

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 11 јуна 2018 године, одређени смо у комисију за преглед и оцену докторске дисертације,

Ауто-дуални симплицијални комплекси,
њихова генерализација и примене у
комбинаторици и геометрији

мастер математичара Маринка Тимотијевића. Комисија је поднешену дисертацију пажљиво прегледала и након консултација подноси Већу следећи,

ИЗВЕШТАЈ

1. Кратка научна биографија

Маринко Тимотијевић је рођен 29. 01. 1986. у Бијелом Пољу. Основне студије математике завршио је 2010 године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу (Одсек математика). Мастер студије математике завршио је 2012. на Природно-математичком факултету у Крагујевцу (Одсек математика, смер теоретска математика).

Мастер рад под насловом *Фундаменталне групе* урађен је 2012 године под менторством проф. др. Радосава Ђорђевића на Математичком факултету у Крагујевцу. Исте године уписао је докторске студије математике (смер топологија) на Математичком факултету у Београду.

Запослен је од 2013 године на Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу (у звању асистент за ужу научну област математичка анализа са применама).

2. Публиковани научни радови и радови на рецензији

1. M. Muzika Dizdrević, M. Timotijević, R. Živaljević, *Signed Polyomino Tilings By n -in-Line Polyominoes and Gröbner Bases*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), **99**(113), 31–42 (2016).

2. M. Timotijević, *Note on combinatorial structure of self-dual simplicial complexes*, Mat. Vesnik **71**, 104–122, (2019).

3. M. Jelić, D. Jojić, M. Timotijević, S.T. Vrećica, R.T. Živaljević. *Combinatorics of unavoidable complexes*, arXiv:1612.09487 [math.AT] (рад је на рецензији).

4. F. D. Jevtić, M. Timotijević, R. T. Živaljević, *Polytopal Bier spheres and Kantorovich-Rubinstein polytopes of weighted cycles*, arXiv:1812.00397 [math.MG] (рад је на рецензији).

3. Област докторске дисертације

Шире области дисертације су топологија и комбинаторика. Ужа област је тополошка комбинаторика (теорија Александерове дуалности) са посебним акцентом на минималним триангулацијама многострукости и више-димензионалним аналогонима непланарних графова.

Ауто-дуални симплицијални комплекси и њихове генерализације, r -неизбежни симплицијални комплекси, убрајају се у централне теме тополошке комбинаторике и дискретне (комбинаторне) геометрије.

Подсетимо да Александеров дуал K° симплицијалног комплекса K даје комбинаторни модел његове допуне (комплемента) унутар одговарајуће Биерове сфере $Bier(K) = K *_{\Delta} K^\circ$. Кажемо да је комплекс K ауто-дуалан (поддуалан) уколико је $K = K^\circ$ ($K \subseteq K^\circ$).

Ауто-дуални симплицијални комплекси и њихова спајања (join) у основи су познате теореме Куратовског о непланарности графова. Графови K_5 и $K_{3,3}$, као 1-димензионални симплицијални комплекси, примери су спајања ауто-дуалних симплицијалних комплекса. По резултатима Халина и Јунга (R. Halin, H. A. Jung), помоћу ауто-дуалних симплицијалних комплекса добија се потребан и довољан услов не-планарности произвољног симплицијалног комплекса.

Ауто-дуални симплицијални комплекси се јављају и као минималне триангулације многих тополошких простора, на пример, реалне, комплексне и кватернионске пројективне равни.

Међу математичарима који су истраживали ауто-дуалне триангулације тополошких простора, а који су инспирисали аутора у његовом избору истраживачке теме, су и В. Багџи, В. Дага, У. Врем, Д. Городков, С. Мелихов, и др.

4. Приказ дисертације са акцентом на оригиналним доприносима

Дисертација има 88 страна текста, 4 табеле и 18 слика. Списак литературе се састоји од 34 библиографске јединице. Поред предговора и литературе, дисертација има пет глава.

Главе 1 и 2 су прегледног карактера. У њима је излажен материјал везан за теорију симплицијалних комплекса у обиму неопходном за читање централних глава тезе.

Главе 3, 4 и 5, које садрже оригиналне доприносе, базирају се на два научна рада (референце [15] и [32]) који су већ публиковани или на рецензији. Рад [32] је урађен самостално, док је рад [15] коауторски.

Акцент у дисертацији је на на одређивању свих ауто-дуалних симплицијалних комплекса у датом амбијенту (вишедимензионални комплекси Халина-Јунга-Куратовског), конструкцији ауто-дуалних триангулација тополошких простора, као и одређивању комбинаторних својстава r -неизбежних симплицијалних комплекса. У глави 3 се наводе два метода конструкције ауто-дуалних симплицијалних комплекса, метода реконструкције и метода дуалне надградње. У глави 4 се анализирају основне особине r -неизбежних симплицијалних комплекса. Може се рећи да ове две главе, по својој оригиналности и техничкој сложености примењених метода, чине главни део дисертације. С друге стране глава 5 није мање занимљива с обзиром да се у њој, такође методама базираним на теорији ауто-дуалних комплекса, добијају интересантне једнакости које обезбеђују нови метод за одређивање Дедекиндових бројева (Richard Dedekind).

У глави 1 је изложен стандардни материјал везан за теорију симплицијалних комплекса.

Глава 2 даје приказ основних појмова теорије Александерове дуалности са акцентом на две значајне примене; одређивање минималних триангулација тополошких простора и оценивање димензије геометријских релизација симплицијалних комплекса. У Поглављу 2.5 се доказује да ауто-дуални симплицијални комплекси и њихова спајања представљају канонске примере комплекса који нису уложиви у Еуклидске просторе довољно мале димензије.

Централни нови резултати у глави 3 су Теорема 3.1 и Теорема 3.2. Теорема 3.1 доказује да је број ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[n]$ једнак броју под-дуалних комплекса у амбијенту $[n - 1]$ а Теорема 3.2 доказује да је сваки ауто-дуалан комплекс потпуно одређен линком произвољног темена.

Аутор полази од опсервације да се склањањем главног симплекса ауто-дуалног комплекса и додавањем његовог комплемента добија нови ауто-дуални симплицијални комплекс (реконструкција). Затим показује да се

узастопном реконструкцијом ауто-дуалног симплицијалног комплекса може добити било који други ауто-дуални симплицијални комплекс у истом амбијенту. Ради прегледности, уводи се појам графа реконструкција чији су чворови сви ауто-дуални комплекси у амбијенту $[n]$ а гране одговарају паровима комплекса који могу да се добију разменом комплементарних главних симплекса. Симплицијални комплекси $\Delta_{[n]\setminus\{i\}} = 2^{[n]\setminus\{i\}}$, као ауто-дуални комплекси у амбијенту $[n]$, играју посебну улогу. Они имају само један главни симплекс и једини у графу реконструкција имају степен 1. Како је граф реконструкција повезан, анализирају се путеви који почињу ауто-дуалним комплексом $\Delta_{[n-1]}$. Ово омогућава конструкцију ”оператора корена” \surd који сваком ауто-дуалном комплексу у амбијенту $[n]$ додељује под-дуалан комплекс у амбијенту $[n - 1]$. Доказује се да оператор \surd има инверзни оператор ”оператор дуалне надградње” \wedge што обезбеђује доказ Теореме 3.1.

Даље се у Поглављу 3.3 даје геометријски опис оператора \surd и \wedge . Доказује се да корени комплекс ауто-дуалног симплицијалног комплекса може да буде линк било којег његовог темена а дуална надградња симплицијалног комплекса је унија његовог Александеровог дуала и конуса. Како су оператори \surd и \wedge један другом инверзни, одатле следи важна опсервација да је сваки ауто дуални симплицијални комплекс у амбијенту $[n]$ једнак унији конуса и Александеровог дуала (у амбијенту $[n - 1]$) линка његовог произвољног темена (Теорема 3.2).

Друга половина главе 3 бави се применом Теореме 3.2 на комбинаторну класификацију ауто-дуалних симплицијалних комплекса и конструкцију ауто-дуалних триангулација тополошких простора. У Поглављу 3.5 се описује метода конструкције неизоморфних ауто-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$ дуалном надградњом неизоморфних под-дуалних симплицијалних комплекса. Поглавље 3.7 истражује везу хомологије и кохомологије датог симплицијалног комплекса и хомологије и кохомологије његове дуалне надградње коришћењем метода Алгебарске топологије. Доказује се да је под одређеним условима могуће конструисати ауто-дуалне симплицијалне комплексе са унапред задатим хомолошким групама. У наставку (Поглавље 3.8) дат је један нов опис конструкције ауто-дуалних триангулација пројективних простора.

Напомињемо да је проблем конструкције минималне триангулације октонионске пројективне равни још увек отворен. Оригинале технике описане у глави 3 значајно поједностављују конструкцију наведене триангулације свођењем на конструкцију дуалне надградње посебних комбинаторних сфера.

У Глави 4 се уводе и анализирају тзв. *r-неизбежни симплицијални ком-*

џлекси и ”партициона инваријанта” (π -инварианта) $\pi(K)$ симплицијалног комплекса K . Главни резултати су Теорема 4.1 и Теорема 4.2. Теорема 4.1 даје процену ”нивоа неизбежности” спајања симплицијалних комплекса помоћу нивоа неизбежности одговарајућих компоненти. Како су ауто-дуални комплекси у новој терминологији препознати као минимално 2-неизбеи комплекси (имају партициону инваријанту 2), спајањем n ауто-дуалних комплекса добијају се симплицијални комплекси са партиционом инваријантом $n + 1$. Ова опсервација омогућава једноставнију проверу да ли дати симплицијални комплекс садржи спајање ауто-дуалних симплицијалних комплекса што даје метод за процену димензије њихове геометријске реализације. У наставку Главе 4 анализирају се партиционе инваријанте линеарно реализабилних симплицијалних комплекса. Уводи се појам ”карактеристичног прага” симплицијалног комплекса који омогућава процену партиционе инваријанте произвољног симплицијалног комплекса техникама линеарног програмирања. Теорема 4.2 доказује да ако је карактеристични праг симплицијалног комплекса ρ , тада је његова партициона инваријанта мања или једнака од $\lfloor 1/\rho \rfloor + 1$. На крају се у Поглављу 4.7 анализира грешка процене партиционе инваријанте помоћу Теореме 4.2 (тзв. ”ексцес карактеристичног прага”) и наводе се примери симплицијалних комплекса са произвољно великим ексцесом.

Ово је веома активни правац истраживања. Напомињемо да последњи резултати аутора, међу њима и неки који нису укључени у дисертацију, повезују партициону инваријанту и карактеристични праг симплицијалног комплекса са ”нивоима дисјунктности” (matching number) хиперграfoва и његовим рационалним релаксацијама.

Последња глава, Глава 5, описује примену Теореме 3.1 на одређивање Дедекиндових бројева који се уводе као бројеви различитих Булових функција са n променљивих. Доказује се неједнакост која помоћу броја различитих ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[n]$ даје доњу и горњу границу Дедекиндових бројева.

5. Закључак

Докторска дисертација „Ауто-дуални симплицијални комплекси, њихова генерализација и примене у комбинаторици и геометрији“ је врло леп и садржајан прилог теорији ауто-дуалних и r -неизбежних симплицијалних комплекса. По свом карактеру дисертација је мултидисциплинарна и тематски и методолошки је везана за топологију, геометрију, комбинаторику, рачунарство и линеарно програмирање. Резултати су нови и актуелни и могу бити занимљиви ширем кругу научника свих наведених специјалности.

Аутор дисертације Маринко Тимотијевић је показао завидно математичко знање из неколико различитих области, као и способност за самостални научни рад. Посебно јак утисак оставља његова способност да повеже теорију и експеримент, комбинујући сложене појмове алгебарске (комбинаторне) топологије са техникама из рачунарства и линеарног програмирања.

Дисертација се може убројити у пионирске подухвате у том делу ”примењене и рачунарске алгебарске топологије” (Applied and Computational Algebraic Topology) који акцентује анализу комбинаторних својстава аутодуалних и r -неизбежних симплицијалних комплекса.

Са задовољством предлажемо Научно-наставном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да прихвати овај рад као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.

проф. др Раде Живаљевић (ментор)
редовни професор
Математички институт САНУ

проф. др Сениша Врећница
редовни професор
Математички факултет Београд

проф. др Владимир Грујић
ванредни професор
Математички факултет Београд

др Александар Вучић
доцент
Математички факултет Београд

Београд, 14 март 2019.