija rešavaju se iterativnim postupcima. Naime, većina ovih sistema ne može se rešiti tačno, pa se zato određuje njihovo približno rešenje primenom nekog numeričkog postupka, što je uslovilo intenzivan razvoj čitave oblasti poznate pod nazivom numeričko rešavanje sistema nelinearnih jednačina.

Njutnov postupak je jedan od najpoznatijih postupaka za rešavanje nelinearnih sistema. Iterativni niz se ovim postupkom generiše na sledeći način.

Algoritam: NJUTNOV POSTUPAK (N)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$f'(x^k)s^k = -f(x^k),$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Kada je reč o glatkim sistemima, nadalje će se podrazumevati da važe sledeće osnovne pretpostavke:

P1: f je neprekidno diferencijabilna funkcija na D,

P2: postoji rešenje $x^* \in D$ sistema (3.1),

P3: $f'(x^*)$ je regularna matrica.

Njutnov postupak je lokalno kvadratno konvergentan, te je veoma atraktivan u teorijskom smislu.

Teorema 3.1 *[31] Neka su zadovoljene osnovne pretpostavke i neka je f' Lipšic neprekidno preslikavanje sa konstantom L, tj. neka važi*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in D.$$

Tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je za svako $x^0 \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ niz $\{x^k\}$ dobijen Njutnovim postupkom dobro definisan i konvergira kvadratno ka rešenju x^* sistema (3.1).

Brza lokalna konvergencija i postizanje tačnog rešenja u prvoj iteraciji u slučaju afinog preslikavanja su prednosti ovog postupka. Međutim Njutnov postupak, kao i mnogi drugi iterativni postupci ima i svoje nedostatke, a to su izračunavanje matrice jakobijana i tačno rešavanje sistema linearnih jednačina u svakoj iteraciji, što je komplikovano i skupo pri praktičnoj realizaciji, kada su u pitanju sistemi velikih dimenzija.

U cilju prevazilaženja ovih nedostataka razvile su se modifikacije Njutnovog postupka, a to su netačni Njutnovi postupci i kvazi-Njutnovi postupci.

3.2 Netačni Njutnovi postupci

Osnovna ideja ove grupe postupaka je približno rešavanje sistema linearnih jednačina u svakom iterativnom koraku, čime se postiže ušteda i tako otklanja jedan od nedostataka Njutnovog postupka.

Iterativni niz se netačnim Njutnovim postupkom generiše sledećim algoritmom.

Algoritam: NETAČNI NJUTNOV POSTUPAK (IN)

S0: Dat je niz $\{t_k\}$ za koji važi $t_k \geq 0$ za svako k i $x^0 \in R^n$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$f'(x^k)s^k = -f(x^k) + r^k, \tag{3.2}$$

gde je

$$\|r^k\| \leq t_k \|f(x^k)\|, \tag{3.3}$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Niz $\{t_k\}$ je niz nenegativnih brojeva poznat pod nazivom "forcing term", koji povezuje normu rezidualnog vektora sa normom vrednosti funkcije i reguliše nivo tačnosti rešenja linearnog sistema (3.2). Ukoliko je $t_k = 0$ za svako k, natačni Njutnov postupak se svodi na Njutnov postupak.

Lokalna konvergencija ovog postupka dokazana je u radu Dembo et all. [9], pod pretpostavkom da je niz $\{t_k\}$ uniformno ograničen jedinicom.

Teorema 3.2 *[9] Neka su zadovoljene osnovne pretpostavke i neka je $t_k \leq t_{\max} < t < 1$. Tada postoji pozitivan broj ε takav da ako je $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$, iterativni niz $\{x^k\}$ formiran IN postupkom uz uslov (3.3) konvergira linearno u normi $\|\cdot\|_*$ ka tačnom rešenju x^* sistema (3.1), tj. važi*

$$\|x^{k+1} - x^*\|_* \leq t\|x^k - x^*\|_*,$$

pri čemu je $\|y\|_* = \|f'(x^*)y\|$.

Teorema 3.3 *[9] Neka niz $\{x^k\}$ dobijen IN postupkom sa uslovom (3.3) konvergira ka rešenju x^*. Tada je konvergencija superlinearna ako i samo ako važi*

$$\|r^k\| = o(\|f(x^k)\|), \quad kad \quad k \to \infty. \tag{3.4}$$

Niz $\{t_k\}$ utiče na red konvergencije netačnog Njutnovog postupka. Prethodna relacija (3.4) implicira da niz $\{x^k\}$ dobijen IN postupkom sa uslovom (3.3) konvergira superlinearno ka rešenju x^* ako je

$$\lim_{k\to\infty} t_k = 0.$$

Netačni Njutnov postupak sa kriterijumom (3.3) nije afino invarijantan, za razliku od Njutnovog postupka. U radu Ypma [57], definisan je novi kriterujum

$$\frac{\|f'(x^k)^{-1}r^k\|}{\|f'(x^k)^{-1}f(x^k)\|} \leq t_k, \tag{3.5}$$

koji povezuje rezidualni vektor i vrednost funkcije ali u težinskoj normi, definisanoj pomoću inverznog jakobijana. Ovaj kriterijum je afino invarijantan, ali nije baš pogodan za praktično izračunavanje. Dokazana je lokalna konvergencija netačnog Njutnovog postupka sa kriterijumom (3.5).

Teorema 3.4 *[57] Neka su zadovoljene pretpostavke kao u teoremi 3.2. Tada postoji okolina rešenja x^*, takva da za ma koju početnu iteraciju x^0 iz te okoline sledi da niz $\{x^k\}$ generisan IN postupkom sa kriterijumom (3.5) konvergira linearno ka x^*.*

Teorema 3.5 *[57] Neka niz $\{x^k\}$ dobijen IN postupkom sa kriterijumom (3.5) konvergira ka x^*. Tada*

i) $\{x^k\}$ konvergira ka x^* superlinearno ako i samo ako je

$$\|f'(x^k)^{-1}r^k\| = o(\|f'(x^k)^{-1}f(x^k)\|), \quad kad \quad k\to\infty,$$

ii) $\{x^k\}$ konvergira ka x^* sa q-redom bar $1+p$ ako i samo ako je

$$\|f'(x^k)^{-1}r^k\| = \mathcal{O}(\|f'(x^k)^{-1}f(x^k)\|^{1+p}), \quad kad \quad k\to\infty.$$

Konvergencija netačnog Njutnovog postupka sa kriterijumom (3.5) takođe je uslovljena konvergencijom niza t_k.

Ako je

$$\lim_{k\to\infty} t_k = 0,$$

tada niz $\{x^k\}$ dobijen IN postupkom sa kriterijumom (3.5) konvergira superlinearno ka x^*, a ukoliko je

$$t_k = \mathcal{O}(\|f'(x^k)^{-1}f(x^k)\|^p), \quad \text{kad} \quad k\to\infty$$

tada $\{x^k\}$ konvergira sa q-redom bar $1+p$.

3.3 Kvazi-Njutnovi postupci

Jedan od nedostataka Njutnovog postupka jeste izračunavanje matrice jakobijana u svakom iterativnom koraku, što komplikuje i poskupljuje primenu postupka tj. povećava računsku složenost algoritma. Kvazi-Njutnovi postupci čine grupu modifikacija Njutnovog postupka koja se razvila sa težnjom da se eliminiše dati nedostatak. Osnovna karakteristika ovih postupaka jeste aproksimiranje matrice jakobijana nekom matricom znatno jednostavnijom za izračunavanje.

Najjednostavnija modifikacija Njutnovog postupka koja spada u kvazi-Njutnove postupke je fiksni Njutnov postupak, koji se definiše na sledeći način.

Algoritam: FIKSNI NJUTNOV POSTUPAK (FN)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$f'(x^0)s^k = -f(x^k),$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

U svakoj iteraciji jakobijan se aproksimira istom matricom, pa ovaj metod otklanja nedostatak Njutnovog postupka, ima manju računsku složenost od Njutnovog postupka, ali je sporiji. Fiksni Njutnov postupak je linearno konvergentan, za razliku od Njutnovog postupka koji je brz ali skup.

Teorema 3.6 *[31] Neka su zadovoljene osnovne pretpostavke i neka je f' Lipšic neprekidna na D. Tada postoje konstante $K_C > 0$ i $\varepsilon > 0$ takve da za svako $x^0 \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ FN postupak konvergira linearno ka x^* i važi*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq K_C \|x^0 - x^*\| \|x^k - x^*\|.$$

U radu Krejić, Lužanin [32] definisan je postupak modifikacije slobodnog vektora (MRV), koji je nastao sa ciljem da se dobije postupak koji ima manju računsku složenost od Njutnovog postupka, a koji je brži od fiksnog Njutnovog postupka. To je postupak koji ima istu matricu sistema u svakom iterativnom koraku, a slobodni vektor u Njutnovoj jednačini se ažurira. Tretirajući matricu sistema kao aproksimaciju matrice jakobijana, MRV postupak se može tumačiti kao kvazi-Njutnov postupak, s tim što se on istovremeno može posmatrati i kao netačni Njutnov postupak.

Algoritam: MRV POSTUPAK (MRV)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$ i matrica $A \in R^{n \times n}$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$As^k = (\alpha_k \bar{H}(x^k) - E) f(x^k),$$

gde je $\alpha_k \in R$ i

$$\bar{H}(x^k) = f'(x^k) - A,$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Ideja MRV postupka je ažuriranje slobodnog vektora tako da fiksni Njutnov postupak postane što sličniji Njutnovom postupku. Ukoliko je $A = f'(x^0)$ i $\alpha_k = 0$ za svako k, MRV postupak se svodi na fiksni Njutnov postupak. Iako Njutnov postupak nije specijalan slučaj MRV postupka, pažljivim izborom matrice sistema A i parametra α_k ovaj postupak daje dobre rezultate.

Teorema 3.7 *[32] Neka važe osnovne pretpostavke, neka je matrica A regularna i neka $r \in (0,1)$. Tada postoje konstante $\varepsilon = \varepsilon(r)$, $\delta = \delta(r)$ i $\bar{\alpha} > 0$ takve da ako je $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$, $\|A - f'(x^*)\| \leq \delta$ i $|\alpha_k| < \bar{\alpha}$, sledi da niz $\{x^k\}$ generisan MRV postupkom konvergira linearno ka x^* i važi*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq r\|x^k - x^*\|, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Najjednostavnija mogućnost je konstantna vrednost parametra u toku celog postupka tj. $\alpha_k \equiv \alpha = const.$ Druga mogućnost je izbor optimalnog parametra, koji se određuje iz uslova da nova iteracija bude što "sličnija" Njutnovoj iteraciji. Vrednost optimalnog parametra je

$$\alpha_k^{opt} = \frac{< v, w + q >}{< w + q, w + q >}, \tag{3.6}$$

gde je $M = \bar{H}(x^k)A^{-1}$, $v = Mf(x^k)$, $w = \bar{H}(x^k)f(x^k)$, $q = Mw$.

Naredna teorema odnosi se na konvergenciju MRV postupka sa optimalnim parametrom.

Teorema 3.8 *[32] Neka su zadovoljene osnovne pretpostavke, neka je A regularna matrica i neka je $t < 1$. Tada postoje konstante ε, $\delta > 0$ takve da ako je $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$ i $\|A - f'(x^*)\| \leq \delta$, sledi da niz $\{x^k\}$ generisan MRV postupkom sa optimalnim parametrom α_k^{opt} datim sa (3.6) konvergira linearno ka rešenju x^* u odgovarajućoj normi, tj. važi*

$$\|x^{k+1} - x^*\|_* \leq t\|x^k - x^*\|_*,$$

gde je $\|y\|_* = \|f'(x^*)y\|$.

Postoje kvazi-Njutnovi postupci kod kojih se aproksimacija B_k matrice jakobijana $f'(x^k)$ menja u svakom koraku po nekom pravilu, a iterativni niz $\{x^k\}$ se dobija na sledeći način.

Algoritam: KVAZI-NJUTNOV POSTUPAK (QN1)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$ i matrica $B_0 \in R^{n\times n}$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$B_k s^k = -f(x^k),$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k,$$

$$B_{k+1} = M(B_k, x^k).$$

S2: Stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

Druga mogućnost je da se pak u svakom koraku menja aproksimacija A_k inverzne matrice jakobijana, pri čemu se niz $\{x^k\}$ generiše sledećim algoritmom.

Algoritam: KVAZI-NJUTNOV POSTUPAK (QN2)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$ i matrica $A_0 \in R^{n\times n}$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$s^k = -A_k f(x^k),$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k,$$

$$A_{k+1}^{-1} = M(A_k^{-1}, x^k).$$

S2: Stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

Konvergencija kvazi-Njutnovih postupaka je linearna ili superlinearna. Opšti uslovi za konvergenciju postupka QN2 dati su u narednoj teoremi.

Teorema 3.9 *[31] Neka su zadovoljene osnovne pretpostavke i neka je f' Lipšic neprekidno na D. Tada postoje konstante $K_A > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, takve da ako $x^0 \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ i linearno preslikavanje $A(x)$ zadovoljava uslov*

$$\|E - A(x)f'(x^*)\| = \rho(x) < \varepsilon_1$$

za sve $x \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$, sledi da QN2 postupak sa $A_k = A(x^k)$ konvergira linearno ka x^* i važi

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq K_A(\rho(x^k) + \|x^k - x^*\|)\|x^k - x^*\|.$$

Kvazi-Njutnovi postupci koji zadovoljavaju jednačinu sečice

$$B_{k+1}s^k = f(x^{k+1}) - f(x^k)$$

se vrlo često primenjuju. Međutim, ovako određena matrica B_{k+1} nije jedinstvena, pa se dodatno zahteva da ona bude rešenje sledećeg optimizacionog problema

$$\min\{\|B - B_k\|, \ B \in R^{n\times n}, \ Bs^k = f(x^{k+1}) - f(x^k)\}.$$

U zavisnosti od norme koja se primenjuje dobijaju se različiti postupci ovog tipa među kojima su najpoznatiji "dobar" Brojdenov postupak

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y^k - B_k s^k){s^k}^\top}{{s^k}^\top s^k}, \quad y^k = f(x^{k+1}) - f(x^k)$$

i "loš" Brojdenov postupak

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y^k - B_k s^k){y^k}^\top B_k}{{y^k}^\top B_k s^k}.$$

Oba ova postupka su lokalno superlinearno konvergentna.

Teorema 3.10 *[13] Neka važe osnovne pretpostavke i neka osim toga f' zadovoljava Lipšicov uslov u x^* sa konstantom L. Tada je niz generisan "dobrim" Brojdenovim postupkom dobro definisan i konvergira superlinearno ka x^* za svaku početnu aproksimaciju dovoljno blisku tačnom rešenju.*

Veliki doprinos razvoju ovih algoritama dali su mnogobrojni autori, a jedan sveobuhvatni pregled referenci dat je u radu Martínez [45].

3.4 Braunov postupak

Braunov postupak, posmatran u radovima Brown [4], Fromer [23], Milaszewicz [47] i dr., spada u numeričke postupke za rešavanje glatkih sistema nelinearnih jednačina oblika (3.1), gde je $f : D \subseteq R^n \to R^n$, $f = (f_1, ..., f_n)^\top$, $f_i : D \subseteq R^n \to R$.

Ovaj metod predstavlja modifikaciju Njutnovog postupka koja se bazira na Gausovom postupku eliminacije. U suštini, to je kombinacija jednodimenzionalnog Njutnovog postupka sa Gaus-Zajdelovim postupkom. Ukoliko je dimenzija prostora $n = 1$, Braunov postupak se svodi na Njutnov, a u slučaju da je preslikavanje f linearno on se svodi na Gausov postupak eliminacije.

Radi jednostavnijeg praćenja algoritma uvode se potrebne oznake:

$$\bar{x}^{k,i} = (x_i^k, x_{i+1}^k, ..., x_n^k)^\top, \quad i = 1, ..., n,$$

$$\bar{x}^i = (x_i, x_{i+1}, ..., x_n)^\top, \quad i = 1, ..., n.$$

Za dato $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)^\top \in R^n$ i indeks i, $i = 1, 2, ..., n$ sukcesivno se definišu funkcije

$$f_{ii}(\bar{x}^i) = f_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i), \tag{3.7}$$

$$s_i(\bar{x}^{i+1}) = x_i^k - (\frac{\partial f_{ii}}{\partial x_i}(\bar{x}^{k,i}))^{-1} \left[\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f_{ii}}{\partial x_j}(\bar{x}^{k,i})(x_j - x_j^k) + f_{ii}(\bar{x}^{k,i}) \right]. \tag{3.8}$$

Iterativni niz $\{x^k\}$ se Braunovim postupkom dobija na sledeći način.

Algoritam: BRAUNOV POSTUPAK (B)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$, $k := 0$.

S1: Za $i = 1, 2, ..., n-1$ odredi

$$x_i = s_i(\bar{x}^{i+1}),$$

gde je $s_i(\bar{x}^{i+1})$ dato sa (3.8).

S2: Odredi

$$x_n^{k+1} = x_n^k - (\frac{\partial f_{nn}}{\partial x_n}(x_n^k))^{-1} f_{nn}(x_n^k),$$

a zatim za $i = n-1, n-2, ..., 1$ odredi

$$x_i^{k+1} = s_i(\bar{x}^{k+1,i+1}).$$

S3: Stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

Braunov postupak se može zapisati u matričnom obliku

$$U(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -m(x^k),$$

gde je

$$U(x^k) = \begin{bmatrix} u_{11}^k & u_{12}^k & \cdots & u_{1n}^k \\ 0 & u_{22}^k & \cdots & u_{2n}^k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn}^k \end{bmatrix}$$

gornja trougaona matrica iz $R^{n \times n}$ sa elementima

$$u_{ij}^k = 0 \quad \text{za} \quad i > j,$$

i

$$u_{ij}^k = \frac{\partial f_{ii}}{\partial x_j}(\bar{x}^{k,i}) \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n; \quad j = i, i+1, ..., n,$$

a vektor $m(x^k) \in R^n$ ima komponente $m_i(x^k) = f_{ii}(\bar{x}^{k,i}), i = 1, 2, ..., n$.

Pod nešto jačim pretpostavkama u odnosu na osnovne, u radu Brown [1] dokazana je lokalna kvadratna konvergencija ovog postupka.

Teorema 3.11 *[1] Neka je f dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija, neka postoji rešenje x^* sistema (3.1) i neka je $f'(x^*)$ regularna matrica. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da ako $x^0 \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ iterativni niz $\{x^k\}$ dobijen Braunovim postupkom konvergira kvadratno ka x^*.*

Lokalna konvergencija Braunovog postupka sa dodatnim pretpostavkama vezanim za konveksnost skupa D, posmatrana je u radovima Fromer [23], Milaszewicz [47], i dr.

3.5 Algoritmi za globalizaciju

Do sada je razmatrana lokalna konvergencija nekih iterativnih postupaka za rešavanje glatkih nelinearnih sistema oblika (3.1). Naime, tvrđenja o konvergenciji važila su pod uslovom da je početna aproksimacija x^0 dovoljno bliska tačnom rešenju x^* sistema (3.1). Sledeći korak predstavlja globalizacija brzih lokalnih algoritama, tj. garantovanje konvergencije postupaka za proizvoljno izabranu startnu iteraciju x^0.

Algoritmi za globalizaciju se grubo mogu podeliti na monotone, koji zahtevaju strogu redukciju odnosno opadanje vrednosti norme funkcije u svakoj narednoj iteraciji tj.

$$\|f(x^{k+1})\| < \|f(x^k)\|$$

i nemonotone, kod kojih mora biti zadovoljen uslov

$$\|f(x^{k+1})\| \leq \mathcal{O}(\|f(x^k)\|) + \eta_k,$$

gde je $\{\eta_k\}$ niz pozitivnih brojeva sa osobinom $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k = \eta < \infty$.

Rešavanje sistema (3.1) ekvivalentno je traženju globalnog minimuma funkcije cilja

$$\Theta(x) = \frac{1}{2}\|f(x)\|^2, \quad \Theta : R^n \to R, \tag{3.9}$$

tj. problem (3.1) ekvivalentan je problemu

$$\Theta(x) \to \min,$$

gde je $\Theta(x)$ dato sa (3.9).

Ako je pravac pretraživanja, dobijen na osnovu nekog lokalnog algoritma opadajući pravac za funkciju $\Theta(x)$, tada se globalizacija obično vrši primenom postupka linijskog pretraživanja za minimizaciju funkcije cilja $\Theta(x)$.

Naredni algoritam, koji je formulisan u Dennis, Schnabel [14], spada u monotone algoritme za globalizaciju.

Algoritam: POSTUPAK LINIJSKOG PRETRAŽIVANJA SA ARMIJO PRAVILOM

S0: Neka je $x^0 \in R^n$, $\beta \in (0,1)$, $\rho \in (0,1/2)$, $k := 0$.

S1: Odredi pravac d^k, koji je opadajući za $\Theta(x)$.

S2: Odaberi najmanji broj $m \in \{0,1,2,...\}$ tako da važi

$$\Theta(x^k + \beta^m d^k) \le \Theta(x^k) + \beta^m \rho \nabla\Theta(x^k)^\top d^k,$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k,$$

gde je $\lambda_k = \beta^m$.

S3: Stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

U slučaju da pravac d^k nije opadajući pravac za $\Theta(x)$, obično se uvodi gradijentni korak koji jeste pravac opadanja ili se koristi nemonotona tehnika za globalizaciju koja je predstavljena u radu Birgin et all. [3] po ugledu na Li, Fukushima [40].

Algoritam: NEMONOTONA GLOBALIZACIJA

S0: Neka je $\sigma \in (0,1)$, $0 < \tau_{\min} < \tau_{\max} < 1$, $\theta \in [0,1)$, i neka je $\{\eta_k\}$ niz pozitivnih brojeva sa osobinom $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k = \eta < \infty$, i $x^0 \in R^n$, $k := 0$.

S1: Odredi pravac pretraživanja d^k.

S2: Stavi $\alpha = 1$.

S3: Ako je

$$\|f(x^k + \alpha d^k)\| \le (1 + \alpha\sigma(\theta - 1))\|f(x^k)\| + \eta_k$$

tada $\alpha_k = \alpha$ i

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k,$$

inače odredi $\alpha_{new} \in [\alpha\tau_{\min}, \alpha\tau_{\max}]$, stavi $\alpha = \alpha_{new}$ i ponovi korak S3.

S4: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Algoritmi za globalizaciju, tj. za određivanje uslova koji obezbeđuju globalnu konvergenciju postupaka za rešavanje glatkih sistema razvijaju se veoma intenzivno. Pod standardnim pretpostavkama dokazana je globalna konvergencija Njutnovog postupka i njegovih modifikacija u mnogobrojnim radovima, Eisenstat, Walker [17], Kantorovich [26], Kelley [31], Krejić, Martínez [35], Li, Fukushima [39], i dr.

4

Generalizovani postupci za rešavanje semiglatkih sistema

4.1 Generalizovani postupci Njutnovog tipa

Zbog problema sa diferencijabilnošću, klasična teorija ne daje dobre rezultate pri rešavanju neglatkih sistema nelinearnih jednačina, pa se zato koriste iterativni postupci dobijeni uopštavanjem postupaka za rešavanje glatkih sistema. Oni se dele u tri klase: generalizovane postupke Njutnovog tipa, postupke sa regularizacijom sistema jednačina i postupke sa regularizacijom matrice jakobijana. Najpre se razvila prva grupa postupaka koji su zasnovani na primeni generalizovanog jakobijana.

Neka je $H : R^n \to R^n$ nelinearna, lokalno Lipšicova funkcija. Sistem jednačina

$$H(x) = 0, \tag{4.1}$$

ne može se rešavati klasičnim Njutnovim postupkom jer H nije glatka, pa se stoga koristi generalizovani Njutnov postupak. Iterativni niz se generiše sledećim algoritmom.

Algoritam: GENERALIZOVAN NJUTNOV POSTUPAK (GN)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$V_k s^k = -H(x^k), \quad V_k \in \partial H(x^k),$$

gde je $\partial H(x^k)$ generalizovani jakobijan funkcije H u x^k, definisan na osnovu (2.11),

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Sa računarske tačke gledišta određivanje generalizovanog jakobijana može biti komplikovano, pa se često umesto skupa ∂H koristi neki od subdiferencijala $\partial_B H$, $\partial_b H$ ili $\partial_C H$ koji su dati sa (2.10), (2.12), (2.13), respektivno. Slično kao i u glatkom slučaju, da bi se izbegli nedostaci generalizovanog Njutnovog postupka razvile su se njegove modifikacije. Jedna od njih je generalizovan netačni Njutnov postupak.

Algoritam: GENERALIZOVAN NETAČNI NJUTNOV POSTUPAK (GIN)

S0: Dat je niz $\{t_k\}$ za koji važi $t_k \geq 0$ za svako k i $x^0 \in R^n$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$V_k s^k = -H(x^k) + r^k, \quad V_k \in \partial_B H(x^k),$$

tako da važi

$$\|r^k\| \leq t_k \|H(x^k)\|, \tag{4.2}$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Drugu grupu modifikacija čine generalizovani kvazi-Njutnovi postupci koji se takođe koriste za rešavanje (4.1).

Algoritam: GENERALIZOVAN KVAZI-NJUTNOV POSTUPAK (GQN)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$ i niz matrica $\{V_k\} \in R^{n\times n}$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$V_k s^k = -H(x^k),$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

Kako je predmet disertacije rešavanje nelinearnih komplementarnih problema posebna pažnja biće posvećena iterativnim postupcima za ove probleme. U radovima Lopes et all. [41], Sun, Han [54] izloženi su kvazi-Njutnovi postupci za rešavanje semiglatkih sistema oblika (2.7) i (2.8), nastalih preformulacijom nelinearnih komplementarnih problema. Poznato je da se NCP

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^{\mathsf{T}} F(x) = 0, \tag{4.3}$$

gde je $F : R^n \to R^n$, $F = (F_1, F_2, ..., F_n)^{\mathsf{T}}$ nelinearna, neprekidno diferencijabilna funkcija, može transformisati na ekvivalentan sistem semiglatkih jednačina

$$G(x) = \min\{x, F(x)\}, \tag{4.4}$$

pri čemu se operator min uzima po komponentama. Kvazi-Njutnov postupak za rešavanje (4.4) dat u radu Lopes et all. [41] definiše se na sledeći način.

Algoritam: KVAZI-NJUTNOV POSTUPAK ZA NCP (QNNCP)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$ i niz matrica $\{A_k\} \in R^{n\times n}$, $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$B_k s^k = -G(x^k), \quad B_k \in R^{n\times n}$$

gde je matrica B_k data sa

$$[B_k]_i = \begin{cases} [A_k]_i, & \text{ako} \quad x_i^k > F_i(x^k) \\ e^i, & \text{ako} \quad x_i^k < F_i(x^k) \\ \lambda e^i + (1-\lambda)[A_k]_i, & \text{ako} \quad x_i^k = F_i(x^k) \end{cases} \tag{4.5}$$

za $i = 1, 2, ..., n$, A_k je aproksimacija matrice jakobijana funkcije F u x^k, a $\lambda \in \{0, 1\}$,

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Na analogan način u istom radu predstavljen je i kvazi-Njutnov postupak za rešavanje semiglatkog sistema (2.8).

4.2 Lokalna konvergencija

Generalizovan Njutnov postupak za rešavanje sistema semiglatkih jednačina, kao i njegove modifikacije su lokalno konvergentni. U radu Qi, Sun [51] dokazana je superlinearna konvergencija generalizovanog Njutnovog postupka za rešavanje sistema (4.1).

Teorema 4.1 *[51] Neka je x^* rešenje sistema (4.1), H je lokalno Lipšicova i semiglatka funkcija u x^* i neka su svi elementi skupa $\partial H(x^*)$ regularni. Tada je GN postupak dobro definisan i konvergira superlinearno ka rešenju x^* u okolini x^*. Ukoliko je funkcija H semiglatka reda p u x^*, tada GN postupak konvergira sa redom $1 + p$.*

Analogno tvrđenje o lokalnoj konvergenciji GN postupka u slučaju da $V_k \in \partial_b H(x^k)$ formulisano je u Sun, Han [54].

Generalizovan netačni Njutnov postupak sa uslovom (4.2) definisan je u radu Martínez, Qi [46], gde je pokazana lokalna konvergencija datog postupka za dovoljno malo t.

Teorema 4.2 *[46] Neka je H lokalno Lipšicova funkcija na otvorenom, konveksnom skupu $D \subseteq R^n$, koja je osim toga semiglatka i BD regularna u rešenju $x^* \in D$ sistema (4.1). Tada postoje $t < 1$ i okolina rešenja x^* takvi da ako je niz $\{t_k\}$ ograničen sa t, sledi da za ma koju početnu iteraciju x^0 iz te okoline niz $\{x^k\}$ formiran GIN postupkom uz uslov (4.2) konvergira linearno ka x^*.*
Ukoliko niz $\{t_k\} \to 0$ tada $\{x^k\}$ konvergira superlinearno ka x^*.

Kada su u pitanju glatki sistemi, netačni Njutnov postupak je lokalno konvergentan za dato $t < 1$. Međutim, ovo ne važi za semiglatke sisteme, što pokazuje primer naveden u radu Martínez, Qi [46]. U opštem slučaju, kada je H lokalno Lipšicova neglatka funkcija, ne može se pokazati konvergencija GIN postupka sa uslovom (4.2) za proizvoljno $t < 1$, već samo za t dovoljno malo.

Bolji rezultat dobija se primenom drugog kriterijuma. Naime, uslov (4.2) može se zameniti uslovom

$$\|V_k^{-1} r^k\| \leq t_k \|V_k^{-1} H(x^k)\|, \tag{4.6}$$

koji je afino invarijantan, ali je komplikovan za praktičnu primenu.

U istom radu dokazana je lokalna konvergencija GIN postupka sa kriterijumom (4.6) za dato $t < 1$.

Teorema 4.3 *[46] Neka su zadovoljene pretpostavke iz prethodne teoreme, i neka je dato $t \in (0, 1)$ i $\bar{t} \in (t, 1)$. Tada postoji okolina tačnog rešenja x^*, takva da za bilo koju početnu aproksimaciju x^0 iz te okoline i niz $\{t_k\}$ sadržan u $[0, t]$ sledi da niz $\{x^k\}$ generisan GIN postupkom sa uslovom (4.6) konvergira linearno ka x^*, tj. važi*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \bar{t}\|x^k - x^*\|, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Ukoliko $\{t_k\} \to 0$, tada niz $\{x^k\}$ konvergira superlinearno ka x^*.

Sistem jednačina (4.1) može se rešavati kvazi-Njutnovim postupcima. Generalizovan kvazi-Njutnov postupak predstavljen je u radu Sun, Han [54], u kome je pokazana lokalna konvergencija.

Teorema 4.4 *[54] Neka je $H : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova funkcija na otvorenom konveksnom skupu $D \subseteq R^n$, koja je osim toga i semiglatka u rešenju $x^* \in D$ sistema (4.1). Neka su sve $W_* \in \partial_b H(x^*)$ regularne matrice. Tada postoje pozitivne konstante ε i δ takve da ako $x^0 \in D$, $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$, i ako postoje $W_k \in \partial_b H(x^k)$ za koje važi*

$$\|V_k - W_k\| \leq \delta, \tag{4.7}$$

sledi da je niz generisan GQN postupkom dobro definisan i konvergira linearno ka x^* u okolini x^*.

Teorema 4.5 *[54] Neka su zadovoljene pretpostavke iz prethodne teoreme. Neka je $\{V_k\}$ niz regularnih matrica iz $R^{n\times n}$ i neka za $x^0 \in D$ niz $\{x^k\}$ generisan GQN postupkom ostaje u D i zadovoljava $x^k \neq x^*$ za svako k, i $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$. Tada $\{x^k\}$ konvergira superlinearno ka x^* i $H(x^*) = 0$ ako i samo ako postoje $W_k \in \partial_b H(x^k)$ tako da važi*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(V_k - W_k)s^k\|}{\|s^k\|} = 0,$$

gde je $s^k = x^{k+1} - x^k$.

Lokalna konvergencija u $\|\cdot\|_\infty$ QNNCP postupka za rešavanje semiglatkog sistema (4.4), nastalog preformulacijom NCP dokazana je u Lopes et all. [41] pod sledećim pretpostavkama:

P1: postoji rešenje x^* sistema (4.4),

P2: F' je Lipšic neprekidna u okolini x^*,

P3: G je BD-regularna u x^*.

Teorema 4.6 *[41] Neka su zadovoljene navedene pretpostavke i neka $r \in (0,1)$. Tada postoje konstante $\varepsilon, \delta > 0$ takve da ako je $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$*

i $\|A_k - F'(x^*)\| \leq \delta$ *za svako* k*, sledi da je niz* $\{x^k\}$ *generisan QN-NCP postupkom, gde je* B_k *dato sa (4.5) dobro definisan i konvergira linearno ka* x^**, tj. važi*

$$\|x^{k+1} - x^*\|_\infty \leq r\|x^k - x^*\|_\infty, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Teorema 4.7 *[41] Neka su zadovoljene navedene pretpostavke i neka niz* $\{x^k\}$ *generisan QNNCP postupkom, gde je* B_k *dato sa (4.5) konvergira ka* x^**. Neka je* A_k *aproksimacija matrice jakobijana funkcije* F *u tački* x^k *i* $s^k = x^{k+1} - x^k$*. Ako je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(A_k - F'(x^*))s^k\|}{\|s^k\|} = 0,$$

tada niz $\{x^k\}$ *konvergira superlinearno ka* x^**.*

4.3 Postupak modifikacije slobodnog vektora za NCP

U ovom poglavlju detaljno će biti izložen jedan novi postupak koji spada u grupu kvazi-Njutnovih postupaka za rešavanje nelinearnih komplementarnih problema. Reč je o postupku koji je nastao uopštavanjem postupka modifikacije slobodnog vektora (MRV) za glatke sisteme.

Rešava se sistem semiglatkih jednačina

$$G(x) = \min\{x, F(x)\} = 0, \tag{4.8}$$

dobijen preformulacijom NCP (4.3). Neka je data startna iteracija $x^0 \in R^n$. Definiše se matrica B

$$[B]_i = \begin{cases} e^i, & \text{ako} \quad x_i^0 < F_i(x^0) \\ [A]_i, & \text{ako} \quad x_i^0 > F_i(x^0) \\ \lambda e^i + (1-\lambda)[A]_i, & \text{ako} \quad x_i^0 = F_i(x^0) \end{cases}, \tag{4.9}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$ pri čemu je $A \in R^{n\times n}$, $\lambda \in \{0, 1\}$. Svakom $x \in R^n$ pridružuje se skup matrica $\{V(x)\}$ gde je

$$[V(x)]_i = \begin{cases} e^i, & \text{ako} \quad x_i < F_i(x) \\ [F'(x)]_i, & \text{ako} \quad x_i > F_i(x) \\ \lambda e^i + (1-\lambda)[F'(x)]_i, & \text{ako} \quad x_i = F_i(x) \end{cases}, \tag{4.10}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$, i $\lambda \in \{0, 1\}$. Na osnovu definicije (2.12) skupa $\partial_b G(x)$ sledi $V(x) \in \partial_b G(x)$.

Iterativni niz $\{x^k\}$ se generiše sledećim algoritmom.

Algoritam: MRV POSTUPAK ZA NCP (MRVNCP)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$ i regularna matrica $B \in R^{n\times n}$ definisana sa (4.9), $k := 0$.

S1: Odredi s^k iz jednačine

$$Bs^k = (\alpha_k W(x^k) - E)G(x^k),$$

gde je

$$W(x^k) = V(x^k) - B,$$

$\alpha_k \in R$, a $V(x^k)$ je dato sa (4.10),

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Kao i u glatkom slučaju, u svakoj iteraciji se modifikuje slobodni vektor i rešava sistem linearnih jednačina. S obzirom da je u toku čitavog postupka matrica sistema B ista, postiže se manja računska složenost, što čini prednost ovog postupka.

Relaksacioni parametar α_k utiče na aproksimaciju inverznog generalizovanog jakobijana $\left(B^{-1} + \alpha_k(E - B^{-1}V(x^k))\right)$. Analogno glatkom slučaju, najjednostavnija mogućnost je konstantna vrednost parametra $\alpha_k = \alpha = const$, tokom celog postupka. Specijalnim izborom $\alpha_k = 0$ dobija se generalizovani fiksni Njutnov postupak. Druga mogućnost je izbor optimalnog parametra

$$\alpha_k^{opt} := \arg\min_{\alpha\in R}\|L(x^k + s^k)\|_2^2, \tag{4.11}$$

pri čemu je

$$s^k = -B^{-1}(E - \alpha_k W(x^k))G(x^k),$$

a linearni model koji se minimizira je

$$L(x^k + d) = G(x^k) + V(x^k)d.$$

Rešenje problema (4.11) je

$$\alpha_k^{opt} = \frac{< v, w + q >}{< w + q, w + q >}, \tag{4.12}$$

gde je

$$M = W(x^k)B^{-1}, \quad v = MG(x^k), \quad w = W(x^k)G(x^k), \quad q = Mw.$$

Konvergencija MRVNCP postupka biće dokazana pod sledećim pretpostavkama:

P1: postoji rešenje x^* NCP (4.3), tj. sistema (4.8),

P2: svi elementi skupa $\partial_b G\left(x^*\right)$ su regularni.

Rešenju $x^* \in R^n$ pridružuje se skup matrica $\{V_* = V\left(x^*\right)\}$ tako da je

$$[V_*]_i = \begin{cases} e^i, & \text{ako} \quad x_i^* < F_i\left(x^*\right) \\ \left[F'\left(x^*\right)\right]_i, & \text{ako} \quad x_i^* > F_i\left(x^*\right) \\ \lambda e^i + (1-\lambda)\left[F'\left(x^*\right)\right]_i, & \text{ako} \quad x_i^* = F_i\left(x^*\right) \end{cases}, \tag{4.13}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$, gde je $\lambda \in \{0, 1\}$. Na osnovu definicije skupa $\partial_b G\left(x^*\right)$ sledi $V_* \in \partial_b G\left(x^*\right)$.

Za dokaz lokalne konvergencije MRVNCP postupka sa optimalnim parametrom neophodna su naredna tvrđenja.

Lema 4.1 *[54] Neka je $G : R^n \to R^n$ lokalno Lipšicova funkcija. Ako je svako $V_x \in \partial_b G(x)$ regularno, tada postoji pozitivna konstanta β takva da je $\|V_x^{-1}\| \leq \beta$ za svako $V_x \in \partial_b G(x)$. Osim toga, postoji okolina $\mathcal{N}(x, \varepsilon)$ tačke x takva da za svako $y \in \mathcal{N}(x, \varepsilon)$, sledi da je bilo koje $V_y \in \partial_b G(y)$ regularno i važi*

$$\|V_y^{-1}\| \leq \frac{10}{9}\beta.$$

Sledeća teorema je analogna teoremi 4.2.

Teorema 4.8 *[46] Neka je* $G : R^n \to R^n$ *lokalno Lipšicova funkcija, semiglatka u rešenju* x^* *sistema (4.8) i neka su sve matrice* $V_* \in \partial_b G(x^*)$ *regularne, a* $\{t_k\}$ *je niz nenegativnih brojeva. Tada postoje* $t < 1$ *i okolina rešenja* x^**, takvi da ako je niz* $\{t_k\}$ *ograničen sa* t*, sledi da GIN postupak sa* $V_k \in \partial_b G(x^k)$ *konvergira linearno ka* x^* *u njenoj okolini.*

Na osnovu teoreme 2.4 i semiglatkosti funkcije G sledi

$$\|G(x+\bar{v}) - G(x) - V\bar{v}\| = o(\|\bar{v}\|),$$

za $V \in \partial_b G(x+\bar{v})$ i dovoljno malo $\bar{v}$.

Prilikom dokazivanja lokalne konvergencije MRVNCP postupka, on je posmatran kao GIN postupak i korišćena je norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 4.9 *Neka važe pretpostavke P1 i P2 i neka je matrica* B *definisana sa (4.9) regularna. Tada postoje pozitivne konstante* ε *i* $\bar{\delta}$ *takve da ako je* $\|x^0 - x^*\| \le \varepsilon$ *i* $\|A - F'(x^*)\| \le \bar{\delta}$ *sledi da je niz* $\{x^k\}$ *generisan MRVNCP postupkom sa optimalnim parametrom* α_k^{opt} *dobro definisan i konvergira linearno ka* x^**.*

Dokaz. Preslikavanje F je neprekidno, pa postoji $\varepsilon_1 > 0$ takvo da za $x \in \mathcal{N}_1(x^*, \varepsilon_1) = \{x \in R^n,\ \|x - x^*\| \le \varepsilon_1\}$ i $i = 1, 2, ..., n$ važi

$$\begin{aligned} x_i^* < F_i(x^*) &\Rightarrow x_i < F_i(x), \\ x_i^* > F_i(x^*) &\Rightarrow x_i > F_i(x). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Na osnovu pretpostavke, matrica B definisana sa (4.9) je regularna za $\lambda \in \{0,1\}$. Za izabrano $\lambda \in \{0,1\}$, svakom $x \in \mathcal{N}_1(x^*, \varepsilon_1)$ se pridružuje $V(x)$ dato sa (4.10), a rešenju x^* se pridružuje matrica V_* (4.13), pa na osnovu toga za $i = 1, 2, ..., n$ sledi

$$[V(x) - V_*]_i \in \{0, [F'(x) - F'(x^*)]_i\}. \tag{4.15}$$

Pošto su sve matrice $V_* \in \partial_b G(x^*)$ regularne, lema 4.1 implicira da postoji $M_0 > 0$ takvo da je $\|V_*^{-1}\| \leq M_0$. Neka je $t < 1$. Bira se $\bar{\delta} > 0$ takvo da važi

$$\bar{\delta} = \min\{\frac{1}{2M_0}, \frac{t}{2\sqrt{n}M_1}\}, \tag{4.16}$$

pri čemu je $M_1 > 0$ ograničenje za $\|B^{-1}\|$, a ono postoji na osnovu sledećeg. Za $x^0 \in \mathcal{N}_1(x^*, \varepsilon_1)$ i $i = 1, 2, ..., n$ važe implikacije (4.14), pa zbog definicija B i V_*, za $i = 1, 2, ..., n$ sledi

$$[V_* - B]_i \in \{0, [F'(x^*) - A]_i\}.$$

Kako je $\|A - F'(x^*)\| \leq \bar{\delta}$ sledi

$$\|V_* - B\| \leq \bar{\delta}. \tag{4.17}$$

Koristeći lemu 1.6 i narednu nejednakost

$$\|V_*^{-1}(B - V_*)\| \leq \|V_*^{-1}\|\|B - V_*\| \leq M_0\bar{\delta} \leq \frac{1}{2} < 1,$$

sledi da postoji $M_1 > 0$ takvo da važi

$$\|B^{-1}\| \leq M_1. \tag{4.18}$$

Za $\bar{\delta}$ izabrano tako da važi (4.16), postoji $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ takvo da za $x \in \mathcal{N}_2(x^*, \varepsilon_2) = \{x \in R^n, \|x - x^*\| \leq \varepsilon_2\} \subseteq \mathcal{N}_1(x^*, \varepsilon_1)$ važi

$$\|V(x) - V_*\| \leq \bar{\delta}. \tag{4.19}$$

Prethodna nejednakost proizilazi iz (4.15) i činjenice da je F' neprekidna funkcija.

Odabere se $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ i x^0 tako da važi $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$.
Za $x \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon) = \{x \in R^n, \|x - x^*\| \leq \varepsilon\} \subseteq \mathcal{N}_2(x^*, \varepsilon_2) \subseteq \mathcal{N}_1(x^*, \varepsilon_1)$ definišu se funkcije

$$\bar{s}(x, \alpha) = -B^{-1}(E - \alpha W(x))G(x)$$

i

$$p(x, \alpha) = \|G(x) + V(x)\bar{s}(x, \alpha)\|_2,$$

pri čemu je $V(x)$ matrica pridružena elementu x za izabrano λ. Pošto je

$$\alpha^{opt} = argmin_{\alpha \in R} \|G(x) + V(x)\bar{s}(x,\alpha)\|_2^2,$$

sledi

$$p(x, \alpha^{opt}) \leq p(x, 0).$$

Koristeći (4.16), (4.17), (4.18), i (4.19) dobija se

$$\begin{aligned}
p(x,0) &= \|G(x) + V(x)\bar{s}(x,0)\|_2 \\
&\leq \sqrt{n}\|G(x) + V(x)\bar{s}(x,0)\| \\
&\leq \sqrt{n}\|G(x) - V(x)B^{-1}G(x)\| \\
&\leq \sqrt{n}\|E - V(x)B^{-1}\|\|G(x)\| \\
&\leq \sqrt{n}\|B - V(x)\|\|B^{-1}\|\|G(x)\| \\
&\leq \sqrt{n}(\|B - V_*\| + \|V_* - V(x)\|)\|B^{-1}\|\|G(x)\| \\
&\leq \sqrt{n}(\bar{\delta} + \bar{\delta})M_1\|G(x)\| \\
&\leq t\|G(x)\|.
\end{aligned}$$

Posmatrajući MRVNCP postupak kao GIN postupak sa

$$\|r^k\| = p(x^k, \alpha_k^{opt})$$

za $x^k \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ sledi

$$\|r^k\| = p(x^k, \alpha_k^{opt}) \leq p(x^k, 0) \leq t\|G(x^k)\|,$$

pa direktno važi tvrđenje na osnovu teoreme 4.8. □

Relaksacioni parametar uslovljava ponašanje ovog postupka. Najjednostavniji izbor je konstantna vrednost parametra u toku čitavog postupka. Druga mogućnost je izbor optimalnog parametra tako da nova iteracija bude što bliža Njutnovoj iteraciji.

4.4 Globalna konvergencija

Generalizovani postupci Njutnovog tipa za rešavanje neglatkih sistema oblika (4.1) su lokalno konvergentni. U poslednje vreme velika pažnja posvećuje se razvoju tehnika za njihovu globalizaciju.

Tvrđenje o globalnoj konvergenciji generalizovanog Njutnovog postupka dato je u Qi, Sun [51] i ono predstavlja uopštenje Njutn-Kantorovičeve teoreme o globalnoj konvergenciji Njutnovog postupka za glatke sisteme. Globalna konvergencija Brojdenovog postupka za semiglatke sisteme dokazana je u Li, Fukushima [40].

U ovom poglavlju akcenat će biti na algoritmima za globalizaciju netačnih Njutnovih postupaka za rešavanje neglatkih sistema, pa će biti navedeni neki od njih. Po ugledu na globalni algoritam definisan u Martínez, Qi [46], u radu Dingguo, Weiwen [15] predstavljen je globalni generalizovani netačni Njutnov postupak za rešavanje neglatkih sistema oblika (4.1). Ovaj algoritam spada u monotone algoritme za globalizaciju jer zahteva redukciju norme funkcije u svakoj iteraciji, i predstavlja generalizaciju globalnog netačnog Njutnovog postupka u glatkom slučaju definisanog u Eisenstat, Walker [17].

Algoritam: GLOBALNI GENERALIZOVANI NETAČNI NJUTNOV POSTUPAK (GGIN)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$, $\theta \in (0,1)$ i niz $\{t_k\}$ takav da je $t_k \in (0,1)$ za svako k, $k := 0$.

S1: Odredi s^k tako da je

$$\|H(x^k + s^k)\| \le (1 - \theta(1 - t_k))\|H(x^k)\|,$$

$$\|r^k\| = \|V_k s^k + H(x^k)\| \le t_k \|H(x^k)\|,$$

pri čemu je $V_k \in \partial H(x^k)$, a zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S2: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Globalna konvergencija navedenog postupka dokazana je pod sledećim pretpostavkama:

P1: neka je H Lipšic neprekidna funkcija i neka za ma koje $y \in R^n$ i $V_y \in \partial H(y)$ važi

$$H(y) - H(x) = V_y(y - x) + o(\|y - x\|),$$

P2: neka za ma koje $V_x \in \partial H(x)$ i $M > 1$ važi

$$|H(x)^{\mathsf{T}} V_x H(x)| \geq 2\|H(x)\|^2/M, \quad \|V_x\| \leq M/2, \quad \|V_x^{-1}\| \leq M/2.$$

Teorema 4.10 *[15] Neka je $\{x^k\}$ niz generisan GGIN postupkom i neka $t_k \to 0$ i $\|V_k\| \leq M$, $\|V_k^{-1}\| \leq M$, $M > 1$ za svako k i ma koje $V_k \in \partial H(x^k)$. Ako je x^* tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$ i funkcija H zadovoljava P1 u x^*, tada niz $\{x^k\}$ konvergira ka x^* superlinearno.*

Numeričko rešavanje komplementarnih problema je oblast koja je vrlo aktuelna, te su istraživanja u njoj poslednjih godina fokusirana na razvoj globalno konvergentnih algoritama.

Osnovna ideja je prevođenje NCP na ekvivalentan problem minimizacije funkcije cilja čiji je globalni minimum ujedno i rešenje NCP, a zatim formulisanje algoritma za rešavanje datog problema minimizacije. Definisanje funkcije cilja je obično bazirano na nekoj od preformulacija NCP na ekvivalentan sistem jednačina, s tim što je bitno odabrati takvu funkciju cilja koja će posedovati pogodne osobine i sa teorijske i sa računarske tačke gledišta. Osim toga, potrebno je odrediti uslove pod kojima je svaka stacionarna tačka funkcije cilja ujedno i njen globalni minimum, kao i uslove pod kojima je nivo skup funkcije cilja ograničen.

Poznato je da se NCP

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^{\mathsf{T}} F(x) = 0, \tag{4.20}$$

može transformisati na sistem semiglatkih jednačina

$$\Phi(x) = 0, \tag{4.21}$$

gde je $\Phi(x)$, dato sa (2.9), funkcija čije su komponente definisane preko Fišerove funkcije (2.6). Rešavanje sistema (4.21) ekvivalentno je traženju globalnog minimuma funkcije cilja

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\|\Phi(x)\|^2, \quad \Psi : R^n \to R, \tag{4.22}$$

tj. sistem (4.21) ekvivalentan je problemu

$$\Psi(x) \to \min,$$

gde je $\Psi(x)$ dato sa (4.22), što znači da se rešavanje NCP (4.20) svodi na određivanje globalnog minimuma funkcije $\Psi(x)$ na R^n.

Neke osobine funkcije Ψ navedene su u radu Facchinei, Soares [19].

Lema 4.2 *[19] Funkcija Ψ je neprekidno diferencijabilna i njen gradijent je $\nabla\Psi(x) = V^\top\Phi(x)$, pri čemu je $V \in \partial_C\Phi(x)$.*

Lema 4.3 *[19] Ako je funkcija F P_0-funkcija, onda je svaka stacionarna tačka funkcije Ψ njen globalni minimum.*

Lema 4.4 *[19] Ako je funkcija F uniformna P-funkcija, onda je nivo skup*

$$\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in R^n, \quad \Psi(x) \leq \alpha\}$$

ograničen.

Sa teorijske tačke gledišta ovako definisana funkcija Ψ je izuzetno pogodna za primenu, jer osobina glatkosti koju poseduje omogućava jednostavnu globalizaciju.

Najbrži algoritmi za rešavanje NCP su generalizovani postupci Njutnovog tipa, koji su kao što je već rečeno, u opštem slučaju lokalno konvergentni. Uobičajena šema za globalizaciju je sledeća:

1. preformulacija NCP na semiglatki sistem (4.21),
2. definisanje lokalnog generalizovanog algoritma Njutnovog tipa za rešavanje sistema (4.21),
3. primena postupka linijskog pretraživanja sa Armijo pravilom, za minimizaciju funkcije cilja (4.22), čime se postiže globalizacija lokalnog algoritma.

Na ovu temu napisano je mnoštvo radova, De Luca, Facchinei, Kanzow [10], [11], Facchinei, Kanzow [18], Facchinei, Soares [19], Yamashita, Fukushima [56] i dr.

Preformulacija NCP preko Fišerove funkcije je pogodna iz razloga što je odgovarajuća funkcija cilja (4.22) glatka, pa se globalizacija lako postiže, za razliku od neglatke funkcije cilja $\frac{1}{2}\|G(x)\|^2$ bazirane na preformulaciji preko min funkcije (4.4). Osim toga, izbor ove funkcije cilja

(4.22) motivisan je uslovom koji obezbeđuje da je svaka stacionarna tačka funkcije Ψ ujedno i njen globalni minimum.

Među mnogobrojnim globalnim algoritmima za NCP razmatranim u De Luca, Facchinei, Kanzow [11] nalazi se i naredni postupak.

Algoritam: GLOBALNI GENERALIZOVANI NETAČNI FIŠER-ČI POSTUPAK ZA NCP (GIFQNCP)

S0: Neka je $\rho > 0$, $m > 1$, $\sigma \in (0,1)$, $\varepsilon \geq 0$, $\beta \in (0, 1/2)$ i neka je dat niz $\{t_k\}$ za koji važi $0 \leq t_k \leq t < 1$ za svako k. Neka je $x^0 \in R^n$ i $k := 0$.

S1: Ako je $\|\Phi(x^k)\| \leq \varepsilon$ STOP.

S2: Odredi pravac d^k iz jednačine

$$V_k d^k = -\Phi(x^k) + r^k, \quad V_k \in \partial_B \Phi(x^k), \tag{4.23}$$

gde je

$$\|r^k\| \leq t_k \|\Phi(x^k)\|.$$

Ako jednačina (4.23) nije rešiva tada

$$d^k = -\nabla\Psi(x^k).$$

S3: Ako je

$$\Psi(x^k + d^k) \leq \sigma\Psi(x^k)$$

tada $x^{k+1} = x^k + d^k$, $k := k+1$ i idi na korak S1.

S4: Ukoliko d^k ne zadovoljava uslov

$$\nabla\Psi(x^k)^\top d^k \leq -\rho\|d^k\|^m$$

tada

$$d^k = -\nabla\Psi(x^k).$$

Odredi najmanji broj $i^k \in \{0, 1, ...\}$ tako da važi

$$\Psi(x^k + 2^{-i^k} d^k) \leq \Psi(x^k) + \beta 2^{-i^k} \nabla\Psi(x^k)^\top d^k,$$

zatim odredi

$$x^{k+1} = x^k + 2^{-i^k} d^k,$$

stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

Navedeni algoritam spada u grupu algoritama za globalizaciju koji koriste monotonu tehniku. Ukoliko pravac pretraživanja d^k, dobijen rešavanjem jednačine u koraku S2 algoritma GIFQNCP, nije dovoljno dobar pravac opadanja funkcije Ψ, koristi se gradijentni pravac tj. pravac najbržeg pada funkcije Ψ.

Naredna teorema odnosi se na globalnu konvergenciju datog postupka.

Teorema 4.11 *[11] Neka je x^* R-regularno rešenje NCP i neka $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$. Tada niz $\{x^k\}$ dobijen GIFQNCP postupkom konvergira superlinearno ka x^*.*

5

Postupci sa regularizacijom jakobijana za rešavanje NCP

U prethodnom poglavlju posmatrani su generalizovani postupci Njutnovog tipa koji se koriste za rešavanje sistema semiglatkih jednačina. Sada će detaljno biti ispitani postupci sa regularizacijom matrice jakobijana, koji čine posebnu klasu postupaka za rešavanje semiglatkih sistema, pa time i nelinearnih komplementarnih problema. I ovi postupci su nastali uopštavanjem Njutnovog postupka i njegovih modifikacija, s tim što su bazirani na aproksimiranju neglatke funkcije glatkim operatorom, i kombinovanju originalne neglatke funkcije sa jakobijanom njenog glatkog operatora u klasičnoj Njutnovoj jednačini.

Definicije i neke osobine glatkih operatora semiglatkih funkcija Φ i G, dobijenih preformulacijom NCP, navedene su u delu 2.4. Ovde će akcenat biti na Fišerovoj reformulaciji pomoću funkcije Φ, koja se aproksimira glatkim operatorom Φ_μ (2.17), definisanim pomoću funkcije Kanzova (2.18).

Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana za rešavanje semiglatkog sistema

$$H(x) = 0,$$

je najpoznatiji postupak ove klase. Prvi put je definisan u radu Chen et all. [6], gde je korišćena monotona tehnika za globalizaciju, zasnovana na primeni postupka linijskog pretraživanja, i dokazana globalna konvergencija algoritma pod pretpostavkom da glatki operator H_μ dat u definiciji 2.9 zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom, tj. da važi (2.16).

Po ugledu na ovaj postupak, u Kanzow, Pieper [29] je formulisan analogan metod za NCP, baziran na Fišerovoj reformulaciji, i dokazana je globalna konvergencija. Dobra definisanost algoritma za najopštiji oblik NCP omogućena je uvođenjem gradijentnog koraka.

5.1 Netačni Njutnovi postupci sa regularizacijom jakobijana

Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana definisan u radovima Chen et all. [6], Kanzow, Pieper [29], i nemonotona tehnika za globalizaciju data u radu Li, Fukushima [40], za dokaz globalne konvergencije Brojdenovog postupka sa regularizacijom jakobijana za semiglatke sisteme, bili su osnovna motivacija za formulisanje novog globalnog algoritma za NCP.

Dakle, rešava se NCP

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^{\top} F(x) = 0, \tag{5.1}$$

gde je $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))^{\top} : R^n \to R^n$ neprekidno diferencijabilna funkcija. NCP se transformiše na ekvivalentan sistem semiglatkih jednačina

$$\Phi(x) = 0, \tag{5.2}$$

pri čemu je

$$\Phi(x) = (\phi(x_1, F_1(x)), \cdots, \phi(x_n, F_n(x)))^{\top},$$

a

$$\phi(x_i, F_i(x)) = \sqrt{x_i^2 + F_i^2(x)} - x_i - F_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.3}$$

Uzimajući u obzir da je rešavanje semiglatkog sistema (5.2), ekvivalentno traženju globalnog minimuma funkcije

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\|\Phi(x)\|^2, \tag{5.4}$$

korišćena je baš ova Fišerova preformulacija NCP na sistem (5.2), zbog pogodnosti koje pruža ovako definisana funkcija Ψ, a o kojima je bilo reči u poglavlju 4.4.

Neka je

$$\Psi_\mu(x) = \frac{1}{2}\|\Phi_\mu(x)\|^2, \tag{5.5}$$

gde je

$$\Phi_\mu(x) = (\phi_\mu(x_1, F_1(x)), \cdots, \phi_\mu(x_n, F_n(x)))^\top, \tag{5.6}$$

glatka aproksimacija funkcije $\Phi(x)$ definisana sa

$$\phi_\mu(x_i, F_i(x)) = \sqrt{x_i^2 + F_i^2(x) + 2\mu} - x_i - F_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.7}$$

a $\mu > 0$ je parametar regularizacije.

Osnovna karakteristika postupaka sa regularizacijom jakobijana je aproksimiranje neglatke funkcije glatkim operatorom i kombinovanje originalne neglatke funkcije sa jakobijanom njene glatke aproksimacije. Rešavanje kombinovane Njutnove jednačine

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k)d^k = -\Phi(x^k)$$

u svakom koraku postupka predstavlja određivanje tačnog rešenja sistema linearnih jednačina, što praktično može prouzrokovati teškoće kada su u pitanju sistemi velikih dimenzija. Jedan pristup prevazilaženja ovog problema je približno rešavanje datog linearnog sistema, što navodi na primenu netačnog Njutnovog postupka. Dobijeno približno rešenje u opštem slučaju ne mora biti opadajući pravac funkcije $\Psi(x)$, pa je to razlog za primenu nemonotone tehnike za globalizaciju.

Sada će biti formulisan novi postupak Njutnovog tipa za rešavanje NCP (5.1), zasnovan na nemonotonoj globalizaciji, koji pripada klasi postupaka sa regularizacijom matrice jakobijana. Ovakva vrsta globalizacije prvi put je izložena u radu Li, Fukushima [40]. Pošto se u svakom koraku kombinovana Njutnova jednačina rešava približno, ovaj postupak nazvan je netačni Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana. Globalizacija je bazirana na minimizaciji funkcije $\Psi(x)$ i odgovarajuće funkcije $\Psi_\mu(x)$.

Algoritam: NETAČNI NJUTNOV POSTUPAK SA REGULARIZACIJOM JAKOBIJANA ZA NCP (JSIN)

S0: Bira se $\sigma, \alpha, \bar{\xi} \in (0,1)$, $0 < \tau_{\min} < \tau_{\max} < 1$, $\gamma > 0$, $t, \theta \in [0,1)$, $t < \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \sigma(1-\theta)(1+\alpha)$, $\varepsilon \geq 0$ i $x^0 \in R^n$. Neka je $\{\eta_k\}$ niz sa osobinom $\eta_k > 0$ za svako k i $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \leq \eta < \infty$, a $\{t_k\}$ niz za koji važi $0 \leq t_k \leq t$. Neka je $\beta_0 = \|\Phi(x^0)\|$, $\mu_0 = (\frac{\alpha\beta_0}{2\sqrt{2n}})^2$ i $k := 0$.

S1: Ako je $\|\Phi(x^k)\| \leq \varepsilon$ STOP.

S2: Odredi d^k iz kombinovane natačne Njutnove jednačine

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k)d^k = -\Phi(x^k) + r^k, \tag{5.8}$$

gde je

$$\|r^k\| \leq t_k \|\Phi(x^k)\|.$$

S3: Stavi $\tilde{\alpha} = 1$. Ako je

$$\Psi_{\mu_k}(x^k + \tilde{\alpha}d^k) \leq (1 + \tilde{\alpha}\sigma(\theta - 1))^2 \Psi_{\mu_k}(x^k) + \eta_k, \tag{5.9}$$

tada $\alpha_k = \tilde{\alpha}$ i $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$.

Ukoliko uslov (5.9) nije zadovoljen odaberi $\alpha_{new} \in [\tilde{\alpha}\tau_{\min}, \tilde{\alpha}\tau_{\max}]$, stavi $\tilde{\alpha} = \alpha_{new}$ i ponovi (5.9).

S4: Ako je

$$\|\Phi(x^{k+1})\| \leq \max\{\bar{\xi}\beta_k, \frac{1}{\alpha}\|\Phi(x^{k+1}) - \Phi_{\mu_k}(x^{k+1})\|\} \tag{5.10}$$

tada

$$\beta_{k+1} = \|\Phi(x^{k+1})\|$$

i odredi μ_{k+1} tako da je

$$0 < \mu_{k+1} \leq \min\{(\frac{\alpha\beta_{k+1}}{2\sqrt{2n}})^2, \frac{\mu_k}{4}, \frac{\mu_k^2}{\|\Phi_{\mu_k}(x^{k+1})\|^2}, \bar{\mu}(x^{k+1}, \gamma\beta_{k+1})\}. \tag{5.11}$$

Ako ne važi (5.10) tada

$$\beta_{k+1} = \beta_k, \quad \mu_{k+1} = \mu_k.$$

S5: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S1. ♣

Osnovni problem pri dokazu globalne konvergencije netačnih Njutnovih postupaka je činjenica da pravac d^k dobijen iz jednačine (5.8) nije u opštem slučaju pravac opadanja funkcije Ψ. Upravo to je glavni motiv za korišćenje nemonotone tehnike za globalizaciju, jer je ona primenljiva bez obzira da li je pravac pretraživanja opadajući ili ne. Globalizacija GIFQNCP postupka iz rada [11] zasniva se na primeni postupka linijskog pretraživanja kada je lokalni pravac opadajući, i uvođenju gradijentnog koraka u slučaju da on to nije. Osim toga, gradijentni korak obezbeđuje dobru definisanost algoritma GIFQNCP. Međutim, primena gradijentnog koraka dovodi do usporavanja algoritma i komplikuje analizu konvergencije kada su u pitanju postupci sa regularizacijom. Netačni Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana za NCP (JSIN) je dobro definisan jer je uslov (5.9) uvek zadovoljen za dovoljno malo $\tilde{\alpha} > 0$, s obzirom da je $\eta_k > 0$.

Sada će biti navedene potrebne definicije i osnovne karakteristike funkcija Φ, Φ_μ i skupa $\partial_C \Phi(x)$ neophodne za dalji rad.

Na uobičajen način definiše se skup

$$\partial_C \Phi(x) = \partial \Phi_1(x) \times \partial \Phi_2(x) \times \ldots \times \partial \Phi_n(x), \tag{5.12}$$

koji se može predstaviti kao

$$\partial_C \Phi(x) = D_a(x) + D_b(x) F'(x), \tag{5.13}$$

gde su $D_a(x) = diag(a_1(x), \ldots, a_n(x))$, $D_b(x) = diag(b_1(x), \ldots, b_n(x))$ dijagonalne matrice sa elementima

$$a_i(x) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + F_i^2(x)}} - 1, \quad b_i(x) = \frac{F_i(x)}{\sqrt{x_i^2 + F_i^2(x)}} - 1, \tag{5.14}$$

ako je $(x_i, F_i(x)) \neq (0,0)$ i

$$a_i(x) = \xi_i - 1, \quad b_i(x) = \rho_i - 1, \quad (\xi_i, \rho_i) \in R^2, \quad \|(\xi_i, \rho_i)\| \leq 1, \tag{5.15}$$

za $(x_i, F_i(x)) = (0,0)$, pri čemu su F_i, $i = 1, ..., n$ komponente funkcije F iz NCP (5.1).

Matrica jakobijana $\Phi'_\mu(x)$ se analogno može predstaviti kao

$$\Phi'_\mu(x) = D_a(x,\mu) + D_b(x,\mu)F'(x),$$

pri čemu su $D_a(x,\mu) = diag(a_1(x,\mu),\ldots,a_n(x,\mu))$ i $D_b(x,\mu) = diag(b_1(x,\mu),\ldots,b_n(x,\mu))$ dijagonalne matrice sa elementima

$$a_i(x,\mu) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + F_i^2(x) + 2\mu}} - 1, \quad b_i(x,\mu) = \frac{F_i(x)}{\sqrt{x_i^2 + F_i^2(x) + 2\mu}} - 1, \tag{5.16}$$

za $i = 1, 2, ..., n$.

Lema 5.1 *[18] Neka je F P_0-funkcija. Tada su sve matrice iz skupa $\partial_C\Phi(x)$ regularne za ma koje $x \in R^n$.*

Lema 5.2 *[40] Ako je F P_0-funkcija tada je jakobijan $\Phi'_\mu(x)$ regularna matrica za svako $\mu > 0$ i ma koje $x \in R^n$.*

Lema 5.3 *[29] Neka je $\{x^k\} \subseteq R^n$ konvergentan niz čija je granica $x^* \in R^n$. Funkcija Φ je semiglatka pa važi*

$$\|\Phi(x^k) - \Phi(x^*) - V_k(x^k - x^*)\| = o(\|x^k - x^*\|)$$

za ma koje $V_k \in \partial_C\Phi(x^k)$.

Lema 5.4 *[19] Neka je $H : R^n \to R^n$ semiglatka funkcija i neka je $x^* \in R^n$ rešenje sistema $H(x) = 0$ takvo da su svi elementi skupa $\partial_C H(x^*)$ regularni. Neka su $\{x^k\}$ i $\{d^k\}$ dati nizovi takvi da $\{x^k\} \to x^*$ i $\|x^k + d^k - x^*\| = o(\|x^k - x^*\|)$. Tada važi*

$$\|H(x^k + d^k)\| = o(\|H(x^k)\|).$$

Lema 5.5 *[50] Neka je $H : R^n \to R^n$ semiglatka funkcija i neka je $x^* \in R^n$ rešenje sistema $H(x) = 0$ takvo da su svi elementi skupa $\partial_B H(x^*)$ regularni. Tada postoji okolina x^* takva da je x^* jedinstveno rešenje u njoj.*

Definiše se

$$\Phi^0(x) = \lim_{\mu \to 0} \Phi'_\mu(x).$$

U radu [29] pokazano je da važi

$$\lim_{\mu \to 0} dist\left(\Phi'_\mu(x), \partial_C \Phi(x)\right) = 0, \tag{5.17}$$

za ma koje $x \in R^n$, pa s toga sledi $\Phi^0(x) \in \partial_C \Phi(x)$, tj. glatka aproksimacija Φ_μ zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom.

Proces regularizacije uslovljen je parametrom regularizacije μ_k. Naredna lema formulisana u [29] daje preciznu definiciju "praga" parametra regularizacije.

Lema 5.6 *[29] Neka je x proizvoljan ali fiksiran vektor iz R^n koji nije rešenje NCP. Definišu se konstante*

$$\gamma_1(x) := \max_{i \notin \beta_1(x)} \{\|x_i e^i + F_i(x)\nabla F_i(x)\|\} \geq 0$$

i

$$\alpha_1(x) := \min_{i \notin \beta_1(x)} \{x_i^2 + F_i^2(x)\} > 0,$$

gde je $\beta_1(x) := \{i, \ \ x_i = F_i(x) = 0\}$. Za dato $\delta > 0$ definiše se

$$\bar{\mu}(x,\delta) := \begin{cases} 1, & ako \quad (\frac{n\gamma_1^2(x)}{\delta^2} - \alpha_1(x)) \leq 0, \\ \frac{\alpha_1^2(x)}{2}(\frac{\delta^2}{n\gamma_1^2(x) - \delta^2\alpha_1(x)}), & inače. \end{cases}$$

Tada je

$$dist\left(\Phi'_\mu(x), \partial_C \Phi(x)\right) \leq \delta$$

za svako μ, $0 < \mu \leq \bar{\mu}(x,\delta)$.

Najpre se na uobičajen način pokazuje pripadnost članova niza generisanih algoritmom JSIN nivo skupu.

Definicija 5.1 *Definišu se skupovi:*

$$K = \{0\} \cup \left\{ k, k \in N;\ \|\Phi(x^k)\| \leq \max\{\bar{\xi}\beta_{k-1}, \frac{1}{\alpha}\|\Phi(x^k) - \Phi_{\mu_{k-1}}(x^k)\|\} \right\},$$

$$K_1 = \{k, k \in K;\ \bar{\xi}\beta_{k-1} \geq \frac{1}{\alpha}\|\Phi(x^k) - \Phi_{\mu_{k-1}}(x^k)\|\},$$

$$K_2 = \{k, k \in K;\ \bar{\xi}\beta_{k-1} < \frac{1}{\alpha}\|\Phi(x^k) - \Phi_{\mu_{k-1}}(x^k)\|\}.$$

Teorema 5.1 *Niz* $\{x^k\}$ *dobijen JSIN postupkom ostaje u nivo skupu*

$$\mathcal{L}_0 = \{x \in R^n;\ \ \Psi(x) \leq \hat{\alpha}^2\Psi(x^0) + 2\hat{\alpha}\sqrt{\eta}\sqrt{\Psi(x^0)} + \eta\},$$

gde je

$$\hat{\alpha} = \bar{\alpha} + (\bar{\alpha} + 1)\frac{\alpha}{2},$$

$$\bar{\alpha} = 1 + \tilde{\alpha}\sigma(\theta - 1). \tag{5.18}$$

Dokaz. Definicije skupova K, K_1 i K_2 impliciraju da je $K = \{0\} \bigcup K_1 \bigcup K_2$. Neka se skup K, koji ne mora biti beskonačan, sastoji od članova $k_0 = 0 < k_1 < k_2 < \cdots$ i neka je $k \in N$ proizvoljan fiksiran indeks, a k_j najveći član iz K takav da je $k_j \leq k$. Tada je

$$\mu_k = \mu_{k_j}, \qquad \beta_k = \beta_{k_j}. \tag{5.19}$$

Na osnovu (5.9) iz koraka S3 algoritma JSIN, za $k_j \leq k$ važi

$$\Psi_{\mu_{k_j}}(x^k) \leq \bar{\alpha}^2\Psi_{\mu_{k_j}}(x^{k_j}) + \eta_{k_j},$$

pri čemu je $\bar{\alpha}$ dato sa (5.18). Koristeći definiciju Ψ_μ i prethodnu nejednakost, za $k_j \leq k$ važi

$$\|\Phi_{\mu_{k_j}}(x^k)\| \leq \sqrt{\bar{\alpha}^2\|\Phi_{\mu_{k_j}}(x^{k_j})\|^2 + 2\eta_{k_j}} \leq \bar{\alpha}\|\Phi_{\mu_{k_j}}(x^{k_j})\| + \sqrt{2\eta_{k_j}}. \tag{5.20}$$

Dalje, na osnovu (2.20), (5.19) i (5.20) sledi

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x^k)\| &\leq \|\Phi_{\mu_k}(x^k)\| + \|\Phi(x^k) - \Phi_{\mu_k}(x^k)\| \\
&= \|\Phi_{\mu_{k_j}}(x^k)\| + \|\Phi(x^k) - \Phi_{\mu_{k_j}}(x^k)\| \\
&\leq \bar{\alpha}\|\Phi_{\mu_{k_j}}(x^{k_j})\| + \sqrt{2\eta_{k_j}} + \sqrt{2n\mu_{k_j}} \\
&= \bar{\alpha}\|\Phi_{\mu_{k_j}}(x^{k_j}) \pm \Phi(x^{k_j})\| + \sqrt{2\eta_{k_j}} + \sqrt{2n\mu_{k_j}} \\
&\leq \bar{\alpha}\beta_{k_j} + (1+\bar{\alpha})\sqrt{2n\mu_{k_j}} + \sqrt{2\eta_{k_j}}.
\end{aligned}$$

Znači za $j \geq 0$ važi

$$\|\Phi(x^k)\| \leq \bar{\alpha}\beta_{k_j} + (1+\bar{\alpha})\sqrt{2n\mu_{k_j}} + \sqrt{2\eta_{k_j}}. \tag{5.21}$$

Ako je $j = 0$ tada je $k_j = k_0 = 0$, $\beta_{k_j} = \beta_0$ i $\mu_{k_j} = \mu_0$, pa je

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x^k)\| &\leq \bar{\alpha}\beta_0 + (\bar{\alpha}+1)\sqrt{2n\mu_0} + \sqrt{2\eta_0} \\
&\leq \bar{\alpha}\beta_0 + (\bar{\alpha}+1)\frac{\alpha}{2}\beta_0 + \sqrt{2\eta_0}, \\
&\leq (\bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\frac{\alpha}{2})\|\Phi(x^0)\| + \sqrt{2\eta}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Ako je $j \geq 1$ tada na osnovu koraka S4 algoritma JSIN sledi

$$\mu_{k_j} \leq \frac{1}{4}\mu_{k_j-1} = \frac{1}{4}\mu_{k_{j-1}}$$

i

$$\beta_{k_j} \leq \bar{\xi}\beta_{k_j-1} = \bar{\xi}\beta_{k_{j-1}}, \tag{5.23}$$

za $k_j \in K_1$ ili

$$\begin{aligned}
\beta_{k_j} &\leq \frac{1}{\alpha}\|\Phi_{\mu_{k_j-1}}(x^{k_j}) - \Phi(x^{k_j})\| \leq \frac{1}{\alpha}\sqrt{2n\mu_{k_j-1}} \\
&= \frac{1}{\alpha}\sqrt{2n\mu_{k_{j-1}}} \leq \frac{1}{2}\beta_{k_{j-1}},
\end{aligned} \tag{5.24}$$

za $k_j \in K_2$.

Neka je $r = \max\{\frac{1}{2}, \bar{\xi}\}$. Tada zbog (5.23) i (5.24) za $j \geq 1$ važi

$$\beta_{k_j} \leq r\beta_{k_{j-1}}.$$

Dalje, na osnovu definicije μ_0 i β_0 sledi

$$\mu_{k_j} \leq \frac{1}{4^j}\mu_0 = \frac{1}{4^j}(\frac{\alpha\beta_0}{2\sqrt{2n}})^2 = \frac{\alpha^2}{2n4^{j+1}}\beta_0^2 = \frac{\alpha^2}{2n4^{j+1}}\|\Phi(x^0)\|^2,$$

pa je

$$\sqrt{\mu_{k_j}} \leq \frac{1}{2^{j+1}}\frac{\alpha}{\sqrt{2n}}\|\Phi(x^0)\|, \tag{5.25}$$

za $j \geq 1$. Takođe, za $j \geq 1$ važi

$$\beta_{k_j} \leq \bar{\xi}\beta_{k_{j-1}} \leq \bar{\xi}^2\beta_{k_{j-2}} \leq \cdots \leq r^j\|\Phi(x^0)\|. \tag{5.26}$$

Koristeći (5.21), (5.25) i (5.26), za $j \geq 1$ dobija se

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x^k)\| &\leq \bar{\alpha}\beta_{k_j} + (1+\bar{\alpha})\sqrt{2n\mu_{k_j}} + \sqrt{2\eta_{k_j}} \\
&\leq \bar{\alpha}r^j\|\Phi(x^0)\| + (1+\bar{\alpha})\frac{\alpha}{2^{j+1}}\|\Phi(x^0)\| + \sqrt{2\eta_{k_j}} \\
&\leq r^j(\bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\frac{\alpha}{2})\|\Phi(x^0)\| + \sqrt{2\eta_{k_j}} \qquad (5.27) \\
&\leq (\bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\frac{\alpha}{2})\|\Phi(x^0)\| + \sqrt{2\eta}.
\end{aligned}$$

Dalje, na osnovu (5.22) i (5.27) sledi

$$\|\Phi(x^k)\| \leq (\bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\frac{\alpha}{2})\|\Phi(x^0)\| + \sqrt{2\eta} \tag{5.28}$$

za $j \geq 0$. Prethodna nejednakost (5.28) i definicija funkcije Ψ impliciraju

$$\Psi(x^k) \leq (\bar{\alpha} + (\bar{\alpha}+1)\frac{\alpha}{2})^2\Psi(x^0) + 2\sqrt{\eta}(\bar{\alpha} + (\bar{\alpha}+1)\frac{\alpha}{2})\sqrt{\Psi(x^0)} + \eta,$$

tj.

$$\Psi(x^k) \leq \hat{\alpha}^2\Psi(x^0) + 2\hat{\alpha}\sqrt{\eta}\sqrt{\Psi(x^0)} + \eta,$$

što znači da niz $\{x^k\}$ ostaje u nivo skupu $\mathcal{L}_0$. $\square$

Za dokaz globalne konvergencije JSIN postupka potrebna su sledeća tvrđenja iz Kanzow, Pieper [29], koja važe i za ovaj postupak.

Lema 5.7 *[29] Neka je skup K dat u definiciji 5.1 i neka je $\{x^k\}$ niz generisan JSIN postupkom. Tada važi*

$$\|\Phi(x^k) - \Phi_{\mu_k}(x^k)\| \leq \alpha\|\Phi(x^k)\|, \quad za \quad k \geq 0 \quad i$$

$$dist\left(\Phi'_{\mu_k}(x^k), \partial_C\Phi(x^k)\right) \leq \gamma\|\Phi(x^k)\|, \quad za \quad k \geq 1, \; k \in K.$$

Lema 5.8 *[29] Neka je $\{x^k\}$ niz generisan JSIN postupkom i neka je x^* tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$, koja je i rešenje NCP. Tada je skup K beskonačan i $\{\mu_k\} \to 0$.*

Dokaz sledeće leme bazira se na ideji iz rada Kanzow, Pieper [29].

Lema 5.9 *Neka je $\{x^k\}$ niz dobijen JSIN postupkom i neka je K beskonačan skup. Tada je svaka tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$ rešenje NCP.*

Dokaz. Neka je x^* tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$, a $\{x^k\}_L$ podniz koji konvergira ka x^*. Kako je skup K beskonačan sledi $k_j \to \infty$ i $j \to \infty$, pa je dalje, na osnovu relacije (5.27),

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x^*)\| &= \lim_{k \in L} \|\Phi(x^k)\| \leq \lim_{j\to\infty} \left[r^j(\bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\frac{\alpha}{2})\|\Phi(x^0)\| + \sqrt{2\eta_{k_j}}\right] \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \left[r^j(\bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\frac{\alpha}{2})\|\Phi(x^0)\| + \sqrt{2\eta_j}\right] = 0,
\end{aligned}$$

jer je $r < 1$ i $\eta_j \to 0$ kada $j \to \infty$. Znači, x^* je rešenje NCP. □

Naredna teorema odnosi se na globalnu konvergenciju JSIN postupka.

Teorema 5.2 *Neka je F uniformna P-funkcija i neka je $\{x^k\}$ niz generisan JSIN postupkom. Tada je svaka tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$ stacionarna tačka funkcije Ψ.*

Dokaz. Posebno se posmatraju dva slučaja. U prvom slučaju, kada je skup K beskonačan, tvrđenje sledi direktno na osnovu leme 5.9.

Drugi slučaj je slučaj kada je K konačan skup. Neka je $\bar{k}$ najveći indeks skupa K. Tada na osnovu algoritma JSIN za svako $k > \bar{k}$ važi

$$\mu_k = \mu_{\bar{k}}, \quad \beta_k = \beta_{\bar{k}} = \|\Phi(x^{\bar{k}})\|, \tag{5.29}$$

$$\|\Phi(x^k)\| > \bar{\xi}\beta_k = \bar{\xi}\|\Phi(x^{\bar{k}})\| > 0,$$

$$\alpha\|\Phi(x^k)\| > \|\Phi_{\mu_{\bar{k}}}(x^k) - \Phi(x^k)\|. \tag{5.30}$$

Neka je x^* tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$, a $\{x^k\}_L$ podniz koji konvergira ka x^*. Pošto je K konačan skup, bez smanjenja opštosti se može pretpostaviti da $k \notin K$, za svako $k \in L$. Pretpostavka da je F uniformna P-funkcija i lema 5.2 impliciraju da za svako $x \in \mathcal{L}_0$ postoji konstanta $M > 0$ takva da važi $\|\Phi'_{\mu_k}(x)^{-1}\| \leq M$. Tada na osnovu kombinovane netačne Njutnove jednačine (5.8) i (5.28) sledi

$$\|d^k\| \leq M_1,$$

pri čemu je M_1 pozitivna konstanta. Kako je $\lim_{k\in L, k\to\infty} \alpha_k d^k = 0$, razmatraju se naredne dve mogućnosti:

a) $\alpha_k \to \widehat{\alpha} > 0,\ k \in L,$

b) $\alpha_k \to 0,\ k \in L.$

a) Ako je $\{\alpha_k\}_L \to \widehat{\alpha} > 0$, tada postoje podskup $\tilde{L} \subset L$ i $\widehat{\alpha} > 0$ takvi da je $\alpha_k \geq \widehat{\alpha} > 0$ za svako $k \in \tilde{L}$. Tada važi

$$\|\Phi_{\mu_k}(x^{k+1})\| \leq \|\Phi_{\mu_k}(x^k)\|(1 + \widehat{\alpha}\sigma(\theta - 1)) + \sqrt{2\eta_k} \tag{5.31}$$

za svako $k \in \tilde{L}$. Pošto $k \in \tilde{L}$ sledi $k \notin K$ i $\mu_k = \mu_{\bar{k}} = \mu$. Sumirajući prethodne nejednakosti (5.31) za $k \in \tilde{L}$ dobija se

$$\|\Phi_\mu(x^{k+1})\| + \widehat{\alpha}\sigma(1-\theta)\sum_{k\in\tilde{L}}\|\Phi_\mu(x^k)\| \leq \|\Phi_\mu(x^0)\| + \sqrt{2}\sum_{k\in\tilde{L}}\sqrt{\eta_k}.$$

Dalje je

$$\sum_{k\in\tilde{L}}\|\Phi_\mu(x^k)\| \leq \frac{\|\Phi_\mu(x^0)\| + \sqrt{2}\sum_{k\in\tilde{L}}\sqrt{\eta_k}}{\widehat{\alpha}\sigma(1-\theta)},$$

pa je

$$\lim_{k\in\tilde{L}} \|\Phi_\mu(x^k)\| = 0,$$

jer je prethodna suma ograničena, a kako je $\lim_{k\in\tilde{L},k\to\infty} x^k = x^*$ sledi

$$\|\Phi_\mu(x^*)\| = 0. \tag{5.32}$$

Uzimajući u obzir (5.32), prvu nejednakost leme 5.7 i posmatrajući granični proces dobija se

$$\|\Phi(x^*)\| \leq \alpha\|\Phi(x^*)\| < \|\Phi(x^*)\|,$$

jer je $\alpha < 1$, što znači da je $\|\Phi(x^*)\| = 0$, odnosno x^* je rešenje NCP.

b) Druga mogućnost je $\{\alpha_k\}_L \to 0$. Sada se pretpostavlja da x^* nije stacionarna tačka funkcije Ψ, tj. $\nabla\Psi(x^*) \neq 0$. Na osnovu izbora α_{new} za $k \in L$ dovoljno veliko, postoji prethodno $\alpha'_k > \alpha_k$, $\alpha'_k \in [\frac{\alpha_k}{\tau_{\max}}, \frac{\alpha_k}{\tau_{\min}}]$ takvo da nejednakost iz koraka S3 algoritma JSIN nije zadovoljena, tj. tako da je

$$\lim_{k\in L} \alpha'_k = 0$$

i

$$\Psi_{\mu_k}(x^k + \alpha'_k d^k) > (1 + \alpha'_k\sigma(\theta - 1))^2\Psi_{\mu_k}(x^k) + \eta_k,$$

odnosno,

$$\Psi_{\mu_k}(x^k + \alpha'_k d^k) - \Psi_{\mu_k}(x^k) > (2\alpha'_k\sigma(\theta - 1) + (\alpha'_k\sigma)^2(\theta - 1)^2)\Psi_{\mu_k}(x^k).$$

Posmatrajući graničnu vrednost dobija se

$$\lim_{\alpha'_k\to 0} \frac{\Psi_{\mu_k}(x^k + \alpha'_k d^k) - \Psi_{\mu_k}(x^k)}{\alpha'_k} > \lim_{\alpha'_k\to 0} (2\sigma(\theta-1)+\alpha'_k\sigma^2(\theta-1)^2)\Psi_{\mu_k}(x^k),$$

tj.

$$\nabla\Psi_{\mu_k}(x^k)^\top d^k \geq 2\sigma(\theta - 1)\Psi_{\mu_k}(x^k). \tag{5.33}$$

Na osnovu (5.29), (5.30) i definicija $\Psi(x^k)$ i $\Psi_{\mu_k}(x^k)$, za svako $k > \bar{k}$ sledi

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi_{\mu_k}(x^k)^\top d^k &= \Phi_{\mu_k}(x^k)^\top\Phi'_{\mu_k}(x^k)d^k \\
&= \Phi_{\mu_k}(x^k)^\top\Phi'_{\mu_k}(x^k)(-\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\Phi(x^k) + \Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}r^k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\Phi_{\mu_k}(x^k)^\top\Phi(x^k) + \Phi_{\mu_k}(x^k)^\top r^k \pm \Phi(x^k)^\top\Phi(x^k) \\
&\quad \pm\Phi(x^k)^\top r^k \\
&\leq -2\Psi(x^k) + \|\Phi(x^k)^\top - \Phi_{\mu_k}(x^k)\|\|\Phi(x^k)\| \qquad (5.34)\\
&\quad +\|\Phi(x^k)^\top - \Phi_{\mu_k}(x^k)^\top\|\|r^k\| + \|\Phi(x^k)^\top\|\|r^k\| \\
&\leq -2\Psi(x^k) + 2\alpha\Psi(x^k) + (1+\alpha)t_k\|\Phi(x^k)\|^2 \\
&\leq (-2(1-\alpha) + 2t(1+\alpha))\Psi(x^k).
\end{aligned}
$$

Dalje, iz (5.33) i (5.34) sledi

$$
2\sigma(\theta-1)\Psi_{\mu_k}(x^k) \leq \nabla\Psi_{\mu_k}(x^k)^\top d^k \leq (-2(1-\alpha)+2t(1+\alpha))\,\Psi(x^k). \tag{5.35}
$$

Koristeći (5.30) i (5.35), pošto je $\mu_k = \mu_{\bar{k}}$ za $k > \bar{k}$, dobija se

$$
\begin{aligned}
-\nabla\Psi_{\mu_{\bar{k}}}(x^k)^\top d^k &\leq 2\sigma(1-\theta)\Psi_{\mu_{\bar{k}}}(x^k) \\
&= \sigma(1-\theta)\|\Phi_{\mu_{\bar{k}}}(x^k) \pm \Phi(x^k)\|^2 \\
&\leq \sigma(1-\theta)(\|\Phi(x^k)\| + \alpha\|\Phi(x^k)\|)^2 \qquad (5.36)\\
&= 2\sigma(1-\theta)(1+\alpha)^2\Psi(x^k),
\end{aligned}
$$

a na osnovu (5.35) i (5.36) sledi

$$
(2(1-\alpha) - 2t(1+\alpha))\,\Psi(x^k) \leq -\nabla\Psi_{\mu_k}(x^k)^\top d^k \leq 2\sigma(1-\theta)(1+\alpha)^2\Psi(x^k).
$$

Uzimajući u obzir graničnu vrednost kad $k \to \infty$, $k \in L$ dobija se

$$
(2(1-\alpha) - 2t(1+\alpha))\,\Psi(x^*) \leq -\nabla\Psi_{\mu_*}(x^*)^\top d^* \leq 2\sigma(1-\theta)(1+\alpha)^2\Psi(x^*). \tag{5.37}
$$

Poznato je da je $\Psi(x^*) > 0$, jer bi u protivnom skup K bio beskonačan (zbog leme 5.8), a razmatra se slučaj kada je K konačan skup. Stoga, iz (5.37) sledi

$$
2(1-\alpha) - 2t(1+\alpha) \leq 2\sigma(1-\theta)(1+\alpha)^2,
$$

odnosno

$$
t \geq \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \sigma(1-\theta)(1+\alpha),
$$

a to je kontradikcija u odnosu na uslov vezan za t u koraku S0 algoritma JSIN. Znači, pod pretpostavkom da x^* nije stacionarna tačka funkcije Ψ došlo se do kontradikcije, čime je kompletiran dokaz teoreme. □

Pretpostavka da je F uniformna P-funkcija, lema 4.3 i prethodna teorema 5.2 impliciraju da je svaka stacionarna tačka funkcije Ψ ujedno i njen globalni minimum, tj. rešenje NCP.

Da bi se pokazala superlinearna konvergencija, posmatran je JSIN postupak sa specijalnim izborom niza $\{\eta_k\}$.

Teorema 5.3 *Neka je F uniformna P-funkcija, x^* je tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$ generisanog JSIN postupkom u kome je niz $\{\eta_k\}$ definisan sa*

$$\eta_k = (2+\sigma(\theta-1))^2 n\mu_k + (2+\sigma(\theta-1))\sqrt{2n\mu_k}(1+\sigma(\theta-1))\|\Phi_{\mu_k}(x^k)\|$$

i neka je $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$. Tada je x^* rešenje NCP i niz $\{x^k\}$ konvergira superlinearno ka x^*.

Dokaz. S obzirom na tvrđenje prethodne teoreme 5.2, očigledno je da je x^* rešenje NCP. Kako je $\partial_B\Phi(x^*) \subseteq \partial_C\Phi(x^*)$, na osnovu leme 5.5 postoji okolina x^* takva da je x^* jedinstveno rešenje u njoj. Pošto je x^* tačka nagomilavanja niza $\{x^k\}$ dobijenog algoritmom JSIN koja je i rešenje NCP, lema 5.8 implicira da je skup K beskonačan. Znači $\{x^k\}_K \to x^*$.

Najpre se dokazuje da ovako izabran niz $\{\eta_k\}$ zadovoljava osobinu $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \leq \eta < \infty$.

Neka je $A = (2+\sigma(\theta-1))^2 n$, a $B = (2+\sigma(\theta-1))\sqrt{2n}(1+\sigma(\theta-1))$. Tada je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k = A\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k + B\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\mu_k}\|\Phi_{\mu_k}(x^k)\|. \tag{5.38}$$

Na osnovu relacije (2.19) i algoritma JSIN važi

$$\|\Phi_{\mu_k}(x^k) - \Phi_{\mu_{k-1}}(x^k)\| \leq \sqrt{2n}(\sqrt{\mu_{k-1}} - \sqrt{\mu_k}),$$

pa koristeći nejednakost trougla sledi

$$\|\Phi_{\mu_k}(x^k)\| \leq \sqrt{2n}(\sqrt{\mu_{k-1}} - \sqrt{\mu_k}) + \|\Phi_{\mu_{k-1}}(x^k)\|.$$

Pošto je K beskonačan skup, zbog (5.11) iz koraka S4 algoritma JSIN važi

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu_k}\|\Phi_{\mu_k}(x^k)\| &\leq \sqrt{2n}\sqrt{\mu_k}(\sqrt{\mu_{k-1}}-\sqrt{\mu_k})+\sqrt{\mu_k}\|\Phi_{\mu_{k-1}}(x^k)\| \\ &\leq \sqrt{2n}\sqrt{\mu_k}\sqrt{\mu_0}+\sqrt{\mu_k}\|\Phi_{\mu_{k-1}}(x^k)\| \qquad (5.39) \\ &\leq \sqrt{2n}\sqrt{\mu_k}\sqrt{\mu_0}+\mu_{k-1}.\end{aligned}$$

Na osnovu relacija (2.20), (5.11), (5.38) i (5.39) dobija se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k &\leq A\mu_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}+B\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2n}\sqrt{\mu_k}\sqrt{\mu_0}+B\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k-1} \\ &\quad +B\sqrt{\mu_0}\|\Phi_{\mu_0}(x^0)\| \\ &= A\mu_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}+B\sqrt{2n}\sqrt{\mu_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\mu_k}+B\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k-1} \\ &\quad +B\sqrt{\mu_0}\|\Phi_{\mu_0}(x^0)\pm\Phi(x^0)\| \\ &\leq A\mu_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}+B\sqrt{2n}\mu_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}+B\mu_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}} \\ &\quad +B\sqrt{\mu_0}\|\Phi(x^0)\| \\ &\leq \eta<\infty,\end{aligned}$$

zbog ograničenosti $\|\Phi(x^0)\|$ i ograničenosti redova u prethodnoj nejednakosti.

Dakle, za ovaj specijalan izbor niza $\{\eta_k\}$ važi $\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k \leq \eta < \infty$.

Pošto je F uniformna P-funkcija na osnovu leme 5.2 sledi da je $\Phi'_{\mu_k}(x^k)$ regularna matrica . Sad se dokazuje da za svako $k \in K$ dovoljno veliko važi

$$\|\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\| \leq M, \qquad (5.40)$$

gde je M pozitivna konstanta. Na osnovu pretpostavke teoreme i leme 5.1 sledi regularnost svih elemenata skupa $\partial_C\Phi(x^*)$. Kako je C-subdiferencijal odgore poluneprekidan, a niz $\{x^k\}$ konvergira ka x^*, sledi da su sve matrice $V_k \in \partial_C\Phi(x^k)$ regularne i $\|V_k^{-1}\| \leq M_1$, za k dovoljno veliko i $M_1 > 0$. Skup $\partial_C\Phi(x^k)$ je neprazan i kompaktan, pa postoji $V_k \in \partial_C\Phi(x^k)$ takvo da je

$$dist(\Phi'_{\mu_k}(x^k), \partial_C\Phi(x^k)) = \|\Phi'_{\mu_k}(x^k) - V_k\|. \qquad (5.41)$$

Na osnovu druge nejednakosti leme 5.7 sledi

$$\|\Phi'_{\mu_k}(x^k) - V_k\| \leq \gamma\beta_k, \quad k \in K, \tag{5.42}$$

pa je

$$\begin{aligned} \|E - V_k^{-1}\Phi'_{\mu_k}(x^k)\| &= \|V_k^{-1}(V_k - \Phi'_{\mu_k}(x^k))\| \\ &\leq \|V_k^{-1}\|\|V_k - \Phi'_{\mu_k}(x^k)\| \\ &\leq M_1\gamma\beta_k. \end{aligned}$$

Pošto je skup K beskonačan, zbog koraka S4 algoritma JSIN dobija se $\beta_k \to 0$, pa za dovoljno veliko $k \in K$ takvo da je $\beta_k \leq \frac{1}{2\gamma M_1}$, važi

$$\|E - V_k^{-1}\Phi'_{\mu_k}(x^k)\| \leq \frac{1}{2} < 1,$$

a na osnovu leme 1.6 tada sledi (5.40). Lipšic neprekidnost funkcije Φ, lema 5.3, relacije (5.40), (5.42), pretpostavka $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ i konstrukcija algoritma JSIN, za $k \in K$ dovoljno veliko impliciraju

$$\begin{aligned} \|x^k + d^k - x^*\| &= \|x^k - x^* - \Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}(\Phi(x^k) - r^k)\| \\ &\leq \|\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\|(\|\Phi(x^k) - \Phi(x^*) - V_k(x^k - x^*)\| \\ &\quad +\|V_k - \Phi'_{\mu_k}(x^k)\|\|x^k - x^*\| + \|r^k\|) \\ &\leq \|\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\|(\|\Phi(x^k) - \Phi(x^*) - V_k(x^k - x^*)\| \\ &\quad +\|V_k - \Phi'_{\mu_k}(x^k)\|\|x^k - x^*\| + t_k\|\Phi(x^k)\|) \\ &\leq M(o(\|x^k - x^*\|) + \gamma\beta_k\|x^k - x^*\| \\ &\quad +t_k\|\Phi(x^k) - \Phi(x^*)\|) \\ &= o(\|x^k - x^*\|), \end{aligned} \tag{5.43}$$

jer $\beta_k \to 0$, pri čemu je $V_k \in \partial_C\Phi(x^k)$ izabrano tako da važi (5.41). Dalje, zbog (5.43) i leme 5.4, za $k \in K$, $k \to \infty$ sledi

$$\|\Phi(x^k + d^k)\| = o(\|\Phi(x^k)\|). \tag{5.44}$$

Sad, treba pokazati da postoji $\breve{k} \in K$ takvo da za svako $k \geq \breve{k}$, $k \in K$ sledi da i $k+1$ pripada skupu K i važi $x^{k+1} = x^k + d^k$. Pošto (5.44) važi za dovoljno veliko k, sledi

$$\|\Phi(x^k + d^k)\| \leq (1 + \sigma(\theta - 1))\|\Phi(x^k)\|. \tag{5.45}$$

Na osnovu (2.20) i (5.45) dobija se

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{\mu_k}(x^k+d^k)\| &\le \|\Phi(x^k+d^k)\| + \|\Phi_{\mu_k}(x^k+d^k) - \Phi(x^k+d^k)\| \\
&\le (1+\sigma(\theta-1))\|\Phi(x^k)\| + \sqrt{2n\mu_k} \\
&\le (1+\sigma(\theta-1))(\|\Phi_{\mu_k}(x^k)\| + \|\Phi(x^k) - \Phi_{\mu_k}(x^k)\|) \\
&\quad + \sqrt{2n\mu_k} \\
&\le (1+\sigma(\theta-1))\|\Phi_{\mu_k}(x^k)\| + (2+\sigma(\theta-1))\sqrt{2n\mu_k},
\end{aligned}$$

a kvadriranjem prethodne nejednakosti i koristeći ovaj specijalan izbor niza $\{\eta_k\}$ sledi

$$\|\Psi_{\mu_k}(x^k+d^k)\| \le (1+\sigma(\theta-1))^2\|\Psi_{\mu_k}(x^k)\| + \eta_k,$$

što znači da je uslov (5.9) iz koraka S3 algoritma JSIN zadovoljen za $\alpha_k = 1$, odnosno $x^{k+1} = x^k + d^k$. Neka je $\sigma \le \frac{\xi-1}{\theta-1}$. Tada, na osnovu (5.45) sledi

$$\|\Phi(x^{k+1})\| = \|\Phi(x^k+d^k)\| \le (1+\sigma(\theta-1))\|\Phi(x^k)\| \le \xi\|\Phi(x^k)\|,$$

što implicira da $k+1 \in K$. Znači, za dovoljno veliko $\breve{k} \in K$ važi $x^{\breve{k}+1} = x^{\breve{k}} + d^{\breve{k}}$ i $\breve{k}+1 \in K$. Ponavljajući ovo može se pokazati da za svako $k \ge \breve{k}$ važi i $k \in K$ i $x^{k+1} = x^k + d^k$, pa na osnovu toga i (5.43) sledi superlinearna konvergencija. □

Netačni Njutnovi postupci za rešavanje semiglatkih sistema predstavljeni u [11] i [15] su superlinearno konvergentni kao i dati JSIN postupak. Uslovi pod kojima je dokazana globalna konvergencija navedenih postupaka su iste težine i sva tri postupka su primenljiva na istu klasu problema.

Kombinujući nemonotonu tehniku za globalizaciju, sa pretpostavkom da je F uniformna P-funkcija, mogu se prevazići poteškoće vezane za problem rešivosti kombinovane Njutnove jednačine i činjenice da pravac dobijen iz nje ne mora biti opadajući.

Kao i u glatkom slučaju Njutnov postupak se može dobiti kao specijalan slučaj netačnog Njutnovog postupka. Naime, specijalnim izborom parametra $t_k = 0$ u svakom koraku netačnog Njutnovog postupka sa regularizacijom jakobijana za NCP (JSIN), on se svodi na Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana za NCP (JSN). Stoga globalna konvergencija JSN postupka proizilazi iz dokazane globalne konvergencije JSIN postupka.

5.2 Braunov postupak sa regularizacijom jakobijana

U delu 3.4 bilo je reči o Braunovom postupku za rešavanje glatkih sistema. Uopštavanjem ovog postupka dobija se analogan postupak za rešavanje sistema semiglatkih jednačina. Kako je tema ove disertacije rešavanje NCP (5.1), a jedan od načina za njegovu preformulaciju je transformacija na ekvivalentan semiglatki sistem

$$\Phi(x) = 0, \tag{5.46}$$

sada će biti formulisan Braunov postupak za rešavanje ovog sistema, koji spada u grupu postupaka sa regularizacijom jakobijana. Korišćena je Fišerova reformulacija pomoću funkcije

$$\Phi(x) = (\phi(x_1, F_1(x)), \cdots, \phi(x_n, F_n(x)))^\top,$$

gde je $\phi(x_i, F_i(x))$ dato sa (5.3), a $F(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))^\top$ je funkcija iz NCP (5.1) koja je neprekidno diferencijabilna. Glatki operator funkcije $\Phi(x)$ je

$$\Phi_\mu(x) = (\phi_\mu(x_1, F_1(x)), \cdots, \phi_\mu(x_n, F_n(x)))^\top, \tag{5.47}$$

pri čemu je $\phi_\mu(x_i, F_i(x))$ dato sa (5.7), a $\mu > 0$ je parametar regularizacije.

Neka je

$$\phi_i(x, \mu) := \phi_\mu(x_i, F_i(x)) = \phi(x_i, F_i(x), \mu).$$

Funkcija Φ_μ je neprekidno diferencijabilna pa je njen jakobijan

$$\Phi'_\mu(x) := \Phi'(x, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(x,\mu)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1(x,\mu)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1(x,\mu)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(x,\mu)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n(x,\mu)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n(x,\mu)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{5.48}$$

Pre definisanja postupka uvode se potrebne oznake koje će omogućiti lakše praćenje algoritma.

Neka je za $i = 1, 2, ..., n$

$$\bar{x}^i = (x_i, x_{i+1}, ..., x_n)^\top,$$

$$\bar{x}^{*,i} = (x_i^*, x_{i+1}^*, ..., x_n^*)^\top,$$

$$\bar{x}^{k,i} = (x_i^k, x_{i+1}^k, ..., x_n^k)^\top \quad \text{i}$$

$$\bar{e}^i = (1, 0, 0, ..., 0)^\top \in R^{n-i+1}.$$

Za dati parametar regularizacije $\mu_k > 0$, vektor $x^k \in R^n$ sa komponentama $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)^\top$ i indeks i, $i = 1, 2, ..., n$ sukcesivno se definišu sledeće funkcije

$$\phi_{ii}(\bar{x}^i) = \phi(x_i, F_i(s_1, s_2, ..., s_{i-2}, s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i)), \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} \phi_{ii}(\bar{x}^i, \mu_k) &= \phi_{\mu_k}(x_i, F_i(s_1, s_2, ..., s_{i-2}, s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i)) \\ &= \phi(x_i, F_i(s_1, s_2, ..., s_{i-2}, s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i), \mu_k), \end{aligned} \tag{5.50}$$

$$s_i(\bar{x}^{i+1}) = x_i^k - (\frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_i})^{-1}[\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_j}(x_j - x_j^k) + \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i})]. \tag{5.51}$$

Koristeći kompoziciju funkcija očigledno je da se za $j < i$ svaka funkcija s_j može zapisati u obliku $s_j(\bar{x}^{i+1})$, što znači da se s_1, s_2,..., s_{i-2} iz (5.49) i (5.50) mogu predstaviti kao $s_1 = s_1(\bar{x}^i)$, $s_2 = s_2(\bar{x}^i)$,..., $s_{i-2} = s_{i-2}(\bar{x}^i)$. Praćenjem sledećeg primera uočava se da je $s_1 = s_1(\bar{x}^i)$.

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1(x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \\ &= s_1(x_2, x_3, ..., x_{i-2}, s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i) \\ &= s_1(s_2(x_3, ..., s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i), ..., s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i) \\ &= s_1(s_2(s_3(...), ..., s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i), ..., s_{i-1}(\bar{x}^i), \bar{x}^i) \\ &= s_1(\bar{x}^i). \end{aligned}$$

Funkcije $\phi_{ii}(\bar{x}^i)$ su semiglatke i neprekidne, jer su za fiksno μ_k funkcije s_i neprekidne (pod pretpostavkom da je $\frac{\partial \phi_{ii}}{\partial x_i} \neq 0$), a funkcije $\phi_{ii}(\bar{x}^i, \mu_k)$ su neprekidno diferencijabilne za fiksno μ_k.

Iterativni niz se Braunovim postupkom sa regularizacijom jakobijana dobija na sledeći način.

Algoritam: BRAUNOV POSTUPAK SA REGULARIZACIJOM JAKOBIJANA ZA NCP (JSB)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$ i niz $\{\mu_k\}$ takav da je $\mu_k > 0$ za svako k, $k := 0$.

S1: Za $i = 1, 2, ..., n-1$

$$x_i = s_i(\bar{x}^{i+1}),$$

gde je $s_i(\bar{x}^{i+1})$ dato sa (5.51).

S2: Odredi

$$x_n^{k+1} = x_n^k - \left(\frac{\partial \phi_{nn}(x_n^k, \mu_k)}{\partial x_n}\right)^{-1} \phi_{nn}(x_n^k),$$

a zatim za $i = n-1, n-2, ..., 1$ odredi

$$x_i^{k+1} = s_i(\bar{x}^{k+1, i+1}).$$

S3: Stavi $k := k+1$ i idi na korak S1. ♣

Ovaj postupak se može zapisati i u matričnom obliku

$$U(x^k, \mu_k)(x^{k+1} - x^k) = -m(x^k),$$

gde je

$$U(x^k, \mu_k) = \begin{bmatrix} u_{11}^{k,\mu_k} & u_{12}^{k,\mu_k} & \cdots & u_{1n}^{k,\mu_k} \\ 0 & u_{22}^{k,\mu_k} & \cdots & u_{2n}^{k,\mu_k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn}^{k,\mu_k} \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

gornja trougaona matrica sa elementima

$$u_{ij}^{k,\mu_k} = \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_j} \quad \text{za} \quad i = 1,2,...,n, \quad j = i, i+1, ..., n, \tag{5.53}$$

a komponente vektora $m(x^k)$ su

$$m_i(x^k) = \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}), \quad i = 1,2,...,n.$$

Matrica $U(x^k, \mu_k)$ oblika (5.52) sa elementima (5.53) može se zapisati u istom obliku gornje trougaone matrice ali sa elementima $u_{ij}^{k,\mu_k} = 0$ za $i > j$ i

$$u_{ij}^{k,\mu_k} = \begin{cases} \phi_{1j}^{k,\mu_k}, & j = 1,2...,n \\[2ex] \dfrac{\begin{vmatrix} \phi_{11}^{k,\mu_k} & \phi_{12}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{1,i-1}^{k,\mu_k} & \phi_{1j}^{k,\mu_k} \\ \phi_{21}^{k,\mu_k} & \phi_{22}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{2,i-1}^{k,\mu_k} & \phi_{2j}^{k,\mu_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_{i1}^{k,\mu_k} & \phi_{i2}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{i,i-1}^{k,\mu_k} & \phi_{ij}^{k,\mu_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_{11}^{k,\mu_k} & \phi_{12}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{1,i-1}^{k,\mu_k} \\ \phi_{21}^{k,\mu_k} & \phi_{22}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{2,i-1}^{k,\mu_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{i-1,1}^{k,\mu_k} & \phi_{i-1,2}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{i-1,i-1}^{k,\mu_k} \end{vmatrix}}, & i = 2,3,...,n, \quad j = i, i+1, ..., n \end{cases}$$

gde su ϕ_{ij}^{k,μ_k} elementi matrice

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k) = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{k,\mu_k} & \phi_{12}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{1n}^{k,\mu_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}^{k,\mu_k} & \phi_{n2}^{k,\mu_k} & \cdots & \phi_{nn}^{k,\mu_k} \end{bmatrix},$$

tj.

$$\phi_{ij}^{k,\mu_k} = \frac{\partial \phi_i(x^k, \mu_k)}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,n,$$

a argument x^k je

$$x^k = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}(\bar{x}^{k,i}), \bar{x}^{k,i})^\top, \quad \text{za} \quad i = 1,2,...,n.$$

Matrica $U(x^k, \mu_k)$ oblika (5.52) se dobija kada se matrica $\Phi'_{\mu_k}(x^k)$ elementarnim transformacijama svede na gornju trougaonu matricu sa nulama ispod glavne dijagonale.

U ovom poglavlju biće dokazana lokalna konvergencija Braunovog postupka sa regularizacijom jakobijana. Pre svega potrebno je navesti još neke definicije i pomoćna tvrđenja koja će omogućiti dokaz konvergencije JSB postupka za rešavanje sistema (5.46) dobijenog preformulacijom NCP.

Na uobičajen način se definiše skup $\partial_C\Phi(x)$ sa (5.12) i

$$\Phi^0(x) = \lim_{\mu \to 0} \Phi'_\mu(x),$$

pri čemu je $\Phi'_\mu(x)$ oblika (5.48). Kako je u Kanzow, Pieper [29] dokazano da važi (5.17), znači da $\Phi^0(x) \in \partial_C\Phi(x)$, tj. funkcija Φ_μ definisana sa (5.47) zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom. Na osnovu toga, leme 2.2 i činjenice da je Φ semiglatka funkcija sledi

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|\Phi(x+v) - \Phi(x) - \Phi^0(x+v)v\|}{\|v\|} = 0. \tag{5.54}$$

Pošto Φ_μ zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom, lema 2.3 implicira da ako su svi elementi skupa $\partial_C\Phi(x)$ regularni, sledi da tada postoje okolina $\mathcal{N}(x,\varepsilon)$ i $M > 0$ takvi da za ma koje $y \in \mathcal{N}(x,\varepsilon)$ važi da je $\Phi^0(y)$ regularno i

$$\|\Phi^0(y)^{-1}\| \le M.$$

Osim toga postoje $M_1 \ge M$ i $\bar{\mu} > 0$ takvi da za ma koje $y \in \mathcal{N}(x,\varepsilon)$ i $\mu \in (0,\bar{\mu})$ sledi da je $\Phi'_\mu(y)$ regularno i

$$\|\Phi'_\mu(y)^{-1}\| \le M_1.$$

Sada se navode neophodne definicije. Strogo komplementarno rešenje dato u definiciji 2.1, može se definisati na još jedan način.

Definicija 5.2 *Rešenje x^* NCP (5.1) je strogo komplementarno ako za svako $i = 1, 2, ..., n$ važi*

$$x_i^* + F_i(x^*) > 0.$$

Ako je x^* strogo komplementarno rešenje NCP, tada postoji okolina $\mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ u kojoj je funkcija Φ diferencijabilna.

Definicija 5.3 *Neka je x^* strogo komplementarno rešenje NCP. Za $x^k \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ definiše se matrica*

$$U^0(x^k) = \lim_{\mu_k \to 0} U(x^k, \mu_k)$$

sa elementima

$$U^0(x^k) = \begin{bmatrix} u_{11}^{0,k} & u_{12}^{0,k} & \cdots & u_{1n}^{0,k} \\ 0 & u_{22}^{0,k} & \cdots & u_{2n}^{0,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn}^{0,k} \end{bmatrix},$$

gde je

$$u_{ij}^{0,k} = \lim_{\mu_k \to 0} u_{ij}^{k,\mu_k},$$

a u_{ij}^{k,μ_k} za $i = 1, 2, ..., n$, $j = i, i+1, ..., n$ je dato sa (5.53).

Osim toga definiše se vektor

$$\phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i}) := (u_{ii}^{0,k}, u_{i,i+1}^{0,k}, ..., u_{in}^{0,k})^\top \in R^{n-i+1}.$$

Tvrđenje o konvergenciji JSB postupka biće dokazano pod sledećim pretpostavkama:

P1: x^* je strogo komplementarno rešenje NCP,

P2: svi elementi skupa $\partial_C \Phi(x^*)$ su regularni.

Poznato je da se skup $\partial_C \Phi(x)$ može predstaviti kao

$$\partial_C \Phi(x) = D_a(x) + D_b(x) F'(x),$$

gde su $D_a(x) = diag(a_1(x), \ldots, a_n(x))$, $D_b(x) = diag(b_1(x), \ldots, b_n(x))$ dijagonalne matrice sa elementima $a_i(x)$ i $b_i(x)$ definisanim sa (5.14) i (5.15). Matrica $\Phi'_\mu(x)$ (5.48) se analogno može predstaviti kao

$$\Phi'_\mu(x) = D_a(x, \mu) + D_b(x, \mu) F'(x),$$

pri čemu su $D_a(x,\mu) = diag(a_1(x,\mu),\ldots,a_n(x,\mu))$ i $D_b(x,\mu) = diag(b_1(x,\mu),\ldots,b_n(x,\mu))$ dijagonalne matrice sa elementima $a_i(x,\mu)$ i $b_i(x,\mu)$ definisanim sa (5.16) za $i = 1,2,...,n$.

Slede još neka pomoćna tvrđenja potrebna za dokaz lokalne konvergencije JSB postupka.

Lema 5.10 *Neka je x^* strogo komplementarno rešenje NCP. Tada postoji okolina $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ takva da za $x^k \in \mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ i odgovarajuću matricu $U^0(x^k)$ važi*

$$\phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i}) \in \partial\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}), \quad za \quad i = 1,2,...,n,$$

pri čemu su $U^0(x^k)$ i $\phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i})$ dati u definiciji 5.3.

Dokaz. Neka je $l_i(\bar{x}^{k,i}) = F_i(s_1,s_2,...,s_{i-1}(\bar{x}^{k,i}),\bar{x}^{k,i})$. Na osnovu (2.6), (2.18), (5.49) i (5.50) za $i = 1,2,...,n$ sledi

$$\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) = \sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})} - x_i^k - l_i(\bar{x}^{k,i}),$$

$$\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i},\mu_k) = \sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i}) + 2\mu_k} - x_i^k - l_i(\bar{x}^{k,i}).$$

Pošto je x^* strogo komplementarno rešenje NCP, postoji okolina $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ u kojoj je funkcija Φ diferencijabilna. Na osnovu toga i definicije $u_{ij}^{0,k}$ date u definiciji 5.3 sledi za $j = i$

$$\begin{aligned} u_{ii}^{0,k} &= \lim_{\mu_k\to 0} u_{ii}^{k,\mu_k} = \lim_{\mu_k\to 0} \frac{\partial\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i},\mu_k)}{\partial x_i} \\ &= \lim_{\mu_k\to 0}[(\frac{x_i^k}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i}) + 2\mu_k}} - 1) \\ &\quad +(\frac{l_i(\bar{x}^{k,i})}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i}) + 2\mu_k}} - 1)\frac{\partial l_i(\bar{x}^{k,i})}{\partial x_i}] \\ &= \frac{x_i^k}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})}} - 1 + (\frac{l_i(\bar{x}^{k,i})}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})}} - 1)\frac{\partial l_i(\bar{x}^{k,i})}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

a za $j = i+1, i+2, ..., n$ sledi

$$\begin{aligned} u_{ij}^{0,k} &= \lim_{\mu_k \to 0} u_{ij}^{k,\mu_k} = \lim_{\mu_k \to 0} \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_j} \\ &= \lim_{\mu_k \to 0} \left(\frac{l_i(\bar{x}^{k,i})}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i}) + 2\mu_k}} - 1\right) \frac{\partial l_i(\bar{x}^{k,i})}{\partial x_j} \\ &= \left(\frac{l_i(\bar{x}^{k,i})}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})}} - 1\right) \frac{\partial l_i(\bar{x}^{k,i})}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

gde se $\frac{\partial l_i(\bar{x}^{k,i})}{\partial x_j}$ za $j = i, i+1, ..., n$ određuje pomoću pravila za izvod složene funkcije.

Dalje, na osnovu definicije 5.3, za $i = 1, 2, ..., n$ važi

$$\begin{aligned} \phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i}) &:= (u_{ii}^{0,k}, u_{i,i+1}^{0,k}, ..., u_{in}^{0,k})^\top \\ &= \lim_{\mu_k \to 0} (u_{ii}^{k,\mu_k}, u_{i,i+1}^{k,\mu_k}, ..., u_{in}^{k,\mu_k})^\top \\ &= \lim_{\mu_k \to 0} \left(\frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_{i+1}}, ..., \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_n}\right)^\top \quad (5.55) \\ &= \lim_{\mu_k \to 0} \Big[\left(\frac{x_i^k}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i}) + 2\mu_k}} - 1\right)\bar{e}^i \\ &\quad + \left(\frac{l_i(\bar{x}^{k,i})}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i}) + 2\mu_k}} - 1\right) l_i'(\bar{x}^{k,i})\Big] \\ &= \left(\frac{x_i^k}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})}} - 1\right)\bar{e}^i + \left(\frac{l_i(\bar{x}^{k,i})}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})}} - 1\right) l_i'(\bar{x}^{k,i}), \end{aligned}$$

gde je $\bar{e}^i = (1, 0, ..., 0)^\top \in R^{n-i+1}$, a $l_i'(\bar{x}^{k,i}) \in R^{n-i+1}$ je vektor sa komponentama $\frac{\partial l_i(\bar{x}^{k,i})}{\partial x_j}$ za $j = i, i+1, ..., n$.

S druge strane, pošto je u $\mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ funkcija Φ diferencijabilna, za $i = 1, 2, ..., n$ sledi

$$\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) = \left(\frac{x_i^k}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})}} - 1\right)\bar{e}^i + \left(\frac{l_i(\bar{x}^{k,i})}{\sqrt{(x_i^k)^2 + l_i^2(\bar{x}^{k,i})}} - 1\right) l_i'(\bar{x}^{k,i}), \quad (5.56)$$

gde je $l_i'(\bar{x}^{k,i}) \in R^{n-i+1}$ vektor sa komponentama

$$\frac{\partial l_i(\bar{x}^{k,i})}{\partial x_j} \quad \text{za} \quad j = i, i+1, ..., n.$$

Na osnovu (5.55) i (5.56) očigledno sledi da

$$\phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i}) \in \partial\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}), \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad \square$$

Lema 5.11 *Ako je $\Phi(x^*) = 0$ onda je $\phi_{ii}(\bar{x}^{*,i}) = 0$, za $i = 1, 2, ..., n$, gde je ϕ_{ii} dato sa (5.49).*

Dokaz. Kako je $\Phi(x^*) = 0$ sledi

$$\phi(x_i^*, F_i(x^*)) = 0, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.57}$$

Dalje na osnovu (5.49), (5.57) i koraka S2 algoritma JSB sledi

$$\begin{aligned} \phi_{ii}(\bar{x}^{*,i}) &= \phi(x_i^*, F_i(s_1, s_2, ..., s_{i-2}, s_{i-1}(\bar{x}^{*,i}), \bar{x}^{*,i})) \\ &= \phi(x_i^*, F_i(s_1, s_2, ..., x_{i-1}^*, x_i^*, ..., x_n^*)) \\ &= \phi(x_i^*, F_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i^*, ..., x_n^*)) \\ &= \phi(x_i^*, F_i(x^*)) = 0. \qquad \square \end{aligned}$$

Lema 5.12 *a) Ako je $\Phi'_{\mu_k}(x^k)$ regularna i $\|\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\| \leq M$ onda je matrica $U(x^k, \mu_k)$ oblika (5.52) regularna i važi $\|U(x^k, \mu_k)^{-1}\| \leq \bar{M}$ i $\|U(x^k, \mu_k)\| \leq M_2$.*
b) Ako je $\|\underline{\Phi}^0(x^k)^{-1}\| \leq M_3$ onda je $\|U^0(x^k)^{-1}\| \leq M_4$ i $\|U^0(x^k)\| \leq \bar{M}_2$, gde je $U^0(x^k)$ dato u definiciji 5.3.

Dokaz. a) Kako je $\Phi'_{\mu_k}(x^k)$ regularna matrica, a matrica JSB postupka $U(x^k, \mu_k)$ oblika (5.52) se dobija kada se matrica $\Phi'_{\mu_k}(x^k)$ elementarnim transformacijama svede na gornju trougaonu matricu, sledi

$$U(x^k, \mu_k) = \bar{P}\Phi'_{\mu_k}(x^k), \tag{5.58}$$

gde je $\bar{P}$ proizvod elementarnih matrica koje odgovaraju transformacijama primenjenim na vrste matrice $\Phi'_{\mu_k}(x^k)$. Pošto su $\bar{P}$ i $\Phi'_{\mu_k}(x^k)$

regularne, sledi i regularnost matrice $U(x^k, \mu_k)$.
Kako je $\bar{P} = P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1$, gde su P_i, $i = 1, 2, ..., n-1$ elementarne matrice sledi

$$\|U(x^k, \mu_k)^{-1}\| \le \|\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\|\|P_1^{-1}\|\cdots\|P_{n-1}^{-1}\| \le \bar{M}.$$

Pošto $\Phi^0(x^k) \in \partial_C\Phi(x^k)$, a skup $\partial_C\Phi(x^k)$ je kompaktan sledi

$$\|\Phi^0(x^k)\| \le \bar{M}_2, \tag{5.59}$$

a kako je po uslovu $\|\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\| \le M$, sledi i $\|\Phi'_{\mu_k}(x^k)\| \le M_5$. Relacija (5.58) implicira

$$\|U(x^k, \mu_k)\| \le \|\bar{P}\|\|\Phi'_{\mu_k}(x^k)\| \le M_2.$$

b) Kako je $\|\Phi^0(x^k)^{-1}\| \le M_3$ i

$$U^0(x^k) = \bar{P}\Phi^0(x^k) = P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1\Phi^0(x^k), \tag{5.60}$$

sledi

$$\|U^0(x^k)^{-1}\| \le \|\Phi^0(x^k)^{-1}\|\|P_1^{-1}\|\cdots\|P_{n-1}^{-1}\| \le M_4.$$

Dalje, na osnovu (5.59) i (5.60) sledi

$$\|U^0(x^k)\| \le \|\bar{P}\|\|\Phi^0(x^k)\| \le \widetilde{M}_2. \qquad \square$$

Na isti način kao u radu Krejić, Martínez [35] formuliše se i dokazuje naredna lema.

Lema 5.13 *Neka su $\tilde{e}_i^k$, $i = 1, 2, ..., n$, $k = 0, 1, ...$; i c_j, $j = 2, 3, ..., n$ realni brojevi takvi da je $\tilde{e}_i^k \ge 0$ za svako $i = 1, 2, ..., n$, $k = 0, 1, ...$ i $c_j > 0$ za $j = 2, 3, ..., n$ i neka je $r_k \ge 0$ za $k = 0, 1, ...$ i $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ i $\varepsilon_k > 0$ za $k = 0, 1, ...$ i $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$ i*

$$\tilde{e}_{n-i+1}^{k+1} \le r_k\tilde{e}_{n-i+1}^k + \sum_{j=1}^{i-1} c_{n-j+1}\tilde{e}_{n-j+1}^k, \tag{5.61}$$

za svako $i = 1, 2, ..., n$, $k = 0, 1, ...$ Tada niz $\{\tilde{e}^k\}$, $\tilde{e}^k = (\tilde{e}_n^k, \tilde{e}_{n-1}^k, ..., \tilde{e}_1^k)^\top$ konvergira ka nuli superlinearno u odgovarajućoj normi.

Dokaz. Relacija (5.61) je ekvivalentna sa

$$\tilde{e}^{k+1} \leq A\tilde{e}^{k}, \tag{5.62}$$

pri čemu je

$$\tilde{e}^{k} = (\tilde{e}_n^k, \tilde{e}_{n-1}^k, ..., \tilde{e}_1^k)^\top,$$
$$\tilde{e}^{k+1} = (\tilde{e}_n^{k+1}, \tilde{e}_{n-1}^{k+1}, ..., \tilde{e}_1^{k+1})^\top,$$

a matrica A je donja trougaona matrica

$$A = \begin{bmatrix} r_k & 0 & \cdots & & 0 \\ c_n & r_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_2 & r_k \end{bmatrix}.$$

Spektralni radijus matrice A je $\rho(A) = r_k$, pa na osnovu teoreme 1.2 postoji norma $\|\cdot\|_C$ na R^n takva da za dato $r_k + \varepsilon_k$ važi

$$\|A\|_C \leq r_k + \varepsilon_k. \tag{5.63}$$

Znači,

$$r_k = \rho(A) \leq \|A\|_C \leq r_k + \varepsilon_k.$$

U slučaju kad je A donja trougaona matrica, konstrukcija norme $\|\cdot\|_C$ je $\|x\|_C = \|Dx\|_2$, gde je D dijagonalna matrica sa pozitivnim elementima. Tada zbog (5.62) važi

$$D\tilde{e}^{k+1} \leq DA\tilde{e}^{k}.$$

Dalje zbog monotonije $\|\cdot\|_2$, definicije $\|x\|_C = \|Dx\|_2$ i (5.63) sledi

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}^{k+1}\|_C &= \|D\tilde{e}^{k+1}\|_2 \leq \|DA\tilde{e}^{k}\|_2 = \|A\tilde{e}^{k}\|_C \\ &\leq \|A\|_C\|\tilde{e}^{k}\|_C \leq (r_k + \varepsilon_k)\|\tilde{e}^{k}\|_C, \end{aligned}$$

što implicira superlinearnu konvergenciju niza $\{\tilde{e}^k\}$, jer je $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ i $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. □

Definicija 5.4 *Neka je $\|x\|_C = \|Dx\|_2$, gde je D dijagonalna matrica sa pozitivnim elementima.*

Od sada nadalje $\|\cdot\| = \|\cdot\|_C$. Za matricu D se može uzeti jedinična matrica E, pa je znači nadalje $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

Sledi teorema o lokalnoj konvergenciji JSB postupka.

Teorema 5.4 *Neka važe pretpostavke P1 i P2. Tada postoje pozitivne konstante ε, μ takve da za $\|x^0 - x^*\| \le \varepsilon$ i niz pozitivnih brojeva $\{\mu_k\} \le \mu$, za koji je $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$, sledi da je niz $\{x^k\}$ generisan JSB postupkom dobro definisan i konvergira superlinearno ka x^*.*

Dokaz. Pošto Φ_μ zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom, tj. $\Phi^0(x^*) \in \partial_C\Phi(x^*)$ i važi pretpostavka P2, na osnovu leme 2.3 postoji okolina $\mathcal{N}_0(x^*, \varepsilon_0) = \{x \in R^n,\ \|x - x^*\| \le \varepsilon_0\}$ i konstanta $M > 0$ takve da za ma koje $x \in \mathcal{N}_0(x^*, \varepsilon_0)$ važi da je $\Phi^0(x)$ regularna matrica i $\|\Phi^0(x)^{-1}\| \le M$.

Kako je x^* strogo komplementarno rešenje NCP, postoji okolina $\mathcal{N}_1(x^*, \varepsilon_1) = \{x \in R^n,\ \|x - x^*\| \le \varepsilon_1\}$ u kojoj je funkcija Φ diferencijabilna. Neka je δ_k niz pozitivnih brojeva takav da je

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0. \tag{5.64}$$

Bira se $\varepsilon > 0$ dovoljno malo i

$$\mathcal{N}(x^*, \varepsilon) = \{x \in R^n,\ \|x - x^*\| \le \varepsilon\} \subseteq \mathcal{N}_0(x^*, \varepsilon_0) \cap \mathcal{N}_1(x^*, \varepsilon_1). \tag{5.65}$$

Na osnovu definicije 5.3

$$U^0(x^k) = \lim_{\mu_k \to 0} U(x^k, \mu_k),$$

sledi da za dato δ_k i $x^k \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ postoji $\mu_k > 0$ takvo da važi

$$|u_{ii}^{0,k} - u_{ii}^{k,\mu_k}| \le \delta_k, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.66}$$

Pošto za $x^k \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ važi $\|\Phi^0(x^k)^{-1}\| \le M$, a po lemi 5.12 je tada

$$\|U^0(x^k)^{-1}\| \le M_3 \tag{5.67}$$

i

$$\|U^0(x^k)\| \le M_2, \tag{5.68}$$

a kako je $U^0(x^k)$ gornja trougaona matrica, elementi na dijagonali matrice $U^0(x^k)^{-1}$ su inverzni dijagonalni elementi matrice $U^0(x^k)$, tj. dijagonalni elementi matrice $U^0(x^k)^{-1}$ su $(u_{ii}^{0,k})^{-1}$, za $i = 1, 2, ..., n$. Zbog toga i (5.67) važi da su $(u_{ii}^{0,k})^{-1}$ ograničeni. Na osnovu ograničenosti $(u_{ii}^{0,k})^{-1}$ za $i = 1, 2, ..., n$, relacije (5.66) i leme 1.6 sledi

$$|(u_{ii}^{k,\mu_k})^{-1}| \leq M_1, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.69}$$

Pošto zbog leme 5.12 važi (5.68) sledi

$$|u_{ij}^{0,k}| \leq M_2, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j \geq i. \tag{5.70}$$

Kako $\Phi^0(x^k) \in \partial_C \Phi(x^k)$, a skup $\partial_C \Phi(x^k)$ je kompaktan sledi da je $\|\Phi^0(x^k)\| \leq M_4$, pa zbog definicije $\Phi^0(x^k)$ sledi i $\|\Phi'_{\mu_k}(x^k)\| \leq \bar{M}_4$. Pošto je

$$U(x^k, \mu_k) = \bar{P}\Phi'_{\mu_k}(x^k),$$

gde je $\bar{P}$ proizvod elementarnih matrica sledi

$$\|U(x^k, \mu_k)\| \leq \|\bar{P}\|\|\Phi'_{\mu_k}(x^k)\| \leq M_5,$$

pa je

$$|u_{ij}^{k,\mu_k}| \leq M_5, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j \geq i. \tag{5.71}$$

Na osnovu semiglatkosti funkcije ϕ_{ii}, (5.54) i leme 5.10, za $i = 1, 2, ..., n$ sledi

$$|\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) - \phi_{ii}(\bar{x}^{*,i}) - \phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i})(\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i})| = o(\|\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i}\|). \tag{5.72}$$

Kako su ϕ_{ii} semiglatke, one su i lokalno Lipšicove, pa za $i = 1, 2, ..., n$ važi

$$|\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) - \phi_{ii}(\bar{x}^{*,i})| \leq L\|\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i}\|. \tag{5.73}$$

Potrebno je dokazati da za svako $i = n, n-1, ..., 2, 1$ važi

$$|x_i^{k+1} - x_i^*| \leq o(|x_i^k - x_i^*|) + \sum_{j=i+1}^{n} c_j |x_j^k - x_j^*|. \tag{5.74}$$

Najpre se dokazuje indukcijom da za svako $i = n, n-1, ..., 2$ važi

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq M_1 L |x_i^k - x_i^*| + \sum_{j=i+1}^{n} c_j |x_j^k - x_j^*|. \tag{5.75}$$

Za $i = n$ na osnovu algoritma JSB, leme 5.11, (5.69) i (5.73) sledi

$$\begin{aligned}
|x_n^{k+1} - x_n^k| &\leq |(\frac{\partial \phi_{nn}(x_n^k, \mu_k)}{\partial x_n})^{-1}||\phi_{nn}(x_n^k)| \\
&= |(\frac{\partial \phi_{nn}(x_n^k, \mu_k)}{\partial x_n})^{-1}||\phi_{nn}(x_n^k) - \phi_{nn}(x_n^*)| \\
&\leq L|(u_{nn}^{k,\mu_k})^{-1}||x_n^k - x_n^*| \\
&\leq M_1 L|x_n^k - x_n^*|.
\end{aligned}$$

Pretpostavlja se da za $l = n, n-1, ..., i+1$ važi

$$|x_l^{k+1} - x_l^k| \leq M_1 L|x_l^k - x_l^*| + \sum_{j=l+1}^{n} c_j|x_j^k - x_j^*|. \tag{5.76}$$

Potrebno je dokazati da važi (5.76) za $l = i$. Na osnovu algoritma JSB, leme 5.11, (5.69), (5.71), (5.73) i hipoteze (5.76) sledi

$$\begin{aligned}
|x_i^{k+1} - x_i^k| &\leq |(\frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_i})^{-1}||\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_j}(x_j^{k+1} - x_j^k)| \\
&\leq |(u_{ii}^{k,\mu_k})^{-1}||\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) - \phi_{ii}(\bar{x}^{*,i}) + \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}^{k,\mu_k}(x_j^{k+1} - x_j^k)| \\
&\leq |(u_{ii}^{k,\mu_k})^{-1}| \left[|\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) - \phi_{ii}(\bar{x}^{*,i})| + \sum_{j=i+1}^{n} |u_{ij}^{k,\mu_k}||x_j^{k+1} - x_j^k|\right] \\
&\leq M_1 \left[L\|\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i}\| + M_5 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^{k+1} - x_j^k|\right] \\
&\leq M_1 \left[L \sum_{j=i}^{n} |x_j^k - x_j^*| + M_5 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^{k+1} - x_j^k|\right] \\
&\leq M_1 \left[L|x_i^k - x_i^*| + L \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^k - x_j^*| + M_5 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^{k+1} - x_j^k|\right] \\
&\;\;\vdots \\
&\leq M_1 L|x_i^k - x_i^*| + \sum_{j=i+1}^{n} c_j|x_j^k - x_j^*|.
\end{aligned}$$

Znači, za $i = n, n-1, ..., 2$ važi (5.75).

Sad se pokazuje da za svako $i = n, n-1, ..., 2, 1$ važi (5.74).

Za $i = n$ na osnovu algoritma JSB i leme 5.11 sledi

$$\begin{aligned}
x_n^{k+1} - x_n^* &= x_n^k - x_n^* - \Big(\frac{\partial \phi_{nn}(x_n^k, \mu_k)}{\partial x_n}\Big)^{-1} \phi_{nn}(x_n^k) \\
&= -(u_{nn}^{k,\mu_k})^{-1}[\phi_{nn}(x_n^k) - \phi_{nn}(x_n^*) \pm \phi_{nn}^0(x_n^k)(x_n^k - x_n^*) \\
&\quad - \frac{\partial \phi_{nn}(x_n^k, \mu_k)}{\partial x_n}(x_n^k - x_n^*)] \\
&= -(u_{nn}^{k,\mu_k})^{-1}[(\phi_{nn}(x_n^k) - \phi_{nn}(x_n^*) - \phi_{nn}^0(x_n^k)(x_n^k - x_n^*)) \\
&\quad + (\phi_{nn}^0(x_n^k) - \frac{\partial \phi_{nn}(x_n^k, \mu_k)}{\partial x_n})(x_n^k - x_n^*)].
\end{aligned}$$

Dalje koristeći (5.64), (5.66), (5.69) i (5.72) sledi

$$\begin{aligned}
|x_n^{k+1} - x_n^*| &= |(u_{nn}^{k,\mu_k})^{-1}|[|\phi_{nn}(x_n^k) - \phi_{nn}(x_n^*) - \phi_{nn}^0(x_n^k)(x_n^k - x_n^*)| \\
&\quad + |\phi_{nn}^0(x_n^k) - \frac{\partial \phi_{nn}(x_n^k, \mu_k)}{\partial x_n}||x_n^k - x_n^*|] \\
&\leq M_1 \Big[o(|x_n^k - x_n^*|) + |u_{nn}^{0,k} - u_{nn}^{k,\mu_k}||x_n^k - x_n^*|\Big] \\
&\leq M_1 \Big[o(|x_n^k - x_n^*|) + \delta_k |x_n^k - x_n^*|\Big] \\
&= o(|x_n^k - x_n^*|).
\end{aligned}$$

Dakle, za $i = n$ važi (5.74).

Sada se dokazuje da važi (5.74) za i, $i = n-1, n-2, ..., 1$. Na osnovu algoritma JSB je

$$\begin{aligned}
x_i^{k+1} - x_i^* &= s_i(\bar{x}^{k+1,i+1}) - x_i^* \\
&= x_i^k - x_i^* - \Big(\frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_i}\Big)^{-1}[\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}, \mu_k)}{\partial x_j}(x_j^{k+1} - x_j^k)]
\end{aligned}$$

$$= (-\frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i},\mu_k)}{\partial x_i})^{-1}[\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) - \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i},\mu_k)}{\partial x_i}(x_i^k - x_i^*) + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial \phi_{ii}(\bar{x}^{k,i},\mu_k)}{\partial x_j}(x_j^{k+1} - x_j^k)].$$

Dalje je

$$\begin{aligned} |x_i^{k+1} - x_i^*| &\leq |(u_{ii}^{k,\mu_k})^{-1}||\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) - \phi_{ii}(\bar{x}^{*,i}) \pm \phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i})(\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i}) \\ &\quad -u_{ii}^{k,\mu_k}(x_i^k - x_i^*) + \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}^{k,\mu_k}(x_j^{k+1} - x_j^k)| \\ &\leq |(u_{ii}^{k,\mu_k})^{-1}|[|\phi_{ii}(\bar{x}^{k,i}) - \phi_{ii}(\bar{x}^{*,i}) - \phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i})(\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i})| \\ &\quad +|\phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i})(\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i}) - u_{ii}^{k,\mu_k}(x_i^k - x_i^*)| \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{n} |u_{ij}^{k,\mu_k}||x_j^{k+1} - x_j^k|]. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Na osnovu (5.66) i (5.70) ocenjuje se

$$\begin{aligned} &|\phi_{ii}^0(\bar{x}^{k,i})(\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i}) - u_{ii}^{k,\mu_k}(x_i^k - x_i^*)| = \\ &= |\sum_{j=i}^{n} u_{ij}^{0,k}(x_j^k - x_j^*) - u_{ii}^{k,\mu_k}(x_i^k - x_i^*)| \\ &\leq |u_{ii}^{0,k} - u_{ii}^{k,\mu_k}||x_i^k - x_i^*| + \sum_{j=i+1}^{n} |u_{ij}^{0,k}||x_j^k - x_j^*| \\ &\leq \delta_k|(x_i^k - x_i^*)| + M_2 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^k - x_j^*|. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Pošto je pokazano da za svako $i = n, n-1, ..., 2$ važi (5.75) sledi da za $j = i+1, i+2, ..., n$ važi

$$|x_j^{k+1} - x_j^k| \leq M_1 L|x_j^k - x_j^*| + \sum_{l=j+1}^{n} c_l|x_l^k - x_l^*|. \tag{5.79}$$

Dalje, na osnovu (5.64), (5.69), (5.72), (5.77), (5.78) i (5.79) sledi

$$\begin{aligned} |x_i^{k+1} - x_i^*| &\leq M_1[o(\|\bar{x}^{k,i} - \bar{x}^{*,i}\|) + \delta_k|x_i^k - x_i^*| \\ &\quad +M_2 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^k - x_j^*| + M_5 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^{k+1} - x_j^k|] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M_1[\sum_{j=i}^{n} o(|x_j^k - x_j^*|) + \delta_k |x_i^k - x_i^*| \\
&\quad + M_2 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^k - x_j^*| + M_5 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^{k+1} - x_j^k|] \\
&\leq M_1[o(|x_i^k - x_i^*|) + \sum_{j=i+1}^{n} o(|x_j^k - x_j^*|) + \delta_k |x_i^k - x_i^*| \\
&\quad + M_2 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^k - x_j^*| + M_5 \sum_{j=i+1}^{n} |x_j^{k+1} - x_j^k|] \\
&\leq \\
&\vdots \\
&\leq o(|x_i^k - x_i^*|) + \sum_{j=i+1}^{n} c_j |x_j^k - x_j^*|.
\end{aligned}
$$

Dakle, pokazano je da za $i = n, n-1, ..., 2, 1$ važi (5.74), tj. važi

$$
|x_i^{k+1} - x_i^*| \leq r_k |x_i^k - x_i^*| + \sum_{j=i+1}^{n} c_j |x_j^k - x_j^*|, \tag{5.80}
$$

gde je $lim_{k\to\infty} r_k = 0$. Ako se uvede oznaka

$$
\tilde{e}_i^{k+1} = |x_i^{k+1} - x_i^*|, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., n,
$$

tada je relacija (5.80) ekvivalentna relaciji (5.61), što znači da su ispunjeni uslovi za primenu leme 5.13, pa na osnovu nje sledi superlinearna konvergencija niza $\{\tilde{e}^k\}$ ka nuli, pa time i superlinearna konvergencija niza $\{x^k\}$ ka x^*. Znači za $x^k \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ važi

$$
\|x^{k+1} - x^*\| = o(\|x^k - x^*\|),
$$

pa je dalje

$$
\|x^{k+1} - x^*\| = o(\|x^k - x^*\|) \leq \|x^k - x^*\| \leq \varepsilon,
$$

što implicira da i $x^{k+1} \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$, čime je pokazana i dobra definisanost postupka. $\Box$

5.3 Hibridni Braun-Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana

U prethodnom poglavlju definisan je Braunov postupak sa regularizacijom jakobijana (JSB) za rešavanje NCP i dokazana je lokalna konvergencija datog postupka pod pretpostavkom da je rešenje NCP x^* strogo komplementarno. U slučaju degenerativnog rešenja, tj. ako postoji indeks $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takav da je $x_i^* = F_i(x^*) = 0$, funkcija Φ dobijena preformulacijom NCP nije diferencijabilna u rešenju x^* i tada se koristi postupak dobijen po ugledu na hibridni postupak iz rada Chen [5].

Ovaj postupak takođe spada u u grupu postupaka sa regularizacijom jakobijana, a predstavlja kombinaciju Braunovog i Njutnovog postupka, te je iz tog razloga nazvan hibridni Braun-Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana.

Dakle, rešava se sistem semiglatkih jednačina

$$\Phi(x) = 0,$$

dobijen preformulacijom NCP (5.1). Kako je reč o postupku sa regularizacijom jakobijana, koristi se glatka aproksimacija Φ_μ (5.47) funkcije Φ. Na poznat način definiše se skup $\partial_C \Phi(x)$ sa (5.12) i

$$\Phi^0(x) = \lim_{\mu \to 0} \Phi'_\mu(x), \tag{5.81}$$

gde je $\Phi'_\mu(x)$ dato sa (5.48). Sa N_Φ je označen skup tačaka u kojima funkcija Φ nije diferencijabilna, a sa $\overline{xy}$ je označen linijski segment određen tačkama x i y. Neka je W skup za koji važi $N_\Phi \subseteq W$. Za $\tau > 0$ definiše se skup $W_\tau = \{x \in R^n,\ dist(x, W) \leq \tau\}$.

Niz $\{x^k\}$ se hibridnim Braun-Njutnovim postupkom sa regularizacijom jakobijana generiše na sledeći način.

Algoritam: HIBRIDNI BRAUN-NJUTNOV POSTUPAK SA REGULARIZACIJOM JAKOBIJANA ZA NCP (HJSBN)

S0: Dato je $x^0 \in R^n$, $\gamma > \tau > 0$, $W_\gamma = \{x \in R^n,\ dist(x, W) \leq \gamma\}$ i niz $\{\mu_k\}$ sa osobinom $\mu_k > 0$ za svako k.

S1: Odredi x^1 iz Njutnovog postupka

$$\begin{aligned} \Phi'_{\mu_0}(x^0)s^0 &= -\Phi(x^0), \\ x^1 &= x^0 + s^0, \qquad k := 1. \end{aligned}$$

S2: Ako je $\overline{x^k x^{k-1}} \cap W_\gamma \neq \emptyset$ tada odredi x^{k+1} iz Njutnovog postupka

$$\begin{aligned} \Phi'_{\mu_k}(x^k)s^k &= -\Phi(x^k), \\ x^{k+1} &= x^k + s^k, \end{aligned}$$

inače odredi x^{k+1} iz Braunovog postupka (primeni korake S1 i S2 algoritma JSB).

S3: Stavi $k := k + 1$ i idi na korak S2. ♣

Znači, ukoliko je presek linijskog segmenta $\overline{x^k x^{k-1}}$ i skupa W_γ neprazan, naredna iteracija x^{k+1} se određuje Njutnovim korakom, a u suprotnom Braunovim korakom.

Uvodi se dodatna pretpostavka

P: Postoji $L > 0$ takvo da važi

$$\|\Phi'_\mu(x) - \Phi'_\mu(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \text{za} \quad \overline{xy} \cap W_\tau = \emptyset$$

i ma koje $\mu > 0$.

Sledi teorema o lokalnoj konvergenciji HJSBN postupka.

Teorema 5.5 *Neka je x^* rešenje NCP, neka su svi elementi skupa $\partial_C \Phi(x^*)$ regularni i neka važi pretpostavka P. Tada postoje pozitivne konstante ε, μ takve da za niz pozitivnih brojeva $\{\mu_k\} \leq \mu$, za koji je $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$ i za $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$, sledi da je niz $\{x^k\}$ generisan HJSBN postupkom dobro definisan i konvergira superlinearno ka x^*.*

Dokaz. Pošto Φ_μ zadovoljava uslov konzistencije sa jakobijanom, tj. $\Phi^0(x^*) \in \partial_C\Phi(x^*)$ i kako su svi elementi skupa $\partial_C\Phi(x^*)$ regularni, na osnovu leme 2.3 sledi da postoje okolina $\mathcal{N}_0(x^*, \varepsilon_0)$ i konstante $M, M_1 > 0$ takvi da za ma koje $x \in \mathcal{N}_0(x^*, \varepsilon_0)$ važi da je $\Phi^0(x)$ regularno, $\|\Phi^0(x)^{-1}\| \leq M$ i postoji $\bar{\mu} > 0$ takvo da za $\mu \in (0, \bar{\mu})$ važi

$$\|\Phi_\mu'(x)^{-1}\| \leq M_1. \tag{5.82}$$

Neka je δ_k niz pozitivnih brojeva za koji važi

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0. \tag{5.83}$$

Posmatraju se tri slučaja:

1. $x^* \in intW_\gamma$,
2. $x^* \in R^n \backslash W_\gamma$,
3. $x^* \in \widetilde{W}_\gamma = \{x \in R^n,\ dist(x, W) = \gamma\}$.

1. slučaj: Ako $x^* \in intW_\gamma$ tada postoji $\varepsilon > 0$ dovoljno malo takvo da je $\mathcal{N}(x^*, \varepsilon) \subseteq \mathcal{N}_0(x^*, \varepsilon_0) \cap intW_\gamma$. Za $x^k \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ i dato δ_k, na osnovu (5.81) i (5.82) postoji $\mu_k > 0$ takvo da je

$$\|\Phi^0(x^k) - \Phi_{\mu_k}'(x^k)\| \leq \delta_k, \tag{5.84}$$

$$\|\Phi_{\mu_k}'(x^k)^{-1}\| \leq M_1. \tag{5.85}$$

Kako $\Phi^0(x^k) \in \partial_C\Phi(x^k)$ na osnovu (5.54) sledi

$$\|\Phi(x^k) - \Phi(x^*) - \Phi^0(x^k)(x^k - x^*)\| = o(\|x^k - x^*\|), \tag{5.86}$$

za $x^k \in \mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$. Pošto se na osnovu algoritma HJSBN u $\mathcal{N}(x^*, \varepsilon)$ primenjuje Njutnov korak, koristeći (5.83), (5.84), (5.85) i (5.86) sledi

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|x^k - x^* - \Phi_{\mu_k}'(x^k)^{-1}\Phi(x^k)\| \\
&= \| - \Phi_{\mu_k}'(x^k)^{-1}[\Phi(x^k) - \Phi(x^*) \pm \Phi^0(x^k)(x^k - x^*) \\
&\quad -\Phi_{\mu_k}'(x^k)(x^k - x^*)]\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|-\Phi'_{\mu_k}(x^k)^{-1}\|[\|\Phi(x^k)-\Phi(x^*)-\Phi^0(x^k)(x^k-x^*)\| \\
&\quad +\|\Phi^0(x^k)-\Phi'_{\mu_k}(x^k)\|\|x^k-x^*\|] \\
&\leq M_1\left[o(\|x^k-x^*\|)+\delta_k\|x^k-x^*\|\right] \\
&= o(\|x^k-x^*\|).
\end{aligned}$$

Znači za $x^k \in \mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ važi

$$\|x^{k+1}-x^*\| = o(\|x^k-x^*\|) \leq \|x^k-x^*\| \leq \varepsilon,$$

odnosno $x^{k+1} \in \mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$, pa dakle sledi dobra definisanost i superlinearna konvergencija.

2. slučaj: Ako $x^* \in R^n \backslash W_\gamma$, tada postoji $\varepsilon > 0$ dovoljno malo takvo da je $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon) \subseteq \mathcal{N}_0(x^*,\varepsilon_0) \cap (R^n \backslash W_\gamma)$ i u $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ važi pretpostavka P. Pretpostavka P implicira diferencijabilnost funkcije Φ u x^*, pa znači da je x^* strogo komplementarno rešenje. Kako je $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon) \cap W_\gamma = \emptyset$ na osnovu algoritma u $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ se primenjuje Braunov korak, pa kako su zadovoljene sve pretpostavke za primenu teoreme 5.4, na osnovu nje sledi da za $x^k \in \mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ važi da i $x^{k+1} \in \mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ i $\|x^{k+1}-x^*\| = o(\|x^k-x^*\|)$, tj. sledi dobra definisanost i superlinearna konvergencija.

3. slučaj: Ako $x^* \in \widetilde{W}_\gamma = \{x,\ dist(x,W) = \gamma\}$, tj. ako x^* pripada granici skupa W_γ, tada postoji $\varepsilon > 0$ dovoljno malo takvo da je $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon) \subseteq \mathcal{N}_0(x^*,\varepsilon_0) \cap (R^n \backslash W_r)$ i u $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ važi pretpostavka P. Kako u $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ važi pretpostavka P, to implicira diferencijabilnost funkcije Φ u x^*. Na osnovu algoritma u $\mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ je moguć i Braunov i Njutnov korak. Neka $x^k \in \mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$. Ako se x^{k+1} dobija na osnovu Braunovog koraka, tada pošto su zadovoljene pretpostavke za primenu teoreme 5.4, na osnovu nje sledi da i $x^{k+1} \in \mathcal{N}(x^*,\varepsilon)$ i sledi da važi $\|x^{k+1}-x^*\| = o(\|x^k-x^*\|)$, tj. sledi dobra definisanost i superlinearna konvergencija. Ukoliko je x^{k+1} dobijeno na osnovu Njutnovog koraka, tada se dobra definisanost i superlinearna konvergencija dokazuju kao u 1. slučaju. $\square$

6

Numerički rezultati

U ovom poglavlju predstavljeni su numerički rezultati dobijeni testiranjem iterativnih postupaka za rešavanje NCP

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^{\mathrm{T}} F(x) = 0, \tag{6.1}$$

na relevantnim primerima.

Algoritmi su implementirani u programskom paketu *Mathematica* 5.0 i MATLAB 7.0.

Pri praktičnom rešavanju NCP javljaju se problemi kao što su izbor početne vrednosti, izlaznog kriterijuma, postupka za rešavanje linearnog sistema, vrednosti raznih parametara i sl., pa će i o tome biti reči.

6.1 MRV postupak za NCP

MRV postupak za NCP definisan je u delu 4.3, gde je pokazana lokalna linearna konvergencija ovog postupka za rešavanje semiglatkog sistema

$$G(x) = \min\{x, F(x)\} = 0,$$

dobijenog preformulacijom NCP (6.1).

Pri praktičnoj realizaciji algoritma korišćeni su sledeći kriterijumi konvergencije

$$\|x^k - x^*\| \leq 10^{-4}\|x^k\| + 10^{-4} \quad \text{i} \quad \|G(x^k)\| \leq 10^{-4}. \tag{6.2}$$

Aproksimacija x^k se smatra prihvatljivom, tj. dovoljno dobrom aproksimacijom rešenja, ako su zadovoljena oba ova uslova (6.2) i tada postupak konvergira. Ukoliko je

$$\|G(x^k)\| \geq 10^{10}, \tag{6.3}$$

smatra se da postupak divergira. Prilikom primene iterativnog postupka potrebno je ograničiti broj dozvoljenih iteracija, odnosno maksimalan broj iteracija u oznaci $kmax$. Ako nakon $kmax = 20$ iteracija nije zadovoljen ni jedan od uslova (6.2) i (6.3) podrazumeva se da postupak sporo konvergira. Spora konvergencija i divergencija označene su $*$.

Za razne početne aproksimacije x^0 i $A = F'(x^0)$ testirani su MRV postupak za NCP sa optimalnim parametrom (MRVNCP_{opt}), MRV postupak za NCP sa konstantnim parametrom (MRVNCP_{const}), generalizovani Njutnov postupak (GN) i generalizovani fiksni Njutnov postupak (GFN), koji se dobija kao specijalan slučaj MRVNCP_{const} sa $\alpha = 0$ u toku celog postupka.

Korišćeni su primeri malih dimenzija, testirani u mnogobrojnim radovima koji se bave ovom tematikom, De Luca et all. [10], Dirske, Ferris [16], Sun, Han [54] i dr.

Primer 1. Funkcija $F : R^4 \to R^4$

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6\\
F_2(x) &= 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 3x_3 + 2x_4 - 2\\
F_3(x) &= 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 1\\
F_4(x) &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3
\end{aligned}$$

Rešenje NCP sa funkcijom F definisanom u primeru 1 je

$$x^* = (\frac{1}{2}\sqrt{6}, 0, 0, 0.5)^\top, \quad \text{a} \quad F(x^*) = (0, 2 + \frac{1}{2}\sqrt{6}, 5, 0)^\top.$$

Kako je $\beta(x^*) = \{i,\ x_i^* = F_i(x^*) = 0\} = \emptyset$ ovo rešenje je strogo komplementarno.

$(x^0)^\top$	GN	GFN	MRVNCP$_{const}$	MRVNCP$_{opt}$
$(1,0,0,0)$	3	7	$(3,-0.13)$	3
$(1,0,1,0)$	3	7	$(3,-0.13)$	3
$(1,0,0,1)$	3	7	$(3,-0.13)$	3
$(1,0.2,0.5,1)$	4	16	$(16,-0.2)$	7
$(1,0,1,-1)$	4	19	$(17,-0.1)$	4
$(1.5,-0.5,4.5,-1)$	4	*	$(10,-0.2)$	6
$(1.1,-0.1,3.1,-0.1)$	4	16	$(16,-0.2)$	7
$(0.85,0.2,0.5,1)$	4	*	$(17,-0.1)$	9

Tabela 1. Primer 1

Rezultati prikazani u tabeli 1 pokazuju ponašanje postupaka, pri čemu je u slučaju da postupak konvergira naveden broj iteracija. Kod MRVNCP$_{const}$ postupka prvi broj označava broj iteracija, a drugi vrednost parametra α.

Primer 2. Funkcija $F : R^4 \to R^4$

$$F_1(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6$$

$$F_2(x) = 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 10x_3 + 2x_4 - 2$$

$$F_3(x) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9$$

$$F_4(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3$$

NCP sa funkcijom F datom u primeru 2 ima dva rešenja. Strogo komplementarno rešenje je

$$x_{SK}^* = (1,0,3,0)^\top, \quad \text{a} \quad F(x_{SK}^*) = (0,31,0,4)^\top,$$

pri čemu je $\beta(x_{SK}^*) = \emptyset$, a degenerisano rešenje je

$$x_D^* = (\frac{1}{2}\sqrt{6},0,0,0.5)^\top, \quad \text{a} \quad F(x_D^*) = (0,2+\frac{1}{2}\sqrt{6},0,0)^\top,$$

gde je $\beta(x_D^*) = \{3\}$.

$(x^0)^\top$	GN	GFN	MRVNCP_{const}	MRVNCP_{opt}
$(1,0,0,0)$	$(3,x_D^*)$	*	$(4,-0.1,x_D^*)$	$(3,x_D^*)$
$(1,0,1,0)$	$(3,x_D^*)$	*	$(4,-0.1,x_D^*)$	$(3,x_D^*)$
$(1,0,0,1)$	$(3,x_D^*)$	*	$(3,-0.13,x_D^*)$	$(3,x_D^*)$
$(1,0.2,0.5,1)$	$(4,x_D^*)$	*	$(8,-0.15,x_{SK}^*)$	$(5,x_{SK}^*)$
$(1,0,1,-1)$	$(3,x_D^*)$	*	$(4,-0.1,x_D^*)$	$(3,x_D^*)$
$(1.5,-0.5,4.5,-1)$	$(3,x_{SK}^*)$	$(7,x_{SK}^*)$	$(5,-0.1,x_{SK}^*)$	$(3,x_{SK}^*)$
$(1.1,-0.1,3.1,-0.1)$	$(3,x_{SK}^*)$	$(4,x_{SK}^*)$	$(4,-0.15,x_{SK}^*)$	$(3,x_{SK}^*)$
$(0.85,0.2,0.5,1)$	$(4,x_D^*)$	$(12,x_{SK}^*)$	$(9,-0.1,x_{SK}^*)$	$(7,x_{SK}^*)$

Tabela 2. Primer 2

Za svaki od postupaka u tabeli 2 naveden je broj iteracija potrebnih za konvergenciju, i rešenje ka kojem postupak konvergira, dok je za MRVNCP_{const} postupak navedena i vrednost parametra α.

Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 1 i tabeli 2 uočava se da MRVNCP_{opt} postupak ima dobre osobine u poređenju sa ostalim postupcima. Naime, on je pokazao bolje ponašanje u odnosu na postupke MRVNCP_{const} i GFN, kao što je i očekivano. Osim toga u većini slučajeva broj iteracija potrebnih za konvergenciju MRVNCP_{opt} bio je blizak broju potrebnih iteracija za konvergenciju GN postupka, čime su nadmašeni teorijski rezultati.

Definisanje postupka koji ima manju računsku složenost od generalizovanog Njutnovog postupka, a koji je brži od generalizovanog fiksnog Njutnovog potupka, bilo je glavna motivacija za formiranje MRV postupka za NCP. Numerički rezultati potvrdili su ova očekivanja.

Relaksacioni parametar uslovljava ponašanje postupka. Kao što je već rečeno, najjednostavnija mogućnost je konstantna vrednost parametra u toku celog postupka, a druga mogućnost je izbor optimalnog parametra tako da nova iteracija bude što bliža Njutnovoj iteraciji.

Dalja istraživanja biće usmerena na dublje poređenje ovog postupka sa ostalim generalizovanim postupcima Njutnovog tipa.

6.2 Netačni Njutnovi postupci za NCP

Jedan od načina za rešavanje NCP (6.1) je primena netačnih Njutnovih postupaka. Globalno konvergentni generalizovani netačni Njutnovi postupci razmatrani su u delu 4.4, a netačni Njutnovi postupci sa regularizacijom jakobijana za NCP u delu 5.1, gde je i dokazana globalna konvergencija JSIN postupka za rešavanje semiglatkog sistema

$$\Phi(x) = 0,$$

nastalog preformulacijom NCP.

Sada će biti prikazani rezultati dobijeni testiranjem JSIN postupka, koji je poređen sa JSN postupkom kao njegovim specijalnim slučajem i GIFQNCP postupkom definisanim u radu De Luca et all. [11].

Test funkcije generisane su na sledeći način, prvi put predstavljen u radu Gomes-Ruggiero [24].

Neka je $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T$ nelinearna, diferencijabilna funkcija $f : R^n \to R^n$ i neka je $x^* = (1, 0, 1, 0, ...)^T \in R^n$.
Za $i = 1, 2, ..., n$ definiše se

$$F_i(x) = \begin{cases} f_i(x) - f_i(x^*), & \text{ako je } i \text{ neparno ili } i > r \\ f_i(x) - f_i(x^*) + 1, & \text{inače} \end{cases} \tag{6.4}$$

gde je $r \geq 0$ ceo broj. Za ovako definisanu funkciju F, vektor x^* je rešenje NCP, ali to rešenje ne mora biti jedinstveno. Ako je $r = n/2$, x^* je degenerisano rešenje NCP, a ukoliko je $r = n$ ono je strogo komplementarno rešenje. Za funkciju f uzeto je svih 17 test problema navedenih u radu Lukšan [42], problemi 2, 4, 6, 7, 12, 13, 25 i 27 iz rada Spedicato [53] i problemi 1.1, 1.2, 1.3 i 1.5 iz knjige Bus [4]. Svaki od navedenih netačnih postupaka testiran je sa tri vrednosti "forcing" parametra: $t_k = 0.5$, $t_k = 2^{-k}$ i $t_k = \|\Phi(x^k)\|$. Dakle, upoređivano je sedam postupaka:

- JSN - JSN postupak
- JSIN1 - JSIN postupak sa $t_k = 0.5$
- JSIN2 - JSIN postupak sa $t_k = 2^{-k}$
- JSIN3 - JSIN postupak sa $t_k = \|\Phi(x^k)\|$
- GIN1 - GIFQNCP postupak sa $t_k = 0.5$
- GIN2 - GIFQNCP postupak sa $t_k = 2^{-k}$

- GIN3 - GIFQNCP postupak sa $t_k = \|\Phi(x^k)\|$

na svim navedenim test problemima, pri čemu su posmatrane tri dimenzije $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$, i dve početne aproksimacije uzete iz radova De Luca et all [11] i Lukšan [42]. Prva startna iteracija označena sa x^0 navedena je u radu Lukšan [42] a druga, označena sa $\tilde{x}^0$ definisana je sa

$$\tilde{x}_i^0 = \begin{cases} 10x_i^0, & \text{ako je} \quad x_i^0 \neq 0 \\ 10, & \text{inače.} \end{cases}$$

Osim toga, za svaku od navedenih dimenzija posmatrano je degenerisano rešenje ($r = n/2$), kao i strogo komplementarno rešenje ($r = n$). Korišćen je sledeći kriterijum konvergencije

$$\|\Phi(x^k)\| \leq 10^{-5}\sqrt{n},$$

ali u slučaju da on nije zadovoljen ni nakon $k_{max} = 200$ iteracija postupak se prekida. Postupci GIN1, GIN2, GIN3 testirani su sa parametrima $\rho = 10^{-8}$, $\beta = 10^{-4}$ i $m = 2.1$, dok su za postupke JSN, JSIN1, JSIN2 i JSIN3 korišćeni sledeći parametri: $\sigma = 10^{-4}$, $\alpha = 0.5$, $\bar{\xi} = 0.5$, $\gamma = 20$, $\theta = 0.8$, $\tau_{\min} = 0.3$, $\tau_{\max} = 0.8$. Kod svih netačnih postupaka sistem linearnih jednačina rešava se iterativno, pri čemu je u tu svrhu upotrebljen GMRES postupak.

Dobijeni numerički rezultati upoređivani su na osnovu indeksa robustnosti, indeksa efikasnosti i kombinovanog indeksa koji se definišu na sledeći način

- indeks robustnosti

$$R_j = \frac{t_j}{n_j},$$

- indeks efikasnosti

$$E_j = \sum_{i=1, r_{ij} \neq 0}^{m} \left(\frac{r_{ib}}{r_{ij}}\right) / t_j,$$

- kombinovani indeks

$$E_j \times R_j = \sum_{i=1, r_{ij} \neq 0}^{m} \left(\frac{r_{ib}}{r_{ij}}\right) / n_j,$$

gde je r_{ij} broj iteracija potrebnih za rešavanje i-tog problema j-tim postupkom, $r_{ib} = \min_j r_{ij}$ je najbolji rezultat za rešavanje i-tog problema, t_j je broj uspeha j-tog postupka i n_j je broj problema testiranih j-tim postupkom.

Slede tabele sa rezultatima testiranih postupaka.

	JSN	JSIN1	JSIN2	JSIN3	GIN1	GIN2	GIN3
R	0.875	0.6667	0.7639	0.5694	0.6667	0.7361	0.6111
E	0.9468	0.7723	0.8756	0.9383	0.7786	0.8716	0.9187
E × R	0.8284	0.5149	0.6688	0.5343	0.51913	0.6416	0.5742

Tabela 3. STROGO KOMPLEMENTARNO REŠENJE ($r = n$) SA POČETNOM ITERACIJOM x^0

	JSN	JSIN1	JSIN2	JSIN3	GIN1	GIN2	GIN3
R	0.8472	0.75	0.9028	0.4167	0.6944	0.8194	0.4861
E	0.9051	0.6954	0.8854	0.9222	0.6685	0.838	0.8611
E × R	0.7668	0.5215	0.7993	0.3843	0.4642	0.6867	0.4186

Tabela 4. STROGO KOMPLEMENTARNO REŠENJE ($r = n$) SA POČETNOM ITERACIJOM $\bar{x}^0$

	JSN	JSIN1	JSIN2	JSIN3	GIN1	GIN2	GIN3
R	0.7606	0.6761	0.7746	0.4648	0.6197	0.7606	0.4366
E	0.9721	0.5851	0.8265	0.9803	0.5855	0.8134	0.9157
E × R	0.7393	0.3956	0.6402	0.4556	0.3628	0.6187	0.3998

Tabela 5. DEGENERISANO REŠENJE ($r = n/2$) SA POČETNOM ITERACIJOM x^0

	JSN	JSIN1	JSIN2	JSIN3	GIN1	GIN2	GIN3
R	0.8382	0.6618	0.7941	0.3382	0.6176	0.8088	0.5441
E	0.9383	0.5381	0.8397	0.8197	0.5654	0.7925	0.8306
E × R	0.7865	0.3561	0.6668	0.2773	0.3492	0.6410	0.452

Tabela 6. DEGENERISANO REŠENJE ($r = n/2$) SA POČETNOM ITERACIJOM $\bar{x}^0$

Netačni Njutnovi postupci nastali su sa idejom da se prevaziđe nedostatak Njutnovog postupka koji se odnosi na tačno rešavanje sistema linearnih jednačina što poskupljuje postupak kada su u pitanju sistemi velikih dimenzija. Pri praktičnoj primeni, međutim, ovi postupci daju nešto slabije rezultate od Njutnovog postupka, što se vidi pri poređenju kombinovanog indeksa postupaka JSIN1, JSIN2 i JSIN3 sa istim indeksom JSN postupka.

Globalna superlinearna konvergencija JSIN2 postupka dokazana je u delu 5.1. Numerički rezultati potvrdili su teorijske. Naime, analizirajući tabele uočava se da su među netačnim postupcima Njutnovog tipa najbolji rezultati dobijeni primenom JSIN2 postupka, što znači da se ovaj metod sasvim uspešno može koristiti za rešavanje NCP. Štaviše, u praktičnoj primeni JSIN2 postupak je pokazao bolje ponašanje čak i u odnosu na postupke JSIN3 i GIN3, koji su sa teorijske tačke gledišta brži.

Interesantno je napomenuti da se pri analizi postupaka u određenim slučajevima dešavalo da na istom primeru različiti postupci konvergiraju ka različitim rešenjima. Osim toga, prilikom testiranja problema 4.6 iz rada Lukšan [42] sa startnom iteracijom x^0, ni jedan od postupaka nije bio uspešan, međutim, korišćenjem novog izlaznog kriterijuma

$$\|\Phi(x^k)\| \leq 10^{-6},$$

JSIN1 postupkom primenjenim na ovaj primer u slučaju dimenzije $n = 10$, određeno je približno rešenje.

Generalno govoreći, postupci JSIN i GIFQNCP imaju veoma slično ponašanje u praktičnoj primeni. Pojedini numerički primeri ukazuju na to da je bilo slučajeva u kojima neki od JSIN postupaka nije bio uspešan, dok je pak odgovarajući GIFQNCP konvergirao, ali su korišćeni gradijentni koraci. Međutim, uvođenje gradijentnog koraka može usporiti algoritam, pa je iz tog razloga sasvim opravdana nemonotona tehnika za globalizaciju, na kojoj je zasnovan JSN postupak.

6.3 Braunov postupak sa regularizacijom jakobijana za NCP

U ovom delu predstavljeni su neki numerički rezultati dobijeni primenom Braunovog postupka sa regularizacijom jakobijana (JSB) za rešavanje NCP (6.1) koji se svodi na ekvivalentan sistem semiglatkih jednačina oblika

$$\Phi(x) = 0. \tag{6.5}$$

JSB postupak definisan je u delu 5.2 gde je pokazana lokalna superlinearna konvergencija pod pretpostavkom da je rešenje NCP strogo komplementarno. U slučaju degenerisanog rešenja definisan je hibridni Braun-Njutnov postupak sa regularizacijom jakobijana (HJSBN), za koji je u delu 5.3 pokazana takođe lokalna superlinearna konvergencija.

Prilikom numeričkih testiranja nadmašena su teorijska očekivanja jer se JSB postupak pokazao kao uspešan i u slučaju degenerisanog rešenja. Naime, kada je rešenje NCP degenerisano, lokalna konvergencija je dokazana samo za Braunov postupak u kombinaciji sa Njutnovim postupkom, tj. za HJSBN postupak. Međutim, u praksi je JSB postupak dao zadovoljavajuće rezultate čak i tada, iako je teorijski dokazana konvergencija ovog postupka samo u slučaju strogo komplementarnog rešenja.

Pri numeričkim izračunavanjima korišćeni su sledeći kriterijumi konvergencije

$$\|x^k - x^{k-1}\| \leq 10^{-6} \quad \text{i} \quad \|\Phi(x^k)\| \leq 10^{-6},$$

ali u slučaju da oni nisu zadovoljeni ni nakon $kmax = 100$ iteracija postupak se prekida.

Niz parametara regularizacije $\{\mu_k\}$ definisan je sa

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \|\Phi(x^0)\|, \\ \mu_{k+1} &= \frac{1}{4}\,\mu_k, \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Uporedni test rađen je za Braunov (JSB) i Njutnov (JSN) postupak sa regularizacijom jakobijana za razne vrednosti početne iteracije x^0.

Najpre slede rezultati dobijeni testiranjem NCP (6.1) sa funkcijom F definisanom u primerima 1 i 2, koji su navedeni u poglavlju 6.1.

$(x^0)^\top$	JSN	JSB
$(1,0,1,0)$	6	6
$(1,0,0,1)$	5	5
$(1,0.2,0.5,1)$	5	5
$(1,0.5,0.5,1)$	5	5
$(1.5,-0.5,4.5,-1)$	6	7
$(1.1,-0.1,3.1,-0.1)$	6	6
$(0.85,0.2,0.5,1)$	5	5
$(1.1,0.2,0.2,0.4)$	5	5
$(1.5,-0.5,0.5,1)$	6	5

Tabela 7. Primer 1

$(x^0)^\top$	JSN	JSB
$(1.1,0.2,0.2,0.4)$	$(8,x^*_{SK})$	$(8,x^*_{SK})$
$(1.1,-0.1,3.1,-0.1)$	$(3,x^*_{SK})$	$(4,x^*_{SK})$
$(0.5,0,3.5,0)$	$(5,x^*_{SK})$	$(6,x^*_{SK})$
$(1,0.2,0.5,1)$	$(18,x^*_D)$	$(8,x^*_{SK})$
$(1.2,0.01,0.01,0.4)$	$(18,x^*_D)$	$(20,x^*_D)$

Tabela 8. Primer 2

NCP sa funkcijom F datom u primeru 1 ima strogo komplementarno rešenje $x^* = (\frac{1}{2}\sqrt{6},0,0,0.5)^\top$, a NCP sa funkcijom F datom u primeru 2 ima dva rešenja, degenerisano $x^*_D = (\frac{1}{2}\sqrt{6},0,0,0.5)^\top$ i strogo komplementarno rešenje $x^*_{SK} = (1,0,3,0)^\top$. Za oba postupka JSN i JSB u tabelama 7 i 8 naveden je broj iteracija potrebnih za konvergenciju, dok je u tabeli 8 naznačeno i rešenje ka kojem postupak konvergira.

Osim ova dva primera dimenzije $n = 4$, testirano je još pet primera iz radova Lukšan [42] i Spedicato [53].

Test funkcije F_i za $i = 1,2,...,n$ generisane su na način (6.4) opisan u delu 6.2. Za funkciju $f : R^n \to R^n$ odabrani su sledeći primeri:

Primer 3. Lukšan [42], tridijagonalni sistem, problem 4.7

Primer 4. Lukšan [42], petodijagonalni sistem, problem 4.8

Primer 5. Lukšan [42], Brojdenova tridijagonalna funkcija, problem 4.14

Primer 6. Lukšan [42], Brojdenov tridijagonalni problem 4.17

Primer 7. Spedicato [53], problem 2

Dati primeri testirani su u tri dimenzije $n = 4$, $n = 10$ i $n = 100$ za razne vrednosti startne iteracije i posmatrano je degenerisano i strogo komplementarno rešenje.

Prethodno definisani indeks robustnosti, efikasnosti i kombinovani indeks poslužili su za poređenje numeričkih rezultata dobijenih primenom postupaka JSB i JSN za rešavanje NCP na primerima 3, 4, 5, 6 i 7.

	JSN	JSB
R	0.978723	0.978723
E	0.988544	0.990554
E × R	0.967511	0.969478

Tabela 9. STROGO KOMPLEMENTARNO REŠENJE ($r = n$)

	JSN	JSB
R	0.9375	0.9375
E	0.979731	0.979038
E × R	0.918498	0.917848

Tabela 10. DEGENERISANO REŠENJE ($r = n/2$)

Na osnovu rezultata prikazanih u tabelama 7, 8, 9 i 10 primećuje se slično ponašanje postupaka JSB i JSN. Naime, numerički rezultati potvrdili su teorijska očekivanja vezana za superlinearnu konvergenciju ovih postupaka, ali su nadmašili teorijske rezultate u pogledu primene JSB postupka, jer se praktično ovaj postupak pokazao kao uspešan i u slučaju degenerisanog rešenja.

Literatura

[1] Brown, K., *A quadratically convergent Newton-like method based on upon Gaussian elimination*, SIAM J. Numer. Anal. 6 (1969), 560-569.

[2] Broyden, G., *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*, Math. Comp 19 (1965), 577-593.

[3] Birgin, E., Krejić, N., Martínez, J.M., *Globally convergent inexact quasi-Newton methods for solving nonlinear systems*, Numerical Algorithms 32 (2003), 249-260.

[4] Bus, J.C.P., *Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations*, Mathematical Centre Tracts 122, Amsterdam, 1980.

[5] Chen, X., *Superlinear convergence of smoothing quasi-Newton methods for nonsmooth equations*, J. Comput. Appl. Math 80 (1997), 105-126.

[6] Chen, X., Qi, L., Sun, D., *Global and superlinear convergence of the smoothing Newton method and its applications to general box constrained variational inequalities*, Mathematics of Computation 67, 22 (1998), 519-540.

[7] Clarke, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.

[8] Cvetković, Lj., Rapajić, S., *How to improve MAOR method convergence area for linear complementarity problems*, Applied Mathematics and Computation 162 (2005), 577-584.

[9] Dembo, R.S., Eisenstat, S.C., Steihaug, T., *Inexact Newton methods*, SIAM J. Numer. Anal. 19 (1982), 400-408.

[10] De Luca, T., Facchinei, F., Kanzow, C., *A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems*, Mathematical Programming 75 (1996), 407-439.

[11] De Luca, T., Facchinei, F., Kanzow, C., *A theoretical and numerical comparison of some semismooth algorithms for complementarity problems*, Computational Optimization and Applications 16 (2000), 173-205.

[12] Dennis, J.E., Moré, J.J., *A characterization of superlinear convergence and its application to quasi-Newton methods*, Math. Comp., 28 (1974), 549-560.

[13] Dennis, J.E., Moré, J.J., *Quasi-Newton methods, motivation and theory*, SIAM Review 19 (1977), 46-89.

[14] Dennis, J.E., Schnabel, R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

[15] Dingguo, P., Weiwen, T., *Globally convergent inexact generalized Newton's methods for nonsmooth equations*, J. Comput. Appl. Math. 138 (2002), 37-49.

[16] Dirske, S., P., Ferris, M. C., MCPLIB: *A collection of nonlinear mixed complementarity problems*, Optim. Methods and Soft. 5 (1995), 319-345.

[17] Eisenstat, S.C., Walker, H.F., *Globally convergent inexact Newton methods*, SIAM J. Optim. 4 (1994), 393-422.

[18] Facchinei, F., Kanzow, C., *A nonsmooth inexact Newton method for the solution of large scale complementarity problems*, Mathematical Programming 76 (1997), 493-512.

[19] Facchinei, F., Soares, J., *A new merit function for nonlinear complementarity problems and a related algorithm*, SIAM J. Optim. 7, 1 (1997), 225-247.

[20] Ferris, M.C., Kanzow, C., *Complementarity and related problems*

[21] Ferris, M.C., Pang, J.S., *Engineering and economic applications of complementarity problems*, SIAM Review 39 (1997), 669-713.

[22] Fischer, A., *A special Newton-type optimization method*, Optimization 24 (1992), 269-284.

[23] Frommer, A., *Monotonicity of Brown's method*, ZAMM 68 (1988), 101-109.

[24] Gomes-Ruggiero, M.A., Martínez, J.M., Santos, S.A., *Solving nonsmooth equations by means of quasi-Newton methods with globalization*, Recent Advances in Noonsmooth Optimization, World Scientific Publisher, Singapore, 1995, 121-140.

[25] Herceg, D., Krejić, N., *Numerička analiza.* Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, MP "Stylos", Novi Sad, 1997.

[26] Kantorovich, L.V., Akilov, G.P., *Functional Analysis in Normed Spaces*, Pergamon, Oxford, England, 1964.

[27] Kanzow, C., *Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 17 (1996), 851-868.

[28] Kanzow, C., *Inexact semismooth Newton methods for large-scale complementarity problems*, Optim. Methods Softw. 19 (2004), No. 3-4, 309-325.

[29] Kanzow, C., Peiper, H., *Jacobian smoothing methods for general nonlinear complementarity problems*, SIAM J. Optim. 9, 2 (1999), 342-373.

[30] Kanzow, C., Yamashita, N., Fukushima, M., *New NCP functions and their properties*, J. Optim. Theory and Appl., 94, No 1 (1997), 115-135.

[31] Kelley, C.T., *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Frontiers in Applied Mathematics 16, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1995.

[32] Krejić, N., Lužanin, Z., *Newton-like method with modification of the right-hand-side vector*, Math. of Comp., 71 (2002), 237-250.

[33] Krejić, N., Lužanin, Z., Rapajić, S., *Method with modification of the right-hand-side vector for nonlinear complementarity problems*, International Journal of Computer Mathematics (to appear).

[34] Krejić, N., Lužanin, Z., Rapajić, S., *On a smoothing quasi-Newton method for nonlinear complementarity problems*, PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 3, Issue 1 (2003) 523-524.

[35] Krejić, N., Martínez, J.M., *A globally convergent inexact-Newton method for solving reducible nonlinear systems of equations*, Optim. Methods Softw. 13 (2000), No. 1, 11-34.

[36] Krejić, N., Martínez, J.M., *Inexact-Newton methods for semismooth systems of equations with block-angular structure*, J. Comput. Appl. Math. 103 (1999), 239-249.

[37] Krejić, N., Rapajić, S., *Globally convergent Jacobian smoothing inexact Newton methods for NCP*, (submitted).

[38] Krejić, N., Rapajić, S., *Jacobian smoothing Brown's method for nonlinear complementarity problems*, (submitted).

[39] Li, D. Fukushima, M., *A derivative-free line search and global convergence of Broyden-like method for nonlinear equations*, Optim. Methods Softw. 13 (2000), No. 3, 181-201.

[40] Li, D. Fukushima, M., *Globally convergent Broyden-like methods for semismooth equations and applications to VIP, NCP and MCP*, Annals of Operations Research 103 (2001), 71-97.

[41] Lopes, V.L.R., Martínez, J.M., Pérez, R., *On the local convergence of quasi-Newton methods for nonlinear complementarity problems*, Appl. Numer. Math. 30 (1999), No. 1, 3-22.

[42] Lukšan, L., *Inexact trust region method for large sparse systems of nonlinear equations*, Journal of Optimization Theory and Appl. 81 (1994), 569-590.

[43] Lužanin, Z., Rapajić, S., *Convergence acceleration of a general Newton method for systems of nonlinear equations*, Scientiae Mathematicae Japonicae 54, No. 3 (2001), 513-519.

[44] Mangasarian, L., *Equivalence of the complementarity problem to a system of nonlinear equations*, SIAM J. Appl. Math. 31 (1976), 89-92.

[45] Martínez, J.M., *Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear systems*, Numerical analysis 2000, Vol. IV, Optimization and nonlinear equations. J. Comput. Appl. Math. 124 (2000) 1-2, 97-121.

[46] Martínez, J.M., Qi, L., *Inexact Newton's method for solving nonsmooth equations*, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995), 127-145.

[47] Milaszewicz, J., P., *On Brown's and Newton's methods with convexity hypothesis*, J. Comput. Appl. Math., 150 (2002), 1-24.

[48] Pang, J.S., Qi, L., *Nonsmooth equations: Motivation and algorithms*, SIAM J. Optim. 3 (1993), 443-465.

[49] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.

[50] Qi, L., *Convergences analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations*, Math. Oper. Res. 18 (1993), 227-244.

[51] Qi, L., Sun, J., *A nonsmooth version of Newton's method*, Math. Programming 58 (1993), 353-367.

[52] Rapajić, S., *Modifikacije Njutnovog postupka za probleme nelinearne komplementarnosti*, magistarska teza, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1999.

[53] Spedicato, E., Huang, Z., *Numerical experience with Newton-like methods for nonlinear algebraic systems*, Computing 58 (1997), 69-89.

[54] Sun, D., Han, J., *Newton and quasi-Newton methods for a class of nonsmooth equations and related problems*, SIAM J. Optim., Vol 7, No 2 (1997), 463-480.

[55] Sun, D., Qi, L., *On NCP functions*, Computational Optimization and Applications, 1998.

[56] Yamashita, N., Fukushima, M., *Modified Newton methods for solving a semismooth reformulation of monotone complementarity problems*, Mathematical Programming 76 (1997), 469-491.

[57] Ypma, T.J., *Local convergence of inexact Newton methods*, SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984), 583-590.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rođena sam 30. marta 1972. godine u Vršcu, od majke Mirjane i oca Đure Pilipović. Osnovnu školu "Đorđe Natošević" i srednju prirodno-matematičku školu "Jovan Jovanović - Zmaj" završila sam u Novom Sadu sa odličnim uspehom.

Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer informatika, upisala sam se 1990. godine.

Sve predviđene ispite u toku studija položila sam sa prosečnom ocenom 9,52 i oktobra 1994. godine sam odbranila diplomski rad pod nazivom "Numeričko rešavanje semilinearnih singularno perturbovanih problema u *Mathematica*-i". Na poslediplomske studije Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, odsek matematika, smer numerička matematika, upisala sam se 1995. godine, a magistarsku tezu pod nazivom "Modifikacije Njutnovog postupka za probleme nelinearne komplementarnosti" odbranila sam oktobra 1999. godine.

Marta 1995. godine zaposlila sam se na Institutu za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, kao asistent pripravnik, a od februara 2000. godine radim kao asistent. Držim nastavu iz sledećih predmeta: numerička analiza i operaciona istraživanja, a držala sam vežbe iz predmeta: matematika sa statistikom sa studente biologije i biohemije, matematika za dvopredmetne studije, programiranje i numerička matematika za studente fizike, računari i numerička matematika za studente hemije i poslovna matematika za studente geografije.

Učestvovala sam sa saopštenjem na sedam domaćih i međunarodnih skupova. Koautor sam deset naučnih radova i dve zbirke zadataka.
Član sam organizacionih odbora tri domaća kongresa.
Udata sam, imam dve ćerke i živim u Novom Sadu.

U Novom Sadu, 10. maja 2005. Sanja Rapajić

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: mr Sanja Rapajić
AU
Mentor: Prof. dr Nataša Krejić
MN
Naslov rada: Iterativni postupci sa regularizacijom za rešavanje nelinearnih komplementarnih problema
MR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s / e
JI
Zemlja publikovanja: Srbija i Crna Gora
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2005
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (6, 118, 57, 10, 0, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: nelinearni komplementarni problemi, nelinearni sistemi, semiglatke funkcije, generalizovani jakobijan, lokalna konvergencija, globalna konvergencija, postupci sa regularizacijom jakobijana
PO

UDK:
Čuva se:
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

U doktorskoj disertaciji razmatrani su iterativni postupci za rešavanje nelinearnih komplementarnih problema (NCP). Problemi ovakvog tipa javljaju se u teoriji optimizacije, inženjerstvu i ekonomiji. Matematički modeli mnogih prirodnih, društvenih i tehničkih procesa svode se takođe na ove probleme. Zbog izuzetno velike zastupljenosti NCP problema, njihovo rešavanje je veoma aktuelno. Među mnogobrojnim numeričkim postupcima koji se koriste u tu svrhu, u ovoj disertaciji posebna pažnja posvećena je generalizovanim postupcima Njutnovog tipa i iterativnim postupcima sa regularizacijom matrice jakobijana. Definisani su novi postupci za rešavanje NCP i dokazana je njihova lokalna ili globalna konvergencija. Dobijeni teorijski rezultati testirani su na relevantnim numeričkim primerima.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP
Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	Dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	Dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	Dr Miodrag Petković, redovni profesor Elektronskog fakulteta u Nišu
Član:	Dr Zorana Lužanin, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Doctoral dissertation
CC
Author: M.Sc. Sanja Rapajić
AU
Mentor: Prof. dr Nataša Krejić
MN
Title: Jacobian smoothing methods for nonlinear complementarity problems
TI

Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: Serbia and Montenegro
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2005
PY

Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (6, 118, 57, 10, 0, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: nonlinear complementarity problems, nonlinear systems, semismooth functions, generalized Jacobijan, local convergence, global convergence, Jacobian smoothing methods
SKW

UC:
Holding data:
HD
Note:
N

Abstract:
AB

Iterative methods for nonlinear complementarity problems (NCP) are considered in this doctoral dissertation. NCP problems appear in many mathematical models from economy, engineering and optimization theory. Solving NCP is very atractive in recent years. Among many numerical methods for NCP, we are interested in generalized Newton-type methods and Jacobian smoothing methods. Several new methods for NCP are defined in this dissertation and their local or global convergence is proved. Theoretical results are tested on relevant numerical examples.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB
Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor:	Dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Dr Miodrag Petković, Full Professor, Faculty of Electronic Engineering, University of Niš
Member:	Dr Zorana Lužanin, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad