



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Nelinearna dinamika u okviru Frenkel-Kontorova modela pod dejstvom spoljašnjih periodičnih sila

-doktorska disertacija-

Mentori:

dr Milan Pantić
dr Jasmina Tekić

Kandidat: Petar Mali

Novi Sad, 2015

Predgovor

Svoju zahvalnost dugujem svim članovima katedre za teorijsku fiziku, koji su mi bili podrška tokom doktorskih studija i od kojih sam mnogo naučio.

Posebnu zahvalnost dugujem mentorima dr Milanu Pantiću, koji je počevši od osnovnih studija pa tako i kroz cele doktorske studije bio uvek otvoren za diskusiju i saradnju uopšte, i dr Jasmini Tekić koja me je uvela u probleme kojima se bavila niz godina i koja je usmerila tok izrade ove disertacije.

Zahvaljujem se i svima koji su mi na bilo koji način pomogli, a koje ovde nisam spomenuo.

Novi Sad, jun 2015.

Petar Mali

Sadržaj

Uvod	7
1 Frenkel - Kontorova model	9
1.1 Osnovno stanje	11
1.2 Uticaj spoljašnje sile i odziv sistema	12
1.3 Kretanje pod dejstvom spoljašnje <i>dc</i> sile	13
1.4 Kretanje pod dejstvom spoljašnjih periodičnih sila	14
1.5 Zavisnost širine stepenika od spoljašnje periodične sile	19
1.5.1 Amplitudna zavisnost Šapiro stepenika	19
1.5.2 Analitički rezultat u slučaju celobrojnog ω	21
1.5.3 Frekventna zavisnost Šapiro stepenika	23
1.5.4 Zavisnost širine Šapiro stepenika od perioda <i>ac</i> sile	28
1.6 Realni fizički sistemi na koje se može primeniti FK model	28
1.6.1 Talasi gustine naboja	29
1.6.2 Džozefsonovi spojevi	32
2 Generalisani FK model	33
2.1 Generalisani substratni potencijali	33
2.2 Generalisana međučestična interakcija	35
2.3 Asimetrični deformacioni potencijal	36
2.4 Zavisnost širine stepenika od spoljašnje periodične sile	41
2.4.1 Amplitudna zavisnost Šapiro stepenika u slučaju ASDP-a	41
2.5 Frekventna zavisnost Šapiro stepenika u slučaju ASDP-a	44
2.6 Šapiro stepenici za slučaj celobrojnih vrednosti ω	48
2.7 Efekti saturacije u ac+dc pokretanom FK modelu	51
2.8 Farejev niz u pojavljivanju subharmonijskih stepenika...	56
2.8.1 Rezultati	56
2.9 FK model u drugim realističnim substratnim potencijalima	64
2.10 Uticaj polucelih stepenika na dinamiku	64
2.10.1 Varijabilni potencijal	64
2.10.2 Dvobarijerni potencijal	67
2.11 Sistemi koji zadržavaju svoje ponašanje	70
2.11.1 Dvojamni potencijal	70

3	Uticaj termalnog šuma	75
3.1	Uticaj Gausovog belog šuma na subharmonijske stepenike	76
3.2	Efekat šuma na amplitudnu zavisnost...	79
3.3	Efekat šuma na frekventnu zavisnost...	81

Uvod

Frenkel - Kontorova model [1–5] je jednostavan model koji u današnje vreme ima ogromnu primenu. Prva primena ovog modela javila se u fizici dislokacija [6–9], a kasnije je korišten i u razmatranju efekata kod toplotne provodljivosti [10, 11], kao i u tribologiji [12]. Ovaj model se, šire gledano, može koristiti u problemima u kondenzovanom stanju gde postoji nadmetanje više interakcija. Modeli gde postoji nadmetanja interakcija javljaju se i u magnetizmu. Prostorno modulirane strukture su eksperimentalno opažene u mnogim kondenzovanim sistemima, npr. u ferimagnetnim fazama retkih zemalja i njihovih jedinjenja. Talasni vektor, koji karakteriše modulaciju, se menja sa spoljašnjim parametrima poput temperature, pritiska, magnetnog polja. Najčešće se menja kontinualno, ali dešava se i da zadrži vrednost pri nekom intervalu promene spoljašnjih parametara. Samerljiva (nesamerljiva) faza odgovara slučaju kada je odnos talasnog vektora, koji karakterise ovu fazu, i vektora recipročne rešetke racionalan (iracionalan) [13–15]. Jedan od najjednostavnijih modela u magnetizmu za opisivanje prostorno moduliranih struktura je Izingov ANNNI model (axial next nearest neighbours model).

Zbog svoje jednostavnosti i široke primene Frenkel Kontorova model je područje interesovanja kako teorijskih fizičara, tako i matematičara. Dinamika problema mnogo tela u prošlom veku našla je primenu u onome što se često zove fizika uređaja (device physics). Primena $ac+dc$ voženog Frenkel Kontorova modela, koji će biti obrađivan u ovom radu, je u talasima gustine naboja [16–24], Džozefsonovim spojevima (Josephson - junctions) [25–32] i superprovodnim nanožicama [33, 34]. Rad je strukturiran u tri glave. Glava 1. opisuje standardni Frenkel-Kontorova model, Frenkel-Kontorova model pod dejstvom spoljašnjih sila i njihovu primenu u realnim fizičkim sistemima. U Glavi 2. je data motivacija za uvođenje generalisanog Frenkel-Kontorova modela. Izloženi su neki do sada poznati rezultati vezani za generalisani Frenkel-Kontorova model pod dejstvom spoljašnjih periodičnih sila, kao i rezultati poglavlja 2.6, 2.7, 2.8 i 2.9 koja predstavljaju originalan doprinos ove disertacije. U Glavi 3 diskutuje se standardni i generalisani Frenkel-Kontorova model pod dejstvom spojašnjih periodičnih sila i pod uticajem Gausovog belog šuma. Poglavlja 3.1, 3.2 i 3.3 predstavljaju originalan doprinos ove disertacije.

Glava 1

Frenkel - Kontorova model

Frenkel - Kontorova model (FK model) je jednostavan model koji obezbeđuje mehaničku intuiciju. Ovaj model prvi put se pojavljuje u radovima Delingera (Dehlinger) [1], a kasnije je uveden kao diskretan dinamički model od strane Frenkela i Kontorove [2–5]. Skup identičnih čestica u jednoj dimenziji, koje interaguju harmonijskom interakcijom, postavljen je u periodični potencijal. Ako se sa u_l označi položaj l -te čestice, totalna potencijalna energija sistema je

$$H = V(u) + \sum_l V_{int}(u_{l+1} - u_l) \quad (1.1)$$

gde je $V(u)$ periodičan potencijal, a V_{int} je harmonijska interakcija koja, obzirom da su čestice identične, zavisi samo od rastojanja među susednim česticama. ¹ Standardni FK model je definisan sledećim potencijalima:

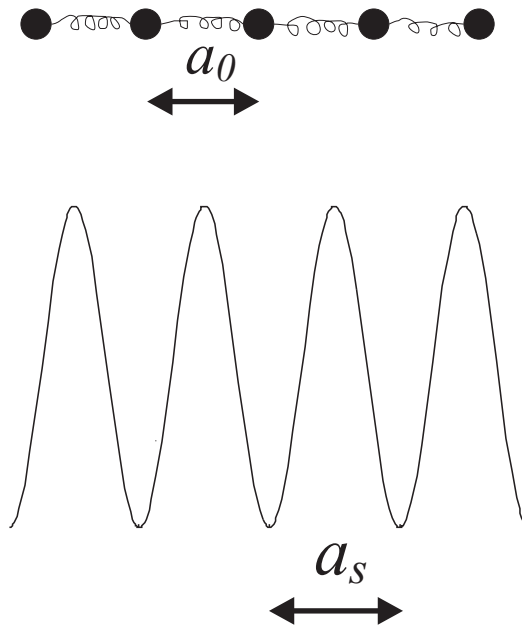
$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} [1 - \cos(2\pi u)] \quad (1.2)$$

$$V_{int}(y) = \frac{1}{2}(y - \mu)^2 \quad (1.3)$$

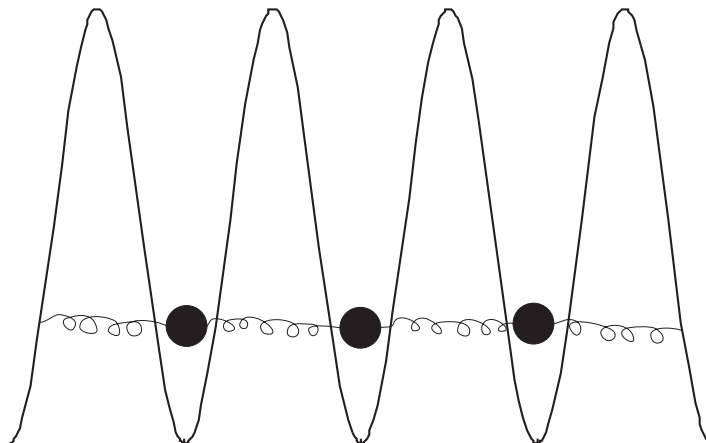
gde je K intenzitet periodičnog potencijala, a μ dužina neistegnute opruge. Potencijal $V(u)$ je periodičan sa celobrojnim periodom a_s (videti sliku Sl. 1.1). Pre stavljanja u periodični potencijal lanac čestica je takav da su sve čestice na jednakom međusobnom rastojanju a_0 . Kada se lanac postavi u periodični potencijal, V_{int} će težiti da sve čestice i dalje budu na jednakom međusobnom rastojanju, dok periodični potencijal teži da postavi čestice na dno jame favorizujući celobrojni srednju međučestičnu razdaljinu (videti sliku Sl. 1.2). U literaturi se takmičenje između interakcija obično naziva frustracijom. Ravnotežna konfiguracija je takva da je sila na svaku česticu jednaka nuli. U slučaju da je ravnotežna konfiguracija određena sa $a_0 = a_s$, onda svaka čestica zauzima jedan minimum periodičnog potencijala. U tom slučaju kažemo da je srednja međučestična razdaljina ili parametar srazmere $\omega = 1$. ²

¹U obzir se uzima samo interakcija među najbližim susedima u lancu.

²Na engleskom se zove winding number pa je stoga ovaj parametar označen grčkim slovom ω .



Sl. 1.1: Lanac pre stavljanja u periodični potencijal. Sa slike je jasnije šta su tačno parametri a_0 i a_s opisani prethodno u tekstu. U definiciji periodičnog potencijala uzeto je $K = 4$ da bi se mogao plotirati.



Sl. 1.2: Nakon stavljanja čestica u periodični potencijal uspostavlja se ravnoteža sa srednjom međučestičnom razdaljinom $\omega = 1$.

Pri uspostavljanju ravnoteže ne mora biti odnos $\omega = 1$. Može biti i neki racionalni broj na primer $\omega = \frac{2}{3}$, a čak može biti i iracionalan.³ Strukture sa racionalnim ω se zovu samerljive (commensurate), a sa iracionalnim nesamerljive (incommensurate) [35, 36]. Više detalja u poglavlju koje sledi.

³ $\omega = \frac{2}{3}$ ne znači da se čestice dele i da se rasporede tako da se $\frac{2}{3}$ čestice nađe u svakoj jami, već da se recimo u 4 jame nalazi 6 čestica.

1.1 Osnovno stanje

U FK modelu, osnovno stanje sistema je određeno ravnotežnim međučestičnim rastojanjem a_0 i konstantom substratnog potencijala a_S . Ako se ove dve prostorne jedinice poklapaju $a_0 = a_S$ i potencijal interakcije među česticama je konveksan, osnovno stanje je trivijalno i sve čestice su u minimumima substratnog potencijala. Ako je $a_0 \neq a_S$, osnovno stanje nije trivijalno i pojavljuje se takmičenje između ovih skala. Međučestični potencijal teži da održi uniformno rastojanje među česticama, dok substratni potencijal teži da drži čestice pričvršćene u jamama. Takmičenje između ovih interakcija naziva se frustracijom. Za dalji tekst značajno je da se uvede pojam konfiguracija. Konfiguracija je definisana sa $\{u_l\}_{l \in S}$, gde je S skup uzastopnih prirodnih brojeva koji može biti konačan ili beskonačan, dok $u_l \in \mathbb{R}, \forall l$ -definiše položaje čestica [37]. U slučaju razmatranja konačnog lanca S je konačan skup. U daljem tekstu koristićemo zapis $\{u_l\}$ da ne bismo opterećivali notaciju. Razmotrimo slučaj kada broj čestica N i dužina lanca L teže beskonačnosti, a njihova koncentracija je konačna

$$n = \lim_{L, N \rightarrow \infty} \frac{N}{L} \quad (1.4)$$

Dužina lanca je $L = Na_0 = Ma_S$, gde je M broj potencijalnih minimuma, onda je koncentracija data sa $\frac{N}{M} = \frac{a_S}{a_0}$ parametar srazmere. Jedan od glavnih parametara u FK modelu je srednja međučestična razdaljina (winding number) ω i data je kao

$$\omega = \langle u_{l+1} - u_l \rangle = \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \frac{u_N - u_M}{N - M} \quad (1.5)$$

Za konveksne modele dokazano je [38] da svaka konfiguracija sa minimumom energije ima dobro definisanu međučestičnu razdaljinu i obratno da za svaki realan broj ω postoji najmanje jedna konfiguracija koja odgovara minimumu energije za srednju čestičnu razdaljinu ω (videti [38]).

Ako je model homogen potencijal ne zavisi od indeksa l i prenumerisanje čestica neće promeniti osobine konfiguracije. Zbog periodičnosti substratnog potencijala $V(u_l)$ i činjenice da V_{int} zavisi od međučestične razdaljine konfiguracija $\{u_l\}$ je invarijantna u odnosu na celobrojne translacije. Zbog toga transformacija

$$\sigma_{i,j}\{u_l\} = \{u_{l+i} + ja_S\} = \{u_{l+i} + j\} \quad (1.6)$$

definiše konfiguraciju za istu energiju u slučaju $a_S = 1$ (i, j su proizvoljni celi brojevi). Ukoliko je $\{u_l\}$ konfiguracija sa minimumom energije, transformacija $\sigma_{i,j}\{u_l\}$ generiše novu konfiguraciju koja odgovara minimumu energije. Za date dve konfiguracije $\{u_l\}$ i $\{\tilde{u}_l\}$ možemo reći da je jedna manja od druge, $\{u_l\} < \{\tilde{u}_l\}$, ako $\forall l \ u_l < \tilde{u}_l$.

Za konfiguraciju $\{u_l\}$ se kaže da je rotaciono uređena ako je zadovoljeno

$$\sigma_{i,j}\{u_l\} < \{u_l\}, \quad i\omega + j < 0 \quad (1.7)$$

$$\sigma_{i,j}\{u_l\} > \{u_l\}, \quad i\omega + j > 0 \quad (1.8)$$

Primetimo da uslov $i\omega + j = 0$ ne odgovara opštem slučaju $\sigma_{i,j}\{u_l\} = \{u_l\}$ za proizvoljnu konfiguraciju sa međučestičnom razdaljinom ω koja odgovara minimumu energije. Svaka konfiguracija $\{u_l\}$ je definisana potencijalnom energijom

$$E_N(\{u_l\}) = \sum_{l=1}^N V(u_l) + \sum_{l=2}^N V_{int}(u_l - u_{l-1}) \quad (1.9)$$

gde podrazumevamo interakciju među najbližim susedima ⁴. Za beskonačan lanac energija po čestici je definisana sa

$$\epsilon(\{u_l\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_N(\{u_l\}) \quad (1.10)$$

Osnovno stanje sa srednjim međučestičnim rastojanjem ω definiše konfiguraciju za koju

$$\epsilon = \min_{\omega} \epsilon(\omega) \quad (1.11)$$

reprezentuje minimum energije po čestici za ostale fiksirane parametre. Jedan od metoda za traženje ovog minimuma razvio je Grifits (Griffiths) [39, 40]. Energija po čestici se uvodi jer je ukupna energija beskonačnog lanca, tipično beskonačna. Matematički bi osnovno stanje moglo da se definiše i kao minimalna energija svakog konačnog proizvoljno odabranog dela lanca $\{u_m, u_{m+1}, \dots, u_l\}$ [41].

Osnovno stanje sa racionalnim srednjem međučestičnim rastojanjem zove se samerljivo. U tom slučaju koordinate čestica u_l formiraju aritmetičku progresiju inkrementa a_S (ili umnoška a_S). Ako je ω iracionalno koordinate čestica ne formiraju aritmetičku progresiju.

U numeričkim proračunima u okviru FK modela ω se zadaje kao parametar. Definiše se broj čestica N i definiše se srednja međučestična razdaljina ω i u slučaju konačnog lanca uvedu se ciklični granični uslovi. A položaji čestica se onda mogu zadati na razne načine deterministički na primer, $u_l = l \cdot \omega$, $l = 1, \dots, N$ ili nasumično npr. $u_l = (l + 0.3 \cdot \text{rand}()) \cdot \omega$, $l = 1, \dots, N$, gde $\text{rand}()$ predstavlja neki generator slučajnih brojeva. Kod samerljivih struktura ω je racionalan broj pa se definiše u kodu jednostavno kao $\omega = 1, 1/2, 1/3, \dots$. Kod nesamerljivih struktura se srednja međučestična razdaljina u numeričkim proračunima definiše kao odnos dva susedna člana u Fibonačijevom nizu, $\omega = 55/89$ ili $\omega = 89/144$.

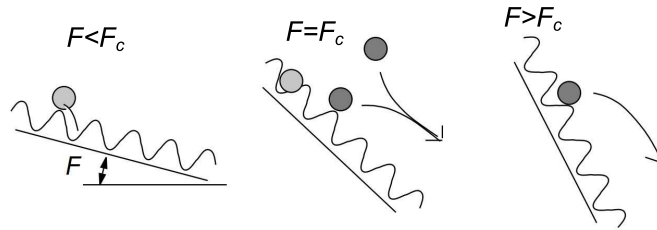
1.2 Uticaj spoljašnje sile i odziv sistema

Kada se na FK model deluje spoljašnjom silom pitanje je koje se postavlja kakav je odziv sistema, odnosno kako se mobilnost ili brzina čestica menja pri promeni spoljašnje sile. Iako je FK model jednostavan mehanički model, pod dejstvom spoljašnje sile može da opisuje različite realne fizičke situacije. Kada se na sistem deluje spoljašnjom silom F ukupna potencijalna energija sistema može se zapisati kao

$$U_{tot} = \sum_l [V(u_l) + V_{int}(u_{l+1} - u_l) - F u_l]. \quad (1.12)$$

Efekat spoljašnje sile predstavljen je na slici Sl. 1.2.

⁴Transliranjem indeksa u drugoj sumi potencijalna energija se može zapisati kao $E_N(\{u_l\}) = \sum_{l=1}^N \{V(u_l) + V_{int}(u_{l+1} - u_l)\}$.



Sl. 1.3 : Uticaj spoljašnje sile na čestice u periodičnom substratnom potencijalu.

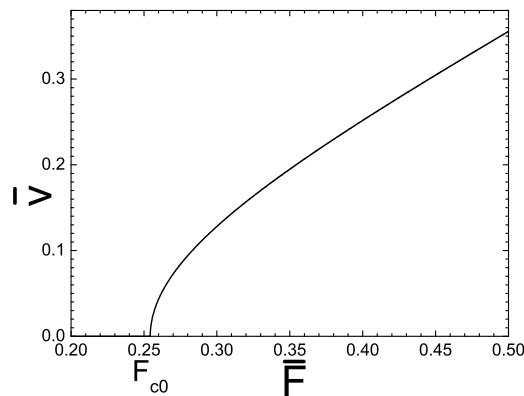
Dok je spoljašnja sila mala čestice se malo pomeraju unutar potencijalnih jama sinusnog substratnog potencijala. Kada spoljašnja sila dostigne neku vrednost $F > F_c$, gde F_c predstavlja kritičnu vrednost sile, čestice postaju nestabilnije, napuštaju svoje jame i počinju da izvode kolektivno kretanje. Dešava se prelaz iz stacionarnog u dinamički režim.

1.3 Kretanje pod dejstvom spoljašnje dc sile

U jako prigušenom dc voženom FK modelu (na FK model delujemo spoljašnjom prinudnom dc silom intenziteta F) kritična sila potrebna da bi čestice napustile svoje jame i započele kretanje naziva se dc treshold vrednosti sile i obeležava sa F_{c0} . Jednačine kretanja u ovom slučaju sa date sa

$$\dot{u}_i = u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i - V'(u_i) + F. \quad (1.13)$$

Na slici prikazana je zavisnost srednje brzine kretanja čestica od dc sile. Čestice ostaju pričvršćene u svojim jamama dok spoljašnja dc sila ne pređe vrednost dc tresholda. Od tog momenta srednja brzina čestice u funkciji dc sile postaje rastuća funkcija.

Sl. 1.4: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}$ i $K = 4$.

Za koju vrednost će se desiti ovaj prelaz zavisi od različitih parametara sistema, poput međučestične razdaljine ω i parametra K (što je K veće, veća je i vrednost dc tresholda). U slučaju jednočestičnog sistema

$$\dot{u} = -V'(u) + F. \quad (1.14)$$

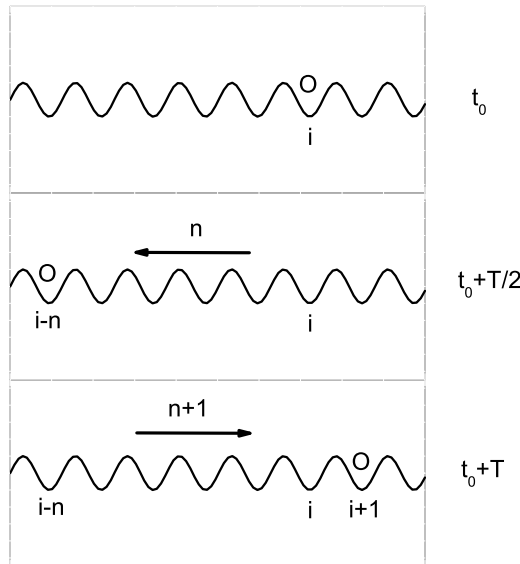
Dinamički *dc* treshold, kritična sila u ovom slučaju, definisan je sa $F_{c0} = \max V'(u)$.

1.4 Kretanje pod dejstvom spoljašnjih periodičnih sila

Razmotrimo kretanje sistema pod dejstvom spoljašnje periodične sile intenziteta

$$F(t) = \bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t). \quad (1.15)$$

Ona se sastoji se iz *dc* i *ac* komponente, gde je *dc* komponenta \bar{F} je ona koja "gura" čestice. Da ona ne postoji neka posmatrana *l*-ta čestica bi se pola perioda pomerila za nekoliko jama substratnog potencijala, a onda bi se vratila za drugu polovinu perioda. Stoga je sila koja izaziva njeno pomeranje zapravo \bar{F} . (videti Sl. 1.5). Na slici Sl. 1.5 $T = \frac{1}{\nu_0}$ predstavlja period *ac* sile, dok je t_0 početni trenutak koji može biti proizvoljno odabran.



Sl. 1.5: Kretanje čestice tokom jednog perioda *ac* sile, gde $n = 0, 1, 2, \dots$ predstavljaju broj čvorova za koje se čestica pomeri.

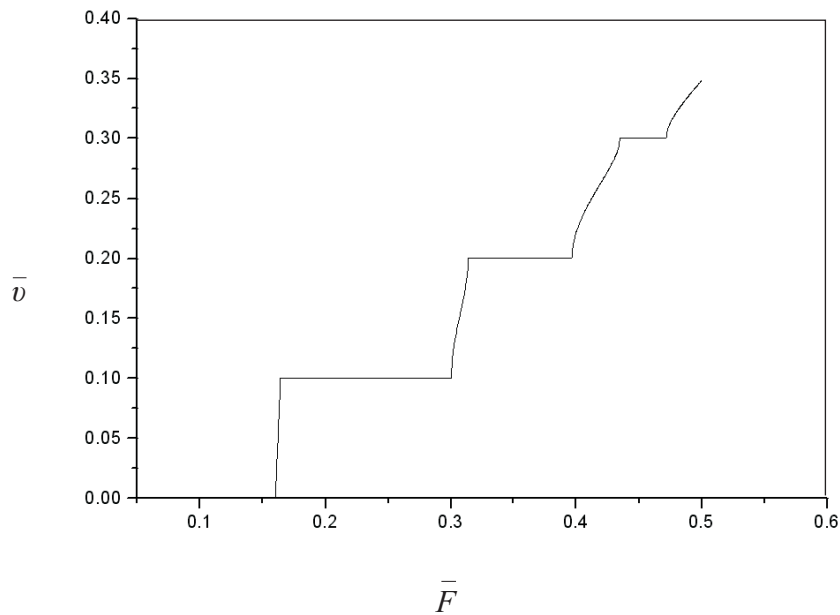
Jednačine kretanja će zavistiti od prigušenja (eng. damping). U ovom radu razmatra se slučaj jakog prigušenja (overdamped)⁵. U datom slučaju jednačine kretanja su

$$\dot{u}_l = u_{l+1} + u_{l-1} - 2u_l - V'(u_l) + F(t) \quad (1.16)$$

gde $l = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$, dok je N je broj čestica u lancu. Ovaj sistem može da bude rešen analitički samo za slučaj kada je $\omega = \langle (u_{l+1} - u_l) \rangle$ celobrojno, jer se u tom slučaju pomenuti lanac u periodičnom potencijalu (1.2) ponaša kao jedna čestica. Kada ω nije ceo broj sistem se mora rešavati numerički. Sistem jednačina (1.16) je integraljen korišćenjem metoda Runge

⁵U slučaju slabog prigušenja (underdamped), drugi izvod položaja po vremenu figuriše u jednačinama i dinamika sistema je opisana sistemom diferencijalno - diferencnih jednačina drugog reda po vremenu.

Kuta (Runge Kutta). Uvede se konačan broj čestica N i srednje međučestično rastojanje ω , čime je definisan i broj minimuma sinusnog substratnog potencijala. Zatim se nametnu ciklični granični uslovi. Za slučaj $N = 8$, $\omega = 1/2$ substratni potencijal ima četiri minimuma, a zbog cikličnih graničnih uslova čestica iz četvrtog minimuma ulazi u prvi. U ovom problemu javlja se takmičenje frekventnih skala: frekvencije ν_0 spoljašnje periodične (*ac*) sile i karakteristične frekvencije kretanja u periodičnom potencijalu pod dejstvom sile \bar{F} . Ovaj fenomen frustracije je veoma značajan jer pri određenom odnosu frekvencija dolazi do dinamičkog zaključavanja, (povećavanjem srednje sile \bar{F} ne dolazi do povećanja srednje brzine kretanja čestica \bar{v}), videti sliku Sl. 1.6.



Sl. 1.6: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu = 0.2$ i $K = 4$. Objavljeno u [43].

Ako je $\{u_l(t)\}$ rešenje sistema jednačina (1.16), onda simetrijska transformacija

$$\sigma_{i,j,m}\{u_l(t)\} = \{u_{l+i}(t - \frac{m}{\nu_0}) + j\} \quad (1.17)$$

daje novo rešenje, gde su i, j, m celi brojevi [35, 36]. Rešenje se naziva rezonantnim ako i samo ako postoji takva trojka celih brojeva koja je invarijantna u odnosu na simetrijsku operaciju $\sigma_{i,j,m}$, odnosno ako važi:

$$\sigma_{i,j,m}\{u_l(t)\} = \{u_l(t)\} \quad (1.18)$$

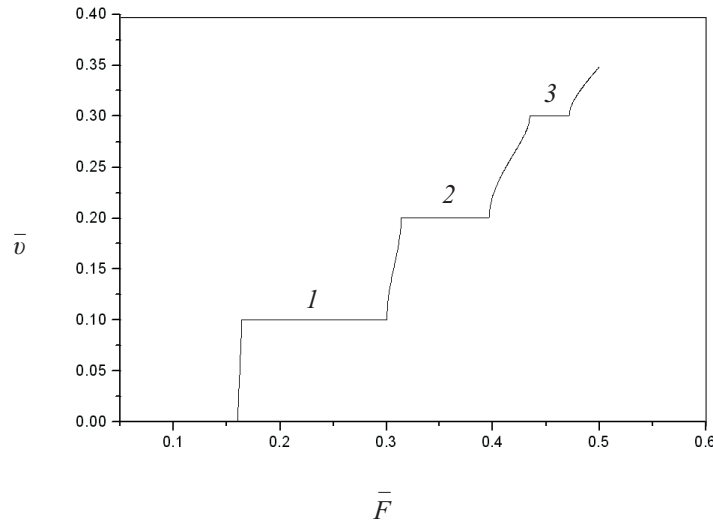
Srednja brzina rezonantnog rešenja je data sa [35, 36]

$$\bar{v} = \frac{i\omega + j}{m} \nu_0 \quad (1.19)$$

Uredjena trojka (i, j, m) celih brojeva nije jedinstvena. U slučaju kada je ω iracionalno postoji jedinstven minimalni triplet tako da i, j, m nemaju zajedničke faktore. Za racionalnu vrednost $\omega = \frac{p}{q}$ (gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi) minimalni triplet (i, j, m) je takav da $ip + jq$ i m nemaju zajedničke faktore. Ovaj uslov ipak ne definiše najmanji jedinstveni triplet jer je triplet $(\tilde{i} = i + lq, \tilde{j} = j - lp, m)$ za ma koje celobrojno l takođe minimalan [36]. Ceo broj m je pak jednoznačno određen ovim uslovom. Kada je $m = 1$ rezonantna rešenja i stepenici se zovu harmonijskim ($\frac{i}{m} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots$), a za $m > 1$ subharmonijskim. U specijalnom slučaju $m = 2$ govori se o polucelim stepenicima. Ovi stepenici nazivaju se Šapirovim (Shapiro), jer je prvi eksperimentalno opazio pojavu zaključavanja naučnik Sidni Šapiro [42]. U slučaju da je $\omega = \frac{1}{q}$ može se uvek odabrati $j = 0$ što pojednostavljuje izraz za srednju brzinu rezonantnog rešenja :

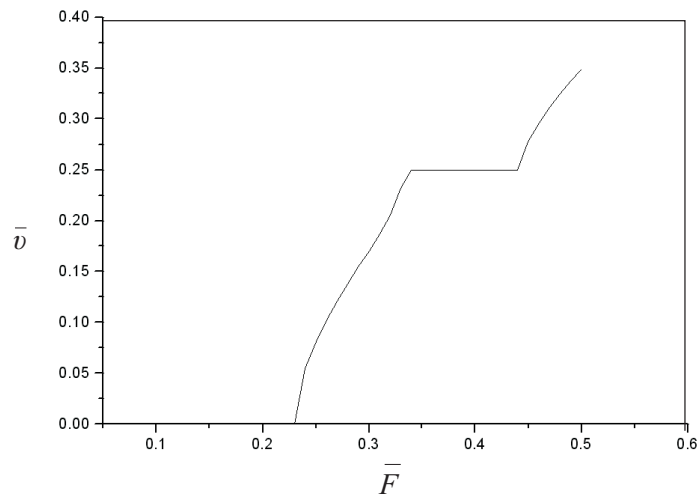
$$\bar{v} = \frac{i\omega}{m}\nu_0 \quad (1.20)$$

Odavde se lako mogu odrediti stepenici sa Sl. 1.6. Obzirom da ako je (i, j, m) minimalan triplet onda je i $(\tilde{i} = i + lq, \tilde{j} = j - lp, m)$ minimalan triplet za ma koje celobrojno l . U slučaju $\omega = \frac{1}{q}$, $p = 1$ pa iz $\tilde{j} = j - l$ vidimo da ako se odabere $l = j$ dobija se $\tilde{j} = 0$. U radu [43] autori su odredili da je minimalni triplet koji odgovara prvom harmonijskom stepeniku na grafiku na Sl. 1.7 ($i = -1, j = 1, m = 1$), odavde se trivijalno vidi da se izborom $l = 1$ dobija takođe minimalni triplet ($\tilde{i} = 1, \tilde{j} = 0, m = 1$) koji takođe odgovara rezonantnoj brzini datoj sa (1.19).

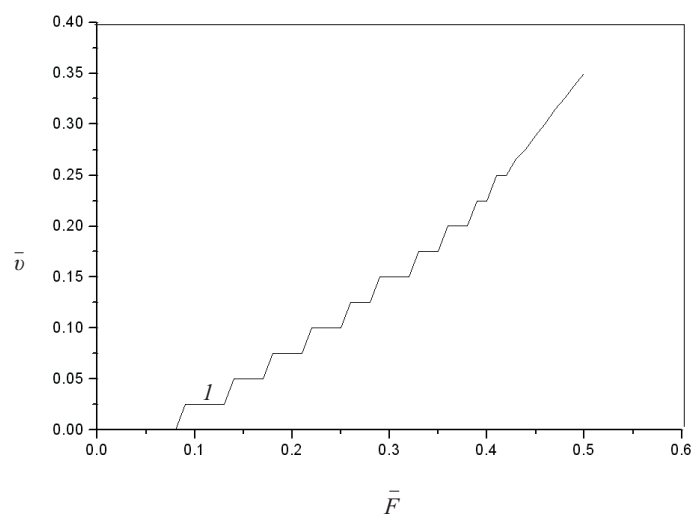


Sl. 1.7: Za teorijska razmatranja od značaja su harmonijski i poluceli stepenici. Na ovom grafiku vidi se prvi harmonijski step za $m = 1$. Iz relacije $\bar{v} = \frac{\omega}{m}\nu_0$ za $m = 1$ trivijalno se dobija da je $\bar{v} = \frac{1}{2}\nu_0 = 0.1$ i odatle je određen prvi harmonijski stepenik⁶ Nakon što \bar{F} pređe vrednost 0.5 na Sl. 1.6 ili Sl. 1.7 srednja brzina \bar{v} samo raste i nigde više ne dolazi do "zaključavanja".

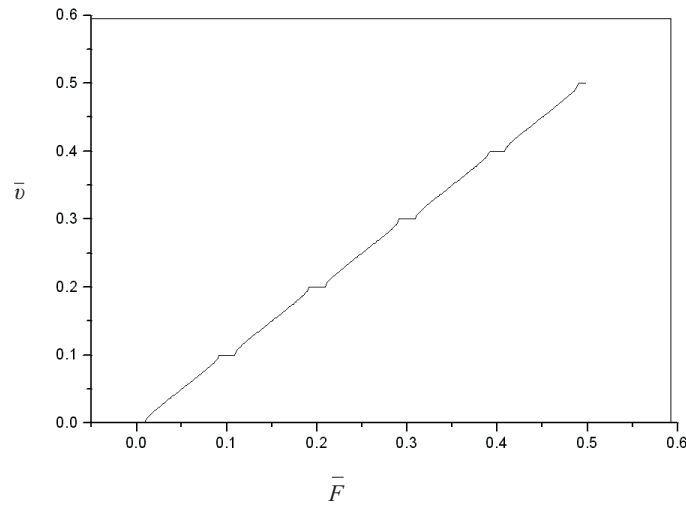
⁶Širina viših harmonijskih stepenika je manja u odnosu na prvi harmonijski stepenik. Stoga u svim teorijskim razmatranjima često ispituje samo ponašanje prvog harmonijskog stepenika i ovaj stepenik se u tom slučaju naziva harmonijskim stepenikom.



Sl. 1.8: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu = 0.5$ i $K = 4$. dobija se očitavanjem vrednosti $\bar{v} = 0.25$, za koje se javi zaključavanje, sa grafika i korišćenjem $\bar{v} = \frac{i\omega}{m}\nu_0$ dobija se da je jedini stepenik koji se javlja na grafiku prvi harmonijski.



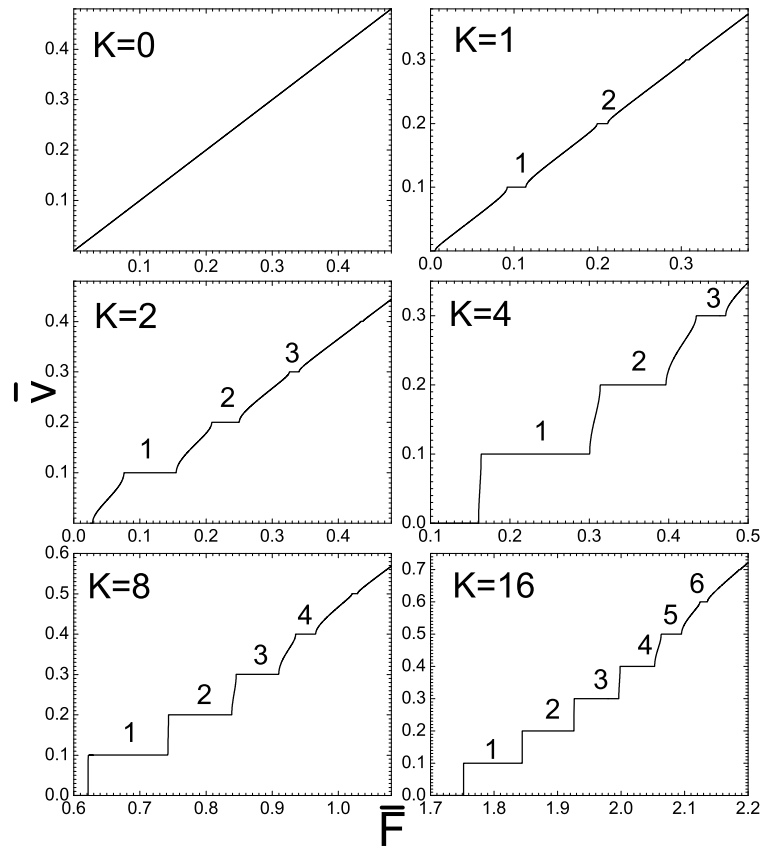
Sl. 1.9: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu = 0.05$ i $K = 4$. Na grafiku je označen prvi harmonijski stepenik.



Sl. 1.10: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}, F_{ac} = 10, \nu = 0.2$ i $K = 4$.

Do fenomena zaključavanja dolazi usled takmičenja dve sile $V'(u)$ i $F(t)$, pričvršćujuće i pokretačke sile respektivno. Na graficima Sl. 1.8 i Sl. 1.9 vidimo da promena ν_0 definiše i broj stepenika na nekom intervalu srednje sile, kao i vrednosti za koje će se stepenici pojaviti. Na slici Sl. 1.8 za vrednost $\nu_0 = 0.5$, prvi harmonijski stepenik se javlja za vrednost srednje brzine $\bar{v} = \omega\nu_0 = \frac{1}{2} \cdot 0.5 = 0.25$, dok se za vrednost $\nu_0 = 0.05$ na Sl. 1.9 prvi harmonijski stepenik javlja za vrednost srednje brzine $\bar{v} = \omega\nu_0 = \frac{1}{2} \cdot 0.05 = 0.025$. Kada $F_{ac} \rightarrow 0$ zaključavanje izostaje. Čestice se kreću isključivo pod dejstvom dc sile. U slučaju $F_{ac} \rightarrow \infty$ sistem se ponaša kao sistem slobodnih čestica. Pogledati grafik na Sl. 1.10. Za celobrojne vrednosti ω , samo harmonijski stepenici postoje, dok se poluceli i ostali subharmonijski pojavljuju za racionalne vrednosti ω [44,45]. Ipak ovi subharmonijski stepenici su toliko mali u odnosu na harmonijske, da se ne mogu uočiti na grafiku funkcije odziva $\bar{v}(\bar{F})$. Širina harmonijskog stepenika ⁷ sa grafika na Sl. 1.7 je $\Delta F_1 = 0.1366$. U Fortran kodu korak sile je \bar{F} je bio 10^{-4} , što ukazuje na tačnost sa kojom je rađeno. Sa istog grafika na osnovu (1.20) može se utvrditi da se poluceli stepenik koji se javlja za $\bar{v} = 0.05$, ali se ne može opaziti s grafika jer je širina ovog stepenika $\Delta F_{1/2}$ zanemarljiva u odnosu na širinu harmonijskog stepenika $\frac{\Delta F_{1/2}}{\Delta F_1} \approx 0$. Menjanjem parametara koji figurišu u jednačinama kretanja, poput F_{ac} i ν_0 , može se vršiti ispitivanje promene širine pojedinih stepenika u funkciji ovih parametara.

⁷Često se kaže dimenzija harmonijskog stepenika i umesto izmeriti širinu stepenika izmeriti stepenik.



Sl. 1.11: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu = 0.2$ i različite vrednosti K .

Pojavljivanje Šapiro stepenika strogo zavisi od K , kao što možete videti na Sl. 1.11. Kada je $K = 0$, imamo sistem slobodnih čestica i srednja brzina raste linearno sa povećanjem srednje sile. Za $K \neq 0$ Šapiro stepenici se pojavljuju. Promena K ne utiče na rezonantne vrednosti brzine pojedinih stepenika, ali će uticati na broj stepenika i kritičnu silu. U graničnom slučaju $K \rightarrow \infty$, kritična sila divergira i čestice ostaju pričvrćene.

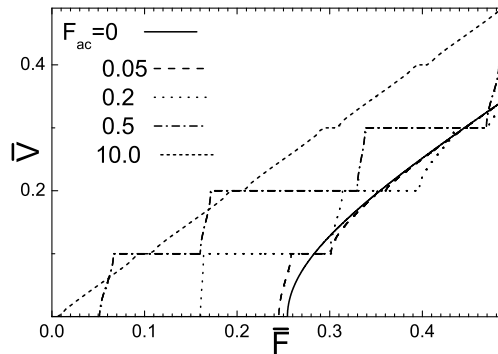
1.5 Zavisnost širine stepenika od spoljašnje periodične sile

U ovom poglavlju biće ispitivana zavisnost širine Šapiro stepenika pri promeni parametara spoljašnje periodične sile. Razmotrićemo kako se ponašaju Šapiro stepenici u standardnom ac+dc voženom jako prigušenom FK modelu pri promeni amplitude i frekvencije spoljašnje periodične sile, odnosno razmotrićemo amplitudnu i frekventnu zavisnost Šapiro stepenika.

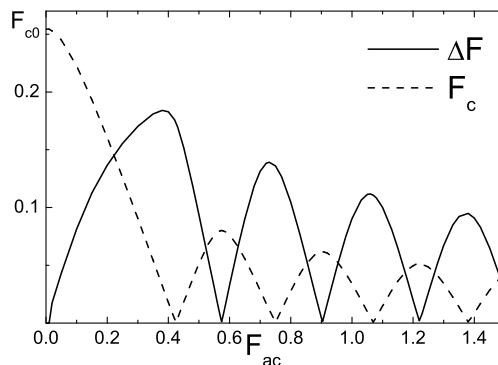
1.5.1 Amplitudna zavisnost Šapiro stepenika

Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u radu [46]. Od interesa je ispitivanje dimenzije odnosno širine stepenika i razmatranje kako širina stepenika zavisi od F_{ac} , kao i zavisnost

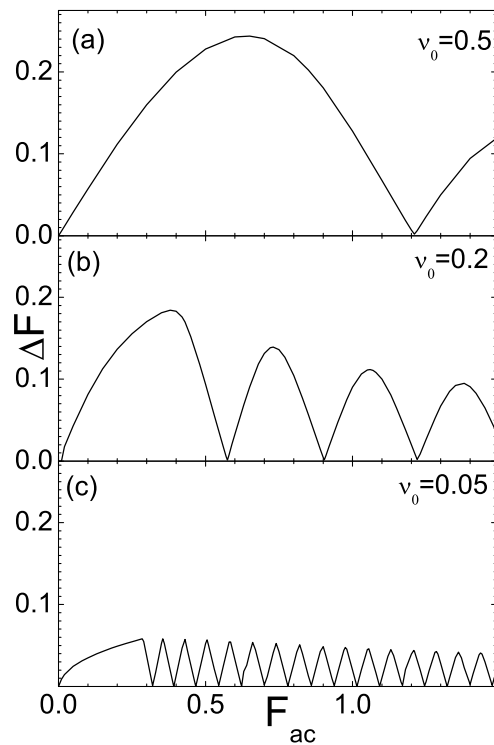
kritične sile od F_{ac} . Kako se može uočiti sa Sl. 1.12 stepenici mogu postojati samo za određenu vrednost amplituda, inače se sistem ponaša ili kao dc disipativan $F_{ac} \rightarrow 0$ ili kao sistem slobodnih čestica $F_{ac} \rightarrow \infty$. Na krivama na slici Sl. 1.12, može se videti niz harmonijskih stepenika koji se pojavljuju kada srednja brzina ima vrednost celobrojnog umnoška $\omega\nu_0$. Posmatranjem amplitudne zavisnosti širine prvog harmonijskog stepenika i kritične sile Sl. 1.13, usporedbom se može zaključiti da minimumi kritične sile odgovaraju maksimumima širine stepenika i obratno. F_{c0} na grafiku predstavlja dc treshold vrednost kritične sile. Kao što se može videti na Sl. 1.14 za sve vrednosti frekvencije ac sile, širina stepenika osciluje sa ac amplitudom i za relativno velike vrednosti frekvencije oscilacije dobijaju beselovsku formu. Za velike vrednosti frekvencije Sl.14(a) maksimalna širina stepenika (prvi maksimum na krivoj $\Delta F(F_{ac})$) je veći od prvog maksimuma koji se javlja pri manjim vrednostima frekvencije. Na Sl. 1.14(b) maksimalna širina stepenika i period oscilacija su smanjeni, dok oscilacije i dalje zadržavaju beselovsku formu. Za male vrednosti ac frekvencije Sl. 1.14(c), maksimalna širina stepenika i period oscilacija značajno su smanjeni i prvi maksimum na krivoj $\Delta F(F_{ac})$ nema značajno veću vrednost od ostalih. Na slici Sl. 1.15 predstavljene su Beselove funkcije J_0, J_1, J_2 .



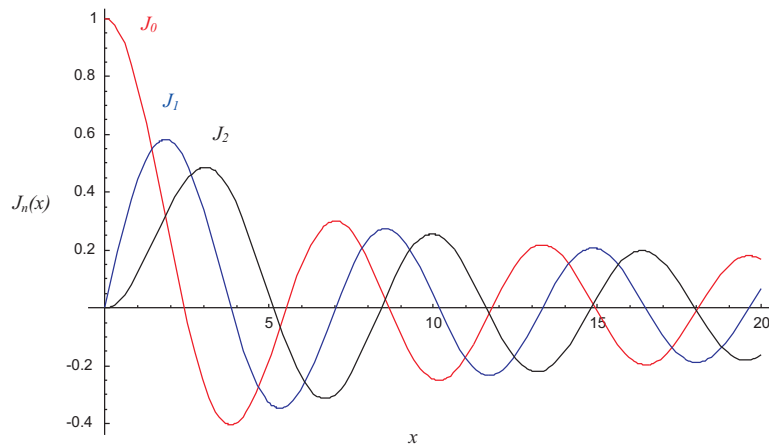
Sl. 1.12: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}, F_{ac} = 0.2, \nu = 0.2$ i različite vrednosti K .



Sl. 1.13: Širina prvog harmonijskog stepenika i kritična sila kao funkcija ac sile F_{ac} . $F_{c0} = 0.2544$ na grafiku predstavlja vrednost kritične sile u slučaju $F_{ac} = 0$.



Sl. 1.14: Kritična sila kao funkcija ac amplitude, za $\omega = 1/2$, $K = 4$ i različite vrednosti ac frekvencije: a) $\nu_0 = 0.5$, $\nu_0 =, \nu_0 =$ isprekidana linija predstavlja širinu prvog harmonijskog stepenika.



Sl. 1.15: Beselove funkcije J_0 , J_1 i J_2 .

U talasima gustine naboja analitički rezultat u formi Beselovih funkcija dobijen je za slučaj visokih frekvencija u jednočestičnom modelu.

1.5.2 Analitički rezultat u slučaju celobrojnog ω

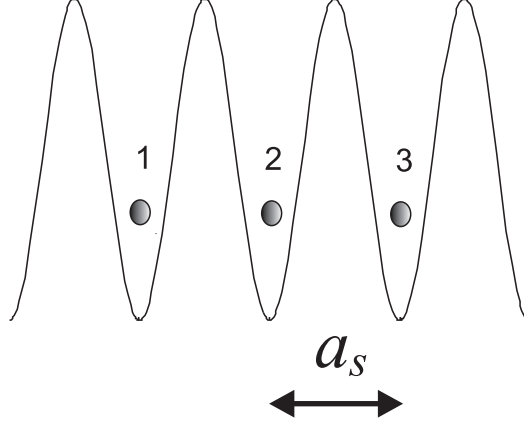
Analitički rezultat iz ovoog poglavlja publikovan je u radu [47]. Jednačina

$$\dot{u}_l = u_{l+1} + u_{l-1} - 2u_l - V'(u) + F(t) \quad (1.21)$$

gde je $F(t) = \bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t)$, u slučaju jedne čestice postaje

$$\dot{u} = -V'(u) + F(t) = -V'(u) + \bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t). \quad (1.22)$$

Posmatrajmo član $-V'(u) + \bar{F}$ u jednačini (1.22). Iako se $V'(u)$ menja od tačke do tačke prostora, ovaj član je konstantan duž svakog perioda potencijala a_S (jednako vreme treba čestici da stigne od tačke 1 do tačke 2, kao i od tačke 2 do tačke 3, vidi sliku) i odgovara brzini drifta v_d (videti sliku Sl. 1.16). Stoga jednačina (1.22) može biti zapisana kao



Sl. 1.16: Pozicija čestica u standardnom sinusoidalnom substratnom potencijalu, za slučaj samerljive strukture $\omega = 1$

$$\dot{u} = -v_d + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t). \quad (1.23)$$

odnosno

$$u(t) = -v_d t + \frac{F_{ac}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi\nu_0 t) + u_0. \quad (1.24)$$

Ovde je v_d brzina drifta, F_{ac} i ν_0 su respektivno amplituda i frekvencija ac sile, a u_0 je konstanta integracije. U slučaju kada je substratni potencijal periodična i parna funkcija, možemo pisati:

$$V(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} a_q \cos(q\alpha u). \quad (1.25)$$

Zamenom (1.24) u (1.25) i korišćenjem funkcije generatriše za Beselove funkcije

$$\exp\left[-i \frac{F_{ac}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi\nu_0 t)\right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p\left(\frac{F_{ac}}{2\pi\nu_0}\right) \exp(-ip2\pi\nu_0 t). \quad (1.26)$$

dobija se

$$V(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_q J_p\left(\frac{q\alpha F_{ac}}{2\pi\nu_0}\right) \cos[(2\pi p\nu_0 - q\alpha v_d)t + q\alpha u_0]. \quad (1.27)$$

Iz jednakosti (1.27) vidi se da je srednja energija "pritiskanja" $\langle V(u) \rangle = \frac{a_0}{2}$, osim ako je $2\pi p\nu_0 = q\alpha v_d$, jer u tom slučaju postoji dodatna polarizaciona energija

$$\delta \langle V(u) \rangle = \sum_n a_n J_n\left(\frac{F_{ac}}{2\pi\nu_0}\right) \cos(q\alpha u_0). \quad (1.28)$$

gde se sumiranje vrši po svim p i q takvim da je $\frac{p}{q} = \frac{\alpha v_d}{2\pi\nu_0}$.

Takođe i vremenski usrednjena sila pritiskanja $\delta\langle V'(u_0) \rangle$ će biti različita od nule kada je $2\pi p\nu_0 = q\alpha v_d$ u kom slučaju:

$$\delta\langle V'(u_0) \rangle = \sum_n q\alpha a_q J_p\left(\frac{F_{ac}}{2\pi\nu_0}\right) \cos(q\alpha u_0) \quad (1.29)$$

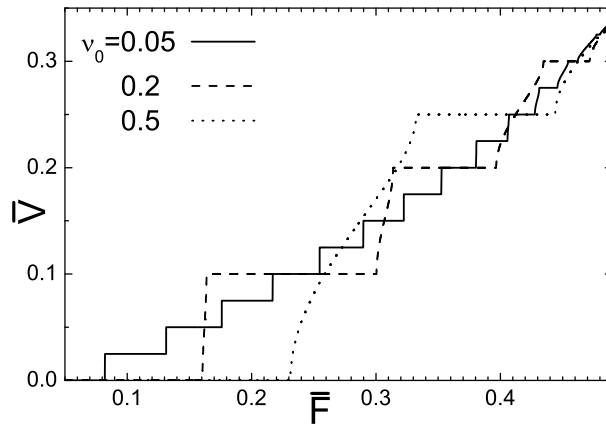
Promenom parametra u_0 u oblasti za koju je polarizaciona energija manja od nule, sila pritiskanja poništava efekat dc sile tako da srednja brzina čestica ostaje konstantna. Ta oblast sile za koju brzina ostaje konstantna određuje širinu Šapiro stepenika. Stoga, širina Šapiro stepenika u funkciji amplitude ac sile F_{ac} će takođe biti Beselova funkcija. Kako je $\delta\langle V'(u_0) \rangle$ neparna funkcija od u_0 i njene ekstremne vrednosti se pojavljuju za $u_0 = u_m$, širina stepenika je proporcionalna sa $\delta\langle V'(u_0) \rangle$. Može se primetiti da u slučaju standardnog FK modela, za $V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2}[1 - \cos(2\pi u)]$, subharmonijskih stepenika nema.

1.5.3 Frekventna zavisnost Šapiro stepenika

Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u radu [46]. Frekvencija ac sile određuje odgovarajuće rezonantne brzine i u okviru standardnog FK modela harmonijski stepenici se pojavljuju za

$$\bar{v} = \frac{i}{m}\omega\nu_0 \quad (1.30)$$

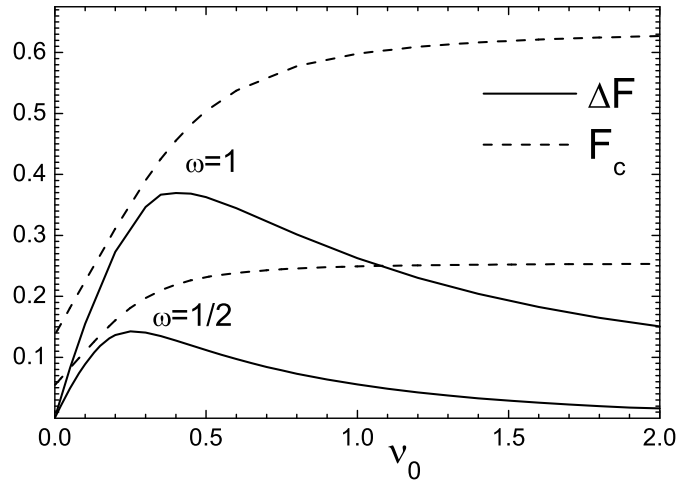
gde je $i = 1, 2, 3, \dots$. Stoga promena frekvencije ν_0 ne utiče samo na širinu pojedinih stepenika na $\bar{v}(\bar{F})$ (kao što je to slučaj kod amplitude), već i na vrednosti brzine \bar{v} za koje se javljaju pojedini harmonijski stepenici (videti Sl. 1.17).



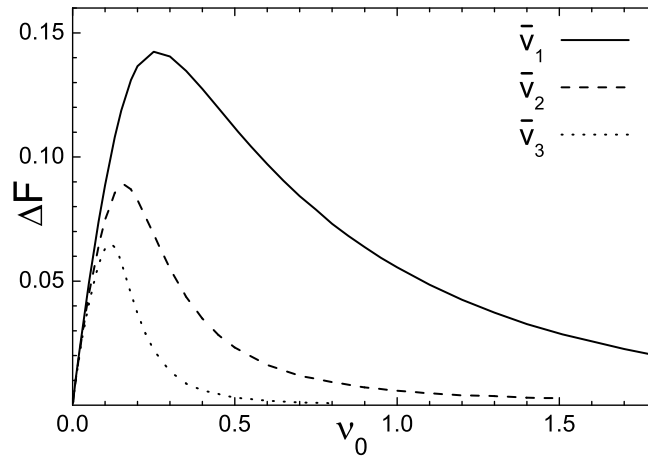
Sl. 1.17: Srednja brzina u funkciji dc sile za vrednost parametara $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$ i različite vrednosti frekvencije $\nu_0 = 0.05$, $\nu_0 = 0.2$ i $\nu_0 = 0.5$.

Sa funkcija odziva dobijenih za čitav opseg frekvencija, očitane su širine stepenika i kritične sile. Na slici Sl. 1.18 prikazana je širina prvog harmonijskog stepenika i kritična sila u funkciji ν_0 za dve samerljive strukture $\omega = 1/2$ i $\omega = 1$. Za obe samerljive strukture sa porastom frekvencije

širina stepenika raste do dostizanja maksimuma i onda opada odlazeći u nulu. Kritična sila nakon početnog rasta saturira dc treshold vrednosti $F_{c0} = 0.2544$ i $F_{c0} = 0.6367$ za $\omega = 1/2$ i $\omega = 1$ respektivno. Sa druge strane kada $\nu_0 \rightarrow 0$, F_c teži vrednosti $F_{c0} - F_{ac}$ (0.0544 za $\omega = 1/2$ i 0.1367 za $\omega = 1$).



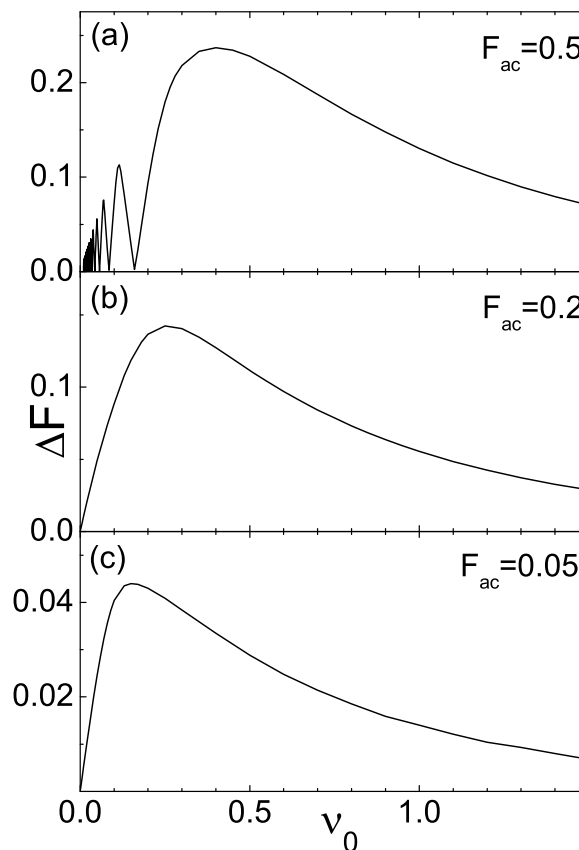
Sl. 1.18: Širina harmonijskog stepenika (puna linija) i kritična sila (isprekidana linija) u funkciji ν_0 za $K = 4$ u slučaju dve samerljive strukture: $F_{ac} = 0.2$ i $\omega = 1/2$ i $F_{ac} = 0.5$ i $\omega = 1$.



Sl. 1.19: Širina prva tri harmonijska stepenika $\bar{v} = \frac{i}{1}\omega\nu_0$, $i = 1, 2, 3$ u funkciji ν_0 za vrednosti parametara $K = 4$, $\omega = 1/2$, $F_{ac} = 0.2$.

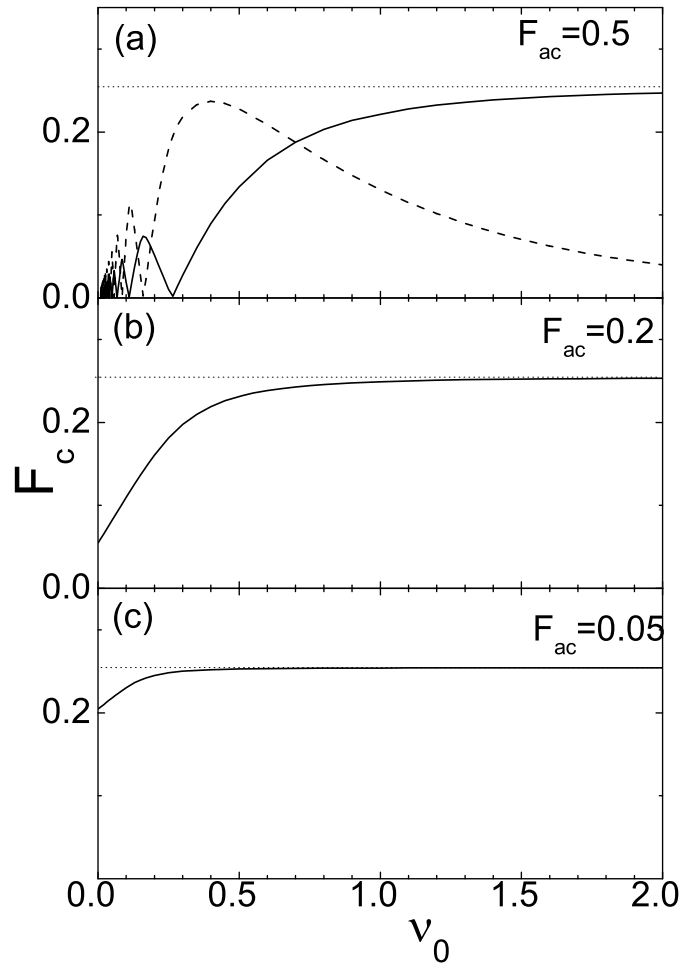
Analiziranjem širine prva tri harmonijska stepenika u funkciji ν_0 (videti sliku Sl. 1.19) može se uočiti da je širina prvog harmonijskog stepenika najveća i da širina harmonijskih stepenika opada sa porastom harmonijskog reda. Takođe viši harmonijski stepenici brzo nestaju sa porastom ac frekvencije. Na slici Sl. 1.20 predstavljena je širina prvog harmonijskog stepenika

u funkciji frekvencije ac sile za tri različite ac amplitude. Za sve vrednosti amplitude nakon što širina stepenika dostigne globalni maksimum opada i za više vrednosti frekvencije postaje jednaka nuli. Ipak na slici Sl. 1.20 (a), za vrednost ac amplitude $F_{ac} = 0.5$, može se primetiti interesantno ponašanje. Za datu vrednost amplitude se u oblasti niskih frekvencija $\nu_0 < 0.16$ javljaju oscilacije širine stepenika sa frekvencijom, koje ne postoje za manje vrednosti amplitude ac sile. Sa daljim porastom frekvencije ove oscilacije nestaju i ponašanje postaje isto kao i na slikama Sl. 1.20 (b) i Sl. 1.20 (c).



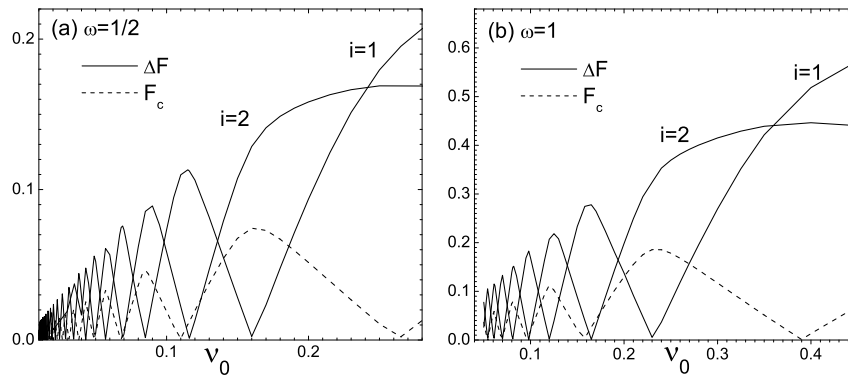
Sl. 1.20: Širina prvog harmonijskog stepenika $\bar{v} = \omega\nu_0$ u funkciji ν_0 za $\omega = 1/2$, $K = 4$ i tri različite vrednosti ac amplitude a) $F_{ac} = 0.5$ b) $F_{ac} = 0.2$ c) $F_{ac} = 0.05$.

Na slici Sl. 1.21 prikazana je zavisnost kritične sile F_c od ac frekvencije za iste tri vrednosti amplitude. U dve amplitudne oblasti Sl. 1.21 (b) i Sl. 1.21 (c) pri niskim vrednostima frekvencije kritična sila F_c je rastuća funkcija. Sa daljim porastom frekvencije kritična sila F_c saturira dc treshold vrednosti F_{c0} , koja je na grafiku reprezentovana tačkicama. Za $\nu_0 \rightarrow 0$ i $F_{ac} = 0.2$, slika Sl. 1.21 (b) kritična sila se približava vrednosti $F_{c0} - F_{ac} = 0.0544$. Sa porastom ν_0 , F_c saturira brže dc treshold vrednosti nego u slučaju (a). Za male amplitude (c) u limitu $\nu_0 \rightarrow 0$ kritična sila dostiže vrednost $F_c = 0.2044$, a sa porastom frekvencije saturira F_{c0} . Oscilatorno ponašanje za male frekvencije će se uvek pojaviti u slučaju $F_{ac} > F_{c0}$.



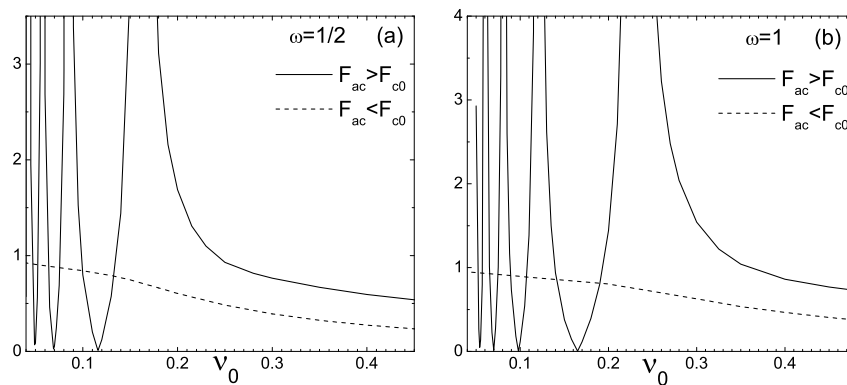
Sl. 1.21: Kritična sila F_c u funkciji ac frekvencije ν_0 za $\omega = 1/2$, $K = 4$ i različite vrednosti ac amplitude a) $F_{ac} = 0.5$, b) $F_{ac} = 0.2$, c) $F_{ac} = 0.05$. Isprekidana linija na a) predstavlja širinu prvog harmonijskog stepenika.

Slično oscilatorno ponašanje uočava se i u drugim samerljivim strukturama i generalno je u visokoamplitudnom limitu u $ac+dc$ voženom FK modelu. Širina prvog harmonijskog stepenika ($i = 1$), drugog harmonijskog stepenika ($i = 2$) i kritična sila su predstavljene za dve srednje međučestične razdaljine $\omega = 1/2$ i $\omega = 1$ na slici Sl. 1.22. Kao u slučaju oscilovanja širine stepenika sa ac amplitudom može se primetiti da za obe samerljive strukture, maksimalna širina stepenika opada sa harmonijskim redom. Periodi oscilacija za ΔF i F_c su isti i za prvi harmonijski stepenik maksimum jedne krive odgovara minimumu druge. Ovo oscilovanje nestaje sa daljim povećanjem frekvencije i tada se sistem ponaša kao u slučaju $F_{ac} < F_{c0}$. Ako je amplituda primenjene sile jednaka dinamičkom dc treshold-u, oscilacije nestaju i ΔF i F_c idu u nulu za $\nu_0 \rightarrow 0$. Pojava oscilacija za niske vrednosti frekvencije pri $F_{ac} > F_{c0}$ rezultat je takmičenja sile $F(t)$ i sile pričvršćivanja čestica u jamama substratnog potencijala. Oscilacije postoje dok ih dc komponenta ne "uništi".



Sl. 1.22: Širina prva dva harmonijska stepenika ΔF i kritična sila F_c (isprekidana linija) u funkciji ν_0 u visokoamplitudnoj oblasti $F_{ac} > F_{c0}$, za $K = 4$ i a) $F_{ac} = 0.5$, $\omega = 1/2$, b) $F_{ac} = 1.2$, $\omega = 1$.

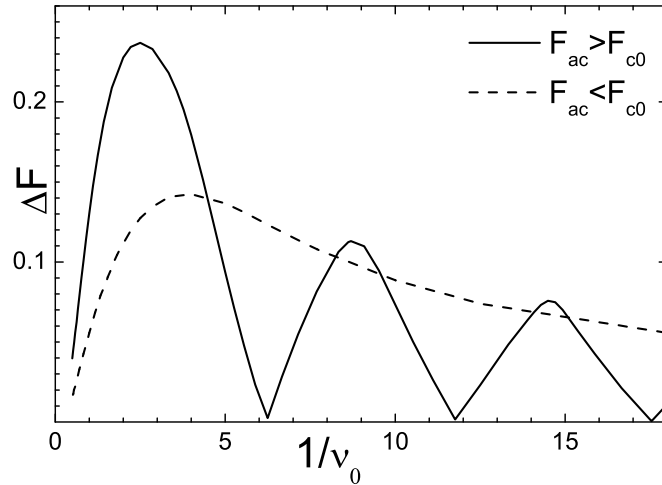
U realnim fizičkim sistemima odnos širine prvog i drugog harmonijskog stepenika je često ispitivan i po referenci je skoro konstantan. Na slici Sl. 1.23 odnos $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$ predstavljen je za dve različite samerljive strukture $\omega = 1/2$ i $\omega = 1$ i dve amplitudne oblasti $F_{ac} < F_{c0}$ i $F_{ac} > F_{c0}$. Kada je $F_{ac} < F_{c0}$, odnos širina $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$ opada sa porastom frekvencije i pri visokim vrednostima frekvencije teži nekoj konstantnoj vrednosti. U slučaju kada je $F_{ac} > F_{c0}$ zbog pojave oscilatornog ponašanja na niskim frekvencijama pojavljuju se oštri pikovi u tačkama gde $\Delta F_1 \rightarrow 0$ (visine pikova su reda veličine 100, a vertikalna osa uzima vrednosti od 0 do 4 da bi obe krive bile vidljive).



Sl. 1.23: Odnos širine drugog i prvog harmonijskog stepenika $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$ u funkciji ν_0 za $K = 4$ za dva različita slučaja $F_{ac} > F_{c0}$ (puna linija) i $F_{ac} < F_{c0}$ (isprekidana linija) i dve različite samerljive strukture a) $\omega = 1/2$, b) $\omega = 1$.

Na višim frekvencijama ovi pikovi nestaju i ponašanje je slično kao u [20].

1.5.4 Zavisnost širine Šapiro stepenika od perioda ac sile



Sl. 1.24: Širina prvog harmonijskog stepenika kao funkcija $\frac{1}{\nu_0}$ za $\omega = 1/2$ i $K = 4$ u visokoamplitudnoj oblasti $F_{ac} = 0.5$, $F_{ac} > F_{c0}$ (puna linija) i niskoamplitudnoj oblasti $F_{ac} = 0.2$, $F_{ac} < F_{c0}$. (isprekidana linija)

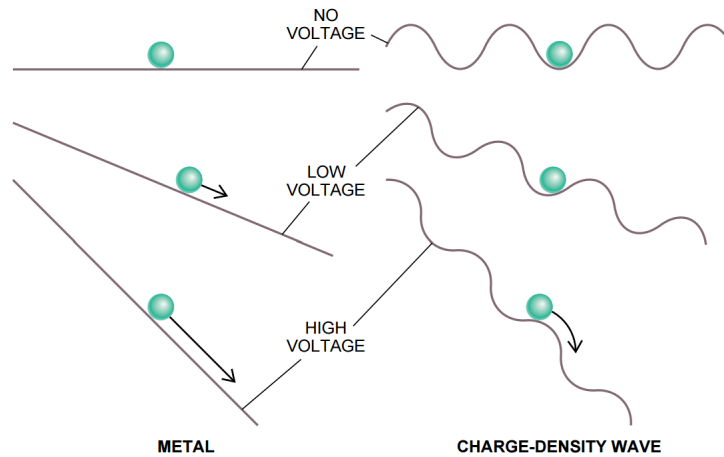
Na slici Sl. 1.24 širina stepenika je predstavljena u funkciji perioda $\frac{1}{\nu_0}$ ac sile za slučajeve $F_{ac} > F_{c0}$ i $F_{ac} < F_{c0}$. Za $F_{ac} > F_{c0}$ kriva je slična Beselovim oscilacijama širine stepenika sa amplitudom. Oscilacije se dešavaju usled kretanja čestica napred - nazad pod dejstvom ac sile. Rastojanje koje čestice pređu krećući se napred-nazad određeno je i vremenom koje čestice imaju da pređu to rastojanje, a to vreme je određeno frekvencijom ac sile ν_0 . Za male vrednosti frekvencije ν_0 , zbog dugog perioda $T = \frac{1}{\nu_0}$, čestice će skakati u udaljenije jame i provešće manje vremena pričvršćene, što će rezultovati manjom širinom stepenika. Sa porastom frekvencije (period se smanjuje) čestice će skakati između bližih jama i provešće više vremena pričvršćene. Oscilacije će postojati sve dok dc doprinos potpuno ne nadjača ac doprinos.

1.6 Realni fizički sistemi na koje se može primeniti FK model

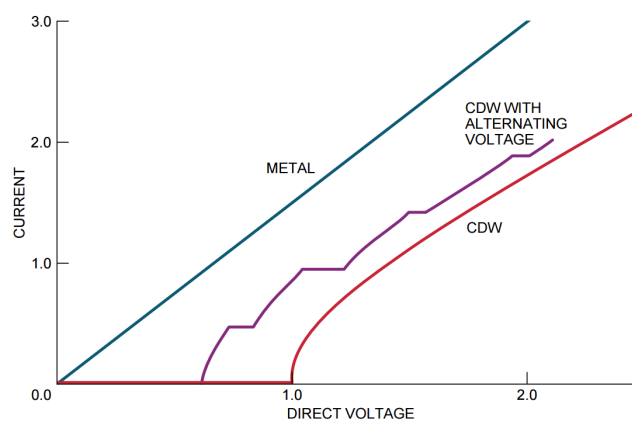
FK model može biti korišćen za opis niza neinteragujućih atoma, klastera atoma za DNK modele, pa čak i za opis frustriranih jednodimenzionih magnetnih sistema. Jedna od prvih primena FK modela je za opis dislokacija u metalima [3,6–9]. FK model je prvi model pomoću koga su opisane dislokacije na atomskom nivou. Disipativni $ac+dc$ vožen jako prigušen FK model se često koristi za opis različitih fenomena u različitim oblastima fizike, poput talasa gustine naboja i talasa gustine spina [16–24], sistema Džozefsonovih spojeva [25–32] i poslednjih godina i superprovodnih nanožica [33,34]. Ove sisteme opisuje veoma dobro jako prigušeni (overdamped) $ac + dc$ vožen FK model. Slabo prigušeni (underdaped) FK model se koristi za opisivanje pojava gde inercijalni efekti ne mogu biti zanemareni, poput pojava kakve se javljaju u tribologiji. U ovom poglavlju akcenat će biti stavljen na primenu Frenkel Kontorova modela u talasima gustine naboja i Džozefsonovim spojevima.

1.6.1 Talasi gustine naboja

Jedna od osnovnih primena FK modela je u talasima gustine naboja (charge density wave systems, CDW). Na niskim temperaturama bliskim apsolutnoj nuli, između elektrona u pojedinim metalima javlja se kolektivno ponašanje, takozvana samoorganizacija. Ti elektroni koji se ponašaju kao jedna celina zovu se talasi gustine naboja i teorijski ih je istraživao Rudolf E. Perls ranih 30-ih godina prošlog veka, da bi do njihovog eksperimentalnog otkrića došlo tek 70-ih godina prošlog veka. U prvi mah talasi gustine naboja su bili kandidati za objašnjenje pojave superprovodnosti. Danas znamo da se superprovodnost javlja usled drugačijeg mehanizma.



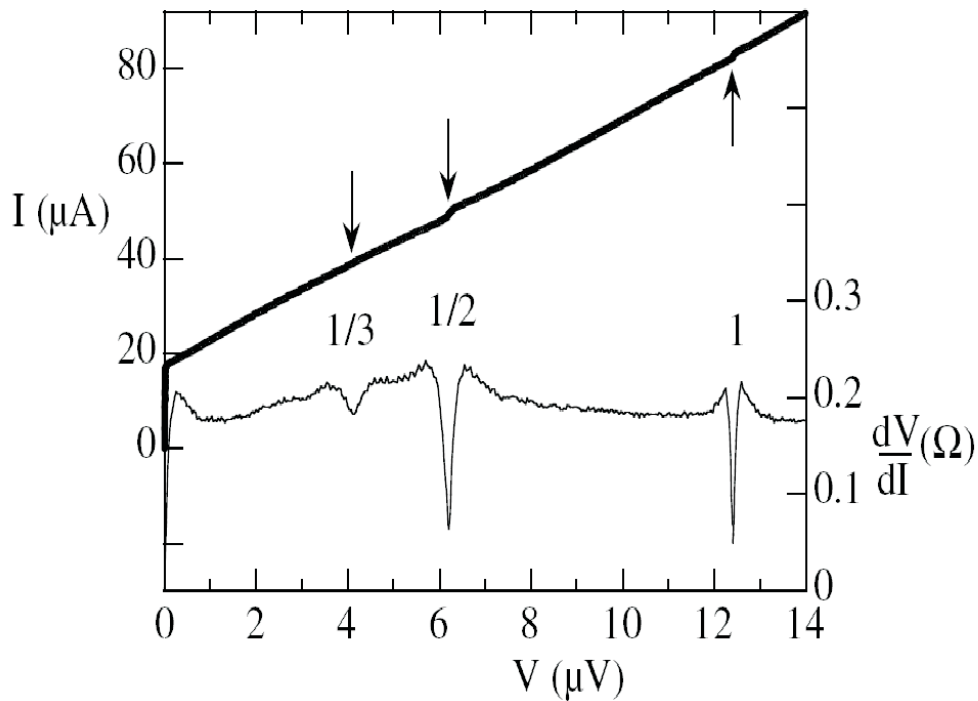
Sl. 1.25: Model naelektrisanih čestica pokazuje razliku struje u talasima gustine naboja i u običnim metalima. U metalima (levo) čestice leže na ravnim (električni potencijal) površima. Dovođenjem napona površi se nagnu i čestice počnu da se kreću; uspostavi se struja. Za talase gustine naboja (desno) površi su "rebraste". Dovođenjem malog napona nagib je mali i čestica malo promene svoj položaj i ne uspostavlja se struja. Ako je nagib dovoljno veliki da čestice preskoče barijere uspostavlja se struja. Grafik je preuzet iz rada [48].



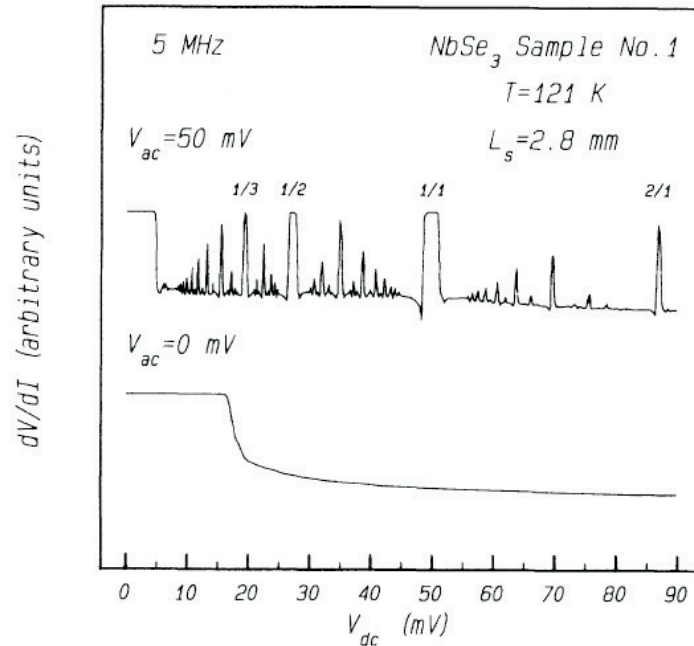
Sl. 1.26: Grafik struje u funkciji napona za metale i talase gustine naboja. U metalima (plava linija) struja raste linearno sa naponom. Kod talasa gustine naboja nema struje dok napon ne dostigne neku kritičnu vrednost; samo tada se uspostavlja struja (crvena kriva). Ako se uz dc napon primeni i alternirajući ac napon, kriva pokazuje plateau (ljubičasta kriva). Platoi odgovaraju dinamičkom zaključavanju kada se kretanje talasa gustine naboja poklopi sa ac frekvencijom. Grafik je preuzet iz rada [48].

Pojava stepenika javlja se u mnogim eksperimentalnim studijama. U ovom radu akcenat je stavljen na fiziku uređaja (device physics). Pošto se u standardnom FK modelu razmatra linearan lanac čestica, od interesa su oni CDW materijali koji se ponašaju kao linearni lanci. U tu grupu spadaju NbSe_3 , TaS_3 , $\text{K}_{0.3}\text{MoO}_3$, $\text{Rb}_{0.3}\text{MoO}_3$ [36]. Fenomen zaključavanja primećen je u CDW transportu u jedinjenjima poput NbSe_3 i TaS_3 . Kada je dc polje veće od polja praga za CDW provođenje E_T , javlja se struja koja sadrži i dc i oscilatornu komponentu. Kada se dc i ac napon primene zajedno $V(t) = V_{dc} + V_{ac} \cos(\omega t)$ javljaju se stepenici u dc strujno naponskoj karakteristici gde dc CDW struja ostaje konstanta pri promeni napona. Ovi stepenici su u vezi sa odnosom spoljašnje frekvence ω i unutrašnje ω_n . Javljaju se harmonijski stepenici za koje je $\frac{\omega_n}{\omega} = p$ i subharmonijski $\frac{\omega_n}{\omega} = \frac{p}{q} \neq r$, gde $p, q, r \in \mathbb{Z}$. Ovde postoji analogija između brzine i struje, kao i između sile i napona, ako se izvrši usporedba sa standardnim FK modelom.

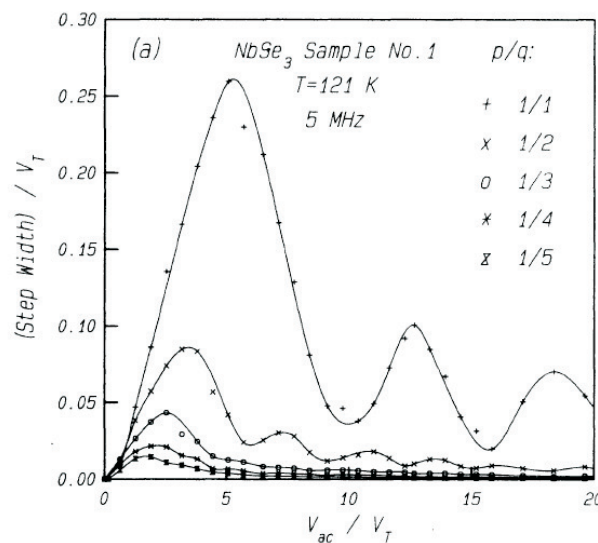
Stepenici se pojavljuju kao pikovi na grafiku zavisnosti diferencijalnog otpora $\frac{dV}{dI}$ od dc napona (videti Sl. 1.27, Sl. 1.28.). Širine stepenika se izračunavaju kao $\delta V = \int \frac{dV}{dI} dI$. Razlog ovome je taj što se na grafiku odziva $I(V)$ dobijaju minijturni stepenici čiju je širinu praktično nemoguće odrediti na drugi način (videti Sl. 1.27). Na stotine malih subharmonijskih stepenika mogu se videti na kvalitetno pripremljenom uzorku. Za svaki od ovih jedinjenja postoji kritična temperatura, ispod kojeg postaju CDW sistemi. NbSe_3 i $\text{K}_{0.3}\text{MoO}_3$ postaju CDW sistemi na temperaturama 145K i 180K, respektivno. NbS_3 je CDW na 340K, što znači da pokazuje ove efekte na sobnoj temperaturi. Širine stepenika u funkciji ac napona osciluju beselovski (videti Sl. 1.29).



Sl. 1.27: Grafik iz rada [16]. Gornja kriva: Strujno - naponska karakteristika uzorka. Vidi se pojava stepenika malih dimenzija. Donja kriva: Diferencijalni otpor uzorka kao funkcija napona. Sa ove krive se mere i određuju stepenici. Kao rezultat merenja dobijaju se dva subharmonijska i jedan harmonijski stepenik.



Sl. 1.28: Grafik iz rada [17]. Na grafiku je dat diferencijalni otpor u funkciji dc napona. Stepenci se javljaju za pikove diferencijalnog otpora. Predstavljene su rezultati za NbSe₃ na temperaturi od 121K. Vidi se analogija sa standardnim FK modelom. Za $V_{ac} = 0$ ne dolazi do pojave zaključavanja.



Sl. 1.29: Grafik iz rada [17]. Izmereni stepenci su stepenci sa grafika sa Sl. 1.28. Vidimo da dimenzija stepenika osciluje u zavisnosti od V_{ac} poput Beselovih funkcija.

Na slici Sl. 1.29 vidimo beselovske oscilacije prvog harmonijskog stepenika 1/1 i više subharmonijskih stepenika 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, sa kojih možemo videti kako se odnose relativne širine različitih stepenika, za različite vrednosti ac napona. Na osnovu svega ovoga vide se jasne analogije i veze između CDW sistema i $ac + dc$ voženog FK modela.

1.6.2 Džozefsonovi spojevi

Džozefsonov spoj je tanak sloj između dva superprovodna materijala. U strujno-naponskoj karakteristici Džozefsonovog spoja, za razliku i od standardnog otpornika i diode, postoji diskontinuitet. Ovo je takozvana dc karakteristika. Džozefsonov spoj, usled uspostavljanja struje, ima karakterističnu frekvenciju, takozvanu Džozefsonovu frekvenciju plazme. Ukoliko se spoj ozrači zračenjem neke frekvencije može da dođe do rezonancije. U tom slučaju vidimo *ac* efekat. Kod Džozefsonovih spojeva u rezonanciju stupaju Džozefsonova frekvencija plazme i primenjena frekvencija ozračavanja. Džozefsonovi spojevi su od značaja jer je u ovim sistemima prvi put Šapiro uočio stepenike. Danas obično koristimo naziv Šapiro stepenici nezavisno od sistema u kojem se javlja dinamičko zaključavanje. Pojava Šapiro stepenika u ac+dc voženom FK modelu i ozračenom Džozefsonovom spoju ima sličan mehanizam. Javlja se takmičenje različitih frekventnih skala gde se za određene vrednosti frekvencija javljaju rezonance. Rezonance se manifestuju kao stepenici na graficima.

Glava 2

Generalisani FK model

Kao što je već napomenuto, pod pojmom standardni FK model, podrazumeva se skup čestica koje interaguju harmonijski, a smeštene su u sinusni substratni potencijal. Realni fizički sistemi su veoma složeni i FK model u svojoj standardnoj formi nije dovoljan za njihov opis, pa se stoga pribegava određenim generalizacijama istog. Da bi se modelovale različite fizičke situacije, u različitim realnim fizičkim sistemima, koristi se generalisani FK model.

2.1 Generalisani substratni potencijali

Radom na dinamici solitona u različitim tipovima realističnih sistema, Ramoazne (Re-moissenet) i Pejrar (Peyrard) su uveli familiju nelinearnih periodičnih potencijala [49, 50], zadatih generalnom formom:

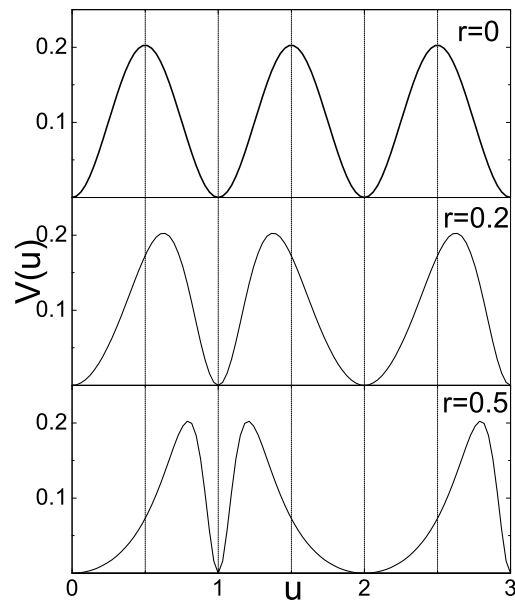
$$V(u, r) = A(r) \frac{1 + e \cos(2\pi u)}{[1 + r^2 + 2r \cos(\frac{2\pi u}{m})]^p} \quad (2.1)$$

Ovde je $A(r)$ normalizovana amplitudna funkcija; r je deformacioni parametar koji uzima vrednosti u intervalu $-1 < r < 1$ ($|r| < 1$); m, p su celi brojevi; $e = \pm 1$. Za potrebe ovog rada mi ćemo koristiti realan umnožak ovako zadatog potencijala

$$V(u, r) = \frac{K}{(2\pi)^2} A(r) \frac{1 + e \cos(2\pi u)}{[1 + r^2 + 2r \cos(\frac{2\pi u}{m})]^p} \quad (2.2)$$

za koji izborom parametara možemo dobiti različite vrste periodičnih potencijala. Izborom parametara $A(r) = (1 - r^2)^2$, $m = p = 2$ i $e = -1$ dobija se asimetrični deformacioni potencijal (videti Sl. 2.1):

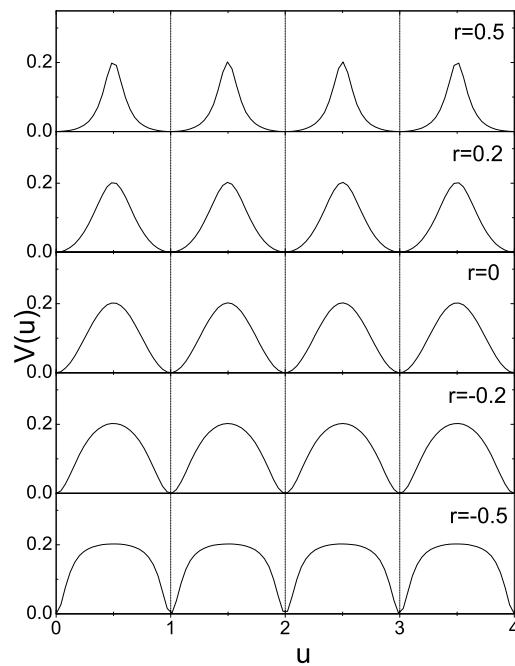
$$V(u, r) = \frac{K}{(2\pi)^2} \frac{(1 - r^2)^2 [1 - \cos(2\pi u)]}{[1 + r^2 + 2r \cos(\pi u)]^2} \quad (2.3)$$



Sl. 2.1: Asimetrični deformacioni substratni potencijal za $K = 4$ i različite vrednosti deformacionog parametra r .

Varijabilni potencijal (videti Sl. 2.2) dobija se za vrednosti parametara $A(r) = (1 - r)^2$, $m = p = 1$ i $e = -1$, tj.:

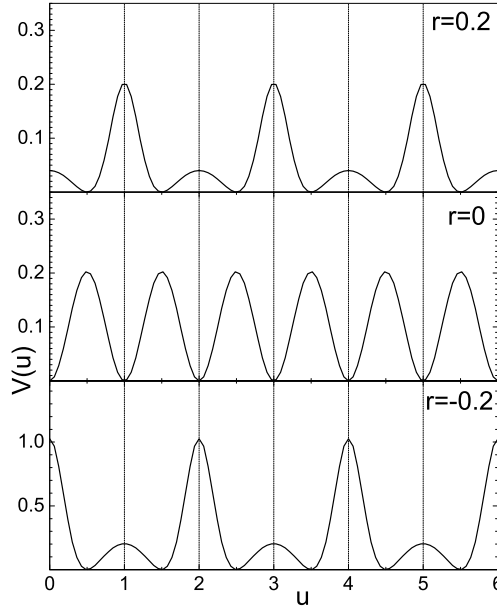
$$V(u, r) = \frac{K}{(2\pi)^2} (1 - r)^2 \frac{[1 - \cos(2\pi u)]}{1 + r^2 + 2r \cos(2\pi u)}, \quad (2.4)$$



Sl. 2.2: Varijabilni potencijal za $K = 4$ i različite vrednosti r .

a dvojamni potencijal (videti Sl. 2.3) za vrednost parametara $A(r) = (1 - r)^4$, $m = p = 2$, $e = +1$, $0 < r < 1$, odnosno

$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} (1 - r)^4 \frac{1 + \cos(2\pi u)}{[1 + r^2 + 2r \cos(\pi u)]^2}. \quad (2.5)$$



Sl. 2.3: Dvojamni substratni potencijal za $K = 4$ i različite vrednosti deformacionog parametra r .

Drugi periodični substratni potencijali mogu se dobiti pogodnim izborom parametara u (2.2).

2.2 Generalisana međučestična interakcija

U realnim fizičkim sistemima međučestična interakcija obično nije harmonijska što vodi nizu fizičkih efekata: drugačijem osnovnom stanju, promeni dinamike i fenomena interferencije, narušenja kink-antikink simetrije, pojavljivanja novih tipova ekscitacija itd.

Ako su čestice naelektrisane među njima se javlja Kulonovo (Coulomb) odbijanje $V_{int} \approx \frac{e^2}{u}$ koje deluje među njima na rastojanju $u < a^*$, gde je u^* radijus ekraniranja koji je jednak inverznom Tomas-Fermi momentu u slučaju metalnog substrata, ili Debajevom (Debye) radijusu ekraniranja u slučaju poluprovodnog substrata. Kada je radijus ekraniranja dovoljno veliki, kao u slučaju poluprovodnika glavni doprinos međučestičnoj interakciji može biti zapisan preko stepenog zakona (power law) $V(u) = u^{-1}$. U slučaju metalnih substrata a^* je reda veličine konstante rešetke. Ako su atomi neutralni preklapanje njihovih atomskih ljuski može biti predstavljeno direktnom interakcijom $V_{int}(u) \approx e^{-\beta u}$. Da bi se objasnio fazni prelaz iz samerljive u nesamerljivu strukturu u talasima gustine naboja harmonijska međučestična interakcija zamenjena je Todinim (Toda) potencijalom [51]

$$V(r) = \frac{\mu}{\beta^2} e^{-\beta(r-b)} + \frac{\mu}{\beta}(r-b) - \frac{\mu}{\beta^2} \quad (2.6)$$

gde μ predstavlja elastičnu konstantu, β stepen anharmoničnosti, a b je ravnotežna međučestična razdaljina neperturbovanog lanca. U ovom radu generalizacije standardnog FK modela biće vršene samo korišćenjem generalisanih substratnih potencijala.

2.3 Asimetrični deformacioni potencijal

U radovima [52–56] razmatrano je kretanje čestica pod dejstvom spoljašnjih periodičnih sila u okviru FK modela u kojem su čestice smeštene u asimetrični deformacioni potencijal¹. Kao što je već napomenuto u samerljivim strukturama, sa racionalnim ω , javljaju se poluceli stepenici, ali je u standardnom FK modelu njihova veličina toliko mala da se ne mogu videti na grafiku odziva $\bar{v}(\bar{F})$. U suprotnosti sa standardnim FK modelom, veliki subharmonijski stepenici mogu se pojaviti u prisustvu deformacionog potencijala. U opisu Džozefsonovih spojeva, kristala sa diskokacijama i drugim realnim sistemima nije za očekivati da će neki standardni model dati zadovoljavajući opis. Remoazne i Pejrar [49] uveli su familiju nelinearnih periodičnih potencijala u koje spada i asimetrični deformacioni potencijal (ASDP):

$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} \frac{(1-r^2)^2 [1 - \cos(2\pi u)]}{[1 + r^2 + 2r \cos(\pi u)]^2} \quad (2.7)$$

gde je r deformacioni parametar ($-1 < r < 1$). Za $r = 0$ dobija se periodični substratni potencijal standardnog FK modela. Razmatrajući ponovo ponašanje jako prigušenog sistema prethodni rezultati se dobijaju za $r = 0$. Promenom parametra r , $0 < |r| < 1$, dobija se asimetrični potencijal sa barijerama jednake visine, ali neekvivalentnim susednim jamama, sa respektivno ravnim i ostrim ivicama. Pozicija potencijalne barijere u_b je definisana relacijom $\cos(\pi u_b) = \frac{2r}{1+r^2}$. Precizno, ovde asimetrija znači da je pričvršćivanje u dva susedna potencijalna minimuma substratnog potencijala različito. U potencijalu sa ostrim maksimumima i širokim minimumima čak i veoma veliki kink može biti pokrenut. I u slučaju ovog potencijala, kao i u slučaju ac+dc voženog standardnog FK modela, dolazi do takmičenja između frekventnih skala i shodno tome do dinamičkog zaključavanja. Kada zaključavanje nastane čestice ostaju "zaključane" sve dok rast \bar{F} ne uspe da poništi pričvršćujuće sile. Ponovo će biti razmatran slučaj $\omega = \frac{1}{2}$, jer u tom slučaju postoji usporedba sa rezultatima dobijenim za standardni FK model. Kao što je već rečeno, standardni FK model sa celobrojnim ω redukuje se u jednočestični model i dokazano je da se u njemu ne mogu pojaviti subharmonijski stepenici. U slučaju deformacionog potencijala sistem ne može biti aproksimiran jednočestičnim modelom jer u tom slučaju postoje dve grupe čestica sa različitim dinamičkim osobinama. Pokazano je da deformacija periodičnog potencijala uzrokuje pojavu mnoštva velikih subharmonijskih stepenika.

Sistem jednačina kretanja dat je sa

$$\dot{u}_l = u_{l+1} + u_{l-1} - 2u_l - V'(u_l) + F(t) \quad (2.8)$$

gde $l = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$, N je broj čestica. Ako je $\{u_l(t)\}$ rešenje sistema jednačina (2.8), onda simetrijska transformacija

¹Asimetrični deformacioni potencijal je takođe korišćen za proučavanje toplotne provodljivosti u niskodimenzionim rešetkama [11].

$$\sigma_{i,j,m}\{u_l(t)\} = \{u_{l+i}(t - \frac{m}{\nu_0}) + j\} \quad (2.9)$$

daje novo rešenje, gde su i, j, m celi brojevi. Rešenje se naziva rezonantnim ako i samo ako postoji takva trojka celih brojeva koja je invarijantna u odnosu na simetrijsku operaciju $\sigma_{i,j,m}$, odnosno ako važi:

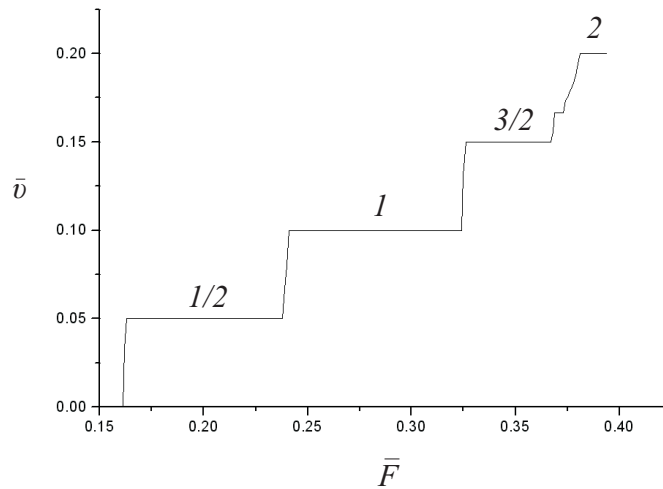
$$\sigma_{i,j,m}\{u_l(t)\} = \{u_l(t)\} \quad (2.10)$$

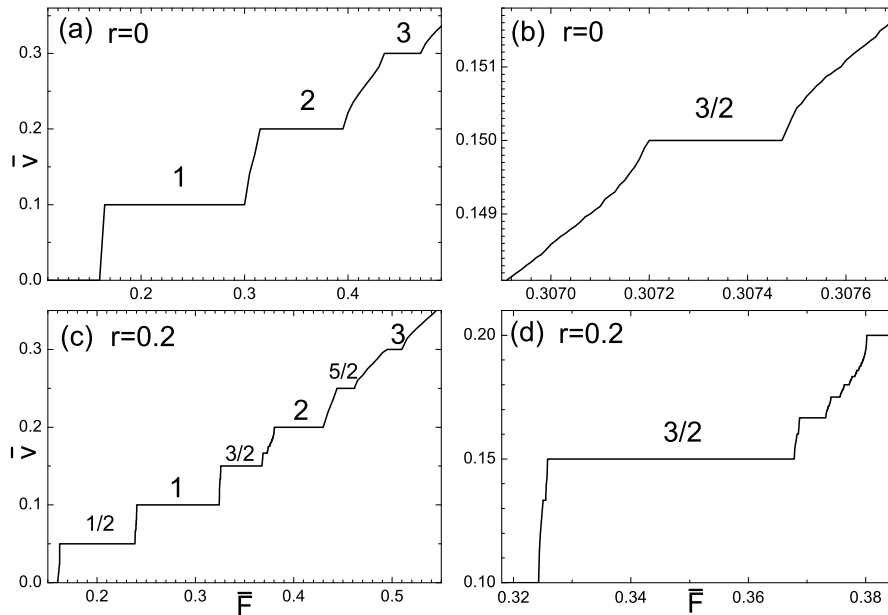
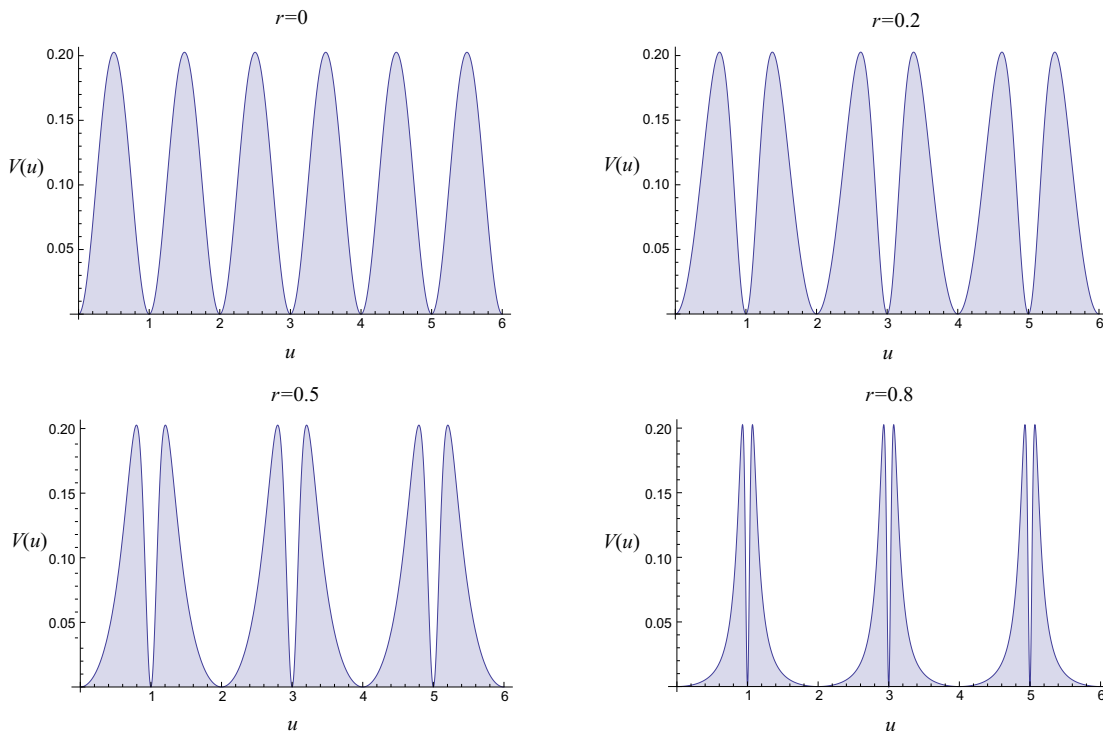
Srednja brzina rezonantnog rešenja u ovom slučaju je data sa

$$\bar{v} = \frac{i\omega + ja_S}{m}\nu_0 \quad (2.11)$$

gde je a_S period substratnog potencijala. Posmatranjem na primer, drugog polucelog stepenika $3/2$ datog na Sl. 2.4 može se videti da se dati stepenik pojavljuje za $\bar{v} = 0.15$. Nakon primene generalne transformacije za skup parametara $\omega = \frac{1}{2}$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu = 0.2$, $r = 0.2$, $K = 4$, $a_S = 2$ dobijamo da je minimalni triplet $i = -1, j = 1, m = 2$. Za $m = 1$ takav triplet ne postoji. Odatle se jasno vidi da je u pitanju poluceli stepenik. Moguće je izvršiti reskaliranje $\bar{v}' = 0.075$, $\omega' = \frac{1}{4}$, $a'_S = 1$ i korišćenje simetrijske transformacije $\bar{v}' = \frac{i'\omega' + j'}{m'}\nu_0$. Minimalan triplet u tom slučaju će takođe biti $i' = -1, j' = 1, m' = 2$.

Ako je i', j', m' minimalni triplet za samerljivu strukturu $\omega' = \frac{p}{q}$, onda je takođe i $\tilde{i} = i' + lq$, $\tilde{j} = j' - lp$, m' minimalni triplet, za ma koji ceo broj l . U ovom slučaju i re-reskaliranom slučaju dobijamo triplet $\tilde{i} = 3, \tilde{j} = 0, m' = 2$. U slučaju $\omega' = \frac{1}{q}$ uvek se može odabrati l tako da je $\tilde{j} = 0$. Na taj način možemo zaključiti da je srednja brzina koja odgovara prvom polucelom stepeniku $\bar{v} = \frac{1}{2}\omega\nu_0$, dok drugom polucelom stepeniku odgovara brzina $\bar{v} = \frac{3}{2}\omega\nu_0$. Korišćenjem ove simetrijske transformacije mogu se numerisati svi stepenici na Sl. 2.5. Na Sl. 2.5 (a) i (c) date su respektivno funkcije odziva $\bar{v}(\bar{F})$ u slučaju standardnog FK modela ($r = 0$) i u slučaju generalisanog ($r = 0.2$). Vidi se da se u slučaju generalisanog FK modela javljaju veliki subharmonijski stepenici. Sa Sl. 2.5 (b) i Sl. 2.5 (d) može se uporediti širina drugog polucelog stepenika $3/2$ u slučaju standardnog i generalisanog FK modela.



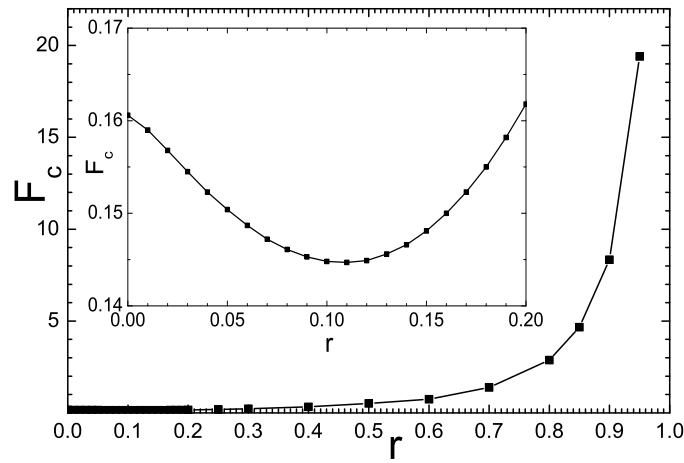
Sl. 2.4: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu = 0.2$, $r = 0.2$ i $K = 4$.Sl. 2.5: Srednja brzina u funkciji dc sile za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i dve vrednosti deformacionog parametra $r = 0$ i $r = 0.2$.Sl. 2.6: Oblici ASDP-a za različite vrednosti deformacionog parametra r .

Na slici Sl. 2.6 predstavljeno je kako se menja oblik ASDP-a sa promenom r . U standardnom FK modelu $r = 0$, potencijal je sinusni sa periodom 1 i za $\omega = \frac{1}{2}$, unutar jednog

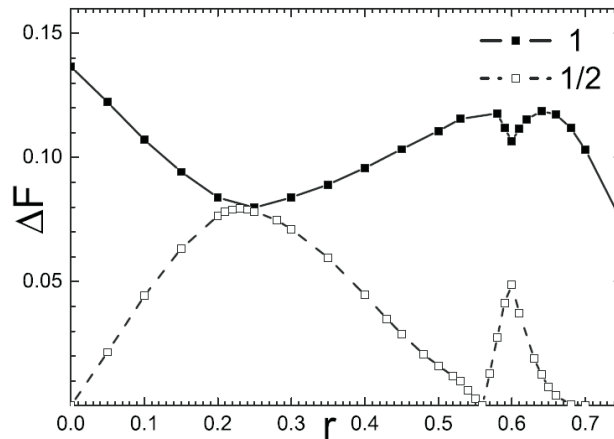
perioda nalaze se dve čestice u jednoj potencijalnoj jami. U slučaju deformacionog potencijala za $r \neq 0$, period je 2 i unutar jednog perioda četiri čestice se rasporede u dve potencijalne jame. Relacija koja povezuje broj čestica po elementarnoj ćeliji sa srednjom brzinom koja figuriše na grafiku odziva $\bar{v}(\bar{F})$ je

$$|\bar{v} - \bar{v}_{step}| = \frac{\nu_0}{qm} \quad (2.12)$$

gde je q broj čestica po elementarnoj ćeliji, a m ceo broj. Promena broja čestica unutar elementarne ćelije će promeniti \bar{v} i kritičnu silu F_c ($|\bar{v} - \bar{v}_{step}| \approx |F - F_c|^{\frac{1}{2}}$). U slučaju koji je razmatran broj čestica po elementarnoj ćeliji se promeni sa dve na četiri. Kada $r \rightarrow 1$ kritična sila F_c divergira. Na slici Sl. 2.7 data je zavisnost kritične sile od deformacionog parametra r .



Sl. 2.7: Kritična sila F_c kao funkcija deformacionog parametra r za $\omega = \frac{1}{2}, K = 4, F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$. Grafik u unutrašnjosti predstavlja istu krivu u oblasti $0 \leq r \leq 0.2$.



Sl. 2.8: Širina ΔF harmonijskog i polucelog stepenika u funkciju od deformacionog parametra za $\omega = \frac{1}{2}, K = 4, F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$.

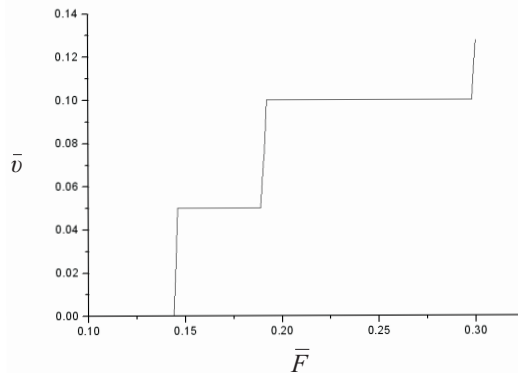
Ova ispitivanja vršena su u radovima [52, 53]. Ako K nije preveliko, u ovom slučaju $K = 4$, za vrednosti $0 < r < 0.1$, kritična sila opada sa porastom r zadržavajući vrednost manju od one za

$r = 0$ na intervalu $0 < r < 0.2$. Za veće vrednosti deformacionog parametra r kritična sila raste i divergira kada $r \rightarrow 1$. Detaljno objašnjenje ove pojave dato je u radu [52,53]. Čestice u ASDP-u nisu dinamički ekvivalentne. Kada r raste čestice u oštrim minimumima postaju nestabilnije i za male vrednosti r ovaj efekat je dominantan. Povećanje broja čestica u pojedinim jamama čini sistem nestabilnim, što dovodi do smanjenja kritične sile F_c . Sa porastom r , veličina harmonijskog stepenika opada i dostiže minimum za vrednost $r = 0.25$. To je globalni minimum funkcije $\Delta F_1(r)$, gde r uzima pozitivne vrednosti. Lokalni minimum ista funkcija ima za $r = 0.6$. Globalni maksimum funkcija $\Delta F_1(r)$ dostiže za $r = 0.65$. Nakon toga funkcija uniformno ² opada, zadovoljavajući pri tome granični uslov $\lim_{r \rightarrow 1} \Delta F_1(r) = \Delta F_1(\lim_{r \rightarrow 1} r) = 0$. Grafik na Sl. 2.8 pokazuje korespondenciju između zavisnosti veličine harmonijskih i polucelih stepenika od deformacionog parametra. Za vrednost r za koju $\Delta F_1(r)$ ima globalni minimum, $\Delta F_{1/2}(r)$ ima globalni maksimum. Ovakva korespondencija stoji i za lokalne ekstreme. Pojava ovih ekstrema i opisane korespondencije objašnjena je u radu [53]. Za ispitivani slučaj $\omega = \frac{1}{2}$, pri $r = 0$ po dve čestice se raspoređuju po potencijalnom minimumu. Za vrednost $r = 0.25$, po dve čestice se raspoređuju u širokim, a po dve u oštrim minimumima. Pri daljem povećavanju r široki minimumi postaju sve širi, a oštri sve uži i za vrednost $r = 0.6$, tri čestice se raspoređuju u široke, a po jedna u oštre minimume. Pri velikim vrednostima deformacionog parametra $r \rightarrow 1$, oštri minimumi praktično nestaju i sve čestice su pričvršćene u širokim minimumima, što rezultuje nestanku pojave zaključavanja:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Delta F_1(r) = \lim_{r \rightarrow 1} \Delta F_{1/2}(r) = 0 \quad (2.13)$$

Za $r = 0$ širina harmonijskog stepenika je maksimalna, dok je širina polucelog nula, jer se poluceli stepenik ne može registrovati iz odziva $\bar{v}(\bar{F})$. Kritična sila F_c je ona vrednost \bar{F} za koju dolazi do faznog prelaza iz stacionarnog režima $\bar{v} = 0$ u dinamički režim $\bar{v} \neq 0$. Potpuno analogni rezultati se dobijaju i za negativno r , $F_c(r) = F_c(-r), \forall r \in (-1, 1)$ i potpuno se iste vrednosti dobijaju za $\Delta F(-r)$. Rezultat (2.13) postaje:

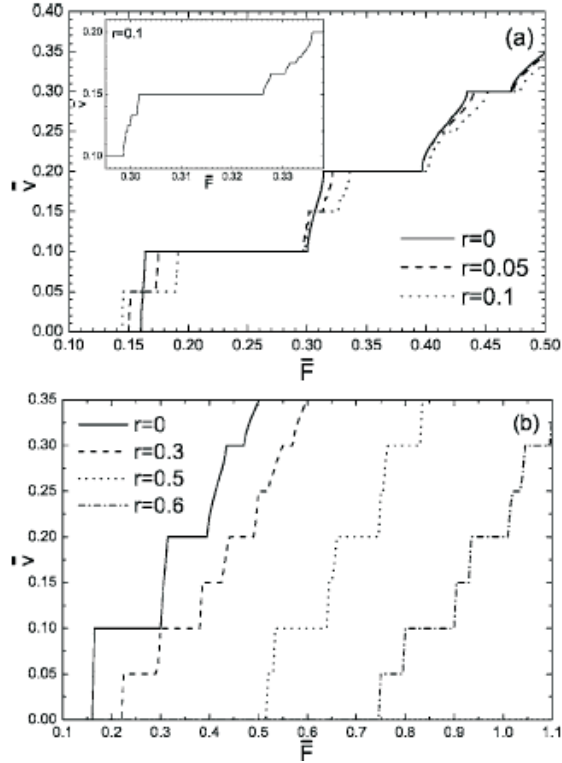
$$\lim_{r \rightarrow -1} \Delta F_1(r) = \lim_{r \rightarrow -1} \Delta F_{1/2}(r) = 0 \quad (2.14)$$



²Ne postoji vrednost r , $0 \leq r < 1$ za koju se ne može odrediti veličina harmonijskog stepenika iz funkcije odziva $\bar{v}(\bar{F})$.

Sl. 2.9: Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za $\omega = \frac{1}{2}$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu = 0.2$, $r = 0.1$ i $K = 4$. Korak sile u Fortran kodu je 10^{-3} .

Za grafik sa Sl. 2.9 je $F_c = 0.146$, $\Delta F_{1/2} = 0.043$ i $\Delta F_1 = 0.106$. Na ovaj način, iz funkcija odziva, dobijeni su grafici na Sl. 2.7 i Sl. 2.8.



Sl. 2.10: Plotovi iz rada [52]. Funkcije odziva za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti deformacionog parametra: a) $r \leq 0.1$ i b) $r \geq 0.3$.

U FK modelu sa deformacionim potencijalom dolazi do pojave velikih subharmonijskih stepenika. U ovom poglavlju je lepo pokazana korelacija između polucelih i harmonijskih stepenika. Naime, što su jedni veći drugi su manji i obratno.

2.4 Zavisnost širine stepenika od spoljašnje periodične sile

Kao i u slučaju standardnog FK modela i u generalisanom FK modelu je interesantno ispitivati kako širina stepenika zavisi od parametara spoljašnje sile, odnosno od amplitude i frekvencije spoljašnje ac sile.

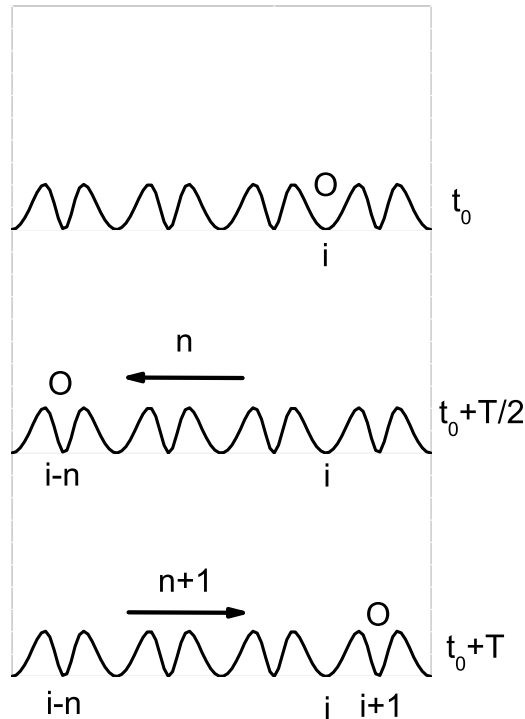
2.4.1 Amplitudna zavisnost Šapiro stepenika u slučaju ASDP-a

Na slici 1 je prikazana amplitudna zavisnost širine prvog harmonijskog stepenika i kritična sila za različite vrednosti deformacionog parametra. Sa porastom deformacionog parametra amplitudna zavisnost počinje da odstupa od beselovske forme. Ove promene prati pojava

velikih polucelih stepenika. Rezultati pokazuju uticaj koji deformacija potencijala ima na dinamičko zaključavanje. Za $r = 0.2$ na odzivu $\bar{v}(\bar{F})$ pojavljuju se veliki poluceli stepenici. Širina prvog harmonijskog stepenika i kritična sila osciluju suprotno standardnom slučaju za $r = 0$, maksimum jedne krive odgovara minimumu druge, dok beselovske oscilacije postaju anomalne gde je drugi maksimum niži od trećeg. Fizički proces koji stoji iza pojave beselovskih oscilacija je pomeraj čestica napred-nazad usled dejstva ac sile.

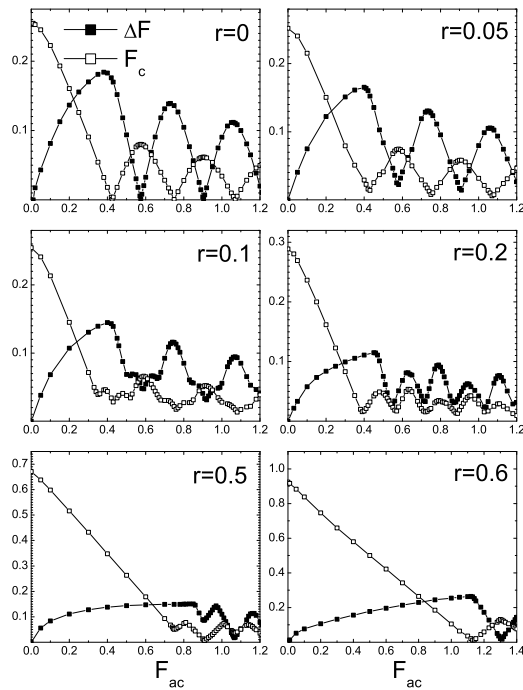
U slučaju $ac + dc$ voženih sistema dinamika je karakterisana kretanjem čestica napred usled dejstva dc sile i kretanjem čestica napred-nazad usled dejstva ac sile. Usled toga čestice izvode kretanja koje se sastoji od više skokova napred-nazad, gde amplituda ac sile F_{ac} određuje koliko jama će čestice preskakati. Deformacija potencijala uticaće na ovo kretanje i samim tim i na amplitudnu zavisnost širine stepenika i kritične sile, jer u slučaju $r \neq 0$ postoje dve različite vrste jama.

Za vrednost F_{ac} koja odgovara prvom maksimumu funkcije $\Delta F_1(F_{ac})$ čestice se pomere u susedni minimum substratnog potencijala, one koje se nalaze u širokim skaču u oštre i obratno. Za vrednosti F_{ac} koje odgovaraju drugom i svakom sledećem parnom maksimumu funkcije $\Delta F_1(F_{ac})$, čestice će skočiti nazad u različitu vrstu minimuma, što znači da će čestice iz i -tog oštrog minimuma skočiti nazad u široki minimum i onda opet napred u $i + 1$ -vi širok minimum. U slučaju vrednosti F_{ac} koje odgovaraju trećem i ostalim neparnim maksimumima funkcije $\Delta F_1(F_{ac})$ čestica će se nazad iz minimuma i pomeriti u istu vrstu minimuma i odatle napred u različitu vrstu minimuma $i + 1$. Usled različitog pritiskanja čestica u različitim minimumima substratnog potencijala doći će do različitog ponašanja u amplitudnoj zavisnosti širine Šapiro stepenika i kritične sile. Drugi efekat koji utiče na amplitudnu zavisnost je promena broja čestica u potencijalnim jamama.

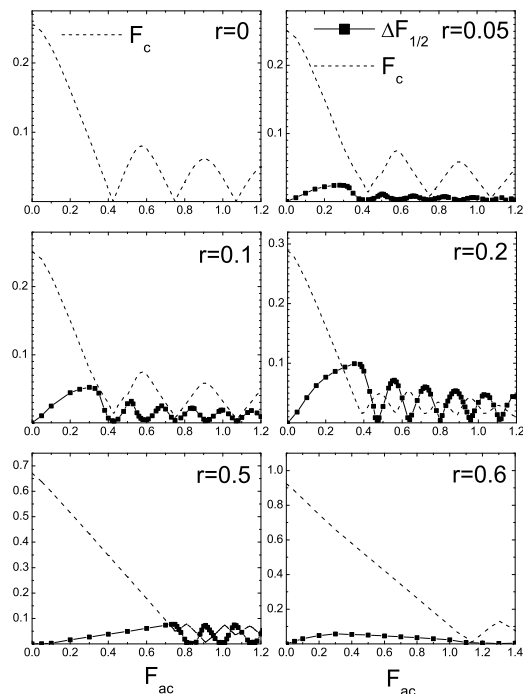


Sl. 2.11: Kretanje čestice za vreme jednog perioda ac sile u ASDF-u. $n = 0, 1, 2, \dots$ predstavlja broj

minimuma koji čestica preskoči.



Sl. 2.12: Širina ΔF prvog harmonijskog stepenika i kritična sila F_c kao funkcija ac amplitude za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$ i $r = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ i 0.6 .

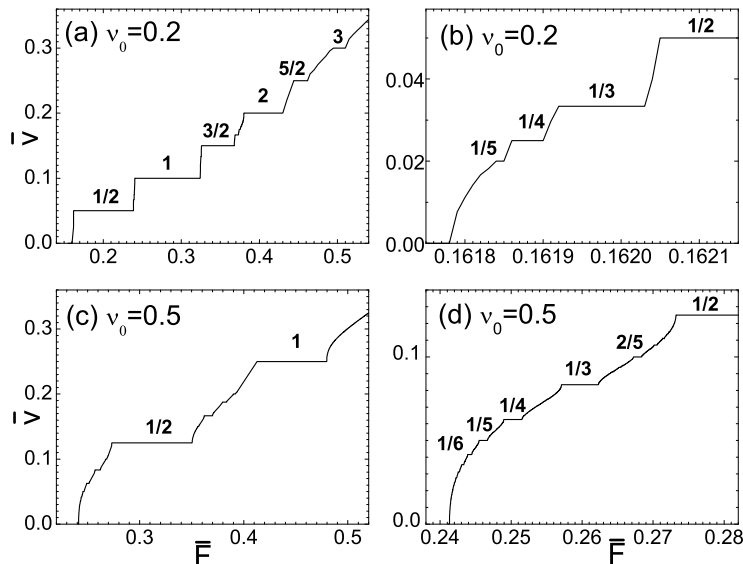


Sl. 2.13: Širina ΔF prvog polucelog stepenika kao funkcija ac amplitude za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$ i $r = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ i 0.6 . Isprekidana linija predstavlja kritičnu silu.

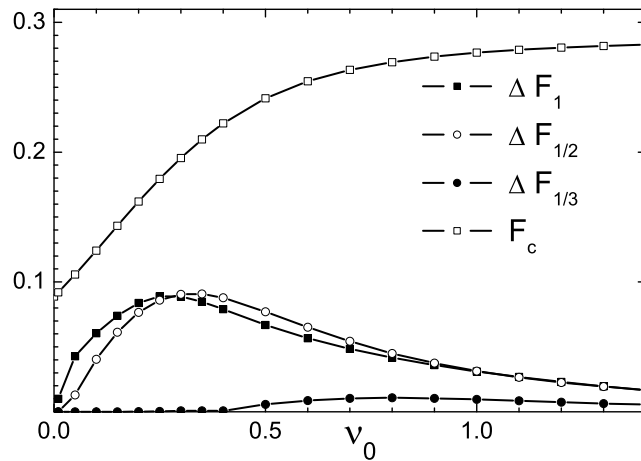
Sa povećanjem r oštri minimumi postaju sve manje dostupni česticama. Na slici 21. prikazana je širina prvog harmonijskog i polucelog stepenika u funkciji ac amplitude. Odgovarajuće širine stepenika su u korelaciji i to takvoj da maksimumi jedne krive odgovaraju minimumima druge. Kriva $\Delta F_1(F_{ac})$ nema nula na celom intervalu F_{ac} .

2.5 Frekventna zavisnost Šapiro stepenika u slučaju ASDP- a

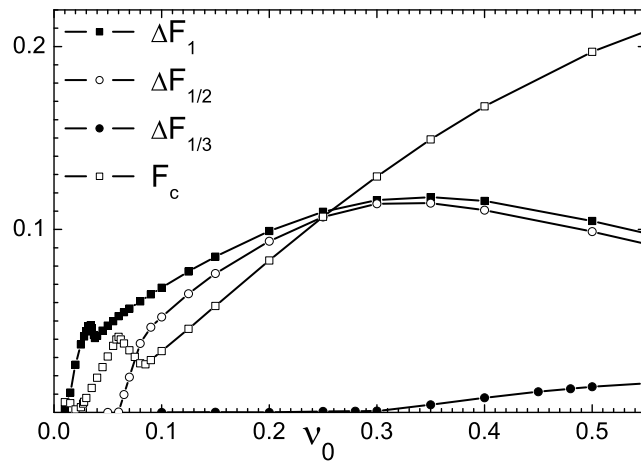
U slučaju standardnog FK modela ispitivanje frekventne zavisnosti širine Šapiro stepenika, ograničeno je samo na harmonijske stepenike. U slučaju FK modela sa generalisanim substratnim potencijalom (u ovom slučaju ASDP) pojavljuju se veliki subharmonijski stepenici na funkciji odziva $\bar{v}(\bar{F})$. Može se primetiti da broj i veličina subharmonijskih stepenika raste sa porastom frekvencije (videti sliku Sl. 2.14). Funkcije odziva $\bar{v}(\bar{F})$ u $ac + dc$ voženom FK modelu u ASDP-u predstavljene su na slici za dve različite frekvencije $\nu_0 = 0.2$ i $\nu_0 = 0.5$. Slike Sl. 2.14 (b) i Sl. 2.14(d) predstavljaju uvećane delove figura na (a) i (c). Pored talasa gustine naboja i nizova Džozefsonovih spojeva povećanje broja i veličine stepenika sa frekvencijom uočeno je i u superprovodnim nanožicama. Na slici Sl. 2.15 predstavljena je frekventna zavisnost širine prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{1/2}$ i trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$. Sa porastom frekvencije raste širina stepenika, dostiže maksimalnu vrednost i onda opada za velike vrednosti frekvencije. Kritična sila pri tome raste i saturira dc treshold vrednosti, F_{c0} za $r = 0.2$.



Sl. 2.14 : Srednja brzina u funkciji dc sile za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $r = 0.2$ i dve različite vrednosti ac frekvencije: $\nu_0 = 0.2$ na (a) i (b) i $\nu_0 = 0.5$ na (c) i (d).

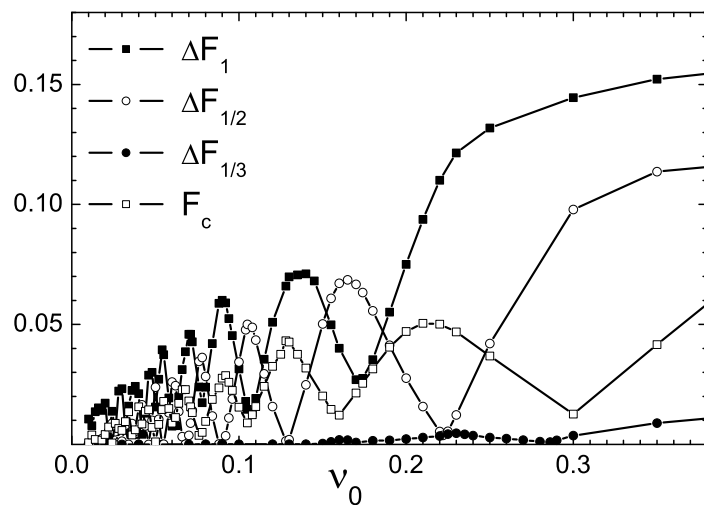


Sl. 2.15 : Frekventna zavisnost širine prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{1/2}$ i trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$, kao i kritične sile F_c za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$ i $r = 0.2$.

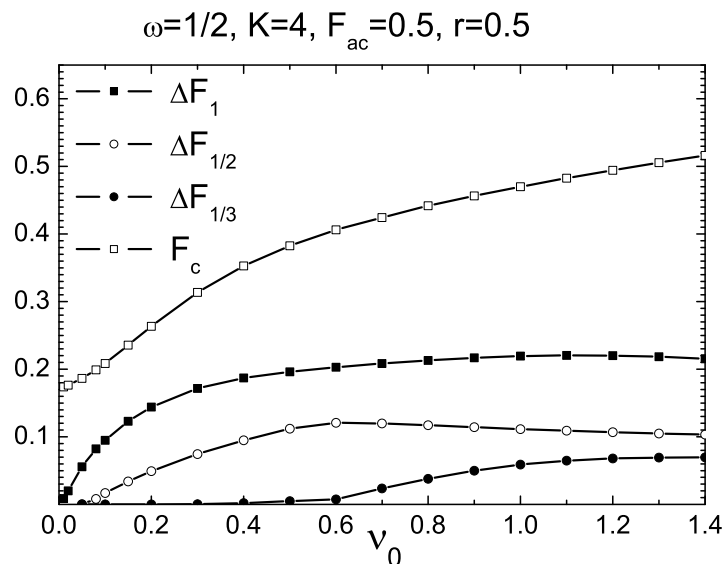


Sl. 2.16 : Frekventna zavisnost širine prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{1/2}$ i trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$, kao i kritične sile F_c za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.3$ i $r = 0.2$.

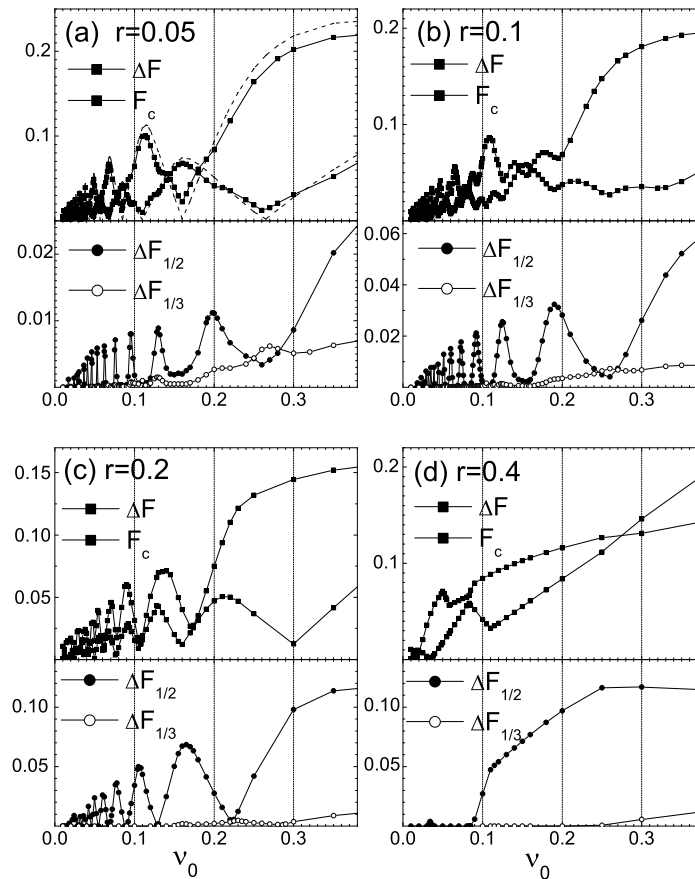
Kada $\nu_0 \rightarrow 0$ kritična sila teži vrednosti $F_{c0} - F_{ac}$. Ono što je posebno interesantno je da sa porastom frekvencije poluceli stepenici postaju širi od harmonijskih blizu vrednosti za koju dostižu maksimum. Za ASDP sa deformacionim parametrom $r = 0.2$, dc treshold ima vrednost $F_{c0} = 0.289$. Ako se primeni amplituda sile veća od dc treshold-a (videti slike Sl. 2.16 i Sl. 2.17) oscilatorno ponašanje za male vrednosti frekvencije ν_0 javlja se kao u slučaju standardnog FK modela.



Sl. 2.17 : Frekventna zavisnost širine prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{1/2}$ i trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$, kao i kritične sile F_c za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.5$ i $r = 0.2$.

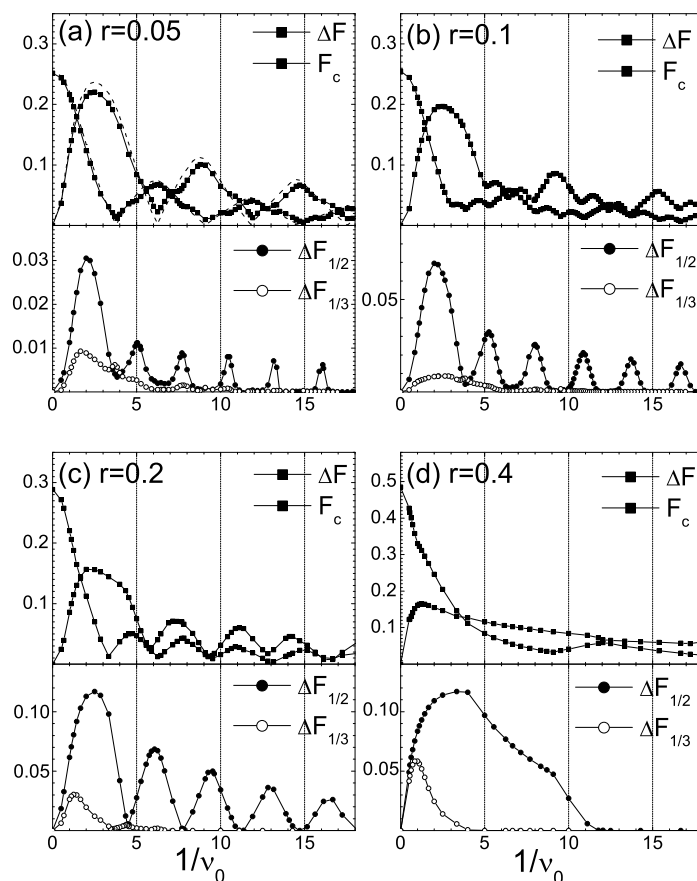


Sl. 2.18 : Frekventna zavisnost širine prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{1/2}$ i trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$, kao i kritične sile F_c za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.5$ i $r = 0.5$.



Sl. 2.19 : Širina prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$, trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$ i kritična sila F_c u ac frekvencije ν_0 za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.5$ i $r = 0.05, 0.1, 0.2$ i 0.4 od (a) do (d) respektivno. Isprekidana linija odgovara slučaju $r = 0$.

Ako se sistem nalazi u visokoamplitudnom limitu $\frac{F_{ac}}{F_{c0}} > 1$ i menjamo deformacioni parametar r , frekventna zavisnost širine Šapiro stepenika će prolaziti kroz različita ponašanja. Na slici Sl. 2.19 data je frekventna zavisnost širine prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{1/2}$, trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$ i kritična sila predstavljene su za različite vrednosti deformacionog parametra r . Za male vrednosti deformacionog parametra $r = 0.05$ poluceli stepenici su mali i zadržava se ponašanje kao u slučaju standardnog FK modela, gde maksimum širine stepenika odgovara minimumu kritične sile i obratno. Sa porastom deformacije, za vrednost $r = 0.1$ na slici, pojavljuju se veći poluceli stepenici i forma oscilacija počinje da se menja. Za $r = 0.2$ pojavljuju se veliki poluceli stepenici (čak i veći od harmonijskih) i sada maksimum jedne krive odgovara maksimumu druge krive. Porast deformacije takođe utiče na dc treshold vrednost i samim tim na odnos $\frac{F_{ac}}{F_{c0}}$. Obzirom da F_{c0} raste sa deformacionim parametrom sistem će se u jednom trenutku prebaciti iz visokoamplitudnog limita $\frac{F_{ac}}{F_{c0}} > 1$ u niskoamplitudni limit $\frac{F_{ac}}{F_{c0}} \leq 1$ kada oscilatorno ponašanje nestaje. U graničnom slučaju veoma velikih deformacija Šapiro stepenici nestaju.

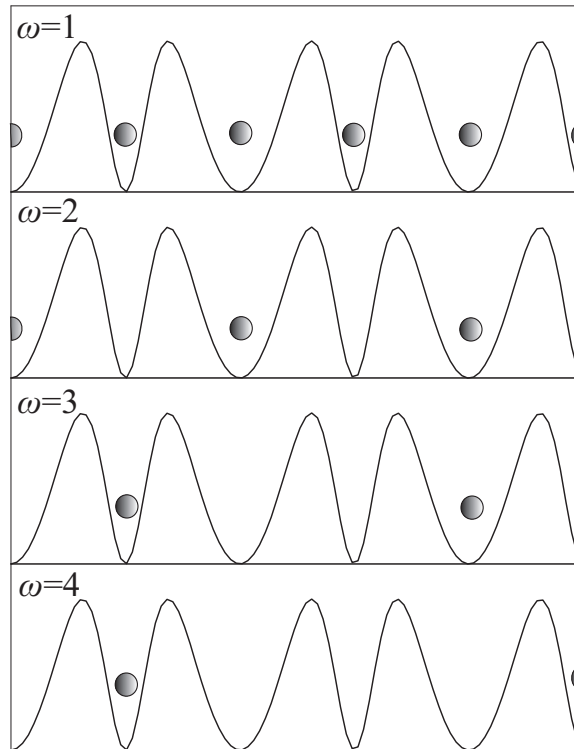


Sl. 2.20 : Širina prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$, trećinskog stepenika $\Delta F_{1/3}$ i kritična sila F_c u funkciji perioda $\frac{1}{\nu_0}$ za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.5$ i $r = 0.05, 0.1, 0.2$ i 0.4 od (a) do (d) respektivno. Isprekidana linija odgovara slučaju $r = 0$.

Na slici prikazana je ista zavisnost kao na slici samo u funkciji perioda $T = \frac{1}{\nu_0}$.

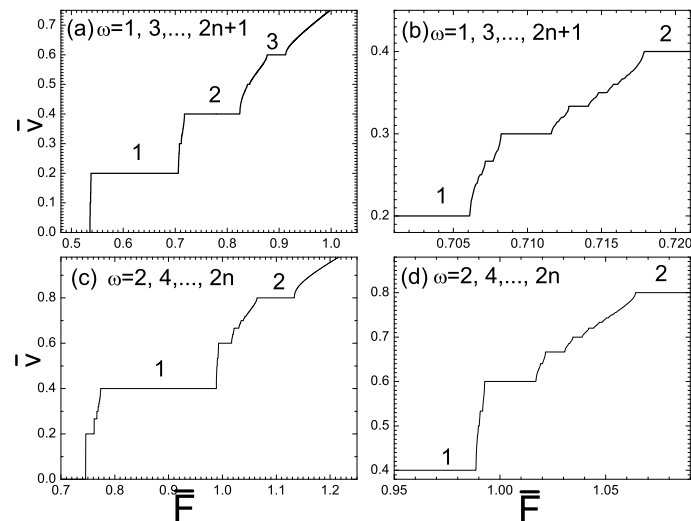
2.6 Šapiro stepenici za slučaj celobrojnih vrednosti ω

Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u radu [47]. Ako je ω celobrojno pri ac+dc pokretanom FK modelu u ASDP sistem više ne može da se posmatra kao jednočestični, odnosno model sa jednim stepenom slobode. Na slici Sl. 2.21 date su pozicije čestica u različitim smerljivim strukturama sa celobrojnim ω .

Sl. 2.21: Pozicije čestice u ASDP-u za $\omega = 1, 2, 3, 4$.

Razmatranjem funkcija odziva za različite samerljive strukture sa celobrojnim ω došli smo do zaključka da se svi rezultati mogu podeliti u dva tipa:

- funkcije odziva za samerljive strukture sa neparnom vrednošću ω , $\omega = 1, 3, 5, \dots, 2n + 1$
- funkcije odziva za samerljive strukture sa parnom vrednošću ω , $\omega = 2, 4, 6, \dots, 2n$.



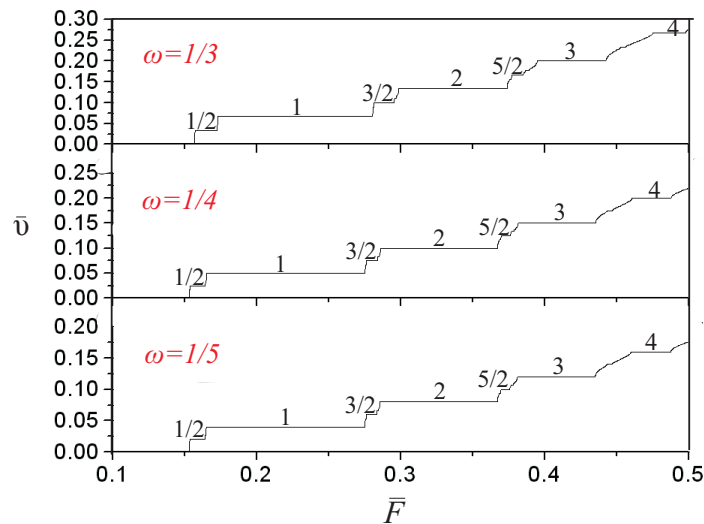
Sl. 2.22: Srednja brzina u funkciji dc sile za $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i $\omega = 1, 3, 5, \dots, 2n + 1$ na a) i b) i $\omega = 2, 4, \dots, 2n$ na c) i d). Grafici na slikama b) i d) odgovaraju respektivno graficima na slikama a) i c), samo je drugačiji posmatrani interval dc sile.

Razlog zašto se pojavljuju samo dva tipa funkcija odziva za različite vrednosti celobrojnog ω može se razumeti ako se posmatra slika Sl. 2.21. Ako je ω parno, sve čestice se nalaze u istom tipu jame. U slučaju ω neparno i -ta čestica će se naći na primer u širokom minimumu, a $i + 1$ -va u uskom minimumu, dok će se $i + 2$ -ga čestica naći u širokom minimumu. Obzirom da se čestice u različitim minimumu drugačije ponašaju u smislu dinamike, jasna je razlika između odziva za parno i neparno ω . Na slici Sl. 2.22 se takođe može videti i veliki uticaj širine stepenika na kritičnu silu.

2.7 Efekti saturacije u ac+dc pokretanom FK modelu

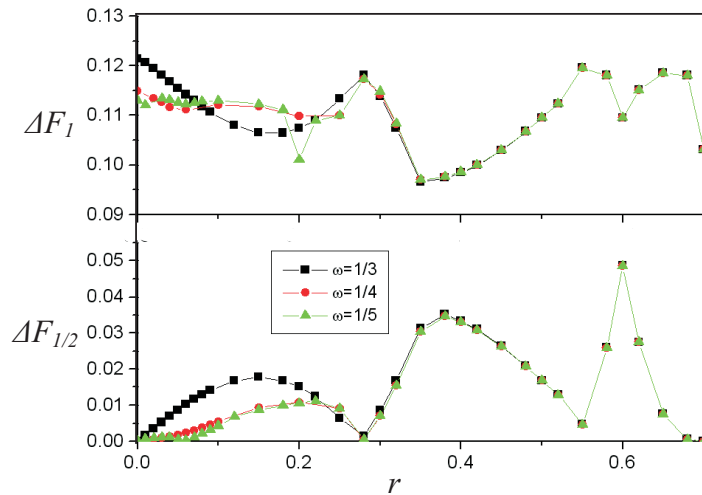
Rezultati ovog poglavlja publikovani su u radu [58]. U ac+dc pokretanom FK modelu srednja brzina kretanja čestica zavisi od mnoštva parametara poput srednje međučestične razdaljine, intenziteta periodičnog potencijala i primenjene sile. Sva razmatranja samerljivih struktura u okviru ac+dc pokretanog FK modela obuhvatala su slučajeve sa srednjim međučestičnim razdaljinama $\omega = 1/2$ i $\omega = 1$. U okviru ovog poglavlja ispitivane su samerljive strukture sa međučestičnom razdaljinom $\omega = 1/3, 1/4, 1/5$ (respektivno 3, 4 i 5 čestica po jami). Za substratni potencijal uzet je asimetrični deformacioni potencijal ASDP.

Na slici Sl. 2.23 prikazani su odzivi $\bar{v}(\bar{F})$ u slučaju ove tri samerljive strukture za vrednost deformacionog parametra $r = 0.2$.



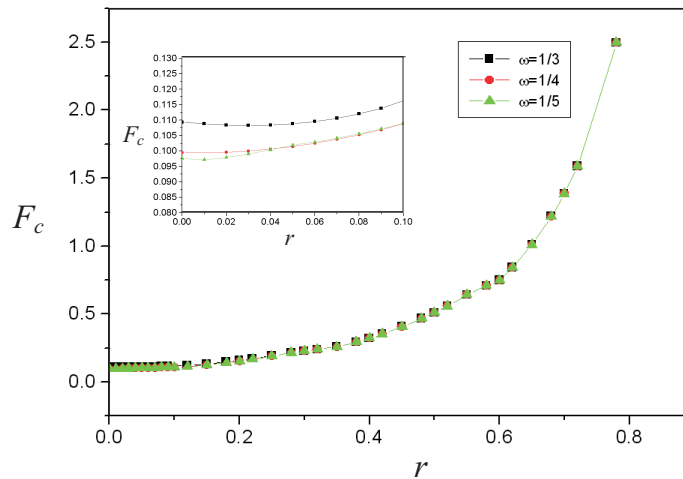
Sl. 2.23: Srednja brzina kao funkcija dc sile za $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i tri različite samerljive strukture $\omega = 1/3, 1/4$ i $1/5$.

Širine prvog harmonijskog i polucelog stepenika u funkciji deformacionog parametra r prikazane su na Sl. 2.24. Vidi se da za $r > 0.4$ sve krive saturiraju istoj vrednosti. U slučaju standardnog FK modela ($r = 0$) širina prvog harmonijskog stepenika veoma zavisi od srednje međučestične razdaljine. Sa porastom deformacionog parametra r , dolazi do deformacije substratnog potencijala koji menja svoj period. Za male vrednosti deformacionog parametra i dalje je jednak broj čestica u oštrim i širokim minimumima i širine stepenika su različite za različite samerljive strukture. Sa povećanjem deformacionog parametra više čestica zauzima široke minimume. Za veliku vrednost deformacionog parametra r , sve čestice će težiti da zauzmu široke minimume. Za neku kritičnu vrednost deformacionog parametra $r > 0.4$, nema razlike između samerljivih struktura $\omega = 1/3, 1/4, 1/5$.



Sl. 2.24: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 i polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ kao funkcija deformacionog parametra r za $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$.

Poznato je da su u slučaju samerljive stukture $\omega = 1/2$, pri kretanju čestica u ASDP-u širine prvog harmonijskog i polucelog stepenika u korelaciji; što je harmonijski stepenik veći, poluceli je manji i obratno. Vidimo da je ova korelacija održana i za $\omega = 1/3, 1/4, 1/5$. Za $r > 0.4$ krive sa Sl. 2.24 poklapaju se sa krivom sa slike Sl. 2.8 (poglavlje 2.3).

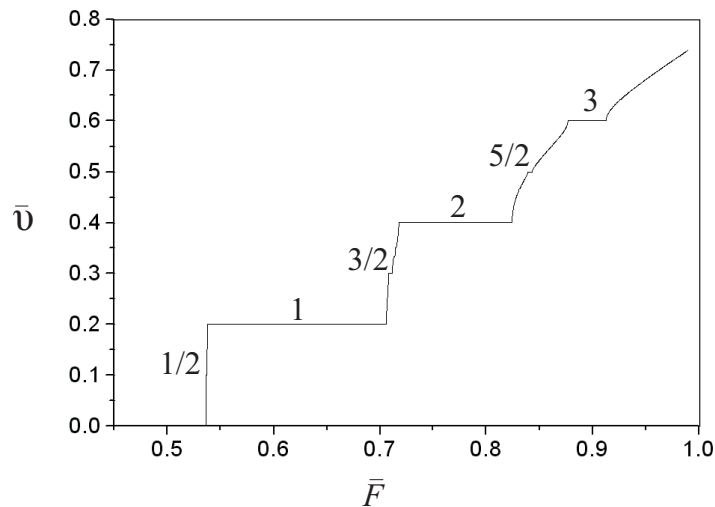


Sl. 2.25: Kritična sila u funkciji deformacionog parametra za $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i tri različite vrednosti parametra srazmere. Inset pokazuje istu krivu na intervalu $0 \leq r \leq 0.01$.

Saturacioni efekti su takođe opaženi na grafiku zavisnosti kritične sile od deformacionog parametra r . Poznato je da u graničnom procesu $r \rightarrow 1$ kritična sila divergira [52, 53]. Za $\omega = 1/4, 1/5$ kritična sila raste sa porastom r , osim u slučaju veoma malih vrednosti r , ($0 \leq r \leq 0.01$). Oblast $0 < r < 0.01$ zvaćemo oblasti opadanja kritične sile. U slučaju $\omega = 1/3$ oblast opadanja kritične sile je nešto veća $0 \leq r \leq 0.03$. Kada K nije preveliko, u slučaju

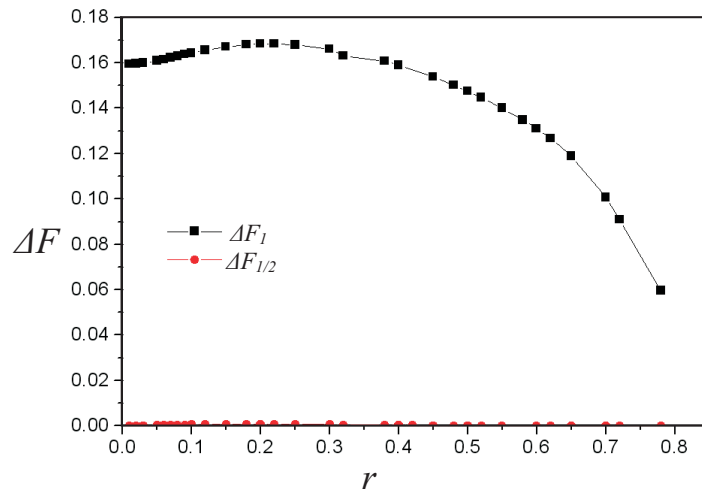
koji razmatramo $K = 4$, oblast na kojoj kritična sila opada postoji kod svih samerljivih struktura. Detaljno objašnjenje ove pojave dato je u radu [52, 53]. Čestice u ASDP-u nisu dinamički ekvivalentne. Kada r raste čestice u oštrim minimumima postaju nestabilnije i za male vrednosti r ovaj efekat je dominantan. Povećanje broja čestica u pojedinim jamama čini sistem nestabilnim, što dovodi do smanjenja kritične sile F_c . Na Sl. 2.25 dat je grafik zavisnosti kritične sile F_c od deformacionog parametra, za slučaj tri različite samerljive strukture $\omega = 1/3, 1/4, 1/5$.

Sa funkcije odziva Sl. 2.26 se vidi da se u ac+dc pokretanom FK modelu u slučaju samerljive strukture $\omega = 1$ javljaju subharmonijski stepenici za $r \neq 0$. Poredeći širine prvog harmonijskog i polucelog stepenika na Sl. 2.27 u funkciji od r uočena je ogromna razlika između njihovih širina. Na slici Sl. 2.28 je prikazana kritična sila u funkciji deformacionog parametra. Kao i na prethodnoj slici Sl. 2.25 u slučaju samerljivih struktura $\omega = 1/q$, inset na Sl. 2.28 prikazuje interval opadanja kritične sile pri porastu r . Kritična sila opada sa porastom deformacionog parametra na intervalu $0 < r < 0.16$, zadržavajući vrednost manju od $F_c(r = 0)$ na intervalu $0 < r < 0.2$. Sa daljim porastom r kritična sila raste, dostižući beskonačnu vrednost kada $r \rightarrow 1$.

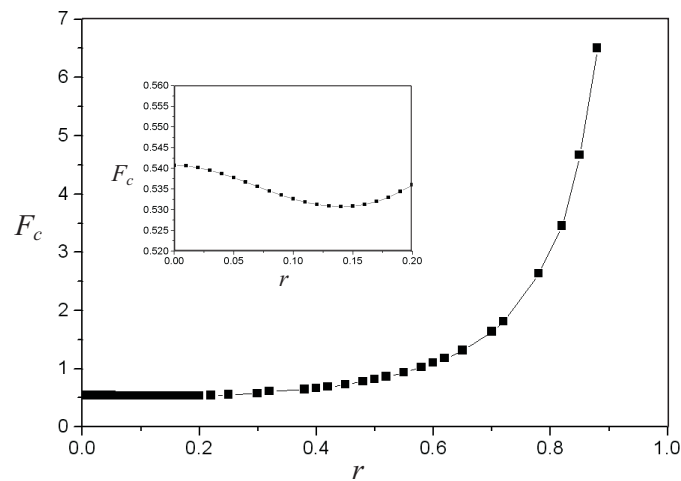


Sl. 2.26: Srednja brzina kao funkcija dc sile za $\omega = 1, K = 4, F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$.

Širine stepenika u slučaju samerljive strukture $\omega = 1$, pokazuju drugačije ponašanje u odnosu na samerljive strukture $\omega = 1/q$, pri promeni deformacionog parametra. Na slici Sl. 2.29 predstavljene su kritična sila i širina stepenika u funkciji od deformacionog parametra za $\omega = 1$ i $\omega = 1/3$. Može se zaključiti da pri velikoj vrednosti deformacije potencijala $r > 0.8$, praktično sve samerljive strukture saturiraju samerljivoj strukturi $\omega = 1$.

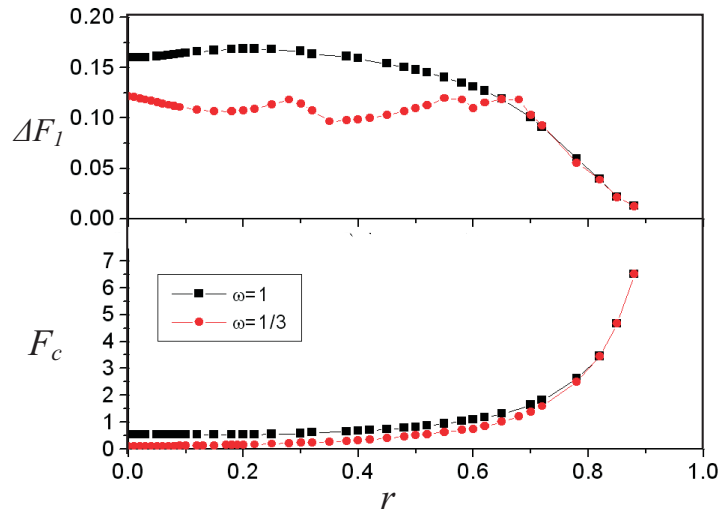


Sl. 2.27: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 i polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ u slučaju samerljive strukture $\omega = 1$, za $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$.



Sl. 2.28: Krična sila kao funkcija deformacionog parametra r za vrednosti parametara $\omega = 1$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$. Inset pokazuje istu krivu u oblasti $0 \leq r \leq 0.2$.

Ovi rezultati pokazuju da je razlika među samerljivim strukturama od velikog značaja za male vrednosti parametra r . Povećanjem r uvode se novi stepeni slobode u sistem i svaka samerljiva struktura u tom slučaju predstavlja sistem sa mnogo stepeni slobode, čak i $\omega = 1$. Međutim u slučaju velikih vrednosti r česticama više oštri minimumi nisu dostupni i sve one zauzimaju široke minimume. Kada deformacioni parametar uzme vrednost veću od $r = 0.8$ samerljive strukture $\omega = 1/q$ ne razlikuju se u smislu dinamike od $\omega = 1$. Stoga za velike vrednosti deformacije nema više razlike između različitih samerljivih struktura i vrednosti kritične sile i širine stepenika saturiraju vrednost jednočestičnog sistema $\omega = 1$.



Sl. 2.29: Kritična sila i širina prvog harmonijskog stepenika u funkciji deformacionog parametra r za $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i dve različite samerljive strukture $\omega = 1$ i $\omega = 1/3$.

Ovaj rezultat je bitan za još postojeće debate oko toga da li u modelovanju sistema talasa gustine naboja i Džozefsonovih spojeva koristiti jednočestične ili mnogočestične modele. Ova diskusija je pokrenuta iz razloga što iako su eksperimentalni sistemi, sistemi sa velikim brojem stepeni slobode, neki rezultati vezani za njih se mogu vrlo lepo teorijski opisati jednočestičnim modelima, verovatno zbog redukovanja stepeni slobode sa zaključavanjem. Ovi rezultati dobijeni za ac+dc pokretan FK model pri velikim deformacijama potencijala daju mogućnost da je redukovanje stepeni slobode u ovim sistemima baš razlog zašto se ovo dešava.

2.8 Farejev niz u pojavljivanju subharmonijskih stepenika u ac+dc pokretanom FK modelu

Rezultati ovog poglavlja publikovani su u radu [59]. Razmotrimo FK model pod dejstvom spoljašnje periodične sile $F(t) = \bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t)$. Za sistem jednačina

$$\dot{u}_l = u_{l+1} + u_{l-1} - 2u_l - V'(u_l) + F(t) \quad (2.15)$$

gde je $l = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$, a N je broj čestica u lancu izabere se, za prethodno uveden skup parametara $\{F_{ac}, \nu_0, \omega, K\}$ i proizvoljni početni uslov $\{u_l(t_0)\}, l = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$. Bez gubljenja na opštosti može se uzeti da je $t_0 = 0$. Jednačine kretanja se integrale metodom Runge Kuta izvesni vremenski period (izvesni broj perioda spoljašnje sile) sa vremenskim korakom t_s ($t_s = \frac{1}{100}\tau$, gde je $\tau = \frac{1}{\nu_0}$, a ν_0 je period spoljašnje sile) dok se ne postigne ravnotežno stanje $\{u_l(t_{ss})\}, l = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$, ili dok nismo prilično sigurni da je ravnotežno stanje postignuto.

Fokus u ovom poglavlju je na računanju najvećeg Ljapunovljevog (Lyapunov) eksponenta λ . Poznato je da je najveći Ljapunovljev eksponent kvantitativna mera za prisustvo haosa u dinamičkom sistemu, ipak pokazalo se da može služiti i kao lokator harmonijskih i subharmonijskih stepenika. Kada je sistem dinamički zaključan (kada se nalazimo na stepeniku) trajektorije čestica su periodične u vremenu što se odražava negativnom vrednošću najvećeg Ljapunovljevog eksponenta $\lambda < 0$. Izvan stepenika trajektorije su ili kvaziperiodične $\lambda = 0$ ili dolazi do pojave haosa $\lambda > 0$.

Kod računanja najvećeg Ljapunovljevog eksponenta polazi se od ravnotežnog stanja $\{u_l(t_{ss})\}$. I sada se selektuje neka bliska perturbovana konfiguracija (pomerena za d_0) $\{u'_l(t_{ss})\}$:

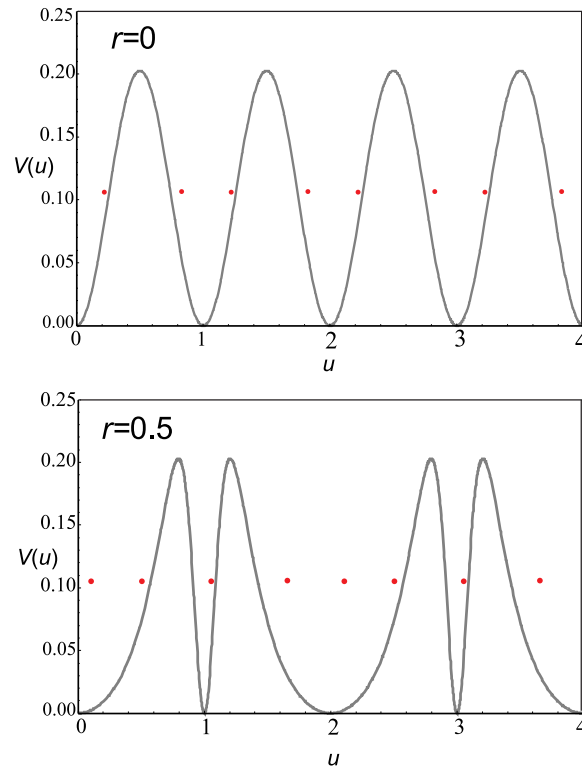
$$u'_l(t_{ss}) = u_l(t_{ss}) \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{N}}, \quad \forall l \quad (2.16)$$

Da bismo bili sigurni da se projektovanje uvek vrši na potprostor u kome dominira najveći Ljapunovljev eksponent znak ispred kvadratnog korena nasumično je odabran, gde se + i - znak pojavljuju sa istom verovatnoćom. Vrši se uzorkovanje i podešavanje praćenjem rada Sprota, [60], svakih 25 vremenskih koraka. U računima korišćeno je $t_{ss} = 300\tau$ i $d_0 = 10^{-7}$. Najveći Ljapunovljev eksponent će u daljem tekstu biti zvan samo Ljapunovljev eksponent. Važno je da se ovaj postupak može primenjivati kako na standardni tako i na ma koji FK modeli sa generalisanim substratnim potencijalu. U ovom poglavlju biće razmatran ASDP.

2.8.1 Rezultati

Ljapunovljev eksponent je računat za različite vrednosti deformacionog parametara r . Za substratni potencijal izabran je asimetrični deformacioni potencijal ASDP:

$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} \frac{(1-r^2)^2 [1 - \cos(2\pi u)]}{[1 + r^2 + 2r \cos(\pi u)]^2} \quad (2.17)$$



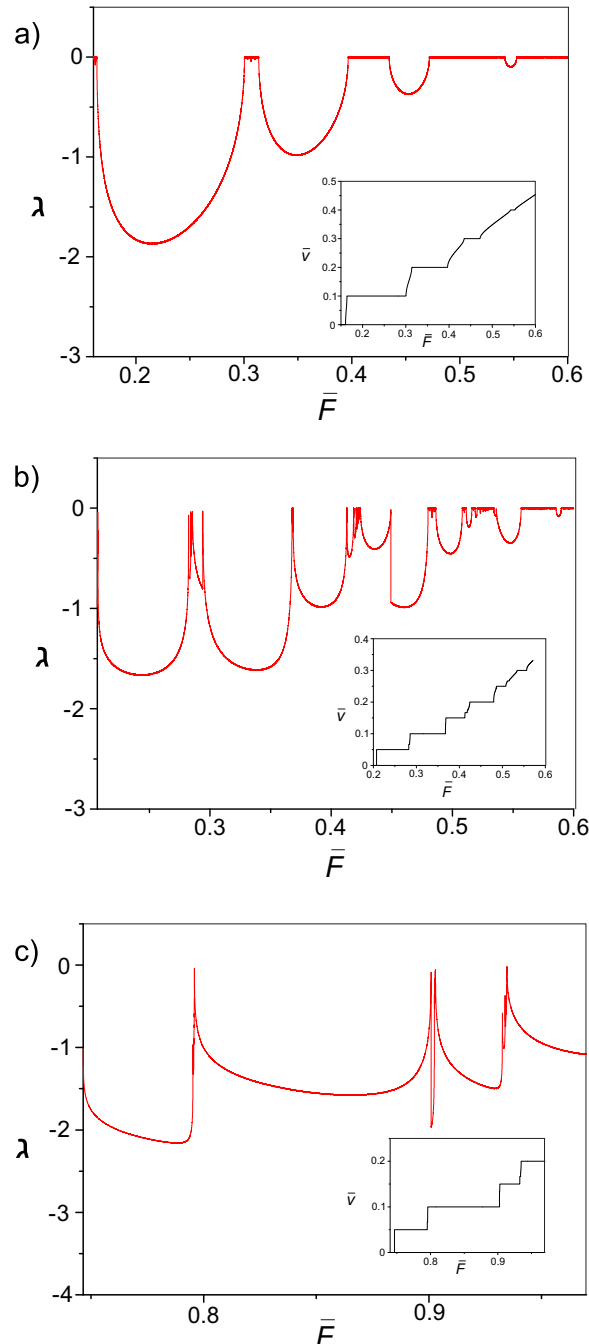
Sl. 2.30: Kretanje čestica u asimetričnom deformacionom potencijalu za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$ i dve različite vrednosti deformacionog parametra. Čestice su označene crvenim tačkama.

Na slici Sl. 2.30 predstavljeno su čestice u asimetričnom deformacionom potencijalu za samerljivu strukturu $\omega = 1/2$ i $K = 4$. Crvene tačkice predstavljaju čestice. Može se videti da se sa porastom deformacionog parametara veći broj čestica nalazi u širokim jamama. Postojeći rezultati sa generalisan FK model sa ASDP-om na koji se deluje prinudnom $ac + dc$ silom izloženi su u poglavlju 2.3. Na Sl. 2.31 dat je Ljapunovljev eksponent u funkciji dc sile za tri različite vrednosti deformacionog parametra r . Inseti pokazuju odgovarajuće funkcije odziva $\bar{v}(\bar{F})$ (srednja brzina u funkciji dc sile). Kao što se može videti sa Sl. 2.31, izračunati Ljapunovljevi eksponenti su uvek $\lambda \leq 0$, što implicira da se unošenjem deformacije ne javlja haos u sistemu. Oblasti \bar{F} na Sl. 2.31 su različite za različito r , zbog činjenice da se za različito r isti stepenici pojavljuju u različitim opsezima \bar{F} [52, 53]. Sa porastom \bar{F} raste kritična sila, samim tim i vrednosti \bar{F} za koje počinju i završavaju se pojedini stepenici se menjaju sa promenom deformacionog parametra. Korišćenjem simetrijske transformacije $\bar{v} = \frac{i\omega + ja_s}{m} \nu_0$, gde je a_s period substratnog potencijala, svi Šapiro stepenici mogu biti identifikovani. Poznato je da u slučaju ($r = 0$) sa celobrojnom međučestičnom razdaljinom neće biti subharmonijskih stepenika u funkciji odziva $\bar{v}(\bar{F})$. Sa druge strane u slučaju $\omega = 1/2$, samo poluceli stepenik $3/2$ se vidi na funkciji odziva između prvog i drugog harmonijskog stepenika. Računanje Ljapunovljevog eksponenta između prvog i drugog harmonijskog stepenika otkriće i druge subharmonijske stepenike (videti Sl. 2.32). Površina ispod minimuma na $\lambda(\bar{F})$ direktno je proporcionalna širini stepenika na grafiku $\bar{v}(\bar{F})$; širim stepenicima na grafiku $\bar{v}(\bar{F})$ odgovaraće veće površine ispod minimuma na $\lambda(\bar{F})$. Ako se posmatraju subharmonijski stepenici na Sl. 2.32, može se primetiti da je najveći subharmonijski stepenik između 1 i 2 poluceli stepenik $3/2$. Zatim između stepenika 1 i $3/2$ najveći stepenik je $4/3$, dok je najveći stepenik između $3/2$ i 2 $5/3$. Prema tome, na osnovu

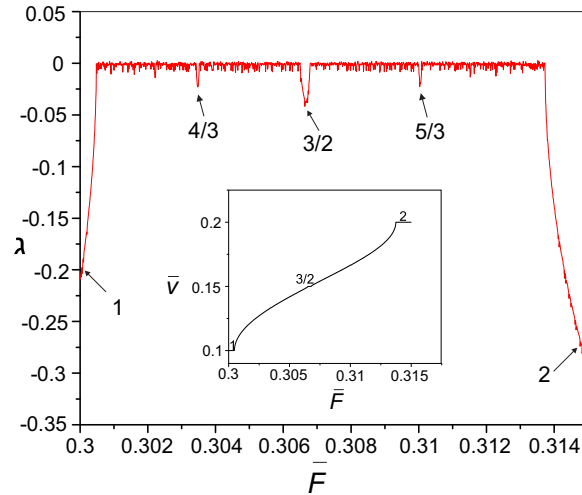
pojavljivanja subharmonijskih stepenika između 1 i 2 možemo napisati niz

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1} \quad (2.18)$$

Ovaj niz je Farejev niz, koji je poznat u teoriji brojeva [62, 63].



Sl. 2.31: Ljapunovljev eksponent u funkciji dc sile za samerljivu strukturu $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i tri različite vrednosti deformacionog parametra (a) $r = 0$, (b) $r = 0.28$, (c) $r = 0.6$. Inseti pokazuju odgovarajuće funkcije odziva $\bar{v}(\bar{F})$.



Sl. 2.32: Ljapunovljev eksponent u funkciji dc sile za $r = 0$ (ostatak parametara je uzet kao na slici Sl. 2.31). Inset pokazuje funkciju odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za isti interval dc sile. Rezultat je dobijen u radu [43].

Farejev niz $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ reda \mathcal{N} je rastući niz ireducibilnih razlomaka između 0 i 1, čiji imenilac je manji ili jednak od \mathcal{N} .

$$\mathcal{F}_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{F}_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{F}_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \quad (2.22)$$

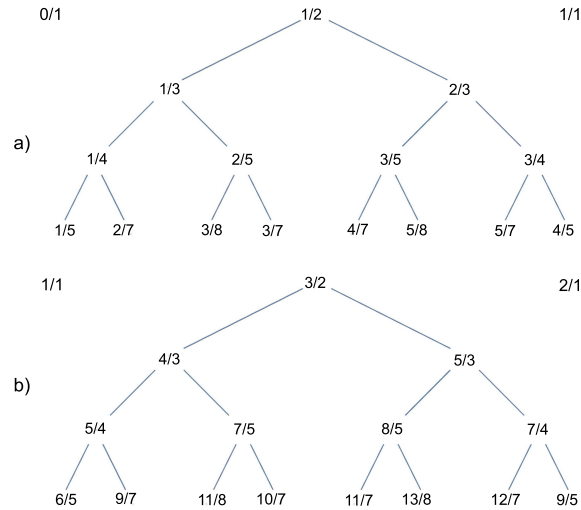
$$\mathcal{F}_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}. \quad (2.23)$$

Stoga, ukoliko imamo dva razlomka $\frac{p}{q}$ (p, q uzajamno prosti brojevi) i $\frac{p'}{q'}$ (p', q' uzajamno prosti brojevi), razlomak između njih sa najmanjim imeniocem je

$$\frac{p''}{q''} = \frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'} \quad (2.24)$$

(p'' i q'' su uzajamno prosti brojevi).

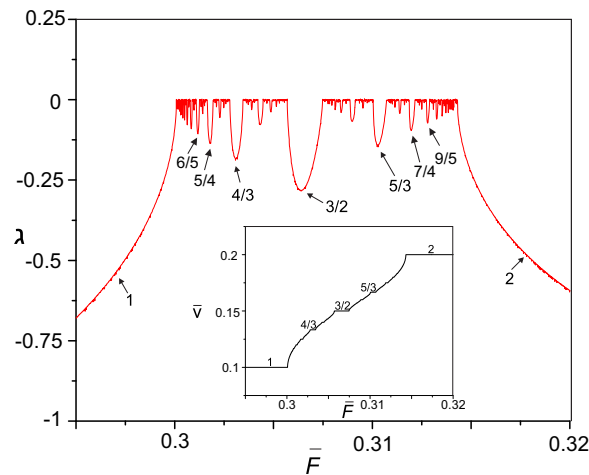
Na slici Sl. 5.4 data je Farejeva konstrukcija pomoću koje se Farejev niz može vizualizovati.



Sl. 2.33: Graf koji reprezentuje deo Farejeve konstrukcije, a) od 0 do 1 b) od 1 do 2.

Farejev niz je našao primenu i u fizici akceleratora [64, 65]. Pored navedinih osobina važna je i tzv. udaljenost između dva susedna člana u nizu. Udaljenost između m koja dva susedna člana u proizvoljno odabranom Farejevom nizu $\frac{p_1}{q_1}$ i $\frac{p_2}{q_2}$, respektivno je $\frac{1}{q_1 q_2}$. Na primer, rastojanje između $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{3}$ u (2.18) je $\frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3}$.

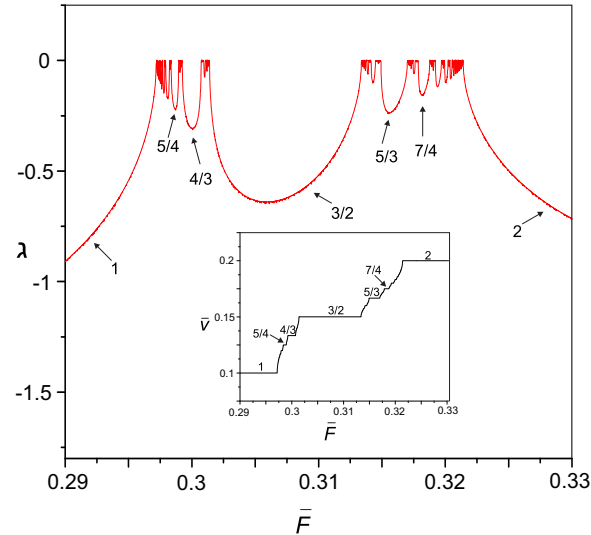
Za slučaj FK modela sa celobrojnom međučestičnom razdaljinom ω nema subharmonijskog zaključavanja, odakle sledi da se na grafiku $\lambda(\bar{F})$ može videti samo Farejev niz \mathcal{F}_1 . Ipak, za slučaj međučestične razdaljine $\omega = \frac{1}{2}$ na slici Sl. 2.32, najveći stepenik između stepenika 1 i 2 je poluceli stepenik $3/2$. Pri deformaciji potencijala, veliki poluceli i subharmonijski stepenici se pojavljuju. Nasuprot slučaju $r = 0$ na Sl. 2.32, za $r = 0.01$ na Sl. 2.34 veliki $4/3$ i $5/3$ se vide.



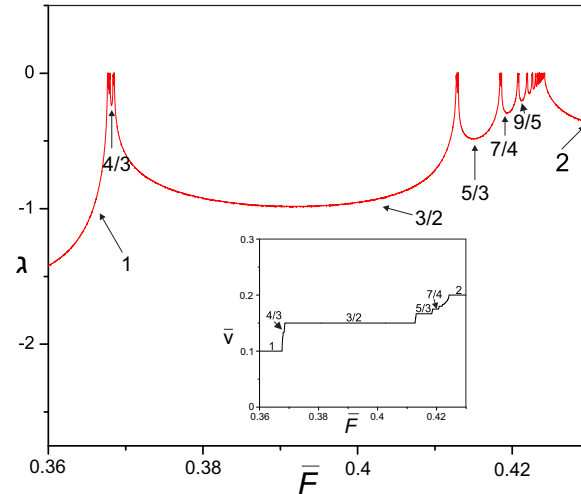
Sl. 2.34: Ljapunovljev eksponent kao funkcija dc sile za $r = 0.01$ (ostatak parametara je isti kao na slici Sl. 2.31). Inset pokazuje funkciju odziva $\bar{v}(\bar{F})$ na istom intervalu sile.

Subharmonijski stepenici višeg reda, poput $4/3$ i $5/3$ (sa leve i desne strane) pojavljuju se simetrično u odnosu na stepenik $3/2$. Stepenci se na ovakav način pojavljuju i kod superprovodnih nanožica (videti FIG2 u radu [33]). Sa daljim deformisanjem potencijala, narušava se ta simetrija, kao što se može videti na Sl. 2.35. Pokazano je u poglavlju 2.3 da širine

polucelih i drugih subharmonijskih stepenika rastu sa deformacijom i nakon dostizanja maksimuma za neku vrednost r , opadaju u nulu. Računanjem $\lambda(\bar{F})$ za $r = 0.28$, što je vrednost za koju subharmonijski stepenici dostižu maksimum, dobija se rezultat sa Sl. 2.36.

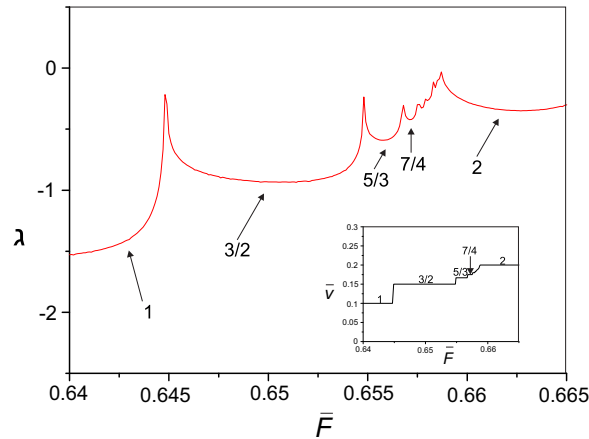


Sl. 2.35: Ljapunovljev eksponent kao funkcija dc sile za $r = 0.05$ (ostatak parametara je isti kao na slici Sl. 2.31). Inset pokazuje funkciju odziva $\bar{v}(\bar{F})$ na istom intervalu sile.



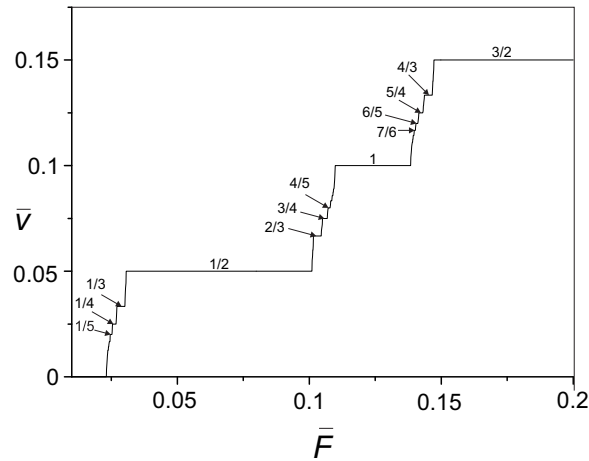
Sl. 2.36: Ljapunovljev eksponent kao funkcija dc sile za $r = 0.28$ (ostatak parametara je isti kao na slici Sl. 2.31). Inset pokazuje funkciju odziva $\bar{v}(\bar{F})$ na istom intervalu sile.

Za ovu vrednost deformacionog parametra neki subharmonijski stepenici počinju da nestaju. Za velike vrednosti deformacionog parametra r , veličina polucelih stepenika opada i viši subharmonijski stepenici kompletno nestaju. Ovo je potvrđeno rezultatima sa Sl. 2.37, gde je $\lambda(\bar{F})$ za $r = 0.5$ izračunato.



Sl. 2.37: Ljapunovljev eksponent kao funkcija dc sile za $r = 0.5$ (ostatak parametara je isti kao na slici Sl. 2.31). Inset pokazuje funkciju odziva $\bar{v}(\bar{F})$ na istom intervalu sile.

Nestajanje stepenika je takođe jasno vidljivo na Sl. 2.38. Deformacija potencijala veoma utiče na to koji će se stepenici pojaviti i kolika će biti njihova širina. Sa povećanjem deformacije r , desna strana Farejeve konstrukcije postaje dominantnija u odnosu na levu, što znači da povećanjem deformacionog parametra r dominantnu stranu Farejeve konstrukcije čine stepenici $3/2, 5/3, 7/4, 9/5$. U analizama drugih tipova deformacionih potencijala, poput varijabilnog, dvobarijernog i dvojamnog, uvek se pojavljuju stepenici sa grafa na Sl. 2.33 [66]. Stoga za dva stepenika $\frac{p}{q}$ i $\frac{p'}{q'}$, najveći stepenik koji leži između njih je $\frac{p+p'}{q+q'}$. Važno je da nam Farejeva konstrukcija govori o pojavljivanju i relativnoj veličini stepenika, ali nam ne govori ništa o njihovoj stvarnoj širini, niti znamo zašto se oni pojavljuju na takav način [61]. Poznato je da su u slučaju asimetričnog deformacionog potencijala ASDP širine harmonijskih i polucelih stepenika korelisane; što je veća širina harmonijskih stepenika, manja je širina polucelih i obratno. U nekim slučajevima, u zavisnosti od parametara sistema, veličina polucelih stepenika može biti veća od harmonijskih. Veličina polucelih i drugih subharmonijskih stepenika veoma utiče na sistem i na osnovu toga su uvedena tri tipa ponašanja sistema: standardno ponašanje za male vrednosti polucelih stepenika, ponašanje za polucele stepenike srednje veličine i ponašanje za velike polucele stepenike. Farejeva konstrukcija predviđa da ako imamo dva harmonijska stepenika 1 i 2, najveći stepenik između njih će biti poluceli stepenik $1/2$, ali će on biti manje širine nego dati harmonijski. Za određene vrednosti parametara u okviru $ac + dc$ pokretanog FK modela to neće biti slučaj. Na slici Sl. 2.37 je predstavljena funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za skup parametara pri kojima se javljaju veliki subharmonijski stepenici. Očito je da u nestandardnom slučaju, relativne veličine harmonijskih i polucelih stepenika ne slede Farejevu konstrukciju; poluceli stepenici nisu manji od harmonijskih, odnosno veličina stepenika ne opada sa porastom imenioca. Poluceli stepenici $1/2$ i $3/2$ su veći od harmonijskih 1 i 2. Zanimljivo je da se viši subharmonijski stepenici pojavljuju u skladu sa Farejevom konstrukcijom.



Sl. 2.38: Srednja brzina u funkciji dc sile za $F_{ac} = 0.55$ i $r = 0.2$ (ostatak parametara je uzet kao na slici Sl. 2.31)

Računanje Ljapunovljevih eksponenata, pored toga što je detekcija prisustva haosa u sistemu, pruža nam mogućnost i da preciznije detektujemo rezonance. U slučaju $ac + dc$ pokretanog FK modela nije primećeno prisustvo haosa u sistemu. Za razliku od našeg slučaja haos je primećen u slučaju sistema Džozefsonovih spojeva, gde se haotične oblasti javljaju između subharmonijskih Šapiro stepenika pri određenim vrednostima parametara [67, 68]. Gledajući eksperimentalne rezultate u talasima gustine naboja, Džozefsonovim spojevima i superprovodnim nanožicama, uočeno je da se svi Šapiro stepenici javljaju prema Farejevom pravilu.

2.9 FK model u drugim realističnim substratnim potencijalima

Rezultati ovog poglavlja publikovani su u radu [66]. U standardnom FK modelu, širina Šapiro stepenika i kritična sila osciluju beselovski sa amplitudom ac sile i to tako da maksimumi jedne krive odgovaraju minimumima druge [20–22]. Na amplitudnu zavisnost utiče pojava polucelih stepenika, obzirom da postoji korelacija između harmonijskih i polucelih stepenika. Šapiro stepenici nalaze se u takvoj korelaciji da što je veća širina harmonijskih stepenika, manja je širina polucelih i obratno [30–32]. Ipak postojala je sumnja da za neki odabir substratnog potencijala ova zavisnost neće biti održana [24]. Sva teorijska ispitivanja vršimo u tri slučaja; u slučaju malih polucelih stepenika, polucelih stepenika srednje veličine i velikih polucelih stepenika.

U slučaju malih polucelih stepenika imamo standardno ponašanje. Oscilacije širine stepenika i kritične sile u funkciji amplitude ac sile imaju Beselovu formu, gde maksimum jedne krive odgovara minimumu druge. U slučaju polucelih stepenika srednjih veličina Beselova forma zavisnosti širine stepenika i kritične sile počinje da se menja. Za velike polucele stepenike Beselova forma je kompletno uništena. Širina harmonijskih stepenika i kritična sila osciluju, nasuprot standardnom slučaju, na način gde maksimumi jedne krive odgovaraju minimumima druge.

Postoji velika sličnost u ponašanju između FK modela u deformacionom substratnom potencijalu sa ponašanjem u "high Tc-grain boundary junctions" [31, 32] što može dovesti do zaključka da pojava polucelih stepenika utiče na harmonijske stepenike i da će sistem prolaziti kroz ova tri tipa ponašanja. I pored ovih rezultata ova klasifikacija nije univerzalna. U narednom poglavlju biće ispitivan generalizovani Frenkel Kontorova model u substratnim potencijalima poput varijabilnog, dvobarijernog i dvojamskog. Primećeno je da u različitim substratnim potencijalima veličina polucelih stepenika može imati različit uticaj. Postoje sistemi koji imaju potpuno drugačije ponašanje od onog datog u radovima [31, 32].

2.10 Uticaj polucelih stepenika na dinamiku

Pored FK modela u asimetričnom deformacionom potencijalu mogu se koristiti i drugi substratni potencijali poput varijabilnog, dvojamskog i dvobarijernog potencijala.

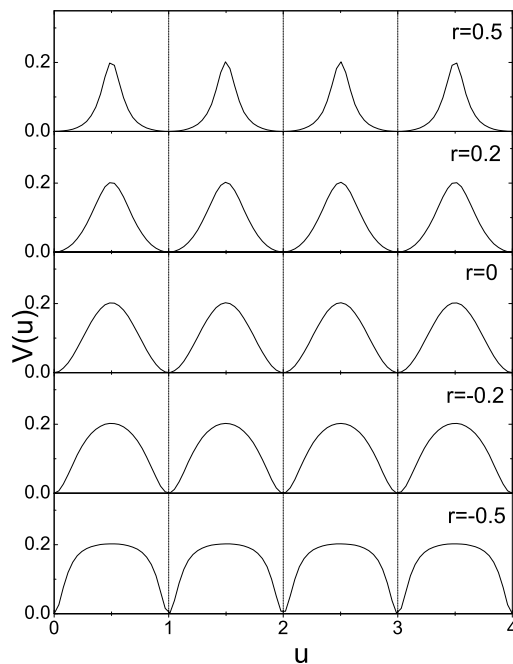
2.10.1 Varijabilni potencijal

Varijabilni potencijal je jedan od potencijala uvedenih u radovima Pejrrara i Ramoaznea. Analitički oblik varijabilnog potencijala je dat sa

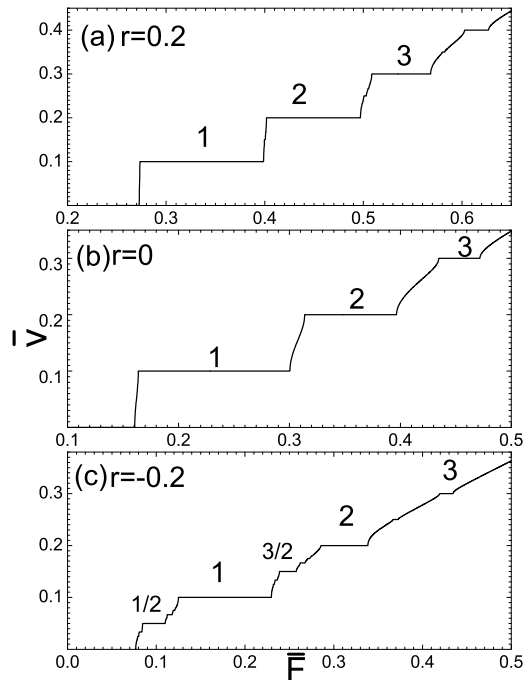
$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} (1-r)^2 \frac{[1 - \cos(2\pi u)]}{1 + r^2 + 2r \cos(2\pi u)} \quad (2.25)$$

gde je K intenzitet substratnog potencijala, a r je deformacioni parametar ($-1 < r < 1$). Na Sl. 2.39 prikazan je varijabilni potencijal za različite vrednosti parametra r . Sa promenom parametra r ne dolazi do promene vrednosti lokalnih maksimuma $V(u)$, ali se značajno menja oblik substratnog potencijala. Za negativne vrednosti deformacionog parametra $r < 0$ dobija

se potencijal sa "ravnim" maksimumima i oštrim minimumima, dok je u slučaju $r > 0$ situacija obratna. Za $r = 0$ dobija se potencijal standardnog FK modela.



Sl. 2.39: Varijabilni potencijal za $K = 4$ i različite vrednosti r .

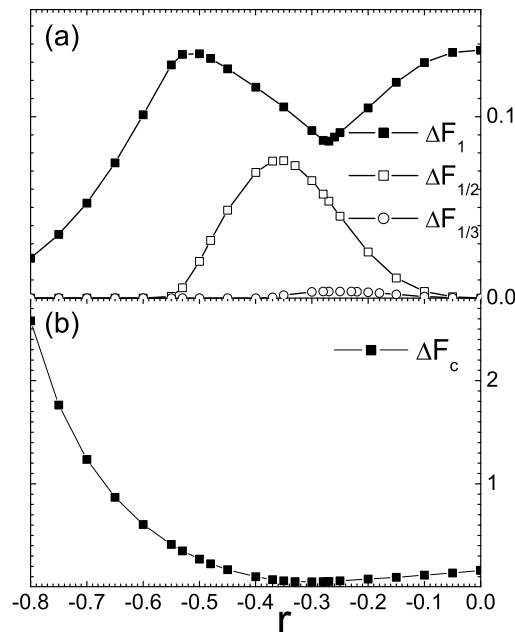


Sl. 2.40: Srednja brzina kao funkcija srednje sile za $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti deformacionog parametra a) $r = 0.2$, b) $r = 0$ i c) $r = -0.2$. Na grafiku su označeni harmonijski i poluceli stepenici.

Varijabilni oblik substratnog potencijala utiče na dinamičko zaključavanje. Za samerljivu strukturu $\omega = 1/2$ na slici Sl. 2.40 je data funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ za različite vrednosti deformacionog parametra. Za $r > 0$, kada su maksimumi potencijala oštri, a dolje ravne promena oblika neće značajno uticati na funkciju odziva. Na odzivu se pojavljuju mali subharmonijski stepenici, ali njihova veličina je zanemarljiva. Kada je $r > 0$ uvek se pojavljuju dve čestice po potencijalnom jami. Za $r < 0$ u slučaju ravnih maksimuma (oštrih minimuma) pojavljuje se novo metastabilno stanje, jer čestice mogu da se nalaze na vrhu potencijalnog maksimuma i za $\omega = 1/2$. Može se javiti slučaj kada je jedna čestica na vrhu maksimuma, a druga je u minimumu. Ovo može značajno uticati na subharmonijske stepenike.

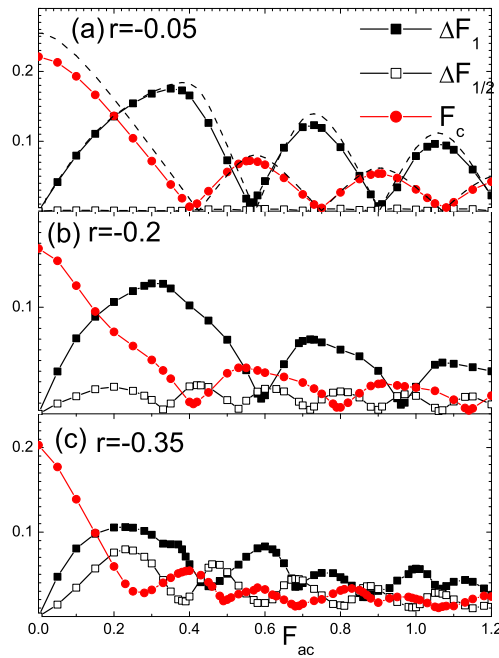
Dobro je poznata činjenica da se standardni FK model za celobrojno ω redukuje u sistem sa jednim stepenom slobode i ne postoji subharmonijsko zaključavanje. Za razliku od standardnog, generalizovani FK model ne može biti redukovani u sistem sa jednim stepenom slobode, a prisustvo mnogo stepeni slobode može dovesti do subharmonijskog zaključavanja za ma koju vrednost ω . Sa slike možemo videti da za $r < 0$ dolazi do pojave polucelih i drugih subharmonijskih stepenika. Sa Sl. 2.40 (c) vidi se da, u slučaju $r < 0$, dolazi do pojave velikih polucelih stepenika, a sa grafika se vidi i niz subharmonijskih stepenika višeg reda.

Kritična sila divergira kada $r \rightarrow -1$. U suprotnosti sa slučajem FK modela u asimetričnom deformacionom potencijalu kod koga minimumi harmonijskih stepenika odgovaraju maksimumima polucelih ovde vidimo blago odstupanje (videti Sl. 2.41). Deformisanje potencijala ima velik uticaj na oscilacije veličine stepenika sa amplitudom.



Sl. 2.41: a) Širina prvog harmonijskog ΔF_1 polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ i $\Delta F_{1/3}$ stepenika u funkciji deformacionog parametra r ; b) Kritična sila u funkciji deformacionog parametra za vrednosti parametara $K = 4$, $\omega = 1/2$, $F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$.

Koliko je veliki uticaj varijabilnog substratnog potencijala na Šapiro stepenike najbolje se može videti iz grafika amplitudne zavisnosti kritične sile, prvog harmonijskog i polucelog stepenika, za različite vrednosti deformacionog parametra (videti Sl. 2.42).



Sl. 2.42: Širina prvog harmonijskog stepenika ΔF_1 , polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ i kritična sila F_c kao funkcije ac amplitude F_{ac} za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$ i tri različite vrednosti deformacionog parametra (a) $r = -0.05$, (b) $r = -0.2$ i (c) $r = -0.35$. Isprekidana linija odgovara slučaju $r = 0$.

Sa porastom negativnih vrednosti r pojavljuju se poluceli stepenici što utiče na standardno ponašanje. Veličina harmonijskih stepenika se smanjuje i minimumi ne dostižu nulu. Kada se pojave veliki poluceli stepenici širina harmonijskog stepenika i kritična sila osciluju suprotno standardnom slučaju. Sada maksimumi jedne krive odgovaraju minimumima druge krive, a oscilacije postaju anomalne Beselove (treći maksimum ima manju vrednost od četvrtog). Rezultati na Sl. 2.42(c) pokazuju da se veliki poluceli stepenici javljaju za vrednosti amplitude spoljašnje sile, koje odgovaraju minimumima kritične sile.

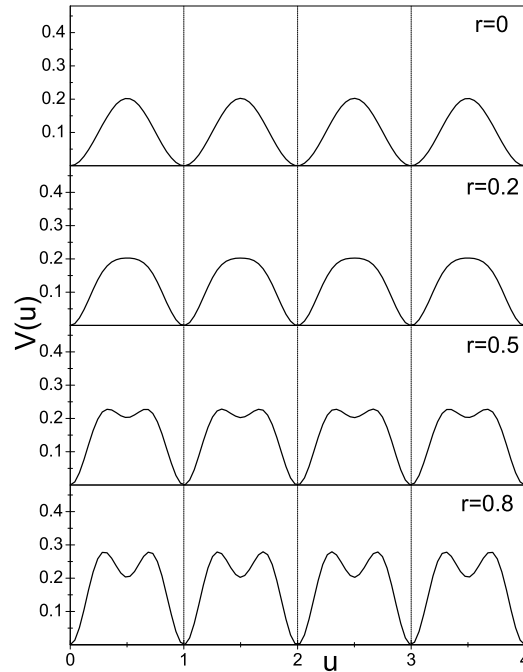
2.10.2 Dvobarijerni potencijal

U nekim primenama FK modela

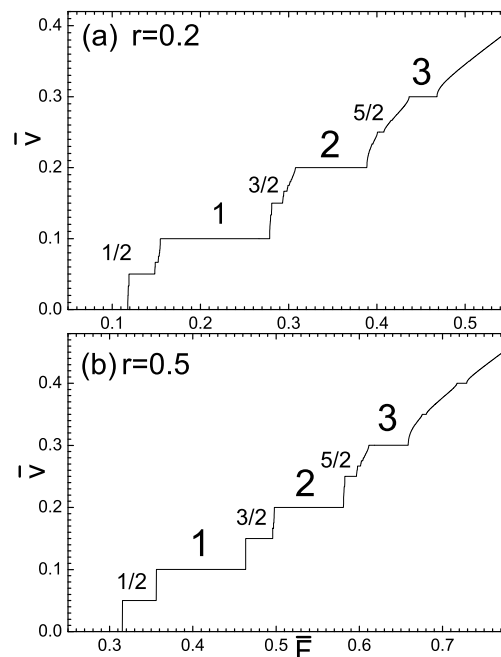
$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} \{ [1 - \cos(2\pi u)] + r[1 + \cos(4\pi u)] \} \quad (2.26)$$

Ovaj potencijal ima dvobarijernu strukturu za $r > \frac{1}{4}$. Sa Sl. 2.43 može se uočiti da će u slučaju dvobarijerne strukture, $r > \frac{1}{4}$, potencijal imati dva globalna maksimuma po periodu, jedan globalni minimum i jedan lokalni minimum, koji se, ako imamo u vidu kretanje čestica u ovom potencijalu može nazvati i relativnim minimumom. U ovom slučaju sistem se može pojaviti u metastabilnom osnovnom stanju, gde čestice lanca zauzimaju lokalni (relativni) minimum substratnog potencijala. Pojava ovih lokalnih minimuma (metastabilnih stanja) jako utiče na interferencione fenomene. Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ je prikazana na Sl. 2.44. Deformacija potencijala i pojava ravnog maksimuma će uticati na pojavu velikih polucelih, kao i subharmonijskih stepenika višeg reda. Na Sl. 2.45 predstavljene su širine prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog

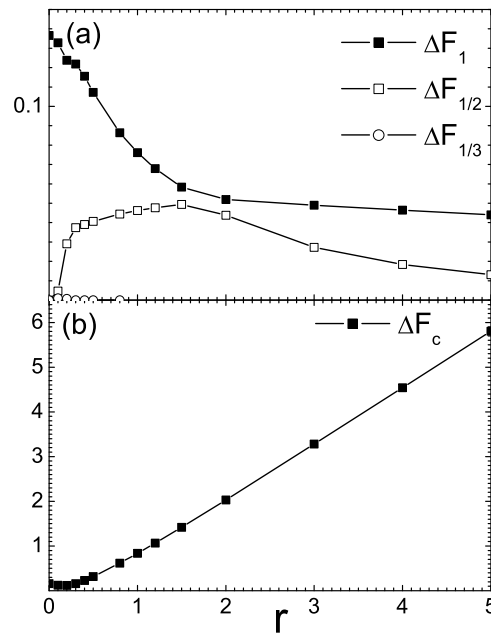
$\Delta F_{1/2}$ i $1/3$ stepenika $\Delta F_{1/3}$, kao i kritična sila F_c u funkciji deformacionog parametra r . Kao što se može uočiti subharmonijski stepenici se pojavljuju na širokom opsegu deformacionog parametra r . Korelacija između harmonijskih i polucelih stepenika je prisutna, kao i u slučaju ASDP. Subharmonijski stepenik $1/3$ se teško vidi na grafiku $\bar{v}(\bar{F})$. Kritična sila, kao i u svim prethodnim slučajevima divergira za velike vrednosti deformacionog parametra r .



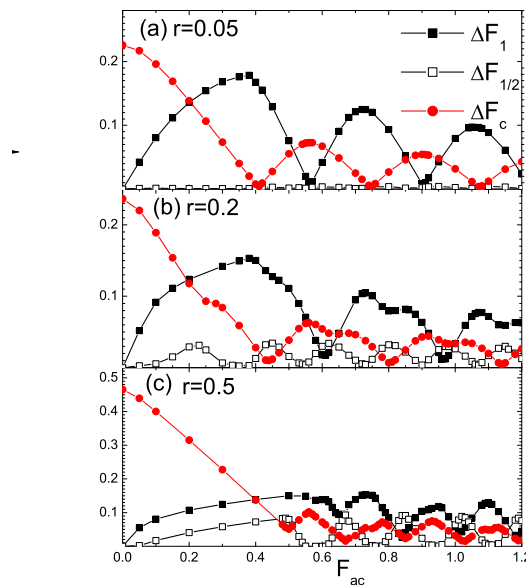
Sl. 2.43: Dvobarijerni potencijal za $K = 4$ i različite vrednosti r .



Sl. 2.44: Srednja brzina kao funkcija dc sile za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti deformacionog parametra r . a) $r = 0.2$ b) $r = 0.5$.



Sl. 2.45: (a) Širina prvog harmonijskog stepenika ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{\frac{1}{2}}$ i $\Delta F_{\frac{1}{3}}$ u funkciji deformacionog parametra r . (b) Kritična sila u funkciji deformacionog parametra r . Vrednosti ostalih parametara korišćenih u simulaciji su $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$.



Sl. 2.46: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ i kritična sila u funkciji ac amplitude F_{ac} za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti deformacionog parametra.

Na Sl. 2.46, prikazana je amplitudna zavisnost prvog harmonijskog i polucelog stepenika, kao i kritične sile za različite vrednosti deformacionog parametra r . Sa porastom deformacije sistem

prolazi kroz tri različita tipa amplitudne zavisnosti. Standardno ponašanje je zastupljeno u prisustvu malih polucelih stepenika kada je $r = 0.05$. Ponašanje za polucele stepenike srednjih veličina javlja se za $r = 0.2$. Sa porastom polucelih stepenika beselovska forma od ΔF_1 i F_c počinje da se deformiše i javljaju se novi maksimumi. Ponašanje za velike polucele stepenike $r = 0.5$ dato je na Sl. 2.46 (c). Harmonijski stepenik i kritična sila osciluju kontra standardnom slučaju ($r = 0$), maksimum (minimum) jedne krive odgovara maksimumu (minimumu) druge krive.

2.11 Sistemi koji zadržavaju svoje ponašanje

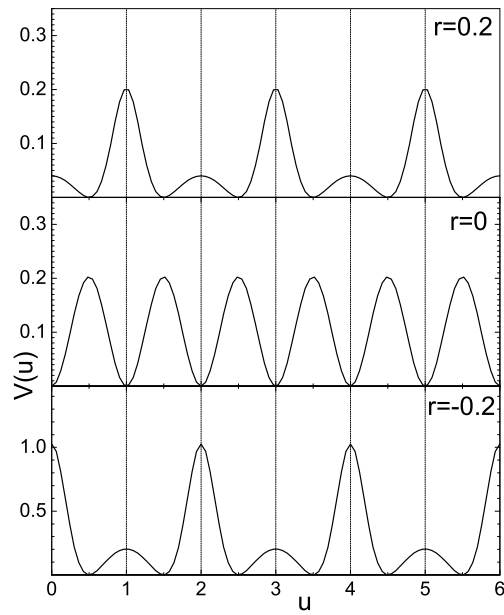
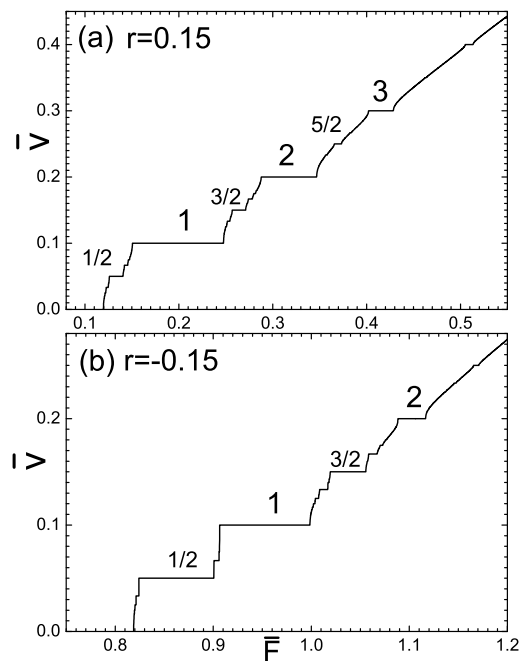
$Ac + dc$ pokretan generalisani FK model sa dvojamnim substratnim potencijal je izdvojen od ostalih zbog potpuno drugačijeg ponašanja. Ovaj sistem zadržava standardno ponašanje nezavisno od veličine polucelih stepenika u sistemu.

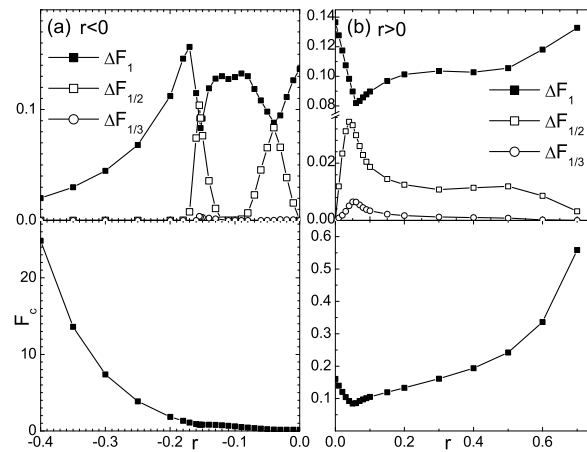
2.11.1 Dvojamni potencijal

U nekim realističnim sistemima pojava velikih polucelih stepenika neće uticati na dinamičko zaključavanje, kao u pređašnje opisanim slučajevima. U ovom poglavlju biće razmatran substratni potencijal koji sadrži više od jednog globalnog minimuma po periodu, takozvani dvojamni potencijal. Analitička forma ovog potencijala data je izrazom:

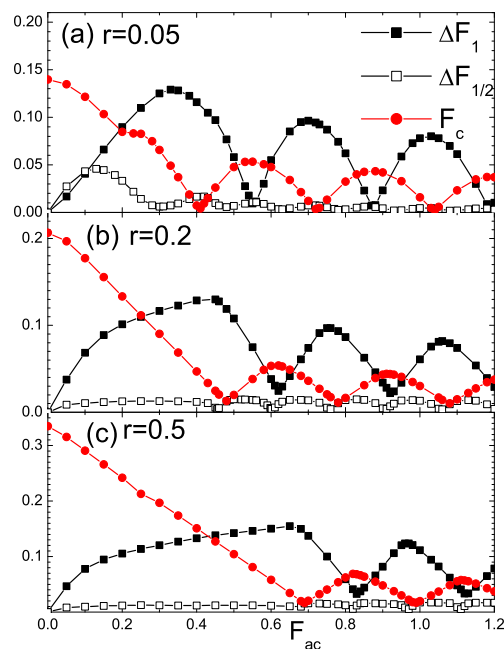
$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} (1-r)^4 \frac{1 + \cos(2\pi u)}{[1 + r^2 + 2r \cos(\pi u)]^2}, \quad (2.27)$$

gde je r , ($-1 < r < 1$) deformacioni parametar. Ovaj potencijal ima dva različita minimuma po periodu koji su odvojeni visokim barijerama i stoga dvojamni substratni potencijal ima dva tipa osnovnog stanja (levo i desno). Na Sl. 2.47 dvojamni potencijal je predstavljen za različite vrednosti deformacionog parametra. Amplituda potencijala je 0.2 za standardni slučaj ($r = 0$) i za slučaj $r > 0$ (na grafiku je predstavljen slučaj $r = 0.2$), odnosno visina barijera je 0.2 za $r \geq 0$. Za slučaj $r < 0$ ($r = -0.2$), barijere koje razdvajaju jame rastu sa apsolutnom vrednošću porasta r . Iz ovih razloga, za ovako definisan dvojamni potencijal, pri ispitivanju amplitudne zavisnosti biće ispitivan samo slučaj malih negativnih vrednosti r . Na Sl. 2.48 funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$ predstavljena je za različite vrednosti deformacionog parametra r . U oba slučaja $r > 0$ i $r < 0$ Sl. 2.48 (a) i 2.48 (b), deformacija potencijala će dovesti do pojave subharmonijskih stepenika. Kao što se može videti za isto $|r|$, porast amplitude za $r < 0$ će rezultovati značajnom povećanju kritične sile ($r = 0.15$, $F_c = 0.12$; dok je za $r = -0.15$, $F_c = 0.82$).

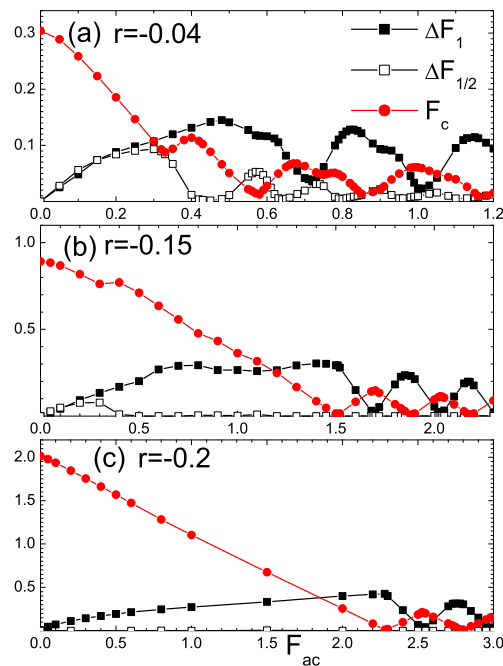
Sl. 2.47: Dvojamni substratni potencijal za $K = 4$ i različite vrednosti deformacionog parametra r .Sl. 2.48: Srednja brzina kao funkcija dc sile za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti r . a) $r = 0.15$ b) $r = -0.15$.



Sl. 2.49: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{\frac{1}{2}}$ i $\Delta F_{\frac{1}{3}}$ stepenika i kritična sila kao funkcija parametra r za skup parametara $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$. a) $r < 0$ b) $r > 0$.



Sl. 2.50: Širina prvog harmonijskog stepenika ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{\frac{1}{2}}$ i kritična sila u funkciji ac amplitude F_{ac} za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti deformacionog parametra.



Sl. 2.51: Širina prvog harmonijskog stepenika ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{\frac{1}{2}}$ i kritična sila u funkciji ac amplitude F_{ac} za $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti deformacionog parametra.

Na Sl. 2.49 predstavljene su širina harmonijskog, polucelog i $1/3$ - stepenika kao i kritična sila u funkciji deformacionog parametra za oba slučaja $r > 0$ i $r < 0$. U oba smera sa porastom r veličine harmonijskih i polucelih stepenika su u korelaciji. Za $r < 0$ na Sl. 2.49 (a) zbog porasta amplitude potencijala (porasta barijera koje razdvajaju jame) poluceli stepenici se pojavljuju samo za male vrednosti deformacije $-0.2 < r < 0$. Za $r > 0$, barijere koje odvajaju jame ne rastu sa povećanjem r i poluceli stepenici se mogu opaziti do $r = 0.7$. Veoma mali $1/3$ stepenici se mogu opaziti na Sl. 2.49 (b) (na slici Sl. 2.49 (a) njihova veličina je suviše mala da bi se videla na grafiku). Kritična sila divergira kada $|r| \rightarrow 1$, a posebno brzo raste u slučaju $r < 0$ zbog porasta amplitude potencijala sa deformacijom. Gledajući slike Sl. 2.50 i Sl. 2.51 može se videti potpuno nov rezultat. Sa deformacijom substratnog potencijala ne javljaju se anomalne Beselove oscilacije u funkciji širine prvog harmonijskog stepenika stepenika od amplitude ac sile (videti Sl. 2.50). Ne javljaju se dvojamne beselovske oscilacije, kao kod ASDP-a, varijabilnog i dvobarijernog substratnog potencijala. *Kod dvojamnog substratnog potencijala nezavisno od pojave polucelih stepenika i njihove veličine sistem zadržava standardno ponašanje; širina Šapiro stepenika i kritična sila ponašaju se u funkciji F_{ac} kao u slučaju $r = 0$.*

Različiti potencijali koje su uveli Pejrar i Ramoazne korišćeni su i u tribologiji ³ [12].

³Složeni mehanizmi koji se dešavaju u pojava trenja između različitih površina izučavaju se u okviru nauke koja se zove tribologija. Naziv tribologija je izveden od grških reči *tribos*-trenje, *logos*-nauka.

Glava 3

Uticaj termalnog šuma

Pri ispitivanju interferencionih fenomena u realističnim sistemima, fokus je na postizanju maksimalne stabilnosti Šapiro stepenika. Zbog mogućih primena u tehnici, poslednjih godina su vršena ispitivanja dinamičkog zaključavanja u talasima gustine naboja i Džozefsonovih spojeva u prisustvu šuma. Bilo koja tehnička primena interferencionih fenomena i primena u izgradnji Šapiro-stepenik uređaja zahteva poznavanje teorije vezane za ponašanje Šapirovih stepenika u prisustvu šuma. U ovom poglavlju biće predstavljen uticaj termalnog šuma na dinamiku samerljivih struktura u okviru jako prigušenog FK modela pod dejstvom spoljašnjih periodičnih sila i posebno uticaj šuma na osobine Šapirovih stepenika.

Kretanje sistema čestica u standardnom FK modelu sa prisustvom temperature opisano je sistemom jednačina usloženjenim u odnosu na (1.16)

$$\dot{u}_l = u_{l+1} + u_{l-1} - 2u_l - V'(u_l) + F(t) + \eta_l(t) \quad (3.1)$$

gde termalni šum zadovoljava jednakost:

$$\langle \eta_l(t) \eta_l(t') \rangle = 2T \delta(t - t') \quad (3.2)$$

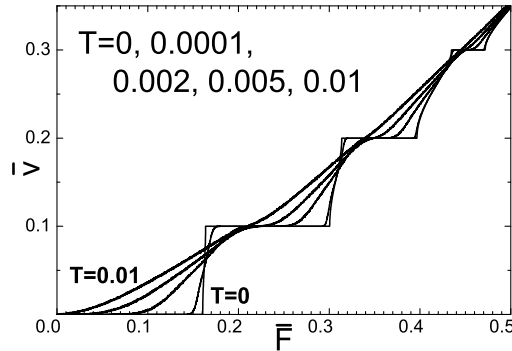
Sama temperature T inkorporirana je u model na takav način da nijedan parametar sistema ne zavisi eksplicitno od temperature, što znači da se temperatura T može tretirati kao temperatura okoline. U jednačini (3.2) uzeto je da je $k_B = 1$, a $\delta(t - t')$ je Dirakova delta funkcija. Sistem (3.1) je integraljen primenom periodičnih graničnih uslova za samerljivu strukturu $\omega = \frac{1}{2}$ (dve čestice po potencijalnoj jami). Vremenski korak korišćen u simulaciji je 0.001τ ($\tau = 1/\nu_0$). Čestice su prvo termalizovane pri vrednosti sile $\bar{F} = 0$; a zatim je sila povećavana sa korakom $T = 10^{-4}$, gde je nakon svakog koraka korišćeno vreme relaksacije 100τ da bi sistem došao u ravnotežno stanje. Funkcija odziva $\bar{v}(\bar{F})$, posebno širine stepenika i kritična sila su analizirani pri različitim šumovima. Na $T = 0$ (nema šuma), ivice stepenika su oštre i veličine stepenika mogu biti merene precizno. Povećanjem temperature ivice prestaju da budu oštre i postaju zaobljene i mora se usvojiti jednoznačan kriterijum pri merenju stepenika (za koju vrednost \bar{F} stepenik počinje, a za koju se završava)¹. U ovom radu se uzima da će sistem biti na stepeniku ako je promena $\bar{v}(\bar{F})$ manja od 0.1%.² Sa povećanjem temperature stepenici se tope i

¹Mora se uvesti odgovarajuća konvencija i primenjivati i za određivanje početka kao i za određivanje kraja stepenika.

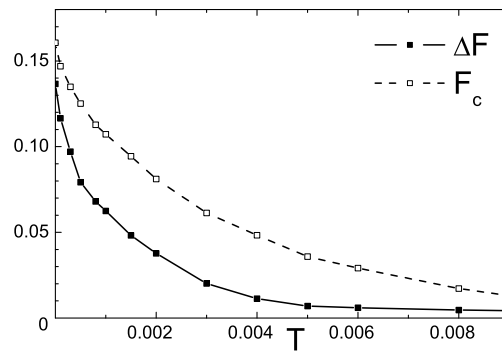
²Moguće je izabrati i neki drugi kriterijum, manje ili više strog, jer je cilj da se ispita kvalitativno, a ne kvantitativno ponašanje.

vremenom nestaju. Kritična sila se takođe smanjuje sa povećanjem temperature. Na visokim temperaturama efekat substratnog potencijala se potpuno može zanemariti i sistem se ponaša kao sistem slobodnih čestica. Širina prvog harmonijskog stepenika $\bar{v} = \omega\nu_0$ i kritična sila opadaju sa povećanjem temperature. Parametri na graficima su odabrani tako da se rezultati mogu porediti sa rezultatima dobijenim za slučaj $T = 0$.

Na osnovu grafika na Sl. 3.2 da se primetiti da kritična sila F_c i širina prvog harmonijskog stepenika ΔF opadaju sa povećanjem temperature.



Sl. 3.1: Srednja brzina kao funkcija srednje sile za $\omega = \frac{1}{2}, K = 4, F_{ac} = 0.2, \nu_0 = 0.2$ i različite temperature $T = 0, 0.0001, 0.002, 0.005$ i 0.01 .



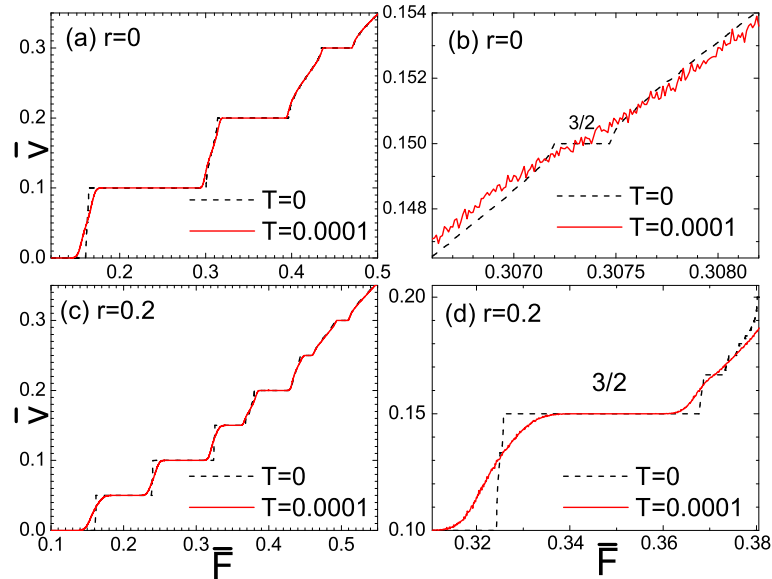
Sl. 3.2: Širina prvog harmonijskog stepenika ΔF i kritična sila F_c kao funkcija temperature T za $\omega = \frac{1}{2}, K = 4, F_{ac} = 0.2$ i $\nu_0 = 0.2$.

Rezultati predstavljeni na Sl. 3.1 i Sl. 3.2 objavljeni su u radu [69].

3.1 Uticaj Gausovog belog šuma na subharmonijske stepenike

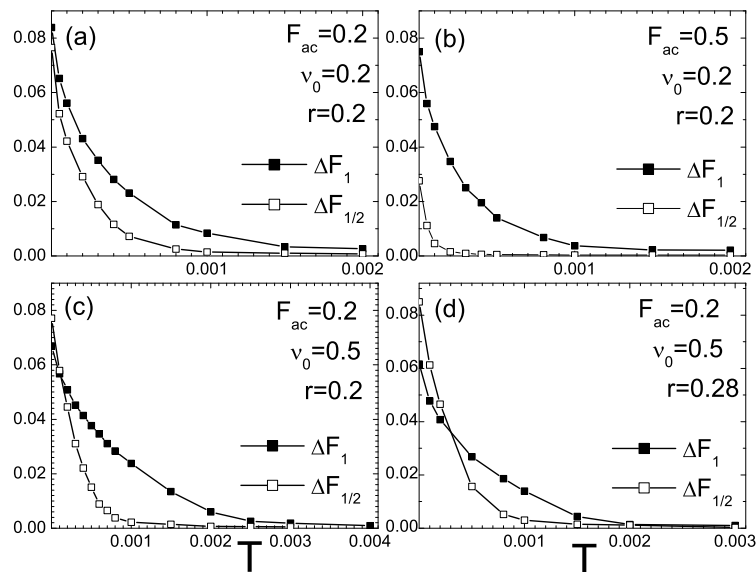
Rezultati ovog odeljka publikovani su u radu [70]. U slučaju standardnog FK modela, termalne fluktuacije kompletno uništavaju subharmonijske stepenike. Uvođenjem asimetričnog

deformacionog potencijala u model dolazi do pojave polucelih i ostalih subharmonijskih stepenika i oni pokazuju otpornost na prisustvo termalnog šuma. Na slici Sl. 3.3 je prikazana funkcija odziva za samerljivu strukturu $\omega = 1/2$ u prisustvu dve vrednosti deformacionog parametra r i dve vrednosti temperature T . U slučaju standardnog FK modela ($r = 0$), na slici Sl. 3.3 (a) prisustvo termalnog šuma će dovesti do topljenja Šapiro stepenika i vidimo na Sl. 3.3(b) da u tom slučaju poluceli stepenik $3/2$ nestaje. Sa deformacijom potencijala ($r = 0.2$) na slikama Sl. 3.3(c) i Sl. 3.3(d), pojavljuju se veliki poluceli i ostali subharmonijski stepenici.



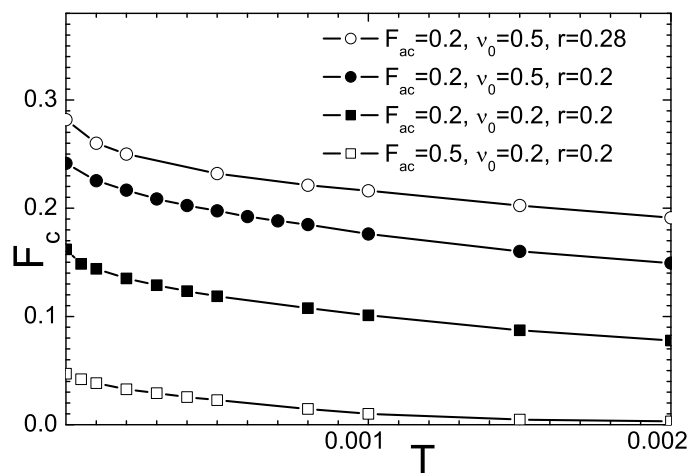
Sl. 3.3: Srednja brzina kao funkcija dc sile za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$ i različite vrednosti temperature $T = 0; 0.0001$ i deformacionog parametra: $r = 0$ na a) i b) i $r = 0.2$ na c) i d) respektivno. Slike b) i d) predstavljaju uvećane delove slika a) i c).

Na Sl. 3.4 je prikazana temperaturska zavisnost širine prvog harmonijskog i polucelog stepenika za različite vrednosti ac amplitude, frekvencije i deformacionog parametra. Kao što je već primećeno u radovima drugih autora poluceli i ostali subharmonijski stepenici su osetljiviji na termalni šum i brže im se smanjuje veličina sa povećanjem temperature. Parametri sistema imaju veliki uticaj na temperatursku zavisnost Šapiro stepenika. Na slikama Sl. 3.4 a) i Sl. 3.4 b), porast ac amplitude će promeniti temperaturnu zavisnost; na slici Sl. 3.4 b) poluceli stepenici će se značajno brže topiti sa porastom temperature. Porast frekvencije može značajno da poveća broj i veličinu polucelih i ostalih subharmonijskih stepenika i time utiče na njihovo topljenje. Usporedbom rezultata na Sl. 3.4 a) i Sl. 3.4 b) dobijenih za $\nu_0 = 0.2$ sa onim na Sl. 3.4 c) i Sl. 3.4 d), za $\nu_0 = 0.5$, može se videti da su stepenici koji se javljaju za veće vrednosti frekvencije otporniji na termalni šum. Na slikama Sl. 3.4 a) i Sl. 3.4 b) stepenici postoje do vrednosti $T = 0.002$, dok na slici Sl. 3.4 c) možemo povećati temperaturu do $T = 0.04$ (zbog lakšeg poređenja rezultata ordinate na graficima su iste). Na slici Sl. 3.4 d), može se videti da za veće vrednosti frekvencije i deformacije, poluceli stepenici postaju veći od harmonijskih na niskim temperaturama.



Sl. 3.4: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 i polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ kao funkcija temperature za $\omega = 1/2$, $K = 4$ i a) $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$, $r = 0.2$; b) $F_{ac} = 0.5$, $\nu_0 = 0.2$, $r = 0.2$; c) $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.5$, $r = 0.2$; d) $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.5$, $r = 0.28$.

Na slici Sl. 3.5. predstavljena je kritična sila u funkciji temperature za različite vrednosti parametara sistema. Kritična sila ima veće vrednosti za veće vrednosti frekvencije spoljašnje sile ν_0 i veće vrednosti deformacionog parametra r .

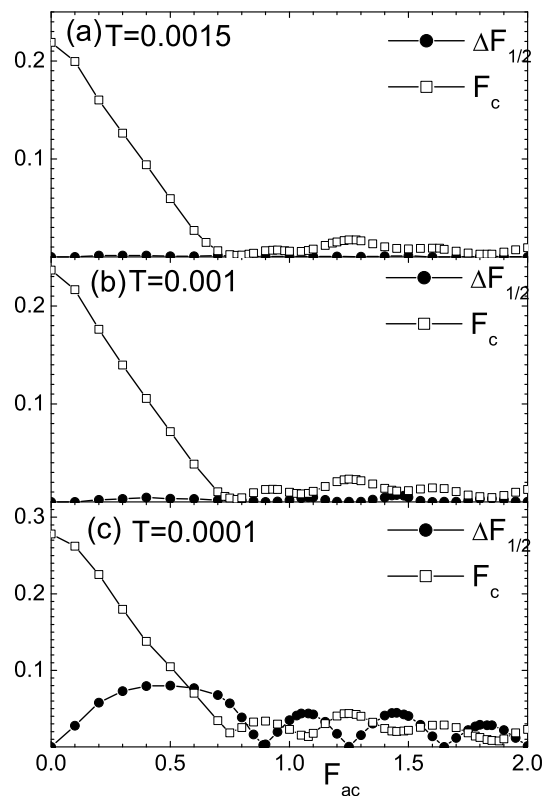


Sl. 3.5: Kritična sila F_c kao funkcija temperature za $\omega = 1/2$, $K = 4$ i $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.5$, $r = 0.28$; $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.5$, $r = 0.2$; $F_{ac} = 0.2$, $\nu_0 = 0.2$, $r = 0.2$; i $F_{ac} = 0.5$, $\nu_0 = 0.2$, $r = 0.2$ odozgo nadole, respektivno.

3.2 Efekat šuma na amplitudnu zavisnost harmonijskih i subharmonijskih Šapiro stepenika

Poznato je da u standardnom ponašanju širina harmonijskih stepenika i kritična sila osciluju beselovski sa ac amplitudom tako da maksimum jedne krive odgovara minimumu druge. U standardnom FK modelu za više vrednosti frekvencije spoljašnje sile i u odsustvu termalnog šuma pojavljuje se standardno ponašanje gde veličina sukcesivnih maksimuma monotono opada sa amplitudom. Prisustvo termalnog šuma će u tom slučaju prouzrokovati samo zaobljavanje minimuma i smanjenje maksimuma. Generalan rezultat je da u slučaju standardnog FK modela (sa ili bez prisustva termalnog šuma) maksimumi širine harmonijskih stepenika odgovaraju minimumima kritične sile i obratno. U slučaju FK modela sa asimetričnim deformacionim potencijalom, prisustvo velikih subharmonijskih stepenika će uticati na ponašanje harmonijskih stepenika. U slučaju ASDP-a poluceli i harmonijski stepenici su korelisani; što je veća širina polucelih stepenika, manja je širina harmonijskih i obratno.

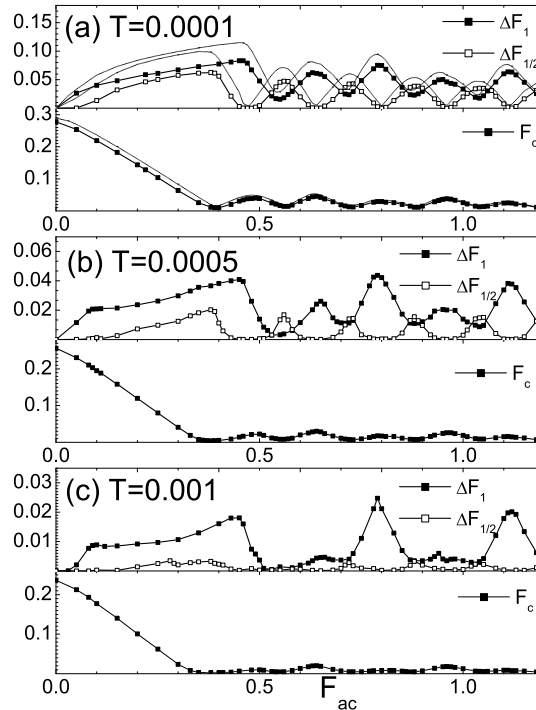
Na slici Sl. 3.6 prikazana je amplitudna zavisnost širine polucelih stepenika i kritične sile za tri različite vrednosti temperature. Za visoku vrednost temperature Sl. 3.6 (a) poluceli stepenici skoro da ne postoje. Sa porastom temperature Sl. 3.6(b) počinju polako da se pojavljuju, a na Sl. 3.6 (c), veliki maksimumi na krivoj se pojavljuju za velike vrednosti F_{ac} koji odgovaraju minimumima kritične sile.



Sl. 3.6: Širina polucelih stepenika $\Delta F_{1/2}$ i kritična sila F_c u funkciji ac amplitude za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.5$, $r = 0.2$ i a) $T = 0.0015$, b) $T = 0.001$ i c) $T = 0.0001$.

Za razliku od standardnog FK modela, prisustvo velikih polucelih stepenika će kompletno

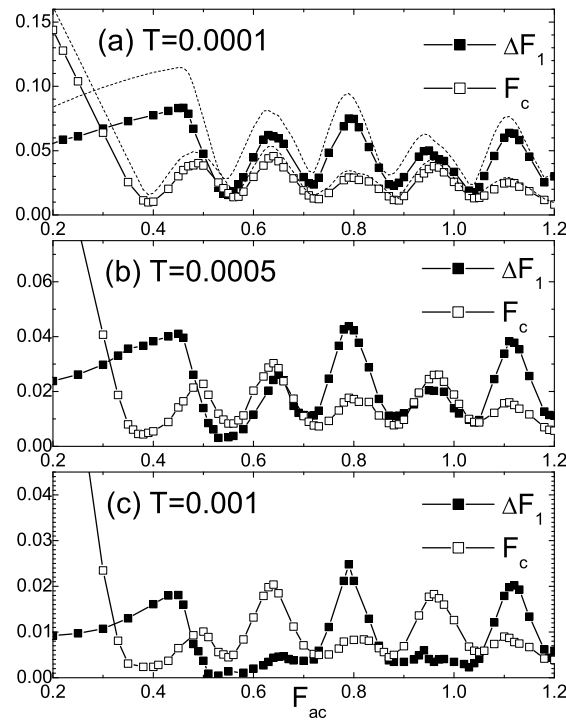
promeniti ponašanje harmonijskih stepenika u prisustvu termalnog šuma. Na slici Sl. 3.7 data je amplitudna zavisnost širine prvog harmonijskog i polucelog stepenika kao i kritična sila za različite vrednosti temperature.



Sl. 3.7: Širina prvog harmonijskog stepenika ΔF_1 , polucelog $\Delta F_{1/2}$ i kritična sila F_c u funkciji ac amplitude F_{ac} za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$, $r = 0.2$ i (a) $T = 0.0001$, (b) $T = 0.0005$ i (c) $T = 0.001$. Isprekidane linije predstavljaju rezultate za $T = 0$.

Kao što se može videti sa Sl. 3.7 porast temperature će pored topljenja stepenika, dovesti i do promene amplitudne zavisnosti. Razlikujemo tri tipa ponašanja:

- (1) ponašanje u prisustvu velikih polucelih stepenika za $T = 0.0001$ na Sl.3.7(a): Harmonijski stepenik i kritična sila osciluju drugačije od standardnog slučaja ($r = 0$), maksimumi jedne krive odgovaraju maksimumima druge krive i oscilacije su anomalne beselovske.
- (2) ponašanje u prisustvu stepenika srednje veličine dato je na slici Sl.3.7(b) za $T = 0.0005$. Maksimumi $\Delta F_{1/2}$ počinju da nestaju dok se i forma ΔF_1 i F_c menja i parni maksimumi nestaju.
- (3) ponašanje za male polucele stepenike $T = 0.001$ prikazano je na slici Sl.6.7(c). Veličina maksimuma je smanjena, a oscilacije su kao u standardnom slučaju kada maksimumi od ΔF_1 odgovaraju maksimumima kritične sile F_c , dok minimumi kritične sile postaju jednaki nuli. Pozicije minimuma i maksimuma širine harmonijskih stepenika i kritične sile, kao i forma njihovih oscilacija može se bolje sagledati na slici Sl.3.8. Na slici Sl. 3.8(a) jasno se vidi da za niske temperature $T = 0.0001$, kada su poluceli stepenici veliki, maksimumi širine harmonijskih stepenika odgovaraju maksimumima kritične sile, što je suprotno standardnom ponašanju.

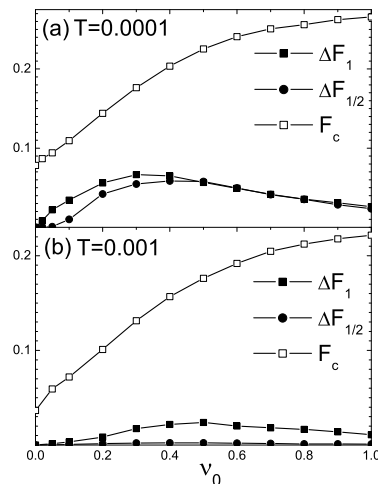


Sl. 3.8: Širina prvog harmonijskog stepenika ΔF_1 i kritična sila F_c u funkciji ac amplitude F_{ac} za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$, $r = 0.2$ i (a) $T = 0.0001$, (b) $T = 0.0005$ i (c) $T = 0.001$. Isprekidane linije na (a) predstavljaju rezultate za $T = 0$.

Sa porastom temperature poluceli stepenici počinju da nestaju i pozicije minimuma i maksimuma su drugačije na slici Sl. 3.8(b). Parni maksimumi na krivoj $\Delta F_1(F_{ac})$ se smanjuju, dok isti maksimumi na $F_c(F_{ac})$ rastu. Na visokim temperaturama Sl. 3.8(c), kada polucelih stepenika gotovo da nema, ΔF_1 i F_c osciluju u funkciji F_{ac} kao u standardnom slučaju.

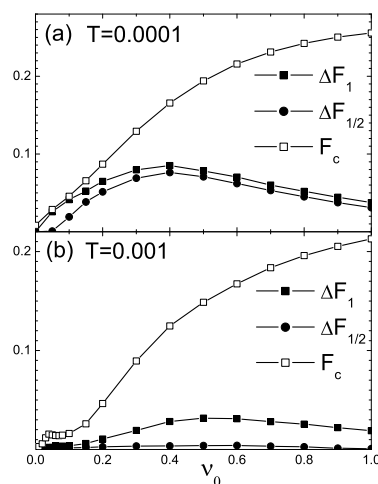
3.3 Efekat šuma na frekventnu zaviznost harmonijskih i subharmonijskih Šapiro stepenika

Na slici Sl. 3.9 prikazana je zavisnost širine prvog harmonijskog i polucelog stepenika i kritične sile od frekvencije spoljašnje ac sile ν_0 , za različite vrednosti temperature T . Sa porastom frekvencije, širine stepenika dostižu maksimum i onda opadaju u nulu, dok kritična sila saturira treshold vrednosti koja ne zavisi od frekvencije.



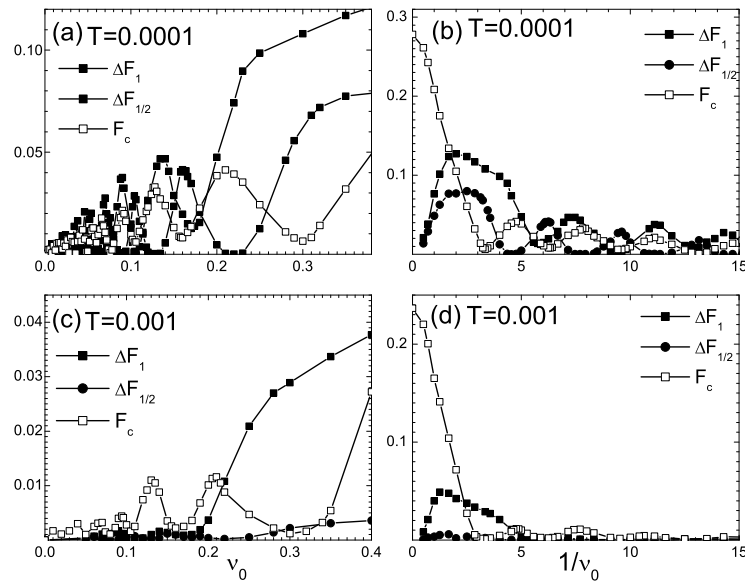
Sl. 3.9: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ i kritična sila u funkciji frekvencije ν_0 za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.2$, $r = 0.2$ i (a) $T = 0.0001$ (b) $T = 0.001$.

Na niskim temperaturama Sl.3.9(a), porast frekvencije doprinosi veličini polucelih stepenika koji mogu biti iste veličine ili čak veći od harmonijskih. Sa porastom temperature Sl.3.9(b), uticaj šuma na polucele stepenike je vidljiva. Širine obe vrste stepenika i kritična sila se značajno redukuju. Sa porastom F_{ac} , doći će do potpuno drugačijeg ponašanja. Na slici Sl.6.10, prikazana je frekventna zavisnost širine prvog harmonijskog i polucelog stepenika, kao i kritične sile za različite vrednosti temperature pri $F_{ac} = 0.28$. Na slici Sl. 3.10(a), ponašanje stepenika je slično kao na Sl. 3.9(a), gde povećanje amplitude redukuje širinu polucelih stepenika u odnosu na harmonijske (poluceli stepenici ne dostižu veličine harmonijskih). Na slici Sl. 3.10(b), može se videti da za male vrednosti frekvencije, pri porastu temperature kritična sila i širina harmonijskih stepenika nisu monotono rastuće funkcije. Ovaj efekat biće još uočljiviji sa daljim porastom ac amplitude.



Sl. 3.10: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ i kritična sila u funkciji frekvencije ν_0 za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.28$, $r = 0.2$ i (a) $T = 0.0001$ (b) $T = 0.001$.

Na slici Sl. 3.11 predstavljena je zavisnost širine harmonijskog, polucelog stepenika i kritične sile od frekvencije i perioda ac sile, za $F_{ac} = 0.5$. Za razliku od Sl. 3.10(a) na Sl. 3.11(a), javljaju se niskofrekventne oscilacije širine harmonijskih i polucelih stepenika, kao i kritične sile. Ove oscilacije će se pojaviti uvek u slučaju velikih amplituda F_{ac} . Obzirom da dc threshold F_{c0} opada u prisustvu šuma sistem može preći iz nisko-amplitudne oblasti $F_{ac} \leq F_{c0}$ u visoko-amplitudnu oblast $F_{ac} > F_{c0}$. Za slučaj na Sl. 3.10 sistem je pokretan spoljašnjom $ac + dc$ silom, čija je ac amplituda $F_{ac} = 0.28$ za $T = 0.0001$. Obzirom da je za dati slučaj $F_{c0} = 0.2783$, $F_{ac} < F_{c0}$ i nalazimo se u nisko-amplitudnoj oblasti. Za razliku od ovog slučaja za $T = 0.001$ dc threshold opada na $F_{c0} = 0.2366$ i sistem je sada u visoko-amplitudnoj oblasti $F_{ac} > F_{c0}$.



Sl. 3.11: Širina prvog harmonijskog ΔF_1 , polucelog stepenika $\Delta F_{1/2}$ i kritična sila u funkciji frekvencije ν_0 i perioda $\frac{1}{\nu_0}$ spoljašnje periodične sile $\bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t)$ za $\omega = 1/2$, $K = 4$, $F_{ac} = 0.5$, $r = 0.2$ i $T = 0.0001$ na (a) i (b) i $T = 0.001$ na (c) i (d).

Zavisnost Šapiro stepenika od frekvencije je bila deo brojnih kontroverzi. U jednočestičnom modelu zasnovanom na tunelovanju u talasima gustine naboja ili sistemima Džozefsonovih spojeva maksimalna širina stepenika je u visoko-frekventnoj oblasti nezavisna od frekvencije. U mnogočestičnim sistemima, u sistemima talasa gustine naboja, sistemima Džozefsonovih spojeva, širina stepenika i kritična sila, nakon početnog porasta idu u nulu za velike vrednosti frekvencije.

FK model predstavlja mnogočestični model i, kao i u ostalim mnogočestičnim modelima, stepenici će nestati na visokim frekvencijama. Rezultati koji su dobijeni u ovom radu pokazuju da stepenici mogu oscilovati u funkciji frekvencije, ako se nalazimo u visoko-amplitudnoj oblasti.

Zaključak

U ovom radu ispitivani su uticaji veličine polucelih stepenika na interferencione fenomene u okviru $ac + dc$ pokretanog FK modela sa različitim generalisanim substratnim potencijalima. Pokazano je da do sada usvojena klasifikacija nije generalna. Dok FK model sa ASDP-om, varijabilnim i dvobarijernim substratnim potencijalima prolazi kroz različite tipove amplitudne zavisnosti, FK model sa dvojamskim substratnim potencijalom uvek zadržava standardno ponašanje, čak i u prisustvu velikih polucelih stepenika. Primećeno je da se stepenici javljaju po Farejevom pravilu. Računat je najveći Ljapunovljev eksponent u funkciji dc sile za različite vrednosti deformacionog parametra u okviru ASDP-a i nigde nije registrovan deterministički haos. Pokazano je da su harmonijski stepenici otporniji na termalni šum u odnosu na subharmonijske i da sa povećanjem temperature amplitudna zavisnost sistema prolazi kroz različite tipove ponašanja.

U okviru ove disertacije publikovana su četiri rada u vrhunskim međunarodnim časopisima (M21 kategorije) i jedan rad je prihvaćen u domaćem časopisu. Reference su poređane hronološki.

1. P. Mali, J. Tekić, Z. Ivić, M. Pantić, Phys. Rev. E **86**, 046209 (2012).
2. J. Tekić, P. Mali, Z. Ivić, M. Pantić, J. Appl. Phys. **114**, 174504 (2013).
3. P. Mali, J. Tekić, M. Pantić, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **19**, 3469-3475 (2014).
4. J. Odavić, P. Mali, J. Tekić, Phys. Rev. E **91**, 052904 (2015).
5. P. Mali, J. Tekić, J. Res. Phys. **38**, (2015).

Dobijeni rezultati mogu biti od značaja za proučavanje realnim fizičkih sistema poput talasa i spinova gustine naboja, Džozefsonovih spojeva i superprovodnih nanožica. Napredovanje u izgradnji Šapiro stepenik-uređaja zahteva napredovanje u razumevanju interferencionih fenomena u realnim sistemima. Stoga rad na generalisanim FK modelima pored toga što doprinosi proširivanju znanja za postojeće mnogočestične sisteme, može naci svoje značajno mesto i u tehničkim primenama.

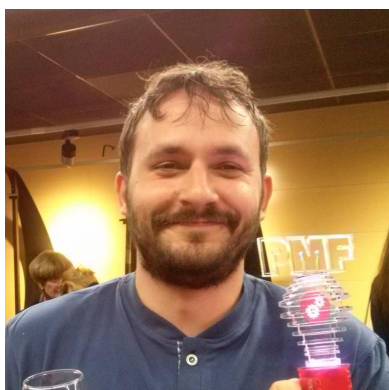
Literatura

- [1] U. Dehlinger, Ann. Phys. Lpz. **2**, 749 (1929).
- [2] Ya. Frenkel, T. Kontorova, Phys. Z. Sowietunion **13**, 1 (1938).
- [3] T. Kontorova, Ya. Frenkel, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **8**, 89 (1938).
- [4] T. Kontorova, Ya. Frenkel, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **8**, 1340 (1938).
- [5] Ya. Frenkel, T. Kontorova, J. Phys. Acad. Sci. USSR **1**, 137 (1938) (in Russian).
- [6] A. Seeger, A. Kochendorfer, Z. Physik **130**, 321 (1951)
- [7] F. C. Frank, J. H. van der Merwe, Proc. Roy. Soc. (London) A **198**, 205 (1949)
- [8] F. C. Frank, J. H. van der Merwe, Proc. Roy. Soc. (London) A **200**, 125 (1949).
- [9] W. Atkinson, N. Cabrera, Phys. Rev. **138**, 763 (1965).
- [10] B. Hu, B. Lee, H. Zhao, Phys. Rev. E **57** 2992 (1998)
- [11] B. Ai, B. Hu, Phys. Rev. E **83** 011131 (2011)
- [12] R. L. Woulache, A. Vanossi, N. Manini, Phys. Rev. E **88**, 012810 (2013).
- [13] M.E. Fisher, W. Selke, Phys. Rev. Lett **44** 23 (1980)
- [14] C.S.O. Yokoi, M.D. Coutunho-Filho,S.R. Salinas, Phys. Rev. B **24** 7 (1981)
- [15] M. Jensen, Per Bak, Phys. Rev. B **29** 11 (1984)
- [16] P. Dubos, H. Courtois,O. Buisson,B. Pannetier, Phys. Rev. Letters **87** 206801 (2001)
- [17] R.E.Thorne,W.G.Lyons,J.W.Lyding,J.R.Tucker,J.Bardeen,Phys. Rev. B **35** 6360 (1987)
- [18] A. Fiory, Phys. Rev. Lett. **27** 501 (1971)
- [19] W. Gruner , Reviews of Modern Physics **60** (1988)
- [20] R. E. Thorne, J. S. Hubacek, W. G. Lyons, J. W. Lyding, J. R. Tucker, Phys. Rev. B **37**, 10055 (1988).
- [21] R. E. Thorne, W. G. Lyons, J. W. Lyding, J. R. Tucker, J. Bardeen, Phys. Rev. B **35**, 6348 (1987).

- [22] R. E. Thorne, W. G. Lyons, J. W. Lyding, J. R. Tucker, J. Bardeen, Phys. Rev. B **35**, 6360 (1987).
- [23] S. N. Coppersmith and P. B. Littlewood, Phys. Rev. Lett. **57**, 1927 (1986).
- [24] A. Zettl and G. Grüner, Phys. Rev. B **29**, 755 (1984).
- [25] S. P. Benz, M. S. Rzchowski, M. Tinkham, and C. J. Lobb, Phys. Rev. Lett. **64**, 693 (1990).
- [26] J. Pfeiffer, M. Kemmler, D. Koelle, R. Kleiner, E. Goldobin, M. Weides, A. K. Feofanov, J. Lisenfeld, and A. V. Ustinov, Phys. Rev. B **77**, 214506 (2008).
- [27] P. Komissinskiy, G. A. Ovsyannikov, K. Y. Constantinian, Y. V. Kisilinski, I. V. Borisenko, I. I. Soloviev, V. K. Kornev, E. Goldobin, and D. Winkler, Phys. Rev. B **78**, 024501 (2008).
- [28] P. Russer, J. Appl. Phys. **43**, 2008 (1972).
- [29] R. L. Kautz, J. Appl. Phys. **52**, 3528 (1981).
- [30] J. Lee, J. Yu, and G. Park, Phys. Rev. B **55**, 1231 (1997).
- [31] E. A. Early, A. F. Clark and K. Char Appl. Phys. Lett. **62**, 3357 (1993).
- [32] E. A. Early, R. L. Steiner, and A. F. Clark, Phys. Rev. B **50**, 9409 (1994).
- [33] R. C. Dinsmore III, M. H. Bae, and A. Bezryadin, Appl. Phys. Lett. **93**, 192505 (2008).
- [34] M. H. Bae, R. C. Dinsmore III, T. Aref, M. Brenner, and A. Bezryadin, Nano Lett. **9**, 1889 (2009).
- [35] O. M. Braun, Y. S. Kivshar, The Frenkel - Kontorova model, Springer - Verlag, Berlin (2004)
- [36] L. M. Floria, J. J. Mazo, Advances in Physics **46** 505-598 (1996)
- [37] C. Baesens, R.S. MacKay, Nonlinearity **11** 949-964 (1998)
- [38] S. Aubry, P.Y. Le Daeron, Physica D, **8**, 341-422
- [39] W. Chou, R.B. Griffiths, Phys. Rev. B **34** 6219 (1986)
- [40] R.B. Griffiths, W. Chou, Phys. Rev. Lett. **64**, 693 (1990).
- [41] S. Slijepčević, arXiv:1411.0305 (2014)
- [42] S. Shapiro, Phys.Rev.Lett. **11** 80 (1963)
- [43] F. Falo, L.M. Floria, P.J. Martinez, J.J.Mazo, Phys. Rev. B **48** 7434 (1993)
- [44] M. J. Renne and D. Polder, Rev. Phys. Appl. **9**, 25 (1974).
- [45] J. R. Waldram and P. H. Wu, J. Low Temp. Phys. **47**, 363 (1982).

- [46] B. Hu, J. Tekić, Phys. Rev. B **75** 056608 (2007)
- [47] P. Mali, J. Tekić, J. Res. Phys. **38**, (2015).
- [48] S. Brown and G. Gruner, Sci. Am. **270**, No. 4, 50 (1994).
- [49] M. Peyrard, M. Remoissenet, Phys. Rev. B **26**, 2886 (1982).
- [50] M. Remoissenet, M. Peyrard, Phys. Rev. B **29**, 3153 (1984).
- [51] A. Milchev, G. M. Mazzuchell, Phys. Rev. B **38**, 2808 (1988).
- [52] J. Tekić, B. Hu, Phys. Rev. E **72** 056602 (2005)
- [53] J. Tekić, B. Hu, Phys. Rev. E **81** 036604 (2010)
- [54] J. Tekić, Z. Ivić, Phys. Rev. E **83** 056604 (2011)
- [55] J. Tekić, B. Hu, Journal of Applied Physics **95**, 073502 (2009).
- [56] J. Tekić, International Journal of Modern Physics B **21**, 4234-4238 (2007).
- [57] Tekić J., He D., Hu B., Phys. Rev. E **79** 036604(2009)
- [58] P. Mali, J. Tekić, M. Pantić, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **19**, 3469-3475 (2014).
- [59] J. Odavić, P. Mali, J. Tekić, Phys. Rev. E **91**, 052904 (2015).
- [60] J.C. Sprott, Numerical Calculation of Largest Lyapunov Exponent [online] (2013). URL <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/lyapexp.htm>
- [61] R. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2nd ed. (Oxford University Press, Oxford, UK, 2001).
- [62] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford Science Publications, New York, 1996), 5th ed.
- [63] H. Brown and K. Mahler, J. Number Theory **3**, 364 (1971).
- [64] R. Tomas, Phys. Rev. Spec. Topic. Accel. Beams **17**, 014001 (2014).
- [65] E. D. Courant and H. S. Snyder, Ann. Phys. (N.Y.) **281**, 360 (2000); Ann. Phys. (N.Y.) **3**, 1 (1958).
- [66] J. Tekić, P. Mali, Z. Ivić, M. Pantić, J. Appl. Phys. **114**, 174504 (2013).
- [67] Yu. M. Shukrinov, S. Yu. Medvedeva, A. E. Botha, M.R. Kolahchi, A. Irie, Phys. Rev. B **88**, 214515 (2013).
- [68] Yu. M. Shukrinov, A. E. Botha, S. Yu. Medvedeva, M. R. Kolahchi, A. Irie, Chaos **24**, 033115 (2014).
- [69] J. Tekić, B. Hu, Phys. Rev. E **78** 104305 (2008)
- [70] P. Mali, J. Tekić, Z. Ivić, M. Pantić, Phys. Rev. E **86**, 046209 (2012).

Biografija



Petar Mali je rođen 16.01.1986. u Zrenjaninu. Na Univerzitetu u Novom Sadu upisao je 2005. osnovne studije fizike, gde je položio sve ispite i stekao zvanje Diplomirani fizičar. 2011. je upisao doktorske studije na Departmanu za fiziku, gde je položio ispite i stekao mogućnost odbrane doktorske disertacije. U istraživanju se bavi nelinearnom fizikom i kvantnom teorijom magnetizma u okviru kojih je do sada objavio više radova od toga sedam radova na sci listi - četiri kategorije M21, jedan kategorije M22 i dva kategorije M23. Držao je do sada vežbe za studente fizike iz više predmeta, uključujući Matematičku fiziku, Nebesku mehaniku, Savremenu teorijsku fiziku, Izabrana poglavlja iz mehanike i elektrodinamike, Statističku fiziku i Matematiku za studente optometrije. Učestvuje u organizaciji Seminara iz fizike/astrofizike na Departmanu za fiziku. Dobitnik je nagrade “PMF to sam ja” za 2015. godinu.

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet

Ključna dokumentacijska informacija:

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa:

Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada:

Doktorska disertacija

VR

Autor:

Petar Mali

AU

Mentori:

dr Milan Pantić i dr Jasmina Tekić

MN

Naslov rada:

Nelinearna dinamika u okviru
Frenkel- Kontorova modela pod
dejstvom spoljašnjih periodičnih sila
srpski (latinica)

NR

Jezik publikacije:

JP

Jezik izvoda:

srpski / engleski

JI

Zemlja publikovanja:

Srbija

ZP

Uže geografsko područje:

Vojvodina

UGP

Godina:

2015

GO

Izdavač:

Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa:

Prirodno-matematički fakultet,
Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
(poglavlja/strana/referenci/tabela/grafika/priloga)
(3/89/70/0/90/0)

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast:

Fizika

NO

Naučna disciplina:

Teorijska fizika kondenzovane materije

ND

Ključne reči:

Frenkel-Kontorova model, Džozefsonovi spojevi,
talasi gustine naboja, Šapiro stepenici, haos

KR

- Čuva se: Biblioteka departmana za fiziku,
ČU PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: nema
VN
Izvod: Ispitivan je generalisani Frenkel-Kontorova model pod dejstvom spoljašnjih periodičnih sila, i njihov uticaj na Šapiro stepenike. Deformacija substratnog potencijala prouzrokuje pojavu velikih polucelih i drugih subharmonijskih stepenika u sistemu. Rezultati dobijeni u radu su od značaja u talasima i spinovima gustine naboja kao i u Džozefsonovim spojevima.
- Datum prihvatanja teme od NN veća: mart 2014.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik komisije: dr Zoran Ivić,
Institut za nuklearne nauke "Vinča"
- Član: dr Slobodan Radošević, Departman za fiziku,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
- Član: dr Milan Pantić, Departman za fiziku,
Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Novom Sadu,
mentor
- Član: dr Jasmina Tekić, Institut za nuklearne nauke "Vinča",
mentor

University of Novi Sad
Faculty of Science

Key Words Documentation:

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Documentation type: Monograph publication
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Content code: Doctoral dissertation
CC

Author: Petar Mali
AU

Mentors: dr Milan Pantić and dr Jasmina Tekić
MN

Title: Nonlinear dynamics of $ac + dc$
driven Frenkel-Kontorova model
Serbian (latin)

Language of text: Serbian (latin)
LT

Language of abstract: English
JI

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2015
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Prirodno-matematički fakultet,
Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
(3/89/70/0/90/0)
PP

Physical description: (3/89/70/0/90/0)
PD

Scientific field: Physics
SF

Scientific discipline: Theoretical condensed matter physics
SD

Key words: Frenkel-Kontorova model, Josephson junctions,
charge density waves, Shapiro steps, chaos
KW

Holding data: Library of Department of Physics

HD

Note:

N

Abstract:

PMF-a u Novom Sadu

none

Properties of the Shapiro steps in different commensurate structures of the $ac + dc$ driven Frenkel-Kontorova model with different generalized substrate potential have been examined. Deviation from the sinusoidal potential produces appearance of large subharmonic steps. Presented results could be of great importance for the studies of all real systems closely related to the dissipative dynamics of the FK model such as studies of the charge- or spin-density wave systems and the systems of Josephson-junction arrays.

AB

Accepted by the Scientific Board: March 2014

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

dr Zoran Ivić,
Vinča Institute of Nuclear Sciences

Member:

dr Slobodan Radošević, Department of Physics,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member:

dr Milan Pantić, Department of Physics,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor

Member:

dr Jasmina Tekić,
Vinča Institute of Nuclear Sciences , mentor