Državni univerzitet u Novom Pazaru
Departman za matematičke nauke

Dženis Pučić

NUMERIČKE METODE STATISTIČKE OBRADE STOHASTIČKIH POJAVA U TEHNICI

Doktorska disertacija

Novi Pazar, 2013.

Sadržaj

Predgovor

Poznato je da pri pokušaju davanja prihvatljivo-matematičkog oblika mnogim prirodnim pojavama, nije moguće izbeći razne slučajnosti. S toga se pokazalo da deterministički opis srednjim vrednostima, kojima se objašnjavaju razne prirodne veze, mora biti zamenjen temeljnom statističkom obradom stohastičkih (slučajnih) pojava. Ovakve probleme lakše je formulisati nego rešiti, zbog čestih problema eksperimentalne prirode u stručnim oblastima koje se time bave kao i problema pri formiranju jednobraznog statističkog uzorka slučajne promenljive, odnosno time generisanih teškoća odgovarajuće matematičke formucije.

Ova disertacija se bavi istraživanjima kombinujući delove veoma važnih teorija, kao što su:

- Teorija verovatnoće i matematičke statistike;
- Teorija stohastičkih procesa;
- Statističke mešovite raspodele aditivnog i multiplikativnog tipa;

a sve u cilju dobijanja jednog poboljšanog pristupa za primenu rešavanja stvarnih problema, sa kojima se srećemo pri istraživanju u tehničkim naukama.

Disertacija "Numeričke metode statističke obrade stohastičkih pojava u tehnici", napisana je na 93 strane, formata A4, u LaTeX-u, i sadrži 2 slike, 11 grafikona. Pored predgovora i uvoda ova doktorska disretacija sadrži 4 poglavlja i zaključak. Na kraju je naveden spisak korišćene literature.

Ova doktorska disertacija je iz oblasti primenjene matematike i njen značaj je u aplikativnim metodama koje su date kroz primene, a ne samo kroz teoreme i dokaze kao u čisto teorijskoj matematici.

U prvom poglavlju navedeni su oni pojmovi iz teorije verovatnoće i matematičke statistike, sa posebnim osvrtom na slučajne promenljive, empirijske funkcije raspodele uzoraka, tačkaste i intervalne ocene parametara. Pored osnove zasnivanja teorije stohastičkih procesa u najkraćem je opisano Braunovo kretanje, Beli šum, Stohastički integral i Stohastička stabilnost.

U drugom poglavlju navedene su neke odabrane numeričke metode sa posebnim osvrtom na metodu Monte Karla i neki karakteristični primeri njene primene.

Treće poglavlje obuhvata mešovite raspodele aditivnog tipa, momente mešovotih raspodela sa Apsolutno-neprikidnim komponentama, Normalno-normalne, Normalno-uniformne i Normalno-Sipmsonove raspodele. Takođe, u ovom poglavlju su obrađene mešovite raspodele multiplikativnog tipa, mešovite raspodele maksimalno multiplikativnog tipa i mešovite raspodele minimalno multiplikativnog tipa.

U četvrtom poglavlju data je primena mešovitih raspodela u tehnici sa posebnim doprinosima u primeni, mešovito-aditivne raspodele na analizu zračenja smeše radioaktvnih izotopa, kao i primeri mešovito-statističkih raspodela multiplikativnog tipa na projektovanje vakumskih izolacionih sistema.

U zaključku su kratko navedeni ostvareni zadaci i ciljevi ove doktorske disertacije.

* * * * * *

Zahvaljujem se mojim profesorima koji su permanentno pratili i pomagali moj rad na izradi ove doktorske disertacije, tj. članovima Komisije: predsedniku prof. dr Igoru Milovanoviću, mentoru prof. dr Diani Dolićanin-Đekić i doc. dr Koviljki Stanković. Takođe se zahvaljujem profesorima: akademiku SANU Stevanu Pilipoviću, akademiku SANU Teodoru Atanackoviću, prof. dr Predragu Osmokroviću i prof. dr Ivanu Aranđeloviću, na pomoći i podršci, tokom izrade disertacije. Posebno se zahvaljujem prof. dr Ćemalu Dolićaninu za organizaciju, nesebičnu pomoć i pokazano strpljenje.

Novi Pazar, avgust 2013. godine — Dženis Pučić

Uvod

Mnoge pojave u prirodi, društvu i nauci su podložne slučajnim promenama. Nasumičnost se često zanemaruje pri proučavanju tih pojava. Umesto toga, teži se oslanjanju na srednje vrednosti u cilju objašnjenja prirodne veze koja se istražuje. U tehničkoj literaturi je rad sa slučajnim promenljivima, često izbegavan tako što su množene poznate srednjih vrednosti sa takozvanim sigurnosnim faktorima. Ovakav pristup može da bude pogrešan zato što često ekstremna vrednost a ne srednja, određuje karakteristike sistema.

Danas je opšte prihvaćeno da deterministički opis srednjim vrednostima mora biti zamenjen temeljnom statističkom obradom stohastičko/slučajnih pojava. Takav zadatak je daleko lakše postaviti nego rešiti, zbog čestih problema eksperimentalne prirode u primenjenim naučnim oblastima koje se time bave i takođe, zbog problema, koji se javljaju pri formiranju reprezentativnog statističkog uzorka.

Pre nego što dođe do matematičke formulacije slučajnog tj. stohastičkog procesa, on treba da bude fenomenološki poznat. Stoga polazna tačka mora nužno da bude eksperiment čiji rezultati, odnosno izmerene vrednosti, uzimaju vrednosti u određenom opsegu i na koje ne utiče nikakva ireverzibilna posledica samog eksperimenta. Uzroci varijacije eksperimentalno dobijenih slučajnih promenljivih mogu da budu svojstveni procesu, mogu da nastanu od njegovih graničnih uslova ili se mogu nalaziti u slučajnim greškama prilikom merenja (što je manje moguće). Statistički uzorak formiran od slučajnih promenjivih koje zadovoljavaju ove uslove se smatra čistim i na njega se može primeniti aparat matematičke statistike. U praksi, nažalost, mnogo se češće sreće sa slučajnim procesima uzajamno spregnutim, neistorodnim sa različitim graničnim uslovima i nepoznatim stepenom reverzibilnosti eksperimentalnog postupka. Eksperimentalno praćenje takvog tipa slučajnih procesa ne vodi čistim statističkim uzorcima, već statističkim uzo - rcima mešovitog tipa koji sadrže raznorodne slučajne promenjive čiju raznorodnost uglavnom nije moguće odrediti iz uslova međusobne ekranizacije i prirode samog eksperimenta. To je razlog što, mnogi empirijski dobijeni statistički uzorci slučajnih promenjivih imaju takozvane mešovite raspodele. Njihova analiza je veoma komplikovana usled velikog broja neizdiferenciranih parametara.

Osnovni cilj ovog rada je izgradnja jedinstvenog pristupa teoriji mešovitih raspodela, zasnovanog na analizi njihovog nastanka. Biće pokazano da mešovite raspodele aditivnog tipa nastaju prilikom mešanja različitih uzoraka, a mešovite raspodele multiplikativnog tipa kao raspodele estremnih vrednost uzorka. Takvo striktno matematičko razmatranje mešanja stohastičkih raspodela, omogućuje razvoj simplifikovanih algoritmi za identifikaciju i primenu mešovitih raspodela, podesnih za upotrebu u inženjerskoj praksi.

Ovaj cilj će se ostvariti tako što će se, nakon definisanja osnovnih pojmova matematičke statistike razmatrati striktno matematičke posledice formiranja statističkog uzorka od raznorodno karakterisanih neizdiferenciranih slučajnih promenjivih statistički obradivog tipa. Tom prilikom će se matematički definisati: mešovite raspodele aditivnog i multiplikativnog tipa; funkcija gustine mešovite normalno-normalne raspodele; funkcija gustine mešovite normalno-pravougaone raspodele; funkcija gustine mešovite normalno-trougaone raspodele; efikasnost primene kombinovane metode; određivanje intervala prekrivanja; razvoj simplifikovanog numeričkog algoritma za analizu mešovite raspodele aditivnog tipa (sa proverom na realnom problemu iz Nuklearne fizike); razvoj simplifikovanog numeričkog algoritma za analizu mešovite raspodele multiplivativnog tipa (sa proverom na realnom problemu iz Tehnike visokog napona).

Glava 1

TEORIJA VEROVATNOĆE - OSNOVNI POJMOVI

U razmatranju koje sledi od brojnih matematičko-statističkih koncepata, pravaca i metoda, bez ulaženja u detalje dokazivanja, izloženi su samo oni važni za razumevanje narednih poglavlja. Kompletni dokazi navedenih teorema mogu se naći (ako u tekstu nije naglaseno drugačije) u knjigama [2], [25], [26],[33], [34], [21], [40], [42], [63], [64].

1.1 Nastanak teorije verovatnoće

Mnoge prirodne i društvene pojave mogu se precizno opisati matematičkim pravilima i obrascima. Za njih najčešće kažemo da poseduju deterministički karakter i kao takve izučavamo ih standardnim naučnim metodama. Osim toga, postoje pojave koje se ne mogu posmatrati na ovaj način, jer ne postoji mogućnost jednoznačnog utvrđivanja međusobnih veza i odnosa unutar njih. Ovakve pojave nazivamo slučajnim ili stohastičkim. Njihovim proučavanjem se bavi Teorije verovatnoće - oblast savremene matematike koja je našla ogromnu primenu u mnogim oblastima nauke i života uopšte. Ona se pokazala kao veoma moćan matematički aparat, koji se uspešno primenjuje u predviđanju različitih pojava i procesa. Pitanjima tipa: ,,Da li postoje slučajni događaji" i ,,šta je slučajnost" bavi se filozofija i ne posvećuje im se prostor u ovoj disertaciji. U principu, u matematici se ne razmatra šta predstavlja neki pojam već šta se sa njim može uraditi. Upravo zato, izabrali smo, kao i većina autora koji se bave ovom problematikom, Kolmogorovljev aksiomatski pristup Teoriji verovatnoće.

Teorija verovatnoće je mlada matematička disciplina u odnosu na geometriju i algebru. Može se uprošćeno definisati kao oblast matematike koja se uglavnom bavi procenama mogućnosti za realizaciju slučajnih događaja. I pored tog velikog vremena, koje je uloženo u proučavanje ove problematike, prva tačna rešenja problema iz ove oblasti su zabeležena tek u XVII veku (1654. godine), u prepisci francuskih matematičara Bleza Paskala i Pjera Ferma. Naredne godine donele su nove doprinose ovoj naučnoj disciplini koje su dali Kristijan Hajgens, Jakob Bernuli i Abraham de Moavr. Veliki deo njihovih istraživanja je bio podstaknut praktičnim problemima, na primer, razvoj osiguravajućih društava doveo je potrebe da se razvije metotodologija procene rizika za šta je bio neophodan razvoj teorije verovatnoće.

Prvu sistematizaciju dobijenih rezultata je izvršio francuski matematičar Laplas, koji je uveo 1812. godine, takozvanu "klasičnu" definiciju verovatnoće, koja se koristi u slučajevima kada je skup logički mogućih ishoda konačan i svi njegovi elementi imaju jednake mogućnosti realizacije. U narednih 120 godina usledio je buran razvoj Teorije verovatnoće, kome je posebno doprinela pojava matematičke statistike i njene primene u prirodnim, društvenim i tehničkim naukama. Strogo matematičko zasnivanje Teorije verovatnoće i pored velikog broja partikularnih rezultata nije se moglo završiti bez pojave savremenih matematičkih postupaka, koje su doneli Kantorova teorija skupova i Lebegova teorija mera i integrala. Aksiomatski sistem, koji se danas koristi za rad u teoriji verovatnoće, praktično je uveo ruski matematičar Kolmogorov 1933. godine. On je da bi konzinstentno definisao pojam verovatnoće, morao u svojoj teoriji da prihvati postojanje slučajnih događaja, koji nisu nemogući ali je njihova verovatnoća jednaka nuli!

1.2 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

1.2.1 Slučajni događaji i njihove verovatnoće

Skup svih logički mogućih ishoda jedne pojave označavaćemo sa Ω. Njegove elemente zvaćemo elementarnim ishodima a podskupove slučajnim događajima. Skup Ω nazivamo sigurnim događajem a $\emptyset$ nemogućim događajem. Događaj $A^c_\Omega = A^c \cap \Omega$ nazivamo suprotnim događajem događaju A i ubuduće ga označavamo sa A^c, ili sa $\overline{A}$.

Operacija unije dva slučajna događaja A i B definiše događaj $A \cup B$ koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od njih.

Operacija preseka dva slučajna događaja A i B definiše događaj $A \cap B$ koji se realizuje ako i samo ako se realizuju i A i B istovremeno. Umesto $A \cap B$ koristićemo oznaku AB.

Za događaje A i B kažemo da su disjunktni, ako je $AB = \emptyset$ to jest ako realizacija jednog od njih isključuje realizaciju drugog.

Ako je $A \subseteq B$, onda praktično iz realizacije događaja A obavezno sledi realizacija događaja B.

Operacije unije i preseka jednostavno se proširuju na slučaj više od dva događaja - ako je I proizvoljan (konačan ili beskonačan) skup indeksa, onda je

$$\bigcup_{i \in I} A_i \qquad (\bigcap_{i \in I} A_i)$$

događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A_i (svi događaji A_i).

Kolekcija podskupova $\otimes$ nepraznog skupa X zove se σ - polje ako:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

2) Iz $A \in \mathcal{F}$ sledi $A^c \in \mathcal{F}$;

3) Iz $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ sledi $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Iz definicije σ - polja sledi da $\emptyset \in \mathcal{F}$ (jer je $\emptyset = \Omega^c$); kao i da iz $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ sledi $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (jer je onda $A_n^c \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ i $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = (\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$).

Definicija 1.2.1.1. *Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, gde je Ω neprazan skup, $\mathcal{F}$ σ - polje nad Ω i $p : \mathcal{F} \to [0, 1]$ preslikavanje koje ima sledeće osobine:*

1. $p(\Omega) = 1$;

2. ako je $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ niz događaja takvih da iz $i \neq j$ sledi $A_i \cap A_j = \emptyset$, onda je:

$$p(\bigcup A_n) = \sum p(A_n),$$

naziva se prostor verovatnoće, a funkcija p verovatnoća.

Teorema 1.2.1.1.

1) $p(\emptyset) = 0$.

2) Ako su $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ disjunktni događaji onda je:

$$p(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k).$$

3) Iz $A \in \mathcal{F}$ sledi $p(A^c) = 1 - p(A)$.

4) Iz $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subseteq B$ sledi $p(A) \leq p(B)$.

5) Za proizvoljne slučajne događaje $A, B \in \mathcal{F}$ važi:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Relacija definisana Teoremom 1.2.1.1 je "jednosmerna", to jest verovatnoća nemogućeg događaja jeste jednaka 0, ali to ne znači da je to jedini događaj čija je verovatnoća jednaka nuli. Postoje primeri prostora verovatnoće (na primer kod Geometrijske definicije verovatnoće) u kojima postoje "neprazni" događaji čija je verovatnoća jednaka nuli. Za događaj čija je verovatnoća jednaka nuli kažemo da je skoro nemoguć. Takođe, postoje prostori verovatnoće u kojima postoje događaji različiti od Ω čija je verovatnoća jednaka 1. Za događaj čija je verovatnoća jednaka 1 kažemo da je skoro siguran.

Naredne teoreme daju dva važna primera prostora verovatnoće.

Teorema 1.2.1.2. *Ako je Ω konačan skup i ako su svi elementarni ishodi jednako verovatni (imaju jednake mogućnosti realizacije), onda je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i za svaki $A \subseteq \Omega$ važi*

$$p(A) = \frac{n_A}{n}$$

gde je n_A broj elemenata skupa A, a n broj elemenata skupa Ω.

Formulom datom u prethodnom stavu francuski matematičar Laplas je 1812. godine uveo prvu matematičku definiciju verovatnoće, opisujući situacije do kojih dolazi pri hazardnim igrama. Njen jedini nedostatak su restriktivne mogućnosti za primenu, to jest može se koristiti jedino ako je Ω konačan skup i ako su svi elementarni ishodi jednakoverovatni.

Sada ćemo pokazati kako se može definisati verovatnoća u slučaju da se Ω može predstaviti kao Lebeg-merljiv podskup Euklidskog prostora koji se sastoji od jednakoverovatnih elementarnih ishoda kojih ima neprebrojivo beskonačno. U takvom slučaju verovatnoća svakog elementarnog ishoda je jednaka 0.

Navešćemo definiciju merljivog skupa i merljive funkcije

Definicija 1.2.1.2. *Familija Ω podskupova skupa X je σ-algebra na X ako važi*

1° $X \in \Omega$,

2° *ako* $A \in \Omega$, *tada* $X \setminus A \in \Omega$,

3° *ako je* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *niz skupova iz* Ω, *onda je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$.

Prostor (X, Ω) zovemo merljivim prostorom. Same skupove iz Ω zovemo merljivim skupovima.

Definicija 1.2.1.3. *Neka je (X, Ω) merljiv prostor. Tada funkciju $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, gde je $\overline{\mathbb{R}}$ proširen skup realnih brojeva, zovemo merljivom (Ω-merljivom) ako je skup*

$$f^{-1}\left((c, +\infty]\right) = \{x \in X : f(x) > c\}$$

merljiv za svako $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.1.3. *Neka je* $\Omega \subseteq R^n$ *Lebeg merljiv skup takav da je* $\mu(\Omega) < \infty$. *Tada svi merljivi podskupovi skupa* Ω *obrazuju jedno* σ *- polje* $\mathcal{F}$. *Uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, *gde je* $p : \mathcal{F} \to [0,1]$ *funkcija definisana formulom*

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

je prostor verovatnoće.

Predhodnom stavom je uvedena takozvana geometrijska definicija verovatnoće.

1.2.2 Uslovne verovatnoće i nezavisnost događaja

Često je u praksi potrebno izračunati verovatnoću događaja A, pod uslovom da se realizovao događaj B. Stoga navodimo sledeću definiciju

Definicija 1.2.2.1. *Verovatnoća događaja* A, *pod uslovom da se realizovao događaj* B, *pri čemu je* $p(B) > 0$, *zovemo uslovnom verovatnoćom i označavamo sa* $p(A|B)$ *i važi*

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}.$$

Jedan od osnovnih pojmova Teorije verovatnoće i Matematičke statistike jeste nezavisnost događaja. Događaj B je nezavisan od događaja A ako informacija o realizaciji događaja A ne utiče na verovatnoću događaja B, tj. izraženo preko uslovnih verorovatnoća

$$p(B|A) = p(B).$$

Ako je događaj B nezavisan od događaja A, iz:

$$p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)}$$

sledi

$$p(AB) = p(A)p(B)$$

pa je prema tome

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A)$$

tj. onda je i događaj A nezavisan od događaja B.

Iz prethodnih razmatranja sledi da su dva događaja A i B nezavisna ako i samo ako je

$$p(AB) = p(A)p(B).$$

Moramo skrenuti pažnju čitaocu da je nezavisnost događaja različit pojam od njihove disjunktnosti. Disjunktni događaji su obavezno zavisni jer je verovatnoća njihovog preseka uvek jednaka nuli, to jest realizacija jednog isključuje mogućnost realizacije drugog! Zatim ćemo primetiti da se nezavisnost dva događaja definiše pomoću uvedene verovatnoće nad poljem događaja, za razliku od disjunktnosti koja se definiše nezavisno od verovatnoća. Praktično, nezavisnost događaja A i B ne utvrđuje se proveravanjem gornje jednakosti, već to neposredno sledi iz fizičkih uslova datog opita.

Za događaje $A_1, \ldots, A_n$ reći ćemo da su nezavisni ako za svaki $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ važi

$$p(\bigcap_{i \in I} A_i) = \Pi_{i \in I} p(A_i)$$

to jest, ako je verovatnoća preseka svake konačne podfamilije jednaka proizvodu verovatnoća njenih elemenata.

Interesantno je da iz nezavisnosti svakog para događaja ne sledi nezavisnost cele familije kao i da iz uslova

$$p(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \Pi_{i=1}^{n} p(A_i)$$

ne sledi nezavisnost svakog para događaja, već se mora u definicijom obuhvatiti svaka konačna podfamilija.

Primer 1.2.2.1. *Metalni novčić se baca dva puta. Ako označimo sa P podatak da je u jednom od bacanja palo pismo a sa G podatak da je pao grb, skup logički mogućih ishoda definisan ovim ekspermentom je:*

$$\Omega = \{PP,\ PG,\ GP, GG\}.$$

Posmatrajmo događaje $A = \{PP,\ PG\}$, $B = \{PP,\ GP\}$ i $C = \{PP,\ GG\}$. Sada je

$$p(AB) = p(A)p(B) = p(BC) = p(B)p(C) = p(AC) = p(A)p(C) = \frac{1}{4}.$$

Prema tome svaka dva od definisanih događaja su međusobno nezavisna, ali sva tri događaja nisu nezavisna jer je $p(ABC) = \dfrac{1}{4}$ a

$p(A)p(B)p(C) = \dfrac{1}{8}$.

Primer 1.2.2.2. *Kocka se baca dva puta. Neka su događaji A, B i C definisani na sledeće načine: A se realizovao ako i samo ako je u prvom bacanju pao broj iz skupa* $\{1, 2, 5\}$*; B se realizovao ako i samo ako je u prvom bacanju pao broj iz skupa* $\{4, 5, 6\}$*; C se realizovao ako i samo ako su pali brojevi čiji zbir je jednak* 9.

Sada je $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$, $p(C) = \frac{1}{9}$ *i*

$$p(ABC) = p(A)p(B)p(C) = \frac{1}{36}.$$

Međutim događaji A i B nisu nezavisni jer je

$$p(AB) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = p(A)p(B).$$

Za događaje $A_1, A_2, \ldots$ reći ćemo da su nezavisni ako za svaki $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ važi

$$p(\bigcap_{i \in I} A_i) = \Pi_{i \in I} p(A_i)$$

to jest ako je verovatnoća preseka svake konačne podfamilije jednaka proizvodu verovatnoća njenih elemenata.

1.2.3 Slučajne promenljive

Kao što smo videli, redovno se susrećemo sa situacijom da elementarnom slučajnom događaju pri opitu koji posmatramo možemo pridružiti broj ili uređenu $n-$torku brojeva. To nas dovodi do pojma *slučajne promenljive.*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ dati prostor verovatnoće. Merljivo preslikavanje $X : \Omega \to R^k$ naziva se slučajna promenljiva. Ako je $k = 1$ slučajna promenljiva je jednodimenziona, a ako je $k > 1$, onda je višedimenziona. Slučajne promenljive označavaćemo velikim slovima latinice.

Slučajne promenljive čiji je skup vrednosti konačan ili prebrojiv nazivaju se *diskretne slučane promenljive.*

Diskretna slučajna promenljiva tipa sa konačnim $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ili prebrojivo beskonačnim skupom vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots\}$ je određena ako su poznate verovatnoće

$$p_i = p(X = x_i)$$

za svako x_i. Kako je $p(\Omega) = 1$, pri tome mora biti ispunjeno $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ u slučaju konačnog skupa vrednosti, odnosno $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ u slučaju prebrojivo beskonačnog skupa vrednosti, jer je

$$p(\Omega) = p(\cup\{X = x_i\}) = \sum p(X = x_i).$$

Pravilo koje vrednosti x_i diskretne slučajne promenljive pridružuje njenu verovatnoću p_i naziva se zakon raspodele.

Slučajne promenljive koje nisu diskretne ne mogu se opisati zakonom raspodele jer kod njih postoje elementarni ishodi čija je verovatnoća jednaka nuli. One se opisuju korišćenjem funkcije raspodele verovatnoća (koju ćemo u daljem tekstu nazivati funkcija raspodele) koja se definiše sa:

$$F(x) = p(\{X < x\}).$$

Teorema 1.2.3.1. *Proizvoljna funkciju raspodele verovatnoća ima sledeće osobine:*
1) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$*;*
2) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$*;*
3) F *je rastuća (iz* $a < b$ *sledi* $F(a) < F(b)$*);*
4) F *je neprekidna sa leve strane (*$\lim_{t\to x-} F(t) = F(x)$*);*
5) $p(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$*.*

Slučajna promenljiva je *neprekidna* ako je njena funkcija raspodele neprekidna. Svaka slučajna promenljiva se može predstaviti u obliku zbira dve slučajne promenljive od kojih je jedna diskretna, a druga neprekidna.

Neprekidna slučajna promenljiva X je *apsolutno neprekidna* ako postoji funkcija f, takva da je:

$$X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

U tom slučaju se funkcija f naziva gustina raspodele slučajne promenljive X.

Teorema 1.2.3.2. *Ako je* X *apsolutno neprekidna slučajna promenljiva i* f *njena funkcija gustine raspodele onda je:*
1) $\lim_{x\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$*;*
2) $f(t) > 0$ *za svako* t*;*
3)$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$*.*

Neprekidna slučajna promenljiva je *singularna* ako nije konstanta i ako je izvod njene funkcije raspodele jednak nuli skoro svuda u odnosu na Lebegovu meru. Svaka neprekidna slučajna promenljiva koja nije apsolutno neprekidna, može se predstaviti u obliku zbira dve neprekidne slučajne promenljive od-kojih je jedna apsolutno neprekidna a druga singularna.

Slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne ako su za svakih n podskupova $B_1, \ldots, B_n \subseteq \mathbb{R}$ skupa realnih brojeva događaji

$$\{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_n \in B_n\}$$

međusobno nezavisni. Niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}$ je nezavisan ako je takav svaki njegov konačan podniz.

Za niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}$ definisan na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ kažemo da konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj $X : \Omega \to R$ ako je za svako $\varepsilon > 0$:

$$\lim p(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Primer 1.2.3.1. ***Dvotačkasta raspodela. Indikator događaja.*** *Za slučajnu promenljivu X koja ima dvočlan skup vrednosti kažemo da ima dvotačkastu raspodelu. Pri tome obično koristimo oznake $X \in \{a, b\}$, $p(X = a) = p$, $p(X = b) = 1 - p = q$. Specijalno, slučajna promenljiva koja ima dvotačkastu raspodelu naziva se Indikator događaja, ako su vrednosti koje ona uzima 0 i 1. Naziv potiče odatle što se takve slučajne promenljive javljaju pri praćenju opita u kojima nas interesuje samo da li se događaj A ($p(A) = p$, $p(A^c) = 1 - p = q$) realizovao ili nije. One uzimaju vrednost 1 u slučaju realizacije događaja A, a vrednost 0 u slučaju realizacije događaja A^c.*

1.2.4 Momenti slučajne promenljive

Preslikavanje E skupa svih slučajnih promenljivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ u skup realnih brojeva naziva se matematičko očekivanje ako ispunjava sledeće uslove:
1. ako je $X = c$ konstantna slučajna promenljiva onda je $E(X) = c$;
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
3. $E(tX) = tE(X)$ gde je t realan broj;
4. ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive onda je $E(XY) = E(X)E(Y)$;
5. ako je slučajna promenljiva X indikator događaja onda je $E(X) = p$;
6. za svaki konvergentan u verovatnoći niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}$ važi:

$$E(\lim X_n) = \lim E(X_n).$$

Može se pokazati da postoji tačno jedno takvo preslikavanje.
Matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive X koja ima konačan skup vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zakon raspodele $p_i = p(X = x_i)$ $i = 1, \ldots, n$ izračunava se po formuli:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive X koja ima prebrojivo beskonačan skup vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots\}$ i zakon raspodele $p_i = p(X = x_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ izračunava se po formuli:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Matematičko očekivanje apsolutno neprekidne slučajne promenljive X koja ima funkciju gustine f izračunava se po formuli:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt.$$

Sledeća teorema ima ogroman značaj u primenama, jer definiše postupak za izračunavanje matematičkog očekivanja neprekidne transformacije apsolutno neprekidne slučajne promenljive.

Teorema 1.2.4.1. *Ako je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva koja ima funkciju gustine f i g realna funkcija realne promenljive, onda je*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt.$$

Iz prethodnih formula sledi da matematičko očekivanje kao realan broj postoji za sve diskretne slučajne promenljive koje imaju konačni skup vrednosti. Za ostale tipove slučajnih promenljivih njegovo postojanje zavisi od konvergencije odgovarajućih redova odnosno integrala.

Disperzija (Varijansa) je mera odstupanja slučajne promenljive od njenog matematičkog očekivanja. Definiše se relacijom:

$$D(X) = E((X - E(X))^2).$$

Iz definicje sledi

Teorema 1.2.4.2. *Za proizvoljne slučajne promenljive X i Y definisane na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ važi:*

1. $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$;
2. *ako je $X = c$ konstantna slučajna promenljiva onda je $D(X) = 0$;*
3. $D(tX) = t^2 D(X)$ *gde je t realan broj.*

Teorema 1.2.4.3. ***Bijenemeova teorema*** *Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, onda je*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Neka je X slučajna promenljiva koja ima matematičko očekivanje i disperziju. Ako je X diskretna slučajna promenljiva koja ima konačan skup vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zakon raspodele $p_i = p(X = x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, onda se matematičko očekivanje slučajne promenljive X^2 izračunava po formuli:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i.$$

Ako je X diskretna slučajna promenljiva koja ima prebrojivo beskonačni skup vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots\}$ i zakon raspodele $p_i = p(X = x_i)$ $i = 1, \ldots, n$ onda se matematičko očekivanje slučajne promenljive X^2 izračunava po formuli:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i.$$

Ako je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva X koja ima funkciju gustine f, onda se matematičko očekivanje slučajne promenljive X^2 izračunava po formuli:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt.$$

U sva tri slučaja disperzija se najjednostavnije izračunava po formuli:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$$

datoj u Teoremi 1.2.4.2.

Kvadratni koren disperzije se naziva standardno odstupanje i označava sa σ.

Definicija 1.2.4.1. *Neka je X slučajna promenljiva i n prirodan broj. Onda je $E(X^n)$ n-ti momenat slučajne promenljive X. Ako je $E(X) < \infty$ i $n > 1$ onda je $E((X - E(X))^n)$ n-ti centrirani momenat slučajne promenljive X.*

Iz prethodne definicije sledi da je matematičko očekivanje moment prvog reda, a varijansa centrirani moment n-tog reda slučajne promenljive X.

Ako je X diskretna slučajna promenljiva koja ima konačan skup vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i zakon raspodele $p_i = p(X = x_i)$ $i = 1, \ldots, n$ onda je:

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i.$$

Ako je X diskretna slučajna promenljiva koja ima prebrojivo beskonačan skup vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots\}$ i zakon raspodele $p_i = p(X = x_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ onda je:

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i.$$

Ako je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva koja ima funkciju gustine f onda je:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)dt.$$

1.2.5 Diskretne slučajne promenljive

Sada ćemo opisati najvažnije diskretne slučajne promenljive.

Konstantna slučajna promenljiva. To je slučajna promenljiva sa zakonom raspodele $\{p(X=a)\} = 1$, gde je a fiksiran realni broj. Zapazimo da su njene vrednosti to jest jedina njena vrednost određene deterministički. Njeno matematičko očekivanje i varijansa date su formulama: $E(X) = a$ i $D(X) = 0$.

Dvotačkasta slučajna promenljiva. Ona je definisana u prethodnom tekstu. Njeno matematičko očekivanje i varijansa date su formulama: $E(X) = pa + qb$ i $D(X) = pq(a-b)^2$.

Uniformna diskretna raspodela. Za slučajnu promenljivu X koja ima konačan skup vrednosti, kažemo da ima Uniformnu diskretnu raspodelu ako sve njene vrednosti imaju jednake verovatnoće. Ovaj tip slučajnih promenljivih se prirodno javlja u svim zadacima u kojima se verovatnoća zadaje Laplasovom definicijom. Ako je $X \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $p(X = x_i) = p$, iz $1 = p(\Omega) = \sum p(X = x_i) = np$, dobijamo

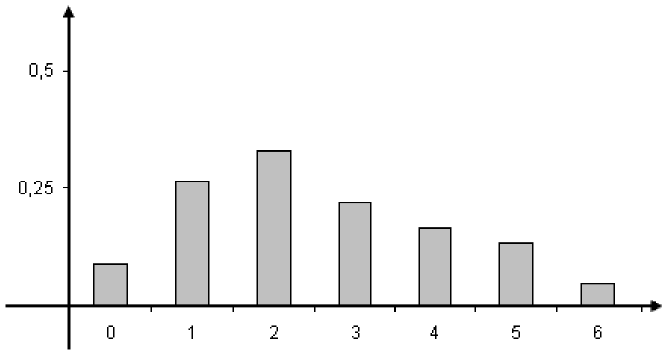
$$p = \frac{1}{n}.$$

Binomna raspodela. Neka je $0 < p < 1$ i $q = 1 - p$. Za slučajnu promenljivu X koja uzima vrednosti u skupu $\{0, \ldots, n\}$ kažemo da ima Binomnu raspodelu sa parametrima n i p (što označavamo sa $X - \mathcal{B}(n,p)$) ako je njen zakon raspodele:

$$p(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Posmatrajmo jedan opit sa slučajnim ishodima i dogadaj A, koji se realizuje sa verovatnoćom $P(A) = p$, vezan za taj opit. Verovatnoću suprotnog događaja označimo sa q. Pretpostavimo da opit ponavljamo n puta nezavisno i u neizmenjenim uslovima. Iz Bernulijeve formule sledi da broj realizacija događaja A u tih n ponavljanja opita ima $\mathcal{B}(n,p)$ raspodelu.

Ako slučajna promenljiva X ima $\mathcal{B}(n, p)$ onda je $E(X) = np$ i $D(X) = npq$.

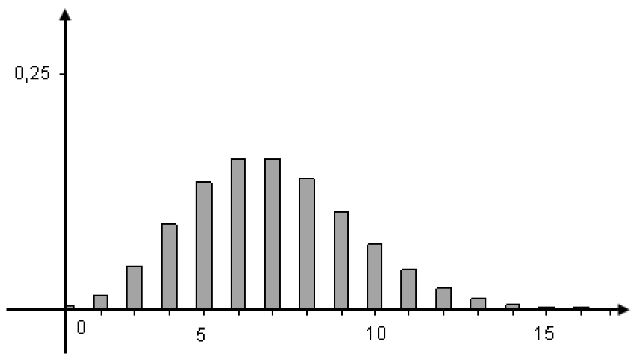


Slika 1.1. Grafički prikaz binomne raspodele

Puasonova raspodela. Neka je $\lambda > 0$. Za slučajnu promenljivu X koja uzima vrednosti u skupu $\{0, 1, \ldots\}$ kažemo da ima Puasonovu raspodelu sa parametrom λ (što označavamo sa $X \ - \ \mathcal{P}(\lambda)$ ako je njen zakon raspodele:

$$p(\{X = k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ako slučajna promenljiva X ima $\mathcal{P}(\lambda)$ onda je $E(X) = \lambda$ i $D(X) = \lambda$.



Slika 1.2. Grafički prikaz Puasonove raspodele

Geometrijska raspodela Neka je $0 < p < 1$ i $q = 1 - p$. Za slučajnu promenljivu X koja uzima vrednosti u skupu $\{1, 2, \ldots\}$ kažemo da ima Geometrijsku raspodelu sa parametrom p, što označavamo sa $X \ - \ \mathcal{G}(p)$, ako je njen zakon raspodele:

$$p(\{X = k\}) = q^{k-1}p.$$

Ako slučajna promenljiva X ima $\mathcal{G}(p)$ onda je $E(X) = \dfrac{1}{p}$ i $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Paskalova raspodela. Posmatrajmo jedan opit sa slučajnim ishodima i dogadaj A, koji se realizuje sa verovatnoćom $P(A) = p$, vezan za taj opit. Verovatnoću suprotnog događaja označimo sa q. Pretpostavimo da opit ponavljamo nezavisno i u neizmenjenim uslovima. Za slučajnu promenljivu definisanu kao broj ponavljanja opita do $k-$te realizacije događaja A kažemo da ima Paskalovu (ili negativnu Binomnu raspodelu) što označavamo sa $X\ -\ \bar{\mathcal{B}}(n,p)$. Slučajna promenljiva X sa Paskalovom raspodelom očigledno uzima vrednosti u skupu $\{k, k+1, \ldots\}$. Događaj $\{X = n\}$ možemo predstaviti u obliku $\{X = n\} = CD$ gde je C događaj: u prvih $n-1$ ponavljanja opita A se realizovao $k-1$ puta; a D događaj: u n-tom ponavljanju se realizovao A. Iz Bernulijeve formule sledi da je

$$p(C) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k},$$

dok je $p(D) = p(A) = p$. Iz nezavisnosti tih događaja sledi:

$$p(X = n) = p(CD) = p(C)p(D) = (\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k})p = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

Poslednjom formulom je opisan zakon raspodele slučajne promenljive koja ima Paskalovu raspodelu. Međutim, ta formula nije pogodna za određivanje matematičkog očekivanja i disperzije. Posmatrajmo zato slučajne promenljive X_i definisane kao broj ponavljanja opita između $i-1$ i i-te realizacije događaja A, $i = 1, \ldots, k$. Dobijamo da $X_i - \mathcal{G}(p)$ i $X = X_1 + \cdots + X_k$. Iz nezavisnosti ishoda u ponovljenim opitima sledi nezavisnost slučajnih promenljivih X_i. Prema tome, imamo:

$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_k) = E(X_1) + \cdots + E(X_k) = \frac{k}{p} \qquad \text{i}$$

$$D(X) = D(X_1 + \cdots + X_k) = D(X_1) + \cdots + D(X_k) = \frac{kq}{p^2}.$$

1.2.6 Apsolutno neprekidne slučajne promenljive

Sada ćemo opisati najvažnije Apsolutno neprekidne slučajne promenljive.

Neprekidna uniformna raspodela. Neka je $-\infty < a < b < \infty$. Za slučajnu promenljivu X koja ima funkciju gustine:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b; \\ \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

kažemo da ima neprekidnu uniformnu raspodelu na intervalu $[a, b]$ što označavamo sa $X \;-\; \mathcal{U}(a, b)$. Funkciju raspodele, matematičko očekivanje i disperziju od X određujemo primenom odgovarajućih definicija.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} tdt = \frac{b+a}{2};$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} t^2 dt = \frac{b^2+ab+a^2}{2};$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ova raspodela se u tehničkoj literaturi naziva pravougaona raspodela.

Simpsonova raspodela. Neka je $-\infty < a < c < b < \infty$. Za slučajnu promenljivu X koja ima gustinu raspodele

$$f(x) = \begin{cases} 2\frac{x-a}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x \leq c; \\ \\ 2\frac{b-x}{(b-a)(b-c)}, & c \leq x \leq b; \\ \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

kažemo da ima Simpsonovu raspodelu na intervalu $[a, b]$ što označavamo sa $X \;-\; \mathcal{S}(a, b, c)$. Ova raspodela se u tehničkoj literaturi naziva trougaona raspodela.

Eksponencijalna raspodela. Neka je $\lambda > 0$. Za slučajnu promenljivu

X koja ima funkciju gustine:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

kažemo da ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ što označavamo sa $X \;-\; \mathcal{E}(\lambda)$. Funkcija raspodele, matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive X koja ima eksponencijalnu raspodelu dati su sa:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ i $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Erlangova raspodela. Neka je $\lambda > 0$. Neka su slučajne promenljive X_i $i = 1, \dots, n$ nezavisne i neka svaka od njih ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu. Tada kažemo da slučajna promenljiva $X = X_1 + \cdots + X_n$ ima Erlangovu raspodelu sa parametrima λ i n. Odatle sledi da je:

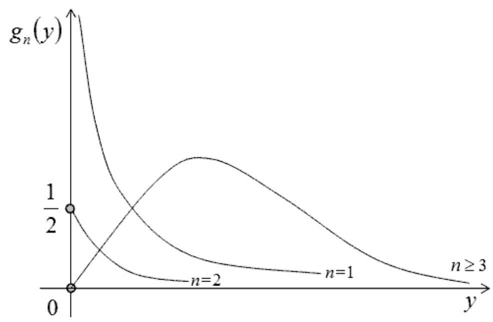
$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \text{ i } D(X) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Vejbulova raspodela. Neka su $\alpha, \beta > 0$. Za slučajnu promenljivu X koja ima funkciju gustine:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \beta\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

kažemo da ima Vejbulovu raspodelu sa parametrima α i β što označavamo sa $X \;-\; \mathcal{V}(\alpha, \beta)$. Njena funkcija raspodele je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\beta x^{\alpha}}, & x \geq 0, \end{cases}$$



Slika 1.3. Vejbulova raspodela

Gama raspodela. Neka su $\alpha, \beta > 0$. Za slučajnu promenljivu X koja ima funkciju gustine:

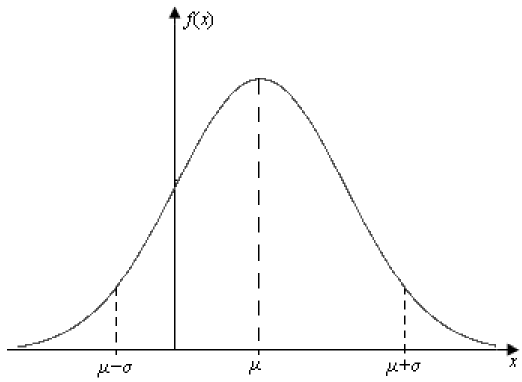
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x \geq 0, \end{cases}$$

kažemo da ima Gama raspodelu sa parametrima α i β što označavamo sa $X - \Gamma(\alpha, \beta)$. Za ovu slučajnu promenljivu važi: $E(X) = \alpha/\beta$ i $D(X) = \alpha/\beta^2$.

Normalna raspodela. Neka je m proizvoljan a σ^2 pozitivan realan broj. Za slučajnu promenljivu X koja ima funkciju gustine:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathcal{R}$$

kažemo da ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ^2, što označavamo sa $X - \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Nažalost, nije moguće odrediti analitički oblik funkcije raspodele za slučajne promenljive ovog tipa ali se može pokazati da je: $E(X) = m$ i $D(X) = \sigma^2$. Broj $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ naziva se standardno odstupanje.



Slika 1.4. Grafik gustine slučajne promenljive sa normalnom raspodelom

Ako je $m = 0$ i $\sigma^2 = 1$ za slučajnu promenljivu kažemo da ima standardizovanu normalnu raspodelu. Vrednosti funkcije raspodele za standardizovanu normalnu raspodelu su date u tablici. Sledeći stav nam omogućava određivanje vrednosti funkcija raspodela za slučajne promenljive sa Normalnim raspodelama koje nisu standardizovane.

Teorema 1.2.6.1. *Ako slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, onda slučajna promenljiva*

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$

ima standardizovanu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Teorema 1.2.6.2. *Neka slučajne promenljive X_i, $i = 1, \ldots, n$ imaju Normalne $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ raspodele i neka su α_i proizvoljni brojevi. Tada slučajna promenljiva*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

ima Normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, gde je:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \quad i \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2.$$

Logaritamski normalna raspodela. Pozitivna slučajna promenljiva Y je logaritamski normalno raspodeljena kada je slučajna promenljiva, dobijena transformacijom $X = \log Y$ (ili $X = lnY$), normalno raspodeljena.

1.3 Matematička statistika

1.3.1 Osnovni pojmovi matematičke statistike

Začeci statistike kao naučne discipline nastaju skoro istovremeno u Nemačkoj i Engleskoj u XVII veku. U to vreme statistika se, uglavnom, bavi prikupljanjem i sistematizacijom podataka o stanovništvu i privredi, pa je dugo smatrana naučnom metodom koja pripada skupu društvenih nauka. Fundamentalnu osnovu za zasnivanje savremene statistike kao nauke, uopšte, ali i njen buran razvoj kao teorijske discipline omogućen je, pre svega, razvojem Teorije verovatnoća u prvoj polovini XX veka. Ona otvara širi prostor razvoju statističke teorije, odnosno matematičkom, deduktivnom pristupu u opisivanju (i dokazivanju) statističkih zakonitosti. Na ovaj način nastaje *matematička statistika*, primenjena matematička disciplina zasnovana na osnovnim principima i rezultatima Teorije verovatnoća. Dakle, matematičku statistiku možemo, u velikoj meri, posmatrati kao naučnu oblast srodnu Teoriji verovatnoća. Ipak, ona se danas samostalno razvija i daje osnov za samostalno utvrđivanje formalnih, egzaktnih principa nad kojima se usavršavaju nove primenjene statističke metode.

U ovom, uvodnom poglavlju izlažemo najpre neke osnovne pojmove matematičke statistike. Zatim, razmatramo i neke od tzv. statistika uzoraka, kao posebnih preslikavanja sa važnim implementacijama u ostalim oblastima teorijske, ali i primenjene statistike.

Uočimo skup nekih elemenata. U Matematičkoj statistici takav skup zove se populacija ili generalni skup. Kod svakog elementa populacije interesujemo se za neku njegovu određenu numeričku karakteristiku. Tu numeričku karakteristiku zvaćemo obeležje.

Obeležja se najčešće dele na kvalitativna i kvantititativna. Kvantitativna obeležja imaju jasno definisane jedinice za merenje (masa, zapremina, vreme, brzina,...), dok kod kvalitativnnih sami definišemo jedinicu i skalu za merenje (ocenjivanje rezultata ispitata, ocenjivanje kvaliteta proizvoda,...).

Broj elemenata populacije može biti konačan ili beskonačan (prebrojivo ili neprebrojivo).

Primetimo da kod svakog elementa populacije možemo da posmatramo više obeležja istovremeno.

Osnovni zadatak Matematičke statistike je: za datu populaciju naći raspodelu datog obeležja na njenim elementima.

Skoro da nije potrebno posebno naglašavati da u ogromnoj većini slučajeva koje srećemo u primenama nije moguće dobiti kompletnu informaciju o raspodeli obeležja u celoj populaciji. Razlog može da leži u brojnosti populacije, u velikim troškovima skopčanim sa registrovanjem obeležja kod svakog elementa, ili u konkretnoj nemogućnosti takvog posla.

Ostaje nam da na jednom delu populacije registrujemo obeležje kod svakog elementa i da zatim izvršimo ekstrapolaciju na celu populaciju, to jest da dobijenu raspodelu obeležja proširimo sa dela na ceo skup. Odmah se nameće pitanje takozvane reprezentativnosti takvog dela. Bez matematičke rigoroznosti možemo reći da je neki metod uzimanja dela populacije reprezentativan, ako je kriterijum po kome se uzima taj deo nezavisan od obelezja koje posmatramo. Jedan od načina postizanja reprezentativnosti dela jeste, popularno rečeno, da taj deo izaberemo slučajno.

Ako jedan elemenat skupa biramo, slučajno iz cele populacije, onda populaciju možemo shvatiti kao skup svih mogućih ishoda Ω. Elementi populacije sada se posmatraju kao elementarni ishodi. Kako se svakom elementu populacije pridružuje jedan broj, njegovo obeležje, to obeležje je jedna slučajna promenljiva X. Problem se, dakle svodi na određivanje raspodele verovatnoća slučajne promenljive X. Ako slučajno biramo n elemenata populacije dobili smo uređenu $n-$torku realnih brojeva $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ čiji su elementi vrednosti obeležja izmerene na uzorku. Ova $n-$torka realnih brojeva naziva se slučajni uzorak obima n. Ograničićemo se na jednu vrstu slučajnih uzoraka, kod koje su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i svaka ima istu raspodelu kao obeležje X koje posmatramo. To je takozvani prost slučajni uzorak. Pošto ćemo se baviti samo prostim slučajnim uzorkom, govorićemo često kratko uzorak.

Rekli smo da je osnovni problem odrediti raspodelu obeležja X na celoj populaciji, a to znači zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X ako je X diskretnog tipa ili gustinu raspodele ako je X neprekidnog tipa. U Matematičkoj statistici postoji teorema (takozvana centralna teorema Matematičke statistike) koja daje potvrdan odgovor na pitanje da li prost slučajni uzorak može da da kompletnu informaciju o raspodeli obeležja X. Pri tome tačno određivanje raspodele obeležja X zahteva da obim uzroka n neograničeno raste. Pošto očigledno u primenama možemo da radimo samo sa konačnim obimom uzorka, raspodelu za X možemo da odredimo samo približno, utoliko tačnije ukoliko je n veće. U rešavanju postavljenog problema radimo sa različitim određenim funkcijama slučajnog uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Takve funkcije se, ako ne zavise od nepoznatih parametara nazivaju statistike. Statistike su, videli smo, slučajne promenljive. Međutim, ako pristupimo registrovanju vrednosti obeležja X kod jednog određenog uzorka, dobijamo niz od n određenih brojeva. Dobijene vrednosti obeležavamo sa $(x_1, \ldots, x_n)$ i nazivamo realizovani uzorak, i vrednosti posmatranih statistika postaju konkretni brojevi.

Realizovani uzorak se može zapisati na više različitih načina. Prvi je standardni zapis kod koga rednom broju elementa uzorka pridružujemo vrednost obeležja. Drugi je kvalitativni zapis (uglavnom se koristi kod kvalitativnih obeležija sa malim brojem vrednosti obeležja), i kod njega vrednosti obeležja dodeljujemo broj elemenata uzorka koji imaju tu vrednost. Treći je intervalni zapis kod koga smo vrednosti obeležja svrstali u disjunktne intervale, i svakom intervalu pridružujemo broj elemenata uzorka koji mu pripadaju.

Osnovne statistike koje ćemo razmatrati su: aritmetička sredina uzorka $(\overline{X_n})$, aritmetička sredina kvadriranog uzorka $(\overline{X_n^2})$, disprzija uzorka $(\overline{S_n^2})$ i popravljena disprzija uzorka $(\hat{S}_n^2)$.

Aritmetička sredina uzorka se izračunava po formuli:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Međutim kod realizovanog uzorka postupak izračunavanja zavisi od zapisa uzorka. Kod standarnog zapisa imamo:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j;$$

kod kvalitativnog zapisa je:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} n_j x_j,$$

gde je k broj različitih vrednosti uzorka, a n_j broj vrednosti uzorka koje imaju vrednost x_j; kod intervalnog zapisa je

$$\overline{X_n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} n_j a_j,$$

gde je k broj intervala, a_j sredina $j-$tog intervala a n_j broj vrednosti uzorka koje pripadaju $j-$tom intervalu.

Aritmetička sredina kvadriranog uzorka se izračunava po formuli:

$$\overline{X_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2.$$

Kod standarnog zapisa imamo:

$$\overline{X_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2;$$

kod kvalitativnog zapisa je:

$$\overline{X_n^2} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} n_j x_j^2,$$

gde je k broj različitih vrednosti uzorka, a n_j broj vrednosti uzorka koje imaju vrednost x_j; kod intervalnog zapisa je

$$\overline{X_n^2} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} n_j a_j^2,$$

gde je k broj intervala, a_j sredina $j-$tog intervala a n_j broj vrednosti uzorka koje pripadaju $j-$tom intervalu.

Disperzija uzorka $(\overline{S_n^2})$ se definiše sa:

$$\overline{S_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X_n})^2.$$

Praktičan postupak za izračunavanje disperzije uzorka dajemo u sledećem stavu.

Teorema 1.3.1.1.

$$\overline{S_n^2} = \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2.$$

Popravljena disperzija uzorka ($\hat{S}_n^2$) se definiše formulom:

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2.$$

Očigledno važi:

$$\hat{S}_n^2 = \frac{n-1}{n}\overline{S_n^2}.$$

Sada ćemo preći na raspodele tih statistika. Pre svega, u Matematičkoj statistici razlikujemo mali i veliki uzorak, prema tome da li je obim uzorka mali ili veliki. Kod velikog uzorka obično se služimo asimptotski tačnim raspodelama onih statistika koje posmatramo. Zato se ne može povući stroga granica između malog i velikog uzorka (da li je ona za obim uzorka, recimo, n=30, 50 ili 100) jer primenjujući asimptotski tačne raspodele, činimo veće ili manje greške, već prema tome da li je obim uzorka manji ili veći. Od asimptotskih raspodela koje primenjujemo kod velikog uzorka obično je u pitanju normalna raspodela zbog važenja centralne granične teoreme.

Teorema 1.3.1.2. *Neka obeležje X ima $E(X) = m$ i $D(X) = \sigma^2$. Ako je $n > 30$ onda $\overline{X_n}$ ima približno normalnu $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$ raspodelu.*

Ako obeležije X ima normalnu raspodelu onda tvrđenje prethodnog stava važi i ako je uzorak manjeg obima od 30. U tom slučaju $\overline{X_n}$ ima normalnu raspodelu kao linearna kombinacija slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom, a parametri se određuju na isti način.

Teorema 1.3.1.3. *Ako obeležije X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu onda statistika*

$$\frac{n\overline{S_n^2}}{\sigma^2}$$

ima χ^2_{n-1} raspodelu.

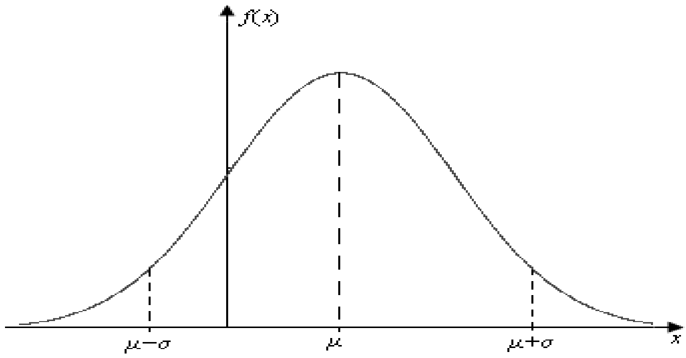
Teorema 1.3.1.4. *Ako obeležije X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu onda su statistike $\overline{X_n}$ i $\overline{S_n^2}$ nezavisne slučajne promenljive.*

1.3.2 Empirijska funkcija raspodele uzorka

Posebno ističemo još jednu važnu statistiku uzorka, koju ćemo često koristiti u daljem radu.

Teorema 1.3.2.1. ***Empirijska funkcija raspodele*** *Empirijska funkcija raspodele uzorka* $(X_1, \dots, X_n)$ *je statistika:*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{\{X_k < x\}}, \qquad x \in R.$$



Slika 1.5. Grafik empirijske funkcije raspodele uzorka

Za realizovani uzorak $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takav da važi poredak:

$$x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \cdots \leq x_{i_n}$$

statistika $F_n(x)$, $x \in R$ je monotono neopadajuća funkcija sa mogućim skokovima u tačkama varijacionog niza.

Ukoliko su svi elementi u realizovanom uzorku različiti, skokovi su veličine $1/n$. Stoga, slučajna promenljiva $F_n(x)$ je statistika čiji je kodomen skup $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ ili njegov pravi podskup sa verovatnoćama:

$$P\left\{F_n(x) = \frac{k}{n}\right\} = \binom{n}{k} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Odavde sledi da slučajna promenljiva $nF_n(x)$, po definiciji, ima binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu, sa parametrom $p = F(x) = P\{X < x\}$, $x \in R$.

Teorema 1.3.2.2. *Za svako fiksirano* $x \in R$ *važi konvergencija:*

$$P\big\{F_n(x) \to F(x)\,,\, n \to \infty\big\} = 1.$$

Konvergencija o kojoj je bilo reči u prethodnom stavu, ostvaruje se uniformno po $x \in R$. O tome govori tzv. **centralna teorema matematičke statistike**, koju su dokazali Glivlenko i Kanteli.

Teorema 1.3.2.3. ***Centralna teorema matematičke statistike*** *Ako je $F(x)$ funkcija raspodele obeležja X i $F_n(x)$, $x \in R$, empirijska funkcija raspodele uzorka obima n iz populacije sa obeležjem X, tada važi:*

$$P\left\{\sup_{x\in R}|F_n(x) - F(x)| \to 0 \text{ kada } n \to \infty\right\} = 1.$$

S tim u vezi važno je istaći još jedan rezultat koji se odnosi na obeležja apsolutno neprekidnog tipa.

Teorema 1.3.2.4. *Neka je $F(x)$ funkcija raspodele, a $F_n(x)$, $x \in R$, empirijska funkcija raspodele na osnovu uzorka obima n iz populacije sa obeležjem X. Ako je $F(x)$ neprekidna funkcija, onda raspodela statistike:*

$$\sup_{x\in R}|F_n(x) - F(x)|$$

ne zavisi od funkcije $F(x)$.

1.3.3 Tačkaste ocene parametara

Rekli smo da je osnovni problem Matematičke statistike kako da se na osnovu uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ zaključi kakva je raspodela obeležja X. Često na osnovu drugih razmatranja, na primer onih koja se odnose na primene Puasonove i normalne raspodele, znamo da obeležje X ima određeni tip raspodele, ali ne znamo parametre te raspodele.

Na taj način srećemo se sa problemom ocenjivanja nepoznatih parametara na osnovu uzorka. Nepoznati parametar raspodele obeležja X označićemo sa θ. Na osnovu uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ biramo jednu statistiku

$$\hat{\theta}_n = f(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

kojom ocenjujemo parametar θ u sledećem smislu. U situaciji kakva je redovno u primenama, registrujemo određene numeričke vrednosti našeg uzorka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. To je niz od n brojeva koje je u našem partikularnom opitu "uzela" n dimenzionalna slučajna promenljiva $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Tako statistika $\hat{\theta}_n$ kao funkcija od $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ "uzima" jednu određenu numeričku vrednost

$$\hat{u}_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Tim brojem $\hat{u}_n$ ocenjujemo nepoznati parametar θ. Očigledno je da ta ocena ima izvesnu grešku, ali tu grešku treba tumačiti u drugom smislu, od onog koji imamo kod greški u približnom računanju. Radi se o tome da ako bismo celu operaciju "uzimanja" uzorka ponovili, ne bismo uopšte dobili iste brojeve kao prvi put već neke druge $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a to znači i drugu ocenu $\hat{u}_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nepoznatog parametra θ. Kako su vrednosti koje dobijamo u uzorku nepredvidive u običnom determinističkom smislu, to je nepredvidiva i vrednost za ocenu parametra θ. Drugim rečima, ocena je za nas slučajna promenljiva θ. Međutim, kada je jednom realizovan uzorak, dobijen je određen broj $\hat{u}_n$ i više se ne može govoriti o slučajnoj promenljivoj. Možemo imati manje ili više poverenje u nas broj $\hat{u}_n$ kao ocenu parametra θ i to "poverenje" proističe iz razmatranja kakva je raspodela statistike θ.

Ocena nepoznatog parametra θ pomoću statistike $\hat{\theta}_n$ odnosno broja $\hat{u}_n$ zove se "tačkasta" ocena. Ocena θ je centrirana (nepristrasna) ako je $E(\hat{\theta}_n) = \theta$. Očigledno je da je centriranost vrlo "poželjna" osobina ocena.

Aritmetička sredina uzorka $\overline{X_n}$ je centrirana ocena matematičkog očekivanja obeležja X.

Disperzija uzorka $\overline{S_n^2}$ nije centrirana ocena disperzije $D(X)$ obeležja X. Zaista,

$$\begin{aligned} E(\overline{S_n^2}) \quad &= E(\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2) = \\ &= E(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \overline{X_n}^2) = \\ &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{j=1}^{n} E(X_j^2) - E(\overline{X_n 2}^2). \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} E(\overline{X_n}^2) \quad &= E(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{j=1}^{n} X_j)^2 = \\ &= \tfrac{1}{n^2}E(\textstyle\sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{k\neq j} X_k X_j) = \\ &= \tfrac{1}{n}E(X^2) + \tfrac{n-1}{n}E(X)^2, \end{aligned}$$

tako da je

$$E(\overline{S_n^2}) = \frac{n-1}{n}E(X^2) - \frac{n-1}{n}E(X)^2 = \frac{n-1}{n}.$$

Odavde sledi da je popravljena disperzija uzorka

$$\hat{S}_n^2 = \frac{n-1}{n}\overline{S_n^2}$$

centrirana ocena za disperziju obeležja jer je $E(\hat{S}_n^2) = D(X)$.

Ako imamo dve tačkaste ocene θ_1 i θ_2 parametra θ (na osnovu istog realizovanog uzorka) za ocenu θ_1 reći ćemo da je efikasnija od ocene θ_2 ako je $D(\theta_2) > D(\theta_1)$.

Sada ćemo razmotriti dva postupka za određivanje tačkastih ocena parametara.

Metod momenata. Prilikom primene ovog postupka razmatramo teorijske momente pridružene slučajnoj promenljivoj:

$$E(X), E(X^2), E(X^3), E(X^4), \ldots$$

ili centrirane teorijske momente pridružene slučajnoj promenljivoj:

$$E((X - E(X))^2), E((X - E(X))^3), \ldots$$

Pored njih posmatramo i momente izračunate na osnovu uzorka (statističke momente):

$$\overline{X_n}, \overline{X_n^2}, \overline{X_n^3}, \ldots$$

ili centrirane momente izračunate na osnovu uzorka (centrirane statističke momente):

$$\overline{S_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2, \overline{S_n^3} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^3.$$

Izjednačavanjem k teorijskih (ili centriranih teorijskih) momenata sa odgovarajućim statističkim (ili centriranih statističkim momentima) dobijamo sistem od k jednačina sa k nepoznatih (jer su statistički momenti konkretni brojevi a teorijski momenti funkcije nepoznatih parametara).

Kao ocenu dobijenu metodom momenata za nepoznate parametare $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$, prihvatamo rešenja tog sistema jednačina.

Metod najveće verodostojnosti. Metod maksimalne verodostojnosti je najopštiji metod za dobijanje tačkastih ocena parametara. Međutim, kao što ćemo videti, taj metod može često da zahteva složeno izračunavanje.

Neka raspodela obeležja X zavisi od nepoznatih parametara $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$, čije vrednosti treba odrediti na osnovu realizovanog uzorka $(x_1, \ldots, x_n)$. U tom cilju se određuje funkcija najveće verodostojnosti $L(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ prema sledećim pravilima:

1) Ako je X diskretna slučajna promenljiva sa zakonom raspodele $P(X = x_i) = p_i$ onda je

$$L(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \Pi_{j=1}^{n} P(X = x_j),$$

gde verovatnoće $P(X = x_j)$ zavise od nepoznatih parametara.

2) Ako je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $f(x)$ onda je

$$L(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \Pi_{j=1}^{n} f(x_j),$$

gde vrednosti funkcije gustine zavise od nepoznatih parametara.

Kao ocenu dobijenu metodom maksimalne verodostojnosti za nepoznate parametare $(\theta_1, \dots, \theta_k)$, prihvatamo one vrednosti za koje funkcija $L(\theta_1, \dots, \theta_k)$ dostiže maksimum. U praksi je obično lakše naći maksimum funkcije $\ln(L(\theta_1, \dots, \theta_k) = \Pi_{j=1}^{n} P(X = x_j))$, koji se dostiže za iste vrednosti nepoznatih parametara.

1.3.4 Intervalne ocene parametara

Osim ,,tačkastih" ocena, pozabavićemo se još takozvanim intervalnim ocenama nepoznatog parametra. Problem se svodi na to da se odrede dve statistike $\hat{\theta_1} = f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i $\hat{\theta_1} = f_2(X_1, X_2, , \dots, X_n)$ takve da je

$$p(\{\theta_1 \leq \theta_2\}) = 1 \quad \text{i} \quad p(\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}) = \beta,$$

gde je β zadata verovatnoća. Interval $[\theta_1, \theta_2]$ je slučajan interval, jer su mu krajnje tačke slučajane promenljive. Interval $[\theta_1, \theta_2]$ naziva se $[\theta_1, \theta_2]$ interval poverenja za parametar θ, a verovatnoća β nivo poverenja. Prirodno je tražiti što ,,uže" intervale poverenja $[\theta_1, \theta_2]$, na primer, u torm smislu da matematičko očekivanje dužine intervala poverenja bude što manje. Sa druge strane želimo da nivo poverenja β bude što veći; obično se uzima $\beta = 0.95$ ili $\beta = 0.99$. Jasno je da su ova dva zahteva uglavnom oprečna. Izlaz leži u povećanju obima uzorka n.

Kada smo ,,uzeli" uzorak i dobili brojeve $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ onda statistike $\hat{\theta_1} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\hat{\theta_1} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ postaju određeni brojevi $\nu_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\nu = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ respektivno, a slučajni interval $[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$ postaje određeni interval $[\nu_1, \nu_2]$. Pogrešno bi bilo smatrati da sa verovatnoćom β taj interval $[\nu_1, \nu_2]$ sadrži nepoznati parametar θ! ν_1, ν_2 i θ su neslučajni brojevi, prema tome događaj $\nu_1 \leq \theta \leq \nu_2$ je izvestan ili nemoguć dogadaj i njegova verovatnoca je 1, odnosno 0, a nikako nije β. Verovatnoća β je samo verovatnoća da slučajni interval $[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$ prekrije nepoznati broj θ. β možemo interpretirati i ovako: zamislimo da smo ,,uzeli" mnogo serija uzoraka obima n i dobili nizove brojeva $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1', x_2', \dots, x_n')$, $(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$,...i izračunali intervale poverenja $[\nu_1, \nu_2]$,$[\nu_1', \nu_2']$,$[\nu_1'', \nu_2'']$,... Tada na te intervale možemo gledati kao na realizacije slučajnog intervala $[\nu_1, \nu_2]$. Kako je $p(\{\hat{\theta_1} \leq \theta \leq \theta_2\}) = \hat{\beta}$ i tumačeći verovatnoću kao graničnu vrednost relativnih uče stanosti, možemo reći da približno $100\beta\%$ numeričkih intervala $[\nu_1, \nu_2]$,$[\nu_1', \nu_2']$,$[\nu_1'', \nu_2'']$,... prekriva nepoznati broj θ, a ostalih $100(1-\beta)\%$ ne prekriva.

1.4 Stohastički procesi

Sadržaj ovog poglavlja je detaljno obrađen u knjizi [40].

1.4.1 Osnove teorije stohastičkih procesa

U ovom paragrafu navešćemo neke osnovne elemente teorije stohastičkih procesa. Napominjemo da se u našoj matematičkoj literaturi, za isti pojam, često koriste i termini slučajni proces ili slučajna funkcija. Ubrzanim razvojem tehničkih nauka, i inače, od polovine minulog veka, došlo je do pojave problema za koje se pokazalo da metode sa kojima je raspolagala teorija verovatnoće nisu dovoljne za njihovo rešavanje. Između ostalog, to je posledica činjenice da su se u to vreme mnoge nauke, a naročito prirodnotehničke, bavile istraživanjem pojava, koje se menjaju u zavisnosti od vremena, a teorija verovatnoće u to vreme nije imala metodologiju proučavanja takvih pojava. Između ostalih, i ovo je jedan od razloga za uvođenje stohastičkih procesa i razmatranja slučajnih promenljivih koje su zavisne od vremena. Pored toga se kod mnogih pojava, pri pokušaju da ih matematički opišemo, ne može izbeći slučajnost, pogotovu kod nelinearnih fenomena.

Modeliranje raznovrsnih prirodnih fenomena u tehnici, prirodnim naukama, ekonomiji, zaštiti okoline, neophodno sadrži faktor slučajnosti. Ako recimo verovatnoću shvatimo kao meru slučajnosti ili meru neznanja; matematički pristup je potpuno isti.

Napomenimo da je danas stohastička analiza jedna od modernijih oblasti matematike i poseduje veoma razvijen matematički aparat u radu sa stohastičkim diferencijalnim jednačinama, koje modeliraju razne fenomene sa nepoznatim faktorima, a koje shvatamo kao da su se slučajno dogodili.

Definicija 1.4.1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{N}$. Stohastički proces, u oznaci $\{X(t), t \in I\}$, je familija slučajnih promenljivih definisanim na istom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, p)$.*

Skup $I \subseteq \mathbb{N}$ u ovom slučaju zovemo parametarskim skupom, a realni prostor $\mathbb{R}^d$ -skupom stanja, pri čemu je $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Imajući u vidu da je svaki slučajan proces, za fiksirano $t \in I$, slučajna promenljiva, koja je funkcija od $\omega \in \Omega$, stohastički proces je funkcija dva parametra t i ω , tj.

$$X_t = X_t = \{X(t, \omega), t \in I\}.$$

Često, vezano za parametre t i ω stohastičkih procesa razmatramo dva slučaja:

- za fiksirano $t \in [t_0, T]$, kao što je napred rečeno, dobijamo jednu slučajnu promenljivu;

- za fiksirano $\omega \in \Omega$ dobijamo realnu funkciju vremena na $[t_0, T]$, koju zovemo trajektorijom (realizacijom) stohastičkog procesa $\{X(t), t \in I\}$.

Definicija 1.4.1.2. *Stohastički procesi* $\{X(t), t \in I\}$ *i* $\{\overline{X}(t), t \in I\}$, *definisani na istom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ *verovatnoće, su stohastički ekvivalentni ako se* $\{X(t), t \in I\}$ *poklapa sa* $\{\overline{X}(t), t \in I\}$, *u oznaci* $\{X(t), t \in I\} = \{\overline{X}(t), t \in I\}$ *sa verovatnoćom* 1, *pri čemu* $\{\overline{X}(t), t \in I\}$ *zovemo modifikacijom procesa* $\{X(t), t \in I\}$ *i obrnuto.*

Definicija 1.4.1.3. *Slučajnu promenljivu oblika,*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(X(t_i), t_i \in I) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$$

gde su $a_i \in \mathbb{R}$, *zovemo* n*-dimenzionalnim sečenjem stohastičkog procesa* $\{X(t), t \in I\}$ *na segment* $[t_0, T]$.

Definicija 1.4.1.4. *Gausovim stohastičkim procesom na* $[t_0, T]$ *zovemo svaki stohastički proces* $\{X(t), t \in I\}$ *čije je svako* n*-dimenziono sečenje slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom.*

Definicija 1.4.1.5. *Srednja vrednost ili očekivanje stohastičkog procesa* $\{X(t), t \in I\}$ *je realna funkcija vremena* $m : [t_0, T] \to \mathbb{R}$. *Umesto* $m(t)$ *koristi se oznaka* $m_X(t)$.

Važi sledeća formula:

$$m_X(t) = E[\{X(t), t \in I\}] = E[X_t].$$

Definicija 1.4.1.6. *Korelaciona funkcija stohastičkog procesa* $\{X(t), t \in I\}$ *u oznaci* $K_X(t, s)$ *ili* $K(t, s)$ *je:*

$$K(t, s) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))] = E[X_t X_s] - m(t)m(s).$$

Definicija 1.4.1.7. *Uzajamno korelaciona funkcija dva stohastička procesa* $\{X(t), t \in I\}$ *i* $\{Y(t), t \in I\}$, *je*

$$K_{X,Y}(t, s) = E[(X_t - m(t_X))(Y_s - m_Y(s))].$$

Definicija 1.4.1.8. *Disperzija stohastičkih procesa* $\{X(t), t \in I\}$ *u oznaci* $D_X(t)$, *ili kraće* $D(t)$ *je*

$$D(t) = K(t, t) = E[X_t^2] - m(t)^2.$$

Izrazom

$$\rho(t,s) = \frac{Kt, s}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

je definisan koeficijent korelacije procesa $\{X(t), t \in I\}$*, koji se označava i sa* $\rho_X(t,s)$.

Definicija 1.4.1.9. *Stohastički proces* X_t *je* ***gausovski*** *ako su sve njegove konačno dimenzionalne raspodele normalne.*

Definicija 1.4.1.10. *Ako za svako* $t \in [0,\infty)$ *važi* $X(t) : \Omega \longrightarrow B_X$ *gde je* B_X *najviše prebrojiv skup* $(B_X = \{x_1, x_1 \ldots\})$ *tada slučajan proces* $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ *zovemo* ***diskretno vrednosnim****, a za proizvoljno* t *slučajna promenljiva* $X(t)$ *je diskretna. Skup* (B_X) *zovemo skup* ***stanja*** *slučajnog procesa.*

Definicija 1.4.1.11. *Diskretna vrednost slučajnog procesa* $\{X_{(t)} : t \in [0,\infty)\}$ *je merljiva ako za svako* $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ *iz* B_X *i za* $t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1}$ *iz* $[0,\infty)$ *važi*

$$P(X(t_{n+1}) = x_{n+1}|X(t_1) = x_1, \ldots X(t_n) = x_n = P(X(t_n{+}1) = X_{n+1}|X(t_n) = x_n.$$

1.4.2 Braunovo kretanje

Pre nego što damo definiciju Braunovog kretanja ili Vinerovog procesa, napomenimo da sam pojam Braunovog kretanja potiče od izučavanja, biologa Roberta Brauna, haotičnog kretanja rastvorenih čestica polena u vodi. Haotičnost Brunovog kretanja objašnjavana je slučajnim sudarima između molekula tečnosti, u kojoj su rastvorene čestice polena, i samih čestica polena. Takođe u jednom svom radu, na samom početku 20-og veka, A. Ajnštajn je Brunovo kretanje proučavao sa aspekta molekularno-kinetičke teorije toplote. U radovima [75],[76] iz 1923. Norbert Viner je dao strogu matematičku definiciju Braunovog kretanja, koje se zbog toga često naziva Vinerov proces. Dakle, zahvaljujući Vineru, termin Braunovo kretanje više nije označavao samo fizičku pojavu, već i matematički pojam, i njegova značajna primena se ogleda u opisivanju različitih pojava iz realnog života.

Definicija 1.4.2.1. *Stohastički proces* $\omega = \{\omega(t),\ t \geq 0\}$ *je Vinerov, ako važi:*

1) $p(\omega(0) = 0) = 1$*;*

2) Za svako $t_0, t_1, \ldots, t_n$*;* $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$*, odgovarajuće slučajne promenljive*

$$\omega(t_0), \omega(t_1) - \omega(t_0), \omega(t_2) - \omega(t_1) \ldots, \omega(t_n) - \omega(t_{n-1})$$

su nezavisne;

3) $[\omega(t) - \omega(s)] : \mathcal{N}(0, t-s)$*, za svako* $t > s \geq 0$.

Iz uslova 1) *i* 3) *dobijamo da* $\omega_t : \mathcal{N}(0, t-s)$ *za svako* $t > 0$ *, odakle sledi:*

$$p(a \leq \omega_t \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Teorema 1.4.2.1. *Stohastički proces* $\{\omega(t),\ t \geq 0\}$ *je Vinerov ako i samo ako je Gausov i ako je* $E(\omega(t)) = 0$ *i* $K(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$ *za svako* $s, t \geq 0$.

Navedimo samo neke osobine Vinerovog procesa:

1) n-dimenzionalna gustina raspodele za $t_1 \leq \cdots \leq t_n$ i $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ može se predstaviti pomoću jedimenzionih gustina verovatnoće normalne raspodele:

$$f(t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_n) = f(t_1, u_1) f(t_2 - t_1, u_2 - u_1) \cdots, f(t_n - t_{n-1}; u_n - u_{n-1}).$$

2) skoro sve njegove trajektorije su neprekidne funkcije;

3) skoro sve njegove trajektorije su nediferencijabilne funkcije u svakoj tački.

1.4.3 Beli šum

Beskonačno diferencijabilnu funkciju definisanu na $\mathbb{R}^n$ nazivamo test funkcija, ako je skup tačaka u kojima je ona različita od nule kompaktan.

Realnu linernu funkciju definisanu na vektorskom prostoru nad poljem realnih brojeva nazivamo linearna funkcionela.

Linearnu funkcionelu T, definisanu na skupu test funkcija, zovemo uopštenom funkcijom ili distribucijom.

Pošto su skoro sve trajektorije Vinerovog procesa nediferencijabilne funkcije, tada njegov prvi izvod se mora razmatrati kao uopštena funkcija (distribucija). Stoga, kada pređemo na distribucije i uvedemo pojam uopštenog stohastičkog procesa dolazimo do pojma koji se uobičajeno naziva Beli šum, u oznaci ζ_t. Ne ulazeći u detaljnije izučavaje distribucija, što ovde nije cilj, za beli šum kažemo da je uopšteni stohastički proces i predstavlja izvod Vinerovog procesa, koga posmatramo kao uopšten stohastički proces. Dakle, možemo simbolično zapisivati:

$$\zeta_t = \frac{d\omega_t}{dt} = \dot{\omega}_t$$

ili posle integracije,

$$\omega_t = \int_0^t \zeta_s ds.$$

Beli šum definišemo i kao stohastički proces sa nezavisnim priraštajima, očekivanjem O i kovarijansom $\delta(x-y)$.

1.4.4 Stohastički integral

Godine 1949. K. Ito uveo je pojam stohastičkog integrala, čemu je prethodio razvoj stohastičkih diferencijalnih jednačina. Kako je Vinerov proces neograničene varijacije, kao i da skoro sve njegove trajektorije nemaju izvod ni u jednoj tački, to stohastički integral (integral Itoa) po Vinrovom procesu ne može se definisati ni kao Rieman-Stieltjesov ni kao Lebegov integral. Ipak, zavaljujući stohastičkoj prirodi Vinerovog procesa, stohastički integral Itoa može se definisati za široku klasu stohastičkih procesa.

Definicija 1.4.4.1. *Stohastički proces φ je stepenasti proces, ako postoji podela $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ intervala $[t_0, T]$, nezavisna od ω, takva da je $\varphi(t) = \varphi(t_k)$ za sve $t_k \le t \le t_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Definicija 1.4.4.2. *Ako je φ stepenasti stohastički proces, tada slučajnu promenljivu*

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t) d\omega(t) = \lim \sum k = 0^{n-1} \varphi(t_k)(\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)$$

zovemo stohastičkim integralom Itoa, stepenastog procesa φ na Vinerovom procesu ω.

1.4.5 Stohastička stabilnost

Kako za modeliranje fenomena sa nepoznatim faktorima koristimo diferencijalne stohastičke jednačine, to ćemo u ovom poglavlju dati originalnu sistematizaciju najvažnijih diferencijalnih jednačina stohastičke stabilnosti. Teoreme koje navodimo su dokazane u [70], [71] i [72]. Osnova za njihovo izvođenje je Foker-Plank-Kolmogorovljeva jednačina za funkciju gustine raspodele:

$$\partial P(t,C)/\partial t = -\partial(A(t,C)P(t,C))/\partial C + 0,5B\partial^2 P(t,C)/\partial C^2 \tag{1.1}$$

gde je: $A(t,C)$ koeficijent difuzije, B faktor koncentracije slučajnog procesa Markova a sa t je označeno vreme. Momenti slučajnog procesa su dati formulama:

$$M^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^n P(t,C) dC,$$

dok se disperzija izračunava prema formuli:

$$\sigma^2(t) = M^{(2)}(t) - M^{(1)}(t)^2.$$

Diferencijalna entropija se uvodi formulom:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t,C)\ln(P(t,C))dC.$$

Iz jednačine 1.1 dobijamo:

$$dM^{(1)}(t)/dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t,C)P(t,C)dC. \tag{1.2}$$

Teorema 1.4.5.1. *Ako koeficijent difuzije ima oblik*

$$A(t,C) = Cf(M^{(1)}(t))/M^{(1)}(t), \tag{1.3}$$

onda je diferencijalna jednačina matematičkog očekivanja:

$$dM^{(1)}(t)/dt = f(M^{(1)}(t)). \tag{1.4}$$

Teorema 1.4.5.2. *Jednačina disperzije je:*

$$\begin{aligned} d\sigma^2(t)/dt = 2(\int_{-\infty}^{+\infty} CA(t,C)P(t,C)dC- \\ -\int_{-\infty}^{+\infty} CP(t,C)dC \int_{-\infty}^{+\infty} A(t,C)P(t,C)dC) + B, \end{aligned} \tag{1.5}$$

odnosno

$$d\sigma^2(t)/dt = 2(f(M^{(1)}(t)/M^{(1)}(t))\sigma^2(t) + B.) \tag{1.6}$$

Jednačina diferencijalne entropije je:

$$\begin{aligned} dS/dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial A(t,C)\partial CP(t,C))dC+ \\ +0,5B\int_{-\infty}^{+\infty} \ln P(t,C)(\partial^2 P(t,C)/\partial C^2)dC. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Teorema 1.4.5.3. *Jednačina diferencijalne entropije je ekvivalentna sa:*

$$\begin{aligned} dS/dt = f(M^{(1)}(t))/M^{(1)}(t)+ \\ +0,5B\int_{-\infty}^{+\infty} \ln P(t,C)(\partial^2 P(t,C)/\partial C^2)dC. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ako je koeficijent difuzije Markovljevog procesa jednak nuli, tada se jednačine 1.6 i 1.8 mogu rešiti bez nalaženja gustine raspodele, što je značajna prednost predložene metode istraživanja slučajnih pojava. Jednačina 1.6 omogućuje pronalaženje minimalne i maksimalne vrednosti disperzije, što je važno u postupku planiranja eksperimenata i prilikom analize eksperimentalnih podataka. Jednacina 1.8 omogućuje određivanje momenata ekstremnih vrednosti.

U slučaju da slučajni proces zavisi od dve slučajne promenljive, koristi se višedimenziona jednačina Foker - Plank - Kolmogorova:

$$\begin{aligned} \partial P(t,C,T)/\partial t = -\partial(A_C(t,C,T)P(t,C,T))/\partial C+ \\ \partial(A_T(t,C,T)P(t,C,T))/\partial T+ \\ +0,5B_C\partial^2 P(t,C,T)/\partial C^2 + 0,5B_T\partial^2 P(t,C,T)/\partial T^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Tada je matematičko očekivanje opisano jednačinama:

$$dM_C^{(1)}(t)/dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_C(t,C,T)P(t,C,T)dCdT; \tag{1.10}$$

$$dM_C^{(1)}(t)/dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_T(t,C,T)P(t,C,T)dCdT; \tag{1.11}$$

a disperzija jednačinama:

$$\begin{aligned} d\sigma_c^{(2)}(t)/dt = 2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} CA_C(t,C,T)P(t,C,T)dCdT- \\ -M_C^{(1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_C(t,C,T)P(t,C,T)dCdT\Big) + B_C; \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} d\sigma_T^{(2)}(t)/dt = 2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} TA_T(t,C,T)P(t,C,T)dCdT- \\ -M_T^{(1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_T(t,C,T)P(t,C,T)dCdT\Big) + B_T; \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{CT}^{(2)}(t)/dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(TA_C(t,C,T)P(t,C,T)+ \\ +CA_T(t,C,T)P(t,C,T))dCdT- \\ -(M_T^{(1)}dM_C^{(1)}/dt + M_T^{(1)}dM_C^{(1)}/dt). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Za

$$A_C(t,C,T) = a_{11}C + a_{12}T, \quad A_T(t,C,T) = a_{21}C + a_{22}T \tag{1.15}$$

dobijamo sistem jednačina:

$$d(\sigma_C^2(t))/dt = 2a_{11}\sigma_C^2 + 2a_{12}\sigma_{CT}^2, +B_C \ t > 0; \tag{1.16}$$

$$d(\sigma_T^2(t))/dt = 2a_{21}\sigma_{CT}^2 + 2a_{22}\sigma_{T,}^2 + B_T; \ t > 0; \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} d(\sigma_{CT}^2(t))/dt = a_{21}M_C^2 + a_{12}M_T^2 + (a_{11} + a_{22})M_{CT}^2 - \\ -(a_{21}(M_C^{(1)})^2 + (a_{12}(M_T^{(1)})^2 + (a_{11} + a_{22})M_C^{(1)}M_T^{(1)}) = \\ = a_{21}\sigma_C^2 + a_{12}\sigma_T^2 + (a_{11} + a_{22})\sigma_{CT}^2; \ t > 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(t, C, T) \ln P(t, C, T) dC dT \ \ t > 0.$$

Naredna Teorema, dokazana u radu [2], nam daje uslove za stabilnosti srednje vrednosti u stohastčkom smislu:

Teorema 1.4.5.4. *Ako su koeficijenti difuzije jednaki nuli a koreni karakteristične jednačine*

$$0 = \begin{vmatrix} 2a_{11} - \lambda & 0 & a_{12} \\ 0 & 2a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & 2a_{12} & a_{11} + a_{11} - \lambda \end{vmatrix},$$

λ_i *realni i negativni, onda je sistem jednačina asimptotski stabilan; ako je jedan koren nula, a druga dva su negativna, rešenje je stabilno; a ako su dva korena jednaki nuli, a treći je negativan, onda rešenje je stabilno; ako je najmanje jedan realni koren pozitivan, onda je rešenje asimptotski nestabilno. Ako su koreni karakteristicne jednačine kompleksni, u slučaju negativnih realnih delova svih korena, rešenje je asimptotski stabilno. Ako je realni koren pozitivan, tada je rešenje asimptotski nestabilno. Ako je bar jedan od koeficijenata difuzije različit od nule Markovljev proces je asimptotski nestabilan.*

Jednačina diferencijalne entropje u višedimenzionom slučaju ima oblik:

$$\begin{aligned}
dS/dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\partial A_C(t,C,T)/\partial C+ \\
+(\partial A_C(t,C,T)/\partial T)]P(t,C,T)dCdT+ \\
+0,5B_C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\ln P(t,C,T)\partial^2 P(t,C,T)/dC^2]dCdT+ \\
+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\partial A_T(t,C,T)/\partial T+ \\
+(\partial A_T(t,C,T)/\partial C)]P(t,C,T)dCdT+ \\
+0,5B_T\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\ln P(t,C,T)\partial^2 P(t,C,T)/dT^2]dCdT.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Teorema 1.4.5.5. *Ako koeficijenti difuzije jednaki nuli i ako je ispunjen uslov 1.15 jednačina 1.19 dobija oblik:*

$$dS/dt = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}. \tag{1.20}$$

Jednačina gustine slučajnog polja ima oblik:

$$\partial P(t,x,C)/\partial t - D\partial^2 P(t,x,C)/\partial x^2 = \partial(A(t,x,C)P(t,x,C))/\partial C+ \\ 0,5B\partial^2 P(t,x,C)\partial C^2.$$

Iz nje dobijamo jednačinu matematičkog očekivanja

$$M^{(1)}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} CP(t,x,C)dC$$

$$\partial M^{(1)}(t,x)/\partial t - D\partial^2 M^{(1)}(t,x)/\partial x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t,x,C)P(t,x,C)dC. \tag{1.21}$$

Teorema 1.4.5.6. *Ako koeficijent difuzije ima oblik:*

$$A(t,x,C) = Cf(M^{(1)}(t,x))/M^{(1)}(t,x), \tag{1.22}$$

onda je jednačina matematičkog očekivanja:

$$\begin{aligned}
\partial M^{(1)}(t,x)/\partial t- \\
-D\partial^2 M^{(1)}(t,x)/\partial x^2 = f(M^{(1)}(t,x)).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Teorema 1.4.5.7. *Ako je ispunjen uslov 1.22 onda se jednačina disperzije:*

$$\begin{aligned}\partial\sigma^{(2)}(t,x)/\partial t - D\partial^2\sigma^2(t,x)/\partial x^2 = \\ = 2D(\partial M^{(1)}(t,x)/\partial x)^2 + \\ +2[\int_{-\infty}^{+\infty} CA(t,x,C)P(t,x,C)dC - \\ -M^{(1)}(t,x)\int_{-\infty}^{+\infty} A(t,x,C)P(t,x,C)dC] + B.\end{aligned} \tag{1.24}$$

transformiše u oblik:

$$\begin{aligned}\partial\sigma^{(2)}(t,x)/\partial t - D\partial^2\sigma^2(t,x)/\partial x^2 = 2D(\partial M^{(1)}(t,x)/\partial x)^2 + \\ +2[f(M^{(1)}(t,x)/M^{(1)}(t,x)]\sigma^2(t,x) + B.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Teorema 1.4.5.8. *Ako je ispunjen uslov 1.23 onda se jednačina diferencijalne entropije:*

$$\begin{aligned}\partial S(t,x)/\partial t - D\partial^2 S(t,x)/\partial x^2 = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial A(t,x,C)/\partial C P(t,x,C)dC + \\ 0,5B\int_{-\infty}^{+\infty} \ln P(t,x,C)\partial^2 P(t,x,C)/\partial C^2 dC - \\ -D\int_{-\infty}^{+\infty} (1/P(t,x,C))(\partial P(t,x,C)/\partial x)^2 dC.\end{aligned} \tag{1.26}$$

transformiše u oblik:

$$\begin{aligned}\partial S(t,x)/\partial t - D\partial^2 S(t,x)/\partial x^2 = \\ = [f(M^{(1)}(t,x)/M^{(1)}(t,x)] + \\ 0,5B\int_{-\infty}^{+\infty} \ln P(t,x,C)\partial^2 P(t,x,C)/\partial C^2 dC - \\ -D\int_{-\infty}^{+\infty} (1/P(t,x,C))(\partial P(t,x,C)/\partial x)^2 dC.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Glava 2

ODABRANE NUMERIČKE METODE

2.1 Uvodni pojmovi

Numeričke metode su počele da se razvijaju još u antičkoj Grčkoj i njihov razvoj i primena prati celu kasniju epohu civilizacije. Od mnoštva velikih matematičara i fizičara koji su se uz ostala područja bavili i numeričkim metodama navodimo samo nekoliko odabranih imena, onih koju su bili, u to vreme istaknuti specijalisti, kao što su: Euklid, Arhimed, Fibonači, Njutn, Ferma, Dekart, Gaus, Ojler, Paskal, Lagranže, Furije, Ralej, Poinkar, Ljapunov, Kurant i mnogi drugi. Navodimo, takođe, samo nekoliko nematematičara koji su dali veliki doprinos: Berstou (aerodinamičar), Zaidel (astronom), Ričardson i Lorenc, (meteorolozi), Etken (statističar), Pareto (ekonomist). Njihove rezultate su kasnije preuzeli matematičari i dalje ih usavršili, dokazivali i generalizovali.

Sa pojavom kompjutera, numeričke metode su dobile novi impuls. Mnoge metode poznate od ranije, primenom računara su postale mnogo preciznije i brže, pa su se i znatno usavršile i danas se mogu upotrebiti za mnogo složenije i komplikovanije probleme. Na primer, iako je Gausov algoritam eliminacije za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina bila dobro poznata metoda među matematičarima i inženjerima, za čoveka koji ima samo papir, olovku i kalkulator bio je problem rešiti sistem od desetak linearnih jednačina, a rešenje sistema od jedanaest jednačina bio je pravi podvig. Bilo je pravo čudo kada je Modor u svom doktoratu rešio nekoliko sistema od 24 linearne jednačine bez upotrebe kalkulatora. Rešavanje nelinearne jednačiine je bila još mnogo veća poteškoća. Danas, uz pomoć računara, i sistemi od nekoliko miliona nelinearnih jednačina ne prestavljaju nesavladivu prepreku. Ne znamo koliki je trenutni rekord, ali se sećamo da je NASA najavila da će do kraja dvadesetog veka numeričko rešenje sistema od oko milijardu nelinearnih jednačina, nastalih modeliranjem strujanja vetra oko avionskog krila. Nepoznanice tog sistema su istovremeno veličine koje opisuju turbulentno strujanje vetra, ali i one koje opisuju oscilacije avionskog krila od dinamičkog opterećenja od turbulentnog strujanja. Oscilacije krila i strujanje vetra su međusobno zavisni, pa jednačine treba rešavati kao jedan sistem. Ne znamo je li se predviđanje "NASA" ostvarilo, ali ako i nije to će se bez sumnje uskoro dogoditi. Ipak, nelinearne jednačine su vrlo raznolike, pa ni danas ne postoje univerzalne metode kojima bi se mogli rešavati svi tipovi jednačina.

Bilo je metoda koje su se u predkompjutersko vreme razvijale u teorije, ali su bile zbog opsežnih proračuna neprimenjive. Računari su omogućili da se mnoge od njih uspešno realizuju. Među takvim metodama posebno je veliku primenu u inženjerstvu doživela metoda konačnih elemenata (MKE). Prva ideja je, koliko je poznato, potekla od Kuranta, ali se u to vreme mogla primeniti samo na nekoliko jednostavnih i po opsegu malih školskih primera. Ta se metoda danas primenjuje na sve linearne i nelinearne inženjerske problem matematičke fizike. U tehničkoj mehanici i konstruktorskom inženjerstvu rešavaju se tom metodom vrlo složeni problem statistike, dinamike, stabilnosti i optimalizacije. Pomoću računara se generišu modeli različitih konstrukcija i opterećenja, sprovodi proračun, a na kraju daje grafički prikaz i provera rezultata, dimenzionišu se armiranobetonske, čelične i drvene konstrukcije, te proveravaju naprezanja i deformacije u objektu. Može se uvažiti bilo koji od pozantih nelineranih statističkih i dinamičkih modela: geometrijska i materijalna nelinearnost raznih tipova: velika pomeranja i velike deformacije, nelinearna elastičnost, plastičnost, visoko-elastičnost, viskoplastičnost, mehanika loma, kontaktni problemi itd.

Analitičkim istraživanjima, numeričkim eksperimentima i inženjerskim iskustvom je utvrđeno da ta metoda nasuprot velikih prednosti ima teorijskih i paktičkih nedostataka, pa se osim daljih poboljšanja MKE, u novije vreme razvijaju i mnoge alternativne metode, kao na primer "bezmrežne metode". Nove metode daju za neke pojave, teorijski bolja rešenja, ali MKE u svakodnevnoj inženjerskoj primeni i dalje ima prednost.

U kratkom nabrojaćemo sledeće od opšte primenjivih numeričkih metoda:

- ***Metoda numeričkog integraljenja diferencijalnih jednačina*** se svodi na rešavanje *Košijevih* jednačina i graničnih uslova. Postoji veliki broj metoda za rešavanje tj. integraciju sistema diferencjalnih jednačina, kao što su: metoda *Runge-Kuta, Ojlerova* metoda i dr.[13, 38, 45].

- ***Metoda graničnih elemenata*** se sastoji u diskretizaciji graničnih oblasti konstrukcija pomoću graničnih elemenata što podrazumeva i određene aproksimacije u geometrijskom smislu i u pogledu graničnih funkcija Određenim postupkom formira se sistem algebarskih jednačina čijim se rešavanjem dobijaju tražene veličine na granicama oblasti. Postoji tri vida ove metode: direktna, poludirektna i indirektna [77, 8].

- ***Metoda konačnih razlika (diferencna metoda)*** je numerička metoda koja se, bazira na matematičkoj diskretizaciji diferencijalnih jednačina čime se te jednačine konačnim razlikama prevode u algebarske. Uspešno se primenjuje za rešavanje raznovrsnih zadataka kao na primer: torzija štapova, tankozidne konstrukcije, teorija ploča, problemi plastično deformabilnih konstrukcija, provođenje toplote, strujanje fluida, aviotehnika i dr.

  Prva primena diferencnih jednačina u tehnici pripada *Runge Kut-u* koji je ovu metodu primenio 1908. godine na rešavanje problema torzije štapova. Pri tome je korišćen sistem od 42 jednačine, no s obzirom na jednostavnost jednačina konačnih razlika rešenje je dobiveno bez mnogo teškoća. Dalji napredak u ovoj oblasti učinio je *L. E. Ričardson* koji je za rešavanje ovakvih algebarskih jednačina primenio iterativni postupak i tako dobio približne vrednosti za napone koji nastaju u branama usled gravitacionih sila i pritiska vode. *H. Lajbman* dao je drugi iterativni postupak i dokaz njegove konvergencije. Kasnije, *F. Wolf* razmatrao je konvergenciju ovog iterativnog postupka za slučaj harmonijskih i biharmonijskih jednačina. U teoriji ploča, metodu konačnih razlika sa uspehom primenio *je H. Markus (1919. god.).* U novije vreme, metoda konačnih razlika našla je veoma široku primenu u radovima *R. V. Soutvel*-a i njegovih učenika.

  Primenom metode konačnih razlika, kontinualni proces izučava se u konačnom broju dovoljno malih vremenskih intervala, [13, 44, 14]. Tako je moguće, u tim malim intervalima, funkcije vremena (koordinate, sile, brzine i dr.) aproksimirati približnim izrazima. U svakom elementarnom intervalu vrši se integracija, pri čemu se rezultati integracije u prethodnom intervalu uzimaju kao početni za naredni vremenski interval.

- ***Metoda konačnih elemenata (MKE)*** je jedna od najšire prihvaćenih savremenih metoda u svim oblastima fizike i tehnike. Primena ove metode zbog obimnosti računanja, podrazumeva isključivo primenu računara velikih kapaciteta i velikih brzina računanja. Pomoću ove metode, za razliku od analitičkih, mogu se rešavati najsloženiji problemi, uzimati skoro potpuno realni granični uslovi, složenost geometrijskih oblika, uslovi spoljašnjeg opterećenja i dr. Suštinski problem se sastoji u izboru modela koji najbolje aproksimira odgovarajući domen, odnosno, da se izvrši pravilan izbor tipa, broja i uopšte mreže konačnih elemenata, pravilan izbor osnovnih nepoznatih u čvorovima i interpolacionih funkcija kojima se opisuje stanje (na primer polje pomeranja, deformacije, naprezanja) u svakom konačnom elementu.

Metoda konačnih elemenata (MKE) je savremena numerička metoda koja se koristi za projektovanje i proračun konstrukcija uz primenu računara. Za razliku od drugih numeričkih metoda koje se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina graničnih problema, MKE se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog kontinuuma delovima konačnih dimenzija i jednostavnog oblika koji se zovu **konačni elementi (KE)**. Osnovu za razmatranje predstavlja, dakle, konačni element za koji se uspostavljaju osnovne statičke, kinematičke, dinamičke, termodinamičke i dr. veze. Potom se te veze proširuju na ceo domen, odnosno do granica kontinuuma, [3]- [6],[50]- [53].

Prve teorijske osnove MKE se sreću u radovima *Argiris*-a, oko 1954−55. godine, mada je sam koncept metode definisan mnogo ranije. Tako, još 1941. *Hrenikof* i 1947. *Levi* su primenili ovu metodu u avio industriji. Primenom trougaonih konačnih elemenata, istraživači *Claugh, Martin, Turner, Tor, Teig,* proračunali su naponsko stanje "BOEING" -a i time dali veliki doprinos daljoj primeni MKE u avio industriji. Tada je, prvi put, definisan i termin "*the finite element method*" ili skraćeno FEM a na predlog *Klauf*-a. U periodu od 1960. do 1970. godine, širenju ove metode doprineli su *J. H. Argiris, O. K. Cinkievič, Čeng, Oden* i dr. Vremenom polje primene MKE se proširilo na trodimenzionalne probleme, dinamiku konstrukcija, prostiranje talasa, strujanje fluida, nelinearnost, seizmičke procese, probleme interakcije dva ili više medijuma, itd.

Sa stanovišta fizičkog tumačenja, primenom MKE proučavano deformabilno telo tj. kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode zamenjuje se diskretnim modelom međusobno povezanih KE sa konačnim brojem stepeni slobode kretanja.

U matematičkom smislu, umesto sistema diferencijalnih jednačina (običnih, parcijalnih ili integralnih) koje definišu stanje ravnoteže celokupnog modela, primenom MKE, dobija se sistem običnih algebarskih jednačina. Za korišćenje računara pogodno je sve veličine pisati u matričnoj formi.

Za definisanje i izvođenje osnovnih jednačina u metodi konačnih elemenata koristi se jedna od sledećih metoda.

1.*Direktna metoda (Direct Finite Element Method)* predstavlja najjednostavniji pristup pri rešavanju problema jer se zavisnosti između veličina uspostavljaju neposredno - direktno. Na primer, veoma je slična metodi deformacija kod proračuna linijskih nosača, pa je pogodna za rešavanje jednostavnih zadataka.

2. *Varijaciona metoda (Variational Finite Element Method)* se zasniva na principu stacionarnosti funkcionala. U mehanici čvrstog tela i pri rešavanju statičkih problema konstrukcija funkcional je potencijalna energija. Zbir kinetičke i potencijalne energije je potencijal u dinamičkim problemima. Osnova ove metode je klasična metoda Ritz-a. Nepoznati parametri su statičke veličine (unutrašnje sile), kinematičke veličine (pomeranja) ili mešovite veličine tj. istovremeno pomeranja i unutrašnje sile.

3. *Metoda reziduma (Residual Finite Element Method)* se koristi tamo gde je teško definisati funkcional pa se diferencijalne jednačine formiraju iz samih konačnih elemenata.

4. *Metoda energetskog balansa (Energy Balance Element Method)* koristi se u termostatičkoj i termodinamičkoj analizi i zasniva se na balansu različitih vidova energije (toplotna, mehanička).

U mehanici kontinuuma najviše se koriste *varijaciona metoda i metoda reziduma*. Primenom varijacione metode dobija se niži red izvoda u diferencijalnim jednačinama za razliku od metode reziduuma koja daje vii red izvoda.

Osnovni zadatak pri proučavanju nekog deformabilnog tela je izbor diskretnog modela koji najbolje aproksimira, na primer, stanje napona i stanje deformacije kao i granične uslove. Pri diskretizaciji kontinuuma može se koristiti jedan tip konačnih elemenata ili kombinacija više tipova. Svi konačni elementi su povezani zajedničkim čvorovima, tako da čine prvobitnu konstrukciju. Konačni elementi kojima se diskretizuje konstrukcija moraju biti kompatibilni pre i posle dejstva spoljašnjeg opterećenja, tj. u prirodnoj i prinudnoj konfiguraciji, nenapregnutom i napregnutom stanju, odnosno nedeformisanom i deformisanom stanju.

Raznovrsnost problema, konstruktivnih oblika, geometrijskih veličina i uticaja kod konstrukcija uslovili su razvoj velikog broja tipova (vrsta) konačnih elemenata. Osnovna razlika među njima, pored oblika, je u različitosti "unutrašnjih" funkcija ili *funkcija oblika (shape function)*, odnosno interpolacionih funkcija kojima se aproksimira polje promenljivih u konačnom elementu. Praktično, ne postoje egzaktni kriterijumi za izbor najboljeg diskretnog modela koji obezbeđuje tačnost rešenja. Zato je, pored poznavanja teorije konačnih elementa potrebno i široko inženjersko iskustvo i kvalitativno poznavanje stanja napona i stanja deformacije kod razmatrane konstrukcije.

Osnovni tipovi (oblici) konačnih elemenata su [3]- [6],[50]- [53]

- jednodimenzionalni ili linijski konačni elementi ($1D$) (štapovi, grede, cevni elementi),
- dvodimenzionalni ili ravanski konačni elementi ($2D$) (trougaoni, pravougaoni, membrane, ploče i ljuske),
- trodimenzionalni ili prostorni konačni elementi ($3D$) (prizmatični, osnosimetrični i dr.).

Za nelinearnu analizu struktura, u statičkim uslovima, često se koristi metoda Njutn-Rafson-ova, kao i metoda iteracije. Kod analize konstrukcija pri nestacionarnim dinamičkim uslovima koriste se metode Hubolt-a, Njmark-a i Vilsona. Osnovna karakteristika svih numeričkih metoda sastoji se u tome što se pomoću njih rešavaju fundamentalne jednačine koje opisuju određene pojave, uključujući i granične uslove. Dobijena rešenja su približna i mogu biti izračunata sa greškom koju unapred želimo. Sve numeričke metode podrazumevaju primenu računara i odgovarajućih programskih paketa. To je naročito izraženo kod metoda koje podrazumevaju diskreditaciju u fizičkom smislu. Danas u svetu postoje razvijeni mnogi programski paketi kao što su: SAP (Structual Analzsis Program - USA); NASTRAH (Program National Aerohautical Moduls - Norveška); SEZAM (Super Element Structural Analzsis Moduls - Norveška); MARC; ANSYS; SANSS (Statistička Analiza Napona Skeletnih Struktura), I-DEAS, SANU; PALL2, COSSMOS M I dr., a izbor odgovarajućeg je uslovljen i raspoloživim računarskim sistemom. Od numeričkih metoda ovde ćemo posebno istaži metodu Monte Karla, koja se zasniva na kompjuterskom ponavljanju izbora slučajnih brojeva pomoću kojih se matematički modelira ponašanje sistema.

2.2 Monte Karlo Metoda

Metoda *Monte Karlo* (MK) je numerički metod i odnosi se na široki spektar matematičkih modela i algoritama čija je glavna karakteristika stohastički pristup odnosno upotreba slučajnih brojeva koji emituju fizičke ulazne podatke. Ili, Monte Karlo simulacija predstavlja metode koje se zasnivaju na kompjuterskom ponavljanju izbora slučajnih (pseudoslučajnih) brojeva kojima se matematički modelira ponašanje sistema ili objekata proučavanja.

Slika 2.1: Princip *Monte Karlo* simulacije

Ako su ulazi sistema slučajni procesi, tada je i izlaz slučajni proces. Rezultat simulacije se ocenjuje iz izlaznog slučajnog procesa nekom od statističkih metoda. Pomoću MK metode se može simulirati i ispitivati ponašanje širokog spektra problema u gotovo svim oblastima, a posebno u matematici, fizici, hemiji, inženjerstvu, energetici, radioaktivnom zračenju, operacionim istraživanjima, statistici, ekonomiji, itd. Najčešće je reč o matematičkim problemima čija se rešenja ne mogu odrediti analitički ili za to ne postoje efikasni numerički algoritmi. Postoji mnogo varijanata metoda Monte Karlo. Neke od njih se zasnivaju na slučajnim perturbacijama postignutih lokalnih optimuma u toku dotadašnjeg pretraživanja. Uz to, često se koriste i za proveru rezultata dobivenih analitičkim ili drugim metodama. Metode *Monte Karlo* imaju najveću primenu kod problema gde je korišćenje determinističkog algoritma nemoguće ili nemoguće u realnom vremenu. Uopšteni izgled jednog *Monte Karlo* metoda, sastoji se od faza:

- Definisanje domena mogućih ulaznih podataka;
- Generisanje tih ulaznih podataka na slučajan način;
- Izvršavanje determinističkog računa na osnovu tih uzoraka;
- Izračunavanje konačnog rezultata.

Statističkim metodama lako je izračunati grešku dobijenog rezultata. Karakteristično je da su algoritmi metode Monte Karlo obično jednostavni i laki za programiranje. Zbog velikog broja matematičkih operacija i ponavljanja, Monte Karlo metode ulaze u široku upotrebu tek s naglim razvojem računara u poslednjim decenijama dvadesetog veka. Smatra se da je metoda *Monte Karlo* korišćena veoma davno. Na primer, poznato je da je Ajzef Hol (1829-1907), 1873. godine računao približnu vrednost broja π po tom principu. Rezultati su objavljeni u članku "On an experimental determination of π".

Samo ime '*Monte Karlo*' uveli su Stanislav Ulam, Džon von Nojman i Nikolas Metropolis 1946. godine, iako je sama ideja bila poznata i ranije. Enriko Fermi je koristio slične metode 1930. godine kako bi odredio svojstva tada tek otkrivenog neutrona. Američka vojska koristila ih je intenzivno 40-ih i 50-ih godina prilikom razvoja nuklearne, a zatim i hidrogenske bombe, nasuprot vrlo ograničenoj snazi tadašnjih računara. S druge strane, ime potiče iz samog postupka rada: umesto sistemnog pretraživanja čitavog područja definisanog problema, pretražuju se samo "slučajno" odabrane tačke u tom području i traži se optimum među tim tačkama. ("Slučajno" najčešće znači kvazi slučajno što se postiže pomoću determinističkih algoritama "generatora slučajnih brojeva", a generator slučajnih brojeva asocira na kockarnicu - odatle je i naziv *Monte Karlo*) .

Generisanje nizova slučajnih brojeva je ključni segment metoda Monte Karlo, čija uopštenost u najvećoj meri zavisi od kvaliteta upotrebljenih slučajnih brojeva. Stoga se posebna pažnja posvećuje matematičkim algoritmima, radi njihovog generisanja. Postoje tri vrste slučajnih brojeva:

Pravi slučajni brojevi su slučajni u statističkom smislu. Bilo koji deo niza pravih slučajnih brojeva je nezavisan od prethodnih delova niza. Ovi nizovi su neponovljivi.

Pseudoslučajni brojevi generisani su odgovarajućim algoritmom, tako da svaki generisani slučajan broj zavisi od prethodno generisanih slučajnih brojeva, ali na takav način da je bilo koji mali deo niza ovih slučajnih brojeva sličan pravim slučajnim brojevima.

Kvazi-slučajni brojevi u suštini nemaju slučajan karakter, ali ako se uzme dovoljno veliki deo niza ovih brojeva, po svojim karakteristikama oni mogu biti bolji od pravih slučajnih brojeva.

Koristeći determinističke generatore za generisanje slučajnih brojeva pomoću računara dobijaju se slučajni brojevi u nizovima tačno određene dužine, pri čemu prethodnih k brojeva (najčešće $k = 1$) određuju sledeći broj. Niz slučajnih brojeva ima konačnu dužinu, tzv. period, što znači da se posle izvesnog vremena taj niz ponavlja.

Odabrane tačke u nekom području se često upotrebljavaju kao početni uslovi za lokalnu matematičku optimalizaciju. *Monte Karlo* metode primenjuju se najviše u fizičkim i hemijskim procesima, komplikovanim matematičkim proračunima, uopšte sistemima čije se ponašanje jedva/ne može deterministički obraditi. Posebna grupa ovih metoda je *Monte Karlo* integraljenje koje ima veliku primenu u numeričkom izračunavanju ograničenih integrala koji mogu biti višedimenzionalni, sa komplikovanim granicama, itd. Na primer, na površinu se biraju slučajno generisane tačke, a rezultat se dobija iz odnosa ukupnog broja tačaka i tačaka koje zadovoljavaju uslov problema (npr. nalaze sa na površinu ispod grafika date funkcije).

2.2.1 Neki karakteristični primeri primene metode Monte Karlo

Ovde ćemo navesti *neke karakteristične* primere metode *Monte Karlo*, koju je moguće primeniti svaki put kada se rešenje nekog problema može dovesti u vezu sa određenim parametrom raspodele verovatnoće [*]. Jedan takav primer je izračunavanje određenih integrala slika (2.2) koje se svodi, kao što je poznato, na izračunavanje površine ispod podintegralne funkcije. Površina ovakvih likova se može oceniti ako se uniformno raspodele tačke po nekoj većoj površini poznate površine koja je sadrži (obično po kvadratu ili pravougaoniku), a zatim se prebroje tačke koje su nalaze unutar lika. Kao konkretan primer posmatraćemo četvrtinu jediničnog kruga. Ako se po jediničnom kvadratu nalazi uniformno raspoređenih 10 tačaka, a zatim se utvrdi da se unutar kruga nalazi 8, dobiće se:

$$\frac{S(\text{krug}/4)}{S(\text{kvadrat})} = 0,8 \pm 0,1$$

Greška je izračunata pomoću izraza:

$$\Delta X \approx \sqrt{\frac{X(1-X)}{N}}$$

jer je reč o promenljivoj veličini x koja može poprimiti vrednosti: 1(pogodak u figuru) i 0(promašaj).

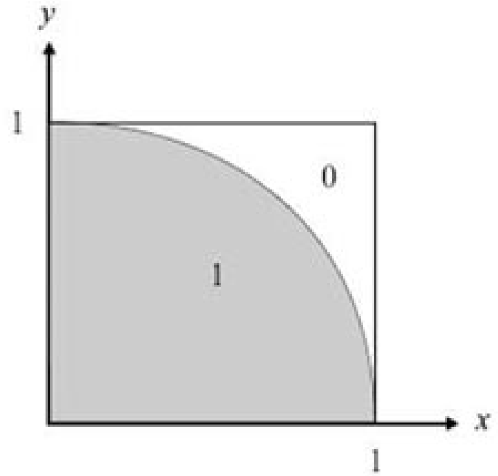
Takođe, može se odrediti približna vrednost broja π: posmatramo i dalje kvadrat stranice 1 i u njega upisanu četvrtinu kruga poluprečnika 1, slika 2.2. Na slučajan način "bacajmo" tačke po površini kvadrata (slika 2.3) i neka je ukupan broj tačaka N, a broj tačaka koje pripadaju delu kruga N_k. Očigledno, ti brojevi će se odnositi kao površine na kojima se nalaze:

$$N/N_k = r^2/(r^{2*}\pi/4),$$

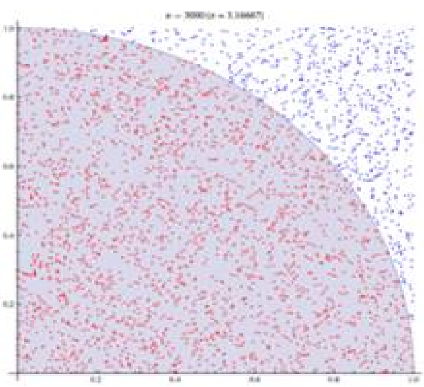
odakle sledi:

$$4N_k/N = \pi.$$

Dobijeni rezultat (naravno, nije uvek isti) je: 3.14175.



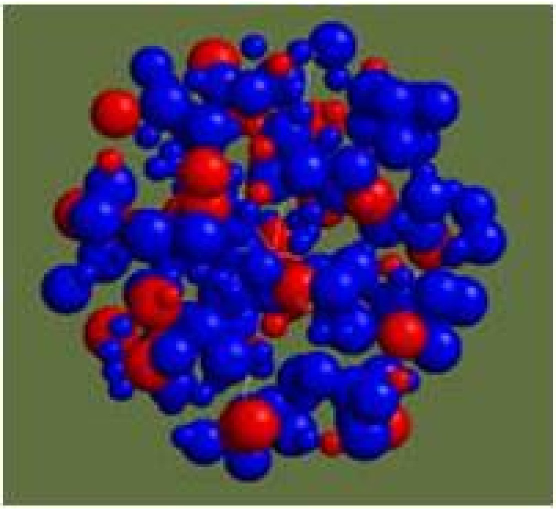
Slika 2.2: Izračunavanje određenog integrala i broja π



Slika 2.3: Izračunavanje broja π

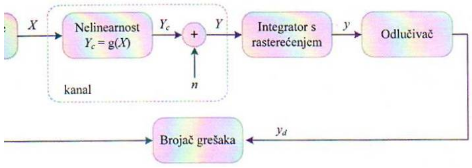
Metoda *Monte Karlo* se uspešno primenjuje u mikrofizici za "izračunavanje apsorbovane doze na ćelijskom nivou u terapiji radionuklidima" (grupa autora sa Instituta nuklearne medicine u Beogradu). Pokazano je kako se u terapiji radionuklidima vrši izračunavanje apsorbovanih doza za svaku ćeliju tumora što omogućava tačniju procenu efekata terapije radionuklidima. Da bi primena metode *Monte Karlo* ili neke druge u oblasti terapije radionuklidima bila što svrsishodnija bilo bi korisno definisati referentni 3D model tumora na ćelijskom nivou. Koristeći histopatološka merenja za različite tumore definisan je model referentnog tumora kao sfera datog prečnika koja sadrži ćelije datog srednjeg prečnika i standardne devijacije i date gustine ćelija.

Određeni deo radiofarmaka koji se primeni za terapiju datog tumora će ostati u stromi tumora, a preostali deo će se vezati za određeni broj ćelija zavisno od karakteristika samog radiofarmaka. Samo vezivanje za ćelije može biti homogeno po površini ćelija ili homogeno po zapremini ćelije. Relizovani model tumora na ćelijskom nivou prikazan je na slici 2.4 itd



Slika 2.4: Referentni model tumora na ćelijskom nivou za primenu u terapiji radionuklidima

Značajna primena metoda Monte Karlo zapažena je u oblasti *Modeliranja procesa u telekomunikacionim sistemima*. Kao primer primene MK simulacije u telekomunikacijama, posmatrajmo sistem za prenos M-arnih digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti. Potrebno je odrediti verovatnoću greške po simbolu, u uslovima nelinearnog kanala u kome deluje aditivni šum. Blok-šema simulacionog modela prikazana je na slici 2.5

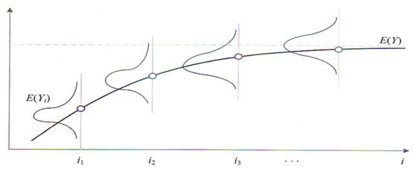


Slika 2.5: Simulacioni model sistema za prenos signala u osnovnom opsegu učestanosti

Na početku se generiše N simbola, na primer, kvatenarnog ulaznog signala i mN odabranih podataka Gausovog šuma. Uz pomoć računarskih programa dobija se signal koji se zatim propusti kroz kanal čiji je model poznat $Yc = g(X)$. Integriranje sa rasterećenjem je modelirano računanjem srednje vrednosti primljenog signala na intervalu trajanja jednog simbola. U odlučivaču se signal poredi s pragovima, na osnovu čega se donosi odluka. Konačno, potrebno je prebrojati pogrešno primljene simbole i oceniti verovatnoću greške.

Često se primenjuje tzv. metod nezavisnih replikacija, po kome se izvrši više serija nezavisnih ponavljanja simulacije. Nezavisnost se ostvaruje npr. različitim početnim uslovima, ili, u ovom primeru, različitim sekvencama korisnog signala i šuma. Za svaku seriju replikacija oceni se traženi izlazni parametar (npr. verovatnoća greške), a konačan rezultat se dobija usrednjavanjem ovih podrezultata po svim serijama. Jasno je da će tačnost rezultata dobijenog Monte Karlo simulacijom zavisiti od broja replikacija statističkog eksperimenta, odnosno, u ovom primeru, od broja generisanih simbola.

U opštem slučaju, s povećanjem broja replikacija, menjaju se i funkcija gustine verovatnoće i matematičko očekivanje izlaza simulacije. Ova zavisnost je kvalitativno prikazana na slici 2.6. Na grafiku sa slike 2.6 mogu se



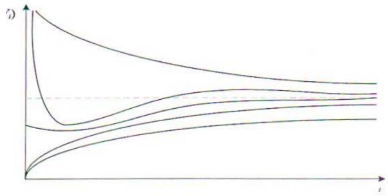
Slika 2.6: Promena statistike izlaza

uočiti dve oblasti, koje odgovaraju prelaznom i ustaljenom režimu. Odlika ustaljenog režima je da nastupa za dovoljno veliki broj replikacija i da u njemu izlaz simulacije ne zavisi od početnog uslova, tj. da važi

$$Fi(y|I) \to F(y); (\forall I).$$

Iako ustaljeni režim ne zavisi od početnog uslova, brzina konvergencije ka njemu zavisi od toga, što je ilustrovano na slici 2.7. Sa stanovišta dobijanja verodostojnih i reprezentativnih rezultata u što kraćem vremenu, poželjno je da izlaz simulacije što pre uđe u ustaljeni režim. Napomenimo da se u izlazu nekih simulacionih modela mogu javiti i oscilatorni procesi.

Da bi se eliminisao uticaj početnog uslova na ocenu parametara sistema, potrebno je iz rezultata izbaciti onaj deo koji se odnosi na prelazni režim, a koji se u literaturi naziva *warmup* ili *startup* periodom. U operativnom smislu, to npr. znači da ćemo uzorak izlaznog signala za statističku obradu izabrati tako da ne obuhvati l prvih odabranih uzoraka, koji odgovaraju prelaznom režimu, ili da ćemo iz razmatranja izostaviti l prvih korisnika koji dolaze u servisni sistem, itd.



Slika 2.7: Primer zavisnosti očekivanja rezultata simulacije od broja ponavljanja početnog uslova

Korišćenjem metoda *Monte Karlo* rešavaju se formulacije *kvantne mehanike* i *kvantne teorije* polja koje se opisuju preko funkcionalnog integrala. Osnova klasičnih numeričkih metoda računanja odredenih integrala je u podeli domena integracije na N delova i aproksimiranju integrala odgovarajućom sumom, što je i ovde polaz.

Treba izdvojiti i primer primene metoda *Monte Karlo* u oblasti ekonomije, kao na primer, praćenje trajanja projekta. Monte Karlo metoda omogućava simulaciju mogućih trajanja projekta na osnovu kojih se računaju srednje trajanje i varijansa kritične putanje projekta. Polazni podaci su trajanja aktivnosti čije vrednosti se simuliraju:

- iz odabrane raspodele za trajanje aktivnosti;
- na osnovu datih vrednosti procenjenog trajanja aktivnosti i njihove varijanse.

Podešavanjem simulacije na 1000, 10000 i više ponavljanja doprinosi tačnijim procenama. Ove procene su dragocene s obzirom na to da je u realnim uslovima gotovo nemoguće ponoviti jedan isti projekat onoliko puta koliko to omogućava primena kompjutera, odnosno softver.

2.2.2 Primena Monte Karlo simulacija kod radioaktivnog zračenja i statističke prirode transfera energije zračenja

Na primeru radioaktivnog raspada ilustrovacemo primenu *Monte Karlo* simulacija u nuklearnoj fizici, sa posebnim osvrtom na statistiku prirode događaja transfera energije zračenja.

U tom cilju pretpostavimo da imamo radioaktivnih jezgara u trenutku t. Sa dN se označava broj jezgara koja se raspadnu u toku vremenskog intervala $(t, t+dt)$, a koji je srazmeran broju radioaktivnih jezgara N_t u trenutku t i dužini vremenskog intervala dt:

$$dN = -\lambda N_t dt$$

Pri čemu negativan znak na desnoj strani prethodne jednačine označava da se broj radioaktivnih jezgara tokom vremena smanjuje. Vrednost konstante zavisi samo od osobina konkretnog radioaktivnog jezgra, a potpuno je nezavisna od svih fizičkih, hemijskih ili nekih drugih uticaja. Integralni oblik gornje jednačine glasi

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

gde N_0 označava broj radioaktivnih jezgara u trenutku $t = 0$. Vreme poluživota radioaktivnih jezgara $T_{1/2}$ određuje se iz izraza (koji predstavlja modifikovani gornji izraz za $t = T_{1/2}$)

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T \frac{1}{2}}$$

odakle se dobija:

$$T\frac{1}{2} = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{0,69315}{\lambda}$$

Broj raspadnutih radioaktivnih jezgara u vremenskom intervalu $(t, t+dt)$ dat je izrazom:

$$\lambda N_t dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$

Zbir vremena života jezgara iznosi:

$$T_S = \int_0^\infty t\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \frac{N_0}{\lambda}.$$

Srednje vreme života radioaktivnih jezgara određuje se iz sledećeg izraza:

$$\tau = \frac{T_S}{N_0} = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{T_{\frac{1}{2}}}{0,69315} \approx 1,4427 T_{\frac{1}{2}}$$

Verovatnoća da se radioaktivno jezgro raspadne u toku vremenskog intervala $(t, t + dt)$ data je izrazom:

$$f(t)dt = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}} dt$$

Vrednosti slučajne promenljive t koja prati ovakav tip eksponencijalne raspodele generišu se pomoću sledeće jednačine:

$$u = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau}} dt = -e^{-\frac{1}{\tau}} + 1$$

odakle se dobija:

$$t = -\tau \ln(1 - u)$$

gde je u slučajan broj koji prati uniformnu raspodelu u interval $(0, 1)$. Pošto je raspodela vrednosti slučajnog broja $(1 - u)$ ista kao i za u, možemo pisati:

$$t = -\tau \ln u.$$

Ovde smo, kao što smo već napred istakli, od bezbroj drugih primera naveli samo neke od veoma katakterističnih.

U ovom paragrafu istaknimo da Monte Karlo metoda ima značajnu primenu simulacijama raznih događaja transfera energije zračenja radi primene u medicini.

Tako, na ćelijskom i podćelijskom nivou, statistička priroda događaja transfera energije zračenja se često karakteriše preko mikrodozimetrijskih veličina, kao što je specifična energija po događaju -z. Specifična energija je stohastička veličina i od interesa je razmatrati njenu raspodelu verovatnoće $f(z)$, kumulativnu funkciju raspodele $F(z)$ i srednju specifičnu energiju $\bar{z}$.

Specifična energija z, je količnik,

$$z = \frac{\varepsilon}{m} \tag{2.1}$$

gde je: m masa mete, $F(z)$ je verovatnoća da je specifična energija manja ili jednaka z.
Raspodela verovatnoće, $f(z)$ je izvod od $F(z)$ po z, tj.:

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz}. \tag{2.2}$$

Srednja specifična energija je data formulom:

$$\bar{z} = \int_0^\infty z f(z) dz \tag{2.3}$$

i to je nestohastična (neslučajna) veličina. Ona je jednaka apsorbovanoj dozi D kada je razmatrani region uniforman i kada je intenzitet zračenja u tom regionu uniforman. Ovde je značaj Monte Karlo simulacija u tome što određivanje $f(z)$ omogućuje formiranjem istorije (praćenjem kretanja) mnogo pojedinačnih čestica (elektroni u ovom slučaju) u razmatranoj zapremini i računanjem energije deponovane u toj oblasti. Ovde su, mikrodozimetrijske veličine određene za beta emitujuće radionuklide sa ciljem dobijanja informacija koje mogu biti korisne u izboru radionuklida za terapijske svrhe.
Ovaj problem predstavlja jedan segment doprinosa ove doktorske disertacije, i sadržan je u radu "Specific energy distribution within cytoplasm and nucleoplasm of typical mammalian cell due to various beta radionuclides" autora V.M. Markovića, N. Stefanovića, D. Nikezića, Dž.F. Pučića i V. Uroševića [41], što predstavlja značajan doprinos razvoju naučne misli u ovoj oblasti.

Glava 3

MEŠOVITE RASPODELE

3.1 Mešovite raspodele aditivnog tipa

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive koje imaju funkcije raspodele $F_1, \ldots, F_n$. Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ realni brojevi takvi da je $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ onda se za slučajnu promenljivu X kojoj odgovara funkcija raspodele

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x),$$

kaže da ima mešovitu raspodelu aditivnog tipa. Brojevi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se nazivaju koeficijenti koncentracije, a slučajne promenljive $\alpha_1, \ldots, \alpha_n X_1, \ldots, X_n$ komponente te raspodele.

Primer 3.1.0.1. *Smeša koja se sastoji od n - radioaktivnih izotopa. Pretpostavimo da je slučajna promenljiva X_k definisana kao broj raspada atoma $k-$ tog izotopa u jedinici vremena, i da je α_k koncetracija $k-$ tog izotopa u smeši, tj. da smeša sadrži α_k 100% $k-$ tog izotopa. Jasno je da Gajger-Milerov brojač može detektovati samo ukupan broj radioaktivnih raspada u jedinici vremena. Ako sa X definišemo broj raspada izmeren na Gajger - Milerovom brojaču, onda X ima mešovitu raspodelu aditivnog tipa.*

Primer 3.1.0.2. *Posmatrajmo obeležije X na uzorku obima n nastao kao unija m - različitih uzoraka, pri čemu je k -ti uzorak zastupljen sa n_k elemenata. Pri tome je naravno $n_1 + \cdots + n_m = n$. Neka je X_k restrikcija obeležja X na k -tom uzorku a $F_{n_k k}$ njegova empirijska funkcija raspodele. Ako je F_n empirijska funkcija raspodele obeležja X a $\dfrac{n_k}{n} = \alpha_k$ njegova frekvencija, onda X ima mešovitu raspodelu aditivnog tipa, pri čemu je*

$$F(x) = \alpha_1 F_{n_1 1}(x) + \cdots + \alpha_m F_{n_m n}(x),$$

empirijska funkcija raspodele za X.

3.1.1 Momenti mešovite raspodele sa apsolutno neprekidnim komponentama

Jasno je da će u slučaju kada su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ apsolutno neprekidnog tipa i kada su njihove funkcije gustina $f_1, \ldots, f_n$ onda mešovitoj slučajnoj promenljivoj X odgovara funkcija gustine raspodele

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x).$$

U tom slučaju možemo odrediti i momente mešovite slučajne promenljive ako su nam poznati momenti komponenti i njihovi koeficijenti koncentracije.

Teorema 3.1.1.1. *Neka su nezavisne slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ apsolutno neprekidnog tipa i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ realni brojevi takvi da je $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Ako je l prirodan broj, f_k funkcija gustine raspodele slučajne promenljive X_k a α_k njena koncentracija onda je*

$$E(X^l) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(X_k^l),$$

gde X ima mešovitu raspodelu aditivnog tipa definisanu komponentama $X_1, \ldots, X_n$ i koeficijentima koncentracije $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Dokaz.

$$E(X^l) = \int_{-\infty}^{\infty} t^l \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} t^l f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(X_k^l).$$

□

Međutim već za disperziju mešovite raspodele se dobijaju prilično komplikovani analitički izrazi.

U tekstu koji sledi ispitaćemo najvažnije mešovite raspodele aditivnog tipa, sa apsolutno neprekidnim komponentama.

3.1.2 Normalno - normalna raspodela

Pretpostavimo da $X_1 - \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 - \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ i $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$. Slučajna promenljiva $Y = X_1 + X_2$ imaće normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\alpha_1 m_1 +$

$\alpha_2 m_2, \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2)$. Međutim određivanje parametara, mešovite raspodele koja se sastoji od dve normalno raspodeljene komponente je mnogo teži zadatak. Prvi koji je poušao da ga reši je jedan od najvećih statističara svih vremena, Karl Pirson [56]. On je u tu svrhu koristio metod momenata.

Problem koji je on proučavao je sledeći: Obeležije, proučavamo na osnovu dva uzorka koji su izdvojeni iz dve populacije. Pri tome nam nisu poznati obimi uzoraka ali znamo obim njihove unije. Takođe znamo da obelezije na oba uzorka ima normalnu raspodelu. Potrebno je proceniti parametre raspodele obeležija na oba uzorka ako imamo podatke o uniji uzoraka, pri čemu ne znamo ni za jedan element uzorka iz koje populacije potiče.

U opisanom problemu imamo 5 nepoznatih parametara $m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ i n_1, gde je sa n_1 označen obim prvog uzorka. Pirson je problem rešavao određivanjem prvih pet statističkih momenata unije uzoraka i njihovim izjednačavanjem sa odgovarajućim teorijskim momentima. Na taj način je dobijao sistem od pet nelinearnih jednačina, čijim je rešavanjem je dobijao procene nepoznatih parametara.

Iranski matematičar J. Behbudian [9] je problem ocene nepoznatih parametara rešavao metodom maksimalne verodostojnosti.

Mana oba postupka je što prvi daje komplikovan sistem nelinearnih jednačina koji se takođe mora rešavati numeričkim postupcima a drugi se svodi na odredjivanje maksimuma nelinearne funkcije koja zavisi od 5 nezavisnih promenljivih što nije ništa jednostavniji zadatak.

Problem koji je se rešava u ovoj disertaciji je drugačiji, i potiče iz tehničke prakse (određivanje merne nesigurnosti uređaja koji ima dve normalno raspodeljene ulazne velič ine). On matematički može formulisati ovako: odrediti funkciju rasopdele sluvajne promenljive X koja mešovitu raspodelu koja se sastoji od dve normalno raspodeljene komponente sa poznatim parametrima i poznatim faktorima koncentracije.

Naš problem se može teorijski rešiti, određivanjem teorijskih momenata slučajne promenljive promenljive koja ima mešovitu raspodelu, korišćenjem formula koje smo dokazali u prethodnm odeljku. Oni prema Karlemanovoj teoremi [48] jednoznačno određuju funkciju raspodele. Međutim to rešenje u praksi nije primenljivo zbog beskonačnosti niza teorijskih momenata.

Zato smo za rešavanje postavljenog problema koristili metodu Monte Karlo koja je na uzorku generisanom sa 5000 slučajnih brojeva dala traženu funkciju raspodele koja od eksperimentalno utvrđene funkcije raspodele odstupa za manje od 1%.

3.1.3 Normalno - uniformna raspodela

Problem određivanje merne nesigurnosti uređaja koji ima normalno raspodeljene ulazne veličine i uniformno raspodeljenu ulaznu veličinu, koje su nezavisne, sa poznatim parametrima i poznatim faktorima koncentracije, dovodi do istih teškoća kao i prethodni. Praktično treba odrediti raspodelu mešovite slučajne promenljive X čija funkcija raspodele F ispunljava uslov

$$F(x) = \alpha F_1(x) + (1 - \alpha)F_2(x),$$

gde je F_1 poznata funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom raspodelom, F_2 poznata funkcija raspodele slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom i α $(0 < \alpha < 1)$ poznat parametar. Primenom metode Monte Karlo koja je na uzorku generisanom sa 5000 slučajnih brojeva dala traženu funkciju raspodele koja od eksperimentalno utvrđene funkcije raspodele odstupa za manje od 1%.

3.1.4 Normalno - Simpsonove raspodela

Problem određivanje merne nesigurnosti uređaja koji ima normalno raspodeljene ulazne veliǐnu i truogaonu raspodeljenu ulaznu veličinu, koje su nezavisne, sa poznatim parametrima i poznatim faktorima koncentracije, dovodi do istih teškoća kao i prethodna dva. Praktično treba odrediti raspodelu mešovite slučajne promenljive X čija funkcija raspodele F ispunljava uslov

$$F(x) = \alpha F_1(x) + (1 - \alpha)F_2(x),$$

gde je F_1 poznata funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom raspodelom, F_2 poznata funkcija raspodele slučajne promenljive sa Simpsonovom raspodelom i α $(0 < \alpha < 1)$ poznat parametar. Primenom metode Monte Karlo koja je na uzorku generisanom sa 5000 slučajnih brojeva dala traženu funkciju raspo dele koja od eksperimentalno utvrđene funkcije raspodele odstupa za manje od 1%.

3.1.5 Momenti mešovite raspodele sa diskretnim komponentama

Jasno je da će u slučaju kada su slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$ diskretnog tipa i kada su njihove funkcije gustina $p_1, \dots, p_n$ onda mešovitoj slučajnoj promenljivoj X odgovara zakon raspodele

$$p(\{X = x\}) = \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x).$$

U tom slučaju možemo odrediti i momente mešovite slučajne promenljive ako su nam poznati momenti komponenti i njihovi koeficijenti koncentracije.

Teorema 3.1.5.1. *Neka su nezavisne slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$ diskretnog tipa i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ realni brojevi takvi da je $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Ako je l prirodan broj, p_k funkcija gustine raspodele slučajne promenljive X_k a α_k njena koncentracija onda je*

$$E(X^l) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(X_k^l),$$

gde X ima mešovitu raspodelu aditivnog tipa definisanu komponentama $X_1, \dots, X_n$ i koeficijentima koncentracije $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Dokaz. Neka je $p_X(x) = p(\{X = x\}) = \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x)$ i $\chi = \{x : p_X(x) \neq 0\}$. Sada je:

$$E(X^l) = \sum_{x \in \chi} x^l \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{x \in \chi} x^l f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(X_k^l).$$

□

Međutim već za disperziju mešovite raspodele se dobijaju prilično komplikovani analitički izrazi.

3.2 Pouzdanost tehničkih sistema

Posmatraćemo tokom vremena rad nekog objekta koji ćemo zvati element. U toku svog rada element je izložen uticajima koji mogu da dovedu do prestanka njegovog funkcionisanja. U tom slučaju kažemo da je element otkazao ili da je nastupio otkaz. Ovde ćemo, jednostavnosti radi, pretpostaviti da otkaz nastupa trenutno i da je potpun (to jest element posle otkaza ne može da funkcioniše u manjem stepenu itd.). Element ispravno radi u vremenskom intervalu $[0, T]$, gde je T trenutak otkaza.

Trenutak otkaza T je, uopšte uzev, nepredvidiv i mi ćemo ovde pretpostavljati da je T slučajna promenljiva neprekidnog tipa sa gustinom raspodele

$$f(x) = \begin{cases} 0, & t \leq 0,; \\ \\ \varphi(t), & t > 0, \end{cases}$$

Pouzdanost $R(t)$ elementa u trenutku t definiše se kao $R(t) = p(T > t)$. $R(t)$ se zove još i funkcija pouzdanosti. Iz definicije sledi da je $R(t) = 1 - F(t)$, gde smo sa F označili funkciju raspodele vremena ispravnog rada.

Dakle, pouzdanost $R(t)$ je verovatnoća da će element još funkcionisati u trenutku t. Na primer, ako je za neki tip elektronskih cevi za $t = 500$ časova R(t)=0.90, to. znači da će približno 90% elektronskih cevi tog tipa koje se nalaze u istom režimu rada još funkcionisati posle 500 časova rada.

Funkcija rizika (ili funkcija opasnosti od otkaza) $z(t)$ slučajne promenljive T definiše se kao

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0,; \\ \\ \frac{\varphi(t)}{R(t)}, & t > 0, \end{cases}$$

Da bismo objasnili značenje funkcije rizika, posmatrajmo uslovnu vero vatnoću da element koji ispravno radi do trenutka t otkaže u vremenskom intervalu $[t, t + \Delta t]$:

$$\begin{aligned} p(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) &= \frac{p(\{t \leq T \leq t + \Delta t\} \cap \{T > t\})}{p(T > t)} \\ &= \frac{p(t \leq T \leq t + \Delta t)}{p(T > t)} \\ &= \frac{1}{R(t)} \int_t^{t+\Delta t} \varphi(x) dx \qquad (3.1) \\ &\approx \frac{1}{R(t)} \varphi(t) \Delta t = z(t) \Delta t, \end{aligned}$$

ako je Δt malo i $\varphi(t)$ neprekidna funkcija. Dakle, $z(t)\Delta t$ je onaj deo broja elemenata koji ispravno rade do trenutka t, a koji otkažu u malom vremenskom intervalu $[t, t+\Delta t]$. Na primer, kod elektronskih cevi za $t = 500$ časova, $z(t) = 0.001$ i $\Delta t = l$ čas, što znači da približno $100 z(t)\Delta t\% = 0.1\%$ cevi koje su funkcionisale posle 500 časova, otkazuju do 501-og časa rada.

Vidimo da gustina raspodele $\varphi(t)$ jednoznačno određuje funkciju rizika $z(t)$. Važi i obrnuto da je

$$\varphi(t) = z(t) e^{-\int_0^t z(x) dx}.$$

Zaista, kako je $R(t) = l - F(t)$, sledi da je $R'(t) = -F'(t) = -\varphi(t)$, odakle je

$$z(t) = \frac{\varphi(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)}.$$

Rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = -z(t)$$

sa početnim uslovom $R(0) = 1$ je

$$R(t) = e^{-\int_0^t z(t)dx}$$

odakle posle diferenciranja po t dobijamo željeni rezultat.

Matematičko očekivanje vremena ispravnog rada T označavaćemo sa T_0.

Može se pokazati da je

$$T_0 = \int_0^\infty R(t)dt.$$

iz

$$\int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty (\int_t^\infty \varphi(x)dx)dt.$$

Posle parcijalne integracije, ($u(t) = \int_t^\infty \varphi(x)dx$, $dv = dt$ odakle sledi $du = -\varphi(t)dt$ i $dv = dt$), dobijamo

$$\int_0^\infty R(t)dt = t\int_t^\infty \varphi(x)dx|_0^\infty + \int_0^\infty t\varphi(t)dt.$$

Ostaje još da pokažemo da $t\int_t^\infty \varphi(x)dx \to 0$ kada $t \to \infty$.

Iz

$$\begin{aligned} T_0 &= \int_0^\infty t\varphi(t)dt = \int_0^t x\varphi(x)dx + \int_t^\infty x\varphi(x)dx \geq \\ &\geq \int_0^t x\varphi(x)dx + t\int_t^\infty x\varphi(x)dx \end{aligned}$$

dobijamo

$$T_0 \geq T_0 + \lim_{t\to\infty} t\int_t^\infty x\varphi(x)dx.$$

Kako je $T_0 < \infty$, dobili smo da je $t\int_t^\infty \varphi(x)dx \to 0$ kada $t \to \infty$, čime je dokaz završen.

Sada ćemo razmotriti najčešće raspodele vremena ispravnog rada T.

Pre svega, imamo normalnu raspodelu za T $\mathcal{N}(T_0, \sigma^2)$ koja je, prema centralnoj graničnoj teoremi, dobar model za slučaj kada otkaz nastupa zbog "starenja" elementa (na primer, promene fizičkohemijskih svojstava elementa od kojih zavisi njegovo funkcionisanje). Primetimo da ako T ima normalnu raspodelu onda je $P(T<0)$ pozitivan broj, što ne odgovara definiciji pouzdanosti. Međutim, normalna raspodela ovde važi približno i $p(T<0)$ je u konkretnim primenama tako mala da se može zanemariti.

Pretpostavimo da je funkcija rizika za T konstanta, $z(t)=\lambda$, $t,\lambda>0$. Odavde odmah sledi da je odgovarajuća gustina za T:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \lambda e^{-\lambda t}, & x\geq 0, \end{cases}$$

odakle sledi da T ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu.

Neka je $\Delta t>0$ i ne obavezno malo. Odredimo verovatnoću da element otkaže u vremenskom intervalu $[t,t+\Delta t]$, ako pretpostavimo da je u trenutku t ispravno radio:

$$\begin{aligned} p(t\leq T\leq t+\Delta t|T>t) &= \frac{p(\{t\leq T\leq t+\Delta t\}\cap\{T>t\})}{p(T>t)} \\ &= \frac{p(t\leq T\leq t+\Delta t)}{p(T>t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = 1-e^{-\lambda\Delta t}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vidimo da verovatnoća koja je u pitanju ne zavisi od trenutka t već samo od duzine intervala Δt. Dakle, prošlost elementa ne utice na verovatnoću njegovog otkaza, ili, do otkaza element funkcioniše "kao nov". Primer takvog elementa je električni osigurač. U ovakvim slučajevima nema, dakle, "starenja" elementa i obično otkaz nastupa pod dejstvom spoljašnjih faktora.

Postoji važna i interesantna veza između eksponencijalne raspodele vremena ispravnog rada T i Puasonove raspodele. Pretpostavimo da element otkazuje pod dejstvom slučajnih "udara" (na primer, osigurač pregoreva pod udarom jačine struje). Ako broj udara X u vremenskom intervalu $[0,t]$ ima Puasonovu $\mathcal{P}(\lambda t)$ raspodelu, onda je

$$R(t)=P(X=0)=e^{-\lambda t},$$

odakle sledi da T ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu.

U slučajevima kada funkcija rizika nije konstanta, T se često može modelirati Vejbulovom raspodelom, pravilnim izborom parametara α i β. Za $\beta=1$ Vejbulova raspodela se svodi na eksponencijalnu.

Primetimo još da se u primenama često sreću slučajevi da otkaz elementa nastupa i zbog "starenja" i zbog slučajnih "udara". U takvim situacijama kombinacija normalne i eksponencijalne raspodele može da bude dobar model za pouzdanost elementa. Zamislimo, dakle, da funkcionisanje elementa zavisi od dve komponente, od kojih prva otkazuje zbog starenja, a druga u slučajnim trenucima nezavisnim od dužine vremena prethodnog funkcionisanja. Obe komponente funkcionišu nezavisno jedna od druge i otkaz elemnta nastupa kada otkaže bar jedna komponenta. Ako sa $R_1(t)$ i T_1 obeležimo pouzdanost i vreme ispravnog rada prve, a sa $R_2(t)$ i T_2 pouzdanost i vreme ispravnog rada druge komponente, tada je pouzdanost takvog elementa

$$R(t) = p(\{T_1 > t\}\{T_2 > t\}) = p(\{T_1 > t\})p(\{T_2 > t\}) = R_1(t)R_2(t).$$

Tehnički sistem je skup elemenata poveznih u jednu celinu. Ovde ćemo pretpostaviti da su vremena ispravnog rada pojedinih elemenata međusobno nezavisne slučajne promenljive i da su poznate njihove raspodele (koje najčešće zadajemo preko funkcije pouzdanosti). Zadatak koji sebi postavljamo je da se na osnovu poznatih veza između elemenata i njihovih funkcija pouzdanosti utvrdi funkcija pouzdanosti i očekivano vreme ispravnog rada celog sistema u toku posmatranog perioda. Sistem se zadaje šemom na kojoj je predstavljen raspored njegovih elemenata i njihove međusobne veze. Smatramo da je sistem ispravno radio u posmatranom periodu ako su početak i kraj sistema sve vreme bili neprekidno povezani.

Pretpostavimo da se sistem sastoji od n elemenata. Funkciju pouzdanosti i tog elementa označićemo sa R_i. Događaj da je i ti element ispravno radio u vremenu t označićemo sa $A_i(t)$.

Za elemente $1, \ldots, k$ reći ćemo da su rednoj vezi ako kvar jednog od njih povlači prekid rada sistema. U tom slučaju verovatnoća ispravnog rada u vremenu t sistema koji se sastoji od njih je jednaka verovatnoći preseka događaja $A_i(t)$, jer će sistem koji se sastoji od njih ispravno raditi jedino ako se realizuju svi događaja $A_i(t)$. Iz nezavisnosti tih događaja sledi da je verovatnoća ispravnog rada u vremenu t sistema koji se sastoji od k redno povezanih elemenata, jednaka proizvodu verovatnoća ispravnog rada njegovih elemenata, to jest,

$$R(t) = P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i(t)) = \Pi_{i=1}^{n} p(A_i(t)).$$

Za elemente $1, \ldots, k$ reći ćemo da su u paralelnoj vezi ako sistem koji se sastoji od njih ispravno radi dok ispravno radi bar jedan od njih. U tom slučaju verovatnoća ispravnog rada sistema, koji se sastoji od njih u vremenu t je jednaka verovatnoći unije događaja $A_i(t)$, jer će sistem koji se sastoji od njih ispravno raditi ako se realizuje bar jedan od događaja $A_i(t)$. Iz nezavisnosti tih događaja sledi da je verovatnoća ispravnog rada sistema koji se sastoji od k paralelno povezanih elemenata u vremenu t, jednaka:

$$R(t) = P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i(t)) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}(1 - p(A_i(t))).$$

Sadržaj ovog poglavlja je detaljnije odrađen u knjizi [2].

3.3 Mešovite raspodele multiplikativnog tipa

Mešovite raspodele multiplikativnog tipa prirodno nastaju kod problema određivanja raspodele maksimuma ili minimuma konačnog skupa nezavisnih slučajnih promenljivih. Kao što ćemo videti prirodno su vezane za probleme iz teorije pouzdanosti opisane u predhodnoj glavi.

3.3.1 Mešovite raspodele maksimalo - multiplikativnog tipa

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive koje imaju funkcije raspodele $F_1, \ldots, F_n$. Pretpostavimo da X_k uzima vrednosti u intervalu $[0, +\infty)$ odnosno da je $F_k(0) = 0$. Neka je

$$X = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Onda za slučajnu promenljivu X kažemo da ima mešovitu raspodelu maksimalo - multiplikativnog tipa, koja se sastoji od komponenti $X_1, \ldots, X_n$.

X se može inpretirati kao vreme ispravnog rada uređaja koji se sastoji od n uređaja koji su povezani paralelnom vezom pri čemu vreme ispravnog rada $k-$ tog uređaja ima funkciju raspodele F_k. Označimo sa F funkciju raspodele slučajne promenljive X. Događaj da je i-ti element otkazao pre isteka vremena t označićemo sa $B_i(t)$. U tom slučaju verovatnoća otkaza sistema, koji se sastoji od njih u vremenu t je jednaka verovatnoći preseka događaja $B_i(t)$, jer će sistem koji se sastoji od njih kvari, pre isteka vremena t, ako se realizuju svi događaji $B_i(t)$.

Sada je:

$$F(t) = P(\bigcap_{i=1}^{k} B_i(t)) = \Pi_{i=1}^{n} p(B_i(t)) = \Pi_{i=1}^{n} F_i(t),$$

za svako $t > 0$. Formulisaćemo naš zaključak u obliku sledeće teoreme:

Teorema 3.3.1.1. *Ako slučajna promenljiva X ima mešovitu raspodelu maksimalo - multiplikativnog tipa, koja se sastoji od komponenti $X_1, \ldots, X_n$ onda je:*

$$F(t) = \Pi_{i=1}^{n} F_i(t),$$

za svako $t > 0$.

3.3.2 Mešovite raspodele minimalno - multiplikativnog tipa

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive koje imaju funkcije raspodele $F_1, \ldots, F_n$. Pretpostavimo da X_k uzima vrednosti u intervalu $[0, +\infty)$ odnosno da je $F_k(0) = 0$. Neka je

$$X = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Onda za slučajnu promenljivu X kažemo da ima mešovitu raspodelu minimalo - multiplikativnog tipa, koja se sastoji od komponenti $X_1, \ldots, X_n$.

X se može inpretirati kao vreme ispravnog rada uređaja koji se sastoji od n uređaja koji su povezani rednom vezom, pri čemu vreme ispravnog rada $k-$ tog uređaja ima funkciju raspodele F_k. Označimo sa F funkciju raspodele slučajne promenljive X. Događaj da je i-ti element otkazao pre isteka vremena t označićemo sa $C_i(t)$. U tom slučaju verovatnoća otkaza sistema, koji se sastoji od njih u vremenu t je jednaka verovatnoći unije događaja $C_i(t)$, jer će sistem koji se sastoji od njih kvari, pre isteka vremena t, ako se realizuje bar jedan od događaja $C_i(t)$.

Sada je:

$$F(t) = P(\bigcup_{i=1}^{k} C_i(t)) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}(1 - p(C_i(t))) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}(1 - F_i(t))$$

za svako $t > 0$. Formulisaćemo naš zaključak u obliku sledeće teoreme:

Teorema 3.3.2.1. *Ako slučajna promenljiva X ima mešovitu raspodelu maksimalo - multiplikativnog tipa, koja se sastoji od komponenti $X_1, \ldots, X_n$ onda je:*

$$F(t) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}(1 - F_i(t)),$$

za svako $t > 0$.

Iz predhodne teoreme sledi da slučajna promenljiva X koja ima mešovitu raspodelu minimalo - multiplikativnog tipa, koja se sastoji od komponenti $X_1, \ldots, X_n$, pri čemu X_k ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ_k, ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Glava 4

Primena mešovitih raspodela u tehnici

4.1 Primena mešovitih raspodela u elektrotehnici

Opisaćemo jedan prirodan način nastanka slučajnih promenljivih sa mešovitom raspodelom minimalno - multiplikativnog tipa.

Izolacioni sistemi se, bez većih teškoća, dimenzionišu da nesmetano funkcionišu pri nominalnim vrednostima napona. Naime, malo predimenzionisana izolacija obezbeđuje stabilnost funkcionisanja sistema pod nominalnim uslovima. Međutim problem može da nastane pojavom prenapona u mreži, pošto ne postoji pouzdan sistem za predviđanje ponašanja izolacija pod dejstvom impulsnog napona. Ovaj problem se javlja na svim naponskim nivoima, a u poslednje vreme je posebno aktuelan na visokonaponskom nivou, što je uzrokovano sve većom elektromagnetnom kontaminacijom urbanih sredina i krajnjom minijaturizacijom elektronskih komponenata. Predviđanje ponašanja izolacionog sistema, tj. njegovog proboja, pod dejstvom impulsnih napona posebno je interesantno u slučaju gasne izolacije, između ostalog i zbog toga što je najčešće korišćen tip izolacije.

Pretpostavimo da se izolatorski sistem sastoji od n kompnenti. Sa X_k označimo vreme do proboja $k-$te komponente. Prema tome X_k je slučajna promenljiva. Njenu Funkciju raspodele označimo sa F_k. Prema Teoremi 3.3.2.1 važiće

$$F(t) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}(1 - F_i(t)),$$

za svako $t > 0$.

U cilju provere podobnosti opisanog modela za određivanje impulsno podnošljivog napona dvoelektrodnih sistema i njihovog poređenja sa odgovarajućim rezultatima dobijenim primenom klasičnog modela izvršena su merenja pod dobro kontrolisanim laboratorijskim uslovima i razvijen je originalni softver za statističku analizu rezultata merenja i primenu istih za određivanje impulsno podnošljivog napona.

Merni sistem je bio u potpunosti automatizovan i na odgovarajući način zaštićen od elektromagnetnih smetnji. Sva merna oprema, sa nezavisnim napajanjem, nalazila se u kabini zaštićnoj do nivoa od 100 dB. Gde god je to bilo moguće, korišćene su optičke veze između kabine i mernog kruga. Dvostruko obloženi kablovi položeni u uzemljene kanale korišćeni su za galvanske veze.

U eksperimentu su korišćene tri gasne komore. Komora A je korišćena u opsegu malih vrednosti pd proizvoda (pritisak $\times$ međuelektrodno rastojanje), tj. za pritiske u opsegu od 1 mbar do 1 bar, i međuelektrodna rastojanja od 0,1 mm do 1 mm. Komora B je korišćena za srednje vrednosti pd proizvoda, sa pritiskom u opsegu od 1 bar do 4 bar, i međuelektrodnim rastojanjem od 0,1 mm do 10 mm. Komora C je korišćena u opsegu velikih vrednosti pd proizvoda, za pritiske od 1 bar do 6 bar, i međuelektrodna rastojanja od 1 mm do 50 mm. Eksperimenti su izvedeni sa Ar (plemeniti gas), N2 (elektropozitivan gas) i SF6 (elektronegativan gas). Komore su konstruisane tako da omoguće formiranje dvoelektrodnih konfiguracija koje proizvode homogeno električno polje (simetrične Rogovski elektrode) ili nehomogeno polje (konfiguracija šiljak-ploča). Elektrode su bile pre ugradnje u komoru ili polirane do visokog sjaja ili peskirane. Međuelektrodna rastojanja su određena sa 1% nesigurnosti tipa B. Nulto rastojanje između elektroda je određivano merenjem električne otpornosti. Elektrode u komorama A, B i C su konstruisane tako da obezbede iste oblike električnog polja u obe komore, prema teoriji sličnosti za električno pražnjenje gasa. U slučaju malih vrednosti pd proizvoda, impulsi primenjenog napona su imali sledeće nagibe prednje ivice: 1 kV/μs, 2 kV/μs, 3 kV/μs, 5 kV/μs, 10 kV/μs, 20 kV/μs, 30 kV/μs, 50 kV/μs, 100 kV/μs, i 200 kV/μs. U slučaju srednjih vrednosti pd proizvoda, nagibi su bili: 1 kV/μs, 2 kV/μs, 5 kV/μs, i 10 kV/μs. Za velike vrednosti pd proizvoda, nagibi su bili: 100 kV/μs, 200 kV/μs, 435 kV/μs, 640 kV/μs, i 800 kV/μs.

Eksperimentalni postupak se sastojao u sledećem:

1) postavljanje ispitnog dvoelektrodnog sistema unutar gasne komore,

2) višestepeno vakumiranje komore i uvođenje radnog gasa (tj. ispiranje komore da bi se uklonio preostali vazduh),

3) podešavanje željenog pritiska radnog gasa u komori (podešenoj na temperaturu od 0^oC),

4) kondicioniranje elektrodnog sistema sa 100 uzastopnih impulsnih proboja,

5) merenje 20 uzastopnih dc probojnih napona, sa pauzom od 30 s između

svaka dva uzastopna proboja,

6) merenje 1000 uzastopnih vrednosti impulsnog probojnog napona i odgovarajućih probojnih vremena (tj., vremenskih intervala između momenta u kome se impulsni napon izjednačava sa *dc* probojnim naponom i momenta samog proboja), pomoću impulsnih napona sa jednim od navedenih nagiba prednje ivice i sa amplitudom koja je obezbeđivala da se proboj uvek dešava na prednjoj ivici impulsa (ponovo je postojala pauza od 30μs između svaka dva uzastopna proboja).

Rezultati merenja su obrađeni softverskim paketom za statistički proračun, koji se sastojao iz sledećih modula:

1) formiranje statističkog uzorka uz primenu Šoveneovog kriterijuma za odbacivanje lažnih rezultata merenja,

2) određivanje momenata uzorka,

3) izračunavanje varijacionih koeficijenata uzorka (uzoračkih varijansi),

4) ocena parametara normalne, dvo- i tro-parametarske Vejbulove i duplo-eksponencijalne raspodele, primenom metode momenata i metode maksimalne verodostojnosti sa indirektnom procenom funkcije verodostojnosti.

Primenom Vremenskog zakona uvećanja, karakteristika impulsnog podnosivog napona izračunavana je sledećom polu-empirijskom metodom u tri koraka:

1) Na osnovu 1000 pari vrednosti slučajne promenljive probojno vreme, dobijenih eksperimentalno za osnovni sistem (n = 1), određena je statistička raspodela ove promenljive primenom χ^2 testa i testa Kolmogorova.

2) Probojna vremena uvećanog sistema, tix (i = 2,3,4...), koja odgovaraju vrednostima usvojenim za x-ti kvantil (graničnu verovatnoću proboja), izračunate su na osnovu ustanovljene statističke raspodele slučajne promenljive probojno vreme i srednje vrednosti probojnog vremena osnovnog sistema.

3) Vrednosti probojnog napona Uix izračunate su pomoću analitičkog izraza za oblik impulsnog napona i prethodno izračunatih vremena proboja u vremenski uvećanim sistemima. Skup tačaka (Uix, tix) predstavljao bi x-tu karakteristiku impulsnog podnosivog napona. Dobijene tačke fitovane su simpleks metodom.

4.2 Primena mešovite-aditivne raspodele na analizu zračenja smeše radioaktivnih izotopa

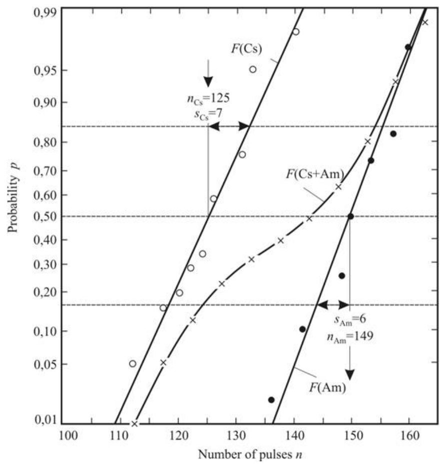
Ovde ćemo razmotriti mogućnost razdvajanja efekata zračenja iz dva ili više radioaktivnih izotopa primenom metoda statističke matematike. Postupak se svodi na primenu mešovito-aditivne raspodele. Ovde će matematički postupak biti primenjen na primeru analize složenog zračenja iz dva radioaktivna izvora.

Poznato je da vreme raspada individualnog jezgra nepravilno fluktuira od jednog jezgra do drugog, tako da, na nivou današnjeg razvoja nauke, nije moguće predvideti kada će se neko konkretno jezgro raspasti i za koje vreme. Smatra se da je raspad pojedinačnog jezgra potpuno proizvoljan, da nije određeno vreme kada će do njega doći i da ga je nemoguće povezati sa bilo čim u obliku neke zakonomernosti [66, 60]. Iz toga razloga, u slučaju smeše radioaktivnih izotopa, empirijski dobijene funkcije raspodele slučajne promenljive broj raspada (odnosno broj impulsa u detektoru) predstavlja mešavinu dve ili više teoretskih funkcija raspodele. Mešavine raspodela rezultiraju mešovitim raspodelama, pri čemu se multiplikativne raspodele, po pravilu, svode na zakone porasta verovatnoće [67, 68, 55]. Da bi se takav stohastički proces statistički formulisao on mora da bude fenomenološki "poznat". Stoga polazne tačke moraju da budu eksperimenti čiji rezultati (broj impulsa u detektoru) variraju u okviru određenih slučajnih opsega. Uzorci varijacija rezultata dobijenih eksperimentalno su svojstveni procesu raspada radioaktivnih izotopa, i mogu da nastanu od graničnih uslova, i kao što se mogu naći i u slučajnim greškama merenja. Ova poslednja kategorija potrebno je da bude svedena na minimum i što je tačnije moguće određena, pošto se ne može obuhvatiti algoritmom koji će ovde biti predložen. Što je i cilj ovog paragrafa [12, 37].

Sa aspekta eksperimenta, a u cilju dobijanja empirijske raspodele slučajne promenljive, broj impulsa u detektoru za smešu izotopa korišćena su dva radioaktivna jezgra, $Cs - 137$ i $Am - 241$ i GM brojač. Izvori su bili postavljeni tako u odnosu na brojačku cev da je izvor Am davao približno za jednu trećinu veći broj impulsa od izvora Cs. GM brojač je bio sa antikoincidentnom zaštitom i bio je smešten u zaštitnu kabinu (za zaštitu od elektromagnetnog zračenja) zaštite veće od 100dB. Merenja su vršena na pet minuta i to: samo sa izvorom Cs; samo sa izvorom Am i zajedno sa oba izvora. Prilikom ovih merenja geometrija sistema, izvor i detektor bili su nepromenljivi. Fon je meren i vršena je korekcija na fon, i pokazalo da je fon mali ili nula.

Kombinovana merna nesigurnost mernog postupka je manja od 3% [69].

Na osnovu rezultata zaključiili smo da stohastička veličina broja impulsa u detektoru pripada normalnoj statističkoj raspodeli [12, 37]. Na slici 4.1 prikazane su empirijski dobijene funkcije raspodele za izvor Cs, $F\,(\mathrm{C}s)$, za izvor Am, $F\,(\mathrm{A}m)$ i za superpoziciju izvora Cs i Am, $F\,(\mathrm{C}s + Am)$. Za ovu poslednju raspodelu se može, na osnovu fizičkih uzoraka posmatrane pojave, tvrditi da pripada složenoj (mešovitoj) raspodeli aditivnog tipa.



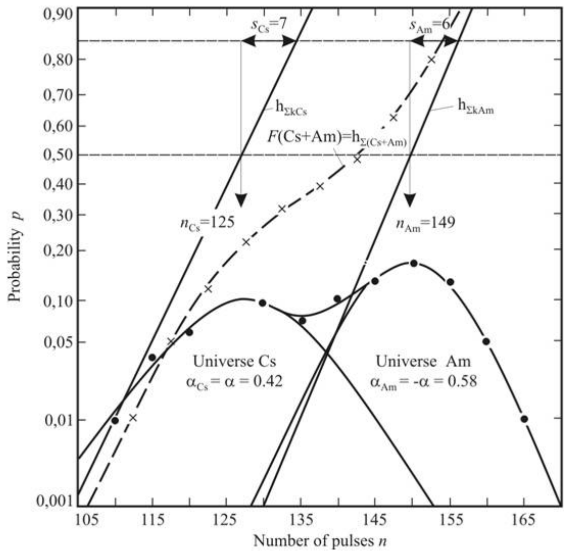
Slika 4.1: Mešovita raspodela slučajne veličine broj impulsa

$F\,(\mathrm{C}s)$ - funkcija raspodele za broj impulsa izvora Cs
$F\,(\mathrm{A}m)$ - funkcija raspodele za broj impulsa izvora Am
$F\,(\mathrm{C}s + Am)$ - funkcija raspodele za broj impulsa izvora Cs i Am

Fizički uzorci složene raspodele aditivnog tipa su različiti mehanizmi (opisani funkcijama raspodele $F_i\,(x)$ u skladu sa kojima može da se odigra celokupni proces opisan funkcijom raspodele $F(x)$ date izrazom:

$$F\,(x) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i F_i\,(x) \quad , \quad \sum_{i=1}^{j} \alpha_i = 1(+) \tag{4.1}$$

Složena raspodela aditivnog tipa koja je, u konkretnom slučaju razmatrana, veoma se teško matematički obrađuje zbog obuhvaćenih šest parametara (μ_{cs},σ_{cs}, α_{cs}, μ_{Am}, σ_{Am} i α_{Am}) koji se na osnovu izraza (4.1) mogu svesti na pet parametara (μ_{cs},σ_{cs}, α_{cs}, μ_{Am}, σ_{Am}) pošto je $\alpha_{cs} + \alpha_{Am} = 1$. Samim tim je matematička analiza mešavite raspodele koja se sastoji od dve normalne raspodele veoma komplikovana i nepouzdana. Iz tog razloga su potrebne empirijske metode koje se mogu primeniti ili uz pomoć analognih računara ili jednostavno grafički upotrebom papira verovatnoće. Ove grafičke metode su zasnovane na empirijskoj funkciji gustine $f^*(x)$, koja se, od oka, deli na funkcije gustine $f_i^*(x)$ posebnog tipa raspodele, na takav način da se početna gustina $f^*(x)$ dobija superpozicijom $f_i^*(x)$. Olakšavajuća okolnost je, na primer, činjenica da kada koristimo papir verovatnoće normalne raspodele grafici empirijske funkcije gustine $f^*(x)$ su skoro normalno raspodeljene ukoliko su sastavne gustine $f_i^*(x)$ takođe normalno raspodeljene. Ovi pravi grafici treba da budu polazna tačka u grafičkoj aproksimaciji. Na slici 4.2 prikazana je mešovita raspodela sa Slike 4.1 izdeljena na njene sastavne delove.



Slika 4.2: Analiza mešovite raspodele $F(\mathrm{C}s + Am)$ sa Slike 4.1

Karakteristika mešovite raspodele $F(\mathrm{C}s + Am)$ i opisani model ukazuje da se $F(\mathrm{C}s + Am)$ sastoji od dve normalne raspodele. Pošto empirijska funkcija gustine mora da bude polazna tačka, merene vrednosti su beležene takozvanom tabelom učestanosti (*). Empirijska funkcija gustine je grafički predstavljena, Slika (4.2) i otprilike, podeljena na dva "univerzuma", (populacije). Relativna učestanost svakog od univerzuma je uneta u tabelu (*). Sume učestanosti daju parametre komponenti $\alpha_{cs} = 0.42$ i $\alpha_{Am} = 0.58$. Na osnovu tih rezultata se za svaki univerzum formuliše kumulativna učestanost, prema:

$$h_{\Sigma k} = \frac{1}{\alpha_{cs,Am}} \sum_{i=1}^{k} h_i \tag{4.2}$$

(na osnovu tabele (*) i grafičkog određivanja parametara raspodela kao kvantila n_{50cs},σ_{50cs} i n_{50Am}, σ_{50Am}. Tako dobijeni rezultati ukazuju i da se mešovita raspodela sastoji od dve normalne raspodele:

$$F\left(\mathrm{Cs}+Am\right)=0.42\Phi\left(n_{Cs};125;7^2\right)+0.58\Phi\left(n_{Am};149;6^2\right) \tag{4.3}$$

Parametri sastavnih raspodela se dobro slažu sa funkcijama raspodele dobijenim za pojedinačne izvore, Slika 4.2 .

Tabela (*). Ocena mešovite raspodele (Slika 4.2) sa uzorkom veličine $n=199$

Broj klase	Granice klase		Apsolutna učestanost	Relativna kumulativna uěstanost	Relativna učestanost	Relativna učestanost Univerzum Cs	Relativna učestanost Univerzum Am	Relativna kumulativna učestanost Univerzum Cs	Relativna kumulativna učestanost Univerzum Am
	n_{Cs}	n_{Am}	h_{mk}	$h_{\Sigma k}$	h_k	h_{kCs}	h_{kAm}	$h_{\Sigma kCs}$	$h_{\Sigma Am}$
1	>107	112	2	0,010	0,010	0,010	-	0,024	-
2	>112	117	4	0,050	0,040	0,040	-	0,119	-
3	>117	122	12	0,120	0,070	0,070	-	0,286	-
4	>122	127	20	0,220	0,100	0,100	-	0,525	-
5	>127	132	19	0,315	0,095	0,093	0,002	0,747	0,003
6	>132	137	15	0,390	0,075	0,062	0,013	0,895	0,026
7	>137	142	20	0,490	0,100	0,032	0,068	0,971	0,144
8	>142	147	28	0,630	0,140	0,010	0,130	0,995	0,370
9	>147	152	34	0,800	0,170	0,020	0,168	0,999	0,662
10	>152	157	26	0,930	0,130	-	0,130	-	0,888
11	>157	162	11	0,985	0,055	-	0,055	-	0,983
12	>162	167	2	0,995	0,010	-	0,010	-	0,999
					0,995	$\alpha_{Cs}=0,419$ $\alpha\approx 0,42$	$\alpha_{Am}=0,576$ $1-\alpha\approx 0,58$		

Na kraju ovog paragrafa istaknimo da ovde prikazana metoda omogućava razdvajanje pojedinačnih radioaktivnih izotopa iz mešavine i njihovu karakterizaciju. Ova metoda, takođe, omogućava određivanje mrtvog vremena brojača samo na osnovu jednog merenja. Međutim, treba napomenuti da zbog matematičkih problema koji ih prate, mešovite raspodele bi trebalo koristiti samo onda kada su fizički neophodne, tj. kada fizički model slučajne pojave koja se ispituje stvara mešovitu raspodelu. Bez ovakvog modela, empirijski ustanovljen izraz nikako ne bi trebalo da se od početka tumači kao mešovita raspodela. Bez sumnje, mnogi odnosi u nuklearnoj fizici suštinski prate mešovite raspodele, ali ipak u značajnijim područijima preovladavaju pojedinačni uticaji tako da se mešovite komponente mogu zanemariti.

4.3 Primena mešovitih statističkih raspodela multiplikativnog tipa na projektovanje vakuumskih izolacionih sistema

U ovom paragrafu biće prikazan algoritam podesan za prenošenje statističkog ponašanja rezultata dobijenih na modelima na konačni proizvod. Izrazi dobijeni statističkom analizom provereni su obradom odgovarajueg eksperimenta sprovedenog pod dobro kontrolisanim laboratorijskim uslovima. Rezultate koje ćemo ovde dobiti pokazuju da su izrazi izvedeni na osnovu primene mešovite raspodele multiplikativnog tipa zadovoljavajući. Ti izrazi se pokazuju posebno zadovoljavajući u slučaju da na površinama elektrodnog sistema preovladava jedan sistem slabih mesta. Zbog prirode mehanizma električnog proboja vakuuma ovi izrazi su veoma pogodni i praktični za primenu u slučaju porjektovanja vakuumske izolacije, ali se mogu primeniti i u slučaju drugih (naročito reverzibilnih) izolacionih medija.

Mnoge empirijski dobijene raspodele predstavljaju dve ili više teoretskih funkcija raspodele, tj. mešovite raspodele. U konstrukcionoj fazi izolacionih sistema mešovite raspodele multiplikativnog tipa omogućavaju primenu rezultata dobijenih na modelima za izradu konačnih proizvoda. Mešovite raspodele multiplikativnog tipa uključuju model koji je opisan statističkim raspodelama ekstremne vrednosti. Ovaj tip raspodela se bazira na izrazima množenja verovatnoa. Zbog toga se multiplikativne mešovite raspodele tretiraju kao osnova zakona uvećanja [55].

Ako su izolacione strukture velike i ako su naponski izvori dovoljne snage, pražnjenja koja možda mogu da proizvedu proboj mogu paralelno da se razvijaju kako u prostoru tako i u vremenu. Tačka pražnjenja u kojoj se pražnjenje najbrže razvija na slučajan način proizvešće proboj celokupne strukture. Zakon porasta omogućava da se na osnovu merenja na modelima predvidi ponašanje odgovarajuće slučajne promenjive finalne izolacione strukture [57, 43].

Zakon porasta predstavlja praktičnu primenu zakona množenja za nezavisne verovatnoće, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Naravno, pri tome se usvaja pretpostavka nezavisnosti procesa pražnjenja, koji se paralelno odvija u odnosu na prostor. Da bi se izveo izraz za zakon porasta polazi se od činjenice da je verovatnoća događaja probojni napon V_n sistema S_n veći od primenjenog napona V jednaka verovatnoći složenog događaja probojni napon $V_{n,i}$ za svaki od ovih paralelno povezanih podsistema $S_{n,i}$ (i=1,2,...,n) bude veći od V, tj:

$$P(V_n > V) = P(V_{n,1} > V) \wedge P(V_{n,2} > V) ... \wedge P(V_{n,n} > V)\,(+.) \qquad (4.4)$$

Prva pretpostavka je da su podsistemi Sn, međusobno statistički nezavisni, tj. da iniciranje proboja u podsistemu Sn, i zavise samo od stanja površine elektroda u tom podsistemu. Zbog mehanizma proboja vakuuma ova pretpostavka je potpuno ispunjena u slučaju vakuumske izolacije [58]. Na osnovu ove pretpostavke i zakona multiplikacije nezavisnih verovatnoća izraz (*.) prelazi u:

$$P(V_n > V) = P(V_{n,1} > V) \wedge P(V_{n,2} > V) ... P(V_{n,n} > V) \qquad (4.5)$$

Na osnovu zakona veze između verovatnoće i funkcije distribucije i zakona komplementarnosti "događaja proboj" i "neproboj izolacije", dobija se:

$$F(n, V) = 1 - [1 - F(x > x_1)]^n \qquad (4.6)$$

Za korišćenje izraza (4.4) trebalo bi imati jako mnogo eksperimentalnih podataka za sistem S_1, pošto F(n,V) za veliko n zavisi uglavnom od vrednosti F(1,V) sa malom verovatnoćom. Da bi se ova nepogodnost izbegla pogodno je pretpostaviti funkciju distribucije F(1,V). Pokazano je da je ta raspodela najverovatnije Vejbul-ova troparametarska raspodela (što implicira istu prirodu slabih mesta izolacije[27]). Pod tom pretpostavkom izraz (4.6) prelazi u:

$$F(1, V) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{V - V_0}{\eta_1}\right)^{\delta}\right] \qquad (4.7)$$

gde su V_0, η_1, δ parametri raspodele. Na osnovu izraza (4.7) se dobija da je varijansa odgovarajuće Vejbul-ove raspodele:

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{n^{1/\sigma}} \qquad (4.8)$$

a srednja vrednost:

$$\overline{V}_n = V_1 - L(\delta)\left[1 - \frac{1}{n^{-1/\sigma}}\right]\sigma_1 \tag{4.9}$$

gde je:

$$L(\delta) = \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\delta}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right]^{-1/2} \cdot \left(1+\frac{1}{\sigma}\right) \tag{4.10}$$

Pri tome je treći parametar raspodele (parametar skaliranja) moguće izračunati izrazom:

$$\eta_n = \frac{n_1}{n^{1/\delta}} \tag{4.11}$$

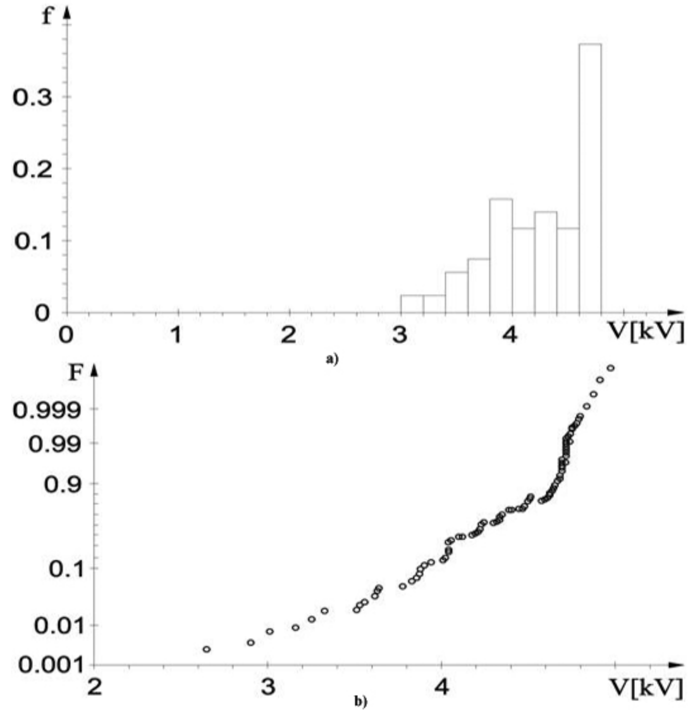
pri čemu se koeficijent varijacije (odnos empirijskog standardnog odstupanja i empirijske disperzije) menja kao:

$$\left(\frac{S}{\overline{X}}\right)_n = \left(\frac{S}{\overline{X}_1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{X_0}{\overline{X}}\left(\sqrt[\delta]{n} - 1\right)} \tag{4.12}$$

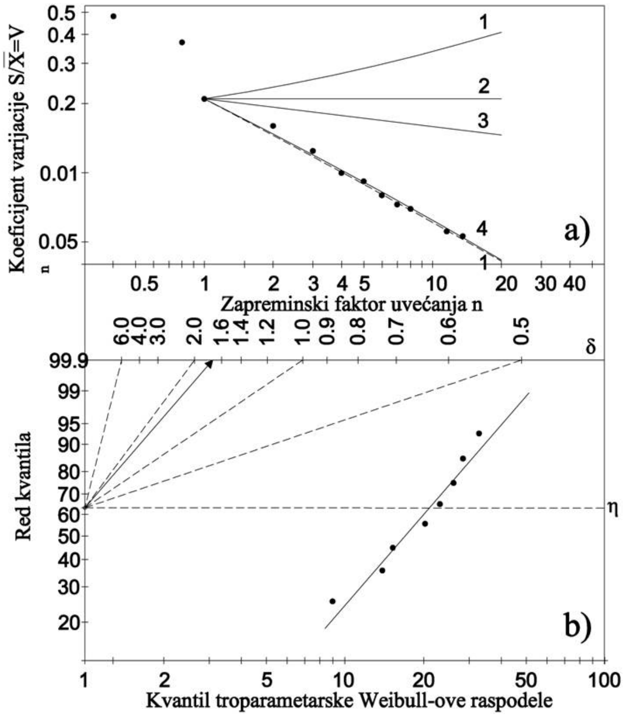
U cilju provere primenjivosti izraza zakona porasta na vakuumske izolacione sisteme izvršena su merenja probojnog napona sa više parova cilindričnih elektroda različitih aktivnih površina. Odnosi aktivnih površina elektroda su bili: 0.4 : 0.8 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 11 : 13. Elektrode su bile izrađene od mesinga i pre upotrebe polirane do visokog sjaja ili peskirane (obrađene mlazom peska). Pritisak u komori je bio 10^{-4} bar, 10^{-6} bar i 10^{-9} bar. Međuelektrodno rastojanja su bila 0.03 mm, 0.06 mm i 0.1 mm. Primenjivan je impulsni napon 1.2/50 μs negativnog polariteta sa amplitudom 50 kV. Za svaki par elektroda je pravljena serija od 300 merenja probojnog napona. Između dva uzastopna merenja pravljena je pauza 1 min. Pre svake serije merenja elektrode su kondicionirane sa po 50 proboja. Kombinovana merna nesigurnost merenja je procenjena na manje od 5% [12]. Dobijeni rezultati su statistički obrađeni uz odbacivanje sumnjivih rezultata primenom Chuvenneta kriterijuma [12].

Na Slici 4.3 su prikazani odgovarajući histogrami vrednosti probojnog napona kao i odgovarajuća kumulativna raspodela na Vejbul-ovom papiru verovatnoće pri vrednostima pritiska od 10^{-4} bar. Uočena odstupanja koja se javljaju pri pritisku 10^{-4} bar su posledica što se pri ovoj vrednosti pritiska javljaju dva mehanizma proboja vakuuma tj. lavinski vakuumski mehanizam i katodni vakuumski mehanizam proboja [70]. To uslovljava da je odgovarajuća statistička raspodela slučajne promenljive "probojni napon" mešovita raspodela aditivnog tipa, Slika 4.3. Međutim to ne smeta da i pri pritisku 10^{-4} bar zakon uvećanja daje zadovoljavajući rezultat, uz nešto manje slaganje nego u slučaju pritiska 10^{-6} bar i 10^{-9} bar. Na slikama 2, 3 i 4 prikazani su koeficijenti varijacija probojnog napona u funkciji faktora uvećanja površine elektroda zajedno sa odgovarajućim eksperimentalnim tačkama (pogledaj Sliku 4.4 kao i koeficijente varijacije za duplo-eksponencijalne, normalne, Vejbul-ove dvoparametarske i Vejbul-ove troparametarske raspodele dobijene odgovarajuim izrazima (analognim izrazu (4.12)[71] pri međuelektrodnim rastojanjima i pritiscima: a) d=0.1 mm, p=10^{-4} bar, b) d=0.1 mm i p=10^{-6} bar i c) d=0.1 mm i p=10^{-9} bar (peskarene elektrode). Eksperimentalno dobijene tačke prikazane na Slikama 4.4,4.5 i 4.6 fitovane su gradijentnom metodom (isprekidana linija) i dobijeno je dobro slaganje sa krivim određenim izrazom (4.12) (što uslovno važi pri pritisku od 10^{-14} bar). Naime odgovarajući parametri troparametarske Vejbul-ove raspodele dobijeni momentnom metodom, grafičkom metodom, Slika (4.4),(4.5) i (4.6) i fitovanjem razlikovali su se za manje od 5%. To posebno dolazi do izražaja pri grafičkom određivanju parametara skaliranja δ. Određena razlika koja se javlja pri pritisku 10^{-4} bar je već objašnjena kombinacijom mešovite raspodele aditivnog tipa i mešovite raspodele multiplikativnog tipa (što u stvari predstavlja zakon porasta verovatnoće proboja).

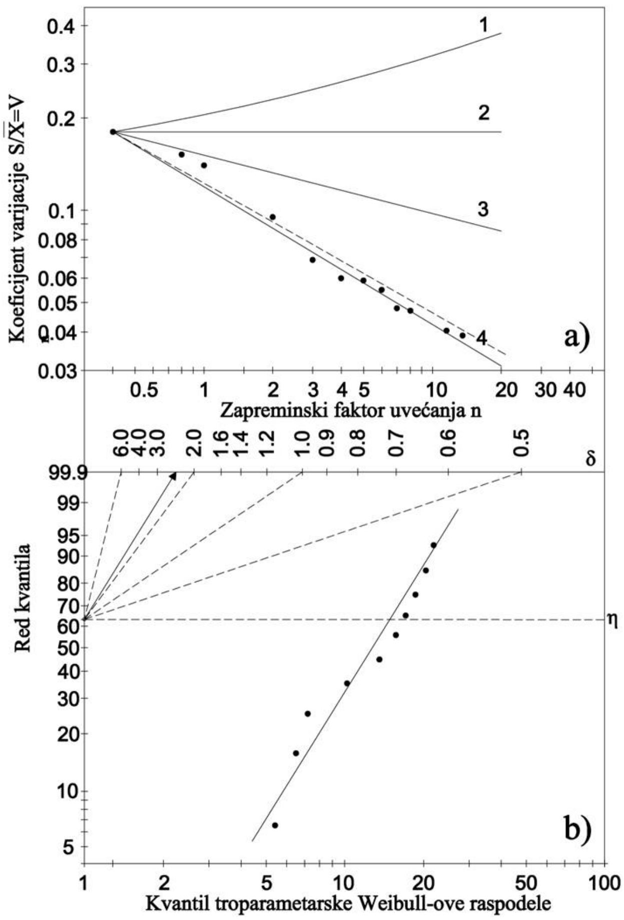
Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da se oni u svim slučajevima kvantitativno ponašaju prema izvedenom zakonu porasta. Kvantitativno su mnogo bolja slaganja između dobijenih i očekivanih rezultata (prema zakonu porasta) za peskirane elektrode i pritiske u vakuumu 10^{-6} bar i 10^{-9} bar. To je posledica činjenice da polazna predpostavka izvođenja zakona porasta više odgovara peskarenim elektrodama (isti tip slabih mesta, tj. mikrošiljaka izazvanih peskarenjem) i podataka da raspodela slučajne promenljive pri pritisku 10^{-4} bar nije čista Vejbul-ova raspodela već mešovita raspodela aditivnog tipa koja se sastoji od dve Vejbul-ove raspodele (za svaki mehanizam proboja po jedna) kombinovana sa mešovitom raspodelom multiplikativnog tipa. I pored ovih razlika se može zaključiti da izvedeni zakon porasta (izrazi (4.8), (4.9), (4.10) i (4.11)) daje zadovoljavajuće rezultate koji se bez ikakve dileme mogu koristiti u inženjerskoj praksi za predikciju ponašanja probojnog napona nekih vakuumskih izolacionih sistema na osnovu ispitivanja na odgovarajućim modelima.



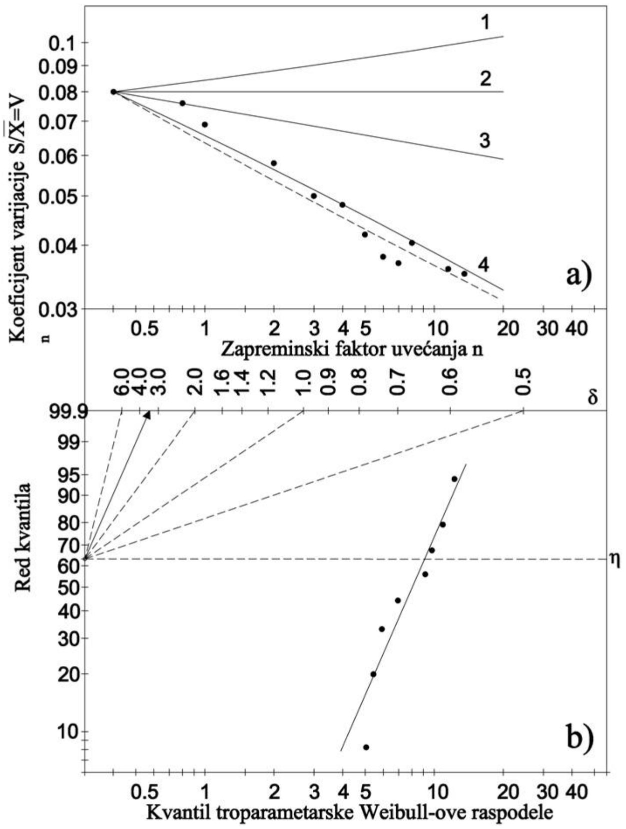
Slika 4.3: a) Histogram raspodele frekvencije probojnog napona za elektrode d=0.1 mm; b)odgovarajući podaci za probojni napon prikazani na Vejbul-ovom papiru verovatnoće, d=0.1 mm



Slika 4.4: Teoretske krive zavisnosti koeficijenta varijacije od zapreminskog faktora uvećanja sa odgovarajućim eksperimentalno dobijenim vrednostima koeficijenta varijacije slučajne promenljive broj impulsa (a) i grafička metoda ocene parametara troparametarske Vejbul-ove raspodele prikazana na Vejbulovom papiru verovatnoće (b). Međuelektrodno rastojanje d=0.1 mm, $p = 10^{-4}$ bar (1 - duplo-eksponencijalna raspodela, 2 - dvoparametarska Vejbul-ova raspodela, 3 - normalna raspodela, 4 - troparametarska Vejbul-ova raspodela, -eksperimentalne tačke fitovane gradijentnom metodom).



Slika 4.5: Teoretske krive zavisnosti koeficijenta varijacije od zapreminskog faktora uvećanja sa odgovarajućim eksperimentalno dobijenim vrednostima koeficijenta varijacije slučajne promenljive broj impulsa (a) i grafička metoda ocene parametara troparametarske Vejbul-ove raspodele prikazana na Vejbulovom papiru verovatnoće (b). Međuelektrodno rastojanje d=0.1 mm, $p = 10^{-6}$ bar (1 - duplo-eksponencijalna raspodela, 2 - dvoparametarska Vejbul-ova raspodela, 3 - normalna raspodela, 4 - troparametarska Vejbul-ova raspodela, -eksperimentalne tačke fitovane gradijentnom metodom).



Slika 4.6: Teoretske krive zavisnosti koeficijenta varijacije od zapreminskog faktora uvećanja sa odgovarajućim eksperimentalno dobijenim vrednostima koeficijenta varijacije slučajne promenljive broj impulsa (a) i grafička metoda ocene parametara troparametarske Vejbul-ove raspodele prikazana na Vejbulovom papiru verovatnoće (b). Međuelektrodno rastojanje d=0.1 mm, $p = 10^{-9}$ bar (1 - duplo-eksponencijalna raspodela, 2 - dvoparametarska Vejbul-ova raspodela, 3 - normalna raspodela, 4 - troparametarska Vejbul-ova raspodela, -eksperimentalne tačke fitovane gradijentnom metodom).

ZAKLJUČAK

Doktorska disertacija "Numeričke metode statističke obrade stohastičkih pojava u tehnici" je posvećena istraživanjima teorije verovatnoće i statistike, teorije stohastičkih procesa kao i statističkih mešovitih raspodela aditivnog i multiplikativnog tipa. U disertaciji je korišćen jedinstveni pristup teoriji mešovitih raspodela koji je primenjen za rešavanje realnih problema koji se javljaju u tehnici.

Prvo poglavlje je uvodnog karaktera i uglavnom je napisano na osnovu relevantne literarature. Pored toga u njemu je data i originalna sistematizacija rezultata koji se odnose na diferencijalne jednačine stohastičke stabilnosti.

U drugom poglavlju su izložene odabrane numeričke metode, od kojih je motoda Monte Karlo posebno obrađena. Data je nova primena ove metode u analizi radioaktivnog zračenja koja se može koristiti u medicini.

Treća glava je posvećena teoriji mešovitih raspodela. Iako je njih opisao još Karl Pirson 1894. godine [56], njihova teorija nije nikad nije sistematski obrađivana. Zato smo u ovom radu posebnoproučili modele u kojima se one prirodno javljaju. Konstatovano je da mešovite raspodele aditivnog tipa potiču iz ,,zaprljanih" ili ,,pomešanih" uzoraka a dokazano je da su mešovite raspodele multiplikativnog tipa praktično raspodele ekstermalnih statistika. Takođe je utvrđena jedna prirodna veza između mešovitih raspodela multiplikativnog tipa i teorije pouzdanosti, koja omogućuje nov pristup toj teoriji.

Primene teorijskih rezultata su obrađene u četvrtoj glavi. Na osnovu rezultata dobijenih u radu određene su funkcije mešovite raspodele. Pokazano je da se teorijska kriva, ocenjena kriva i empirijska kriva funkcija mešovite raspodele dosta dobro poklapaju. Neznatna odstupanja (maksimalno 3,22 %) su posledica ocenjivanja parametara mešovite raspodele (čije su vrednosti pseudoslučajne) i broja N iteracija (ukupan broj pokušaja).

Izvršeno je određivanje intervala prekrivanja za verovatnoću prekrivanja od 95 %, na osnovu dobijenih funkcija mešovite raspodele. Pokazano je da vrednosti granica intervala poverenja ocenjene funkcije mešovite raspodele neznatno odstupaju od vrednosti granica intervala poverenja teorijske funkcije mešovite raspodele (maksimalno 10-ak procenata). Takođe je pokazano da i simplifikovani pristup mešovitim raspodelama daje dobre rezultate, što je prikazano u radu. Naime, metoda prikazana u radu omogućuje razdvajanje pojedinačnih radioaktivnih izotopa iz mešavine i njihovu karakterizaciju. Ova metoda, takođe, omogućuje određivanje mrtvog vremena brojača samo na osnovu jednog merenja. Međutim, treba napomenuti da zbog matematičkih problema koji ih prate, mešovite raspodele bi trebalo koristiti samo onda kada su fizički neophodne, tj. kada fizički model slučajne pojave koja se ispituje stvara mešovitu raspodelu. Bez ovakvog modela, empirijski ustanovljen izraz nikako ne bi trebalo da se od početka tumači kao mešovita raspodela. Bez sumnje mnogi odnosi u nuklearnoj fizici suštinski prate mešovite raspodele, ali ipak u značajnijim područijima preovadavaju pojedinačni uticaji i tako da se mešovite komponente mogu zanemariti.

Isto je urađeno i za mešovite raspodele multiplikativnog tipa (tzv. zakon porasta) tako što je na osnovu stohastičnosti procesa impulsnog proboja gasova izveden semiempirijski algoritam za izračunavanje podnošljivog napona gasam izolovanog elekrodnog sistema, na osnovu vremenskog zakona uvećanja. Dobijeni algoritam je izveden na osnovu pretpostavke pripadanja slučajne promenljive impulsni proboji napon raspodelama tipa minimalne vrednosti pri čemu su analizom χ^2 testom i testom Kolmogorova ustanovljene kao najadekvatnije za primenu duploeksponencijalna i Veibulova raspodela.

Na osnovu dobijenih rezultata je zaključeno da u radu izvedeni i predloženi algoritam na osnovu zakona uvećanja daje pouzdane rezultate koji su nezavisni od vrednosti pritiska gasa, međuelektrodnog rastojanja, vrste gasa, metode obrade površina elektroda i nagiba primenjivanog impulsnog napona, što ne važi za podnošljive napone proračunate na osnovu zakona površina-vreme. Na osnovu rezultata prikazanih u ovom radu može se zaključiti da je proračun podnošljivog napona na osnovu zakona vremenskog uvećanja (tj mešovite raspodele multiplikativnog tipa) pouzdan i daje bolje rezultate od odgovarajućeg proračuna podnošljivog napona na osnovu zakona površina-vreme.

Literatura

[1] Amelkin V. V., Dolicanin-Djekic D. Strong Isochronism of Polynomial Reversible Dynamical Systems on the Plane with Homogeneous Nonlineartities of Degree 4, DIFERENTIAL EQUATIONS, vol. 47, br. 3, str. 438-442 (Article)(2011)

[2] Aranđelović I., Z. Mitrović, V. Stojanović *Verovatnoća i statistika*, Zavod za udžbenike, Beograd, (2011).

[3] Argyris J. H., Energy Theorems and Structural Analysis, Aircraft Eng. 26, (1954).

[4] Argyris J. H. and Kelsey S., Structural Analysis by theMatrix Force Method with Applications to Aircraft Wings, Wiss. Ges. Luftfahrt, Jahrb. (1956).

[5] Argyris J. H.,, Matrix Analysis of Three Dimensional Media-Small and Large Displacement, AIAA J. 3, No 1, (1965).

[6] Argyris J. H.,, Recent Advances in Matrix Methods of Strucural Analysis, Program. Aeronaut. Sci. 4, New Jersey, (1964).

[7] Atanackovic T., Diana Dolicanin, Sanja Konjik, Stevan Pilipovic, Dissipativity and stability for a nonlinear differential equation with distributed order symmetrized fractional derivate, APPLIED MATHEMATICS LETTERS, vol. 24, br. 6, str. 1020-1025 (Article)(2011).

[8] Bathe K. J., Wilson E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hill, INC Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).

[9] Behboodian J., *On mixture of normal distributions*, Biometrica 57, pp.215–217, (1970).

[10] Boson Jonas, Göran Agren, Lennart Johansson, A detailed investigation of HPGe detector response for improved Monte Carlo efficiency calculations, Sweden (2008).

[11] Cornejo Díaz N., M. Jurado Vargas, DETEFF: An improved Monte Carlo computer program for evaluating the efficiency in coaxial gamma-ray detectors, Spain (2007).

[12] Dolićanin Ć., K. Stanković, D. Dolićanin, B. Lončar, *Statistical treatment of nuclear counting results*, Nuclear Technology and Radiation Protection, Vol. 26,2, pp.164–170,(2011).

[13] Dolićanin Ć., Miodrag Perović, J. P.Solovjev: Matematika III (II deo), Priština, (1990).

[14] Dolićanin D. , M. Stefanović, Application of Numerical Methods in Solving some Problems in Mechanics, Peterburg ,(2012).

[15] Dolićanin-Đekić D., Dž. F. Pučić, K. Đ. Stanković, Application of an additive-type mixed probability distribution to the analysis of radiation from a mixture of radioactive sources- Nuclear Technology & Radiation Protection: Vol. 28, No.2, pp.191-194, Year (2013).

[16] Dolićanin D., Dž. Pučić, K.Stanković, Application of mixed multiplicative statistical distributions in designing vacuum insulation systems, Contents lists available at ScienceDirect, VACUUM, journal homepage: www.elsevier.com/locate/vacuum, Vacuum 100, pp. 7-10, (2014).

[17] Dolicanin D., Korsantiya OB, Strong Isochronicity of a Center of Plane Dynamical Systems with Homogeneous Nonlinearities of Degree 5, DIFERENTIAL EQUATIONS, vol. 44, br. 10, str. 1495-1498 (Article),(2008).

[18] Dolicanin-Đekić D. Strong isochronism of two-dimensional reversible cubic systems, Diferential Equations, Vol.48, br.5, str. 760-764 (Article)(2012).

[19] Dolicanin D., Gine Jaume, Olivera Regilene, Romanovski Valery G, The center problem for a 2:-3 resonant cubic Lotka-Volterra system, Applied Mathematics and Computation, Vol. 220, str. 12-19 (Article) (2013).

[20] Dolicanin D., Vladimir Amelkin V., Milisav Stefanovic, Milos Vujisic, Construction of An Autogenerator Dynamic Model Applicable to Nuclear Processes,Nuclear Technology & Radiation Protection, Vol. 26, br.1, str.74-77 (Article) (2011).

[21] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* John Wiley & Sons, New York, (1971).

[22] Fuller W.A., *Introduction to Statistical Time Series.* John Wiley & Sons, New York, (1976).

[23] Grinstead C., J. L. Snell, *Introduction to Probability.* American Mathematical Society, Washington, (2006).

[24] Hamilton D. J., *Time Series Analysis.* Princeton University Press, New Jersey, (1994).

[25] Hadžić O., *Odabrane metode teorije verovatnoće*, PMF, Novi Sad, (1990).

[26] Hadžić O., *Numeričke i statističke metode u obradi eksperimentalnih podataka*, PMF, Novi Sad, (1989).

[27] Hauschild W., W. Mosch, Statistik fur Electrotehniker, VEB Verlag Technik, Berlin, (1984).

[28] Hauschild W., W. Mosch: "Statistical Techniques for High-Voltage Engineering", Peter Peregrinus Ltd, (1992).

[29] Hercog D., *Numerička matematika*, Naučna knjiga, Beograd, (1990).

[30] Hill T.: "Statistical Mechanics, principles and selected applications", McGraw-Hill Book Companz, Inc, (1956).

[31] Hogg R., A. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics.* The Macmillan Company, New York, (1965).

[32] Huy N.Q., D.Q. Bihn, V.X. An, Study on the increase of inactive germanium layer in a high-purity germanium detector after a long time operation applying MCNP code Nucl. Instr. and Meth. A 573(2007)384.

[33] Ivković Z., *Matematička Statistika*, Naučna knjiga, Beograd, (1976).

[34] Ivković Z., *Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom*, (treće izdanje) PMF, Beograd, (1986).

[35] Karamanis D., Efficiency simulation of HPGe and Si(Li) detectors in γ - and X-ray spectroscopy, Greece (2003).

[36] Laborie J.-M., G. Le Petit, D. Abt, M. Girard, Monte Carlo calculation of the efficiency calibration curve and coincidence-summing corrections in low-level gamma- ray spectrometry using well-type HPGe detectors, France (1999).

[37] Lazarević Đ., M. Vujisić, K. Stanković, E. Dolićanin, P. Osmokrović, Radiation Hardness of Indium Oxide Films in the Cooper-Pair Insulator State, *Nuclear Technology & Radiation Protection*, Vol. 27, No. 1, pp. $40 - 43$(2012).

[38] Lapidus I., Partial Diferential Equations in Science and Engineering, John Wiley and Sons, New York, (1982).

[39] Lindsey J. K., *The Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time*. LUC, Dienpebeek and Ulg, Liége, (2003).

[40] Mališić J., *Slučajni procesi - teorija i primene*. Naučna knjiga, Beograd, (1989).

[41] Marković V.M., N. Stefanović, D. Nikezić, Dž.F. Pučić i V. Urošević, Specific energy distribution within cytoplasm and nucleoplasm of typical mammalian cell due to various beta radionuclides.

[42] Merkle M., *Verovatnoća i statistika*. Akademska misao, Beograd, (2002).

[43] Meek JM, Craggs JD. Electrical breakdown of gases, StateplaceNew York: Wiley; (1978).

[44] Milovanović G., Numerička analiza, I deo, Niš, (1979).

[45] Milovanović G., Numerička analiza, III deo, Beograd, (1991).

[46] Mladenović P., *Kombinatorika*, Društvo matematičara SR Srbije, Beograd, (1989).

[47] Mirković B., *Teorija mera i integrala*. Naučna knjiga, Beograd, (1990).

[48] Mladenović P., *Verovatnoća i statistika*, MF, Beograd, (1995).

[49] Nenadović M., *Matematička obrada podataka dobijenih merenjem*, SANU, Beograd, (1988).

[50] Nikolić V., Ć. Dolićanin, ,D. Dimitrijević,Dynamic Model for the Stress and Strain State Analysis of a Spur Gear Transmission, Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering, Vol 58, No 1, pp. $56 - -67$, (2012).

[51] Nikolić V., D. Dolićanin, S. Radaković, Dz. Pučić, *Numerical methods for solving the dynamic behavior of real systems*, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics, Vol . . . , No. . . 2, . . . , (2013).

[52] Nikolić V., Ć. Dolićanin, D.Dimitrijević, Numerical modelling of gear set dynamic behaviour. Scientific Technical Review, no. $3-4$, p. $48-54$, (2010).

[53] Nikolic-Stanojevic V., Ljiljana Veljovic and Cemal Dolicanin, A New Model of the Fractional Order Dynamics of the Planetary Gears, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Volume, Article ID 932150, 15 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/932150, (2013).

[54] Nikolić-Stanojević V., D.Dolićanin- Đekić, A. Radaković, Dž. Pučić "Numerical methods for solving the dynamic behavior of real systems" Applied Matematics, Informatics and Mechanics, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Vol 6, No 1 (2014).

[55] Osmokrović P., R. Marić, K. Stanković, D. Ilić, M. Vujisić, Validity of the Space-Time Enlargement Law for vacuum breakdown, Vacuum Vol. 85 (2), pp. 221-230, (2010).

[56] Pearson K., *Contribution to the Theory of Evolution*, Philos. Trans. A 185, pp.171–110, (1894).

[57] Pedersen A., On the electrical breakdown of gaseous dielectrics: An engineering approach, IEEE Trans. Electr. Insul., vol. 24, no. 5, pp. 721-739, Oct. (1989).

[58] Pejović M. M., N. T. Nešić, M. M. Pejović, Analysis of low-pressure dc breakdown in nitrogen between two spherical iron electrodes, Physics of Plasmas 13 (2), (2006).

[59] Pejović M. M., M. M. Pejović, Memory effect in argon in the presence of vacuum and gas electrical breakdown mechanisms, Applied Physics Letters 92 (1), art. no. 011507, (2008).

[60] Pejović M.M., M. M. Pejović, A. B. Jakšić, K. D. Stanković, S. A. Marković, successive gamma-ray irradiation and corresponding post-irradiation annealing of pMOS dosimeters, *Nuclear Technology & Radiation Protection*, Vol. 27, No. 4, pp. $341-345$, (2012).

[61] Peyres V., E. Garca-Torao, Efficiency calibration of an extended-range Ge detector by a detailed Monte Carlo simulation, Spain (2007).

[62] Schmetterer L., *Einf́uhrung in die mathematische Statistik*. Springer-Verlag, Wien-New York, (1976).

[63] Stojaković M., Slučajni procesi, FTN, Novi Sad, (1999).

[64] Stojaković M., Matematička statistika, FTN, Novi Sad, (1999).

[65] Stojanović S., J. Mališić, Matematičko modeliranje, Naučna knjiga, Beograd, (1980).

[66] Stanković K., Influence of the plain-parallel electrode surface dimensions on the type A measurement uncertainty of GM counter, *Nuclear Technology & Radiation Protection*, Vol. 26, No. 1, pp. $39-44$, (2011).

[67] Stanković K., M. Pešić, P. Osmokrović, M. Vujisić, Surface Time enlargement law for gas pulse breakdown, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* Vol.15, No.4, pp. 994-1005, (2008).

[68] Stanković K., P. Osmokrović, Ć. Dolićanin, M. Vujisić, A. Vasić, Time enlargement law for gas pulse breakdown, *Plasma Sources Science and Technology* Vol. 18025028 (12pp), (2009).

[69] Stanković K., M. Vujisić, Lj. Delić, Influence of Tube Volume on Measurement Uncertainty of GM Counters, *Nuclear Technology & Radiation Protection*, Vol. 25, No.1, pp. 46-50, (2010).

[70] Solovjev J.P., Jednačine stohastičkih polja, (Ruski), oskva GUZ, (2006).

[71] Solovjev J.A., Jednačine stohastičkih toplotnih polja, (Ruski), Inženjersko - fizički žurnal 79, 396-400, (2000).

[72] Solovjev J. A., Ć Dolićanin Ch, D. Dolićanin D.-h., V.I. Solovjev, Stochastic Approach To Research Of Stability Of Solutions Of The Differential Equations - Scientific Publications of the State University of Novi Pazar: St. Univ of Novi Pazar,75 p., (2013).

[73] Tošić D., Uvod u numeričku analizu, Naučna knjiga, Beograd, (1982).

[74] Walrand J., *Lecture Notes on Probability Theory and Random Processes.* University of California, Berkeley, (2004).

[75] Wiener N., *Diferential spaces*, J. Math. phys 2,pp.131–174,(1983).

[76] Wiener N., *The homogeneous chaos*, 60,pp.897–936, (1930).

[77] Zienkiewicz.. C. O., The Finite Element Method, Third edition, McGraw-Hill,London, (1977).

[78] Ширяев А. Н., *Вероятность.* Наука, Москва, (1980).