



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Sanja Ružićić

DOPUSTIVA SINGULARNA REŠENJA SISTEMA GASNE DINAMIKE SA NEPOZITIVNIM PRITISKOM

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2019.

Copyright © 2019 Sanja Ružićić

PUBLISHED BY AUTHOR

Predgovor

Bez obzira da li su čovek ili priroda odgovorni za to svakodnevno smo svedoci ponekad i neobjašnjivih i iznenadnih događaja u prirodi. To su na primer udari munje, zemljotresi, eksplozije, probijanje zvučnog zida i slično. Svi ti događaji su povezani sa naglim oslobođanjem energije koje je rezultiralo pojavom udarnog talasa. U fizičkom smislu, udarni talasi su nelinearni talasi koji putuju brzinom većom od brzine zvuka i koje karakteriše nagla promena gustine, brzine ili temperature u protoku stišljivog fluida. U prirodi se javljaju svaki put kada različiti elementi fluida prilaze jedan drugom sa brzinom većom od lokalne brzine zvuka. Oni su zaslužni za to što je danas moguće putovati avionima čija brzina prelazi brzinu zvuka, jer ih generiše vazduh oko samog aviona (videti [2, 112]). Takođe, zbog osobine da vrlo brzo mogu da razviju visoku temperaturu i pritisak u posmatranoj sredini imaju veliku primenu u industriji (na primer u genetici, mikrobiologiji, obradi drveta). U matematičkom smislu, udarni talasi se javljaju kao rešenja hiperboličnih zakona održanja i nama će biti od posebnog značaja.

Teorija hiperboličnih zakona održanja je razvijena da bi se proučavalo strujanje stišljivog fluida kada pre svega zbog nelinearne prirode jednačina dolazi do pojave rešenja u obliku udarnih talasa. Glatka rešenja nekog početnog problema postoje samo u specijalnim slučajevima i do nekog trenutka. Uglavnom dolazi do prekida u rešenju zbog čega se uvodi koncept slabih rešenja, što grubo rečeno znači da se izvodi posmatraju u distributivnom smislu. Međutim, klasa slabih rešenja je toliko velika da nam procedure za rešavanje koje se koriste ne daju jedinstveno rešenje. Zbog toga obično moramo da koristimo dodatne uslove dopustivosti kako bismo eliminisali nefizička rešenja. Ti uslovi su najčešće manifestacija nekog fizičkog zakona. Postoji nekoliko višedimenzionalnih modela u dinamici fluida za koje se zna da ne postoji jedinstveno slabo rešenje početnog problema (na primer Navije-Stoksove i Ojlerove jednačine). Rezultati iz te oblasti su toliko značajni da iako za neke od njih još uvek ne postoji teorijska potvrda oni se dugi niz godina primenjuju u realnim problemima, uglavnom oslanjajući se na numeričke simulacije. Višedimenzionalni zakoni održanja su u teorijskom smislu još uvek velika nepoznanica, pa će se rezultati u ovoj disertaciji odnositi na jednodimenzionalne sisteme. Iako uprošćeni, oni mogu da opišu veliki broj prirodnih fenomena.

U drugoj polovini devetnaestog veka Riman¹ je sa svojim radom [92] postavio temelje u analizi opštih hiperboličnih jednodimenzionalnih sistema zakona održanja. Ispostaviće se da je Rimanov problem kao specijalni oblik po delovima konstantnog početnog problema i danas nezaobilazan u analizi početnih problema sistema zakona održanja. Iako je do danas ostvaren značajan napredak, još uvek se dosta toga ne zna, naročito u slučaju opštih početnih problema i višedimenzionalnih sistema. Takođe, rezultati koji se tiču početnih problema bi mogli biti vrlo značajni u analizi graničnih problema i obrnuto, jer je pokazano da se problemi koji imaju rešenja u obliku višedimenzionalnih udarnih talasa mogu prevesti u

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), nemački matematičar, Gausov učenik koji je značajno doprineo razvoju matematičke analize i diferencijalne geometrije.

granične probleme. Tom problematikom se prvi bavio Majda² u [68] i [69].

Iako se dugi niz godina smatralo da ništa gore od pojave udarnih talasa u rešenju ne može da se desi, u drugoj polovini dvadesetog veka se pojavio pojam delta udarnog talasa (a kasnije i singularnih rešenja koja sadrže Dirakovu delta funkciju) koji nastaje usled velike koncentracije mase ili neke druge veličine. Delta udarni talasi nam pomažu da razumemo procese koji se odvijaju u svemiru (na primer nastanak galaksija, ponašanje tamne energije u svemiru, itd.). U takvim slučajevima klasična teorija koja rešenja Rimanovih problema hiperboličnih sistema prikazuje kao kombinaciju elementarnih talasa u koje pored udarnih talasa spadaju kontaktni diskontinuiteti i razređujući talasi više ne važi. U ovoj disertaciji će značajna pažnja biti posvećena upravo neograničenim (singularnim) rešenjima. Neograničenost rešenja se manifestuje kroz pojavu Dirakove delta funkcije. U disertaciji ćemo se fokusirati na jednodimenzionalne izentropske sisteme gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom. To su sistemi koji opisuju kretanje stišljivog, neviskoznog fluida koji slabo provodi toplotu, a promene specifične unutrašnje energije opisane preko absolutne temperature ili specifične entropije sistema su zanemarljive. Analiziraćemo fizički dopustiva rešenja modela za Čapliginov gas i njegovih uopštenja kada je pritisak negativan i obrnuto proporcionalan gustini gasa, kao i rešenja sistema gasne dinamike bez pritiska. Originalni deo disertacije je najvećim delom obuhvaćen Glavama 5, 7 i 8, a rezultati su sažeti u tri rada:

- [80] M. Nedeljkov, S. Ružićić, *On the uniqueness of solution to generalized Chaplygin gas, Discrete and continuous dynamical systems*, 37,8 (2017), 4439–4460.
- [81] M. Nedeljkov, S. Ružićić, *Shadow wave tracking procedure and initial data problem for pressureless gas model*, <https://arxiv.org/abs/1906.09093>
- [82] M. Nedeljkov, S. Ružićić, *Energy admissibility condition for shadow wave*, preprint.

Disertacija se sastoji iz tri dela. Cilj prvog dela (prve dve glave) je upoznati čitaoca sa osnovnim principima termodinamike, dati fizičku interpretaciju zakona održanja i navesti osnovne osobine hiperboličnih sistema zakona održanja koje će biti korišćene u nastavku rada. Na kraju druge glave su navedene osnovne karakteristike sistema gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom. U Odeljku 2.6.2. su dati neki rezultati iz [80]. Preciznije, objašnjen je postupak dobijanja konveksnih entropija kod modela za uopšten Čapliginov gas i pokazano je da su dobijene entropije konveksne (Lema 2.1).

U drugom delu je akcenat stavljen na rešavanje hiperboličnih sistema zakona održanja. U Glavi 3 je opisan postupak dobijanja klasičnih rešenja Rimanovih problema i dati su neki uslovi dopustivosti koji se koriste kod hiperboliv cnih sistema. Glava 4 sadrži definiciju singularnih rešenja, sa posebnim osvrtom na rešenja u obliku senka talasa kao najopštijeg oblika singularnih rešenja koja sadrže i neke specijalne tipove rešenja koja se često spominju u literaturi. Na kraju Glave 4 su analizirane singularne interakcije između talasa. Glava 5 predstavlja originalni doprinos disertacije i sadrži rezultate iz [80], [81] i [82]. U tom delu su analizirana (klasična i neklasična) rešenja Rimanovog problema sistema gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom, kao i njihova dopustivost. Dato je jedinstveno rešenje Rimanovog problema sistema gasne dinamike bez pritiska koje se može predstaviti kao kombinacija kontaktnih diskontinuiteta ili u obliku prostog senka talasa. Pored toga, dobijeno je rešenje problema koji sadrži Dirakovu delta funkciju u početnom uslovu i analizirana je dissipacija energije tog rešenja. Pokazano je da u oblasti u kojoj ne postoji klasično rešenje Rimanovog problema za uopšten Čapliginov gas postoji rešenje u obliku prekompresivnog prostog

²Andrew J. Majda je američki matematičar rođen 1949. godine koji je ostvario značajan doprinos u oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina.

senka talasa. Međutim, uslov prekompresivnosti koji je obično dovoljan da eliminiše nedopustiva singularna rešenja ovde ne može da eliminiše rešenje u obliku senka talasa koje odgovara jednom delu oblasti u kojoj postoji klasično rešenje. Tada značajnu ulogu dobijaju konveksne entropije i entropijski uslov. Međutim, zbog specifičnosti entropija koje se mogu predstaviti kao kombinacija modifikovanih Beselovih funkcija druge vrste, koristeći entropijski uslov nismo uspeli da isključimo rešenje u obliku prekompresivnog senka talasa u oblasti gde postoji klasično rešenje. Najznačajniji rezultat iz tog dela tiče se odnosa između uslova prekompresivnosti i entropijskog uslova, jer je pokazano da uslov prekompresivnosti ne implicira entropijski, što do sada nije bilo poznato u literaturi. Slaba jedinstvenost rešenja Rimanovog problema je pokazana koristeći dodatni uslov dopustivosti, Princip maksimalne disipacije energije koji je isključio nedopustivo rešenje u obliku senka talasa ([82]). Takođe je dato rešenje Rimanovog problema kod neizentropskog modela za uopšten Čapliginov gas, kao i rešenje kod izentropskog modela za Čapliginov gas.

U trećem delu je fokus na početnom problemu sistema gasne dinamike bez pritiska. Na početku (Glava 6) je dat kratak pregled razvoja algoritama za konstrukciju rešenja početnih problema koji su poslužili kao motivacija za konstrukciju neograničenog rešenja početnog problema sistema gasne dinamike bez pritiska. Tu je akcenat stavljen na algoritam za praćenje talasa. Treba napomenuti da se algoritmi koji su navedeni u tom delu ne mogu primeniti na slabo hiperbolične probleme (kao što je sistem gasne dinamike bez pritiska), i da se njima mogu konstruisati samo ograničena rešenja početnog problema, a jasno je da u opštem slučaju rešenje može da eksplodira. Glava 7 sadrži rezultate iz [81] i [82] i u njoj je dat algoritam za konstrukciju približnog rešenja početnog problema za gasnu dinamiku bez pritiska koji se zasniva na diskretizaciji početnog uslova i rešavanju Rimanovih problema i problema interakcije između talasa. Nakon analize približnog rešenja po slučajevima i dokaza egzistencije rešenja, analizirana je promena stope disipacije energije nastala kao posledica singularnih interakcija između talasa i pokazano je da ukupna entropija opada posle interakcije između dva talasa. Na kraju je dat algoritam za konstrukciju približnog rešenja početnog problema kod kog komponenta gustine u početnom uslovu sadrži Dirakovu delta funkciju. U Glavi 8 je pokazano da približno rešenje početnog problema konstruisano u Glavi 7 konvergira u prostoru Radonovih mera sa predznakom. U nekim slučajevima je moguće odrediti oblik graničnog rešenja bar do nekog trenutka i može se pokazati da je to rešenje u nekom smislu jedinstveno ([81]).

Iz mnogo razloga veliku zahvalnost dugujem svom mentoru dr Marku Nedeljkovu. Omogućio mi je da kroz rad i greške učim, dajući mi slobodu da sama dođem do ideja i boljih rešenja, sve vreme je podsticao kreativnost i bio velika podrška.

Zahvaljujem se i ostalim članovima komisije: Dori Seleši, Stevanu Pilipoviću, Srboljubu Simiću i Božidaru Jovanoviću.

Sanja Ružić

Novi Sad, novembar 2019. godine

Sadržaj

Predgovor

iii

| | |
|--|-----------|
| I OSOBINE JEDNODIMENZIONALNIH HIPERBOLIČNIH SISTEMA ZAKONA ODRŽANJA | 1 |
| 1 Mehanika neprekidnih sredina i modeliranje protoka fluida | 3 |
| 1.1 Kretanje tela | 3 |
| 1.2 Zakoni balansa mase, količine kretanja i momenta količine kretanja | 6 |
| 1.3 Prvi i drugi zakon termodinamike | 8 |
| 1.4 Konstitutivne jednačine | 10 |
| 1.5 Zakoni balansa na udarnom talasu | 11 |
| 1.6 Modeliranje protoka fluida | 12 |
| 1.6.1 Jednodimenzionalni sistemi gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom | 13 |
| 2 Jednodimenzionalni hiperbolični sistemi zakona održanja | 15 |
| 2.1 Hiperboličnost i rešenja | 16 |
| 2.2 Rimanove invarijante | 18 |
| 2.3 Rankin-Igonov uslov | 19 |
| 2.4 Zaista nelinearni i linearno degenerisani sistemi | 21 |
| 2.5 Entropija i fluks entropije | 22 |
| 2.6 Jednačine gasne dinamike i osobine | 23 |
| 2.6.1 Model za gasnu dinamiku bez pritiska | 25 |
| 2.6.2 Model za Čapliginov gas i uopštenja | 26 |
| II DOPUSTIVA REŠENJA RIMANOVOG PROBLEMA | 33 |
| 3 Klasično rešenje Rimanovog problema i entropijska dopustivost | 35 |
| 3.1 Elementarni talasi | 36 |
| 3.2 Uslovi dopustivosti | 39 |
| 3.3 Opšti oblik rešenja Rimanovog problema | 45 |
| 4 Singularna (neklassična) rešenja | 49 |
| 4.1 Singularna rešenja - definicija i primeri | 49 |
| 4.2 Senka talasi | 52 |
| 4.2.1 Konstantni senka talasi | 53 |
| 4.2.2 Težinski senka talasi | 58 |
| 4.2.3 Još neka uopštenja senka talasa | 60 |
| 4.3 Uslovi dopustivosti | 61 |

| | | |
|--|--|------------|
| 4.4 | Singularne interakcije između talasa | 64 |
| 5 | Sistemi gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom | 71 |
| 5.1 | Model gasne dinamike bez pritiska | 71 |
| 5.1.1 | Neizentropski model za gasnu dinamiku bez pritiska | 79 |
| 5.2 | Model za uopšten Čapliginov gas | 81 |
| 5.2.1 | Uslov prekompresivnosti i entropijski uslov | 85 |
| 5.2.2 | Princip maksimalne disipacije energije | 97 |
| 5.2.3 | Neizentropski model za uopšten Čapliginov gas | 101 |
| 5.3 | Model za Čapliginov gas | 103 |
| III | GLOBALNO REŠENJE POČETNOG PROBLEMA ZA GASNU DINAMIKU BEZ PRITISKA | 109 |
| 6 | Istorija i motivacija | 111 |
| 6.1 | Razvoj algoritama za konstrukciju približnih rešenja | 112 |
| 6.2 | Konstrukcija približnog rešenja pomoću metoda za praćenje talasa | 115 |
| 7 | Egzistencija približnog rešenja početnog problema | 121 |
| 7.1 | Konstrukcija približnog rešenja početnog problema | 123 |
| 7.2 | Interakcije između talasa | 126 |
| 7.3 | Egzistencija globalnog približnog rešenja | 129 |
| 7.3.1 | Analiza Slučajeva I – IV | 129 |
| 7.3.2 | Opšti slučaj | 140 |
| 7.3.3 | Disipacija energije kao posledica interakcije između talasa | 145 |
| 7.4 | Dopustivo rešenje uopštenog Rimanovog problema | 148 |
| 8 | Postojanje i jedinstvenost limesa približnog rešenja | 153 |
| 8.1 | Prostor Radonovih mera sa predznakom | 153 |
| 8.2 | Slaba konvergencija približnog rešenja u prostoru mera | 155 |
| 8.3 | Jedinstvenost slabog limesa i particije ekvidistantnog tipa | 161 |
| Bibliografija | | 167 |
| Biografija | | 175 |
| Ključna dokumentacijska informacija | | 177 |
| Key words documentation | | 180 |

Deo I

**OSOBINE
JEDNODIMENZIONALNIH
HIPERBOLIČNIH SISTEMA
ZAKONA ODRŽANJA**

Glava

1

Sadržaj

| | | |
|-------|--|----|
| 1.1 | Kretanje tela | 3 |
| 1.2 | Zakoni balansa mase, količine kretanja i momenta količine kretanja | 6 |
| 1.3 | Prvi i drugi zakon termodinamike | 8 |
| 1.4 | Konstitutivne jednačine | 10 |
| 1.5 | Zakoni balansa na udarnom talasu | 11 |
| 1.6 | Modeliranje protoka fluida | 12 |
| 1.6.1 | Jednodimenzionalni sistemi gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom . | 13 |

Mehanika neprekidnih sredina i modeliranje protoka fluida

Sva materija u prirodi se matematički opisuje pomoću modela u koje spadaju tečnosti, gasovi i čvrsta tela. Karakteristika fluida u koje spadaju tečnosti i gasovi je da se kreću usled delovanja sile, ali se ne zaustavljaju čak ni kada se delovanje te sile prekine, i u nastavku ćemo akcenat stavljati na opisivanje kretanja fluida. U mehanici neprekidnih sredina fluid karakterišu njegova gustina i temperatura (ili specifična entropija), dok je kretanje opisano uz pomoć brzine. Sve promene u vremenu se opisuju uz pomoć parcijalnih diferencijalnih jednačina. Matematička teorija u mehanici neprekidnih sredina je zasnovana na osnovnim fizičkim principima koji se nazivaju zakoni balansa. Zakoni balansa mase, količine kretanja, momenta količine kretanja, energije (ili prvi zakon termodinamike) i entropijska nejednakost (ili drugi zakon termodinamike) su postulati i oni važe za sva tela, a proces koji se ponaša u skladu sa njima se naziva termodinamički proces. Međutim, ti zakoni ne definišu svojstva i ponašanje fluida. Bez tačnog preciziranja materijala od kojeg je fluid sačinjen ne možemo da znamo kako će se on ponašati pod uticajem spoljašnjih sila. Specifikacija materijala se određuje pomoću konstitutivnih jednačina.

1.1. Kretanje tela

U mehanici neprekidnih sredina se polazi od pretpostavke da su fizičke veličine poput mase i količine kretanja povezane sa materijalom uniformno raspoređene na datom malom prostoru umesto koncentrisane na samo jednom delu i ona opravdava korišćenje gustine, brzine, temperature i drugih termodinamičkih veličina prilikom opisivanja kretanja tela (fluida) (za detaljnije videti [4, 46]).

Posmatramo kretanje tela u vremenu i Euklidskom prostoru \mathbb{R}^m , $m = 1, 2, 3$ i to u dve konfiguracije: referentnoj i trenutnoj, pri čemu je izbor referentne konfiguracije proizvoljan. Telo $B \subset \mathbb{R}^m$ u referentnoj konfiguraciji se naziva referentno telo, a tačka $X \in B$ se naziva materijalna tačka ili čestica.

DEFINICIJA 1.1. Kretanje tela B je glatko injektivno preslikavanje $\chi : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ koje ne menja orijentaciju sistema i koje svakoj materijalnoj tački $X \in B$ i vremenu t dodeljuje tačku u prostoru $x \in \mathbb{R}^m$ (pišemo $(X, t) \mapsto \chi(X, t) = x$).

Za fiksirano t , preslikavanje χ se naziva deformacija u vremenu t i označava se sa $\chi_t(X) = \chi(X, t)$. Važi $\chi_0(B) = B$ i $J(X, t) := \det \nabla \chi_t(X) > 0$. Preslikavanje $B \rightarrow \mathcal{B}_t := \chi_t(B)$ je difeomorfizam.

Označimo sa A skup materijalnih tačaka. Neka se skup A u vremenu t preslikava u skup $\mathcal{A}_t = \chi_t(A)$. Tada kažemo da se A deformiše u \mathcal{A}_t ili da se \mathcal{A}_t kreće sa telom.

Neka je \mathcal{P}_t oblast u prostoru koja se kreće sa telom, tj. postoji materijalna oblast P takva da važi $\mathcal{P}_t = \chi_t(P)$ za svako t . Iz injektivnosti funkcije χ_t sledi

$$\partial \mathcal{P}_t = \chi_t(\partial P).$$

PRIMER 1.1. Kontaktni diskontinuiteti o kojima će kasnije biti reči su materijalne površi, dok udarni talasi nisu. ■

Deformacioni gradijent

DEFINICIJA 1.2. Tenzor¹ predstavlja linearnu transformaciju iz Euklidskog vektorskog prostora $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ u isti taj vektorski prostor. Drugim rečima, tenzor T je linearno preslikavanje koje vektor \mathbf{v} slika u vektor \mathbf{u} što zapisujemo sa $T\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

- Neka je $m = 3$ i neka je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora \mathcal{V} . Tada je komponenta T_{ij} tenzora T data sa $T_{ij} = (T)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot T\mathbf{e}_j$.
- Transponovani tenzor T^T tenzora T se definiše sa $\mathbf{u} \cdot T\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot T^T\mathbf{u}$ i po komponentama važi $(T^T)_{ij} = T_{ji}$.
- Tenzor T je invertibilan ako postoji njegov inverzni tenzor T^{-1} takav da važi $TT^{-1} = T^{-1}T = \mathbf{1}$, pri čemu je sa $\mathbf{1}$ označen jedinični tenzor.
- Tenzorski proizvod $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ vektora \mathbf{u} i \mathbf{v} je tenzor takav da $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ važi za sve $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$.
- Unutrašnji proizvod dva tenzora T i S se definiše sa $T : S = \text{tr}(S^T T)$, pri čemu je sa $\text{tr}(T) = \sum_i T_{ii}$ označen trag tenzora T .

DEFINICIJA 1.3. Neka je $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ diferencijabilna mnogostruktost i neka je $X \in \mathcal{M}$. Tangentni prostor $T_X \mathcal{M}$ je vektorski prostor čija je baza generisana tangentnim vektorima sa početnom tačkom X , tj. parcijalnim izvodima u X .

DEFINICIJA 1.4. Diferencijal $F : T_X B \rightarrow T_x \mathbb{R}^m$ preslikavanja χ_t je dat sa

$$F(X, t) = \nabla \chi_t(X), \quad F_{ij}(X, t) = \frac{\partial \chi_i(X, t)}{\partial X_j}, \quad x = \chi_t(X)$$

i naziva se deformacioni gradijent.

¹Ovde navodimo definiciju specijalnog tipa tenzora. Definicija tenzora na mnogostrukostima se može pronaći u [1].

Važi

$$F, F^{-T} : T_X B \rightarrow T_x \mathbb{R}^m, \quad F^{-1}, F^T : T_x \mathbb{R}^m \rightarrow T_X B, \quad x = \chi_t(X).$$

Kako se u Euklidskom prostoru \mathbb{R}^m afina struktura podrazumeva (iz $a \in \mathbb{R}^m$ i $a+u = b \in \mathbb{R}^m$ sledi $u = b - a \in \mathbb{R}^m$) zaključujemo da za dve materijalne tačke X i Y važi $X - Y \in T_Y B$. Tada se materijalni vektor $X - Y$ slika u $F(X - Y, t) \in T_y \mathbb{R}^m$, gde $y = \chi_t(Y)$. Za dovoljno malo $|X - Y|$, koristeći Tejlorov razvoj funkcije χ_t u okolini materijalne tačke X dobijamo

$$\chi_t(Y) - \chi_t(X) = F(X, t)(Y - X) + o(|X - Y|).$$

Preslikavanje χ_t je *homogena deformacija* ako je deformacioni gradijent F nezavisan od materijalne tačke X , tj. ako važi

$$\chi_t(X) - \chi_t(Y) = F(X - Y) \quad \text{za sve materijalne tačke } X \text{ i } Y.$$

Sledi $x - y = F(X - Y) \in T_y \mathbb{R}^m$, gde $x = \chi_t(X)$. Vektor $x - y$ predstavlja prostorni vektor.

Deformacioni gradijent se uz pomoć Teoreme o polarnoj dekompoziciji može zapisati kao proizvod ortogonalne transformacije $R : T_X B \rightarrow T_x \mathbb{R}^m$ ($RR^T = R^T R = \mathbf{1}$, $\det R = 1$) i simetričnog, pozitivno definitnog tenzora deformacije U ili V ,

$$F = RU = VR, \quad U = \sqrt{F^T F}, \quad V = \sqrt{FF^T}.$$

Tenzor $F^T F : T_X B \rightarrow T_X B$ se naziva Grinov tenzor deformacije, dok je Košijev tenzor deformacije dat sa $FF^T : T_x \mathbb{R}^m \rightarrow T_x \mathbb{R}^m$.

Lagranžov i Ojlerov pristup

Brzina i ubrzanje materijalne tačke X u vremenu t su dati sa

$$\dot{\chi}(X, t) = \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t} \quad \text{i} \quad \ddot{\chi}(X, t) = \frac{\partial^2 \chi(X, t)}{\partial t^2}.$$

Koristeći $\dot{\chi}(X, t)$ brzina se može opisati i kao funkcija koja zavisi od x i t na sledeći način

$$\mathbf{v}(x, t) = \dot{\chi}(\chi^{-1}(x, t), t) \quad \text{ili} \quad \dot{\chi}(X, t) = \mathbf{v}(\chi(X, t), t).$$

U mehanici neprekidnih sredina se koriste dva pristupa prilikom opisivanja kretanja: materijalni (Lagranžov) i prostorni (Ojlerov). U Ojlerovom pristupu se prati ponašanje nekog polja u fiksiranoj tački u prostoru, dok Lagranžov pristup prati ponašanje polja na trajektorijama čestice. Vektorsko polje \mathbf{v} predstavlja prostorni opis brzine.

Napomena. Prilikom modeliranja protoka fluida se uglavnom koristi Ojlerov pristup. Naime, kod fluida ne postoji prirodna referenta konfiguracija, nego se za referentnu uzima konfiguracija u nekom fiksiranom vremenu t_0 .

U opštem slučaju, ako sa $\varphi_R(X, t)$ označimo materijalni opis skalarnog, vektorskog ili tensorskog polja u materijalnoj tački $X \in B$ i vremenu t , onda je njemu odgovarajući prostorni opis u $x = \chi(X, t)$ i vremenu t dat sa

$$\varphi(x, t) = \varphi_R(\chi^{-1}(x, t), t).$$

Dodatno, $\varphi_R(X, t) = \varphi(\chi(X, t), t)$. Ukoliko ne bude postojala mogućnost zabune, uglavnom ćemo koristiti istu oznaku za materijalni i prostorni opis nekog polja.

U nastavku ćemo sa ∇ , Div i Curl označavati materijalni gradijent, divergenciju i rotor, a sa grad, div i curl prostorni gradijent, divergenciju i rotor. Veza između prostornog i materijalnog gradijenta skalarног polja φ , odnosno vektorskog polja \mathbf{h} je

$$\nabla\varphi = F^T \text{grad } \varphi, \quad \nabla\mathbf{h} = (\text{grad } \mathbf{h})F,$$

redom. Gornje relacije se dobijaju korišćenjem formule za izvod složene funkcije. Na primer, prvu relaciju dobijamo iz

$$\frac{\partial\varphi(X,t)}{\partial X_A} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial\chi_i(X,t)}{\partial X_A} = \sum_{i=1}^m F_{iA}(X,t) \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i}, \quad x = \chi(X,t).$$

Dalje, sa

$$\dot{\varphi}(X,t) = \frac{\partial\varphi(X,t)}{\partial t}$$

ćemo označavati materijalni izvod po vremenu polja φ , a sa

$$\partial_t\varphi(x,t) = \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

prostorni izvod po vremenu polja φ . Veza između materijalnog i prostornog izvoda po vremenu je

$$\dot{\varphi} = \partial_t\varphi + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi, \quad \dot{\mathbf{h}} = \partial_t\mathbf{h} + (\text{grad } \mathbf{h})\mathbf{v},$$

pri čemu φ predstavlja skalarno polje, a \mathbf{h} vektorsko polje (dokaz videti u [50]).

Ponašanje deformacionog gradijenta tokom vremena može se opisati jednačinom

$$\dot{F} = LF, \quad L = \text{grad } \mathbf{v},$$

pri čemu L predstavlja gradijent brzine \mathbf{v} koji se može rastaviti na simetričan i koso-simetričan deo

$$L = D + W, \quad \text{gde } D = \frac{1}{2}(L + L^T), \quad W = \frac{1}{2}(L - L^T). \quad (1.1)$$

1.2. Zakoni balansa mase, količine kretanja i momenta količine kretanja

Za sada ćemo prepostaviti da je kretanje glatko zajedno sa svim termodinamičkim po-ljima koja opisuju to kretanje. Neka je kao i ranije \mathcal{P}_t oblast u prostoru koja se kreće sa telom, tj. postoji materijalna oblast P takva da $\mathcal{P}_t = \chi_t(P)$ za sve t . Neka su sa φ_R i φ označeni materijalni i prostorni opis nekog polja. Tada važi

$$\int_{\mathcal{P}_t} \varphi(x,t) dx = \int_P \varphi_R(X,t) J(X,t) dX, \quad x = \chi(X,t), \quad J(X,t) = \det F(X,t),$$

pri čemu su sa dx i dX označene standardne Euklidske mere u \mathbb{R}^m , odnosno B .

U nastavku ćemo često koristiti Rejnoldsovou transportnu jednačinu koja igra vrlo važnu ulogu u mehanici neprekidnih sredina

$$\overline{\int_{\mathcal{P}_t} \dot{\varphi} dx} = \overline{\int_P \varphi_R \dot{J} dX} = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\varphi} + \varphi \text{ div } \mathbf{v}) dx. \quad (1.2)$$

Dokaz relacije (1.2) se može naći u [50].

Globalni oblik **zakona balansa mase** (ili zakona održanja mase) je dat sa

$$\overline{\dot{M}(\mathcal{P}_t)} := \overline{\int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t) dx} = 0,$$

što znači da masa $M(\mathcal{P}_t)$ ne zavisi od odabira referentne konfiguracije, tj. bez obzira na to kako je telo deformisano ukupna masa se ne menja. Gustinu mase u tački (x, t) označavamo sa $\rho(x, t)$. Koristeći Rejnoldsovou transportnu jednačinu (1.2) dobijamo lokalni oblik zakona balansa mase

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{ili} \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

koji se naziva i jednačina kontinuiteta. Količinu kretanja oblasti \mathcal{P}_t koja se kreće sa telom ćemo označavati sa $l(\mathcal{P}_t)$,

$$l(\mathcal{P}_t) := \int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) dx,$$

dok će moment količine kretanja oblasti \mathcal{P}_t biti označen sa $a(\mathcal{P}_t)$,

$$a(\mathcal{P}_t) := \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r}(x) \times (\rho(x, t) \mathbf{v}(x, t)) dx.$$

Vektor $\mathbf{r}(x)$ predstavlja vektor položaja koji odgovara tački $x \in \mathbb{R}^m$ i određuje se u odnosu na koordinatni početak u \mathbb{R}^m . Može se pokazati da važi $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, što će biti korišćeno u nastavku.

Zakon balansa količine kretanja² govori da je promena po vremenu količine kretanja $l(\mathcal{P}_t)$ u oblasti \mathcal{P}_t koja se kreće sa telom jednaka ukupnoj sili koja deluje na tu oblast,

$$\overline{\dot{l}(\mathcal{P}_t)} = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{f} dx.$$

U gornjem izrazu $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{n}(x, t), x, t)$ predstavlja gustinu površinske sile koja deluje na rub oblasti (orientisanu površ) \mathcal{P}_t , \mathbf{n} je jedinični vektor spoljašnje normale, dok se sa \mathbf{f} označava gistica zapreminskih sila. Dakle, ukupna sila predstavlja zbir kontaktnih sila koje deluju na $\partial\mathcal{P}_t$ i spoljašnjih zapreminskih sila (na primer gravitaciona³ i elektromagnetna sila), nastalih usled delovanja fizičkog polja na oblast \mathcal{P}_t . Može se pokazati da postoji tenzor T takav da važi $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n}$ (videti dokaz Košijeve teoreme u [50]). Tenzor T se naziva *Košijev tenzor napona* i on karakteriše kontaktne sile koje se javljaju samo usled direktnе interakcije između molekula i naglo opadaju sa porastom rastojanja između elemenata u interakciji. Njihovo ponašanje zavisi od karakteristika tela koje se posmatra, što znači da specifičan oblik Košijevog tenzora napona opisuje svojstva materijala čije se kretanje posmatra. Detaljnija analiza zapreminskih i kontaktних sila se može naći u [4].

Posebno značajan će nam biti lokalni oblik zakona balansa količine kretanja

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} T + \mathbf{f} \quad \text{ili} \quad \partial_t(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{div}(T - \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \mathbf{f}.$$

Zakon balansa momenta količine kretanja govori da je promena po vremenu momenta količine kretanja $a(\mathcal{P}_t)$ u oblasti \mathcal{P}_t koja se kreće sa telom jednaka ukupnom momentu te oblasti,

$$\overline{\dot{a}(\mathcal{P}_t)} = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{f} dx.$$

Balans momenta količine kretanja implicira simetričnost Košijevog tenzora napona,

$$T = T^T.$$

²Illi Drugi Njutnov zakon $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

³Gravitaciona sila je proporcionalna masi elementa na koji deluje.

1.3. Prvi i drugi zakon termodinamike

Balans energije ili prvi zakon termodinamike kaže da je promena ukupne unutrašnje $\mathcal{E}(\mathcal{P}_t)$ i kinetičke energije $\mathcal{K}(\mathcal{P}_t)$ jednaka zbiru toplotnog protoka $\mathcal{Q}(\mathcal{P}_t)$ i spoljašnje snage $\mathcal{W}(\mathcal{P}_t)$, tj.

$$\overline{\mathcal{E}(\mathcal{P}_t)} + \dot{\mathcal{K}(\mathcal{P}_t)} = \mathcal{Q}(\mathcal{P}_t) + \mathcal{W}(\mathcal{P}_t),$$

gde

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\mathcal{P}_t) &:= \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 dx, \\ \mathcal{W}(\mathcal{P}_t) &:= \int_{\partial \mathcal{P}_t} T \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx, \\ \mathcal{Q}(\mathcal{P}_t) &:= \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{P}_t} q dx, \\ \mathcal{E}(\mathcal{P}_t) &:= \int_{\mathcal{P}_t} \rho e dx.\end{aligned}$$

U gornjim jednačinama D predstavlja simetrični deo gradijenta brzine L (videti (1.1)), \mathbf{n} je jedinični spoljašnji vektor normale na \mathcal{P}_t , skalarno polje $e = e(\rho(x, t), \theta(x, t), x, t)$ predstavlja specifičnu unutrašnju energiju⁴, sa $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\rho(x, t), \theta(x, t), x, t)$ je označen toplotni protok, a sa $q = q(\rho(x, t), \theta(x, t), x, t)$ gustina zapreminskog toplotnog doprinosa. Apsolutna temperatura je označena sa $\theta = \theta(x, t) > 0$. Može se pokazati (videti [50]) da važi

$$\mathcal{W}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} T : D dx + \overline{\mathcal{K}(\mathcal{P}_t)}.$$

Napomena. Uкупni toplotni doprinos $\mathcal{Q}(\mathcal{P}_t)$ se predstavlja kao zbir stope po kojoj se toplota prenosi u \mathcal{P}_t preko $\partial \mathcal{P}_t$ i stope po kojoj toplota nastaje u \mathcal{P}_t pod različitim spoljašnjim uticajima (npr. zračenjem). Treba napomenuti da se u literaturi pojavljuje i znak - ispred prvog izraza u $\mathcal{Q}(\mathcal{P}_t)$. Taj znak zavisi od smera vektora \mathbf{q} i njegovog odnosa sa vektorom \mathbf{n} .

Lokalni oblik zakona održanja energije je dat sa

$$\rho \dot{e} = T : D + \operatorname{div} \mathbf{q} + q \quad \text{ili} \quad \partial_t(\rho e) = T : D + \operatorname{div}(\mathbf{q} - \rho e \mathbf{v}) + q. \quad (1.3)$$

Postoji više interpretacija entropije ([91]). Jedna od njih vidi entropiju kao meru neuređenosti sistema nastalu usled fluktuacija atoma i molekula, dok toplota predstavlja dodatni transfer energije nastao zbog istih fluktuacija. Oblasti koje se kreću sa telom mogu da proizvode entropiju, i ta činjenica pravi osnovnu razliku između energije i entropije. Entropijska nejednakost se zasniva na činjenici da sistem teži da poveća neuređenost sistema (entropiju), što znači da je ukupna produkcija entropije u \mathcal{P}_t (označavamo je sa $\mathcal{H}(\mathcal{P}_t)$) nenegativna, pa važi

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}_t) \geq 0.$$

Ukupna produkcija entropije u \mathcal{P}_t jednaka je razlici između stope po kojoj raste ukupna entropija u \mathcal{P}_t (ukupna entropija u \mathcal{P}_t će biti označena sa $\mathcal{S}(\mathcal{P}_t)$) i stope priraštaja entropije $\mathcal{J}(\mathcal{P}_t)$, koja predstavlja stopu po kojoj se entropija prenosi u \mathcal{P}_t . To zapisujemo sa

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}_t) = \overline{\dot{\mathcal{S}}(\mathcal{P}_t)} - \mathcal{J}(\mathcal{P}_t),$$

⁴Reč "specifična" znači da se meri po jedinici mase.

gde

$$\mathcal{J}(\mathcal{P}_t) := \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{P}_t} j dx, \quad \mathcal{S}(\mathcal{P}_t) := \int_{\mathcal{P}_t} \rho s dx.$$

Skalarno polje $s = s(\rho, \theta, x, t)$ predstavlja specifičnu entropiju, vektorsko polje $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\rho, \theta, x, t)$ protok entropije, a $j = j(\rho, \theta, x, t)$ zapreminska produkacija entropije. Toplotni protok \mathbf{q} i protok entropije \mathbf{j} imaju isti pravac i njihova veza je data preko apsolutne temperature θ ,

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{q}}{\theta}, \quad j = \frac{q}{\theta}. \quad (1.4)$$

Koristeći relaciju (1.4) dobijamo oblik **entropijske nejednakosti** koji se naziva Klausius-Dijemova nejednakost (*eng. Clausius-Duhem inequality*) koja je manifestacija drugog zakona termodinamike. Lokalni oblik entropijske nejednakosti je dat sa

$$\rho \dot{s} \geq \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \frac{q}{\theta} \quad \text{ili} \quad \partial_t (\rho s) \geq \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} - \rho s \mathbf{v} \right) + \frac{q}{\theta}. \quad (1.5)$$

Zakon balansa (nejednakost) entropije služi kao merilo za termodinamičku dopustivost termodinamičkog procesa.

Napomena. Entropijska nejednakost (1.5) se, pod određenim uslovima ([89]), može dobiti i iz zakona balansa energije (1.3) preko Gibsove relacije

$$\theta Ds(\rho, \theta) = De(\rho, \theta) + p(\rho, \theta)D\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (1.6)$$

pri čemu simbol D predstavlja diferencijal u odnosu na promenljive (ρ, θ) , tj.

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}.$$

Kombinovanjem prvog i drugog zakona termodinamike dobijamo **disipacionu nejednakost**

$$\rho \dot{e} - \rho \theta \dot{s} - T : D - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \leq 0. \quad (1.7)$$

Ona ima smisla samo ako veličine koje opisuju kretanje ne razvijaju prekide, jer se između ostalog ona dobija korišćenjem formule za izvod složene funkcije. Međutim, Klausius-Dijemova nejednakost ćemo koristiti i prilikom provere dopustivosti procesa kod koga neka od termodinamičkih veličina razvija prekide u konačnom vremenu.

Ukoliko zanemarimo sve termalne efekte (apsolutna temperatura je konstantna, tj. $\theta = \theta_0$) dobijamo proces koji se odvija pod mehaničkim uticajem ili izoterman proces, pa konstitutivne jednačine zadovoljavaju disipacionu nejednakost koja vazi u mehaničkoj teoriji

$$\rho \dot{\psi} - T : D = -\delta \leq 0,$$

gde $\psi = e - \theta_0 s$ predstavlja slobodnu unutrašnju energiju, a $\delta \geq 0$ disipaciju. Ovaj zakon govori da promena slobodne (ukupna slobodna energija se označava sa $\mathcal{F}(\mathcal{P}_t)$) i kinetičke energije neće biti jednak spoljašnjoj snazi, nego će doći do disipacije, što zapisujemo sa

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}_t) = \mathcal{W}(\mathcal{P}_t) - \overline{(\mathcal{F}(\mathcal{P}_t) + \dot{\mathcal{K}}(\mathcal{P}_t))} \geq 0, \quad \mathcal{D}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \delta dx, \quad \mathcal{F}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \psi dx.$$

Napomena. Kako će u ovoj disertaciji akcenat biti stavljen na opisivanje protoka fluida i jednačine će biti date u prostornoj konfiguraciji, nećemo navoditi prethodno date zakone balansa u referentnoj (Lagranžovoj) konfiguraciji. Izvođenje se može pronaći u [28, 50]. Napomenimo da se prilikom prevodenja iz jedne u drugu konfiguraciju koristi veza $S = (\det F)TF^{-T}$, pri čemu S predstavlja napon po jedinici površine u referentnom telu B i naziva se Piola-Kirhofov tenzor napona.

1.4. Konstitutivne jednačine

Zakon održanja mase, kao i zakoni balansa količine kretanja i momenta količine kretanja ne prave razliku između tipova materijala od kojih je telo sačinjeno i kao takvi nisu dovoljni da u potpunosti opišu ponašanje nekog tela. Za to služe konstitutivne jednačine koje treba da budu invarijantne u odnosu na promenu sistema referencije (fizičke osobine materijala i njegovo ponašanje ne zavise od posmatrača) i da budu konzistentne sa disipacijonom nejednakostju, jer samo takve imaju fizičkog smisla ([50]). Jednačine koje određuju termodinamički proces (zakoni balansa mase, količine kretanja, momenta količine kretanja i energije), zajedno sa konstitutivnim jednačinama daju zatvoren sistem evolucionih jednačina.

DEFINICIJA 1.5 (Glava 3 u [34]). *Termodinamički proces je*

- (i) *adijabatski* ako su topotni protok i gustina zapreminskog topotnog doprinosa jednaki nuli ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$ i $q = 0$). U tom slučaju kažemo da materijal ne provodi topotu.
- (ii) *izoterman* ako je apsolutna temperatura θ konstantna. Svi izotermni procesi su adijabatski.
- (iii) *izentropski* ako je specifična entropija s konstantna, tj. postoji funkcija $\tilde{s} : B \rightarrow \mathbb{R}$ takva da važi

$$s(x, t) = \tilde{s}(X), \quad x = \chi(X, t).$$

Opšti oblik konstitutivnih jednačina je dat sa

$$\Phi(X, t) = \hat{\Phi}(\Lambda(X, t), X). \tag{1.8}$$

Na taj način jedno polje (u ovom slučaju Φ) predstavljamo preko drugog (Λ). Ukoliko relacija (1.8) ne zavisi od materijalne tačke X , kažemo da je telo homogeno.

U većini slučajeva dva posmatrača neće zabeležiti isto kretanje nekog tela. Prelazak sa jednog na drugog posmatrača je preslikavanje $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ koje se za svako t definiše preko rotacije i translacije posmatranog prostora,

$$x^* = y(t) + Q(t)x,$$

pri čemu je sa $Q(t)$ označena rotacija⁵, a $y(t)$ predstavlja neku tačku u prostoru.

PRIMER 1.2. Kao jedan primer navodimo Galilejeve transformacije koje $x \in \mathbb{R}^3$ preslikavaju u

$$x^* = Qx + ut + \text{const},$$

gde $Q(t) \equiv Q$, $QQ^T = I$ i $u \in \mathbb{R}^3$. ■

⁵Rotacija R je ortogonalna transformacija takva da $RR^T = \mathbf{1}$ i $\det R = 1$.

Jedan od osnovnih postulata u mehanici je da konstitutivne jednačine ne zavise od posmatrača (kažemo još i da su invarijantne u odnosu na promenu sistema referencije), što se može zapisati na sledeći način:

$$\text{Ako } \Phi = \hat{\Phi}(\Lambda) \quad \text{tada } \Phi^* = \hat{\Phi}(\Lambda^*).$$

DEFINICIJA 1.6. (i) Materijalne tačke, materijalni vektori i skalarna polja su invarijantni u odnosu na promenu posmatrača. Na primer, $\rho^* = \rho$.

(ii) Vektorsko polje \mathbf{g} je indiferentno u odnosu na promenu posmatrača ako važi

$$\mathbf{g}^* = Q\mathbf{g}.$$

(iii) Tenzor G je indiferentan u odnosu na promenu posmatrača ako za bilo koja dva vektorska polja \mathbf{g} i \mathbf{h} indiferentna u odnosu na promenu posmatrača važi

$$\text{iz } \mathbf{h} = G\mathbf{g} \quad \text{sledi} \quad \mathbf{h}^* = G^*\mathbf{g}^*.$$

$$\text{Tada } G^* = QGQ^T.$$

Napomena. Može se pokazati da je Košijev tenzor napona indiferentan u odnosu na promenu posmatrača, tj. važi $T^* = QTQ^T$. Indiferentnost Košijevog tenzora napona je posledica zahteva da fizički zakoni budu nezavisni od posmatrača (za detalje videti [50]).

1.5. Zakoni balansa na udarnom talasu

Prilikom modeliranja kretanja nekog tela (ili fluida) mora se uzeti u obzir da je moguće da, uprkos tome što je kretanje neprekidno, neka veličina (gustina, brzina, tenzor deformacije, Košijev tenzor napona,...) razvije prekid na nekoj površi. Može da dođe do pojave udarnih talasa, koji će biti veoma značajni u ovom radu. Na primer, može se desiti da u slučaju kontakta dva različita materijala (npr. voda i vazduh) gustina razvije prekid na granici [106]. U takvim slučajevima zakoni balansa se moraju modifikovati. Naime, van prekida će važiti zakoni balansa za glatko kretanje koji su prethodno navedeni, dok se na prekidnoj površi moraju definisati odgovarajući zakoni balansa. Zakoni balansa na udarnom talasu se nazivaju Rankin-Igonoovi uslovi.

DEFINICIJA 1.7. Udarni talas je glatka orijentisana površ $\mathcal{C}(t)$, sa granicom, kroz B koja zadovoljava uslove

1. $\mathcal{C}(t)$ razdvaja referentno telo B na oblasti $\mathcal{B}^l(t)$ i $\mathcal{B}^r(t)$ takve da

$$B(t) = \mathcal{B}^l(t) \cup \mathcal{B}^r(t), \quad \mathcal{C}(t) = \mathcal{B}^l(t) \cap \mathcal{B}^r(t);$$

2. preslikavanje χ je neprekidno na $\mathcal{C}(t)$;
3. brzina i deformacioni gradijent imaju prekid na $\mathcal{C}(t)$, a neprekidni su van udarnog talasa.

Skok veličine φ na udarnom talasu ćemo označavati sa $[\varphi] = \varphi^r - \varphi^l$ ako sledeći limesi postoje

$$\varphi^r = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x + h\mathbf{n}(x, t), t), \quad \varphi^l = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x - h\mathbf{n}(x, t), t),$$

pri čemu je sa \mathbf{n} označen jedinični vektor normale na $\mathcal{C}(t)$ orijentisan u pravcu $\mathcal{B}^r(t)$.

Kako bismo definisali zakone balansa na udarnom talasu koristimo Ojlerov oblik transportne relacije koja uopštava Rejnoldsovou relaciju datu sa (1.2),

$$\overline{\int_{\mathcal{P}_t} \varphi dx} = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}) dx - \int_{\mathcal{P}_t \cap \mathcal{C}(t)} [\varphi(c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})] ds,$$

pri čemu je sa $c = c(x, t)$ data brzina udarnog talasa $\mathcal{C}(t)$ u pravcu vektora normale \mathbf{n} .

Zakoni balansa mase, količine kretanja i energije na udarnom talasu u prostornoj konfiguraciji su redom dati sa

$$\begin{aligned} [\rho(c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})] &= 0 \\ [\rho(c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}] &= -[T]\mathbf{n} \\ [\rho(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2)(c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})] &= -[T\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{q}] \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Izvođenje uslova (1.9), kao i analogni uslovi u materijalnoj konfiguraciji se mogu naći u [50].

1.6. Modeliranje protoka fluida

U mehanici neprekidnih sredina se pretpostavlja da fluid u vremenu t u potpunosti karakterišu njegova gustina $\rho = \rho(x, t) \geq 0$ i apsolutna temperatura $\theta = \theta(x, t) > 0$ i da je njegovo kretanje određeno poljem brzine $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$. Sve ostale promenljive, kao što su termodinamičke funkcije: pritisak p , specifična unutrašnja energija e i specifična entropija s se opisuju pomoću ρ i θ i konstitutivnih relacija⁶. Kao što je ranije rečeno, za opis kretanja fluida se po pravilu koristi Ojlerov pristup (prostorna konfiguracija). Fluide razlikujemo od drugih materijala po obliku Košijevog tenzora napona

$$T = S_v - p\mathbf{1},$$

pri čemu S_v predstavlja viskozni tenzor napona.

Viskoznost je mera fluidnog otpora slobodnom tečenju. To je otpor kojim se slojevi fluida suprostavljanju relativnom kretanju jednih u odnosu na druge. Stišljivost je osobina fluida da pri promeni temperature i pritiska menja zapreminu. Svi fluidi u prirodi (kao i materijali) do neke mere ispoljavaju viskoznost i provode toplotu. Međutim, neke fluide možemo klasifikovati kao elastične koji ne provode toplotu, a to znači da su viskoznost i provodljivost toplote zanemarljivi. U tom slučaju se Košijev tenzor napona svodi na sferni tenzor $T = -p(\rho, \theta)\mathbf{1}$, gde p predstavlja hidrostatički pritisak.

Pritisak p i specifična unutrašnja energija e zadovoljavaju Maksvelovu relaciju

$$\frac{\partial e(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^2} \left(p(\rho, \theta) - \theta \frac{\partial p(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right), \quad (1.10)$$

koja je ekvivalentna Gibsovoj relaciji (1.6). Naime, (1.6) se može zapisati na sledeći način

$$\theta \frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{\partial e}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial s}{\partial \rho} = \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} p.$$

Diferenciranjem prve jednačine po ρ i druge po θ , a zatim kombinovanjem dve jednačine se dobija relacija

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

iz koje sledi (1.10).

⁶Moguće je da θ i s zamene uloge. U tom slučaju prepostavljamo da trojka $\{\rho, s, \mathbf{v}\}$ karakteriše kretanje fluida, a θ je funkcija od ρ i s . Međutim, tada ne postoji fizička rešenja sa prekidima.

PRIMER 1.3. U slučaju kada je posmatrani fluid jednoatomski gas veza između p i e je data sa

$$p(\rho, \theta) = \frac{2}{3} \rho e(\rho, \theta). \quad (1.11)$$

Korišćenjem relacije (1.10) može se pokazati da (1.11) važi ako i samo ako postoji funkcija h takva da

$$p(\rho, \theta) = \theta^{\frac{5}{2}} h\left(\frac{\rho}{\theta^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (1.12)$$

Za linearnu funkciju h dobijamo $p = R\rho\theta$, gde je sa $R > 0$ označena univerzalna gasna konstanta. Formula (1.12) se može primeniti i u slučaju nekih realnih gasova (videti [46]). ■

Višedimenzionalni protok stišljivog, neviskoznog fluida koji ne provodi (ili slabo provodi) toplotu se opisuje Ojlerovim jednačinama iz gasne dinamike

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \operatorname{grad} p(\rho, \theta) &= 0 \\ \partial_t \left(\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + e(\rho, \theta) \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + e(\rho, \theta) \right) + p(\rho, \theta) \mathbf{v} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ovde je Košijev tenzor napona dat sa $T = -p(\rho, \theta)\mathbf{1}$, a izraz $E = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \rho e$ predstavlja gustinu energije. Zbog pretpostavke da fluid ne provodi ili slabo provodi toplotu, toplotni fluks se može zanemariti (tj. proces je adijabatski $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, $q = 0$). Takođe, prepostavljamo da nema uticaja zapreminskih sila, tj. $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Model (1.13) se može dodatno uprostiti. Ukoliko je termodinamički proces izoterman ili izentropski, strujanje fluida će biti u potpunosti opisano zakonima održanja mase i količine kretanja, kao i konstitutivnim relacijama. U takvim situacijama prepostavljamo da se sve promene specifične unutrašnje energije koje se manifestuju kroz promenu temperature ili specifične entropije mogu zanemariti. Glatki izentropski (ili izotermni) procesi će automatski zadovoljavati zakon održanja energije. U tom slučaju će pritisak zavisiti samo od gustine, tj. važiće $p = p(\rho)$. Napomenimo da, iako uprošćen takav model će matematički biti dobro postavljen i moći će da dovoljno dobro opiše veliki broj fizičkih procesa.

1.6.1. Jednodimenzionalni sistemi gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom

U slučaju kada se promene u kretanju fluida duž dva pravca mogu zanemariti, protok fluida opisuјemo jednodimenzionalnim zakonima održanja. Jednodimenzionalni izentropski ili izotermni sistem gasne dinamike kod koga je zanemaren uticaj zapreminskih sila je dat sa

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0,$$

gde su sa $\rho > 0$ i u označene gustina i brzina tog gasa. Nas će posebno interesovati sistemi gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom: model gasne dinamike bez pritiska, model za Čapliginov gas, kao i njegova uopštenja.

U višedimenzionalnom obliku sistem gasne dinamike bez pritiska ($p(\rho) = 0$) modelira nastanak velikih struktura u svemiru (videti [108]), dok se jednodimenzionalni oblik naziva i model lepljivih čestica, jer opisuje kretanje čestica koje se nakon sudara slepe i nastave da se kreću kao jedna, pritom zadovoljavajući zakon održanja mase i količine kretanja ([12]).

Nekada se verovalo da se širenje svemira usporava, pre svega zbog delovanja gravitacije. Merenjem udaljenosti između galaksija je uočeno da se nekada svemir širio sporije nego sada. Iako postoji nekoliko teorija, još uvek se ne zna šta tačno uzrokuje tu pojavu, ali je

novi misteriozni sastojak u svemiru dobio ime: tamna energija. Oko 68% svemira čini tamna energija, a 27% tamna materija ([114]).

Zanimljivo je da je 1917. godine Albert Ajnštajn⁷ uveo kosmološku konstantu kako bi mu omogućila da dobije stacionarno kosmološko rešenje (pretpostavlja se da je svemir statičan). Međutim, 1931. godine američki astronom Habl⁸ je dokazao da se svemir širi i to velikom brzinom, nakon čega se veliki broj naučnika okrenuo ka nestatičkim relativističkim modelima, a Ajnštajn odbacio svoju ideju o kosmološkoj konstanti nazvavši je najvećom greškom u svom životu. Ideja o kosmološkoj konstanti nikada do kraja nije odbačena i sa pojavom tamne energije se ispostavilo da Ajnštajn ipak na kraju nije bio potpuno u pravu. Naime, kasnije su naučnici iskoristili kosmološku konstantu da objasne tamnu energiju u svemiru, jer se ispostavilo da ona daje najprecizniju ocenu za vrednost tamne energije (videti [113, 115]).

Zbog toga se u poslednje vreme značajna pažnja posvećuje sistemima zakona održanja koji se mogu primeniti u kosmologiji.

Sistem zakona održanja

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x \left(\rho u^2 - \frac{C}{\rho^\alpha} \right) &= 0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

se koristi kao model za tamnu energiju u svemiru. To je model za stišljive fluide kod kojih je pritisak negativan i obrnuto proporcionalan gustini,

$$p(\rho) = -\frac{C}{\rho^\alpha}, \quad C > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

gde je sa $\rho > 0$ data gustina, a u predstavlja brzinu fluida. Postoji značajna razlika između modela (1.14) sa parametrom $\alpha \in (0, 1)$ i sa $\alpha = 1$. Kada je $\alpha = 1$, model se naziva Čapliginov gas, dok u suprotnom, za $\alpha \in (0, 1)$ dobijamo model za uopšteni Čapliginov gas. Kasnije ćemo pokazati da ta dva modela karakterišu različite osobine pa se analiza njihovih rešenja ne može objediniti.

Treba napomenuti da je Čapliginov model sa $\alpha = 1$ prvo korišćen u aerodinamici. Čapligin⁹ u [22] navodi taj model kao pogodan za opisivanje aerodinamičke sile na krilima aviona koja je normalna na smer kretanja vazduha. Tek kasnije su Čapliginov model i njegova uopštenja počela da se koriste u kosmologiji (videti rad [54] i literaturu navedenu u njemu). Polazi se od pretpostavke da je svemir koji prolazi kroz različite faze ispunjen Čapliginovim gasom. Prilikom prelaska iz jedne u drugu fazu, svemir prolazi kroz središnju fazu koja je mešavina kosmološke konstante i još nekih oblika materije. Modeli za Čapliginov gas opisuju tranziciju iz jedne u drugu fazu. To objašnjava pojavu uopštenih modela za Čapliginov gas koji zavise od konstante $\alpha \in (0, 1]$. Na primer, slučaj $\alpha = \frac{1}{3}$ odgovara evoluciji svemira kroz središnju fazu koja je mešavina kosmološke konstante i radijacije.

⁷Albert Einstein (1879–1955), teorijski fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku.

⁸Edwin Hubble (1889–1952), jedan od najznačajnijih astronomova u istoriji.

⁹Sergey Alexeyevich Chaplygin (1869–1942), ruski fizičar i matematičar.

Glava

2

Sadržaj

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Hiperboličnost i rešenja | 16 |
| 2.2 | Rimanove invarijante | 18 |
| 2.3 | Rankin-Igonoov uslov | 19 |
| 2.4 | Zaista nelinearni i linearno degenerisani sistemi | 21 |
| 2.5 | Entropija i fluks entropije | 22 |
| 2.6 | Jednačine gasne dinamike i osobine | 23 |
| 2.6.1 | Model za gasnu dinamiku bez pritiska | 25 |
| 2.6.2 | Model za Čapliginov gas i uopštenja | 26 |

Jednodimenzionalni hiperbolični sistemi zakona održanja

Zakone balansa oblika

$$\partial_t H(U(x, t), x, t) + \operatorname{div} G(U(x, t), x, t) = P(U(x, t), x, t), \quad U \in \mathbb{R}^n$$

definišemo u vremenu i prostoru dimenzije $k \in \mathbb{N}$ ($t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^k$), ali kada ih primenjujemo u mehanici neprekidnih sredina kretanje u prostoru opisuјemo u najviše tri dimenzije. Neke procese u prirodi možemo opisati zanemarujući promene u dve prostorne dimenzije (protok gasa kroz cev, vibraciju elastične žice i slično). U tim slučajevima pretpostavljamo da čestica ne menja pravac prilikom kretanja, što znači da se sredina može modelirati kao jednodimenzionalna. To je značajno, jer se sa povećanjem dimenzije problem značajno komplikuje, a teorija višedimenzionalnih sistema je još uvek velika nepoznanica (videti [6, 28, 65, 69, 107]). Pored toga, teorija jednodimenzionalnih sistema se uglavnom ne može primeniti na višedimenzionalne sisteme.

Jednodimenzionalni sistem zakona balansa dat je u obliku

$$\partial_t H(U(x, t), x, t) + \partial_x G(U(x, t), x, t) = P(U(x, t), x, t), \quad (2.1)$$

gde $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ i $G = (g_1, \dots, g_n)$, $H = (h_1, \dots, h_n)$, $P = (p_1, \dots, p_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Funkcija G se naziva fluks funkcija. Homogen sistem zakona balansa ($p_i(u(x, t)) = 0$ za svako $i = 1, \dots, n$) naziva se *sistem zakona održanja*. U nekim slučajevima on se može zapisati u kanoničkom obliku

$$\partial_t U(x, t) + \partial_x F(U(x, t)) = 0. \quad (2.2)$$

U slučaju kada je $n = 1$ posmatramo jedan skalarni zakon održanja. Skalarni zakoni održanja su značajni, ali se o njima dosta zna i u većini slučajeva se njihova analiza ne može uopštiti na sisteme.

2.1. Hiperboličnost i rešenja

Posebnu pažnju posvećujemo (strogom) hiperboličnim sistemima zakona održanja kod kojih se rešenje može predstaviti u obliku talasa i koje karakteriše konačna brzina prostiranja.

DEFINICIJA 2.1. *Sistem (2.2) je hiperboličan ako za svako $U \in \mathcal{O}$, gde je $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, Jakobijan matrica $DF(U)$ ima n realnih karakterističnih korena $\lambda_1(U) \leq \dots \leq \lambda_n(U)$ i n linearne nezavisne (desne) karakteristične vektore $r_1(U), \dots, r_n(U)$ takvih da*

$$DF(U)r_i(U) = \lambda_i(U)r_i(U), \quad i = 1, \dots, n.$$

i-ti karakteristični koren λ_i matrice $DF(U)$ naziva se još i i-ta karakteristična brzina sistema (2.2). Par (λ_i, r_i) čini i-to karakteristično polje (ili familiju).

DEFINICIJA 2.2. *Sistem (2.2) je strogo hiperboličan ako je hiperboličan i za svako $U \in \mathcal{O}$ Jakobijan matrica $DF(U)$ ima n različitih karakterističnih korena, tj.*

$$\lambda_1(U) < \dots < \lambda_n(U).$$

U nastavku će biti jasno zašto je značajno napraviti razliku između levih i desnih karakterističnih korena. Desni karakteristični koreni su dati u Definiciji 2.1 i predstavljaju vektore kolona, dok leve karakteristične korene označavamo sa $l_1(U), \dots, l_n(U)$. Oni predstavljaju vektore vrsta i zadovoljavaju uslov $l_i(U)DF(U) = \lambda_i(U)l_i(U)$, $i = 1, \dots, n$. U slučaju kada je sistem (2.2) strogo hiperboličan može se naći baza levih i desnih karakterističnih vektora koji se mogu normalizovati tako da važi

$$|r_i(U)| = 1, \quad l_i(U) r_j(U) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

To znači da se svaki vektor $V \in \mathbb{R}^n$ može zapisati kao linearna kombinacija vektora baze r_i

$$V = \sum_{i=1}^n (l_i \cdot V) r_i.$$

Koristeći prethodno navedena svojstva levih i desnih karakterističnih vektora, može se pokazati (videti [28]) da ako postoje j, k , $j \neq k$ takvi da $\lambda_j(U) = \lambda_k(U)$, tada

$$D\lambda_j(U) r_k(U) = D\lambda_k(U) r_j(U) = 0. \tag{2.3}$$

Sistemi zakona održanja opisuju fizičke procese, pa je logično očekivati sisteme u kojima jednačine imaju nelinearni oblik. Njihova osnovna karakteristika je da čak i sa glatkim početnim uslovom rešenje problema može da razvije prekide u konačnom vremenu, što dovodi do formiranja udarnog talasa.

Glatko rešenje sistema (2.2) je svaka neprekidno-diferencijabilna funkcija $U = U(x, t)$ koja zadovoljava (2.2) u svakoj tački domena. Činjenica da zbog specifičnih osobina sistema zakona održanja dolazi do pojave prekida u rešenju nam govori da ćemo rešenje morati da potražimo u nekom prostoru funkcija koje nisu neprekidno-diferencijabilne (na primer u prostoru ograničenih merljivih funkcija L^∞).

U svim tačkama u kojima je funkcija U neprekidno-diferencijabilna sistem (2.2) se može zapisati u ekvivalentnoj, kvazilinearnoj formi $U_t + DF(U)U_x = 0$. U suprotnom, proizvod $DF(U)U_x$ nije dobro definisan i kako bismo dobili globalno rešenje moramo da radimo unutar klase funkcija sa prekidima interpretirajući sistem u distributivnom smislu.

DEFINICIJA 2.3. Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatko vektorsko polje.

- Merljiva funkcija $U = U(x, t)$ definisana na otvorenom skupu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sa vrednostima u \mathbb{R}^n je rešenje u distributivnom smislu sistema zakona održanja $U_t + F(U)_x = 0$ ako

$$\iint_{\mathcal{D}} (U\varphi_t + F(U)\varphi_x) dxdt = 0$$

važi za sve C^1 -funkcije $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa kompaktnim nosačem.

- Kažemo da je funkcija $U : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ rešenje u distributivnom smislu početnog problema

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U(x, 0) = \bar{U}(x), \quad (2.4)$$

gde $\bar{U} \in \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, ako

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (U\varphi_t + F(U)\varphi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(x)\varphi(x, 0) dx = 0$$

važi za sve C^1 -funkcije $\varphi : \mathbb{R} \times (-\infty, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa kompaktnim nosačem.

DEFINICIJA 2.4. Funkcija $U : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je slabo rešenje početnog problema (2.4) ako je neprekidna kao funkcija koja slika $[0, T]$ u prostor \mathbb{L}_{loc}^1 , zadovoljava početni uslov i restrikcija funkcije U na $\mathbb{R} \times (0, T)$ je rešenje u distributivnom smislu sistema (2.2).

Napomena. Može se pokazati da je svako neprekidno-diferencijabilno rešenje takođe rešenje u distributivnom smislu, a svako rešenje u distributivnom smislu je slabo rešenje. Obrnuto ne važi.

Dok god su prisutni prekidi u rešenju početnog problema, slaba rešenja prethodno definisana nisu dovoljna da daju jedinstveno rešenje i obično može da se pronađe čitava familija slabih rešenja. Da bi se došlo do jedinstvenog rešenja moraju se uvesti dodatni uslovi dopustivosti koji će da isključe nedopustiva (nefizička) slaba rešenja. Ti uslovi vrlo često imaju potporu u fizici, te se kao jedan od najvažnijih pojavljuje entropijski uslov koji predstavlja manifestaciju Drugog zakona termodinamike ili nekog drugog fizičkog zakona.

Sistem od n zakona održanja ima najviše n karakteristika koje povezujemo sa klasičnim rešenjem U .

DEFINICIJA 2.5. i -ta karakteristika sistema (2.2) je C^1 -funkcija $x = x(t)$ koja predstavlja integralnu krivu ODJ

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(U(x, t)).$$

Talasi se prostiru duž karakteristika što objašnjava zašto pojava višestrukih karakterističnih korena značajno komplikuje analizu sistema zakona održanja i utiče na ponašanje rešenja. Linearni sistemi zakona održanja imaju (najviše) n karakteristika sa konstantnim koeficijentima pravca koje nakon nekog vremena počinju da se sekut i dolazi do formiranja udarnog talasa. Već u slučaju nelinearnih¹ strogo hiperboličnih sistema rešenje se značajno komplikuje, a jedan od razloga je taj što karakteristični koreni, kao i karakteristični vektori zavise od rešenja U . U tom slučaju oblici različitih komponenti u rešenju variraju kroz vreme i dolazi do potencijalnog formiranja udarnog talasa. Takođe, nastaje netrivijalna interakcija između različitih talasa, snaga talasa koji ostvaruju interakciju se menja i dolazi do formiranja novih.

¹funkcija $F(U)$ je nelinearna

2.2. Rimanove invarijante

U teoriji jednodimenzionalnih sistema zakona održanja posebnu ulogu imaju skalarne funkcije koje se nazivaju Rimanove invarijante.

DEFINICIJA 2.6. *i–ta Rimanova invarijanta sistema $\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$ je skalarna funkcija w definisana na \mathcal{O} koja za svako $U \in \mathcal{O}$ zadovoljava jednačinu*

$$Dw(U) r_i(U) = 0.$$

Korisnost Rimanovih invarijanti naročito uočavamo u sistemima sa sledećom strukturuom.

DEFINICIJA 2.7. *Sistem (2.2) je snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti ako postoji n skalarnih funkcija (w_1, \dots, w_n) takvih da za svako $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, w_j predstavlja i–tu Rimanovu invarijantu sistema (2.2). To znači da i–tom karakterističnom vektoru odgovara tačno $(n - 1)$ –na i–ta Rimanova invarijanta.*

Imajući u vidu vezu između levih i desnih karakterističnih vektora, kao i gore navedene definicije dolazimo do sledećeg zaključka.

TEOREMA 2.1. *Funkcije (w_1, \dots, w_n) definisane na \mathcal{O} formiraju koordinatni sistem Rimanovih invarijanti za sistem $\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$ ako i samo ako*

$$Dw_i(U) r_j(U) \begin{cases} = 0, & \text{ako } i \neq j \\ \neq 0, & \text{ako } i = j, \end{cases} \quad (2.5)$$

tj. ako i samo ako je $Dw_i(U)$ levi karakteristični vektor $l_i(U)$ matrice $DF(U)$. To znači da je tangentna hiperravan na površi nivoa koje odgovaraju $w_i(U)$ u tački U generisana vektorima

$$r_1(U), \dots, r_{i-1}(U), r_{i+1}(U), \dots, r_n(U).$$

Hiperbolični sistemi koji se sastoje iz n , $n \geq 2$ zakona održanja će biti snabdeveni koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti samo ukoliko, u opštem slučaju predeterminisan sistem (2.5) koji se sastoji iz $n(n - 1)$ jednačine sa n nepoznatih, ima rešenje. To znači da je svaki hiperboličan sistem koji se sastoji iz dva zakona održanja snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti.

Napomena. Često je zgodno normalizovati desne karakteristične vektore r_1, \dots, r_n tako da važi $Dw_i(U) r_j(U) = \delta_{ij}$, iz čega se jasno vidi da je $\frac{\partial U}{\partial w_i} = r_i$. Koristeći izvod složene funkcije na proizvoljnoj funkciji φ dobijamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w_i} = D\varphi r_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Ukoliko sistem (2.2) posmatramo u kontekstu glatkog rešenja i ako prepostavimo da je on snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti, množeći ga sa leve strane sa Dw_i , $i = 1, \dots, n$ sistem (2.2) svodimo na ekvivalentnu, dijagonalnu formu

$$\partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

To znači da je za $i = 1, \dots, n$ funkcija w_i konstantna na svakoj i–toj karakteristici povezanoj sa glatkim rešenjem U sistema (2.2).

2.3. Rankin-Igonooov uslov

Posmatrajmo najpre po delovima konstantnu funkciju $U = U(x, t)$ koja ima prekid na pravoj $x = st$ i koja je oblika

$$U(x, t) = \begin{cases} U^+, & x > st \\ U^-, & x < st \end{cases}$$

za neko $U^-, U^+ \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$. Funkcija U će biti rešenje (2.2) ako i samo ako važi

$$s(U^+ - U^-) = F(U^+) - F(U^-). \quad (2.7)$$

Brzina udarnog talasa je označena sa s , a uslov (2.7) nazivamo *Rankin-Igonooov uslov*² (ili skraćeno RH uslov). U tom slučaju kažemo da je stanje U^- sa leve strane pridruženo stanju U^+ sa desne strane udarnim talasom brzine s .

Rankin-Igonooov uslov (2.7) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$(A(U^+, U^-) - sI)(U^+ - U^-) = 0,$$

gde je sa

$$A(U, V) = \int_0^1 DF(\tau U + (1 - \tau)V) d\tau \quad (2.8)$$

data *srednja matrica* sa karakterističnim korenima i levim i desnim karakterističnim vektorima koje redom označavamo sa $\lambda_i(U, V)$, $l_i(U, V)$ i $r_i(U, V)$. Rankin-Igonooov uslov (2.7) će biti zadovoljen ako i samo ako je s karakteristični koren, a $U^+ - U^-$ karakteristični vektor matrice $A(U^+, U^-)$.

Rankin-Igonooov uslov se može definisati i u opštem slučaju kada su levo i desno početno stanje glatka rešenja sistema (2.2).

TEOREMA 2.2. *Potreban i dovoljan uslov da funkcija*

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L(x, t), & x < c(t) \\ U_D(x, t), & x > c(t) \end{cases}, \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

gde su U_L i U_D C^1 -rešenja na njihovim domenima bude slabo rešenje početnog problema

$$U_t + (F(U))_x = 0, \quad U(x, 0) = \bar{U}(x) \quad (2.10)$$

je

$$c'(t) = \frac{F(U_D(c(t), t)) - F(U_L(c(t), t))}{U_D(c(t), t) - U_L(c(t), t)} =: \frac{[F(U)]_c}{[U]_c}. \quad (2.11)$$

DOKAZ. Neka je funkcija (2.9) slabo rešenje problema (2.10). Tada za svako $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (U\varphi_t + F(U)\varphi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty U(x, 0)\varphi(x, 0) dx = 0.$$

²eng. *Rankine-Hugoniot condition*

Kako za svako φ takvo da $\text{supp } \varphi \subset \{(x, t) : x < c(t), t > 0\}$ i C^1 funkciju U_L važi

$$0 = \iint (U_L \varphi_t + F(U_L) \varphi_x) dx dt = - \iint ((U_L)_t + (F(U_L))_x) \varphi dx dt,$$

zaključujemo da $(U_L)_t + (F(U_L))_x = 0$ za sve $x < c(t)$ i $t > 0$, a kako je test funkcija φ proizvoljna sledi

$$(U_L)_t + (F(U_L))_x = 0.$$

Slično, zaključujemo da $(U_D)_t + (F(U_D))_x = 0$.

Dalje,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (U \varphi_t + F(U) \varphi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty U(x, 0) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{c(t)} (U_L \varphi_t + F(U_L) \varphi_x) dx dt + \int_0^\infty \int_{c(t)}^\infty (U_D \varphi_t + F(U_D) \varphi_x) dx dt \\ & \quad + \int_{-\infty}^\infty \bar{U}(x) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Koristeći formulu

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{c(t)} U_L \varphi dx = c'(t) U_L(c(t), t) \varphi(c(t), t) + \int_{-\infty}^{c(t)} ((U_L)_t \varphi + U_L \varphi_t) dx$$

možemo da izračunamo integrale u gornjem izrazu. Može se pokazati da važi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{c(t)} (U_L \varphi_t + F(U_L) \varphi_x) dx dt &= \int_0^\infty \left(F(U_L(c(t), t)) - c'(t) U_L(c(t), t) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & \quad + \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{c(t)} U_L \varphi dx dt \\ \int_0^\infty \int_{c(t)}^\infty (U_D \varphi_t + F(U_D) \varphi_x) dx dt &= - \int_0^\infty \left(F(U_D(c(t), t)) - c'(t) U_D(c(t), t) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & \quad + \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_{c(t)}^\infty U_D \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Zamenom dva integrala u izraz (2.12) dobijamo

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(F(U_L(c(t), t)) - F(U_D(c(t), t)) - (U_L(c(t), t) - U_D(c(t), t)) c'(t) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & \quad + \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^\infty U \varphi dx dt + \int_{-\infty}^\infty \bar{U}(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \\ & \int_{-\infty}^\infty U(x, t) \varphi(x, t) dx \Big|_{t=0}^{t=\infty} = - \int_{-\infty}^\infty \bar{U}(x) \varphi(x, 0) dx, \end{aligned}$$

što je tačno ako važi (2.11). \square

Primetite da Teorema 2.2 ima smisla samo ako funkcija $U(x, t)$ ima prekid prvog reda na krivoj $x = c(t)$, tj. ako sledeći limesi postoje

$$U^+(t) := \lim_{x \rightarrow c(t)^+} U(x, t), \quad U^-(t) := \lim_{x \rightarrow c(t)^-} U(x, t). \tag{2.13}$$

U slučaju kada bar jedna od tih graničnih vrednosti ne postoji dolazi do pojave singularnih (neograničenih) rešenja koje ćemo analizirati kasnije.

Može se pokazati da će po delovima Lipšic-neprekidna funkcija koja ima konačno mnogo prekida na krivam oblika $x = \gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ biti rešenje sistema zakona održanja ako skoro sigurno tačkasto zadovoljava odgovarajući kvazilinearni sistem i Rankin-Igonove uslove na svakoj krivoj prekida.

TEOREMA 2.3. *Neka je $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup i neka je data merljiva i ograničena funkcija $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Pretpostavimo da postoji konačno mnogo tačaka $P_i = (t_i, x_i)$, $i = 1, \dots, N$ i konačno mnogo disjunktnih Lipšic-neprekidnih krivih $\gamma_k : (a_k, b_k) \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, M$ takvih da važi:*

1. Za svaku tačku $P = (x, t)$, različitu od P_i koja ne leži na krivoj γ_j postoji okolina V u kojoj je funkcija U Lipšic-neprekidna.
2. Svaka tačka $Q = (\gamma_j(t), t)$, za sve $j = 1, \dots, M$ ima okolinu V u kojoj su restrikcije funkcije U na podskupove $V^+ = V \cap \{x > \gamma_j(t)\}$, $V^- = V \cap \{x < \gamma_j(t)\}$ obe Lipšic-neprekidne.

Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

- i) U je rešenje u distributivnom smislu sistema (2.2).
- ii) Funkcija U zadovoljava kvazilinearni sistem $U_t + DF(U)U_x = 0$ u skoro svakoj tački (x, t) . Za svako $j = 1, \dots, M$ i za skoro svako $t \in (a_j, b_j)$ važi

$$\gamma'_j(t) (U_j^+(t) - U_j^-(t)) = F(U_j^+(t)) - F(U_j^-(t)). \quad (2.14)$$

Ako je uslov (2.14) zadovoljen tada su krive γ_j neprekidno-diferencijabilne.

Dokaz Teoreme 2.3 videti u [14].

2.4. Zaista nelinearni i linearno degenerisani sistemi

Većina fizičkih sistema poseduje jedno ili nekoliko linearно degenerisanih polja, dok su ostala zaista nelinearna ([94]).

DEFINICIJA 2.8. *Kažemo da je za $i \in \{1, \dots, n\}$ i -ta karakteristična familija hiperboličnog sistema (2.2)*

- zaista nelinearna ako za svako $U \in \mathcal{O}$ važi

$$D\lambda_i(U)r_i(U) \neq 0, \quad (2.15)$$

- linearno degenerisana ako za svako $U \in \mathcal{O}$ važi

$$D\lambda_i(U)r_i(U) = 0. \quad (2.16)$$

Sistem (2.2) je zaista nelinearan ako je svaka karakteristična familija tog sistema zaista nelinearna.

Napomena. Primetite da uslov $D\lambda_i(U)r_i(U) = 0$ iz Definicije 2.8 znači da je i -ta karakteristična brzina λ_i konstantna duž integralnih krivih vektorskog polja koji odgovara r_i . Uslov $D\lambda_i(U)r_i(U) \neq 0$ znači da važi ili $D\lambda_i(U)r_i(U) > 0$ ili $D\lambda_i(U)r_i(U) < 0$. Tim uslovom se isključuje mogućnost da λ_i delimično raste, a delimično opada duž odgovarajućih integralnih krivih.

U slučaju kada je sistem (2.2) snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti uslove (2.15) i (2.16) zapisujemo u ekvivalentnim oblicima

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} \neq 0, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} = 0.$$

Stanje linearne degeneracije može biti posledica gubitka osobine stroge hiperboličnosti.

TEOREMA 2.4. *Ako su u hiperboličnom sistemu (2.2) i-ti i k-ti karakteristični koren jednaki, tj. važi*

$$\lambda_i(U) = \lambda_k(U), \quad U \in \mathcal{O},$$

onda su i-ta i k-ta karakteristična familija linearno degenerisane.

Obrnut smer Teoreme 2.4 ne mora da važi, što ćemo kasnije pokazati na primeru modela za Čapliginov gas.

Pretpostavke o zaista nelinearnim i linearno degenerisanim sistemima su značajne, jer će nam omogućiti da rešenje predstavimo u obliku elementarnih talasa (Glava 3).

2.5. Entropija i fluks entropije

Sistemu zakona održanja (2.2) može se pridružiti zakon održanja oblika

$$\partial_t \eta(U(x, t)) + \partial_x Q(U(x, t)) = 0 \tag{2.17}$$

ako važi

$$DQ(U(x, t)) = D\eta(U(x, t))DF(U(x, t)), \quad U \in \mathcal{O}.$$

U tom slučaju skalarnu funkciju $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo *entropijom* sistema (2.2), dok skalarna funkcija $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ predstavlja *fluks entropije* koji odgovara η . Kažemo da funkcije η i Q čine entropijski par (η, Q) za sistem (2.2). Pridružen zakon održanja (2.17) je veoma blizak Drugom zakonu termodinamike (ili zakonu održanja energije) i njegov značaj leži u činjenici da je svako klasično rešenje sistema zakona održanja (2.2) automatski i klasično rešenje pridruženog sistema (2.17).

Napomena. Treba napomenuti da specifična unutrašnja entropija s (kažemo i fizička entropija sistema) definisana u Glavi 1 nije isto što i (matematička) entropija η sistema prethodno definisana.

Dodatni *uslov integrabilnosti* koji entropija η i fluks entropije Q treba da zadovolje je

$$D^2\eta(U(x, t))DF(U(x, t)) = DF(U(x, t))^T D^2\eta(U(x, t)), \quad U \in \mathcal{O}. \tag{2.18}$$

Množeći uslov (2.18) sa leve strane sa $r_j(U(x, t))^T$, a sa desne strane sa $r_k(U(x, t))$, $j \neq k$ svodimo ga na ekvivalentan oblik

$$r_j(U(x, t))^T D^2\eta(U(x, t))r_k(U(x, t)) = 0, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k. \tag{2.19}$$

Značajnu ulogu igraju konveksne entropije, jer je poznato da ukoliko je sistem zakona održanja u kanoničkoj formi snabdeven konveksnom entropijom on mora biti hiperboličan. Kažemo da je entropija konveksna ako je Hesijan matrica $D^2\eta$ pozitivno definitna, tj.

$$r_j(U)^T D^2\eta(U)r_j(U) > 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.20}$$

Napomena. U slučaju kada sistem zakona održanja (ili balansa) nije dat u kanoničkom obliku (videti (2.1)), problem traženja entropije η svodi se na problem traženja matrice B za koju važi

$$D\eta(U(x, t)) = B(U(x, t))^T DH(U(x, t)).$$

Jasno, ukoliko je sistem dat u kanoničkoj formi imamo $D\eta = B^T$, jer $DH = I$.

Uslov (2.18) je dat u obliku sistema koji se sastoji iz $\frac{1}{2}n(n - 1)$ parcijalnih diferencijalnih jednačina sa samo jednom nepoznatom η . U slučaju kada je $n = 2$ uslov integrabilnosti (2.18) se svodi na jednu linearu hiperboličnu jednačinu drugog reda sa jednom nepoznatom čije rešavanje dovodi do velike familije netrivijalnih entropijskih parova koji se pridružuju datom sistemu (videti [64]). Inače, ako je $n \geq 3$, pojavljuje se problem prederminisanosti sistema i u tom slučaju može da se desi da sistem ne poseduje čak ni trivijalnu entropiju. Međutim, kod sistema koji imaju poreklo u mehanici neprekidnih sredina može se pronaći bar jedna entropija koja je strogo konveksna i tu značajnu ulogu mogu da imaju Rimanove invarijante. Naime, kada je sistem (2.2) snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti (w_1, \dots, w_n) problem prederminisanosti sistema nestaje. Zbog toga je zgodno tražiti η i Q kao funkcije od Rimanovih invarijanti. Koristeći (2.6) i množeći $DQ(U) = D\eta(U)DF(U)$ sa desne strane sa $r_j(U)$ dobijamo

$$\frac{\partial Q}{\partial w_j} = \lambda_j \frac{\partial \eta}{\partial w_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Na sličan način se odgovarajući uslov integrabilnosti (2.18) svodi na

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial w_j \partial w_k} + g_{jk} \frac{\partial \eta}{\partial w_j} + g_{kj} \frac{\partial \eta}{\partial w_k} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k, \quad (2.21)$$

pri čemu je funkcija g_{jk} definisana sa

$$g_{jk} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \frac{\partial \lambda_j}{\partial w_k}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k.$$

g_{jk} se može definisati čak i kada je $\lambda_j = \lambda_k$, jer u tom slučaju važi $\frac{\partial \lambda_j}{\partial w_k} = 0$, što se vidi iz (2.3). Koristeći uslov (2.19), može se pokazati da važi

$$g_{jk} = r_j^T D^2 w_j r_k, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k,$$

kao i da Rimanove invarijante uslov konveksnosti entropije (2.20) svode na

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial w_j^2} + \sum_{i=1}^n r_j^T D^2 w_i r_j \frac{\partial \eta}{\partial w_i} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Iako na prvi pogled izgleda da je sistem (2.21) predeterminisan, jer se sastoji iz $\frac{1}{2}n(n - 1)$ jednačine sa jednom promenljivom, ispostaviće se da zbog svojstava Rimanovih invarijanti to ipak nije slučaj (za detalje videti [28]).

2.6. Jednačine gasne dinamike i osobine

Jednodimenzionalni Ojlerov model iz gasne dinamike koji opisuje kretanje stišljivog, neviskoznog fluida koji slabo provodi toplotu i sastoji se iz jednačina održanja mase, količine

kretanja i energije je dat sa

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho, \theta)) &= 0 \\ \partial_t\left(\rho\left(\frac{1}{2}u^2 + e(\rho, \theta)\right)\right) + \partial_x\left(\rho u\left(\frac{1}{2}u^2 + e(\rho, \theta)\right) + up(\rho, \theta)\right) &= 0,\end{aligned}\tag{2.22}$$

pri čemu $\rho > 0$ predstavlja gustinu, u brzinu, $e > 0$ specifičnu unutrašnju energiju, p pritisak, $\theta > 0$ absolutnu temperaturu, dok $E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e$ predstavlja specifičnu ukupnu energiju koja je zbir kinetičke energije fluida i energije povezane sa brojem stepena slobode molekula gasa. Oblik funkcije $p = p(\rho, \theta)$ zavisi od gasa koji se posmatra, a tu zavisnost između termodinamičkih veličina dobijamo iz konstitutivnih relacija (videti Glavu 1). Ako je

$$e(\rho) = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad p = p(\rho) = C\rho^\gamma, \quad \gamma > 1,$$

sistem (2.22) opisuje ponašanje politropnog idealnog gasa³. Sa γ je označena adijabatska konstanta koja u klasičnoj kinetičkoj teoriji ima oblik $\gamma = 1 + \frac{2}{k}$, pri čemu k predstavlja broj stepeni slobode molekula gasa (broj nezavisnih promenljivih potrebnih da se opiše kretanje u trodimenzionalnom prostoru, tj. broj načina na koji molekul u gasnoj ravni može da se kreće, rotira ili vibrira). Na primer, atom ima tri stepena slobode, jer može da se kreće u svim pravcima u trodimenzionalnoj ravni, dok dvoatomski molekul dodatno može i da se rotira pa poseduje pet stepeni slobode (detaljnije videti u [111]).

Za glatka rešenja, treća jednačina u (2.22) se može zapisati na sledeći način

$$\partial_t s + u\partial_x s = 0,$$

pri čemu je sa s označena (fizička) entropija sistema, koja je konstantna na svakoj karakteristici sistema.

PRIMER 2.1. Ojlerov sistem (2.22) za politropan gas je strogo hiperboličan, jer su karakteristični koreni Jakobijan matrice dati sa

$$\lambda_1 = u - \sqrt{\gamma\rho^{-1}p}, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + \sqrt{\gamma\rho^{-1}p}.$$

Prva i treća karakteristična familija tog sistema su zaista nelinearne, dok je druga linearno degenerisana. ■

Ukoliko prepostavimo da je entropija s svuda konstantna, sistem (2.22) se pojednostavljuje. Jednodimenzionalni izentropski Ojlerov model iz gasne dinamike određen je zakonima održanja mase i količine kretanja

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) &= 0,\end{aligned}\tag{2.23}$$

pri čemu važi $p'(\rho) > 0$ i $\rho p''(\rho) + 2p'(\rho) > 0$. Te dve osobine garantuju strogu hiperboličnost sistema i konveksnost matematičke entropije. Za politropan gas kada važi $p(\rho) = C\rho^\gamma$, $\gamma > 1$, te osobine su zadovoljene. Podrazumeva se da je $\rho \geq 0$, jer predstavlja gustinu.

Napomena. Vodi se diskusija da li ima fizičkog smisla posmatrati slučaj $\gamma = 1$ kod politropnog gasa. Neki autori (na primer [58]) veruju da slučaj $\gamma \rightarrow 1$ ima fizičkog smisla, jer su tada jednačine izotermne gasne dinamike date sa (2.23) i $p(\rho) = C\rho$.

³Na primer, vazduh se modelira kao politropan gas sa $\gamma = 1.4$.

Karakteristika slabih rešenja je pojava vakuuma u rešenju u konačnom vremenu uprkos pretpostavci o pozitivnosti gustine ρ u početnom uslovu (videti [45]). Jedino što možemo da očekujemo je da za skoro sve (x, t) komponenta gustine ρ u slabom rešenju nenegativna, tj. da važi $\rho(x, t) \geq 0$.

Glatka rešenja sistema (2.23) zadovoljavaju i originalan Ojlerov sistem (2.22). Međutim, prilikom prelaska na slabu formulaciju gubi se jednakost u zakonu balansa energije, tj. dolazi do disipacije energije. Na taj način dobijamo još jedan uslov koji je vrlo značajan za proveru dopustivosti slabog rešenja. Na primer, to je uslov koji je omogućio eliminaciju oscilatornih slabih rešenja u Ojlerovom sistemu (videti [36, 37]). Tada gustina energije $E = \frac{1}{2}\rho u^2 + e(\rho)\rho$ igra ulogu matematičke entropije (imamo $\eta_e = E$), dok je odgovarajući fluks entropije dat sa $Q_e = Eu + p(\rho)u$. Par (η_e, Q_e) čini jedan (semi)-konveksan entropijski par za sistem (2.23).

Ako je $\rho > 0$, sistem (2.23) se može transformisati u kanonički oblik

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x q &= 0 \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{\rho} + p(\rho) \right) &= 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

gde je sa $q = \rho u$ označena gustina količine kretanja. Jakobijan matrica sistema $A(\rho, q)$ je data sa

$$A(\rho, q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{\rho^2} - p'(\rho) & \frac{2q}{\rho} \end{bmatrix},$$

dok su njeni karakteristični korenii

$$\lambda_1(\rho, q) = \frac{q}{\rho} - \sqrt{p'(\rho)}, \quad \lambda_2(\rho, q) = \frac{q}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)}.$$

Jasno je da važi $\lambda_1 < \lambda_2$, pa je sistem (2.23) strogo hiperboličan. Sa $c = \sqrt{p'(\rho)}$ je data brzina zvuka. Obe karakteristične familije ovog sistema su zaista nelinearne, tj. važi $D\lambda_i r_i > 0$, $i = 1, 2$, pri čemu su sa r_i označeni desni karakteristični vektori koji odgovaraju karakterističnim korenima λ_i , $i = 1, 2$ i dati su sa

$$r_1(\rho, q) = \left(-1, -\frac{q}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} \right)^T, \quad r_2(\rho, q) = \left(1, \frac{q}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} \right)^T.$$

Sistem (2.24) ima singularitet na pravoj $\rho = 0$ i tada dolazi do pojave vakuuma u rešenju (videti sistem (2.25) dole).

Napomena. Za sistem (2.23) kažemo da je Ojlerov, jer je dat u Ojlerovim koordinatama koje su prirodnije u analizi protoka fluida. Njemu odgovarajući oblik u Lagranžovim koordinatama se naziva “ p -sistem” i dat je sa

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x u &= 0 \\ \partial_t u + \partial_x p(v) &= 0, \end{aligned}$$

gde je sa u označena brzina gasa, a sa $v = \rho^{-1}$ njegova specifična zapremina. Detaljnija analiza p -sistema se može pronaći u [15, 94].

2.6.1. Model za gasnu dinamiku bez pritiska

Neka je dat izentropski model iz gasne dinamike bez pritiska (PGD) koji se dobija iz Ojlerovog sistema (2.23) uzimanjem $p(\rho) = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0 \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) &= 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ovo je slabo hiperboličan sistem sa jednakim karakterističnim korenima $\lambda_i(\rho, u) = u$, $i = 1, 2$. To znači da su obe karakteristične familije tog sistema linearno degenerisane, što je posledica gubitka osobine stroge hiperboličnosti (videti Teoremu 2.4). Sistem (2.25) ćemo kasnije rešavati u originalnom obliku, tj. nećemo ga prebacivati u kanoničku formu, jer dolazi do pojave vakuuma u rešenju.

Napomena. Sistem (2.25) se može dobiti iz višedimenzionalnog sistema gasne dinamike bez pritiska

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= 0.\end{aligned}$$

Naime, radijalno simetrično rešenje zadovoljava sistem

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{n-1}{r} \rho u &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_r(\rho u^2) + \frac{n-1}{r} \rho u^2 &= 0.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Za glatka rešenja i sa smenom promenljivih $p = r^{n-1} \rho$, sistem (2.26) se može transformisati u jednodimenzionalni oblik (2.25), pri čemu je ρ zamenjeno sa p (za detalje videti [78]).

Sistem (2.25) poseduje entropiju ali ona nije strogo konveksna ([95]), što je tipično za sisteme koji nisu strogo hiperbolični. Entropija η i njoj odgovarajući fluks entropije Q koji imaju poreklo u zakonu održanja energije su dati sa

$$\eta(\rho, u) = \frac{1}{2} \rho u^2, \quad Q(\rho, u) = u \eta = \frac{1}{2} \rho u^3.$$

Dodatno, funkcije oblika

$$\eta(\rho, u) = \frac{1}{2} \rho u^n, \quad Q(\rho, u) = \frac{1}{2} \rho u^{n+1}, \quad n \text{ je parno}$$

predstavljaju semi-konveksan entropijski par za sistem (2.25) (Hesijan matrica $D^2\eta$ je pozitivno semi-definitna).

Neizentropski model iz gasne dinamike bez pritiska se sastoji iz zakona održanja mase i količine kretanja datih u (2.25) i zakona održanja energije

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + \partial_x \left(\rho u \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) \right) = 0.$$

Sistem je linearno degenerisan sa svim karakterističnim korenima jednakim u . Semi-konveksni entropijski parovi su oblika

$$\eta(\rho, u, e) = \rho(R(u) + S(e)), \quad Q(\rho, u, e) = \rho(R(u) + S(e)),$$

gde $R''(x) \geq 0$, $S'(x) \leq 0$ i $S''(x) \geq 0$ za svako x .

2.6.2. Model za Čapliginov gas i uopštenja

Model za uopšten Čapliginov gas

Posmatramo prvo izentropski model za uopšten Čapliginov gas

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x \left(\rho u^2 - \frac{C}{\rho^\alpha} \right) &= 0,\end{aligned}\tag{2.27}$$

gde $\alpha \in (0, 1)$. Sistem (2.27) karakteriše negativan pritisak koji je obrnuto proporcionalan gustini gasa ρ . Fizički domen za ovaj problem je $\{(\rho, u) | \rho > 0\}$, jer bi u suprotnom pritisak bio beskonačan u vakuumu. Zbog toga ne očekujemo pojavu vakuma u rešenju, pa sistem možemo posmatrati u kanoničkom obliku, što postižemo uvođenjem nove promenljive $q = \rho u$ koja predstavlja gustinu količine kretanja. Dakle, kanonički oblik sistema (2.27) je dat sa

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x q &= 0 \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Zbog jednostavnosti smo pretpostavili da je $C = 1$.

Jakobijan matrica sistema (2.28) je data sa

$$A(\rho, q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{\rho^2} + \alpha \rho^{-1-\alpha} & \frac{2q}{\rho} \end{bmatrix},$$

dok su karakteristični koreni matrice A dati sa

$$\lambda_1(\rho, q) = \frac{q}{\rho} - \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \lambda_2(\rho, q) = \frac{q}{\rho} + \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Jasno je da je $\lambda_1(\rho, q) < \lambda_2(\rho, q)$ odnosno sistem je strogo hiperboličan za $\alpha \in (0, 1)$. Odgovarajući desni karakteristični vektori dati su sa

$$r_1(\rho, q) = \left(-1, -\frac{q}{\rho} + \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right)^T, \quad r_2(\rho, q) = \left(1, \frac{q}{\rho} + \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right)^T,$$

dok su levi karakteristični vektori jednaki

$$l_1(\rho, q) = \left(-\frac{q}{\rho^2} - \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{3+\alpha}{2}}, \frac{1}{\rho} \right), \quad l_2(\rho, q) = \left(-\frac{q}{\rho^2} + \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{3+\alpha}{2}}, \frac{1}{\rho} \right).$$

Obe karakteristične familije su zaista nelinearne, jer

$$D\lambda_1(\rho, q) r_1(\rho, q) = D\lambda_2(\rho, q) r_2(\rho, q) = \sqrt{\alpha} \frac{1-\alpha}{2} \rho^{-\frac{3+\alpha}{2}} > 0,$$

Koristeći Teoremu 2.1 dobijamo dve Rimanove invarijante $v(\rho, q)$ i $w(\rho, q)$

$$v(\rho, q) = \frac{q}{\rho} + \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}, \quad w(\rho, q) = \frac{q}{\rho} - \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}. \quad (2.29)$$

Lako se pokazuje da važi $Dv = l_1$, $Dw = l_2$, pa iz Definicije 2.7 sledi da je $w(\rho, q)$ Rimanova invarijanta prve karakteristične familije, a $v(\rho, q)$ je Rimanova invarijanta druge karakteristične familije.

Jedan konveksni entropijski par za sistem (2.28) možemo dobiti koristeći specifičnu ukupnu energiju sistema, kao i u slučaju Ojlerovog sistema. Imamo

$$\eta(\rho, q) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho} + \frac{1}{1+\alpha} \rho^{-\alpha}, \quad Q(\rho, q) = \frac{1}{2} \frac{q^3}{\rho^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha} q \rho^{-(1+\alpha)}.$$

Međutim, sistem (2.28) poseduje beskonačno mnogo konveksnih entropijskih parova (η, Q) . Njih možemo naći iz uslova integrabilnosti (2.19) koji se svodi na parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\partial_{\rho\rho}\eta + \frac{2q}{\rho}\partial_{\rho q}\eta + \left(\frac{q^2}{\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho^{1+\alpha}} \right) \partial_{qq}\eta = 0,$$

koja se pomoću Rimanovih invarijanti v i w može svesti na oblik

$$(v - w)\partial_{vw}\eta = \frac{3 + \alpha}{2(1 + \alpha)}(\partial_v\eta - \partial_w\eta). \quad (2.30)$$

Koristeći metodu razdvajanja promenljivih $\eta(v, w) = f(v - w)g(v + w)$ dalje jednačinu (2.30) svodimo na oblik

$$\frac{g''(v + w)}{g(v + w)} = \frac{2B}{v - w} \frac{f'(v - w)}{f(v - w)} + \frac{f''(v - w)}{f(v - w)} = l \in \mathbb{R},$$

gde $B = \frac{3+\alpha}{2(1+\alpha)}$. Kako tražimo konveksnu entropiju, uzimamo $l > 0$. Tada

$$g(v + w) = C_1 e^{\sqrt{l}(v+w)} + C_1 e^{-\sqrt{l}(v+w)},$$

dok f zadovoljava jednačinu

$$f''(v - w) + \frac{2B}{v - w}f'(v - w) - lf(v - w) = 0. \quad (2.31)$$

Koristeći instrukcije iz [88], može se pokazati da rešenje te jednačine ima oblik

$$f(v - w) = (v - w)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \left(c_1 I_{\frac{1}{1+\alpha}}((v - w)\sqrt{l}) + c_2 K_{\frac{1}{1+\alpha}}((v - w)\sqrt{l}) \right), \quad (2.32)$$

gde $I_\nu(x)$ predstavlja modifikovanu Beselovu funkciju prve vrste, dok je sa $K_\nu(x)$ označena modifikovana Beselova funkcija druge vrste.

Napomena. Modifikovane Beselove funkcije prve i druge vrste su rešenja diferencijalne jednačine data u obliku alternativnog stepenog reda. Više o njihovom nastanku, osobinama i ponašanju se može pronaći u [110]. Sve osobine i relacije koje će biti korišćene u disertaciji će prethodno biti navedene.

Jednačina (2.31) pripada tipu

$$(a_2x + b_2)y''(x) + (a_1x + b_1)y'(x) + (a_0x + b_0)y(x) = 0, \quad x = v - w,$$

gde $a_2 = 1$, $b_2 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 2B$, $a_0 = -l$ i $b_0 = 0$, a njeno rešenje je dato u obliku $f(x) = e^{hx}J(a, b; \xi)$, gde $h = \sqrt{l}$, $a = B$, $b = 2B$ i $\xi = -2\sqrt{l}x$. Sa $J(a, b; x)$ se označava rešenje jednačine $xy''(x) + (b - x)y'(x) - ay(x) = 0$ i ono je dato sa

$$J(a, b; x) = \Phi(a, b; x) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}x^{-2\nu}\Phi(a - b + 1, 2 - b; x), \quad \nu = \frac{1}{1 + \alpha},$$

gde

$$\Phi(a, b; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad (a)_k := a(a + 1) \cdot \dots \cdot (a + k - 1), \quad (a)_0 = 1.$$

Dalje, kako je $a = \nu + \frac{1}{2}$ i $b = 2\nu + 1$, važi

$$\Phi(a, b; x) = \Gamma(1 + \nu)e^x \left(\frac{x}{2} \right)^{-\nu} I_\nu(x).$$

Koristeći identitete

$$\Gamma(2\nu) = \frac{2^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right), \quad K_\nu\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\Gamma(1 - \nu)\left(I_{-\nu}\left(\frac{x}{2}\right) - I_\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

kao i da važi

$$\Phi(a, b; x) = e^x \Phi(b - a, b; -x) = e^x \Phi(a, b; -x), \quad \text{jer } b - a = B = a$$

dobijamo rešenje u obliku (2.32).

Entropija η se preko originalnih promenljivih (ρ, q) može zapisati na sledeći način

$$\eta(\rho, q) = C_1 \eta_1(\rho, q) + C_2 \eta_2(\rho, q) + C_3 \eta_3(\rho, q) + C_4 \eta_4(\rho, q),$$

gde

$$\begin{aligned} \eta_1(\rho, q) &:= e^{\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right), \\ \eta_2(\rho, q) &:= e^{-\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \eta_3(\rho, q) &:= e^{\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right), \\ \eta_4(\rho, q) &:= e^{-\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\text{i } \lambda := \sqrt{l} > 0.$$

LEMA 2.1. *Entropije η_1 i η_2 date u (2.33) su strogo konveksne, dok η_3 i η_4 date u (2.34) nisu konveksne za svako $\lambda > 0$ i $0 < \alpha < 1$.*

DOKAZ. Da bismo dokazali da je entropija strogo konveksna koristićemo činjenicu da njena Hesijan matrica mora biti pozitivno definitna. Dovoljno je pokazati da su glavni minori Hesijan matrica $D^2\eta_1$ i $D^2\eta_2$ pozitivni (Teorema 7.10. u [102]). U dokazu ćemo koristiti sledeće relacije iz [110]

$$\begin{aligned} K'_\nu(z) &= -\frac{1}{2} (K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)), \quad -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) \\ K_\nu(z) &< K_\mu(z) \quad \text{za } \nu < \mu. \end{aligned}$$

Neka je $x(\rho) := \frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda$. Tada

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) &= 2\sqrt{\alpha} \lambda \rho^{-\frac{3+\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) + \frac{1}{2} \rho^{-1} K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)), \\ \frac{\partial}{\partial \rho} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) &= 2\sqrt{\alpha} \lambda \rho^{-\frac{3+\alpha}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) + \frac{1}{2} \alpha \rho^{-1} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)). \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \eta_1(\rho, q) &= e^{\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) (-2q\rho^{-1}\lambda + 1) + 2\sqrt{\alpha} \lambda \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \eta_1(\rho, q) &= 4\lambda^2 e^{\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{-\frac{5}{2}} \left(K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) \left(\frac{q^2}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^\alpha} \right) - 2\sqrt{\alpha} q \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right) \\ &> 4\lambda^2 e^{\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{-\frac{5}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \left(q\rho^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \geq 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial q \partial \rho} \eta_1(\rho, q) &= 4\lambda^2 e^{\frac{2q}{\rho} \lambda} \rho^{-\frac{5}{2}} \left(-q K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) + \sqrt{\alpha} \rho^{\frac{1-\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right) \end{aligned}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial q}\eta_1(\rho, q) = 2\lambda e^{\frac{2q}{\rho}\lambda} \rho^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)), \quad \frac{\partial^2}{\partial q^2}\eta_1(\rho, q) = 4\lambda^2 e^{\frac{2q}{\rho}\lambda} \rho^{-\frac{3}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)).$$

Dakle, determinanta Hesijan matrice $D^2\eta_1$ koja odgovara entropiji η_1 je jednaka

$$\begin{aligned} D_1 &:= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\eta_1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial q^2}\eta_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial q \partial \rho}\eta_1 \right)^2 \\ &= 16\alpha\lambda^4 e^{\frac{4q}{\rho}\lambda} \rho^{-4-\alpha} \left(\left(K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right)^2 - \left(K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{1+\alpha} > \frac{\alpha}{1+\alpha}$ za $\alpha \in (0, 1)$, lako se dobija da je $D_1 > 0$. Slično, dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\eta_2(\rho, q) &= 4\lambda^2 e^{-\frac{2q}{\rho}\lambda} \rho^{-\frac{5}{2}} \left(K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) \left(\frac{q^2}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^\alpha} \right) + 2\sqrt{\alpha}q\rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right) \\ &> 4\lambda^2 e^{-\frac{2q}{\rho}\lambda} \rho^{-\frac{5}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \left(q\rho^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\alpha}\rho^{-\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \geq 0, \\ D_2 &:= 16\alpha\lambda^4 e^{-\frac{4q}{\rho}\lambda} \rho^{-4-\alpha} \left(\left(K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right)^2 - \left(K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Hesijan matrica $D^2\eta_2$ je takođe pozitivno definitna, jer $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\eta_2(\rho, q) > 0$ i $D_2 > 0$, pa zaključujemo da je i η_2 konveksna funkcija.

Na sličan način pokazujemo da funkcije η_3 i η_4 nisu konveksne. Ovog puta koristimo relacije

$$\begin{aligned} I'_\nu(z) &= \frac{1}{2} \left(I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) \right), \quad \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z), \\ I_\nu(z) &> I_\mu(z) \quad \text{za } \nu < \mu. \end{aligned}$$

Determinanta Hesijan matrice funkcije η_3 je jednaka

$$D_3 := 16\alpha\lambda^4 e^{\frac{4q}{\rho}\lambda} \rho^{-4-\alpha} \left(\left(I_{\frac{1}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right)^2 - \left(I_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x(\rho)) \right)^2 \right).$$

Kako je $D_3 < 0$ zaključujemo da η_3 nije konveksna funkcija. Slično dobijamo i za funkciju η_4 . \square

Dakle, sve konveksne entropije za sistem (2.28) dobijene metodom razdvajanja promenljivih se mogu predstaviti kao linearna kombinacija funkcija η_1 i η_2 datih u (2.33) za $\lambda > 0$. Fluksevi entropije koji odgovaraju η_1 i η_2 su dati sa

$$\begin{aligned} Q_1(\rho, q) &:= \frac{1}{2\lambda} \rho^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2q}{\rho}\lambda} \left((2\lambda q - \rho) K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right) + 2\lambda\sqrt{\alpha} \rho^{\frac{1-\alpha}{2}} K_{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right) \right), \\ Q_2(\rho, q) &:= \frac{1}{2\lambda} \rho^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2q}{\rho}\lambda} \left((2\lambda q + \rho) K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right) - 2\lambda\sqrt{\alpha} \rho^{\frac{1-\alpha}{2}} K_{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right) \right). \end{aligned}$$

Napomena. Prethodno naveden način nije jedini za dobijanje entropijskih parova. Mogu se koristiti neke druge metode ili se u navedenom postupku promenljive mogu razdvojiti na drugačiji način. Na primer, sa $\eta(v, w) = f(v - w)g(v)$ dobijamo konveksnu entropiju

$$\eta(\rho, q) = e^{\lambda \frac{q}{\rho}} \left(\frac{4\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \right)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \rho^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \lambda \right).$$

Međutim, njenim korišćenjem nisu dobijeni bolji rezultati, pa ćemo tu analizu izostaviti.

Neizentropski model za uopšten Čapliginov gas je dat sa

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 - \rho^{-\alpha}) &= 0 \\ \partial_t\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho e\right) + \partial_x\left(\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho e - \rho^{-\alpha}\right)u\right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Sa smenom promenljivih $q = \rho u$, $m = \frac{\rho u^2}{2} + \rho e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho} + \rho e$, sistem (2.35) svodimo na kanonički oblik

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x q &= 0 \\ \partial_t q + \partial_x\left(\frac{q^2}{\rho} - \rho^{-\alpha}\right) &= 0 \\ \partial_t m + \partial_x\left(\frac{q}{\rho}(m - \rho^{-\alpha})\right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Sistem (2.36) je strogo hiperboličan jer su svi karakteristični korenii Jakobijan matrice realni i različiti,

$$\lambda_1(\rho, q, m) = \frac{q}{\rho} - \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} < \lambda_2(\rho, q, m) = \frac{q}{\rho} < \lambda_3(\rho, q, m) = \frac{q}{\rho} + \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Odgovarajući desni karakteristični vektori su dati sa

$$\begin{aligned}r_1(\rho, q, m) &= \left(-1, -\frac{q}{\rho} + \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}, -\frac{m}{\rho} + \sqrt{\alpha} \frac{q}{\rho} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho^{-(1+\alpha)}\right)^T, \\ r_2(\rho, q, m) &= (0, 0, 1)^T, \\ r_3(\rho, q, m) &= \left(1, \frac{q}{\rho} + \sqrt{\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}, \frac{m}{\rho} + \sqrt{\alpha} \frac{q}{\rho} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho^{-(1+\alpha)}\right)^T.\end{aligned}$$

Lako se dobija da su prva i treća karakteristična familija ovog sistema zaista nelinearne, dok je druga linearno degenerisana. Sistem (2.36) je snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarjanti (w_1, w_2, w_3), gde

$$w_1 = \frac{q}{\rho} + \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}, \quad w_2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho^2} - \frac{m}{\rho} + \frac{1}{1+\alpha} \rho^{-(1+\alpha)}, \quad w_3 = \frac{q}{\rho} - \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Za svako $i = 1, 2, 3$, w_j , $j \neq i$ je i -ta Rimanova invarijanta sistema.

Model za Čapliginov gas

Razlike između modela za uopšten Čapliginov gas i modela za Čapliginov gas kada je $\alpha = 1$ u (2.28) su značajne. Naime, sistem (2.28) sa $\alpha = 1$ je strogo hiperboličan sa karakterističnim korenima

$$\lambda_1(\rho, q) = \frac{q-1}{\rho} < \frac{q+1}{\rho} = \lambda_2(\rho, q).$$

Međutim, obe karakteristične familije tog sistema su linearno degenerisane, što je samo jedan od primera da obrnut smer Teoreme 2.4 ne važi. To znači da se analiza dva sistema ne može objediniti, jer različite osobine između dva sistema impliciraju i različite oblike rešenja (videti [11, 76]).

Opšti oblik entropije za sistem je dat sa

$$\eta(\rho, q) = \frac{\rho}{2} \left(F\left(\frac{q-1}{\rho}\right) + G\left(\frac{q+1}{\rho}\right) \right). \quad (2.37)$$

Pri tome funkcije F i G moraju biti konveksne da bi entropija η bila konveksna. Fluks entropije koji odgovara η ima oblik

$$Q(\rho, q) = \frac{1}{2} \left((q+1)F\left(\frac{q-1}{\rho}\right) + (q-1)G\left(\frac{q+1}{\rho}\right) \right). \quad (2.38)$$

Jedan konveksni entropijski par se može dobiti iz zakona održanja energije. U tom slučaju imamo

$$\eta(\rho, q) = \frac{q^2 + 1}{\rho}, \quad Q(\rho, q) = \frac{q}{\rho} \frac{q^2 - 1}{\rho}.$$

Deo II

**DOPUSTIVA REŠENJA
RIMANOVOG PROBLEMA**

Glava

3

Sadržaj

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Elementarni talasi | 36 |
| 3.2 | Uslovi dopustivosti | 39 |
| 3.3 | Opšti oblik rešenja Rimanovog problema . . | 45 |

Klasično rešenje Rimanovog problema i entropijska dopustivost

U analizi sistema zakona održanja veoma važnu ulogu ima Rimanov problem kao specijalan oblik početnog problema, jer nam omogućava da bolje razumemo, a samim tim i rešimo početni problem. Takođe, rešenja Rimanovog problema vrlo često opisuju asimptotsko ponašanje rešenja početnog problema. Pored toga, Rimanov problem ima značajnu ulogu kod numeričkih šema za približno rešenje sistema zakona održanja, jer se one često zasnivaju na diskretizaciji početnog uslova, a potom i rešavanju Rimanovih problema.

Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup i $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatko vektorsko polje. Rimanov problem se sastoji u pronalaženju slabog rešenja sistema zakona održanja

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{3.1}$$

zajedno sa po delovima konstantnim početnim uslovom

$$\bar{U}(x) = U(x, 0) = \begin{cases} U^-, & x < 0 \\ U^+, & x > 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

sa U^- , $U^+ \in \mathcal{O}$. Ovaj oblik početnog problema je prvi predložio i izučavao Riman, 1860. godine u svom radu [92] gde se bavio rešenjima sistema gasne dinamike.

Postoji više načina da se konstruiše rešenje Rimanovog problema. Mi ćemo se oslanjati na klasičan metod koji se zasniva na spajanju elementarnih talasa (konstantna stanja, udarni talasi koji spajaju konstantna stanja i centrirani razređujući talasi koji su ograničeni konstantnim stanjima ili kontaktnim diskontinuitetima).

Hiperbolični sistem zakona održanja (3.1) je invarijantan u odnosu na preslikavanje $(x, t) \mapsto (\alpha x, \alpha t)$, $\alpha > 0$, pa će rešenje Rimanovog problema biti dato u samosličnom obliku

$$U(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0,$$

gde $\Phi \in L^\infty$ (videti [94]). Smenom promenljivih $\xi = \frac{x}{t}$, problem (3.1, 3.2) se transformiše u oblik

$$-\xi\Phi'(\xi) + DF'(\Phi(\xi)) = 0, \quad \Phi(\pm\infty) = U^\pm.$$

Na taj način dobijamo da svako glatko rešenje $\Phi(\xi)$ zadovoljava jednačinu

$$(-\xi I + DF(\Phi))\Phi'(\xi) = 0,$$

što znači da će ono biti ili konstantno (ako $\Phi'(\xi) = 0$) ili će imati singularitet (važi $\xi\Phi' = DF(\Phi)\Phi'$).

3.1. Elementarni talasi

DEFINICIJA 3.1. Neka je dato $U_0 \in \mathbb{R}^n$ i indeks $k \in \{1, \dots, n\}$. Sa

$$\sigma \mapsto R_k(\sigma)(U_0)$$

označavamo k -tu razređujuću krivu kroz stanje U_0 koja predstavlja integralnu krivu vektor-skog polja r_k kroz U_0 . Vrednost $R_k(\sigma)(U_0)$ u vremenu $t = \sigma$ je rešenje početnog problema

$$\frac{dU}{dt} = r_k(U(t)), \quad U(0) = U_0.$$

Možemo zaključiti da razređujuće krive zadovoljavaju sledeće relacije

$$\frac{d}{d\sigma} R_k(\sigma)(U_0) = r_k(R_k(\sigma)(U_0)), \quad R_k(\sigma')(R_k(\sigma)(U_0)) = R_k(\sigma + \sigma')(U_0) \quad (3.3)$$

za sve U_0, σ, σ' .

One se lako mogu pronaći Rimanovih invarijanti sistema.

TEOREMA 3.1. Svaka k -ta Rimanova invarijanta je konstantna na k -toj razređujućoj krivoj sistema (3.1). Obrnuto, neka je u tački \bar{U} sistem zaista nelinearan u odnosu na k -tu karakterističnu familiju sistema (3.1) i $w_1, \dots, w_{k-1}, w_{k+1}, \dots, w_n$ su nezavisne k -te Rimanove invarijante u okolini \bar{U} . Tada je k -ta razređujuća kriva kroz \bar{U} određena sistemom jednačina $w_j(U) = w_j(\bar{U}), j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$.

U nastavku ćemo prepostavljati da je sistem (3.1) strogo hiperboličan i da je svaka karakteristična familija sistema zaista nelinearna ili linearno degenerisana.

Neka su dati $U^-, U^+ \in \mathcal{O}$. Posmatramo k -tu karakterističnu familiju koja je zaista nelinearna u smislu da važi $D\lambda_k(U)r_k(U) > 0$ za sve $U \in \mathcal{O}$. Neka je $\tau^+ > 0$ takvo da važi

$$U^+ = R_k(\tau^+)(U^-).$$

U tom slučaju se može formirati po delovima glatko rešenje Rimanovog problema (3.1, 3.2) koje se naziva *centrirani razređujući talas* k -te karakteristične familije i za neko $t > 0$ je dato sa

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, & x/t < \lambda_k(U^-) \\ R_k(\tau)(U^-), & x/t \in [\lambda_k(U^-), \lambda_k(U^+)], x/t = \lambda_k(R_k(\tau)(U^-)) \\ U^+, & x/t > \lambda_k(U^+). \end{cases} \quad (3.4)$$

DOKAZ. Primetite da je funkcija $\tau \mapsto \lambda(R_k(\tau)(U^-))$ koja slika $[0, \tau^+]$ u $[\lambda_k(U^-), \lambda_k(U^+)]$ strogo rastuća, što je posledica prepostavke o zaista nelinearnoj karakterističnoj familiji. Takođe, važi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U(x, t) - \bar{U}(x)\|_{L^1} = 0.$$

Rešenje $U(x, t)$ je konstantno ($U_x = U_t = 0$) u oblastima $x < t\lambda_k(U^-)$ i $x > t\lambda_k(U^-)$, pa ono trivijalno zadovoljava kvazilinearnu formu sistema (3.1),

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad A(U) = DF(U). \quad (3.5)$$

Dalje, kako je U konstantna na svakom delu $\{(x, t) : x = t\lambda_k(R_k(\tau)(U^-))\}$ sledi

$$U_t(x, t) + \frac{x}{t}U_x(x, t) = 0, \quad \frac{x}{t} = \lambda_k(R_k(\tau)(U^-)) = \lambda_k(U(x, t)). \quad (3.6)$$

Diferenciranjem druge jednačine u (3.6) po t dobijamo

$$\frac{t}{x} = -(D\lambda_k(U) r_k(U))^{-1} \frac{1}{t},$$

što u kombinaciji sa prvom jednačinom u (3.6) daje

$$U_x = (D\lambda_k(U) r_k(U))^{-1} \frac{1}{t} r_k(U).$$

Dakle, U_x je paralelan vektoru $r_k(U)$, što znači da je on takođe karakteristični vektor matrice $A(U)$, pa važi

$$A(U)U_x = \lambda_k U_x,$$

iz čega sledi (3.5). \square

DEFINICIJA 3.2. Sa

$$\tau \mapsto S_k(\tau)(U_0)$$

označavamo k -tu krivu udarnog talasa kroz stanje U_0 koja predstavlja glatku krivu, tangentnu na vektor r_k u U_0 i rešenje je sistema

$$l_j(U, U_0)(U - U_0) = 0 \quad \text{za sve } j \neq k.$$

DEFINICIJA 3.3. Skup svih stanja U koja se mogu pridružiti stanju U_0 preko krive udarnog talasa se naziva Igonoov lokus koji odgovara U_0 ,

$$H(U_0) = \{U : \exists s \in \mathbb{R}, s(U - U_0) = F(U) - F(U_0)\}.$$

TEOREMA 3.2. Prepostavimo da je sistem (3.1) strogo hiperboličan i neka je dato stanje $\bar{U} \in \mathcal{O}$, pri čemu $\lambda_k(\bar{U})$ predstavlja k -ti karakteristični koren matrice $DF(\bar{U})$, $k = 1, \dots, n$. Tada postoje $\tau_0 > 0$, n glatkih krivih udarnih talasa $S_k : [-\tau_0, \tau_0] \rightarrow \mathcal{O}$, $k = 1, \dots, n$ i skalarne funkcije $s_k : [-\tau_0, \tau_0] \rightarrow \mathbb{R}$ sa osobinom

$$F(S_k(\tau)) - F(\bar{U}) = s_k(\tau)(S_k(\tau) - \bar{U}), \quad \tau \in [-\tau_0, \tau_0].$$

Dodatno,

$$\begin{aligned} S_k(0) &= \bar{U}, \quad s_k(0) = \lambda_k(\bar{U}) \\ \dot{s}_k(0) &= \frac{1}{2} D\lambda_k(\bar{U}) r_k(\bar{U}) \\ \dot{S}_k(0) &= r_k(\bar{U}), \quad \ddot{S}_k(0) = Dr_k(\bar{U}) r_k(\bar{U}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

U slučaju kada bude bilo značajno naglasiti tačku porekla \bar{U} , koristićemo i notaciju $S_k(\tau; \bar{U})$, $s_k(\tau; \bar{U})$ ili $S_k(\tau)(\bar{U})$, $s_k(\tau)(\bar{U})$ umesto $S_k(\tau)$, $s_k(\tau)$.

DOKAZ. U dokazu ove teoreme se koristi matrica $A(U, V)$ definisana u (2.8). Sa $r_k(U, V)$ kao i ranije označavamo desni karakteristični vektor matrice $A(U, V)$, a sa $\lambda_k(U, V)$ karakteristični koren matrice $A(U, V)$. Zatim koristimo činjenicu da se stanje U može pridružiti stanju \bar{U} preko k -tog udarnog talasa brzine s ako i samo ako

$$U = \bar{U} + \tau r_k(\bar{U}, U), \quad s = \lambda_k(\bar{U}, U)$$

i definišemo funkciju

$$H(U, \tau) = U - \bar{U} - \tau r_k(\bar{U}, U)$$

na $\mathcal{O} \times \mathbb{R}$. Koristeći Teoremu o implicitnoj funkciji zaključujemo da postoji kriva $U = S_k(\tau)$, $S_k(0) = \bar{U}$ takva da $H(U, \tau) = 0$ za neko τ blizu 0 ako i samo ako $U = S_k(\tau)$. Dalje, definišemo

$$s_k(\tau) = \lambda_k(\bar{U}, S_k(\tau)).$$

Jasno je da važi $s_k(0) = \lambda_k(\bar{U}, \bar{U}) = \lambda_k(\bar{U})$. Takođe, može se pokazati da važi $\dot{S}_k(0) = S_k(\bar{U}, \bar{U}) = r_k(\bar{U})$, kao i

$$\begin{aligned} s_k(\tau) &= \lambda_k(\bar{U}) + \frac{1}{2}\tau D\lambda_k(\bar{U})r_k(\bar{U}) + \mathcal{O}(\tau^2), \\ S_k(\tau) &= \bar{U} + \tau r_k(\bar{U}) + \frac{1}{2}\tau^2 Dr_k(\bar{U})r_k(\bar{U}) + \mathcal{O}(\tau^3). \end{aligned}$$

Detaljniji dokaz se može pronaći u [28]. □

Direktno iz relacija datih u (3.7)₃ sledi naredna teorema.

TEOREMA 3.3. Neka je k -ta karakteristična familija hiperboličnog sistema (3.1) zaista ne-linearna u $\bar{U} \in \mathcal{O}$ i neka je karakteristični koren r_k normalizovan tako da u okolini tačke \bar{U} važi $D\lambda_k(U)r_k(U) = 1$. Tada k -ta razređujuća kriva R_k i k -ta kriva udarnih talasa S_k imaju kontakt drugog reda u \bar{U} , tj. važi

$$R_k(\tau)(\bar{U}) - S_k(\tau)(\bar{U}) = \mathcal{O}(1) \cdot \tau^3.$$

TEOREMA 3.4. Neka je k -ta karakteristična familija hiperboličnog sistema (3.1) linearno degenerisana u $\bar{U} \in \mathcal{O}$. Tada se k -ta kriva udarnih talasa i k -ta razređujuća kriva u tački \bar{U} poklapaju, tj.

$$S_k(\tau; \bar{U}) = R_k(\tau)(\bar{U}) \quad \text{za sve } \tau.$$

DOKAZ. Tvrđenje sledi iz činjenice da u slučaju linearne degenerisane familije važi

$$\lambda_k(R_k(\tau)(\hat{U})) = \lambda_k(\hat{U}) \quad \text{za sve } \tau,$$

iz čega sledi

$$F(R_k(\tau)(\bar{U})) - F(\bar{U}) = \int_0^\tau DF(R_k(t)(\bar{U})) \underbrace{\frac{d(R_k(t)(\bar{U}))}{dt}}_{=r_k(R_k(t)(\bar{U}))} dt = \lambda_k(\bar{U})(R_k(\tau)(\bar{U}) - \bar{U}),$$

jer $DF r_k = \lambda_k r_k$. □

Ukoliko izaberemo proizvoljna stanja U^- i U^+ takva da važi $U^+ = S_k(\tau; U^-)$, $s = s_k(\tau; U^-)$, Rankin-Igonoov uslov

$$F(U^+) - F(U^-) = s(U^+ - U^-)$$

će biti zadovoljen za svako τ . Tada po delovima konstantna funkcija

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, & x < ts_k(\tau) \\ S_k(\tau) = U^+, & x > ts_k(\tau) \end{cases} \quad (3.8)$$

predstavlja slabo rešenje Rimanovog problem (3.1, 3.2) i naziva se *k-ti udarni talas*.

U slučaju kada je k -ta karakteristična familija sistema zaista nelinearna i važi

$$D\lambda_k(U^-)r_k(U^-) > 0,$$

rešenje u obliku (3.8) se naziva kompresivni udarni talas ako je $\tau < 0$, a razređujući talas ako je $\tau > 0$. Ako je k -ta karakteristična familija sistema linearne degenerisana, rešenje u obliku (3.8) se naziva *kontaktni diskontinuitet*.

Kada kažemo *elementarni* k -ti talas mislimo na jedan k -ti udarni, razređujući talas ili kontaktni diskontinuitet, a ukoliko se k -ti talas sastoji iz više elementarnih talasa, nazivamo ga *složeni* k -ti talas.

3.2. Uslovi dopustivosti

Pod stabilnim rešenjem podrazumevamo ono koje se sastoji iz glatkih talasa malih amplituda koji se pri interakciji sa udarnim talasom absorbuju, prenose ili reflektuju kao talasi malih amplituda i pri tome ne utiču na udarni talas u smislu da menjaju njegovu snagu ili brzinu.

DEFINICIJA 3.4. Skok $U^+ - U^-$ nazivamo amplitudom, a $|U^+ - U^-|$ snagom udarnog talasa. Kažemo da je udarni talas jak ukoliko ne uvodimo restrikciju na njegovu snagu. U zavisnosti od toga kakvu restrikciju uvodimo, postoje slabi i udarni talasi srednje snage. Prepostavljamo da važi $|U^+ - U^-| < \alpha$, pri čemu α zavisi od Jakobijan matrice sistema DF (ta zavisnost se najčešće izražava pomoću karakterističnih korena i vektora). Ukoliko α zavisi samo od prvih izvoda¹ λ_i i r_i kažemo da udarni talas ima srednju snagu, a ukoliko α zavisi i od drugih izvoda λ_i i r_i udarni talas je slab.

U nastavku će biti navedeni neki uslovi koji se koriste za proveru dopustivosti klasičnih rešenja sistema zakona održanja. Međutim, ti uslovi će biti dovoljni samo ukoliko se radi sa strogo hiperboličnim sistemama, udarnim talasima srednje ili slabe snage. Svi ostali slučajevi (npr. jaki udarni talasi) još uvek predstavljaju otvoreni problem, bar kada je u pitanju dopustivost rešenja. Takođe, često se dešava da samo jedan uslov dopustivosti nije dovoljan da eliminiše sva nefizička rešenja, nego se mora koristiti kombinacija više takvih uslova. To povlači sa sobom pitanje nekih novih uslova dopustivosti, a osnovne osobine koje oni treba da zadovolje su:

- Test treba da se primeni na svaku tačku domena (\bar{x}, \bar{t}) , čime je omogućena samo analiza rešenja u maloj okolini te tačke (npr. krug sa centrom u (\bar{x}, \bar{t})).
- Test ne treba da gleda u prošlost što znači da treba posmatrati samo $t \geq \bar{t}$.

¹Prvi izvodi karakterističnih korena i vektora nekog sistema govore o stepenu nelinearnosti tog sistema.

- Dopustivo rešenje $U = U(x, t)$ treba da bude invarijantno u odnosu na translaciju što znači da će rešenje U biti dopustivo u (\bar{x}, \bar{t}) ako i samo je $\bar{U}(x, t) = U(x + \bar{x}, t + \bar{t})$ dopustivo u $(0, 0)$.
- Dopustivo rešenje treba da bude invarijantno u odnosu na dilataciju, što znači da će rešenje U biti dopustivo u $(0, 0)$ ako i samo ako je za svako $\alpha > 0$ rešenje $\bar{U}_\alpha(x, t) = U(\alpha x, \alpha t)$ dopustivo u $(0, 0)$.

Neka je dato rešenje sistema zakona održanja (3.1) na gornjoj polovini ravni koje se sastoji iz konstantnog stanja U^- sa leve strane, kojem je pridruženo stanje U^+ sa desne strane udarnim talasom brzine s tako da je Rankin-Igonooov uslov zadovoljen. I neka brzina udarnog talasa s zadovoljava

$$\begin{aligned}\lambda_1(U^-) &\leq \dots \leq \lambda_{i-1}(U^-) < s < \lambda_i(U^-) \leq \dots \leq \lambda_n(U^-), \\ \lambda_1(U^+) &\leq \dots \leq \lambda_j(U^+) < s < \lambda_{j+1}(U^+) \leq \dots \leq \lambda_n(U^+)\end{aligned}\quad (3.9)$$

za $i, j = 1, \dots, n$. U graničnom slučaju kada je $i = 1$ uzimamo $\lambda_{i-1}(U^-) = -\infty$, a kada $j = n$ uzimamo $\lambda_{j+1}(U^+) = +\infty$.

Uslov (3.9) isključuje sve udarne talase koji putuju karakterističnom brzinom λ_i iz razloga što se oni javljaju samo u slučaju linearne degenerisane karakteristične familije. Udarni talas koji stanju U^- sa leve strane pridružuje stanje U^+ i putuje brzinom s takvom da $s = \lambda_i(U^-)$ (odnosno $s = \lambda_i(U^+)$) se naziva i -ti levi kontaktni diskontinuitet (odnosno i -ti desni kontaktni diskontinuitet). Ukoliko je $s = \lambda_i(U^-) = \lambda_i(U^+)$ odgovarajući udarni talas nazivamo i -ti kontaktni diskontinuitet.

Klasična rešenja sistema (3.1) sa malim oscilacijama se mogu aproksimirati rešenjima linearizovanog sistema. Može se konstruisati familija rešenja malim perturbovanjem konstantnih stanja U^- , U^+ uz pretpostavku da je Jakobijsan matrica $DF(U)$ jednaka $DF(U^-)$ ako $|U - U^-| < \varepsilon$ i jednaka $DF(U^+)$ ako $|U - U^+| < \varepsilon$. Neka su $w_k^\pm(x, t)$ i $\sigma(t)$ C^1 -funkcije takve da $|w_k^\pm| < a\varepsilon$, $|\sigma'| < a\varepsilon$ za $a \ll 1$. Tada će funkcija

$$U(x, t) = \begin{cases} U^- + \sum_{k=1}^n w_k^-(x, t)r_k(U^-), & x < st + \sigma(t) \\ U^+ + \sum_{k=1}^n w_k^+(x, t)r_k(U^+), & x > st + \sigma(t) \end{cases}$$

predstavljati rešenje sistema (3.1) na gornjoj poluravni ako zadovoljava (3.1) za $x \neq st + \sigma(t)$ i Rankin-Igonooov uslov (2.7) na perturbovanom udarnom talasu $x = st + \sigma(t)$, koji će predstavljati sistem od n jednačina sa $n + i - j$ nepoznatim. Jasno, broj jednačina u tom sistemu može biti manji, veći ili jednak broju nepoznatih, od čega zavisi dalja analiza.

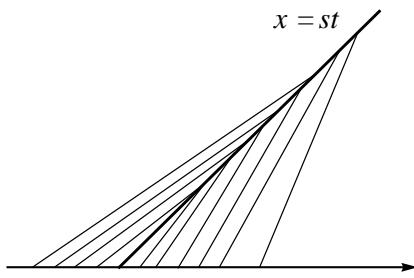
Laksov entropijski uslov

Slabo rešenje $U = U(x, t)$ sistema (3.1) je dopustivo ako svaki udarni talas koji putuje brzinom $s = \lambda_i(U^-, U^+)$ i stanju U^- sa leve strane pridružuje stanje U^+ sa desne strane, zadovoljava *Laksov entropijski uslov*

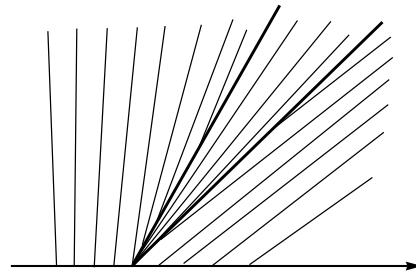
$$\lambda_i(U^+) \leq s \leq \lambda_i(U^-). \quad (3.10)$$

Laksov entropijski uslov koji je dobio ime po američkom matematičaru Laksu² je najjednostavniji od svih uslova za proveru dopustivosti rešenja, a značajan je jer ima jasnu geometrijsku interpretaciju u smislu da obe i -te karakteristike idu u udarni talas (videti Sliku 3.1). Uslov (3.10) se može primeniti samo u slučaju po delovima glatkog rešenja (ne opštег slabog rešenja), ali je efikasan čak i u slučaju kada sistem ne poseduje konveksnu entropiju ([94]).

²Peter Lax, rođen 1926. godine je američki matematičar poreklom iz Mađarske koji je dao veliki doprinos u oblasti hiperboličnih zakona održanja i dinamici fluida.



Slika 3.1: Dopustiv udarni talas



Slika 3.2: Nedopustiv udarni talasi

TEOREMA 3.5. Pretpostavimo da je u stanju U^- i -ta karakteristična familija sistema (3.1) zaista nelinearna i da važi $D\lambda_i(U^-) r_i(U^-) > 0$ (odnosno $D\lambda_i(U^-) r_i(U^-) > 0$). Neka je S_i označena i -ta kriva udarnog talasa kroz U^- i neka je $U^- = S_i(0)$. Tada slab i-ti udarni talas koji stanju U^- pridružuje stanje $U^+ = S_i(\tau)$ zadovoljava Laksov entropijski uslov ako i samo ako $\tau < 0$ (odnosno $\tau > 0$).

Napomena. Prethodna teorema nam govori da u slučaju kada $D\lambda_i(U^-) r_i(U^-) > 0$ svi kompresivni talasi male snage zadovoljavaju Laksov entropijski uslov, dok ih razređujući ne zadovoljavaju. Takođe, svi kontaktni diskontinuiteti zadovoljavaju Laksov entropijski uslov.

Liuov entropijski uslov

Udarni talas i -te karakteristične familije koji stanju U^- sa leve strane pridružuje stanje $U^+ = S_i(\tau_+; U^-)$ sa desne strane i prostire se brzinom s zadovoljava Liuov entropijski uslov ako

$$s = s_i(\tau_+; U^-) \leq s_i(\tau; U^-) \quad \text{za } \tau \text{ između } 0 \text{ i } \tau_+. \quad (3.11)$$

U opštem slučaju Liuov entropijski uslov je jači od Laksovog. Međutim, u slučaju slabih talasa oni mogu biti ekvivalentni.

TEOREMA 3.6. Neka je i -ta karakteristična familija zaista nelinearna. Tada slab i-ti udarni talas zadovoljava Liuov entropijski uslov (3.11) ako i samo ako zadovoljava Laksov entropijski uslov (3.10).

Entropijski uslov dopustivosti

Svakom sistemu zakona održanja koji se pojavljuje u mehanici neprekidnih sredina pridružuje se tzv. *entropijska nejednakost* koju mora da zadovolji svaki u fizičkom smislu značajan proces. Ona na neki način predstavlja manifestaciju Drugog zakona termodinamike ili nekog drugog fizičkog zakona (npr. zakon održanja energije). Uloga entropijske nejednakosti je da isključi fizički nedopustivo slabo rešenje. Entropijski uslov dopustivosti je formulisan Laks u [62].

DEFINICIJA 3.5. Slabo rešenje sistema zakona održanja (3.1) je entropijski dopustivo ako

$$\partial_t \eta(U(x, t)) + \partial_x Q(U(x, t)) \leq 0 \quad (3.12)$$

važi u distributivnom smislu, tj.

$$\iint (\eta(U)\varphi_t + Q(U)\varphi_x) dx dt \geq 0$$

važi za sve nenegativne test funkcije $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ i za sve entropijske parove (η, Q) takve da je η strogo uniformno konveksna entropija pridružena sistemu (3.1), a Q je odgovarajući fluks entropije.

Svako glatko rešenje sistema (3.1) je dopustivo i zadovoljava (3.12) kao jednakost. Naime, neka je funkcija U C^1 -rešenje sistema (3.1). Tada

$$\begin{aligned}\eta(U)_t + Q(U)_x &= D\eta(U)U_t + DQ(U)U_x \\ &= D\eta(U)(-DF(U)U_x) + D\eta(U)DF(U)U_x = 0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Definicija entropijski dopustivog rešenja sa sobom povlači i pitanje pronalaženja odgovarajuće entropije za sistem zakona održanja. Ukoliko sistem ima potporu u fizici, logično je očekivati da će fizički zakoni dati odgovarajuće smernice za određivanje entropije. U odustvu fizičkih argumenata, mogu se koristiti matematički. Takođe, poželjno bi bilo da ta entropija ima neka stabilizirajuća svojstva, tj. da se njenim korišćenjem može doći do stabilnog dopustivog rešenja. Najčešće se zahteva da je entropija konveksna ili da ima neka konveksna svojstva. Međutim, korišćenje konveksne entropije ima smisla samo u slučaju kada je sistem dat u kanoničkom obliku.

U nastavku navodimo specijalni oblik entropijskog uslova (3.12) koji važi u slučaju kada je dopustivo rešenje po delovima Lipšic-neprekidna funkcija.

TEOREMA 3.7. Neka je $U = U(x, t)$ rešenje sistema (3.1) koje zadovoljava sve uslove Teoreme 2.3 i neka je η pridružena konveksna entropija, a Q odgovarajući fluks entropije. Entropijski uslov dopustivosti (3.12) važi ako i samo ako na svakoj krivoj prekida $x = \gamma_i(t)$, $i = 1, \dots, M$ i za svaku t važi

$$-\gamma'_i(t)(\eta(U_i^+(t)) - \eta(U_i^-(t))) + Q(U_i^+(t)) - Q(U_i^-(t)) \leq 0.\tag{3.14}$$

DOKAZ. Van krivih prekida, rešenje sistema U zadovoljava jednakost (3.13), a korišćenjem Teoreme o divergenciji dobijamo jednakost

$$\begin{aligned}\iint (\eta(U)\varphi_t + Q(U)\varphi_x) dxdt &= - \iint (\eta(U)_t + Q(U)_x) \varphi dxdt \\ &+ \sum_i \int_{a_i}^{b_i} (\gamma'_i(t)(\eta(U_i^+) - \eta(U_i^-)) - (Q(U_i^+) - Q(U_i^-))) \varphi(\gamma_i(t), t) dt\end{aligned}$$

koja važi za sve nenegativne test funkcije $\varphi \in C_0^1$. Dakle, entropijska nejednakost (3.12) će biti zadovoljena ako i samo ako je uslov

$$\begin{aligned}\iint (\eta(U)\varphi_t + Q(U)\varphi_x) dxdt \\ = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} (\gamma'_i(t)(\eta(U_i^+) - \eta(u_i^-)) - (Q(U_i^+) - Q(U_i^-))) \varphi(\gamma_i(t), t) dt \geq 0\end{aligned}$$

zadovoljen za sve nenegativne funkcije $\varphi \in C_0^1$, što je ekvivalentno uslovu (3.14). \square

Neka je sa $S_i(\tau; U^-)$ data i -ta kriva udarnog talasa kroz U^- i neka je $U^+ = S_i(\tau^+; U^-)$, $s = s_i(\tau^+, U^-)$. Producija entropije preko i -tog udarnog talasa u tački τ je data sa

$$E_i(\tau) = -s_i(\tau)(\eta(S_i(\tau)) - \eta(U^-)) + Q(S_i(\tau)) - Q(U^-).\tag{3.15}$$

Diferenciranjem (3.15) po τ dobijamo

$$\begin{aligned}E'_i(\tau) &= -s_i(\tau)(\eta(S_i(\tau)) - \eta(U^-)) - s_i(\tau)D\eta(S_i(\tau))S'_i(\tau) \\ &+ D\eta(S_i(\tau))DF(S_i(\tau))S'_i(\tau),\end{aligned}\tag{3.16}$$

pri čemu je korišćeno da $DQ = D\eta DF$. Kombinujući (3.16) sa jednakošću

$$(DF(S_i(\tau)) - s_i(\tau)I)S'_i(\tau) = s'_i(\tau)(S_i(\tau) - U^-),$$

koja se dobija diferenciranjem po τ Rankin-Igonooovih jednačina definisanih na i -toj krivoj udarnog talasa, dobija se

$$E'_i(\tau) = -s'_i(\tau)(\eta(S_i(\tau)) - \eta(U^-) - D\eta(S_i(\tau))(S_i(\tau) - U^-)). \quad (3.17)$$

Iz relacije (3.17) sledi zaključak sledeće teoreme.

TEOREMA 3.8. *Neka je $E_i(\tau)$ definisano sa (3.15).*

- (i) *Ako je i -ta karakteristična familija linearno degenerisana, funkcija $E_i(\tau)$ je jednaka 0 na i -tom udarnom talasu (kontaktnom diskontinuitetu), jer $s'_i(\tau) = 0$.*
- (ii) *Ako je i -ta karakteristična familija zaista nelinearna, entropijski uslov dopustivosti i Laksov entropijski uslov su ekvivalentni na svakom slabom i -tom udarnom talasu.*

DOKAZ. (i) Tvrđenje sledi iz činjenice da je u slučaju linearne degenerisanosti i -te karakteristične familije $s'_i(\tau) = 0$.

- (ii) Primetite da u slučaju konveksne entropije funkcije $E'_i(t)$ i $s'_i(t)$ u (3.17) imaju isti znak, jer je izraz u zagradi nepozitivan. Dakle, da bi entropijski uslov dopustivosti $E_i(\tau^+) \leq 0$ bio zadovoljen mora da važi $\tau^+ < 0$ i $s'_i(\tau) > 0$ na intervalu $(\tau^+, 0)$ (jer u tom slučaju $E_i(\tau)$ raste na $(\tau^+, 0)$) ili $\tau^+ > 0$ i $s'_i(\tau) < 0$ na $(0, \tau^+)$ (tada $E_i(\tau)$ opada na $(0, \tau^+)$), što je ekvivalentno uslovu (3.10). □

Može se pokazati da su pod određenim uslovima Liuov entropijski uslov i entropijski uslov dopustivosti ekvivalentni (dokaz videti u [28]).

TEOREMA 3.9. *Neka su i -ta kriva udarnog talasa $S_i(\tau^-)$ kroz U^- i odgovarajuća funkcija brzine udarnog talasa $s_i(\tau; U^-)$ definisane na intervalu (α, β) koji sadrži nulu i neka važi*

$$\tau(S'_i(\tau; U^-))^T D^2\eta(S_i(\tau; U^-))(S_i(\tau; U^-) - U^-) \geq 0, \quad \tau \in (\alpha, \beta),$$

pri čemu je η konveksna entropija za sistem (3.1). Tada i -ti udarni talas koji stanju U^- sa leve strane pridružuje stanje $U^+ = S_i(\tau^+; U^-)$ sa desne strane brzinom $s = s_i(\tau^+; U^-)$ zadovoljava Liuov entropijski uslov (3.11) ako i samo ako zadovoljava entropijski uslov dopustivosti $E_i(\tau) \leq 0$.

Viskozni profil udarnog talasa

Pored entropijskog uslova kao alata za pronalaženje dopustivog slabog rešenja, kao veoma moćan alat se koristi i *Metod izčezavajuće viskoznosti*.

DEFINICIJA 3.6. *Slabo rešenje $U = U(x, t)$ sistema (3.1) je dopustivo ako predstavlja graničnu vrednost niza funkcija U_μ kada $\mu \rightarrow 0$, koje su rešenje sistema zakona održanja*

$$\partial_t U(x, t) + \partial_x F(U(x, t)) = \mu \partial_x (B(U(x, t) \partial_x U(x, t))),$$

gde B predstavlja $n \times n$ matricu definisanu na \mathcal{O} .

Kod ovakvih analiza, prvo treba pronaći viskoznu matricu B . U slučaju kada sistem zakona održanja (3.1) potiče iz fizike, odabir matrice B diktira fizika. U suprotnom, dodaje se veštačka viskoznost, gde odabir matrice B treba da bude takav da uzrokuje disipaciju što bi učinilo sistem dobro definisanim. Vrlo često se za B uzima jedinična matrica I . Da bi slabo rešenje bilo dopustivo matrica $D^2\eta B$ mora da bude pozitivno semi-definitna (za detalje videti [28]).

DEFINICIJA 3.7. *Viskozni profil udarnog talasa koji povezuje levo U^- i desno konstantno stanje U^+ je luk sa krajevima u U^- i U^+ , pri čemu U^+ predstavlja rešenje diferencijalne jednačine*

$$B(V(\tau))V'(\tau) = F(V(\tau)) - F(U^-) - s(V(\tau) - U^-).$$

Udarni talas koji stanju U^- sa leve strane pridružuje stanje U^+ sa desne strane zadovoljava uslov dopustivosti za viskozne udarne talase ako se U^- može povezati sa U^+ preko viskoznog profila udarnog talasa.

Može se pokazati da je uslov dopustivosti za viskozne udarne talase jači od entropijskog uslova, ali kako ovaj metod neće biti značajan u daljoj analizi, zainteresovane čitaocе upućujemo na [28].

Uslov opadanja matematičke entropije

Činjenica da prethodno navedeni uslovi dopustivosti nisu uvek efikasni i da ne mora da znači da će eliminisati sva nefizička rešenja (npr. entropijski uslov dopustivosti nije potpuno efikasan kod sistema koji nisu zaista nelinearni) navela je Dafermos u [27] u potragu za alternativnim kriterijumom koji se može koristiti kao uslov za proveru dopustivosti slabog rešenja i ima fizičkog smisla.

Neka je sa (η, Q) označen strogo konveksan entropijski par za sistem (3.1) takav da važi $\eta(0) = 0$. Prepostavimo da je sa $U(x, t)$ dato ograničeno rešenje tog sistema koje postoji za svako $t \in [0, T]$. Sa

$$\mathcal{H}_U(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \eta(U(x, t)) dx$$

ćemo označavati ukupnu (matematičku) entropiju rešenja U u $t \in [0, T]$. Koristeći termine iz [29] i [44] navodimo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 3.8 ([27]). *Rešenje $U(x, t)$ je dopustivo ako ne postoji nijedno $\bar{U}(x, t)$ takvo da za $s \in [0, T]$ važi*

$$U(x, t) = \bar{U}(x, t) \quad \text{za } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, s] \quad \text{i} \quad \frac{d_+ \mathcal{H}_U(t)}{dt} < \frac{d_+ \mathcal{H}_{\bar{U}}(t)}{dt},$$

pri čemu je sa $\frac{d_+}{dt}$ označen desni izvod, a $\frac{d_+ \mathcal{H}_U(t)}{dt}$ predstavlja stopu promene (matematičke) entropije koja odgovara rešenju U .

Iz gornje definicije vidimo da je slabo rešenje dopustivo ako ukupna entropija opada sa najvećom mogućom stopom.

Neka je funkcija $U(x, t)$ ograničena i po delovima neprekidna sa leve strane sa kompaktnim nosačem i sa prekidima prvog reda koji se nalaze na udarnim talasima opisanim glatkim krivama $x = c_\alpha(t)$. U [29] je pokazano da je stopa promene entropije rešenja U jednaka

$$\frac{d_+ \mathcal{H}_U(t)}{dt} = \mathcal{P}_U(t) + Q(U(-\infty)) - Q(U(+\infty)) = \mathcal{P}_U(t),$$

pri čemu je sa $\mathcal{P}_U(t)$ označena produkcija entropije η rešenja U u vremenu t . Važi

$$\mathcal{P}_U(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} \left(Q(U^+(t)) - Q(U^-(t)) - c'_\alpha(t)(\eta(U^+(t)) - \eta(U^-(t))) \right),$$

pri čemu je sa \mathcal{S} označen skup svih udarnih talasa u rešenju $U(x, t)$ u vremenu t , a U^+ i U^- su definisani kao u (2.13).

U slučaju sistema zakona održanja sa dve jednačine, kada gustina energije igra ulogu matematičke entropije, ukupna energija u vremenu t se često označava sa $\mathcal{E}_U(t)$ dok je sa $\frac{d+\mathcal{E}_U(t)}{dt}$ data *stopa disipacije energije* slabog rešenja U u vremenu t . U tom slučaju se kriterijum za proveru dopustivosti dat u Definiciji 3.8 naziva *Princip maksimalne disipacije energije*.

Ovaj kriterijum za proveru dopustivosti rešenja su dalje izučavali i prilagođavali Hsiao u [51], De Lellis i Székelyhidi u [36, 37], Feireisl u [44], Chiodaroli i Kreml u [23], Dafermos u [29], Duchon i Robert u [41], itd. Značajan rezultat je ostvaren u [23] gde je pokazano da Princip maksimalne disipacije energije ne favorizuje klasična samo-slična rešenja u slučaju dvodimenzionalnog Ojlerovog sistema za izentropsko strujanje stišljivog fluida. Naime, konstruisano je rešenje kod kog se gubi više energije nego kod klasičnog. Pored toga, u [44] je metodom konveksne integracije konstruisano beskonačno mnogo rešenja za isti sistem koji ne zadovoljavaju Princip maksimalne disipacije energije. U [29], Dafermos analizira sisteme kod kojih maksimalna disipacija energije nije poželjna osobina.

3.3. Opšti oblik rešenja Rimanovog problema

Neka je sistem (3.1) strogo hiperboličan, sa glatkim koeficijentima definisanim na otvorenom intervalu $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ i neka je za svako $i = 1, \dots, n$ i -ta karakteristična familija zaista nelinearna ili linearno degenerisana.

Cilj je pronaći slabo rešenje Rimanovog problema (3.1, 3.2) ako su zadovoljene gore navedene pretpostavke i ako je $|U^+ - U^-|$ dovoljno malo. To rešenje će biti samoslično, oblika $U(t, x) = \Psi(\frac{x}{t})$, pri čemu funkcija $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ može imati prekide prvog reda.

Sa (3.4), odnosno (3.8) data su rešenja Rimanovog problema u slučaju kada se stanje U^+ nalazi na i -toj razređujućoj krivoj, odnosno na i -tom udarnom talasu. Ta dva slučaja služe kao osnova za konstrukciju rešenja sa proizvoljnim početnim stanjima U^- i U^+ .

Neka je i -ta karakteristična familija zaista nelinearna i neka je i -ti desni karakteristični vektor r_i normalizovan tako da važi $D\lambda_i r_i = 1$. Tada svaki i -ti talas male snage mora biti ili centrirani i -ti razređujući talas ili kompresivni i -ti udarni talas koji zadovoljava Laksov uslov dopustivosti. To zaključujemo koristeći sledeće:

- Iz Teoreme 3.2 znamo da se sva stanja koja mogu biti pridružena proizvoljnem stanju U^- preko slabog i -tog udarnog talasa nalaze na i -toj krivoj udarnog talasa $S_i(\tau; U^-)$.
- Iz Teoreme 3.5 zaključujemo da će i -ti udarni talas koji stanju U^- sa leve strane pridružuje neko $S_i(\tau; U^-)$ biti dopustiv ako i samo je $\tau < 0$, jer tada važi Laksov entropijski uslov.
- Stanju U^- se sa desne strane mogu pridružiti stanja $R_i(\tau, U^-)$ preko centriranih i -tih razređujućih krivih ako $\tau > 0$.
- Stanju U^- se sa leve strane mogu pridružiti stanja $R_i(\tau, U^-)$ preko centriranih i -tih razređujućih krivih ako $\tau < 0$.

Opšte rešenje Rimanovog problema se može konstruisati spajanjem elementarnih talasa. Na osnovu prethodne analize vidimo da se i -tu talasna kriva $\Psi_i(\tau; U^-) = \Psi_i(\tau)(U^-)$ može definisati na sledeći način

$$\Psi_i(\tau; U^-) = \begin{cases} R_i(\tau; U^-), & \tau \geq 0 \\ S_i(\tau; U^-), & \tau < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Kriva Ψ_i je glatka za $\tau \neq 0$ i dva puta neprekidno-diferencijabilna u $\tau = 0$.

Rešiti opšti Rimanov problem znači za dato početno stanje $W_0 = U^-$ pronaći n -torku $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ u okolini $0 \in \mathbb{R}^n$ i uzastopna međustanja $W_i := \Psi(\sigma_i; W_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$ takva da važi $W_n = U^+$. Kompozicija n talasnih krivih

$$\Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n; U^-) := \Psi_n(\sigma_n) \circ \dots \circ \Psi_1(\sigma_1)(U^-) \quad (3.19)$$

je dva puta neprekidno-diferencijalna funkcija sa Lipšic-neprekidnim drugim izvodom i važi

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_i} \Big|_{\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 0} = r_i(U^-). \quad (3.20)$$

Jasno, ukoliko su stanja U^- i U^+ dovoljno blizu, postojaće jedinstveno σ takvo da $U^+ = \Lambda(\sigma; U^-)$. n -torka $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ i levo stanje U^- će određivati talasni fan koji stanju U^- pridružuje stanje U^+ . Sa σ_i je data amplituda i -tog talasa, dok $|\sigma_i|$ predstavlja snagu tog talasa.

Rešenje Rimanovog problema se može konstruisati i obrnutim redosledom. Preciznije, počevši od završnog stanja $W_n = U^+$ mogu se konstruisati uzastopna stanja preko talasnih krivih

$$\Phi_i(\tau; U^+) = \begin{cases} S_i(\tau; U^+), & \tau \geq 0 \\ R_i(\tau; U^+), & \tau < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

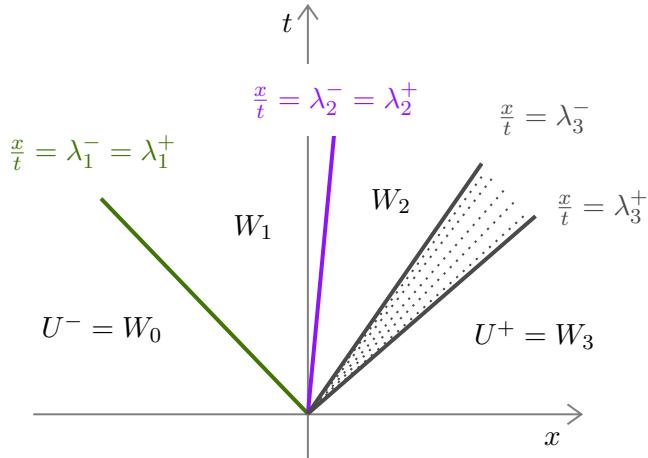
i to računajući $W_{i-1} = \Phi_i(\sigma_i; W_i)$, $i = 1, \dots, n$ sve dok se ne dođe do početnog stanja $W_0 = U^-$. Vrlo često je korisno koristiti kombinacije krivih Ψ_i i Φ_j , naročito u slučaju Rimanovog problema za sistem od dva zakona održanja ($n = 2$). U tom slučaju se povlači talasna kriva prve karakteristične familije $\Psi_1(\sigma_1, U^-)$ kroz levo stanje U^- i kriva $\Phi_2(\sigma_2, U^+)$ kroz desno stanje U^+ . Presek te dve krive (ako postoji) se naziva središnje stanje W_M i važi $W_M = \Psi_1(\sigma_1; U^-) = \Phi_2(\sigma_2; U^+)$. Ako je presek W_M jedinstven on generiše rešenje Rimanovog problema.

U zavisnosti od sistema i pozicija stanja U^- i U^+ dve talasne krive mogu da se preseku u jednoj tački, u više njih, a mogu i da se ne preseku uopšte. U slučaju kada je i -ta karakteristična familija linearno degenerisana, ne postoji centrirani i -ti razređujući talasi i svaki i -ti talas mora biti kontakni diskontinuitet. Tada se krive Ψ_i i Φ_i poklapaju sa i -tom krivom udarnog talasa S_i , tj. važi $\Psi_i(\tau; \tilde{U}) = \Phi_i(\tau; \tilde{U}) = S_i(\tau; \tilde{U})$.

Znamo da svaki Rimanov problem sa početnim uslovom

$$U(x, 0) = \begin{cases} W_{i-1}, & x > 0 \\ W_i, & x < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

ima entropijski dopustivo rešenje koje je generisano talasom koji pripada i -toj karakterističnoj familiji. Razlikujemo dva slučaja:



Slika 3.3: Rešenje koje se sastoji iz udarnog talasa prve familije, kontaktnog diskontinuiteta druge familije i centriranog razređujućeg talasa treće familije

(A): i -ta karakteristična familija je zaista nelinearna i $\sigma_i > 0$.

Rešenje Rimanovog problema sa početnim uslovom (3.22) će biti centrirani razređujući talas sa i -tom karakterističnom brzinom koja pripada intervalu $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$, pri čemu

$$\lambda_i^- := \lambda_i(W_{i-1}), \quad \lambda_i^+ := \lambda_i(W_i).$$

(B): i -ta karakteristična familija je zaista nelinearna i $\sigma_i \leq 0$ ili je i -ta karakteristična familija linearno degenerisana i σ_i je proizvoljno.

Rešenje Rimanovog problema sa početnim uslovom (3.22) je dopustiv i -ti udarni talas ili kontaktni diskontinuitet sa brzinom

$$\lambda_i^- := \lambda_i^+ := \lambda_i(W_{i-1}, W_i).$$

Rešenje originalnog Rimanovog problema se konstruiše sklapanjem rešenja n Rimanovih problema sa početnim uslovima (3.22), $i = 1, \dots, n$. Za dovoljno male amplitude $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ brzine λ_i^- , λ_i^+ će ostati blizu karakterističnih brzina $\lambda_i(U^-)$, $i = 1, \dots, n$. Kako je sistem strogo hiperboličan, može se prepostaviti da su intervali $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$ disjunktni, tj. da važi

$$\lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_2^- \leq \lambda_2^+ < \dots < \lambda_n^- \leq \lambda_n^+.$$

Tada će po delovima glatka funkcija $U : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ data sa

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, & \frac{x}{t} \in (-\infty, \lambda_1^-) \\ W_i, & \frac{x}{t} \in (\lambda_i^+, \lambda_{i+1}^-), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ R_i(\tau; W_{i-1}), & \frac{x}{t} \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+], \quad \frac{x}{t} = \lambda_i(R_i(\tau; W_{i-1})) \\ U^+, & \frac{x}{t} \in (\lambda_n^+, \infty) \end{cases} \quad (3.23)$$

predstavljati slabo rešenje Rimanovog problema (3.1, 3.2) (za primer videti Sliku 3.3).

TEOREMA 3.10. Neka je sistem (3.1) strogo hiperboličan sa glatkim koeficijentima definisanim na otvorenom intervalu $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ i neka je za svako $i = 1, \dots, n$ i -ta karakteristična familija zaista nelinearna ili linearno degenerisana. Za svaki kompaktan skup $K \in \mathcal{O}$ postoji $\delta > 0$ takvo da Rimanov problem (3.1, 3.2) ima jedinstveno slabo rešenje u obliku (3.23) ako $U^- \in K$ i $|U^+ - U^-| < \delta$.

Dokaz Teoreme 3.10 se može naći u [14].

Napomena. U nekim slučajevima, talasne krive će biti efikasne i za rešavanje Rimanovog problema kada su početno i krajnje stanje dosta udaljeni (na primer isentropijsko strujanje gasa).

U slučaju kada se radi sa strogo hiperboličnim sistemima i karakterističnim familijama koje su ili linearne degenerisane ili zaista nelinearne, Laxov uslov dopustivosti je dovoljan da dovede do jedinstvenog rešenja Rimanovog problema. Međutim, u slučaju kada je bar jedan od ta dva uslova narušen, moraju se koristiti jači uslovi dopustivosti.

Ukoliko je sistem strogo hiperboličan ali nije ni linearne degenerisan ni zaista nelinearan, koristi se Liuov entropijski uslov dopustivosti. U [28] je opisan postupak konstrukcije talasnih krivih pod pretpostavkama da je sistem strogo hiperboličan i da je i -ta karakteristična familija po delovima zaista nelinearna, u smislu da ako je U stanje linearne degeneracije (važi $D\lambda_i(U)r_i(U) = 0$), tada $D(D\lambda_i(U)r_i(U))r_i(U) \neq 0$. U tom slučaju se može pokazati da za dovoljno malo $|U^+ - U^-|$ postoji jedinstveno rešenje Rimanovog problema (3.1, 3.2) koje se sastoji iz $(n + 1)$ -og konstantnog stanja $W_0 = U^-, W_1, \dots, W_n = U^+$. Stanju W_i je pridruženo stanje W_{i-1} dopustivim i -tim talasom, pa se rešenje Rimanovog problema sastoji iz razređujućih talasa i najviše prebrojivo mnogo udarnih talasa koji zadovoljavaju Liuov uslov dopustivosti.

Međutim, narušavanjem pretpostavke o strogoj hiperboličnosti i talasima malih amplituda dolazi do pojave singularnih rešenja koja sadrže Dirakovu delta funkciju. Narušena stroga hiperboličnost je takođe uzrok problema vezanih za jedinstvenost rešenja Rimanovog problema. U tom slučaju Liuov entropijski uslov više nije dovoljan za eliminaciju svih nedopustivih rešenja.

Glava

4

Sadržaj

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1 | Singularna rešenja - definicija i primeri | 49 |
| 4.2 | Senka talasi | 52 |
| 4.2.1 | Konstantni senka talasi | 53 |
| 4.2.2 | Težinski senka talasi | 58 |
| 4.2.3 | Još neka uopštenja senka talasa | 60 |
| 4.3 | Uslovi dopustivosti | 61 |
| 4.4 | Singularne interakcije između talasa | 64 |

Singularna (neklassična) rešenja

4.1. Singularna rešenja - definicija i primeri

Klassična rešenja Rimanovog problema

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U = (u^1, \dots, u^n), \quad F = (f^1, \dots, f^n),$$
$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < 0 \\ U_d, & x > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

se mogu predstaviti kao kombinacija elementarnih talasa. Međutim, ona postoje samo kod nekih hiperboličnih sistema i za neke početne uslove (bar za dovoljno malo $|U_l - U_d|$). Kako bismo u potpunosti rešili Rimanov problem (4.1) obično je potrebno da rešenja posmatramo u neklassičnom smislu. Zbog toga uvodimo singularna rešenja koja su neograničena, što se ispoljava kroz pojavu Dirakove delta funkcije u rešenju. Takva rešenja ne zadovoljavaju sistem (4.1), a ni Rankin-Igonoove jednačine u klasičnom smislu. Kako bi se definisala singularna rešenja, između ostalog je neophodno definisati proizvod dve distribucije: Hevisajdove funkcije i Dirakove delta distribucije, što zavisi od odabira klase približnih rešenja koja će aproksimirati to rešenje. Najpoznatije klase singularnih rešenja su rešenja u obliku delta i singularnih udarnih talasa koja se javljaju kao slabi limesi približnih rešenja sistema zakona održanja. To su distributivna rešenja oblika

$$U(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < 0 \\ U_d, & x > 0 \end{cases} + \Sigma(t)\delta(x - c(t)),$$

gde $\Sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$, $\sigma_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, n$, Dirakova δ funkcija ima nosač na pravoj $x = c(t)$, a $c(t)$ i $\sigma_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ su C^1 -funkcije.

Rešenje Rimanovog problema koje sadrži delta funkciju se prvi put numerički pojavilo 1977. godine u doktorskoj disertaciji [59], kada je Korčinski¹ izučavao sistem

$$u_t + (u^2)_x = 0, \quad v_t + (uv)_x = 0.$$

¹Dennis Korchinski

Od tada se brojni autori bave singularnim rešenjima i traže načine za njihovu konstrukciju, ali je još uvek delimično otvoreno pitanje prostora kojem ta rešenja pripadaju.

Postoji više načina (metoda) za konstrukciju približnog rešenja čiji distributivni limes predstavlja singularno rešenje problema. Međutim, ti metodi su uglavnom definisani na konkretnom sistemu ili se mogu primeniti samo na specijalnu klasu sistema (to zavisi od oblika fluks funkcije). Još uvek nije razvijena teorija koja se može primeniti na sve sisteme i koja objedinjuje definiciju singularnih rešenja. Pored toga, još uvek se ne zna koji sve sistemi poseduju takva rešenja i koji je uzrok pojave tih rešenja. Autori u [30, 31] koriste slabi asymptotski metod (*eng. weak asymptotics method*) i definišu singularno rešenje $(u(x, t), v(x, t))$ kao distributivni limes kada $\varepsilon \rightarrow 0$ slabih asymptotskih rešenja $(u(x, t, \varepsilon), v(x, t, \varepsilon))$. Približno rešenje se takođe može konstruisati koristeći Kolomboovu teoriju uopštenih funkcija (videti [73, 74]). Sever u [95] definiše singularno rešenje U sistema $U_t + F(U)_x = 0$ kao slabi limes približnih rešenja U_ε takvih da izraz

$$\partial_t U_\varepsilon(\cdot, t) + \partial_x F(U_\varepsilon(\cdot, t)) - \varepsilon \partial_x(B \partial_x(U_\varepsilon(\cdot, t)))$$

konvergira ka nuli u prostoru mera na \mathbb{R} i tačkasto po t za neku pozitivno definitnu matricu B . Međutim, neki autori smatraju da postoji mana u toj definiciji, jer se rešenje U ne povezuje sa sistemom (4.1)₁.

Mi ćemo kasnije definisati približna rešenja u obliku senka talasa (SDW rešenja) koja su definisana tako da se mogu primeniti na što veću klasu sistema, a obuhvataju i delta i singularne udarne talase kao specijalne slučajeve.

Uslovi dopustivosti koji se najčešće koriste kod singularnih rešenja su uslov prekompre-sivnosti

$$\lambda_i(U_l) \geq c'(t) \geq \lambda_i(U_d), \quad i = 1, \dots, n$$

i entropijski uslov. Ta dva uslova ćemo kasnije koristiti i kod rešenja u obliku senka talasa.

Singularna rešenja sa delta funkcijom dodatom na samo jednu komponentu u rešenju postoje kod sistema oblika

$$\begin{aligned} u_t + (f^1(u, v))_x &= 0 \\ v_t + (f^2(u, v))_x &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

pri čemu su sa $f^1(u, v)$ i $f^2(u, v)$ date glatke funkcije, linearne u odnosu na v .

Neka je dat početni uslov oblika

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) + \sigma_0 \delta(x - X), \tag{4.3}$$

gde $u_0(x), v_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, a σ_0 je konstanta.

U nastavku ćemo navesti definiciju singularnih rešenja početnog problema (4.2, 4.3) sa nosačem delta funkcije na krivoj $x = c(t)$, pri čemu je $c(t)$ glatka funkcija. Opštija definicija ovih rešenja, kada se singulariteti nalaze na povezanom grafu koji je unija konačno mnogo glatkih krivih je data u [30] i [31].

Napomena. U slučaju kada je $\sigma_0 = 0$, a $u_0(x)$ i $v_0(x)$ su po delovima konstantne funkcije posmatramo Rimanov početni problem kao specijalan oblik početnog problema (4.2, 4.3). Rešenje tog problema se naziva *delta udarni talas*. Početni uslov koji sadrži delta funkciju je značajan, jer se rešavanje problema interakcije može svesti na početni problem sa početnim uslovom oblika (4.3), što ćemo kasnije i koristiti.

DEFINICIJA 4.1. Par distribucija $(u(x, t), v(x, t))$, gde $v(x, t) = \bar{v}(x, t) + \sigma(t)\delta(x - c(t))$ i $u, \bar{v} \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R})$, $\sigma(t), c(t) \in C^1$, $\sigma(0) = \sigma$, $c(0) = X$ je singularno rešenje problema (4.2, 4.3) ako

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\varphi_t + f^1(u, \bar{v})\varphi_x) dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\varphi(x, 0) dx &= 0 \\ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\bar{v}\varphi_t + f^2(u, \bar{v})\varphi_x) dxdt + \int_0^\infty \sigma(t)\partial_x\varphi(c(t), t) dt + \int_{-\infty}^\infty v_0(x)\varphi(x, 0) dx &= 0 \end{aligned}$$

važi za svaku test funkciju $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$, gde $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R} \times [0, \infty)$.

U slučaju singularnih rešenja Rankin-Igonoov uslov više ne važi, jer ta rešenja ne zadovoljavaju sistem (4.1) u klasičnom smislu, a izraz $\int_0^\infty \sigma(t)\partial_x\varphi(c(t), t) dt$ je posledica toga. Naime, pojavljuju se tzv. Rankin-Igonoovi deficiti koje ćemo označavati sa κ_1, κ_2 . Sada imamo

$$-[u]c'(t) + [f^1(u, v)] = 0, \quad -c'(t)[v] + [f^2(u, v)] = \sigma'(t),$$

pa je $\kappa_1 = 0$, jer u komponenta u rešenju ne sadrži delta funkciju (prvi uslov je standardna Rankin-Igonoova jednačina) i $\kappa_2 = \sigma'(t)$. Drugim rečima, singularni deo prve komponente u rešenju u je mali i teži nuli u prostoru mera, pa je prva Rankin-Igonoova jednačina zadovoljena, dok singularni deo druge komponente v nije zanemarljiv. Kažemo da je brzina singularnog rešenja problema (4.2, 4.3) jednaka $c'(t)$, dok je snaga jednaka $\sigma(t)$.

Napomena. Kod nekih sistema postoje singularna rešenja kod kojih dve ili više komponenti u rešenju sadrže delta funkciju, i u tom slučaju dobijamo dodatni sistem jednačina koji je kombinacija standarnih Rankin-Igonoovih jednačina i jednačina kod kojih umesto 0 sa desne strane imamo Rankin-Igonoov deficit (Propozicija 4.1).

Tipičan primer modela kod kog može doći do pojave rešenja u obliku delta udarnog talasa je sistem

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad v_t + (g(u)v)_x = 0,$$

koji je linearan u odnosu na v komponentu rešenja i specijalan je oblik sistema (4.2). Takođe, model za gasnu dinamiku (2.25) sa Rimanovim početnim uslovom ima rešenje u obliku delta udarnog talasa (videti Glavu 5). To rešenje se, kao što je urađeno u [8] može definisati i kao rešenje sa vrednostima u prostoru mera (MV - rešenje).

Rešenje u obliku singularnih udarnih talasa postoji kod sistema oblika

$$u_t + (f(u) - v)_x = 0, \quad v_t + (g(u))_x = 0, \tag{4.4}$$

pri čemu su f i g polinomne funkcije

$$f(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i, \quad a_n \neq 0, \quad g(u) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i u^i, \quad b_{n+1} \neq 0,$$

i n je paran prirodan broj. Singularni udarni talasi su nelinearni objekti kod kojih fluks funkcije $f^i(U)$ nisu dobro definisane u prostoru mera. Dati su kao limes približnog rešenja koje pripada nekom prostoru funkcija koji predstavlja dual prostora test funkcija, dok je limes definisan u nekom prostoru težinskih mera ([58]). Takođe, može se pokazati da takvo rešenje pripada prostoru uopštenih distribucija (videti [24, 73, 90]).

Najpoznatiji model sa rešenjem u obliku singularnog udarnog talasa koji je i specijalan oblik sistema (4.4) je tzv. Keyfitz-Kranzer model ([58, 60]),

$$u_t + (u^2 - v)_x = 0, \quad v_t + \left(\frac{1}{3}u^3 - u\right)_x = 0. \tag{4.5}$$

Sistem (4.5) je strogo hiperboličan i obe karakteristične familije su zaista nelinearne, ali Rimanov problem (4.5),

$$(u, v)(x, 0) = \begin{cases} (u_l, v_l), & x < 0 \\ (u_r, v_r), & x > 0 \end{cases}$$

ne poseduje uvek klasično rešenje koje je kombinacija udarnih i razređujućih talasa. Zanimljivo je da postoji veza između sistema (4.5) i modela za politropan gas kada $p(\rho) = \rho^\gamma$, gde $\gamma = 1$,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + \rho)_x = 0. \quad (4.6)$$

Naime, glatka rešenja sistema (4.6) zadovoljavaju jednačinu

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \log \rho \right)_x = 0,$$

pa smenom promenljivih $v = \frac{1}{2}u^2 - \log \rho$ dobijamo sistem (4.5) čije dve jednačine predstavljaju zakone održanja brzine u i nove veličine v koja predstavlja matematičku entropiju za sistem (4.5) (videti [55, 56]). Rešenje u obliku singularnog udarnog talasa se javlja i kod sistema iz hromatografije koji menjaju tip [70, 103].

Napomena. Kao što možemo videti na primeru sistema (4.5) i (4.6), sistemi zakona održanja su prilično osetljivi na smenu promenljivih (tj. na odabir promenljive koja će biti očuvana u sistemu). Dešava se da različiti oblici istog sistema imaju različite osobine i rešenja. Nekoliko takvih primera se može naći u [55].

Sistem (4.5) koji poseduje rešenje u obliku singularnog udarnog talasa je dobijen iz klasičnog Ojlerovog sistema, pa je moguće da se smenom promenljivih koja nije fizički opravданa može doći do rešenja u obliku singularnog udarnog talasa ([55]).

Delta udarne talase obično vezujemo za slabo hiperbolične sisteme ([63]), a singularne za strogo hiperbolične iako se mogu pronaći primeri gde to pravilo ne važi (videti [57] na primer). Postoji nekoliko otvorenih pitanja u vezi sa delta i singularnim udarnim talasima. Naime, još uvek ne postoji opšte prihvaćeno objašnjenje u kom smislu ta rešenja zadovoljavaju neki hiperbolični sistem zakona održanja, a prisutan je i nedostatak fizičke interpretacije takvih rešenja.

U poslednje vreme su se pojavili još neki oblici singularnih rešenja kao što su na primer δ' – ili $\delta^{(n)}$ – udarni talasi definisani u [86, 97], ili talasi koji sadrže $\sqrt{\delta}$ iz [58, 74]. Takođe, u [79] su definisani delta kontaktni diskontinuiteti sa nosačem delta funkcije na pravoj i sa snagom koja se ne menja sa vremenom. Pored toga, delta kontaktni diskontinuitet se prostire duž karakteristike. Svi ti objekti su obuhvaćeni nekim oblikom senka talasa, pa ih nećemo posebno analizirati.

4.2. Senka talasi

Činjenica da do sada nije tačno utvrđeno koji sistemi imaju rešenje u obliku delta ili singularnog talasa, kao i problem jedinstvenosti rešenja nam značajno komplikuju potragu za neklasičnim rešenjem nekog sistema. Iz tog razloga u ovom delu uvodimo senka talase (*eng. shadow waves*) date u [75], koji su definisani što grublje kako bi objedinili delta i singularne talase (ili bar postupak traženja istih), a pritom i proširili klasu mogućih neograničenih rešenja jednodimenzionalnih sistema zakona održanja. To je postignuto uvođenjem malog

parametra $\varepsilon > 0$ koji je zaslužan za pojavu Dirakove delta funkcije u rešenju. Rešenje u obliku senka talasa (ili kraće SDW rešenje) Rimanovog problema sa levim i desnim konstantnim stanjima U_l i U_r , sastoji se iz bar dva udarna talasa koji razdvajaju početna stanja U_l i U_r . Brzine tih talasa su malo pomerene u odnosu na brzinu $c'(t)$.

Posmatramo $n \times n$ sistem zakona održanja

$$\partial_t F(U) + \partial_x G(U) = 0, \quad U = (u^1, \dots, u^n) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.7)$$

gde su funkcije $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidne.

U zavisnosti od oblika funkcija F i G , kao i od početnog uslova koristićemo više različitih oblika senka talasa. Krenućemo od najjednostavnijeg oblika - konstantnog senka talasa koji u opštem slučaju nije dovoljan za rešavanje problema interakcije između talasa. Zato uvodimo opštiji oblik, tzv. težinske senke talase koji proširuju klasu mogućih rešenja i povećavaju šansu za pronalaženje dopustivog entropijskog rešenja. Na kraju definišemo složene senke talase.

4.2.1. Konstantni senka talasi

Sledeća lema daje direktni način za pronalaženje rešenja u obliku senka talasa.

LEMA 4.1. *Neka su date funkcije $F, G \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ i neka je $U_\varepsilon : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ po delovima konstantna funkcija data sa*

$$U_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} U_l, & x < c(t) - a_\varepsilon(t) - x_{l,\varepsilon} \\ U_{l,\varepsilon}, & c(t) - a_\varepsilon(t) - x_{l,\varepsilon} < x < c(t) \\ U_{r,\varepsilon}, & c(t) < x < c(t) + b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon} \\ U_r, & x > c(t) + b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Funkcije $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ su glatke i jednake nuli u $t = 0$ sa redom rasta manjim ili jednakim ε i $x_{l,\varepsilon}, x_{r,\varepsilon} \sim \varepsilon$. Pretpostavimo da važi

$$\max_{i=l,r} \{\|F(U_{i,\varepsilon})\|_{\mathbb{L}^\infty}, \|G(U_{i,\varepsilon})\|_{\mathbb{L}^\infty}\} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}). \quad (4.9)$$

Tada

$$\begin{aligned} \partial_t F(U_\varepsilon) &\approx -c'(t)(F(U_r) - F(U_l))\delta + (a'_\varepsilon(t)F(U_{l,\varepsilon}) + b'_\varepsilon(t)F(U_{r,\varepsilon}))\delta \\ &\quad - c'(t)((a_\varepsilon(t) + x_{l,\varepsilon})F(U_{r,\varepsilon}) + (b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon})F(U_{r,\varepsilon}))\delta' \\ \partial_x G(U_\varepsilon) &\approx (G(U_r) - G(U_l))\delta + ((a_\varepsilon(t) + x_{l,\varepsilon})G(U_{l,\varepsilon}) + (b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon})G(U_{r,\varepsilon}))\delta', \end{aligned} \quad (4.10)$$

pri čemu δ i δ' imaju nosače na pravoj $x = c(t)$.

Napomena. Neka je V_ε lokalno integrabilna funkcija sa domenom $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pišemo $V_\varepsilon \approx G \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako za svaku test funkciju $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ važi

$$\int_\Omega V_\varepsilon \varphi \rightarrow \langle G, \varphi \rangle \quad \text{kada } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Takođe, $a_\varepsilon \sim b_\varepsilon$ ako postoji $A > 0$ takvo da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_\varepsilon}{b_\varepsilon} = A$. Landauovi simboli $\mathcal{O}(\cdot)$ i $o(\cdot)$ će biti korišćeni pod pretpostavkom $\varepsilon \rightarrow 0$ koja će često biti izostavljena posle njihovog korišćenja.

DOKAZ. Neka je

$$I_F := \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial_t F(U_\varepsilon) \varphi(x, t) dx dt, \quad I_G := \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial_x G(U_\varepsilon) \varphi(x, t) dx dt$$

Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\begin{aligned} I_F &= - \int_0^\infty (c'(t) - a'_\varepsilon(t)) (F(U_{l,\varepsilon}) - F(U_l)) \varphi(c(t) - a_\varepsilon(t) - x_{l,\varepsilon}, t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty c'(t) (F(U_{r,\varepsilon}) - F(U_{l,\varepsilon})) \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty (c'(t) + b'_\varepsilon(t)) (F(U_r) - F(U_{r,\varepsilon})) \varphi(c(t) + b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon}, t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Dalje, korišćenjem formule za Tejlorov razvoj funkcije $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$

$$\begin{aligned} \varphi(c(t) - a_\varepsilon(t) - x_{l,\varepsilon}(t), t) &= \varphi(c(t), t) + \sum_{i=1}^m \partial_x^i \varphi(c(t), t) \frac{(-a_\varepsilon(t) - x_{l,\varepsilon})^i}{i!} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}) \\ \varphi(c(t) + b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon}, t) &= \varphi(c(t), t) + \sum_{i=1}^m \partial_x^i \varphi(c(t), t) \frac{(b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon})^i}{i!} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}) \end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I_F &= - (F(U_{l,\varepsilon}) - F(U_l)) \int_0^\infty (c'(t) - a'_\varepsilon(t)) (\varphi(c(t), t) - \partial_x \varphi(c(t), t)(a_\varepsilon(t) + x_{l,\varepsilon})) dt \\ &\quad - (F(U_{r,\varepsilon}) - F(U_{l,\varepsilon})) \int_0^\infty c'(t) \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad - (F(U_r) - F(U_{r,\varepsilon})) \int_0^\infty (c'(t) + b'_\varepsilon(t)) (\varphi(c(t), t) + \partial_x \varphi(c(t), t)(b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon})) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= - (F(U_r) - F(U_l)) \int_0^\infty c'(t) \varphi(c(t), t) dt + \int_0^\infty (a'_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}) + b'_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon})) \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty c'(t) ((a_\varepsilon(t) + x_{l,\varepsilon}) F(U_{l,\varepsilon}) + (b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon}) F(U_{r,\varepsilon})) \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke o rastu funkcija $a_\varepsilon, b_\varepsilon, F(U_{i,\varepsilon}), G(U_{i,\varepsilon}), i = l, r$, bilo je dovoljno uzeti $m = 1$ u gornjem razvoju. Sve prethodne aproksimacije imaju tačnost reda ε^2 .

Na isti način kao kod $\partial_t F(U_\varepsilon)$ dobijamo aproksimacije za $\partial_x G(U_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} I_G &= (G(U_{l,\varepsilon}) - G(U_l)) \int_0^\infty (\varphi(c(t), t) - \partial_x \varphi(c(t), t)(a_\varepsilon(t) + x_{l,\varepsilon})) dt \\ &\quad + (G(U_{r,\varepsilon}) - G(U_{l,\varepsilon})) \int_0^\infty \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad + (G(U_r) - G(U_{r,\varepsilon})) \int_0^\infty (\varphi(c(t), t) + \partial_x \varphi(c(t), t)(b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon})) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= (G(U_r) - G(U_l)) \int_0^\infty \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty ((a_\varepsilon(t) + x_{l,\varepsilon}) G(U_{l,\varepsilon}) + (b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon}) G(U_{r,\varepsilon})) \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Ovim je dokaz završen. \square

DEFINICIJA 4.2. Po delovima konstantne funkcije oblika (4.8) se nazivaju (konstantni) senka talasi (kraće konstantni SDW ili samo SDW).

Vrednost

$$\sigma_\varepsilon(t) := (a_\varepsilon(t) + x_{l,\varepsilon})U_{l,\varepsilon} + (b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon})U_{r,\varepsilon} \quad (4.11)$$

je snaga, a $c'(t)$ je brzina senka talasa.

Centralna linija senka talasa je data sa $x = c(t)$, dok $x = c(t) - a_\varepsilon(t) - x_{l,\varepsilon}$ i $x = c(t) + b_\varepsilon(t) + x_{r,\varepsilon}$ predstavljaju spoljašnje linije senka talasa.

Vrednosti $x_{l,\varepsilon}$ i $x_{r,\varepsilon}$ nazivamo pomerajima, dok su $U_{l,\varepsilon}$, $U_{r,\varepsilon}$ središnja stanja datog senka talasa.

Pomeraji $x_{l,\varepsilon}$ i $x_{r,\varepsilon}$ iz (4.8) su korisni kada početni uslov sadrži delta funkciju. Ako $\sigma := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{l,\varepsilon}U_{l,\varepsilon} + x_{r,\varepsilon}U_{r,\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$ postoji, funkcija U_ε iz (4.8) će zadovoljavati uslov

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < 0 \\ U_r, & x > 0 \end{cases} + \sigma\delta_{(0,0)}. \quad (4.12)$$

Takođe, problem interakcije u kom učestvuje bar jedan senka talas (to uključuje i delta i singularne udarne talase) je ekvivalentan problemu sa početnim uslovom oblika (4.12) transliranom u tačku interakcije. U tom slučaju $x_{l,\varepsilon}$ i $x_{r,\varepsilon}$ ima ulogu u kontrolisanju početne snage senka talasa.

LEMA 4.2. Neka je $\sigma_\varepsilon(t)$ dato u (4.11) i neka $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon(t) = \sigma(t) \in \mathbb{R}^n$ postoji za svako $t \geq 0$. Tada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint U_\varepsilon(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \langle \sigma(t)\delta(x - c(t)) + U_l + [U]\theta(x - c(t)), \varphi(x, t) \rangle, \quad (4.13)$$

gde je sa θ data Hevisajdova funkcija i $[U] := U_r - U_l$.

DOKAZ. Dokaz je direktna posledica definicije konstantnog senka talasa. Imamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint U_\varepsilon(x, t) \varphi(x, t) dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{c(t) - a_\varepsilon - x_{l,\varepsilon}} U_l \varphi(x, t) dx dt \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{c(t) - a_\varepsilon - x_{l,\varepsilon}}^{c(t)} U_{l,\varepsilon} \varphi(x, t) dx dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{c(t)}^{c(t) + b_\varepsilon + x_{r,\varepsilon}} U_{r,\varepsilon} \varphi(x, t) dx dt \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{c(t) + b_\varepsilon + x_{r,\varepsilon}}^{+\infty} U_r \varphi(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

pa važi

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint (U_\varepsilon \varphi)(x, t) dx dt &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{c(t)} U_0 \varphi(x, t) dx dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (a_\varepsilon + x_{l,\varepsilon}) U_{l,\varepsilon} \varphi(c(t), t) dt \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (b_\varepsilon + x_{r,\varepsilon}) U_{r,\varepsilon} \varphi(c(t), t) dt + \int_0^{+\infty} \int_{c(t)}^{+\infty} U_r \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int \sigma(t) \varphi(c(t), t) dt + \iint (U_l + [U]\theta(x - c(t))) \varphi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Relaciju (4.13) možemo zapisati i na sledeći način

$$U_\varepsilon(x, t) \approx \begin{cases} U_l, & x < c(t) \\ U_r, & x > c(t) \end{cases} + \sigma(t)\delta(x - c(t)) \quad \text{kada } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

DEFINICIJA 4.3. Neka je $U_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^n)$ rešenje u obliku senka talasa dano sa (4.8).

Komponente u_ε^i , $i = 1, \dots, n$ koje zadovoljavaju uslov

$$\|u_\varepsilon^i\|_{\mathbb{L}^\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}) \text{ ako su } F \text{ i } G \text{ najviše linearne u odnosu na } i - \text{tu promenljivu (4.14)}$$

su glavne ili ε^{-1} komponente.

Komponente u_ε^i , $i = 1, \dots, n$ koje zadovoljavaju uslov

$$\|u_\varepsilon^i\|_{\mathbb{L}^\infty} \text{ ima rast dovoljno malog reda da važi (4.9)} \quad (4.15)$$

su sporedne komponente.

Ako sve sporedne komponente senka talasa (4.8) imaju konačan limes kada $\varepsilon \rightarrow 0$, tada je distributivni limes rešenja U_ε dat u obliku delta udarnog talasa. Ukoliko je bar jedna sporedna komponenta neograničena kada $\varepsilon \rightarrow 0$, dobijeni talas se naziva singularni udarni talas.

U nastavku pretpostavljamo da važi jedan od dva uslova: (4.14) ili (4.15).

DEFINICIJA 4.4. Neka je dato fiksirano stanje U_l . Skup svih stanja $U_r \in \Omega$ za koje postoji rešenje u obliku senka talasa sistema (4.7) sa početnim uslovom

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < 0 \\ U_r, & x > 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

naziva se SDW lokus stanja U_l . Tačke na SDW lokusu za koje je rešenje u oblike senka talasa problema (4.7, 4.16) dopustivo naziva se dopustiv SDW lokus stanja koji odgovara stanju U_l .

Prosti senka talasi

Konstrukcija i kompleksnost rešenja u obliku senka talasa zavise od osobina funkcija F i G u (4.7). U nastavku ćemo posmatrati specijalan oblik konstantnog senka talasa koji se naziva *prost senka talas* i ima oblik

$$U_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < (c - a_\varepsilon)t \\ U_{l,\varepsilon}, & (c - a_\varepsilon)t < x < ct \\ U_{r,\varepsilon}, & ct < x < (c + b_\varepsilon)t \\ U_r, & x > (c + b_\varepsilon)t. \end{cases} \quad (4.17)$$

Napomena. Udarni talas koji stanju U_l sa leve strane pridružuje stanje U_r sa desne strane i prostire se brzinom c možemo posmatrati kao specijalan slučaj prostog senka talasa, i to biranjem $U_{l,\varepsilon} = U_l$, $U_{r,\varepsilon} = U_r$ ili $a_\varepsilon = b_\varepsilon = 0$. Isto važi i za kontaktne diskontinuitete.

Iz (4.17) se vidi da se prost senka talas prostire konstantnom brzinom c , tj. njegov front se nalazi na pravoj $x = ct$. Takođe, $x_{l,\varepsilon} = x_{r,\varepsilon} = 0$, što znači da (4.17) ne može biti rešenje problema interakcije ili problema koji u početnom uslovu ima delta funkciju. Međutim, takav oblik rešenja je obično dovoljan za rešavanje Rimanovog problema sa $n = 2$.

Jedna od prednosti rešenja u obliku senka talasa je ta što se postupak pronalaženja rešenja svodi na rešavanje sistema jednačina.

Neka je dat sistem (4.7) u nekanoničkom obliku. U slučaju prostog senka talasa (u nastavku ćemo često izostavljati reč "prost"), aproksimacije (4.10) imaju oblik

$$\begin{aligned} \partial_t F(U_\varepsilon) &\approx -c(F(U_r) - F(U_l))\delta(x - ct) + (a_\varepsilon F(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon F(U_{r,\varepsilon}))\delta(x - ct) \\ &\quad - c(a_\varepsilon F(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon F(U_{r,\varepsilon}))t\delta'(x - ct) \end{aligned}$$

$$\partial_x G(U_\varepsilon) \approx (G(U_r) - G(U_l))\delta(x - ct) + (a_\varepsilon G(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon G(U_{r,\varepsilon}))t\delta'(x - ct),$$

pa važi

$$\begin{aligned}\partial_t F(U_\varepsilon) + \partial_x G(U_\varepsilon) &\approx \left(-c(F(U_r) - F(U_l)) + G(U_r) - G(U_l) + a_\varepsilon F(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon F(U_{r,\varepsilon}) \right) \delta \\ &\quad + \left(-c(a_\varepsilon F(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon F(U_{r,\varepsilon})) + a_\varepsilon G(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon G(U_{r,\varepsilon}) \right) t \delta'.\end{aligned}$$

Rešenje sistema (4.7) u obliku (4.17) postoji, tj. $\partial_t F(U_\varepsilon) + \partial_x G(U_\varepsilon) \approx 0$ ako i samo postoji rešenje sistema

$$\begin{aligned}c(f^i(U_r) - f^i(U_l)) - (g^i(U_r) - g^i(U_l)) &\approx a_\varepsilon f^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon f^i(U_{r,\varepsilon}) \\ a_\varepsilon g^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon g^i(U_{r,\varepsilon}) &\approx c(a_\varepsilon f^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon f^i(U_{r,\varepsilon})), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}\quad (4.18)$$

gde $F = (f^1, \dots, f^n)$, $G = (g^1, \dots, g^n)$. Leva strana prve jednakosti u (4.18) predstavlja i -ti Rankin-Igonov deficit

$$\kappa^i := c(f^i(U_r) - f^i(U_l)) - (g^i(U_r) - g^i(U_l)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Sada sistem (4.18) dobija oblik

$$\begin{aligned}a_\varepsilon f^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon f^i(U_{r,\varepsilon}) &\approx \kappa^i \\ a_\varepsilon g^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon g^i(U_{r,\varepsilon}) &\approx c \kappa^i, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Napomena. U slučaju kada je sistem (4.7) dat u kanoničkom obliku, tj. $f^i(y) = y^i$, $i = 1, \dots, n$ pitanje egzistencije rešenja u obliku prostog senka talasa je ekvivalentno rešavanju sistema

$$\begin{aligned}a_\varepsilon u_{l,\varepsilon}^i + b_\varepsilon u_{r,\varepsilon}^i &\approx \kappa^i \\ a_\varepsilon g^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon g^i(U_{r,\varepsilon}) &\approx c \kappa^i, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (4.19)$$

PROPOZICIJA 4.1 (Propozicija 3.1. iz [75]). Neka fluks funkcije u (4.7) imaju najviše linearan rast u odnosu na k komponenti (u^1, \dots, u^k) i superlinearan u odnosu na ostale komponente. Tada se SDW lokus sistema (4.7) u kanoničkom obliku ($F(U) = U$) nalazi na mnogostrukosti dimenzije $k + 1$.

DOKAZ. Komponente $u_{j,\varepsilon}^i$, $j = l, r$, $i = k + 1, \dots, n$ imaju rast koji je u odnosu na ε dovoljno mali da zadovolji jednu od dve prepostavke (4.14), (4.15). Ako fluks funkcija ima superlinearan rast u odnosu na i -tu komponentu u^i , tada važi $u_{j,\varepsilon}^i = o(\varepsilon^{-1})$. To znači da je i -ti Rankin-Igonov deficit jednak nuli ($\kappa^i = 0$), pa je sistem (4.19) delimično određen. Za fiksno levo stanje U_l , brzina c i desno stanje U_r ($n + 1$ promenljiva) treba da zadovolje $n - k$ jednačina oblika

$$c = \frac{g^i(U_r) - g^i(U_l)}{u_r^i - u_l^i}, \quad i = k + 1, \dots, n.$$

Za određeno c , skup svih mogućih vrednosti za $U_l = (u_l^1, \dots, u_l^n)$ će pripadati preseku mnogostrukosti dimenzije $k + 1$ i domena Ω . Dalje, za poznato U_l , U_r i c treba odrediti središnja stanja $u_{j,\varepsilon}^i$, $j = l, r$, $i = 1, \dots, n$. Kako je $\kappa_{k+1} = \dots = \kappa_n = 0$, sistem (4.19) ima $n + k$ netrivijalnih jednačina sa $2n$ nepoznatih

$$\begin{aligned}a_\varepsilon u_{l,\varepsilon}^i + b_\varepsilon u_{r,\varepsilon}^i &\approx \kappa^i, \quad i = 1, \dots, k \\ a_\varepsilon g^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon g^i(U_{r,\varepsilon}) &\approx c \kappa^i, \quad i = 1, \dots, k \\ a_\varepsilon g^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon g^i(U_{r,\varepsilon}) &\approx 0, \quad i = k + 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Za neke specijalne forme fluks funkcija taj sistem ima rešenje. \square

PRIMER 4.1 (Konstrukcija rešenja u obliku δ -udarnog talasa). Neka postoji rešenje koje se sastoji iz delta udarnog talasa i to u formi

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < ct \\ u_r, & x > ct \end{cases}, \quad v(x, t) = \begin{cases} v_l, & x < ct \\ v_r, & x > ct \end{cases} + \alpha_l \delta^-(x - ct) + \alpha_r \delta^+(x - ct),$$

pri čemu su $\delta^-(x - ct)$ i $\delta^+(x - ct)$ definisane na $\mathbb{R}_+^2 \cap \{x \leq ct\}$ i $\mathbb{R}_+^2 \cap \{x \geq ct\}$, respektivno i imaju nosač na pravoj $x = ct$. Odgovarajuće SDW rešenje se konstruiše uzimanjem

$$u_{l,\varepsilon} = u_l, \quad u_{r,\varepsilon} = u_r, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon v_{l,\varepsilon} = \alpha_l, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon v_{r,\varepsilon} = \alpha_r.$$

■

Prepostavke (4.14) i (4.15) se koriste kako bi analiza bila što opštija, ali se kod nekih specijalnih sistema one mogu izbeći. Razvojem test funkcije do drugog stepena dobijamo rešenja u obliku tzv. δ' -udarnog talasa koja su uvedena u [86, 97]. Naravno, još većom preciznošću prilikom aproksimacije test funkcije dobijamo rešenja u obliku $\delta^{(n)}$ -udarnog talasa (za detalje videti [75]).

4.2.2. Težinski senka talasi

Kako bi se obuhvatilo što više tipova rešenja sistema zakona održanja, nastaju specijalni oblici senka talasa. Jedan takav je težinski senka talas kod koga središnja stanja $U_{l,\varepsilon}(t)$, $U_{r,\varepsilon}(t)$ zavise od t .

LEMA 4.3. *Neka su date funkcije $F, G \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ i neka je $U_\varepsilon : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ za svako $t \geq 0$ po delovima konstantna funkcija data sa*

$$U_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < c(t) - a_\varepsilon(t) \\ U_{l,\varepsilon}(t), & c(t) - a_\varepsilon(t) < x < c(t) \\ U_{r,\varepsilon}(t), & c(t) < x < c(t) + b_\varepsilon(t) \\ U_r, & x > c(t) + b_\varepsilon(t). \end{cases} \quad (4.20)$$

Funkcije $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ su C^1 -funkcije takve da važi $a_\varepsilon(0) = x_{l,\varepsilon}$ i $b_\varepsilon(0) = x_{r,\varepsilon}$. Neka F i G zadovoljavaju uslov

$$\max_{i=l,r} \{\|F(U_{i,\varepsilon})\|_{\mathbb{L}^\infty}, \|G(U_{i,\varepsilon})\|_{\mathbb{L}^\infty}\} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}).$$

Tada

$$\begin{aligned} I_F := & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial_t F(U_\varepsilon) \varphi(x, t) dx dt \approx - \int_0^\infty c'(t)(F(U_r) - F(U_l)) \varphi(c(t), t) dt \\ & + \int_0^\infty \partial_t ((a_\varepsilon(t)F(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)F(U_{r,\varepsilon}(t))) \varphi(c(t), t) dt \\ & + \int_0^\infty c'(t)(a_\varepsilon(t)F(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)F(U_{r,\varepsilon}(t))) \partial_x \varphi(c(t), t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_G := & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial_x G(U_\varepsilon) \varphi(x, t) dx dt \approx \int_0^\infty (G(U_r) - G(U_l)) \varphi(c(t), t) dt \\ & - \int_0^\infty (a_\varepsilon(t)G(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)G(U_{r,\varepsilon}(t))) \partial_x \varphi(c(t), t) dt. \end{aligned}$$

DOKAZ. Dokaz je sličan dokazu Leme 4.1. Naime, razliku pravi činjenica da središnje stanje zavisi od t , pa se u aproksimaciji za I_F posle parcijalne integracije pojavljuje izraz

$$\int_0^\infty \int_{c(t)-a_\varepsilon(t)}^{c(t)} \partial_t F(U_{l,\varepsilon}(t)) \varphi(x, t) dx dt + \int_0^\infty \int_{c(t)}^{c(t)+b_\varepsilon(t)} \partial_t F(U_{r,\varepsilon}(t)) \varphi(x, t) dx dt,$$

tj. dobijamo

$$\begin{aligned} I_F = & - \int_0^\infty (c'(t) - a'_\varepsilon(t))(F(U_{l,\varepsilon}(t)) - F(U_l)) \varphi(c(t) - a_\varepsilon(t), t) dt \\ & - \int_0^\infty c'(t)(F(U_{r,\varepsilon}(t)) - F(U_{l,\varepsilon}(t))) \varphi(c(t), t) dt \\ & - \int_0^\infty (c'(t) + b'_\varepsilon(t))(F(U_r) - F(U_{r,\varepsilon}(t))) \varphi(c(t) + b_\varepsilon(t), t) dt \\ & + \underbrace{\int_0^\infty \int_{c(t)-a_\varepsilon(t)}^{c(t)} \partial_t F(U_{l,\varepsilon}(t)) \varphi(x, t) dx dt}_{=a_\varepsilon(t) \partial_t F(U_{l,\varepsilon}(t)) \varphi(c(t), t) + \mathcal{O}(\varepsilon)} + \underbrace{\int_0^\infty \int_{c(t)}^{c(t)+b_\varepsilon(t)} \partial_t F(U_{r,\varepsilon}(t)) \varphi(x, t) dx dt}_{=b_\varepsilon(t) \partial_t F(U_{r,\varepsilon}(t)) \varphi(c(t), t) + \mathcal{O}(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Razvojem test funkcije φ u Tejlorov polinom I_F svodimo na

$$\begin{aligned} I_F = & - \int_0^\infty (F(U_r) - F(U_l)) c'(t) \varphi(c(t), t) dt \\ & + \int_0^\infty \left(\underbrace{a_\varepsilon(t) \partial_t F(U_{l,\varepsilon}(t)) + a'_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}(t))}_{=\partial_t(a_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}(t)))} + \underbrace{b_\varepsilon(t) \partial_t F(U_{r,\varepsilon}(t)) + b'_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon}(t))}_{=\partial_t(b_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon}(t)))} \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & + \int_0^\infty c'(t) \left(a_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon}(t)) \right) \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. Slično,

$$\begin{aligned} I_G = & \int_0^\infty (G(U_r) - G(U_l)) \varphi(c(t), t) dt \\ & - \int_0^\infty \left(a_\varepsilon(t) G(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) G(U_{r,\varepsilon}(t)) \right) \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

□

Koristeći Lemu 4.3 i aproksimacije za I_F i I_G dobijamo

$$\begin{aligned} I_F + I_G \approx & \int_0^\infty \left(-c'(t)(F(U_r) - F(U_l)) + (G(U_r) - G(U_l)) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & + \int_0^\infty \partial_t(a_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon}(t))) \varphi(c(t), t) dt \\ & + \int_0^\infty c'(t) \left(a_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon}(t)) \right) \partial_x \varphi(c(t), t) dt \\ & - \int_0^\infty \left(a_\varepsilon(t) G(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) G(U_{r,\varepsilon}(t)) \right) \partial_x \varphi(c(t), t) dt \end{aligned}$$

Izjednačavanjem izraza uz $\varphi(c(t), t)$ (što odgovara δ funkciji) sa nulom dobijamo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$c'(t)(F(U_r) - F(U_l)) - (G(U_r) - G(U_l)) \approx \partial_t(a_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon}(t))), \quad (4.21)$$

dok izjednačavanjem izraza koji odgovara δ' sa nulom dobijamo

$$c'(t) \left(a_\varepsilon(t) F(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) F(U_{r,\varepsilon}(t)) \right) \approx a_\varepsilon(t) G(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t) G(U_{r,\varepsilon}(t)). \quad (4.22)$$

Dakle, kao i ranije egzistencija rešenja u obliku težinskog senka talasa ekvivalentna je postojanju rešenja sistema (4.21, 4.22).

Kod sistema dimenzije veće od dva skoro je nemoguće pronaći konstantno SDW rešenje problema interakcije, pa u tom slučaju težinski senka talas igra značajnu ulogu.

Napomena. U nastavku ćemo često izostavljati reč "težinski". Ako bude bitno napomenuti da se talas prostire konstantnom brzinom ili da središnja stanja ne zavise od t , koristićemo reči "prost" ili "konstantni".

4.2.3. Još neka uopštenja senka talasa

Definicija senka talasa se može dodatno uopštiti kako bi se obuhvatilo što više različitih oblika neograničenih rešenja ali i da bi se povećale šanse za pronalaženje dopustivog približnog rešenja.

DEFINICIJA 4.5. Po delovima konstantna funkcija sa konačnom brzinom prostiranja c ,

$$U_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < (c + a_{-N,\varepsilon})t \\ U_{-N,\varepsilon}, & (c + a_{-N,\varepsilon})t < x < (c + a_{-N+1,\varepsilon})t \\ \dots & \dots \\ U_{0,\varepsilon}, & (c + a_{0,\varepsilon})t < x < (c + a_{1,\varepsilon})t \\ \dots & \dots \\ U_{N-1,\varepsilon}, & (c + a_{N-1,\varepsilon})t < x < (c + a_{N,\varepsilon})t \\ U_r, & x > (c + a_{N,\varepsilon})t \end{cases} \quad (4.23)$$

naziva se složeni senka talas (ili N-SDW).

Ukoliko je $a_{i,\varepsilon} = i\varepsilon$, $i = -N, \dots, N$ kažemo da N-SDW ima homogen oblik. Ukoliko N-SDW ima semi-homogen oblik onda važi $a_{i,\varepsilon} = i b_i \varepsilon$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = -N, \dots, N$.

Na isti način kao ranije mogu se aproksimirati parcijalni izvodi $\partial_t F(U_\varepsilon)$ i $\partial_x G(U_\varepsilon)$.

LEMA 4.4. Neka su date neprekidne funkcije $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ i funkcija $U_\varepsilon : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Omega$ data sa (4.23) i neka su $a_{i,\varepsilon}$, $i = -N, \dots, N$ takvi da važi

$$b_i := \frac{a_{i+1,\varepsilon} - a_{i,\varepsilon}}{\varepsilon} \in \mathbb{R}, \quad i = -N, \dots, N-1.$$

Pretpostavimo da važi

$$\max_{i=-N, \dots, N-1} \{ \|F(U_{i,\varepsilon})\|_{\mathbb{L}^\infty}, \|G(U_{i,\varepsilon})\|_{\mathbb{L}^\infty} \} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}).$$

Tada

$$\begin{aligned} \partial_t F(U_\varepsilon) &= \left(\sum_{i=-N}^{N-1} b_i \varepsilon F(U_{i,\varepsilon}) - c(F(U_r) - F(U_l)) \right) \delta(x - ct) - c \sum_{i=-N}^{N-1} b_i \varepsilon F(U_{i,\varepsilon}) t \delta'(x - ct) \\ \partial_x G(U_\varepsilon) &= (G(U_r) - G(U_l)) \delta(x - ct) + \sum_{i=-N}^{N-1} b_i \varepsilon G(U_{i,\varepsilon}) t \delta'(x - ct). \end{aligned}$$

Koristeći aproksimacije iz Leme 4.4 dobijamo da će složeni senka talas dat sa (4.23) biti približno rešenje sistema (4.7) ako

$$\varepsilon \sum_{i=-N}^{N-1} b_i F(U_{i,\varepsilon}) \approx \kappa \quad \text{i} \quad \varepsilon \sum_{i=-N}^{N-1} b_i G(U_{i,\varepsilon}) \approx c\kappa,$$

pri čemu $\kappa = (\kappa^1, \dots, \kappa^n)$ predstavlja vektor Rankin-Igonooovih deficitata.

Napomena. Kao i ranije, N-SDW sa konstantnom brzinom se može uopštiti definisanjem težinskog N-SDW kod kog će središnja stanja zavisiti od t , a brzina će zavisiti od t . Takvo rešenje bi imalo posebnu ulogu u slučaju rešavanja problema interakcije.

4.3. Uslovi dopustivosti

Mnogi sistemi zakona održanja imaju rešenja u obliku delta (ili singularnih) udarnih talasa ali su samo neka od njih fizički značajna. U radu sa delta i singularnim udarnim talasima, naročito sa sistemima koji nemaju specijalne osobine (npr. stroga hiperboličnost) se uglavnom koristi uslov prekompresibilnosti kao uslov za proveru dopustivosti rešenja koji je u većini slučajeva dovoljan za odabir jedinstvenog i fizički značajnog rešenja. To je uslov analogan Laksovom entropijskom uslovu za udarne talase (3.10).

DEFINICIJA 4.6. *Senka talas koji razdvaja stanja U_l i U_r i prostire se brzinom $c'(t)$ je prekompresivan ako važi*

$$\lambda_i(U_l) \geq c'(t) \geq \lambda_i(U_r), \quad i = 1, \dots, n,$$

pri čemu je $c'(t)$ brzina talasa i $x = \lambda_i(U)t$, $i = 1, \dots, n$ su karakteristike sistema.

Druga opcija za proveru dopustivosti je entropijski uslov. Neka je sa η označena strogo konveksna ili semi-konveksna entropija sistema (4.7), dok je njoj odgovarajući fluks entropije označen sa Q .

DEFINICIJA 4.7. *Rešenje U_ε sistema (4.7) sa početnim uslovom $U|_{t=0} = U_{0,\varepsilon}$ je dopustivo ako*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T (\eta(U_\varepsilon) \partial_t \varphi + Q(U_\varepsilon) \partial_x \varphi) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(U_{0,\varepsilon}(x, 0)) \varphi(x, 0) dx \geq 0 \quad (4.24)$$

važi za svako $T > 0$ i za sve nenegativne test funkcije $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (-\infty, T))$.

U opštem slučaju se ne zna kakav je odnos između dva uslova za proveru dopustivosti. Na nekim sistemima je pokazano da entropijski uslov implicira uslov prekompresivnosti i postojala je sumnja da bi dva uslova mogla biti ekvivalentna, sve dok na modelu za uopšten Čapliginov gas nije pokazano da to ne važi uvek ([80]).

Dopustivim rešenjem ćemo smatrati ono koje zadovoljava entropijsku nejednakost (4.24) i to za sve entropijske parove sa konveksnim (u slučaju stroga hiperboličnih sistema) ili semi-konveksnim entropijskim funkcijama (u slučaju slabo hiperboličnih sistema).

U slučaju rešenja u obliku senka talasa, entropijsku nejednakost (4.24) svodimo na dva uslova. Posmatramo prost senka talas oblika (4.17) i koristimo (4.10) ali sa funkcijama η (umesto f) i Q (umesto g). Prvi uslov ima oblik

$$-c(\eta(U_r) - \eta(U_l)) + Q(U_r) - Q(U_l) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\varepsilon \eta(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon \eta(U_{r,\varepsilon})) \leq 0, \quad (4.25)$$

jer je δ funkcija nenegativna distribucija, dok je drugi uslov dat sa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-c(a_\varepsilon \eta(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon \eta(U_{r,\varepsilon})) + a_\varepsilon Q(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon Q(U_{r,\varepsilon})) = 0, \quad (4.26)$$

jer izvod δ funkcije nema konstantan znak.

DEFINICIJA 4.8. *Producija ukupne (matematičke) entropije rešenja u obliku prostog senka talasa je konstantna i data je sa*

$$\mathcal{P}_{l,r} := -c(\eta(U_r) - \eta(U_l)) + Q(U_r) - Q(U_l) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\varepsilon \eta(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon \eta(U_{r,\varepsilon})).$$

Kažemo da je senka talas disipativan ako važi $\mathcal{P}_{l,r} \leq 0$.

Napomena. Pojam disipativnog slabog rešenja je uveo Lions^a u [66].

^aPierre-Louis Lions, rođen 1956. godine je francuski matematičar i dobitnik Fildsove medalje.

DEFINICIJA 4.9. *Kažemo da je rešenje u obliku prostog senka talasa slabo jedinstveno ako je njegova distributivna slika jedinstvena, tj. pored brzine talasa c koja je jedinstvena, jedinstven mora biti i limes*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\varepsilon U_{l,\varepsilon} + b_\varepsilon U_{r,\varepsilon}).$$

Ako je limes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\varepsilon u_{l,\varepsilon}^i + b_\varepsilon u_{r,\varepsilon}^i)$ za neko $i \in \{1, \dots, n\}$ jedinstven, kažemo da je i -ta komponenta jedinstvena.

Napomena. Primetite da na osnovu prethodne definicije važi da su sve sporedne komponente U_ε jedinstvene.

PROPOZICIJA 4.2 (Propozicija 4.2. iz [75]). *Prepostavimo da postoji rešenje u obliku prostog senka talasa sistema (4.7).*

(a) *Ako postoji jednačina u sistemu (npr. i -ta) takva da je funkcija $f^i(U)$ nezavisna od glavnih komponenti vektora U , tada je brzina SDW-a jedinstveno određena jednačinom*

$$-c[f^i(U)] + [g^i(U)] = 0.$$

(b) *Ako postoji jednačina u sistemu (npr. i -ta) takva da $f^i(U) = u^j$, pri čemu je u^j glavna komponenta U , tada je ona jedinstveno određena sa*

$$a_\varepsilon u_{l,\varepsilon}^j + b_\varepsilon u_{r,\varepsilon}^j = \kappa^i \in \mathbb{R}.$$

Ako (a) i (b) važe za sve glavne komponente, tada je distributivni limes SDW rešenja sistema (4.7) jedinstven. Isti je slučaj i sa sistemom datim u kanoničkom obliku.

DEFINICIJA 4.10. *Rešenje sistema (4.7) je slabo jedinstveno ako se na jedinstven način može zapisati kao kombinacija standardnih dopustivih elementarnih talasa (udarni, razređujući talasi i kontaktni diskontinuiteti) i dopustivog senka talasa.*

Gornje definicije se mogu uopštiti i na težinski senka talas. Na primer, zamenom funkcija η i Q umesto F i G u (4.21) i (4.22) dobijamo dva entropijska uslova za proveru dopustivosti rešenja u obliku senka talasa

$$\begin{aligned} & -c'(t)(\eta(U_r) - \eta(U_l)) + (Q(U_r) - Q(U_l)) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_t (a_\varepsilon(t)\eta(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)\eta(U_{r,\varepsilon}(t))) \leq 0 \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (c'(t)(a_\varepsilon(t)\eta(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)\eta(U_{r,\varepsilon}(t))) - (a_\varepsilon(t)Q(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)Q(U_{r,\varepsilon}(t)))) = 0. \end{aligned}$$

Producija ukupne (matematičke) entropije preko težinskog senka talasa zavisi od t i data je sa

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{l,r}(t) := & -c'(t)(\eta(U_r) - \eta(U_l)) + Q(U_r) - Q(U_l) \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (a_\varepsilon(t)\eta(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)\eta(U_{r,\varepsilon}(t))).\end{aligned}$$

Označimo sa

$$\mathcal{H}_{l,r}(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{l,r}^\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(U_\varepsilon(x,t)) dx$$

ukupnu entropiju u vremenu t rešenja u obliku senka talasa (4.20) koji razdvaja stanja U_l i U_r . Važi

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{l,r}^\varepsilon(t) = & \int_{-\infty}^{c(t)-a_\varepsilon(t)} \eta(U_l) dx + \int_{c(t)-a_\varepsilon(t)}^{c(t)} \eta(U_{l,\varepsilon}(t)) dx \\ & + \int_{c(t)}^{c(t)+b_\varepsilon(t)} \eta(U_{r,\varepsilon}(t)) dx + \int_{c(t)+b_\varepsilon(t)}^{\infty} \eta(U_r) dx.\end{aligned}$$

Koristeći formulu

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \eta(x,t) dx = b'(t)\eta(b(t),t) - a'(t)\eta(a(t),t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \eta_t(x,t) dx$$

i činjenicu da u oblasti gde je rešenje glatko važi $\partial_t \eta + \partial_x Q = 0$ dobijamo izraz za stopu promene entropije rešenja u obliku senka talasa u vremenu t

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathcal{H}_{l,r}^\varepsilon(t) = & (c'(t) - a'_\varepsilon(t))\eta(U_l) + a'_\varepsilon(t)\eta(U_{l,\varepsilon}(t)) + a_\varepsilon(t)\eta_t(U_{l,\varepsilon}(t)) \\ & + b'_\varepsilon(t)\eta(U_{r,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)\eta_t(U_{r,\varepsilon}(t)) - (c'(t) + b'_\varepsilon(t))\eta(U_r) \\ = & c'(t)(\eta(U_l) - \eta(U_r)) + \frac{d}{dt} (a_\varepsilon(t)\eta(U_{l,\varepsilon}(t)) + b_\varepsilon(t)\eta(U_{r,\varepsilon}(t))) \\ & \underbrace{- a'_\varepsilon(t)\eta(U_l) - b'_\varepsilon(t)\eta(U_r)}_{\sim \varepsilon}.\end{aligned}$$

Puštanjem limesa kada $\varepsilon \rightarrow 0$ u gornjem izrazu dobijamo relaciju

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}_{l,r}(t) = \mathcal{P}_{l,r}(t) + Q(U_l) - Q(U_r). \quad (4.27)$$

Kriterijum za proveru dopustivosti klasičnih rešenja dat u Definiciji 3.8 se može prilagoditi i slučaju kada rešenje sadrži senka talas i to korišćenjem izraza za produkciju entropije $\mathcal{P}_{l,r}(t)$ koji se dobija kod senka talasa, odnosno stope promene entropije $\mathcal{H}_{l,r}(t)$ umesto odgovarajućih izraza koji se koriste kod klasičnih talasa. To će kasnije biti ilustrovano na sistemu (2.28).

Napomena. U gornjem izvođenju zanemarujuemo da je moguć problem sa beskonačnom ukupnom entropijom u konačnom vremenu. Razlog za to leži u činjenici da se talasi prostiru konačnom brzinom, pa je moguće posmatrati ukupnu entropiju na konačnom intervalu $[-M, M]$, pri čemu je $M > 0$ dovoljno veliko takvo da su sve korišćene pretpostavke zadovoljene. U tom slučaju imamo $Q(U_\varepsilon(-M, t)) = Q(U_r)$ i $Q(U_\varepsilon(M, t)) = Q(U_l)$, pa se jednačina (4.27) ne menja.

Može se desiti da postoji rešenje u obliku senka talasa posmatranog problema ali da to rešenje nije dopustivo. U [76] je predstavljen postupak koji bi trebalo da prevaziđe taj problem. Na primeru modela za Čapliginov gas uveden je pojam niza senka talasa takvog da je svaki senka talas u nizu parametrizovan pomoću nekog parametra, manjeg od onog koji odgovara prethodnom članu niza. Na taj način nastaju senka talasi višeg reda. Najpre se fiksira početni parametar ε i rešava početni problem korišćenjem elementarnih talasa i senka talasa parametrizovanog pomoću novog parametra $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$. Novi senka talas ima red jedan. U sledećoj iteraciji se fiksira ε_1 i uvodi novi parametar ε_2 koji odgovara senka talasu drugog reda sa kojim se rešava početni problem, itd. Slično će kasnije biti urađeno na primeru modela za gasnu dinamiku bez pritiska i početnog uslova koji sadrži delta funkciju (Glava 7).

4.4. Singularne interakcije između talasa

Rešavanje problema interakcije između udarnih talasa (to uključuje i kontaktne diskontinuitete) je ekvivalentno rešavanju Rimanovog problema sa početnim uslovom transliranim u tačku interakcije između talasa. Međutim, slučaj kada u interakciji učestvuje centrirani razređujući talas je značajno komplikovaniji i mi ga ovde nećemo razmatrati (više o tome se može pronaći u [21, 101]). Alternativni pristup je da se centrirani razređujući talas aproksimira fanom koji se sastoji iz udarnih talasa malih amplituda, kao što je urađeno u slučaju algoritma za praćenje talasa (videti Glavu 5).

Kako senka talasi obuhvataju veliku klasu singularnih rešenja, uključujući i delta i singularne udarne talase, pretpostavljamo da u interakciji učestvuje bar jedan senka talas. Udarne talase možemo posmatrati kao specijalne (trivijalne) oblike senka talasa, pa ćemo analizom obuhvatiti i interakcije u kojima učestvuju elementarni talasi, izuzimajući razređujuće talase.

DEFINICIJA 4.11 (Prilazeći talasni frontovi). *Kažemo da su dva talasna fronta prilazeća ako se mogu sudariti u budućnosti, gledano nezavisno od ostalih talasa.*

PRIMER 4.2. Dva talasna fronta koja imaju poreklo u $(X_1, 0)$ i $(X_2, 0)$ sa konstantnim brzinama c_1 i c_2 su prilazeća ako važi

$$(X_1 < X_2 \text{ i } c_1 > c_2) \text{ ili } (X_1 > X_2 \text{ i } c_1 < c_2).$$

Drugim rečima, talasni frontovi sa konstantnom brzinom su prilazeći ako onaj sa leve strane ima veću brzinu. ■

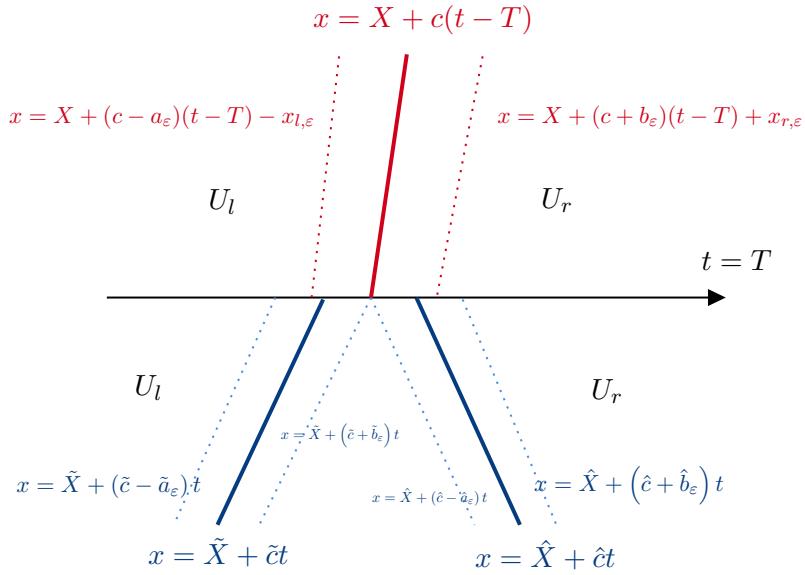
Prepostavimo da je došlo do susreta dva prosta senka talasa koji su rešenja sistema (4.7) i imaju oblik

$$\tilde{U}_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_l, & x - \tilde{X} < (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)t \\ \tilde{U}_{l,\varepsilon}, & (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)t < x - \tilde{X} < \tilde{c}t \\ \tilde{U}_{r,\varepsilon}, & \tilde{c}t < x - \tilde{X} < (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)t \\ U_m, & x - \tilde{X} > (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)t \end{cases}, \quad \hat{U}_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_m, & x - \hat{X} < (\hat{c} - \hat{a}_\varepsilon)t \\ \hat{U}_{l,\varepsilon}, & (\hat{c} - \hat{a}_\varepsilon)t < x - \hat{X} < \hat{c}t \\ \hat{U}_{r,\varepsilon}, & \hat{c}t < x - \hat{X} < (\hat{c} + \hat{b}_\varepsilon)t \\ U_r, & x - \hat{X} > (\hat{c} + \hat{b}_\varepsilon)t \end{cases}.$$

Neka se \tilde{U}_ε nalazi sa leve strane talasa \hat{U}_ε , tj. $\tilde{X} < \hat{X}$. Potreban uslov da dođe do sudara ta dva talasa je da važi $\tilde{c} > \hat{c}$.

Neka je sa (X, T) označena tačka interakcije, tj. presečna tačka između dve spoljašnje SDW linije, $x = \tilde{X} + (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)t$ i $x = \hat{X} + (\hat{c} - \hat{a}_\varepsilon)t$ (videti Sliku 4.1). (X, T) zadovoljava jednačinu

$$X = \tilde{X} + (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)T = \hat{X} + (\hat{c} - \hat{a}_\varepsilon)T,$$

Slika 4.1: Interakcija između \tilde{U}_ε i \hat{U}_ε u $t = T$

pa sledi

$$T = \frac{\hat{X} - \tilde{X}}{\tilde{c} - \hat{c} + \hat{a}_\varepsilon + \tilde{b}_\varepsilon}.$$

Posmatramo sistem (4.7) sa početnim uslovom

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < \tilde{X} \\ U_m, & \tilde{X} < x < \hat{X} \\ U_r, & x > \hat{X}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Označimo sa U_ε^- približno rešenje tog početnog problema pre interakcije. Ono je kombinacija dva senka talasa, $\tilde{U}_\varepsilon(x, t)$ i $\hat{U}_\varepsilon(x, t)$ i dato je sa

$$U_\varepsilon^-(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)t + \tilde{X} \\ \tilde{U}_{l,\varepsilon}, & (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)t + \tilde{X} < x < \tilde{c}t + \tilde{X} \\ \tilde{U}_{r,\varepsilon}, & \tilde{c}t + \tilde{X} < x < (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)t + \tilde{X} \\ U_m, & (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)t + \tilde{X} < x < (\hat{c} - \hat{a}_\varepsilon)t + \hat{X}, \quad t \leq T. \\ \hat{U}_{l,\varepsilon}, & (\hat{c} - \hat{a}_\varepsilon)t + \hat{X} < x < \hat{c}t + \hat{X} \\ \hat{U}_{r,\varepsilon}, & \hat{c}t + \hat{X} < x < (\hat{c} + \hat{b}_\varepsilon)t + \hat{X} \\ U_r, & x > (\hat{c} + \hat{b}_\varepsilon)t + \hat{X} \end{cases} \quad (4.29)$$

Dalje, neka je

$$U_\varepsilon^+(x, t) = \begin{cases} U_l, & x - X < (c - a_\varepsilon)(t - T) - x_{l,\varepsilon} \\ U_{l,\varepsilon}, & (c - a_\varepsilon)(t - T) - x_{l,\varepsilon} < x - X < c(t - T), \quad t \geq T. \\ U_{r,\varepsilon}, & c(t - T) < x - X < (c + b_\varepsilon)(t - T) + x_{r,\varepsilon} \\ U_r, & x - X > (c + b_\varepsilon)(t - T) + x_{r,\varepsilon} \end{cases} \quad (4.30)$$

Napomena. Primetite da se u (4.30) pojavljuju konstante $x_{l,\varepsilon}, x_{r,\varepsilon} \sim \varepsilon$. One imaju važnu ulogu, jer se snaga tog senka talasa u $t = T$ manifestuje kroz izraz $x_{l,\varepsilon}U_{l,\varepsilon} + x_{r,\varepsilon}U_{r,\varepsilon}$.

U nastavku ćemo pokazati da je sa

$$U_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_\varepsilon^-(x, t), & t \leq T \\ U_\varepsilon^+(x, t), & t > T \end{cases} \quad (4.31)$$

dato slabo rešenje problema interakcije pod uslovom da postoji rešenje u obliku senka talasa sistema (4.7) sa početnim uslovom

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < 0 \\ U_r, & x > 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

dato sa

$$\bar{U}_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_l, & x < (c - a_\varepsilon)t \\ U_{l,\varepsilon}, & (c - a_\varepsilon)t < x < ct \\ U_{r,\varepsilon}, & ct < x < (c + b_\varepsilon)t \\ U_r, & x > (c + b_\varepsilon)t. \end{cases} \quad (4.33)$$

Napomenimo da je pretpostavka o postojanju rešenja oblika (4.33) bez prisustva konstanti $x_{l,\varepsilon}, x_{r,\varepsilon} \sim \varepsilon$ dovoljna za postojanje rešenja problema interakcije oblika (4.30) (radi jednostavnosti je uzeto $T = 0$). Naime, iz Leme 4.1 dobijamo da će senka talas dat sa (4.30), $T = 0$ biti rešenje posmatranog problema ako zadovoljava sistem

$$\begin{aligned} -c(f^i(U_r) - f^i(U_l)) + a_\varepsilon f^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon f^i(U_{r,\varepsilon}) + g^i(U_r) - g^i(U_l) &\approx 0, \\ -c((a_\varepsilon t + x_{l,\varepsilon})f^i(U_{l,\varepsilon}) + (b_\varepsilon t + x_{r,\varepsilon})f^i(U_{r,\varepsilon})) \\ + (a_\varepsilon t + x_{l,\varepsilon})g^i(U_{l,\varepsilon}) + (b_\varepsilon t + x_{r,\varepsilon})g^i(U_{r,\varepsilon}) &\approx 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Međutim, lako se pokazuje da ako $(x_{l,\varepsilon}, x_{r,\varepsilon}) = \alpha(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$ važi za bilo koje realno α , onda se druga jednačina iz (4.34) svodi na

$$-c(a_\varepsilon f^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon f^i(U_{r,\varepsilon})) + a_\varepsilon g^i(U_{l,\varepsilon}) + b_\varepsilon g^i(U_{r,\varepsilon}) \approx 0,$$

pa je sistem (4.34) ekvivalentan sistemu (4.18) koji zadovoljavaju rešenja u obliku prostog senka talasa, tj. (4.30) će biti rešenje posmatranog problema ako i samo ako je (4.33) rešenje tog problema.

TEOREMA 4.1. *Funkcija U_ε definisana sa (4.31) je rešenje problema (4.7, 4.28) ako važe sledeće pretpostavke:*

1. Postoji rešenje problema (4.7, 4.28) za $t < T$ dato sa (4.29).
2. Postoji rešenje problema (4.7, 4.32) za $t > 0$ dato sa (4.33).
3. Moguće je odabrati $\alpha \geq 0$ takvo da važi

$$\alpha\kappa = T(\tilde{\kappa} + \hat{\kappa}),$$

pri čemu su sa $\hat{\kappa}, \tilde{\kappa}, \kappa \in \mathbb{R}^n$ označeni Rankin-Igonoovi deficiti koji redom odgovaraju funkcijama $\hat{U}_\varepsilon, \tilde{U}_\varepsilon, \bar{U}_\varepsilon$.

U tom slučaju kažemo da je funkcija U_ε^- data sa (4.30) rešenje problema interakcije između \tilde{U}_ε i \hat{U}_ε .

Napomena. Prepostavka 2 iz Teoreme 4.1 je bitna, jer nam garantuje postojanje rešenja problema interakcije u obliku konstantnog senka talasa. Naravno, takvo rešenje ne postoji uvek. Moguće je da iz interakcije dva senka talasa nastane senka talas sa nekonstantnom brzinom. To će kasnije biti pokazano na primeru modela za gasnu dinamiku bez pritiska. Naravno, može da se desi da ne postoji ni rešenje problema interakcije u obliku težinskog senka talasa. U tom slučaju treba pokušati sa još opštijim oblikom SDW rešenja. Takođe, treba uzeti u obzir da je moguće da iz singularne interakcije nastane neka kombinacija talasa od kojih je bar jedan singularni talas, kao što je dobijeno u [74].

DOKAZ. Neka je sa $\mathbf{n}_0 = (0, 1)$ označen jedinični vektor normale na $t = T$. Posmatramo sledeće oblasti:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &:= \{(x, t) : t = T, x - \tilde{X} \leq (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)T\} \\ \gamma_2 &:= \gamma'_2 \cup \gamma''_2, \quad \begin{cases} \gamma'_2 := \{(x, t) : t = T, (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)T \leq x - \tilde{X} \leq \tilde{c}T\} \\ \gamma''_2 := \{(x, t) : t = T, \tilde{c}T \leq x - \tilde{X} \leq (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)T\} \end{cases} \\ \gamma_3 &:= \gamma'_3 \cup \gamma''_3, \quad \begin{cases} \gamma'_3 := \{(x, t) : t = T, (\hat{c} - \hat{a}_\varepsilon)T \leq x - \hat{X} \leq \hat{c}T\} \\ \gamma''_3 := \{(x, t) : t = T, \hat{c}T \leq x - \hat{X} \leq (\hat{c} + \hat{b}_\varepsilon)T\} \end{cases} \\ \gamma_4 &:= \{(x, t) : t = T, x - \hat{X} \geq (\hat{c} - \hat{b}_\varepsilon)T\} \\ \gamma_5 &:= \{(x, t) : t = T, x \leq X - x_{l,\varepsilon}\} \\ \gamma_6 &:= \gamma'_6 \cup \gamma''_6, \quad \begin{cases} \gamma'_6 := \{(x, t) : t = T, X - x_{l,\varepsilon} \leq x \leq X\} \\ \gamma''_6 := \{(x, t) : t = T, X \leq x \leq X + x_{r,\varepsilon}\} \end{cases} \\ \gamma_7 &:= \{(x, t) : t = T, x \geq X + x_{r,\varepsilon}\}.\end{aligned}$$

Znamo da je U_ε^- približno rešenje sistema (4.7) za $t < T$, a U_ε^+ definisano sa (4.30) je približno rešenje istog sistema za $t > T$.

Neka je $\gamma \subset \mathbb{R}_+^2$ prekidna kriva za U_ε^- i U_ε^+ i neka $\Lambda = \mathbb{R}_+^2 \setminus \gamma$. Na osnovu Teoreme o divergenciji sledi

$$\begin{aligned}&\iint(F(U_\varepsilon)\partial_t\varphi + G(U_\varepsilon)\partial_x\varphi)dxdt = \int_\gamma(G, F)(U_\varepsilon)\cdot\mathbf{n}_0\varphi ds \\ &- \iint_{(x,t) \in \Lambda, t > T}(\partial_t F(U_\varepsilon^+) + \partial_x G(U_\varepsilon^+))\varphi dxdt - \iint_{(x,t) \in \Lambda, t < T}(\partial_t F(U_\varepsilon^-) + \partial_x G(U_\varepsilon^-))\varphi dxdt.\end{aligned}$$

Integrali na Λ i $\gamma \setminus \cup_{i=1}^7 \gamma_i$ konvergiraju ka nuli kada $\varepsilon \rightarrow 0$ (greška je reda ε), jer su U_ε^- i U_ε^+ na osnovu prepostavki 1 i 2 iz formulacije teoreme približna rešenja sistema (4.7) ispod i iznad prave $t = T$. Ostalo je da se dokaže da integrali na $\cup_{i=1}^7 \gamma_i$ konvergiraju ka nuli kada $\varepsilon \rightarrow 0$, tj. da važi

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (G, F)(\tilde{U}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}_0 \varphi ds + \int_{\gamma_3 \cup \gamma_4} (G, F)(\hat{U}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}_0 \varphi ds - \int_{\gamma_5 \cup \gamma_6 \cup \gamma_7} (G, F)(U_\varepsilon^\pm) \cdot \mathbf{n}_0 \varphi ds \approx 0.$$

Dalje, vidimo da su \tilde{U}_ε i U_ε jednake U_l na $\gamma_1 \cap \gamma_5$ i da su \hat{U}_ε i U_ε jednake U_r na $\gamma_4 \cap \gamma_7$. Pored toga, jednodimenzionalna Lebegova mera na skupovima $(\gamma_1 \setminus \gamma_5) \cup (\gamma_5 \setminus \gamma_1)$ i $(\gamma_4 \setminus \gamma_7) \cup (\gamma_7 \setminus \gamma_4)$ teži nuli kada $\varepsilon \rightarrow 0$, jer su $a_\varepsilon, b_\varepsilon, x_{l,\varepsilon}$ i $x_{r,\varepsilon}$ konstante reda ε i U_ε je ograničeno na tim skupovima. To znači da preostaje da se dokaže da važi

$$\int_{\gamma_2} F(\tilde{U}_\varepsilon)\varphi ds + \int_{\gamma_3} F(\hat{U}_\varepsilon)\varphi ds \approx \int_{\gamma_6} F(U_\varepsilon^+)\varphi ds.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} F(\tilde{U}_\varepsilon) \varphi \, ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma'_2} F(\tilde{U}_\varepsilon) \varphi \, ds + \int_{\gamma''_2} F(\tilde{U}_\varepsilon) \varphi \, ds \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\tilde{X} + (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)T}^{\tilde{X} + \tilde{c}T} F(\tilde{U}_{l,\varepsilon}) \varphi(x, T) \, dx + \int_{\tilde{X} + \tilde{c}T}^{\tilde{X} + (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)T} F(\tilde{U}_{r,\varepsilon}) \varphi(x, T) \, dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\tilde{a}_\varepsilon F(\tilde{U}_{l,\varepsilon}) + \tilde{b}_\varepsilon F(\tilde{U}_{r,\varepsilon}) \right) T \varphi(X, T) = \tilde{\kappa} T \varphi(X, T), \end{aligned}$$

jer je $\varphi(x, T) = \varphi(\tilde{X} + \tilde{c}T) + \mathcal{O}(\varepsilon) \approx \varphi(X, T)$, za $x \in (\tilde{X} + (\tilde{c} - \tilde{a}_\varepsilon)T, \tilde{X} + (\tilde{c} + \tilde{b}_\varepsilon)T)$. Slično, dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} F(\hat{U}_\varepsilon) \varphi \, ds &= \hat{\kappa} T \varphi(X, T) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_6} F(U_\varepsilon^+) \varphi \, ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_{l,\varepsilon} F(U_{l,\varepsilon}) + x_{r,\varepsilon} F(U_{r,\varepsilon})) \varphi(X, T) = \alpha \kappa \varphi(X, T), \end{aligned}$$

jer važi $(x_{l,\varepsilon}, x_{r,\varepsilon}) = \alpha(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$. Dakle, funkcija U_ε je rešenje problema (4.7, 4.28) ako važi pretpostavka 3, tj. $\alpha = T(\tilde{\kappa} + \hat{\kappa})/\kappa$. \square

Iz Teoreme 4.1 vidimo da je rešavanje problema interakcije između talasa od kojih je bar jedan senka talas ekvivalentno rešavanju početnog problema kada je na Rimanov početni uslov dodat izraz koji sadrži delta funkciju, tj. U_ε^+ je rešenje sistema (4.7) sa početnim uslovom

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l, & x < X \\ U_r, & x > X \end{cases} + \sigma \delta_{(X, T)}, \quad (4.35)$$

gde je sa $\sigma \in \mathbb{R}^n$ označena početna snaga prostog senka talasa koja je jednaka zbiru snaga prilazećih talasa u $t = T$, tj. važi

$$\sigma = (\tilde{\sigma} + \hat{\sigma})T,$$

gde $\tilde{\sigma} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{a}_\varepsilon \tilde{U}_{l,\varepsilon} + \tilde{b}_\varepsilon \tilde{U}_{r,\varepsilon})$, $\hat{\sigma} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\hat{a}_\varepsilon \hat{U}_{l,\varepsilon} + \hat{b}_\varepsilon \hat{U}_{r,\varepsilon})$. To znači da ćemo vrednosti $x_{i,\varepsilon}, U_{i,\varepsilon}$, $i = l, r$ birati tako da važi

$$\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_{l,r} U_{l,\varepsilon} + x_{r,\varepsilon} U_{r,\varepsilon}).$$

Dakle, rešenje problema (4.7, 4.35) dobijamo korišćenjem Leme 4.1 u slučaju konstantnog senka talasa ili Leme 4.3 u slučaju težinskog senka talasa kada je

$$\sigma = \sigma(0), \quad \text{gde } \sigma(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\varepsilon(t) U_{l,\varepsilon}(t) + b_\varepsilon(t) U_{r,\varepsilon}(t)), \quad a_\varepsilon(0) = x_{l,\varepsilon}, \quad b_\varepsilon(0) = x_{r,\varepsilon}.$$

Napomena. Teorema 4.1 se može primeniti i ukoliko je jedan od prilazećih talasa (\tilde{U} ili \hat{U}) udarni talas ili kontaktni diskontinuitet uz određene (očigledne) modifikacije kod oblika funkcije (na primer, $a_\varepsilon = b_\varepsilon = 0$ u (4.33)). Takođe, teorema može biti korisna i kod interakcija između senka talasa i razređujućeg talasa kada se razređujući talas razlaže preko fana koji se sastoji iz neentropijskih udarnih talasa male snage, pa se posmatraju interakcije između senka talasa i elemenata fana. U tom slučaju bi puštanjem distributivnog limesa kod rezultujućeg senka talasa dobili levo ili desno stanje (zavisi od toga sa koje strane se nalazi razređujući talas) koje nije konstantno.

Neka važe pretpostavke iz Teoreme 4.1 i neka je sa (η, Q) dat entropijski par za sistem (4.7). Pretpostavimo da funkcije \tilde{U}_ε , \hat{U}_ε i U_ε^+ zadovoljavaju entropijsku nejednakost na svojim domenima. Rešenje U_ε će biti entropijski dopustivo ako važi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_6} \eta(U_\varepsilon^+) \varphi - \int_{\gamma_2} \eta(\tilde{U}_\varepsilon) \varphi - \int_{\gamma_3} \eta(\hat{U}_\varepsilon) \varphi \right) \leq 0, \quad (4.36)$$

za svaku nenegativnu test funkciju $\varphi \in C_0^\infty$. Iz konstrukcije funkcije U_ε znamo

$$\eta(\tilde{U}_\varepsilon) = \begin{cases} \eta(\tilde{U}_{l,\varepsilon}), & (x, t) \in \gamma'_2 \\ \eta(\tilde{U}_{r,\varepsilon}), & (x, t) \in \gamma''_2 \end{cases}, \quad \eta(\hat{U}_\varepsilon) = \begin{cases} \eta(\hat{U}_{l,\varepsilon}), & (x, t) \in \gamma'_3 \\ \eta(\hat{U}_{r,\varepsilon}), & (x, t) \in \gamma''_3 \end{cases},$$

pa sledi da je relacija (4.36) zadovoljena ako i samo ako važi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x_{l,\varepsilon} \eta(U_{l,\varepsilon}) + x_{r,\varepsilon} \eta(U_{r,\varepsilon}) \right) - \left(\tilde{a}_\varepsilon \eta(\tilde{U}_{l,\varepsilon}) + \tilde{b}_\varepsilon \eta(\tilde{U}_{r,\varepsilon}) + \hat{a}_\varepsilon \eta(\hat{U}_{l,\varepsilon}) + \hat{b}_\varepsilon \eta(\hat{U}_{r,\varepsilon}) \right) T \leq 0.$$

Glava

5

Sadržaj

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.1 | Model gasne dinamike bez pritiska | 71 |
| 5.1.1 | Neizentropski model za gasnu dinamiku bez pritiska | 79 |
| 5.2 | Model za uopšten Čapliginov gas | 81 |
| 5.2.1 | Uslov prekompresivnosti i entropijski uslov | 85 |
| 5.2.2 | Princip maksimalne disipacije energije | 97 |
| 5.2.3 | Neizentropski model za uopšten Čapliginov gas | 101 |
| 5.3 | Model za Čapliginov gas | 103 |

Sistemi gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom

5.1. Model gasne dinamike bez pritiska

Posmatramo izentropski sistem gasne dinamike bez pritiska (2.25) sa Rimanovim početnim uslovom

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_l, u_l), & x < 0 \\ (\rho_r, u_r), & x > 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

gde $\rho_l, \rho_r > 0$.

Neka u_l i u_r iz (5.1) zadovoljavaju uslov $u_l \leq u_r$. Tada postoji klasično rešenje problema (2.25, 5.1) koje se može predstaviti kao kombinacija kontaktnih diskontinuiteta, jer su obe karakteristične familije sistema linearne degenerisane. Ako je $u_l = u_r$, rešenje je dato u obliku kontaktnog diskontinuiteta koji razdvaja stanja (ρ_l, u_l) i (ρ_r, u_r) ,

$$U(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, u_l), & x < u_l t \\ (\rho_r, u_r), & x > u_l t. \end{cases} \quad (5.2)$$

Dalje, ako je $u_l < u_r$, rešenje je dato u obliku dva kontaktne diskontinuiteta razdvojena vakuumom,

$$U(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, u_l), & x < u_l t \\ (0, \phi(x, t)), & u_l t < x < u_r t \\ (\rho_r, u_r), & x > u_r t, \end{cases} \quad (5.3)$$

pri čemu je sa $\phi(x, t)$ data proizvoljna neprekidna funkcija takva da važi $\phi(u_l t, t) = u_l$, $\phi(u_r t, t) = u_r$. Kao klasična rešenja, rešenja u obliku (5.2) ili (5.3) su entropijska.

U suprotnom (kada $u_l > u_r$) ne postoji rešenje koje se može predstaviti u obliku elementarnih talasa, nego se mora tražiti neki oblik neklasičnog rešenja koje sadrži Dira-kovu delta funkciju. Pokazaćemo da u tom slučaju postoji rešenje dano u obliku senka talasa.

Napomena. Rimanovom problemu (2.25, 5.1) se posvećuje dosta pažnje. To je jedan od najpoznatijih modela iz klase onih sa rešenjem u obliku delta udarnog talasa. Izentropski modeli kod kojih se ne zanemaruje uticaj nekih zapreminskeh sila (poput gravitacije) su izučavani u [32, 99], višedimenzionalni modeli u [65, 78, 100], a model sa dodatim zakonom održanja energije u [75].

LEMA 5.1. *Postoji dopustivo rešenje Rimanovog problema (2.25, 5.1) kada $u_l > u_r$ u obliku prekompresivnog prostog senka talasa*

$$U^\varepsilon(x, t) = (\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, u_l), & x < c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t \\ (\rho_\varepsilon, u_\varepsilon), & c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t < x < c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t \\ (\rho_r, u_r), & x > c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t, \end{cases} \quad (5.4)$$

pri čemu $\rho_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1}$. Front senka talasa je dat sa $x = c(t) = y_{l,r}t$, gde

$$y_{l,r} := \frac{\sqrt{\rho_l}u_l + \sqrt{\rho_r}u_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon,$$

označava brzinu, dok $\xi_{l,r}t := \sqrt{\rho_l\rho_r}(u_l - u_r)t$ predstavlja snagu senka talasa.

DOKAZ. Treba pokazati da senka talas dat sa (5.4) zadovoljava sistem (2.25) u distributivnom smislu, tj. da

$$\begin{aligned} A &:= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon \varphi_t)(x, t) + (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \varphi_x)(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx \approx 0 \\ B &:= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon u^\varepsilon \varphi_t)(x, t) + (\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 \varphi_x)(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx \approx 0, \end{aligned}$$

važi za svaku test funkciju $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+^2)$. Važi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi_t)(x, t) dx dt &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t} \rho_l \varphi_t(x, t) dx dt + \int_0^\infty \int_{c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t}^{c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t} \rho_\varepsilon \varphi_t(x, t) dx dt \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t}^\infty \rho_r \varphi_t(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Koristeći parcijalnu integraciju (ili Teoremu o divergenciji) i razvoj funkcije φ u Tejlorov red

$$\varphi(c(t) \pm \frac{\varepsilon}{2}t, t) = \varphi(c(t), t) \pm \partial_x \varphi(c(t), t) \frac{\varepsilon}{2}t + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

dobijamo

$$\begin{aligned} A_1 &:= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \partial_t \varphi)(x, t) dx dt = - \int_0^\infty (\rho_l - \rho_\varepsilon) \varphi(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t, t) (c'(t) - \frac{\varepsilon}{2}) dt \\ &\quad - \int_0^\infty (\rho_\varepsilon - \rho_r) \varphi(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t, t) (c'(t) + \frac{\varepsilon}{2}) dt - \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx \\ &= - \int_0^\infty (\rho_l - \rho_\varepsilon) \left(\varphi(c(t), t) - \partial_x \varphi(c(t), t) \frac{\varepsilon}{2}t \right) (c'(t) - \frac{\varepsilon}{2}) dt \\ &\quad - \int_0^\infty (\rho_\varepsilon - \rho_r) \left(\varphi(c(t), t) + \partial_x \varphi(c(t), t) \frac{\varepsilon}{2}t \right) (c'(t) + \frac{\varepsilon}{2}) dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\infty \left(c'(t)(\rho_r - \rho_l) - \varepsilon \rho_\varepsilon \right) \varphi(c(t), t) dt - \int_0^\infty \varepsilon \rho_\varepsilon t c'(t) \partial_x \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

i na sličan način dobijamo

$$\begin{aligned} A_2 &:= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi)(x, t) dx dt = \int_0^\infty (\rho_l u_l - \rho_\varepsilon u_\varepsilon) \varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2} t, t \right) dt \\ &\quad + \int_0^\infty (\rho_\varepsilon u_\varepsilon - \rho_r u_r) \varphi \left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2} t, t \right) dt \\ &= \int_0^\infty (\rho_l u_l - \rho_\varepsilon u_\varepsilon) \left(\varphi(c(t), t) - \partial_x \varphi(c(t), t) \frac{\varepsilon}{2} t \right) dt \\ &\quad + \int_0^\infty (\rho_\varepsilon u_\varepsilon - \rho_r u_r) \left(\varphi(c(t), t) + \partial_x \varphi(c(t), t) \frac{\varepsilon}{2} t \right) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= - \int_0^\infty (\rho_r u_r - \rho_l u_l) \varphi(c(t), t) dt + \int_0^\infty \varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon t \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Neka je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_\varepsilon =: \xi_{l,r}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon =: y_{l,r}.$$

Tada važi

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \int_0^\infty \left(c'(t)(\rho_r - \rho_l) - (\rho_r u_r - \rho_l u_l) - \varepsilon \rho_\varepsilon \right) \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty \varepsilon \rho_\varepsilon t (c'(t) - u_\varepsilon) \partial_x \varphi(c(t), t) dt - \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

pa vidimo da će $A = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ biti zadovoljeno ako i samo ako

$$\xi_{l,r} = c'(t)(\rho_r - \rho_l) - (\rho_r u_r - \rho_l u_l), \quad y_{l,r} = c'(t),$$

jer u tom slučaju važi

$$A = A_1 + A_2 + \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Na sličan način dobijamo $B = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ i to zamenom $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$ umesto ρ^ε i $\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2$ umesto $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$ u gornje jednačine. Dakle, $\xi_{l,r}$ i $y_{l,r}$ su rešenja sistema

$$\begin{aligned} \xi_{l,r} &= y_{l,r}(\rho_r - \rho_l) - (\rho_r u_r - \rho_l u_l) \\ \xi_{l,r} y_{l,r} &= y_{l,r}(\rho_r u_r - \rho_l u_l) - (\rho_r u_r^2 - \rho_l u_l^2). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Eliminacijom $\xi_{l,r}$ iz druge jednačine u (5.5) dobijamo da je $y_{l,r}$ rešenje kvadratne jednačine

$$y_{l,r}^2 (\rho_r - \rho_l) - 2y_{l,r} (\rho_r u_r - \rho_l u_l) + (\rho_r u_r^2 - \rho_l u_l^2) = 0.$$

Ako je $\rho_r \neq \rho_l$, onda

$$y_{l,r} = \frac{\rho_r u_r - \rho_l u_l \pm \sqrt{(\rho_r u_r - \rho_l u_l)^2 - (\rho_r - \rho_l)(\rho_r u_r^2 - \rho_l u_l^2)}}{\rho_r - \rho_l}.$$

Rešenje u obliku senka talasa dano sa (5.4) će biti prekompresivno ako odaberemo znak $+ u$ u gornjoj jednačini (u tom slučaju $y_{l,r}$ je konveksna kombinacija u_l i u_r). Dakle, uslov prekompresivnosti ima oblik

$$u_l \geq y_{l,r} \geq u_r, \quad \text{gde } y_{l,r} = \frac{\sqrt{\rho_r}u_r + \sqrt{\rho_l}u_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}. \quad (5.6)$$

Zamenom $y_{l,r}$ u (5.5) dobijamo izraz za snagu senka talasa

$$\xi_{l,r}t = \sqrt{\rho_l\rho_r}(u_l - u_r)t.$$

Ako je $\rho_r = \rho_l$, takođe postoji dopustivo rešenje sistema (5.5) u obliku senka talasa i u tom slučaju imamo

$$y_{l,r} = \frac{u_r + u_l}{2}, \quad \xi_{l,r} = \rho_l(u_l - u_r).$$

Jasno je da je i ovaj put uslov (5.6) zadovoljen. \square

Napomena. Primetite da u sistemu (2.25) prepostavljamo da nema spoljašnjih sila poput gravitacije. Isti postupak se može primeniti i na sistemu koji ne zanemaruje efekat tih sila. Na primer, u [32] je dano rešenje Rimanovog problema za gasnu dinamiku bez pritiska, gde se prepostavlja prisustvo gravitacionog polja.

U slučaju sistema gasne dinamike bez pritiska, rešenje u obliku senka talasa (ali težinskog) postoji čak i kada komponenta gustine u početnom uslovu sadrži Dirakovu delta funkciju.

LEMA 5.2. *Neka je dat sistem (2.25) sa početnim uslovom*

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_l, u_l), & x < X \\ (\rho_r, u_r), & x > X \end{cases} + (\gamma, 0) \delta_{(X, 0)}, \quad (5.7)$$

i neka je $(\rho u)|_{t=0} = \tilde{\gamma} \delta_{(X, 0)}$ takvo da važi $u_l \geq \tilde{\gamma}/\gamma \geq u_r$, $\gamma > 0$, $\rho_l, \rho_r \geq 0$. Tada postoji rešenje problema (2.25, 5.7) u obliku prekompresivnog težinskog senka talasa.

Snaga $\xi(t)$ i brzina $u_s(t)$ tog senka talasa su rešenje sistema običnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= (\rho_r - \rho_l)u_s(t) - (\rho_r u_r - \rho_l u_l), & \xi(0) &= \gamma \\ (\xi(t)u_s(t))' &= (\rho_r u_r - \rho_l u_l)u_s(t) - (\rho_r u_r^2 - \rho_l u_l^2), & \xi(0)u_s(0) &= \tilde{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Funkcija $c(t) = \int_0^t u_s(\tau) d\tau + X$ predstavlja front rezultujućeg senka talasa.

DOKAZ. Dokazaćemo da je senka talas oblika

$$U^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, u_l), & x < c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t - x_\varepsilon \\ (\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)), & c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t - x_\varepsilon < x < c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon \\ (\rho_r, u_r), & x > c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon \end{cases} \quad (5.9)$$

približno rešenje problema (2.25, 5.7) i to primenom Leme 4.3 sa $U = (\rho, u)$, $U_{l,\varepsilon}(t) = U_{r,\varepsilon}(t) = U_\varepsilon(t)$ i $a_\varepsilon(t) = b_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon$. Primetite da u slučaju sistema (2.25) imamo $F = (f_1, f_2)$, $G = (g_1, g_2)$, gde $f_1(\rho, u) = \rho$, $f_2(\rho, u) = g_1(\rho, u) = \rho u$ i $g_2(\rho, u) = \rho u^2$.

Zaključujemo da će (5.9) biti približno rešenje ako i samo ako $\rho_\varepsilon(t)$ i $u_\varepsilon(t)$ predstavljaju rešenje sistema

$$\begin{aligned} c'(t)(\rho_r - \rho_l) - (\rho_r u_r - \rho_l u_l) &\approx \partial_t \left(2 \left(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon \right) \rho_\varepsilon(t) \right) \\ c'(t)(\rho_r u_r - \rho_l u_l) - (\rho_r u_r^2 - \rho_l u_l^2) &\approx \partial_t \left(2 \left(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon \right) \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

koji odgovara (4.21), dok sistem (4.22) sada ima oblik

$$\begin{aligned} c'(t)2\left(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon\right)\rho_\varepsilon(t) &\approx 2\left(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon\right)\rho_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) \\ c'(t)2\left(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon\right)\rho_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) &\approx 2\left(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon\right)\rho_\varepsilon(t)u_\varepsilon^2(t). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Dve jednačine u (5.11) su ekvivalentne i biće zadovoljene ako važi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = c'(t) =: u_s(t).$$

Dalje, neka je

$$\xi(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\left(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon\right)\rho_\varepsilon(t).$$

Tada je sistem (5.10) ekvivalentan sistemu (5.8), a početni uslovi iz (5.8) se mogu zapisati u obliku

$$\xi(0) = \gamma, \quad u_s(0) = \tilde{\gamma}/\gamma =: c.$$

Uslov $\xi(0) = \gamma$ će biti zadovoljen ako izaberemo x_ε tako da važi

$$\int_{X-x_\varepsilon}^{X+x_\varepsilon} \rho_\varepsilon(t) dx = \gamma. \quad (5.12)$$

Na taj način se osiguravamo da će rešenje biti neprekidno u odnosu na vreme. Iz (5.12) vidimo da slučaj $\rho_\varepsilon(t) = 0$ nije moguć, jer je $\gamma > 0$. Ukoliko bi važilo $\gamma = 0$, slučaj $\rho_\varepsilon(t) = 0$ bi odgovarao kontaktnom diskontinuitetu kada $u_l = u_r$, dok u suprotnom takvo rešenje ne bi postojalo. Ako je $\gamma > 0$ i $u_l = u_r$, rešenje se naziva delta kontaktni diskontinuitet, jer se taj talas prostire duž karakteristike i ima konstantnu brzinu u_l .

Sistem (5.8) se može rešiti, što često nije slučaj. Pod uslovom $\rho_l \neq \rho_r$, iz prve obične diferencijalne jednačine u (5.8) dobijamo

$$u_s(t) = c'(t) = \frac{1}{[\rho]} \xi'(t) + \frac{[\rho u]}{[\rho]},$$

pri čemu koristimo standardnu oznaku za skok na udarnom talasu, $[\cdot] := \cdot_r - \cdot_l$. Kombinovanjem

$$\xi(t)u_s(t) = \frac{1}{[\rho]} \xi'(t)\xi(t) + \frac{[\rho u]}{[\rho]} \xi(t)$$

sa drugom jednačinom iz (5.8) dobijamo

$$(\xi u_s)'(t) = \left(\frac{1}{[\rho]} \xi'(t)\xi(t) + \frac{[\rho u]}{[\rho]} \xi(t) \right)' = [\rho u] \left(\frac{[\rho u]}{[\rho]} + \frac{1}{[\rho]} \xi'(t) \right) - [\rho u^2],$$

tj.

$$(\xi'(t)\xi(t) + [\rho u]\xi(t))' = [\rho u]^2 + [\rho u]\xi'(t) - [\rho u^2][\rho].$$

Dalje, integraljenjem gornje jednačine na intervalu $(0, t)$ dobijamo

$$\xi'(t)\xi(t) + ([\rho u]^2 - [\rho u^2][\rho])t = \xi'(0)\xi(0) + ([\rho u]^2 - [\rho u^2][\rho]).$$

Takođe, iz

$$\xi'(0) = c[\rho] - [\rho u], \quad [\rho u]^2 - [\rho u^2][\rho] = \rho_l \rho_r [u]^2,$$

sledi

$$\xi'(t)\xi(t) = \rho_l\rho_r[u]^2t + \gamma(c[\rho] - [\rho u]).$$

Još jednim integraljenjem gornje jednačine dobijamo snagu $\xi(t)$, a zatim i brzinu $u_s(t)$ koji su rešenje sistema (5.8).

U slučaju $\rho_l = \rho_r \neq 0$, sistem (5.8) ima oblik

$$\xi'(t) = \rho_l(u_l - u_r), \quad (\xi(t)u_s(t))' = \rho_l(u_l - u_r)(u_l + u_r - u_s(t)),$$

dok u slučaju $\rho_l = \rho_r = 0$ imamo

$$\xi'(t) = 0, \quad (\xi(t)u_s(t))' = 0.$$

Konačno, snaga i brzina rezultujućeg senka talasa su date sa

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \sqrt{\gamma^2 + \rho_l\rho_r[u]^2t^2 + 2\gamma(c[\rho] - [\rho u])t}, \\ u_s(t) &= \begin{cases} \frac{1}{[\rho]} \left([\rho u] + \frac{\rho_l\rho_r[u]^2t + \gamma(c[\rho] - [\rho u])}{\xi(t)} \right), & \text{ako } \rho_l \neq \rho_r \\ \frac{\gamma^2}{\xi^2(t)} \left(c - \frac{u_l + u_r}{2} \right) + \frac{u_l + u_r}{2}, & \text{ako } \rho_l = \rho_r, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

a njegov front je kriva $x = c(t)$,

$$c(t) = \begin{cases} X + \frac{1}{\rho_r - \rho_l} (\xi(t) - \gamma + (\rho_r u_r - \rho_l u_l)(t - T)), & \text{ako } \rho_r \neq \rho_l \\ X + \frac{\gamma}{\xi(t)} \left(c - \frac{u_r + u_l}{2} \right) (t - T) + \frac{u_r + u_l}{2} (t - T), & \text{ako } \rho_r = \rho_l \neq 0 \\ X + c(t - T), & \text{ako } \rho_r = \rho_l = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Rešenje u obliku (5.9) postoji za svako $t \geq 0$ i to sledi iz $u_r \leq c \leq u_l$. Naime, važi

$$c[\rho] - [\rho u] = \rho_l(c - u_r) + \rho_l(u_l - c) \geq \min\{\rho_l, \rho_r\}(u_l - u_r),$$

pa dobijamo

$$\begin{aligned} \xi(t) &\geq \sqrt{\gamma^2 + (\min\{\rho_l, \rho_r\})^2[u]^2t^2 + 2\gamma \min\{\rho_l, \rho_r\}(u_l - u_r)t} \\ &= \gamma + \min\{\rho_l, \rho_r\}(u_l - u_r)t \geq \gamma > 0. \end{aligned}$$

Ostalo je da pokažemo da je senka talas dat sa (5.9) prekompresivan, tj. da njegova brzina $u_s(t)$ zadovoljava uslov

$$u_r \leq u_s(t) \leq u_l, \quad t \geq 0.$$

Neka je $\rho_l \neq \rho_r$. Diferenciranjem izraza za brzinu $u_s(t)$ datog sa (5.13)₂ dobijamo

$$u'_s(t) = -\frac{\gamma^2}{\xi^3(t)}[\rho](c - y_{l,r})(c - z_{l,r}),$$

gde

$$y_{l,r} := \frac{u_l\sqrt{\rho_l} + u_r\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}, \quad z_{l,r} := \frac{u_l\sqrt{\rho_l} - u_r\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\rho_l} - \sqrt{\rho_r}}. \quad (5.15)$$

Sa druge strane, direktno iz sistema (5.8) dobijamo

$$u'_s(t) = -\frac{1}{\xi(t)}([\rho]u_s^2(t) - 2[\rho u]u_s(t) + [\rho u^2]) = -\frac{[\rho]}{\xi(t)}(u_s(t) - y_{l,r})(u_s(t) - z_{l,r}).$$

Kako je snaga senka talasa $\xi(t)$ pozitivna i rastuća funkcija, početna brzina c zadovoljava uslov $u_l \geq c \geq u_r$ i važi

$$[\rho](c - z_{l,r}) > \begin{cases} [\rho](u_r - z_{l,r}), & [\rho] > 0 \\ [\rho](u_l - z_{l,r}), & [\rho] < 0 \end{cases} = \min \{ \sqrt{\rho_l}, \sqrt{\rho_r} \} (\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l})(u_l - u_r) > 0,$$

zaključujemo

$$\text{sign}(u'_s(t)) = -\text{sign}([\rho](c - y_{l,r})(c - z_{l,r})) = -\text{sign}(c - y_{l,r}).$$

To znači da je $u_s(t)$ rastuća funkcija ako je $c < y_{l,r}$, a opadajuća ako je $c > y_{l,r}$. Dalje, $u_s(t)$ ima asimptotu kada $t \rightarrow \infty$, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_s(t) = y_{l,r},$$

pa sledi $u_s(t) \in [u_r, u_l]$.

Ako je $\rho_l = \rho_r \neq 0$, koristimo činjenicu da je $u_s(t)$ konveksna kombinacija c i $\frac{u_l + u_r}{2}$, jer $0 < \gamma^2/\xi^2(t) \leq 1$. Dakle, važi

$$u_s(t) \in \left[\min \left\{ c, \frac{u_l + u_r}{2} \right\}, \max \left\{ c, \frac{u_l + u_r}{2} \right\} \right] \subset [u_r, u_l].$$

Slučaj $\rho_l = \rho_r = 0$ je trivijalan, jer je brzina senka talasa konstantna i jednaka c . \square

POSLEDICA 5.1. Neka važe pretpostavke iz Leme 5.2. Težinski senka talas dat sa (5.9) je prekompresivan i njegova snaga je ograničena, tj. važi

$$\begin{aligned} u_l &\geq u_s(t) \geq u_r \\ \gamma + \min\{\rho_l, \rho_r\}(u_l - u_r)t &\leq \xi(t) \leq \gamma + \max\{\rho_l, \rho_r\}(u_l - u_r)t. \end{aligned}$$

DOKAZ. Sledi iz dokaza Leme 5.2. \square

Napomena. Početni uslov oblika (5.7) kod koga je na Rimanov početni uslov dodat izraz koji sadrži delta funkciju ćemo u nastavku nazivati *uopšteni Rimanov početni uslov*. Odgovarajući problem će biti uopšteni Rimanov problem.

Lema 5.2 nam garantuje postojanje rešenja problema interakcije između dva senka talasa.

POSLEDICA 5.2. Rezultat interakcije između dva prekompresivna senka talasa kod sistema gasne dinamike bez pritiska je prekompresivan senka talas.

DOKAZ. Neka su data dva prilazeća prekompresivna senka talasa. Onaj sa leve strane razdvaja stanja (ρ_l, u_l) i (ρ_m, u_m) , dok desni razdvaja stanja (ρ_m, u_m) i (ρ_r, u_r) . Rezultujući SDW (videti Sliku 5.1) koji nastaje u tački (X, T) je rešenje uopštenog Rimanovog problema

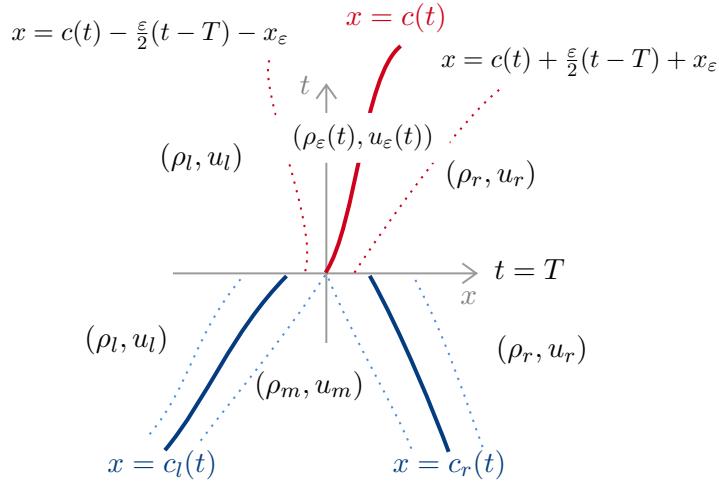
$$(\rho, u)(x, T) = \begin{cases} (\rho_l, u_l), & x < X \\ (\rho_r, u_r), & x > X \end{cases} + (\gamma, 0) \delta_{(X, T)},$$

gde $\gamma = \xi_1(T) + \xi_2(T)$. Sa $\xi_1(t)$ i $\xi_2(t)$ su označene snage dva prilazeća senka talasa u vremenu t . Kako su prilazeći talasi prekompresivni sledi da njihove brzine zadovoljavaju

$$u_m \leq u_{s1}(t) \leq u_l, \quad u_r \leq u_{s2}(t) \leq u_m, \quad t \leq T.$$

Početna brzina $c = u_s(T^+)$ rezultujućeg senka talasa je konveksna kombinacija $u_{s1}(T^-)$ i $u_{s2}(T^-)$, iz čega sledi $u_l \geq c \geq u_r$. Prekompresivnost u $t > T$ sledi iz Posledice 5.1. \square

U ovom delu nećemo analizirati rešenje uopštenog Rimanovog problema (2.25, 5.7) sa $c \notin [u_r, u_l]$, jer će se njegova konstrukcija nastavljati na proceduru za konstrukciju početnog problema koja će biti data u Glavi 7.



Slika 5.1: Interakcija između dva senka talasa

Disipacija energije kod senka talasa

Sistem (2.25) poseduje semi-konveksan entropijski par (η, Q) koji ima poreklo u zakonu održanja energije u kom se prilikom prelaska na slabu formulaciju gubi jednakost, što se manifestuje kroz pojavu disipacionog člana. Dodatni zakon koji se tada dobija može poslužiti kao uslov za proveru dopustivosti slabog rešenja. Tada ulogu matematičke entropije sistema dobija gustina energije. Neka je entropijsko-energetski par označen sa

$$\eta(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^2, \quad Q(\rho, u) = \eta u = \frac{1}{2}\rho u^3.$$

LEMA 5.3. *Svaki prekompresivan senka talas oblika (5.9) je entropijski dopustiv. Obrnuto ne važi.*

DOKAZ. Senka talas koji je nastao u $t = T_1$ i razdvaja stanja (ρ_l, u_l) i (ρ_r, u_r) je entropijski dopustiv ako zadovoljava dva uslova

$$D_{l,r}(t) := -u_s(t)[\eta] + [Q] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(2\left(\frac{\epsilon}{2}(t - T_1) + x_\epsilon\right) \eta(U_\epsilon(t)) \right) \leq 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(u_s(t) 2\left(\frac{\epsilon}{2}(t - T_1) + x_\epsilon\right) \eta(U_\epsilon(t)) - 2\left(\frac{\epsilon}{2}(t - T_1) + x_\epsilon\right) Q(U_\epsilon(t)) \right) = 0,$$

gde $U_\epsilon(t) = (\rho_\epsilon(t), u_\epsilon(t))$ i $[\eta] := \eta(\rho_r, u_r) - \eta(\rho_l, u_l)$. Lako se pokazuje da je drugi uslov zadovoljen, jer je ekvivalentan uslovu

$$\frac{1}{2}\xi(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u_s(t) - u_\epsilon(t)) u_\epsilon^2(t) = 0,$$

a iz definicije senka talasa sledi $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t) = u_s(t) \in [u_r, u_l]$. Takođe, znamo da su $u_s(t)$ i $\xi(t)$ ograničene funkcije. Izraz $D_{l,r}(t)$ predstavlja produkciju energije¹ rešenja u obliku senka talasa u vremenu $t > T_1$, a uslov $D_{l,r}(t) \leq 0$ znači da se energija ne proizvodi, ali može doći

¹Koristimo terminologiju iz [23, 27, 29].

do gubitka (disipacije) energije. Dalje, koristeći

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(2\left(\frac{\xi}{2}(t - T_1) + x_\varepsilon\right) \eta(U_\varepsilon(t)) \right) &= \frac{1}{2} (\xi'(t) u_s^2(t) + 2\xi(t) u_s(t) u'_s(t)) \\ &= \frac{1}{2} u_s(t) \left(u_s(t)(u_s(t)[\rho] - [\rho u]) - 2([\rho] u_s^2(t) - 2[\rho u] u_s(t) + [\rho u^2]) \right) \\ &= \frac{1}{2} u_s(t) \left(-[\rho] u_s^2(t) + 3[\rho u] u_s(t) - 2[\rho u^2] \right), \end{aligned}$$

dobijamo eksplicitan izraz za produkciiju energije kod senka talasa

$$D_{l,r}(t) = -\frac{1}{2} (\rho_l(u_l - u_s(t))^3 + \rho_r(u_s(t) - u_r)^3). \quad (5.16)$$

Senka talas je prekompresivan ako važi $u_l \geq u_s(t) \geq u_r$, iz čega sledi $D_{l,r}(t) \leq 0$ za $t \geq T_1$.

□

DEFINICIJA 5.1. *Kažemo da je senka talas koji razdvaja stanja U_r i U_l i nastao je u vremenu $T \geq 0$ disipativan ako važi $D_{l,r}(t) \leq 0$ za svako $t \geq T$.*

Može se pokazati da je $D_{l,r}(t)$ rastuća funkcija od t . Neka je

$$A(t) := [\rho] u_s^2(t) - 2[\rho u] u_s(t) + [\rho u^2] = \rho_r(u_s(t) - u_r)^2 - \rho_l(u_l - u_s(t))^2.$$

Za $\rho_l \neq \rho_r$ imamo $u'_s(t) = -A(T_1) \frac{\gamma^2}{\xi^3(t)}$ i važi

$$D'_{l,r}(t) = -\frac{3}{2} u'_s(t) A(t) = \frac{3}{2} \frac{\gamma^2}{\xi^3(t)} A(t) A(T_1) \geq 0,$$

jer $\xi(t) > 0$ i iz $u_s(T_1) > (<)y_{l,r}$ sledi $u_s(t) > (<)y_{l,r}$ za $t > T_1$. Ako je $\rho_l = \rho_r \neq 0$, prvi izvod brzine $u_s(t)$ je dat sa

$$u'_s(t) = -2 \frac{\gamma^2}{\xi^3(t)} \left(c - \frac{u_l + u_r}{2} \right) \rho_l (u_l - u_r),$$

pa zaključujemo da važi $D'_{l,r}(t) \geq 0$. U slučaju $\rho_l = \rho_r = 0$, važi $D_{l,r}(t) = D'_{l,r}(t) = 0$ za $t > T_1$.

Dakle, produkcija energije rešenja u obliku senka talasa je nepozitivna i neopadajuća funkcija od t . Jasno je da $D_{l,r}(t)$ može biti i konstantna funkcija ako je talas prost senka talas sa konstantnom brzinom, tj. ako je $u'_s(t) = 0$ za $t > T_1$.

Napomena. Iz (5.16) vidimo da ako $u_l - u_r \sim \mu$, tada $D_{l,r}(t) \sim \mu^3$, jer $u_r \leq u_s(t) \leq u_l$. U tom slučaju je disipacija energije rešenja u obliku senka talasa zanemarljiva.

5.1.1. Neizentropski model za gasnu dinamiku bez pritiska

Analiza rešenja Rimanovog problema za sistem

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0 \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) &= 0 \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + \partial_x \left(\rho u \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

je slična kao i kod izentropskog sistema (2.25). Naime, ako je leva komponenta brzine u početnom uslovu manja od desne komponente, tada postoji klasično rešenje Rimanovog

problema koje se sastoji iz dva kontaktna diskontinuiteta koja su razdvojena vakuumom. Ako su obe komponente brzine jednake, rešenje je jedan kontaktni diskontinuitet. U suprotnom, može se pokazati da postoji rešenje Rimanovog problema u obliku delta udarnog talasa ili prostog senka talasa. To rešenje je entropijsko, i entropijski uslov i uslov prekompresivnosti su ekvivalentni za sve semi-konveksne entropijske parove sistema (Teorema 6.1 u [75]), što ne važi u slučaju izentropskog sistema. Rešenje Rimanovog ili uopštenog Rimanovog problema se dobija proširivanjem rešenja dobijenog kod izentropskog modela. To sledi iz činjenice da se prve dve jednačine u sistemu mogu rešiti nezavisno od treće.

LEMA 5.4. *Neka je dat sistem (5.17) sa početnim uslovom*

$$(\rho, u, e)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_l, u_l, e_l), & x < 0 \\ (\rho_r, u_r, e_r), & x > 0 \end{cases} + (\gamma, 0, 0) \delta_{(0,0)},$$

i neka je $(\rho u)|_{t=0} = \tilde{\gamma}\delta_{(0,0)}$, $(\frac{\rho u^2}{2} + \rho e)|_{t=0} = \hat{\gamma}\delta_{(0,0)}$ takvo da važi $u_l \geq \tilde{\gamma}/\gamma \geq u_r$, $\gamma \geq 0$, $\rho_l, \rho_r \geq 0$. Postoji rešenje tog problema dato u obliku prekompresivnog senka talasa

$$U^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, u_l, e_l), & x < c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t - x_\varepsilon \\ (\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), e_\varepsilon(t)), & c(t) - \frac{\varepsilon}{2}t - x_\varepsilon < x < c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon \\ (\rho_r, u_r, e_r), & x > c(t) + \frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon, \end{cases}$$

gde su $\xi(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon)\rho_\varepsilon(t)$ i $u_s(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t)$ rešenje sistema (5.8) i važi $c'(t) = u_s(t)$, $c(0) = 0$. Funkcija $e_s(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e_\varepsilon(t)$ zadovoljava jednačinu

$$c'(t) \left[\frac{\rho u^2}{2} + \rho e \right] - \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{u_s^2(t)}{2} \xi(t) + e_s(t) \xi(t) \right).$$

Dokaz Leme 5.4 sledi iz Lema 4.3 i 5.2 (za detalje videti [75]).

Napomena. U slučaju Rimanovog početnog uslova kada je $\gamma = 0$ rešenje je dato u obliku prostog senka talasa koji se prostire brzinom $y_{l,r}$. Tada važi $\rho_\varepsilon(t) = \rho_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1}$, $u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon \approx y_{l,r}$ i $e_\varepsilon(t) = e_\varepsilon$ za svako $t > 0$ i $x_\varepsilon = 0$.

U slučaju entropijskog para (η, Q) , $\eta(\rho, u, e) = -\rho e$, $Q(\rho, u, e) = -\rho u e$, produkcija entropije kod senka talasa je jednaka baš produkciji energije rešenja u obliku senka talasa $D_{l,r}(t)$ kod izentropskog sistema. Naime, važi

$$\begin{aligned} & -u_s(t)[\eta] + [Q] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(2(\frac{\varepsilon}{2}t + x_\varepsilon) \eta(\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), e_\varepsilon(t)) \right) \\ & = -u_s(t)(-\rho_r u_r + \rho_l u_l) + (-\rho_r u_r e_r + \rho_l u_l e_r) - \frac{d}{dt}(\xi(t) e_s(t)) \\ & = \rho_r e_r (u_s(t) - u_r) + \rho_l e_l (u_l - u_s(t)) - \frac{d}{dt}(\xi(t) e_s(t)), \end{aligned}$$

kao i

$$\frac{d}{dt}(\xi(t) e_s(t)) = D_{l,r}(t) + \rho_l e_l (u_l - u_s(t)) + \rho_r e_r (u_s(t) - u_r) \geq 0,$$

čime je tvrđenje pokazano. Iz gornje nejednakosti vidimo i da je rešenje u obliku senka talasa iz Leme 5.4 dobro definisano, jer implicira $e_s(t) \geq 0$ za svako $t > 0$.

5.2. Model za uopšten Čapliginov gas

Cilj ovog dela je pronaći rešenje sistema (2.28) sa Rimanovim početnim uslovom

$$(\rho, q) = \begin{cases} (\rho_0, q_0), & x < 0 \\ (\rho_1, q_1), & x > 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Kao što je pokazano u Glavi 2, obe karakteristične familije sistema (2.28) su zaista nelinearne, što znači da se klasično rešenje Rimanovog problema može predstaviti kao kombinacija elementarnih talasa (razređujućih i udarnih). Kako bismo pronašli razređujuće krive možemo koristiti Rimanove invarijante date u (2.29) i Teoremu 3.1. Razređujuće krive kroz levo stanje (ρ_0, u_0) koje odgovaraju dvema karakterističnim familijama su date se

$$\begin{aligned} R_1(\rho_0, q_0) : q &= \frac{\rho}{\rho_0} q_0 + \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho \left(\rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right), \quad \rho < \rho_0 \\ R_2(\rho_0, q_0) : q &= \frac{\rho}{\rho_0} q_0 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \rho \left(\rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right), \quad \rho > \rho_0. \end{aligned}$$

One se dobijaju iz jednačina $v(\rho, q) = v(\rho_0, q_0)$ i $w(\rho, q) = w(\rho_0, q_0)$.

Napomena. Uslove $\rho < \rho_0$ kod R_1 i $\rho > \rho_0$ kod R_2 određujemo koristeći činjenicu da rešenje u obliku centriranog razređujućeg talasa ne zadovoljava Laksov entropijski uslov (važi $\lambda_i(\rho_1, q_1) > \lambda_i(\rho_0, q_0)$, $i = 1, 2$). Na primer, ako $(\rho_1, q_1) \in R_1(\rho_0, q_0)$ onda

$$\lambda_1(\rho_1, q_1) - \lambda_1(\rho_0, q_0) = \sqrt{\alpha} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left(\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right).$$

Ta vrednost je pozitivna ako važi $\rho_1 < \rho_0$.

Napomena. Razređujuće krive se mogu pronaći i direktno, iz Definicije 3.1. Razređujuća kriva prve karakteristične familije kroz stanje (ρ_0, q_0) je rešenje početnog problema

$$\frac{d\rho}{dt} = -1, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)}, \quad (\rho, q)(x, 0) = (\rho_0, q_0),$$

koji se može zapisati i na sledeći način

$$\frac{dq}{d\rho} = \lambda_1(\rho, q), \quad q(\rho_0) = q_0.$$

Koristeći da je $q = \rho u$ i da važi $\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dq}{d\rho} - \frac{q}{\rho} \right)$, gornja diferencijalna jednačina se može transformisati u

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{\rho}.$$

Krive udarnih talasa dobijamo eliminacijom brzine c iz Rankin–Igonooovih jednačina

$$\begin{aligned} c(\rho_1 - \rho_0) &= q_1 - q_0 \\ c(q_1 - q_0) &= \frac{q_1^2}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{q_0^2}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^\alpha}. \end{aligned}$$

Krive udarnih talasa kroz stanje (ρ_0, u_0) su date sa

$$\begin{aligned} S_1(\rho_0, q_0) : q &= \frac{\rho}{\rho_0} q_0 - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \left(\frac{1}{\rho_0^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right)}, \quad \rho > \rho_0, \\ S_2(\rho_0, q_0) : q &= \frac{\rho}{\rho_0} q_0 - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \left(\frac{1}{\rho_0^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right)}, \quad \rho < \rho_0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Brzine c_i udarnih talasa S_i , $i = 1, 2$ date su sa

$$c_1 = \frac{q_0}{\rho_0} - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho^\alpha - \rho_0^\alpha}{\rho - \rho_0} \frac{1}{\rho_0^\alpha \rho^\alpha}}, \quad c_2 = \frac{q_0}{\rho_0} + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho^\alpha - \rho_0^\alpha}{\rho - \rho_0} \frac{1}{\rho_0^\alpha \rho^\alpha}}.$$

Na isti način se može dobiti da je kriva udarnog talasa koja pripada drugoj karakterističnoj familiji kroz desno stanje (ρ_1, q_1) data sa

$$S_2(\rho_1, q_1) : q = \frac{\rho}{\rho_1} q_1 + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1} (\rho - \rho_1) \left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right)}, \quad \rho > \rho_1.$$

Dakle, klasično rešenje Rimanovog problema (2.28, 5.18) je kombinacija razređujućih i udarnih talasa. Može se pokazati sledeće: Ako se stanje (ρ_1, q_1) nalazi iznad krivih R_1 i R_2 , rešenje je kombinacija razređujućih talasa. U oblasti između krivih R_1 i S_2 (odnosno S_1 i R_2) rešenje je oblika $R_1 + S_2$ (odnosno $S_1 + R_2$), dok je na jednom delu ispod S_1 i S_2 rešenje kombinacija dva udarna talasa (videti Sliku 5.2).

Primetite da za $(\rho, q) \in S_1(\rho_0, q_0)$ važi

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_1(\rho) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{q_0}{\rho_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho_0^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right)} \right) = \frac{q_0}{\rho_0} - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}},$$

dok za $(\rho, q) \in S_2(\rho_1, q_1)$ imamo

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_2(\rho) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{q_1}{\rho_1} + \sqrt{\frac{1}{\rho_1} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right)} \right) = \frac{q_1}{\rho_1} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Kako se (klasično) rešenje traži kao presek dve krive udarnih talasa $S_1(\rho_0, q_0)$ i $S_2(\rho_1, q_1)$, ono će postojati ako važi

$$\frac{q_1}{\rho_1} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \geq \frac{q_0}{\rho_0} - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}},$$

tj. ako se (ρ_1, q_1) nalazi iznad krive (takođe videti [109])

$$\Gamma_{ss} = \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0) : q = \left(\frac{q_0}{\rho_0} - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho.$$

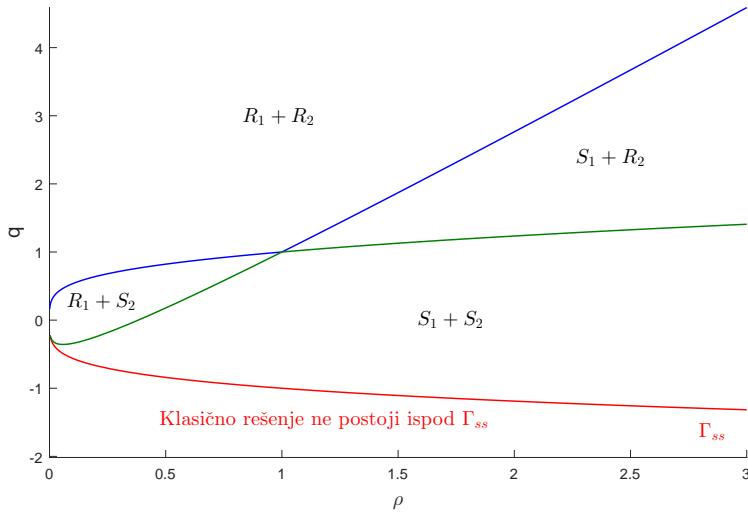
Dakle, u oblasti ispod krive Γ_{ss} nema klasičnog rešenja Rimanovog problema (2.28, 5.18), što ne znači da u toj oblasti ne postoji neki oblik neklasičnog rešenja koje sadrži delta funkciju.

LEMA 5.5. *Postoji rešenje u obliku prostog senka talasa problema (2.28, 5.18) dato sa*

$$(\rho^\varepsilon, q^\varepsilon)(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, q_0), & x < (c - \varepsilon)t \\ (\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}), & (c - \varepsilon)t < x < ct \\ (\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon}), & ct < x < (c + \varepsilon)t \\ (\rho_1, q_1), & x > (c + \varepsilon)t \end{cases} \quad (5.20)$$

ako i samo ako važi

$$(q_0\rho_1 - q_1\rho_0)^2 > (\rho_0 - \rho_1) \left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho_0^\alpha} \right) \rho_0 \rho_1.$$



Slika 5.2: Rešenje Rimanova problema (2.28, 5.18) kao kombinacija elementarnih talasa

DOKAZ. Koristeći Lemu 4.1 dobijamo sledeće aproksimacije za izvode

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &\approx (-c[\rho] + (\varepsilon \rho_{0,\varepsilon} + \varepsilon \rho_{1,\varepsilon}))\delta - c(\varepsilon \rho_{0,\varepsilon} + \varepsilon \rho_{1,\varepsilon})t\delta' \\ \partial_x q &\approx [q]\delta + (\varepsilon q_{0,\varepsilon} + \varepsilon q_{1,\varepsilon})t\delta' \\ \partial_t q &\approx (-c[q] + (\varepsilon q_{0,\varepsilon} + \varepsilon q_{1,\varepsilon}))\delta - c(\varepsilon q_{0,\varepsilon} + \varepsilon q_{1,\varepsilon})t\delta' \\ \partial_x \left(\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right) &\approx \left[\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right] \delta + \left(\varepsilon \left(\frac{q_{0,\varepsilon}^2}{\rho_{0,\varepsilon}} - \frac{1}{\rho_{0,\varepsilon}^\alpha} \right) + \varepsilon \left(\frac{q_{1,\varepsilon}^2}{\rho_{1,\varepsilon}} - \frac{1}{\rho_{1,\varepsilon}^\alpha} \right) \right) t\delta'.\end{aligned}$$

Nosač delta funkcije δ i njenog izvoda δ' je prava $x = ct$. Kao i ranije, $[\cdot] := \cdot_1 - \cdot_0$. Jedini način da se izbegne trivijalan slučaj (kada su $\rho_{i,\varepsilon}$ i $q_{i,\varepsilon}$, $i = 0, 1$ jednaki nuli) je $\rho_{i,\varepsilon}, q_{i,\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1}$, $i = 0, 1$. Označimo

$$\xi_i := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_{i,\varepsilon}, \quad \chi_i := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon q_{i,\varepsilon}, \quad i = 0, 1.$$

Tada važi

$$\frac{q_{i,\varepsilon}^2}{\rho_{i,\varepsilon}} - \frac{1}{\rho_{i,\varepsilon}^\alpha} \approx \frac{\chi_i^2}{\xi_i}, \quad i = 0, 1.$$

Funkcija (5.20) će biti rešenje Rimanova problema (2.28, 5.18) ako postoji rešenje sistema

$$\begin{aligned}-c[\rho] + (\xi_0 + \xi_1) + [q] &= 0 \\ c(\xi_0 + \xi_1) &= \chi_0 + \chi_1 \\ -c[q] + (\chi_0 + \chi_1) + \left[\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right] &= 0 \\ c(\chi_0 + \chi_1) &= \frac{\chi_0^2}{\xi_0} + \frac{\chi_1^2}{\xi_1}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Neka su sa $\kappa_1 := c[\rho] - [q]$ i $\kappa_2 = c[q] - \left[\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right]$ označeni Rankin–Igonoovi deficiti koji odgovaraju prvoj i trećoj jednačini sistema (5.21), redom. Iz druge jednačine dobijamo

$\kappa_2 = c\kappa_1$, a zamenom prve jednačine u treću dobijamo kvadratnu jednačinu

$$[\rho]c^2 - 2[q]c + \left[\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha} \right] = 0,$$

čije rešenje je za $\rho_0 \neq \rho_1$ dato sa

$$c = \frac{[q] \pm \sqrt{[q]^2 - [\rho] \left[\frac{q^2 - \rho^{1-\alpha}}{\rho} \right]}}{[\rho]}. \quad (5.22)$$

Jedina moguća relacija između nepoznatih $\xi_i, \chi_i, i = 0, 1$ je

$$\xi_0 = \frac{\chi_0}{c} \quad \text{i} \quad \xi_1 = \frac{\chi_1}{c}.$$

Prva i treća jednačina u (5.21) jedinstveno određuju snagu senka talasa

$$\xi := \xi_0 + \xi_1 = \kappa_1, \quad \chi := \chi_0 + \chi_1 = \kappa_2 = c\kappa_1.$$

Kako promenljiva ρ označava gustinu mora da važi $\kappa_1 > 0$ (slučaj $\kappa_1 = 0$ odgovara udarnom talasu). Iz prve jednačine u (5.21) dobijamo

$$c = \frac{q_1 - q_0 + \kappa_1}{\rho_1 - \rho_0},$$

pa zbog pozitivnosti Rankin-Igonooovog deficit-a κ_1 moramo uzeti znak + u (5.22). Lako se dobija

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{(q_0\rho_1 - q_1\rho_0)^2}{\rho_0\rho_1} - (\rho_0 - \rho_1)\left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)}.$$

Zaključujemo da SDW rešenje problema (2.28, 5.18) postoji ako i samo ako važi

$$(q_0\rho_1 - q_1\rho_0)^2 > (\rho_0 - \rho_1)\left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)\rho_0\rho_1, \quad (5.23)$$

tj. ako se (ρ_1, q_1) nalazi ispod krive

$$q = \frac{\rho}{\rho_0}q_0 - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}(\rho_0 - \rho)\left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)} \quad (5.24)$$

ili iznad krive

$$q = \frac{\rho}{\rho_0}q_0 + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}(\rho_0 - \rho)\left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)}. \quad (5.25)$$

□

Napomena. 1. Ako je $\rho_1 = \rho_0$, brzina senka talasa je data sa $c = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{\rho_1} + \frac{q_0}{\rho_0}\right)$.

2. Primetite da je u (5.20) bilo dovoljno uzeti $\rho_{0,\varepsilon} = \rho_{1,\varepsilon}$ i $q_{0,\varepsilon} = q_{1,\varepsilon}$, jer SDW rešenje treba da bude slabo jedinstveno, što znači da će svaki odabir konstanti $\rho_{0,\varepsilon}, \rho_{1,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon}$ dati isti distributivni limes.

Kriva (5.24) se poklapa se krivom udarnog talasa (5.19) koja se nalazi iznad krive Γ_{ss} . Oblast između krivih (5.24) i Γ_{ss} odgovara $S_1 + S_2$ rešenju, što znači da rešenje Rimanovog problema nije jedinstveno ako se desno stanje (ρ_1, q_1) nalazi u toj oblasti (postoji i SDW i $S_1 + S_2$ rešenje). Takođe, iznad krive (5.25) postoji i rešenje u obliku senka talasa i klasično rešenje. Dakle, u tim oblastima moramo da isključimo jedno od dva rešenja uz pomoć uslova dopustivosti.

5.2.1. Uslov prekompresivnosti i entropijski uslov

Prvo ćemo koristiti uslov prekompresivnosti

$$\lambda_i(\rho_0, q_0) \geq c \geq \lambda_i(\rho_1, q_1), \quad i = 1, 2,$$

koji u slučaju sistema (2.28) ima oblik

$$\frac{q_0}{\rho_0} - \sqrt{\alpha} \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \geq \frac{q_1 - q_0 + \kappa_1}{\rho_1 - \rho_0} \geq \frac{q_1}{\rho_1} + \sqrt{\alpha} \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}. \quad (5.26)$$

Označimo sa $x := q_0 \rho_1 - q_1 \rho_0$. Da bi relacija (5.26) bila zadovoljena mora da važi $x > 0$.

Neka je $\rho_1 > \rho_0$. Iz uslova

$$\frac{q_0}{\rho_0} - \sqrt{\alpha} \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \geq \frac{q_1}{\rho_1} + \sqrt{\alpha} \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}$$

dobijamo $x \geq \sqrt{\alpha} (\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} \rho_1 + \rho_0 \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}}) > \sqrt{\alpha} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} (\rho_0 + \rho_1) =: z$. Primetite da je (5.26) ekvivalentan uslovima

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= x - \sqrt{\alpha} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} (\rho_1 - \rho_0) - \rho_0 \kappa_1 \\ &= x - \sqrt{\alpha} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} (\rho_1 - \rho_0) - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} \sqrt{x^2 - x_*^2} \geq 0 \\ f_2(x) &:= x + \sqrt{\alpha} \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} (\rho_1 - \rho_0) - \rho_1 \kappa_1 \\ &= x + \sqrt{\alpha} \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} (\rho_1 - \rho_0) - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}} \sqrt{x^2 - x_*^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

gde $x_* := \sqrt{\rho_0 \rho_1 (\rho_1 - \rho_0) (\rho_0^{-\alpha} - \rho_1^{-\alpha})} > 0$. Uslov (5.23) koji (ρ_1, q_1) mora da zadovolji da bi postojalo rešenje u obliku senka talasa daje $x > x_*$, pa ćemo u nastavku tražiti samo x za koje važi $x > \max\{x_*, z\} =: x_0$.

Rešavanje jednačine $f_1(x) = 0$ se svodi na rešavanje kvadratne jednačine

$$x^2 - 2\sqrt{\alpha} \rho_1 \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} x + \alpha \rho_0^{1-\alpha} \rho_1^2 + (1-\alpha) \rho_0^{2-\alpha} \rho_1 - \rho_0^2 \rho_1^{1-\alpha} = 0,$$

čiji su koreni jednaki

$$\begin{aligned} x_1 &:= \sqrt{\alpha} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} \rho_1 + \rho_0 \rho_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{\rho_1^{-\alpha} - (1-\alpha) \rho_0^{-\alpha}} \\ x_{11} &:= \sqrt{\alpha} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} \rho_1 - \rho_0 \rho_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{\rho_1^{-\alpha} - (1-\alpha) \rho_0^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Jasno je da važi $x_{11} < x_1$ i $x_{11} > \sqrt{\alpha} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} \rho_1 - \sqrt{\alpha} \rho_0^{1-\frac{\alpha}{2}} \rho_1^{\frac{1}{2}} > 0$, jer $\rho_1^{-\alpha} - (1-\alpha) \rho_0^{-\alpha} < \alpha \rho_0^{-\alpha}$ za $\rho_1 > \rho_0$. Takođe,

$$x_{11}^2 - x_*^2 = \rho_0 \rho_1 (\sqrt{\alpha} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} - \rho_1^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\rho_1^{-\alpha} - (1-\alpha) \rho_0^{-\alpha}})^2 > 0,$$

pa sledi $x_{11} > x_* > 0$. Dalje, $z > x_1 > x_*$, i $x_{11} < x_1$. Ako je $\rho_1^{-\alpha} < (1-\alpha) \rho_0^{-\alpha}$, gornja kvadratna jednačina nema realnih korena pa je funkcija $f_1(x)$ strogo pozitivna za $x > x_0$. U suprotnom, važi $f_1(x) > 0$ za $x > x_1$. Dakle, prvi uslov prekompresivnosti (5.27)₁ je zadovoljen ako $x > x_0 = z$.

Slično, jedini koren jednačine $f_2(x) = 0$ za $x > x_0$ je

$$x_2 := \sqrt{\alpha} \rho_0 \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_0^{\frac{1}{2}} \rho_1 \sqrt{\rho_0^{-\alpha} - (1-\alpha) \rho_1^{-\alpha}},$$

a $\rho_0^{-\alpha} \geq (1-\alpha)\rho_1^{-\alpha}$ važi za sve $\rho_1 > \rho_0$ pa je $f_2(x) \leq 0$ zadovoljeno ako $x \geq x_2$. Koristeći $(1-\alpha)\rho_1^{-\alpha} < (1-\alpha)\rho_0^{-\alpha}$ dobijamo

$$x_2 > \sqrt{\alpha}\rho_0\rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_0^{\frac{1}{2}}\rho_1\sqrt{\alpha}\rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} > z.$$

Kako je $x_1 < z = x_0 < x_2$ sledi da uslov prekompresivnosti (5.26) važi za sve $x \geq x_2$ i $\rho_1 > \rho_0$.

Napomena. Dodatno, može se pokazati da je izraz

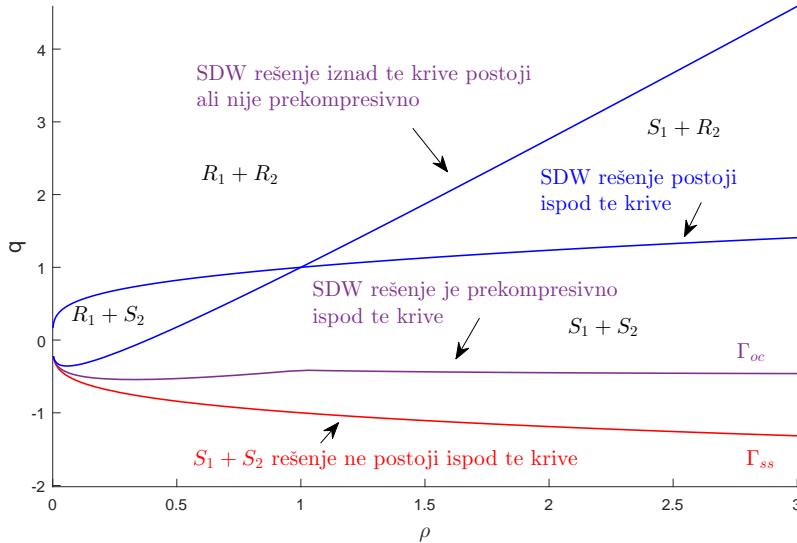
$$x_1 - x_2 = \rho_0\rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\sqrt{1 - (1-\alpha)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^\alpha} - \sqrt{\alpha} \right) - \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}}\rho_1 \left(\sqrt{1 - (1-\alpha)\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^\alpha} - \sqrt{\alpha} \right)$$

jednak nuli ako $\rho_1 = \rho_0$, i njegov prvi izvod po ρ_1 je negativan za $\rho_1 > \rho_0$, iz čega sledi $x_1 < x_2$.

Postupak u slučaju $\rho_1 < \rho_0$ je sličan. Zamenom ρ_0 i ρ_1 i ponavljanjem postupka od gore dobijamo da uslov (5.26) važi ako $x \geq x_1$.

Vidimo da stanje (ρ_1, q_1) može da se poveže sa stanjem (ρ_0, q_0) preko prekompresivnog senka talasa ako i samo ako se nalazi ispod krive

$$\Gamma_{oc} : q = \begin{cases} \frac{\rho}{\rho_0}q_0 - \frac{1}{\rho_0} \left(\sqrt{\alpha}\rho_0\rho^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_0^{\frac{1}{2}}\rho\sqrt{\rho_0^{-\alpha} - (1-\alpha)\rho^{-\alpha}} \right), & \text{ako } \rho_0 \leq \rho, \\ \frac{\rho}{\rho_0}q_0 - \frac{1}{\rho_0} \left(\sqrt{\alpha}\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}}\rho + \rho_0\rho^{\frac{1}{2}}\sqrt{\rho^{-\alpha} - (1-\alpha)\rho_0^{-\alpha}} \right), & \text{ako } \rho_0 > \rho. \end{cases}$$



Slika 5.3: Prekompresivan SDW i S1+S2 rešenje

Lako se pokazuje (ilustracija je data na Slici 5.3) da se kriva Γ_{oc} nalazi između (5.24) i Γ_{ss} , što znači da iznad Γ_{oc} postoji jedinstveno rešenje koje je kombinacija elementarnih talasa (SDW rešenje iznad krive (5.25) nije dopustivo). Međutim, u oblasti između krivih Γ_{ss} i Γ_{oc} postoji i rešenje u obliku prekompresivnog senka talasa i $S_1 + S_2$ rešenje. U nastavku ćemo pokušati da iskoristimo entropijski uslov i konveksni entropijski par (η, Q) kako bismo došli do jedinstvenog rešenja (tj. dokazali da SDW rešenje nije dopustivo u oblasti između krivih Γ_{ss} i Γ_{oc}).

Napomena. U poslednje vreme mnogo autora izučava Rimanov problem za uopšten Čapliginov gas (na primer, videti [104, 109]). Međutim, u tim radovima nije uočeno da uslov prekompre-
sivnosti nije dovoljan da eliminiše sva nedopustiva rešenja.

DEFINICIJA 5.2. *Rešenje u obliku prostog senka talasa problema (2.28, 5.18) dato sa (5.20) je entropijsko ako uslovi*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -c(\varepsilon \eta(\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}) + \varepsilon \eta(\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon})) + \varepsilon Q(\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}) + \varepsilon Q(\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon}) &= 0 \\ c(\eta(\rho_0, q_0) - \eta(\rho_1, q_1)) + Q(\rho_1, q_1) - Q(\rho_0, q_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \eta(\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}) + \varepsilon \eta(\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon})) &\leq 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

važe za sve konveksne entropijske parove (η_1, Q_1) i (η_2, Q_2) , $\lambda > 0$.

Dva uslova iz (5.28) slede iz entropijske nejednakosti (4.24) i ekvivalentni su onima iz (4.25) i (4.26).

Kako bismo dokazali da postoji slabo jedinstveno rešenje Rimanovog problema (2.28, 5.18) treba da pokažemo da SDW rešenje iznad krive Γ_{ss} nije dopustivo.

TEOREMA 5.1. *Prvi entropijski uslov*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -c(\varepsilon \eta(\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}) + \varepsilon \eta(\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon})) + \varepsilon Q(\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}) + \varepsilon Q(\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon}) = 0 \quad (5.29)$$

važi za SDW rešenje dato u obliku (5.20), entropijske parove (η_1, Q_1) , (η_2, Q_2) date u (2.33) i $\lambda > 0$.

DOKAZ. Pokazaćemo da uslov (5.29) važi u slučaju prvog entropijskog para (η_1, Q_1) . Dokaz je analogan za (η_2, Q_2) .

Kako $\rho_{i,\varepsilon}^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow 0$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$, $i = 1, 2$, možemo koristiti asymptotsko ponašanje modifi-
kovane Beselove funkcije druge vrste,

$$K_\nu(x) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{2}{x} \right)^\nu, \quad \nu > 0 \quad \text{kada } x \rightarrow 0. \quad (5.30)$$

Neka je $A := \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$. Tada $2A\lambda\rho_{i,\varepsilon}^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, pa važi

$$K_{\frac{1}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_{i,\varepsilon}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right) \sim \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) (A\lambda)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \rho_{i,\varepsilon}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2$$

$$K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_{i,\varepsilon}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right) \sim \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) (A\lambda)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \rho_{i,\varepsilon}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Primetite da $0 < A < 1$ za $0 < \alpha < 1$.

Koristeći

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_{i,\varepsilon} = \xi_i, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon q_{i,\varepsilon} = \chi_i, \quad \chi_i = c\xi_i, \quad i = 0, 1$$

i relaciju

$$K_{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}(x) = \frac{2}{x(1+\alpha)} K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x) + K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x). \quad (5.31)$$

dobijamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \eta_1(\rho_{i,\varepsilon}, q_{i,\varepsilon}) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) e^{2\lambda c} (A\lambda)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \xi_i$$

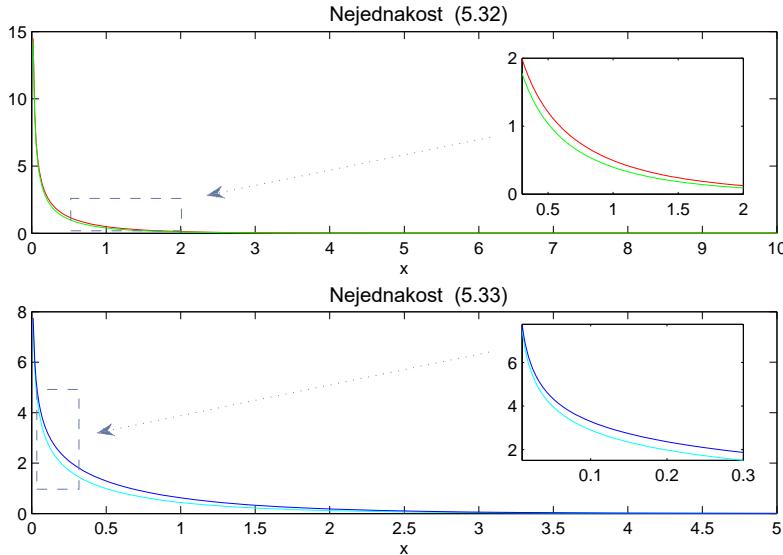
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon Q_1(\rho_{i,\varepsilon}, q_{i,\varepsilon}) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) e^{2\lambda c} (A\lambda)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \chi_i,$$

iz čega sledi

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -c(\varepsilon \eta_1(\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}) + \varepsilon \eta_1(\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon})) + \varepsilon Q_1(\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}) + \varepsilon Q_1(\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon}) \\ &= -\frac{c}{2} e^{2\lambda c} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) (A\lambda)^{-\frac{1}{1+\alpha}} (\xi_0 + \xi_1) + \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) e^{2\lambda c} (A\lambda)^{-\frac{1}{1+\alpha}} (\chi_1 + \chi_2). \end{aligned}$$

Jasno je da će prvi entropijski uslov biti zadovoljen za sve $\lambda > 0$ ako i samo ako važi $c(\xi_1 + \xi_2) = \chi_0 + \chi_1$, što je uvek tačno i sledi iz definicije senka talasa. \square

Kako bismo dokazali slabu jedinstvenost rešenja Rimanovog problema treba pokazati da druga relacija u (5.28) važi, tj. da je izraz sa leve strane te nejednakosti nepozitivan za sve (ρ_1, q_1) koji se nalaze na krivoj $\Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$ ili ispod nje i da to važi za sve $\lambda > 0$, dok iznad Γ_{ss} taj izraz treba da bude pozitivan.



Slika 5.4: Nejednakosti (5.32) i (5.33)

U nastavku ćemo koristiti jednakost (5.31) i relaciju

$$x^\nu K_\nu(x) e^x > 2^{\nu-1} \Gamma(\nu), \quad x > 0, \nu > \frac{1}{2}$$

koja je dokazana u [53]. Iz $\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{2}$ za $0 < \alpha < 1$ dobijamo da za sve $x > 0$ i $0 < \alpha < 1$ važi

$$K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x) > \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}} e^{-x}. \quad (5.32)$$

U [5] je pokazano da je funkcija $x \mapsto x^\nu e^x K_\nu(x)$ monotono opadajuća na intervalu $(0, \infty)$ za sve $\nu < \frac{1}{2}$ i da važi

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\nu e^x K_\nu(x) = 2^{\nu-1} \Gamma(\nu).$$

Koristeći taj rezultat i činjenicu da $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{1}{2}$ za $0 < \alpha < 1$ dobijamo

$$K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x) < \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} e^{-x}. \quad (5.33)$$

Relacije (5.32) i (5.33) su ilustrovane na Slici 5.4, gde su upoređene leva i desna strana obe nejednakosti.

Zamenom izraza za entropiju η_1 i fluks entropije Q_1 u (5.28)₂, kao i korišćenjem definicije senka talasa dobijamo da leva strana te nejednakosti za prvi entropijski par (η_1, Q_1) ima oblik

$$\begin{aligned} E_\lambda^1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left(\rho_{0,\varepsilon}^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_{0,\varepsilon}^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) + \rho_{1,\varepsilon}^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_{1,\varepsilon}^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \right) e^{2c\lambda} \\ &\quad - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{1}{2}} (-c\rho_0 + q_0) e^{2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} - \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} e^{2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} \\ &\quad - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (c\rho_1 - q_1) e^{2\lambda\frac{q_1}{\rho_1}} + \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} e^{2\lambda\frac{q_1}{\rho_1}} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{1+\alpha} \right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} \kappa_1 e^{2c\lambda} - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{1}{2}} (-c\rho_0 + q_0) e^{2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} \\ &\quad - \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} e^{2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (c\rho_1 - q_1) e^{2\lambda\frac{q_1}{\rho_1}} \\ &\quad + \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} e^{2\lambda\frac{q_1}{\rho_1}}. \end{aligned}$$

Pri tome je korišćeno da važi $\rho_{0,\varepsilon} \sim \rho_{1,\varepsilon} \sim \frac{1}{2\varepsilon} \kappa_1$, $\varepsilon \rightarrow 0$ i $\kappa_1 = c(\rho_1 - \rho_0) - (q_1 - q_0)$. Drugi entropijski uslov za prvi entropijski par će biti zadovoljen ako $E_\lambda^1 \leq 0$.

Za $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$ imamo $E_\lambda^1 = e^{2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} \hat{E}_\lambda^1$, gde

$$\begin{aligned} \hat{E}_\lambda^1 &= \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{1+\alpha} \right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} (\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}}) e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ &\quad - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} \\ &\quad - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})} \\ &\quad + \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Na isti način kao za prvi entropijski par možemo da odredimo levu stranu nejednakosti (5.28)₂ za drugi entropijski par (η_2, Q_2)

$$\begin{aligned} E_\lambda^2 &= \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{1+\alpha} \right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} \kappa_1 e^{-2c\lambda} - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{1}{2}} (-c\rho_0 + q_0) e^{-2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} \\ &\quad + \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (c\rho_1 - q_1) e^{-2\lambda\frac{q_1}{\rho_1}} \\ &\quad - \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-2\lambda\frac{q_1}{\rho_1}}. \end{aligned}$$

Za $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$ važi

$$E_\lambda^2 = e^{-2\lambda \left(\frac{q_0}{\rho_0} - (\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}) \right)} \hat{E}_\lambda^2,$$

gde

$$\begin{aligned} \hat{E}_\lambda^2 &= \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{1+\alpha} \right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} (\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}}) e^{-2\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ &\quad - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} \\ &\quad - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})} \\ &\quad + \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Vidimo da \hat{E}_λ^2 dobijamo iz \hat{E}_λ^1 zamenom ρ_0 i ρ_1 , čime je dokazano sledeće tvrđenje.

PROPOZICIJA 5.1. *Ako druga relacija u (5.28) važi za entropijski par (η_1, Q_1) , $(\rho_0, \rho_1) \in \Omega_0 \times \Omega_1$, $\Omega_0, \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}_+$ i (ρ_1, q_1) se nalazi na krivoj $\Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$, tada drugi entropijski uslov važi za entropijski par (η_2, Q_2) i $(\rho_0, \rho_1) \in \Omega_1 \times \Omega_0$ takvo da se (ρ_1, q_1) nalazi na $\Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$.*

Sledeća teorema nam daje bolji uvid u odnos između uslova prekompresivnosti i entropijske nejednakosti. Pokazaćemo da postoji tačka iznad krive Γ_{ss} u kojima je uslov prekompresivnosti zadovoljen, ali entropijski uslov nije. To je prvi takav rezultat u literaturi. Dakle, bar u tim tačkama možemo da izbegnemo nejedinstvenost koristeći entropijski uslov. Međutim, iako nismo pronašli čak ni numerički primer koji to potvrđuje, još uvek ne znamo da li možda postoje neke tačke u kojima je uslov prekompresivnosti jači od entropijskog uslova.

TEOREMA 5.2. *Za svaku $\alpha \in (0, 1)$ i svaku (ρ_0, q_0) postoji desno stanje (ρ_1, q_1) čija se okolina nalazi iznad $\Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$ i u toj okolini je uslov prekompresivnosti zadovoljen ali entropijski uslov nije za dovoljno veliko λ .*

DOKAZ. Definišimo krivu

$$\Gamma_\beta : q = \left(\frac{q_0}{\rho_0} - (\beta + (1 - \beta)\sqrt{\alpha})(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}) \right) \rho, \quad 0 < \beta < 1.$$

Neka je $\rho_0 = \rho_1$. Tada je brzina senka talasa jednaka

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{q_0}{\rho_0} + \frac{q_1}{\rho_1} \right),$$

pa dobijamo da za $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_\beta$ važi

$$c = \frac{q_0}{\rho_0} - (\beta + (1 - \beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Brzina c je neprekidna kao funkcija od ρ , pa je gornji izraz za brzinu tačan za sve ρ_1 u maloj okolini ρ_0 .

Lako se proverava da je uslov prekompresivnosti zadovoljen za sve $\beta \in (0, 1)$ i $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_\beta$ takvo da $\rho_1 = \rho_0$. To sledi iz nejednakosti $\beta(1 - \sqrt{\alpha}) > 0$ koja važi za sve $\beta \in (0, 1)$ i $\alpha \in (0, 1)$. Dalje,

$$\begin{aligned} \kappa_1|_{\rho_0=\rho_1} &= 2(\beta + (1 - \beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} \\ -c\rho_0 + q_0|_{\rho_0=\rho_1} &= c\rho_1 - q_1|_{\rho_0=\rho_1} = (\beta + (1 - \beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Sve funkcije korištene u ovoj analizi su neprekidne, pa zaključujemo da je uslov prekompresivnosti zadovoljen na krivoj Γ_β za sve ρ koje se nalazi u maloj okolini ρ_0 .

Ostalo je da proverimo entropijski uslov na krivoj Γ_β za ρ u okolini ρ_0 . Leva strana druge entropijske nejednakosti (5.28)₂ za prvi entropijski par (η_1, Q_1) je data sa

$$E_{\lambda,\beta}^1|_{\rho_0=\rho_1} = (\beta + (1 - \beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} e^{2\lambda\frac{q_0}{\rho_0}} \tilde{E}_{\lambda,\beta}^1|_{\rho_0=\rho_1},$$

gde

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\lambda,\beta}^1|_{\rho_0=\rho_1} &= \Gamma \left(\frac{1}{1+\alpha} \right) (A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}})^{-\frac{1}{1+\alpha}} e^{-2\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ &\quad - K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) (1 + e^{-4\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}) \\ &\quad - K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta + (1 - \beta)\sqrt{\alpha}} (1 - e^{-4\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}). \end{aligned}$$

Koristeći relaciju

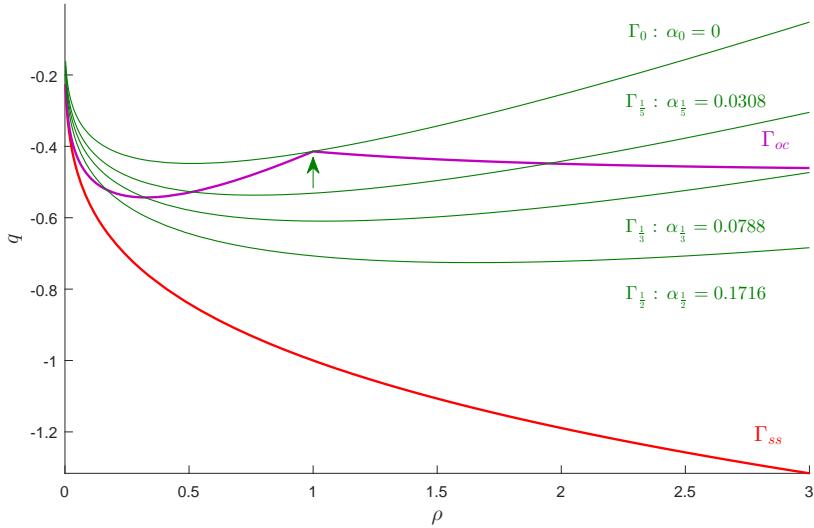
$$\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu-1}(x)} < \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + x^2}}{x}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (5.36)$$

koja je data u [61] i činjenicu da važi $K_{-\nu} = K_\nu$, dobijamo

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\lambda,\beta}^1|_{\rho_0=\rho_1} &> \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)(A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}})^{-\frac{1}{1+\alpha}} e^{-2\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ &- K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(1+e^{-4\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}\right) \frac{\frac{1}{1+\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^2 + (2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}})^2}}{2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ &- K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right) \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta + (1-\beta)\sqrt{\alpha}} \left(1 - e^{-4\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Dalje, ako iskoristimo relaciju (5.33) i pustimo $\lambda \rightarrow \infty$, dobijamo da važi $E_{\lambda,\beta}^1|_{\rho_0=\rho_1} > 0$, tj. entropijski uslov nije zadovoljen ako

$$\begin{aligned} &\Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \rho_0^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} e^{-2\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ &- \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \rho_0^{\frac{\alpha}{2}} \lambda^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta + (1-\beta)\sqrt{\alpha}}\right) e^{-2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} > 0. \end{aligned}$$



Slika 5.5: Ponašanje krive Γ_β

Eksponencijalna funkcija opada ka nuli brže od bilo kog stepena λ , pa će gornja relacija biti tačna ako $\beta + (1-\beta)\sqrt{\alpha} < A = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$. Dalje, definišimo funkciju

$$h_\beta(x) := -\beta + (1+\beta)x - \beta x^2 - (1-\beta)x^3$$

Jedan koren jednačine $h_\beta(x) = 0$ je $x = 1$ i to važi za svako $\beta \in (0, 1)$. Međutim, ta jednačina ima samo jedan koren x_β na intervalu $(0, 1)$ i on je jednak

$$x_\beta = \frac{1 - \sqrt{1 + 4(1-\beta)\beta}}{2(\beta-1)}.$$

Dakle, za svako $\beta \in (0, 1)$ postoji interval $(\alpha_\beta, 1)$, gde $\alpha_\beta := x_\beta^2$ takav da je funkcija h_β pozitivna za sve $\alpha \in (\alpha_\beta, 1)$, što znači da u tom slučaju entropijska jednakost nije zadovoljena. Jasno,

$$\alpha_{\beta_1} = x_{\beta_1}^2 < x_{\beta_2}^2 = \alpha_{\beta_2} \quad \text{za } \beta_1 < \beta_2.$$

Iz $\beta \rightarrow 0$ sledi $x_\beta \rightarrow 0$, što znači da je funkcija $h_\beta(x)$ pozitivna za svako $\alpha \in (0, 1)$ i dovoljno malo β . Sa porastom β (Γ_β se spušta) raste α_β (videti ilustraciju na Slici 5.5).

Kako je funkcija h_β neprekidna, zaključujemo sledeće: Za svako $\alpha \in (0, 1)$ i prvi entropijski par (η_1, Q_1) postoji $\beta \in (0, 1)$ (β je dovoljno malo ako je α dovoljno malo) takvo da entropijski uslov kada $\lambda \rightarrow \infty$ ne važi za $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_\beta$ i ρ_1 u maloj okolini ρ_0 .

Time smo pokazali da u slučaju modela za uopšten Čapliginov gas uslov prekompresivnosti ne implicira entropijski uslov. \square

PRIMER 5.1. Ako fiksiramo $\beta = 0.5$ i posmatramo krivu $\Gamma_{0.5}$ dobijamo da za svako $\alpha \in (\alpha_0, 1)$, $\alpha_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 \approx 0.17157$ (videti Sliku 5.5) i svako (ρ_0, q_0) postoji $\lambda > 0$ i stanje (ρ_1, q_1) koje se nalazi iznad Γ_{ss} krive, takvo da je SDW rešenje dato sa (5.20) prekompresivno, ali nije entropijski dopustivo. ■

Napomena. Teorema 5.2 se može dokazati i uz pomoć drugog entropijskog para. Leva strana entropijske nejednakosti (5.28)₂ za (η_2, Q_2) i $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_\beta$, gde $\rho_1 = \rho_0$ je jednaka

$$E_{\lambda, \beta}^2|_{\rho_0=\rho_1} = e^{-2\lambda(\frac{q_0}{\rho_0}-2(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}})}(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{\alpha}{2}}\tilde{E}_\lambda^2|_{\rho_0=\rho_1},$$

gde

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\lambda, \beta}^2|_{\rho_0=\rho_1} = & \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\left(A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}e^{-2\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ & - K_{\frac{1}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(1+e^{-4\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}\right) \\ & - K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right)\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha}}\left(1-e^{-4\lambda(\beta+(1-\beta)\sqrt{\alpha})\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Poređenjem izraza za (η_1, Q_1) i (η_2, Q_2) , zaključujemo da važi

$$\tilde{E}_{\lambda, \beta}^2|_{\rho_0=\rho_1} = \tilde{E}_{\lambda, \beta}^1|_{\rho_0=\rho_1}.$$

Dakle, drugi entropijski uslov za entropijski par (η_2, Q_2) , ρ_1 u okolini ρ_0 i dovoljno veliko λ je zadovoljen ako i samo ako je zadovoljen za entropijski par (η_1, Q_1) .

U nastavku navodimo neke rezultate koji pokazuju korisnost entropijskog uslova. Prvo opisujemo asimptotsko ponašanje entropijskog uslova kada $\lambda > 0$ teži nuli ili beskonačnosti.

PROPOZICIJA 5.2. Obe relacije u (5.28) važe za sve entropijske parove (η_1, Q_1) , (η_2, Q_2) na Γ_{ss} krivoj ako $\lambda \rightarrow 0$ ili $\lambda \rightarrow \infty$.

DOKAZ. U Teoremi 5.1 smo pokazali da prva relacija u (5.28) važi za sve entropijske parove i sve $\lambda > 0$. Treba pokazati da važi druga relacija u (5.28) kada je $\lambda > 0$ dovoljno malo ili dovoljno veliko. Koristeći relacije (5.34) i (5.35) zaključujemo da važi

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E_\lambda^i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Čak štaviše, to važi za svako q , a ne samo za ono koje se nalazi na krivoj Γ_{ss} . Treba pokazati da \tilde{E}_λ^i opada u $\lambda = 0$. Uzmimo prvo entropijski par (η_1, Q_1) . Koristeći relacije

$$\frac{d}{dx}K_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}K_\nu(x), \quad K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{E}_\lambda^1 = & - \left(\frac{\lambda^{-1}}{1+\alpha} + 2\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) (A\lambda)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \left(\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} \right) e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ & + \left(\frac{\lambda^{-1}}{1+\alpha} + 4\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \right) K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} \\ & + \sqrt{\alpha} \left(\frac{\lambda^{-1}\alpha}{1+\alpha} + 4\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1}{1+\alpha} \right) K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} \\ & + e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})} \left(\left(\frac{\lambda^{-1}}{1+\alpha} + 2\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + 2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} \right. \\ & \left. - \sqrt{\alpha} \left(\frac{\lambda^{-1}\alpha}{1+\alpha} + 2\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} - 2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned}$$

Zatim, koristeći sledeće relacije iz [110]

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)},$$

i identitet $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)}$ dobijamo

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\Gamma(\nu-k) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} + \Gamma(-\nu-k) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \right). \quad (5.37)$$

Zamenom (5.37) u $\frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{E}_\lambda^1$ i ređanjem izraza po rastućem redosledu u odnosu na stepen od λ dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{E}_\lambda^1|_{\lambda=0} = \lambda^{-1-\frac{1}{1+\alpha}} i_1 + \lambda^{-1-\frac{\alpha}{1+\alpha}} i_2 + \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} i_3 + \lambda^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} i_4 + \lambda^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} i_5 + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{1}{1+\alpha}}),$$

gde

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 = i_3 = i_4 = 0, \\ i_5 &= \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{1+2\alpha}{1+\alpha} \frac{\alpha-1}{1+\alpha} \left(\rho_0^{-\frac{1+3\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+3\alpha}{2}} \right) - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rho_1^{-\alpha} \frac{2}{1+\alpha} \frac{3+\alpha}{1+\alpha} \right). \end{aligned}$$

Kako je $i_5 < 0$ za $\alpha \in (0, 1)$, zaključujemo da \hat{E}_λ^1 opada u $\lambda = 0$.

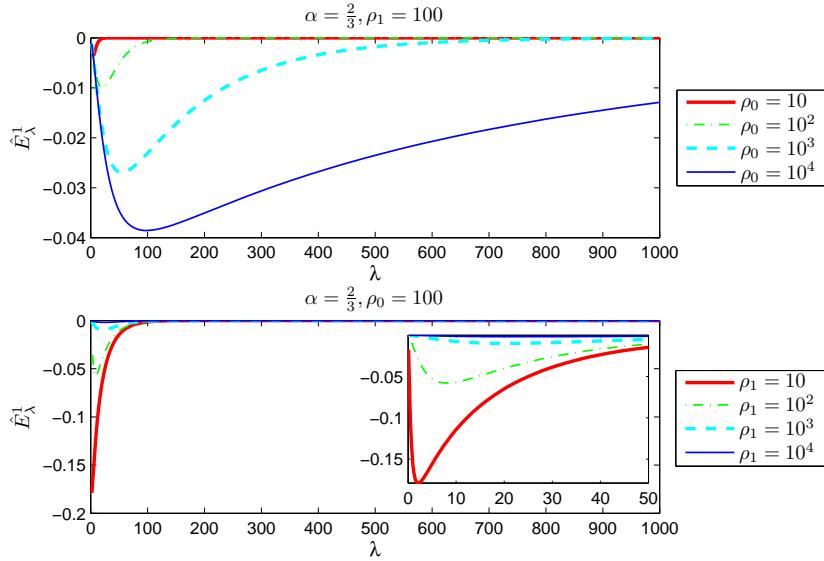
Isto se pokazuje za drugi entropijski par (η_2, Q_2) , pa zaključujemo da (5.28) važi kada $\lambda \rightarrow 0^+$ i za entropijske parove (η_1, Q_1) i (η_2, Q_2) .

Neka je sada λ dovoljno veliko. Zaključujemo sledeće:

- (i) Svaki sabirak u (5.34) i (5.35) teži nuli kada $\lambda \rightarrow \infty$.
- (ii) Izrazi

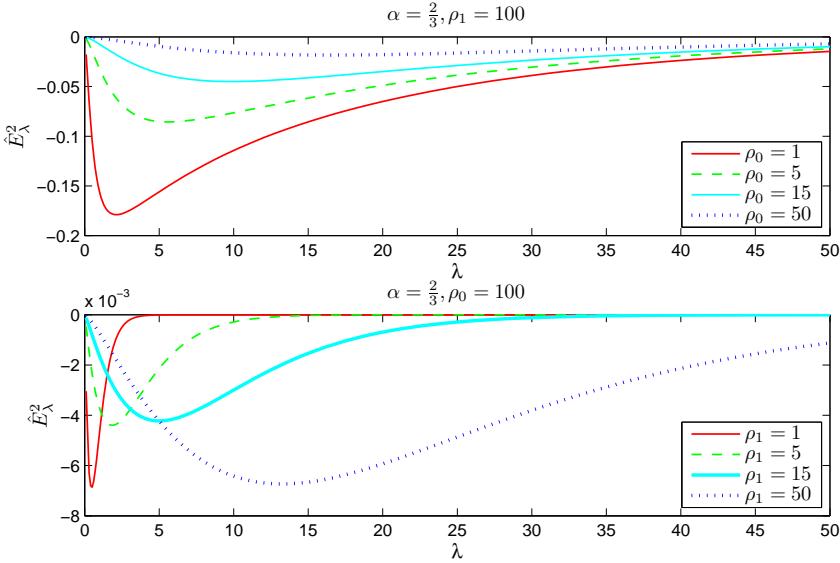
$$K_{\frac{1}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{i} \quad K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}}$$

dominiraju u odnosu na ostala tri iz (5.34) za dovoljno veliko λ . Isto važi i za drugi entropijski par.

Slika 5.6: Entropijska nejednakost na Γ_{ss} za prvi entropijski par (η_1, Q_1)

Iz (i) i (ii) sledi da $\hat{E}_\lambda^i \leq 0$, $i = 1, 2$ kada $\lambda \rightarrow \infty$. \square

Na osnovu numeričkih testova može se zaključiti da Propozicija 5.2 važi za sve $\lambda > 0$, tj. da se kriva $\Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$ nalazi u entropijskoj oblasti. To je ilustrovano na Slici 5.6 za prvi entropijski par i na Slici 5.7 za drugi entropijski par. Međutim, to nismo uspeli da pokažemo, pre svega jer ne postoji dovoljno dobre aproksimacije za modifikovane Beselove funkcije druge vrste.

Slika 5.7: Entropijska nejednakost na Γ_{ss} za drugi entropijski par (η_2, Q_2)

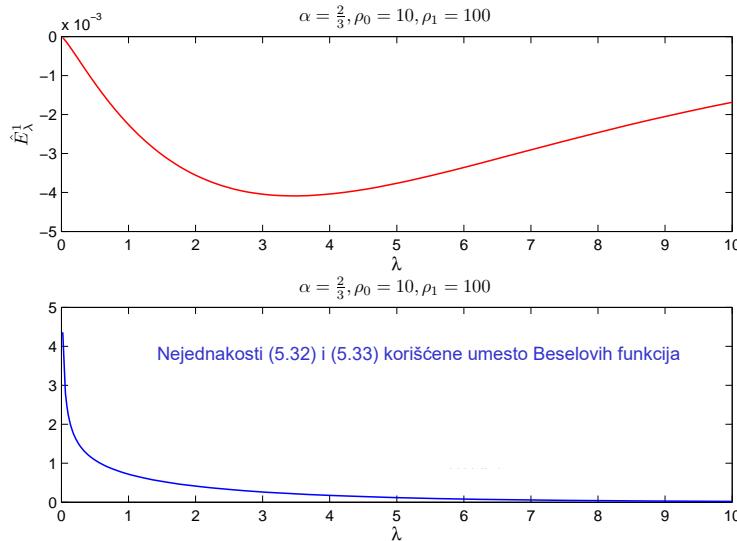
Iako su nejednakosti (5.32) i (5.33) delovale obećavajuće, one nisu bile dovoljne da pokažu globalnu nepozitivnost funkcije E_λ^i , $i = 1, 2$. Kao što se može videti na Slici 5.8, korišćenjem tih nejednakosti dobijamo gornje ograničenje za E_λ^i , $i = 1, 2$ koje je pozitivna funkcija, pa

zaključujemo da nam trebaju bolje aproksimacije Beselovih funkcija. U nekim specijalnim slučajevima te nejednakosti mogu biti od koristi. Neki primeri su dati ispod.

Nejednakosti (5.32) i (5.33) daju samo jedno, gornje ili donje ograničenje za Beselovu funkciju, pa za drugo ograničenje treba koristiti neke druge. Na primer, korišćenjem (5.36) dobija se

$$K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x) > \frac{x K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x)}{\frac{1}{1+\alpha} + \sqrt{(\frac{1}{1+\alpha})^2 + x^2}}, \quad x > 0.$$

Nažalost, ni ta nejednakost ne daje dovoljno dobar rezultat, a numerički rezultati u Matlabu su to potvrdili.



Slika 5.8: Nejednakosti (5.32) i (5.33) nisu dovoljne da pokažu nepozitivnost \hat{E}_λ^1

U nastavku ćemo navesti nekoliko specijalnih slučajeva kada je moguće pokazati da je kriva Γ_{ss} entropijska.

PRIMER 5.2. Entropijski uslov (5.28) važi ako (ρ_1, q_1) leži na krivoj Γ_{ss} kroz (ρ_0, q_0) i jedan od sledeća dva uslova je zadovoljen

- (i) $\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ je dovoljno malo,
- (ii) α je blizu 1.

Dokaz. Ranije smo pokazali da prva relacija u (5.28) uvek važi, preostalo je da se pokaže da je zadovoljena druga relacija.

(i) Koristićemo da $\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow 0$ ako i samo ako $\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow 0$ i $\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow 0$, jer su ρ_0 i ρ_1 pozitivni.

Za prvi entropijski par (η_1, Q_1) , stanje (ρ_1, q_1) koje leži na krivoj $\Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$ i dovoljno malo $\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ dobijamo

$$\begin{aligned} E_\lambda^1 &\sim e^{2\lambda \frac{q_0}{\rho_0}} \left(\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} (\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}}) e^{-2\lambda \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} (\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}}) e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})} \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 - e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})}) \right). \end{aligned}$$

Koristeći da

$$e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}, e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})} \rightarrow 1 \quad \text{kada} \quad \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow 0,$$

zaključujemo da $E_\lambda^1 \leq 0$, tj. entropijski uslov je zadovoljen za prvi entropijski par (η_1, Q_1) . Isto se može pokazati za (η_2, Q_2) .

(ii) Neka je sada α dovoljno blizu 1. Tada je i A blizu 1 pa važi

$$K_{\frac{1}{1+\alpha}}(x) \approx K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(x) \approx K_{\frac{1}{2}}(x), \quad \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) \approx \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \alpha \rightarrow 1.$$

Sledi,

$$\begin{aligned} \hat{E}_\lambda^1 &\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} (1+1) e^{-2\lambda\rho_0^{-1}} - K_{\frac{1}{2}}(2\lambda\rho_0^{-1}) \rho_0^{-\frac{1}{2}} (1+\sqrt{1}) - K_{\frac{1}{2}}(2\lambda\rho_1^{-1}) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (1-\sqrt{1}) e^{-2\lambda(\rho_0^{-1} + \rho_1^{-1})} \\ &\leq \frac{2\sqrt{\pi}}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} e^{-2\lambda\rho_0^{-1}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} \rho_0^{-\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\lambda\rho_0^{-1}} = 0, \end{aligned}$$

pri čemu je korišćena relacija

$$K_{\frac{1}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} (A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}})^{-\frac{1}{2}} e^{-2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Dakle, $\hat{E}_\lambda^1 \leq 0$ važi za α koje je dovoljno blizu 1 i sve $\rho_0, \rho_1 > 0$, a isto se može pokazati i za drugi entropijski par, tj. imamo $\hat{E}_\lambda^2 \leq 0$. ■

PRIMER 5.3. Entropijski uslov (5.28) važi za prvi entropijski par (η_1, Q_1) ako i samo ako je jadan od sledeća tri uslova tačan

- (i) ρ_0 je dovoljno malo i $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$,
- (ii) ρ_1 je dovoljno malo i $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$,
- (iii) $\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ je dovoljno malo, $A\lambda \geq 1$, $\rho_1 \leq \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ i $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati drugu relaciju u (5.28).

(i) Kako $e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \rightarrow 0$ i $e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})} \rightarrow 0$ kada $\rho_0 \rightarrow 0$, dobijamo da $\hat{E}_\lambda^1 \leq 0$ važi za dovoljno malo ρ_0 , svako $\rho_1 > 0$, $\lambda \geq 0$ i $\alpha \in (0, 1)$.

(ii) Iz $\rho_1 \rightarrow 0$ sledi $\rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} \rightarrow 0$ i $\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}} \rightarrow \infty$. Dalje, koristeći nejednakost (5.32) dobijamo

$$\hat{E}_\lambda^1 \leq \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) (A\lambda)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} - e^{-2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \right) - \sqrt{\alpha} \rho_0^{-\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right) \leq 0,$$

što sledi iz $e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \leq e^{-2A\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}}$.

(iii) Neka je $\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ dovoljno malo. Koristeći relacije (5.30), (5.32) i (5.33) dobijamo

$$\begin{aligned} \hat{E}_\lambda^1 &\sim \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} (\rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}}) e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} \rho_0^{\frac{1-\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\ &\quad - \left(K_{\frac{1}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right) - \sqrt{\alpha} K_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(2A\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right) \right) \rho_1^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-2\lambda(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}})} \\ &\leq \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{1}{1+\alpha}} \rho_1^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \left(1 - e^{-2(1+A)\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) A^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \lambda^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} e^{-2\lambda\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \left(1 - e^{-2(1+A)\lambda\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}} \right). \end{aligned}$$

$\hat{E}_\lambda^1 \leq 0$ sledi iz $A\lambda \geq 1$ i $\rho_1 \leq \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$. ■

Sledeći rezultat je direktna posledica Propozicije 5.1 i Primera 5.3.

PRIMER 5.4. Entropijski uslov (5.28) za drugi entropijski (η_2, Q_2) važi ako i samo je jedan od sledeća tri uslova tačan

- (i) ρ_1 je dovoljno malo, $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$,
- (ii) ρ_0 je dovoljno malo, $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$,
- (iii) $\rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ je dovoljno malo, $A\lambda \geq 1$, $\rho_0 \leq \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ i $(\rho_1, q_1) \in \Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$,

■

Da bismo pokazali (slabu) jedinstvenost rešenja Rimanovog problema koristeći entropijski uslov, neophodno je da pokažemo da je kriva Γ_{ss} entropijska. Za to je potrebno pronaći bolje ocene Beselovih funkcija ili dovoljno efikasan alternativni način. Ukoliko bismo uspeli da pokažemo da \hat{E}_λ^i kao funkcija od λ ima samo jedan ekstrem (za svako i) i to je minimum, dobili bismo da entropijska nejednakost važi na Γ_{ss} . Svi numerički eksperimenti koje smo uradili to povrđuju.

Tabela 5.1: Ocene minimuma funkcije \hat{E}_λ^1 za $\rho_0 = \rho_1$

| α | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{5}$ |
|--|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $b = A\lambda\rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ | 0.2814 | 0.3452 | 0.4029 | 0.4173 | 0.4266 | 0.4308 | 0.4357 |

Na primer, ako posmatramo \hat{E}_λ^1 kao funkciju od $b = A\lambda\rho^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ možemo približno da pronađemo vrednosti u kojima ta funkcija dostiže lokalni minimum. U Tabeli 5.1 su date procene u slučaju $\rho_0 = \rho_1$ i za neke vrednosti parametra $\alpha \in (0, 1)$.

Napomenimo da pokušaj da se jedinstvenost minimuma pokaže korišćenjem prvih i drugih izvoda funkcija \hat{E}_λ^i , $i = 1, 2$ nije bio uspešan, pre svega zbog kompleksnosti tih izvoda.

Jedinstvenost je moguće dobiti i korišćenjem nekih drugih uslova dopustivosti. Jedna ideja je da se iskoristi model za modifikovan Čapliginov gas ([33]) koji se dobija dodavanjem izraza koji zavisi od malog parametra $\varepsilon > 0$ na fluks funkciju u drugoj jednačini u (2.27),

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x \left(\rho u^2 + \varepsilon \rho - \frac{1}{\rho^\alpha} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Za razliku od modela (2.27), Rimanov problem (5.38, 5.18) ima jedinstveno entropijsko rešenje koje je kombinacija udarnih i razređujućih talasa. Međutim, dobijeno rešenje konvergira ka rešenju problema (2.27, 5.18) kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Dodatno, ono konvergira ka rešenju u obliku senka talasa (5.20) ako i samo ako se stanje (ρ_1, q_1) nalazi ispod Γ_{ss} krive. To je rezultat koji može poslužiti kao dodatni uslov dopustivosti, jer će eliminisati rešenje u obliku senka talasa iznad krive Γ_{ss} (za detaljnije videti [77]).

5.2.2. Princip maksimalne disipacije energije

Još jedan način da se dođe do jedinstvenog rešenja Rimanovog problema kod modela za uopšteni Čapliginov gas je da se gustina energije $\eta = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{1+\alpha}\rho^{-\alpha}$ i odgovarajući fluks $Q = \frac{1}{2}\rho u^3 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\rho^{-\alpha}u$ iskoriste kao (matematički) entropijski par (η, Q) koji bi u kombinaciji sa principom maksimalne disipacije energije datim u Definiciji 3.8 doveli do jedinstvenog rešenja. Naime, u tom slučaju bi bilo dovoljno pokazati da je produkcija energije klasičnog

$S_1 + S_2$ rešenju manja od produkције energije koja odgovara rešenju u obliku senka talasa iznad Γ_{ss} krive, što bi značilo da $S_1 + S_2$ rešenje gubi energiju po većoj stopi. Radi jednostavnijeg zapisa ćemo izentropski model za uopšten Čapliginov gas posmatrati u originalnom obliku (2.27), koristeći komponente gustine ρ i brzine $u = \frac{q}{\rho}$.

$S_1 + S_2$ je dato kao kombinacija dva udarna talasa koja povezuju levo (ρ_0, u_0) i desno (ρ_1, u_1) početno stanje preko međustanja (ρ_m, u_m) koje je dato sa

$$\begin{aligned} u_m &= u_0 - \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0 \rho_m} (\rho_0^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha})}, \quad \rho_m > \rho_0 \\ u_m &= u_1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 \rho_m} (\rho_1^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha})}, \quad \rho_m > \rho_1. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Ovo rešenje postoji ako se stanje (ρ_1, u_1) nalazi iznad krive Γ_{ss} , tj. ako važi $u_1 > u_0 - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}$. Prvi udarni talas se prostire brzinom

$$c_1 = u_0 - \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\rho_0^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}}{\rho_m - \rho_0}} =: u_0 - A_{0,m},$$

dok je brzina drugog jednaka $c_2 = u_m + A_{m,1} = u_1 + A_{1,m}$. Lako se dobija da važi

$$c_2 - c_1 = \frac{\rho_0}{\rho_m} A_{0,m} + \frac{\rho_1}{\rho_m} A_{1,m} > 0.$$

Iz Leme 5.5 i analize koja sledi posle nje, znamo da postoji rešenje u obliku prekompresivnog senka talasa i u oblasti iznad krive Γ_{ss} kroz (ρ_0, u_0) . Neka je $(\rho_{1,\varepsilon}, u_{1,\varepsilon}) = (\rho_{2,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon})$ u definiciji senka talasa koji tada dobija oblik

$$(\rho, u)(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < (c - \varepsilon)t \\ (\rho_\varepsilon, u_\varepsilon), & (c - \varepsilon)t < x < (c + \varepsilon)t \\ (\rho_1, u_1), & x > (c + \varepsilon)t, \end{cases} \quad (5.40)$$

gde je brzina senka talasa jednaka $c = \frac{u_1 \rho_1 - u_0 \rho_0 + \kappa_1}{\rho_1 - \rho_0}$ ako $\rho_0 \neq \rho_1$, a $c = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$ ako $\rho_0 = \rho_1$. Važi $\kappa_1 = \sqrt{\rho_0 \rho_1 (u_0 - u_1)^2 - (\rho_0 - \rho_1)(\rho_1^{-\alpha} - \rho_0^{-\alpha})}$, kao i ranije.

Primetite da iz uslova prekompresivnosti dobijamo $u_0 - \sqrt{\alpha} \rho_0^{-\frac{1}{1+\alpha}} \geq u_1 + \sqrt{\alpha} \rho_1^{-\frac{1}{1+\alpha}}$, pa zaključujemo $u_0 > u_1$.

Producija energije $S_1 + S_2$ rešenja je konstantna za svako t i data je sa

$$\begin{aligned} E_{0,1} &= -c_1(\eta(\rho_m, u_m) - \eta(\rho_0, u_0)) + Q(\rho_m, u_m) - Q(\rho_0, u_0) \\ &\quad - c_2(\eta(\rho_1, u_1) - \eta(\rho_m, u_m)) + Q(\rho_1, u_1) - Q(\rho_m, u_m), \end{aligned}$$

dok u slučaju rešenja u obliku senka talasa imamo

$$\begin{aligned} D_{0,1} &:= -c(\eta(\rho_1, u_1) - \eta(\rho_0, u_0)) + Q(\rho_1, u_1) - Q(\rho_0, u_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon \eta(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon) \\ &= -c(\eta(\rho_1, u_1) - \eta(\rho_0, u_0)) + Q(\rho_1, u_1) - Q(\rho_0, u_0) + \frac{1}{2} c^2 \kappa_1. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Iz (5.39) se lako izvodi sledeće

$$u_0 - u_1 = \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m} A_{0,m} + \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m} A_{1,m}, \quad \kappa_1 = \sqrt{(\rho_m - \rho_0)(\rho_m - \rho_1)(c_2 - c_1)}. \quad (5.42)$$

Neka je $\rho_1 \neq \rho_0$. Koristeći relacije iz (5.42) dobijamo

$$\begin{aligned} c - c_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}(u_1 - u_0) + \frac{\kappa_1}{\rho_1 - \rho_0} + A_{0,m} \\ &= \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right) (c_2 - c_1) > 0 \\ c - c_2 &= \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0}(u_1 - u_0) + \frac{\kappa_1}{\rho_1 - \rho_0} - A_{1,m} \\ &= \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} \right) (c_2 - c_1) < 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Nejednakosti (5.43) se dobijaju podelom na slučajeve. Naime, ako je $\rho_1 > \rho_0$, imamo $\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1} > 1$, dok obrnuto važi za $\rho_1 < \rho_0$. Time je pokazano da se brzina senka talasi nalazi između dve brzine udarnih talasa, c_1 i c_2 . U slučaju $\rho_0 = \rho_1$, važi $c - c_1 = c_2 - c = \frac{\rho_0}{\rho_m} A_{0,m}$.

Princip maksimalne disipacije energije će eliminisati rešenje u obliku prekompresivnog senka talasa iznad krive $\Gamma_{ss}(\rho_0, u_0)$ ako važi $E_{0,1} < D_{0,1}$.

TEOREMA 5.3. Postoji jedinstveno entropijsko rešenje Rimanovog problema

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0 \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x \left(\rho u^2 - \frac{1}{\rho^\alpha} \right) &= 0, \quad (\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < 0 \\ (\rho_1, u_1), & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.44)$$

koje je dato kao kombinacija elementarnih talasa ako $u_1 > u_0 - \rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho_1^{-\frac{1+\alpha}{2}}$, ili u obliku senka talasa (5.40), inače.

DOKAZ. Preostalo je da se pokaže da važi $D_{0,1} - E_{0,1} > 0$. Imamo

$$D_{0,1} - E_{0,1} = \eta(\rho_m, u_m)(c_1 - c_2) + \eta(\rho_0, u_0)(c - c_1) + \eta(\rho_1, u_1)(c_2 - c) + \frac{1}{2} c^2 \kappa_1.$$

Neka je prvo $\rho_0 \neq \rho_1$. Koristeći (5.43) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{D_{0,1} - E_{0,1}}{c_2 - c_1} &= -\eta(\rho_m, u_m) + \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right) \eta(\rho_0, u_0) \\ &\quad + \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} \right) \eta(\rho_1, u_1) + \frac{1}{2} c^2 \sqrt{(\rho_m - \rho_0)(\rho_m - \rho_1)} \\ &= \frac{1}{1+\alpha} \left(\rho_1^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha} - \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right) (\rho_1^{-\alpha} - \rho_0^{-\alpha}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\rho_m u_m^2 + \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right) \rho_0 u_0^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} \right) \rho_1 u_1^2 + c^2 \sqrt{(\rho_m - \rho_0)(\rho_m - \rho_1)} \right) \\ &=: \frac{1}{1+\alpha} I_1 + \frac{1}{2} I_2, \end{aligned}$$

gde

$$I_1 = \rho_1^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha} - \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right) (\rho_1^{-\alpha} - \rho_0^{-\alpha}),$$

$$\begin{aligned} I_2 = & -\rho_m u_m^2 + \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right) \rho_0 u_0^2 \\ & + \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} \right) \rho_1 u_1^2 + c^2 \sqrt{(\rho_m - \rho_0)(\rho_m - \rho_1)}. \end{aligned}$$

Prvo ćemo pokazati da važi $I_1 > 0$,

$$\begin{aligned} I_1 = & (\rho_1^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}) \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} - (\rho_0^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}) \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} + (\rho_0^{-\alpha} - \rho_1^{-\alpha}) \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} \\ = & \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} (\rho_m - \rho_1) \left(\frac{\rho_1^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}}{\rho_m - \rho_1} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} \right) + \frac{\rho_0^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}}{\rho_m - \rho_0} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Lako se pokazuje da ako je $\rho_1 > \rho_0$, tada

$$a_1 := 1 - \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} > 0, \quad a_2 := -1 + \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} > 0,$$

dok suprotno važi ako je $\rho_1 < \rho_0$. To je u kombinaciji sa relacijama $\rho_m > \rho_0$ i $\rho_m > \rho_1$ dovoljno da se pokaže $I_1 > 0$.

Da bismo dokazali da važi $I_2 > 0$ koristimo (5.39), (5.42) i definiciju senka talasa tako što prvo eliminišemo u_0 i u_m iz I_2 (izrazimo ih preko u_1 i ρ_0, ρ_1, ρ_m). Zatim pokazujemo da se I_2 može zapisati u obliku $I_2 = b_1 u_1^2 + b_2 u_1 + b_3$, gde $b_1 = b_2 = 0$ i

$$\begin{aligned} b_3 = & \frac{\rho_m - \rho_0}{(\rho_1 - \rho_0)^2} \frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m} \left(\frac{1}{2} (\rho_1 a_2 - \rho_0 a_1) \left(\sqrt{\rho_0^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}} - \sqrt{\rho_1^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}} \right)^2 \right. \\ & \left. + \sqrt{(\rho_0^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha})(\rho_1^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha})} \left((\rho_1 a_2 - \rho_0 a_1) - \sqrt{\rho_0 \rho_1} \frac{(\sqrt{\rho_m - \rho_1} - \sqrt{\rho_m - \rho_0})^2}{\sqrt{(\rho_m - \rho_1)(\rho_m - \rho_0)}} \right) \right). \end{aligned}$$

Prvi izraz u b_3 je pozitivan jer važi

$$\rho_1 a_2 - \rho_0 a_1 = \underbrace{\left(1 - \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m - \rho_1}} \right)}_{=:a} \left(\rho_0 \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_m - \rho_0}} - \rho_1 \right) > 0,$$

što sledi iz činjenice da za $\rho_1 > \rho_0$ važi $a > 1$ iz čega sledi $(1 - a) < 0$ i $\rho_0/a - \rho_1 < 0$. Slično se dobija i u slučaju $\rho_1 < \rho_0$. Konačno, dobijamo

$$\begin{aligned} & (\rho_1 a_2 - \rho_0 a_1) - \sqrt{\rho_0 \rho_1} \frac{(\sqrt{\rho_m - \rho_1} - \sqrt{\rho_m - \rho_0})^2}{\sqrt{(\rho_m - \rho_1)(\rho_m - \rho_0)}} \\ & = -(\sqrt{\rho_0} - \sqrt{\rho_1})^2 + (\sqrt{\rho_0} - \sqrt{\rho_1}) \left(\sqrt{\rho_0} \frac{1}{a} - \sqrt{\rho_1} a \right) > 0, \end{aligned}$$

što sledi iz

$$\frac{\sqrt{\rho_0}/a - \sqrt{\rho_1}a}{\sqrt{\rho_0} - \sqrt{\rho_1}} > 1.$$

Dakle, $I_2 = b_3 > 0$, pa dobijamo $D_{0,1} - E_{0,1} > 0$.

Slučaj $\rho_0 = \rho_1$ je jednostavniji. Tada važi

$$D_{0,1} - E_{0,1} = (c_2 - c_1)(\rho_0^{-\alpha} - \rho_m^{-\alpha}) \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_m} + \frac{1}{1+\alpha} \right) > 0.$$

□

5.2.3. Neizentropski model za uopšten Čapliginov gas

Neizentropsko strujanje Čapliginovog gasa je opisano zakonima održanja mase, količine kretanja i energije datim u (2.35). Sistem u kanoničkom obliku je dat u (2.36). Rimanov problem (2.36),

$$(\rho, q, m)(0, x) = \begin{cases} (\rho_0, q_0, m_0), & x < 0 \\ (\rho_1, q_1, m_1), & x > 0, \end{cases} \quad (5.45)$$

se rešava na isti način kao kod izentropskog modela. Kako su prva i treća karakteristična familija tog sistema zaista nelinearne, a druga je linearne degenerisana, sledi da se klasično rešenje tamo gde postoji sastoji iz udarnih i/ili razređujućih talasa prve i treće karakteristične familije i kontaktnog diskontinuiteta druge karakteristične familije. Razređujuće krive prve i treće karakteristične familije kroz (ρ_0, q_0, m_0) su date sa

$$R_1(\rho_0, q_0, m_0) : \begin{cases} q = \frac{q_0}{\rho_0} \rho - \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \left(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho \\ m = \frac{m_0}{\rho_0} \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{\rho^2} - \frac{q_0^2}{\rho_0^2} \right) \rho + \frac{1}{1+\alpha} (\rho^{-(1+\alpha)} - \rho_0^{-(1+\alpha)}) \rho \end{cases}, \quad \rho < \rho_0,$$

$$R_3(\rho_0, q_0, m_0) : \begin{cases} q = \frac{q_0}{\rho_0} \rho + \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} \left(\rho_0^{-\frac{1+\alpha}{2}} - \rho^{-\frac{1+\alpha}{2}} \right) \rho \\ m = \frac{m_0}{\rho_0} \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{\rho^2} - \frac{q_0^2}{\rho_0^2} \right) \rho + \frac{1}{1+\alpha} (\rho^{-(1+\alpha)} - \rho_0^{-(1+\alpha)}) \rho \end{cases}, \quad \rho > \rho_0.$$

Krine udarnih talasa prve i treće karakteristične familije kroz (ρ_0, q_0, m_0) su date sa

$$S_1(\rho_0, q_0, m_0) : \begin{cases} q = \frac{q_0}{\rho_0} \rho - \sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\rho \rho_0} (\rho_0^{-\alpha} - \rho^{-\alpha})} \\ m = \frac{m_0}{\rho_0} \rho - \frac{q_0}{\rho_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} (\rho - \rho_0) (\rho_0^{-\alpha} - \rho^{-\alpha})} - \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \rho^{-\alpha} \end{cases}, \quad \rho > \rho_0,$$

$$S_3(\rho_0, q_0, m_0) : \begin{cases} q = \frac{q_0}{\rho_0} \rho - \sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\rho \rho_0} (\rho_0^{-\alpha} - \rho^{-\alpha})} \\ m = \frac{m_0}{\rho_0} \rho - \frac{q_0}{\rho_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} (\rho - \rho_0) (\rho_0^{-\alpha} - \rho^{-\alpha})} - \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \rho^{-\alpha} \end{cases}, \quad \rho < \rho_0.$$

Brzine udarnih talasa S_1 i S_2 su jednake

$$c_1 = \frac{q_0}{\rho_0} - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho^\alpha - \rho_0^{-\alpha}}{\rho - \rho_0} \frac{1}{\rho_0^\alpha \rho^\alpha}}, \quad c_3 = \frac{q_0}{\rho_0} + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho^\alpha - \rho_0^{-\alpha}}{\rho - \rho_0} \frac{1}{\rho_0^\alpha \rho^\alpha}}.$$

Kontaktni diskontinuitet koji odgovara drugoj karakterističnoj familiji je dat sa

$$\text{CD}(\rho_0, q_0, m_0) : q = \frac{q_0}{\rho_0} \rho, \quad m \in \mathbb{R}$$

i ima brzinu $c_2 = \frac{q_0}{\rho_0}$. Kao i kod izentropskog modela dobijamo da klasično rešenje $S_1 + \text{CD} + S_2$ postoji samo ako se (ρ_1, q_1) nalazi iznad krive $\Gamma_{ss}(\rho_0, q_0)$. U suprotnom postoji rešenje Rimanovog problema dato u obliku prostog senka talasa.

TEOREMA 5.4. Postoji rešenje problema (2.36, 5.45) dato u obliku prostog senka talasa

$$(\rho^\varepsilon, q^\varepsilon, m^\varepsilon)(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, q_0, m_0), & x < (c - \varepsilon)t \\ (\rho_{0,\varepsilon}, q_{0,\varepsilon}, m_{0,\varepsilon}), & (c - \varepsilon)t < x < ct \\ (\rho_{1,\varepsilon}, q_{1,\varepsilon}, m_{1,\varepsilon}), & ct < x < (c + \varepsilon)t \\ (\rho_1, q_1, m_1), & x > (c + \varepsilon)t, \end{cases} \quad (5.46)$$

ako i samo ako

$$(q_0\rho_1 - q_1\rho_0)^2 > (\rho_0 - \rho_1)\left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)\rho_0\rho_1.$$

DOKAZ. Iz Leme 4.1 dobijamo

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x q &\approx (-c[\rho] + [q] + \varepsilon(\rho_{0,\varepsilon} + \rho_{1,\varepsilon}))\delta \\ &\quad + (-c\varepsilon(\rho_{0,\varepsilon} + \rho_{1,\varepsilon}) + \varepsilon(q_{0,\varepsilon} + q_{1,\varepsilon}))t\delta' \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha}\right) &\approx \left(-c[q] + \left[\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha}\right] + \varepsilon(q_{0,\varepsilon} + q_{1,\varepsilon})\right)\delta \\ &\quad - c\varepsilon(q_{0,\varepsilon} + q_{1,\varepsilon})t\delta' + \left(\varepsilon\left(\frac{q_{0,\varepsilon}^2}{\rho_{0,\varepsilon}} - \frac{1}{\rho_{0,\varepsilon}^\alpha}\right) + \varepsilon\left(\frac{q_{1,\varepsilon}^2}{\rho_{1,\varepsilon}} - \frac{1}{\rho_{1,\varepsilon}^\alpha}\right)\right)t\delta' \\ \partial_t m + \partial_x \left(\frac{q}{\rho}(m - \rho^{-\alpha})\right) &\approx \left(-c[m] + \left[\frac{q}{\rho}(m - \rho^{-\alpha})\right] + \varepsilon(m_{0,\varepsilon} + m_{1,\varepsilon})\right)\delta \\ &\quad - c\varepsilon(m_{0,\varepsilon} + m_{1,\varepsilon})t\delta' \\ &\quad + \left(\varepsilon\left(\frac{q_{0,\varepsilon}}{\rho_{0,\varepsilon}}(m_{0,\varepsilon} - \rho_{0,\varepsilon}^{-\alpha})\right) + \varepsilon\left(\frac{q_{1,\varepsilon}}{\rho_{1,\varepsilon}}(m_{1,\varepsilon} - \rho_{1,\varepsilon}^{-\alpha})\right)\right)t\delta', \end{aligned}$$

gde $[\cdot] = \cdot_1 - \cdot_0$. Važi, $\rho_{i,\varepsilon}, q_{i,\varepsilon}, m_{i,\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1}$, $i = 0, 1$. Dalje, neka je

$$\xi_i := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_{i,\varepsilon}, \quad \chi_i := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon q_{i,\varepsilon}, \quad \sigma_i := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon m_{i,\varepsilon}, \quad i = 0, 1.$$

Tada važi

$$\varepsilon\left(\frac{q_{i,\varepsilon}^2}{\rho_{i,\varepsilon}} - \frac{1}{\rho_{i,\varepsilon}^\alpha}\right) \approx \frac{\chi_i^2}{\xi_i}, \quad \varepsilon\left(\frac{q_{i,\varepsilon}}{\rho_{i,\varepsilon}}(m_{i,\varepsilon} - \rho_{i,\varepsilon}^{-\alpha})\right) \approx \frac{\chi_i}{\xi_i}\sigma_i, \quad i = 0, 1.$$

pa se Rimanov problem (2.36, 5.45) svodi na sistem jednačina,

$$\begin{aligned} -c[\rho] + [q] + (\xi_0 + \xi_1) &= 0 \\ c(\xi_0 + \xi_1) &= \chi_0 + \chi_1 \\ -c[q] + \left[\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha}\right] + (\chi_0 + \chi_1) &= 0 \\ c(\chi_0 + \chi_1) &= \frac{\chi_0^2}{\xi_0} + \frac{\chi_1^2}{\xi_1} \\ -c[m] + \left[\frac{q}{\rho}(m - \rho^{-\alpha})\right] + (\sigma_0 + \sigma_1) &= 0 \\ c(\sigma_0 + \sigma_1) &= \frac{\chi_0}{\xi_0}\sigma_0 + \frac{\chi_1}{\xi_1}\sigma_1. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Neka su sa $\kappa_1 := c[\rho] - [q]$, $\kappa_2 = c[q] - \left[\frac{q^2}{\rho} - \frac{1}{\rho^\alpha}\right]$ i $\kappa_3 := c[m] - \left[\frac{q}{\rho}(m - \rho^{-\alpha})\right]$ označeni Rankin-Igonoovi deficiti prve, druge i treće karakteristične familije, redom. Prve četiri jednačine iz

(5.47) su iste kao kod izentropskog modela, pa dobijamo $\kappa_2 = c\kappa_1$, pri čemu je $\kappa_1 > 0$. Brzina senka talasa je jednaka

$$c = \frac{q_1 - q_0 + \kappa_1}{\rho_1 - \rho_0}, \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{(q_0\rho_1 - q_1\rho_0)^2}{\rho_0\rho_1} - (\rho_0 - \rho_1)\left(\frac{1}{\rho_1^\alpha} - \frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)},$$

a relacije između nepoznatih $\xi_i, \chi_i, i = 0, 1$, su

$$\xi_0 = \frac{\chi_0}{c} \quad \text{i} \quad \xi_1 = \frac{\chi_1}{c}.$$

Snaga senka talasa je jedinstveno određena i data je sa

$$\xi := \xi_0 + \xi_1 = \kappa_1, \quad \chi := \chi_0 + \chi_1 = \kappa_2 = c\kappa_1, \quad \sigma := \sigma_0 + \sigma_1 = \kappa_3,$$

gde

$$\kappa_3 = c[m] - \left[\frac{q}{\rho}(m - \rho^{-\alpha})\right] = \frac{[q] + \kappa_1}{[\rho]}[m] - \left[\frac{q}{\rho}(m - \rho^{-\alpha})\right].$$

Dakle, iz istog razloga kao kod sistema (2.27) rešenje u obliku senka talasa postoji ako se (ρ_1, q_1) nalazi ispod (5.24) ili iznad (5.25). \square

Rešenje u obliku (5.46) je prekompresivno ako važi (5.26), pa prekompresivnost ne zavisi od treće koordinate u rešenju m . Dakle, u ovom slučaju se o prekompresivnosti senka talasa mogu izvesti isti zaključci kao kod izentropskog modela za uopšten Čapliginov gas. Ostaje otvoreno pitanje da li bi entropijski uslov ili neki drugi uslov dopustivosti mogao da dovede do jedinstvenosti rešenja.

Ovaj problem su izučavali autori u [85, 96], ali ni oni nisu uočili da postoji problem sa jedinstvenošću rešenja Rimanovog problema.

5.3. Model za Čapliginov gas

U nastavku posmatramo izentropski model za Čapliginov gas

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x\left(\rho u^2 - \frac{C}{\rho}\right) &= 0, \end{aligned}$$

pri čemu je gustina gase ρ pozitivna. Kako je pritisak obrnuto proporcionalan gustini gase (i negativan) neće doći do pojave vakuma u rešenju, pa sistem možemo posmatrati u kaničkom obliku

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x q &= 0 \\ \partial_t q + \partial_x\left(\frac{q^2 - 1}{\rho}\right) &= 0, \end{aligned} \tag{5.48}$$

gde zbog jednostavnijeg zapisa uzimamo $C = 1$. Rešavamo problem (5.48) sa Rimanovim početnim uslovom

$$(\rho, q)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_l, q_l), & x < 0 \\ (\rho_r, q_r), & x > 0. \end{cases} \tag{5.49}$$

Sistem (5.48) je strogo hiperboličan, ali su obe karakteristične familije linearno degenerisane, što znači da klasično rešenje (ako postoji) može da se predstavi kao kombinacija kontaktnih diskontinuiteta. Kontaktni diskontinuitet prve karakteristične familije kroz (ρ_l, q_l) je dat sa

$$\text{CD}_1(\rho_l, u_l) : q = 1 + \frac{q_l - 1}{\rho_l} \rho,$$

dok je kontaktni diskontinuitet druge karakteristične familije kroz (ρ_l, q_l) dat sa

$$\text{CD}_2(\rho_l, u_l) : q = -1 + \frac{q_l + 1}{\rho_l} \rho.$$

Klasično rešenje se sastoji iz kontaktnog diskontinuiteta prve karakteristične familije koji povezuje stanja (ρ_l, q_l) i (ρ_m, q_m) i kontaktnog diskontinuiteta druge karakteristične familije koji povezuje stanja (ρ_m, q_m) i (ρ_r, q_r) , gde

$$(\rho_m, q_m) = \left(\frac{2}{\lambda_2(\rho_r, q_r) - \lambda_1(\rho_l, q_l)}, \frac{\lambda_2(\rho_r, q_r) + \lambda_1(\rho_l, q_l)}{\lambda_2(\rho_r, q_r) - \lambda_1(\rho_l, q_l)} \right).$$

To rešenje (u nastavku CDC rešenje) se može zapisati sa

$$(\rho, q)(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, q_l), & x < \frac{q_l - 1}{\rho_l} t \\ (\rho_m, q_m), & \frac{q_l - 1}{\rho_l} t < x < \frac{q_r + 1}{\rho_r} t \\ (\rho_r, q_r), & x > \frac{q_r + 1}{\rho_r} t. \end{cases}$$

Središnje stanje (ρ_m, q_m) pronalazimo kao presek $\text{CD}_1(\rho_l, q_l)$ i $\text{CD}_2(\rho_r, q_r)$. Kako je gustina gase pozitivna, CDC rešenje postoji ako je $\rho_m > 0$, tj. ako važi

$$\lambda_2(\rho_r, q_r) = \frac{q_r + 1}{\rho_r} > \frac{q_l - 1}{\rho_l} = \lambda_1(\rho_l, q_l),$$

što se može zapisati na sledeći način

$$\rho_l(q_r + 1) - \rho_r(q_l - 1) > 0. \quad (5.50)$$

Ako (5.50) ne važi, tada postoji neklasično rešenje u obliku delta udarnog talasa, što je pokazano u [11]. Mi ćemo pokazati da postoji rešenje u obliku senka talasa koje ga aproksimira (videti [76]).

TEOREMA 5.5. Postoji (slabo) jedinstveno entropijsko rešenje Rimanovog problema (5.48, 5.49) koje se sastoji iz dva kontaktna diskontinuiteta ako važi (5.50) ili iz jednog prostog senka talasa datog sa

$$(\rho^\varepsilon, q^\varepsilon)(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, q_l), & x < (c - \varepsilon)t \\ (\rho_\varepsilon, q_\varepsilon), & (c - \varepsilon)t < x < (c + \varepsilon)t \\ (\rho_r, q_r), & x > (c + \varepsilon)t, \end{cases} \quad (5.51)$$

gde $c = \frac{q_r - q_l + \kappa_1}{\rho_r - \rho_l}$ predstavlja brzinu senka talasa, a Rankin-Igonovi deficiti su dati sa

$$\kappa_1 = \sqrt{\rho_l \rho_r (\lambda_1(\rho_l, q_l) - \lambda_1(\rho_r, q_r)) (\lambda_2(\rho_l, q_l) - \lambda_2(\rho_r, q_r))}, \quad \kappa_2 = c \kappa_1.$$

DOKAZ. Prethodno smo pokazali da postoji klasično rešenje Rimanovog problema (5.48, 5.49) koje je dato kao kombinacija dva kontaktna diskontinuiteta ako važi (5.50). Da bismo pokazali da postoji rešenje u obliku prostog senka talasa dato sa (5.51) koristićemo Lemu 4.1 sa $a_\varepsilon(t) = b_\varepsilon(t) = \varepsilon t$ i $U_{l,\varepsilon} = U_{r,\varepsilon} = (\rho_\varepsilon, q_\varepsilon)$. Označimo sa

$$\kappa_1 := c(\rho_r - \rho_l) - (q_r - q_l), \quad \kappa_2 := c(q_r - q_l) - \left(\frac{q_r^2 - 1}{\rho_r} - \frac{q_l^2 - 1}{\rho_l} \right)$$

Rankine-Igonoove deficite. Sistem (4.19) koji ρ_ε i q_ε treba da zadovolje da bi (5.51) bilo rešenje problema (5.48, 5.49) sada ima oblik

$$\kappa_1 \approx 2\varepsilon\rho_\varepsilon, \quad \kappa_2 \approx 2\varepsilon q_\varepsilon.$$

Dodatno, važi

$$2\varepsilon\rho_\varepsilon c = 2\varepsilon q_\varepsilon, \quad 2\varepsilon \left(\frac{q_\varepsilon^2 - 1}{\rho_\varepsilon} \right) = 2\varepsilon q_\varepsilon c, \quad (5.52)$$

gde $\rho_\varepsilon, q_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1}$. Neka je

$$\xi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon\rho_\varepsilon, \quad \chi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon q_\varepsilon.$$

Tada iz dve jednačine u (5.52) koje su ekvivalentne dobijamo $c\xi = \chi$, pa sledi $\kappa_2 = c\kappa_1$. Brzina senka talasa c je rešenje kvadratne jednačine

$$[\rho]c^2 - 2c[q] + \left[\frac{q^2 - 1}{\rho} \right] = 0,$$

gde $[\cdot] := \cdot_r - \cdot_l$. U slučaju $[\rho] \neq 0$ dobijamo

$$c = \frac{[q]}{[\rho]} + \frac{1}{[\rho]} \sqrt{[q]^2 - [\rho] \left[\frac{q^2 - 1}{\rho} \right]} = \frac{[q] + \kappa_1}{[\rho]},$$

jer je $\kappa_1 > 0$. Slučaj $\kappa_1 = 0$ odgovara klasičnom rešenju u obliku kontaktnog diskontinuiteta. Ako je $[\rho] = 0$ onda je brzina senka talasa jednaka

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{q_r}{\rho_r} + \frac{q_l}{\rho_l} \right).$$

Može se pokazati da važi

$$[q]^2 - [\rho] \left[\frac{q^2 - 1}{\rho} \right] = \rho_l \rho_r (\lambda_1(\rho_l, q_l) - \lambda_1(\rho_r, q_r)) (\lambda_2(\rho_l, q_l) - \lambda_2(\rho_r, q_r)),$$

pa vidimo da će rešenje u obliku (5.51) postojati ako

$$(\lambda_1(\rho_l, q_l) - \lambda_1(\rho_r, q_r)) (\lambda_2(\rho_l, q_l) - \lambda_2(\rho_r, q_r)) \geq 0. \quad (5.53)$$

Kako $\lambda_2(\rho_i, q_i) > \lambda_1(\rho_i, q_i)$, $i = l, r$ uvek važi zaključujemo da će uslov iz (5.53) biti zadovoljen ako $\lambda_2(\rho_r, q_r) \leq \lambda_1(\rho_l, q_l)$, što je negacija uslova (5.50) za postojanje klasičnog rešenja.

Ostalo je da pokažemo da je SDW rešenje entropijsko, tj. da zadovoljava sledeća dva uslova

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2c\varepsilon\eta(\rho_\varepsilon, q_\varepsilon) + 2\varepsilon Q(\rho_\varepsilon, q_\varepsilon)) &= 0 \\ -c(\eta(\rho_r, q_r) - \eta(\rho_l, q_l)) + Q(\rho_r, q_r) - Q(\rho_l, q_l) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon\eta(\rho_\varepsilon, q_\varepsilon) &\leq 0 \end{aligned} \quad (5.54)$$

za η i Q date sa (2.37) i (2.38). Korišćenjem da važi

$$2\varepsilon\rho_\varepsilon c \approx 2\varepsilon q_\varepsilon, \quad \frac{q_\varepsilon \pm 1}{\rho_\varepsilon} \approx c \quad \text{kada } \varepsilon \rightarrow 0,$$

lako se dobija da je prvi uslov u (5.54) zadovoljen. Takođe,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon\eta(\rho_\varepsilon, q_\varepsilon) = \frac{1}{2}\kappa_1(F(c) + G(c)),$$

pa drugi uslov u (5.54) ima oblik

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}F\left(\frac{q_r - 1}{\rho_r}\right)(c\rho_r - (q_r + 1)) - \frac{1}{2}F\left(\frac{q_l - 1}{\rho_l}\right)(-c\rho_l + (q_r + 1)) + \frac{1}{2}\kappa_1 F(c) \\ & - \frac{1}{2}G\left(\frac{q_r + 1}{\rho_r}\right)(c\rho_r - (q_r + 1)) - \frac{1}{2}G\left(\frac{q_l + 1}{\rho_l}\right)(-c\rho_l + (q_r + 1)) + \frac{1}{2}\kappa_1 G(c) \leq 0. \end{aligned}$$

Da bismo dokazali da gornja nejednakost važi dovoljno je pokazati sledeće

$$\begin{aligned} E_F &:= F\left(\frac{q_r - 1}{\rho_r}\right)\frac{c\rho_r - (q_r + 1)}{\kappa_1} + F\left(\frac{q_l - 1}{\rho_l}\right)\frac{-c\rho_l + (q_r + 1)}{\kappa_1} - F(c) \geq 0 \\ E_G &:= G\left(\frac{q_r + 1}{\rho_r}\right)\frac{c\rho_r - (q_r + 1)}{\kappa_1} + G\left(\frac{q_l + 1}{\rho_l}\right)\frac{-c\rho_l + (q_r + 1)}{\kappa_1} - G(c) \geq 0. \end{aligned}$$

Pokazaćemo da konveksna funkcija F zadovoljava prvu nejednakost, dokaz da isto važi za drugu nejednakost je analogan. Koristićemo da

$$\frac{c\rho_r - (q_r + 1)}{\kappa_1} + \frac{-c\rho_l + (q_r + 1)}{\kappa_1} = 1,$$

kao i relaciju

$$f(ax + by) \leq af(x) + bf(y), \quad a, b \geq 0, \quad a + b = 1$$

koja važi za sve konveksne funkcije f . Dakle, ako uzmemo

$$a = c\rho_r - (q_r + 1) \geq 0 \quad \text{i} \quad b = -c\rho_l + (q_r + 1) \geq 0, \tag{5.55}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} E_F &\geq F\left(\frac{c\rho_r - (q_r + 1)}{\kappa_1}\frac{q_r - 1}{\rho_r} + \frac{-c\rho_l + (q_r + 1)}{\kappa_1}\frac{q_r - 1}{\rho_l}\right) - F(c) \\ &= F\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(c[q] - \left[\frac{q^1 - 1}{\rho}\right]\right)\right) - F(c) = F\left(\frac{c\kappa_1}{\kappa_1}\right) - F(c) = 0. \end{aligned}$$

U slučaju kada ne važi jedan od uslova iz (5.55) može se pronaći konveksna funkcija F takva da je $E_F < 0$ (videti [76]).

Nejednakost $E_G \geq 0$ je zadovoljena ako važi $c\rho_r - (q_r - 1) \geq 0$ i $-c\rho_l + (q_r - 1) \geq 0$. Dakle, rešenje u obliku senka talasa je entropijsko ako i samo ako

$$\lambda_2(\rho_r, q_r) \leq c \leq \lambda_2(\rho_l, q_l), \quad \lambda_1(\rho_r, q_r) \leq c \leq \lambda_1(\rho_l, q_l), \tag{5.56}$$

tj. ako je to rešenje prekompresivno. Lako se pokazuje da su uslov prekompresivnosti (5.56) i $\lambda_2(\rho_r, q_r) \leq c \leq \lambda_1(\rho_l, q_l)$ koji je negacija uslova (5.50) ekvivalentni, pa sledi da u oblasti u kojoj postoji CDC rešenje ne postoji entropijsko SDW rešenje, što znači da je rešenje Rimanovog problema (5.48, 5.49) slabo jedinstveno. \square

Na isti način kao i u slučaju gasne dinamike bez pritiska možemo pristupiti problemu interakcije između dva senka talasa.

LEMA 5.6. *Neka je dat sistem (5.48) sa početnim uslovom*

$$(\rho, q)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_l, q_l), & x < X \\ (\rho_r, q_r), & x > X \end{cases} + (\gamma, \chi) \delta_{(X, 0)}, \quad \gamma > 0 \quad (5.57)$$

takovim da važi

$$\frac{q_l - 1}{\rho_l} \geq \frac{\chi}{\gamma} \geq \frac{q_r + 1}{\rho_r}. \quad (5.58)$$

Tada postoji rešenje uopštenog Rimanovog problema (5.48, 5.57) u obliku prekompresivnog senka talasa

$$(\rho^\varepsilon, q^\varepsilon)(x, t) = \begin{cases} (\rho_l, q_l), & x < c(t) - a_\varepsilon(t) - x_\varepsilon \\ (\rho_\varepsilon(t), q_\varepsilon(t)), & c(t) - a_\varepsilon(t) - x_\varepsilon < x < c(t) + a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon \\ (\rho_r, q_r), & x > c(t) + a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon, \end{cases} \quad (5.59)$$

gde $c(0) = X$, $\rho_\varepsilon(t)$, $q_\varepsilon(t) \sim \varepsilon^{-1}$, $a_\varepsilon(t)$ je glatka funkcija reda ε , $a_\varepsilon(0) = 0$ i $x_\varepsilon \sim \varepsilon$ zadovoljava

$$\gamma = \int_{X-x_\varepsilon}^{X+x_\varepsilon} \rho_\varepsilon(t) dx, \quad \chi = \int_{X-x_\varepsilon}^{X+x_\varepsilon} q_\varepsilon(t) dx.$$

DOKAZ. Da bismo pokazali da (5.59) jeste rešenje datog problema koristićemo Lemu 4.3. Funkcije $\rho_\varepsilon(t)$, $q_\varepsilon(t)$, $a_\varepsilon(t)$ i x_ε treba da zadovolje sistem jednačina (4.21, 4.22) koji sada ima oblik

$$\begin{aligned} c'(t)[\rho] - [q] &\approx \frac{d}{dt}(2(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)\rho_\varepsilon(t)) \\ c'(t)[q] - \left[\frac{q^2 - 1}{\rho} \right] &\approx \frac{d}{dt}(2(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)q_\varepsilon(t)) \\ 2c'(t)(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)\rho_\varepsilon(t) &\approx 2(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)q_\varepsilon(t) \\ 2c'(t)(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)q_\varepsilon(t) &\approx 2(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)\left(\frac{q_\varepsilon^2(t) - 1}{\rho_\varepsilon(t)}\right), \end{aligned} \quad (5.60)$$

gde $[\cdot] := \cdot_r - \cdot_l$, kao i ranije. Neka je

$$\xi(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)\rho_\varepsilon(t), \quad \chi(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon)q_\varepsilon(t).$$

Kako je $\rho_\varepsilon(t) \sim \varepsilon^{-1}$, dobijamo da su treća i četvrta jednačina iz (5.60) ekvivalentne i da važi $c'(t)\xi(t) = \chi(t)$. To znači da funkcije $c'(t)$ i $\xi(t)$ predstavljaju rešenje sistema običnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= c'(t)[\rho] - [q] \\ (c'(t)\xi(t))' &= c'(t)[q] - \left[\frac{q^2 - 1}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Postupak za rešavanje sistema (5.61) je isti kao u dokazu Leme 5.2, pa ćemo ga ovde izostaviti. Neka je $c := \chi/\gamma$. Za $\rho_l \neq \rho_r$ rešenje sistema (5.61) je dato sa

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(c[\rho] - [q])t + \left([q]^2 - [\rho]\left[\frac{q^2 - 1}{\rho}\right]\right)t^2} \\ c'(t) &= \frac{[q]}{[\rho]} + \frac{1}{\xi(t)[\rho]} \left(\gamma \left(c[q] - \left[\frac{q^2 - 1}{\rho} \right] \right) + \left([q]^2 - [\rho]\left[\frac{q^2 - 1}{\rho}\right]\right)t \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Rešenje u obliku senka talasa postoji dok god je izraz pod korenom u $\xi(t)$ nenegativan i lako se može pokazati da za svako $t \geq 0$ važi $\xi(t) \geq \gamma > 0$. Naime, iz uslova prekompresivnosti sledi da je izraz $[q]^2 - [\rho] \left[\frac{q^2-1}{\rho} \right]$ nenegativan (videti dokaz Teoreme 5.5). Da bismo pokazali da važi $c[\rho] - [q] \geq 0$ posmatraćemo dva slučaja.

- (1) Neka je $[\rho] > 0$. Tada važi nejednakost $\frac{[q]}{[\rho]} \leq \frac{q_r+1}{\rho_r}$ koja je ekvivalentna uslovu prekompresivnosti $\lambda_2(\rho_r, q_r) \leq \lambda_2(\rho_l, q_l)$. Kombinujući to sa $c \geq \lambda_2(\rho_r, q_r)$ dobijamo

$$c[\rho] - [q] \geq \lambda_2(\rho_r, q_r)[\rho] - \lambda_2(\rho_r, q_r)[\rho] = 0.$$

- (2) Neka je $[\rho] < 0$. Sada važi nejednakost $\frac{[q]}{[\rho]} \geq \frac{q_l-1}{\rho_l}$ koja je ekvivalentna uslovu $\lambda_1(\rho_r, q_r) \leq \lambda_1(\rho_l, q_l)$. Slično kao u prethodnom slučaju koristimo $c \geq \lambda_1(\rho_l, q_l)$ i dobijamo $c[\rho] - [q] \geq 0$.

Dakle, izrazi koji stoje uz t i t^2 u $\xi(t)$ su nenegativni, pa važi $\xi(t) \geq \gamma$ za svako $t \geq 0$ odakle zaključujemo da rešenje u obliku senka talasa dato sa (5.59) neće eksplodirati.

Dalje, treba dokazati da je to rešenje prekompresivno za svako $t \geq 0$. Važi

$$\begin{aligned} c''(t) &= -\frac{\gamma^2}{[\rho]\xi^3(t)} \left(c^2[\rho]^2 - 2c[\rho][q] + [q]^2 - \left([q]^2 - [\rho] \left[\frac{q^2-1}{\rho} \right] \right) \right) \\ &= -\frac{\gamma^2}{\xi^3(t)} [\rho](c - \alpha_{l,r})(c - \beta_{l,r}), \end{aligned}$$

gde

$$\alpha_{l,r} := \frac{[q]}{[\rho]} + \frac{1}{[\rho]} \sqrt{[q]^2 - [\rho] \left[\frac{q^2-1}{\rho} \right]}, \quad \beta_{l,r} := \frac{[q]}{[\rho]} - \frac{1}{[\rho]} \sqrt{[q]^2 - [\rho] \left[\frac{q^2-1}{\rho} \right]}.$$

Korišćenjem uslova (5.58) dobijamo da $[\rho](c - \beta_{l,r}) \geq 0$, a kako su γ i $\xi(t)$ pozitivni sledi $\text{sign}(c''(t)) = -\text{sign}(c - \alpha_{l,r})$. Takođe, važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c'(t) = \alpha_{l,r},$$

iz čega sledi prekompresivnost rezultujućeg senka talasa

$$\frac{q_r+1}{\rho_r} \leq c'(t) \leq \frac{q_l-1}{\rho_l}.$$

Takođe, na isti način kao što je pokazano da važi $c[\rho] - [q] \geq 0$, može se dokazati da je $\xi(t)$ neopadajuća funkcija od t , tj. $\xi'(t) = c'(t)[\rho] - [q] \geq 0$ za sve $t > 0$.

U slučaju $\rho_l = \rho_r$ dobijamo sistem

$$\xi'(t) = -[q], \quad (\xi(t)c'(t))' = [q] \left(2c'(t) - \frac{q_r+q_l}{\rho_l} \right),$$

čije je rešenje dato sa

$$\xi(t) = \gamma - [q]t, \quad c'(t) = \frac{\gamma^2}{\xi^2(t)} \left(c - \frac{q_r+q_l}{2\rho_l} \right) + \frac{q_r+q_l}{2\rho_l}.$$

Ovde iz (5.58) sledi $\xi'(t) \geq 0$. Jasno je da je i tom slučaju rezultujući senka talas prekompresivan, jer se $c'(t)$ može predstaviti kao konveksna kombinacija dva broja c i $\frac{q_r+q_l}{2\rho_l}$ koja oba pripadaju intervalu $[\frac{q_r+1}{\rho_l}, \frac{q_l-1}{\rho_l}]$. \square

POSLEDICA 5.3. *Rezultat interakcije između dva prekompresivna senka talasa kod sistema (5.48) je prekompresivan senka talas.*

Dokaz Posledice 5.3 je sličan dokazu Posledice 5.2.

Deo III

**GLOBALNO REŠENJE
POČETNOG PROBLEMA ZA
GASNU DINAMIKU BEZ
PRITISKA**

Glava 6

Sadržaj

| | | |
|-----|--|-----|
| 6.1 | Razvoj algoritama za konstrukciju približnih rešenja | 112 |
| 6.2 | Konstrukcija približnog rešenja pomoću metoda za praćenje talasa | 115 |

Istorija i motivacija

Neka je dat strogo hiperboličan sistem od n zakona održanja

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U = (u^1, \dots, u^n), \quad F = (f^1, \dots, f^n), \quad n \geq 2 \quad (6.1)$$

sa glatkim koeficijentima, definisanim za sve U u otvorenom skupu $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ i sa početnim uslovom male totalne varijacije

$$U(x, 0) = \bar{U}(x). \quad (6.2)$$

Prepostavimo je svaka karakteristična familija zaista nelinearna ili linearno degenerisana i da su desni karakteristični vektori zaista nelinearne i -te karakteristične familije parametrizovani tako da važi $D\lambda_i r_i > 0$.

DEFINICIJA 6.1. *Kažemo da funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ima ograničenu totalnu varijaciju na \mathbb{R} ako važi*

$$TV_{(-\infty, \infty)} f(\cdot) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| dx < +\infty.$$

Analiza početnih problema sistema zakona održanja, kao i konstrukcija rešenja dugi niz godina privlače pažnju mnogih autora. Za sada postoje značajni rezultati u slučaju početnog uslova male totalne varijacije, ali ne postoji metod koji bi dao egzistenciju rešenja početnog problema u opštem slučaju. Dobijeni su rezultati koji važe samo u slučaju konkretnih sistema, ali se ne mogu uopštiti na proizvoljne sisteme. Međutim, tako nešto ni ne treba očekivati. Naime, očekujemo da će u opštem slučaju doći do eksplozije slabog rešenja, a samim tim i do pojave neograničenih slabih rešenja. Takođe, sudari talasa istih ili različitih karakterističnih familija u rešenju mogu da izazovu pojačavanje talasa (*eng. wave amplification*), pojavu koja nastaje kada se prilikom svakog sudara između dva talasa snaga odlazećeg povećava za neki faktor odvodeći oscilacije u slabom rešenju ka beskonačnosti u konačnom vremenu. A čak iako broj oscilacija ostane ograničen može da se dogodi da eksplodira ukupna totalna varijacija slabog rešenja (videti [28]).

U nastavku ćemo dati pregled nekih rezultata dobijenih u slučaju početnog uslova male totalne varijacije. Algoritmi za konstrukciju približnog rešenja koji će ovde biti navedeni će nam poslužiti kao motivacija za konstrukciju približnog (neograničenog) rešenja početnog problema za sistem gasne dinamike bez pritiska.

Napomena. Primetite da će svaka konstantna funkcija $U(x, t) = \tilde{U}$ biti trivijalno rešenje sistema (6.1) sa početnim uslovom $U(x, 0) = \tilde{U}$. Algoritmi za konstrukciju približnih rešenja će se zasnivati na diskretizaciji početnog uslova i rešavanju Rimanovih problema. U slučaju početnog uslova male totalne varijacije i strogo hiperboličnog sistema, početna stanja iz generisanih Rimanovih početnih uslova će biti dovoljno blizu, pa ćemo moći da koristimo Teoremu 3.10 iz koje će slediti da postoji entropijsko klasično rešenje odgovarajućeg Rimanovog problema za sistem (6.1).

6.1. Razvoj algoritama za konstrukciju približnih rešenja

U svom radu [48], Glim¹ je 1965. godine objavio rezultat koji je predstavljao kamen temeljac za dalju analizu i konstrukciju rešenja početnog problema. Naime, on je pokazao da ako početni uslov ima malu totalnu varijaciju i blizu je konstantnog stanja, sistem je strogo hiperboličan, a karakteristične familije zaista nelinearne ili linearne degenerisane, tada postoji slabo rešenje jednodimenzionalnog sistema zakona održanja sa početnim problemom male totalne varijacije i to za svako $t > 0$.

Ideja Glimove šeme je konstrukcija približnog rešenja U_ω^h koje zavisi od izbora mreže, tj. koraka $\Delta x = h$ i Δt i niza $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$ takvog da $\omega_i \in (-1, 1)$ za svako i . Odnos između Δx i Δt se unapred određuje, a može se uzeti i $\Delta t = \Delta x$. Prvo se u $t = 0$ funkcija $U(x, 0) = \bar{U}(x)$ aproksimira po delovima konstantnom funkcijom koja ima prekide u čvorovima mreže, tj.

$$U_\omega^h(x, 0) = \bar{U}((k + \omega_0)\Delta x) \quad \text{za sve } x \in I_k := ((k - 1)\Delta x, (k + 1)\Delta x).$$

U svakoj tački prekida $(X_k, 0)$ funkcije $U_\omega^h(x, 0)$ rešava se odgovarajući Rimanov problem i na taj način se za dovoljno malo $t > 0$ dobija rešenje koje se može predstaviti kao kombinacija rešenja Rimanovih problema. Posle nekog vremena ta rešenja (talasi) će početi da se sudađaju. Kako bi se to sprečilo približno rešenje se zaustavlja u nekom vremenu T_1 pre prvog sudara i procedura se restartuje. Naime, tada se funkcija $U_\omega^h(x, T_1^-)$ aproksimira novom $U_\omega^h(x, T_1^+)$ koja je data sa

$$U_\omega^h(x, T_1^+) = U_\omega^h((k + \omega_1)\Delta x, T_1^-) \quad \text{za sve } x \in I_k.$$

Postupak se ponavlja tako što se u n -tom koraku rešenje prekida u $t = T_n$ koje je vreme pre prvog sudara između talasa koji su rešenja Rimanovog problema nastala u $t = T_{n-1}$. Približno rešenje posle $t = T_n$ se dobija novom aproksimacijom funkcije $U_\omega^h(x, T_n^-)$ po delovima konstantnom funkcijom. Globalno rešenje se dobija spajanjem rešenja Rimanovih problema.

Glimova šema je razvijena u [48] za zaista nelinearne sisteme i početni uslov koji je blizak konstantnom početnom uslovu. Kasnije je približno rešenje konstruisano u slučaju sistema izotermne gasne dinamike i nekih specijalnih sistema i to za početni uslov velike totalne varijacije (videti [38, 83, 84, 94]). Takođe, rađeno je i na uopštenjima Glimove šeme. Na primer, u [67] je šema prvi put adaptirana slučaju kada sistem nije zaista nelinearan. Napominjemo da se Glimova šema danas ne koristi često, jer je njena primena na višedimenzionalne sisteme razočaravajuća. Detaljna analiza, dokaz Glimove teoreme, primeri i dodatna literatura se takođe mogu naći u [15, 28, 64, 94].

Vremenom su autori uspevali da pronađu nove načine za konstrukciju približnog rešenja. Nastao je metod za praćenje talasa (skraćeno WFT algoritam), prvo na skalarnim zakonima održanja, a zatim i na sistemima. To je metod za pronalaženje globalnog rešenja početnog

¹James Gilbert Glimm, rođen 1934. godine je američki matematičar, nekadašnji predsednik Američkog matematičkog društva (AMS).

problema hiperboličnog sistema zakona održanja koji se zasniva na praćenju talasa i kontrolisanju interakcija između njih. Kao i kod Glimove šeme, Rimanov problem ima ključnu ulogu u konstrukciji približnog rešenja preko WFT algoritma. U slučaju interakcije između udarnih talasa se rešava novi Rimanov problem, što nije slučaj kada u interakciji učestvuje razređujući talas. Metod za praćenje talasa prevazilazi tu prepreku razlaganjem razređujućih talasa na nedopustive udarne talase male snage, a potom rešavanjem Rimanovih problema nastalih iz interakcija između udarnih talasa. Iako takva rešenja generalno ne zadovoljavaju uslove dopustivosti, računa se na to da će zbog blizine između udarnih i razređujućih talasa, svaki razređujući talas moći da se dovoljno dobro aproksimira fanovima koji se sastoje iz (nedopustivih) udarnih talasa male snage. Očekuje se da će na kraju limes približnog rešenja dobijenog korišćenjem algoritma za praćenje talasa biti dopustivo rešenje. Konačno, to rešenje će biti po delovima glatko sa prekidima koji se nalaze na pravama. Zajednički naziv za sve tačke prekida su frontovi.

U slučaju WFT algoritma rešenje početnog problema (6.1, 6.2) se traži kao granična vrednost po delovima konstantnog ε -približnog rešenja U_ε sistema (6.1) sa prekidima prvog reda na konačno mnogo pravih u (x, t) -ravnini $x = c_\alpha(t)$. Funkcija U_ε približno zadovoljava Rankin-Igonoove uslove na tim pravama, u smislu da za $t > 0$ važi

$$\sum_{\alpha} |F(U_\varepsilon(c_\alpha^+(t), t) - F(U_\varepsilon(c_\alpha^-(t), t)) - c'_\alpha(t)(U_\varepsilon(c_\alpha^+(t), t) - U_\varepsilon(c_\alpha^-(t), t))| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Takođe, ako je η konveksna entropija za sistem (6.1), a Q odgovarajući fluks entropije, u vremenu $t > 0$ će važiti

$$\sum_{\alpha} |Q(U_\varepsilon(c_\alpha^+(t), t)) - Q(U_\varepsilon(c_\alpha^-(t), t)) - c'_\alpha(t)(\eta(U_\varepsilon(c_\alpha^+(t), t)) - \eta(U_\varepsilon(c_\alpha^-(t), t)))| \leq \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Kao i kod Glimove šeme, u $t = 0$ funkcija $\bar{U}(x)$ se aproksimira po delovima konstantnom funkcijom $U_\varepsilon(x, 0)$ i u svakoj tački prekida se rešava odgovarajući Rimanov problem. Talasi određeni početnim prekidima putuju konstantnim brzinama sve do vremena T_1 kada se dogode prve interakcije. U $t = T_1$ se ponovo rešavaju Rimanovi problemi generisani po delovima konstantnom funkcijom $U_\varepsilon(x, T_1)$. Procedura se zatim ponavlja u svakom vremenu T_m u kojem se ostvaruje interakcija između dva ili više talasa. Može se pokazati da je totalna varijacija svakog približnog rešenja U_ε mala i da broj prekidnih linija ostaje konačan u konačnom vremenu.

Analizom razvoja algoritama za praćenje talasa kroz istoriju mogli bismo da izdvojimo nekoliko metoda. Dafermos² je u [26] uveo WFT algoritam za skalarne zakone održanja, koji je skrenuo pažnju mnogih autora koji su se kasnije bavili unapređenjem algoritma. Di Perna³ je u [39] algoritam primenio na zaista nelinearnim sistemima dva zakona održanja, da bi konačno Bresan⁴ u [13] i Risebro⁵ u [93], nezavisno jedan od drugog proširili WFT algoritam na zaista nelinearne sisteme od n zakona održanja. Bresan je u [13] opisao Tačan postupak za rešavanje Rimanovog problema i uveo pojam generacijskog reda koji govori koliko je interakcija bilo potrebno da nastane određeni talasni front. Dat je algoritam koji proizvodi tzv. uprošćeno rešenje tako što malim promenama brzina omogućava da neki talasi prosto prođu pored drugih, a preostale talase skuplja u tzv. nefizičke frontove. U [93] je

²Constantine Michael Dafermos, rođen 1941. godine je grčko-američki matematičar koji izučava nelinearne hiperbolične zakone održanja čija rešenja razvijaju prekide.

³Ronald J. DiPerna (1974-1989), američki matematičar koji je ostvario značajne rezultate u oblasti dinamike fluida i kinetičke teorije gasova.

⁴Alberto Bressan, rodjen 1956. godine je italijanski matematičar koji se bavi analizom hiperboličnih zakona održanja.

⁵Nils Henrik Risebro, norveški matematičar.

umesto generacijskog reda u svakom vremenu interakcije dva talasa posmatrana funkcionala koja zavisi od buduće interakcije. Svaki put kada je ta funkcionala dovoljno mala neki talasi se odstranjuju i algoritam se restartuje. Iako sa teorijskog gledišta oba metoda daju isti rezultat (egzistenciju rešenja), sa numeričkog gledišta oni nisu efikasni, jer metod u [13] zahteva praćenje prošlosti preko generacijskog reda, dok metod u [93] zahteva znanje o budućnosti. Prethodno navedeni radovi koriste kompaktnost kao alat za izvlačenje podniza koji će konvergirati ka entropijski dopustivom slabom rešenju početnog problema. U [16] i [17] je dokazano da taj niz konvergira ka jedinstvenom rešenju.

U [3] je opisan algoritam koji izbegava prethodno navedene probleme. Uveden je prag parametar koji u zavisnosti od veličine proizvoda snaga dva prilazeća talasa diktira koji od dva postupka za rešavanje Rimanovog problema (tačno ili uprošćeno rešenje) treba koristiti u kojoj situaciji.

Bresan je u [14] objedinio sve prethodno navedene rezultate, što ćemo u nastavku iskoristiti kako bismo opisali WFT algoritam. Akcenat ćemo staviti na ideju algoritma i konstrukciju približnog rešenja. Dokazi egzistencije i jedinstvenosti rešenja dobijenih metodom za praćenje talasa se mogu naći u prethodno navedenim radovima.

Napomena. U ovom radu je akcenat stavljen na jednodimenzionalne sisteme zakona održanja ali se algoritam za praćenje talasa (naravno, u prilagođenoj formi) može primeniti i u slučaju višedimenzionalnih sistema (videti [49, 65]).

Slabo rešenje početnog problema koje zadovoljava entropijski uslov se dobija kao granična vrednost približnih rešenja U_ε kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Drugim rečima, Glimova šema, WFT algoritam i sve njihove modifikacije se koriste kao sredstvo u dokazu sledeće teoreme.

TEOREMA 6.1 (Globalna egzistencija entropijskog rešenja). *Za dati početni problem (6.1, 6.2) takav da je sistem (6.1) strogo hiperboličan i svaka karakteristična familija ili zaista nelinearna ili linearno degenerisana, postoji konstanta $\delta_0 > 0$ sa sledećim osobinama. Za svaki početni uslov $\bar{U} \in \mathbb{L}^1$ takav da*

$$TV_{(-\infty, \infty)} \bar{U}(\cdot) \leq \delta_0,$$

početni problem (6.1, 6.2) ima slabo rešenje $U = U(x, t)$ definisano za sve $t \geq 0$. Ako je η konveksna entropija za sistem (6.1), tada se može pronaći rešenje koje je entropijski dopustivo.

Dopustivo rešenje sa ograničenom totalnom varijacijom (BV rešenje) početnog problema (6.1, 6.2) sa početnim uslovom male totalne varijacije se može konstruisati metodom izčezavajuće viskoznosti, kao što je urađeno u [7]. To rešenje se dobija kao limes rešenja U_ε kada $\varepsilon \rightarrow 0$ paraboličnog sistema

$$\partial_t U_\varepsilon + \partial_x F(U_\varepsilon) = \varepsilon \partial_x^2 U_\varepsilon.$$

Do sada je razvijeno više metoda koji vode ka dokazu konvergencije približnog rešenja. Izdvajamo metod kompenzovane kompaktnosti uveden u [105] i [40] koji se zasniva na izvlačenju slabo konvergentnog podniza i posmatranju limesa u kontekstu Jangovih mera. U dokazu da niz rešenja dobijenih metodom za praćenje talasa konvergira ka entropijskom rešenju (Teorema 6.1) se koristi Helijeva teorema. Međutim, takav pristup ne daje informaciju o jedinstvenosti tog rešenja.

Takođe, može se pokazati da se entropijsko slabo rešenje konstruisano Glimovom šemom ili metodom za praćenje talasa poklapa sa dopustivim BV rešenjem dobijenim metodom izčezavajuće viskoznosti, tj. da će svako entropijsko rešenje biti isto kao ono dobijeno metodom za praćenje talasa (videti [14, 16, 18, 19]).

6.2. Konstrukcija približnog rešenja pomoću metoda za praćenje talasa

U nastavku ćemo detaljnije objasniti proceduru za konstrukciju približnog rešenja pomoću metoda za praćenje talasa. Približno rešenje će biti označeno sa $U_\varepsilon(x, t)$.

Konstrukciju započinjemo diskretizacijom početnog uslova, tj. aproksimiranjem funkcije $\bar{U}(x)$ po delovima konstantnom funkcijom $U_\varepsilon(x, 0)$ takvom da za dovoljno malo $\delta_0 > 0$ važi

$$\text{TV}_{(-\infty, \infty)} U_\varepsilon(\cdot, 0) \leq \text{TV}_{(-\infty, \infty)} \bar{U}(\cdot) \leq \delta_0, \quad \|U_\varepsilon(\cdot, 0) - \bar{U}(\cdot)\|_{\mathbb{L}^1} < \varepsilon.$$

Prepostavimo da $U_\varepsilon(x, 0)$ ima konačno mnogo prekida u tačkama X_1, \dots, X_N . Za svako $i = 1, \dots, N$ rešavamo problem (6.1) sa Rimanovim početnim uslovom

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_\varepsilon(X_i^-, 0), & x < X_i \\ U_\varepsilon(X_i^+, 0), & x > X_i, \end{cases}$$

čije je rešenje dato u samosličnom obliku

$$U_\varepsilon(x, t) = \Phi\left(\frac{x - X_i}{t}\right),$$

pri čemu je sa $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ označena po delovima neprekidna funkcija i $U_\varepsilon(X_i^\pm, 0) := \lim_{x \rightarrow X_i^\pm} U_\varepsilon(x, 0)$. Jasno je da ima smisla tražiti rešenje u samosličnom obliku jer su elementarni talasi (udarni talasi, kontaktni diskontinuiteti i razređujući talasi) dati u samosličnom obliku. Talasi koji su rešenja gore pomenutih Rimanovih problema putuju nepromjenjenim brzinama sve do vremena $t = T_1$ kada se dogodi prva interakcija između njih i kada se rešavaju novi Rimanovi problemi generisani funkcijom $U_\varepsilon(x, T_1)$.

Napomena. Definicija približnog rešenja U_ε će nam omogućiti da malo pomerimo brzinu jednog prilazećeg talasnog fronta u odnosu na onu dobijenu algoritmom za praćenje talasa kako bismo sprečili interakciju više od dva talasa u isto vreme. U opštem slučaju može da se dogodi interakcija više od dva talasa u isto vreme, što bi dodatno zakomplikovalo algoritam.

DEFINICIJA 6.2 (Prilazeći talasni frontovi). Dva talasna fronta koja pripadaju karakterističnim familijama $k_\alpha, k_\beta \in \{1, \dots, n\}$, locirana na $x_\alpha(t) < x_\beta(t)$ su prilazeća ako je $k_\alpha > k_\beta$ ili $k_\alpha = k_\beta$ i bar jedan od njih je udarni talas koji pripada zaista nelinearnoj familiji. Drugim rečima, dva talasna fronta su prilazeća ako onaj pozadi ima veću brzinu, što znači da će se talasi sudsariti u budućnosti.

U procesu rešavanja Rimanovih problema (tj. problema interakcije) ćemo kombinovati dva postupka, tačan i uopšten. Uopšten postupak je nastao kako bi se rešio problem nastanka beskonačno mnogo talasa koji formiraju približno rešenje u konačnom vremenu.

Tačan postupak za rešavanje Rimanovog problema

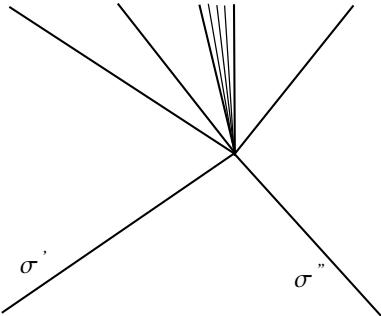
Neka su data stanja U^- i U^+ i Rimanov problem u tački (\bar{X}, \bar{T}) ,

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U(\bar{X}, \bar{T}) = \begin{cases} U^-, & x < \bar{X} \\ U^+, & x > \bar{X}. \end{cases} \quad (6.3)$$

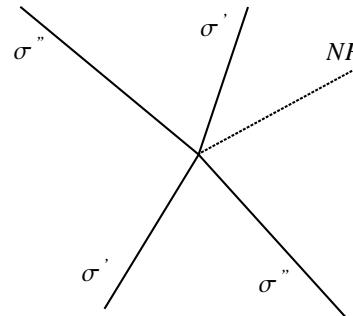
Korišteći talasnu krivu Ψ_i definisanu u (3.18) mogu se odrediti međustanja W_0, W_1, \dots, W_n i vrednosti $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ takve da važi

$$W_0 = U^-, \quad W_i = \Psi_i(\sigma_i; W_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad W_n = U^+.$$

Ako su sva rešenja Rimanovih problema u odnosu na skokove (W_{i-1}, W_i) udarni talasi ili kontaktni diskontinuiteti približno rešenje će biti po delovima konstantno, sa konstantnim stanjima W_0, \dots, W_n i sadržaće najviše n linija prekida. Međutim, u opštem slučaju približno rešenje neće biti po delovima konstantna funkcija zbog prisustva centriranih razređujućih talasa koji će zbog toga morati da se aproksimiraju po delovima konstantnim (centriranim) razređujućim fanovima i to umetanjem dodatnih stanja $W_{i,j}$. Za i -tu karakterističnu familiju cilj je formirati i -ti razređujući fan koji će se sastojati iz p_i udarnih talasa male snage. Razlikovaćemo nekoliko slučajeva u zavisnosti od oblika rešenja Rimanovog problema.



Slika 6.1: Tačan postupak za rešavanje Rimanovog problema



Slika 6.2: Uprošten postupak za rešavanje Rimanovog problema

(a) i -ta karakteristična familija je zaista nelinearna, tj. $D\lambda_i r_i > 0$

(i) $\sigma_i > 0$

Uzimamo ceo broj $p_i := 1 + \left[\frac{\sigma_i}{\delta} \right]$ i definišemo međustanja

$$W_{i,j} = \Psi_i \left(\frac{j\sigma_i}{p_i}; W_{i-1} \right), \quad x_{i,j}(t) = \bar{X} + (t - \bar{T})\lambda_i(W_{i,j}), \quad j = 1, \dots, p_i.$$

Na taj način centrirani razređujući talas i -te karakteristične familije aproksimamo razređujućim fanom koji se sastoji iz p_i udarnih talasa sa brzinama koje su približno jednake karakterističnoj brzini. Takođe, svaki pojedinačni udarni talas neće imati snagu veću od nekog unapred zadatog parametra $\delta > 0$.

(ii) $\sigma_i \leq 0$

U ovom slučaju rešenje Rimanovog problema je udarni talas, pa ga nema potrebe razlagati. Uzimamo $p_i := 1$ i definišemo

$$W_{i,j} = W_i, \quad x_{i,j}(t) = \bar{X} + (t - \bar{T})\lambda_i(W_{i-1}, W_i).$$

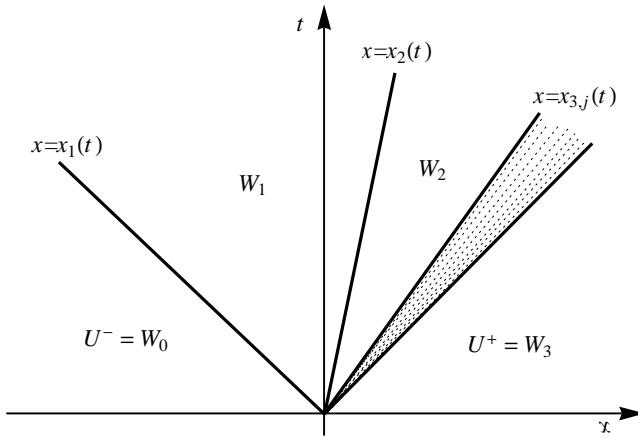
(b) i -ta karakteristična familija je linearno degenerisana, tj. $D\lambda_i r_i = 0$ i σ_i je proizvoljno.

U ovom slučaju rešenje Rimanovog problema je kontaktni diskontinuitet, koji nema potrebe razlagati. Uzimamo $p_i := 1$ i definišemo

$$W_{i,j} = W_i, \quad x_{i,j}(t) = \bar{X} + (t - \bar{T})\lambda_i(W_i).$$

Napomena. Kao i ranije, sa $\lambda_i(W_{i-1}, W_i)$ označavamo i -ti karakteristični koren matrice $A(W_{i-1}, W_i)$ koji ujedno predstavlja i brzinu udarnog talasa u Rankin-Igonovom uslovu

$$\lambda_i(W_{i-1}, W_i)(W_i - W_{i-1}) = F(W_i) - F(W_{i-1}).$$



Slika 6.3: Primer rešenja u obliku (6.4)

Primetite da važi $W_i = W_{i,p_i}$, $i = 1, \dots, n$, $U^- = W_{1,1}$, $U^+ = W_{n,p_n}$

Koristeći prethodno definisana međustanja $W_{i,j}$ i pozicije udarnih talasa ili kontaktnih diskontinuiteta $x = x_{i,j}(t)$ dobijamo približno rešenje Rimanovog problema (6.3) dato sa

$$U^\delta(x, t) = \begin{cases} U^-, & x < x_{1,1}(t), \\ W_i, & x_{i,p_i}(t) < x < x_{i+1,1}(t), \\ W_{i,j}, & x_{i,j}(t) < x < x_{i,j+1}(t), \quad j = 1, \dots, p_i - 1, \\ U^+, & x > x_{n,p_n}(t). \end{cases} \quad (6.4)$$

Prethodno naveden postupak se naziva *tačan postupak za rešavanje Rimanovog problema* (eng. *accurate Riemann solver* ili skraćeno AcRS). Međutim, korišćenjem samo AcRS algoritma može da se desi da se u konačnom vremenu pojavi beskonačno mnogo talasnih frontova usled čega dolazi do pucanja algoritma. Iz interakcije između dva prilazeća talasa nastaje n ili više odlazećih talasa (n u slučaju kada su svi talasi generisani Rimanovim problemom udarni talasi ili kontaktni diskontinuiteti, a više od n ukoliko se kao rešenja Rimanovog problema pojavljuju razređujući talasi). Novogenerisani odlazeći talasi će se sudarati sa drugim talasima, stvarajući pri tome sve više linija prekida. Kako je potrebno da broj prekida bude konačan u konačnom vremenu, postojeći AcRS algoritam se mora modifikovati. Zato se on kombinuje sa *uprošćenim postupkom za rešavanje Rimanovog problema* (eng. *simplified Riemann solver* ili skraćeno SimRS).

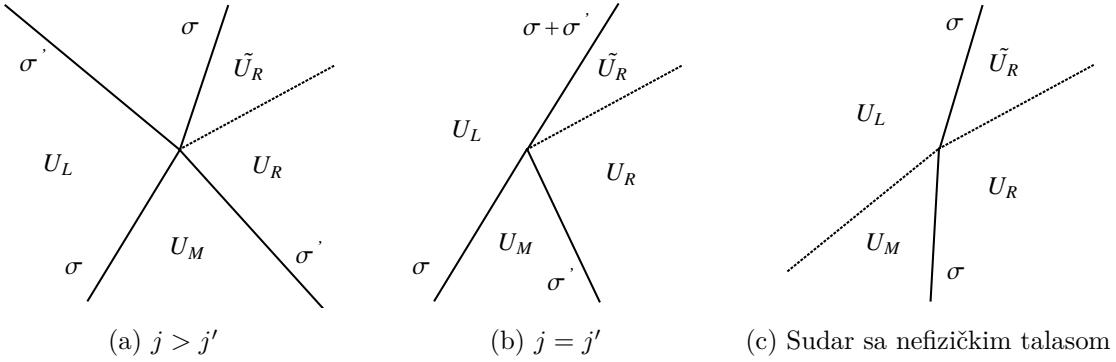
Uprošćen postupak za rešavanje Rimanovog problema

Osnovna karakteristika uprošćenog postupka za rešavanje Rimanovog problema je ta što minimizuje broj odlazećih talasnih frontova tako što kupi sve nove talase u jedan koji se naziva *nefizički talasti front*, ima veoma malu amplitudu i fiksnu brzinu $\hat{\lambda}$ koja je strogo veća od svih karakterističnih brzina. U zavisnosti od vrste dva prilazeća talasnog fronta razlikujemo dva slučaja koji će obuhvatiti sve moguće tipove interakcija baš zbog činjenice da svi nefizički talasti frontovi putuju istom brzinom $\hat{\lambda}$ i ne postoji mogućnost njihove interakcije.

SLUČAJ 1: $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ su familije dva prilazeća talasnog fronta i važi $j \geq j'$.

Neka su sa U_L , U_M i U_R označeni levo, srednje i desno stanje koji su pre interakcije u relaciji

$$U_M = \Psi_j(\sigma; U_L), \quad U_R = \Psi_{j'}(\sigma'; U_M).$$



Slika 6.4: Uprošćen postupak za rešavanje Rimanovog problema

Definišimo pomoćno desno stanje \tilde{U}_R sa

$$\tilde{U}_R := \begin{cases} \Psi_j(\sigma) \circ \Psi_{j'}(\sigma')(U_L), & \text{ako } j > j' \\ \Psi_j(\sigma + \sigma')(U_L), & \text{ako } j = j'. \end{cases} \quad (6.5)$$

Označimo sa $\tilde{U}^\delta = \tilde{U}^\delta(x, t)$ po delovima konstantno približno rešenje Rimanovog problema sa početnim stanjima U_L i \tilde{U}_R . To rešenje je oblika (6.4), pri čemu su U^- i U^+ zamenjeni sa U_L i \tilde{U}_R . Iz (6.5) se vidi da će se \tilde{U}^δ sastojati iz dva talasnih frontova sa amplitudama σ i σ' ako je $j > j'$ ili iz samo jednog sa amplitudom $\sigma + \sigma'$ ako je $j = j'$ (videti Slike 6.4a i 6.4b). Novi nefizički talasni front će razdvajati stanja \tilde{U}_R i U_R i prostirat će se brzinom $\hat{\lambda}$. Dalje, u okolini tačke (\bar{X}, \bar{T}) , $t \geq \bar{T}$ definišemo približno rešenje U^δ na sledeći način

$$U^\delta(x, t) := \begin{cases} \tilde{U}^\delta(x, t), & x - \bar{X} < (t - \bar{T})\hat{\lambda} \\ U_R, & x - \bar{X} > (t - \bar{T})\hat{\lambda}. \end{cases} \quad (6.6)$$

SLUČAJ 2: *Nefizički talasni front prilazi sa leve strane i sudara se sa talasnim frontom i -te karakteristične familije za neko $i \in \{1, \dots, n\}$* (Slika 6.4c).

Neka su sa U_L , U_M i U_R označeni levo, srednje i desno stanje pre interakcije i neka je $U_R = \Psi_i(\sigma; U_M)$. Definišemo pomoćno desno stanje sa $\tilde{U}_R = \Psi_i(\sigma; U_L)$ i sa \tilde{U}^δ označavamo približno rešenje Rimanovog problema u obliku (6.4) sa početnim stanjima U_L i \tilde{U}_R . Znamo da će \tilde{U}^δ sadržati jedan talasni front i -te karakteristične familije čija je amplituda jednaka σ . Uzimamo da talas koji razdvaja stanja \tilde{U}_R i U_R putuje brzinom $\hat{\lambda}$ i u okolini tačke (\bar{X}, \bar{T}) , $t \geq \bar{T}$ definišemo približno rešenje U^δ kao u (6.6).

Preostalo je da se definije kada, tj. pri kojoj interakciji treba koristiti koji od dva opisana postupka. Do sada su u algoritmu korišćena dva parametra: fiksna brzina $\hat{\lambda}$ nefizičkog talasnog fronta i mala konstanta $\delta > 0$ koja kontroliše maksimalnu snagu udarnih talasa u razređujućem fanu. Treći parametar koji se koristi je *prag* parametar $\rho > 0$ koji određuje koji od dva postupka (AcRS ili SimRS) treba koristiti u datoj interakciji:

- AcRS se koristi u vremenu $t = 0$ i u svakoj interakciji između dva fizička talasa (udarni, razređujući talasi ili kontaktni diskontinuiteti) kada proizvod snaga prilazećih talasa zadovoljava $|\sigma\sigma'| \geq \rho$.
- SimRS se koristi u svakoj interakciji u kojoj učestvuju nefizički talasni frontovi i u interakciji u kojoj proizvod snaga prilazećih talasa zadovoljava $|\sigma\sigma'| < \rho$.

Dakle, približno rešenje U_ε dobijamo najpre diskretizacijom početnog uslova i rešavanjem Rimanovih problema u $t = 0$ i to korišćenjem AcRS. Talasi koji su rešenja tih Rimanovih problema će se prostirati do prve interakcije kada se rešavaju novi Rimanovi problemi kombinovanjem AcRS i SimRS, kao što je prethodno opisano. Postupak se nastavlja do beskonačnosti ili do poslednje interakcije.

DEFINICIJA 6.3. Za dato $\varepsilon > 0$ kažemo da je neprekidno preslikavanje $U_\varepsilon : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ ε -približno rešenje sistema (6.1) konstruisano metodom za praćenje talasa (ili WFT približno rešenje) ako sledeći uslovi važe:

1. Funkcija $U_\varepsilon = U_\varepsilon(x, t)$ je po delovima konstantna sa prekidima na konačno mnogo pravih u (x, t) -ravni. Postoje tri vrste prekida (označavaćemo ih sa \mathcal{J}): udarni talasi ili kontaktni diskontinuiteti (\mathcal{S}), razređujući talasi (\mathcal{R}) i nefizički talasi (\mathcal{NP}).
2. Na svakom udarnom talasu (ili kontaktnom diskontinuitetu) $x = x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{S}$ levi i desni limesi $U^- := U_\varepsilon(x_\alpha^-(t), t)$ i $U^+ := U_\varepsilon(x_\alpha^+(t), t)$ zadovoljavaju $U^+ = S_{k_\alpha}(\sigma_\alpha; U^-)$ za neko $k_\alpha \in \{1, \dots, n\}$ i amplitudu talasa σ_α . Pri tome, ako je karakteristična familija koja odgovara indeksu k_α zaista nelinearna, važi $\sigma_\alpha < 0$. Takođe, ako je sa $\lambda_{k_\alpha}(U^+, U^-)$ označena brzina udarnog talasa iz Rankin-Igonovog uslova, važi

$$|x'_\alpha(t) - \lambda_{k_\alpha}(U^+, U^-)| \leq \varepsilon.$$

3. Na svakom razređujućem talasu $x = x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{R}$ i za svaku zaista nelinearnu familiju koja odgovara indeksu k_α , važi $U^+ = R_{k_\alpha}(\sigma_\alpha; U^-)$ za neko $\sigma_\alpha \in (0, \varepsilon]$, kao i ocena

$$|x'_\alpha(t) - \lambda_{k_\alpha}(U^+)| \leq \varepsilon.$$

4. Svi nefizički frontovi $x = x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{NP}$ imaju istu brzinu $\hat{\lambda}$ koja je fiksna, strogo veća od svih karakterističnih brzina i zadovoljava $x'_\alpha(t) \equiv \hat{\lambda}$. Ukupna jačina svih nefizičkih frontova u $U_\varepsilon(x, t)$ je uniformno mala, tj. važi

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{NP}} |U_\varepsilon(x_\alpha^+(t), t) - U_\varepsilon(x_\alpha^-(t), t)| \leq \varepsilon \quad \text{za sve } t \geq 0.$$

Dodatno, ako početna vrednost funkcije U_ε zadovoljava uslov

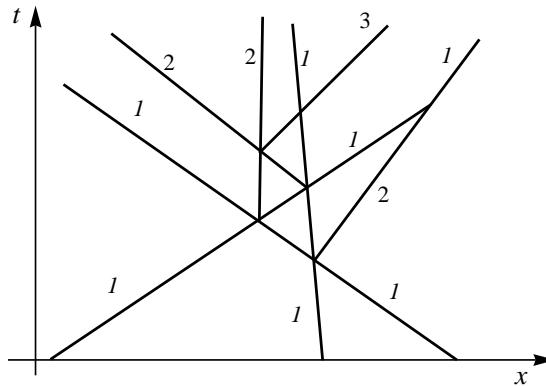
$$\|U_\varepsilon(\cdot, 0) - \bar{U}(\cdot)\|_{\mathbb{L}^1} < \varepsilon,$$

kažemo da je U_ε ε -približno rešenje početnog problema (6.1, 6.2) konstruisano metodom za praćenje talasa.

Da bi se opisala struktura rešenja dobijenog algoritmom za praćenje talasa svaki talas se mora pojedinačno pratiti od njegovog nastanka do večnosti ili poništenja prilikom sudara sa drugim talasom. Talas koji učestvuje u sudaru ne mora nužno da se poništi, može i da nastavi put u obliku odlazećeg talasa. Praćenje talasa se ostvaruje tako što se svakom talasu dodeli broj koji se naziva *generacijski red* i koji zapravo predstavlja maksimalan broj sudara koji prethode njegovom nastanku. Generacijski red se definiše induktivno na sledeći način:

- Svi talasni frontovi nastali iz Rimanovog problema u vremenu $t = 0$ imaju generacijski red $k = 1$.
- Pretpostavimo da u interakciji učestvuju dva talasa koja pripadaju familijama $i, i' \in \{1, \dots, n + 1\}$ i imaju generacijske redove k i k' . Generacijski redovi odlazećih talasa su jednaki:

Slučaj $i \neq i'$.



Slika 6.5: Dodeljivanje generacijskog reda u WFT algoritmu

- Odlazeći talasi i -te i i' -te karakteristične familije imaju iste redove (k i k') kao i prilazeći talasi koji učestvuju u interakciji.
- Odlazeći talasi ostalih karakterističnih familija j , $j \neq i, i'$ imaju red $\max\{k, k'\} + 1$.

Slučaj $i = i'$.

- Odlazeći talasi i -te karakteristične familije imaju red $\min\{k, k'\}$.
- Odlazeći talasi ostalih karakterističnih familija $j \neq i$ imaju red $\max\{k, k'\} + 1$.

Prethodno opisano rešenje jeste približno rešenje početnog problema (6.1, 6.2), tj. može se pokazati da važi sledeća teorema čiji dokaz ćemo izostaviti, jer se ideje koje su date u njemu ne mogu primeniti u dokazu teorema koje će biti date u narednim glavama.

TEOREMA 6.2. *Neka je sistem (6.1) strogo hiperboličan, njegove karakteristične familije su zaista nelinearne ili linearne degenerisane i U je definisano na otvorenom skupu $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. Za dati početni problem (6.1, 6.2) postoji konstanta $\delta_0 > 0$ takva da važi sledeće. Za svaku funkciju $\bar{U} \in \mathbb{L}^1$ takvu da*

$$TV_{(-\infty, \infty)} \bar{U}(\cdot) \leq \delta_0$$

i za svako $\varepsilon > 0$ početni problem (6.1, 6.2) ima ε -približno rešenje koje je dobijeno korišćenjem metoda za praćenje talasa i definisano je za svako $t \geq 0$.

Glava

7

Sadržaj

| | | |
|-------|---|-----|
| 7.1 | Konstrukcija približnog rešenja početnog problema | 123 |
| 7.2 | Interakcije između talasa | 126 |
| 7.3 | Egzistencija globalnog približnog rešenja | 129 |
| 7.3.1 | Analiza Slučajeva I – IV | 129 |
| 7.3.2 | Opšti slučaj | 140 |
| 7.3.3 | Disipacija energije kao posledica interakcije između talasa | 145 |
| 7.4 | Dopustivo rešenje uopštenog Rimanovog problema | 148 |

Egzistencija približnog rešenja početnog problema

Posmatramo izentropski sistem gasne dinamike bez pritiska

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) &= 0\end{aligned}\tag{7.1}$$

sa početnim uslovom

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x \leq R \\ (\rho(x), u(x)), & x > R. \end{cases}\tag{7.2}$$

Prepostavljamo da $\rho(x), u(x) \in C_b^1([R, \infty))$, $\rho(x) > 0$ i $\rho_0, u_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_0 > 0$.

Napomena. Sa C_b^1 označavamo prostor ograničenih neprekidno-diferencijabilnih funkcija sa ograničenim prvim izvodima. Prepostavka o ograničenim parcijalnim izvodima početnih funkcija $\rho(x)$ i $u(x)$ nije neophodna za dokaz egzistencije globalnog rešenja ali će biti značajna u dokazu da postoji limes približnog rešenja (Glava 8).

Cilj ovog dela je konstrukcija dopustivog približnog rešenja problema (7.1, 7.2), pod uslovom da važe gore navedene prepostavke. To ćemo postići diskretizacijom početnog uslova (tj. aproksimiranjem funkcija $\rho(x)$ i $u(x)$ iz početnog uslova po delovima konstantnim funkcijama $\rho^\varepsilon(x, 0)$ i $u^\varepsilon(x, 0)$) i praćenjem interakcija između talasa koji su rešenja (uopštenih) Rimanovih problema. Značajnu ulogu će imati senka talas sa ne-konstantnom brzinom kao rešenje problema interakcije. Činjenica da iz interakcije između dva ili više senka talasa nastaje jedan novi će nam garantovati da broj talasa koji čine približno rešenje početnog problema neće rasti sa vremenom.

U ovom slučaju se standardna teorija o postojanju rešenja početnog problema (tj. Metod za praćenje talasa) ne može primeniti, jer je rešenje Rimanovog problema između ostalog

dato u obliku delta udarnog talasa, pa će se u limesu konstruisanog približnog rešenja pojaviti delta funkcija. Pored toga, sistem (7.1) je slabo hiperboličan, a WFT procedura se može primeniti samo na strogo hiperboličnim sistemima.

Međutim, procedura za konstrukciju približnog rešenja koja će biti data u nastavku na neki način predstavlja uopštenje WFT procedure. Napominjemo da su obe karakteristične familije sistema (7.1) linearno degenerisane, što znači da će klasično entropijsko rešenje biti predstavljeno kao kombinacija kontaktnih diskontinuiteta, što će uprostiti našu proceduru. U slučaju pojave razređujućih talasa morali bismo da ih aproksimiramo sa fanovima nedopustivih udarnih talasa, kao što je učinjeno u algoritmu za praćenje talasa. Sa druge strane, pojava vakuuma u rešenju komplikuje postupak dobijanja približnog rešenja, jer dolazi do nastanka senka talasa sa vakuuumom koji se nalazi sa bar jedne strane talasa, što dovodi do nekih novih slučajeva interakcija. Pored toga, u slučaju sistema (7.1) nećemo imati problem sa pojavom beskonačno mnogo talasa u konačnom vremenu što se dešava kod sistema sa više od dve jednačine. Čak štavise, broj talasa u približnom rešenju će opadati sa svakom interakcijom. Za razliku od WFT algoritma, u našem talasni front ne mora biti prava linija, jer će se senka talasi prostirati i ne-konstantnim brzinama. Takođe, neće biti potrebno dodeliti generacijski red svakom talasu koji čini približno rešenje, jer će sve informacije o tom talasu biti sadržane u izrazu za njegovu snagu i brzinu.

Model za gasnu dinamiku bez pritiska je specifičan, jer se dodavanjem treće jednačine koja predstavlja zakon održanja energije, rešenje ne menja značajno. Drugim rečima, sva rešenja neizentropskog modela (5.17) se dobijaju najpre rešavanjem prve dve jednačine, nezavisno od treće. To nam omogućava da naš algoritam direktno primenimo i na neizentropski model dodavanjem treće komponente e na početni uslov (7.2) ($e_0 > 0$, $x \leq R$ i $e(x) > 0$, $x > R$, $e(x) \in C_b^1([R, \infty))$).

Još jednu prednost naše procedure pronalazimo u činjenici da se ona, pod uslovom da postoji jedinstveno rešenje Rimanovog problema za sistem koji se može predstaviti kao kombinacija elementarnih i senka talasa takođe može primeniti i na neke druge sisteme zakona održanja.

Napomena. U nastavku ćemo malo zloupotrebiti notaciju. Naime, koristićemo istu notaciju za rešenje $(\rho(x, t), u(x, t))$ i funkcije iz početnog uslova $u(x)$ i $\rho(x)$. Ukoliko budemo izostavljali argument, oznaka će se odnositi na rešenje.

DEFINICIJA 7.1. *Kažemo da je funkcija $u(x)$ rastuća (ili opadajuća) ako za svako $x < y$ važi $u(x) \leq u(y)$ (ili $u(x) \geq u(y)$). Funkcija $u(x)$ je strogo rastuća ili strogo opadajuća ako važi stroga nejednakost.*

Klasičan početni problem (7.1),

$$(\rho, u)(x, 0) = (\rho(x), u(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

sa funkcijama $\rho(x)$ i $u(x)$ koje su neprekidne i ograničene je specifičan, jer u tom slučaju postoji glatko rešenje bar do nekog vremena $T_{\max} > 0$ kada karakteristike počinju da se sekui i dolazi do prekida (videti [32, 42]). Naime, u slučaju glatkog rešenja i daleko od vakuuma prva jednačina u (7.1) je ekvivalentna Burgersovoj jednačini $\partial_t u + u \partial_x u = 0$. Njene karakteristike su integralne krive obične diferencijalne jednačine

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t), t),$$

pa je glatko rešenje u dato u obliku

$$u(x, t) = u(\psi(x, t)), \tag{7.4}$$

pri čemu $\psi = \psi(x, t)$ zadovoljava jednačinu $x = u(\psi)t + \psi$. To rešenje postoji sve dok se može primeniti Teorema o implicitnoj funkciji. U slučaju kada je funkcija $u(x)$ strogo rastuća, ne postoji ograničenje za T_{\max} , jer je $u'(x) > 0$ za svako x , pa glatko rešenje postoji za svako $t > 0$ (videti dokaz Teoreme 8.5). Isto važi i ako je $u(x)$ rastuća, jer je tada rešenje (ρ, u) koje odgovara oblasti u kojoj je funkcija $u(x)$ konstantna takođe konstantno.

Kombinovanjem prve i druge jednačine u (7.1) dobijamo da rešenje ρ zadovoljava jednačinu $\partial_t\rho + u\partial_x\rho = -\rho\partial_xu$ i dato je sa

$$\rho(x, t) = \rho(\psi(x, t))e^{\int_0^t \frac{u'(\psi(x, s))}{u'(\psi(x, t))s+1} ds} \in C^1. \quad (7.5)$$

Nakon vremena $T_{\max} > 0$ preslikavanje $x \mapsto \psi(x, t)$ više neće biti bijekcija, što znači da će se celi intervali slikati u jednu tačku. To dovodi do eksplozije klasičnog rešenja, a koncentracija mase objašnjava pojavu Dirakove delta funkcije u rešenju.

U neizentropskom sistemu (5.17), dobijamo da specifična unutrašnja energija e zadovoljava jednačinu $\partial_t e + u\partial_x e = 0$, pa glatko rešenje postoji za $t < T_{\max}$ i dato je sa

$$e(x, t) = e(\psi(x, t)), \quad \text{gde } e(x, 0) = e(x),$$

a funkcija ψ je definisana kao u (7.4).

Napomena. Iz oblika klasičnog rešenja (7.4, 7.5) vidimo da u njemu ne dolazi do pojave vakuum, što nije slučaj kod približnog rešenja koje će biti konstruisano dole. U Glavi 8 će biti pokazano da puštanjem limesa taj vakuum nestaje i da dobijeno približno rešenje dobro aproksimira klasično tamo gde ono postoji.

Početnom problemu za sistem (7.1) se posvećuje dosta pažnje. Tokom godina nastalo je mnogo različitih metoda za konstrukciju globalnog rešenja početnog problema. Međutim, zbog prisustva Dirakove delta funkcije u rešenju autori su uglavnom prisiljeni da ga traže u prostoru mera. Takođe, metodi koji su primenjivani u tim slučajevima su specifični za sistem (7.1) i ne mogu se uopštiti. Na primer, autori u [42] su koristili uopšteni varijacioni metod kako bi konstruisali globalno slabo rešenje početnog problema za (7.1). Skoro u isto vreme, egzistencija slabog rešenja je pokazana u [12] na drugačiji način. U [10] je pokazana egzistencija slabog rešenja korišćenjem aproksimacija dobijenih metodom izčezavajuće viskoznosti, dok su u [72] korišćena entropijska rešenja skalarnih zakona održanja. Analizom postojanja globalnog slabog rešenja bavili su se i autori u [9, 20, 71]. Jedinstvenost je pokazana u [52] za početni uslov koji pripada prostoru Radonovih mera, oslanjajući se na metod iz [42].

7.1. Konstrukcija približnog rešenja početnog problema

Postupak konstrukcije rešenja početnog problema (7.1, 7.2) će se u velikoj meri oslanjati na rešavanje problema interakcije između talasa. Detaljnu analizu, kao i pregled svih tipova interakcija koje mogu da se dogode u slučaju sistema gasne dinamike bez pritiska ćemo dati kasnije. Bitno je znati da ako dva ili više talasa učestvuju u interakciji u isto vreme, rešenje problema interakcije postoji i to je jedan senka talas (videti Posledicu 5.2). Potreban uslov da se dva talasa sudare je da imaju zajedničko stanje, tj. desno stanje talasa koji prilazi sa leve strane mora da bude jednak levom stanju talasa koji prilazi sa desne strane. To stanje ćemo nazivati *središnje* stanje. Takođe, brzina levog prilazećeg talasa mora biti veća od brzine desnog prilazećeg talasa.

U nastavku dajemo induktivni algoritam za konstrukciju približnog rešenja početnog problema (7.1, 7.2).

ALGORITAM:**KORAK 0 (Aproksimacija početnog uslova po delovima konstantnim funkcijama):**

Neka su dati $u_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_0 > 0$, malo $\varepsilon > 0$ i particija $\mathcal{P}^\varepsilon := \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ intervala $[R, \infty)$ takva da $Y_{i+1} - Y_i \leq \mu(\varepsilon)$ za svako $i \in \mathbb{N}_0$ i $Y_0 := R$. (Tačna granica $\mu(\varepsilon)$ će biti data u Poglavlju 7.3.) Particiji \mathcal{P}^ε odgovaraju ograničeni nizovi $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, gde $u_i := u(Y_i)$ i $\rho_i := \rho(Y_i) > 0$. Funkcije $\rho(x)$ i $u(x)$ iz (7.2) se aproksimiraju po delovima konstantnim funkcijama $\rho^\varepsilon(x, 0)$ i $u^\varepsilon(x, 0)$ na sledeći način

$$(\rho^\varepsilon(x, 0), u^\varepsilon(x, 0)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & \text{ako } x \leq R \\ (\rho_{i+1}, u_{i+1}), & \text{ako } x \in (Y_i, Y_{i+1}], i = 0, 1, \dots \end{cases}$$

KORAK 1 (Konstrukcija približnog rešenja do prve interakcije):

Za svako $i = 0, 1, 2, \dots$ rešava se problem (7.1) sa Rimanovim početnim uslovom

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_i, u_i), & x < Y_i \\ (\rho_{i+1}, u_{i+1}), & x > Y_i. \end{cases} \quad (7.6)$$

Na taj način se konstruiše lokalno približno rešenje $U^\varepsilon := (\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ kao kombinacija talasa koji su rešenja Rimanovih problema.

Znamo da postoji rešenje Rimanovog problema dato u obliku prostog senka talasa (ako $u_i > u_{i+1}$), u obliku jednog kontaktnog diskontinuiteta (ako $u_i = u_{i+1}$) ili kombinacije sa dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom (ako $u_i < u_{i+1}$).

Približnom rešenju do prve interakcije odgovara skup početnih stanja $S_0 := \{U_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$, dok je skup početnih indeksa koji odgovara S_0 označen sa $I_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$.

Svako stanje može biti vakuum ili konstantno stanje oblika $U_k = (\rho_s, u_s)$, $\rho_s \neq 0$, ali zbog pojave vakuuma ne mora nužno da važi $k = s$. Skup S_0 sadrži sve informacije o obliku približnog rešenja u $t = 0$, jer odnos između svaka dva uzastopna stanja jedinstveno određuje tip odgovarajućeg talasa.

Ukoliko nema interakcija između talasa, oni će nastaviti da se prostiru do beskonačnosti. U suprotnom, dobijeno približno rešenje se nastavlja do vremena $t = T_1$ kada će se dogoditi prvi skup interakcija između dva ili više talasa.

Zbog oblika rešenja Rimanovog problema nije moguća interakcija između dva kontaktna diskontinuiteta (levi uvek ima manju brzinu od desnog ili su paralelni). Takođe, moguće su odvojene interakcije dva ili više talasa koje se odvijaju u isto vreme, pa u opštem slučaju ne postoji jedinstvena tačka interakcije u vremenu $t = T_1$.

U $t = T_1$ se formira bar jedan novi senka talas, svi talasi koji su učestvovali u interakcijama nestaju, dok ostali nastavljaju da se prostiru do sledeće interakcije. Novi skup stanja S_1 i njemu odgovarajući skup indeksa $I_1 \subset I_0$ se dobijaju eliminacijom svih središnjih stanja iz S_0 (i odgovarajućih indeksa iz I_0) koja su nestala posle interakcija u vremenu $t = T_1$. Ova procedura se nastavlja posle svake interakcije.

KORAK j DO $j + 1$ (Konstrukcija rešenja između dve interakcije):

Posle j -te interakcije između dva ili više talasa sva središnja stanja su izbrisana iz skupa stanja S_{j-1} koji odgovara prethodnoj interakciji. Formirani su novi skup stanja S_j , kao i

odgovarajući skup indeksa I_j . Pri tome važi

$$I_j = \{0, j_1, j_2, j_3, \dots\} \subset I_{j-1}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots,$$

dok $k \in I_{j-1} \setminus I_j$ znači da je k -to stanje iz S_0 nestalo posle interakcije.

U vremenu $t = T_j$ približno rešenje se konstruiše tako što se skup talasa koji su učestvovali u interakciji zamenjuje novim senka talasima, dok ostali nastavljaju da se prostiru na isti način kao pre interakcije. Rešenje se nastavlja do vremena $t = T_{j+1}$ kada će se dogoditi sledeći skup interakcija. Ako T_{j+1} ne postoji, algoritam se zaustavlja.

Notacija

Sada ćemo uvesti notaciju koju ćemo koristiti u nastavku.

Rešenje Rimanovog problema (7.1, 7.6) sa $u_i = u_{i+1}$ dato u obliku kontaktnog diskontinuiteta oblika

$$(\rho, u)(x, t) = \begin{cases} (\rho_i, u_i), & x - Y_i < u_i t \\ (\rho_{i+1}, u_{i+1}), & x - Y_i > u_i t \end{cases} \quad (7.7)$$

ćemo označavati sa $\text{CD}_{i,i+1}$. Ako je $u_i < u_{i+1}$, rešenje odgovarajućeg Rimanovog problema koje je kombinacija dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom će biti označeno sa $\text{CD}_1^i + \text{Vac}_{i,i+1} + \text{CD}_2^{i+1}$. Ono je oblika

$$(\rho, u)(x, t) = \begin{cases} (\rho_i, u_i), & x - Y_i < u_i t \\ (0, u_i(x, t)), & u_i t < x - Y_i < u_{i+1} t \\ (\rho_{i+1}, u_{i+1}), & x - Y_i > u_{i+1} t, \end{cases} \quad (7.8)$$

pri čemu je sa $u_i(x, t)$ data neprekidna funkcija za koju važi $u_i(Y_i + u_i t, t) = u_i$, $u_i(Y_i + u_{i+1} t, t) = u_{i+1}$. Sa $\text{SDW}_{i,i+1}$ će biti označen prost senka talas oblika

$$(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)(x, t) = \begin{cases} (\rho_i, u_i), & x - Y_i < \tilde{c}(t) - \frac{\varepsilon}{2}t \\ (\rho_{i,\varepsilon}, u_{i,\varepsilon}), & \tilde{c}(t) - \frac{\varepsilon}{2}t < x - Y_i < \tilde{c}(t) + \frac{\varepsilon}{2}t \\ (\rho_{i+1}, u_{i+1}), & x - Y_i > \tilde{c}(t) + \frac{\varepsilon}{2}t. \end{cases}$$

koji je rešenje Rimanovog problema (7.1, 7.6) ako $u_i > u_{i+1}$.

Senka talas sa levim i desnim stanjima (ρ_i, u_i) i (ρ_j, u_j) , $i < j$, $\rho_i, \rho_j > 0$ će biti označen sa $w\text{SDW}_{i,j}$. $\text{SDW}_{i,i+1}$ je specijalan slučaj $w\text{SDW}_{i,j}$ kada $j = i + 1$ i brzina prostiranja je konstantna.

Neka je i i k par indeksa. Tada će sa $w^i\text{SDW}_k$, $i \leq k$ biti označen senka talas sa vakuumskim stanjem $\text{Vac}_{i-1,i} := (0, u_{i-1}(x, t))$ sa leve strane i stanjem (ρ_k, u_k) , $\rho_k > 0$ sa desne strane. Specijalno, ako je $k = i$, imamo $w^i\text{SDW}_k = \text{CD}_1^k = \text{CD}_2^i$.

Slično, sa $w\text{SDW}_i^k$, $i \leq k$ je dat senka talas sa vakuumskim stanjem $\text{Vac}_{k,k+1} = (0, u_k(x, t))$ sa desne strane, dok se stanje (ρ_i, u_i) , $\rho_i > 0$ nalazi sa leve strane talasa. Specijalno, ako je $k = i$, imamo $w\text{SDW}_i^k = \text{CD}_1^k = \text{CD}_1^i$.

Senka talas koji razdvaja vakuumsku stanju $((0, u_{i-1}(x, t))$ je sa leve strane, a $(0, u_k(x, t))$ sa desne strane) će biti označen sa $w^i\text{SDW}^k$.

Talas $w\text{SDW}_i^k$, $k > i$, $u_i > u_k$ se formira iz interakcije između $w\text{SDW}_{i,k}$ i CD_1^k , dok $w^i\text{SDW}_k$, $i < k$, $u_i > u_k$ nastaje kao rezultat interakcije između CD_2^i i $w\text{SDW}_{i,k}$. Ovakvi tipovi interakcija se pojavljuju u slučaju kada je funkcija $u(x)$ strogo rastuća na nekom intervalu, gde se senka talas prvo sudara sa prvim, a zatim i sa drugim kontaktnim diskontinuitetom iz kombinacije $\text{CD} + \text{Vac} + \text{CD}$.

Takođe, talasi $wSDW_l^r$ i $wSDW_r^l$ su specijalni slučajevi $wSDW_{l,r}$ čiji su snaga i brzina dati sa (5.13). Na primer, u slučaju $\rho_l > 0$, $\rho_r = 0$, snaga i brzina su jednaki

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \sqrt{\gamma^2 + 2\rho_l\gamma(u_l - c)t} \\ u_s(t) &= u_l - \frac{\gamma(u_l - c)}{\sqrt{\gamma^2 + 2\rho_l\gamma(u_l - c)t}} \\ c(t) &= X + u_l t - \frac{1}{\rho_l} \xi(t) + \frac{\gamma}{\rho_l}.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Ako je $\rho_l = 0$ i $\rho_r > 0$, rešenje je oblika (7.9) sa ρ_l i u_l zamenjenim ρ_r i u_r .

Konačno, u slučaju $\rho_l = \rho_r = 0$, rezultujući talas $wSDW^r$ ima konstantnu snagu i brzinu, jer one zadovoljavaju sistem

$$\xi'(t) = 0, \quad (\xi u_s)'(t) = 0.$$

Napomena. Primetite da postojanje $wSDW_{i,j}$ implicira $u_i \geq u_j$, jer odnos između u_i i u_j određuje tip prekida. Pri tome ne isključujemo slučaj kada $u_i = u_j$, jer ćemo kontaktni diskontinuitet posmatrati kao specijalan slučaj senka talasa. U nastavku nećemo naglašavati odnos između dve komponente brzine, jer će to biti jasno iz oblika rešenja.

7.2. Interakcije između talasa

Ključnu ulogu u proceduri za konstrukciju rešenja početnog problema opisanoj u pretходnom poglavlju imaju Rimanov problem i interakcije između talasa (odnosno uopšteni Rimanov problem). Posmatraćemo prvo interakcije između dva talasa, od kojih je bar jedan senka talas.

Rešavanje problema interakcije ekvivalentno je rešavanju uopštenog Rimanovog problema sa početnim uslovom (5.7) transliranim u tačku interakcije (X, T) . Rezultujući talas razdvaja stanja $U_l = (\rho_l, u_l)$ i $U_r = (\rho_r, u_r)$ koja nasleđuje od dva talasa koja učestvuju u interakciji. Naime, U_l je levo stanje levog prilazećeg talasa, dok je U_r desno stanje desnog prilazećeg talasa. Vrednost γ iz (5.7) je jednaka ukupnoj snazi dva prilazeća talasa u vremenu interakcije,

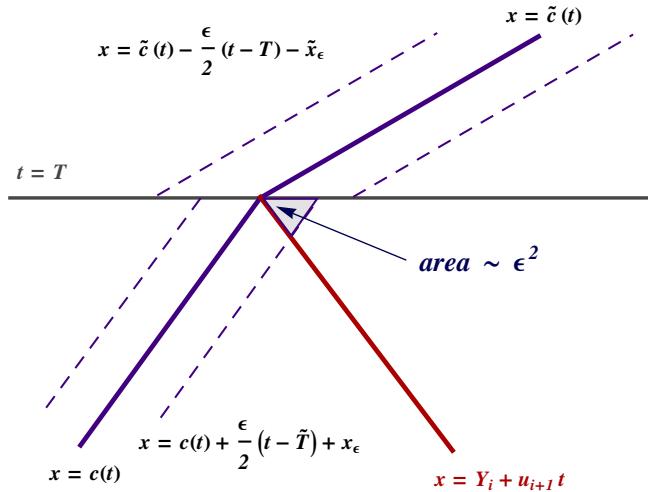
$$\gamma = \xi(T) = \xi_l(T) + \xi_r(T),\tag{7.10}$$

pri čemu su sa $\xi_l(t)$ i $\xi_r(t)$, $t < T$ označene snaga levog i desnog prilazećeg talasa, redom. To važi jer je ukupna masa pre i posle interakcije očuvana. Slično, ukupna količina kretanja je očuvana posle interakcije. Ukoliko sa $u_{s_l}(t)$ i $u_{s_r}(t)$, $t < T$ označimo brzine dva prilazeća talasa, početna brzina rezultujućeg talasa je jednaka

$$c = u_s(T) = \frac{\xi_l(T)u_{s_l}(T) + \xi_r(T)u_{s_r}(T)}{\xi_l(T) + \xi_r(T)}.\tag{7.11}$$

Prilikom rešavanja problema interakcije ćemo često koristiti modifikovanu verziju Teoreme 4.1. Reč "modifikovanu" koristimo iz više razloga.

1. U našem slučaju talasi koji učestvuju u interakciji mogu biti kontaktne diskontinuitete, prosti ili težinski senka talasi. Kontaktne diskontinuitete i proste senke talase ćemo posmatrati kao specijalne slučajeve težinskog senka talasa, pa će analiza interakcije između dva senka talasa sa nekonstantnom brzinom pokriti sve moguće slučajeve.



Slika 7.1: Oblast ograničena spoljašnjom linijom SDW-a, kontaktnim diskontinuitetom i pravom $t = T$

2. U interakciji mogu učestvovati dva ili više talasa. Sve interakcije između dva ili više prilazeća talasa koje se odvijaju u ε -vremenu ćemo smatrati jednom interakcijom, jer se sve te interakcije odvijaju u oblasti površine reda ε^2 . Koristićemo termin “talasi su se sudarili u isto vreme”.
3. Zanemarićemo činjenicu da se interakcija u kojoj učestvuje SDW odnosi na interakciju spoljašnje linije tog talasa sa elementarnim talasom ili spoljašnjom linijom drugog senka talasa ukoliko je drugi talas koji učestvuje u interakciji SDW. To je moguće, jer ti talasi sa pravom $t = T$ koja odgovara vremenu interakcije formiraju oblast površine reda ε^2 . U nastavku navodimo primer kada se senka talas sudara sa kontaktnim diskontinuitetom, a zatim tvrđenje uopštavamo u obliku leme.

PRIMER 7.1. Neka senka talas sa spoljašnjim linijama $x = c(t) \pm \frac{\varepsilon}{2}(t - \tilde{T}) \pm x_\varepsilon$ sa leve strane prilazi i sudara se sa kontaktnim diskontinuitetom $x = Y_i + u_{i+1}t$. Prepostavimo da se interakcija između centralne linije senka talasa i kontaktnog diskontinuiteta odigrava u vremenu $t = T$. Prava $t = T$, spoljašnja linija senka talasa i kontaktni diskontinuitet formiraju oblast čija je površina reda ε^2 . Kako središnja stanja rezultujućeg senka talasa zadovoljavaju $u_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(1)$ i $\rho_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, greška aproksimacije vremena interakcije će biti dovoljno mala. Ilustracija je data na Slici 7.1. ■

LEMA 7.1. *Prepostavimo da se dva prilazeća senka talasa sa centralnim linijama $x = c_l(t)$ i $x = c_r(t)$ sudaraju u vremenu $t = \tilde{T}$ koje je rešenje jednačine*

$$c_l(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_l) + x_{l,\varepsilon} = c_r(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_r) - x_{r,\varepsilon}.$$

Sa $x = c_l(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_l) + x_{l,\varepsilon}$ je označena desna spoljašnja linija levog prilazećeg senka talasa, dok je sa $x = c_r(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_r) - x_{r,\varepsilon}$ označena leva spoljašnja linija desnog prilazećeg senka talasa i važi $x_{l,\varepsilon}, x_{r,\varepsilon} \sim \varepsilon$. Vreme $T > 0$ koje je rešenje jednačine $c_l(t) = c_r(t)$ se naziva vreme interakcije, jer je površina oblasti koju formiraju dve spoljašnje linije prilazećih senka talasa i prava $t = T$ reda ε^2 i svi izrazi reda ε^α , $\alpha > 1$ se mogu zanemariti. Važi $T = \tilde{T} + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Tvrđenje je tačno i kada se jedan senka talas zameni kontaktnim diskontinuitetom.

Dakle, problem određivanja vremena interakcije između dva ili više talasa je ekvivalentan traženju presečne tačke dve centralne linije senka talasa.

Napomenimo da i pored toga što Lema 7.1 čini problem određivanja vremena interakcije jednostavnijim, njegovo rešavanje se u opštem slučaju svodi na rešavanje nelinearne jednačine za koju najčešće ne možemo pronaći eksplicitno rešenje. Zbog toga koristimo numeričke postupke kako bismo došli do približnog rešenja. Međutim, za dokaz egzistencije približnog rešenja početnog problema nije neophodno znati tačno vreme interakcije između talasa, nego je dovoljna informacija da li će se talasi sudariti u budućnosti ili ne, a to sledi iz prekompresivnosti senka talasa.

PRIMER 7.2. Posmatramo interakciju između dva talasa: $W_1 := \text{wSDW}_{i,k}$ prilazi sa leve strane i sudara se sa $W_2 := \text{wSDW}_k^j$, $i < k < j$. Neka W_1 i W_2 imaju poreklo u tačkama (X_1, T_1) i (X_2, T_2) , redom. Rezultat te interakcije je wSDW_i^j . Vreme interakcije T između dva talasa je rešenje jednačine $c_1(T) = c_2(T)$, gde

$$\begin{aligned} c_1(t) &= X_1 + \frac{\xi_1(t) - \sigma_1 + (\rho_k u_k - \rho_i u_i)(t - T_1)}{\rho_k - \rho_i} \\ c_2(t) &= X_2 + u_k(t - T_2) - \frac{1}{\rho_k} \left(\sqrt{\sigma_2^2 + 2\rho_k \sigma_2 (u_k - c_2)(t - T_2)} - \sigma_2 \right). \end{aligned}$$

Sa $\xi_1(t)$ je označena snaga talasa W_1 , dok c_i i σ_i , $i = 1, 2$ predstavljaju brzinu i snagu talasa W_i u vremenu $t = T_i$. ■

Prepostavimo da m prilazećih senka talasa W_1, \dots, W_m učestvuje u interakciji u isto vreme (ili u ε -vremenu). Neka je levo stanje talasa W_1 označeno sa U_l , a desno stanje talasa W_m označeno sa U_r . Da bi prepostavka o interakciji bila zadovoljena neophodno je da svaka dva susedna talasa imaju zajedničko (središnje) stanje. Rezultat interakcije u vremenu $t = T$ između talasa W_1, \dots, W_m je jedan senka talasa sa levim i desnim stanjem U_l i U_r , redom. Početna brzina i snaga rezultujućeg senka talasa su date sa

$$c := u_s(T) = \frac{\sum_{i=1}^m u_{si}(T) \xi_i(T)}{\sum_{i=1}^m \xi_i(T)}, \quad \gamma := \xi(T) = \sum_{i=1}^m \xi_i(T),$$

pri čemu su sa $u_{si}(t)$ i $\xi_i(t)$ označene brzina i snaga talasa W_i , $i = 1, \dots, m$.

Dakle, u našem slučaju svaki tip interakcije između W_1, \dots, W_m može biti klasifikovan kao jedan od četiri tipa (A1-A4).

TIPOVI INTERAKCIJA:

- (A1):** Talas W_1 ima stanje (ρ_l, u_l) , $\rho_l > 0$ sa leve strane, dok W_m ima vakuumsko stanje $\text{Vac}_{r,r+1}$ sa desne strane. Rezultat interakcije između W_1, \dots, W_m je jedan senka talas, označen sa wSDW_l^r , $l < r$.
- (A2):** Talas W_1 ima levo stanje (ρ_l, u_l) , $\rho_l > 0$, dok W_m ima stanje (ρ_r, u_r) , $\rho_r > 0$ sa desne strane. Rezultat interakcije između W_1, \dots, W_m je $\text{wSDW}_{l,r}$, $l < r$.
- (A3):** Talas W_1 ima vakuumsko stanje $\text{Vac}_{l-1,l}$ sa leve strane, dok W_m ima desno stanje (ρ_r, u_r) , $\rho_r > 0$. Rezultat interakcije između W_1, \dots, W_m je w^lSDW_r , $l < r$.
- (A4):** Talas W_1 ima vakuumsko stanje $\text{Vac}_{l-1,l}$ sa leve strane, dok W_m ima vakuumsko stanje $\text{Vac}_{r,r+1}$ sa desne strane. Rezultat interakcije između W_1, \dots, W_m je w^lSDW^r , $l < r$.

Sledeće tvrđenje je posledica Leme 5.2 i njene Posledice 5.1.

POSLEDICA 7.1. Ako su talasi W_1, \dots, W_m prekompresivni, rezultujući senka talas je takođe prekompresivan.

Napomena. U slučaju interakcije između dva talasa, tip (A1) uključuje interakciju između wSDW_{l,s} i wSDW_s^r kada je središnje stanje neko (ρ_s, u_s) , gde $\rho_s > 0$ i između wSDW_l^s i w^{s+1}SDW^r, $s + 1 < r$ kada je središnje stanje vakuumsko Vac_{s,s+1}. Drugim rečima, središnje stanje može biti vakuumsko ili ne-vakuumsko, ali ono ne utiče na rezultat interakcije. Isto važi i kod ostalih tipova interakcija.

Analiza interakcija između talasa (tj. tipovi (A1-A4)) pokriva sve moguće slučajeve interakcija kod sistema gasne dinamike bez pritiska (7.1). Sledеća teorema je posledica toga.

POSLEDICA 7.2. *Algoritam za konstrukciju približnog rešenja početnog problema se može primeniti i u slučaju početnog uslova oblika*

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho(x), u(x)), & x \leq R \\ (\rho_0, u_0), & x > R \end{cases} \quad (7.12)$$

ili bilo kod početnog uslova

$$\rho(x, 0) = \rho(x), \quad u(x, 0) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.13)$$

gde su $\rho(x) > 0$ i $u(x)$ po delovima $C_b^1(\mathbb{R})$ sa konačno mnogo prekida prve vrste i $u(x)$ ima konačno mnogo lokalnih ekstremi.

Napomena. Iz Leme 5.4 sledi da se svi tipovi interakcija kod sistema (5.17) mogu tretirati na potpuno isti način kao gore.

7.3. Egzistencija globalnog približnog rešenja

Analiza približnog rešenja problema (7.1, 7.2) se zasniva na četiri glavna slučaja:

Slučaj I: $u_0 \leq u(R)$ i $u(x)$ je rastuća za $x > R$

Slučaj II: $u_0 > u(R)$ i $u(x)$ je rastuća za $x > R$

Slučaj III: $u_0 \geq u(R)$ i $u(x)$ je opadajuća za $x > R$

Slučaj IV: $u_0 < u(R)$ i $u(x)$ je opadajuća za $x > R$.

Prvo ćemo detaljnije objasniti svaki od Slučajeva I – IV i dokazati da je konstruisano rešenje zaista približno rešenje početnog problema (7.1, 7.2). Pri tome ćemo često koristiti Leme 5.2 i 7.1 i rezultate dobijene u prethodnoj analizi. U slučaju kada je funkcija $u(x)$ rastuća (Slučajevi I i II), moguće je odrediti redosled interakcija između talasa, pa ćemo dati i eksplicitan izraz za rešenje. U opštem slučaju nije moguće odrediti redosled interakcija, jer on zavisi i od oblika funkcije $\rho(x)$, ali u dokazu egzistencije približnog rešenja ta činjenica ne igra značajnu ulogu.

Ako funkcija $u(x)$ menja monotonost ali ima konačno mnogo ekstremnih vrednosti, približno rešenje se dobija kao kombinacija rešenja iz Slučajeva I – IV.

7.3.1. Analiza Slučajeva I – IV

Slučaj I: $u(x)$ je rastuća funkcija za $x > R$ i važi $u_0 \leq u(R)$

Slučaj kada je funkcija $u(x)$ rastuća i $u_0 \leq u(R)$ je najjednostavniji, jer se talasi koji formiraju približno rešenje ne sudaraju međusobno. Približno rešenje je po delovima neprekidna¹ funkcija sa prekidima prvog reda na kontaktnim diskontinuitetima. To je posledica

¹ ρ komponenta u rešenju je po delovima konstantna funkcija, dok je u komponenta konstantna u nevakuumskim stanjima, a neprekidna u vakuumskim.

činjenice da je rešenje Rimanovog problema (7.1, 7.6) za svako i jedan kontaktni diskontinuitet dat sa (7.7) ili kombinacija dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom data sa (7.8). Ti kontaktni diskontinuiteti se neće sudarati jer su svaka dva paralelna ($u_i = u_{i+1}$ za neko i) ili odlazeća (kontaktni diskontinuitet sa leve strane ima manji koeficijent pravca).

Ako je početna funkcija $u(x)$ strogo rastuća, približno rešenje se može predstaviti kao niz rešenja oblika (7.8) i dato je sa

$$U^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x - R < u_0 t \\ (0, u_0(x, t)), & R + u_0 t < x < R + u_1 t \\ (\rho_1, u_1), & R + u_1 t < x < Y_1 + u_1 t \\ (0, u_1(x, t)), & Y_1 + u_1 t < x < Y_1 + u_2 t \\ \vdots & \vdots \\ (\rho_i, u_i), & Y_{i-1} + u_i t < x < Y_i + u_i t \\ (0, u_i(x, t)), & Y_i + u_i t < x < Y_i + u_{i+1} t \\ \vdots & \vdots \end{cases},$$

gde $u_i(Y_i + u_i t, t) = u_i$, $u_i(Y_i + u_{i+1} t, t) = u_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ i važi $\mu(\varepsilon) \geq Y_i - Y_{i-1}$ za svako $i = 1, 2, \dots$. Ako je $u_i = u_{i+1}$ za neko i , dva kontaktna diskontinuiteta iz kombinacije $CD_1^i + Vac_{i,i+1} + CD_2^{i+1}$ će se poklopiti, a vakuum između njih će nestati.

Slučaj II: $u(x)$ je rastuća funkcija za $x > R$ i važi $u_0 > u(R)$

Za razliku od Slučaja I, sada je prvi talas u nizu rešenja Rimanovih problema $SDW_{0,1}$, jer $u_0 > u(R)$ i uvek možemo da odaberemo dovoljno malo $\varepsilon > 0$ takvo da važi $u_0 > u_1$. Talas $SDW_{0,1}$ ima poreklo u tački $(R, 0)$ i rešenje je Rimanovog problema (7.1, 7.6) za $i = 0$. Rešenje Rimanovog problema (7.1, 7.6) za $i = 1, 2, \dots$ je kombinacija $CD_1^i + Vac_{i,i+1} + CD_2^{i+1}$ (ako $u_i < u_{i+1}$) ili jedan kontaktni diskontinuitet $CD_{i,i+1}$ (ako $u_i = u_{i+1}$), kao i u prethodnom slučaju. Približno rešenje se sastoji iz jednog senka talasa i niza kontaktnih diskontinuiteta, što znači da će se u ovom slučaju dešavati interakcije tipa:

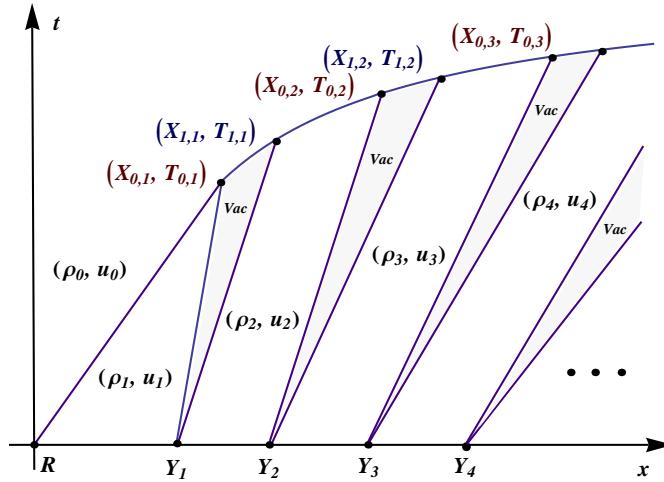
(A1): interakcije između senka talasa i kontaktnih diskontinuiteta sa vakuumom na desnoj strani.

(A2): interakcije između senka talasa sa vakuumom na desnoj strani i kontaktnih diskontinuiteta sa vakuumom na levoj strani ili između senka talasa sa oba ne-vakuumnska stanja i jednog kontaktnog diskontinuiteta koji je rešenje Rimanovog problema kada $u_k = u_{k+1}$ za neko k .

Radi jednostavnijeg objašnjenja prepostavimo da je funkcija $u(x)$ strogo rastuća. Neka je sa $(X_{0,i}, T_{0,i})$ označena tačka interakcije između senka talasa i prvog kontaktnog diskontinuiteta u i -toj talasnoj kombinaciji $CD_i + Vac_{i,i+1} + CD_{i+1}$. Zatim, neka je sa $(X_{1,i}, T_{1,i})$ označena tačka interakcije između senka talasa i drugog kontaktnog diskontinuiteta iz kombinacije $CD_i + Vac_{i,i+1} + CD_{i+1}$ (videti Sliku 7.2).

Funkcija $u(x)$ je rastuća i ograničena, pa postoji neko \tilde{u} takvo da $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = \tilde{u}$. U zavisnosti od odnosa između \tilde{u} i u_0 posmatraćemo dva slučaja.

Neka je prvo $\tilde{u} \leq u_0$. Prvi talas u nizu $SDW_{0,1}$ se prostire konstantnom brzinom $y_{0,1} \in (u_1, u_0)$ i sa leve strane prilazi kontaktnom diskontinuitetu CD_1^1 čiji je koeficijent pravca u_1 . Ta dva talasa se sudaraju u $t = T_{0,1}$. Rezultujući $wSDW_0^1$ ima brzinu $u_s(t)$ oblika kao u (7.9)₂ koja je rastuća funkcija od t i ima asimptotu kada $t \rightarrow \infty$. Preciznije, važi $u_s(t) \in (u_1, u_0)$

Slika 7.2: Skica interakcije u slučaju strogog rastuće funkcije $u(x)$ i $\tilde{u} \leq u_0$

za $t > T_{0,1}$ i $u_s(t) \rightarrow u_0$, $t \rightarrow \infty$, što znači da će posle nekog vremena (u $t = T_{1,1}$) talas wSDW₀¹ morati da se sudari sa CD₂², jer $u_2 < \tilde{u} < u_0$. Rezultat te interakcije je wSDW_{0,2}. Ako je početna brzina c tog senka talasa manja od $y_{0,2}$, njegova brzina će da raste i težiće ka $y_{0,2}$ kada $t \rightarrow \infty$. U suprotnom, ako je $c > y_{0,2}$ brzina će opadati i težiće $y_{0,2}$ kada $t \rightarrow \infty$. Dakle, wSDW_{0,2} će biti prekompresivan sa brzinom koja će kad-tad postati veća od u_2 , što znači će se sudariti sa sledećim po redu kontaktnim diskontinuitetom CD₁². Sa porastom t raste broj sudara i sa svakom interakcijom između senka talasa i kontaktnog diskontinuiteta nastaje novi senka talas koji nastavlja da se sudara sa kontaktnim diskontinuitetima koji mu prilaze sa desne strane.

Razlika između slučaja $\tilde{u} \leq u_0$ analiziranog gore i slučaja $\tilde{u} > u_0$ je ta što će u drugom u nekom trenutku rezultujući senka talas ući u vakuumsko stanje ali neće dostići dovoljno veliku brzinu da iz njega izade i interakcije između talasa će prestati.

Označimo sa $U^\varepsilon = (\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ približno rešenje dobijeno na gore opisan način. Neka su sa $u_s(t)$ i $\xi(t)$ označene po delovima definisane brzina i snaga rezultujućeg senka talasa kojeg ćemo nazivati 0-SDW. Po konstrukciji te funkcije su neprekidne, kao i SDW front dat sa $x = c(t)$, gde $c'(t) = u_s(t)$. Njihove restrikcije na intervalu $[T_{0,i}, T_{1,i}]$ i $[T_{1,i}, T_{0,i+1}]$ su rešenja sistema običnih diferencijalnih jednačina oblika (5.8). Drugim rečima, 0-SDW predstavlja singularni deo rešenja U^ε koji je dat sa

$$\hat{U}^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 0, & x < c(t) - a_\varepsilon(t) \\ (\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)(t), & c(t) - a_\varepsilon(t) < x < c(t) + a_\varepsilon(t) \\ 0, & x > c(t) + a_\varepsilon(t) \end{cases}$$

gde

$$a_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}t, & t \in (0, T_{0,1}] \\ \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_\varepsilon^{0,i}, & t \in (T_{0,i}, T_{1,i}] \quad , \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i}, & t \in (T_{1,i}, T_{0,i+1}] \end{cases}$$

Vrednosti $x_\varepsilon^{k,i}$, $k = 0, 1$, $i = 1, 2, \dots$ biramo tako da spoljašnje linije senka talasa date sa

$$x = c(t) - a_\varepsilon(t) \quad \text{i} \quad x = c(t) + a_\varepsilon(t)$$

budu po delovima neprekidne, tj. suma snaga prilazećih talasa treba da bude jednaka snazi rezultujućeg senka talasa u okolini tačke interakcije. Preciznije, za svako $i = 1, 2, 3, \dots$ vrednosti $x_\varepsilon^{0,i}$ i $x_\varepsilon^{1,i}$ biramo tako da su relacije analogne onima u (5.12) zadovoljene.

Kako je u ovom slučaju poznat redosled interakcija između talasa, moguće je odrediti eksplicitan oblik rešenja U^ε . Ako je $\tilde{u} \leq u_0$, približno rešenje početnog problema (7.1, 7.2) do prve interakcije je dano sa

$$U_0^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x - R < y_{0,1}t - \frac{\varepsilon}{2}t \\ (\rho_\varepsilon, u_\varepsilon), & y_{0,1}t - \frac{\varepsilon}{2}t < x - R < y_{0,1}t + \frac{\varepsilon}{2}t \\ (\rho_1, u_1), & R + y_{0,1}t + \frac{\varepsilon}{2}t < x < Y_1 + u_1t \\ (0, u_1(x, t)), & Y_1 + u_1t < x < Y_1 + u_2t \\ \vdots & \vdots \\ (\rho_i, u_i), & Y_{i-1} + u_it < x < Y_i + u_it \\ (0, u_i(x, t)), & Y_i + u_it < x < Y_i + u_{i+1}t \\ \vdots & \vdots \end{cases},$$

gde $u_i(Y_i + u_it, t) = u_i$, $u_i(Y_i + u_{i+1}t, t) = u_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. Dalje, približno rešenje za $t \in [T_{0,i}, T_{1,i}]$ je

$$U_{\text{vac},i}^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_\varepsilon^{0,i} \\ (\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)), & c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_\varepsilon^{0,i} < x < c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_\varepsilon^{0,i} \\ (0, u_i(x, t)), & c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_\varepsilon^{0,i} < x < Y_{i+1} + u_{i+1}t \\ (\rho_{i+1}, u_{i+1}), & Y_i + u_{i+1}t < x < Y_{i+1} + u_{i+1}t \\ (0, u_{i+1}(x, t)), & Y_{i+1} + u_{i+1}t < x < Y_{i+1} + u_{i+2}t \\ \vdots & \vdots \end{cases},$$

dok je rešenje za $t \in [T_{1,i}, T_{0,i+1}]$ dano sa

$$U_{\text{nvac},i}^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) - x_\varepsilon^{1,i} \\ (\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)), & c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) - x_\varepsilon^{1,i} < x < c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i} \\ (\rho_{i+1}, u_{i+1}), & c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i} < x < Y_{i+1} + u_{i+1}t \\ (0, u_{i+1}(x, t)), & Y_{i+1} + u_{i+1}t < x < Y_{i+1} + u_{i+2}t \\ (\rho_{i+2}, u_{i+2}), & Y_{i+1} + u_{i+2}t < x < Y_{i+2} + u_{i+2}t \\ (0, u_{i+2}(x, t)), & Y_{i+2} + u_{i+2}t < x < Y_{i+2} + u_{i+3}t \\ \vdots & \vdots \end{cases}.$$

Konačno, približno rešenje problema (7.1, 7.2) označeno sa U^ε nastaje spajanjem gore navedenih rešenja

$$U^\varepsilon(x, t) := (\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t)) = \begin{cases} U_0^\varepsilon(x, t), & 0 \leq t < T_{0,1} \\ U_{\text{vac},i}^\varepsilon(x, t), & T_{0,i} \leq t < T_{1,i}, i = 1, 2, \dots \\ U_{\text{nvac},i}^\varepsilon(x, t), & T_{1,i} \leq t < T_{0,i+1}, i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7.14)$$

TEOREMA 7.1. Date su funkcije $u(x), \rho(x) \in C_b([R, \infty))$, $\rho(x) > 0$. Pretpostavimo da je $u(x)$ rastuća i neka je $\rho_0 > 0$ i $u_0 > u(R)$. Neka je $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ particija intervala $[R, \infty)$,

$Y_0 = R$ takva da $C\sqrt[3]{\varepsilon} \geq Y_i - Y_{i-1} \geq \sqrt{\varepsilon}$ za svako $i = 1, 2, \dots$ i neku konstantu $C \geq 1$. Tada za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji dopustivo globalno približno rešenje početnog problema (7.1, 7.2), tj. postoji funkcija U^ε koja zadovoljava sistem

$$\begin{aligned}\partial_t \rho^\varepsilon + \partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) &\approx 0 \\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) + \partial_x(\rho^\varepsilon(u^\varepsilon)^2) &\approx 0,\end{aligned}$$

uslove $\rho^\varepsilon(x, 0) \approx \rho(x, 0)$, $u^\varepsilon(x, 0) \approx u(x, 0)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ i uslov dopustivosti.

- (1) Ako je $\tilde{u} \leq u_0$, postoji beskonačno mnogo interakcija.
- (2) Ako je $\tilde{u} > u_0$, interakcije će prestati posle vremena $t = T_{0,k}$, gde $k \in \mathbb{N}$ zadovoljava $u_k < u_0 \leq u_{k+1}$. U tom slučaju važi $u_s(t) \rightarrow u_0$ kada $t \rightarrow \infty$.

Napomena. Za gornju granicu u $C\sqrt[3]{\varepsilon} \geq Y_i - Y_{i-1} \geq \sqrt{\varepsilon}$ je umesto $C\sqrt[3]{\varepsilon}$ dovoljno uzeti bilo koju funkciju $\mu(\varepsilon)$ koja zadovoljava $\mu(\varepsilon) \rightarrow 0$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Ovu smo uzeli zbog Teoreme 7.3 gde $u(x)$ ne mora da bude monotona funkcija. Takođe, u slučaju rastuće funkcije $u(x)$ donja granica umesto $\sqrt{\varepsilon}$ može biti bilo koja oblika ε^α , gde $0 < \alpha < 1$.

DOKAZ. (1) Posmatramo prvo slučaj $\tilde{u} \leq u_0$.

Želimo da pokažemo da konstruisano rešenje U^ε , $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ dato sa (7.14) zadovoljava sistem

$$\begin{aligned}E_1 &:= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon \partial_t \varphi)(x, t) + (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi)(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx \approx 0 \\ E_2 &:= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_t \varphi)(x, t) + (\rho^\varepsilon(u^\varepsilon)^2 \partial_x \varphi)(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx \approx 0\end{aligned}$$

za svaku test funkciju $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. U dokazu ćemo koristiti Tejlorov razvoj test funkcije φ ,

$$\begin{aligned}\varphi(c(t) - a_\varepsilon(t), t) &= \varphi(c(t), t) - \partial_x \varphi(c(t), t) a_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \varphi(c(t) + a_\varepsilon(t), t) &= \varphi(c(t), t) + \partial_x \varphi(c(t), t) a_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \varphi(x, t) &= \varphi(c(t), t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{za } x \in (c(t) - a_\varepsilon(t), c(t) + a_\varepsilon(t)).\end{aligned}\tag{7.15}$$

Imamo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \partial_t \varphi)(x, t) dx dt &= I_0 + \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon \varphi)(x, T_{0,1}^-) - (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0)) dx \\ &+ \sum_{i=1}^\infty I_{0,i} + \sum_{i=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon \varphi)(x, T_{1,i}^-) - (\rho^\varepsilon \varphi)(x, T_{0,i}^+)) dx \\ &+ \sum_{i=1}^\infty I_{1,i} + \sum_{i=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon \varphi)(x, T_{0,i+1}^-) - (\rho^\varepsilon \varphi)(x, T_{1,i}^+)) dx,\end{aligned}\tag{7.16}$$

gde $I_0, I_{0,i}$ i $I_{1,i}$, predstavljaju integrale koji odgovaraju intervalima $[0, T_{0,1}]$, $[T_{0,i}, T_{1,i}]$ i $[T_{1,i}, T_{0,i+1}]$, redom. Preciznije,

$$\begin{aligned}I_0 &:= \int_0^{T_{0,1}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon \partial_t \varphi dx dt, \\ I_{0,i} &:= \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon \partial_t \varphi dx dt, \\ I_{1,i} &:= \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon \partial_t \varphi dx dt.\end{aligned}$$

Izraz $\int_{\mathbb{R}}(\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx$ u (7.16) će se skratiti sa istim izrazom kada se dobijene vrednosti ubace u E_1 , dok će se svi ostali integrali međusobno skratiti, što je posledica neprekidnosti funkcije U^ε po t . Kako bismo ocenili ukupnu grešku u približnom rešenju u fiksiranom vremenu $t > 0$ analizu ćemo podeliti po intervalima $[0, T_{0,1}]$, $[T_{0,i}, T_{1,i}]$ i $[T_{1,i}, T_{0,i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$. Na sličan način kao i u (7.16) dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi)(x, t) dx dt = J_0 + \sum_{i=1}^\infty J_{0,i} + \sum_{i=1}^\infty J_{1,i},$$

gde

$$\begin{aligned} J_0 &:= \int_0^{T_{0,1}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi dx dt \\ J_{0,i} &:= \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi dx dt \\ J_{1,i} &:= \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Ovde ćemo dati dokaz za slučaj kada je funkcija $u(x)$ strogo rastuća, jer činjenica da $u(x)$ može biti konstantna na nekom intervalu ne pravi značajnu razliku u analizi. Naime, tada će se za neko i vremena $T_{0,i}$ i $T_{1,i}$ poklopiti, jer nema vakuma.

U intervalu $[0, T_{0,1}]$ važi

$$\begin{aligned} I_0 = & - \int_0^{T_{0,1}} \rho_1 u_1 \varphi(Y_1 + u_1 t, t) dt - \int_0^{T_{0,1}} (\rho_0 - \rho_{0,\varepsilon}) \varphi(R + y_{0,1} t - \frac{\varepsilon}{2} t, t) \left(y_{0,1} - \frac{\varepsilon}{2} \right) dt \\ & - \int_0^{T_{0,1}} (\rho_{0,\varepsilon} - \rho_1) \varphi(R + y_{0,1} t + \frac{\varepsilon}{2} t, t) \left(y_{0,1} + \frac{\varepsilon}{2} \right) dt \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^\infty \int_0^{T_{0,1}} \rho_{i+1} u_{i+1} (\varphi(Y_i + u_{i+1} t, t) - \varphi(Y_{i+1} + u_{i+1} t, t)) dt}_{:= A_0}, \end{aligned}$$

jer je $\rho_{0,\varepsilon} = \text{const}$ (ovde je senka talas prost). Slično,

$$\begin{aligned} J_0 := & \int_0^{T_{0,1}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi dx dt = \int_0^{T_{0,1}} (\rho_0 u_0 - \rho_{0,\varepsilon} u_{0,\varepsilon}) \varphi(R + y_{0,1} t - \frac{\varepsilon}{2} t, t) dt \\ & - \int_0^{T_{0,1}} (\rho_1 u_1 - \rho_{0,\varepsilon} u_{0,\varepsilon}) \varphi(R + y_{0,1} t + \frac{\varepsilon}{2} t, t) dt + \int_0^{T_{0,1}} \rho_1 u_1 \varphi(Y_1 + u_1 t, t) dt \\ & - \underbrace{\sum_{i=1}^\infty \int_0^{T_{0,1}} \rho_{i+1} u_{i+1} (\varphi(Y_i + u_{i+1} t, t) - \varphi(Y_{i+1} + u_{i+1} t, t)) dt}_{:= B_0}. \end{aligned}$$

Napomenimo da ćemo u ovom dokazu koristiti ideje iz dokaza Lema 5.1 i 5.2, pa neke tehničke delove nećemo detalno objašnjavati. Korišćenjem relacije

$$\xi_{0,1} = y_{0,1}(\rho_1 - \rho_0) - (\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0)$$

i razvoja u Tejlorov red test funkcije (7.15) dobijamo da u intervalu $[0, T_{0,i}]$ važi

$$\begin{aligned} I_0 + J_0 = & \int_0^{T_{0,1}} (\xi_{0,1} - \varepsilon \rho_{0,\varepsilon}) \varphi(R + y_{0,1} t, t) dt \\ & - \int_0^{T_{0,1}} t \varepsilon \rho_{0,\varepsilon} (y_{0,1} - u_{0,\varepsilon}) \partial_x \varphi(R + y_{0,1} t, t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

jer je $A_0 = B_0$. Dakle $E_1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ za $0 \leq t \leq T_{0,1}$, jer iz definicije SDW_{0,1} sledi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{0,\varepsilon} = y_{0,1}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rho_{0,\varepsilon} = \xi_{0,1}.$$

Slično, zamenom ρ sa ρu i ρu sa ρu^2 u gornjim relacijama pokazuje se da je $E_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ u $[0, T_{0,1}]$.

Dalje, za $t \in [T_{0,i}, T_{1,i}]$ imamo

$$\begin{aligned} I_{0,i} = & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \int_{c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_{\varepsilon}^{0,i}}^{c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i}} \partial_t \rho_{\varepsilon}(t) \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} (\rho_0 - \rho_{\varepsilon}(t)) \varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) \left(c'(t) - \frac{\varepsilon}{2} \right) dt \\ & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_{\varepsilon}(t) \varphi \left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) \left(c'(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right) dt \\ & + \underbrace{\sum_{k=i}^{\infty} \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_{k+1} u_{k+1} \left(\varphi(Y_k + u_{k+1} t, t) - \varphi(Y_{k+1} + u_{k+1} t, t) \right) dt}_{:= A_{0,i}}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} J_{0,i} = & \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} (\rho_0 u_0 - \rho_{\varepsilon}(t) u_{\varepsilon}(t)) \varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) dt \\ & + \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_{\varepsilon}(t) u_{\varepsilon}(t) \varphi \left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) dt \\ & - \underbrace{\sum_{k=i}^{\infty} \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_{k+1} u_{k+1} \left(\varphi(Y_k + u_{k+1} t, t) - \varphi(Y_{k+1} + u_{k+1} t, t) \right) dt}_{:= B_{0,i} = A_{0,i}}. \end{aligned}$$

Korišćenjem Leme 5.2 i njenog dokaza, a ponavljanjem postupka od gore (sada umesto prostog senka talasa imamo težinski kao prvi talas u nizu) dokazujemo da

$$\begin{aligned} I_{0,i} + J_{0,i} = & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \partial_t \rho_{\varepsilon}(t) \varphi(c(t), t) \cdot 2 \left(\frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i} \right) dt \\ & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_0 (c'(t) - u_0) \varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) dt \\ & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_{\varepsilon}(t) \frac{\varepsilon}{2} \left(\varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) + \varphi \left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) \right) dt \\ & + \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_{\varepsilon}(t) (c'(t) - u_{\varepsilon}(t)) \varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) - x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) dt \\ & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \rho_{\varepsilon}(t) (c'(t) - u_{\varepsilon}(t)) \varphi \left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i}, t \right) dt + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ = & \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} \left(\rho_0 (u_0 - c'(t)) - 2 \partial_t \rho_{\varepsilon}(t) \left(\frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i} \right) + \varepsilon \rho_{\varepsilon}(t) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & - \int_{T_{0,i}}^{T_{1,i}} 2 \rho_{\varepsilon}(t) \left(\frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i} \right) (c'(t) - u_{\varepsilon}(t)) \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Dakle, $I_{0,i} + J_{0,i} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ na $t \in [T_{0,i}, T_{1,i}]$, jer je wSDW₀ⁱ definisan tako da važi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \rho_{\varepsilon}(t) \left(\frac{\varepsilon}{2}(t - T_{0,i}) + x_{\varepsilon}^{0,i} \right) = \xi(t), \quad \xi'(t) = \rho_0 (u_0 - c'(t)), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(t) = c'(t).$$

Slično, zamenom $\rho \mapsto \rho u$ dobijamo da je $E_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ na intervalu $[T_{0,i}, T_{1,i}]$.

Konačno, na intervalu $[T_{1,i}, T_{0,i+1}]$ važi

$$\begin{aligned} I_{1,i} = & - \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \int_{c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) - x_\varepsilon^{1,i}}^{c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i}} \partial_t \rho_\varepsilon(t) \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} (\rho_0 - \rho_\varepsilon(t)) \varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) - x_\varepsilon^{1,i}, t \right) \left(c'(t) - \frac{\varepsilon}{2} \right) dt \\ & - \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} (\rho_\varepsilon(t) - \rho_{i+1}) \varphi \left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i}, t \right) \left(c'(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right) dt \\ & - \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \rho_{i+1} u_{i+1} \varphi(Y_{i+1} + u_{i+1} t, t) dt \\ & + \sum_{k=i+1}^{\infty} \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \rho_{k+1} u_{k+1} \left(\varphi(Y_k + u_{k+1} t, t) - \varphi(Y_{k+1} + u_{k+1} t, t) \right) dt, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} J_{1,i} = & \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} (\rho_0 u_0 - \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t)) \varphi \left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) - x_\varepsilon^{1,i}, t \right) dt \\ & + \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) - \rho_{i+1} u_{i+1}) \varphi \left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i}, t \right) dt \\ & + \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \rho_{i+1} u_{i+1} \varphi(Y_{i+1} + u_{i+1} t, t) dt \\ & - \sum_{k=i+1}^{\infty} \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \rho_{k+1} u_{k+1} \left(\varphi(Y_k + u_{k+1} t, t) - \varphi(Y_{k+1} + u_{k+1} t, t) \right) dt. \end{aligned}$$

Na isti način kao ranije dobijamo

$$\begin{aligned} I_{1,i} + J_{1,i} = & - \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} 2 \left(\partial_t \rho_\varepsilon(t) \left(\frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \rho_\varepsilon(t) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & + \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} \left((\rho_{i+1} - \rho_0) c'(t) - (\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_0 u_0) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ & - \int_{T_{1,i}}^{T_{0,i+1}} 2 \rho_\varepsilon(t) \left(\frac{\varepsilon}{2}(t - T_{1,i}) + x_\varepsilon^{1,i} \right) (c'(t) - u_\varepsilon(t)) \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

pa je $E_1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ na $[T_{1,i}, T_{0,i+1}]$. To sledi iz Leme 5.2, tj. iz definicije wSDW $_{0,i+1}$. Dokaz da je $E_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ na $[T_{1,i}, T_{0,i+1}]$ je sličan.

Primetite da dokaz važi čak i u slučaju kada je $\rho_{i+1} = \rho_0$ za neko i , jer tada iz (5.13)₂ sledi $\xi'(t) = -\rho_0(u_{i+1} - u_0)$ i izraz za brzinu senka talasa $c'(t)$ ne utiče na rezultat.

Kako test funkcija φ ima kompaktan nosač i važi uslov $Y_i - Y_{i-1} \geq \sqrt{\varepsilon}$, sledi da se najviše $\frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt{\varepsilon}}$ sudara između talasa može desiti na nosaču test funkcije. Dakle, E_1 i E_2 će biti reda $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})\mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, pa dobijamo da u slučaju $\tilde{u} \leq u_0$ približno rešenje početnog problema (7.1, 7.2) postoji i dato je sa (7.14).

Dopustivost rešenja je posledica jedinstvenosti klasičnog rešenja (tj. kontaktnog diskontinuiteta) i prekompresivnosti senka talasa u intervalima $[0, T_{0,1}]$, $[T_{0,i}, T_{1,i}]$, $[T_{1,i}, T_{0,i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$

U slučaju kada je $\tilde{u} = u_0$, važi $y_{0,i+1} \rightarrow u_0$ kada $i \rightarrow \infty$, tj. iz prekompresivnosti sledi da je za dovoljno veliko i brzina senka talasa blizu u_0 .

(2) Ako je $\tilde{u} > u_0$, tada postoji indeks $k \in \mathbb{N}$ takav da je $u_{k+1} \geq u_0$ i $u_k < u_0$. Tada će SDW kriva $x = c(t)$ ostati u vakuumskoj oblasti između dva kontaktna diskontinuiteta koja imaju poreklo u istoj tački $(Y_k, 0)$. To sledi iz prekompresivnosti, jer će brzina senka talasa $u_s(t) \in (u_k, u_0)$ uvek biti manja od u_{k+1} . Dakle, sudari će prestati posle interakcije u $t = T_{0,k}$. Približno rešenje je dato sa

$$U^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} U_0^\varepsilon(x, t), & 0 \leq t < T_{0,1} \\ U_{\text{vac},i}^\varepsilon(x, t), & T_{0,i} \leq t < T_{1,i}, i = 1, \dots, k-1 \\ U_{\text{nvac},i}^\varepsilon(x, t), & T_{1,i} \leq t < T_{0,i+1}, i = 1, \dots, k-1 \\ U_{\text{vac},k}^\varepsilon(x, t), & T_{0,k} \leq t < \infty. \end{cases}$$

□

Ideje iz dokaza Teoreme 7.1 će se koristiti i kod ostalih slučajeva, pa tehnički deo dokaza nećemo ponavljati.

Slučaj III: $u(x)$ je opadajuća funkcija za $x > R$ i važi $u_0 \geq u(R)$

Niz rešenja Rimanovih problema (7.1, 7.6), $i = 0, 1, 2, \dots$ je dat u obliku niza prostih senka talasa $\text{SDW}_{0,1}, \text{SDW}_{1,2}, \dots$. Talas $\text{SDW}_{i,i+1}$ ima poreklo u $(Y_i, 0)$ i prostire se brzinom $y_{i,i+1}$. Kako su svi tipovi talasa koji formiraju približno rešenje senka talasi (ili kontaktni diskontinuiteti ako $u_i = u_{i+1}$), jedini tip interakcija koji može da se dogodi u ovom slučaju je tip (A2), tj. moguće su samo interakcije između dva ili više senka talasa koji razdvajaju ne-vakuumsku stanju. Primetite da važi

$$\begin{aligned} y_{i,k} - y_{k,j} &= \frac{\sqrt{\rho_i}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_k}} \frac{\sqrt{\rho_k}}{\sqrt{\rho_k} + \sqrt{\rho_j}} (u_i - u_k) + \frac{\sqrt{\rho_i}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_k}} \frac{\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_k} + \sqrt{\rho_j}} (u_i - u_j) \\ &\quad + \frac{\sqrt{\rho_k}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_k}} \frac{\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_k} + \sqrt{\rho_j}} (u_k - u_j) \geq 0 \quad \text{za } i < k < j, \end{aligned} \tag{7.17}$$

jer je $u(x)$ opadajuća funkcija, pa zaključujemo da se brzine prostih senka talasa smanjuju sa povećanjem i , tj. svaka dva senka talasa su prilazeća. Međutim, to koja dva senka talasa će prva da se sudare zavisi od oblika funkcija $u(x)$ i $\rho(x)$, ali i od razlike $u_0 - u_1$. Tačka interakcije $(\tilde{X}_i, \tilde{T}_i)$ između $\text{SDW}_{i-1,i}$ i $\text{SDW}_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ se određuje rešavanjem jednačine

$$\tilde{X}_i = Y_{i-1} + y_{i-1,i} \tilde{T}_i = Y_i + y_{i,i+1} \tilde{T}_i,$$

kada dobijamo

$$\tilde{T}_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{y_{i-1,i} - y_{i,i+1}}.$$

Kako bismo odredili prvu tačku interakcije trazimo i za koje je T_i minimalno. Rezultujući senka talas će imati brzinu koja je veća od brzine svih talasa koji mu prilaze sa desne strane. Taj proces će se nastaviti, ali u opštem slučaju ne možemo odrediti redosled interakcija.

Neka je $\Delta Y_i := Y_i - Y_{i-1} \sim \mu(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Tada za svako i važi $\Delta u_i := u_i - u_{i-1} < \text{const}_u \cdot \mu(\varepsilon)$, gde $\sup_{x \geq R} |u'(x)| \leq \text{const}_u$. Iz razlike (7.17) vidimo da važi

$$y_{i-1,i} - y_{i,i+1} < (u_{i-1} - u_i) + (u_{i-1} - u_{i+1}) + (u_i - u_{i+1}) = 2(u_{i-1} - u_{i+1}) < \text{const}_u \cdot \mu(\varepsilon),$$

tj. $\tilde{T}_i = \mathcal{O}(1)$, pa će se interakcija između dva susedna senka talasa sa malom snagom dogoditi u konačnom vremenu.

Sa 0-SDW ćemo označavati senka talas koji povezuje talase oblika $w\text{SDW}_{0,i}$ nastale iz interakcija sa talasima koji mu prilaze sa desne strane. Iz uslova prekompresivnosti (koji sledi iz dokaza Leme 5.2) sledi da će 0-SDW “nadjačati” ostale talase koje ćemo nazivati “mali” senka talasi, jer imaju malu snagu.

U slučaju kada je $u_0 > u(R)$, vreme interakcije između $\text{SDW}_{0,1}$ i $\text{SDW}_{1,2}$ je reda $\mathcal{O}(\mu(\varepsilon))$. To znači da će se prva interakcija dogoditi između ta dva senka talasa. Rezultujući $w\text{SDW}_{0,2}$ će nastaviti da se prostire do sledeće interakcije.

Slučaj IV: $u(x)$ je opadajuća funkcija za $x > R$ i važi $u_0 < u(R)$

Ovaj slučaj je sličan prethodnom. Približno rešenje do prve interakcije se sastoji iz kombinacije $\text{CD}_1^0 + \text{Vac}_{0,1} + \text{CD}_2^1$ i niza prostih senka talasa $\text{SDW}_{1,2}, \text{SDW}_{2,3}, \dots$.

Prvi kontaktni diskontinuitet u nizu CD_1^0 sa vakuumskim stanjem sa desne strane ima koeficijent pravca u_0 koji je manji od koeficijenta pravca drugog kontaktnog diskontinuiteta CD_2^1 . Iz istog razloga kao u prethodnom slučaju nije moguće odrediti redosled interakcija između talasa. Ovde su moguće interakcije tipa (A2) (interakcije između dva ili više senka talasa koja razdvajaju ne-vakuumsku stanju) ili tipa (A3) (interakcije u kojima učestvuje senka talas sa levim vakuumskim stanjem). Inicijator interakcija tipa (A3) je talas CD_2^1 koji će se sudariti sa talasom oblika $w\text{SDW}_{1,k}$ za neko $k \geq 2$. Rezultat te interakcije je $w^1\text{SDW}_k$ sa levim vakuumskim stanjem i brzinom koja je veća od brzina svih senka talasa koji mu prilaze sa desne strane. Takođe, moguće je da će se dogoditi interakcija između dva ili više malih senka talasa pre nego što se rezultujući talasi sudare sa talasom oblika $w^1\text{SDW}_k$. Brzina svih rezultujućih talasa će biti veća od u_0 , što znači da CD_1^0 neće učestvovati u interakcijama.

Slučajeve III i IV objedinjujemo u sledećoj teoremi gde će biti dokazano da rešenje konstruisano algoritmom jeste približno rešenje problema (7.1, 7.2).

TEOREMA 7.2. Neka su date funkcije $u(x), \rho(x) \in C_b([R, \infty)), \rho(x) > 0, \rho_0 > 0$ i $u_0 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je funkcija $u(x)$ opadajuća za $x > R$. Posmatramo particiju $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ intervala $[R, \infty)$ takvu da $C\sqrt[3]{\varepsilon} \geq Y_i - Y_{i-1} \geq \sqrt[3]{\varepsilon}$, $Y_0 = R$ važi za svako $i = 1, 2, \dots$ i konstantu $C \geq 1$. Tada za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji dopustivo globalno približno rešenje $U^\varepsilon(x, t)$ problema (7.1, 7.2).

DOKAZ. Ideja ovog dokaza je ista kao u dokazu Teoreme 7.1. Neka je sa

$$S_0^{III} := \{(\rho_i, u_i) : i = 0, 1, 2, \dots\}$$

označen skup početnih stanja u slučaju $u_0 \geq u(R)$ (to je Slučaj III), a sa

$$S_0^{IV} := \{(\rho_0, u_0), \text{Vac}_{0,1}\} \cup \{(\rho_i, u_i) : i = 1, 2, \dots\}$$

je označen skup početnih stanja u Slučaju IV kada $u_0 < u(R)$. Dalje, sa $I_0^{III} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ će biti označen početni skup indeksa koji odgovara skupu stanja S_0^{III} , dok će $I_0^{IV} = \{-1\} \cup I_0^{III}$ predstavljati skup indeksa koji odgovara skupu stanja S_0^{IV} . Svakom stanju iz S_0^α je dodeljen tačno jedan indeks iz $I_0^\alpha, \alpha \in \{III, IV\}$.

Neka se u vremenu $t = T_k$ odigrao k -ti skup interakcija između dva ili više talasa. Kao što je objašnjeno u algoritmu, posle k -tog skupa interakcija formira se skup stanja $S_k^\alpha, \alpha \in \{III, IV\}$ i to eliminacijom svih središnjih stanja koja su nestala posle interakcije. Samim tim su eliminisani i indeksi ili indeksi iz I_{k-1}^α koji odgovaraju eliminisanim središnjim stanjima iz S_{k-1}^α . Novi skup indeksa je dat sa

$$I_k^{III} = \{0, k_1^{III}, k_2^{III}, k_3^{III}, \dots\}, \quad I_k^{IV} = \{-1, 0, k_1^{IV}, k_2^{IV}, k_3^{IV}, \dots\},$$

gde $1 \leq k_1^\alpha < k_2^\alpha < k_3^\alpha < \dots$, $\alpha \in \{III, IV\}$. Pri tome važi $I_k^\alpha \subset I_{k-1}^\alpha$, jer nova stanja ne mogu da se pojave posle interakcije.

Želimo da pokažemo da za svaku test funkciju $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ važi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon \partial_t \varphi)(x, t) + (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi)(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx &\approx 0, \\ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty ((\rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_t \varphi)(x, t) + (\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 \partial_x \varphi)(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \varphi)(x, 0) dx &\approx 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Uopštavamo dokaz iz Teoreme 7.1. Prvo delimo vremensku osu na podintervale oblika $[T_j, T_{j+1}]$, pri čemu su T_j , $j = 1, 2, \dots$ vremena interakcije između talasa i $T_0 := 0$. Neka je

$$Q_k := \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon \partial_t \varphi dx dt + \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi dx dt.$$

Q_k odgovara prvoj jednačini u (7.18) i vremenu između k -tog i $(k+1)$ -og skupa interakcija i važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon \partial_t \varphi dx dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \varphi dx dt = \sum_{k=0}^\infty Q_k.$$

I ovde ćemo vrednosti $x_\varepsilon \sim \varepsilon$ birati tako da suma snaga prilazećih talasa bude jednaka početnoj snazi rezultujućeg senka talasa (koristićemo Lemu 5.2). Pokazaćemo da je svaki izraz Q_k dovoljno mali (reda ε) iz čega će slediti da je jednačina (7.18)₁ zadovoljena. Pri tome ćemo zanemariti izraze koji odgovaraju krajevima intervala $[T_k, T_{k+1}]$ (jer će se oni skratiti međusobno ili sa drugim sabirkom iz (7.18)₁)

Neka su sa i i j označena dva susedna indeksa iz I_k^α . Odnos između njima odgovarajućih stanja iz S_k^α određuje tip talasa koji razdvaja ta stanja. Neka je brzina tog talasa označena sa $u_s(t) = c'(t)$, a snaga sa $\xi(t)$ i neka je središnje stanje senka talasa dano sa $(\rho_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$. Izraz Q_k je suma izraza oblika

$$C_{i,j}^k := \int_{T_k}^{T_{k+1}} (A_{i,j}(t) - B_{i,j}(t)) dt + \int_{T_k}^{T_{k+1}} \int_{c(t)-\frac{\varepsilon}{2}(t-T)-x_\varepsilon}^{c(t)+\frac{\varepsilon}{2}(t-T)+x_\varepsilon} \partial_t \rho_\varepsilon(t) \varphi(x, t) dx dt, \quad (7.19)$$

gde

$$\begin{aligned} A_{i,j}(t) &:= (\rho_i - \rho_\varepsilon(t)) \varphi\left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t-T) - x_\varepsilon, t\right) \left(c'(t) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\quad + (\rho_\varepsilon(t) - \rho_j) \varphi\left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t-T) + x_\varepsilon, t\right) \left(c'(t) + \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ B_{i,j}(t) &:= (\rho_i u_i - \rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t)) \varphi\left(c(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t-T) - x_\varepsilon, t\right) \\ &\quad + (\rho_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) - \rho_j u_j) \varphi\left(c(t) + \frac{\varepsilon}{2}(t-T) + x_\varepsilon, t\right). \end{aligned}$$

Drugi sabirak u $C_{i,j}^k$ se dobija korišćenjem Teoreme o divergenciji. Kako bismo dobili ocenu za $C_{i,j}^k$ ponavljamo postupak iz dokaza Teoreme 7.1 (ili Leme 4.3) i koristimo Lemu 5.2. Dobijamo

$$\begin{aligned} C_{i,j}^k &= \int_{T_k}^{T_{k+1}} 2 \left(\partial_t \rho_\varepsilon(t) \left(\frac{\varepsilon}{2}(t-T) + x_\varepsilon \right) + \frac{\varepsilon}{2} \rho_\varepsilon(t) \right) \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad + \int_{T_k}^{T_{k+1}} ((\rho_i - \rho_j) c'(t) - (\rho_i u_i - \rho_j u_j)) \varphi(c(t), t) dt \\ &\quad + \int_{T_k}^{T_{k+1}} 2 \rho_\varepsilon(t) (c'(t) - u_\varepsilon(t)) \left(\frac{\varepsilon}{2}(t-T) - x_\varepsilon \right) \partial_x \varphi(c(t), t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Specijalno, ako su stanja koja odgovaraju indeksima i i j razdvojena kontaktnim diskontinuitetom, važi $C_{i,j}^k = 0$, jer je on klasično rešenje i tačno zadovoljava sistem (7.18). U Slučaju III će svi talasi u rešenju biti senka talasi, dok su u Slučaju IV dva početna talasa kontaktni diskontinuiteti koji imaju poreklo u istoj tački. Prvi neće učestvovati u interakcijama (on daje $C_{-1,0}^k = 0$ za svako k), dok ćemo imati $C_{0,1}^{j-1} = 0$, pri čemu je T_j vreme interakcije između CD_2^1 i nekog senka talasa. Nakon te interakcije pojavljuće se izrazi oblika $C_{0,m}^s = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $m > 1$, $s \geq j$ koji odgovaraju senka talasu sa levim vakuumskim stanjem.

Primetite da su ovde skupovi početnih indeksa I_0^α formirani tako da indeksima i i j odgovaraju stanja (ρ_i, u_i) i (ρ_j, u_j) . Izuzetak su indeksi -1 i 0, jer se samo tada pojavljuje vakuum. U opštem slučaju, kada ne znamo na kom mestu će se pojaviti vakuumsko stanje, indeksima i i j dodeljujemo stanja (ρ_l, u_l) i (ρ_r, u_r) , pri čemu ne mora nužno da važi $i = l$ i/ili $j = r$. Ta činjenica ne menja ništa značajno u dokazu. Jedino bitno je da će svaki talas u rešenju doprineti greškom reda ε ili 0 (ako je kontaktni diskontinuitet). Dakle, zaključujemo da $C_{i,j}^k \lesssim \mathcal{O}(\varepsilon)$ važi za svako $i < j$ i svako $k = 1, 2, \dots$.

Uslov $\Delta Y_i \geq \sqrt[3]{\varepsilon}$ garantuje da će se najviše $\frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ interakcija dogoditi na kompaktnom nosaču test funkcije φ . Iz istog razloga će približno rešenje za svako t iz intervala $[T_k, T_{k+1}]$ sadržati najviše $\frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ talasa. Dakle, dobijamo

$$Q_k = \frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon^2}) \quad \text{kada } \varepsilon \rightarrow 0,$$

što znači da je izraz $\sum_k Q_k$ dovoljno mali, tj. reda $\sqrt[3]{\varepsilon}$. Primetite da ovde nije bilo dovoljno granicu definisati preko $\sqrt{\varepsilon}$ kao u Teoremi 7.1, jer se u slučaju kada je funkcija $u(x)$ rastuća za svako fiksirano t rešenje U^ε sastoji iz najviše jednog senka talasa, dok su svi ostali talasi kontaktni diskontinuiteti.

Zaključujemo da konstruisano približno rešenje zadovoljava prvu jednačinu u (7.1). Dokaz da zadovoljava drugu jednačinu je analogan (samo zamenjujemo ρ^ε sa $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$).

Dopustivost približnog rešenja sledi iz prekompresivnosti svakog senka talasa u intervalu $[T_k, T_{k+1}]$. \square

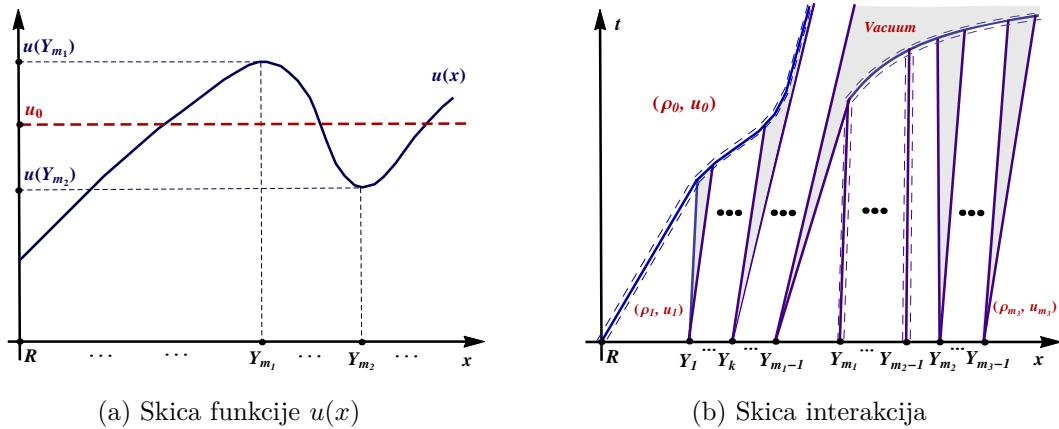
7.3.2. Opšti slučaj

Neka funkcija $u(x)$ ima konačno mnogo lokalnih ekstrema. Analiziraćemo slučaj kada $u(x)$ samo jednom menja monotonost na $x \geq R$, ali se analiza lako može uopštiti na slučaj sa više od jednog lokalnog ekstrema. Približno rešenje se može posmatrati kao kombinacija Slučajeva I-IV.

Pretpostavimo prvo da $u(x)$ dostiže lokalni ekstrem u tački Y_{m_1} koja pripada particiji $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ intervala $[R, \infty)$.

Neka je $(Y_{m_1}, u(Y_{m_1}))$ tačka lokalnog maksimuma. Ako je $u_0 \leq u(R)$, prvi deo približnog rešenja do prve interakcije je dat u obliku niza talasnih kombinacija sa dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom. Poslednja talasna kombinacija ima poreklo u tački $(Y_{m_1-1}, 0)$. Počev od tačke $(Y_{m_1}, 0)$ formira se približno rešenje kao u Slučaju III tako što se uzima $R = Y_{m_1}$ i $u_0 = u(Y_{m_1})$ u (7.2). Dakle, za dovoljno malo $t > 0$ približno rešenje je konstantno levo od kontaktnog diskontinuiteta sa poreklom u $(R, 0)$, sve do senka talasa koji ima poreklo u $(Y_{m_1}, 0)$ ono se sastoji iz niza kontaktnih diskontinuiteta, dok desno od tog senka talasa rešenje čini niz senka talasa.

Ako je $u_0 > u(R)$, približno rešenje do prve interakcije je kombinacija Slučajeva II i III. Razlika između ovog i slučaja $u_0 \leq u(R)$ je ta što je talas koji ima poreklo u $(R, 0)$ sada SDW_{0,1}, a ne kontaktni diskontinuitet. Taj senka talas pravi značajnu razliku između dva



Slika 7.3: Funkcija $u(x)$ menja monotonost ($u(x)$ ima lokalne maksimume u Y_{m_1} i Y_{m_2} i lokalni minimum u Y_{m_2} i važi $u_0 < u(Y_{m_1})$)

slučaja posle prve interakcije, jer će se sudsudati sa kontaktnim diskontinuitetima koji mu prilaze sa desne strane. Ilustracija ovog slučaja je data na Slici 7.3.

Slično, ako $u(x)$ dostiže lokalni minimum u $(Y_{m_1}, 0)$ i važi $u_0 \geq u(R)$, rešenje do prve interakcije je kombinacija Slučajeva III i II. To znači da je približno rešenje konstantno do $\text{SDW}_{0,1}$ sa poreklom u $(R, 0)$, a njega prati niz $\{\text{SDW}_{i,i+1}\}_{i=0}^{m_1-1}$. Počev od tačke $(Y_{m_1}, 0)$ približno rešenje čini niz talasnih kombinacija sa kontaktnim diskontinuitetima razdvojenim vakuumom. U drugom slučaju, kada je $u_0 < u(R)$, približno rešenje do prve interakcije je kombinacija Slučajeva IV i II. Sada umesto $\text{SDW}_{0,1}$ imamo kombinaciju $\text{CD}_1^0 + \text{Vac}_{0,1} + \text{CD}_2^1$ (ili $\text{CD}_{0,1}$ ako $u_0 = u_1$).

Slučaj kada tačka Y_{m_1} ne pripada particiji $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ intervala $[R, \infty)$ je sličan. Neka $u(x)$ dostiže lokalni ekstrem u $x = Y_{\max}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da

$$Y_{k-1} < Y_{\max} \leq Y_k, \quad Y_{k-1}, Y_k \in \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}. \quad (7.20)$$

Primetite da u slučaju kada Y_{\max} pripada particiji imamo $Y_{\max} = Y_k$. Iz (7.20) i činjenice da funkcija $u(x)$ dostiže lokalni maksimum sledi

$$u(Y_{\max}) \geq \max\{u(Y_{k-1}), u(Y_k)\} =: m.$$

Ako odaberemo Y_{m_1} tako da

$$Y_{m_1} = \begin{cases} Y_{k-1}, & \text{ako } m = u(Y_{k-1}) \\ Y_k, & \text{ako } m = u(Y_k), \end{cases}$$

tada se Y_{m_1} posmatra kao tačka u kojoj se dostiže lokalni maksimum. Ostatak analize je isti kao gore. Ako funkcija $u(x)$ ima lokalni minimum koji se dostiže u $x = Y_{\min}$, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da

$$Y_{k-1} < Y_{\min} \leq Y_k, \quad Y_{k-1}, Y_k \in \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$$

i $u(Y_{\min}) \leq \min\{u(Y_{k-1}), u(Y_k)\} =: l$. Ako je $Y_{\min} = Y_k$, tada $Y_{\min} \in \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$. Inače, $Y_{\min} \notin \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$. Tada uzimamo

$$Y_{m_1} = \begin{cases} Y_{k-1}, & \text{ako } l = u(Y_{k-1}) \\ Y_k, & \text{ako } l = u(Y_k) \end{cases}$$

i nastavljamo kao gore.

Napomena. Iz prethodne analize zaključujemo da izbor particije $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ ne utiče na oblik približnog rešenja posmatranog početnog problema. Drugim rečima, za konstrukciju približnog rešenja je dovoljno uzeti lokalni ekstrem po delovima konstantne funkcije $u^\varepsilon(x, 0)$ koja aproksimira $u(x)$.

Prethodno opisana kombinacija talasa će dati približno rešenje početnog problema (7.1, 7.2), što je sumirano u sledećoj teoremi.

TEOREMA 7.3 (Postojanje globalnog dopustivog približnog rešenja). *Neka su date funkcije $u(x), \rho(x) \in C_b([R, \infty)), \rho(x) > 0$ i neka $u(x)$ ima konačno mnogo lokalnih ekstrema. Pretpostavimo da je $\rho_0 > 0, u_0 \in \mathbb{R}$. Označimo sa $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}, Y_0 = R$ particiju intervala $[R, \infty)$ takvu da $C \sqrt[3]{\varepsilon} \geq Y_i - Y_{i-1} \geq \sqrt[3]{\varepsilon}$ za svako $i = 1, 2, \dots$ i konstantu $C \geq 1$. Tada za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji globalno približno rešenje $U^\varepsilon(x, t)$ problema (7.1, 7.2).*

Napomena. Teorema 7.3 će važiti i u slučaju sistema (5.17) sa $e(x) \in C_b([R, \infty))$ i $e(x) > 0$. Dodavanje komponente energije neće uticati na ponašanje približnog rešenja početnog problema, što sledi iz Leme 5.4.

DOKAZ. Kako je dokaz sličan kao i kod Teorema 7.1 i 7.2, tehničke detalje nećemo ponavljati. Na kompaktnom nosaču test funkcije φ može da se dogodi najviše $\frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ interakcija. Takođe, za svako $t > 0$ približno rešenje se sastoji iz najviše $\frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ talasa. Ti talasi su rešenja Rimanovog ili uopštenog Rimanovog problema i mogu biti kontaktni diskontinuiteti, prosti ili težinski senka talasi. Svaki kontaktni diskontinuitet tačno zadovoljava sistem (7.1), jer je klasično rešenje, dok svaki senka talas približno zadovoljava taj sistem i greška je reda ε . To znači da za svaki talas između dva uzastopna vremena interakcije T_k i T_{k+1} važi

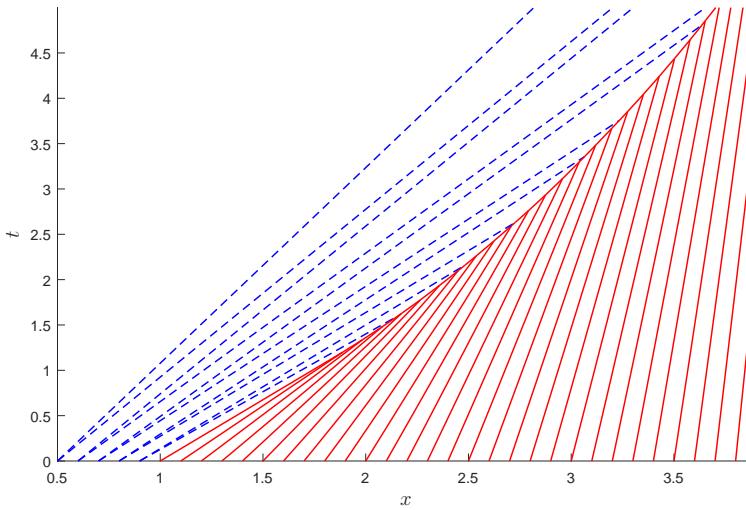
$$C_{i,j}^k \lesssim \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{kada } \varepsilon \rightarrow 0,$$

pri čemu je oznaka $C_{i,j}^k$ analogna onoj u (7.19). To znači da je ukupna greška dovoljno mala, jer koristeći oznake iz dokaza Teoreme 7.2 dobijamo

$$\sum_k Q_k = \frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} Q_k \lesssim \frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \frac{\text{const}(\varphi)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon}) \rightarrow 0 \quad \text{kada } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

Moguće je povući paralelu između slabog rešenja konstruisanog u [42] i približnog rešenja konstruisanog u ovom radu. Koristeći termine iz [42], našu proceduru možemo interpretirati na sledeći način. Gustina i brzina čestice koja je locirana u tački x_0 u početnom trenutku su date sa $(\rho, u)(x_0, 0)$. Cilj je opisati ponašanje (poziciju, brzinu i gustinu) svake čestice u nekom vremenu $t = t^*$. Naravno, čestica je postojala u $t = 0$ ili je nastala posle sudara u nekom trenutku pre t^* . Kako bismo to postigli prvo diskretizujemo početni uslov. Drugim rečima, pretpostavljamo da u početnom trenutku imamo skup čestica, od kojih se svaka ponaša različito. Na početku ih vidimo kao talasne frontove koji imaju poreklo na x -osi. One će se sudarati i nakon svakog sudara formirati jedan senka talas (sudaranjem formiraju jednu veću česticu) koji predstavlja klaster (skup čestica). U [42] je pozicija tog klastera u nekom vremenu data preko njegovog centra mase koji sadrži informacije o svim česticama koje čine taj klaster (to je posledica zakona održanja mase i količine kretanja). Ovde su pozicija, brzina i gustina klastera (tj. rezultujućeg senka talasa) posle sudara određene samo osobinama čestica koje učestvuju u sudaru. To je jedna od prednosti naše procedure. Pored toga, metod dat u [42] se ne može primeniti u slučaju nekih drugih sistema zakona održanja, dok je procedura korišćena u ovom radu univerzalna i njena primena na sistem gasne dinamike bez pritiska je samo prvi korak u razvoju algoritma za konstrukciju neograničenih rešenja sistema zakona održanja sa proizvoljnim početnim uslovom.



Slika 7.4: Interakcije talasa u približnom rešenju problema (7.1, 7.21).

Primeri

Kada je funkcija $u(x)$ rastuća i u nekim slučajevima kada je opadajuća može se odrediti eksplicitan oblik približnog rešenja. Međutim, u opštem slučaju će redosled interakcija zavisiti i od oblika funkcije $\rho(x)$ i vrednosti u_0 i $\rho_0 > 0$ u početnom uslovu (7.2).

PRIMER 7.3. Posmatramo sistem (7.1) sa početnim uslovom

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 0.2, & x \leq 0.5 \\ 1, & x > 0.5, \end{cases} \quad u(x, 0) = \begin{cases} \arctg(0.5), & x \leq 0.5 \\ \arctg(x), & 0.5 < x \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases} \quad (7.21)$$

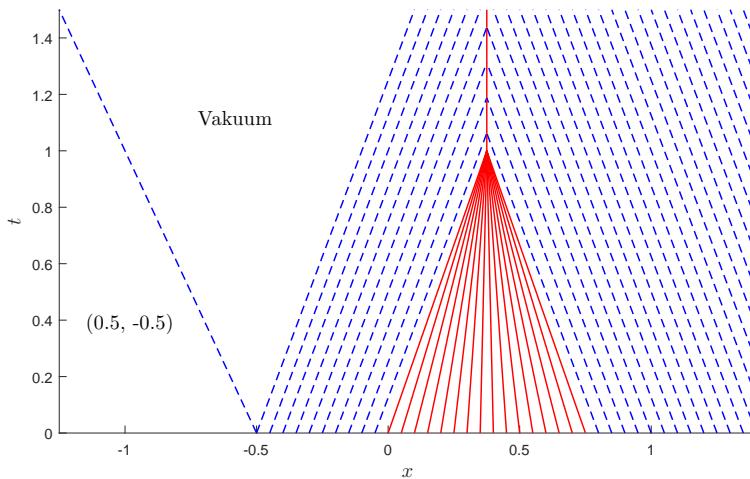
Ovo je primer kada funkcija $u(x)$ ima lokalni maksimum (videti Sliku 7.4²). Približno rešenje je konstantno do kontaktnog diskontinuiteta sa poreklom u $(0.5, 0)$ kog prati niz kombinacija sa dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom, a zatim i niz senka talasa. Kontaktni diskontinuiteti prilaze i sudaraju se sa senka talasima. Iz tih interakcija se formira jedan senka talas koji se prostire nekonstantnom brzinom i koji razdvaja niz kontaktnih diskontinuiteta sa leve strane i niz prostih senka talasa sa desne strane. Sa Slike 7.4 se jasno vidi da je limes komponente brzine u približnom rešenju funkcija koja je prvo konstantna, zatim rastuća, a potom opadajuća. U ρ komponenti tog limesa se pojavljuje težinski delta udarni talas sa nosačem koji odgovara frontu senka talasa koji nastaje iz interakcija. ■

PRIMER 7.4. Neka je dat problem (7.1) sa početnim uslovom

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (0.5, -0.5) & x \leq -0.5 \\ (0.5, u(x)), & x > -0.5, \end{cases} \quad u(x) = \begin{cases} 0.4 & x \leq 0 \\ 0.4 - x, & 0 < x \leq 0.8 \\ -0.4, & x > 0.8. \end{cases} \quad (7.22)$$

Kao što se može videti na Slici 7.5 približno rešenje za $t < 1$ se sastoji iz talasne kombinacije CD+Vac+CD koju prati niz kontaktnih diskontinuiteta, zatim niz senka talasa (taj deo odgovara intervalu u kom je $u(x)$ linearno opadajuća funkcija), pa ponovo niz kontaktnih diskontinuiteta. U vremenu $t = 1$ se događa istovremena interakcija između svih senka talasa. To znači da dolazi do akumuliranja mase iz linearno opadajućeg intervala $[0, 0.8]$ sve do $t = 1$ kada se masa iz tog intervala sabija u jednu tačku i dolazi do pojave Dirakove delta funkcije, tj. do eksplozije C^1 -rešenja (tada

²Plavom isprekidanim linijom su označeni kontaktni diskontinuiteti, a crvenom senka talasi.



Slika 7.5: Interakcije između talasa u približnom rešenju problema (7.1, 7.22) do vremena $t = 1.5$

karakteristike počinju da se seknu). Jasno je da približno rešenje u fiksiranoj tački neće biti jednak C^1 -rešenju u toj tački zbog prisustva senka talasa male snage. Međutim, kasnije će biti pokazano da približno rešenje konvergira u L_{loc}^1 ka C^1 -rešenju tamo gde ono postoji (videti Teoremu 8.5). Dokaz se zasniva na činjenici da važi zakon održanja mase, a razliku između dva rešenja možemo objasniti na sledeći način. U glatkom rešenju masa između dve karakteristike ostaje konstantna do trenutka kada se one preseku, što znači da gustina mase između te dve karakteristike raste sa vremenom ako se one približavaju jedna drugoj. U približnom rešenju gustina ostaje konstantna između dva prilazeća senka talasa, a ostatak mase se akumulira u senku talasu kroz njegovu snagu koja raste sa vremenom.

Napomenimo da su u ovom slučaju u oblastima u kojima se pojavljuju nizovi kontaktnih diskontinuiteta funkcije $u(x)$ i $\rho(x)$ konstantne. Kontaktni diskontinuiteti će razdvajati ista stanja, pa njihova interakcija sa senka talasima neće promeniti brzinu i snagu senka talasa. Lako se može pokazati da to uvek važi. Takođe, u ovom slučaju sve interakcije rezultiraju prostim senka talasima, jer je $\rho(x, 0)$ konstantna funkcija. ■

Kao što je već rečeno, prilikom konstrukcije približnog rešenja mora se uzeti u obzir da su moguće odvojene ali istovremene interakcije između talasa. Dovoljan uslov da bi se to dogodilo je da je funkcija $u(x)$ linearno opadajuća (ali ne strogo) i da je $\rho(x)$ konstantna na intervalima na kojima je $u(x)$ strogo opadajuća.

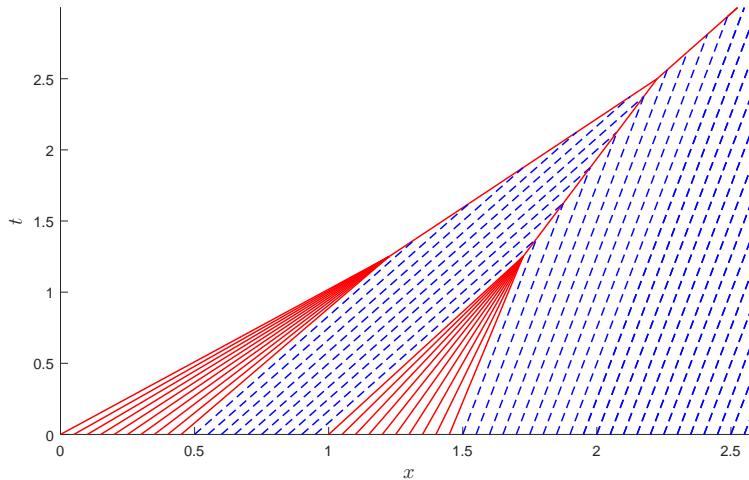
PRIMER 7.5. Neka su funkcije $u(x)$ i $\rho(x)$ date sa

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - 0.8x, & 0 < x \leq 0.5 \\ 0.6, & 0 < x \leq 1, \quad \rho(x) = 0.2. \\ 1.4 - 0.8x, & 1 < x \leq 1.5 \\ 0.2, & x > 1.5 \end{cases}$$

Posmatramo problem (7.1) sa početnim uslovom

$$(\rho(x, 0), u(x, 0)) = \begin{cases} (0.2, 1), & x \leq 0 \\ (\rho(x), u(x)), & x > 0. \end{cases} \quad (7.23)$$

Kao što se vidi na Slici 7.6, približno rešenje se sastoji iz nizova kontaktnih diskontinuiteta i senka talasa. Svi senka talasi nastali u $t = 0$ će se sudsariti u $t = 1.25$ u dve odvojene interakcije. Rezultat svake od dve interakcije je novi prost senka talas. Dva senka talasa formirana u $t = 1.25$ će se sudsarati



Slika 7.6: Dve odvojene interakcije koje se dešavaju u isto vreme u približnom rešenju problema (7.1, 7.23).

sa kontaktnim diskontinuitetima koji im prilaze sa obe strane, a zatim će se sudsuditi međusobno u $t = 2.5$ kada će biti formiran jedan novi prost senka talas koji će se prostirati brzinom $c = 0.6$. Slično kao u prethodnom primeru, glatko rešenje postoji do $t = 1.25$ kada karakteristike počinju da se sekut.

7.3.3. Disipacija energije kao posledica interakcije između talasa

U nastavku ćemo koristeći rezultat iz Poglavlja 5.1 analizirati promenu matematičke entropije (ili disipaciju energije) koja nastaje kao posledica interakcija između talasa. Pret-hodno smo pokazali da je kod sistema (7.1) produkcija energije u vremenu t kod senka talasa koji razdvaja stanja U_l i U_r označena sa $D_{l,r}(t)$ i data u (5.16) nepozitivna i neopadajuća funkcija od vremena. Znamo da je energija očuvana na svakom kontaktnom kontinuitetu i u oblastima gde je rešenje glatko.

Napomena. Primetite da u slučaju kada je $\rho_l = \rho_r = 0$ važi $D_{l,r}(t) = 0$ za svako $t \geq 0$. Ako je $\rho_l \neq 0, \rho_r = 0$, brzina senka talasa $u_s(t)$ je rastuća funkcija takva da $\lim_{t \rightarrow \infty} u_s(t) = u_l$, iz čega sledi $\lim_{t \rightarrow \infty} D_{l,r}(t) = 0$. Konačno, ako je $\rho_r \neq 0, \rho_l = 0$, brzina senka talasa $u_s(t)$ je opadajuća funkcija takva da $\lim_{t \rightarrow \infty} u_s(t) = u_r$, pa sledi $\lim_{t \rightarrow \infty} D_{l,r}(t) = 0$.

Posmatramo prvo interakciju između wSDW _{l,r} i CD₁^r u vremenu $t = T_1$. To je tip interakcije koji se javlja u Slučaju I kada je početna funkcija $u(x)$ rastuća i važi $u_0 > u(R)$. Producija energije kod wSDW _{l,r} i CD₁^r pre njihove interakcije je jednaka

$$D_1(T_1^-) = -\frac{1}{2}(\rho_l(u_l - u_s(T_1^-))^3 + \rho_r(u_s(T_1^-) - u_r)^3),$$

dok je ona posle interakcije jednaka

$$D_1(T_1^+) = \frac{1}{2}\rho_l(u_s(T_1^+) - u_l)^3.$$

Kako iz konstrukcije približnog rešenja sledi $u_s(T_1^-) = u_s(T_1^+)$ dobijamo da važi

$$\Delta D_1(T_1) := D_1(T_1^+) - D_1(T_1^-) = \frac{1}{2}\rho_r(u_s(T_1) - u_r)^3 > 0.$$

Iz veze između producije i stope disipacije energije koja je data u (4.27) zaključujemo da se stopa disipacije energije približnog rešenja povećava posle interakcije između wSDW _{l,r} i CD₁ ^{r} . Rezultujući talas wSDW _{l} ^{r} se dalje sudara sa CD₂ ^{$r+1$} u vremenu $t = T_2$. Tada je produkcija energije koja odgovara talasima koji učestvuju u interakciji jednaka

$$D_2(T_2^-) = \frac{1}{2}\rho_l(u_s(T_2^-) - u_l)^3,$$

dok je produkcija energije koja odgovara rezultujućem senku talasu data sa

$$D_2(T_2^+) = -\frac{1}{2}(\rho_l(u_l - u_s(T_2^+))^3 + \rho_{r+1}(u_s(T_2^+) - u_{r+1})^3).$$

U ovom slučaju važi obrnuto, stopa disipacije energije se smanjuje posle interakcije, jer

$$\Delta D_2(T_2) = -\frac{1}{2}\rho_{r+1}(u_s(T_2) - u_{r+1})^3 < 0.$$

Dalje, posmatramo interakciju između wSDW _{l,m} i wSDW _{m,r} . Neka se talas wSDW _{l,m} prostire brzinom $u_{s1}(t)$ i ima snagu $\xi_1(t)$, dok wSDW _{m,r} putuje brzinom $u_{s2}(t)$, a njegova snaga je označena sa $\xi_2(t)$. Početna brzina rezultujućeg wSDW _{l,r} je jednaka

$$u_s := u_s(T) = \alpha u_{s1} + (1 - \alpha)u_{s2}, \quad \text{gde } \alpha = \frac{\xi_1(T^-)}{\xi_1(T^-) + \xi_2(T^-)}, \quad u_{si} := u_{si}(T^-).$$

Tada

$$\begin{aligned} D(T^-) &= -\frac{1}{2}(\rho_m(u_{s1} - u_m)^3 + \rho_l(u_l - u_{s1})^3 + \rho_r(u_{s2} - u_r)^3 + \rho_m(u_m - u_{s2})^3), \\ D(T^+) &= -\frac{1}{2}(\rho_r(u_s - u_r)^3 + \rho_l(u_l - u_s)^3), \\ \Delta D(T) &= -\frac{1}{2}(u_{s1} - u_{s2}) \left(\alpha \rho_r((u_s - u_r)^2 + (u_s - u_r)(u_{s2} - u_r) + (u_{s2} - u_r)^2) \right. \\ &\quad - \rho_m((u_{s1} - u_m)^2 - (u_{s1} - u_m)(u_m - u_{s2}) + (u_m - u_{s2})^2) \\ &\quad \left. + (1 - \alpha)\rho_l((u_l - u_s)^2 + (u_l - u_s)(u_l - u_{s1}) + (u_l - u_{s1})^2) \right). \end{aligned}$$

Vidimo da znak $\Delta D(t)$ zavisi od $\rho(x)$ i $u(x)$, pa u opštem slučaju ne možemo doneti zaključak o promeni energije posle sudara između dva senka talasa. Međutim, to je moguće ako je $\rho_l = \rho_m = \rho_r$.

PRIMER 7.6. Posmatramo početni problem (7.1, 7.2) sa opadajućom funkcijom $u(x)$ takvom da $u_0 > u(R)$ i $\rho(x) = \rho_0$ za sve $x > R$. U tom slučaju SDW _{$i,i+1$} koji je nastao u $t = 0$ putuje konstantnom brzinom $y_{i,i+1} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$. Rezultat interakcije u vremenu $t = T$ između SDW _{$i,i+1$} i SDW _{$i+1,i+2$} je SDW _{$i,i+2$} sa konstantom brzinom i snagom koje su date sa

$$y_{i,i+2} = \frac{u_i + u_{i+2}}{2}, \quad \xi_{i,i+2}t = \rho_0(u_i - u_{i+2})t, \quad t \geq T.$$

Indukcijom se lako može pokazati da je približno rešenje posmatranog problema po delovima konstantna funkcija sa prekidima na prostim senka talasima koji razdvajaju konstantna stanja, tj. u ovom slučaju svi talasni frontovi su prave. Posmatramo interakciju između SDW _{l,m} i SDW _{m,r} u $t = T$. Producija energije pre ($t = T^-$) i posle interakcije ($t = T^+$) koja odgovara samo talasima koji učestvuju ili su rezultat interakcije je jednaka

$$D(T^-) = -\frac{\rho_l}{8}((u_l - u_m)^3 + (u_m - u_r)^3), \quad D(T^+) = -\frac{\rho_0}{8}(u_l - u_r)^3.$$

Može se pokazati da se stopa disipacije energije približnog rešenja smanjuje posle sudara, tj. važi

$$\Delta D(T) = -\frac{3}{8}\rho_l(u_l - u_r)(u_l - u_m)(u_m - u_r) < 0.$$

Primetite da je bilo dovoljno posmatrati samo talase koji učestvuju u interakciji, jer će svi ostali nastaviti da se nesmetano kreću na isti način (sa istom brzinom i snagom) kao pre interakcije, pa će promena stope disipacije energije koja odgovara tim talasima biti konstantna i u $t = T$. To znači da će se izrazi koji odgovaraju talasima koji se ne sudaraju u $t = T$ skratiti u $\Delta D(T)$. ■

Napomena. Iz analize u Poglavlju 5.1 zaključujemo da prethodni rezultati važe i u slučaju sistema (5.17) i entropijskog para

$$\eta(\rho, u, e) = -\rho e, \quad Q(\rho, u, e) = -\rho ue.$$

Neka je sa η označena matematička entropija sistema. Označimo sa

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-M}^M \eta(U(x, t)) dx$$

ukupnu entropiju u vremenu t rešenja $U(x, t)$. Pri tome se ograničavamo na interval $[-M, M]$, gde je $M > 0$ dovoljno veliko kako bismo izbegli mogućnost da je ukupna entropija beskonačna u konačnom vremenu. U nastavku ćemo pokazati da ukupna entropija opada posle interakcije između dva talasa i da to važi u slučaju oba sistema gasne dinamike bez pritiska, (7.1) i (5.17).

TEOREMA 7.4. *Posmatramo sistem (7.1) (ili (5.17)). Ukupna entropija opada posle interakcije između dva senka talasa.*

DOKAZ. Prepostavimo da se dva senka talasa sudaraju u $t = T$. Levi SDW _{l,m} se prostire brzinom $u_{s_l}(t)$ i ima snagu $\xi_l(t)$, dok se desni SDW _{m,r} prostire brzinom $u_{s_r}(t)$ i snaga mu je označena sa $\xi_r(t)$. (Odgovarajuće specifične unutrašnje energije su označene sa $e_{s_l}(t)$ i $e_{s_r}(t)$.) Brzina i snaga rezultujućeg senka talasa SDW _{l,r} su označene sa $u_s(t)$ i $\xi(t)$ (i unutrašnja energija je $e_s(t)$). Ukupna entropija u vremenu $t < T$ je označena sa $\mathcal{E}^-(t)$, dok je ukupna entropija u $t > T$ (koja odgovara SDW _{l,r}) označena sa $\mathcal{E}^+(t)$.

Posmatramo prvo sistem (7.1) i entropijski par

$$\eta(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^2, \quad Q(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^3.$$

Tada

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+(T+0) - \mathcal{E}^-(T-0) &= \frac{1}{2}(\xi(T)u_s^2(T) - \xi_l(T)u_{s_l}^2(T) - \xi_r(T)u_{s_r}^2(T)) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\xi_l(T)\xi_r(T)}{\xi(T)}(u_{s_l}(T) - u_{s_r}(T))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Gornja nejednakost sledi iz relacija (7.10) i (7.11).

U slučaju sistema (5.17) i entropijskog para

$$\eta(\rho, u, e) = \rho(R(u) + S(e)), \quad Q(\rho, u, e) = \rho(R(u) + S(e)),$$

gde $R''(x) \geq 0$, $S'(x) \leq 0$ i $S''(x) \geq 0$ za svako x važi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+(T+0) - \mathcal{E}^-(T-0) &= \xi(T) \left(R(u_s(T)) - \frac{\xi_l(T)}{\xi(T)}R(u_{s_l}(T)) - \frac{\xi_r(T)}{\xi(T)}R(u_{s_r}(T)) \right. \\ &\quad \left. + S(u_s(T)) - \frac{\xi_l(T)}{\xi(T)}S(u_{s_l}(T)) - \frac{\xi_r(T)}{\xi(T)}S(u_{s_r}(T)) \right). \end{aligned}$$

Koristeći relaciju

$$e_s(T) = \frac{\xi_l(T)}{\xi(T)} e_{s_l}(T) + \frac{\xi_r(T)}{\xi(T)} e_{s_r}(T) + \frac{1}{2} \frac{\xi_l(T)\xi_r(T)}{\xi^2(T)} (u_{s_l}(T) - u_{s_r}(T))^2$$

koja sledi iz neprekidnosti energije u $t = T$,

$$\xi(T) \left(\frac{u_s^2(T)}{2} + e_s(T) \right) = \xi_l(T) \left(\frac{u_{s_l}^2(T)}{2} + e_{s_l}(T) \right) + \xi_r(T) \left(\frac{u_{s_r}^2(T)}{2} + e_{s_r}(T) \right),$$

kao i osobine funkcija R i S dobijamo

$$\begin{aligned} R(u_s(T)) &\leq \frac{\xi_l(T)}{\xi(T)} R(u_{s_l}(T)) + \frac{\xi_r(T)}{\xi(T)} R(u_{s_r}(T)) \\ S(e_s(T)) &\leq S \left(\frac{\xi_l(T)}{\xi(T)} e_{s_l}(T) + \frac{\xi_r(T)}{\xi(T)} e_{s_r}(T) \right) \leq \frac{\xi_l(T)}{\xi(T)} S(u_{s_l}(T)) + \frac{\xi_r(T)}{\xi(T)} S(u_{s_r}(T)). \end{aligned}$$

Kako je $\xi(T) > 0$ važi $\mathcal{E}^+(T+0) - \mathcal{E}^-(T-0) \leq 0$. \square

Napomena. Interakcija između senka talasa i kontaktnog diskontinuiteta je specijalan slučaj Teoreme 7.4. U tom slučaju je dovoljno uzeti da je snaga talasa koji odgovara kontaktnom diskontinuitetu jednaka nuli. Tada se ukupna entropija ne menja posle interakcije.

7.4. Dopustivo rešenje uopštenog Rimanovog problema

Algoritam za konstrukciju približnog rešenja početnog problema prethodno opisan se u prilagođenoj formi može primeniti i u slučaju kada ρ komponenta u početnom uslovu sadrži Dirakovu delta funkciju, tj. pod pretpostavkom da se velika koncentracija mase dogodila u nekoj početnoj tački. Posmatramo početni uslov oblika

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < X \\ (\rho_1, u_1), & x > X \end{cases} + (\xi_\delta, 0) \delta_{(X, 0)}, \quad (7.24)$$

gde $\rho_0, \rho_1 > 0$, $\xi_\delta > 0$.

Algoritam za konstrukciju približnog rešenja problema (7.1, 7.24) će se zasnivati na aproksimaciji početnog uslova po delovima konstantnom funkcijom

$$U^\mu(x, 0) := (\rho^\mu, u^\mu)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < X - \frac{\mu}{2} \\ (\frac{\xi_\delta}{\mu}, u_\delta), & X - \frac{\mu}{2} < x < X + \frac{\mu}{2} \\ (\rho_1, u_1), & x > X + \frac{\mu}{2} \end{cases} \quad (7.25)$$

i praćenju talasa koji su rešenja početnog problema (7.1, 7.25), kao i rešenja problema interakcije. Talasi koji su rešenja dva Rimanova problema iz (7.25) se mogu sudsuditi, a njihova interakcija će imitirati prisustvo delta funkcije u originalnom početnom uslovu (7.24). Iako je vrednost u_δ iz (7.25) veštački dodata i rešenje će zavisiti od njenog odabira, odgovarajući uslovi dopustivosti bi trebalo da eliminišu nefizička rešenja i samim tim odrede u_δ .

Ista procedura se može primeniti i u slučaju 3×3 sistema (5.17) sa početnim uslovom oblika

$$(\rho, u, e)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_0, u_0, e_0), & x < X \\ (\rho_1, u_1, e_1), & x > X \end{cases} + (\xi_\delta, 0, 0) \delta_{(X, 0)}, \quad \xi_\delta > 0. \quad (7.26)$$

U tom slučaju bi u aproksimaciji početnog uslova dodavali veštačku komponentu $e_\delta > 0$ u središnje stanje na isti način kao što je to urađeno sa u_δ u (7.25).

$$U^\mu(x, 0) := (\rho^\mu, u^\mu, e^\mu)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_0, u_0, e_0), & x < X - \frac{\mu}{2} \\ (\frac{\xi_\delta}{\mu}, u_\delta, e_\delta), & X - \frac{\mu}{2} < x < X + \frac{\mu}{2} \\ (\rho_1, u_1, e_1), & x > X + \frac{\mu}{2}. \end{cases}$$

ALGORITAM ZA (7.1, 7.24):

Neka je fiksirano dovoljno malo $\mu > 0$ i neka je vrednost u_δ data.

Lokalno rešenje problema (7.1, 7.25) je po delovima neprekidna funkcija sa prekidima prvog reda na talasima koji su rešenja dva Rimanova problema. Ta rešenja su jedinstveno određena odnosom između u_0 , u_δ i u_1 . Prvi talas ili talasna kombinacija razdvaja stanja (ρ_0, u_0) i $(\frac{\xi_\delta}{\mu}, u_\delta)$ i ima poreklo u $(X - \frac{\mu}{2}, 0)$, dok drugi talas ili talasna kombinacija razdvaja stanja $(\frac{\xi_\delta}{\mu}, u_\delta)$ i (ρ_1, u_1) i ima poreklo u $(X + \frac{\mu}{2}, 0)$. Parametar $\varepsilon > 0$ iz definicije senka talasa zadovoljava uslov $\varepsilon \leq \mu^\alpha$, $\alpha > 1$. Na taj način se formiraju senka talasi drugog reda. Talasi koji su rešenja dva Rimanova problema se mogu sudsariti ali će svaka interakcija uključivati bar jedan senka talas (kontaktni diskontinuiteti se ne mogu sudsarati međusobno). Maksimalan broj interakcija je dva i on zavisi od odnosa između u_0 , u_1 i u_δ .

Označimo sa $U^\mu = (\rho^\mu, u^\mu)$ funkciju konstruisanu gore datim algoritmom. Dokaz da U^μ jeste dopustivo približno rešenje problema (7.1, 7.24) je isti kao dokazi Teorema 7.1-7.3. Distributivno rešenje tog problema ćemo dobiti puštanjem parametra μ da ide u nulu u U^μ .

Kako oblik približnog rešenja U^μ zavisi od u_δ razlikovaćemo dva slučaja: A: $u_0 \leq u_1$ i B: $u_0 > u_1$ i njihove podslučajeve.

Približno rešenje problema (5.17, 7.26) i podela na slučajeve neće zavisiti od odabira vrednosti e_δ , pa analiza koja sledi važi i u tom slučaju.

Slučaj A

Podslučaj A₁: $u_\delta < u_0 < u_1$.

Približno lokalno rešenje se sastoji iz prostog senka talasa SDW_{0,δ} koji razdvaja stanja U_0 i U_δ , i dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom. Nosač senka talasa se nalazi na

pravoj $x = X - \frac{\mu}{2} + y_{0,\delta}t$, gde je sa $y_{0,\delta} := \frac{u_0\sqrt{\rho_0} + u_\delta\sqrt{\frac{\xi_\delta}{\mu}}}{\sqrt{\rho_0} + \sqrt{\frac{\xi_\delta}{\mu}}}$ označena njegova brzina. Vrednost

$y_{0,\delta}$ je veća od koeficijenta pravca prvog kontaktnog diskontinuiteta, što znači da će se ta dva talasa sudsariti u vremenu $t = T_1 = \frac{\mu}{y_{0,\delta} + \frac{\varepsilon}{2} - u_\delta} \sim \sqrt{\mu}$ koje je rešenje jednačine

$$X - \frac{\mu}{2} + y_{0,\delta}t + \frac{\varepsilon}{2}t = X + \frac{\mu}{2} + u_\delta t.$$

Pri tome koristimo da spoljašnja linija senka talasa $x = X - \frac{\mu}{2} + y_{0,\delta}t + \frac{\varepsilon}{2}t$ ustvari prva preseca pravu $x = X + \frac{\mu}{2} + u_\delta t$ (kontaktni diskontinuitet). Međutim, važi $\varepsilon \leq \mu^\alpha$, $\alpha > 1$ i $\rho_\varepsilon(t) \sim \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, pa se izraz $\frac{\varepsilon}{2}t$ iz gornje jednačine može zanemariti (videti Lemu 7.1).

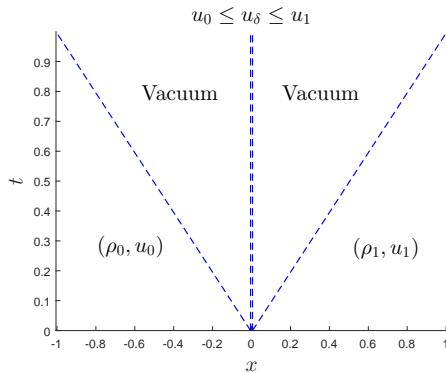
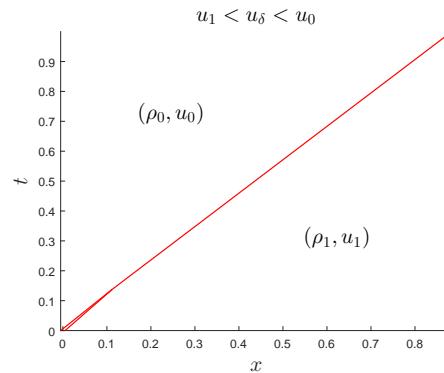
Rezultujući senka talas wSDW₀^δ se prostire brzinom i snagom koje su date sa

$$\xi(t) = \sqrt{\xi_{0,\delta}^2 T_1^2 + 2\rho_0 \xi_{0,\delta} T_1 (u_0 - y_{0,\delta})(t - T_1)}, \quad u_s(t) = u_0 - \frac{\xi_{0,\delta}}{\xi(t)}(u_0 - y_{0,\delta}),$$

gde $\xi_{0,\delta} := \sqrt{\rho_0 \frac{\xi_\delta}{\mu}}(u_0 - u_\delta)$. Funkcije $\xi(t)$ i $u_s(t)$ su neopadajuće, $\xi(t)$ je nenegativna i $u_s(t) \rightarrow u_0 < u_1$ kada $t \rightarrow \infty$. To znači da se $wSDW_0^\delta$ neće sudsiti sa drugim kontaktnim diskontinuitetom u talasnoj kombinaciji. Primetite da $y_{0,\delta} \rightarrow u_\delta$ i $\xi_{0,\delta} T_1 \rightarrow \xi_\delta$ kada $\mu \rightarrow 0$. Lako se može pokazati da je distributivni limes približnog rešenja kada $\mu \rightarrow 0$ dat sa

$$(\rho, u)(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < c(t) \\ (0, \frac{x-X}{t}), & c(t) < x < X + u_1 t + (\xi(t), 0)\delta(x - c(t)), \\ (\rho_1, u_1), & x > X + u_1 t \end{cases} \quad (7.27)$$

pri čemu su $\xi(t)$ i $u_s(t)$ date sa (5.13) gde su U_l i U_r zamenjeni sa U_0 i $(0, \frac{x-X}{t})$, redom i važi $c(t) = X + \int_0^t u_s(s) ds$.

Slika 7.7: Podslučaj A_2 Slika 7.8: Podslučaj B_2

Podslučaj A_2 : $u_0 \leq u_\delta \leq u_1$.

Ovaj podslučaj je ilustrovan na Slici 7.7.

Do prve interakcije približno rešenje se sastoji iz talasne kombinacije CD + Vac + CD sa poreklom u $(X - \frac{\mu}{2}, 0)$ koju prati talasna kombinacija koja ima poreklo u $(X + \frac{\mu}{2}, 0)$,

$$U^\mu(x, t) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < X - \frac{\mu}{2} + u_0 t \\ (0, \frac{x-X}{t}), & -\frac{\mu}{2} + u_0 t < x - X < -\frac{\mu}{2} + u_\delta t \\ (\frac{\xi_\delta}{\mu}, u_\delta), & -\frac{\mu}{2} + u_\delta t < x - X < \frac{\mu}{2} + u_\delta t \\ (0, \frac{x-X}{t}), & \frac{\mu}{2} + u_\delta t < x - X < \frac{\mu}{2} + u_1 t \\ (\rho_1, u_1), & x > X + \frac{\mu}{2} + u_1 t. \end{cases} \quad (7.28)$$

Ako je $u_0 < u_\delta < u_1$, distributivni limes približnog rešenja datog sa (7.28) je kombinacija dva kontaktna diskontinuiteta i delta udarnog talasa koji se nalazi između njih sa nosačem na $x = X + u_\delta t$. Ako je $u_0 = u_\delta = u_1$, dobijamo specijalan oblik rešenja u obliku delta udarnog talasa koji se prostire karakterističnom brzinom $u_0 = u_1$ i naziva se delta kontaktni diskontinuitet.

Podslučaj A_3 : $u_0 < u_1 < u_\delta$.

Približno rešenje do prve interakcije se sastoji iz talasne kombinacije sa dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom koju prati prost senka talas koji razdvaja stanja U_δ i $U_1 = (\rho_1, u_1)$. U $T_1 = \frac{\mu}{u_\delta - y_{\delta,1}} \sim \sqrt{\mu}$, gde $y_{\delta,1} := \frac{u_\delta \sqrt{\frac{\xi_\delta}{\mu} + u_1 \sqrt{\rho_1}}}{\sqrt{\frac{\xi_\delta}{\mu} + \sqrt{\rho_1}}}$ drugi kontaktni diskontinuitet

iz talasne kombinacije čiji je nagib u_δ se sudara sa senka talasom. Rezultujući senka talas se prostire ne-konstantnom brzinom $u_s(t)$ koja raste sa t i zadovoljava $u_s(t) \rightarrow u_1$ kada $t \rightarrow \infty$. Kako je $u_1 > u_0$, prvi kontaktni diskontinuitet se neće sudariti sa senka talasom. Dobijamo da se distributivni limes približnog rešenja sastoji iz kontaktnog diskontinuiteta koji razdvaja U_0 i vakuumsko stanje i delta udarnog talasa koji razdvaja vakuum i stanje U_1 , slično kao u (7.27).

Slučaj B

Podslučaj B₁: $u_\delta < u_1 < u_0$.

Kao i u podslučaju A₁, približno rešenje se sastoji iz prostog senka talasa SDW_{0,δ} koga prate dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom. Talas SDW_{0,δ} se sudara sa prvim kontaktnim diskontinuitetom u $t = T_1$ i iz te interakcije nastaje wSDW₀^δ sa brzinom $u_s(t)$ koja teži u_0 kada $t \rightarrow \infty$. Važi $u_0 > u_1$, što znači da će rezultujući senka talas wSDW₀^δ dostići brzinu veću od brzine drugog kontaktnog diskontinuiteta sa koeficijentom pravca u_1 i u vremenu $t = T_2$ se sudariti sa njim. Rezultat te interakcije je senka talas wSDW_{0,1} koji razdvaja stanja U_0 i U_1 , redom. Brzina tog senka talasa je rastuća funkcija, pa sledi $T_2 < \frac{\mu}{y_{0,\delta} - u_1} \sim \sqrt{\mu} \rightarrow 0$ kada $\mu \rightarrow 0$. To znači da će se obe interakcije dogoditi u $\sqrt{\mu}$ -vremenu, pa će distributivni limes približnog rešenje biti jednak

$$U(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < c(t) \\ U_1, & x > c(t) \end{cases} + (\xi(t), 0)\delta(x - c(t)), \quad (7.29)$$

pri čemu su $\xi(t)$ i $u_s(t)$ date sa (5.13), gde su U_l i U_r zamenjeni sa U_0 i U_1 , redom i $c(t) = X + \int_0^t u_s(s)ds$. U ovom slučaju važi $c(0) = u_\delta < u_1 < u_0$, pa sledi da rešenje (7.29) nije prekompresivno.

Podslučaj B₂: $u_1 \leq u_\delta \leq u_0$ i bar jedna nejednakost je strogā.

Približno rešenje ovog problema je dato u obliku senka talasa koji razdvaja U_0 i U_1 , što sledi iz Leme 5.2.

Isti rezultat se dobija algoritmom za konstrukciju približnog rešenja koji je prethodno dat. Rešenje se sastoji iz dva prekompresivna prosta senka talasa. Jedan razdvaja stanja U_0 i $(\frac{\xi_\delta}{\mu}, u_\delta)$, a drugi $(\frac{\xi_\delta}{\mu}, u_\delta)$ i U_1 . Ta dva talasa će se sudariti u $T = \frac{\mu}{y_{0,\delta} - y_{\delta,1}} \sim \sqrt{\mu}$, jer je brzina levog $y_{0,\delta}$ veća od brzine desnog $y_{\delta,1}$. Odgovarajuće snage dva senka talasa su date sa $\xi_{0,\delta}T$ i $\xi_{\delta,1}T$. Početna brzina $u_s := u_s(T+0)$ i snaga $\xi_s := \xi(T+0)$ rezultujućeg prekompresivnog senka talasa su jednake

$$u_s = \frac{y_{0,\delta}\xi_{0,\delta}T + y_{1,\delta}\xi_{1,\delta}T}{\xi_{0,\delta}T + \xi_{1,\delta}T}, \quad \xi_s = \xi_{0,\delta}T + \xi_{1,\delta}T.$$

Dalje, imamo

$$y_{0,\delta} - y_{\delta,1} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\xi_\delta}}(\sqrt{\rho_0}(u_0 - u_\delta) + \sqrt{\rho_1}(u_\delta - u_1)), \quad \mu \rightarrow 0.$$

To zajedno sa činjenicom da važi $y_{0,\delta}, y_{\delta,1} \rightarrow u_\delta$, $\mu \rightarrow 0$ daje $\xi_s \rightarrow \xi_\delta$ i $u_s \rightarrow u_\delta$ kada $\mu \rightarrow 0$. Distributivni limes kada $\mu \rightarrow 0$ daje rešenje u obliku prekompresivnog delta udarnog talasa (7.29), pri čemu su $u_s(t)$ i $\xi(t)$ dati sa (5.13), gde su U_l i U_r zamenjeni sa U_0 i U_1 , redom.

Podslučaj B₃: $u_1 < u_0 < u_\delta$.

Približno rešenje se sastoji iz dva kontaktna diskontinuiteta razdvojena vakuumom i prostog senka talasa koji razdvaja stanja U_δ i U_1 , kao u Podslučaju A₃. Rezultat interakcije

između drugog kontaktnog diskontinuiteta i senka talasa je novi senka talas koji se prostire brzinom koja teži u_1 kada $t \rightarrow \infty$. Ali kako je sada $u_1 < u_0$ i prvi kontaktni diskontinuitet će se sudariti sa senka talasom u vremenu $t = T_2 \sim \sqrt{\mu}$. Obe interakcije će se dogoditi u $\sqrt{\mu}$ -vremenu i distributivni limes će imati oblik (7.29). Kao i u podslučaju B_1 , imamo $c(0) = u_\delta > u_0$ iz čega sledi da rešenje nije prekompresivno.

Da bi se odredilo fizički dopustivo rešenje (tj. vrednost u_δ) treba korititi uslove dopustivosti. Svaki senka talas u približnom rešenju U^μ je prekompresivan, i svaki kontaktni diskontinuitet je entropijsko rešenje. Međutim, to ne mora da važi za distributivni limes (Podslučajevi B_1 i B_3), što znači da će uslov prekompresivnosti moći da eliminiše neka rešenja, ali ne sva. Kako bi se odredilo jedno fizički dopustivo rešenje moraju se koristiti neki drugi uslovi dopustivosti, što će biti ostavljeno za budući rad.

Glava 8

Sadržaj

| | | |
|-----|---|-----|
| 8.1 | Prostor Radonovih mera sa predznakom | 153 |
| 8.2 | Slaba konvergencija približnog rešenja u prostoru mera | 155 |
| 8.3 | Jedinstvenost slabog limesa i particije ekvidistantnog tipa | 161 |

Postojanje i jedinstvenost limesa približnog rešenja

U limesu rešenja u obliku senka talasa se pojavljuje Dirakova delta funkcija, što prostor Radonovih mera sa predznakom čini prirodnim izborom za limes približnog rešenja početnog problema (7.1, 7.2) konstruisanog algoritmom datim u Glavi 7. U nastavku ćemo prvo ukratko definisati prostor Radonovih mera (sa predznakom) i dati definiciju slabe konvergencije u prostoru Radonovih mera. Zatim ćemo pokazati da su komponente u približnom rešenju U^ν koje odgovara malom $\varepsilon_\nu > 0$ lokalno ograničene mere sa predznakom koje konvergiraju u prostoru Radonovih mera sa predznakom.

8.1. Prostor Radonovih mera sa predznakom

Neka je X lokalno kompaktan metrički prostor.

DEFINICIJA 8.1. Neka je (X, \mathcal{N}) prostor sa σ -algebrrom $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$. Mera μ na (X, \mathcal{N}) je funkcija $\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ za koju važi:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (2) Ako je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz \mathcal{N} , tada

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Jasno je da komponenta brzine u približnom rešenju U^μ ne mora biti nenegativna, zbog čega uvodimo pojam mera sa predznakom.

DEFINICIJA 8.2. Neka je (X, \mathcal{N}) merljiv prostor. Mera sa predznakom μ na (X, \mathcal{N}) je funkcija $\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da važi:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (2) μ može da primi samo jednu od vrednosti $-\infty$ ili $+\infty$;

(3) Ako je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz \mathcal{N} , tada

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

i $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ apsolutno konvergira ako je $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ konačna.

Iz Definicije 8.2 sledi da je svaka mera takođe mera sa predznakom, pa se zbog toga često uz meru dodaje reč "nenegativna".

TEOREMA 8.1 (Hanova dekompozicija). Ako je μ mera sa predznakom na (X, \mathcal{N}) tada postoje skupovi

- $P \in \mathcal{N}$ koji je pozitivan u odnosu na μ (za sve $B \in \mathbb{N}$ takve da $B \subset P$ važi $\mu(B) \geq 0$),
- $N \in \mathbb{N}$ koji je negativan u odnosu na μ (za sve $B \in \mathbb{N}$ takve da $B \subset N$ važi $\mu(B) \leq 0$)

za koje važi $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$. Dekompozicija $X = P \cup N$ se naziva Hanova dekompozicija.

TEOREMA 8.2 (Žordanova dekompozicija). Za svaku meru sa predznakom na (X, \mathcal{N}) postoje jedinstvene nenegativne mere μ^+ i μ^- takve da $\mu = \mu^+ - \mu^-$ i

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N).$$

Nenegativne mere μ^+ i μ^- se nazivaju pozitivna i negativna varijacija od μ . Nenegativna mera $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ naziva se varijacija od μ .

Borelova mera je mera definisana na Borelovoj sigma algebri koja je generisana kolekcijom otvorenih podskupova metričkog prostora X . Više o merama i njenim karakteristikama se može naći u [25, 43, 47, 87].

DEFINICIJA 8.3 (Radonova mera). Radonova mera μ je Borelova mera koja je

- (1) lokalno konačna, tj. $\mu(K) < \infty$ za svaki kompaktan skup K ;
- (2) regularna spolja na svim Borelovim skupovima što znači da za svaki Borelov skup E važi

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \text{ je otvoren}\};$$

- (3) regularna iznutra na svim otvorenim Borelovim skupovima što znači da za svaki otvoren Borelov skup E važi

$$\mu(E) = \sup\{\mu(B) : B \subset E, B \text{ je kompaktan}\}.$$

Za Borelovu meru koja zadovoljava (2) i (3) kažemo da je Borel regularna.

Jasno je da je približno rešenje U^ν definisano u prostoru u kom je svaka mera Borel regularna, pa tu osobinu necemo posebno naglašavati u nastavku.

DEFINICIJA 8.4 (Radonova mera sa predznakom). Radonova mera sa predznakom je Borelova mera sa predznakom čije su pozitivna i negativna varijacija Radonove mere.

Linearna funkcionala $U : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ je nenegativna ako $U(\varphi) = |\langle U, \varphi \rangle| \geq 0$ važi za sve $\varphi \geq 0$. Uz pomoć Risove teoreme o reprezentaciji moguće je napraviti karakterizaciju Radonovih mera preko nenegativnih linearnih funkcionala na $C_0(X)$ ([25, 47, 43]).

TEOREMA 8.3 (Risova teorema o reprezentaciji). Neka je U nenegativna linearna funkcionala na $C_0(X)$. Tada postoji jedinstvena Radonova mera μ na X takva da

$$U(\varphi) = \int \varphi d\mu \quad \text{za sve } \varphi \in C_0(X).$$

Može se pokazati da za svaku ograničenu linearu funkcionalu na $C_0(X)$ postoji Žordanova dekompozicija, tj. svaka ograničena linearna funkcionala na $C_0(X)$ označena sa U se može zapisati u obliku $U = U_+ - U_-$, pri čemu U_- i U_+ predstavljaju nenegativne linearne funkcionele na $C_0(X)$ (videti Lemu 4.3.6. iz [25]). To će nam u nastavku biti vrlo značajno, jer se može definisati izometrički izomorfizam između prostora Radonovih mera sa predznakom i duala prostora $C_0(X)$ (videti Teoremu 4.4.4. iz [25]). To nam omogućava da damo sledeću definiciju Radonovih mera sa predznakom.

DEFINICIJA 8.5. Skup svih linearnih funkcionala U definisanih na prostoru $C_0(\Omega)$ takvih da za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji konstanta C_K takva da

$$|\langle U, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty} \quad \text{za sve } \varphi \in C_0(\Omega), \text{ supp}(\varphi) \subset K$$

je prostor Radonovih mera sa predznakom $\mathcal{M}(\Omega)$.

Sa $\mathcal{M}_f(\Omega)$ je označen prostor Radonovih mera sa predznakom i konačnom masom, tj. $U \in \mathcal{M}_f(\Omega)$ ako postoji konstanta C takva da

$$|\langle U, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{L^\infty} \quad \text{za sve } \varphi \in C_0(\Omega).$$

DEFINICIJA 8.6. Neka je $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ niz Radonovih (lokalno konačnih) mera na \mathbb{R}^n . Kažemo da μ_j slabo konvergira u zvezda topologiji ka μ (pišemo $\mu_j \xrightarrow{*} \mu$) ako

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_j = \int \varphi d\mu \quad \text{za sve } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Niz $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ je uniformno lokalno ograničen ako za svaki kompaktan skup K postoji konstanta C_K takva da $\mu_j(K) \leq C_K$ za svako $j \in \mathbb{N}$.

U nastavku ćemo koristiti sledeće tvrđenje iz [35].

PROPOZICIJA 8.1. Neka je $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ niz (nenegativnih) uniformno lokalno ograničenih mera. Tada postoji njegov podniz $\{\mu_{j_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ i Radonova mera μ takva da $\mu_{j_i} \xrightarrow{*} \mu$.

8.2. Slaba konvergencija približnog rešenja u prostoru mera

TEOREMA 8.4 (Globalna egzistencija slabog limesa). Neka je $u(x), \rho(x) \in C_b([R, \infty))$, $\rho(x) > 0$, $\rho_0 > 0$ i $u(x)$ ima konačno mnogo lokalnih ekstremi. Neka je dat niz $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$, $\varepsilon_\nu \rightarrow 0^+$ takav da $\sqrt[3]{\varepsilon_\nu} \leq Y_i - Y_{i-1} \leq C \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}$, $C \geq 1$ važi za particiju $\{Y_i^\nu\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ koja odgovara ε_ν . Označimo sa $\{U^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ odgovarajući niz približnih rešenja problema (7.1, 7.2) konstruisanih kao u Teoremi 7.3. Postoji njegov podniz, još uvek označen sa $\{U^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ i Radonova mera sa predznakom U^* takva da U^ν slabo konvergira ka U^* kada $\nu \rightarrow \infty$.

Da bismo dokazali da postoji limes U^* treba pokazati da su komponente u $|U^\nu| := (\rho^\nu, |u^\nu|)$ uniformno lokalno ograničene mere za svako $\nu \in \mathbb{N}_0$. Primetite da iz konstrukcije i uslova $\rho(x) > 0$, $\rho_0 > 0$ sledi $|\rho^\nu| = \rho^\nu$. Dokaz Teoreme 8.4 će se oslanjati na tri Leme koje će biti date u nastavku. Prvo ćemo pokazati da su brzina i snaga svakog talasa u približnom rešenju U^ν ograničeni.

LEMA 8.1 (Konačna brzina prostiranja). Neka su $u(x)$ i $\rho(x)$ ograničene i neprekidne funkcije i neka $u(x)$ ima konačno mnogo lokalnih ekstrema. Brzina svakog talasa koji čini dopustivo približno rešenje problema (7.1, 7.2) je ograničena.

Dokaz Leme 8.1 sledi iz Leme 5.2 i njene Posledice 5.1. Naime, kontaktni diskontinuiteti su entropijska rešenja sa brzinama koje su jednakе vrednosti funkcije $u(x)$ u nekoj tački, a kako je $u(x)$ ograničena funkcija sledi da će se oni prostirati konačnom brzinom. Takođe, svaki senka talas je prekompresivan, pa se može pokazati da se brzina svakog talasa u U' nalazi između

$$\min \{u_0, \inf_{x \geq R} u(x)\} \quad \text{i} \quad \max \{u_0, \sup_{x \geq R} u(x)\}.$$

Označimo sa

$$M := \max \{\rho_0, \sup_{x \geq R} \rho(x)\}, \quad N := \min \{\rho_0, \inf_{x > R} \rho(x)\}.$$

Jasno je da vrednosti M i N postoje, jer su funkcije $u(x)$ i $\rho(x)$ ograničene na $x > R$. Takođe, M i N ne zavise od particije.

LEMA 8.2. Neka je sa U' dato dopustivo približno rešenje problema (7.1, 7.2) sa funkcijama $u(x)$ i $\rho(x)$ koje zadovoljavaju uslove Teoreme 8.4. Tada

$$\underbrace{\inf_i \xi_i t}_{=0} \Big|_{t=0} < \xi(t) < \underbrace{\sup_i \xi_i t}_{=0} \Big|_{t=0} + M \left(\max \{u_0, \sup_{x \geq R} u(x)\} - \min \{u_0, \inf_{x \geq R} u(x)\} \right) t,$$

gde je sa $\xi_i t$ označena snaga i -tog talasa nastalog u $t = 0$.

DOKAZ. Neka su sa W_l i W_r označena dva prekompresivna senka talasa koji se sudebruju u $t = T$. W_l i W_r imaju zajednično središnje stanje U_m koje može biti vakuumsko ili ne-vakuumsko. Rezultat te interakcije je jedan prekompresivan senka talas koji razdvaja stanja U_l i U_r , i može biti klasifikovan kao jedan od 4 tipa: wSDW $_l^r$, wSDW $_{l,r}$, w l SDW $_r$ ili w l SDW r , gde $u_l > u_r$. Brzina rezultujućeg talasa W zadovoljava uslov $u_r \leq u_s(t) \leq u_l$ za $t > T$, što sledi iz prekompresivnosti. Neka su sa c_i i σ_i označene brzina i snaga i -tog prilazećeg talasa W_i , $i \in \{l, r\}$ u vremenu interakcije $t = T$. Početna brzina i snaga rezultujućeg talasa W u vremenu $t = T^+$ su date sa

$$c := u_s(T^+) = \frac{\sigma_l c_l + \sigma_r c_r}{\sigma_l + \sigma_r}, \quad \sigma := \xi(T^+) = \sigma_l + \sigma_r.$$

Iz (5.13) se vidi da važi

$$\xi'(t) \leq \begin{cases} \rho_l(u_l - u_r), & \text{ako } W = \text{wSDW}_l^r \\ \max\{\rho_l, \rho_r\}(u_l - u_r), & \text{ako } W = \text{wSDW}_{l,r} \\ \rho_r(u_l - u_r), & \text{ako } W = \text{w}^l\text{SDW}_r \end{cases}$$

ili $\xi'(t) = 0$ ako je $W = \text{w}^l\text{SDW}_r$, pa dobijamo da za svaki senka talas sa početnom snagom σ koji je nastao u $t = T$ i razdvaja stanja U_l i U_r važi

$$\xi(t) \leq \sigma + M(u_l - u_r)(t - T), \quad t > T. \tag{8.1}$$

Ako je rezultujući talas wSDW $_{l,r}$ (oba stanja su ne-vakuumsko) dobijamo donju granicu za snagu talasa W

$$\xi(t) \geq \sigma + N(u_l - u_r)(t - T), \quad t > T. \tag{8.2}$$

Inače, imamo bar $\xi(t) \geq \sigma$.

Do prve interakcije približno rešenje se sastoji iz kontaktnih diskontinuiteta čija snaga je jednaka nuli i/ili prostih senka talasa oblika $SDW_{i,i+1}$ sa snagom

$$\xi(t) = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}}(u_i - u_{i+1})t, \quad t > 0,$$

koja je ograničena sa

$$N(u_i - u_{i+1})t \leq \xi(t) \leq M(u_i - u_{i+1})t, \quad t > 0.$$

Početna snaga talasa $wSDW_{i,i+2}$ koji nastaje kao rezultat interakcije između $SDW_{i,i+1}$ i $SDW_{i+1,i+2}$ u vremenu $t = T_1$ je od gore ograničena sa

$$M(u_i - u_{i+1})T_1 + M(u_{i+1} - u_{i+2})T_1 = M(u_i - u_{i+2})T_1,$$

a od dole sa

$$N(u_i - u_{i+1})T_1 + N(u_{i+1} - u_{i+2})T_1 = N(u_i - u_{i+2})T_1.$$

Za $t > T_1$ dobijamo sledeće granice za snagu rezultujućeg $wSDW_{i,i+2}$

$$N(u_i - u_{i+2})t \leq \xi(t) \leq M(u_i - u_{i+2})T_1 + M(u_i - u_{i+2})(t - T_1) = M(u_i - u_{i+2})t,$$

koristeći (8.1) i (8.2). Gornja analiza obuhvata i interakciju između senka talasa i kontaktnog diskontinuiteta. Ako kontaktni diskontinuitet ima vakuumsko stanje sa bar jedne strane, važi (8.2) sa $N = 0$.

Indukcijom dobijamo globalne gornje granice za snagu bilo kog talasa u vremenu t . Namente, neka je i dalje sa W označen talas koji je rezultat interakcije između W_l i W_r u vremenu $t = T$. Neka važi

$$\sigma_1 \leq M(u_l - u_m)T, \quad \sigma_2 \leq M(u_m - u_r)T.$$

Tada

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \leq M(u_l - u_r)T. \tag{8.3}$$

Dalje, koristeći ocene (8.1), (8.2) i (8.3) dobijamo gornju granicu za snagu talasa W

$$\xi(t) \leq M(u_l - u_r)T + M(u_l - u_r)(t - T) = M(u_l - u_r)t, \quad t > T.$$

□

Napomena. Primetite da u slučaju kada je $u(x)$ opadajuća i $u_0 \geq u(R)$ (Slučaj III) dobijamo bolju donju granicu za snagu talasa, jer vakuumsko stanje ne pripada skupu stanja. Dakle, u tom slučaju ocene za snagu bilo kog talasa u vremenu t su

$$\underbrace{\inf_i \xi_{i,i+1} t}_{=0} \Big|_{t=0} + N(u_0 - \underline{u})t < \xi(t) < \underbrace{\sup_i \xi_{i,i+1} t}_{=0} \Big|_{t=0} + M(u_0 - \underline{u})t.$$

gde $\underline{u} = \inf_{x \geq R} u(x)$ i $\xi_{i,i+1} = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}}(u_i - u_{i+1})$.

LEMA 8.3. *Neka sve pretpostavke iz Teoreme 8.4 važe i neka je $\{U^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ niz rešenja definisan u toj teoremi. Tada su ρ^ν i $|u^\nu|$ nenegativne uniformno lokalno ograničene mere za svako $\nu \in \mathbb{N}_0$.*

DOKAZ. Iz konstrukcije približnog rešenja, ograničenosti funkcije $u(x)$ i Leme 8.1 sledi da je u^ν uniformno globalno ograničena funkcija za sve $\nu \in \mathbb{N}_0$. Da bismo pokazali da je ρ^ν uniformno ograničena u L^1_{loc} na svakom kompaktnom skupu koristićemo zakon održanja mase, ograničenost funkcije $\rho(x)$ i konačnu brzinu prostiranja. Za svako $E \Subset \mathbb{R}$ postoji $C_E > 0$ takvo da

$$0 \leq \int_{E \times (t_0, T)} \rho^\nu(x, t) dx dt \leq (T - t_0) \cdot C_E \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho(x, 0) < \infty.$$

Dakle, $|u^\nu|$ i ρ^ν su ograničene u $L^1(K)$ na svakom kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}_+^2$, tj. $|U^\nu|$ je uniformno lokalno ograničena mera. \square

DOKAZ TEOREME 8.4. Iz Leme 8.3 znamo da su ρ^ν i $|u^\nu|$ nenegativne uniformno lokalno ograničene mere. Dakle, postoje uniformno lokalno ograničene mere U_+^ν i U_-^ν takve da $U^\nu = U_+^\nu - U_-^\nu$ i $|U^\nu| = U_+^\nu + U_-^\nu$. Iz Propozicije 8.1 sledi da postoje podnizovi $\{U_+^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ i $\{U_-^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ i lokalno konačne mere U_+^* i U_-^* takve da $U_+^\nu \xrightarrow{\star} U_+^*$ i $U_-^\nu \xrightarrow{\star} U_-^*$. Zaključujemo da U^ν slabo konvergira ka $U^* := U_+^* - U_-^*$ kada $\nu \rightarrow \infty$. Primetite da smo u dokazu mogli direktno primeniti Propoziciju 8.1 da bismo dobili podniz $\{|U^\nu|\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ koji slabo konvergira ka $|U^*|$. \square

U nekim slučajevima je bar za mali vremenski interval moguće pronaći eksplicitan oblik limesa U^* , što će biti pokazano u nastavku.

TEOREMA 8.5. *Pretpostavimo da važe sve pretpostavke iz Teoreme 8.4, kao i notacija. Neka je $u_0 > u(R)$. Postoji $T_{\max} > 0$ takvo da je za svako $t < T_{\max}$ U^* dato u obliku težinske δ mere sa nosačem na krivoj $\Gamma : x = c(t)$ koja razdvaja konstantno stanje $U_0 = (\rho_0, u_0)$ i C^1 -rešenje $U(x, t)$ sistema (7.1), tj.*

$$U^*(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < c(t) \\ U(x, t), & x > c(t) \end{cases} + (\xi(t), 0)\delta(x - c(t)), \quad 0 < t < T_{\max}. \quad (8.4)$$

Gornje ograničenje za vreme T_{\max} se dobija kao pozitivan infimum od $-\frac{1}{u'(x)}$, $x > R$, pri čemu se $D_x := \left(x - \frac{u(x)}{u'(x)}, -\frac{1}{u'(x)} \right)$ nalazi iznad Γ .

Napomena. Teorema 8.5 važi čak i kada je $u_0 \leq u(R)$, a $u(x)$ je rastuća funkcija. To je trivijalan slučaj koji će biti obuhvaćen dokazom te teoreme, jer približno rešenje konvergira ka jedinstvenom glatkom rešenju koje se može dobiti metodom karakteristika.

DOKAZ. Neka je fiksirano proizvoljno $T > 0$. Prvo ćemo pokazati da singularni deo rešenja \hat{U}^ν (videti Slučajeve II i IV) konvergira, tj. da postoji njegov podniz koji konvergira. Iz Lema 8.1 i 8.2 imamo da je \hat{U}^ν ograničen u $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+^2)$ uniformno po $\nu \in \mathbb{N}_0$, pa zaključujemo da postoji njegov podniz koji slabo konvergira ka $\hat{U}^* \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Primetite da je nosač funkcije \hat{U}^* kriva.

Pošto znamo da se sa leve strane \hat{U}^ν u U^ν nalazi konstantno stanje U_0 , vršićemo analizu u zavisnosti od desne strane. Pokazaćemo da desna strana približnog rešenja U^ν konvergira ka klasičnom rešenju U dobijenom pomoću metoda karakteristika sve dok takvo rešenje postoji.

Posmatramo klasičan početni problem (7.1, 7.3) sa funkcijom $u(x)$ koja je rastuća. Procedura za konstrukciju približnog rešenja daje dopustivo približno rešenje U^ν (Posledica 7.2). To rešenje se sastoji iz niza kontaktnih diskontinuiteta koji se ne sudaraju međusobno. Kao što je već pokazano na početku Glave 7, u slučaju kada je funkcija $u(x)$ rastuća ne postoji gornje ograničenje za T_{\max} . Ako je funkcija $u(x)$ konstantna na nekom intervalu, onda je i

glatko rešenje konstantno na odgovarajućem intervalu, dok je rešenje u delu kada je $u'(x) > 0$ dato sa (7.5, 7.4).

Dokazaćemo da za svaki interval $[X_-, X_+]$ u vremenu $T > 0$ važi

$$\begin{aligned} I_\nu := \int_{X_-}^{X_+} \rho^\nu(x, T) dx &\rightarrow \int_{X_-}^{X_+} \rho(x, T) dx \quad \text{kada } \nu \rightarrow \infty, \\ \int_{X_-}^{X_+} u^\nu(x, T) dx &\rightarrow \int_{X_-}^{X_+} u(x, T) dx \quad \text{kada } \nu \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Neka je za svako $\nu \in \mathbb{N}_0$ sa U^ν označeno približno rešenje koje odgovara particiji $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ takvoj¹ da važi $Y_i - Y_{i-1} \leq C \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}$, $C \geq 1$ za svako $i \in \mathbb{Z}$. Jasno je da postoje Y_- , Y_+ za koje važi

$$X_- = Y_- + u(Y_-)T \quad \text{i} \quad X_+ = Y_+ + u(Y_+)T.$$

Dalje, neka su indeksi l i m , $l \leq m$ takvi da $Y_- \in (Y_{l-1}, Y_l]$, $Y_+ \in [Y_m, Y_{m+1})$, gde $Y_{l-1}, Y_l, Y_m, Y_{m+1} \in \{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Definišimo

$$X_{0,i} := Y_i + u(Y_i)T, \quad X_{1,i} := Y_i + u(Y_{i+1})T.$$

Iz konstrukcije približnog rešenja je jasno da će $u^\nu(x, t)$ dobro aproksimirati glatko rešenje $u(x, t)$. Preciznije, koeficijenti pravaca kontaktnih diskontinuiteta su elementi niza $\{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Funkcija $u(x)$ je u ne-vakuumu aproksimirana po delovima konstantnom funkcijom sa vrednostima iz $\{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, dok je u vakuumu približno rešenje $u^\nu(x, t)$ dato u obliku neprekidne funkcije koja spaja u_i i u_{i+1} za neko i . Ta procedura čini približno rešenje u^ν neprekidnim.

Napomena. Isti zaključak kao za komponentu brzine u važi i za komponentu energije e u slučaju sistema (5.17), jer je glatko rešenje e konstantno na karakteristikama kao i u , a e^ν komponenta u približnom rešenju se dobija na isti način kao u^ν . Dakle, svi zaključci izvedeni u ovoj glavi će važiti i u slučaju sistema (5.17).

Da bismo pokazali da važi (8.5)₁ koristićemo zakon održanja mase. Po konstrukciji imamo $\rho^\nu(x, T) = 0$ ako je $x \in (X_{0,i}, X_{1,i})$. Tada

$$\begin{aligned} I'_\nu &= \int_{X_-}^{X_+} \rho^\nu(x, T) dx = \int_{X_{0,l}}^{X_{1,m}} \rho^\nu(x, T) dx + \underbrace{\int_{X_-}^{X_{0,l}} \rho^\nu(x, T) dx + \int_{X_{1,m}}^{X_+} \rho^\nu(x, T) dx}_{=: I'_\nu} \\ &= \sum_{i=l}^{m-1} \rho_{i+1}(X_{0,i+1} - X_{1,i}) + \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu}) = \sum_{i=l}^{m-1} \rho(Y_{i+1})(Y_{i+1} - Y_i) + \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu}) \\ &\approx \int_{Y_l}^{Y_m} \rho(x) dx \rightarrow \int_{Y_-}^{Y_+} \rho(x) dx \quad \text{kada } \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$I'_\nu = \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu})$ sledi iz činjenice da je $\rho(x)$ ograničena funkcija i da $X_{0,l} - X_- \sim \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}$, $X_+ - X_{1,m} \sim \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}$. Iz činjenice da protok fluida indukuje preslikavanje iz intervala $[Y_-, Y_+]$ na $t = 0$ u interval $[X_-, X_+]$ na $t = T$ i da važi zakon održanja mase² dobijamo

$$\mathcal{M}_0([Y_-, Y_+]) := \int_{Y_-}^{Y_+} \rho(x, 0) dx = \int_{X_-}^{X_+} \rho(x, T) dx =: \mathcal{M}_T([X_-, X_+]),$$

¹Da bismo pojednostavili notaciju izostavljaćemo ν iz $\{Y_i^\nu\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

²Sa $\mathcal{M}_\tau([a, b])$ ćemo označavati masu u intervalu $[a, b]$ na pravoj $t = \tau$.

čime je dokazana tačnost (8.5).

Neka je sada funkcija $u(x)$ opadajuća. Tada se približno rešenje problema (7.1, 7.13) sastoji iz niza senka talasa između kojih su moguće interakcije. Takođe, zbog oblika funkcije $u(x)$ karakteristike će početi da se sekut posle nekog vremena, zbog čega će glatko rešenje eksplodirati u $t = T_{\max}$. Prosti senki talasi koji u početku čine približno rešenje U^ν će početi da se sudaraju u nezanemarljivom vremenu koje je približno T_{\max} . To sledi iz relacije (7.17) i analize koja je prati. Želimo da pokažemo da rešenje dobijeno korišćenjem metode karakteristika za $t < T_{\max}$ odgovara limesu približnog rešenja U^ν . Na sličan način kao što je to urađeno u slučaju rastuće funkcije $u(x)$ koristićemo zakon održanja mase.

Neka je $T < T_{\max}$ proizvoljno ali fiksirano. Pri tome ćemo zahtevati da $T > 0$ bude bar malo manje od T_{\max} (tj. $T < T_{\max} - c\sqrt[3]{\varepsilon_\nu}$, $c > 0$) kako bismo izbegli sudare senka talasa sa karakteristikama. Ponovo posmatramo interval $[X_-, X_+]$, gde $X_* = Y_* + u(Y_*)T$, za $* \in \{+, -\}$. Dalje, uz pomoć karakteristika krajeve tog intervala X_- i X_+ preslikavamo na x -osu (protok fluida indukuje preslikavanje iz $[Y_-, Y_+]$ na x -osi u interval $[X_-, X_+]$ na $t = T$). Iz konstrukcije je jasno da i ovde važi (8.5)₂. Treba još pokazati da je zadovoljena prva relacija u (8.5). Neka su indeksi l, m takvi da za $Y_{l-1}, Y_l, Y_m, Y_{m+1} \in \{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ važi $Y_- \in (Y_{l-1}, Y_l]$, $Y_+ \in [Y_m, Y_{m+1})$. Neka je $X_i := Y_i + y_{i,i+1}T$. Tada

$$\begin{aligned} S_k &:= \int_{X_k}^{X_{k+1}} \rho^\nu(x, T) dx = \frac{1}{2}\xi_{k-1,k}T + \int_{X_k + \frac{\varepsilon_\nu}{2}T}^{X_{k+1} - \frac{\varepsilon_\nu}{2}T} \rho_{k+1} dx + \frac{1}{2}\xi_{k,k+1}T \\ &= \frac{1}{2}(\xi_{k-1,k} + \xi_{k,k+1})T + \rho_{k+1}(X_{k+1} - X_k) - \varepsilon_\nu T \rho_{k+1} \\ &= \frac{1}{2}(\xi_{k-1,k} + \xi_{k,k+1})T + \rho_{k+1}(Y_{k+1} - Y_k) + \rho_{k+1}(y_{k,k+1} - y_{k-1,k})T - \varepsilon_\nu T \rho_{k+1}, \end{aligned}$$

jer

$$\xi_{k,k+1}T = \sqrt{\rho_k \rho_{k+1}}(u_k - u_{k+1})T = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{X_k - \frac{\varepsilon_\nu}{2}T}^{X_k + \frac{\varepsilon_\nu}{2}T} \rho^\nu(x, T) dx.$$

Iz (7.17) za $i = k - 1, j = k + 1$ i $\rho_{k+1} = \rho_k + \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu})$ sledi

$$y_{k,k+1} - y_{k-1,k} = -\frac{1}{2}(u_{k-1} - u_{k+1}) + \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu^2}). \quad (8.6)$$

Kako je $\rho(x)$ ograničena funkcija, važi

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_k \rho_{k+1}} &= \rho_{k+1} + \frac{1}{2}(\rho_k - \rho_{k+1}) + \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu^2}), \\ \sqrt{\rho_{k-1} \rho_k} &= \rho_{k+1} + \frac{1}{2}(\rho_{k-1} + \rho_k - 2\rho_{k+1}) + \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu^2}). \end{aligned}$$

Korišćenjem gornjih relacija i (8.6) dobijamo

$$\begin{aligned} \beta_k &:= \frac{1}{2}(\xi_{k-1,k} + \xi_{k,k+1}) + \rho_{k+1}(y_{k,k+1} - y_{k-1,k}) \\ &= \frac{1}{2}\rho_{k+1}(u_{k-1} - u_k) + \frac{1}{2}\rho_{k+1}(u_k - u_{k+1}) - \frac{1}{2}\rho_{k+1}(u_{k-1} - u_{k+1}) \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{4}((\rho_{k-1} + \rho_k - 2\rho_{k+1})(u_{k-1} - u_k) + (\rho_k - \rho_{k+1})(u_k - u_{k+1}))}_{\sim \sqrt[3]{\varepsilon_\nu^2}} + \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu^2}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{\varepsilon_\nu^2}). \end{aligned}$$

Tada važi

$$\begin{aligned}
 I_\nu &:= \int_{X_-}^{X_+} \rho^\nu(x, T) dx = \sum_{k=l}^{m-1} S_k + \rho_l(X_l - X_-) + \frac{1}{2}(\xi_{l,l+1} + \xi_{m,m+1})T + \rho_{m+1}(X_+ - X_m) \\
 &= \sum_{k=l}^{m-1} \rho_{k+1}(Y_{k+1} - Y_k) + \rho_l(Y_l - Y_-) + \rho_{m+1}(Y_+ - Y_m) + T \sum_{k=l}^{m-1} \beta_k - \varepsilon_\nu T \sum_{k=l}^{m-1} \rho_{k+1} \\
 &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\xi_{l,l+1} + \xi_{m,m+1}) - \rho_l(u(Y_-) - y_{l,l+1}) - \rho_{m+1}(y_{m,m+1} - u(Y_+)) \right) T,}_{\sim \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}, \text{ jer je svaki od sabiraka reda } \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}} \quad \nu \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Suma $\sum_{k=l}^{m-1} \beta_k$ ima $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon_\nu}}\right)$ globalno ograničenih elemenata što sledi iz uslova Teoreme 7.3, $\sqrt[3]{\varepsilon_\nu} \leq Y_i - Y_{i-1} \leq C \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}$. Dakle,

$$\sum_{k=l}^{m-1} \beta_k \leq \text{const} \cdot \sqrt[3]{\varepsilon_\nu}.$$

Kako je $\rho(x)$ ograničena funkcija zaključujemo da važi

$$\varepsilon_\nu T \sum_{k=l}^{r-1} \rho_{k+1} \leq \sqrt[3]{\varepsilon_\nu^2} T \sum_{k=l}^{r-1} \rho_{k+1}(Y_{k+1} - Y_k) \rightarrow 0 \quad \text{kada } \nu \rightarrow \infty.$$

Sledi,

$$I_\nu \rightarrow \int_{Y_-}^{Y_+} \rho(x) dx = \mathcal{M}_0([Y_-, Y_+]) = \mathcal{M}_T([X_-, X_+]) \quad \text{kada } \nu \rightarrow \infty.$$

Limes U^* za $t < T_{\max}$ je dat u obliku težinske delta mere \hat{U}^* koja povezuje konstantno stanje (ρ_0, u_0) i limes rešenja klasičnog početnog problema sa rastućom ili opadajućom funkcijom $u(x)$. Prethodno smo pokazali da je taj limes jednak glatkom rešenju početnog problema. Dokaz važi sve dok postoji glatko rešenje ispod krive Γ , tj. do vremena T_{\max} kada karakteristike počinju da se sekut ispod Γ . Za $x > R$ one se sekut u okolini tačke $D_x = \left(x - \frac{u(x)}{u'(x)}, -\frac{1}{u'(x)}\right)$.

Slučaj kada $u(x)$ menja monotonost konačno mnogo puta je kombinacija rastućeg i opadajućeg slučaja. \square

Kao što je već pomenuto, u slučaju kada je $u(x)$ rastuća funkcija nema gornjeg ograničenja za T_{\max} . Isto će se desiti i kada je $u'(x)$ dovoljno blizu nule i $u(x)$ je opadajuća funkcija, jer u tom slučaju neće biti interakcija između malih senka talasa, nego će u svakoj interakciji učestovati 0-SDW koji će redom kupiti sve proste senke talase koji mu prilaze sa desne strane.

Ako je T_{\max} konačno, ne možemo da budemo sigurni kako će izgledati limes U^* približnog rešenja za $t \geq T_{\max}$. Ali ono što je sigurno je da će za $t \gg 1$ rešenje biti dato u obliku jednog delta udarnog talasa koji razdvaja stanja $(\rho(R), u(R))$ i $(\rho(\infty), u(\infty))$.

8.3. Jedinstvenost slabog limesa i particije ekvidistantnog tipa

Dokazi Teorema 8.4 i 8.5 o postojanju limesa u prostoru mera se zasnivaju na izvlačenju konvergentnog podniza. Međutim, alati koji su korišćeni u dokazu nam ne daju informaciju o jedinstvenosti tog limesa. U nastavku ćemo pokazati da je mera U^* iz Teoreme 8.5 jedinstvena bar za $t < T_{\max}$ ako su particije intervala $[R, \infty)$ ekvidistantnog tipa.

Neka je dato dovoljno malo $\varepsilon > 0$. Definišemo familiju particija $\{\mathcal{P}^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ takvih da za svako $\nu \in \mathbb{N}_0$ važi

$$\mathcal{P}^\nu = \{Y_i^\nu\}_{i \in \mathbb{N}_0}, \quad \mathcal{P}^{\nu+1} = \mathcal{P}^\nu \cup \{Y_{i+\frac{1}{2}}^\nu\}_{i \in \mathbb{N}_0},$$

gde $\sqrt[3]{\varepsilon} \leq Y_{k+1}^0 - Y_k^0 \leq C\sqrt[3]{\varepsilon}$ za svako k i neku konstantu $C \geq 1$. Ako $\frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{2^\nu} \leq Y_{k+1}^\nu - Y_k^\nu \leq \frac{C\sqrt[3]{\varepsilon}}{2^\nu} =: \mu_\nu$ važi za svako $k \in \mathbb{N}_0$ i $\nu \in \mathbb{N}_0$, kažemo da familija $\{\mathcal{P}^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ ima ekvidistantno svojstvo.

Svaka particija \mathcal{P}^ν generiše dopustivo približno rešenje U^ν početnog problema (7.1, 7.2) koje odgovara $\varepsilon_\nu = \varepsilon/2^{3\nu}$. Označimo sa $\Gamma^\nu : x = c^\nu(t)$ 0-SDW krivu u U^ν . Da bismo pokazali jedinstvenost limesa prepostavilićemo da važi sledeće.

Prepostavka 8.1. *Funkcije $u(x)$ i $\rho(x)$ zajedno sa prvim izvodima su neprekidne i ograničene i $u(x)$ ima konačno mnogo lokalnih ekstrema. Neka je $\rho(x) > 0$ za $x > R$. Vrednosti $u_0 > \sup_{x \geq R} \{u(x)\}$ i $\rho_0 > 0$ su odabrane tako da je minimalno rastojanje između nagiba krive Γ^ν i $u(c^\nu(t), t)$ veće od nekog pozitivnog broja α .*

Kako kriva $\Gamma : x = c(t)$ razdvaja konstantno stanje U_0 i jedinstveno glatko rešenje početnog problema $U(x, t)$, jedinstvenost limesa U^* će slediti iz dokaza jedinstvenosti krive Γ .

TEOREMA 8.6 (Jedinstvenost slabog limesa). *Ako Prepostavka 8.1 važi, tada niz rešenja $\{U^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ kom odgovara familija particija $\{\mathcal{P}^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ ekvidistantnog tipa konvergira ka jedinstvenoj ograničenoj meri U^* na $\mathbb{R} \times (0, T_{\max})$ kada $\nu \rightarrow \infty$.*

DOKAZ. Neka je $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Tada postoji τ_0 , $0 < \tau_0 < T_{\max}$, nezavisno od $\nu \in \mathbb{N}_0$ i particije takvo da $\varphi \equiv 0$ za $t < \tau_0$. Želimo da pokažemo da $\Gamma^\nu \rightarrow \Gamma$ kada $\nu \rightarrow \infty$ u intervalu $0 < t < T_{\max}$.

Prepostavimo da $c^\nu(\tau_0) = c(\tau_0)$ za sve $\nu \in \mathbb{N}_0$ i neka je $\gamma_0 > 0$ takvo da $\gamma_0 \leq \xi^\nu(\tau_0)$ važi nezavisno od particije. Bez gubljenja opštosti prepostavilićemo da je $t = \tau_0$ vreme interakcije između 0-SDW i nekog kontaktnog diskontinuiteta (ili senka talasa). Dakle, neka za svaku ν postoji neko $Y_i^\nu \in \mathcal{P}^\nu$ takvo da važi $Y_i^\nu + u(Y_i^\nu)\tau_0 = c^\nu(\tau_0)$ (ili $Y_i^\nu + y_{i,i+1}^\nu \tau_0 = c^\nu(\tau_0)$), pri čemu je $y_{i,i+1}^\nu$ definisano kao u (5.15) i odgovara stanjima u_i^ν , u_{i+1}^ν iz particije \mathcal{P}^ν . (To neće važiti u opštem slučaju, ali neće uticati na rezultat, jer je greška dovoljna mala.) Nosač test funkcije je kompaktan pa možemo uzeti $Y_J^0 > R$ i vreme $\bar{T} > 0$ kao krajnje tačke u našoj analizi. To znači da ćemo se ograničiti na oblast

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}_+^2 : t \in [\tau_0, \bar{T}], x \in [Y_i^0 + ty_{i,i+1}^0, Y_J^0 + ty_{J,J+1}^0]\}.$$

Radi jednostavnosti ćemo prvo prepostaviti da su particije \mathcal{P}^ν intervala $[R, \infty)$ ekvidistantne, tj. da važi $Y_{k+1}^\nu - Y_k^\nu = \mu_\nu$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$ i $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dokaz se lako može uopštiti. Neka je

$$M = \max\{\rho_0, \sup_{x \geq R} \rho(x)\}, \quad A = \max\{u_0, \sup_{x \geq R} u(x)\} - \min\{u_0, \inf_{x \geq R} u(x)\}.$$

Primenom formula za Tejlorov razvoj funkcija

$$\sqrt{a+x}, \quad \frac{1}{\sqrt{a+x}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{a+x}$$

za dovoljno malo t dobijamo aproksimacije funkcija $\xi(t)$ i $u_s(t)$ datih u (3.4)

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \begin{cases} \gamma + (c[\rho] - [\rho u])t + \frac{\rho_l \rho_r [u]^2 - (c[\rho] - [\rho u])^2}{2\gamma} t^2 + \mathcal{O}(t^3), & \rho_l \neq \rho_r \\ \gamma + \rho_l(u_l - u_r)t, & \rho_l = \rho_r \neq 0, \end{cases} \\ u_s(t) &= \begin{cases} c + \frac{\rho_l \rho_r [u]^2 - (c[\rho] - [\rho u])^2}{\gamma[\rho]} t + \mathcal{O}(t^2), & \rho_l \neq \rho_r \\ c - \frac{2}{\gamma} \rho_l(u_l - u_r)(c - \frac{u_r + u_l}{2})t + \mathcal{O}(t^2), & \rho_l = \rho_r \neq 0, \end{cases}\end{aligned}$$

Slučaj $\rho_l = \rho_r = 0$ je trivijalan, jer tada važi $\xi'(t) = 0, u'_s(t) = 0$. Front 0-SDW-a označen sa $x = c(t), c(0) = X$ se može aproksimirati na sledeći način

$$c(t) = \begin{cases} X + ct + \frac{\rho_l \rho_r [u]^2 - (c[\rho] - [\rho u])^2}{2\gamma[\rho]} t^2 + \mathcal{O}(t^3), & \rho_l \neq \rho_r \\ X + ct - \frac{1}{\gamma} \rho_l(u_l - u_r)(c - \frac{u_r + u_l}{2})t^2 + \mathcal{O}(t^3), & \rho_l = \rho_r \neq 0. \end{cases}$$

Dalje, gornje aproksimacije možemo zapisati malo drugačije koristeći

$$\rho_l \rho_r [u]^2 - (c[\rho] - [\rho u])^2 = -[\rho]^2(c - y_{l,r})(c - z_{l,r}),$$

pri čemu su $y_{l,r}$ i $z_{l,r}$ definisane u (5.15). Iz prekompresivnosti, $u_r \leq c \leq u_l$ i činjenice da važi

$$0 < [\rho](c - z_{l,r}) \leq 2 \max\{\rho_l, \rho_r\}(u_l - u_r) \leq 2MA, \quad |c - y_{l,r}| < (u_l - u_r) \leq A,$$

dobijamo sledeće globalne ocene

$$\begin{aligned}|\xi(t) - \gamma - (c[\rho] - [\rho u])t| &\leq MC_\gamma t^2, \\ |c(t) - X - ct| &\leq C_\gamma t^2, \\ |u_s(t) - c| &\leq 2C_\gamma t,\end{aligned}\tag{8.7}$$

gde $C_\gamma := \frac{MA^2}{\gamma}$.

Neka je funkcija $u(x)$ rastuća. Posmatramo particije \mathcal{P}^0 i \mathcal{P}^1 takve da $\mathcal{P}^0 = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ i $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^0 \cup \{Y_{k+\frac{1}{2}}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, pri čemu važi $Y_{k+\frac{1}{2}} = \frac{Y_k + Y_{k+1}}{2}$ za svako k . Dakle, \mathcal{P}^1 dobijamo iz \mathcal{P}^0 polovljanjem svakog podintervala na još dva jednakata. Neka je sa $(X_{0,j}, T_{0,j})$ označena tačka interakcije između 0-SDW sa nosačem na krivoj Γ^0 i kontaktog diskontinuiteta $x = Y_j + u_j t$. Slično, sa $(X_{1,j}, T_{1,j})$ označavamo tačku interakcije između Γ^0 i CD: $x = Y_j + u_{j+1} t$. Tačke interakcije između Γ^1 i dva kontaktne diskontinuitete sa poreklom u tački $(Y_j, 0)$ će biti označene sa $(X_{0,j}^1, T_{0,j}^1)$ i $(X_{1,j}^1, T_{1,j}^1)$, redom. Razlika između dva približna rešenja U^0 i U^1 dobijena iz particija \mathcal{P}^0 i \mathcal{P}^1 je ta što se u U^1 u svakoj tački $(Y_{k+\frac{1}{2}}, 0)$ koja polovi podinterval iz \mathcal{P}^0 pojavljuje talasna kombinacija CD+Vac+CD. To implicira pojavu novih tačaka interakcije $(X_{m,k+\frac{1}{2}}^1, T_{m,k+\frac{1}{2}}^1)$, $m = 0, 1$. Pretpostavka od gore nam daje $X_{0,i} = X_{0,i}^\nu$, $T_{0,i} = T_{0,i}^\nu = \tau_0$ za sve ν . Neka je

$$\begin{aligned}\gamma_{k,j} &= \xi(T_{k,j}), \quad c_{k,j} = u_s(T_{k,j}), \quad X_{k,j} = \gamma(T_{k,j}), \quad k = 0, 1, \quad j = i, i+1, \\ \gamma_{k,j}^1 &= \xi(T_{k,j}^1), \quad c_{k,j}^1 = u_s(T_{k,j}^1), \quad X_{k,j}^1 = \gamma(T_{k,j}^1), \quad k = 0, 1, \quad j = i, i+\frac{1}{2}, i+1.\end{aligned}$$

Iz sistema

$$X_{1,i} = c(T_{1,i}) = Y_i + u_{i+1} T_{1,i}, \quad c(T_{0,i}) = X_{0,i} = Y_i + u_i T_{0,i}$$

se lako dobija

$$T_{1,i} = T_{0,i} + \tau_1 + \mathcal{O}(\tau_1^2), \quad \tau_1 := \frac{u_{i+1} - u_i}{c_{0,i} - u_{i+1}} T_{0,i}.$$

Iz Pretpostavke 8.1 sledi da postoji $\alpha > 0$ takvo da $c_{0,i} - u_{i+1} > \alpha$. To znači da su gornje aproksimacije dovoljno dobre i da važi $\mathcal{O}(\tau_1^2) = \mathcal{O}(\mu_0^2)$, jer $u_{i+1} - u_i = \mathcal{O}(\mu_0)$. Primetite da je ovde $\mu_0 = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Iz ocena (8.7) sledi

$$|X_{1,i} - (X_{0,i} + c_{0,i}\tau_1)| \leq C_{\gamma_0} \tau_1^2 < C_{\gamma_0} \frac{B_u^2 \bar{T}^2}{\alpha^2} \mu_0^2,$$

gde $B_u := \sup_{x \geq R} |u'(x)|$.

Novu tačku interakcije $(X_{0,i+1}, T_{0,i+1})$ dobijamo iz

$$X_{0,i+1} = c(T_{0,i+1}) = Y_{i+1} + u_{i+1} T_{0,i+1}, \quad c(T_{1,i}) = X_{1,i}.$$

Dakle, važi $T_{0,i+1} = T_{1,i} + \tau_2 + \mathcal{O}(\mu_0^2)$, gde

$$\tau_2 := \frac{Y_{i+1} - Y_i}{c_{1,i} - u_{i+1}} = \frac{\mu_0}{c_{1,i} - u_{i+1}}.$$

Kako znamo da je brzina senka talasa u vakuumu rastuća funkcija od t , važi $c_{1,i} - u_{i+1} > c_{0,i} - u_{i+1} > \alpha$. Dobijamo sledeće ocene

$$|X_{0,i+1} - (X_{1,i} - c_{1,i}\tau_2)| \leq C_{\gamma_0} \tau_2^2 < C_{\gamma_0} \frac{C_{\gamma_0}}{\alpha^2} \mu_0^2.$$

Dalje, posmatramo particiju \mathcal{P}^1 . Neka je

$$\begin{aligned} \tau_1^1 &:= T_{0,i} \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_i}{c_{0,i} - u_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \tau_2^1 := \frac{Y_{i+\frac{1}{2}} - Y_i}{c_{1,i}^1 - u_{i+\frac{1}{2}}}, \\ \tau_3^1 &:= T_{0,i+\frac{1}{2}}^1 \frac{u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}}{c_{0,i+\frac{1}{2}}^1 - u_{i+1}}, \quad \tau_4^1 := \frac{Y_{i+1} - Y_{i+\frac{1}{2}}}{c_{1,i+\frac{1}{2}}^1 - u_{i+1}}. \end{aligned}$$

Na isti način kao kod \mathcal{P}^0 dobijamo

$$\begin{aligned} T_{0,i+1}^1 &= T_{0,i} + \tau_1^1 + \tau_2^1 + \tau_3^1 + \tau_4^1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_0^2}{2}\right), \\ X_{0,i+1}^1 &= \underbrace{X_{0,i} + c_{0,i}\tau_1^1 + c_{1,i}^1\tau_2^1 + c_{0,i+\frac{1}{2}}^1\tau_3^1 + c_{1,i+\frac{1}{2}}^1\tau_4^1}_{=: \tilde{X}_{0,i+1}^1} + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_0^2}{2}\right) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} |X_{1,i}^1 - (X_{0,i} + c_{0,i}\tau_1^1)|, |X_{1,i+\frac{1}{2}}^1 - (X_{0,i+\frac{1}{2}}^1 + c_{0,i+\frac{1}{2}}^1\tau_3^1)| &< \frac{C_{\gamma_0}}{\alpha^2} B_u^2 \bar{T}^2 \frac{\mu_0^2}{2}, \\ |X_{0,i+\frac{1}{2}}^1 - (X_{1,i}^1 + c_{1,i}^1\tau_2^1)|, |X_{0,i+1}^1 - (X_{1,i+\frac{1}{2}}^1 + c_{1,i+\frac{1}{2}}^1\tau_4^1)| &< \frac{C_{\gamma_0}}{\alpha^2} \frac{\mu_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Koristeći ocene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{c_{0,i} - u_{i+1}} - \frac{1}{c_{0,i} - u_{i+\frac{1}{2}}} \right| &< \frac{B_u}{\alpha^2} \frac{\mu_0}{2}, \\ \left| \frac{1}{c_{0,i} - u_{i+1}} - \frac{1}{c_{0,i+\frac{1}{2}}^1 - u_{i+1}} \right| &< \frac{C_{\gamma_0} \mu_0}{\alpha^2} (B_u \bar{T} + 1) \end{aligned}$$

lako se može pokazati da postoje pozitivne konstante C_0 i C_1 takve da važi

$$|\tau_1 - (\tau_1^1 + \tau_3^1)| \leq C_0 \frac{\mu_0^2}{2}, \quad |\tau_2 - (\tau_2^1 + \tau_4^1)| \leq C_1 \frac{\mu_0^2}{2}. \quad (8.8)$$

Dakle, imamo

$$|T_{0,i+1}^1 - T_{0,i+1}| \leq (C_0 + C_1) \frac{\mu_0^2}{2}.$$

Slično, pokazujemo da za neko $C_2 > 0$ važi

$$\begin{aligned} |X_{0,i+1} - (X_{0,i} + c_{0,i}\tau_1 + c_{1,i}\tau_2)| &< \frac{C_{\gamma_0}}{\alpha^2} (B_u^2 \bar{T}^2 + 1) \mu_0^2, \\ |X_{0,i+1}^1 - \tilde{X}_{0,i+1}^1| &< 2 \frac{C_{\gamma_0}}{\alpha^2} (B_u^2 \bar{T}^2 + 1) \frac{\mu_0^2}{2}, \\ |\tilde{X}_{0,i+1}^1 - (X_{0,i} + c_{0,i}\tau_1 + c_{1,i}\tau_2)| &< C_2 \frac{\mu_0^2}{2}, \end{aligned}$$

i to koristeći (8.8) i ocene

$$|c_{1,i} - c_{0,i}| < \frac{2C_{\gamma_0} B_u}{\alpha} \mu_0, \quad |c_{1,i}^1 - c_{0,i}| < \frac{2C_{\gamma_0} B_u}{\alpha} \frac{\mu_0}{2}, \quad |c_{0,i+\frac{1}{2}}^1 - c_{1,i}^1| < \frac{2C_{\gamma_0}}{\alpha} \frac{\mu_0}{2}.$$

Time smo pokazali da postoji konstanta $\tilde{C} > 0$ takva da važi

$$|X_{0,i+1}^1 - X_{0,i+1}| < \tilde{C} \frac{\mu_0^2}{2}.$$

Ponavljajući gore opisan postupak sa svake dve particije \mathcal{P}^ν i $\mathcal{P}^{\nu+1}$ dobijamo iste ocene kao i gore, pri čemu su $T_{0,i+1}$, $T_{0,i+1}^1$ i μ_0 redom zamenjeni sa $T_{0,i+1}^\nu$, $T_{0,i+1}^{\nu+1}$ i μ_ν . Neka je sa $T_{0,J}^\nu \leq \bar{T}$ označeno vreme sudara između Γ^ν i kontaktnog diskontinuiteta $x = Y_J + u(Y_J)t$. Za svako ν i particiju \mathcal{P}^ν dogodiće se najviše $2(Y_J - Y_i)/\mu_\nu$ interakcija na kompaktnom nosaču test funkcije. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} |T_{0,J}^\nu - T_{0,J}^{\nu+1}| &\leq 2(C_0 + C_1)(Y_J - Y_i) \frac{\mu_\nu}{2} =: C_T \frac{\mu_\nu}{2}, \\ |X_{0,J}^\nu - X_{0,J}^{\nu+1}| &\leq 2C(Y_J - Y_i) \frac{\mu_\nu}{2} =: C_X \frac{\mu_\nu}{2}. \end{aligned}$$

Konačno, konstante C_X, C_T ne zavise od particije, pa zaključujemo da je rastojanje između krivih Γ^p i Γ^{m+p} na $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cup \text{supp } \varphi$ ocenjeno sa

$$|X_{0,J}^{m+p} - X_{0,J}^p| \leq C_X \sum_{i=p+1}^{m+p} \frac{\mu_0}{2^i} \leq C_X \frac{\mu_0}{2^p} = C_X \mu_p, \quad |T_{0,J}^{m+p} - T_{0,J}^p| \leq C_T \frac{\mu_0}{2^p},$$

tj. $\{\Gamma^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ je Košijev niz koji konvergira za svako $t > \tau_0$. Da bismo pokazali da isto važi za svako $t > 0$ dovoljno je da uzmemo dovoljno malo τ_0 .

Dokaz je sličan i u slučaju kada je funkcija $u(x)$ opadajuća i važi $u_0 > u(R)$ za $t < T_{\max}$. Primetite da uslov $u_0 > \sup_{x > R} u(x)$ iz Prepostavke 8.1 implicira $u_0 > u(R)$, jer je funkcija $u(x)$ opadajuća.

Uzmimo particiju \mathcal{P}^0 , gde $Y_k - Y_{k-1} = \mu_0$ za svako k . Neka je presečna tačka između krive Γ^0 i senka talasa sa frontom $x = Y_k + y_{k,k+1}t$ označena sa (X_k, T_k) . Ponovo pretpostavljamo da za svako ν važi $X_i = X_i^\nu$, $T_i = T_i^\nu = \tau_0$. Naredna tačka interakcije označena sa (X_{i+1}, T_{i+1}) se određuje iz sistema

$$c(T_i) = X_i, \quad c(t) = Y_{i+1} + y_{i+1,i+2}t, \quad u_s(T_i) = c_i.$$

Iz Prepostavke 8.1 sledi da postoji $\alpha > 0$ koje ne zavisi od particije takvo da $c_i - y_{i+1,i+2} > \alpha$. Dakle, interakcija između 0-SDW i SDW $_{i+1,i+2}$ se odvija u vremenu $t = T_{i+1}$ koje se može aproksimirati sa

$$T_{i+1} = T_i + \tau_i + \mathcal{O}(\mu_0^2), \quad \tau_i := \frac{1 + u'(Y_{i+1})T_i}{c_i - y_{i+1,i+2}}\mu_0.$$

Te aproksimacije dobijamo iz ocena $y_{i+1,i+2} - y_{i+1,i} = \frac{1}{2}(u_{i+2} - u_i) + \mathcal{O}(\mu_0^2)$ i $u_{i+2} - u_i = \frac{2}{\nu}u'(Y_{i+1}) + \mathcal{O}(\mu_0^2)$. Tada

$$\begin{aligned} |X_{i+1} - (X_i + c_i \tau_i)| &< C_{\gamma_0} \tau_i^2 < C_{\gamma_0} \frac{(1+B_u T_{\max})^2}{\alpha^2} \mu_0^2, \\ |c_{i+1} - c_i| &< 2C_{\gamma_0} \frac{1+B_u T_{\max}}{\alpha} \mu_0. \end{aligned}$$

Posmatramo sada particiju \mathcal{P}^1 , gde $Y_{k+1} - Y_{k+\frac{1}{2}} = Y_{k+\frac{1}{2}} - Y_k = \frac{\mu_0}{2} = \mu_1$ za svako k . Tačke interakcije ćemo označiti sa (X_j^1, T_j^1) , $j = k, k + \frac{1}{2}, k + 1$. Na sličan način kao i kod slučaja rastuće funkcije $u(x)$ pokazujemo da postoje konstante $D_0, D_1 > 0$ takve da važi

$$|T_{i+1}^1 - T_{i+1}| \leq D_0 \frac{\mu_0^2}{2}, \quad |X_{i+1}^1 - X_{i+1}| \leq D_1 \frac{\mu_0^2}{2}.$$

Iste relacije sa μ_0 zamenjenim sa μ_ν dobijamo u slučaju particija \mathcal{P}^ν i $\mathcal{P}^{\nu+1}$. Neka je sa $T_J^\nu < T_{\max}$ označeno poslednje vreme interakcije između Γ^ν i senka talasa na nosaču test funkcije $\text{supp } \varphi$. Greške nastale zbog aproksimacije krivih Γ^ν , $\nu \in \mathbb{N}_0$ se akumuliraju sa svakom interakcijom ali ostaju dovoljno male, tj.

$$|X_J^\nu - X_J^{\nu+1}| \leq (Y_J - Y_i)D_1 \frac{\mu_\nu}{2}, \quad |T_J^\nu - T_J^{\nu+1}| \leq (Y_J - Y_i)D_0 \frac{\mu_\nu}{2}.$$

Dakle, zaključujemo da $\Gamma^\nu \rightarrow \Gamma$ kada $\nu \rightarrow \infty$ za $t < T_{\max}$. Puštanjem τ_0 da ide u nulu težimo ka tački porekla krive Γ koja je označena sa $(R, 0)$.

U opštem slučaju kada su particije ekvidistantnog tipa takve da važi $\frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{2^\nu} \leq Y_{k+1}^\nu - Y_k^\nu \leq \frac{C \sqrt[3]{\varepsilon}}{2^\nu} = \mu_\nu$ dokaz je sličan kao gore. Iz donje granice za dužinu svakog podintervala particije se vidi da je maksimalan broj interakcija između Γ^0 i senka talasa jednak $\frac{2(Y_J - Y_i)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} = \frac{E}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Kako se familija particija $\{\mathcal{P}^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ formira tako da se svaki podinterval $[Y_k^\nu, Y_{k+1}^\nu]$ u \mathcal{P}^ν deli na dva, ne nužno jednaka dela takva da važi

$$\min \{Y_{k+\frac{1}{2}}^\nu - Y_k^\nu, Y_{k+1}^\nu - Y_{k+\frac{1}{2}}^\nu\} \geq \frac{\mu_\nu}{2C}, \quad \max \{Y_{k+\frac{1}{2}}^\nu - Y_k^\nu, Y_{k+1}^\nu - Y_{k+\frac{1}{2}}^\nu\} \leq \frac{\mu_\nu}{2},$$

zaključujemo da je broj sudara između Γ^ν i senka talasa koji mu prilaze sa desne strane najviše $E \frac{C}{\mu_\nu}$. Dakle, dokaz u opštem slučaju je isti kao i gore pri čemu je $Y_J - Y_i$ zamenjeno sa $C(Y_J - Y_i)$. \square

Bibliografija

- [1] D. Aubram, *Differential geometry applied to continuum mechanics*, Shaker, 2009.
- [2] J. Anderson Jr., *Modern Compressible Flow, with Historical Perspective*, Third Edition, McGraw-Hill International Edition, 2003.
- [3] P. Baiti, H.K. Jenssen, *On the front tracking algorithm*, J. Math. Anal. Appl. **217** (1998), 395–404.
- [4] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2000.
- [5] A. Baricz, *Bounds for modified Bessel functions of the first and second kinds*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **53** (2010), 575–599.
- [6] S. Benzoni-Gavage, D. Serre *Multidimensional hyperbolic partial differential equations. First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [7] S. Bianchini, A. Bressan, *Vanishing viscosity solutions to nonlinear hyperbolic systems*, Annals of Mathematics **161** (2005), 223–342.
- [8] F. Bouchut, *On zero pressure gas dynamics*, Advances in Math. for Appl. Sci., World Scientific, **22**, (1994), 171–190.
- [9] F. Bouchut, F. James, *Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness*, Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no. 11-12, 2173–2189.
- [10] L. Boudin, *A solution with bounded expansion rate to the model of viscous pressureless gases*, SIAM J. Math. Anal., 32(1) (2000), 172–193.
- [11] Y. Brenier, *Solutions with concentration to the Riemann problem for the one-dimensional Chaplygin gas equations*, J. Math. Fluid Mech. 7(3) (2005), 326–331.
- [12] Y. Brenier, E. Grenier, *Sticky particles and scalar conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. 35(6) (1998), 2317–2328.
- [13] A. Bressan, *Global Solutions of Systems of Conservation Laws by Wave-Front Tracking*, J. Math. Anal. Appl., **170** (1992), 414–432.
- [14] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Oxford University Press, New York, 2000.
- [15] A. Bressan, *Lecture Notes on Hyperbolic Conservation Laws*, Department of Mathematics, Penn State University, 2009.

- [16] A. Bressan, *The unique limit of the Glimm scheme*, Arch. Rational. Mech. Anal. **130** (1995), 205–230.
- [17] A. Bressan, G. Crasta, B. Piccoli, *Well-Posedness of the Cauchy Problem for $n \times n$ Systems of Conservation Laws*, S.I.S.S.A, Trieste, 1995.
- [18] A. Bressan, P. Goatin, *Oleinik type estimates and uniqueness for $n \times n$ conservation laws*, J. Differential Equations, **156** (1999), 26–49.
- [19] A. Bressan, M. Lewiska, *A uniqueness condition for hyperbolic systems of conservation laws*, Discr. Con. Dynam. Syst. **6** (2000), 673–682.
- [20] F. Cavalletti, M. Sedjro, M. Westdickenberg, *A simple proof of global existence for the 1D pressureless gas dynamics equations*, SIAM J. Math. Anal. **47** (1) (2015), 66–79.
- [21] T. Chang, L. Hsiao, *The Riemann Problem and Interaction of Waves in Gas Dynamics*, in: Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math., vol. 41, Longman Scientific and Technical, 1989.
- [22] S. Chaplygin, *On gas jets*, Sci. Mem. Moscow Univ. Math. Phys. **21** (1904), 1–121.
- [23] E. Chiodaroli, O. Kreml, *On the Energy Dissipation Rate of Solutions to the Compressible Isentropic Euler System*, Arch. Ration. Mech. Anal. **214** (2014), 1019–1049.
- [24] J. F. Colombeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North Holland, 1985.
- [25] J.B. Conway, *A course in abstract analysis*, Vol. 141, American Mathematical Soc., 2012.
- [26] C. Dafermos, *Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law*, J. Math. Anal. Appl. **38** (1972), 33–41.
- [27] C. Dafermos, *The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws*, J. Differ. Equ. **14** (1973), 202–212.
- [28] C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2016.
- [29] C. Dafermos, *Maximal dissipation in equations of evolution*, J. Differ. Equ. **252**(1) (2012), 567–587.
- [30] V.G. Danilov, V.M. Shelkovich, *Propagation and interaction of δ -shock waves to hyperbolic systems of conservation laws*, Dokl. Ross. Akad. Nauk. (2004), 4–8.
- [31] V.G. Danilov, V.M. Shelkovich, *Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws*, Quarterly of Applied Mathematics **63.3** (2005), 401–427.
- [32] D.A.E. Daw, M. Nedeljkov, *Shadow waves for pressureless gas balance laws*, Applied Mathematics Letters **57** (2016), 54–59.
- [33] U. Debnath, A. Banerjee, S. Chakraborty, *Role of modified Chaplygin gas in accelerated universe*, Classical Quantum Gravity **21** (2004), 5609–5618.
- [34] A.B. De Castro, *Continuum Thermomechanics*, Birkhauser, Basel, 2005.

- [35] C. De Lellis, *Rectifiable Sets, Densities and Tangent Measures*, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2008.
- [36] C. De Lellis, L. Székelyhidi Jr, *The Euler equations as a differential inclusion*, Ann. Math. (2) **170**(3) (2009) , 1417–1436.
- [37] C. De Lellis, L. Székelyhidi Jr, *On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. 195 (2010), no. 1, 225–260.
- [38] R. Di Perna, *Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 1–28.
- [39] R. Di Perna, *Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Diff. Eqs. **20** (1976), 187–212.
- [40] R. Di Perna, *Convergence of approximate solutions to conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 27–70.
- [41] J. Duchon, R. Robert, *Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations*, Nonlinearity **13**(1) (2000), 249–255.
- [42] W. E, Y.G. Rykov, Ya.G. Sinai, *Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion dynamics*, Comm. Math. Phys. 177 (2) (1996), 349–380.
- [43] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, rev. ed., CRC Press, 2015.
- [44] E. Feireisl, *Maximal Dissipation and Well-posedness for the Compressible Euler System*, J. Math. Fluid Mech. 16 (2014), 447–461.
- [45] E. Feireisl, T.G. Karper, M. Pokorný, *Mathematical theory of compressible viscous fluids*, Birkhauser, 2016.
- [46] E. Feireisl, A. Novotný, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, Basel, Birkhauser, 2009.
- [47] G.B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 2nd edition, May 1999.
- [48] J. Glimm, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 95–105.
- [49] J. Glimm, M.J. Graham, J. Grove, X.L. Li, T.M. Smith, D. Tan, F. Tangerman, Q. Zhang, *Front Tracking in Two and Three Dimensions*, Computers Math. Applic. Vol. 35, No. 7, pp. 1–11, 1998.
- [50] M.E. Gurtin, E. Fried, L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, University Press, Cambridge, 2010.
- [51] L. Hsiao, *The entropy rate admissibility criterion in gas dynamics*, J. Differential Equations 38 (1980), 226–238.
- [52] F. Huang, Z. Wang, *Well posedness for pressureless flow*, Communications in mathematical physics 222.1 (2001), 117–146.

- [53] M.E.H. Ismail, *Complete monotonicity of modified bessel functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **108** (1990), 353–361.
- [54] A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *An alternative to quintessence*, Phys. Lett. **511** (2001), 265–268.
- [55] B.L. Keyfitz, *Conservation Laws, Delta Shocks and Singular Shocks*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (1999), 99–112.
- [56] B.L. Keyfitz, *Singular shocks: retrospective and prospective*, Confluentes Mathematici **3.03** (2011), 445–470.
- [57] B.L. Keyfitz, H.C. Kranzer, *The Riemann problem for a class of hyperbolic conservation laws exhibiting a parabolic degeneracy*, Journal of Differential Equations **47** (1983), 35–65.
- [58] B.L. Keyfitz, H.C. Kranzer, *Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions*, J. Differ. Equations **118** (1995), 420–451.
- [59] D.J. Korchinski, *Solution of a Riemann problem for a system of conservation laws possessing nonclassical weak solution*, Thesis, Adelphi University, 1977.
- [60] H.C. Kranzer, B.L. Keyfitz, *A strictly hyperbolic system of conservation laws admitting singular shocks: Nonlinear Evolution Equations That Change Type*, IMA Vol. Math. Appl. **27** (1990), Springer-Verlag, 107–125.
- [61] A. Laforgia, P. Natalini, *Some inequalities for modified Bessel functions*, Journal of Inequalities and Applications, **2010** (2010), Article ID 253035, 10 pages.
- [62] P.D. Lax, *Shock waves and entropy*, in Contribution to Nonlinear Functional Analysis (E.H. Zarantonello, Ed.) pp. 603–634, Academic Press, New York, 1971.
- [63] P. Le Floch, *An existence and uniqueness result for two nonstrictly hyperbolic systems*, in: IMA Volumes in Math. and its Appl., B.L. Keyfitz, M. Shearer (EDS), Nonlinear evolution equations that change type, Springer Verlag, Vol 27, 1990, 126–138.
- [64] P.G. Le Floch, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer Basel AG, 2002.
- [65] J. Li, T. Zhang, S. Yang, *The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics*, Longman, Harlow, 1998.
- [66] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics*, vol. 1, vol. 3 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996, Incompressible models, Oxford Science Publications
- [67] T.-P. Liu, *Admissible solutions of hyperbolic conservation laws*, Memoirs AMS **30** (1981), No. 240.
- [68] A. Majda, *The stability of multidimensional shocks*, Memoirs of the Amer. Math. Soc, 275, 1983.
- [69] A. Majda, *The existence of multidimensional shocks*, Memoirs of the Amer. Math. Soc, 281, 1983.
- [70] M. Mazzotti, *Non-classical composition fronts in nonlinear chromatography-Delta-shock*, Ind. Eng. Chem. Res. **48** (2009), 7733–7752.

- [71] L. Natile, G. Savaré, *A Wasserstein approach to the one-dimensional sticky particle system*, SIAM J. Math. Anal. 41 (2009), no. 4, 1340–1365.
- [72] T. Nguyen, A. Tudorascu, *One-dimensional pressureless gas systems with/without viscosity*, Comm. Partial Differential Equations 40 (9) (2015), 1619–1665.
- [73] M. Nedeljkov, *Delta and singular delta locus for one dimensional systems of conservation laws*, Math. Method Appl. Sci. **27** (2004), 931–955.
- [74] M. Nedeljkov, *Singular shock waves in interaction*, Quart. Appl. Math. **66** (2008), 281–302.
- [75] M. Nedeljkov, *Shadow waves, entropies and interactions for delta and singular shocks*, Arch. Ration. Mech. Anal. **197**,2 (2010), 489–537.
- [76] M. Nedeljkov, *Singular shock interactions in Chaplygin gas dynamic system*, J. Differ. Equations **256** (2014), 3859–3887.
- [77] M. Nedeljkov, *Admissibility of a solution to generalized Chaplygin gas*, Theoretical and Applied Mechanics 46 (1), (2019), 89–96.
- [78] M. Nedeljkov, L. Neumann, M. Oberguggenberger, M. Sahoo, *Radially symmetric shadow wave solutions to the system of pressureless gas dynamics in arbitrary dimensions*, Nonlinear Analysis 163 (2017), 104–126.
- [79] M. Nedeljkov, M. Oberguggenberger, *Interactions of delta shock waves in a strictly hyperbolic systems of conservation laws*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), 1143–1157.
- [80] M. Nedeljkov, S. Ružičić, *On the uniqueness of solution to generalized Chaplygin gas*, Discrete and continuous dynamical systems, 37,8 (2017), 4439–4460.
- [81] M. Nedeljkov, S. Ružičić, *Shadow wave tracking procedure and initial data problem for pressureless gas model*, <https://arxiv.org/abs/1906.09093>
- [82] M. Nedeljkov, S. Ružičić, *Energy admissibility condition for shadow wave*, preprint.
- [83] T. Nishida, *Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system*, Proc. Japan Acad. **44** (1968), 642–646.
- [84] T. Nishida, J.A. Smoller, *Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. **26**(1973), 183–200.
- [85] Y. Pang, *Delta shock wave with Dirac delta function in multiple components for the system of generalized Chaplygin gas dynamics*, Boundary Value Problems (2016), 202.
- [86] E.Yu. Panov, V.M. Shelkovich, *δ' -shock waves as a new type of solutions to systems of conservation laws*, J. Differ. Equations **228** (2006), 49–86.
- [87] S. Pilipović, D. Seleši, *Mera i integral*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.
- [88] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC-Press, Boca Raton, 1995.
- [89] J.M. Powers, *Lecture notes on gas dynamics*, University of Notre Dame, Indiana, 2015.
- [90] M. Oberguggenberger, Y.-G. Wang, *Generalized solution to conservation laws*, Zeitschr. Anal. Anw. **13** (1994), 7–18.

- [91] M.C. Reis, C.F.F. Caio, A.B.M.S. Adalberto, *Entropy and its mathematical properties: consequences for thermodynamics*, ChemTexts 1.1 (2015), 9.
- [92] B. Riemann, *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Gött. Abh. Math. Cl. **8** (1860), 43–65.
- [93] N.H. Risebro, *A Front-tracking alternative to the random choise method*, Proc. Am. Math. Soc. **117** (1993), 1125–1139.
- [94] D. Serre, *Systems of Conservation Laws I: Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, 1999.
- [95] M. Sever, *Distribution Solutions of Nonlinear systems of Conservation Laws*, Memoirs of the American Math. Society, Vol. 190, Number 889, 2007.
- [96] Z. Shao, *The Riemann problem for the relativistic full Euler system with generalized Chaplygin proper energy density-pressure relation*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 69.2 (2018), 44.
- [97] V.M. Shelkovich, *The Riemann problem admitting $\delta-$, δ' -shocks, and vacuum states (the vanishing viscosity approach)*, J. Difer. Equations **231** (2006), 459–500.
- [98] V.M. Shelkovich, *A special hyperbolic system of conservation laws admitting delta-shock wave type solutions*, Preprint, 2003.
(url: <http://www.math.ntnu.no/conservation/2003/059.html>)
- [99] C. Shen, *The Riemann problem for the pressureless Euler system with the Coulomb-like friction term*, IMA J. Appl. Math., 81 (2016), 76–99.
- [100] W.C. Sheng, T. Zhang, *The Riemann problem for transportation equation in gas dynamics*, Mem. Amer. Math. Soc., 137(654) (1999), 1–77.
- [101] J.A. Smoller, J.L. Johnson, *Global solutions for an extended class of hyperbolic systems of conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 32 (1969), 169–189.
- [102] Z. Stojaković, I. Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, Symbol, Novi Sad, 2010.
- [103] M. Sun, *Interactions of delta shock waves for the chromatography equations*, Appl. Math. Lett. 26 (2013), no. 6, 631–637.
- [104] M. Sun, *The exact Riemann solutions to the generalized Chaplygin gas equations with friction*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **36** (2016), 342–353.
- [105] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. 4 (R.J. Knops, ed.). Pitman Press, 1979.
- [106] R. Temam, A. Miranville, *Mathematical modeling in continuum mechanics*, Cambridge University Press, 2005.
- [107] Y. Zheng, *Systems of conservation laws: two-dimensional Riemann problems*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, Vol 38, Birkhauser, 2001.
- [108] Ya. B. Zeldovich, *Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations*, Astron. Astrophys., 5 (1970), pp. 84–89.

- [109] G. Wang, *The Riemann problem for one dimensional generalized Chaplygin gas dynamics*, J. Math. Anal. Appl. **403** (2013), 434–450.
- [110] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1966.
- [111] <https://www.askiitians.com/iit-study-material/iit-jee-physics/kinetic-theory-of-gases/degrees-of-freedom/>
- [112] <https://physics.info/shock/>
- [113] <https://physicstoday.scitation.org/do/10.1063/PT.6.3.20181030a/full/>
- [114] <https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy>
- [115] <https://www.space.com/9593-einstein-biggest-blunder-turns.html>

Biografija



Sanja Ružićić je rođena 30.04.1991. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu "Svetozar Miletić" u Titelu 2006. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu i kao nosilac Vukove diplome završila je prirodno-matematički smer. Osnovne studije Primjenjene matematike, modul Finansijska matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisuje 2010. godine i završava ih 2013. godine sa prosečnom ocenom 10,00. Iste godine u Novom Sadu upisuje master studije Primjenjene matematike, modul Finansijska matematika i završava ih u julu 2015. godine odbranivši master rad pod nazivom "Modeli protoka krvi u arterijama".

Doktorske studije matematike upisuje 2015. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Od maja 2015. godine je zaposlena na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu kao saradnik u nastavi, a od septembra 2016. godine kao asistent. Položila je sve ispite predviđene planom i programom sa prosečnom ocenom 10,00. Ima objavljen jedan naučni rad u međunarodnom časopisu kategorije M21. Od 2017. godine je učesnik na projektu *Metode funkcionalne i harmonijske analize i PDJ sa singularitetima*.

Novi Sad, novembar 2019. godine

Sanja Ružićić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija

VR

Autor: Sanja Ružićić

AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov

MN

Naslov rada: Dopustiva singularna rešenja sistema gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2019

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (8/182/115/1/25/0)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika i grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Sistemi zakona održanja, singularna rešenja, uslovi dopustivosti, gasna dinamika, Čapliginov gas, senka talasi, početni problem

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

Karakteristika hiperboličnih sistema zakona održanja je da čak i u slučaju glatkog početnog uslova rešenja uglavnom razvijaju prekide u konačnom vremenu. Zbog toga se posmatraju slaba rešenja koja dati sistem zadovoljavaju u distributivnom smislu i mogu biti čak i neograničena što se ispoljava kroz pojavu Dirakove delta funkcije u rešenju.

U ovoj disertaciji se akcenat stavlja na analizu protoka stišljivog neviskoznog fluida koji ne menja pravac prilikom kretanja. Protok je opisan Ojlerovim sistemom iz gasne dinamike koji se sastoji iz zakona održanja mase, količine kretanja i energije, dok su karakteristike fluida određene konstitutivnim relacijama. U slučaju izentropskog ili izoternog protoka sistem se svodi na zakone održanja mase i količine kretanja. Glatka rešenja takvog sistema automatski zadovoljavaju zakon održanja energije, dok prelaskom na slabu formulaciju dolazi do gubitka energije. Za predstavnike sistema gasne dinamike sa nepozitivnim pritiskom su uzeti sistem gasne dinamike bez pritiska i model za Čapliginov gas i njegova uopštenja. Data su rešenja Rimanovih problema za te sisteme koja se mogu predstaviti kao kombinacija klasičnih elementarnih talasa i senka talasa koji aproksimiraju rešenja u obliku delta udarnih talasa i koji omogućavaju rešavanje početnog problema koji u početnom uslovu sadrži delta funkciju. Na primeru modela za uopšten Čapliginov gas dokazano je da uslov prekompresivnosti nije jači od entropijskog uslova, što je prvi takav rezultat u literaturi.

Dalje su korišćena rešenja Rimanovih problema, kao i problema singularne interakcije i dat je algoritam za konstrukciju globalnog dopustivog približnog rešenja početnog problema za sistem gasne dinamike bez pritiska. Algoritam je univerzalan i ideja se može proširiti na veliki broj sistema zakona održanja i veliki broj početnih uslova. Diskutovane su promene energije u približnom rešenju i posle interakcija. Dobijeno približno rešenje slabo konvergira u prostoru Radonovih mera sa predznakom.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 07.02.2019.

DP

Datum odrbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

- Predsednik: dr Dora Seleši, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
- Mentor: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
- Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
- Član: dr Srboljub Simić, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
- Član: dr Božidar Jovanović, naučni savetnik,
Matematički institut SANU, Beograd

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Content Code: Doctoral dissertation

CC

Author: Sanja Ružić

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD.

MN

Title: Admissible singular solutions to gas dynamics systems with non-positive pressure

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2019

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (8/182/115/1/25/0)
(number of sections/pages/references/tables/pictures and graphs/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific Discipline: Partial Differential Equations

SD

Subject/Key words: Conservation laws systems, singular solutions. admissibility conditions, gas dynamics, Chaplygin gas, shadow waves, initial value problem

SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

A solutions to hyperbolic conservation laws systems starting out as smooth often develop singularities in a finite time. As a consequence, we are forced to look for weak solutions that satisfy the system in distributional sense. Those solutions are often unbounded, which is expressed through the appearance of Dirac delta function.

In this theses we study a one-dimensional, compressible and inviscid flow of a fluid. The process is described by compressible Euler gas dynamics system which consists of conservation laws of mass, linear momentum and energy, while the characteristics of the fluid are described using constitutive relations. In the case of isentropic or isothermal flow the system reduces to conservation laws of mass and linear momentum. The energy is conserved for smooth solutions to such systems, but while passing to the weak formulation the energy is being dissipated. As representatives, we consider pressureless gas dynamics system, as well as Chaplygin gas model and its generalizations. We give the solutions to Riemann problems which can be represented as a combinations of classical elementary waves and shadow waves that approximate the solutions in the form of delta shock and allow as to solve the problems with initial data containing delta function. We use generalized Chaplygin gas model as demonstration of the fact that overcompressibility condition is not stronger than entropy condition, which is the first result of that kind in the literature.

Further, we use solutions to the Riemann problems, as well as singular interaction problems to give the algorithm for construction of global admissible approximate solution to the pressureless gas dynamics initial value problem. The algorithm is universal and idea can be applied to large number of conservation laws systems and large number of initial data. We discuss energy changes in approximate solution and after the interactions. The constructed approximate solution converges in the space of signed Radon measures.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 07.02.2019.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

- President: Dora Seleši PhD, full professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Mentor: Marko Nedeljkov PhD, full professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Member: Academician Stevan Pilipović PhD, full professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Member: Srboljub Simić PhD, full professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Member: Božidar Jovanović PhD, full research professor
Mathematical Institute SANU, Belgrade