

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Небојша М. Војновић

**ПРИМЕНА БАЗИСНИХ ФУНКЦИЈА  
ВИШЕГ РЕДА ПРИ ПРОЦЕНИ ОБЛИКА  
МЕТАЛНИХ И ДИЕЛЕКТРИЧНИХ  
ОБЈЕКТА**

докторска дисертација

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Nebojša M. Vojnović

**UTILIZING HIGHER-ORDER BASIS  
FUNCTIONS FOR ESTIMATING THE  
SHAPE OF METALLIC AND DIELECTRIC  
OBJECTS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2019

**Ментор:**

др Марија Стевановић, ванредни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

**Чланови комисије:**

др Бранко Колунџија, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Небојша Дончов, редовни професор  
Универзитет у Нишу – Електронски факултет

др Антоније Ђорђевић, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Александар Ракић, ванредни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Датум одбране: \_\_\_\_\_

*Супрузи Наташи и ћерки Маши.*

# Примена базисних функција вишег реда при процени облика металних и диелектричних објеката

## Резиме

Представљена је квалитативна метода нумеричке електромагнетике за микроталасно формирање слике, која се ослања на решавање инверзног проблема расејања. У уводном делу дат је преглед литературе и укратко су дефинисане предности предложеног алгоритма у односу на већ постојеће методе. Након увода, дефинисани су основни постулати инверзних проблема и упоређени са добро познатом формулацијом директних електромагнетских проблема. Након тога, објашњене су потешкоће које настају при решавању инверзних проблема, односно показано је да су они у општем случају нелинеарни и некоректно постављени. Такође, детаљно је описана техника развоја по мултиполима као фундаментална алатка у аналитичкој електромагнетици, на којој се заснива приказана метода.

Даље, изложени су детаљи новог алгоритма за дводимензионално микроталасно формирање слике уз употребу сензора трансверзално-магнетске (ТМ) и трансверзално-електричне (ТЕ) поларизације. Метода се може применити у случају металних, као и у случају диелектричних објеката, и ослања се на “реткост” траженог решења, уз употребу мерног модела заснованог на изворима поља у виду мултипола. У циљу верификације перформанси, алгоритам је тестиран на низу нумеричких сценарија, укључујући објекте чији попречни пресеци имају сложене (конкавне) облике попречног пресека. Анализа је показала да у случају ТМ поларизације стандардна обрада ретких сигнала може бити искоришћена заједно са функцијама базиса вишег реда (мултиполима вишег реда), у циљу добијања бољих крајњих резултата. С друге стране, стандардна обрада ретких сигнала не даје добре резултате у случају ТЕ поларизације. У оба случаја, коришћење мултипола вишег реда омогућава прецизнију анализу објеката комплексних облика, чак и у присуству шума. Упоредно су приказани резултати добијени за случај ТМ и ТЕ поларизације.

Такође, испитан је концепт оптималног реда мултипола за оба дводимензионална сценарија. Установљено је да је могуће остварити значајну уштеду у рачунарским ресурсима и трајању симулација уколико се приликом реконструкције користи само оптималан ред мултипола. На крају, анализирано је и неколико тродимензионалних примера.

**Кључне речи:** инверзно расејање, микроталасно формирање слике, обрада ретких сигнала, оптимални ред мултипола, развој по мултиполима.

**Научна област:** Електротехника и рачунарство

**Ужа научна област:** Електромагнетика

**УДК број:** 621.3

# Utilizing higher-order basis functions for estimating the shape of metallic and dielectric objects

## Abstract

An electromagnetic qualitative microwave imaging method, which relies on solving an inverse scattering problem, is presented. In the introductory part of this dissertation, the state-of-the-art is briefly summarized. Also, main advantages of the proposed method, compared to other known methods, are outlined. After the introduction, we define the basic idea of an inverse problem, compared to the well-known direct electromagnetic problem formulation. Then, we explain the main difficulties arising during an attempt to solve such an inverse problem, i.e., it is shown that these problems are generally non-linear and ill-posed. Also, the multipole expansion technique, as a fundamental tool in analytical electromagnetics, is described in detail.

Next, details are presented of the novel algorithm for two-dimensional microwave imaging, using sensors with transverse magnetic (TM) and transverse electric (TE) polarization. The method is applicable to metallic and dielectric objects and exploits the sparseness of the sought solution, by imposing a measurement model based on multipole sources. In order to verify the achievable performance, the method was numerically tested against different scenarios, including targets with complex concave cross-sections. The investigation showed that, in the case of a simpler (scalar) TM polarization, the standard (zero-order) sparse processing can be used together with the higher-order basis functions (higher multipole orders) in order to obtain a better reconstruction of the analyzed object. On the other hand, as opposed to the TM polarization, the standard sparse processing yields no or very little information about the targets in the more complicated (vectorial) TE case. In both cases, using higher-order multipole sources to build sparse imaging dictionaries allows better target shape estimations, even in the presence of noise. In addition, we compared the results obtained using TM and TE polarization.

Also, the concept of the optimal multipole order was investigated for TE and TM two-dimensional scenarios. It was found that a significant reduction in computational time and resources can be achieved if only the optimal multipole order is used in the

final reconstruction. In addition, we also considered certain cases of the three-dimensional scenario.

**Keywords:** inverse scattering, microwave imaging, multipole expansion, optimal multipole order, sparse processing.

**Scientific area:** Electrical and computer engineering

**Scientific subarea:** Electromagnetics

**UDC number:** 621.3



# Садржај

<b><u>1. УВОД</u></b>	1
1.1. Уводне напомене	1
1.2. Стање у свету	2
1.3. Значај, предмет и циљ истраживања докторске дисертације	9
<b><u>2. ИНВЕРЗНИ ПРОБЛЕМИ У ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЦИ</u></b>	12
2.1. Уводне напомене	12
2.2. Једначина расејања	13
2.3. Методе регуларизације	16
2.4. Примери метода за решавање једначине расејања	21
2.4.1. Сингуларна декомпозиција	22
2.4.2. <i>Truncated singular value decomposition</i> метода	23
2.4.3. <i>Linear sampling</i> метода	27
2.4.4. Стандардна обрада ретких сигнала	30
<b><u>3. РАЗВОЈ ПО МУЛТИПОЛИМА</u></b>	35
3.1. Уводне напомене	35
3.2. Дводимензионални случај развоја по мултиполима	35
3.2.1. Случај ТМ поларизације	35
3.2.2. Случај ТЕ поларизације	42
3.3. Тродимензионални случај развоја по мултиполима	44
3.3.1. Тродимензионални случај са ТМ поларизованим струјним елементима	47
3.3.2. Тродимензионални случај са ТЕ поларизованим струјним елементима	52
3.3.3. Развој произвољног електромагнетског поља на $TM_r$ и $TE_r$ поларизоване компоненте	53

<b><u>4. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ ЗА ДВОДИМЕНЗИОНАЛНЕ ПРОБЛЕМЕ</u></b>	59
4.1. Уводне напомене	59
4.2. Дводимензионална анализа - ТЕ случај	59
4.3. Дводимензионална анализа - ТМ случај	68
4.4. Нумерички резултати дводимензионалних анализа	70
4.4.1. Метални објекат са попречним пресеком у облику крста	71
4.4.2. Диелектрични објекат са попречним пресеком у облику крста	75
4.4.3. Метални објекат са попречним пресеком у облику петокраке звезде	76
4.4.4. Метални објекат са попречним пресеком у облику змаја	79
<b><u>5. КОНЦЕПТ ОПТИМАЛНОГ РЕДА МУЛТИПОЛА</u></b>	82
5.1. Уводне напомене	82
5.2. Концепт оптималног реда мултипола - ТЕ поларизација	84
5.3. Концепт оптималног реда мултипола - ТМ поларизација	89
5.4. Дискусија резултата	91
<b><u>6. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ ЗА ТРОДИМЕНЗИОНАЛНЕ ПРОБЛЕМЕ</u></b>	96
6.1. Уводне напомене	96
6.2. Тродимензионални метални објекат у облику крста	99
6.3. Тродимензионални диелектрични објекат у облику крста	102
6.4. Тродимензионални метални објекат у облику звезде	104
<b><u>7. ЗАКЉУЧАК</u></b>	107
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	110
<b>БИОГРАФИЈА АУТОРА</b>	119
<b>ПРИЛОГ 1</b>	121
<b>ПРИЛОГ 2</b>	122
<b>ПРИЛОГ 3</b>	123

# 1. Увод

## 1.1. Уводне напомене

Многе данашње практичне апликације захтевају познавање параметара, односно карактеризацију објеката који су на неки начин недоступни директном мерењу. Параметри од интереса могу бити локација, величина, облик, а такође и електрична својства, као што су релативна диелектрична пермитивност и/или електрична проводност. Поред физичке недоступности разматраног објекта, мерења могу бити дуготрајна, скупа, па чак и опасна по здравље.

С тим у вези, претходних година све популарнија је област позната као *микроталасно формирање слике* (енгл. *microwave imaging*, MWI) која се заснива на употреби микроталасног зрачења у циљу добијања потребних података о недоступном објекту. До повећаног интересовања научне заједнице долази осамдесетих година прошлог века и настаје из низа *ad hoc* метода без ригорозних математичких основа. Са порастом способности персоналних рачунара и могућности паралелизације, област микроталасног формирања слике (МФС) постаје све популарнија. Исход ове популарности је огроман број научних радова, како из инжењерских, тако и из области математике и физике.

Поред инхерентне неинвазивности, једна од најзначајнијих предности техника МФС је коришћење нејонизујућег, микроталасног зрачења, јер сама техника обухвата употребу микроталасних примопредајних сензора (углавном у виду антенског низа). Не треба, наравно, заборавити чињеницу да су МФС системи релативно јефтине и једноставни за имплементацију и коришћење. С друге стране, МФС спада у класу инверзних проблема, што са собом повлачи и одређене недостатке који долазе до изражаја при обради примљених сигнала.

Наиме, за инверзне проблеме важи да су генерално *нелинеарни* и *некоректно постављени* (енгл. *ill-posed*). Такође, у зависности од нивоа тачности који се захтева, извршавање МФС алгоритама може трајати значајно дуже у поређењу са неким конвенционалним методама (нпр. рендген), што представља проблем у практичној примени. Компромис између прецизности добијених резултата и времена које је потребно за обраду улазних података једна је од главних тема истраживања у овој области.

## 1.2. Стање у свету и преглед литературе

На самом почетку треба напоменути да, поред области електромагнетике (ЕМ) која ће овде бити разматрана, значајан број научних радова постоји и из области решавања инверзних проблема у домену акустике [1]. Тачније, најчешћи циљ поменутих радова је ултразвучна дијагноза у медицини [2], где је посебну пажњу потребно посветити могућности добијања квалитетне реконструкције на основу мерења из ограниченог скупа блиских углова.

Једна од веома важних будућих примена МФС лежи у неинвазивној медицинској дијагностици, тачније у детекцији бенигнух и малигнух тумора [3]–[6]. Због агресивне природе својих ћелија, малигни тумори имају веома неправилне облике, те је потребно алгоритам адаптирати на такав начин да се могу анализирати како конвексни, тако и конкавни објекти.

Следећа битна примена МФС је у домену радарске технике [7], [8] са посебним акцентом на области тзв. *ground penetrating radar (GPR)* [9] која се бави детекцијом објеката у земљи, и то углавном цеви или неексплодираних мина [10]. Највећа препрека у решавању оваквих проблема је нехомогеност медијума у коме се налази анализирани објекат. Поменута нехомогеност потиче од састава самог земљишта, као и од чињенице да треба узети у обзир и дисконтинуитет између земље и ваздуха, јер се тражени објекат налази у земљи, а мерни антенски низ у ваздуху.

Још једна битна област примене МФС је прикупљање података о објектима који се налазе иза зида (енгл. *through-wall-imaging, TWI*) [11]. Уколико се анализирају људски субјекти [12], потребно је обезбедити да алгоритам ради у реалном

времену како би се, због велике динамике људског тела чак и у стању мировања, очувала прецизност добијене слике и избегло тзв. “размазивање” (енгл. *blurring*). Један од честих проблема са којим се TWI технике сусрећу је компензовање утицаја металних шипки (арматуре) које се често налазе унутар зидова.

Потенцијална примена МФС може бити и делимична замена употребе рендгенског зрачења у медицини. Наиме, када се има у виду фреквенција на којој раде рендгенски предајници (реда РHz–ЕHz), јасно је да слике добијене помоћу МФС (где је радна фреквенција реда GHz) имају неупоредиво мању резолуцију. Стога би МФС технике могле да послуже као претходни корак рендгенској дијагностици (прелиминарна дијагноза), у циљу минимизације излагања пацијената штетном, јонизујућем зрачењу велике снаге.

У литератури везаној за МФС, постоји више подела уведених од стране разних аутора. На овом месту ће бити дат преглед оних подела које се најчешће срећу у литератури.

Приликом самог постављања МФС проблема, прво је потребно дефинисати одговарајућу интегралну једначину која ће бити решавана (односно инвертована). Према томе, прва подела МФС метода је на оне које решавају *интегралну једначину магнетског поља* (енгл. *magnetic field integral equation*, MFIE) [13], и на оне које решавају *интегралну једначину електричног поља* (енгл. *electric field integral equation*, EFIE) [14], [15]. Треба напоменути да првих метода има много мање од других, односно у да се у највећем делу релевантне литературе решава EFIE.

У вези са избором интегралне једначине је и избор домена у коме је потребно пронаћи решење. Стога, МФС методе могу се поделити на оне које проблем решавају у *једнодимензионалном* (1D) простору [16], *дводимензионалном* (2D) простору уз коришћење *трансверзално-магнетске* (TM) *поларизације* [17]–[20], *дводимензионалном простору уз коришћење трансверзално-електричне* (TE) *поларизације* [21]–[23], или *тродимензионалном* (3D) простору [24]–[27]. Највећи број радова бави се 2D сценаријем и TM поларизацијом, из разлога што се проблем у том случају своди на скаларан и једноставно га је решити [28]. Такође треба поменути и *каскадне* TM-TE методе [29], [30], које у циљу добијања бољих резултата користе предности обе појединачне поларизације.

Још један параметар који је директно повезан са избором одговарајуће интегралне једначине је *регија* у којој се прикупљају подаци за обраду. Наиме, највећи број метода заснива се на обради података добијених у зони *далеког поља* (енгл. *far-field*). На тај начин, због особине одређених компонената поља да брже слабе са растојањем, комплетна информација о пољу може се добити на основу мерења уз помоћ сензора са мањим бројем оријентација. Типичан пример је брзо опадање радијалне компоненте електричног поља произвољне расподеле струје, те је у далеком пољу довољно мерити само преостале две сферне компоненте. Приликом мерења *блиског* електромагнетског поља (енгл. *near-field*) [31], [32] потребно је узети у обзир све три његове компоненте, што компликује процедуру прибављања података. С друге стране, мерењем у блиском пољу добијају се информације о еванесцентним таласима који веома брзо слабе. На овај начин се ублажава један од главних недостатака МФС метода, а то је нејединственост решења након инверзије. Треба напоменути да постоје и методе које поред тога што прикупљају податке у блиском пољу, захтевају и директан контакт сензора и испитиваног објекта [33]. Овакве *контактне* методе углавном своју примену налазе у медицини.

Након дефинисања интегралне једначине, домена и регије у којој се тражи решење, могуће је овако дефинисану, *нелинеарну* једначину на неки начин *линеаризовати*, односно применити неки вид апроксимације. Према томе, МФС методе могу се поделити на *егзактне* и *апроксимативне*. Егзактне методе не користе ниједан вид апроксимације, односно решавају ригорозан систем Максвелових једначина. Методе линеаризације које се најчешће срећу у литератури су Борнова [34]–[36], Ритовљева [37], [38], *Foldy-Lax* [39] и Кирхофова [40]–[42] апроксимација. Борнова и њена напреднија варијанта (Ритовљева апроксимација) познате су као тзв. *single bounce* апроксимације, базирају се на занемаривању ефекта вишеструке рефлексије и дају добре резултате за случај “слабих” расејача (случај када се релативне диелектричне пермитивности расејача и околног медијума не разликују значајно). *Foldy-Lax* је генерализована Борнова апроксимација, која апроксимира далеко расејано електромагнетско поље у неинтегралном облику, а може се применити за случај вишеструких расејача. На крају, Кирхофова апроксимација, у литератури позната и као *physical optics* (PO)

апроксимација, подразумева да су полупречници расејача много већи од коришћене таласне дужине, па је сваки расејач могуће третирати као раван од које се инцидентни талас рефлектује. Наиме, РО је могуће схватити и као екстензију *geometrical optics* (GO) принципа (који разматра само праволинијско кретање и просту рефлексију таласа представљених у виду линија), са додатим ефектима поларизације, интерференције и дифракције.

Најосновнија подела МФС метода је на тзв. *квалитативне* и *квантитативне* методе и тиче се параметара расејача које је потребно проценити. Наиме, квалитативним МФС методама одређују се позиција, облик и величина металних или диелектричних објеката [43]–[46]. С друге стране, квантитативне методе као резултат дају релативну диелектричну пермитивност и/или електричну проводност расејача [47]–[50].

Док је проблем још увек у директном облику, односно пре процеса инверзије, неопходно је одабрану (континуалну) интегралну једначину *дискретизовати*. Резултат овог процеса је *систем једначина* дефинисаних у дискретним тачкама простора који се разматра. Након дискретизације, могуће је добијени систем једначина решити помоћу рачунара. Метода дискретизације која се најчешће користи у литератури је *метода момената* (енгл. *method of moments*, МоМ) [51]. Поред тога, у знатно мањем броју научних радова, за дискретизацију је искоришћена *метода коначних елемената* (енгл. *finite elements method*, FEM) [52]. Стога, МФС методе можемо поделити и по овом критеријуму. Уколико је проблем дефинисан у хомогеном, или делимично нехомогеном медијуму, МоМ се одликује знатно нижим захтевима по питању рачунарских ресурса, посебно када се има у виду да се често анализирају проблеми отвореног типа. Другим речима, број ћелија добијених након физичке сегментације анализираног објекта (тзв. *mesh* ћелије) на којима је потребно решити Максвелове једначине, много је мањи за случај када је примењена метода еквивалентних површинских/запреминских струја по/у расејачу (МоМ), него у случају када је сегментацију потребно извршити над целокупним разматраним тродимензионалним доменом (FEM).

Имајући у виду да решење инверзног проблема није јединствено, у литератури постоји пуно радова који у сам алгоритам имплементирају и нека предзнања (тзв. *a priori* знања) о функцији која се реконструира. На тај начин могуће је добити

значајно бољи резултат [53]. Посебан случај представљају проблеми за чија се решења *a priori* зна да су “ретка” (енгл. *sparse*), тј. да (након репрезентације помоћу одговарајућих функција базиса) највећи број коефицијената у вектору решења има нулту или занемарљиво малу вредност. Метода специјално развијена за овај случај означава се као *обрада ретких сигнала* (енгл. *compressive sensing*, CS) [54]–[56]. Интересантно је да постоји веза између методе прикупљања података о расејачу насумично постављеним антенама и CS методе [57], [58].

У литератури се може срести велики број МФС метода, развијених током претходних неколико деценија, за инверзију система једначина добијеног на већ описан начин. Из групе квалитативних треба издвојити методе засноване на сингуларној декомпозицији [59], као на пример *pseudo-inverse* (PSI) [60] и *truncated singular value decomposition* (TSVD) [61]. Са математичког становишта, PSI метода еквивалентна је сингуларној декомпозицији (о којој је више детаља дато у одељку 2.4.1). TSVD метода ослања се на прорачун сингуларних вредности одговарајуће матрице и одсецање оних које су испод неког унапред дефинисаног прага (више детаља дато је у одељку 2.4.2). Једна од основних метода је тзв. *equivalent source method*, ESM [62], која се ослања на теорему еквиваленције где се сваки дисконтинуитет у разматраном домену замењује одговарајућим површинским (или запреминским) електричним (или магнетским) струјама. Новије методе, као што су *linear sampling method*, LSM (која је описана у одељку 2.4.3) [63]–[66], и њена екстензија позната као *factorization method* (FM) [67], [68], ослањају се на тзв. *interior point* приступ. Другим речима, врши се анализа да ли разматрана тачка припада неком домену или не. Такође треба поменути и методу познату као MUSIC (енгл. *multiple signal classification*) [69]–[71], веома једноставну и често коришћену у циљу локализације недоступних објеката, чак и у присуству шума. У мање коришћене квалитативне методе спадају, на пример, *level-set algorithm* (LSA), *equivalent current density vector* (ECDV) метода, *iterative hard thresholding* (ИТ) метода и многе друге.

С друге стране, квантитативне МФС методе се најчешће дефинишу као апроксимативне. Самим тим потребно је дефинисати *итеративни* процес за реконструкцију конститутивних параметара расејача [72], [73]. Једна од основних квантитативних метода је *итеративна Борнова метода* (енгл. *Born iterative*



*method*, BIM) [74], као и њена напреднија верзија позната као *distorted Born iterative method* (DBIM) [75]–[77]. Предност DBIM у односу на BIM је у чињеници да се током итерација, поред процене релативне диелектричне пермитивности објекта, врши и процена одговарајуће Гринеове функције. У литератури се могу наћи и радови који имплементирају верзију DBIM базирану на Ритовљевој апроксимацији, DRIM (енгл. *distorted Rytov iterative method*) [78]. Веома слична DBIM методи је и *Newton-Kantorovich* метода [79], [80], а доказ о еквивалентности ове две методе може се наћи у [81]. Једна од често коришћених метода позната као *diffraction tomography*, DT [82], [83], такође се заснива на Борновој апроксимацији, па се према томе и користи за квантитативну анализу слабих расејача. Од осталих метода треба поменути и методе инверзије које користе Бајесов пробабилистички приступ [84], [85], тзв. *contrast source/contrast field* методе [86]–[88], као и *iterative multi-resolution* (IMRS) методу [89].

Као што је већ напоменуто, решавање инверзних проблема је компликовано јер су такви проблеми некоректно постављени. У практичним применама, то значи да решење задатог проблема није јединствено. Ефикасан начин да се дође до јединственог решења су методе *регуларизације*. Тачније, поред минимизовања резидуала класичном методом најмањих квадрата (енгл. *least squares method*), могуће је увести и додатни вид пенализације у зависности од преферираног облика решења. Овај додатни вид пенализације се углавном имплементира коришћењем неке  $l$ -норме вектора решења пондерисане тежинским фактором познатим као *регуларizacionи параметар*. Најчешће коришћена метода регуларизације је тзв. регуларизација Тихонова која се ослања на  $l_2$ -норму вектора решења и има изражен ефекат “омекшавања” ивица (енгл. *smoothing effect*) [90]. У вези за овом врстом регуларизације треба поменути и тзв. *Morozov discrepancy principle* [91], који дефинише начин за оптималан одабир регуларizacionог параметра. Такође, постоје и регуларizacionе методе засноване на  $l_0$ - [92] и  $l_1$ -норми вектора решења [93]. Из групе  $l_1$  регуларизација, најчешће се у литератури среће тзв. LASSO (енгл. *least absolute shrinkage and selection operator*) [94], као и њена побољшана верзија LARS (енгл. *least-angle regression*) [95]. Често коришћена је и *total variation* (TV) метода, која као додатни вид пенализације уводи  $l_1$ -норму градијента вектора решења [96] и позната је по томе што

реконструисане слике имају веома изражене ивице (енгл. *edge-preserving*), за разлику од регуларизације Тихонова. Метода регуларизације која комбинује  $l_2$ - и  $l_1$ -норму вектора решења, и самим тим уводи два регуларизациона параметра, позната је као *elastic net* регуларизација [97], [98]. Поред наведених *адитивних* метода регуларизације, постоје и тзв. *мултипликативне* (MR) методе које не користе регуларизациони параметар [99], [100]. Од осталих метода треба поменути (*orthogonal*) *matching pursuit* [101], *Landweber* [102], [103], *Dantzig* [104] и *maximum entropy* методе [105].

Након увођења методе регуларизације, могуће је дефинисати тзв. *функцију циља* као суму два фактора. Први фактор је  $l_2$ -норма разлике тачне и апроксимативне вредности мерене величине, док је други параметар дат као додатни вид пенализације. Овако дефинисану функцију циља потребно је минимизовати. За потребе минимизације могу се искористити два приступа. Једну групу чине *стохастички типови минимизације*, чији су типични представници *genetic algorithm* (GA) [106], *particle swarm optimization* (PSO) [107], *differential evolution strategy* (DES) [108] и *simulated annealing* [109]. Ове методе су веома захтевне по питању рачунарских ресурса (захтевају вишеструко решавање директног проблема), али са друге стране са високом вероватноћом проналазе глобални минимум функције циља. Постоје и *детерминистички* типови минимизације који користе разне аналитичке методе, као што су разни облици Њутнове [110] методе (Гаус-Њутнова [111], приближна Њутнова [112], [113], квази-Њутнова [114]), метод конјугованих градијената (CG) [115], [116], као и *Levenberg-Marquardt* [117] метода. Детерминистичке методе су брже од стохастичких, али уз одређену вероватноћу проналажења само локалног минимума функције циља. Треба напоменути да неке од метода (на пример DBIM) не користе функцију циља, већ се ослањају на неки вид испитивања конвергенције решења. Пример је рачунање процентуалне разлике између две последње итерације. Када та разлика постане мања од неке унапред дефинисане вредности, процедура се зауставља.

Још једна подела која се може наћи у литератури је и подела на *радарске* и *томографске* МФС методе. Под радарским методама подразумевају се методе засноване на обради широкопојасних сигнала у временском домену. Овакве

методе одликују могућност синтетичког фокусирања и ефекат супер-резолюције [118]–[120]. С друге стране, томографске методе подразумевају побуду једном антенном из низа и мерење одзива на преосталим антенама [121]. Након тога се читава процедура понавља (односно ротира у случају кружног антенског низа), тако да се расејач побуди из сваког доступног угла.

На крају треба напоменути да у литератури постоје и радови који разматрају употребу података добијених на више различитих фреквенција, и да се на тај начин, уз сложенију и дуготрајнију процедуру мерења, добијају нешто бољи резултати [122], [123]. Такође, постоји изванредан број радова који, због велике осетљивости фазе на високим фреквенцијама, испитују могућност прикупљања и обраде искључиво података о амплитуди расејаног поља [124].

### **1.3. Значај, предмет и циљ истраживања докторске дисертације**

Употреба базисних функција вишег реда имплементирана кроз мултиполни развој представља елементарну методу у електротехници уз помоћ које је на релативно брз и једноставан начин могуће апроксимирати вредности електромагнетског поља, са високом тачношћу. Предмет овог истраживања садржан је у анализи података добијених антенским мерењима поља расејаних од објеката различитих облика и састава, у условима побуде електромагнетским таласима различите поларизације, уз присуство шума различитих нивоа.

Циљ овог истраживања огледа се у синтези нове квалитативне методе базиране на аналитичким изразима, која као улазне податке може узети нумеричке или експериментално добијене податке, а која ће бити у могућности да верно изврши реконструкцију облика разматраних објеката.

У литератури се већ могу пронаћи алгоритми који уз помоћ разних нумеричких метода, евентуално претпостављајући одређено предзнање о објекту, могу извршити реконструкцију облика дво- и тродимензионалних објеката на основу података добијених помоћу антенског низа. Многе од предложених метода су итеративне, што директно имплицира дужи временски период потребан за извршавање симулација и добијање крајњег резултата. Значај овог истраживања је у остваривању предности у односу на поменуте методе, и то по питању степена

тачности реконструкције, могућности рада у условима виших нивоа шума и мање захтевности по питању рачунарских ресурса.

Стандардни поступак реконструкције ослања се на униформну мрежу монопола (мултипола нултог реда). У овом истраживању се полази од претпоставке да се већа веродостојност реконструисаних слика може постићи уколико се узму у обзир и мултиполи вишег реда, имајући у виду њихову већу усмереност. На тај начин би се могли реконструисати и сложенији (прикривени) делови конкавних објеката. Треба напоменути да се сви редови мултипола разматрају независно, те процедура траје онолико пута дуже од стандардног приступа колико има редова мултипола у анализи.

Анализа сваког реда мултипола подразумева минимизациони процес коришћењем конвексног програмирања, након чега се добија карактеристична L-крива. Додатна претпоставка подразумева да се за вредност регуларизационог параметра која одговара колону L-криве добија најбоље решење као баланс између максимално ретког (решења са минималним бројем ненултих чланова) и максимално веродостојног (тачног) решења.

Истраживање се заснива на изразима за магнетски и електрични вектор-потенцијал (у зависности од поларизације побудног електромагнетског таласа), на основу којих се коришћењем развоја по мултиполима добија системска матрица неопходна за процес минимизације. Разматрају се подаци добијени у два сценарија, и то: антенски низ без присутног објекта, и антенски низ са присутним објектом. Процес минимизације врши се над разликом овог пара података. Добијене слике пролазе кроз процес дигиталног филтрирања, у циљу елиминисања што већег броја артефаката, тј. нежељених пиксела. Поменути дигитални филтар добија се стандардном обрадом ретких сигнала, за вредност регуларизационог параметра изнад вредности која одговара колону L-криве. На основу површине дигиталног филтра процењује се максимални ред мултипола који је потребно узети у обзир. Такође, максимални ред мултипола могуће је верификовати и помоћу Фуријеове анализе. С друге стране, на основу димензија простора у ком се врши претрага, процењује се неопходан број антена у низу. Полупречник антенског низа бира се углавном тако да објекат буде у далеком

пољу свих антена. У циљу редуковања утицаја шума на квалитет реконструкције, могуће је симултано обрађивати сигнале са неколико просторно блиских антена.

Као резултат овог истраживања развијен је оригиналан алгоритам за реконструкцију објеката сложеног облика. Додатно, установљена је аутоматизована процедура за одређивање релевантних редова мултипола (у зависности од поларизације побудног електромагнетског таласа) који су потребни за верну реконструкцију дво- и тродимензионалних, металних и диелектричних објеката, чак и у условима високог нивоа шума.

Након увода, у другом поглављу дати су основни појмови о инверзним проблемима у електромагнетици, као и о методама за њихово решавање. Такође, приказани су и примери слични предложеној методи, који се најчешће срећу у литератури. Показано је да ове методе дају лоше резултате за случај објеката конкавног попречног пресека. У трећем поглављу детаљно је приказана метода мултиполног развоја за дво- и тродимензионални случај. У четвртном поглављу дати су резултати анализе дводимензионалног трансверзално-електричног и трансверзално-магнетског сценарија. Пето поглавље бави се концептом оптималних редова мултипола за дводимензионални ТМ и ТЕ случај. У шестом поглављу дати су резултати анализе тродимензионалног сценарија. Коначно, у седмом поглављу дати су закључци целокупне анализе.

## 2. Инверзни проблеми у електромагнетици

### 2.1. Уводне напомене

Највећи део истраживања у оквиру електромагнетике, у микроталасном и милиметарском опсегу фреквенција, подразумева неки облик решавања тзв. *директног проблема*. Наиме, под појмом директног проблема подразумевамо сценарио када на основу познатог инцидентног електромагнетског таласа и познатих особина расејача треба, аналитичким или нумеричким методама, пронаћи облик расејаног поља. У литератури је могуће пронаћи мноштво резултата (књиге, научни радови, патенти, софтверски пакети итд.) у вези са решавањем овог типа проблема.

С друге стране, решавање *инверзних проблема* (или проблема инверзног расејања, енгл. *inverse scattering*) у електромагнетици постало је интересантно крајем прошлог века. У склопу решавања проблема инверзног расејања потребно је на основу познатих облика инцидентног и расејаног електромагнетског таласа одредити особине расејача (нпр. његову позицију, облик и састав). Данас су теоријске основе потребне за решавање ових проблема знатно унапређене, а самим тим значајно је повећано и интересовање научне заједнице за ову област. Решавање проблема инверзног расејања своју примену налази у радарима/сонарима, грађевини, медицинској дијагностици итд. Највеће потешкоће са којима се сусрећемо приликом њиховог решавања су чињенице да су ови проблеми генерално нелинеарни и некоректно постављени.

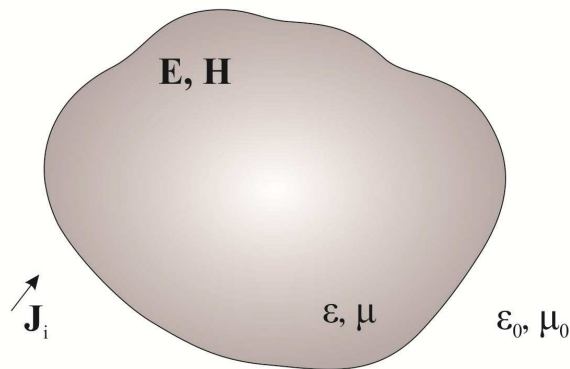
## 2.2. Једначина расејања

Да бисмо показали да су проблеми инверзног расејања нелинеарни, потребно је да изведемо тзв. *једначину расејања*. У том циљу, прво ћемо извести запреминску теорему еквиваленције [125]. Претпоставимо да у вакууму постоје побудне запреминске струје  $\mathbf{J}_i$  као на слици 2.1. Те струје стварају инцидентно електрично поље  $\mathbf{E}_0$  и инцидентно магнетско поље  $\mathbf{H}_0$ . Стога имамо да важе Фарадејев и Амперов закон, тј.

$$\text{rot } \mathbf{E}_0 = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (2.1)$$

и

$$\text{rot } \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_i + j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_0. \quad (2.2)$$



Слика 2.1 - Уз извођење запреминске теореме еквиваленције.

Ако се у вакуум унесе и диелектрични објекат као на слици 2.1, побудне струје  $\mathbf{J}_i$  створиће унутар објекта ново електрично и магнетско поље,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . И у овом случају важе поменуте Максвелове једначине, дате са

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \quad (2.3)$$

и

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_i + j\omega\mu \mathbf{E}. \quad (2.4)$$

Одузимањем релација (2.1) и (2.3) добијамо

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) &= -j\omega\mu\mathbf{H} + j\omega\mu_0\mathbf{H}_0 = -j\omega\mu\mathbf{H} + j\omega\mu_0\mathbf{H}_0 + j\omega\mu_0\mathbf{H} - j\omega\mu_0\mathbf{H} = \\ &= j\omega\mu_0(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}) - j\omega\mathbf{H}(\mu - \mu_0) = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s - j\omega\mathbf{H}(\mu - \mu_0),\end{aligned}\quad (2.5)$$

односно

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s - j\omega\mathbf{H}(\mu - \mu_0), \quad (2.6)$$

при чему смо са  $\mathbf{E}_s$  означили вектор расејаног електричног поља који је дефинисан разликом вектора укупног и инцидентног електричног поља. Поређењем израза (2.6) са почетним обликом Фарадејевог закона, дефинишемо *запреминску густину еквивалентне магнетске струје*,  $\mathbf{M}_{\text{eq}}$ , дату са

$$\mathbf{M}_{\text{eq}} = j\omega\mathbf{H}(\mu - \mu_0) = j\omega\mu_0\mathbf{H}(\mu_r - 1). \quad (2.7)$$

Сада израз (2.6) постаје

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s - \mathbf{M}_{\text{eq}}. \quad (2.8)$$

Слично, након одузимања релација (2.2) и (2.4), долазимо до израза

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon_0\mathbf{E}_s + j\omega\mathbf{E}(\epsilon - \epsilon_0), \quad (2.9)$$

при чему смо са  $\mathbf{H}_s$  означили вектор расејаног магнетског поља који је дефинисан разликом вектора укупног и инцидентног магнетског поља. Аналогно, дефинишемо *запреминску густину еквивалентне електричне струје*,  $\mathbf{J}_{\text{eq}}$ , дату са

$$\mathbf{J}_{\text{eq}} = j\omega\mathbf{E}(\epsilon - \epsilon_0) = j\omega\epsilon_0\mathbf{E}(\epsilon_r - 1), \quad (2.10)$$

при чему израз (2.9) постаје

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon_0\mathbf{E}_s + \mathbf{J}_{\text{eq}}. \quad (2.11)$$

Из израза (2.7) и (2.10) може се приметити да су еквивалентне струје дефинисане само у делу простора који заузима унети диелектрични објекат. Другим речима, са становишта расејаног електромагнетског поља, објекат се може *еквивалентирати* запреминским магнетским, односно електричним струјама.

Да бисмо комплетирали извођење једначине расејања, осврнимо се још на израз којим се дефинише вектор електричног поља, дат са



$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega\mathbf{A}, \quad (2.12)$$

при чему први сабирак са десне стране једнакости представља допринос наелектрисања, док други сабирак представља допринос временски променљивих струја, вектору електричног поља. Имајући у виду Лоренцов услов, дат са

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega\mu\epsilon V, \quad (2.13)$$

израз (2.12) постаје

$$\mathbf{E} = -j\omega \left[ \mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\omega^2\mu\epsilon} \right] = -j\omega \left[ \mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\beta^2} \right]. \quad (2.14)$$

Из израза (2.14) се види да је вектор електричног поља у потпуности могуће описати само коришћењем магнетског вектор-потенцијала. С друге стране, магнетски вектор-потенцијал је функција вектора запреминске густине електричних струја,  $\mathbf{J}$ . Стога је и вектор електричног поља могуће описати само уз помоћ вектора  $\mathbf{J}$  интегралним изразом облика

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_v \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV, \quad (2.15)$$

при чему је са  $\mathbf{r}$  означен вектор положаја тачке у којој посматрамо вектор електричног поља, са  $\mathbf{r}'$  вектор положаја тачке у којој се налази извор поља, а са  $\overline{\mathbf{G}}$  дијадичка Гринава функција дата у облику тензора као

$$\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Коначно, израз за расејано електрично поље (2.15) можемо написати као

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \int_v \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') dV, \quad (2.17)$$

што уз дефиницију расејаног електричног поља, дату са

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{inc}, \quad (2.18)$$

даје једначину расејања

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) + \int_v \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') dV = \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) + j\omega\epsilon_0 \int_v \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV. \quad (2.19)$$

Имајући у виду да су фактори под интегралом са десне стране једнакости,  $(\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ , непознати (производ тзв. функције контраста објекта и вектора електричног поља унутар објекта), постаје јасно да је разматрани проблем нелинеаран. Да бисмо решили овакав проблем, потребно је на неки начин линеаризовати једначину расејања дату релацијом (2.19). Једна од могућности за линеаризацију проблема је да се директно решава једначина (2.17) по непознатим еквивалентним струјама. Друга могућност је примена Борнове апроксимације, којом се укупно поље у објекту замењује инцидентним, односно важи

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega\epsilon_0 \int_V \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}') dV. \quad (2.20)$$

У оба случаја занемарујемо састав објекта и сматрамо да просторна расподела струја или разлике пермитивности осликава облик објекта. Такве методе називамо квалитативним. Другим речима, уколико је потребно пронаћи и електрична својства објекта (квантитативна метода), проблем постаје нелинеаран.

### 2.3. Методе регуларизације

Осврнућемо се још и на дефиницију некоректно постављених проблема. Наиме, француски математичар Жак Адамар дефинисао је услове које један проблем треба да испуни да би био дефинисан као коректно постављен (енгл. *well-posed*). Потребно је да буду испуњена три услова, и то:

- 1) решење проблема мора постојати,
- 2) решење проблема мора бити јединствено и
- 3) решење проблема мора континуално зависити од улазних параметара.

Уколико било који од три наведена услова није испуњен, проблем се дефинише као некоректно постављен. У пракси се најчешће дешава да инверзан проблем нема задовољене последње две одредбе Адамарове дефиниције. Тачније, нејединственост решења може се јавити уколико се решава систем са много мање једначина него непознатих. Такође, има примера где је апсолутно немогуће пронаћи јединствено решење, чак и са произвољно много непознатих.

У циљу показивања поменуте нејединствености решења може се разматрати електростатичко поље у аналитичком примеру са слике 2.2. У првом случају разматрамо тачкасто наелектрисање  $Q_1$ , а у другом исто тачкасто наелектрисање али окружено двема равномерно наелектрисаним сферним љускама укупне количине наелектрисања  $-Q_2$  и  $Q_2$ , респективно.



Слика 2.2 - Уз аналитички пример електростатичког поља.

Посматрамо тачку дефинисану вектором положаја  $\mathbf{r}$ , која се налази изван сферних љуски. На том месту, интензитет електричног поља услед усамљеног тачкастог наелектрисања (слика 2.2а) дат је као

$$E'(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.21)$$

Имајући у виду Гаусов закон, интензитет електричног поља система са слике 2.2б дат је са

$$E''(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{-Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.22)$$

Другим речима, имајући у виду релације (2.21) и (2.22), јасно је да није могуће разликовати електростатичка поља у ова два случаја. Самим тим, уколико се решава инверзан проблем када је на основу информације о интензитету електричног поља потребно пронаћи одговарајуће изворе зрачења, сусрећемо се са проблемом нејединствености траженог решења.

Трећу одредбу Адамарове дефиниције не испуњавају проблеми код којих долази до скоковитих промена у решењу услед малих промена у улазним подацима. Превелика осетљивост решења последица је и чињенице да се у матрици система налази одређен број колона/редова који су линеарно потпуно или приближно међусобно зависни, због чега системска матрица може бити сингуларна. Параметар системске матрице који се у литератури користи као

показатељ сингуларности познат је као *условљеност матрице* (енгл. *matrix condition number*) [117]. Егзактан начин рачунања овог параметра описан је у одељку 2.4.1.

Интересантно је напоменути да је Адамар у своје време сматрао да су некоректно постављени проблеми “вештачки” и да не описују реалне физичке системе. Годинама касније испоставило се да није био у праву и да постоји велики број проблема у науци који се могу представити као некоректно постављени.

За решавање некоректно постављених проблема користе се тзв. *регуларизационе методе* [80], [94]. Посматрајмо линеаран проблем облика

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \quad (2.23)$$

при чему је са  $\mathbf{y}$  означен вектор чији су чланови познати подаци, са  $\mathbf{x}$  је означен непознати вектор који је потребно пронаћи, док је са  $\mathbf{A}$  обележен оператор који пресликава један скуп у други. Поступак регуларизације подразумева коришћење тзв. *норми*. Наиме, у математици, норма реда  $p$  се дефинише као

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \quad (2.24)$$

при чему вектор  $\mathbf{x}$  има укупно  $n$  чланова. Ред норме,  $p$ , може бити било који реалан број. Редови норме који се најчешће срећу су нулти, први, други и тзв.  $p$ -норма уз услов  $0 < p < 1$ . Норма нултог реда се користи у облику  $\|\mathbf{x}\|_0$  и дефинише укупан број ненултих чланова у вектору  $\mathbf{x}$ . Норма првог реда еквивалентна је апсолутној вредности вектора, односно

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \quad (2.25)$$

док норма другог реда представља познату Еуклидску метрику у облику

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (2.26)$$

Поступак регуларизације подразумева минимизацију остатка (резидуала) релације (2.23), уз додатни услов који фаворизује одређени облик вектора решења. За минимизацију остатка по правилу бирамо квадрат норме другог реда, односно

$$\min \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_2^2. \quad (2.27)$$

Додатни услов бира се на основу претходног знања о проблему који се решава. Коначан облик функције која се минимизира је стога дат у облику

$$\min \left\{ \|y - Ax\|_2^2 + \gamma \|x\|_p \right\}, \quad (2.28)$$

при чему је са  $\gamma$  означен тзв. *регуларизациони параметар* који има улогу да балансира између тачности решења (израженог преко квадрата друге норме остатка) и мере у којој је решење ретко. Овај баланс, односно вредност параметра  $\gamma$ , бира корисник. Уколико се узме да важи  $\gamma = 0$ , нема регуларизације и ослањамо се само на минимизацију квадратног растојања тренутне вредности вектора  $x$  од тачног решења. С друге стране, уколико се у релацији (2.28) одабере велика вредност регуларизационог параметра, потенцира се искључиво реткост решења без обзира на тачност. Из наведеног је јасно да је регуларизациони параметар  $\gamma$  потребно одабрати на оптималан начин, тако да се постигне компромис у задовољавању оба услова из релације (2.28).

У овом раду проблеми које решавамо спадају у класу ретких сигнала. За неки вектор или матрицу кажемо да су ретки уколико је само мали број елемената тог вектора/матрице различит од нуле.

Имајући у виду претходни коментар о норми нултог реда, логично би било одабрати регуларизацију у облику

$$\min \left\{ \|y - Ax\|_2^2 + \gamma \|x\|_0 \right\}. \quad (2.29)$$

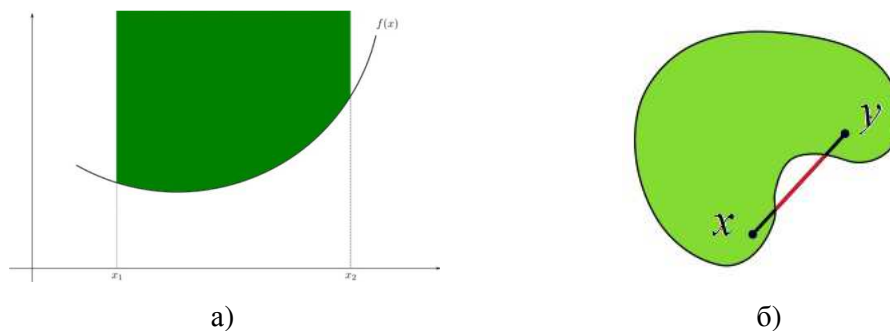
Међутим, показује се да је овако дефинисан проблем у комбинаторном смислу јако тешко решити [92]. Наиме, потребно је пронаћи глобални минимум функције стохастичког облика, те је оптимизацију потребно вршити са веома малим кораком и у великом броју тачака. Из наведених разлога, оптимизација траје веома дуго и стога је облик регуларизације дат са (2.29) у пракси тешко применљив.

У примеру са слике 2.2а, у случају усамљеног тачкастог наелектрисања норма првог реда била би једнака  $|Q_1|$ . Са друге стране, у случају система са слике 2.2б норма првог реда је  $|Q_1| + 2|Q_2|$ . Као што ће касније бити показано, у случају када се зна да је број извора мали (што одговара усамљеном тачкастом наелектрисању у овом примеру) потребно је одабрати оно решење које има минималну  $l_1$  норму у односу на остала решења.

Уместо (2.29) може се користити облик који такође фаворизује мали број ненултих чланова решења, дат са

$$\min \left\{ \|y - Ax\|_2^2 + \gamma \|x\|_1 \right\}. \quad (2.30)$$

Проблем дефинисан у облику (2.30) је конвексан и може се релативно једноставно решити конвексним програмирањем. У овој тези ћемо користити управо овај вид регуларизације. Конвексним програмирањем могуће је извршити минимизацију/максимизацију конвексне функције над конвексним скупом уз могућност дефинисања додатних ограничења. Конвексна функција је она функција за коју важи да унутар површи која је дефинисана изнад њене криве на графику, било које две тачке могу да се споје правом линијом (слика 2.3а). Аналогна дефиниција важи и за конвексан скуп (слика 2.3б). Захваљујући конвексности, локални минимум уједно је и глобални, а метода је брза и поуздана чак и у случају великог броја ограничења и непознатих, посебно уколико се располаже и неким *a priori* информацијама.



Слика 2.3 - Илустрација а) конвексне функције, и б) неконвексног скупа.

Један од најпознатијих облика регуларизације је тзв. регуларизација Тихонова дефинисана као

$$\min \left\{ \|y - Ax\|_2^2 + \gamma \|x\|_2^2 \right\}. \quad (2.31)$$

Оваква регуларизација спада у групу *квадратних метода* које су пронашле примену при решавању разних практичних проблема, јер се решење овако дефинисаног проблема може добити у затвореном облику. Недостатак регуларизације Тихонова је то што онемогућава реконструкцију оштрих ивица

објекта, односно присутан је ефекат омекшавања ивица. Такође, оваквом регуларизацијом није могуће извршити реконструкцију блиско позиционираних објеката.

Најређе коришћен вид регуларизације је  $p$ -регуларизација дата као

$$\min \left\{ \|y - Ax\|_2^2 + \gamma \|x\|_p^p \right\}, \quad (2.32)$$

уз услов  $0 < p < 1$ . Стриктно гледано, норма у склопу другог сабирка у (2.32) означава се као *квази-норма*, јер не задовољава тзв. *неједнакост троугла* (збир дужина било које две странице троугла мора бити већи од дужине треће странице). Овако дефинисан проблем је неконвексан и самим тим веома комплексан за решавање [105]. Функција коју је потребно оптимизовати (тј. минимизовати) има више локалних минимума, због чега оптимизација често даје погрешно решење у виду локалног минимума.

Поред релација (2.29)–(2.32), при решавању регуларизационих проблема могуће је имплементирати и технику сингуларне декомпозиције (енгл. *singular value decomposition*, SVD). Ова метода је често коришћена при инверзији сингуларних матрица, обраде сигнала и статистике, а детаљније је приказана у одељку 2.4.1. Квадратна метода, позната као *truncated singular value decomposition*, једна је од популарних регуларизационих метода која подразумева одсецање оних сингуларних вредности које су испод унапред дефинисаног прага (детаљније у одељку 2.4.2). Из групе неквадратних метода регуларизације, најкоришћеније су метода тоталне варијације и максималне ентропије.

## 2.4. Примери метода за решавање једначине расејања

У овом одељку, уз помоћ неколико илустративних примера, биће приказане три методе често коришћене за решавање проблема инверзног расејања (у случају конвексних објеката): *truncated singular value decomposition* [61], *linear sampling* [64] и стандардна обрада ретких сигнала [14].

Пре приказивања репрезентативних метода, треба напоменути да је у свим разматраним случајевима решавана релација (2.17), дискретизована МоМ техником. Такође, решење је тражено на, у општем случају, правоугаоној мрежи тачака у оквиру које се претпоставља да се тражени објекат налази. Као резултат,

добијен је систем *линеарних* једначина који је потребно решити коришћењем неке од предложене три методе. Због много веће захтевности по питању прецизности (у односу на анализу објеката једноставног облика попречног пресека), акценат је стављен на анализу дводимензионалних објеката комплексног (конкавног) попречног пресека, са израженим ефектом вишеструког расејања. Такође, подацима добијеним мерењем на антенском низу, није додаван шум.

У циљу бољег разумевања TSVD и LSM метода, прво ће бити показане основе технике сингуларне декомпозиције.

### 2.4.1. Сингуларна декомпозиција

Посматрајмо правоугаону матрицу  $\mathbf{A}$  произвољних димензија  $m \times n$  чији су чланови комплексни бројеви, тј.  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Сингуларна декомпозиција матрице  $\mathbf{A}$  дата је у форми факторизације као

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (2.33)$$

при чему индекс  $^H$  означава операцију конјуговања и транспоновања матрице/вектора, са  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  су означене унитарне матрице за које важи  $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  је јединична дијагонална матрица), док је са  $\mathbf{\Sigma}$  обележена дијагонална матрица димензија  $m \times n$  чији су чланови реални бројеви, тј.  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Квадратне матрице  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  и правоугаону матрицу  $\mathbf{\Sigma}$  можемо написати у облику

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_m], \quad (2.34)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n], \quad (2.35)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_p & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$



Дијагонални чланови матрице  $\Sigma$  означавају се као *сингуларне вредности* матрице  $\mathbf{A}$ , већи су или једнаки нули и поређани су по опадајућем редоследу, тј.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ , при чему је  $p = \min(m, n)$ . Параметар матрице  $\mathbf{A}$  познат као условљеност матрице дефинише се као однос прве и последње сингуларне вредности, тј. као  $\sigma_1 / \sigma_p$ .

Колоне матрица  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  из (2.34) и (2.35) називају се *леви (десни) сингуларни вектори* матрице  $\mathbf{A}$ . Матрицу  $\mathbf{A}$  можемо написати и у развијеном облику као

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^H. \quad (2.37)$$

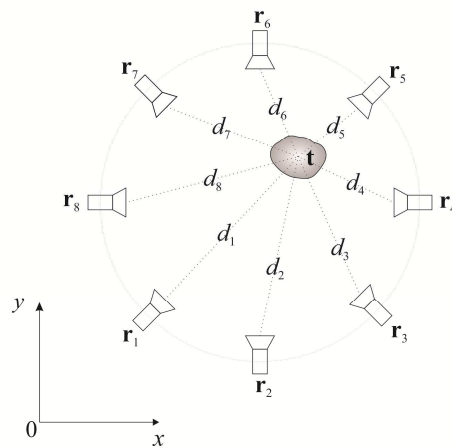
Треба напоменути да је матрица  $\Sigma$  једнозначно одређена матрицом  $\mathbf{A}$ , што није обавезно случај и са матрицама  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ .

Постоје две битне карактеристике сингуларне декомпозиције:

- сингуларне вредности ( $\sigma_i$ ) постепено опадају ка нули; повећавање димензија матрице  $\mathbf{A}$  доводи до повећања броја малих сингуларних вредности,
- елементи левог и десног сингуларног вектора ( $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$ ) чешће мењају знак са порастом индекса  $i$ , односно са смањењем вредности  $\sigma_i$ .

#### 2.4.2. *Truncated singular value decomposition* метода

Посматрајмо сценарио приказан на слици 2.4.



Слика 2.4 - Уз илустрацију *truncated singular value decomposition* методе.

У питању је тачкасти расејач у тачки одређеној вектором положаја  $\mathbf{t}$ , окружен антенским низом чији су елементи позиционирани у тачкама датим векторима положаја  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  (у примеру са слике 2.4,  $M = 8$ ). Растојања расејача од сваке антене понаособ означена су са  $d_i$ . Вектор примљених сигнала, у случају тачкастог расејача, приближно је дат као

$$\begin{bmatrix} E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t} - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t} - \mathbf{r}_1|}} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t} - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t} - \mathbf{r}_1|}} \\ \vdots \\ \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t} - \mathbf{r}_M|)}{\sqrt{|\mathbf{t} - \mathbf{r}_M|}} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t} - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t} - \mathbf{r}_1|}} \end{bmatrix} \sigma_p, \quad (2.38)$$

при чему је са  $\sigma_p$  означен коефицијент рефлексије тачкастог расејача. Како позиција расејача није позната, потребно је дефинисати мрежу тачака у којима ће бити испитивана његова присутност. Ова мрежа састоји се од тачака са вектором положаја  $\mathbf{t}_i$ , при чему важи  $i = 1, \dots, L$ , где је са  $L$  означен укупан број тачака у дефинисаној мрежи. Уколико у све тачке претраживања, у којима се тачкасти објекат не налази, додамо по један тачкасти расејач нултог коефицијента рефлексије, релацију (2.38) можемо да напишемо као

$$\begin{bmatrix} E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|}} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|}} \dots \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_1|}} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_1|}} \\ \vdots \\ \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|}} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|}} \dots \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_M|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_M|}} \frac{\exp(-j\beta|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_1|)}{\sqrt{|\mathbf{t}_L - \mathbf{r}_1|}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_L \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

при чему је само један члан у последњој матрици са десне стране (2.39) различит од нуле. Релацију (2.39) можемо у скраћеном облику написати као

$$\mathbf{g} = \mathbf{L}\mathbf{f}. \quad (2.40)$$

У општем случају, објекат који се анализира није тачкаст и његова позиција није позната. Стога су и коефицијенти рефлексије у вектору  $\mathbf{f}$  непознати. Коришћењем сингуларне декомпозиције из претходног одељка, добија се решење са најмањим квадратним одступањем као

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^P \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i}{\sigma_i}. \quad (2.41)$$

Међутим, оно је нумерички неповољно због преовладавајућег утицаја чланова са малим сингуларним вредностима који потичу од шума, због чега сума у (2.41) дивергира. Због тога се примењује метода *truncated singular value decomposition*, где се користи само првих  $K$  чланова суме, односно

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^K \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i}{\sigma_i}, \quad (2.42)$$

код којих су сингуларне вредности веће од задатог прага.

У даљем тексту ће на неколико примера бити демонстрирана TSVD метода. Разматрани су метални објекти издужени дуж  $z$ -осе, који у  $xOy$  равни имају попречни пресек у облику крста, односно петокраке звезде, као на слици 2.5.



Слика 2.5 - Попречни пресеци објеката разматраних у оквиру примера TSVD методе: а) крст и б) петокрака звезда.

Такође, биће анализирани две величине објеката са слике 2.5 (такве да минималан пречник круга потребан да обухвати објекат буде једнак  $1,4\lambda$ , односно  $2,2\lambda$  за учестаност од 2 GHz), као и две поларизације инцидентног електромагнетског таласа (ТМ и ТЕ поларизација).

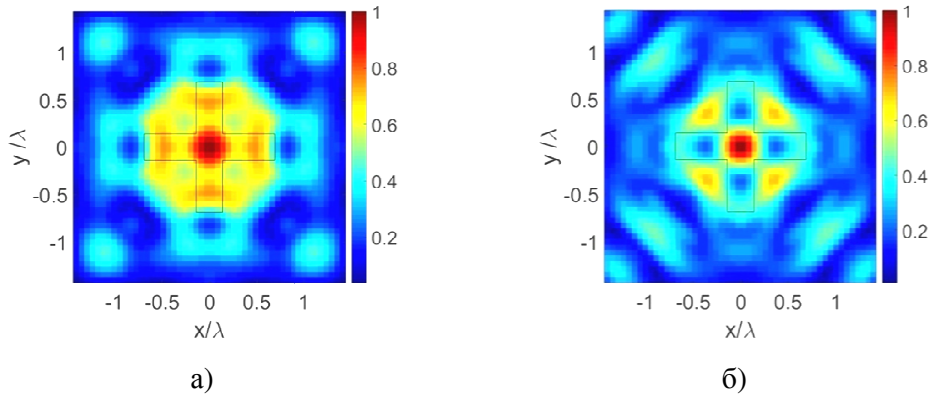
На слици 2.6 дати су резултати TSVD методе за мањи објекат са попречним пресеком у облику крста, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

На слици 2.7 дати су резултати TSVD методе за већи објекат са попречним пресеком у облику крста, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

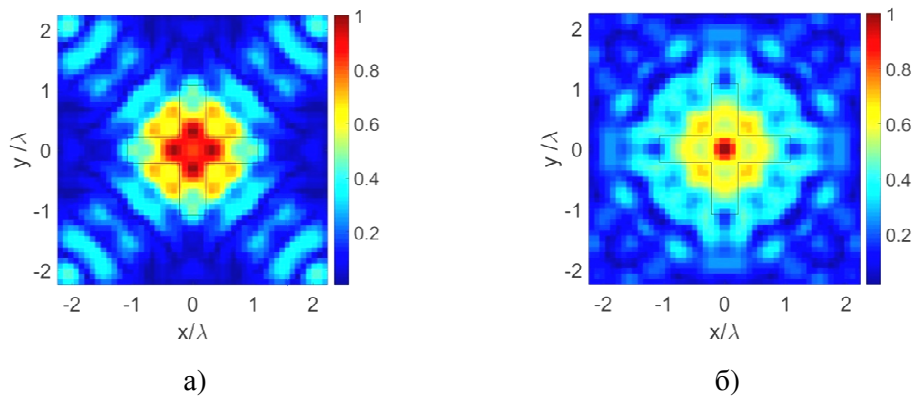
На слици 2.8 дати су резултати TSVD методе за мањи објекат са попречним пресеком у облику звезде, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

На слици 2.9 дати су резултати TSVD методе за већи објекат са попречним пресеком у облику звезде, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

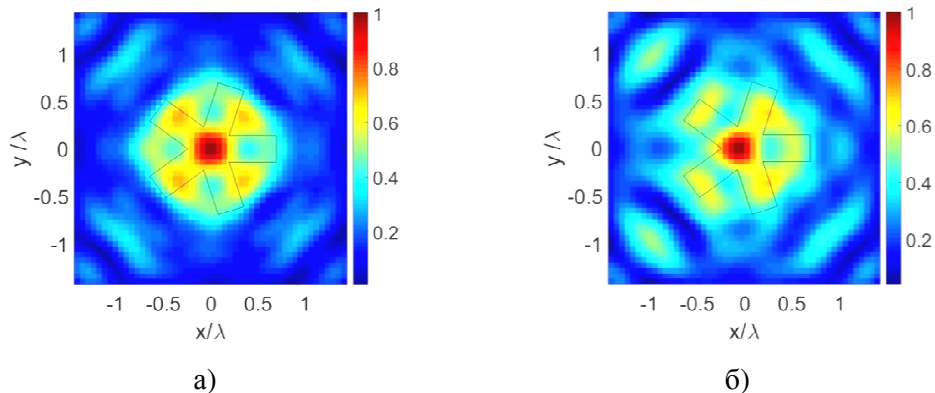
Као што се са слика 2.6–2.9 види, без обзира на величину, облик и поларизацију инцидентног таласа, TSVD метода не даје добре резултате када су у питању објекти конкавног облика попречног пресека.



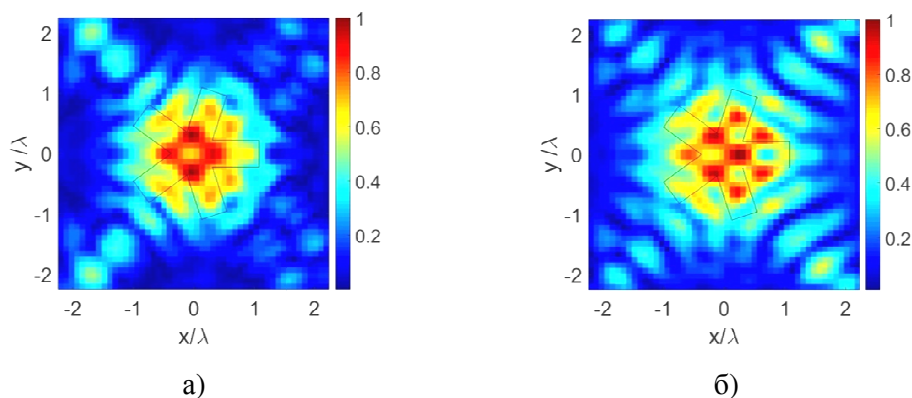
Слика 2.6 - Резултати TSVD методе за случај мањег металног објекта са попречним пресеком у облику крста: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.7 - Резултати TSVD методе за случај већег металног објекта са попречним пресеком у облику крста: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.8 - Резултати TSVD методе за случај мањег металног објекта са попречним пресеком у облику звезде: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.9 - Резултати TSVD методе за случај већег металног објекта са попречним пресеком у облику звезде: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.

### 2.4.3. *Linear sampling* метода

*Linear sampling* метода се такође ослања на сингуларну декомпозицију, спада у групу квалитативних МФС метода и веома је често коришћена у литератури за потребе локализације металних и диелектричних објеката, као и утврђивања њихових облика.

Посматрајмо поново сценарио са слике 2.4. Матрицу у којој су смештена сва мерења (мултистатичка матрица), можемо приближно дефинисати са

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma \exp(-j\beta(d_1 + d_1))}{\sqrt{d_1}\sqrt{d_1}} & \dots & \frac{\sigma \exp(-j\beta(d_1 + d_M))}{\sqrt{d_1}\sqrt{d_M}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma \exp(-j\beta(d_M + d_1))}{\sqrt{d_M}\sqrt{d_1}} & \dots & \frac{\sigma \exp(-j\beta(d_M + d_M))}{\sqrt{d_M}\sqrt{d_M}} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

при чему је са  $\sigma$  означен коефицијент рефлексије расејача. Такође, вектор одзива антенског низа на тачкасти расејач у тачки  $\mathbf{t}$  дат је изразом

$$\mathbf{g} = \left[ \frac{\exp(-j\beta d_1)}{\sqrt{d_1}} \dots \frac{\exp(-j\beta d_M)}{\sqrt{d_M}} \right]^T. \quad (2.44)$$

Уколико проблем опет представимо у облику операторске релације (2.40), њеним решавањем добијамо *фокусирано* решење у тачки  $\mathbf{t}$ . Као и у претходном примеру, позиција расејача није позната, те дефинишемо мрежу тачака (чији су вектори положаја дефинисани векторима  $\mathbf{t}_i$ ), што значи да је потребно решити систем једначина дат са

$$\mathbf{L}\mathbf{f}(\mathbf{t}_i) = \mathbf{g}(\mathbf{t}_i). \quad (2.45)$$

С обзиром на то да се тражени расејач представља као сума доприноса тачкастих расејача, *linear sampling* метода сврстава се у групу апроксимативних метода.

Овако добијени систем једначина може се решити сингуларном декомпозицијом. Треба имати у виду да је овако дефинисан проблем некоректно постављен, те је потребно увести неки вид регуларизације у циљу његовог решавања. У пракси се најчешће користи регуларизација Тихонова, а решење се добија у облику

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}_n) = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \alpha^2} \langle \mathbf{g}(\mathbf{t}_n), \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i, \quad (2.46)$$

где је са  $\alpha$  обележен регуларизациони коефицијент за чију вредност усвајамо  $\alpha = 0,001\sigma_1$ . Уколико разматрана тачка у мрежи,  $\mathbf{t}_i$ , не припада објекту, решење дивергира. Стога,  $i$ -ти пиксел слике рачунамо као

$$I(\mathbf{t}_i) = \frac{1}{\|\mathbf{f}(\mathbf{t}_i)\|}. \quad (2.47)$$

У даљем тексту ће бити приказано неколико примера решених *linear sampling* методом. Тачније, биће разматран исти сет објеката као у одељку 2.4.2, тј. исти

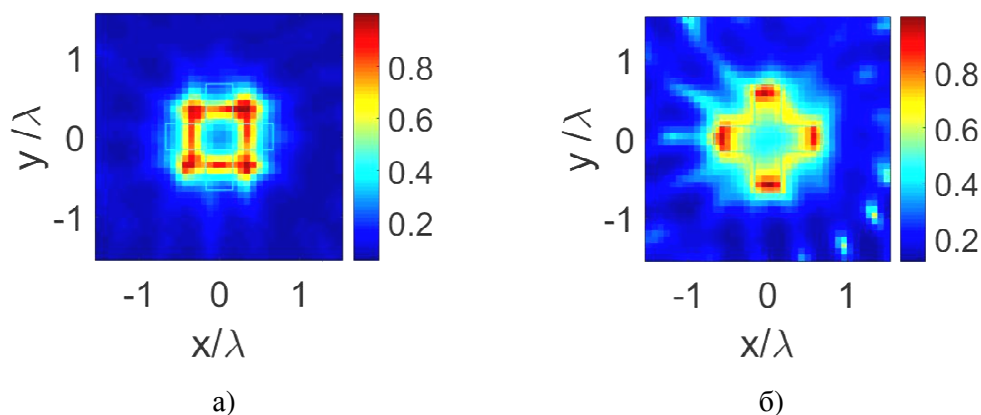
облици и димензије објеката, као и поларизације инцидентног електромагнетског таласа.

На слици 2.10 дати су резултати *linear sampling* методе за мањи објекат са попречним пресеком у облику крста, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

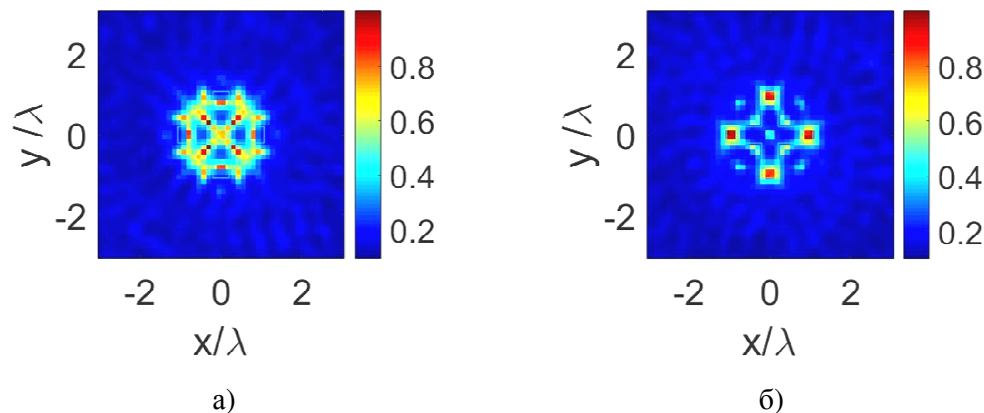
На слици 2.11 дати су резултати *linear sampling* методе за већи објекат са попречним пресеком у облику крста, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

На слици 2.12 дати су резултати *linear sampling* методе за мањи објекат са попречним пресеком у облику звезде, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

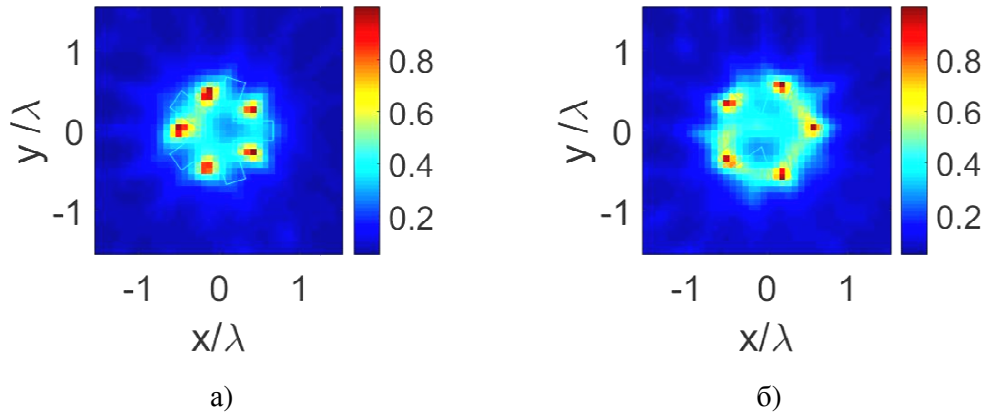
На слици 2.13 дати су резултати *linear sampling* методе за већи објекат са попречним пресеком у облику звезде, за случај ТЕ и ТМ поларизације.



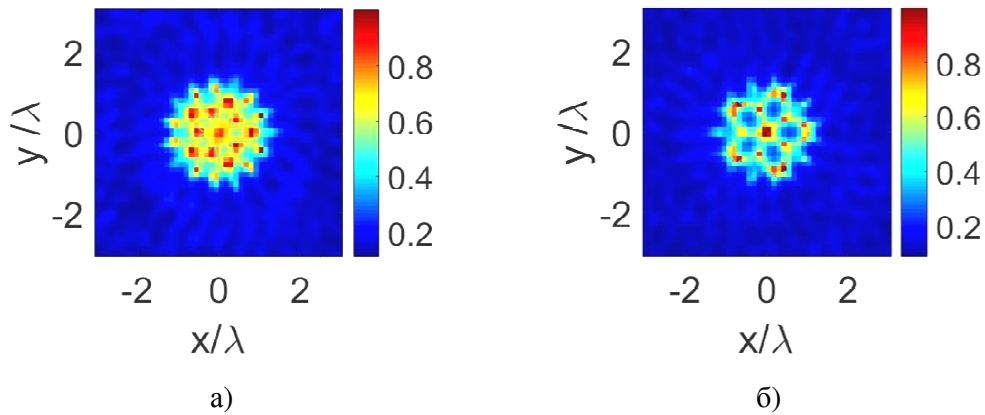
Слика 2.10 - Резултати *linear sampling* методе за случај мањег металног објекта са попречним пресеком у облику крста: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.11 - Резултати *linear sampling* методе за случај већег металног објекта са попречним пресеком у облику крста: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.12 - Резултати *linear sampling* методе за случај мањег металног објекта са попречним пресеком у облику звезде: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.13 - Резултати *linear sampling* методе за случај већег металног објекта са попречним пресеком у облику звезде: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.

Као што се са слика 2.10–2.13 може видети, *linear sampling* метода даје веома лоше резултате у случају ТЕ поларизације, без обзира на облик и величину разматраног објекта. Такође, ова метода даје веома грубе реконструкције у случају ТМ поларизације (иако су ови резултати знатно бољи од оних добијених у случају ТЕ поларизације).

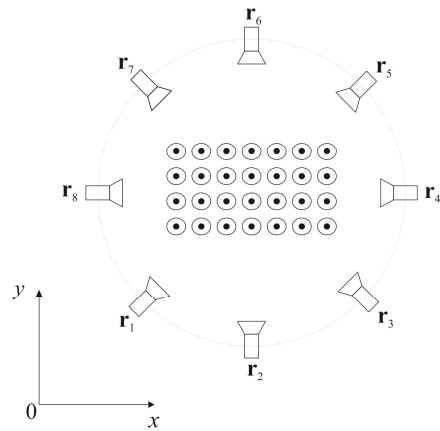
#### 2.4.4. Стандардна обрада ретких сигнала

У склопу последњег примера биће приказана метода која је по свом облику најсличнија овде предложеном алгоритму заснованом на мултиполном развоју.



Наиме, *стандардна* обрада ретких сигнала ослања се на чињеницу да је облик испитиваног објекта могуће одредити на основу расподеле електричних струја по/у објекту, као и на основу претпоставке да се та расподела струја може представити (уз адекватно одабрану функцију базиса) уз помоћ малог броја струјних импулса, тј. монопола. На овом месту, резултати добијени стандардном обрадом ретких сигнала биће приказани без улажења у детаље, који ће бити изложени у четвртом поглављу заједно са детаљима о предложеној, новој методи.

Као и у претходним примерима, разматра се кружни низ примопредајних антена, који окружује унапред дефинисан простор претраге, дискретизован мрежом тачака у којима су смештени струјни монополи. Скица овог сценарија за случај ТМ поларизације, односно за случај ТМ поларизованих струјних монопола, дата је на слици 2.14.



Слика 2.14 - Разматрана геометрија уз дефиницију стандардне обраде ретких сигнала.

По угледу на релацију (2.23), израз за расејано електрично поље може се дефинисати као

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{W}_0 \mathbf{c}_0, \quad (2.48)$$

при чему је са  $\mathbf{e}_s$  означен вектор мерених вредности расејаног електричног поља, дат као

$$\mathbf{e}_s = [E_1^s \ \dots \ E_M^s]^T, \quad (2.49)$$

са  $\mathbf{c}_0$  је означен вектор непознатих коефицијената, односно

$$\mathbf{c}_0 = [C_1^0 \ \cdots \ C_L^0]^T, \quad (2.50)$$

док је са  $\mathbf{W}_0$  обележена системска матрица дата у облику

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M1} & \cdots & u_{ML} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

при чему коефицијенти  $u_{ij}$  зависе од одабране поларизације инцидентног таласа, као

$$\begin{aligned} u_{ij}^{\text{TE}} &= \frac{1}{2} (H_{-1}^{(2)}(\beta R_{ij}) - H_1^{(2)}(\beta R_{ij})), \\ u_{ij}^{\text{TM}} &= H_0^{(2)}(\beta R_{ij}) = \frac{e^{-j\beta R_{ij}}}{\sqrt{R_{ij}}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Са  $R_{ij}$  обележено је растојање између одговарајуће антене (од укупно  $M$  антена) у низу и посматране тачке у простору претраге (од укупно  $L$  тачака). Детаљно извођење израза за одговарајуће компоненте електричног поља, на основу којих су добијене релације (2.52), дато је у четвртом поглављу. Даље, дефинишемо оптимизациони (тј. минимизациони) проблем у облику релације (2.30), као

$$\hat{\mathbf{c}} = \min_{\mathbf{c}} \left\{ \|\mathbf{e}_s - \mathbf{W}_0 \mathbf{c}_0\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{c}_0\|_1 \right\}. \quad (2.53)$$

Коментари о избору регуларизационог параметра  $\gamma$  дати су у четвртом поглављу.

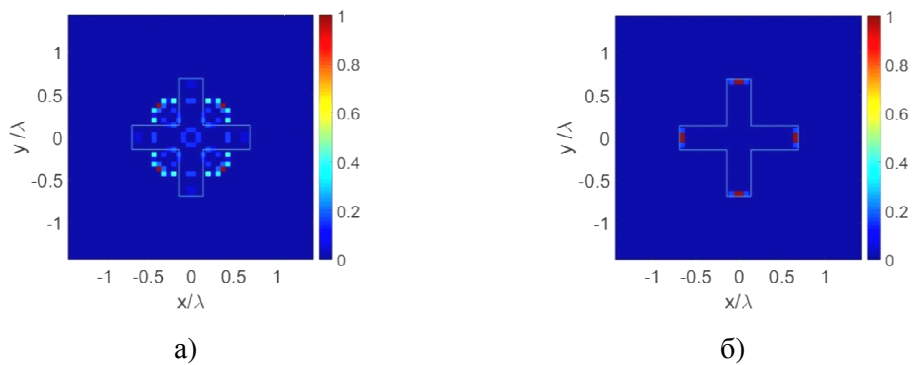
У циљу приказивања способности методе стандардне обраде ретких сигнала, анализиран је скуп објеката са слике 2.5, као и у претходна два примера.

На слици 2.15 дати су резултати стандардне обраде ретких сигнала за мањи објекат са попречним пресеком у облику крста, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

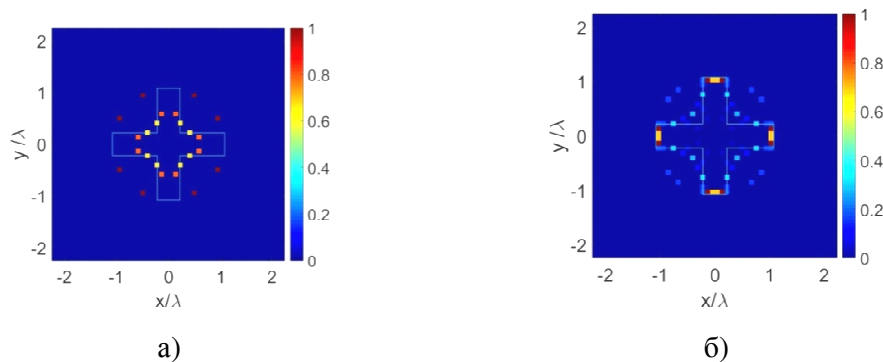
На слици 2.16 дати су резултати стандардне обраде ретких сигнала за већи објекат са попречним пресеком у облику крста, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

На слици 2.17 дати су резултати стандардне обраде ретких сигнала за мањи објекат са попречним пресеком у облику звезде, за случај ТЕ и ТМ поларизације.

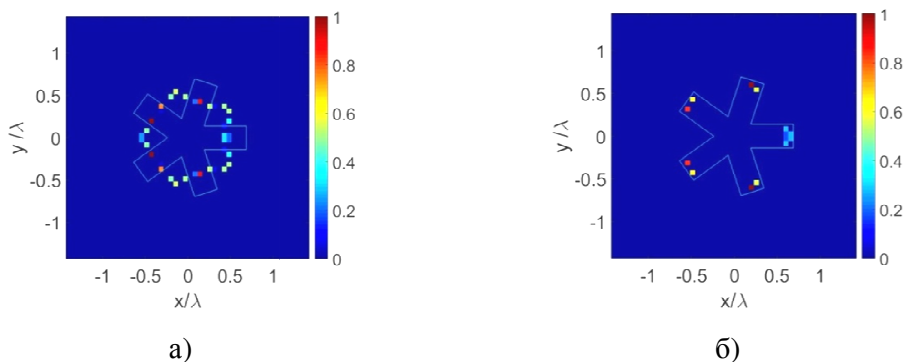
На слици 2.18 дати су резултати стандардне обраде ретких сигнала за већи објекат са попречним пресеком у облику звезде, за случај ТЕ и ТМ поларизације.



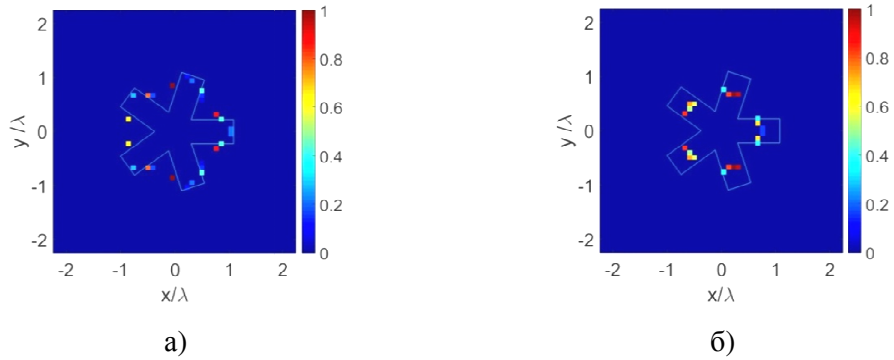
Слика 2.15 - Резултати стандардне обраде ретких сигнала за случај мањег металног објекта са попречним пресеком у облику крста: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.16 - Резултати стандардне обраде ретких сигнала за случај већег металног објекта са попречним пресеком у облику крста: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.17 - Резултати стандардне обраде ретких сигнала за случај мањег металног објекта са попречним пресеком у облику звезде: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.



Слика 2.18 - Резултати стандардне обраде ретких сигнала за случај већег металног објекта са попречним пресеком у облику звезде: а) ТЕ поларизација и б) ТМ поларизација.

Са слика 2.15–2.18 види се да стандардна обрада ретких сигнала може да се искористи у случају ТМ поларизације, али треба имати у виду се ни тада овом методом не могу добити верне реконструкције облика разматраног објекта. С друге стране, у случају ТЕ поларизације, у већини разматраних сценарија, резултати добијени стандардном обрадом ретких сигнала потпуно су неупотребљиви.

На основу резултата добијених у одељцима 2.4.2–2.4.4 јасно је да ниједна од најчешће коришћених МФС метода не даје резултате довољно добре за верну реконструкцију објекта конкавног попречног пресека. У овој чињеници управо лежи главни мотив за синтезу напредније нумеричке методе, која ће бити у стању да да добре резултате без обзира на комплексност анализираног објекта.

## **3. Развој по мултиполима**

### **3.1. Уводне напомене**

Развој по мултиполима је често коришћена метода у електромагнетици, погодна за приближно израчунавање вредности поља задате расподеле извора (струја и наелектрисања), и као таква представља један облик опште теореме еквиваленције електромагнетског поља. Наиме, показује се да је сваки систем извора, у хомогеној средини и локализован унутар неког домена, могуће заменити еквивалентним системом (у односу на спољашњост поменутог домена) у једној тачки, коришћењем тзв. *мултипола*. Ова метода применљива је како у електростатичком [125], тако и у електродинамичком облику [126].

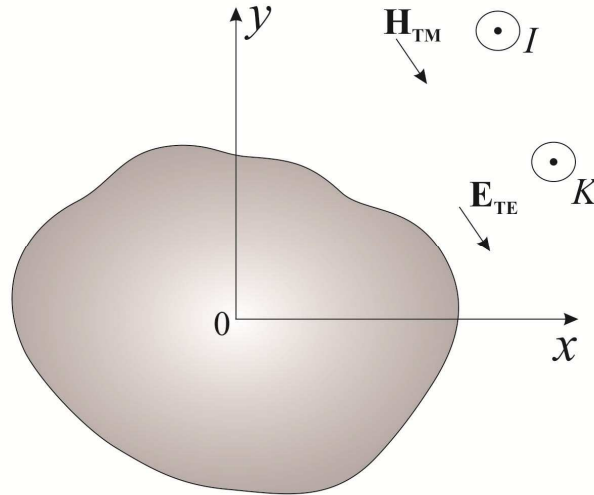
У даљем тексту, у одељку 3.2, биће приказан најпре једноставнији, дводимензионални облик развоја по мултиполима за две ортогоналне поларизације, и то за: трансверзално- магнетску и трансверзално- електричну. Потом ће у одељку 3.3 бити разматран тродимензионални случај.

### **3.2. Дводимензионални случај развоја по мултиполима**

#### **3.2.1. Случај ТМ поларизације**

На слици 3.1 је приказана геометрија дводимензионалног проблема која ће бити употребљена за демонстрацију развоја по мултиполима, за случај ТМ поларизације. Под појмом дводимензионалног проблема подразумева се геометрија која *не зависи* од  $z$ -осе цилиндричног координатног система. Разматра се објекат произвољног облика попречног пресека који је издужен по  $z$ -оси и

осветљен инцидентним, ТМ поларизованим електромагнетским таласом. Код ове врсте поларизације, вектор магнетског поља  $\mathbf{H}$  налази се у трансверзалној ( $x0y$ ) равни. Овај талас може се замислити као последица бесконачно дугачког, линијског влакна електричне струје,  $I$ .



Слика 3.1 - Илустрација инцидентног, ТМ и ТЕ поларизованог, електромагнетског таласа.

Извођење започињемо решавањем Хелмхолцове једначине у дводимензионалном координатном систему (односно, у редукованом цилиндричном координатном систему који не зависи од  $z$ -осе) [126], која је дата са

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \beta^2 \psi = 0. \quad (3.1)$$

У релацији (3.1) са  $\psi$  је обележена произвољна скаларна функција. Хелмхолцова једначина може се решити методом раздвајања променљивих, уколико скаларну функцију  $\psi$  дефинишемо као производ две под-функције од којих свака зависи само од једне координате редукованог цилиндричног координатног система, односно као

$$\psi = R(\rho)\Phi(\phi) = R\Phi. \quad (3.2)$$

Након уврштавања у (3.1) добијамо

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \beta^2 = 0, \quad (3.3)$$

односно

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \beta^2 \rho^2 = 0. \quad (3.4)$$

Прва два сабирка са леве стране релације (3.4) зависе само од по једне координате, а други сабирак можемо написати у облику

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - n^2 \Phi = 0, \quad (3.5)$$

при чему је са  $n$  означена константа.

Коначно, уврштавањем у (3.4) добијамо

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + n^2 R + \beta^2 \rho^2 R = 0. \quad (3.6)$$

Релације (3.5) и (3.6) су раздвојене по променљивама и свака од њих зависи само од једне координате редукованог цилиндричног координатног система. Решавањем ових раздвојених релација и налажењем производа њихових решења, долазимо до решења почетне Хелмхолцове једначине дате релацијом (3.1).

Релација (3.5) је хармонијска једначина чије решење је хармонијска функција коју ћемо означити са  $h(n\varphi)$ . С друге стране, релација (3.6) представља Беселову једначину реда  $n$ , чије ћемо решење означити са  $B_n(\beta_\rho \rho)$ . Према томе, решење Хелмхолцове једначине, у случају редукованог цилиндричног система, дато је са

$$\psi(\beta_\rho, n) = B_n(\beta_\rho \rho) h(n\varphi). \quad (3.7)$$

Напоменимо да би исто решење, за случај комплетног цилиндричног система (са укљученом зависношћу по  $z$ -оси), гласило

$$\psi(\beta_\rho, n, \beta_z) = B_n(\beta_\rho \rho) h(n\varphi) h(\beta_z z). \quad (3.8)$$

Решење хармонијске једначине (3.5) узећемо у експоненцијалном облику, уз напомену да  $n$  мора бити цео број, из разлога периодичности функције  $h(n\varphi)$  по променљивој  $\varphi$ . Што се тиче избора Беселове функције, уколико је потребно задовољити услов да поље нестане у бесконачно удаљеној тачки, потребно је

одабрати Ханкелову функцију друге врсте,  $H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho)$ . Наиме, овај тип Беселове функције једини задовољава поменути услов за реалну вредност параметра  $\beta_\rho$ , а користи се за моделовање таласа који се простиру ка споља (енгл. *outward-traveling waves*).

Конечно, решење Хелмхолцове једначине добијамо као

$$\psi(\beta_\rho, n) = H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho) e^{jn\phi}. \quad (3.9)$$

У [126] могу се пронаћи изрази за компоненте електромагнетског поља дате у цилиндричном координатном систему у случају ТМ поларизације:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z}, \\ E_\phi &= \frac{1}{j\omega\epsilon \rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z}, \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) \psi, \\ H_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \\ H_\phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

У случају када нема зависности по  $z$ -оси, ти изрази се свODE на

$$\begin{aligned} E_\rho &= 0, \\ E_\phi &= 0, \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \beta^2 \psi = -j\omega\mu\psi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

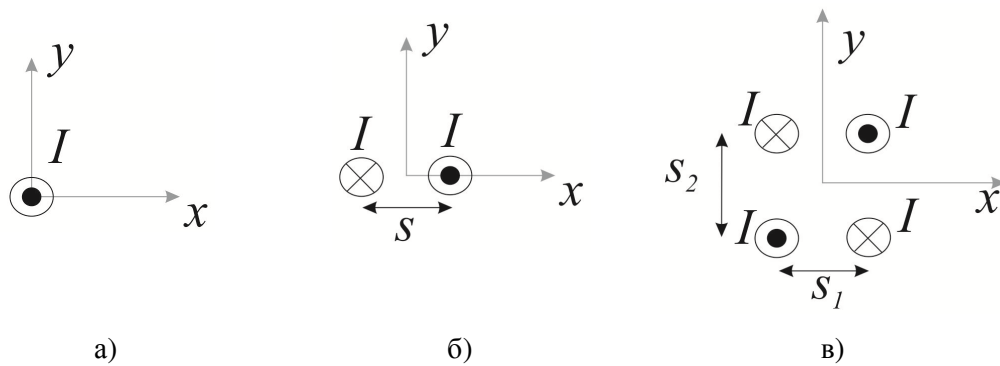
Електрично поље има само  $z$ -компоненту, која је директно пропорциона почетној скаларној функцији  $\psi$ . Даље, електрично поље можемо изразити преко суме свих редова Беселове функције (а самим тим и свих редова експонента у хармонијској функцији  $e^{jn\phi}$ ), као

$$E_z = \psi(\beta_\rho, n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho) e^{jn\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)) H_n^{(2)}(\beta_\rho \rho). \quad (3.12)$$



Сума из релације (3.12) има физичку интерпретацију у виду доприноса електричном пољу који потичу од више двовимензионалних извора у виду струјних монопола, дипола, квадрупола итд...

Посматрајмо стога бесконачно дугачко струјно влакно постављено у координатном почетку, у правцу  $z$ -осе, као што је приказано на слици 3.2а. Референтни смер струје поклапа се са позитивним смером  $z$ -осе, док је са  $I$  обележена ефективна вредност струје. Овакво струјно влакно ћемо у даљем тексту називати *струјни монопол*.



Слика 3.2 - Илустрација прва три члана двовимензионалног мултиполног развоја у случају ТМ поларизације: а) струјни монопол; б) струјни дипол; в) струјни квадрупол.

Из разлога симетрије, поље монопола не зависи од  $\phi$ -координате. Стога је магнетски вектор-потенцијал монопола  $A_z^1(\rho)$  облика [126]

$$A_z^1(\rho) = C\mu H_0^{(2)}(\beta\rho), \quad (3.13)$$

при чему константу  $C$  треба одредити.

На основу услова датог са

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint H_\phi \rho d\phi = I, \quad (3.14)$$

односно

$$2\pi\rho H_\phi = 2\pi\mu B_\phi = I, \quad (3.15)$$

и израза за  $\phi$ -компоненту магнетског поља,  $H_\phi$ , добијеног на основу дефиниције магнетског вектор-потенцијала,  $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z^1}{\partial \rho} = -C \frac{\partial}{\partial \rho} [H_0^{(2)}(\beta\rho)] \Big|_{\beta\rho \rightarrow 0} \rightarrow \frac{j2C}{\pi\rho}, \quad (3.16)$$

добијамо за константу  $C$  вредност

$$C = \frac{I}{4j}, \quad (3.17)$$

односно

$$A_z^1(\rho) = \frac{\mu I}{4j} H_0^{(2)}(\beta\rho). \quad (3.18)$$

Посматрајмо сада конфигурацију од два супротно оријентисана, бесконачно дугачка струјна влакна постављена дуж  $z$ -осе, на малом растојању ( $y$  односу на координату  $\rho$ )  $s$  по  $x$ -оси (слика 3.2б). Овакву конфигурацију називамо *струјни дипол*. Израз за  $z$ -компоненту магнетског вектор-потенцијала,  $A_z^2(\rho, \phi)$ , струјног дипола могуће је добити диференцирањем израза (3.18), као

$$A_z^2(\rho, \phi) = A_z^1\left(x - \frac{s}{2}, y\right) - A_z^1\left(x + \frac{s}{2}, y\right). \quad (3.19)$$

За мало растојање  $s$ , добијамо [126]

$$A_z^2(\rho, \phi) \Big|_{s \rightarrow 0} \rightarrow -s \frac{\partial A_z^1(\rho)}{\partial x} = -\frac{\mu I s}{4j} \frac{\partial}{\partial x} [H_0^{(2)}(\beta\rho)] = \frac{\mu \beta I s}{4j} H_1^{(2)}(\beta\rho) \cos \phi. \quad (3.20)$$

Примећујемо да је  $z$ -компонента магнетског вектор-потенцијала, за случај струјног дипола, изражена преко Ханкелове функције друге врсте *првог* реда, за разлику од струјног монопола где је фигурисала Ханкелова функција друге врсте *нултог* реда.

Аналогно можемо посматрати случај четири бесконачно дугачка струјна влакна постављена дуж  $z$ -осе, на малим растојањима  $s_1$  и  $s_2$  по  $x$ - и  $y$ -оси, респективно (слика 3.2в), односно случај *струјног квадрупла*. Сличним резонувањем за  $z$ -компоненту магнетског вектор-потенцијала,  $A_z^4(\rho, \phi)$ , добијамо

$$\begin{aligned} A_z^4(\rho, \phi) \Big|_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_2 \rightarrow 0}} \rightarrow s_1 s_2 \frac{\partial^2 A_z^1(\rho)}{\partial x \partial y} &= -s_2 \frac{\partial A_z^2(\rho, \phi)}{\partial y} = -\frac{\mu \beta I s_1 s_2}{4j} \frac{\partial}{\partial y} [H_1^{(2)}(\beta\rho) \cos \phi] = \\ &= \frac{\mu \beta^2 I s_1 s_2}{8j} H_2^{(2)}(\beta\rho) \sin 2\phi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

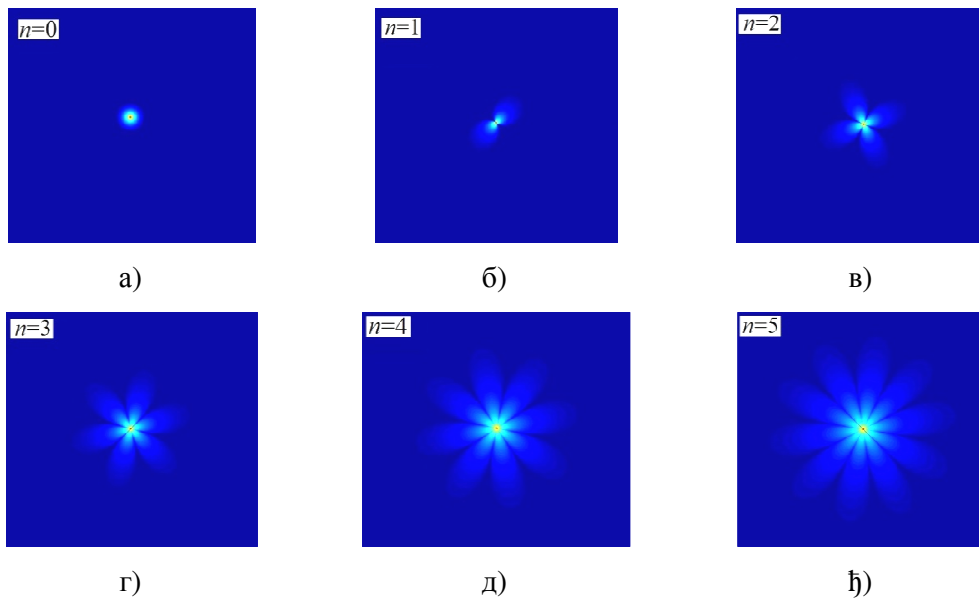
У случају струјног квадрупола,  $z$ -компонента магнетског вектор-потенцијала пропорционална је Ханкеловој функцији друге врсте *другог* реда.

Понављајући овај поступак долазимо до општег израза за  $z$ -компоненту магнетског вектор-потенцијала израженог преко бесконачне суме свих редова мултипола, као

$$A_z(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(\beta\rho)[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)], \quad (3.22)$$

при чему су са  $a_n$  и  $b_n$  означени коефицијенти у развоју. Овај израз је, наравно, исти као (3.12).

Ради стицања општег утиска о томе како изгледа  $z$ -компонента електричног поља за првих неколико хармоника у мултиполном развоју, на слици 3.3 скицирана је апсолутна вредност израза  $H_n^{(2)}(\beta\rho) \cdot [\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)]$  у зависности од производа  $\beta\rho$ , у логаритамској размери.



Слика 3.3 - Скица расподеле  $z$ -компоненте електричног поља за првих шест хармоника у дводимензионалном ТМ мултиполном развоју.

Са слике 3.3 може се приметити да број бочних листова у расподели електричног поља расте са повећањем реда мултипола.

### 3.2.2. Случај ТЕ поларизације

Посматрајмо сада случај када је објекат у координатном почетку, издужен по  $z$ -оси, осветљен инцидентним, ТЕ поларизованим електромагнетским таласом (слика 3.1). Аналогно ТМ случају, овај талас може се замислити као последица бесконачно дугачког, линијског влакна магнетске струје,  $K$ . Према томе, вектор електричног поља  $\mathbf{E}$  налази се искључиво у трансверзалној ( $x0y$ ) равни. Како су вектори магнетског и електричног поља практично заменили места у случајевима ТМ и ТЕ поларизације, јасно је да ова два случаја могу да се третирају као дуални.

Извођење је аналогно оном у случају ТМ поларизације, с тим да уместо релација (3.10), треба узети [126]

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \\
 E_\phi &= \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \\
 E_z &= 0, \\
 H_\rho &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z}, \\
 H_\phi &= \frac{1}{j\omega\mu\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z}, \\
 H_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) \psi,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

при чему за скаларну функцију  $\psi$  у релацији (3.23) узимамо  $z$ -компоненту електричног вектор-потенцијала,  $F_z$ . Начин формирања мултипола је идентичан оном у случају ТМ поларизације, осим што у коначним изразима фигурише вредност магнетске струје  $K$  уместо вредности електричне струје  $I$ .

Као општи израз за  $z$ -компоненту електричног вектор-потенцијала, израженог преко бесконачне суме свих редова мултипола, добијамо

$$\psi = F_z(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(\beta\rho) [a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)]. \tag{3.24}$$

Даље, израз за електрично поље добијамо као

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{i}_\rho + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{i}_\phi, \tag{3.25}$$

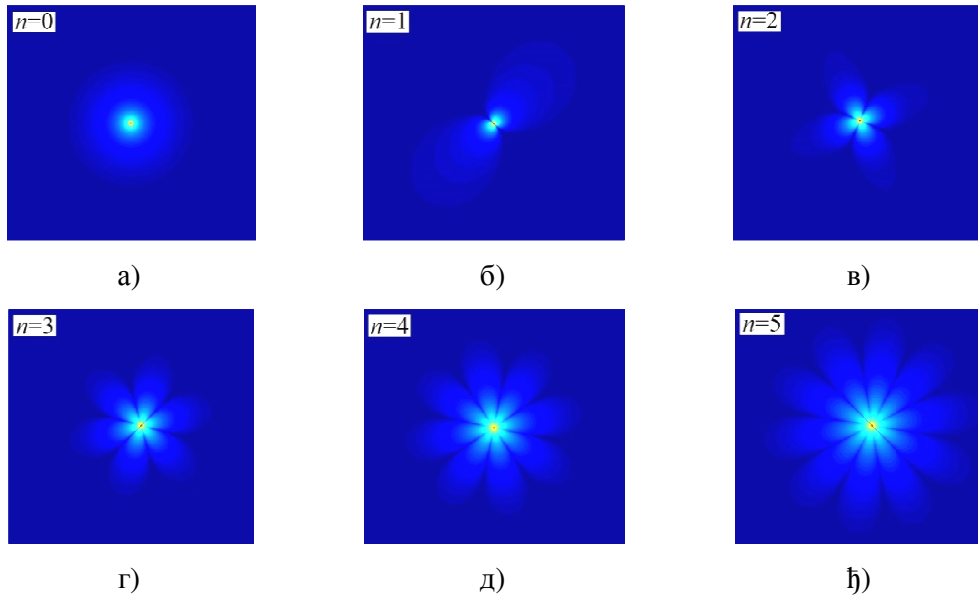
док су компоненте вектора електричног поља дате са

$$\begin{aligned}
 E_\rho(\rho, \varphi) &= -\frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(\beta\rho) \frac{\partial}{\partial\varphi} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)] = \\
 &= -\frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(\beta\rho) [-na_n \sin(n\varphi) + nb_n \cos(n\varphi)]
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

и

$$\begin{aligned}
 E_\varphi(\rho, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\rho} [H_n^{(2)}(\beta\rho)(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (H_{n-1}^{(2)}(\beta\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\beta\rho))(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)).
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Слично као и у одељку 3.2.1, скицирањем апсолутне вредности израза  $(H_{n-1}^{(2)}(\beta\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\beta\rho)) \cdot [\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)]$ , може се стећи општи утисак о расподели  $\varphi$ -компоненте електричног поља за првих неколико хармоника (слика 3.4). График је цртан у зависности од производа  $\beta\rho$ , у логаритамској размери.



Слика 3.4 - Скица расподеле  $\varphi$ -компоненте електричног поља за првих шест хармоника у дводимензионалном ТЕ мултиполном развоју.

Слике 3.4а–ђ веома су сличне сликама 3.3а–ђ.

### 3.3. Тродимензионални случај развоја по мултиполима

За разлику од претходна два случаја, када смо разматрали објекат издужен по  $z$ -оси, у тродимензионалном случају анализирамо објекат ограничен по свим координатама.

Као и у претходним извођењима, потребно је решити Хелмхолцову једначину, овог пута у сферном координатном систему [126], која је дата са

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \beta^2 \psi = 0. \quad (3.28)$$

Применом методе раздвајања променљивих, односно увођењем под-функција облика

$$\psi = R(r)H(\theta)\Phi(\varphi) = RH\Phi, \quad (3.29)$$

добивамо

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{H} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \beta^2 r^2 \sin^2 \theta = 0. \quad (3.30)$$

Претпоследњи члан са леве стране једнакости зависи само од  $\varphi$ -координате, па је могуће писати

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (3.31)$$

при чему је са  $m$  обележена константа. Сада релација (3.30) постаје

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{H \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \beta^2 r^2 = 0. \quad (3.32)$$

Средишња два члана са леве стране једнакости зависе само од  $\theta$ -координате, те је могуће увести смену

$$\frac{1}{H \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -n(n+1), \quad (3.33)$$

при чему је са  $n$  означена константа. Компактнији облик једнакости (3.33) дат је са

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] H = 0. \quad (3.34)$$

На крају, као коначан израз добијамо

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + [(\beta r)^2 - n(n+1)]R = 0. \quad (3.35)$$

Релације (3.31), (3.34) и (3.35) су сада са раздвојеним променљивама. Множењем њихових решења долази се до решења почетне Хелмхолцове једначине дате са (3.28).

Једначина (3.31) је хармонијска једнакост (слично као и у дводимензионалним случајевима), чија су решења хармонијске функције  $h(m\varphi)$ . Релација (3.34) представља Лежандрову једначину чија решења су придружени Лежандрови полиноми које ћемо означити са  $L_n^m(\cos \theta)$ . Релација (3.35) представља Беселову једначину, чија решења су *сферне* Беселове функције  $b_n(\beta r)$ , које се са регуларним Беселовим функцијама,  $B_n(\beta r)$ , могу повезати помоћу

$$b_n(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} B_{n+1/2}(\beta r). \quad (3.36)$$

Општи облик решења Хелмхолцове једначине је

$$\psi_{n,m}(r, \theta, \varphi) = b_n(\beta r) L_n^m(\cos \theta) h(m\varphi). \quad (3.37)$$

Аналогно дводимензионалним случајевима, решење хармонијске релације (3.31) узимамо у експоненцијалном облику,  $e^{im\varphi}$ , уз напомену да због периодичности функције  $h(m\varphi)$ , константа  $m$  мора бити целобројна. Придружени Лежандров полином,  $L_n^m(\cos \theta)$  у (3.37), бирамо да буде *прве врсте*,  $P_n^m(\cos \theta)$ , уз целобројну константу  $n$ . На овај начин избегава се сингуларност полинома  $L_n^m(\cos \theta)$  у опсегу  $\theta \in [0, \pi]$ . Сферичну Беселову функцију,  $b_n(\beta r)$ , бирамо на исти начин као и у дводимензионалним случајевима, као сферичну Ханкелову функцију друге врсте, тј.  $h_n^{(2)}(\beta r)$  уколико поље нестаје у бесконачно удаљеној тачки.

Коначан облик решења Хелмхолцове једначине, који одговара моделовању таласа који се простиру ка споља, добијамо у облику

$$\psi_{n,m}(r, \theta, \varphi) = h_n^{(2)}(\beta r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (3.38)$$

Придружени Лежандрови полиноми прве врсте, за првих неколико вредности  $n$  и  $m$ , дати су са

$$\begin{aligned}
P_0^0(\cos \theta) &= 1, \\
P_1^0(\cos \theta) &= \cos \theta, \\
P_1^1(\cos \theta) &= -\sin \theta, \\
P_2^0(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1), \\
P_2^1(\cos \theta) &= -3\sin \theta \cos \theta, \\
P_2^2(\cos \theta) &= 3\sin^2\theta, \\
P_3^0(\cos \theta) &= \frac{1}{2}\cos \theta(5\cos^2\theta - 3), \\
P_3^1(\cos \theta) &= -\frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\sin \theta, \\
P_3^2(\cos \theta) &= 15\cos \theta \sin^2\theta, \\
P_3^3(\cos \theta) &= -15\sin^3\theta.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Алтернативни приступ мултиполном развоју који се често среће у литератури, је тзв. развој по *сферним хармоницима*. Наиме, ако у поступку раздвајања променљивих у тродимензионалном случају, у релацији (3.29), групишемо зависности од углова  $\theta$  и  $\varphi$  у једну под-функцију, као

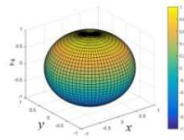
$$\psi = R(r)Y(\theta, \varphi), \tag{3.40}$$

за решење Хелмхолцове једначине, по променљивој  $r$ , добијамо сферну Беселову функцију,  $b_n(\beta r)$ , као и у случају (3.35). С друге стране, решење по просторном углу  $(\theta, \varphi)$  добијамо у облику сферних хармоника, дефинисаних општом релацијом [127]

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi}. \tag{3.41}$$

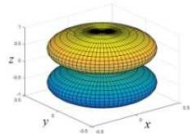
На слици 3.5 су приказане апсолутне вредности реалних делова првих неколико сферних хармоника, заједно са вредностима  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ .





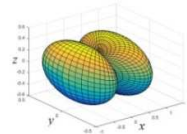
$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

а)



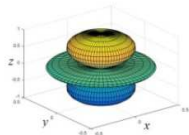
$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

б)



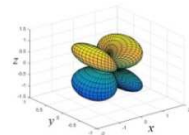
$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{j\varphi}$$

в)



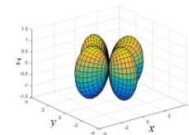
$$Y_2^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2 \theta - 1)$$

г)



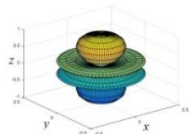
$$Y_2^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{5}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{j\varphi}$$

д)



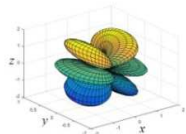
$$Y_2^2(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{j2\varphi}$$

е)



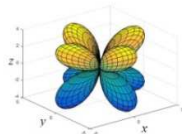
$$Y_3^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5\cos^3 \theta - 3\cos \theta)$$

е)



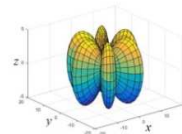
$$Y_3^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5\cos^2 \theta - 1) e^{j\varphi}$$

ж)



$$Y_3^2(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{j2\varphi}$$

з)



$$Y_3^3(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{j3\varphi}$$

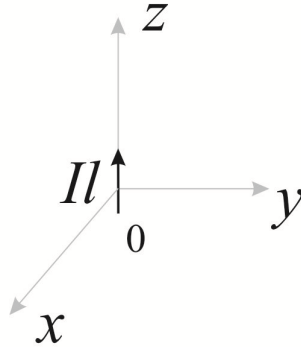
и)

Слика 3.5 - Скице сферних хармоника прва четири реда.

### 3.3.1. Тродимензионални случај са ТМ поларизованим струјним елементима

Попут дводимензионалног случаја, поље у сферном координатном систему може да се припише зрачењу мултипола. Посматрајмо, стога, геометрију са слике 3.6. У питању је кратак струјни елемент (*електрични монопол*) момента  $Il$ ,

постављен у координатном почетку, дуж  $z$ -осе, у медијуму пермитивности  $\epsilon$ , пермеабилности  $\mu$ , без губитака [126].



Слика 3.6 - Илустрација електричног монопола.

На основу диференцијалне једначине

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3.42)$$

слиди да је опште решење за магнетски вектор-потенцијал у хомогеној средини

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{Idl}{r} e^{-j\beta r}. \quad (3.43)$$

У случају монопола са слике 3.6, магнетски вектор-потенцијал је

$$A_z = \frac{\mu Il}{4\pi r} e^{-j\beta r}. \quad (3.44)$$

Релацију (3.44) можемо написати у облику који одговара релацији (3.38), као

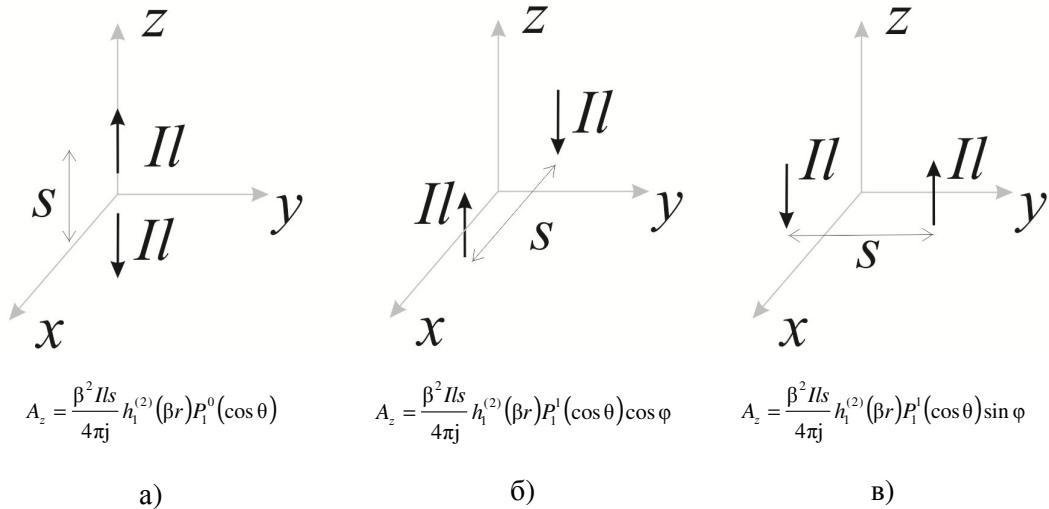
$$A_z = \frac{\mu \beta Il}{4\pi j} h_0^{(2)}(\beta r) P_0^0(\cos\theta), \quad (3.45)$$

имајући у виду (3.39), као и

$$h_0^{(2)}(\beta r) = -\frac{e^{-j\beta r}}{j\beta r}. \quad (3.46)$$

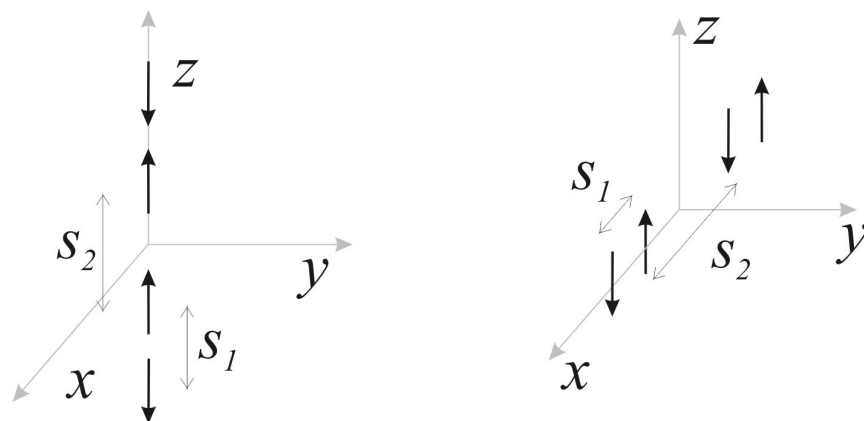
Пратећи исту процедуру диференцирања као у одељку 3.2.1, почевши од релације (3.45), можемо једноставно доћи до израза за  $z$ -компоненте магнетског вектор-потенцијала за ТМ поларизоване (гледано у односу на  $z$ -осу) струјне диполе, квадруполе итд.

На слици 3.7 су скициране три конфигурације *електричних дипола* постављених дуж сваке од оса правоугаоног координатног система. На слици су такође дати и коначни изрази [126] за  $z$ -компоненте магнетског вектор-потенцијала. Као што се може приметити, изрази су међусобно истог облика и сразмерни су производу придруженог Лежандровог полинома прве врсте *првог реда* и сферне Ханкелове функције друге врсте *првог реда* ( $n = 1$ ).



Слика 3.7 - Различите конфигурације *електричних дипола* постављених дуж оса правоугаоног координатног система.

На слици 3.8 су скициране конфигурације *линијских електричних квадрупола*, као и одговарајући изрази за  $z$ -компоненте магнетског вектор-потенцијала [126]. Изрази су међусобно истог облика и у њима фигуришу линеарне комбинације производа придруженог Лежандровог полинома прве врсте *другог* ( $n = 2$ ) и *нулног* реда ( $n = 0$ ), од којих је сваки пондерисан одговарајућом сферном Ханкеловом функцијом.

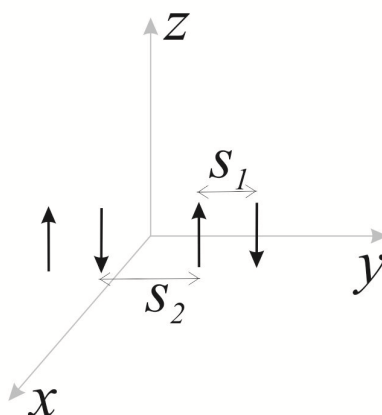


$$A_z = \frac{\beta^3 I l s_1 s_2}{6\pi j} \left[ h_2^{(2)}(\beta r) P_2^0(\cos \theta) - \frac{1}{2} h_0^{(2)}(\beta r) \right]$$

a)

$$A_z = \frac{\beta^3 I l s_1 s_2}{12\pi j} \left[ h_0^{(2)}(\beta r) + h_2^{(2)}(\beta r) [1 - \cos^2 \phi P_2^2(\cos \theta)] \right]$$

б)



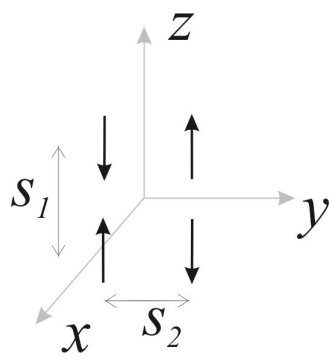
$$A_z = \frac{\beta^3 I l s_1 s_2}{12\pi j} \left[ h_0^{(2)}(\beta r) + h_2^{(2)}(\beta r) [1 - \sin^2 \phi P_2^2(\cos \theta)] \right]$$

в)

Слика 3.8 - Конфигурације линијских електричних квадруполоа постављених дуж оса правоугаоног координатног система; моменти свих појединачних елемената су  $Il$ .

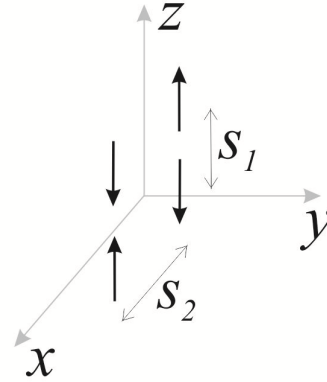
На слици 3.9 су скициране конфигурације *просторних електричних квадруполоа*, као и одговарајући изрази [126] за  $z$ -компоненте магнетског вектор-потенцијала. Изрази су међусобно истог облика и сразмерни су производу придруженог

Лежандровог полинома прве врсте *другог реда* и сферне Ханкелове функције друге врсте *другог реда* ( $n = 2$ ).



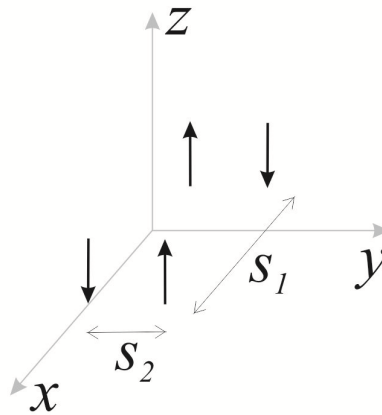
$$A_z = \frac{j\beta^3 I l s_1 s_2}{12\pi} h_2^{(2)}(\beta r) P_2^1(\cos \theta) \sin \varphi$$

а)



$$A_z = \frac{j\beta^3 I l s_1 s_2}{12\pi} h_2^{(2)}(\beta r) P_2^1(\cos \theta) \cos \varphi$$

б)



$$A_z = \frac{j\beta^3 I l s_1 s_2}{24\pi} h_2^{(2)}(\beta r) P_2^2(\cos \theta) \sin 2\varphi$$

в)

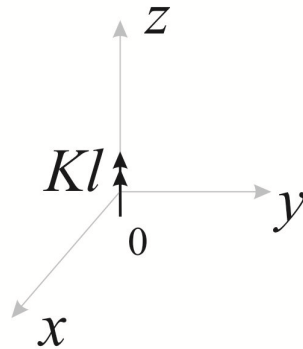
Слика 3.9 - Конфигурације просторних електричних квадруполо постављених у свакој од равни правоугаоног координатног система; моменти свих појединачних елемената су  $Il$ .

Имајући у виду изразе за  $z$ -компоненте електричног монопола (слика 3.6), дипола (слика 3.7) и квадруполо (слике 3.8 и 3.9), можемо формирати општи израз који важи за сваки ред мултипола, слично као у (3.22)

$$A_z(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n h_n^{(2)}(\beta r) P_n^m(\cos \theta) [a_n \cos(m\varphi) + b_n \sin(m\varphi)]. \quad (3.47)$$

### 3.3.2. Тродимензионални случај са ТЕ поларизованим струјним елементима

Посматрајмо сада геометрију са слике 3.10. У питању је структура дуална оној са слике 3.6, тј. у питању је кратак елемент магнетске струје (*магнетски монопол*) момента  $Kl$ , постављен у координатном почетку, дуж  $z$ -осе, у медијуму пермитивности  $\epsilon$ , пермеабилности  $\mu$ , без губитака [126].

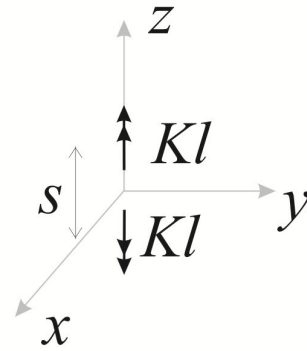


Слика 3.10 - Илустрација магнетског монопола.

Извођење израза за електрични вектор-потенцијал,  $F$ , аналогно је оном у одељку 3.3.1, уз напомену да јачину електричне струје  $I$  треба заменити јачином магнетске струје  $K$ . На тај начин добијамо

$$F_z = \frac{\mu\beta Kl}{4\pi j} h_0^{(2)}(\beta r) P_0^0(\cos \theta). \quad (3.48)$$

Такође, сви наредни чланови у ТЕ мултиполном развоју имају облик функције  $F_z$  идентичан облику функције  $A_z$  у случају ТМ поларизације. Пример *магнетског дипола* дат је на слици 3.11.



$$F_z = \frac{\beta^2 K l s}{4\pi j} h_1^{(2)}(\beta r) P_1^0(\cos \theta)$$

Слика 3.11 - Илустрација магнетског дипола.

Коначно, општи израз за  $F_z$ , дат преко суме свих мултипола у развоју, гласи

$$F_z(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n h_n^{(2)}(\beta r) P_n^m(\cos \theta) [a_n \cos(m\varphi) + b_n \sin(m\varphi)]. \quad (3.49)$$

### 3.3.3. Развој произвољног електромагнетског поља на $TM_r$ и $TE_r$ поларизоване компоненте

Произвољно електромагнетско поље може да се представи као суперпозиција поља чије је магнетско поље управно на радијални правац и поља чије је електрично поље управно на радијални правац [126]. У првом случају говоримо о  $TM_r$  поларизацији, а у другом о  $TE_r$  поларизацији. Компоненте  $TM_r$  поља могу се добити из услова

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{i}_r \quad (3.50)$$

и

$$\mathbf{F} = 0. \quad (3.51)$$

Из друге Максвелове једначине следи диференцијална једначина

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \beta^2 \mathbf{A} - j\omega\epsilon \nabla V. \quad (3.52)$$

У сферном координатном систему, за изабрани облик магнетског вектор-потенцијала, добија се да важи

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \mathbf{i}_\varphi, \quad (3.53)$$

одакле следи

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = & -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{i}_\varphi - \\ & -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_\theta, \end{aligned} \quad (3.54)$$

односно

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_r + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \mathbf{i}_\theta, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = & -\left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right) \mathbf{i}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \mathbf{i}_\theta. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Даље, десна страна једнакости (3.52) може да се напише као

$$\beta^2 \mathbf{A} - j\omega\mu\epsilon \nabla V = \beta^2 A_r \mathbf{i}_r - j\omega\mu\epsilon \left( \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi \right). \quad (3.57)$$

Изједначавањем чланова који стоје уз  $\mathbf{i}_\varphi$  и  $\mathbf{i}_\theta$  у изразима (3.56) и (3.57), добијају се једнакости

$$-j\omega\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta}, \quad (3.58)$$

$$-j\omega\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \varphi}. \quad (3.59)$$

Оба услова се свде на

$$\frac{\partial A_r}{\partial r} = -j\omega\mu\epsilon V. \quad (3.60)$$

Коначно, када се изједначе чланови који стоје уз  $\mathbf{i}_r$ , добија се

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) + \beta^2 A_r - j\omega\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (3.61)$$



Када се (3.60) уврсти у (3.61), добија се

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \beta^2 A_r = 0. \quad (3.62)$$

Са друге стране, у сферном координатном систему, Лапласијан је дефинисан као

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (3.63)$$

У специјалном случају када важи

$$f = \frac{A_r}{r}, \quad (3.64)$$

релација (3.63) постаје

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2}. \quad (3.65)$$

Поређењем једнакости (3.63) и (3.65), добијамо

$$(\Delta + \beta^2) \left( \frac{A_r}{r} \right) = 0. \quad (3.66)$$

Односно, у сферном координатном систему, Хелмхолцову једначину задовољава скаларна функција

$$\psi_a = \frac{A_r}{r}, \quad (3.67)$$

одакле следи да је магнетски вектор-потенцијал дат са

$$\mathbf{A} = r \psi_a \mathbf{i}_r. \quad (3.68)$$

На сличан начин добија се комплементарно решење за талас чији је вектор електричног поља ТЕ поларизован у односу на радијалан правац (ТЕ<sub>r</sub> поларизација). Ово поље се добија из услова

$$\mathbf{F} = r \psi_r \mathbf{i}_r, \quad (3.69)$$

и

$$\mathbf{A} = 0. \quad (3.70)$$

У овом случају, одговарајућа диференцијална једначина гласи

$$(\Delta + \beta^2) \left( \frac{F_r}{r} \right) = 0. \quad (3.71)$$

Стога, општа решења за  $A_r$  и  $F_r$  дата су у облику

$$\sum_{m,n} C_{m,n} \hat{B}_n(\beta r) L_n^m(\cos \theta) h(m\varphi), \quad (3.72)$$

где су  $\hat{B}_n(\beta r)$  сферне Беселове функције које је увео Шелкуноф, дате са

$$\hat{B}_n(\beta r) = \beta r b_n(\beta r) = \beta r \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} B_{n+1/2}(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi\beta r}{2}} B_{n+1/2}(\beta r). \quad (3.73)$$

Да бисмо одредили вектор јачине ТМ<sub>r</sub> поларизованог електричног поља, полазимо од израза за вектор електричног поља у функцији два потенцијала

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla V. \quad (3.74)$$

Када се уврсти услов (3.60), израз за вектор електричног поља постаје

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \left( \frac{\partial A_r}{\partial r} \right), \quad (3.75)$$

односно

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{j}{\omega\mu\epsilon} \left( \beta^2 \mathbf{A} + \nabla \left( \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) \right) = \\ &= -\frac{j}{\omega\mu\epsilon} \left( \left( \beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) A_r \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi \partial r} \mathbf{i}_\varphi \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Према томе, компоненте електричног поља од интереса у далеком пољу, дате су са

$$E_\theta = -\frac{j}{\omega\mu\epsilon r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r}, \quad (3.77)$$

и

$$E_\varphi = -\frac{j}{\omega\mu\epsilon r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi \partial r}. \quad (3.78)$$

Дакле, потребно је пронаћи изводе функције  $A_r$  по све три сферне координате.

Извод по  $r$ -координати налазимо као

$$\frac{\partial A_r}{\partial r} = \sum_{m,n} C_{m,n} L_n^m(\cos \theta) h(m\varphi) \frac{\partial}{\partial r} (\hat{H}_n^{(2)}(\beta r)). \quad (3.79)$$

Одговарајући извод Ханкелове функције дат је изразом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(\hat{H}_n^{(2)}(\beta r)) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{\frac{\pi\beta r}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \right] = \sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \frac{1}{2\sqrt{r}} + \sqrt{\frac{\pi\beta r}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \beta = \\
&= \sqrt{\frac{\pi\beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) + \sqrt{\frac{\pi\beta^3 r}{2}} \left[ H_{n-1/2}^{(2)}(\beta r) - \frac{n+1/2}{\beta r} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \right] = \\
&= \sqrt{\frac{\pi\beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) + \sqrt{\frac{\pi\beta^3 r}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta r) - \frac{2n+1}{2\beta r} \sqrt{\frac{\pi\beta^3 r}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) = \\
&= \sqrt{\frac{\pi\beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) + \sqrt{\frac{\pi\beta^3 r}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta r) - (2n+1) \sqrt{\frac{\pi\beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) = \\
&= \sqrt{\frac{\pi\beta^3 r}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta r) - 2n \sqrt{\frac{\pi\beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Стога имамо да је извод функције  $A_r$  по  $r$ -сферној координати дат изразом

$$\frac{\partial A_r}{\partial r} = \sum_{m,n} C_{m,n} L_n^m(\cos \theta) h(m\varphi) \left[ \sqrt{\frac{\pi\beta^3 r}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta r) - 2n \sqrt{\frac{\pi\beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \right]. \tag{3.81}$$

Извод функције  $A_r$  по  $\varphi$ -сферној координати налазимо као

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} &= \sum_{m,n} C_{m,n} \hat{H}_n^{(2)}(\beta r) L_n^m(\cos \theta) \frac{\partial h(m\varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{m,n} C_{m,n} \hat{H}_n^{(2)}(\beta r) L_n^m(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} [e^{-jm\varphi}] = \\
&= \sum_{m,n} C_{m,n} \hat{H}_n^{(2)}(\beta r) L_n^m(\cos \theta) (-jm) e^{-jm\varphi} = \\
&= \sum_{m,n} C_{m,n} \left[ \sqrt{\frac{\pi\beta r}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \right] L_n^m(\cos \theta) (-jm) h(m\varphi).
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Извод функције  $A_r$  по  $\theta$ -сферној координати налазимо као

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \sum_{m,n} C_{m,n} \hat{H}_n^{(2)}(\beta r) h(m\varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} [L_n^m(\cos \theta)]. \tag{3.83}$$

Извод одговарајуће Лежандрове функције дат је изразом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} [L_n^m(\cos \theta)] &= -\sin \theta L_n^{\prime m}(\cos \theta) = \\
&= -\sin \theta \left[ \frac{-m \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} L_n^m(\cos \theta) - \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} L_n^{m+1}(\cos \theta) \right] = \\
&= -\sin \theta \left[ \frac{-m \cos \theta}{\sin^2 \theta} L_n^m(\cos \theta) - \frac{1}{\sin \theta} L_n^{m+1}(\cos \theta) \right] = \\
&= \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} L_n^m(\cos \theta) + L_n^{m+1}(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Стога имамо да је извод функције  $A_r$  по  $\theta$ -сферној координати дат са

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} &= \sum_{m,n} C_{m,n} \hat{H}_n^{(2)}(\beta r) h(m\varphi) \left[ \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} L_n^m(\cos \theta) + L_n^{m+1}(\cos \theta) \right] = \\ &= \sum_{m,n} C_{m,n} \sqrt{\frac{\pi \beta r}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) h(m\varphi) \left[ \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} L_n^m(\cos \theta) + L_n^{m+1}(\cos \theta) \right].\end{aligned}\quad (3.85)$$

Коначно, изрази за компоненте електричног поља у далеком пољу (за случај  $TM_r$  поларизације), дати су са

$$\begin{aligned}E_\theta &= -\frac{j}{\omega \mu \epsilon r} \sum_{m,n} C_{m,n} h(m\varphi) \left[ \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} L_n^m(\cos \theta) + L_n^{m+1}(\cos \theta) \right] \cdot \\ &\cdot \left[ \sqrt{\frac{\pi \beta^3 r}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta r) - 2n \sqrt{\frac{\pi \beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \right],\end{aligned}\quad (3.86)$$

и

$$\begin{aligned}E_\varphi &= -\frac{j}{\omega \mu \epsilon r \sin \theta} \sum_{m,n} C_{m,n} h(m\varphi) (-jm) L_n^m(\cos \theta) \cdot \\ &\cdot \left[ \sqrt{\frac{\pi \beta^3 r}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta r) - 2n \sqrt{\frac{\pi \beta}{8r}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \right].\end{aligned}\quad (3.87)$$

У случају  $TE_r$  поларизације, изрази за компоненте електричног поља које су од интереса у далеком пољу, дати су изразима [126]

$$\begin{aligned}E_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (3.88)$$

Стога коришћењем (3.72) и (3.82) добијамо

$$E_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \sum_{m,n} C_{m,n} \left[ \sqrt{\frac{\pi \beta r}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) \right] L_n^m(\cos \theta) (-jm) h(m\varphi).\quad (3.89)$$

Најзад, коришћењем (3.72) и (3.85) добијамо

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \sum_{m,n} C_{m,n} \sqrt{\frac{\pi \beta r}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r) h(m\varphi) \left[ \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} L_n^m(\cos \theta) + L_n^{m+1}(\cos \theta) \right].\quad (3.90)$$

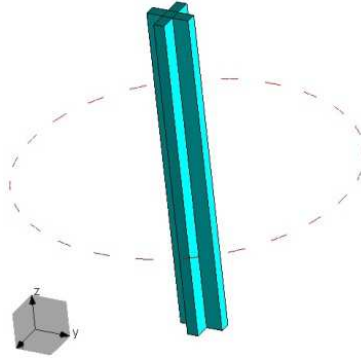
## 4. Нумерички резултати за дводимензионалне проблеме

### 4.1. Уводне напомене

Имајући у виду аналитичке резултате изложене у одељцима 3.2.1 и 3.2.2, у овом поглављу ће бити приказани резултати добијени анализом металних и диелектричних објеката, издужених дуж  $z$ -осе, за случај ТЕ, односно ТМ поларизованог упадног електромагнетског таласа. С обзиром на то да су детаљи ТМ сценарија већ разматрани у литератури [43], акценат ће бити стављен на ТЕ случај [128] који ће бити приказан у одељку 4.2 уз детаљан опис коришћене геометрије и нумеричких метода. У одељку 4.3 биће, из разлога комплетности, укратко описан ТМ сценарио уз поређење са геометријом и методама коришћеним у ТЕ случају. Коначно, у одељку 4.4 биће упоређени резултати нумеричке анализе за ТЕ и ТМ случај, за неколико различитих објеката, у различитим условима односа сигнал-шум (енгл. *signal-to-noise ratio*, SNR).

### 4.2. Дводимензионална анализа - ТЕ случај

На слици 4.1 је приказана типична геометрија која је разматрана у оквиру ТЕ случаја. Наиме, у питању је објекат издужен по  $z$ -оси (са константним попречним пресеком), окружен низом сензора у виду полуталасних дипола. Полупречник антенског низа је такав да се објекат налази у далеком пољу сензора, мада то није неопходно.



Слика 4.1 - Типична геометрија разматрана у оквиру ТЕ случаја.

Диполи (а самим тим и струје) са слике 4.1 су  $\phi$ -оријентисани и индукују такође  $\phi$ -оријентисане струје у разматраном објекту. Уколико је објекат од савршеног проводника (енгл. *perfect electric conductor*, ПЕС) струје постоје само по површини објекта (површинске струје). Уколико је објекат начињен од диелектрика, говоримо о запреминским струјама индукованим у објекту. Даље, те индуковане струје стварају расејано електромагнетско поље око објекта чија  $\phi$ -компонента може да се измери коришћењем полуталасних дипола. Дакле, ако претпоставимо да на слици 4.1 постоји укупно  $M$  дипола, симулацијом ћемо добити матрицу димензија  $M \times M$  у којој се налазе информације о томе на који начин објекат расејава електромагнетско поље из различитих праваца у једној равни ( $xOy$  раван на слици 4.1). На основу резултата анализе, формира се слика која би требало да што верније осликава облик објекта у  $xOy$  равни, тј. облик његовог попречног пресека.

У одељку 3.2.2, изведени су изрази за вектор електричног поља у случају ТЕ поларизације, дати као

$$E_{\rho}(\rho, \phi) = -\frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(\beta\rho) [-na_n \sin(n\phi) + nb_n \cos(n\phi)] \quad (4.1)$$

и

$$E_{\phi}(\rho, \phi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (H_{n-1}^{(2)}(\beta\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\beta\rho)) (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)). \quad (4.2)$$

Диполима са слике 4.1 не можемо измерити радијалну компоненту електричног поља, те се мерним антенском системом са слике 4.1 губи део информације о расејаном пољу. Како  $\rho$ -компонента електричног поља из (4.1) брже опада са

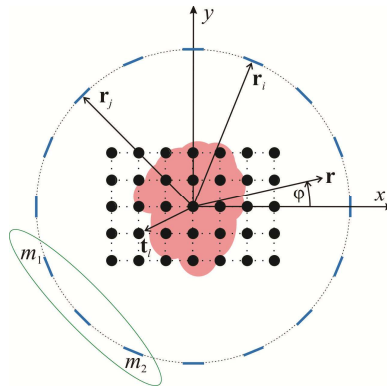
растојањем, може се претпоставити да у далеком пољу ова компонента може да се занемари, и да је највећи део информације о расејаном пољу садржан управо у  $\phi$ -компоненти електричног поља. Ипак, због постојања две компоненте електричног поља, ТЕ случај се означава као *векторски*.

Даље, у  $xOy$  равни потребно је дефинисати (у општем случају) правоугаону област која се претражује и у којој очекујемо да се тражени објекат налази. Ову област ћемо означити као *област претраживања*. У литератури [129] могу се пронаћи детаљи о степенима слободе електромагнетског поља, према којима може да се дефинише довољан број антена потребних да се прикупе све информације о расејаном пољу, имајући у виду димензије простора претраге. Наиме, показује се да уколико се број антена у низу повећа преко потребног, не могу се добити додатни детаљи о расејаном пољу, тј. не може се постићи већа тачност. Релација која дефинише потребан број антена, дата је са

$$M = \frac{2O}{\lambda} + 1, \quad (4.3)$$

при чему је са  $O$  обележен обим простора претраге изражен у таласним дужинама.

Како облик траженог објекта није унапред познат, потребно је дискретизовати простор претраживања и на тај начин добити коначан скуп тачака у ком ће бити вршена претрага еквивалентних извора зрачења. Са једне стране, што је број тачака већи, то ће и облик објекта бити прецизније одређен. Са друге стране, ако је број тачака превелики, трајање симулације се повећава, као и неодређеност проблема. У представљеној анализи, типично растојање између суседних тачака износи око  $0,1\lambda$ . Илустрација овакве дискретизације дата је на слици 4.2.



Слика 4.2 - Илустрација дискретизованог простора претраживања.

Приликом анализе, на место сваке од тачака биће постављен по један мултипол, при чему су сви мултиполи у мрежи истог реда. За сваки ред мултипола врши се засебна анализа, која као резултат даје засебну матрицу решења. Суперпозицијом ових појединачних решења добија се коначна слика објекта.

Теоријски, број потребних редова мултипола је бесконачан. Међутим, теорија о степенима нелинеарности електромагнетског поља [28] дефинише везу минималног полупречника круга,  $a$ , потребног да се обухвати разматрани расејач, са максималним редом мултипола који је потребно разматрати у анализи,  $\bar{n}$ . Показује се да, имајући у виду димензије расејача, зрачење мултипола преко одређеног реда опада веома брзо са растојањем, па ти редови не доприносе коначној реконструкцији. Релација која дефинише максималан ред мултипола који је потребно разматрати, дата је са

$$\bar{n} = \beta a, \quad (4.4)$$

при чему је са  $\beta$  означен фазни коефицијент. Стога, коначну слику објекта добијамо као суму (суперпозицију) слика добијених за сваки ред мултипола, од првог, па до  $\bar{n}$ -тог. Као што ће у даљем тексту бити показано, нулти ред мултипола (монополи) показао се као неупотребљив у анализи.

Релацију (4.2) која дефинише  $\phi$ -компоненту електричног поља, могуће је написати у поједностављеном облику, као

$$E_{\phi,n}(\mathbf{r}_j, \mathbf{t}_l) = a_n g_{jl} \cos(n\phi) + b_n g_{jl} \sin(n\phi), \quad (4.5)$$

уз

$$g_{jl} = \frac{1}{2} (H_{n-1}^{(2)}(\beta R_{jl}) - H_{n+1}^{(2)}(\beta R_{jl})) \quad (4.6)$$

и

$$R_{jl} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{t}_l|, \quad j = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, L, \quad (4.7)$$

при чему је са  $\mathbf{r}_j$  обележен вектор положаја  $j$ -тог сензора у низу, а са  $\mathbf{t}_l$  вектор положаја  $l$ -те тачке у дискретизованом домену (видети слику 4.2).

У општем случају, напон индукован на приступу (порту) антене дат је са



$$V = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}}, \quad (4.8)$$

где је са  $\mathbf{E}$  означен вектор инцидентног електричног поља, а са  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  вектор ефективне дужине антене. У случају конфигурације са слике 4.2, израз (4.8) се своди на облик

$$V(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) = -E_\phi(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) \cdot h_\phi(\mathbf{r}_j), \quad (4.9)$$

када се има у виду да су сензори  $\phi$ -оријентисани.

Зарад реконструкције објекта згодно је користити разлику облика

$$\Delta \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v}_0^{(i)}, \quad (4.10)$$

где је са  $(i)$  означен индекс предајне антене,  $\mathbf{v}^{(i)}$  означава вектор измерених напона, дат са

$$\mathbf{v}^{(i)} = \begin{bmatrix} V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i) \\ \vdots \\ V(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_i) \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

док је са  $\mathbf{v}_0^{(i)}$  обележен одзив антенског низа без присутног објекта који се анализира,

$$\mathbf{v}_0^{(i)} = \begin{bmatrix} V_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i) \\ \vdots \\ V_0(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_i) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Разлика дата у (4.10) уједно елиминише и утицај спреге између антена у низу. Треба такође напоменути да се, за потребе израза (4.10), (4.11) и (4.12), индуковани напони мере на кратко спојеним приступима сваке антене, коришћењем импеданских ( $z$ ) параметара.

Вектор  $\Delta \mathbf{v}^{(i)}$  може се дефинисати у облику

$$\Delta \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{W}_n \mathbf{c}_n^{(i)}, \quad (4.13)$$

где је са  $\mathbf{W}_n$  означена матрица система, коју је могуће разложити на два “речника”,  $\mathbf{W}_n^c$  и  $\mathbf{W}_n^s$ , који су повезани са косинусним (синусним) деловима релације (4.5). Дакле, имамо да важи

$$\mathbf{W}_n = [\mathbf{W}_n^c \ \mathbf{W}_n^s], \quad (4.14)$$

$$\mathbf{W}_n^c = \cos(n\varphi) \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M1} & \cdots & u_{ML} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{W}_n^s = \sin(n\varphi) \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M1} & \cdots & u_{ML} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$u_{ij} = g_{ij} h_\varphi(\mathbf{r}_j). \quad (4.17)$$

Непознати мултиполни коефицијенти, повезани са  $(i)$ -том екситацијом, налазе се у вектору димензија  $2L \times 1$  датим са

$$\mathbf{c}_n^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{a}_n = [a_1^n \ \dots \ a_L^n]^T, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{b}_n = [b_1^n \ \dots \ b_L^n]^T, \quad (4.20)$$

при чему су са  $\mathbf{a}_n$  и  $\mathbf{b}_n$  обележени непознати вектори коефицијената који одговарају речницима  $\mathbf{W}_n^c$  и  $\mathbf{W}_n^s$ , респективно. С обзиром на то да је број мултипола који има значајне амплитуде мали, јер индуковане струје заузимају мали део простора претраживања, одлучујемо се за  $l_1$  регуларизацију. Стога, ради решавања релације (4.13), уводимо функцију циља у облику

$$\hat{\mathbf{c}}_n^{(i)} = \min_{\mathbf{c}_n} \left\{ \|\Delta \mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{W}_n \mathbf{c}_n^{(i)}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{k}_n^{(i)}\|_1 \right\}, \quad (4.21)$$

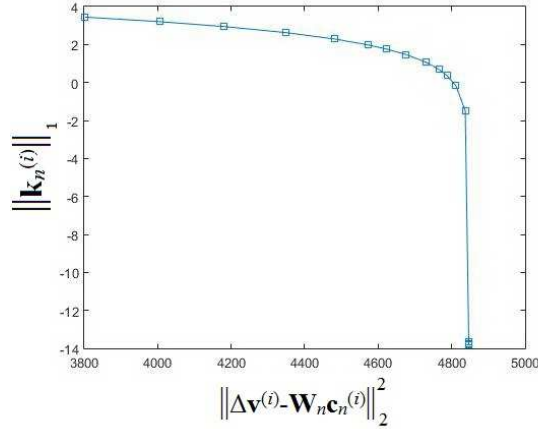
при чему важи

$$\mathbf{k}_n = [k_1^n \ \dots \ k_L^n]^T, \quad (4.22)$$

$$k_l^n = \sqrt{(a_l^n)^2 + (b_l^n)^2}, \quad (4.23)$$

где је са  $\gamma$  обележен *регуларизациони* параметар којим се балансира између тачности решења (квадрат друге норме грешке решења у односу на тачне мерене

податке) и мере у којој је решење ретко (прва норма вектора решења). За одабир одговарајуће вредности регуларизационог параметра коришћен је метод L-криве [130]. Наиме, уколико се за више вредности параметра  $\gamma$  нацрта зависност прве нормe вектора решења од квадрата друге нормe грешке решења, добија се слика слична оној на слици 4.3. На тој кривој је уочљиво тзв. “колeно”, које бирамо као тачку за коју параметар  $\gamma$  има оптималну вредност.



Слика 4.3 - Илустрација L-криве.

За потребе оптимизације приликом решавања релације (4.21) коришћен је пакет за конвексно програмирање, CVX [131]. Коначна слика добија се суперпозицијом решења добијених за различите редове мултипола и углове инциденције, као

$$I(l) = \sum_i \sum_n |k_n^{(i)}(l)|, \quad (4.24)$$

где  $I(l)$  означава интензитет  $l$ -тог пиксела на слици.

У циљу смањења утицаја шума на веродостојност реконструисаних слика, могуће је истовремено обрађивати податке добијене са неколико ( $P$ ) суседних антена. На слици 4.2 је приказан један такав под-низ, чији чланови су антене са индексима од  $m_1$  до  $m_2$ ,  $m_1 < m_2 \leq M$ . Вектор мерених напона тада постаје

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^{m_1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{v}^{m_2} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

док се одговарајућа системска матрица састоји од  $P$  идентичних блокова

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_n \\ \vdots \\ \mathbf{W}_n \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

при чему су блокови дефинисани релацијама (4.14)–(4.17).

Функција коју треба минимизовати сада постаје

$$\hat{\mathbf{c}}_n = \min_{\mathbf{c}_n} \left\{ \|\Delta \mathbf{v} - \mathbf{W}_n \mathbf{c}_n\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{k}_n\|_1 \right\}. \quad (4.27)$$

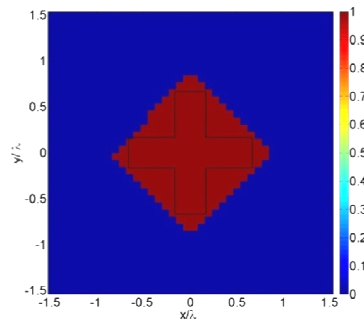
Резултат оптимизације су процењени мултиполни коефицијенти који одговарају углу између антена са индексима  $m_1$  и  $m_2$ . У циљу добијања комплетне слике објекта, потребно је заротирати овај под-низ око објекта, односно узети да важи  $m_1 = 1, 2, \dots, M - P + 1$ . Свака позиција под-низа даје парцијалну слику, а суперпозицијом слика из свих углова добијамо коначну слику објекта (за анализирани ред мултипола).

Презентована метода спада у класу *compressive sensing* метода и потребно је испунити један веома битан услов да би ова метода била валидна. Наиме, потребно је да резултујућа матрица решења (за сваки ред мултипола понаособ) буде највећим делом испуњена нултим члановима, односно да у њој буде много мање чланова различитих од нуле него што је укупно чланова у матрици,  $L$ . Другим речима, решење проблема (за сваки ред мултипола понаособ) мора бити ретко. Такође, као што је напоменуто, форма овде презентоване методе, која подразумева само употребу монопола уместо комплетног мултиполног развоја, већ је позната у литератури као стандардна обрада ретких сигнала [43].

Веома битан корак при реконструисању коначне слике објекта је поступак добијања тзв. “конвексне анвелопе” (енгл. *convex hull*). Наиме, приликом реконструкције облика траженог објекта, јављају се тзв. *артефакти*, односно пиксели позиционирани ван контуре објекта, који својим присуством онемогућују правилну реконструкцију. У циљу елиминисања артефаката, може се имплементирати концепт конвексне анвелопе на следећи начин.

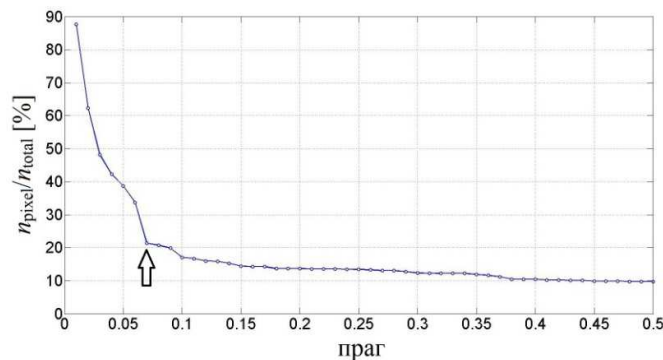
Показује се да уколико у процесу оптимизације функције циља дате релацијом (4.27) и коришћењем само монопола у развоју (стандардном обрадом ретких сигнала), одаберемо вредност регуларизационог параметра знатно већу од вредности која одговара колону одговарајуће  $L$ -криве, можемо добити приближну

процену површине коју тај објекат заузима у дводимензионалном простору. Бирамо високу вредност регуларизационог параметра јер је конвексну анвелопу лакше добити ако се разматра континуална слика објекта, односно решење које није ретко. Треба напоменути да је конвексну анвелопу могуће добити и на друге начине, јер већина алгоритама за реконструкцију као резултат даје управо конвексну анвелопу, а не прави облик објекта. Типичан изглед бинаризоване конвексне анвелопе дат је на слици 4.4.



Слика 4.4 - Пример бинаризоване конвексне анвелопе.

Процес бинаризације конвексне анвелопе врши се уз претпоставку да јој одређени пиксел припада уколико интензитет тог пиксела премашује неки претходно дефинисани праг. У циљу израчунавања вредности тог прага, користимо следећи алгоритам. Цртамо процентуалну вредност броја пиксела који премашују праг, у зависности од вредности прага, као на слици 4.5. С обзиром на то да тако добијена крива има облик обрнуте L-криве, у циљу добијања вредности прага бирамо преломну тачку на кривој (вредност прага износи 0,07 на примеру са слике 4.5 и означена је стрелицом).

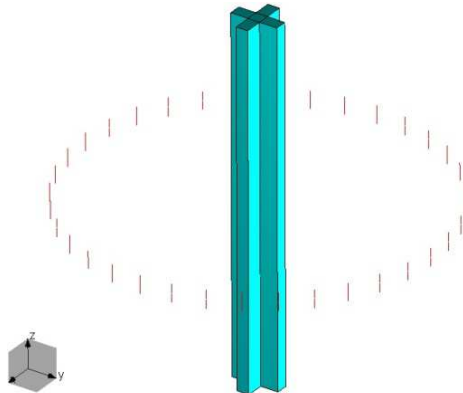


Слика 4.5 - Обрнута L-крива за добијање вредности прага при прорачуну конвексне анвелопе.

Добијену конвексну анVELOпу можемо искористити као просторни (дигитални) филтар са чијим вредностима је потребно помножити реконструисану слику објекта. На овај начин уклањају се непотребни артефакти, односно пиксели који су далеко изван простора који заузима тражени објекат. Друга улога конвексне анVELOпе је у процени површине коју објекат заузима. Проналажењем минималног полупречника круга потребног да обухвати конвексну анVELOпу могуће је, уз помоћ релације (4.4), добити максималан ред мултипола у развоју који је потребно разматрати. Коначна реконструкција је вршена суперпозицијом слика добијених анализом за редове мултипола од првог до  $\bar{n}$ -тог. Као што ће у одељку 4.4 бити показано, нулти ред мултипола показао се као неупотребљив у реконструкцији.

### 4.3. Двoдимензионална анализа - ТМ случај

Разматрана геометрија за случај ТМ поларизованог упадног електромагнетског таласа дата је на слици 4.6. Разлика у односу на слику 4.1 је само у томе што су полуталасни диполи оријентисани у правцу  $z$ -осе. У овом случају вектор магнетског поља лежи у трансверзалној ( $xOy$ ) равни.



Слика 4.6 - Типична геометрија разматрана у оквиру ТМ случаја.

Побудне  $z$ -оријентисане струје индукују такође  $z$ -оријентисане струје дуж објекта. Индуковане струје стварају расејано поље чију  $z$ -компоненту региструјемо полуталасним диполима.

Положаји мултипола за овај случај дефинисани су на исти начин као на слици 4.2, уз адекватно постављене полуталасне диполе. С обзиром на то да је на основу релације (3.22) потребно разматрати само  $z$ -компоненту електричног поља, овај приступ се означава као *скаларан*.

Све ознаке (број дипола, број тачака у дискретизованом домену, и сл.) исте су као у одељку 4.2. Такође, и у овом случају примењујемо теорију о степенима слободе [129] и нелинеарности [28] електромагнетског поља, и сходно њима одређујемо потребан број дипола и максималан ред мултипола који ћемо користити у развоју. Конвексна анвелопа одређује се и у овом случају користећи стандардну обраду ретких сигнала, уз коришћење  $L$ -криве и бирањем вредности регуларизационог параметра на исти начин као и у ТЕ случају.

Релација која дефинише  $z$ -компоненту електричног поља има исти облик као релација за магнетски вектор-потенцијал (3.22), односно

$$E_z(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(\beta\rho) [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)]. \quad (4.28)$$

Вектор  $\Delta \mathbf{v}^{(i)}$  дефинисан је на исти начин као у релацији (4.13). Речници су поново у облику (4.14), али компоненте нису исте као у ТЕ случају. Наиме, имамо да важи

$$\mathbf{W}_n^c = \cos(n\varphi) \begin{bmatrix} e^{-j\beta d_{11}} / \sqrt{d_{11}} & \cdots & e^{-j\beta d_{1L}} / \sqrt{d_{1L}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\beta d_{M1}} / \sqrt{d_{M1}} & \cdots & e^{-j\beta d_{ML}} / \sqrt{d_{ML}} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{W}_n^s = \sin(n\varphi) \begin{bmatrix} e^{-j\beta d_{11}} / \sqrt{d_{11}} & \cdots & e^{-j\beta d_{1L}} / \sqrt{d_{1L}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\beta d_{M1}} / \sqrt{d_{M1}} & \cdots & e^{-j\beta d_{ML}} / \sqrt{d_{ML}} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Вектор непознатих мултиполних коефицијената,  $\mathbf{c}_n^{(i)}$ , дефинисан је релацијама (4.18)–(4.20). Такође, функција циља дата је са (4.21), а важе и релације (4.22)–(4.24). На исти начин као и у одељку 4.2 могуће је умањити утицај шума обрадом података са неколико суседних антена истовремено. Одабир прага при бинаризацији конвексне анвелопе врши се аналогно процедури која је претходно показана. Битна разлика у односу на ТЕ случај огледа се у редовима мултиполног развоја које је потребно користити приликом реконструкције. Наиме, у ТМ

случају нулти ред мултипола може се искористити. Заједно са њим за реконструкцију су коришћена и два највиша реда мултипола, сходно [129]. Другим речима, коначна реконструкција је рачуната као суперпозиција нултог,  $(\bar{n} - 1)$ -ог и  $\bar{n}$ -тог реда мултипола.

Чињеница да је нулти ред мултипола неупотребљив у ТЕ случају, док се у ТМ анализи може искористити, може се објаснити на следећи начин. Показује се [126, релација (5.88)] да је, у цилиндричном координатном систему, Гринова функција у слободном простору дата у облику

$$G(\rho, \rho') = \frac{I(\rho')}{4j} H_0^{(2)}(\beta|\rho - \rho'|), \quad (4.31)$$

где је са  $\rho'$  означено растојање извора (бесконечно дугачко струјно влакно, тј. струјни монопол) од координатног почетка, док је са  $\rho$  означено растојање разматране тачке од координатног почетка. Имајући у виду релацију (4.28), јасно је да је  $z$ -компонента електричног поља, у случају нултог реда мултипола, директно сразмерна Гриновој функцији. С друге стране, за ТЕ случај, из израза (4.2) се види да је  $\phi$ -компонента електричног поља директно сразмерна Ханкеловој функцији првог реда (на коју разлика Ханкелових функција из (4.2) може да се сведе). Према томе, компонента електричног поља која се мери у ТЕ случају није директно сразмерна Гриновој функцији у слободном простору. Оно што је интересно, јесте да је  $\rho$ -компонента електричног поља дата изразом (4.1) директно сразмерна Гриновој функцији, али због обрнуте пропорционалности растојању, њен утицај на нумеричку методу у ТЕ случају може се сматрати занемарљиво малим.

#### 4.4. Нумерички резултати дводимензионалних анализа

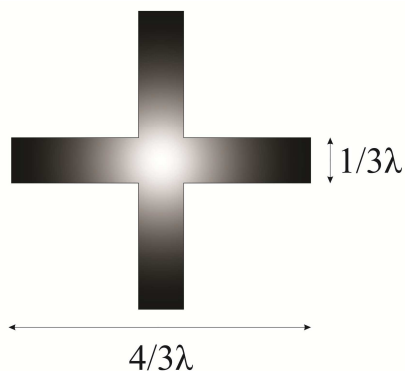
У овом одељку биће приказани нумерички резултати добијени анализом неколико различитих објеката од савршеног проводника и диелектричног материјала комплексне пермитивности  $\epsilon_r = 10 - j1$ , за случај ТЕ и ТМ поларизације. Такође, подаци добијени електромагнетском симулацијом [132] деградирани су додавањем нумерички генерисаног сигнала шума (енгл. *additive white Gaussian noise*, AWGN) различите снаге. Као резултат овог сабирања,



добијају се подаци за анализу са различитим односом сигнал-шум. Комплетна анализа вршена је на фреквенцији од 2 GHz.

#### 4.4.1. Метални објекат са попречним пресеком у облику крста

Први објекат који ће бити разматран начињен је од савршеног проводника и има попречни пресек у облику крста, као на слици 4.7. Краци крста дугачки су  $2/3\lambda$  (пречник објекта је двоструко већи и износи  $4/3\lambda$ ) и широки  $1/3\lambda$ .

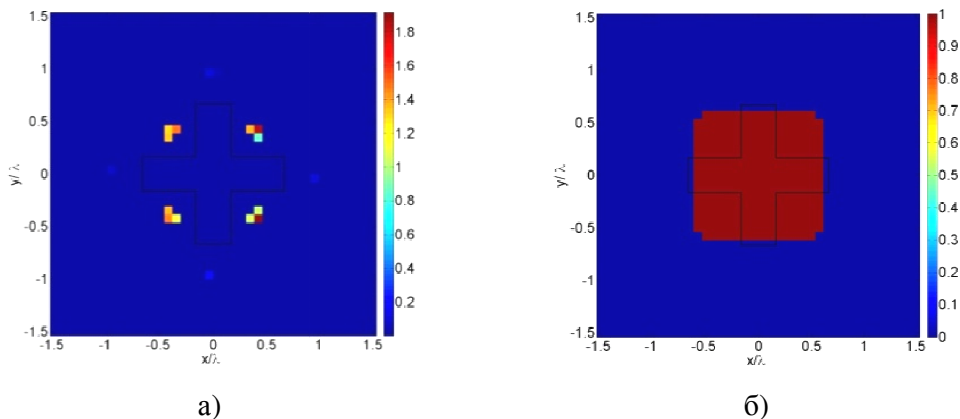


Слика 4.7 - Димензије разматраног објекта са попречним пресеком у облику крста.

Простор претраге је дефинисан као квадрат димензија  $3\lambda \times 3\lambda$ , на основу чега је коришћењем релације (4.3) добијено да је потребан број антена  $M = 24$ . Простор претраге је дискретизован коришћењем укупно  $40 \times 40$  униформно постављених тачака (растојање између суседних тачака износи мање од  $0,1\lambda$ ). У ТЕ случају, применом релација (4.25)–(4.27) вршена је анализа коришћењем сигнала који су добијени са две суседне антене ( $P = 2$ ). Другим речима, узето је да предајни низ заузима угао од  $30^\circ$  у равни око простора претраге. Овај принцип ће бити коришћен и у наредним анализама, за остале објекте.

Након одређивања броја потребних антена, примењена је стандардна обрада ретких сигнала у ТЕ случају и добијена су два битна резултата. Прво, минимизацијом функције циља дате релацијом (4.27), уз вредност регуларизационог параметра која одговара колелу L-криве, установљено је да је нулти ред мултипола неупотребљив у анализи (слика 4.8а), тј. при реконструкцији

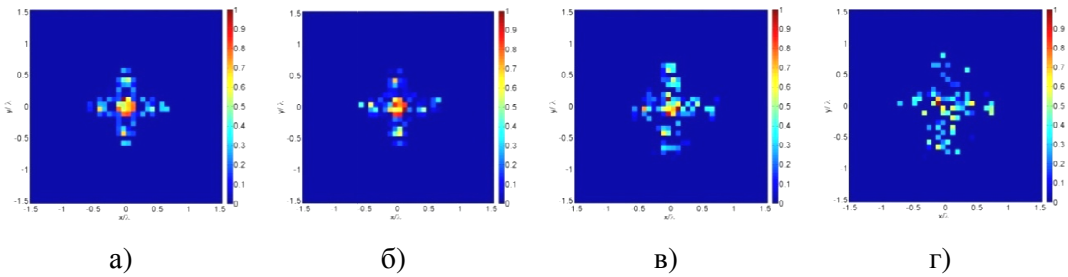
и добијању коначне слике објекта. Затим, за вредност регуларизационог параметра која одговара вертикалном делу L-криве, и применом претходно описаног поступка бинаризације, добијена је конвексна анвелопа објекта (слика 4.8б).



Слика 4.8 - Резултати добијени стандардном обрадом ретких сигнала за објекат са попречним пресеком у облику крста, у ТЕ случају: а) нулти ред мултипола; б) конвексна анвелопа објекта.

На основу димензија конвексне анвелопе и релације (4.4) израчунато је да је максималан ред мултипола који је потребно разматрати,  $\bar{n} = 4$ . Могуће је искористити још један вид провере приликом одређивања редова мултипола које је потребно укључити у анализу. Наиме, у литератури [28] је показано да се рачунањем Фуријеовог развоја за расејано поље мерено на кругу који окружује објекат, може добити процена који су редови у мултиполном развоју доминантни у односу на остале. За случај металног објекта са попречним пресеком у облику крста, оваквом анализом добијено је да амплитуда четвртог хармоника (амплитуда четвртог реда мултипола) износи мање од 10% у односу на доминантан хармоник. Стога, редови у мултиполном развоју који су коришћени при анализи су  $n = 1, \dots, \bar{n} - 1$ .

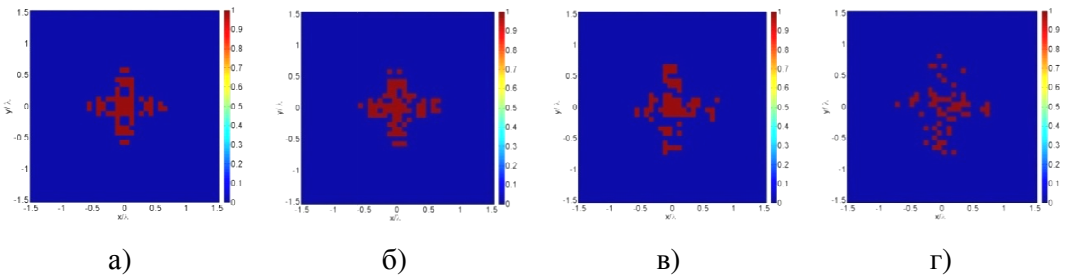
На слици 4.9 дати су резултати реконструкције добијени суперпозицијом одговарајућих редова мултипола, у ТЕ случају. Разматрана су четири односа сигнал-шум и то: 20 dB, 10 dB, 5 dB и 0 dB.



Слика 4.9 - Резултати реконструкције металног објекта са попречним пресеком у облику крста (ТЕ случај), за однос сигнал-шум: а) 20 dB; б) 10 dB; в) 5 dB; г) 0 dB.

Као што се са слике 4.9 може видети, облик крста је видљив за све вредности односа сигнал-шум, осим у случају 4.9г, тј. за вредност односа сигнал-шум од 0 dB.

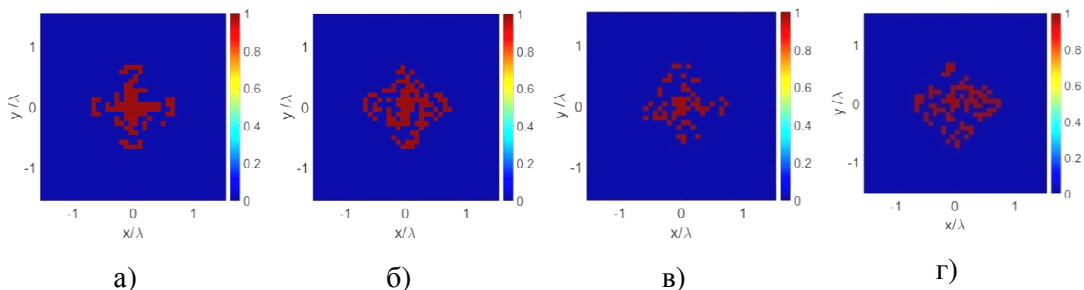
Из разлога јасније представе, резултате са слике 4.9 могуће је бинаризовати тако што су сви пиксели са интензитетом преко 5% од максималне вредности заокружени на јединични интензитет. С друге стране, сви пиксели са интензитетом мањим од 5% максималне вредности заокружени су на нулти интензитет. На овај начин добијени су резултати представљени на слици 4.10.



Слика 4.10 - Бинаризовани резултати реконструкције металног објекта са попречним пресеком у облику крста (ТЕ случај), за однос сигнал-шум: а) 20 dB; б) 10 dB; в) 5 dB; г) 0 dB.

У даљем току овог поглавља, за остале разматране објекте, биће приказивани само бинаризовани резултати.

У ТМ случају, реконструкција је вршена суперпозицијом редова мултипола  $n=0, \bar{n}-1$  и  $\bar{n}$ . При анализи комбиновани су подаци са две суседне антене ( $P=2$ ) и добијени резултати дати су на слици 4.11.



Слика 4.11 - Бинаризовани резултати реконструкције металног објекта са попречним пресеком у облику крста (ТМ случај), за однос сигнал-шум: а) 20 dB; б) 10 dB; в) 5 dB; г) 0 dB.

За разлику од ТЕ случаја, резултати добијени за ТМ поларизацију су нешто лошији, и облик крста могуће је разазнати у случају односа сигнал-шум од 20 dB и 10 dB.

У циљу квантификације тачности предложене методе, дефинисана су два параметра. Параметар  $\eta_1$  дефинисан је тако да се помоћу њега може проценити прецизност методе, односно као

$$\eta_1 = \frac{N_{in}}{N_{tot}}, \quad (4.32)$$

при чему је са  $N_{in}$  означен број бинаризованих пиксела који је добијен унутар контуре објекта, док је са  $N_{tot}$  обележен укупан број добијених бинаризованих пиксела. Други параметар,  $\eta_2$ , дефинисан је са

$$\eta_2 = \frac{N_{in}}{N_{obj}}, \quad (4.33)$$

где је са  $N_{obj}$  дефинисан укупан број пиксела који је могуће сместити унутар контуре објекта. Параметар  $\eta_2$  дефинисан је на такав начин да се помоћу њега може проценити способност методе да правилно реконструише облик испитиваног објекта. У табели 4.1 дати су параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  за случај металног објекта са попречним пресеком у облику крста, у ТЕ и ТМ случају.

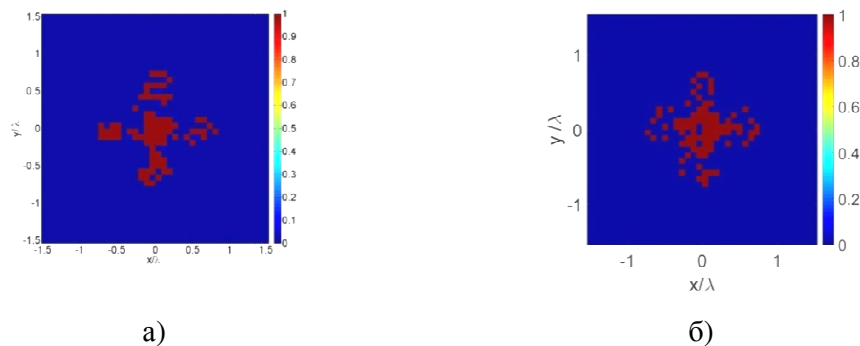
Табела 4.1

Параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  рачунати за метални објекат са попречним пресеком у облику крста (ТЕ и ТМ случај)

SNR	$\eta_{1TE}$ [%]	$\eta_{2TE}$ [%]	$\eta_{1TM}$ [%]	$\eta_{2TM}$ [%]
20 dB	100	51	88	61
10 dB	99	55	70	54
5 dB	92	52	73	34
0 dB	71	32	64	44

#### 4.4.2. Диелектрични објекат са попречним пресеком у облику крста

Као други пример, анализиран је објекат идентичан оном из одељка 4.4.1, али начињен од диелектрика, комплексне пермитивности  $\epsilon_r = 10 - j1$ . Сви параметри анализе исти су као и у случају металног објекта (простор претраге, број тачака у дискретизованом домену, број антена, максималан ред мултипола). Стандардном обрадом ретких сигнала установљено је да је нулти ред мултипола, као и у случају металног објекта, неупотребљив. Такође, добијена конвексна анвелопа има облик веома сличан оном са слике 4.8б. Притом, исти резултат је добијен и Фуријеовом анализом, односно добијено је да је четврти ред мултипола много мање значајан у односу на остале редове. Дакле, у ТЕ случају разматрани су редови мултипола  $n = 1, 2, 3$ , а у ТМ случају  $n = 0, 3, 4$ , као у одељку 4.4.1. Из разлога прегледности, резултати реконструкције дати су на слици 4.12 за ТЕ и ТМ случај за вредност односа сигнал-шум од 10 dB. Такође, тачности  $\eta_1$  и  $\eta_2$  дате су у табели 4.2 за случај ТЕ и ТМ поларизације, за четири вредности односа сигнал-шум.



Слика 4.12 - Бинаризовани резултати реконструкције диелектричног објекта са попречним пресеком у облику крста, за однос сигнал-шум 10 dB: а) ТЕ случај; б) ТМ случај.

Табела 4.2

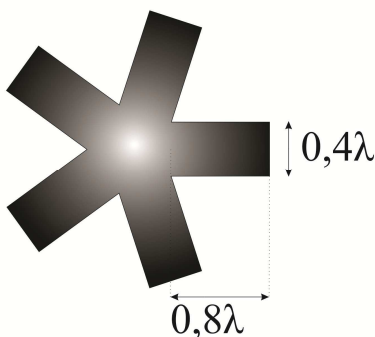
Параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  рачунати за диелектрични објекат са попречним пресеком у облику крста (ТЕ и ТМ случај)

SNR	$\eta_{1TE}$ [%]	$\eta_{2TE}$ [%]	$\eta_{1TM}$ [%]	$\eta_{2TM}$ [%]
20 dB	95	83	87	56
10 dB	94	65	75	48
5 dB	93	54	73	50
0 dB	89	42	52	21

Са слика 4.11 и 4.12, односно из табела 4.1 и 4.2, може се видети да је предложена метода применљива не само у случају јаких расејача начињених од савршеног проводника, већ и у случају слабијих расејача начињених од диелектрика. У највећем броју случајева датих у табелама 4.1 и 4.2, тачности добијене за ТЕ поларизацију нешто су веће у односу на ТМ поларизацију.

#### 4.4.3. Метални објекат са попречним пресеком у облику петокраке звезде

Геометрија следећег примера дата је на слици 4.13. У питању је објекат од савршеног проводника, са попречним пресеком у облику петокраке звезде. Краци звезде дугачки су  $0,8\lambda$  и широки  $0,4\lambda$ .

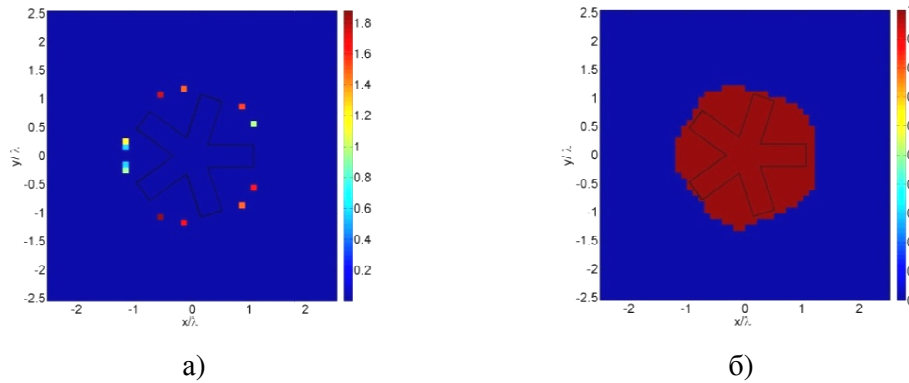


Слика 4.13 - Димензије разматраног објекта са попречним пресеком у облику петокраке звезде.

Простор претраге је у овом примеру у облику квадрата димензија  $6\lambda \times 6\lambda$ , на основу чега је потребан број антена  $M = 50$ . Дискретизација простора претраге извршена је коришћењем  $50 \times 50$  униформно постављених тачака, односно

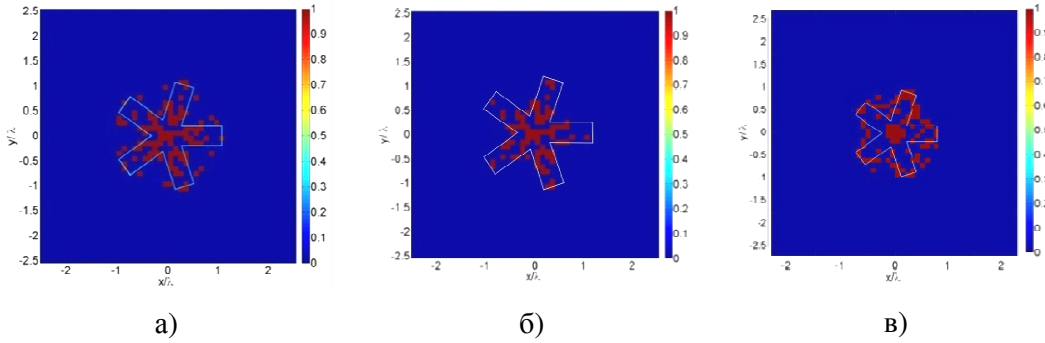
растојање између суседних тачака износи  $0,12\lambda$ . У ТЕ и ТМ случају вршена је анализа симултаним коришћењем сигнала који су добијени са четири суседне антене ( $P=4$ ).

Применом стандардне обраде ретких сигнала у ТЕ случају добијено је да је нулти ред мултипола неупотребљив као у случају претходна два примера (видети слику 4.14а). За вредност регуларизационог параметра која одговара вертикалном делу L-криве, и након бинаризације, добијена је конвексна анвелопа објекта (слика 4.14б).



Слика 4.14 - Резултати добијени стандардном обрадом ретких сигнала за објекат са попречним пресеком у облику петокраке звезде, у ТЕ случају: а) нулти ред мултипола; б) конвексна анвелопа објекта.

На основу слике 4.14б и релације (4.4) израчунато је да је максималан ред мултипола који је потребно разматрати  $\bar{n}=6$ . Фуријеовом анализом је установљено да су сви хармоници у развоју значајни. Дакле, редови у мултиполном развоју који су коришћени при анализи, у ТЕ случају, су  $n=1, \dots, \bar{n}$ . С друге стране, у ТМ случају, разматрани су редови  $n=0, \bar{n}-1$  и  $\bar{n}$ . Резултати реконструкције за ТЕ и ТМ случај, за вредност односа сигнал-шум од 10 dB, дати су на сликама 4.15а и 4.15в, респективно.



Слика 4.15 - Бинаризовани резултати реконструкције металног објекта са попречним пресеком у облику петокраке звезде за однос сигнал-шум 10 dB: а) ТЕ случај са првим редом мултипола; б) ТЕ случај без првог реда мултипола; в) ТМ случај.

Тачности  $\eta_1$  и  $\eta_2$  дате су у табели 4.3 за случај ТЕ и ТМ поларизације за четири вредности односа сигнал-шум.

Табела 4.3

Параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  рачунати за метални објекат са попречним пресеком у облику петокраке звезде (ТЕ и ТМ случај)

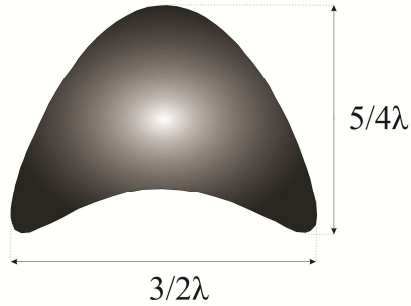
SNR	$\eta_{1TE}$ [%]	$\eta_{2TE}$ [%]	$\eta_{1TM}$ [%]	$\eta_{2TM}$ [%]
20 dB	93	46	65	25
10 dB	93	46	63	27
5 dB	92	39	55	23
0 dB	94	16	58	25

Иако су, у ТЕ случају, прецизност методе (параметар  $\eta_1$ ) и реконструисана површина траженог објекта (параметар  $\eta_2$ ) задовољавајући, примећује се да конкавни облик петокраке звезде није јасан на слици 4.15а. Уз претпоставку да у ТЕ случају ниски редови мултипола доприносе грубој процени површине објекта, док коришћење виших редова омогућава реконструкцију финијих детаља у попречном пресеку, анализа је поновљена с тим да је при реконструкцији, поред нултог реда, изостављен и први ред мултипола. Резултат те анализе, за вредност односа сигнал-шум 10 dB, дат је на слици 4.15б, на којој се прецизније може видети облик анализираног објекта.



#### 4.4.4. Метални објекат са попречним пресеком у облику змаја

Геометрија последњег разматраног објекта дата је на слици 4.16. У питању је метални (РЕС) објекат са попречним пресеком у облику змаја (енгл. *kite*).



Слика 4.16 - Димензије разматраног металног објекта са попречним пресеком у облику змаја.

Облик са слике 4.16 описан је аналитичким изразима за  $x$ - и  $y$ -координату сваке тачке на обиму објекта, са

$$x(t) = \frac{3}{2} \sin(t) \frac{\lambda}{2} \quad (4.34)$$

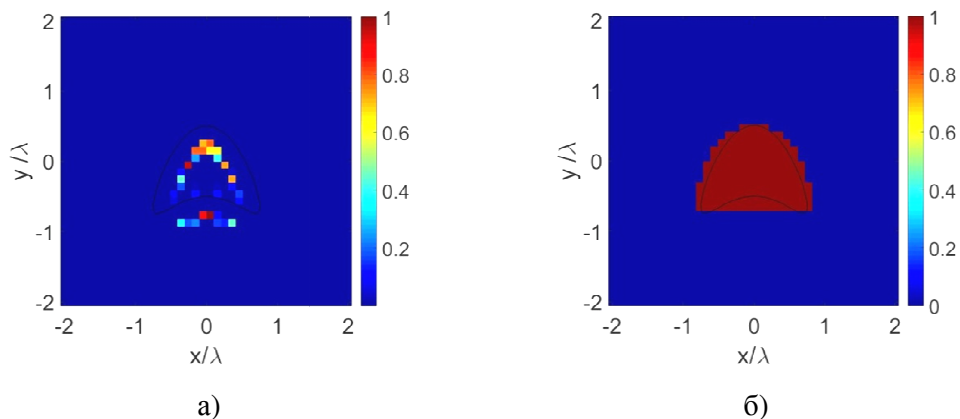
и

$$y(t) = (\cos(t) + 0,65 \cos(2t) - 0,65) \frac{\lambda}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (4.35)$$

при чему је са  $t$  означен угао (рачунат у односу на позитиван смер  $y$ -осе) под којим се види тачка на обиму објекта.

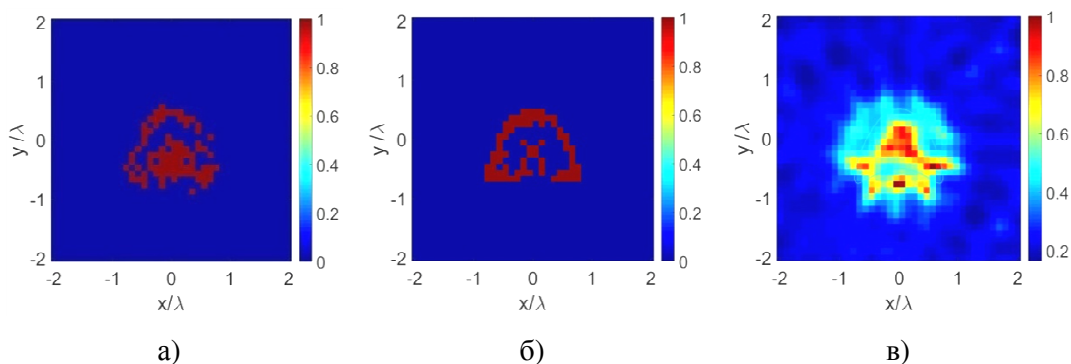
Простор претраге је дефинисан као квадрат димензија  $4\lambda \times 4\lambda$ , односно потребан број антена износи  $M = 36$ . Униформна дискретизација простора претраге извршена је коришћењем  $40 \times 40$  тачака, односно растојање између суседних тачака износи  $0,1\lambda$ . У ТЕ и ТМ случају вршена је анализа симултаним коришћењем сигнала који су добијени са три суседне антене ( $P = 3$ ).

Стандардном обрадом ретких сигнала у ТЕ случају добијено је да је нулти ред мултипола неупотребљив као и у претходним примерима (видети слику 4.17а). За вредност регуларизационог параметра која одговара вертикалном делу  $L$ -криве, и након бинаризације, добијена је конвексна анвелопа објекта (слика 4.17б).



Слика 4.17 - Резултати добијени стандардном обрадом ретких сигнала за метални објекат са попречним пресеком у облику змаја, у ТЕ случају: а) нулти ред мултипола; б) конвексна анвелопа објекта.

На основу димензија конвексне анвелопе са слике 4.17б добијено је да је максималан ред мултипола који је потребно разматрати приликом реконструкције,  $\bar{n} = 7$ . Фуријеовом анализом је установљено да су сви хармоници у развоју значајни. Дакле, редови у мултиполном развоју који су коришћени при анализи, у ТЕ случају, су  $n = 1, \dots, \bar{n}$ . С друге стране, у ТМ случају, разматрани су редови  $n = 0, \bar{n} - 1$  и  $\bar{n}$ . Резултати реконструкције за ТЕ и ТМ случај, за вредност односа сигнал-шум од 10 dB, дати су на сликама 4.18а и 4.18б, респективно. У циљу поређења, на слици 4.18в дат је резултат добијен LSM приступом, који је један од најкоришћенијих у литератури.



Слика 4.18 - Резултати реконструкције металног објекта са попречним пресеком у облику змаја за однос сигнал-шум 10 dB: а) ТЕ случај; б) ТМ случај; в) LSM.

Поређењем резултата са слике 4.18 може се уочити да су резултати добијени коришћењем мултиполног развоја знатно бољи у односу на оне добијене LSM методом, тј. облик разматраног објекта је знатно јаснији у прва два случаја.

Тачности  $\eta_1$  и  $\eta_2$  дате су у табели 4.4 за случај ТЕ и ТМ поларизације за четири вредности односа сигнал-шум.

Табела 4.4

Параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  рачунати за метални објекат са попречним пресеком у облику змаја (ТЕ и ТМ случај)

SNR	$\eta_{1TE}$ [%]	$\eta_{2TE}$ [%]	$\eta_{1TM}$ [%]	$\eta_{2TM}$ [%]
20 dB	76	58	82	59
10 dB	78	56	82	49
5 dB	76	58	78	41
0 dB	65	55	72	25

## 5. Концепт оптималног реда мултипола

### 5.1. Уводне напомене

Током нумеричке анализе за потребе претходног поглавља уочено је да су, у неким случајевима, резултати реконструкције добијени одређеним редовима мултипола значајно бољи, односно употребљивији, у односу на остале. Стога ће циљ овог поглавља бити да се истражи постојање тзв. *оптималних* редова мултипола, који су сами по себи довољни за квалитетну реконструкцију облика траженог објекта. Концепт оптималног реда мултипола, наравно, не умањује значај суперпозиције свих релевантних редова, односно приступа који је приказан у претходном поглављу. Међутим, под одређеним условима пружа се могућност значајне уштеде времена и рачунарских ресурса употребом само једног реда мултипола приликом реконструкције.

Приликом реконструкције различитих објеката уочено је да оптимални ред мултипола зависи од геометрије самог објекта, тачније од његовог облика и величине. Због тога је спроведена нумеричка анализа ради успостављања квалитативне зависности оптималног реда мултипола од комплексности и пречника објекта. Даља анализа биће дата само као показатељ да овакав концепт постоји, без егзактног аналитичког доказа.

Разматран је скуп објеката различитих облика попречног пресека. Сваком објекту мењан је полупречник, уз анализу представљену у претходном поглављу за све релевантне редове мултипола, у складу са релацијом (4.4). У литератури је већ показано да анализа електрички великих објеката не представља проблем чак ни једноставнијим методама које користе базисне функције нултог реда (нпр. *standard sparse processing* или LSM). Много већи изазов представља локализација

и одређивање облика објеката чија је електрична величина упоредива са, или мања од таласне дужине.

Скуп разматраних објеката обухвата конкавне, “звездасте” објекте различитог нивоа комплексности. Тачније, разматрани су савршено проводни метални објекти са растућим бројем крака, односно са све израженијим ефектом вишеструког расејања на самом објекту. Већи број кракова значи и њихово мање међусобно растојање, односно потребу за прецизнијом анализом у смислу тежег уочавања конкавности у добијеним резултатима. Теорија изложена у претходном поглављу примењена је и у овој анализи, тј. разматрана је побуда ТЕ [133], односно ТМ [134] поларизованим инцидентним пољем.

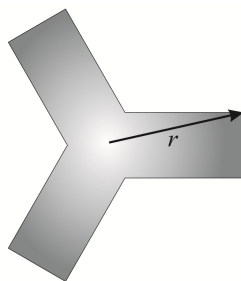
У програмском пакету WIPL-D Pro конструисани су скалабилни модели са могућношћу промене полупречника ( $r$ ) разматраних објеката, односно коришћен је *фактор скалирања*,  $s$ , дефинисан као скалар којим су помножене све релевантне димензије испитиваног објекта. Максималан полупречник усвојен је да буде једнак једној таласној дужини, осим у случајевима који ће бити посебно наглашени. У складу са релацијом (4.4), овако дефинисан максималан полупречник одговара максималном релевантном реду мултипола,  $\bar{n} = 6$ . За мање вредности полупречника објекта, сходно је разматран и мањи максималан ред мултипола. Полупречник објекта смањиван је од вредности  $\lambda$  до  $0,35\lambda$  са кораком од  $0,05\lambda$ .

Параметри анализе идентични су оним из претходног поглавља. Једини изузетак су димензије простора претраживања које су линеарно мењане заједно са полупречником разматраног објекта. Наиме, простор претраживања је у свим случајевима квадратног облика са страницом од  $4\lambda s$ . Радна фреквенција је 2 GHz, полупречник антенског низа (састављеног од полуталасних дипола) износи  $5\lambda$ , а простор претраживања дискретизован је коришћењем  $50 \times 50$  униформно постављених тачака. У нумеричким симулацијама висина објеката (у циљу остваривања 2D геометрије) износи  $10\lambda$ , а анализа расејаног поља обезбеђена је одузимањем матрица добијених са и без присутног објекта, као у претходном поглављу. Број елемената у антенском низу биран је на следећи начин: за објекте већег полупречника,  $r \in [0,7\lambda, \dots, \lambda]$  број елемената износи 50 и резултати су добијени комбиновањем података добијених са четири суседне антене. С друге

стране, за објекте мањег полупречника,  $r \in [0,35\lambda, \dots, 0,65\lambda]$ , број елемената у низу износи 24 и резултати су добијени комбиновањем података добијених са две суседне антене. Конвексна анвелопа рачуната је коришћењем података добијених анализом нултог реда мултипола, тј. *standard sparse processing* методом за објекат одговарајућег пречника. У свим случајевима, за добијање конвексне анвелопе, комбиновани су подаци добијени са две суседне антене. Такође, конвексну анвелопу могуће је добити и LSM методом. Зарад приказивања концепта оптималног реда мултипола, подацима током анализе није додаван шум.

## 5.2. Концепт оптималног реда мултипола - ТЕ поларизација

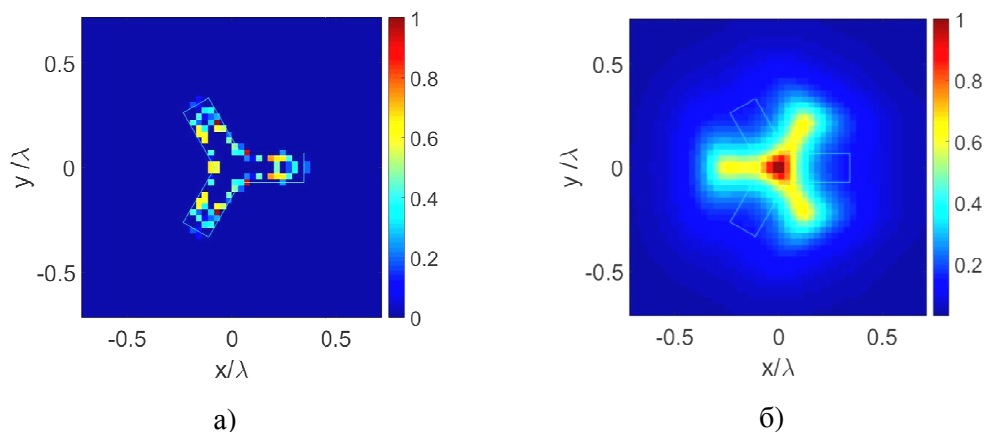
Први разматрани објекат за случај ТЕ поларизације дат је на слици 5.1. У питању је објекат са попречним пресеком у облику трокраке звезде.



Слика 5.1 - Попречни пресек првог разматраног објекта: трокрака звезда.

Резултат анализе оптималног реда мултипола, за случај објекта са слике 5.1, при  $r = 0,35\lambda$ , дат је на слици 5.2а, а у циљу поређења, на слици 5.2б дата је слика истог објекта добијена LSM методом.

Као што се са слика 5.2а и 5.2б види, резултати добијени предложеном методом за оптимални ред мултипола верно осликавају облик разматраног објекта. С друге стране, облик добијен LSM методом није у потпуности доследан са обликом анализираног објекта.

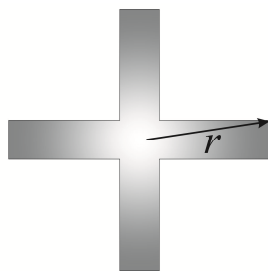


$$n = 1, r = 0,35\lambda$$

Слика 5.2 - Резултати анализе оптималног реда мултипола за случај објекта са попречним пресеком у облику трокраке звезде: а) предложена метода за случај оптималног реда мултипола, и б) LSM метода.

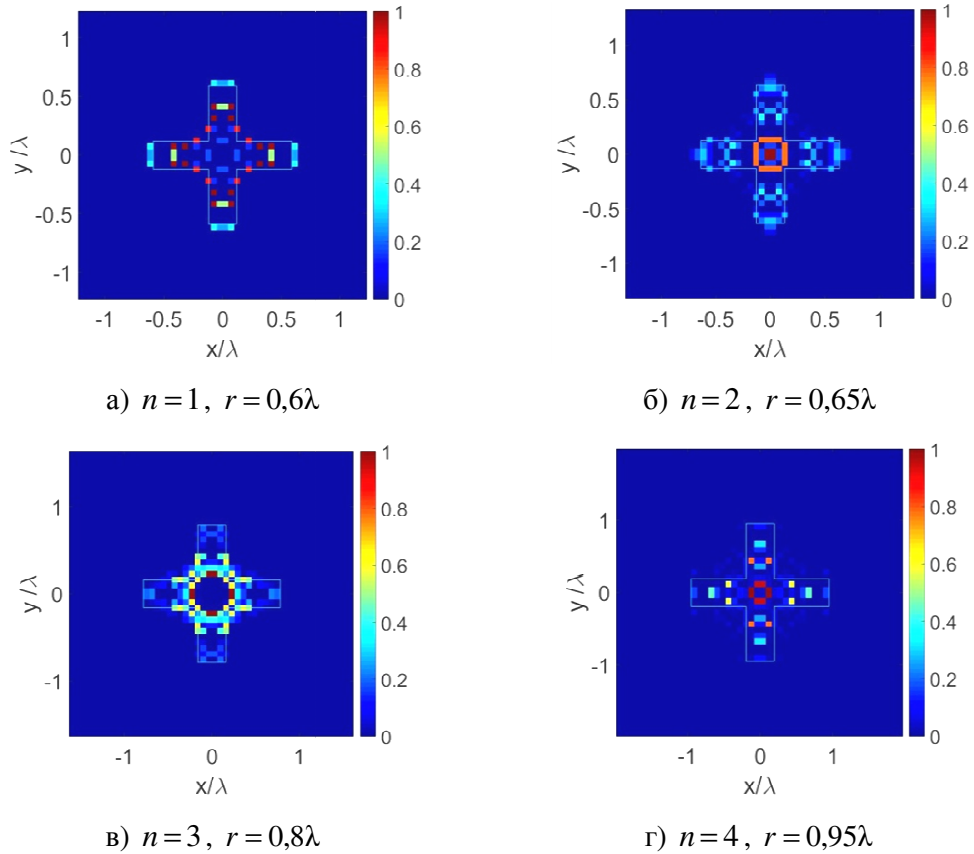
Анализа је спроведена за различите електричне величине овог објекта и реконструкција је била могућа све до најмање вредности полупречника од  $r = 0,2\lambda$ . За све испитиване полупречнике објекта добијено је да је оптималан први ред мултипола. На слици 5.2а приказан је само један репрезентативан пример.

Други разматрани објекат за случај ТЕ поларизације дат је на слици 5.3. У питању је објекат са попречним пресеком у облику крста.



Слика 5.3 - Попречни пресек другог разматраног објекта: крст.

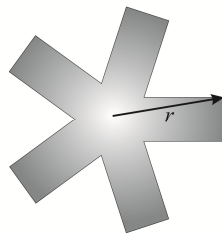
Резултати анализе оптималног реда мултипола за случај објекта са слике 5.3, за неколико вредности полупречника, дати су на слици 5.4. У спроведеним анализама конкавност објекта је била видљива до вредности полупречника од  $r = 0,35\lambda$ .



Слика 5.4 - Резултати анализе оптималног реда мултипола за случај објекта са попречним пресеком у облику крста.

Као што се са слике 5.4 може приметити, у случају објекта са слике 5.3 већим полупречницима објекта одговарају виши оптимални редови мултипола.

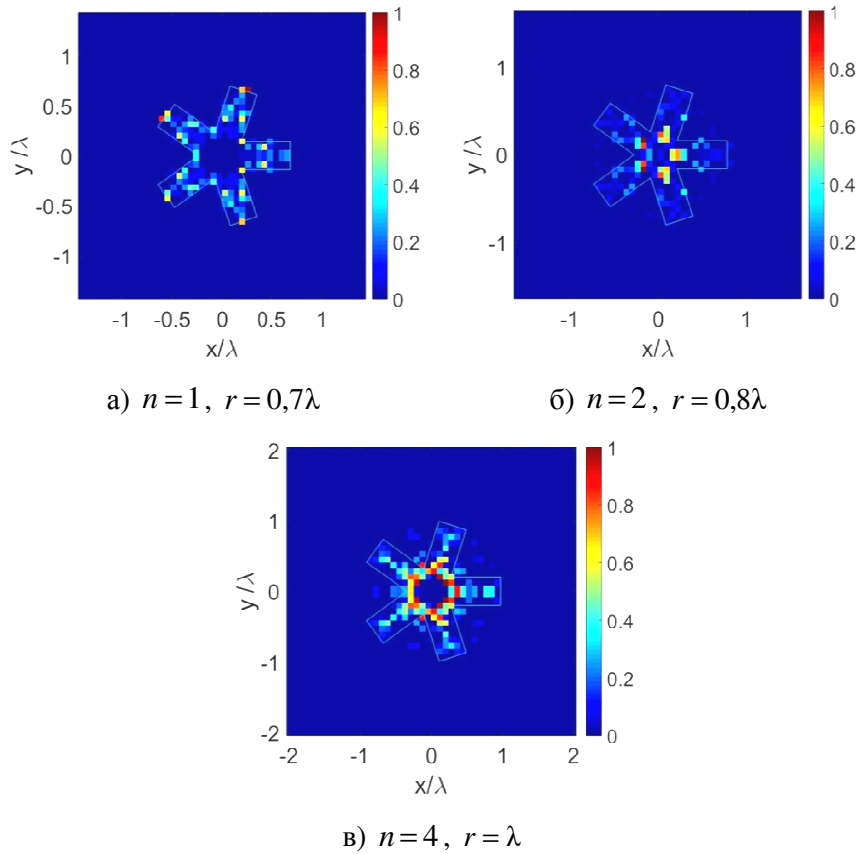
Следећи разматрани објекат за случај ТЕ поларизације дат је на слици 5.5. У питању је објекат са попречним пресеком у облику петокраке звезде.



Слика 5.5 - Попречни пресек трећег разматраног објекта: петокрака звезда.



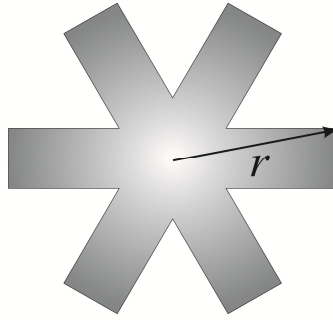
Резултати анализе оптималног реда мултипола за случај објекта са слике 5.5 дати су на слици 5.6. У нашим анализама, конкавност овог објекта је била видљива до вредности полупречника од  $r = 0,45\lambda$ .



Слика 5.6 - Резултати анализе оптималног реда мултипола за случај објекта са попречним пресеком у облику петокраке звезде.

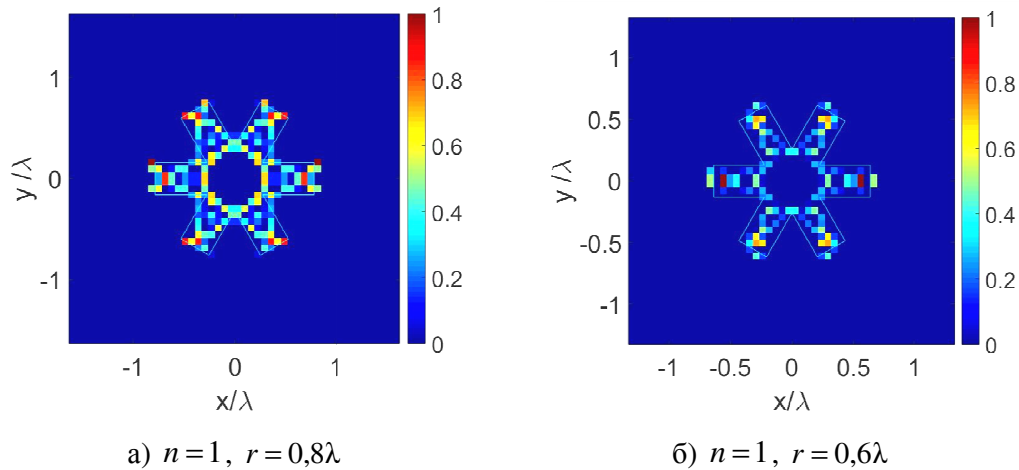
За објекат са слике 5.5 интересно је напоменути да, мењајући полупречник објекта, ни у једном случају није добијено да је трећи ред мултипола оптималан, што је свакако тема за даље истраживање.

Последњи разматрани објекат за случај ТЕ поларизације дат је на слици 5.7. У питању је објекат са попречним пресеком у облику шестокраке звезде.



Слика 5.7 - Попречни пресек четвртог разматраног објекта: шестокрака звезда.

Резултати анализе оптималног реда мултипола за случај објекта са слике 5.7, за полупречнике  $r=0,8\lambda$  и  $r=0,6\lambda$  дати су на слици 5.8. Конкавност објекта видљива је до вредности полупречника од  $r=0,5\lambda$ .

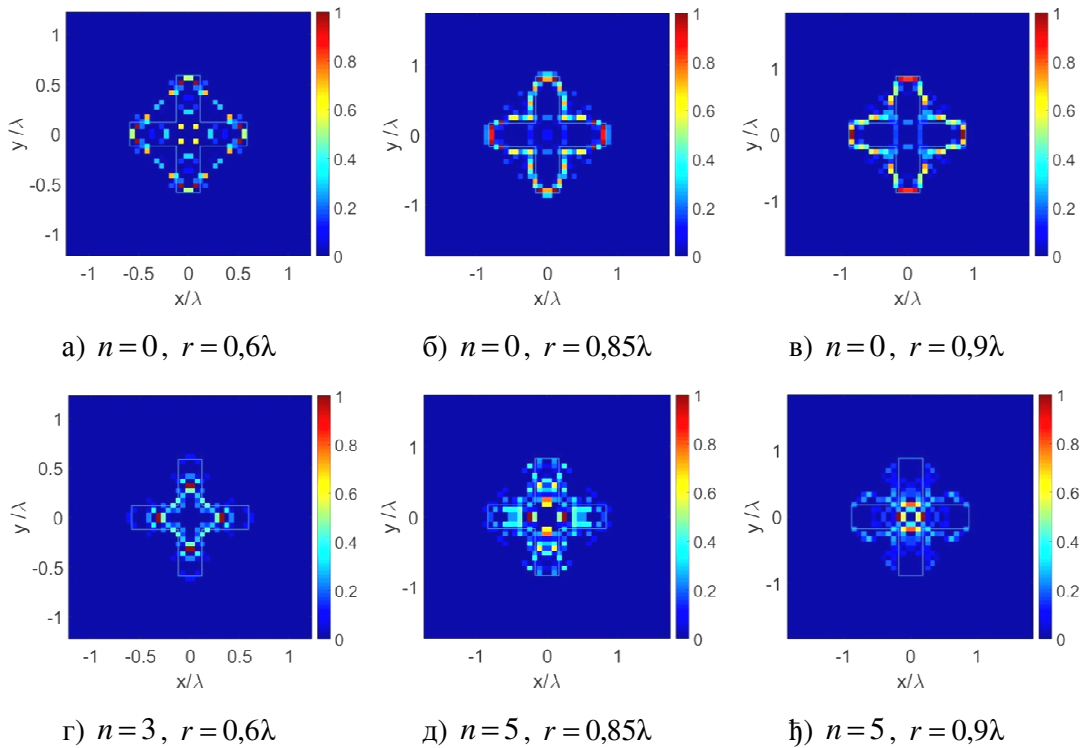


Слика 5.8 - Резултати анализе оптималног реда мултипола за случај објекта са попречним пресеком у облику шестокраке звезде.

Без обзира на разматрани полупречник објекта са слике 5.7, током анализе је установљено да је увек оптималан први ред мултипола (два репрезентативна примера су дата на сликама 5.8а и 5.8б). Овај закључак је идентичан оном за случај објекта у облику трокраке звезде са слике 5.1. Иако су ова два разматрана објекта различитих комплексности, на основу сличности између њихових попречних пресека (шестокрака звезда се састоји од две трокраке звезде ротиране за  $180^\circ$ ), испоставља се да без обзира на полупречник објекта, оптималан увек остаје први ред мултипола.

### 5.3. Концепт оптималног реда мултипола - ТМ поларизација

У случају ТМ поларизације први анализирани објекат идентичан је оном са слике 5.3. Показује се да је оптималан ред мултипола или нулти, или  $\bar{n}-1$ , у зависности од електричне величине објекта. На сликама 5.9а–в дат је изглед реконструкције за нулти ред мултипола, док је на сликама 5.9г–ђ дат изглед мултипола реда  $\bar{n}-1$ , за три карактеристична полупречника објекта.

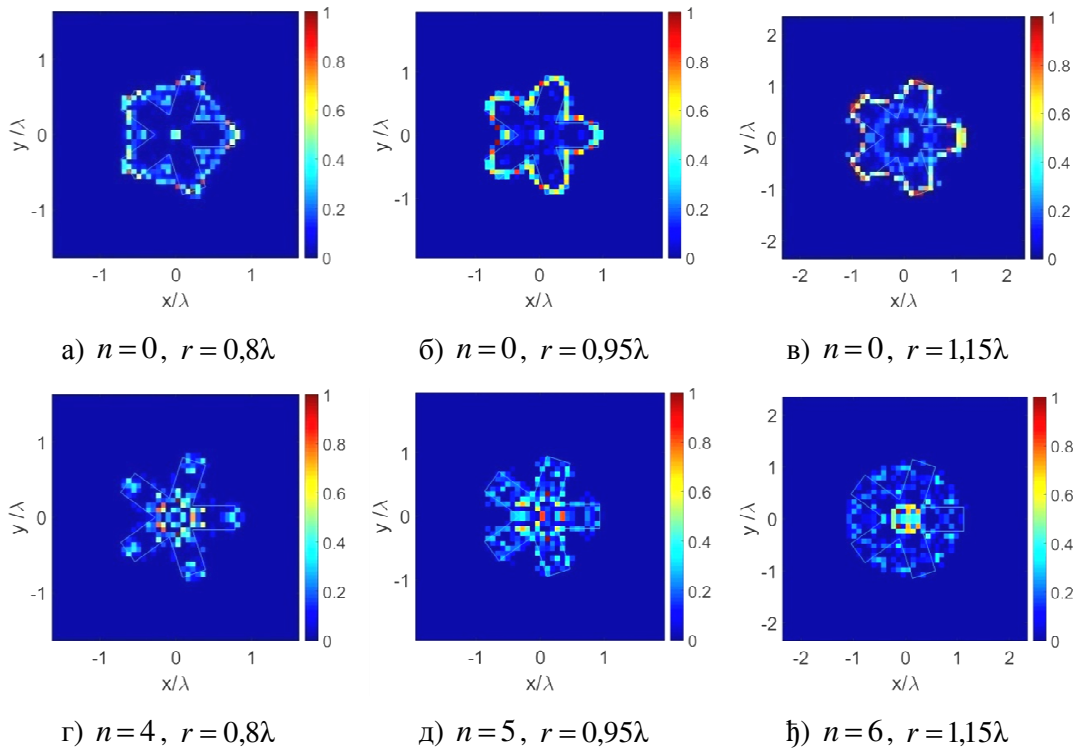


Слика 5.9 - Резултати анализе нултог и  $\bar{n}-1$ -ог реда мултипола за три карактеристична полупречника објекта са попречним пресеком у облику крста.

Са слика 5.9а и 5.9г се може видети да је, за довољно мали полупречник објекта, оптималан виши ред мултипола. С друге стране, за већу вредност полупречника објекта (слике 5.9в и 5.9ђ), оптималан је нулти ред мултипола. Овај закључак је у складу са ранијом констатацијом да је облик електрички великог објекта могуће проценити и једноставним методама, као што је у овом случају *standard sparse processing*. Треба напоменути да минималан полупречник објекта

са попречним пресеком у облику крста, за случај ТМ поларизације, за који је још увек могуће видети његову конкавну природу, износи  $0,55\lambda$ .

Други анализирани објекат идентичан је оном са слике 5.5. Као и у претходном случају, оптималан ред мултипола је или нулти, или  $\bar{n}-1$ , у зависности од електричне величине објекта. На сликама 5.10а–в дат је изглед реконструкције за нулти ред мултипола, док је на сликама 5.10г–ђ дат изглед реконструкције за мултипол реда  $\bar{n}-1$ , за три карактеристична полупречника објекта.



Слика 5.10 - Резултати анализе нултог и  $\bar{n}-1$ -ог реда мултипола за три карактеристична полупречника објекта са попречним пресеком у облику петокраке звезде.

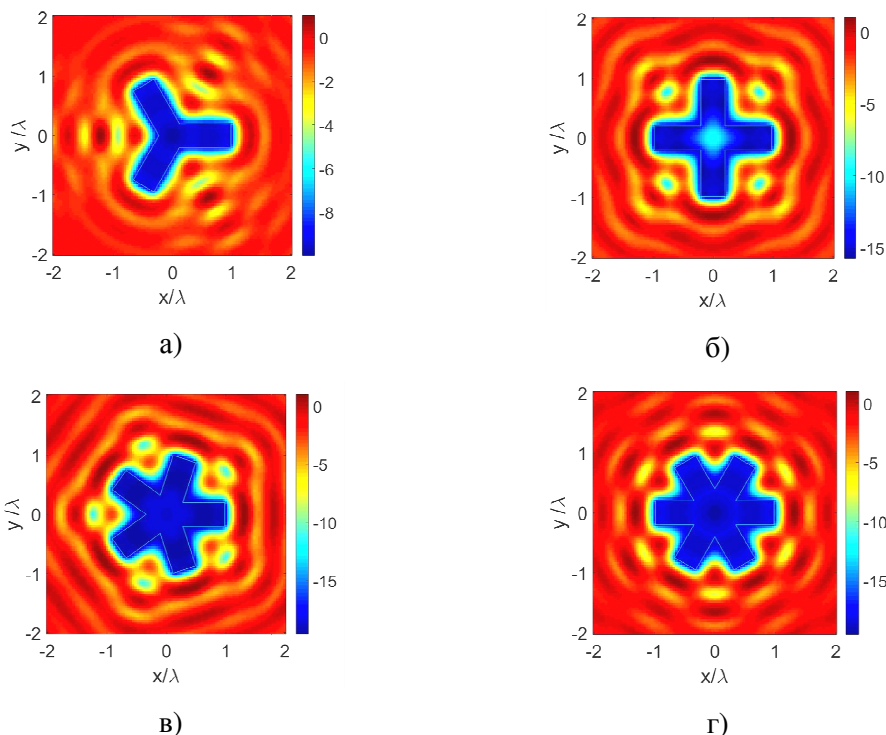
Са слика 5.10а и 5.10г се може извести сличан закључак као у случају објекта са попречним пресеком у облику крста: за мале вредности полупречника објекта оптималан је виши ред мултипола, док је за већу вредност полупречника објекта оптималан нулти ред мултипола (слике 5.10в и 5.10ђ). Минималан полупречник објекта са попречним пресеком у облику петокраке звезде, за случај ТМ

поларизације, за који је још увек могуће видети његову конкавну природу, износи  $0,6\lambda$ .

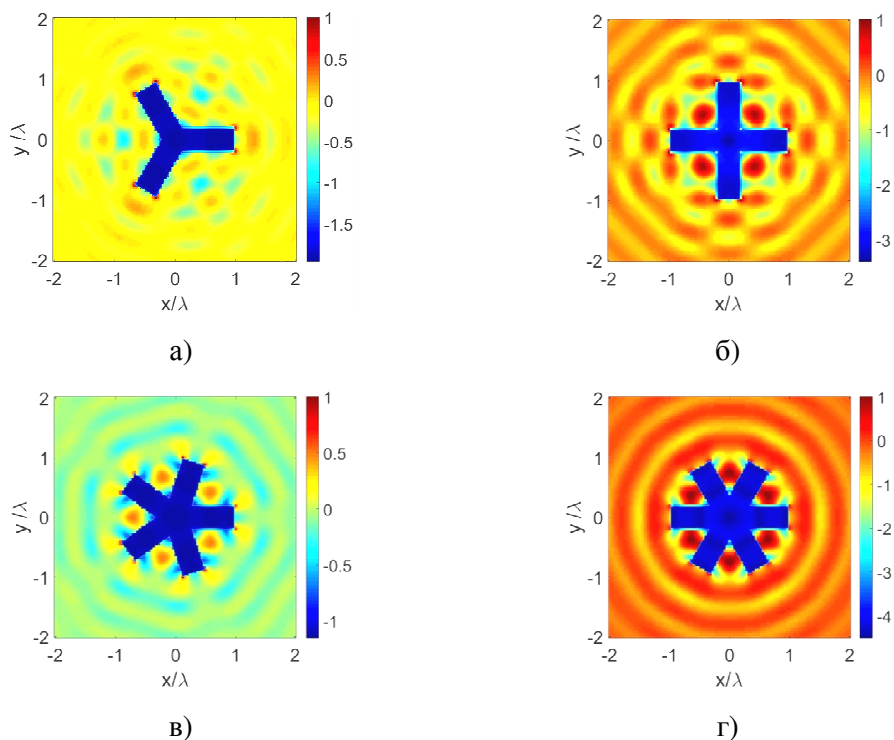
#### 5.4. Дискусија резултата

С обзиром на то да је у резултатима приказаним у одељку 5.2, као и у оним из одељка 5.3, могуће уочити одређене правилности, у овом одељку биће сумирани закључци анализе концепта оптималног реда мултипола.

Приказани су резултати испитивања вршеног у случају објекта звездастог попречног пресека, у зависности од нормализоване вредности полупречника објекта. Раније описан проблем вишеструке рефлексије приказан је на слици 5.11 за случај ТМ, односно на слици 5.12 за случај ТЕ поларизације. Тачније, на сликама 5.11 и 5.12 дат је изглед магнитуде расејаног електричног поља, на примеру објекта јединичног нормализованог полупречника, који су коришћени за потребе одељака 5.2 и 5.3.



Слика 5.11 - Приказ расејаног електричног поља и проблема вишеструке рефлексије за случај  $r = \lambda$  и ТМ поларизације: а) трокрака звезда; б) крст; в) петокрака звезда; г) шестокрака звезда.

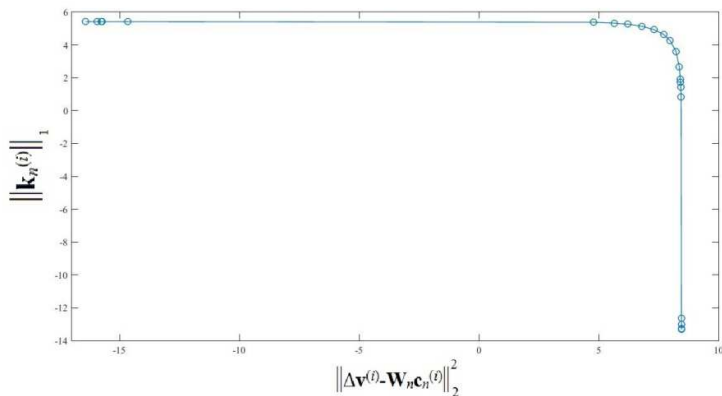


Слика 5.12 - Приказ расејаног електричног поља и проблема вишеструке рефлексије за случај  $r = \lambda$  и ТЕ поларизације: а) трокрака звезда; б) крст; в) петокрака звезда; г) шестокрака звезда.

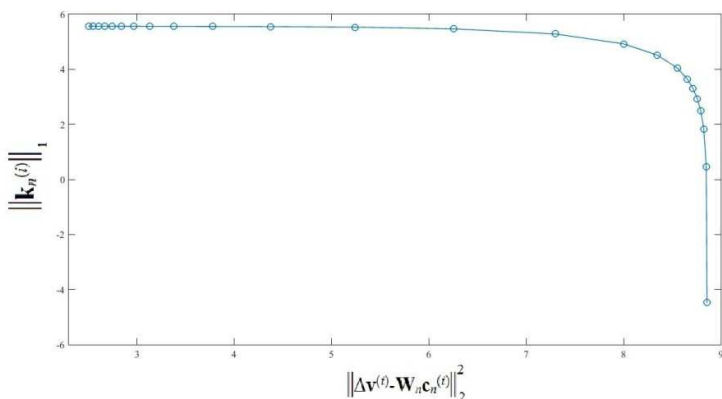
Као што се са слика 5.11 и 5.12 може видети, шупљине између кракова објеката представљају регије јаког електричног поља, посебно у случају ТЕ поларизације.

Показано је да у већини случајева постоји један ред који је довољан за реконструкцију облика објекта. Међутим, за одређене величине објекта није се издвајао ниједан ред посебно, а тада је облик објекта могуће добити као суму реконструкција добијених коришћењем свих значајних редова мултипола. Поред тачности реконструкције, која *a priori* није позната, као критеријум смо користили утицај регуларизационог параметра  $\gamma$  на стабилност добијеног решења. Наиме, вредност регуларизационог параметра није стриктно ограничавана на тачку колена одговарајуће L-криве, већ је толерисана нешто шира област око колена. Показало се да уколико постоји оптималан ред мултипола, избор регуларизационог параметра није од велике важности. Тачније, за читав низ различитих вредности параметра  $\gamma$  уочава се висок квалитет добијене реконструкције. Уколико је током анализе добијен квалитетан резултат који није

стабилан са променом вредности  $\gamma$ , такав резултат је одбациван и сматран неоптималним. Типични примери L-крива добијених за случај оптималног и неоптималног реда мултипола дати су на слици 5.13.



а)



б)

Слика 5.13 - Примери L-крива добијених анализом а) оптималног, и б) неоптималног реда мултипола.

У случају оптималног реда мултипола са слике 5.13а може се приметити да се већи број тачака на L-кривој налази у околини колена, што иде у прилог ранијој тврдњи да је у овом случају за реконструкцију могуће искористити било коју од већег броја блиских вредности регуларизационог параметра. С друге стране, у случају неоптималног реда мултипола (слика 5.13б), овај ефекат није уочљив и тачке на L-кривој су распоређене знатно равномерније. Имајући у виду слику

5.13, могуће је оптималан ред мултипола пронаћи као онај код кога се, на одговарајућој L-кривој, добијају тачке груписане у околини колена.

У случају ТЕ поларизације није сасвим јасна веза минималног полупречника потребног да обухвати објекат и оптималног реда мултипола. Наиме, код објеката са слика 5.4 и 5.6 појединачно уочава се да оптимални ред мултипола расте са полупречником описаног круга. Притом треба имати у виду расподелу електромагнетског поља за растући ред мултипола (видети слику 3.4), односно способност виших редова мултипола да прецизније реконструишу комплексније објекте.

Додатно, граница конкавности је у свим случајевима тражена искључиво за ред мултипола који се показао као оптималан за дати полупречник (ако уопште постоји такав ред). Показује се да је ова граница нижа за једноставније објекте, што има смисла када се има у виду слабо изражен ефекат вишеструког расејања на једноставнијим објектима. Детаљи комплексног конкавног објекта постају, за мале вредности полупречника, “невидљиви” за антенски низ (из очигледног разлога ограничене резолуције за дату таласну дужину), што није случај уколико се разматра објекат са већим полупречником.

Резултати анализе, односно оптималан ред мултипола, не зависе од избора димензија простора претраге. Резолуција добијене слике се, наравно, мења са променом димензија простора претраге, али ред који се показао као оптималан такав и остаје.

Треба такође напоменути да, пошто је комплетна анализа базирана на оптимизационом алгоритму, неки од добијених резултата нису потпуно доследни. Пример је резултат на слици 5.6, где су пронађени полупречници објекта такви да први, други и четврти ред мултипола постану оптимални, док трећи ред мултипола није оптималан ни за једну вредност полупречника објекта.

У случају ТМ поларизације као релевантни су се показали нулти и ред мултипола за један нижи од максималног, тј.  $\bar{n}-1$ . Притом, интересантно је уочити да се као резултат анализе нултог реда мултипола добијају пиксели углавном по ободу разматраног објекта. Имајући у виду да су разматрани метални објекти, односно да се индуковане струје налазе искључиво по ободу објекта,



долази се до закључка да овакав резултат највише одговара физички реалном решењу датог проблема.

Једна од могућности за препознавање оптималног реда мултипола садржана је у анализи L-кривих добијених након сваке појединачне анализе (односно за сваки од релевантних редова мултипола). Наиме, након цртања кривих и одабира одговарајућих колена, могуће је за свако колено прочитати вредност на  $x$ -оси добијеног графика (да подсетимо, ова вредност представља  $l_2$ -норму разлике тачне и симулиране вредности расејаног електричног поља на месту сензора) и на основу тог податка установити који редови мултипола су употребљивији (у смислу тачности) од осталих. Иако овај приступ не омогућава уштеду времена потребног за анализу (јер је свакако потребно анализирати све релевантне редове мултипола), ипак пружа један вид демистификације концепта оптималног реда мултипола. С друге стране, треба имати у виду да се читавањем вредности на  $x$ -оси за тачку колена L-криве добија информација о *усредњеној* (по угловима инциденције) квадратној грешци између мерене и симулиране вредности расејаног електричног поља на месту сензора.

На крају приказане анализе поставља се питање одређивања оптималног реда мултипола само на основу вредности расејаног поља на месту сензора, односно коришћењем неког од параметара добијених на приступу антена у низу ( $z$ -,  $y$ - или  $s$ -параметри). Аналитичка процена оптималног реда мултипола није једноставан проблем, посебно када се има у виду да је комплетна анализа дата у форми оптимизационог алгорита. Један од праваца у предстојећем истраживању биће и аналитичка потпора концепта оптималног реда мултипола.

## 6. Нумерички резултати за тродимензионалне проблеме

### 6.1. Уводне напомене

Након показивања да предложена метода функционише у дводимензионалним ТМ и ТЕ сценаријима, потребно је испитати њене могућности и у тродимензионалном случају.

Стога ће у овом поглављу бити разматран општи случај сензора постављених у правцу ортова сферног координатног система. Како се анализа, као и у претходним поглављима, врши у далеком пољу примопредајних антена, потребно је разматрати две од три могуће оријентације антена, и то  $\phi$ - и  $\theta$ -оријентацију. Оваквом геометријом могуће је у потпуности окружити испитивани објекат и на тај начин добити комплетну информацију о начину на који дати објекат расејава инцидентно електромагнетско поље из свих упадних углова. Иако се у практичним применама веома ретко дешава да испитивани објекат може да се у потпуности окружи сензорима, теорија изложена у трећем поглављу важи и у случају када је број углова инциденције ограничен. Треба наравно напоменути да, као последица, у овом случају долази до лошијих реконструкција облика испитиваног објекта услед прикупљања некомплетног скупа информација о начину на који објекат расејава електромагнетско поље.

У даљем тексту биће приказани резултати добијени тродимензионалном анализом металних (РЕС), односно диелектричних објеката. Радна фреквенција износи 2 GHz, са полуталасним диполима као сензорима. Подацима добијеним на пријемним антенама додат је бели Гаусов шум (AWGN), тако да крајњи однос сигнал-шум износи 20 dB.

У алгоритам су имплементирани изрази (3.86) за  $E_{\theta}$ - и (3.87) за  $E_{\varphi}$ -компоненту електричног поља, који су изведени у одељку 3.3.3. Треба напоменути да комплетан тродимензионални систем једначина које дефинишу вредности електромагнетског поља укључује доприносе  $TE_r$  и  $TM_r$  поларизација, у складу са [126], као

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) A_r, \\
E_{\theta} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{j\omega\epsilon r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta}, \\
E_{\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\epsilon r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \varphi}, \\
H_r &= \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) F_r, \\
H_{\theta} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{j\omega\mu r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta}, \\
H_{\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\mu r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \varphi}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Изрази за електрично поље у случају  $TM_r$  поларизације дати су изразима (3.86) и (3.87), док су изрази за случај  $TE_r$  поларизације дати релацијама (3.89) и (3.90).

За потребе нумеричке анализе, дефинисан је вектор разлике одзива антенског система са и без присутног објекта који се анализира, по угледу на дводимензионалну анализу из четвртог поглавља, као

$$\Delta \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{W}_n \mathbf{c}_n^{(i)}. \tag{6.2}$$

Притом, речници су дефинисани са

$$\mathbf{W}_n = [\mathbf{W}_n^c \ \mathbf{W}_n^s], \tag{6.3}$$

$$\mathbf{W}_n^c = \cos(n\varphi) \begin{bmatrix} u_{11}^{\varphi/\theta} & \cdots & u_{1L}^{\varphi/\theta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M1}^{\varphi/\theta} & \cdots & u_{ML}^{\varphi/\theta} \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

$$\mathbf{W}_n^s = \sin(n\varphi) \begin{bmatrix} u_{11}^{\varphi/\theta} & \cdots & u_{1L}^{\varphi/\theta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M1}^{\varphi/\theta} & \cdots & u_{ML}^{\varphi/\theta} \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

$$u_{ij}^{\varphi/\theta} = g_{ij}^{\varphi/\theta} h_{\varphi/\theta}(\mathbf{r}_j). \quad (6.6)$$

Такође, по угледу на (3.86), односно (3.87), важи и

$$u_{ij}^{\theta} = -\frac{j}{\omega\mu\epsilon R_{ij}} \left[ \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} L_n^m(\cos \theta) + L_n^{m+1}(\cos \theta) \right] \cdot \left[ \sqrt{\frac{\pi\beta^3 R_{ij}}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta R_{ij}) - 2n \sqrt{\frac{\pi\beta}{8R_{ij}}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta R_{ij}) \right], \quad (6.7)$$

односно

$$u_{ij}^{\varphi} = -\frac{m}{\omega\mu\epsilon R_{ij} \sin \theta} L_n^m(\cos \theta) \cdot \left[ \sqrt{\frac{\pi\beta^3 R_{ij}}{2}} H_{n-1/2}^{(2)}(\beta R_{ij}) - 2n \sqrt{\frac{\pi\beta}{8R_{ij}}} H_{n+1/2}^{(2)}(\beta R_{ij}) \right]. \quad (6.8)$$

Аналогно изразу (4.21) дефинисана је функција циља као

$$\hat{\mathbf{c}}_n^{(i)} = \min_{\mathbf{c}_n} \left\{ \|\Delta \mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{W}_n \mathbf{c}_n^{(i)}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{k}_n^{(i)}\|_1 \right\}, \quad (6.9)$$

при чему важи

$$\mathbf{k}_n = [k_1^n \dots k_L^n]^T, \quad (6.10)$$

$$k_l^n = \sqrt{(a_l^n)^2 + (b_l^n)^2}, \quad (6.11)$$

а коначна реконструкција добијана је коришћењем

$$I(l) = \sum_i \sum_n |k_n^{(i)}(l)|. \quad (6.12)$$

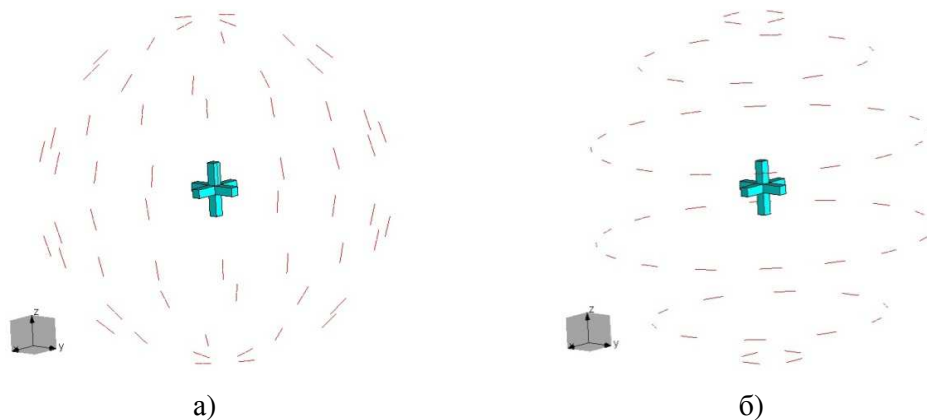
Због физике проблема, односно облика релација (6.7) и (6.8), постоје два случаја у погледу редова мултипола, односно редова придружених Лежандрових полинома прве врсте, који се не могу користити. Наиме, у изразу (6.7) јавља се извод придруженог Лежандровог полинома прве врсте и реда  $m$ , који се може изразити користећи ред  $m+1$ . Другим речима, када се разматра сценарио са  $\theta$ -оријентисаним диполима, не могу се у обзир узети парови  $(n, m)$  за које важи  $n = m$ . Такође, због директне пропорционалности израза (6.8) са редом придруженог Лежандровог полинома прве врсте,  $m$ , јасно је да у случају сценарија са  $\varphi$ -оријентисаним диполима није могуће разматрати случај  $m = 0$ .

Разматрана су три конкавна тродимензионална објекта, а реконструкције су добијене за случај две паралелне равни (енгл. *slice*). Прва раван је  $xOy$  раван на висини  $z=0$ , док је друга раван паралелна првој, али на нешто већој висини (у зависности од геометрије самог објекта). Прву раван означимо као *mid-slice*, а другу као *top-slice*. У литератури се могу пронаћи радови који анализирају 3D геометрију (видети референце из уводног поглавља). У таквим радовима се, поред оваквог приступа, који подразумева две или више паралелних равни, анализирају и две или три ортогоналне равни ( $xOy$ -,  $xOz$ - и  $yOz$ -раван). Имајући у виду да овде разматрани објекти имају идентичан облик попречног пресека у свим ортогоналним равнима, одабран је први приступ.

## 6.2. Тродимензионални метални објекат у облику крста

Први разматрани објекат дат је на слици 6.1. У питању је тродимензионални метални објекат са попречним пресеком у облику крста у све три ортогоналне равни.

Испитивани објекат је сферно окружен полуталасним диполима, постављеним у шест слојева (гледано у односу на  $z$ -осу). Сваки од слојева састављен је од варијабилног броја дипола, који је одабран тако да диполи буду што равномерније распоређени по  $\varphi$ -, односно  $\theta$ -координати. Стога се у крајњим слојевима налазе по четири дипола, у средњим по 10, док се у унутрашњим слојевима налази по 16 дипола, што је укупно 60 антена.

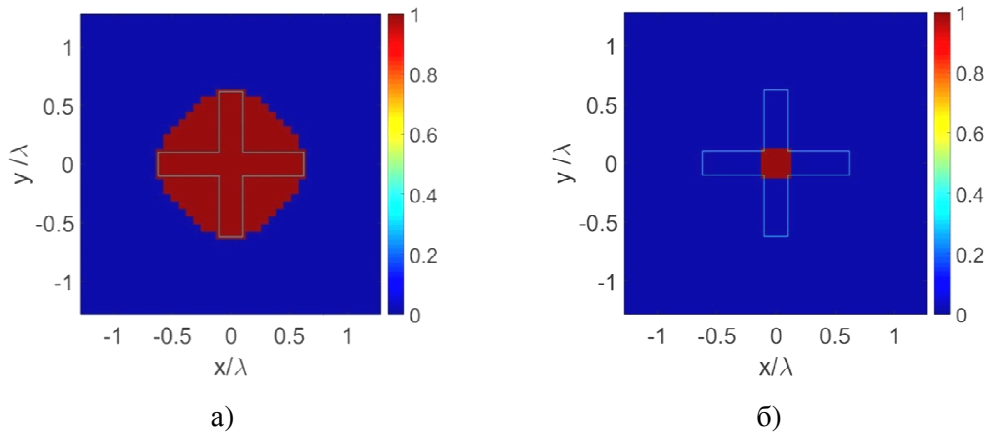


Слика 6.1 - Анализирани тродимензионални метални објекат у облику крста:

а)  $\theta$ -оријентисани диполи, и б)  $\varphi$ -оријентисани диполи.

Испитивани објекат је пречника  $1,25\lambda$ , док ширина крака износи  $0,1\lambda$ . Полупречник сферног антенског низа је  $4\lambda$ , а димензије простора претраге су  $2,5\lambda \times 2,5\lambda$ , са  $40 \times 40$  тачака. Након извршене симулације, истовремено су обрађивани подаци добијени са две суседне антене ( $P=2$ ), у циљу добијања стабилнијих резултата.

Стандардном обрадом ретких сигнала, за случај најнижег реда мултипола који је могуће анализирати,  $n=1$ , и за  $\phi$ -оријентисане диполе, добијене су конвексне анvelope, и то у две равни: за *mid-slice* ( $z=0$ ) и за *top-slice* ( $z=\lambda/2$ ), приказане на слици 6.2. Треба напоменути да се веома слични резултати, у погледу конвексних анvelope, добијају и за  $\theta$ -оријентисане диполе.



Слика 6.2 - Конвексне анvelope за тродимензионални метални објекат у облику крста: а) *mid-slice* и б) *top-slice*.

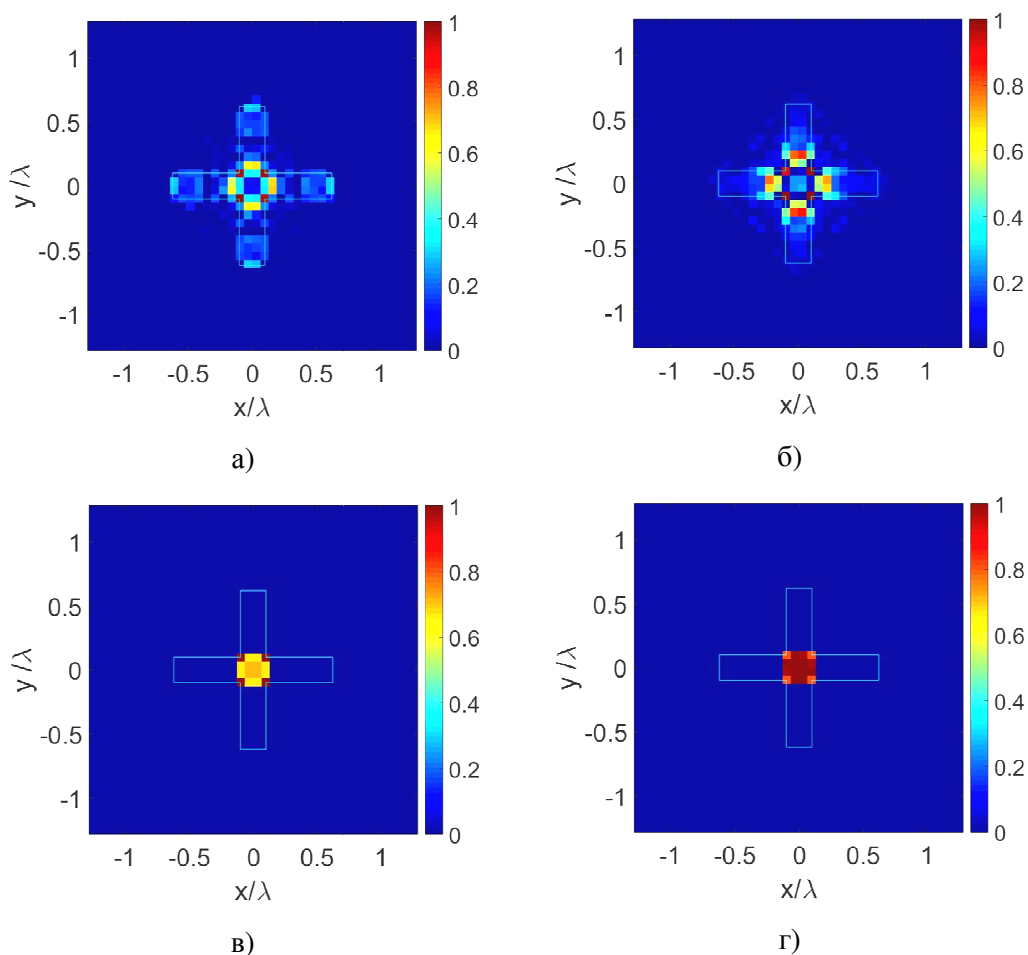
Резултати добијени предложеном методом, за  $\theta$ - и  $\phi$ -оријентисане диполе, у обе равни (*top-slice* и *mid-slice*), дати су на слици 6.3. Као што је био случај са резултатима дводимензионалних анализа, и овде ће табеларно (табела 6.1) бити приказане вредности параметара  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , дефинисаних у четвртом поглављу.

Табела 6.1

Параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  рачунати за тродимензионални метални објекат са попречним пресеком у облику крста

<i>slice</i>	$\eta_{1\theta}$ [%]	$\eta_{2\theta}$ [%]	$\eta_{1\phi}$ [%]	$\eta_{2\phi}$ [%]
<i>mid-slice</i>	95	75	80	71
<i>top-slice</i>	100	100	100	100

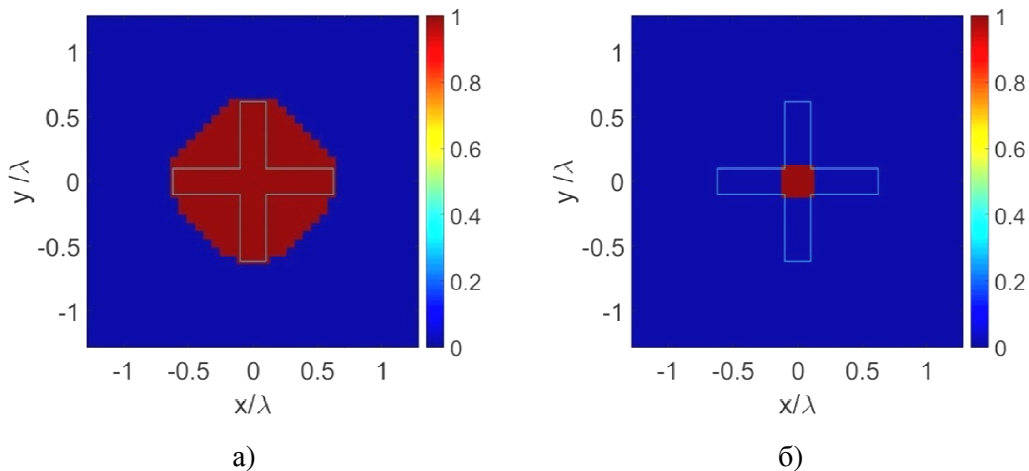
Током симулација примећено је неколико правилности везаних за објекат у облику крста и за наредна два објекта. Наиме, без обзира на то да ли се анализира *mid-slice* или *top-slice*, током реконструкција, у случају  $\theta$ -оријентисаних дипола, испоставило се да је довољно користити само комбинације  $(n, 0)$ , при чему ред мултипола  $n$  узима вредности од нуле до  $\bar{n}$ , као и у претходним поглављима. С друге стране, приликом анализе сценарија са  $\phi$ -оријентисаним диполима, довољно је користити само комбинације  $(n, 1)$ .



Слика 6.3 - Резултати за тродимензионални метални објекат у облику крста:  
 а) *mid-slice* и  $\theta$ -диполи, б) *mid-slice* и  $\phi$ -диполи, в) *top-slice* и  $\theta$ -диполи, г) *top-slice*  
 и  $\phi$ -диполи.

### 6.3. Тродимензионални диелектрични објекат у облику крста

Следећи разматрани објекат идентичан је оном из претходног одељка, односно у питању је тродимензионални крст дат на слици 6.1, али начињен од диелектрика релативне пермитивности  $\epsilon_r = 10 - j1$ . Сви параметри анализе исти су као и у случају металног објекта. Конвексне анвелопе, добијене стандардном обрадом ретких сигнала, на сличан начин као и у одељку 6.2, за *mid*- и *top-slice*, дате су на слици 6.4, и врло су сличне оним са слике 6.2.



Слика 6.4 - Конвексне анвелопе за тродимензионални диелектрични објекат у облику крста: а) *mid-slice* и б) *top-slice*.

Резултати добијени предложеном методом, за  $\theta$ - и  $\phi$ -оријентисане диполе и нулти (односно први) ред придруженог Лежандровог полинома прве врсте, дати су на слици 6.5 за *mid*- и *top-slice*, док је у табели 6.2 дат преглед параметара  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

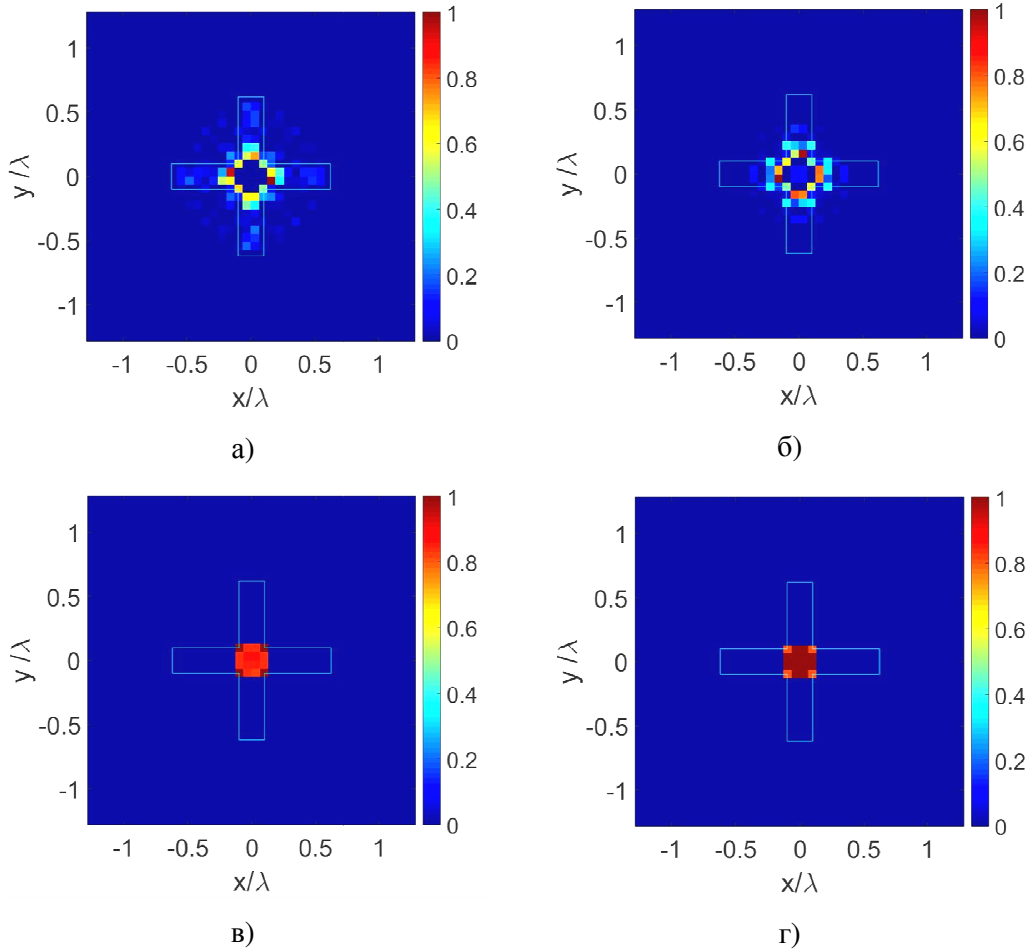
Поређењем резултата са слика 6.3 и 6.5, као и табела 6.1 и 6.2, види се да се, иако метода функционише и за диелектричне објекте, ипак бољи резултати добијају за случај металног расејача, што је и било очекивано када се имају у виду резултати дводимензионалних анализа из одељака 4.4.1 и 4.4.2. Такође, у случају металног и диелектричног објекта, нешто боље резултате дала је анализа са  $\theta$ -оријентисаним диполима.



Табела 6.2

Параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  рачунати за тродимензионални диелектрични објекат са попречним пресеком у облику крста

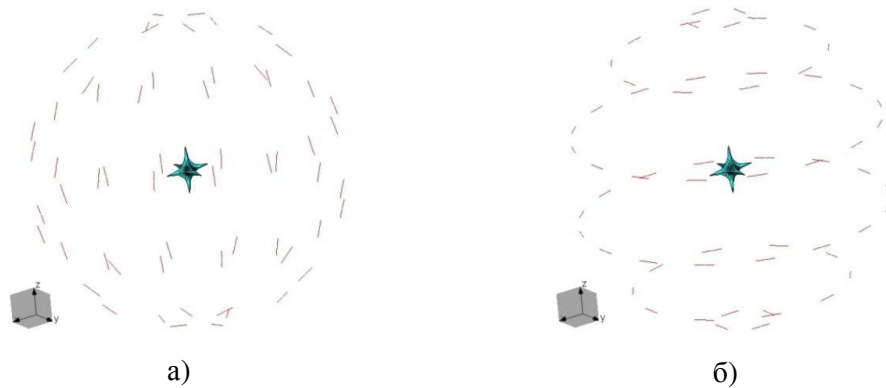
<i>slice</i>	$\eta_{1\theta}$ [%]	$\eta_{2\theta}$ [%]	$\eta_{1\phi}$ [%]	$\eta_{2\phi}$ [%]
<i>mid-slice</i>	87	37	100	36
<i>top-slice</i>	100	100	100	100



Слика 6.5 - Резултати за тродимензионални диелектрични објекат у облику крста: а) *mid-slice* и  $\theta$ -диполи, б) *mid-slice* и  $\phi$ -диполи, в) *top-slice* и  $\theta$ -диполи, г) *top-slice* и  $\phi$ -диполи.

#### 6.4. Тродимензионални метални објекат у облику звезде

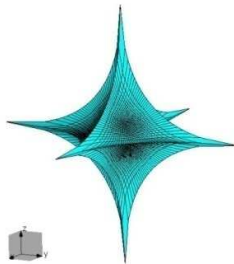
Геометрија трећег разматраног примера приказана је на слици 6.6, док је детаљан приказ разматраног објекта дат на слици 6.7. У питању је тродимензионални метални објекат са попречним пресеком у облику звезде са “експоненцијалним крацима”.



Слика 6.6 - Анализирани тродимензионални метални објекат у облику звезде:

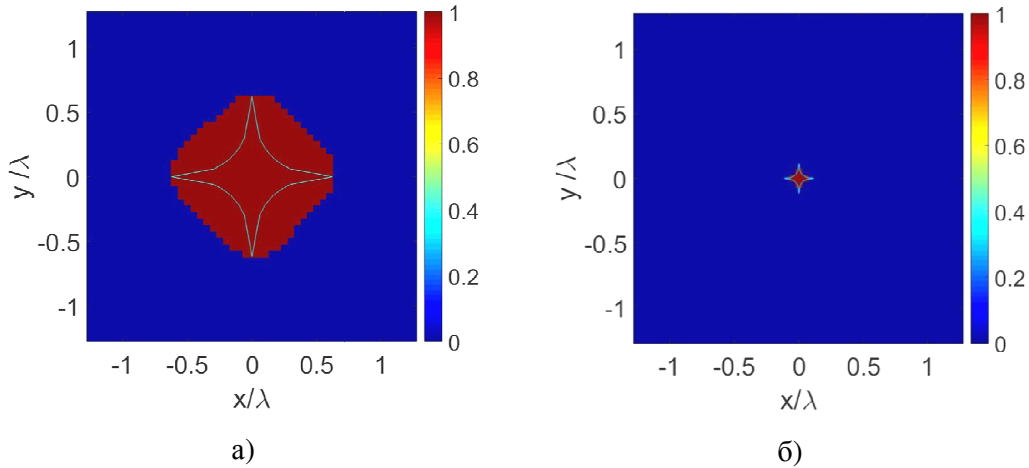
а)  $\theta$ -оријентисани диполи, и б)  $\phi$ -оријентисани диполи.

Објекат је окружен сферним низом од 60 полуталасних дипола распоређених у шест слојева, односно на идентичан начин као и у претходна два примера. Узет је исти пречник објекта од  $1,25\lambda$ , као и полупречник сферног антенског низа од  $4\lambda$ . Димензије простора претраге су и даље  $2,5\lambda \times 2,5\lambda$ , али овог пута је број тачака  $51 \times 51$ . Већа густина тачака по простору претраге узета је првенствено због већег нивоа детаља које је потребно реконструисати у односу на претходне примере. Такође, из истог разлога, приликом обраде су комбиновани подаци са четири суседне антене.



Слика 6.7 - Увећана скица тродимензионалног металног објекта у облику звезде са “експоненцијалним крацима”.

Стандардном обрадом ретких сигнала добијене су конвексне анvelope за *mid-slice* ( $z = 0$ ) и за *top-slice* ( $z = \lambda/5$ ), које су приказане на слици 6.8.



Слика 6.8 - Конвексне анvelope за тродимензионални метални објекат у облику звезде: а) *mid-slice* и б) *top-slice*.

Коментари везани за пример тродимензионалног, металног/диелектричног крста, важе и у овом случају. Наиме, при реконструкцији су коришћени подаци добијени анализама за нулти, односно први, ред придруженог Лежандровог полинома прве врсте, за случај  $\theta$ -, односно  $\phi$ -оријентисаних дипола. Резултати ових реконструкција дати су на слици 6.9, а параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  дати су у табели 6.3.

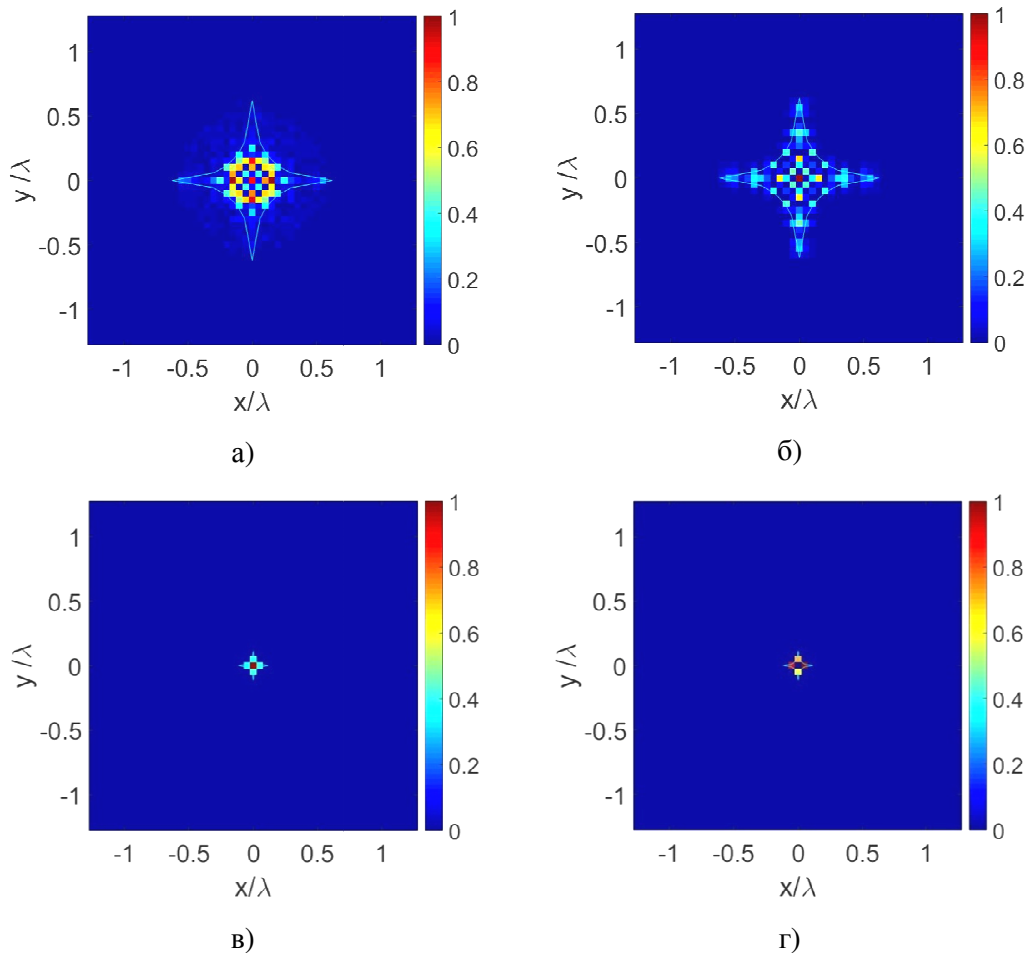
Табела 6.3

Параметри  $\eta_1$  и  $\eta_2$  рачунати за тродимензионални метални објекат са попречним пресеком у облику звезде

<i>slice</i>	$\eta_{1\theta}$ [%]	$\eta_{2\theta}$ [%]	$\eta_{1\phi}$ [%]	$\eta_{2\phi}$ [%]
<i>mid-slice</i>	78	71	78	64
<i>top-slice</i>	100	100	100	80

Са становишта табеле 6.3, резултати добијени коришћењем  $\theta$ - и  $\phi$ -дипола су сличне тачности. Међутим, у визуелном смислу резултати добијени  $\phi$ -диполима делују веродостојније. Такође, у табелама 6.1–6.3 види се да су добијене *top-slice* реконструкције са веома високом тачношћу у свим разматраним случајевима. Ово је последица чињенице да је облик објекта у овим равнима дефинисан веома

малим бројем пиксела. Додатно, са слика 6.2б, 6.4б и 6.8б може се уочити да су конвексне анvelope у свим случајевима веома уске, што заједно са претходним коментаром за последицу има велике вредности параметара  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .



Слика 6.9 - Резултати за тродимензионални метални објекат у облику звезде:  
 а) *mid-slice* и  $\theta$ -диполи, б) *mid-slice* и  $\phi$ -диполи, в) *top-slice* и  $\theta$ -диполи, г) *top-slice*  
 и  $\phi$ -диполи.

## 7. Закључак

У овој дисертацији приказана је нумеричка метода која спада у област микроталасног формирања слике, предвиђена за квалитативну процену позиције и облика расејача. Предложена метода може се употребити у сценаријима када испитивани објекат из неког разлога није доступан директном мерењу, било да је у питању физичка недоступност, висока цена или дуготрајност мерења, опасност по здравље, итд. У циљу прикупљања потребних података, испитивани објекат окружен је сензорима у форми полуталасних дипола, предвиђених за рад у микроталасном опсегу фреквенција. Овај задатак није нимало једноставан, јер расејано електромагнетско поље зависи како од геометријских, тако и од електричних особина расејача. Сама по себи, свака квалитативна метода представља специјалан случај у поређењу са квантитативним методама, јер се не процењује састав испитиваног објекта, већ само облик. Другим речима, имајући у виду интегралну једначину електричног поља дату изразом (2.19), квалитативне методе, на основу занемаривања састава разматраног објекта, подразумевају решавање линеарног проблема. Предложена метода подразумева решавање проблема инверзног електромагнетског расејања, што имплицира решавање система једначина који има много више непознатих него самих једначина.

У циљу решавања добијеног система једначина, потребно је искористити сва могућа предзнања о објекту који се анализира, како би анализе биле што краткотрајније, а резултати што прецизнији. У случају који је овде презентован, *a priori* знање које је могуће искористити, дато је у облику информације да струје по/у разматраном објекту, уз правилан избор одговарајућих функција базиса, заузимају много мањи простор од оног у коме се врши претрага. С тим у вези, могуће је имплементирати методу у литератури познату као обрада ретких

сигнала, и на тај начин решити проблем који на први поглед може деловати као нерешив са математичког становишта.

Идеја је да је уместо апроксимирања облика објекта струјним монополима (односно струјним импулсима), могуће искористити и више редове у мултиполном развоју (функције базиса вишег реда), и на тај начин добити додатне информације о облику самог објекта. Посебан значај предложена метода има у анализи објеката комплексног (конкавног) облика, посебно када се има у виду да многи, до сада предложени линеарни алгоритми, као резултат дају конвексне облике који често не одговарају прецизно облику стварно испитиваног објекта. Међутим, и овакву, недовољно прецизну, информацију о објекту ипак је могуће искористити у форми дигиталног филтра, у циљу уклањања нежељених артефаката који леже далеко изван контуре испитиваног објекта. Веома битну улогу у предложеном алгоритму, игра теорија о степенима слободе електромагнетског поља, на основу које је могуће одредити максималан ред мултипола који је потребно узети у обзир током анализе. Стога, битну примену, овде предложена метода могла би пронаћи у медицинској дијагностици, при класификацији малигнух тумора који, захваљујући агресивној природи својих ћелија, имају веома неправилне облике.

Приказани су резултати за дводимензионалне и тродимензионалне сценарије, за различите поларизације примопредајних антена, у случају металних и диелектричних објеката, као и за различите вредности односа сигнал-шум. Коришћен је оптимизациони алгоритам базиран на конвексном програмирању, који поред минимизације резидуала мерених и предикованих вредности електричног поља, узима у обзир и минимизацију броја извора зрачења. Уместо  $l_0$ -норме у оквиру регуларизације, која делује као логичан избор и притом води ка решавању неконвексног типа проблема, изабрана је  $l_1$ -норма, као значајно једноставнија, јер је тако добијен проблем конвексан. Највећа предност решавања конвексног проблема је могућност проналажења глобалног минимума разматране функције у веома малом броју итерација. Компромис између тачности решења и мере у којој је оно ретко, остварује се регуларизационим параметром чија је оптимална вредност узета на колелу одговарајуће L-криве.

Презентовани резултати, како у дводимензионалним, тако и у тродимензионалним сценаријима показују да предложена метода има велики потенцијал у области микроталасног формирања слике. Неки од праваца даљег истраживања укључују аналитичку потпору концепта оптималног реда мултипола у 2D и 3D сценаријима, детаљнију тродимензионалну анализу уз испитивање важења теорије о степенима слободе електромагнетског поља у овом случају, као и могућности убрзавања предложеног алгорита. Такође, имајући у виду да је највећи део различитих метода предложених у литератури чисто теоријски, од велике важности било би и конструисање мерног прототипа, односно експериментална верификација резултата добијених анализом стварних узорака.

## Литература

- [1] A. Kirsch, R. Kress, P. Monk, A. Zinn, “Two methods for solving the inverse acoustic scattering problem,” *Inverse Problems*, vol. 4, no. 3, pp. 749–770, 1988.
- [2] W. Tobocman, “Inverse acoustic wave scattering in two dimensions from impenetrable targets,” *Inverse Problems*, vol. 5, pp. 1131–1144, 1989.
- [3] H. Zhou, T. Takenaka, J. Johnson, T. Tanaka, “A breast imaging model using microwaves and a time domain three dimensional reconstruction method,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 93, pp. 57–70, 2009.
- [4] P. Meaney, M. Fanning, T. Reynolds, C. Fox, Q. Fang, C. Kogel, S. Poplack, K. Paulsen, “Initial clinical experience with microwave breast imaging in women with normal mammography,” *Academic Radiology*, vol. 14, pp. 207–218, 2007.
- [5] J. Shea, P. Kosmas, S. Hagness, B. Van Veen, “Three-dimensional microwave imaging of realistic numerical breast phantoms via a multiple-frequency inverse scattering technique,” *Medical Physics*, vol. 37, pp. 4210–4226, 2010.
- [6] M. El-Shenawee, E. Miller, “Spherical harmonics microwave algorithm for shape and location reconstruction of breast cancer tumor,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 25, no. 10, pp. 1258–1271, 2006.
- [7] L. Potter, E. Ertin, J. Parker, M. Cetin, “Sparsity and compressed sensing in radar imaging,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 1006–1020, 2010.
- [8] Y. Yoon, M. Amin, “Compressive sensing technique for high-resolution radar imaging,” *Proceedings of the SPIE Symposium on Defense and Security*, Orlando, Florida, 2008.
- [9] A. Gurbuz, J. McClellan, W. Scott, “A compressive sensing data acquisition and imaging method for stepped frequency GPRs,” *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol. 57, no. 7, pp. 2640–2650, 2009.
- [10] C. Fischer, A. Herschlein, M. Younis, W. Wiesbeck, “Detection of antipersonnel mines by using the factorization method on multistatic ground-penetrating radar measurements,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, no. 1, pp. 85–92, 2007.
- [11] Q. Huang, L. Qu, B. Wu, G. Fang, “UWB through-wall imaging based on compressive sensing,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 48, no. 3, pp. 1408–1415, 2010.
- [12] F. Ahmad, M. Amin, “Through-the-wall human motion indication using sparsity-driven change detection,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 51, no. 2, pp. 881–890, 2013.
- [13] M. Lambert, D. Lesselier, B. Kooij, “The retrieval of a buried cylindrical obstacle by a constrained modified gradient method in the H-polarization case and for Maxwellian materials,” *Inverse Problems*, vol. 14, pp. 1265–1283, 1998.
- [14] M. Nikolic, A. Nehorai, A. Djordjevic, “Electromagnetic imaging of hidden 2D PEC targets using sparse signal modeling,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 51, pp. 2707–2721, 2013.



- [15] M. Nikolic, G. Tang, A. Nehorai, "Electromagnetic imaging using compressive sensing," in *Proc. 48th Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, pp. 1737–1741, 2010.
- [16] T. Uno, S. Adachi, "Inverse scattering method for one-dimensional inhomogeneous layered media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. M-35, pp. 1456–1466, 1987.
- [17] M. Nikolic, A. Nehorai, A. Djordjevic, "Multipole-based sparse electromagnetic imaging," *IEEE International Conference on Antenna Measurements & Applications*, 2014.
- [18] C. Lin, Y. Kiang, "Inverse scattering for conductors by the equivalent source method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 3, pp. 310–316, 1996.
- [19] A. Djordjevic, T. Sarkar, S. Rao, "Analysis of finite conductivity cylindrical conductors excited by axially-independent TM electromagnetic field," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-33, no. 10, pp. 960–966, 1985.
- [20] I. Rekanos, "Shape reconstruction of a perfectly conducting scatterer using differential evolution and particle swarm optimization," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 46, no. 7, pp. 1967–1974, 2008.
- [21] K. Agarwal, X. Chen, "Applicability of MUSIC-type imaging in two-dimensional electromagnetic inverse problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 10, pp. 3217–3223, 2008.
- [22] M. Hajishemi, M. El-Shenawee, "TE versus TM for the shape reconstruction of 2-D PEC targets using the level-set algorithm," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 48, no. 3, pp. 1159–1168, 2010.
- [23] D. Colton, M. Piana, "The simple method for solving the electromagnetic inverse scattering problem: the case of TE polarized waves," *Inverse Problems*, no. 14, pp. 597–614, 1998.
- [24] S. Caorsi, G. Gragnani, M. Pastorino, "Equivalent current density reconstruction for microwave imaging purposes," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 37, no. 5, pp. 910–916, 1989.
- [25] E. Iakovleva, S. Gdoura, D. Lesselier, G. Perrusson, "Multistatic response matrix of a 3-D inclusion in half space and MUSIC imaging," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 9, pp. 2598–2609, 2007.
- [26] R. Solimene, A. Buonanno, F. Soldovieri, R. Pierri, "Physical optics imaging of 3-D PEC objects: vector and multipolarized approaches," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 48, no. 4, pp. 1799–1808, 2010.
- [27] Z. Zhang, Q. Liu, "Three-dimensional nonlinear image reconstruction for microwave biomedical imaging," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 51, pp. 544–548, 2004.
- [28] O. Bucci, N. Cardace, L. Crocco, T. Insernia, "2D inverse scattering: degree of nonlinearity, solution strategies, and polarization effects," *Proceedings of SPIE 4123, Image Reconstruction from Incomplete Data*, vol. 185, 2000.
- [29] C. Chou, Y. Kiang, "Inverse scattering of dielectric cylinders by a cascaded TE-TM method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 10, pp. 1923–1930, 1999.

- [30] M. Haas, W. Rieger, C. Huber, G. Lehner, W. Rucker, "Improvement of inverse scattering results by combining TM- and TE-polarized probing waves using an iterative adaptation technique," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, no. 3, pp. 1574–1577, 1999.
- [31] P. Mojabi, J. LoVetri, "Comparison of TE and TM inversions in the framework of the Gauss-Newton method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 4, pp. 1336–1348, 2010.
- [32] T. Cui, W. Chew, X. Yin, W. Hong, "Study of resolution and super-resolution in electromagnetic imaging for half-space problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 6, pp. 1398–1411, 2004.
- [33] R. Halter, A. Hartov, K. Paulsen, "A broadband high-frequency electrical impedance tomography system for breast imaging," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 55, pp. 650–659, 2008.
- [34] L. Poli, G. Oliveri, A. Massa, "Microwave imaging within the first-order Born approximation by means of the contrast-field Bayesian compressive sensing," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 6, pp. 2865–2879, 2012.
- [35] F. Viani, L. Poli, G. Oliveri, F. Robol, A. Massa, "Sparse scatterers imaging through approximated multitask compressive sensing strategies," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 55, no. 7, pp. 1553–1558, 2013.
- [36] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., Cambridge, U.K., Cambridge University Press, 1999.
- [37] G. Oliveri, L. Poli, P. Rocca, A. Massa, "Bayesian compressive optical imaging within the Rytov approximation," *Optics Letters*, vol. 37, no. 10, pp. 1760–1762, 2012.
- [38] A. Devaney, "Inverse scattering theory within the Rytov approximation," *Optics Letters*, vol. 6, no. 8, pp. 374–376 1981.
- [39] Y. Zhong, X. Chen, "MUSIC imaging and electromagnetic inverse scattering of multiple-scattering small anisotropic spheres," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 12, pp. 3542–3549, 2007.
- [40] R. Pierri, A. Liseno, F. Soldovieri, "Shape reconstruction from PO multifrequency scattered fields via the singular value decomposition approach," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 9, pp. 1333–1343, 2001.
- [41] A. Brancaccio, G. Leone, "Multimonostatic shape reconstruction of two-dimensional dielectric cylinders by a Kirchhoff-based approach," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 48, no. 8, pp. 3152–3161, 2010.
- [42] N. Bojarski, "A survey of physical optics inverse scattering identity," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-30, pp. 980–989, 1982.
- [43] M. Nikolic Stevanovic, L. Crocco, A. Djordjevic, A. Nehorai, "Higher-order sparse microwave imaging of PEC scatterers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 3, pp. 988–997, 2016.
- [44] G. Otto, W. Chew, "Microwave inverse scattering - local shape function imaging for improved resolution of strong scatterers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, no. 1, pp. 137–141, 1994.

- [45] D. Colton, H. Haddar, M. Piana, "The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering theory," *Inverse Problems*, vol. 19, no. 6, pp. S105–S137, 2003.
- [46] R. Potthast, "A survey on sampling and probe methods for inverse problems," *Inverse Problems*, vol. 22, no. 2, pp. R1–R47, 2006.
- [47] J. Ma, W. Chew, C. Lu, J. Song, "Image reconstruction from TE scattering data using equation of strong permittivity fluctuation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 48, no. 6, pp. 860–867, 2000.
- [48] M. Azghani, P. Kosmas, F. Marvasti, "Microwave medical imaging based on sparsity and an iterative method with adaptive thresholding," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 34, no. 2, pp. 357–365, 2015.
- [49] M. Bevacqua, L. Crocco, L. Di Donato, T. Isernia, "Microwave imaging of non-weak targets via compressive sensing and virtual experiments," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 14, pp. 1035–1038, 2015.
- [50] S. Caorsi, A. Massa, M. Pastorino, "Numerical assessment concerning a focused microwave diagnostic method for medical applications," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, no. 11, pp. 1815–1830, 2000.
- [51] M. Ney, A. Smith, S. Stuchly, "A solution of electromagnetic imaging using pseudoinverse transformation," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. MI-3, pp. 155–162, 1984.
- [52] K. Paulsen, P. Meaney, M. Moskowitz, J. Sullivan, "A dual mesh scheme for finite element based reconstruction algorithms," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 14, pp. 504–514, 1995.
- [53] A. Qing, "Electromagnetic imaging of two-dimensional perfectly conducting cylinders with transverse electric scattered field," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 12, pp. 1786–1794, 2002.
- [54] A. Massa, P. Rocca, G. Oliveri, "Compressive sensing in electromagnetics - a review," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 57, no. 1, pp. 224–238, 2015.
- [55] E. Candès, M. Wakin, "An introduction to compressive sampling," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 21–30, 2008.
- [56] R. Baraniuk, "Compressive sensing [lecture notes]," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 4, pp. 118–121, 2007.
- [57] L. Carin, D. Liu, W. Lin, B. Guo, "Compressive sensing for multistatic scattering analysis," *Journal on Computational Physics*, vol. 228, no. 9, pp. 3464–3477, 2009.
- [58] L. Carin, "On the relationship between compressive sensing and random sensor arrays," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 51, no. 5, pp. 72–81, 2009.
- [59] D. Malioutov, M. Cetin, A. Willsky, "Sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 8, pp. 3010–3022, 2005.
- [60] C. Chiu, Y. Kiang, "Electromagnetic imaging for an imperfectly conducting cylinders," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, pp. 1632–1639, 1991.

- [61] R. Solimene, F. Ahmad, F. Soldovieri, "A novel CS-TSVD strategy to perform data reduction in linear inverse scattering problems," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 9, no. 5, pp. 881–885, 2012.
- [62] A. Annan, "The equivalent source method for electromagnetic scattering analysis and its geophysical application," *PhD Thesis*, Memorial University of Newfoundland, 1974.
- [63] L. Crocco, L. Di Donato, I. Catapano, T. Isernia, "An improved simple method for imaging the shape of complex targets," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 2, pp. 843–851, 2013.
- [64] A. Liseno, R. Pierri, "Shape reconstruction by spectral data of the far-field operator: analysis and performances," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 3, pp. 899–903, 2004.
- [65] F. Cakoni, M. Fares, H. Haddar, "Analysis of two linear sampling methods applied to electromagnetic imaging of buried objects," *Inverse Problems*, vol. 22, no. 3, pp. 845–867, 2006.
- [66] I. Catapano, L. Crocco, T. Isernia, "On simple methods for shape reconstruction of unknown scatterers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 5, pp. 1431–1436, 2007.
- [67] A. Kirsch, "The factorization method for Maxwell's equations," *Inverse Problems*, vol. 20, no. 6, pp. S117–S134, 2004.
- [68] B. Gebauer, M. Hanke, A. Kirsch, W. Muniz, C. Scheider, "A sampling method for detecting buried objects using electromagnetic scattering," *Inverse Problems*, vol. 21, no. 6, pp. 2035–2050, 2005.
- [69] H. Ammari, E. Iakovleva, D. Lesselier, G. Perruson, "MUSIC type electromagnetic imaging of a collection of small three-dimensional bounded inclusions," *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 29, no. 2, pp. 674–709, 2007.
- [70] M. Cheney, "The linear sampling method and the MUSIC algorithm," *Inverse Problems*, vol. 17, no. 4, pp. 591–595, 2001.
- [71] P. Stoica, K. Sharman, "Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 7, pp. 1132–1143, 1990.
- [72] T. Habashy, A. Abubakar, "A general framework for constraint minimization for the inversion of electromagnetic measurements," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 46, pp. 265–312, 2014.
- [73] A. Souvorov, A. Bulyshev, S. Semenov, R. Svenson, A. Nazarov, Y. Sizov, G. Tatsis, "Microwave tomography: a two-dimensional Newton iterative scheme," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, pp. 1654–1659, 1998.
- [74] Y. Wang, W. Chew, "An iterative solution of the two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem," *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 1, pp. 100–108, 1989.
- [75] W. Chew, Y. Wang, "Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 9, no. 2, pp. 218–225, 1990.

- [76] T. Cui, W. Chew, "Inverse scattering of two-dimensional dielectric objects buried in a lossy Earth using the distorted Born iterative method," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, no. 2, pp. 339–346, 2001.
- [77] C. Gilmore, P. Mojabi, J. LoVetri, "Comparison of an enhanced distorted Born iterative method and the multiplicative-regularized contrast source inversion method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 8, pp. 2341–2351, 2009.
- [78] L. Li, W. Zhang, F. Li, "Tomographic reconstruction using the distorted Rytov iterative method with phaseless data," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 5, pp. 479–483, 2008.
- [79] N. Joachimowicz, C. Pichot, J. Hugonin, "Inverse scattering: an iterative numerical method for electromagnetic imaging," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 12, pp. 1742–1752, 1991.
- [80] A. Roger, "Newton-Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 29, pp. 232–238, 1981.
- [81] R. Remis, P. van den Berg, "On the equivalence of the Newton-Kantorovich and distorted Born methods," *Inverse Problems*, vol. 16, pp. L1–L4, 2000.
- [82] W. Tabbara, B. Duchene, C. Pichott, D. Lesselier, L. Chommeloux, N. Joachimowicz, "Diffraction tomography: contribution to the analysis of some applications in microwaves and ultrasonics," *Inverse Problems*, vol. 4, pp. 305–331, 1988.
- [83] T. Hansen, P. Johansen, "Inversion scheme for monostatic ground penetrating radar that takes into account the planar air-soil interface," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 38, pp. 496–506, 2000.
- [84] G. Oliveri, P. Rocca, A. Massa, "A Bayesian-compressive-sampling-based inversion for imaging sparse scatterers," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, no. 10, pp. 3993–4006, 2011.
- [85] L. Poli, G. Oliveri, A. Massa, "Imaging sparse metallic cylinders through a local shape function Bayesian compressing sensing approach," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 30, pp. 1261–1272, 2013.
- [86] L. Poli, G. Oliveri, P. Rocca, A. Massa, "Bayesian compressive sensing approaches for the reconstruction of two-dimensional sparse scatterers under TE illuminations," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 51, no. 5, pp. 2920–2936, 2013.
- [87] L. Crocco M. D' Urso, T. Isernia, "Testing the contrast source extended Born inversion method against real data: the TM case," *Inverse Problems*, vol. 21, no. 6, pp. S33–50, 2005.
- [88] A. Desmal, H. Bagci, "A preconditioned inexact Newton method for nonlinear sparse electromagnetic imaging," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 12, no. 3, pp. 532–536, 2015.
- [89] R. Azaro, M. Donelli, D. Franceschini, A. Massa, "Multiscaling reconstruction of metallic targets from TE and TM experimental data," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 48, no. 2, pp. 322–324, 2006.
- [90] P. Lobel, L. Blanc-Féraud, C. Pichot, M. Barlaud, "A new regularization scheme for inverse scattering," *Inverse Problems*, vol. 13, pp. 403–410, 1997.

- [91] S. Siltanen, “Computational inverse problems,” *Lecture notes*, version 14, 2010.
- [92] T. Blumensath, M. Davies, “Iterative hard thresholding for compressed sensing,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 27, no. 3, pp. 265–274, 2009.
- [93] E. Candès, M. Wakin, S. Boyd, “Enhancing sparsity by reweighted minimization,” *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 14, no. 5–6, pp. 877–905, 2008.
- [94] R. Tibshirani, “Regression shrinkage and selection via lasso,” *Journal of the Royal Statistical Society, ser. B*, vol. 58, no. 1, pp. 267–288, 1996.
- [95] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, R. Tibshirani, “Least angle regression,” *The Annals of Statistics*, vol. 32, no. 2, pp. 407–499, 2007.
- [96] G. Oliveri, N. Anselmi, A. Massa, “Compressive sensing imaging of non-sparse 2D scatterers by a total-variation approach within the Born approximation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 10, pp. 5157–5170, 2014.
- [97] D. Winters, B. Van Veen, S. Hagness, “A sparsity regularization approach to the electromagnetic inverse scattering problem,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 1, pp. 145–154, 2010.
- [98] H. Zou, T. Hastie, “Regularization and variable selection via the elastic net,” *Journal of the Royal Statistical Society, ser. B*, vol. 67, no. 2, pp. 301–320, 2005.
- [99] P. van den Berg, A. Abubakar, J. Fokkema, “Multiplicative regularization for contrast profile inversion,” *Radio Science*, vol. 38, no. 2, pp. 1–10, 2003.
- [100] P. Mojabi, J. LoVetri, “Microwave biomedical imaging using the multiplicative regularized Gauss-Newton inversion,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 8, pp. 645–648, 2009.
- [101] G. Davis, S. Mallat, Z. Zhang, “Adaptive time-frequency approximations with matching pursuits,” in *Wavelet Analysis and Its Applications*, San Diego, CA Academic, pp. 271–293, 1994.
- [102] L. Landweber, “An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind,” *American Journal of Mathematics*, vol. 73, no. 3, pp. 615–624, 1951.
- [103] G. Bozza, M. Pastorino, “An inexact Newton-based approach to microwave imaging within the contrast source formulation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 4, pp. 1122–1132, 2009.
- [104] E. Candès, T. Tao, “The Dantzig selector: statistical estimation when  $p$  is much larger than  $n$ ,” *The Annals of Statistics*, vol. 35, no. 6, pp. 2313–2351, 2007.
- [105] D. Malioutov, “A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays,” *MSc Thesis*, Northeastern University, 2001.
- [106] S. Caorsi, A. Massa, M. Pastorino, A. Rosani, “Microwave medical imaging: potentialities and limitations of a stochastic optimization technique,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 52, pp. 1909–1916, 2004.
- [107] M. Donelli, D. Franceschini, P. Rocca, A. Massa, “Three-dimensional microwave imaging problems solved through an efficient multi-scaling particle swarm optimization,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, pp. 1467–1481, 2009.

- [108] A. Qing, "Electromagnetic inverse scattering of multiple two-dimensional perfectly conducting objects by the differential evolution strategy," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 6, pp. 1251–1262, 2003.
- [109] L. Garnero, A. Franchois, J. Hugonin, C. Pichot, N. Joachimowicz, "Microwave imaging - complex permittivity reconstruction by simulated annealing," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, pp. 1801–1807, 1991.
- [110] R. Kress, "Numerical methods in inverse obstacle scattering," in *Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction, Lecture Notes in Physics*, vol. 486, Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [111] J. Zaeytjij, A. Franchois, C. Eyraud, J. Geffrin, "Full-wave three-dimensional microwave imaging with a regularized Gauss-Newton method - theory and experiment," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 11, pp. 3279–3292, 2007.
- [112] G. Bozza, C. Estatico, M. Pastorino, A. Randazzo, "An inexact Newton method for microwave reconstruction of strong scatterers," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 5, pp. 61–64, 2006.
- [113] P. Kosmas, J. Shea, B. Van Veen, S. Hagness, "Three-dimensional microwave imaging of realistic breast phantoms via an inexact Gauss-Newton algorithm," in *Proceedings of IEEE APS-URSI*, pp. 1–4, 2008.
- [114] A. Franchois, A. Tijhuis, "A quasi-Newton reconstruction algorithm for a complex microwave imaging scanner environment," *Radio Science*, vol. 38, no. 2, pp. 1–13, 2003.
- [115] H. Harada, D. Wall, T. Takenaka, M. Tanaka, "Conjugate gradient method applied to inverse scattering problem," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, pp. 784–792, 1995.
- [116] T. Rubæk, P. Meaney, P. Meincke, K. Paulsen, "Nonlinear microwave imaging for breast-cancer screening using Gauss-Newton's method and the CGLS inversion algorithm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 8, pp. 2320–2331, 2007.
- [117] A. Franchois, C. Pichot, "Microwave imaging - complex permittivity reconstruction with a Levenberg-Marquardt method," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 45, pp. 203–214, 1997.
- [118] A. Devaney, "Time reversal imaging of obscured targets from multistatic data," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 5, pp. 1600–1610, 2005.
- [119] A. Devaney, E. Marengo, F. Gruber, "Time-reversal-based imaging and inverse scattering of multiply scattering point targets," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, no. 5, pp. 3129–3138, 2005.
- [120] G. Micolau, M. Saillard, "DORT method as applied to electromagnetic sensing of buried objects," *Radio Science*, vol. 38, no. 3, pp. 1–12, 2003.
- [121] L. Monte, J. Parker, "Sparse reconstruction methods in RF tomography for underground imaging," in *Proc. International Waveform Diversity and Design Conference*, pp. 28–32, 2010.
- [122] I. Catapano, L. Crocco, T. Isernia, "Improved sampling methods for shape reconstruction of 3-D buried targets," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 46, no. 10, pp. 3265–3273, 2008.

- [123] W. Zhang, L. Li, F. Li, “Multifrequency imaging from intensity-only data using the phaseless data distorted Rytov iterative method,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 1, pp. 290–294, 2009.
- [124] L. Pan, X. Chen, S. Yeo, “A compressive-sensing-based phaseless imaging method for point-like dielectric objects,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 11, pp. 5472–5475, 2012.
- [125] B. Popović, *Elektromagnetika*, Beograd, Građevinska knjiga, 1980.
- [126] R. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, New York, McGraw-Hill, 1961.
- [127] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [128] N. Vojnovic, M. Nikolic Stevanovic, L. Crocco, A. Djordjevic, “High-order sparse shape imaging of PEC and dielectric targets using TE polarized fields,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 4, pp. 2035–2043, 2018.
- [129] O. Bucci, G. Franceschetti, “On the degrees of freedom of scattered fields,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 7, pp. 918–926, 1989.
- [130] P. Hansen, D. O’Leary, “The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, no. 6, pp. 1487–1503, 1993.
- [131] M. Grant, S. Boyd, *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming*, <http://stanford.edu/~boyd/cvx>, 2009.
- [132] WIPL-D Pro v13, <http://www.wipl-d.com/>
- [133] N. Vojnovic, M. Stevanovic, A. Djordjevic, L. Crocco, “Optimal multipole orders in TE imaging of PEC scatterers,” *IEEE International Conference on Antenna Measurements & Applications*, 2018.
- [134] M. Nikolic Stevanovic, N. Vojnovic, L. Crocco, “A numerical study on optimal multipole order for sparse microwave imaging of star-shaped scatterers,” *IEEE European Conference on Antennas and Propagation*, 2019.



## Биографија аутора

Небојша М. Војновић рођен је 15.07.1983. у Београду, где је завршио основну школу и гимназију “Свети Сава”. Електротехнички факултет уписао је 2002. године, а дана 29.10.2008. године дипломирао је на Одсеку за електронику, телекомуникације и аутоматику, Смеру за телекомуникације. Факултет је завршио са просечном оценом 8,10 и са оценом 10 успешно одбранио дипломски рад на тему “Анализа и синтеза двоструких антенских низова у микрострип технологији”.

У периоду од 2011. до 2012. године био је запослен у “ИМТЕЛ комуникације а.д.” на позицији истраживача-приправника на пословима научно-истраживачког типа у области антена и микроталасне технике. Претежно се бавио моделовањем и симулацијом електромагнетских структура коришћењем различитих софтверских алата. Поред неколико комерцијалних пројеката, учествовао је и на пројектима Министарства за просвету, науку и технолошки развој: TR-32052-2 (Истраживање и развој решења за побољшање перформанси бежичних комуникационих система у микроталасном и милиметарском опсегу фреквенција) и III-44009-5 (Развој дигиталних технологија и умрежених сервиса у системима са уграђеним електронским компонентама).

У периоду од 2012. до 2017. године био је запослен у Институту за физику, Универзитет у Београду, на позицији истраживача-сарадника, где се претежно бавио моделовањем микроталасних склопова и уређаја еквивалентним електричним шемама, као и применом метаматеријала и холографских антена у микроталасној и антенској техници. У овом периоду учествовао је на пројектима Министарства за просвету, науку и технолошки развој: TR-32024 (Реконфигурабилне, мултибанд и скениране антене на бази метаматеријала за бежичне комуникационе системе и сензоре) и PRI-AIBSE-2011-1119 (*Reconfigurable, multiband devices and antennas based on the innovative concept of metamaterials*).

Од 2017. године запослен је на Електротехничком Факултету, Универзитет у Београду, на позицији истраживача-сарадника у областима микроталасне технике, антена и микроталасног формирања слике. Учествује на пројекту Министарства за

просвету, науку и технолошки развој: TR-32005 (Алгоритми и софтвер за симулације у фреквенцијском домену RF подсистема и електромагнетских сензора у ICT).

Објавио је 18 радова на страним и домаћим конференцијама и пет радова у страним и домаћим часописима (од чега су три рада у часописима са SCI листе). Такође, објавио је и пет техничких решења. Служи се енглеским језиком.

Од 2015. године ради као рецензент у еминентном часопису *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, од 2016. у домаћем часопису *Microwave Review* (Микроталасна Ревивија), а од 2017. и за потребе међународне конференције *TELFOR*. Већ дуго низ година члан је *IEEE* удружења.

На конференцији ЕТРАН 2015 освојио је награду из области Микроталасне технике за најбољи рад под насловом “Независно померање резонанси у правоугаоном ENZ таласоводу”. Године 2016. добио је награду “проф. др Илија Стојановић” за најбољи стручни рад објављен у реномираном међународном часопису током 2015. и 2016. године за рад под насловом “*Modeling of non-resonant longitudinal and inclined slots for resonance tuning in ENZ waveguide structures*”.

На седници Научног већа Института за физику одржаној 10.11.2015. године изабран је у звање истраживач-сарадник.

## Прилог 1.

### Изјава о ауторству

Потписани: Небојша Војновић, дипл. инж.

број индекса: 2011/5072

#### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**Примена базисних функција вишег реда при процени облика металних и диелектричних објеката**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Београду,  
10.03.2019. год.

Потпис докторанда

Војновић Небојша

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске верзије  
докторског рада**

Име и презиме аутора: Небојша Војновић, дипл. инж.

Број индекса: 2011/5072

Студијски програм: електротехника и рачунарство

Наслов рада: **Примена базисних функција вишег реда при процени облика металних и диелектричних објеката**

Ментор: др Марија Стевановић, ванредни професор

Потписани: Небојша Војновић, дипл. инж.

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду,  
10.03.2019. год.

**Потпис докторанда**

Војновић Небојша

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку “Светозар Марковић” да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**Примена базисних функција вишег реда при процени облика металних и диелектричних објеката**

које је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство - некомерцијално - без прераде
4. Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима
5. Ауторство - без прераде
6. Ауторство - делити под истим условима

(Молим да заокружите само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду,  
10.03.2019. год.

**Потпис докторанда**

Војнобук Невојчић

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство - некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално - без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство - без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.