



UNIVERZITET U NOVOM SADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA
STUDIJSKI PROGRAM: GRAĐEVINARSTVO

LINIJSKI MODEL INTERAKCIJE VODE I
NANOSA U MREŽI PRIRODNIH VODOTOKA

Doktorska disertacija

Mentor: Prof. Dr. Dragan Savić

Kandidat: Mirjana Isić

Subotica, 2014 godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
 GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

RBR	Redni broj:	
IBR	Identifikacioni broj:	
TD	Tip dokumentacije:	Monografska dokumentacija
TZ	Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
VR	Vrsta rada:	Doktorska disertacija
AU	Ime i prezime autora:	Mirjana Isić
MN	Mentor:	dr. Dragan Savić, gostujući profesor
NR	Naslov rada:	Linijski model interakcije vode i nanosa u mreži prirodnih vodotoka
JP	Jezik publikacije:	Srpski
JI	Jezik izvoda:	Srpski/Engleski
ZP	Zemlja publikovanja:	Republika Srbija
UGP	Uže geografsko područje:	Vojvodina
GO	Godina:	2014
IZ	Izdavač:	Autorski reprint
MA	Mesto i adresa:	Subotica, Kozaračka 2a
FO	Fizički opis rada:	Broj poglavlja: 10; Broj stranica: 217; Broj slika: 89; Broj tabela: 35; Broj priloga: 9; Broj referenci: 98
NO	Naučna oblast:	Građevinarstvo
ND	Naučna disciplina:	Numerička hidraulika
PO	Predmetna odrednica, ključne reči:	numerički model, linijsko strujanje, granata mreža, transport nanosa, otvoreni tokovi
UDK		627.13:519.6
ČU	Čuva se:	
VN	Važna napomena:	
IZ	Izvod:	<p>U radu su prikazani razvoj, testiranje, kalibracija i verifikacija linijskog modela neustaljenog tečenja vode i transporta nanosa u mreži prirodnih vodotoka. Hidraulički model se zasniva na <i>St. Venant</i>-ovim jednačinama koje su diskretizovane primenom <i>Preissmann</i>-ove šeme. Za modelisanje transporta nanosa i deformacije korita je usvojen koncept koji daje mogućnost da se obuhvate oba vida kretanja nanosa (suspendovanog i vučenog). Primenom pristupa aktivnog sloja su definisani procesi razmene materijala između nanosa u suspenziji i nanosa u aktivnom sloju. Osnovne jednačine transporta nanosa i deformacije korita su rešene primenom metode etapnog rešavanja čija primena rezultuje u dva uzastopna koraka, advektivnom i difuzionom koraku. Jednačine advektivnog koraka su rešavane metodom karakteristika, dok se za jednačine difuzionog koraka primenila <i>Crank-Nicholson</i>-ova šema metode konačnih razlika. Dobijene jednačine su dopunjene sa dodatnim jednačinama kako bi se omogućilo modelisanje opisanih procesa u granatnoj mreži otvorenih tokova. Izvedene jednačine su primenjene za formiranje numeričkog modela koji je kvalitativno testiran na šematskim primerima, a kvantitativni testovi su urađeni na realnom primeru. Za realan primer je izabrana deonica Dunava u Srbiji sa glavnim pritokama Savom i Tisom. Kako bi se definisala oblast koja će se koristiti za verifikaciju modela napravljen je detaljan pregled i sistematizacija postojećih merenja morfologije korita, nivoa, proticaja i koncentracija suspendovanog nanosa. Na osnovu ovog pregleda je definisana morfologija modelisane mreže tokova. Pri kalibraciji hidrauličkog modela su razmotrena dva pristupa, kalibracija putem <i>Manning</i>-ovog koeficijenta zadatog kao funkcije od proticaja, i kalibracija zadavanjem apsolutne hrapavosti, dok je verifikacija modela urađena puštanjem simulacije od godinu dana i poređenjem rezultata proračuna sa merenjima. Kalibracija modela transporta je sprovedena za duži vremenski period kako bi se što bolje opisale godišnje varijacije koncentracije suspendovanog nanosa, a za verifikaciju modela je odabran petogodišnji period tokom kojeg su upoređeni rezultati proračuna sa merenjima, čime je pokazano da razvijen model može pouzdano da simulira procese strujanja vode i transporta nanosa u mreži otvorenih tokova.</p>
DP	Datum prihvatanja teme od strane NN veća:	12.11.2013.
DO	Datum odbrane:	
KO	Članovi komisije:	predsednik: dr. Marko Ivetić član: dr. Ljubodrag Savić član: dr. Miodrag Jovanović član: dr. Srđan Kolaković član: dr. Miodrag Spasojević

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING SUBOTICA

KEY WORD DOCUMENTATION

ANO	Accession number:	
INO	Identification number:	
DT	Document type:	Monograph documentation
TR	Type of record:	Textual printed material
CC	Contents code:	PhD Thesis
AU	Author:	Mirjana Isić
MN	Mentor:	dr. Dragan Savić, visiting professor
TI	Title:	A one-dimensional model for flow and sediment interaction in a looped network of natural watercourses
LT	Language of text:	Serbian
LA	Language of abstract:	English/Serbian
CP	Country of publication:	Republic of Serbia
LP	Locality of publication:	Vojvodina
PY	Publication year:	2014
PU	Publisher:	Author reprint
PP	Publication place:	Subotica, Kozaračka 2a
PD	Physical description:	Number of chapters: 10; Number of pages: 217; Number of figures: 89; Number of tables: 35; Number of appendices: 9; Number of references: 98
SF	Scientific field:	Civil Engineering
SD	Scientific discipline:	Computational Hydraulics
SKW	Subject, Key words:	numerical model, 1-D flow, looped network, sediment transport, open channel
UC		627.13:519.6
HD	Holding data:	
N	Note:	
AB	Abstract:	<p>This work presents the development, evaluation, calibration and verification of a one dimensional unsteady flow, sediment transport and bed evolution looped river network model. The hydraulic model is based on the <i>St. Venant's</i> equations discretized using the <i>Preissmann's</i> scheme. The sediment transport and bed evolution model implements a concept that differentiates sediment particles moving in the form of suspended sediment, and near bed and bed sediment. Applying the active layer concept the developed model includes definitions of the exchange mechanisms between the suspended sediment and active layer material. The governing transport equations were solved using the split operator approach that resulted in two successive steps, the advection and diffusion step. The advection step equations were solved using the characteristics method, whereas the diffusion step equations are discretized using the <i>Crank-Nicholson's</i> scheme. The obtained system of the developed equations was complemented with additional equations in order to allow sediment transport and bed evolution simulation in a looped river network. The derived equations were applied to develop an open channel flow, sediment transport and bed evolution numerical model that was subjected to a series of schematic tests and a real life situation simulation. The model's evaluation was conducted by comparison of the simulation results with the available measurements. The presented work was complemented with an comprehensive overview of the existing bathymetry, water level, discharge and suspended sediment concentration measurements in order to define the model's domain, initial and boundary conditions. The calibration of the hydraulic model was done by assigning the <i>Manning's</i> coefficient as a function of the discharge. As a result of the exhausting requirements of this approach, a second approach was considered, where the calibration is conducted by changing the absolute roughness. The verification of the hydraulic model was done by comparing the computed results of a one year flow simulation with the available measurements. Since the agreement between the two was satisfying, the sediment transport and bed evolution model was calibrated using a longer time interval in order to better capture the annual variations of the suspended sediment. The calibrated model was employed for a long term sediment transport and bed evolution simulation. The simulation results were compared with the existing measurements confirming the developed model's reliability.</p>
AS	Accepted on Scientific Board on:	12.11.2013.
DE	Defended:	
DB	Thesis Defend Board:	<p>president: dr. Marko Ivetić member: dr. Ljubodrag Savić member: dr. Miodrag Jovanović member: dr. Srđan Kolaković member: dr. Miodrag Spasojević</p>

UNIVERZITET U NOVOM SADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA
DOKTORSKA DISERTACIJA
podneta 2014. godine

LINIJSKI MODEL INTERAKCIJE VODE I NANOSA U MREŽI PRIRODNIH VODOTOKA

Mirjana Isić, d.i.g.

Katedra za hidrotehniku i vodno inženjerstvo okoline,
Građevinski fakultet Subotica,
Univerzitet u Novom Sadu

Sažetak:

Ovaj rad prikazuje razvoj, testiranje, kalibraciju i verifikaciju linijskog modela neustaljenog tečenja vode i transporta nanosa u granatoj mreži prirodnih vodotoka. Hidraulički model je zasnovan na *St. Venant*-ovim jednačinama koje opisuju linijsko strujanje u otvorenim tokovima. Jednačine strujanja su diskretizovane primenom *Preissmann*-ove šeme metode konačnih razlika nakon čega su linearizovane primenom *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka. Formiran sistem jednačina je dopunjen sa jednačinama koje omogućavaju modelisanje strujanja vode u granatoj mreži otvorenih tokova. Za modelisanje transporta nanosa i deformacije korita je usvojen koncept kojim se obuhvataju dva vida kretanja nanosa, suspendovani i nanosa na i pri dnu, kao i njihova interakcija sa vodom. Primenjen je pristup aktivnog sloja, zajedno sa principom deljenja nanosne mešavine na proizvoljan broj frakcija, pomoću kojih su definisani procesi razmene materijala između nanosa u suspenziji i nanosa u aktivnom sloju. Nakon izvođenja osnovnih jednačina transporta nanosa i deformacije korita se prešlo na formulisanje modela zasnovanog na metodi etapnog rešavanja. Osnovna prednost ove metode je što se polazne jednačine rešavaju u dva koraka (advektivni i difuzioni korak), čime je omogućeno posebno tretiranje članova sa numerički najpogodnijom metodom. Za rešavanje jednačina advektivnog koraka je primenjena metoda karakteristika, dok su jednačine difuzionog koraka rešavane primenom *Crank-Nicholson*-ove šeme metode konačnih razlika. Diskretizovane jednačine su dopunjene dodatnim jednačinama kako bi se omogućilo modelisanje transporta nanosa i deformacije korita u granatoj mreži otvorenih tokova. Razvijen model za transport nanosa podrazumeva simultano rešavanje implicitnog sistema jednačina za svaku tačku posebno.

Razvijen numerički model je testiran na šematskim primerima kako bi se sprovela kvalitativna analiza modela. Ovim ispitivanjem su obuhvaćene provere funkcionisanja algoritma za modelisanje transporta nanosa u granatoj deonici toka, analiza primenjenog modela advekcije i testiranje mehanizama razmene. Nakon niza kvalitativnih testova model je testiran na realnom primeru puštanjem dugoročne simulacije i poređenjem rezultata proračuna sa merenim vrednostima. Za realan primer je izabrana deonica Dunava u Srbiji od Bezdana do HE Đerdap, sa većim pritokama Savom od Sremske Mitrovice i Tisom od Sente. Kako bi se definisala oblast koja će se koristiti za verifikaciju modela napravljen je detaljan pregled i sistematizacija postojećih merenja morfologije korita, nivoa, proticaja i koncentracija suspendovanog nanosa. Analizom raspoloživih podataka se pokazalo da problem predstavljaju nekompletni podaci merenih koncentracija suspendovanog nanosa, kako za definisanje graničnih uslova, tako i za kontrolne preseke u kojima se proverava slaganje računatih i merenih vrednosti. Zbog toga je u radu razmatrana mogućnost dopunjavanja graničnih uslova za model transporta suspendovanog nanosa. Nakon što su pregledani raspoloživi podaci i konačno definisana morfologija modelisane mreže tokova, prešlo se na kalibraciju hidrauličkog modela. Za kalibraciju su razmotrena dva pristupa, kalibracija zadavanjem *Manning*-ovog koeficijenta kao funkcije od proticaja, i zadavanjem hrapavosti. Analizom dva pristupa je zaključeno da je kalibracija pomoću hrapavosti mnogo praktičniji i fizički opravdan pristup zbog čega je u daljem proračunu i zadržan. Verifikacija hidrauličkog modela je urađena puštanjem simulacije od godinu dana nakon čega su rezultati proračuna upoređeni sa postojećim merenjima, čime je potvrđena njegova ispravnost. Kalibracija modela transporta nanosa i deformacije korita je sprovedena za duži vremenski period kako bi se što bolje opisala tendencija promene koncentracije suspendovanog nanosa. Nakon kalibracije je puštena dugoročna simulacija kojom je obuhvaćen interval od pet godina, sa ciljem verifikacije razvijenog modela. Upoređivanjem merenih vrednosti sa rezultatima proračuna je pokazano da razvijen model može pouzdano da simulira procese strujanja vode i transporta nanosa u mreži otvorenih tokova.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING SUBOTICA
PhD THESYS
submitted in 2014

**A ONE-DIMENSIONAL MODEL FOR FLOW AND SEDIMENT
INTERACTION IN A LOOPED NETWORK OF NATURAL
WATERCOURSES**

Mirjana Isić, C.E.

Department for Hydraulics and Environmental Engineering,
Faculty of Civil Engineering Subotica,
University of Novi Sad

Abstract:

This work presents the development, evaluation, calibration and verification of a one dimensional unsteady flow, sediment transport and bed evolution looped river network model. The hydraulic model is based on the *St. Venant's* equations discretized using the *Preissmann's* scheme. The attained system of equations was complemented with additional equations in order to enable flow modeling in a looped river network. The sediment transport and bed evolution model implements a concept that differentiates sediment particles moving in the form of suspended sediment, and near bed and bed sediment. Applying the active layer concept, along with the representation of the sediment mixture through a suitable number of size-classes, the developed model includes definitions of the exchange mechanisms between the suspended sediment and active layer material. After deriving the governing equations for the sediment transport and bed evolution processes, they were solved using the split operator approach that resulted in two successive steps, the advection and diffusion step. The advection step equations were solved using the characteristics method, whereas the diffusion step equations are discretized using the *Crank-Nicholson's* scheme. The obtained system of the developed equations was complemented with additional equations in order to allow sediment transport and bed evolution simulation in a looped river network. The derived equations were applied to develop an open channel flow, sediment transport and bed evolution numerical model that was subjected to a series of schematic tests. After confirming its qualitative consistency, the model was used for a long term water flow and sediment transport simulation on the Danube River and its main tributaries, rivers Tisa and Sava. The model's evaluation was conducted by comparison of the simulation results with the available measurements. The presented work was complemented with a comprehensive overview of the existing bathymetry, water level, discharge and suspended sediment concentration measurements in order to define the model's domain, initial and boundary conditions. The calibration of the hydraulic model was done by assigning the *Manning's* coefficient as a function of the discharge. As a result of the exhausting requirements of this approach, a second approach was considered, where the calibration is conducted by changing the absolute roughness. The verification of the hydraulic model was done by comparing the computed results of a one year flow simulation with the available measurements. Since the agreement between the two was satisfying, the sediment transport and bed evolution model was calibrated using a longer time interval in order to better capture the annual variations of the suspended sediment. The calibrated model was employed for a long term sediment transport and bed evolution simulation. The simulation results were compared with the existing measurements confirming the developed model's reliability.

Zahvalnica

Pre svega želim da se zahvalim svojim roditeljima, sestrama i bratu, koji su mi bili oslonac tokom doktorskih studija i svom budućem suprugu, bez čije pomoći i kontinualne podrške ne bih uspela.

Takođe želim da se zahvalim dekanu, prodekanima i svim zaposlenima Građevinskog fakulteta Subotica, koji su svojom podrškom pomogli u veoma složenoj administrativnoj proceduri koja je pratila ovu doktorsku disertaciju. Zahvaljujem se i šefu Katedre za hidrotehniku i vodno inženjerstvo okoline, koji je sa stručnog stanovišta pomogao tokom višegodišnjeg rada na izradi teze, i mentoru dr. Draganu Saviću.

Merenja radi sakupljanja terenskih podataka u vezi sa tečenjem vode i ponašanjem nanosa na rekama Dunav, Sava, Tisa i manjim pritokama Dunava su prikupljena u okviru projekta koji je finansiran od strane Ministarstva za obrazovanje, nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, naziv projekta *Merenje i modeliranje fizičkih, hemijskih, bioloških i morfodinamičkih parametara reka i vodnih akumulacija*, broj projekta TR 37009. Ovom prilikom bih želela da se zahvalim i participantima na projektu, Republičkom Hidrometeorološkom Zavodu Srbije i Privrednom Društvu „Hidroelektrane Đerdap”. Takođe se zahvaljujem Institutu za Vodoprivredu „Jaroslav Černi” koji je svojim terenskim radom obezbedio podatke korišćene u ovom radu.

Subotica, 8.5.2014.

Autor

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Pregled literature	3
2.1. Linijski modeli tečenja	4
2.2. Modeli transporta nanosa i deformacije korita	9
3. Linijske jednačine neustaljenog strujanja i transporta	18
3.1. Linijsko neustaljeno strujanje - <i>St. Venant</i> -ove jednačine	18
3.2. Transport nanosa i promena kote dna	22
3.2.1. Održanje mase suspendovanog nanosa	22
3.2.2. Održanje mase nanosa u aktivnom sloju	27
3.2.3. Globalna jednačina održanja mase aktivnog sloja i stratuma	30
4. Numeričko rešavanje jednačina	34
4.1. Mreža prirodnih vodotokova	34
4.1.1. Jednačine linijskog neustaljenog strujanja	34
4.1.2. Unutrašnji granični uslovi	38
4.1.3. Rešavanje sistema jednačina	39
4.1.4. Thomas-ov algoritam	40
4.1.5. Proračun nepoznatih kota u čvorovima	42
4.1.6. Rešavanje sistema jednačina za mrežu	43
4.2. Transport nanosa i deformacija korita	50
4.2.1. Koncept numeričkog rešavanja	50
4.2.2. Advekcija - suspendovani nanos	51
4.2.3. Nanos na dnu i pri dnu	58
4.2.4. Simultano rešavanje jednačina	59
4.2.5. Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa u čvorovima	61
4.2.6. Difuzija - suspendovani nanos	63
5. Programski kod	67
6. Testiranje modela na šematskim primerima - kvalitativno ponašanje	71
6.1. Testiranje algoritma za proračun strujanja vode i transporta nanosa u mreži otvorenih tokova	71
6.2. Testiranje linearne advekcije	74
6.2.1. Linearna advekcija	74
6.2.2. Metoda karakteristika	75
6.2.3. Šeme metode konačnih razlika	76
6.2.4. Numerički testovi	77
6.2.5. Linearna advekcija u metodi razlomljenih koraka	79
6.2.6. Primena u modelisanju otvorenih tokova	79
6.3. Testiranje mehanizama razmene	82
6.3.1. Uvlačenje nanosa sa dna u suspenziju	82
6.3.2. Deponovanje nanosa iz suspenzije	85

7. Formiranje modela	88
7.1. Deonica Dunava u Srbiji sa glavnim pritokama	88
7.1.1. Pregled i sistematizacija raspoloživih merenja	89
7.1.2. Morfološki podaci	89
7.1.3. Podaci o protocima, nivoima i nanosu	96
7.1.4. Dodatna analiza raspoloživih podataka o nanosu	102
7.1.5. Pomoćne zavisnosti - dopuna graničnih uslova za proračun trans- porta nanosa	107
7.1.6. Greške u merenjima	111
7.1.7. Dodatna razmatranja	116
8. Kalibracija i verifikacija	117
8.1. Kalibracija hidrauličkog modela	117
8.2. Verifikacija hidrauličkog modela	128
8.3. Kalibracija modela transporta nanosa i deformacije korita	134
9. Dugoročna simulacija	137
10. Zaključak	165
Prilog A Koeficijenti jednačina tečenja	169
Prilog B Simultano rešavanje jednačina- Izvodi	171
Prilog C Interpolacija	177
Prilog D Thomas-ov (double-sweep) algoritam	180
Prilog E Difuzija - Koeficijenti Thomas-ovog algoritma	181
Prilog F Pomoćne zavisnosti	182
Prilog G Izvodi članova razmene nanosa	189
Prilog H Rezultati kalibracije hidrauličkog modela	190
Prilog I Rezultati dugoročne simulacije	201

Spisak slika

1	Kontrolna zapremina za izučavanje jednačina linijskog strujanja vode i transporta nanosa	20
2	Kontrolna zapremina za izučavanje transporta suspendovanog nanosa	23
3	Sastav aktivnog sloja	28
4	Aktivni sloj sa stratumom	31
5	Aktivni sloj sa svim stratimuma do referentne kote dna	32
6	Računske tačke i računске ćelije	39
7	Detalj čvora N sa ulaznim i izlaznim deonicama	45
8	Prostiranje trajektorije kroz računске ćelije	52
9	Oznake računskih tačaka	59
10	Šematski prikaz programskog koda	68
11	Dispozicija modelisanog sistema kanala	72
12	Šematski primer - promena hidrauličkih parametara duž toka kroz deonice $L_5 - L_4 - L_3 - L_1$	72
13	Šematski primer - proračun strujanja vode i transporta nanosa u sistemu kanala	73
14	Putovanje trajektorije u proračunu advekcije	75
15	Šematski primer - čista advekcija - <i>Gauss</i> -ova raspodela	78
16	Šematski primer - proračun transporta susp. nanosa - stabilno rešenje	80
17	Šematski primer - proračun transporta susp. nanosa - nestabilno rešenje	81
18	Šematski primer - uvlačenje u suspenziju - promena tokom vremena	83
19	Šematski primer - uvlačenje u suspenziju - promena duž toka	84
20	Šematski primer - deponovanje - promena tokom vremena	85
21	Šematski primer - deponovanje - promena duž toka	86
22	Deonica Dunava u Srbiji sa pritokama	88
23	Merenja RHMZ i usvojena zavisnost $P(Q)$	108
24	Poređenje C_{sr} iz zavisnosti $P(Q)_{RHMZ}$ sa $C_{sr} - JC$ datih u izveštajima	108
25	Merenja instituta „Jaroslav Černi” i usvojena zavisnost $C_{sr}(C_{pov})$	109
26	Poređenje C_{sr} iz zavisnosti $C_{sr}(C_{pov})_{JC}$ sa $C_{sr} - JC$ datih u izveštajima	109
27	Merenja instituta „Jaroslav Černi” i usvojena zavisnost $P(Q)$	110
28	Poređenje C_{sr} iz zavisnosti $P(Q)_{JC}$ sa $C_{sr} - JC$ datih u izveštajima	110
29	Greške u merenjima, 1. deo	111
30	Greške u merenjima, 2. deo	112
31	Greške u merenjima, 3. deo	114
32	Greške u merenjima, 4. deo	115
33	Proračunska šema oblasti modela	118
34	Kalib. modela zadavanjem Manning-ovog koef. za $Q_{sr} = 2400m^3/s$	120
35	Kalib. modela zadavanjem Manning-ovog koef. za $Q_{sr} = 5000m^3/s$	121
36	Kalib. modela zadavanjem Manning-ovog koef. za $Q_{sr} = 7600m^3/s$	122
37	Kalib. modela zadavanjem Manning-ovog koef. za $Q_{sr} = 10500m^3/s$	123
38	Kalib. modela zadavanjem Manning-ovog koef. za $Q_{sr} = 12800m^3/s$	124
39	Kalib. modela zadavanjem Manning-ovog koef. za $Q_{sr} = 15600m^3/s$	125
40	Kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 7600m^3/s$	126
41	Provera kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 15600m^3/s$	127
42	Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. g; 1. deo	129
43	Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. g; 2. deo	130
44	Uticao HE Đerdap na oscilacije nivoa	131

45	Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. g; 3. deo .	131
46	Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. g; 4. deo .	132
47	Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. g; 5. deo .	133
48	Kalibracija modela transporta nanosa i deformacije korita	136
49	Proračunska šema oblasti modela	138
50	Granični uslovi za model transporta nanosa	139
51	Uzvodni granični uslovi za hidraulički model na Dunavu, Tisi, Savi i Velikoj Moravi	140
52	Nizvodni granični uslov za hidraulički model na Dunavu - HE Đerdap 1 .	141
53	Dugoročna simulacija - nivogram, 1. deo	142
54	Dugoročna simulacija - nivogram, 2. deo	143
55	Dugoročna simulacija - nivogram, 3. deo	144
56	Dugoročna simulacija - nivogram, 4. deo	145
57	Dugoročna simulacija - nivogram, 5. deo	146
58	Proticaj i konc. susp. nanosa na Dunavu u Novom Sadu i Smederevu . .	148
59	Proticaj i konc. susp. nanosa na Dunavu u Starim Banovcima i kod HE Đerdap 1	149
60	Proticaj i konc. susp. nanosa u Titelu na Tisi i Beogradu na Savi	150
61	Zasipanje na Dunavu od HE Đerdap 1 do Novog sada tokom perioda od 01.01.2006. do 31.12.2010. godine	151
62	Zasipanje po deonicama i promena srednjeg prečnika zrna duž Dunava . .	152
63	Promena srednjeg prečnika zrna duž Tise i Save	153
64	Promena ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u proizvoljnom trenutku 2007. godine	155
65	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Dunava za 2007. godinu, 1. deo	157
66	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Dunava za 2007. godinu, 2. deo	158
67	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Tise za 2007. godinu, 1. deo	160
68	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Tise za 2007. godinu, 2. deo	161
69	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Save za 2007. godinu, 1. deo	162
70	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Save za 2007. godinu, 2. deo	163
71	Promena nivoa i talvega duž toka za 2007. godinu	164
72	Lokalni koordinatni sistem	177
73	Lokalni koordinatni sistem za interpolaciju po vremenu	179
74	Kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 7600m^3/s$ (a) i provera za $Q_{sr} = 15600m^3/s$ (b)	190
75	Kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 7600m^3/s$, 1. deo . .	191
76	Kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 7600m^3/s$, 2. deo . .	192
77	Kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 7600m^3/s$, 3. deo . .	193
78	Provera kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 15600m^3/s$, 1. deo	194
79	Provera kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 15600m^3/s$, 2. deo	195

80	Provera kalib. modela zadavanjem aps. hrapavosti za $Q_{sr} = 15600m^3/s$, 3. deo	196
81	Promena ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u proizvoljnom trenutku 2008. godine	202
82	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Dunava za 2008. godinu, 1. deo	203
83	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Dunava za 2008. godinu, 2. deo	204
84	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Tise za 2008. godinu, 1. deo	205
85	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Tise za 2008. godinu, 2. deo	206
86	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Save za 2008. godinu, 1. deo	207
87	Promena konc. susp. nanosa i proc. udela frakcija duž Save za 2008. godinu, 2. deo	208
88	Promena nivoa i talvega duž toka za 2008. godinu	209
89	Promena kote dna tokom vremena	210

Spisak tabela

1	Pregled modela linijskog tečenja, 1. deo	7
2	Pregled modela linijskog tečenja, 2. deo	8
3	Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 1. deo	14
4	Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 2. deo	15
5	Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 3. deo	16
6	Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 4. deo	17
7	Tabelarni prikaz dimenzija matrica u hidrauličkom proračunu	49
8	Vektorske norme za testiranje linearne advekcije - Gauss-ova raspodela	79
9	Vektorske norme za testiranje linearne advekcije - primena u modelisanju otvorenih tokova	81
10	Pregled raspoloživih profila na Dunavu, 1. deo	91
11	Pregled raspoloživih profila na Dunavu, 2. deo	92
12	Pregled raspoloživih profila na Dunavu, 3. deo	93
13	Pregled raspoloživih profila na Tisi, Savi i Kolubari	94
14	Pregled raspoloživih profila za Porečku, Pek, Neru, Mlavu, Veliku Moravu i Tamiš	95
15	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Dunav	99
16	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Tisa	100
17	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Sava	100
18	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Kolubara	100
19	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Pek	101
20	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Nera	101
21	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Mlava	101
22	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Velika Morava	101
23	Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Tamiš	101
24	Pregled raspoloživih merenja pronosa nanosa	102
25	Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Dunavu, 1. deo	103
26	Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Dunavu, 2. deo	104
27	Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Tisi	104
28	Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na manjim pritokama	105
29	Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Savi	106
30	Merodavni proticaji za kalibraciju hidrauličkog modela	118
31	Definisanje frakcija i srednjih prečnika zrna u modelu	135
32	Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Dunavu, 1. deo	197
33	Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Dunavu, 2. deo	198
34	Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Dunavu, 3. deo	199
35	Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Tisi, Savi i Velikoj Moravi	200

Lista promenljivih

β_k	udeo k -te frakcije u ukupnoj mešavini
$\beta_{sL,k}$	percentualni udeo k -te frakcije u L -tom podsloju
ΔQ	priraštaj proticaja između dve uzastopne iteracije
Δs_{ns}	priraštaj ns -te promenljive vezne za nanos
Δz	priraštaj nivoa između dve uzastopne iteracije
δx	rastojanje između dve susedne računске tačke
ε_s	koeficijent molekularne i turbulentne difuzije
ε_s^m	koeficijent molekularne difuzije
ε_s^t	koeficijent turbulentne difuzije
ε_x	dozvoljena greška u proračunu polazne tačke segmenta trajektorije
γ_k	parametar alokacije k -te frakcije
φ_k	pronos mase vučenog nanosa
ϕ	nepoznata funkcija koja se određuje interpolacijom po prostoru ili vremenu
ϕ_r	izvod nepoznate funkcije po r za interpolaciju po prostoru
ϕ_x	izvod nepoznate funkcije po x za interpolaciju po prostoru
ϕ_k	fluks vučenog nanosa po jedinici širine
ψ	koeficijent ponderacije po prostoru
ρ	gustina mešavine vode i nanosa
ρ_s	gustina zrna nanosa
τ	lokalna koordinata za interpolaciju po vremenu
τ_b	lokalni napon trenja na dnu
Θ_c	kritična vrednost <i>Shields</i> -vog broja
θ	koeficijent ponderacije po vremenu
ζ_k	faktor skrivanja k -te frakcije
A	površina poprečnog preseka struje
A_1, A_2, A_3, A_4	koeficijenti interpolacionog polinoma po prostoru
A_1^x	površina poprečnog preseka upravna na pravac toka u tački x_1
A_2^x	površina poprečnog preseka upravna na pravac toka u tački x_2

- $a_{\text{sed}}, b_{\text{sed}}, c_{\text{sed}}$ međusobno ortogonalni prečnici elipsoidnog zrna
- a, b, c, d koeficijenti kubnog interpolacionog polinoma
- A_l dolazna tačka trajektorije l -tog segmenta
- α_b ugao koji dno zaklapa sa horizontalom
- a_t, b_t koeficijenti za interpolaciju po vremenu
- A_b^z površina poprečnog preseka dna
- B širina poprečnog preseka
- B_1, B_2 koeficijenti za interpolaciju po vremenu
- C_k bezdimenzionalna koncentracija suspendovanog nanosa k -te frakcije
- C_{ch} *Chezy*-jev koeficijent
- C_k^{dep} merodavna koncentracija za proračun fluksa usled deponovanja
- C_k^{er} merodavna koncentracija za proračun vertikalnog fluksa koji je posledica uvlačenja nanosa iz sloja na i pri dnu
- C_f *Strickler*-ov ili *Darcy-Weisbach*-ov koeficijent, u zavisnosti od toga za koji se koeficijent opredeli
- C_{out} koncentracija suspendovanog nanosa na izlazu iz čvora
- C_{lok} koncentracija suspendovanog nanosa na mestu lokalnog ulaska u čvor
- C_x izvod koncentracije po prostoru
- D_k^{sed} vertikalni fluks mase suspendovanog nanosa usmeren na dole, fluks usled deponovanja
- $(D_*)_k$ bezdimenzionalni prečnik zrna k -te frakcije
- D_k prečnik zrna k -te frakcije
- D_L prečnik najmanjeg nepokretnog zrna
- D_l polazna tačka trajektorije l -tog segmenta
- dt računski korak po vremenu
- E_k^{sed} vertikalni fluks mase suspendovanog nanosa usmeren na gore
- E_a debljina aktivnog sloja
- h dubina vode
- I_b nagib dna
- K zajednički koeficijent difuzije i disperzije
- k_l koeficijent podužne disperzije osrednjen po dubini

- M ukupna masa nanosa u kontrolnoj zapremini
- m prethodna iteracija
- $m + 1$ tekuća iteracija
- M_k masa nanosa k -te frakcije u kontrolnoj zapremini
- M_w, N_w, r_w koeficijenti za proračun brzine tonjenja
- n prethodni vremenski nivo
- n_i ort spoljne normale u pravcu i
- $n + 1$ tekući vremenski nivo
- NG ukupan broj grupa čvorova
- $ng(NG)$ maksimalan broj čvorova u grupi ng
- n_{man} Manning-ov koeficijent trenja
- ns redni broj promenljivih vezanih za nanos
- n_{str} Strickler-ov koeficijent trenja
- p poroznost mešavine nanosa
- q_k fluks suspendovanog nanosa usled zajedničkog dejstva molekularne i turbulentne difuzije za k -tu frakciju
- q_k^f fluks suspendovanog nanosa usled dejstva gravitacije (tonjenja) za k -tu frakciju
- $\left(q_k^f\right)_z$ fluks nanosa usled gravitacije
- Q_{lok} proticaj na mestu lokalnog spoljašnjeg ulaska u čvor
- $(q_k)_i$ fluks suspendovanog nanosa usled difuzije u pravcu i
- r lokalna koordinata za interpolaciju po prostoru
- S površina omotača kontrolne zapremine
- $(S_f)_k$ fluks razmene sa dubljim slojevima za k -tu frakciju
- S_f član razmene između aktivnog sloja i aktivnog stratuma
- S_p faktor oblika zrna
- T_k bezdimenzionalni parametar smičućeg napona k -te frakcije
- t_A vremenski nivo dolazne tačke segmenta trajektorije
- t_D vremenski nivo polazne tačke segmenta trajektorije
- u_i brzina vode u pravcu i
- u_* lokalna smičuća brzina u x pravcu

u_*^{cr}	lokalna kritična smičuća brzina u x pravcu
u_A	brzina u dolaznoj tački segmenta trajektorije
u_D	brzina u polaznoj tački segmenta trajektorije
V	kontrolna zapremina
ϱ	parametar kalibracije
V_k	zapremina koju zauzima nanos k -te frakcije u kontrolnoj zapremini
w_k^f	brzina tonjenja
x_a	dolazna tačka segmenta trajektorije
x_D	polazna tačka segmenta trajektorije
z_b	kota dna vodotoka i kota površine aktivnog sloja
z_{bf}	kota podine aktivnog sloja
z_f	referentna kota dna

1. Uvod

OSNOVNI cilj istraživanja je izučavanje strujanja vode i transporta nanosa i njihova međusobna interakcija u mreži prirodnih, aluvijalnih vodotoka. Zajednički uticaj složene geometrije korita sa promenljivim domenom strujanja i kompleksne mreže prirodnih vodotoka uzrokuje složenu strujnu sliku koja deluje kao pokretač nanosa koji u zavisnosti od uslova može da se kreće u vidu suspendovanog ili vučenog nanosa. Postojeća strujna slika izaziva pokretanje nanosa na i pri dnu, čime dolazi do neizbežne promene morfologije korita, koja ima povratni uticaj na tečenje. Pošto se nanos u prirodnim vodotocima javlja kao mešavina zrna različitih veličina, isti hidraulički uslovi će imati različit uticaj na zrna različite veličine, što uvodi dodatne komplikacije u modelisanje ove pojave. Kao neposredna posledica ovoga proizilazi poteškoća pri tačnom definisanju razmene materije između suspenzije, dna i dubljih slojeva u rečnom koritu. Naime, neustaljeno strujanje u prirodnim vodotocima može usloviti veoma složeno ponašanje i mehanizme razmene nanosne mešavine, pri čemu zrna pojedinih granulometrijskih intervala mogu imati potpuno različite uloge u odnosu na druge granulometrijske intervale istog nanosnog materijala. Za izučavanje ove pojave se koriste fizički modeli, eksperimentalne laboratorijske metode, terenska merenja i numerički modeli. Iskustva poslednjih nekoliko decenija ukazuju na to da se najbolji pristup krije u kombinaciji numeričkih modela, terenskih merenja i laboratorijskih eksperimenata. Numerički modeli omogućavaju rešavanje diferencijalnih jednačina koje sadrže sve, ili barem najbitnije, mehanizme izučavane pojave. Za kalibraciju i verifikaciju ovih modela se mogu koristiti terenska merenja, dok se rezultati laboratorijskih eksperimenata mogu koristiti za dalji razvoj pojedinih delova modela. Osnovna prednost numeričkih modela u odnosu na druge pristupe se ogleda u mogućnosti da predvide posledice koji bi neki događaj mogao da ima na strujnu sliku i morfologiju korita (na primer uticaj izgradnje regulacione građevine, poplave i slično). Druga značajna prednost numeričkih modela je činjenica da se jednom formiran numerički model može koristiti za niz različitih situacija. Navedene prednosti su osnovni razlog postojanja velikog broja linijskih, ravanskih i prostornih numeričkih modela. Dimenzija modela koja se primenjuje zavisi od posmatrane problematike. Prostorni modeli daju detalju strujnu sliku i raspored izučavanih veličina u sva tri pravca. Nedostatak ovakvih modela je njihova zahtevnost u pogledu ulaznih podataka (podaci o geometriji, početni i granični uslovi) i tromost postojećih modela. Zbog nedostatka podataka i dugog vremena potrebnog računaru da sprovede simulacije, ovi modeli se ograničavaju na potrebe izučavanja lokalnih (prostorno i vremenski) pojava. Ravanski modeli su manje zahtevni i u pogledu ulaznih podataka i u pogledu vremena rada računara, zbog čega se mnogi istraživači opredeljuju za njih. To ih takođe kvalifikuje za modelisanje dužih deonica ili vremenski dužeg perioda u odnosu na prostorne modele. Ipak, i prostorni i ravanski modeli su suviše zahtevni (u pogledu ulaznih podataka i vremena rada računara) da bi se primenili za simuliranje strujanja u mreži tokova, ili za višegodišnje simulacije. U takvim situacijama se kao najpovoljniji pristup nameće primena linijskih modela koji zahtevaju manje ulaznih podataka i mnogo kraće vreme rada računara. U ovom radu se razmatra modelisanje procesa strujanja vode, transporta nanosa i deformacije korita u granatoj mreži otvorenih tokova. Kako bi se omogućilo modelisanje opisanih procesa na prostranim oblastima tokom niza godina, istraživanje se bazira na izučavanju linijskih modela neustaljenog tečenja i transporta nanosa. Radi dostizanja postavljenog cilja, pored korektnog matematičkog modelisanja koje se mora zasnivati na fizici razmatranog procesa, neophodno je formulisati i odgovarajuće računске procedure koje omogućavaju efikasan proračun u topološki veoma složenim sistemima prirodnih vodotokova.

Da bi se stekao uvid u trenutnu situaciju u istraživanoj oblasti, u poglavlju 2. je dat pregled literature. U pogledu modela neustaljenog tečenja, pregled literature je ograničen na linijske modele i naglasak je stavljen na rešavanje polaznih jednačina. Kod pregleda postojećih modela transporta nanosa i deformacije korita su prikazani modeli nezavisno od njihove dimenzije (linijski, ravanski ili prostorni) jer u ovoj oblasti ne postoji opšte prihvaćen pristup za modelisanje pa je neophodno napraviti što kompletniji pregled literature sa ciljem sticanja što boljeg uvida u postojeće pravce. Analiza postojećih modela je poslužila kao pomoć za odabir pristupa modelisanja transporta nanosa i deformacije korita. Koristeći se zaključcima iz ovog poglavlja, prešlo se na izvođenje i rešavanje osnovnih jednačina kojima se opisuje strujanje vode i transport nanosa u granatoj mreži otvorenih tokova. Diskretizovane jednačine su iskorišćene za formiranje programskog koda koji pruža mogućnost simuliranja neustaljenog tečenja i transporta nanosa u mreži otvorenih tokova. Formiran kod je podvrgnut nizu kvalitativnih testova sa ciljem da se eliminišu potencijalne greške ili nedostaci programa. Nakon što je kvalitativnim testovima potvrđeno da rezultati proračuna ukazuju na ispravno funkcionisanje programa, pristupilo se formiranju modela stvarne mreže otvorenih tokova. Prvi korak u konačnoj proveru modela na stvarnom primeru je pregled postojećih podataka. Pošto je za stvarni primer izabran deo Dunava u Srbiji od granice sa Mađarskom kod Bezdana do brane Đerdap 1, sa dve veće pritoke, Savom od Sremske Mitrovice i Tisom od Sente, neophodno je napraviti sistematizaciju postojećih merenja vezanih za geometriju korita, podatke o proticajima, nivoima i nanosu. Cilj sistematizacije merenja je definisanje same geometrije modelisane deonice, i njenih početnih i graničnih uslova, kao i kontrolnih preseka koji bi poslužili za kalibraciju i verifikaciju modela. Kalibracija i verifikacija modela su rađene odvojeno za hidraulički proračun i za proračun transporta nanosa i deformaciju korita. Već je napomenuto da strujna slika izaziva promene u morfologiji koje onda imaju povratno dejstvo na samu strujnu sliku. Zato se postupak kalibracije i verifikacije hidrauličkog proračuna sprovodi prvi. Nakon kalibracije i provere ispravnosti kalibracije hidrauličkog modela, može da se pristupi procesu kalibracije modela transporta nanosa. Konačna verifikacija kompletnog modela je prikazana u poglavlju 9. gde se daju rezultati za petogodišnji period simulacije upoređeni sa postojećim merenjima.

2. Pregled literature

NEPREKIDNA istraživanja procesa u otvorenim tokovima rezultat su težnje ljudi da unapred znaju posledice budućih događaja. Bolje shvatanje ponašanja vodenih tokova daje mogućnost predviđanja uticaja koji će imati izgradnja nekog hidrotehničkog objekta pre njegove izgradnje ili prognozu potencijalnog poplavnog talasa i njegovih efekata. Ono takođe omogućuje procenu intenziteta deponovanja materijala u retenzijama i njegovog uticaja na smanjenje kapaciteta retenzije, predviđanje potrebe za zaštitom temelja građevina od erozije ili nestabilnosti rečnih korita kao i pravovremeno istraživanje pristupa za sprečavanje ovih procesa. Sa tim ciljem su još davno formirane diferencijalne jednačine koje opisuju procese strujanja vode i transporta nanosa u vodotocima. U odsustvu analitičkog rešenja ovih jednačina se paralelno sa razvojem računara, razvijala i oblast njihovog numeričkog rešavanja. Preciznije definisanje pojedinih procesa u prirodnim tokovima je uzrokovalo potrebu za formulisanjem empirijskih izraza koji su postali nezamenljiv deo numeričkih modela. Sa daljim unapređenjem tehnike se omogućilo razvijanje složenijih modela strujanja vode i transporta nanosa koji teže da sve detaljnije reprodukuju sve veći broj prirodnih procesa kao što su strujanje vode u mreži otvorenih tokova, transport suspendovanog nanosa i nanosa na i pri dnu, promenu kote dna korita, kao i povratan uticaj morfoloških promena na strujnu sliku. Dalji razvoj računara bio je preduslov za formiranje složenijih numeričkih modela koji mogu da se primene za puštanje dugoročnih simulacija čitavih sistema vodotokova i tako daju sliku o uticaju pojedinih elemenata datog sistema na pojave u drugim delovima istog sistema tokom niza godina. Simulacije ovog tipa su ograničene na linijske modele zbog nedostatka adekvatnih podataka neophodnih za definisanje geometrije korita i graničnih uslova sa jedne strane i samog trajanja simulacija sa druge. Zbog toga su linijski modeli, uprkos postojanju niza ravanskih i prostornih modela, još uvek nezamenljivi u oblasti dugoročnih simulacija u mreži otvorenih tokova. Prednost ravanskih i prostornih modela je njihova sposobnost da rekonstruišu složenu strujnu sliku i daju detaljniju sliku očekivanih morfodinamičkih procesa usled čega se njihova primena ograničava na modelisanje lokalnih poremećaja u otvorenim tokovima. Sa druge strane, problem linijskih modela predstavlja sama činjenica da se linijski modeli koriste za dugoročne simulacije mreže tokova, te da je potrebno definisati mehanizme koji dozvoljavaju raspodelu vode i nanosa iz jednog rečnog toka na više deonica (grananje mreže), odnosno spajanje više tokova u jedan (modelisanje ulivanja pritoka). Dodatna poteškoća je posledica karaktera nanosa koji se u vodotocima javlja u vidu mešavine zrna raznih veličina. Usled toga se pri istim hidrauličkim uslovima zrna različitih veličina ponašaju drugačije čime se nameće potreba za razvrstavanjem nanosa na čestice različitih veličina.

Cilj ovog istraživanja je formiranje linijskog modela interakcije vode i nanosa u mreži prirodnih vodotokova. Imajući u vidu da je prvi preduslov za razmatranje transporta nanosa i promene kote dna, formulisanje modela strujanja vode koji ima direktan uticaj na transportne procese, pregled literature počinje sa poglavljem 2.1. gde se daje pregled postojećih linijskih modela tečenja. U slučaju strujanja vode koja transportuje suspendovani nanos malih koncentracija se smatra da je uticaj čestica suspendovanog nanosa na strujnu sliku zanemarljiv zbog čega je opravdano ovaj složeni problem razmatrati kao dve, uslovno rečeno, odvojene pojave. Štaviše, pošto su promene kote dna korita mnogo sporije od promena u struji, može se smatrati da je kota dna nepromenljiva tokom jednog vremenskog koraka, pa se hidraulički proračun sprovodi sa podacima o geometriji toka iz prethodnog vremenskog koraka. Ovaj pristup je usvojen i u prikazanom radu što objašnjava razdvojen pregled linijskih modela neustaljenog tečenja u otvorenim

tokovima 2.1. i pregled postojećih modela transporta nanosa i deformacije korita, 2.2. Pošto je osnovni koncept prilikom modelisanja transportnih procesa kod velikog broja modela nezavisan od dimezije (linijski, ravanski ili prostorni) modela, pregledom literature su obuhvaćene sve tri grupe. Svrha datog pregleda je prepoznavanje pristupa koji su se pokazali kao adekvatni u postojećim modelima i sticanje uvida u one oblasti koje zahtevaju poboljšanja sa namerom da se obezbedi dodatno unapređenje u razmatranoj oblasti.

2.1. Linijski modeli tečenja

Strujanje vode i transport nanosa predstavljaju izuzetno složene i još uvek nedovoljno istražene procese u prirodi. Određivanje analitičkog rešenja za jednačine je izuzetno teško u ovoj oblasti zbog čega se istraživači uglavnom opredeljuju za neku vrstu modela. Ranije je većina inženjerskih problema ovog tipa bila rešavana pomoću terenskih istraživanja ili laboratorijskih fizičkih modela. Unapređenje računarske tehnologije je dozvolilo kreiranje numeričkih modela čija osnovna prednost u odnosu na fizičke modele ostaju troškovi izrade i njihova primenljivost na razne situacije a ne samo na konkretan problem za koji je model sastavljen. Pouzdanost numeričkih modela direktno zavisi od toga koliko dobro osnovne jednačine opisuju razmatrane fizičke procese, zadatih graničnih uslova, primenjenih empirijskih zavisnosti, usvojene šeme za diskretizaciju jednačina i brzine proračuna. Primenom neodgovarajućih jednačina ili suviše grube ili nestabilne numeričke šeme se dobija model koji nije pouzdan.

Pokazalo se da postoji veza između tipa jednačine i njenog numeričkog rešenja što bi značilo da će tip posmatrane jednačine odrediti pogodnost određene numeričke metode za njeno rešavanje. Najviše pažnje treba posvetiti izboru numeričke metode kod onih tipova jednačina koje su problematične pri numeričkom rešavanju (jednačina advekcije na primer, koja je detaljno razmatrana u poglavlju 6.2.). Uopšteno, najčešće korišćene numeričke metode u oblasti linijskih modela strujanja vode i transporta nanosa čine metoda konačnih razlika i metoda karakteristika. Metode konačnih elemenata se često koristi za modelisanje ravanskog i prostornog tečenja jer omogućava dobar opis strujne oblasti. Prednost ove metode se gubi kod linijskih modela. Metoda karakteristika se uglavnom koristi za jednačine koje su izrazito hiperboličkog karaktera, na primer jednačine kojima se opisuje advekcija.

Pregled postojećih linijskih modela strujanja vode u otvorenim tokovima je prikazan u tabelama 1 i 2. Modeli namenjeni za simulaciju ustaljenog tečenja se oslanjaju na energetsku jednačinu za ustaljeno stanje Holly i Spasojevic (1985), Karim et al. (1987) ili Brunner (2010) (za slučaj ustaljenog strujanja). Yang i Simoes (2008) su u svom radu predstavili kvazi-ustaljen model koji je zasnovan na konceptu tuba definisanih oko strujnica. Na ovaj način se posmatrani poprečni presek deli na niz elemenata definisanih oko strujnica, od kojih se svaki modeliše primenom linijskog modela, čime se dobija delimično ravanski prikaz hidrauličkih uslova duž toka. Prema ovom konceptu čestice vode ne mogu da prođu kroz granice tube oko strujnice. Prikazani model neustaljenost dobija kao seriju ustaljenih situacija. Drugu, mnogo veću grupu čine "klasični" modeli neustaljenog strujanja koji se oslanjaju na *St. Venant*-ove jednačine (Yang, 1986; Husain i Eqnaibli, 1988; Rahuel et al., 1989; Holly i Rahuel, 1990a,b; Holly i Parrish, 1993; Bhal-lamudi i Chaudhry, 1991; Clemmens i Holly, 1993; Nguyen i Kawano, 1995) detaljnije prikazane u poglavlju 3.1.

U pogledu numeričkih metoda koje se koriste za rešavanje polaznih jednačina, većina autora se uglavnom opredeljuje za metodu konačnih razlika koja je izrazito popularna

zbog svoje jednostavnosti i jasnog fizičkog značenja članova u jednačinama. Suština ove metode je da se polazne diferencijalne jednačine diskretizuju u pojedinačnim računskim tačkama tako da se dobije algebarska jednačina. Aproksimacije izvoda su sadržane u numeričkim šemama. Prilikom razvoja numeričke šeme se obično polazi od jednačine linearne advekcije sa čime se daje mogućnost primene *Von Neumann*-ove analize. Nakon toga se sprovođenjem niza testova šema prilagođava nelinearnoj advekciji. Kao primer se navodi šema koju su za linearnu advekciju predložili Lax i Wendroff (1960), ili šema koju je *Lax* originalno predložio za nelinearnu advekciju, a koja se može primeniti i za linearnu advekciju (Lax, 1954). Sa ciljem smanjenja uticaja disperzije na rezultate su autori Appadu et al. (2008) kombinovanjem *MacCormack*-ove i *Lax-Friedrich*-ove dvostepene šeme razvili novu šemu. Autori Ewing i Wang (2001) su dali istorijski pregled šema metode konačnih razlika za modelisanje advekcije. Od prikazanih modela autori Yang i Simoes (2008); Husain i Eqnaibli (1988); Bhallamudi i Chaudhry (1991) koriste šeme metode konačnih razlika. Bhallamudi i Chaudhry (1991) konkretno primenjuju *McCormack* šemu sa obrazloženjem da je šema eksplicitna što je čini jednostavnom za upotrebu i automatski eliminiše iterativni proračun i potrebu za inverzijom velikih matrica. Osim ova dva pristupa postoje i modeli koji jednačine rešavaju primenom metode konačnih zapremine (Huang et al., 2008; Kuiry i Bates, 2010) ili metodom karakteristika, na primer Yeh et al. (1995). Najčešće primenjivana šema konačnih razlika je *Preissmann*-ova šema (Holly i Rahuel, 1990a,b; Wu et al., 2004; Fang et al., 2008; Islam et al., 2008; Sart et al., 2010) koja se zasniva na integralnim jednačinama ispisanim za kontrolnu zapreminu. Ova šema se naziva i šema četiri tačke jer je kontrolna zapremina definisana sa četiri tačke (po dve računске tačke u dva vremenska nivoa). Nakon diskretizacije jednačina se dobija sistem linearnih ili nelinearnih algebarskih jednačina. Ako je formiran sistem sastavljen od linearnih jednačina prelazi se na njihovo rešavanje primenom nekog od postojećih postupaka kao što su *Gauss*-ova eliminacija (Ferziger i Perić, 2002) ili algoritam za tridijagonalne matrice (TDMA - Tridiagonal Matrix Algorithm) odnosno *Thomas*-ov algoritam (Conte i deBoor, 1972). Ukoliko se formiran sistem sastoji od nelinearnih jednačina, onda se pre njihovog rešavanja sprovodi postupak linearizacije čime se polazni sistem nelinearnih jednačina svodi na sistem linearnih jednačina, koje se potom rešavaju nekim od pomenutih postupaka. Nedostatak *Preissmann*-ove šeme se primećuje prilikom modelisanja rušenja brane kada ova šema prouzrokuje fizički neopravdane oscilacije (Wu, 2008). Samuels i Skeels (1990) su u svom radu definisali uslove stabilnosti *Preissmann*-ove šeme. Da bi se izbegle neželjene oscilacije neki autori (Huang et al., 2008; Kuiry i Bates, 2010) u svojim modelima koriste takozvanu *Godunov* šemu metode konačnih zapremine čija primena dozvoljava simulaciju rušenja brana.

Već je napomenuto da je osnovna prednost linijskih modela njihova sposobnost simulacije višegodišnjih događaja u složenim sistemima vodenih tokova. Počeci dugoročnih simulacija u mreži otvorenih tokova su bili kvazi-ustaljeni modeli (Holly i Spasojevic, 1985; Karim et al., 1987). Model Karim et al. (1987) je originalno napravljen da simulira tečenje u svega jednoj deonici pa je program kasnije dopunjen kako bi se dozvolilo priključivanje pritoka na glavni tok. Modeli neustaljenog tečenja kao što je CHARIMA (Yang, 1986) su služili za kraće simulacije. Ovaj model obuhvata dva pristupa za rešavanje datog problema. U slučaju simulacije ustaljenog tečenja koristi energetska jednačinu dobijenu zanemarivanjem priraštaja količine kretanja tokom vremena u dinamičkoj jednačini. Ukoliko se radi o neustaljenom tečenju, program koristi kompletne *St. Venant*-ove jednačine. Slično programskom kodu CHARIMA, i program HEC-RAS (Brunner, 2010) dozvoljava posebno zadavanje informacija ovog tipa, takođe koristeći energetska jednačinu za ustaljene situacije, a kompletne jednačine u slučaju neustaljenog strujanja. Danas većina

postojećih modela može da simulira neustaljeno tečenje u mreži otvorenih tokova (model dozvoljava da se priključi proizvoljan broj pritoka na glavni tok). Takav je *Channel Network Model* (Husain i Eqnaibli, 1988) koji pored priključenja pritoka od unutrašnjih graničnih uslova predviđa isticanja ispod ustave i kaskadu. Autori Nguyen i Kawano (1995); Fang et al. (2008); Vieira i Wu (2002a); Wu et al. (2004); DHI (2009) su predstavili modele koji takođe simuliraju strujanje u mreži otvorenih tokova, gde modeli Vieira i Wu (2002a); Wu et al. (2004) uključuju i modelisanje hidrotehničkih građevina kao što su prelazi ispod mostova, merna suženja ili brane. Modeli koji pored ulivanja pritoka u glavni tok dozvoljavaju grananje mreže (razdvajanje toka oko ade ili ostrva u dva ili više manja toka, i njihovo ponovno spajanje) su BRALLUVIAL (Holly i Spasojevic, 1985), CHARIMA (Yang, 1986), CARIMA (Holly i Parrish, 1993), DUFLOW (Clemmens i Holly, 1993), CanalMod od autora Islam et al. (2008) ili MIKE 11 (DHI, 2009). Potreba za ovakvim modelima je posledica pokrivanja velikih površina tokova sa jedinstvenim modelom u kom slučaju su pojave poput grananja toka neizbežne. Poslednjih godina se takođe javljaju pokušaji spajanja linijskih i ravanskih modela (Chen i Zhu, 2012). U linijskom delu svog modela autori Chen i Zhu (2012) koriste kompletne jednačine za linijsko neustaljeno tečenje koje rešavaju primenom *Preissmann*-ove šeme. Postupak linijskog i ravanskog proračuna se sprovode odvojeno nakon čega slede korekcije na deonicama gde se dva modela spajaju.

Referenca	Modeli linijskog tečenja			Napomena
	Ustaljeno/ neustaljeno	Hidraulički model	Numerička metoda	
Holly i Spasojevic (1985) BRALLUVIAL	kvazi-ustaljeno	energetska jednačina za ustaljeno tečenje	implicitna šema metode konačnih razlika	model može da simulira tečenje u granatoj mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim graničnim uslovima
Yang (1986) CHARIMA	kvazi-ustaljeno, neustaljeno	kvazi-ustaljeno: energetska jednačina za ustaljeno tečenje neustaljeno: St. Venant-ove jednačine	kvazi-ustaljeno: implicitna šema metode konačnih razlika; neustaljeno: Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u granatoj mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim graničnim uslovima
Karim et al. (1987) IALLUVIAL	kvazi-ustaljeno	energetska jednačina za ustaljeno tečenje	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova
Husain i Eqnaibli (1988) Channel Network Model	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	implicitna šema metode konačnih razlika	model može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim graničnim uslovima
Rahuel et al. (1989) CHARICAR	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	
Holly i Rahuel (1990a,b) SEDICOUP	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	
Holly i Parrish (1993) CARIMA	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u granatoj mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim graničnim uslovima
Bhallaamudi i Chaudhry (1991)	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	eksplicitna McCormack šema metode konačnih razlika	
Clemmens i Holly (1993) DUFLOW	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u granatoj mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim graničnim uslovima
Nguyen i Kawano (1995)	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova

Tabela 1: Pregled modela linijskog tečenja, 1. deo

Referenca	Modeli linijskog tečenja			Napomena
	Ustaljeno/ neustaljeno	Hidraulički model	Numerička metoda	
Yeh et al. (1995) NMMOC	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	metoda karakteristika	
Vieira i Wu (2002a, b) Wu i Vieira (2002) CCHED	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim grančnim uslovima, ima opciju primene modela difuzionog talasa
Wu et al. (2004)	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim grančnim uslovima
Yang i Simoes (2008) GSTARS	kvazi-ustaljeno	St. Venant-ove jednačine	metoda konačnih razlika	neustaljenost se dobija kombinacijom niza ustaljenih stanja
Fang et al. (2008)	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova
Huang et al. (2008)	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	metoda konačnih zapremina, postupak Godunov-a sa Riemann-ovim postupkom	
Islam et al. (2008) CanalMod	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u granatoj mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim grančnim uslovima
DHI (2009) MIKE 11	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Abbot-Ionescu šema	u granatoj mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim grančnim uslovima
Kuiry i Bates (2010)	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	metoda konačnih zapremina, postupak Godunov-a sa Riemann-ovim postupkom	model obuhvata i razmenu sa susjednim okolnim poplavnim područjem predstavljениm sa trougaonim ćelijama
Brunner (2010) HEC-RAS	ustaljeno, neustaljeno	ustaljeno: energetska jednačina neustaljeno: St. Venant-ove jednačine	ustaljeno: iterativna metoda standardnih koraka; neustaljeno: Preissmann-ova šema	model može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova sa unutrašnjim grančnim uslovima
Chen i Zhu (2012)	neustaljeno	St. Venant-ove jednačine	Preissmann-ova šema	model je kombinacija linijskog i ravanskog modela gde linijski deo može da simulira tečenje u mreži otvorenih tokova

Tabela 2: Pregled modela linijskog tečenja, 2. deo

2.2. Modeli transporta nanosa i deformacije korita

U prethodnom poglavlju je pokazano da kod modelisanja linijskog neustaljenog tečenja u mreži otvorenih tokova postoji dominantan pristup kojeg se većina istraživača pridržava. Rešavaju se *St. Venant*-ove jednačine, većina autora preferira *Preissmann*-ovu šemu, a pojedina odstupanja su posledica pokušaja simultanog rešavanja jednačina strujanja i transporta kao u slučaju NMMOC modela od autora Yeh et al. (1995), ili teženje za proširenjem modela na modelisanje poplavnih područja (Kuiry i Bates, 2010). Za razliku od linijskih modela tečenja, modeli transporta nanosa i deformacije korita predstavljaju izuzetno složene procese za čiju matematičku formulaciju ne postoji opšte prihvaćen pristup. Deljenje nanosa na suspendovani i nanos na i pri dnu omogućava da se kod modelisanja suspendovanog nanosa prihvati pretpostavka da se njegove čestice kreću brzinom približno jednakoj brzini fluidnih delića, te da je njegovo kretanje kontinualno. Ova pretpostavka je preduslov za jednoznačno ispisivanje jednačine održanja mase suspendovanog nanosa.

Prva razlika u pristupima modelisanja se odnosi na način na koji se opisuje sam sastav mešavine nanosa. Veliki broj postojećih modela za transport nanosa polazi od pretpostavke da je nanos uniforman ili mešavinu nanosa predstavlja sa karakterističnim zrnom (model SUTERNCH-2D autora van Rijn et al. (1990) ili FAST2D autora Rodi (2000)) i ne sadrže sveobuhvatan opis procesa vezanih za nanos. Prvi veliki napredak u ovoj oblasti predstavljaju modeli koji nanos modelišu kao mešavinu zrna različitih veličina. Model BRALLUVIAL (Holly i Spasojevic, 1985) je zasnovan na kvazi-ustaljenom modelu strujanja vode i transporta nanosa i dozvoljava definisanje mešavine nanosa preko zrna različitih veličina. Model SEDICOU (Holly i Rahuel, 1990a,b) rešava *St. Venant*-ove jednačine neustaljenog strujanja sa globalnom jednačinom održanja mase nanosa na i pri dnu i transportnom jednačinom mešavine nanosa. Pregledom modela prikazanih u tabelama 3, 4, 5 i 6 se primećuje da je većina autora prihvatila ideju da se nanos modeliše preko zrna nanosa različitih veličina. Razlog za ovo je što se na taj način za ukupan transport nanosa (suma po svim frakcijama) dobijaju bolja slaganja sa merenjima nego kada se nanos modeliše kao uniforman.

Za razliku od transporta suspendovanog nanosa, formulisanje jednačine transporta nanosa na i pri dnu, i mehanizama razmene sa suspenzijom nije jednoznačno definisano. Razlikuju se tri osnovna pravca modelisanja procesa na i pri dnu, pristup homogenog sloja (Karim i Kennedy, 1982; Karim et al., 1983, 1987) koji je sastavljen od mešavine nanosa potencijalno izloženog kretanju. Debljina homogenog sloja varira od visine skoka zrna do visine dina. Neki modeli koji se oslanjaju na koncept homogenog sloja su model BRALLUVIAL autora Holly i Spasojevic (1985), CHARIMA autora Holly et al. (1990), modeli autora Armanini i Giampaolo (1988), Rahuel et al. (1989), model NMMOC autora Yeh et al. (1995) i mnogi drugi. Drugi pristup je pristup sloja vučenog nanosa (van Rijn, 1987) gde se razmatraju zrna koja se kreću kao vučeni nanos, a debljina sloja je jednaka visini skoka ovih zrna. Ovakvi modeli su FAST2D od autora Bui et al. (1998) ili Rodi (2000), FAST3D autora Wu et al. (2000), ili njegova kasnija verzija koju su predstavili Bui i Rutschmann (2006), odnosno Bui i Rutschmann (2010). Treći pristup koji se prepoznaje kod niza modela je pristup aktivnog sloja i aktivnog podsloja ili stratuma (Spasojevic i Holly, 1990) gde se smatra da aktivni sloj čine zrna nanosa potencijalno izložena kretanju, kao i zrna koja se već kreću kao vučeni nanos. Modeli koji se oslanjaju na ovaj pristup su MOBED2 od osnivača koncepta i autora Spasojevic i Holly (1990), SEDICOU autora Holly i Rahuel (1990a,b), model CH3D-SED autora Gessler et al. (1999), modeli autora Yang i Simoes (2008), Hung et al. (2009), model 2DVONASK au-

tora Budinski (2011) i drugi. Dalje razlike u modelisanju procesa na i pri dnu zavise od prihvaćenog polaznog koncepta sloja. Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita je dat u tabelama 3, 4, 5 i 6.

Neprekidna interakcija mešavine nanosa i vode uzrokuje stalnu promenu raspodele frakcija po prostoru i vremenu što ujedno određuje raspoloživost zrna određene veličine za učešće u procesima razmene između suspendovanog i nanosa na i pri dnu. Model autora Struksima et al. (1985) ne obuhvata suspendovani nanos već isključivo simulira vučeni nanos. Model CCHE2D (Jia i Wang, 1999) deformaciju korita računa preko vučenog nanosa, dok model Nagata et al. (2000) simulira promenu kote dna sa erozijom obala primenom modela za transport nanosa zasnovanog na empirijskom izrazu za intenzitet podizanja nanosa. Model BRALLUVIAL (zasnovan na konceptu homogenog sloja) promenu kote dna određuje iz jednačine održanja mase ispisane za svaku frakciju posebno. Imajući u vidu da je i dno sačinjeno od mešavine nanosa, na kraju svakog vremenskog koraka se određuje najnovija raspodela frakcija u mešavini nanosa na dnu kao funkcija debljine homogenog sloja, količine materijala (svake frakcije) koja ulazi u sloj tokom jednog vremenskog intervala i debljine za koju se sloj podigne ili spusti (za svaku frakciju). Model CHARIMA (Holly et al., 1990) je linijski model koji rešava sistem jednačina održanja mase suspendovanog nanosa i nanosa na dnu, odnosno ispod površine dna za proizvoljan broj frakcija pri čemu su članovi jednačina definisani za svaku frakciju posebno. Wu et al. (2004) je prikazao linijski model kojim se opisuje transport vučenog i suspendovanog nanosa sa razmenom između materijala u suspenziji i na dnu, takođe za proizvoljan broj frakcija. Autori Holly i Rahuel (1990a,b) su predstavili linijski model (SEDICOU) koji razlikuje suspendovani nanos i nanos na i pri dnu, a promenu kote dna (odnosno talvega) računa preko promene površine poprečnog preseka.

Najveći izazov poslednjih godina predstavlja modelisanje procesa na i pri dnu, odnosno procesa razmene sa suspendovanim nanosom. Model CCHE1D (Wu i Vieira, 2002) koristi uopštene jednačine za neravnotežno stanje, neuniformnog nanosa. Jednačina je data u opštem obliku (može da se primeni kako za suspendovani tako i za vučeni nanos), pri čemu se u zavisnosti od vrste nanosa drugačije definišu pojedini članovi jednačine. CCHE1D suspendovani i vučeni nanos tretira zajedno, što znači da postoji jedna ovakva jednačina za zbir suspendovanog i vučenog nanosa, dok su procesi razmene (deponovanje i resuspenzija) uzeti u obzir kao razlika pronosa ukupnog nanosa i kapaciteta pronosa za ravnotežno stanje. Model FAST2D (Rodi, 2000) (koncept vučenog nanosa) mešavinu nanosa predstavlja preko karakterističnog zrna, a transport suspendovanog nanosa opisuje pomoću jednačine održanja mase suspendovanog nanosa sa članovima razmene (članovi deponovanja i uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju). Deponovanje suspendovanog nanosa je definisano kao avdektivni fluks suspendovanog nanosa usled dejstva gravitacije (tonjenja), koji se računa koristeći izračunatu vrednost koncentracije. Uvlačenje nanosa sa dna i prelazak u suspenziju je modelisano pod pretpostavkom ravnotežnog stanja (stanje kada je deponovanje jednako uvlačenju nanosa u suspenziju) i računato je sa koncentracijom pri dnu. Postoje modeli koji interakciju vode i mešavine nanosa (Spasojevic i Holly, 1990; Holly i Rahuel, 1990a,b; Wu, 2004; Zhou et al., 2009; Hung et al., 2009) opisuju preko jednačine održanja mase suspendovanog nanosa za određenu frakciju, koja takođe sadrži članove razmene (deponovanje i vertikalni fluks uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju). Član deponovanja se obično definiše kao fluks razmene usled dejstva gravitacije a računa se koristeći izračunatu koncentraciju i brzinu tonjenja, što je u slučaju linijskih modela srednja profilska koncentracija. Preostali procesi vezani za nanos, kao što su vertikalni fluks usmeren na gore usled uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju, promena kote dna, promena raspodele frakcija se modelišu na razne načine. Ovo potvrđuje da ne

postoji opšte prihvaćen pristup u modelisanju ovih članova kao i potrebu za dodatnim istraživanjima ove oblasti. Spasojevic i Holly (1990) uvode proračun vertikalnog fluksa uvlačenja nanosa u suspenziju po frakcijama u novi predloženi koncept na osnovu aktivnog sloja i aktivnog podsloja. Ovim se dobija set jedanačina za nanos pri dnu, na dnu i ispod dna. Razmena mase između aktivnog sloja i podsloja je omogućena ispisivanjem jednačine održanja mase aktivnog sloja i aktivnog stratuma za sve frakcije. Promena kote dna se određuje ispisivanjem globalne jednačine održanja mase za aktivni sloj i stratume koja je dobijena sumiranjem jednačina održanja mase za aktivni sloj i podsloj po svim frakcijama. Konačan oblik jednačine se dobija primenom uslova da je suma svih frakcija jednaka jedinici. Da bi se ovaj uslov zadovoljio neophodno je zajedničko rešavanje jednačina održanja mase po frakcijama i jednačine za proračun promene kote dna. Modeli zasnovani na konceptu aktivnog sloja (Spasojevic i Holly, 1990; Gessler et al., 1999; Hung et al., 2009; Budinski, 2011) i aktivnog stratuma dozvoljavaju proračun kote dna korita i granulometrijskog sastava aktivnog sloja za neograničen broj granulometrijskih intervala.

Razmena nanosa između nanosa na dnu i nanosa u suspenziji je zbirni uticaj članova deponovanja i uvlačenja nanosa u suspenziju, koji se izvode iz jednačine održanja suspendovanog nanosa (Jovanović, 2008; García, 2008; Wu, 2008). Na osnovu ovih razmatranja član uvlačenja nanosa u suspenziju je definisan kao turbulentni fluks usmeren vertikalno nagore, dok je deponovanje posledica uticaja gravitacionog ubrzanja, koje se predstavlja kao advektivni fluks usmeren vertikalno nadole. Koja će se koncentracija zadržati kao merodavna koncentracija za modelisanje člana deponovanja zavisi od dimenzije modela. Prostorni modeli poput Gessler et al. (1999); Wu et al. (2000); Khosronejad et al. (2008) mogu da odrede vrednost koncentracije neposredno iznad dna i nametnu je kao merodavnu za proračun deponovanja. Ravanski modeli osrednjeni po dubini kao rezultat proračuna u jednoj tački preseka dobijaju jednu vrednost koncentracije koja je osrednjena po dubini. Jedan pristup je da se ova koncentracija zada kao merodavna za proračun člana deponovanja (Wu, 2004). Model SEDICOUPI koristi sračunatu srednju profilsku koncentraciju kao merodavnu (Holly i Rahuel, 1990a,b). Često ovakav pristup rezultuje u nerealnim vrednostima u pogledu deponovanja zbog čega su se autori poput Duan i Nanda (2006); Budinski (2011) opredelili za drugačiji pristup. Koristeći *Rouse*-ovu krivu, izračunata koncentracija osrednjena po dubini se ekstrapoluje, pa se tako dobijena koncentracija koristi kao merodavna za proračun deponovanja. Slična situacija se javlja i kod linijskih modela, gde se kao rezultat dobija srednja profilaska koncentracija. Sa ciljem unapređenja mogućnosti modela da što bolje reprodukuje stvarno stanje, principi koje su primenili autori Duan i Nanda (2006); Budinski (2011) može da se proširi i primeni i na linijske modele.

Drugi član kojim se opisuje razmena materijala između suspenzije i dna je vertikalni fluks uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju. Matematička formulacija ovog člana predstavlja veći izazov što potvrđuje raznolikost pristupa primenjenih u raznim modelima. Dva osnovna pristupa za modelisanje vertikalnog fluksa uvlačenja zrna u suspenziju je primena ravnotežne i neravnotežne koncentracije za određivanje ovog člana. Autori Spasojevic i Holly (1990); Bui et al. (1998); Rodi (2000); Wu et al. (2000); Duan i Nanda (2006); Zeng et al. (2008) u svojim modelima vertikalni fluks uvlačenja nanosa sa dna računaju primenom ravnotežne koncentracije. Posledica ovako definisanog fluksa uvlačenja nanosa u suspenziju je da se proračunom dobija da je ovaj član skoro uvek prisutan i daje velike vrednosti. Kako bi se poboljšao kvalitet modelisanja vertikalnog fluksa uvlačenja, veliki broj autora ovaj član modelišu kao vertikalni gradijent koji se diskretizacijom prevodi u razliku merodavne koncentracije za proračun vertikalnog fluksa uvlačenja i ravnotežne

koncentracije definisane empirijskim izrazima (Brors, 1999). U tom slučaju se merodavna koncentracija za proračun vertikalnog fluksa uvlačenja u suspenziju određuje analogno članu deponovanja, odnosno jedna mogućnost je zadavanje vrednosti koncentracije na nekom rastojanju od dna kod prostornih modela (Gessler et al., 1999), koncentracije osrednjene po dubini kod ravanskih, ili srednje profilske kod linijskih modela, a druga opcija je da se kod linijskih i ravanskih modela primenom *Rouse*-ove krive sračunata koncentracija ekstrapoluje (Budinski, 2011). Pored opisanog koncepta za modelisanje člana razmene postoje i drugi pristupi. Na primer, autori Wu (2004); Zhou et al. (2009) član razmene definišu kao razliku izračunate koncentracije i transportnog kapaciteta.

Dok se osnovni principi modelisanja fizičkih procesa transporta i razmene mogu preuzeti sa prostornih modela i uz pojednostavljenja i pretpostavke prilagoditi zahtevima linijskih modela, postupak proračuna u čvorovima (mesta račvanja deonica) je karakterističan za linijske modele. Uopšteno se može reći da linijski modeli koji simuliraju tečenje u mreži otvorenih tokova za proračun koncentracije u čvorovima koriste jednačinu održanja mase pronosa nanosa. Za razliku od jednačine kontinuiteta koja se ispisuje u čvorovima za vodu, jednačina održanja mase pronosa nanosa obično sadrži dodatne članove. Naime, pronos nanosa koji u čvor ulazi ne mora biti jednak pronosu nanosa koji iz čvora izlazi, jer deo nanosa može da se „potroši” na promenu kote dna. Vodeći se ovakvim rezonovanjem, autori modela BRALLUVIAL (Holly i Spasojevic, 1985) ispisuju jednačinu održanja mase ukupnog nanosa u čvorovima u koju se dodaje član koji je posledica promene kote dna. Postupak proračuna je takav da se prvo sprovodi proračun ukupnog nanosa u svim tačkama pa se rešavanjem jednačine održanja mase u čvorovima određuje promena kote dna u čvoru. Model CHARIMA (Yang, 1986) za čvorove ispisuje jednačinu održanja mase kojom se koncentracije nanosa u izlaznim deonicama raspodeljuju proporcionalno proticajima u izlaznim deonicama, a promena kote dna u čvoru se računa preko promena kote dna ulaznih deonica. Protoku proporcionalna raspodela koncentracije suspendovanog nanosa u deonicama koje izlaze iz čvora se zadržala i u kasnijoj verziji modela CHARIMA (Holly et al., 1990). Sama ideja da se proračun suspendovanog nanosa u čvorovima vrši uz pretpostavku da je raspodela koncentracije suspendovanog nanosa protoku proporcionalna je fizički opravdana (ako se smatra da se čestice suspendovanog nanosa kreću brzinom fluidnih delića). Nedovoljno istražena oblast ostaje definisanje ostalih veličina (vezanih za nanos) u čvorovima, kao što su proračun nanosa na i pri dnu, raspodela frakcija i promena kote dna.

Pregledom postojećih modela transporta nanosa i morfologije korita se može reći da se u smislu složenosti modela razlikuju jednostavniji modeli koji usvajaju pristup da se nanos može predstaviti sa jednim karakterističnim zrnom (Bhallamudi i Chaudhry, 1991; Bui et al., 1998; Nagata et al., 2000; Huang et al., 2008) i na složenije modele koji nanos predstavljaju preko mešavine zrna različitih veličina (Holly i Rahuel, 1990a,b; Spasojevic i Holly, 1990; Wu i Vieira, 2002; Yang i Simoes, 2008). Tokom godina se pokazalo da modelisanje nanosa kao mešavine zrna daje bolje slaganje sa merenjima od modelisanja preko karakterističnog zrna. Iz priloženih tabela 3,4, 5 i 6 se takođe može zaključiti da su dva vodeća pristupa u modelisanju koncept homogenog sloja i koncept aktivnog sloja, gde se kod linijskih modela uglavnom javlja prvi od ova dva kao stariji. Model GSTARS od autora Yang i Simoes (2008) se oslanja na koncept aktivnog sloja sa neograničenim brojem frakcija, međutim za hidraulički proračun se koristi model kvazi ustaljenog strujanja sa čime se značajno ograničavaju njegove mogućnosti. Drugi linijski model zasnovan na konceptu aktivnog sloja je SEDICOU od autora Holly i Rahuel (1990a,b). Hidraulički proračun ovog modela se svodi na rešavanje *St. Venant*-vih jednačina neustaljenog strujanja primenom *Preissmann*-ove šeme. Od jednačina za

proračun transporta nanosa i deformacije korita se koriste jednačina održanja mase suspendovanog nanosa i jednačina za vučeni nanos gde se obe ispisuju za sve razmatrane frakcije. Promena kote dna se određuje iz jedne globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu koja se dobija ispisivanjem istih jednačina po svim frakcijama i njihovim sumiranjem. Poslednja jednačina koja ulazi u sistem je jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju, koja služi za određivanje promene raspodele frakcija zrna u mešavini nanosa na dnu. Ovih jednačina takođe ima koliko i frakcija. Kako bi osigurali što tačnije rešenje autori Holly i Rahuel (1990a) su za diskretizaciju jednačine održanja mase suspendovanog nanosa usvojili metodu karakteristika za koju je pokazano da je pouzdana za simulaciju situacija sa dominantnom advekcijom Isic et al. (2013). Imajući u vidu da je ova metoda tačna koliko i primenjena interpolacija, model SEDICOUPI ima kubni lokalni interpolacioni polinom (Holly i Preissmann, 1977). Druga značajna karakteristika ovog modela je simultano rešavanje jednačina strujanja i transporta nanosa. Osnovne prednosti ovog modela (simultano rešavanje svih jednačina, simulacija mešavine zrna sa proizvoljnim brojem frakcija i primena metode karakteristika sa kubnim interpolacionim polinomom) su istovremeno uzrok njegove nepraktičnosti. Naime, zajedničko rešavanje jednačina podrazumeva invertovanje matrice celog sistema sa čime se proračun značajno usporava. Pored toga, primena usvojenog postupka za proračun advekcije suspendovanog nanosa nameće ograničenje trajektorije čestice na dužinu jedne računске ćelije, sa čime se računski korak po vremenu značajno ograničava, a proračun usporava. Unapređenjem ovog postupka tako da se jednačine strujanja rešavaju nezavisno od jednačina transporta nanosa i deformacije korita bi omogućilo brži proračun. Ako se pored toga trajektoriji dozvoli da prolazi kroz više računskih ćelija postojala bi mogućnost primene dužeg vremenskog koraka što bi rezultovalo sa simulacijama kraćeg trajanja.

Referenca	Tip modela	Model transporta nanosa i deformacije korita						Napomena
		Transport vučenog nanosa	Promena kote dna	Transport susp. nanosa (ustaljeno)	Deponovanje/ resuspenzija	Br. frakcija nanosa		
Celik (1982)	ravanski	ne	ne	da (ustaljeno)	da	ne	promena kote dna se računa preko jednačine <i>Erner</i> -ovog tipa	
Struksima et al. (1985)	ravanski	da	da	ne	ne	ne	koristi koncept homogenog sloja; <i>Preissmann</i> -ova šema za diskretizaciju transportne jed. suspendovanog nanosa	
Holly i Spasojevic (1985) BRALLUVIAL	linijski	da	da	da	ne	neograničen	koristi koncept homogenog sloja; <i>Preissmann</i> -ova šema za diskretizaciju transportne jed. suspendovanog nanosa	
Celik i Rodi (1985)	ravanski	ne	ne	da (ustaljeno)	da	ne	koristi koncept homogenog sloja <i>Preissmann</i> -ova šema za diskretizaciju transportne jed. suspendovanog nanosa	
Yang (1986) CHARIMA	linijski	da	da	da	ne	neograničen	koristi koncept homogenog sloja diskretizaciju transportne jed. suspendovanog nanosa	
Karim et al. (1987) LALLUVIAL	linijski	da	da	da	ne	neograničen	koristi koncept homogenog sloja diskretizaciju transportne jed. suspendovanog nanosa	
Arramini i Giampaolo (1988)	linijski	da	da	da	da	neograničen	koncept homogenog sloja	
Rahuel et al. (1989) CARICCHAR	linijski	da	da	ne	da	neograničen	koncept mešanog sloja; proračun nanosa primenom generalizovane <i>Preissmann</i> -ove šeme	
Spasojevic i Holly (1990) MOBED2	ravanski	da	da	da	da	neograničen	koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma	
van Rijn et al. (1990) SUTRENCH-2D	ravanski	da	da	da (kvazi-neustaljeno)	da	ne	promena kote dna pomoću jednačine ukupnog nanosa	
Holly et al. (1990) CHARIMA	linijski	da	da	da	da	neograničen	koncept homogenog sloja, unapređena verzija	

Tabela 3: Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 1. deo

Referenca	Tip modela	Model transporta nanosa i deformacije korita						Napomena
		Transport vučenog nanosa	Promena kote dna	Transport susp. nanosa	Deponovanje/ /resuspenzija	Br. frakcija nanosa		
Holly i Rahuel (1990a,b) SEDICOU	linijski	da	da	da	da	neograničen	koncept aktivnog sloja; <i>Preisssmann</i> -ova šema za diskretizaciju transportne jed. suspendovanog nanosa	
Bhallamudi i Chaudhry (1991)	linijski	da	da	da	ne	ne	empirijska formula za proračun transporta ukupnog nanosa, spaja suspendovani i nanos na dnu	
Bui et al. (1998)	ravanski	da	da	da	da	ne	promena kote dna se računa preko jedn. održanja ukupnog nanosa;	
Rodi (2000) FAST2D	ravanski	da	da	da	ne	da?	koncept sloja vučenog nanosa	
Olsen (1999)	ravanski	da	da	da	da	ne	promena kote dna se računa pomoću „bilansne” jednačine	
Brors (1999)	ravanski	da	da	da	da	ne	model promene kote dna je linijski	
Jia i Wang (1999) CCHE2D	ravanski	da	da	ne	ne	ne	promena kote dna se računa preko jednačine <i>Erner</i> -ovog tipa	
Gessler et al. (1999) CH3D-SED	prostorni	da	da	da	da	neograničen	koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma	
Nagata et al. (2000)	ravanski	da	da	ne	ne	ne	promena kote dna se računa preko jednačine <i>Erner</i> -ovog tipa	
Wu et al. (2000) FAST3D	prostorni	da	da	da	da	ne	koncept sloja vučenog nanosa	
Hervouet i Bates (2000) TELEMAC-3D	prostorni	ne	ne	da	nema resusp. samo dep.	ne		
Vieira i Wu (2002a,b) Wu i Vieira (2002) CCHE1D	linijski	da	da	da	da	neograničen	koristi koncept homogenog sloja; <i>Preisssmann</i> -ova šema za diskretizaciju transportne jednačine suspendovanog nanosa	

Tabela 4: Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 2. deo

Referenca	Tip modela	Model transporta nanosa i deformacije korita						Napomena
		Transport vučenog nanosa	Promena kote dna	Transport susp. nanosa	Deponovanje/ /resuspenzija	Br. frakcija nanosa		
Duan et al. (2002) EnCCHE2D	ravanski	da	da	da	ne	ne	promena kote dna se računa preko jednačine <i>Erner</i> -ovog tipa	
Olsen (2003)	prostorni	da	da	da	ne?	ne	promena kote se računa iz „bilansne” jednačine	
Wu et al. (2004)	linijski	-	da	ne	da	neograničen	koncept homogenog sloja; zajedno se tretiraju suspendovani i nanos na dnu	
Wu (2004)	ravanski	da	da	da	da	neograničen?	koncept homogenog sloja	
Yongjun et al. (2004)	prostorni	ne	da	da	da?	ne?	koncept homogenog sloja	
Ruther i Olsen (2005) SSTIM	prostorni	da	da	da	da	ne?	koncept aktivnog i neaktivnog sloja	
Duan i Nanda (2006)	ravanski	ne	ne	da	da	ne?	dep. i resusp. se računaju u obliku „viška” susp. nanosa	
Bui i Rutschmann (2006) FAST3D	prostorni	da	da	ne	ne	neograničen	koncept sloja vučenog nanosa	
Wu i Wang (2008)	linijski	da	da	da	da	neograničen	koncept mešanog sloja; zajedno se tretiraju suspendovani i nanos na dnu; metoda konačnih zapremina	
Yang i Simoes (2008) GSTARS	linijski	da	da	da	da	neograničen	koncept aktivnog sloja	
Fang et al. (2008)	linijski	da	da	da	da	neograničen	proračun nanosa metodom karakteristika analitički	
Huang et al. (2008)	linijski	da	da	ne	ne	ne		
Khosronejad et al. (2008)	prostorni	da	da	da	da	ne	promena kote dna se računa pomoću jedn. kont. za nanos	

Tabela 5: Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 3. deo

Referenca	Tip modela	Model transporta nanosa i deformacije korita						Napomena
		Transport vüčenog nanosa	Promena kote dna	Transport susp. nanosa	Deponovanje/ /resuspenzija	Br. frakcija nanosa		
Zeng et al. (2008)	prostorni	da	da	da	da	ne?	promena kote dna se računa pomoću jednačine tipa <i>Emer</i> -ova	
RMA-10 García (2008)	prostorni	ne	?	da	da	ne?	metoda konačnih elemenata;	
MIKE 3 García (2008)	prostorni	ne	?	da	nema resusp. samo dep.	ne?	metoda konačnih razlika; kohezivni nanos	
RMA-10 García (2008)	prostorni	ne	?	da	da	ne?	metoda konačnih elemenata; kohezivni nanos	
Delft 3D García (2008)	prostorni	ne?	ne	da	da	da		
Fischer-Antze et al. (2009)	prostorni	da	da	da		neograničen?	promena kote dna se računa iz „bilansne” jednačine	
Hung et al. (2009)	ravanski	da	da	da	da	neograničen	koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma	
Zhou et al. (2009)	ravanski	da	da	da	da	neograničen	dno se modeliše pomoću tri sloja (stratuma)	
DHI (2009) MIKE 11	limijski	da	ne?	da	da	neograničen	ima opciju da koristi razne pristupe za proračun transporta	
Bui i Rutschmann (2010) FAST3D	prostorni	da	da	ne	ne	neograničen	koncept sloja vüčenog nanosa	
Brunner (2010) HEC-RAS	limijski	da	da	da	da	20	transport nanosa se računa za kvazi-neustaljeno stanje	
Budinski (2011) 2DVONASK	ravanski	da	da	da	da	neograničen	koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma	
MIKE 21		da	ne?	da	?	da?	metoda konačnih razlika	

Tabela 6: Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 4. deo

3. Linijske jednačine neustaljenog strujanja i transporta

FORMIRANJE linijskog modela interakcije vode i nanosa u mreži prirodnih vodotokova prvenstveno zahteva matematičku formulaciju problematike. Prilikom izvođenja jednačina i izrade modela se polazi od jednačina strujanja vode koje su neophodne za formiranje strujne slike koja potom utiče na pokretanje nanosa. Jednačine koje opisuju linijsko neustaljeno strujanje su opšte poznate *St. Venant*-ove jednačine koje su prikazane u poglavlju 3.1. Njihovo detaljno izvođenje ovde nije prikazano, a može se naći u Diplomskom-Master radu autora Isic (2008). Nakon formulisanja jednačina koje opisuju neustaljeno strujanje u otvorenim tokovima mogu da se definišu jednačine koje opisuju procese transporta nanosa i promene kote dna. Ove jednačine predstavljaju nedovoljno istraženu oblast te se navode sa mnogo više detalja. Prikazani rad se oslanja na koncept aktivnog sloja i aktivnog podsloja koji su predstavili Spasojevic i Holly (1990). Ovakvim pristupom se ukupan nanos deli na tri oblasti, oblast suspendovanog nanosa koja obuhvata zonu u kojoj se čestice nanosa kreću brzinama fluidnih delića. Druga oblast obuhvata nanos pri dnu koji se kreće u vidu skokova ili kotrljanjem (vučeni nanos). Treća oblast se odnosi na nanos koji se nalazi na samom dnu. Podelom ukupnog nanosa na ove tri oblasti mogu da se formulišu i osnovne jednačine za definisanje procesa transporta nanosa i promene kote dna koje su prikazane u poglavlju 3.2. Detaljno izvođenje jednačine održanja mase suspendovanog nanosa za mešavinu nanosa je dato u poglavlju 3.2.1. Izvođenje jednačine održanja mase mešavine nanosa u aktivnom sloju je prikazano u poglavlju 3.2.2., dok poglavlje 3.2.3. obuhvata izvođenje globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu.

3.1. Linijsko neustaljeno strujanje - *St. Venant*-ove jednačine

Jednačine kojima se opisuje neustaljeno strujanje u otvorenim tokovima su *de St. Venant*-ove jednačine. Ove jednačine mogu da se izvedu polazeći od integralnog oblika osnovnih jednačina mehanike fluida, jednačine održanja mase i jednačine održanja količine kretanja. Primenom pristupa da se prati izabrana masa fluida koja zauzima zapreminu V_f jednačina održanja mase može da se napiše u sledećem obliku

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_f} \rho dV = 0. \quad (3.1)$$

Primenom *Reynolds*-ove transportne teoreme može da se pređe na pristup da se razmatra promena unutar nepokretne zapremine V ograničene omotačem S , pa jednačina održanja mase postaje

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho u_i n_i dS = 0. \quad (3.2)$$

Jednačina održanja količine kretanja napisana u obliku kada se prati masa fluida koja zauzima zapreminu V_f je data izrazom (3.3), a nakon primene *Reynolds*-ove transportne teoreme koja omogućava da se posmatra promena unutar nepokretne zapremine se dobija jednačina (3.4).

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_f} \rho u_i dV = \int_{V_f} \rho f_j dV - \int_S p n_j dS + \int_S \sigma_{ij}^{d+t} n_i dS, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dV = - \int_S \rho u_i n_i u_j dS + \int_V \rho f_j dV - \int_S p n_j dS + \int_S \sigma_{ij}^d n_i dS. \quad (3.4)$$

Za dalje izvođenje se razmatra promena mase i količine kretanja tokom konačnog vremenskog intervala (od trenutka t_1 do t_2) zbog čega se jednačine (3.2) i (3.4) integrale po vremenu. Jednačina održanja mase je data izrazom (3.5), a jednačina održanja količine kretanja sa izrazom (3.6).

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho u_i n_i dS dt = 0. \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dV dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho u_i n_i u_j dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho f_j dV dt - \int_S p n_j dS + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_S \sigma_{ij}^d n_i dS dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

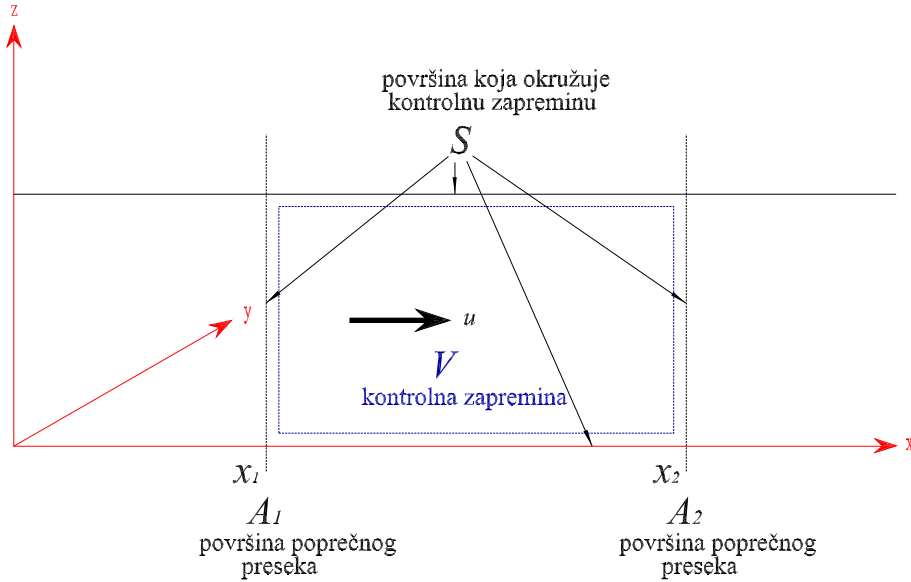
Jednačine (3.5) i (3.6) predstavljaju prostorne jednačine koje se primenom određenih pretpostavki mogu svesti na linijske jednačine strujanja. Uslove pod kojim polazne jednačine (3.5) i (3.6) mogu da se svedu na linijske jednačine je definisao *de St. Venant*, a pretpostavke su navedene u nastavku:

- nema naglih promena nivoa slobodne površine vode usled čega je vertikalno ubrzanje zanemarljivo i važi pretpostavka o hidrostatičkom rasporedu pritisaka;
- promena nivoa slobodne površine poprečno na struju nema značajnog uticaja na propagaciju talasa pa se može pretpostaviti da je nivo slobodne površine upravno na stuju horizontalan;
- neuniformnost rasporeda brzina po poprečnom preseku ne utiče značajno na propagaciju talasa, dakle može se pretpostaviti konstantna brzina po poprečnom preseku;
- razlika gubitaka energije pri neustaljenom i ustaljenom tečenju nije značajna pa mogu da se koriste izrazi za trenje koji se koriste za ustaljeno tečenje;
- prosečan pad dna u podužnom pravcu je mali, odnosno $\cos \alpha_b \cong 1$ pa je $\sin \alpha_b \cong \tan \alpha_b$.

Pored navedenih pretpostavki je uvedena dodatna pretpostavka da je gustina mešavine vode i nanosa približno konstantna po poprečnom preseku. Detaljno izvođenje je prikazano u radu autora Isic (2008), pa se ovde navode samo ključni koraci u izvođenju.

Posmatra se jednačina održanja mase (3.5) na koju se primenom pretpostavke da je tečenje linijsko (jedina komponenta brzine različita od nule je komponenta upravna na poprečni presek struje), brzina i gustina su konstantne po poprečnom preseku, i da proticaj postoji samo kroz dva poprečna preseka struje (uzvodni i nizvodni), jednačina održanja mase postaje

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A^-)_{t_2} - (\rho A^-)_{t_1}] dx + \int_{t_1}^{t_2} [(\rho u A^-)_{x_2} - (\rho u A^-)_{x_1}] dt = 0. \quad (3.7)$$



Slika 1: Kontrolna zapremina za izučavanje jednačina linijskog strujanja vode i transporta nanosa

Razmatra se jednačina održanja količine kretanja (3.6) na koju se primenjuju pretpostavke da je tečenje linijsko usled čega ostaje samo jedna komponenta brzine, brzina i gustina su konstantne po poprečnom preseku i da proticaj postoji samo kroz površine poprečnog preseka upravne na pravac struje, od zapremisnkih sila se razmatra samo sila gravitacije. Koristeći navedene stavove, može se preurediti leva strana jednačine (3.6) i prva dva člana na desnoj strani znaka jednakosti. Član koji sadrži silu pritiska obuhvata dejstvo sile pritiska u dva susedna poprečna preseka i reakciju na dejstvo sile pritiska na omotač usled neprizmatičnosti korita. Sila pritiska se određuje pod pretpostavkom da u svim poprečnim presecima važi hidrostatički raspored pritisaka. Reakcija na silu pritiska usled neprizmatičnosti (na rastojanju između dva poprečna preseka) se određuje pod pretpostavkom da je promena širine postepena. Uticaj površinske sile od devijatorskog dela napona se razmatra pod pretpostavkom da je dominantan uticaj napona trenja u onom delu poprečnog preseka gde je fluid u dodiru sa čvrstom granicom. Prilikom izvođenja se raspored napona trenja po okvašenom obimu zamenjuje sa prosečnim naponom trenja za presek, a onda se primenom *St. Venant*-ove pretpostavke da se za određivanje napona trenja mogu koristiti izrazi koji važe za ustaljeno tečenje može definisati napon trenja preko nagiba trenja. Naravno, kasnije se primenom empirijskih zavisnosti za nagib trenja i srednju brzine za ustaljeno tečenje može primeniti na primer *Manning*-ov ili *Chezy*-jev izraz. Primenom navedenih pretpostavki i preuređivanjem jednačina se dobija integralni oblik jednačine održanja količine kretanja za jednodimenzionalno neustaljeno tečenje u otvorenim tokovima (3.8).

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_1}^{x_2} [(\rho u A)_{t_2} - (\rho u A)_{t_1}] dx + \int_{t_1}^{t_2} [(\rho u^2 A)_{x_2} - (\rho u^2 A)_{x_1}] dt = \\
 & = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho A S_0 dx dt + g \int_{t_1}^{t_2} [(\rho I_1)_{x_1} - (\rho I_1)_{x_2}] dt + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho I_2 dx dt - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho A S_f dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Diferencijalni oblik jednačina se izvodi primenom pretpostavke da su zavisno promenljive diferencijabilne i neprekidne funkcije. Razvijanjem funkcije u *Taylor*-ov red vrednost funkcije f u koordinati x_2 može da se napiše kao

$$(f)_{x_2} = (f)_{x_1} + \left. \frac{\partial f}{\partial c} \right|_{x_1} (x_2 - x_1) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_1} \frac{(x_2 - x_1)^2}{2!} + \dots \quad (3.9)$$

Analogno se razvijanjem u *Taylor*-ov red funkcija f u trenutku t_2 može izraziti kao

$$(f)_{t_2} = (f)_{t_1} + \left. \frac{\partial f}{\partial c} \right|_{t_1} (t_2 - t_1) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{t_1} \frac{(t_2 - t_1)^2}{2!} + \dots \quad (3.10)$$

Zanemarivanjem članova koji sadrže izvode drugog i višeg reda se dobija veza

$$\int_{t_1}^{t_2} [(f)_{x_2} - (f)_{x_1}] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1} (x_2 - x_1) dt, \quad (3.11)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [(f)_{t_2} - (f)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t_1} (t_2 - t_1) dx. \quad (3.12)$$

Primenom izraza (3.11) i (3.12) uz pretpostavku da razlika $x_2 - x_1$ i $t_2 - t_1$ teži nuli može da se pređe na diferencijalni oblik jednačina. Jednačina održanja mase je

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} = 0, \quad (3.13)$$

a jednačina održanja količine kretanja je

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 A) = -g \frac{\partial}{\partial x}(\rho I_1) + g \rho I_2 + g \rho A(S_0 - S_f). \quad (3.14)$$

Primenom uslova da je gustina konstantna, ρ može da se izvuče ispred izvoda. Proizvod brzine i površine poprečnog preseka struje daje proticaj, pa se u jednačinama može zameniti da je $u \cdot A = Q$. Ovako izvedene jednačine predstavljaju konzervativni oblik jednačina koje zadovoljavaju uslov očuvanja mase i količine kretanja. Dodatno pojednostavljenje se uvodi ako se pretpostavi da nema strmih talasa i sličnih diskontinuiteta (hidraulički skok na primer), jer se tada integrali I_1 i I_2 eliminišu. *de St. Venant*-ove jednačine su konačno:

jednačina kontinuiteta

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (3.15)$$

i dinamička jednačina

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \cdot \frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \frac{\partial z}{\partial x} + g \cdot A \cdot S_f = 0.$$

U dinamičkoj jednačini se drugi član preuređuje prema sledećem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \cdot \frac{Q^2}{A} \right) = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha \cdot \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{Q^2}{A} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

pa je konačni oblik dinamičke jednačine

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha \cdot \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + g \cdot A \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + g \cdot A \cdot S_f = 0. \quad (3.16)$$

Prikazane jednačine čine sistem od dve nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine čije rešavanje je prikazano u poglavlju 4.1.1.

3.2. Transport nanosa i promena kote dna

Celokupna oblast u kojoj se izučavaju nanosni procesi je podeljena u tri dela. Oblast suspendovanog nanosa, aktivni sloj i sloj nanosa ispod površine koji se sastoji od aktivnog i ostalih stratuma. Jednačine za transport nanosa se sada definišu za svaku od oblasti uz dodatak mehanizama razmene među njima. Mešavina nanosa se predstavlja odgovarajućim brojem frakcija $k = 1, \dots, K$, gde je K ukupan broj frakcija. Istraživanje se zasniva na formiranju linijskog modela strujanja vode, transporta nanosa i morfoloških promena zbog čega je neophodno uvesti određene pretpostavke o uticaju promene kote dna na poprečni presek toka. Primenjen je pristup koji podrazumeva da se oblik poprečnog preseka ne menja. Promena kote dna isključivo utiče na translatorno pomeranje preseka, njegovo podizanje ili spuštanje.

3.2.1. Održanje mase suspendovanog nanosa

Polazi se od jednačine održanja mase suspendovanog nanosa u kontrolnoj zapremini V ograničenoj omotačem površine S

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot C_k \cdot dV}_1 + \underbrace{\int_S \rho \cdot C_k \cdot u_i \cdot n_i \cdot dS}_2 = - \underbrace{\int_S (q_k)_i \cdot n_i \cdot dS}_3 - \underbrace{\int_S (q_k^f)_i \cdot n_i \cdot dS}_4, \quad (3.17)$$

gde su dimenzije fluksa suspendovanog nanosa usled difuzije, q_k , $[ML^{-2}T^{-1}]$, a dimenzije fluksa usled gravitacije, q_k^f , su $[ML^{-2}T^{-1}]$. Navode se značenja članova:

1. lokalna promena mase suspendovanog nanosa u kontrolnoj zapremini;
2. razlika izlazne i ulazne mase suspendovanog nanosa kroz S advekcijom;
3. razlika ulazne i izlazne mase suspendovanog nanosa kroz S usled molekularne i turbulentne difuzije;
4. razlika ulazne i izlazne mase suspendovanog nanosa kroz S usled dejstva gravitacije;

Prilikom izvođenja se pretpostavlja da se čestice suspendovanog nanosa kreću brzinom fluidnih delića. Integraljenjem polazne jednačine po vremenu (od t_1 do t_2) se dobija jednačina održanja mase suspendovanog nanosa tokom konačnog vremenskog intervala.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot C_k \cdot dV \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho \cdot C_k \cdot u_i \cdot n_i \cdot dS \cdot dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_i \cdot n_i \cdot dS \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k^f)_i \cdot n_i \cdot dS \cdot dt \quad (3.18)$$

Dobijena jednačina je prostorna a može se svesti na linijsku jednačinu primenom *de St. Venant*-ovih pretpostavki uz dodatne uslove da su C_k i ρ konstantne po poprečnom preseku.

Član 1.

Posmatra se kontrolna zapremina V , na elementu računске ćelije u prostoru definisanom od koordinate x_1 do x_2 , u vremenskom intervalu od t_1 do t_2 , slika 1. Lokalna promena

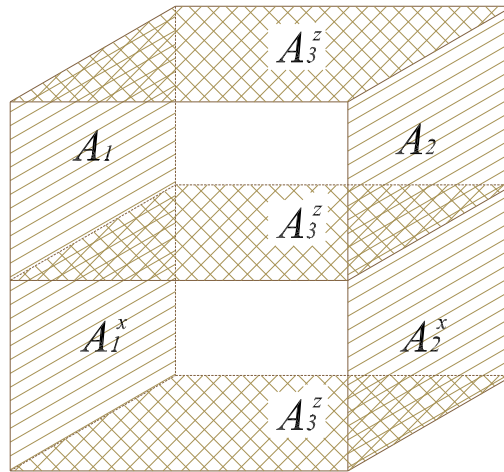
mase suspendovanog nanosa, uz pretpostavku da su ρ i C_k konstantne po poprečnom preseku postaje

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot C_k \cdot dV \cdot dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot C_k \cdot A^x \cdot dx \cdot dt = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot C_k \cdot A^x \cdot dx \Big|_{t_2} - \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot C_k \cdot A^x \cdot dx \Big|_{t_1} = \int_{x_1}^{x_2} [(\rho \cdot C_k \cdot A^x)_{t_2} - (\rho \cdot C_k \cdot A^x)_{t_1}] \cdot dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

Član 2.

Kako se radi o linijskom strujanju, jedina komponenta brzine koja postoji je komponenta upravna na poprečne preseke A_1^x i A_2^x . Primenom navedenih pretpostavki i pojednostavljenja koja su rezultat linijskog karaktera modela, razlika izlaza i ulaza mase suspendovanog nanosa kroz omotač S postaje

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho \cdot C_k \cdot u_i \cdot n_i \cdot dS \cdot dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{A_2^z} \rho \cdot C_k \cdot u \cdot dA^z - \int_{A_1^z} \rho \cdot C_k \cdot u \cdot dA^z \right] \cdot dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [(\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^z)_{x_2} - (\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^z)_{x_1}] \cdot dt \end{aligned} \quad (3.20)$$



Slika 2: Kontrolna zapremina za izučavanje transporta suspendovanog nanosa

Član 3.

Izlaz manje ulaz mase suspendovanog nanosa usled difuzije, koja obuhvata zbirno dejstvo molekularne i turbulentne difuzije, načelo može postojati u pravcu toka $(q_k)_x$ i u

vertikalnom pravcu, $(q_k)_z$.

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_i \cdot n_i \cdot dS \cdot dt = -\int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_x \cdot n_x \cdot dS \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_z \cdot n_z \cdot dS \cdot dt \quad (3.21)$$

Komponenta difuzionog fluksa u pravcu toka se modeliše, analogno *Fick*-ovom zakonu koji je formulisan za molekularnu difuziju, kao

$$(q_k)_x = -\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k), \quad (3.22)$$

gde je ε_s koeficijent difuzije koji u sebi sadrži koeficijent molekularne ε_s^m i turbulentne ε_s^t difuzije,

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s^m + \varepsilon_s^t.$$

Uticao molekularne difuzije je u poređenju sa uticajem turbulentne difuzije zanemarljiv, zbog čega je za dalje izvođenje pretpostavljeno da je $\varepsilon_s = \varepsilon_s^t$. Transport suspendovanog nanosa difuzijom se u horizontalnom pravcu odvija kroz poprečne preseke A_1^x i A_2^x . Vertikalna komponenta difuzionog fluksa postoji samo kroz dno A_b^z i predstavlja ulaz u kontrolnu zapreminu zbog čega se javlja sa negativnim predznakom. Primenom svega navedenog jednačina (3.21) postaje

$$\begin{aligned} & -\int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_x \cdot n_x \cdot dS \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_z \cdot n_z \cdot dS \cdot dt = \\ & -\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{A_2^x} -\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot dA^x - \int_{A_1^x} -\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot dA^x \right] \cdot dt - \\ & -\int_{t_1}^{t_2} \left[-\int_{A_b^z} (q_k)_z \cdot dA^z \right] \cdot dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

Uz pretpostavku da su difuzioni fluks i koeficijent difuzije konstantni po poprečom preseku poslednja jednačina postaje

$$\begin{aligned} & -\int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_x \cdot n_x \cdot dS \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (q_k)_z \cdot n_z \cdot dS \cdot dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right)_{x_2} - \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right)_{x_1} \right] \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (q_k)_z \cdot B \cdot dx \cdot dt. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vertikalna komponenta difuzionog fluksa kroz dno predstavlja uvlečenje zrna nanosa pojedinih granulometrijskih intervala sa dna (pokretnog i nepokretnog) u suspenziju zbog čega se prelazi na obeležavanje $(q_k)_z = E_k^{\text{sed}}$ (*E-entrainment*). Ovo je prvi od dva mehanizma koja čine član izvora suspendovanog nanosa, koji predstavlja glavni mehanizam razmene između nanosa koji se nalazi u suspenziji i nanosa koji se nalazi u aktivnom sloju.

Član 4.

Razlika izlaza i ulaza nanosa kroz razmatranu kontrolnu zapreminu pod dejstvom gravitacije ima samo vertikalnu komponentu, a kako nema transporta nanosa kroz slobodnu površinu nego samo kroz dno, dobija se

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left(q_k^f \right)_i \cdot n_i \cdot dS \cdot dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left(q_k^f \right)_z \cdot n_z \cdot dS \cdot dt = \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_{A_{bz}} \left(q_k^f \right)_z \cdot dA^z \right] \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(q_k^f \right)_z \cdot B \cdot dx \cdot dt, \end{aligned} \quad (3.25)$$

pri čemu je pretpostavljeno da je gravitacioni fluks po poprečnom preseku konstantan. Pošto fluks mase nanosa usled gravitacije $(q_k^f)_z$ kroz dno predstavlja izlaz iz razmatrane kontrolne zapremine, onda se uvodi da je

$$\left(q_k^f \right)_z = -\rho \cdot C_k \cdot w_k^f = -D_k^{\text{sed}}, \quad (3.26)$$

jer je brzina tonjenja w_k^f suprotna od pozitivnog smera ose z . U jednačini (3.26) D_k^{sed} označava deponovanje (*D-deposition*), koje predstavlja drugi mehanizam sadržan u članu izvora suspendovanog nanosa. Dakle, član razmene mase usled dejstva gravitacije je

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(q_k^f \right)_z \cdot B \cdot dx \cdot dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (-\rho \cdot C_k \cdot w_k \cdot B) \cdot dx \cdot dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} D_k^{\text{sed}} \cdot B \cdot dx \cdot dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Kompletiranje jednačine održanja mase suspendovanog nanosa

Izvedeni izrazi za pojedine članove se vraćaju u jednačinu (3.18) što daje

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [(\rho \cdot C_k \cdot A^x)_{t_2} - (\rho \cdot C_k \cdot A^x)_{t_1}] \cdot dx + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} [(\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^x)_{x_2} - (\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^x)_{x_1}] \cdot dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right)_{x_2} - \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right)_{x_1} \right] \cdot dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} E_k^{\text{sed}} \cdot B \cdot dx \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} D_k^{\text{sed}} \cdot B \cdot dx \cdot dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

U nastavku se pretpostavlja da su zavisno promenljive neprekidne i diferencijabilne funkcije, pa se primenom ranije izvedenih zavisnosti dobija za prvi član

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} [(\rho \cdot C_k \cdot A^x)_{t_2} - (\rho \cdot C_k \cdot A^x)_{t_1}] \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot C_k \cdot A^x) \cdot dt \cdot dx,$$

za drugi član

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{t_1}^{t_2} [(\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^x)_{x_2} - (\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^x)_{x_1}] \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^x) \cdot dx \cdot dt,$$

i konačno za treći član

$$\begin{aligned} & \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right)_{x_2} - \left(\varepsilon_s^t \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right)_{x_1} \right] \cdot dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s^t \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right) \cdot dx \cdot dt. \end{aligned}$$

Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa je sada

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot C_k \cdot A^x) \cdot dt \cdot dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A^x) \cdot dx \cdot dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot C_k) \cdot A^x \right) \cdot dx \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} E_k^{\text{sed}} \cdot B \cdot dx \cdot dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} D_k^{\text{sed}} \cdot B \cdot dx \cdot dt. \end{aligned}$$

Poslednji izraz važi za proizvoljnu oblast integracije pa važi i u diferencijalnom obliku. Radi jednostavnijeg obeležavanja se uvodi da je $A^x = A$, pa je jednačina održanja mase suspendovanog nanosa

$$\frac{\partial (\rho \cdot C_k \cdot A)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot C_k \cdot u \cdot A)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial (\rho \cdot C_k)}{\partial x} \cdot A \right) + E_k^{\text{sed}} \cdot B - D_k^{\text{sed}} \cdot B. \quad (3.29)$$

Za dalje preuređivanje jednačine se pretpostavlja da je gustina mešavine vode i nanosa konstantna po vremenu i prostoru, pa jednačina može da se подели sa gustinom, i uvrštava se da je $Q = u \cdot A$, usled čega se može napisati da je

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_k \cdot A) + \frac{\partial}{\partial x} (C_k \cdot Q) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} \cdot A \right) + \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho}.$$

Jednačina se dalje transformiše tako da se u njoj prepozna jednačina kontinuiteta

$$C_k \cdot \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + A \cdot \frac{\partial C_k}{\partial t} + Q \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} \cdot A \right) + \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho}.$$

Primenom da je

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

i deljenjem jednačine sa A , se dobija konačan oblik diferencijalne jednačine održanja mase suspendovanog nanosa

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s^t \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} \cdot A \right) + \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A}. \quad (3.30)$$

3.2.2. Održanje mase nanosa u aktivnom sloju

Prilikom izvođenja jednačine održanja mase suspendovanog nanosa se pretpostavilo da se voda i čestice nanosa kreću približno istim brzinama. Ova pretpostavka je omogućila da se jednačina održanja mase napiše za elementarnu zapreminu mešavine vode i nanosa. U slučaju nanosa na i pri dnu to nije slučaj. Pošto su trajektorije ovog nanosa pod dominantnim uticajem gravitacije, voda i čestice nanosa nemaju iste brzine, pa se ne može definisati ovakva elementarna zapremina. Za kontrolnu zapreminu kao na slici 3 važi da je fluks čestica kroz uzvodnu i nizvodnu granicu kontrolne zapremine posledica pristizanja čestica iz neke druge kontrolne zapremine, dok je fluks čestica kroz dno posledica deponovanja i uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju koji su povezani sa promenom kote dna. Čestice nanosa mogu da prođu kroz kontrolnu zapreminu bez deponovanja ili resuspenzije. Pored toga, čestice koje pređu u suspenziju u jednoj kontrolnoj zapremini mogu proći kroz još nekoliko kontrolnih zapremina pre nego što se deponuju. Zato je potrebno naći mehanizam za definisanje trajektorije svake čestice od trenutka kada ona pređe u suspenziju do tačke deponovanja. Dodatne poteškoće su posledica neuniformnosti toka i sastava dna. Da se ne bi trajektorija svake čestice razmatrala posebno, kretanje nanosa treba predstaviti kao „kontinualan” proces unutar neke oblasti, odnosno treba definisati neki oblik kontrolne zapremine. Definisanje takve kontrolne zapremine je problematično zato što je elementarna zapremina za strujanje vode za više redova veličine manja od najmanje potrebne elementarne zapremine za opisivanje transporta nanosa.

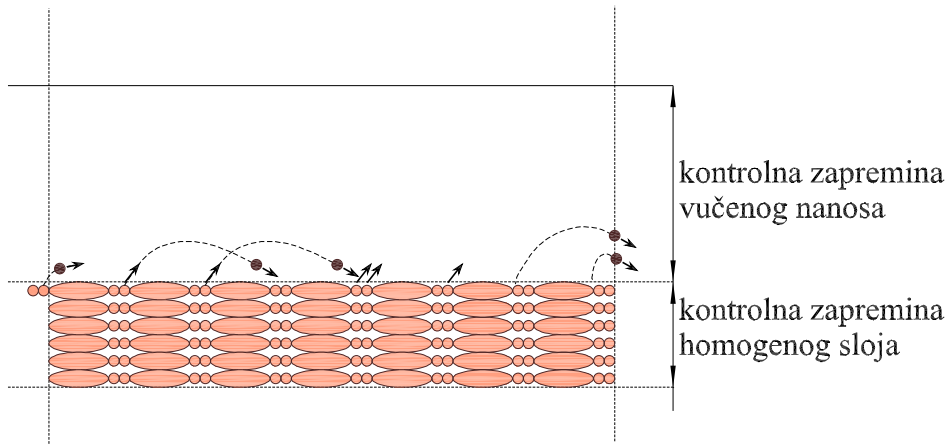
Kako bi se izbegla potreba za posebnim razmatranjem trajektorije svakog pojedinačnog zrna nanosa, smatraće se da je proticaj unutar posmatrane kontrolne zapremine konstantan. Dodatno pojednostavljenje je pretpostavka da je mešavina nanosa unutar kontrolne zapremine homogena i da posmatrana kontrolna zapremina razmenjuje zrna isključivo sa susednim kontrolnim zapreminama. Zrna koja su pokrenuta unutar posmatrane kontrolne zapremine mogu da se deponuju u istoj ili prvoj (nizvodnoj) zapremini, odnosno zrna koja se deponuju u posmatranoj kontrolnoj zapremini su pokrenuta u istoj ili prvoj uzvodnoj kontrolnoj zapremini. U tom slučaju, pokretanje i neposredno deponovanje zrna unutar same kontrolne zapremine neće izazvati promenu sastava dna. Promena sastava je posledica zrna koja su rezultat razmene sa susednim kontrolnim zapreminama. U skladu sa navedenim se navode osnovne pretpostavke:

- raspodela zrna po veličini (tj. granulometrijski sastav) je ista za čitavu kontrolnu zapreminu aktivnog sloja;
- sva zrna iste veličine su podjednako izložena struji;
- dužina kontrolne zapremine aktivnog sloja je veća od dužine skoka zrna koja se kreću saltacionim kretanjem.

Debljina aktivnog sloja se definiše uz pretpostavku da se sva zrna vučenog nanosa kreću po dnu (skakanje zrna se zanemaruje), a iz ove pretpostavke se dolazi i do definicije kote dna. Ova pretpostavka takođe dozvoljava primenu klasične definicije poroznosti materijala na dnu. Deponovanje i uvlačenje nanosa sa dna u suspenziju se definišu na malom rastojanju od dna koje je istovremeno mesto na kojem se definišu granični uslovi za proračun suspendovanog nanosa. Kota podine aktivnog sloja može da se menja. Ukoliko dođe do njenog spuštanja, to znači da aktivni sloj zalazi u sloj ispod. Zbog toga se materijal ispod aktivnog sloja diskretizuje u niz podslojeva, uz napomenu da je horizontalna dimenzija ovih podslojeva jednaka sa horizontalnom dimenzijom aktivnog sloja. Za ove slojeve takođe važi pretpostavka da je granulometrijska kriva celog stratuma ista.

Pošto sloj ispod aktivnog sloja učestvuje u razmeni materijala sa aktivnim slojem, nazvan je aktivni podsloj. Granulometrijske krive aktivnog sloja i aktivnog podsloja se po pravilu razlikuju. Spuštanje kote podine aktivnog sloja znači da deo materijala koji je pripadao aktivnom podsloju postaje deo aktivnog sloja. Kao rezultat ovoga dolazi do promene sastava aktivnog sloja, dok zastupljenost pojedinih granulometrijskih intervala u aktivnom podloju ostaje nepromenjena. U suprotnom, prilikom podizanja podine aktivnog sloja, materijal koji je pripadao aktivnom sloju postaje deo aktivnog podsloja, dolazi do promene sastava oba sloja (aktivnog sloja i aktivnog podsloja).

Na slici 3 je prikazana kontrolna zapremina aktivnog sloja podeljena na sloj vučenog nanosa i homegeni sloj. Granica između ova dva sloja nije egzaktno definisana, jer zrna vučenog nanosa postaju deo homogenog sloja čim prestanu da se kreću, odnosno, zrna homogenog sloja postaju deo vučenog sloja čim se pokrenu. U nastavku izlaganja je cilj definisanje promene mase k -te frakcije po vremenu u kontrolnoj zapremini aktivnog sloja.



Slika 3: Sastav aktivnog sloja

Ukupna masa zrna k -te frakcije u razmatranoj kontrolnoj zapremini je

$$M_k = \rho_s \cdot V_k. \quad (3.31)$$

Udeo k -te frakcije u ukupnoj mešavini nanosnog materijala β_k je definisan kao odnos mase k -te frakcije, M_k , i ukupne mase nanosa unutar kontrolne zapremine, M .

$$\beta_k = \frac{M_k}{M} = \frac{V_k}{(1-p) \cdot V} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_s}. \quad (3.32)$$

Ovde se napominje da poslednja jednačina zapravo daje definiciju frakcione zastupljenosti granulometrijskog intervala k u mešavini nanosa aktivnog sloja. Razmatrana kontrolna zapremina je definisana debljinom aktivnog sloja, E_a , širinom preseka, B , i rastojanjem između dve susedne računске tačke Δx ,

$$V = E_a \cdot \Delta x \cdot B. \quad (3.33)$$

Nakon definisanja kontrolne zapremine, masa nanosa pojedinog granulometrijskog intervala, uz pretpostavku konstantne gustine zrna nanosa i konstantne poroznosti materijala u aktivnom sloju, se definiše kao

$$M_k = \beta_k \cdot \rho_s \cdot (1-p) \cdot E_a \cdot \Delta x \cdot B. \quad (3.34)$$

Promena mase frakcije k po jedinici vremena može se opisati jednačinom

$$\frac{\partial M_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \cdot \beta_k \cdot (1 - p) \cdot E_a \cdot \Delta x \cdot B). \quad (3.35)$$

Pošto su gustina zrna nanosa, poroznost mešavine nanosa i Δx konstantne po vremenu, promena mase pojedine frakcije nanosa u aktivnom sloju postaje

$$\frac{\partial M_k}{\partial t} = \rho_s \cdot (1 - p) \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_a \cdot B)}{\partial t}. \quad (3.36)$$

Prikazana promena mase je posledica pronosa mase vučenog nanosa između dva susedna preseka (desna strana jednačine (3.37))

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_a \cdot B)}{\partial t} = (\varphi_k)_{us} - (\varphi_k)_{ds}, \quad (3.37)$$

Jednačina se elementarnim algebarskim operacijama transformiše u oblik

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_a \cdot B)}{\partial t} = \frac{(\varphi_k)_{us} - (\varphi_k)_{ds}}{\Delta x}. \quad (3.38)$$

Izvor suspendovanog nanosa i razmena sa dubljim slojevima

Pod uticajem lokalnih poremećaja strujnog polja određena zrna nanosa mogu iz aktivnog sloja da pređu u suspendovani nanos. Kao što je to najavljeno u prethodnom izlaganu, prelazak nanosa sa dna u suspendovani nanos se opisuje sa članom izvora S_k koji predstavlja gubitak mase za posmatranu kontrolnu zapreminu pa se u razmatranoj jednačini održanja mase javlja sa negativnim predznakom

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_a \cdot B)}{\partial t} + \frac{(\varphi_k)_{ds} - (\varphi_k)_{us}}{\Delta x} = -S_k \cdot B. \quad (3.39)$$

Član izvora suspednovanog nanosa predstavlja razliku vertikalnog fluksa usmerenog na gore koji uvlači nanos sa dna u suspenziju E^{sed} i fluksa deponovanja zrna nanosa iz suspenzije na rečno dno D^{sed} ,

$$S_k = E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}.$$

Usled ove razmene dolazi do promene kote dna i kote podine aktivnog sloja što izaziva razmenu materijala sa sledećim slojem - aktivnim podlojem (aktivnim stratummom). Navedena razmena se opisuje sa članom razmene sa dubljim slojevima $(S_f)_k$. Po konvenciji je član razmene dobitak za aktivni sloj pa se u jednačini održanja mase javlja sa pozitivnim predznakom. Iz prethodno navedenog stava po definiciji sledi da se $(S_f)_k$ u jednačini održanja mase nanosa za aktivni stratum mora javiti kao gubitak. Dakle, razmatrana jednačina se može napisati u njenoj sledećoj formi kao

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_a \cdot B)}{\partial t} + \frac{(\varphi_k)_{ds} - (\varphi_k)_{us}}{\Delta x} = -E_k^{\text{sed}} \cdot B + D_k^{\text{sed}} \cdot B + (S_f)_k \cdot B,$$

gde φ_k predstavlja pronos mase vučenog nanosa $[MT^{-1}]$, a $(S_f)_k$ je fluks razmene sa dubljim slojevima $[ML^{-2}T^{-1}]$.

Tokom proračuna se jednačine strujanja i jednačine kojima se opisuje transport nanosa i deformacija korita rešavaju nezavisno. Prvo se sprovodi proračun hidrauličkog dela, nakon čega se prelazi na rešavanje jednačina vezanih za nanos. Zbog toga se

tokom rešavanja jednačina vezanih za nanos može smatrati da se veličine koje su rezultat hidrauličkog proračuna ne menjaju. Sa ovakvim pristupom se u poslednjoj jednačini širina vodnog ogledala može izvući ispred znaka izvoda po vremenu. Uvođenjem dodatne pretpostavke, da je širina vodnog ogledala unutar kontrolne zapremine konstantna se pronos mase vučenog nanosa može podeliti sa širinom vodnog ogledala da bi se dobio fluks vučenog nanosa po jedinici širine ϕ_k . U tom slučaju su svi članovi jednačine pomnoženi sa B pa se deljenjem jednačine sa B dobija konačan oblik jednačine održanja mase aktivnog sloja,

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_a)}{\partial t} + \frac{(\phi_k)_{ds} - (\phi_k)_{us}}{\Delta x} = -E_k^{\text{sed}} + D_k^{\text{sed}} + (S_f)_k. \quad (3.40)$$

3.2.3. Globalna jednačina održanja mase aktivnog sloja i stratuma

Sabiranjem jednačine održanja mase nanosa aktivnog sloja po svim frakcijama se dobija jednačina (3.41)

$$\begin{aligned} \rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(E_a \cdot B \cdot \sum_{k=1}^K \beta_k \right) + \frac{\sum_{k=1}^K [(\varphi_k)_{ds} - (\varphi_k)_{us}]}{\Delta x} = \\ = \sum_{k=1}^K B \cdot ((S_f)_k - E_k^{\text{sed}} + D_k^{\text{sed}}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Suma procentualnog udela svih frakcija u mešavini nanosnog materijala je po definiciji 100%, sa čime je dobijena dodatna jednačina

$$\sum_{k=1}^K \beta_k = 1. \quad (3.42)$$

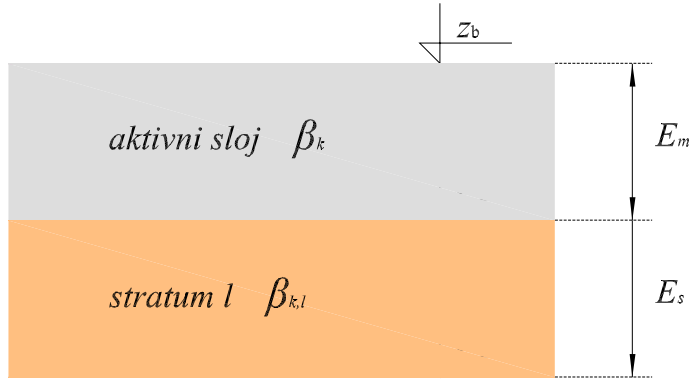
Uvrstanjem jednačine (3.42) u jednačinu (3.41) se dobija

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (E_a \cdot B)}{\partial t} + \frac{\sum_{k=1}^K [(\varphi_k)_{ds} - (\varphi_k)_{us}]}{\Delta x} - \sum_{k=1}^K B \cdot ((S_f)_k - E_k^{\text{sed}} + D_k^{\text{sed}}) = 0. \quad (3.43)$$

Debljina aktivnog sloja se definiše kao razlika kote dna (vodotoka) z_b (ili površina aktivnog sloja) i kote podine aktivnog sloja z_{bf} , $E_a = z_b - z_{bf}$. Razmene materijala na i pri dnu sa materijalom iz suspenzije izaziva promenu raspodele frakcija u aktivnom sloju i konačno rezultuje u promeni debljine aktivnog sloja. Da bi se odredila ova promena prvo se razmatraju slojevi ispod aktivnog sloja, slika 4.

Jednačina održanja mase nanosa k -te frakcije aktivnog (ili l -tog) stratuma se dobija analogno jednačini održanja mase aktivnog sloja. Imajući u vidu da u aktivnom stratumu nema pronosa vučenog nanosa ni razmene sa suspendovanim materijalom kao i konvenciju o definiciji predznaka člana koji definiše razmenu mase između aktivnog sloja i stratuma ispod njega, jednačina održanja mase nanosa k -te frakcije l -tog stratuma ima oblik

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (\beta_{k,l} \cdot E_{s,l} \cdot B)}{\partial t} + (S_f)_k \cdot B = 0.$$



Slika 4: Aktivni sloj sa stratumom

Sumiranjem poslednje jednačine po svim frakcijama nanosne mešavine se dobija globalna jednačina održanja mase aktivnog stratuma

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial \left(E_{s,l} \cdot B \cdot \sum_{k=1}^K \beta_{k,l} \right)}{\partial t} + \sum_{k=1}^K [(S_f)_k \cdot B] = 0. \quad (3.44)$$

Za bilo koji stratum, analogno aktivnom sloju, važi da je

$$\sum_{k=1}^K \beta_{k,l} = 1,$$

pa se primenom ovog uslova na jednačinu (3.44) dobija da je

$$\rho_s (1 - p) \cdot \frac{\partial (E_{s,l} \cdot B)}{\partial t} = - \sum_{k=1}^K [(S_f)_k \cdot B]. \quad (3.45)$$

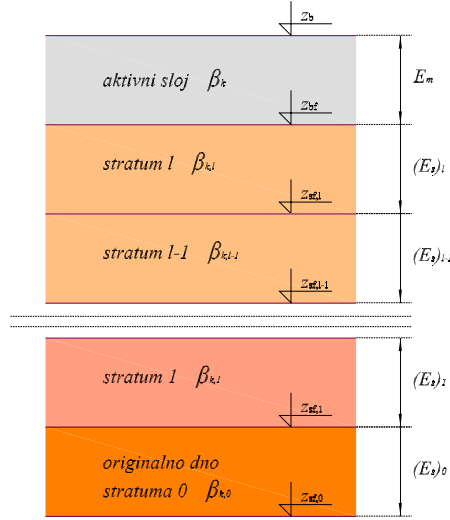
Iz jednačine (3.45) se može zaključiti da promena debljine aktivnog stratuma zavisi samo od razmene mase sa aktivnim slojem.

Analogno prethodnom izlaganju se dolazi do jednačine održanja mase sledećeg stratuma $l - 1$,

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (E_{s,l-1} \cdot B)}{\partial t} = 0, \quad (3.46)$$

gde nema člana razmene sa aktivnim slojem jer stratum $l - 1$ nije u kontaktu sa njim. Jednačina oblika (3.46) može da se napiše za svaki sledeći stratum sve do poslednjeg na čijem se dnu nalazi referentna kota z_f . Za referentnu kotu se uzima da je $z_f = 0$ (slika 5) i da se tokom vremena ne menja. Sabiranjem jednačina održanja mase nanosa za aktivni sloj i sve stratum (sumiranih po frakcijama) se dobija globalna jednačina održanja mase aktivnog sloja i stratuma (tj. globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu)

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (z_b \cdot B)}{\partial t} + \frac{\sum_{k=1}^K [(\varphi_k)_{ds} - (\varphi_k)_{us}]}{\Delta x} + \sum_{k=1}^K (E_k^{\text{sed}} \cdot B - D_k^{\text{sed}} \cdot B) = 0.$$



Slika 5: Aktivni sloj sa svim stratumima do referentne kote dna

Uz isto obrazloženje kao u slučaju jednačine održanja mase nanosa u aktivnom sloju se može smatrati da se širina vodnog ogledala tokom proračuna nanosa ne menja i da je konstantna unutar posmatrane kontrolne zapremine pa se deljenjem sa B dobija konačan oblik globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\sum_{k=1}^K [(\phi_k)_{ds} - (\phi_k)_{us}]}{\Delta x} + \sum_{k=1}^K (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) = 0. \quad (3.47)$$

U poslednjoj jednačini se usled sabiranja pod izvodom javlja razlika $z_b - z_f$. Primenom pretpostavke da je $z_f = \text{const.} = 0$ se jednačina svela na naveden izraz.

Pregled raspoloživih jednačina i nepoznatih veličina

Radi preglednosti se ponovo navode jednačine koje se rešavaju u okviru linijskog modela transporta nanosa i deformacije korita:

K komada jednačina održanja mase suspendovanog nanosa

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} \cdot A \right) + \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A}, \quad (3.48)$$

K komada jednačina održanja mase nanosa aktivnog sloja

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_m)}{\partial t} + \frac{(\phi_k)_{ds} - (\phi_k)_{us}}{\Delta x} = -E_k^{\text{sed}} + D_k^{\text{sed}} + (S_f)_k, \quad (3.49)$$

jedna globalna jednačina održanja mase aktivnog sloja i podslojeva

$$\rho_s \cdot (1 - p) \cdot \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\sum_{k=1}^K [(\phi_k)_{ds} - (\phi_k)_{us}]}{\Delta x} + \sum_{k=1}^K (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) = 0. \quad (3.50)$$

Za sada na raspolaganju stoje $2K + 1$ jednačina. Nepoznate veličine u prethodno navedenim jednačinama su:

- K nepoznatih koncentracija suspendovanog nanosa C_k ,
- K nepoznatih flukseva razmene sa dubljim slojevima $(S_f)_k$,
- K nepoznatih vertikalnih flukseva usmerenih na gore usled uvlačenja zrna nanosa sa dna u suspenziju E_k^{sed} ,
- K nepoznatih flukseva usled deponovanja zrna nanosa iz suspenzije na dno D_k^{sed} ,
- K nepoznatih pronosa mase vučenog nanosa po jedinici širine ϕ_k ,
- K nepoznatih frakcionih zastupljenosti granulometrijskih intervala u mešavini nanosnog materijala,
- *jedna* nepoznata debljina aktivnog sloja E_a ,
- *jedna* nepoznata kota dna z_b ,

što je ukupno $6K + 2$ nepoznatih, dakle potrebno je obezbediti $4K + 1$ dodatnih jednačina.

Osnovne nepoznate u formiranom sistemu jednačina su K koncentracija suspendovanog nanosa osrednjenih po preseku, K raspodela frakcija u aktivnom sloju i jedna kota površine dna. Koncentracija merodavna za određivanje člana E_k^{sed} , koeficijent difuzije, fluks vučenog nanosa, debljina aktivnog sloja i brzina tonjenja su veličine koje zavise od karakteristika toka i/ili primarnih nanosnih nepoznatih, i određuju se primenom odgovarajućih empirijskih zavisnosti datih u prilogu F.

4. Numeričko rešavanje jednačina

U poglavlju 3. su prikazane jednačine koje su primenjene za opisivanje procesa strujanja vode (poglavlje 3.1.) i transporta nanosa i promene kote dna (poglavlje 3.2.). Sledeći korak u fazi izrade modela je diskretizacija i rešavanje izvedenih jednačina. Za diskretizaciju *St. Venant*-ovih jednačina je primenjena šema metode konačnih razlika koja se zasniva na integralnim jednačinama, takozvana *Preissmann*-ova šema, detaljno razmatrana u poglavlju 4.1. Nakon diskretizacije se prelazi na rešavanje izvedenog sistema jednačina, i prilagođavanje algoritma rešavanja kako bi razvijeni programski kod mogao da podrži modelisanje strujanja u granatoj mreži prirodnih tokova. Posle kompletiranja algoritma za rešavanje jednačina linijskog neustaljenog tečenja u mreži otvorenih tokova se prelazi na diskretizaciju i rešavanje jednačina transporta nanosa i deformacije korita. Za rešavanje jednačina transporta nanosa i promene kote dna je usvojena metoda razlomljenih koraka zbog njene osobine da dozvoljava zasebno rešavanje delova jednačina sa numeričkom metodom koja datom članu najviše odgovara. Detaljno objašnjenje usvojenog koncepta numeričkog rešavanja, diskretizovanih jednačina, dodatnih jednačina neophodnih za simulaciju procesa transporta nanosa i promene kote dna u granatoj mreži otvorenih tokova i samog algoritma rešavanja je prikazano u poglavlju 4.2.

4.1. Mreža prirodnih vodotokova

Polazne jednačine za izradu linijskog modela neustaljenog tečenja u mreži otvorenih tokova su *St. Venant*-ove jednačine date u poglavlju 3.1. U narednim poglavljima 4.1.1., 4.1.2., 4.1.3. i 4.1.4. su prikazane diskretizacija i rešavanje polaznih jednačina. Sa ovim poglavljima je zaokružen pregled jednačina i postupaka rešavanja strujanja vode na jednoj deonici toka. Pošto se u prikazanom radu razmatra strujanje vode u granatoj mreži otvorenih tokova, dva naredna poglavlja (4.1.5. i 4.1.6.) su neophodna za kompletiranje sistema jednačina i postupka rešavanja.

4.1.1. Jednačine linijskog neustaljenog strujanja

Za diskretizaciju jednačina tečenja se koristi *Preissmann*-ova šema koja predlaže aproksimacije izvoda navedene u nastavku. Opravdanje za implementaciju navedene šeme u razvijen model se može naći u pregledu literature, gde je ustanovljeno da se radi o robusnoj i pouzdanoj numeričkoj metodi korišćenoj od strane velikog broja autora. Aproksimacija izvoda proizvoljne fukcije po prostoru je data se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \theta \cdot \frac{f_i^{n+1} - f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \cdot \frac{f_i^n - f_{i+1}^n}{\Delta x},$$

aproksimacija izvoda proizvoljne funkcije po vremenu

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \psi \cdot \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t} + (1 - \psi) \cdot \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t},$$

dok je aproksimacija same proizvoljne funkcije

$$f \cong \theta \cdot \frac{f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \cdot \frac{f_i^n + f_{i+1}^n}{2},$$

pri čemu je u originalnoj šemi $\psi = 0.5$.

Jednačina kontinuiteta

Primenom navedenih aproksimacija na jednačinu kontinuiteta (3.15) se dobija izraz sledećeg oblika

$$\psi \frac{A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n}{\Delta t} + (1 - \psi) \frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t} + \theta \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Q_i^n - Q_{i+1}^n}{\Delta x} = 0,$$

gde su nepoznate A_i^{n+1} , A_{i+1}^{n+1} , Q_i^{n+1} i Q_{i+1}^{n+1} , pa se jednačina može napisati kao funkcija ovih nepoznatih

$$F_1 = F(A_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_i^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) = 0. \quad (4.51)$$

Izvedena jednačina je nelinearna algebarska jednačina koju je potrebno linearizovati. Za linearizaciju i rešavanje jednačine se koristi *Newton-Raphson*-ov iterativni postupak koji je detaljno opisan u master radu autora Isic (2008).

Posmatra se funkcija F_1 u dve uzastopne iteracije m i $m + 1$. Pretpostavka je da u m -toj iteraciji jednačina (4.51) nije zadovoljena, dok je F_1 u $m + 1$ -oj iteraciji takvo da zadovoljava datu jednakost. Vrednost funkcije ${}^{m+1}F_1$ se razvija u *Taylor*-ov red u okolini vrednosti mF_1 uz zanemarivanje izvoda višeg reda. Primenom uslova da je ${}^{m+1}F_1 = 0$ može da se izrazi mF_1

$$\begin{aligned} -{}^mF_1 &= \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} \right|_m \cdot \Delta Q_{i+1} + \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_i^{n+1}} \right|_m \cdot \Delta Q_i + \\ &+ \left. \frac{\partial F_1}{\partial A_{i+1}^{n+1}} \right|_m \cdot \left. \frac{\partial A_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \right|_m \cdot \Delta Z_{i+1} + \left. \frac{\partial F_1}{\partial A_i^{n+1}} \right|_m \cdot \left. \frac{\partial A_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \right|_m \cdot \Delta Z_i, \end{aligned} \quad (4.52)$$

gde su ΔQ i Δz redom nepoznat priraštaj protoka i nivoa između dve uzastopne iteracije, dok su sve ostale veličine poznate iz prethodne iteracije tekućeg vremenskog nivoa, ili iz prethodnog vremenskog nivoa. Navode se izvodi

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} \right|_m &= -\frac{\theta}{\Delta x}, & \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_i^{n+1}} \right|_m &= \frac{\theta}{\Delta x}, & \left. \frac{\partial F_1}{\partial A_{i+1}^{n+1}} \right|_m &= \frac{\psi}{\Delta t}, \\ \left. \frac{\partial F_1}{\partial A_i^{n+1}} \right|_m &= \frac{1 - \psi}{\Delta t}, & \left. \frac{\partial A_{i+1}^{n+1}}{\partial z_{i+1}^{n+1}} \right|_m &= {}^m b_{i+1}^{n+1}, & \left. \frac{\partial A_i^{n+1}}{\partial z_i^{n+1}} \right|_m &= {}^m b_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Vraćanjem navedenih izvoda u jednačinu (4.52) se dobija izraz

$$A \cdot \Delta Z_{i+1} + B \cdot \Delta Q_{i+1} = C \cdot \Delta Z_i + D \cdot \Delta Q_i + G, \quad (4.54)$$

gde su koeficijenti dati u prilogu A.

Dinamička jednačina

Dinamička jednačina (3.16) se diskretizuje primenom *Preissmann*-ovih aproksimacija. Zbog obima jednačine se njena diskretizacija radi član po član. Preglednosti radi, za neke delove jednačina su korišćene skraćene oznake koje su navedene u prilogu A.

Član 1

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \cong \psi \cdot \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} + (1 - \psi) \cdot \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t}.$$

Član 2

$$2 \cdot \alpha \cdot \frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \cong 2 \cdot FALPHA \cdot 0.5 \cdot FQDIVA \cdot \left(\theta \cdot \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \cdot \frac{Q_i^n - Q_{i+1}^n}{\Delta x} \right)$$

Član 3

$$-\alpha \cdot \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cong -FALPHA \cdot FQSAS \cdot \left(\theta \cdot \frac{A_i^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \cdot \frac{A_i^n - A_{i+1}^n}{\Delta x} \right)$$

Član 4

$$\frac{Q^2}{A} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cong 0.5 \cdot FQSA \cdot \left(\theta \cdot \frac{\alpha_i^{n+1} - \alpha_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \cdot \frac{\alpha_i^n - \alpha_{i+1}^n}{\Delta x} \right)$$

Član 5

$$g \cdot A \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cong g \cdot FA \cdot \left(\theta \cdot \frac{z_i^{n+1} - z_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \cdot \frac{z_i^n - z_{i+1}^n}{\Delta x} \right)$$

Član 6

Ovaj član u sebi sadrži nagib trenja S_f . Kako bi se u jednačini zadržao pravac tečenja, nagib trenja se piše kao

$$S_f = \frac{Q \cdot |Q|}{K^2}.$$

Pošto su jednačina kontinuiteta i dinamička jednačina pisane za računsku ćeliju između dve računске tačke, nagib trenja predstavlja nagib koji se odnosi na čitavu ćeliju. Međutim, proticaj Q i propusna moć K su definisani samo u računskim tačkama. Zbog toga se nagib trenja vezan za računsku ćeliju izražava preko osrednjenih vrednosti Q i K za računске tačke posmatrane deonice, odnosno

$$S_f = \beta \cdot (S_f)_{i+1} + (1 - \beta) \cdot (S_f)_i = \beta \cdot \left(\frac{Q_{i+1} \cdot |Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2} \right) + (1 - \beta) \cdot \left(\frac{Q_i \cdot |Q_i|}{K_i^2} \right)$$

a primenom aproksimacije same funkcije je

$$S_f = \theta \cdot [\beta \cdot (S_f)_{i+1}^{n+1} + (1 - \beta) \cdot (S_f)_i^{n+1}] + (1 - \theta) \cdot [\beta \cdot (S_f)_{i+1}^n + (1 - \beta) \cdot (S_f)_i^n] = SFRICT$$

Posmatrani član je konačno

$$g \cdot A \cdot S_f \cong g \cdot FA \cdot SFRICT.$$

Navedeni članovi jednačine, koji su diskretizovani primenom *Preissmann*-ove šeme, se vraćaju u jednačinu (3.16) uz primenu da je $\Delta x' = -\Delta x$. Razlog za uvođenje prethodno navedene oznake se krije u činjenici da se stacionaže reka mere od ušća u uzvodnom smeru. Ova konvencija uzrokuje nepogodnost da je pozitivan pravac prostorne koordinate suprotan u odnosu na podrazumevani pravac tečenja, pa se uvođenjem nove oznake olakšava formulisanje radnih jednačina i programiranje istih. Kompletna diskretizovana algebarska jednačina je data u prilogu A, i ona može da se napiše kao funkcija nepoznatih veličina koje se u njoj javljaju.

$$F_2 = F(Q_{i+1}, Q_i, A_i, A_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, Z_i^{n+1}, Z_{i+1}, K_{i+1}, K_i, (C_f)_{i+1}, (C_f)_i)^{n+1} = 0 \quad (4.55)$$

Ovako dobijena nelinearna algebarska jednačina se linearizuje analogno jednačini kontinuiteta, tako da se dobija izraz

$$\begin{aligned}
-mF_2 = & \frac{\partial F_2}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \Delta Q_{i+1} + \frac{\partial F_2}{\partial Q_i^{n+1}} \Big|_m \Delta Q_i + \frac{\partial F_2}{\partial A_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial A_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_{i+1} + \\
& + \frac{\partial F_2}{\partial A_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial A_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_i + \frac{\partial F_2}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_{i+1} + \frac{\partial F_2}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_i + \\
& + \frac{\partial F_2}{\partial K_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_{i+1}^{n+1}}{\partial (C_f)_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial (C_f)_{i+1}^{n+1}}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \Delta Q_{i+1} + \\
& + \frac{\partial F_2}{\partial K_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_i^{n+1}}{\partial (C_f)_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial (C_f)_i^{n+1}}{\partial Q_i^{n+1}} \Big|_m \Delta Q_i + \\
& + \frac{\partial F}{\partial K_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_{i+1} + \frac{\partial F}{\partial K_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_i + \\
& + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial \alpha_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_{i+1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial \alpha_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m \Delta Z_i.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Poslednja jednačina se preuređuje grupisanjem članova u zavisnosti od toga uz koju se nepoznatu nalaze. Jednačina se može napisati u sledećem obliku

$$A' \cdot \Delta Z_{i+1} + B' \cdot \Delta Q_{i+1} = C' \cdot \Delta Z_i + D' \cdot \Delta Q_i + G', \tag{4.57}$$

gde su koeficijenti

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{\partial F_2}{\partial A_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial A_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m + \frac{\partial F_2}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial \alpha_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m + \frac{\partial F_2}{\partial K_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \Big|_m, \\
B' &= \frac{\partial F_2}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} \Big|_m + \frac{\partial F_2}{\partial K_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_{i+1}^{n+1}}{\partial (C_f)_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial (C_f)_{i+1}^{n+1}}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} \Big|_m \\
C' &= \frac{\partial F_2}{\partial K_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial \alpha_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m + \frac{\partial F_2}{\partial A_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial A_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m + \frac{\partial F_2}{\partial Z_i^{n+1}} \Big|_m, \\
D' &= -\frac{\partial F_2}{\partial Q_i^{n+1}} \Big|_m - \frac{\partial F_2}{\partial K_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial K_i^{n+1}}{\partial (C_f)_i^{n+1}} \Big|_m \frac{\partial (C_f)_i^{n+1}}{\partial Q_i^{n+1}} \Big|_m, \\
G' &= -mF_2.
\end{aligned}$$

Vrednosti koeficijenata su za dinamičku jednačinu navedene u opštem obliku, dok su sami izvodi dati u prilogu A.

Izraz za hidrauličku provodljivost se razlikuje u zavisnosti od toga da li se računa preko *Strickler*-ovog izraza ili *Darcy-Weisbach*-ve formule. Koristeći *Strickler*-ov izraz K postaje

$$K = n_{str} \cdot A \cdot R^{2/3} = n_{str} \cdot \frac{A^{5/3}}{O^{2/3}},$$

dok se u slučaju *Darcy-Weisbach*-ove formule dobija

$$K = A \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R}{f}} = \frac{A^{3/2}}{O^{1/2}} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot g}{f}}.$$

Nakon što se odrede izvodi koji se javljaju u navedenim izrazima, mogu se sračunati koeficijenti dinamičke jednačine.

4.1.2. Unutrašnji granični uslovi

Od unutrašnjih graničnih uslova se razmatraju poznat nivogram i poznat hidrogram kao najzastupljeniji unutrašnji granični uslovi.

Hidrogram

Kada je kao unutrašnji granični uslov zadat poznat proticaj tokom vremena (hidrogram), na raspolaganju stoje dve jednačine, od kojih je prva jednačina kontinuiteta u dve susedne računске tačke

$${}^{m+1}Q_{i+1}^{n+1} = {}^{m+1}Q_i^{n+1}.$$

Jednačina kontinuiteta može da se napiše u sledećem obliku

$${}^mQ_{i+1}^{n+1} + \Delta Q_{i+1} = {}^{m+1}Q_i^{n+1} + \Delta Q_i.$$

Poslednja jednačina je diskretizovan oblik jednačine kontinuiteta iz koje se određuju koeficijenti za „double-sweep” algoritam. Cilj je da se dobije jednačina istog oblika kao jednačina kontinuiteta odnosno dinamička jednačina za proizvoljnu tačku unutar razmatrane računске oblasti,

$$A \cdot \Delta Z_{i+1} + B \cdot \Delta Q_{i+1} = C \cdot \Delta Z_i + D \cdot \Delta Q_i + G.$$

Upoređivanjem diskretizovane jednačine kontinuiteta sa uopštenim oblikom jednačine se dolazi do koeficijenata

$$A' = 0, \quad B' = 1, \quad D' = 1, \quad C' = 0, \quad G' = {}^{m+1}Q_i^{n+1} - {}^mQ_{i+1}^{n+1}.$$

Druga jednačina koja stoji na raspolaganju je oblika

$$Q_{i+1}^{n+1} = Q(t).$$

Razvijanjem u *Taylor*-ov red u okolini vrednosti iz prethodne iteracije uz zanemarivanje izvoda drugog i višeg reda se dobija

$${}^{m+1}Q_{i+1}^{n+1} = {}^mQ_{i+1}^{n+1} + \Delta Q_{i+1} = Q(t).$$

Upoređivanjem diskretizovane jednačine sa uopštenim oblikom dinamičke jednačine se dolazi do koeficijenata

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad G = Q(t) - {}^mQ_{i+1}^{n+1}.$$

Nivogram

Ako se na granici deonice koja se nalazi unutar sistema granate mreže otvorenih tokova (deonica koja nije na uzvodna deonica celog sistema) poznaje promena nivoa tokom vremena, na raspolaganju stoji jedna jednačina kontinuiteta i dodatna jednačina u zavisnosti od toga da li se granični uslov nalazi na uzvodnoj ili nizvodnoj granici posmatrane deonice. Ako se radi o uzvodnom kraju deonice, dodatna jednačina je oblika

$$z_{i+1}^{n+1} = z(t).$$

Koeficijenti jednačine kontinuiteta su isti kao u slučaju poznate veze protoka i vremena i neće se ponoviti. Linearizacijom druge jednačine se dobija

$${}^{m+1}z_{i+1}^{n+1} = {}^mz_{i+1}^{n+1} + \Delta z_{i+1} = z(t).$$

Koeficijenti za dalji proračun su

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad G = z(t) - {}^m z_{i+1}^{n+1}.$$

Ukoliko se granični uslov nalazi na nizvodnoj granici posmatrane deonice, jednačina i njen linearizovan oblik su

$$z_i^{n+1} = z(t), \quad {}^{m+1} z_i^{n+1} = {}^m z_i^{n+1} + \Delta z_i = z(t).$$

U ovom slučaju su koeficijenti za dalji proračun

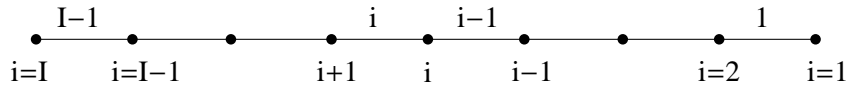
$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad G = {}^m z_i^{n+1} - z(t).$$

4.1.3. Rešavanje sistema jednačina

Diskretizacijom i linearizacijom polaznih parcijalnih diferencijalnih jednačina se došlo do sistema linearnih algebarskih jednačina koji se rešava u svakoj iteraciji svakog vremenskog koraka. Izvedene jednačine su napisane za računsku ćeliju koja je smeštena između dve susedne računске tačke, odakle se može zaključiti da zatvaranje formiranog sistema zahteva dve dodatne jednačine, po jednu za krajnje tačke računске oblasti. Dodatne jednačine su jednačine graničnih uslova koje se u opštem obliku mogu napisati kao

$$\alpha \cdot \Delta Z + \beta \cdot \Delta Q = \gamma. \quad (4.58)$$

Dodatno se napominje da se indeksi uz nepoznate priraštaje proticaja i nivoa odnose na računске tačke dok se indeksi uz koeficijente odnose na računске ćelije smeštene između dve susedne računске tačke, slika 6.



Slika 6: Računske tačke i računске ćelije

Sistem jednačina je

$$\begin{aligned} & \alpha_{US} \cdot \Delta z_I \quad + \beta_{US} \cdot \Delta Q_I \quad \quad \quad = \gamma_{US} \quad (I) \\ -C'_{I-1} \cdot \Delta z_{I-1} \quad -D'_{I-1} \cdot \Delta Q_{I-1} \quad +A'_{I-1} \cdot \Delta z_I \quad +B'_{I-1} \cdot \Delta Q_I & = G'_{I-1} \quad (I-1)' \\ -C_{I-1} \cdot \Delta z_{I-1} \quad -D_{I-1} \cdot \Delta Q_{I-1} \quad +A_{I-1} \cdot \Delta z_I \quad +B_{I-1} \cdot \Delta Q_I & = G_{I-1} \quad (I-1) \\ -C'_{I-2} \cdot \Delta z_{I-2} \quad -D'_{I-2} \cdot \Delta Q_{I-2} \quad +A'_{I-2} \cdot \Delta z_{I-1} \quad +B'_{I-2} \cdot \Delta Q_{I-1} & = G'_{I-2} \quad (I-2)' \\ -C_{I-2} \cdot \Delta z_{I-2} \quad -D_{I-2} \cdot \Delta Q_{I-2} \quad +A_{I-2} \cdot \Delta z_{I-1} \quad +B_{I-2} \cdot \Delta Q_{I-1} & = G_{I-2} \quad (I-2) \\ & \vdots \\ -C'_i \cdot \Delta z_i \quad -D'_i \cdot \Delta Q_i \quad +A'_i \cdot \Delta z_{i+1} \quad +B'_i \cdot \Delta Q_{i+1} & = G'_i \quad (i)' \\ -C_i \cdot \Delta z_i \quad -D_i \cdot \Delta Q_i \quad +A_i \cdot \Delta z_{i+1} \quad +B_i \cdot \Delta Q_{i+1} & = G_i \quad (i) \\ & \vdots \\ -C'_1 \cdot \Delta z_1 \quad -D'_1 \cdot \Delta Q_1 \quad +A'_1 \cdot \Delta z_2 \quad +B'_1 \cdot \Delta Q_2 & = G'_2 \quad (2)' \\ -C_1 \cdot \Delta z_1 \quad -D_1 \cdot \Delta Q_1 \quad +A_1 \cdot \Delta z_2 \quad +B_1 \cdot \Delta Q_2 & = G_2 \quad (2) \\ & \quad \quad \quad \alpha_{DS} \cdot \Delta z_1 \quad + \beta_{DS} \cdot \Delta Q_1 \quad = \gamma_{DS} \quad (1) \end{aligned}$$

Prikazan sistem jednačina se rešava *Thomas*-ovim („double-sweep”) algoritmom, koji se redovno primenjuje u slučaju tridijagonalnih matrica.

4.1.4. Thomas-ov algoritam

Kako bi se proračunom obuhvatila situacija da se više pritoka spaja u jednu, odnosno da se jedna deonica grana u više deonica, proračun se razlikuje od slučaja kada se razmatra tečenje duž toka u kojem nema grananja. Predpostavlja se da važe sledeće zavisnosti

$$\begin{aligned}\Delta Q_i &= E_i \cdot \Delta z_i + F_i + H_i \cdot \Delta z_I, \\ \Delta Q_I &= E'_i \cdot \Delta z_i + F'_i + H'_i \cdot \Delta z_I.\end{aligned}\quad (4.59)$$

Prva od jednačina (4.59) daje vezu priraštaja proticaja u proizvoljnoj tački sa priraštajem nivoa u proizvoljnoj (i -toj) i najuzvodnijoj ($i = I$) tački. Druga jednačina daje vezu priraštaja protoka u najuzvodnijoj tački sa priraštajem nivoa u proizvoljnoj i najuzvodnijoj tački. Ispisivanjem jednačine

$$\Delta Z_i = RL_{i-1} \cdot \Delta Z_{i-1} + RM_{i-1} \cdot \Delta Q_{i-1} + RN_{i-1} \quad (4.60)$$

i njenim uvrštanjem zajedno sa prvom jednačinom (4.59) u jednačinu

$$-C_{i-1} \cdot \Delta Z_{i-1} - D_{i-1} \cdot \Delta Q_{i-1} + A_{i-1} \cdot \Delta Z_i + B_{i-1} \cdot \Delta Q_i = G_{i-1} \quad (4.61)$$

preuređivanjem se dobija

$$\Delta Q_{i-1} = F_{i-1} + H_{i-1} \cdot \Delta Z_I + \Delta Z_{i-1} \cdot E_{i-1}, \quad (4.62)$$

gde su poznati koeficijenti

$$\begin{aligned}E_{i-1} &= \frac{C_{i-1} - RL_{i-1} \cdot (A_{i-1} + B_{i-1} \cdot E_i)}{RM_{i-1} \cdot (A_{i-1} + B_{i-1} \cdot E_i) - D_{i-1}}, \\ H_{i-1} &= \frac{-B_{i-1} \cdot H_i}{RM_{i-1} \cdot (A_{i-1} + B_{i-1} \cdot E_i) - D_{i-1}}, \\ F_{i-1} &= \frac{G_{i-1} - RN_{i-1} \cdot (A_{i-1} + B_{i-1} \cdot E_i) - B_{i-1} \cdot F_i}{RM_{i-1} \cdot (A_{i-1} + B_{i-1} \cdot E_i) - D_{i-1}}.\end{aligned}\quad (4.63)$$

Prikazani izrazi mogu da se napišu i za proizvoljnu tačku i ,

$$\begin{aligned}E_i &= \frac{C_i - RL_i \cdot (A_i + B_i \cdot E_{i+1})}{RM_i \cdot (A_i + B_i \cdot E_{i+1}) - D_i}, & H_i &= \frac{-B_i \cdot H_{i+1}}{RM_i \cdot (A_i + B_i \cdot E_{i+1}) - D_i}, \\ F_i &= \frac{G_i - RN_i \cdot (A_i + B_i \cdot E_{i+1}) - B_i \cdot F_{i+1}}{RM_i \cdot (A_i + B_i \cdot E_{i+1}) - D_i}, & \Delta Q_i &= F_i + H_i \cdot \Delta Z_I + \Delta Z_i \cdot E_i.\end{aligned}$$

Uvrštanjem prve od jednačina (4.59) napisane za tačku $i-1$ i jednačine (4.60) u drugu jednačinu iz (4.59) se dobija

$$\Delta Q_I = E'_{i-1} \cdot \Delta Z_{i-1} + H'_{i-1} \cdot \Delta Z_I + F'_{i-1}, \quad (4.64)$$

gde su poznati koeficijenti

$$\begin{aligned}E'_{i-1} &= E'_i \cdot [RL_{i-1} + RM_{i-1} \cdot E_{i-1}], & H'_{i-1} &= H'_i + E'_i \cdot RM_{i-1} \cdot H_{i-1}, \\ F'_{i-1} &= F'_i + E'_i \cdot [RM_{i-1} \cdot F_{i-1} + RN_{i-1}],\end{aligned}\quad (4.65)$$

ili za računsku tačku i

$$\begin{aligned} E'_i &= E'_{i+1} \cdot [RL_i + RM_i \cdot E_i], & H'_i &= H'_{i+1} + E'_{i+1} \cdot RM_i \cdot H_i, \\ F'_i &= F'_{i+1} + E'_{i+1} \cdot [RM_i \cdot F_i + RN_i], & \Delta Q_I &= E'_i \cdot \Delta Z_i + H'_i \cdot \Delta Z_I + F'_i. \end{aligned}$$

Koeficijenti E, F i H zahtevaju izraze za inicijalizaciju. Ovi izrazi se dobijaju polazeći od jednačina

$$\begin{aligned} -C_{I-1} \cdot \Delta Z_{I-1} - D_{I-1} \cdot \Delta Q_{I-1} + A_{I-1} \cdot \Delta Z_I + B_{I-1} \cdot \Delta Q_I &= G_{I-1}, \\ -C'_{I-1} \cdot \Delta Z_{I-1} - D'_{I-1} \cdot \Delta Q_{I-1} + A'_{I-1} \cdot \Delta Z_I + B'_{I-1} \cdot \Delta Q_I &= G'_{I-1}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Jednačine (4.66) se kombinuju tako da se iz njih eliminiše priraštaj protoka za tačku I , pa se dobija izraz

$$\Delta Q_{I-1} = E_{I-1} \cdot \Delta Z_{I-1} + F_{I-1} + H_{I-1} \cdot \Delta Z_I, \quad (4.67)$$

gde su poznati koeficijenti

$$\begin{aligned} E_{I-1} &= \frac{C'_{I-1} B_{I-1} - C_{I-1} B'_{I-1}}{D_{I-1} B'_{I-1} - D'_{I-1} B_{I-1}}, & F_{I-1} &= \frac{G'_{I-1} B_{I-1} - G_{I-1} B'_{I-1}}{D_{I-1} B'_{I-1} - D'_{I-1} B_{I-1}}, \\ H_{I-1} &= \frac{A_{I-1} B'_{I-1} - A'_{I-1} B_{I-1}}{D_{I-1} B'_{I-1} - D'_{I-1} B_{I-1}}. \end{aligned}$$

Izrazi za inicijalizaciju koeficijenata E', F' i H' se dobijaju polazeći od istih jednačina, njihovim kombinovanjem tako da se eliminiše priraštaj protoka u tački $I-1$, pa se dobija izraz

$$\Delta Q_I = E'_{I-1} \cdot \Delta Z_{I-1} + F'_{I-1} + H'_{I-1} \cdot \Delta Z_I$$

gde su poznati koeficijenti

$$\begin{aligned} E'_{I-1} &= \frac{C_{I-1} D'_{I-1} - C'_{I-1} D_{I-1}}{B_{I-1} D'_{I-1} - B'_{I-1} D_{I-1}}, & F'_{I-1} &= \frac{G_{I-1} D'_{I-1} - G'_{I-1} D_{I-1}}{B_{I-1} D'_{I-1} - B'_{I-1} D_{I-1}}, \\ H'_{I-1} &= \frac{A'_{I-1} D_{I-1} - A_{I-1} D'_{I-1}}{B_{I-1} D'_{I-1} - B'_{I-1} D_{I-1}}. \end{aligned}$$

Koeficijenti RL_i, RM_i i RN_i se dobijaju kombinacijom jednačina $(I-1)$ i $(I-1)'$ tako da se iz njih eliminiše priraštaj protoka u tački I da se dobije

$$\Delta Z_I = RL_{I-1} \cdot \Delta Z_{I-1} + RM_{I-1} \cdot \Delta Q_{I-1} + RN_{I-1},$$

gde su poznati koeficijenti

$$\begin{aligned} RL_{I-1} &= \frac{C_{I-1} B'_{I-1} - C'_{I-1} B_{I-1}}{A_{I-1} B'_{I-1} - A'_{I-1} B_{I-1}}, & RM_{I-1} &= \frac{D_{I-1} B'_{I-1} - D'_{I-1} B_{I-1}}{A_{I-1} B'_{I-1} - A'_{I-1} B_{I-1}}, \\ RN_{I-1} &= \frac{G_{I-1} B'_{I-1} - G'_{I-1} B_{I-1}}{A_{I-1} B'_{I-1} - A'_{I-1} B_{I-1}}, \end{aligned}$$

uz napomenu da dobijeni izrazi važe za proizvoljnu tačku $i-1$ pa važe i za proizvoljnu računsku tačku i .

4.1.5. Proračun nepoznatih kota u čvorovima

Razmatra se proizvoljan sistem mreže otvorenih tokova sa ukupno N čvorova. Za svaki čvor unutar razmatranog sistema (izuzev graničnih uslova koji se posebno razmatraju) mogu da se napišu po dve jednačine, jedna jednačina kontinuiteta i jedna energetska jednačina. Jednačina kontinuiteta za proizvoljan čvor N po svim deonicama koji u dati čvor ulaze ili iz njega izlaze je

$$\sum_{l_{in}=1, l_{out}=1}^{L_{in}, L_{out}} {}^{m+1}Q_{N, l_{in}/out}^{n+1} = 0.$$

Linearizacijom jednačine kontinuiteta se dobija

$$\sum_{l_{in}=1, l_{out}=1}^{L_{in}, L_{out}} \left({}^m Q_{N, l_{in}/out}^{n+1} + \Delta Q_{N, l_{in}/out} \right) = 0. \quad (4.68)$$

Jednačina tipa (4.68) može da se napiše za svaki čvor u sistemu pri čemu se protoci deonica javljaju kao pozitivni ukoliko je deonica ulazna za dati čvor, a kao negativni ukoliko je deonica za dati čvor izlazna. Za energetska jednačinu se koristi uslov jednakosti nivoa u čvorovima

$${}^{m+1}z_{1, l_{in}}^{n+1} = {}^{m+1}z_{I, l_{out}}^{n+1},$$

odnosno jednakost priraštaja nivoa u čvorovima

$$\Delta z_{1, l_{in}} = \Delta z_{I, l_{out}}.$$

Pošto se na početku proračuna u čvorovima podešava da su nivoi svih ulaznih deonica u čvoru jednaki, onda se uslov o jednakosti priraštaja nivoa konačno svodi na uslov jednakosti nivoa. Radi jednostavnijeg obeležavanja se za priraštaj nivoa u čvorovima uvodi oznaka Δz_N , pa je energetska jednačina

$$\Delta z_{1, l_{in}} = \Delta z_{I, l_{out}} = \Delta z_N. \quad (4.69)$$

Cilj je da se u jednačini (4.68) nepoznati priraštaji protoka zamene sa izrazima u kojima se kao nepoznate javljaju priraštaji nivoa, kako bi se konačno dobio sistem jednačina u kome se kao nepoznate javljaju samo priraštaji nivoa u čvorovima. Formiranje pomenutog sistema jednačina se sastoji od sledećih koraka:

- ispisivanje jednačine kontinuiteta (4.68) za proizvoljan čvor N . Predznak za protoke je pozitivan ako je deonica ulazna za dati čvor, a negativan ukoliko deonica izlazi iz čvora;
- zamena priraštaja protoka u jednačini kontinuiteta sa izrazima (4.59). Za ulazne deonice se koristi prvi od dva data izraza, a za izlazne drugi;
- primena uslova (4.69) na dobijenu jednačinu;
- određivanje koeficijenata za formulisanje uopštenog sistema jednačina.

Za svaki čvor koji nije na granici mogu da se napišu po dve jednačine sa po dve nepoznate (nepoznat priraštaj protoka i nivoa). Pomoću jednačina (4.59) se nepoznati priraštaji protoka menjaju sa jednačinama u kojima se javljaju priraštaji nivoa (nepoznat priraštaj

najuzvodnije odnosno najnižvodnije tačke deonice). Odavde je jasno da zatvaranje sistema zahteva poznate granične uslove na oba kraja (uzvodne i nizvodne). Ako je na nizvodnoj granici poznata vrednost nivoa tokom vremena to znači da je

$$\Delta z_{1,DS} = z_{1,DS}(t^{n+1}) - {}^m z_{1,DS}^{n+1}. \quad (4.70)$$

Ako je na uzvodnoj granici poznata vrednost nivoa tokom vremena to znači da je

$$\Delta z_{I,US} = z_{I,US}(t^{n+1}) - {}^m z_{I,US}^{n+1} = \Delta z_{I,US}. \quad (4.71)$$

I konačno, ako je na nizvodnoj granici poznat proticaj tokom vremena onda je

$$Q_{DS}(t^{n+1}) = {}^{m+1}Q_{DS}^{n+1}, \quad \text{odnosno} \quad Q_{DS}(t^{n+1}) = {}^m Q_{DS}^{n+1} + \Delta Q_{DS}.$$

Odavde se upoređivanjem sa opštim oblikom jednačine graničnog uslova (4.58) dobijaju traženi koeficijenti

$$\alpha_{DS} = 0, \quad \beta_{DS} = 1, \quad \gamma_{DS} = Q_{DS}(t^{n+1}) - {}^m Q_{DS}^{n+1}.$$

Rezultat proračuna unapred je jednačina sledećeg oblika

$$\Delta Q_{1,DS} = \Delta Q_1 = F_1 + H_1 \cdot \Delta z_I + \Delta z_1 \cdot E_1 = F_{DS} + H_{DS} \cdot \Delta z_{I,DS} + \Delta z_{1,DS} \cdot E_{DS}.$$

Ako se ova jednačina sabere sa jednačinom nizvodnog graničnog uslova koja je prethodo podeljena sa $-\beta_{DS}$ dobija se

$$\frac{\gamma_{DS}}{\beta_{DS}} - F_{DS} = \Delta z_{1,DS} \cdot \left[E_{DS} + \frac{\alpha_{DS}}{\beta_{DS}} \right] + H_{DS} \cdot \Delta z_{I,DS}. \quad (4.72)$$

Sličnim postupkom se dolazi do jednačine (4.73) za slučaj da je uzvodni granični uslov zadat hidrogram,

$$\frac{\gamma_{US}}{\beta_{US}} - F'_{US} = \left[\frac{\alpha_{US}}{\beta_{US}} + H'_{US} \right] \cdot \Delta z_{I,US} + E'_{US} \cdot \Delta z_{1,US}. \quad (4.73)$$

4.1.6. Rešavanje sistema jednačina za mrežu

Ispisivanjem jednačina graničnih uslova je zatvoren sistem jednačina. Pomenuti sistem može da se napiše u sledećem obliku¹

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}^w & a_{1,2}^w & \cdots & a_{1,Nds-1}^w & a_{1,Nds}^w \\ a_{2,1}^w & a_{2,2}^w & \cdots & a_{2,Nds-1}^w & a_{2,Nds}^w \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{Nds-1,1}^w & a_{Nds-1,2}^w & \cdots & a_{Nds-1,Nds-1}^w & a_{Nds-1,Nds}^w \\ a_{Nds,1}^w & a_{Nds,2}^w & \cdots & a_{Nds,Nds-1}^w & a_{Nds,Nds}^w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta z_{n_1} \\ \Delta z_{n_2} \\ \vdots \\ \Delta z_{n_{Nds-1}} \\ \Delta z_{n_{Nds}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^w \\ b_2^w \\ \vdots \\ b_{Nds-1}^w \\ b_{Nds}^w \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

ili jednostavnije kao

$$[A^w] \cdot \{\Delta Z_N\} = \{B^w\}.$$

¹Radi kompaktnijeg pisanja u jednačini 4.74 je uvedeno skraćeno obeležavanje po kojem se uzima da je $Nodes = Nds$.

Rešenje sistema se dobija množenjem jednačine sa inverznom matricom koeficijenata $[A^w]^{-1}$ sa leve strane

$$\{\Delta z_N\} = [A^w]^{-1} \cdot \{B^w\}.$$

Koeficijenti za čvorove

Formiranje sistema oblika (4.74) podrazumeva da se sve jednačine kontinuiteta napišu u opštem obliku

$$a_{N,1}^w \cdot \Delta z_{n_1} + a_{N,2}^w \cdot \Delta z_{n_2} + \dots + a_{N,Nodes-1}^w \cdot \Delta z_{n_{Nodes-1}} + a_{N,Nodes}^w \cdot \Delta z_{n_{Nodes}} = b_N^w, \quad (4.75)$$

gde se prvi indeks uz koeficijente a odnosi na čvor za koji se piše jednačina kontinuiteta, a drugi koeficijent ide po svim čvorovima. Postupak kojim se dolazi do konačnog oblika jednačina za proračun priraštaja nivoa je dat u poglavlju 4.1.5. zbog čega se ovde neće ponavljati. Poslednji naveden korak je određivanje koeficijenata za formulisanje uopštenog sistema jednačina. Opšti oblik svake jednačine (a konačno i sistema) se dobija upođivanjem izvedene jednačine kontinuiteta sa jednačinom (4.75). Traženi koeficijenti za proizvoljan čvor N u opštem obliku postaju

$$\begin{aligned} a_{N,1}^w &= a_{N,2}^w = \dots = a_{N,N-2}^w = 0, \\ a_{N,N-1}^w &= \sum_{l_{in}=1}^{L_{in}} H_{1,l_{in}}, \\ a_{N,N}^w &= \sum_{l_{in}=1}^{L_{in}} E_{1,l_{in}} - \sum_{l_{out}=1}^{L_{out}} H'_{1,l_{out}}, \\ a_{N,N+1}^w &= - \sum_{l_{out}=1}^{L_{out}} E'_{1,l_{out}}, \\ a_{N,N+2}^w &= a_{N,N+3}^w = \dots = a_{N,Nodes}^w = 0, \\ b_N^w &= - \sum_{l_{in}=1}^{L_{in}} ({}^m Q_{1,l_{in}}^{n+1} + F_{1,l_{in}}) + \sum_{l_{out}=1}^{L_{out}} ({}^m Q_{I,l_{out}}^{n+1} + F'_{1,l_{in}}). \end{aligned}$$

Koeficijenti za granične uslove

Upoređivanjem opšteg oblika jednačine za čvorove (4.75) sa jednačinom nizvodnog graničnog uslova u slučaju poznatog nivograma (4.70) se dobijaju koeficijenti

$$\begin{aligned} a_{Nodes,1}^w &= a_{Nodes,2}^w = \dots = a_{Nodes,N-1}^w = 0, \\ a_{Nodes,Nodes}^w &= 1, \\ b_{Nodes}^w &= z_{1,DS}(t^{n+1}) - {}^m z_{1,DS}^{n+1}. \end{aligned}$$

Ako je poznat nivogram na uzvodnoj granici poređenjem jednačine (4.75) sa jednačinom (4.71) se dobijaju koeficijenti

$$\begin{aligned} a_{1,1}^w &= 1, \\ a_{1,2}^w &= a_{1,3}^w \dots = a_{1,N-1}^w = a_{1,N}^w = 0, \\ b_1^w &= z_{I,US}(t^{n+1}) - {}^m z_{I,US}^{n+1}. \end{aligned}$$

Ako je na nizvodnoj granici dat hidrogram poređenjem jednačine (4.75) sa (4.72) se

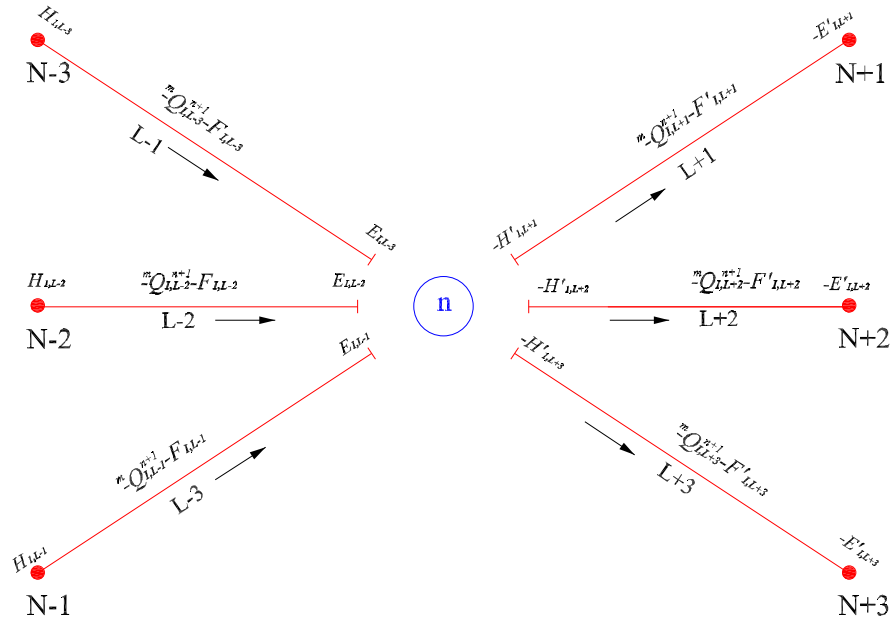
dobijaju koeficijenti

$$\begin{aligned} a_{Nodes,1}^w &= a_{Nodes,2}^w = \dots = a_{Nodes,N-2}^w = 0, \\ a_{Nodes,Nodes-1}^w &= H_{1,DS}, \\ a_{Nodes,Nodes}^w &= E_{1,DS} + \frac{\alpha_{DS}}{\beta_{DS}}, \\ b_{Nodes}^w &= \frac{\gamma_{DS}}{\beta_{DS}} - F_{1,DS}. \end{aligned}$$

I konačno, ako je na uzvodnoj granici zadat hidrogram poređenjem jednačine (4.73) sa (4.75) se dobijaju koeficijenti

$$\begin{aligned} a_{1,1}^w &= \frac{\alpha_{US}}{\beta_{US}} + H'_1, \\ a_{1,2}^w &= E'_1, \\ a_{1,3}^w &= a_{1,4}^w = \dots = a_{1,N-1}^w = a_{1,N}^w = 0, \\ b_1^w &= \frac{\gamma_{US}}{\beta_{US}} - F'_1. \end{aligned}$$

Primer čvora sa označenim ulaznim i izlaznim deonicama i pripadajućim koeficijentima je prikazan na slici 7.



Slika 7: Detalj čvora N sa ulaznim i izlaznim deonicama

Generalizacija koeficijenata

Prilikom rešavanja sistema (4.74) treba imati u vidu da će dimenzija matrice koju je potrebno rešiti imati broj kolona i redova jednak broju čvorova. Kako se prilikom proračuna sistema otvorenih tokova obično radi o velikom broju čvorova, sa ciljem ubrzanja proračuna se problem svodi na invertovanje onoliko matrica koliko je grupa čvorova u sistemu, NG . Dimenzije svake od NG matrica su jednake maksimalnom broju čvorova u

grupi ng_{NG} .

Jednačine (4.74) mogu da se reše na opisani način jedino ako se prethodno rastave na NG podsistema. Broj novih sistema je jednak broju grupa čvorova, pa će sistem od NG grupa čvorova imati NG podsistema. Radi preglednosti je sistem (4.74) ispisan sa označenim podsistemima, jednačina (4.76).

Svaki od navedenih podsistema se sastoji od $ng(NG)$ čvorova pa će i broj jednačina u podsistemu biti jednak sa maksimalnim brojem čvorova u datoj grupi $ng(NG)$. Tokom proračuna se razlikuju tri grupe čvorova, prethodna koja čini matricu $R_{i,j}$, srednja (trenutno posmatrana) grupa $SMAT_{i,j}$, i naredna grupa $T_{i,j}$. Ove matrice su dvodimenzionalne a indeksi i i j redom označavaju čvor za koji je napisana jednačina kontinuiteta i čvor na drugom kraju posmatrane deonice. Kako bi se odredilo da li deonica ulazi ili izlazi iz čvora uvodi se promenljiva $RLSIGN$ gde $RLSIGN < 0$ označava da posmatrana deonica ulazi u čvor, a $RLSIGN > 0$ da deonica iz njega izlazi.

$$\begin{bmatrix} a_{ng1(1),ng1(1)}^w \\ \vdots \\ a_{ng1(NG1),ng1(1)}^w \\ \vdots \\ a_{ng1(NG1),ng1(NG1)}^w \\ \vdots \\ a_{NG(1),ng1(1)}^w \\ \vdots \\ a_{NG(NG),ng1(1)}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & a_{ng1(1),ng1(NG1)}^w & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ng1(NG1),ng1(NG1)}^w & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{NG(1),ng1(NG1)}^w & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{NG(NG),ng1(NG1)}^w & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ng1(1),NG(NG)}^w \\ \vdots \\ a_{ng1(NG1),NG(NG)}^w \\ \vdots \\ a_{NG(1),NG(NG)}^w \\ \vdots \\ a_{NG(NG),NG(NG)}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{n,ng1(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{n,ng1(NG1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{n,NG(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{n,NG(NG)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ng1(1)}^w \\ \vdots \\ b_{ng1(NG1)}^w \\ \vdots \\ b_{NG(1)}^w \\ \vdots \\ b_{NG(NG)}^w \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

$$\begin{bmatrix} b_{ng1(1)}^w \\ \vdots \\ b_{ng1(NG1)}^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ng1(1),ng1(1)}^w & \cdots & a_{ng1(1),ng1(NG1)}^w \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ng1(NG1),ng1(1)}^w & \cdots & a_{ng1(NG1),ng1(NG1)}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{n,ng1(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{n,ng1(NG1)} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{ng1(1),NG(1)}^w \\ \vdots \\ a_{ng1(NG1),NG(1)}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{n,NG(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{n,NG(NG)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} b_{NG(1)}^w \\ \vdots \\ b_{NG(NG)}^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{NG(1),ng1(1)}^w & \cdots & a_{NG(1),ng1(NG1)}^w \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{NG(NG),ng1(1)}^w & \cdots & a_{NG(NG),ng1(NG1)}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{n,ng1(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{n,ng1(NG1)} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{NG(1),NG(NG)}^w \\ \vdots \\ a_{NG(NG),NG(NG)}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{n,NG(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{n,NG(NG)} \end{bmatrix}.$$

Inverzija matrice koeficijenata čvorova

Izvedene jednačine mogu da se napišu za svaki čvor proizvoljne mreže otvorenih tokova. Međutim, u cilju ubrzanja proračuna se mreža otvorenih tokova sa ukuono *Nodes* čvorova deli u *NG* grupa, pa se invertovanje matrica radi po grupama čvorova. Bilo koja od navedenih grupa se sastoji od čvorova koji su povezani samo međusobno, ili sa čvorovima sledeće ili prethodne grupe. Dve grupe mogu biti povezane samo preko jednog čvora. Ako se sa *ng* označi proizvoljna grupa čvorova koja nije ni prva ni poslednja, može se napisati jednačina kontinuiteta za posmatranu grupu u formi matrice jednačine

$$[R]_{ng}\{\Delta z\}_{ng-1}+[S]_{ng}\{\Delta z\}_{ng}+[T]_{ng}\{\Delta z\}_{ng+1}=\{V\}_{ng}, \quad (4.77)$$

gde *ng-1* i *ng+1* redom označavaju prethodnu i narednu grupu čvorova u odnosu na posmatranu *ng* grupu. Veličina $\{\Delta z\}_{ng}$ je vektor koji se sastoji od toliko priraštaja nivoa koliko je čvorova u grupi *ng*. Matrice *R*, *S* i *T* su podmatrice matrice *A* date jednačinom (4.76).

Prilikom proračuna se jednačina (4.77) ispisuje za svaku grupu čvorova. Onda se upoređivanjem jednačine (4.77) sa (4.76) određuju matrice koeficijenata. Ako se posmatra čvor *ng* matrice se sastoje od sledećih članova

$$[S]_{ng}=\begin{bmatrix} a_{ng(1),ng(1)}^w & \cdots & a_{ng(1),ng(NG)}^w \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ng(NG),ng(1)}^w & \cdots & a_{NG(1),ng(NG)}^w \end{bmatrix}, [\Delta z]_{ng}=\begin{Bmatrix} \Delta z_{ng(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{ng(NG)} \end{Bmatrix},$$

njoj prethodna matrica je *R*_{ng}

$$[R]_{ng}=\begin{bmatrix} a_{ng(1),ngl(1)}^w & \cdots & a_{ng(1),ngl(NGl)}^w \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ng(NG),ngl(1)}^w & \cdots & a_{NG(1),ngl(NGl)}^w \end{bmatrix}, \{\Delta z\}_{ngl}=\begin{Bmatrix} \Delta z_{ngl(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{ngl(NGl)} \end{Bmatrix},$$

gde je *ngl = ng-1* prethodni čvor u odnosu na posmatrani *ng* čvor, sledeća matrica je

$$[T]_{ng}=\begin{bmatrix} a_{ng(1),ngd(1)}^w & \cdots & a_{ng(1),ngd(NGd)}^w \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ng(NG),ngd(1)}^w & \cdots & a_{NG(1),ngd(NGd)}^w \end{bmatrix}, \{\Delta z\}_{ngd}=\begin{Bmatrix} \Delta z_{ngd(1)} \\ \vdots \\ \Delta z_{ngd(NGd)} \end{Bmatrix},$$

gde je *ngd = ng+1* naredni čvor u odnosu na *ng* i slobodan član

$$\{V\}_{ng}=\begin{Bmatrix} b_{ng(1)}^w \\ \vdots \\ b_{ng(NG)}^w \end{Bmatrix}.$$

Matrična jednačina tipa (4.77) se ispisuje za sve grupe čvorova uz napomenu da prva grupa nema prethodnu, a poslednja narednu usled čega se odgovarajući članovi gube iz jednačine. Radi sticanja boljeg uvida u složenost sistema, dimenzije članova u matričnoj jednačini (4.77) su date u tabeli 7.

Algoritam za inverziju matrica se izvodi polazeći od pretpostavke da može da se napiše zavisnost sledećeg oblika

$$\{\Delta z\}_{ng-1}=[E]_{ng-1}\cdot\{\Delta z\}_{ng}+\{F\}_{ng-1},$$

Element	Broj kolona	Broj redova
$\{\Delta z\}_{ngl}$	1	NGl
$\{\Delta z\}_{ng}$	1	NG
$\{\Delta z\}_{ngd}$	1	NGd
$[R]_{ng}$	NGl	NG
$[S]_{ng}$	NG	NG
$[T]_{ng}$	NGd	NG
$[V]_{ng}$	1	NG

Tabela 7: Tabelarni prikaz dimenzija matrica u hidrauličkom proračunu

gde je $[E]_{ng-1}$ nepoznata matrica sa ng kolona i $ng-1$ redova, a ng je broj čvorova u grupi ng . Vektor $\{F\}_{ng-1}$ je nepoznat i sadrži ng_{NG-1} redova. Kada se poslednja jednačina uvrsti u jednačinu (4.77) pa se dobijen izraz pomnoži sa leve strane sa $[[R]_{ng} \cdot [E]_{ng-1} + [S]_{ng}]^{-1}$ rezultujući izraz daje vezu nepoznatih priraštaja kota slobodne povr vsine vode u dva susedna čvora,

$$\{\Delta z\}_{ng} = [E]_{ng} \{\Delta z\}_{ng+1} + \{F\}_{ng}, \quad (4.78)$$

gde su

$$[E]_{ng} = - \left[[R]_{ng} \cdot [E]_{ng-1} + [S]_{ng} \right]^{-1} [T]_{ng},$$

$$\{F\}_{ng} = \left[[R]_{ng} \cdot [E]_{ng-1} + [S]_{ng} \right]^{-1} \cdot \left[\{V\}_{ng} - [R]_{ng} \cdot \{F\}_{ng-1} \right],$$

Sada se sa poznatim koeficijentima $[E]_{ng-1}$ i $\{F\}_{ng-1}$ pomoću uvek poznatih koeficijenata iz jednačine (4.77) mogu odrediti koeficijenti $[E]_{ng}$ i $\{F\}_{ng}$ za čvorove $NG = 2, 3, \dots, NG$. Koeficijenti $[E]_{ng1}$ i $\{F\}_{ng1}$ se određuju ispisivanjem jednačine (4.77) za prvu grupu čvorova

$$[S]_{ng1} \{\Delta z\}_{ng1} + [T]_{ng1} \{\Delta z\}_{ng2} = \{V\}_{ng1}.$$

Kako prva grupa $ng1$ nema prethodnu grupu onda se iz jednačine (4.77) gubi član koji u proračun uvodi prethodnu grupu. Jednačina se preuređuje tako da se dobije

$$\{\Delta z\}_{ng1} = [E]_{ng1} \{\Delta z\}_{ng2} + \{F\}_{ng1},$$

gde su

$$[E]_{ng1} = -[S]_{ng1}^{-1} [T]_{ng1}, \quad \{F\}_{ng1} = [S]_{ng1}^{-1} \{V\}_{ng1}.$$

Sa izvedenim jednačinama proračun može da se sprovede po svim grupama čvorova i mogu da se odrede svi koeficijenti $[E]_{ng}$ i $\{F\}_{ng}$. Ovaj deo proračuna se naziva „matrix forward sweep” pri čemu dimenzije kvadratnih matrica koje je potrebno invertovati nikada nisu veće od najvećeg broja čvorova u grupi.

Nakon proračuna u napred se određuje priraštaj nivoa slobodne površine vode u poslednjoj grupi čvorova $\{\Delta z\}_{NG}$ kako bi mogao da se započne proračun u nazad („matrix backward sweep”). Jednačina (4.77) se ispisuje za poslednju grupu čvorova u mreži

$$[R]_{NG} \{\Delta z\}_{NG-1} + [S]_{NG} \{\Delta z\}_{NG} = \{V\}_{NG}.$$

U dobijenu jednačinu se uvrštava jednačina (4.78) sa ciljem da se eliminiše priraštaj nivoa $\{\Delta z\}_{NG}$, odakle se dobija

$$\{\Delta z\}_{NG} = \{F\}_{NG},$$

gde je

$$\{F\}_{NG} = \frac{[\{V\}_{NG} - [R]_{NG} \cdot \{F\}_{NG-1}]}{[[R]_{NG} \cdot [E]_{NG-1} + [S]_{NG}]}$$

Pošto se odredi vektor $\{\Delta z\}_{NG}$, redom se određuju priraštaji nivoa slobodne površine vode za ostale grupe, primenom ranije date jednačine. Prednost primenjenog postupka je u značajnoj redukciji dimenzije matrica koje je potrebno invertovati. Programom je definisano da je najnižvodniji čvor prvi čvor pa se redni brojevi čvorova povećavaju prema uzvodnom kraju. Za sam proračun inverzne matrice je primenjen maksimum pivot postupak (*Gauss-Jordan-ov* postupak) detaljno opisan u Carnahan et al. (1969).

4.2. Transport nanosa i deformacija korita

Najznačajnije osobine numeričkog rešenja su tačnost, konvergencija, konzistencija i stabilnost. Tačnost numeričkog rešenja se ogleda u tome koliko dobro diskretizovana jednačina aproksimira diferencijalnu jednačinu. Sa obzirom da se za diskretizaciju jednačine i graničnih uslova često koriste numeričke šeme različite tačnosti, obično je nemoguće utvrditi sveobuhvatnu tačnost modela. Sistem jednačina se smatra konsistentnim originalnoj diferencijalnoj jednačini ukoliko se za svaku računsku tačku, za slučaj da dužina računске ćelije teži nuli, diskretizovana jednačina svodi na polaznu diferencijalnu jednačinu. Numerička stabilnost se odnosi na porast ili opadanje grešaka nastalih u bilo kojoj fazi proračuna. Smatra se da je algoritam stabilan ako je kumulativan efekat grešaka tokom njegove primene zanemarljiv. Za proveru stabilnosti se primenjuju *von Neuman-ova* analiza stabilnosti (Isic i Spasojević, 2009) ili matrična metoda (Fletcher, 1991). Za rešenje diskretizovane jednačine se kaže da konvergira ako aproksimirano rešenje teži tačnom rešenju originalne diferencijalne jednačine kada rastojanje između računskih tačaka teži nuli.

4.2.1. Koncept numeričkog rešavanja

Sistem jednačina koji opisuje transport suspendovanog nanosa i nanosa na i pri dnu se sastoji od jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, jednačine održanja mase nanosa u aktivnom sloju i globalne jednačine održanja mase. Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa je mešovitog matematičkog karaktera, advektivno - difuzionog, zbog čega je usvojena metoda razlomljenih koraka (Yanenko, 1971) ili etapno numeričko rešavanje. Prednost ove metode što ona dozvoljava da se polazna jednačina rešava po delovima kako bi se svaki njen deo tretirao sa njemu numerički najpovoljnijim pristupom (Spasojević i Holly, 1990; Gessler et al., 1999; Wu, 2008; Hung et al., 2009; Budinski, 2011; Isic et al., 2013). Polazeći od jednačine održanja mase suspendovanog nanosa k -te frakcije

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} \cdot A \right) + \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A}, \quad (4.79)$$

primenom metode razlomljenih koraka jednačina može da se rastavi na lokalnu promenu mase usled advekcije i difuzije. Lokalna promena mase suspendovanog nanosa usled advekcije, označena indeksom a , je

$$\left(\frac{\partial C_k}{\partial t} \right)^a = -u \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} + \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A}, \quad (4.80)$$

što istovremeno predstavlja jednačinu advektivnog koraka. Jednačina difuzionog koraka se dobija kada se od lokalne promene mase usled difuzije dodate na advekciju, indeks

$a+d$, oduzme lokalna promena mase usled advekcije,

$$\left(\frac{\partial C_k}{\partial t}\right)^{a+d} - \left(\frac{\partial C_k}{\partial t}\right)^a = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} \cdot A \right). \quad (4.81)$$

Prikazan sistem jednačina se rešava u dva koraka. U prvom koraku se rešava advekcija suspendovanog nanosa sa razmenom, a u drugom difuzija. Ovakav pristup za sobom povlači potrebu za simultanim rešavanjem jednačina kako bi se ispunio uslov da je suma raspodele frakcija $\sum \beta = 1$. Advekcija suspendovanog nanosa sa članom razmene je jednačina hiperboličkog karaktera i opisuje lokalnu promenu koncentracije suspendovanog nanosa usled uticaja advekcije i članova razmene E_k^{sed} i D_k^{sed} . Difuzija suspendovanog nanosa je data jednačinom eliptičnog karaktera i opisuje lokalnu promenu koncentracije suspendovanog nanosa usled dejstva difuzije dodatog na uticaj advekcije sa članovima razmene.

Numerička rešenja jednačina hiperboličkog karaktera su sklona numeričkim problemima poput numeričke difuzije, oscilacija i nestabilnosti. Kako bi se ovi problemi izbegli, za rešavanje jednačine advekcije suspendovanog nanosa sa članom razmene je primenjena metoda karakteristika sa prostornom interpolacijom višeg reda (Isic et al., 2013). Jednačina difuzionog koraka se rešava primenom implicitne šeme metode konačnih razlika. Kretanje nanosa na i pri dnu je spor proces zbog čega su jednačina održanja mase aktivnog sloja i globalna jednačina održanja mase diskretizovane integraljenjem po vremenu i kontrolnoj zapremini. Kako bi se zadovoljio uslov da je suma procentualnog udela frakcija, po svim frakcijama, jednaka jedinici, sve jednačine za nanos na i pri dnu (jednačina održanjem mase nanosa u aktivnom sloju (3.40) i globalna jednačina održanja mase aktivnog sloja i stratuma (3.50)) sa ukupno K nepoznatih β i jednom nepoznatom kotom z_b , se rešavaju simultano primenom *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka (Budinski i Spasojević, 2013). Veza procesa na i pri dnu sa suspendovanim nanosom je obezbeđena preko članova razmene, a sam postupak proračuna je iterativan u svakom vremenskom koraku.

4.2.2. Advekcija - suspendovani nanos

Za rešavanje jednačina advektivnog koraka u proračunu transporta suspendovanog nanosa je sprovedena detaljna analiza primenom raznih šema metode konačnih razlika i metode karakteristika sa više tipova interpolacije. Detaljan pregled rezultata ovih istraživanja je prikazan u okviru testiranja modela u poglavlju 6.2. Na osnovu rezultata pomenutih istraživanja je zaključeno da je najpovoljniji pristup za modelisanje advekcije metoda karakteristika, te se ovo poglavlje odnosi na rešavanje jednačina advekcije njenom primenom.

Osnovna ideja metode karakteristika je da u ravni (x,t) postoje linije (karakteristične linije) duž kojih se polazna parcijalna diferencijalna jednačina transformiše u dve obične diferencijalne jednačine (Isic et al., 2013).

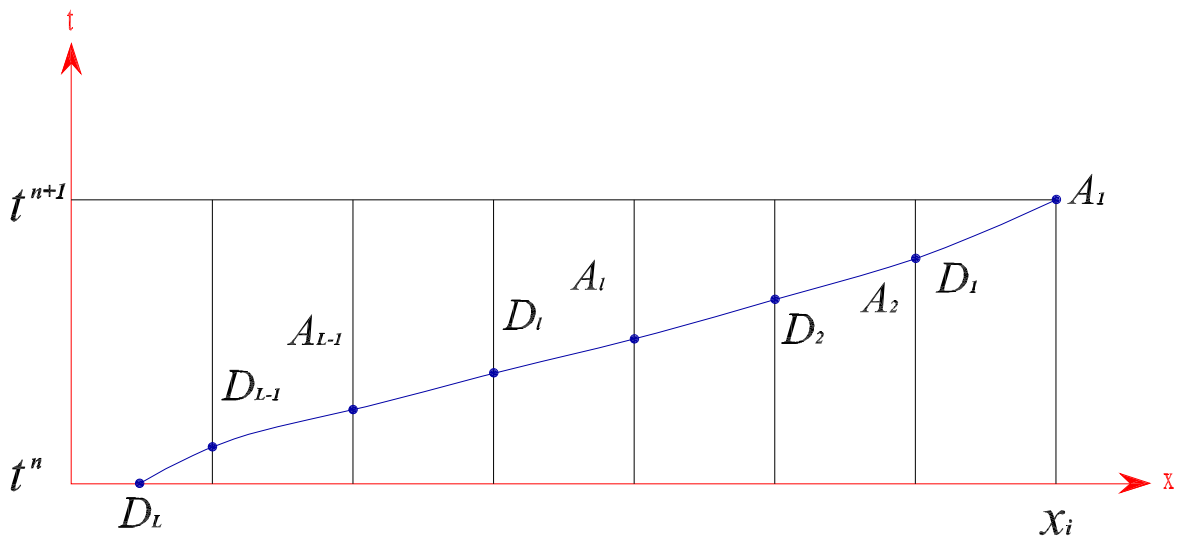
Transport suspendovanog nanosa usled advekcije je dat sa

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A}. \quad (4.82)$$

Primenom metode karakteristika se dobija obična diferencijalna jednačina

$$\frac{dC_k}{dt} = \frac{E_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A} - \frac{D_k^{\text{sed}} \cdot B}{\rho \cdot A}, \quad \text{koja važi duž } u = \frac{dx}{dt}. \quad (4.83)$$

Jednačine (4.83) se rešavaju integraljenjem duž trajektorije. Ograničavanjem dužine trajektorije na dužinu jedne računске ćelije se istovremeno unosi značajno ograničenje računskog koraka po vremenu, što rezultuje sporijim proračunom. Kako bi se omogućila primena većeg vremenskog koraka, prilikom rešavanja se ostavlja mogućnost da se trajektorija proteže kroz proizvoljan broj računskih ćelija jedne deonice (Spasojević i Holly, 1990). U pogledu dužine, trajektorije ostaju ograničene na rastojanje između dva susedna računska čvora. To praktično znači da trajektorija koja krene iz najuzvodnije računске tačke prve računске ćelije može da se prostire sve do nizvodne računске tačke na naj-nizvodnijoj ćeliji iste deonice. U tom slučaju se trajektorija deli na segmente, gde jedan segment predstavlja dužinu trajektorije u jednoj računskoj ćeliji. Trajektorija čestice može da se sastoji od proizvoljnog broja segmenata L , slika 8, sve dok je ukupna dužina manja od dužine deonice.



Slika 8: Prostiranje trajektorije kroz računске ćelije

U nastavku se rešava jednačina trajektorije jednog segmenta, a isti postupak se primenjuje na sve segmente. Integraljenjem jednačine trajektorije duž jednog segmenta, od polazne tačke D do dolazne tačke A , se dobija

$$\int_D^A dx = \int_D^A u \cdot dt \quad \Rightarrow \quad x_A - x_D = \frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D) \cdot (t_A - t_D),$$

Sve vrednosti u dolaznoj tački A su poznate, a vrednosti u tački D treba odrediti. Nepoznate su x_D , u_D i t_D , a na raspolaganju stoji samo jedna jednačina, zbog čega je njihovo određivanje iterativno. Uvodi se iterativno pravilo

$$x_A - x_D^{m+1} = \frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D^m) \cdot (t_A - t_D^{m+1}),$$

Koordinata polazne tačke trajektorije se određuje primenom sledeće jednačine

$$x_D^{m+1} = x_A - \frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D^m) \cdot (t_A - t_D^{m+1}).$$

Kada se započinje proračun, za početnu iteraciju $m = 0$ se uzima da je $u_D^m = u_A$ pa se jednačina svodi na

$$x_D^{m+1} = x_A - u_A \cdot (t_A - t_D^{m+1}).$$

U slučaju da je brzina u_A pozitivna, koordinata dolazne tačke je veća od koordinate polazne tačke, i obrnuto,

$$\begin{aligned} u_A > 0 &\Rightarrow x_D^{m+1} < x_A, \\ u_A < 0 &\Rightarrow x_D^{m+1} > x_A. \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga se određuju jednačine za proračun nepoznatog vremena t_D^{m+1} u kojem je trajektorija krenula iz x_D . Sa obzirom da je dolazno vreme trajektorije poznato, ono će poslužiti za određivanje polaznog vremena. Količnik pređenog puta i brzine daje vreme potrebno da se pređe put od x_D do x_A . Onda se nepoznato vreme može izračunati oduzimanjem količnika $\frac{x_i - x_{i-1}}{u_A}$ od t_A . Pošto je u početnoj iteraciji usvojena pretpostavka da je $u_A = u_D$, u prikazanom količniku umesto brzine u_D figuriše brzina u_A . Proračun se razlikuje u zavisnosti od toga da li je nepoznata brzina pozitivna, negativna ili jednaka nuli.

$$\begin{aligned} u_A > 0 &\Rightarrow x_A - x_D^{m+1} = x_i - x_{i+1} &\Rightarrow t_D^{m+1} = t_A - \frac{x_i - x_{i+1}}{u_A}, \\ u_A < 0 &\Rightarrow x_A - x_D^{m+1} = x_i - x_{i-1} &\Rightarrow t_D^{m+1} = t_A - \frac{x_i - x_{i-1}}{u_A}, \\ u_A = 0 &\Rightarrow x_A - x_D^{m+1} = 0 &\Rightarrow t_D^{m+1} = t_A. \end{aligned}$$

Nakon ovoga se razmatra slučaj kada je $m > 0$. Ukoliko nije reč o početnoj iteraciji, više ne važi ranija pretpostavka o jednakosti brzine polazne i dolazne tačke, odnosno $u_A \neq u_D$. Koordinata polazne tačke se računa preko jednačine

$$x_D^{m+1} = x_A - \frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D^m) \cdot (t_A - t_D^{m+1}).$$

U zavisnosti od predznaka prosečne brzine, razlikuju se dva slučaja

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D^m) > 0 &\Rightarrow x_D^{m+1} < x_A, \\ \frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D^m) < 0 &\Rightarrow x_D^{m+1} > x_A. \end{aligned}$$

Za proračun vremena se primenjuje isti princip kao u početnoj iteraciji uz napomenu da pošto je $u_A \neq u_D$, za brzinu se uzima srednja vrednost ove dve brzine.

$$\begin{aligned} (u_A + u_D^m) > 0 &\Rightarrow x_A - x_D^{m+1} = x_i - x_{i+1} &\Rightarrow t_D^{m+1} = t_A - \frac{x_i - x_{i+1}}{\frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D^m)} \\ (u_A + u_D^m) < 0 &\Rightarrow x_A - x_D^{m+1} = x_i - x_{i-1} &\Rightarrow t_D^{m+1} = t_A - \frac{x_i - x_{i-1}}{\frac{1}{2} \cdot (u_A + u_D^m)} \\ (u_A + u_D^m) = 0 &\Rightarrow x_A - x_D^{m+1} = 0 &\Rightarrow t_D^{m+1} = t_A \end{aligned}$$

Rezultat proračuna ne mora da bude tačna vrednost koordinate. Ukoliko se proračunom dobije neposredna okolina računске tačke smatra se da je položaj tačke određen,

$$\begin{aligned} (x_{i+1} - \varepsilon_x) < x_D^{m+1} < (x_{i+1} + \varepsilon_x) &\Rightarrow x_d = x_{i+1}, \\ (x_{i-1} - \varepsilon_x) < x_D^{m+1} < (x_{i-1} + \varepsilon_x) &\Rightarrow x_d = x_{i-1}. \end{aligned}$$

Nakon ovoga se prelazi na jednačinu advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k , pri čemu strategija rešavanja prati isti princip podele trajektorije na proizvoljan broj segmenata. Jednačina (4.83) se množi sa dt i integrali duž cele trajektorije od polazne tačke D_L L -tog segmenta do dolazne tačke A_1 prvog. U opštem slučaju se polazna tačka nalazi u n -tom vremenskom nivou, slika 8, međutim, ukoliko se radi o granici, D_L može da se nađe i bilo gde između n i $n+1$. Zato se, radi sveobuhvatnog izvođenja, u daljem razmatranju neće staviti indeks za vreme uz koncentraciju u polaznoj tački. Integraljenjem jednačine po segmentima se uopšteno može napisati

$$\int_{D_L}^{A_1} dC_k = \int_{D_L}^{A_1} \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \cdot dt.$$

Integraljenje na levoj strani rezultuje u razlici koncentracija između krajnjih tačaka trajektorije. Desna strana ne može da se integrali analitički, umesto toga je integral duž cele trajektorije rastavljen na sumu integrala po segmentima (segment je deo trajektorije unutar jedne računске ćelije).

$$\begin{aligned} (C_k)_{A_1} - (C_k)_{D_L} &= \underbrace{\int_{D_L}^{A_L} \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \cdot dt}_{\text{segment } L} + \underbrace{\int_{D_{L-1}}^{A_{L-1}} \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \cdot dt}_{\text{segment } L-1} + \dots + \\ &+ \underbrace{\int_{D_l}^{A_l} \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \cdot dt}_{\text{segment } l} + \dots + \underbrace{\int_{D_1}^{A_1} \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \cdot dt}_{\text{segment } 1}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Ispisani integrali se rešavaju numerički primenom uopštenog trapeznog pravila. Integraljenje se radi segment po segment i princip ostaje isti za sve segmente. Za proizvoljan l -ti segment se numeričkom integracijom dobija

$$\begin{aligned} &\int_{D_l}^{A_l} \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \cdot dt = \\ &= \left[(1-\theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_l} + \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{A_l} \right] \cdot (t_{A_l} - t_{D_l}). \end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg obeležavanja se uvodi oznaka $S_k^{\text{sed}} = E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}$. Primenom novog obeležavanja i navedenog principa pri najavljenom numeričkom integraljenju uz uvođenje

oznaka $A_L = D_{L-1}$, $A_1 = A_i$ i $t_{A_1} = t^{n+1}$ (Slika 8) jednačina (4.84) postaje

$$\begin{aligned}
& (C_k)_{A_1} - (C_k)_{D_L} = \\
& = \left[(1-\theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_L} + \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_{L-1}} \right] \cdot (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) + \\
& + \left[(1-\theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_{L-1}} + \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_{L-2}} \right] \cdot (t_{D_{L-2}} - t_{D_{L-1}}) + \\
& + \dots + \left[(1-\theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_{l+1}} + \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_l} \right] \cdot (t_{D_l} - t_{D_{l+1}}) + \\
& + \left[(1-\theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_l} + \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_{l-1}} \right] \cdot (t_{D_{l-1}} - t_{D_l}) + \\
& + \dots + \left[(1-\theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_2} + \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_1} \right] \cdot (t_{D_1} - t_{D_2}) + \\
& + \left[(1-\theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)_{D_1} + \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k^{\text{sed}} \right)^{n+1} \right] \cdot (t^{n+1} - t_{D_1}).
\end{aligned}$$

Tokom proračuna se za sve veličine E_k^{sed} i D_k^{sed} uzimaju vrednosti iz poslednje iteracije, osim za one koje se odnose na tačku i za koju je jednačina napisana. U nastavku se razmatrane jednačina preuređuje tako da se dobije

$$\begin{aligned}
& (C_k^a)_i - (C_k)_{D_L} = (1-\theta) \cdot (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_L} + \\
& + \sum_{l=L-1}^2 \left[[t_{D_{l-1}} \cdot (1-\theta) + t_{D_l} \cdot (2\theta-1) - t_{D_{l+1}} \cdot \theta] \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_l} \right] + \\
& + [t^{n+1} \cdot (1-\theta) + t_{D_1} \cdot (2\theta-1) - t_{D_2} \cdot \theta] \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_1} + \\
& + \theta \cdot (t^{n+1} - t_{D_1}) \cdot \left(\frac{B_k}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_i^{n+1}.
\end{aligned}$$

U slučaju da je $t_{D_L} = t^n$ onda se vrednosti $(C_k)_{D_L}$, A_{D_L} , B_{D_L} i $(S_k)_{D_L}$ dobijaju interpolacijom po prostoru. Ako je $t_{D_L} > t^n$ onda se pomenute vrednosti na uzvodnoj granici određuju interpolacijom po vremenu gde su njihove vrednosti u tekućem vremenskom nivou poznate, a na ostalim granicama se primenjuje procedura opisana u nastavku. Za slučaj da je $t_{D_L} > t^n$, koristi se linearna interpolacija koja je ranije opisana, pa je na primer, član izvora

$$(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_D = a_t \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^n + b_t \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1}.$$

Član $(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i$ je nepoznat u vremenu $n+1$, zbog čega u proračun ulazi njegova vrednost iz predhodne iteracije

$$(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_D = a_t \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^n + b_t \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1}.$$

Pošto član izvora zavisi od koncentracije suspendovanog nanosa, frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala u aktivnom sloju i drugih veličina, proračun nanosa bi postao

implicitan. Uzimanjem vrednosti iz prethodne iteracije se obezbeđuje eksplicitan karakter proračuna u prostornom smislu. Postupak proračuna je takav da se nakon hidrauličkog proračuna podešava da je u čvoru ${}^m(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})^{n+1} = (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})^n$. Sa ovime se prelazi na proračun nanosa i određuju se nepoznata koncentracija i $(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})$ tekućeg vremenskog nivoa u čvorovima, uzimajući za interpolaciju vrednosti iz prethodne iteracije (tekućeg vremenskog nivoa, na primer ${}^m(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})^{n+1}$). Uzimajući u obzir princip naveden u prethodnom izlaganju, jednačina (4.84) može da se napiše u obliku

$$F2_k = C_k^a - (C_k)_{D_L} - \sum_{D_L}^{D_1} \frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho \cdot A} \cdot \Delta t - \Delta t_1 \cdot \theta \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_i^{n+1}, \quad (4.85)$$

gdje je uvedeno skraćeno obeležavanje

$$\Delta t_1 = t^{n+1} - t_{D_1}.$$

Korisno je napomenuti da je izraz (4.85) diskretan oblik jednačine advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa za granulometrijski interval k , koji dozvoljava eksplicitan proračun nanosa po prostoru. U nastavku se navode izrazi za sumu za slučaj da je $L = 1$, $L = 2$ odnosno $L > 2$. Ako je $L = 1$ suma u jednačini (4.85) predstavlja

$$\sum_{D_L}^{D_1} \frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho \cdot A} \cdot \Delta t = (1 - \theta) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_1} \cdot \Delta t_1.$$

Ako je $L = 2$ suma je

$$\begin{aligned} \sum_{D_L}^{D_1} \frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho \cdot A} \cdot \Delta t &= (1 - \theta) \cdot (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_L} + \\ &+ [t^{n+1} \cdot (1 - \theta) + t_{D_1} \cdot (2\theta - 1) - t_{D_2} \cdot \theta] \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_1}. \end{aligned}$$

I konačno, za $L > 2$ se koristi kompletna jednačina

$$\begin{aligned} \sum_{D_L}^{D_1} \frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho \cdot A} \cdot \Delta t &= (1 - \theta) \cdot (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_L} + \\ &+ \sum_{l=L-1}^2 \left[[t_{D_{l-1}} \cdot (1 - \theta) + t_{D_l} \cdot (2\theta - 1) - t_{D_{l+1}} \cdot \theta] \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_l} \right] + \\ &+ [t^{n+1} \cdot (1 - \theta) + t_{D_1} \cdot (2\theta - 1) - t_{D_2} \cdot \theta] \cdot \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right)_{D_1}. \end{aligned}$$

Prilikom proračuna zbir koncentracije u polaznoj tački cele trajektorije i sume treba da je pozitivan kako se ne bi dobile negativne vrednosti koncentracija. Ovo se obezbeđuje programski tako što se proverava da li je navedeni zbir negativan, i ako se desi da jeste onda se nulira.

Jednačina za izvode

Ograničavajući faktor metode karakteristika je neophodnost interpolacije tokom proračuna. Zato se za interpolaciju po prostoru usvojila kubna interpolacija primenom

Hermite-ovog kubnog interpolacionog polinoma. Tokom izvođenja interpolacionog polinoma je pokazano da ovaj tip interpolacije zahteva poznate vrednosti izvoda u računskim tačkama. Traženi izvodi se određuju polazeći od jednačine advektivnog koraka

$$\frac{dC_k}{dt} + u \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}),$$

koja se diferencira po x kako bi se dobila jednačina za izvode

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C_k}{\partial t} \right) + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C_k}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho A} \right) - \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Jednačina se preuređuje u

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_x)_k + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} (C_x)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right) - (C_x)_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

gde je $C_x = \frac{\partial C}{\partial x}$. U poslednjoj jednačini se prepoznaje totalni izvod pa se dobija

$$\frac{d(C_x)_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right) - (C_x)_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{koja važi duž} \quad u = \frac{dx}{dt}.$$

Sama trakektorija je već određena tokom proračna, a i vrednosti koncentracije i izvora su poznate u n i $n+1$.

Integraljenje jednačine izvoda duž trajektorije

Integraljenjem jednačine za izvode duž trajektorije je u potpunosti analogno integraljenju jednačine. Leva strana jednačine može da se integrira, dok se desna rastavlja na niz segmenata.

$$\int_{D_L}^{A_1} d(C_x)_k = \int_{D_L}^{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho A} \right) - (C_x)_k \frac{\partial u}{\partial x} \right] dt,$$

odakle je

$$\begin{aligned} (C_x)_{k,A_1} - (C_x)_{k,D_L} &= \underbrace{\int_{D_L}^{A_L} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right) - (C_x)_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot dt}_{\text{segmentL}} + \\ &+ \underbrace{\int_{D_{L-1}}^{A_{L-1}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right) - (C_x)_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot dt + \dots +}_{\text{segmentL-1}} \\ &+ \underbrace{\int_{D_l}^{A_l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right) - (C_x)_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot dt + \dots +}_{\text{segmentl}} \\ &+ \underbrace{\int_{D_1}^{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \right) - (C_x)_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot dt}_{\text{segment1}}. \end{aligned}$$

Integraljenje segmenata je numeričko primenom uopštenog trapeznog pravila. Postupak je prikazan na proizvoljnom segmentu l .

$$\int_{D_l}^{A_l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho A} \right) - (C_x)_k \frac{\partial u}{\partial x} \right] dt =$$

$$= \left[(1-\theta) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{BS_k}{\rho A} \right) - (C_x)_k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{D_l} + \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho A} \right) - (C_x)_k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{A_l} \right] (t_{A_l} - t_{D_l})$$

Primenom ovog pravila, jednačina za jedan segment postaje

$$(C_x)_{k,A_1} = \frac{(C_x)_{k,D_L}}{Denom} + \frac{(t_{A_L} - t_{D_L})}{Denom} \cdot \theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho A} \right]_{A_L} +$$

$$+ \frac{(t_{A_L} - t_{D_L})}{Denom} \cdot (1-\theta) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\rho A} \right) - (C_x)_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{D_L}, \quad (4.86)$$

gde je

$$Denom = 1 + \theta \cdot (t_{A_L} - t_{D_L}) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{A_L}.$$

U ovoj fazi proračuna je u jednačini (4.86) sve poznato osim traženog izvoda. Primenom ovog izraza se, segment po segment, određuje vrednost traženog izvoda u računskim tačkama.

Zbog složenosti se posebno razmatra izvod $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{\rho \cdot A} \cdot S_k \right)$ koji može da se rastavi na sledeći način

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{A} \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{B \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{(E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})}{A} \cdot \frac{\partial B}{\partial x}.$$

4.2.3. Nanos na dnu i pri dnu

Jednačina održanja mase nanosa granulometrijskog intervala k u aktivnom sloju je

$$\rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{\partial (\beta_k \cdot E_a)}{\partial t} + \frac{(\phi_k)_{ds} - (\phi_k)_{us}}{\Delta x} = -E_k^{\text{sed}} + D_k^{\text{sed}} + (S_f)_k. \quad (4.87)$$

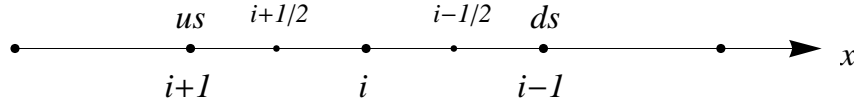
Jednačina se diskretizuje prema oznakama na slici 9 primenom šeme konačnih razlika i preuređuje tako da se dobije

$$F3_k = \rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{(\beta_k \cdot E_a)_i^{n+1} - (\beta_k \cdot E_a)_i^n}{\Delta t} - ((S_f)_k)_i$$

$$+ \theta \cdot \frac{(\phi_k)_{i-1/2}^{n+1} - (\phi_k)_{i+1/2}^{n+1}}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} + (1-\theta) \cdot \frac{(\phi_k)_{i-1/2}^n - (\phi_k)_{i+1/2}^n}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} +$$

$$+ \theta \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^n. \quad (4.88)$$

Ukupan broj jednačina (4.88) je K jer se po jedna jednačina ispisuje za svaku frakciju nanosne mešavine.



Slika 9: Oznake računskih tačaka

Globalna jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju i podslojevima je dobijena sumiranjem jednačina po svim stratovima i frakcijama uz primenu uslova da je suma procentualnog udela frakcija aktivnog sloja i stratuma jedan. Kao rezultat je dobijena jedna jednačina sa nepoznatom kotom z_b ,

$$\rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\sum_{k=1}^K [(\phi_k)_{ds} - (\phi_k)_{us}]}{\Delta x} + \sum_{k=1}^K (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) = 0. \quad (4.89)$$

Navodi se diskretizovani oblik globalne jednačine održanja mase nanosa u aktivnom sloju i podslojevima

$$\begin{aligned} F1 = & \rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{(z_b)_i^{n+1} - (z_b)_i^n}{\Delta t} + \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\theta \cdot [(\phi_k)_{i-1/2}^{n+1} - (\phi_k)_{i+1/2}^{n+1}]}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} + \frac{(1-\theta) \cdot [(\phi_k)_{i-1/2}^n - (\phi_k)_{i+1/2}^n]}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\theta \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Primenjena šema je polueksplicitna što znači da se kod proračuna fluksa vučenog nanosa koji zavisi od brzine tečenja i frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala u aktivnom sloju, za brzinu uzimaju brzine iz odgovarajućeg vremenskog nivoa, dok se za β_k uvek uzima vrednost iz prethodnog vremenskog nivoa. Na ovaj način se omogućava nezavisan proračun tačke i od susednih tačaka (uslovno rečeno).

Na kraju se konstatuje da se izvedene jednačine nelinearne i zahtevaju linearizaciju pre nego što se pristupi njihovom rešavanju.

4.2.4. Simultano rešavanje jednačina

U prethodnim poglavljima 4.2.2. i 4.2.3. su izvedene nelinearne diskretizovane jednačine koje se rešavaju kao sistem kako bi se zadovoljio nametnut uslov da je suma procentualnog udela frakcija, po svim frakcijama, jedan. Navedene jednačine se linearizuju. Linearizacijom globalne jednačine održanja mase u aktivnom sloju i stratovima (4.90) se dobija

$$\begin{aligned} & {}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial z_b} \right]^{n+1} \Delta z_b + {}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial C_1} \right]^{n+1} \Delta C_1 + {}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial \beta_1} \right]^{n+1} \Delta \beta_1 + \dots + {}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial C_k} \right]^{n+1} \Delta C_k + \\ & + {}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial \beta_k} \right]^{n+1} \Delta \beta_k + \dots + {}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial C_K} \right]^{n+1} \Delta C_K + {}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial \beta_K} \right]^{n+1} \Delta \beta_K = - {}^m F1^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

pri čemu su izrazi za izvode dati u prilogu B. Navodi se advektivni deo jednačina održanja mase suspendovanog nanosa k -te frakcije (4.85) u linearizovanom obliku

$$\begin{aligned} & m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial z_b} \right]^{n+1} \Delta z_b + m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_1} \right]^{n+1} \Delta C_1 + m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_1} \right]^{n+1} \Delta \beta_1 + \dots + m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_k} \right]^{n+1} \Delta C_k + \\ & m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_k} \right]^{n+1} \Delta \beta_k + \dots + m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_K} \right]^{n+1} \Delta C_K + m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_K} \right]^{n+1} \Delta \beta_K = -{}^m F2_k^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.92)$$

uz napomenu da su izrazi za izvode su dati u prilogu B. Jednačina održanja mase u aktivnom sloju za k -tu frakciju je data izrazom (4.88), a njen linearizovani oblik je

$$\begin{aligned} & m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial z_b} \right]^{n+1} \Delta z_b + m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial C_1} \right]^{n+1} \Delta C_1 + m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial \beta_1} \right]^{n+1} \Delta \beta_1 + \dots + m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial C_k} \right]^{n+1} \Delta C_k + \\ & m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial \beta_k} \right]^{n+1} \Delta \beta_k + \dots + m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial C_K} \right]^{n+1} \Delta C_K + m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial \beta_K} \right]^{n+1} \Delta \beta_K = -{}^m F1_k^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Dobijen sistem se sastoji od $2K+1$ jednačine i istog broja nepoznatih. Zbog jednostavnijeg pisanja se sistem predstavlja u matricnom obliku

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F1}{\partial z_b} & \frac{\partial F1}{\partial C_1} & \frac{\partial F1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F1}{\partial C_k} & \frac{\partial F1}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F1}{\partial C_K} & \frac{\partial F1}{\partial \beta_K} \\ \frac{\partial F2_1}{\partial z_b} & \frac{\partial F2_1}{\partial C_1} & \frac{\partial F2_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F2_1}{\partial C_k} & \frac{\partial F2_1}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F2_1}{\partial C_K} & \frac{\partial F2_1}{\partial \beta_K} \\ \frac{\partial F3_1}{\partial z_b} & \frac{\partial F3_1}{\partial C_1} & \frac{\partial F3_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F3_1}{\partial C_k} & \frac{\partial F3_1}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F3_1}{\partial C_K} & \frac{\partial F3_1}{\partial \beta_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F2_k}{\partial z_b} & \frac{\partial F2_k}{\partial C_1} & \frac{\partial F2_k}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F2_k}{\partial C_k} & \frac{\partial F2_k}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F2_k}{\partial C_K} & \frac{\partial F2_k}{\partial \beta_K} \\ \frac{\partial F3_k}{\partial z_b} & \frac{\partial F3_k}{\partial C_1} & \frac{\partial F3_k}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F3_k}{\partial C_k} & \frac{\partial F3_k}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F3_k}{\partial C_K} & \frac{\partial F3_k}{\partial \beta_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F2_K}{\partial z_b} & \frac{\partial F2_K}{\partial C_1} & \frac{\partial F2_K}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F2_K}{\partial C_k} & \frac{\partial F2_K}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F2_K}{\partial C_K} & \frac{\partial F2_K}{\partial \beta_K} \\ \frac{\partial F3_K}{\partial z_b} & \frac{\partial F3_K}{\partial C_1} & \frac{\partial F3_K}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F3_K}{\partial C_k} & \frac{\partial F3_K}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F3_K}{\partial C_K} & \frac{\partial F3_K}{\partial \beta_K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_b \\ \Delta C_1 \\ \Delta \beta_1 \\ \vdots \\ \Delta C_k \\ \Delta \beta_k \\ \vdots \\ \Delta C_K \\ \Delta \beta_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F1 \\ -F2_1 \\ -F3_1 \\ \vdots \\ -F2_k \\ -F3_k \\ \vdots \\ -F2_K \\ -F3_K \end{bmatrix}$$

U nastavku se uvodi novo obeležavanje. Prva promenljiva vezana za nanos je z_b gde je $ns = 1$, pa se uvodi $\Delta z_b = \Delta s_1$. Analogno ovome se navode nove oznake za sve nanosne promenljive.

$$\begin{array}{lll} z_b & ns = 1 & \Delta z_b = \Delta s_1 \\ C_1 & ns = 2 & \Delta C_1 = \Delta s_2 \\ \beta_1 & ns = 3 & \Delta \beta_1 = \Delta s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{kk} & ns = 2kk & \Delta C_{kk} = \Delta s_{2kk} \\ \beta_{kk} & ns = 2kk+1 & \Delta \beta_{kk} = \Delta s_{2kk+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{KK} & ns = 2KK & \Delta C_{KK} = \Delta s_{2KK} \\ \beta_{KK} & ns = 2KK+1 & \Delta \beta_{KK} = \Delta s_{2KK+1} \end{array} \quad (4.94)$$

Uvođenjem novih oznaka je ranije ukupan broj frakcija K sada KK , dok je ukupan broj promenljivih $2K+1$ sada $2KK+1 = NS$. Sada se sistem jednačina i nepoznatih može

prikazati pomoću matrične jednačine kao

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,2kk} & a_{1,2kk+1} & \cdots & a_{1,2KK} & a_{1,2KK+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,2kk} & a_{2,2kk+1} & \cdots & a_{2,2KK} & a_{2,2KK+1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,2kk} & a_{3,2kk+1} & \cdots & a_{3,2KK} & a_{3,2KK+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2k,1} & a_{2k,2} & \cdots & a_{2k,2kk} & a_{2k,2kk+1} & \cdots & a_{2k,2KK} & a_{2k,2KK+1} \\ a_{2k+1,1} & a_{2k+1,2} & \cdots & a_{2k+1,2kk} & a_{2k+1,2kk+1} & \cdots & a_{2k+1,2KK} & a_{2k+1,2KK+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2K,1} & a_{2K,2} & \cdots & a_{2K,2kk} & a_{2K,2kk+1} & \cdots & a_{2K,2KK} & a_{2K,2KK+1} \\ a_{2K+1,1} & a_{2K+1,2} & \cdots & a_{2K+1,2kk} & a_{2K+1,2kk+1} & \cdots & a_{2K+1,2KK} & a_{2K+1,2KK+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \vdots \\ \Delta s_{2kk} \\ \Delta s_{2kk+1} \\ \vdots \\ \Delta s_{2KK} \\ \Delta s_{2KK+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{2kk} \\ b_{2kk+1} \\ \vdots \\ b_{2KK} \\ b_{2KK+1} \end{bmatrix}$$

Gore navedena matrična jednačina se, radi preglednosti, piše i u razvijenom obliku

$$a_{1,1} \cdot \Delta s_1 + a_{1,2} \cdot \Delta s_2 + a_{1,3} \cdot \Delta s_3 + \cdots + a_{1,2kk} \cdot \Delta s_{2kk} + \\ + a_{1,2kk+1} \cdot \Delta s_{2kk+1} + \cdots + a_{1,2KK} \cdot \Delta s_{2KK} + a_{1,2KK+1} \cdot \Delta s_{2KK+1} = b_1,$$

$$a_{2k,1} \cdot \Delta s_1 + a_{2k,2} \cdot \Delta s_2 + a_{2k,3} \cdot \Delta s_3 + \cdots + a_{2k,2kk} \cdot \Delta s_{2kk} + \\ + a_{2k,2kk+1} \cdot \Delta s_{2kk+1} + \cdots + a_{2k,2KK} \cdot \Delta s_{2KK} + a_{2k,2KK+1} \cdot \Delta s_{2KK+1} = b_{2k},$$

$$a_{2k+1,1} \cdot \Delta s_1 + a_{2k+1,2} \cdot \Delta s_2 + a_{2k+1,3} \cdot \Delta s_3 + \cdots + a_{2k+1,2kk} \cdot \Delta s_{2kk} + \\ + a_{2k+1,2kk+1} \cdot \Delta s_{2kk+1} + \cdots + a_{2k+1,2KK} \cdot \Delta s_{2KK} + a_{2k+1,2KK+1} \cdot \Delta s_{2KK+1} = b_{2k+1}.$$

4.2.5. Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa u čvorovima

Kako je cilj razvijanje programskog koda koji će omogućiti proračun transporta nanosa u mreži otvorenih tokova, pored klasičnih jednačina za proračun transporta suspendovanog nanosa treba obezbediti dodatnu jednačinu za proračun u čvorovima. Za proračun suspendovanog nanosa se jednačina u čvorovima dobija uvođenjem pretpostavke o potpunom mešanju u čvorovima. U tom slučaju je suma masenog pronosa nanosa po svim deonicama L_{in} koje ulaze u posmatrani čvor jednaka proizvodu sume pojedinačnih ulaznih protoka i jedne izlazne koncentracije C_{out} koja je ista za sve izlazne deonice L_{out} , dakle matematička formulacija gore navedenog stava je

$$Q_{lok} \cdot C_{lok} + \sum_{in} Q \cdot C = C_{out} \cdot \sum_{out} Q, \quad (4.95)$$

gde je $Q_{lok} \cdot C_{lok}$ lokalni spoljašnji ulaz u čvor ukoliko on postoji.

Jednačina za proračun izvoda koncentracija suspendovanog nanosa u čvorovima sistema je jednačina čiste advekcije

$$Cx = -\frac{A}{Q} \cdot \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (4.96)$$

Primenom jednačine (4.96) se uvrštavanjem koncentracije u čvoru za sve izlazne preseke određuje izvod koncentracije suspendovanog nanosa u najuzvodnijoj izlaznoj deonici uzimajući vrednosti A i Q odgovarajuće izlazne deonice.

Koncentracija suspendovanog nanosa u čvoru N se određuje iz jednačine kontinuiteta čvora uzimajući da je primarna promenljiva potpuno pomešana koncentracija na izlazu iz čvora C_N . U tom slučaju se jednačina kontinuiteta čvora N u opštem obliku može napisati kao (4.95)

$$Q_{lok} \cdot C_{lok} + \sum_{l_{in}=1}^{L_{in}} Q_{l_{in}} \cdot C_{l_{in}} = C_N \cdot \sum_{l_{out}=1}^{L_{out}} Q_{l_{out}}. \quad (4.97)$$

Jedine nepoznate u jednačini (4.95) su koncentracije u čvorovima. Svaka jednačina za čvor u sebi ima jednu nepoznatu koncentraciju posmtranog čvora C_N i jednu dodatnu nepoznatu koncentraciju uzvodnog čvora $C_{Nus} = C_{N-1}$ usled čega zatvaranje sistema jednačina zahteva jednu dodatnu jednačinu na uzvodnoj granici. Uzvodni granični uslov za proračun koncentracija u čvorovima je poznata koncentracija na uzvodnoj granici.

Sa ovime se postupak proračuna svodi na zadavanje početnih vrednosti koncentracija, frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala u aktivnom sloju i kote dna u svim računskim tačkama. Koristeći početne vrednosti koncentracije u najnižvodnijim tačkama ulaznih deonica se za svaki čvor rešavanjem jednačine (4.95) dobija koncentracija suspendovanog nanosa u čvoru koja istovremeno predstavlja koncentraciju suspendovanog nanosa u uzvodnim tačkama izlaznih deonica čvora. Za dalji proračun je potrebno definisati proceduru za određivanje frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala u aktivnom sloju i kote dna u uzvodnim tačkama izlaznih deonica.

Proračun kote dna i raspodele frakcija u uzvodnim tačkama izlaznih deonica

Pošto su sve nanosne promenljive definisane u poslednjim tačkama ulaznih deonica prelazi se na proračun najuzvodnijih tačaka izlaznih deonica. Raspodela frakcija u tačkama $i = I$ izlaznih deonica se određuje iz jednačine kontinuiteta flukseva vučenog nanosa

$$\sum_{l_{in}=1}^{L_{in}} \phi_k^t \cdot \beta_k \cdot (1 - \gamma_k) \cdot \zeta_k = \beta_I^N \cdot \sum_{l_{out}=1}^{L_{out}} \phi_k^t \cdot (1 - \gamma_k) \cdot \zeta_k. \quad (4.98)$$

Ispisivanjem ove jednačine se uvodi pretpostavka da je raspodela frakcija ista u svim izlaznim deonicama. Izračunata raspodela frakcija u čvoru se nameće kao poznata raspodela frakcija u tačkama $i = I$ izlaznih deonica. Tokom proračuna se za svaki čvor proverava da li je suma na bilo kojoj strani jednačine nula. Ukoliko se dobije da je jedna od suma nula, onda se u tačkama $i = I$ nameće jedan od sledećih uslova

$$\beta_I^{n+1} = \beta_I^n \quad \text{ili} \quad \beta_I^{n+1} = \frac{1}{L_{out}} \cdot \sum_{l_{out}} \beta_{l_{out}}.$$

Sa poznatim β_I se iz globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu određuje kota dna tačke $i = I$ svih izlaznih deonica.

$$\begin{aligned} F1 = & \rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{(z_b)_i^{n+1} - (z_b)_i^n}{\Delta t} + \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\theta \cdot [(\phi_k)_{i-1/2}^{n+1} - (\phi_k)_i^{n+1}]}{x_{i-1/2} - x_i} + \frac{(1-\theta) \cdot [(\phi_k)_i^n - (\phi_k)_{i-1/2}^n]}{x_{i-1/2} - x_i} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\theta \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^n \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.99)$$

Nakon ovoga se za sve unutrašnje tačke (izuzev tačke $i = 1$ gde su već sve promenljive određene) sprovodi klasičan proračun transporta nanosa i deformacije korita.

Iterativni postupak se na ovaj način svodi na određivanje svih nanosnih promenljivih u nizvodnoj tački ulaznih deonica. Koristeći te vrednosti se rešava jednačina kontinuiteta iz koje se dobija koncentracija suspendovanog nanosa u čvoru koja se pripisuje koncentracijama uzvodnih tačaka izlaznih deonica. Frakciona zastupljenost u aktivnom sloju se određuje iz jednačine održanja flukseva vučenog nanosa ili kao srednja vrednost ulaznih vrednosti ove veličine, nakon čega se rešavanjem jednačine (4.99) dobija kota dna. Nakon toga se prelazi na sledeću iteraciju i postupak se ponavlja dok se ne ispuni kriterijum za prestanak iteracija.

4.2.6. Difuzija - suspendovani nanos

Jednačina difuzionog koraka je izvedena ranije (4.81), a za njenu diskretizaciju se primenjuje *Crank-Nicholson*-ova šema sa ponderacijom jednačine po vremenu (odnosno po računskom koraku). Pošto se difuzioni korak za nanos računa nakon gotovog hidrauličkog proračuna, onda se sve veličine poznate iz hidrauličkog proračuna uzimaju iz tekućeg vremenskog nivoa (u ovom slučaju su to koeficijent disperzije i površina poprečnog preseka).

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_k}{\partial t}\right)^{a+d} - \left(\frac{\partial C_k}{\partial t}\right)^a = \theta \cdot \left[\frac{1}{A^{n+1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s^{n+1} \cdot \frac{\partial C_k^{a+d}}{\partial x} \cdot A^{n+1} \right) \right] + \\ (1-\theta) \cdot \left[\frac{1}{A^{n+1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s^{n+1} \cdot \frac{\partial C_k^a}{\partial x} \cdot A^{n+1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Za izvod po vremenu se koristi *Euler*-va aproksimacija, a diskretizacija izvoda po prostoru se sprovodi u dva koraka. Prvi korak je diskretizacija spoljašnjeg izvoda

$$\begin{aligned} \frac{(C_k^{a+d})_i - (C_k^n)_i}{\Delta t} - \frac{(C_k^a)_i - (C_k^n)_i}{\Delta t} = \\ = \frac{\theta}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{\left(\varepsilon_s^{n+1} \cdot \frac{\partial C_k^{a+d}}{\partial x} \cdot A^{n+1} \right)_{i-1/2} - \left(\varepsilon_s^{n+1} \cdot \frac{\partial C_k^{a+d}}{\partial x} \cdot A^{n+1} \right)_{i+1/2}}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} + \\ + \frac{(1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{\left(\varepsilon_s^{n+1} \cdot \frac{\partial C_k^a}{\partial x} \cdot A^{n+1} \right)_{i-1/2} - \left(\varepsilon_s^{n+1} \cdot \frac{\partial C_k^a}{\partial x} \cdot A^{n+1} \right)_{i+1/2}}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}}. \end{aligned}$$

Algebarskim preuređivanjem se sa leve strane jednačine gube koncentracije iz n -tog vremenskog nivoa. Pored toga se diskretizacijom unutrašnjeg izvoda i oslobađanjem od duplog razlomka dobija

$$\begin{aligned} \frac{(C_k^{a+d})_i - (C_k^a)_i}{\Delta t} = \frac{\theta}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\left(\varepsilon_s^{n+1} \right)_{i-1/2} \cdot \frac{(C_k^{a+d})_{i-1} - (C_k^{a+d})_i}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i-1/2}^{n+1} \right) - \\ - \frac{\theta}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\left(\varepsilon_s^{n+1} \right)_{i+1/2} \cdot \frac{(C_k^{a+d})_i - (C_k^{a+d})_{i+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i+1/2}^{n+1} \right) + \\ + \frac{(1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\left(\varepsilon_s^{n+1} \right)_{i-1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_{i-1} - (C_k^a)_i}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i-1/2}^{n+1} \right) - \\ - \frac{(1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\left(\varepsilon_s^{n+1} \right)_{i+1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_i - (C_k^a)_{i+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i+1/2}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Pošto se proračun nanosa sastoji od advektivnog i difuzionog koraka to znači da su koncentracije izračunate u difuzionom koraku istovremeno i nepoznate koncentracije tekućeg vremenskog nivoa $C_k^{a+d} = C_k^{n+1}$, pa se u nastavku prelazi na oznaku za vreme $n+1$. Izvedena jednačina je implicitna i rešava se primenom *Thomas*-ovog algoritma, zbog čega se preuređuje tako da se na levoj strani jednačine javi svi članovi pomnoženi sa nepoznatim koncentracijama $(C_k^{n+1})_{i+1}$, $(C_k^{n+1})_i$, $(C_k^{n+1})_{i-1}$, a na desnoj strani ostaju članovi pomnoženi sa poznatim koncentracijama C_k^a . Jednačina se množi sa Δt i preuređuje tako da se dobije sledeći oblik jednačine

$$\begin{aligned} & (C_k^{a+d})_i - \frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i-1/2} \cdot \frac{(C_k^{a+d})_{i-1} - (C_k^{a+d})_i}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i-1/2}^{n+1} \right) + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i+1/2} \cdot \frac{(C_k^{a+d})_i - (C_k^{a+d})_{i+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i+1/2}^{n+1} \right) = \\ & = (C_k^a)_i + \frac{\Delta t \cdot (1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i-1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_{i-1} - (C_k^a)_i}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i-1/2}^{n+1} \right) - \\ & - \frac{\Delta t \cdot (1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i+1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_i - (C_k^a)_{i+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i+1/2}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Koeficijenti *Thomas*-ovog algoritma se dobijaju grupisanjem članova uz nepoznate koncentracije po računskim tačkama. Desna strana jednačine se ne preuređuje dalje jer su sve veličine sa desne strane poznate.

$$\begin{aligned} & (C_k^{m+1})_{i+1} \cdot \left(- \frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{((\varepsilon_s^t)^{n+1})_{i+1/2} \cdot A_{i+1/2}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \right) + \\ & + (C_k^{m+1})_i \cdot \left[1 + \frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{((\varepsilon_s^t)^{n+1})_{i-1/2} \cdot A_{i-1/2}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} + \frac{((\varepsilon_s^t)^{n+1})_{i+1/2} \cdot A_{i+1/2}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \right) \right] + \\ & + (C_k^{m+1})_{i-1} \cdot \left(- \frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{((\varepsilon_s^t)^{n+1})_{i-1/2} \cdot A_{i-1/2}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \right) = \\ & = (C_k^a)_i + \frac{\Delta t \cdot (1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i-1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_{i-1} - (C_k^a)_i}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i-1/2}^{n+1} \right) - \\ & - \frac{\Delta t \cdot (1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i+1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_i - (C_k^a)_{i+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i+1/2}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Konačan oblik jednačine je

$$(C_k^{m+1})_{i+1} \cdot P_i + (C_k^{m+1})_i \cdot Q_i + (C_k^{m+1})_{i-1} \cdot R_i = S_i, \quad (4.101)$$

gde su koeficijenti P_i, Q_i, R_i i S_i dati u prilogu E. Jednačina (4.101) predstavlja sistem jednačina koji može da se ispiše u razvijenom obliku. U tom slučaju se za prvu računsku tačku $i = I$ iz jednačine gubi član pomnožen sa $(C_k^{n+1})_{i+1}$ jer ova tačka ne postoji, dok se za najnižvodniju tačku $i = 1$ gubi član pomnožen sa $(C_k^{n+1})_{i-1}$ jer za poslednju tačku

on ne postoji. Dakle, uzimajući navedeno u obzir, sistem linearnih algebarskih jednačina je dat izrazom

$$\begin{aligned}
& (C_k^{n+1})_I \cdot Q_I & + & (C_k^{n+1})_{I-1} \cdot R_I & = & S_I & \text{ za } & i = I \\
(C_k^{n+1})_I \cdot P_{I-1} & + & (C_k^{n+1})_{I-1} \cdot Q_{I-1} & + & (C_k^{n+1})_{I-2} \cdot R_{I-1} & = & S_{I-1} & \text{ za } & i = I-1 \\
& & & & \vdots & & & & \\
(C_k^{n+1})_{i+1} \cdot P_i & + & (C_k^{n+1})_i \cdot Q_i & + & (C_k^{n+1})_{i-1} \cdot R_i & = & S_i & \text{ za } & i = i \\
& & & & \vdots & & & & \\
(C_k^{n+1})_3 \cdot P_2 & + & (C_k^{n+1})_2 \cdot Q_2 & + & (C_k^{n+1})_1 \cdot R_2 & = & S_2 & \text{ za } & i = 2 \\
(C_k^{n+1})_2 \cdot P_1 & + & (C_k^{n+1})_1 \cdot Q_1 & & & = & S_1 & \text{ za } & i = 1
\end{aligned}$$

Jednačine za izvode

Kao rezultat primene metode karakteristika se javlja potreba za interpolacijom kako bi se odredile vrednosti nepoznate veličine u polaznoj tački trajektorije. Imajući u vidu da je ova metoda tačna koliko i primenjena interpolacija, u istraživanju se odlučilo za primenu *Hermite*-ovog interpolacionog polinoma koji je kubni interpolacioni polinom formiran sa vrednostima iz samo dve računске tačke. Uspostavljanje ovakvog polinoma zahteva poznate vrednosti izvoda, zbog čega je neophodno kompletan proračun uraditi i za izvode. Jednačina difuzionog koraka za izvode se dobija polazeći od jednačine difuzionog koraka (4.100) koja se diferencira po x , pa se dobija da je

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C_k}{\partial t} \right)^{a+d} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C_k}{\partial t} \right)^a = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x} \cdot A \right) \right].$$

Zamenom mesta izvoda po vremenu i prostoru i uvođenjem oznake $C_x = \frac{\partial C}{\partial x}$ razmatrana jednačina postaje

$$\left(\frac{\partial (C_x)_k}{\partial t} \right)^{a+d} - \left(\frac{\partial (C_x)_k}{\partial t} \right)^a = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_s \cdot (C_x)_k \cdot A) \right].$$

U sledećem koraku se izvodi proizvoda sa desne strane rastavljaju na zbir izvoda tako da se dobije

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial (C_x)_k}{\partial t} \right)^{a+d} - \left(\frac{\partial (C_x)_k}{\partial t} \right)^a &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_s \cdot (C_x)_k \cdot A) \right] - \frac{\varepsilon_s^t \cdot (C_x)_k}{A^2} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 - \\
&\quad - \frac{\varepsilon_s^t}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial (C_x)_k}{\partial x} - \frac{(C_x)_k}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\varepsilon_s^t}{\partial x}.
\end{aligned}$$

U saglasnosti sa dosad korišćenim principima pri implementaciji šema metode konačnih razlika, izvodi po vremenu se diskretizuju primenom *Euler*-ove aproksimacije, a desna strana razmatrane jednačine se ponderiše po vremenu (tj. računskom koraku) da bi se

dobilo da je

$$\begin{aligned} \frac{(Cx_k)_i^{a+d} - (Cx_k)_i^a}{\Delta t} &= \theta \cdot \frac{1}{A^{n+1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_s \cdot Cx_k^{a+d} \cdot A^{n+1}) \right] - \theta \cdot \frac{\varepsilon_s \cdot Cx_k^{a+d}}{(A^{n+1})^2} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 - \\ &- \theta \cdot \frac{\varepsilon_s}{A^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{n+1} \cdot \frac{\partial Cx_k^{a+d}}{\partial x} - \theta \cdot \frac{Cx_k^{a+d}}{A^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{n+1} \cdot \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} + \\ &+ (1-\theta) \cdot \frac{1}{A^{n+1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_s \cdot Cx_k^a \cdot A^{n+1}) \right] - (1-\theta) \cdot \frac{\varepsilon_s \cdot Cx_k^a}{(A^{n+1})^2} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 - \\ &- (1-\theta) \cdot \frac{\varepsilon_s}{A^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{n+1} \cdot \frac{\partial Cx_k^a}{\partial x} - (1-\theta) \cdot \frac{Cx_k^a}{A^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{n+1} \cdot \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x}. \end{aligned}$$

Konačno, jednačina se diskretizuje primenom *Crank-Nicholson*-ve šeme.

$$\begin{aligned} \frac{(Cx_k)_i^{a+d} - (Cx_k)_i^a}{\Delta t} &= \frac{\theta}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{(\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} \cdot (Cx_k)_{i-1}^{a+d} \cdot A_{i-1}^{n+1} - (\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot (Cx_k)_i^{a+d} \cdot A_i^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} - \\ &- \frac{\theta}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{(\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot (Cx_k)_i^{a+d} \cdot A_i^{n+1} - (\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1} \cdot (Cx_k)_{i+1}^{a+d} \cdot A_{i+1}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} - \\ &- \theta \cdot \frac{(\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot (Cx_k)_i^{a+d}}{(A_i^{n+1})^2} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right)^2 - \\ &- \theta \cdot \frac{(\varepsilon_s)_i^{n+1}}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) \cdot \frac{(Cx_k)_{i-1}^{a+d} - (Cx_k)_{i+1}^{a+d}}{x_{i-1} - x_{i+1}} - \\ &- \theta \cdot \frac{(Cx_k)_i^{a+d}}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) \cdot \frac{(\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} - (\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} + \\ &+ \frac{(1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{(\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} \cdot (Cx_k)_{i-1}^a \cdot A_{i-1}^{n+1} - (\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot (Cx_k)_i^a \cdot A_i^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} - \\ &- \frac{(1-\theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{(\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot (Cx_k)_i^a \cdot A_i^{n+1} - (\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1} \cdot (Cx_k)_{i+1}^a \cdot A_{i+1}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} - \\ &- (1-\theta) \cdot \frac{(\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot (Cx_k)_i^a}{(A_i^{n+1})^2} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right)^2 - \\ &- (1-\theta) \cdot \frac{(\varepsilon_s)_i^{n+1}}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) \cdot \frac{(Cx_k)_{i-1}^a - (Cx_k)_{i+1}^a}{x_{i-1} - x_{i+1}} - \\ &- (1-\theta) \cdot \frac{(Cx_k)_i^a}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) \cdot \frac{(\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} - (\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \end{aligned}$$

Primenom da je $Cx_k^{a+d} = Cx_k^{n+1}$ se napisani izraz preuređuje tako da se članovi pomnoženi sa koncentracijom iz $n+1$ vremenskog koraka stavljaju na levu stranu znaka jednakosti (kao nepoznate veličine), a ostali članovi se stavljaju na desnu stranu čineći poznate vrednosti. Na ovaj način se dobija jednačina koja može da se napiše u sledećem obliku

$$(Cx_k)_{i+1}^{n+1} \cdot Px_i + (Cx_k)_i^{n+1} \cdot Qx_i + (Cx_k)_{i-1}^{n+1} \cdot Rx_i = Sx_i, \quad (4.102)$$

gde su koeficijenti navedeni u prilogu E. Jednačina (4.102) predstavlja sistem od k jednačina koji se rešava primenom *Thomas*-vog algoritma, potpuno analogno kao i jednačina koncentracije suspendovanog nanosa.

5. Programski kod

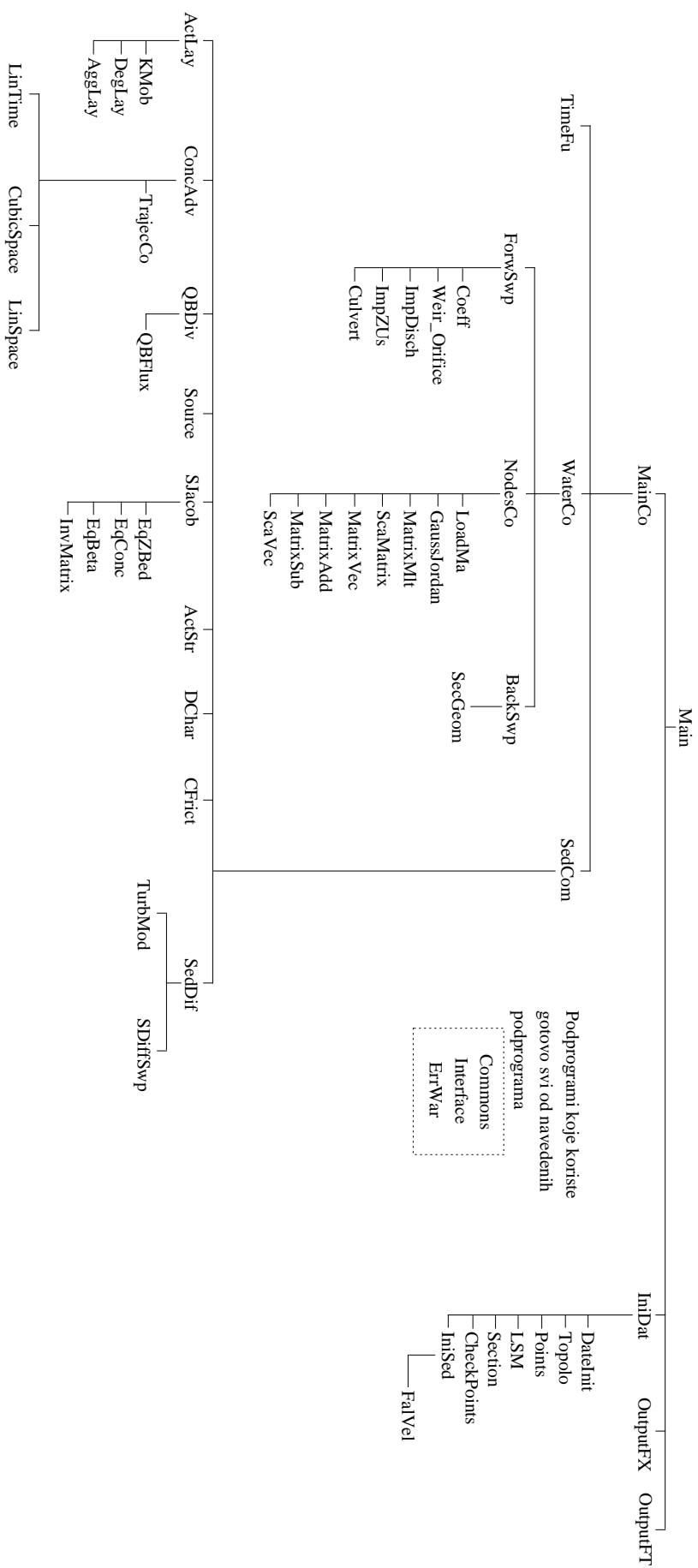
NAKON diskretizacije parcijalnih diferencijalnih jednačina kojima se opisuje strujanje vode, transport nanosa i deformacija korita, se prelazi na njihovo rešavanje primenom programskog jezika FORTRAN. Na složenost razmatranog problema ukazuju kompleksni sistemi jednačina potrebni za modelisanje strujanja vode i nanosa u mreži otvorenih tokova. Zbog toga je postupak programskog rešavanja izvedenih jednačina organizovan preko niza podprograma. Šematski prikaz organizacije podprograma je prikazan na slici 10.

Programski kod je organizovan preko jednog glavnog programa i niza podprograma, koje čine zasebne logičke celine. Glavni program, nazvan **Main**, u sebi ne sadrži matematičke operacije. Njegova funkcija je da kontroliše podprograme nižeg reda kojima se vrši sam proračun, i kao mesto na kojem se deklarišu promenljive. Preko glavnog programa se učitavaju osnovni podaci: broj računskih čvorova, najveći broj deonica koji se vezuje za jedan čvor, ukupan broj deonica, najveći broj računskih tačaka na jednoj deonici, ukupan broj grupa čvorova, broj poprečnih preseka, tačke odabrane za ispisivanje podataka u njima i slično. Program **Main** poziva podprograme **IniDat**, **MainCo**, **OutputFX** i **OutputFT**.

IniDat služi za učitavanje opštih parametara (da li se sprovedi proračun transporta nanosa, parametar kojim se određuje merna jedinica u kojoj se unose podaci o vremenskom koraku, vremenski korak za hidraulički i proračuna transportna nanosa) i početnih uslova. Podprogram **IniDat** poziva sledeće podprograme:

- **DateInit** - koji služi za transformaciju vremena proračuna u datume;
- **Topolo** - za svaku deonicu posebno učitava broj računskih tačaka na njoj, uzvodni i nizvodni čvor deonice, tip deonice (obična deonica, deonica sa poznatim nivoogramom, hidrogramom i slično), nakon čega za svaki čvor posebno definiše kojoj grupi pripada, koliko deonica se u njega priključuje i za svaku od deonica se određuje da li deonica u čvor ulazi ili iz njega izlazi;
- **Points** - je podprogram koji služi za učitavanje početnih uslova za hidraulički proračun;
- **LSM** - služi za definisanje veze *Manning* - ovog koeficijenta hrapavosti i proticaja koristeći metodu najmanjih kvadrata (Least Square Method);
- **Section** - učitava tip poprečnog preseka i podatke potrebne za njegovo definisanje nakon čega ih ispisuje u tabelu;
- **CheckPoints** - proverava konzistentnost unetih podataka;
- **IniSed** - učitava numeričke i fizičke parametre za proračun nanosa, odnosno odgovarajuće početne uslove. Ovaj podprogram poziva **FalVel**, koji služi za određivanje brzine tonjenja zrna nanosa, odnosno **DChar**, **SecGeom**, **CFrict** i **Source** za kvantifikaciju početnih vrednosti za koeficijent trenja odnosno član izvora suspendovanog nanosa.

Podprogrami **OutputFX** i **OutputFT** na kraju simulacije iz binarne datoteke (u koju se tokom proračuna upisuju rezultati) učitavaju vrednosti promenljivih i upisuju ih u tekstualnu datoteku, koja je prilagođena za grafičko prikazivanje u softverskom paketu **TecPlot360**.



Slika 10: Šematski prikaz programskog koda

Programska jedinica **MainCo** je zadužena za upravljanje hidrauličkim i nanosnim proračunom tokom trajanja simulacije. Na početku svakog vremenskog koraka TimeFu učitava i interpoluje zadate funkcije graničnih uslova. ErrWar ispisuje informacije o eventualnim greškama i upozorenjima u posebnu tekstualnu datoteku. Commons sadrži globalne promenljive, a Interface definiše zahteve svih podprograma u pogledu ulaznih i izlaznih promenljivih.

Podprogram **WaterCo** upravlja hidrauličkim proračunom. ForwSwp je zadužen za sprovođenje proračuna unapred i poziva podprograme:

- Coeff - računa vrednosti koeficijenata *Preissmann*-ove šeme za „klasičnu” aluvijalnu deonicu reke;
- WeirOrifice - računa vrednosti koeficijenata *Preissmann*-ove šeme u slučaju deonice sa ustavom ili prelivom;
- ImpDisch - računa vrednosti koeficijenata *Preissmann*-ove šeme u slučaju deonice sa nametnutim protokom;
- ImpZUs - računa vrednosti koeficijenata *Preissmann*-ove šeme u slučaju deonice sa nametnutom kotom slobodne površine vode;
- Culvert - računa vrednosti koeficijenata *Preissmann*-ove šeme u slučaju deonice sa propustom.

Programska jedinica **NodesCo** upravlja proračunom nivoa slobodne površine vode u čvorovima sistema granate mreže vodotoka. **NodesCo** poziva sledeće podprograme:

- LoadMa - računa koeficijente matrice sistema linearnih jednačina za čvorove granate mreže otvorenih tokova;
- GaussJordan - podprogram za rešavanje sistema linearnih jednačina;
- MatrixMlt - podprogram za množenje dve matrice
- ScaMatrix - podprogram za množenje matrice sa skalarnom veličinom;
- MatrixVec - podprogram za množenje matrice sa vektorom;
- MatrixAdd - podprogram za sabiranje dve matrice;
- MatrixSub - podprogram za oduzimanje dve matrice;
- ScaVec - podprogram za množenje vektora skalarnom veličinom.

BackSwp je zadužen za proračun unazad i poziva podprogram:

- SecGeom - računa vrednosti geometrijskih parametara poprečnog preseka (površina, okvašen obim, širina vodnog ogleдалa, hidraulička provodljivost, itd.) za zadati nivo.

Numeričkim proračunom transporta nanosa i morfoloških promena upravlja **Sed-Com**. Podprogram ActLay je zadužen za proračun procesa koji se odnose na aktivni sloj i poziva podprograme:

- KMob - određuje najmanje nepokretno zrno nanosne mešavine za trenutne hidrauličke uslove;

- DegLay - računa debljinu aktivnog sloja, član razmene mase između aktivnog sloja i aktivnog stratuma i njihove izvode po nanosnim promenljivama u slučaju kada se javlja proces erozije;
- AggLay - računa debljinu aktivnog sloja, član razmene mase između aktivnog sloja i aktivnog stratuma i njihove izvode po nanosnim promenljivama u slučaju kada se javlja proces deponovanja.

ConcAdv vrši numeričko integraljenje jednačine advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa duž trajektorije. Radi postizanja ovog cilja pozivaju se podprogrami:

- TrajecCo - određuje koordinate trajektorije, segment po segment;
- LinTime - vrši određivanje vrednosti proizvoljne promenljive koristeći linearnu interpolaciju po vremenu;
- CubicSpace - vrši određivanje vrednosti proizvoljne promenljive koristeći kubnu interpolaciju po prostoru;
- LinSpace - vrši određivanje vrednosti proizvoljne promenljive koristeći linearnu interpolaciju po prostoru.

Programska jedinica QBDiv računa divergenciju fluksa vučenog nanosa, pri čemu poziva podprogram:

- QBFlux - kvantifikuje fluks vučenog nanosa za pojedini granulometrijski interval nanosne mešavine.

Podprogram Source računa član izvora suspendovanog nanosa i njegove izvode po svim nanosnim promenljivama. Programska jedinica SJacob je zadužena za računanje članova matrice sistema diskretizovanih i linearizovanih jednačina koje opisuju ponašanje nanosa, pri čemu se pozivaju podprogrami:

- EqZBed - računa koeficijente globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu;
- EqConc - računa koeficijente jednačine advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa;
- EqBeta - računa koeficijente jednačine održanja mase pojedine frakcije nanosa u aktivnom sloju;
- InvMatrix - rešava sistem linearnih jednačina.

Nakon rešavanja sistema jednačina u razmatranoj računskoj tački, ActStr vrši operacije vezane za određivanje debljine i granulometrijskog sastava aktivnog stratuma. Podprogram DChar određuje karakteristične prečnike D_{50} i D_{90} , pri čemu poslednju koristi CFrict da bi se odredio koeficijent trenja.

Programska jedinica SedDif upravlja proračunom difuzionog koraka jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, pri čemu se pozivaju podprogrami:

- TurbMod - određuje koeficijent difuzije;
- SDiffSwp - upravlja proračunom unapred i proračunom unazad pri rešavanju sistema jednačina.

6. Testiranje modela na šematskim primerima - kvalitativno ponašanje

NAKON formiranja programskog koda, a pre nego što se pristupi njegovoj upotrebi, neophodno je sprovesti niz testova kako bi se otkrile potencijalne greške i ustanovili njegovi nedostaci. Prvi korak u testiranju je primena programa na niz šematskih primera sa ciljem testiranja pojedinih aspekata modela. Svrha ovakvih testova je kvalitativna provera razvijenog modela. Prilikom analize rezultata se proverava zadovoljenost jednačine održanja mase tokom proračuna, da li rezultati proračuna daju očekivane i fizički opravdane vrednosti analizirane veličine.

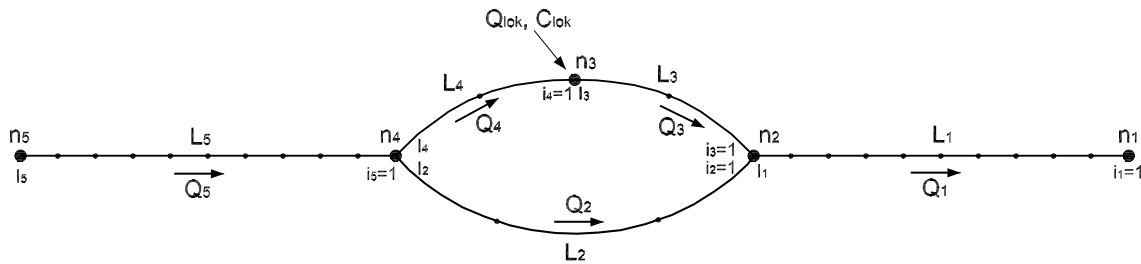
U okviru preliminarnih analiza ispravnosti razvijenog modela su ispitani sledeći aspekti modela: analiza algoritma za proračun strujanja vode i transporta suspendovanog nanosa u mreži otvorenih tokova na jednostavnom primeru složenog toka, primena različitih metoda za rešavanje linearne advekcije, provera modelisanja mehanizama razmene odnosno test uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju i deponovanja materijala iz suspenzije. Nakon sprovođenja šematskih primera se prelazi na složenije primere. Kako bi se aktivirao što veći broj podprograma, u sledećoj fazi ispitivanja se model primenjuje na simulaciju stvarne deonice Dunava i njene glavne pritoke u Srbiji.

6.1. Testiranje algoritma za proračun strujanja vode i transporta nanosa u mreži otvorenih tokova

Prvi šematski primer je formulisan sa namerom analize ispravnosti osnovnih principa modela, odnosno održanje mase vode i suspendovanog nanosa u čvorovima. Dispozicija modelisanog sistema kanala je data na slici 11. Sistem se sastoji od pet horizontalnih deonica međusobno povezanih preko pet računskih čvorova. Deonica L_2 je pravougaonog poprečnog preseka, dok su ostale deonice kanali trapeznog poprečnog preseka. Za hidraulički proračun je uzvodni granični uslov poznat hidrogram, dok je na nizvodnom kraju zadata konstantna dubina od $10m$. Početna vrednost proticaja iznosi $Q = 190m^3/s$ i zadržava se tokom prvih 15 dana proračuna. Nakon toga vrednost proticaja za dva dana poraste na $Q = 240m^3/s$ i ostaje konstantna jedan dan, pa se u roku od dva dana spušta na $Q = 180m^3/s$. Nakon toga proticaj ostaje konstantan do kraja proračuna. Tokom svih simulacija se u čvor $n = 3$ upušta lokalni dotok od $Q_{lokalno} = 20m^3/s$. Rasporedi proticaja i brzine duž toka pre nailaska talasa, u vreme maksimalnog protoka i nakon prolaska talasa su prikazani na slici 12.

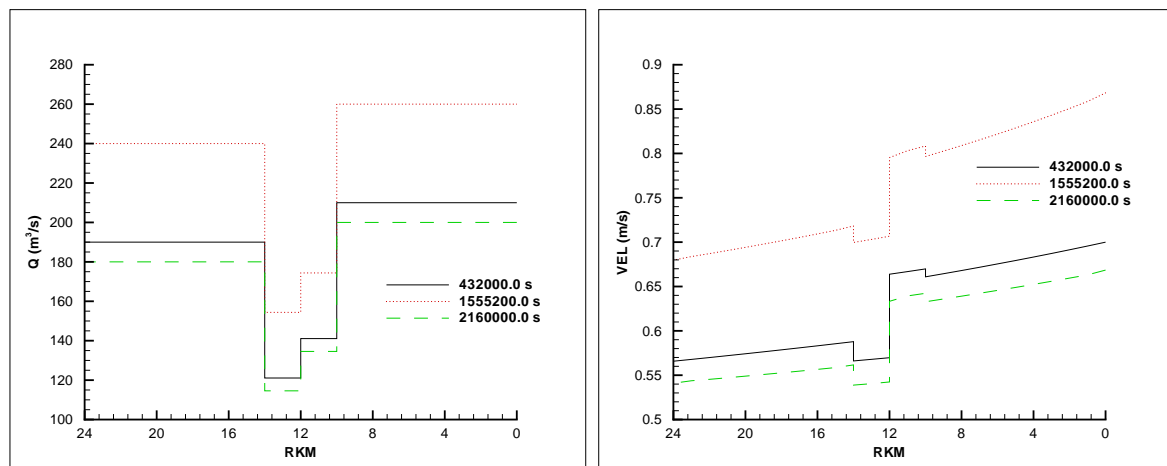
Proračun nanosa zahteva samo uzvodni granični uslov koji je definisan kao poznata i konstantna vrednost koncentracije tokom vremena. U čvoru $n = 3$ je paralelno sa dotokom vode zadat i konstantan ulaz koncentracije suspendovanog nanosa. Rezultati su prikazani u obliku funkcija $Q(t)$ i $C(t)$ u čvorovima $n = 4$, $n = 3$ i $n = 2$. U čvoru $n = 4$ se primećuje da je hidrogram koji ulazi kroz deonicu L_5 jednak sumi izlaznih hidrograma kroz deonice L_2 i L_4 . Kako u ovom čvoru nema lokalnog dotoka vode, može se zaključiti da su rezultati proračuna u skladu sa očekivanim. Čvor $n = 3$ povezuje samo dve deonice, L_4 (ulazna deonica) i L_3 (izlazna deonica), ali je graničnim uslovima definisan konstantan lokalni dotok što objašnjava veći izlazni hidrogram. U čvoru $n = 2$ se spajaju deonice L_2 i L_3 pa je suma njihovih hidrograma jednaka izlaznom hidrogramu kroz deonicu L_1 .

Posmatra se promena ukupne koncentracije suspendovanog nanosa tokom vremena $SumC$ u čvoru $n = 4$. Prilikom izvođenja jednačina je navedeno da se u čvorovima pretpostavlja da je raspodela koncentracija u deonicama koje izlaze iz čvora proporcionalna



Slika 11: Dispozicija modelisanog sistema kanala

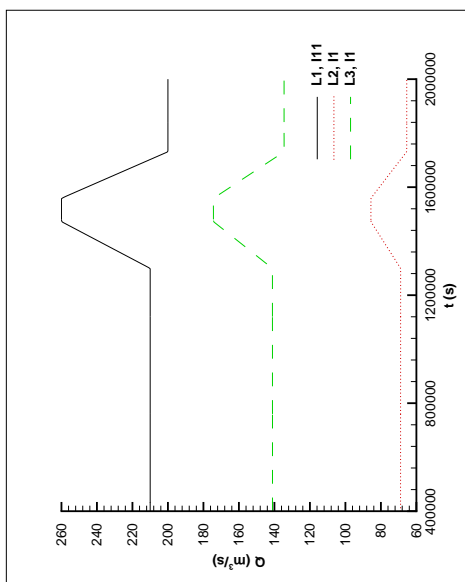
protoku. Sa prikazane slike se vidi da je koncentracija suspendovanog nanosa na ulazu u čvor $n = 4$ jednaka koncentracijama na uzvodnom kraju izlaznih deonica. Dobijena jednakost je rezultat primenjenog koncepta, da se čvrne koncentracije suspendovanog nanosa računaju kao protoku proporcionalne. Po istom principu se u izlaznoj deonici čvora $n = 3$ dobija manja koncentracija nego u ulaznoj deonici, uprkos činjenici da se u njemu lokalno dovodi suspendovani nanos. Lokalni dotok mešavine vode i nanosa je takav da se njime zapravo smanjuje koncentracija suspendovanog nanosa u vodi. Ista pojava se primećuje u čvoru $n = 2$. Naime, u čvor ulaze dve deonice, L_2 sa „većom“ koncentracijom suspendovanog nanosa i deonica L_3 sa manjom, a kao rezultat se u izlaznoj deonici javlja koncentracija između ove dve vrednosti. Poslednja konstatacija je takođe u skladu sa principom modelisanja ponašanja suspendovanog nanosa u čvorovima razmatranog sistema granate mreže otvorenih tokova.



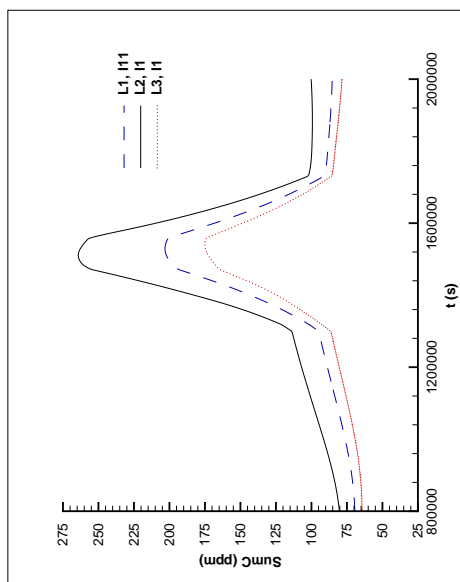
(a) Promena proticaja duž toka

(b) Promena brzine duž toka

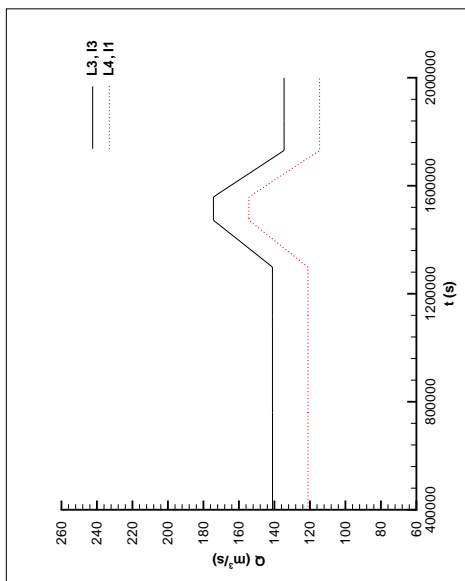
Slika 12: Šematski primer - promena hidrauličkih parametara duž toka kroz deonice $L_5-L_4-L_3-L_1$



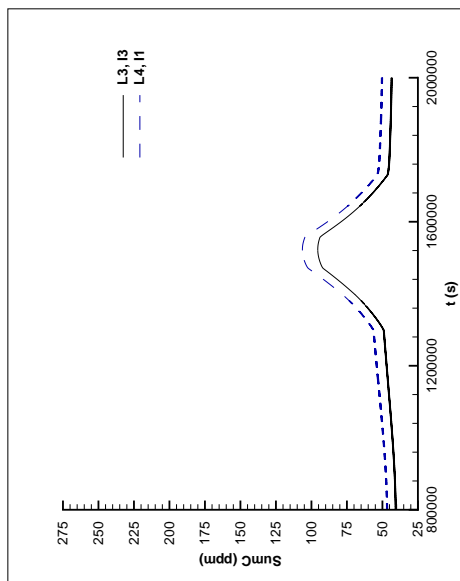
(c) Hidrogrami čvora $n = 2$



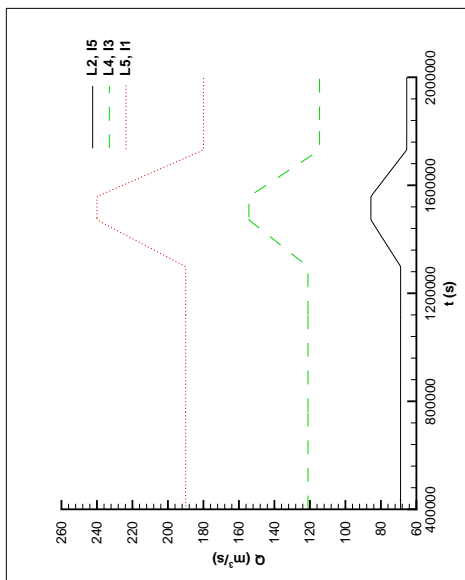
(f) Funkcija $SumC(t)$ čvora $n = 2$



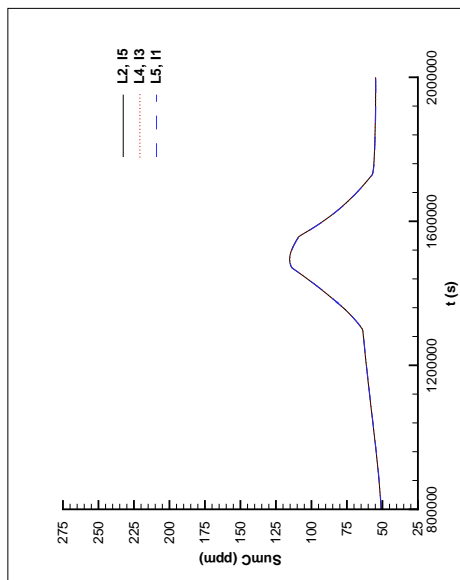
(b) Hidrogrami čvora $n = 3$



(e) Funkcija $SumC(t)$ čvora $n = 3$



(a) Hidrogrami čvora $n = 4$



(d) Funkcija $SumC(t)$ čvora $n = 4$

Slika 13: Šematski primer - proračun strujanja vode i transporta nanosa u sistemu kanala

6.2. Testiranje linearne advekcije

Primena metode razlomljenih koraka na jednačinu transporta nanosa rezultuje u dva uzastopna koraka, advektivni i difuzioni korak (Spasojevic i Holly, 1990). Za razliku od difuzionog koraka koji se pokazao kao numerički bezazlen, advektivni korak izaziva niz poteškoća. Glavni problem je posledica stohastičke promene *Courant*-ovog broja usled prirodne geometrije otvorenih tokova i graničnih uslova. Najveći izazov prilikom rešavanja advekcije predstavlja izbor numeričkog rešenja koje će osigurati tačnost rešenja sa jedne strane i obezbediti primenu što većeg računskog koraka po vremenu sa druge strane. Mnogi autori su za rešavanje jednačine advekcije koristili šeme metode konačnih razlika zbog njihove jednostavne primene (Wu, 2008; Fletcher, 1991; Hirsch, 2007; Strikwerda, 2004). *Lax* i *Wendroff* su razvili šemu drugog reda za jednačinu linearne advekcije, (*Lax* i *Wendroff*, 1960).

Primena metode karakteristika na numeričko rešenje jednačine linearne advekcije je ispitivana sa strane mnogih autora sa ciljem smanjenja uticaja numeričke difuzije čija pojava prikriva stvarnu difuziju. Imajući u vidu da tačnost metode karakteristika direktno zavisi od vrste interpolacije koja se koristi, postoji niz radova na datu temu. Leonard (1979) je predložio kvadratnu uzvodnu interpolaciju, dok su Holly i Preissmann (1977) predložili lokalni kubni interpolacioni polinom koji je dodatno ispitan i sa strane drugih autora (Ahmad i Kothiyari, 2001; Holly i Usseglio-Polatera, 1984; Tsai et al., 2006; Yang i Hsu, 1991).

Ovde prikazani testovi su sprovedeni na jednačini čiste advekcije nakon čega je isti postupak primenjen i na advekciju kao dela metode razlomljenih koraka. Primenjena numerička rešenja su ocenjena na osnovu njihove disperzije i disipacije, a testovi čiste advekcije su rađeni na primeru *Gauss*-ove funkcije i stepene funkcije (ili oštrog čela). Rezultati dobijeni na primerima čiste advekcije su primenjeni na metodu razlomljenih koraka sa ciljem poboljšanja tačnosti rezultata.

6.2.1. Linearna advekcija

Kako bi se došlo do tačnog rešenja sa kojim bi se numeričko modelisanje procesa transporta unapredilo, prvo se jednačina linijske linearne advekcije razmatra kao nezavisna jednačina. Razmotriće se razne numeričke metode sa namerom definisanja njihove tačnosti, stabilnosti i primenljivosti. Jenačina čiste, linearne advekcije sa početnim uslovom je

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad C(x,0) = C_0(x), \quad (6.103)$$

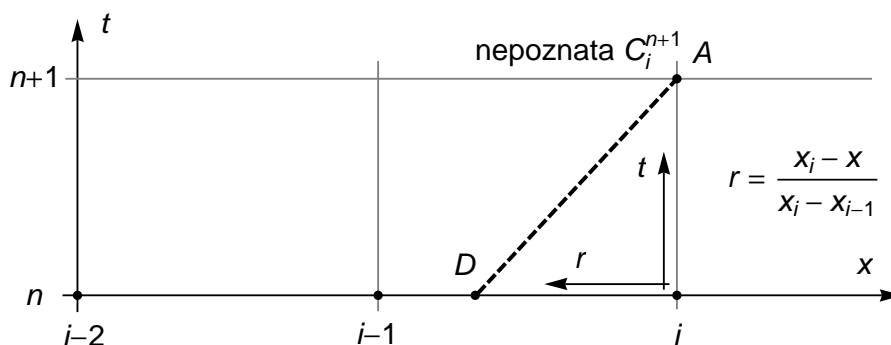
gde je C_0 početna vrednost koncentracije, a u je u ovom slučaju poznata i konstantna brzina advekcije. Jednačina (6.103) ima tačno rešenje koje pokazuje da se za pozitivne brzine u početna vrednost koncentracije $C_0(x)$ translatorno pomera na desnu stranu brzinom u , a za negativne brzine na levu stranu, bez ikakvih promena oblika (Toro, 2009). Ovo objašnjava činjenicu da jednačina advekcije granični uslov zahteva samo na uzvodnim granicama.

Numeričko rešenje jednačine (6.103) je dobijeno primenom metode karakteristika sa tri različita tipa interpolacije i sa četiri različite šeme metode konačnih razlika (Upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff i Runge-Kutta četvrtog reda). Tačnost razmatranih numeričkih metoda je analizirana proverom razlike između analitičkog i numeričkog rešenja u svakoj računskoj tački i njihovom primenom za određivanje standardnih L_1 , L_2 i L_∞ vektorskih normi (Griewank i El-Danaf, 2009).

6.2.2. Metoda karakteristika

Pogodnost metode karakteristika za primenu na modelisanje transportnih procesa je posledica jasnog fizičkog značenja. Karakteristična kriva je trajektorija kontrolne zapremine koja sadrži mešavinu vode i transportovane materije. Metoda karakteristika polaznu parcijalnu diferencijalnu jedničinu (6.103) transformiše u dve obične diferencijalne jednačine, pa se može napisati da je

$$\frac{dC}{dt} = 0, \quad \text{koja važi duž karakteristične linije} \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (6.104)$$



Slika 14: Putovanje trajektorije u proračunu advekcije

Na slici 14 je prikazana trajektorija koja dolazi u računsku tačku i u vremenskom nivou $n+1$. Za polaznu tačku trajektorije se zna da je negde u prethodnom vremenskom nivou, ali je njena koordinata nepoznata. Integraljenjem jednačine (6.104) duž trajektorije, između polazne $D(x_D, t^n)$ i dolazne tačke $A(x_i, t^{n+1})$ se dobija da je

$$C_i^{n+1} = C_D^n, \quad x_D = x_i - u\Delta t, \quad (6.105)$$

gde je C_i^{n+1} tražena veličina transportovana advekcijom u dolaznoj tački A , a C_D^n ista veličina u polaznoj tački D , sa koordinatom x_D . Polazna tačka je obično smeštena između dve računске tačke u vremenskom nivou n , pa se određivanje vrednosti C_i^{n+1} svodi na definisanje veličine C_D^n putem neke vrste interpolacije. Obična linearna interpolacija je problematična jer izaziva rasplinjavanje numeričkog rešenja, zbog čega se u nastavku analiziraju tri vrste interpolacije višeg reda. Prvo se razmatra interpolacioni polinom drugog reda (MC2) (Ferziger i Perić, 2002). Druga dva tipa interpolacije su lokalni interpolacioni polinomi višeg reda, *Hermite*-ov kubni interpolacioni polinom (HP3) (Holly i Preissmann, 1977; Tsai et al., 2006) i njegova unapređena verzija, lokalni interpolacioni polinom petog reda (HP5).

U slučaju MC2, interpolacioni polinom za veličinu transportovanu advekcijom ima sledeći oblik,

$$C_D^n = C_{i-1}^n + g_1(C_i^n - C_{i-1}^n) + g_2(C_{i-1}^n - C_{i-2}^n), \quad (6.106)$$

gde su g_1 i g_2 koeficijenti koje su definisali Ferziger i Perić (2002). Interpolacioni polinom za slučaj HP3 je dat izrazom

$$C_D^n = a_1 C_{i-1}^n + a_2 C_i^n + a_3 (C_x)_{i-1}^n + a_4 (C_x)_i^n, \quad (6.107)$$

gde su a_1, a_2, a_3 i a_4 poznati koeficijenti koji mogu da se nađu u radu autora Holly i Preissmann (1977); Tsai et al. (2006). Primena interpolacionog polinoma datog jednačinom (6.107) zahteva poznate vrednosti koncentracije i njenog izvoda u susednim računskim tačkama. Jednačina za izvode se dobija diferenciranjem jednačine (6.103) po x nakon čega se integraljenjem duž karakteristične linije dobija da je

$$(C_x)_i^{n+1} = (C_x)_D^n. \quad (6.108)$$

Implementacija jednačine (6.108) zahteva dodatni izraz pomoću kojeg se mogu interpolovati izvodi koncentracije, pa se navodi

$$(C_x)_D^n = b_1 C_{i-1}^m + b_2 C_i^m + b_3 (C_x)_{i-1}^n + b_4 (C_x)_i^n, \quad (6.109)$$

gde su b_1, b_2, b_3 i b_4 poznati koeficijenti koji mogu da se nađu u radovima autora Holly i Preissmann (1977); Tsai et al. (2006). Uzvodni granični uslov za izvode se dobija preuređivanjem jednačine (6.103). Interpolacioni polinom HP5 je dat sledećom jednačinom

$$C_D^m = c_1 C_{i-1}^m + c_2 C_i^m + c_3 (C_x)_{i-1}^n + c_4 (C_x)_i^n + c_5 (C_{xx})_{i-1}^n + c_6 (C_{xx})_i^n, \quad (6.110)$$

gde je C_{xx} drugi izvod koncentracije po prostoru, a koeficijenti c_1, c_2, c_3, c_4 i c_5 su dati u radu autora Isic et al. (2013). Jednačina prvih izvoda (6.108) je validna i u ovom slučaju, tako da se navodi samo neophodan interpolacioni polinom

$$(C_x)_D^n = d_1 C_{i-1}^m + d_2 C_i^m + d_3 (C_x)_{i-1}^n + d_4 (C_x)_i^n + d_5 (C_{xx})_{i-1}^n + d_6 (C_{xx})_i^n, \quad (6.111)$$

gde potrebni koeficijenti d_1, d_2, d_3, d_4 i d_5 mogu da se nađu u radu autora Isic et al. (2013). U slučaju HP5 interpolacija veličine koja se transportuje advekcijom pored poznatih vrednosti C i C_x u susednim računskim tačkama, zahteva i poznate druge izvode koji se određuju diferenciranjem jednačine za prve izvode po x i integraljenjem duž trajektorije kako bi se dobila sledeća jednačina

$$(C_{xx})_i^{n+1} = (C_{xx})_D^n. \quad (6.112)$$

Iz poslednje jednačine je jasno da primena polinoma HP5 zahteva interpolacionim polinom za druge izvode dat izrazom (6.113),

$$(C_{xx})_D^n = e_1 C_{i-1}^n + e_2 C_i^n + e_3 (C_x)_{i-1}^n + e_4 (C_x)_i^n + e_5 (C_{xx})_{i-1}^n + e_6 (C_{xx})_i^n, \quad (6.113)$$

gde su koeficijenti e_1, e_2, e_3, e_4 i e_5 dati u radu autora Isic et al. (2013). Uzvodni granični uslov za druge izvode se dobija diferenciranjem uzvodnog graničnog uslova prvih izvoda.

6.2.3. Šeme metode konačnih razlika

Široka primena šema metode konačnih razlika je posledica njihove jednostavnosti. Za diskretizaciju jednačine linearne advekcije (6.103) su primenjene *upwind* šema, (UW), koja je šema prvog reda po vremenu i prostoru (Fletcher, 1991; Hirsch, 2007; Strikwerda, 2004), *Lax-Friedrichs* šema, (LF), koja je takođe prvog reda po vremenu i prostoru (Hirsch, 2007; Lax, 1954; Strikwerda, 2004), *Lax-Wendroff* šema, (LW), koja je šema drugog reda po vremenu i prostoru (Fletcher, 1991; Hirsch, 2007; Lax i Wendroff, 1960; Strikwerda, 2004) i *Runge-Kutta* četvrtog reda, (RK), (Hirsch, 2007). Von Neumann i Richtmyer (1950) su razvili metodu analize šema konačnih razlika koja omogućava

predviđanje disipacije i disperzije analizirane šeme. Disipacija je konstantno opadanje amplitude talasa koji napreduje tokom vremena i izaziva rasplinjavanje rešenja. Odnos apsolutne vrednosti faktora amplifikacije približnog i tačnog rešenja daje amplitudnu grešku. Ukoliko je ovaj odnos jednak jedinici, nema amplitudne greške, dakle neće se javiti ni amplifikacija rešenja niti njegovo rasplinjavanje (numerička difuzija). Vrednosti amplitudne greške veće od jedan su pokazatelji numeričke nestabilnosti ispitivane šeme.

Fazna greška je odnos brzine propagacije m -te komponente približnog i tačnog rešenja. Fazna greška veća od jedan ukazuje na to da je brzina propagacije približnog rešenja veća od brzine propagacije tačnog rešenja, dok su vrednosti fazne greške manje od jedan pokazatelj kašnjenja numeričkog rešenja. Ako je odnos brzina propagacije približnog i tačnog rešenja jednak jedinici, znači da data šema nema faznu grešku, odnosno da nema numeričkih oscilacija.

Autori Isic et al. (2013) su dali izraze i grafički prikaz amplitudne i fazne greške razmatranih šema metode konačnih razlika.

6.2.4. Numerički testovi

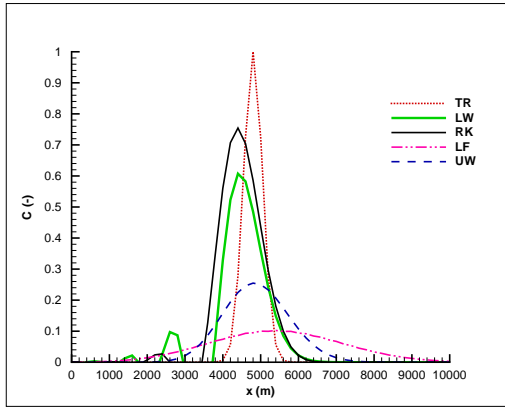
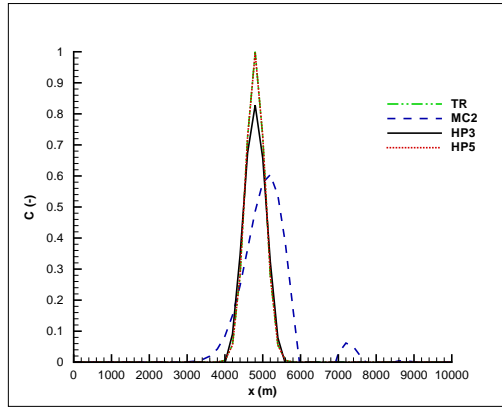
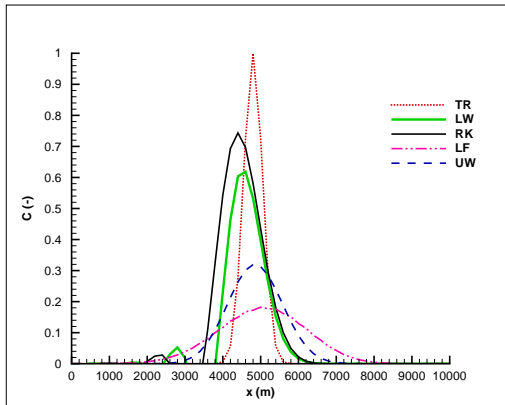
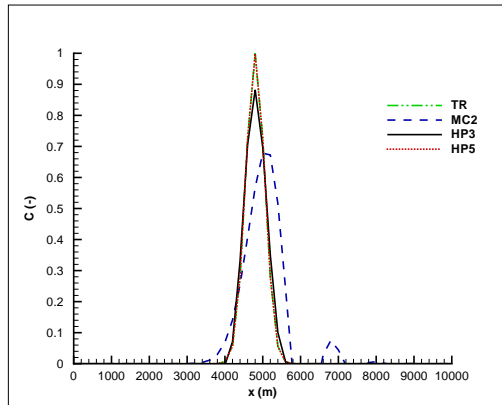
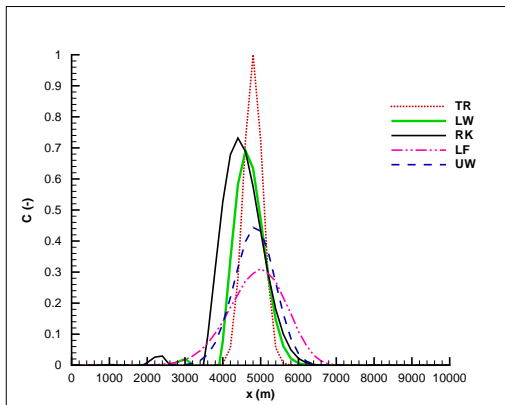
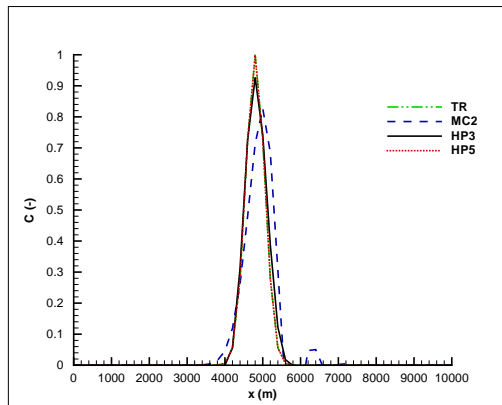
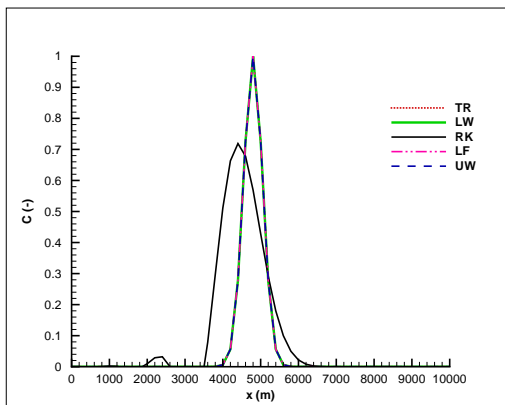
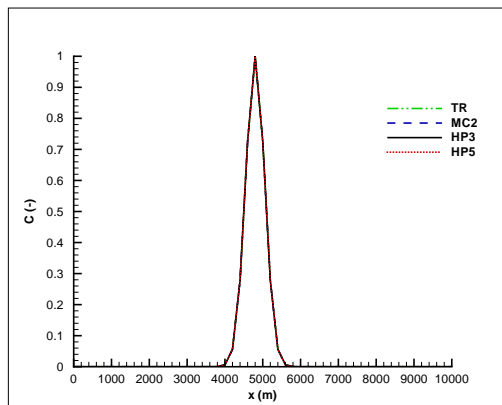
Numerički model transporta nanosa podrazumeva rešavanje kompletne transportne jednačine. Primenom metode razlomljenih koraka se dolazi do jednačina koje se rešavaju u dva uzastopna koraka, advektivni i difuzioni korak (Benqué et al., 1982; Spasojevic i Holly, 1990; Wu, 2008). Difuzioni korak sam po sebi menja oblik rešenja sa čime se onemogućava razaznavanje numeričke od stvarne difuzije. Zbog toga se advekcija prvo razmatra kao samostalna celina.

Prikazani primer je analitičko rešenje jednačine linearne advekcije (jednačina (6.103)) opisane sa *Gauss*-ovom raspodelom transporta koncentracije (Tsai et al., 2006)

$$C(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (6.114)$$

gde je x_0 položaj maksimalne vrednosti *Gauss*-ove funkcije, $\sigma_x = 250m$ je parametar standardne devijacije. Početni uslov se dobija iz jednačine (6.114) podešavanjem da je maksimum funkcije u $x_0 = 0.0m$ za $t = 0.0s$, a granični uslov se dobija polazeći od iste jednačine podešavanjem da preostali deo funkcije ulazi u računsku oblast za vremena $t > 0.0s$. Ukupna dužina modelisane oblasti je $L = 10km$, ukupno simulirano vreme je $160min$, računski korak po prostoru je $\Delta x = 200m$, a brzina propagacije iznosi $u = 0.5m/s$. Rezultati numeričkih testova su prikazani na slici 15 (ES označava tačno rešenje), gde se vidi uticaj *Courant*-ovog broja. Najbolji rezultati se dobijaju za $\lambda = 1.00$ kada sve numeričke metode, izuzev RK, daju dobre aproksimacije tačnog rešenja.

Dobijeni rezultati su u saglasnosti sa rezultatima koje su Isic et al. (2013) dobili sprovođenjem *von Neumann*-ove analize stabilnosti. Za vrednosti $\lambda < 1.00$, dolazi do stvaranja numeričkih oscilacija i/ili rasplinjavanja, u zavisnosti od odabrane numeričke metode. Takođe se primećuje da je razlika u tačnosti između MC2 i HP3 za red veličine veća od razlike u tačnosti između HP3 i HP5, čime je opravdan prelaz sa kvadratnog na kubni interpolacioni polinom. Sa druge strane, se pokazalo da se ne isplati dodatno unapređenje interpolacionog polinoma do HP5 zbog komplikacija tokom izvođenja i problema oko zadavanja graničnih uslova, jer je napor koji je potrebno uložiti neopravdan imajući u vidu relativno malo poboljšanje rezultata. Dodatni nedostatak šema metode konačnih razlika je potreba da se tokom proračuna zadovolji *Courant-Friedrichs-Lewy* uslov (Thomas, 1995) (za UW, LF, LW $0 < \lambda \leq 1$, a za RK $0 < \lambda \leq 2\sqrt{2}$), dok metoda karakteristika nema ovakvo ograničenje. U tabeli 8 su prikazane vrednosti vektorskih normi odakle je jasno da od razmotrenih metoda HP5 daje najbolje rezultate.

(a) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 0.25$ (b) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 0.25$ (c) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 0.50$ (d) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 0.50$ (e) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 0.75$ (f) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 0.75$ (g) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 1.00$ (h) Šeme metode konačnih razlika, $\lambda = 1.00$

Slika 15: Šematski primer - čista advekcija - Gauss-ova raspodela

Cournat-ov broj	Vektorska norma L_k	Numerička metoda						
		LW	RK	LF	UW	HP3	MC2	HP5
$\lambda = 0.25$	$k = 1$	3.42601	3.59985	4.13945	3.22401	0.50295	3.44921	0.013381
	$k = 2$	0.99927	1.18737	1.33368	1.08618	0.21323	1.01972	0.005896
	$k = \infty$	0.51501	0.65093	0.90508	0.74519	0.17202	0.51387	0.004322
$\lambda = 0.75$	$k = 1$	1.78614	3.54939	3.01285	2.2315	0.32499	1.94874	0.004549
	$k = 2$	0.64308	1.14501	1.03319	0.7998	0.15333	0.67258	0.002024
	$k = \infty$	0.36598	0.62234	0.70457	0.55621	0.10968	0.40708	0.001495
$\lambda = 1.00$	$k = 1$	0.0	3.53719	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$k = 2$	0.0	1.12623	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$k = \infty$	0.0	0.60709	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 8: Vektorske norme za testiranje linearne advekcije - Gauss-ova raspodela

Na osnovu do sada izloženog, bilo bi logično odabrati takve parametre proračuna koji će obezbediti vrednost $\lambda = 1$. Međutim, iz praktičnih razloga to nije izvodljivo, pogotovo u slučaju modelisanja prirodnih tokova.

6.2.5. Linearna advekcija u metodi razlomljenih koraka

Kompletna jednačina održanja mase suspendovanog nanosa je

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_s A \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (6.115)$$

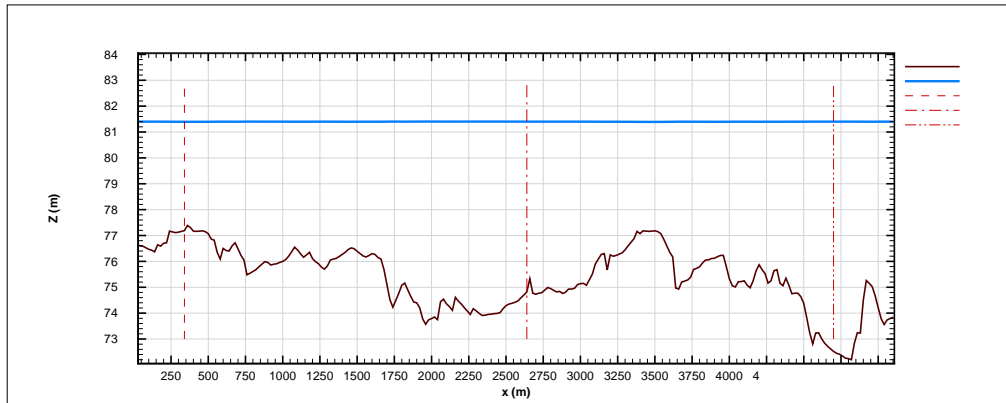
pri čemu je pretpostavljeno da nema razmene sa materijalom na dnu. Primena metode razlomljenih koraka rezultuje u dva uzastopna koraka (advektivni i difuzioni korak) koji doprinose konačnom rešenju.

Za razliku od metode konačnih razlika, čija primena ostaje ista i u slučaju da se razmatra kompletna jednačina transporta nanosa, kod metode karakteristika interpolacioni polinomi ostaju nepromenjeni, ali se postupak integraljenja i diferenciranja mora prilagoditi koristeći se ranije izloženim principima. Ovo je još jedan razlog zbog kojeg se mnogi autori opredeljuju za metodu konačnih razlika.

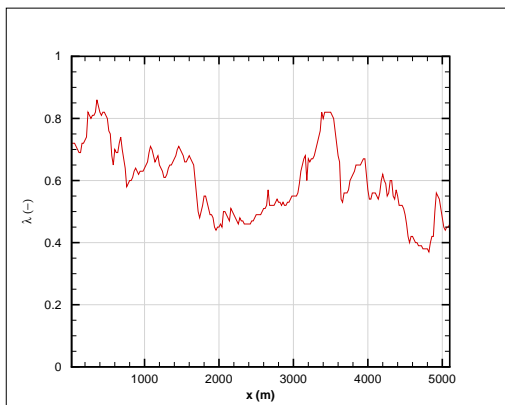
6.2.6. Primena u modelisanju otvorenih tokova

Sledeći korak u proveri razmatranih numeričkih metoda je njihova primena na primeru numeričkog modela transporta nanosa razvijenog koristeći jednačinu (6.115). Za realni primer vodotoka nije moguće naći analitičko rešenje jednačina zbog složene računске oblasti, odnosno zbog promenljive geometrije korita. Ranije je ustanovljeno da HP5 daje najtačnije rezultate od razmatranih metoda, pa će se rezultati dobijeni korišćenjem tog polinoma smatrati referentnim vrednostima.

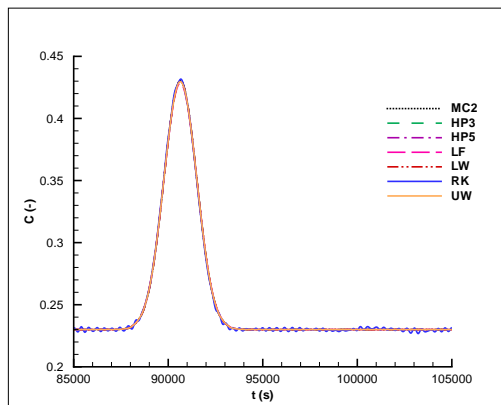
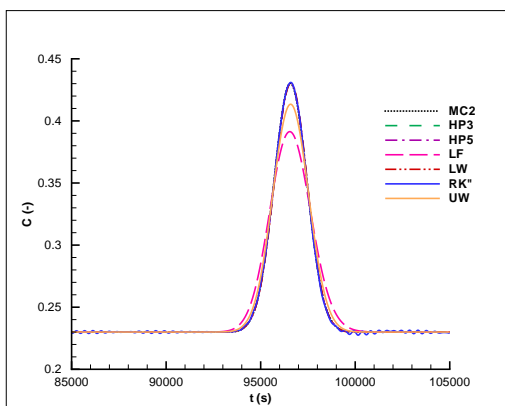
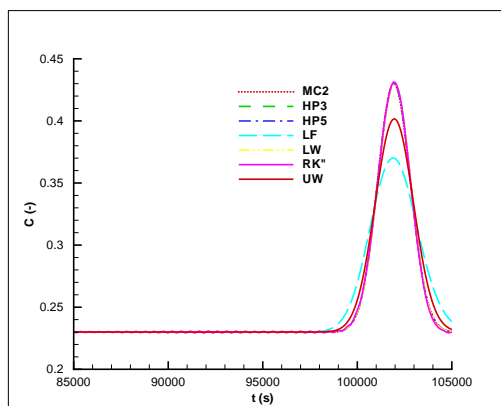
Podužni presek modelisane deonice je prikazan na slici 16(a) gde su $P1$, $P2$ i $P3$ preseki u kojima su rezultati analizirani. Ukupna dužina deonice je $L = 5080m$ sa računskim korakom po prostoru od $\Delta x = 20m$ i ukupnim simuliranim vremenom od $39.2h$. Izbor računskog koraka po vremenu od $\Delta t = 30s$ je uslovljen sa stabilnošću najosetljivije metode. Uzvodni granični uslov za proračun nanosa je dat Gauss-ovom krivom dok je hidraulički deo proračuna ostavljen u ustaljenom stanju. Na slici 16(c),(d) i (e) je prikazana promena koncentracije tokom vremena u presecima $P1$, $P2$ i $P3$ izračunata primenom različitih numeričkih metoda. U tabeli 9 su date vektorske norme na osnovu čijih vrednosti se zaključuje da se udaljavanjem od uzvodnog graničnog uslova tačnost rešenja smanjuje. Daljom analizom se može primetiti da HP3 daje rezultate najbliže referentnim vrednostima, rezultati dobijeni pomoću MC2 i LW su za red veličine lošiji od njih, a preostale metode su se pokazale kao još slabije. Slika 16(b) prikazuje



(a) Podužni presek modelisane deonice



(b) Promena Courant-ovog broja duž toka

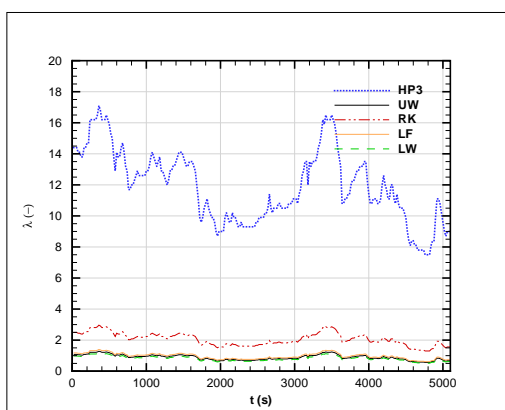
(c) Funkcija $C(t)$ u preseku P1(d) Funkcija $C(t)$ u preseku P2(e) Funkcija $C(t)$ u preseku P3

Slika 16: Šematski primer - proračun transporta suspendovanog nanosa - stabilno rešenje

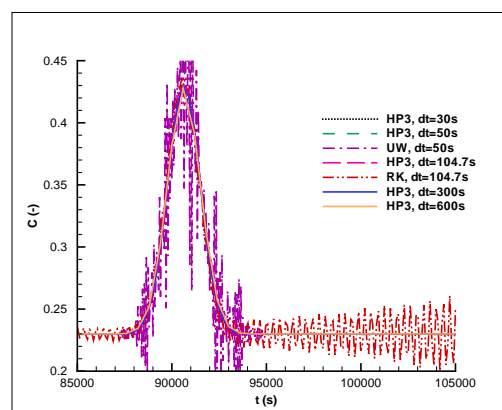
promenu *Courant*-ovog broja duž toka pod uticajem promenljive geometrije zbog čega je podešavanje $\lambda = 1$ nemoguće u svakodnevnim primerima. Pored toga, ograničenje vrednosti *Courant*-ovog broja može značajno da uspori proračune tečenja i transporta nanosa u otvorenim tokovima gde se simuliraju i periodi od nekoliko godina ili decenija. Jedna od najvećih prednosti metode karakteristika je njen potencijal da se koriguje tako da se omoguće veći vremenski koraci. Zbog svoje složenosti je ovaj postupak urađen za samo jedan slučaj interpolacije. Pošto složenost izvođenja ovih jednačina raste sa stepenom razmatranog interpolacionog polinoma, odabran je HP3 za koji se pokazalo da daje mnogo bolje rezultate od MC2, a ne toliko lošije u odnosu na HP5 koliko je njegovo izvođenje jednostavnije.

Tačka	Vektorska norma L_k	Razlika između referentnih vrednosti (HP5) i					
		HP3	MC2	LW	RK	LF	UW
P1	$k = 1$	0.02295	0.31153	0.08491	4.07491	0.81348	0.28407
	$k = 2$	0.00432	0.04175	0.01118	0.07663	0.11695	0.04364
	$k = \infty$	0.00169	0.01492	0.00358	0.00674	0.03247	0.01453
P2	$k = 1$	0.02706	0.53571	0.49950	2.97721	5.16261	2.18031
	$k = 2$	0.00399	0.06138	0.05366	0.08534	0.34416	0.15974
	$k = \infty$	0.00129	0.01688	0.01571	0.01787	0.05155	0.03081
P3	$k = 1$	0.04027	0.72973	0.76613	2.99403	8.28436	3.66326
	$k = 2$	0.00515	0.07580	0.07279	0.10312	0.50963	0.24719
	$k = \infty$	0.00155	0.01902	0.01946	0.02027	0.06042	0.03677

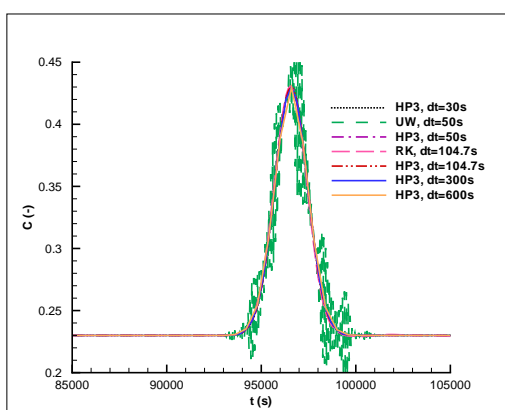
Tabela 9: Vektorske norme za testiranje linearne advekcije - primena u modelisanju otvorenih tokova



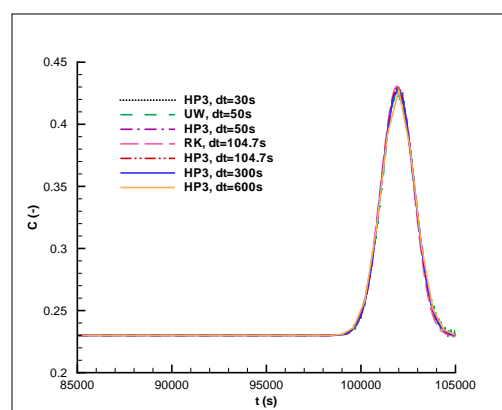
(a) Promena *Courant*-ovog broja duž toka



(b) Funkcija $C(t)$ u preseku P1



(c) Funkcija $C(t)$ u preseku P2



(d) Funkcija $C(t)$ u preseku P3

Slika 17: Šematski primer - proračun transporta suspendovanog nanosa - nestabilno rešenje

Na slici 17(b),(c) i (d) su upoređeni rezultati dobijeni različitim metodama, uključujući i poboljšan algoritam za metodu karakteristika koja koristi HP3 interpolacioni polinom. Za razliku od UW i RK šema koje postaju numerički nestabilne pri većim vremenskim koracima, poboljšan HP3 algoritam daje rešenje bez značajnog gubitka tačnosti. Postignute vrednosti *Courant*-ovih brojeva su prikazane na slici 17(a). Za metode konačnih razlika prikazane vrednosti predstavljaju maksimalne vrednosti λ dok je modifikovan HP3 algoritam mogao da podnese i veće vrednosti.

6.3. Testiranje mehanizama razmene

Prilikom izvođenja jednačina, član izvora suspendovanog nanosa je definisan kao razlika vertikalnog fluksa usmerenog na gore koji uvlači nanos sa dna u suspenziju i fluksa deponovanja. Kako bi se proverila ispravnost usvojenog mehanizma razmene, polazeći od same definicije člana izvora suspendovanog nanosa, treba proveriti dve karakteristične situacije.

Prvi slučaj je situacija kada se u otvoreni tok upušta čista voda dok mu je dno prekriveno nanosom. Pod pretpostavkom da su karakteristike toka takve da mogu da pokrenu nanos sa dna, očekivani rezultat je uvlačenje nanosa sa dna u suspenziju sa čime bi se u samom toku javila koncentracija nanosa koja bi bila na raspolaganju za deponovanje. U slučaju ustaljenog tečenja se u proizvoljnom preseku može očekivati postizanje ravnotežnog stanja, odnosno izjednačenje količine materijala koji se sa dna podiže i materijala koji se deponuje iz suspenzije.

Druga karakterističan situacija prilikom analize mehanizama razmene je situacija kada je dno otvorenog toka bez nanosa (na dnu nema nanosa koji voda može da pokrene) dok se na uzvodnoj granici nameće da ulazi voda sa suspendovanim nanosom. U tom slučaju bi se, uz odgovarajuće hidrauličke uslove, očekivalo deponovanje nanosa iz suspenzije. Kao rezultat deponovanja se sada na dnu toka nalazi nanos koji je na raspolaganju za potencijalno uvlačenje u suspenziju. Pod uslovom ustaljenog tečenja se u proizvoljno odabranom poprečom preseku nakon određenog vremena uspostavlja ravnotežno stanje.

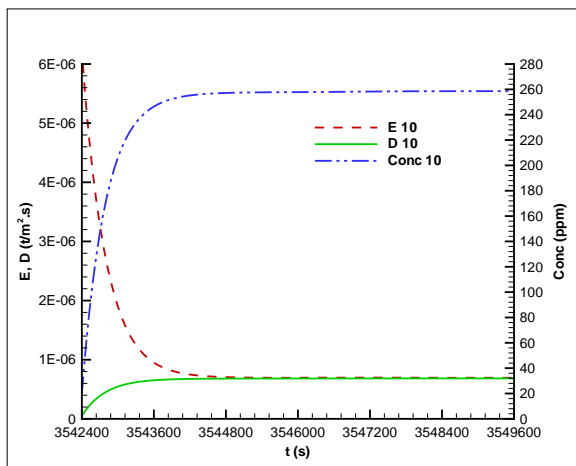
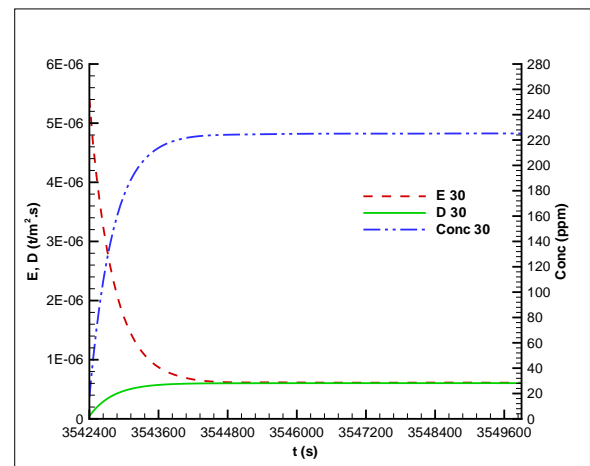
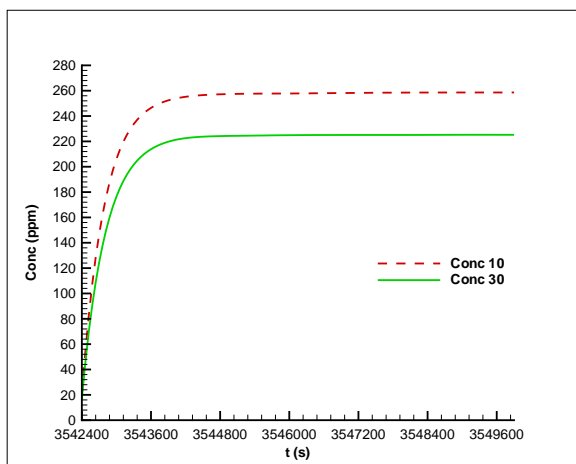
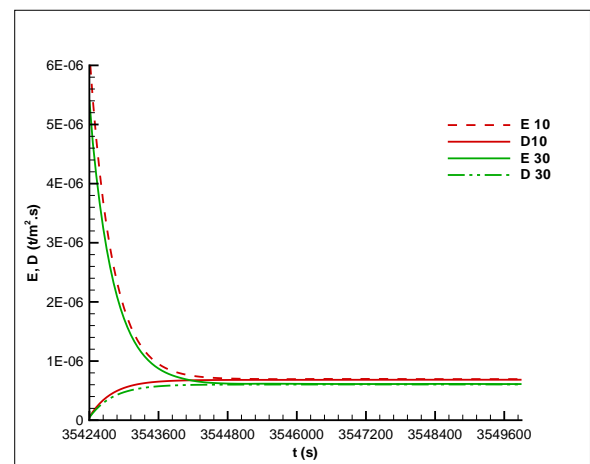
Dva navedena slučaja predstavljaju jednostavne situacije da se provere najosnovniji principi mehanizma razmene između suspendovanog i nanosa na i pri dnu. Kako bi rezultati bili što jasniji, za oba primera se usvaja prizmatičan kanal pravougaonog poprečnog preseka širine $B = 10m$ sa horizontalnim dnom. Ukupna dužina kanala je $20km$. Računske tačke su postavljene na međusobnom rastojanju od $0.5km$, što znači da je ukupan broj računskih tačaka 41. Računski korak po vremenu je isti za oba šematska primera mehanizama ramene i iznosi $\Delta t = 60s$. Hidraulički proračun je isti u oba slučaja. Za početni uslov je nametnuto da voda stoji, a početna dubina iznosi $h = 10m$. Uzvodni granični uslov je poznat hidrogram koji se sa početne vrednosti $Q = 0.0m^3/s$ za dva dana podigne na vrednost od $Q = 90m^3/s$ i ostaje nepromenjen do kraja simulacije. Nizvodni granični uslov je konstantna dubina od $h = 10m$. Nakon postizanja maksimalne vrednosti hidrograma je predviđen period od približno 39 dana za ustaljivanje hidrauličkog proračuna pre nego što se pređe na proračun nanosa. Podaci za dalji proračun se razlikuju u zavisnosti od date situacije zbog čega su posebno dati u daljem tekstu.

6.3.1. Uvlačenje nanosa sa dna u suspenziju

U slučaju provere mehanizma uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju su početni i granični uslovi za proračun nanosa isti. Nanosa u suspenziji nema u početnom stanju niti ga ima u vodi koja se upušta u kanal, a nizvodni granični uslovi nisu potrebni. Nanos

se u početnom trenutku i na uzvodnoj granici zadaje kao procentualni udeo date frakcije na dnu. Radi preglednosti rezultata se razmatra samo jedna frakcija tako da su početni i granični uslovi $\beta = 1$ za datu frakciju. Simulirani period za transport nanosa je 11.66 dana, ali se ravnotežno stanje postigne mnogo ranije zbog čega je prikaz rezultata ograničen na dva dana.

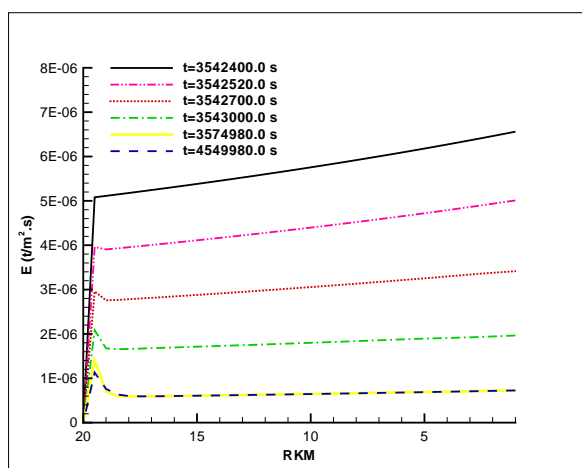
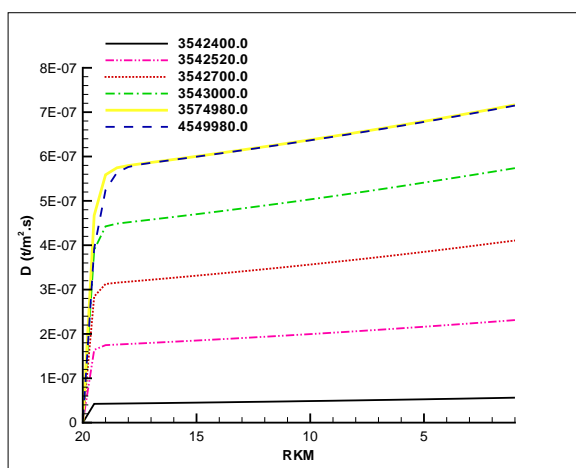
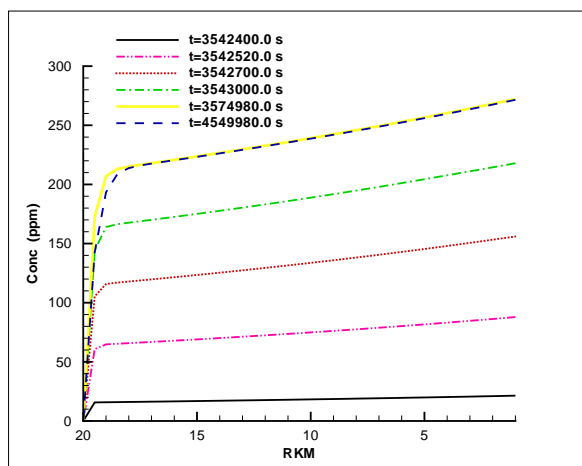
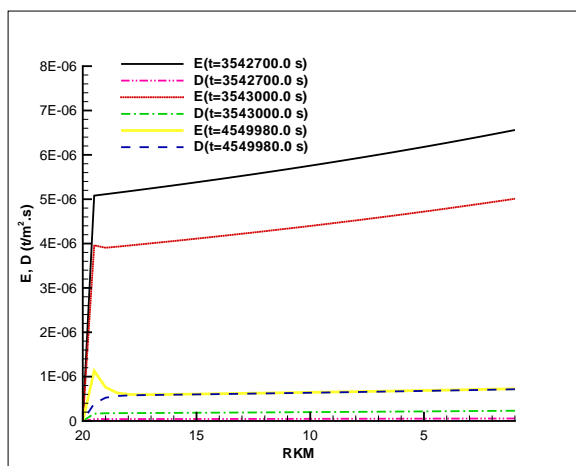
Od rezultata proračuna je prikazana promena koncentracije C , vertikalnog fluksa uvlačenja nanosa sa dna i nanosa pri dnu u suspenziju E i deponovanja D tokom vremena, slike 18, i duž toka, slike 19. Slika 18 (a) prikazuje promenu veličina C , E i D tokom vremena u računskoj tački $i = 10$, uz napomenu da je $i = 1$ na nizvodnoj granici. Vrednost vertikalnog fluksa uvlačenja nanosa sa dna u suspenziju je najveća na samom početku proračuna nanosa, a kako proračun napreduje vrednost E se smanjuje jer je sve manje materijala na dnu koji može da se uvuče u suspenziju. Suprotno ovoj veličini je vrednost deponovanja koja je najmanja na početku proračuna jer u početnim trenucima nema nanosa u vodi koji bi mogao da se deponuje. Kako proračun odmiče, članom E se u suspenziju uvlači nanos, što potvrđuje i oblik krive $C(t)$, koji sada ostvaruje uslove potrebne za deponovanje, zbog čega funkcija $D(t)$ raste. Pored navedenog se primećuje da nakon određenog vremena sve tri krive postaju horizontalne, odnosno vrednosti E i D se izjednačavaju i postiže se konstantna vrednost koncentracije u suspenziji.

(a) Funkcije $E(t)$, $D(t)$ i $Conc(t)$ za tačku $i = 10$ (b) Funkcije $E(t)$, $D(t)$ i $Conc(t)$ za tačku $i = 30$ (c) Funkcija $Conc(t)$ za tačke $i = 10$ i $i = 30$ (d) Funkcije $E(t)$ i $D(t)$ za tačke $i = 10$ i $i = 30$

Slika 18: Šematski primer - uvlačenje u suspenziju - promena tokom vremena

Slika 18 (b) prikazuje iste veličine u računskoj tački $i = 30$. Poređenjem ove dve slike se primećuje da, mada oblik dobijenih krivih jeste isti, postoje razlike između samih vrednosti, na primer, na slici pod (a) se koncentracija ustali na vrednost $C \approx 260ppm$, dok se u na slici označenoj sa (b) ustali na $C \approx 225ppm$. Imajući u vidu da je tačka $i = 30$ bliža uzvodnom kraju od tačke $i = 10$, razlika u ustaljenim vrednostima koncentracija je opravdana i objašnjava se sa činjenicom da je presek $i = 10$ više udaljen o uzvodnog kraja što sistemu ostavlja više prostora za uvlačenje nanosa sa dna a samim tim i postizanje većih vrednosti koncentracija, što je prikazano na slikama 18 (c) i (d).

Promena veličine E duž toka je data na slici 19 (a) za više vremenskih trenutaka. Primećuje se da je vrednost E najveća na početku proračuna i da se tokom proračuna smanjuje (svaka sledeća kriva je ispod prethodne) dok se ne postigne ravnotežno stanje kada se daljim proračunom uvek dobija ista kriva (dve najniže krive na slici se preklapaju). Osim toga se primećuje da u opštem slučaju vrednost E raste u smeru tečenja jer ima sve više materijala na raspolaganju. Tokom vremena porast E duž toka opada i linije postaju približno horizontalne zbog uticaja veličine D .

(a) $E(x)$ u različitim vremenskim trenucima(b) $D(x)$ u različitim vremenskim trenucima(c) $Conc(x)$ u različitim vremenskim trenucima(d) $E(x)$ i $D(x)$ u različitim vremenskim trenucima

Slika 19: Šematski primer - uvlačenje u suspenziju - promena duž toka

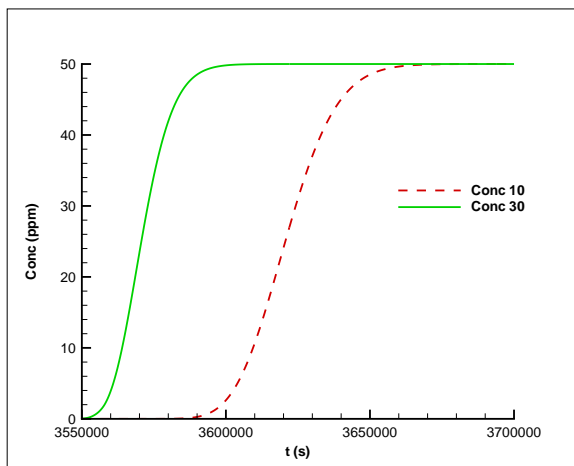
Slike 19 (b) i (c) redom prikazuju promenu veličine D i C duž toka u više vremenskih trenutaka. Međusobnim poređenjem veličina D i C se primećuje slično ponašanje ovih veličina, naime, obe veličine su najmanje u početnim trenucima proračuna, a tokom

vremena rastu do postizanja ravnotežnog stanja (dve gornje krive koje se preklapaju na obe slike). Paralelno porastu veličine E prema nizvodnom kraju, raste i koncentracija suspendovanog nanosa, a samim tim i veličina D . Ovo se objašnjava time da se udaljavanjem od uzvodne granice na raspolaganju nalazi veća dužina toka sa čijeg dna može da se podigne materijal, a što je više materijala podignuto, biće ga više na raspolaganju za deponovanje.

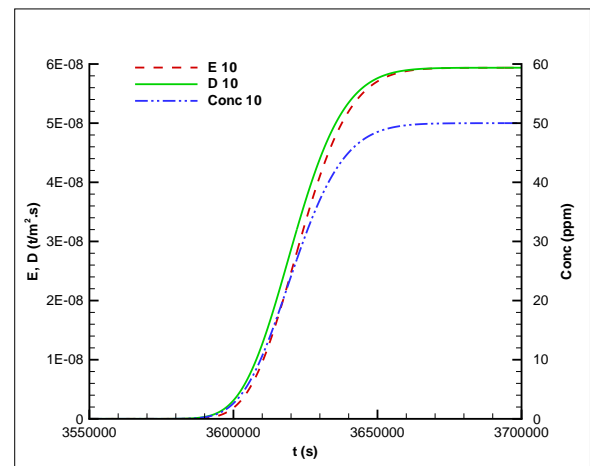
Slika 19 (d) paralelno prikazuje veličine E i D duž toka za odabrane vremenske trenutke. U početnim trenucima se javljaju ekstremne vrednosti veličina E i D , i primećuje se da razlika između njih tokom vremena opada, do postizanja ravnotežnog stanja koji se manifestuje izjednačenjem krivih $E(x)$ i $D(x)$.

6.3.2. Deponovanje nanosa iz suspenzije

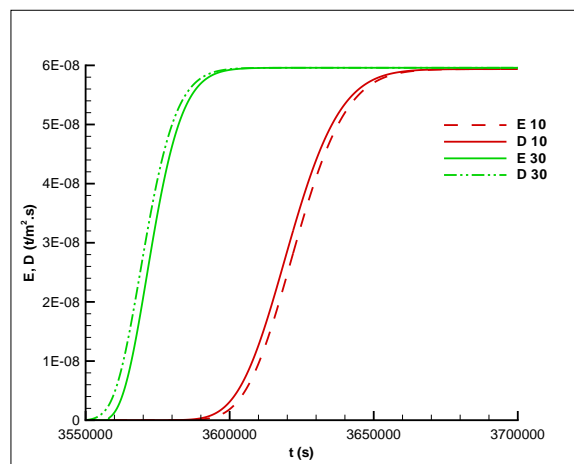
Početni uslov za proračun nanosa kod primera deponovanja nanosa iz suspenzije je zadata bezdimenzionalna koncentracija $C = 0.0$. Nizvodni granični uslov nije potreban kod proračuna nanosa, a na uzvodnoj granici se upušta konstantna koncentracija $C = 5 \cdot 10^{-5}$ tokom trajanja proračuna. Simuliran period iznosi 11.66 dana, međutim, imajući u vidu da se ravnotežno stanje postigne ranije prikaz rezultata je ograničen upravo na taj vremenski interval.



(a) Funkcija $Conc(t)$ za tačke $i = 10$ i $i = 30$



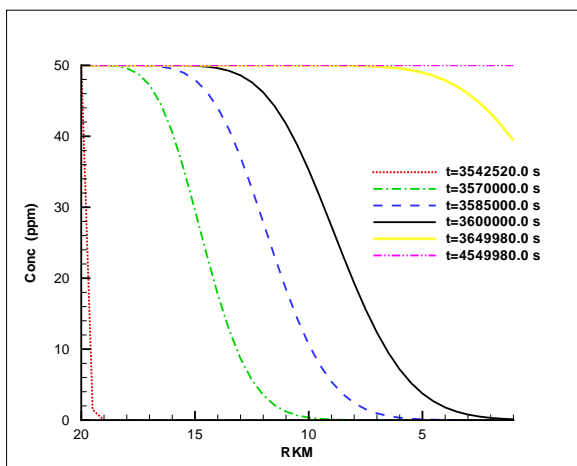
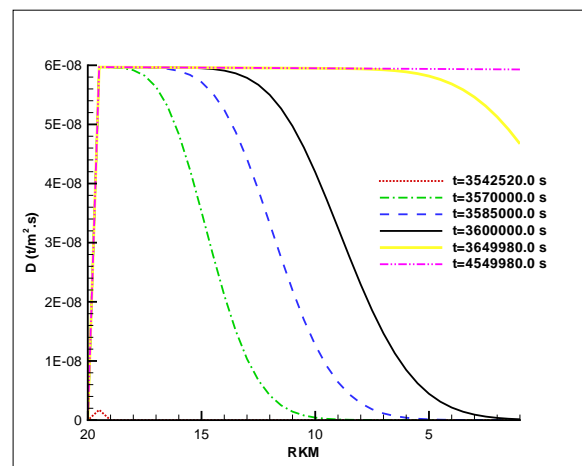
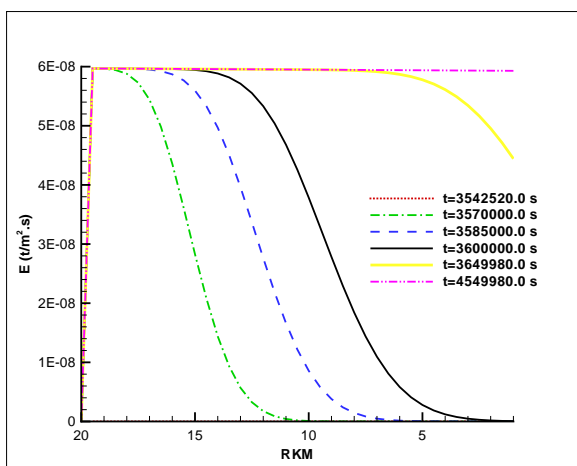
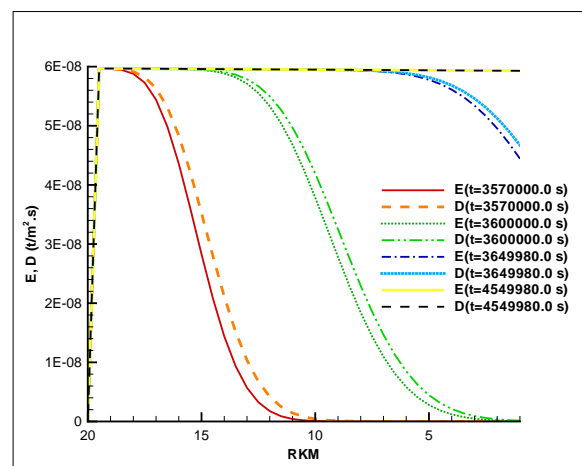
(b) Funkcije $E(t)$, $D(t)$ i $Conc(t)$ za tačku $i = 10$



(c) Funkcije $E(t)$ i $D(t)$ za tačke $i = 10$ i $i = 30$

Slika 20: Šematski primer - deponovanje - promena tokom vremena

Na slici 20 (a) je prikazana promena koncentracije tokom vremena u dve odabrane tačke, $i = 10$ i $i = 30$. Odabrani vremenski interval obuhvata period kada poremećaj sa uzvodnog kraja stiže do odabranih preseka i postepeno podiže vrednosti koncentracije do vrednosti na kojoj se ustaljuje a koja odgovara graničnom uslovu. Na slici (b) su prikazane veličine E , D i C za tačku $i = 10$ odakle je jasno da upuštanjem vode sa suspendovanim nanosom u tok na čijem dnu nema potencijalno pokretnog nanosa dolazi do deponovanja nanosa. Posledica deponovanja je formiranje nanosa na dnu koji sada stoji na raspolaganju za uvlačenje u suspenziju, što objašnjava kašnjenje veličine E . Takođe se primećuje da je ustaljivanje vrednosti koncentracije praćeno ustaljivanjem i izjednačavanjem vrednosti D i E , dakle, kao što se očekivalo, dolazi do formiranja ravnotežnog stanja. Promena veličina E i D za tačke $i = 10$ i $i = 30$ je prikazana na slici 20 (c) gde se primećuje kašnjenje vrednosti u tački $i = 10$ u odnosu na vrednosti u $i = 30$ što je u skladu sa očekivanjem jer se tačka $i = 30$ nalazi uzvodno od $i = 10$ pa uzvodno nastao poremećaj prvo stiže do nje.

(a) $Conc(x)$ u različitim vremenskim trenucima(b) $D(x)$ u različitim vremenskim trenucima(c) $E(x)$ u različitim vremenskim trenucima(d) $E(x)$ i $D(x)$ u različitim vremenskim trenucima

Slika 21: Šematski primer - deponovanje - promena duž toka

Rezultati proračuna u vidu promene duž toka su prikazani na slikama 21. Slika (a) prikazuje promene $C(x)$ u različitim vremenskim trenucima čijim međusobnim poređenjem može da se isprati postepeno povećanje koncentracije nanosa u vodi od početnog uslova do vrednosti zadate kao granični uslov. Slike 21 (b) i (c) redom prikazuju promene D i

E duž toka za odabrane vremenske trenutke odakle se ponovo vidi da je priraštaj koncentracije u vodi praćen deponovanjem, a posledica deponovanja je uvlačenje nanosa u suspenziju. Slika 21 (*d*) pokazuje da se tokom vremena kriva $D(x)$ uvek nalazi ispred krive $E(x)$ iz već navedenih razloga, a takođe daje jasan pregled postepenog ustaljivanja ovih veličina do trenutka postizanja ravnotežnog stanja.

7. Formiranje modela

U prethodnim poglavljima su prikazane osnovne jednačine primenjene da se opišu razmatrani procesi, njihova diskretizacija, rešavanje, zatim formiranje numeričkog modela i njegovo testiranje na šematskim primerima. Sledeća faza ispitivanja je testiranje modela primenom na proračun strujanja vode, transporta nanosa i deformacije korita, na stvarnom primeru. Jedna od glavnih prednosti linijskih modela je njihova sposobnost da simuliraju višegodišnje procese u mreži otvorenih tokova, što znači da bi konačna verifikacija trebala da se sprovede na primeru koji će iskoristiti pomenute prednosti modela. Zbog toga je kao primer razmatran tok Dunava u Srbiji sa njegovim pritokama, detaljno opisan u predstojećim poglavljima.

7.1. Deonica Dunava u Srbiji sa glavnim pritokama

Za realan primer je odabrana deonica Dunava u Srbiji, slika 22, dužine 486.48km koja se proteže od HE Đerdap 1 (*rkm* 943.00) do Bezdana (*rkm* 1430.44), sa svojim najvećim pritokama Savom i Tisom. Planirano je da model obuhvata deonicu Save dužine 132.50km od ušća u Dunav do Sremske Mitrovice (*rkm* 132.85), i deonicu Tise dužine 122.96km od ušća u Dunav do Sente (*rkm* 122.96). Unutar modelisanog dela Tise se nalazi brana kod Novog Bečeja (*rkm* 62.35) koja je u model ugrađena kao unutrašnji granični uslov gde se uzvodno od brane zadaje nivo na osnovu kojeg se računa proticaj. Primenom jednačine kontinuiteta (proticaj uzvodno od brane je jednak proticaju nizvodno od brane) je omogućen dalji proračun u sistemu. Pored glavnih pritoka, modelom je predviđeno da se obuhvate i manje pritoke kao što su Kolubara, Mlava, Nera, Pek, Porečka, Tamiš i Velika Morava.



Slika 22: Deonica Dunava u Srbiji sa pritokama

Detaljan pregled i poređenje merenih profila i merenih vrednosti nivoa, protoka i pronosa nanosa (koncentracije nanosa) je neophodan kako bi se što bolje definisali granični

uslovi koji imaju direktan uticaj na tačnost rezultata. Ova analiza takođe treba da posluži kao pomoć pri odabiru najpovoljnijih preseka i podataka koji će se koristiti kao kontrolni preseki prilikom verifikacije modela. Kako je većina merenja poprečnih preseka korita Dunava urađena 2006. godine, nakon čega su pomenuta merenja ponovljena 2010. godine, ovaj period je odabran kao period najpogodniji za kalibraciju i verifikaciju modela. U delovima toka gde nije bilo morfoloških merenja za 2006. godinu, preuzeti su odgovarajući profili iz najbliže godine za koju merenja postoje. Pregled morfoloških merenja, merenja proticaja, nivoa, pronosa nanosa i površinskih koncentracija je prikazan u poglavlju 7.1.1.

Merenja prikazana u ovom radu su finansirana od strane Ministarstva za obrazovanje, nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije u sklopu projekta *Merenje i modeliranje fizičkih, hemijskih, bioloških i morfodinamičkih parametara reka i vodnih akumulacija* (broj projekta TR 37009). Na projektu su se kao participanti javili Republički Hidrometeorološki Zavod Srbije i Privredno Društvo „Hidroelektrane Đerdap”, čije se učešće manifestovalo kroz izdavanje podataka o merenjima u cilju unapređenja prikazanog istraživanja.

7.1.1. Pregled i sistematizacija raspoloživih merenja

Pre nego što se pristupi formiranju numeričkog modela, potrebno je pregledati raspoložive podatke kako bi se ustanovile tačne granice modelisane oblasti, zatim periodi sa raspoloživim merenjima nivoa, proticaja i pronosa nanosa kako bi se odredili napovoljniji kontrolni preseki za proveru ispravnosti modela. U slučaju realnog primera merni profili, čiji pregled je dat u poglavlju 7.1.2. predstavljaju računске tačke. Zato se sa pregledom podataka polazi od morfologije korita. Nakon toga se prelazi na analizu postojećih merenja, kao i poređenje stacionaže mernih profila i stacionaža preseka sa podacima o nivoima, proticajima i pronosu nanosa, odnosno srednjim profilskim koncentracijama. Cilj ove analize je da se nađu preseki sa što više podataka koji mogu da se koriste u procesu kalibracije i verifikacije, koji su istovremeno u (ili što bliže) računskoj tački (odnosno mernom profilu). Pregled postojećih merenja proticaja, nivoa i pronosa nanosa, uz stacionažu preseka u kojem su vršena merenja i stacionažu najbližeg postojećeg mernog profila je dat u poglavlju 7.1.3.

7.1.2. Morfološki podaci

Raspoloživa merenja morfologije poprečnih preseka korita su prikazani u tabelama 10, 11 i 12 za Dunav, u tabeli 13 za Tisu, Savu i Kolubaru, a u tabeli 14 za Porečku, Pek, Neru, Mlavu, Veliku Moravu i Tamiš. Tabele sadrže redni broj profila (*r.b.*), naziv profila, stacionažu merenog preseka, godinu ili godine u kojima su merenja izvršena i kolonu u kojoj je naznačeno da li je posmatrani profil obuhvaćen modelom.

Kao što je to navedeno ranije, u tabelama 10, 11 i 12 je dat pregled raspoloživih merenja profila na modelisanoj deonici Dunava. Ukupan broj raspoloživih profila je 354 od kojih je u model ugrađeno ukupno 332 profila. Preostalih 22 profila je izostavljeno jer se preklapaju ili su suviše blizu nekom drugom profilu. Prosečno rastojanje između profila iznosi 1.378km.

Među prikazanim podacima se primećuje da nisu svi profili mereni 2006. godine. Dok je deonica Dunava od HE Đerdap 1 do ušća Nere u Dunav pokrivena merenim profilima iz 2006. i 2010. godine, na delu reke od HE Đerdap 1 do Novog Sada ima merenja profila iz 2010. godine, ali nedostaju podaci iz 2006. godine. Zato su na ovom delu modela iskorišćena merenja iz 2005. godine. Najmanje merenja ima na deonici od Novog Sada

do uzvodne granice modela kod Bezdana gde su za svhu ovog istraživanja obezbeđena samo merenja iz 2004. odnosno 2005. godine, dok novijih merenja nema. S' obzirom da na deonici Dunava od nizvodne granice na HE Đerdap 1 do Novog Sada postoje i merenja profila iz 2010. godine, ova deonica može da se iskoristi za proveru modela deformacije korita analizom merenih i izračunatih vrednosti zasipanja.

Pregled merenih profila za Tisu, Savu i njenu pritoku Kolubaru je dat u tabeli 13. Ukupan broj izmerenih preseka na Tisi je 66 od kojih je predviđeno da se svi ugrade u model. Nedostatak ove deonice je što nije bilo merenja iz 2006. godine zbog čega su uzeta merenja iz prethodne godine. Pored toga, na Tisi nije bilo kasnijih merenja morfologije korita, a prosečno rastojanje prikazanih profila iznosi $1.753km$.

Ukupan broj raspoloživih profila na Savi iznosi 58 i planirano je da se svi postojeći profili obuhvate modelom. Na delu Save od ušća do rk m 102.850 (u blizini mesta Šabac) je bilo podataka o morfologiji iz 2005. godine, dok je su za preostali deo modela (Šabac - Sremska Mitrovica) zbog nedostatka drugih, uzeti podaci iz 2004. godine. Na Savi takođe nije bilo merenja iz 2010. godine, a prosečno rastojanje između profila iznosi $2.329km$.

Na Kolubari je izmereno svega četiri profila sa kojima je obuhvaćena deonica od $2.68km$ mereno od ušća. Merni profili su na prosečnom međusobnom rastojanju od $0.78km$.

Podaci o merenim profilima na manjim pritokama koje su predviđene za ugradnju u model (Porečka, Pek, Nera, Mlava, Velika Morava i Tamiš) su dati u tabeli 14. Na Porečkoj ima svega četiri izmerena preseka na međusobnom rastojanju od $0.5km$ pri čemu je prvi presek na $0.1km$ od ušća u Dunav, dakle dužina deonice koja je obuhvaćena merenjima iznosi $1.6km$. Merenja na Porečkoj su data i za 2005. i za 2010. godinu. Na Peku su, takođe za 2005. i 2006. godinu izmerena tri preseka na prosečnom rastojanju od $0.375km$, dok na Neri ima svega dva merenja u 2006. godini i jedno u 2010. Nešto više merenja ima na Velikoj Moravi (šest merenih preseka za 2005. i 2010. godinu), i na Tamišu (ukupno sedamnaest merenja za 2005. i 2010. godinu). Prosečno rastojanje između datih profila na Velikoj Moravi iznosi $4.055km$, a na Tamišu $0.363,km$.

Pošto su klasifikovani svi raspoloživi profili koji su od interesa za formiranje modela, sprovedena je analiza raspoloživih merenja nivoa, proticaja, pronosa nanosa i srednjih profilskih koncentracija prikazana u poglavlju 7.1.3.

Dunav					Dunav				
r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan	r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	D1	943.960	2006, 2010	DA	63	L4	994.677	2006	NE
2	PA1	944.300	2006, 2010	DA	64	PA12	995.000	2006, 2010	DA
3	PA2	945.000	2006, 2010	DA	65	PA12a	995.700	2006, 2010	DA
4	D2	945.600	2006, 2010	DA	66	PA12b	996.300	2006, 2010	DA
5	D3	946.150	2006, 2010	DA	67	PA12c	996.950	2006, 2010	DA
6	PA3	946.650	2006, 2010	DA	68	PA12d	998.250	2006, 2010	DA
7	D4	947.200	2006, 2010	DA	69	JC7	999.000	2006, 2010	NE
8	D5	948.000	2006, 2010	DA	70	PA12e	999.500	2006, 2010	DA
9	PA4	948.900	2006, 2010	DA	71	PA12f	1001.000	2006, 2010	DA
10	PA4a	949.800	2006, 2010	DA	72	PA12g	1002.550	2006, 2010	DA
11	PA4b	951.500	2006, 2010	DA	73	PA13	1003.800	2006, 2010	DA
12	JC15	953.000	2006, 2010	DA	74	PA13a	1004.900	2006, 2010	DA
13	L1	953.245	2006	NE	75	PA13b	1005.900	2006, 2010	DA
14	PA5	953.400	2006, 2010	DA	76	PA13c	1007.400	2006, 2010	DA
15	PA5a	953.700	2006, 2010	DA	77	PA13d	1008.050	2006, 2010	DA
16	JC14	954.500	2006, 2010	DA	78	PA13e	1008.730	2006, 2010	DA
17	PA6	955.150	2006, 2010	DA	79	PA13f	1009.750	2006, 2010	DA
18	D6	956.000	2006, 2010	DA	80	PA14	1010.700	2006, 2010	DA
19	D7	957.200	2006, 2010	DA	81	JC6	1011.100	2006, 2010	NE
20	PA6a	958.100	2006, 2010	DA	82	PA14a	1011.600	2006, 2010	DA
21	D8	959.300	2006, 2010	DA	83	PA14b	1012.300	2006, 2010	DA
22	D9	960.500	2006, 2010	DA	84	JC5	1012.310	2006, 2010	NE
23	PA6b	963.000	2006, 2010	DA	85	D15	1013.350	2006, 2010	DA
24	PA7	963.180	2006, 2010	DA	86	D16	1014.000	2006, 2010	DA
25	D10	964.400	2006, 2010	DA	87	PA14c	1015.000	2006, 2010	DA
26	JC 13	965.250	2006, 2010	NE	88	D17	1016.200	2006, 2010	DA
27	PA7a	966.100	2006, 2010	DA	89	L5	1016.238	2006	NE
28	D11	966.600	2006, 2010	DA	90	PA15	1017.200	2006, 2010	DA
29	D12	967.200	2006, 2010	DA	91	L6	1017.241	2006	NE
30	PA7b	968.200	2006, 2010	DA	92	D18	1018.800	2006, 2010	DA
31	L2	968.492	2006	NE	93	PA15a	1020.300	2006, 2010	DA
32	JC 12	968.700	2006, 2010	NE	94	D19	1022.000	2006, 2010	DA
33	D13	969.300	2006, 2010	DA	95	D20	1023.000	2006, 2010	DA
34	JC11	969.950	2006, 2010	DA	96	PAA15b	1024.200	2006, 2010	DA
35	D14	970.350	2006, 2010	DA	97	D21	1025.100	2006, 2010	DA
36	PA8	971.200	2006, 2010	DA	98	D22	1026.000	2006, 2010	DA
37	PA8a	972.250	2006, 2010	DA	99	JC4	1026.700	2006, 2010	DA
38	PA8b	973.300	2006, 2010	DA	100	PA16	1027.100	2006, 2010	DA
39	JC10	973.900	2006, 2010	NE	101	D23	1028.000	2006, 2010	DA
40	PA8c	974.500	2006, 2010	DA	102	D24	1028.800	2006, 2010	DA
41	PA8d	975.550	2006, 2010	DA	103	D25	1029.600	2006, 2010	DA
42	JC9	976.000	2006, 2010	DA	104	16a	1030.600	2006, 2010	DA
43	PA9	976.400	2006, 2010	DA	105	D26	1031.400	2006, 2010	DA
44	PA9a	977.700	2006, 2010	DA	106	D27	1032.200	2006, 2010	DA
45	PA9b	978.500	2006, 2010	DA	107	D28	1033.500	2006, 2010	DA
46	PA9c	979.600	2006, 2010	DA	108	PA16b	1034.700	2006, 2010	DA
47	PA9d	980.800	2006, 2010	DA	109	D29	1035.700	2006, 2010	DA
48	PA10	982.200	2006, 2010	DA	110	D30	1036.600	2006, 2010	DA
49	PA10a	983.100	2006, 2010	DA	111	PA17	1037.700	2006, 2010	DA
50	PA10b	984.150	2006, 2010	DA	112	L7	1037.700	2006	NE
51	PA10c	985.400	2006, 2010	DA	113	GB1	1038.280	2006	DA
52	PA10d	986.400	2006, 2010	DA	114	GB2	1038.390	2006	NE
53	PA10e	987.900	2006, 2010	DA	115	D31	1038.500	2006, 2010	DA
54	PA11	989.000	2006, 2010	DA	116	GB3	1038.570	2006	NE
55	PA11a	990.000	2006, 2010	DA	117	GB4	1038.640	2006	NE
56	JC8	990.300	2006, 2010	DA	118	GB5	1038.730	2006	NE
57	L3	990.680	2006	NE	119	D32	1039.400	2006, 2010	DA
58	PA11b	991.000	2006, 2010	DA	120	JC3	1040.500	2006, 2010	NE
59	PA11c	992.100	2006, 2010	DA	121	PA17a	1041.100	2006, 2010	DA
60	PA11d	993.000	2006, 2010	DA	122	D33	1042.700	2006, 2010	DA
61	PA11e	993.800	2006, 2010	DA	123	JC2	1043.000	2006, 2010	NE
62	PA11f	994.550	2006, 2010	DA	124	D34	1043.600	2006, 2010	DA

Tabela 10: Pregled raspoloživih profila na Dunavu, 1. deo

Dunav

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
125	PA18Y	1044.550	2006, 2010	DA
126	PA18R	1044.550	2006, 2010	DA
127	PA18aR	1045.700	2006, 2010	DA
128	PA18aY	1045.700	2006, 2010	DA
129	D35	1047.100	2006, 2010	DA
130	PA19	1048.000	2006, 2010	DA
131	L8	1048.380	2006	DA
132	D36	1049.400	2006, 2010	DA
133	D37	1050.400	2006, 2010	DA
134	PA19a	1051.500	2006, 2010	DA
135	D38	1052.500	2006, 2010	DA
136	PA20	1053.900	2006, 2010	DA
137	JC1	1054.800	2006, 2010	NE
138	D39	1055.500	2006, 2010	DA
139	D40	1056.700	2006, 2010	DA
140	20a	1057.400	2006, 2010	DA
141	D41	1058.400	2006, 2010	DA
142	PA21	1059.550	2006, 2010	DA
143	D42	1060.700	2006, 2010	DA
144	PA21a	1061.550	2006, 2010	DA
145	D43	1062.700	2006, 2010	DA
146	D44	1063.550	2006, 2010	DA
147	PA22	1064.900	2006, 2010	DA
148	D45	1066.300	2006, 2010	DA
149	PA22a	1067.150	2006, 2010	DA
150	D46	1068.100	2006, 2010	DA
151	PA23	1069.000	2006, 2010	DA
152	D47	1069.800	2006, 2010	DA
153	D48	1070.150	2006, 2010	DA
154	PA23a	1071.450	2006, 2010	DA
155	L9	1072.244	2006	NE
156	D49	1072.400	2006, 2010	DA
157	D50	1073.350	2006, 2010	DA
158	PA24	1074.350	2006, 2010	DA
159	L10	1074.525	2006	NE
160	D51	1075.000	2006, 2010	DA
161	PA25	1075.650	2005, 2010	DA
162	D75	1076.220	2005, 2010	DA
163	PA26	1076.900	2005, 2010	DA
164	D76	1077.140	2005, 2010	DA
165	D77	1077.840	2005, 2010	DA
166	PA27	1078.300	2005, 2010	DA
167	PA27A	1078.900	2005, 2010	DA
168	D78	1079.620	2005, 2010	DA
169	PA28	1081.250	2005, 2010	DA
170	D79	1082.420	2005, 2010	DA
171	D80	1083.280	2005, 2010	DA
172	PA29	1084.180	2005, 2010	DA
173	PA29A	1085.200	2005, 2010	DA
174	PA29B	1086.160	2005, 2010	DA
175	PA30	1087.180	2005, 2010	DA
176	PA30A	1088.180	2005, 2010	DA
177	PA31	1089.140	2005, 2010	DA
178	D81	1090.070	2005, 2010	DA
179	PA31A	1091.130	2005, 2010	DA
180	D82	1092.030	2005, 2010	DA
181	PA32	1093.260	2005, 2010	DA
182	D83	1094.050	2005, 2010	DA
183	D84	1095.120	2005, 2010	DA
184	PA32A	1095.980	2005, 2010	DA
185	D85	1096.200	2005, 2010	DA
186	PA33	1097.550	2005, 2010	DA

Dunav

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
187	D86	1098.460	2005, 2010	DA
188	PA33A	1099.420	2005, 2010	DA
189	D87	1100.420	2005, 2010	DA
190	PA33B	1101.160	2005, 2010	DA
191	D88	1101.980	2005, 2010	DA
192	PA34	1102.850	2005, 2010	DA
193	D89	1103.100	2005, 2010	DA
194	D89A	1103.940	2005, 2010	DA
195	PA34A	1104.350	2005, 2010	DA
196	PA34B	1104.910	2005, 2010	DA
197	D90	1105.460	2005, 2010	DA
198	PA35	1106.350	2005, 2010	DA
199	D91	1107.220	2005, 2010	DA
200	PA35A	1107.960	2005, 2010	DA
201	D92	1108.680	2005, 2010	DA
202	PA36	1109.540	2005, 2010	DA
203	D93	1110.320	2005, 2010	DA
204	PA36A	1111.280	2005, 2010	DA
205	PA37	1112.220	2005, 2010	DA
206	PA37A	1113.480	2005, 2010	DA
207	D94	1114.670	2005, 2010	DA
208	PA38	1116.000	2005, 2010	DA
209	D95	1117.540	2005, 2010	DA
210	D96	1118.620	2005, 2010	DA
211	D97	1119.640	2005, 2010	DA
212	PA39	1120.600	2005, 2010	DA
213	D98	1121.410	2005, 2010	DA
214	D99	1122.210	2005, 2010	DA
215	D100	1123.020	2005, 2010	DA
216	D101	1123.980	2005, 2010	DA
217	PA40	1124.800	2005, 2010	DA
218	D102	1125.820	2005, 2010	DA
219	D103	1126.840	2005, 2010	DA
220	PA41	1127.600	2005, 2010	DA
221	D104	1128.620	2005, 2010	DA
222	D105	1129.770	2005, 2010	DA
223	PA42	1130.700	2005, 2010	DA
224	D106	1131.720	2005, 2010	DA
225	D107	1132.660	2005, 2010	DA
226	PA43	1133.490	2005, 2010	DA
227	D108	1134.520	2005, 2010	DA
228	D109	1135.610	2005, 2010	DA
229	PA44	1136.680	2005, 2010	DA
230	D110	1137.870	2005, 2010	DA
231	D111	1138.920	2005, 2010	DA
232	D112	1139.800	2005, 2010	DA
233	PA45	1140.540	2005, 2010	DA
234	D113	1141.880	2005, 2010	DA
235	D114	1142.600	2005, 2010	DA
236	PA46	1143.660	2005, 2010	DA
237	D115	1144.920	2005, 2010	DA
238	PA47	1146.100	2005, 2010	DA
239	D116	1146.660	2005, 2010	DA
240	D117	1147.550	2005, 2010	DA
241	D118	1148.440	2005, 2010	DA
242	PA48	1149.300	2005, 2010	DA
243	D119	1150.600	2005, 2010	DA
244	D120	1152.060	2005, 2010	DA
245	PA49	1153.580	2005, 2010	DA
246	D121	1155.640	2005, 2010	DA
247	PA50	1157.000	2005, 2010	DA
248	D122	1158.000	2005, 2010	DA

Tabela 11: Pregled raspoloživih profila na Dunavu, 2. deo

Dunav					Dunav				
r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan	r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
249	PA51	1159.540	2005, 2010	DA	302	EP125	1298.990	2004-2005	DA
250	D123	1160.850	2005, 2010	DA	303	EP124	1300.580	2004-2005	DA
251	PA52	1161.850	2005, 2010	DA	304	EP122	1303.960	2004-2005	DA
252	D124	1163.180	2005, 2010	DA	305	EP120	1306.460	2004-2005	DA
253	D125	1164.450	2005, 2010	DA	306	EP118	1308.690	2004-2005	DA
254	PA53	1165.570	2005, 2010	DA	307	EP116	1310.350	2004-2005	DA
255	D126	1166.900	2005, 2010	DA	308	EP114	1313.190	2004-2005	DA
256	D127	1167.600	2005, 2010	DA	309	EP112	1315.210	2004-2005	DA
257	PA54	1168.000	2005, 2010	DA	310	EP110	1317.320	2004-2005	DA
258	PA55	1171.200	2005, 2010	DA	311	EP108	1319.240	2004-2005	DA
259	PA56	1174.100	2005, 2010	DA	312	EP105	1321.950	2004-2005	DA
260	PA57	1176.400	2005, 2010	DA	313	EP103	1323.690	2004-2005	DA
261	PA58	1178.450	2005, 2010	DA	314	EP101	1325.230	2004-2005	DA
262	PA59	1181.900	2005, 2010	DA	315	EP98	1328.450	2004-2005	DA
263	PA60	1184.700	2005, 2010	DA	316	EP92	1333.470	2004-2005	DA
264	PA61	1187.600	2005, 2010	DA	317	EP90	1334.740	2004-2005	DA
265	PA62	1191.200	2005, 2010	DA	318	EP89	1336.760	2004-2005	DA
266	PA63	1194.800	2005, 2010	DA	319	EP84	1341.800	2004-2005	DA
267	PA64	1198.300	2005, 2010	DA	320	EP82	1345.540	2004-2005	DA
268	PA65	1201.150	2005, 2010	DA	321	EP79	1348.040	2004-2005	DA
269	PA66	1203.750	2005, 2010	DA	322	EP76	1349.870	2004-2005	DA
270	PA67	1207.300	2005, 2010	DA	323	EP74	1351.720	2004-2005	DA
271	PA68	1210.400	2005, 2010	DA	324	EP73	1353.080	2004-2005	DA
272	PA69	1213.100	2005, 2010	DA	325	EP72	1354.500	2004-2005	DA
273	PA70	1215.550	2005, 2010	DA	326	EP69	1357.510	2004-2005	DA
274	PA71	1219.000	2005, 2010	DA	327	EP67	1360.620	2004-2005	DA
275	PA72	1223.800	2005, 2010	DA	328	EP66	1362.100	2004-2005	DA
276	PA73	1228.100	2005, 2010	DA	329	EP63	1366.190	2004-2005	DA
277	PA74	1232.100	2005, 2010	DA	330	EP61	1368.270	2004-2005	DA
278	PA75	1236.100	2005, 2010	DA	331	EP60	1369.430	2004-2005	DA
279	PA76	1240.600	2005, 2010	DA	332	EP56	1374.850	2004-2005	DA
280	PA77	1244.450	2005, 2010	DA	333	EP53	1377.360	2004-2005	DA
281	PA78	1249.400	2005, 2010	DA	334	EP51	1379.470	2004-2005	DA
282	PA79	1254.150	2005, 2010	DA	335	EP50	1380.630	2004-2005	DA
283	EP169	1256.110	2004-2005	DA	336	EP48	1382.190	2004-2005	DA
284	EP168	1257.330	2004-2005	DA	337	EP44	1385.620	2004-2005	DA
285	EP166	1260.010	2004-2005	DA	338	EP42	1388.410	2004-2005	DA
286	EP165	1261.190	2004-2005	DA	339	EP39-1	1392.100	2004-2005	DA
287	EP164	1262.200	2004-2005	DA	340	EP32	1396.230	2004-2005	DA
288	EP161	1264.460	2004-2005	DA	341	EP26	1401.690	2004-2005	DA
289	EP158	1266.450	2004-2005	DA	342	EP24	1404.540	2004-2005	DA
290	EP155	1268.760	2004-2005	DA	343	EP22	1406.720	2004-2005	DA
291	EP151	1271.940	2004-2005	DA	344	EP20	1408.860	2004-2005	DA
292	EP148	1276.820	2004-2005	DA	345	EP18	1410.820	2004-2005	DA
293	EP145	1280.810	2004-2005	DA	346	EP16	1412.980	2004-2005	DA
294	EP144	1281.660	2004-2005	DA	347	EP14	1415.470	2004-2005	DA
295	EP143	1282.560	2004-2005	DA	348	EP11	1418.530	2004-2005	DA
296	EP138	1286.380	2004-2005	DA	349	EP10	1419.630	2004-2005	DA
297	EP133	1290.830	2004-2005	DA	350	EP9	1421.720	2004-2005	DA
298	EP131	1291.870	2004-2005	DA	351	EP8	1423.270	2004-2005	DA
299	EP129	1293.730	2004-2005	DA	352	EP7	1424.860	2004-2005	DA
300	EP127	1295.980	2004-2005	DA	353	EP5	1426.820	2004-2005	DA
301	EP126	1297.560	2004-2005	DA	354	EP1	1430.440	2004-2005	DA

Tabela 12: Pregled raspoloživih profila na Dunavu, 3. deo

Tisa					Sava				
r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan	r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	PA-1A	0.250	2005	DA	1	PA-1	0.100	2005	DA
2	PA-1	1.100	2005	DA	2	PA-1A	1.030	2005	DA
3	PA-1B	2.750	2005	DA	3	PA-2	2.930	2005	DA
4	PA-2	4.500	2005	DA	4	PA-2A	5.300	2005	DA
5	PA-2A	6.340	2005	DA	5	PA-3	7.500	2005	DA
6	PA-2B	8.090	2005	DA	6	PA-3A	10.250	2005	DA
7	PA-3	10.600	2005	DA	7	PA-4	12.500	2005	DA
8	PA-3A	13.640	2005	DA	8	PA-4A	14.800	2005	DA
9	PA-3B	16.560	2005	DA	9	PA-5	17.250	2005	DA
10	PA-4	18.700	2005	DA	10	PA-5A	19.150	2005	DA
11	PA-4A	21.170	2005	DA	11	PA-6	20.960	2005	DA
12	PA-4B	23.510	2005	DA	12	PA-6A	23.150	2005	DA
13	PA-5	25.980	2005	DA	13	PA-7	26.130	2005	DA
14	PA-5A	31.160	2005	DA	14	PA-7A	29.130	2005	DA
15	PA-5B	33.870	2005	DA	15	PA-8	35.100	2005	DA
16	PA-6	36.400	2005	DA	16	PA-8A	37.660	2005	DA
17	PA-6A	38.970	2005	DA	17	PA-9	41.040	2005	DA
18	PA-6B	41.990	2005	DA	18	PA-9A	43.720	2005	DA
19	PA-6C	44.380	2005	DA	19	PA-10	45.700	2005	DA
20	PA-7	47.060	2005	DA	20	PA-10A	48.400	2005	DA
21	PA-7A	50.750	2005	DA	21	PA-11	51.480	2005	DA
22	PA-7B	55.050	2005	DA	22	PA-11A	54.100	2005	DA
23	PA-8	58.320	2005	DA	23	PA-12	55.500	2005	DA
24	PA-8A	62.350	2005	DA	24	PA-12A	58.380	2005	DA
25	EP55	64.200	2005	DA	25	PA-13	61.650	2005	DA
26	EP56	64.870	2005	DA	26	PA-13A	64.980	2005	DA
27	EP57	65.900	2005	DA	27	PA-14	67.240	2005	DA
28	EP58	67.450	2005	DA	28	PA-15	71.180	2005	DA
29	EP59	68.760	2005	DA	29	PA-16	75.670	2005	DA
30	EP62	72.140	2005	DA	30	PA-17	81.050	2005	DA
31	EP65	74.950	2005	DA	31	PA-18	86.050	2005	DA
32	EP66	76.350	2005	DA	32	PA-19	91.060	2005	DA
33	EP67	77.250	2005	DA	33	PA-20	94.710	2005	DA
34	EP68	78.550	2005	DA	34	PA-21	98.900	2005	DA
35	EP69	79.740	2005	DA	35	PA-22	102.850	2005	DA
36	EP70	80.960	2005	DA	36	EP102	104.140	2004	DA
37	EP72	82.260	2005	DA	37	EP103	105.500	2004	DA
38	EP73	83.140	2005	DA	38	EP104	106.650	2004	DA
39	EP75	85.000	2005	DA	39	EP105	107.670	2004	DA
40	EP76	86.330	2005	DA	40	EP106	108.660	2004	DA
41	EP77	87.620	2005	DA	41	EP107	109.700	2004	DA
42	EP78	88.710	2005	DA	42	EP108	110.550	2004	DA
43	EP81	91.050	2005	DA	43	EP109	112.070	2004	DA
44	EP82	91.870	2005	DA	44	EP110	114.290	2004	DA
45	EP83	93.170	2005	DA	45	EP111	115.735	2004	DA
46	EP85	95.460	2005	DA	46	EP112	116.930	2004	DA
47	EP86	96.740	2005	DA	47	EP113	117.700	2004	DA
48	EP87	97.720	2005	DA	48	EP114	119.610	2004	DA
49	EP88	99.450	2005	DA	49	EP115	120.880	2004	DA
50	EP90	102.510	2005	DA	50	EP116	122.100	2004	DA
51	EP91	103.920	2005	DA	51	EP117	122.900	2004	DA
52	EP92	105.550	2005	DA	52	EP118	124.155	2004	DA
53	EP93	106.860	2005	DA	53	EP119	125.350	2004	DA
54	EP95	108.920	2005	DA	54	EP120	126.850	2004	DA
55	EP96	109.980	2005	DA	55	EP121	128.000	2004	DA
56	EP97	111.050	2005	DA	56	EP122	129.600	2004	DA
57	EP99	112.970	2005	DA	57	EP123	131.350	2004	DA
58	EP100	114.280	2005	DA	58	EP124	132.850	2004	DA
59	EP101	115.510	2005	DA					
60	EP103	117.500	2005	DA					
61	EP104	118.140	2005	DA					
62	EP105	118.780	2005	DA					
63	EP106	119.980	2005	DA					
64	EP107	120.780	2005	DA					
65	EP108	121.950	2005	DA					
66	EP109	122.960	2005	DA					

Kolubara				
r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	PR1	0.340	2005, 2010	DA
2	PR2	1.000	2005, 2010	DA
3	PR3	1.793	2005, 2010	DA
4	PR4	2.680	2005, 2010	DA

Tabela 13: Pregled raspoloživih profila na Tisi, Savi i Kolubari

Porečka

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	PA-1	0.100	2005, 2010	DA
2	PA-2	0.600	2005, 2010	DA
3	PA-3	1.100	2005, 2010	DA
4	PA-4	1.600	2005, 2010	DA

Pek

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	PA-1	0.300	2005, 2010	DA
2	PA-2	0.700	2005, 2010	DA
3	PA-3	1.050	2005, 2010	DA

Nera

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	Pr-1	0.100	2006, 2010	DA
2	Pr-3	1.200	2006	DA

Mlava

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	PA-1	0.488	2005, 2010	DA
2	PA-2	1.477	2005, 2010	DA
3	PA-3	2.473	2005, 2010	DA
4	PA-4	3.475	2005, 2010	DA
5	PA-5	5.000	2005, 2010	DA

Velika Morava

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	KP-1	0.060	2005, 2010	DA
2	KP-4	2.460	2005, 2010	DA
3	KP-9	5.860	2005, 2010	DA
4	KP-12	9.000	2005, 2010	DA
5	KP-17	14.410	2005, 2010	DA
6	KP-23	20.335	2005, 2010	DA

Tamiš

r.b.	Naziv	Stac.	Godina	Modelisan
1	PA-T1	0.100	2005, 2010	DA
2	PA-T2	0.300	2005, 2010	DA
3	PA-T3	0.500	2005, 2010	DA
4	PA-T4	1.300	2005, 2010	DA
5	PA-T5	1.800	2005, 2010	DA
6	PA-T6	2.000	2005, 2010	DA
7	PA-T7	2.400	2005, 2010	DA
8	PA-T8	2.900	2005, 2010	DA
9	PA-T9	3.200	2005, 2010	DA
10	PA-T91	3.200	2005, 2010	DA
11	PA-T10	3.600	2005, 2010	DA
12	PA-T11	4.100	2005, 2010	DA
13	PA-T12	4.900	2005, 2010	DA
14	PA-T121	5.000	2005, 2010	DA
15	PA-T13	5.300	2005, 2010	DA
16	PA-T14	5.800	2005, 2010	DA
17	PA-T15	5.900	2005, 2010	DA

Tabela 14: Pregled raspoloživih profila za Porečku, Pek, Neru, Mlavu, Veliku Moravu i Tamiš

7.1.3. Podaci o protocima, nivoima i nanosu

Nakon što su definisani raspoloživi poprečni preseki planirane oblasti modela, prelazi se na pregled raspoloživih merenja proticaja Q , nivoa Z , pronosa nanosa P i površinske koncentracije C_{pov} . Podaci su razvrstani po rekama (Dunav, Tisa, Sava, Kolubara, Pek, Nera, Mlava, Velika Morva i Tamiš), uz napomenu da na reci Porečka nije bilo merenja ni jednog od analiziranih parametara u periodu 2006. do 2010. godine, zbog čega je ova pritoka izostavljena u pregledu koji sledi.

Tabele su organizovane tako da se za svaku reku, za određenu stanicu (naziv mesta u kojem je vršeno merenje) prikazuje ukupan broj merenih podataka za sve četiri razmatrane veličine (dnevne vrednosti pronosa nanosa P , proticaja Q , vodostaja H i površinske koncentracije C_{pov}) za svaku godinu posebno (od 2006. do 2010. godine) i stacionaža na kojoj je veličina merena. Tabele su dopunjene sa nazivom i stacionažom profila koji je najbliži svakoj od stanica. Osim ovih podataka, na raspolaganju stoje i podaci sa limnimetarskih stanica kod Pančeva, Nere, Golubca, Dobre, Donjeg Milanovca i gornje vode HE Đerdap 1 koje su merile satne vrednosti nivoa za razmatrani period. Svrha predstojeće analize je identifikacija što bliže računске tačke za svaku stanicu na kojoj postoje merenja da bi se postojeći podaci o vodostajima (nivoima), proticajima i nanosu pripojili računskoj tački i ugradili u model. Pored toga, ovaj pregled treba da pruži uvid u moguća rešenja za definisanje graničnih uslova i postojećih preseka koji bi poslužili kao kontrolne tačke modela. U pogledu graničnih uslova, hidraulički proračun zahteva zadavanje graničnih uslova na uzvodnoj i nizvodnoj granici, dok proračun nanosa zahteva zadavanje samo uzvodnih graničnih uslova. Iz poslednjeg sledi da bi modelisanje toka u razmatranoj mreži, slika 22, zahtevalo zadavanje uzvodnih graničnih uslova (za hidraulički proračun i proračun transporta nanosa) u uzvodnim presecima Dunava, Tise, Save, Kolubare, Porečke, Peka, Nere, Mlave i Tamiša, dok je nizvodni granični uslov potreban na nizvodnom kraju Dunava (HE Đerdap 1) samo za hidraulički proračun. Predstojeći pregled raspoloživih merenja je neophodan kako bi se proverila mogućnost definisanja navedenih graničnih uslova koristeći postojeća merenja, odnosno razmotrila alternativa ukoliko postojeći podaci nisu pogodni za predviđeni zadatak.

Pregled merenja na Dunavu je prikazan u tabeli 15. Prosečno rastojanje između mesta sa izmerenim profilom i stanice sa merenim parametrima je 0.561km , dok je najveće rastojanje 1.55km (Stari Banovci). Mada se međusobna udaljenost poznatog profila od stanice sa merenjima može prihvatiti kao zadovoljavajuća za formiranje modela, sledeći faktor koji značajno utiče na primenljivost određene stanice u modelu jeste parametar koji je u njoj meren. Kao primer se razmatra Donji Milanovac gde se stacionaža preseka i merne stanice poklapaju, međutim u pomenutom preseku ima samo merenja vodostaja, dakle ovaj presek ne bi bio pogodan kao granični uslov za proračun nanosa, ali bi mogao da posluži kao kontrolna tačka u unutrašnjosti modela za poređenje računatih i merenih vrednosti nivoa. S' obzirom da je na nizvodnoj granici modela (HE Đerdap 1) poznat nivo gornje vode za vremenski interval od 2006. do 2010. godine, kao nizvodni granični uslov se usvaja poznati nivogram tokom vremena.

Prilikom izbora uzvodnog graničnog uslova nije dovoljno postojanje podataka o poznatim protocima ili nivoima jer model zahteva i podatke o nanosu. Pregledom podataka prikazanih u tabeli 15, se primećuje da je najuzvodniji presek na Dunavu sa paralelnim merenjima proticaja i podataka o nanosu, Novi Sad, gde za 2006. godinu nedostaje 23 podataka o merenim površinskim koncentracijama. Sledeći presek sa postojećim merenjima vode i nanosa je Smederevo, pri čemu merenje površinskih koncentracija tokom prve dve godine nije bilo kontinualno (nedostaje 49 podataka za 2006. godinu i 17 za 2007. go-

dinu). Osim ova dva preseka, ni jedan drugi presek nema kontinualna paralelna merenja podataka o vodi i nanosu tokom perioda od interesa. U Starim Banovcima ima dosta merenja površinskih koncentracija, međutim nema ni jednog podatka koji bi poslužio za definisanje graničnog uslova za hidraulički proračun. Ovim se zaključuje da je jedna opcija da se model ograniči do Novog Sada, a da se podaci o nanosu koji nedostaju na neki način interpoluju koristeći postojeće vrednosti, ili da se sa ciljem produžetka modela do Bezdana, nađe drugi način za formulisanje uzvodnog graničnog uslova za proračun transporta nanosa na Dunavu. Uprkos istaknutim nedostacima, prikazani podaci imaju veoma značajnu ulogu u formiranju modela i neophodni su tokom procesa kalibracije i što detaljnije verifikacije modela.

Pregled raspoloživih merenja sa stacionažama mernih mesta i nazivom i stacionažom najbližeg profila na Tisi je dat u tabeli 16. Prosečno rastojanje između merne stanice i postojećeg poprečnog preseka iznosi $0.626km$, dok je najveće rastojanje $1.1km$ (Titel). Analogno prethodnom slučaju, samo rastojanje između merne stanice i postojećeg profila ne predstavlja značajnu prepreku, za razliku od neujednačenosti (u vremenskom i prostornom smislu) podataka. I na Tisi se javlja isti problem kao i na Dunavu, jer je jedini presek u kojem ima paralelnih merenja podataka vezanih za vodu i nanos, tokom svih razmatranih godina, Titel pri čemu su podaci za nanos i ovde nekompletni (samo su podaci za 2008. godinu kompletni). Osim toga, presek u kojem je meren vodostaj je udaljen $10.600rkm$ od ušća, a presek sa podacima o nanosu $4.500rkm$. Kada bi cilj bio primena ovih podataka za uzvodni granični uslov na Tisi, modelisana deonica bi u najboljem slučaju bila dugačka svega $10.600km$, a ukupno 115 dana merenja bi bilo interpolovano.

Na Savi je situacija po pitanju rastojanja mernih stanica i poznatih profila malo lošija, tabela 17, jer je prosečno rastojanje između preseka sa poznatom morfologijom i preseka sa merenim parametrima $2.227km$, dok je najveće rastojanje $6.39km$ (Sremska Mitrovica). U pogledu samih merenja, na Savi kod Beograda postoje kontinualna merenja površinske koncentracije nanosa na $5.2km$ od ušća i kontinualna merenja vodostaja na $1.0km$ od ušća u Dunav. Jedini nedostatak ovih merenja je što bi se njihovom primenom za uzvodni granični uslov Sava maltene izostavila iz modela.

Pritoke Kolubara, tabela 18, Pek, tabela 19, Nera, tabela 20, Mlava, tabela 21 i Tamiš, tabela 23 su pokrivene sa po samo jednom mernom stanicom pri čemu ni na jednoj od navedenih pritoka nema merenja nanosa. Još jedan nedostatak sa podacima na navedenim pritokama je veliko rastojanje između merne stanice i poznatog profila. Na Tamišu je ovo rastojanje čak $116.80km$, na Kolubari $69.32km$, a na ostalim pritokama je mnogo manje i iznosi $7.65km$ na Peku, $20.5km$ na Neri, $20.5km$ i $15km$ na Mlavi. Na Velikoj Moravi, tabela 22 ima više mernih stanica, ali samo jedan raspoloživ profil koji je najbliži mernom mestu na Ljubičevskom Mostu (udaljen $1.495km$). Mada u pomenutom preseku ima kompletnih paralelnih merenja površinskih koncentracija i proticaja tokom perioda od 2006. do 2010. godine, glavni nedostatak je što je sam presek na $\approx 20km$ od ušća. Čak i da se pretpostavi da ova udaljenost neće biti prepreka u formiranju modela, ovo je jedini presek u celokupnoj razmatranoj mreži tokova u kojem postoje kompletna paralelna merenja.

Na osnovu dosadašnjeg izlaganja je jasno da raspoloživi podaci nisu dovoljni za formiranje predviđenog modela. Zbog toga se razmatra drugačiji pristup za definisanje graničnih uslova za proračun nanosa detaljno predstavljen u poglavlju 7.1.5. Bez dodatnih podataka bi bilo neophodno značajno redukovati oblast modela. Sa ciljem da se što veći deo oblasti predviđene za modelisanje zadrži, razmatrani su alternativni pristupi za definisanje graničnih uslova. Naime, ako bi se obezbedili podaci za granične uslove u Senti

na Tisi, Sremskoj Mitrovici na Savi i Bezdanu na Dunavu, onda bi jedino manje pritoke morale da izostanu iz modela. Od manjih pritoka može da se zadrži Velika Morava koja je jedina sa dovoljno podataka za zadavanje graničnih uslova. Nedostatak ove pritoke je što u njoj nema preseka koji bi mogao da se koristi za kontrolu prilikom kalibracije i verifikacije modela.

Dunav

Stanica	m.v./god.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Bezdan	H	365	365	366	365	365	1425.59	1424.860	EP7
	Q	365	365	366	365	365			
	P	365	365	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Apatin	H	365	365	366	365	365	1401.90	1401.690	EP26
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Bogojevo	H	365	365	366	365	59	1367.25	1368.270	EP61
	Q	365	365	366	365	59			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Bačka Palanka	H	365	365	366	365	365	1298.66	1298.990	EP125
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Novi Sad	H	365	365	366	365	365	1254.98	1254.150	PA-79
	Q	365	365	366	365	365			
	P	-	-	-	-	-	≈ 1258.00	1257.330	EP168
	C_{pov}	342	365	366	365	365			
Slankamen	H	365	365	366	365	365	1215.53	1215.550	PA-70
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Stari Banovci	H	-	-	-	-	-	1192.75	1191.200	PA-62
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	322	343	366	346	365			
Zemun	H	365	273	319	365	365	1173.31	1174.100	PA-56
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Pančevo	H	365	365	366	365	365	1154.60	1153.580	PA-49
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Smederevo	H	365	365	366	365	365	1116.00	1116.000	PA-38
	Q	365	365	366	365	365			
	P	-	-	-	-	-	1110.40	1110.320	D-93
	C_{pov}	316	348	366	365	365			
Banatska Palanka	H	365	344	366	365	365	1076.60	1076.220	D-75
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Veliko Gradište	H	365	365	366	365	365	1059.80	1059.550	PA21
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Golubac	H	308	365	315	365	274	1042.00	1042.700	D33
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Donji Milanovac	H	352	365	366	365	365	995.00	995.000	PA12
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
HE Đerdap 1	H	-	-	-	-	-	943.00	943.960	D1
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	365	320	321	342	321			

Tabela 15: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Dunav

Tisa

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Senta	H	365	365	366	365	365	123.50	122.960	EP109
	Q	365	365	366	365	365			
	P	365	365	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Padej	H	365	-	-	-	-	105.40	105.550	EP92
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Novi Bečej	H	-	-	366	365	365	65.00	64.870	EP56
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Novi Bečej G.V.	H	365	365	366	365	365	63.40	64.200	EP55
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Novi Bečej D.V.	H	365	365	366	365	365	63.40	62.350	PA-8A
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Novi Bečej	H	365	365	-	-	-	63.35	62.350	PA-8A
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Taraš	H	-	-	-	-	-	47.52	47.060	PA-7
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	275	365			
Titel	H	365	365	366	365	365	≈ 9.50	10.600	PA-3
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	351	318	366	341	335			
							4.90	4.500	PA-2

Tabela 16: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Tisa

Sava

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Sremska Mitrovica	H	365	365	366	365	365	139.24	132.850	EP124
	Q	365	365	366	365	365			
	P	365	365	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	255	365			
Šabac	H	365	365	366	365	365	106.28	106.650	EP104
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Beljin	H	365	365	366	365	365	≈ 68.00	67.240	PA-14
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Beograd	H	365	365	366	365	365	≈ 1.00	1.030	PA-1A
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	365	365	366	365	365			
							5.20	5.300	PA-2A

Tabela 17: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Sava

Kolubara

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Beli Brod	H	-	365	366	365	365	72.00	2.68	PR4
	Q	-	365	366	365	365			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			

Tabela 18: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Kolubara

Pek

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Kusiće	H	365	365	366	365	365	8.70	1.050	PA-3
	Q	365	365	366	365	365			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			

Tabela 19: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Pek

Nera

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Kusić	H	-	365	366	365	365	21.70	1.200	Pr-3
	Q	-	365	366	365	365			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			

Tabela 20: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Nera

Mlava

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Bratinač	H	365	365	366	365	365	≈ 20.00	5.000	PA-5
	Q	365	365	366	365	365			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			

Tabela 21: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Mlava

Velika Morava

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Bagrdan	H	365	365	366	365	365	≈ 120.00	20.335	KP-23
	Q	365	365	366	365	365			
	P	365	365	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Žabarski Most	H	365	365	366	365	365	72.15	20.335	KP-23
	Q	-	-	-	-	-			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			
Ljubičevski Most	H	365	365	366	365	365	≈ 22.00	20.335	KP-23
	Q	365	365	366	365	365			
	P	365	365	-	-	-	21.83	20.335	KP-23
	C_{pov}	365	365	366	365	365			

Tabela 22: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Velika Morava

Tamiš

Stanica	m.v.	2006	2007	2008	2009	2010	Stac.	Stac. najbližeg profila	Naziv
Jaša Tomić	H	-	365	366	365	365	≈ 122.70	5.900	PA-T15
	Q	-	365	366	365	365			
	P	-	-	-	-	-			
	C_{pov}	-	-	-	-	-			

Tabela 23: Pregled raspoloživih merenja Q , H , P i C_{pov} na reci Tamiš

7.1.4. Dodatna analiza raspoloživih podataka o nanosu

Analizom koja je sprovedena u poglavlju 7.1.3. se pokazalo da definisanje (uzvodnih i nizvodnih) graničnih uslova za hidraulički deo modela ne predstavlja problem jer postoji dovoljan broj podataka na granicama. Podaci vezani za nanos su međutim nedovoljni za formulisanje modela transporta i deformacije korita jer je broj preseka sa merenjima mnogo manji, a ni u njima uglavnom nema kontinualnih merenja tokom perioda od 2006. do 2010. godine. Zbog toga se opredelilo za drugačiji pristup u formulisanju uzvodnih graničnih uslova za proračun transporta nanosa. Uopšteno se raspoloživi podaci o nanosu sastoje od merenja pronosa nanosa P (podatke je obezbedio Republički Hidrometeorološki Zavod Srbije, u daljem tekstu RHMZ) koji predstavlja proizvod zapreminske srednje profilske koncentracije suspendovanog nanosa i proticaja, i podaci o merenim srednjim profilskim i površinskim koncentracijama suspendovanog nanosa (podaci obezbeđeni od strane Privrednog Društva „Hidroelektrane Đerdap”, u daljem tekstu Đerdap).

Uspostavljanjem matematičke veze pronosa nanosa sa proticajem za proizvoljan presek bi se omogućilo da se za poznati proticaj nekog preseka izračuna pronos nanosa iz kojeg se jednostavnim deljenjem sa proticajem dobija srednja profilska koncentracija. Formiranje ove zavisnosti bi omogućilo da se u preseku gde ima merenja pronosa nanosa iz neke godine napravi veza oblika $P = P(Q)$ pomoću koje bi se samo sa merenim proticajem mogao odrediti pronos nanosa. Za određivanje ovakve zavisnosti je poželjno koristiti što više merenja jer se više pronos nanosa ne vezuje za dati vremenski trenutak nego za neku vrednost proticaja. U tom svetlu se razmatraju raspoloživi podaci o merenim vrednostima pronosa nanosa u razmatranoj mreži otvorenih tokova za što duži vremenski period, a ne samo za period od interesa. Pregled podataka o pronosu nanosa je prikazan u tabeli 24 za period od 1987. do 2007. godine jer se ne raspolaže sa podacima iz ranijih godina.

Godina	Dunav	Tisa	Velika Morava		Sava		
	Bezdani <i>rkm</i> 1425.59	Senta <i>rkm</i> 123.50	Bagrdan <i>rkm</i> 120.28	Ljubičevski most <i>rkm</i> 22.01	Srem. Mitrovica <i>rkm</i> 139.26	Šabac <i>rkm</i> 106.38	Beograd <i>rkm</i> 2.00
1987.	-	-	365	365	-	-	-
1988.	-	-	366	366	-	-	-
1989.	-	-	365	362	-	-	-
1990.	-	-	365	306	-	-	-
1991.	365	337	365	365	-	-	-
1992.	366	361	366	353	-	-	-
1993.	365	-	365	345	-	365	365
1994.	365	306	365	365	-	365	-
1995.	365	347	365	365	-	365	-
1996.	366	353	366	366	-	212	-
1997.	365	339	365	365	-	301	-
1998.	365	359	365	365	-	365	-
1999.	365	291	365	365	-	-	-
2000.	366	366	366	366	-	261	-
2001.	365	347	365	365	-	365	-
2002.	365	365	365	365	-	365	-
2003.	365	365	365	365	-	-	-
2004.	366	366	366	366	366	-	-
2005.	365	365	365	365	365	-	-
2006.	365	365	365	365	365	-	-
2007.	365	365	365	365	365	-	-

Tabela 24: Pregled raspoloživih merenja pronosa nanosa

Dunav - Dobra rkm1017.32			
Datum	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
02.07.1986.	5800	0.0352	0.0174
26.06.1987.	7604	0.0385	0.0096
19.10.1988.	3950	0.0193	0.0177
Dunav - Kulić rkm1106.72			
Datum	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
03.06.1980.	8065.0	0.0779	0.0352
14.08.1980.	6560.0	0.0779	0.0434
29.09.1980.	3145.0	0.0112	0.0128
11.06.1982.	5680.0	0.0590	0.0145
09.10.1982.	3196.0	0.0189	0.0156
14.02.1983.	7260.0	0.1305	0.0507
01.06.1983.	4800.0	0.0342	0.0340
03.10.1983.	2655.0	0.0145	0.0078
08.02.1984.	4368.0	0.0349	0.0118
18.04.1984.	7630.0	0.1138	0.0325
20.03.1985.	6684.0	0.1385	0.0000
11.10.1985.	2295.0	0.0091	0.0000
22.04.1986.	8382.0	0.0764	0.0312
09.07.1986.	4338.0	0.0476	0.0222
03.04.1987.	8454.0	0.1824	0.0405
04.06.1987.	9504.0	0.0892	0.0450
01.07.1987.	6478.0	0.0546	0.0216
09.05.1988.	6815.0	0.0588	0.0130
24.10.1988.	2626.0	0.0084	0.0230
30.03.1989.	5490.0	0.0734	0.0240
23.05.1989.	8476.0	0.1823	0.0320
08.11.1990.	4712.0	0.0664	0.0308
21.05.1991.	7900.0	0.1090	0.0280
16.03.1992.	3692.0	0.0284	0.0207
15.11.1995.	3915.0	0.0131	0.0130
08.06.1996.	6708.0	0.0320	0.0034
18.10.1996.	5138.0	0.0227	0.0222
10.07.1997.	4380.0	0.0257	0.0104
08.06.1998.	3940.0	0.0148	0.0144
17.12.2001.	4424.0	0.0221	0.0040
06.04.2005.	12300.0	0.0663	0.0158
Dunav - Smederevo rkm1160.00,1140.00			
Datum	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
03.10.2006.	2808.0	0.0107	0.0063
21.04.2007.	3821.2	0.0249	0.0084
18.09.2008.	2623.3	0.0204	0.0074
25.09.2008.	2968.7	0.0368	0.0065
11.09.2009.	3573.4	0.0131	0.0325
19.09.2009.	2987.0	0.0105	0.0237
08.09.2010.	5452.0	0.0543	0.0246
17.09.2010.	5989.4	0.0321	0.0211
14.04.2011.	4291.0	0.0332	0.0094
09.09.2011.	1998.2	0.0103	0.0054
Dunav - Ilok rkm1301.50			
Datum	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
11.11.1986.	1668.0	0.0370	0.0162
20.04.1987.	5012.0	0.1020	0.0328
27.04.1987.	4232.0	0.1016	0.0197
23.02.1988.	2392.0	0.0588	0.0142
11.04.1988.	5920.0	0.1206	0.0192
05.09.1988.	3056.0	0.0903	0.0453
03.03.1989.	3320.0	0.0855	0.0238
11.10.1989.	2451.0	0.0467	0.0130
27.09.1990.	1735.0	0.0373	0.0302
Dunav - Stari Banovci rkm1192.35			
Datum	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
22.02.1989.	2020.0	0.0206	0.0190
18.10.1989.	2981.0	0.0210	0.0185
10.05.1990.	3145.0	0.0420	0.0165
02.10.1990.	2754.0	0.0453	0.0626
17.05.1991.	3416.0	0.0673	0.0156
13.03.1992.	3066.0	0.0481	0.0226
24.09.1993.	2464.0	0.0483	0.0197
01.12.1994.	2836.0	0.0277	0.0079
19.04.1995.	5628.0	0.0609	0.0118
06.09.1995.	4704.0	0.1085	0.0131
04.06.1996.	5248.0	0.0574	0.0122
16.10.1996.	4036.0	0.0354	0.0150
09.07.1997.	3774.0	0.0394	0.0066
07.06.1998.	3052.0	0.0404	0.0269
16.11.1998.	7032.0	0.2516	0.0173
04.04.2005.	7200.0	0.1216	0.0328
28.12.2005.	2384.0	0.0104	0.0012
09.10.2006.	1892.0	0.0258	0.0281
18.12.2006.	1912.0	0.0073	0.0095
24.09.2007.	5373.0	0.0450	0.0322
12.11.2007.	3009.8	0.0330	0.0175
21.08.2008.	3590.2	0.0302	0.0276
16.09.2008.	1641.4	0.0244	0.0159
09.09.2009.	2534.0	0.0320	0.0131
06.11.2009.	2423.2	0.0161	0.0047
23.11.2009.	3019.5	0.0404	0.0049
12.08.2010.	5413.4	0.1062	0.0452
18.09.2010.	4884.2	0.0388	0.0245
12.04.2011.	3424.6	0.0345	0.0099
07.09.2011.	1817.3	0.0235	0.0117
Dunav - Surduk rkm1207.30			
Datum	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
19.09.1986.	2320	0.0405	0.0338
15.02.1987.	3547	0.1017	0.0000
09.04.1987.	6144	0.2246	0.0365
27.05.1987.	6012	0.1400	0.0235
26.02.1988.	2996	0.0371	0.0420
30.03.1988.	6430	0.2734	0.1273
09.12.1988.	3020	0.0545	0.0305

Tabela 25: Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Dunavu, 1. deo

Datum	Dunav - Ledinci <i>rkm1260.00</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
26.04.1995.	3745.0	0.0513	0.0170
04.09.1995.	4070.0	0.1171	0.0376
06.06.1996.	5064.0	0.0840	0.0228
14.10.1996.	3440.0	0.0756	0.0061
04.07.1997.	3374.0	0.0584	0.0243
06.06.1998.	2340.0	0.0432	0.0433
20.04.2005.	3812.0	0.0354	0.0116
08.07.2005.	2573.0	0.0482	0.0638
06.10.2006.	1632.0	0.0330	0.0194
12.12.2006.	1570.0	0.0090	0.0037
25.09.2007.	4510.0	0.0359	0.0187
13.11.2007.	2683.1	0.0199	0.0074
20.08.2008.	2767.9	0.0308	0.0170
14.09.2008.	1822.8	0.0297	0.0190
07.09.2009.	2219.0	0.0342	0.0096
05.11.2009.	2146.8	0.0095	0.0045
16.08.2010.	4522.1	0.0589	0.0367
12.10.2010.	2825.0	0.0260	0.0124
12.05.2011.	1715.0	0.0295	0.0361
05.09.2011.	1714.0	0.0278	0.0279

Datum	Dunav - Bogojevo <i>rkm1366.90</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
11.04.1974.	2570.0	0.0850	0.0458
28.05.1974.	2760.0	0.0933	0.0327
25.06.1974.	3750.0	0.1040	0.0375
28.09.1974.	2460.0	0.1600	0.0769
04.11.1974.	4460.0	0.1510	0.0392
20.05.1980.	4470.0	0.0751	0.0320
09.08.1980.	3605.0	0.0782	0.0376
18.11.1980.	2525.0	0.0721	0.0256

Tabela 26: Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Dunavu, 2. deo

Datum	Tisa - Titel <i>rkm4.90</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
03.10.1986.	188.0	0.0159	0.0188
05.11.1986.	189.0	0.0146	0.0112
10.04.1987.	1813.0	0.3510	0.1298
01.06.1987.	1385.0	0.1396	0.0602
28.10.1987.	168.0	0.0192	0.0158
16.02.1988.	1008.0	0.1677	0.0399
31.03.1988.	1807.0	0.5136	0.1485
08.03.1989.	1510.0	0.6473	0.1890
20.04.1995.	1069.0	0.0492	0.0024
05.09.1995.	372.0	0.0099	0.0182
05.06.1996.	618.0	0.0177	0.0105
15.10.1996.	506.0	0.0141	0.0381
08.07.1997.	598.0	0.0389	0.0297
05.06.1998.	773.0	0.0361	0.0487
03.04.2005.	2240.0	0.1196	0.0420
07.10.2006.	338.0	0.0118	0.0103
26.09.2007.	652.4	0.0270	0.0192
22.08.2008.	481.7	0.0170	0.0097
21.07.2009.	451.0	0.0119	0.0150
11.08.2010.	1321.0	0.1642	0.0713
10.04.2011.	928.4	0.0374	0.0533

Datum	Tisa - Žabaljski most <i>rkm34.87</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
23.04.1974.	428.0	0.0405	0.0521
29.05.1974.	1395.0	0.3240	0.0651
20.06.1974.	2000.0	0.5340	0.4060
30.09.1974.	447.0	0.0342	0.0058

Datum	Tisa - Taraš <i>rkm47.0</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
23.05.1980.	1350.0	0.3500	0.3509
07.08.1980.	2345.0	0.3240	0.2813
16.10.1980.	1190.0	0.1569	0.1020
17.09.1986.	270.0	0.0196	0.0139
29.05.1987.	1552.0	0.2471	0.1115
27.10.1987.	154.0	0.0142	0.0097
18.02.1988.	914.0	0.1325	0.1306
02.04.1988.	2000.0	0.3930	0.2875
06.06.1989.	707.0	0.0397	0.0000
16.10.1989.	465.0	0.0132	0.0160
08.07.2009.	570.3	0.0204	0.0120
02.09.2009.	274.9	0.0080	0.0057
10.08.2010.	1467.5	0.1858	0.1553
14.10.2010.	558.2	0.0145	0.0293
11.04.2011.	905.2	0.0287	0.0410
03.11.2011.	278.4	0.0062	0.0051

Tabela 27: Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Tisi

Datum	Porečka - Topolnica <i>rkm9.85</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
31.08.1982.	1.250	0.0018	0.0033
28.12.1982.	7.030	0.033	0.0246
20.06.1983.	0.990	0.0078	0.0090
26.06.1984.	0.623	0.0026	0.0114
26.03.1985.	11.50	0.0196	0.0000
28.03.1985.	24.90	0.1090	0.0000
29.08.1985.	1.82	0.1978	0.0000
04.12.1985.	20.50	0.1049	0.0000
31.03.1986.	61.90	0.4071	0.1634
01.04.1986.	41.35	0.3591	0.0567
26.03.1987.	8.11	0.0625	0.0025

Datum	Pek - Braničevo <i>rkm6.60</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
30.08.1982.	3.12	0.0235	0.0804
28.12.1982.	11.96	0.0803	0.1638
20.06.1983.	4.16	0.0071	0.0411
20.09.1983.	3.74	0.1508	0.0136
25.01.1984.	4.84	0.1952	0.1090
25.06.1984.	3.18	0.0085	0.0113
13.03.1985.	5.34	0.0139	0.0350
22.03.1985.	38.90	0.2702	0.3000
26.08.1985.	0.562	0.0066	0.0753
29.08.1985.	8.02	0.5062	0.1000
25.02.1986.	35.30	0.1994	0.3553
24.07.1986.	7.50	0.0796	0.0586
18.02.1987.	8.24	0.0813	0.1098
08.04.1987.	21.5	0.1642	0.1064

Datum	Mlava - Bradarac <i>rkm8.78</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
27.08.1982.	3.85	0.0735	0.0549
29.12.1982.	11.87	0.4100	0.0918
14.03.1983.	11.10	0.1040	0.0637
21.06.1983.	10.4	0.2858	0.1750
20.09.1983.	3.94	0.5330	0.2860
27.01.1984.	16.0	0.5210	0.3344
16.03.1984.	20.8	1.0670	0.4568
25.06.1984.	5.26	0.1340	0.1173
11.03.1985.	11.1	0.1879	0.0000
24.03.1985.	18.8	0.2681	0.3948
26.08.1985.	1.09	0.0103	0.0250
06.09.1985.	8.94	0.2204	0.2020
13.03.1986.	31.1	0.2688	0.2743
23.07.1986.	21.7	0.3065	0.3460
19.02.1987.	14.6	0.3330	0.3570
07.04.1987.	33.8	0.3817	0.3892

Datum	V. Morava - ušće <i>rkm0.58</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
29.04.1974.	290.0	0.1860	0.1346
21.05.1974.	670.0	0.7050	0.2520
08.07.1974.	197.0	0.2960	0.2403
14.10.1974.	55.4	0.0197	0.0168
24.10.1974.	94.2	0.0558	0.0552
28.04.1975.	178.0	0.0467	0.1242
23.01.1976.	161.0	0.0542	0.0414
17.06.1976.	370.0	0.3070	0.1009
21.09.1976.	247.5	0.4110	0.0483
18.11.1976.	221.5	0.2090	0.3257
05.06.1980.	617.0	0.3525	0.2747
13.08.1980.	96.4	0.0204	0.0266
28.06.1982.	108.0	0.0090	0.0099
08.10.1982.	79.8	0.0160	0.0128
15.02.1983.	345.0	0.3280	0.6800
31.05.1983.	64.3	0.0262	0.0460
04.10.1983.	84.7	0.0142	0.0565
07.02.1984.	576.0	0.4045	0.2850
23.04.1986.	242.0	0.0159	0.1418
08.07.1986.	275.0	0.1740	0.1191
30.06.1987.	132.3	0.0348	0.0405
10.05.1988.	194.0	0.0138	0.0280
27.12.1988.	139.0	0.0168	0.0265
31.03.1989.	130.2	0.0156	0.0163
22.05.1989.	498.0	0.6787	0.4204

Datum	V. Morava - Lj. most <i>rkm21.80</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
27.04.1974.	303.5	0.2930	0.1861
19.05.1974.	823.0	1.4650	1.2319
21.05.1974.	674.0	0.7160	0.6525
11.07.1974.	189.0	0.3280	0.1794
11.10.1974.	64.0	0.0463	0.0362
10.06.1975.	630.0	0.6280	0.6715
26.01.1976.	174.5	0.1990	0.1300
13.06.1976.	1438.0	0.4990	0.3078
17.09.1976.	117.2	0.0660	0.0703
16.11.1976.	154.5	0.0870	0.0694
07.11.1980.	114.0	0.0332	0.0208
11.11.1987.	67.2	0.0141	0.0127
16.06.1996.	218.0	0.1481	0.0386
09.12.1996.	341.0	0.1138	0.0444
10.04.2005.	508.0	0.6220	0.0583
04.06.2006.	290.8	0.7166	0.0990
02.11.2007.	209.0	0.7770	0.1048
08.12.2008.	313.1	0.1124	0.0185
17.08.2009.	125.1	0.0487	0.0137
07.07.2010.	430.4	0.1670	0.1473
05.06.2011.	215.0	0.5386	0.0526

Tabela 28: Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na manjim pritokama

Datum	Sava - Beograd <i>rkm2.0.5.2</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
26.09.1986.	472.0	0.0096	0.0119
28.10.1986.	511.0	0.0103	0.0165
25.12.1986.	953.0	0.0253	0.0790
06.04.1987.	3097.0	0.1292	0.1028
26.05.1987.	3550.0	0.1039	0.1642
08.07.1987.	1063.0	0.0595	0.0364
15.04.1988.	2828.0	0.0338	0.0137
26.12.1988.	810.0	0.0133	0.0124
10.03.1989.	1730.0	0.0803	0.0600
05.05.1989.	2089.0	0.0972	0.0900
01.06.1993.	589.0	0.0117	0.0087
28.10.1994.	350.0	0.0099	0.0034
26.05.1995.	1968.0	0.0282	0.0396
22.09.1995.	2062.0	0.0664	0.0334
03.06.1996.	1610.0	0.0406	0.0196
17.10.1996.	1849.0	0.0304	0.0141
11.07.1997.	728.0	0.0066	0.0036
09.06.1998.	826.0	0.0067	0.0098
05.04.2005.	4145.0	0.0234	0.0254
04.10.2006.	540.0	0.0074	0.0119
27.09.2007.	968.2	0.0059	0.0040
13.10.2008.	720.7	0.0083	0.0090
21.09.2009.	311.6	0.0025	0.0037
13.08.2010.	602.0	0.0239	0.0051
13.09.2011.	310.6	0.0044	0.0044
Datum	Sava - Srem. Mitrovica <i>rkm136.30</i>		
	$Q(m^3/s)$	$C_{sr}(kg/m^3)$	$C_{pov}(kg/m^3)$
19.04.1974.	1430.0	0.0850	0.0519
24.05.1974.	1504.0	0.1080	0.0734
28.06.1974.	1090.0	0.0670	0.0390
10.10.1974.	2850.0	0.2440	0.2126
20.10.1974.	4280.0	0.1310	0.0583
16.04.1975.	2710.0	0.1010	0.0937
09.04.1976.	2260.0	0.0970	0.0868
09.09.1976.	1820.0	0.1580	0.1454
06.11.1976.	1828.0	0.0900	0.0724
29.05.1980.	3335.0	0.0509	0.0355
18.08.1980.	580.0	0.0145	0.0139
21.10.1980.	2180.0	0.0925	0.0666
25.04.1988.	1590.0	0.0432	0.0193
14.03.1989.	1115.0	0.0342	0.0236
09.07.2009.	1075.0	0.0553	0.0196
01.09.2009.	371.0	0.0040	0.0069
17.08.2010.	571.5	0.0105	0.0082
13.10.2010.	1427.3	0.0257	0.0103
13.05.2011.	891.1	0.0129	0.0099
02.11.2011.	958.5	0.0321	0.0085

Tabela 29: Pregled raspoloživih simultanih merenja C_{pov} i C_{sr} na Savi

Druga opcija je određivanje veze površinske i srednje profilske koncentracije suspendovanog nanosa. Postojanje jednoznačne veze ove dve koncentracije bi omogućilo da se za merene vrednosti površinskih koncentracija sračuna odgovarajuća srednja profilska koncentracija. Ovaj pristup se razmatra jer je u okviru projekta Ministarstva za obrazovanje, nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, participant Privredno Društvo „Hidroelektrane Đerdap” na raspolaganje stavilo podatke prikupljene od strane Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi” (u daljem tekstu JC). Pomenuti podaci se sastoje od dnevnih merenja srednjih profilskih i površinskih koncentracija koje bi mogle da posluže za dopunjavanje nekompletnih podataka na granicama modela. Koristeći se istom logikom kao u prethodnom slučaju, cilj je iskoristiti što više merenja kako bi se dobila verodostojna zavisnost dve vrednosti. Pregled simultanih merenja površinskih i srednjih profilskih koncentracija je dat u tabelama 25, 26, 27, 29 i 28. Analizom raspoloživih podataka se primećuje da definisanje kvalitetne funkcije $C_{sr}(C_{pov})$ zahteva što je moguće više podataka, usled čega merna mesta poput Dobre i Bogojeva na Dunavu (tabela 25 sa svega tri merenja, tabela 26 sa svega osam merenja), ili Žabaljski most na Tisi (tabela 27 sa samo četiri merenja) nisu razmatrana jer je broj simultanih merenja nedovoljan.

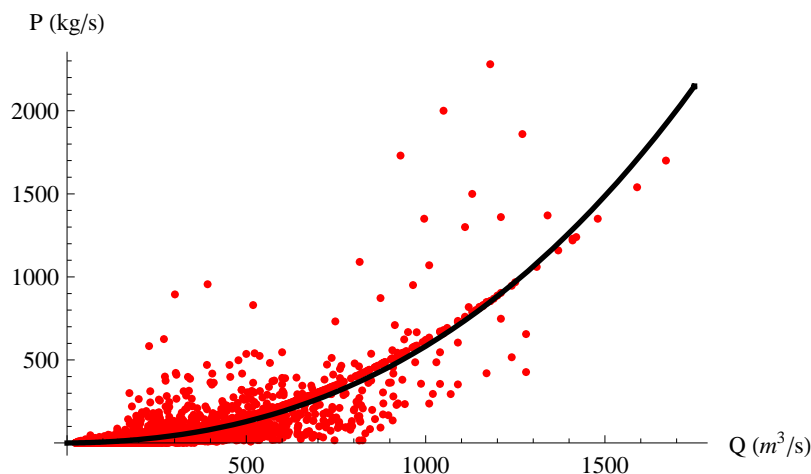
Još jedan mogući pristup je definisanje veze pronosa nanosa i protoka koristeći JC podatke (tabele 25, 26, 27, 29 i 28). Prednost ovog postupka u odnosu na definisanje iste zavisnosti sa podacima RHMZ-a se ogleda u tome da su ovde jednoznačne vrednosti koje ulaze u funkciju (merena vrednost srednje profilske koncentracije i meren proticaj). Sa druge strane, nedostatak je očigledan i ogleda se u neuporedivo manjem broju raspoloživih podataka za formulisanje zavisnosti. Detaljno ispitivanje nabrojanih postupaka za određivanje funkcije kojom bi se dopunili nekompletni granični uslovi je prikazano u poglavlju 7.1.5.

7.1.5. Pomoćne zavisnosti - dopuna graničnih uslova za proračun transporta nanosa

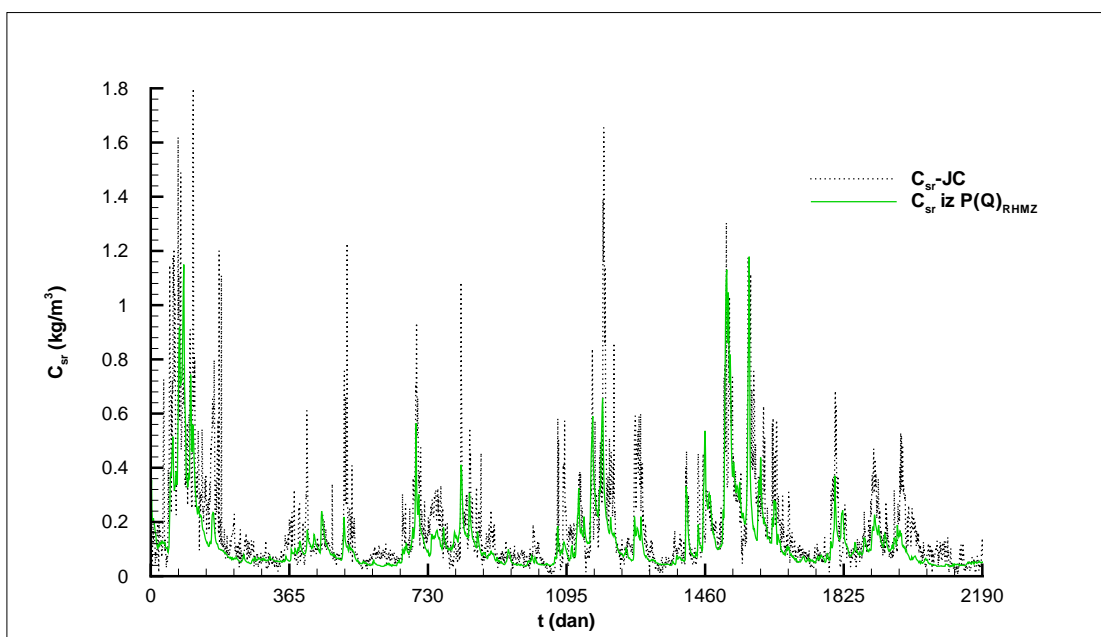
Pomoću dodatnih analiza raspoloživih merenja na planiranoj oblasti modela (poglavljje 7.1.3.) je zaključeno da na granicama modelisane oblasti nema kontinualnih merenja pronosa nanosa koja su neophodna za planiranu numeričku simulaciju. Kao rezultat su sprovedena dodatna istraživanja kojima su sistematizovana sva merenja nanosa na oblasti od interesa. Pregledanjem raspoloživih merenja vezanih za nanos je spomenuto više mogućnosti za prevazilaženje problema nedovoljnih merenja na granicama: definisanje veze pronosa nanosa i proticaja koristeći podatke koje je obezbedio RHMZ, definisanje veze površinske i srednje profilske koncentracije koristeći podatke JC, i konačno, koristeći iste podatke, definisanje veze pronosa nanosa i proticaja. Najkompletniji podaci o nanosu mogu da se nađu na Velikoj Moravi na mernom mestu Ljubičevski most, zbog čega je ovaj presek izabran kao primer na kojem se prikazuje princip daljeg istraživanja. Uspostavljene zavisnosti su primenjene za određivanje srednje profilske koncentracije za period od 2006. do 2011. godine i poređene sa dnevnim vrednostima srednjih profilskih koncentracija suspendovanog nanosa obezbeđenih od strane HE Đerdap (a čije prikupljanje je sproveo JC).

Prvo se razmatra zavisnost pronosa nanosa i proticaja primenom podataka RHMZ-a. U tabeli 24 je prikazan broj merenja pronosa nanosa u preseku Ljubičevski most na Velikoj Moravi odakle se vidi da merenja pronosa nanosa postoje od 1987. do 2007. godine. Da bi se uspostavila tražena zavisnost, od RHMZ su traženi podaci o merenim proticajima u istom periodu. Na slici 23 su tačkama prikazana sva merenja proticaja i pronosa nanosa u periodu od 01.01.1987. do 31.12.2007. godine, a usvojena aproksimacija je prikazana

punom linijom. Prilikom izbora najpogodnije funkcije za opisivanje tražene zavisnosti su razmatrane logaritamske, eksponencijalne, stepene funkcije i polinomi višeg stepena. U ovom slučaju je konačno usvojen polinom trećeg stepena kao zavisnost koja najbolje opisuje merenja. Dobijena zavisnost ($P(Q)_{RHMZ}$) je testirana poređenjem izračunatih srednjih profilskih koncentracija C_{sr} sa srednjim profilskim koncentracijama ($C_{sr}-JC$) iz izveštaja JC za godine 2006, 2007, 2008, 2009, 2010 i 2011. Vrednosti srednjih profilskih koncentracija u ovim izveštajima nisu direktno merene vrednosti koncentracija. Prilikom dnevnih merenja se zbog jednostavnijeg uzorkovanja uzimaju uzorci za određivanje površinskih koncentracija, nakon čega se primenom sličnih zavisnosti koje se i ovde razmatraju definiše veza kojom se iz merenih površinskih koncentracija dolazi do srednje profilske koncentracije. Ipak, zbog odsustva boljih podataka, ove vrednosti srednjih profilskih koncentracija se uzimaju kao referentne, te se dalji rezultati porede sa njima.



Slika 23: Merenja RHMZ i usvojena zavisnost $P(Q)$

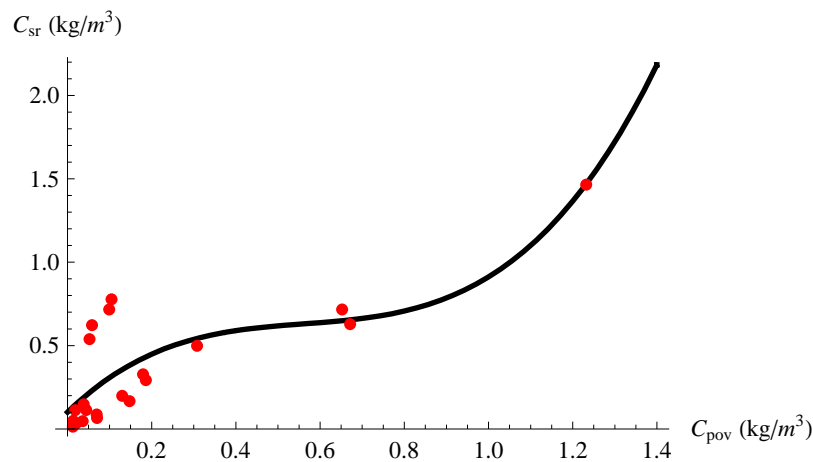


Slika 24: Poređenje C_{sr} dobijenih iz zavisnosti $P(Q)_{RHMZ}$ sa $C_{sr}-JC$ datih u izveštajima

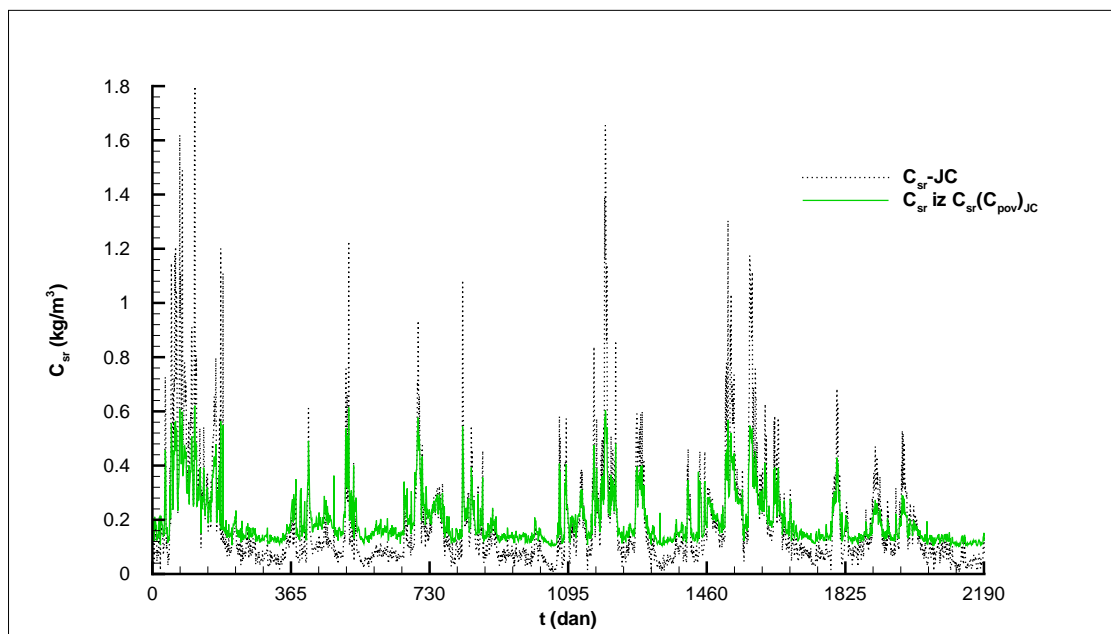
Slika 24 prikazuje srednje profilske koncentracije koje daje Jaroslav Černi u svojim godišnjim izveštajima, i izračunate vrednosti srednjih profilskih koncentracija ko-

risteći prethodno uspostavljenu zavisnost $P(Q)_{RHMZ}$ za period od 2006. do 2011. godine (ukupno 2191 dan). Sa prikazanih rezultata se vidi da je slaganje vrednosti dosta dobro i da C_{sr} dobijeno iz $P(Q)_{RHMZ}$ po obliku prati krivu $C_{sr}-JC$. Takođe se može primetiti da se veća odstupanja javljaju u slučajevima značajnog i naglog povećanja koncentracija, gde usvojena zavisnost $P(Q)_{RHMZ}$ nije uspela da reprodukuje maksimume. Kod umerenog priraštaja koncentracije, rezultati dobijeni primenom $P(Q)_{RHMZ}$ daju dosta dobra slaganja sa $C_{sr}-JC$.

Sledeći tip funkcije koji se razmatra daje vezu srednje profilske i površinske koncentracije. U poglavlju 7.1.4. je pokazano da ovakvih podataka ima mnogo manje. Pomenuti pristup se ipak razmatra iz nužnosti usled odsustva boljih. Slika 25 prikazuje merene srednje profilske i površinske koncentracije (podaci poreklom iz izveštaja JC) i usvojenu funkciju $C_{sr}(C_{pov})_{JC}$. Za uspostavljanje zavisnosti je usvojen polinom trećeg stepena jer se pokazao kao najpogodniji za opisivanje raspoloživih merenja. Dobijena funkcija je testirana poređenjem sa podacima $C_{sr}-JC$ za period 2006. do 2011. godine, slika 26.



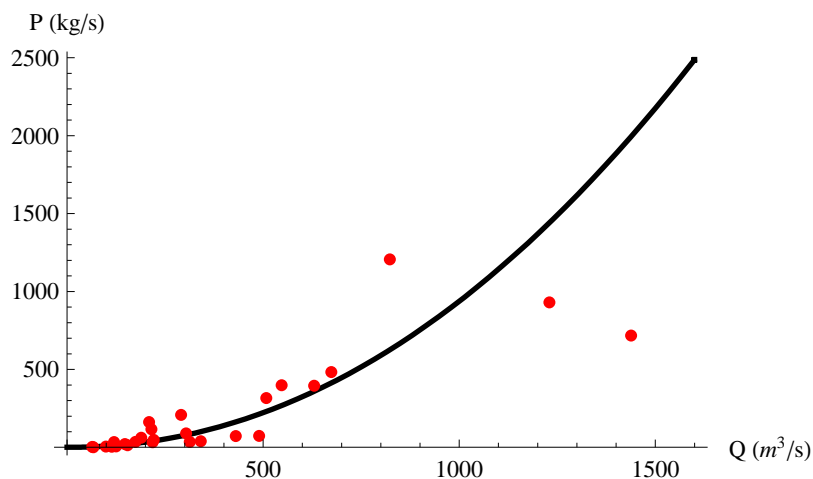
Slika 25: Merenja instituta „Jaroslav Černi” i usvojena zavisnost $C_{sr}(C_{pov})_{JC}$



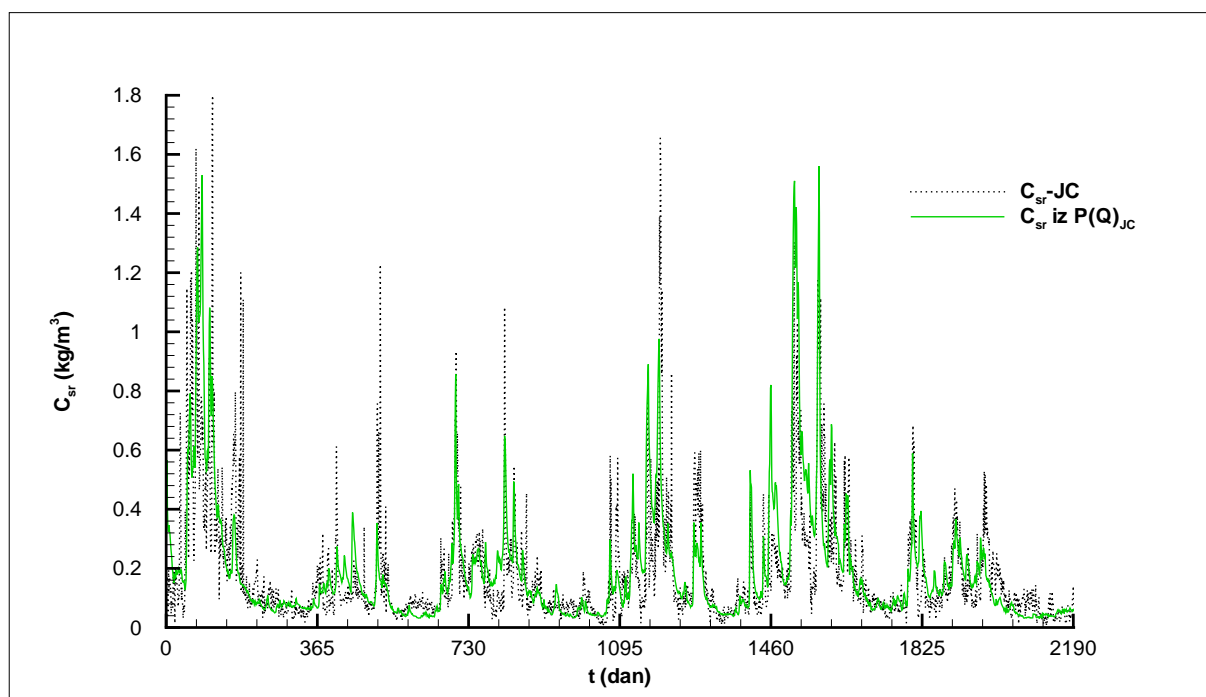
Slika 26: Poređenje C_{sr} dobijenih iz zavisnosti $C_{sr}(C_{pov})_{JC}$ sa $C_{sr}-JC$ datih u izveštajima

U razmatranom slučaju se uočava da usvojena zavisnost $C_{sr}(C_{pov})_{JC}$ kod ekstremnih vrednosti daje manje koncentracije od $C_{sr}-JC$, dok se u periodima gde su koncentracije generalno manje i nema naglih skokova, vrednosti dobijene primenom $C_{sr}(C_{pov})_{JC}$ iznad vrednosti datih u Jaroslav Černijevim izveštajima.

Pored ove opcije je analiziran još jedan pristup koristeći isti izvor podataka (tabela 28), s' time da se ovaj put traži veza pronosa nanosa i proticaja. Množenjem izmerenih srednjih profilskih koncentracija i proticaja iz tabele 28 se dobio pronos nanosa, koji se kombinovao sa pripadajućim proticajima. Ovi podaci su zajedno sa usvojenom aproksimacijom, $P(Q)_{JC}$ (stepena funkcija) prikazani na slici 27.



Slika 27: Merenja instituta „Jaroslav Černi” i usvojena zavisnost $P(Q)$



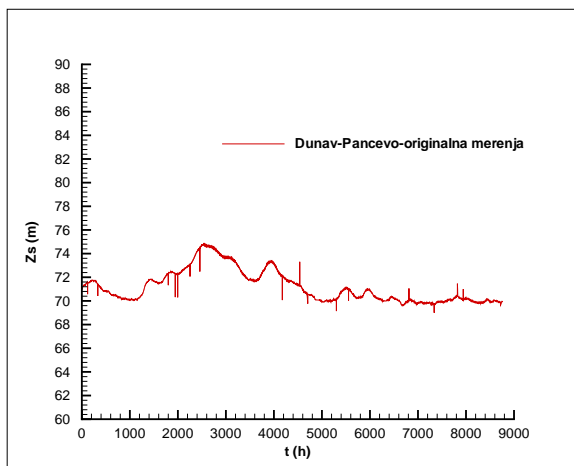
Slika 28: Poređenje C_{sr} dobijenih iz zavisnosti $P(Q)_{JC}$ sa $C_{sr}-JC$ datih u izveštajima

Nakon uspostavljanja jednoznačne veze, funkcija je proverena poređenjem sa podacima $C_{sr}-JC$ za isti period kao u dva prethodna slučaja (od 2006. do 2011. godine). U ovom slučaju se primećuje znatno bolje slaganje rezultata nego u dva prethodna

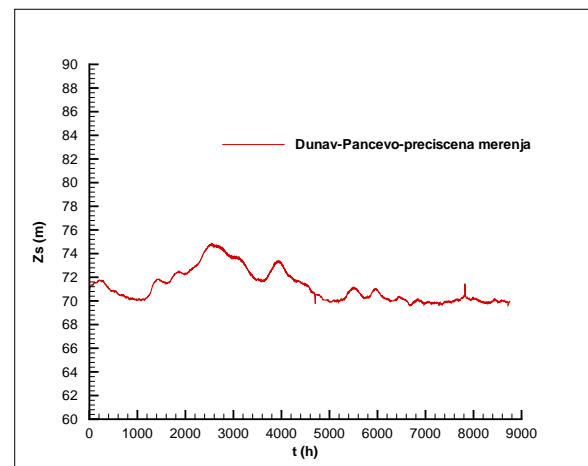
slučaja. Funkcija bolje reprodukuje srednje profilske koncentracije u mirnijim periodima od funkcije $C_{sr}(C_{pov})_{JC}$ i bolje prati maksimume od funkcije $P(Q)_{RHMZ}$. Jednostavnim pregledom rezultata se lako dolazi do zaključka da je poslednja korelacija najpovoljnija za definisanje uzvodnih graničnih uslova, međutim, pre donošenja takve odluke treba imati u vidu da je broj simultanih merenja srednje i površinske koncentracije u preseku Ljubičevski most na Velikoj Moravi relativno velik (22 podatka). Preseci kao što su Dobra, Ilok, Smederevo, Surduk i Bogojevo na Dunavu, ili Žabaljski most na Tisi imaju mnogo manje podataka koji bi dali manje kvalitetnu zavisnost. Zbog toga se ne može jednoznačno reći da je napovoljnije koristiti zavisnost tipa $P(Q)_{JC}$, nego se usvaja princip da se prilikom definisanja zavisnosti prednost daje ovom tipu funkcije ukoliko je broj simultanih merenja prihvatljiv, a u suprotnom da se pribegne funkciji tipa $P(Q)_{RHMZ}$.

7.1.6. Greške u merenjima

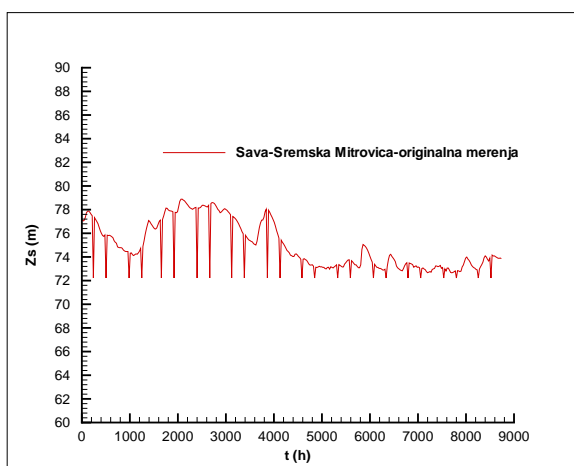
U ranijem izlaganju je već napomenut veliki broj podataka koji je neophodan za formiranje predviđenog modela. Prilikom pripremanja ulaznih podataka modela treba voditi računa o potencijalnim greškama merenja koje mogu uzrokovati loše rezultate simulacije ili čak nemogućnost modela da završi proračun ukoliko se radi o graničnim uslovima. Zbog toga je neophodno pregledati sva merenja i eventualne greške ukloniti.



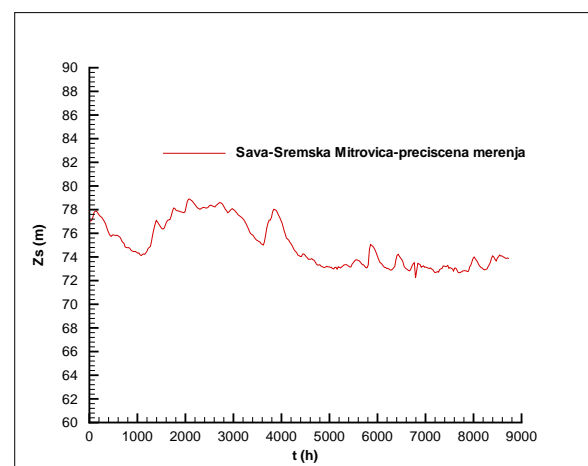
(a) Dunav-Pančevo



(b) Dunav-Pančevo

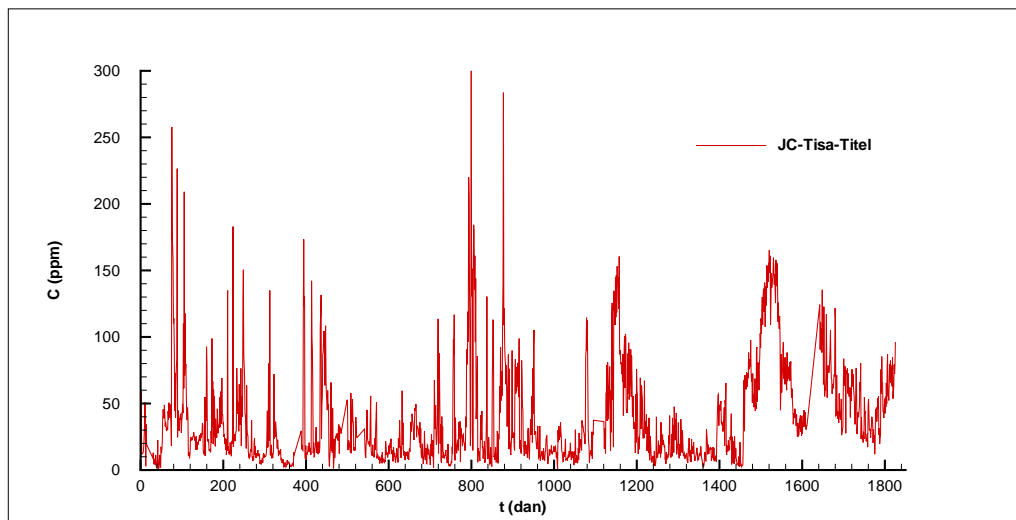


(c) Sava-Sremska Mitrovica

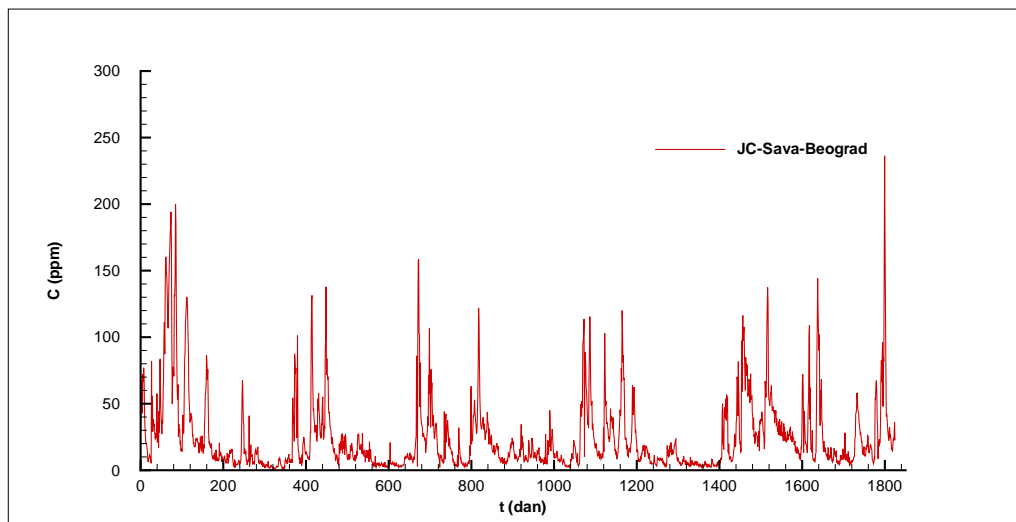


(d) Sava-Sremska Mitrovica

Slika 29: Greške u merenjima, 1. deo



(a) Tisa-Titel



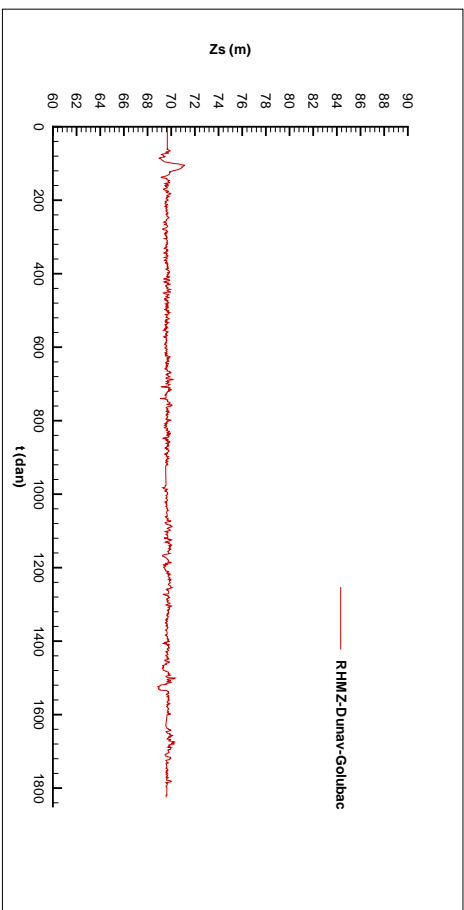
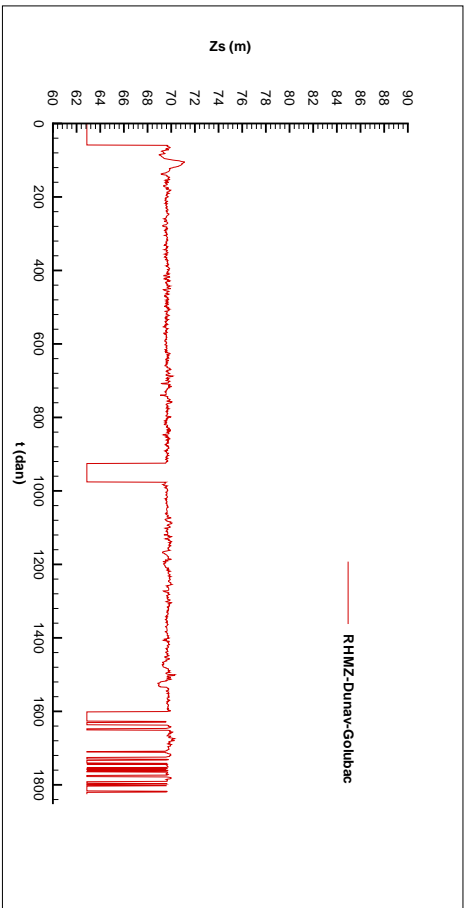
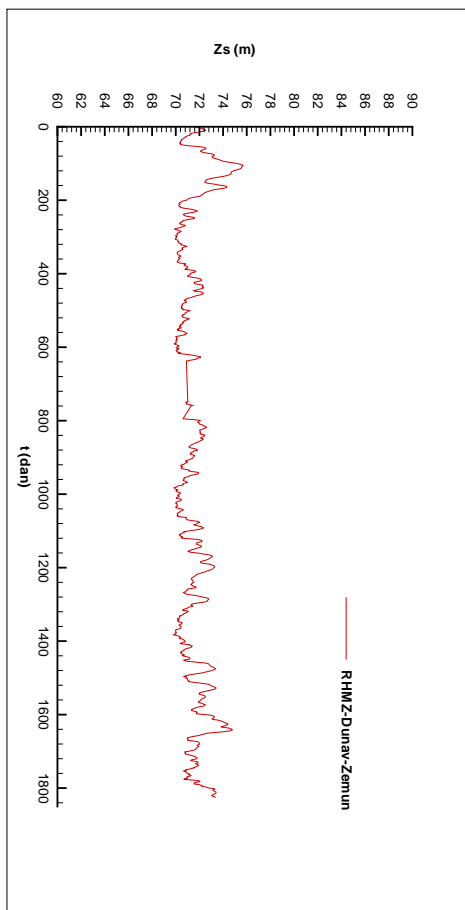
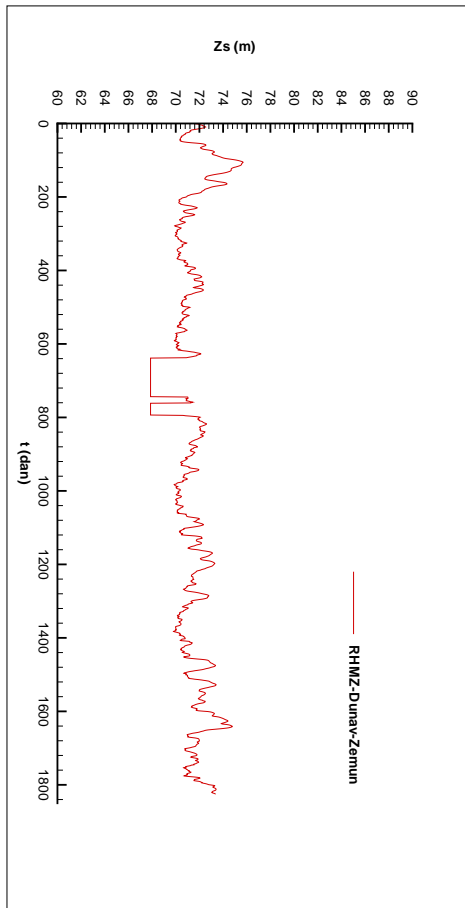
(b) Sava-Beograd

Slika 30: Greške u merenjima, 2. deo

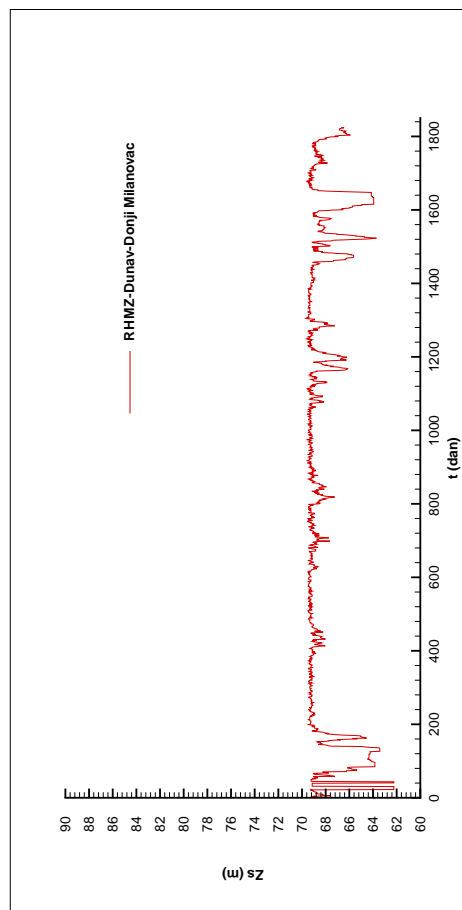
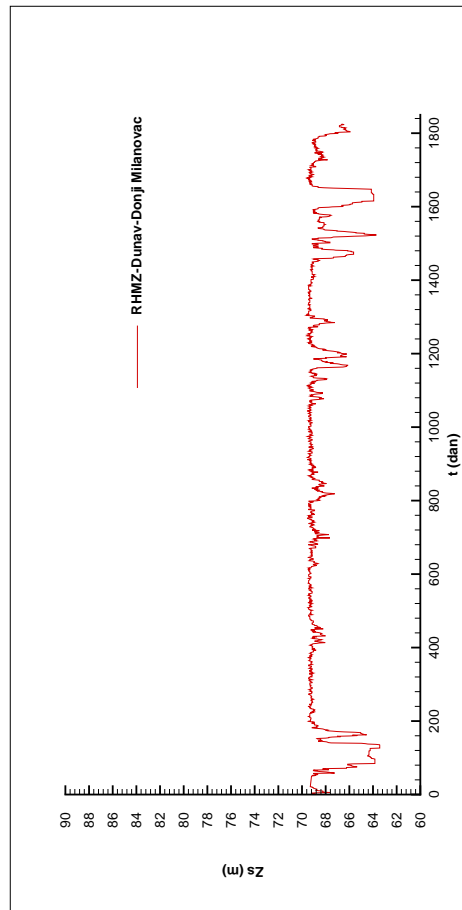
Kod analize merenja nivoa greške su obično jednoznačne, kao u slučaju merenja nivoa na Dunavu u Pančevu ili na Savi u Sremskoj Mitrovici, slike 29. Pomenute greške mogu biti posledica diskontinuiteta tokom merenja usled kvara opreme, propusta prilikom prikupljanja podataka, ili greške u procesu njihove naknadne obrade. Imajući u vidu veliki broj podataka sa kojima se radi, nije moguće jednoznačno ustanoviti poreklo grešaka. Ipak, ima slučajeva kada se ne može sa sigurnošću tvrditi da se zaista radi o greškama. Kao primer se navode merenja srednjih profilskih koncentracija suspendovanog nanosa. Kako su sva prikazana merenja nivoa, proticaja i koncentracija suspendovanog nanosa dnevne vrednosti, za koncentracije je nemoguće ustanoviti da li se radi o realnom trenutnom povećanju vrednosti ili je u pitanju greška. Kao primer su data merenja za svih pet godina na Tisi u Titelu i na Savi u Beogradu, slika 30. Kod Titela se oko $t = 800$ dana javlja postepeno povećanje merenih koncentracija suspendovanog nanosa u čijoj sredini se nalazi pik koji dostiže vrednosti $C = 300\text{ppm}$. Pošto se maksimum javlja u sred perioda postepenog povećanja nakon kojeg sledi postepeno smanjenje vrednosti, rezultati merenja deluju tačnim. U istom preseku se oko $t = 900$ dana javlja samosta-

lan maksimum koji dostiže vrednost od $C = 280ppm$. Sa obzirom da merenja pre ni posle ovog ekstrema ne daju dojam o porastu vrednosti koncentracija, razumno bi bilo pretpostaviti da je u pitanju greška. Ipak, imajući u vidu da su merenja dnevne vrednosti, takođe se može pretpostaviti da je tokom 24 časa između dva susedna merenja moglo doći do pojave koja bi opravdala ovakve rezultate. Zbog toga se merenja koncentracija suspendovanog nanosa u radu nisu ispravljala, nego se prilikom upoređivanja rezultata proračuna sa merenim vrednostima vodilo računa i o potencijalnim greškama u merenjima. Sa ciljem tačnijeg tumačenja rezultata dugoročne simulacije su paralelno posmatrane promene koncentracije suspendovanog nanosa i promenama proticaja u istom preseku. Pored toga, prilikom evaluacije rezultata proračuna treba imati u vidu još jednu nedoslednost. Naime, podaci o koncentracijama suspendovanog nanosa su dobijeni od dva izvora (RHMZ i JC podaci). Posledica toga je da se negde na granicama modela zadaju JC merenja, a negde RHMZ merenja, dok se za kontrolu koriste isključivo JC podaci jer drugih merenja nije bilo unutar modelisane oblasti.

Dodatni primeri grešaka u merenjima nivoa za svih pet godina su dati na slikama 31 i 32.



Slika 31: Greške u merenjima, 3. deo



Slika 32: Greške u merenjima, 4. deo

7.1.7. Dodatna razmatranja

U ovom poglavlju je sprovedena detaljna analiza raspoloživih merenja morfologije, nivoa, proticaja, pronosa nanosa i srednjih profilskih i površinskih koncentracija suspendovanog nanosa. Ranije je zaključeno da su broj podataka i mesta preseka sa merenim vrednostima nivoa i proticaja dovoljni za definisanje graničnih uslova hidrauličkog dela modela. Takođe se pokazalo da su broj podataka i mesta sa podacima vezanim za nanos nedovoljni za simulaciju transporta nanosa i deformacije korita na razmatranoj oblasti modela. Pokazano je da se definisanjem zavisnosti pronosa nanosa i proticaja, za svaki presek u kojem ima merenja proticaja može dobiti realna vrednost pronosa nanosa, te da se na taj način prevaziđe problem malobrojnih merenja. Nakon svega se može doneti konačna odluka o oblasti modela. Modelisana oblast je deonica Dunava od Bezdana do brane HE Đerdap 1, Tisa od Sente, Sava od Sremske Mitrovice i Velika Morava od Ljubićevskog mosta. Preostale manje pritoke se izostavljaju jer na njima nema dovoljno podataka za formiranje modela transporta nanosa i deformacije korita. Umesto toga su preostale pritoke u model uključene kao lokalni doticaj čiste vode.

8. Kalibracija i verifikacija

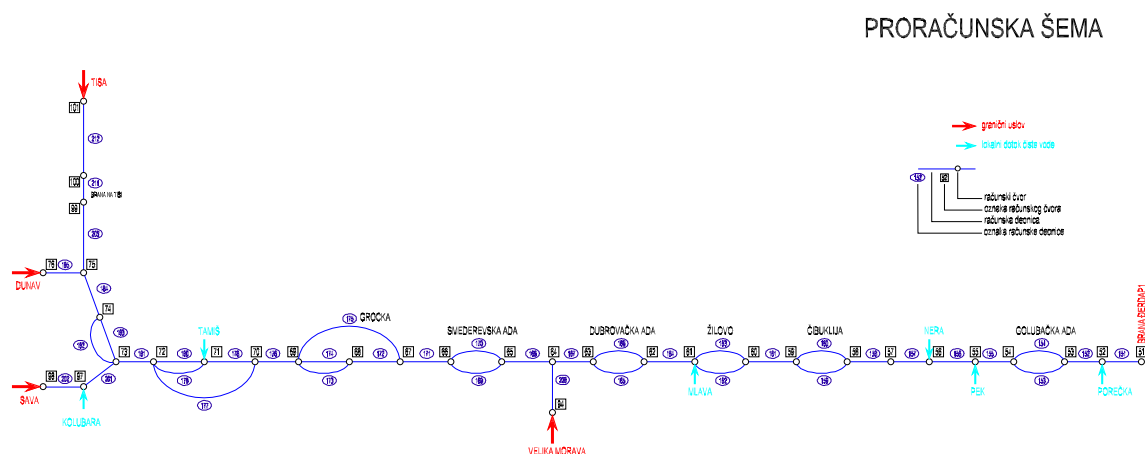
KALIBRACIJA i verifikacija hidrauličkog modela i modela transporta nanosa i deformacije korita su prikazane odvojeno. Osnovni razlog za ovo je složenost razmatranih procesa. Kao što je ranije napomenuto, formirana strujna slika utiče na transportne procese i promenu morfologije koja onda ima povratno dejstvo na strujnu sliku. Međusobna zavisnost ovih procesa čini istovremenu kalibraciju hidrauličkog dela modela i modela transporta nanosa i deformacije korita nemogućim. Drugi razlog nezavisne kalibracije je posledica različite brzine kojom se ovi procesi odvijaju. Dok je strujanje vode, odnosno formiranje strujne slike, brz proces, gde za kalibraciju može da se koristi svega nekoliko dana, transport nanosa i deformacija korita su znatno sporiji procesi za čiju kvalitetnu kalibraciju treba mnogo više vremena.

Ispravna kalibracija hidrauličkog modela je preduslov za dalju kalibraciju modela transporta nanosa. Zato su u poglavlju 8.1. razmatrana dva pristupa kalibracije. Prvi pristup se zasniva na kalibrisanju zadavanjem vrednosti *Manning*-ovog koeficijenta hrapavosti kao funkcije od proticaja, a drugim pristupom se zadaje vrednost apsolutne hrapavosti. Nakon izbora pristupa kalibracije je urađena preliminarna verifikacija hidrauličkog modela puštanjem simulacije za jednu godinu (01.01.2006. do 31.12.2006. godina) i poređenjem rezultata izračunatih nivoa sa postojećim merenjima. Konačna verifikacija kompletnog modela je izvršena puštanjem dugoročne simulacije (poglavlje 9.).

Pošto je ustanovljeno da je hidraulički model ispravan, u poglavlju 8.3. se prelazi na kalibraciju modela transporta nanosa i deformacije korita. Zbog tromosti procesa, nekompletnih merenja i njihovog mešovitog porekla (podaci poreklom od RHMZ-a i podaci poreklom od JC-a), za kalibraciju modela transporta je usvojen period od jedne godine. Za kalibraciju modela transporta nanosa su iskorišćeni podaci iz 2006. godine, čime su obuhvaćene i godišnje varijacije koncentracije suspendovanog nanosa. Zbog dimenzije modelisane oblasti i raznolikosti unutar nje, model je korigovan da se pored zadavanja parametara kalibracije po frakcijama omogući dodatna korekcija parametara kalibracije u svakoj računskoj tački. Nakon kalibracije modela je puštena dugoročna simulacija za period od 01.01.2006. do 31.12.2010. godine. Rezultati modela su upoređeni sa merenim vrednostima koncentracija suspendovanog nanosa, što je prikazano u poglavlju 9.

8.1. Kalibracija hidrauličkog modela

Modelisana oblast se sastoji od reke Dunav od Bezdana do Đerdapa, deonice Tise od Sente do ušća, deonice Save od Sremske Mitrovice do ušća i deonice Velike Morave od Ljubićevskog mosta do ušća. Preostale manje pritoke su modelisane kao lokalni doticaji. Šematski prikaz oblasti modela je prikazan na slici 33. Uzvodni granični uslovi hidrauličkog proračuna su poznati hidrogrami na svim deonicama, slika 51. Nizvodna granica je zajednička za sve tokove i nalazi se na Dunavu, a zadaje se kao poznat nivo-gram na brani HE Đerdap 1, slika 52. Osim toga se na modelisanoj deonici Tise, u Novom Bečeju, nalazi brana (unutrašnji granični uslov) koja je modelisana zadavanjem poznatog nivoa gornje vode na brani. Dakle, model je formulisan za mrežu otvorenih tokova unutar akumulacije hidroelektrana HE Đerdap 1 koja svojim radom izaziva neustaljeno tečenje. Zbog intenzivnih oscilacija koje su posledica rada hidroelektrane, računski korak po vremenu tokom svih simulacija strujanja vode iznosi 15 minuta. Promene nivoa na brani su izuzetno učestale te su opisane satnim vrednostima merenja nivoa. Merenja koja su poreklom od RHMZ-a daju dnevne vrednosti svih podataka zbog čega su ovi podaci interpolovani da bi se na svim granicama mogle zadati satne vrednosti.



Slika 33: Proračunska šema oblasti modela

Karakteristični proticaj	Pripadajući šestodnevni period u 2006. godini						
$Q_{sr} \approx 2400m^3/s$	dan	27.10.	28.10.	29.10.	30.10.	31.10.	1.11.
	protok	2400	2450	2450	2450	2450	2400
$Q_{sr} \approx 5000m^3/s$	dan	18.01.	19.01.	20.01.	21.01.	22.01.	23.01.
	protok	5450	5250	5250	5150	5000	4950
$Q_{sr} \approx 7600m^3/s$	dan	27.05.	28.05.	29.05.	30.05.	31.05.	1.06.
	protok	7700	7700	7550	7500	7450	7600
$Q_{sr} \approx 10500m^3/s$	dan	15.03.	16.03.	17.03.	18.03.	19.03.	20.03.
	protok	10600	10700	10700	10600	10600	10500
$Q_{sr} \approx 12800m^3/s$	dan	3.05.	4.05.	5.05.	6.05.	7.05.	8.05.
	protok	12900	12800	12800	12800	12900	12800
$Q_{sr} \approx 15600m^3/s$	dan	14.04.	15.04.	16.04.	17.04.	18.04.	19.04.
	protok	15500	15800	15800	15600	15400	15400

Tabela 30: Merodavni proticaji za kalibraciju hidrauličkog modela

Osnovni parametar za kalibraciju linijskih modela neustaljenog tečenja u mreži otvorenih tokova je *Manning*-ov koeficijent. Klasičan pristup pri kalibraciji je zadavanje različitih vrednosti ovog koeficijenta duž toka. Zadana vrednost *Manning*-ovog koeficijenta oslikava promene u poprečnim presecima modelisane oblasti, lokalne gubitke ili čak i meandriranje deonice ukoliko nema dovoljno gustih merenja profila. Nedostatak ovog pristupa je posledica toga da se na ovaj način zadaje konstantna vrednost *Manning*-ovog koeficijenta u jednom preseku koja ostaje ista uprkos promenama proticaja i nivoa. Kao posledica se pri većim varijacijama proticaja javljaju i veća odstupanja u rezultatima. Jedan pristup u prevazilaženju ovog nedostatka je zadavanje *Manning*-ovog koeficijenta u vidu funkcije proticaja. U tom slučaju se za svaki presek zadaje niz vrednosti *Manning*-ovog koeficijenta pomoću kojih se definiše funkcija $n = n(Q)$, sa čime se obezbeđuje bolje praćenje stvarnog stanja. Da bi se na ovaj način kalibrisao hidraulički model, potrebno je zadati *Manning*-ove koeficijente hrapavosti za niz karakterističnih proticaja koji se javljaju. Ovo se postiže odabirom nekoliko merodavnih perioda tokom kojih se javlja

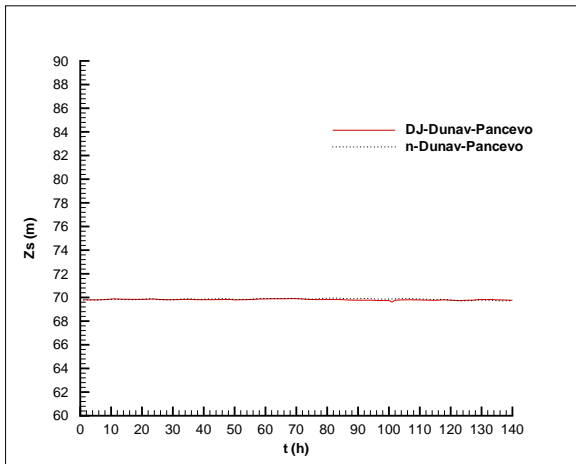
približno ustaljeno stanje. Za svaki od odabranih perioda model treba posebno da se kalibriše. Merodavni proticaji korišćeni za definisanje funkcije *Manning*-ovog koeficijenta i proticaja su prikazani u tabeli 30.

Model je posebno kalibrisan za svaki od šestodnevni hidrograma iz tabele 30, sa čime je dobijena veza *Manning*-ovog koeficijenta i proticaja. Rezultati kalibracije za različite proticaje su prikazani na slikama 34, 35, 36, 37, 38 i 39.

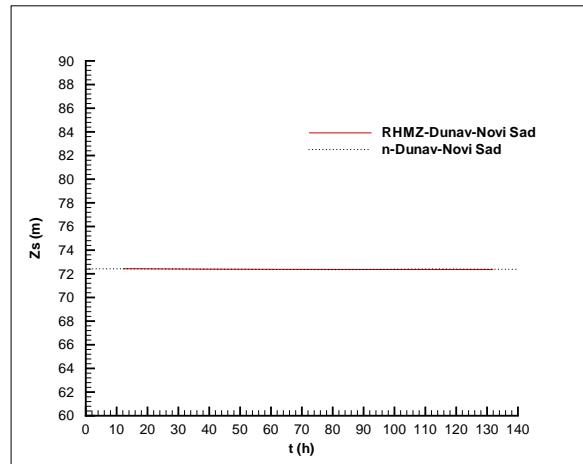
Već na osnovu prikazanog broja slika je jasno da ovakav način kalibracije zahteva izuzetno mnogo rada. Naime, kompletan model je potrebno kalibrisati za svaki od proticaja posebno. Rezultati kalibracije za period od 27.10.2006. do 1.11.2006. godine su prikazani na slici 34. Merene vrednosti nivoa su označene punim linijama, dok su izračunate vrednosti nivoa prikazane isprekidanom linijom (oznaka n u legendi ukazuje na to da je kalibracija rađena menjanjem *Manning*-ovog koeficijenta). Za procese kalibracije i verifikaciju hidrauličkog proračuna su korišćeni podaci koje je obezbedio Republički Hidrometeorološki Zavod Srbije (ova merenja su označena sa RHMZ) i podaci dobijeni od Privrednog Društva „Hidroelektrane Đerdap” D.O.O. (merenja označena sa DJ). Imajući u vidu da se isti postupak ponavlja za šest vremenskih intervala od šest dana (odnosno za šest merodavnih proticaja), prikazani su samo odabrani preseci. Kao kriterijum za određivanje koeficijenta hrapavosti je korišćeno slaganje simuliranih i merenih nivoa. Najveća vrednost *Manning*-ovog koeficijenta hrapavosti iznosi $0.06m^{-1/3}s$ a javlja se na deonici između rkm 964.40 i rkm 974.51. Povećane vrednosti koeficijenta hrapavosti su date i na zakrivljenim deonicama toka gde se usled velikih rastojanja mernih preseka jedino na ovaj način mogu uzeti u obzir meandriranja deonice i postići dobra slaganja merenih i računatih vrednosti. Povećane vrednosti koeficijenta su takođe zadate na deonicama sa lokalnim poremećajima kao što su ostrva, suženja ili nagla proširenja.

Poređenjem merenih vrednosti nivoa sa izračunatim vrednostima se može zaključiti da kalibracija hidrauličkog modela zadavanjem *Manning*-ovog koeficijenta kao funkcije od proticaja daje dobre rezultate. Nedostatak ovakvog pristupa je činjenica da se za definisanje funkcije $n = n(Q)$ model mora posebno kalibrisati za niz reprezentativnih proticaja što ovaj način kalibracije čini izuzetno nepraktičnim za upotrebu. Sa namerom da se pojednostavi postupak kalibracije, razmatran je drugi pristup gde bi se, umesto zadavanja *Manning*-ovog koeficijenta, kao parametar kalibracije zadavala apsolutna hrapavost, koja zajedno sa dubinom ulazi u proračun koeficijenta trenja, prilog F. Ovakav pristup daje mogućnost da se koeficijent koji služi za kalibraciju u proračunu poveže sa dubinom umesto sa proticajem. Prednost se ogleda u tome da se kalibracija radi za proizvoljan usvojen period, a ne za niz perioda. U ovom slučaju je odabran period od 27.05.2006. do 1.06.2006. godine sa srednjim protokom od $Q_{sr} = 7600m^3/s$. Rezultati kalibracije su prikazani na slikama 40. Za prikaz rezultata su odabrani isti preseci kao u prethodnom slučaju, gde su rezultati proračuna označeni sa k . Poređenjem rezultata se primećuje da ovakav pristup takođe daje dobra slaganja merenih i računatih nivoa, uz napomenu da je sam postupak kalibracije mnogo lakši i brži. Radi sigurnosti je proračun ponovljen (sa istim vrednostima parametara kalibracije) za period 14.04.2006. do 19.04.2006. godine kada je srednji proticaj bio mnogo veći, $Q_{sr} = 15600m^3/s$. Rezultati su dati na slici 41. Prikazani rezultati potvrđuju da usvojene vrednosti parametara kalibracije mogu dobro da reprodukuju merenja i u periodima sa većim proticajima.

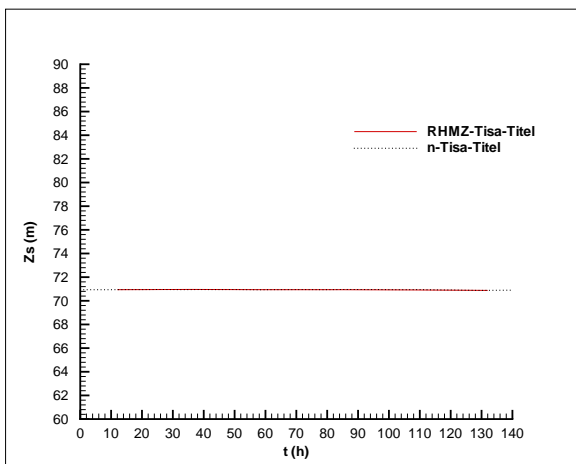
Imajući u vidu da je kalibracija hidrauličkog modela zadavanjem apsolutne hrapavosti mnogo jednostavnija i daje jednako dobre rezultate kao kalibracija zadavanjem *Manning*-ovog koeficijenta, u daljem radu je primenjen ovaj tip kalibracije. Ostali preseci korišćeni u procesu kalibracije se nalaze u prilogu H.



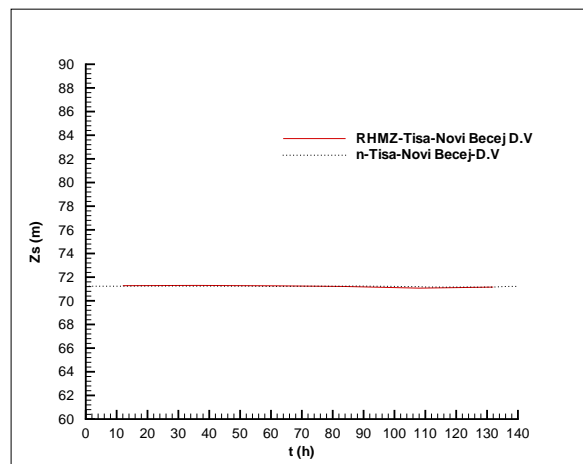
(a) Dunav - Pančevo



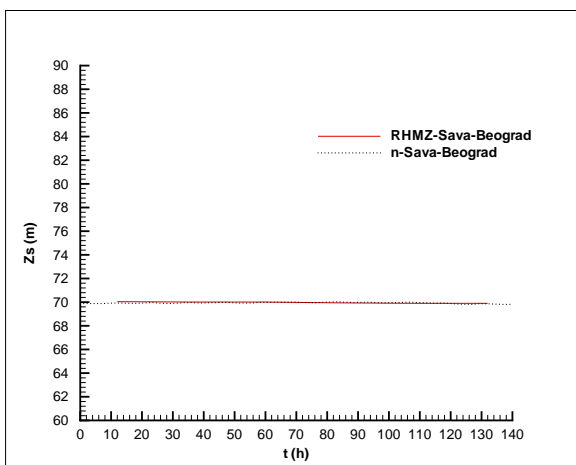
(b) Dunav - Novi Sad



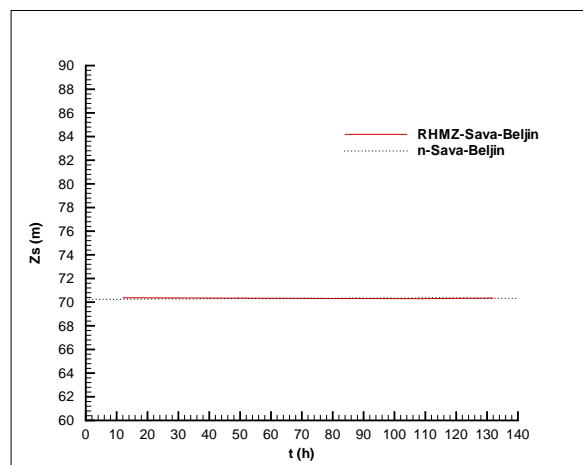
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda

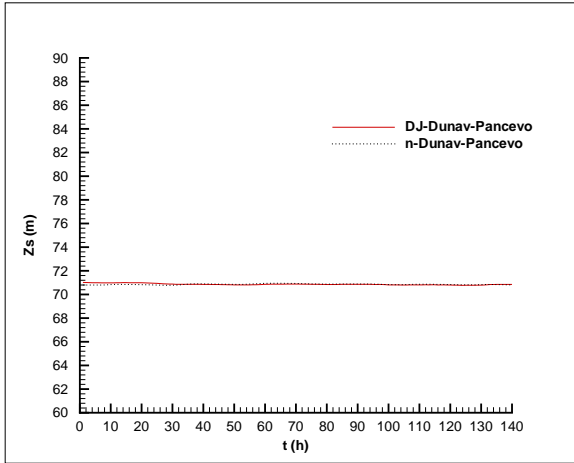


(e) Sava - Beograd

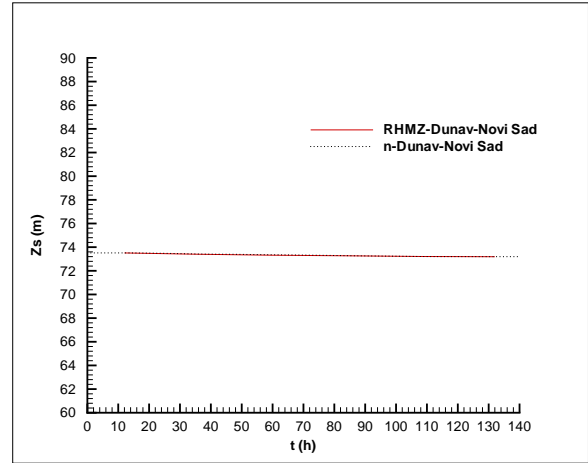


(f) Sava - Beljin

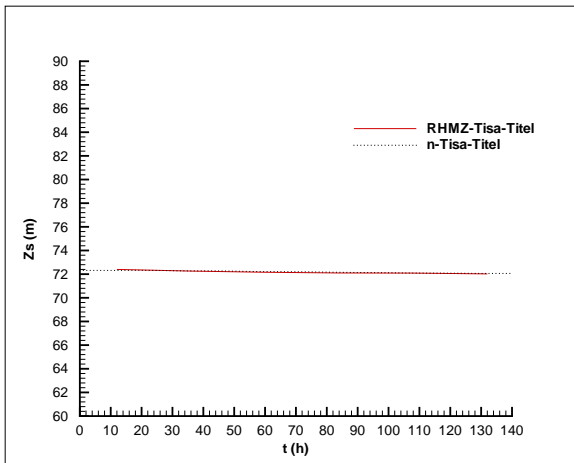
Slika 34: Kalibracija modela zadavanjem Manning-ovog koeficijenta za $Q_{sr} = 2400\text{m}^3/\text{s}$



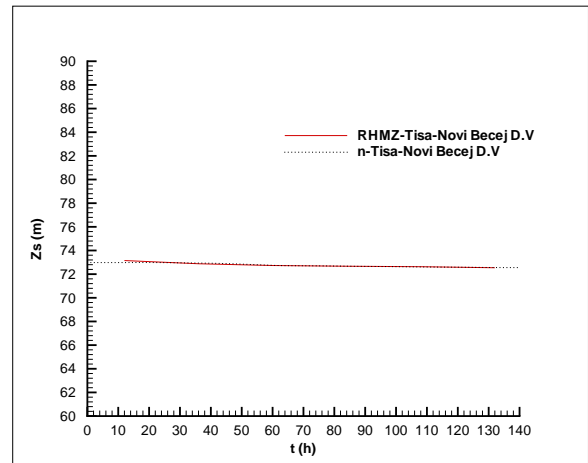
(a) Dunav - Pančevo



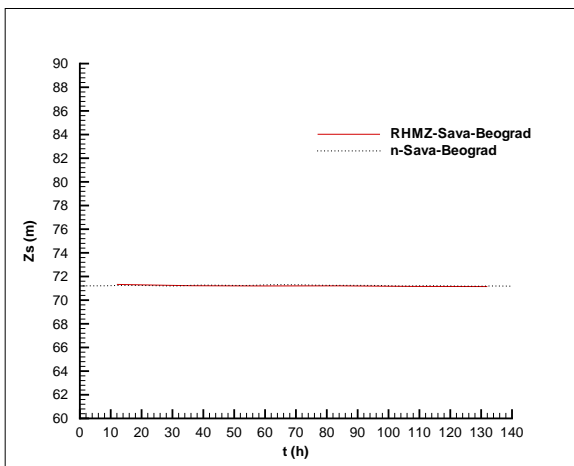
(b) Dunav - Novi Sad



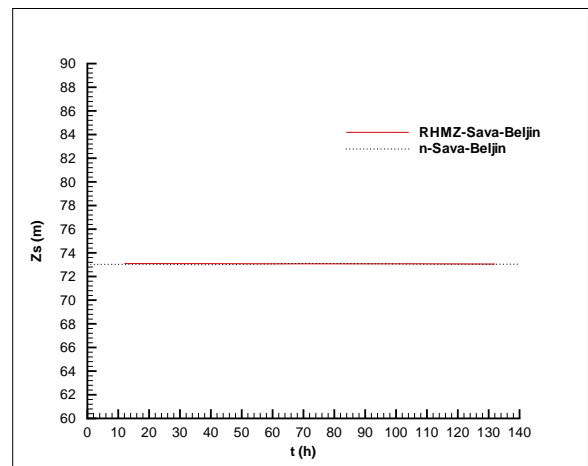
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda

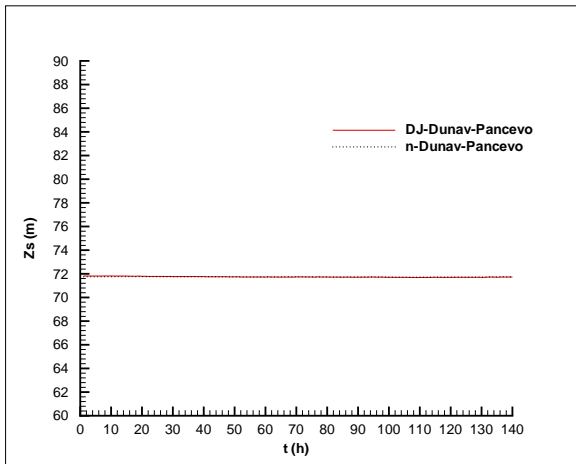


(e) Sava - Beograd

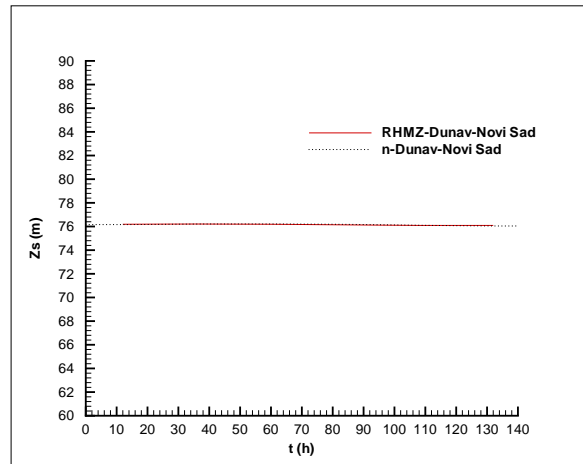


(f) Sava - Beljin

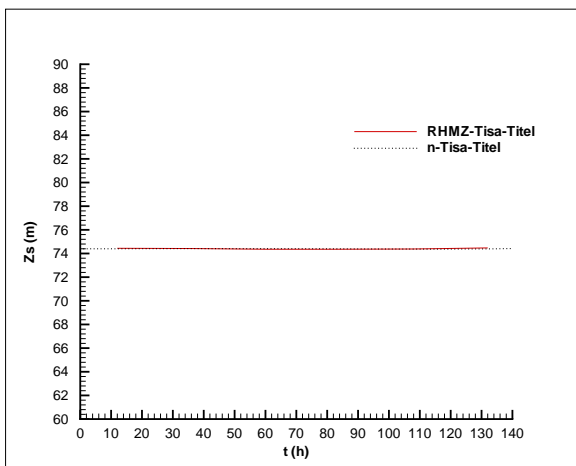
Slika 35: Kalibracija modela zadavanjem Manning-ovog koeficijenta za $Q_{sr} = 5000 \text{ m}^3/\text{s}$



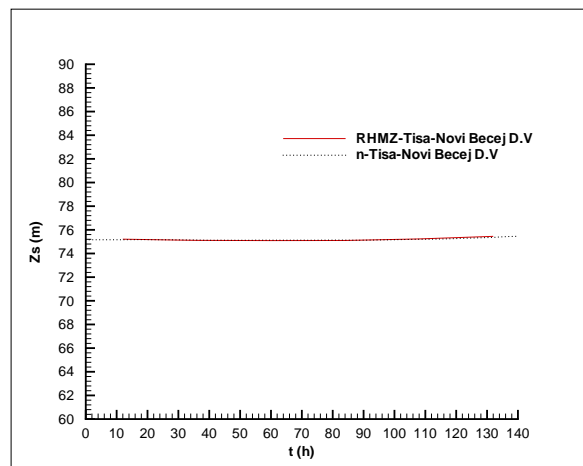
(a) Dunav - Pančevo



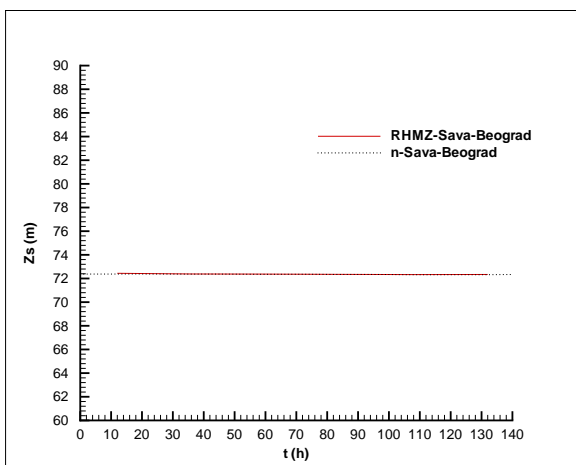
(b) Dunav - Novi Sad



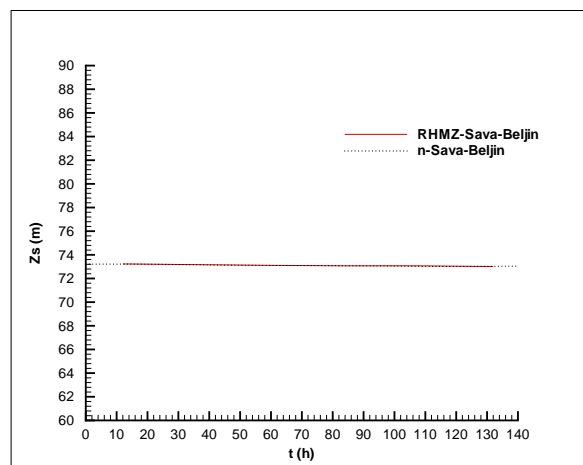
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda

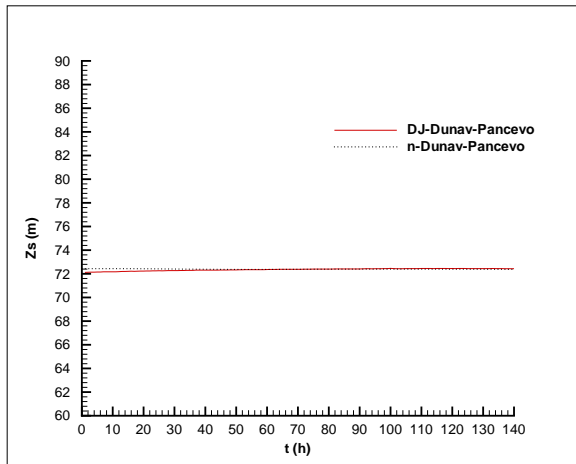


(e) Sava - Beograd

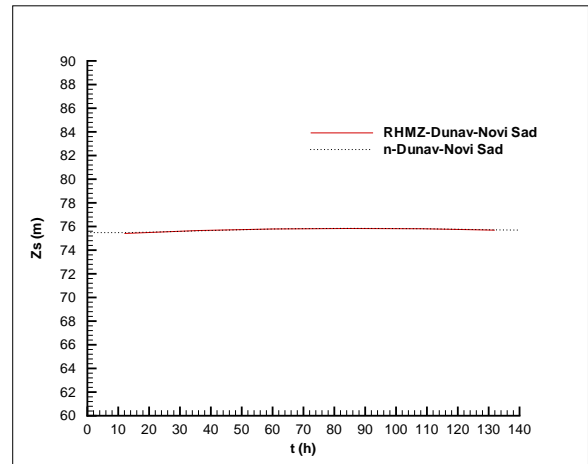


(f) Sava - Beljin

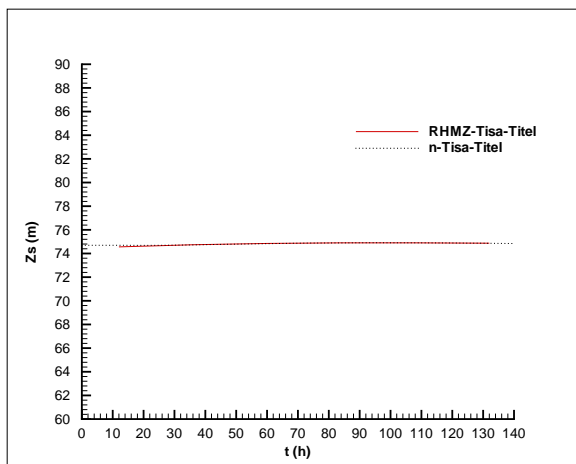
Slika 36: Kalibracija modela zadavanjem Manning-ovog koeficijenta za $Q_{sr} = 7600\text{m}^3/\text{s}$



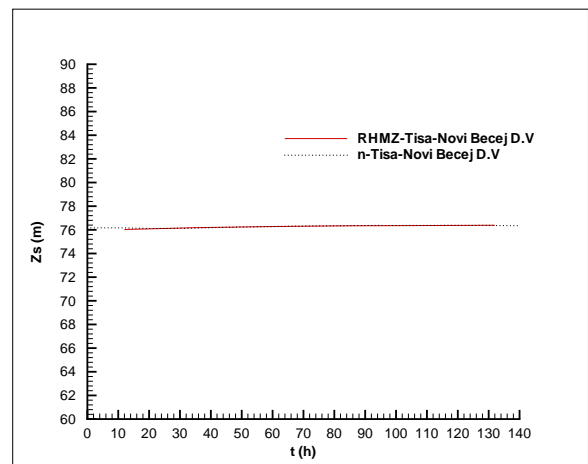
(a) Dunav - Pančevo



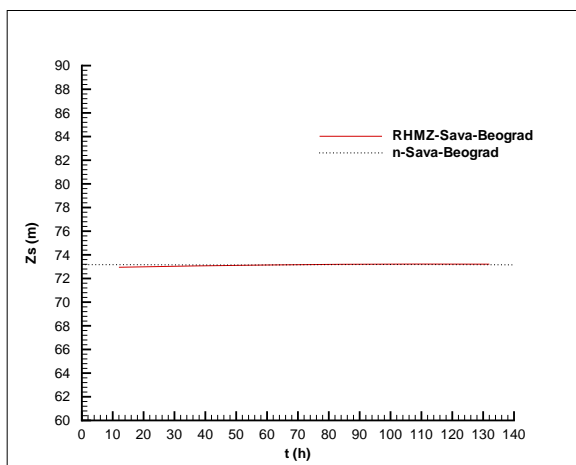
(b) Dunav - Novi Sad



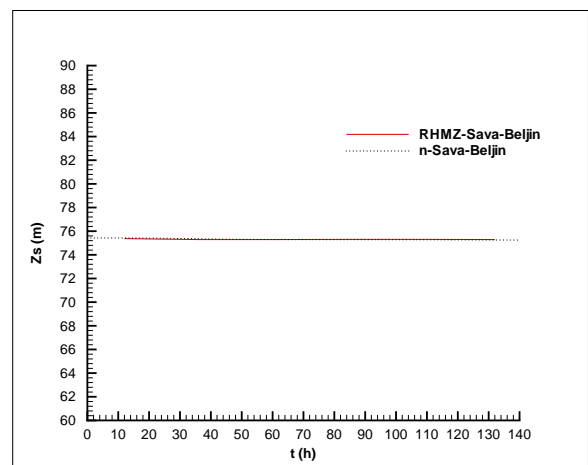
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda

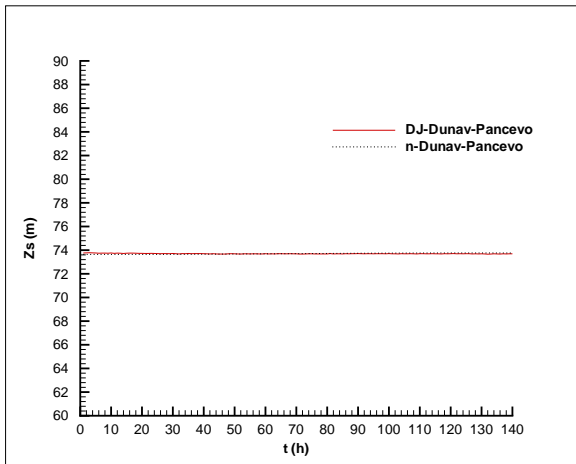


(e) Sava - Beograd

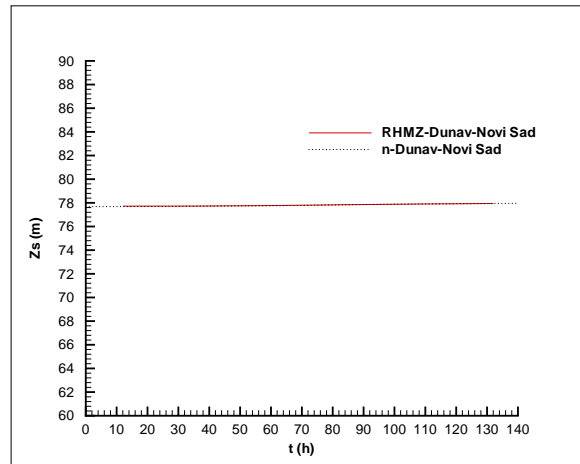


(f) Sava - Beljin

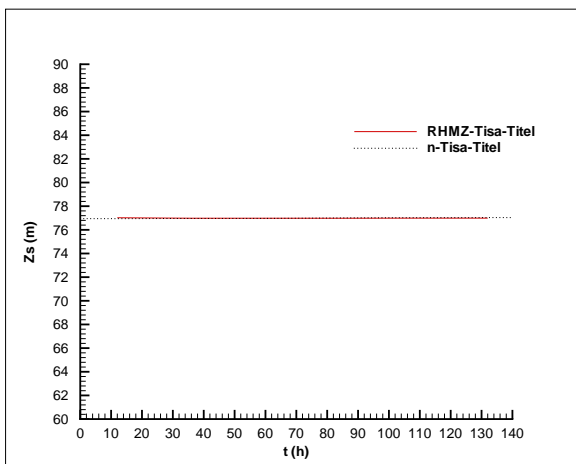
Slika 37: Kalibracija modela zadavanjem Manning-ovog koeficijenta za $Q_{sr} = 10500 \text{ m}^3/\text{s}$



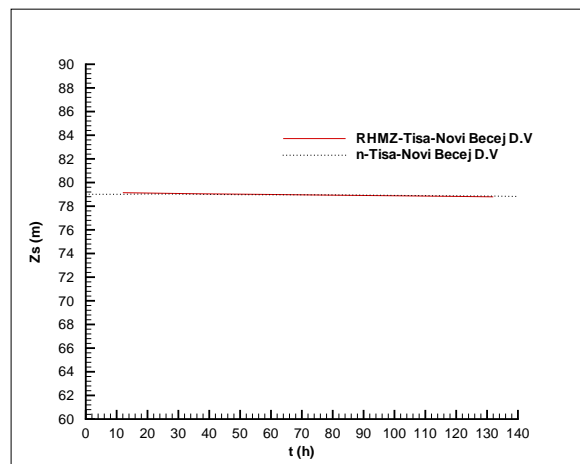
(a) Dunav - Pančevo



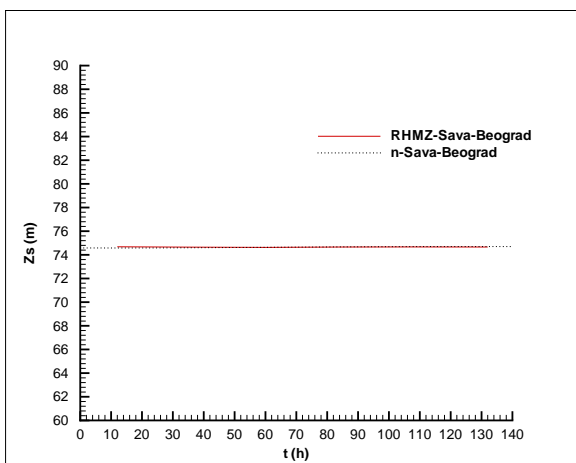
(b) Dunav - Novi Sad



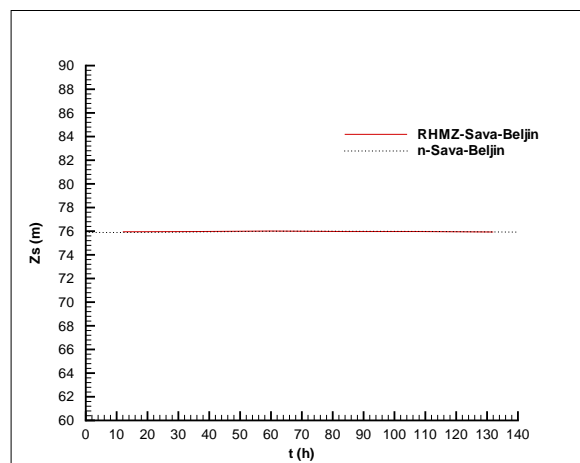
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda

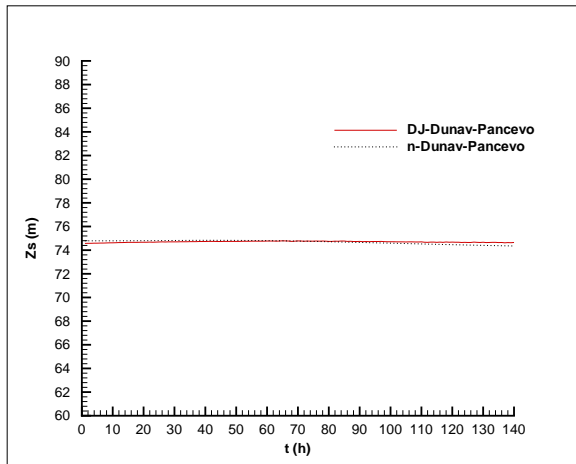


(e) Sava - Beograd

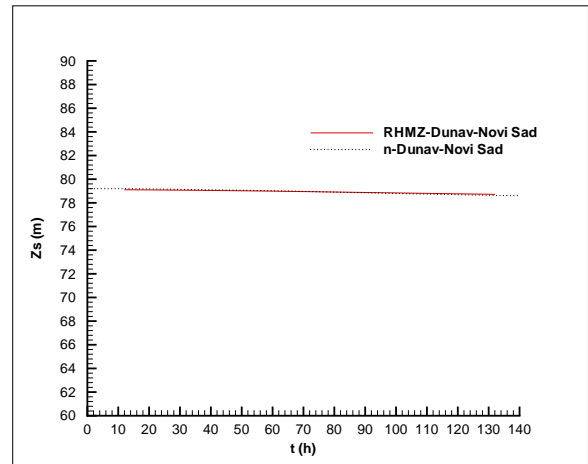


(f) Sava - Beljin

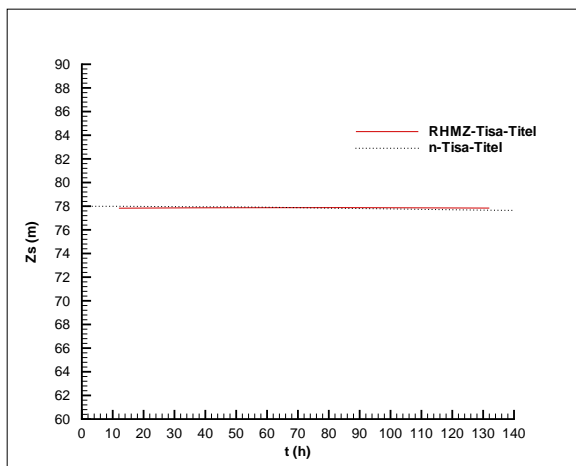
Slika 38: Kalibracija modela zadavanjem Manning-ovog koeficijenta za $Q_{sr} = 12800\text{m}^3/\text{s}$



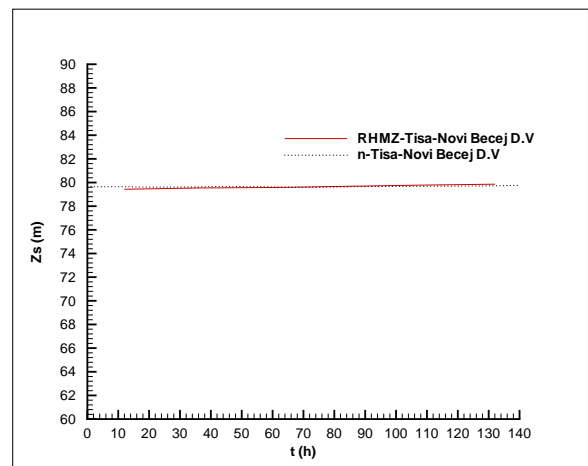
(a) Dunav - Pančevo



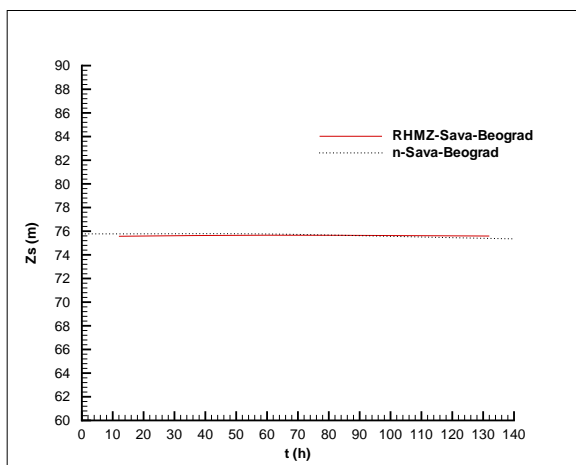
(b) Dunav - Novi Sad



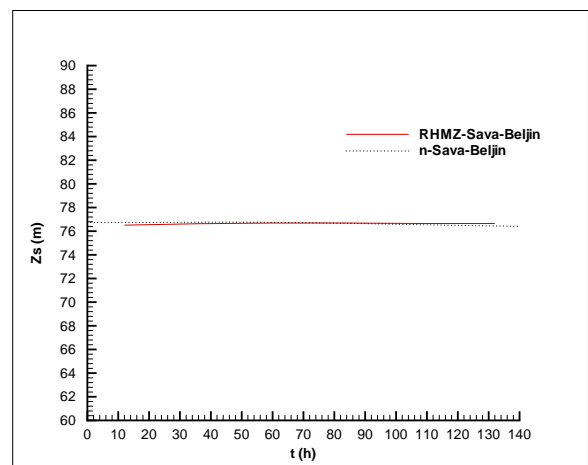
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda

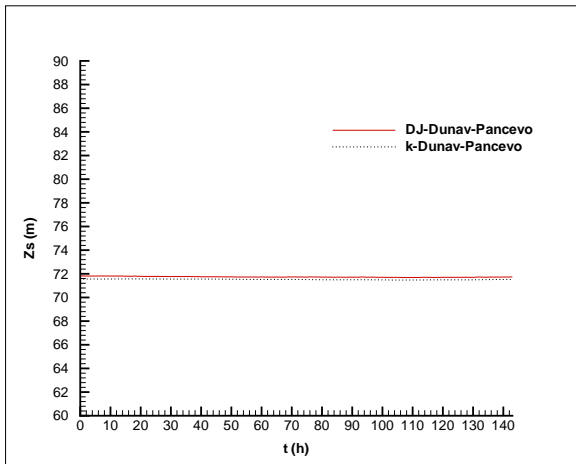


(e) Sava - Beograd

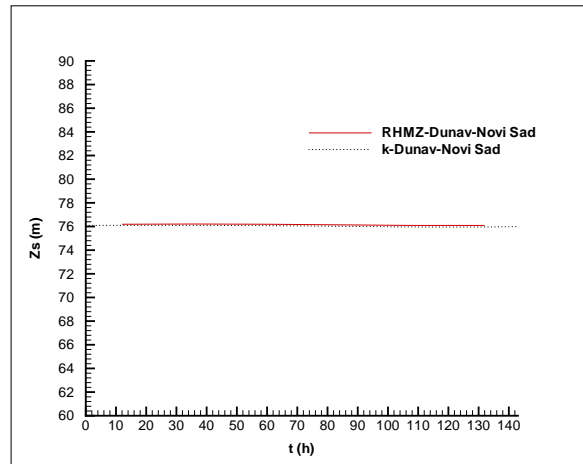


(f) Sava - Beljin

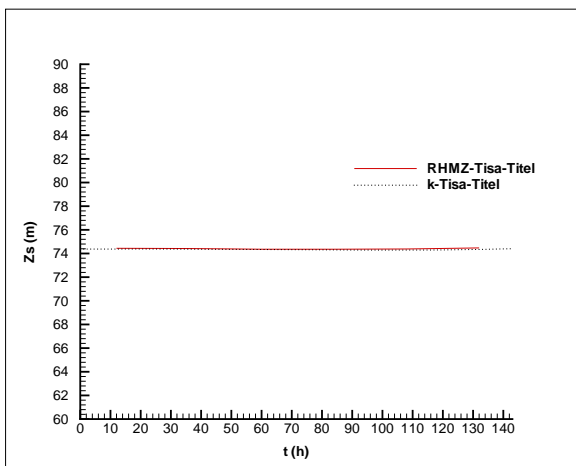
Slika 39: Kalibracija modela zadavanjem Manning-ovog koeficijenta za $Q_{sr} = 15600 \text{ m}^3/\text{s}$



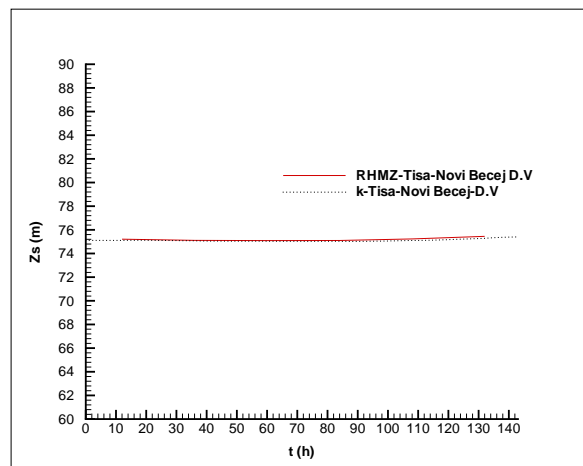
(a) Dunav - Pančevo



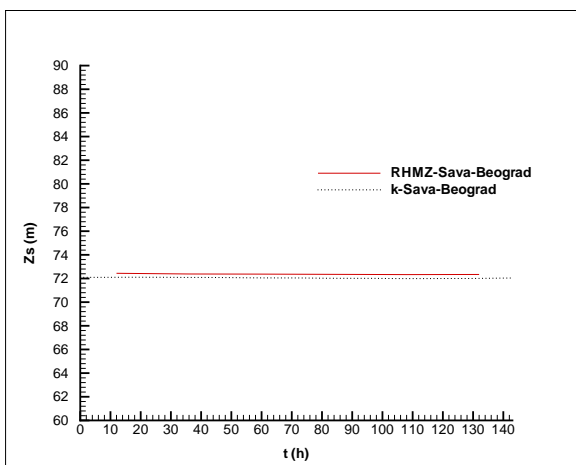
(b) Dunav - Novi Sad



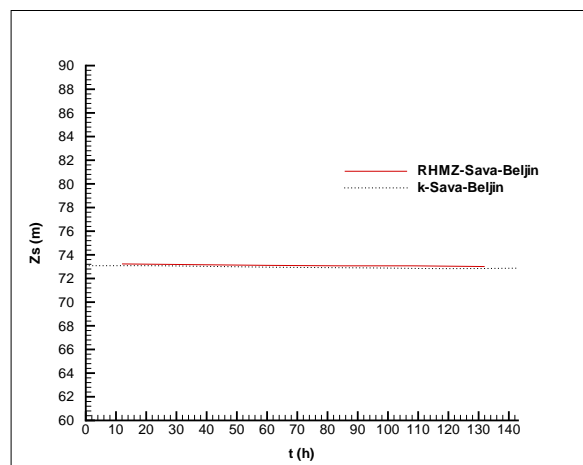
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda

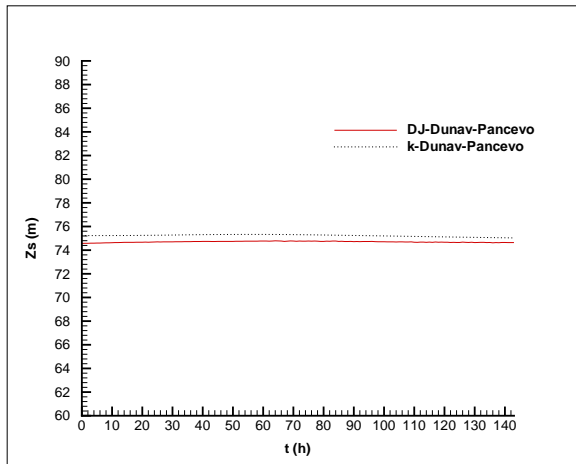


(e) Sava - Beograd

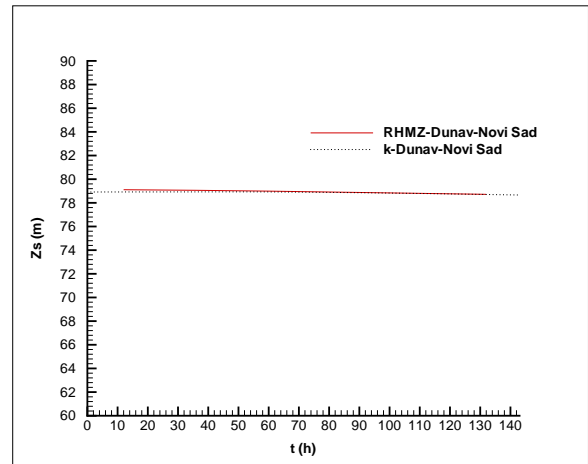


(f) Sava - Beljin

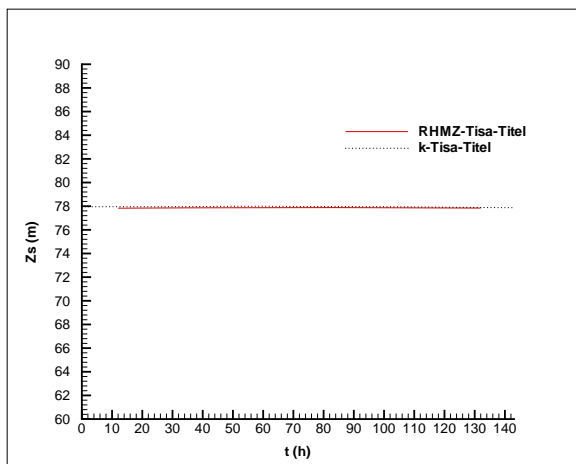
Slika 40: Kalibracija modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 7600 \text{ m}^3/\text{s}$



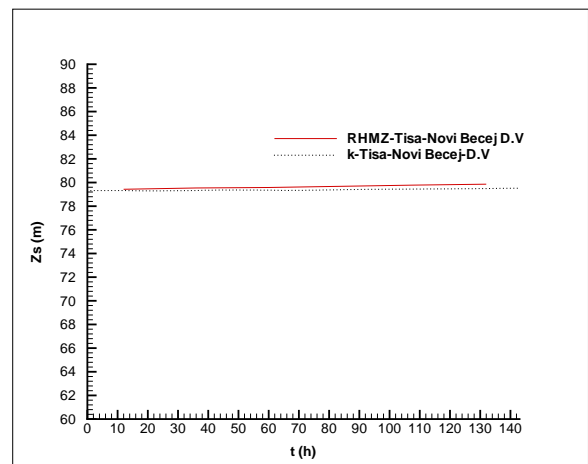
(a) Dunav - Pančevo



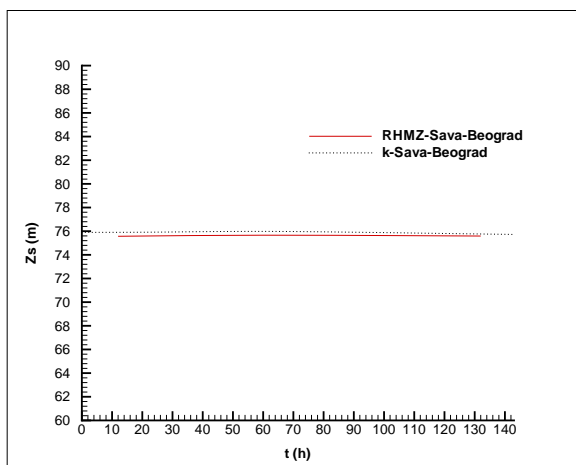
(b) Dunav - Novi Sad



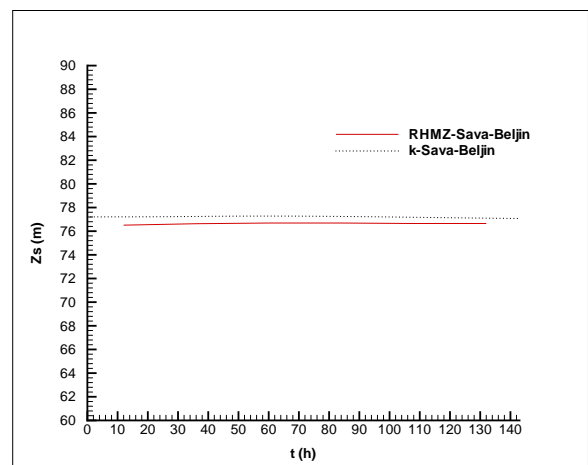
(c) Tisa - Titel



(d) Tisa - Novi Bečej donja voda



(e) Sava - Beograd



(f) Sava - Beljin

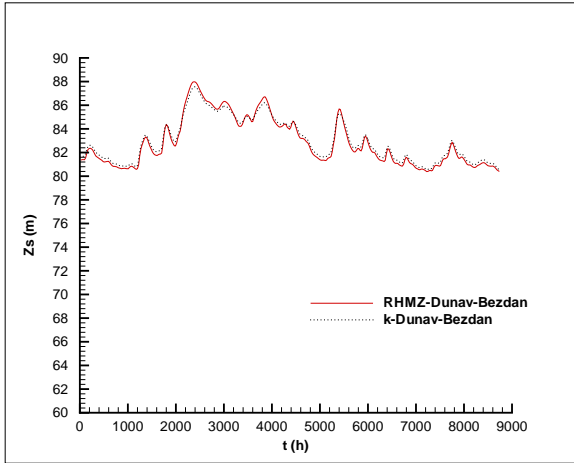
Slika 41: Provera kalibracije modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 15600\text{m}^3/\text{s}$

8.2. Verifikacija hidrauličkog modela

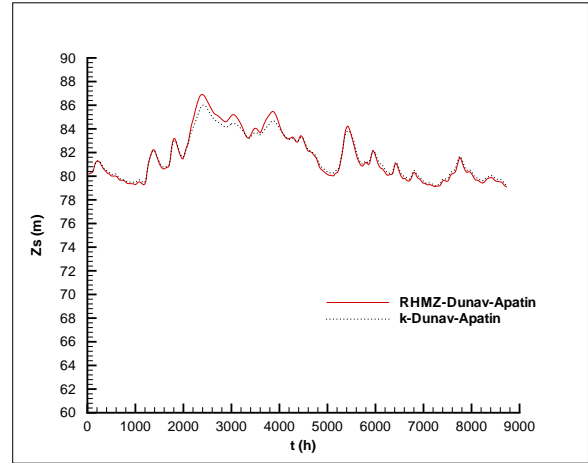
Verifikacija hidrauličkog modela je rađena puštanjem simulacije i poređenjem rezultata za celu 2006. godinu. Računski korak po vremenu je iznosio 15 minuta. Za proveru rezultata su korišćena postojeća merenja nivoa. Granični uslovi su isti kao kod procesa kalibracije, na uzvodnim granicama su zadati proticaji za 2006. godinu (prvih 365 dana sa slike 51), a na nizvodnoj granici je zadat nivogram (prvih 365 dana sa slike 52). Rezultati verifikacije za 2006. godinu su prikazani na slikama 42, 43, 45, 46 i 47. Kako je uzvodni granični uslov za hidraulički proračun poznat hidrogram na svim granicama, prikazani nivoi su rezultat proračuna u ovim presecima.

Na slici 42 su prikazani rezultati na Dunavu za preseke kod Bezdana, Apatina, Bogojeva, Bačke Palanke, Novog Sada i Slankamena. Upoređivanjem rezultata merenih i računatih nivoa se primećuje da razvijen hidraulički model može kvalitetno da reprodukuje ne samo tendenciju merenja nego i same vrednosti. Najveća odstupanja su primećena u preseku kod Novog Sada u periodu oko $t = 2400h$ i $t = 3800h$. Slike 43 prikazuju rezultate za preseke na Dunavu u blizini Zemuna, Pančeva, Smedereva, Nere, Golubca i Dobre. Analizom prikazanih rezultata se može reći da je slaganje rezultata proračuna i merenih vrednosti zadovoljavajuće. Približavanjem nizvodnom graničnom uslovu može da se primeti sve više izražen uticaj rada hidroelektrane Đerdap 1 na nivoe, koji se manifestuje oscilacijama kote slobodne površine vode tokom vremena. Da bi se pomenute oscilacije jasnije prikazale, rezultati proračuna i merenja su prikazani za preseke kod Dobre i Donjeg Milanovca u većoj razmeri (prikazan je samo interval od ukupno modelisanog vremenskog perioda) na slikama 44. Na slikama 45 su dati rezultati za preseke na Dunavu kod Donjeg Milanovca i na samoj nizvodnoj granici. Za presek kod Donjeg Milanovca su rezultati upoređeni sa DJ merenjima, slika 45 (a), odnosno sa RHMZ merenjima, slika 45 (b). Analizom datih rezultata se primećuje nelogičnost, jer dok je slaganje sa DJ merenjima sasvim dobro, u istom preseku su jasno vidljiva odstupanja rezultata u odnosu na RHMZ merenja. Ova odstupanja su posledica toga što su DJ podaci, kao i rezultati modela dati u satnim vrednostima, a merenja RHMZ-a su dnevne vrednosti nivoa koje ne mogu tako kvalitetno da prate nagle promene u blizini brane. Rezultati za preseke na Tisi su prikazani na slikama 46. I za ove preseke se može reći da je slaganje merenih i računatih vrednosti dobro, sa čime je ujedno i potvrđena mogućnost razvijenog modela da modeliše ulivanje pritoke (Tise) u glavni tok (Dunav). Pored toga treba napomenuti da slike 46 (c) i (b) redom prikazuju presek kod Novog Bečejja neposredno uzvodno i nizvodno od brane. Brana je modelisana kao poznata promena nivoa tokom vremena iz koje je računat proticaj pa je primenom jednačine kontinuiteta na deonicu sa branom omogućen dalji proračun. To znači da nivogram na slici 46 (c) predstavlja zadat unutrašnji granični uslov, dok slika 46 (b) prikazuje računate i merene nivoe u preseku nizvodno od brane. Na osnovu dobrog slaganja merenih i računatih vrednosti se može zaključiti da je prikazan unutrašnji granični uslov ispravno modelisan. Rezultati simulacija za Savu su prikazani na slikama 47.

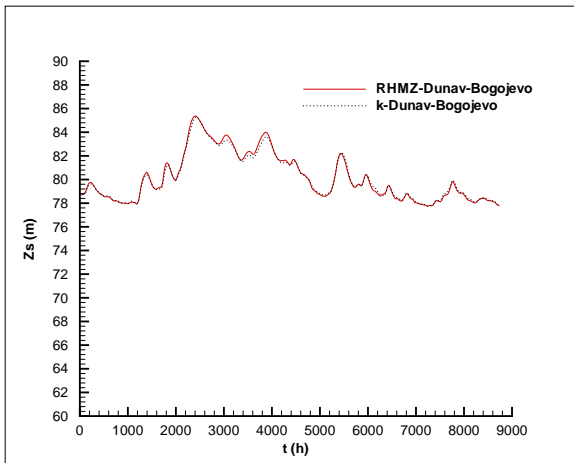
Uopšteno se, na osnovu slaganja rezultata proračuna i merenih vrednosti nivoa slobodne površine vode, može da se zaključi da su usvojene vrednosti apsolutne hrapavosti odgovarajuće. Rezultati potvrđuju verodostojnost hidrauličkog modela i njegovu sposobnost da pouzdano reprodukuje, odnosno predvidi, strujnu sliku modelisane oblasti. Kao konačna verifikacija hidrauličkog modela su poslužili rezultati dugoročne simulacije prikazani u poglavlju 9. Pošto su uspešno sprovedeni procesi kalibracije i verifikacije hidrauličkog dela modela, sledeći korak je kalibracija modela za proračun transporta nanosa i deformacije korita.



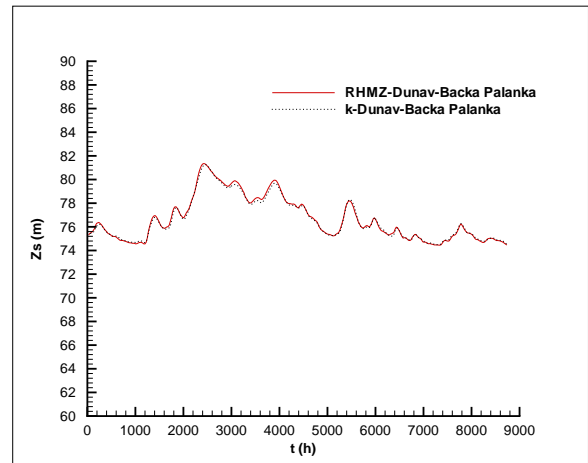
(a) Dunav - Bezdán



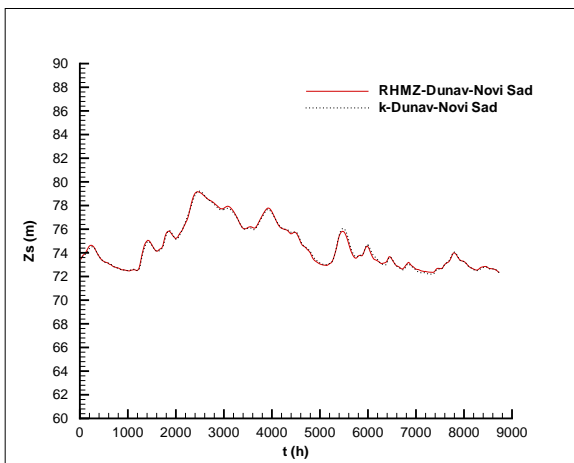
(b) Dunav - Apatin



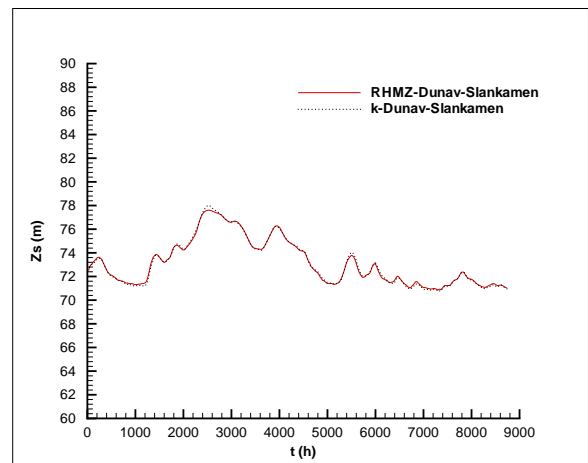
(c) Dunav - Bogojevo



(d) Dunav - Bačka Palanka

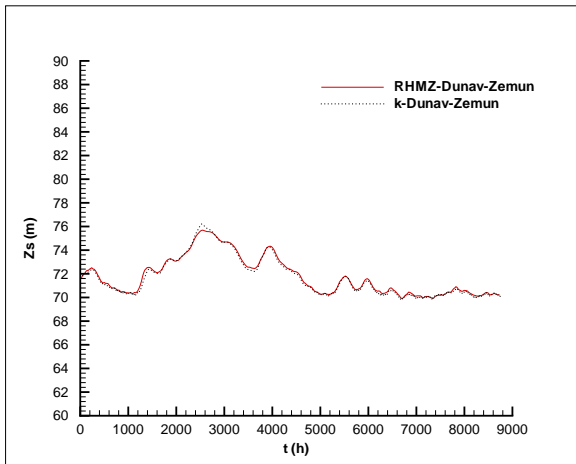


(e) Dunav - Novi Sad

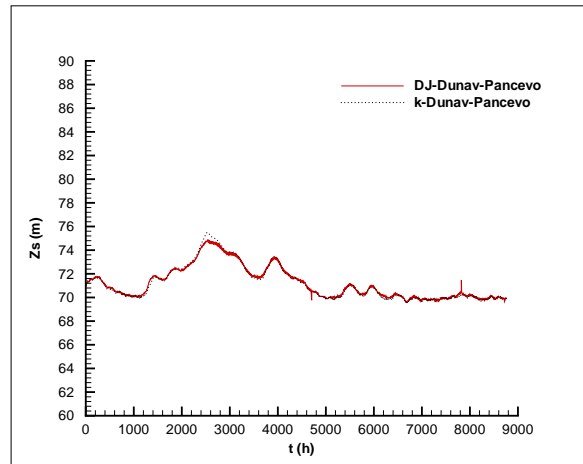


(f) Dunav - Slankamen

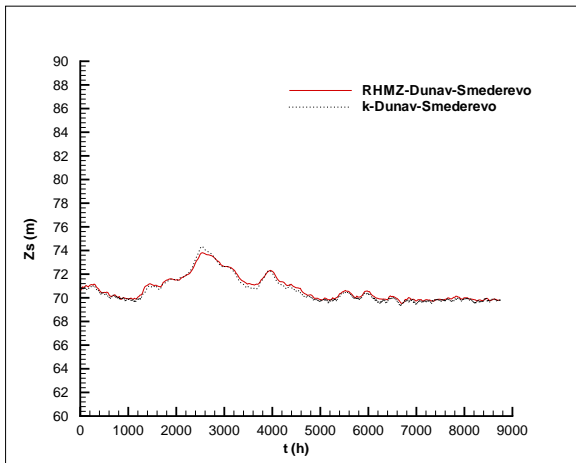
Slika 42: Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. godinu, 1. deo



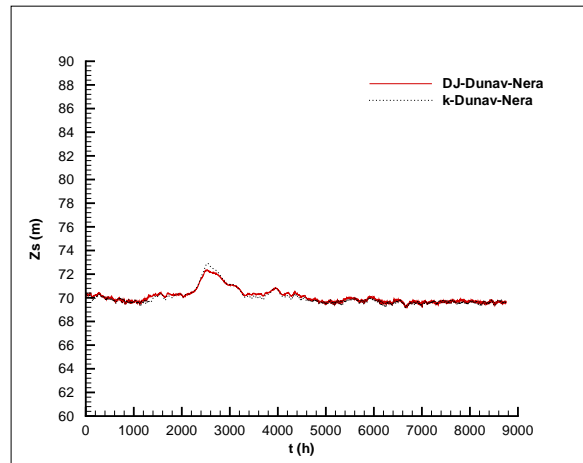
(a) Dunav - Zemun



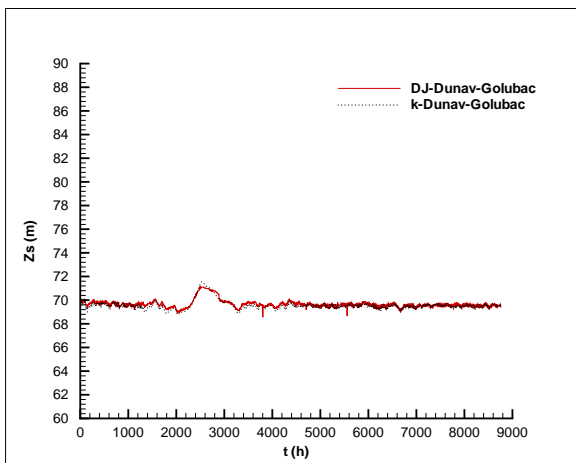
(b) Dunav - Pančevo



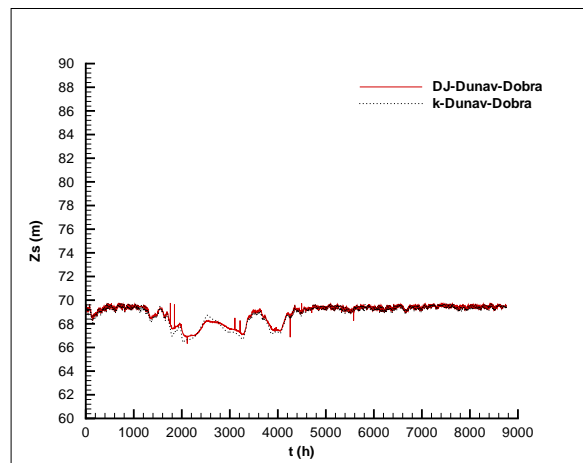
(c) Dunav - Smederevo



(d) Dunav - Nera

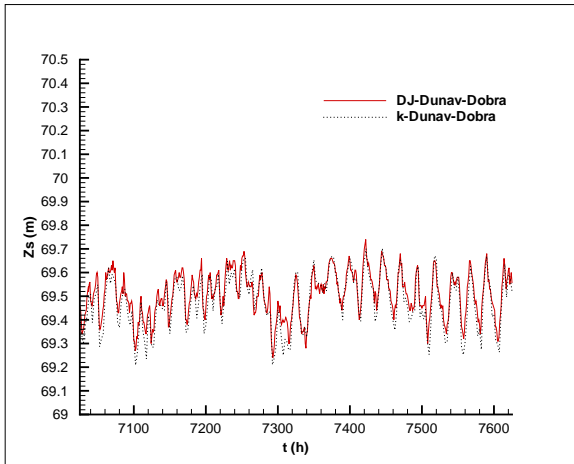


(e) Dunav - Golubac

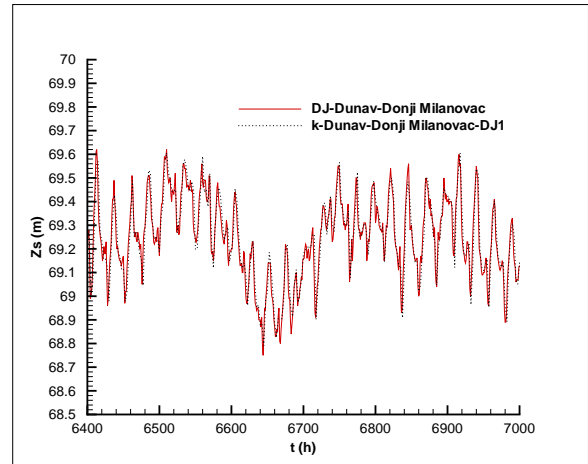


(f) Dunav - Dobra

Slika 43: Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. godinu, 2. deo

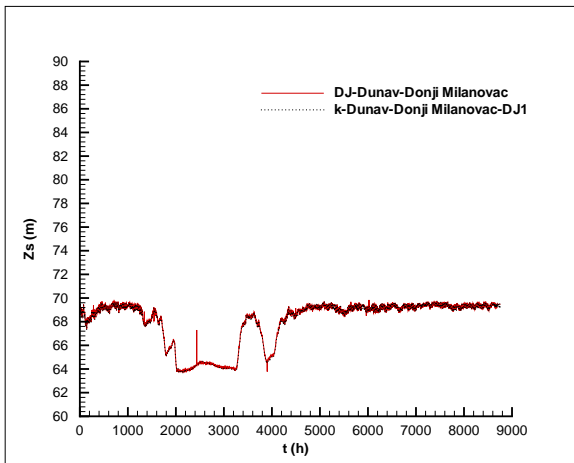


(a) Dunav - Dobra - DJ

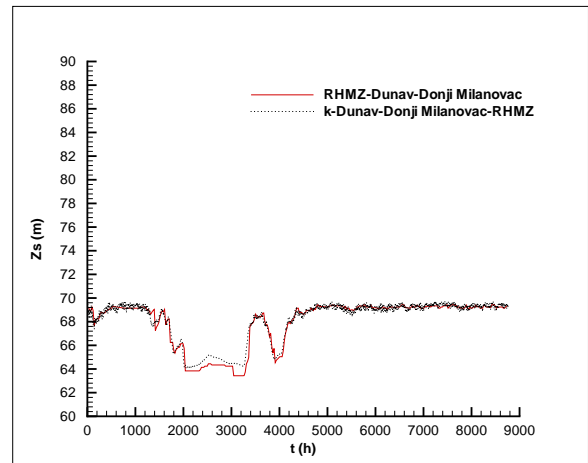


(b) Dunav - Donji Milanovac

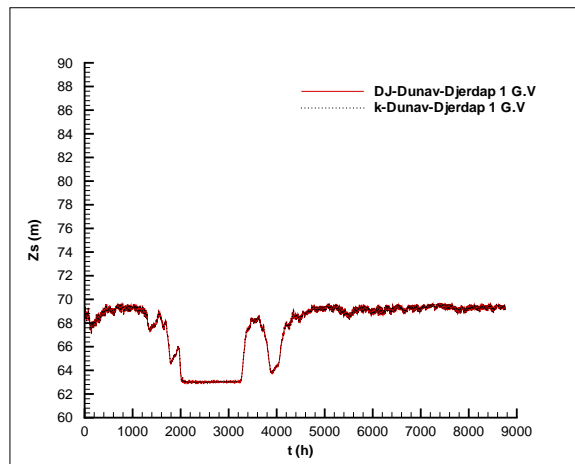
Slika 44: Uticaj HE Đerdap na oscilacije nivoa



(a) Dunav - Donji Milanovac - DJ

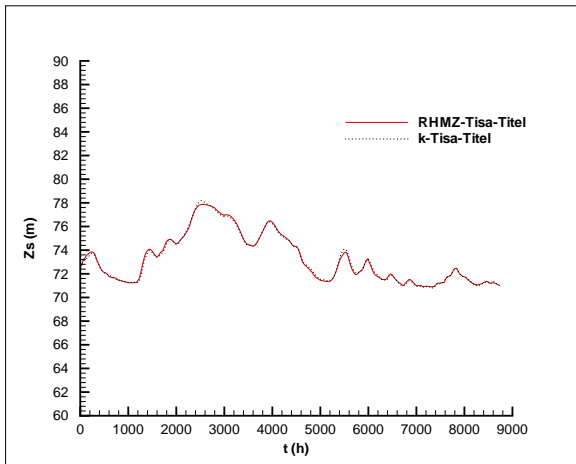


(b) Dunav - Donji Milanovac - RHMZ

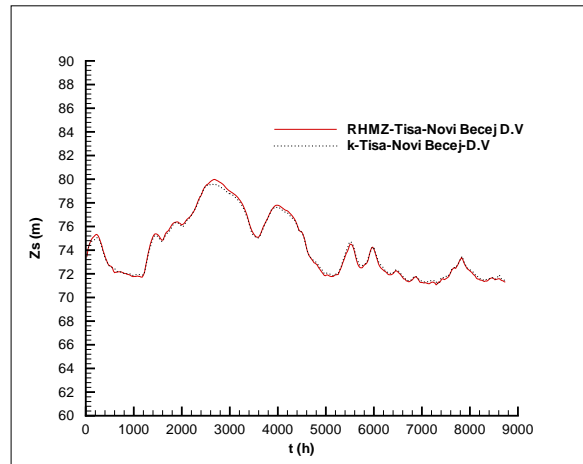


(c) Dunav - Đerdap 1 gornja voda

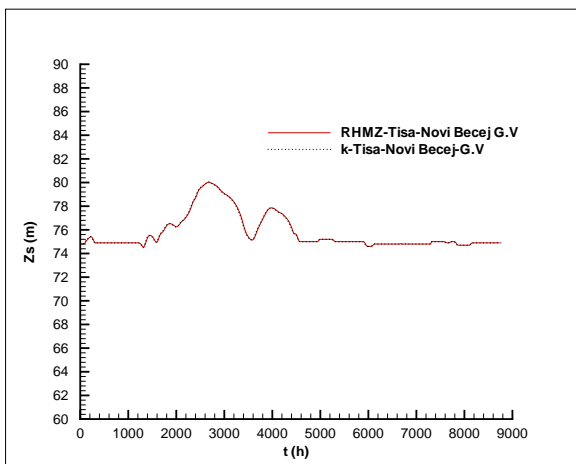
Slika 45: Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. godinu, 3. deo



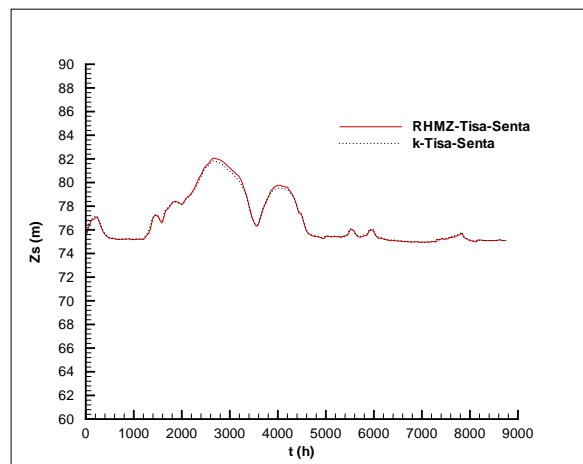
(a) Tisa - Titel



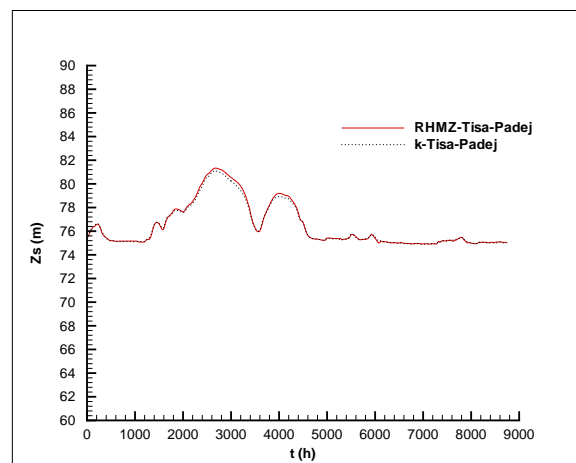
(b) Tisa - Novi Bečej donja voda



(c) Tisa - Novi Bečej gornja voda

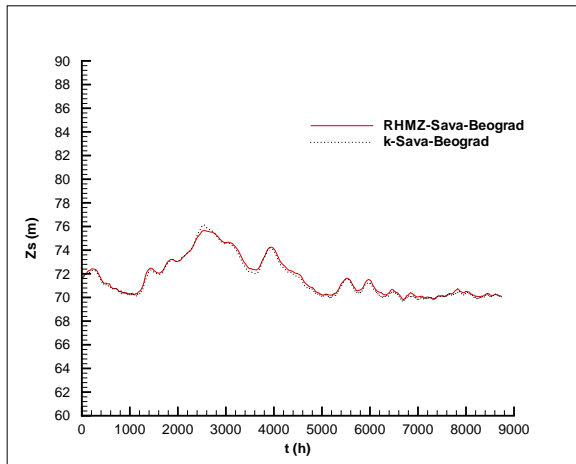


(d) Tisa - Senta

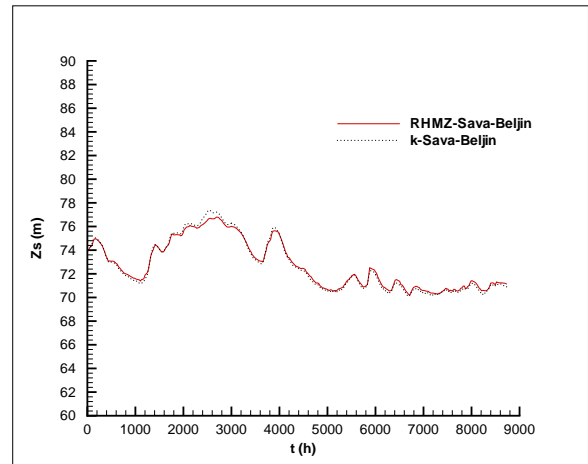


(e) Tisa - Padej

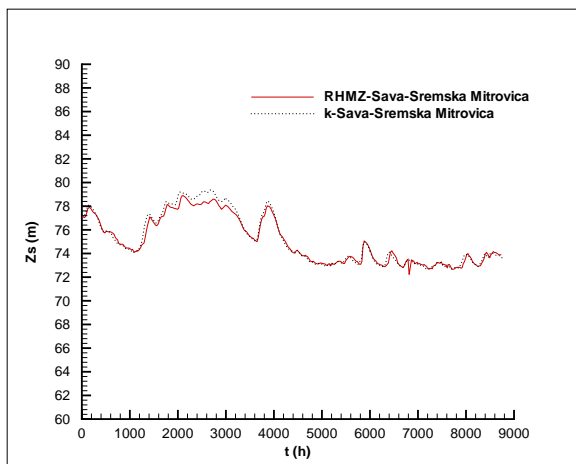
Slika 46: Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. godinu, 4. deo



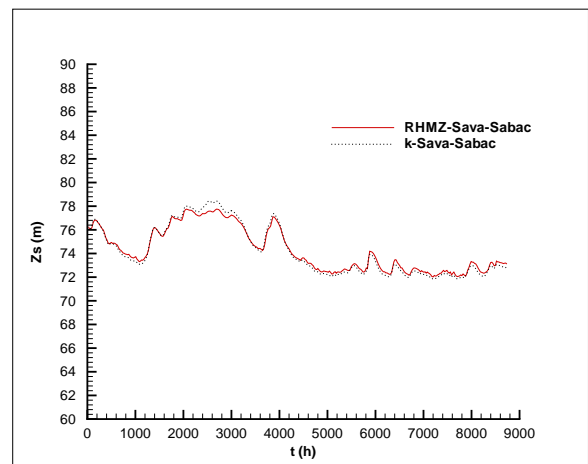
(a) Sava - Beograd



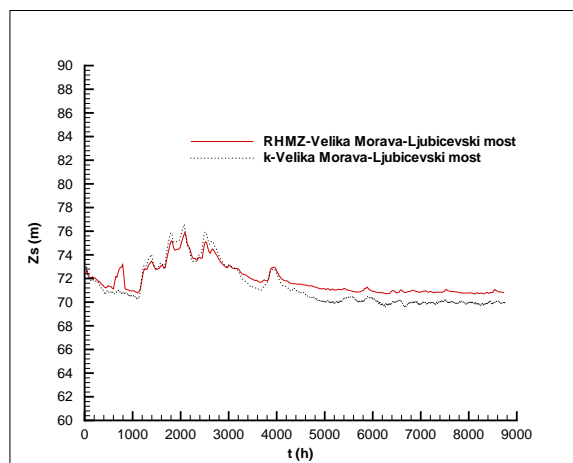
(b) Sava - Beljin



(c) Sava - Sremska Mitrovica



(d) Sava - Šabac



(e) Velika Morava - Ljubicevski most

Slika 47: Verifikacija hidrauličkog modela - rezultati simulacije za 2006. godinu, 5. deo

8.3. Kalibracija modela transporta nanosa i deformacije korita

Modelisanje transporta nanosa i deformacije korita granične uslove zahteva samo na uzvodnim granicama modela. Pregledom podataka u poglavlju 7.1.3. je pokazano da za prvu godinu simulacije (2006. godina) na svim uzvodnim granicama postoje merene vrednosti koncentracija suspendovanog nanosa. Na granicama na Dunavu (Bezdan), Tisi (Senta) i Savi (Sremska Mitrovica) postoje samo merenja pronosa nanosa poreklom od RHMZ-a, dok na Velikoj Moravi (Ljubićevski most) postoje merenja pronosa nanosa (RHMZ podaci) i srednje profilske koncentracije (JC podaci). Imajući u vidu da merenja RHMZ-a postoje još samo za 2007. godinu, odlučeno je da se ova merenja koriste na granicama na kojima nema drugog izbora (Dunav, Tisa i Sava). Pošto na Velikoj Moravi za sve godine postoje JC merenja, onda su za granični uslov na ovoj granici tokom svih pet godina korišćena merenja JC. Na ostalim granicama su granični uslovi dopunjeni uspostavljanjem zavisnosti pronosa nanosa i proticaja koristeći RHMZ merenja. Za kalibraciju modela transporta je usvojen period od godinu dana (01.01.-31.12.2006. godine) kako bi se što bolje uhvatila tendencija kretanja nanosa. Granični uslovi za model transporta nanosa i deformacije korita su prikazani na slici 50, gde je za proces kalibracije korišćeno samo prvih 365 dana podataka.

Pregledom raspoloživih merenja je pokazano da je broj kontrolnih preseka za kalibraciju modela transporta nanosa i deformacije korita mali, 15, 16, 17 i 22. Kao kontrolni preseki za 2006. godinu na Dunavu postoje merenja u Novom Sadu, Starim Banovcima, Smederevu i na brani HE Đerdap 1, gde su sva merenja u kontrolnim presecima poreklom iz Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi” A.D. U 2006. godini na Tisi merenja postoje samo u Titelu, na Savi u Beogradu i oba su poreklom JC merenja, a na Velikoj Moravi nema merenja koja mogu da posluže za kontrolu tokom kalibracije. Što se tiče manjih pritoka, Pek, Nera, Porečka, Mlava i Tamiš, na njima nema merenja nanosa za definisanje graničnih uslova niti za kontrolu kalibracije zbog čega je koncentracija suspendovanog nanosa koja preko ovih pritoka dolazi u sistem zanemarena.

Kod hidrauličkog modela je zbog izrazitih oscilacija usled rada hidroelektrane na nizvodnoj granici modela usvojen vremenski korak od 15 minuta. U ranijem izlaganju je napomenuto da se za razliku od hidrauličkog modela procesi transporta nanosa i deformacije korita odvijaju sporije. Osim toga, ovaj deo modela nije toliko osetljiv i dozvoljava primenu većeg vremenskog koraka. Zbog toga, i sa namerom da se trajanje rada računara svede na što kraći period, za sve proračune transporta nanosa i deformacije korita je usvojen vremenski korak od 30 minuta. Kalibracija ovog dela modela je rađena zadavanjem vrednosti rastojanja na kojem se određuje koncentracija merodavna za proračun fluksa uvlačenja zrna nanosa sa dna u suspenziju odnosno fluksa deponovanja. Potseća se da zbirno dejstvo navedena dva mehanizma daje član izvora suspendovanog nanosa koji predstavlja primarni mehanizam razmene između raznih vidova kretanja nanosa, čime se i opravdava navedeni način kalibracije razvijenog modela transporta nanosa i deformacije korita. Dok je rastojanje za proračun koncentracije merodavne za deponovanje isto za sve frakcije nanosa, rastojanje za proračun merodavne koncentracije za vertikalni fluks uvlačenja nanosa u suspenziju se zadavalo posebno za sve modelisane frakcije. Prilikom modelisanja je nanosna mešavina podeljena na deset granulometrijskih intervala (frakcija). Srednji prečnici zrna za usvojene frakcije su prikazani u tabeli 31. Mada merenja koncentracije suspendovanog nanosa nisu data po frakcijama, godišnji izveštaji Damjanović i Matović (2009), Damjanović i Matović (2010), Damjanović i Matović (2011) i Damjanović i Matović (2012) sadrže srednje krive granulometrijskog sastava za pojedine preseke pomoću kojih su merenja na granicama rastavljena na frakcije. Koristeći iste

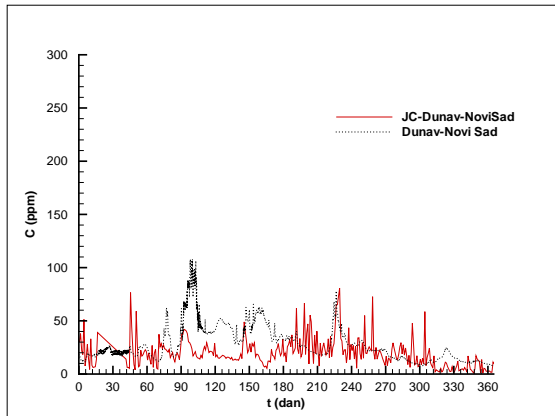
krive je formulisan i početni uslov za nanos na dnu. Međutim, kako nema merenja suspendovanog nanosa po frakcijama, kalibracija i verifikacija modela transporta nanosa i deformacije korita su sprovedeni za usvojenih deset frakcija, ali su rezultati prikazani kao suma koncentracija suspendovanog nanosa po svim frakcijama, jer samo kao takvi mogu da se uporede sa merenjima.

frakcija	otvor sita (<i>mm</i>)	srednje zrno (<i>mm</i>)
1	0.01 - 0.001	0.003
2	0.06 - 0.01	0.024
3	0.1 - 0.06	0.077
4	0.2 - 0.1	0.141
5	0.6 - 0.2	0.346
6	1 - 0.6	0.775
7	2 - 1	1.414
8	6 - 2	3.464
9	10 - 6	7.746
10	30 - 10	17.321

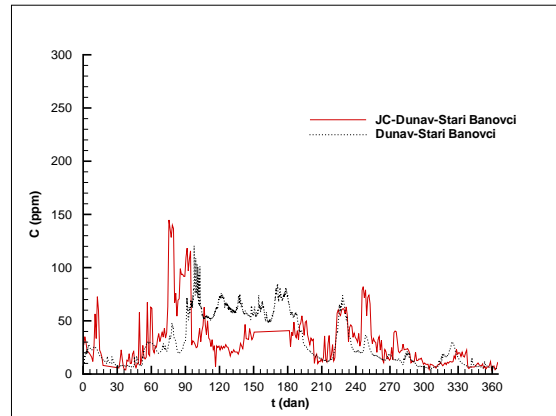
Tabela 31: Definisane frakcije i srednjih prečnika zrna u modelu

Pošto je modelom obuhvaćena mreža tokova koja sadrži deonice toka sa međusobno izuzetno različitim karakteristikama po pitanju materijala koji se u njima nalazi, model je proširen sa opcijom da se duž toka koriguje vrednost koeficijenta kalibracije. Na taj način je tokom kalibracije zadavan jedan zajednički koeficijent za kalibraciju za kompletan sistem modelisanih tokova, koji je kasnije, u problematičnim oblastima (na primer neposredno uz branu i slično), po potrebi korigovan. Za kalibraciju su korišćene merene vrednosti koekcentracija suspendovanog nanosa koje su upoređivane sa rezultatima proračuna.

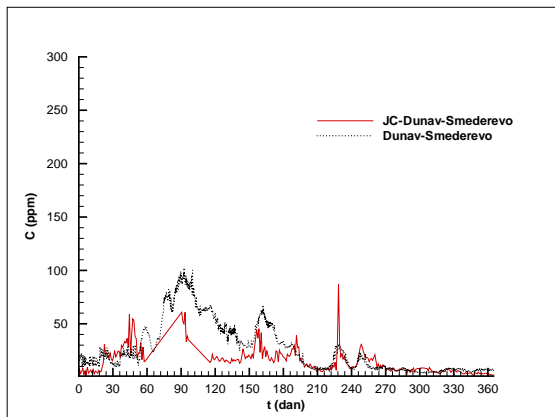
Rezultati kalibracije su prikazani na slikama 48. Analizom rezultata kalibracije za presek kod Novog Sada se uočava izuzetno veliko odstupanje između merenih i računatih koncentracija suspendovanog nanosa u periodu od $t = 2000h$ do $t = 400h$. Uzrok za ovakvo odstupanje može biti pogrešno kalibrisan model, ili greške u merenjima. Ako se istovremeno pogledaju rezultati za preseke u Starim Banovcima i Smederevu primećuje se da u istom vremenskom intervalu nedostaju merenja, te da i u ovim presecima postoji značajnije odstupanje između računatih i merenih koncentracija suspendovanog nanosa. Sa druge strane, u preostalom periodu je slaganje između rezultata dosta dobro. Takođe je primećeno da se vremena maksimalnih vrednosti računatih koncentracija poklapaju sa vremenima maksimalnih vrednosti proticaja, slika 58, što potvrđuje logičnost u rezultatima proračuna. Slaganje merenih i računatih vrednosti koncentracija suspendovanog nanosa u Titelu na Tisi i Beogradu na Savi je zadovoljavajuće zbog čega se prelazi na sledeću fazu, verifikaciju modela puštanjem dugoročne simulacije.



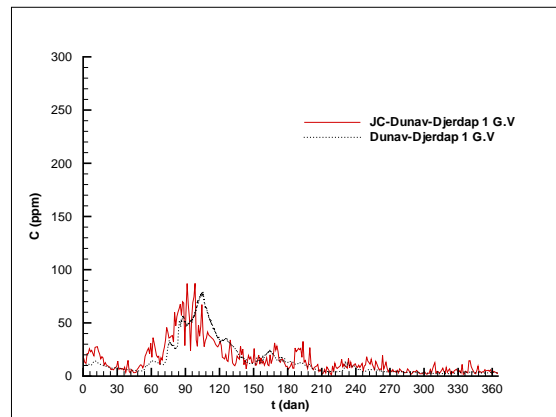
(a) Dunav - Novi Sad



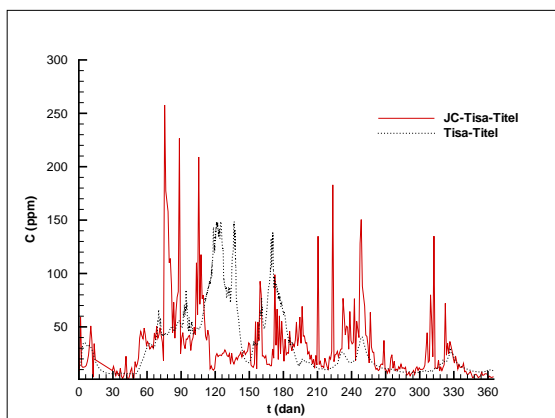
(b) Dunav - Stari Banovci



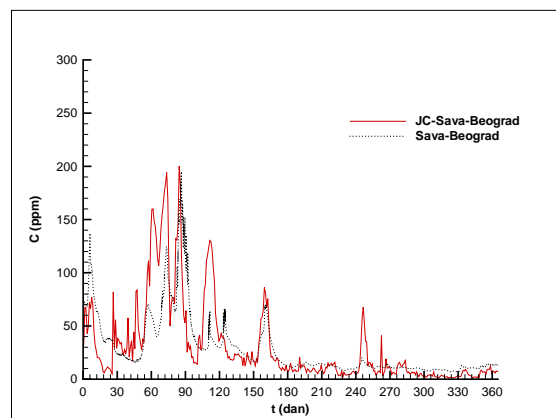
(c) Dunav - Smederevo



(d) Dunav - HE Đerdap 1



(e) Tisa - Titel



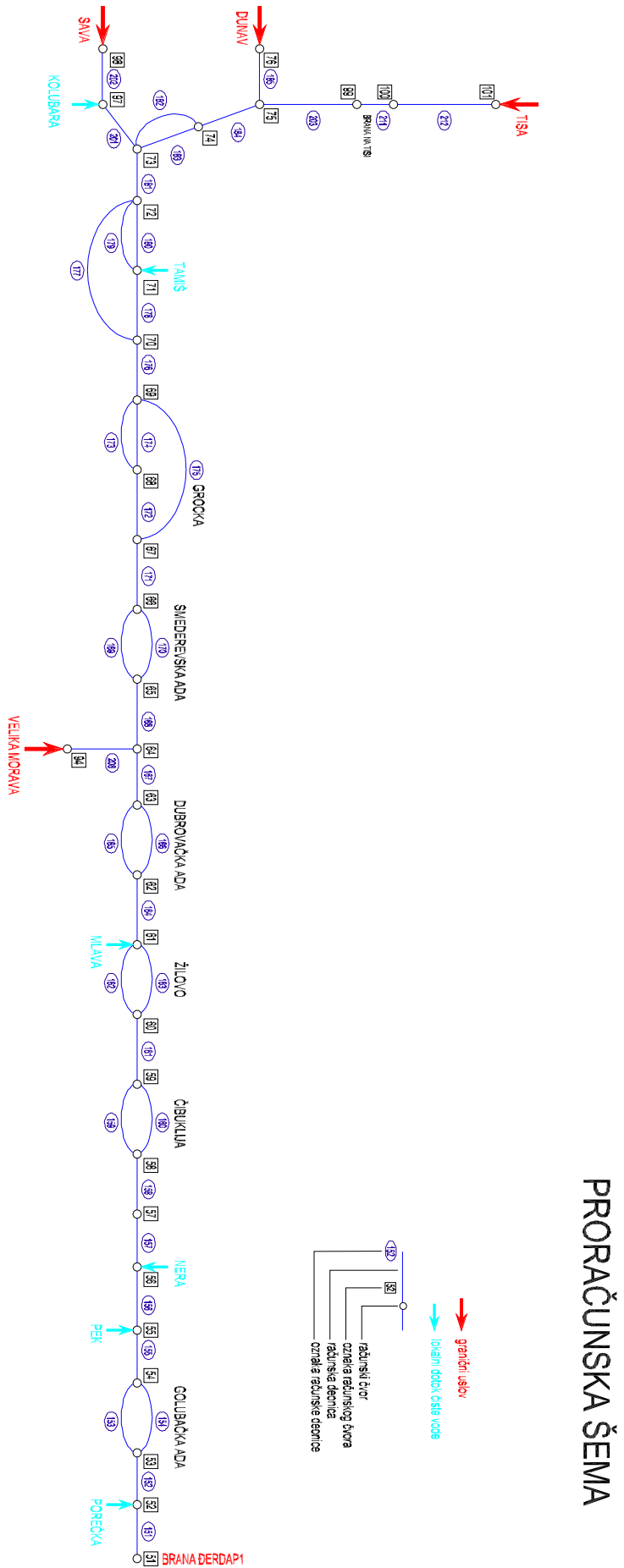
(f) Sava - Beograd

Slika 48: Kalibracija modela transporta nanosa i deformacije korita

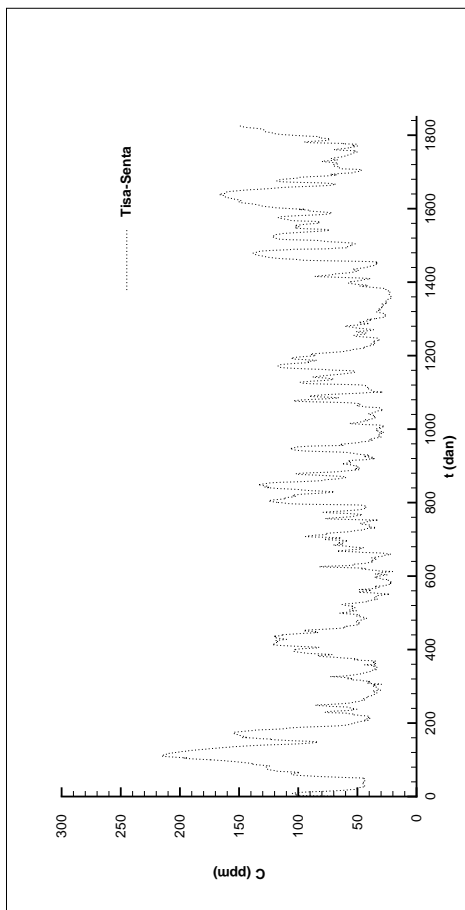
9. Dugoročna simulacija

TESTIRANJE razvijenog matematičkog modela na simulacijama mreže prirodnih tokova, gde pored složenih geometrijskih karakteristika korita postoje i terenska merenja zavise promenljivih veličina, predstavlja najstrožiji vid potvrde valjanosti i pouzdanosti modela. Kompleksna geometrija prirodnih tokova uslovljava složene uslove tečenja i ponašanja nanosne mešavine. Ova okolnost omogućava potvrđivanje sposobnosti modela da reprodukuje realna terenska stanja. Verifikacija modela transporta nanosa i deformacije korita je urađena za period od 01.01.2006. do 31.12.2010. godine, uz napomenu da je 2006. godina korišćena za proces kalibracije. Za verifikaciju transporta suspendovanog nanosa bi bio dovoljan i kraći vremenski interval, međutim modelom je predviđeno simuliranje deformacije korita koja je po svojoj prirodi spor proces. Zbog toga je za konačnu verifikaciju modela odabrana dugoročna simulacija od pet godina tokom koje mogu da se očekuju i značajnije promene korita. Za proveru modela transporta su upoređivane izračunate vrednosti koncentracija suspendovanog nanosa sa merenim vrednostima istih. Kao dodatna provera koncepta modelisanja su, tamo gde je to bilo moguće, upoređene izračunate i merene promene površine poprečnog preseka tokom perioda od 2006. do 2010. godine.

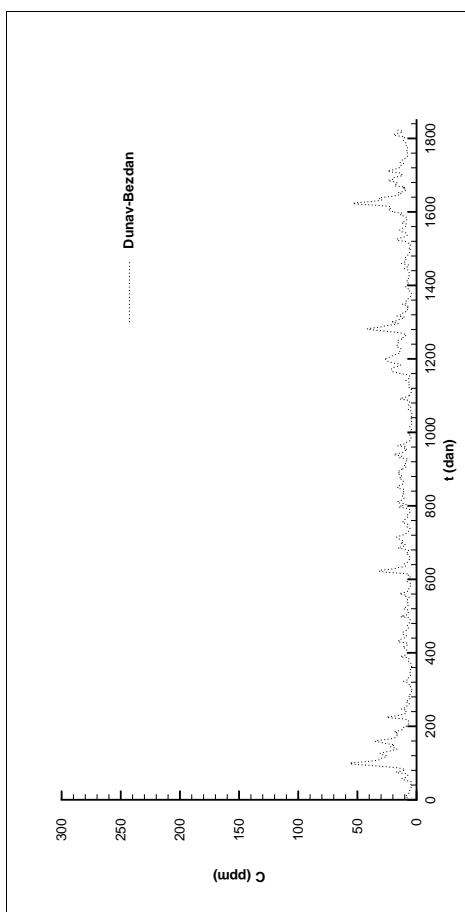
Zbog nedostatka merenja su modelisane samo veće pritoke, Sava od Sremske Mitrovice do ušća, Tisa od Sente do ušća i Velika Morava od Ljubićevskog mosta do ušća. Na Savi je jedini presek sa raspoloživim merenjima koncentracija suspendovanog nanosa Beograd, na Tisi Titel, dok na Velikoj Moravi osim graničnog uslova nema preseka sa merenjima koncentracija koji bi mogli da se iskoriste za verifikaciju modela. Proračunska šema za konačnu verziju oblasti modela je prikazana na slici 49. Identično kao pri kalibraciji modela i sad su pored navedenih pritoka uzete u obzir veće rečne ade. Kontrolni preseki na Dunavu su Novi Sad, Stari Banovci, Smederevo i HE Đerdap 1. Preostale pritoke su u modelu zadržane kao lokalni dotok čiste vode. Što se tiče graničnih uslova za model transporta nanosa, već je napomenuto da ovaj model zahteva samo uzvodni granični uslov. Na Dunavu je granični uslov poznata koncentracija suspendovanog nanosa tokom vremena u Bezdanu. Pregledom raspoloživih merenja je pokazano (tabela 15) da u Bezdanu ima samo RHMZ merenja (meren je pronos nanosa) koja prestaju 2007. godine. U poglavlju 7. su razmatrane mogućnosti za formiranje dodatnih graničnih uslova definisanjem veze pronosa nanosa i proticaja (primenom ili RHMZ podataka ili JC podataka) i definisanjem veze srednje profilske i površinske koncentracije primenom JC podataka. U slučaju graničnog uslova na Dunavu nema JC podataka u Bezdanu. Najbliži profil sa merenjima površinske i srednje profilske koncentracije je u Bogojevu (tabela 26). Drugi problem je što je broj ovih merenja dosta mali (svega osam podataka) usled čega bi ovako definisana zavisnost bila dosta nepouzdana. Zbog toga se za granični uslov na Dunavu opredelilo za definisanje veze pronosa nanosa i proticaja primenom postojećih RHMZ podataka. Slična situacija je i sa podacima na granici modela na Tisi. Merenja pronosa nanosa ima do 2007. godine, tako da su preostali granični uslovi određeni definisanjem veze pronosa nanosa i proticaja primenom postojećih RHMZ podataka, a isti princip je primenjen u Sremskoj Mitrovici. Na granici modela na Velikoj Moravi postoje RHMZ merenja do 2007. godine, a JC merenja postoje za svih pet godina simulacije. Kako je cilj što tačnija reprezentacija procesa, za period od 2008. do 2010. godine moraju da se koriste JC merenja. Sa druge strane, mora da postoji doslednost unutar podataka koji se nameću za granične uslove, zbog čega su tokom svih pet godina na Velikoj Moravi korišćeni JC podaci. Grafički prikaz graničnih uslova modela transporta nanosa i deformacije korita su prikazani na slici 50.



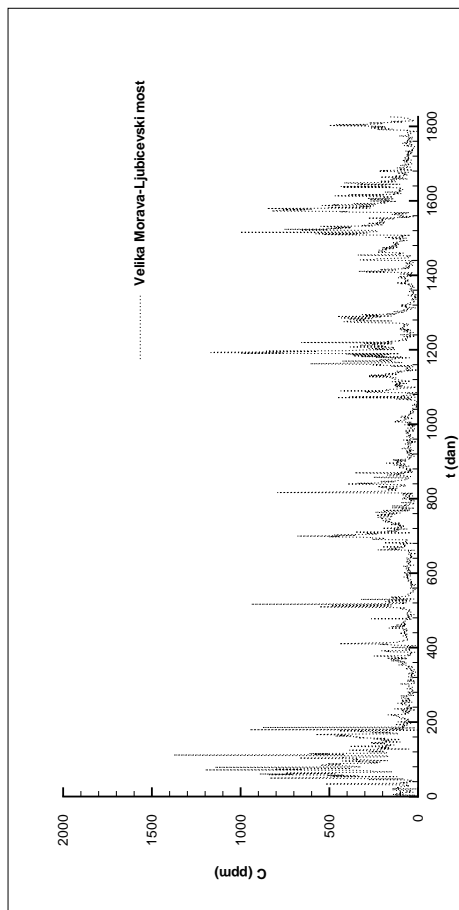
Slika 49: Proračunska šema oblasti modela



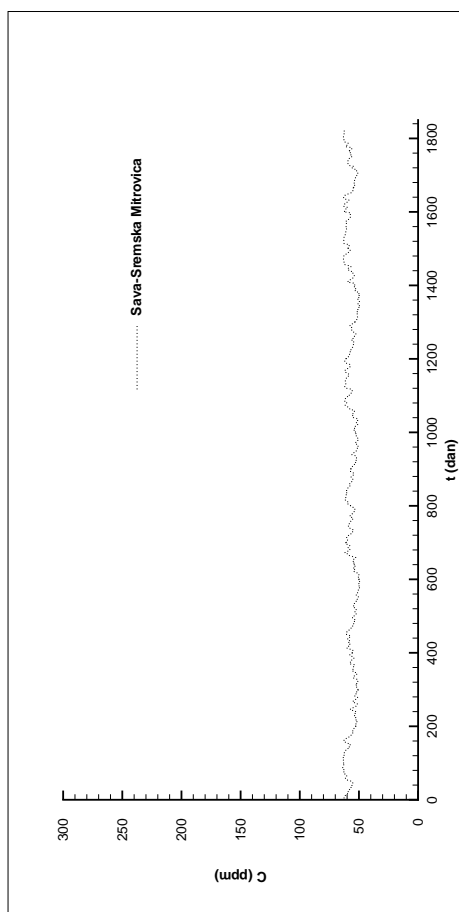
(a) Dunav - Bezdan



(b) Tisa - Senta

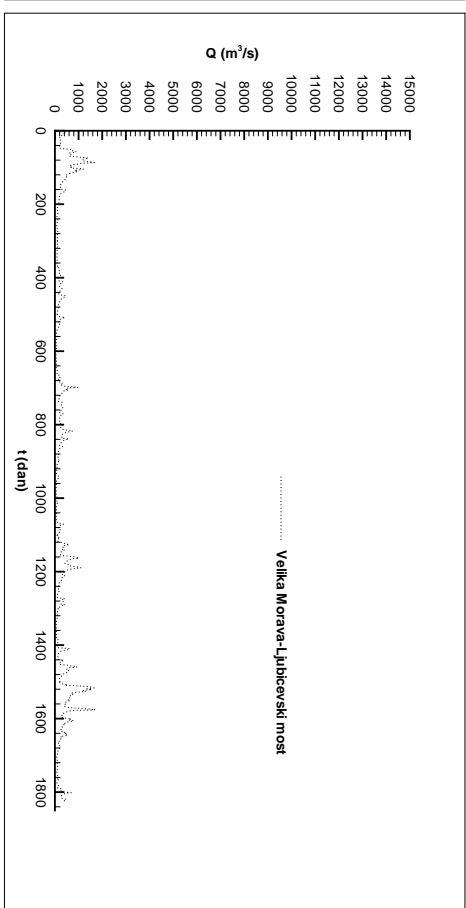
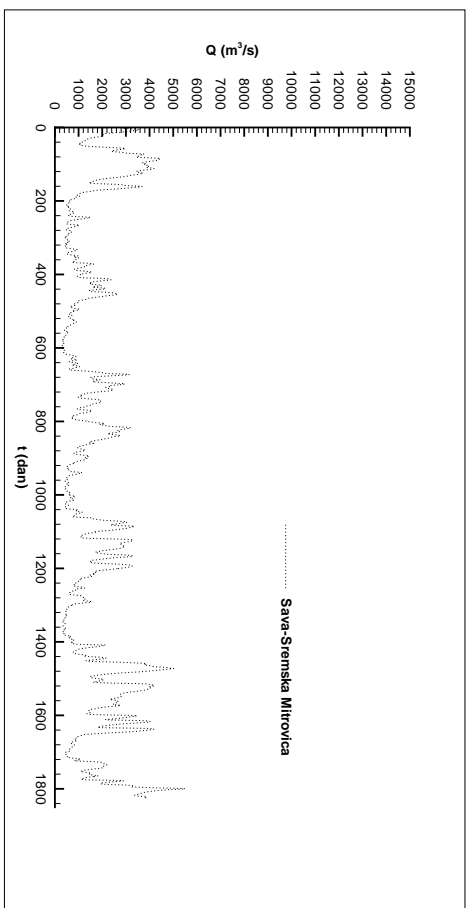
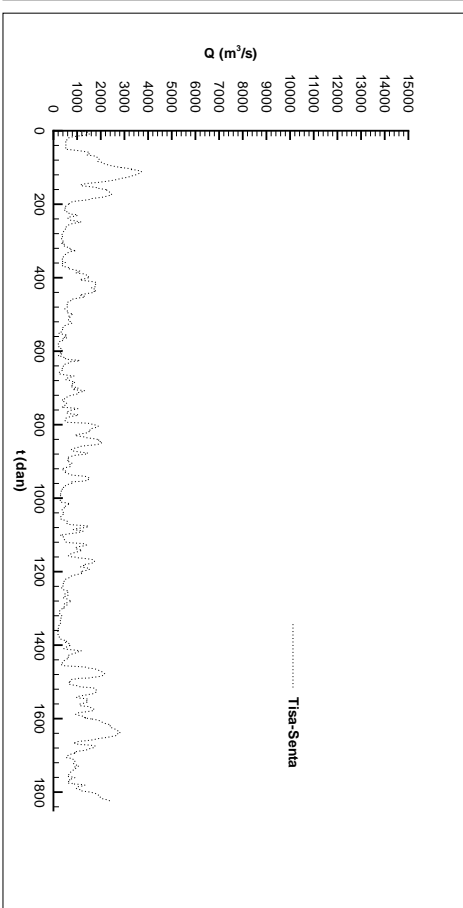
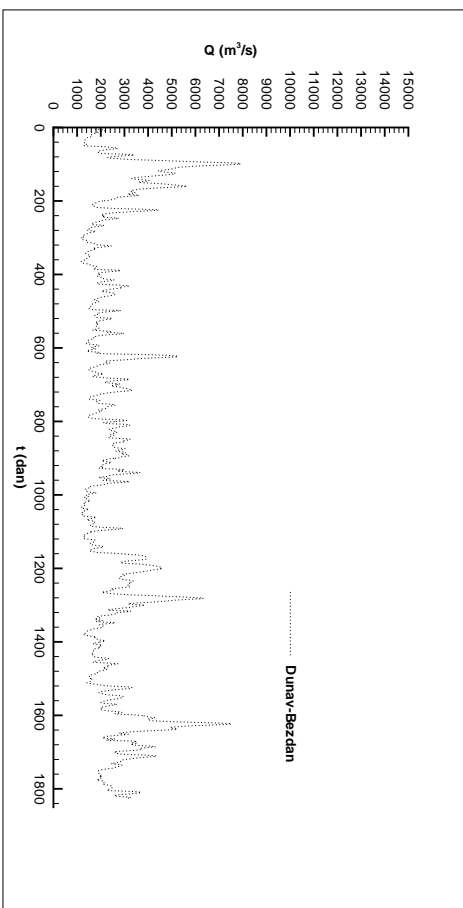


(c) Sava - Sremska Mitrovica



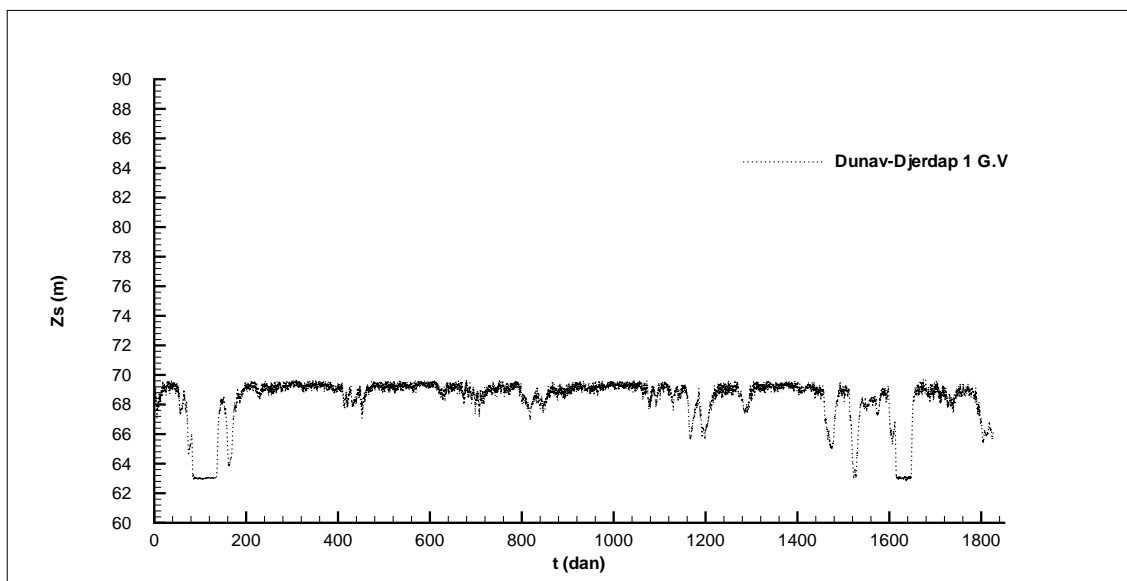
(d) Velika Morava - Ljubicevski most

Slika 50: Granični uslovi za model transporta nanosa



Slika 51: Uvodni granični uslovi za hidraulički model na Dunavu, Tisi, Savi i Velikoj Moravi

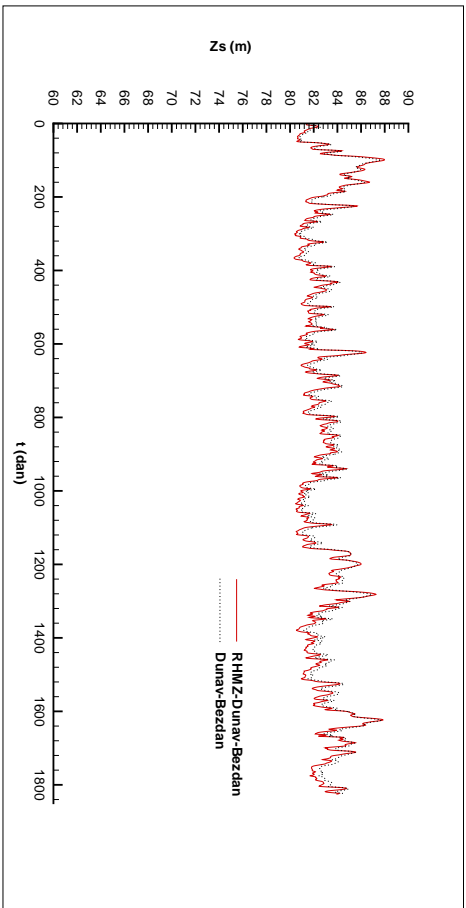
Pošto se modelisanje transporta nanosa, kao ni sam proces, ne može razmatrati nezavisno od strujne slike, potrebno je definisati granične uslove i za hidraulički model. Uzvodni granični uslovi su poznati hidrogrami prikazani na slikama 51, a nizvodni granični uslov je poznat nivogram na HE Đerdap 1, slika 52.



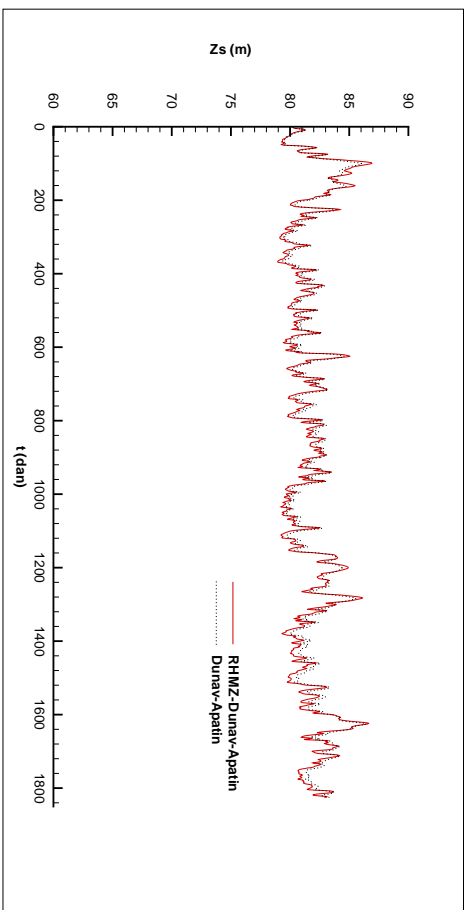
Slika 52: Nizvodni granični uslov za hidraulički model na Dunavu - HE Đerdap 1

Verifikacija hidrauličkog modela je prikazana u poglavlju 8.2. za godinu dana simulacije i nagovešteno je da će se kasnije dati rezultati za čitav modelisan period od 2006. do 2010. godine. Slike 53, 54, 55, 56 i 57 paralelno prikazuju merene i računate nivograme u kontrolnim presecima za svih pet godina simulacije. Analizom rezultata je zaključeno da je slaganje sa merenjima zadovoljavajuće. Pomenuta analiza je pored upoređivanja brojčanih vrednosti merenih i računatih nivoa slobodne površine vode podrazumevala i osvrst na pitanje da li numerička simulacija prati tendenciju merenja. Najveća odstupanja simuliranih i merenih nivoa se javlja kod mernog mesta Ljubićevski most na Velikoj Moravi. Međutim, smatra se da su uočena odstupanja prihvatljiva jer se radi o manje bitnoj pritoci. Matematički model u mernim mestima na Dunavu, Tisi i Savi daje više nego zadovoljavajuće slaganje sa osmotrenim nivoima slobodne površine vode. Ovde se takođe napominje da kvalitetno tumačenje rezultata modela transporta nanosa zahteva da se paralelno sa koncentracijama posmatraju i hidrogrami. Navedena konstatacija ima svoje uporište u fizici razmatranog procesa. Proticaj je neposredno vezan za brzinu strujanja, koja je glavni pokretački mehanizam nanosne mešavine, pa je razumno pretpostaviti da postoji veza između vrednosti proticaja i prisustva suspendovanog nanosa. Pošto nema merenih hidrograma u svim presecima sa merenjima koncentracija suspendovanog nanosa, u pomenutim presecima će se koristiti računati hidrogrami. Na osnovu dobrog slaganja merenih i računatih nivograma duž glavnog toka i pritoka, može se smatrati da su rezultati hidrauličkog modela dovoljno tačni da se smatraju kao reprezentativni u presecima bez merenja.

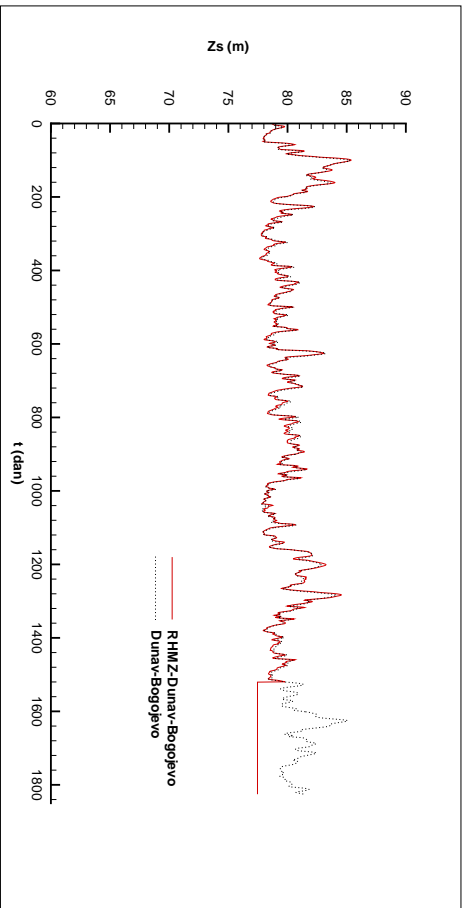
Na slici 58 su paralelno prikazani rezultati proračuna i merene vrednosti koncentracije suspendovanog nanosa (dve gornje slike) i proticaja (dve donje slike) u Novom Sadu i Smederevu za kompletan period od 2006. do 2010. godine. Poređenjem rezultata proračuna i merenja koncentracije suspendovanog nanosa u Novom Sadu se primećuju značajno veće vrednosti računatih koncentracija u odnosu na merene vrednosti. Paralelnim posmatranjem promena koncentracije suspendovanog nanosa tokom vremena i



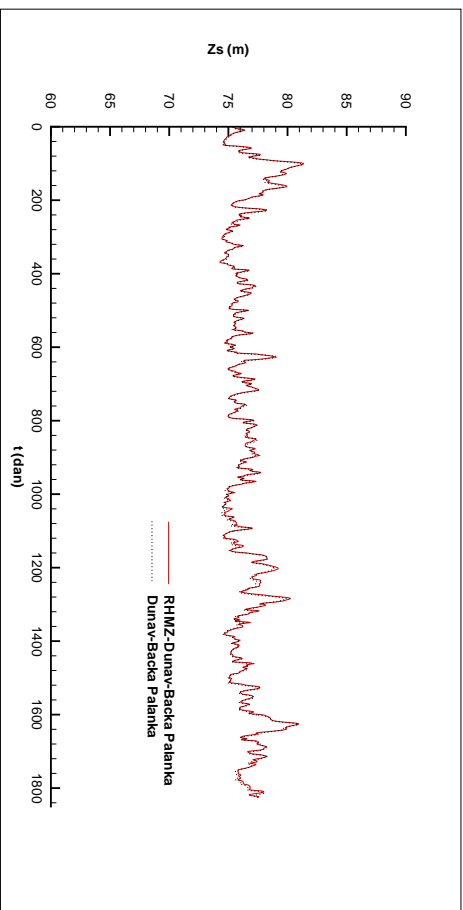
(a) Dunav - Bezdán



(b) Dunav - Apatin

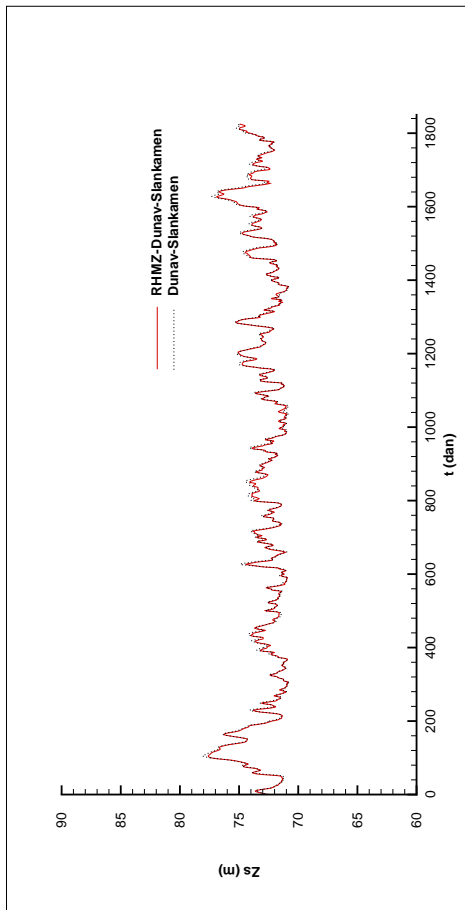


(c) Dunav - Bogojevo

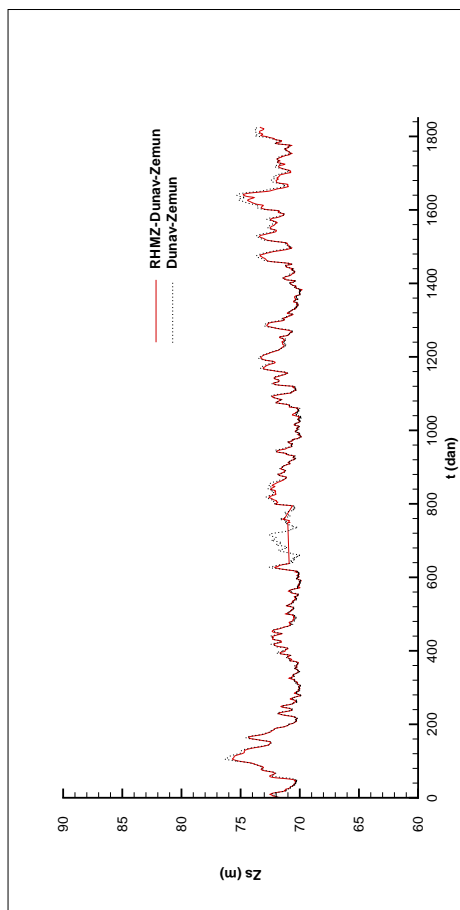


(d) Dunav - Bačka Palanka

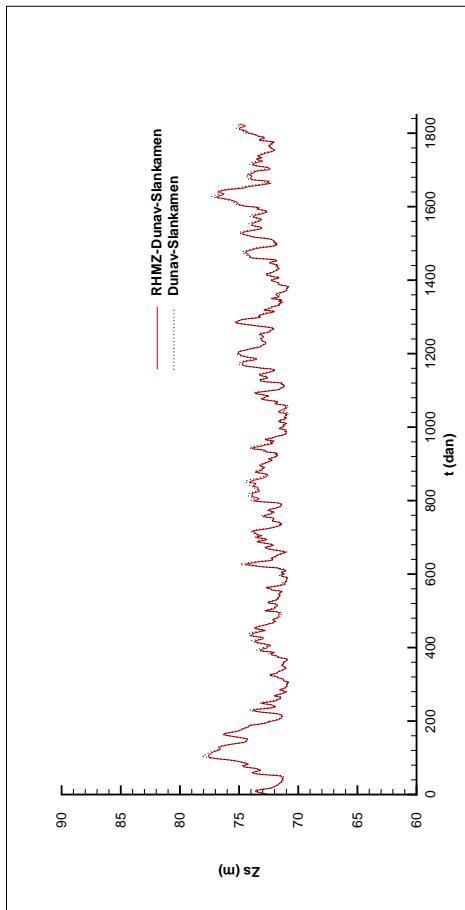
Slika 53: Dugoročna simulacija - nivoogram, 1. deo



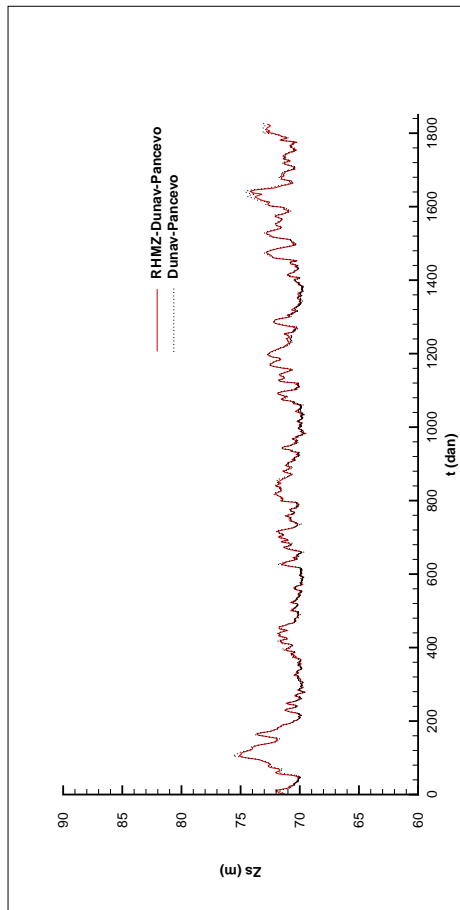
(a) Dunav - Novi Sad



(c) Dunav - Zemun

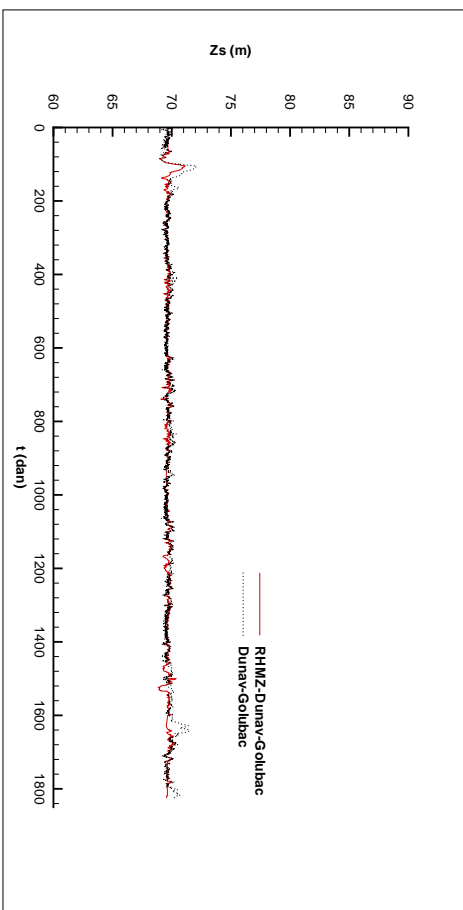


(b) Dunav - Slankamen

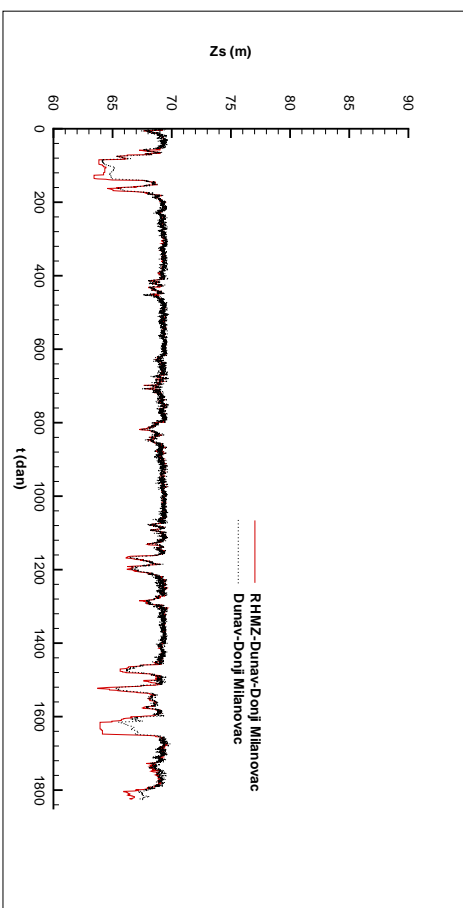


(d) Dunav - Pancevo

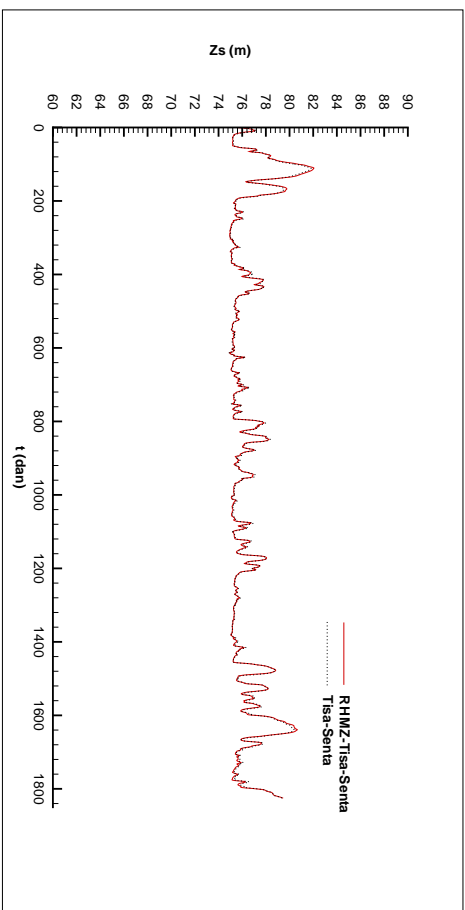
Slika 54: Dugoročna simulacija - nivogram, 2. deo



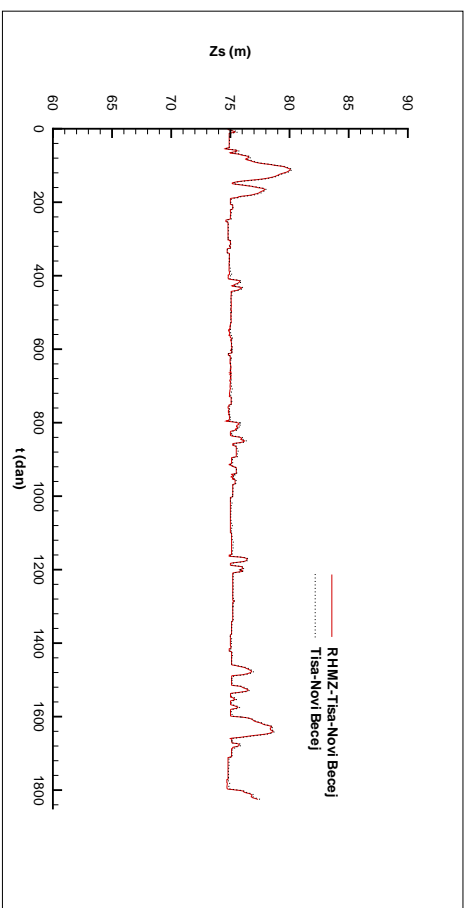
(a) Dunav - Golubac



(b) Dunav - Donji Milanovac

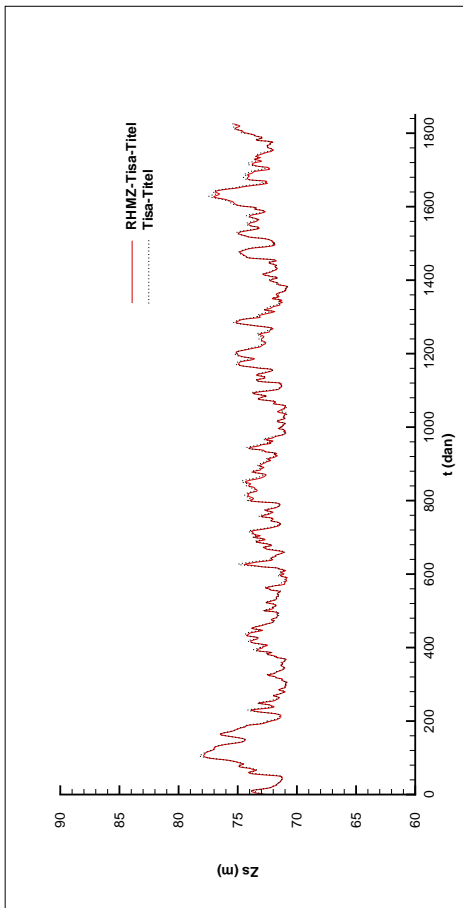


(c) Tisa - Senta

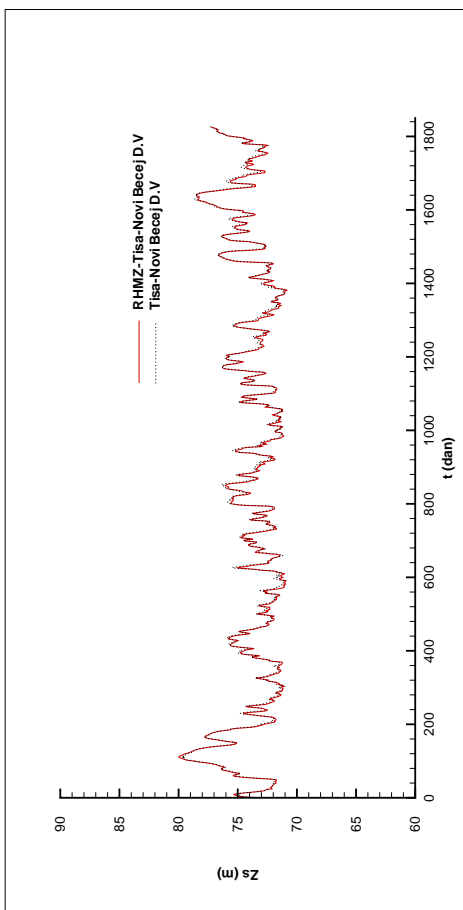


(d) Tisa - Novi Bečej

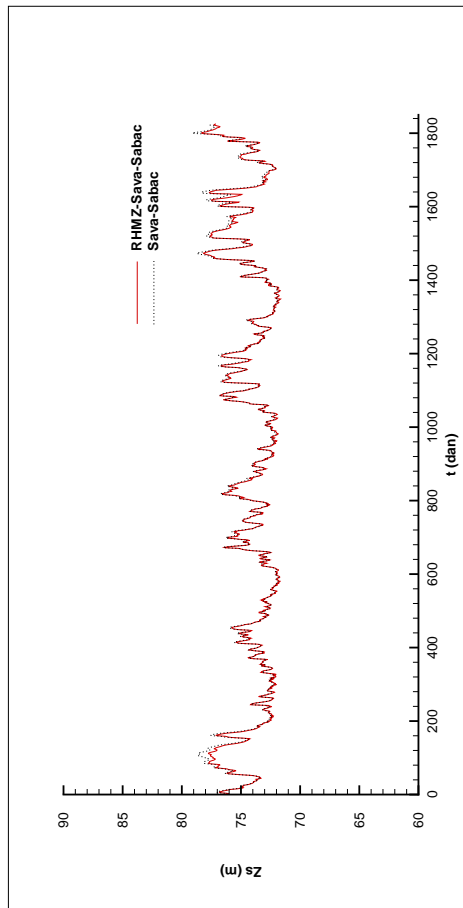
Slika 55: Dugoročna simulacija - nivoogram, 3. deo



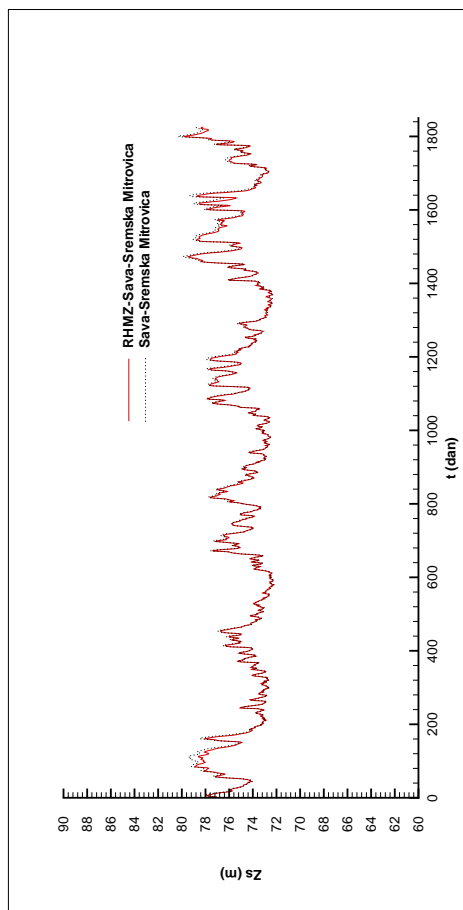
(a) Tisa - Novi Bečej D.V.



(b) Tisa - Titel

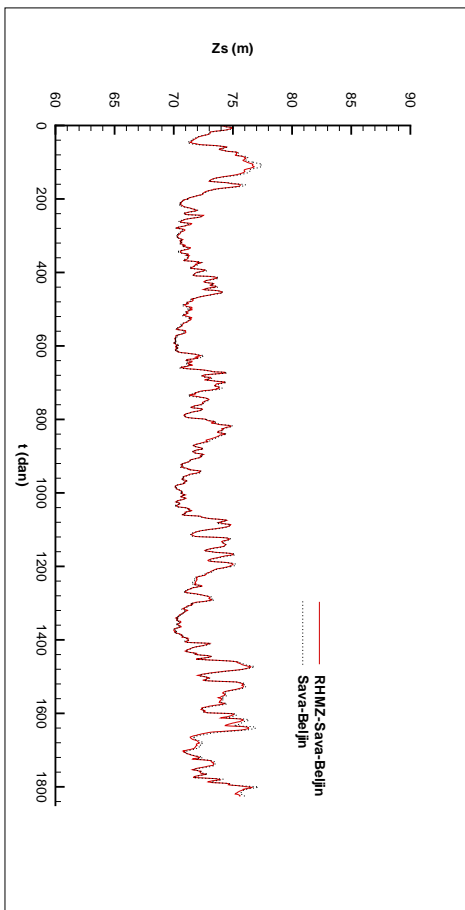


(c) Sava - Sremska Mitrovica

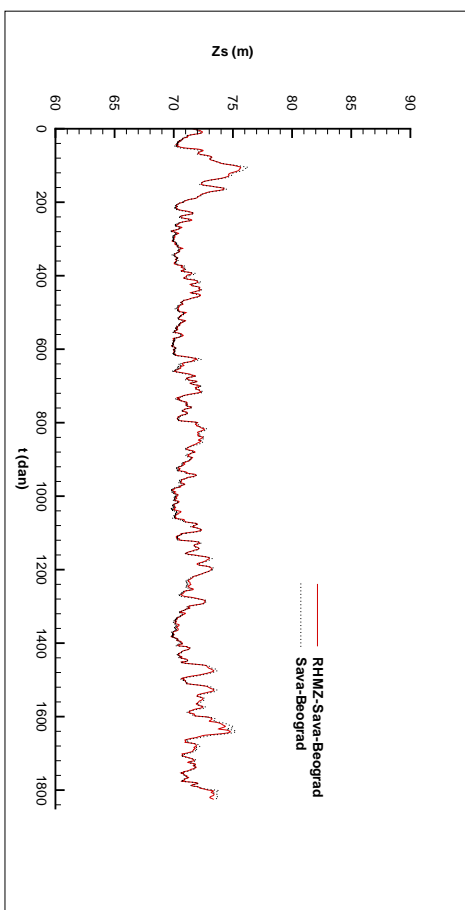


(d) Sava - Šabac

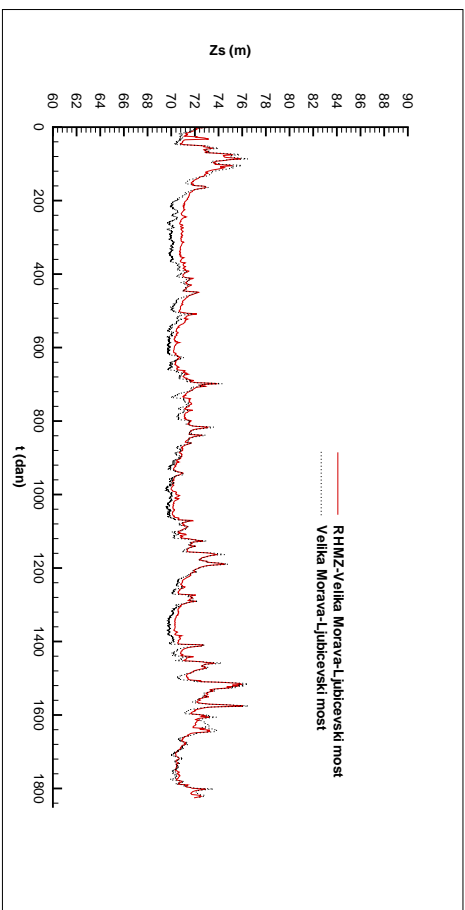
Slika 56: Dugoročna simulacija - nivogram, 4. deo



(a) Sava - Beljin



(b) Sava - Beograd

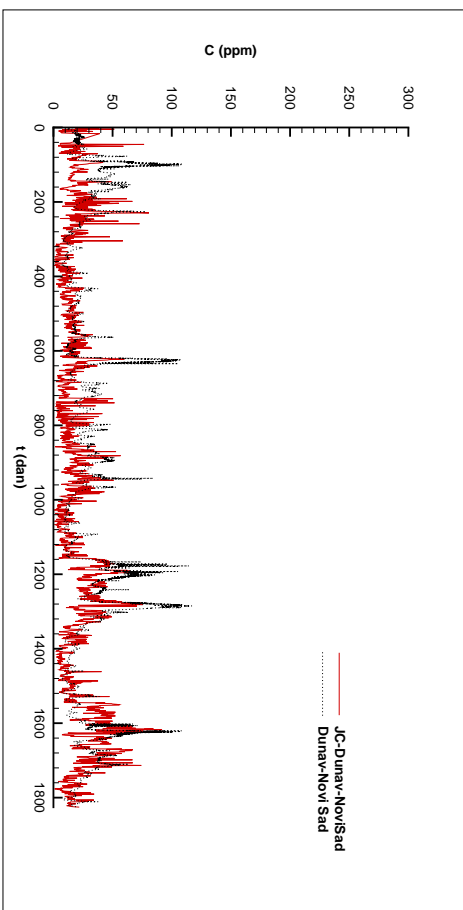
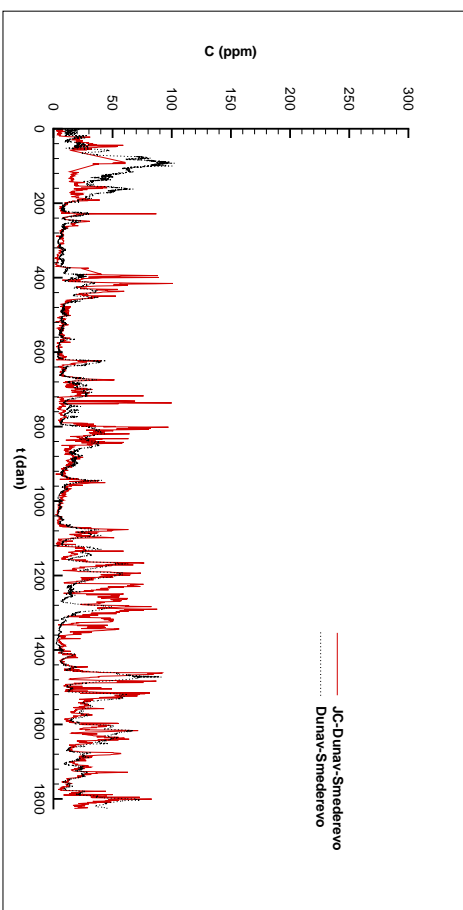
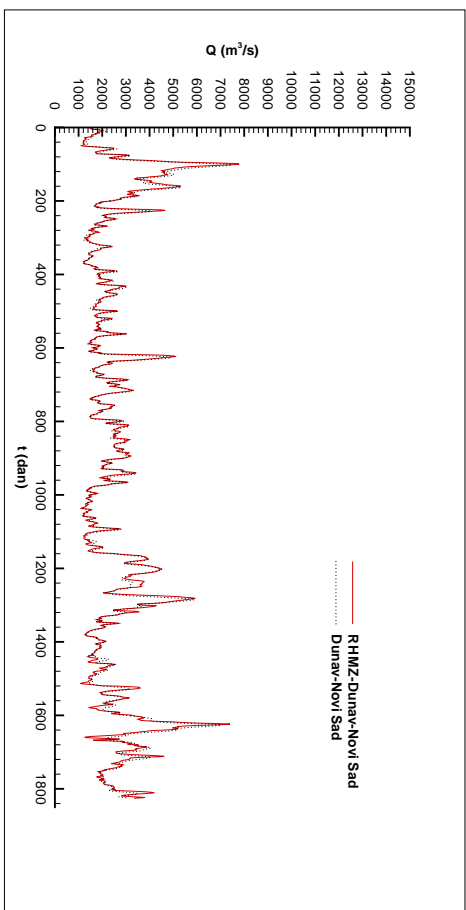
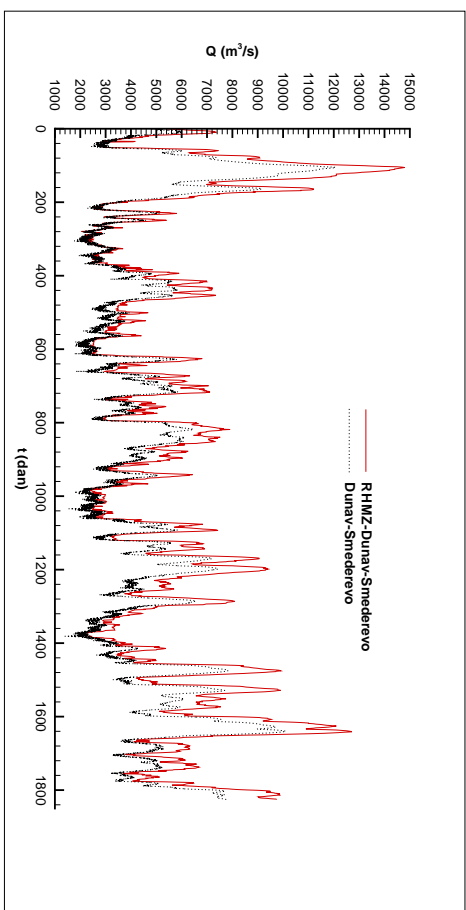


(c) Velika Morava - Ljubicevski most

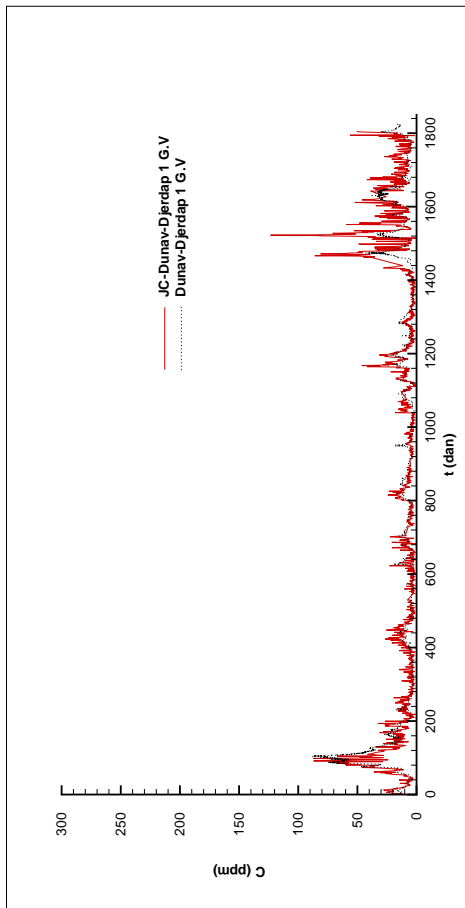
Slika 57: Dugoročna simulacija - nivoogram, 5. deo

hidrograma u Novom Sadu se vidi da se vremena ovih maksimuma poklapaju sa ekstremima hidrograma što ukazuje na logičnost izračunatih kocentracija suspendovanog nanosa i moguće greške prilikom merenja. Ista pojava, ali manjeg intenziteta, se primećuje kod Smedereva, uz napomenu da u ovom preseku nema merenja proticaja zbog čega su za hidrogram dati samo rezultati proračuna. Na slici 59 su prikazani rezultati promene koncentracije suspendovanog nanosa tokom vremena i hidrogram za Stare Banovce i kod HE Đerdap 1. Ako se posmatraju rezultati prikazani za Stare Banovce može se primetiti da se računate vrednosti generalno podudaraju sa merenjima dok se vremena značajnijih odstupanja poklapaju sa maksimalnim vrednostima proticaja. Pošto je očekivano da se pri većim proticajima jave veće koncentracije suspendovanog nanosa, a usled nepostojanja merenih vrednosti proticaja u Starim Banovcima, može se zaključiti da rezultati proračuna odgovaraju očekivanom ponašanju. Na istoj slici su prikazani i rezultati proračuna za presek kod HE Đerdap 1. Ako se posmatra hidrogram u ovom preseku primećuje se jak uticaj hidroelektrane koji izaziva značajne oscilacije u protocima usled čega se sa jedinstvene slike za svih pet godina simulacija mogu primetiti samo oscilacije dužeg vremenskog trajanja (na primer globalno povećanje od početka simulacije do oko $t = 200$ dana ili od $t = 1400$ dana do $t = 1800$ dana). Upoređivanjem vremena ovih maksimuma sa značajnijim oscilacijama u promenama koncentracija se i u ovom slučaju primećuje poklapanje. Po istom principu su prikazani i rezultati za Titel na Tisi i Beograd na Savi, slika 60. Vremena pojave maksimalnih vrednosti protoka i koncentracija suspendovanog nanosa se poklapaju u oba preseka. Dok su slaganja računate i merene koncentracije suspendovanog nanosa u Beogradu dosta dobra, kod Titela se primećuje da proračun prati maksimume merenih koncentracija suspendovanog nanosa, ali daje dosta manje rezultate od merenih vrednosti kod baznih vrednosti koncentracija u poslednjih godinu dana simulacije. Imajući u vidu da su uzvodni granični uslovi za proračun transporta nanosa u ovom periodu dobijeni iz funkcije, može se pretpostaviti da je ovo odstupanje posledica pogrešnih graničnih uslova.

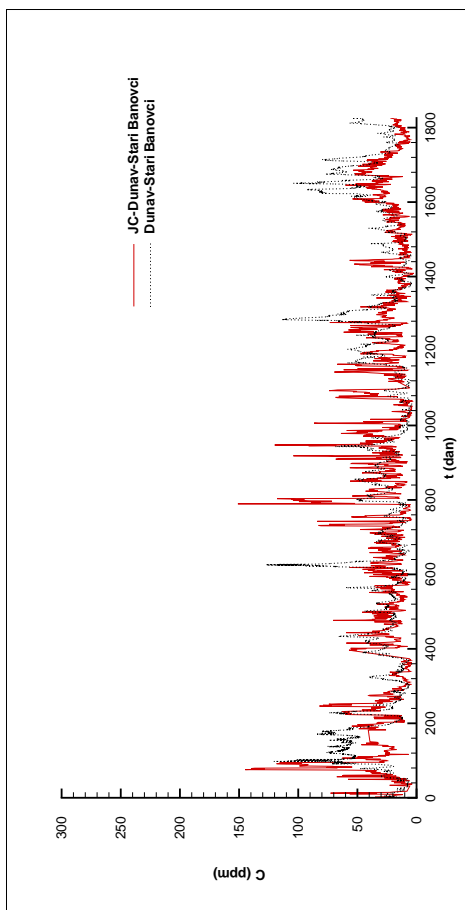
Za verifikaciju modela osim poređenja računatih i merenih vrednosti koncentracija suspendovanog nanosa mogu da se koriste i merenja poprečnih preseka. Pregled raspoloživih morfoloških merenja na Dunavu je prikazan u tabelama 10, 11 i 12. Primećuje se da prva serija merenja profila potiče iz 2004, 2005 ili 2006 godine. Ovi profili su korišćeni prilikom definisanja morfologije modela. Za većinu profila od HE Đerdap 1 do Novog Sada postoje merenja profila iz 2010. godine koja mogu da se iskoriste da se odredi zasipanje poprečnih preseka u intervalu od 2006. do 2010. godine. Pozitivne vrednosti zasipanja se manifestuju u vidu smanjenja poprečnog preseka toka, dok negativne vrednosti zasipanja znače povećanje poprečnog preseka. Na slici 61 su prikazane merene i računate vrednosti zasipanja tokom perioda simulacije, od 01.01.2006. do 31.12.2010. godine. Upoređivanjem rezultata se primećuje slična tendencija između merenih i računatih vrednosti koja se manifestuje dominantnim zasipanjem preseka u zoni uz branu. Odstupanja u rezultatima su posledica dva faktora. Prvi je činjenica da se period simulacije ne poklapa u potpunosti sa periodom iz kojeg su merenja, jer je deo merenih profila iz 2005. godine, čime je već na samom početku uneta greška u proračun. Drugi razlog odstupanja je što je model formulisan tako da za svaki poprečni presek računa jednu prosečnu vrednost promene kote dna, odnosno ne postoji mogućnost modelisanja promene oblika poprečnog preseka. Računom je omogućeno translatorno spuštanje ili podizanje poprečnog preseka, dok se u prirodi deformacija korita manifestuje i kroz promenu oblika poprečnog preseka. Opravdano je pretpostaviti da promena oblika poprečnog preseka može prouzrokovati značajnu lokalnu promenu hidrauličkih parametara, što može dovesti do promene tendencije ponašanja nanosa, pa time i do promene tendencije zasipanja u

(a) Dunav - Novi Sad - $C(t)$ (b) Dunav - Smederevo - $C(t)$ (c) Dunav - Novi Sad - $Q(t)$ (d) Dunav - Smederevo - $Q(t)$

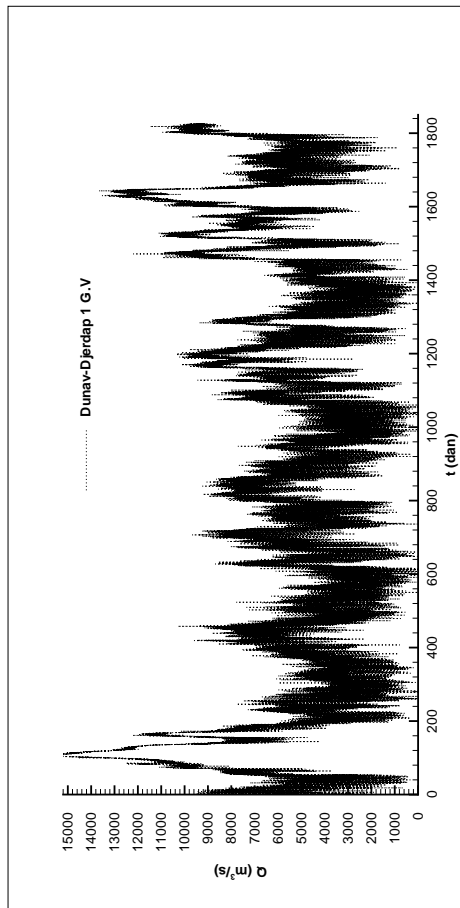
Slika 58: Proticaji i koncentracija suspendovanog nanosa na Dunavu u Novom Sadu i Smederevu



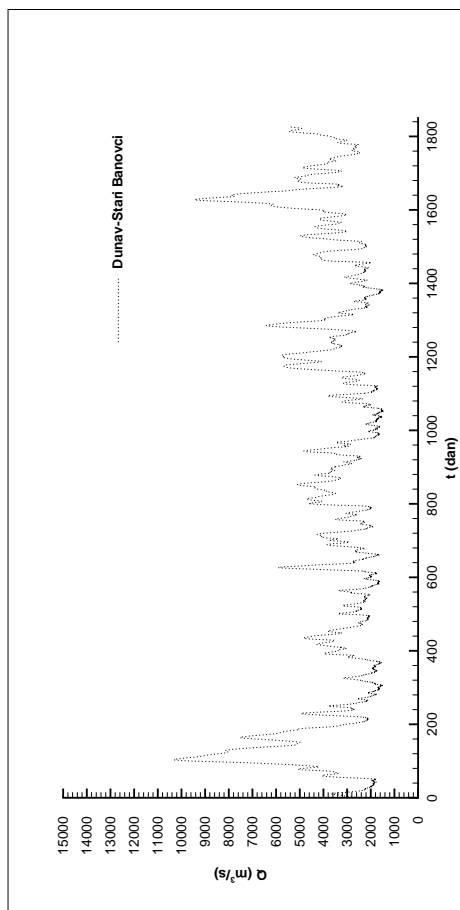
(a) Dunav - Stari Banovci - $C(t)$



(b) Dunav - HE Đerdap 1 - $C(t)$

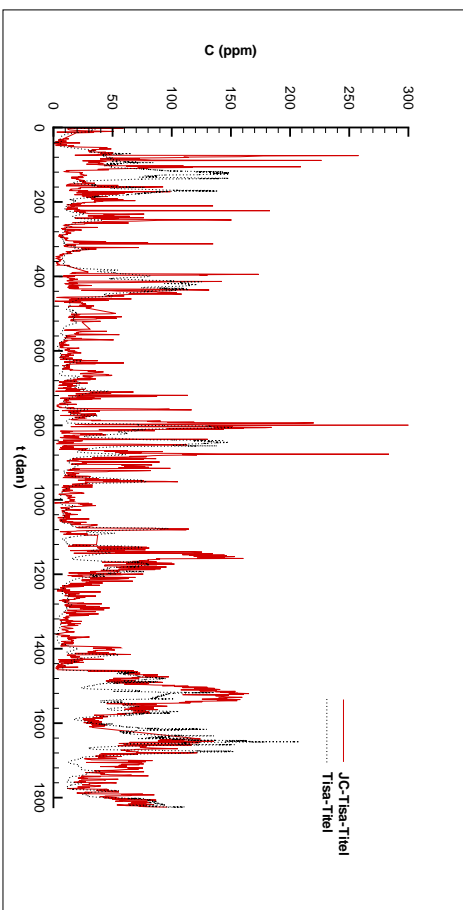
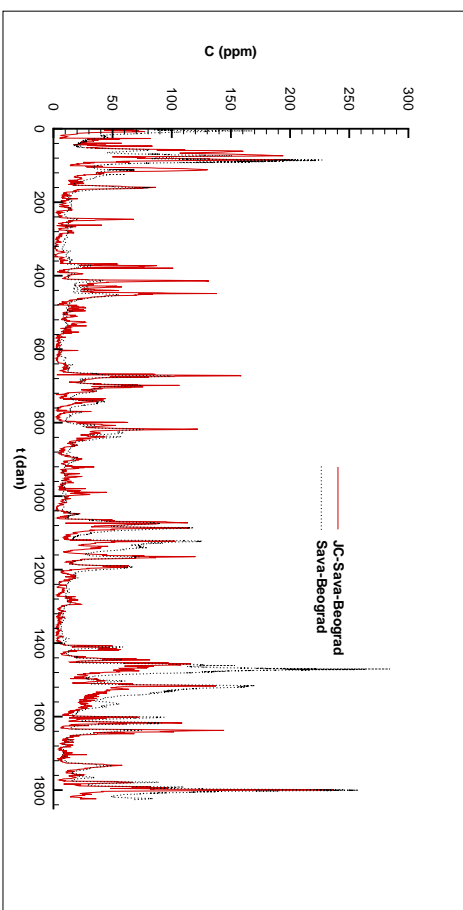
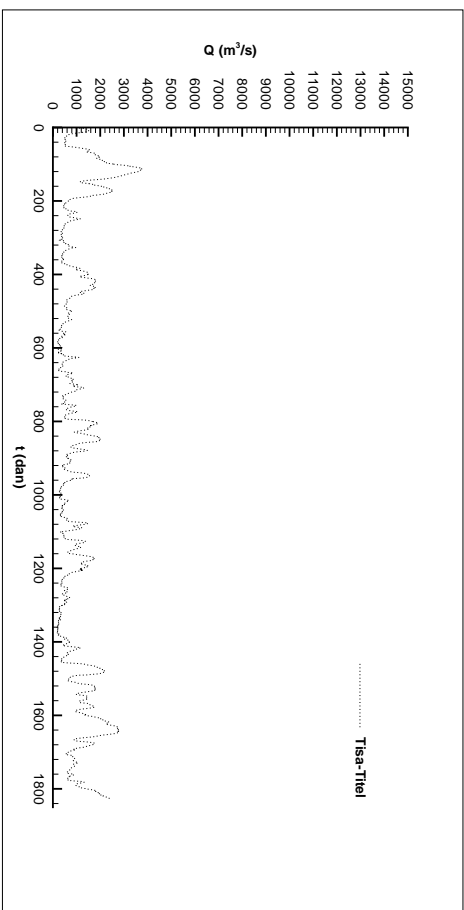
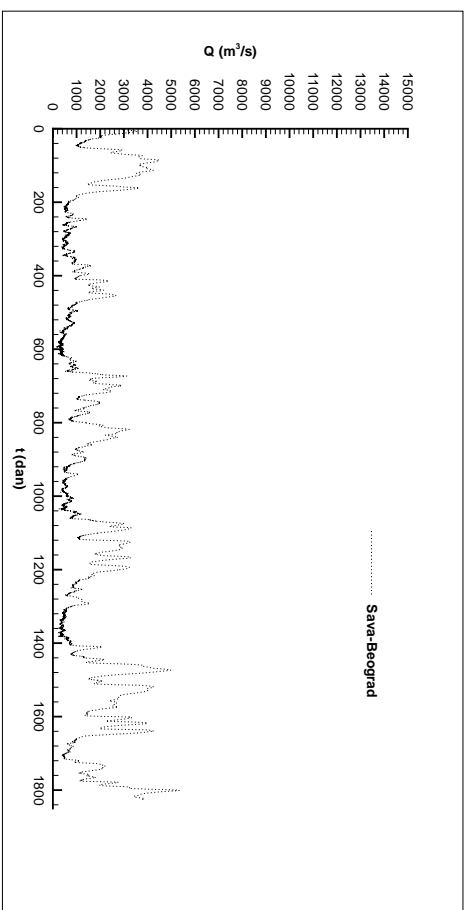


(c) Dunav - Stari Banovci - $Q(t)$

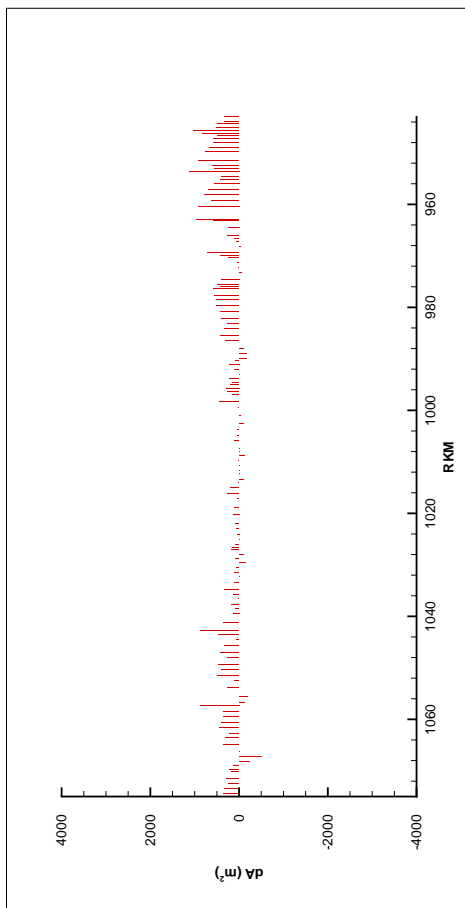


(d) Dunav - HE Đerdap 1 - $Q(t)$

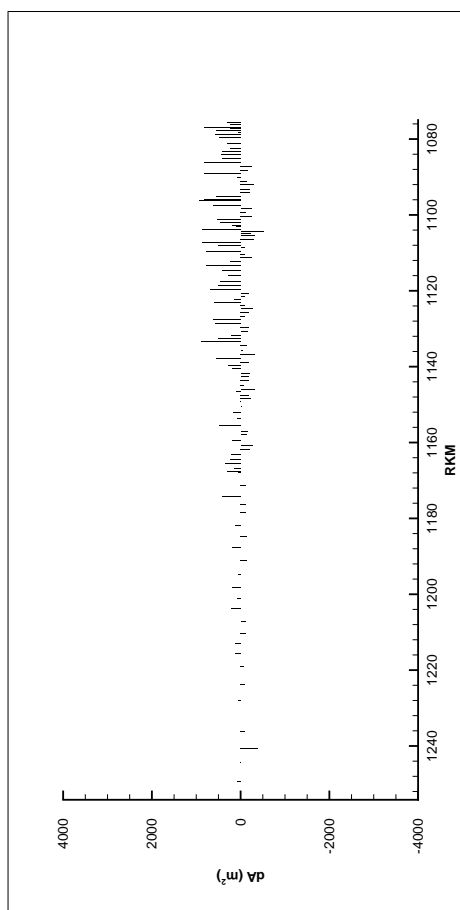
Slika 59: Proticaj i koncentracija suspendovanog nanosa na Dunavu u Starim Banovcima i kod HE Đerdap 1

(a) Tisa - Titel - $C(t)$ (b) Sava - Beograd - $C(t)$ (c) Tisa - Titel - $Q(t)$ (d) Sava - Beograd - $Q(t)$

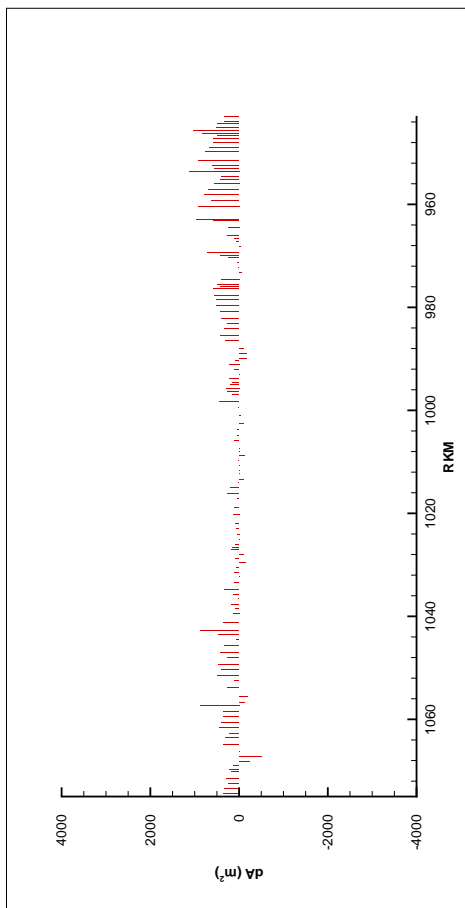
Slika 60: Proticaj i koncentracija suspendovanog nanosa u Titelu na Tisi i Beogradu na Savi



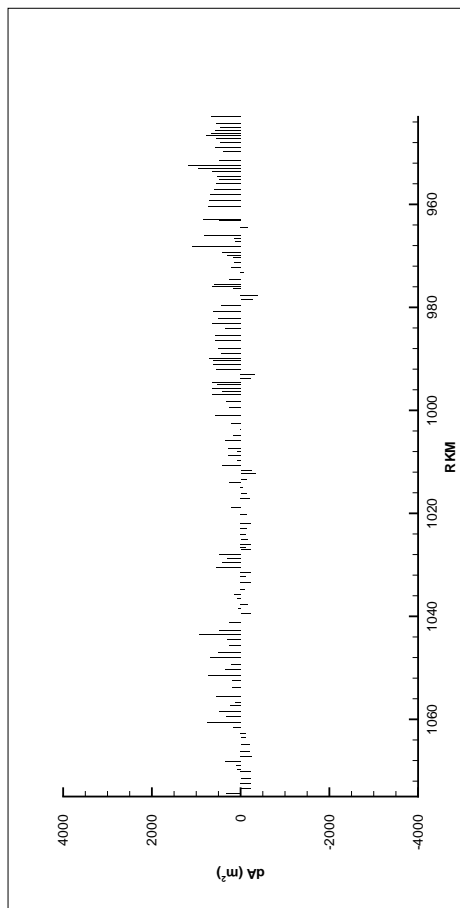
(a) Dunav - Merene vrednosti zasipanja od Novog Sada do ušća Nere



(c) Dunav - Računate vrednosti zasipanja od Novog Sada do ušća Nere

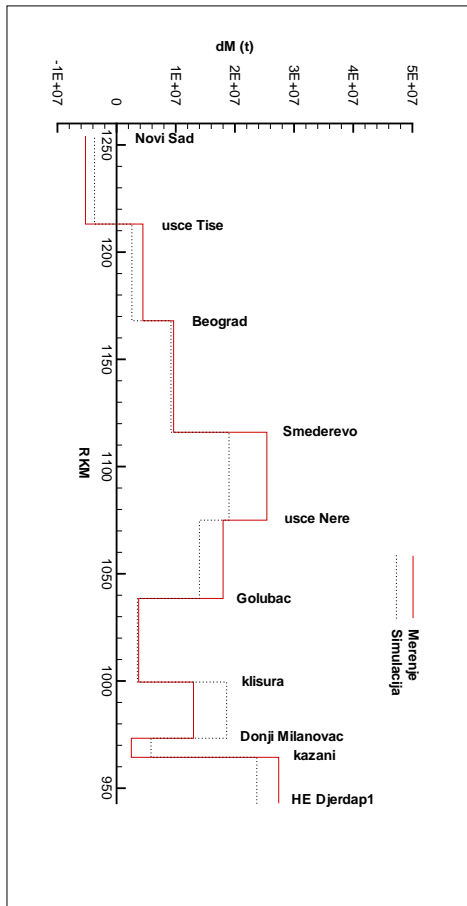


(b) Dunav - Merene vrednosti zasipanja od ušća Nere do HE Đerdap 1

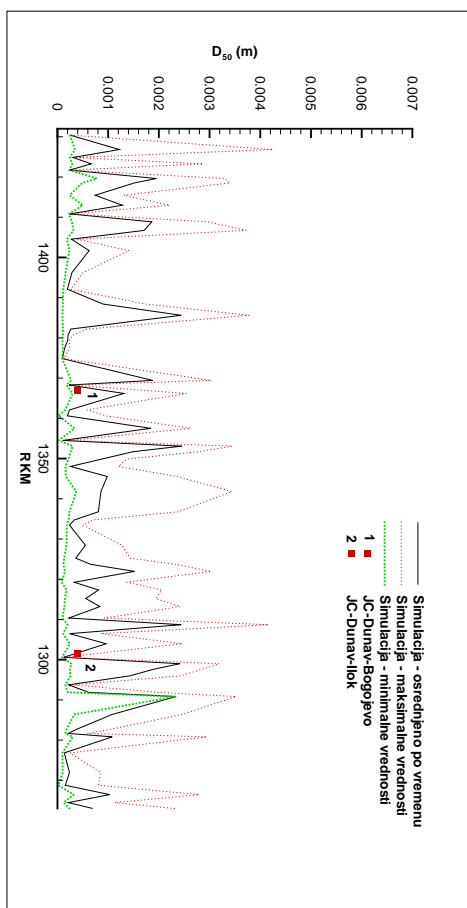


(d) Dunav - Računate vrednosti zasipanja od ušća Nere do HE Đerdap 1

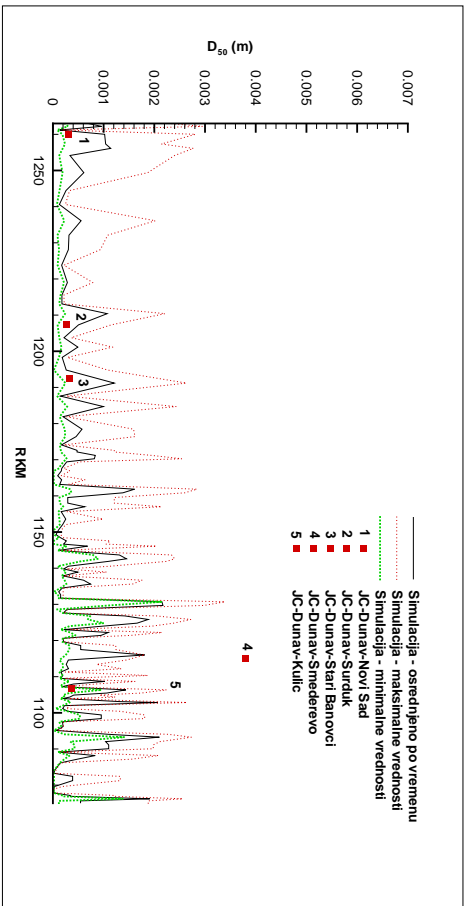
Slika 61: Zasipanje na Dunavu od HE Đerdap 1 do Novog Sada tokom perioda od 01.01.2006. do 31.12.2010. godine



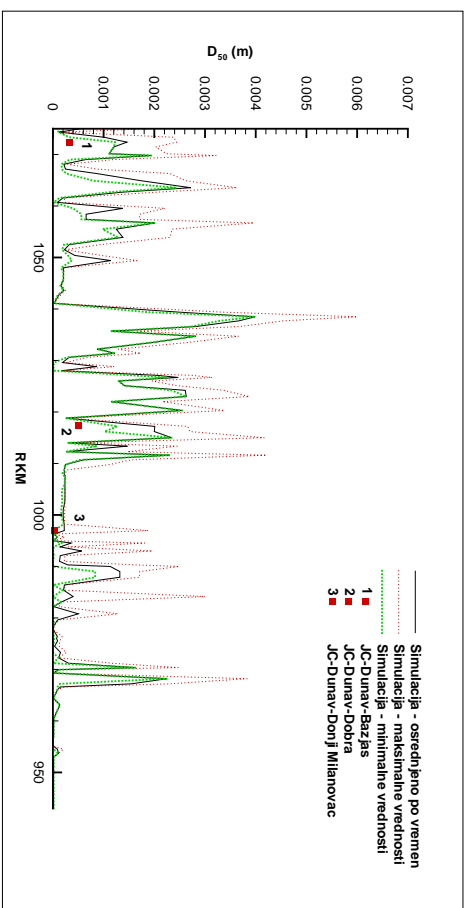
(a) Dunav - zasipanje po deonicama duž toka



(b) Dunav - promena srednjeg prečnika zrna od Bezdana do Novog Sada

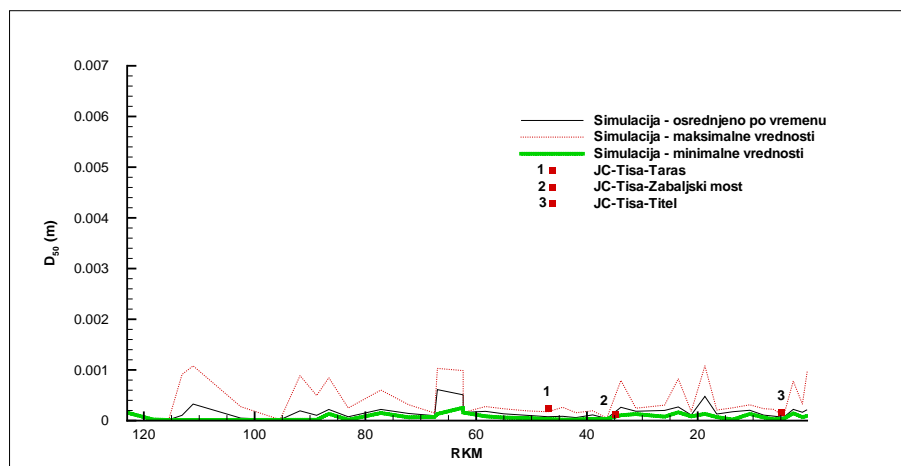


(c) Dunav - promena srednjeg prečnika zrna od Novog Sada do ušća Nere

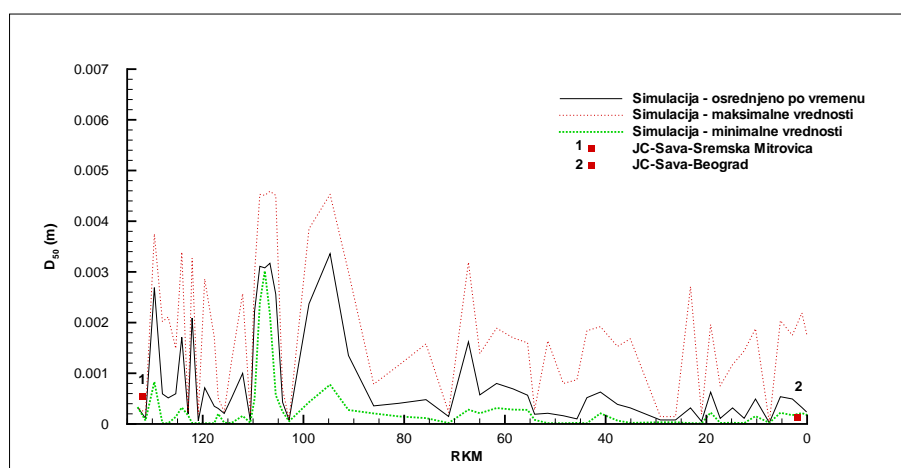


(d) Dunav - promena srednjeg prečnika zrna od ušća Nere do HE Džerdap 1

Slika 62: Zasipanje po deonicama i promena srednjeg prečnika zrna duž Dunava



(a) Tisa - promena srednjeg prečnika zrna duž Tise



(b) Sava - promena srednjeg prečnika zrna duž Save

Slika 63: Promena srednjeg prečnika zrna duž Tise i Save

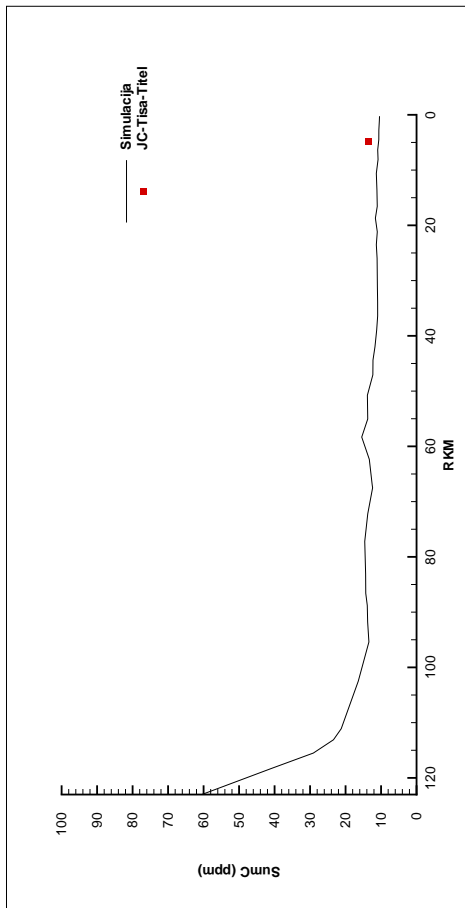
poprečnom preseku. Međutim, ova problematika spada u oblast ravanskog modelisanja, pa nije predmet razmatranja. Radi sticanja boljeg uvida u mogućnost matematičkog modela da reprodukuje osmotrene tendencije u mreži vodotoka na slici 62(a) je prikazano (mereno i računato) zasipanje duž toka Dunava po deonicama, izraženo u masi istaloženog ili erodovanog nanosnog materijala. Napominje se da tendencija koja se javlja u konkretnom poprečnom preseku može ukazivati na uniformno zasipanje (slika 89 (a), prilog I), uniformno erodovanje (slika 89 (c), prilog I) ili vremensku kombinaciju erodovanje i zasipanja (slika 89 (b), prilog I). U slučaju vremenski uniformnih tendencija može se očekivati da model reprodukuje ponašanje osmotreno na terenu, dok u slučaju vremenskog smenjivanja zasipanja i erodovanja to redovno nije slučaj. Na uzvodnom delu toka se primećuje naizmenično zasipanje i erodovanje, dok u presecima bližim brani dominira zasipanje. Model je takođe identifikovao deonicu Đerdapske klisure, odnosno lokaciju Velikog kazana i Malog kazana kao domene koji se nalaze „duboko” u akumulaciji ali nemaju izraženu tendenciju zasipanja. Dakle, konstatuje se da je razvijeni model sposoban da reprodukuje morfološke promene koje su identifikovane obradom merenih podataka.

Tokom numeričke simulacije je računat i srednji prečnik zrna nanosne mešavine aktivnog sloja, pa su na slikama 62 (b), (c) i (d) date merene i računane vrednosti ove veličine za razmatranu deonicu Dunava u poslednjoj godini razmatranog perioda. Pored zado-

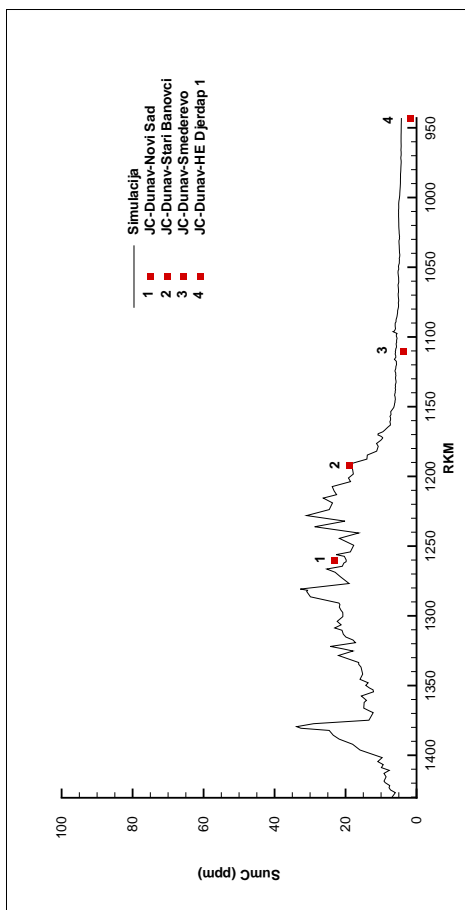
voljavajućeg slaganja merenih i računatih vrednosti uočava se jasna tendencija prisustva sitnijeg materijala u koritu kod kotline Donjeg Milanovca (oko rkm 1000) i neposredno uzvodno od brane. Ovo se poklapa sa tendencijama deponovanja na ovim deonicama. Takođe se na prikazanim rezultatima vidi početak Đerdapske klisure (oko rkm 1040) gde su računate veće vrednosti srednjeg prečnika, što je posledica velikih brzina strujanja vode. Na deonici Dunava uzvodno od Golubca ne postoji jasno izražena tendencija ali se može reći da srednji prečnici dobijeni iz merenja uglavnom upadaju između minimalne i maksimalne računate vrednosti. Na slici 63 su date računate i merene vrednosti srednjeg prečnika zrna nanosne mešavine za Tisu i Savu. U slučaju Tise se ne može konstatovati bilo kakva tendencija duž toka. Međutim može se tvrditi da simulacija daje vrednosti veoma bliske osmotrenim vrednostima. Duž Save simulirane vrednosti načelno ukazuju na smanjivanje srednjeg prečnika zrna duž toka uz napomenu da su i ovde merene vrednosti slične računatim.

Da bi se stekao dodatni uvid u tačnost rezultata numeričke simulacije na slici 64 su prikazane ukupne koncentracije suspendovanog nanosa duž toka Dunava, Tise i Save u proizvoljnom trenutku 2007. godine. Bitno je naglasiti da ovi rezultati sami po sebi ne predstavljaju karakterističnu ili nedvosmislenu tendenciju ponašanja nanosa, jer su prikazane vrednosti izuzetno neustaljenog karaktera, a prikazan je samo jedan vremenski trenutak. Međutim, na Dunavu se može primetiti tendencija smanjenja koncentracije suspendovanog nanosa u nizvodnom smeru što je u potpunosti potvrđeno merenim vrednostima. Navedeno je najverovatnije posledica uspora generisanog branom HE Đerdap 1. Na Tisi i Savi postoji samo po jedno merno mesto usled čega je nemoguće govoriti o bilo kakvoj tendenciji koja bi mogla biti opravdana merenim vrednostima. Bez obzira na ovo, slaganje merenja i računate vrednosti je zadovoljavajuće, a simulirane vrednosti u prikazanom trenutku pokazuju tendenciju opadanja koncentracije suspendovanog nanosa u nizvodnom smeru za obe reke. Na slici 81 u prilogu I su date ukupne koncentracije suspendovanog nanosa duž toka Dunava, Tise i Save u proizvoljnom trenutku 2008. godine.

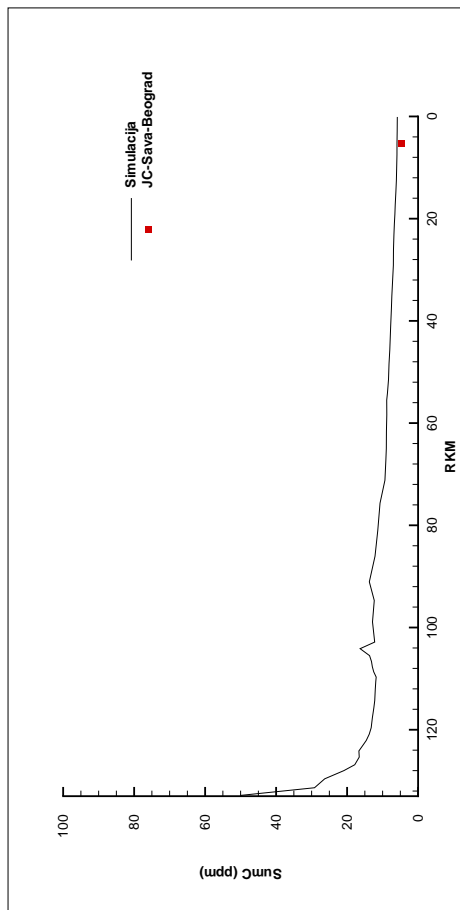
Jedna od osnovnih prednosti razvijenog matematičkog modela je mogućnost podele nanosne mešavine na proizvoljan broj granulometrijskih intervala (frakcija). Ovakav pristup omogućava formulisanje menanizama razmene mase između suspenzije i materijala u aktivnom sloju za svaku frakciju posebno. Usvojeni koncept omogućava da isti hidraulički uslovi prouzrokuju različito ponašanje za zrna nanosa različitih veličina. Model takođe omogućava proračun frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala u nanosnoj mešavini aktivnog sloja i svih podslojeva ispod njega. Prilikom implementacije modela za izučavanu mrežu vodotokova je napomenuto da je mešavina nanosa podeljena na deset granulometrijskih intervala (frakcija), uprkos činjenici da su sva raspoloživa merenja organizovana tako da daju samo ukupnu koncentraciju za mešavinu suspendovanog nanosa. Zbog toga su do sada svi rezultati prikazivani kao ukupne vrednosti koncentracija suspendovanog nanosa, i kao takvi su se koristili pri oceni valjanosti procesa kalibracije i verifikacije modela. U nastavku se daju rezultati raspodele koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i raspodela frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala u nanosnoj mešavini aktivnog sloja duž toka. Za dobijene rezultate se ne može sa sigurnošću utvrditi njihova ispravnost jer nema odgovarajućih merenja. Ipak, analizom rezultata i razmatranjem njihove fizičke opravdanosti se može doneti zaključak logičnosti izračunatih vrednosti, i na taj način doneti zaključak o kvalitativnoj oceni razvijenog modela. Osim toga, tokom analize rezultata se mogu uzeti u obzir srednje krive granulometrijskog sastava date u godišnjim izveštajima Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi”, (Knežević; Damjanović i Matović, 2009, 2010, 2011, 2012).



(b) Promena ukupne koncentracije duž Tise



(a) Promena ukupne koncentracije duž Dunava

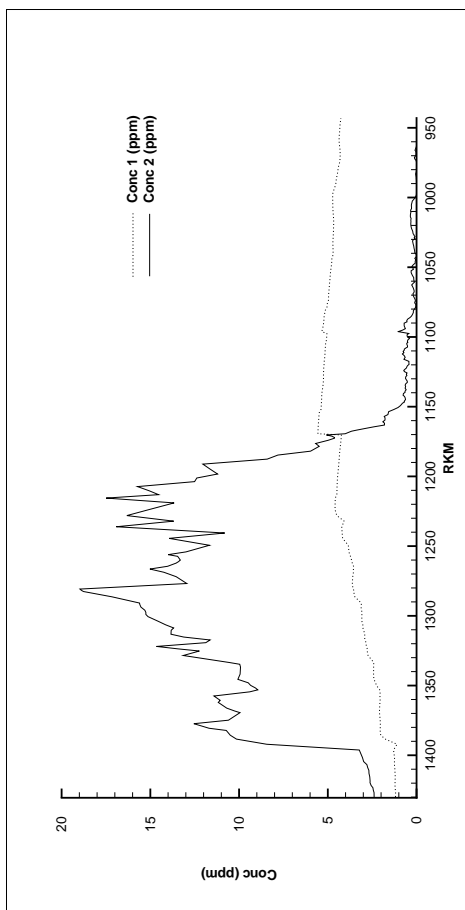


(c) Promena ukupne koncentracije duž Save

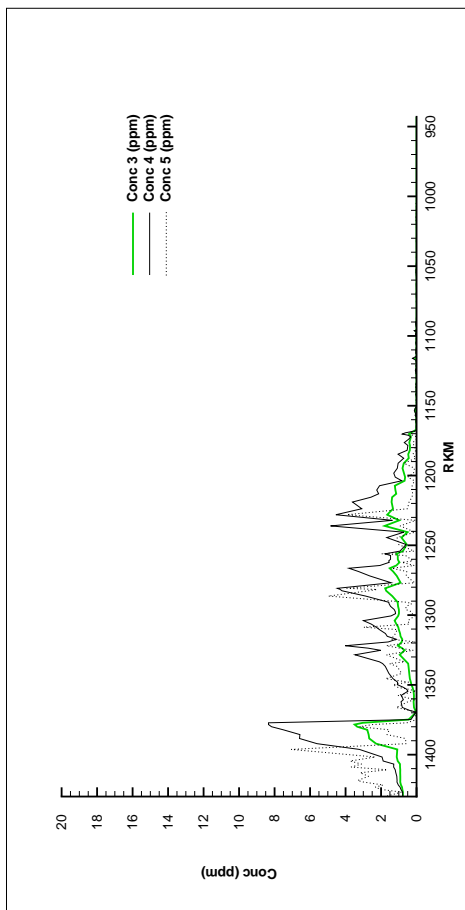
Slika 64: Promena ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u proizvodnjom trenutku 2007. godine

Na slici 65 su prikazane promene koncentracije suspendovanog nanosa i promene procentualnog udela pojedinih frakcija u nanosu na dnu duž Dunava za proizvoljan trenutak u 2007. godini. Prve dve frakcije su prikazane na slikama (a) i (c), a treća, četvrta i peta frakcija na slikama (b) i (d). Pre svega, bitno je naglasiti da ovi rezultati sami po sebi ne predstavljaju karakterističnu ili nedvosmisleno tendenciju ponašanja nanosa, jer su prikazane vrednosti izuzetno neustaljenog karaktera, a prikazan je samo jedan vremenski trenutak. Prvo se posmatraju rezultati za prve dve frakcije na osnovu kojih se primećuje da udeo najmanje frakcije suspendovanog nanosa raste od uzvodnog kraja prema nizvodnom. Istovremeno se sadržaj druge frakcije suspendovanog nanosa smanjuje. Tendencija za procentualni udeo prve i druge frakcije u sastavu dna pokazuje neuniformno povećanje u nizvodnom pravcu toka. Dobijeni rezultati su u načelnom skladu sa vrednostima datim na granulometrijskim krivama u godišnjim izveštajima Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi”, prema kojima je sadržaj prve frakcije u suspenziji najmanji na uzvodnom kraju i ima rastuću tendenciju u preseccima bližim brani. Takođe se podudaraju i rezultati u pogledu sastava dna, da je udeo manjih frakcija u mešavini nanosa na dnu veći uz branu. Poslednja konstatacija se može fenomenološki objasniti prisustvom uspora koji generiše brana Đerdap 1. Kako se suspendovani nanos prve frakcije približava brani, dubine se povećavaju što neposredno dovodi do smanjenja brzina i kinetičke energije toka, što se dovodi u vezu sa deponovanjem i sitnijih zrna nanosa iz suspenzije. Na osnovu granulometrijskih krivi datih u izveštajima Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi” i numerički rezultati u vezi sa frakcijama $k = 3$, $k = 4$ i $k = 5$ odgovaraju postojećim podacima. Naime, prema izveštajima je u suspenziji pronađeno prvih pet frakcija od kojih su koncentracije suspendovanog nanosa frakcija $k = 3$, $k = 4$ i $k = 5$ u smeru tečenja pokazale tendenciju opadanja. U pogledu mešavine nanosa na dnu se pokazalo da frakcija $k = 3$, $k = 4$ i $k = 5$ ima na dnu, što je takođe u skladu sa podacima datim u izveštajima autora Knežević; Damjanović i Matović (2009, 2010, 2011, 2012). Za frakcionu zastupljenost razmatranih granulometrijskih intervala duž toka se ne uočava jednoznačna tendencija. Na slici 66 (a) su prikazane promene koncentracija suspendovanog nanosa frakcija $k = 6$, $k = 7$, $k = 8$, $k = 9$ i $k = 10$. Od pomenutih se samo koncentracije suspendovanog nanosa za frakcije $k = 6$ i $k = 7$ javljaju u vidu suspenzije, i to isključivo u prvoj polovini modelisane deonice Dunava i u znatno manjim količinama zbog čega je njihov grafički prikaz dat u manjoj razmeri u odnosu na prethodne slike. Ovakvi rezultati su u skladu sa podacima Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi”. Procentualni udeo većih fracija ($k = 6$, $k = 7$, $k = 8$, $k = 9$ i $k = 10$) u mešavini nanosa na dnu je prikazan na slikama 66 (b) i (c). Numerička simulacija ukazuje na veće prisustvo krupnijih zrna nanosa (frakcije $k = 8$, $k = 9$ i $k = 10$) u aktivnom sloju u odnosu na nešto sitnija zrna (frakcije $k = 6$ i $k = 7$). Prikazani rezultati ne pokazuju prepoznatljivu tendenciju duž razmatrane deonice Dunava. Na slici 82 i 83 u prilogu I su prikazane promene koncentracije suspendovanog nanosa i promene procentualnog udela pojedinih frakcija u nanosu na dnu duž Dunava za proizvoljan trenutak u 2008. godini.

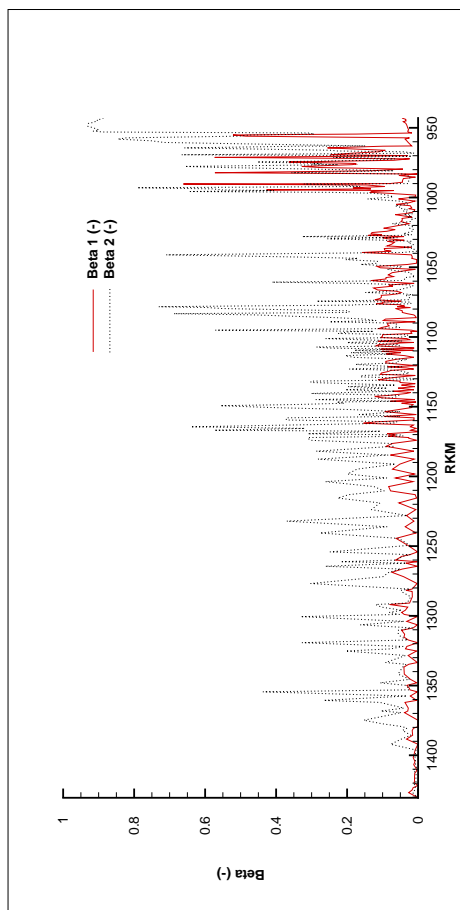
Promena koncentracija suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija u mešavini nanosa na dnu duž Tise za proizvoljni trenutak u 2007. godini je prikazana na slikama 67 i 68. Izveštaji Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi” sadrže granulometrijske krive za Tisu u preseku kod Titela. Na osnovu prosečnih vrednosti granulometrijskog sastava je očekivano da se u obliku suspendovanog nanosa javi prvih pet frakcija koncentracije suspendovanog nanosa, što je potvrđeno rezultatima proračuna. Promena koncentracije suspendovanog nanosa za frakcije $k = 1$ i $k = 2$ duž toka su prikazane na slici 67 (a), a za $k = 3$, $k = 4$ i $k = 5$ na slici 67 (b), odakle se vidi prisustvo ovih čestica u suspenziji. Prema rezultatima je sadržaj koncentracije suspendovanog nanosa



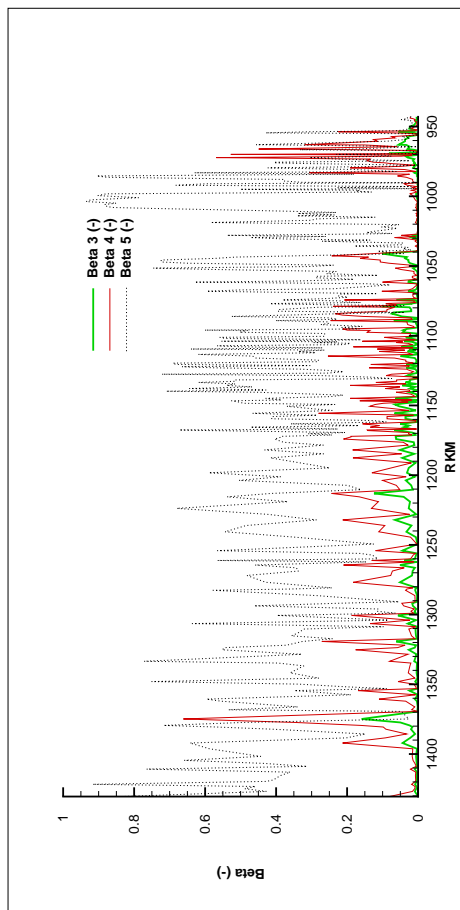
(a) Promena koncentracija C_1 i C_2 duž Dunava



(b) Promena koncentracija C_3 , C_4 i C_5 duž Dunava

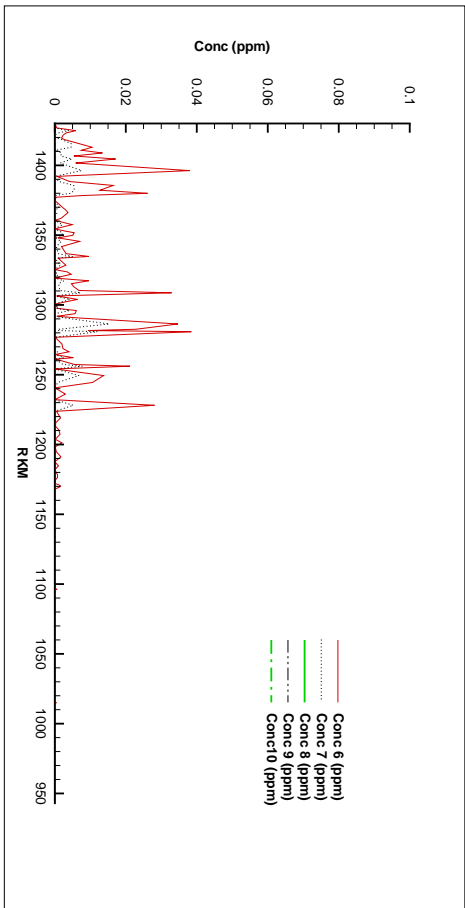
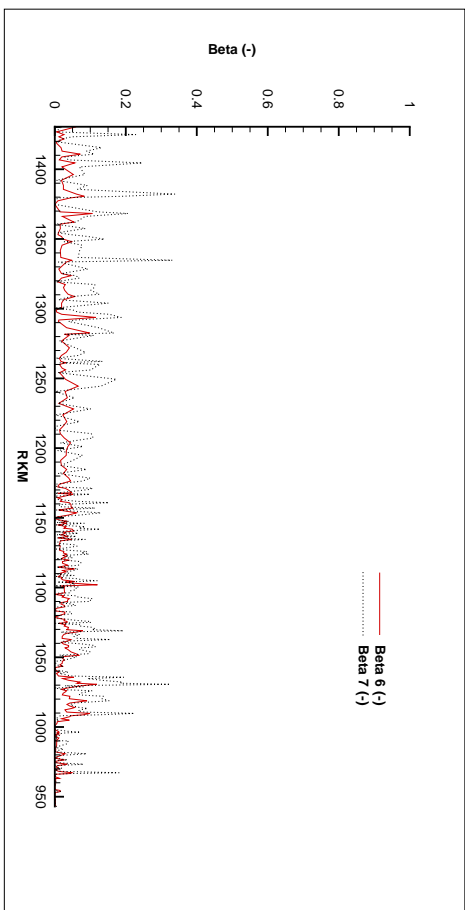
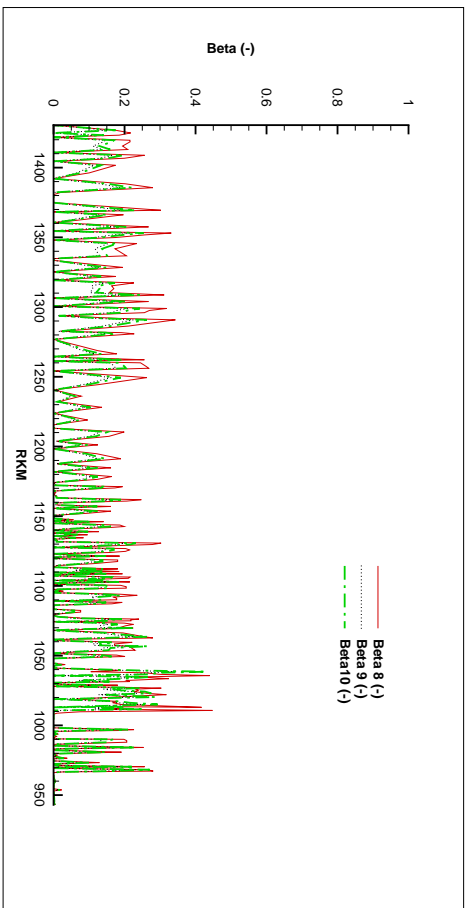


(c) Promena procentualnog udela frakcija β_1 i β_2 duž Dunava



(d) Promena procentualnog udela frakcija β_3 , β_4 i β_5 duž Dunava

Slika 65: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Dunava za 2007. godinu, 1. deo

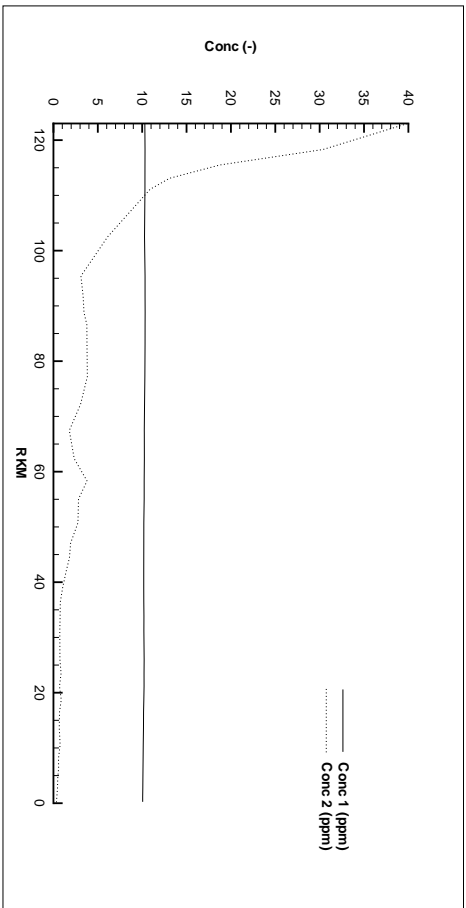
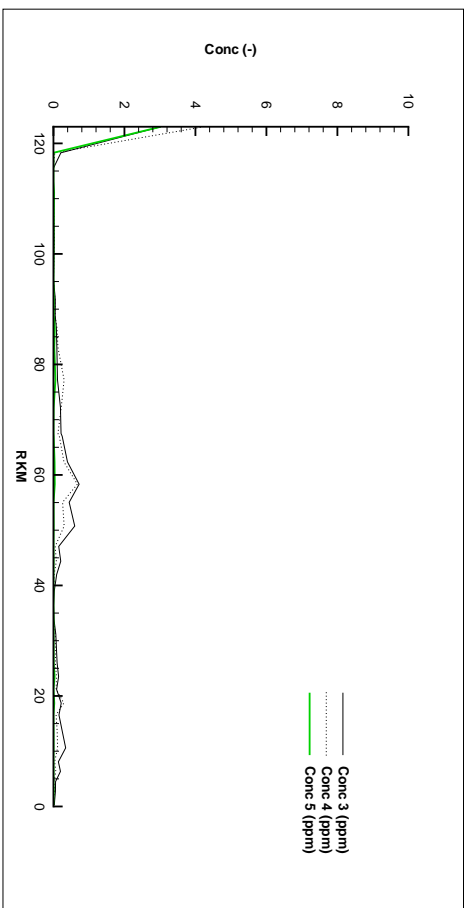
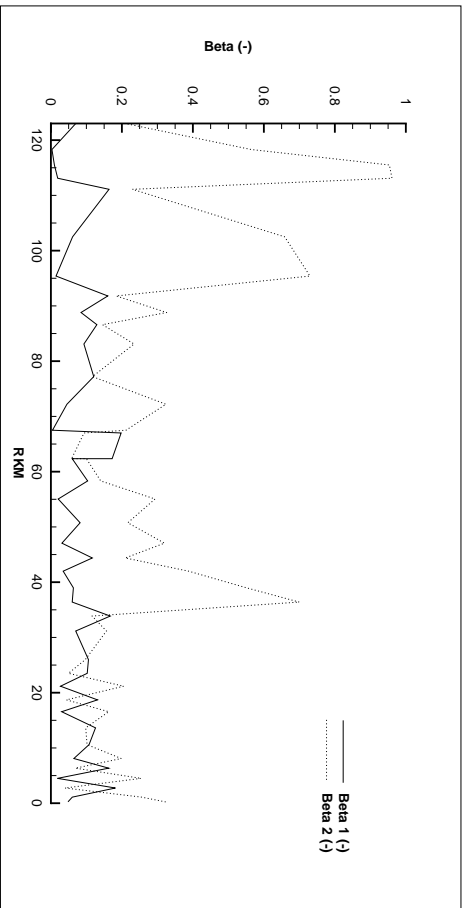
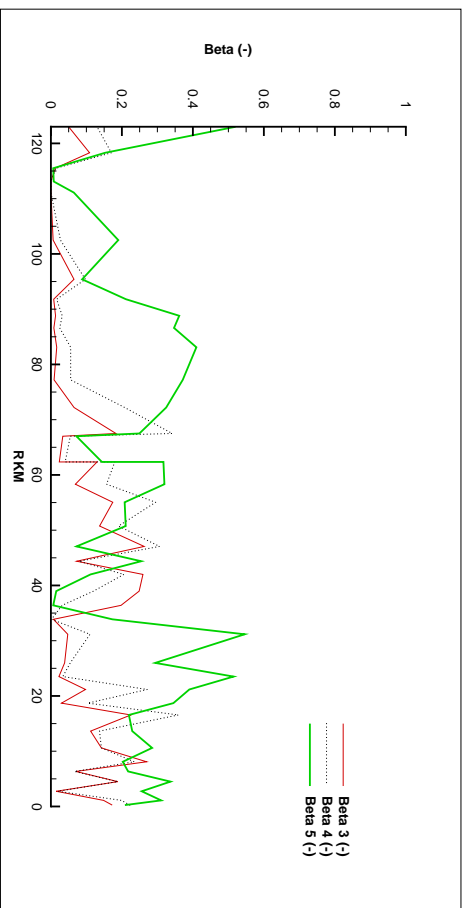
(a) Promena koncentracija C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , i C_{10} duž Dunava(b) Promena procentualnog udela frakcija β_6 i β_7 duž Dunava(c) Promena procentualnog udela frakcija β_8 , β_9 i β_{10} duž Dunava

Slika 66: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Dunava za 2007. godinu, 2. deo

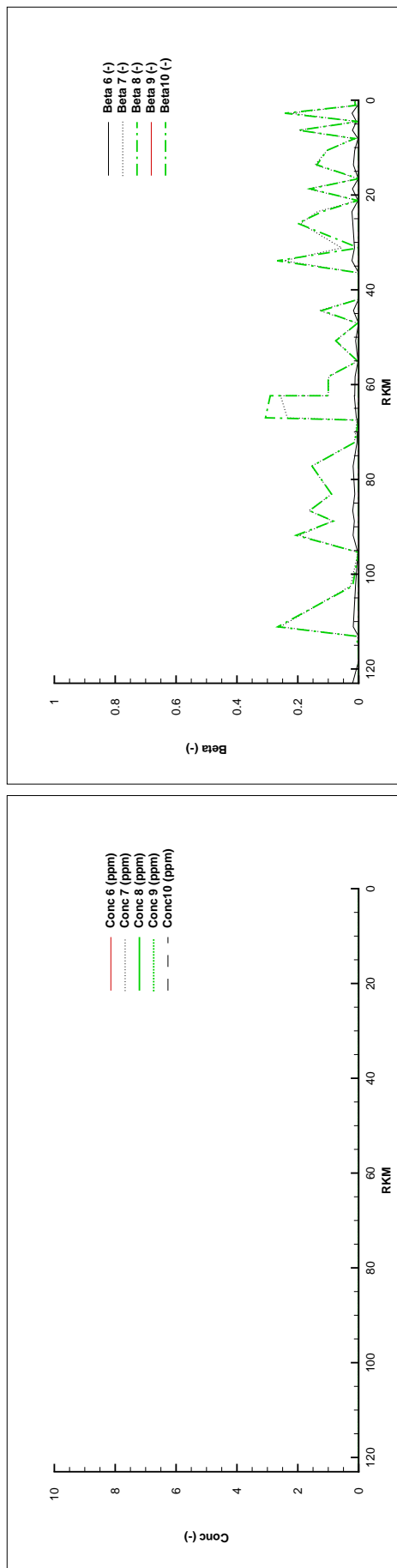
prve frakcije prilično jednolik duž toka, dok se za drugu frakciju uočava jednoznačno smanjenje u smeru tečenja. Promena koncentracija suspendovanog nanosa većih čestica ($k = 6$, $k = 7$, $k = 8$, $k = 9$ i $k = 10$) je prikazana na slici 68 (a) gde se vidi da pomenutih frakcija nema u suspenziji za razmatrani vremenski trenutak. Na osnovu rezultata promena procentualnog udela frakcija u mešavini nanosa na dnu duž toka, slike 67 (c) i (d) i 68 (b), može se zaključiti da sastav nanosnog materijala na dnu duž Tise ne pokazuje prepoznatljivu tendenciju. Na slikama 84 i 85 u prilogu I su prikazane promene koncentracija suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija u mešavini nanosa na dnu duž Tise za proizvoljni trenutak u 2008. godini.

Što se tiče granulometrijskog sastava nanosa duž toka Save, u izveštajima Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi” mogu da se nađu podaci o preseccima u okolini Beograda, i na samoj granici modela, kod Sremske Mitrovice. Na osnovu podataka se očekuje prisustvo prvih šest frakcija u suspenziji. Rezultati proračuna za proizvoljni trenutak u 2007. godini su prikazani na slikama 69 i 70. Za koncentracije prve dve frakcije (slika 69 (a)) se primećuje postepeno opadanje duž toka. Prisustvo frakcija $k = 3$, $k = 4$ i $k = 5$ (slika 69 (b)) je mnogo manje i ono takođe pokazuje opadajuću tendenciju, dok se frakcija $k = 6$ (slika 70 (a)) javlja sa jako malim vrednostima. Preostalih frakcija na osnovu rezultata proračuna nema u suspenziji, što je u skladu sa podacima datim u godišnjim izveštajima Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi”. Analizom rezultata proračuna procentualnog udela pojedinih frakcija u mešavini nanosa na dnu se primećuje da je granulometrijski sastav dna prilično neujednačen, pri čemu se ističe veći sadržaj pete frakcije, što je takođe u skladu sa podacima koji mogu da se nađu u izveštajima Instituta za Vodoprivredu „Jaroslav Černi”. Na slikama 86 i 87 u prilogu I su prikazane promene koncentracija suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija u mešavini nanosa na dnu duž Save za proizvoljni trenutak u 2008. godini.

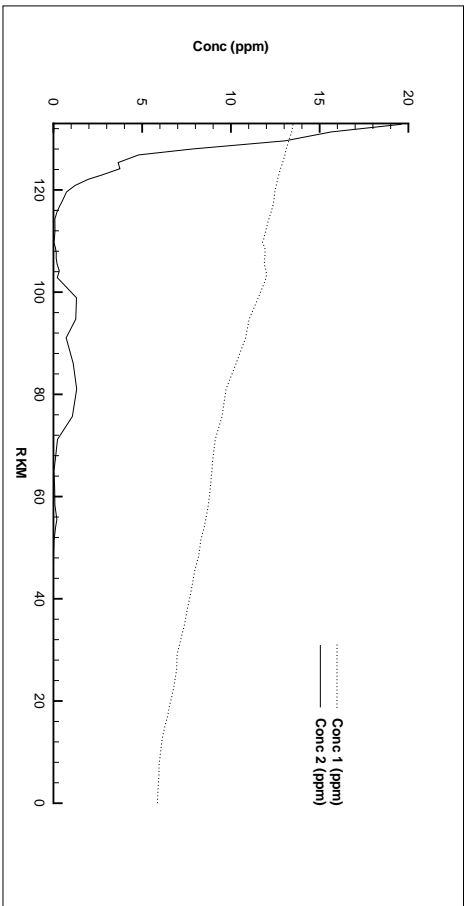
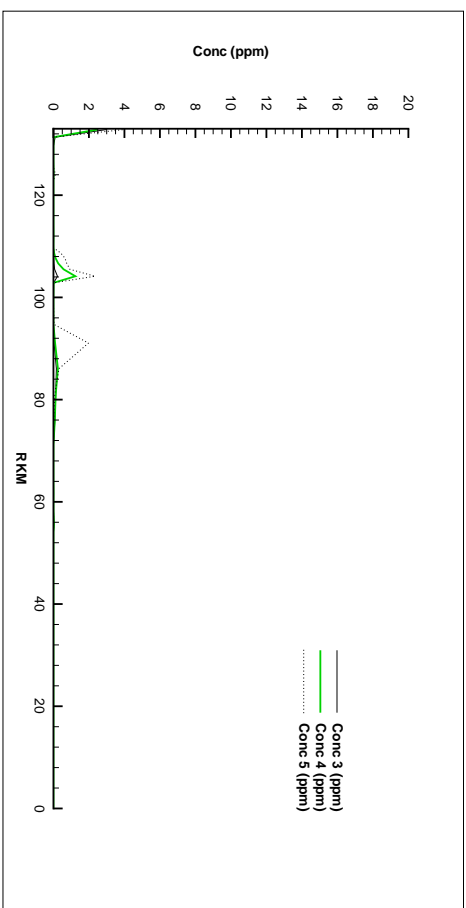
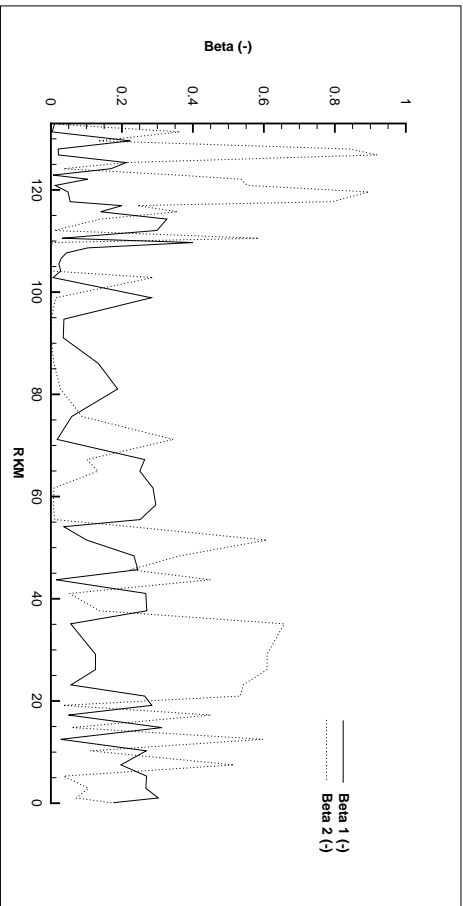
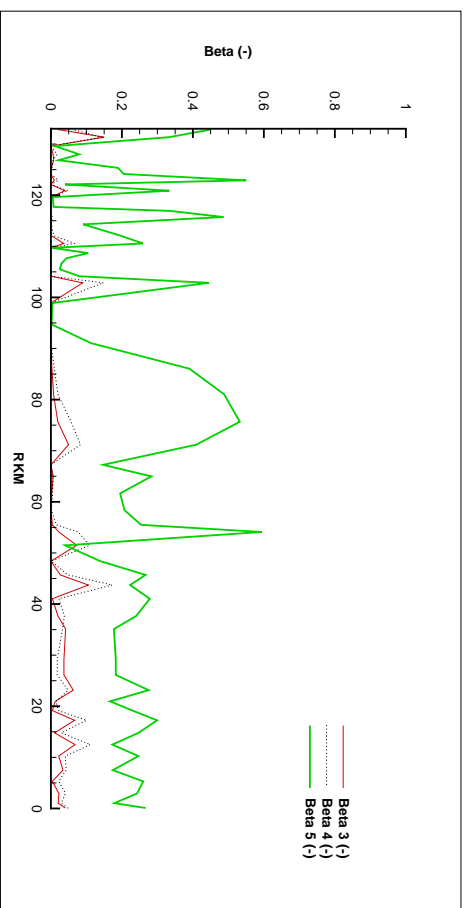
Na slici 71 su prikazane promene nivoa i promene kote dna (talvega) duž toka Dunava, Tise i Save. Primećuje se da je nagib linije nivoa na Dunavu veći na uzvodnom kraju i smanjuje se prema brani. Slična tendencija se primećuje na Savi, gde je nagib linije nivoa blaži prema ušću u Dunav. Diskontinuitet linije slobodne površine vode na Tisi je posledica brane kod Novog Bečeja, koja se u modelu javlja kao unutrašnji granični uslov pri hidrauličkom proračunu.

(a) Promena koncentracija C_1 i C_2 duž Tise(b) Promena koncentracija C_3 , C_4 i C_5 duž Tise(c) Promena procentualnog udela frakcija β_1 i β_2 duž Tise(d) Promena procentualnog udela frakcija β_3 , β_4 i β_5 duž Tise

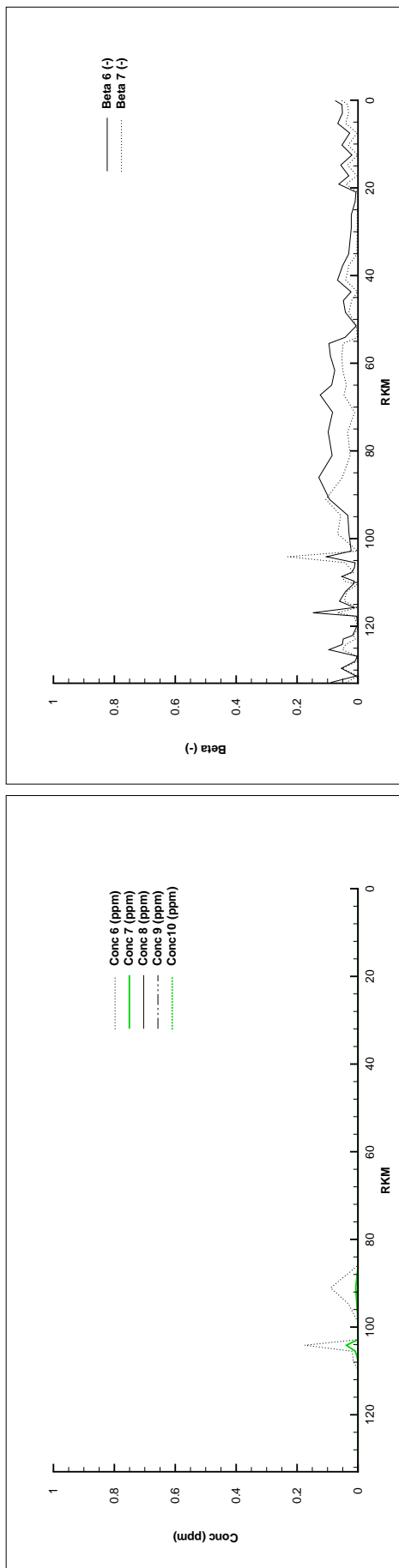
Slika 67: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Tise za 2007. godinu, 1. deo

(a) Promena koncentracija C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , i C_{10} duž Tise(b) Promena procentualnog udela frakcija β_6 , β_7 , β_8 , β_9 i β_{10} duž Tise

Slika 68: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Tise za 2007. godinu, 2. deo

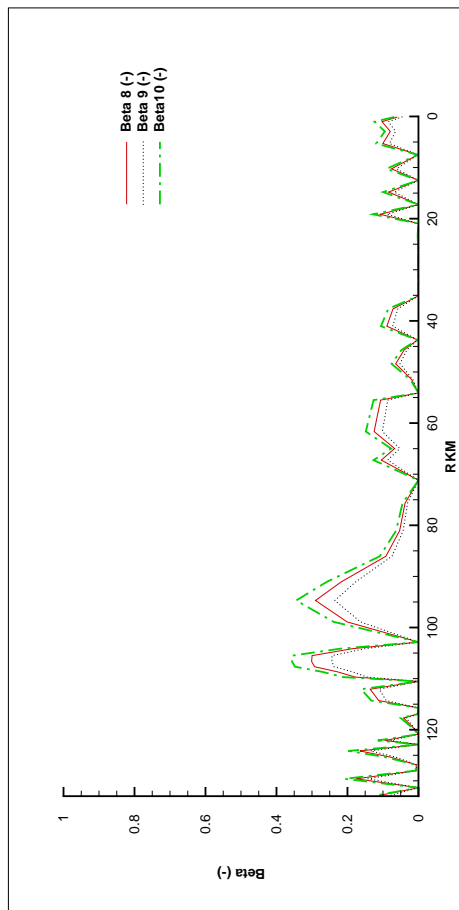
(a) Promena koncentracija C_1 i C_2 duž Save(b) Promena koncentracija C_3 , C_4 i C_5 duž Save(c) Promena procentualnog udela frakcija β_1 i β_2 duž Save(d) Promena procentualnog udela frakcija β_3 , β_4 i β_5 duž Save

Slika 69: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Save za 2007. godinu, 1. deo



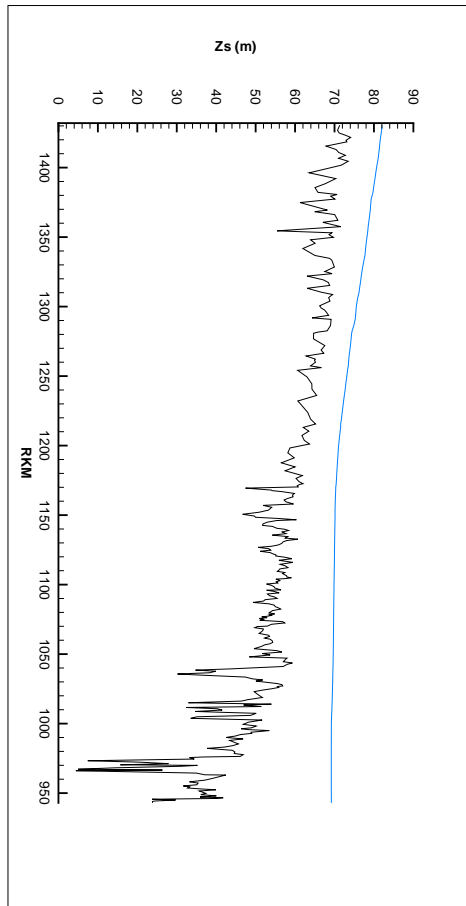
(a) Promena koncentracija C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , i C_{10} duž Save

(b) Promena procentualnog udela frakcija β_6 i β_7 duž Save

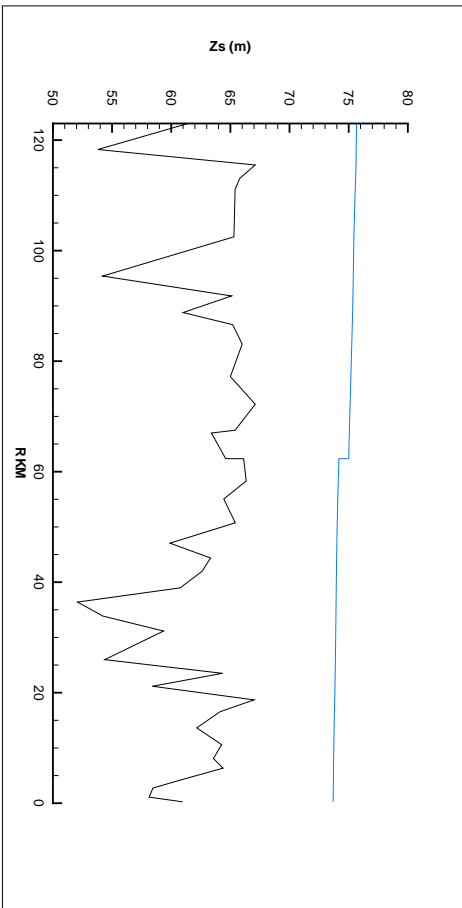


(c) Promena procentualnog udela frakcija β_8 , β_9 i β_{10} duž Save

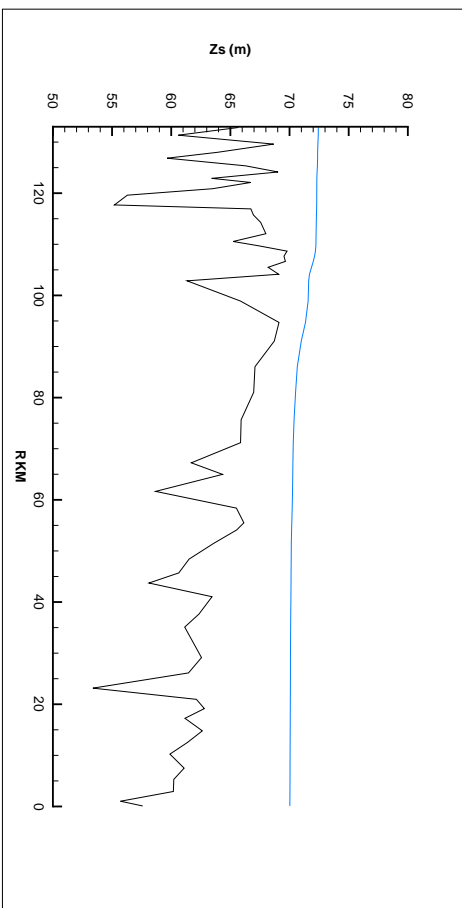
Slika 70: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Save za 2007. godinu, 2. deo



(a) Linija nivoa i talveg duž Dunava



(b) Linija nivoa i talveg duž Tise



(c) Linija nivoa i talveg duž Save

Slika 71: *Promena nivoa i talvega duž toka za 2007. godinu*

10. Zaključak

U radu su prikazani razvoj, testiranje, kalibracija i verifikacija linijskog modela neustaljenog strujanja vode, transporta nanosa i deformacije korita u granatoj mreži otvorenih tokova. Pregledom literature u poglavlju 2. su prikazani postojeći modeli i opšte prihvaćeni pravci u modelisanju razmatranih procesa. Takođe je napomenuto da je razvijenom modelu konceptualno najbliži model SEDICOUF čiji osnovni nedostatak proizilazi iz simultanog rešavanja jednačina strujanja i jednačina transporta nanosa, što ga čini izuzetno sporim (što su i sami autori Holly i Rahuel (1990a,b) naveli u radu kao manu). Sa ciljem uklanjanja ovog nedostatka, i dodatnog unapređenja na polju linijskih modela strujanja vode i transporta nanosa sa deformacijom korita, je razvijen model prikazan u ovom radu. Poboljšanja su ostvarena u sledećim oblastima:

- Hidraulički model je formulisan sa poboljšanim mogućnostima kalibracije u cilju mogućnosti simulacije velikog dijapazona proticaja sa zadovoljavajućim slaganjem računatih i osmotrenih nivoa slobodne površine vode.
- Formulisan je kompletan set parcijalnih diferencijalnih jednačina kojim se opisuje transport mešavine nanosa i morfološke promene korita koristeći koncept aktivnog sloja i podsloja za linijski koordinatni sistem.
- Primenom metode etapnog rešavanja advektivni član je računat metodom karakteristika sa lokalnim interpolacionim polinomom višeg reda. Razvijen algoritam podrazumeva mogućnost prostiranja trajektorije duž više računskih ćelija, što je rezultovalo u korišćenju većeg računskog koraka po vremenu.
- Formulisanje mehanizama razmene mase između suspenzije i materijala u aktivnom sloju za linijski model ponašanja mešavine nanosa, koji se zasniva na gradijentu koncentracije pri dnu.
- Formulisanje iterativne računске procedure proračuna nanosa u mreži prirodnih vodotoka zasnovane na zadovoljavanju jednačine kontinuiteta u čvorovima sistema.
- Algoritam za simuliranje transporta nanosa i deformacije korita u mreži otvorenih tokova omogućava (u matematičkom smislu) trajektorije koje se pri proračunu transporta suspendovanog nanosa protežu duž čitavih računskih deonica.

Doprinos teze se sastoji u unapređenju postojećih linijskih modela interakcije vode i nanosa u prirodnim vodotocima sa mešavinom nanosa različitih frakcija, kako u pogledu modelskog koncepta, tako i u pogledu numeričkog pristupa i algoritama, posebno u podoblasti nanosa pri dnu, na površini dna i u podpovršinskim slojevima, uključujući i mehanizme interakcije sa nanosom u suspenziji.

U poglavlju 3. su izvedene osnovne jednačine koje opisuju razmatrane procese i pretpostavke pod kojima ove jednačine važe. Analizom postojećih linijskih modela strujanja vode je pokazano da je primena *St. Venant*-ovih jednačina sa *Preissmann*-ovom šemom metode konačnih razlika opšte prihvaćen i testiran pristup u modelisanju strujanja vode u mreži otvorenih tokova. Veliki broj postojećih numeričkih modela raznih autora (Yang, 1986; Rahuel et al., 1989; Holly i Rahuel, 1990a,b; Clemmens i Holly, 1993; Nguyen i Kawano, 1995; Vieira i Wu, 2002a; Wu i Vieira, 2002; Fang et al., 2008; Islam et al., 2008; Brunner, 2010; Chen i Zhu, 2012) od samih početaka linijskih modela pa do danas se zasniva na ovim jednačinama. Iz tog razloga je u prikazanom radu za diskretizaciju *St. Venant*-ovih jednačina primenjena *Preissmann*-ova šema. Za model transporta nanosa

i deformacije korita se pokazala težnja autora da mešavinu nanosa u modelu predstave preko proizvoljnog broja frakcija. Pored toga, koncept aktivnog sloja u modelisanju nanosa na i pri dnu, kao i procesa razmene materijala sa dnom je jedan od vodećih pristupa obično prisutan kod složeinijih modela transporta mešavine nanosa i deformacije korita, (Spasojevic i Holly, 1990; Gessler et al., 1999; Yang i Simoes, 2008; Hung et al., 2009; Budinski, 2011). Diskretizacija i rešavanje izvedenih jednačina su prikazani u poglavlju 4. Jednačine transporta suspendovanog nanosa su rešene primenom metode etapnog rešavanja gde se polazne jednačine mešovitog matematičkog karaktera rešavaju u dva uzastopna koraka, advektivnom i difuzionom koraku. Ovime je omogućeno da se obe grupe jednačina rešavaju metodom koja je najpogodnija za dati tip jednačine. Jednačine difuzionog koraka ne izazivaju značajnije numeričke probleme i rešavane su *Crank-Nicholson*-ovom šemom metode konačnih razlika. Sa druge strane, za jednačine advektivnog koraka je poznato da se prilikom njihovog numeričkog rešavanja javljaju numeričke oscilacije koje izazivaju nestabilnost rešenja, i numerička difuzija koju je kasnije nemoguće razlikovati od stvarne difuzije (Isic et al., 2013). Zbog toga je rešavanje jednačina advektivnog koraka analizirano primenom raznih šema metode konačnih razlika i metodom karakteristika (poglavlje 6.2.) gde je ustanovljeno da metoda karakteristika daje najbolje rezultate od razmatranih metoda, i primenjena je za rešavanje jednačine advektivnog koraka u razvijenom numeričkom modelu. S' obzirom da je tačnost ove metode uslovljena primenjenom interpolacijom, u modelu je usvojen *Holly-Preissmann*-ov kubni interpolacioni polinom za koji je u poglavlju 6.2. potvrđeno da daje bolje rezultate od drugih tipova interpolacije. Sam postupak rešavanja sistema jednačina, koje opisuju procese transporta nanosa i deformacije korita, je formulisano tako da se jednačine simultano rešavaju za jednu računsku tačku. Ovime se značajno smanjuje trajanje proračuna u odnosu na neke postojeće modele jer nema invertovanja velikih matrica.

Nakon izvođenja i numeričkog rešenja jednačina strujanja vode, transporta nanosa i deformacije korita, se prešlo na formiranje programskog koda. Kratak opis podprograma i šematski prikaz razvijenog modela su dati u poglavlju 5. Razvijen programski kod je testiran na šematskim primerima (poglavlje 6.) sa ciljem eliminacije potencijalnih grešaka i nelogičnosti. Pošto je ustanovljeno da su kvalitativni rezultati modela u skladu sa očekivanim ponašanjem, prešlo se na testiranje modela na realnom primeru. Za realan primer je odabrana deonica Dunava u Srbiji od granice sa Mađarskom, u Bezdanu, do brane HE Đerdap 1, sa glavnim pritokama Savom od Sremske Mitrovice, Tisom od Sente i Velikom Moravom od Ljubićevskog mosta. Definisane oblasti modela je zahtevalo sprovođenje detaljnog pregleda raspoloživih podataka vezanih za morfologiju korita i podataka neophodnih za definisanje graničnih uslova i kontrolnih preseka. Poglavlje 7. daje pregled raspoloživih merenja morfologije, proticaja, nivoa, pronosa nanosa i srednjih profilskih koncentracija. Analizom podataka je pokazano da se manje pritoke poput Porečke, Peka, Nere, Mlave, Tamiša i Kolubare ne mogu uključiti u konačan model jer na njima nema podataka za definisanje graničnih uslova tokom proračuna transporta nanosa. Na Velikoj Moravi postoje merenja koncentracija suspendovanog nanosa koje je obezbedilo Privredno Društvo „Hidroelektrane Đerdap” D.O.O., koji su dovoljni za zadavanje graničnih uslova, međutim nema dodatnog preseka sa merenjima koncentracija suspendovanog nanosa koji bi služio za upoređivanje računatih i merenih vrednosti koncentracija. Na ostalim deonicama su Republički Hidrometeorološki Zavod Srbije i Privredno Društvo „Hidroelektrane Đerdap” D.O.O. obezbedili dovoljan broj podataka da se definišu granični uslovi za hidraulički proračun i proračun transporta nanosa i deformacije korita, kao i kontrolni preseki za kalibraciju i verifikaciju razvijenog numeričkog modela. Nakon definisanja morfologije, početnih i graničnih uslova, razvijen model je

kalibrisan. Kalibracija modela je prikazana u poglavlju 8., a rađena je u dve faze. U prvoj fazi je kalibrisan hidraulički model za šta su razmotrena dva pristupa. Prvi pristup se zasniva na kalibraciji modela zadavanje *Manning*-ovog koeficijenta kao funkcije od proticaja. Mada se pokazalo da kalibracija ovim putem daje dobra slaganja nivoa sa merenjima, zbog zahtevnosti ovakvog pristupa se razmotrio drugi pristup, kalibracija zadavanjem apsolutne hrapavosti. Nakon razmatranja drugog pristupa se pokazalo da se na ovaj način mogu dobiti jednako dobri rezultati sa mnogo manje pripreme, jer ovaj pristup ne podrazumeva zadavanje funkcije koeficijenta hrapavosti i proticaja, već samo jedne vrednosti hrapavosti u svakom preseku. Nakon kalibracije hidrauličkog modela je puštena simulacija za godinu dana sa ciljem njegove preliminarne verifikacije. Pošto je pokazano da je slaganje merenih i računatih nivoa zadovoljavajuće pristupilo se kalibraciji modela transporta nanosa. Model transporta nanosa i deformacije korita je kalibrisan zadavanjem rastojanja od dna na kojem se nalaze koncentracije merodavne za proračun erozije i deponovanja. Imajući u vidu dužinu modelisane oblasti, model je korigovan kako bi se obezbedila korekcija ovog parametra u računskim tačkama, što je neophodno sa obzirom na različite karaktere deonica u uzvodnom delu Dunava u odnosu na deonice bliže brani. Za kalibraciju modela je izabran period od godinu dana kako bi se obuhvatile i godišnje varijacije koncentracije suspendovanog nanosa. Mešavina zrna nanosa različitih veličina je predstavljena deljenjem na ukupno deset frakcija, što se zadržalo tokom svih proračuna. Mada u raspoloživim merenjima nema podele mešavine nanosa po veličini zrna, za ocenu ispravnosti su rezultati merenja upoređeni sa ukupnom koncentracijom suspendovanog nanosa koja se dobija sabiranjem koncentracija svih deset frakcija. Ovakav pristup obezbeđuje tačniju reprezentaciju procesa jer se tokom proračuna uzima u obzir i veličina zrna nanosa koja direktno utiče na njegovo ponašanje u datim hidrauličkim uslovima.

Verifikacija kompletnog modela je sprovedena puštanjem dugoročne simulacije od 01.01.2006. do 31.12.2010. godine. Za ocenu tačnosti rezultata su korišćeni preseki sa postojećim merenjima proticaja, nivoa i koncentracija suspendovanog nanosa u kojima su upoređeni rezultati proračuna sa postojećim merenjima. Na osnovu dobijenih rezultata je zaključeno da model može verodostojno da simulira strujanje vode i transport nanosa u mreži otvorenih tokova za duže vremenske periode (poglavlje 9.). Pošto je u pregledu postojećih merenja pokazano da na većem delu Dunava postoje dve serije merenja morfologije, testiran je i model deformacije korita, upoređivanjem promene površine poprečnog preseka koja nastaje između početka i kraja simuliranog perioda. Promena površine poprečnog preseka je predstavljena u vidu zasipanja, odnosno pozitivne promene su pokazatelj zasipanja koje izaziva smanjenje poprečnog preseka, a negativne vrednosti su znak erozije odnosno povećanja površine poprečnog preseka. Pokazalo se da je slaganje između računatih i merenih vrednosti zasipanja bolje u delovima toka bliže brani, što je posledica primenjenih podataka. Naime, merenja morfologije bliže brani su iz 2006. godine, dok su merenja morfologije na uzvodnijem delu iz 2005. godine. Kako drugih podataka nije bilo, u proračun su uzeta merenja iz 2005. godine, čime je uneta greška. Drugi razlog za odstupanje u rezultatima je činjenica da razvijeni model u svakom poprečnom preseku računa jednu prosečnu vrednost promene kote dna, odnosno, proračun ne dozvoljava promenu oblika poprečnog preseka nego samo njegovo translatorno podizanje ili spuštanje, što nije u skladu sa stvarnim fizičkim procesima.

Konačno se može zaključiti da je razvijen numerički model za simulaciju linijskog modela strujanja vode, transporta nanosa i deformacije korita u mreži aluvijalnih tokova sposoban verodostojno da reprodukuje strujnu sliku i transportne procese. Osim toga, prednost postojećeg modela se ogleda u većoj efikasnosti u odnosu na model sličnih karak-

teristika SEDICOUP. Imajući u vidu rezultate verifikacije modela, dalje istraživanje bi trebalo da se orijentiše na poboljšanje modela deformacije korita. Rezultati modela bi mogli da se unaprede sa modifikacijama numeričkog modela tako da se omogući promena poprečnog preseka korita. Osim toga, tačnost rezultata proračuna direktno zavisi od tačnosti podataka. Prilikom izrade rada se nedostatak podataka na granicama modela prevazišao definisanjem funkcija pronosa nanosa i proticaja na uzvodnim granicama. Radi postizanja boljih slaganja rezultata modela sa merenjima je neophodno obezbediti kontinualne i konzistentne granične uslove, ili putem učestalijih, kontinualnih merenja u dužim vremenskim intervalima, ili uspostavljanjem boljeg pristupa za definisanje podataka na granicama. Takođe se preporučuje razvijanje numeričkog modela za transport nekonzervativne zagađujuće materije u mreži prirodnih vodotokova. Istraživanje u ovom smeru bi omogućilo formiranje linijskog matematičkog modela koji bi bio u stanju da pored dugoročnih simulacija strujanja i transporta nanosa sprovodi i proračune kvaliteta vode i nanosa.

Prilog A Koeficijenti jednačina tečenja

Koeficijenti jednačine kontinuiteta

Koeficijenti jednačine kontinuiteta (4.54) su

$$A = \frac{\psi}{\Delta t} m b_{i+1}^{n+1}, \quad B = \frac{\theta}{\Delta x'}, \quad C = -\frac{(1-\psi)}{\Delta t} m b_i^{n+1}, \quad D = \frac{\theta}{\Delta x'},$$

$$G = -\psi \frac{m A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n}{\Delta t} - (1-\psi) \frac{m A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t} - \theta \frac{m Q_{i+1}^{n+1} - m Q_i^{n+1}}{\Delta x'} - (1-\theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x'},$$

gde je $\Delta x' = -\Delta x$. Uvrštanjem diskretizovanih članova dinamičke jednačine u polaznu parcijalnu diferencijalnu jednačinu (3.16) se dobija sledeća jednačina

$$\psi \cdot \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} + (1-\psi) \cdot \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + FALPHA \cdot FQDIVA \cdot QDELX + FQSA \cdot ALDELX$$

$$- FALPHA \cdot FQSAS \cdot ADELX + g \cdot FA \cdot ZDELX + g \cdot FA \cdot SFRICT = 0$$

Koeficijenti dinamičke jednačine

Izvodi potrebni za određivanje koeficijenata dinamičke jednačine su

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \right|_m = \frac{g \cdot \theta}{\Delta x'} \cdot FA,$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial A_{i+1}^{n+1}} \right|_m = -\theta \cdot \frac{m Q_{i+1}^{n+1}}{(m A_{i+1}^{n+1})^2} \cdot FALPHA \cdot QDELX - \frac{\theta}{4 \cdot \Delta x'} \cdot FALPHA \cdot FQDIVA +$$

$$+ \frac{\theta}{2} \cdot \frac{m Q_{i+1}^{n+1}}{(m A_{i+1}^{n+1})^2} \cdot \left(\frac{m Q_i^{n+1}}{m A_i^{n+1}} + \frac{m Q_{i+1}^{n+1}}{m A_{i+1}^{n+1}} \right) \cdot FALPHA \cdot ADELX -$$

$$- \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(m Q_{i+1}^{n+1})^2}{(m A_{i+1}^{n+1})^2} \cdot ALDELX + \frac{g \cdot \theta}{2} \cdot ZDELX + \frac{g \cdot \theta}{2} \cdot SFRICT,$$

$$\left. \frac{\partial A_{i+1}^{n+1}}{\partial Z_{i+1}^{n+1}} \right|_m = m b_{i+1}^{n+1},$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{i+1}^{n+1}} \right|_m = \frac{\theta}{2} \cdot FQDIVA \cdot QDELX - \frac{\theta}{2} \cdot FQSAS \cdot ADELX + \frac{\theta}{\Delta x'} \cdot FQSA,$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial K_{i+1}^{n+1}} \right|_m = -2 \cdot g \cdot \theta \cdot \beta \cdot FA \cdot \left(\frac{m Q_{i+1}^{n+1} \cdot |m Q_{i+1}^{n+1}|}{(m K_{i+1}^{n+1})^3} \right).$$

Primenom *Strickler*-ove formule je $(C_f)_{i+1}^{n+1} = (n_{str})_{i+1}^{n+1}$, pa je izvod

$$\left. \frac{\partial K_{i+1}^{n+1}}{\partial (n_{str})_{i+1}^{n+1}} \right|_m = \frac{(m A_{i+1}^{n+1})^{5/3}}{(m O_{i+1}^{n+1})^{2/3}},$$

uz napomenu da je veza *Strickler*-ovog i *Manning*-ovog koeficijenta

$$n_{str} = \frac{1}{n_{man}}.$$

Ako se koristi *Darcy-Weisbach*-va formula onda je $(C_f)_{i+1}^{n+1} = f_{i+1}^{n+1}$, a izvod je

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial K_{i+1}^{n+1}}{\partial f_{i+1}^{n+1}} \right|_m &= -\frac{\sqrt{8 \cdot g}}{2} \cdot \frac{(m A_{i+1}^{n+1})^{3/2}}{(m O_{i+1}^{n+1})^{1/2}} \cdot (m f_{i+1}^{n+1})^{-3/2} = -\sqrt{\frac{2 \cdot g}{m O_{i+1}^{n+1}} \cdot \left(\frac{m A_{i+1}^{n+1}}{m f_{i+1}^{n+1}} \right)^3}. \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} \right|_m &= \frac{\psi}{\Delta t} + \frac{\theta}{m A_{i+1}^{n+1}} \cdot FALPHA \cdot QDELX + \frac{2 \cdot \theta}{\Delta x'} \cdot FALPHA \cdot FQDIVA - \\ &\quad - \frac{\theta}{2 \cdot m A_{i+1}^{n+1}} \cdot \left(\frac{m Q_i^{n+1}}{m A_i^{n+1}} + \frac{m Q_{i+1}^{n+1}}{m A_{i+1}^{n+1}} \right) \cdot FALPHA \cdot ADELX + \\ &\quad + \theta \cdot \frac{m Q_{i+1}^{n+1}}{m A_{i+1}^{n+1}} \cdot ALDELX + g \cdot FA \cdot 2 \cdot \theta \cdot \beta \cdot \frac{|m Q_{i+1}^{n+1}|}{(m K_{i+1}^{n+1})^2}. \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial K_i^{n+1}} \right|_m &= -2 \cdot g \cdot FA \cdot \theta \cdot (1 - \beta) \cdot \left(\frac{m Q_i^{n+1} \cdot |m Q_i^{n+1}|}{(m K_i^{n+1})^3} \right) \end{aligned}$$

Primenom *Strickler*-ve formule je $(C_f)_i^{n+1} = (n_{str})_i^{n+1}$ pa je izvod

$$\left. \frac{\partial K_i^{n+1}}{\partial (n_{str})_i^{n+1}} \right|_m = \frac{(m A_i^{n+1})^{5/3}}{(m O_i^{n+1})^{2/3}},$$

a primenom *Darcy-Weisbach*-ovog izraza je

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial K_i^{n+1}}{\partial f_i^{n+1}} \right|_m &= -\frac{\sqrt{8 \cdot g}}{2} \cdot \frac{(m A_i^{n+1})^{3/2}}{(m O_i^{n+1})^{1/2}} \cdot (m f_i^{n+1})^{-3/2} = -\sqrt{\frac{2 \cdot g}{m O_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{m A_i^{n+1}}{m f_i^{n+1}} \right)^3}. \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i^{n+1}} \right|_m &= \frac{\theta}{2} \cdot FQDIVA \cdot QDELX - \frac{\theta}{2} \cdot FQSAS \cdot ADELX - \frac{\theta}{\Delta x'} \cdot FQSA \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial A_i^{n+1}} \right|_m &= \frac{m Q_i^{n+1}}{(m A_i^{n+1})^2} \cdot FALPHA \cdot \left[-\theta \cdot QDELX + \frac{\theta}{2} \cdot \left(\frac{m Q_i^{n+1}}{m A_i^{n+1}} + \frac{m Q_{i+1}^{n+1}}{m A_{i+1}^{n+1}} \right) \cdot ADELX \right] + \\ &\quad + \frac{\theta}{\Delta x'} \cdot FALPHA \cdot FQSAS - \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(m Q_i^{n+1})^2}{(m A_i^{n+1})^2} \cdot ALDELX + \\ &\quad + \frac{g \cdot \theta}{2} \cdot ZDELX + \frac{g \cdot \theta}{2} \cdot SFRICT. \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial Z_i^{n+1}} \right|_m &= -\frac{g \cdot \theta}{\Delta x'} \cdot FA \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial Q_i^{n+1}} \right|_m &= \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} + FALPHA \cdot \left[\frac{\theta}{m A_i^{n+1}} \cdot QDELX - \frac{\theta}{\Delta x'} \cdot FQDIVA \right] + \\ &\quad + ALDEX \cdot \left[-\frac{\theta}{2 \cdot m A_i^{n+1}} \cdot FALPHA \cdot \left(\frac{m Q_i^{n+1}}{m A_i^{n+1}} + \frac{m Q_{i+1}^{n+1}}{m A_{i+1}^{n+1}} \right) + \theta \cdot \frac{m Q_i^{n+1}}{m A_i^{n+1}} \right] + \\ &\quad + 2 \cdot g \cdot FA \cdot \theta \cdot (1 - \beta) \cdot \frac{|m Q_i^{n+1}|}{(m K_i^{n+1})^2} \\ \left. \frac{\partial A_i^{n+1}}{\partial Z_i^{n+1}} \right|_m &= b_i^{n+1} \end{aligned}$$

Vrednosti izvoda $\left. \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial Z^{n+1}} \right|_m$, $\left. \frac{\partial K^{n+1}}{\partial Z^{n+1}} \right|_m$, i $\left. \frac{\partial (C_f)^{n+1}}{\partial Q^{n+1}} \right|_m$ u tačkama i i $i+1$ se određuju numerički.

U nastavku se navode oznake korišćene u prethodnim izrazima.

$$\begin{aligned}
FALPHA &= 0.5 \cdot [\theta \cdot (\alpha_i^{n+1} + \alpha_{i+1}^{n+1}) + (1-\theta) \cdot (\alpha_i^n + \alpha_{i+1}^n)] \\
FQDIVA &= \theta \cdot \left(\frac{{}^m Q_i^{n+1}}{{}^m A_i^{n+1}} + \frac{{}^m Q_{i+1}^{n+1}}{{}^m A_{i+1}^{n+1}} \right) + (1-\theta) \cdot \left(\frac{{}^m Q_i^n}{{}^m A_i^n} + \frac{{}^m Q_{i+1}^n}{{}^m A_{i+1}^n} \right) \\
QDELX &= \frac{\theta}{\Delta x'} \cdot ({}^m Q_{i+1}^{n+1} - {}^m Q_i^{n+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x'} \cdot ({}^m Q_{i+1}^n - {}^m Q_i^n) \\
FQSAS &= \frac{\theta}{4} \cdot \left(\frac{{}^m Q_i^{n+1}}{{}^m A_i^{n+1}} + \frac{{}^m Q_{i+1}^{n+1}}{{}^m A_{i+1}^{n+1}} \right)^2 + \frac{(1-\theta)}{4} \cdot \left(\frac{{}^m Q_i^n}{{}^m A_i^n} + \frac{{}^m Q_{i+1}^n}{{}^m A_{i+1}^n} \right)^2 \\
ADELX &= \frac{\theta}{\Delta x'} \cdot ({}^m A_{i+1}^{n+1} - {}^m A_i^{n+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x'} \cdot ({}^m A_{i+1}^n - {}^m A_i^n) \\
FQSA &= 0.5 \cdot \left[\theta \cdot \left(\frac{({}^m Q_i^{n+1})^2}{{}^m A_i^{n+1}} + \frac{({}^m Q_{i+1}^{n+1})^2}{{}^m A_{i+1}^{n+1}} \right) + (1-\theta) \cdot \left(\frac{({}^m Q_i^n)^2}{{}^m A_i^n} + \frac{({}^m Q_{i+1}^n)^2}{{}^m A_{i+1}^n} \right) \right] \\
ALDELX &= [\theta \cdot (\alpha_{i+1}^{n+1} - \alpha_i^{n+1}) + (1-\theta) \cdot (\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n)] \cdot \frac{1}{\Delta x'} \\
ZDELX &= [\theta \cdot ({}^m Z_{i+1}^{n+1} - {}^m Z_i^{n+1}) + (1-\theta) \cdot ({}^m Z_{i+1}^n - {}^m Z_i^n)] \cdot \frac{1}{\Delta x'} \\
FA &= 0.5 \cdot [\theta \cdot ({}^m A_i^{n+1} + {}^m A_{i+1}^{n+1}) + (1-\theta) \cdot ({}^m A_i^n + {}^m A_{i+1}^n)] \\
SFRICT &= \theta \cdot \left[\beta \cdot \left(\frac{{}^m Q_{i+1}^{n+1} \cdot |{}^m Q_{i+1}^{n+1}|}{{}^m K_{i+1}^{n+1}} \right) + (1-\beta) \cdot \left(\frac{{}^m Q_i^{n+1} \cdot |{}^m Q_i^{n+1}|}{{}^m K_i^{n+1}} \right) \right] + \\
&\quad + (1-\theta) \cdot \left[\beta \cdot \left(\frac{{}^m Q_{i+1}^n \cdot |{}^m Q_{i+1}^n|}{{}^m K_{i+1}^n} \right) + (1-\beta) \cdot \left(\frac{{}^m Q_i^n \cdot |{}^m Q_i^n|}{{}^m K_i^n} \right) \right]
\end{aligned}$$

Prilog B Simultano rešavanje jednačina- Izvodi

Izvodi za globalnu jednačinu održanja mase nanosa na dnu - F1

Pronos vučenog nanosa po jedinici širine se u pogledu nepoznatih vezanih za nanos računa sa vrednostima iz predhodnog vremenskog nivoa, pa se ne javlja u izvodima. Oznake za vreme i iteraciju izvoda su označene samo kod prvog člana radi preglednosti.

$$\begin{aligned}
{}^m \left[\frac{\partial F1}{\partial z_b} \right]^{n+1} &= \frac{\rho_s \cdot (1-p)}{\Delta t} + \frac{\partial F1}{\partial E_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \frac{\partial F1}{\partial D_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \dots + \frac{\partial F1}{\partial E_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \\
&\quad + \frac{\partial F1}{\partial D_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial z_b} = \frac{\rho_s \cdot (1-p)}{\Delta t} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial z_b} - \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial z_b} \right) + \\
&\quad + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial z_b} - \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial z_b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F_1}{\partial C_1} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F_1}{\partial E_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \frac{\partial F_1}{\partial D_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial E_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \frac{\partial F_1}{\partial D_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial C_1} = \\ &= \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial C_1} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial C_1} - \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial C_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F_1}{\partial \beta_1} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F_1}{\partial E_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F_1}{\partial D_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial E_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F_1}{\partial D_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} = \\ &= \theta \cdot B_i^{n+1} \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} - \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} \end{aligned}$$

Koncentracija i raspodela frakcije se razlikuju za svaku frakciju, pa i izvod funkcije treba da se odredi za svaku frakciju posebno. Za razliku od dve navedene veličine, kota dna je jedna (ne zavisi od k) te je izvod funkcije po z_b takođe samo jedan. Izvod F_1 po koncentraciji proizvoljne frakcije može da se napiše kao

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F_1}{\partial C_k} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F_1}{\partial E_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \frac{\partial F_1}{\partial D_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial E_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \frac{\partial F_1}{\partial D_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial C_k} = \\ &= \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial C_k} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial C_k} - \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial C_k}. \end{aligned}$$

Izvod funkcije po k -toj raspodeli frakcija je

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F_1}{\partial \beta_k} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F_1}{\partial E_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \frac{\partial F_1}{\partial D_1^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial E_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \frac{\partial F_1}{\partial D_K^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} = \\ &= \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} - \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_k}. \end{aligned}$$

Izvodi advektivnog dela jednačine održanja mase suspendovanog nanosa - $F2_k$

Navode se izrazi za izvode.

$${}^m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial z_b} \right]^{n+1} = \frac{\partial F2_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \frac{\partial F2_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} \right)$$

$${}^m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_1} \right]^{n+1} = \frac{\partial F2_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \frac{\partial F2_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} \right)$$

$${}^m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_1} \right]^{n+1} = \frac{\partial F2_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F2_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} \right)$$

Izvodi funkcije $F2_k$ po C_k i β_k su

$${}^m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_k} \right]^{n+1} = 1 + \frac{\partial F2_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \frac{\partial F2_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} = 1 - \Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} \right)$$

$${}^m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_k} \right]^{n+1} = \frac{\partial F2_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \frac{\partial F2_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} \right)$$

Izvodi jednačine održanja mase u aktivnom sloju - $F3_k$

Odgovarajući izvodi su dati u nastavku.

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial z_b} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F3_k}{\partial E_a} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial z_b} + \frac{\partial F3_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \frac{\partial F3_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \frac{\partial F3_k}{\partial (S_f)_k} \cdot \frac{\partial (S_f)_k}{\partial z_b} = \\ &= \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial z_b} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} \right) - \frac{\partial (S_f)_k}{\partial z_b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial C_1} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F3_k}{\partial E_a} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial C_1} + \frac{\partial F3_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \frac{\partial F3_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \frac{\partial F3_k}{\partial (S_f)_k} \cdot \frac{\partial (S_f)_k}{\partial C_1} = \\ &= \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial C_1} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} \right) - \frac{\partial (S_f)_k}{\partial C_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial \beta_1} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F3_k}{\partial E_a} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F3_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F3_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F3_k}{\partial (S_f)_k} \cdot \frac{\partial (S_f)_k}{\partial \beta_1} = \\ &= \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial \beta_1} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} \right) - \frac{\partial (S_f)_k}{\partial \beta_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial C_k} \right]^{n+1} &= \frac{\partial F3_k}{\partial E_a} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial C_k} + \frac{\partial F3_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \frac{\partial F3_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \frac{\partial F3_k}{\partial (S_f)_k} \cdot \frac{\partial (S_f)_k}{\partial C_k} = \\ &= \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial C_k} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} \right) - \frac{\partial (S_f)_k}{\partial C_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^m \left[\frac{\partial F3_k}{\partial \beta_k} \right]^{n+1} &= \frac{\rho_s \cdot (1-p) \cdot E_a^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial F3_k}{\partial E_a} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial \beta_k} + \frac{\partial F3_k}{\partial E_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \frac{\partial F3_k}{\partial D_k^{\text{sed}}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \\ &+ \frac{\partial F3_k}{\partial (S_f)_k} \cdot \frac{\partial (S_f)_k}{\partial \beta_k} = \frac{\rho_s \cdot (1-p) \cdot E_a^{n+1}}{\Delta t} + \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial \beta_k} + \\ &+ \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} \right) - \frac{\partial (S_f)_k}{\partial \beta_k} \end{aligned}$$

Globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu - F1

Koeficijenti sistema jednačina koji potiču od globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu su

$$a_{1,1} = \frac{\partial F1}{\partial z_b} = \frac{\rho_s \cdot (1-p)}{\Delta t} + \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial z_b} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \dots +$$

$$+ \theta \cdot \left(\frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial z_b} - \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial z_b} \right) = \frac{\rho_s \cdot (1-p)}{\Delta t} + \theta \cdot \sum_{k=1}^K \left[(E^{\text{sed}})'_{k,1} - (D^{\text{sed}})'_{k,1} \right]$$

$$a_{1,2} = \frac{\partial F1}{\partial C_1} = \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial C_1} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial C_1} -$$

$$- \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial C_1} = \theta \cdot \sum_{k=1}^K \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2} - (D^{\text{sed}})'_{k,2} \right]$$

$$a_{1,3} = \frac{\partial F1}{\partial \beta_1} = \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} -$$

$$- \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} = \theta \cdot \sum_{k=1}^K \left[(E^{\text{sed}})'_{k,3} - (D^{\text{sed}})'_{k,3} \right]$$

⋮

$$a_{1,2kk} = \frac{\partial F1}{\partial C_{kk}} = \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial C_k} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial C_k} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial C_k} -$$

$$- \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial C_k} = \theta \cdot \sum_{k=1}^K \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk} \right]$$

$$a_{1,2kk+1} = \frac{\partial F1}{\partial \beta_{kk}} = \theta \cdot \frac{\partial E_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} - \theta \cdot \frac{\partial D_1^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \dots + \theta \cdot \frac{\partial E_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} -$$

$$- \theta \cdot \frac{\partial D_K^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} = \theta \cdot \sum_{k=1}^K \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} \right]$$

Navodi se slobodan član b_1

$$b_1 = -\rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{(z_b)_i^{n+1} - (z_b)_i^n}{\Delta t}$$

$$- \sum_{k=1}^K \left(\frac{\theta \cdot \left[(\phi_k)_{i-1/2}^{n+1} - (\phi_k)_{i+1/2}^{n+1} \right] + (1-\theta) \cdot \left[(\phi_k)_{i-1/2}^n - (\phi_k)_{i+1/2}^n \right]}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} + \frac{(1-\theta) \cdot \left[(\phi_k)_{i-1/2}^n - (\phi_k)_{i+1/2}^n \right]}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^K \left(\theta \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^n \right).$$

Izvodi $(E^{\text{sed}})'_k$ i $(D^{\text{sed}})'_k$ su dati u prilogu G.

Advektivni deo jednačine održanja mase suspendovanog nanosa - $F2_k$

Koeficijenti sistema jednačina poreklom od advektivnog dela jednačine održanja mase suspendovanog nanosa su

$$\begin{aligned} a_{2k,1} &= \frac{m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial z_b} \right]^{n+1}}{\left[\frac{\partial F2_k}{\partial z_b} \right]^{n+1}} = \frac{\partial F2_k}{\partial s_1} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} + \Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} = \\ &= -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,1} - (D^{\text{sed}})'_{k,1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k,2} &= \frac{m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_1} \right]^{n+1}}{\left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_1} \right]^{n+1}} = \frac{\partial F2_k}{\partial s_2} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} + \Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} = \\ &= -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2} - (D^{\text{sed}})'_{k,2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k,3} &= \frac{m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_1} \right]^{n+1}}{\left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_1} \right]^{n+1}} = \frac{\partial F2_k}{\partial s_3} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} + \Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} = \\ &= -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,3} - (D^{\text{sed}})'_{k,3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k,2kk} &= \frac{m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_{kk}} \right]^{n+1}}{\left[\frac{\partial F2_k}{\partial C_{kk}} \right]^{n+1}} = \frac{\partial F2_k}{\partial s_{2kk}} = \\ &= \begin{cases} -\Delta t_1 \theta \frac{B_i^{n+1}}{\rho A_i^{n+1}} \left[\frac{E_k^{\text{sed}}}{C_{kk}} - \frac{D_k^{\text{sed}}}{C_{kk}} \right] = -\Delta t_1 \theta \frac{B_i^{n+1}}{\rho A_i^{n+1}} \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk} \right] & k \neq kk \\ 1 - \Delta t_1 \theta \frac{B_i^{n+1}}{\rho A_i^{n+1}} \left[\frac{E_k^{\text{sed}}}{C_{kk}} - \frac{D_k^{\text{sed}}}{C_{kk}} \right] = 1 - \Delta t_1 \theta \frac{B_i^{n+1}}{\rho A_i^{n+1}} \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk} \right] & k = kk \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k,2kk+1} &= \frac{m \left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_{kk}} \right]^{n+1}}{\left[\frac{\partial F2_k}{\partial \beta_{kk}} \right]^{n+1}} = \frac{\partial F2_k}{\partial s_{2kk+1}} = -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} + \Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_k} = \\ &= -\Delta t_1 \cdot \theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} \right] \end{aligned}$$

Navedeni koeficijenti se određuju za $kk = 1, KK$. Slobodan član je

$$b_{2k} = -(C_k^a)_i + (C_k)_{DL} + \sum_{DL}^{D_1} \frac{B}{\rho \cdot A} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}}) \cdot \Delta t + \Delta t_1 \cdot \left[\theta \cdot \frac{B_i^{n+1}}{\rho \cdot A_i^{n+1}} \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1} \right]. \quad (\text{B116})$$

Jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju - $F3_k$

Koeficijneti poreklom od jednačine održanja mase u aktivnom sloju su

$$\begin{aligned} a_{2k+1,1} &= \frac{\partial F3_k}{\partial z_b} = \frac{\partial F3_k}{\partial s_1} = \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial z_b} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} \right) - \frac{\partial (S_f)_k}{\partial z_b} = \\ &= \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot (E_a)'_1 + \theta \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,1} - (D^{\text{sed}})'_{k,1} \right] - (S_f)'_{k,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+1,2} &= \frac{\partial F3_k}{\partial C_1} = \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial C_1} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_1} \right) - \\ &- \frac{\partial (S_f)_k}{\partial C_1} = \rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot (E_a)'_2 + \theta \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2} - (D^{\text{sed}})'_{k,2} \right] - (S_f)'_{k,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+1,3} &= \frac{\partial F3_k}{\partial \beta_1} = \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial \beta_1} + \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_1} \right) - \\ &- \frac{\partial (S_f)_k}{\partial \beta_1} = \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot (E_a)'_3 + \theta \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,3} - (D^{\text{sed}})'_{k,3} \right] - (S_f)'_{k,3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+1,2kk} &= \frac{\partial F3_k}{\partial C_{kk}} = \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial E_a}{\partial C_k} + \\ &+ \theta \cdot \left(\frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} - \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_k} \right) - \frac{\partial (S_f)_k}{\partial C_k} = \\ &= \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot (E_a)'_{2kk} + \theta \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk} \right] - (S_f)'_{k,2kk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+1,2kk+1} &= \frac{\partial F3_k}{\partial \beta_{kk}} = \frac{\partial F3_k}{\partial s_{2kk+1}} = \\ &= \begin{cases} \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot (E_a)'_{2kk+1} + \theta \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} \right] - (S_f)'_{k,2kk+1}, & k \neq kk \\ \rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{E_a^{n+1}}{\Delta t} + \\ + \rho_s \cdot (1-p) \frac{\beta_k^{n+1}}{\Delta t} \cdot (E_a)'_{2kk+1} + \theta \cdot \left[(E^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} - (D^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} \right] - (S_f)'_{k,2kk+1}, & k = kk. \end{cases} \end{aligned}$$

Slobodan član je

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= -\rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{(\beta_k \cdot E_a)^{n+1} - (\beta_k \cdot E_a)^n}{\Delta t} + ((S_f)_k)_i - \\ &- \theta \cdot \frac{(\phi_k)_{i-1/2}^{n+1} - (\phi_k)_{i+1/2}^{n+1}}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} - (1-\theta) \cdot \frac{(\phi_k)_{i-1/2}^n - (\phi_k)_{i+1/2}^n}{x_{i-1/2} - x_{i+1/2}} - \\ &- \theta \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^{n+1} - (1-\theta) \cdot (E_k^{\text{sed}} - D_k^{\text{sed}})_i^n \end{aligned} \quad (\text{B117})$$

Prilog C Interpolacija

Interpolacija u prostoru

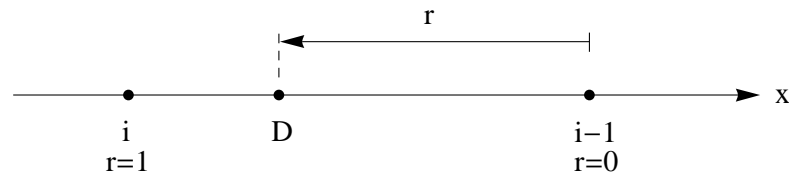
Nedostatak primene metode karakteristika je u tome što ovaj postupak zahteva interpolaciju. Kao rezultat toga se obično tačnost ove metode svodi na tačnost primenjene interpolacije. Ovim se iz razmatranja interpolacije po prostoru isključuje primena linearne interpolacije. Detaljna analiza uticaja primenjenog interpolacionog polinoma je prikazana u radu autora Isic et al. (2013). Na osnovu tamo navedenih zaključaka je doneta odluka da se primeni *Hermite*-ov kubni interpolacioni polinom (Quarterioni et al., 2000). Formiranje kubnog interpolacionog polinoma bi u opštem slučaju podrazumevalo interpolaciju između četiri računске tačke, međutim, primenom *Hermite*-vog interpolacionog polinoma se u proračun uvode svega dve računске tačke i vrednosti izvoda funkcije u njima. Zbog uopštenosti se razmatra proizvoljna nepoznata funkcija $\phi_D = \phi(x_D)$ koju je potrebno odrediti. Tražena funkcija se određuje pomoću kubnog interpolacionog polinoma između tačaka i i $i-1$. Formiranje kubnog interpolacionog polinoma bi zahtevalo da se interpolacija radi između četiri tačke, što može da se izbegne ukoliko se za interpolaciju koriste vrednosti izvoda u tačkama.

$$\begin{aligned}\phi_D &= \phi(x_D) = A_1 + A_2 \cdot x_D + A_3 \cdot x_D^2 + A_4 \cdot x_D^3, \\ \phi_{x_D} &= \phi_x(x_D) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A_2 + 2 \cdot A_3 \cdot x_D + 3 \cdot A_4 \cdot x_D^2.\end{aligned}$$

Koeficijenti A_1, A_2, A_3, A_4 se određuju iz poznatih vrednosti funkcije i njenog izvoda u tačkama i i $i-1$. Ispisivanjem jednačina za ove tačke se dobija

$$\begin{aligned}\phi_i &= A_1 + A_2 \cdot x_i + A_3 \cdot x_i^2 + A_4 \cdot x_i^3, \\ \phi_{i-1} &= A_1 + A_2 \cdot x_{i-1} + A_3 \cdot x_{i-1}^2 + A_4 \cdot x_{i-1}^3, \\ \phi_{x_i} &= A_2 + 2 \cdot A_3 \cdot x_i + 3 \cdot A_4 \cdot x_i^2, \\ \phi_{x_{i-1}} &= A_2 + 2 \cdot A_3 \cdot x_{i-1} + 3 \cdot A_4 \cdot x_{i-1}^2.\end{aligned}$$

Prelaskom na lokalni koordinatni sistem dalji proračun može značajno da se pojednostavi. U lokalnom koordinatnom sistemu, slika 72, r predstavlja lokalnu koordinatu između tačaka i i $i-1$ definisanu sledećim izrazom



Slika 72: Lokalni koordinatni sistem

$$r = \frac{x_{i-1} - x_D}{x_{i-1} - x_i} = \begin{cases} 0, & x_D = x_{i-1} \\ 1, & x_D = x_i \end{cases}$$

Određuje se veza izvoda nepoznate funkcije ϕ_x i lokalne koordinate r ,

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial r}}{x_{i-1} - x_i} = - \frac{\phi_r}{x_{i-1} - x_i}.$$

Sada mogu da se napišu odgovarajući kubni polinomi

$$\phi_D = \phi(r) = A_1 + A_2 \cdot r + A_3 \cdot r^2 + A_4 \cdot r^3 \quad (\text{C118})$$

$$(\phi_r)_D = \frac{\partial \phi}{\partial r} = A_2 + 2 \cdot A_3 \cdot r + 3 \cdot A_4 \cdot r^2. \quad (\text{C119})$$

Koristeći ranije izvedenu vezu

$$\phi_x = -\frac{\phi_r}{x_{i-1} - x_i},$$

uz uvrštavanje grančnih vrednosti $r = 1$ i $r = 0$ u polinome mogu da se odrede nepoznati koeficijenti A_1, A_2, A_3 i A_4 .

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_{i-1} = A_1 \\ \phi(1) &= \phi_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ \phi_r(0) &= -\phi_{x_{i-1}}(x_{i-1} - x_i) = A_2 \\ \phi_r(1) &= -\phi_{x_i}(x_{i-1} - x_i) = A_2 + 2A_3 + 3A_4 \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina se dobijaju tražene vrednosti koeficijenata

$$\begin{aligned} A_1 &= \phi_{i-1} \\ A_2 &= -\phi_{x_{i-1}}(x_{i-1} - x_i) \\ A_3 &= 3\phi_i - 3\phi_{i-1} + \phi_{x_i}(x_{i-1} - x_i) + 2\phi_{x_{i-1}}(x_{i-1} - x_i) \\ A_4 &= -\phi_{x_i}(x_{i-1} - x_i) - \phi_{x_{i-1}}(x_{i-1} - x_i) - 2\phi_i + 2\phi_{i-1}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobijenih izraza na mesto koeficijenata u jednačini (C118) i njenim sređivanjem se dobija konačan oblik kubnog interpolacionog polinoma

$$\phi_D = \phi(r) = a \cdot \phi_i + b \cdot \phi_{i-1} + c \cdot \phi_{x_i} + d \cdot \phi_{x_{i-1}} \quad (\text{C120})$$

gde su

$$a = r^2(3-2r), \quad b = 1-a, \quad c = r^2(1-r)(x_{i-1}-x_i), \quad d = -r(x_{i-1}-x_i)(1-r)^2.$$

Iz jednačine (C120) je jasno da formiranje kubnog interpolacionog polinoma zahteva poznate izvode u tačkama i i $i-1$. Mada ispisivanje kubnog polinoma za izvode u tačkama i i $i-1$ deluje kao logičan sledeći korak, time bi se u proračun uvukli i izvodi višeg reda. Zbog toga se koristi drugi pristup. Jednačina (C120) se diferencira po r što daje

$$\phi_r = \frac{\partial}{\partial r} (a \cdot \phi_i + b \cdot \phi_{i-1} + c \cdot \phi_{x_i} + d \cdot \phi_{x_{i-1}}) \quad (\text{C121})$$

Uvrštavanjem ranije dobijene zavisnosti

$$\phi_r = -\phi_x \cdot (x_{i-1} - x_i)$$

u jednačinu (C121) se dobija

$$\phi_x = \frac{\frac{\partial}{\partial r} (a \cdot \phi_i + b \cdot \phi_{i+1} + c \cdot \phi_{x_i} + d \cdot \phi_{x_{i-1}})}{(x_{i-1} - x_i)}$$

Poslednja jednačina se jednostavnije može napisati kao

$$\phi_{x_D} = e \cdot \phi_i + f \cdot \phi_{i-1} + g \cdot \phi_{x_i} + h \cdot \phi_{x_{i-1}},$$

gde su

$$e = -\frac{1}{x_{i-1}-x_i} \cdot \frac{\partial a}{\partial r} = \frac{6r}{x_{i-1}-x_i} \cdot (r-1)$$

$$f = -\frac{1}{x_{i-1}-x_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial r} = -e$$

$$g = -\frac{1}{x_{i-1}-x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} = (3r-2) \cdot r$$

$$h = \frac{1}{x_{i-1}-x_i} \cdot \frac{\partial d}{\partial r} = (1-4r+3r^2).$$

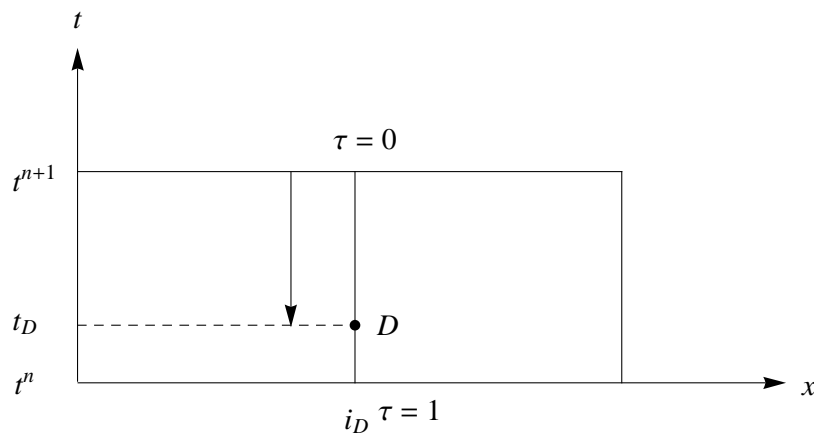
Ovime je izvod nepoznate funkcije ϕ_{x_D} dobijen kao izvod interpolovane vrednosti funkcije ϕ_D . Mada je ϕ_{x_D} polinom drugog stepena koji smanjuje tačnost postupka, njegova prednost je što zahteva samo poznate vrednosti funkcija ϕ i ϕ_x u čvorovima.

Interpolacija po vremenu

Za interpolaciju po vremenu je korišćena linearna interpolacija jer se smatra da su promene koje nastaju između dva susedna vremenska koraka dovoljno male (zbog fizičkih karakteristika samih procesa) te da je linearna interpolacija dovoljna. Polinom za linearnu interpolaciju nepoznate funkcije ϕ_D je

$$\phi_D = \phi(t) = B_1 + B_2 \cdot t.$$

Uvodi se lokalni koordinatni sistem za vreme gde je τ lokalna koordinata definisana kao



Slika 73: Lokalni koordinatni sistem za interpolaciju po vremenu

$$\tau = \frac{t^{n+1} - t_D}{t^{n+1} - t^n} = \begin{cases} 0, & t_D = t^{n+1}, \\ 1, & t_D = t^n. \end{cases}$$

Sada je interpolacioni polinom

$$\phi(\tau) = A_1 + A_2 \cdot \tau.$$

Nepoznati koeficijenti se određuju ispisivanjem interpolacionog polinoma za tačke $\tau = 0$ i $\tau = 1$,

$$\phi(0) = \phi_i^{n+1} = A_1, \quad \phi(1) = \phi_i^n = A_1 + A_2.$$

Konačan oblik interpolacionog polinoma je

$$\phi(\tau) = a_t \cdot \phi_i^{n+1} + b_t \cdot \phi_i^{n+1}, \quad (\text{C122})$$

gde su

$$a_t = \tau, \quad b_t = 1 - \tau.$$

Prilog D Thomas-ov (double-sweep) algoritam

Jednačina (4.101) predstavlja sistem jednačina koji može da se ispiše u razvijenom obliku. U tom slučaju se za prvu računsku tačku $i = I$ iz jednačine gubi član pomnožen sa $(C_k^{n+1})_{i+1}$ jer ova tačka ne postoji, dok se za najnižvodniju tačku $i = 1$ gubi član pomnožen sa $(C_k^{n+1})_{i-1}$ jer za poslednju tačku on ne postoji. Sistem jednačina je dat izrazom

$$\begin{aligned} (C_k^{n+1})_I \cdot Q_I &+ (C_k^{n+1})_{I-1} \cdot R_I &= S_I &\text{ za } &i = I \\ (C_k^{n+1})_I \cdot P_{I-1} &+ (C_k^{n+1})_{I-1} \cdot Q_{I-1} &+ (C_k^{n+1})_{I-2} \cdot R_{I-1} &= S_{I-1} &\text{ za } &i = I-1 \\ &\vdots &&&& \\ (C_k^{n+1})_{i+1} \cdot P_i &+ (C_k^{n+1})_i \cdot Q_i &+ (C_k^{n+1})_{i-1} \cdot R_i &= S_i &\text{ za } &i = i \\ &\vdots &&&& \\ (C_k^{n+1})_3 \cdot P_2 &+ (C_k^{n+1})_2 \cdot Q_2 &+ (C_k^{n+1})_1 \cdot R_2 &= S_2 &\text{ za } &i = 2 \\ (C_k^{n+1})_2 \cdot P_1 &+ (C_k^{n+1})_1 \cdot Q_1 &&= S_1 &\text{ za } &i = 1 \end{aligned}$$

Iz jednačine za $i = I$ se izražava koncentracija $(C_k^{n+1})_I$ tako da se dobije

$$(C_k^{n+1})_I = (C_k^{n+1})_{I-1} \cdot E_I + F_I,$$

gde su

$$E_I = -\frac{R_I}{Q_I}, \quad F_I = \frac{S_I}{Q_I}.$$

Izraz za $(C_k^{n+1})_I$ se uvrštava u jednačinu za $i = I-1$ i izražava se koncentracija $(C_k^{n+1})_{I-1}$ tako da se dobije

$$(C_k^{n+1})_{I-1} = (C_k^{n+1})_{I-2} \cdot E_{I-1} + F_{I-1},$$

gde su

$$E_{I-1} = -\frac{R_{I-1}}{Q_{I-1} + E_I \cdot P_{I-1}}, \quad F_{I-1} = \frac{S_{I-1} - F_I \cdot P_{I-1}}{Q_{I-1} + E_I \cdot P_{I-1}}.$$

Na osnovu ovoga može da se napiše uopštena jednačina oblika

$$(C_k^{n+1})_i = (C_k^{n+1})_{i-1} \cdot E_i + F_i,$$

gde su

$$E_i = -\frac{R_i}{Q_i + E_{i+1} \cdot P_i}, \quad F_i = \frac{S_i - F_{i+1} \cdot P_i}{Q_i + E_{i+1} \cdot P_i}.$$

Da bi se dobila jednačina za najnižvodniju tačku $i = 1$, jednačina za tačku $i = 2$

$$(C_k^{n+1})_2 = (C_k^{n+1})_1 \cdot E_2 + F_2,$$

se uvrštava u jednačinu za $i = 1$ odakle se izračava koncentracija $(C_k^{n+1})_1$

$$(C_k^{n+1})_1 = \frac{S_1 - F_2 \cdot P_1}{E_2 \cdot P_1 + Q_1}.$$

Pošto je *Thomas*-ov algoritam za izvode identičan istom za koncentracije, neće se navoditi.

Prilog E Difuzija - Koeficijenti Thomas-ovog algoritma

Koeficijenti Thomas-ovog algoritma za koncentracije

Koeficijenti *Thomas*-ovog algoritma jednačine difuzionog koraka suspendovanog nanosa su dati u nastavku

$$\begin{aligned} P_i &= -\frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{(\varepsilon_s^{n+1})_{i+1/2} \cdot A_{i+1/2}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1})(x_{i-1/2} - x_{i+1/2})}, \\ Q_i &= 1 + \frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{(\varepsilon_s^{n+1})_{i-1/2} \cdot A_{i-1/2}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} + \frac{(\varepsilon_s^{n+1})_{i+1/2} \cdot A_{i+1/2}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \right), \\ R_i &= -\frac{\Delta t \cdot \theta}{A_i^{n+1}} \cdot \frac{(\varepsilon_s^{n+1})_{i-1/2} \cdot A_{i-1/2}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})}, \\ S_i &= (C_k^a)_i + \\ &+ \frac{\Delta t \cdot (1 - \theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i-1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_{i-1} - (C_k^a)_i}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i-1/2}^{n+1} \right) - \\ &- \frac{\Delta t \cdot (1 - \theta)}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s^{n+1})_{i+1/2} \cdot \frac{(C_k^a)_i - (C_k^a)_{i+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot A_{i+1/2}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Koeficijenti Thomas-ovog algoritma za izvode koncentracija

Navode se koeficijenti *Thomas*-ovog algoritma za jednačinu difuzionog koraka za izvode

koncentracije

$$\begin{aligned}
Px_i &= -\frac{\theta \cdot \Delta t}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1} \cdot \frac{A_{i+1}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} + (\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot \frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_{i+1})^2} \right) \\
Qx_i &= 1 + \frac{\theta \cdot \Delta t \cdot (\varepsilon_s)_i^{n+1}}{(x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \cdot \left(\frac{1}{(x_{i-1} - x_i)} + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})} \right) + \\
&\quad + \frac{\theta \cdot \Delta t}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_{i+1})^2} \right) \cdot \left([(\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} - (\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1}] + \frac{(\varepsilon_s)_i^{n+1}}{A_i^{n+1}} \cdot (A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}) \right) \\
Rx_i &= \frac{\theta \cdot \Delta t}{A_i^{n+1}} \cdot \left((\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot \frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_{i+1})^2} - \frac{(\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} \cdot A_{i-1}^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \right) \\
Sx_i &= (Cx_k)_i^a + \frac{(1-\theta) \cdot \Delta t}{A_i^{n+1}} \cdot \left[\frac{(Cx_k)_{i-1}^a \cdot (\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} \cdot A_{i-1}^{n+1} - (Cx_k)_i^a \cdot (\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot A_i^{n+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \right] + \\
&\quad + \frac{(1-\theta) \cdot \Delta t}{A_i^{n+1}} \cdot \left[-\frac{(Cx_k)_i^a \cdot (\varepsilon_s)_i^{n+1} \cdot A_i^{n+1} - (Cx_k)_{i+1}^a \cdot (\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1} \cdot A_{i+1}^{n+1}}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_{i-1/2} - x_{i+1/2})} \right] - \\
&\quad - (Cx_k)_i^a \cdot \frac{(1-\theta) \cdot \Delta t \cdot (\varepsilon_s)_i^{n+1}}{(A_i^{n+1})^2} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right)^2 - \\
&\quad - \frac{(1-\theta) \cdot \Delta t \cdot (\varepsilon_s)_i^{n+1}}{A_i^{n+1}} \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) \cdot \frac{(Cx_k)_{i-1}^a - (Cx_k)_{i+1}^a}{x_{i-1} - x_{i+1}} - \\
&\quad - \frac{(1-\theta) \cdot \Delta t}{A_i^{n+1}} \cdot (Cx_k)_i^a \cdot \left(\frac{A_{i-1}^{n+1} - A_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) \cdot \frac{(\varepsilon_s)_{i-1}^{n+1} - (\varepsilon_s)_{i+1}^{n+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}}
\end{aligned}$$

Prilog F Pomoćne zavisnosti

Izveden sistem jednačina ima više nepoznatih nego jednačina (dakle rešenje nije jednoznačno), zbog čega se u sistem jednačina dodaju pomoćne zavisnosti.

Ocena vrednosti koeficijenta trenja

Formulisan hidraulički model linijske otpore trenja obračunava primenom ranije datih empirijskih izraza. Kao ulazni parametar za kalibraciju ovog dela modela se zadaje *Manning*-ov koeficijent. Kako je modelisan duži vremenski period, za postizanje kvalitetnih rezultata je bilo neophodno formulisanje veze *Manning*-ovog koeficijenta i proticaja. Međutim, kako se modelisana oblast nalazi unutar akumulacije HE Đerdap 1, gde se pri velikim proticajima otvara ispušt, javila se nelogičnost u kalibracionim parametrima. Naime, za očekivati je da će većim vrednostima proticaja odgovarati veće dubine, odnosno manje vrednosti koeficijenta trenja, ali kako se na brani pri velikim proticajima nivo vode spušta, ispostavilo se da je za veće vrednosti nivoa potrebno zadati veće vrednosti koeficijenta trenja. Drugi problem sa ovim pristupom je potreba posebne kalibracije kompletnog modela za niz proticaja kako bi se definisala funkcija. Zbog toga je model proširen dodavanjem veze koeficijenta tangencijalnog napona sa apsolutnom hrapavošću sa čime je omogućena kalibracija definisanjem hrapavosti pomoću koje se tokom proračuna određuje koeficijent tangencijalnog napona, a nakon toga i sam napon trenja. Za određivanje ko-

eficijenta tangencijalnog napona iz zadate hrapavosti je primenjena logaritamska funkcija (Jovanović, 2008)

$$C_\tau = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \log\left(\frac{12 \cdot h}{k}\right)} \right].$$

Fluks vučenog nanosa po jedinici širine

U izvedenim jednačinama se javlja pronos vučenog nanosa dimenzija MT^{-1} , dok su izrazi za određivanje fluksa vučenog nanosa uglavnom formulisani za fluks vučenog nanosa po jedinici dužine. Zbog toga se uvodi fluks vučenog nanosa po jedinici širine, ϕ , za koji važi da je $\varphi = \phi \cdot B$. Za proračun fluksa vučenog nanosa na raspolaganju stoji niz empirijskih izraza. Kao primer se navodi izraz za teorijsku vrednost zapreminskog fluksa vučenog nanosa po jedinici dužine, koji je predložio *van Rijn*

$$(\phi_V^t)_k = \sqrt{(S-1) \cdot g \cdot D_k^{1.5}} \cdot 0.053 \cdot \frac{T_k^{2.1}}{(D_*)_k^{0.3}}. \quad (\text{F123})$$

$$(D_*)_k = D_k \cdot \left[\frac{g \cdot (S-1)}{\nu^2} \right]^{1/3}, \quad T_k = \frac{u_*^2 - (u_*^{\text{cr}})_k^2}{(u_*^{\text{cr}})_k^2}.$$

Lokalna vrednost smičuće brzine je data izrazom (F124),

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}, \quad \tau_b = \gamma \cdot R \cdot I_b \quad \text{i} \quad \tau_b = C_f \cdot \rho \cdot u^2, \quad (\text{F124})$$

Napon trenja na dnu može da se odredi preko *Chezy*-jevog koeficijenta. Kombinovanjem ovog izraza sa *Chezy*-jevom jednačinom može da se nađe veza dva koeficijenta

$$u = C_{\text{ch}} \cdot \sqrt{R \cdot I_b}, \quad C_f \cdot \rho \cdot u^2 = \gamma \cdot R \cdot I_b \quad \Rightarrow \quad C_f = \frac{g}{C_{\text{ch}}^2}.$$

Uvrštanjem izraza za koeficijent trenja u (F124) se dobija krajnji izraz za u_*

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} = u \frac{\sqrt{g}}{C_{\text{ch}}} \quad \text{gde je} \quad C_{\text{ch}} = 18 \cdot \log\left(\frac{12 \cdot R}{3 \cdot D_{90}}\right). \quad (\text{F125})$$

Kritična vrednost lokalne smičuće brzine se određuje po preporuci *Shields*-a (F126),

$$(u_*^{\text{cr}})_k = \sqrt{(\Theta_c)_k \cdot g \cdot (S-1) \cdot D_k}, \quad \Theta_c = \begin{cases} 0.24 \cdot D_*^{-1}, & 1 < D_* \leq 4 \\ 0.14 \cdot D_*^{-0.64}, & 4 < D_* \leq 10 \\ 0.04 \cdot D_*^{-0.1}, & 10 < D_* \leq 20 \\ 0.013 \cdot D_*^{0.29}, & 20 < D_* \leq 150 \\ 0.056, & D_* > 150 \end{cases}. \quad (\text{F126})$$

Množenjem zapreminskog fluksa vučenog nanosa po jedinici dužine, (F127), sa gustinom nanosa ρ_s se dobija izraz za teorijsku vrednost masenog fluksa vučenog nanosa po jedinici širine

$$\phi_k^t = \rho_s \cdot \sqrt{(S-1) \cdot g} \cdot D_k^{1.5} \cdot 0.053 \cdot \frac{T_k^{2.1}}{(D^*)_k^{0.3}}. \quad (\text{F127})$$

Originalna jednačina umesto D_k ima reprezentativni prečnik mešavine nanosa D_{50} . Pošto usvojeni pristup omogućava razmatranje mešavine po frakcijama, onda je za datu frakciju merodavan prečnik D_k .

Množenjem izraza za teorijsku vrednost fluksa vučenog nanosa (F127) sa β_k se obezbeđuje da se razmatra samo raspoloživa količina date frakcije. Uvođenjem parametra alokacije γ_k se iz proračuna izuzima deo vučenog nanosa koji odmah odlazi u suspenziju. Kao primer se uzima situacija kada je $\gamma_k = 1$, što bi računski dalo da nema fluksa vučenog nanosa date frakcije jer je ona u potpunosti prešla u suspenziju. Ovaj parametar zavisi od odnosa lokalne smičuće brzine i brzine tonjenja i određuje se prema izrazu (F129). Poslednja korekcija koja se uvodi je posledica pristupa modelisanja mešavine. Fluks vučenog nanosa se redukuje faktorom skrivanja ζ_k kojim se opisuje mogućnost primenjenog pristupa da veće čestice pokriju manje sa čime ih čine manje dostupnim za transport. Konačan izraz za fluks vučenog nanosa po jedinici dužine je

$$\phi_k = \phi_k^t \cdot \beta_k \cdot (1 - \gamma_k) \cdot \zeta_k, \quad (\text{F128})$$

gde je parametar alokacije

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{u_*}{w_k^f} < 0.4, & \gamma_k = 0 \\ 0.4 \leq \frac{u_*}{w_k^f} < 10, & \gamma_k = 0.25 + 0.325 \ln \left(\frac{u_*}{w_k^f} \right) \\ \frac{u_*}{w_k^f} \geq 10, & \gamma_k = 1 \end{cases} \quad (\text{F129})$$

Jednačina (F128) je pomnožena sa $1 - \gamma$ čime se sugeriše da deo nanosa direktno prelazi u suspenziju zbog čega ne ulazi u proračun vučenog nanosa. Fluks nanosa koji je prešao u suspenziju je onda

$$\phi_k^t \cdot \beta_k \cdot \gamma_k \cdot \zeta_k, \quad (\text{F130})$$

i razmotriće se kao mogući pristup za modelisanje člana E_k^{sed} .

Faktor skrivanja je računat prema *Karim*-u

$$\zeta_k = \left(\frac{D_k}{D_{50}} \right)^{0.85}.$$

Vertikalni fluks nanosa usled deponovanja iz suspenzije

Vertikalni fluks nanosa usled deponovanja iz suspenzije je

$$D_k^{\text{sed}} = \rho_s \cdot w_k^f \cdot C_k^{\text{dep}}, \quad (\text{F131})$$

Linijski modeli kao rezultat proračuna, između ostalog, daju srednju profilsku koncentraciju koja bi se mogla usvojiti kao koncentracija reprezentativna za proračun deponovanja,

$$C_k^{\text{dep}} = C_k.$$

Kako ne postoji analitički izraz za brzinu tonjenja za zrna koja nisu sfernog oblika, pribegava se empirijskim obrascima. Predlog proračuna brzine tonjenja za zrna čiji oblik nije sferni je dao *van Rijn*,

$$w_k^f = \begin{cases} \frac{1}{18} \cdot \frac{(S-1) \cdot g \cdot D_k^2}{\nu}, & D_k < 1 \cdot 10^{-4} m \\ 10 \cdot \frac{\nu}{D_k} \cdot \left[\left(1 + \frac{0.01 \cdot (S-1) \cdot g \cdot D_k^3}{\nu^2} \right)^{0.5} - 1 \right], & 1 \cdot 10^{-4} m \leq D_k < 1 \cdot 10^{-3} m \\ 1.1 \cdot [(S-1) \cdot g \cdot D_k]^{0.5}, & D_k \geq 1 \cdot 10^{-3} m \end{cases} \quad (\text{F132})$$

Kao alternativa se daje i izraz koji su predložili *Wu* i *Wang*

$$w_k^f = \frac{M_w \cdot \nu}{N_w \cdot D_k} \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{4 \cdot N_w}{3 \cdot M_w^2} \cdot D_k^3 \right)^{1/r_w}} - \frac{1}{2} \right]^{r_w}, \quad (\text{F133})$$

gde su koeficijenti M_w , N_w i r_w dati sledećim izrazima

$$M_w = 53.5 \cdot e^{-0.65 \cdot Sp}, \quad N_w = 5.65 \cdot e^{-2.5 \cdot Sp}, \quad r_w = 0.7 + 0.9 \cdot Sp. \quad (\text{F134})$$

Čestica nanosa može da se opiše kao elipsoid, a u tom slučaju se faktor oblika definiše kao

$$Sp = \frac{c_{\text{sed}}}{\sqrt{a_{\text{sed}} \cdot b_{\text{sed}}}},$$

a njegova vrenost za zna oblikovana u prirodnim vodotocima obično iznosi oko 0.7, (*Wu*, 2008).

Vertikalni fluks usled uvlačenja nanosa iz sloja na dnu i pri dnu

Jedan od mogućih pristupa je da se ovaj član modeliše po analogiji na član deponovanja

$$E_k^{\text{sed},1} = \beta_k \cdot \rho \cdot w_k^f \cdot C_k^{\text{er}}, \quad (\text{F135})$$

uz dodatak člana β_k kako bi se u obzir uzela i raspoloživost određene frakcije u sloju vučenog nanosa.

Kod linijskog modela je to srednja profilska koncentracija pa je

$$C_k^{\text{er}} = C_k. \quad (\text{F136})$$

Druga opcija bi bila da se u proračun vertikalnog fluksa usled uvlačenja nanosa pri dnu i sa dna, uzme u obzir ona masa koja se izuzela prilikom proračuna fluksa vučenog nanosa, kao masa koja je uvučena u suspenziju. U tom slučaju bi ovaj član bio jednak izrazu (F130), pa je

$$E_k^{\text{sed},2} = \frac{\phi_k^t}{\Delta x} \cdot \beta_k \cdot \gamma_k \cdot \zeta_k, \quad (\text{F137})$$

deljenje sa Δx se javlja jer je teorijska vrednost fluksa vučenog nanosa originalno data po jedinici širine, a član E_k^{sed} fluks (po jedinici površine).

Treća razmatrana opcija je da se E_k^{sed} računa kao

$$E_k^{\text{sed},3} = -\varepsilon_t \cdot \frac{\partial(\rho \cdot C_k)}{\partial z} \Big|_{z_b},$$

Gradijent koncentracije se diskretizuje metodom konačnih razlika

$$E_k^{\text{sed},3} = -(\varepsilon_t)_{a_k+\Delta a} \cdot \rho \cdot \frac{(C_k)_{a_k+\Delta a} - (C_k)_{a_k}}{\Delta a},$$

gde je

$$(C_k)_{a_k+\Delta a} = C_k,$$

a $(C_k)_{a_k}$ je koncentracija koja se određuje empirijski. Za određivanje ove koncentracije se koristi preporuka van Rijn (1984)

$$(C_k)_{a_k} = C_{a_k} \cdot \beta_k = 0.015 \cdot \frac{D_k}{a_k} \cdot \frac{T_k^{1.5}}{(D^*)_k^{0.3}} \cdot \beta_k$$

Koeficijent turbulentne difuzije je

$$\varepsilon_s^t(z) = \frac{1}{\sigma_k} \cdot \kappa \cdot u_* \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

gde κ von Karman-ova konstanta, a h je dubina. Primenom ove jednačine na linijski model se umesto h uzima srednja dubina \bar{h} , a za z se uzima $z = a$, pa je

$$\varepsilon_s^t(a+\Delta a) = \frac{1}{\sigma_k} \cdot \kappa \cdot u_* \cdot (a+\Delta a) \cdot \left(1 - \frac{a+\Delta a}{\bar{h}}\right).$$

σ je Schmidt-ov broj koji se računa kao

$$\frac{1}{\sigma_k} = 1 + 2 \cdot \left(\frac{w_k^f}{u_*}\right)^2 \quad \text{za} \quad 0.1 < \frac{w_k^f}{u_*} < 1,$$

$$\sigma_k = 1 \quad \text{za} \quad 0.1 \geq \frac{w_k^f}{u_*},$$

$$\sigma_k = 1 \quad \text{za} \quad \frac{w_k^f}{u_*} \geq 1.$$

Debljina aktivnog sloja

Aktivni sloj se sastoji od homogene mešavine zrna nanosa u kojem nema kretanja i sloja pri dnu (ili saltacioni sloj) gde se nanos kreće. Prilikom podizanja nanosa sa dna aktivni sloj može da prodre u aktivni stratum, a tokom deponovanja se čestice nanosa talože i na taj način ulaze u aktivni sloj. Za proračun se uvode sledeće pretpostavke:

- raspodela zrna po veličini je ista za čitavu debljinu aktivnog sloja;
- sva zrna iste veličine su podjednako izložena struji.

Tokom proračuna mogu da se jave dve opcije, jedna je da se kota dna spušta, a druga da se podiže. Pošto je proračun debljine aktivnog sloja i člana razmene sa dubljim slojevima zavisian od procesa koji se odvija, onda se nakon svake iteracije proverava da li se radi o deponovanju ili podizanju materijala.

Spuštanje dna aktivnog sloja

Podizanje materijala sa dna izaziva spuštanje kote dna (podine aktivnog sloja) što može da prouzrokuje prodiranje aktivnog sloja u aktivni stratum. Debljina aktivnog sloja tokom podizanja materijala sa dna se određuje tako da bude proporcionalna eroziji

$$E_a = -\varrho \cdot (z_b^{n+1} - z_b^n).$$

Usled napredovanja procesa uvlačenja manjih zrna u suspenziju, proces erozije se smanjuje sve dok se u potpunosti ne obustavi, a na dnu ostaje sloj nepokretnih zrna formirajući popločani sloj. Približavanjem ovoj graničnoj vrednosti se izraz za debljinu aktivnog sloja približava nuli. Borah je predložio sledeći izraz za debljinu popločavanja

$$\frac{1}{\sum_{k=L}^K \beta_k} \frac{D_L}{1-p},$$

pa je debljina aktivnog sloja (Spasojevic i Holly, 1990; Hung et al., 2009; Budinski, 2011).

$$E_a = \frac{D_L}{1-p} - \varrho \cdot (z_b^{n+1} - z_b^n). \quad (\text{F138})$$

Izraz (F138) u obzir uzima i raspoloživost nekog zrna za uvlačenje u suspenziju. Kota podine ($z_b - E_a$) može i da se poveća tokom procesa uvlačenja zrna u suspenziju ukoliko intenzitet ove pojave naglo opada. Promena kote dna aktivnog sloja određuje razmenu materijala između aktivnog sloja i aktivnog stratuma preko člana razmene sa dnom.

Podizanje dna aktivnog sloja - deponovanje

Prilikom proračuna je pretpostavljeno da čestice nanosa koje napuštaju kontrolnu zapreminu, zamenjuju čestice koje u nju ulaze. Razlika između zrna koja ulaze u kontrolnu zapreminu i onih koja je napuštaju je materijal koji se deponuje na površini dna. Da se ne bi pamtio veliki broj tankih slojeva deponovanog materijala, pretpostavlja se da je deponovan materijal trenutno i u potpunosti pomešan sa već postojećim deponovanim materijalom na dnu.

Debljina aktivnog sloja u tekućem vremenskom nivou može da se odredi kao zbir debljine iz prethodnog vremenskog nivoa i promene kote površine dna,

$$E_a^{n+1} = E_a^n + (z_b^{n+1} - z_b^n).$$

Prilikom deponovanja se kota podine aktivnog sloja ne menja zbog čega se član razmene sa dubljim slojevima gubi.

Razmena materijala između aktivnog sloja i aktivnog stratuma (podsloja) se opisuje članom razmene S_f , (Spasojevic i Holly, 1990). Ovaj član je rezultat promene podine a dobija se kao razlika $z_b - E_a$. Član razmene je u opštem slučaju dat jednačinom (F139),

$$S_f = -\rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{\partial}{\partial t} [(z_b - E_a) \cdot \beta]. \quad (\text{F139})$$

Pozitivna vrednost S_f ukazuje na povećanje mase u aktivnom sloju, a negativna vrednost istog na njeno smanjenje.

Spuštanje podine aktivnog sloja znači da se zahvata materijal iz aktivnog stratuma. Računska pretpostavka je da se zahvaćeni materijal iz aktivnog stratuma trenutno u potpunosti pomeša sa materijalom u aktivnom sloju. Zbog toga se u proračunu člana $(S_f)_k$ koristi procentualni udeo frakcije aktivnog stratuma $\beta_{sL,k}$. Član razmene je onda

$$(S_f)_k = -\rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{(z_b^{n+1} - E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)}{\Delta t} \cdot \beta_{sL,k}. \quad (\text{F140})$$

Podizanje podine aktivnog sloja znači da se materijal ispušta iz aktivnog sloja, a u proračunu se uzima procentualni udeo frakcije aktivnog sloja β_k . Član razmene je onda

$$(S_f)_k = -\rho_s \cdot (1-p) \cdot \frac{(z_b^{n+1} - E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)}{\Delta t} \cdot \boxed{[\theta \cdot \beta_k^{n+1} + (1-\theta) \cdot \beta_k^n]} \quad (\text{F141})$$

gde se umesto uokvirenog člana može koristiti i raspodela frakcija iz prethodnog vremenskog nivoa β_k^n . Mada se raspodela frakcija aktivnog podsloja $\beta_{sL,k}$ menja, njeno dodavanje nepoznatim veličinama bi podrazumevalo ispisivanje jednačine održanja mase aktivnog stratuma za svaku frakciju. Zato se na kraju proračuna vremenskog koraka, u poslednjoj iteraciji, proverava da li je došlo do podizanja kote podine aktivnog sloja. Ukoliko jeste došlo do njenog podizanja onda se raspodela frakcija aktivnog stratuma ponovo računa.

Erozija

U slučaju da se očekuje erozija

$${}^{m+1}E_a^{n+1} = \frac{D_L}{1-p} - \varrho \cdot ({}^{m+1}z_b^{n+1} - z_b^n).$$

U ovom slučaju mogu da se dese dve situacije.

- Spuštanje podine aktivnog sloja kada je

$${}^{m+1}z_b^{n+1} - {}^{m+1}E_a^{n+1} \leq z_b^n - E_a^n.$$

U ovom slučaju se član razmene određuje kao

$$(S_f)_k = -\frac{\rho_s \cdot (1-p)}{\Delta t} \cdot [({}^{m+1}z_b^{n+1} - {}^{m+1}E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)] \cdot (\beta_{sL})_k.$$

- Podizanje podine aktivnog sloja kada je

$${}^{m+1}z_b^{n+1} - {}^{m+1}E_a^{n+1} \geq z_b^n - E_a^n.$$

U tom slučaju je član razmene

$$(S_f)_k = -\frac{\rho_s \cdot (1-p)}{\Delta t} \cdot [({}^{m+1}z_b^{n+1} - {}^{m+1}E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)] \cdot (\theta \cdot {}^{m+1}\beta_k^{n+1} + (1-\theta) \cdot \beta_k^n).$$

Deponovanje

Ukoliko dolazi do deponovanja materijala iz suspenzije, debljina aktivnog sloja se određuje kao

$${}^{m+1}E_a^{n+1} = E_a^n + ({}^{m+1}z_b^{n+1} - z_b^n),$$

a član razmene sa dubljim slojevima je nula

$$(S_f)_k = 0,$$

jer nema razmene sa dubljim slojevima.

Koeficijent difuzije i disperzije

Jednačine koje opisuju linijsko, neustaljeno tečenje u prirodnim vodotocima se izvode polazeći od prostornih jednačina, njihovim osrednjavanjem po dubini i širini. Kao posledica ovog osrednjavanja se javlja član disperzije koji se modeliše po analogiji na difuziju, zbog čega se u izvođenju i stavlja u ovaj član. Rešavanje difuzije podrazumeva poznat koeficijent difuzije, odnosno, ako se modeliše i disperzija, koeficijent zajedničkog dejstva difuzije i disperzije. Autori Fischer et al. (1979) predlažu sledeći izraz za određivanje ovog koeficijenta

$$K = \frac{0.011 \cdot u^2 \cdot B^2}{h \cdot u_*}.$$

Predložena jednačina je dosta gruba pretpostavka uticaja disperzije, ali je pogodna jer njen proračun zahteva veličine koje su poznate tokom proračuna (strednju dubinu, srednju brzinu, širinu vodnog ogledala i nagib slobodne površine).

Autori Falconer (1984) i Zhou et al. (2009) su u radovima predstavili zajednički koeficijent difuzije i disperzije osrednjene po dubini toka i primenili ih za modelisanje ravanskog strujanja. Predloženi izrazi bi se pojednostavljenjem za linijski model sveli na

$$K = k_l \cdot u \cdot h \cdot \sqrt{C_f}.$$

Prilog G Izvodi članova razmene nanosa

Rešavanje sistema jednačina za proračun nanosa na i pri dnu zahteva određivanje izvoda $(E^{\text{sed}})'_k$ i $(D^{\text{sed}})'_k$ po osnovnim nanosnim promenljivama z_b , β_k i C_k .

Izvodi po z_b su jednaki nula jer razmatrani članovi nisu funkcije kote površine dna:

$$(D^{\text{sed}})'_{k,1} = \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} = 0, \quad (\text{G142})$$

$$(E^{\text{sed}})'_{k,1} = \frac{\partial E_k^{\text{sed}}}{\partial z_b} = 0. \quad (\text{G143})$$

Izvodi po C_k postoje, i za član $(E^{\text{sed}})'_k$ se razlikuju u zavisnosti od usvojenog pristupa proračuna i navode se u nastavku

$$(D^{\text{sed}})'_{k,2kk} = \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial C_{kk}} = \begin{cases} w_k^f \cdot \rho, & k = kk; \\ 0, & k \neq kk. \end{cases} \quad (\text{G144})$$

$$(E^{\text{sed},1})'_{k,2kk} = \frac{\partial E_k^{\text{sed},1}}{\partial C_{kk}} = \begin{cases} w_k^f \cdot \rho \cdot \beta_k, & k = kk; \\ 0, & k \neq kk. \end{cases} \quad (\text{G145})$$

$$(E^{\text{sed},2})'_{k,2kk} = \frac{\partial E_k^{\text{sed},2}}{\partial C_{kk}} = 0. \quad (\text{G146})$$

$$(E^{\text{sed},1})'_{k,2kk} = \frac{\partial E_k^{\text{sed},1}}{\partial C_{kk}} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon \cdot \rho}{\Delta a}, & k = kk; \\ 0, & k \neq kk. \end{cases} \quad (\text{G147})$$

Izvodi po β_k su

$$(D^{\text{sed}})'_{k,2kk+1} = \frac{\partial D_k^{\text{sed}}}{\partial \beta_{kk}} = 0, \quad (\text{G148})$$

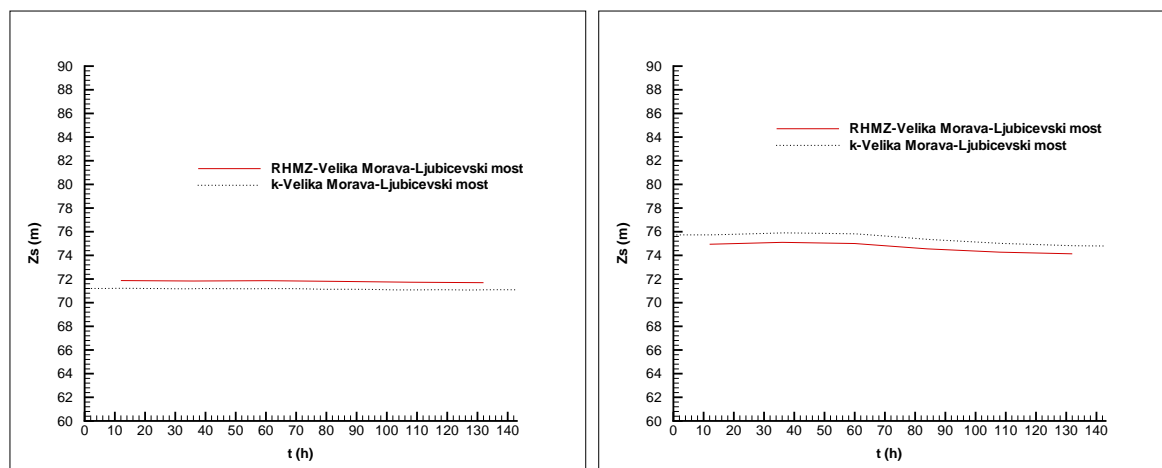
$$(E^{\text{sed},1})'_{k,2kk+1} = \frac{\partial E_k^{\text{sed},1}}{\partial \beta_{kk}} = \begin{cases} w_k^f \cdot \rho \cdot C_k, & k = kk; \\ 0, & k \neq kk. \end{cases} \quad (\text{G149})$$

$$(E^{\text{sed},2})'_{k,2kk+1} = \frac{\partial E_k^{\text{sed},2}}{\partial \beta_{kk}} = \begin{cases} \frac{\phi_k^t \cdot \gamma_k \cdot \zeta_k}{\Delta x}, & k = kk; \\ 0, & k \neq kk. \end{cases} \quad (\text{G150})$$

$$(E^{\text{sed},3})'_{k,2kk+1} = \frac{\partial E_k^{\text{sed},3}}{\partial \beta_{kk}} = \begin{cases} \frac{\varepsilon \cdot C_k \cdot \rho}{\Delta a}, & k = kk; \\ 0, & k \neq kk. \end{cases} \quad (\text{G151})$$

Prilog H Rezultati kalibracije hidrauličkog modela

Na slikama 75, 76, 77 i 74 (levo) su prikazani preseki koji su korišćeni tokom kalibracije hidrauličkog modela. U preseccima su paralelno prikazane izračunate i merene vrednosti nivoa pri čemu je kod svih merenja naznačen izvor (RHMZ ili DJ). Slike 74 (desno), 78,

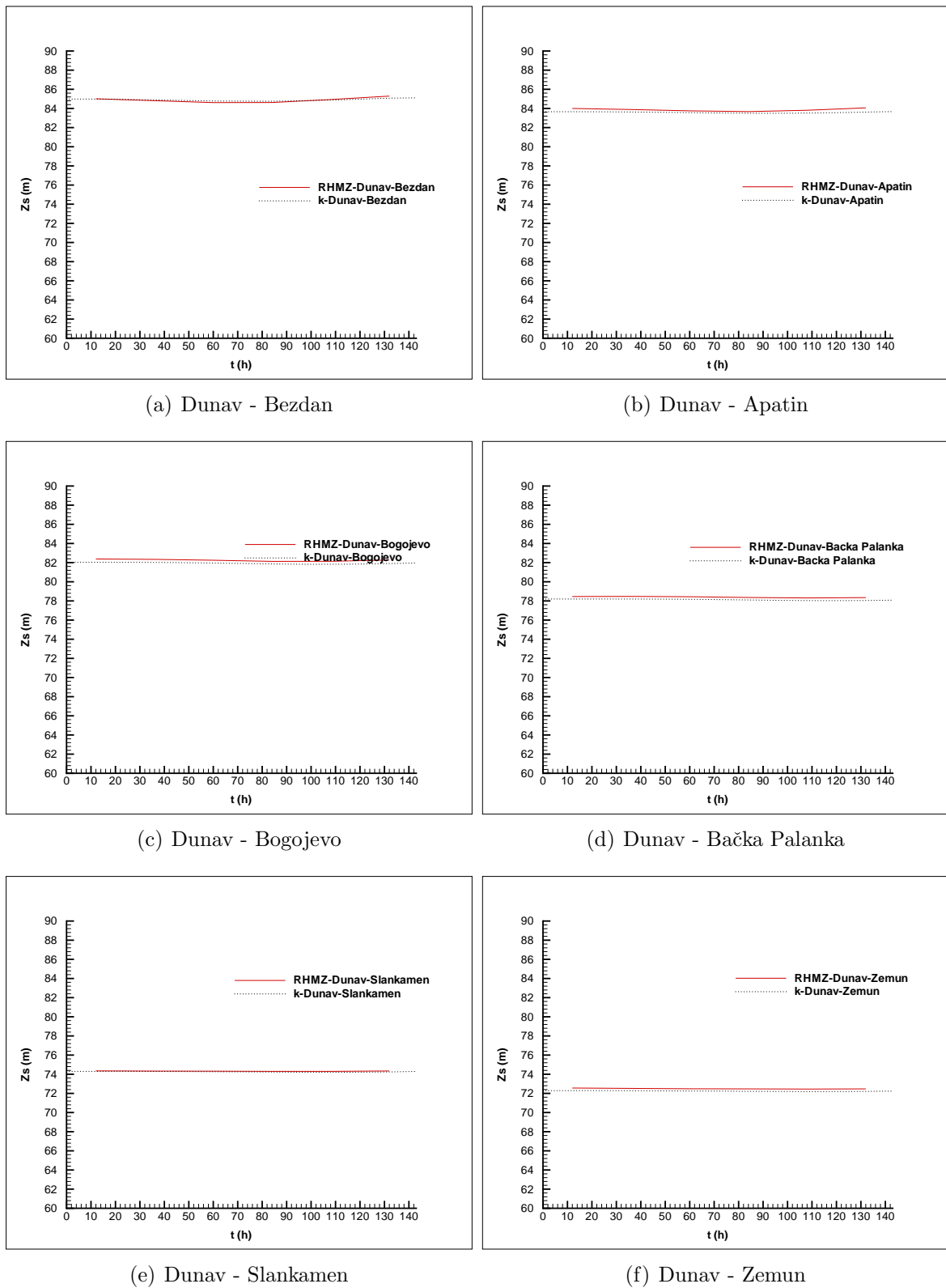


(a) Velika Morava - Ljubicevski most

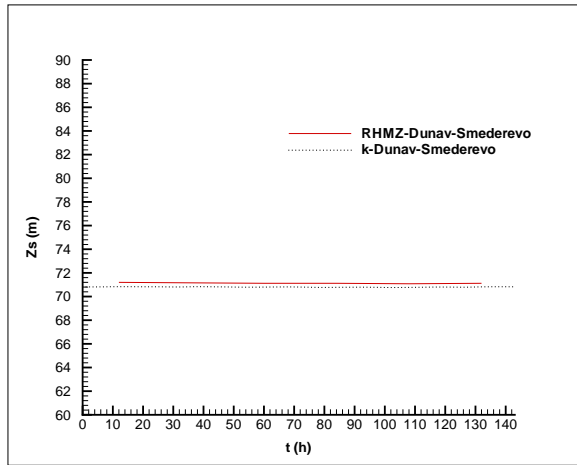
(b) Velika Morava - Ljubicevski most

Slika 74: Kalibracija modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 7600 \text{ m}^3/\text{s}$ (a) i provera za $Q_{sr} = 15600 \text{ m}^3/\text{s}$ (b)

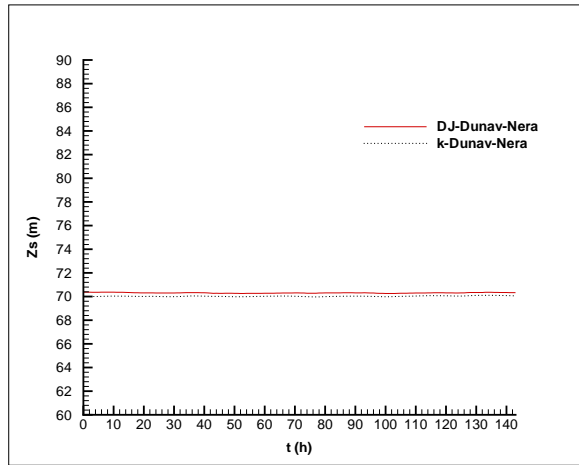
79 i 80 prikazuju paralelno merene i računute vrednosti nivoa za period od 14.04.2006. do 19.04.2006. godine u kojem se javio maksimalni srednji proticaj od $Q_{sr} = 15600 \text{ m}^3/\text{s}$. Ovaj period je uzet kao prvi stepen provere primenjenog postupka kalibracije.



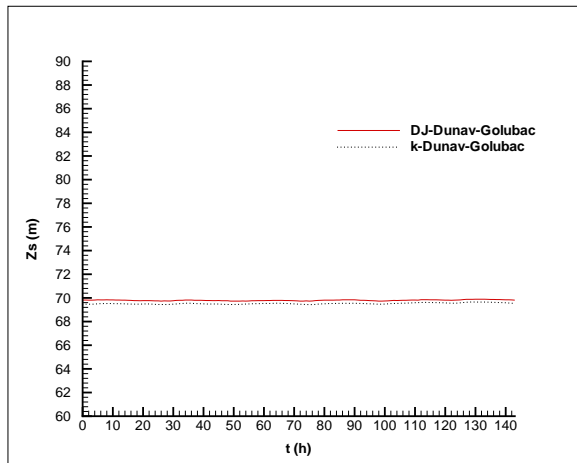
Slika 75: Kalibracija modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 7600 \text{ m}^3/\text{s}$, 1. deo



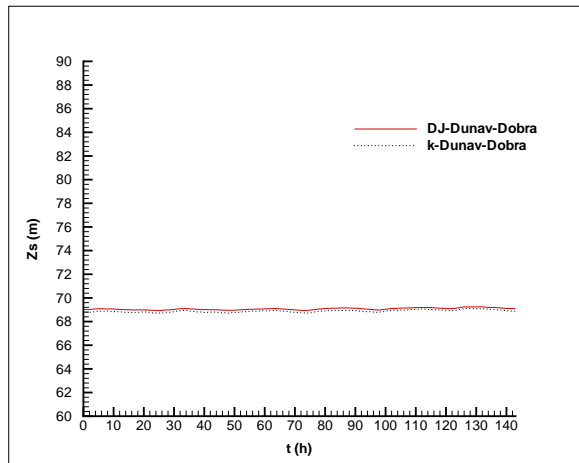
(a) Dunav - Smederevo



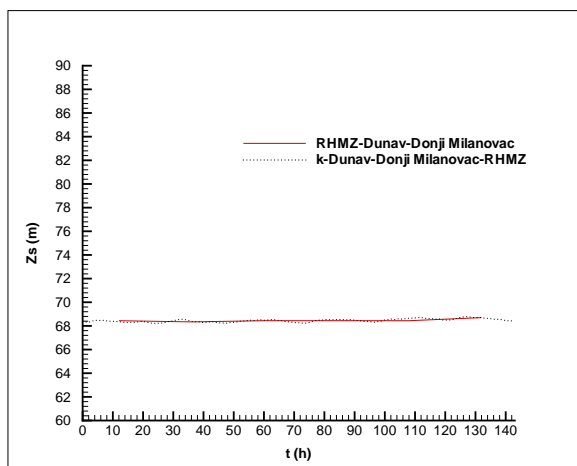
(b) Dunav - Nera



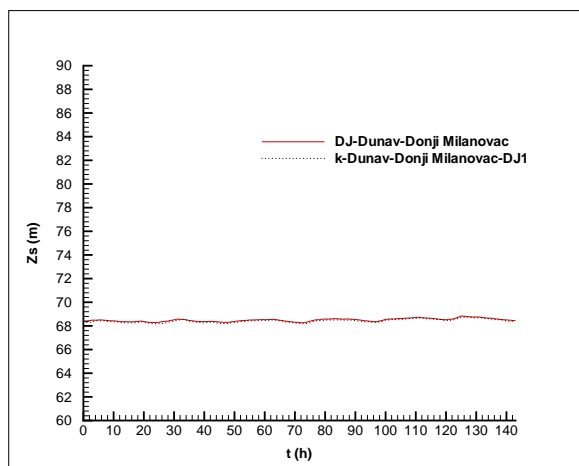
(c) Dunav - Golubac



(d) Dunav - Dobra

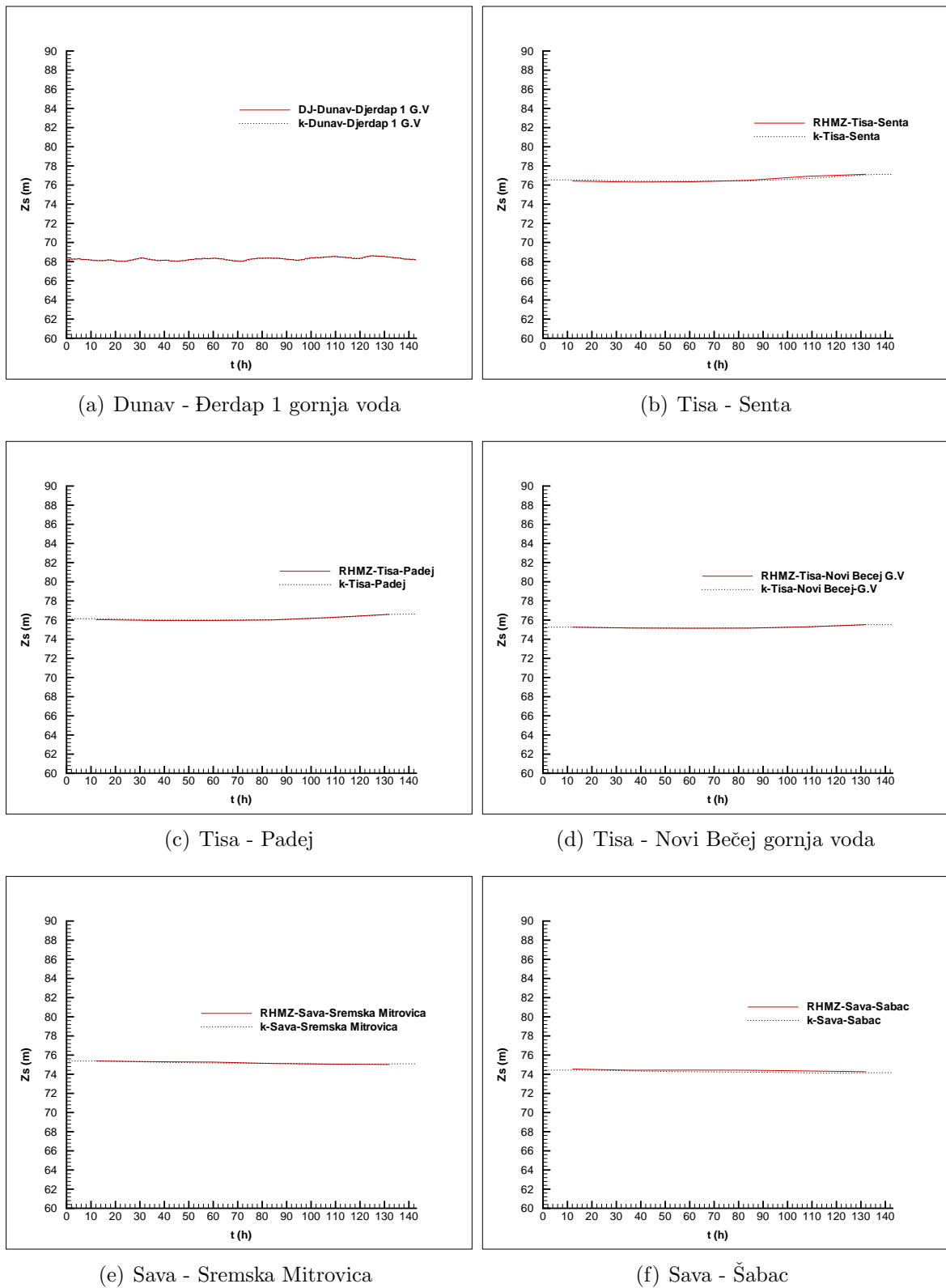


(e) Dunav - Donji Milanovac - RHMZ

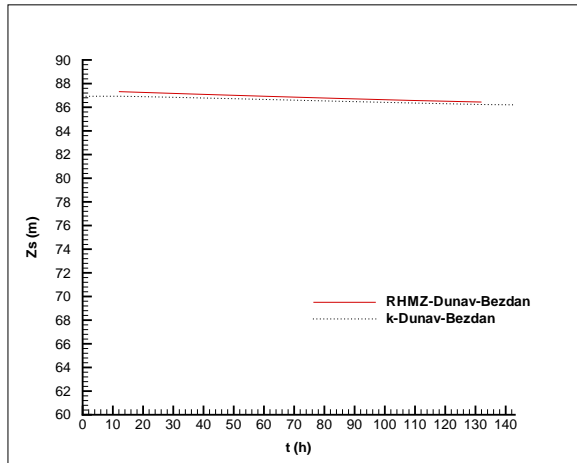


(f) Dunav - Donji Milanovac - DJ

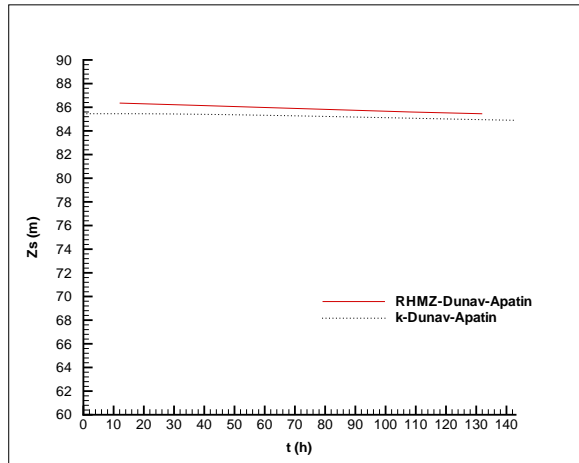
Slika 76: Kalibracija modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 7600 \text{ m}^3/\text{s}$, 2. deo



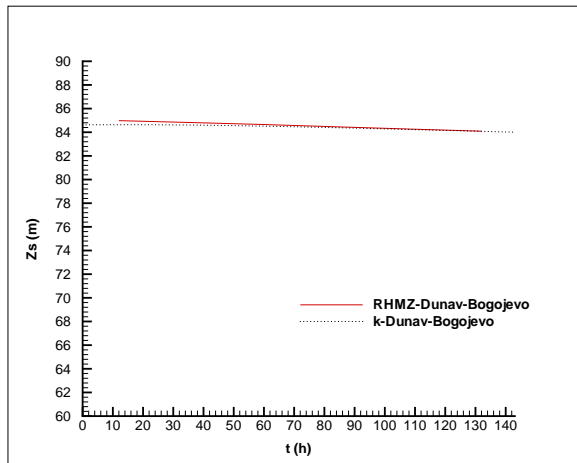
Slika 77: Kalibracija modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 7600 \text{ m}^3/\text{s}$, 3. deo



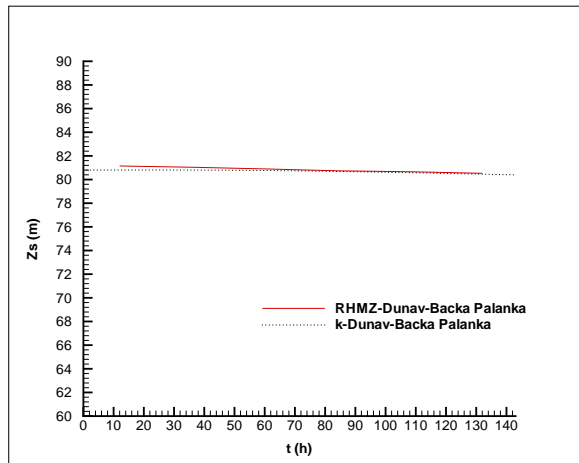
(a) Dunav - Bezdán



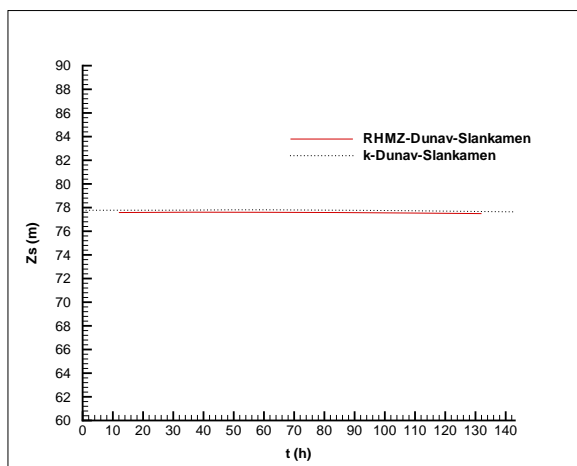
(b) Dunav - Apatin



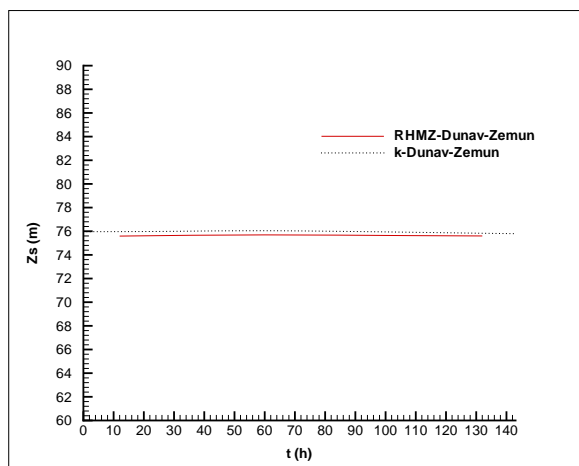
(c) Dunav - Bogojevo



(d) Dunav - Bačka Palanka

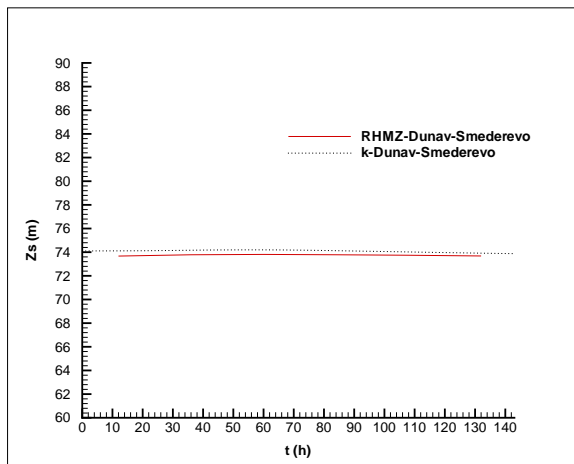


(e) Dunav - Slankamen

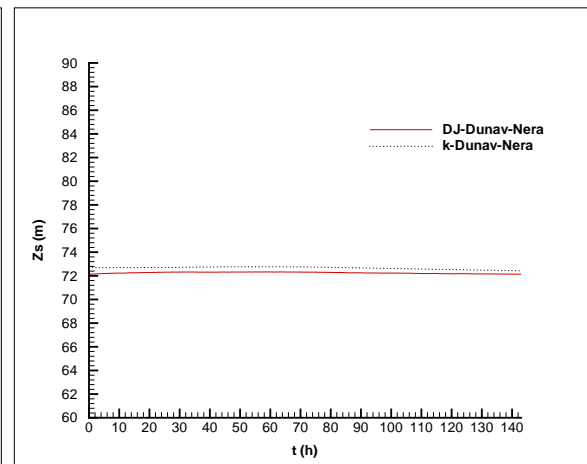


(f) Dunav - Zemun

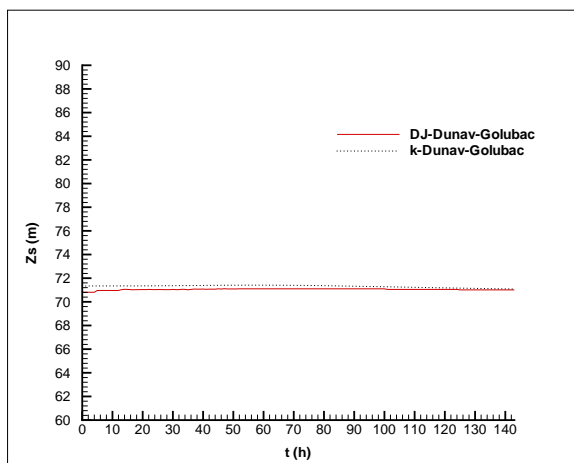
Slika 78: Provera kalibracije modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 15600\text{m}^3/\text{s}$,
1. deo



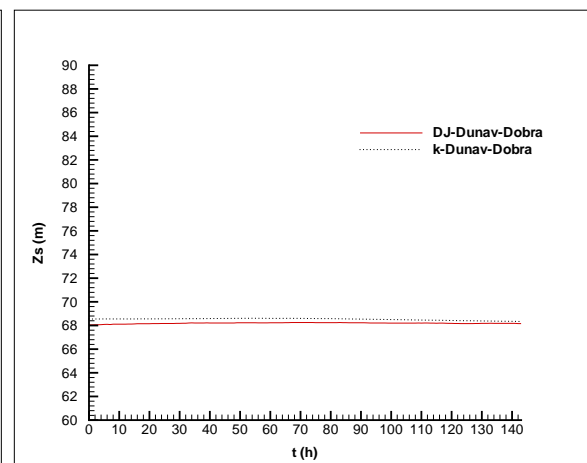
(a) Dunav - Smederevo



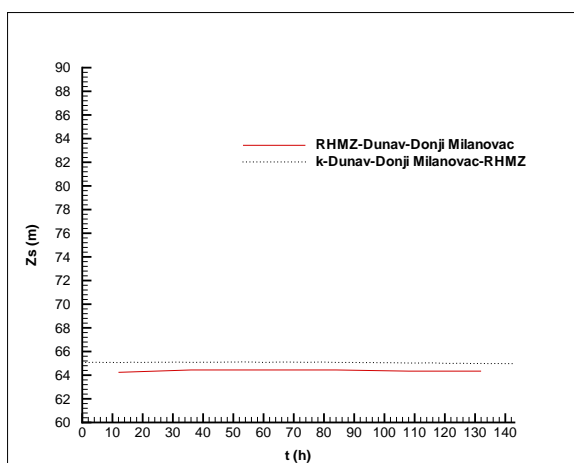
(b) Dunav - Nera



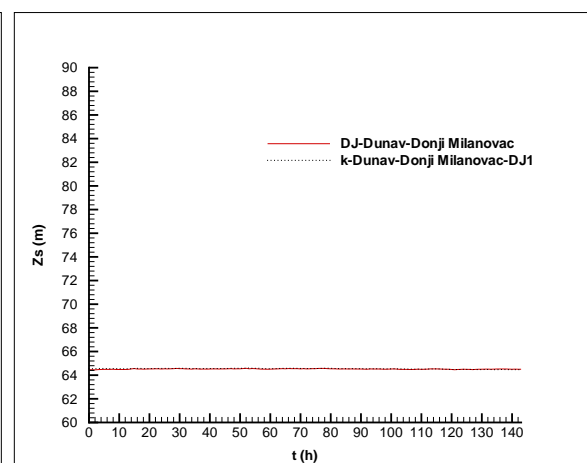
(c) Dunav - Golubac



(d) Dunav - Dobra

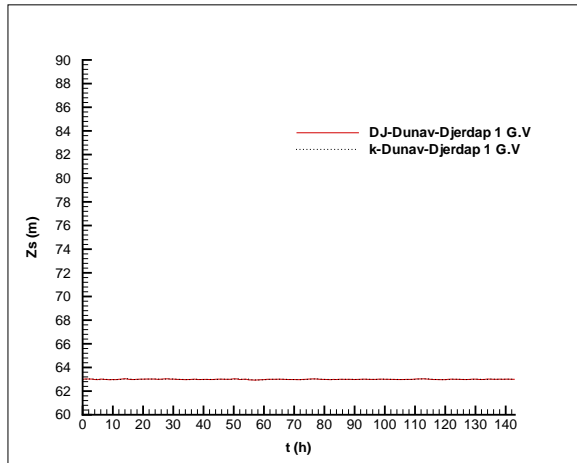


(e) Dunav - Donji Milanovac - RHMZ

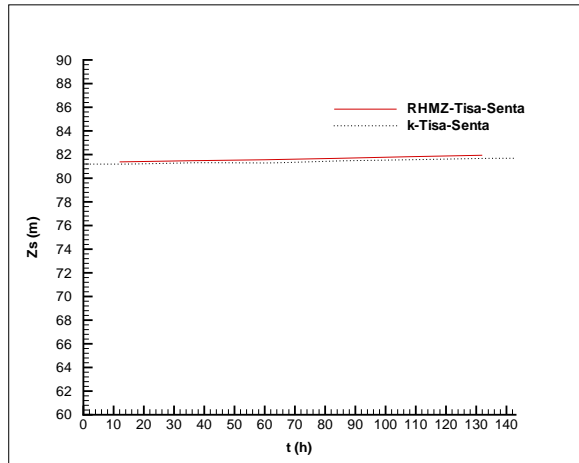


(f) Dunav - Donji Milanovac - DJ

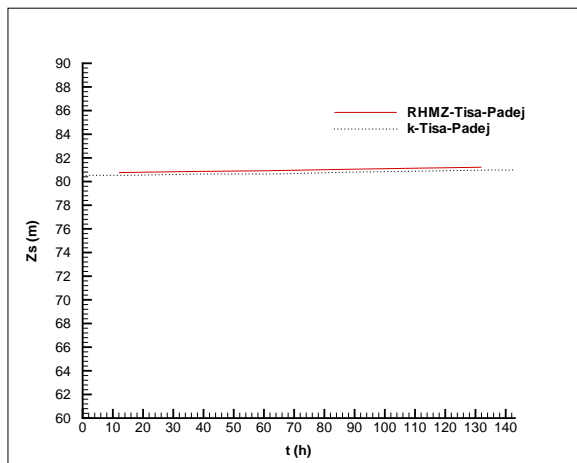
Slika 79: Provera kalibracije modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 15600\text{m}^3/\text{s}$,
2. deo



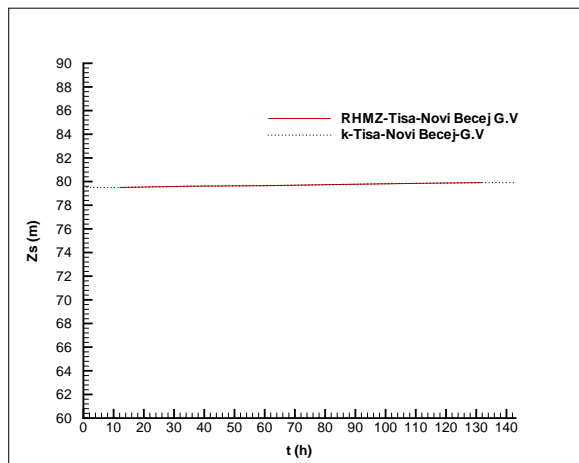
(a) Dunav - Đerdap 1 gornja voda



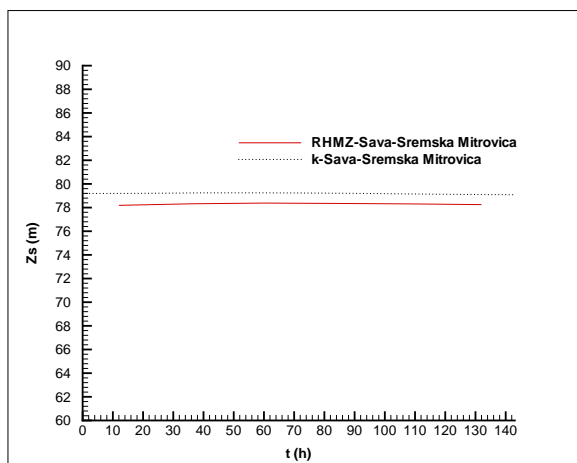
(b) Tisa - Senta



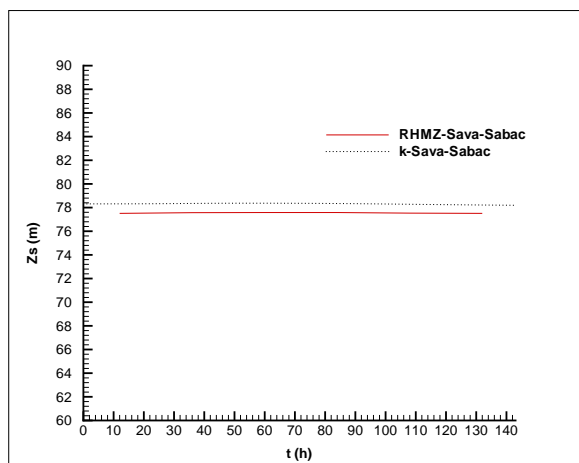
(c) Tisa - Padej



(d) Tisa - Novi Bečej gornja voda



(e) Sava - Sremska Mitrovica



(f) Sava - Šabac

Slika 80: Provera kalibracije modela zadavanjem apsolutne hrapavosti za $Q_{sr} = 15600 \text{ m}^3/\text{s}$,
3. deo

Dunav			Dunav		
Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)	Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)
D1	943.960	0.012	PA12g	1002.550	0.032
PA1	944.300	0.012	PA13	1003.800	0.032
PA2	945.000	0.012	PA13a	1004.900	0.032
D2	945.600	0.012	PA13b	1005.900	0.032
D3	946.150	0.012	PA13c	1007.400	0.032
PA3	946.650	0.012	PA13d	1008.050	0.032
D4	947.200	0.012	PA13e	1008.730	0.032
D5	948.000	0.012	PA13f	1009.750	0.032
PA4	948.900	0.012	PA14	1010.700	0.032
PA4a	949.800	0.012	PA14a	1011.600	0.032
PA4b	951.500	0.022	PA14b	1012.300	0.032
JC15	953.000	0.022	D15	1013.350	0.027
PA5	953.400	0.022	D16	1014.000	0.027
PA5a	953.700	0.022	PA14c	1015.000	0.027
JC14	954.500	0.022	D17	1016.200	0.027
PA6	955.150	0.022	PA15	1017.200	0.027
D6	956.000	0.012	D18	1018.800	0.027
D7	957.200	0.012	PA15a	1020.300	0.027
PA6a	958.100	0.012	D19	1022.000	0.027
D8	959.300	0.012	D20	1023.000	0.027
D9	960.500	0.012	PAA15b	1024.200	0.027
PA6b	963.000	0.012	D21	1025.100	0.027
PA7	963.180	0.012	D22	1026.000	0.027
D10	964.400	0.022	JC4	1026.700	0.027
PA7a	966.100	0.022	PA16	1027.100	0.027
D11	966.600	0.022	D23	1028.000	0.027
D12	967.200	0.022	D24	1028.800	0.035
PA7b	968.200	0.022	D25	1029.600	0.035
D13	969.300	0.022	PA16a	1030.600	0.035
JC11	969.950	0.022	D26	1031.400	0.035
D14	970.350	0.022	D27	1032.200	0.035
PA8	971.200	0.022	D28	1033.500	0.035
PA8a	972.250	0.022	PA16b	1034.700	0.035
PA8b	973.300	0.022	D29	1035.700	0.035
PA8c	974.500	0.022	D30	1036.600	0.035
PA8d	975.550	0.012	PA17	1037.700	0.035
JC9	976.000	0.012	GB1	1038.280	0.035
PA9	976.400	0.012	D31	1038.500	0.035
PA9a	977.700	0.012	D32	1039.400	0.035
PA9b	978.500	0.012	PA17a	1041.100	0.035
PA9c	979.600	0.012	D33	1042.700	0.035
PA9d	980.800	0.012	D34	1043.600	0.035
PA10	982.200	0.012	PA18Y	1044.550	0.035
PA10a	983.100	0.012	PA18R	1044.550	0.025
PA10b	984.150	0.012	PA18aR	1045.700	0.025
PA10c	985.400	0.012	PA18aY	1045.700	0.025
PA10d	986.400	0.012	D35	1047.100	0.025
PA10e	987.900	0.012	PA19	1048.000	0.025
PA11	989.000	0.012	L8	1048.380	0.025
PA11a	990.000	0.012	D36	1049.400	0.025
JC8	990.300	0.012	D37	1050.400	0.025
PA11b	991.000	0.012	PA19a	1051.500	0.025
PA11c	992.100	0.012	D38	1052.500	0.025
PA11d	993.000	0.012	PA20	1053.900	0.025
PA11e	993.800	0.012	D39	1055.500	0.025
PA11f	994.550	0.012	D40	1056.700	0.025
PA12	995.000	0.032	PA20a	1057.400	0.025
PA12a	995.700	0.032	D41	1058.400	0.025
PA12b	996.300	0.032	PA21	1059.550	0.031
PA12c	996.950	0.032	D42	1060.700	0.031
PA12d	998.250	0.032	PA21a	1061.550	0.031
PA12e	999.500	0.032	D43	1062.700	0.031
PA12f	1001.000	0.032	D44	1063.550	0.031

Tabela 32: Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Dunavu, 1. deo

Dunav			Dunav		
Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)	Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)
PA22	1064.900	0.025	PA39	1120.600	0.034
D45	1066.300	0.025	D98	1121.410	0.034
PA22a	1067.150	0.025	D99	1122.210	0.034
D46	1068.100	0.025	D100	1123.020	0.034
PA23	1069.000	0.025	D101	1123.980	0.034
D47	1069.800	0.025	PA40	1124.800	0.034
D48	1070.150	0.025	D102	1125.820	0.034
PA23a	1071.450	0.025	D103	1126.840	0.034
D49	1072.400	0.025	PA41	1127.600	0.027
D50	1073.350	0.025	D104	1128.620	0.027
PA24	1074.350	0.034	D105	1129.770	0.027
D51	1075.000	0.034	PA42	1130.700	0.027
PA25	1075.650	0.034	D106	1131.720	0.027
D75	1076.220	0.034	D107	1132.660	0.027
PA26	1076.900	0.034	PA43	1133.490	0.027
D76	1077.140	0.034	D108	1134.520	0.027
D77	1077.840	0.034	D109	1135.610	0.027
PA27	1078.300	0.034	PA44	1136.680	0.027
PA27A	1078.900	0.034	D110	1137.870	0.027
D78	1079.620	0.034	D111	1138.920	0.027
PA28	1081.250	0.025	D112	1139.800	0.027
D79	1082.420	0.025	PA45	1140.540	0.027
D80	1083.280	0.034	D113	1141.880	0.027
PA29	1084.180	0.034	D114	1142.600	0.027
PA29A	1085.200	0.034	PA46	1143.660	0.037
PA29B	1086.160	0.034	D115	1144.920	0.037
PA30	1087.180	0.034	PA47	1146.100	0.037
PA30A	1088.180	0.034	D116	1146.660	0.037
PA31	1089.140	0.025	D117	1147.550	0.037
D81	1090.070	0.025	D118	1148.440	0.037
PA31A	1091.130	0.034	PA48	1149.300	0.037
D82	1092.030	0.034	D119	1150.600	0.034
PA32	1093.260	0.034	D120	1152.060	0.034
D83	1094.050	0.034	PA49	1153.580	0.034
D84	1095.120	0.034	D121	1155.640	0.034
PA32A	1095.980	0.034	PA50	1157.000	0.035
D85	1096.200	0.029	D122	1158.000	0.035
PA33	1097.550	0.029	PA51	1159.540	0.034
D86	1098.460	0.029	D123	1160.850	0.034
PA33A	1099.420	0.029	PA52	1161.850	0.034
D87	1100.420	0.029	D124	1163.180	0.034
PA33B	1101.160	0.029	D125	1164.450	0.034
D88	1101.980	0.029	PA53	1165.570	0.034
PA34	1102.850	0.029	D126	1166.900	0.034
D89	1103.100	0.029	D127	1167.600	0.044
D89A	1103.940	0.029	PA54	1168.000	0.044
PA34A	1104.350	0.029	PA55	1171.200	0.025
PA34B	1104.910	0.029	PA56	1174.100	0.025
D90	1105.460	0.029	PA57	1176.400	0.025
PA35	1106.350	0.034	PA58	1178.450	0.025
D91	1107.220	0.034	PA59	1181.900	0.025
PA35A	1107.960	0.034	PA60	1184.700	0.025
D92	1108.680	0.034	PA61	1187.600	0.034
PA36	1109.540	0.034	PA62	1191.200	0.034
D93	1110.320	0.034	PA63	1194.800	0.034
PA36A	1111.280	0.034	PA64	1198.300	0.034
PA37	1112.220	0.034	PA65	1201.150	0.03
PA37A	1113.480	0.034	PA66	1203.750	0.03
D94	1114.670	0.034	PA67	1207.300	0.03
PA38	1116.000	0.034	PA68	1210.400	0.03
D95	1117.540	0.034	PA69	1213.100	0.03
D96	1118.620	0.025	PA70	1215.550	0.03
D97	1119.640	0.025	PA71	1219.000	0.03

Tabela 33: Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Dunavu, 2. deo

Dunav

Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)
PA72	1223.800	0.03
PA73	1228.100	0.03
PA74	1232.100	0.034
PA75	1236.100	0.034
PA76	1240.600	0.034
PA77	1244.450	0.027
PA78	1249.400	0.027
PA79	1254.150	0.027
EP169	1256.110	0.027
EP168	1257.330	0.027
EP166	1260.010	0.027
EP165	1261.190	0.027
EP164	1262.200	0.027
EP161	1264.460	0.027
EP158	1266.450	0.027
EP155	1268.760	0.027
EP151	1271.940	0.027
EP148	1276.820	0.027
EP145	1280.810	0.027
EP144	1281.660	0.027
EP143	1282.560	0.027
EP138	1286.380	0.027
EP133	1290.830	0.027
EP131	1291.870	0.027
EP129	1293.730	0.027
EP127	1295.980	0.027
EP126	1297.560	0.027
EP125	1298.990	0.027
EP124	1300.580	0.027
EP122	1303.960	0.027
EP120	1306.460	0.027
EP118	1308.690	0.027
EP116	1310.350	0.027
EP114	1313.190	0.027
EP112	1315.210	0.027
EP110	1317.320	0.027
EP108	1319.240	0.027
EP105	1321.950	0.029
EP103	1323.690	0.029
EP101	1325.230	0.029
EP98	1328.450	0.029
EP92	1333.470	0.029
EP90	1334.740	0.029
EP89	1336.760	0.029
EP84	1341.800	0.029
EP82	1345.540	0.029
EP79	1348.040	0.029
EP76	1349.870	0.029
EP74	1351.720	0.029
EP73	1353.080	0.029
EP72	1354.500	0.029
EP69	1357.510	0.029
EP67	1360.620	0.029
EP66	1362.100	0.029
EP63	1366.190	0.029
EP61	1368.270	0.029
EP60	1369.430	0.029
EP56	1374.850	0.029
EP53	1377.360	0.029
EP51	1379.470	0.029
EP50	1380.630	0.029
EP48	1382.190	0.027
EP44	1385.620	0.027

Dunav

Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)
EP42	1388.410	0.027
EP39-1	1392.100	0.027
EP32	1396.230	0.027
EP26	1401.690	0.027
EP24	1404.540	0.027
EP22	1406.720	0.027
EP20	1408.860	0.027
EP18	1410.820	0.027
EP16	1412.980	0.027
EP14	1415.470	0.027
EP11	1418.530	0.027
EP10	1419.630	0.027
EP9	1421.720	0.027
EP8	1423.270	0.027
EP7	1424.860	0.027
EP5	1426.820	0.027
EP1	1430.440	0.027

Tabela 34: Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Dunavu, 3. deo

Tisa

Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)
PA-1A	0.250	0.025
PA-1	1.100	0.025
PA-1B	2.750	0.025
PA-2	4.500	0.025
PA-2A	6.340	0.025
PA-2B	8.090	0.025
PA-3	10.600	0.025
PA-3A	13.640	0.025
PA-3B	16.560	0.025
PA-4	18.700	0.025
PA-4A	21.170	0.025
PA-4B	23.510	0.025
PA-5	25.980	0.025
PA-5A	31.160	0.025
PA-5B	33.870	0.025
PA-6	36.400	0.025
PA-6A	38.970	0.025
PA-6B	41.990	0.025
PA-6C	44.380	0.025
PA-7	47.060	0.025
PA-7A	50.750	0.025
PA-7B	55.050	0.025
PA-8	58.320	0.025
PA-8A	62.350	0.012
EP55	64.200	0.012
EP56	64.870	0.012
EP57	65.900	0.012
EP58	67.450	0.012
EP59	68.760	0.012
EP62	72.140	0.012
EP65	74.950	0.012
EP66	76.350	0.012
EP67	77.250	0.012
EP68	78.550	0.012
EP69	79.740	0.012
EP70	80.960	0.012
EP72	82.260	0.012
EP73	83.140	0.012
EP75	85.000	0.012
EP76	86.330	0.012
EP77	87.620	0.012
EP78	88.710	0.012
EP81	91.050	0.012
EP82	91.870	0.012
EP83	93.170	0.012
EP85	95.460	0.012
EP86	96.740	0.012
EP87	97.720	0.012
EP88	99.450	0.012
EP90	102.510	0.012
EP91	103.920	0.012
EP92	105.550	0.012
EP93	106.860	0.012
EP95	108.920	0.012
EP96	109.980	0.012
EP97	111.050	0.012
EP99	112.970	0.012
EP100	114.280	0.012
EP101	115.510	0.012
EP103	117.500	0.012
EP104	118.140	0.012
EP105	118.780	0.012
EP106	119.980	0.012
EP107	120.780	0.012
EP108	121.950	0.012
EP109	122.960	0.012

Sava

Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)
PA-1	0.100	0.027
PA-1A	1.030	0.027
PA-2	2.930	0.027
PA-2A	5.300	0.027
PA-3	7.500	0.027
PA-3A	10.250	0.027
PA-4	12.500	0.027
PA-4A	14.800	0.027
PA-5	17.250	0.027
PA-5A	19.150	0.027
PA-6	20.960	0.027
PA-6A	23.150	0.027
PA-7	26.130	0.027
PA-7A	29.130	0.027
PA-8	35.100	0.027
PA-8A	37.660	0.027
PA-9	41.040	0.027
PA-9A	43.720	0.027
PA-10	45.700	0.027
PA-10A	48.400	0.027
PA-11	51.480	0.027
PA-11A	54.100	0.027
PA-12	55.500	0.027
PA-12A	58.380	0.027
PA-13	61.650	0.027
PA-13A	64.980	0.027
PA-14	67.240	0.027
PA-15	71.180	0.01
PA-16	75.670	0.01
PA-17	81.050	0.01
PA-18	86.050	0.01
PA-19	91.060	0.01
PA-20	94.710	0.01
PA-21	98.900	0.01
PA-22	102.850	0.01
EP102	104.140	0.01
EP103	105.500	0.01
EP104	106.650	0.01
EP105	107.670	0.01
EP106	108.660	0.01
EP107	109.700	0.01
EP108	110.550	0.01
EP109	112.070	0.01
EP110	114.290	0.01
EP111	115.735	0.01
EP112	116.930	0.01
EP113	117.700	0.01
EP114	119.610	0.01
EP115	120.880	0.01
EP116	122.100	0.01
EP117	122.900	0.01
EP118	124.155	0.01
EP119	125.350	0.01
EP120	126.850	0.01
EP121	128.000	0.01
EP122	129.600	0.01
EP123	131.350	0.01
EP124	132.850	0.01

Velika Morava

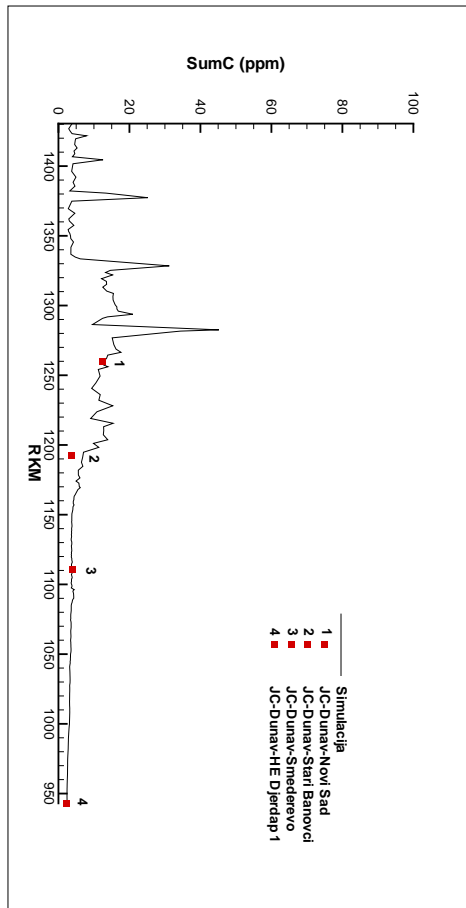
Naziv	Stac.	Apsolutna hrapavost (m)
KP-1	0.060	0.03
KP-4	2.460	0.03
KP-9	5.860	0.03
KP-12	9.000	0.03
KP-17	14.410	0.03
KP-23	20.335	0.03

Tabela 35: Pregled apsolutne hrapavosti za modelisane profile na Tisi, Savi i Velikoj Moravi

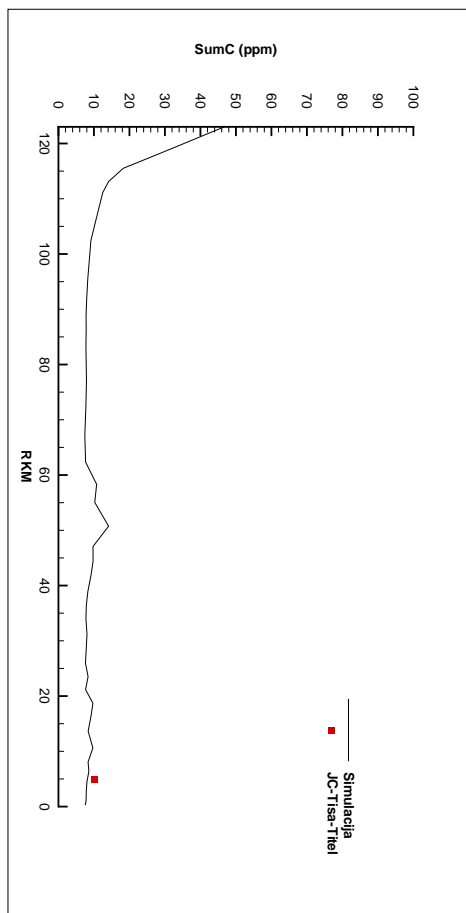
Prilog I Rezultati dugoročne simulacije

Dodatni primeri rezultata proračuna sa postojećim merenjima su dati na slici 81. Prikazane su izračunate vrednosti ukupne koncentracije duž toka Dunava, Tise i Save, sa postojećim merenjima u istom vremenskom trenutku. Sa slika se primećuje da je slaganje rav cunate i merene ukupne koncentracije suspendovanog nanosa zadovoljavajuće. Promena različitih frakcija koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija u mešavini nanosa na dnu duž toka je prikazan na slikama 82 i 83 za Dunav. Na slikama 84 i 85 su prikazani odgovarajući rezultati za Tisu. Proračunom je dobijeno da u suspenziji nema frakcija $k = 6$, $k = 7$, $k = 8$, $k = 9$ i $k = 10$, ali se javljaju u mešavini nanosa na dnu, slika 85. Na slikama 86 i 87 je prikazana promena koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i procentualnog udela frakcija u mešavini nanosa na dnu duž Save. Za isti vremenski trenutak su date i linije nivoa duž Dunava, Tise i Save na slici 88.

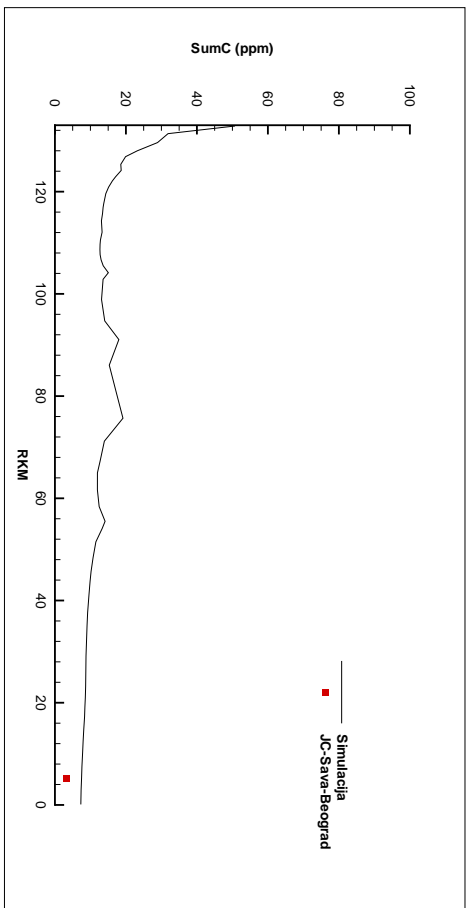
Pored ovih rezultata su kao primer odabrana tri karakteristična preseka kako bi se prikazale promene kote dna (talvega) tokom vremena. Prva tipična pojava je izraženo zasipanje u oblasti uz branu, a karakterističan presek je dat na slici 89 (a). Drugi vid promene kote dna je naizmenično zasipanje i erodovanje poprečnog preseka. Kao primer je dat presek u okolini Novog Sada, Slika 89 (b). Preostala opcija deformacije korita je dominantno erodovanje preseka. Kao karakterističan presek je prikazan presek uzvodno od Zemuna 89 (c).



(a) Promena ukupne koncentracije duž Dunava

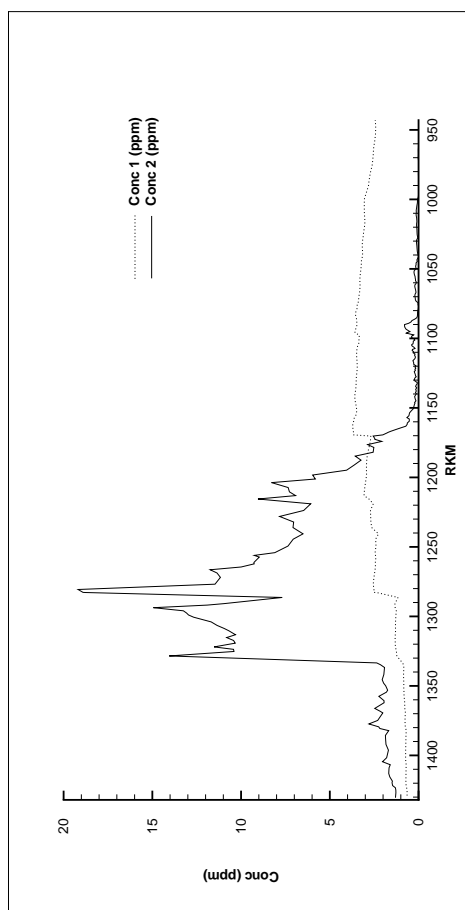
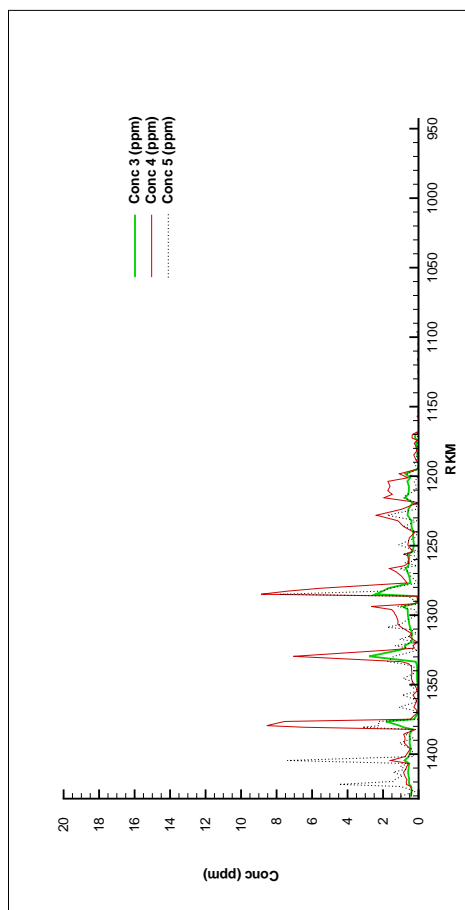
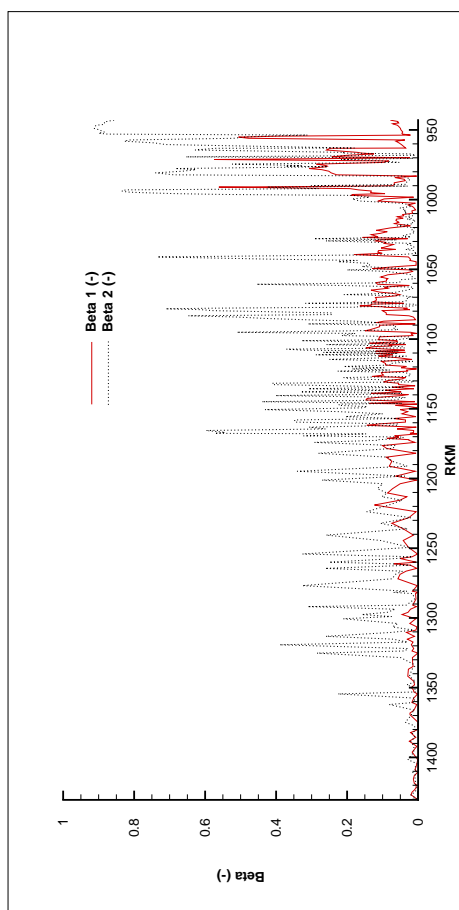
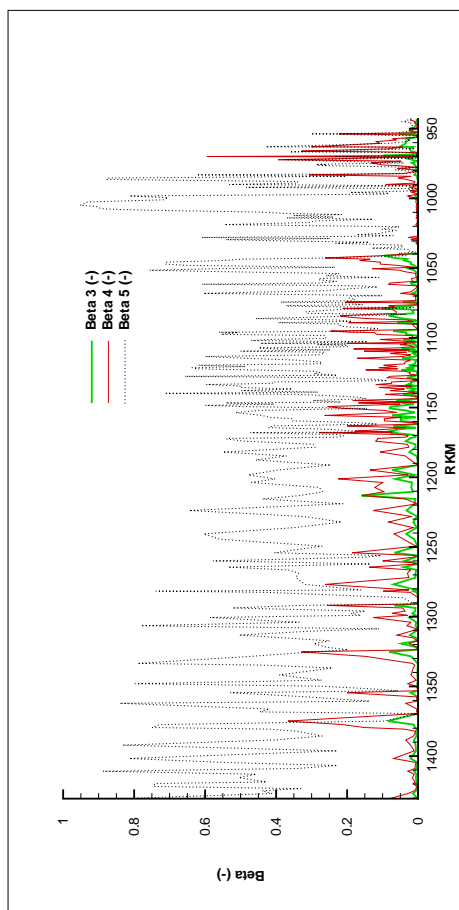


(b) Promena ukupne koncentracije duž Tise

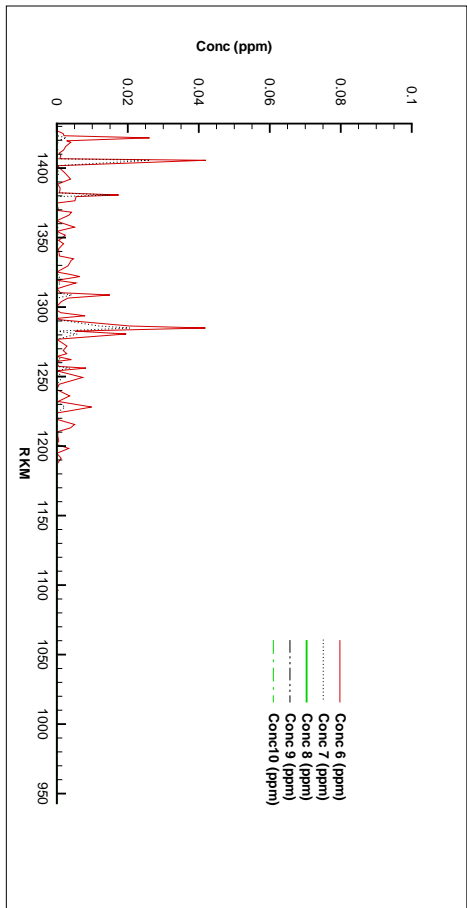
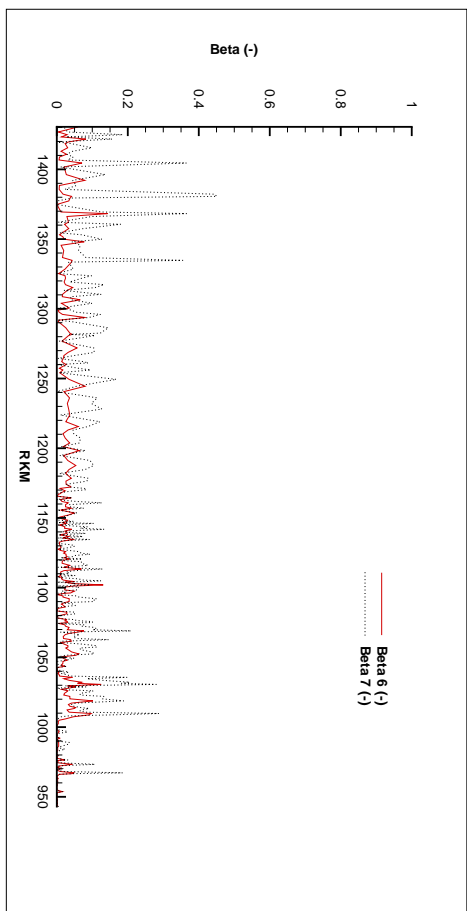
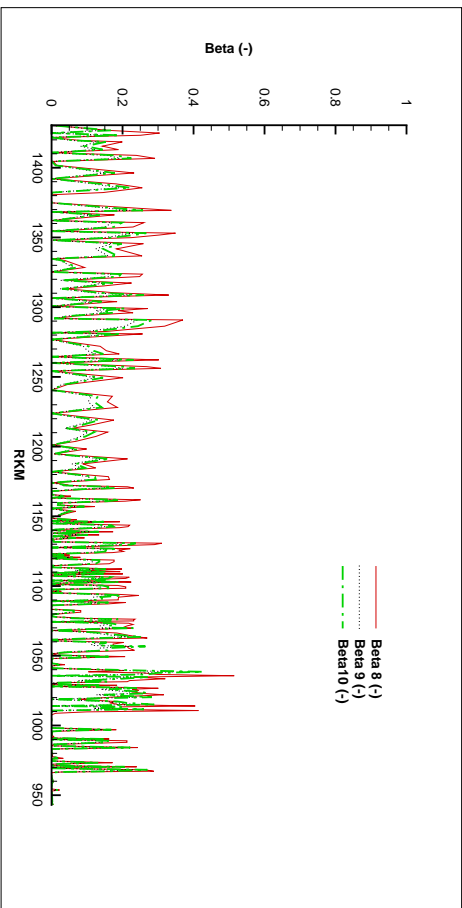


(c) Promena ukupne koncentracije duž Save

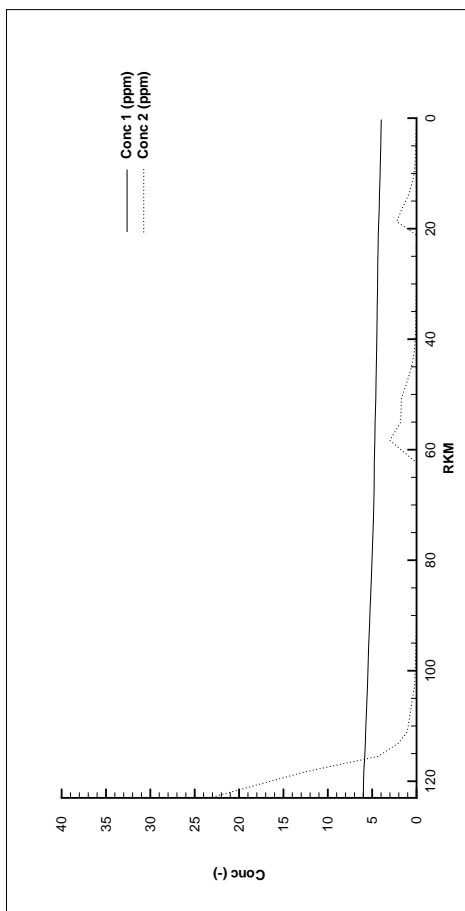
Silka 81: Promena ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u proizvoljnom trenutku 2008. godine

(a) Promena koncentracija C_1 i C_2 duž Dunava(b) Promena koncentracija C_3 , C_4 i C_5 duž Dunava(c) Promena procentualnog udela frakcija β_1 i β_2 duž Dunava(d) Promena procentualnog udela frakcija β_3 , β_4 i β_5 duž Dunava

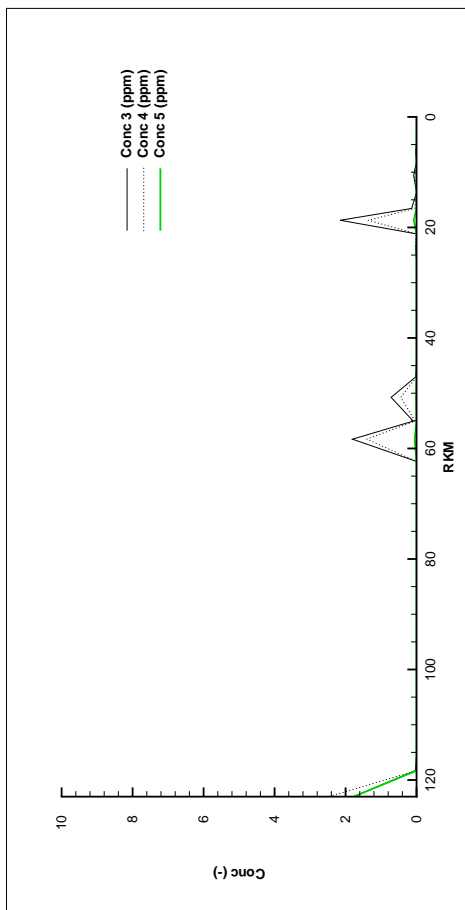
Slika 82: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Dunava za 2008. godinu, 1. deo

(a) Promena koncentracija C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , i C_{10} duž Dunava(b) Promena procentualnog udela frakcija β_6 i β_7 duž Dunava(c) Promena procentualnog udela frakcija β_8 , β_9 i β_{10} duž Dunava

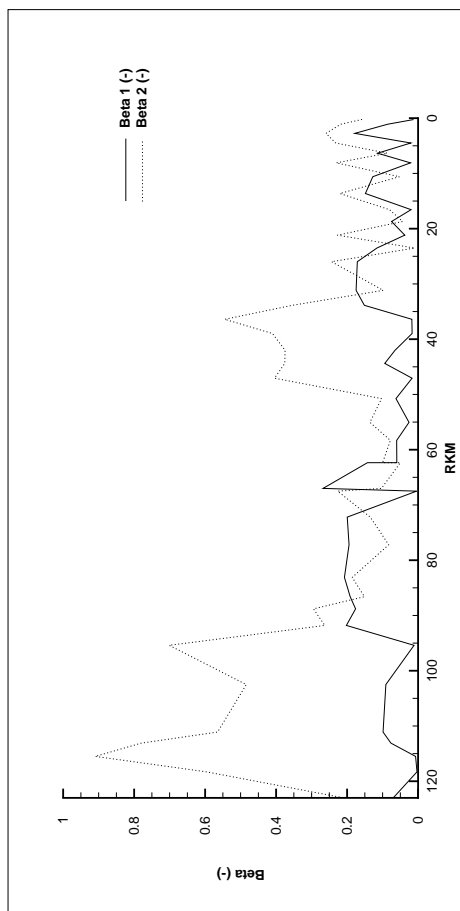
Slika 83: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Dunava za 2008. godinu, 2. deo



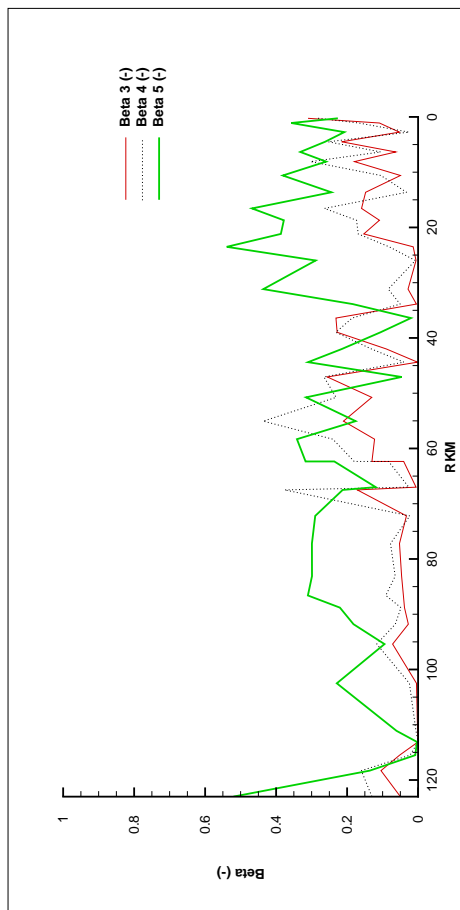
(a) Promena koncentracija C_1 i C_2 duž Tise



(b) Promena koncentracija C_3 , C_4 i C_5 duž Tise

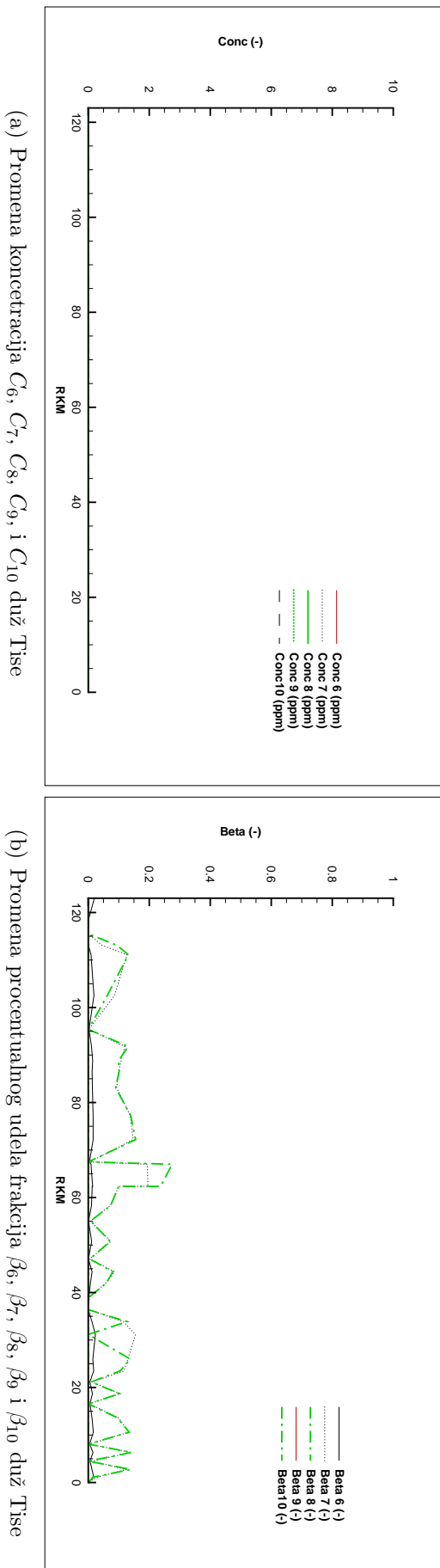


(c) Promena procentualnog udela frakcija β_1 i β_2 duž Tise

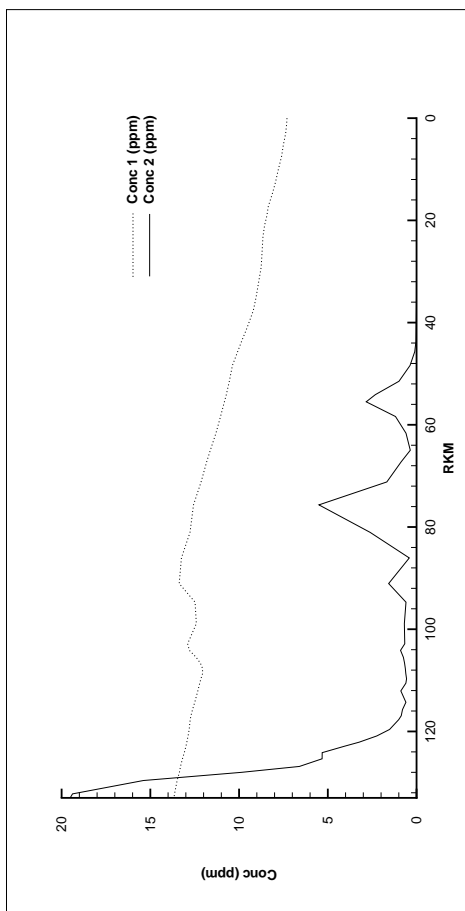


(d) Promena procentualnog udela frakcija β_3 , β_4 i β_5 duž Tise

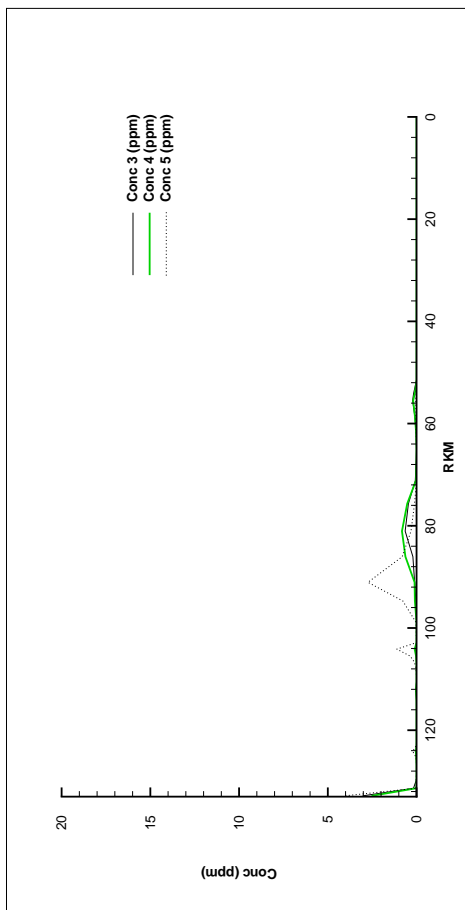
Slika 84: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Tise za 2008. godinu, 1. deo



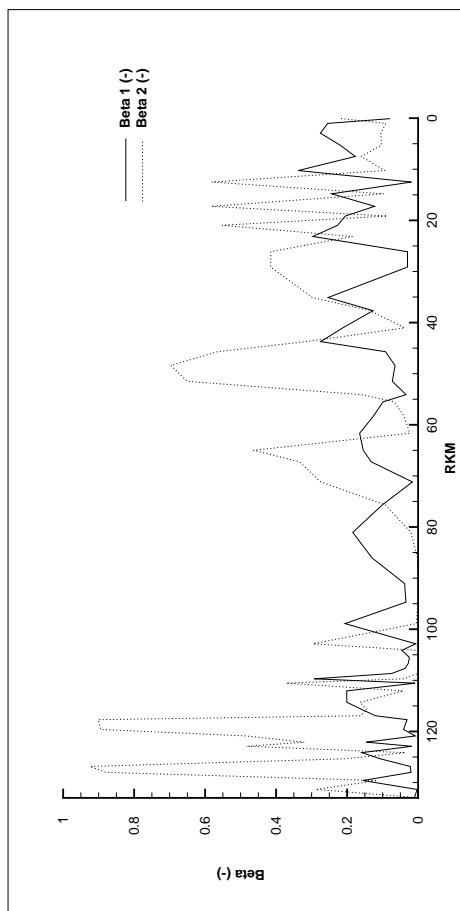
Slika 85: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Tise za 2008. godinu, 2. deo



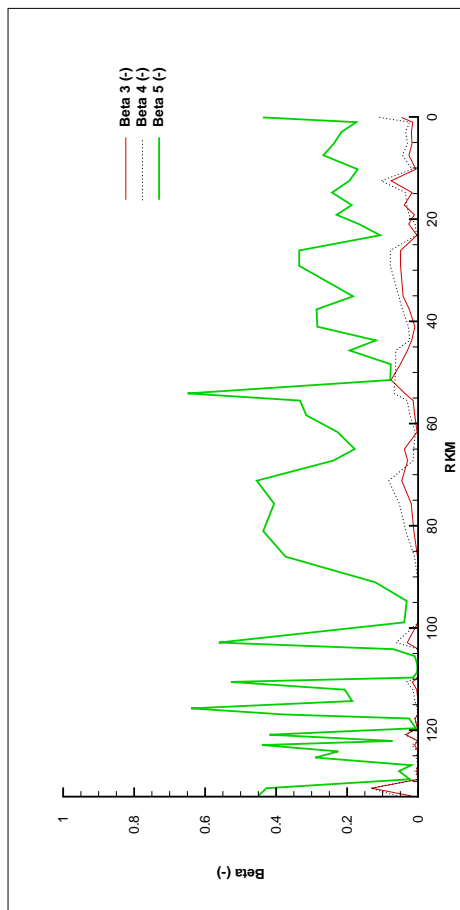
(a) Promena koncentracija C_1 i C_2 duž Save



(b) Promena koncentracija C_3 , C_4 i C_5 duž Save

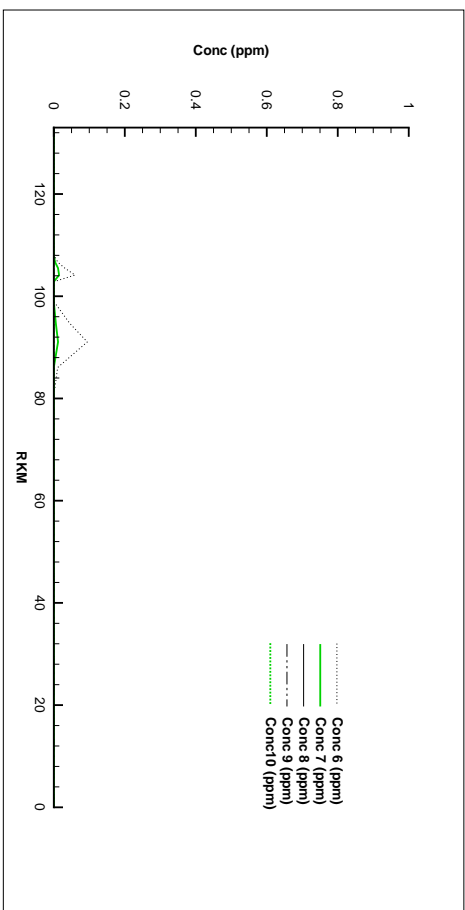


(c) Promena procentualnog udela frakcija β_1 i β_2 duž Save

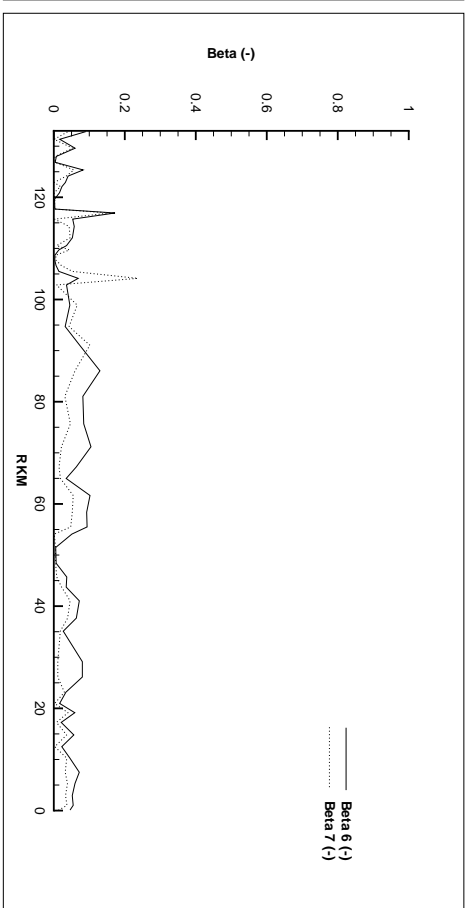


(d) Promena procentualnog udela frakcija β_3 , β_4 i β_5 duž Save

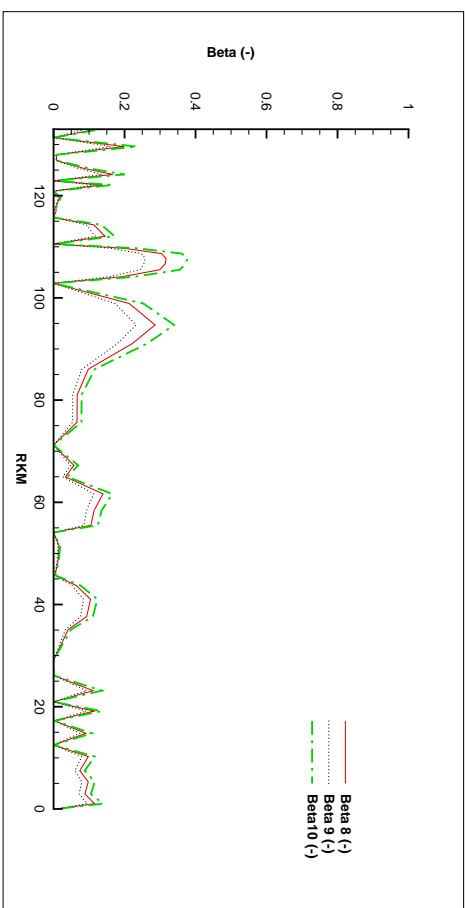
Slika 86: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Save za 2008. godinu, 1. deo



(a) Promena koncentracija C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , i C_{10} duž Save

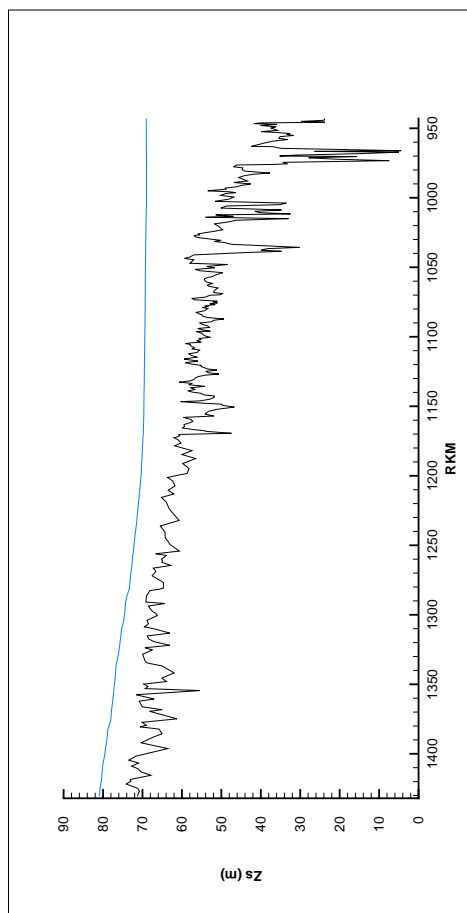


(b) Promena procentualnog udela frakcija β_6 i β_7 duž Save

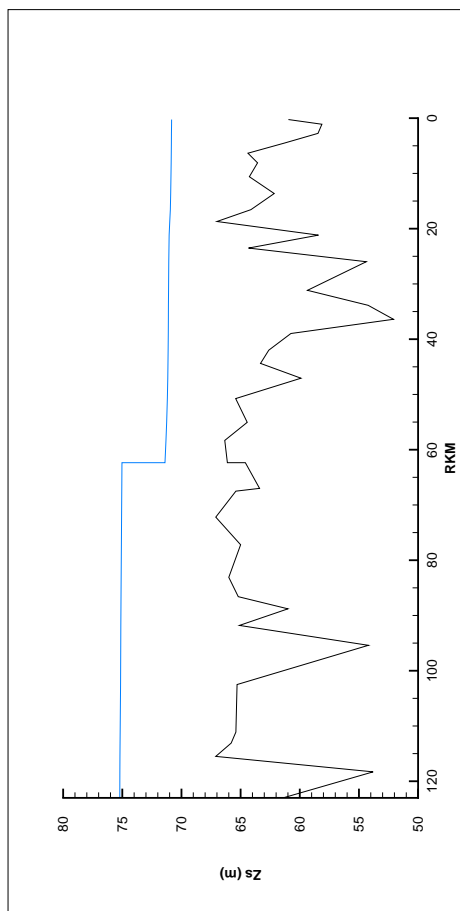


(c) Promena procentualnog udela frakcija β_8 , β_9 i β_{10} duž Save

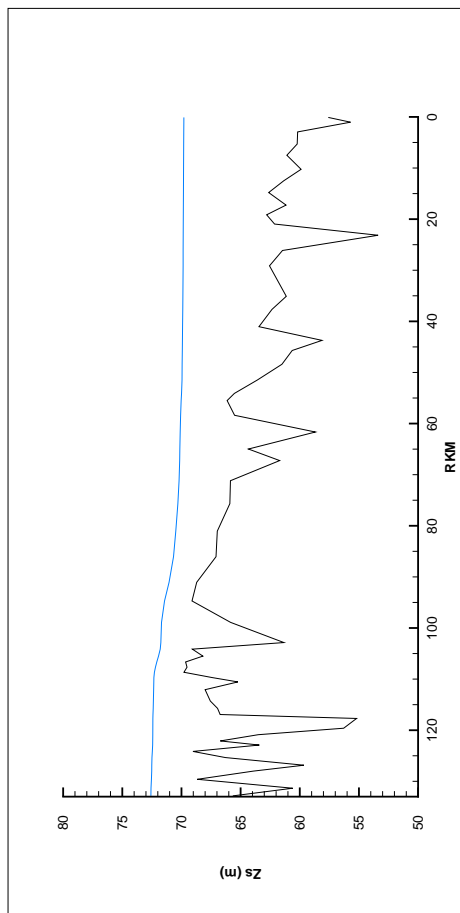
Slika 87: Promena koncentracije suspendovanog nanosa i procentualnog udela frakcija duž Save za 2008. godinu, 2. deo



(a) Linija nivoa i talveg duž Dunava

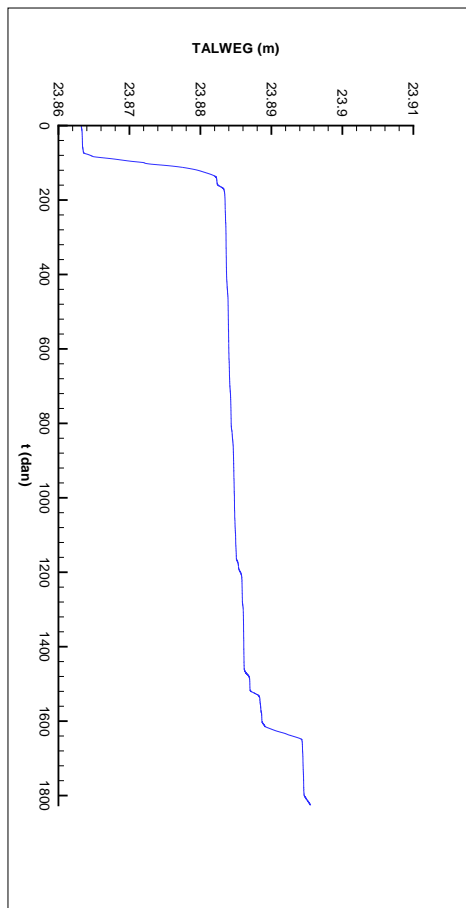


(b) Linija nivoa i talveg duž Tise

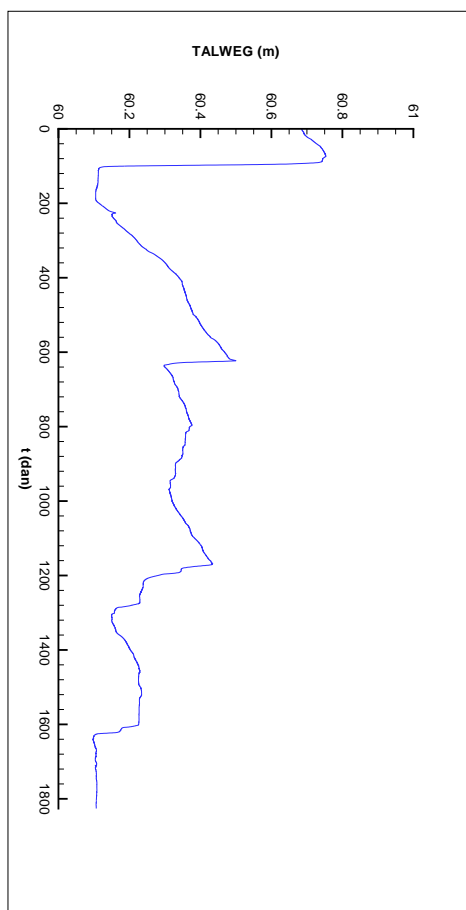


(c) Linija nivoa i talveg duž Save

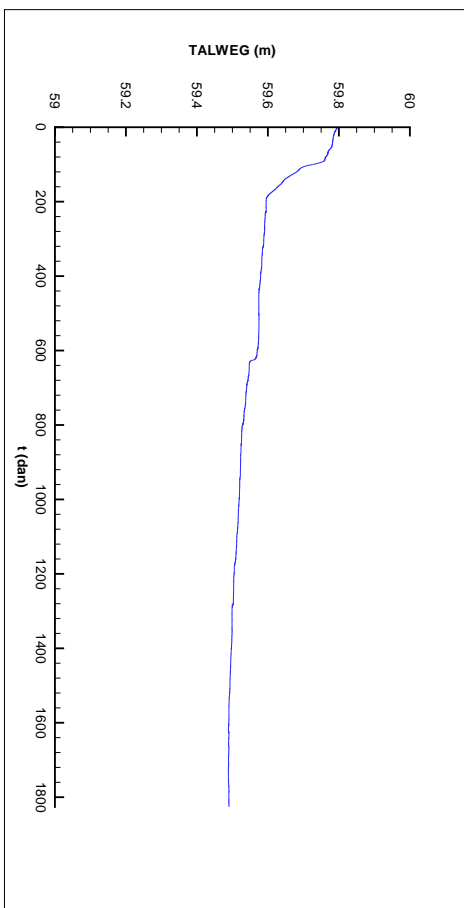
Slika 88: Promena nivoa i talvega duž toka za 2008. godinu



(a) Presek uzvodno od brane sa izraženim zasipanjem



(b) Presek u okolini Novog Sada sa najzmeničnijim zasipanjem i erodovanjem



(c) Presek uzvodno od Zemuna sa dominantnijim erodovanjem

Slika 89: Promena kote dna tokom vremena

Literatura

- Z. Ahmad and U. C. Kothiyari. Time-line cubic spline interpolation scheme for solution of advection equation. *Computers & Fluids*, 37:767–783, 2001.
- A. R. Appadu, M. Z. Dauhoo, and S. D. D. V. Rughooputh. Control of numerical effects of dispersion and dissipation in numerical schemes for efficient shock-capturing through an optimal courant number. *Computers & Fluids*, 37:767–783, 2008.
- A. Armanini and D. S. Giampaolo. A one-dimensional model for transport of a sediment mixture in non-equilibrium conditions. *Journal of Hydraulic Research*, 26(3):275–292, 1988.
- J. P. Benqué, J. A. Cunge, J. Feuillet, A. Hauguel, and F. M. Jr. Holly. New method for tidal current computation. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 108(WW3):396–417, 1982.
- S. M. Bhallamudi and M. H. Chaudhry. Numerical modeling of aggradation and degradation in alluvial channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(9):1145–1164, 1991.
- B. Brors. Numerical modelnig of flow and scour at pipelines. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(5), 1999.
- G. W. Brunner. Hec-ras, river analysis system hydraulic reference manual. Technical Report CPD-69, US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, 2010.
- L. Budinski and M. Spasojević. 2-d modeling of flow and sediment interaction - sediment mixtures. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 2013.
- Lj. Budinski. *Matematičko modeliranje ravanskih (osrednjenih po dubini) jednačina strujanja vode, transporta nanosa i morfoloških promena u prirodnim aluvijalnim vodotocima*. PhD thesis, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, 2011.
- M. D. Bui and P. Rutschmann. A 3d numerical model of graded sediment transport in nonequilibrium condition. In *The 7th International Conference on Hydroscience and Engineering (ICHE-2006), Philadelphia*, 2006.
- M. D. Bui and P. Rutschmann. Numerical modeling of non-equilibrium graded sediment transport in a curved open channel. *Computers & Geosciences*, 36:792–800, 2010.
- M. D. Bui, Th. Wenka, and W. Rodi. Depth-average numerical modelling of flow and sediment transport in the elbe river. In *Proceedings of the 3rd conference on Hydroscience and Engineering, Berlin*, 1998.
- B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes. *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- I. Celik. Numerical modelling of sediment transport in open channel flows. In *Euromech 156: Mechanics of Sediment Transport, Istanbul*, 1982.
- I. Celik and W. Rodi. Mathematical modelling of suspended sediment transport in open channels. In *21st IAHR Congress, Melbourne*, 1985.

- Wang Z. Liu Z. Chen, Y. and D. Zhu. 1d-2d coupled numerical model for shallow-water flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(2):122–132, 2012.
- A. J. Clemmens and F. M. Jr. Holly. Description and evaluation of program duflow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 119(4):724–734, 1993.
- S. D. Conte and C. deBoor. *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- Babić Mladenović M. Knežević Z. Ljumović Đ. Kostić M. Ljumović Đ. Dišlieski A. Damjanović, V. and N. Matović. Program iii: Osmatranja, merenja i analiza uticaja uspora dunava na priobalje izazvanih izgradnjom i radom he đerdap 1. režim nanosa. Technical Report Izveštaj za 2009. godinu, Institut za vodoprivredu 'Jaroslav Černi' A. D. Beograd, R.J. Zavod za uređenje vodnih tokova, 2010.
- Babić Mladenović M. Knežević Z. Ljumović Đ. Mitrović M. Kostić M. Ljumović Đ. Dišlieski A. Damjanović, V. and N. Matović. Program iii: Osmatranja, merenja i analiza uticaja uspora dunava na priobalje izazvanog eksploatacijom he đerdap 1. režim nanosa. Technical Report Izveštaj za 2011. godinu, Institut za vodoprivredu 'Jaroslav Černi' A. D. Beograd, Zavod za uređenje vodnih tokova, 2012.
- Babić Mladenović M. Knežević Z. Tasić D. Mitrović M. Stokić D. Kostić M. Ljumović Đ. Dišlieski A. Damjanović, V. and N. Matović. Program iii: Osmatranja, merenja i analiza uticaja uspora dunava na priobalje izazvanih izgradnjom i radom he đerdap 1. režim nanosa. Technical Report Izveštaj za 2008. godinu, Institut za vodoprivredu 'Jaroslav Černi' A. D. Beograd, R.J. Zavod za uređenje vodnih tokova, 2009.
- Babić Mladenović M. Tasić D. Mitrović M. Kostić M. Ljumović Đ. Dišlieski A. Damjanović, V. and N. Matović. Program iii: Osmatranja, merenja i analiza uticaja uspora dunava na priobalje izazvanog eksploatacijom he đerdap 1. režim nanosa. Technical Report Izveštaj za 2010. godinu, Institut za vodoprivredu 'Jaroslav Černi' A. D. Beograd, Zavod za uređenje vodnih tokova, 2011.
- DHI. Mike 11, a modeling system for rivers and channels. user guide. Technical report, DHI, Water, Environment and Health, 2009.
- J. G. Duan and S. K. Nanda. Two-dimensional depth-averaged model simulation of suspended sediment concentration distribution in a groyne field. *Journal of Hydrology*, 327:426–437, 2006.
- J. G. Duan, S. Y. Wang, and Y. Jia. The application of the enhanced cche2d model to study the alluvial channel migration processes. *Journal of Hydraulic Research*, 39(5), 2002.
- R. E. Ewing and H. Wang. A summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128:423–445, 2001.
- R. A. Falconer. Water quality simulation study of a natural harbor. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 112(1):15–34, 1984.
- H. Fang, M. Chen, and Q. Chen. One-dimensional numerical simulation of non-uniform sediment transport under unsteady flows. *Journal of Sediment Research*, 23(4):315–328, 2008.

- J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- H. B. Fischer, E. J. List, R. C. Y. Koh, J. Imberger, and N. H Brooks. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, INC., Orlando, Florida, 1979.
- T. Fischer-Antze, N. Ruther, N. R. B. Olsen, and D. Gutknecht. Three-dimensional (3d) modeling of non-uniform sediment transport in a channel with unsteady flow. *Journal of Hydraulic Research*, 47(5):670–675, 2009.
- C. A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fundamental and General Techniques*, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- M. H. (Ed.) García. *Sedimentation Engineering Processes, Measurements, Modeling , and Practice*. American Society of Civil Engineers, Reston, Virginia, 2008.
- D. Gessler, B. Hall, M. Spasojevic, F. Holly, H. Pourtaheri, and N. Rappelt. Application of 3d mobile bed, hydrodynamic model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(7): 737–749, 1999.
- A. Griewank and T. S. El-Danaf. Efficient accurate numerical treatment of the modified burger’s equation. *Applicable Analysis*, 88(1):75–87, 2009.
- J.-M. Hervouet and P. Bates. The telemac modeling system. *Special Issue, Hydrological Processes*, 14(13), 2000.
- C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal & External Flows, vol. 1, Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, 2nd edition. Elsevier, Oxford, 2007.
- F. M. Holly and J. L. Rahuel. New numerical/physical framework for mobile-bed modelling, part 1: Numerical and physical principles. *Journal of Hydraulic Research*, 28 (5):401–416, 1990a.
- F. M. Holly and J. L. Rahuel. New numerical/physical framework for mobile-bed modelling, part 2: Test applications. *Journal of Hydraulic Research*, 28(5):545–564, 1990b.
- F. M. Jr. Holly and J. B. Parrish. Description and evaluation of program carima. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 119(4):703–713, 1993.
- F. M. Jr. Holly and A. Preissmann. Accurate calculation of transport in two dimensions. *ASCE Journal of the Hydraulic Division*, 103(HY11):1259–1277, 1977.
- F. M. Jr. Holly and J.-M. Usseglio-Polatera. Dispersion simulation in two-dimensional tidal flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(7):905–926, 1984.
- F. M. Jr. Holly, J. C. Yang, P. Schwarz, J. Schaefer, S. H. Hsu, and R. Einhellung. Charima numerical simulation of unsteady water and sediment movement in multiply connected networks of mobile-bed channels. Technical Report IIHR Reprt No. 343, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1990.
- Yang J. C. Holly, F. M. Jr. and M. Spasojevic. Numerical simulation of water and sediment movement in multiply-connected networks of mobile bed channels. Technical Report 131, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, 1985.

- J. Huang, A. G. L. Borthwick, and R. L. Soulsby. One-dimensional modelling of fluvial bed morphodynamics. *Journal of Hydraulic Research*, 46(5):636–647, 2008.
- M. C. Hung, T. Y. Hsieh, C. H. Wu, and J. C. Yang. Two-dimensional nonequilibrium noncohesive and cohesive sediment transport model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(5):339–382, 2009.
- Abderrahman W. A. Khan H. U. Khan S. M. Khan A. U. Husain, T. and B. S. Eqnaibli. Flow simulation using channel network model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 114(3):424–441, 1988.
- M. Isic. Matematičko modelisanje linijskog neustaljenog tečenja u neprizmatičnom kanalu. Master's thesis, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, 2008.
- M. Isic and M. Spasojević. Matematičko modelisanje linijskog neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima. In *Zbornik radova sa 15. savetovanja Srpskog društva za hidraulička istraživanja*, 2009.
- M. Isic, Z. Horvat, and M. Spasojevic. Advection step in the split-operator approach applied to river modeling. *Applied Numerical Mathematics*, 72(9):1–18, 2013.
- A. Islam, N. S. Raghuawanshi, and R. Singh. Development and application of hydraulic simulation model for irrigation canal network. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 134(1):49–59, 2008.
- Y. Jia and S. Wang. Numerical model for channel flow and morphological change studies. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(9), 1999.
- M. B. Jovanović. *Regulacija reka - Rečna hidraulika i morfologija*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2008.
- M. F. Karim and J. F. Kennedy. Ialluvial: A computer-based flow and sediment-routing model for alluvial streams and its application to the missouri river. Technical Report IIHR Reprt No. 250, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1982.
- M. F. Karim, F. M. Holly, and J. F. Kennedy. Bed armoring procedures in ialluvial and application to missouri river. Technical Report IIHR Reprt No. 269, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1983.
- M. F. Karim, F. M. Jr. Holly, and Y. C. Yang. Ialuvial: Numerical simulation of mobile-bed rivers; part i, theoretical and numerical principles. Technical Report IIHR Reprt No. 309, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1987.
- A. Khosronejad, C. D. Rennie, A. A. Selehi Neyshabouri, and I. Gholami. Three-dimensional numerical modeling of reservoir sediment release. *Journal of Hydraulic Research*, 46(2):209–223, 2008.
- Babić Mladenović M. Damjanović V. Mitrović M. Popović D. Stokić D. Kostić M. Ljumić Đ. Dišlieski A. Matović N. Knežević, Z. Program iii: Osmatranja, merenja i analiza uticaja uspora dunava na priobalje izazvanih eksploatacijom heps. Technical report.

- Sen D. Kuiry, N. and P. D. Bates. Coupled 1d-quasi-2d flood inundation model with unstructured grids. *Journal of Hydraulic Engineering*, 136(8):493–506, 2010.
- P. D. Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7:159–193, 1954.
- P. D. Lax and B. Wendroff. System of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13:217–237, 1960.
- B. P. Leonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19: 59–98, 1979.
- N. Nagata, T. Hosoda, and Y. Muramoto. Numerical analysis of river channel processes with bank erosion. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126(4):243–252, 2000.
- Q. K. Nguyen and H. Kawano. Simultaneous solution for flood routing in channel networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(10):744–750, 1995.
- N. R. B. Olsen. Two-dimensional numerical modelling of flushing processes in water reservoirs. *Journal of Hydraulic Research*, 37(1), 1999.
- N. R. B. Olsen. Three-dimensional cfd modeling of self-forming meandering channel. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(5), 2003.
- A. Quarterioni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- J. L. Rahuel, F. M. Holly, J. P. Chollet, P. J. Belleudy, and G. Yang. Modeling of riverbed evolution for bedload sediment mixtures. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(11): 1521–1542, 1989.
- W. Rodi. Numerical calculations of flow and sediment transport in rivers. In *Proceedings of International Symposium on Stochastic Hydraulics, Beijing*, 2000.
- N. Ruther and N. R. B. Olsen. Three-dimensional modeling of sediment transport in a narrow 90° channel bend. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(10), 2005.
- P. G. Samuels and C. P. Skeels. Stability limits for preissmann’s scheme. *Journal of Hydraulic Engineering*, 116(8):997–1012, 1990.
- C. Sart, J. P. Baume, P. O. Malaterre, and V. Guinot. Adaptation of preissmann’s scheme for transcritical open channel flows. *Journal of Hydraulic Research*, 48(4): 428–440, 2010.
- M. Spasojevic and F. M. Jr. Holly. 2-d bed evolution in natural watercourses - new simulation approach. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of the ASCE*, 116(4):425–443, 1990.
- J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, 2nd edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2004.
- N. Struksima, K. W. Olsen, C. Flostra, and H. J. De Vriend. Bed deformation in curved alluvial channels. *Journal of Hydraulic Research*, 23(1), 1985.

- J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2009.
- T.-L. Tsai, S.-W. Chiang, and J.-C. Yang. Examination of characteristic method with cubic interpolation for advection-diffusion equation. *Computers & Fluids*, 35:1217–1227, 2006.
- L. C. van Rijn. Sediment transport, part ii: Suspended load transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(11):1613–1641, 1984.
- L. C. van Rijn. Mathematical modeling of morphological processes in the case of suspended sediment transport. Technical Report Communication No. 382, Delft Hydraulics Laboratory, 1987.
- L. C. van Rijn, H. van Rossum, and P. Termes. Field verification of 2-d and 3-d suspended-sediment models. *Journal of Hydraulic Engineering*, 116(10):1270–1288, 1990.
- D. A. Vieira and W. Wu. One-dimensional channel network model cche1d version 3.0 - user's manual. Technical Report NCCHE-TR-2002-02, National Center for Computational Hydroscience and Engineering, 2002a.
- D. A. Vieira and W. Wu. One-dimensional channel network model cche1d version 3.0 - model capabilities and application. Technical Report NCCHE-TR-2002-05, National Center for Computational Hydroscience and Engineering, 2002b.
- J. Von Neumann and A. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21:232–237, 1950.
- W. Wu. Depth-averaged two-dimensional numerical modeling of unsteady flow and nonuniform sediment transport in open channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(10):1013–1024, 2004.
- W. Wu. *Computational River Dynamics*. Taylor & Francis Group, London, 2008.
- W. Wu and D. A. Vieira. One-dimensional channel network model cche1d version 3.0 - technical manual. Technical Report NCCHE-TR-2002-01, National Center for Computational Hydroscience and Engineering, 2002.
- W. Wu and S. S. Y. Wang. One-dimensional explicit finite-volume model for sediment transport with transient flows over movable beds. *Journal of Hydraulic Research*, 46(1):87–98, 2008.
- W. Wu, W. Rodi, and T. Wenka. 3d numerical modeling of flow and sediment transport in open channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126(1), 2000.
- W. Wu, A. A. Vieira, and S. S. Y. Wang. One-dimensional numerical model for nonuniform sediment transport under unsteady flows in channel networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(9):914–923, 2004.
- N. N. Yanenko. *The Method of Fractional Steps, Translated by Holt M.* Springer-Verlag, New York, 1971.

- C. T. Yang and F. J. M. Simoes. Gstars computer models and their applications, part i: theoretical development. *Journal of Sediment Research*, 23(3):197–211, 2008.
- J. C. Yang. *Numerical Simulation of bed evolution in Multi-Channel River Systems*. PhD thesis, The Graduate College of the University of Iowa, 1986.
- J.-C. Yang and E.-L. Hsu. On the use of the reach-back characteristics method for calculation of dispersion. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12: 225–235, 1991.
- K. C. Yeh, S. Li, and W. L. Chen. Modeling non-uniform-sediment fluvial process by characteristics method. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(2):159–170, 1995.
- L. Yongjun, D. Guoren, H. Lonxi, and S. Xuejun. 3d mathematical model for suspended load transport by turbulent flows and its applications. *Science in China Ser. E Engineering & Material Science*, 47(2):237–256, 2004.
- J. Zeng, G. Constantinescu, and L. Weber. A 3d non-hydrostatic model to predict flow and sediment transport in loose-bed channel bends. *Journal of Hydraulic Research*, 46 (3):356–372, 2008.
- G. Zhou, H. Wang, X. Shao, and D. Jia. Numerical model for sediment transport and bed degradation in the yangtze channel downstream of three gorges reservoir. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(9):729–740, 2009.